



**HAL**  
open science

## Modèles de simulation d'écoulement transitoire en réseau d'assainissement

Yves Kovacs

► **To cite this version:**

Yves Kovacs. Modèles de simulation d'écoulement transitoire en réseau d'assainissement. Hydrologie. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1988. Français. NNT : . tel-00520785

**HAL Id: tel-00520785**

**<https://pastel.hal.science/tel-00520785v1>**

Submitted on 20 Dec 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 14698

(2)

77826

# THESE DE DOCTORAT

présentée à

L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité

SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'ENVIRONNEMENT

par

Yves KOVACS

Sujet de la thèse :

MODELES DE SIMULATION  
D'ECOULEMENT TRANSITOIRE  
EN RESEAU D'ASSAINISSEMENT

EN.P.C.



DOC06597

18



# THESE DE DOCTORAT

présentée à

L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité

SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'ENVIRONNEMENT

par

Yves KOVACS

Sujet de la thèse :

## MODELES DE SIMULATION D'ECOULEMENT TRANSITOIRE EN RESEAU D'ASSAINISSEMENT

Soutenu le 18 Mai 1988  
devant le Jury composé de :

- |                 |                                                                                    |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| M. J. JACQUET   | : Président, Professeur à L'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées                 |
| M. M. DESBORDES | : Rapporteur, Professeur au Laboratoire d'Hydrologie Mathématique de Montpellier   |
| M. J. CUNGE     | : Rapporteur, Ingénieur-Conseil au Laboratoire d'Hydraulique de France             |
| M. M. ALQUIER   | : Professeur à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse                     |
| M. B. CHOCAT    | : Docteur d'Etat, Professeur à L'Institut Nationale des Science Appliquées de Lyon |
| M. R. POCHAT    | : Directeur de la recherche à l'Ecole Nationale du Génie Rural des Eaux et Forêts  |



### *Remerciements*

Je remercie Monsieur le Professeur Joseph JACQUET pour l'honneur qu'il me fait de présider ce jury.

Je remercie aussi Monsieur Jean CUNGE qui a accepté d'être rapporteur de ce travail ainsi que Monsieur le Professeur Michel ALQUIER qui a bien voulu participer à ce jury.

Ma gratitude va également à Messieurs Michel DESBORDES et Bernard CHOCAT pour leur soutien précieux et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je tiens encore à remercier Monsieur Rémy POCHAT, mon directeur de thèse, pour l'aide permanente qu'il m'a apportée avec expérience et compétence.

Je remercie également Monsieur Antoine FRÉROT qui m'a guidé et soutenu tout au long de ce travail.

Par ailleurs, plusieurs personnes et organismes m'ont aidé et ont ainsi contribué à l'avancement de cette recherche. Sans pouvoir tous les nommer ici, qu'ils soient tous persuadés de ma profonde reconnaissance.

Enfin, je remercie l'équipe du CERGRENE pour sa disponibilité et sa tolérance envers mes questions ainsi que toutes les personnes qui ont participé au quotidien à l'élaboration de ce travail et qui m'ont constamment encouragé dans mes efforts.



### Summary

This thesis begins with a short historical review of water and town links for the defense of the interest of using mathematical models in urban hydrologie.

Follows a synthetic description of flood routing mathematical models which gives a detailed analysis of the equations, their physical basises, their boundary conditions, numerical resolution techniques, and methods for adjusting the parameters

Then, a series of results concerning hypothetical cases choosen to cover most of sewer network real conditions is produced. The methods for adjusting the parameters of simplified flood routing models have been checked. The numerical and hydraulical fields of applicability, depending on non-dimensional numbers, are pointed out referring to the results of a complete model solving full Saint-Venant equations. The possibility of taking into account a downstream boundary condition is tested with a diffusion model that was modified in order to be able to calculate a water line from downstream to upstream as if the flow was permanent.

Finally, a study of the practical use of the models completes the thesis. This text is of greatest interest for all technical services of cities.

### Résumé

La première partie de ce mémoire de thèse montre l'intérêt de l'utilisation de nouveaux outils en hydrologie urbaine, à partir d'un historique de l'évolution des liens entre la ville et l'eau.

Elle est suivie par une présentation synthétique des modèles hydrauliques simplifiés de simulation de crues. Les équations, leur contenu physique, les conditions limites, les méthodes de résolution et les méthodes de calage des paramètres sont analysés de manière détaillée.

Le mémoire présente ensuite une série de résultats de simulations sur des cas hypothétiques choisis pour couvrir la plupart des conditions de l'assainissement.

Les différentes méthodes de calage des paramètres sont testées ainsi que le fonctionnement numérique des modèles. Le mémoire met en évidence des domaines de validité (numériques et hydrauliques) en fonction de nombres adimensionnels et en référence aux résultats d'un modèle intégrant les équations complètes de Saint-Venant. La possibilité de modéliser les influences aval est testée avec un modèle de crue diffusante auquel est intégré un calcul de ligne d'eau.

Une étude des conditions d'utilisation des modèles sur le terrain termine le mémoire qui peut être destiné à tous les services techniques des collectivités locales.



## TABLE DES MATIERES

<u>INTRODUCTION</u> .....	14
 <u>PREMIERE PARTIE :</u>	
POURQUOI UTILISER DES OUTILS D'ANALYSE DU FONCTIONNEMENT DES RESEAUX D'ASSAINISSEMENT .....	18
 1-1 <i>LA VILLE ET L'EAU : UNE HISTOIRE INACHEVEE</i> .....	20
1-1-1    LA PRESENCE DE L'EAU .....	20
1-1-2    LES RESEAUX D'ASSAINISSEMENT .....	23
1-1-3    LES PROBLEMES DE SATURATION .....	27
 1-2 <i>LA CONNAISSANCE DU CYCLE DE L'EAU     EN MILIEU URBAIN</i> .....	34
1-2-1    LA PLUIE ET LE RUISSELLEMENT .....	35
1-2-2    L'ECOULEMENT DANS LE RESEAU D'ASSAINISSEMENT .....	37

## DEUXIEME PARTIE : LES MODELES DE SIMULATION

### LEURS SCHEMAS DE DISCRETISATION

#### LEURS PARAMETRES ..... 41

2-1	<i>LES MODELES MATHEMATIQUES DE SIMULATION D'ECOULEMENT UNIDIMENSIONNEL A SURFACE LIBRE</i>	43
2-1-1	LES MODELES MECANISTES COMPLETS .....	44
2-1-2	LES MODELES MECANISTES SIMPLIFIES .....	47
2-1-2-1	<i>Modèles de crue diffusante</i> .....	49
2-1-2-2	<i>Modèles d'onde cinématique</i> .....	52
2-1-3	JUSTIFICATION DES SIMPLIFICATIONS DES EQUATIONS DE SAINT-VENANT .....	54
2-1-3-1	<i>Méthodes basées sur l'étude directe des ordres de grandeur des termes des équations</i> .....	55
2-1-3-2	<i>Méthodes basées sur l'étude des conditions limites</i> ....	58
2-1-3-3	<i>Méthodes basées sur l'étude des ondes</i> .....	58
2-1-3-4	<i>Conclusions</i> .....	66
2-1-4	LES MODELES CONCEPTUELS .....	68
2-1-4-1	<i>Généralités</i> .....	68
2-1-4-2	<i>Quelques modèles de stock</i> .....	69
2-1-5	CONCLUSIONS .....	71
2-2	<i>METHODES DE RESOLUTION ET SCHEMAS DE DISCRETISATION</i> .....	72
2-2-1	LES METHODES AUX DIFFERENCES FINIES .....	73

2-2-2	METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS DES MODELES MECANISTES COMPLETS .....	79
2-2-2-1	<i>Méthode des caractéristiques</i> .....	79
2-2-2-2	<i>Résolution des équations originelles</i> .....	81
2-2-3	METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS DES MODELES MECANISTES SIMPLIFIES ET DES MODELES CONCEPTUELS.....	82
2-2-3-1	<i>Méthodes d'intégration de l'équation de la crue diffusante</i> .....	82
2-2-3-2	<i>Schémas de résolution de l'équation de l'onde cinématique</i> .....	90
2-2-3-3	<i>Schémas de résolution des modèles de stock</i> .....	97
2-2-3-4	<i>Première classification et récapitulation</i> .....	103
2-2-3-5	<i>Conclusions</i> .....	104
2-3	<b>LES PARAMETRES DES MODELES SIMPLIFIES</b> .....	106
2-3-1	LE PAS D'ESPACE $\Delta x$ ET LE PAS DE TEMPS $\Delta t$ .....	107
2-3-1-1	<i>Les conditions concernant uniquement <math>\Delta x</math></i> .....	107
2-3-1-2	<i>Les conditions concernant uniquement <math>\Delta t</math></i> .....	109
2-3-1-3	<i>Les conditions communes à <math>\Delta x</math> et <math>\Delta t</math></i> .....	110
2-3-1-4	<i>Récapitulation des conditions (2.42) à (2.46)</i> .....	112
2-3-1-5	<i>Conclusions et propositions</i> .....	113
2-3-2	LE PARAMETRE DE PONDERATION $\theta$ .....	114
2-3-3	LA CELERITE $C$ ET LE TEMPS DE PROPAGATION $k$ .....	116
2-3-3-1	<i>Les possibilités pour calculer <math>C</math></i> .....	116
2-3-3-2	<i>Détermination de <math>C</math> jusqu'à <math>y = 1.87.R</math> (collecteur circulaire) .....</i>	121
2-3-3-3	<i>Valeur moyenne de <math>C</math> sur chaque pas de temps</i> .....	124
2-3-3-4	<i>Conclusions</i> .....	126

2-3-4	LA CELERITE MOYENNE $C_m$ ET LE TEMPS MOYEN km .....	127
2-3-4-1	<i>Méthodes géométriques</i> .....	127
2-3-4-2	<i>Méthodes hydrologiques</i> .....	128
2-3-4-3	<i>Conclusions</i> .....	130
2-3-5	LE PARAMETRE DE DIFFUSION D .....	131
2-3-6	CONCLUSIONS .....	133

## TROISIEME PARTIE :

### ETUDE EXPERIMENTALE :

#### INFLUENCE DES PARAMETRES

#### TESTS DE COMPARAISON

#### ENTRE LES MODELES .....136

3-1	<i>MODELES TESTES ET APPROCHE EXPERIMENTALE</i> .....	138
3-1-1	MODELES PROGRAMMES .....	140
3-1-2	CALCUL PRELIMINAIRE DES PARAMETRES .....	143
3-1-3	CHOIX DES DONNEES TESTEES .....	145
3-1-3-1	<i>Rappel des objectifs</i> .....	145
3-1-3-2	<i>Choix des caractéristiques géométriques</i> .....	146
3-1-3-3	<i>Les conditions limites</i> .....	149
3-1-3-4	<i>Variation des nombres adimensionnels</i> .....	151

3-2	<b>INFLUENCE DES METHODES DE CALCUL DES PARAMETRES</b>	155
3-2-1	INFLUENCE DU PAS DE TEMPS .....	157
3-2-1-1	<i>Le phénomène de lissage dû au pas de temps</i> .....	157
3-2-1-2	<i>Les conditions sur le pas de temps des modèles</i> <i>cinématiques et Muskingum</i> .....	161
3-2-1-3	<i>Sous pas de temps et de Muskingum Modifié</i> .....	164
3-2-2	LA DIFFUSION NUMERIQUE DES MODELES .....	166
3-2-2-1	<i>Influence de <math>\Delta x</math> et de <math>\theta</math> pour les modèles cinématiques</i> ..	166
3-2-2-2	<i>Etude avec un paramètre <math>\theta</math> variable</i> .....	167
3-2-2-3	<i>Etude avec <math>\theta</math> constant</i> .....	169
3-2-2-4	<i>Influence de <math>\theta</math> variable par rapport à <math>\theta</math> constant</i> .....	170
3-2-2-5	<i>Domaines théoriques de validité de l'identification</i> <i>de la diffusion numérique à la diffusion hydraulique</i> ..	171
3-2-2-6	<i>Diffusion numérique des termes d'ordres supérieurs à 2</i>	173
3-2-2-7	<i>Essais pour des pentes faibles</i> .....	173
3-2-2-8	<i>Influence du pas d'espace pour le noyau d'Hayami</i> .....	175
3-2-2-9	<i>Diffusion numérique du modèle de crue diffusante</i> .....	175
3-2-3	LA CELERITE C .....	178
3-2-3-1	<i>Impact de la forme de la section sur C</i> .....	178
3-2-3-2	<i>Conservation des volumes</i> .....	180
3-2-3-3	<i>Influence du calcul de C instantané sur la</i> <i>conservation des volumes</i> .....	181
3-2-3-4	<i>Influence de la méthode de détermination de C</i> .....	184
3-2-4	LA CELERITE MOYENNE $C_m$ .....	186
3-2-4-1	<i>Les valeurs de <math>C_m</math> par quelques méthodes</i> .....	186
3-2-4-2	<i>Les valeurs de la durée de propagation km</i> .....	188
3-2-4-3	<i>Influence de <math>C_m</math> sur l'atténuation des débits</i> .....	190
3-2-4-4	<i>Comparaison avec un modèle non-linéaire</i> .....	191
3-2-5	LE PARAMETRE DE DIFFUSION HYDRAULIQUE D .....	196
3-2-5-1	<i>Les valeurs de la diffusion hydraulique</i> .....	196
3-2-5-2	<i>Comportement du noyau d'Hayami selon les valeurs de Z..</i>	197
3-2-5-3	<i>Influence du paramètre D sur l'atténuation des débits..</i>	201

3-2-5-4	<i>Différences entre D variable et D constant</i> .....	203
3-2-5-5	<i>Différences entre Hayami et VPD</i> .....	204
3-2-6	CONCLUSIONS .....	205
3-2-6-1	<i>Consistance et stabilité des modèles cinématiques et Muskingum</i> .....	205
3-2-6-2	<i>Consistance et stabilité des modèles de crue diffusante</i> .....	206
3-2-6-3	<i>Les paramètres C et D</i> .....	207
3-2-6-4	<i>Nouvelle classification et domaines théoriques d'application</i> .....	207
3-3	<b>DOMAINES DE VALIDITE DES MODELES SIMPLIFIES</b> .....	210
3-3-1	ECOULEMENTS TORRENTIELS - NOMBRE DE FROUDE SUPERIEUR A 2 .....	212
3-3-1-1	<i>La diffusion hydraulique en fonction de (K,I)</i> .....	212
3-3-1-2	<i>Comparaison du modèle d'Hayami et du modèle complet</i> ...	213
3-3-1-3	<i>Les modèles cinématiques</i> .....	214
3-3-1-4	<i>Conclusions</i> .....	215
3-3-2	ECOULEMENTS FLUVIAUX - NOMBRE DE FROUDE SUPERIEUR A 1/2 .....	216
3-3-2-1	<i>La diffusion hydraulique en fonction de (K,I)</i> .....	216
3-3-2-2	<i>Les réponses de VPD</i> .....	217
3-3-2-3	<i>Les modèles cinématiques</i> .....	219
3-3-2-4	<i>Conclusions</i> .....	221
3-3-3	PENTES FAIBLES - NOMBRE DE FROUDE INFERIEUR A 1/2 .....	222
3-3-3-1	<i>La diffusion hydraulique en fonction de (K,I)</i> .....	222
3-3-3-2	<i>Non-applicabilité des modèles cinématiques et Muskingum</i> .....	223
3-3-3-3	<i>Les réponses d'Hayami et du modèle VPD</i> .....	224
3-3-3-4	<i>Comparaison avec le modèle complet de Saint-Venant</i> ...	226
3-3-3-5	<i>Extension du domaine de validité de la crue diffusante.</i>	228
3-3-3-6	<i>Z comme critère de validité du modèle VPD</i> .....	230
3-3-3-7	<i>Influence de la longueur</i> .....	231
3-3-3-8	<i>Influence de l'hydrogramme amont</i> .....	234

3-3-3-9	<i>Influence de la condition limite aval</i> .....	237
3-3-4	INFLUENCES AVAL ET PHENOMENES INERTIELS .....	241
3-3-4-1	<i>Programmation du calcul de la ligne d'eau dans un modèle simplifié</i> .....	241
3-3-4-2	<i>Etude d'un cas où Z est supérieur à 0.25</i> .....	246
3-3-4-3	<i>Etude d'un cas où Z est inférieur à 0.25</i> .....	250
3-3-4-4	<i>Les phénomènes inertiels causés par une influence aval</i> .....	254
3-3-4-5	<i>Etude d'un écoulement à frottements forts</i> .....	262
3-3-4-6	<i>Conclusions</i> .....	265
3-3-5	CONCLUSIONS .....	268
3-3-5-1	<i>Domaines de validité hydraulique des modèles</i> .....	268
3-3-5-2	<i>Remarques sur le modèle de crue diffusante</i> .....	270

## QUATRIEME PARTIE :

### CONDITIONS D'UTILISATION DES MODELES ..... 272

4-1	POSSIBILITES D'ADAPTATION DES MODELES AUX SPECIFICITES DES CONDITIONS D'ASSAINISSEMENT .....	274
4-1-1	ADAPTATION A DES CONDITIONS STRUCTURELLES PARTICULIERES	277
4-1-1-1	<i>Modélisation dans un réseau maillé</i> .....	277
4-1-1-2	<i>Modélisation des singularités</i> .....	278
4-1-2	ADAPTATION A DES CONDITIONS HYDRAULIQUES PARTICULIERES .....	280
4-1-2-1	<i>Modélisation des mises en charge</i> .....	280
4-1-3	ADAPTATION AUX CONDITIONS D'UTILISATION .....	284
4-1-3-1	<i>Robustesse des modèles simplifiés et fragilité des modèles complets</i> .....	284
4-1-3-2	<i>Temps de calcul et place mémoire</i> .....	286

4-1-3-3	<i>Aspect formation et interprétation des résultats</i> .....	286
4-2	<b>LA DIFFICULTE DE DISPOSER DE DONNEES</b> .....	287
4-2-1	LES CONNAISSANCES SUR LA PLUIE ET LES BASSINS VERSANTS .....	289
4-2-1-1	<i>La pluie</i> .....	289
4-2-1-2	<i>Les bassins versants</i> .....	293
4-2-2	L'UTILISATION DE MODELES D'ECOULEMENT MALGRE LES DONNES INCERTAINES SUR LE RESEAU .....	297
4-2-2-1	<i>La structure d'un réseau</i> .....	297
4-2-2-2	<i>Le fonctionnement d'un réseau</i> .....	300
4-2-2-3	<i>Conclusions</i> .....	304
	<b><u>CONCLUSION GENERALE</u></b> .....	305
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	309
	<b>ANNEXES</b> .....	323

## NOTATIONS

AMP	: atténuation maximale
B	: largeur au miroir
Cf	: coefficient de frottements à la paroi
Ch	: coefficient de Chézy
C	: coefficient du terme $\partial Q/\partial x$ des modèles d'onde cinématique appelé célérité de propagation
Cm	: célérité moyenne Cm pour les modèles linéaires
Cmax	: célérité maximale
C+	: courbe caractéristique
C-	: courbe caractéristique
Cs	: célérité de Kleitz-Seddon
Cc	: célérité complexe
Cr	: nombre de Reynolds local = $Q/(I.B.C.\Delta x)$
Co	: nombre de courant = $C\Delta t/\Delta x$
D	: coefficient du terme $\partial^2 Q/\partial x^2$ des modèles de crue diffusante appelé coefficient de diffusion
Dm	: coefficient D moyen pour les modèles linéaires
Dmax	: diffusion hydraulique maximale
Dn	: diffusion numérique des schémas
Deb	: débit capable du collecteur
dp	: durée de propagation
F	: nombre de Froude
Fo	: nombre de Froude de l'état initial
g	: accélération de la pesanteur
H	: hauteur de mise en charge
H	: hauteur maximale des collecteurs
hq	: fonction appelée noyau d'Hayami
I	: pente du fond
Ic	: pente critique
Ii	: pente du tronçon critique hydrauliquement équivalent
i	: indice sur l'espace des schémas de discrétisation
If	: nombre de pas d'espace
J	: pente des pertes de charge
K	: coefficient de Strickler
Ki	: coefficient de Strickler du tronçon hydrauliquement équivalent
k	: durée de propagation des modèles de type Muskingum
km	: durée de propagation moyenne des modèles de type Muskingum
k'	: nombre d'onde des perturbations
Lo	: longueur caractéristique
L	: longueur du collecteur
L+	: paramètre adimensionnel = $CTc/L$
No	: nombre adimensionnel
Nc	: nombre cinématique
n	: indice des pas de temps
P	: périmètre mouillé

Q : débit  
 Qn : débit normal  
 q : débits latéraux  
 Qe : débit entrant  
 Qs : débit sortant  
 Qm : débit moyen représentatif d'une crue  
 Qa : débit moyen sur une maille  
 QM : débit de pointe de l'hydrogramme aval  
 Qmax : débit de pointe de l'hydrogramme amont  
 Rh : rayon hydraulique  
 R : rayon des collecteurs circulaires  
 R : nombre de Reynolds total  
 S : section mouillée  
 SM : matrice colonne des termes du second membre  
 PM : matrice du schéma implicite  
 t : temps  
 Tf : terme de forme apparaissant dans l'expression de C  
 Ts : terme correctif de la célérité C calculée par  $(5/3)V$   
 Tc : temps de crue de l'hydrogramme amont  
 To : durée de la crue  
 TP : temps mis pour parcourir la distance  $\Delta x$   
 V : vitesse moyenne dans la section  
 Vo : vitesse moyenne de l'écoulement  
 Vs : volume stocké  
 Vc : vitesse de mise en charge  
 Wgf : travail des forces de gravité, frottement et pression  
 Wi : travail des forces d'inertie  
 W : vitesse servant de condition limite amont  
 x : abscisse en long  
 y : tirant d'eau  
 yo : tirant d'eau moyen  
 z : cote de la surface libre  
 zf : cote du fond  
 Z : paramètre adimensionnel =  $(2.D)/(C.L)$

$\alpha_i$  : coefficient de pondération des schémas de discrétisation  
 $\nu$  : coefficient de pondération des schémas de discrétisation  
 $\lambda$  : coefficient de pondération du schéma VPD  
 $\mu$  : coefficient de pondération du schéma VPD  
 $\theta$  : coefficient de pondération des schémas intégrant l'équation de l'onde cinématique et des schémas Muskingum  
 $\theta_m$  : coefficient  $\theta$  moyen  
 $\beta$  : coefficient caractérisant la rugosité des parois  
 $\Delta x$  : pas d'espace de calcul  
 $\Delta t$  : pas de temps de calcul  
 $\delta t$  : sous pas de temps de calcul du modèle Muskingum Modifié  
 $\Omega$  : matrice second membre du modèle VPD  
 $\omega$  : angle caractérisant la hauteur d'eau  
 $\rho$  : masse volumique

*INTRODUCTION*



Un nombre croissant de collectivités locales se trouvent confrontées à des problèmes de dysfonctionnement de leurs réseaux d'assainissement. Ils proviennent pour l'essentiel d'une augmentation des apports d'eaux pluviales et usées qui conduisent :

- à des risques accrus d'inondation lors d'événements pluvieux importants ;
- à des ralentissements du rythme de l'urbanisation faute de capacité d'évacuation suffisante ;
- à une redéfinition du problème de la maîtrise des flux (stockage, évacuation, pollution)

Minimiser les coûts d'investissements tout en se prémunissant le mieux possible des risques de pollution ou de débordement exige souvent une connaissance fine des phénomènes.

Depuis une quinzaine d'années, de nombreux efforts de recherche ont amélioré la compréhension du cycle de l'eau en milieu urbain. Ils ont abouti au développement de nombreux outils d'analyse ainsi qu'à la réalisation et à l'amélioration de dispositifs de mesure et de contrôle de la quantité et de la qualité des flux hydrauliques transitant dans les réseaux d'assainissement. Quelques collectivités locales "pilotes" ont exploité avec succès ces innovations pour la planification de l'urbanisation, la conception des investissements et la gestion de leurs réseaux d'assainissement. Toutefois, les connaissances acquises et les techniques développées restent encore très méconnues des professionnels de l'assainissement (services techniques, bureaux d'études).

Les modèles mathématiques de simulation de l'écoulement en réseau d'assainissement en régime transitoire constituent l'une des innovations majeures de l'hydrologie urbaine. Ils permettent de connaître à tout instant et en tous points du réseau, les caractéristiques de l'écoulement ce qui permet notamment de traiter les questions suivantes :

- déterminer les possibilités d'urbanisation en fonction de la capacité d'absorption de flux supplémentaires du réseau aval et en cas d'impossibilité, tester plusieurs alternatives permettant de minimiser les investissements ;
- diagnostiquer des dysfonctionnements, lorsque des débordements apparaissent sur le réseau ;
- étudier des possibilités de restructuration pour l'amélioration du fonctionnement d'un réseau existant ;
- gérer en temps réel un réseau d'assainissement.

Les modèles de simulation de l'écoulement dans les réseaux d'assainissement ont été pour la plupart adaptés et mis au point à partir de modèles développés depuis longtemps pour l'étude des crues de rivière. Ils sont donc assez nombreux bien que leur origine soit récente.

Le nombre important de ces modèles aurait pu favoriser leur diffusion et permettre de guider le choix des utilisateurs en fonction des besoins particuliers. Néanmoins, leur taux d'utilisation est resté très faible, et ceci malgré les progrès récents, tant en matière de matériel informatique qu'en matière de logiciel.

Les théories différentes dont ils découlent, le nombre important de méthodes d'intégration des équations qui constituent le support de départ de ces modèles, et les possibilités souvent multiples du calage de leurs paramètres, ont engendré un certain flou sur les possibilités des modèles de simulation de l'écoulement dans les réseaux d'assainissement.

Si l'on connaît bien leurs équations de départ, on connaît déjà moins bien les conditions sous lesquelles ces équations sont valables, l'impact du choix de telle ou telle méthode d'intégration, et l'influence des méthodes de calcul ou de choix des différents paramètres.

Les domaines d'application des modèles ainsi que les conséquences (en terme d'erreur commise) de ne pas simuler correctement certains types spéciaux d'écoulements restent obscurs.

Enfin, pour être utilisés en réseau d'assainissement, les modèles sont souvent "gonflés" de plusieurs modules supplémentaires qui permettent de représenter certains phénomènes spécifiques (mises en charge, singularités, maillages, ouvrages mobiles, ...). La capacité et les conséquences de déformer les modèles de base ou de leur ajouter certains modules spéciaux permettant d'élargir leur champ d'application reste méconnue.

Nous avons fait l'hypothèse que ce "flou" sur les modèles de simulation de l'écoulement en réseau d'assainissement pouvait être en partie responsable de leur faible taux d'utilisation.

C'est dans le but d'étudier, de classifier les modèles d'écoulement pouvant être utilisés dans les réseaux d'assainissement et de synthétiser leurs différences que nous avons entrepris ce travail. Nous avons rédigé nos résultats dans le but qu'ils soient effectivement utilisés par des techniciens des collectivités locales ce qui nous a parfois conduit à rentrer dans le détail de certaines démonstrations.

### *Le plan de thèse*

Le but de la première partie est d'éveiller l'intérêt du lecteur aux problèmes liés à l'assainissement des villes. Nous présenterons un petit historique vivant de l'eau dans la ville et de la construction des réseaux d'assainissement. Cet historique est volontairement succinct et imagé, donc non exhaustif. Nous présenterons dans le chapitre 1-2, une brève description des principaux phénomènes de pluie, ruissellement et d'écoulement dans les réseaux d'assainissement dont la connaissance peut être acquise par l'utilisation de mesures et d'outils d'analyse tels que les modèles mathématiques.

Cette partie introductive se veut un plaidoyer permettant d'expliquer aux hommes d'étude et aux exploitants de réseaux, l'intérêt d'utiliser les outils désormais à leur disposition. Il pourrait constituer la base d'un document de sensibilisation sur ces nouveaux outils d'analyse, par exemple sous forme audiovisuelle.

La deuxième partie est une description des outils disponibles permettant de simuler les écoulements à surface libre en régime transitoire.

Nous utiliserons certains résultats de recherches menées dans le cadre de l'étude des crues des rivières pour analyser les principaux modèles de base, leurs domaines théoriques de validité, les méthodes de résolution des équations, et enfin les méthodes de calcul, ou les critères de choix des paramètres communs à la plupart des modèles. Nous examinerons également les liens théoriques qui existent entre ces modèles.

La troisième partie constitue le coeur de ce travail. Elle est basée sur une vaste série de simulations pour un grand nombre de cas hypothétiques. Ces cas d'étude recouvrent la diversité des situations rencontrées en réseau d'assainissement pour un collecteur unique, et sont choisis en fonction des paramètres dont l'importance a été mise en évidence dans la deuxième partie.

Le premier objet de ce travail est de déterminer les limites théoriques d'application des méthodes d'intégration des modèles simplifiés, et des méthodes servant au calcul de leurs paramètres. Les limites s'expriment en fonction de la stabilité numérique des modèles, du contrôle de leur diffusion numérique et de la maîtrise de l'influence du mode de calcul et de la valeur des paramètres. Ce travail permet de résorber le flou consécutif à la profusion des méthodes de mise en oeuvre des modèles simplifiés.

Le second objet de cette étude "expérimentale" est de déterminer les domaines de validité de l'ensemble des modèles simplifiés par rapport au modèle mécaniste complet de Barré de Saint-Venant sur un collecteur régulier. On identifie pour ce faire, d'une part, l'influence de l'abandon des termes d'inertie dans les équations, et d'autre part, l'influence de la dégradation des conditions aux limites utilisables. On examine particulièrement le cas des fortes influences aval et celui d'une correcte représentation des hauteurs d'eau. Pour ce dernier point où les modèles simplifiés classiques ne donnent pas de résultats satisfaisants, on teste une méthode combinant propagation simplifiée des hydrogrammes et calcul de la ligne d'eau.

La quatrième partie, construite sous forme de dialogue, présente la manière d'utiliser les modèles de simulation en fonction des différents objectifs. Pour chaque besoin, on présentera les divers niveaux de connaissance requis de la pluie, du ruissellement et de l'écoulement dans les réseaux d'assainissement, et les moyens permettant de satisfaire les objectifs.

Cette partie se veut, comme la partie 1, un plaidoyer destiné à montrer aux hommes d'étude que les outils d'analyse et les systèmes de mesure développés ces dernières années sont adaptés aux besoins des collectivités locales, puisque certaines d'entre elles les utilisent avec succès.

Nous concluons sur les résultats obtenus sur les modèles et sur les efforts à poursuivre en matière de formation et de sensibilisation.



**PREMIERE PARTIE**

---

***POURQUOI UTILISER DES OUTILS  
D'ANALYSE DU FONCTIONNEMENT  
DES RESEAUX D'ASSAINISSEMENT***



Avant d'aborder l'étude des modèles mathématiques d'écoulement dans les réseaux d'assainissement qui constitue le coeur de ce travail de recherche, nous présenterons dans cette première partie, un rapide historique de l'évolution des contraintes et des objectifs qui ont contribué à faire de l'hydrologie urbaine, une discipline scientifique et technique.

Nous verrons dans le premier chapitre, comment et pourquoi la construction d'égouts est devenue systématique et a engendré l'existence de véritables réseaux souterrains. Nous verrons ensuite les conséquences de l'extension de l'urbanisation sur les réseaux d'assainissement et l'évolution des objectifs liés à l'assainissement des villes.

La maîtrise du cycle de l'eau en milieu urbain, soumise à des contraintes de plus en plus sévères et des objectifs ambitieux nécessite la connaissance des phénomènes qui y sont liés. Dans le deuxième chapitre, nous présenterons brièvement, les différents concepts actuellement utilisés et les phénomènes qui constituent les étapes du cycle de l'eau en milieu urbain.



## 1-1 LA VILLE ET L'EAU : UNE HISTOIRE INACHEVÉE

### 1-1-1 LA PRESENCE DE L'EAU

#### *La ville autour de l'eau*

L'eau a été pendant des millénaires, intimement liée aux activités humaines et au développement des villes. Assurant des fonctions multiples : alimentation en eau, production d'énergie, irrigation et fertilisation, évacuation des déchets, voie de communication, etc..., la ressource en eau que constituaient le fleuve, la rivière, les canaux ou ruisseaux a joué un rôle capital dans le développement et la prospérité des cités antiques et médiévales (GOUBERT 1986), (OLIVRY 1987).

De manière ambivalente, l'eau qui est la principale ressource des villes est aussi l'eau qui protège contre les envahisseurs et l'eau dont il faut se protéger.

Les sites protégés d'ilots surélevés (comme le centre de Strasbourg), de presqu'îles (comme la presqu'île à Lyon) ou de méandres autour de pitons rocheux (comme le site de Besançon) ont donc constitué des lieux privilégiés d'implantation des villes. D'une part, la proximité de la ressource en eau était assurée. D'autre part, le site en hauteur assurait la protection contre les inondations. Enfin, l'ilot, la presqu'île ou le méandre constituaient une position stratégique car en délimitant le contour de la cité, ils permettaient une protection naturelle contre les envahisseurs (HUBERT 1989).

Des porteurs d'eau acheminaient l'eau vers les parties hautes de la ville. Lorsque la profondeur de la nappe le permettait, on creusait des puits.

#### *L'eau et ses enjeux*

A partir du X<sup>ème</sup> siècle, en France, les échanges par les routes se multiplient. Il ne reste alors que quelques ponts romains délabrés (les constructions romaines bien qu'étant des modèles architecturaux, ont été souvent abandonnées pour marquer le progrès entre la civilisation chrétienne et la barbarie romaine). La construction des ponts sera une grande affaire de la ville médiévale. Le pont s'inscrit comme un des monuments vedettes des villes. La ville vit, agit et existe quand au moins un pont rompt son isolement.

Sur la Loire, par exemple, le pont d'Amboise date de 1015, celui d'Angers est reconstruit en 1028, celui de Tours en 1034. Sur la Saône, le premier pont de Lyon fut achevé vers 1077 (DUBY 1983).

Plus tard, à partir du XIII<sup>ème</sup> siècle, c'est l'établissement d'un port qui sera un facteur important de prospérité des villes. Le pont, la voie de communication que constituaient la rivière ou le port invitent les commerçants et les artisans à venir s'installer dans leurs alentours et constituent un enjeu stratégique et économique de première importance pour le développement des villes (DUBY 1983).

Ceci explique sans doute les extensions que subirent, dès le XII<sup>ème</sup> et XIII<sup>ème</sup> siècle, des villes "places fortes". Ces extensions amenèrent à construire en dehors des murs, en contre-bas, près de la rivière (DUBY 1983). Elles conduisirent souvent à drainer le marécage péri-urbain, comme ce fut le cas, par exemple, pour Caen qui doubla sa superficie au cours du XIII<sup>ème</sup> siècle par rapport à ses limites du XI<sup>ème</sup> siècle et Auxerre qui accrut sa surface de 10% au cours du XII<sup>ème</sup> siècle (GUILLERME 1984).

Ainsi apparut la ville basse et avec la proximité de l'eau, la possibilité accrue de production artisanale et d'échange de biens.

Entre le X<sup>ème</sup> et le XV<sup>ème</sup> siècle, les artisans représentent la majorité de la population des villes. Une partie d'entre eux bénéficient des progrès de la technique grâce à l'utilisation de l'énergie hydraulique (moulins à fouler la laine, moulins à battre le fer, moulins à grains, moulins à aiguiser, etc...). A cette époque, l'eau rythme les saisons et structure le paysage urbain.

### *La ville putride*

Les excréments et les immondices sont évacués par des canaux à ciel ouvert (qu'on appelait des "merderaux") ou sont rejetés au fossé. Les latrines publiques des villes fortifiées sont souvent installées sur les remparts pour assurer l'évacuation à l'extérieur des murs (GUILLERME 1984).

Pour les cités éclatées en partie haute (protégée) et partie basse, la place fortifiée est généralement habitée par les nobles, ecclésiastiques, et marchands alors que la ville basse, lieu de production, est réservée aux artisans. A partir du XIV<sup>ème</sup> siècle, de part sa position aval, la ville basse recueille les déchets de la ville haute et devient un lieu putride où miasmes, flaques nauséabondes et merderaux pestilentiels envahissent l'environnement urbain (GUILLERME 1984).

Parallèlement, l'excrément devient un centre d'intérêt pour le milieu scientifique et technique.

La médecine du XV<sup>ème</sup> et XVI<sup>ème</sup> siècle utilise une multitude de produits obtenus à partir de la fiente des animaux.

Un scientifique, M. de La Framboisière écrit en 1613 à propos du salpêtre utilisé pour fabriquer la poudre à canon : "Le salpêtre pousse préférentiellement dans les endroits humides, sur une terre putréfiée imbibée d'urine mêlée à l'eau". Sa culture sera particulièrement bien adaptée aux sites humides et putrides des villes basses (GUILLERME 1984).

A Reims, on récupère les urines des ouvriers des draperies dans des tonneaux pour blanchir les toiles (GUILLERME 1984).

Une part de l'activité des villes, essentiellement des quartiers bas, se développe autour de la présence concentrée d'excréments et de matières putrescibles, d'où le nom de villes putrides, pour les villes basses du XV<sup>ème</sup>, XVI<sup>ème</sup> et XVII<sup>ème</sup> siècle.

### *L'insalubrité*

L'augmentation de l'insalubrité des villes sera une préoccupation dès le XVI<sup>ème</sup>.

En 1519, à Rouen, la couverture d'un merderau à ciel ouvert est effectuée.

En 1532, à Evreux, on détourne le cours d'une rivière pour effectuer des opérations de vannage et de lessivage des canaux (GUILLERME 1984).

Le curage des rigoles et merderaux se multiplie. On commence par ailleurs à généraliser le système des fosses d'aisance (LAPORTE 1978).

Dès le début du XVIII<sup>ème</sup> siècle, on constate en Italie que les eaux stagnantes avaient une influence sur la mortalité des animaux et des hommes.

Au cours du XVIII<sup>ème</sup> et du XIX<sup>ème</sup> siècle, l'opposition entre la ville haute et ses quartiers riches, et la ville basse s'accentue. Les théories hygiénistes qui commencent à se développer dans le milieu scientifique gagnent peu à peu les couches aisées de la population. Ces théories conduisent essentiellement à améliorer la distribution de l'eau (faisant concurrence aux porteurs d'eau) dans les parties hautes de la ville pour permettre le lavage des rues (GOUBERT, GUILLERME 1983).

Le lavage des rues, cours intérieures, et espaces publics vise essentiellement à éliminer les mauvaises odeurs et la vue des immondices qui dérangent (CORBIN 1983). En apparence contradiction, si la propreté des rues est reconnue d'utilité publique, la coutume de se laver avec parcimonie, de peur de laver son âme, reste encore profondément enracinée dans la tradition, même dans les couches aisées de la population.

Les bornes fontaines, lavoirs et points d'eau installés peu à peu dans tous les quartiers à partir de la fin du XVIII<sup>ème</sup> siècle, vont constituer jusqu'au début du XX<sup>ème</sup> siècle, des hauts lieux de sociabilité où les citoyens organisent leurs habitudes (voir par exemple Gervaise dans L'Assommoir de ZOLA).

## 1-1-2 LES RÉSEAUX D'ASSAINISSEMENT

Dans le *dictionnaire raisonné d'architecture* rédigé en 1878 par Ernest BOSCH, on trouve à égard la définition suivante :

"Conduit souterrain destiné à recueillir les eaux pluviales industrielles et ménagères, ainsi que les immondices d'une ville, pour les rejeter au loin" (BOSCH 1878).

### *Les égouts romains*

Les Romains déjà construisaient des égouts qu'ils nommaient "cloaca". Le plus célèbre d'entre eux, le "*Cloaca maxima*" à Rome, d'une longueur de plus de 1000 mètres, était destiné à évacuer les eaux stagnantes des contreforts du mont Capitole vers le Tibre (BOSCH 1878).

La conception romaine de l'assainissement fut quasiment abandonnée jusqu'au XIX<sup>ème</sup> siècle.

Bien qu'on eût commencé à reconnaître l'utilité de la collecte souterraine des eaux usées et stagnantes dès la fin du Moyen-Age, le manque d'argent, le développement des activités urbaines autour de la putréfaction, et la pauvreté de la population des quartiers les plus insalubres empêchèrent d'en généraliser l'application (BOSCH 1878).

Paris ne possédait en 1663, que 2355 mètres d'égouts en canalisation souterraine. Cent ans plus tard, en 1789, elle n'en comptera encore que 26 kilomètres (BOSCH 1878).



Bouche d'égout sur le Tibre.

Figure 1.1

### *Le besoin d'assainir à partir du XIX<sup>ème</sup> siècle*

Jusqu'à la fin du XVIII<sup>ème</sup> siècle, alors qu'on accroît le pavage des rues, les eaux pluviales et ménagères seront le plus souvent recueillies par les "ruisseaux" (on parlait alors de ruisseaux urbains) qui fendent les chaussées en leur milieu (GUILLERME 1984). On peut d'ailleurs voir encore aujourd'hui ce type de chaussée dans quelques vieilles villes médiévales comme à Dinan (Côte du Nord). Les eaux des rigoles et ruisseaux s'écoulent selon la pente et s'accumulent souvent dans les creux et cuvettes. Sous l'action du soleil et de l'air, les eaux dégagent des exhalaisons fétides et pestilentielles (BOSC 1878).

Après la révolution, à Paris, les rares "lignes" d'égouts permettent d'évacuer une partie des eaux de lavage des rues. Les excréments humains, en revanche et ce depuis la fin du seizième siècle, doivent être retenus dans des fosses "d'aisance" aménagées sous les maisons.

Les épidémies urbaines de choléra et de typhoïde qui se succèdent au XIX<sup>ème</sup> siècle mettent en lumière la corrélation entre insalubrité et maladies et contribuent à conforter le mouvement hygiéniste naissant. Paris connaîtra deux épidémies de choléra en 1832 et 1849 (DUPUY, KNAEBEL 1982).

Très vite va être déclarée la chasse systématique aux eaux stagnantes. L'évacuation de toutes les eaux polluées et sales loin de leur lieu de production, est ressentie comme une nécessité. (KNAEBEL 1979), (GUILLERME 1984).

Les premiers projets importants de construction d'égouts sous les chaussées sont destinés, non seulement à l'évacuation des eaux stagnantes et nauséabondes, mais aussi à l'amélioration des conditions de circulation (principalement celle des voitures) ainsi qu'à l'amélioration du nettoyage des rues. Le profil de la chaussée, dans les grandes artères, jusque là fendu en son milieu devient bombé et les bouches d'égout sont reportées sur le côté de la voie. Le "ruisseau" central est rejeté sur les deux côtés de la chaussée, transformés en trottoirs longés de caniveaux. Ce système vise à supprimer les multiples "cassis" provoqués par les ruisseaux centraux et les obstacles redoutables que représentaient les quelques bouches d'égouts au milieu des carrefours (DUPUY, KNAEBEL 1982).

### *La construction des réseaux*

Durant le XIX<sup>ème</sup> siècle, les grandes extensions que subissent les réseaux d'assainissement ne représentent pas des opérations isolées mais s'inscrivent dans le cadre d'une modification importante de l'espace urbain. C'est Paris qui joue, en France, le rôle de pionnier. Les réalisations de la capitale serviront de référence obligée à bon nombre de collectivités locales, qui, sous l'impulsion des ingénieurs du corps des Ponts et Chaussées, prennent le même genre d'initiatives presque simultanément (Marseille, Lyon, Toulouse, Le Mans, ...) (par exemple, : Procès verbal de conférence entre M. l'architecte Voyer de la ville du Mans et M. l'ingénieur des Ponts et Chaussées chargé du service des grands travaux, 1869).

A Paris, des grands boulevards viennent éventrer la ville aux ruelles étroites et grouillantes. Les vieilles maisons sont remplacées par des immeubles cossus. Des nouveaux quartiers sont édifiés de toutes pièces. L'existence d'un collecteur dans chaque rue confère aux égouts une structure de véritable "réseau" souterrain superposé au réseau routier (DUPUY, KNAEBEL 1982).

### *Le tout-à-l'égout et les réseaux grandioses*

En France, la loi de 1894 instaure la technique du tout-à-l'égout. Le rejet des excréments humains dans les égouts, longtemps controversé, sera donc finalement adopté, entraînant notamment l'abandon des fosses d'aisance.

DUPUY et KNAEBEL expliquent que l'instauration du "tout-à-l'égout" et la construction du réseau d'assainissement dans son caractère grandiose, ne peuvent se comprendre sans se référer à la représentation que se fait le bourgeois de sa ville : lieu de la production des marchandises, certes, mais aussi lieu où la cité se donne en regard à elle-même, où elle matérialise sa puissance dans ses monuments et ses avenues. L'image de la belle ville atteint son apogée sous le Second Empire, lorsque les gouvernants manifestent la volonté de faire de Paris "la vraie Rome du temps présent". Il importe alors absolument de débarrasser la rue, par rejet dans le sous-sol comme dans le non-dit, de tout ce qui pourrait heurter les nouvelles sensibilités et contrecarrer le déroulement des activités urbaines nobles (DUPUY, KNAEBEL 1982).

Les dimensions des collecteurs construits à l'époque de ces grandes restructurations (tout au moins pour la ville de Paris) sont largement supérieures aux besoins. Les galeries (selon les idées d'Hausmann et de Belgrand) devaient pouvoir abriter d'autres réseaux techniques de la ville comme par exemple le réseau d'adduction d'eau. Il y avait là une conception urbaine globale du réseau d'assainissement dont on a depuis perdu beaucoup de composantes. Ainsi, et notamment afin de faciliter l'entretien et le curage du réseau, les collecteurs devaient pouvoir être visités en marchant debout sans se mouiller les pieds. Ceci explique la construction de collecteurs de section ovoïde qui, respectant la possibilité de visite, permettait d'optimiser le volume des maçonneries et de faciliter l'écoulement des faibles débits et l'autocurage. Le calcul sommaire des débits n'intervenait que pour déterminer la profondeur des cunettes (DUPUY, KNAEBEL 1982).

Si à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, l'évacuation systématique des eaux de toute nature est aussi ressentie comme un impératif dans les autres pays Européens, les méthodes préconisées sont parfois différentes. En Allemagne, par exemple, l'ingénieur IMHOFF (début du XX<sup>ème</sup> siècle) avait comme règle fondamentale le maintien de la fraîcheur et l'évacuation des odeurs. Il prônait déjà des techniques d'égout à ciel ouvert et d'auto-épuration dans des lacs de décantation et des bassins de retenue (CLAUDE 1985).

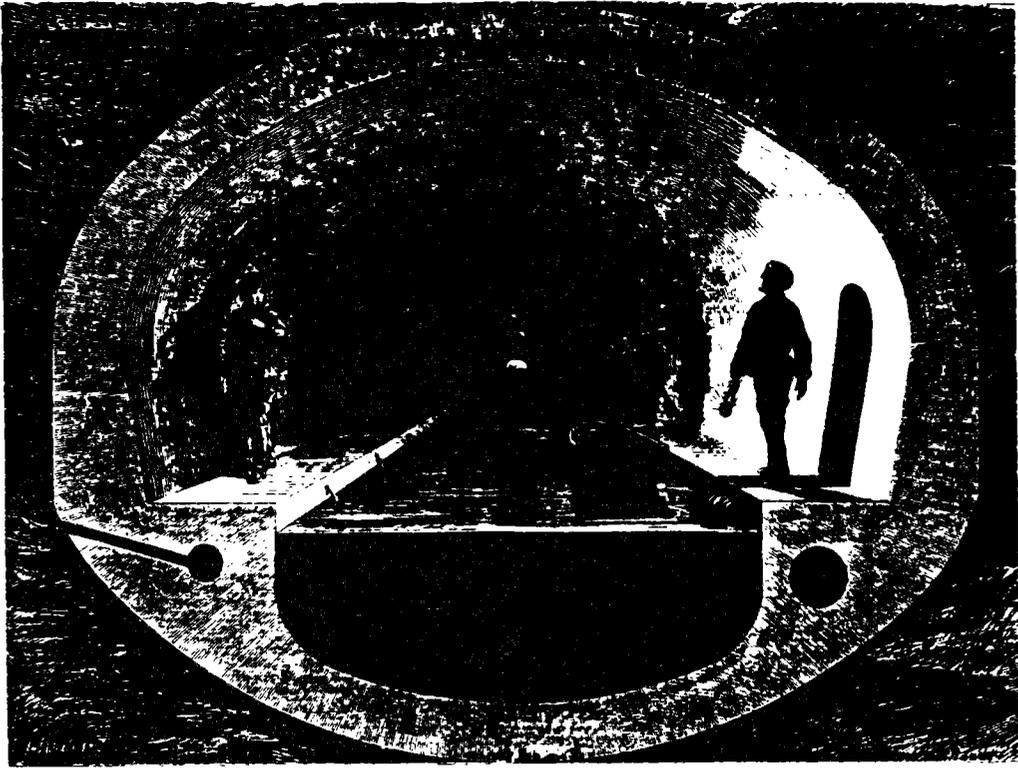


Figure 1.2

### 1-1-3 LES PROBLEMES DE SATURATION DES RESEAUX D'ASSAINISSEMENT

A partir de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, les phénomènes chroniques d'exode rural font croître la population des villes dans des proportions spectaculaires. En plusieurs étapes, les agglomérations de la banlieue établissent pour certaines, le contact avec les centres-ville tout en se développant vers les zones périphériques, ce qui entraîne une augmentation considérable des surfaces imperméables et du ruissellement (OLIVRY 1987).

#### *L'enterrement de l'eau*

Les préoccupations de santé et d'hygiène entraînent la construction systématique d'égouts. Parallèlement, les fonctions traditionnelles de l'eau régressent; les voies d'eau sont peu à peu abandonnées au profit de la route et du chemin de fer.

Les miasmes et les flaques nauséabondes sont définitivement éliminées de l'espace public ; confort urbain exige. Les étangs sont remblayés, les marais asséchés, des bras de rivière sont comblés et les voies d'eau qui subsistent servent uniquement d'exutoire pour les eaux pluviales et usées (OLIVRY 1987).

#### *La contrainte de l'écoulement gravitaire*

Le rôle important qu'a joué l'eau dans la ville au cours des siècles a conduit (cf. paragraphe 1-1-1) à construire à proximité des cours d'eau. L'extension des villes se fait souvent sur des bassins versants<sup>1</sup> dont l'aval est déjà construit.

Une fois entrées dans le réseau, les eaux pluviales et usées s'écoulent selon les pentes des collecteurs vers l'aval des tronçons. Le développement de la ville a donc souvent pour conséquence d'augmenter les volumes instantanés dirigés vers la partie ancienne des réseaux de la ville construite en bordure de rivière autour de points bas.

<sup>1</sup> Un bassin versant est une surface au sol telle que toutes les eaux qui y tombent coulent nécessairement vers un seul et unique point bas appelé exutoire. Les bassins versants sont délimités par des lignes de séparation des eaux qui correspondent aux lignes de crêtes des courbes de niveau.

### *L'urbanisation sur des terrains sensibles*

La topographie fait apparaître naturellement des zones sensibles aux inondations : points de concentration des eaux, pieds de collines, terrains plats et marécageux éloignés de tout exutoire, cuvettes marécageuses, vallées ou lit majeur des rivières inondables, ... (COGEZ 1987).

La recherche des terrains de faible coût, l'utilisation maximale de l'espace disponible, et l'augmentation de l'habitat individuel péri-urbain provoquent un urbanisme tentaculaire englobant progressivement ces zones sensibles (OLIVRY 1987).

Le département de Seine Saint-Denis est un exemple remarquable d'urbanisation en terrain plat. La pente est par endroit si faible que le réseau hydrographique naturel était déjà maillé (lorsque la pente est très faible, l'eau peut prendre différents chemins pour s'écouler, chemins qui finissent par se recouper, ce qui peut conduire à l'existence d'un maillage naturel des cours d'eau). En Seine Saint-Denis, certains endroits étaient d'ailleurs connus pour leurs fréquentes inondations comme en témoignent encore les noms de quelques lieux dits : le Marais du souci, les Pieds humides, le Baigne-cul, la Mare aux veuves...

On trouvait en 1983, sur les terres inondables de l'Ile-de-France, 4150 hectares d'industries et d'agglomérations (Le Monde du 3 Mai 1983).

### *Les inondations*

L'assainissement des villes était, jusqu'à très récemment, une affaire d'hygiénistes dont la devise était : "salubrité = busage". Les rus et ruisseaux ont donc été busés sans le concours d'hydrologues qui auraient analysé les phénomènes pluviaux et raisonné en termes de risques de crues (COGEZ 1987).

Le phénomène naturel d'inondations des lits majeurs des rus et ruisseaux se trouve aggravé par une augmentation des volumes instantanés à évacuer, causée par l'imperméabilisation des surfaces.

Par ailleurs, le réseau aval, bien que parfois initialement surdimensionné, fonctionne au maximum et même au-delà de sa capacité optimale, lors d'événements pluvieux importants.

D'un risque naturel sans gravité, où l'eau trouvait ses chemins hors des habitations, on est passé à un "risque majeur", pouvant entraîner mort d'homme, où l'eau ressurgit violemment à travers le bâti (COGEZ 1987).

Dans un nombre croissant de petites et de grandes agglomérations, on observe des débordements.

Par exemple, à Saint-Valérie-en-Caux, le 31 Juillet 1978, une pluie d'orage crée une inondation, à l'aval d'un bassin rural pentu, dans un quartier périphérique récemment urbanisé et entraîne la mort de 3 personnes (DDE Seine Maritime, communication personnelle).

Dans le département de Seine Saint-Denis, les inondations répétées au cours de l'année 1982 ont causé des dégâts dans 21 communes comptant plus de 2800 déclarations de sinistre. Après expertise et délibération du Conseil Général, le montant des indemnités a été fixé à 10 Millions de Francs, (C. COGEZ communication personnelle). Elles sont probablement inférieures au coût réel des dégâts.

L'augmentation de la fréquence des débordements est aggravée par les pratiques modernes : installation en sous-sol de centraux téléphoniques, d'ordinateurs, d'appareils électroménagers, de salons stéréos, etc... (DUPUY, KNAEBEL 1982), (COGEZ 1987).

Aucun texte ne met en garde les constructeurs des risques encourus. La réglementation et les instructions techniques précisés dans les Plans d'Exposition aux Risques (encore inachevés) permettront de définir clairement les risques et les responsabilités de chacun (assurances, ....).

### *La pollution*

L'augmentation du flux d'eaux usées et pluviales a aussi pour conséquence un accroissement important de la pollution des milieux récepteurs. Pour faire face à la dégradation de la qualité des cours d'eau, on construit des stations d'épuration. Néanmoins, la méconnaissance des phénomènes et le mauvais fonctionnement des réseaux réduisent souvent le rendement des stations.

Ce n'est que depuis les années 1975 que l'on commence à comprendre les mécanismes de pollution des eaux pluviales, jusqu'alors considérées comme propres et déversées directement dans le milieu récepteur. Les taux importants de mauvais branchements de collecteurs d'eau usée sur des collecteurs d'eau pluviale, le mauvais positionnement des hauteurs de déversoirs d'orage, ... (qui se traduit par la non-maîtrise des flux de pollution acheminés vers la station d'épuration ou directement vers le milieu récepteur) nuisent aux tentatives de reconquête de la qualité des eaux des cours d'eau.

### *Le refoulement de l'eau sale*

L'eau est soustraite à la vue des citoyens depuis la mise en place des réseaux d'adduction d'eau potable et du tout-à-l'égout. Les rapports que pouvaient avoir les citoyens (ou les techniciens) avec l'eau se sont, peu à peu, estompés. La disparition de l'eau et de ses usages publics (lavoirs, bornes fontaines, puits, etc...) a entraîné une régression de la sociabilité liée à l'eau.

La rivière autrefois lieu d'activités diverses et de manifestations des forces de la nature (inondations, ponts emportés, etc...), et qui jouait un rôle fondamental dans le développement et la vie de la ville, est canalisée, souvent polluée et traversée sans peine par de nombreux ponts ou tunnels. Elle ne se manifeste plus à la population des villes et disparaît dans la négligence et l'oubli.

Outre la régression de la sociabilité liée à l'eau, la disparition souterraine de l'eau dans la ville a engendré l'évacuation des risques inhérents au transport de flux hydrauliques et l'oubli du "sens de l'eau". Ainsi l'eau, disparue de la "conscience" des villes, a d'autant plus surpris et gêné quand elle est réapparue là où on ne l'attendait pas. Les dégâts et l'impact psychologique ont souvent été d'autant plus importants que l'on ne se méfiait plus. Une terminologie provenant de la psycho-sociologie permettrait de parler de "refoulement collectif de l'eau sale" (KNAEBEL 1979).

En 1982, des riverains de Seine Saint-Denis ont été inondés 5 fois en 20 jours. Les dégâts n'ont bien sûr pas été multipliés par 5, mais la répétition des inondations a été jugée intolérable par les personnes sinistrées. Voir sa cave inondée par le débordement du réseau d'égout est mal supporté mais la voir réinondée juste après l'avoir nettoyée est sans doute encore bien pire (C. COGEZ communication personnelle).

### *La nécessité de renforcement*

Reconstruire un nouveau réseau de plus grande capacité sous une zone urbaine dense n'est pas envisageable, à cause du coût prohibitif des nouveaux ouvrages. Le patrimoine français en infrastructure de réseau d'assainissement est estimé en effet à plus de 800 milliards de francs (si on devait le reconstruire dans l'environnement actuel), ce qui représente près de 15000 francs par habitant! En coût d'infrastructure (avant urbanisation), cette somme serait de 300 milliards de francs (STU 1982).

La reconstruction de nouveaux tronçons sous un centre-ville occasionne des déplacements d'autres ouvrages, tels que des canalisations, passages routiers souterrains, métro, ... et des dangers, tels que la déstabilisation de constructions ou la dégradation de l'étanchéité de parcs de stationnement souterrains, ...).

Il faut donc prévoir une restructuration des réseaux d'assainissement en tirant le meilleur parti de l'existant (BACHOC 1984) et en minimisant la construction d'ouvrages de renforcement tels que :

- collecteurs de délestage ou doublements
- maillages du réseau
- bassins de retenue
- etc...

Des travaux sont engagés, mais les risques de dysfonctionnement des ouvrages restent très importants lorsque toutes les possibilités de fonctionnement n'ont pas été prévues lors de la conception. Les premières mesures pour lutter contre les inondations ont ainsi souvent entraîné la construction d'ouvrages qui se sont avérés inefficaces en regard des améliorations attendues. Les connaissances acquises dans le domaine de l'hydrologie urbaine permettent aujourd'hui de prévoir qu'un doublement de collecteur peut, selon les cas :

- ne pas avoir le débit d'évacuation espéré ;
- aiguïser la crue à l'aval en diminuant les stockages qui s'effectuaient à l'amont dans les collecteurs ou par débordements dont les conséquences restaient modérément graves (BACHOC 1984).

- ne pas résoudre à la source, les insuffisances qui peuvent se manifester sur plusieurs kilomètres à l'amont (des zones où les inondations apparaissent) ou qui peuvent être imputées à des capacités d'évacuation insuffisantes d'un collecteur alors qu'elles sont uniquement ponctuelles (COGEZ 1983), (BACHOC 1984).

De plus, on s'est aperçu que les solutions classiques de renforcement ont leurs propres limites. Les gros collecteurs aggravent les effets de pointe, ne sont souvent sollicités que quelques minutes tous les dix ans (avant de déborder...), ne sont pas rentables s'ils sont peu pentus, et dangereux s'ils se mettent en charge (COGEZ 1987).

### *Le manque d'outils d'analyse*

Quels outils utiliser pour prévoir les bons investissements? Les problèmes de saturation ou de débordements des réseaux d'assainissement sont complexes et font appel à des notions d'hydrologie et d'hydraulique méconnues jusqu'ici des services d'assainissement. Ceux-ci utilisent depuis la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, un certain nombre de "recettes" (qui ont très peu évolué), pour dimensionner les collecteurs des réseaux d'assainissement.

La circulaire de Caquot (CG numéro 1333) parue en 1949 est l'institutionnalisation pour l'ensemble des villes de France d'une formule qui permet de calculer le débit maximum (et le diamètre des collecteurs correspondants) en fonction d'une pluie de période de retour donnée.

Les travaux de M. CAQUOT sont remarquables en regard des connaissances et des conditions de l'époque (DUPUY, KNAEBEL 1982). La formule de CAQUOT a permis et permet encore de réaliser avec succès la conception de nombreux collecteurs et on ne peut que constater son excellence notamment lorsqu'on la compare à la formule rationnelle utilisée dans les autres pays Européens (DESBORDES 1987).

La formule linéaire de Caquot implique une certaine homogénéité du bassin versant et de la structure du réseau, mais elle a permis après guerre à des techniciens peu formés de projeter efficacement des ouvrages de desserte d'une urbanisation traditionnelle. C'est ce qu'explique G. DUPUY dans son ouvrage intitulé : "Comment l'on fabriquait la science opérationnelle urbaine vers les années 1940 - La circulaire de CAQUOT" (DUPUY 1978b).

Elle n'est cependant pas du tout un outil d'analyse et s'avère totalement inadaptée à la recherche et à l'obtention de solutions aux problèmes de saturation des réseaux (DESBORDES 1986).

De plus, la formule de CAQUOT permet le dimensionnement des collecteurs pour une pluie de fréquence de retour donnée (la pluie décennale). Elle permet donc en théorie au réseau de déborder tous les dix ans ...

Le concept de pluie de "fréquence de retour donnée" est actuellement fortement remis en question (DESBORDES 1987). On a déjà vu tomber des pluies qualifiées de "décennales" à quelques jours d'intervalle!

Les notions de "cas de force majeure", ou "catastrophe naturelle" sont d'un maniement délicat dès lors qu'une collectivité locale a choisi une période de retour d'insuffisance "décennale" pour dimensionner son réseau pluvial (COGEZ 1987).

Les égouts construits au siècle dernier, toujours utilisés, pouvaient être au départ, dans certaines villes (à l'image de Paris), largement surdimensionnés. Les problèmes de saturation sont donc généralement apparus tardivement alors que l'extension des villes avait déjà entraîné l'imperméabilisation de bassins versants dont les dimensions dépassaient largement les domaines de validité de la formule de CAQUOT (200 ha).

C'est à partir des années soixante, avec l'apparition des villes nouvelles, que les dangers de saturation des réseaux d'assainissement et les contraintes sur l'urbanisation qui en découlaient ont commencé à être prises en compte dans les projets d'urbanisme.

La délivrance de permis de construire au coup-par-coup a souvent masqué l'insuffisance des possibilités d'assainissement. Les Plans d'Occupation des Sols auraient pu permettre de faire apparaître la compatibilité entre l'urbanisation prévue et les équipements d'assainissement existants ou à construire. La question est restée néanmoins très fréquemment escamotée (DUPUY, KNAEBEL 1982).

Ces insuffisances sont à l'origine de la circulaire de 1977 qui ouvre la porte à de nouvelles techniques. La principale différence entre la circulaire de CAQUOT (1949) et celle de LORIFERNE (1977) concerne la possibilité de stocker ou d'infiltrer les eaux pluviales par des techniques d'infiltration et de stockage (couverture du sol par des revêtements perméables, toitures terrasses, bassins de retenue, etc...).

La circulaire de 1977 signale de plus la possibilité d'affiner la connaissance des phénomènes par des outils mathématiques qui permettent de simuler dans le temps et dans l'espace, les flux ruisselés et ceux circulant dans le réseau d'assainissement.

### *Conclusions*

L'augmentation des surfaces imperméabilisées, conséquence de l'extension des villes, est à la base des problèmes de dysfonctionnement des réseaux d'assainissement rencontrés par un nombre croissant de collectivités locales.

Alors que la ville croyait en avoir fini avec les problèmes d'eau, et pouvoir accroître sa superficie sans contraintes, c'est paradoxalement l'urbanisation qui a fait ressurgir l'eau pour la placer souvent au rang des principales préoccupations des collectivités locales. Ces préoccupations peuvent se regrouper sous les rubriques suivantes :

- connaître les risques encourus (de pollution et d'inondation) et les alternatives possibles pour se protéger de ces risques ;
- minimiser les coûts d'investissement tout en se prémunissant le mieux possible de ces risques ;
- rentabiliser les infrastructures existantes et les nouveaux investissements ;
- éviter totalement les inondations dans les zones aval où le coût des dégâts risque d'être très important et encore plus difficilement supporté du fait de l'actuelle revalorisation sociale et urbanistique des centres-ville ;
- accroître le contrôle de la qualité et de la quantité des eaux acheminées vers la station d'épuration ;

- limiter au maximum les rejets directs polluants dans le milieu récepteur, en particulier par temps de pluie ;
- améliorer la sécurité du personnel travaillant en égoût ou sur les autres ouvrages ;

Le bassin versant qui était supposé toujours plus ruisseler, conséquence d'une imperméabilisation croissante comprise comme inéluctable, sera appréhendé non seulement du point de vue de ce qui ruissellera et qu'il faudra évacuer, mais aussi du point de vue de ce qu'il sera possible d'absorber, de retenir ou même seulement de ralentir. L'évacuation des eaux pluviales ne doit plus apparaître comme un élément perturbateur étranger, sauvage, mais doit être intégrée dans l'habitat et dans la ville (KNAEBEL 1979).

Il est possible actuellement d'urbaniser des bassins versants sans augmenter le ruissellement naturel, à l'aide de techniques d'assainissement local des eaux pluviales (utilisant les capacités d'infiltration des sols et des techniques de stockage).

Aux Etats-Unis, on impose parfois aux promoteurs un rejet d'eaux pluviales au plus égal au rejet du terrain naturel avant urbanisation (STU 1982). En France aussi, comme c'est le cas à Orange, on a défini au P.O.S des nouvelles zones à urbaniser où la quantité d'eau pluviale admise ne doit pas dépasser le ruissellement naturel du terrain non urbanisé (HUBERT, OLIVRY 1987).

Par ailleurs, les investissements de génie civil dont le coût est élevé et le taux d'utilisation faible (parfois quelques **minutes** tous les 10 ans) nécessitent une réflexion poussée sur les meilleures alternatives possibles (BACHOC 1984).

A la passivité d'antan, à la délégation des questions d'évacuation à des ouvrages de génie civil immuables et muets, doit se substituer petit à petit la maîtrise active des phénomènes de ruissellement et d'écoulement (BACHOC 1984).

On doit peu à peu substituer à la notion de risque inéluctable en fréquence, la gestion active du risque. Certaines collectivités locales en ont déjà pris le chemin, en développant par exemple, une gestion en temps réel de leurs réseaux d'assainissement.

## 1-2 LA CONNAISSANCE DU CYCLE DE L'EAU EN MILIEU URBAIN

Les bassins versants et les réseaux d'assainissement ne sont pas uniquement des surfaces à imperméabiliser pour les premiers et des tuyaux à construire pour les seconds. La connaissance des flux qui y circulent constitue souvent une aide indispensable à la décision, pour la planification de l'urbanisation, les diagnostics de dysfonctionnements et les problèmes de gestion.

La connaissance du cycle de l'eau en milieu urbain s'est affinée depuis une quinzaine d'années, avec la mise au point de nouveaux instruments de mesure et le développement d'outils d'analyse.

Elle a déjà été mise à profit par plusieurs collectivités locales à la recherche de solutions à leurs problèmes d'assainissement.

En retour, les besoins des collectivités locales permettent de définir les nouveaux axes de recherche et les points sur lesquels un approfondissement des connaissances est nécessaire.

## 1-2-1 LA PLUIE ET LE RUISSELLEMENT

### *La pluie et son hétérogénéité*

La taille importante de certains bassins versants à prendre en compte dans le calcul des débits ne permet pas de considérer que la pluie est répartie uniformément sur ces bassins versants : à chaque instant, elle est fonction du lieu, et en chaque point d'un bassin versant, elle est fonction du temps. Pour tenir compte de cette hétérogénéité spatiale et temporelle de la pluie, on a introduit les concepts :

- de hyétogrammes qui sont des courbes représentant l'intensité de la pluie, en un point donné, en fonction du temps (mesurée par pluviographe, par exemple) ;
- de lames d'eau qui représentent l'intégration spatiale de la pluie sur l'ensemble d'un bassin versant, à un instant donné ou intégrée sur le temps (mesurée par exemple à l'aide des images du radar météorologique).

Le concept de lame d'eau a l'avantage de relier la pluie à un volume d'eau qui s'abat sur un bassin versant, pendant une durée déterminée, cette lame d'eau variant bien sûr dans le temps au cours de la pluie.

### *Le ruissellement*

En se plaçant à l'exutoire d'un bassin versant, lors d'un événement pluvieux, on observe un débit dont la valeur sera fonction de la pluie et des surfaces du bassin versant. Si l'on mesure ce débit, on pourra comme pour la pluie tracer la courbe (appelée hydrogramme) représentant son évolution en fonction du temps. Le décalage entre le maximum d'intensité de la pluie (correspondant au maximum du hyétogramme) et le débit maximal mesuré à l'exutoire du bassin versant (correspondant au maximum de l'hydrogramme), correspond à ce qu'on appelle le "temps de réponse" du bassin versant. On conceptualise la transformation du hyétogramme de pluie en hydrogramme à l'exutoire d'un bassin en l'appelant transformation pluie-débit.

### *Le rôle important des surfaces*

Les surfaces imperméables directement reliées au réseau d'assainissement jouent un rôle capital sur l'intensité de pointe du débit et sur son temps d'arrivée à l'exutoire du bassin versant.

C'est ce qu'on appelle la "réaction" d'un bassin versant. Elle dépend donc de sa densité et de son type d'urbanisation.

A l'exutoire des différents bassins versants, les eaux pluviales ruisselées se déversent dans le réseau d'assainissement. Les conséquences sur le réseau aval dépendront fortement de la réaction de chaque bassin versant, surtout lorsque le débit à l'exutoire d'un bassin se superpose avec celui d'un autre bassin versant.

On comprend donc que chaque type de pluie (pluie d'orage, pluie longue, etc...) va provoquer un ruissellement différent. Deux pluies sur un même bassin versant de volume identique mais d'intensité distincte peuvent entraîner des débits ruisselés et des temps de réponse très différents. Ces débits pourront avoir des conséquences très différentes sur le fonctionnement du réseau.

Selon la nature de la surface sur laquelle la pluie s'abat, la quantité d'eau tombée va, soit s'infiltrer dans le sol si la surface est poreuse ou perméable (champs, jardins), soit ruisseler si la surface est imperméable (toits, chaussées).

### *La connaissance des phénomènes*

#### *Quantitativement :*

Les mesures et la modélisation permettent de connaître, simuler et prévoir l'impact d'une pluie sur un bassin versant. Cette connaissance pourra être utilisée pour diagnostiquer les contributions de chacun des bassins versants à l'écoulement dans le réseau.

Les modèles de simulation permettent également de connaître la contribution en débit des bassins versants urbains, lorsqu'on modifie hypothétiquement les données concernant par exemple l'imperméabilisation des sols ou l'existence d'investissements utilisant des techniques alternatives d'assainissement des eaux pluviales (chaussées poreuses, toitures en terrasse, bassins de retenue, etc...). Cette connaissance permettra de prendre les décisions de planification de l'urbanisation (ou au contraire de les abandonner ou de les modifier) ainsi que celles d'investissements destinés à diminuer, ou à décaler, l'apport en débit d'un (ou de plusieurs) bassin versant sur le réseau d'assainissement.

Nous verrons dans la partie 4, jusqu'où l'on peut modéliser la complexité du phénomène de ruissellement et quelles données sont nécessaires à l'utilisation des modèles.

#### *Qualitativement :*

Pour la qualité des eaux ruisselées, les progrès tant en matière de mesure que de modélisation ont permis de mieux définir le concept récent de pollution des eaux pluviales.

Les origines de la pollution des eaux pluviales lors du ruissellement sur les surfaces urbaines sont multiples (RENARD 1987) : polluants atmosphériques provenant des activités industrielles et du chauffage des habitations, résidus de combustion des carburants et usure des pneumatiques de véhicules à moteur, usure des revêtements de surface, fondants chimiques et abrasifs utilisés pour la viabilité des chaussées, érosion des surfaces naturelles, déchets de végétation, engrais, insecticides, ...

Les connaissances se sont surtout affinées au niveau de la caractérisation de la pollution. La production de la pollution lors d'une pluie donnée, son transport sur le bassin versant, ainsi que son impact sur le milieu naturel restent mal connus (HEMAIN 1983), (BUJON, HERREMANS 1987).

## 1-2-2 L'ÉCOULEMENT DANS LE RÉSEAU D'ASSAINISSEMENT

Dans un réseau d'assainissement pluvial ou unitaire, les débits sont très variables dans le temps et dans l'espace, à cause de la brutalité et de l'hétérogénéité des événements orageux.

Les débits provenant des différents bassins versants d'une ville vont pénétrer dans le réseau et se propager vers le ou les exutoires du réseau d'assainissement. Certains phénomènes hydrauliques ont une forte influence sur la manière dont les débits vont s'écouler jusqu'à l'aval du réseau.

### *Propagation des hydrogrammes*

L'eau ne se propage pas instantanément vers l'aval du réseau. L'approximation du régime permanent et uniforme (qui est utilisée par les abaques classiques de calcul des collecteurs en fonction d'un débit maximal) ne permet pas de rendre compte de ce phénomène.

Un collecteur d'un réseau agit comme un transformateur d'hydrogramme qui décale dans le temps la pointe de débit, l'atténue, et qui déforme dans certaines conditions, l'allure générale de l'hydrogramme. L'utilisation de modèles mathématiques permet de traduire de manière assez adéquate ces notions simples. De plus il peut être nécessaire de simuler dans le temps, l'impact des ouvrages de stockage situés en général à l'amont des réseaux, pour en évaluer l'influence sur l'aval, ainsi que sur l'amont.

### *Superposition des hydrogrammes*

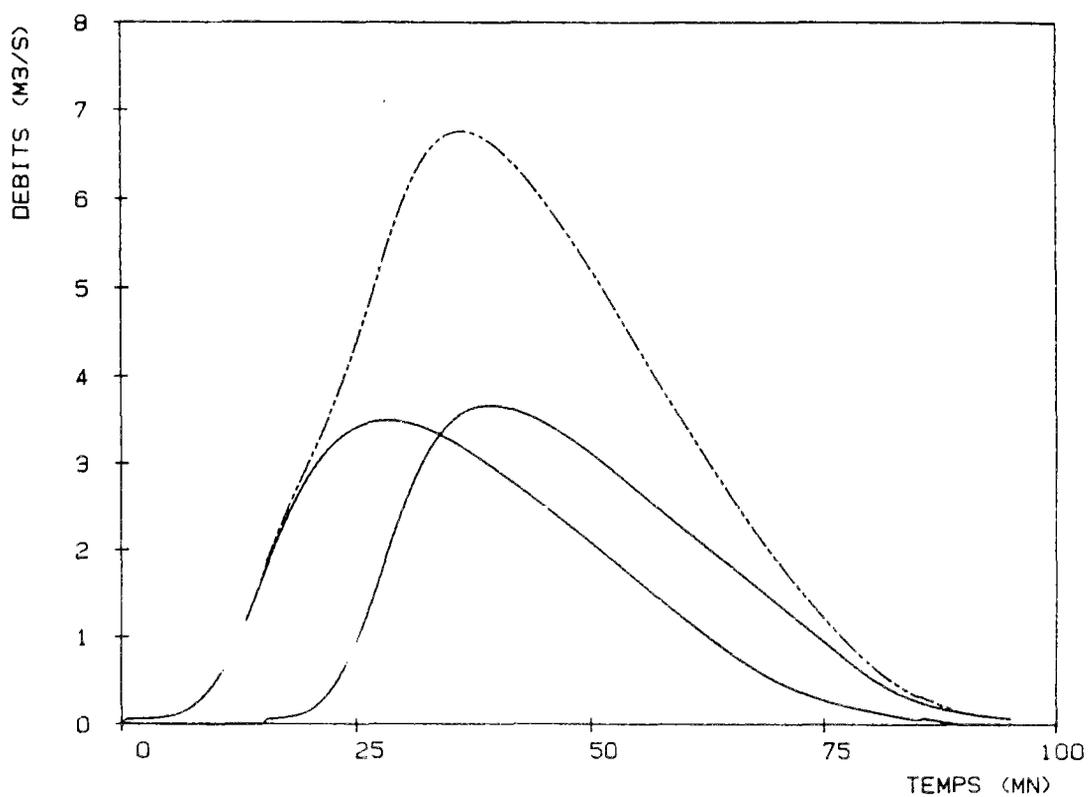
La connaissance des hydrogrammes entiers permet non seulement la connaissance des débits maximums, mais aussi leur temps d'arrivée aux différentes jonctions du réseau.

La connaissance du décalage des temps d'arrivée des débits maximums permettra, après composition au niveau d'une jonction, d'estimer la nécessité de retarder et d'atténuer ou non certains hydrogrammes (par l'intermédiaire de bassins de retenue par exemple). On pourra aussi, par simulation de conditions hypothétiques, juger des conséquences d'un accroissement des capacités d'évacuation à l'amont (BACHOC 1979a) et (BACHOC 1979b).

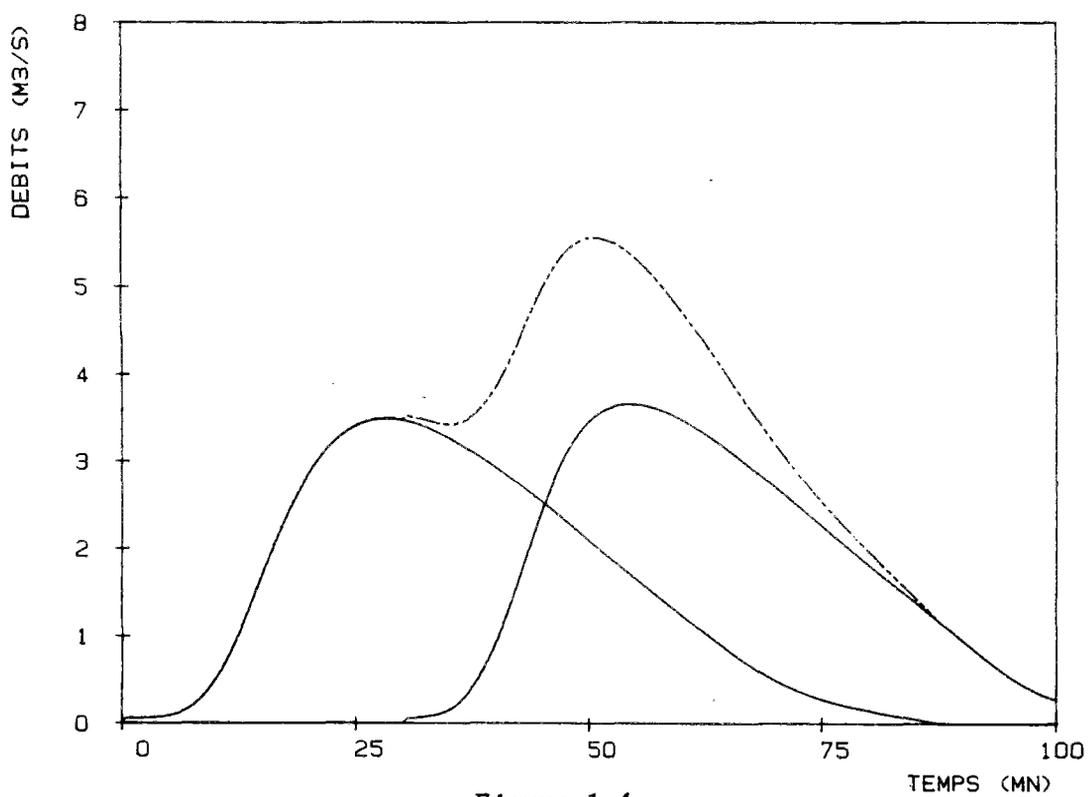
La seule connaissance d'un débit maximal (donné par exemple par la formule de CAQUOT) est insuffisante dès que les durées de propagation des débits sont importantes. En effet, le débit maximal de deux hydrogrammes composés dépendra des durées respectives de propagation et sera souvent très différent de la simple somme des deux débits maximums.

La figure 1.3 représente la composition de deux hydrogrammes dont la pointe de débit est décalée dans le temps. La figure 1.4 représente les deux mêmes hydrogrammes avec des décalages différents. On voit que l'hydrogramme résultant (somme des deux hydrogrammes à la jonction) a un débit maximal qui ne peut être déterminé que par la connaissance des durées de propagation des deux hydrogrammes amont.

SOMMATION - DECALAGE DES DEBITS : 10 MN

*Figure 1.3*

SOMMATION - DECALAGE DES DEBITS : 30 MN

*Figure 1.4*

### *Influences aval*

Les phénomènes d'influence aval qui seront expliqués dans le paragraphe 3-3-4 peuvent modifier les conditions d'écoulement dans le réseau. Ils peuvent par exemple provoquer des débordements bien que le débit ne dépasse pas le débit capable des canalisations.

Ces phénomènes se manifestent surtout sur des réseaux de faible pente, notamment lorsque l'exutoire de certains tronçons se déverse directement dans un bassin ou une rivière dont le niveau est haut.

La construction d'une maille pour décharger une partie du réseau s'est déjà avérée totalement inefficace, faute de n'avoir pas pris en compte ce phénomène.

Par exemple, en Seine Saint-Denis, on a pu s'apercevoir que l'écoulement dans un maillage restait toujours quasi nul à cause d'une forte hauteur d'eau à l'aval. Le collecteur servait donc uniquement de capacité de stockage. Il s'est même avéré que ce maillage (dont la construction avait été décidée pour alléger le débit d'un collecteur sur lequel des débordements fréquents étaient observés) fonctionnait souvent à contre sens (augmentant ainsi la charge du collecteur saturé) (COGEZ communication personnelle)

Certains modèles permettent de simuler les phénomènes d'influence aval et ainsi de prévoir les phénomènes décrits ci-dessus.

### *Mise en charge et débordements*

La mise en charge des réseaux engendre des phénomènes complexes. Elle modifie profondément la propagation des débits qui devient quasi-instantanée, et se produit sur une zone qui a tendance à s'étendre de l'aval vers l'amont, puis à se réduire. Un débit maximal faible dans un collecteur situé sous une zone aval fortement urbanisée peut être la conséquence d'un débordement amont du réseau. Doubler le collecteur amont pour éviter ce débordement a pour effet d'augmenter la pointe de débit dirigée vers l'aval. Ceci peut donner lieu à des débordements graves dans la zone aval qui n'étaient évités que grâce aux débordements amont.

Certains modèles qui permettent la simulation des mises en charge et des débordements permettront de tester et de vérifier les effets de tel ou tel renforcement du réseau et de prendre en compte correctement les débits qui se propagent effectivement à l'aval, lorsqu'il y a stockage ou perte par débordement (BACHOC 1984).

### *Gestion des ouvrages*

La gestion des ouvrages du réseau peut nécessiter la connaissance fine de certains phénomènes hydrauliques ou hydrologiques.

Prenons par exemple, les phénomènes d'influence aval. La méconnaissance d'une influence aval se traduit entre autres par une méconnaissance des hauteurs d'eau (voir le §3-3-4) ce qui peut entraîner un mauvais calage de la crête du déversoir et peut provoquer :

- soit des inondations (si elle est calée trop haut et ne dévie pas une quantité suffisamment importante des flux) ;
- soit des rejets très importants dans le milieu naturel (qui auraient pu être évités par un calage plus affiné).

Dans certains cas, une stratégie de gestion d'un bassin de retenue, tendant à retenir au maximum les eaux pendant un événement pluvieux afin d'éviter des débordements sur une zone aval très sensible, peut engendrer des débordements à l'amont. En voulant trop protéger l'aval, on peut inonder les zones amont à cause de l'influence aval due au remplissage du bassin qui rehausse les hauteurs d'eau dans les tronçons situés à l'amont du bassin. (Conseil Général Seine Saint Denis 1981)

### *Transport de pollution et impact des rejets*

A la pollution strictement "pluviale", venant de la surface, présente dans l'eau de pluie ou lessivée sur les bassins versants, s'ajoutent les surverses des réseaux unitaires, les branchements défectueux des réseaux séparatifs (RENARD 1987) et les remises en suspension de dépôts. Dans de nombreux cas, les matières en suspension (MES) sont très nettement le vecteur principal de pollution, et leur décantation en bassins aménagés s'avère d'une efficacité très encourageante. (BACHOC, THEVENOT 1987).

Si l'on considère que les eaux pluviales sont toutes celles qui, par temps de pluie, rejoignent le milieu recepneur sans transiter par la station d'épuration, il est impossible de traiter l'impact des eaux pluviales sur la qualité des milieux récepteurs en se référant à la pollution des seules eaux de ruissellement (HEMAIN 1983).

Notamment au niveau de l'impact des eaux pluviales sur le milieu recepneur, la modélisation des phénomènes reste à faire malgré les études prometteuses qui lui ont été consacrées (HEMAIN 1980), (BUJON, HERREMANS 1987).

### *Conclusions*

La modélisation dans les réseaux d'assainissement permet de décrire, comprendre et connaître les phénomènes présentés dans ce paragraphe. L'analyse de ces phénomènes est indispensable pour satisfaire avec lucidité les objectifs de planification de l'urbanisation, de prévision et de conception des investissements, et de gestion des réseaux d'assainissement.



*DEUXIEME PARTIE*

---

*LES MODELES DE SIMULATION*  
*LEURS SCHEMAS DE DISCRETISATION*  
*LEURS PARAMETRES*



Dans cette partie, nous présenterons les modèles de simulation d'écoulement à surface libre que l'on peut utiliser en réseau d'assainissement.

Le chapitre 2-1 est consacré aux **équations des modèles** d'écoulement à surface libre en régime transitoire et les hypothèses sous lesquelles ces équations sont valables. On distinguera les modèles complets issus des équations de Saint-Venant, les modèles mécanistes simplifiés issus des équations simplifiées de Saint-Venant et les modèles issus de l'approche conceptuelle.

Le chapitre 2-2 présente les principales **méthodes de résolution** des équations des modèles présentés au chapitre 2-1. Nous verrons alors les liens qui existent entre l'approche conceptuelle et l'approche mécaniste.

Le chapitre 2-3 est consacré aux **paramètres** utilisés par les modèles mécanistes simplifiés et les modèles conceptuels. Nous présenterons les conditions que doivent vérifier ces paramètres et leurs méthodes de calage.

Nous avons déjà réalisé une étude bibliographique (KOVACS 1984) sur la modélisation des écoulements à surface libre. Les descriptions des modèles mathématiques et de leurs schémas de discrétisation seront reprises et complétées par une analyse de leur consistance et de leur stabilité numérique. Nous ne parlerons plus des modèles analogiques et physiques décrits dans notre étude bibliographique. Leur utilisation, tout au moins en ce qui concerne les phénomènes d'écoulement en réseau d'assainissement, est restée marginale, probablement à cause des progrès de l'informatique. L'augmentation du nombre de logiciels et de leurs possibilités et la diminution des coûts du matériel, facilitent en effet considérablement la mise en oeuvre de modèles mathématiques.

Précisons que nous présentons uniquement des **modèles "classiques"** utilisant des méthodes de résolution analytique ou des méthodes de schémas aux différences finies. Il n'y a pas à notre connaissance de modèle construit à partir de la théorie des éléments finis qui soit utilisé pour la simulation des écoulements en réseau d'assainissement. Nous n'avons pas non plus examiné ce que pouvait apporter l'approche fractale (THIBAUT 1987), ni la théorie des graphes.

Les modèles présentés dans cette partie ont donc déjà été utilisés en hydrologie urbaine. Néanmoins, une présentation synthétique des équations, des modes d'intégration et des méthodes de calcul des paramètres, reprenant en partie les acquis des différents auteurs n'avait jamais été réalisée.

Cette partie s'adresse plutôt à un lecteur habitué au maniement d'équations différentielles et aux méthodes de résolution numérique.



## 2-1 LES MODELES MATHEMATIQUES DE SIMULATION D'ÉCOULEMENT UNIDIMENSIONNEL A SURFACE LIBRE

L'étude mathématique des écoulements à surface libre en régime transitoire n'est pas une discipline scientifique nouvelle. Elle a débuté, il y a déjà plus de 200 ans lors de l'essor de l'ensemble des théories mécaniques, avec les travaux de Laplace (1776) et de Lagrange (1781) sur la propagation d'ondes à la surface de canaux. Dès 1871, Barré de Saint-Venant réussit à formuler mathématiquement (par un système d'équations différentielles) le mouvement des eaux à surface libre, pouvant faire l'objet d'une description filaire (cf. définition ci-après). Depuis lors, ces équations servent de base aux modèles mathématiques d'écoulement à surface libre.

La famille des modèles mathématiques issus des équations de Saint-Venant s'appelle les modèles mécanistes. L'approche de Saint-Venant est une approche que l'on peut qualifier de "particulaire" dans la mesure où les conditions globales d'écoulement sont calculées par intégration du mouvement des parties élémentaires du fluide. Le mouvement de chaque tranche élémentaire de liquide est décrit en fonction des lois de conservation de la physique.

Nous verrons au §2-1-3 qu'il s'est développé ultérieurement une autre grande famille de modèles appelés modèles conceptuels qui sont issus non plus des équations de Saint-Venant mais de la théorie de l'analyse des systèmes.

### 2-1-1 LES MODELES MECANISTES COMPLETS

Les modèles intégrant le système complet des équations de Saint-Venant sont généralement appelés "modèles complets".

Les équations de Saint-Venant (voir la page des notations et la figure 2.0) peuvent s'écrire sous la forme (POCHAT 1980) :

$$(2.1) \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = q \quad (2.1.A) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = g \cdot (I-J) + (\epsilon-1) \cdot q \cdot \frac{V}{S} \quad (2.1.B) \end{array} \right.$$

(1)            (2)            (3)            (4) (5)            (6)

$\epsilon = 0$  si le débit latéral  $q$  est entrant,  $\epsilon = 1$  s'il est sortant

S'il n'y a pas d'apports latéraux,  $q = 0$

- (2.1.A) est l'équation de *continuité*, elle traduit la conservation des volumes transités.

- (2.1.B) est l'équation *dynamique*, elle traduit la conservation de l'énergie et éventuellement la conservation de la quantité de mouvement si les variables du système sont dérivables.

Pour l'équation dynamique :

- (1) et (2) sont les termes d'inertie
- (2) est l'accélération convective
- (3) est le terme de pression ou de pente de la surface libre
- (4) est le terme de gravité
- (5) est le terme contenant les pertes de charge par frottements (Strickler).
- (6) est le terme d'inertie des apports latéraux

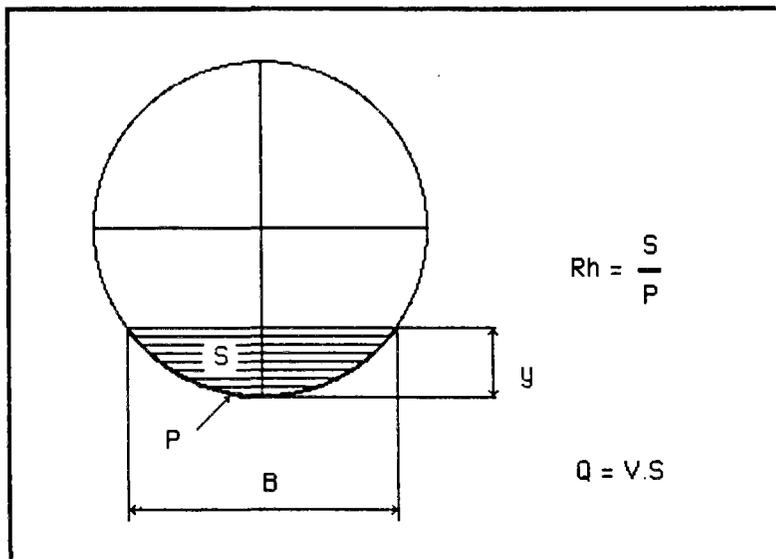


Figure 2.0

Les hypothèses fondamentales sous lesquelles les équations de Saint-Venant sont vérifiées sont les hypothèses des écoulements **filaires** dits graduellement variés. Ces hypothèses peuvent se résumer ainsi :

1. Le mouvement du fluide est considéré comme **unidimensionnel** et suppose négligeables les effets d'une éventuelle différence de niveau dans une section mouillée ;
2. La surface du fluide est graduellement variable, ce qui est équivalent à dire que la distribution de pression sur une verticale est hydrostatique, et que l'accélération verticale est négligeable ;
3. La distribution des vitesses sur une section mouillée est supposée uniforme (écoulement par tranches) ;
4. Les pertes par frottement dans les écoulements non permanents ne sont pas différentes des pertes de charge dans les écoulements permanents. Elles peuvent être réduites au seul paramètre  $J$  (cf. ci-après) ;
5. La pente moyenne du fond est suffisamment faible pour qu'on puisse prendre  $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \alpha$ , où  $\alpha$  est l'angle entre le fond et l'horizontale ;
6. La masse volumique du fluide est constante et le fluide est incompressible.

Précisons l'hypothèse 4 : celle-ci suppose que  $J$  a la même forme qu'en régime permanent et peut être déterminé par une loi de comportement empirique faisant intervenir les variables  $V$  et  $y$ .

Le système de Saint-Venant (2.1) est donc complété par une troisième équation de la forme :

$$(2.2) \quad J(x,t) = f(V(x,t), y(x,t))$$

Les lois habituellement utilisées supposent toutes que  $J$  est proportionnel au carré de la vitesse. On peut trouver dans la littérature diverses expressions déterminées expérimentalement du paramètre  $J$ .

A) La formule la plus utilisée est celle de Chézy :

$$(2.3) \quad J = V^2 / (Ch^2 \cdot Rh)$$

Plusieurs auteurs ont élaboré des méthodes empiriques pour trouver des formules permettant le calcul du paramètre  $Ch$  en fonction de grandeurs mesurables. Parmi celles-ci, citons celles qui sont les plus utilisées :

\*) En introduisant le coefficient de frottement à la paroi  $C_f$  (qui peut être déterminé selon les matériaux qui la composent),  $Ch$  est donné par la formule :

$$Ch^2 = 2g/C_f$$

\*\*) Bazin propose la formule suivante :

$$Ch = 87 / (1 + \gamma / \sqrt{Rh}) \quad (\gamma \text{ dépend de la nature de la paroi et est étalonné pour différents types de conduites})$$

\*\*\*) En assainissement, on utilise en général la formule de Manning-Strickler qui donne l'expression suivante :

$$(2.4) \quad Ch = K \cdot Rh^{1/6}$$

où  $K$  est un coefficient (appelé coefficient de Strickler) qui dépend de la nature des parois. Il varie de 100 (pour des parois lisses) à 25 pour des parois rugueuses.

B) Une autre méthode consiste à écrire :

$$(2.5) \quad J = Q^2 \cdot \phi(y) \quad (J \text{ fonction de } Q^2 \text{ et de } y).$$

Pour un canal de grande largeur, on a pu mesurer que la fonction  $\phi$  peut être considérée comme une fonction hyperbolique du type :

$$\phi(y) = \beta / y^m \quad (\beta \text{ dépend de la nature de la paroi}).$$

Diverses valeurs de  $m$  sont possibles :

$m = 3$  correspond à la formule de Chézy

$m = 10/3$  correspond à la formule de Manning-Strickler

La résolution du système de Saint-Venant implique que la section mouillée  $S$  et le rayon hydraulique  $R_h$  soient des fonctions univoques du tirant d'eau  $y$ . L'hypothèse 3 implique par ailleurs  $Q = V \cdot S$

Enfin, les **conditions aux limites** (2 relations - une à l'amont et l'autre à l'aval - liant  $Q$  et  $y$ ) et les **conditions initiales** (la donnée de  $V(x,0)$  et  $y(x,0)$  pour tout  $x$ ) sont nécessaires pour résoudre le système des équations de Saint-Venant. Les méthodes de résolution des équations de Saint-Venant seront présentées dans le paragraphe 2-2-1.

## 2-1-2 LES MODELES MECANISTES SIMPLIFIES

En raison de la complexité des équations complètes de Saint-Venant, leur résolution n'est possible que depuis l'existence de gros ordinateurs, c'est-à-dire, à peine un quart de siècle.

Néanmoins, des théories telles que celle de l'onde cinématique ont été étudiées dès le milieu du XIX<sup>ème</sup> siècle. KLEITZ (1858), BRETON (1867), GRAEFF (1875), et BOUSSINESQ (1877) sont les pionniers de cette théorie (MILLER, CUNGE 1975). En 1900, SEDDON utilisa l'onde cinématique pour étudier les crues du Mississippi.

Malgré ces premiers travaux, LIDTHILL et WHITHAM dans leur publication de 1955 sont les premiers à poser rigoureusement les fondements mathématiques de la théorie de l'onde cinématique (MILLER, CUNGE 1975).

La théorie de la propagation cinématique des ondes de crue peut être déduite du système de Saint-Venant dont quelques termes des équations ont été éliminés. Nous avons regroupé dans ce paragraphe les modèles mathématiques que l'on peut construire à partir des équations de Saint-Venant pour décrire les phénomènes de crue. La référence aux équations de Saint-Venant pour l'étude des modèles mécanistes simplifiés présente plusieurs avantages :

- donner une base mathématique rigoureuse ;
- définir précisément les hypothèses sous-jacentes à chacune des approximations nécessaires à l'élaboration de ces modèles ;
- définir précisément les conditions aux limites des modèles.

De plus, cette approche permet de bien définir le contenu des équations de Saint-Venant qui tiennent compte à la fois des phénomènes dynamiques et cinématiques dans le calcul des écoulements. En d'autres termes, les équations de Saint-Venant permettent de simuler à la fois les phénomènes inertiels et les phénomènes liés au frottement.

Les ordres de grandeur relatifs des différents termes des équations de Saint-Venant dépendent des caractéristiques géométriques et des conditions aux limites.

L'équation de continuité ne contient que deux termes. En régime non-permanent, aucune des deux dérivées partielles du premier membre ne peut être nulle ou négligeable. Cette équation ne peut être simplifiée.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (équation dynamique) contient cinq termes et peut conduire à un assez grand nombre de simplifications. En effet, il est rare que les cinq termes de cette équation soient tous du même ordre de grandeur.

On peut trouver dans la littérature des données sur les différents ordres de grandeur des termes de l'équation dynamique. CUNGE et MILLER résument les données trouvées chez plusieurs auteurs (CUNGE, MILLER 1975). PRICE indique la valeur des termes mesurés sur des cas typiques de crues de rivières du Royaume Uni (PRICE 1979). Le terme d'inertie (1) dépend essentiellement du temps, donc de la vitesse de montée de la crue. Le terme d'accélération convective (2) dépend plutôt de la géométrie des canalisations. On peut conclure de ces rares études, que pour la plupart des crues de rivière, les termes (1) et (2) d'inertie restent négligeables devant les autres termes de l'équation dynamique. Les termes (4) et (5) de pente et de frottements restent en général, quant à eux, du même ordre de grandeur.

Ceci explique que les équations de Saint-Venant ont essentiellement conduit à 2 catégories de modèles mécanistes simplifiés :

- les modèles à **inertie prépondérante** et frottements négligeables appelés encore modèles dynamiques. Pour la construction de ces modèles, les termes de frottements et de pente du fond (termes (4) et (5) de l'équation dynamique) sont négligés
- les modèles à **frottements prépondérants** où les termes d'inertie (termes (1) et (2) de l'équation dynamique) sont négligés. Ils regroupent :
  - les modèles diffusants (termes d'inertie (1) et (2) négligés)
  - les modèles cinématiques (termes (1), (2) et (3) négligés).

Les modèles dynamiques (c'est-à-dire, les modèles où I et J sont négligés) peuvent s'appliquer pour des écoulements où la pente du fond est nulle ou quasi-nulle (propagation des intumescences sur les canaux).

Lorsque la pente du fond est non nulle (ce qui concerne tous les écoulements gravitaires), il est très rare qu'elle soit longtemps négligeable devant les termes d'inertie. Ceci peut néanmoins être le cas pour une crue causée par la rupture d'un barrage. Pour la simulation de crues naturelles, les termes de pente du fond et de frottement J ne sont jamais négligeables, même s'il peut arriver que les termes d'inertie soient importants. Les modèles dynamiques (il faut entendre par dynamique, les modèles où les termes I et J sont simplifiés) ne font donc pas partie des modèles utilisés pour l'étude des crues de rivières.

L'analyse au paragraphe 2-1-2-3 des critères qui permettent de valider les approximations des équations de Saint-Venant permettra de confirmer l'hypothèse que les modèles dynamiques ne peuvent pas non plus être utilisés pour la simulation des crues dans les réseaux d'assainissement. Nous étudierons donc uniquement les modèles mécanistes simplifiés à frottements prépondérants.

### 2-1-2-1 Modèles de crue diffusante

Les équations de départ du modèle de crue diffusante sont les équations de Saint-Venant où les termes d'inertie  $\partial V/\partial t$  et  $V \cdot \partial V/\partial x$  ont été négligés.

Le système de base du modèle de crue diffusante est donc, lorsqu'il n'y a pas d'apports latéraux :

$$(2.6) \quad \begin{cases} \partial Q/\partial x + \partial S/\partial t = 0 \\ \partial y/\partial x = I - J \end{cases}$$

Ce système est valable sous les mêmes hypothèses que celui de Saint-Venant avec en plus l'hypothèse que les **termes d'inertie sont négligeables** devant les autres termes de l'équation dynamique.

#### Dégradation du système par différentiation

Négliger les termes d'inertie présente un avantage essentiel. En effet, si l'on dérive l'équation de continuité par rapport à  $x$  (à  $t$  constant) et l'équation simplifiée de la quantité de mouvement par rapport à  $t$  (à  $x$  constant), on peut éliminer une des variables (la hauteur ou le débit) pour réduire le système (2.6) à une seule équation. A cause du problème des conditions limites, on élimine en général la variable hauteur du système (2.6) pour ne conserver que les débits. En annexe 1, nous avons présenté le calcul permettant d'obtenir l'équation issue de (2.6) dite équation de l'onde de crue diffusante qui ne fait intervenir que les débits. Elle s'écrit :

$$(2.7) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + C \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = D \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

$C$  est appelé la célérité de l'onde

$D$  est appelé le coefficient de diffusion de l'onde.

L'équation (2.7) est (comme pour la diffusion de la chaleur) une équation de diffusion du débit  $Q$ . Sans hypothèses supplémentaires, le calcul présenté en annexe 1 montre que  $C$  et  $D$  ont pour expression :

$$C = \frac{\left[ \frac{\partial B}{\partial x} - J \cdot \frac{\partial B}{\partial z} \right]}{B^2 \cdot \frac{\partial J}{\partial Q}} - \frac{\frac{\partial J}{\partial z}}{B \cdot \frac{\partial J}{\partial Q}} \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{B \cdot \frac{\partial J}{\partial Q}}$$

$$C = \underbrace{\hspace{10em}}_{Tf} + \underbrace{\hspace{5em}}_{Cs}$$

-  $Tf$  est un terme de forme qui disparaît quand les berges sont verticales et restent parallèles.

-  $Cs$  est connu sous le nom de célérité de Kleitz-Seddon.

On peut donc écrire que :

$$(2.8) \quad C = Cs + \frac{D}{B} \cdot \left[ \frac{\partial B}{\partial x} - J \cdot \frac{\partial B}{\partial z} \right]$$

En utilisant la loi de comportement (2.3) qui donne  $J$  comme fonction parabolique de  $Q$ , c'est à dire :  $J = J(Q^2)$ , (cette hypothèse est faite pour résoudre les équations complètes de Saint-Venant), on peut alors écrire :

$$\frac{\partial J}{\partial Q} = \frac{2J}{Q} \quad \text{ce qui donne :} \quad D = \frac{Q}{2JB}$$

### Modification des conditions limites

Pour résoudre l'équation (2.7) qui est du second ordre, il est nécessaire d'utiliser deux conditions limites, c'est à dire, deux fonctions  $Q(t)$  (par exemple une à l'amont et l'autre à l'aval). Si le système (2.6) est transformé en une équation (2.7bis) ne faisant intervenir que les hauteurs, les conditions limites sont alors deux fonctions  $y(t)$  (à l'amont et à l'aval par exemple).

Dans un cas (équation de la crue diffusante en débit) comme dans l'autre (équation de la crue diffusante en hauteur), on ne peut utiliser les mêmes conditions aux limites que celles nécessaires à la résolution du système complet de Saint-Venant. La résolution de l'équation de la crue diffusante implique un **découplage** entre la hauteur et le débit. Contrairement au système de Saint-Venant, il sera impossible d'utiliser une condition limite en débit à l'amont et une condition limite en hauteur à l'aval. Les conditions limites nécessaires à la résolution du système complet de Saint-Venant doivent être modifiées pour pouvoir être utilisées pour résoudre l'équation de la crue diffusante.

### Hypothèses supplémentaires pour simplifier les expressions de C et D

Bien que la hauteur n'intervienne pas apparemment, dans l'équation (2.7), les coefficients  $C$  et  $D$  sont tous deux, des fonctions de la profondeur. Ainsi, la solution de (2.7) ne sera pas complète si  $y(x,t)$  n'est pas calculée. Or, ce calcul oblige à introduire une nouvelle hypothèse, c'est-à-dire, une loi univoque hauteur-débit telle que, par exemple, la loi de Manning-Strickler. En considérant donc que  $Q$  et  $z$  sont liés par une relation univoque, comme en régime permanent, on peut écrire :

$$\frac{\frac{\partial J}{\partial z}}{\frac{\partial J}{\partial Q}} = - \frac{dQ}{dz} \quad \text{d'où} \quad (2.9) \quad C_s = \frac{1}{B} \cdot \frac{dQ}{dz} = \frac{dQ}{dS}$$

et, puisque  $Q = Q(z)$  signifie aussi  $I = J$  :

$$(2.10) \quad D = \frac{Q}{2IB}$$

### Conditions particulières de l'hydraulique fluviale

Reprenons la loi de comportement (équation (2.5)) :  $J = Q^2 \cdot \phi(y)$  présentée au paragraphe 2-1-1. On peut exprimer  $C$  et  $D$  en fonction de  $\phi$ . En différentiant (2.5), on obtient en effet :

$$2 \cdot Q \cdot \phi(y) \cdot dQ + Q^2 \cdot \frac{d\phi}{dy} \cdot dy = 0 \quad \text{soit :}$$

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{dQ}{dy} = - \frac{Q}{2\phi} \cdot \frac{d\phi}{dy}$$

Pour des biefs de **grande largeur** où l'on peut écrire :

$$\phi(y) = \frac{\beta}{y^m} \quad ; \quad \text{alors} \quad \frac{d\phi}{dy} = -\frac{m}{y} \cdot \phi(y) \quad \text{d'où} :$$

$$C_s = \frac{mQ}{2By}$$

En particulier, lorsqu'on peut considérer que  $By = S$ , ce qui est le cas par exemple quand le canal est **rectangulaire**, on peut écrire :

$$T_f = 0 \quad \text{et} \quad C = C_s = \frac{mV}{2}$$

Ainsi, avec ces hypothèses (grande largeur, berges verticales), on obtient :

$$C = \frac{3}{2} \cdot V \quad \text{si on utilise la formule de Chezy}$$

$$C = \frac{5}{3} \cdot V \quad \text{si on utilise la formule de Manning-Strickler.}$$

Nous verrons au chapitre 2-3 qu'en assainissement, cette approximation de  $dQ/dS$  par  $mQ/2By$  n'est pas rigoureusement exacte car les conduites ne sont pas de grande largeur. De plus, lorsque les conduites ne sont pas rectangulaires, le terme de forme  $T_f$  n'est pas nul.

Nous étudierons dans le chapitre 2-3, les différences entre les possibilités de calcul de la célérité  $C$  pour les géométries que l'on rencontre classiquement en assainissement.

Les calculs des coefficients  $C$  et  $D$  de l'équation de la crue diffusante pourront donc s'effectuer avec les relations (2.8), (2.9) et (2.10).

Dans l'équation (2.7) de la crue diffusante, les paramètres  $C$  et  $D$  sont fonction du débit  $Q$  et du tirant d'eau  $y$  comme l'indiquent les relations (2.8), (2.9) et (2.10). L'équation est donc en théorie non-linéaire mais peut être linéarisée pour simplifier son intégration.

L'intérêt de choisir les paramètres  $C$  et  $D$  *constants* provient du fait que dans ce cas, l'équation de la crue diffusante admet des solutions analytiques. C'est ce que découvrit HAYAMI en 1951, ce qui permit de simuler certaines crues de rivières sans moyen informatique puissant (HAYAMI 1951).

Lorsque les paramètres  $C$  et  $D$  sont choisis *variables*, il faut résoudre l'équation de la crue diffusante numériquement. On détermine à chaque pas de temps et sur chaque pas d'espace, les valeurs que prennent les coefficients  $C$  et  $D$ .

On peut noter  $C_m$  et  $D_m$ , les paramètres  $C$  et  $D$  lorsqu'il est utile de différencier  $C$  ou  $D$  "instantané" de  $C$  ou  $D$  "moyen". Nous présenterons dans le chapitre 2-3, les méthodes de calcul des paramètres  $C$ ,  $D$ ,  $C_m$  et  $D_m$ .

2-1-2-2 Modèles d'onde cinématique

Le système de départ des modèles cinématiques est, lorsqu'il n'y a pas d'apports latéraux :

$$(2.11) \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ I = J \end{array} \right.$$

L'équation de continuité est prise sous sa forme générale. En revanche, on fait l'hypothèse que les **termes d'inertie** (1) et (2) et de **pression** (3) de l'équation dynamique du système de Saint-Venant sont **négligeables** vis-à-vis des forces de gravité et de frottement.

Il ne reste en fait plus de termes dynamiques. On néglige les forces qui ont causé le mouvement, d'où le nom "modèle cinématique". Le mouvement de l'onde est entièrement décrit par l'équation de continuité puisque l'équation dynamique se réduit à  $I = J$  comme en régime permanent (HUG 1975).

L'équation dynamique complète peut s'écrire lorsqu'on utilise une relation empirique donnant  $J$  en fonction de  $Q$  (type Manning-Strickler) et lorsqu'il n'y a pas de débits latéraux (WEINMAN, LAURENSEN 1979) :

$$Q = Q_n(y) \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{I} \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{I_g} \left[ v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t} \right]} \quad (2.12)$$

onde cinématique ┌  
 crue diffusante └  
 équation dynamique complète └

$Q_n$  est le débit du régime permanent uniforme coïncidant à l'instant  $t$  au débit  $Q$  du régime transitoire.  $Q$  dépend de  $t$  puisque  $Q_n$  est fonction de la hauteur d'eau ( $y$ ) qui dépend de  $t$  en régime transitoire. Prendre  $I = J$  est donc équivalent à considérer que le débit est fonction de la hauteur d'eau de manière univoque, comme en régime permanent :  $Q = Q(y) = Q_n(y)$ .

La relation hauteur-débit,  $Q(y)$  (relation empirique de fermeture du modèle) est choisie de la même manière qu'en régime permanent à l'aide d'une des formules ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} Q = Ch.S.\sqrt{Rh.I} & \text{formule de Chézy} \\ Q = K.S.\sqrt{I.Rh}^{2/3} & \text{formule de Manning Strickler.} \\ \left. \begin{array}{l} Q = a.y^b \\ Q = f(y) \end{array} \right\} & \text{autres formules empiriques} \end{array}$$

$I = J$  qui permet d'écrire  $Q = Q(y)$  (relation biunivoque) donne donc aussi  $Q = Q(S)$  ou encore  $S = S(Q)$ . Ainsi :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dS}{dQ} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} \quad \text{En utilisant la célérité : } C_s = \frac{dQ}{dS}$$

$C_s$  : célérité de Kleitz-Seddon défini précédemment

On obtient du système (2.11), une équation dite équation de propagation de l'onde cinématique :

$$(2.13) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + C_s \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad I = J$$

$C_s$  est la célérité de l'onde cinématique. Lorsque le terme  $T_f$  de la célérité de l'onde de crue diffusante est nul ou négligé (on verra dans le chapitre 2-3 qu'on le néglige toujours), la célérité de l'équation de l'onde cinématique est égale à celle de l'équation de la crue diffusante.

En d'autres termes, ceci signifie que l'équation de l'onde cinématique est une équation de crue diffusante où le terme de diffusion  $D \cdot \partial^2 Q / \partial x^2$  (terme du second ordre) a été négligé.

### Perte partielle des conditions limites

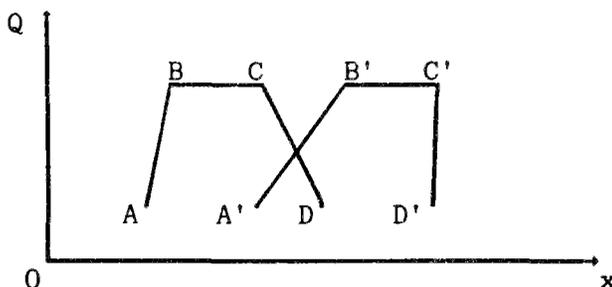
L'équation de l'onde cinématique est du premier ordre et ne nécessite qu'une seule condition limite pour être résolue. On perd donc une partie des conditions limites des équations de Saint-Venant puisque les hauteurs sont éliminées de l'équation.

De même que pour l'équation de la crue diffusante, la célérité  $C$  de l'équation de l'onde cinématique dépend du débit  $Q$  (et de la hauteur d'eau  $y$ ).

Lorsque la célérité  $C$  est choisie constante, l'intégration de l'équation de l'onde cinématique peut se réduire à un modèle de translation simple.

Lorsque la célérité  $C$  est choisie variable, on intègre numériquement l'équation (2.13). Les hydrogrammes changent de forme au cours de la propagation, puisque les débits d'un même hydrogramme sont propagés à des célérités différentes, mais il n'y a en principe aucune atténuation. Nous verrons au chapitre 2-2 que la résolution numérique de l'équation (2.13) peut introduire une diffusion numérique qui génère alors une atténuation des débits.

La figure 2.1 illustre la déformation d'un hydrogramme causée par le choix d'une célérité variable.



*Figure 2.1*

AD : tranche d'eau propagée en A'D' avec une célérité  $C_1$   
 BC : tranche d'eau propagée en B'C' avec une célérité  $C_2 > C_1$

### 2-1-3 JUSTIFICATION DES SIMPLIFICATIONS DES EQUATIONS DE SAINT-VENANT

Plusieurs auteurs ont cherché à déterminer des critères faisant intervenir des caractéristiques géométriques et hydrauliques permettant de définir des **plages de validité** des modèles simplifiés.

Le but est de pouvoir **prévoir** si certains termes des équations de Saint-Venant seront négligeables. On souhaite établir des critères de validité des modèles simplifiés du type : telles caractéristiques géométriques et telles conditions limites nécessitent tel type de modèle.

Lorsque certains termes de l'équation dynamique de Saint-Venant sont négligeables, il est légitime (et même recommandé) de les négliger. Néanmoins, il est souvent délicat de connaître les ordres de grandeur des termes de l'équation dynamique. Ce n'est souvent qu'en résolvant les équations complètes qu'on peut effectivement calculer chacun des termes de l'équation dynamique et en déduire ainsi le caractère négligeable de certains d'entre eux.

Pour trouver d'autres types de **critères** que ceux issus de l'étude directe des ordres de grandeur des termes de l'équation dynamique, on peut utiliser la notion d'onde. Le système de Saint-Venant mis sous forme caractéristique fait en effet apparaître des ondes appelées **ondes dynamiques** (que l'on verra au chapitre suivant). L'équation de l'onde cinématique présentée au paragraphe précédent faisait apparaître la notion de célérité de propagation d'hydrogramme. Cette célérité traduit la propagation d'une onde appelée **onde cinématique**.

Dans ce paragraphe, nous examinerons les paramètres qui jouent un rôle important dans la validité des simplifications des équations de Saint-Venant à travers l'étude directe des ordres de grandeur des termes des équations, des conditions limites et de la prédominance des différents types d'onde. On verra qu'il est difficile de définir précisément des limites de validité de telle ou telle simplification. En revanche, on pourra "mettre le doigt" sur les paramètres importants qui servent à juger du bien fondé des simplifications du système de Saint-Venant.

2-1-3-1 Méthodes basées sur l'étude directe des ordres de grandeur des termes des équations

A) Etude de l'équation dynamique

Pour un hydrogramme de crue donné, sur un bief dont on fait uniquement varier la pente, PONCE a constaté que les **termes d'inertie** ainsi que les termes de pression restaient du même ordre de grandeur quelle que soit la pente (PONCE 1978). On conçoit donc que plus la pente diminue (la pente est directement un terme de l'équation dynamique), plus la différence d'ordre de grandeur entre le terme de gravité ( $gI$ ) et les termes d'inertie et de pression est petite.

WEINMANN et LAURENSEN ont mesuré sur des biefs différents d'une même rivière que les termes d'inertie de l'équation de Saint-Venant étaient de l'ordre  $10^{-5}m/s^2$  et le terme de pression de l'ordre de  $10^{-4}m/s^2$ .

Avec ces ordres de grandeur :

- pour une pente de  $I = 1\%$ , le rapport des termes d'inertie sur le produit  $gI$  est de l'ordre de 0.001 et le rapport du terme de pression sur  $gI$  est de l'ordre de 0.01

- pour une pente de  $I = 1\%$ , le rapport des termes d'inertie sur le produit  $gI$  est de l'ordre de 0.1 et le rapport du terme de pression sur  $gI$  est de l'ordre de grandeur de 1, c'est à dire plus du tout négligeable devant le terme de pente  $gI$  (WEINMANN, LAURENSEN 1979).

Conclusions :

Des études sur les ordres de grandeur des termes de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement, on peut essentiellement conclure que plus  $I$  est faible, moins les termes d'inertie sont négligeables.

B) Etude de l'équation de la crue diffusante

Lorsque les termes d'inertie de l'équation dynamique de Saint-Venant sont négligeables, on peut comparer les domaines de validité des modèles de **crue diffusante** et des modèles **d'onde cinématique**, ce qui revient à évaluer l'importance du terme de pression  $\partial y/\partial x$  négligé dans les modèles cinématiques.

Nous avons vu que les modèles d'onde cinématique et de crue diffusante sont équivalents lorsque le terme de diffusion :

$$D \cdot \partial^2 Q / \partial x^2 \ll C \cdot \partial Q / \partial x$$

On a vu au paragraphe 2-1-2-1 que le coefficient de diffusion  $D$  avait pour expression (2.10) :

$$D = \frac{Q}{2JB} \approx \frac{Q}{2IB} \quad \text{si on fait l'hypothèse que } I = J$$

$D$  est donc inversement proportionnel à la pente des frottements  $J$  et à la pente du fond  $I$ . Ainsi, pour  $I$  grand (correspondant à une pente "forte"),  $D$  est petit par rapport à  $C$  ce qui entraîne en général l'inégalité :

$$D \cdot \partial^2 Q / \partial x^2 \ll C \cdot \partial Q / \partial x$$

### Conclusions :

De cette analyse, on en déduit que plus la pente est faible, moins le terme de pression  $\partial y/\partial x$  est négligeable. En effet, lorsque la pente du fond devient "faible", C diminue et D augmente. Négliger le terme de diffusion D n'est alors plus possible.

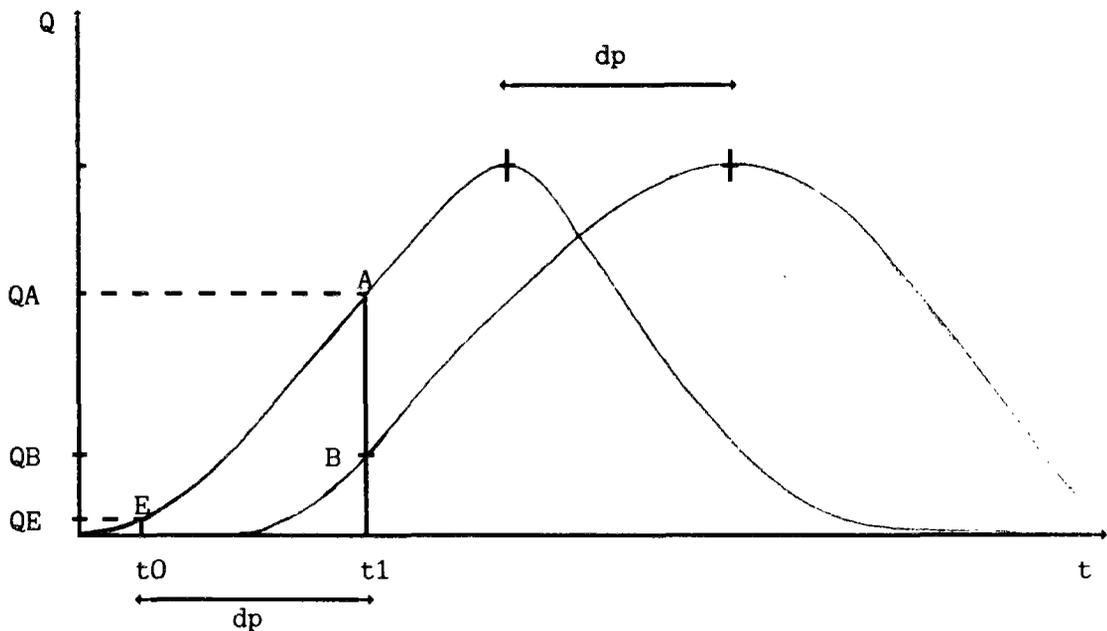
On verra dans la partie 3 que le terme de diffusion crée un amortissement des hydrogrammes. Lorsqu'on constate que l'atténuation des hydrogrammes est importante (ce qui est le cas lorsque justement la pente est faible), cela signifie que les modèles cinématiques qui n'introduisent pas de diffusion ne sont plus applicables.

### C) Vérification a posteriori des ordres de grandeur

Pour les modèles de type cinématique, un critère (a posteriori) consiste à évaluer approximativement, à partir des résultats du modèle cinématique, les ordres de grandeur des différents termes des équations de Saint-Venant. Si les termes d'inertie et le terme de pression peuvent être négligés, on pourra alors valider les résultats obtenus. (MILLER, CUNGE 1975), (CUNGE, CAYLA 1980).

On ne peut pas évaluer exactement ces termes de l'équation dynamique de Saint-Venant car on les néglige dans le calcul, mais les ordres de grandeur basés sur les conditions du régime uniforme sont estimés suffisants.

Concrètement, la méthode consiste à évaluer les termes d'inertie et de pression à partir des **hydrogrammes amont** et **aval** d'un bief de calcul. Soit un hydrogramme donné en amont d'un bief régulier de canalisation de pente I, de longueur L et de rugosité K (un bief régulier a une pente, une section et une rugosité constantes) :



*Figure 2.2a*

Soit  $dp$  (cf. figure 2.2a), la durée de propagation de la pointe de débit de l'hydrogramme amont. A partir de l'origine E de l'hydrogramme amont, on construit les points A et B comme indiqué sur la figure 2.2a. De QA et QB, on déduit, à partir des équations du régime uniforme, les vitesses et hauteurs d'eau correspondantes :  $V_A$ ,  $y_A$ ,  $V_B$ , et  $y_B$ . On peut alors évaluer les termes de l'équation dynamique de la manière suivante :

$$\frac{\partial y}{\partial x} \approx \frac{y_B - y_A}{L}$$

Si ce terme est du même ordre de grandeur que I, le modèle cinématique (où le terme de pression est négligé) ne donne pas de bons résultats.

On évalue de même les termes :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{V^2}{2g} \approx \frac{1}{2g} \cdot \frac{V_A^2 - V_B^2}{L}$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{1}{g} \cdot \frac{V_A - V_B}{t_1 - t_0}$$

Les résultats du modèle peuvent être considérés comme satisfaisants si la condition suivante est vérifiée :

$$\left| \frac{y_B - y_A}{L} + \frac{V_B^2 - V_A^2}{2gL} + \frac{1}{g} \frac{V_A - V_B}{t_1 - t_0} \right| \ll I$$

Conclusions :

Ce dernier critère est d'usage assez limité. En effet, il ne s'applique qu'aux modèles cinématiques non-diffusants (on utilisera plus loin la terminologie - cinématique diffusant - pour définir les modèles cinématiques dont on "pilote" la diffusion numérique). Or, on constatera dans les chapitres suivants que le choix entre un modèle cinématique et un modèle diffusant ne pose pas réellement de problèmes.

Si on applique ce critère avec un modèle de crue diffusante, il est admissible que le terme  $\partial y / \partial x$  soit du même ordre de grandeur que la pente I puisqu'il n'est pas négligé.

L'utilisation du critère C avec un modèle de crue diffusante conduit donc à n'examiner que les ordres de grandeur des termes d'inertie. Or, ces termes sont calculés (comme indiqué ci-avant) avec l'approximation d'une loi hauteur-débit univoque. Lorsque les termes d'inertie ne sont pas négligeables, on verra dans la partie 3 que l'on est justement loin de pouvoir utiliser une loi hauteur-débit univoque. De plus, avec ce critère, on ne peut pas mesurer les effets inertiels causés par une influence aval puisque la condition aval est négligée dans le modèle qu'on utilise pour propager les hydrogrammes. Ce critère nous semble donc d'un intérêt très limité pour évaluer en connaissance de cause, l'erreur commise par le modèle simplifié utilisé.

### 2-1-3-2 Méthodes basées sur l'étude des conditions limites

On a vu qu'outre la simplification des termes d'inertie, l'utilisation d'un modèle simplifié de type crue diffusante ou onde cinématique entraînait une perte des **conditions limites** nécessaires à la résolution du système de Saint-Venant.

Contrairement aux équations de Saint-Venant où les variables sont la hauteur  $y$  et le débit  $Q$ , les modèles simplifiés n'utilisent que la variable  $Q$  négligeant ainsi la condition **limite aval** de l'écoulement (condition sur les hauteurs) nécessaire à la résolution du système complet de Saint-Venant.

Lorsqu'une condition limite aval en hauteur est importante, outre le fait que les termes d'inertie peuvent ne plus être négligeables, une relation de type Manning-Strickler qui donne le débit  $Q$  comme fonction univoque du tirant d'eau  $y$  est fautive. C'est cependant la seule relation permettant de déduire les hauteurs de l'écoulement après le calcul de la propagation des débits. L'impossibilité d'utiliser la condition limite aval peut être une limite à l'utilisation de modèles simplifiés. On verra de plus qu'une hauteur aval forte engendre des phénomènes inertiels et augmente l'ordre de grandeur des termes d'inertie.

### 2-1-3-3 Méthodes basées sur l'étude des ondes

Nous avons introduit précédemment les notions d'onde cinématique et d'onde dynamique. Ces ondes peuvent être définies mathématiquement par leur célérité. On peut aussi leur donner un sens physique.

#### Les ondes dynamiques :

Elles se propagent même lorsqu'il n'y a pas d'écoulement, comme la houle ou les ondes produites lorsqu'on jette un caillou dans un lac. Elles peuvent se propager à contre courant comme l'onde dynamique qui remonte le courant dans le cas d'écoulements fluviaux (voir l'explication plus loin). On peut retenir pour caractériser ces ondes qu'elles peuvent se propager **sans** créer nécessairement un **déplacement** effectif de matière dans le sens de leur propagation. Les vagues se propagent horizontalement à la surface de la mer alors que, lorsque la profondeur est suffisante, les déplacements effectifs d'eau ne sont que locaux et essentiellement verticaux. L'onde dynamique retour se propage dans le sens opposé au déplacement principal de matière qui a lieu dans le sens de l'écoulement...

#### Les ondes cinématiques :

Contrairement aux ondes dynamiques, les ondes cinématiques correspondent uniquement à un **déplacement de matière**. Les ondes cinématiques se propagent avec une célérité qui est du même ordre de grandeur que la vitesse de l'écoulement. Lorsqu'il n'y a pas d'écoulement, il n'y a pas non plus d'ondes cinématiques.

Les ondes dynamiques sont générées par les termes d'inertie de l'équation dynamique de Saint-Venant. Lorsqu'elles s'atténuent ou lorsque les ondes cinématiques prédominent devant les ondes dynamiques, on peut conclure que les termes d'inertie sont négligeables dans les équations de Saint-Venant.

Les **ondes dynamiques** peuvent se propager vers l'amont ou vers l'aval. Elles sont a priori toujours présentes dans les ondes de crue naturelle. Pour les écoulements fluviaux (i.e  $F \leq 1$ ), la partie principale de l'onde de crue se propage beaucoup plus lentement que les petites perturbations qui sont plutôt des ondes dynamiques.

Pour la plupart des écoulements fluviaux, toute perturbation génère des ondes dynamiques qui se propagent vers l'amont et vers l'aval à des célérités supérieures à la célérité de propagation de la crue qui reste du même ordre de grandeur que la vitesse de l'écoulement. A une grande distance à l'aval, les perturbations de type "dynamique" se sont atténuées et le volume principal de la crue qui se déplace à une célérité voisine de la vitesse de l'écoulement est porté par une onde cinématique qui a (comme on le verra) une célérité beaucoup plus faible (MILLER, CUNGE 1975).

#### A) Comparaison des célérités

Une méthode simple permettant de déterminer la prédominance des types d'ondes consiste à comparer leur célérité. Lorsque la célérité des ondes dynamiques est égale à la célérité des ondes cinématiques, les phénomènes "dynamiques" et les phénomènes "cinématiques" sont d'importance comparable (MILLER, CUNGE 1975).

$$\begin{aligned} (dx/dt)_{\text{dynamique}} &= V + \sqrt{gy} && : \text{onde dynamique descendante} \\ (dx/dt)_{\text{cinématique}} &\approx AV && : A \text{ selon la formule utilisée pour} \\ &&& \text{calculer } Q. \end{aligned}$$

Pour un canal de grande largeur et rectangulaire, on a vu que :

$$A = 3/2 \quad \text{si } Q \text{ est calculé par la formule de Chézy}$$

$$A = 5/3 \quad \text{si } Q \text{ est calculé par la formule de Manning-Strickler}$$

Pour un canal quelconque, A est en général compris entre 4/3 et 5/3.

Si on égale les deux célérités :  $(dx/dt)_{\text{dyn.}} = (dx/dt)_{\text{cin.}}$ , on obtient la relation :

$$F + 1 = AF$$

$$\text{soit : } F = \frac{1}{A - 1}$$

où F est le nombre adimensionnel de Froude dont l'expression est :

$$F = \frac{V}{\sqrt{gy}}$$

Finalement, pour un canal rectangulaire de grande largeur, les célérités sont égales lorsque :

$$F = 2 \quad (\text{si on utilise la formule de Chézy})$$

$$F = 3/2 \quad (\text{si on utilise la formule de Manning-Strickler}).$$

Les phénomènes d'instabilité tels que des vagues déferlantes apparaissent pour des nombres de Froude de l'ordre de grandeur de 2 (MILLER, CUNGE 1975).

Lorsque le nombre de Froude est inférieur à 2, les ondes dynamiques ont une célérité beaucoup plus grande que les ondes cinématiques. On suppose donc qu'elles ne jouent pas un rôle important dans le transfert de volume lié à la propagation de la crue.

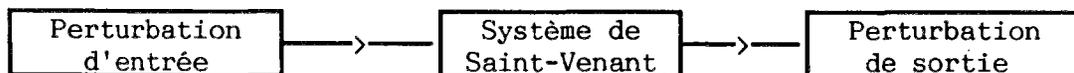
### Conclusions :

Ce critère signifie que pour des écoulements fortement torrentiels où  $F$  est plus grand que 2, les modèles cinématiques ne sont pas valables. On risque en effet d'être en présence de phénomènes de "vagues déferlantes" sur la surface libre. Notons que  $F > 2$  correspond à des fortes pentes  $I$  telles que le rapport  $I/I_c > 4$ . ( $I_c$  étant la pente critique). Ainsi, contrairement aux autres critères (qui indiquaient que plus la pente est forte, plus les termes d'inertie sont négligeables), ce critère indique que lorsque la pente devient très grande (dépasse  $4.I_c$ ), les ondes dynamiques (portées par les termes d'inertie) sont du même ordre de grandeur que les ondes cinématiques. On verra dans le critère suivant, en étudiant l'amortissement des ondes, que pour des pentes fortes avec des écoulements à nombre de Froude supérieur à 2, les ondes dynamiques ne s'amortissent pas.

Pour pouvoir effectivement conclure sur la prédominance des types d'ondes, il est nécessaire d'étudier non seulement les ordres de grandeur des ondes mais aussi leur amortissement. C'est ce que nous proposons dans le critère suivant.

### B) Comparaison des célérités et des amortissements

On examine la réponse des équations de Saint-Venant à des petites perturbations par rapport à un état initial de référence (écoulement permanent dans un canal). Le système de Saint-Venant se comporte dans ce cas comme une fonction de transfert du signal d'entrée (HUG 1975), (BOCQUILLON 1978).



Sur les équations de Saint-Venant linéarisées à partir d'un régime de départ uniforme ( $V_0$  et  $y_0$ ), on cherche les modes de propagation et d'amortissement de perturbations de la forme  $y = y_0 + y^*$  et  $V = V_0 + V^*$  avec  $y^* = A1.exp[i(k'.x - C'.t)]$  et  $V^* = A2.exp[i(k'.x - C'.t)]$  ( $i$  est le nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ ).

Posons  $C_c = C'/k'$  :

La partie réelle de  $C_c$  est la célérité de propagation de la perturbation; la partie imaginaire de  $C_c$  définit l'amortissement (HUG 1975).

La substitution de  $y$  et  $V$  dans le système linéarisé de Saint-Venant permet de trouver l'expression que doit vérifier  $C_c$ .

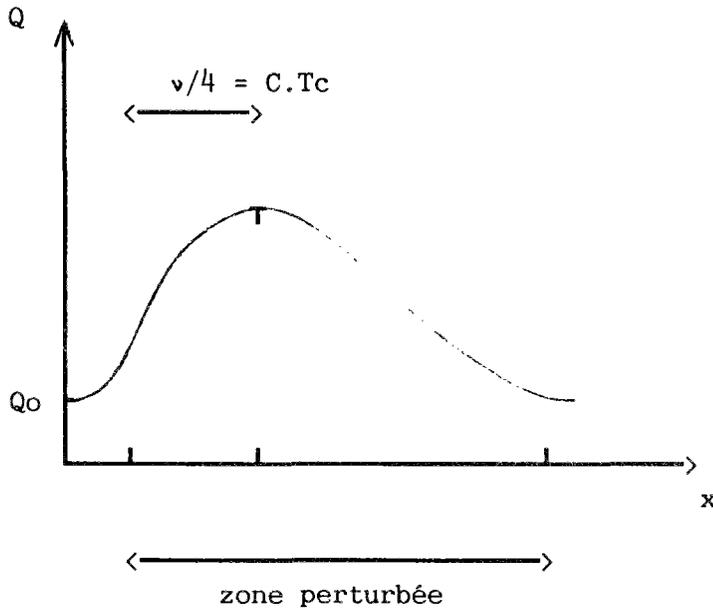
Introduisons les nombres adimensionnels suivants :

$$Fo^2 = \frac{V_0^2}{g \cdot y_0} \quad : \quad \text{nombre de Froude du régime de départ}$$

$$No = \frac{g \cdot I}{k' \cdot V_0^2}$$

No est un nombre adimensionnel caractérisant l'impact de la fréquence fondamentale de la perturbation sur le régime de départ.

On peut en effet donner une signification physique au paramètre  $k'$  intervenant dans No. Si on pose  $k' = 2\pi/\nu$ ,  $\nu$  définit la longueur caractéristique de la perturbation. Avec une célérité de propagation C, on peut relier la variabilité de la perturbation (des hydrogrammes) à la longueur d'onde de la perturbation. On peut considérer, par exemple, que la partie montante de l'hydrogramme représente le quart d'une perturbation sinusoïdale, comme le montre la figure 2.2b ci-dessous. Ainsi, on peut écrire  $\nu \approx 4.C.Tc$ .



*Figure 2.2b*

En utilisant la relation de Chézy (2.3), on peut écrire :

$$No = \frac{g.I}{k'.Vo^2} = \frac{g.Vo^2}{k'.Vo^2.Ch^2.yo} = \frac{g}{Ch^2.k'.yo} = \left[ \frac{g}{2\pi.Ch^2} \right] \cdot \frac{\nu}{yo}$$

No = (constante).( $\nu/yo$ ) est donc d'autant plus petit que la longueur d'onde de la perturbation est courte, c'est à dire que la crue est brutale.

#### Critères de prédominance des types d'ondes

L'expression complexe de la célérité Cc se simplifie selon les ordres de grandeur des nombres Fo et No (HUG 1975).

1<sup>ier</sup> cas :  $Fo^2.No^2 \ll 1$  et  $No^2.Fo^4 \ll 1$

Alors :  $Cc = Vo \pm \sqrt{g.yo} - i.No. \left[ -1 \pm \frac{Fo}{2} \right]$

On reconnaît (voir le paragraphe suivant 2-2-2-1) la célérité des ondes dynamiques qui peuvent se propager vers l'amont ( $V_0 - (g.y_0)^{1/2}$ ) et vers l'aval ( $V_0 + (g.y_0)^{1/2}$ ).

Si on s'intéresse aux ondes qui descendent le courant, c'est à dire, aux ondes telles que la partie réelle de  $C_c$  soit positive, alors, l'expression précédente de  $C_c$  est avec un +, ce qui donne :

$$C_c = V_0 + \sqrt{g.y_0} - i.No. \left[ 1 - \frac{Fo}{2} \right]$$

L'atténuation (la partie imaginaire de  $C_c$ ) est d'autant plus faible que  $No$  est petit sauf si le nombre de Froude  $Fo$  est supérieur à 2. Dans ce cas, l'atténuation devient positive et les ondes s'amplifient. On confirme (comme annoncé) le critère précédent. Pour des pentes fortes où le nombre de Froude est supérieur à 2, les ondes dynamiques s'amplifient d'autant plus que  $No$  est grand. Puisqu'on est cependant dans le cas où  $No^2.Fo^2 \ll 1$ ,  $No$  est nécessairement petit donc la partie imaginaire de  $C_c$  est petite. Il est sans doute plus adapté de parler de "non-atténuation" que d'amplification des ondes.

2ème cas :  $Fo^2.No^2 \gg 1$

On trouve alors pour l'expression de  $C_c$  :

$$C_c = V_0 \pm \frac{V_0}{2} - i.No \pm \left[ i.No - \frac{i}{2.No.Fo^4} \right]$$

ce qui donne les deux célérités :

$$C_{c1} = \frac{3}{2}.V_0 - \frac{i}{2.No.Fo^4}$$

$$C_{c2} = \frac{1}{2}.V_0 - 2.i.No + \frac{i}{2.No.Fo^4}$$

$C_{c1}$  s'amortit peu si  $No.Fo^4$  est grand ; c'est la célérité des ondes cinématiques identifiées aux paragraphes précédents.

$C_{c2}$  s'amortit très vite si  $No$  est grand, ce qui est le cas puisqu'on a supposé  $Fo^2.No^2 \gg 1$ .

**Conclusions :**

Examinons ce que donnent les critères sur les nombres  $Fo$  et  $No$  mis en lumière ci-dessus.

Calculons les produits  $No^2.Fo^2$  et  $No^2.Fo^4$ . On a :

$$No^2.Fo^2 = \frac{g.I^2}{k'^2.V_0^2.y_0} = \frac{I^2}{k'^2.y_0^2.Fo^2} = \frac{I^2.v^2}{4\pi^2.y_0^2.Fo^2}$$

$$No^2.Fo^4 = \frac{I^2.v^2}{4\pi^2.y_0^2}$$

Les valeurs des produits  $No^2.Fo^2$  et  $No^2.Fo^4$  dépendent donc des valeurs de  $Fo$ ,  $y_0$ ,  $I$  et  $v$ . Nous les avons calculées pour quelques cas types de

conditions rencontrées en assainissement. Les valeurs correspondantes sont présentées dans les tableaux 2.0a et 2.0b ci-après.

La principale difficulté en assainissement est de déterminer les valeurs  $y_0$  et  $V_0$  du régime de départ, car cette notion n'a pas nécessairement de sens.

Nous verrons dans la partie 3 que le nombre de Froude  $Fo$  est quasiment constant quelle que soit la hauteur et qu'il dépend essentiellement de la pente, et de la rugosité. On peut dire que le nombre de Froude caractérise hydrauliquement un tronçon quelles que soit la hauteur  $y_0$  du régime permanent de l'écoulement dans ce tronçon.

En revanche, le nombre  $No$  dépend du régime de départ ce qui contraint à choisir "arbitrairement un  $y_0$  ou  $V_0$ .

On a supposé que le régime de départ (servant à déterminer  $y_0$  nécessaire au calcul de  $No.Fo$ ) pouvait être approximativement considéré comme le régime à mi-remplissage du collecteur. C'est pourquoi, dans les tableaux 2.0a et 2.0b,  $y_0$  est choisi égal à 1 mètre.

Sur la ligne où sont indiquées les valeurs de  $No^2.Fo^2$  :

- les cases en gris correspondent aux cas où les ondes dynamiques s'amortissent et où les ondes cinématiques prédominent ;
- les valeurs en caractère gras correspondent aux cas où ce sont les ondes dynamiques qui prédominent ;
- les autres valeurs correspondent aux cas intermédiaires où aucun des deux types d'ondes n'est franchement prédominant.

Pour le tableau 2.0a :

- le coefficient de Strickler  $K = 50$
- la hauteur du régime de départ est choisie à  $y_0 = 1$  mètre
- le nombre de Froude et la célérité sont calculés à partir des simulations présentées dans la partie 3

Pente I	5.10 <sup>-3</sup>			5.10 <sup>-4</sup>			10 <sup>-4</sup>		
Fo	0.7			0.2			0.08		
C (m/s)	2.0			1.0			0.7		
Tc (mn)	5	30	60	5	30	60	5	30	60
v (km)	2,4	14	29	1,2	7	15	0.8	5	10
No <sup>2</sup> Fo <sup>2</sup>	7	250	1000	0.23	8	33	0.03	1	4
No <sup>2</sup> Fo <sup>4</sup>	4	133	530	0.04	1.33	5.3	10 <sup>-4</sup>	0.01	0.03

Tableau 2.0a

Il y a peu de cas où le produit  $No^2.Fo^2$  est franchement supérieur à 1 ou franchement inférieur à 1. Dans la plupart des cas, on est dans une situation intermédiaire. Néanmoins, si on avait choisi  $y_0 = 10\text{cm}$  au lieu de choisir  $y_0 = 1\text{m}$ , les valeurs du produit  $No^2.Fo^2$  seraient 100 fois plus grandes ce qui ferait basculer la plupart des valeurs dans les cas où les ondes cinématiques prédominent. On constate ici, les limites de l'analyse de la prédominance des types d'ondes à partir de l'étude du comportement des perturbations sur un régime de départ établi, puisque selon le choix d'un  $y_0$  qui reste arbitraire, on se trouve dans un cas ou dans l'autre.

En assainissement, la valeur faible de  $y_0$  (comparée aux  $y_0$  des rivières) est compensée par la longueur d'onde souvent très faible de la crue (comparée aux crues des rivières). Le rapport  $v/y_0$  sera donc souvent plus faible que pour les crues de rivière. Ceci signifie que les conditions de l'assainissement sont a priori moins favorables à l'utilisation de modèles cinématiques que les conditions de l'hydraulique fluviale.

La seule différence entre le tableau 2.0a et 2.0b est le coefficient de Strickler qui est pour le tableau 2.0b de  $K = 80$ .

Pour le tableau 2.0b, on a donc :

- $K = 80$
- la hauteur du régime de départ est choisie à  $y_0 = 1$  mètre
- le nombre de Froude et la célérité sont calculés à partir des simulations présentées dans la partie 3

Pente I	$5.10^{-3}$			$5.10^{-4}$			$10^{-4}$		
Fo	1.0			0.38			0.15		
C (m/s)	3.2			1.6			1.12		
Tc (mn)	5	30	60	5	30	60	5	30	60
v (km)	4	23	46	2	12	23	1.3	8	16
$No^2Fo^2$	10	338	1360	0.16	6	23	0.02	0.7	2.6
$No^2Fo^4$	10	338	1360	0.09	3.4	13.6	$4.10^{-4}$	0.02	0.07

Tableau 2.0b

On constate que la diminution du frottement (i.e l'augmentation du coefficient de Strickler) est plutôt favorable à la prédominance des ondes dynamiques dans la propagation des perturbations. Néanmoins, les différences entre les tableaux 2.0a et 2.0b ne sont pas très importantes.

C'est apparemment la pente et la longueur d'onde de la perturbation qui sont les paramètres les plus importants pour juger de la prédominance des types d'ondes.

C) Un critère **expérimental** utilisant le "nombre cinématique" fut développé par WOOLHISER et LIGGETT (MILLER, CUNGE 1975). Ce nombre adimensionnel, proche du nombre  $No$  défini précédemment a pour expression :

$$Nc = g \cdot \frac{I \cdot L}{Vo^2} = No \cdot \frac{2\pi \cdot L}{v} = \frac{I \cdot L}{yo \cdot Fo^2}$$

$L$  = longueur du canal

$Vo$  = vitesse moyenne de l'écoulement

OVERTON a établi que pour des valeurs de  $Nc$  de l'ordre de 10, l'utilisation d'un modèle cinématique ne générerait pas plus de 10% d'erreurs par rapport à un modèle prenant en compte les ondes dynamiques. Ce taux d'erreur diminue fortement pour des valeurs de  $Nc$  plus élevées.

LIGGETT et WOOLHISER ont constaté que  $Nc > 20$  permettait d'obtenir de très bons résultats avec un modèle cinématique et que pour beaucoup de problèmes concrets, le nombre  $Nc$  prenait des valeurs dépassant largement 1000 qui assureraient une très bonne précision des modèles cinématiques (MILLER, CUNGE 1975).

#### Conclusions :

Les modèles d'onde cinématique donnent de bons résultats sur des canaux de grande longueur, de pente pas trop faible où les frottements sont importants (pour que  $Vo$  soit faible). En exprimant  $Nc$  en fonction de  $No$ , ce critère va dans le même sens que le critère faisant intervenir le produit  $No^2 \cdot Fo^2$  puisque si  $No$  est très grand (i.e si  $v/yo$  très grand),  $Nc$  est aussi grand et les ondes cinématiques prédominent dans le phénomène de crue.

La principale différence entre ce critère et le critère précédent est l'intervention de la longueur du bief sur laquelle on examine la propagation de la crue. Lorsque cette longueur est suffisamment grande, les ondes dynamiques peuvent s'atténuer ce que ne précisait pas le critère précédent.

Par exemple, lorsque le nombre  $No$  est petit et qu'on pourrait être dans le cas où le produit  $No^2 \cdot Fo^2 \ll 1$ , le critère expérimental  $C$  indique que si la longueur  $L$  est suffisamment grande pour que  $Nc$  soit supérieur à 10, alors, c'est quand même les ondes cinématiques qui finissent par prédominer. La longueur laisse le temps aux ondes dynamiques de s'amortir et le déplacement de matière dû à la propagation de la crue est finalement gouverné par les ondes cinématiques.

Ici encore, comme dans le critère précédent, les conditions de l'assainissement sont moins favorables que celles de l'hydraulique fluviale. En effet, les longueurs de collecteur (moins importantes que les longueurs de bief de rivières) ne seront pas toujours suffisantes pour atteindre des grandes valeurs de  $Nc$  qui assurent la prédominance des ondes cinématiques.

### 2-1-3-4 Conclusions

Nous venons d'étudier une série de critères destinés à prévoir dans quels cas, certains termes des équations de Saint-Venant sont négligeables.

Cette étude a permis d'identifier les paramètres les plus importants qui conditionnent la validité des simplifications des équations de Saint-Venant. Néanmoins, les critères déterminés doivent être utilisés qualitativement. Ils ne peuvent permettre de trancher catégoriquement en faveur de telle ou telle simplification. En effet :

- les approximations nécessaires à l'établissement des critères sur la prédominance des types d'ondes sont fortes et utilisent notamment la notion de petites perturbations par rapport à un régime uniforme de départ. Il est difficile de mesurer l'erreur commise par une telle approximation ;
- on ne tient pas compte des conditions limites (et notamment d'une hauteur d'eau aval) dans les critères basés sur l'étude directe des ordres de grandeur des termes des équations ainsi que dans les critères expérimentaux et des études sur les ondes. Or, sur un même tronçon, on verra dans la partie 3 que les ondes dynamiques peuvent jouer un rôle très différent selon la condition limite aval.

Le seul paramètre où les conditions limites sont prises en compte est le paramètre  $No$ . Dans  $No$ , la condition limite amont (en débit) est à peu près caractérisée par la longueur d'onde  $\nu$ , comme nous l'avons expliqué sur la figure 2.2b, (bien que plusieurs interprétations de  $\nu$  soient possibles). La condition limite aval en hauteur est d'une certaine mesure prise en compte par l'intermédiaire de la hauteur  $y_0$  du régime uniforme de départ. Toutefois, cette supposition n'a pas de légitimité théorique.

Malgré l'imprécision des critères concernant les conditions limites, l'étude de ce paragraphe a permis de mettre le doigt sur les paramètres qui ont de l'influence sur la validité des simplifications de Saint-Venant.

On a pu constater, notamment avec les tableaux 2.0a et 2.0b que la propagation d'une crue (même en réseau d'assainissement), qui s'accompagne toujours de transport de matière, n'est pratiquement jamais un phénomène purement inertiel. On confirme donc la non-utilisation de modèles dynamiques. Dans plusieurs cas favorables, il semble que les termes d'inertie peuvent être négligeables mais il est délicat de prévoir précisément, les écarts entre la réponse d'un modèle intégrant les équations complètes de Saint-Venant et celle d'un modèle simplifié, à cause de la difficulté de prévoir l'influence des conditions limites.

Cette étude sur les ordres de grandeur des termes des équations de Saint-Venant ne peut donc permettre de conclure précisément que tel type de conditions permet tel type de simplification. C'est pourquoi, une vérification expérimentale s'impose. Dans le chapitre 3-3, nous comparerons sur différents cas, les réponses entre un modèle complet et les modèles simplifiés pour en déduire des domaines plus précis de validité. Nous avons fondé les exemples hypothétiques testés dans la partie 3 en faisant varier les paramètres caractérisant la structure des tronçons, ainsi que les conditions limites qui ont de l'importance sur la validité des modèles mécanistes simplifiés, et que nous rappelons ci-après.

## A) Pour la géométrie :

### La pente

La pente intervient dans la plupart des critères étudiés et a une influence fondamentale sur la validité des modèles simplifiés. On peut retenir approximativement trois zones de comportement :

- les pentes fortes ( $I > 4.I_c$ ) où les ondes dynamiques ne s'amortissent pas. Elles peuvent néanmoins ne pas prédominer dans le phénomène de crue ;
- les pentes moyennes où pour la plupart des conditions limites, les ondes dynamiques sont rapidement amorties et ont une importance négligeable dans le phénomène de propagation de crue ;
- les pentes très faibles (de l'ordre de  $10^{-4}$ ) où les ondes dynamiques peuvent prédominer sur les ondes cinématiques.

### Le coefficient de Strickler

On a vu que le produit  $No^2.Fo^2$  était d'autant plus fort que le coefficient de Strickler était faible. Des frottements importants sont donc favorables à l'élimination des termes d'inertie dans l'équation dynamique de Saint-Venant.

### La longueur

On a vu par l'intermédiaire du nombre  $N_c$  qu'une grande longueur était favorable à la prédominance des ondes cinématiques, car elle permettait aux ondes dynamiques de s'atténuer.

## B) Pour les conditions aux limites :

### La variabilité des perturbations

On a vu par l'intermédiaire du nombre adimensionnel  $No$ , l'importance de la longueur d'onde de la perturbation. Plus l'hydrogramme amont est raide, moins les termes d'inertie sont négligeables.

### La condition limite aval

Une influence aval forte causée par une condition limite aval en hauteur entraîne une erreur importante sur les hauteurs. On verra de plus que des fortes hauteurs d'eau (dont on peut considérer qu'elles augmentent la valeur de  $yo$ ) augmentent les ordres de grandeur des termes d'inertie.

Finalement, lorsque les paramètres de pente et de rugosité sont fixés (et sans influence d'aval significative), les ordres de grandeur dépendront du signal d'entrée (longueur d'onde) et de la longueur du bief. Ainsi, on peut définir un temps externe (temps de montée ou de perturbation) caractérisant l'hydrogramme entrant et un temps interne (temps de propagation dans le collecteur) caractérisant la transformation. L'amortissement sera très fort pour un temps externe faible et un temps interne important alors qu'il sera faible sinon.

## 2-1-4 LES MODELES CONCEPTUELS

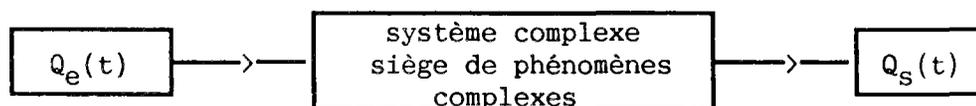
### 2-1-4-1 Généralités

La modélisation mathématique de systèmes complexes (tels que des bassins versants, réseaux d'assainissement, etc.) peut être abordée de deux manières :

- par une approche **mécaniste** (hydrodynamique) qui, en modélisant le comportement de chaque **particule élémentaire** de fluide, en déduit le comportement global du système ;
- par une approche **conceptuelle** qui représente les phénomènes **globalement** par un concept simple, une image de ce à quoi peut ressembler la réalité. La complexité du système est jugée trop grande pour chercher à déduire le comportement global du système du comportement de chaque particule élémentaire. L'approche conceptuelle fournit des modèles qui donnent les conséquences (les résultats) des phénomènes ayant lieu dans le système réel. Ils donnent une "explication" comportementale et non mécaniste des phénomènes. On est alors généralement obligé de disposer de mesures des entrées et des sorties qui permettent de fixer la valeur des paramètres des modèles.

Si l'étude des écoulements a historiquement débuté au cours du XIX<sup>ème</sup> siècle par l'application des théories mécanistes, les premières études de crue de rivière ont été permises grâce à une approche conceptuelle (globale). L'approche conceptuelle permet en effet de développer des outils simples à mettre en oeuvre et peu exigeants en données et en moyens de calcul. Les éléments du système (rivière, bassin versant, réseau d'assainissement, ...) sont considérés comme des filtres, transformant l'hydrogramme d'entrée en hydrogramme de sortie (DESBORDES 1974), (CHOCAT 1978).

Plus le système est complexe, plus une description mécaniste est difficile à exploiter et plus l'approche "globale" se justifie, car elle réduit la complexité du système et des phénomènes à une ou plusieurs relations liants le débit d'entrée (ou la pluie) au débit de sortie.



La plupart des modèles conceptuels utilisés en hydrologie sont des modèles à réservoirs, c'est à dire que le fonctionnement du système est assimilé au fonctionnement d'un réservoir, ou de plusieurs réservoirs en série ou en parallèle. Il existe cependant d'autres modèles conceptuels qui n'utilisent pas l'analogie avec un réservoir tels que par exemple, "l'hydrogramme unitaire" (CHOCAT, THIBAUT 1978).

Pour les modèles à réservoirs que l'on peut encore appeler modèles de stock, le comportement du système dépend de 2 types de variables :

- les variables de flux telles que le débit entrant  $Q_e(t)$  ou le débit sortant  $Q_s(t)$
- les variables d'état telles que le volume stocké  $V_s(t)$  ou la hauteur d'eau.

Le fonctionnement des modèles conceptuels est en partie décrit par des relations déterministes. En effet, on utilise la conservation de la masse ou plutôt (ce qui revient au même dans le cas de liquides) la conservation des volumes transités. On exprime que la variation du volume stocké  $V_s(t)$  est égale à la différence entre le débit entrant et le débit sortant. Soit :

$$(2.14) \quad dV_s/dt = Q_e(t) - Q_s(t)$$

On rajoute à cette équation, une relation de fermeture qui exprime la loi de vidange du réservoir. C'est une loi empirique ou déterministe, qui dépend du type de réservoir duquel on s'inspire. Cette loi de vidange est une équation (appelée équation de stockage) qui relie les variables d'état du système aux variables de flux. Le modèle est linéaire si l'équation de stockage est linéaire, non-linéaire sinon.

Les équations des modèles à réservoirs, sans termes de translation, n'opèrent que sur l'équation de continuité et ne peuvent en aucun cas, caractériser un phénomène de propagation, car elles supposent une transmission instantanée des perturbations. L'effet "apparent" de propagation résulte :

- soit d'un artéfact numérique (diffusion numérique) résultant du mode d'intégration de leur équation différentielle (nous y reviendrons au paragraphe 2-2-3-3)
- soit de l'amortissement au passage du réservoir qui donne un décalage des pics d'hydrogrammes.

Ce ne sont que des analogies *numériques* approximatives. Elles ne peuvent être reliées théoriquement aux phénomènes de propagation hydraulique des écoulements à surface libre.

#### 2-1-4-2 Quelques modèles de stock

Le plus populaire des modèles de stock est certainement le modèle Muskingum. Il fut mis au point (YEVJEVICH 1975) pour la première fois aux Etats-Unis en 1935 par le Corps des Ingénieurs de l'Armée des U.S. pour contrôler les crues de la rivière Muskingum, dans le bassin de l'Ohio.

L'équation de stockage du modèle Muskingum est linéaire et s'écrit habituellement sous la forme :

$$(2.15) \quad V_s(t) = k.[\alpha.Q_e(t) + (1 - \alpha).Q_s(t)]$$

$k$  est un coefficient dont la dimension est un temps qui traduit physiquement le temps de stockage dans le réservoir (à ne pas confondre avec le coefficient de Strickler  $K$ ).

$\alpha$  compris entre 0 et 1 pondère l'influence de  $Q_e$  et  $Q_s$  dans l'équation (2.15).

Le système à résoudre est donc formé des équations (2.14) et (2.15) :

$$(2.16) \quad \begin{cases} \frac{dV_s}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t) \\ V_s(t) = k.[\alpha.Q_e(t) + (1 - \alpha).Q_s(t)] \end{cases}$$

On élimine  $V_s(t)$  du système (2.16) en dérivant l'équation (2.15) par rapport au temps pour obtenir la relation suivante reliant  $Q_e$ ,  $Q_s$  et leur dérivées  $dQ_e/dt$  et  $dQ_s/dt$  :

$$(2.17) \quad k \cdot \alpha \cdot dQ_e/dt + k(1-\alpha) \cdot dQ_s/dt = Q_e(t) - Q_s(t)$$

Les modèles appelés **modèles Muskingum** sont les modèles qui intègrent l'équation (2.17). Les méthodes d'intégration dépendent du schéma choisi pour exprimer les dérivées temporelles  $dQ_s/dt$  et  $dQ_e/dt$  (comme nous le verrons au paragraphe 2-2-2-4) et de la manière de choisir ou de calculer les paramètres  $k$  et  $\alpha$ . On peut signaler dès à présent deux classes de modèles qui dépendent de la valeur de  $\alpha$ .

a) Si on choisit  $\alpha = 0$ , les équations (2.15) et (2.17) s'écrivent :

$$V_s(t) = k \cdot Q_s(t) \quad \text{et} \quad k \cdot dQ_s/dt = Q_e(t) - Q_s(t)$$

Les modèles obtenus s'appellent les modèles à réservoir linéaire (ou les modèles de KALININE-MILYUKOV, du nom de leurs premiers utilisateurs). L'un d'eux, célèbre en hydrologie urbaine est le modèle à réservoir linéaire de DESBORDES. C'est un modèle qui permet de simuler le ruissellement sur des bassins versants urbains, assimilés à des réservoirs. DESBORDES propose une expression empirique qui relie le paramètre  $k$  à la structure du bassin versant (surfaces imperméables, etc...) (DESBORDES 1980).

On constate ici que les modèles de stock permettent aussi la modélisation du ruissellement et semblent même bien adaptés compte tenu du nombre important et de la complexité des phénomènes en jeu.

Comme pour les modèles mécanistes simplifiés, les paramètres  $k$  et  $\alpha$  des modèles Muskingum peuvent être choisis constants ou variables. S'ils sont choisis constants, on les notera  $k_m$  ou  $\alpha_m$ . S'ils sont choisis variables, cela signifie qu'il est nécessaire de recalculer des nouvelles valeurs de  $k$  et  $\alpha$  à chaque pas de temps de calcul et pour chaque pas d'espace.

b) Beaucoup d'autres modèles réservoirs ont été développés pour l'étude des crues. CUNGE et MILLER exposent certains de ces modèles (CUNGE, MILLER 1975).

Appliqués aux écoulements dans les réseaux d'assainissement, des modèles conceptuels ont été mis au point par l'INSA de Lyon (CHOCAT 1978), (THIBAUT 1979), (CHOCAT 1981).

Parmi ces modèles, citons le **modèle de CHOCAT**. Les réseaux d'assainissement étant le siège, souvent simultanément, d'écoulements à surface libre et d'écoulements en charge, le modèle est conçu pour pouvoir coupler les écoulements à surface libre et les écoulements en charge. Pour qu'il puisse être compatible avec des équations d'écoulements en charge, CHOCAT utilise, pour les parties à surface libre du réseau, une équation de stockage non linéaire qui exprime la loi de vidange (équation (2.15)) par la relation :

$$V_s(t) = Q_e(t) \cdot TP(x, t)$$

$TP(x, t)$  est le temps mis pour parcourir la distance  $x$  (séparant les points où sont mesurés  $Q_e$  et  $Q_s$ ), à la vitesse  $V$  d'écoulement du débit  $Q_e(t)$ , donc :  $TP(x, t) = x/V$ . Le modèle est non linéaire car le paramètre  $TP$  est fonction de  $Q_e(t)$ .

### 2-1-5 CONCLUSIONS

Nous avons présenté les principales équations permettant la modélisation de la propagation des crues en rivière et en réseau d'assainissement. Les hypothèses nécessaires à la validité des équations ont été précisées.

Chaque modèle est sous-tendu par des hypothèses et des conditions aux limites qui lui sont propres.

Les modèles issus des équations présentées dans ce chapitre auront donc chacun, un contenu physique bien particulier.

Pour les modèles mécanistes simplifiés, l'étude du paragraphe 2-1-3 a fait apparaître certains paramètres qui ont de l'influence sur les domaines de validité des modèles de crue diffusante et d'onde cinématique, et qui permettent de prédire approximativement la validité de ces modèles.

Pour les modèles issus de l'approche conceptuelle, nous avons distingué deux types de modèles :

- les modèles conçus pour des écoulements restant à surface libre ;
- les modèles conçus pour modéliser simultanément les écoulements à surface libre et en charge (type modèle de CHOCAT).

Notre objectif est de tester, pour les conditions spécifiques de l'assainissement, les modèles initialement développés pour l'étude des crues de rivière. Nous n'avons donc pas retenu le modèle de CHOCAT car les concepts qui sous-tendent sa validité sont différents. Par ailleurs, ce modèle n'a pas de raison d'être utilisé si les écoulements restent à surface libre.

Dans ce premier chapitre, nous sommes resté à un niveau théorique. De plus, la résolution (numérique ou analytique) des équations des modèles introduit des hypothèses supplémentaires et modifie le contenu physique des équations de départ.

L'objet du chapitre 2-2 est de présenter les méthodes de résolution des équations de Saint-Venant, de l'onde de crue diffusante, de l'onde cinématique et des modèles Muskingum. On examinera comment se transforment (s'enrichissent ou se dégradent) les équations de base des modèles.

Les méthodes de résolution présentées dans le chapitre 2-2 seront étudiées expérimentalement dans le chapitre 3-2. Dans le chapitre 3-3, nous étudierons expérimentalement les domaines de validité des modèles en utilisant un modèle de Saint-Venant complet comme référence.



## 2-2 METHODES DE RESOLUTION ET SCHEMAS DE DISCRETISATION

Le système de Saint-Venant complet ne possède pas de solutions analytiques. Pour le résoudre, il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes numériques. Nous avons vu de même que les équations de l'onde de crue diffusante et de l'onde cinématique ne possédaient pas de solutions analytiques dès que les paramètres C ou D étaient choisis variables. Il en est de même des modèles Muskingum où  $k$  et  $\alpha$  sont choisis variables.

Les méthodes classiquement utilisées pour résoudre les équations de l'onde cinématique, de la crue diffusante et du système complet de Saint-Venant sont des méthodes aux différences finies.

En toute généralité, nous allons rappeler les principes des méthodes aux différences finies et les schémas utilisés.

### 2-2-1 LES METHODES AUX DIFFERENCES FINIES

Le but est de résoudre une équation différentielle où interviennent des dérivées par rapport aux temps et à l'espace :  $\partial f/\partial x$ ,  $\partial f/\partial t$ , et éventuellement  $\partial^2 f/\partial x^2$  d'une fonction  $f$  continue et différentiable par rapport à  $x$  et à  $t$ . Nous avons noté  $f$  cette fonction pour la généralité de l'exposé. Dans le cas de l'équation de l'onde cinématique et de l'onde de crue diffusante, la fonction  $f$  n'est rien d'autre que le débit  $Q$ .

Lorsqu'on ne connaît pas de solutions analytiques, c'est à dire, lorsqu'il n'est pas possible de trouver une relation analytique qui donne  $f(x,t)$  pour tout  $x$  et tout  $t$ , on recherche des solutions numériques, c'est à dire, des valeurs de la fonction  $f$  en quelques points particuliers. On commence par quadriller le plan  $(x,t)$  comme indiqué sur la figure ci-dessous afin d'obtenir des mailles de taille  $(\Delta x, \Delta t)$ .

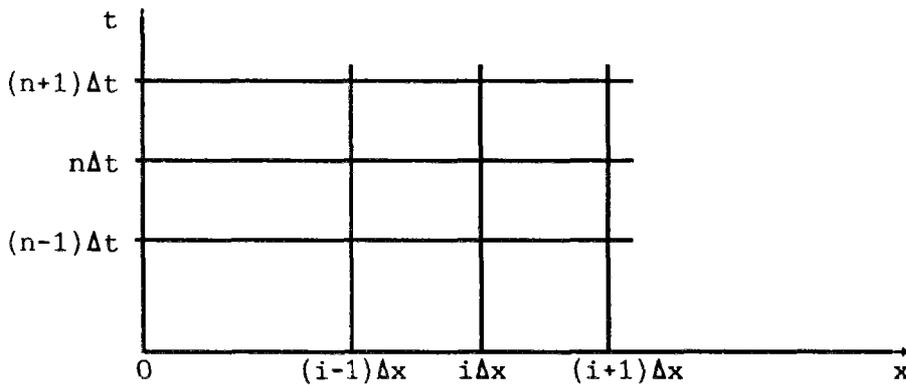


Figure 2.3

$\Delta x$  est le pas d'espace du schéma  
 $\Delta t$  est le pas de temps du schéma

Puisqu'il est impossible de connaître la fonction  $f$  pour tout  $x$  et tout  $t$ , on se contente de calculer les valeurs de  $f$  à chaque noeud du maillage. Les méthodes aux différences finies sont toutes basées sur les développements de Taylor des fonctions continues et dérivables. Plus le pas d'espace et le pas de temps sont petits, plus les développements limités au voisinage des noeuds du maillage sont proches des valeurs exactes. Le calcul des valeurs de  $f$  à chaque noeud du maillage sont donc, aux approximations des développements limités près, les valeurs de la solution exacte de l'équation différentielle vérifiée par  $f$ . A un instant donné, on peut écrire en effet :

$$(2.18a) \quad f_{i+1} = f_i + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + O(\Delta x^4)$$

$$(2.18b) \quad f_{i-1} = f_i - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + O(\Delta x^4)$$

Les dérivées partielles par rapport à  $x$  sont comptées au point  $i\Delta x$  (à l'abscisse  $i\Delta x$ ). Les équations (2.18a) et (2.18b) sont valables quel que soit

le temps  $t$ . On exprime alors à l'aide des développements (2.18a) et (2.18b), les termes  $\partial f/\partial x$ ,  $\partial^2 f/\partial x^2$ , etc..., en fonction des valeurs de la fonction  $f$  aux nœuds du maillage avec les notations suivantes :

$$f_i^n = f(i\Delta x, n\Delta t) \quad 0 \leq i \leq I_f \quad ; \quad 0 \leq n \leq N_f$$

Selon la manière dont on utilise les équations (2.18a) et (2.18b), on obtient des expressions différentes pour les dérivées partielles par rapport à  $x$ . Les équations (2.18a) et (2.18b) au premier ordre, ou (2.18a)-(2.18b) au second ordre donnent les expressions des schémas les plus simples :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} - O(\Delta x^2) \quad \text{schéma centré (approximation du second ordre)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - O(\Delta x) \quad \text{schéma progressif (approximation du premier ordre)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} - O(\Delta x) \quad \text{schéma régressif (approximation du premier ordre)}$$

En plus de la terminologie : schéma progressif, centré et régressif, on introduit la notion de schéma **explicite** et de schéma **implicite** qui précise si le calcul des dérivées partielles de  $f$  par rapport à  $x$  se fait avec les valeurs de la fonction  $f$  au pas de temps  $n$  (où les valeurs de  $f$  sont déjà connues) ou si on utilise les équations (2.18a) et (2.18b) avec des valeurs de  $f$  au pas de temps de calcul  $n+1$  où les valeurs de la fonction  $f$  ne sont pas encore calculées. Considérons l'expression la plus générale que peut prendre la dérivée partielle  $\partial f/\partial x$ , obtenue par combinaison des équations (2.18a) et (2.18b) écrites aux temps  $n\Delta t$  et  $(n+1)\Delta t$ . Celle-ci peut s'écrire :

$$(2.19a) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_s = \alpha_3 \cdot \frac{\alpha_1 \cdot [f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}] + (1-\alpha_1) \cdot [f_i^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}]}{\Delta x} + (1-\alpha_3) \cdot \frac{\alpha_2 \cdot [f_{i+1}^n - f_i^n] + (1-\alpha_2) \cdot [f_i^n - f_{i-1}^n]}{\Delta x}$$

Avec les notations de l'équation (2.19a), on a :

Pondération	Schéma
$\alpha_3 = 0$	explicite
$\alpha_3 = 0.5$	implicite centré dans le temps
$\alpha_3 = 1$	totalemt implicite
$\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = 1$	progressif
$\alpha_1 = 0.5$ $\alpha_2 = 0.5$	centré
$\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = 0$	régressif
$\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = 0$	mixte décentré

Tableau 2.1

L'expression (2.19a) est la forme approchée de la dérivée partielle exacte de  $f$  par rapport à  $x$ . C'est pourquoi, elle est notée avec l'indice  $s$  (comme *schéma*).

La dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $t$  s'exprime quant à elle en général sous la forme:

$$(2.19b) \quad \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_s = \gamma \cdot \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + (1-\gamma) \cdot \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n}{\Delta t}$$

Si l'équation différentielle vérifiée par  $f$  fait intervenir d'autres dérivées partielles que  $\partial f/\partial x$  et  $\partial f/\partial t$ , on les exprime aussi à l'aide des équations (2.18a) et (2.18b). Une fois que toutes les dérivées partielles de  $f$  sont exprimées (approchées) par les valeurs de  $f$  aux différents noeuds du maillage (équations (2.19a), (2.19b), ...), on substitue leurs expressions dans l'équation différentielle à résoudre.

### Différences entre schémas explicites et schémas implicites

L'équation différentielle à résoudre est donc transformée (après substitution des vraies différentielles partielles de  $f$  par leur expressions approchées (2.19a), (2.19b), ...) en un système de  $I_f$  équations algébriques contenant  $I_f$  inconnues qui sont les valeurs  $f(i\Delta x, (n+1)\Delta t)$  pour  $i$  variant de 1 à  $I_f$ .

Les schémas aux différences finies sont **explicites** lorsque seule, la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $t$  s'exprime en fonction des valeurs de  $f$  au pas de temps  $n+1$  et que les différentielles de  $f$  par rapport à  $x$  s'expriment toutes en fonction des valeurs de  $f$  au pas de temps précédent de calcul (pas  $n$ ). Le terme explicite provient du fait que l'on peut exprimer "explicitement" à chaque pas d'espace de calcul (pas  $i$ ) (auquel correspond une des  $I_f$  équations du schéma), la valeur à calculer  $f(i\Delta x, (n+1)\Delta t)$  en fonction des valeurs de  $f$  déjà calculées au temps  $n\Delta t$ .

Les schémas sont dits **implicites** lorsque les différentielles de  $f$  par rapport à  $x$  s'expriment en fonction d'au moins **trois** valeurs (i.e trois indices  $i$ ) de  $f$  au pas de temps de calcul  $n+1$ . Le terme implicite provient du fait que l'on ne peut exprimer explicitement et séparément (contrairement aux schémas **explicites**), les valeurs  $f(i\Delta x, (n+1)\Delta t)$  inconnues en fonction des valeurs déjà calculées de la fonction  $f$  au pas de temps  $n$ . Chacune des  $I_f$  équations à résoudre - une équation pour chaque pas d'espace - contient au moins trois valeurs inconnues de  $f$  au temps de calcul  $(n+1)\Delta t$ , (sauf les équations aux extrémités pour lesquelles les conditions limites  $f(0, (n+1)\Delta t)$  et  $f(I_f \Delta x, (n+1)\Delta t)$  sont connues).

Pour les schémas **explicites**, on peut calculer les valeurs de  $f$  de proche en proche en progressant par balayage sur tous les pas d'espace  $i$  de pas de temps en pas de temps (résolution horizontale d'après la figure 2.3). Mais on peut aussi progresser dans le schéma en calculant toutes les valeurs de  $f$  sur tous les pas de temps et progresser de pas d'espace en pas d'espace (résolution verticale d'après la figure 2.3).

Pour les schémas **implicites**, on ne peut calculer les valeurs de  $f$  au pas de temps  $n+1$  qu'en résolvant le système formé des  $I_f$  équations linéaires algébriques du schéma (ou  $I_f - 1$  selon la définition des conditions limites).

Le système formé de ces équations à résoudre peut s'écrire:

$$(PM) \cdot (f)^{n+1} = (SM)$$

où  $(PM)$  est une matrice bande de taille  $(I_f-1, I_f-1)$  qui contient autant de bandes qu'il y a de valeurs inconnues de  $f$  (valeurs de  $f$  au pas de temps  $n+1$ ) par équation ;

$(f)^{n+1}$  est la matrice colonne dont la  $i^{\text{ème}}$  ligne représente la valeur  $f(i\Delta x, (n+1)\Delta t)$ .  $(SM)$  est la matrice colonne second membre qui contient tous les termes connus.

En général, le système formé des  $I_f$  (ou  $I_f-1$ ) équations est non-linéaire puisque les coefficients des dérivées partielles de  $f$  dans l'équation à résoudre sont souvent fonction des valeurs de  $f$ . Pour être résolu, un tel système matriciel doit être linéarisé (i.e les coefficients des matrices  $PM$  et  $SM$  doivent être choisis constants), ce qui peut supposer des itérations successives.

On retrouve la définition du schéma explicite lorsque la matrice  $(PM)$  est une matrice diagonale. Lorsque la matrice  $(PM)$  est triangulaire inférieure (ou bi-bande), ce qui est le cas lorsque l'on a un schéma implicite centré dans le temps et dans l'espace (correspondant à  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.5$  d'après les conventions de l'équation (2.19a)), on peut à l'aide de la condition limite amont :  $f(0, (n+1)\Delta t)$ , calculer les valeurs de  $f$  aux différents pas d'espace  $i$  (au pas de temps  $n+1$ ) de proche en proche sans être obligé de résoudre le système en inversant la matrice  $(PM)$ . On parle alors dans ce cas de schéma semi-explicite.

## Conditions de stabilité et diffusion numérique

Lorsqu'on résout une équation différentielle aux dérivées partielles par un schéma aux différences finies, il faut vérifier la **consistance** et la **stabilité numérique** du schéma qui permet d'assurer la convergence du résultat numérique vers le résultat exact (théorème de Lax-Millgram).

Un schéma aux différences finies est convergent si la solution qu'il fournit tend vers la solution exacte de l'équation différentielle lorsque  $\Delta x$  et  $\Delta t$  tendent vers 0.

Les problèmes de consistance et de stabilité sont bien distincts. On peut en effet résoudre la bonne équation avec une erreur qui s'accumulant, rend le schéma instable. On peut au contraire commettre une erreur de consistance importante à chaque pas de temps, bien que les paramètres du schéma vérifient les conditions de stabilité.

### La consistance

Pour vérifier la consistance des schémas, on vérifie l'identité (à un certain ordre de dérivation près), entre *l'équation différentielle à résoudre* et *l'équation discrétisée* après avoir effectué un développement limité de Taylor des valeurs discrètes de cette dernière équation. En effet, lorsqu'on utilise un schéma aux différences finies pour résoudre une équation différentielle, on ne résout pas l'équation différentielle avec les *dérivées partielles exactes* mais on résout une équation dans laquelle les dérivées partielles exactes ont été remplacées par les expressions ((2.19a), (2.19b), ..). Ces expressions sont une approximation par différences finies des dérivées partielles exactes faisant intervenir les valeurs discrètes de la fonction  $f$  aux noeuds du maillage.

Pour vérifier l'identité des deux formulations (l'équation exacte et celle résultant du schéma), on effectue des développements limités à l'ordre  $n$  des valeurs discrètes que l'on substitue dans l'équation différentielle discrétisée. Les termes d'ordre 0 et 1 vont s'éliminer puisque le schéma est toujours au minimum, une approximation d'ordre 1 de l'équation différentielle à résoudre. En revanche, il restera des termes d'ordre supérieur ou égal à 2 qui indiqueront l'erreur commise par le schéma. Les termes d'ordre 2 représentent, quand ils sont présents, la partie principale de l'erreur commise par le schéma puisque ce sont les termes d'ordre le plus bas. Cette "partie principale" de l'erreur est connue sous le nom de **diffusion numérique** des schémas aux différences finies. Cette terminologie vient du fait que le terme  $\partial^2 f / \partial x^2$  est couramment appelé terme de diffusion par référence à l'équation de la chaleur.

Pour calculer la *diffusion numérique* d'un schéma, on exprime tous les termes d'erreur en fonction du terme d'erreur d'ordre 2 facteur de  $\partial^2 f / \partial x^2$ . La diffusion numérique ne caractérise donc pas toute l'erreur commise par la résolution numérique mais seulement l'erreur représentée par les termes d'ordre 2 de l'erreur totale du schéma. Nous verrons aux paragraphes 2-2-3-1 et 2-2-3-2 les expressions de la diffusion numérique pour les modèles qui font l'objet de cette partie.

### La stabilité numérique

La stabilité numérique du schéma ne concerne que le schéma de discrétisation, sans référence à l'équation différentielle de départ. On peut avoir un schéma stable qui ne résout pas correctement l'équation. Pour vérifier la stabilité numérique, on effectue le raisonnement suivant (qui n'est vrai que pour les équations différentielles linéaires). On écrit qu'une erreur commise à un pas de temps donné ne doit pas s'amplifier mais doit au contraire, s'atténuer. Si on a à un pas de temps une solution du type  $f_c + \epsilon$ , où  $\epsilon$  est une erreur, le schéma sera dit "stable" si l'erreur ne s'amplifie pas d'un pas de temps à l'autre, c'est à dire si on peut vérifier :

$$\| \epsilon^{n+1} / \epsilon^n \| < 1.$$

$f_c + \epsilon$  vérifie l'équation différentielle linéaire donc  $\epsilon$  la vérifie aussi. On utilise alors le fait que toute solution de l'équation différentielle peut s'exprimer à l'aide d'une série de Fourier :

$$f^n(x) = A^n \cdot e^{i\omega x} \quad i \text{ est le nombre complexe tel que } i^2 = -1$$

En particulier  $f$  s'exprime aussi par une série de Fourier. Pour vérifier que le schéma est stable, on étudie l'amplification des solutions de Fourier. On vérifie donc que le quotient :

$$\left| \frac{A^n}{A^{n+1}} \right| \text{ reste inférieur à 1.}$$

Lorsqu'on substitue ces solutions de Fourier dans le schéma d'intégration, vérifier l'inégalité ci-dessus entraîne en général des conditions (inégalités) sur les paramètres  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ , ..., ainsi que sur les paramètres de l'équation différentielle vérifiée par  $f$ .

C'est ce qu'on appelle les conditions de stabilité numérique.

Outre les différences sur les conditions limites nécessaires à la résolution des deux schémas, les schémas implicites et explicites ont des conditions de stabilité numérique différentes.

En général, les schémas explicites ou semi-implicites (tels que les schémas implicites centrés dans le temps), qui n'utilisent pas de conditions limite aval ont des conditions de stabilité numérique plus sévères que les schémas implicites. Les conditions de stabilité numérique des schémas explicites contraignent donc souvent à choisir  $\Delta x$  et (ou)  $\Delta t$  petits.

Lorsqu'on résout une équation différentielle par un schéma aux différences finies, il est nécessaire de connaître la diffusion numérique du schéma, les conditions de stabilité numérique, et les conditions aux limites. En effet, en méconnaissant la diffusion numérique, ou en n'ayant pas clairement identifié l'influence des conditions limites, on risque de mal interpréter des résultats et de croire à un comportement physique de la fonction  $f$  (c'est à dire, un comportement prévu par l'équation différentielle que vérifie la fonction  $f$ ) alors que ce comportement sera uniquement "numérique" et qu'il aura simplement entraîné une solution calculée différente de la solution exacte de l'équation différentielle originelle.

2-2-2 METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS  
DES MODELES MECANISTES COMPLETS

Les méthodes numériques de résolution habituellement utilisées peuvent être divisées en 4 groupes :

1. Les méthodes aux différences finies *implicites* pour calculer la hauteur  $y$  et la vitesse  $V$  le long des courbes caractéristiques.
2. Les méthodes aux différences finies *explicites* pour résoudre les relations caractéristiques.
3. Les méthodes *implicites* pour les équations originelles.
4. Les méthodes *explicites* pour les équations originelles.

2-2-2-1 Méthode des caractéristiques

On cherche dans le plan  $(x,t)$  des courbes caractéristiques le long desquelles l'équation aux dérivées partielles devient une différentielle totale.

Par exemple, lorsque la section du collecteur est rectangulaire, les courbes caractéristiques sont définies dans le plan  $(x,t)$  par les deux équations différentielles (HUG 1975), (POCHAT 1980) :

$$(2.20) \quad \frac{dx}{dt} = V + \sqrt{gy} \quad \text{pour la courbe traditionnellement notée } C_+$$

$$(2.21) \quad \frac{dx}{dt} = V - \sqrt{gy} \quad \text{pour la courbe traditionnellement notée } C_-$$

Les variables  $V$  et  $y$  sont différentiables sur les courbes  $C_+$  et  $C_-$ .

Ces courbes définissent les célérités de propagation des ondes dites "dynamiques" citées dans le paragraphe 2-1-2-3. Lorsque le nombre de Froude  $F$  est inférieur à 1, la courbe  $C_-$  remonte le courant ( $dx/dt$  est négatif). On est en présence d'un écoulement fluvial. Si  $F > 1$ , la courbe  $C_-$  (comme  $C_+$ ) descend le courant et on est en présence d'un écoulement torrentiel.

On peut écrire le long des courbes caractéristiques :  
sur la courbe  $C_+$  :

$$d[ V + 2\sqrt{gy} ] + g \cdot \left[ J - I - \frac{q}{B \cdot \sqrt{gy}} \right] \cdot dt = \text{constante}$$

De même, sur la courbe  $C_-$  :

$$d[ V - 2\sqrt{gy} ] + g \cdot \left[ J - I - \frac{q}{B \cdot \sqrt{gy}} \right] \cdot dt = \text{constante}$$

La résolution des équations se fait à partir de l'état initial du système (connaissances de  $V$  et  $y$  en tous points de la droite  $t = 0$ )

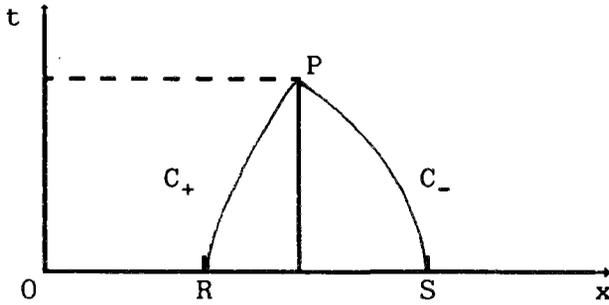


Figure 2.4

En tous points P du plan  $(x, t)$ , il passe deux caractéristiques dont on notera l'intersection avec la droite  $t = 0$ , R et S comme sur la figure ci-dessus. La conservation des informations sur  $C_+$  et  $C_-$  permet par intégration de déduire  $VP$  et  $yP$  de  $VR$ ,  $yR$ ,  $VS$ , et  $yS$ .

De plus, pour compléter la méthode, il est nécessaire de connaître des conditions aux limites. En effet, pour  $xP$  proche de l'une des deux extrémités de la canalisation, l'une au moins des caractéristiques ne coupe pas la droite  $t = 0$

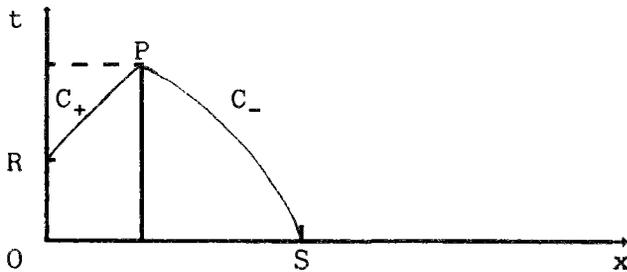


Figure 2.5

Les conditions aux limites s'expriment par une relation du type :

$$f(V, y) = 0$$

qui peut être, par exemple la donnée de  $V + 2\sqrt{gy}$  sur la droite  $x = 0$ .

Si les caractéristiques ont des pentes de signes différents (ce qui est le cas lorsque l'écoulement est fluvial), il est nécessaire de connaître une condition à la limite amont et une condition à la limite aval. Si elles ont des pentes de même signe (ce qui est le cas lorsque l'écoulement est torrentiel), il faut connaître deux relations entre  $V$  et  $y$  à l'amont, aucune n'étant indispensable à l'aval.

En réalité, on ne connaît  $V$  et  $y$  que pour un nombre limité de points des droites  $t = 0$ ,  $x = 0$  ou  $x = x_{\text{fin}}$  ( $x_{\text{fin}}$  désigne l'extrémité aval de la canalisation). Il faut alors interpoler les valeurs  $VR$ ,  $yR$ ,  $VS$  et  $yS$ .

On retiendra simplement que les schémas résolvant la grille des caractéristiques demandent une grande quantité d'interpolations et exigent de puissants ordinateurs. De plus ils sont en général non-conservatifs car on assimile les caractéristiques à des segments de droite entre les points de discrétisation. Ils sont adaptés essentiellement aux systèmes dont la géométrie est simple et peu variable, ce qui signifie qu'ils sont en général mal adaptés aux réseaux d'assainissement riches en singularités et géométriquement souvent complexes. Les équations de Saint-Venant ne conviennent de toute façon qu'à des écoulements graduellement variés, c'est-à-dire loin des singularités. Un modèle utilisant la grille des caractéristiques a néanmoins été utilisé aux USA (dans l'Illinois) en réseau d'assainissement (SÜHA SEVÜK, BEN CHIE YEN 1982).

Les schémas explicites sont les plus simples. Cependant, il est nécessaire de prendre un pas de temps très court, du fait de la condition de

stabilité numérique qui impose :  $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{v + \sqrt{gy}}$

#### 2-2-2-2 Résolution des équations originelles

Les méthodes numériques habituellement utilisées pour résoudre les équations de Saint-Venant utilisent des schémas **implicites** résolvant les équations originelles du système de Saint-Venant ( cf. équations du système (2.1)). Ces schémas permettent en effet des variations importantes des caractéristiques de l'écoulement. Ils ont des conditions de stabilité numérique (des contraintes sur le pas de temps et le pas d'espace) moins sévères que les schémas explicites.

Les schémas implicites ont cependant l'inconvénient d'imposer la résolution à chaque pas de temps d'un système non-linéaire d'équations, linéarisé pour être résolu, dont le nombre d'équations est égal au nombre de noeuds du réseau. La résolution pas de temps par pas de temps exige un temps de calcul important.

Le principe du double balayage permettant l'intégration des équations de Saint-Venant par un schéma implicite est expliqué de manière complète et détaillée dans le cours de R. POCHAT pp.91 - 113 (POCHAT 1980). Nous ne reviendrons pas ici sur ces méthodes. Le lecteur intéressé pourra aussi consulter la référence (AMEIN, CHU 1975)

2-2-3 METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS DES  
MODELES MECANISTES SIMPLIFIES  
ET DES MODELES CONCEPTUELS

Nous présenterons dans ce paragraphe les principales méthodes de résolution des modèles de crue diffusante, de l'onde cinématique et des modèles conceptuels de type Muskingum présentés dans le chapitre 2-1.

2-2-3-1 Méthodes d'intégration de l'équation de la crue diffusante

L'équation de la crue diffusante est une équation parabolique. Son intégration par des méthodes aux différences finies conduit en général à des schémas implicites en raison du terme du second ordre, qui s'il est implicite, fait intervenir trois points au moins de la grille de discrétisation au pas de temps  $n+1$ .

Nous présenterons dans ce paragraphe, un schéma classique d'intégration de l'équation de la crue diffusante ainsi que la méthode d'intégration analytique d'Hayami qui peut être utilisée lorsqu'on suppose  $C$  et  $D$  constants.

A) Un schéma implicite : la méthode VPD

Le schéma VPD (Variable Parameter Diffusion) a été nommé ainsi par PRICE et a été construit pour l'étude de crues de rivière au Royaume Uni (PRICE 1973a) et (PRICE 1973b).

Le schéma d'intégration de l'équation (2.7) de la méthode VPD est le suivant :

On pose 
$$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \Delta Q_i^n \quad \text{pour tout } i \leq I_f \quad \text{et} \quad n \leq N_f$$

$$(2.22a) \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_s = \frac{\Delta Q_i^n}{\Delta t}$$

$$(2.22b) \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_s = \frac{\lambda \cdot [Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}] + (1-\lambda) \cdot [Q_i^n - Q_{i-1}^n]}{\Delta x}$$

$$(2.22c) \quad \left. \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right|_s = \frac{\mu \cdot [Q_{i+1}^{n+1} - 2Q_i^{n+1} + Q_{i-1}^{n+1}] + (1-\mu) \cdot [Q_{i+1}^n - 2Q_i^n + Q_{i-1}^n]}{\Delta x^2}$$

avec :  $0 \leq \lambda \leq 1$   $0 \leq \mu \leq 1$

En reportant les expressions dans l'équation de la crue diffusante (2.7), on obtient le système formé des If équations suivantes à résoudre pour chaque pas de temps de calcul  $n+1$  :

$$(2.23) \quad X.\Delta Q_{i-1}^n + Y.\Delta Q_i^n + Z.\Delta Q_{i+1}^n = U.Q_{i-1}^n + V.Q_i^n + W.Q_{i+1}^n$$

Les coefficients  $X, Y, Z, U, V,$  et  $W$  sont calculés en fonction des paramètres  $C, D, \lambda, \mu, \Delta x,$  et  $\Delta t$ . Le système (2.23) peut s'écrire matriciellement sous la forme :

$$\begin{bmatrix} B(1) & A(2) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C(1) & B(2) & A(3) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & C(i-1) & B(i) & A(i+1) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & C(If-2) & B(If-1) & A(If) & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & C(If-1) & B'(If) & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_1^n \\ \Delta Q_2^n \\ \vdots \\ \Delta Q_i^n \\ \vdots \\ \Delta Q_{If-1}^n \\ \Delta Q_{If}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega'(1) \\ \Omega(2) \\ \vdots \\ \Omega(i) \\ \vdots \\ \Omega(If-1) \\ \Omega(If) \end{bmatrix}$$

Avec les vecteurs  $A(i), B(i), C(i)$  et  $\Omega(i)$  exprimés en fonction des coefficients  $X, Y, Z, U, V,$  et  $W$  ainsi que des valeurs de débit calculées au pas de temps précédent :

$$Q_{i-1}^n, \quad Q_i^n \quad \text{et} \quad Q_{i+1}^n$$

En reprenant les notations du paragraphe précédent, ce système est du type  $(PM) \cdot (\Delta Q) = (\Omega)^n$ . Il suffit d'inverser la matrice  $(PM)$  pour obtenir :  
 $(\Delta Q)^n = (PM)^{-1} \cdot (\Omega)$  soit donc :  $(Q)^{n+1} = (Q)^n + (\Delta Q)^n$   
 $(Q)^n$  est la matrice des débits aux If pas d'espace et au pas de temps  $n$ .

#### Conditions limites

La première équation du système (2.23) :

$$B(1).\Delta Q_1^n + A(2).\Delta Q_2^n = \Omega'(1) \quad \text{utilise la condition limite amont}$$

Cette condition :  $Q(0, (n+1)\Delta x)$  entraîne une valeur de  $\Omega'(1)$  différente des valeurs  $\Omega(i)$ , (d'où la notation  $\Omega'(1)$ ).

La dernière équation du système (2.23) :

$$C(If-1).\Delta Q_{If-1}^n + B'(If).\Delta Q_{If}^n = \Omega(If) \quad \text{utilise la condition aval.}$$

(d'où la notation  $B'(If)$  pour différencier des valeurs  $B(i)$ )

Or, on ne connaît en général pas le débit à l'aval, puisque c'est justement celui qu'on cherche à déterminer. Il est donc nécessaire de trouver une méthode permettant de "fabriquer" une condition limite aval, lorsque la condition limite aval est supposée libre (voir au paragraphe 3-3-3-9 page 237 pour la signification de cette hypothèse).

Plusieurs méthodes sont possibles.

1ère méthode :

On ferme la dernière équation du système en supposant que le débit au pas d'espace  $I_{f+1}$  est égal au débit au pas d'espace  $I_f$ .

Ceci suppose qu'on a atteint le régime uniforme à l'aval ou que les pas d'espace soient suffisamment petits pour que l'erreur commise ne soit pas significative.

2ème méthode (PRICE 1975) :

On peut supposer que le débit aval  $Q(I_f \Delta x, (n+1) \Delta t)$  est le débit qui se trouvait au pas de temps de calcul précédent à la distance  $C \Delta t$  à l'amont. Autrement dit, la condition limite aval peut être calculée par la relation :

$$Q(I_f \Delta x, (n+1) \Delta t) = Q(I_f \Delta x - C \Delta t, n \Delta t)$$

$Q(I_f \Delta x - C \Delta t, n \Delta t)$  doit être calculé par interpolation.

Soit  $Int$ , tel que :

$$\begin{aligned} Int \cdot \Delta x &\leq I_f \cdot \Delta x - C \Delta t < (Int + 1) \cdot \Delta x & \text{et} \\ p &= (I_f - Int) \cdot \Delta x - C \Delta t \end{aligned}$$

La condition limite aval peut donc être déterminée par :

$$Q(I_f \Delta x, (n+1) \Delta t) = (1-p) \cdot Q(Int \Delta x, n \Delta t) + p \cdot Q((Int+1) \Delta x, n \Delta t)$$

Cette méthode exige en réalité un calcul itératif puisque  $C$  est variable et que  $C$  dépend de la valeur  $Int$  et de celle de  $p$ . A la première itération on peut supposer que  $C$  est la célérité du débit  $Q((I_f-1) \Delta x, n \Delta t)$ .

Avec la première condition limite calculée ci-dessus, on recalcule une célérité  $C$  correspondant au débit de la condition limite et on recommence le calcul jusqu'à convergence.

Cette condition limite a l'inconvénient majeur de supposer que le régime atteint à l'aval est une translation sans atténuation ce qui est irréaliste et contraire à la physique du phénomène de propagation des crues. On dégrade donc les qualités du modèle de crue diffusante en utilisant une telle condition.

Selon les méthodes, (condition limite exprimée à  $I_f \Delta x$  ou à  $(I_f+1) \Delta x$ ), le système (2.23) a  $I_f-1$  ou  $I_f$  équations.

Conditions de stabilité numérique :

Dans notre cas :

- si  $\lambda = 0$  le schéma est explicite
- si  $\lambda = 0.5$  le schéma est semi-explicite (ou implicite centré dans le temps)
- si  $\lambda = 1$  le schéma est complètement implicite.

En général :

- la plage  $0 \leq \lambda \leq 0.5$  correspond à un schéma instable
- la plage  $0.5 < \lambda \leq 1$  correspond à un schéma stable.

Les conditions de stabilité numérique dépendent aussi de la valeur du paramètre  $\mu$  et des paramètres  $\Delta x$  et  $\Delta t$ .

On ne peut conclure sur les conditions de stabilité numérique qu'après avoir étudié la diffusion numérique du schéma.

Diffusion numérique des termes d'ordre deux :

Pour une fonction  $f$ , ( $f = Q$  ou  $f =$  dérivées de  $Q$  par rapport à  $x$  et à  $t$ ), les valeurs  $f(i\Delta x, n\Delta t)$  seront simplement notées  $f$  et de manière plus générale, lorsque l'indice  $n$  n'est pas précisé, c'est qu'il s'agit du pas de temps courant  $n$  ou du pas d'espace courant  $i$ . Lorsqu'on effectue un développement de Taylor autour de la valeur  $Q(i\Delta x, n\Delta t)$ , on obtient : (cf. équations (2.18a) et (2.18b) au paragraphe 2-2-1).

$$Q_{i+1}^n = Q_i^n + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + O(\Delta x^4)$$

$$Q_{i+1}^{n+1} = Q_i^{n+1} + \frac{\partial Q^{n+1}}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 Q^{n+1}}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^3 Q^{n+1}}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + O(\Delta x^4)$$

On effectue de même un développement de Taylor des dérivées partielles pour que seules les dérivées au point  $(i\Delta x, n\Delta t)$  subsistent. On notera  $O(\Delta^n)$ , tous les termes d'ordre  $n$  et d'ordres supérieurs dans les calculs qui suivent. Ceci suppose que  $\Delta x^n$ ,  $\Delta t^n$  ainsi que les différentielles  $n^{\text{ème}}$  de  $Q$  par rapport à  $x$  et à  $t$  sont du même ordre de grandeur.

$$\frac{\partial Q^{n+1}}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} \cdot \Delta t + O(\Delta^2) \quad \text{etc...}$$

ce qui donne finalement :

$$Q_{i+1}^{n+1} = Q_i^n + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial Q}{\partial t} \cdot \Delta t + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} \cdot \Delta x \cdot \Delta t + O(\Delta^3)$$

De même, les valeurs de  $Q$  au pas d'espace antérieur  $(i-1)\Delta x$  peuvent s'exprimer par :

$$Q_{i-1}^n = Q_i^n - \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} - \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + O(\Delta^4)$$

et de même que pour  $Q((i+1)\Delta x, (n+1)\Delta t)$  :

$$Q_{i-1}^{n+1} = Q_i^n - \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial Q}{\partial t} \cdot \Delta t + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \cdot \frac{\Delta t^2}{2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} \cdot \Delta x \cdot \Delta t + O(\Delta^3)$$

On substitue alors ces expressions dans les équations (2.22a) et (2.22b) du schéma.

Pour  $\partial Q / \partial t|_s$ , on obtient :

$$\frac{\partial Q}{\partial t}|_s = \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \cdot \frac{\Delta t}{2} + O(\Delta^2)$$

Pour  $\partial Q / \partial x|_s$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}|_s &= \frac{\lambda \cdot [Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}] + (1-\lambda) \cdot [Q_i^n - Q_{i-1}^n]}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x} + (2\lambda - 1) \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x}{2} + \lambda \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} \cdot \Delta t + O(\Delta^2) \end{aligned}$$

Pour  $\partial^2 Q / \partial^2 x|_s$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}|_s = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + O(\Delta^2)$$

Ces expressions mettent en évidence les erreurs sur la manière d'approximer les dérivées partielles (par des différences finies) et l'ordre du schéma de discrétisation.

Pour faire apparaître la diffusion numérique des termes du second ordre du schéma de discrétisation, on reporte les nouvelles expressions (indiquées schéma) de (2.22a) et (2.22b) dans l'équation de base du modèle (équation (2.7) de la crue diffusante). Les dérivées partielles exactes de  $Q$  vérifient l'équation (2.7) donc on obtient l'erreur  $e_1$  commise par le schéma :

$$e_1 = \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \cdot \frac{\Delta t}{2} + C \cdot \left[ (2\lambda - 1) \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x}{2} + \lambda \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} \cdot \Delta t \right] + O(\Delta^2)$$

Afin d'interpréter cet écart entre la solution vraie et la solution du schéma numérique, on calcule la *diffusion numérique* qui est le terme facteur de  $\partial^2 Q / \partial x^2$ , lorsqu'on exprime, par développements de Taylor au deuxième ordre, toutes les dérivées partielles contenues dans  $e_1$  en fonction de  $\partial^2 Q / \partial x^2$ .

Au second ordre, on peut en effet écrire :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left[ -C \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \right] = -C \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} \right] = C^2 \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + O(\Delta^2)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left[ -C \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \right] = -C \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + O(\Delta^2)$$



Pour des pentes faibles, en revanche, le paramètre D est très grand et C reste petit. Pour des choix de  $\Delta x$  et  $\Delta t$  tel que  $\Delta x - C\Delta t$  ne soit pas trop grand, la diffusion numérique des termes du second ordre du schéma reste toujours négligeable devant D.

### Détermination des paramètres C et D

Les paramètres C et D sont calculés à l'aide des formules (2.8) et (2.10) pour chaque pas d'espace  $i$  et à chaque pas de temps de calcul  $n+1$ . Leur valeur varie entre le pas de temps  $n$  et le pas de temps  $n+1$  ce qui signifie que le système matriciel (2.23) est non-linéaire puisque les coefficients de la matrice ne sont pas constants. Pour sa résolution, le système (2.23) doit être linéarisé. Cependant, les valeurs de C et D moyennes à chaque pas de temps dépendent des valeurs à calculer  $\Delta Q((n+1)\Delta t)$ . Ceci implique une implicitation supplémentaire du schéma et éventuellement un développement limité de la célérité C comme on le verra paragraphe 2-3-3-5

### B) Solution pseudo-analytique d'Hayami

La solution analytique d'Hayami s'exprime à l'aide du produit de convolution suivant (LARIGNIER, SAUCEROTTE 1970) :

$$Q(L, t) = \int_0^t Q(0, \tau) \cdot hq(L, t-\tau) d\tau$$

$$\text{avec } hq(x, \tau) = \frac{x}{2\sqrt{\pi D_m \tau}} \cdot \exp \left[ -\frac{(x - C_m \tau)^2}{4D_m \tau} \right]$$

En tenant compte des conditions initiales de l'écoulement, et en exprimant le noyau  $hq$  (qui dépend de  $C_m$  et  $D_m$ ) sous une forme adimensionnelle, la solution d'Hayami s'écrit (LARIGNIER, SAUCEROTTE 1970), (BOCQUILLON 1978) :

$$(2.25) \quad Q(L, t) - Q(0, 0) = \int_0^t [ Q(0, t-\tau) - Q(0, 0) ] \cdot hq_{ad}(k_m, Z, \tau) \cdot d\tau \quad \text{avec}$$

$$(2.26) \quad hq_{ad}(k_m, Z, \tau) = \sqrt{\frac{k_m \cdot Z}{\pi \tau^3}} \cdot \exp \left[ Z \cdot \left[ 2 - \frac{k_m}{\tau} - \frac{\tau}{k_m} \right] \right] = hq(L, \tau)$$

où les nombres  $k_m$  et  $Z$  ont pour expression :

$$Z = \frac{C_m \cdot L}{4 \cdot D_m} \quad \text{et} \quad k_m = \frac{L}{C_m}$$

$Z$  est un nombre adimensionnel qui fait intervenir le rapport  $C_m/D_m$  donc la diffusivité de l'écoulement. On définira plus loin le nombre de Reynolds local  $Cr = 2 \cdot D_m / (C_m \cdot \Delta x)$ . Si on pose que le nombre de Reynolds total (sur toute la longueur  $L$  du bief) a pour expression  $R = 2 \cdot D_m / (C_m \cdot L)$ , alors le nombre adimensionnel  $Z$  s'exprime simplement en fonction du nombre de Reynolds total par la relation :

$$Z = \frac{1}{2.R}$$

Ce nombre de Reynolds total qui caractérise la diffusivité du bief n'est pas rigoureusement identique au nombre de Reynolds  $Re$  qui sert en mécanique des fluides à caractériser si les écoulements sont laminaires ou turbulents.

$km$  a la dimension d'un temps et représente la durée de propagation d'un modèle de translation simple.

On peut calculer les moments successifs du noyau  $hq$  (LARINIER, SAUCEROTTE 1970) :

$$M^{(0)} = 1 \quad (\text{le volume est conservé})$$

$$M^{(1)} = km$$

$$M^{(2)} = km^2 \cdot (1 + 1/2Z)$$

$$\sigma^2 = M^{(2)} - M^{(1)^2} = \frac{km^2}{2Z}$$

Au voisinage de  $\tau = km$ , le noyau  $hq$  tend vers une courbe de Gauss de variance  $\sigma^2$ .

Pour calculer le produit de convolution (2.25) du noyau d'HAYAMI, on est obligé de discrétiser  $hq$  et l'hydrogramme car l'intégrale ne s'exprime pas analytiquement en fonction de  $Q$  et de  $hq$ . C'est pourquoi on parle plutôt de solutions pseudo-analytiques.

Pour calculer numériquement l'intégrale (à  $\epsilon$  près) (2.25), il suffit de prendre un pas de temps suffisamment petit pour que le calcul de l'aire sous la courbe  $hq$  (pour  $t$  variant de 0 à l'infini) soit égale à 1 (à  $\epsilon$  près). Ceci peut obliger, lorsque le noyau  $hq$  est pointu, à prendre un très petit pas de temps au voisinage du maximum de la fonction  $hq$ . Si cette méthode est destinée à être utilisée à des fins opérationnelles, il est utile d'élaborer une méthode de calcul de l'aire sous la courbe  $hq$  permettant d'optimiser le temps de calcul tout en minimisant les erreurs d'interpolation.

2-2-3-2 Schémas de résolution de l'équation de l'onde cinématique

Les méthodes numériques de résolution de l'équation de l'onde cinématique (équation (2.13)) sont nombreuses. Toutefois, la diversité de ces méthodes provient plus des méthodes de calcul des paramètres que des schémas adoptés. En effet, l'un des schémas de discrétisation les plus utilisés (nous verrons au paragraphe suivant les raisons de son utilisation fréquente) est le schéma semi-explicite suivant :

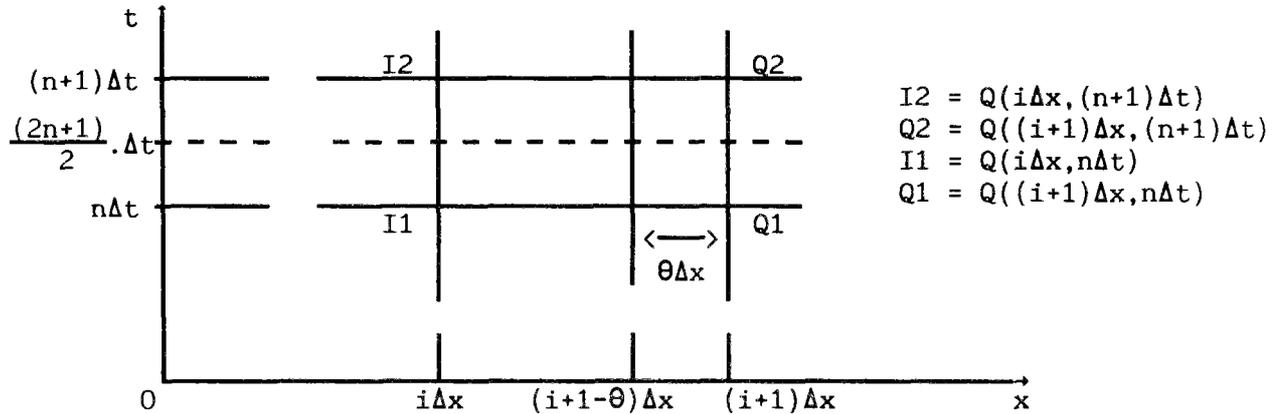


Figure 2.6

$\Delta x$  est le pas d'espace du maillage  
 $\Delta t$  est le pas de temps du maillage

A) Schéma usuel de discrétisation : solution numérique

En utilisant les notations de la figure 2.6, on choisit pour l'expression de  $\frac{\partial Q}{\partial t}$ , celle de l'équation (2.19b), (cf. §2-2-1) et pour l'expression de  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ , celle de (2.19a) avec  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.5$ . Ce schéma est un schéma semi-implicite centré dans le temps et l'espace (cf. §2-2-1).

$\Delta x$  (du schéma ci-dessus) =  $2\Delta x$  du pas d'espace de l'équation (2.19a).

Ainsi :

$$(2.27) \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_s = \theta \cdot \frac{I2 - I1}{\Delta t} + (1-\theta) \cdot \frac{Q2 - Q1}{\Delta t} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q1 - I1}{\Delta x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q2 - I2}{\Delta x} \end{array} \right.$$

En reportant ces deux expressions dans l'équation de l'onde cinématique (2.13), et lorsqu'il n'y a pas d'apports latéraux ( $q=0$ ), on obtient :

$$(2.28) \quad \frac{\theta \cdot (I2 - I1) + (1-\theta) \cdot (Q2 - Q1)}{\Delta t} + c \cdot \frac{(Q1 - I1 + Q2 - I2)}{2 \cdot \Delta x} = 0$$

qui peut encore s'écrire sous la forme :

$$(2.29) \quad Q_2 = C_1.I_1 + C_2.I_2 + C_3.Q_1 \quad \text{avec :}$$

$$(2.30) \quad \left[ \begin{array}{l} C_1 = \frac{2\theta\Delta x + C\Delta t}{2(1-\theta)\Delta x + C\Delta t} \\ C_2 = \frac{C\Delta t - 2\theta\Delta x}{2(1-\theta)\Delta x + C\Delta t} \\ C_3 = \frac{2(1-\theta)\Delta x - C\Delta t}{2(1-\theta)\Delta x + C\Delta t} \end{array} \right. \quad C_1 + C_2 + C_3 = 1$$

Ce schéma semi-explicite ne nécessite que la donnée d'une condition limite amont. Cette condition limite amont donne la première valeur de  $I_2$  (pour l'abscisse  $x = 0$ ), ce qui permet de calculer immédiatement  $Q_2$  (par la relation (2.29)) et d'avancer de proche en proche dans la grille de discrétisation.

#### Conditions de stabilité

Pour que ce schéma soit stable, le pas d'espace et le pas de temps doivent vérifier la condition :  $C.\Delta t \leq \Delta x$ .

De plus :

La plage  $0 \leq \theta \leq 0.5$  correspond à un schéma stable

La plage  $0.5 < \theta \leq 1$  correspond à un schéma instable

On verra au paragraphe 2-3-1 qu'on peut faire décroître  $\theta$  jusqu'à -0.5 en gardant un schéma stable.

#### Diffusion numérique des termes du second ordre

Regardons, comme pour le modèle VPD, la diffusion numérique des termes du second ordre de ce schéma.

On substitue dans les expressions des dérivées  $\partial Q/\partial t$  et  $\partial Q/\partial x$ , les valeurs obtenues par développement de Taylor des débits  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$  (cf. paragraphe 2-2-1 ou 2-2-3-1 pour l'expression de ces développements).

Pour  $\partial Q/\partial t|_s$ , on obtient :

$$\Delta t \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_s = \frac{\partial Q}{\partial t} \cdot \Delta t + \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + (1 - \theta) \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} \cdot \Delta x \Delta t + O(\Delta^2)$$

Pour  $\partial Q/\partial x|_s$ , on obtient :

$$\Delta x \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_s = \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} \cdot \Delta x \Delta t + O(\Delta^2)$$

En reportant ces expressions dans l'équation de l'onde cinématique (équation (2.13)), on obtient comme pour le schéma VPD (cf. §2-2-2-1) l'expression e2 de l'erreur commise par le schéma (2.30) :

$$e_2 = \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \cdot \frac{\Delta t}{2} + (1 - \theta) \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} \cdot \Delta x + C \cdot \left[ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} \cdot \Delta t \right] + O(\Delta^2)$$

En effectuant alors, comme au paragraphe 2-2-3-1, un développement de Taylor au deuxième ordre pour exprimer toutes les dérivées partielles contenues dans  $e_2$  en fonction de  $\partial^2 Q / \partial x^2$ , on obtient :

$$e_2 = \left[ c^2 \cdot \frac{\Delta t}{2} - c \cdot (1 - \theta) \cdot \Delta x + c \cdot \left[ \frac{\Delta x}{2} - c \cdot \frac{\Delta t}{2} \right] \right] \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + O(\Delta^2)$$

ce qui se simplifie et donne finalement :

$$e_2 = \underbrace{c \cdot \Delta x \cdot \left[ \theta - \frac{1}{2} \right]}_{\text{diffusion numérique des termes du second ordre du schéma}} \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + O(\Delta^2)$$

diffusion numérique des termes du second ordre du schéma

L'équation que résout le schéma (2.30) n'est donc pas l'équation (2.13) de l'onde cinématique mais l'équation suivante :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + e_2 = 0$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = -c \cdot \Delta x \cdot \left[ \theta - \frac{1}{2} \right] \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + O(\Delta^2) = D_n \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + O(\Delta^2)$$

On retrouve apparemment le même problème que pour le schéma VPD :

- Pour  $\theta = 0.5$ , il n'y a pas de diffusion numérique des termes du second ordre.
- Pour  $\theta$  plus petit que 0.5, le schéma est stable mais les termes du second ordre introduisent une diffusion numérique dont l'expression est  $D_n = -c \cdot \Delta x \cdot (\theta - 0.5)$

Néanmoins, en théorie, les modèles cinématiques n'entraînent pas d'atténuation des débits, (contrairement aux modèles de crue diffusante type VPD), car le terme  $D \cdot \partial^2 Q / \partial x^2$  est négligé (cf. §2-1-2)

Pour  $\theta = 0.5$ , on a une translation pure de l'hydrogramme (WEINMANN, LAURENSEN 1979). Le schéma (2.27) a la particularité d'introduire une diffusion numérique lorsque  $\theta < 0.5$ . Cette diffusion est bien numérique puisque l'équation (2.13) de l'onde cinématique est en théorie une équation de transport qui n'introduit pas de diffusion hydraulique. Comme le phénomène réel de propagation de crue introduit une atténuation des débits, on s'explique aisément pourquoi le schéma (2.27) a suscité beaucoup d'intérêt.

En général, pour introduire une atténuation du débit (constatée effectivement), les auteurs jouent sur la valeur du paramètre  $\theta$  en essayant de faire correspondre l'atténuation du schéma (2.27) avec l'atténuation des débits effectivement constatée sur des crues réelles.

CUNGE a découvert (CUNGE 1969) qu'il était possible de corrélérer cette atténuation arbitraire (non reliée à une signification physique) à l'atténuation obtenue par un modèle de crue diffusante. Pour cela, CUNGE a simplement identifié l'expression de la diffusion numérique calculée ci-dessus avec l'expression de la diffusion d'un modèle de crue diffusante.

$$\text{On pose donc : } D_n = -C.\Delta x.(\theta - 0.5) = D$$

On peut donc avec le schéma (2.30) résoudre une équation de type crue diffusante où la diffusion  $D$  est remplacée par la diffusion numérique  $D_n$  si on peut déterminer  $\theta$  et  $\Delta x$  tels que  $D_n = D$ . Pour permettre cette identification, on calcule  $\theta$  par la relation :

$$(2.31) \quad \theta = \frac{1}{2} - \frac{D}{C.\Delta x}$$

Ainsi, nous venons de redémontrer (ce que CUNGE a démontré pour la première fois en 1969) que si on choisit  $\theta$  à l'aide de la relation (2.31), la diffusion numérique des termes du second ordre du schéma (2.27) de résolution de l'équation de l'onde cinématique est égale (au second ordre près) au paramètre de diffusion hydraulique  $D$  des modèles de crue diffusante. On donne ainsi une signification physique à l'atténuation numérique obtenue. Il est néanmoins nécessaire que  $\theta$  reste entre  $-0.5$  et  $0.5$ , comme on le confirmera au paragraphe 2-3-1.

Si on remplace  $D$  par son expression (2.10), on obtient la forme bien connue de l'équation (2.31) :

$$(2.31) \quad \theta = \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 - \frac{Q}{B.I.C.\Delta x} \right] \quad \text{en restant attentif à : } -0.5 \leq \theta < 0.5$$

#### Détermination des coefficients

Comme nous l'avons indiqué au paragraphe 2-1-2-2, résoudre l'équation de l'onde cinématique peut se faire en considérant que la célérité  $C$  de l'onde est constante, ce qui entraîne des coefficients  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  constants. Dans ce cas, on choisit généralement aussi  $\theta$  constant.

On peut aussi avant chaque calcul de  $Q_2$ , déterminer une célérité instantanée de propagation sur la maille définie par  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$  (supposée cependant constante sur toute cette maille). Cette célérité  $C$  doit être normalement calculée en prenant la moyenne des 4 débits  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $Q_1$ , et  $Q_2$  de la maille de calcul.  $Q_2$  étant inconnu, la détermination de  $C$  exige un calcul itératif ou une méthode simplifiée permettant d'approximer une valeur correcte de  $C$  uniquement en fonction des débits connus  $I_1$ ,  $I_2$ , et  $Q_1$ .

Après avoir déterminé la célérité  $C$ , on calcule les coefficients  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  avec les formules (2.30) ce qui donne le débit  $Q_2$  par l'équation (2.29). Si on utilise la formule (2.31) pour la détermination de  $\theta$ , on détermine les paramètres intervenant dans la formule (2.31) (qui sont les grandeurs  $Q$ ,  $B$ , et  $C$ ) de la même manière que la célérité  $C$ .

## B) Formulation adimensionnelle du schéma (2.30)

Le schéma (2.30) présenté précédemment peut être écrit sous forme adimensionnelle en introduisant les nombres adimensionnels  $Co$  et  $Cr$ .

$$Co = \frac{C\Delta t}{\Delta x} \quad Co \text{ est appelé le nombre de courant}$$

$$Cr = \frac{2D}{C\Delta x} = \frac{Q}{B.I.C.\Delta x}$$

$Cr$  peut être qualifié de *nombre de Reynolds local*. Il caractérise la diffusivité du schéma (PONCE, THEURER 1982).

La relation (2.31) qui permet l'identification de la diffusion numérique des termes du second ordre du schéma (2.30) à la diffusion hydraulique  $D$  des modèles de crue diffusante peut s'écrire :

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot (1 - Cr) \quad (2.31a)$$

En utilisant le nombre de courant  $Co$  et en substituant  $\theta$  par son expression (2.31a), il vient immédiatement:

$$(2.30a) \quad \left[ \begin{array}{l} C1 = \frac{1 - Cr + Co}{1 + Cr + Co} \\ C2 = \frac{-1 + Cr + Co}{1 + Cr + Co} \\ C3 = \frac{1 + Cr - Co}{1 + Cr + Co} \end{array} \right. \quad C1 + C2 + C3 = 1$$

Cette formulation adimensionnelle du schéma (2.30) est très pratique car on verra au paragraphe 2-3-1 que les critères que doivent vérifier  $\Delta x$  et  $\Delta t$  peuvent être exprimés en fonction des nombres adimensionnels  $Co$  et  $Cr$  (PONCE, THEURER 1982)

## C) Solution pseudo-analytique

Une variante du schéma précédent consiste à garder des fonctions continues par rapport au temps et à discrétiser uniquement les débits par rapport à  $x$ . On notera  $Ic(t)$ , la fonction  $Q(i\Delta x, t)$  et  $Qc(t)$ , la fonction  $Q((i+1)\Delta x, t)$ . Avec le même schéma (2.27) que précédemment pour le calcul de  $\partial Q / \partial x$ , on exprime  $\partial Q / \partial t$  avec la relation :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \theta \cdot \frac{dIc}{dt} + (1-\theta) \cdot \frac{dQc}{dt}$$

En reportant dans (2.13), on obtient l'équation (KOUSSIS 1976) :

$$(2.32) \quad \frac{dQc}{dt} + \frac{C}{\Delta x(1-\theta)} \cdot Qc = \frac{C}{\Delta x(1-\theta)} \cdot Ic - \frac{\theta}{1-\theta} \cdot \frac{dIc}{dt}$$

Cette équation est parfois appelée équation généralisée des modèles d'onde cinématique (WEINMANN, LAURENSEN 1979). On peut la discrétiser pour retomber sur une solution entièrement numérique si on choisit par exemple :

$$\frac{dQc}{dt} = \frac{Q2 - Q1}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \frac{dIc}{dt} = \frac{I2 - I1}{\Delta t}$$

Alors en reportant ces expressions dans (2.32), on obtient l'équation (2.29) avec les coefficients :

$$(2.33) \quad \left[ \begin{array}{l} C1 = \frac{\theta \Delta x + C \cdot \Delta t}{(1-\theta) \Delta x + C \cdot \Delta t} \\ C2 = \frac{C \cdot \Delta t - \theta \Delta x}{(1-\theta) \Delta x + C \cdot \Delta t} \\ C3 = \frac{(1-\theta) \Delta x - C \cdot \Delta t}{(1-\theta) \Delta x + C \cdot \Delta t} \end{array} \right. \quad C1 + C2 + C3 = 1$$

L'équation (2.32) peut aussi être résolue comme une équation différentielle ordinaire du premier ordre avec résolution de l'équation sans second membre puis variation de la constante. Les calculs (KOUSSIS 1976) montrent que la solution obtenue est analytique mais fait intervenir une intégrale que l'on calcule numériquement, ce qui permet de retrouver une équation de type (2.29) avec C1, C2, et C3 qui ont pour valeur :

$$(2.34) \quad \left[ \begin{array}{l} C1 = \frac{\Delta x}{C \cdot \Delta t} \cdot (1 - C3) - C3 \\ C2 = 1 - \frac{\Delta x}{C \cdot \Delta t} \cdot (1 - C3) \\ C3 = \exp \left[ - \frac{C \Delta t}{\Delta x (1-\theta)} \right] \end{array} \right. \quad \text{avec toujours : } C1 + C2 + C3 = 1$$

Ce mode d'intégration bien que pseudo-analytique fait intervenir un pas d'espace et un pas de temps. Au niveau de la formulation (2.34) du schéma, il perd son caractère analytique et est soumis comme les schémas numériques à des conditions de stabilité. De plus, comme le schéma (2.30), il introduit une diffusion numérique. KOUSSIS a montré que la diffusion numérique des termes du second ordre du schéma (2.34) pouvait être identifiée à la diffusion hydraulique D des modèles de crue diffusante si le paramètre de pondération  $\theta$  était calculé par la relation suivante (KOUSSIS 1976) :

$$(2.35) \quad \theta = 1 - \frac{Co}{\ln \left[ \frac{Cr + 1 + Co}{Cr + 1 - Co} \right]} \quad \text{avec toujours :}$$

$$Co = C \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{et} \quad Cr = \frac{Q}{I \cdot B \cdot C \cdot \Delta x}$$

Co est le nombre de courant et Cr est le nombre de Reynolds local précédemment défini.

Il existe d'autres méthodes de résolution de (2.32) qui permettent d'aboutir à des coefficients  $C_1$ ,  $C_2$ , et  $C_3$  différents (THIBAUT 1979). Ces méthodes conduisent cependant toutes aux mêmes types de particularités que celles des schémas que nous avons présentés ci-dessus.

De même, il est possible de résoudre l'équation (2.13) de l'onde cinématique par d'autres types de schémas numériques que les schémas (2.27) résultant du maillage de la figure 2.6. Néanmoins, ces schémas ne semblent pas faire l'objet d'un intérêt particulier et n'ont pas été étudiés de manière aussi importante que les schémas présentés dans ce paragraphe.

En résumé, le schéma (2.27) de résolution de l'équation de l'onde cinématique est particulièrement intéressant :

- il introduit une diffusion numérique par l'intermédiaire du paramètre de pondération  $\theta$  (lorsque  $\theta < 0.5$ ) qui permet de reproduire l'atténuation des hydrogrammes effectivement constatée sur les crues mesurées
- on peut calculer  $\theta$  pour que la diffusion numérique des termes du second ordre du schéma soit égale (au second ordre près) à la diffusion hydraulique des modèles de crue diffusante ce qui donne une signification physique hydraulique à l'atténuation du modèle et permet de donner une signification physique au choix de la valeur du paramètre de pondération  $\theta$
- on peut en trouver des solutions pseudo-analytiques intéressantes.

Nous verrons en effet dans le paragraphe suivant, que la formulation pseudo-analytique du schéma (2.27) permet le lien entre les modèles d'onde cinématique et les modèles de type Muskingum.

### 2-2-3-3 Schémas de résolution des modèles de stock

Les schémas d'intégration possibles de l'équation (2.17) des modèles Muskingum (cf. §2-1-3-2) sont beaucoup moins nombreux que les schémas d'intégration possibles des modèles mécanistes simplifiés puisque seules, les dérivées temporelles sont à discrétiser dans l'équation (2.17) et qu'il n'y a pas de dérivées partielles par rapport à  $x$ . Ceci signifie entre autres que la terminologie : schéma implicite et schéma explicite ne s'applique pas aux modèles de type Muskingum. Avant de présenter les 3 modes d'intégration les plus couramment utilisés de l'équation (2.17), nous allons examiner les rapprochements dont nous avons déjà parlé entre les modèles de type Muskingum et les modèles mécanistes simplifiés de l'onde cinématique.

#### A) Identification numérique des modèles d'onde cinématique avec les modèles de type Muskingum

Avec la terminologie utilisée dans le paragraphe précédent pour le modèle de Koussis (équation (2.32)), nous pouvons écrire pour un tronçon de longueur  $\Delta x$  :

$$Q_e(t) = I_c(t) \quad \text{et} \quad Q_s(t) = Q_c(t)$$

L'équation (2.17) de Muskingum peut alors s'écrire :

$$k \cdot \alpha \cdot \frac{dI_c}{dt} + k \cdot (1-\alpha) \cdot \frac{dQ_c}{dt} = I_c - Q_c$$

soit encore :

$$(2.36) \quad \frac{dQ_c}{dt} + \frac{1}{k \cdot (1-\alpha)} \cdot Q_c = \frac{1}{k \cdot (1-\alpha)} \cdot I_c - \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{dI_c}{dt}$$

L'équation (2.36) est identique dans sa formulation numérique à l'équation (2.32) du schéma d'intégration de l'équation de l'onde cinématique de Koussis s'il est possible de vérifier :

$$\frac{1}{k \cdot (1-\alpha)} = \frac{C}{\Delta x \cdot (1-\theta)} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\theta}{1-\theta}$$

Ceci est possible si l'on choisit par exemple :

$$k = \frac{\Delta x}{C} \quad \text{et} \quad \alpha = \theta$$

Outre le fait de rendre formellement identiques les équations (2.32) et (2.36) ce choix permet de relier la durée de stockage  $k$  dans le réservoir à la célérité de propagation de l'onde cinématique :  $C$ .

$k$  prend donc une signification hydraulique. En effet, la durée de stockage d'un débit se propageant à la célérité  $C$  sur la distance  $\Delta x$  est bien  $\Delta x/C$ . Ainsi, ce rapprochement des modèles Muskingum avec les modèles d'onde cinématique permet de déterminer  $k$  à partir de la célérité  $C$ , c'est à dire, permet une possibilité de calcul de  $k$  à partir des formules qui sont utilisées pour calculer  $C$ , alors qu'en théorie,  $k$  est déterminé à partir d'hydrogrammes mesurés, ou à partir de concepts comportementaux sur le fonctionnement d'un collecteur assimilé à un réservoir.

### Conclusion

La résolution numérique des modèles Muskingum peut donc être identifiée formellement à la résolution numérique de l'équation de l'onde cinématique. Ainsi, la formulation du modèle général d'onde cinématique due à KOUSSIS qui considère une variation discrète en  $x$  et continue en  $t$  est identifiable à la formulation de l'équation différentielle générale du modèle de Muskingum, lorsqu'on relie les paramètres des deux modèles par les relations :

$$k = \Delta x / C \quad \text{et} \quad \alpha = \theta$$

De plus, on peut résoudre numériquement l'équation des modèles de type Muskingum en utilisant, comme pour l'onde cinématique, la méthode de CUNGE (c'est-à-dire, en calculant  $\alpha = \theta$  par la relation (2.31) ou (2.35)) qui permet de rendre équivalent, au second ordre près, le modèle de Muskingum à un modèle de crue diffusante. Ces modèles de Muskingum équivalents au second ordre près, aux modèles de crue diffusante sont appelés les modèles de Muskingum-Cunge.

En d'autres termes, les modèles de Muskingum qui, au départ ne peuvent représenter un phénomène de propagation d'onde peuvent prendre un caractère "hydraulique" lors de leur résolution numérique à l'aide de schémas de discrétisation particuliers qui introduisent une diffusion numérique artificielle. Ces schémas, médiocres vis-à-vis de la résolution exacte de l'équation des modèles Muskingum (puisqu'ils ne sont pas consistants) conduisent à une bonne approximation (au second ordre) des solutions d'une autre équation différentielle du second ordre (la crue diffusante) représentant le phénomène hydraulique de propagation.

Cet exemple illustre bien les dangers de la modélisation numérique, d'aucuns pouvant croire que le modèle de départ (modèle Muskingum) représentait effectivement un phénomène de propagation et qu'on pouvait tirer des informations de sa structure, alors que seule, sa résolution numérique, inadéquate pour le modèle, pouvait approcher une signification physique.

Pour la suite de notre exposé, nous ne parlerons plus de modèles mécanistes simplifiés ou de modèles de stock mais simplement de **modèles simplifiés** pour désigner l'ensemble de ces deux catégories de modèles, étant donné les identifications numériques généralement adoptées pour trouver les solutions des équations.

### B) Quelques schémas numériques dérivés de l'identification précédente

Nous utiliserons l'analogie établie précédemment pour établir les schémas usuels d'intégration de l'équation (2.17).

Prenons les notations du schéma (2.27) :

$$\left[ \begin{array}{l} Q_s(t+\Delta t) = Q_2 \\ Q_s(t) = Q_1 \\ Q_e(t+\Delta t) = I_2 \\ Q_e(t) = I_1 \end{array} \right.$$

Avec ces notations, les solutions numériques des schémas de résolution de l'équation (2.17) peuvent s'écrire, comme pour le schéma (2.27) des modèles cinématiques :

$$Q_2 = C_1.I_1 + C_2.I_2 + C_3.Q_1 \quad (\text{cf. équation 2.29})$$

Selon la manière d'exprimer les dérivées temporelles  $dQ_s/dt$  et  $dQ_e/dt$  ainsi que  $Q_e$  et  $Q_s$ , les paramètres  $C_1$ ,  $C_2$ , et  $C_3$  de l'équation (2.29) auront une expression différente. Nous donnons ci-après, les expressions les plus couramment utilisées, dérivées des expressions des paramètres  $C_1$ ,  $C_2$ , et  $C_3$  des modèles cinématiques.

#### \*) Modèle pseudo-analytique de Koussis

L'identité des équations (2.17) et (2.32) nous permet de connaître déjà une série de solutions des modèles Muskingum. Par exemple, la solution du modèle de Koussis précédent pour les modèles Muskingum s'écrit :

$$(2.37) \quad \left[ \begin{array}{l} C_1 = \frac{k}{\Delta t} \cdot (1 - C_3) - C_3 \\ C_2 = 1 - \frac{k}{\Delta t} \cdot (1 - C_3) \\ C_3 = \exp\left[-\frac{\Delta t}{k \cdot (1-\alpha)}\right] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{avec toujours : } C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ (2.37) \text{ est équivalent à (2.34)} \end{array}$$

Si on choisit  $k = \Delta x/C$  et  $\alpha = \theta$ , alors, de même que pour le schéma (2.34), si  $\theta$  est calculé par (2.35), la diffusion numérique des termes du second ordre de (2.37) est égale à la diffusion hydraulique  $D$  des modèles de crue diffusante.

#### \*\*\*) Solution numérique : premier mode usuel de discrétisation

En utilisant toujours les notations du schéma (2.27), on exprime les dérivées par rapport à  $t$  de la manière suivante :

$$\frac{dQ_e}{dt} = \frac{Q_e(t+\Delta t) - Q_e(t)}{\Delta t} = \frac{I_2 - I_1}{\Delta t}$$

$$\frac{dQ_s}{dt} = \frac{Q_s(t+\Delta t) - Q_s(t)}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{\Delta t}$$

Alors en reportant ces expressions dans (2.17), on obtient l'équation (2.29) avec les coefficients :

$$(2.38) \quad \left[ \begin{array}{l} C_1 = \frac{k\alpha + \Delta t}{k(1-\alpha) + \Delta t} \\ C_2 = \frac{\Delta t - \alpha k}{k(1-\alpha) + \Delta t} \\ C_3 = \frac{k(1-\alpha) - \Delta t}{k(1-\alpha) + \Delta t} \end{array} \right. \quad C_1 + C_2 + C_3 = 1$$

\*\*\*) Deuxième mode usuel de discrétisation

Dans le schéma précédent, les dérivées  $dQ_s/dt$  et  $dQ_e/dt$  sont calculées par un schéma décentré, c'est à dire que l'approximation est du premier ordre. Pour avoir une meilleure expression de ces dérivées, c'est à dire, une approximation de ces dérivées au second ordre, il est nécessaire de prendre un schéma centré. Les expressions font alors intervenir deux mailles ou deux demi-mailles si l'on souhaite garder les conventions des schémas précédents. On écrit ainsi l'équation (2.17) pour le temps  $t+\Delta t/2$ . Les expressions de  $dQ_e/dt$ ,  $dQ_s/dt$ ,  $Q_e$ , et  $Q_s$  sont donc :

$$\begin{aligned} \frac{dQ_e}{dt}(t+\Delta t/2) &= \frac{Q_e(t+\Delta t) - Q_e(t)}{\Delta t} & ; & & Q_e(t+\Delta t/2) &= \frac{Q_e(t+\Delta t) + Q_e(t)}{2} \\ \frac{dQ_s}{dt}(t+\Delta t/2) &= \frac{Q_s(t+\Delta t) - Q_s(t)}{\Delta t} & ; & & Q_s(t+\Delta t/2) &= \frac{Q_s(t+\Delta t) + Q_s(t)}{2} \end{aligned}$$

En utilisant encore les notations du schéma (2.27) et en reportant les expressions ci-dessus dans l'équation (2.17), on obtient l'équation (2.29) avec les coefficients :

$$(2.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{2\alpha k + \Delta t}{2(1-\alpha)k + \Delta t} \\ C_2 = \frac{\Delta t - 2\alpha k}{2(1-\alpha)k + \Delta t} \\ C_3 = \frac{2(1-\alpha)k - \Delta t}{2(1-\alpha)k + \Delta t} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ (2.39) \text{ est équivalent à (2.30)} \end{array}$$

Si on choisi  $k = \Delta x/C$  et  $\alpha = \theta$ , alors, de même que pour le schéma (2.30), si  $\theta$  est calculé par (2.31), la diffusion numérique des termes du second ordre de (2.39) est égale à la diffusion hydraulique des modèles de crue diffusante.

\*\*\*\*) Variante du modèle (2.39) pour l'assainissement

Nous verrons dans le chapitre 2-3 que certains auteurs recommandent de choisir, pour les modèles cinématiques :  $\Delta t$  proche de  $k = \Delta x/C$

Les contraintes que doivent respecter  $\Delta x$  et  $\Delta t$  que nous présenterons au paragraphe 2-3-1 obligent :

- à prendre un pas d'espace grand pour que l'identification de la diffusion numérique du schéma (2.39) à la diffusion hydraulique des modèles de crue diffusante soit possible,
- à choisir un pas de temps petit (en raison de la forte variabilité des hydrogrammes en réseau d'assainissement).

Ainsi, il est souvent difficile de satisfaire  $\Delta t \approx \Delta x/C$ . C'est pourquoi CUNGE et CAYLA ont cherché une astuce permettant d'utiliser le schéma (2.39) avec un pas d'espace "grand" (donc une durée de propagation  $k$  grande) et un pas de temps de calcul beaucoup plus petit que  $k$  (donc plus petit que le pas de temps  $\Delta t$  du schéma (2.39)).

On commence par choisir  $C_0 = 1$ , (i.e  $\Delta t = \Delta x/C = k$ ). On utilise de plus  $\alpha = \theta$  qui permet de pouvoir identifier la diffusion numérique des termes du second ordre du schéma à la diffusion hydraulique  $D$ . Le système (2.39) s'écrit alors de la manière simplifiée suivante :

$$(2.40) \quad \left[ \begin{array}{l} C_1 = \frac{2\theta + 1}{3 - 2\theta} \\ C_2 = \frac{1 - 2\theta}{3 - 2\theta} \\ C_3 = \frac{1 - 2\theta}{3 - 2\theta} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ (2.40) = (2.39) \text{ avec } \Delta t = k \end{array}$$

En utilisant la formulation adimensionnelle du schéma (2.30a), (2.40) peut encore s'écrire très simplement :

$$(2.40a) \quad \left[ \begin{array}{l} C_1 = \frac{2 - Cr}{2 + Cr} \\ C_2 = \frac{Cr}{2 + Cr} \\ C_3 = \frac{Cr}{2 + Cr} \end{array} \right. \quad C_1 + C_2 + C_3 = 1$$

où  $Cr$  est le nombre de Reynolds local.

Pour progresser dans le calcul, CUNGE propose de choisir un sous pas de temps de calcul  $\delta t$  très inférieur à  $k$  et de calculer  $Q_s(t_1 + \delta t)$  de la manière suivante (CUNGE, CAYLA 1980) :

On suppose que le calcul est déjà effectué jusqu'au temps  $t_1$ . On utilise l'équation (2.29) (qui est vraie pour tout  $t$ ), pour calculer  $Q_s$  en écrivant :

$$Q_s(t_1 + \delta t) = C_1.Q_e(t_1 + \delta t - k(t_1)) + C_2.Q_e(t_1 + \delta t) + C_3.Q_s(t_1 + \delta t - k(t_1))$$

Ce calcul est possible pourvu qu'on puisse déterminer les valeurs de  $Q_e$  aux temps :  $t_1 + \delta t - k(t_1)$  et aux temps :  $t_1 + \delta t$

Il faut aussi déterminer la valeur de  $Q_s$  aux temps :  
 $t_1 + \delta t - k(t_1) \leq t_1$  puisque  $\delta t < k$

Le débit  $Q_e$  est en général connu par valeurs discrètes aux points  $n\delta t$  ( $1 \leq n \leq N$ ). De même,  $Q_s$  est calculé uniquement aux temps multiples de  $\delta t$  et est connu (car précédemment calculé) aux temps  $(n-1).\delta t$  et  $n.\delta t$ . La résolution de l'équation (2.29) de  $\delta t$  en  $\delta t$  est donc possible mais exige d'effectuer des interpolations de  $Q_e$  et  $Q_s$  pour obtenir leur valeur au temps  $t_1 + \delta t - k(t_1)$  non nécessairement multiple de  $\delta t$ .

Ceci conduit à une perte du contrôle de la conservation des volumes car les valeurs interpolées sont des valeurs instantanées et non plus des valeurs moyennes sur  $\delta t$ . De plus, les interpolations nécessaires au changement de base de temps entraînent des phénomènes de lissage.

### Détermination des paramètres

Le paramètre  $k$  du modèle est pris variable ce qui entraîne un pas de temps de discrétisation variable (puisque  $k = \Delta t$ ).

On calcule de plus  $\theta$  (en vérifiant que  $-0.5 \leq \theta \leq 0.5$ ) à l'aide de la relation (2.31) qui rend la diffusion numérique de ce schéma égale au second ordre près à la diffusion hydraulique des modèles de crue diffusante. On calcule des nouveaux coefficients  $C_1, C_2, C_3$  à chaque sous pas de temps  $\Delta t$ .

Les conditions de stabilité sont a priori toujours respectées puisque  $C_0 = 1$  (voir le paragraphe suivant 2-3-1).

Le choix de  $\Delta t$  doit se faire en fonction de la variabilité de l'hydrogramme amont (voir le paragraphe 2-3-1-4).

Ce modèle, variante du schéma (2.39) est parfois appelé modèle Muskingum Modifié (CUNGE, CAYLA 1980).

Le module de simulation des écoulements en réseau du programme RERAM (STU 1979) est construit sur ce principe.

#### \*\*\*\*\*) Modèle de Translation simple

Nous avons déjà signalé que  $\theta = 0.5$  correspond en théorie à un modèle de translation pure. Si on prend  $\theta = 0.5$ , ceci signifie que le nombre de Reynolds local  $Cr$  est nul dans le schéma précédent (2.40) ( $Cr$  caractérise la diffusivité du schéma et  $Cr = 0$  implique une diffusivité nulle), on obtient le modèle  $C_1 = 1, C_2 = C_3 = 0$ .

Ceci conduit donc au modèle très simple :

$$Q_s(t+\Delta t) = Q_e(t)$$

Pour (2.40), nous avons fixé  $\Delta t = \Delta x/C = k$ . On obtient ainsi la forme usuelle du modèle de translation simple qui est :

$$Q_s(t+k) = Q_e(t) \quad \text{ou encore en posant } \tau = t-k$$

$$(2.41) \quad Q_s(t) = Q_e(t-k) \quad \text{avec } t > k$$

Ce modèle est bien un modèle de translation pure (temps de translation égal  $k$ ) et le débit maximum aval est égal au débit maximum amont. C'est le plus simple des modèles de type Muskingum ou des modèles d'onde cinématique.

#### 2-2-3-4 Première classification et récapitulation

L'approche hydrodynamique permettant de construire les équations des modèles mécanistes et l'approche comportementale permettant d'élaborer les équations des modèles de stock de type Muskingum sont différentes dans "l'image" ou "l'explication" qu'elles donnent de la réalité.

Néanmoins, un choix judicieux de schémas de discrétisation de l'équation de l'onde cinématique et des modèles Muskingum permet de rendre numériquement identique ces 2 types de modèle. De plus, l'application de méthodes de résolution non-consistantes permet de résoudre au second ordre près une équation de crue diffusante. La méthode de résolution consiste alors à piloter la diffusion numérique de ces modèles (cinématiques et Muskingum) pour la rendre égale à la diffusion hydraulique  $D$  de l'équation de la crue diffusante.

Les schémas (2.37), (2.38) et (2.39) de résolution des modèles de Muskingum étant, comme nous l'avons montré numériquement équivalents aux schémas (2.33), (2.34) et (2.30) de résolution de l'équation de l'onde cinématique, nous n'en parlerons plus pour la suite de notre exposé.

Lorsqu'on parlera du schéma (2.30), il s'agira en réalité des schémas (2.30) et (2.39). De même pour les schémas (2.34) et (2.37), on parlera uniquement de (2.34) et pour les schémas (2.33) et (2.38), uniquement de (2.33).

On peut conserver la terminologie (approche comportementale ou approche mécaniste) en utilisant la manière de déterminer les paramètres.

En effet, pour les modèles mécanistes simplifiés, les équations issues de la mécanique ne suffisent pas à caractériser l'écoulement, et doivent être complétées par des lois empiriques, faisant appel à une représentation globale du phénomène (telle que par exemple, la relation permettant le calcul des pertes de charge  $J$ ). De même, la détermination des valeurs des paramètres des modèles de stock peut faire intervenir des considérations mécanistes.

Si le calcul des paramètres se fait à l'aide de données caractéristiques du canal (telles que la forme des sections, la pente du fond, la rugosité des parois...) et des caractéristiques physiques de l'écoulement, on pourra alors parler de calage mécaniste.

Si le calcul des paramètres se fait à l'aide des mesures sur le débit d'entrée et le débit de sortie de crues passées, on aura alors un calage global et on pourra utiliser la terminologie : "modèle de stock" (WEINMANN, LAURENSEN 1979).

Le tableau 2.2 ci-après permettra au lecteur de retrouver rapidement la signification des paramètres étudiés dans le chapitre suivant 2-3.

	Crue diffusante	Onde cinématique	Muskingum
célérité (C)	$\frac{dQ}{dS} + Tf$	$\frac{dQ}{dS}$	*****
durée de propagation (k)	*****	*****	souvent calculée par : $\frac{\Delta x}{C}$
célérité moyenne (Cm)	Pour les modèles linéaires		*****
durée moyenne de propagation (km)	*****	*****	éventuellement calculée par : $\frac{L}{Cm}$
coefficient de diffusion (D)	$\frac{Q}{2IB}$	*****	*****
coefficient de pondération ( $\theta$ )	*****	introduit une diffusion numérique qui peut être identifiée à la diffusion hydraulique (D)	
coefficient moyen de diffusion (Dm)	Pour les modèles linéaires	*****	*****
coefficient moyen de pondération ( $\theta_m$ )	*****	introduit une diffusion numérique moyenne sur toute la durée de la crue	

Tableau 2.2

### 2-2-3-5 Conclusions

Nous avons présenté les principaux modèles permettant la simulation des écoulements transitoires à surface libre.

Pour les modèles simplifiés, nous avons présenté 3 équations :

- l'équation de la crue diffusante
- l'équation de l'onde cinématique
- l'équation des modèles Muskingum

Nous avons examiné dans le chapitre 2-1, les conditions de validité de ces équations, mais nous n'avons pas pu déterminer précisément les domaines d'application. Nous avons présenté par ailleurs plusieurs méthodes de résolution des équations qui conduisent, dans certains cas, à une modification du contenu physique des équations de départ. Pour les méthodes numériques présentées, nous avons examiné les conditions de stabilité numérique et la consistance des schémas.

Il reste plusieurs points à éclaircir :

- les méthodes de calage des paramètres présentés dans le tableau 2.2 et les conditions que doivent vérifier certains des paramètres pour que les conditions de stabilité et de consistance (ou de non-consistance) des schémas soient assurés (c'est ce que nous proposons dans le chapitre 2-3) ;
- les différences entre les méthodes de résolution et l'intérêt de disposer de tant de méthodes (c'est ce que nous proposons dans le chapitre 3-2) ;
- les différences entre les modèles et l'influence de négliger les termes d'inertie de l'équation dynamique de Saint-Venant pour modéliser les écoulements dans les réseaux d'assainissement (c'est ce que nous proposons dans le chapitre 3-3).

## 2-3 LES PARAMETRES DES MODELES SIMPLIFIES

Après avoir étudié les différents schémas d'intégration des modèles simplifiés, nous avons résumé dans le tableau 2.2 les paramètres utilisés par ces modèles. Nous étudierons dans ce chapitre les méthodes de calcul et de choix de ces paramètres.

Les auteurs sont nombreux à avoir abordé le problème du choix du pas d'espace et du pas de temps des modèles cinématiques (schéma (2.27)) et des modèles Muskingum. Dans les paragraphes 2-3-1 et 2-3-2, nous donnerons les principales conditions que doivent respecter les paramètres  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  et  $\theta$ .

Pour l'assainissement, les alternatives possibles de calcul des paramètres  $C$ ,  $k$ ,  $C_m$ ,  $k_m$ ,  $D$ , et  $D_m$  sont nombreuses. Nous examinerons dans les paragraphes 2-3-3 à 2-3-5 les méthodes permettant le calcul de ces paramètres.

Nous différencierons les paramètres internes et externes.

On appellera paramètre **interne**, un paramètre choisi (ou tout au moins sa méthode de calcul) par l'utilisateur au moment de la conception du programme. Les paramètres internes ne peuvent plus être modifiés par la suite sans modifier le programme lui-même.

Par opposition, on appellera paramètre **externe**, un paramètre choisi au moment de l'introduction des données et qui peut être ajusté (on parle alors de calage) par l'utilisateur selon divers critères. Nous signalerons les méthodes qui relèvent de l'une ou de l'autre de ces définitions.

Un même paramètre (par exemple, le paramètre  $k$ ) peut être soit externe (Muskingum calé par des mesures), soit interne (Muskingum-Cunge où  $k$  est calculé par  $k = \Delta x / C$ ).

### 2-3-1 LE PAS D'ESPACE $\Delta x$ ET LE PAS DE TEMPS $\Delta t$

$\Delta x$  et  $\Delta t$  sont des paramètres de calage externe lorsqu'ils sont choisis par l'utilisateur avant chaque utilisation. Leur choix est soumis à certaines contraintes.

Le choix du paramètre  $\Delta x$  (et donc de  $\Delta t$ ) influe sur la diffusion numérique des termes du second ordre des schémas présentés aux paragraphes 2-2-3-2 et 2-2-3-3 précédents. Ce choix est effectué pour contrôler et maintenir cette diffusion non négligeable.

Le choix de  $\Delta x$  et  $\Delta t$  est donc plus délicat que pour un modèle de type VPD, où l'on est satisfait dès que la diffusion numérique est négligeable.

Nous préciserons les conditions sur  $\Delta x$  et  $\Delta t$  qui s'appliquent à tous les modèles et celles qui ne s'appliquent qu'aux modèles cinématiques issus du schéma (2.27) et aux schémas Muskingum.

Nous présenterons dans le paragraphe 2-3-1-1, les conditions concernant uniquement  $\Delta x$  (indépendamment du choix de  $\Delta t$ ), dans le paragraphe 2-3-1-2, les conditions concernant uniquement  $\Delta t$  (indépendamment du choix de  $\Delta x$ ), et dans le paragraphe 2-3-1-3, les conditions reliant  $\Delta x$  à  $\Delta t$ .

#### 2-3-1-1 Les conditions concernant uniquement $\Delta x$

##### Valeur minimale de $\Delta x$

Les premières fois où le modèle Muskingum fut utilisé,  $\Delta x$  était choisi égal à la longueur totale du bief (YEVJEVICH 1975). Prendre de grandes valeurs de  $\Delta x$  revient à considérer le modèle comme un modèle à réservoir particulier. Néanmoins, LAURENSON a montré qu'il était meilleur de découper le bief en pas d'espace si celui-ci était "long", mais que le paramètre de pondération  $\theta$  était lié au pas d'espace  $\Delta x$  et qu'il devait décroître lorsqu'on faisait décroître  $\Delta x$  (LAURENSON 1964), (WEINMANN, LAURENSON 1979).

On peut vérifier théoriquement cette constatation de LAURENSON en examinant la relation (2.31) qui permet d'identifier la diffusion numérique des modèles Muskingum à la diffusion hydraulique des modèles de crue diffusante. La relation (2.31) montre que  $\theta$  devient négatif et tend vers  $-\infty$  lorsque  $\Delta x$  décroît vers zéro. Si on suppose que des valeurs négatives de  $\theta$  ne sont pas acceptables physiquement, la relation (2.31) donne une valeur minimale pour  $\Delta x$ . (MILLER, CUNGE 1975), (WEINMANN, LAURENSON 1979).

Pour les schémas (2.30), (2.39) ou (2.40) où  $\theta$  est donné par la relation (2.31),  $\theta > 0$  entraîne l'inégalité :

$$(2.42a) \quad \Delta x > \frac{2 \cdot D}{C} \quad \text{ou encore, si on explicite } D :$$

$$(2.42b) \quad \Delta x > \frac{Q}{I \cdot B \cdot C} = \Delta x_{\min}$$

Ces inégalités s'expriment encore sous forme adimensionnelle par la condition très simple :

$$Cr \leq 1$$

Quel que soit le schéma utilisé, JONES montre que le pas d'espace minimal fait toujours intervenir le nombre de Reynolds local  $Cr$  (JONES 1981).

Si on choisit le paramètre  $\theta$  constamment égal à zéro, (pour avoir un modèle de Kalinine-Milyukov), on obtiendra un modèle Muskingum diffusant si  $\Delta x$  vérifie constamment :

$$(2.42c) \quad \Delta x = \frac{Q}{I.B.C} = \Delta x_{\min} \quad (\text{ou } Cr = 1)$$

On accepte des valeurs négatives de  $\theta$

Les critères (2.42a) et (2.42c) méritent quelques précisions. Les discussions sur les valeurs admissibles de  $\theta$  n'ont rien à voir avec la réalité physique des modèles de base et il ne s'agit là que d'affaires de calcul numérique. La question de savoir si  $\theta = 0$  constitue oui ou non une valeur limite inférieure dépend de la position qu'on adopte. Pour un modèle de stock où  $\theta$  représente une pondération sur les signaux d'entrée et de sortie, on peut admettre n'importe quelle valeur de  $\theta$  mais il ne faut pas alors chercher de signification hydraulique à cette valeur (KUNDZEWICZ, STRUPCZEWSKI 1980). En revanche, choisir une valeur négative de  $\theta$  lorsque celui-ci représente un coefficient de pondération des débits aux noeuds du schéma de discrétisation (pour les modèles cinématiques) n'est pas légitime. Or, accepter que  $\theta$  décroisse jusqu'à -0.5 par exemple donne des valeurs minimales admissibles de  $\Delta x$  deux fois plus petites que si on impose  $\theta > 0$ . En effet :

$$\theta > -0.5 \text{ entraîne } \Delta x > \frac{D}{C} \quad (\text{au lieu de } \frac{2D}{C})$$

Cette condition s'exprime encore sous les formes suivantes :

$$(2.42d) \quad \Delta x > \frac{Q}{2IBC} \quad \text{ou} \quad Cr \leq 2$$

En résumé, si on identifie la diffusion numérique des termes du second ordre du schéma (2.30) à la diffusion hydraulique  $D$ , le paramètre  $\theta$  est calculé par la relation (2.31), ce qui entraîne que  $\theta$  tend vers  $-\infty$  quand  $\Delta x$  tend vers zéro. Il est donc nécessaire de fixer une valeur minimale de  $\Delta x$  qui fixe ainsi une valeur minimale en deçà de laquelle le paramètre  $\theta$  ne peut décroître.

Choisir le paramètre de pondération  $\theta$  entre 0 et 1, c'est rester conforme à l'idée qu'on se fait de la signification d'un paramètre de pondération d'un schéma aux différences finies. Mais c'est aussi se contraindre à imposer un pas d'espace minimal plus grand que si on autorise  $\theta$  à décroître jusqu'à la valeur -0.5.

L'obligation de choisir un grand pas d'espace en assainissement (où les contraintes géométriques peuvent imposer des pas d'espaces petits) est souvent très pénalisante et peut empêcher l'identification de la diffusion des termes du second ordre à la diffusion hydraulique  $D$ . Or, on verra dans la partie 3 qu'on maîtrise parfaitement bien la "consistance" et la stabilité du schéma pour des valeurs de  $\theta$  comprises entre -0.5 et 0. Nous ne voyons donc pas de raisons légitimes à imposer 0 pour valeur minimale de  $\theta$ .

Remarquons que les conditions (2.42a) à (2.42d) ne concernent évidemment que les schémas pour lesquels la relation (2.31) est utilisée.

2-3-1-2 Les conditions concernant uniquement  $\Delta t$

Valeur maximale de  $\Delta t$

En regard de la variabilité des hydrogrammes, il apparaît expérimentalement qu'il est nécessaire de vérifier pour tous les schémas aux différences finies (PONCE, THEURER 1982) :

$$(2.43) \quad \Delta t \leq \frac{T_c}{n}$$

- $T_c$  est le temps de crue de l'hydrogramme amont, c'est-à-dire le temps mis pour passer du débit initial au débit maximal
- $n$  est un entier au moins égal à 5 (PONCE, THEURER 1982)

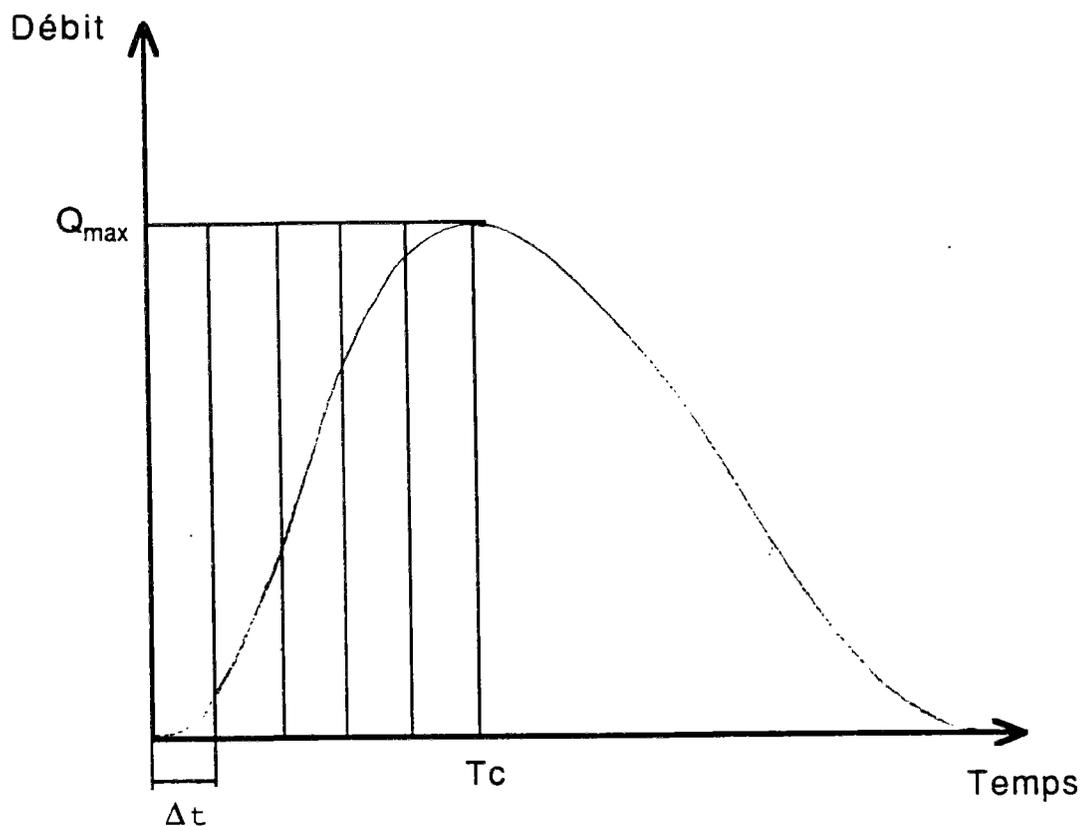


Figure 2.7a

Il est donc recommandé de découper la partie croissante de l'hydrogramme en 5 tranches au moins. On examinera en partie 3, l'importance d'une telle condition pour les conditions relatives à l'assainissement.

De manière adimensionnelle, (2.43) s'écrit :

$$(2.43a) \quad \frac{T_c}{\Delta t} > n$$

### 2-3-1-3 Les conditions communes à $\Delta x$ et $\Delta t$

#### A) Valeur maximale de $\Delta t$ et valeur minimale de $\Delta x$

Pour les modèles cinématiques présentés au chapitre 2-2, on choisit théoriquement  $\Delta x$  et  $\Delta t$  en fonction de la condition de **stabilité numérique** des schémas :

$$(2.44) \quad C_0 \leq 1 \quad \text{ce qui donne :}$$

$$\Delta t \leq \Delta x / C = \Delta t_{\max} \quad \text{ou encore :} \quad \Delta x \geq C \cdot \Delta t = \Delta x_{\min}$$

Plus  $\Delta x$  est choisi petit, plus il est nécessaire de choisir  $\Delta t$  petit pour vérifier cette inégalité.  $\Delta x$  et  $\Delta t$  doivent toujours rester proportionnels.

La question de savoir si les modèles **Muskingum** sont eux aussi soumis à la condition (2.44) qui s'applique généralement pour des équations hyperboliques (du type de l'équation des modèles cinématiques (2.13)) est apparemment toujours en suspens (PONCE, THEURER 1982). L'identité numérique entre le schéma (2.27) de discrétisation de l'onde cinématique avec l'équation (2.17) des modèles Muskingum est sans doute en partie responsable de cette confusion.

En réalité, de même que pour un choix de  $\theta$  hors des limites "hydrauliquement" admissibles, il s'agit d'un vrai faux problème. Si l'on résout le modèle de Muskingum numériquement à partir de l'équation (2.17), pour converger vers la solution numérique du modèle, avec un schéma numérique donné, il faudra bien respecter les critères de stabilité du schéma utilisé (par exemple (2.44)); mais dans ce cas, on risque d'avoir un résultat non satisfaisant par rapport à la réalité parce que le modèle de départ ne représente précisément pas cette réalité! Par suite, on peut très bien ne plus respecter ces critères et laisser "vadrouiller" la solution numérique jusqu'à ce qu'elle donne un résultat satisfaisant (mais n'ayant plus rien à voir avec le contenu physique des équations de départ).

#### B) Valeur maximale de $\Delta x$ et valeur minimale de $\Delta t$

NASH est le premier auteur à avoir constaté que les **valeurs négatives des débits** en début de crue à l'aval du bief de calcul étaient la conséquence de l'utilisation de grandes valeurs de  $\Delta x$  telles que le nombre  $C_0$  soit très petit devant 1 (NASH 1959). Ces débits négatifs ne correspondent pas au phénomène de propagation de crue. Ainsi, beaucoup d'auteurs ont cherché des conditions permettant d'éviter leur apparition (NASH 1959), (KOUSSIS 1976), (PONCE 1982).

KOUSSIS a constaté expérimentalement que la résolution spatiale du schéma devenait insuffisante et que les débits négatifs apparaissaient en début de simulation si l'on ne respectait pas la condition :

$$(2.45a) \quad C_0 > 2\theta$$

Si on exprime (2.45a) en fonction des grandeurs physiques dimensionnelles, on obtient les inégalités :

$$(2.45b) \quad \Delta x < \frac{C \cdot \Delta t}{2 \cdot \theta} = \Delta x_{\max}$$

qui s'exprime encore sous la forme (KOUSSIS 1980) :

$$(2.45c) \quad \Delta t > \frac{2 \cdot \theta \cdot \Delta x}{C} = \Delta t_{\min}$$

L'inégalité (2.45b) n'est pas définie pour  $\theta = 0$ . Puisque le problème d'une résolution spatiale pas assez fine se pose pour tous les modèles (y compris ceux pour lesquels  $\theta = 0$ ), PONCE et THEURER proposent de substituer  $\theta$  dans (2.45a) par son expression issue de l'équation (2.31). L'inégalité (2.45a) devient alors définie indépendamment de  $\theta$ . En utilisant l'expression (2.31a) au lieu de (2.31) qui exprime  $\theta$  en fonction du nombre de Reynolds local  $Cr$ , on obtient :

$$(2.45d) \quad Co + Cr > 1 \quad (\text{PONCE, THEURER 1982})$$

En utilisant (2.31), on obtient les deux inégalités :

$$(2.45e) \quad \Delta x \leq C \cdot \Delta t + \frac{Q}{IBC} = \Delta x_{\max}$$

ou encore :

$$(2.45f) \quad \Delta t > \frac{\Delta x}{C} - \frac{Q}{BIC^2} = \Delta t_{\min}$$

#### Discussion

L'expression (2.45f) qui est pourtant équivalente à (2.45e) ne satisfait pas tous les auteurs. En effet, d'après PONCE et THEURER, il n'y a pas de limite théorique inférieure pour le pas de temps  $\Delta t$  et la question d'une valeur minimale est essentiellement une question de temps de calcul et de capacité mémoire. Il faut donc plutôt considérer les conditions (2.45), qui sont toutes équivalentes, comme une **contrainte sur  $\Delta x$**  (PONCE, THEURER 1982).

Il est intéressant de constater que  $\Delta x$  est inversement proportionnel à  $Co$  et  $Cr$  et que plus  $\Delta x$  est grand, plus  $Co$  et  $Cr$  sont petits.

Plutôt que de délibérer sur le choix du paramètre sur lequel s'applique les contraintes (2.45), PONCE et THEURER ont étudiés directement l'impact du choix de  $\Delta x$  et  $\Delta t$  sur les valeurs des coefficients  $C1$ ,  $C2$ , et  $C3$ . Ils ont mis en lumière que seule, la valeur du coefficient  $C2$  (des schémas (2.30), (2.30a), (2.39) et (2.40)) était déterminante vis à vis des débits négatifs apparaissant en début de crue, et que ce coefficient  $C2$  devait impérativement être positif.

D'après les résultats qu'obtiennent PONCE et THEURER,  $C1$  et  $C3$  peuvent prendre des valeurs négatives sans générer de débits négatifs en début de crue. Ainsi, il n'est pas nécessaire de restreindre les possibilités d'utilisation des modèles cinématiques aux cas où les 3 coefficients  $C1$ ,  $C2$ , et  $C3$  sont positifs, comme le laissaient supposer MILLER et CUNGE (MILLER, CUNGE 1975).

La formulation (2.30a) présentée au paragraphe 2-2-3-2 donnant  $C1$ ,  $C2$ , et  $C3$  montre que  $C2 > 0$  entraîne  $Co + Cr > 1$  qui est justement la condition (2.45d) présentée précédemment.

PONCE et THEURER (PONCE, THEURER 1982) ont conclu que le comportement numérique du schéma (2.30a) était excellent si on pouvait vérifier la condition  $C2 > 1/3$  qui implique la condition :

$$(2.46) \quad C_0 + C_r > 2$$

Pour ne plus se préoccuper des paramètres  $\Delta x$  et  $\Delta t$  mais raisonner uniquement avec les paramètres  $C_0$  et  $C_r$ , PONCE et THEURER propose une condition obligeant  $C_0$  et  $C_r$  à ne pas être trop petits. PONCE et THEURER estiment qu'il est souhaitable de vérifier :

$$(2.47) \quad C_0.C_r > 0.3$$

Conclusion :

La condition (2.47) ne semble pas justifiée d'après les simulations que nous avons réalisées. Si on choisit le nombre de courant  $C_0$  proche de 1, la condition (2.47) impose uniquement le choix d'un paramètre  $C_r$  pas trop petit. Nous confirmerons dans le chapitre 3-2 qu'il n'y a pas d'inconvénients à utiliser les modèles cinématiques ou Muskingum avec un  $C_r$  petit.

#### 2-3-1-4 Récapitulation des conditions (2.42) à (2.46)

Il faut distinguer les conditions de PONCE et THEURER de celles des autres auteurs.

Posons :

$$\Delta x_{C_r} = \frac{Q}{I.B.C} \quad \text{et} \quad \Delta x_{C_0} = C.\Delta t$$

$\Delta x_{C_0}$  est la longueur parcourue par la crue en un pas de temps ;

$\Delta x_{C_r}$  est la longueur caractéristique du bief fonction du frottement et de la forme de la section.

Pour  $\Delta x$ , on peut retenir que les conditions (2.42d) et (2.46a) de PONCE et THEURER entraînent :

$$(2.48a) \quad \Delta x_{C_r} \leq 2\Delta x \leq \Delta x_{C_0} + \Delta x_{C_r}$$

Si on suppose toujours que  $\theta$  peut décroître jusqu'à -0.5 mais qu'on admette suffisante, la condition  $C_0 + C_r > 1$  qui garantit la non-apparition des débits négatifs (ce que nous avons constaté en partie 3 être une bonne solution), on obtient :

$$(2.48b) \quad \Delta x_{C_r} \leq 2\Delta x \leq 2(\Delta x_{C_0} + \Delta x_{C_r})$$

Pour  $\Delta t$ , il faut d'abord retenir la condition (2.43) qui s'applique à tous les schémas aux différences finies :

$$T_c/\Delta t > n$$

Il faut ensuite vérifier, pour assurer la non-apparition de débits négatifs et la stabilité numérique, la condition :

$$(2.49a) \quad \Delta t_{C_0} - \Delta t_{C_r} \leq \Delta t \leq \Delta t_{C_0}$$

où on a posé :

$$\Delta t_{Co} = \frac{\Delta x}{C} \quad \text{et} \quad \Delta t_{Cr} = \frac{Q}{I.B.C^2}$$

Les paramètres  $\Delta t_{Co}$  et  $\Delta t_{Cr}$  ont la même signification (en temps) que  $\Delta x_{Co}$  et  $\Delta x_{Cr}$ .

### 2-3-1-5 Conclusions et propositions

Les conditions (2.42) à (2.46) sur le choix des paramètres  $\Delta x$  et  $\Delta t$  méritent d'être testées puisque certaines d'entre elles sont contradictoires. Il faudra par ailleurs proposer en fonction des conditions retenues une stratégie de choix des paramètres  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ , et éventuellement  $\theta$ . Nous testerons dans le chapitre 3-2 :

- la condition  $Cr \leq 2$  qui permet d'identifier la diffusion des termes du second ordre des modèles à la diffusion hydraulique  $D$  ;
- une condition sur le pas d'espace maximal à ne pas dépasser pour contrôler la diffusion numérique des schémas qui s'ajoute à la condition  $Cr \leq 2$  (une telle contrainte sur  $\Delta x$  n'est apparemment pas nécessaire pour les conditions de l'hydraulique fluviale et c'est pourquoi elle n'est pas présentée dans ce paragraphe)
- la condition de stabilité numérique  $Co \leq 1$  ;
- la condition  $Co + Cr > 1$  qui permet de s'assurer de la non-apparition des débits négatifs en début de crue ;

### Intérêt du modèle Muskingum Modifié

Plus la pente est faible, plus le nombre de Reynolds local est grand (lorsque la pente diminue, on a en effet  $C$  qui diminue et  $D$  qui augmente beaucoup) et plus il est nécessaire de choisir  $\Delta x$  grand pour respecter  $Cr \leq 2$ .

La rapidité de variation des hydrogrammes peut obliger à choisir  $\Delta t$  petit pour respecter la condition (2.43). Un grand  $\Delta x$  choisi pour respecter la condition  $Cr \leq 2$  et un petit  $\Delta t$  choisi pour respecter la condition (2.43) peuvent entraîner un nombre de courant  $Co$  très petit devant 1.

Pour respecter  $Cr \leq 2$ , on peut être amené à choisir un grand pas d'espace impliquant, si on choisit  $Co$  proche de 1, un pas de temps trop grand pour que la condition (2.43) puisse être vérifiée.

L'astuce du modèle Muskingum Modifié qui impose :  $Co = 1$  est de considérer que la condition (2.43) ne s'applique pas au pas de temps de calcul  $\Delta t$  mais seulement au sous pas de temps de calcul  $\Delta t$ .

Ainsi, il est possible de conserver des plus grandes valeurs de  $\Delta x$ . Néanmoins, le modèle Muskingum Modifié introduit des phénomènes de lissage et éventuellement une perte du contrôle de la conservation des volumes. Il faut donc l'utiliser uniquement à bon escient comme on le verra au chapitre 3-2.

Notons pour finir que les conditions (2.42) à (2.49) portant sur  $\Delta x$  et  $\Delta t$  sont des domaines de choix possibles qui garantissent uniquement la précision des schémas numériques et non pas la validité des modèles.

### 2-3-2 LE PARAMETRE DE PONDERATION $\theta$

Rappelons que d'après nos conventions,  $\theta$  représente le paramètre de pondération du schéma de discrétisation (2.27) de l'onde cinématique ainsi que le paramètre de pondération des modèles Muskingum, noté  $\alpha$  dans le chapitre 2-1 et 2-2, mais identifié à  $\theta$  lorsqu'il est calculé pour introduire une diffusion numérique égale à la diffusion hydraulique D.

Nous avons vu au paragraphe 2-3-1 que le choix du paramètre de pondération  $\theta$  était étroitement corrélé au choix du pas d'espace  $\Delta x$  (et donc du pas de temps  $\Delta t$ ).

#### $\theta$ variable

Si  $\theta$  est choisi variable afin d'introduire une diffusion numérique égale à la diffusion hydraulique D de la crue diffusante, le paramètre de pondération  $\theta$  est un paramètre interne puisque sa forme est fixée en fonction du schéma de discrétisation. L'alternative réside ici plutôt dans le choix du schéma car selon celui-ci, l'expression permettant le calcul de  $\theta$  est différente. Par exemple, on a vu au paragraphe 2-2-3 que pour les schémas (2.30), (2.39) et (2.40) de discrétisation,  $\theta$  avait pour expression (2.31), alors que pour les schémas (2.34) et (2.37),  $\theta$  avait pour expression (2.35). Selon le schéma de discrétisation adopté, l'identification au second ordre près à la diffusion d'un modèle de crue diffusante impliquera une expression différente de  $\theta$ .

Le problème du choix de  $\theta$  est transposé au problème du choix d'un schéma de discrétisation, lorsqu'on veut utiliser l'identification avec la diffusion hydraulique des modèles de crue diffusante.

#### $\theta$ constant

Dans le cas de modèles linéaires, on fixe une valeur  $\theta$  que l'on appellera par respect des notations utilisées  $\theta_m$ .

$\theta_m = 0$  correspond aux modèles de Kalinine-Milyukov.

On a vu au paragraphe précédent qu'il était possible de choisir  $\Delta x$  par la relation (2.42c) pour retrouver l'identification avec la diffusion des modèles de crue diffusante. Néanmoins, cette méthode n'est intéressante que si  $\Delta x = Q/(2IB)$  varie peu au cours de la crue et s'il est possible de modifier  $\Delta x$  sans être gêné par les contraintes géométriques. En assainissement, il est délicat d'utiliser un modèle de Kalinine-Milyukov pour lequel on identifie la diffusion numérique à la diffusion hydraulique D car :

- les  $\Delta x$  sont en général courts et fixés par les contraintes géométriques ;
- les variations de  $Q/(2IB)$  peuvent être importantes au cours d'une crue.

Les modèles tels que  $\theta_m < 0.5$  introduisent une diffusion numérique. Il est possible de choisir  $\theta_m$  par la relation (2.31) (ou (2.35)) selon le schéma adopté) en prenant des coefficients moyens.

Par exemple, pour les schémas (2.30), (2.39) et (2.40), on peut utiliser la relation (2.31) et poser :

$$\theta_m = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{Q_m}{C_m \cdot I \cdot B_m \cdot \Delta x} \right]$$

avec  $Q_m$  = un débit moyen "représentatif" de la crue  
 $C_m = C(Q_m)$  = célérité du débit  $Q_m$   
 $B_m = B(Q_m)$  = largeur au miroir du débit  $Q_m$ .

$\theta_m$  peut aussi être fixé de telle sorte que l'atténuation du modèle coïncide le mieux possible avec un jeu de mesures, ou avec l'atténuation obtenue avec le même schéma où  $\theta$  est choisi variable. Dans ce cas, d'après nos conventions, c'est plutôt le paramètre  $\alpha_m$  qu'il faudrait utiliser.

$\theta_m > 0.5$  entraîne en général une amplification des débits (schémas instables) et ne présente pas d'intérêt pour simuler les phénomènes de propagation de crue.

### Conclusions

On verra dans le chapitre 3-2, les différences entre les schémas qui utilisent l'équation (2.31) pour le calcul de  $\theta$  (modèles de Muskingum CUNGE) et les schémas qui utilisent l'équation (2.35) pour calculer  $\theta$  (modèles de KOUSSIS). Le paramètre  $\theta$  sera étudié en parallèle avec le paramètre  $\Delta x$ .

On étudiera par ailleurs, les méthodes qui permettent le meilleur choix du paramètre  $\theta_m$ .

### 2-3-3 LA CELERITE C ET LE TEMPS DE PROPAGATION k

Les paramètres C et k (cf. tableau 2.2) sont utilisés dans les modèles simplifiés non linéaires, c'est à dire, les modèles où chaque tranche d'eau d'un hydrogramme est propagée avec une célérité différente (ou un temps de propagation k différent) dépendant du débit moyen de cette tranche d'eau. Nous avons vu que k et C peuvent être liés par la relation :

$$k = \frac{\Delta x}{C}$$

Cette identification de k à  $\Delta x/C$  est, à notre connaissance, le seul moyen de déterminer les valeurs d'un paramètre k variable pour un modèle de Muskingum. Nous considérerons donc dans la suite de ce paragraphe que le calcul de C est équivalent au calcul de k lorsque  $\Delta x$  est fixé. Nous ne parlerons plus que du paramètre C dans la suite de ce paragraphe.

Pour calculer la célérité C (de la crue diffusante et de l'onde cinématique), on a vu au chapitre 2-2 qu'on fait l'approximation du régime permanent sur chaque tronçon; approximation qui permet d'utiliser une relation univoque liant le débit Q à la hauteur d'eau y (ou à la section mouillée S).

L'utilisation d'une loi hauteur-débit univoque pour le calcul de C permet de déterminer des courbes C(y) ou C(Q). A une hauteur donnée y correspond un débit unique Q et donc une célérité de propagation unique C.

#### 2-3-3-1 Les possibilités de calculer C

Nous avons vu au chapitre 2-2, les formules possibles (correspondant à divers niveaux d'approximation) permettant le calcul du paramètre C.

Dans le cas de l'onde de crue diffusante, où l'on fait uniquement l'approximation d'une loi hauteur-débit univoque, le calcul de C se fait à l'aide de l'expression (2.8) (cf. §2-1-2-1) :

$$*) \quad C = \frac{dQ}{dS} + \frac{D}{B} \cdot \left[ \frac{\partial B}{\partial x} - J \cdot \frac{\partial B}{\partial z} \right] = Ce3$$

Pour l'onde cinématique, C a pour expression (2.9) :

$$*) \quad C = \frac{dQ}{dS} = Ce2$$

Enfin, pour des canaux de grande largeur aux berges verticales, le terme  $dQ/dS$  peut se simplifier en l'expression suivante (cf. §2-1-2-1) :

$$*) \quad C = \frac{dQ}{dS} = m \cdot V = Ce1$$

$m=5/3$  si on utilise la formule de Manning-Strickler.  
 $m=3/2$  si on utilise la formule de Chézy.

Nous avons calculé ces expressions de C pour un collecteur circulaire et rectangulaire. Les calculs établis en annexe 3 nous donnent pour un collecteur circulaire, les expressions suivantes (avec  $m=5/3$ ) :

$$Ce_1 = \frac{5}{3}.V$$

$$Ce_2 = \frac{5}{3}.V - Ts \quad \text{avec} \quad Ts = \frac{2}{3} V. \left[ \frac{Rh}{R \sin^2 \omega} \right]$$

$$Ce_3 = \frac{5}{3}.V - Ts + Tf \quad \text{avec} \quad Tf = - \frac{Q}{B^2 \operatorname{tg} \omega}$$

- $\omega$  est l'angle défini comme indiqué sur la figure 2.7b
- $Rh$  est le rayon hydraulique
- $B$  est la largeur au miroir
- $R$  est le rayon du collecteur

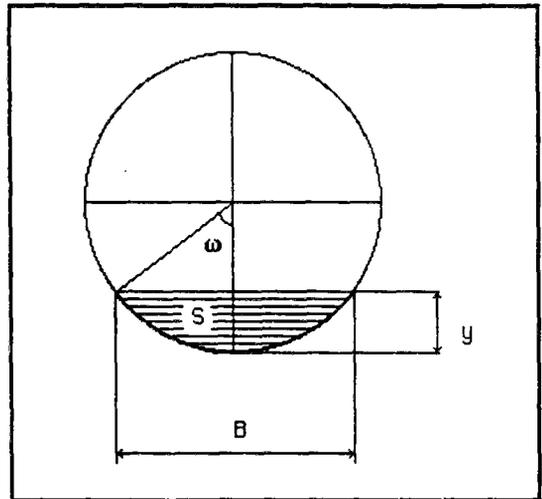


Figure 2.7b

- $Ce_1$  = l'expression de la célérité utilisée habituellement pour l'étude des crues de rivière.
- $Ce_2 = dQ/dS$  lorsqu'on néglige le terme de forme  $Tf$ .
- $Ce_3$  = l'expression complète de  $C$  pour l'équation de la crue diffusante.

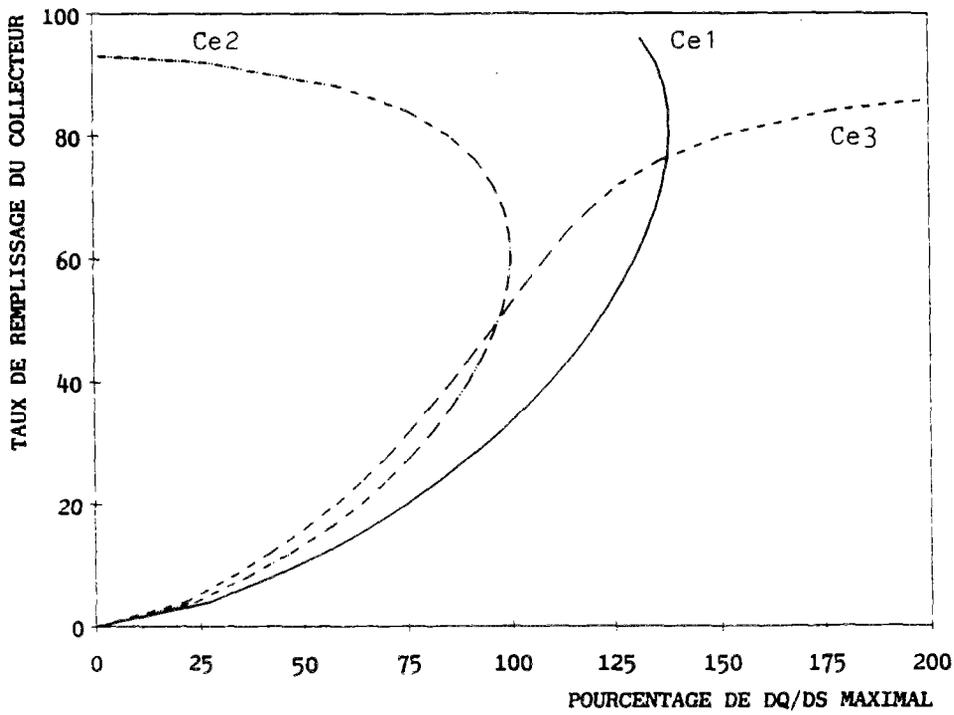
Afin de vérifier expérimentalement les valeurs de  $C$ , nous avons tracé les courbes donnant les valeurs de la célérité  $C$  calculée à partir des 3 formules ci-dessus pour des collecteurs circulaires et rectangulaires.

La **figure 2.8** représente les valeurs que prennent les célérités  $Ce_1$ ,  $Ce_2$ , et  $Ce_3$  pour un collecteur circulaire.

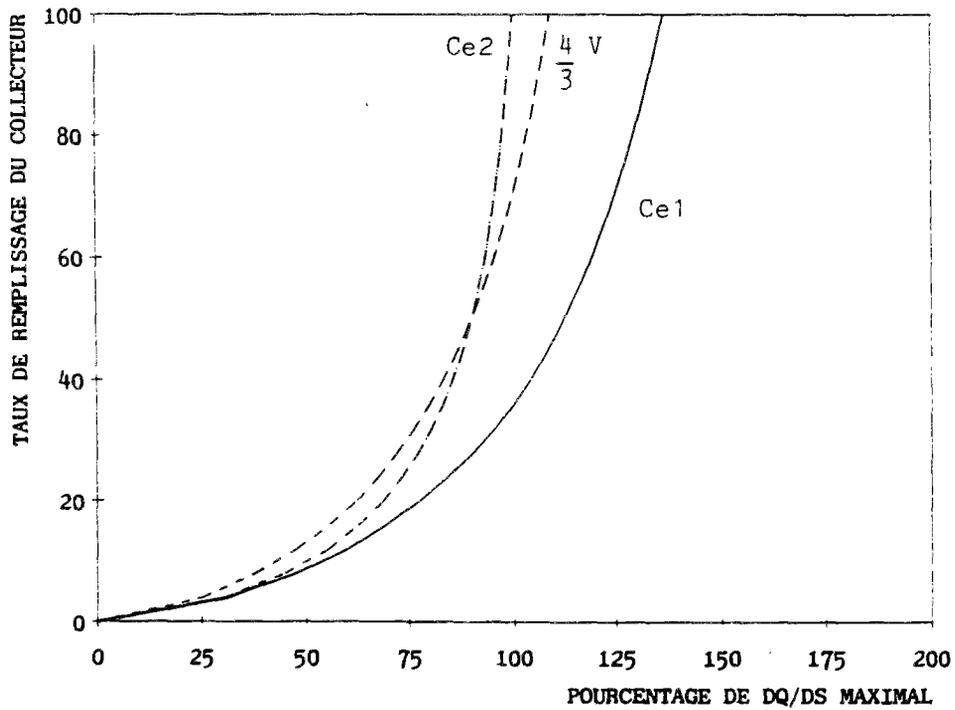
La **figure 2.9** représente les valeurs que prennent les célérités  $Ce_1$  et  $Ce_2$  pour un collecteur rectangulaire. Le terme de forme :  $Tf = 0$  pour des collecteurs rectangulaires donc la célérité  $Ce_3 = Ce_2$ .

Pour le collecteur rectangulaire, nous avons de plus tracé la courbe  $Ce_1' = 4V/3$  pour montrer que la célérité  $Ce_2$  est plus proche de  $4V/3$  que de  $5V/3$ .

## COMPARAISON DES METHODES DE CALCUL DE C

*Figure 2.8*

## COMPARAISON DES METHODES DE CALCUL DE C

*Figure 2.9*

### Elimination du terme de forme Tf

Le formalisme des équations de Saint-Venant ainsi que les relations de Chézy ou de Manning-Strickler ont été mis au point pour des écoulements à surface libre dont la largeur au miroir B était une fonction croissante du tirant d'eau y. Est sous-tendu à ces équations, un comportement de type crue de rivière. Pour des sections circulaires, la largeur au miroir décroît fortement lorsque le tirant d'eau augmente ce qui remet vraisemblablement en cause les hypothèses de Saint-Venant ainsi que les formules empiriques de Chézy et de Manning-Strickler (distribution du profil des vitesses différentes, accélération verticale non-négligeable,...).

Les équations de Saint-Venant utilisent les grandeurs effectives B et y. Néanmoins, même si B(y) ne respecte pas rigoureusement les valeurs "usuelles", la décroissance de B(y) ne nuit pas à l'applicabilité des équations de Saint-Venant.

Pour le modèle de crue diffusante, ce n'est pas la largeur au miroir B qui intervient dans le terme Tf mais son **gradient** par rapport à x et à z. Or, si la décroissance de B est encore acceptable vis à vis des valeurs de B, elle n'est en revanche plus du tout acceptable pour les gradients de B. D'ailleurs, quand on modélise avec un modèle complet le passage d'un lit mineur à un lit majeur, le gradient de B est aussi très grand, voire infini et on s'arrange toujours pour qu'il ne perturbe pas la solution.

Le comportement aberrant des dérivées de B par rapport à z (lorsque B est une fonction décroissante de z) légitime le fait de ne pas tenir compte du terme Tf pour le calcul de la célérité d'un modèle de crue diffusante.

Rappelons par ailleurs que le calcul de C pour un modèle cinématique ne fait pas intervenir le terme Tf.

Pour des hauteurs d'eau où B(y) est une fonction croissante, c'est à dire pour des hauteurs inférieures au rayon du collecteur, le terme Tf est très faible. De même, pour les crues de rivière, le terme Tf a très souvent une valeur négligeable devant  $dQ/dS$ . L'utilisation d'un modèle global de type crue diffusante signifie d'abord, l'envie de "faire simple". C'est pour cette raison d'ailleurs que l'on suppose  $I = J$  pour calculer les coefficients C et D. Vouloir faire simple implique l'abandon du terme Tf, dont la valeur est souvent difficile à calculer sans commettre d'erreurs dans des cas de géométries quelconques, (bien que l'expression analytique de Tf pour un collecteur circulaire soit relativement simple, comme nous l'avons montré en annexe 3).

Notre objectif n'est pas de bâtir une nouvelle théorie sur la propagation des crues dans les tuyaux fermés. On a vu que quelques modèles conceptuels pouvaient être conçus dans le but de pouvoir modéliser le plus facilement possible le passage : écoulement en charge - écoulement à surface libre. Pour conserver la simplicité des modèles globaux et rester dans l'optique de la "récupération" de la théorie de propagation de crues en rivière que l'on souhaite utiliser pour analyser les écoulements transitoires en réseaux d'assainissement, nous avons choisi de négliger le terme Tf.

Pour des hauteurs inférieures au mi-remplissage, le terme  $T_f$  est très faible (cf. figures 2.8 et 2.9) et on le négligera.

Lorsque  $B$  devient une fonction décroissante du tirant d'eau, le terme  $T_f$  calculé à partir du gradient de  $B$  par rapport à  $y$  n'a plus de sens, et ne peut être légitimé par les théories de propagation de crues de rivières.

Nous ne tiendrons pas compte du terme  $T_f$  pour les modèles de crue diffusante et considérerons que les modèles de crue diffusante et les modèles cinématiques ont la même célérité, qui se calcule par  $dQ/dS$ .

#### Interprétation de la figure 2.8 (collecteurs circulaires)

Nous avons déjà expliqué les raisons pour lesquelles il est légitime de ne pas tenir compte du terme de forme  $T_f$ .

Quand les hauteurs d'eau se rapprochent de la hauteur de mise en charge, la célérité  $Ce_2 = dQ/dS$  décroît de manière importante, devient négative et tend vers  $-\infty$  lorsque  $y$  tend vers  $2R$  (c'est à dire, lorsqu'on se rapproche des hauteurs de mise en charge). Pour les mêmes raisons que celles pour lesquelles on ne tient pas compte du terme  $T_f$ , il n'est pas acceptable que la célérité de propagation décroisse au delà d'une limite lorsque le tirant d'eau  $y$  augmente, alors que ce phénomène est lié, comme pour  $T_f$ , à des valeurs des dérivées du débit  $Q$  par rapport à la section mouillée  $S$  qui sortent du domaine d'application de la théorie de propagation des crues de rivière.

Il est donc nécessaire de trouver une méthode permettant d'évaluer la célérité de propagation des débits pour des hauteurs proches de la hauteur de mise en charge, ce que nous examinerons au paragraphe 2-3-3-2.

#### Interprétation de la figure 2.9 (collecteurs rectangulaires)

Le terme  $T_f$  est nul donc  $Ce_3 = Ce_2$

Jusqu'à la mise en charge, on reste avec des valeurs de  $B$ ,  $S$  et  $y$  conformes à celles que l'on peut rencontrer sur les canaux à ciel ouvert. Il n'y a donc pas de problèmes à utiliser la formule  $C = dQ/dS$ . Contrairement aux collecteurs circulaires, les célérités restent donc des fonctions croissantes de la hauteur comme le montrent les courbes de la figure 2.9.

Par ailleurs, quelle que soit la hauteur, la courbe  $4V/3$  reste toujours très proche de la courbe  $Ce_2 = dQ/dS$ . Ce résultat peut permettre de calculer  $C$  par la formule  $C = 4V/3$  lorsqu'il est délicat où impossible de calculer  $dQ/dS$ .

#### Conclusions

On peut considérer que la relation de base qui sert au calcul de  $C$  pour tous les modèles simplifiés est la relation de Kleitz-Seddon :  $C = dQ/dS$ .

A mi-remplissage, on a pour les collecteurs rectangulaires et circulaires :  $dQ/dS = 4V/3$ .  $4V/3$  est proche de  $dQ/dS$  pour ces deux types de section. Pour certaines applications particulières où on ne peut calculer  $dQ/dS$  (cf. chapitre 3-3), on pourra donc éventuellement approcher  $C$  par  $4V/3$  qui est plus proche de  $dQ/dS$  que  $5V/3$ .

### Intervention de K et I dans la célérité

Nous avons présenté en annexe l'expression générale de  $dQ/dS$ . On peut exprimer  $dQ/dS$  de la manière suivante (cf. annexe 2) :

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dS} &= \frac{5}{3} \cdot V - \frac{2}{3} \cdot V \cdot Rh \cdot \frac{dP}{dS} \\ &= K \sqrt{I} \cdot \left[ \frac{5}{3} \cdot Rh^{2/3} - \frac{2}{3} \cdot Rh^{5/3} \cdot \frac{dP}{dS} \right] \\ &= K \sqrt{I} \cdot \phi(Rh, P, S) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Le rayon hydraulique  $Rh$ , le périmètre mouillé  $P$  et la section mouillée  $S$  ne dépendent que de la forme de la section et sont indépendants de la pente  $I$  et du Strickler  $K$ . Pour des collecteurs circulaires et rectangulaires, la fonction  $\phi$  a une forme analytique.

La relation (2.50) montre que la célérité  $dQ/dS$  dépend de  $K$  et de  $I$  uniquement par l'intermédiaire du produit  $K \cdot I^{1/2}$ . Rappelons que dans tous ces calculs (cf. hypothèses permettant d'écrire  $C = dQ/dS$ ), on suppose que la hauteur est liée au débit par la relation univoque de Manning-Strickler.

#### 2-3-3-2 Détermination de C jusqu'à $y = 1.87 \times R$ (collecteur circulaire)

Pour les collecteurs rectangulaires, il n'y a pas de problèmes de décroissance de  $C$  et la formule  $dQ/dS$  est directement applicable jusqu'au plafond du collecteur.

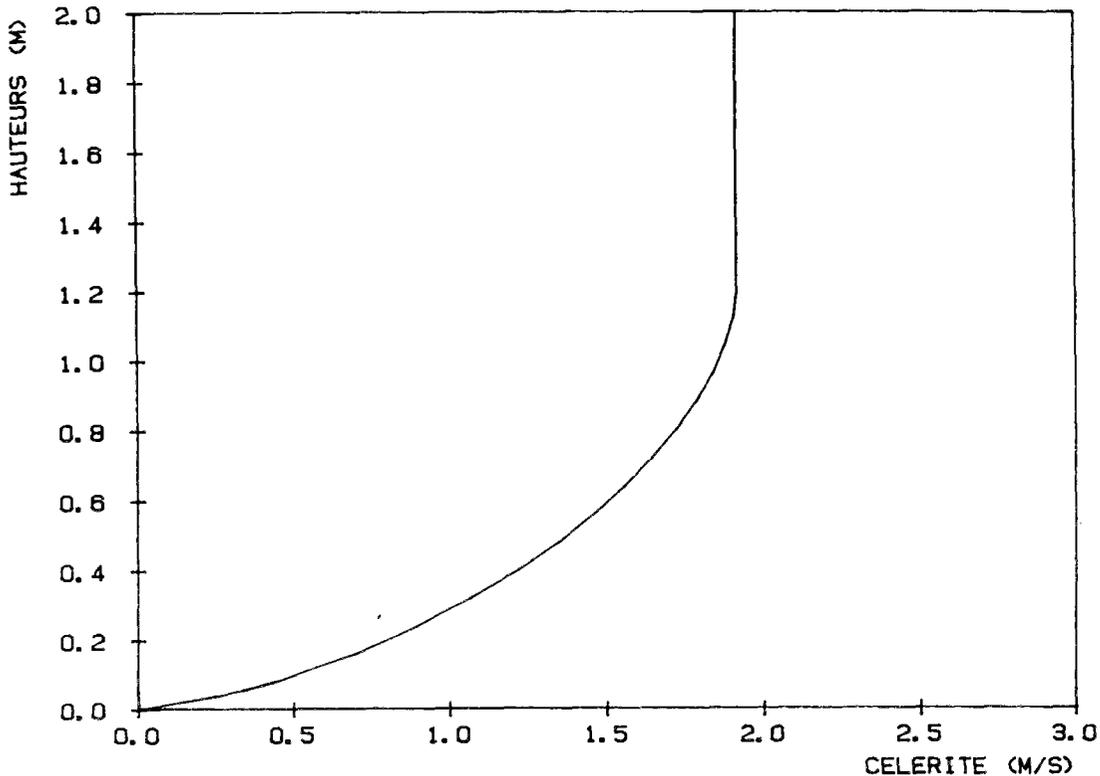
Pour les collecteurs circulaires, le débit capable (i.e le débit maximal que la conduite est capable de laisser passer à surface libre) est atteint avant que la hauteur d'eau soit égale au diamètre, lorsque la hauteur d'eau  $y = 1.87 \times R$  (cf. annexe 3). Les modèles simplifiés qui ne simulent pas les mises en charge détecteront la mise en charge lorsque le débit capable de la conduite sera atteint, ce qui signifie qu'il n'y aura jamais de hauteurs d'eau comprises entre  $1.87 \times R$  et  $2 \times R$ .

La décroissance de  $dQ/dS$  constatée sur la figure 2.8 pour un collecteur circulaire est irréaliste car les équations de départ le sont. Si on veut poursuivre les calculs avec ce type de modèles, même pour des hauteurs où  $dQ/dS$  est décroissante, il est nécessaire de trouver des méthodes permettant de compléter la courbe  $C(y)$ , jusqu'à  $y = 1.87 \times R$ .

Nous proposons dans ce paragraphe deux méthodes permettant de déterminer la célérité  $C(y)$  dans la zone où on ne peut l'identifier à  $dQ/dS$ .

#### A) Méthode de CUNGE et CAYLA

La méthode la plus simple est celle de CUNGE et CAYLA. Ils proposent de garder la célérité constante une fois son maximum atteint (CUNGE, CAYLA 1980). Tant que  $dQ/dS$  est croissant, on l'utilise pour calculer la célérité  $C$ .



*Figure 2.10*

### B) Proposition d'une autre méthode

Nous supposons dans cette méthode que la décroissance de  $dQ/dS$  est plausible mais qu'il n'est pas acceptable que la célérité tende vers  $-\infty$  quand  $y$  se rapproche du diamètre du collecteur. Nous avons donc essayé de chercher une valeur vers laquelle la célérité pourrait effectivement converger quand la hauteur tend vers  $2xR$ .

Pour un écoulement en charge, lorsqu'il n'y a pas de coups de bélier, on a un écoulement massique et la célérité de propagation des débits est très grande (elle est de plus de 1000m/s lorsqu'on néglige l'élasticité de la conduite (HUG 1975)). Il faut cependant signaler que cette célérité quasi-infinie ne correspond pas au coefficient  $C$  de l'équation de l'onde cinématique ou de la crue diffusante déterminé précédemment. Le coefficient  $C$ , bien qu'appelé célérité est par définition le coefficient multiplicatif du terme  $\partial Q/\partial x$  des équations de la crue diffusante et de l'onde cinématique.

Il est possible de se donner pour limite, la vitesse de l'écoulement lorsque celui-ci passe en charge. Cette limite certes artificielle permet de fixer simplement une valeur limite minimale en deçà de laquelle  $C$  ne peut décroître. On supposera alors que  $C$  décroît linéairement de sa valeur maximale à cette limite (voir la figure 2.11). Rappelons qu'il serait faux de considérer cette valeur limite comme une célérité effective de propagation des débits en charge et de poursuivre en effet les calculs si l'écoulement passait en charge.

### Détermination de la vitesse en charge

Par continuité du coefficient de perte de charge  $J$ , la vitesse juste avant la mise en charge peut être approchée par la formule de Manning-Strickler. Elle vaut :

$$(2.51) \quad V = K.I^{1/2}.Rh^{2/3}$$

Le rayon hydraulique a pour valeur au moment de la mise en charge :

$$Rh = Rhc = S/P = \pi R^2 / 2\pi R = R/2$$

Or le rayon hydraulique à mi-remplissage ( $\theta = \pi/2$ ) a pour valeur :

$$Rh = Rhm = S/P = (\pi R^2 / 2) / \pi R = R/2 = Rhc$$

En appliquant la relation (2.51), on en déduit que la vitesse de l'écoulement juste avant la mise en charge est égale à la vitesse de l'écoulement à mi-remplissage et vaut :

$$V = Vc = K.I^{1/2}.(R/2)^{2/3}$$

Après avoir atteint la hauteur  $y_{ma}$  telle que  $dQ/dS$  soit maximum, on peut considérer que  $C$  décroît linéairement de  $dQ/dS_{max}$  à  $Vc$  dans la zone où  $dQ/dS$  est décroissante.

Nous avons tracé figure 2.11, une courbe  $C = C(y)$  (en réalité  $y(C)$ ) déterminée par cette méthode pour une conduite circulaire de diamètre 2 mètres, de pente un pour mille et de Strickler  $K = 70$ .

$$C(y) = \frac{dQ}{dS}(y) \quad \text{pour } y \text{ variant de } 0 \text{ à } y_{ma}.$$

$$C(y) = \frac{\left[ \frac{dQ}{dS}(y_{ma}) - Vc \right]}{y_{ma} - y_c} \cdot (y - y_{ma}) + Vc$$

avec :

$$y_{ma} \text{ telle que } : \quad \frac{dQ}{dS}(y_{ma}) = \frac{dQ}{dS} \text{ max} = C_{max} \quad \text{et} \quad y_c = 2R$$

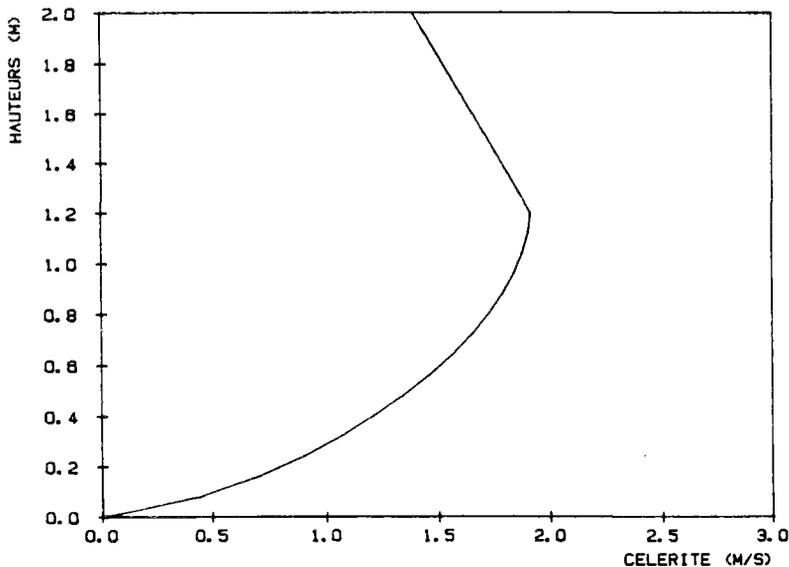
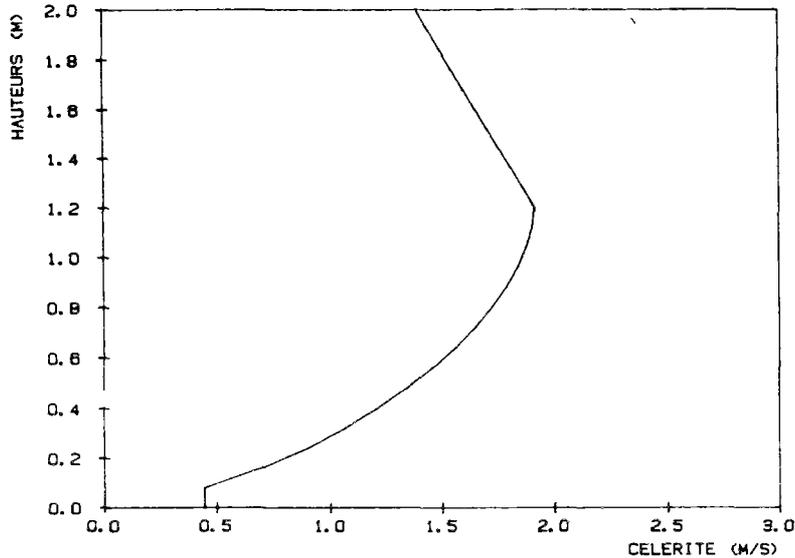


Figure 2.11

### Tronquage de la courbe $dQ/dS$ pour les débits faibles

$dQ/dS$  s'annule pour  $y = 0$ .

Pour s'affranchir des problèmes de division par zéro et empêcher des valeurs de  $C$  trop faibles, qui risqueraient de fausser les calculs, on tronque généralement la courbe  $C(y)$  comme indiqué sur la figure 2.12 ci-dessous.



*Figure 2.12*

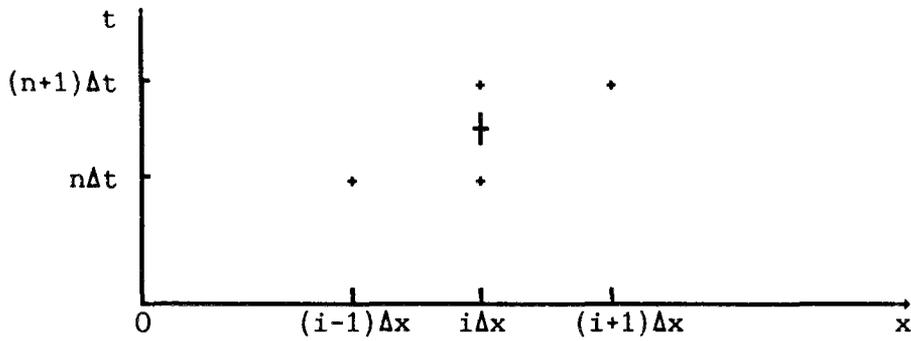
### 2-3-3-3 Valeur moyenne de $C$ sur chaque pas de temps

Une fois la courbe  $C(y)$  déterminée (i.e  $C(Q)$ ), quel débit faut-il choisir pour calculer le paramètre  $C$  à chaque pas d'espace et à chaque pas de temps?

Nous avons vu (cf. chap. 2-2) que la résolution des équations impliquait le calcul d'une valeur moyenne instantanée de  $C$  à chaque noeuds de la grille de discrétisation.

La valeur instantanée de  $C$  doit être en théorie calculée aux mêmes points de la grille de discrétisation que  $\partial Q/\partial x$ . Cette valeur instantanée dépend donc de la formulation (équation (2.21a)) des schémas de discrétisation utilisés.

Pour un schéma implicite mixte centré comme l'est le schéma VPD (cf. équation (2.22b) au paragraphe 2-2-3-1), la formulation de  $\partial Q/\partial x$  fait intervenir les noeuds du maillage indiqués sur la figure 2.13.



*Figure 2.13*

Les points où la célérité instantanée est calculée doivent donc se trouver entre les pas de temps  $n$  et  $n+1$  aux abscisses  $i\Delta x$ .

Pour le modèle VPD, PRICE propose de choisir le milieu des segments (valeur exacte lorsque  $\lambda = 0.5$ ) ce qui donne (PRICE 1973a) :

$$C_i^n = C \left[ \frac{Q(i\Delta x, (n+1)\Delta t) + Q(i\Delta x, n\Delta t)}{2} \right] = C \left[ \frac{Q_i^n + Q_i^{n+1}}{2} \right]$$

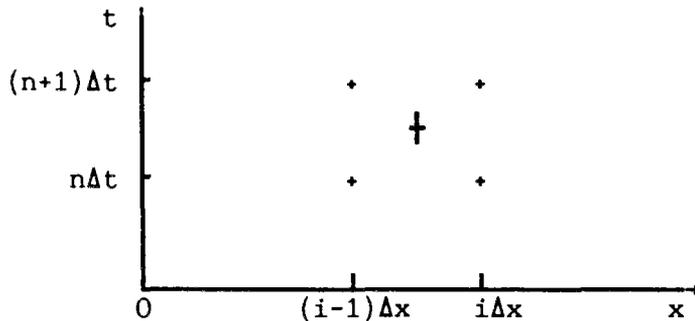
$$\text{Si on pose : } Q_a = \frac{Q_i^n + Q_i^{n+1}}{2}$$

on calcule  $C(Q_a)$  en effectuant un développement limité de  $C$  :

$$(2.52) \quad C(Q_a) = C(Q_i^n) + \frac{dC}{dQ} \cdot (Q_a - Q_i^n) + O(Q^2)$$

Cette méthode oblige à évaluer la dérivée  $dC/dQ$  à chaque noeud du maillage.

Pour les schémas de résolution de l'onde cinématique et Muskingum présentés au paragraphe 2-2-3-2 et 2-2-3-3, le paramètre instantané  $C$  doit être calculé au milieu de chaque maille puisque le schéma ne fait intervenir qu'une maille à la fois comme indiqué sur la figure 2.14.



*Figure 2.14*

Si l'on reprend les notations de l'équation (2.29) (cf. §2-2-3-2), la célérité C doit donc être calculée par la relation :

$$c = c \left[ \frac{I1 + I2 + Q1 + Q2}{4} \right]$$

Ce calcul nécessite une méthode itérative puisque le débit Q2 n'est pas encore calculé (PONCE, YEVJEVICH 1978). C'est pourquoi, dans la plupart des cas, on utilise des méthodes permettant le calcul de C uniquement à l'aide des 3 débits connus I1, I2, et Q1.

#### 2-3-3-4 Conclusions

Les interventions empiriques de calage du paramètre C sont importantes et peuvent vraisemblablement avoir une influence sur la forme des hydrogrammes propagés.

Les 2 méthodes proposées au paragraphe 2-3-3-2 pour calculer C au delà du point où dQ/dS décroît sont empiriques mais permettent de rester dans la logique de la propagation des écoulements à surface libre par des modèles simplifiés.

On testera dans le chapitre 3-2 ces deux méthodes de calcul de C. On verra si elles sont acceptables ou s'il est nécessaire de restreindre les possibilités de modélisation aux écoulements où les hauteurs restent comprises dans la zone où dQ/dS est croissante. Nos conclusions validerons de plus, les raisons qui nous ont conduit à éliminer le terme Tf.

On testera par ailleurs (au chapitre 3-2), différentes méthodes de calcul d'un C "moyen" instantané et on verra en quoi les méthodes ont de l'influence sur les réponses des modèles.

Ces tests seront inclus dans une série de simulations plus vaste destinée à montrer l'influence du paramètre C sur les modèles et d'en déduire l'impact des approximations nécessaires à sa détermination.

### 2-3-4 LA CELERITE MOYENNE $C_m$ ET LE TEMPS MOYEN $k_m$

Les paramètres  $C_m$  et  $k_m$  sont physiquement identiques aux paramètres  $C$  et  $k$ .  $C_m$  est appelé généralement célérité moyenne de propagation et  $k_m$  la durée de propagation sur la longueur  $L$ .

Pour la plupart des méthodes, l'identification des paramètres des modèles Muskingum (cf. §2-2-3-3) permet de calculer  $k_m$  connaissant  $C_m$  par la relation :

$$k_m = \frac{L}{C_m}$$

#### 2-3-4-1 Méthodes géométriques

Pour un collecteur circulaire, on peut calculer les courbes donnant  $C$  en fonction de  $y$  (cf. figures 2.10 ou 2.11). On peut alors choisir une hauteur  $y_m$  "représentative", correspondant aux débits de l'hydrogramme que l'on veut propager dans le collecteur.

On constate que les variations de  $C(y)$  sont faibles pour des hauteurs variant entre 35% et 80% de remplissage (cf. figure 2.11). Avec la méthode de CUNGE et CAYLA (figure 2.10),  $C$  est même constante à partir de  $C_{max}$ . Ainsi, en supposant que la plupart des débits transitant dans le collecteur entraînent une hauteur d'eau comprise entre 35% et 80% du remplissage, on peut choisir une valeur moyenne  $C_m = C(y_m)$  qui pourra être considérée comme célérité moyenne des hydrogrammes transitant dans le tronçon.

Nous avons qualifié de géométriques, ce type de méthodes car la valeur de  $C_m$  ou de  $k_m$  est indépendante de l'hydrogramme propagé. En effet, quels que soient les hydrogrammes propagés, la célérité  $C_m$  aura pour valeur  $C(y_m)$  qui ne dépend que de l'étalonnage de la courbe  $C(y)$ . Celui-ci dépend uniquement des caractéristiques géométriques du bief de calcul (puisqu'on suppose toujours une loi hauteur-débit univoque pour calculer  $C$ ).

La figure 2.15 montre que pour  $0.35 \times R \leq y \leq 0.8 \times 2R$ ,  $C(y) \approx C_m$  avec au maximum 10% d'erreurs, si on utilise la courbe  $C(y)$  où  $C$  est décroissante (et avec encore moins d'erreur si on utilise la méthode de CUNGE et CAYLA).

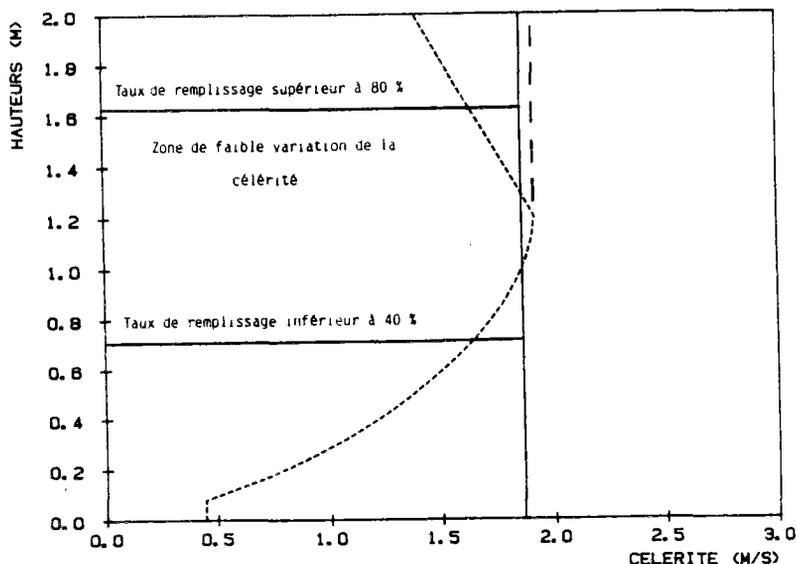


Figure 2.15

Plus généralement, selon l'inspiration des modélisateurs, ce type de méthodes peut conduire à choisir  $C_m$  telle que :

$$(2.53) \quad C_m = C(\gamma H) \quad \text{avec } 0 < \gamma < 1$$

- H étant la hauteur du collecteur.

Selon l'allure de la courbe  $C(y)$ , on peut choisir la valeur du paramètre  $\gamma$  qui semble la plus adéquate. Notons que les 2 méthodes de calcul de  $C$  présentées au paragraphe 2-3-3-2 ne conduisent pas à la même célérité moyenne si  $y$  est dans la zone où  $dQ/dS$  est décroissante.

#### 2-3-4-2 Méthodes hydrologiques

Par opposition aux méthodes géométriques, nous avons appelé méthode hydrologique, toute méthode qui utilise les caractéristiques de l'hydrogramme à propager pour calculer les paramètres  $C_m$ . Nous présenterons ci-dessous quelques méthodes qui sont habituellement utilisées.

##### \* ) Méthodes par moyenne

On calcule la moyenne d'un certain nombre de valeurs bien choisies de l'hydrogramme pour en déduire une célérité moyenne.

Par exemple, une méthode que nous avons testée dans la partie 3, fréquemment utilisée en assainissement, consiste à calculer  $C_m$  à l'aide de la relation :

$$(2.54) \quad C_m = \frac{\sum_{i=1}^N Q_i \cdot V_i}{\sum_{i=1}^N Q_i}$$

- Les  $Q_i$  sont des valeurs discrètes de l'hydrogramme amont.
- $N$  est le nombre de valeurs discrètes des débits de l'hydrogramme.
- Les  $V_i$  sont les vitesses d'écoulement correspondant aux débits  $Q_i$  (liés par la relation  $Q_i = V_i \cdot S_i$ ).

Ce calcul est une moyenne "parabolique" des débits. La méthode a l'avantage de donner plus de poids aux "forts" débits et de limiter ainsi l'influence des faibles débits. Elle a par contre l'inconvénient de ne pas être reliée à une signification physique.

Une variante de cette méthode consiste à prendre les valeurs discrètes des  $Q_i$  uniquement sur le temps de montée de l'hydrogramme amont et non pas sur tout l'hydrogramme.

Enfin, une possibilité utilisée pour gagner du temps de calcul consiste à choisir sur l'hydrogramme amont un très petit nombre de valeurs discrètes de  $Q_i$  ce qui permet d'obtenir  $C_m$  par la formule :

$$C_m = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} Q_i \cdot V_i}{\sum_{i=1}^{N_1} Q_i} \quad \text{avec } N_1 \ll N \text{ de la formule précédente}$$

Une autre méthode (semblable dans son principe) consiste à calculer des célérités  $C_i$  à l'aide de la courbe  $C(y)$  correspondant à quelques valeurs de débit  $Q_i$  de l'hydrogramme à propager et de calculer ensuite  $C_m$  par la relation :

$$C_m = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} C_i}{N_1}$$

#### \*\*) Méthodes utilisant le $Q_{max}$

Désignons par  $Q_{max}$ , le débit maximum de l'hydrogramme amont à propager. Pour que la propagation des débits voisins du  $Q_{max}$  soit la meilleure possible, on peut calculer  $C_m$  par une relation du type :

$$(2.55) \quad C_m = C(\gamma \cdot Q_{max}) \quad \text{avec } 0.7 \leq \gamma \leq 1$$

Ainsi, la pointe de l'hydrogramme sera propagée avec une célérité voisine de la célérité instantanée  $C$  qui correspond théoriquement à la célérité de propagation du débit  $\gamma \cdot Q_{max}$ .

Contrairement aux méthodes décrites précédemment, cette méthode permet de tenir particulièrement bien compte de l'intensité maximale des hydrogrammes se propageant dans le tronçon. Avec cette méthode utilisant le  $Q_{max}$ , la meilleure approximation de  $C_m$  sera lorsque  $Q$  sera voisin de  $\gamma \cdot Q_{max}$  ce qui permettra de faire le moins d'erreurs possibles lors de la propagation de la pointe de l'hydrogramme.

Cette méthode permet de bien propager la *pointe* des hydrogrammes, quelle que soit leur intensité, puisqu'on décale le débit représentatif (servant au calcul de  $C_m$ ) du centre de gravité des hydrogrammes (méthode (2.54)) vers le débit maximal de ces hydrogrammes. En contrepartie, on propagera plus (ou trop) rapidement les faibles débits de début et de fin de crue.

Néanmoins, les valeurs du débit maximum propagé et du temps de crue sont en général des résultats sur lesquels il est important d'avoir la meilleure précision possible.

#### \*\*\*) Méthode purement hydrologique

On évalue la durée de propagation  $km$  en utilisant des jeux de mesures. On mesure le décalage entre les centres de gravité des hydrogrammes amont et aval ou le décalage entre les pointes de débit. Cette mesure correspond à une valeur moyenne de propagation de l'ensemble d'un hydrogramme.

La méthode est peu utilisée car la durée de propagation km est fonction non seulement du collecteur mais aussi de l'hydrogramme amont. Plusieurs mesures sont nécessaires pour couvrir statistiquement l'ensemble des possibilités. Lorsque de bonnes mesures sont vraiment disponibles, elles peuvent être souvent mieux utilisées par des modèles plus élaborés que des modèles simplifiés linéaires qui utilisent un paramètre moyen km.

#### 2-3-4-3 Conclusions

Les méthodes de calcul d'une célérité moyenne  $C_m$  relèvent pour la plupart de "recettes de cuisine". Il n'y a pas franchement d'arguments théoriques pour valider l'une par rapport à l'autre, si ce n'est (à nouveau) la légitimité de la simplicité de la méthode. Nous testerons dans le chapitre 3-2, quelques méthodes de calcul de  $C_m$  et comparerons les réponses avec les modèles où  $C$  est choisi variable. Nous en déduisons :

- les conséquences du choix d'une célérité constante par rapport à une célérité variable (pour un même modèle) ;
- la méthode de calcul de  $C_m$  qui donne les meilleurs résultats en comparant avec les réponses des modèles où  $C$  est choisie variable.

### 2-3-5 LE PARAMETRE DE DIFFUSION D

Le paramètre D est le coefficient du terme de diffusion  $\partial^2 Q / \partial x^2$  de l'équation (2.7) de la crue diffusante.

Il s'exprime analytiquement à l'aide de la pente des frottements et des caractéristiques de l'écoulement (cf. chapitre 2-1). Pour le calcul de D, on considère comme pour le calcul de C que la pente des frottements est égale à la pente du fond ( $J = I$ ), ce qui permet d'utiliser l'expression (2.10). Pour un débit  $Q_a$ , D calculé par (2.10) donne :

$$D = \frac{Q_a}{2IB(Q_a)}$$

Tracé de D pour un collecteur ( $\phi 1500$ ) de pente 5 pour mille avec  $K = 50$ ,  $K = 70$  et  $K = 90$ .

#### DIFFUSIONS POUR UNE PENTE DE 5/1000

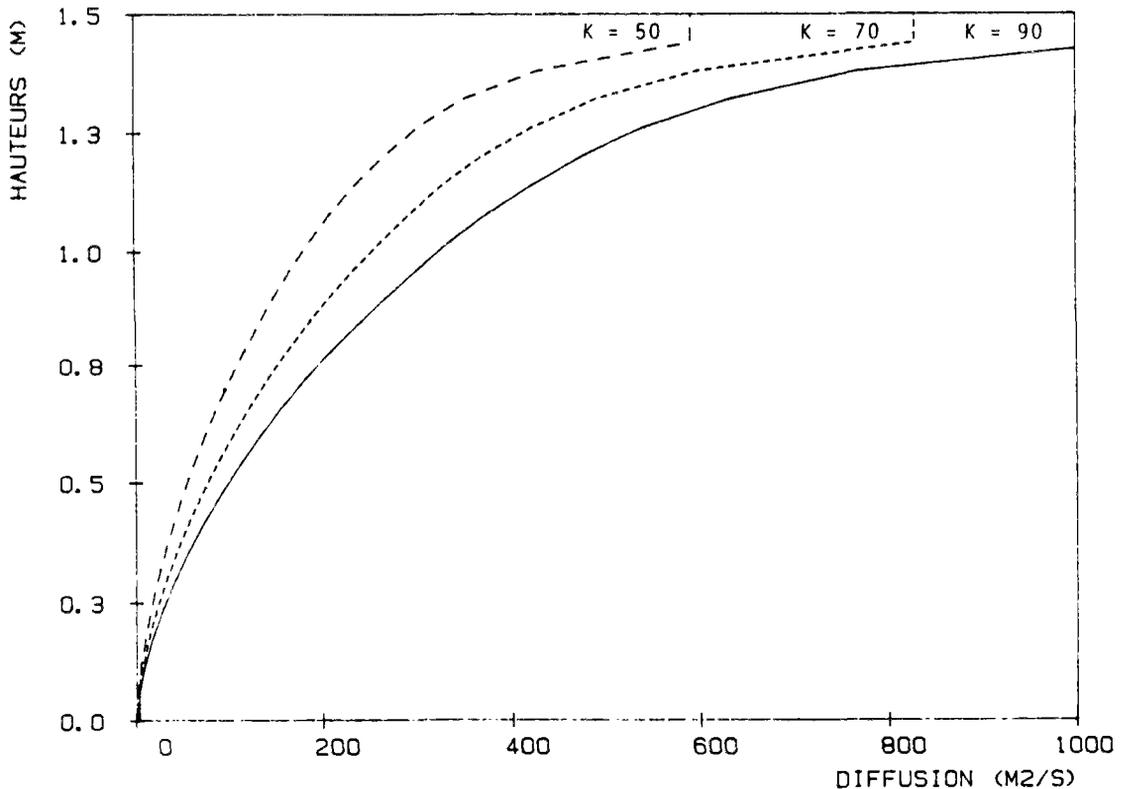


Figure 2.16

Contrairement au paramètre C, les valeurs du paramètre D obtenues par (2.10) sont conformes à celles de l'hydraulique fluviale "classique". Pour un collecteur circulaire, D devient infini juste au moment de la mise en charge. Néanmoins, les hauteurs d'eau calculées ne dépassent jamais  $1.87 \times R$  ce qui borne les valeurs que peut prendre le paramètre de diffusion D (qui correspondent aux valeurs tronquées sur la figure 2.16).

Nous confirmerons de plus expérimentalement dans la partie 3 que l'influence de D est du second ordre par rapport à celle de C et une petite erreur sur le calcul de D ne conduit pas à des différences significatives sur les résultats.

Nous avons donc considéré qu'il était légitime de calculer le coefficient de diffusion D par la relation (2.10) pour toute hauteur d'eau y.

#### Paramètre D instantané moyen

De même que pour le calcul de la célérité C, on suppose que le paramètre D est constant à chaque noeud du maillage. Sa valeur instantanée doit être calculée au même point de la grille de discrétisation que le point où est calculé  $\partial^2 Q / \partial x^2$ . Pour le schéma VPD, le calcul de D (cf. équation (2.22c) du paragraphe 2-2-3-1) devrait donc en théorie s'effectuer avec les valeurs (PRICE 1973a) :

$$B_a = \frac{B_i^n + B_i^{n+1}}{2} \quad Q_a = \frac{Q_i^n + Q_i^{n+1}}{2}$$

Ces valeurs rendent, de même que pour C, l'expression de D implicite et obligent à effectuer un développement limité de D au point  $(i\Delta x, n\Delta t)$  en introduisant les expressions de  $dD/dQ$  et  $dD/dB$ .

#### Paramètre constant Dm

On note Dm, le paramètre D lorsqu'il est utilisé dans les modèles de crue diffusante linéaires tel que le noyau d'Hayami.

On peut le calculer à l'aide de la relation (2.10) en choisissant une valeur moyenne des conditions de l'écoulement par le même type de méthodes que les méthodes de calcul de Cm. Ayant choisi un débit moyen  $Q_m$  et la largeur au miroir correspondante  $B(Q_m)$ , on pose alors :

$$D_m = \frac{Q_m}{2IB(Q_m)}$$

Il peut aussi être fixé pour que le modèle coïncide le mieux possible avec un jeu de mesures ce qui correspond alors à un calage externe.

#### Conclusions

On testera au chapitre 3-2 l'influence du paramètre D sur la réponse des modèles simplifiés. Nous testerons de plus l'impact du choix de D constant par rapport à D variable.

## 2-3-6 CONCLUSIONS

### A) Réflexions

#### Nouvelle terminologie des paramètres

Le contenu hydraulique des modèles simplifiés présentés dans les chapitres 2-1 et 2-2 est au plus égal à celui de l'équation de la crue diffusante. Les identifications effectuées - modèles Muskingum équivalent aux modèles cinématiques - diffusion numérique identifiée à la diffusion hydraulique - ont pour but de donner une signification hydraulique aux paramètres des intégrations numériques des modèles Muskingum et cinématiques. Ces identifications permettent de disposer de modes d'estimation des erreurs commises basées sur les conditions physiques de l'écoulement.

Les paramètres C, D (resp.  $C_m$  et  $D_m$ ) sont les seuls paramètres hydrauliques des modèles simplifiés. Ils contiennent l'information "hydraulique" du réseau.

Le paramètre k (respectivement  $km$ ) peut contenir la même information que le paramètre C (respectivement  $C_m$ ).

Les paramètres  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  peuvent être qualifiés de numériques puisqu'ils n'apparaissent qu'au niveau de la discrétisation des équations de base et n'ont pas de signification hydraulique.

Le paramètre  $\theta$  peut être considéré, tantôt comme numérique, tantôt comme hydraulique, si on admet que l'identification de la diffusion numérique à la diffusion hydraulique D confère à  $\theta$  une réalité hydraulique. On pourrait d'ailleurs conférer à  $\Delta x$  une signification hydraulique puisqu'il intervient dans l'expression de la diffusion numérique des termes du second ordre des schémas comme  $\theta$ .

#### Structure du réseau

Pour tous les modèles simplifiés, l'information sur la structure du réseau (longueur, pentes, section et Strickler des tronçons) est utilisée uniquement par l'intermédiaire de leurs paramètres hydrauliques.

La propagation effective des hydrogrammes s'effectue sans l'utilisation des données structurelles, une fois que les paramètres C, ou  $C_m$ , (resp. k, ou  $km$ ), D, ou  $D_m$  sont déterminés. Les données structurelles du réseau servent donc uniquement à déterminer la valeur des paramètres hydrauliques. Pour la détermination des paramètres moyens  $C_m$ ,  $km$  ou  $D_m$ , il peut de plus être nécessaire de connaître aussi l'hydrogramme amont.

Pour les modèles simplifiés, seuls les débits sont calculés et le calcul s'effectue sans références aux hauteurs d'eau qui dépendent des caractéristiques structurelles des tronçons. La formule de Manning-Strickler est le seul recours pour déterminer, une fois le calcul des débits effectué, les hauteurs d'eau dans le réseau. Les modèles complets qui calculent les couples (Q,y) utilisent au contraire à chaque pas de temps les données structurelles du réseau permettant la détermination de la hauteur d'eau y.

Tout modèle simplifié peut être appelé "modèle global" et reste plus ou moins "aveugle" (sauf par l'intermédiaire des paramètres hydrauliques) des conditions structurelles géométriques du réseau ainsi que des conditions hydrauliques lorsque celles-ci font intervenir les hauteurs d'eau.

Dans la classification des modèles simplifiés, on peut différencier les modèles selon la façon dont ils permettent de tenir compte des données structurelles géométriques du réseau.

Les modèles cinématiques linéaires qui utilisent le seul paramètre  $C_m$  sont les modèles les plus "aveugles" puisque toute l'information (pente, section et Strickler) sera contenue dans le scalaire  $C_m$ . Les modèles cinématiques non-linéaires qui utilisent un  $C$  instantané (qui est en réalité un vecteur  $C(Q)$ ) mémorise toute l'information des tronçons (pente, Strickler et section) par l'intermédiaire de l'étalonnage de la courbe  $C(Q)$ .

Les modèles de crue diffusante utilisent de plus le paramètre instantané  $D(Q)$  ou le paramètre  $D_m$  et les modèles cinématiques diffusants ou Muskingum diffusants utilisent le paramètre  $\theta(Q)$  ou  $\theta_m$ . Ces paramètres sont aussi déterminés à partir des informations sur les conditions structurelles du réseau.

Compte tenu du fait que  $C(Q)$  ne dépend que du produit  $K.I^{1/2}$ , les modèles cinématiques dont la diffusion numérique n'est pas identifiée à la diffusion hydraulique  $D$  (linéaires ou non-linéaires) ont, à  $K.I^{1/2}$  constant, une réponse identique quelle que soit la pente  $I$  (ou le Strickler  $K$ ).

En revanche, le paramètre  $D$ ,  $D_m$  ainsi qu'éventuellement le paramètre  $\theta$  font intervenir le quotient  $K/(I^{1/2})$  et sont fonctions de la pente  $I$  (respectivement du Strickler  $K$ ) lorsque  $K.I^{1/2}$  est constant. Les modèles simplifiés utilisant la diffusion hydraulique  $D$  (directement ou par identification de leur diffusion numérique) ne seront donc pas aveugles des valeurs respectives de  $K$  et de  $I$  à  $K.I^{1/2}$  constant.

## B) Récapitulation

Beaucoup d'auteurs considèrent que le calage des paramètres des modèles simplifiés ne concerne que les paramètres externes  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  et  $\theta$ . Les alternatives de choix et l'empirisme des méthodes de calcul montrent qu'il est tout aussi nécessaire d'être attentif à la manière dont sont calculés les paramètres internes  $C$ ,  $C_m$ ,  $D$  et  $D_m$  (calés automatiquement par le programme) qu'à la manière de déterminer les paramètres externes.

Il est par ailleurs beaucoup plus simple d'utiliser une formule qui permet un calcul automatique de tel ou tel paramètre (même si la formule est fautive) que de devoir choisir la valeur de ce même paramètre sans l'aide de critères théoriques ou même de formules empiriques qui permettent de guider ou de justifier les choix.

Nous avons présenté les conditions que doivent respecter les paramètres numériques des schémas de discrétisation des équations des modèles simplifiés pour que les modèles soient stables et consistants.

De même, pour les paramètres internes, nous avons montré pour chaque paramètre, les méthodes de calcul et nous avons indiqué que beaucoup de ces méthodes ne pouvaient être validées qu'après une vérification expérimentale.

Pour aborder la partie 3 et définir la problématique de la suite de notre travail de recherche, on dispose des résultats de la partie 2 qui peuvent se résumer aux points suivants :

- on a défini précisément les équations des modèles et les hypothèses théoriques sous lesquelles elles étaient valables ;
- on a étudié théoriquement les erreurs commises par les simplifications du système de Saint-Venant et on en a déduit les paramètres qui ont de l'influence sur les domaines de validité des modèles ;
- on a présenté la plupart des méthodes possibles de résolution des équations des modèles en précisant à chaque fois, les conditions théoriques de consistance et de stabilité ;
- on a étudié les modifications de contenu des équations dues aux méthodes d'intégration et les implications que celles-ci avaient sur la valeur des paramètres du modèle ;
- on a identifié plusieurs conditions (souvent contradictoires et sans justifications mathématiques ou physiques précises) que doivent vérifier les paramètres numériques des modèles ;
- on a examiné les méthodes de calcul ou d'évaluation des paramètres hydrauliques des modèles en montrant la nécessité de tester l'impact du choix de telle ou telle méthode sur les réponses des modèles.

C'est dans le but de tester précisément les équations et les méthodes de résolution des modèles simplifiés, les conditions sur les paramètres numériques des méthodes (numériques) de résolution, et les méthodes de calage des paramètres hydrauliques que nous avons fondé la méthodologie d'étude de la partie 3.

*TROISIEME PARTIE*

---

*ETUDE EXPERIMENTALE :*

*INFLUENCE DES PARAMETRES  
ET TESTS DE COMPARAISON  
ENTRE LES MODELES*



Dans cette partie, nous testerons les modèles (présentés dans la partie 2) qui intègrent :

- les équations complètes de Saint-Venant
- l'équation de la crue diffusante
- l'équation de l'onde cinématique
- l'équation des modèles Muskingum

On définit le terme de "modèle" comme l'ensemble formé :

- des équations de départ ;
- d'une méthode de résolution ;
- des conditions aux limites utilisées ;
- éventuellement de modules supplémentaires de calcul.

Les modèles conceptuels (les modèles Muskingum) étudiés dans la partie 2 peuvent en effet être considérés comme faisant partie des modèles qui intègrent l'équation de l'onde cinématique, en raison de l'identification effectuée au chapitre 2-2.

Dans le **chapitre 3-1**, nous présenterons les méthodes de programmation ainsi que les cas hypothétiques sur lesquels ont porté nos simulations.

Dans le **chapitre 3-2**, nous étudierons les différents paramètres des modèles simplifiés en suivant le plan du chapitre 2-3.

Nous analyserons l'influence des paramètres numériques  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ , et  $\theta$  et les conditions qu'ils doivent vérifier pour garantir la stabilité numérique et vérifier la consistance des schémas

Les alternatives des méthodes de calcul et des critères de choix des paramètres présentés dans la partie 2 seront testées.

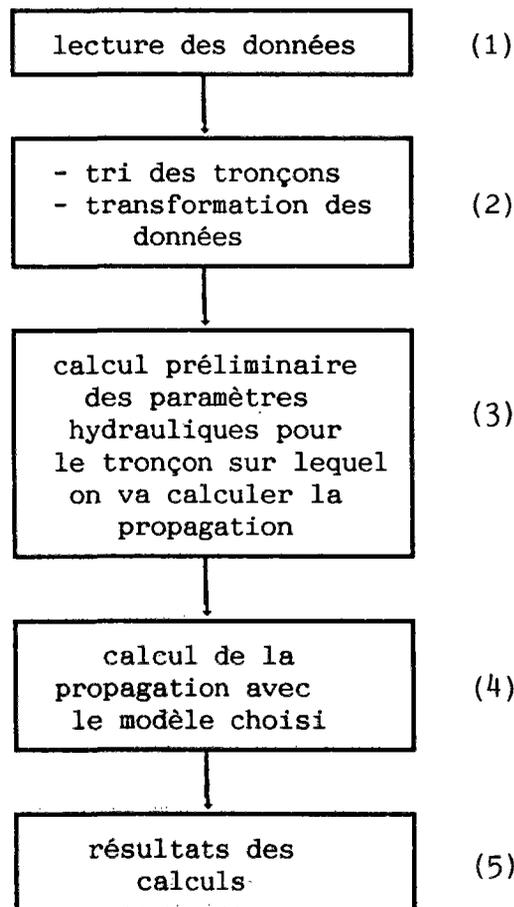
En conclusion, nous présenterons des domaines d'application théoriques des modèles (fonction des limites mathématiques des équations). Nous ne ferons pas référence au modèle complet de Saint-Venant dans ce chapitre.

Dans le **chapitre 3-3**, nous définirons des domaines de validité des modèles simplifiés étudiés en fonction des conditions d'écoulement qui seront caractérisées par des nombres adimensionnels. Nous utiliserons comme référence, les résultats d'un modèle complet de Saint-Venant. Nous examinerons dans le paragraphe 3-3-4 la possibilité de calculer une ligne d'eau dans le modèle de crue diffusante VPD (cf. §2-2-2-1) et d'utiliser ce calcul pour simuler les phénomènes d'influence aval.



### 3-1 MODELES TESTES ET APPROCHE EXPERIMENTALE

Notre objectif est de tester l'influence des paramètres présentés au chapitre 2-3 et de comparer les modèles présentés au chapitre 2-2. Afin de ne pas utiliser d'outils commercialisés d'une part et de pouvoir tester différentes méthodes de calcul de paramètres (en modifiant des parties de programme) d'autre part, nous avons développé nos propres programmes. Nous avons ainsi pu modifier et tester des méthodes de calcul de paramètres qu'il n'aurait pas été possible de tester sur des outils dont nous ne connaissons pas complètement la version source. Les programmes construits permettent de fixer les méthodes de calcul des différents paramètres de telle sorte qu'elles soient identiques pour tous les modèles programmés. Les paramètres sont donc calculés ou simplement choisis avant le calcul de l'écoulement. La simulation de l'écoulement se fait en effet par appel, au choix, d'un des modèles programmés (identifié par sous-programme).



*Figure 3.1*

Cette structure de programme permet de réaliser deux catégories de tests :

- des tests destinés à caractériser l'influence du choix des paramètres (ou de leur méthode de calcul) pour chacun des modèles programmés.
- des tests destinés à identifier les différences entre les modèles lorsque les méthodes de calcul des paramètres internes sont identiques pour tous les modèles.

Un fonctionnement du programme par modules a permis de tester les mêmes méthodes de calage des paramètres pour tous les modèles.

Afin de pouvoir tester les programmes sur des cas réels, nous avons construit un module permettant de simuler le fonctionnement en régime transitoire de bassins de rétention situés aux noeuds du réseau. Il est aussi possible de calculer le dimensionnement de nouveaux tronçons.

Les programmes ont été écrits en langage FORTRAN et sont implantés sur le VAX 750 de l'ENPC. Par ailleurs, certains de ceux-ci ont été complétés par des modèles de pluie et de ruissellement. Le programme construit s'appelle MER. Il fait l'objet d'une notice détaillée (ERB, MOREAU 1986).

### 3-1-1 MODELES PROGRAMMES

Une fois la structure générale du programme construite, chaque modèle peut être programmé et faire l'objet d'un sous-programme (qui constituera le module (4) de la figure (3.1)). Pour chaque schéma, il est possible en changeant très peu de lignes du programme de rendre le modèle linéaire ou non-linéaire et de choisir selon les besoins telle ou telle méthode de calcul de paramètre.

Toutes les méthodes de résolution présentées dans le chapitre 2-2 ont été programmées à l'exception des modèles cinématiques et Muskingum dont les coefficients C1, C2, et C3 ont pour expression (2.33) et (2.37). Ces schémas sont en effet du premier ordre et leur diffusion numérique ne peut pas être identifiée à la diffusion hydraulique D.

A) Méthodes de résolution de l'équation de la crue diffusante :

$$(2.7) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + C \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = D \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

Le modèle VPD

C'est le modèle de crue diffusante dont le schéma de discrétisation présenté au paragraphe 2-2-3-1 a pour expression :

$$(2.22a) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t}$$

$$(2.22b) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\lambda \cdot [Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}] + (1-\lambda) \cdot [Q_i^n - Q_{i-1}^n]}{\Delta x}$$

$$(2.22c) \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\mu \cdot [Q_{i+1}^{n+1} - 2Q_i^{n+1} + Q_{i-1}^{n+1}] + (1-\mu) \cdot [Q_{i+1}^n - 2Q_i^n + Q_{i-1}^n]}{\Delta x^2}$$

Les paramètres numériques sont  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ . Les paramètres hydrauliques sont C et D.

L'équation discrétisée est alors résolue, soit par une inversion directe de la matrice (PM) (cf. §2-2-3-1), soit à l'aide de méthodes d'inversion spécialisées (e.g. double balayage, algorithme de Thomas, ...)

Le modèle est construit pour être non-linéaire. Il est possible de tester VPD avec des paramètres D ou C constants.

### Le modèle du Noyau d'Hayami NH

C'est la solution analytique de la crue diffusante présentée au paragraphe 2-2-3-1 :

$$(2.25) \quad Q(L,t) - Q(0,0) = \int_0^t [ Q(0,t-\tau) - Q(0,0) ] . hq(km,Z,\tau) . d\tau \quad \text{avec}$$

$$(2.26) \quad hq(km,Z,\tau) = \sqrt{\frac{km \cdot Z}{\pi \tau^3}} \cdot \exp \left[ Z \cdot \left[ 2 - \frac{km}{\tau} - \frac{\tau}{km} \right] \right]$$

Pour ce modèle, il n'y a pas de paramètres numériques et les paramètres hydrauliques sont  $C_m$  et  $D_m$ , (ou  $km$  et  $Z$ ).

B) Méthodes de résolution de l'équation (2.13) de l'onde cinématique et des modèles de type Muskingum intégrant l'équation (2.17) :

$$(2.13) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + C \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$(2.17) \quad k \cdot \theta \cdot dQ_e/dt + k(1-\theta) \cdot dQ_s/dt = Q_e(t) - Q_s(t)$$

Les équations (2.13) et (2.17) discrétisées peuvent s'écrire sous la forme :

$$Q_{i+1}^{n+1} = C1 \cdot Q_i^n + C2 \cdot Q_i^{n+1} + C3 \cdot Q_{i+1}^n$$

Le modèle de **Muskingum-Cunge (MC)** est le modèle dont les coefficients  $C1$ ,  $C2$ , et  $C3$  ont pour expression (2.30) (cf. §2-2-3-2) :

$$(2.30) \quad \left[ \begin{array}{l} C1 = \frac{2\theta\Delta x + C\Delta t}{2(1-\theta)\Delta x + C\Delta t} \\ C2 = \frac{C\Delta t - 2\theta\Delta x}{2(1-\theta)\Delta x + C\Delta t} \\ C3 = \frac{2(1-\theta)\Delta x - C\Delta t}{2(1-\theta)\Delta x + C\Delta t} \end{array} \right. \quad C1 + C2 + C3 = 1$$

et le paramètre  $\theta$  calculé par la relation :

$$(2.31) \quad \theta = \frac{1}{2} \cdot (1 - Cr)$$

Le modèle de **KOUSSIS (MK)** est le modèle dont les coefficients  $C1$ ,  $C2$ , et  $C3$  ont pour expression (2.34) (cf. §2-2-3-2) :

$$(2.34) \quad \left[ \begin{array}{l} C1 = \frac{\Delta x}{C \cdot \Delta t} \cdot (1 - C3) - C3 \\ C2 = 1 - \frac{\Delta x}{C \cdot \Delta t} \cdot (1 - C3) \\ C3 = \exp \left[ - \frac{C\Delta t}{\Delta x(1-\theta)} \right] \end{array} \right. \quad \text{avec toujours : } C1 + C2 + C3 = 1$$

$$(2.35) \quad \theta = 1 - \frac{C_o}{\ln \left[ \frac{C_r + 1 + C_o}{C_r + 1 - C_o} \right]}$$

Le paramètre de pondération  $\theta$  peut être calculé (par la relation (2.31) pour le schéma (2.30) et par la relation (2.35) pour le schéma (2.34)) pour que la diffusion numérique des termes du second ordre soit égale à la diffusion hydraulique  $D$  :

$$C_o = C \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{et} \quad C_r = \frac{Q}{I \cdot B \cdot C \cdot \Delta x}$$

Les paramètres  $C$  et  $\theta$  peuvent être choisis constants ou variables. Le schéma (2.30) est équivalent aux schémas (2.30a) et (2.39). Le schéma (2.34) est équivalent au schéma (2.37).

#### Le modèle Muskingum Modifié MM

Nous avons programmé la variante (2.40) du schéma (2.30) utilisant le sous pas de temps de calcul  $\Delta t$  (i.e le modèle Muskingum Modifié). Le paramètre  $\theta$  est calculé par (2.31). Les paramètres  $\theta$  et  $C$  peuvent être choisis variables ou constants.

#### Le modèle de Translation Simple TS

C'est un modèle de type entrée-sortie. Nous avons programmé le modèle de translation simple (2.41) bien qu'il soit possible de l'obtenir à partir du modèle MM en choisissant  $C$  constant et  $\theta=0.5$ .

Le seul paramètre intervenant dans ce modèle est le paramètre hydraulique  $C_m$ , ou plutôt la durée de propagation  $k_m = L/C_m$  où  $L$  est la longueur du tronçon à modéliser. Il n'y a pas de discrétisation spatiale.

#### C) Le modèle complet SV

Nous avons utilisé le modèle complet CAREDas de la société SOGREAH comme référence pour la comparaison des réponses de nos modèles au chapitre 3-3. C'est un modèle qui intègre les équations complètes de Saint-Venant discrétisées par un schéma implicite de PREISSMAN (cf. chap 2-1).

### 3-1-2 CALCUL PRELIMINAIRE DES PARAMETRES

Nous avons vu en conclusion du chapitre 2-3 au paragraphe 2-3-6 que toute l'information sur la structure du réseau est contenue dans les paramètres hydrauliques des modèles simplifiés.

Ce paragraphe indique la manière dont les programmes effectuent le calcul préliminaire des paramètres hydrauliques avant le calcul de la propagation. C'est le fonctionnement du module (3) (cf. figure 3.1) qui est expliqué dans ce paragraphe.

Si  $H$  représente la hauteur (maximale) du collecteur, on commence par découper  $N_h$  incréments de hauteurs d'eau stockés dans le vecteur  $y_1(i)$  qui peut être défini par :

$$y_1(i) = i \cdot \frac{H}{N_h} \quad \text{avec } 0 \leq i \leq N_h$$

et on associe à ce vecteur hauteur d'eau, les vecteurs correspondants :

- des largeurs au miroir  $B_1(i)$
- des sections mouillées  $S_1(i)$
- des rayons hydrauliques  $R_1(i)$
- des périmètres mouillés  $P_1(i)$

L'indice 1 signifie que les valeurs sont fictives et ne correspondent pas à un événement réel.

En utilisant la formule de Manning-Strickler, à chaque hauteur d'eau  $y_1(i)$ , on associe un débit  $Q_1(i)$

#### La célérité

La courbe  $C(y)$  peut alors se construire en utilisant les valeurs discrètes précédemment déterminées :

$$C_1(i) = C(y_1(i)) = \frac{dQ}{dS_{y_1(i)}} = \frac{Q_1(i+1) - Q_1(i-1)}{S_1(i+1) - S_1(i-1)}$$

Comme pour les collecteurs circulaires, lorsque le collecteur est fermé, on trouve que  $C(y)$  décroît pour  $y$  proche de  $H$ . On utilise alors l'une des deux méthodes présentées au paragraphe 2-3-3 qui permettent de déterminer  $C$  jusqu'à la hauteur de mise en charge. Pour des collecteurs rectangulaires ou circulaires,  $C(y)$  a une expression analytique. Un calcul par interpolation n'est donc pas nécessaire.

### La diffusion hydraulique

En reprenant la méthode de calcul de C, on peut de manière symétrique déterminer le paramètre D correspondant aux Nh valeurs de hauteurs d'eau par la relation :

$$D1(i) = D(y1(i)) = \frac{Q1(i)}{2.I.B1(i)}$$

L'expression (2.10) est utilisée sur toute la hauteur du collecteur.

### Paramètres des modèles non-linéaires

Les modules de calcul de la propagation des hydrogrammes (les modèles programmés identifiés au module (4) de la figure 3.1) calculent les coefficients C et D réels par interpolation à partir des vecteurs C1 et D1 initialement prédéterminés.

Ainsi, si Q est le débit pour lequel il faut calculer C et D, on détermine j et p tels que :

$$Q = p.Q1(j) + (1-p).Q1(j+1)$$

puis on calcule C et D par interpolation linéaire :

$$\begin{aligned} C(Q) &= p.C1(j) + (1-p).C1(j+1) \\ \text{et } D(Q) &= p.D1(j) + (1-p).D1(j+1) \end{aligned}$$

De même, pour la détermination du paramètre instantané  $\theta$  les programmes calculent les paramètres instantanés de la relation (2.31) (qui sont C(Q), B(Q)) par interpolation linéaire.

### Paramètres des modèles linéaires

A partir d'un débit moyen  $Q_m$ , on peut calculer  $C_m$ ,  $D_m$ , etc... Pour le calcul de  $C_m$  à mi-remplissage, il suffit de déterminer J tel que :  $y1(J) = H/2$  ce qui donne la célérité  $C_m(H/2) = C1(J)$ .

Pour associer à une valeur de  $C_m$ , le paramètre  $D_m$  (ou  $\theta_m$ ) correspondant, on utilise de même les vecteurs C1, Q1, et D1 et par interpolation linéaire on détermine la valeur  $D_m(C_m)$ , c'est-à-dire en fait  $D(Q_m)$  avec  $Q_m$  tel que  $C_m = C(Q_m)$ .

$$D_m = p.D1(j) + (1-p).D1(j+1) \quad \text{avec } p = \frac{C_m - C1(j)}{C1(j) - C1(j+1)}$$

et j tel que  $C1(j) \leq C_m < C1(j+1)$

### 3-1-3 CHOIX DES DONNEES TESTEES

#### 3-1-3-1 Rappel des objectifs

Nos objectifs ont déjà été précisés tout au long de la partie 2 dans les conclusions successives que nous avons données à la fin de chaque paragraphe. Pour choisir les données (caractéristiques géométriques, conditions limites), nous nous sommes fixé plusieurs contraintes :

- respecter et balayer la plupart des conditions usuelles qui peuvent se présenter en assainissement, tant au niveau de la géométrie des collecteurs qu'au niveau des conditions limites ;
- choisir les caractéristiques géométriques et les conditions aux limites en contrôlant la variation des paramètres qui ont de l'importance sur la validité des simplifications des équations de Saint-Venant (l'étude comparative entre un modèle complet et les modèles simplifiés sera faite dans le chapitre 3-3)
- choisir les caractéristiques géométriques et les conditions aux limites afin de pouvoir tester les valeurs des paramètres numériques pour respecter les conditions de stabilité et de consistance des schémas et les méthodes de calage des paramètres internes C, Cm, D, et Dm.

a) Pour tester la validité des modèles **simplifiés** par rapport à un modèle **complet** de Saint-Venant, les conditions doivent permettre de tester (d'après les conclusions du paragraphe 2-3-1) :

- plusieurs pentes I
- plusieurs coefficients de Strickler K
- plusieurs longueurs L
- plusieurs types de conditions limites (variabilité des hydrogrammes et influences aval)

Les nombres adimensionnels Fo et No devront permettre de couvrir les valeurs des tableaux 2.0a et 2.0b (cf §2-1-3), avec des cas où le produit  $No^2.Fo^2$  est très inférieur ou très supérieur à 1. On testera aussi des cas où le nombre de Froude Fo est supérieur à 2.

b) Pour tester les conditions de **stabilité** et la **diffusion numérique** des schémas aux différences finies, nous avons vu que les paramètres importants sont :

- le nombre de courant  $Co = C.\Delta t/\Delta x$
- le nombre de Reynolds local  $Cr = 2.D/(C.\Delta x)$

Il faut donc :

- choisir plusieurs caractéristiques géométriques telles qu'on ait un bon échantillonnage des valeurs possibles de C et D ;
- tester pour une géométrie donnée (pour des valeurs de C et D données), différents pas de temps et différents pas d'espace.

c) Pour tester les **méthodes de calage** des paramètres internes C, Cm, D et Dm, quels sont les paramètres qu'il est important de faire varier?

Pour les conditions aux limites, il est nécessaire de tester plusieurs intensités d'hydrogramme amont :

- pour tester les méthodes de calage de la courbe  $C(y)$ , notamment pour des hauteurs où  $dQ/dS$  est décroissante (cf. au §2-3-3, les 2 méthodes proposées pour déterminer  $C$  jusqu'à la hauteur de mise en charge) ;
- pour tester les différences entre les méthodes de calcul du paramètre  $C_m$ , dont beaucoup utilisent l'intensité de l'hydrogramme amont.

Pour tester les paramètres  $C$  ou  $C_m$ , il est inutile de faire varier indépendamment  $K$  et  $I$ . Il faut choisir plusieurs valeurs du produit  $K.I^{1/2}$  susceptibles de couvrir l'ensemble des possibilités. Ainsi, pour tester les paramètres  $C$  et  $C_m$ , on choisira quelques valeurs de  $K.I^{1/2}$ , permettant de tester quelques valeurs représentatives que peut prendre  $C$  ou  $C_m$  en assainissement.

Pour tester le paramètre  $D$ , on choisira quelques valeurs de  $K.(I^{1/2})$  en testant différents couples  $(K,I)$  possibles. On pourra notamment examiner précisément l'influence de la diffusion  $D$ , puisqu'à  $K.I^{1/2}$  constant, le paramètre  $C$  ou  $C_m$  ne varie pas.

### 3-1-3-2 Choix des caractéristiques géométriques

Lorsqu'on effectue des séries de simulations en faisant varier plusieurs paramètres à la fois, il est pratique d'utiliser l'analyse adimensionnelle. En effet, les nombres adimensionnels permettent :

- de certifier qu'on a bien couvert la gamme des valeurs possibles ;
- de transférer les résultats à d'autres conditions qui pourront être qualifiées d'équivalentes en regard d'une même valeur d'un nombre adimensionnel.

#### A) La pente $I$ et le Strickler $K$

Pour les paramètres  $C$  et  $C_m$ , les paramètres  $K$  et  $I$  n'interviennent que par leur produit  $K.I^{1/2}$ . Le débit capable des collecteurs ne dépend lui aussi de  $K$  et de  $I$  que par l'intermédiaire du produit  $K.I^{1/2}$ . En assainissement, c'est d'ailleurs le débit capable nécessaire qui conditionne la dimension des tuyaux à poser.

Lorsqu'on fait varier hypothétiquement le produit  $K.I^{1/2}$ , le débit capable d'un même collecteur varie. Nous avons indiqué au paragraphe précédent que notre intention était de tester plusieurs méthodes en faisant varier le produit  $K.I^{1/2}$ . On pouvait donc choisir :

- de garder la même dimension d'un collecteur et d'accepter que le débit capable soit différent pour chaque valeur de  $K.I^{1/2}$  ;
- de modifier pour chaque valeur de  $K.I^{1/2}$ , la dimension du collecteur afin que le débit capable soit identique pour toutes les simulations destinées à montrer l'influence de la variation de  $K.I^{1/2}$  sur les résultats.

Choisir une dimension fixe aurait l'inconvénient de donner un débit capable très important pour des fortes pentes et un débit capable relativement faible pour des faibles pentes. Ainsi, garder la même dimension de collecteur obligerait à modifier la condition limite amont (et notamment l'intensité de l'hydrogramme amont). Si le but est de tester une méthode en fonction de la seule variation du produit  $K.I^{1/2}$ , on est donc très gêné. Par ailleurs, les dimensions effectives des collecteurs sont bien fonction du produit  $K.I^{1/2}$  puisque c'est justement le débit capable qui contraint les constructeurs à choisir la taille des tuyaux.

Nous avons donc choisi, pour les simulations destinées à tester l'influence de la variation de  $K.I^{1/2}$ , de faire varier la dimension des collecteurs en imposant un **débit capable fixe**.

Définissons pour les collecteurs circulaires, le nombre adimensionnel  $\Gamma$  par :

$$\Gamma = \frac{Q}{K.I^{1/2} \cdot (2R)^{5/3}}$$

Q est le débit dans le tuyau

R est le rayon du collecteur

$\Gamma$  est un nombre adimensionnel qui a la propriété remarquable d'être invariant lorsque Q est égal au débit capable quel que soit le collecteur circulaire de pente I, de Strickler K et de rayon R. Cette propriété est due au fait que le débit capable de tous les collecteurs circulaires est atteint à la hauteur  $y = 1.87R$ . Si on exprime  $\Gamma$  en fonction de l'angle  $\omega$  servant à caractériser la hauteur y dans un collecteur circulaire (cf. figure 2.7b au §2-3-3-1), il a pour expression :

$$\Gamma = \left[ \frac{(\omega - \sin\omega \cdot \cos\omega)^5}{1024 \cdot \omega^2} \right]^{1/3}$$

Le débit capable :  $Deb = Q(1.87R)$  et  $\omega(1.87R) = 2.63$  rd d'où :  
 $\Gamma(Deb) = 0.34$

Cette propriété de  $\Gamma$  légitime notre choix puisque fixer un débit capable constant en faisant varier  $K.I^{1/2}$  oblige à ajuster R pour que le dénominateur de  $\Gamma$  soit constant. Ceci signifie que pour un débit donné Q (par exemple, le débit maximal de l'hydrogramme amont que l'on souhaite tester), la valeur  $\Gamma$  sera constante quelle que soit la valeur de  $K.I^{1/2}$ .

Nous avons choisi pour la plupart de nos simulations, un collecteur circulaire dont le débit capable était fixé à  $4.8m^3/s$ . La figure 3.2 indique pour une section circulaire, le diamètre du collecteur et la hauteur  $1.87R$  à laquelle le débit maximal est atteint selon différentes valeurs du produit  $K.I^{1/2}$ . On aura par exemple :

Pour  $I = 5\%$  et  $K = 70$ , un diamètre de  $\phi 960$

Pour  $I = 5^\circ/00$  et  $K = 70$ , un diamètre de  $\phi 1500$

Pour  $I = 5^\circ/000$  et  $K = 70$ , un diamètre de  $\phi 2300$

## DIAMETRE ET HAUTEUR

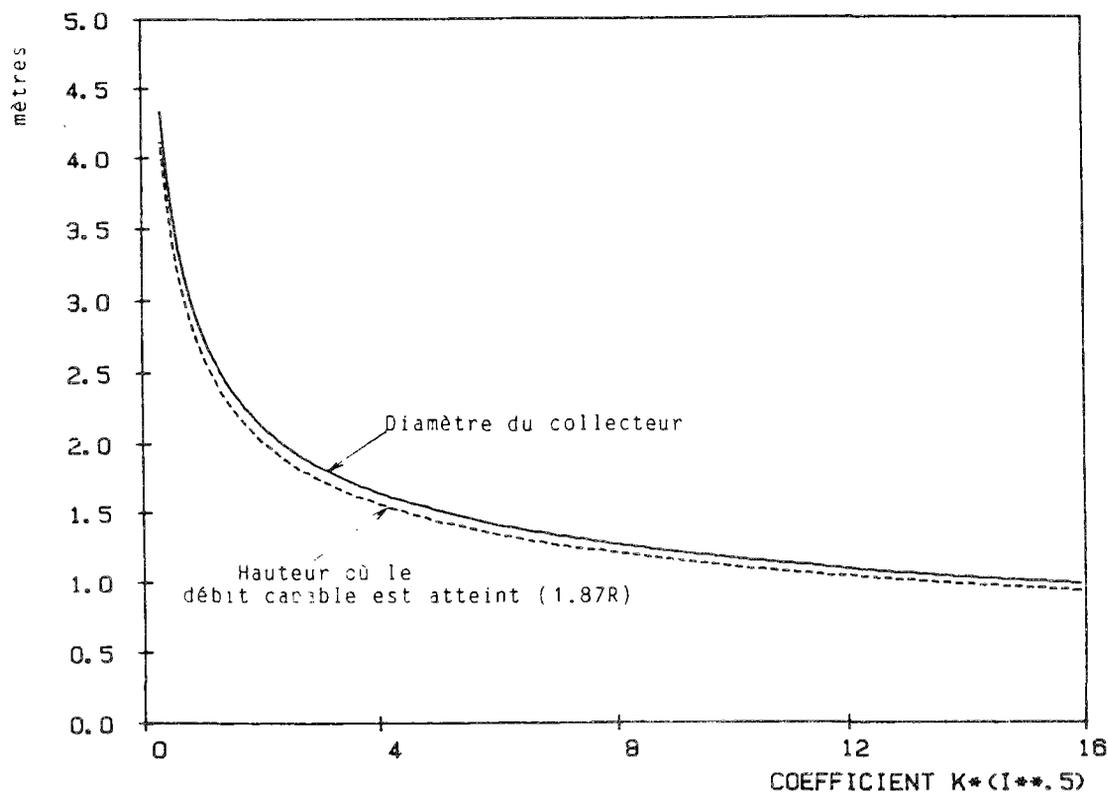


Figure 3.2

## B) La section : SEC

Les simulations destinées à tester l'influence de la variation de  $K.I^{1/2}$  sur une méthode de calcul d'un paramètre ou sur un modèle seront donc effectuées avec un collecteur circulaire, comme nous venons de le justifier ci-avant. Néanmoins, la forme de la section des tronçons intervient dans le calcul des paramètres C, Cm, D, Dm. En regard du paramètre C, nous avons déjà constaté au paragraphe 2-3-3 que la différence essentielle entre les sections rectangulaires et les sections circulaires était (pour ces dernières), la décroissance de C pour des hauteurs d'eau proches de la hauteur de mise en charge.

Afin de vérifier l'influence de la forme de la section et de valider nos choix, nous avons testé les réponses des modèles pour différentes sections, le dimensionnement de la section étant effectué en conservant la valeur du débit capable pour une même pente et un même coefficient de Strickler.

## C) La longueur : L

Nous avons vu que la longueur a de l'influence :

- sur l'atténuation des ondes dynamiques (cf. résultats du paragraphe 2-1-3 sur le nombre cinématique)
- sur les possibilités de choix du pas d'espace puisqu'elle détermine le nombre de tronçons de calcul et entraîne la contrainte  $\Delta x \leq L$ .

La longueur  $L$  intervient par ailleurs dans le nombre de Reynolds total  $R$  ainsi que dans le paramètre  $Z$  du noyau d'Hayami.

Pour les tests effectués, nous avons choisi une longueur de simulation de  $L = 1000\text{m}$ , sauf pour le cas où nous testons explicitement l'influence de la longueur sur l'atténuation des ondes dynamiques.

Une longueur de tronçon de simulation de  $L = 1000\text{m}$  permet de tester le choix de plusieurs pas d'espace. Par ailleurs, les durées de propagation correspondantes sont suffisamment grandes (notamment pour des pentes moyennes et faibles) pour que les différences éventuelles détectées soient significatives.

Les longueurs de tronçon sans singularité sont souvent inférieures à 1000 mètres en réseau d'assainissement. Les différences entre les réponses des modèles "mesurées" sur une longueur de 1000 mètres sont en général plus importantes que celles que l'on peut mesurer sur des distances plus courtes. Il n'y a donc pas d'inconvénient à choisir une distance supérieure aux distances habituelles. Toutefois, il faut que les ondes dynamiques ne créent pas de perturbations importantes dont l'effet s'amortit avec la longueur. Nous précisons les cas où une longueur inférieure à 1000 mètres conduit à une amplification des différences entre les modèles et testerons pour ces cas particuliers, plusieurs longueurs (la longueur intervenant alors comme critère de validité des modèles simplifiés).

Lorsqu'on parlera de durée de propagation des hydrogrammes, il s'agira donc en général de la durée de propagation sur 1000 mètres. La durée de propagation signifie la durée nécessaire à la propagation du débit maximal de l'amont à l'aval du bief.

### 3-1-3-3 Les conditions limites

#### Condition limite amont

Nous avons choisi des hydrogrammes amont (seule condition limite possible pour les modèles simplifiés) susceptibles de satisfaire les objectifs que nous nous sommes fixés au paragraphe 3-1-3-1.

Il faut pouvoir tester :

- plusieurs intensités différentes, par rapport au débit capable des collecteurs ;
- plusieurs "raideurs" d'hydrogramme puisque la variabilité des hydrogrammes est importante en regard de la validité des simplifications des équations de Saint-Venant ainsi qu'en regard de la diffusion numérique des schémas. La condition (2.43) du paragraphe 2-3-1-2 indique d'ailleurs un choix du paramètre  $\Delta t$  en fonction du temps de crue  $T_c$  de l'hydrogramme amont, c'est à dire, en fonction de la variabilité des débits.

Ainsi, certains hydrogrammes doivent être tels que le débit maximal soit presque égal au débit capable.

D'autres doivent être tels que le débit maximal soit très inférieur au débit capable.

Il convient aussi de tester des hydrogrammes dont le temps de crue (ou la raideur) est différent.

Pour la plupart des simulations où le débit capable était choisi égal à  $4.8\text{m}^3/\text{s}$ , nous avons testé des hydrogrammes tels que  $Q_{\text{max}} = \alpha \cdot \text{Deb}$  où on a fait varier  $\alpha$  de 0.95 à 0.2

Pour le temps de crue, nous avons choisi pour la plupart de nos simulations  $T_c = 10\text{mn}$  pour l'hydrogramme le plus "raide" et  $T_c = 30\text{mn}$  pour l'hydrogramme le moins "raide", mais pour des cas particuliers nous avons testé des hydrogrammes où  $T_c$  prenait d'autres valeurs. Pour permettre une consultation rapide, nous avons représenté figure 3.3 les 6 types d'hydrogrammes que nous avons le plus utilisés pour nos simulations. Nous indiquerons pour tous les résultats présentés, quel est le type d'hydrogramme utilisé.

Pour se rapprocher de conditions réelles, tout en gardant des critères simples de mesure de la raideur et de l'intensité des hydrogrammes, nous avons choisi des hydrogrammes triangulaires.

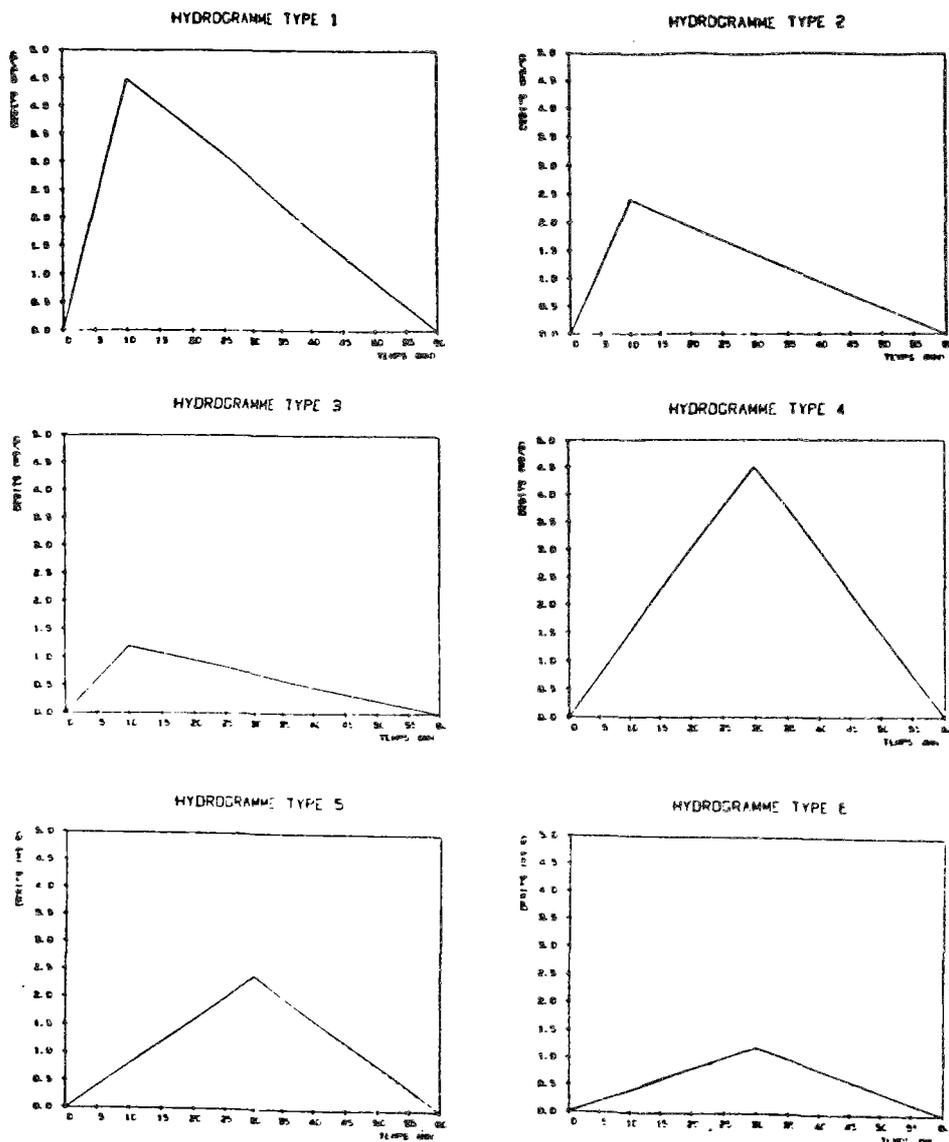


Figure 3.3

### 3-1-3-4 Variations des nombres adimensionnels

#### A) Le nombre de Froude

Le nombre de Froude intervient dans les critères de validité des modèles simplifiés (cf. §2-1-2-3).

Son carré a pour expression :  $F^2 = \frac{V^2}{gy}$

Si on utilise la formule de Manning-Strickler, la vitesse  $V$  est donnée par la relation :  $V = K \cdot I^{1/2} \cdot Rh^{2/3}$ , d'où on déduit :

$$F^2 = \frac{K^2 I}{g} \cdot \left[ \frac{Rh^{4/3}}{y} \right]$$

En première approximation, où on utilise la relation de Manning-Strickler, le nombre de Froude est donc une fonction linéairement croissante de la pente  $I$  ainsi que du coefficient  $K^2$ , lorsque les autres caractéristiques ( $Rh$  et  $y$ ) sont fixées.

En examinant le nombre de Froude dans un collecteur circulaire, on constate que sa variation en fonction de la hauteur d'eau reste faible. Le nombre de Froude, qui tend vers zéro quand  $y$  tend vers zéro, atteint très rapidement un ordre de grandeur qui ne varie pas en fonction de la hauteur (cf. figure 3.4). En reprenant les expressions analytiques du rayon hydraulique  $Rh$  et de la hauteur ( $y$ ) pour un collecteur circulaire en fonction de l'angle  $\omega$  (cf. figure 2.7 du paragraphe 2-3-3-1), ceci signifie que le quotient :

$$\frac{Rh^{4/3}}{y} = \left[ \frac{R}{2} \right]^{4/3} \cdot \left[ 1 - \frac{\sin 2\omega}{2\omega} \right]^{4/3} \cdot \left[ \frac{1}{1 - \cos\omega} \right]$$

reste quasiment constant quelles que soient les valeurs de l'angle  $\omega$  comprises entre 0 et  $\pi$ .

La figure 3.4 a été tracée pour les trois collecteurs  $\phi 960$ ,  $\phi 1500$  et  $\phi 2300$  dont le débit capable reste de  $4.8 \text{ m}^3/\text{s}$  lorsque, pour un Strickler de  $K = 70$ , les pentes sont respectivement de  $5^\circ/0$ ,  $5^\circ/00$  et  $5^\circ/000$ . Les diamètres des collecteurs ont donc été fixés selon la figure 3.2.

Pour chacun des collecteurs, le trait plein correspond à  $K = 50$ , le trait pointillé mixte correspond à  $K = 70$  et le trait pointillé simple correspond à  $K = 90$ .

$$K * (I^{**0.5}) = 1.56 ; = 4.9 ; = 15.6$$

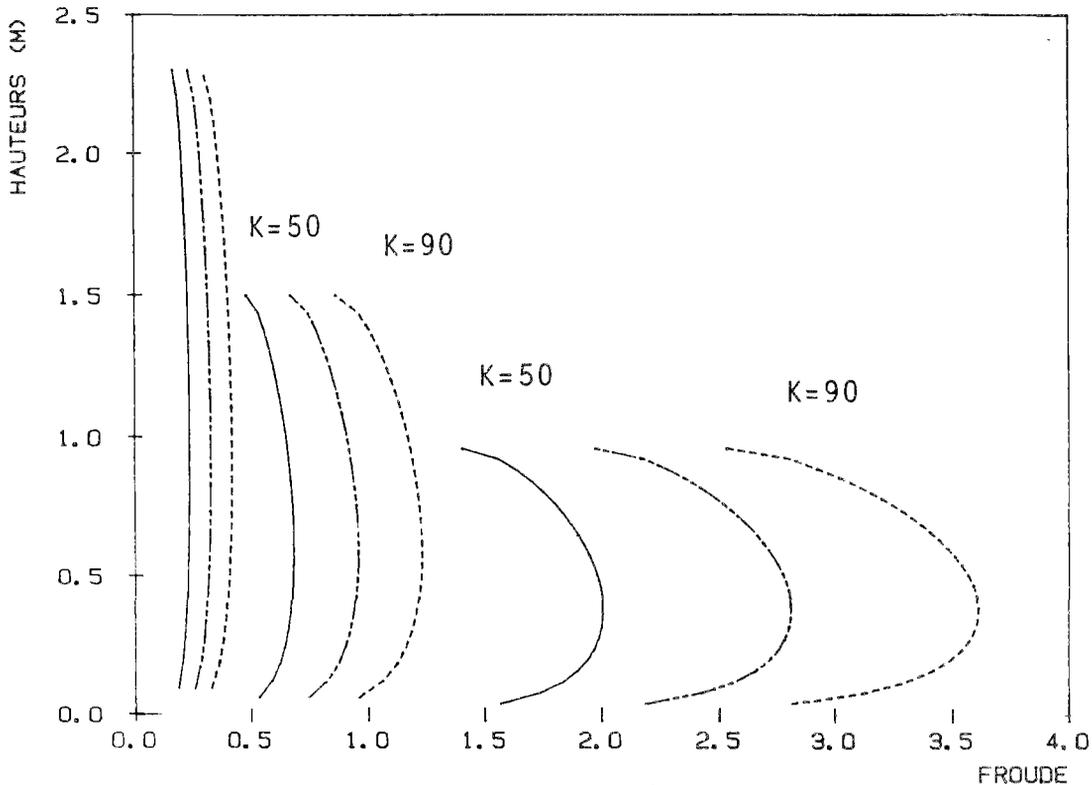


Figure 3.4

### B) Le nombre cinématique Nc

Rappelons que  $N_c$  intervient dans les critères de validité des modèles simplifiés examinés au paragraphe 2-1-3) et a pour valeur :  $gI.L/Vo^2$

Nous avons tracé figure 3.5, la valeur du nombre cinématique en fonction du produit  $K.I^{1/2}$ , en maintenant la valeur du débit capable du collecteur et en faisant varier son diamètre selon la figure 3.2.

$N_c$  est tracé pour une longueur de  $L=1000$  mètres avec une valeur de  $yo$  (de régime de départ) égale au rayon  $R$ . Nous avons déjà signalé au paragraphe 2-1-3 que le choix d'un  $yo$  était délicat et qu'un  $yo$  plus petit conduit à des valeurs de  $N_c$  plus grandes.

On constate que la valeur du nombre cinématique est faible, même pour des pentes fortes (pour lesquelles  $K.I^{1/2}$  est grand). La cause est la longueur de simulation  $L$  qui est beaucoup plus petite qu'en hydraulique fluviale.  $N_c$  étant directement proportionnel à  $L$ , pour une longueur 10 fois plus importante, ( $L=10km$ ), les mêmes caractéristiques donneraient un nombre cinématique  $N_c$  10 fois plus grand (c'est-à-dire variant de 20 à 100 lorsque  $K.I^{1/2}$  varie de 0.5 à 16).

L = 1000 M - COL. CIRC. DEBIT CAPABLE 5 M3/S.

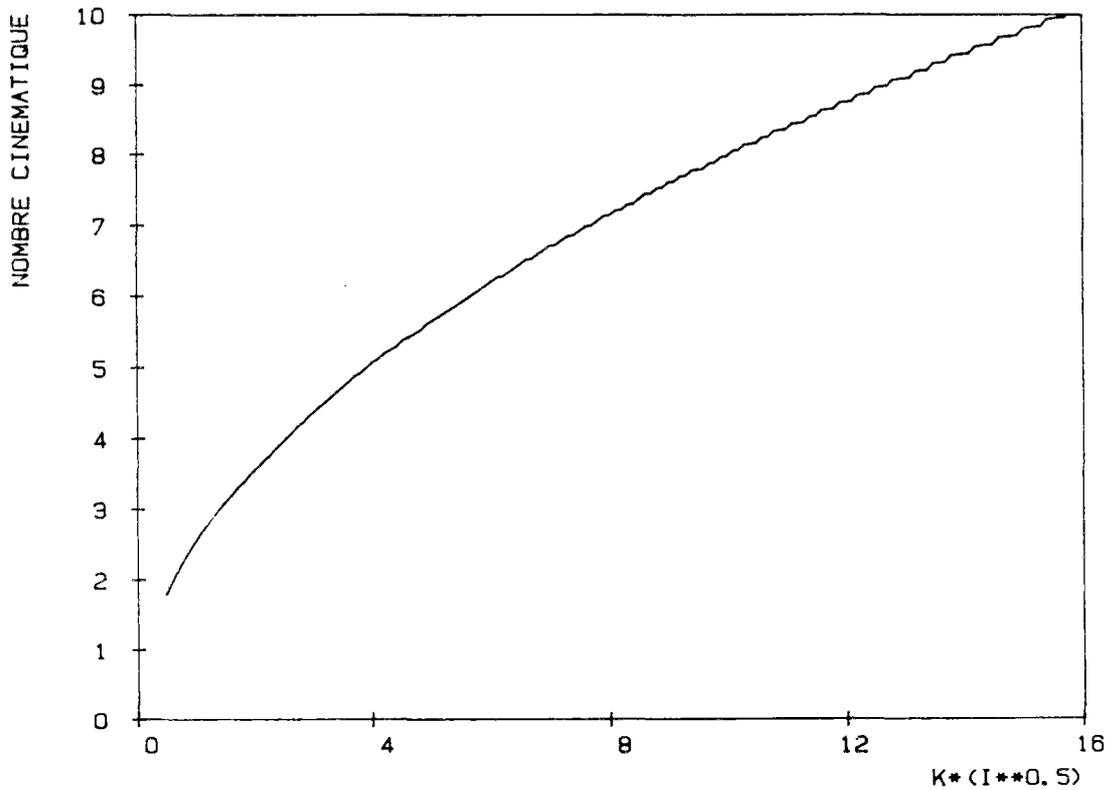


Figure 3.5

### C) Le nombre de Reynolds total R et le paramètre Z

Nous avons défini au chapitre 2-2, le nombre adimensionnel de Reynolds total R et un paramètre Z utilisé dans l'expression adimensionnelle du noyau d'Hayami (cf. équation (2.26) au paragraphe 2-2-2-1). Leurs expressions sont :

$$R = \frac{2D}{CL} \quad \text{et} \quad Z = \frac{CL}{4D} \quad ; \quad \text{le produit } R.Z = 1/2$$

La figure 3.6 indique les valeurs de Z et de R en fonction du produit  $K.I^{1/2}$ . La figure 3.7 représente les mêmes paramètres R et Z en fonction de la pente I pour un coefficient de Strickler fixé à  $K=70$ .

R est une fonction croissante du produit  $K.I^{1/2}$  (représentée par le trait continu). Z en est une fonction décroissante (représentée par le trait pointillé mixte).

L = 1000 M - COL. CIRC. DEBIT CAPABLE 5 M3/S

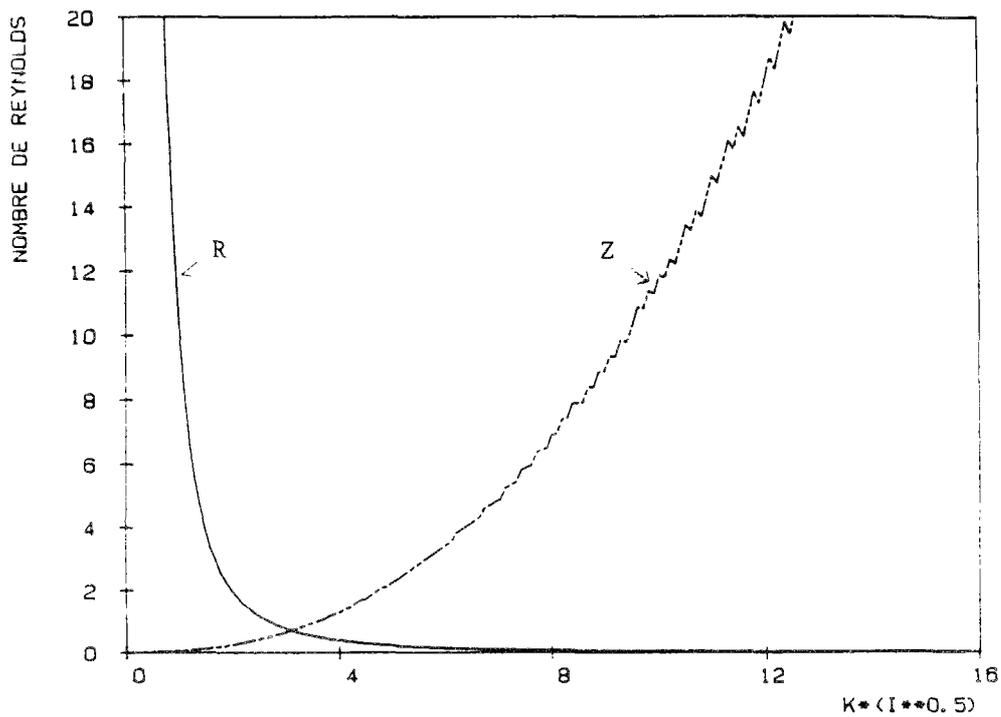


Figure 3.6

L = 1000 M - COL. CIRC. DEBIT CAPABLE 5M3/S

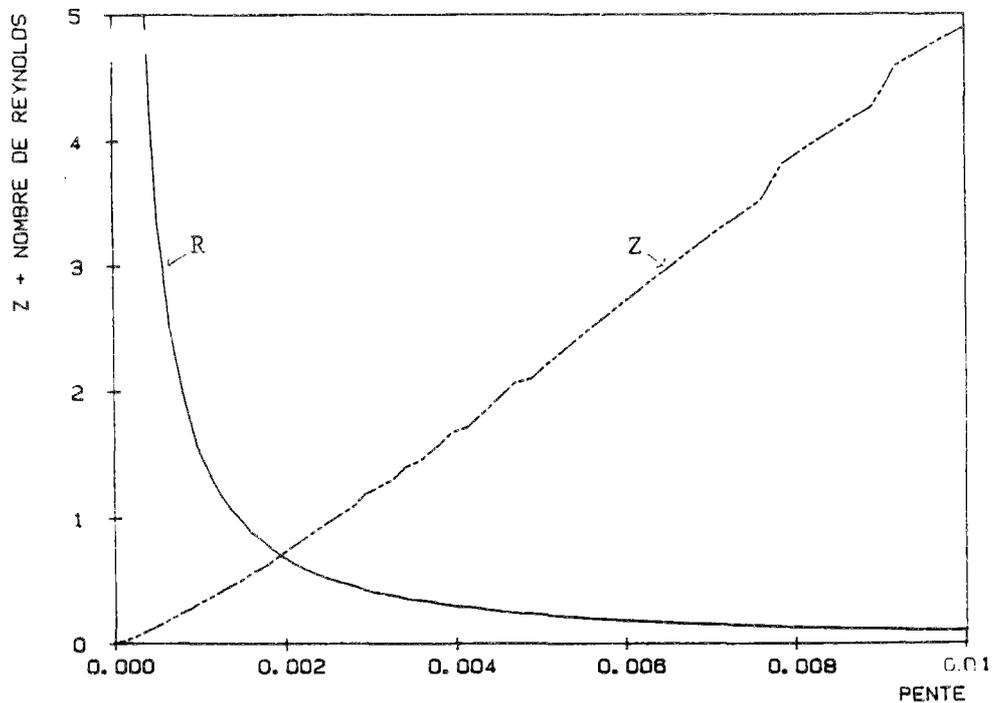


Figure 3.7

## 3-2 INFLUENCE DES METHODES DE CALCUL DES PARAMETRES

Nous appellerons : "atténuation du débit", la différence entre le débit maximum amont et le débit maximum aval, généralement exprimée en pourcentage par rapport au débit maximal amont.

### Les paramètres numériques

Le calage des paramètres numériques des schémas aux différences finies ne devrait pas a priori poser de problèmes. En effet, si les schémas sont "proprement" écrits, la **solution numérique** doit tendre vers la **solution réelle** de l'équation lorsque le pas de temps  $\Delta t$  et le pas d'espace  $\Delta x$  tendent vers 0. C'est ce que signifie notamment le théorème d'analyse numérique de Lax-Milgram.

Les expressions de la diffusion numérique des schémas de discrétisation présentés dans le chapitre 2 font intervenir les paramètres  $\Delta x$  et  $\Delta t$ . Celle-ci s'annule effectivement lorsque  $\Delta x$  et  $\Delta t$  tendent vers zéro.

Pour les schémas aux différences finies intégrant l'équation de la **crue diffusante** (de type VPD), on cherche bien à choisir  $\Delta x$  et  $\Delta t$  tels que la diffusion numérique soit négligeable devant le paramètre de diffusion hydraulique  $D$ . On se rapproche ainsi de la "vraie" solution de l'équation de la crue diffusante, tout au moins, aux noeuds de la grille de discrétisation.

En revanche, pour les schémas intégrant l'équation de l'**onde cinématique** ou les modèles de type **Muskingum**, rendre la diffusion numérique négligeable entraîne que l'on se rapproche de la solution "vraie" de l'équation de l'onde cinématique et que l'on simule la propagation des débits sans introduire de phénomènes d'atténuation. Comme on ne souhaite pas obtenir la solution "vraie" de l'équation de l'onde cinématique, mais qu'on cherche à se rapprocher de la solution vraie de l'équation de la crue diffusante, on choisit volontairement  $\Delta x$  (et  $\Delta t$ ) grand, ou en tous cas suffisamment grand pour que la diffusion numérique ne soit pas négligeable. Cette résolution numérique n'est pas "propre" au sens du théorème de Lax-Milgram puisqu'on résout une équation de crue diffusante alors qu'on intègre une équation de l'onde cinématique. On navigue donc en terrain dangereux.

Nous allons examiner pour les différents modèles simplifiés, l'influence du choix des paramètres numériques sur les réponses des modèles simplifiés. Nous examinerons aussi les conditions (conditions (2.42) à (2.46)) présentées au paragraphe 2-3-1.

Nous examinerons la corrélation entre  $\theta$  et  $\Delta x$  pour les modèles cinématiques et Muskingum. Pour le modèle Muskingum Modifié, nous examinerons l'influence du sous pas de temps de calcul  $\delta t$  sur les résultats du modèle.

## Les paramètres hydrauliques

Nous examinerons comment intervient la forme de la section dans l'allure de la courbe  $dQ/dS$  ainsi que la différence de réponse que cette forme engendre au niveau du calcul de la propagation. On essayera ensuite les deux méthodes qui permettent de déterminer  $C$  dans la zone où  $dQ/dS$  décroît.

On regardera aussi l'influence de la méthode de calcul de la célérité instantanée  $C$  (cas des modèles où  $C$  est choisi variable) en fonction des débits  $Q(i\Delta x, n\Delta t)$ ,  $Q((i+1)\Delta x, n\Delta t)$ ,  $Q(i\Delta x, (n+1)\Delta t)$ , et  $Q((i+1)\Delta x, (n+1)\Delta t)$  aux noeuds de la grille de discrétisation.

Nous étudierons les différentes méthodes permettant le calcul de  $C_m$  selon les valeurs de  $K.I'^2$ . Nous comparerons ensuite les réponses des modèles cinématiques non-linéaires avec les mêmes modèles où  $C$  est choisi constant.

Nous examinerons les réponses du noyau Hayami en fonction du paramètre  $D_m$  (lorsque le paramètre  $C_m$  est fixé). Nous analyserons l'influence de choisir  $D$  constant ou variable pour le modèle VPD.

### 3-2-1 INFLUENCE DU PAS DE TEMPS

#### 3-2-1-1 Le phénomène de lissage dû au pas de temps

Nous appelons "phénomènes de lissage", les effets d'atténuation du débit de pointe causés par le fait de prendre des débits par valeur moyenne sur chaque pas de temps. En effet  $Q(i\Delta t)$  ne signifie pas : valeur exacte du débit à l'instant  $i\Delta t$ , mais signifie : valeur moyenne du débit entre le temps  $i\Delta t$  et  $(i+1)\Delta t$ .

On peut distinguer deux types de lissage dont la cause est le pas de temps.

Le premier type de lissage intervient avant même que le calcul de la propagation ait commencé, simplement par le fait que l'hydrogramme amont est décrit (car utilisé ainsi par le modèle) par valeurs discrètes sur chaque pas de temps de calcul.

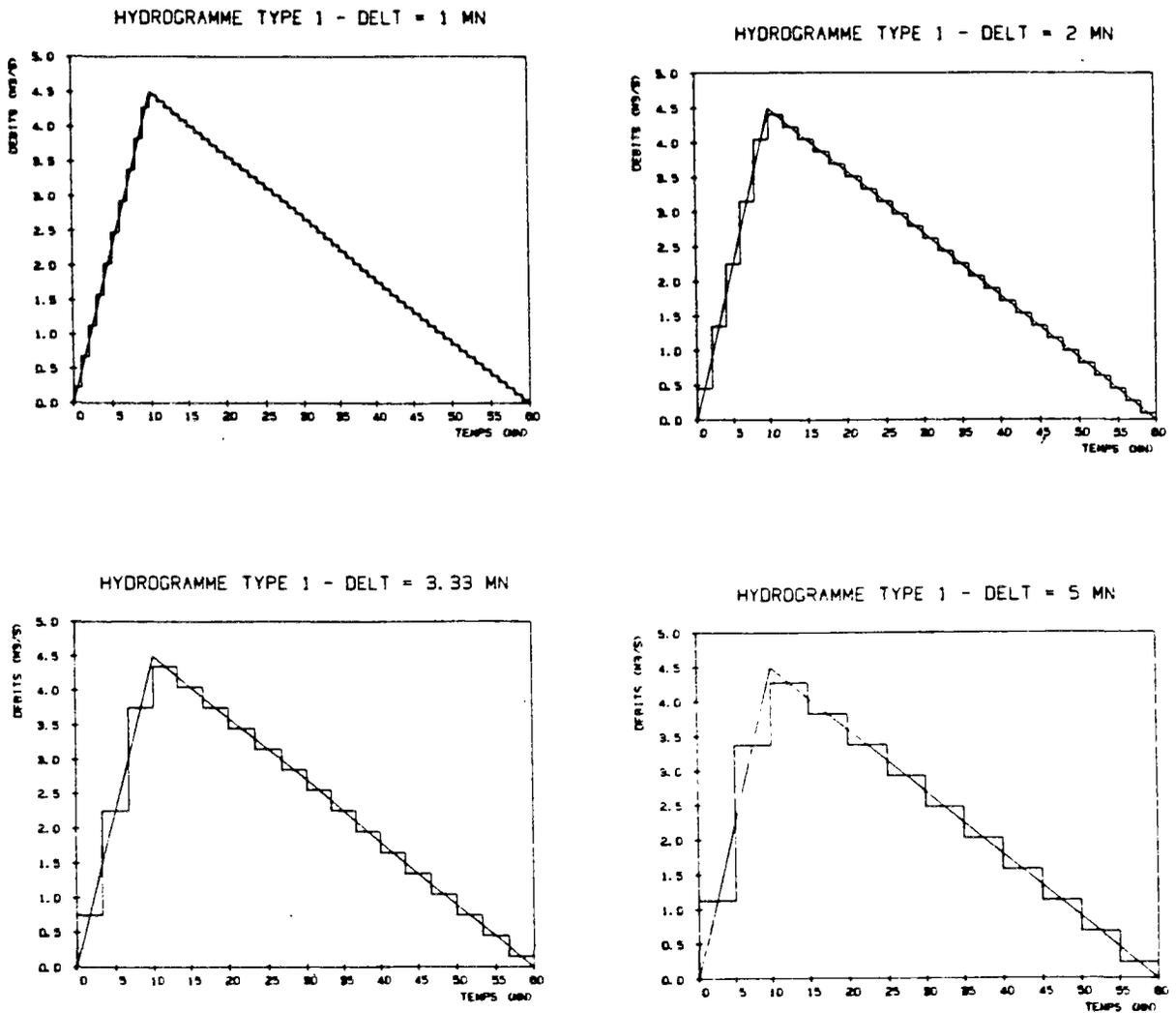


Figure 3.8

La moyenne des débits, sur chaque pas de temps engendre un phénomène de lissage, comme l'indique la figure 3.8. Le débit maximal de l'hydrogramme amont est d'autant plus faible que le pas de temps est grand.

Ce phénomène de lissage se manifeste chaque fois qu'il faut convertir un hydrogramme dans une nouvelle base de temps (donné par valeur moyenne sur chaque pas de temps). C'est le cas pour tous les modèles lors de la prédétermination (par valeurs moyennes sur chaque pas de temps) des hydrogrammes amont. C'est le cas au cours du calcul de la propagation pour des modèles qui utilisent des conversions de pas de temps (tels que Muskingum Modifié).

Remarque : Ce type de lissage peut néanmoins être légèrement diminué par le centrage du pas de temps sur la pointe de débit.

Le deuxième type de lissage intervient au cours du calcul de la propagation des débits. C'est une diffusion numérique causée par la nécessité d'effectuer des interpolations sur les débits de l'hydrogramme amont. Elle ne correspond pas nécessairement à la diffusion numérique des termes du second ordre des schémas de discrétisation des modèles simplifiés.

En effet, l'expression de la diffusion numérique des termes du second ordre des schémas de discrétisation de l'onde cinématique et Muskingum (2.30), (2.39) et (2.40) dépend uniquement du choix de  $\Delta x$  et de  $\theta$  mais ne dépend pas de  $\Delta t$ .

Or pour les modèles cinématiques et Muskingum, le pas de temps introduit aussi un effet d'atténuation des débits bien qu'il n'apparaisse pas dans l'expression de la diffusion numérique des termes du second ordre du schéma. Pour ne pas introduire de confusion avec celle-ci, nous employons le terme de lissage pour les effets d'atténuation dus au pas de temps  $\Delta t$ .

C'est sur le modèle de translation simple que l'on peut le plus facilement "mesurer" ce que signifie le lissage dû au pas de temps.

Soit un hydrogramme amont donné par valeurs moyennes tous les  $\Delta t$  pas de temps. Calculons  $Q_s(t) = Q_e(t - km)$  pour le cas où  $km = \Delta t$  (figure 3.9) et le cas où  $km = 3\Delta t/2$  (figure 3.10).

Si l'hydrogramme amont est défini par :

- |                                          |                |
|------------------------------------------|----------------|
| - pour $0 \leq t < \Delta t$             | $Q_e(t) = Q_1$ |
| - pour $\Delta t \leq t < 2\Delta t$     | $Q_e(t) = Q_2$ |
| - pour $2\Delta t \leq t < 3\Delta t$    | $Q_e(t) = Q_3$ |
| - pour $\Delta t < 0$ et $t > 3\Delta t$ | $Q_e(t) = 0$   |

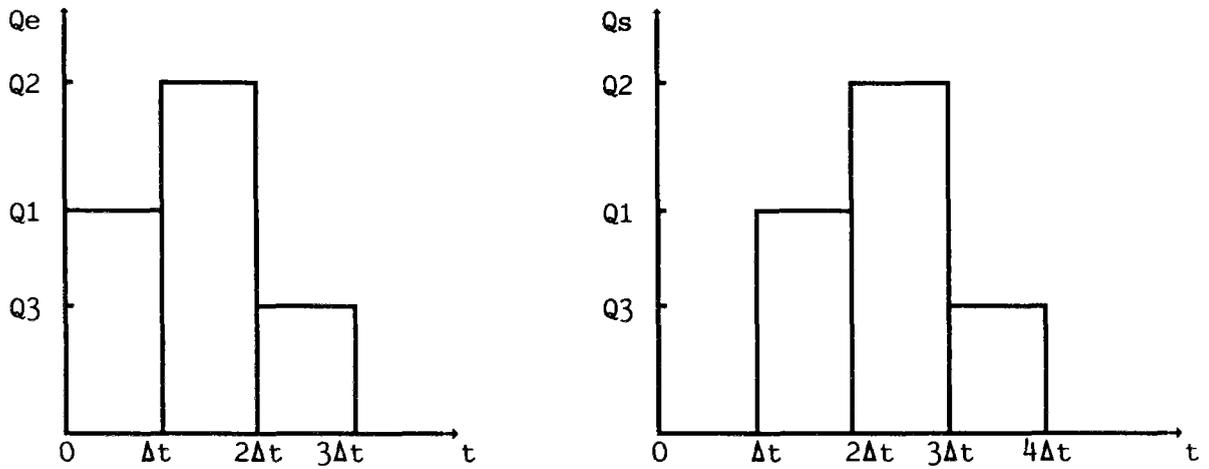


Figure 3.9 (km = Δt)

Lorsque km = Δt (Figure 3.9), l'hydrogramme aval sera défini par :

- pour  $0 \leq t < \Delta t$                        $t - km = t - \Delta t \leq 0$                        $Q_s(t) = 0$
- pour  $\Delta t \leq t < 2\Delta t$                        $0 \leq t - km = t - \Delta t \leq \Delta t$                        $Q_s(t) = Q_1$
- pour  $2\Delta t \leq t < 3\Delta t$                        $\Delta t \leq t - km = t - \Delta t \leq 2\Delta t$                        $Q_s(t) = Q_2$
- pour  $3\Delta t \leq t < 4\Delta t$                        $2\Delta t \leq t - km = t - \Delta t \leq 3\Delta t$                        $Q_s(t) = Q_3$

En revanche, dans le cas où km = 3Δt/2, l'hydrogramme aval aura la forme suivante :

- - : hydrogramme aval correct
- : hydrogramme rediscrétisé dans la base de temps

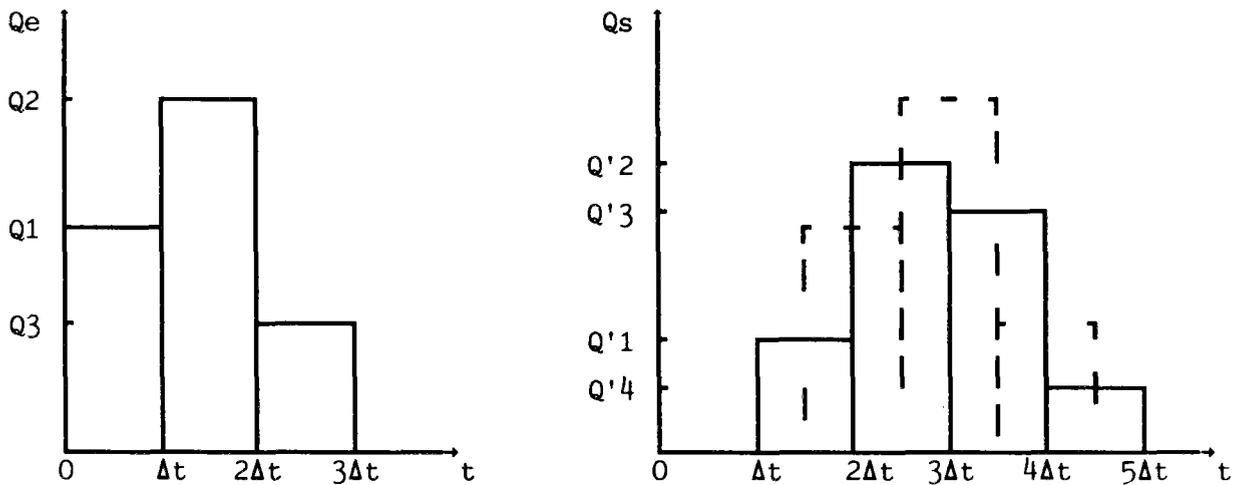


Figure 3.10 (km = 3Δt/2)

Avec  $km = 3\Delta t/2$  (Figure 3.10), si l'on pose :

$$Q'1 = Q1/2$$

$$Q'2 = (Q1 + Q2)/2$$

$$Q'3 = (Q2 + Q3)/2$$

$$Q'4 = Q3/2$$

l'hydrogramme aval est défini par :

- pour $0 \leq t < \Delta t$	$t - km = t - \Delta t \leq 0$	$Qs(t) = 0$
- pour $\Delta t \leq t < 2\Delta t$	$-\Delta t/2 \leq t - km \leq \Delta t/2$	$Qs(t) = Q'1$
- pour $2\Delta t \leq t < 3\Delta t$	$\Delta t/2 \leq t - km \leq 3\Delta t/2$	$Qs(t) = Q'2$
- pour $3\Delta t \leq t < 4\Delta t$	$3\Delta t/2 \leq t - km \leq 5\Delta t/2$	$Qs(t) = Q'3$
- pour $4\Delta t \leq t < 5\Delta t$	$5\Delta t/2 \leq t - km \leq 7\Delta t/2$	$Qs(t) = Q'4$

Dans le cas où  $km = \Delta t$  (figure 3.9), il n'y a pas de lissage et la valeur maximale de  $Qs(t)$  est égale à la valeur maximale de  $Qe(t)$  qui est  $Q2$ .

En revanche, dans le cas où  $km = 3\Delta t/2$  (figure 3.10), il y a atténuation du débit maximum et la valeur maximale atteinte par  $Qs(t)$  est  $(Q1+Q2)/2$ .

Le phénomène de lissage de l'hydrogramme propagé intervient donc à cause du fait que l'hydrogramme aval est lui même donné par une série de valeurs moyennes du débit sur chaque pas de temps. Le volume de la crue est en revanche conservé (quelle que soit la valeur du paramètre  $km$ ) et vaut :

$$Vol = \Delta t.(Q1 + Q2 + Q3 + Q4) = \Delta t.(Q'1 + Q'2 + Q'3 + Q'4)$$

Le phénomène d'atténuation par lissage est aléatoire. Pour la translation simple, il dépend de la partie décimale du quotient  $km/\Delta t$ .

De manière quantitative, on peut majorer l'atténuation obtenue par effet de lissage dû aux interpolations.

Soit l'hydrogramme amont donné par valeurs discrètes sur chaque pas de temps  $\Delta t$  et soit  $n$  tel que  $Q_{max} = Q(n\Delta t)$ . L'atténuation causée par le lissage dû au pas de temps à l'aval du bief de calcul sera au plus égale à :

$$Q_{max} - (Q_{max} + Q_{pt})/2 \text{ soit encore :}$$

$$AMP = \text{atténuation maximale} = \frac{Q_{max} - Q_{pt}}{2}$$

$$\text{où on a posé : } Q_{pt} = \max [Q((n-1)\Delta t), Q((n+1)\Delta t)].$$

Celle-ci est d'autant plus importante que  $Q_{max} - Q_{pt}$  est grand ce qui est le cas lorsque le pas de temps est grand ou lorsque les variations du débit amont à propager sont brusques.

Par exemple, pour un hydrogramme de type 1 (cf. figure 3.3) :

$$\begin{aligned} \text{- avec } \Delta t = 30s, Q_{max} = 4.477 \text{ m}^3/s \text{ et } Q_{pt} = 4.433 \text{ m}^3/s; \text{ donc} \\ AMP = 0.022 \text{ m}^3/s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{- avec } \Delta t = 120s, Q_{max} = 4.41 \text{ m}^3/s \text{ et } Q_{pt} = 4.23 \text{ m}^3/s \text{ donc} \\ AMP = 0.09 \text{ m}^3/s \end{aligned}$$

Sur cet exemple, on constate que l'atténuation causée par le lissage par interpolation de l'hydrogramme de départ est du même ordre de grandeur que l'atténuation maximale possible AMP introduite au cours de la propagation.

La condition (2.43) présentée au paragraphe 2-3-1 qui indique une valeur maximale de  $\Delta t$  en fonction du temps de crue de l'hydrogramme amont du type :  $\Delta t \leq T_c/n$  permet entre autres de limiter les effets d'atténuation dus au lissage de l'hydrogramme amont. Avec un hydrogramme de type 1, la condition (2.43) qui indique  $\Delta t \leq 120s$  permet de limiter les effets de lissage à la valeur  $0.09 \text{ m}^3/s$ .

$Q_{\max}$  effectif =  $4.5 \text{ m}^3/s$

$Q_{\max}$  après lissage avant propagation =  $4.41 \text{ m}^3/s$

$Q_{\max}$  après propagation par la translation simple  $> 4.32 \text{ m}^3/s$

### 3-2-1-2 Les conditions sur le pas de temps des modèles cinématiques et Muskingum

Examinons numériquement les conditions présentées au paragraphe 2-3-1 que doit vérifier le pas de temps.

Pour une pente de  $5^\circ/\dots$  et un strickler  $K = 70$ , le produit  $K.I^{1/2}$  vaut  $4.9$ .

Si on calcule la célérité moyenne  $C_m$  par la relation (2.55) pour un hydrogramme de type 1 ( $T_c = 10 \text{ mn}$ )  $Q_{\max} = 4.5 \text{ m}^3/s$ , on obtient  $C_m = 2.6 \text{ m/s}$ .

(2.49b) donne :

$$\frac{\Delta x}{C} - 16 \leq \Delta t \leq \frac{\Delta x}{C} \quad \text{exprimé en secondes}$$

Nous avons par exemple effectué des simulations avec le schéma (2.30) pour une valeur de  $\Delta x$  fixée à  $250 \text{ m}$ .

La condition (2.49b) donne alors :

$$80 \leq \Delta t \leq 96 \text{ secondes.}$$

$\Delta t > 96s$  entraîne en théorie un schéma instable ;

$\Delta t \leq 80s$  entraîne des débits négatifs.

Ces conditions ne laissent que peu de choix et on voit qu'elles peuvent se résumer à  $\Delta t$  très proche de  $k = \Delta x/C$ .

Pour un hydrogramme type 1, la condition (2.43) donne par ailleurs :

$$\Delta t \leq T_c/5 \quad \text{soit : } \Delta t \leq 2 \text{ mn}$$

Pour tester les effets du non respect de ces conditions, nous avons réalisé des simulations en faisant varier  $\Delta t$  de  $10s$  à  $240s$ .

### Stabilité numérique

Jusqu'à  $\Delta t = 180s$ , nous n'avons pas constaté d'instabilité avec le modèle de Muskingum-Cunge (schéma (2.30)). On peut donc ne pas respecter la condition de stabilité des modèles cinématiques (qui imposait dans notre cas  $\Delta t \leq 96 s$ ) sans générer d'instabilités numériques. Pour le pas d'espace choisi,  $\Delta t = 180s$  correspond à un nombre de courant  $Co \approx 1.8$ .

En réalité, la stabilité numérique ne doit pas se mesurer expérimentalement. Soit on considère qu'on a un schéma d'intégration soumis à des conditions de stabilité et dans ce cas, on les calcule et on les respecte. Soit on considère qu'il n'y a pas de conditions de stabilité. Les points de vue sont partagés. On vérifie néanmoins expérimentalement que  $\Delta t > 180s$  entraîne (dans ce cas) un comportement typiquement instable (amplification des débits). Il semble donc raisonnable d'appliquer les conditions de stabilité aux modèles Muskingum. Si on peut souvent ne pas respecter ces conditions de stabilité, c'est à cause de la diffusion numérique qui diffère selon les événements et les conditions géométriques.

Nous considérerons donc que les modèles Muskingum (ainsi que les modèles cinématique) sont soumis aux conditions de stabilité calculées qui impliquent  $Co \leq 1$  (i.e  $\Delta t \leq \Delta x/C$ ).

### Débits négatifs en début de crue

Il n'est pas nécessaire de choisir  $\Delta t > 80s$  puisque les simulations ont pu être réalisées avec  $\Delta t = 10s$ . Ce résultat est conforme à ce qu'indiquent PONCE et THEURER (cf. §2-3-1). Néanmoins, les "petits"  $\Delta t$  peuvent engendrer des débits négatifs comme annoncé par NASH et KOUSSIS (cf. §2-3-1-3).

Nous avons constaté que le respect de la condition  $\Delta t > 2.\theta.\Delta x/C$  (i.e la condition (2.45c)) permettait de ne pas faire apparaître de débits négatifs.

Par exemple, avec les conditions étudiées au début de ce paragraphe, nous avons présenté figure 3.11 les réponses du schéma (2.30) linéaire où la valeur du paramètre  $\theta$  était fixée à 0.4.

L'hydrogramme en trait mixte est pour  $\Delta t = 15s > 80s$  et est négatif en début de crue. L'hydrogramme en trait plein est pour  $\Delta t = 2.5mn$ .

En revanche, pour  $\theta = 0$ , les modèles ne génèrent pas de débits négatifs en début de crue (quel que soit le pas de temps).

Avec les mêmes conditions que pour la figure 3.11 la figure 3.12 montre l'influence de  $\theta$  sur les débits négatifs lorsque les autres paramètres sont fixés.

Remarque : Le fait que le paramètre  $\theta$  ait une influence sur le débit maximum sera analysé dans le paragraphe 3-2-2 consacré à l'influence de  $\theta$  et de  $\Delta x$ .

CINE LIN - DELT = 15 S ; 2.5 MN - TETA = 0.4 5

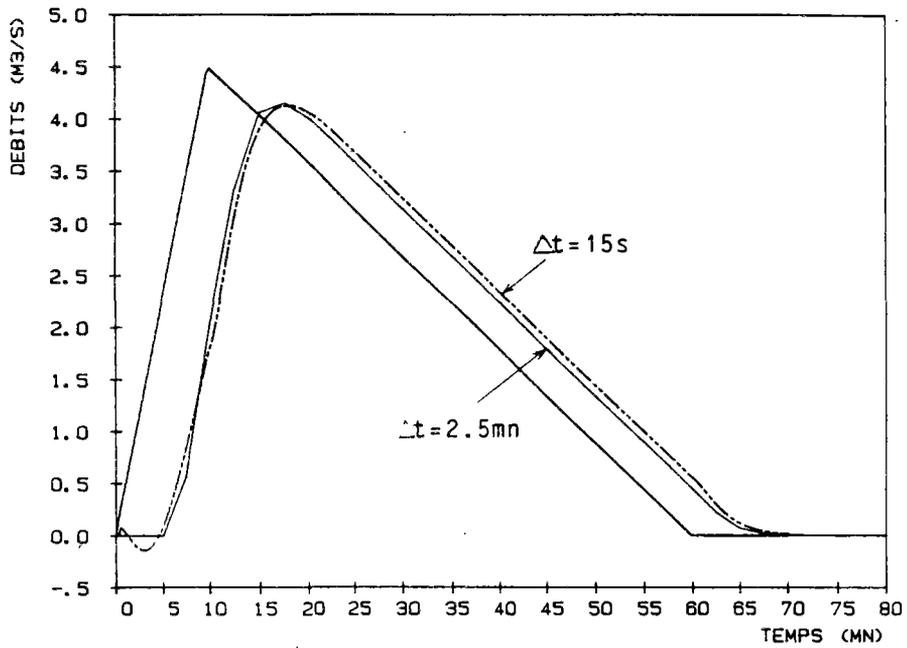


Figure 3.11

CINE LIN - DELT = 15 S - TETA = 0.1 ; 0.2 ; 0.4

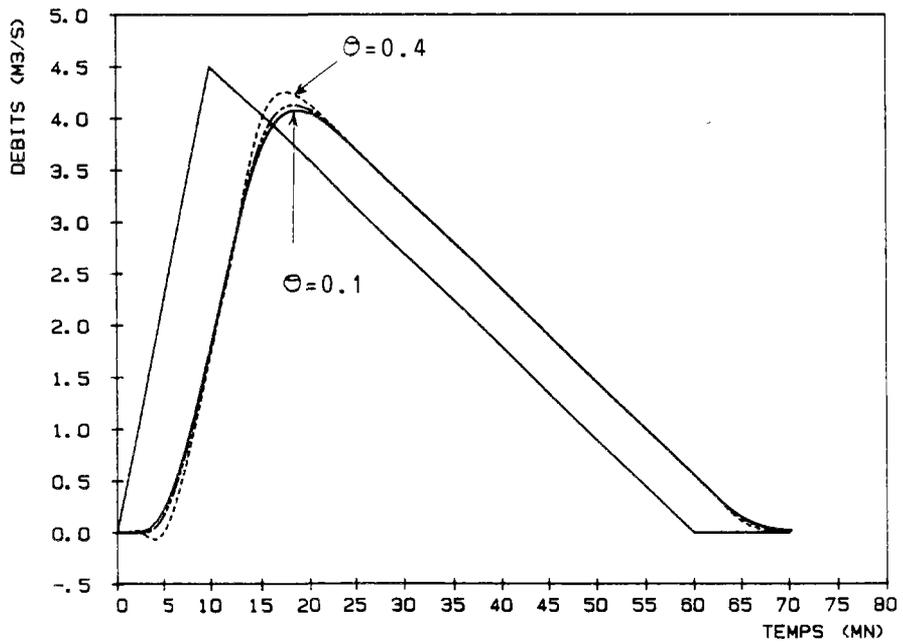


Figure 3.12

### Conclusions :

Contrairement au pas d'espace qui intervient dans l'expression de la diffusion numérique des termes du second ordre et qui influe considérablement (voir paragraphe suivant) sur l'atténuation du débit de pointe, le pas de temps de calcul n'influe pas sur l'atténuation des débits si ce n'est par l'intermédiaire du phénomène de lissage que nous avons expliqué au paragraphe 3-2-1-1. Celui-ci reste néanmoins très faible tant que  $\Delta t$  vérifie la condition (2.43).

Pour les modèles cinématiques et Muskingum, le choix du paramètre  $\Delta t$  doit s'effectuer d'abord en fonction de la condition (2.43). Il faut ensuite vérifier que ce choix permet de respecter les conditions de stabilité :  $Co \leq 1$  et que la valeur de  $\Delta t$  permette de respecter à peu près la condition  $\Delta t > 2\theta \Delta x / C$ .

Le fonctionnement numérique des modèles cinématiques et Muskingum sera optimal si l'on peut choisir le pas de temps  $\Delta t$  tel que :

- le nombre de courant  $Co$  soit voisin de 1 sans en être supérieur,
- la condition  $\Delta t \leq Tc/n$  (2.43) soit respectée.

Dans la pratique, les contraintes sur le pas d'espace  $\Delta x$  sont plus importantes. Il est donc sans doute préférable de choisir d'abord  $\Delta x$  et de vérifier que le choix d'un  $\Delta t$  proche de la valeur  $\Delta x / C$  permette de respecter la condition (2.43). Si tel n'est pas le cas, on pourra alors utiliser un modèle Muskingum Modifié.

#### 3-2-1-3 Sous pas de temps et de Muskingum Modifié

Le fonctionnement du modèle Muskingum Modifié (2.40) est décrit dans le paragraphe 2-2-2-3. Il implique, avant le calcul de la propagation, la conversion de l'hydrogramme amont de la base de temps  $\Delta t$  à la base de temps  $\delta t$ . Il implique, après calcul, la conversion de l'hydrogramme aval de la base de temps  $\delta t$  à la base de temps  $\Delta t$ .

Le phénomène de lissage intervient donc plusieurs fois au cours d'une propagation. Son caractère aléatoire permet l'explication des résultats obtenus.

Le tableau 3.1 présente les résultats d'un jeu de simulations avec plusieurs valeurs de  $\delta t$ , pour un collecteur  $\phi 1500$  de pente  $I=5\%$  et de Strickler  $K = 70$ .

Pour un hydrogramme de type 1, avec  $\Delta x=250m$  les résultats ont été les suivants (QM représente le débit maximal de l'hydrogramme aval et  $dp$  la durée de propagation) :

$\Delta t$	QM (m <sup>3</sup> /s)	dp (mn)
(0.1)km	4.173	6.5
(0.2)km	4.207	7.5
(0.3)km	4.184	6.5
(0.4)km	4.217	8.0
(0.5)km	4.147	6.5

Tableau 3.1

Il n'y a pas de règles évidentes et le caractère aléatoire des phénomènes de lissage explique sans doute les différences obtenues.

Toutefois, les différences entre les résultats ne sont pas à considérer dans l'absolu car 2 hydrogrammes très "proches" l'un de l'autre peuvent donner une durée de propagation assez différente en raison de la faible variation des débits (tangente horizontale) au voisinage des maximums. Au niveau d'un graphique, les résultats présentés dans le tableau 3.1 sont pratiquement confondus.

#### Conclusions :

Il est préférable de n'utiliser le modèle Muskingum Modifié que lorsque la raideur de l'hydrogramme amont empêchera de respecter la condition  $\Delta t \leq T_c/n$  (on considère que  $n = 5$  correspond à la valeur minimale admissible). Dans ce cas, on choisira  $\Delta t$  tel que  $\Delta t \leq T_c/n$  entre (0.1)xkm et (0.5)xkm.

### 3-2-2 LA DIFFUSION NUMERIQUE DES MODELES

Les paragraphes 3-2-2-1 à 3-2-2-7 sont consacrés à la diffusion numérique des schémas de discrétisation de l'équation de l'onde cinématique et des modèles Muskingum présentés au chapitre 2-2.

Le paragraphe 3-2-2-8 est consacré aux erreurs d'intégration du noyau d'Hayami et le paragraphe 3-2-2-9 à la diffusion numérique du modèle de crue diffusante VPD.

#### 3-2-2-1 Influence de $\Delta x$ et de $\theta$ pour les modèles cinématiques

Ces paramètres doivent être étudiés simultanément car ils interviennent tous deux dans l'expression de la diffusion numérique des termes du second ordre des modèles cinématiques et Muskingum. Pour les schémas (2.30) et (2.40), cette diffusion numérique a pour expression (cf. partie 2) :

$$D_n = C. \left[ \frac{1}{2} - \theta \right]. \Delta x \quad (3.1)$$

Nous avons tracé figure 3.13, l'influence de  $\Delta x$  et figure 3.14, l'influence de  $\theta$  sur l'atténuation du débit de pointe pour un hydrogramme de type 1.

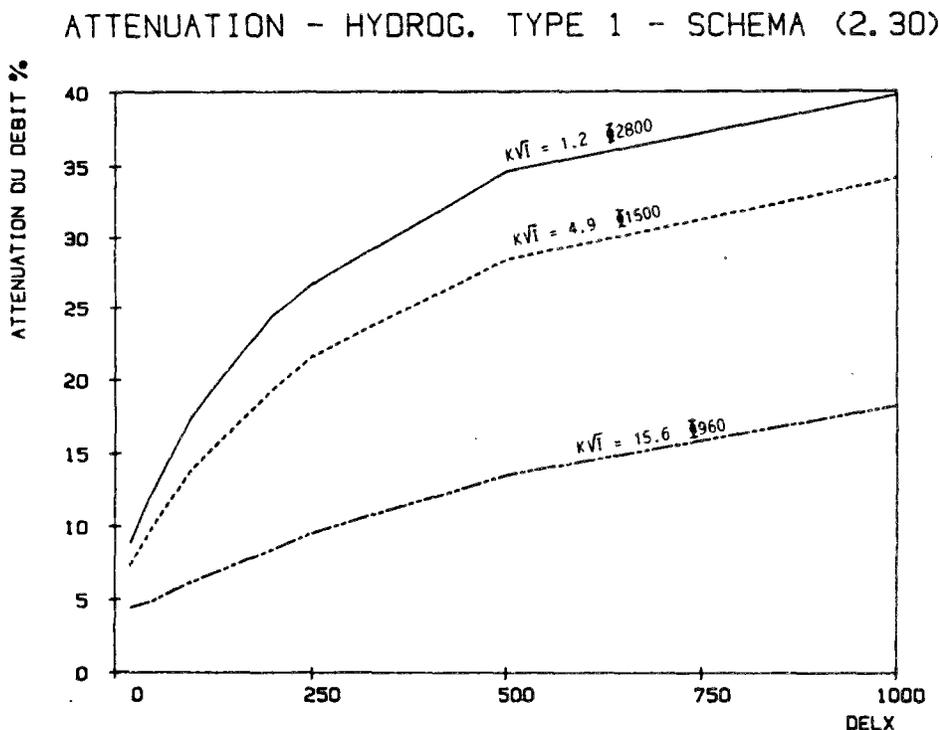


Figure 3.13

## ATTENUATION - HYDROG. TYPE 1 - SCHEMA (2.30)

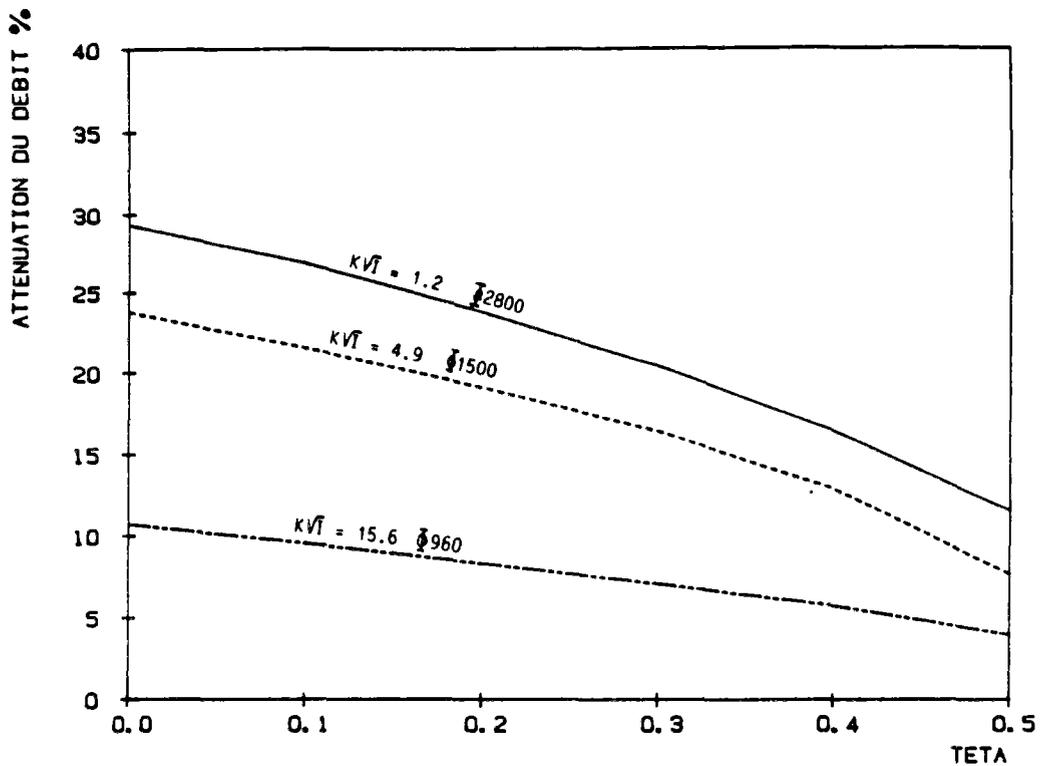


Figure 3.14

Pour les simulations où  $\theta$  varie,  $\Delta x = 250\text{m}$ .

Pour les simulations où  $\Delta x$  varie,  $\theta$  était fixé à 0.1.

3-2-2-2 Etude avec un paramètre  $\theta$  variable

Nous avons vu que le schéma Muskingum Modifié (2.40) utilisait l'identification de la diffusion numérique à la diffusion hydraulique  $D$  de la crue diffusante et calculait automatiquement  $\theta$  par la relation (2.31) :

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 - \frac{Q}{IBC\Delta x} \right]$$

Cette relation permet de maintenir l'égalité entre la diffusion numérique  $D_n$  (donnée par 3.1) et la diffusion hydraulique  $D$  à chaque pas de temps de calcul.

Pour des conditions hydrauliques fixées, ( $D$  étant fixé), le modèle Muskingum Modifié devrait donner des réponses identiques pour toute valeur de  $\Delta x$  pourvu qu'on respecte la condition  $Cr \leq 2$  (si on considère que  $\theta_{\min} = -0.5$ ) ou  $Cr \leq 1$  (si on considère que  $\theta_{\min} = 0$ ) ; condition qui fixe une valeur minimale de  $\Delta x$  pour que  $\theta$  ne décroisse pas au delà de sa valeur minimale admissible.

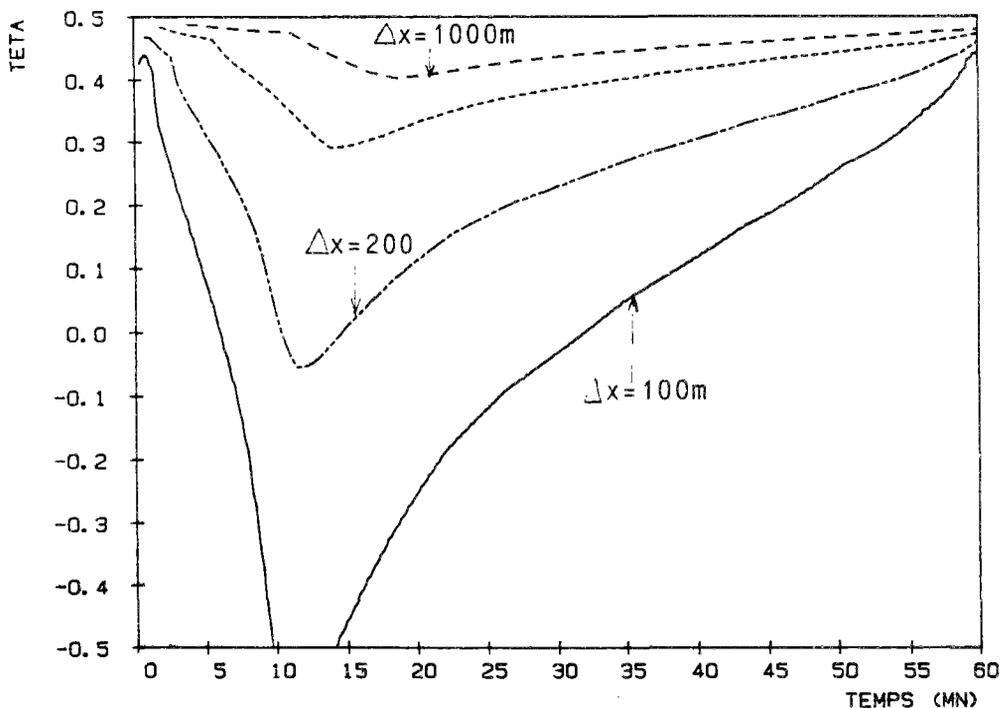
Pour un collecteur  $\phi 1500$  dont la pente est de  $5^\circ/100$  et le Strickler de 70, la condition  $Cr \leq 2$  donne  $\Delta x > 120$  mètres environ. Avec ces hypothèses, nous avons effectué des simulations avec le modèle Muskingum Cunge en faisant varier le pas d'espace de  $\Delta x = 100\text{m}$  à  $\Delta x = 1000\text{m}$ .

L'atténuation du débit de pointe est identique pour tous les pas d'espace (avec les hydrogrammes types de la figure 3.3). La relation (2.31) permet de conserver au cours de la propagation, l'égalité  $D_n = D$ . On résout donc effectivement une équation de crue diffusante où la diffusion hydraulique  $D$  est remplacée par la diffusion numérique  $D_n$ , ce qui explique que le choix du pas d'espace n'influe pas sur les résultats. On vérifie de plus la possibilité de prendre des valeurs de  $\theta$  négatives. Cette possibilité présente l'intérêt majeur de pouvoir choisir des valeurs de  $\Delta x$  plus faibles, puisque la condition pour que l'égalité  $D_n = D$  soit vérifiée est  $Cr \leq 2$  (au lieu de  $Cr \leq 1$  si on prend  $\theta = 0$  comme valeur minimale limite).

Nous avons tracé sur la figure 3.15 les valeurs que prenait  $\theta$  au cours du calcul de la propagation d'un hydrogramme de type 1 pour différents  $\Delta x$ . Plus  $\Delta x$  est grand, moins  $\theta$  décroît.

Pour  $\Delta x = 100\text{m}$ , la pointe de l'hydrogramme aux alentours de  $t = 10\text{mn}$  entraîne une valeur de  $\theta$  inférieure à  $-0.5$ , (bornée automatiquement à  $-0.5$ ). A partir de valeurs de  $\Delta x$  telles que  $\Delta x \leq 120\text{ m}$ , la diffusion numérique  $D_n$  ne peut plus être égale à la diffusion hydraulique  $D$  car elle reste trop faible. Pour des valeurs de  $\Delta x$  inférieures à 120 mètres, la diffusion numérique des termes du second ordre devient inférieure à  $D$  dès que  $\theta$  calculé par (2.31) devient inférieur à  $-0.5$ .

$$K*(I^{**}.5) = 4.9 - \text{DELX} = 100 ; 200 ; 500 ; 1000$$



*Figure 3.15*

Ces résultats sur le modèle Muskingum Cunge permettent de proposer un choix des paramètres  $\Delta x$  et  $\theta_m$  des modèles linéaires en  $\theta$  (modèles qui utilisent un paramètre  $\theta$  constant), que nous étudierons au paragraphe suivant.

### 3-2-2-3 Etude avec $\theta$ constant

Nous avons effectué des simulations avec les modèles linéaires (2.30) et (2.40) en choisissant  $\theta$  en fonction de sa valeur minimale atteinte. Cette valeur calculée par (2.31) correspond (cf. figure 3.15) au débit maximal de l'hydrogramme amont et se calcule par la relation :

$$\theta_m = \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 - \frac{Q_{\max}}{I.B(Q_{\max}).C(Q_{\max}).\Delta x} \right] \quad (3.2)$$

Pour tout pas d'espace  $\Delta x$ , on calcule (à l'aide de la relation 3.2) une valeur  $\theta_m(\Delta x)$  correspondante, en s'assurant le respect de (2.42d) qui impose  $\theta_m > -0.5$ .

Avec une valeur  $\theta_m$  déterminée de la sorte, on obtient des résultats qui ne dépendent plus du paramètre  $\Delta x$ , comme pour le modèle Muskingum Modifié.

Nous avons par ailleurs examiné quelles étaient les différences entre les schémas (2.30) et (2.34).

Lorsque les paramètres des schémas (2.30) et (2.34) sont identiques, les réponses des modèles sont différentes. En revanche, si on utilise la relation (2.35) pour déterminer  $\theta$  avec le débit maximal de l'hydrogramme amont, on retrouve exactement les mêmes réponses que celles du modèle (2.30) lorsque  $\theta$  est calculé par (2.31) (cf. §2-2-3-2).

Par exemple, pour un collecteur  $\phi 1500$  de pente  $5^\circ/\dots$  et de Strickler  $K=70$ , les modèles (2.30) et (2.34) donnent, pour un hydrogramme de type 1, les réponses indiquées dans les tableaux 3.2 et 3.3. La célérité moyenne  $C_m$  était calculée par la méthode M1 (voir plus loin au §3-2-4);  $\Delta t = 30$  s :

schéma (2.30)

$\Delta x$ (m)	$\theta_m$ (1)	QM m <sup>3</sup> /s	dp (mn)
100	-0.3	4.07	9
200	-0.12	4.09	8
500	0.24	4.09	8
1000	0.37	4.07	8

Tableau 3.2

(1)  $\theta_m$  calculé par (2.31)

schéma (2.34)

$\Delta x$ (m)	$\theta_m$ (2)	QM m <sup>3</sup> /s	dp (mn)
100	-0.1	4.09	8
200	0.02	4.07	8
500	0.31	4.05	8
1000	0.42	4.02	8

Tableau 3.3

(2)  $\theta_m$  calculé par (2.35)

On peut noter qu'à paramètre  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  et  $\theta$  identiques, la diffusion numérique du schéma (2.34) est supérieure à celle du schéma (2.30).

$\theta$  calculé par l'expression (2.35) prend des valeurs supérieures aux valeurs calculées par l'expression (2.31). Mais puisque pour chacun des schémas (pour le débit maximal), la diffusion numérique est identique (égale à la diffusion hydraulique  $D$ ), les réponses des deux schémas sont quasiment identiques. On résout pour les 2 schémas la même équation de crue diffusante avec une diffusion numérique telle que  $D_m = D(Q_{\max}) = \text{constante}$ . La diffusion numérique  $D_{n1}$  du schéma (2.30) est égale à la diffusion numérique  $D_{n2}$  du schéma (2.34), elle même égale à la diffusion hydraulique moyenne  $D_m$ .

### Conclusions

Si on a identifié précisément la diffusion numérique de chaque schéma et qu'on maîtrise les valeurs que cette diffusion numérique prend en fonction des paramètres  $\theta$ ,  $\Delta x$  (et éventuellement  $\Delta t$ ), la résolution de l'équation de l'onde cinématique par un schéma numérique ou un autre donne les mêmes résultats. Il n'y a donc pas d'intérêt à utiliser le schéma (2.34) de KOUSSIS dont l'expression est plus compliquée que celle du schéma (2.30). Elle est en effet plus complexe, tant au niveau de l'expression des paramètres  $C_1$ ,  $C_2$ , et  $C_3$  du schéma (2.34), qu'au niveau de la relation (2.35) qui permet le calcul de  $\theta$  pour que la diffusion numérique des termes du second du schéma (2.34) soit égale à la diffusion hydraulique  $D$ .

A partir d'ici, on ne parlera plus du schéma (2.34) et on conservera uniquement le schéma (2.30) et sa variante Muskingum Modifiée (2.40).

#### 3-2-2-4 Influence de $\theta$ variable par rapport à $\theta$ constant

Quelles différences sur les réponses d'un modèle cinématique de type Muskingum-Cunge entraîne le fait de choisir  $\theta$  constant (calculé par (3.2)) où  $\theta$  variable (calculé par (2.31))?

Nous avons testé le modèle Muskingum-Cunge non-linéaire ( $C$  variable) avec  $\theta$  constant calculé par la relation (3.2) (cf. page précédente).

Au niveau de l'atténuation des débits de pointe et de la durée de propagation, il n'y a pratiquement aucune différence. En revanche, comme le montre la figure 3.16,  $\theta$  variable entraîne une croissance plus tardive et plus raide de l'hydrogramme aval.

Ceci s'explique à l'aide de la figure 3.15 qui montre que pour des faibles débits,  $\theta$  reste proche de 0.5 donc n'introduit que très peu d'atténuation.

La figure 3.16 a été réalisée avec les conditions suivantes :

$K = 70$ ,  $I = 5^\circ/\dots$ ,  $\Delta x = 250\text{m}$ ,  $\Delta t > 30\text{s}$ .

$\theta_m(\Delta x)$  calculé par la relation (3.2) donne  $\theta_m = 0.1$

TETA VARIABLE OU FIXE (POINT. : TETA = .1)

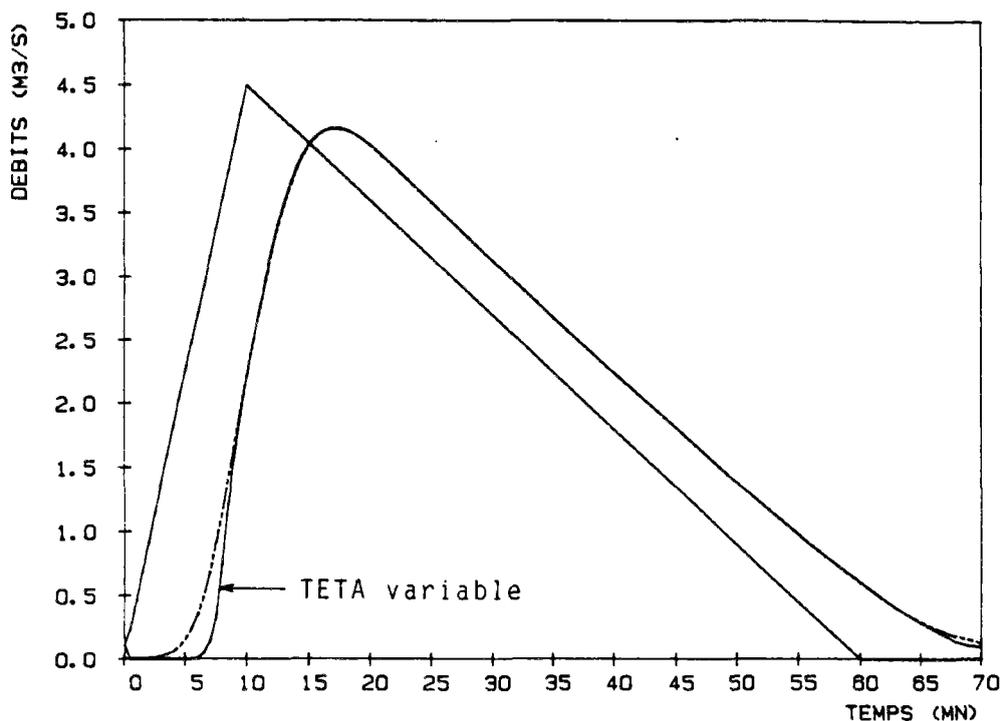
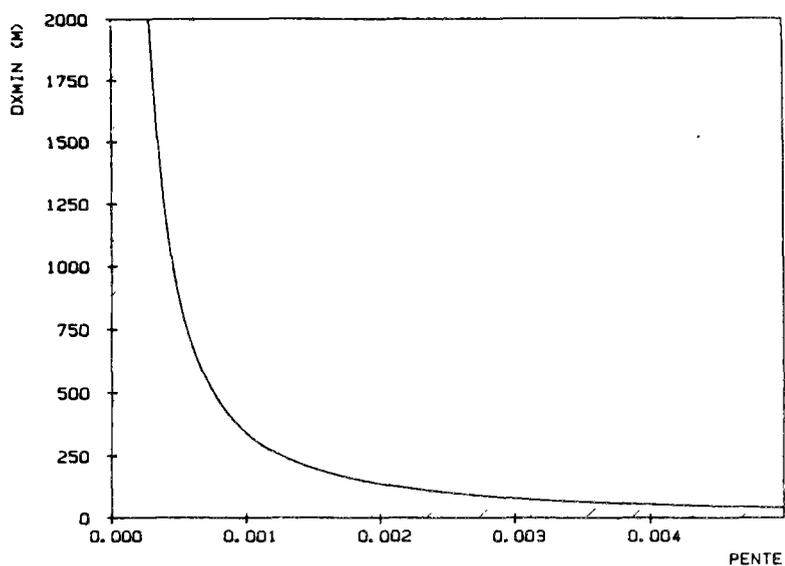


Figure 3.16

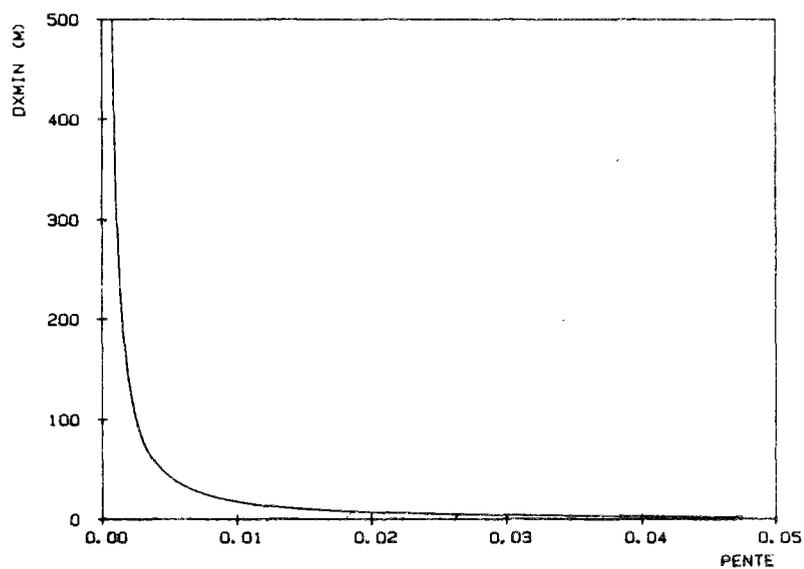
3-2-2-5 Domaines théoriques de validité de l'identification de la diffusion numérique à la diffusion hydraulique

Lorsque les conditions structurelles sont fixées,  $\theta_m(\Delta x)$  est une fonction croissante de  $\Delta x$  qui tend vers 0.5 quand  $\Delta x$  tend vers l'infini.  $\theta_m$  tend vers moins l'infini quand  $\Delta x$  tend vers 0. Pour ne pas décroître en deçà de -0.5, il est nécessaire que  $\Delta x$  vérifie la condition (2.42d). Les figures 3.17 et 3.18 montrent les valeurs que prend  $\Delta x_{min}$  en fonction de la pente d'un collecteur  $\phi 3000$ , les autres paramètres étant fixés.

K=70 COLLECTEUR CIRC. 3 METRES

*Figure 3.17*

K=70 COLLECTEUR CIRC. 3 METRES

*Figure 3.18*

### 3-2-2-6 Diffusion numérique des termes d'ordres supérieurs à 2

L'expression (3.1) permet le calcul de la diffusion numérique du schéma, c'est-à-dire en réalité, la diffusion des termes d'ordre 2 du schéma. En général, les autres termes d'ordres supérieurs sont supposés introduire des erreurs négligeables par rapport aux termes d'ordre 2.

Néanmoins, si on observe la relation (3.1), on constate que  $\theta = 0.5$  annule la diffusion numérique des termes du second ordre. Or, la figure 3.13 qui donnaient le pourcentage de l'atténuation du modèle en fonction de la valeur du paramètre  $\theta$  montre que  $\theta = 0.5$  ne correspond pas à une atténuation nulle.

On a donc pour  $\theta = 0.5$ , une mesure précise de la diffusion numérique des termes d'ordre supérieur à 2 en fonction de  $\Delta x$ , à laquelle il faut toutefois retrancher les effets d'atténuation causés par le lissage du pas de temps.

La diffusion numérique totale du schéma (2.30) dépend au moins de trois facteurs et est a priori d'autant plus importante :

- que la pente est faible (cf. figure 3.13)
- que l'hydrogramme amont est raide (i.e que  $T_c$  est court)
- que le pas d'espace et le pas de temps sont grands.

La diffusion numérique des termes d'ordre supérieur à 2 fait donc intervenir le paramètre adimensionnel  $\Delta x^+ = C.T_c/\Delta x$ . Plus  $\Delta x^+$  est petit, plus les erreurs d'intégration sont importantes.

On pourrait examiner à l'ordre 3 ce que donnent les schémas (2.30) ou (2.40) mais il est délicat d'estimer les ordres de grandeur des termes du troisième ordre.

Concernant les limites de validité des développements de Taylor, l'expression de la diffusion numérique des schémas n'est valable que si  $(\partial^3 Q/\partial x^3) \cdot \Delta x^3/6$  est négligeable devant le terme  $(\partial^2 Q/\partial x^2) \cdot \Delta x^2/2$  et  $(\partial Q/\partial x) \cdot \Delta x$ . Ceci impose  $(\partial^3 Q/\partial x^3)$  ou  $\Delta x^3/6$  très petits.

Si les hydrogrammes ont une forme approximativement parabolique entre deux pas d'espace, les développements limités de Taylor jusqu'à l'ordre 2 sont suffisants.

Si  $\Delta x$  augmente, les termes du troisième ordre introduisent une atténuation en approximant la forme de l'hydrogramme entre deux pas d'espace à une parabole. Plus  $\Delta x$  est grand, plus cette erreur est importante. De même, à pas d'espace égal, plus la longueur  $C.T_c$  est courte, moins les termes  $\partial^n Q/\partial x^n$  d'ordre  $n$  ( $n > 2$ ) seront petits.

### 3-2-2-7 Essais pour des pentes faibles

Pour illustrer la diffusion numérique des termes d'ordres supérieurs à deux, nous avons présenté dans le tableau 3.4 les résultats de simulations réalisées avec un hydrogramme de type 1 tel que  $T_c = 10mn$ . Ceci entraîne que  $C_m.T_c = 660m$  puisque  $C_m \approx 1.13$  m/s. La pointe de l'hydrogramme pénètre dans le collecteur quand le début de la crue commence à apparaître 660m plus en aval.

$\Delta x$ (m)	100	200	250	500	1000
QM (m <sup>3</sup> /s)	3.76	3.46	3.33	2.95	2.82
dp (mn)	15.5	17	18	18	13

Tableau 3.4

On a vu (cf. figures 3.17 et 3.18) que le pas d'espace minimal nécessaire à la validité de l'expression (2.31) prend des valeurs très grandes pour des pentes inférieures à 1°/...

Pour une pente de 5°/... et un hydrogramme de type 1, nous avons testé sur un collecteur  $\phi 2300$  le schéma (2.30) en fonction du pas d'espace  $\Delta x$ . Avec ces conditions, l'identification de la diffusion numérique des termes du second ordre du schéma de discrétisation à la diffusion hydraulique ne peut se faire que si  $\Delta x > 320m$  (cf. condition 2.42d).

Néanmoins, les résultats montrent que l'identification de la diffusion numérique du schéma (2.30) à la diffusion hydraulique D n'est plus exacte. En effet, tant que  $\Delta x$  reste inférieur à 320 m,  $\theta$  est maintenu constant à -0.5 et il est naturel que la diffusion du schéma soit plus faible que la diffusion hydraulique D. En revanche, pour tout  $\Delta x$  supérieur à 320 mètres, le coefficient  $\theta$  est déterminé par (2.31) et devrait permettre, si l'atténuation des débits n'était causée que par la diffusion numérique des termes d'ordre 2, de maintenir une diffusion constante quel que soit  $\Delta x$ , puisque Dn reste constamment égale à la diffusion hydraulique D.

Puisque l'atténuation du débit continue d'augmenter, la diffusion numérique donnée par l'expression (3.1) n'est plus seule à intervenir dans l'atténuation des débits. Le schéma (2.30) n'est donc plus convergent vers la solution de la crue diffusante.

Pour les conditions du tableau 3.4, prendre un pas d'espace  $\Delta x = 500m$  ou  $\Delta x = 1000m$ , alors que la distance sur laquelle s'étend la crue de l'hydrogramme amont n'est que de 660 mètres rend la diffusion numérique des termes du troisième ordre non nulle et correspond à un découpage trop grossier du bief.

Nous avons constaté que pour un hydrogramme de type 4, (où  $T_c=30$  mn), l'atténuation, bien que dépendant des termes d'ordre 3 (fonction croissante de  $\Delta x$ ) était moins importante que pour l'hydrogramme de type 1.

Pour  $T_c=30mn$ ,  $CT_c$  est 3 fois plus grand que pour  $T_c=10mn$ .

En hydraulique fluviale où les crues sont toujours suffisamment longues ( $T_c$  longs), les termes du troisième ordre restent en général négligeables par rapport à la diffusion numérique calculée des termes du second ordre. Le paramètre adimensionnel  $\Delta x^+ = CT_c/\Delta x$  reste toujours très supérieur à 1 même pour des pas d'espaces "grands".

En assainissement, le pas d'espace doit aussi être comparé à la variabilité spatiale des hydrogrammes propagés. On peut définir un "grand" ou un "petit" pas d'espace par rapport à la distance  $C.T_c$ , par l'intermédiaire du nombre adimensionnel  $\Delta x^+ = CT_c/\Delta x$ .

Outre le fait de sortir de la limite de validité des schémas aux différences finies et des développements de Taylor si  $\Delta x$  devient trop grand, on verra au chapitre 3-3 que l'équation de la crue diffusante n'est plus valable sur le plan hydraulique pour des pentes très faibles où le nombre de Reynolds  $R$  est très supérieur à 1. Vouloir identifier la diffusion numérique des schémas des modèles cinématiques à la diffusion hydraulique n'a donc de toute manière plus de sens.

### Conclusions

Finalement, plus la pente est faible, plus le pas d'espace minimal (tel que l'identification de la diffusion numérique à la diffusion hydraulique soit possible) est grand. Mais parallèlement, plus la pente est faible, moins l'hydrogramme se propage rapidement et plus le pas d'espace maximal nécessaire à la validité des schémas numériques aux différences finies doit être petit. Ce pas d'espace maximal dépend du temps de crue de l'hydrogramme amont  $T_c$  et de sa variabilité dans le temps, qui est répercutée sur l'espace.

On trouve ici les limites de l'astuce des schémas qui utilisent l'identification de la diffusion numérique à la diffusion hydraulique.

D'une part, cette identification impose des contraintes sur le choix du pas d'espace (et du pas de temps). D'autre part, en imposant des pas d'espace grands, elle génère une diffusion totale du schéma qui ne peut plus être simplement contrôlée par le choix du paramètre  $\theta$ . Les modèles cinématiques et Muskingum étudiés ne donnent de solutions qui convergent vers les solutions exactes de l'équation de la crue diffusante que dans un domaine réduit où la consistance des schémas peut être contrôlée par la diffusion numérique des termes du second ordre. Nous présenterons en conclusion 3-2-6, les manières de déterminer automatiquement  $\Delta x$  et  $\Delta t$ .

#### 3-2-2-8 Influence du pas d'espace pour le noyau d'Hayami

Pour la solution analytique d'Hayami, il n'est pas nécessaire de découper le bief en pas d'espace et  $\Delta x$  peut être choisi à la longueur totale du bief à modéliser. Nous avons vérifié que le découpage en pas d'espace n'avait aucune influence sur les résultats du modèle. Toutefois, si on commet une légère erreur dans le calcul de l'aire de la fonction  $hq(x,t)$ , cette erreur se transmettra sur les résultats et ceci d'autant plus que le pas d'espace est petit. Il est donc préférable de choisir le moins de pas d'espace possibles et de prendre les longueurs maximales de bief pour la modélisation du réseau par le noyau d'Hayami.

#### 3-2-2-9 Diffusion numérique du modèle de crue diffusante VPD

Nous avons calculé l'expression de la diffusion numérique des termes du second ordre du schéma VPD qui avait pour expression (cf. §2-2-3-1) :

$$D_n = C. \left[ \lambda - \frac{1}{2} \right]. \left[ \Delta x - C\Delta t \right] \quad (3.3)$$

L'équation que résout le schéma est donc en réalité, l'équation de la crue diffusante où le paramètre  $D$  est égal au paramètre  $\sigma = D + D_n$

Contrairement aux modèles cinématiques, on cherche (pour les schémas d'intégration de la crue diffusante) à vérifier le théorème de Lax-Milgram, c'est-à-dire qu'on cherche à rendre la diffusion numérique négligeable pour que la solution du schéma converge vers la solution "exacte" de l'équation de la crue diffusante.

Les essais que nous avons effectués montrent qu'un choix de pas de temps et de pas d'espace tel que  $Co$  soit voisin de 1, permet de rendre le schéma (2.22) consistant.

Par exemple, pour une pente de  $5^\circ$  et un Strickler  $K=70$ , on obtient les résultats suivants :  $D_{max} = 308 \text{ m}^2/\text{s}$ ;  $\lambda = 0.58$ ,  $C_m = 3.6 \text{ m/s}$

Avec  $\Delta t = 30\text{s}$

$\Delta x$ (m)	200	250	500	1000
QM ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	4.187	4.172	4.161	3.181
dp (mn)	7.5	7.5	9	15
$D_n/D_{max}$ (%)	4	12	18	40
$\Delta x - C\Delta t$ (m)	92	142	392	892

Tableau 3.5

Avec  $\Delta t = 15\text{s}$

$\Delta x$ (m)	200	250	500
QM ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	4.177	4.167	4.159
$D_n/D_{max}$ (%)	9	13.5	19.5
$\Delta x - C\Delta t$ (m)	146	196	446

Tableau 3.6

Ces 2 tableaux montrent que pour cet exemple, on vérifie bien la relation (3.3) qui donne la diffusion numérique des termes du second ordre du schéma VPD. On vérifie que plus la diffusion numérique est forte, plus l'atténuation des débits est importante (i.e plus la diffusion totale du schéma est grande). Le débit maximal aval QM est bien une fonction décroissante du rapport  $D_n/D_{max}$ . On vérifie aussi que la diffusion numérique  $D_n$  est proportionnelle à  $\Delta x - C\Delta t$

Pour  $\Delta x=1000\text{m}$ , la diffusion numérique des termes du second ordre ne peut pas expliquer une atténuation aussi importante et les termes du 3ème ordre jouent un rôle important dans la diffusion numérique totale du schéma. Le schéma n'est plus consistant.

Pour des nombres de Reynolds  $R$  très petits (cas des pentes fortes) qui entraînent une diffusion hydraulique  $D$  faible, il est nécessaire de contrôler très précisément la diffusion numérique puisque  $D_n/D$  peut rapidement devenir grand. Or pour de telles conditions, la célérité  $C$  varie fortement (cf. figures de l'annexe 3). A  $\Delta x$  et  $\Delta t$  fixé, le nombre de courant  $Co$  varie à cause de la variation de  $C$ .

Si on choisit  $\Delta x$  et  $\Delta t$  pour que  $Co$  soit voisin de 1 (i.e vérifier  $Co(Q_{max}) \approx 1$ ), alors  $\Delta x - C\Delta t$  est grand en début de crue puisqu'en début de crue,  $C$  est petit. Le nombre de courant  $Co$  (faibles débits) est donc très inférieur à 1 en début de crue et la diffusion numérique ne peut être maintenue négligeable devant le paramètre  $D$ . La diffusion numérique des termes du second ordre est très forte en début de crue alors que justement la diffusion hydraulique  $D$  est encore très faible. Ceci provoque des instabilités et empêche l'utilisation du modèle VPD.

Remarquons la une différence importante avec les modèles cinématiques. Ceux-ci peuvent en effet fonctionner même lorsque les pentes sont supérieures à 1%, puisque la diffusion numérique reste faible en début de crue, et peut rester égale à la diffusion hydraulique  $D$ .

### Conclusions

Contrairement à la diffusion numérique des modèles cinématiques et Muskingum qui reste faible en début de crue lorsque  $C$  est petit, (cf. expression (3.1)), la diffusion numérique des termes du second ordre de VPD (cf. expression (3.3)) est proportionnelle à  $(\Delta x - C\Delta t)$  et conduit à une diffusion grande en début de crue, qui provoque des instabilités de calcul et stoppe l'exécution du programme.

Nous avons programmé le modèle de crue diffusante non-linéaire appelé VPD par le Natural Environment Research Council (PRICE 1973a). Il est cependant possible de programmer d'autres schémas de discrétisation de l'équation de la crue diffusante. La différence essentielle entre deux schémas d'intégration de la crue diffusante sera l'expression de la diffusion numérique des termes du second ordre. Accessoirement, les conditions de stabilité dépendront des schémas. Les schémas d'intégration de l'équation de la crue diffusante, consistants et stables, sont tous équivalents s'ils utilisent les mêmes conditions limites et les mêmes valeurs des paramètres  $C$  et  $D$ . Le principal problème est donc de déterminer les meilleures valeurs possibles de  $C$  et  $D$  (i.e celles correspondant aux valeurs réelles).

### 3-2-3 LA CELERITE C

Nous avons présenté au paragraphe 2-3-3 de la partie 2, la manière dont on pouvait calculer la célérité  $C$  sur tout le collecteur. Nous avons aussi indiqué au paragraphe 2-3-6 que le coefficient  $C$  contenait une partie, voire la totalité de l'information sur la structure du réseau. ( $C$  contient la totalité de l'information pour les modèles cinématiques et Muskingum qui n'utilisent pas l'identification de la diffusion numérique à la diffusion hydraulique  $D$ ).

#### 3-2-3-1 Impact de la forme de la section sur C

La figure 3.19 montre les valeurs de  $dQ/dS(y)$  pour différentes formes de sections de collecteurs habituellement rencontrés en assainissement. Pour tous les collecteurs,  $K$ ,  $I$  et le débit capable sont identiques.

- trait continu : collecteur circulaire
- trait pointillé mixte : collecteur ovoïde
- trait pointillé fin : collecteur fer-à-cheval
- trait pointillé large : collecteur rectangulaire

$K*(I^{**.5})=1.5$  CIR - OVO - FER - RECTAN

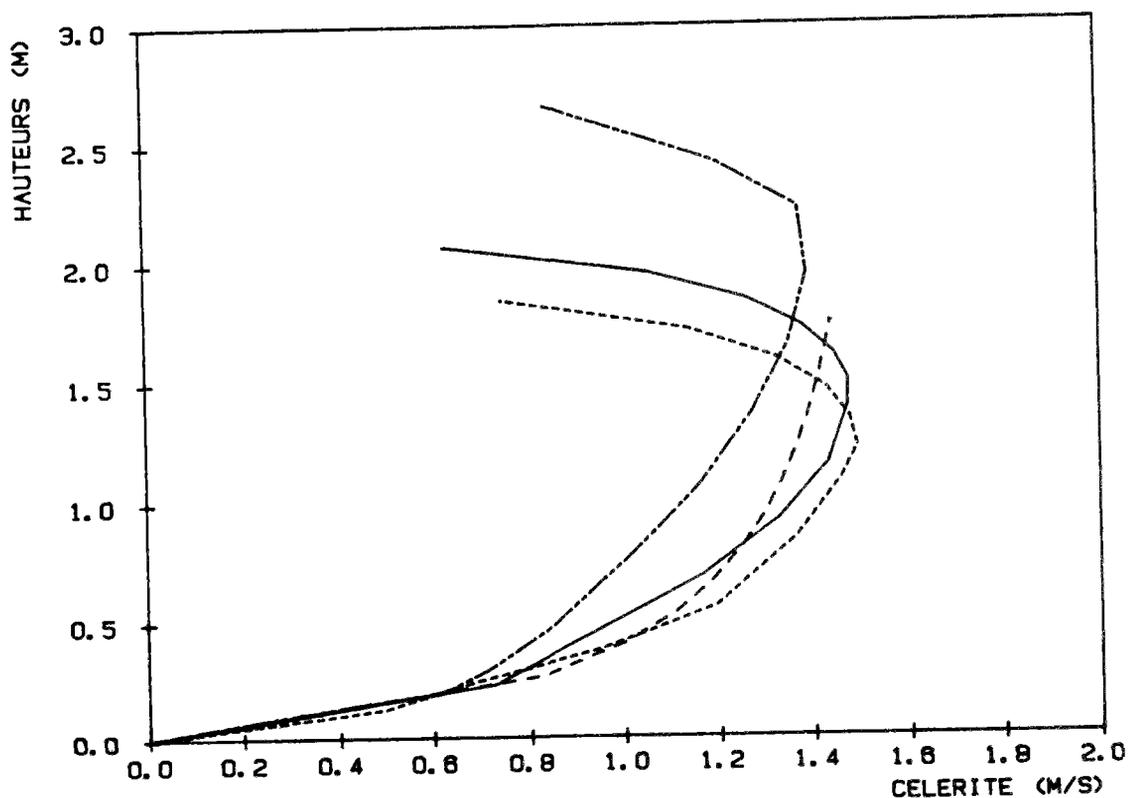


Figure 3.19

A débit capable identique (si  $K$  et  $I$  sont eux-mêmes identiques), les dimensions des collecteurs sont différentes selon la forme de la section ce qui implique que les  $y_{\max}$  de la figure 3.19 sont différents pour chaque type de section.

Comme par ailleurs les courbes  $C(y)$  sont en réalité utilisées par les modèles simplifiés sous la forme  $C(Q)$  (c'est bien un débit et non une hauteur dont on calcule la célérité), il est préférable de tracer les courbes  $C(Q)$  au lieu de  $C(y)$ . Les courbes obtenues sur la figure 3.20 (les types de traits correspondent à ceux de la figure 3.19) montrent que les différences sont beaucoup moins significatives sur les courbes  $C(Q)$  que sur les courbes  $C(y)$ . Les sections circulaires et fer-à-cheval donnent des célérités très proches et il en est de même des sections de type ovoïde et rectangulaire.

$K * (I^{**}.5) = 1.5$  CIR - OVO - FER - RECTAN

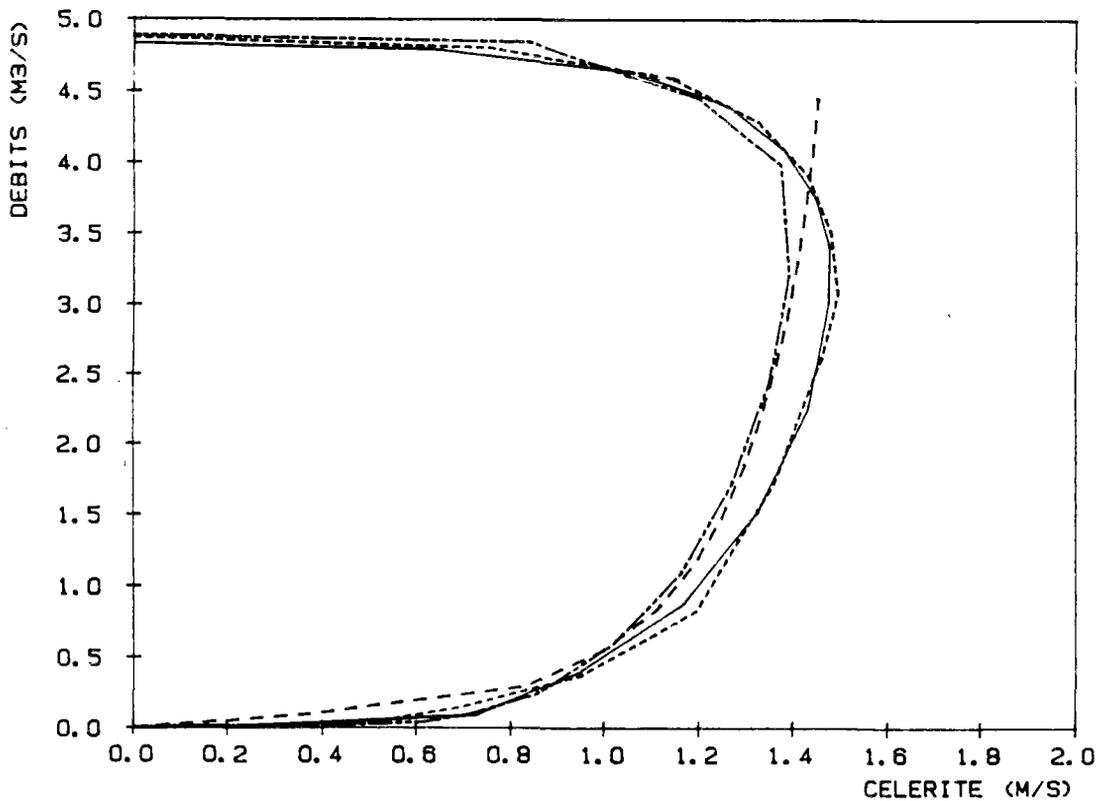


Figure 3.20

A titre d'exemple, la figure 3.21 montre les réponses du modèle (2.30) avec C variable (C décroissante vers  $V_c$  dans la zone où  $dQ/dS$  est décroissante) pour une pente de  $5^\circ/\dots$ , un Strickler  $K = 70$  et un hydrogramme amont de type 1.

CIRC - OVOI - FER - RECT ;  $K*(I^{**.5})=1,56$

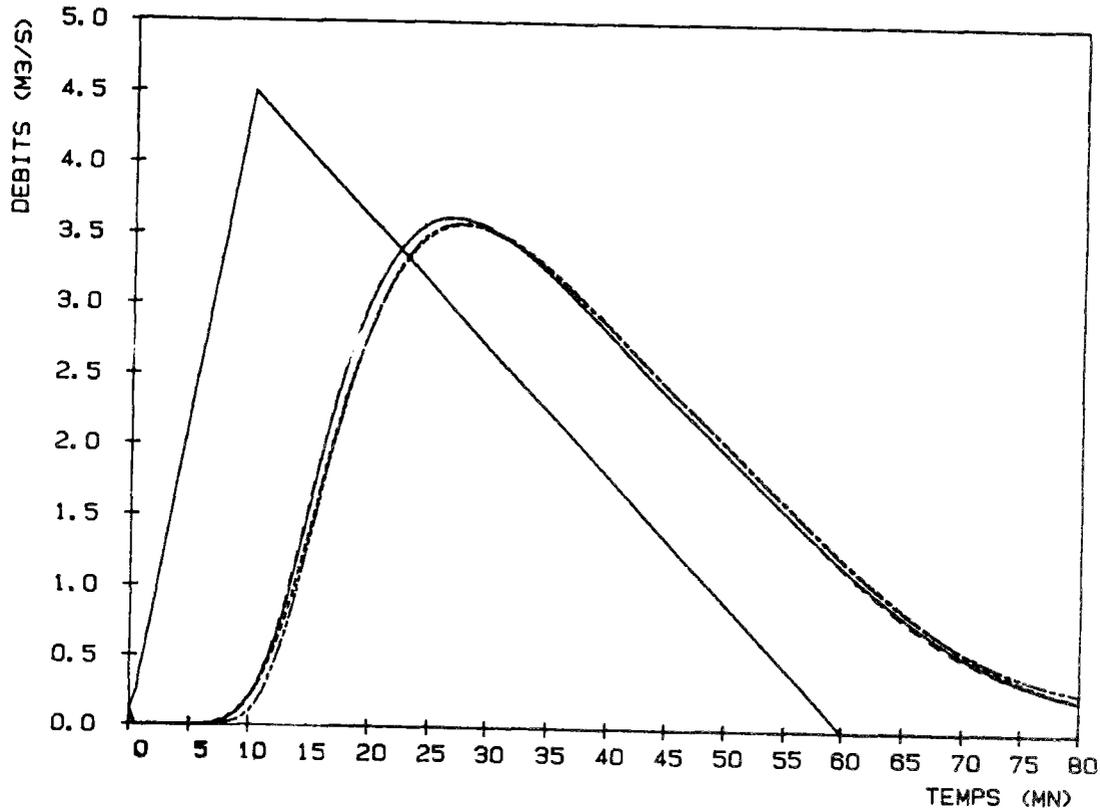


Figure 3.21

### 3-2-3-2 Conservation des volumes

La conservation des volumes est étroitement liée aux méthodes de calcul de C, pour les modèles non-linéaires.

Les modèles cinématiques et Muskingum linéaires pour lesquels les paramètres  $C_1$ ,  $C_2$ , et  $C_3$  sont constants conservent toujours les volumes. Ceci peut se vérifier très simplement en faisant le bilan de masse d'une maille à l'autre. S'il y a conservation des volumes, l'intégrale sur le temps de 0 à l'infini du débit qui entre à l'abscisse  $i\Delta x$  doit être égale à l'intégrale sur le temps de zéro à l'infini du débit qui passe à l'abscisse  $(i+1)\Delta x$ , qui doit être égal au volume total de la crue. Soit  $V_{to}$ , tel que pour  $i$  donné :

$$V_{to} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_i^n$$

On utilise l'équation (2.29) (cf. §2-2-3-2) qui donne :

$$Q_{i+1}^{n+1} = C1.Q_i^n + C2.Q_i^{n+1} + C3.Q_{i+1}^n$$

soit encore :

$$Q_{i+1}^{n+1} - C3.Q_{i+1}^n = C1.Q_i^n + C2.Q_i^{n+1}$$

Avec une condition initiale du type  $Q(i\Delta x, 0) = 0$  , on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} [ C1.Q_i^n + C2.Q_i^{n+1} ] = (C1 + C2) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} Q_i^n = (C1 + C2) \cdot V_{to}$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} [ Q_{i+1}^{n+1} - C3.Q_{i+1}^n ] = (1 - C3) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} Q_{i+1}^n = (C1 + C2) \cdot V_{to}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{i+1}^n = \frac{C1 + C2}{1 - C3} \cdot V_{to} = V_{to}$$

puisque pour tous les schémas,  $C1 + C2 + C3 = 1$ .

Cette démonstration est vraie pour tout  $i$ , donc le volume est bien conservé de proche en proche et  $V_{to}$  à l'amont est bien égal à  $V_{to}$  à l'aval.

Un tel bilan n'est pas possible lorsque les coefficients  $C1$ ,  $C2$  et  $C3$  sont variables car on ne peut les mettre en facteur dans la somme sur les pas de temps. On ne peut donc pas vérifier par cette méthode, la conservation des volumes.

Notons qu'une telle démonstration n'est pas non plus possible avec un schéma aux différences finies résolvant l'équation de la crue diffusante même si les paramètres  $C$  et  $D$  sont choisis constants. En effet, les débits étant exprimés de manière implicite, on ne peut pas effectuer de bilan pas d'espace par pas d'espace. De plus, les valeurs calculées étant des flux (des débits), il est impossible de faire un bilan de masse pas de temps par pas de temps, puisque ce qui entre à un pas de temps n'est pas égal à ce qui sort, et qu'on ne connaît pas ce qui est stocké. Vérifier la conservativité d'un modèle de crue diffusante nécessite de résoudre l'intégralité des calculs sur tous les pas de temps de l'amont à l'aval du tronçon (i.e de faire les mêmes calculs que l'ordinateur), ou de revenir à l'équation de continuité et de résoudre le système (2.6) (cf. page 49) et non uniquement l'équation (2.7).

### 3-2-3-3 Influence du calcul de $C$ instantané sur la conservation des volumes

Les paramètres  $C1$ ,  $C2$  et  $C3$  sont calculés à partir d'une célérité  $C$  variable, différente pour chaque  $i\Delta x$  et chaque  $n\Delta t$ . La valeur de  $C$  instantanée a une influence sur la conservation des volumes.

Pour les modèles cinématiques et Muskingum, nous avons vu que la célérité instantanée  $C$  devait être calculée en effectuant la moyenne des 4 débits :  $Q(i\Delta x, (n+1)\Delta t)$ ,  $Q(i\Delta x, n\Delta t)$ ,  $Q((i+1)\Delta x, (n+1)\Delta t)$ , et  $Q((i+1)\Delta x, n\Delta t)$  constituant les noeuds de chaque maille de la grille de discrétisation (cf. figure 2.14).

Néanmoins, si on souhaite tenir compte de  $Q((i+1)\Delta x, (n+1)\Delta t)$ , on est obligé de procéder par itérations puisque  $Q((i+1)\Delta x, (n+1)\Delta t)$  n'est pas encore calculé.

A la  $i$ ème itération, la célérité instantanée  $C_{mi}$  est calculée à partir des 4 débits de la maille de calcul et  $Q((i+1)\Delta x, (n+1)\Delta t)$  (de la  $(i+1)$ ème itération) avec la valeur  $C_{mi}$ . On arrête la procédure itérative lorsque  $Q((i+1)\Delta x, (n+1)\Delta t)$  de la  $(i+1)$ ème itération (calculé avec  $C_{mi}$ ) est égal au  $Q((i+1)\Delta x, (n+1)\Delta t)$  de la  $i$ ème opération (calculé avec  $C_{mi-1}$ ).

L'initialisation de la procédure peut être réalisée en prenant pour expression de la première célérité instantanée :  $C_{m0}$  calculé à partir des 3 débits connus ce qui permet d'améliorer la convergence de la méthode (PONCE, YEVJEVICH 1978).

PONCE et YEVJEVICH ont constaté que la méthode exacte était quasiment identique à la méthode où l'on calcule  $C$  en prenant la moyenne simple des 3 débits connus de chaque maille. Ceci permet de s'affranchir du calcul itératif et de gagner en temps de calcul et en simplicité.

Ce calcul simplifié a néanmoins l'inconvénient de dépendre du nombre de courant. Lorsque celui-ci est voisin de 1, la solution de PONCE et YEVJEVICH est acceptable mais si l'on choisit des pas d'espace et des pas de temps tels que  $C_0$  soit très petit, l'erreur commise peut être plus importante.

Nous proposons d'introduire le paramètre "numérique"  $\alpha$  qui permet de pondérer, selon le nombre de courant  $C_0$ , la moyenne sur deux débits diamétralement opposés d'une maille et de retrouver l'expression exacte de la célérité instantanée sans procédure itérative. On pose :

$$Q_a = (1-\alpha).Q(i\Delta x, (n+1)\Delta t) + \alpha.Q((i+1)\Delta x, n\Delta t) \quad (3.4)$$

$$C = C(Q_a) \quad (3.5)$$

$\alpha$  n'a que très peu d'influence sur le débit de pointe (tant au niveau de sa durée de propagation, qu'au niveau de son atténuation) tant que les pas d'espace n'entraînent pas des valeurs  $Q_a(\alpha)$  qui varient beaucoup en fonction de  $\alpha$  (i.e tant que  $C_0$  n'est pas trop petit). En revanche,  $\alpha$  a une influence importante sur les volumes.

Le tableau 3.7 illustre l'influence de  $\alpha$  sur l'atténuation du débit de pointe ainsi que sur les volumes de la crue lors de la propagation d'un hydrogramme de type 1 avec le schéma (2.30) ( $C$  variable, méthode où  $C$  décroît).

Pour ces simulations, les conditions étaient :

- collecteur  $\phi 1500$
- pente de  $5^\circ/\dots$ , Strickler  $K = 70$
- $\Delta x = 250$  m,  $\Delta t = 30$ s, donc  $C_0 = 0.32$  ;  $\theta = 0$ .
- volume de l'hydrogramme amont :  $8100\text{m}^3$

paramètre $\alpha$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
QM (m <sup>3</sup> /s)	4.112	4.116	4.120	4.122	4.124	4.125
dp (mn)	17.5	17.5	17.5	17.5	17.5	17.5
Volumes (m <sup>3</sup> )	8291	8257	8218	8178	8127	8013

Tableau 3.7

Lorsqu'on choisit  $\alpha = 1$ , c'est-à-dire  $C = C(Q((i+1)\Delta x, n\Delta t))$ , la détermination de C se fait uniquement à l'aide du débit *aval* calculé au pas de temps précédent. Dans ce cas, les modèles non-linéaires (2.30) et (2.40) font disparaître du volume.

Lorsqu'on choisit  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire  $C = C(Q(i\Delta x, (n+1)\Delta t))$ , la détermination de C se fait uniquement à l'aide du débit *amont* au pas de temps de calcul courant. Les modèles non-linéaires génèrent du volume.

Le tableau 3.7 montre qu'on peut trouver une valeur de  $\alpha$  (pour notre exemple, cette valeur correspond à  $\alpha=0.85$  environ) telle que le volume soit conservé.

En général, (mais ceci dépend du nombre de courant  $C_0$ ), une valeur de  $\alpha > 0.5$  permet de conserver les volumes.

Pour des nombres de courant très inférieurs à 1, il est quelquefois nécessaire de prendre  $\alpha$  très proche de 1 car la différence entre le débit amont et le débit aval peut devenir très importante, alors que les différences de débit d'un pas de temps à un autre seront faibles. Plus  $\Delta x$  est faible, plus la perte ou le gain de volume est faible.

Concernant la faible influence du paramètre  $\alpha$  sur l'atténuation du débit, on peut interpréter à l'aide des courbes  $C(Q)$  le fait que (pour notre exemple),  $QM(\alpha)$  (qui est le débit de pointe de l'hydrogramme propagé) est une fonction croissante. En effet plus  $\alpha$  est proche de 0, plus le débit moyen  $Q_a$  est important. Pour un pas d'espace de 250m, le débit de pointe de l'hydrogramme à l'aval des 250m du premier tronçon de calcul n'est plus que de 4.3 m<sup>3</sup>/s.

$\alpha=0$  donne donc  $Q_a$  égal au débit amont qui croît effectivement jusqu'à 4.5 m<sup>3</sup>/s.

$\alpha=1$  entraîne que  $Q_a$  prend les valeurs de débit de l'hydrogramme aval et ne peut dépasser la valeur 4.3m<sup>3</sup>/s.

Comme pour des valeurs de débit supérieures à 3.2m<sup>3</sup>/s,  $C(Q)$  est décroissante,  $\alpha=0$  donne des célérités plus faibles (puisque des débits  $Q_a$  plus grands) que  $\alpha=1$ . Il est normal que l'atténuation des débits à l'aval du collecteur soit une fonction croissante de  $\alpha$ . On confirmera en effet au paragraphe 3-4 que plus la célérité est faible, plus l'atténuation du débit est importante.

Pour des hydrogrammes dont le débit maximal reste inférieur à  $(0.6) \cdot \text{Deb}$ , on est dans la partie croissante de la courbe  $C(Q)$  et l'atténuation du débit aval est au contraire une fonction décroissante de  $\alpha$  (maximale pour  $\alpha=0$ ).

Ces remarques sur l'atténuation du débit de pointe causé par le paramètre  $\alpha$  ne sont que du "second ordre" par rapport à notre propos.

### Conclusions

De manière générale, la méthode de détermination du paramètre  $C$  instantané sur chaque maille a essentiellement une influence sur les volumes propagés. La méthode de détermination de la célérité  $C$  est satisfaisante lorsque les volumes sont conservés. Elle doit intervenir après le calage du paramètre  $\Delta x$  car celui-ci influe sur la valeur de  $C$  instantané qui permet de conserver les volumes.

Après avoir déterminé la valeur des paramètres numériques  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  et  $\theta$ , l'étude de la conservation des volumes permettra de fixer le choix du paramètre  $\alpha$ .

Cette méthode que nous proposons qui permet de rendre conservatifs, les modèles cinématiques et Muskingum non-linéaires relève plus de l'astuce expérimentale que d'un bilan rigoureux. Elle est acceptable car le bilan exact ne permet pas de déduire des méthodes simples de calage des paramètres qui conservent les volumes.

#### 3-2-3-4 Influence de la méthode de détermination de C

Nous avons testé la méthode de calcul de  $C$  que nous proposons et comparé les résultats avec la méthode de CUNGE et CAYLA (cf. §2-3-2-4).

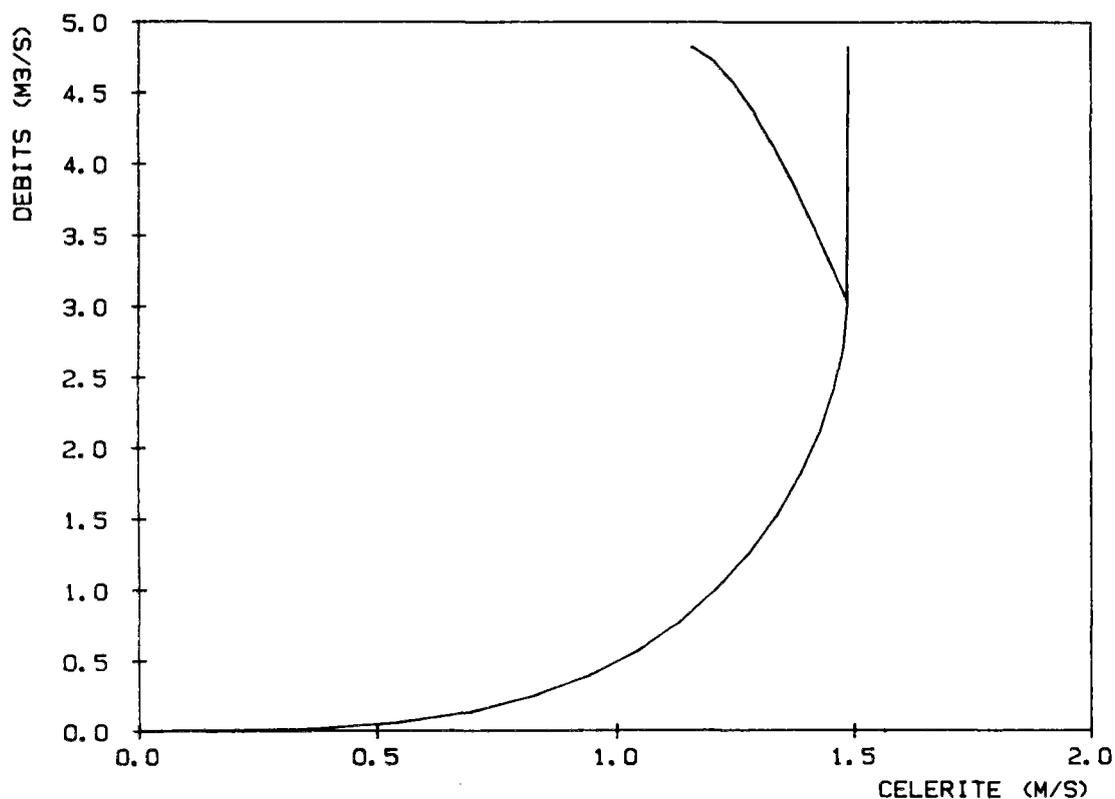
Pour des collecteurs rectangulaires, il n'y a aucune différence puisque les deux méthodes sont identiques; la célérité reste en effet croissante jusqu'à la mise en charge (cf. §2-3-2)

La figure 3.22 montre les différences sur le calcul de  $C$  entre les deux méthodes pour un collecteur circulaire.

Les hydrogrammes dont le débit maximum est inférieur à  $(0.6) \cdot \text{Deb}$  sont propagés de manière identique par les deux méthodes.

Pour différents hydrogrammes dont le débit maximal est supérieur à  $(0.6) \cdot \text{Deb}$ , les différences entre les deux méthodes de calcul de  $C$  sur les réponses du modèle VPD ou sur celles du modèle Muskingum-Cunge non-linéaire sont toujours restées négligeables.

$$\text{CIRC. 2300} - K*(I^{**}.5)=1.56$$



*Figure 3.22*

### Conclusions

La méthode de CUNGE et CAYLA est suffisante. Donnant des résultats identiques, elle est plus simple que la méthode où  $C$  décroît à partir de  $(0.6)^* \text{Deb}$ . De plus, on verra au paragraphe 3-2-4-4 que la décroissance de  $C$  crée des perturbations pour le calcul d'une célérité moyenne à partir de la courbe  $C(Q)$ . Il est donc préférable de toujours choisir la méthode de CUNGE et CAYLA pour le calcul de la courbe  $C(Q)$ .

Nos résultats ont montré que la partie de la courbe  $C(y)$  qui correspond aux hauteurs où  $dQ/dS$  est décroissante n'a pratiquement pas d'influence sur la propagation des débits. Les approximations permettant de prolonger  $C$  jusqu'aux hauteurs maximales ( $1.87R$ ) sont donc légitimées.

Les résultats justifient de plus, le fait d'éliminer le terme de forme  $T_f$  (cf. 2-3-3). L'influence de celui-ci pour des hauteurs où  $dQ/dS$  est croissante est du même ordre de grandeur que l'influence d'un changement de section sur la célérité que nous avons analysé sur la figure 3.21. Nous avons conclu que cette influence était négligeable.

Pour des hauteurs où  $dQ/dS$  décroît, les différences sur les valeurs de  $C$  n'ont pas d'influence sur les résultats comme la comparaison entre la méthode de CUNGE et CAYLA et la méthode où  $C$  décroît l'a prouvé. On peut donc confirmer de manière expérimentale qu'il est légitime de négliger le terme  $T_f$ .

### 3-2-4 LA CELERITE MOYENNE Cm

Nous avons vu dans la partie 2 que la célérité moyenne Cm pouvait être calculée à l'aide de plusieurs relations qui utilisaient :

- soit l'ensemble des valeurs des débits de l'hydrogramme à propager
- soit uniquement le débit maximum
- soit un critère géométrique ou hydraulique permettant de choisir une valeur de la courbe C(Q).

#### 3-2-4-1 Les valeurs de Cm par quelques méthodes

Nous avons dans un premier temps choisi de tester 3 types de méthodes de calcul de Cm. Nous appellerons ces méthodes M1, M2 et M3 :

Méthode 1 (M1) : Méthode hydrologique par moyenne

$$C_m = \frac{\sum_{i=1}^N Q_i \cdot V_i}{\sum_{i=1}^N Q_i}$$

Les N valeurs Qi sont des valeurs discrètes de l'hydrogramme amont (à ne pas confondre avec les Qi(i) du paragraphe 3-1-2)

Méthode 2 (M2) : Méthode hydrologique du débit maximum

$$C_m = C(\sqrt{Q_{\max}})$$

Qmax étant le débit maximum de l'hydrogramme amont.  
v variant entre 0.7 et 1

Méthode 3 (M3) : Méthode géométrique

$$C_m = C(y_m)$$

ym étant la hauteur d'eau correspondant à la hauteur de mi-remplissage

Ces méthodes de calcul ont été présentées dans le paragraphe 2-3-4.

Les figures 3.23 et 3.24 montrent les valeurs que prend Cm en fonction de  $K.I'^2$  pour des hydrogrammes de type 1 et de type 3.

## LES CM - HYDROGRMME TYPE 1

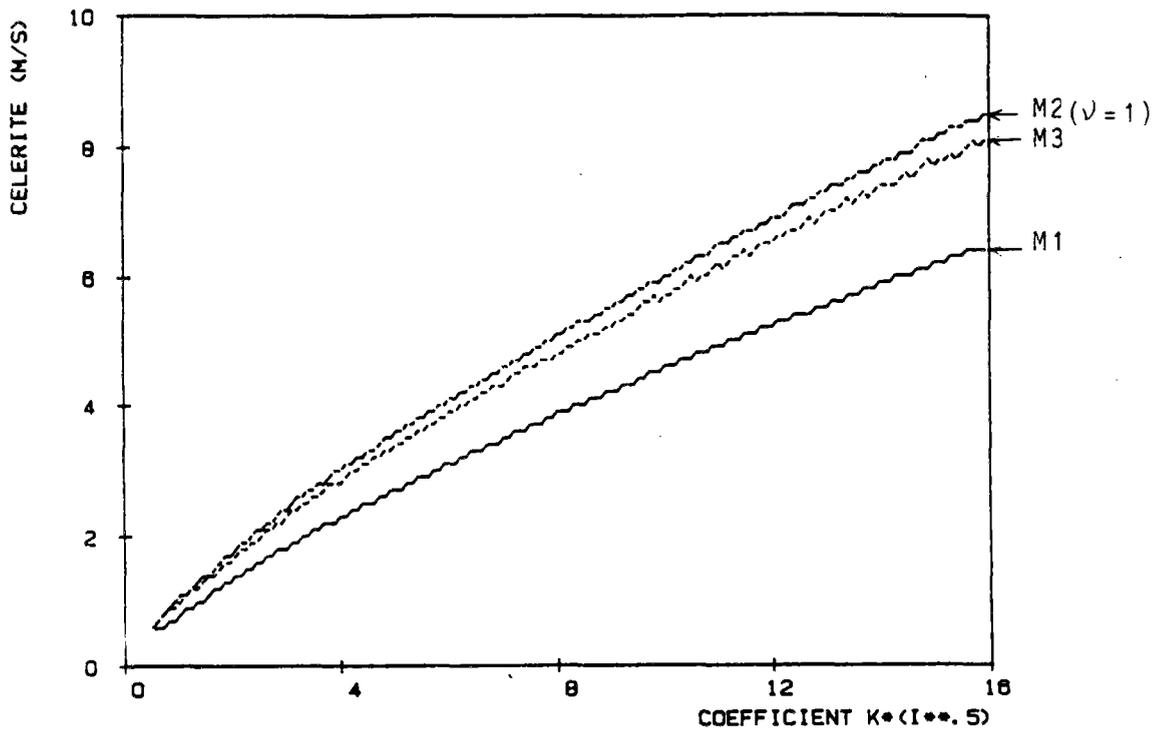


Figure 3.23

## LES CM - HYDROGRAMME TYPE 3

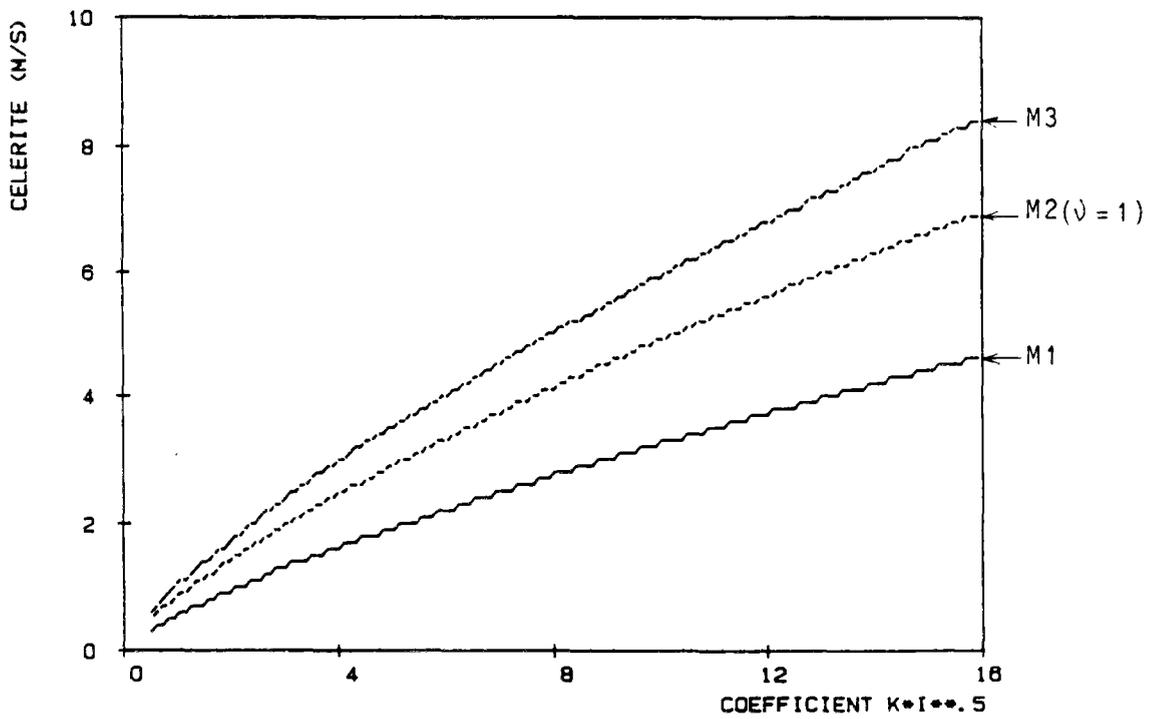


Figure 3.24

Nous avons construit ces courbes pour un collecteur circulaire dont on faisait varier le diamètre (cf. figure 3.2) pour imposer un débit capable constant quelle que soit la valeur du produit  $K.I^{1/2}$ . L'incrément de diamètre (de 0.01m) et celui de  $K.I^{1/2}$  (de 0.1) utilisé pour la construction de ces courbes expliquent leur aspect en escalier.

Pour un hydrogramme de type 1 où  $Q_{max} = (0.9)*Deb$  (Deb étant le débit capable), les méthodes M2 et M3 donnent des résultats voisins car la célérité à mi-remplissage est très proche de la célérité M2 qui correspondait à  $C_m(Q_{max})$  (cf. figure 3.22)

Avec la méthode où C décroît,  $C_m(Q_{max})$  n'est supérieure à  $C_m(y_m)$  que lorsque le débit maximal est compris approximativement entre  $0.55xDeb$  et  $0.65xDeb$ .

Avec la méthode de CUNGE et CAYLA où la célérité ne décroît pas (méthode pour laquelle sont construites les figures 3.23 et 3.24), la célérité moyenne  $C_m(Q_{max})$  est supérieure à  $C_m(y_m)$  pour tous les hydrogrammes dont le débit maximal est supérieur à  $(0.6)*Deb$ .

Les différences entre les méthodes sont d'autant plus fortes que le produit  $K.I^{1/2}$  est grand. Pour des hydrogrammes de type 3 où le débit maximal est égal à  $(0.2)*Deb$ , la méthode M1 donne évidemment des valeurs de célérité beaucoup plus faibles que la méthode M3 (célérité à mi-remplissage).

Ces remarques ne sont pas l'essentiel de notre propos. D'une part, il est beaucoup plus intéressant d'examiner les courbes  $k_m(K.I^{1/2})$  puisque  $k_m$  représente la durée de propagation. D'autre part, les méthodes que nous avons testées ne sont que des exemples qui sont destinés à faire apparaître des différences qui, lorsqu'elles sont importantes, indiquent qu'il est nécessaire de prendre des précautions lorsqu'on utilise un modèle linéaire.

#### 3-2-4-2 Les valeurs de la durée moyenne de propagation $k_m$

Les figures 3.25 et 3.26 montrent les durées de propagation moyennes correspondant aux célérités moyennes  $C_m$  calculées précédemment sur une longueur de 1000m. Les durées de propagation  $k_m$  représentées sur les figures 3.25 et 3.26 ont donc simplement été calculées par la relation  $k_m=1000/C_m$ . Les  $k_m$  ainsi calculés correspondent aux durées de propagation d'un modèle de translation simple.

Pour des pentes et des Strickler tels que  $K.I^{1/2}$  reste supérieur à 8, les différences sur les temps de propagation ne sont que d'au plus quelques minutes. La disparité est un peu plus grande pour les hydrogrammes faibles de type 3 (dont le débit maximum n'est que de  $(0.2)*Deb$ ). La méthode M1 donne toujours des durées de propagation plus longues que les méthodes M2 et M3.

Lorsque le produit  $K.I^{1/2}$  est inférieur à 5, la disparité des durées moyennes de propagation augmente considérablement comme le montrent les figures 3.25 et 3.26. Pour une valeur de  $K.I^{1/2} = 2$  (ce qui correspond par exemple à  $I = 0.001$  et  $K = 63$ ), on obtient :

$k_m(M1) = 12,5mn$   
 $k_m(M2) = 9,6mn$   
 $k_m(M3) = 9mn$

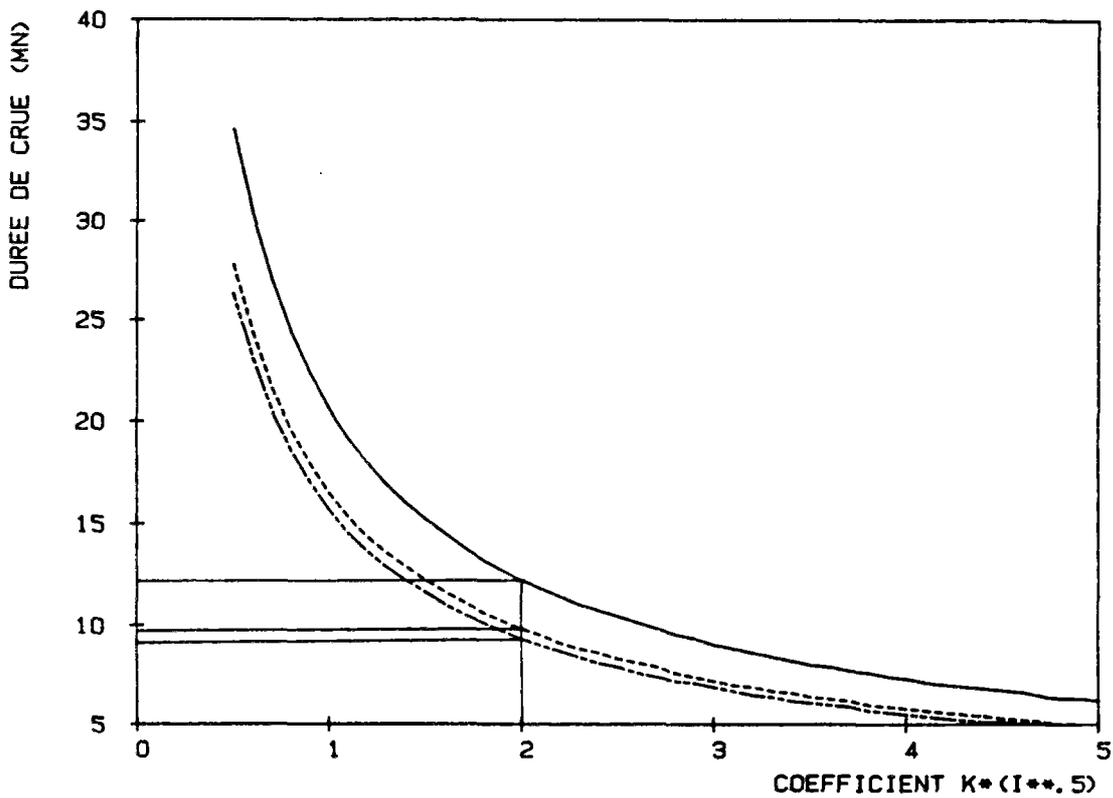
pour un hydrogramme de type 1  
 (cf. courbe 3.25)

$k_m(M1) = 17mn$   
 $k_m(M2) = 11,5mn$   
 $k_m(M3) = 9mn$

pour un hydrogramme de type 3  
 (cf. courbe 3.26)

$k_m(M3) = k_m$  (à mi-remplissage) reste évidemment constant quel que soit le type d'hydrogramme propagé.

### KM - HYDROGRAMME TYPE 1



*Figure 3.25*

## KM - HYDROGRAMMES TYPE 3

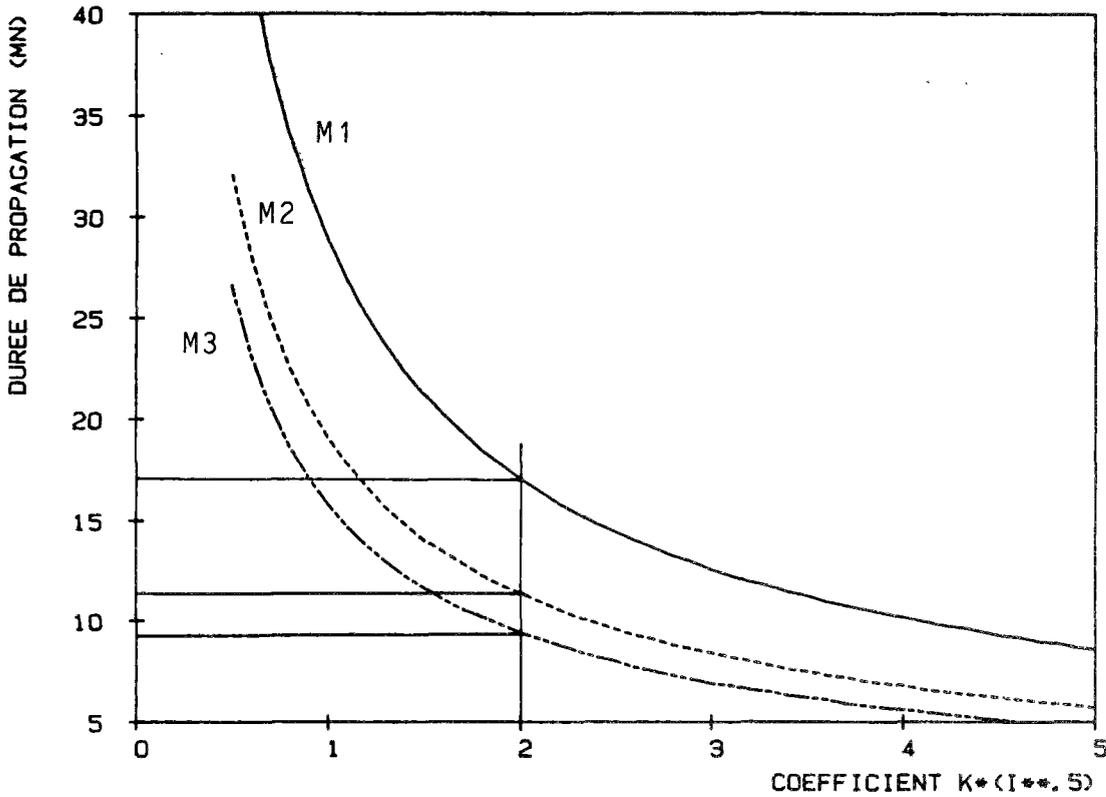


Figure 3.26

Avant de conclure sur les méthodes de calcul de  $C_m$ , nous examinerons dans les paragraphes suivants, l'influence de  $C_m$  sur l'atténuation et comparerons les réponses des modèles non-linéaires.

#### 3-2-4-3 Influence de $C_m$ sur l'atténuation des débits

Lorsque tous les paramètres des modèles sont fixés, la valeur de  $C_m$  a une influence sur l'atténuation du débit de pointe: Plus la célérité  $C_m$  est faible, plus l'atténuation est importante.

La diffusion numérique des termes du second ordre (cf. expression 3.1) est proportionnelle à  $C$ . Plus  $C$  est petit, plus elle est faible.

Néanmoins, changer la valeur de  $C_m$  entraîne le changement de l'équation de base qui est du type :

$$(3.6) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + C_{m_i} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = D_{n_i} \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

où  $D_{n_i}$  est la diffusion numérique des termes d'ordre deux calculée avec  $C_{m_i}$  par l'expression (3.1).

Bien que  $Dn_i$  soit une fonction croissante de  $Cm_i$ , c'est la solution de l'équation dont le paramètre  $Cm_i$  est le plus petit qui aura le plus d'atténuation de débit.

On peut expliquer l'influence de  $Cm$  sur l'atténuation du débit de pointe en examinant la durée de propagation  $k_m = (L/Cm)$ . A  $L$  fixé,  $k_m$  est d'autant plus grand que  $Cm$  est petit (cf. figures 3.25 et 3.26).

$k_m$  peut être considéré comme une durée sur laquelle agit la diffusion des modèles. Sur un bief de longueur constante, lorsque  $Cm$  diminue, la diffusion numérique des termes du second ordre décroît mais la durée pendant laquelle elle "agit" croît. L'accroissance de la durée de propagation a plus d'influence que la décroissance de la diffusion numérique ce qui explique les résultats constatés.

Ceci n'est cependant plus exact lorsque l'augmentation de la durée de propagation influe sur la diffusion numérique des termes du troisième ordre et que le temps caractéristique  $\Delta x = C \cdot T_c / \Delta x$  devient petit (cf. les résultats du paragraphe 3-2-2-7).

Nous reviendrons sur les influences corrélées de  $C$  et  $D$  (resp.  $Dn$ ) lors de l'étude de la solution d'Hayami au paragraphe 3-2-5-2.

#### 3-2-4-4 Comparaison avec un modèle non-linéaire

Nous avons comparé les réponses du modèle Muskingum-Cunge avec  $C$  variable et  $C$  constant.

Nous avons choisi un collecteur tel que  $K \cdot I^{1/2} = 1.56$ . Pour des pentes faibles, nous avons constaté au paragraphe 3-2-4-2 que les durées de propagation étaient très différentes selon les méthodes de calcul de  $Cm$ .

La figure 3.27 montre une série de simulations réalisées avec différentes valeurs de  $Cm$  choisies entre  $C(0.4Q_{max})$  et  $C(Q_{max})$ . Les hydrogrammes tracés correspondent :

au modèle non-linéaire pour le trait continu

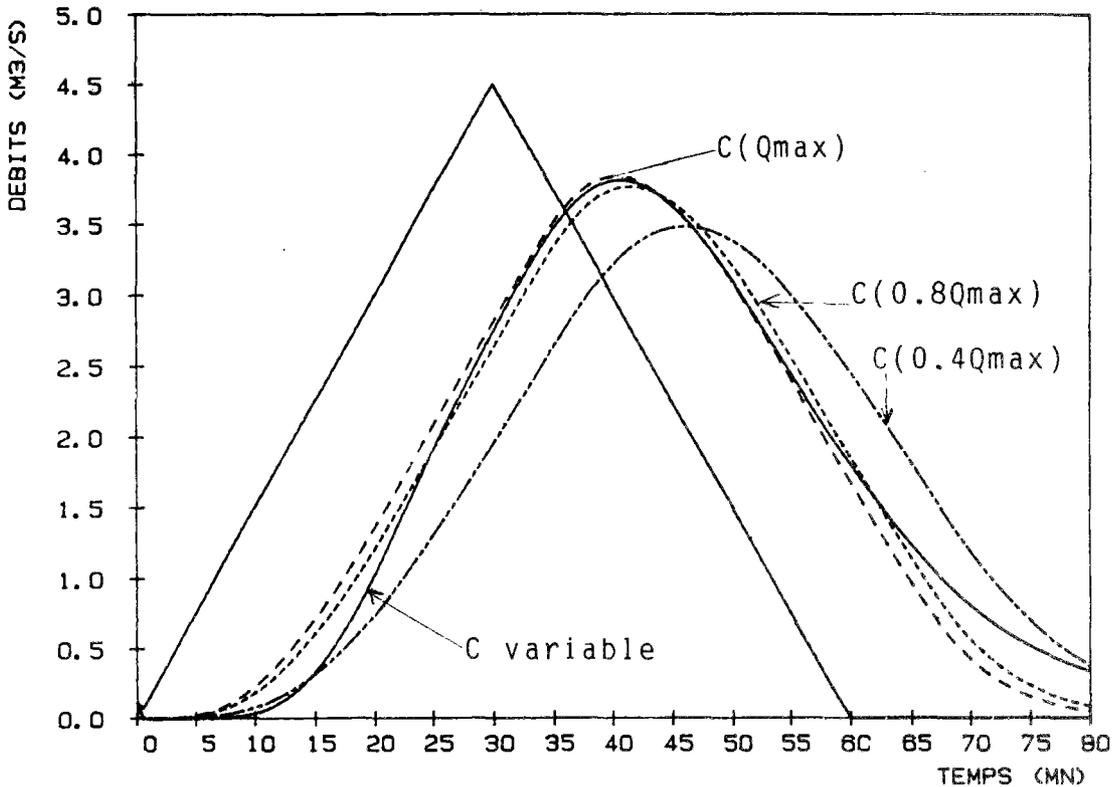
au modèle linéaire :

- . avec  $Cm = C(Q_{max}) = C_{max}$  pour le trait pointillé lâche
- . avec  $Cm = C(mi\text{-remplissage}) = C(0.8Q_{max})$  pour le trait pointillé serré
- . avec  $Cm = C(0.4 \cdot Q_{max})$  pour le trait pointillé mixte

La célérité de propagation de l'hydrogramme en trait pointillé lâche est supérieure à celle de l'hydrogramme en trait pointillé serré elle-même supérieure à celle de l'hydrogramme en trait pointillé mixte.

On illustre les phénomènes constatés au paragraphe précédent : plus  $Cm$  est petit, plus l'atténuation du débit est importante.

CINE NL ; CINE L ;  $K*(I^{**.5})=1.56$



*Figure 3.27*

On peut comprendre facilement les différences entre les réponses du modèle linéaire et celle du modèle non-linéaire.

$C_m$  étant constant, il est supérieur à la célérité  $C$  instantanée pour les débits faibles de début de crue. Il est normal donc que le modèle non-linéaire soit plus rapide (et plus tardif) en début de crue que les modèles linéaires. Le modèle non-linéaire "rattrape" les modèles dont la célérité  $C_m$  est proche des valeurs que  $C$  prend pour des débits forts. A la décrue, le phénomène symétrique se produit et les faibles débits de queue d'hydrogramme sont propagés beaucoup plus lentement (car  $C$  est faible) par le modèle non-linéaire que par les modèles tel que  $C_m = \text{constante}$ .

Ces résultats permettent de supposer que les méthodes qui utilisent un  $C_m$  proche de  $C(Q_{max})$  (la courbe en trait pointillé lâche) sont celles qui permettent le mieux de reproduire la durée de propagation et l'atténuation du débit de pointe des modèles non-linéaires.

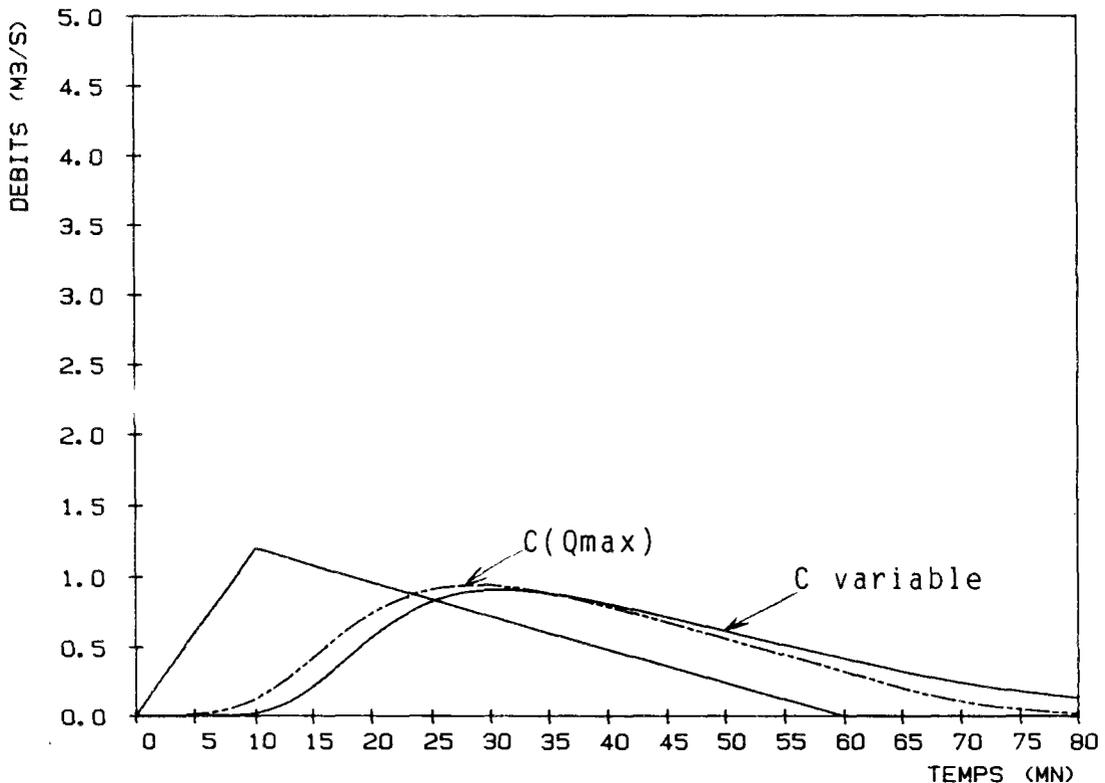
Les méthodes M1 et M3 qui donnent des célérités plus faibles sont moins bonnes que la méthode M2 qui calcule  $C_m$  en fonction de  $Q_{max}$ .

Par ailleurs, les méthodes de type M1 donnent une valeur aléatoire qui dépend du pas de temps de stockage de l'hydrogramme à propager ou des valeurs  $Q_i$  et  $V_i$  choisies pour effectuer la somme  $\sum Q_i V_i$ . La méthode demande de plus un nombre important d'opérations si  $N$  est grand.

Les figures 3.28, 3.29, et 3.30 montrent les différences de résultat obtenus par le modèle non-linéaire (2.30) (trait continu) et par le (même) modèle linéaire (2.30) où  $C_m$  est calculé par la méthode  $C_m = C(Q_{max})$ .

Pour tous les hydrogrammes faibles (hydrogrammes type 3 et 6) l'atténuation des débits et la durée de propagation se superposent de manière satisfaisante (cf. figure 3.28 et 3.29).

CINE LIN. - NON-LIN.  $C_m = C(Q_{max})$   $K * (I^{**}.5) = 1.56$



*Figure 3.28*

CINE LIN. - NON-LIN.  $CM=C(QMAX) K*(I**.5)=1.56$

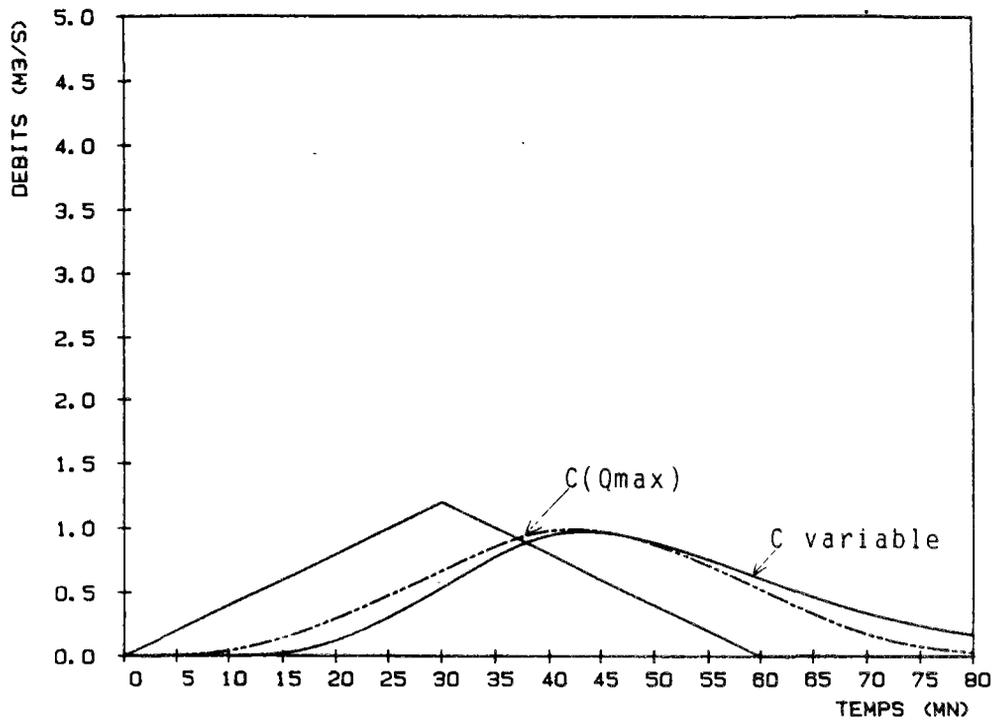


Figure 3.29

CINE LIN. - NON-LIN.  $CM=C(QMAX) K*(I**.5)=1.56$

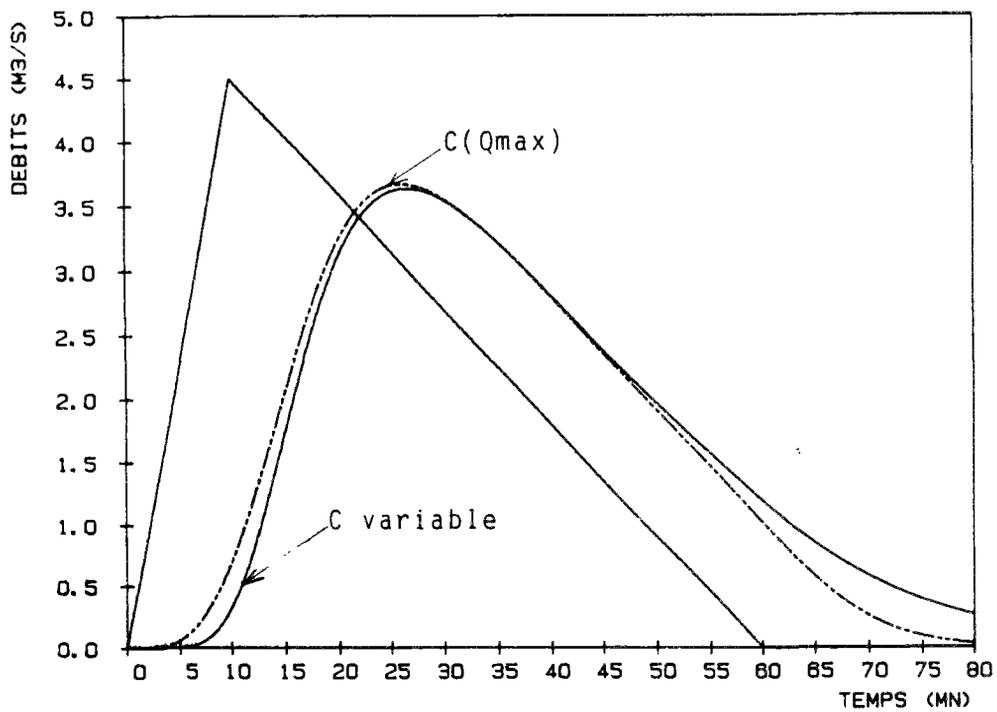


Figure 3.30

### Conclusions

Il est possible de choisir une célérité moyenne  $C_m$  à l'aide du débit maximal de l'hydrogramme amont par la relation  $C_m = C(Q_{max})$ . Les figures 3.28, 3.29, et 3.30 où  $C_m$  est déterminé par  $C(Q_{max})$  ( $C$  étant étalonné par la méthode de CUNGE et CAYLA) montre toutefois que la valeur  $C_m = C(Q_{max})$  est légèrement trop forte puisque le modèle linéaire est un peu plus rapide que le modèle non-linéaire. La valeur optimale est donc sans doute à rechercher par la relation  $C_m = C(v \cdot Q_{max})$  où  $v$  est compris entre 0.9 et 1.

Avec la méthode où  $C$  décroît après avoir atteint  $C_{max}$ , il faut faire attention à  $C(Q_{max})$ . En effet,  $C(Q_{max})$  peut être très inférieur à  $C_{max}$  pour des  $Q_{max}$  proches du débit capable. Avec la méthode de CUNGE et CAYLA,  $C(Q_{max}) = C_{max}$  pour  $Q_{max} > (0.6) Deb$ . Dans ce cas, avec les mêmes conditions que pour la figure 3.30, on obtient un hydrogramme propagé par le modèle linéaire (trait pointillé mixte) un peu décalé (durée de propagation trop longue) par rapport à l'hydrogramme propagé par le modèle non-linéaire.

CINE LIN. - NON-LIN.  $C_m = C(Q_{max})$   $K * (I^{**}.5) = 1.56$

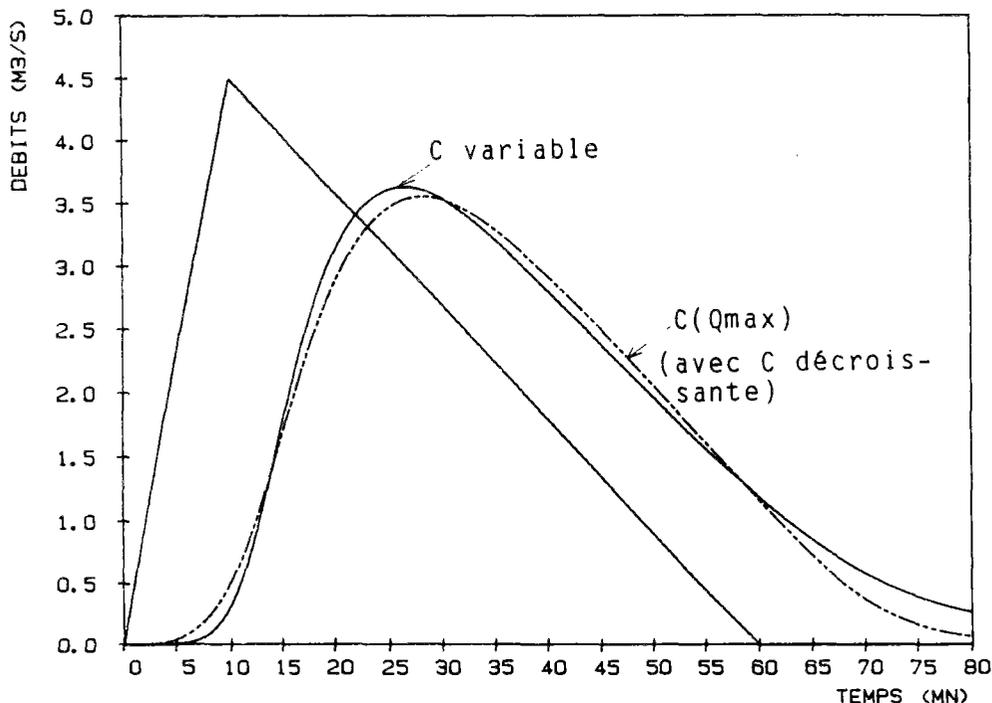


Figure 3.31

Si les différences entre les méthodes de détermination de  $C$  (pour la zone où  $dQ/dS$  est décroissante) sont négligeables sur les modèles non-linéaires en  $C$ , il n'en est pas de même pour les modèles linéaires. Il est préférable d'utiliser systématiquement la méthode de CUNGE et CAYLA qui considère que  $C$  est constant après avoir atteint son maximum.

### 3-2-5 LE PARAMETRE DE DIFFUSION HYDRAULIQUE D

#### 3-2-5-1 Les valeurs de la diffusion hydraulique D

Contrairement au paramètre C, le paramètre D dépend du rapport  $K/(I'^2)$  ce qui signifie qu'à  $K \cdot I'^2$  fixé, D prend des valeurs différentes selon les valeurs de I et de K comme nous le présenterons dans le chapitre 3-3.

Les figures 3.32 et 3.33 montrent les valeurs de D en fonction du produit  $K \cdot I'^2$  lorsque le coefficient de Strickler K est fixé à 70. Les figures indiquent la valeur de D à mi-remplissage d'un collecteur circulaire dont le diamètre varie selon la figure 3.2 (Débit capable constant fixé à  $4.8 \text{ m}^3/\text{s}$ ).

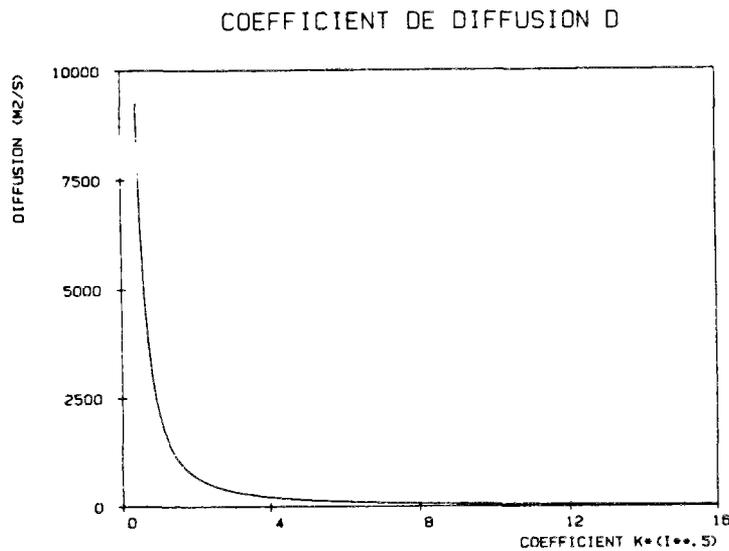


Figure 3.32

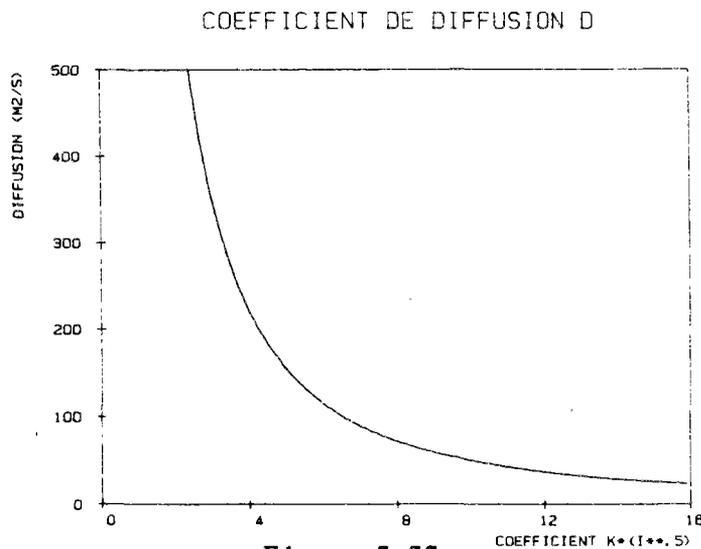


Figure 3.33

3-2-5-2 Comportement du noyau d'Hayami selon la valeur de Z

Nous avons vu au paragraphe 2-2-3-1 que la fonction du noyau d'Hayami avait pour expression en formulation adimensionnelle :

$$h_q(km, Z, \tau) = \sqrt{\frac{km \cdot Z}{\pi \tau^3}} \cdot \exp \left[ Z \cdot \left[ 2 - \frac{km}{\tau} - \frac{\tau}{km} \right] \right]$$

où les nombres km et Z ont pour expression :

$$Z = \frac{C_m \cdot L}{4 \cdot D_m} \quad \text{et} \quad km = \frac{L}{C_m}$$

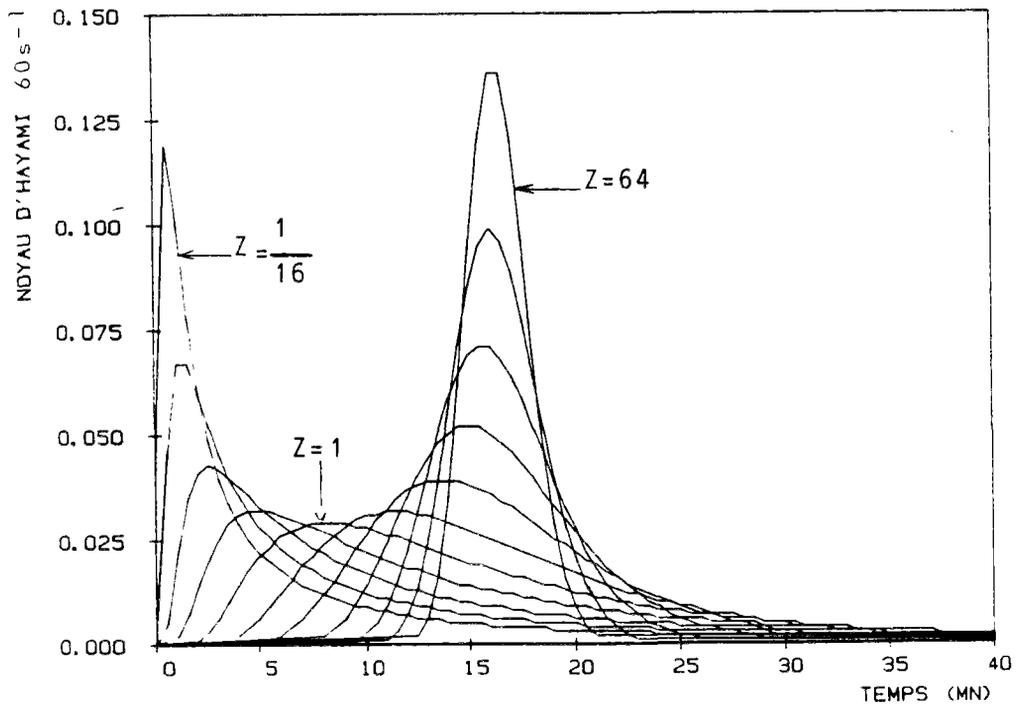
Z est inversement proportionnel au nombre de Reynolds total. Lorsque la pente diminue, Z diminue aussi puisque R augmente (cf. figures 3.6 et 3.7)

**Comportement de la fonction h<sub>q</sub>**

A km fixé, examinons les courbes h<sub>q</sub>(km, Z, τ) pour différentes valeurs de Z. Ceci permettra entre autres de tester l'influence du paramètre D<sub>m</sub> sur la solution d'Hayami.

La figure 3.34 montre la forme de la fonction h<sub>q</sub> selon quelques valeurs de Z variant de 64 à 1/16 selon une suite géométrique de raison 1/2.

HAYAMI - Z = 64 A Z = 1 - Z = 1 A Z = 1/16



*Figure 3.34*

Sur la figure 3.34, le noyau  $hq$  est exprimé en (minutes)<sup>-1</sup> et l'aire de toutes les courbes  $hq(Z)$  vaut 1.

Notons  $hq_{max}$ , le maximum de la fonction  $hq$  et  $\tau_m$ , le temps tel que  $hq(\tau_m) = hq_{max}$

La fonction  $hq_{max}(Z)$  est décroissante pour  $Z \leq 1$ , atteint son minimum pour  $Z=1$ , et est croissante pour  $Z > 1$  ( $Z$  peut varier de 0 à l'infini).

Par ailleurs, le temps  $\tau_m$  est une fonction croissante de  $Z$ .

#### Comportement de la solution d'Hayami

En fonction de plusieurs valeurs de  $Dm_i$ , le paramètre  $C_m$  étant fixé, les résultats sur la fonction  $hq$  permettent d'interpréter la variation des solutions de l'équation de la crue diffusante :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C_m \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = Dm_i \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

Les valeurs de  $Dm_i$  ont été choisies arbitrairement sans référence à aucune réalité physique.

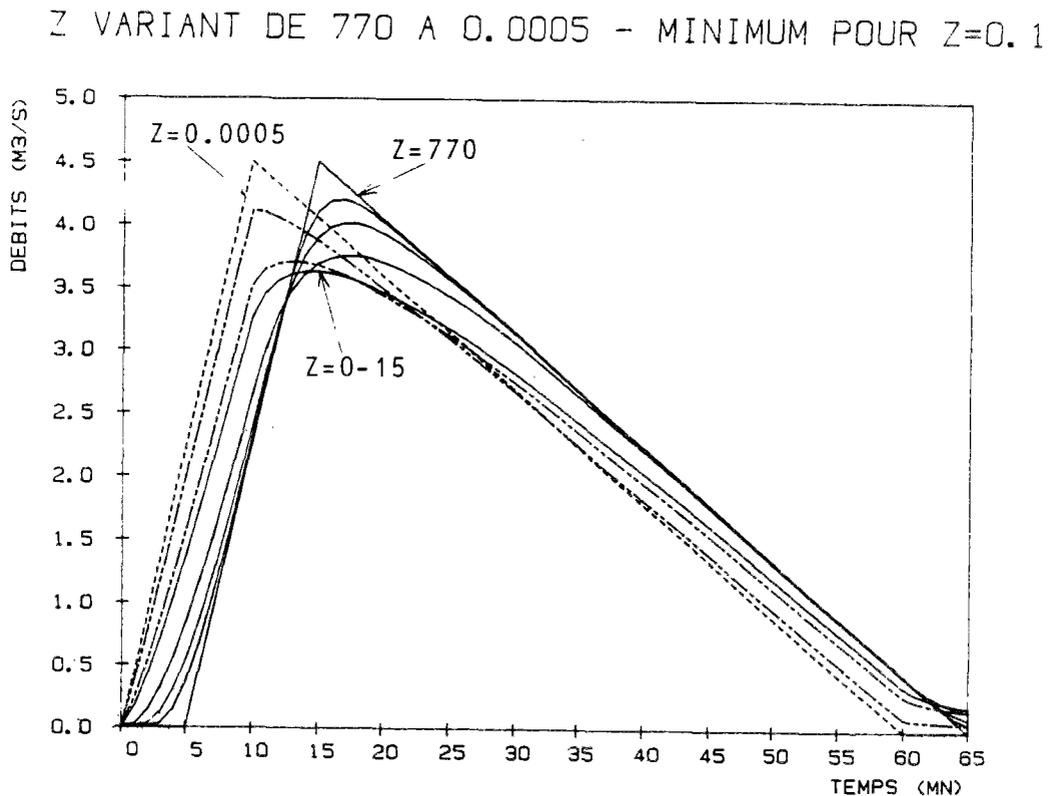


Figure 3.35

Sur la figure 3.35, les courbes en trait pointillé mixte représentent les réponses d'Hayami pour les valeurs  $Z=0.005$  et  $Z=0.0005$ . Lorsque  $Z$  prend des valeurs encore plus petites, la propagation devient instantanée et l'atténuation nulle (courbe en trait pointillé).

## Interprétation des comportements

### a) Influence de $D$

La première valeur de  $D$  ( $D=1\text{m}^2/\text{s}$ ) correspondant à  $Z = 770$  entraîne un comportement de translation simple. L'augmentation de  $D$  (dans la zone où  $Z$  reste supérieur à 0.15) entraîne une augmentation de l'atténuation comme l'indiquent les hydrogrammes en trait continu.

Cette étude un peu artificielle (puisque sans connection à aucune réalité physique) du comportement de la solution analytique d'Hayami permet de nuancer et de prolonger les a priori sur le comportement de l'équation de la crue diffusante. Puisque les valeurs testées sont choisies sans référence à la réalité physique, on peut dire qu'il s'agit du **comportement "mathématique"** de cette équation.

Il est classique de supposer que l'augmentation de  $D_m$  entraîne une augmentation de l'atténuation des débits. Plus  $D_m$  est grand, plus l'hydrogramme propagé est "plat". Or, la figure 3.35 montre que l'atténuation n'augmente pas indéfiniment mais passe par un maximum.

Ce résultat pouvait d'ailleurs être prévu par le seul examen de la figure 3.34 puisque pour  $Z < 1$ , la fonction  $h_q$  tend vers un Dirac à l'origine. La figure 3.35 est en effet la "transposition" (par l'intermédiaire d'un produit de convolution) de la figure 3.34.

Sur la figure 3.34,  $Z = 1$  correspondait à l'atténuation maximale. Sur la réponse effective du modèle, cette atténuation maximale est atteinte pour une valeur de  $Z$  inférieure, de l'ordre de 0.15. Cette valeur de  $Z$  correspondant au maximum d'atténuation dépend de la forme de l'hydrogramme amont mais est en général toujours comprise entre 0.1 et 0.5. Elle est liée au changement de comportement de la fonction  $h_q$  au point où  $Z = 1$ . Si le changement de comportement de la **solution** d'Hayami n'intervient pas pour la même valeur de  $Z$  que le changement de comportement du **noyau** d'Hayami, c'est à cause du produit de convolution qui décale l'impact du paramètre  $Z$ .

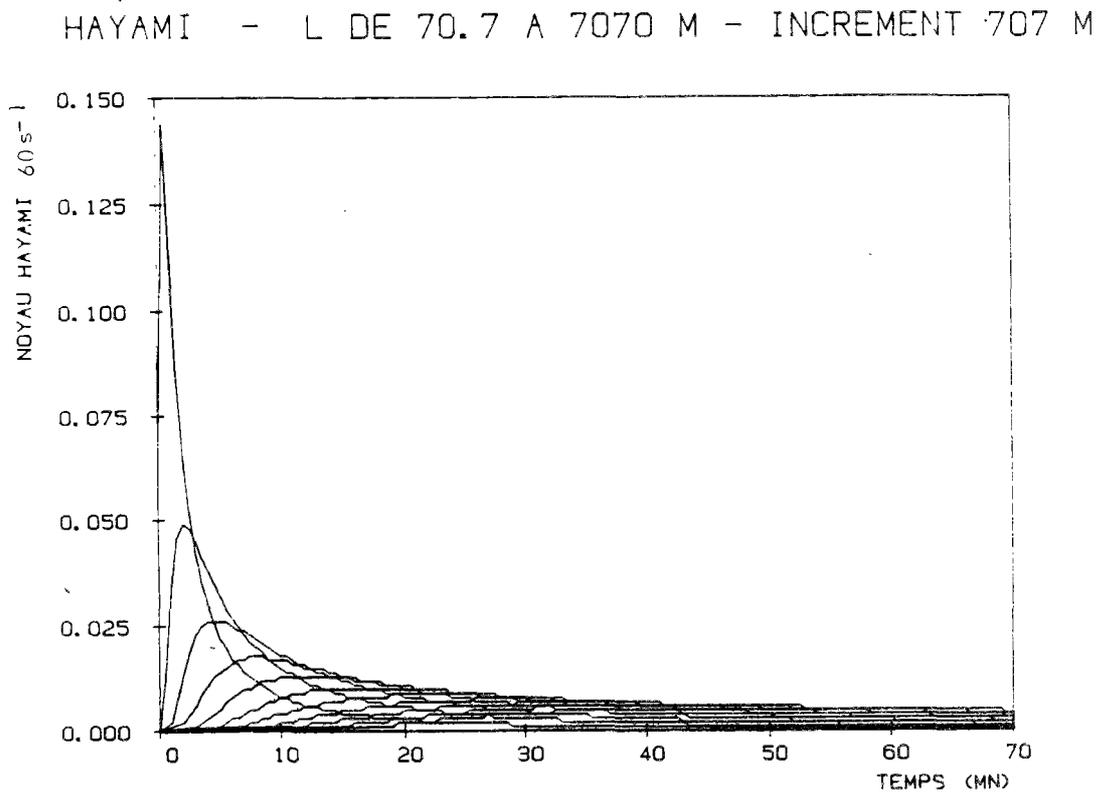
### b) Influence de la longueur

Si on examine le coefficient  $Z$ , on constate que celui-ci est proportionnel à la longueur  $L$  et que la variation de  $Z$  causée par une augmentation de  $D_m$  est équivalente à une diminution de la longueur. On peut expliquer les résultats obtenus si, au lieu de considérer la diminution de  $Z$  comme une augmentation de  $D_m$ , on considère celle-ci comme une diminution de la longueur  $L$ . On comprend mieux alors pourquoi une augmentation de  $D_m$  au delà d'une certaine limite (équivalente à une diminution de la longueur  $L$ ) entraîne une diminution de la durée de propagation et de l'atténuation du débit de pointe. Mais on comprend alors moins bien du coup, pourquoi en deça de cette valeur, ça va dans l'autre sens.

En réalité, le fait de diminuer la longueur  $L$  a aussi pour effet de diminuer la valeur du paramètre  $km$ . On ne peut donc pas raisonner rigoureusement en considérant que les courbes obtenues en faisant varier  $Z$  sont celles qu'on aurait obtenues en faisant varier la longueur  $L$ .

La figure 3.36 montre le comportement bien connu de la fonction  $hq$  en fonction de la longueur  $L$ . Plus  $L$  est grand, plus la fonction  $hq$  s'aplatit et l'influence de  $km$  devient prépondérante sur celle de  $Z$ .

En revanche, pour des très grandes valeurs de  $D_m$ , l'influence de  $km$  devient négligeable et on peut effectivement expliquer la propagation instantanée et sans atténuation des débits (pour des valeurs très faibles de  $Z$ ) comme si l'augmentation de  $D_m$  était équivalente à une diminution de la longueur  $L$ .



### Conclusions

La valeur  $Z = 1$  correspond à un seuil caractérisant un comportement différent du noyau d'Hayami qui influe sur la réponse du modèle. L'atténuation maximale de la pointe de débit est obtenue pour  $Z$  compris entre 0.1 et 0.5 (valeur qui est fonction de la forme de l'hydrogramme amont). En deçà de cette valeur, le modèle d'Hayami se rapproche d'un modèle de translation instantanée. Au delà, il se rapproche d'un modèle de translation simple de célérité

Cm.

### 3-2-5-3 Influence du paramètre D sur l'atténuation des débits

Les résultats varient selon la valeur du paramètre Z comme nous l'avons déjà signalé dans le paragraphe précédent. Le quotient C/D dépend de la pente I et du coefficient de frottement K des collecteurs. Pour une longueur de L = 1000 mètres fixée, Z est d'autant plus petit que la pente est faible. Nous avons effectué des simulations en fixant la célérité Cm et en choisissant plusieurs valeurs physiquement possibles du paramètre Dm sur les courbes D(Q) (cf. figure 2.16 au paragraphe 2-3-5).

#### A) Pentes fortes telles que $Z > 1$

Le tableau 3.8 montre des résultats obtenus pour un collecteur circulaire de diamètre 1500 mm où :

-  $K.I'^2 = 4,9$ ,  $I = 5^\circ$ ,  $K = 70$  avec un hydrogramme de type 1.

Pour toutes ces simulations, le paramètre Cm était identique et sa valeur obtenue par la méthode C(Qmax) (cf. § 3-2-4-1) était de  $C_m = 3.44$  m/s. QM est le débit maximal aval et dp est la durée de propagation.

D (m <sup>2</sup> /s)	QM (m <sup>3</sup> /s)	dp (mn)	
65	4.35	5.5	D(Qmax)=386m <sup>2</sup> /s
153	4.26	5.5	
240	4.20	6.0	D(mi-remplissage)=153m <sup>2</sup> /s
277	4.18	6.0	
320	4.15	6.0	
372	4.12	6.0	
441	4.09	6.5	
546	4.04	6.5	

Tableau 3.8

Pour cet exemple, le paramètre Z du noyau d'Hayami varie de Zmax à Zmin avec :

$$Z_{\max} = C_m.L/(4.D_{\min}) = 13.3$$

$$Z_{\min} = C_m.L/(4.D_{\max}) = 1.6$$

On vérifie les résultats du paragraphe précédent : Z est supérieur à 1 donc l'atténuation est une fonction croissante du paramètre Dm.

En revanche, la durée de propagation augmente légèrement avec Dm au lieu de diminuer ce qu'on constatait déjà sur les courbes de la figure 3.35. La réponse du modèle d'Hayami dépend bien sûr de la forme de la fonction hq mais le produit de convolution n'assure pas nécessairement la corrélation simple entre la forme de hq et la forme de la réponse (après le calcul de la convolution). La convolution de hq et de l'hydrogramme amont entraîne dans ce cas des durées de propagation qui sont d'autant plus grandes que D est grand (dans la zone de variation étudiée) alors que  $\tau_m$  diminuait lorsque Dm augmentait (cf. figure 3.34). La variation de dp reste néanmoins très faible.

### B) Pentes faibles telles que $Z < 1$

Le tableau 3.9 montre des résultats obtenus pour un collecteur circulaire de diamètre 2300 mm avec :

-  $K \cdot I^{1/2} = 1.56$ ,  $I = 5^\circ/\dots$ ,  $K = 70$ , hydrogramme de type 1.

Pour toutes les simulations, la valeur de  $C_m$  (calculée par  $C(Q_{\max})$ ) était identique et fixée à  $C_m = 1.46$  m/s.  $Q_M$  représente le débit maximal aval et  $dp$  la durée de propagation.

D (m <sup>2</sup> /s)	Q <sub>M</sub> (m <sup>3</sup> /s)	dp (mn)	
218	3.53	16.5	
421	3.31	15.5	
677	3.20	14.5	D(mi-remplissage)=1333 m <sup>2</sup> /s
984	3.14	13.0	
1334	3.12	12.0	D(Q <sub>max</sub> )=2580 m <sup>2</sup> /s
1552	3.12	11.5	
1789	3.12	11.0	
2066	3.13	10.0	
2401	3.14	9.5	
2842	3.16	9.0	
3520	3.19	8.0	

Tableau 3.9

Pour cet exemple,  $Z$  varie de  $Z_{\max}$  à  $Z_{\min}$  avec :

$Z_{\max} = 1.67$  (correspond à  $D = 218$  m<sup>2</sup>/s)

$Z_{\min} = 0.1$  (correspond à  $D = 3520$  m<sup>2</sup>/s)

Contrairement aux cas où  $Z > 1$ , la durée de propagation des hydrogrammes varie fortement avec  $D$  alors que l'atténuation ne varie que faiblement. On est bien dans la zone de changement de comportement de la fonction  $h_q$  (correspondant à  $Z = 1$ ) (cf. figures 3.34 et 3.35) que l'on peut mesurer aussi sur la réponse du modèle puisque l'atténuation des débits augmente dès que  $D$  dépasse la valeur 1334 m<sup>2</sup>/s.

Au voisinage de la valeur  $Z = 1$  (où la dérivée  $\partial h_{q\max}/\partial Z$  est nulle), il est naturel que l'atténuation des débits soit moins sensible aux variations de  $Z$  que les durées de propagation (cf. figure 3.34).

L'évolution de la réponse effective d'Hayami est bien corrélée avec la forme de la fonction  $h_q$ , puisque la durée de propagation est une fonction décroissante de  $Z$  et le débit maximal passe effectivement par une valeur minimale. Néanmoins, pour cet exemple, l'atténuation minimale est obtenue pour  $Z = 0.25$  (alors que  $h_{q\max}$  est minimal dès que  $Z=1$ ). Ce décalage est fonction de la forme de l'hydrogramme d'entrée. Il est causé par le produit de convolution.

Nous verrons au chapitre suivant les implications de ce comportement sur les domaines de validité des modèles de crue diffusante.

### 3-2-5-4 Différences entre D variable et D constant

Rappelons que nous avons toujours calculé D par la relation (2.10) (qui donne  $D=Q/2IB$ ) sans chercher à tester d'autres relations.

Nous avons testé VPD en le rendant linéaire en D, ce qui signifie que D est choisi constant pour la propagation de toute la crue et C reste variable.

La figure 3.37 montre le même type de courbes que celles obtenues en comparant  $\theta$  variable à  $\theta$  fixe pour le modèle Muskingum Modifié (cf. figure 3.11).

D à mi-remplissage correspondant au trait pointillé simple est beaucoup plus faible que D(Qmax) qui correspond au trait pointillé mixte.

Lorsque D constant est choisi égal à D(Qmax), on constate que l'atténuation du débit ainsi que la durée de propagation est quasiment identique à celle obtenue avec un paramètre D variable. En revanche, pour des faibles débits en début de crue, on observe les effets de la non-linéarité avec une montée de crue plus tardive et plus raide pour le modèle non-linéaire que pour le modèle linéaire.

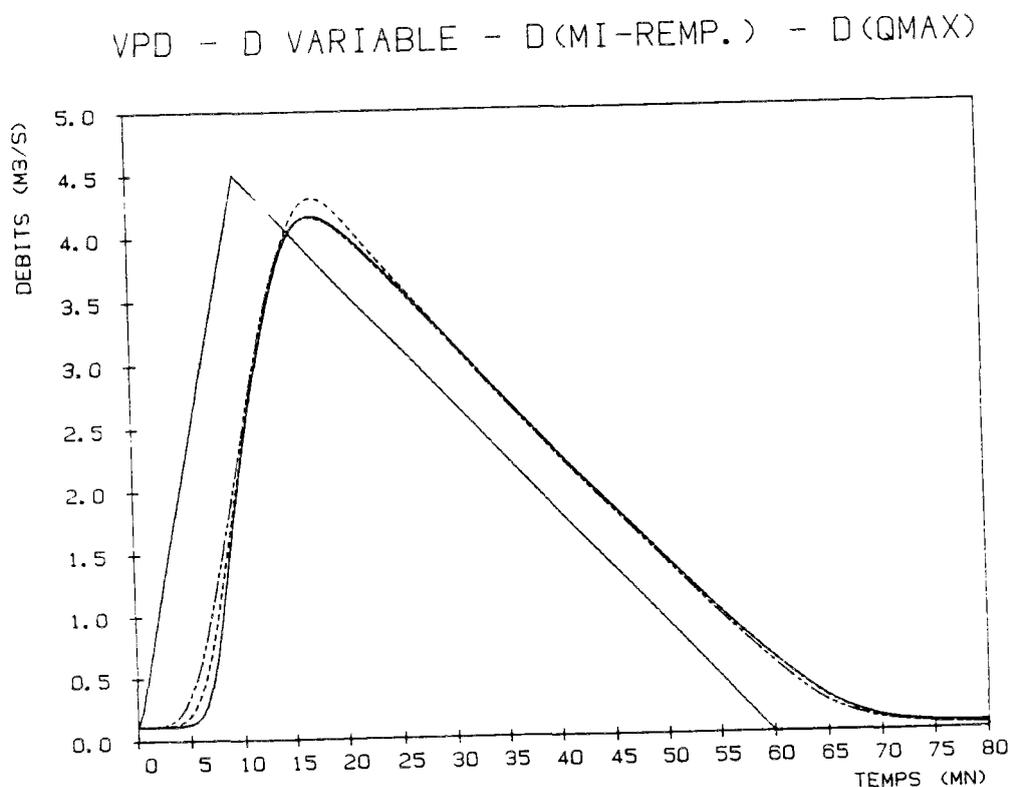


Figure 3.37

3-2-5-5 Différences entre Hayami et VPD

La figure 3.38 montre la réponse d'Hayami (trait pointillé) comparée à la réponse de VPD en trait plein. Pour le modèle d'Hayami, C est calculé par  $C(Q_{max})$  et D est calculé par D(mi-remplissage). Les effets de la non-linéarité par rapport à la réponse linéaire sont toujours du même type : début de crue plus tardif et plus raide pour le modèle non-linéaire, décrue parallèle à la décrue de l'hydrogramme amont pour le modèle linéaire (Hayami) alors que pour VPD, la décrue a une forme plus concave et les faibles débits de fin de crue sont propagés plus lentement qu'avec le modèle linéaire. Les différences entre la réponse linéaire et la réponse non-linéaire sont causées non seulement parce que D est constant mais aussi parce que C est constant.

VPD - HAYAMI -  $K*(I**0.5) = 4.9$  - HYDROG. TYPE 1

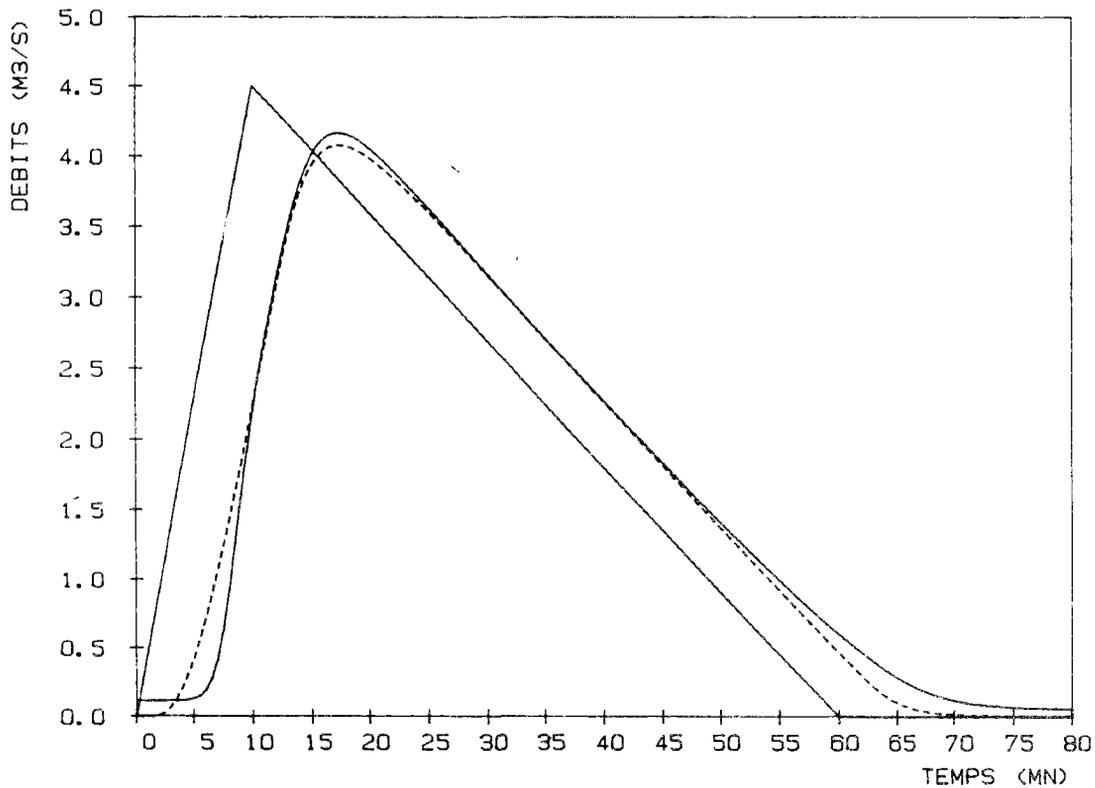


Figure 3.38

### 3-2-6 CONCLUSIONS

#### 3-2-6-1 Consistance et stabilité des modèles cinématiques et Muskingum

On intègre l'équation de l'onde cinématique et l'équation des modèles de type Muskingum en faisant converger les solutions vers les solutions de l'équation de la crue diffusante. Plusieurs schémas de discrétisation sont possibles. Ces schémas sont équivalents entre eux lorsqu'ils sont bien construits. Un schéma est "bien construit" s'il est stable et si sa diffusion numérique est contrôlée par les termes du second ordre (fonction des paramètres du schéma).

Dans des conditions contrôlées de fonctionnement il n'y a pas de différence entre les schémas. Ils permettent d'obtenir des réponses identiques qui sont les solutions de l'équation de la crue diffusante où la diffusion  $D$  est égale à la diffusion numérique  $D_n$ .

Le schéma classique (2.30) de **Muskingum-Cunge** nous semble être le modèle cinématique ou Muskingum "bien construit" le meilleur car :

- il est simple à mettre en oeuvre ;
- il a une formulation adimensionnelle très simple qui permet de bien contrôler la valeur des paramètres du schéma ;
- l'expression de  $\theta$  qui permet l'identification avec la diffusion hydraulique  $D$  est simple et ne fait intervenir que le nombre de Reynolds local  $Cr$  ;
- c'est le modèle cinématique sur lequel les informations disponibles sont les plus nombreuses ;
- la variante (2.40) permettant l'utilisation d'un sous pas de temps de calcul est intéressante.

#### Le choix des paramètres pour le schéma (2.30)

Pour pouvoir identifier la diffusion numérique des termes du second ordre des schémas à la diffusion hydraulique  $D$ , il faut tout d'abord choisir un pas d'espace  $\Delta x$  qui permette de vérifier durant toute la crue, la condition  $Cr \leq 2$  (ce qui n'est possible que pour les cas où le paramètre  $R \leq 2$ ). La valeur maximale de  $Cr$  est obtenue à partir du débit maximal de l'hydrogramme amont.

Il faut ensuite vérifier que la condition  $Cr \leq 2$  n'oblige pas le choix d'un "grand"  $\Delta x$  tel que la diffusion numérique des termes du schéma ne soit plus uniquement contrôlée par la diffusion numérique des termes d'ordre 2. On peut pour cela vérifier que l'influence du choix d'un  $\Delta x$  (permettant de vérifier la condition  $Cr \leq 2$ ) reste négligeable sur l'atténuation des débits.

Le choix du pas de temps, doit s'effectuer en contrôlant :

- les effets de lissage :  $\Delta t \leq T_c/5$  ;
- la stabilité numérique :  $\Delta t \leq \Delta x/C$  ;
- les débits négatifs en début de crue :  $\Delta t > 2.\theta.\Delta x/C$ .

Le choix d'un  $\Delta t$  proche de  $\Delta x/C$  (i.e d'un nombre de courant  $Co = 1$ ) permet d'éviter les débits négatifs et de vérifier la stabilité numérique. Si on choisit  $Co = 1$ , il ne reste qu'à vérifier la condition  $T_c/\Delta t > 5$ . Si tel n'est pas le cas, on peut alors avoir recours au modèle Muskingum Modifié. Il faut alors choisir  $\Delta t$  tel que  $T_c/\Delta t > 5$ .

### Muskingum Modifié ou non?

- Le modèle Muskingum Modifié est simple d'utilisation à cause du calcul automatique du pas de temps  $\Delta t$  et du sous pas de temps  $\Delta t$ . Ce calcul automatique impose donc uniquement le choix d'un pas d'espace  $\Delta x$  comme pour les autres modèles cinématiques. Ce choix automatique du pas de temps est effectué uniquement dans le but de respecter  $C_0 = 1$ , ce qui évite de se préoccuper de la condition  $C_0 + C_r > 1$ . Automatiquement, on évite donc les débits négatifs de début de crue et on respecte les conditions de stabilité.

- Le modèle Muskingum Modifié a l'inconvénient d'utiliser systématiquement le sous pas de temps de calcul, même quand les contraintes (i.e la condition  $T_c/\Delta t > n$ ) ne l'imposent pas. Ce sous pas de temps entraîne une perte supplémentaire du contrôle des volumes transités, multiplie les effets de lissage dus au changement de base de temps, et alourdit le programme. C'est pourquoi, nous ne recommandons de l'utiliser que quand on ne peut vérifier la condition (2.43) avec le pas de temps  $\Delta t$ .

### Calage automatique des paramètres numériques

En fonction des longueurs  $L$  des tronçons, on commence par choisir  $\Delta x$  tel que le nombre de Reynolds local  $C_r$  soit au plus égal à 2. En fonction de ce choix de  $\Delta x$ , on choisit  $\Delta t$  tel que  $C_0$  soit proche de 1.

Si le choix de  $C_0 = 1$  implique le non-respect de la condition (2.43)  $T_c/\Delta t > n$ , alors on utilise le modèle Muskingum Modifié.

Si ce choix permet de respecter la condition (2.43), on utilise le schéma (2.30) avec le pas de temps  $\Delta t$ .

Avant d'effectuer les calculs, on vérifie que deux valeurs de  $\Delta x$  plus grandes que la valeur choisie (correspondant donc à des nombres de Reynolds locaux  $C_r$  plus petits) donnent la même atténuation du débit. Ce test a pour but de vérifier que la diffusion numérique du schéma est bien uniquement causée par les termes du second ordre.

Si ce dernier test est négatif, on ne peut pas utiliser un modèle Muskingum ou cinématique.

De même, si la longueur totale  $L$  d'un tronçon entraîne que  $C_r$  reste toujours plus grand que 2, même pour la valeur maximale de  $\Delta x = L$ , il faut avoir recours à d'autres types de modèle (un modèle de crue diffusante, par exemple).

### 3-2-6-2 Consistance et stabilité des modèles de crue diffusante

Quel que soit le schéma d'intégration utilisé, il faut vérifier les conditions de stabilité et la consistance du schéma. Si la diffusion numérique des termes du second ordre reste toujours petite par rapport à la diffusion hydraulique  $D$ , la solution du schéma de résolution convergera vers la solution de l'équation de la crue diffusante.

Le choix des paramètres  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ , et des paramètres de pondération du schéma (pour VPD, il s'agit des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ ) doit être effectué en fonction de l'expression de la diffusion numérique et des conditions de stabilité.

### 3-2-6-3 Les paramètres C et D

#### La célérité C

Pour la détermination de C instantané jusqu'à la hauteur  $1.87R$ , la méthode qui consiste à considérer que la célérité est constante à partir de la hauteur où elle atteint sa valeur maximale est la meilleure car la plus simple à mettre en oeuvre. De plus, pour la détermination d'un paramètre moyen  $C_m$ , cette méthode est préférable car on contrôle mieux les valeurs prises par  $C(Q_{max})$ .

La méthode où  $C_m$  est déterminée par la relation  $C_m = C(\lambda \cdot Q_{max})$  avec  $0.9 \leq \lambda \leq 1$  est la meilleure en regard de la durée de propagation et de l'atténuation du débit de pointe du modèle non-linéaire correspondant (i.e dont le schéma de discrétisation est identique). Par ailleurs, la non-linéarité du paramètre C entraîne une réponse des modèles plus tardive mais plus raide de la crue et une décrue moins rapide surtout pour les petits débits de fin d'hydrogramme.

#### La diffusion D

L'influence de la diffusion hydraulique D dépend de la valeur du nombre adimensionnel :

$$Z = \frac{C \cdot L}{4 \cdot D}$$

Si Z reste plus grand que 1, le paramètre D introduit une diffusion a priori d'autant plus forte qu'il est grand. En augmentant, D entraîne de plus une légère augmentation des durées de propagation.

Dans les cas de pente faible où le paramètre Z devient plus petit que 1, D a l'effet inverse et D croissant entraîne une diminution de l'atténuation du débit de pointe. On peut dire que le modèle "diffuse" plus rapidement qu'il ne "propage". La comparaison avec les réponses d'un modèle complet (cf. chapitre suivant) permettra de conclure si les cas où  $Z < 1$  garantissent toujours une bonne modélisation des phénomènes.

### 3-2-6-4 Nouvelle classification et domaines théoriques d'application

A la lumière des résultats obtenus dans ce chapitre, il apparaît trois zones qui différencient les modèles simplifiés entre eux, faisant intervenir le nombre de Reynolds total R.

#### DOMAINE n° 1 $R < 0.05$

Cette condition sur R entraîne la condition  $Z > 10$  et correspond à des écoulements de forte pente.

Il est délicat, voire impossible, de maintenir la diffusion numérique des modèles non-linéaires de crue diffusante négligeable devant la diffusion hydraulique D qui reste faible (cf. §3-2-2-9).

Le modèle d'Hayami et les modèles cinématiques et Muskingum peuvent en revanche être utilisés.

### DOMAINE n° 2 $0.05 < R \leq 0.5$

Cette condition sur R entraîne la condition  $1 < Z < 10$ .

Pour les modèles cinématiques et Muskingum, il faut vérifier la condition  $Cr \leq 2$ . Il faut de plus s'assurer que la diffusion numérique totale du schéma est bien contrôlée par celle des termes d'ordre 2.

Pour les modèles non-linéaires de crue diffusante, il est nécessaire de vérifier que les paramètres numériques sont choisis de telle sorte que la diffusion numérique des schémas reste négligeable et que le schéma est stable.

Dans ces conditions et à l'intérieur du domaine n° 2, les modèles cinématiques, Muskingums et les modèles de crue diffusante sont équivalents.

Les modèles linéaires peuvent reproduire correctement l'atténuation du débit de pointe et la durée de propagation obtenue avec les modèles non-linéaires (cf. conclusions sur la célérité moyenne).

Si les modèles sont linéaires en  $\theta$ ,  $\theta(Q_{\max})$  calculé par (2.31) en utilisant le débit maximal de l'hydrogramme amont permet de retrouver la même atténuation et la même durée de propagation que les modèles non-linéaires correspondants. La non-linéarité en  $\theta$  ou en D entraîne un départ plus tardif, mais plus raide de la crue, c'est-à-dire un raidissement du front d'onde.

Dans ce domaine théorique d'application, il ne subsiste que trois types de réponse correspondant aux trois types de modèles suivants :

- les modèles entièrement *non-linéaires* où les paramètres C et D (ou C et  $\theta$ ) sont variables
- réponse des modèles *semi-linéaires* où le paramètre C est variable et le paramètre D (ou  $\theta$ ) est constant
- réponse des modèles entièrement *linéaires* où les paramètres C et D (ou C et  $\theta$ ) sont constants

### DOMAINE n° 3 soit $R > 0.5$

soit la diffusion numérique des modèles cinématiques ou Muskingum ne peut plus être contrôlée par les termes d'ordre 2.

La condition  $R > 0.5$  entraîne la condition :  $Z < 1$ .

On ne peut plus appliquer les modèles cinématiques et Muskingum avec une diffusion numérique égale à la diffusion hydraulique D.

Il ne reste donc que les modèles de crue diffusante non-linéaire de type VPD ou linéaire de type Hayami. La variation du paramètre D en fonction de la hauteur d'eau dans le collecteur étant grande pour des petites valeurs de Z, il est déconseillé d'utiliser un modèle linéaire où D est constant tout au long de la propagation de la crue.

Pour des valeurs de Z comprises entre 0.1 et 1, les modèles de crue diffusante changent de comportement et une augmentation du paramètre D génère une diminution de l'atténuation des débits de pointe.

Modèles non-linéaires C variable D ou $\theta$ variables	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diffusion hydraulique</li> <li>Diffusion numérique identifiée à la diffusion hydraulique</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modèles de crue diffusante pour <math>Z &lt; 10</math></li> <li>Tous les modèles cinématiques et Muskingum avec respect de A et B</li> </ul>
Modèles semi-linéaires C variable D ou $\theta$ constants	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diffusion hydraulique</li> <li>Diffusion numérique identifiée à la diffusion hydraulique</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modèles de crue diffusante pour <math>Z &lt; 10</math></li> <li>Tous les modèles cinématiques et Muskingum avec respect de A et B</li> </ul>
Modèles linéaires C constant D ou $\theta$ constants	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diffusion hydraulique</li> <li>Diffusion numérique identifiée à la diffusion hydraulique</li> <li>Diffusion numérique nulle</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Hayami avec <math>Z</math> quelconque</li> <li>Tous les modèles cinématiques et Muskingum avec respect de A et B</li> <li>Translation simple sans restrictions particulières</li> </ul>

A : le nombre Cr doit être inférieur à 2  
B : la diffusion numérique du schéma provient uniquement de la diffusion numérique des termes d'ordre 2

Tableau 3.10

Cette nouvelle classification ne concerne pas les domaines de validité des modèles qui sont définis dans le chapitre suivant par référence à un modèle complet. Les trois domaines ci-dessus sont établis à partir de la comparaison des réponses des différents modèles simplifiés entre eux et de l'étude du comportement individuel de chacun des modèles. L'intersection de ces domaines et des domaines de validité que nous définirons au chapitre 3-3 permettra d'obtenir les domaines d'utilisation possible des modèles simplifiés.

### 3-3 DOMAINES DE VALIDITE DES MODELES SIMPLIFIES

Nous définirons les domaines de validité des modèles simplifiés par comparaison des réponses d'un modèle complet de Saint-Venant. La référence à nos simulations est donc la simulation des écoulements par un modèle complet.

Cette manière de procéder est plausible puisque les modèles simplifiés ont un contenu physique plus pauvre que les modèles complets. Nous avons en effet vérifié au chapitre 2-1 et 2-2 que tous les modèles simplifiés que nous avons étudiés peuvent se déduire des équations de Saint-Venant et sont donc valables sous des hypothèses plus restrictives que les équations complètes de Saint-Venant.

Si les modèles simplifiés donnent des résultats très différents du modèle complet, cela signifiera que les hypothèses simplificatrices nécessaires à la mise en oeuvre des modèles simplifiés entraînent une perte d'information par rapport au contenu physique des équations de Saint-Venant.

Quelles que soient les conclusions qu'on en tire, il sera toujours utile, lorsqu'on utilise un modèle simplifié, de savoir si les conditions de l'écoulement permettent a priori d'obtenir ou pas des résultats comparables à ceux qu'on aurait obtenu avec un modèle complet.

Les nombres adimensionnels qui peuvent être utilisés pour caractériser les écoulements étudiés dans ce chapitre sont :

$$R = \frac{2 \cdot D}{C \cdot L} \quad \text{ou} \quad Z = \frac{1}{2R} \quad \text{définis au chapitre précédent}$$

$$L+ = \frac{C \cdot T_c}{L} \quad \text{ou} \quad R_c = \frac{2 \cdot D}{C^2 \cdot T_c} = \frac{R}{L+}$$

$L+$  est le rapport entre la distance sur laquelle s'étend la montée de la crue dans le collecteur et la longueur effective  $L$  du collecteur.

$R_c$  caractérise la diffusivité du collecteur sur la longueur  $C \cdot T_c$ , alors que  $R$  caractérise la diffusivité sur la longueur effective  $L$  du tronçon.

Avec les 2 nombres adimensionnels  $L+$  et  $R$  (ou leurs associés  $Z$  et  $R_c$ ), on peut définir les domaines de validité des modèles simplifiés étudiés dans les chapitres précédents.

Les trois domaines théoriques définis dans le paragraphe 3-2-6 ont servi de base à notre étude. Pour chacun des modèles, nous avons précisé l'importance du contrôle des nombres adimensionnels  $L+$  ou  $R_c$ .

Les exemples hypothétiques testés sont de plus caractérisés par leur nombre de Froude et correspondent à des conditions classiques que l'on peut rencontrer en assainissement.

Comme nous l'avons déjà observé à plusieurs reprises, le paramètre  $C$  dépend de la pente et du Strickler par l'intermédiaire du produit  $K \cdot I^{1/2}$ . En

revanche, le paramètre  $D$  dépend (à  $K.I^{1/2}$  fixé) de la pente et du Strickler par l'intermédiaire du quotient  $K/(I^{1/2})$ . Nous testerons les modèles pour plusieurs valeurs de  $K$  et  $I$  à  $K.I^{1/2}$  fixé.

Le paragraphe 3-3-1 est consacré au premier domaine défini dans la conclusion 3-2-6 par  $R < 0.05$  ( $R$  a été défini comme le nombre de Reynolds total).

Dans ce domaine, le modèle de crue diffusante non-linéaire n'est pas applicable. Nous étudierons donc uniquement les réponses des modèles cinématiques et du modèle d'Hayami.

Le paragraphe 3-3-2 est consacré au deuxième domaine défini dans la conclusion 3-2-6 par  $0.05 < R < 0.5$

Pour ce domaine, tous les modèles simplifiés sont applicables, à condition que la diffusion numérique des modèles cinématiques et Muskingum soit bien contrôlée par les termes du second ordre.

On vérifiera que l'identification de la diffusion numérique des modèles cinématiques et Muskingum à la diffusion hydraulique  $D$  permet d'obtenir des résultats identiques à ceux des modèles de crue diffusante.

Dans ce domaine, les modèles linéaires sont applicables. Nous avons vu que la linéarité, semi-linéarité ou non-linéarité des modèles cinématiques et Muskingum introduit plutôt des différences sur la forme générale de l'hydrogramme propagé que sur son débit de pointe et sa durée de propagation.

Le paragraphe 3-3-3 est consacré au troisième domaine défini dans la conclusion 3-2-6, notamment par la condition  $R > 0.5$ . Dans ce domaine, l'identification de la diffusion numérique des termes du second ordre des schémas des modèles cinématiques et Muskingum à la diffusion hydraulique de la crue diffusante n'est plus possible. Par ailleurs, les réponses du modèle complet montrent que l'atténuation des hydrogrammes propagés est forte. L'utilisation d'un modèle cinématique ou Muskingum non-diffusant n'est donc pas intéressante. Il est néanmoins possible de fixer une diffusion numérique arbitraire aux modèles cinématiques et Muskingum pour simuler l'atténuation obtenue par le modèle complet ou par des mesures. Cette méthode est déconseillée si l'on souhaite utiliser les résultats des modèles de manière prédictive.

Nous avons donc éliminé les modèles cinématiques et Muskingum et avons effectué les comparaisons entre le modèle complet de Saint-Venant et les modèles de crue diffusante (non-linéaire et linéaire).

Pour les trois domaines étudiés, la réponse analytique d'Hayami permet d'évaluer l'influence de la diffusion  $D$  et la concordance avec les résultats des modèles numériques.

Le paragraphe 3-3-4 est consacré aux phénomènes inertiels et à l'étude de la modélisation d'une influence aval sur un collecteur régulier à l'aide du modèle non-linéaire de crue diffusante VPD. Les cas hypothétiques testés correspondent à des collecteurs de faible pente entrant dans le troisième domaine d'application des modèles simplifiés défini dans le paragraphe 3-2-6 ( $R > 0.5$ ).

### 3-3-1 ÉCOULEMENTS TORRENTIELS, NOMBRE DE FROUDE > 2

#### 3-3-1-1 La diffusion hydraulique en fonction de (K,I)

Nous avons tracé figure 3.39 les courbes  $D(y)$  pour un collecteur circulaire de diamètre 960 mm et de débit capable  $Deb = 4.8 \text{ m}^3/\text{s}$ . Les courbes correspondent à différents couples  $(K,I)$  lorsque la valeur du produit  $K.I^{1/2}$  est fixée à 15.6.

Les trois couples  $(K,I)$  testés sont :

- trait pointillé mixte :  $K = 90$  et  $I = 3\%$
- trait pointillé simple :  $K = 70$  et  $I = 5\%$
- trait continu :  $K = 50$  et  $I = 9.8\%$

La figure 3.4 qui donne, pour ces 3 couples  $(K,I)$  les courbes  $F(y)$  correspondantes indique que pour ces conditions, l'écoulement est torrentiel et que le nombre de Froude  $F$  est supérieur à 2 (sauf pour le couple  $(K,I)$  où  $K=50$  où  $F$  reste néanmoins supérieur à 1.5).

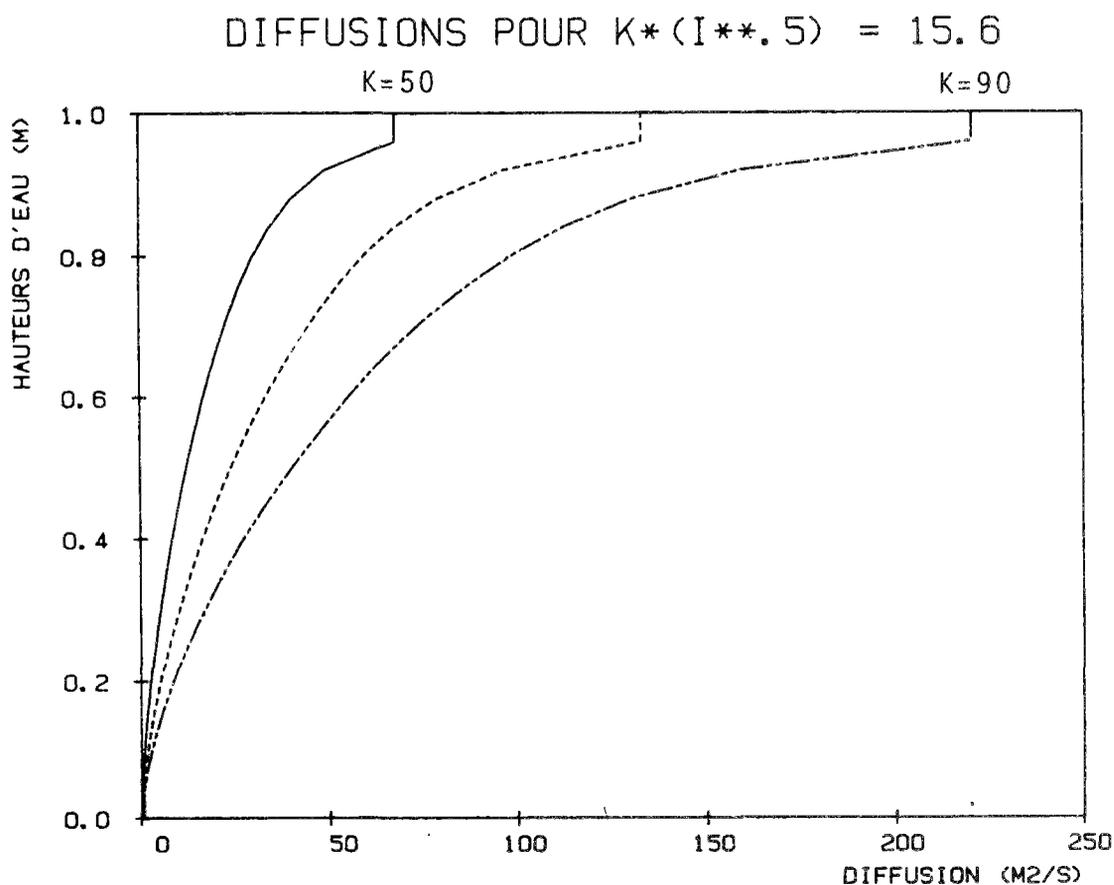


Figure 3.39

Lorsqu'on se rapproche de la hauteur de mise en charge,  $D$  tend vers l'infini puisque la largeur au miroir  $B$  tend vers 0. On tronque  $D$  pour son utilisation numérique. Toutefois, les courbes  $D(Q)$  ne sont utilisées que pour  $Q$  variant de zéro au débit capable qui est atteint avant la mise en charge à environ 90% du remplissage (cf. formule de Manning-Strickler).

### 3-3-1-2 Comparaison du modèle d'Hayami et du modèle complet

Pour un hydrogramme de type 1 (cf. figure 3-2 au paragraphe 3-1-3-2) et les valeurs  $K=70$ ,  $I=5\%$ , le modèle d'Hayami donne les réponses suivantes selon quelques valeurs de  $D_m$  choisies sur la courbe  $D(Q)$  (cf. figure 3.39). La célérité était  $C_m = C(Q_{max}) = 8$  m/s. La longueur du tronçon était  $L = 1000$ m.

$D$ ( $m^2/s$ )	16	31	48	66	120
$Q_M$ ( $m^3/s$ )	4.46	4.45	4.44	4.43	4.42
$dp$ (mn)	2	2	2	2	2

Tableau 3.11

Avec ces conditions,  $D(Q_{max}) = D(4.5) = 66$   $m^2/s$   
 $D(\text{mi-remplissage}) = 23$   $m^2/s$

Pour le paramètre  $Z$  :  
 $Z_{max} = 125$  et  $Z_{min} = 17$

Le nombre  $R$  est inférieur à 0.2 et le temps de crue  $T_c$  est de 600s donc  $C.T_c = 4800$  mètres. On vérifie donc que  $L+ = C.T_c/L \gg 1$ .

En explicitant les réponses d'Hayami pour les différents couples  $(K, I)$  tels que  $K.I^{1/2} = 15.6$ , on obtient :

Pour  $K = 50$  :  $D(Q_{max}) = 33$   $m^2/s$  et  $Q_M = 4.45$   $m^3/s$   
 Pour  $K = 70$  :  $D(Q_{max}) = 66$   $m^2/s$  et  $Q_M = 4.43$   $m^3/s$   
 Pour  $K = 90$  :  $D(Q_{max}) = 109$   $m^2/s$  et  $Q_M = 4.42$   $m^3/s$

On vérifie bien que plus  $D$  est grand, plus l'atténuation est forte. Néanmoins, pour ces conditions, le paramètre  $D$  n'entraîne que très peu d'atténuation (environ 1% de  $Q_{max}$ ) et les résultats obtenus avec le modèle d'Hayami sont donc quasiment identiques à ceux de la translation simple (à 1% d'atténuation près).

Le modèle complet se comporte de manière identique pour les 3 couples  $(K, I)$ . La durée de propagation des hydrogrammes est identique à la durée de propagation obtenue par Hayami (ce qui montre que le calcul de  $C_m$  ou  $km$  est exact). En revanche, l'atténuation des débits est légèrement supérieure pour le modèle complet puisqu'elle atteint 4% du débit maximal. Par exemple, le débit maximal de l'hydrogramme aval  $Q_M$  est de 4.3  $m^3/s$  pour un hydrogramme de type 1.

Pour les 6 types d'hydrogramme testés, avec une longueur telle que  $L^+$  soit supérieur à 1, les réponses du noyau d'Hayami sont quasiment identiques à celles du modèle complet. Pour des écoulements de forte pente de grande longueur, l'atténuation du débit est toujours négligeable pour les modèles simplifiés alors qu'elle ne l'est plus pour les modèles complets. L'hydrogramme aval a une forme identique (à l'atténuation près) à l'hydrogramme amont et le modèle complet se comporte comme un modèle de translation simple. L'atténuation (de 4%) ne peut néanmoins s'expliquer que par les effets des ondes dynamiques (qui ne s'amortissent plus pour des écoulements où le nombre de Froude  $F$  est voisin de 2 (cf. §2-1-3). En effet, la solution de l'équation de la crue diffusante (i.e. la solution des équations de Saint-Venant où les termes d'inertie sont négligés) n'introduit pas d'atténuation des débits.

### Conclusions

Il faut tout d'abord souligner le fait que la notion de nombre de Froude n'existe qu'à cause du terme d'inertie spatiale des équations complètes de Saint-Venant. Simplifier les équations de Saint-Venant, c'est a priori supprimer la notion même de nombre de Froude. Néanmoins, utiliser le nombre de Froude permet une référence au système complet de Saint-Venant et donne des indications précieuses sur les conditions des écoulements.

Les écoulements dont le nombre de Froude est plus grand que 2 sont en général instables. Lorsque les géométries sont relativement régulières, les instabilités peuvent être minimales comme c'est le cas avec les simulations que nous avons effectuées où le modèle complet propage les hydrogrammes par translation simple sans introduire d'atténuation significative.

Les critères théoriques de validité des modèles simplifiés qui limitaient leur utilisation aux écoulements tels que  $F < 2$  ne se justifient pas. Au contraire, les modèles complets donnant les mêmes résultats qu'une translation simple, il est préférable d'utiliser ce dernier modèle étant donnée sa simplicité plus grande.

En revanche, ces critères interviennent sans doute pour des écoulements naturels torrentiels (type torrents de montagne) où les irrégularités du fond du cours d'eau génèrent des phénomènes inertiels vraisemblablement importants qui ne peuvent être négligés, lorsque l'on simule la propagation des crues sur une grande longueur.

En assainissement, il n'est pas nécessaire de se soucier du critère de validité  $F < 2$  des modèles simplifiés.

D'une part, les pentes des collecteurs sont rarement suffisantes pour générer des écoulements tels que  $F$  soit plus grand que 2. Les concepteurs des réseaux doivent en effet respecter la contrainte d'abrasion des radiers et de sécurité qui limite la vitesse de l'écoulement à 4 m/s.

D'autre part, pour de tels écoulements, la translation simple garantit une précision suffisante pour la propagation des hydrogrammes.

Enfin, les longueurs des réseaux raides ne sont jamais suffisantes pour permettre aux ondes dynamiques de déformer significativement l'hydrogramme propagé. Le critère  $L^+ > 1$  garantit des longueurs pour lesquelles les réponses du modèle d'Hayami et du modèle complet sont identiques.

### 3-3-1-3 Les modèles cinématiques

L'étude préalable de la réponse du noyau d'Hayami permettait de conclure qu'un modèle de translation simple était suffisant pour modéliser correctement de telles conditions d'écoulement. Il est donc a priori inutile de chercher à identifier la diffusion numérique d'un modèle cinématique ou Muskingum à la diffusion hydraulique  $D$  puisque celle-ci est d'effet négligeable.

Dans la pratique, on peut néanmoins être confronté à utiliser un modèle cinématique dans les conditions décrites précédemment sans disposer d'un modèle d'Hayami ou d'un modèle de translation simple.

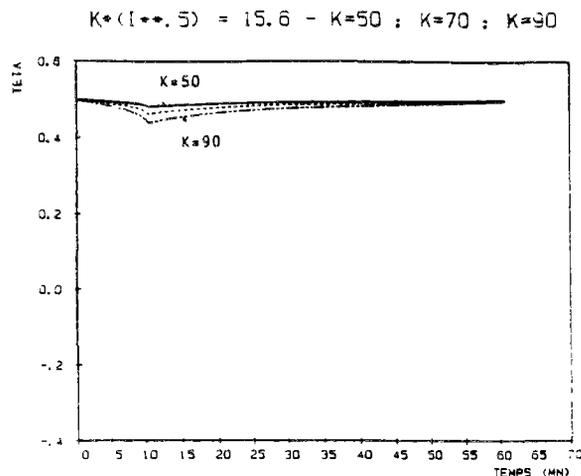


Figure 3.40

La figure 3.40 indique, dans la même logique que 3.39, les valeurs prises par le paramètre de pondération  $\theta$  (calculé par la relation (2.31)) pour  $\Delta x = 100\text{m}$  lors de la propagation d'un hydrogramme de type 1 pour les différents couples  $(K, I)$  testés précédemment.

Avec de telles conditions, pour un pas d'espace usuel  $\Delta x > 100\text{m}$ , le nombre de Reynolds local  $Cr$  reste très petit puisque  $Cr < 0.1$ . De plus, la condition de stabilité  $Co \leq 1$  implique, pour un pas d'espace de 100 mètres, le respect de la condition :  $\Delta t \leq 12\text{s}$ . Ces valeurs très faibles de  $\Delta t$  (de l'ordre de 12s) montrent qu'il est inutile d'utiliser un modèle Muskingum Modifié car le pas de temps  $\Delta t$  imposé (par la célérité très forte) est déjà largement assez petit pour respecter la condition (2.43) :  $Tc/\Delta t > n$  (cf. conclusions du paragraphe 3-2-6-1).

### 3-3-1-4 Conclusions

Dans le domaine où le nombre de Froude est supérieur à 2 et où  $R$  est inférieur à 0.05, le modèle VPD est instable comme nous en avons déjà expliqué les raisons dans le paragraphe 3-2-2-9.

Il est inutile de chercher à identifier la diffusion numérique des modèles cinématiques à la diffusion hydraulique des modèles diffusants. Celle-ci est d'effet négligeable et la solution de Saint-Venant est proche de la solution de la translation simple.

### 3-3-2 ÉCOULEMENTS FLUVIAUX, NOMBRE DE FROUDE > 0.5

Pour ce type d'écoulement, on est en général dans le cas où  $R$  est compris entre 0.5 et 0.05.

#### 3-3-2-1 La diffusion hydraulique en fonction de (K,I)

Nous avons tracé figure 3.41 les courbes  $D(y)$  pour un collecteur circulaire de diamètre 1500 mm et de débit capable  $Deb = 4.8 \text{ m}^3/\text{s}$ . Les courbes correspondent à différents couples  $(K,I)$  lorsque la valeur du produit  $K.I^{1/2}$  est fixée à 4.94.

Les trois couples  $(K,I)$  testés sont :

- trait pointillé mixte :  $K=90, I=3^\circ/\dots$
- trait pointillé simple :  $K=70, I=5^\circ/\dots$
- trait continu :  $K=50, I=9.8^\circ/\dots$

La figure 3.4 (cf. page 152) qui donne, pour ces 3 couples  $(K,I)$  les courbes  $F(y)$  correspondantes indique que pour ces conditions, l'écoulement est fluvial et que le nombre de Froude reste compris entre 0.5 et 1.

DIFFUSIONS POUR  $K*(I^{**}.5) = 4.94$

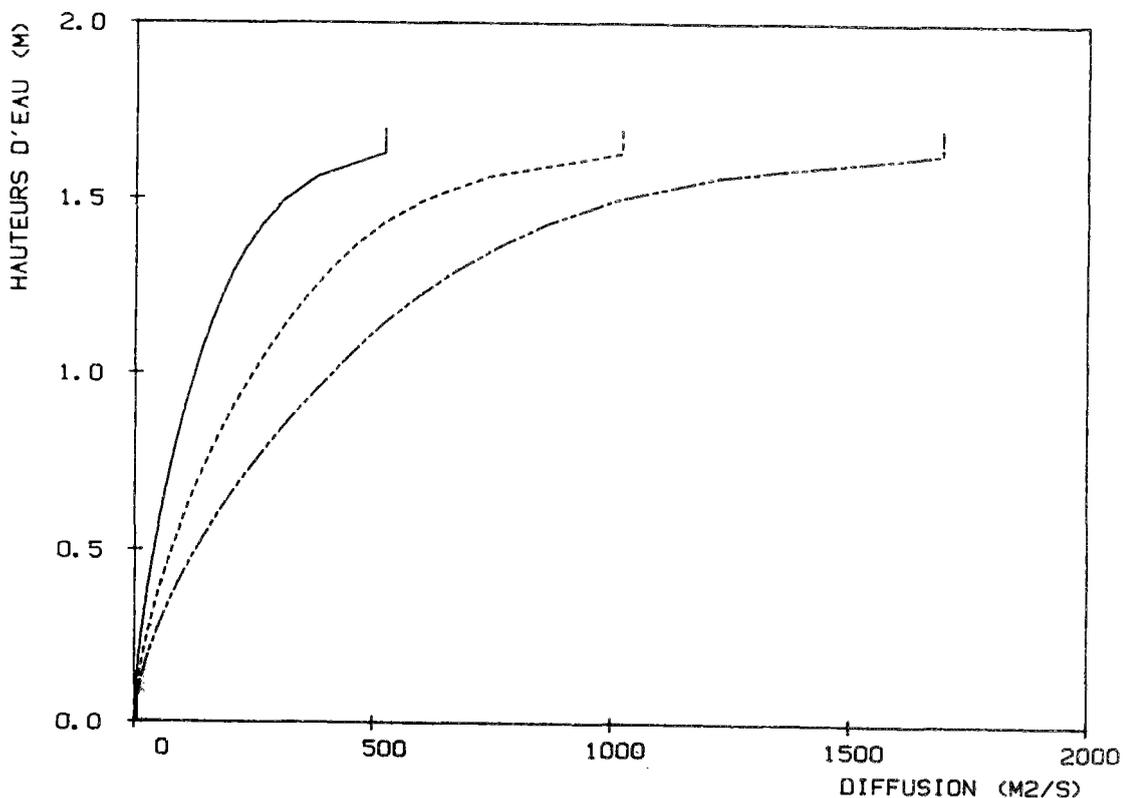


Figure 3.41

### 3-3-2-2 Les réponses de VPD

En fonction des couples  $(K, I)$ , la réponse du modèle VPD est différente comme le montre la figure 3.42. La longueur de simulation (égale à la longueur du collecteur) est de  $L = 1000$  mètres. Pour une longueur de simulation de  $L = 1000$  mètres, le paramètre  $L^+$  est proche de 1.

Le trait pointillé simple correspond à  $K = 50$  et  $I = 9.8^\circ/\dots$

Le trait pointillé mixte correspond à  $K = 70$  et  $I = 5^\circ/\dots$

Le trait continu correspond à  $K = 90$  et  $I = 3^\circ/\dots$

Il ne faut pas se laisser induire en erreur sur le comportement de VPD. En effet  $K = 90$  qui introduit le plus d'atténuation correspond à la pente la plus faible. C'est la pente et non pas le Strickler qui, à  $K \cdot I^{1/2}$  constant, influe le plus sur les réponses du modèle. On pouvait d'ailleurs le vérifier sur les courbes 3.39 et 3.41 qui montrent bien que plus  $K$  est grand (i.e plus  $I$  est petit) plus  $D$  est grand.

VPD ;  $K \cdot (I^{**}.5) = 4.9$  ;  $K=50$  -  $K=70$  -  $K=90$

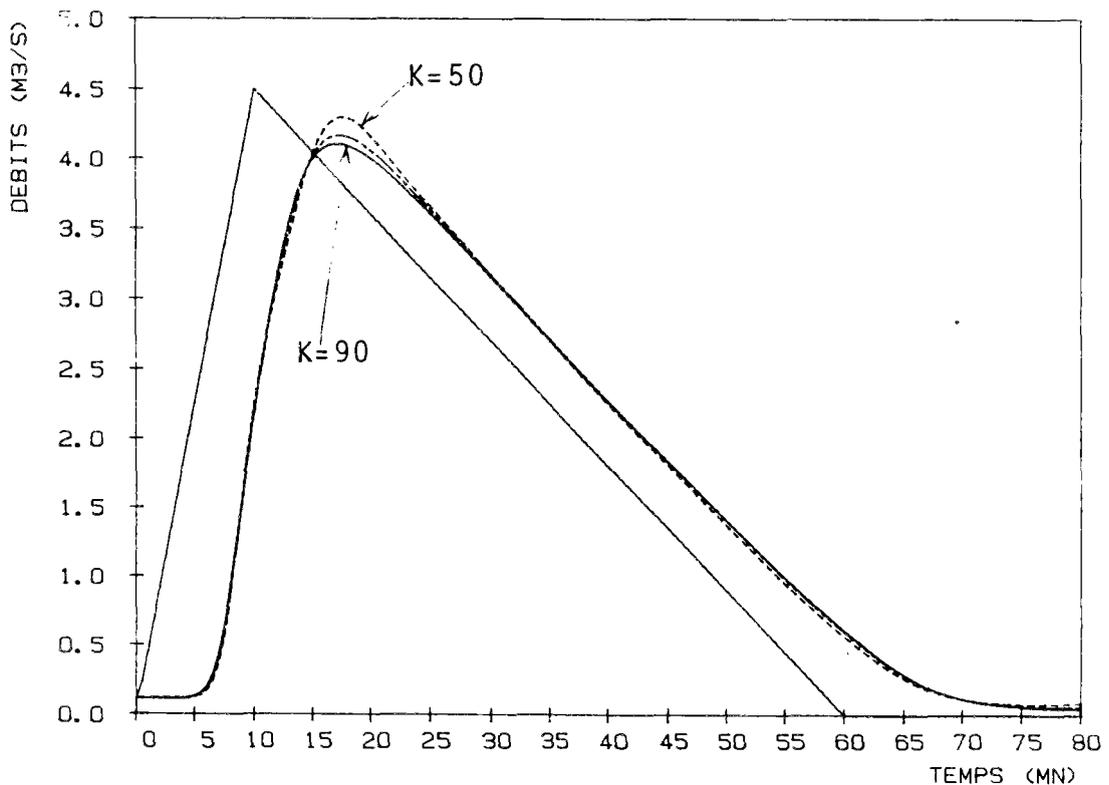


Figure 3.42

Le modèle de Saint-Venant est moins sensible que VPD aux variations de  $K$  et  $I$  (lorsque  $K.I^{1/2}$  est fixé). Néanmoins les résultats de Saint-Venant complet sont quasi-identiques aux résultats de VPD. Nous avons tracé figure 3.43 la réponse de Saint-Venant pour  $K = 70$  qui correspond très précisément à celle de VPD, pour la durée de propagation, l'atténuation des débits, et la forme complète de l'hydrogramme propagé.

De manière quantitative, pour un hydrogramme de type 1 et une longueur de 1000 mètres, les durées de propagation ainsi que les débits maximums aval (exprimés en  $m^3/s$ ) propagés sont les suivants :

Modèle	$K=50 ; I=1\%$	$K=70 ; I=5\text{‰}$	$K=90 ; I=3\text{‰}$
SV	QM = 4.13	QM = 4.15	QM = 4.19
VPD	QM = 4.07	QM = 4.16	QM = 4.25

Tableau 3.12

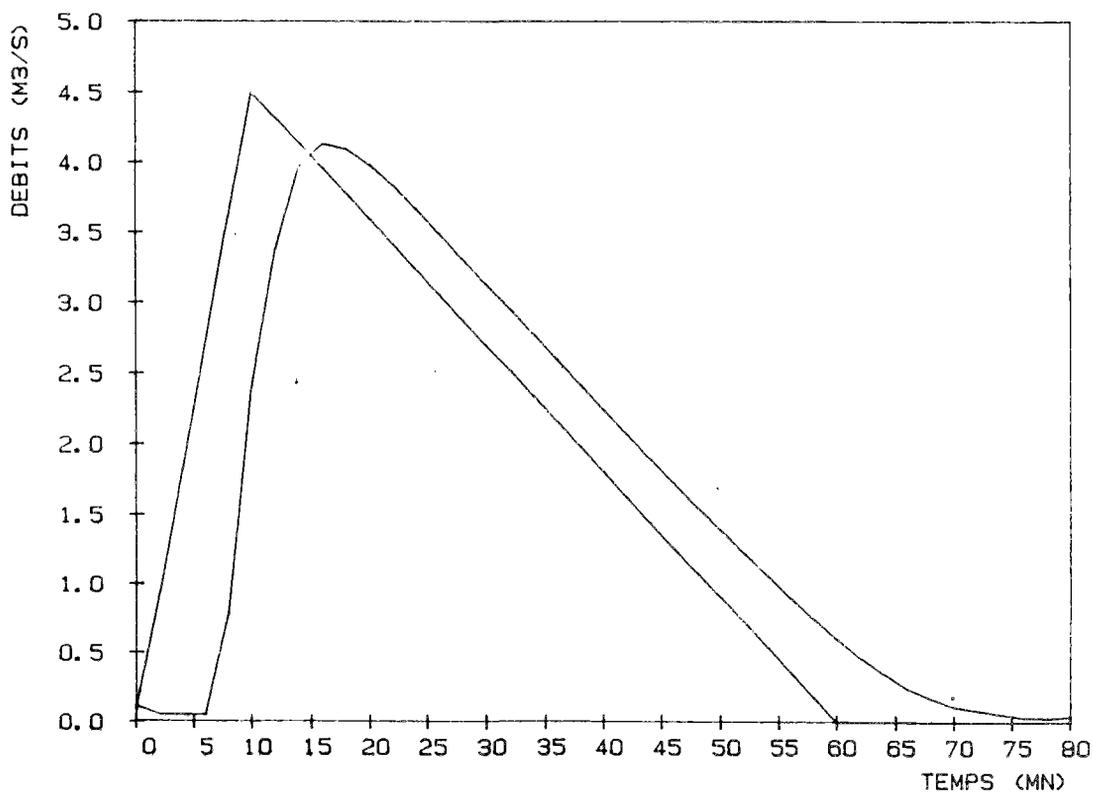


Figure 3.43

La figure 3.44 montre les différences sur le calcul des hauteurs à la distance  $L/2 = 500$  m entre la réponse de Saint-Venant (courbe en trait continu) et celle du modèle VPD (courbe en trait pointillé). Pour le modèle VPD, les hauteurs sont calculées à partir des débits de l'hydrogramme propagé par la relation de Manning-Strickler. Les courbes sont quasiment identiques. Pour les conditions étudiées, on est totalement dans les domaines de validité de l'équation de la crue diffusante. Les termes d'inertie (ou les ondes dynamiques) ont un effet négligeable sur la réponse du modèle complet de Saint-Venant. La hauteur est fonction univoque du débit.

#### HAUTEURS SANS INFLUENCE AVAL

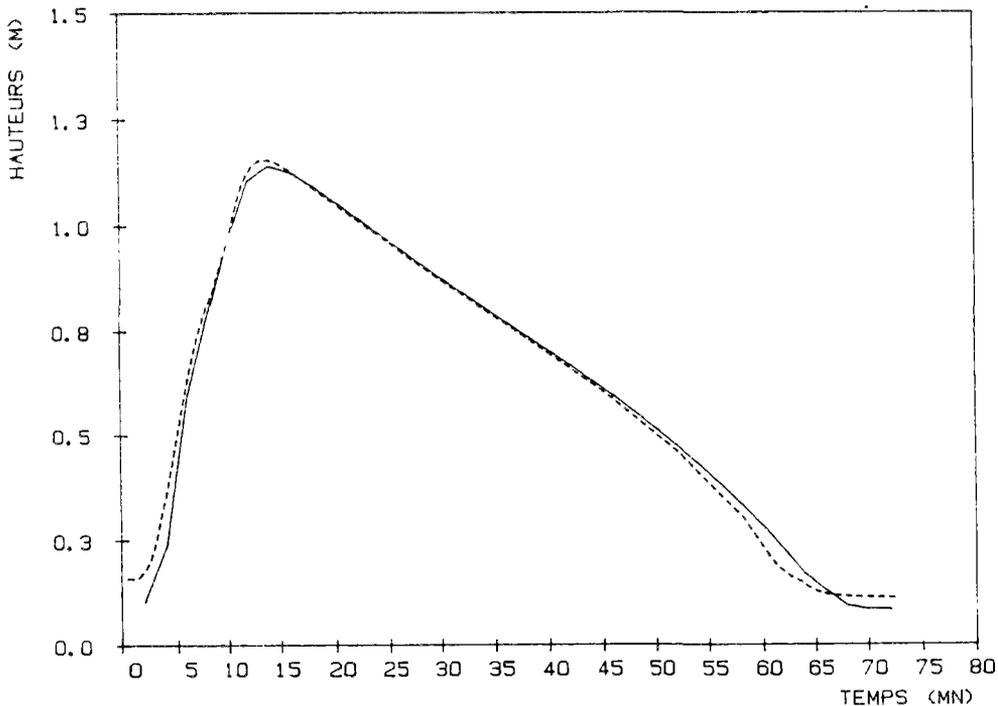


Figure 3.44

#### 3-3-2-3 Les modèles cinématiques

La figure 3.45 montre les courbes  $\theta(Q)$  ( $\theta$  étant calculé par (2.31) avec un pas d'espace de  $\Delta x = 250$  m) lors de la propagation d'un hydrogramme de type 1 pour différentes valeurs de  $K$  et de  $I$ ,  $K.I^{1/2}$  étant fixé à 4.9.

trait continu :  $K = 50$ ,  $Cr_{max} = 0.44$

trait pointillé simple :  $K = 70$ ,  $Cr_{max} = 0.85$

trait pointillé mixte :  $K = 90$ ,  $Cr_{max} = 1.44$

Pour la figure 3.46, le trait pointillé mixte correspond à  $K = 90$ , et le trait pointillé simple à  $K = 50$ . Les réponses du modèle Muskingum-Cunge sont identiques à celles de VPD comme le montre la figure 3.46.

$K*(I^{**.5}) = 4.96 - K=50 - K=70 - K=90$

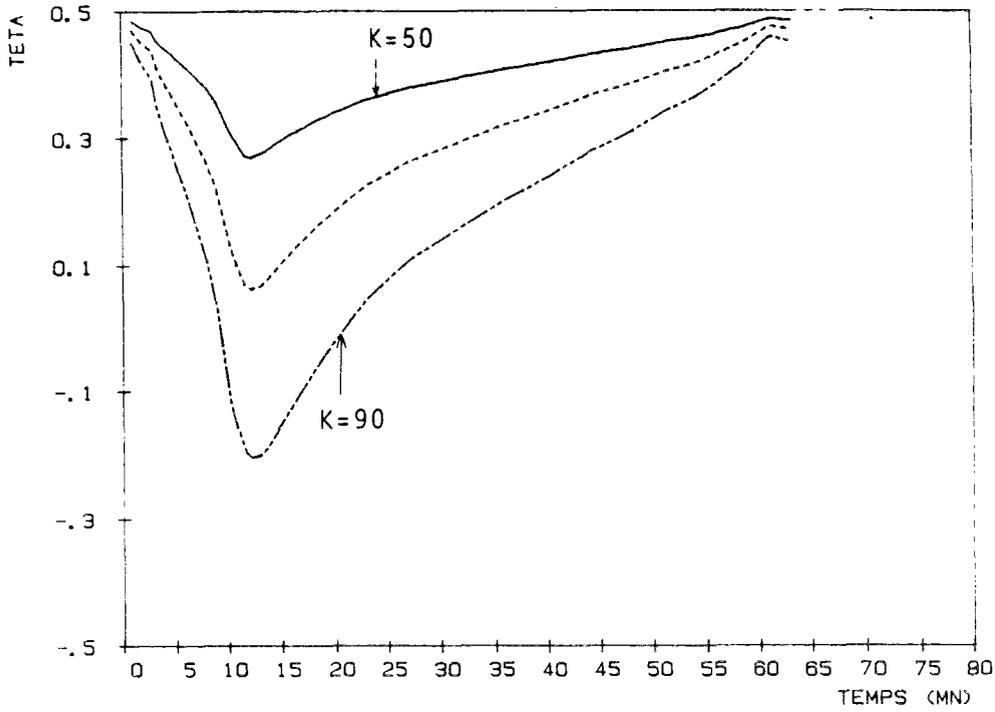


Figure 3.45

MUSMOD  $K=50 - K=70 - K=90 ; K*I (**.5) = 4.96$

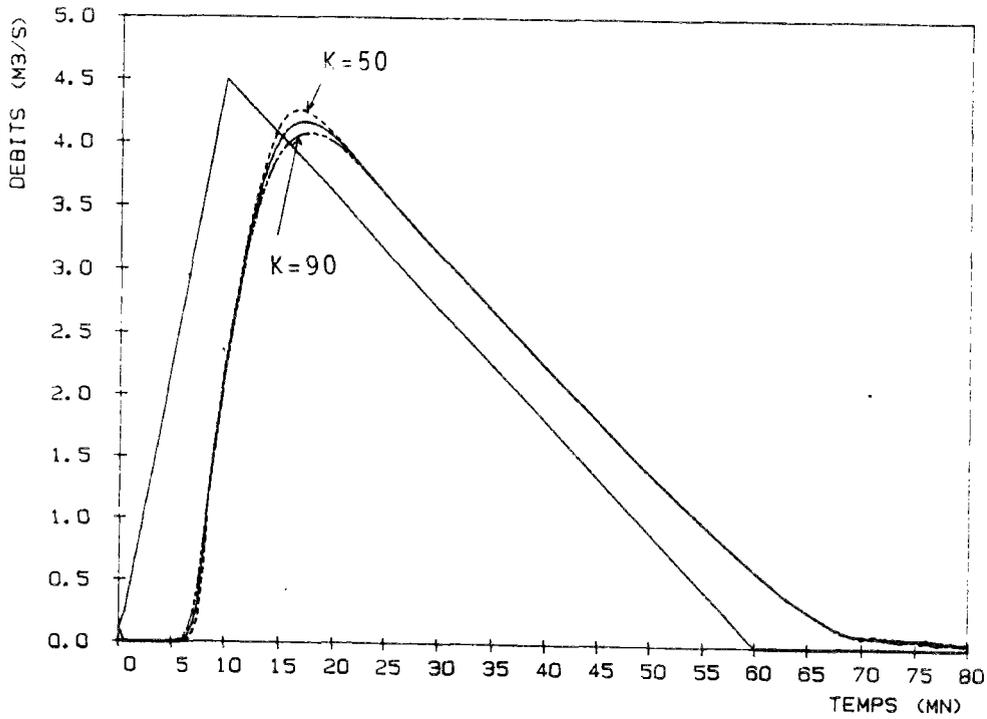


Figure 3.46

Avec les mêmes caractéristiques structurelles :  $K = 70$  ;  $I = 5^\circ/\dots$  , nous avons testé plusieurs hydrogrammes avec le modèle de Saint-Venant complet (SV), le modèle non-linéaire de crue diffusante (VPD) et le modèle Muskingum Modifié (MM).

Pour les hydrogrammes de type 1, 2 et 3, si QM représente le débit maximum de l'hydrogramme aval et dp la durée de propagation, on obtient :

Débit maximal amont (m <sup>3</sup> /s)	QM en (m <sup>3</sup> /s)			dp en (mn)		
	SV	VPD	MM	SV	VPD	MM
Q <sub>max</sub> = 4.5	4.16	4.18	4.16	7	7	8
Q <sub>max</sub> = 2.4	2.25	2.26	2.25	7	7	7
Q <sub>max</sub> = 1.2	1.12	1.14	1.12	8	7	8

Tableau 3.13

#### 3-3-2-4 Conclusions

Nous avons déjà conclu que le modèle de crue diffusante était équivalent à un modèle cinématique ou Muskingum qui utilise l'identification de la diffusion des termes du second ordre du schéma à la diffusion hydraulique D. Le champ d'application de cette équivalence est étendu aux écoulements dont le nombre local de Reynolds peut rester inférieur à 2 sans introduire de diffusion numérique des termes d'ordres supérieurs à 2 pour les modèles cinématiques. La diffusion numérique des modèles cinématiques et Muskingum est d'autant mieux contrôlée par les termes du second ordre que le nombre  $\Delta x^+ = C.Tc/\Delta x$  est petit.

Nous venons de plus de vérifier la validité des modèles simplifiés par rapport à un modèle complet pour des conditions entrant dans le domaine où  $0.05 < R < 0.5$  défini au paragraphe 3-2-6. Les réponses du modèle complet de Saint-Venant sont quasi-identiques à celles des modèles simplifiés. Quelle que soit la valeur du nombre adimensionnel  $L^+$ , ce résultat reste vrai.

Dans ce domaine où tous les modèles sont équivalents, les influences aval sont négligeables (voir la définition au 3-3-4). Quelle que soit la longueur de simulation, les modèles restent équivalents et il n'est pas utile de limiter la valeur du nombre  $L^+$ .

Le critère expérimental qui garantissait une bonne précision des modèles cinématiques pour des nombres  $N_c$  supérieurs à 10 n'est donc pas applicable avec les données que nous avons choisi pour la figure 3.5. Nous ne pouvons donc pas tenir compte du critère  $N_c > 10$ . Les conditions testées correspondent au domaine d'application des modèles diffusants (crue diffusante ou cinématique ou Muskingum), alors que le nombre  $N_c$  (calculé avec nos hypothèses était voisin de 3 (donc inférieur à 10). Une valeur de  $R$  comprise entre 0.5 et 0.05 pour un nombre de Froude entre 0.5 et 1 garantit la validité des modèles cinématiques diffusants) et des modèles de crue diffusante.

### 3-3-3 PENTES FAIBLES, NOMBRE DE FROUDE INFÉRIEUR A 0.5

Pour de telles conditions,  $R$  est souvent supérieur à 0.5.

#### 3-3-3-1 La diffusion hydraulique en fonction de (K,I)

Nous avons tracé figure 3.47 les courbes  $D(y)$  pour un collecteur circulaire de diamètre 2300 mm et de débit capable  $Deb = 4.8 \text{ m}^3/\text{s}$ . Les courbes correspondent à différents couples  $(K,I)$  lorsque la valeur du produit  $K.I'^2$  est fixée à 1.56.

Les trois couples  $(K,I)$  testés sont :

- trait continu :  $K = 50, I = 9.8^\circ/\dots$
- trait pointillé simple :  $K = 70, I = 5^\circ/\dots$
- trait pointillé mixte :  $K = 90, I = 3^\circ/\dots$

La figure 3.4 qui donne, pour ces 3 couples  $(K,I)$  les courbes  $F(y)$  correspondantes indiquent que pour ces conditions, l'écoulement est fluvial et que le nombre de Froude reste inférieur à 0.5.

DIFFUSIONS POUR  $K * (I^{**}.5) = 1.56$

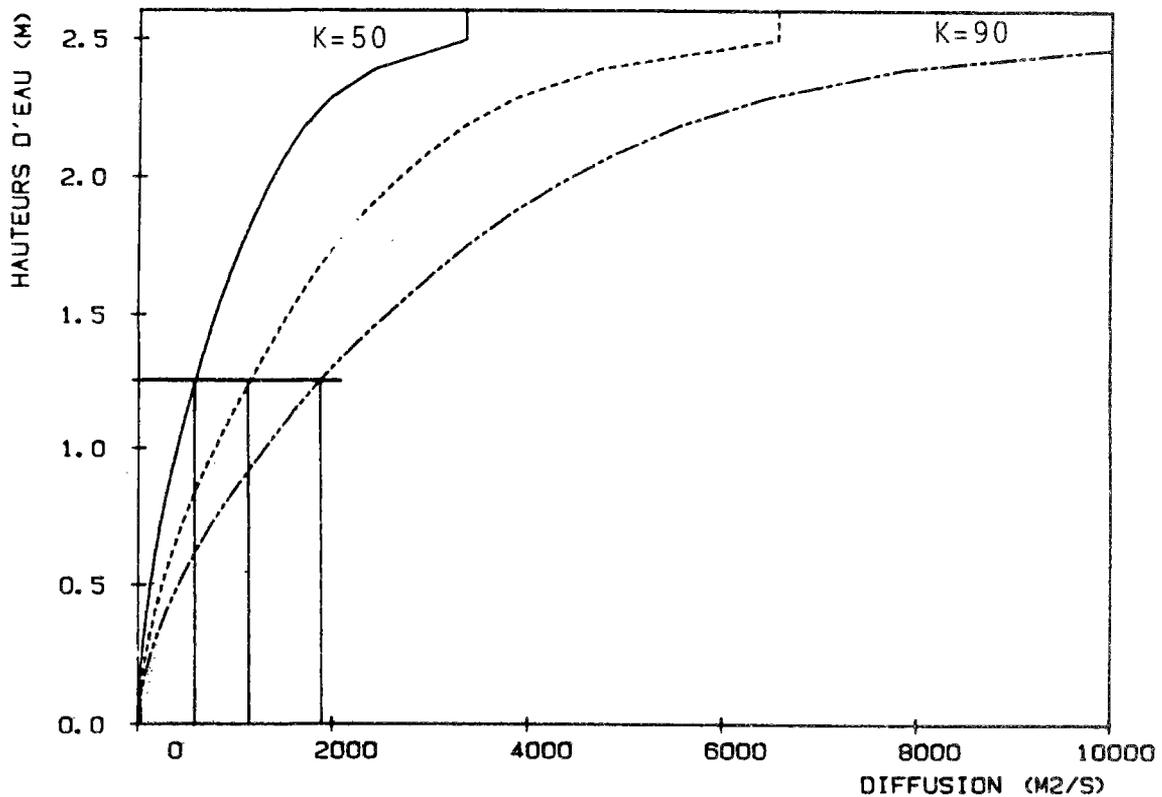


Figure 3.47

### 3-3-3-2 Non-applicabilité des modèles cinématiques et Muskingum

Nous avons vu en conclusion du chapitre 3-2 que la limite de validité d'un modèle de type cinématique ou Muskingum est déterminée par la condition  $Cr \leq 2$ .

Pour des valeurs de  $D$  aussi fortes que celles de la figure 3.47, le nombre de Reynolds local ne peut être inférieur à 2 que si  $\Delta x$  est très grand.

Néanmoins, le choix d'un grand  $\Delta x$  (cf. paragraphe 3-2-2-7) rend la diffusion numérique des termes d'ordres supérieurs à 2 non négligeable. Pour les conditions de la figure 3.47 avec un hydrogramme de type 1,  $\Delta x \leq 300$  m (correspondant à  $\Delta x^+ = 0.5$ ) est la condition nécessaire pour que la diffusion des termes d'ordre supérieur à 2 soit négligeable.

La figure 3.48 montre les valeurs (correspondants aux valeurs de  $D$  de la figure 3.47) que prend le paramètre  $\theta$  pour un pas d'espace  $\Delta x = 250$  m. Le trait continu est pour  $K=50$  et  $I=9.8^\circ/\dots$ , le trait pointillé serré est pour  $K=70$  et  $I=5^\circ/\dots$ , et le trait pointillé mixte est pour  $K=90$  et  $I=3^\circ/\dots$ .

On constate que  $\theta$  prend des valeurs inférieures à  $-0.5$  ce qui entraîne qu'il est impossible d'utiliser l'identification de la diffusion numérique des termes du second ordre du schéma avec la diffusion hydraulique  $D$ . Nous en tirons la conclusion (cf. aussi §3-2-6) que pour de telles conditions, les modèles cinématiques et Muskingum ne sont pas applicables.

$$K * (I * .5) = 1.56 \quad - \quad K=50 \quad - \quad K=70 \quad - \quad K=90$$

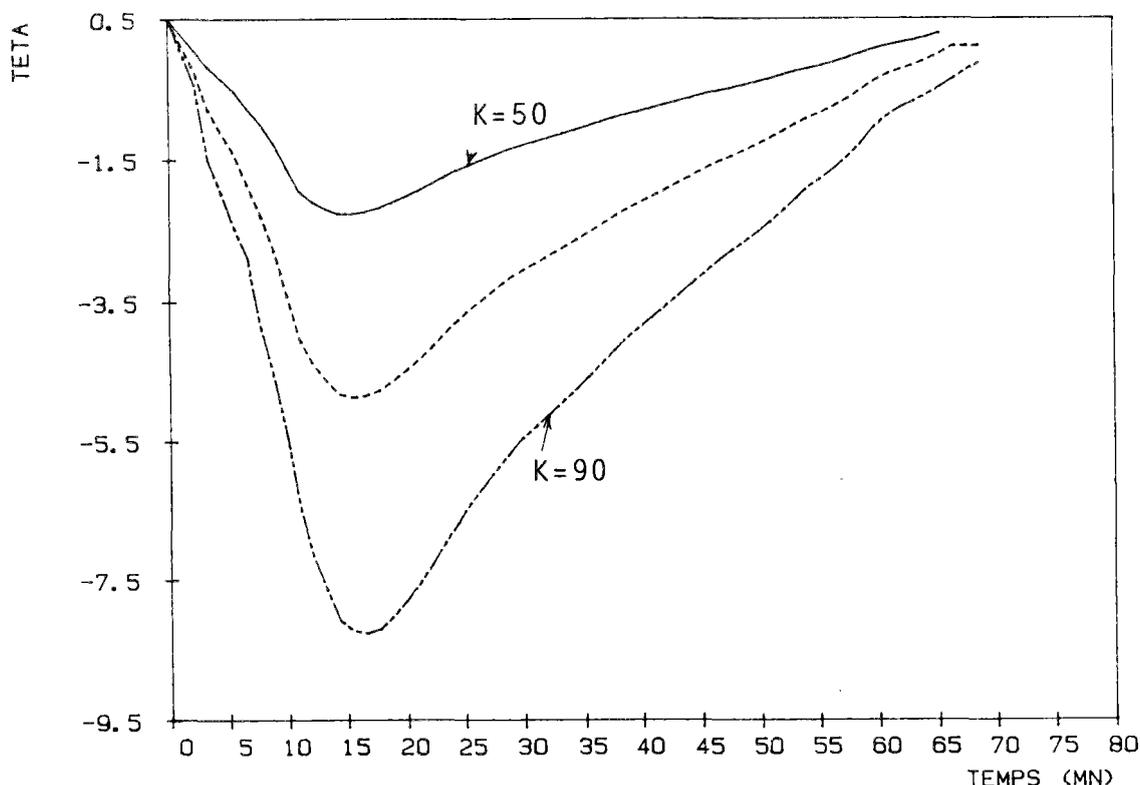


Figure 3.48

### 3-3-3-3 Les réponses d'Hayami et du modèle VPD

Pour les valeurs de la figure 3.47 du paramètre D, les valeurs de Z sont très inférieures à 1 lorsque la longueur est L = 1000 mètres.

Avec une célérité  $C_m = C(Q_{max})$  et une diffusion  $D_m = D(Q_{max})$ , on obtient les réponses suivantes :

Hayami	K=50 ; I=1°/..	K=70 ; I=5°/...	K=90 ; I=3°/...
QM m <sup>3</sup> /s	3.06	3.12	3.26
dp mn	12	9.5	7

Tableau 3.14

Contrairement aux cas précédents des paragraphes 3-3-1 et 3-3-2, l'atténuation du débit maximal est d'autant plus grande que I est grand (et que K est faible). La figure 3.49 montre les hydrogrammes complets correspondants : le trait continu est pour I=3°/... et K=90, le trait pointillé mixte pour I=5°/... et K=70, et le trait pointillé simple pour I=9.8°/... et K=50.

HAYAMI ;  $K \cdot (I^{**}.5) = 1.56$  ; K=50 - K=70 - K=90

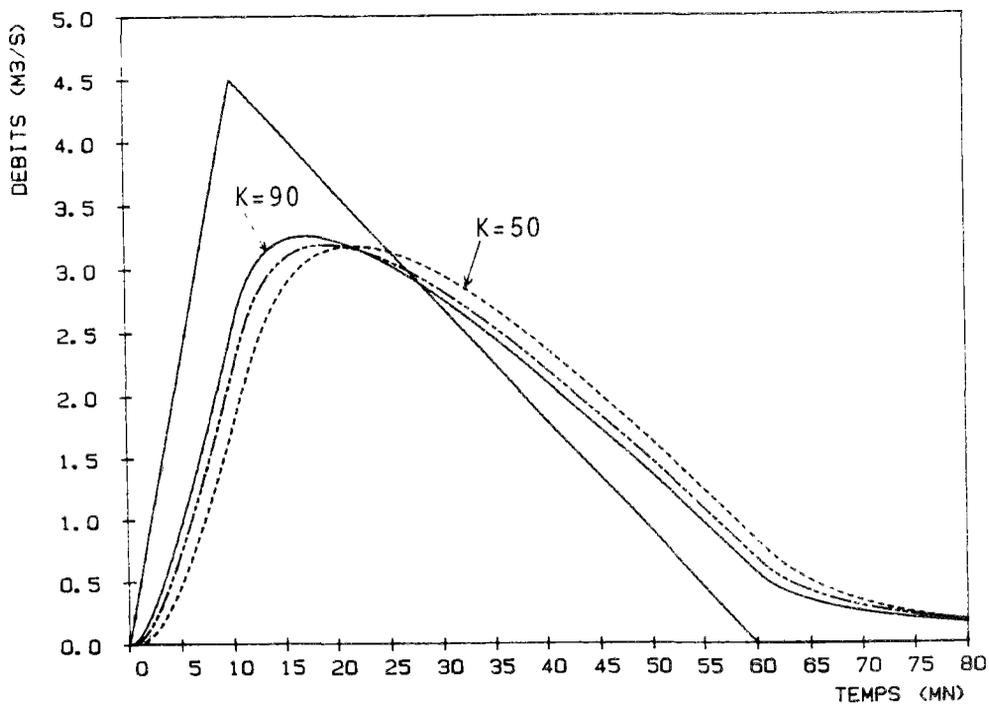


Figure 3.49

On est dans la zone de changement de comportement de la fonction  $h_q$  du noyau d'Hayami (cf. § 3-2-5-4).

C'est donc surtout la durée de propagation qui est sensible aux variations de  $I$  (et  $K$ ). L'atténuation des débits ne varie que faiblement.

La figure 3.50 montre pour les mêmes conditions, la réponse du modèle VPD. Comme pour la figure précédente, le trait continu est pour  $I=3^\circ/\dots$  et  $K=90$ , le trait pointillé mixte pour  $I=5^\circ/\dots$  et  $K=70$ , et le trait pointillé simple pour  $I=9.8^\circ/\dots$  et  $K=50$ . Le modèle VPD réagit dans le même sens que le modèle d'Hayami, c'est-à-dire en sens contraire à ce qu'on aurait pu prévoir. Plus le paramètre  $D$  devient grand (i.e. plus la pente est faible), moins la durée de propagation et l'atténuation sont importantes. La dispersion entre les hydrogrammes propagés est plus importante que celle des solutions d'Hayami.

Avec ces conditions, la figure 3.47 montre que le paramètre  $D$  varie très fortement puisque les valeurs maximales atteignent  $5000 \text{ m}^2/\text{s}$ . De plus, dans ce cas, le changement de comportement intervient en cours de la crue puisque pour de faibles valeurs de débit en début de crue,  $D$  est petit et le paramètre  $Z$  reste supérieur à 1. Ainsi, le choix d'un paramètre moyen  $D_m$  nécessairement très grand entraîne des différences importantes entre les réponses du modèle linéaire et celle du modèle non-linéaire. On verra, par ailleurs au paragraphe 3-3-3-9 l'influence de la condition aval de VPD qui expliquent les différences de comportement entre VPD et Hayami.

VPD ;  $K \cdot (I^{**}.5) = 1.56$  ;  $K=50$  -  $K=70$  -  $K=90$

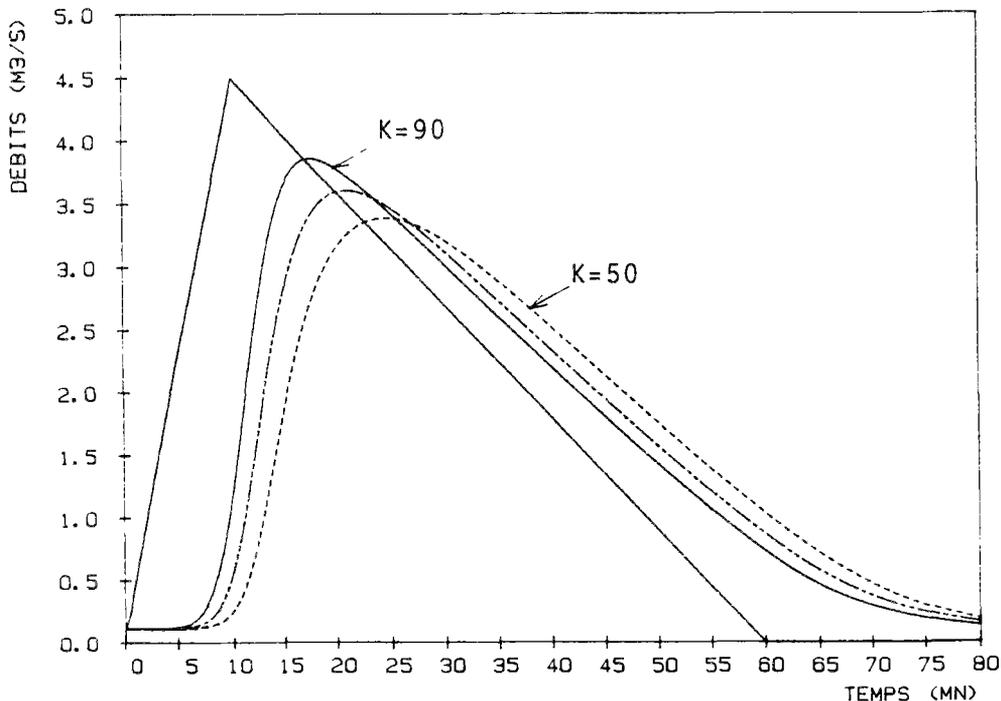


Figure 3.50

### 3-3-3-4 Comparaison avec le modèle complet de Saint-Venant

Sur les réponses du modèle complet, l'atténuation des débits est d'autant plus importante que la pente est faible.

Le modèle VPD réagit donc de manière inverse au modèle complet. Nous avons tracé sur la figure 3.51, les réponses du modèle complet de Saint-Venant SV pour les conditions des figures 3.49 et 3.50. Le trait continu est pour  $I=3^\circ/\dots$  et  $K=90$ , le trait pointillé mixte pour  $I=5^\circ/\dots$  et  $K=70$ , et le trait pointillé simple pour  $I=9.8^\circ/\dots$  et  $K=50$ .

SV ;  $K \cdot I (**.5) = 1.56$  ;  $K=50$  -  $K=70$  -  $K=90$

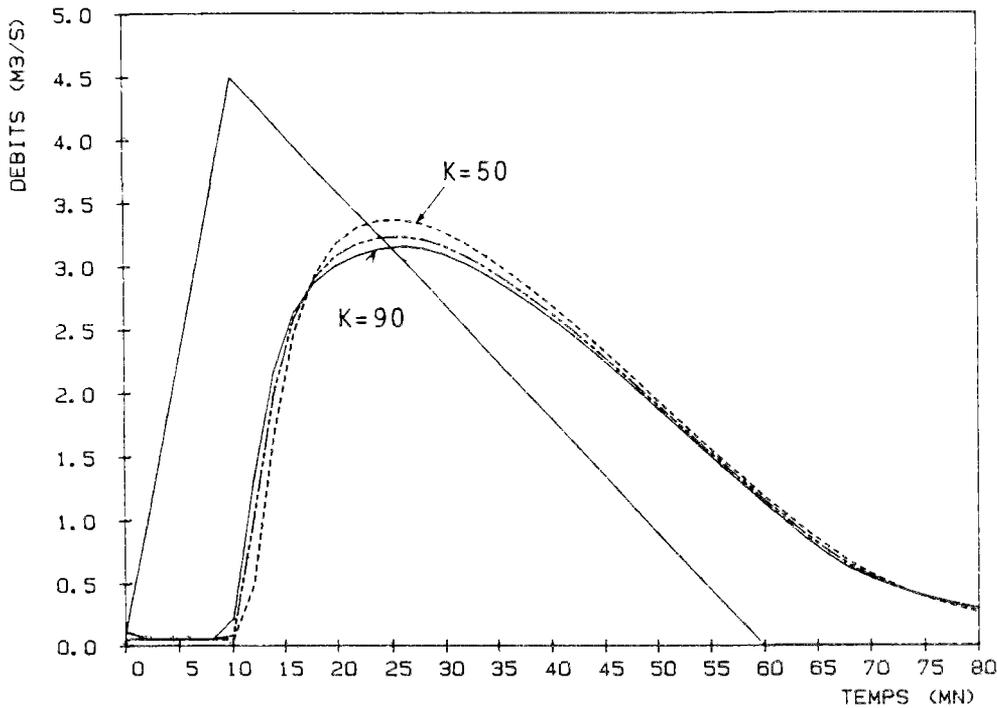


Figure 3.51

On est donc hors du domaine de validité du modèle de crue diffusante, et ceci d'autant plus que le produit  $K \cdot I^{1/2}$  est faible.

Néanmoins, pour le cas où  $K = 50$  et  $I = 9.8^\circ/\dots$ , les réponses des modèles VPD et SV sont très proches. Les courbes en trait pointillé simple sur les figures 3.50 et 3.51 sont en effet quasiment identiques.

Pour le débit maximal et l'atténuation, on obtient en effet :

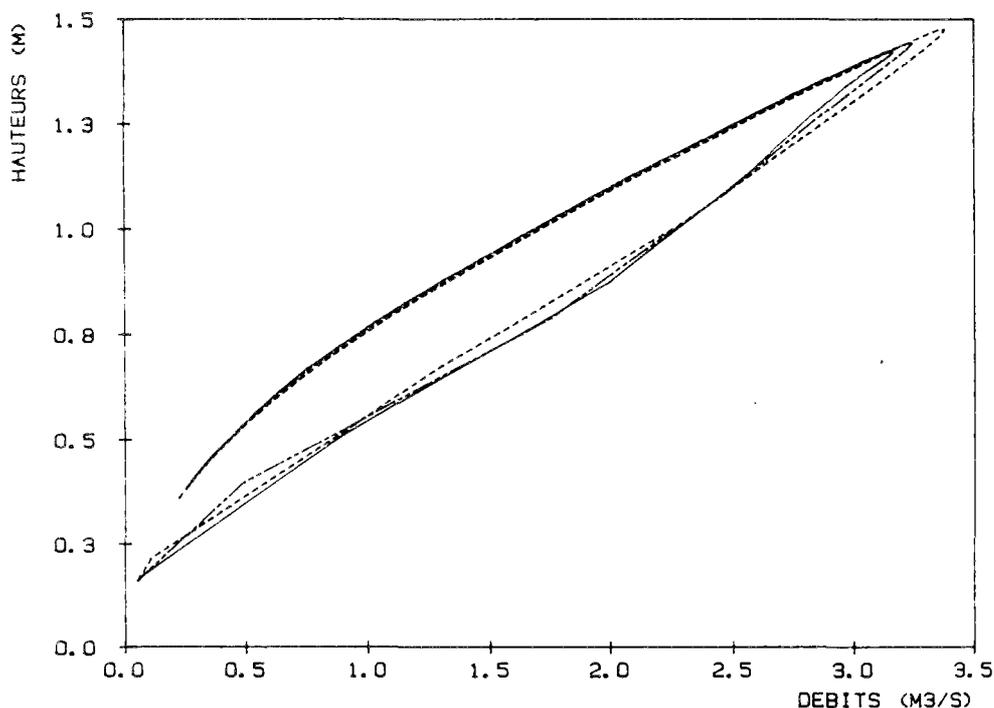
réponse de VPD :  $Q_M = 3.38 \text{ m}^3/\text{s}$  et  $dp = 15 \text{ mn}$

réponse de SV :  $Q_M = 3.365 \text{ m}^3/\text{s}$  et  $dp = 16 \text{ mn}$

Partant des conditions  $K=50$  et  $I=9.8^\circ/\dots$ , la diminution de la pente (associée à l'augmentation du Strickler) entraîne un aplatissement des hydrogrammes pour le modèle complet de Saint-Venant (cf. figure 3.51) alors qu'elle entraîne à l'opposé un raidissement des hydrogrammes sur le modèle VPD. Ainsi, avec la valeur  $K.I^{1/2} = 1.56$ , lorsque  $K=90$ , les réponses du modèle complet et de VPD sont très différentes.

La figure 3.50 montre que le modèle VPD dépend fortement des valeurs particulières des paramètres  $K$  et  $I$  lorsque  $K.I^{1/2}$  est fixé. En revanche, le modèle de Saint-Venant ne dépend que très légèrement des valeurs de  $K$  et  $I$  lorsque  $K.I^{1/2}$  est fixé (cf. figure 3.51). La figure 3.52 montre pour le modèle complet de Saint-Venant, l'évolution des hauteurs d'eau au cours de la crue correspondant aux hydrogrammes de la figure 3.51. Ces hauteurs sont calculées par le modèle complet de Saint-Venant à 900 mètres de l'amont près de l'aval du tronçon. La figure 3.52 confirme que les hauteurs sont (comme les hydrogrammes) quasiment indépendantes de  $K$  et de  $I$  lorsque  $K.I^{1/2}$  est fixé.

$$K \cdot (I^{0.5}) = 1.56 - K = 50 ; 70 ; 90$$



*Figure 3.52*

Les différences entre les réponses des deux modèles sont donc bien plus causées par une modification sensible du comportement de VPD (en fonction de  $K$  et de  $I$ ) que par la variation des réponses de Saint-Venant (puisque celles-ci restent toujours à peu près identiques).

### 3-3-3-5 Extension du domaine de validité de la crue diffusante

Reprenons les conditions du paragraphe précédent.

#### **Frottement ou inertie ?**

Pour  $K = 50$  et  $I = 9.8^\circ/\dots$ , les frottements jouent le rôle dominant dans la propagation des hydrogrammes. Il est donc naturel que le comportement de VPD soit proche de celui de Saint-Venant pour  $K = 50$  puisque les phénomènes inertiels sont rapidement amortis par le frottement important. La majeure partie du volume de la crue est bien propagée avec une célérité  $C$  et une diffusion  $D$ . On est dans le champ d'application des modèles à frottements prépondérants et inertie négligeable, c'est-à-dire dans le domaine de validité de la crue diffusante.

Pour  $K = 90$  et  $I = 3^\circ/\dots$ , les frottements sont faibles et les termes d'inertie ne sont plus négligeables devant le terme de pente  $g.I$  qui reste très faible. C'est pourquoi, en négligeant les termes inertiels, l'atténuation mesurée sur la réponse du modèle VPD reste faible. (cf. figure 3.50).

Néanmoins, pour un tronçon dont le produit  $K.I^{1/2}$  est fixé, que l'inertie soit prépondérante sur le frottement ou le frottement prépondérant sur l'inertie ne change quasiment pas le comportement du modèle complet de Saint-Venant comme nous l'avons constaté sur les figures 3.51 et 3.52.

#### **Tronçons hydrauliquement équivalents**

Introduisons la définition suivante : deux tronçons seront dits hydrauliquement équivalents s'ils ont même section, même longueur et même débit capable (i.e. même valeur du produit  $K.I^{1/2}$ ). Deux tronçons hydrauliquement équivalents ont le même comportement en régime permanent puisque la loi hauteur-débit de Manning-Strickler :  $Q = K.I^{1/2}Rh^{2/3}$  ne fait intervenir que le produit  $K.I^{1/2}$  et la forme de la section par l'intermédiaire du rayon hydraulique  $Rh$ . A même hauteur ( $y$ ), même rayon hydraulique  $Rh$  et même débit  $Q$ .

#### **Tronçons hydrauliquement équivalents en régime transitoire**

Nous venons de voir qu'en régime transitoire, l'équivalence hydraulique est conservée.

La fonction de transfert constituée par le système de Saint-Venant se comporte de la même manière pour 2 tronçons hydrauliquement équivalents. Pour un signal d'entrée (un hydrogramme amont), le signal de sortie (hydrogramme aval) est modifié de manière quasiment identique quel que soit le tronçon "hydrauliquement équivalent" utilisé.

En d'autres termes, quel que soit le tronçon équivalent utilisé, la somme du travail des forces d'inertie  $W_i$  et du travail des forces de gravité, frottement et pression  $W_{gf}$  est constante.

Les réponses de VPD mettent en lumière le seul travail des forces de gravité, de frottement et de pression ( $W_{gf}$ ), puisque les forces d'inertie sont négligées. Le fait que les réponses de VPD soient très sensibles aux valeurs de  $K$  et  $I$  confirme que le travail des forces de gravité, frottement et pression dépend effectivement fortement de  $K$  et  $I$ , même lorsque  $K.I^{1/2}$  est fixé.

Pour plusieurs tronçons hydrauliquement équivalents,  $W_i + W_{gf}$  ne varie quasiment pas. En revanche,  $W_{gf}$  varie de manière importante selon les valeurs de  $K$  et  $I$  mais on peut choisir un tronçon hydrauliquement équivalent tel que  $W_{gf} \gg W_i$ , c'est-à-dire tel que la réponse de VPD soit quasi-identique à celle de Saint-Venant ( $W_i + W_{gf} \approx W_{gf}$ )

Ce résultat remarquable n'est valable que grâce au fait que la fonction de transfert que constitue le système des équations complètes de Saint-Venant se comporte de manière quasi-identique, quel que soit le tronçon équivalent utilisé. Lorsque le travail des forces de gravité, de frottement et de pression devient négligeable, il est remarquable qu'il soit "compensé" par le travail des forces d'inertie. Ce résultat ne peut cependant pas être étendu aux écoulements où la condition aval n'est pas libre (cf. paragraphe 3-3-4)

#### Nouvelle limite de validité de la crue diffusante

Dans l'exemple traité précédemment, les valeurs minimales du paramètre  $Z$  étaient :

Pour $K = 50$ et $I = 9.8^\circ/\dots$	: $Z_{min} = 1280/(4*1317) = 0.25$
Pour $K = 70$ et $I = 5^\circ/\dots$	: $Z_{min} = 1280/(4*2581) = 0.12$
Pour $K = 90$ et $I = 3^\circ/\dots$	: $Z_{min} = 1280/(4*4273) = 0.075$

$Z = 0.25$  est donc dans ce cas, la limite inférieure d'applicabilité du modèle de crue diffusante non-linéaire.

Néanmoins, compte tenu des remarques sur les tronçons hydrauliquement équivalents, une utilisation d'un modèle non-linéaire de crue diffusante est possible même pour des pentes faibles où le paramètre  $Z_{min}$  est inférieur à 0.25.

Pour un tronçon dont le paramètre  $Z_{min}$  est inférieur à 0.25, on calcule le produit  $K.I^{1/2}$  et on choisit un coefficient de Strickler  $K$  ainsi qu'une pente  $I$ , tels que  $K.I^{1/2}$  soit conservé et tels que le paramètre  $Z_{min}$  prenne une valeur approximativement égale à 0.25. On transforme alors le tronçon sur lequel on calcule la propagation en un tronçon hydrauliquement équivalent, de pente plus raide et de frottements plus importants, sur lequel VPD donne une réponse proche de Saint-Venant.  $Z > 0.25$  signifie que c'est le travail des forces de frottement et de gravité qui domine sur celui des forces inertielles.

Ainsi, si on calcule la propagation des hydrogrammes à l'aide du modèle VPD sur le nouveau tronçon hydrauliquement équivalent, on obtiendra une réponse proche de celle du modèle de Saint-Venant avec ce même tronçon. Nous savons par ailleurs que les différences entre les réponses du modèle de Saint-Venant avec le tronçon hydrauliquement équivalent et le tronçon réel sont faibles. Ceci permet donc d'utiliser VPD même pour des cas où la pente, le frottement et la longueur de la canalisation sont trop faibles pour que le paramètre  $Z$  soit supérieur à 0.25.

3-3-3-6 Z comme critère de validité du modèle VPD

La figure 3.50 montrait le comportement de VPD, à  $K.I^{1/2}$  fixé, pour trois couples (K,I). La variabilité des résultats du modèle VPD est grande en fonction de K et I. Partant des résultats obtenus, nous avons avancé que 0.25 correspondait à un seuil minimum acceptable du paramètre Z pour que les simulations de VPD puissent être considérées comme équivalentes à celles du modèle complet de Saint-Venant. Nous avons tracé figure 3.53, 5 réponses de VPD correspondant à 5 tronçons hydrauliquement équivalents tels que le produit  $K.I^{1/2}$  reste constamment fixé à 1.56. Les courbes en trait continu, trait pontillé mixte et trait pointillé fin sont les mêmes que pour la figure 3.50. La courbe en trait pointillé lâche correspond à  $K = 30$  et  $I = 2.7^\circ/\dots$  et la courbe en trait continu espacé correspond à  $K = 20$  et  $I = 6.12^\circ/\dots$ .

On vérifie bien que  $K = 50$  (la courbe en trait pointillé serré) qui correspond à  $Z_{min} = 0.25$  correspond aussi au changement de comportement du modèle VPD. Ainsi, pour des pentes plus fortes que  $9.8^\circ/\dots$  et des coefficients de Strickler K inférieurs à 50, on est dans le domaine où la diminution de la pente entraîne une augmentation de l'atténuation des débits, c'est-à-dire dans le domaine de validité de la crue diffusante. C'est aux alentours de ce changement de comportement qu'on obtiendra la meilleure similitude entre la réponse de Saint-Venant et celle de VPD.

VPD ;  $K \cdot (I^{0.5}) = 1.56$  ;  $K=90$  ;  $70$  ;  $50$  ;  $30$  ;  $20$

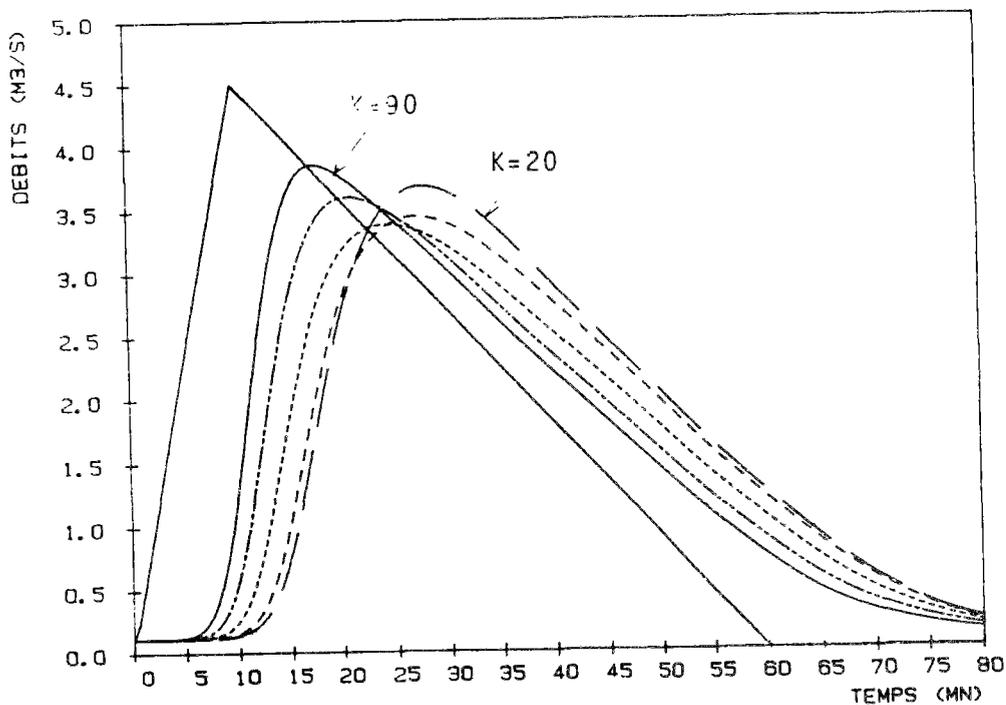


Figure 3.53

Pour  $Z$  supérieur à 0.25, le comportement de VPD est identique à celui du modèle complet mais l'atténuation des hydrogrammes diminue beaucoup plus rapidement lorsque la pente augmente pour le modèle VPD que pour le modèle de Saint-Venant. On avait d'ailleurs déjà vérifié ce résultat dans le paragraphe 3-3-2-2 pour des conditions d'utilisation où  $Z$  restait plus grand que 1.

On peut donc se fixer le critère suivant : lorsque le paramètre  $Z$  est inférieur à 0.25, on transforme le tronçon réel en un tronçon hydrauliquement équivalent tel que  $Z_{\min}$  soit voisin de 0.25. Si  $Z_{\min}$  est supérieur à 0.25, on peut utiliser le tronçon réel pour la propagation des hydrogrammes avec VPD sans utiliser de tronçon hydrauliquement équivalent.

Un critère de validité du modèle de crue diffusante non-linéaire que nous avons mis en lumière est donc  $Z > 0.25$ , lorsqu'il n'y a pas d'influence aval autre que celle créée naturellement par l'écoulement. On testera dans le paragraphe 3-3-4, différentes conditions limites aval et nous en déduirons les cas où ce résultat reste exact.

En reprenant l'expression de  $Z$  en fonction de  $C$ ,  $D$ , et  $L$ ,  $Z > 0.25$  donne simplement le critère :

$$\frac{CL}{D} > 1 \quad \text{équivalent au critère} \quad R < 2$$

### 3-3-3-7 Influence de la longueur

Si pour des faibles pentes où le nombre de Froude est très inférieur 1, la valeur du paramètre  $Z$  est le critère déterminant pour établir la validité du modèle non-linéaire de crue diffusante, on doit vérifier l'importance de la longueur  $L$  des tronçons.

Nous avons tracé sur la figure 3.54a, les réponses de VPD avec les mêmes conditions que celles de la figure 3.50, les mêmes conventions de trait, pour une longueur de  $L = 3000$  m.

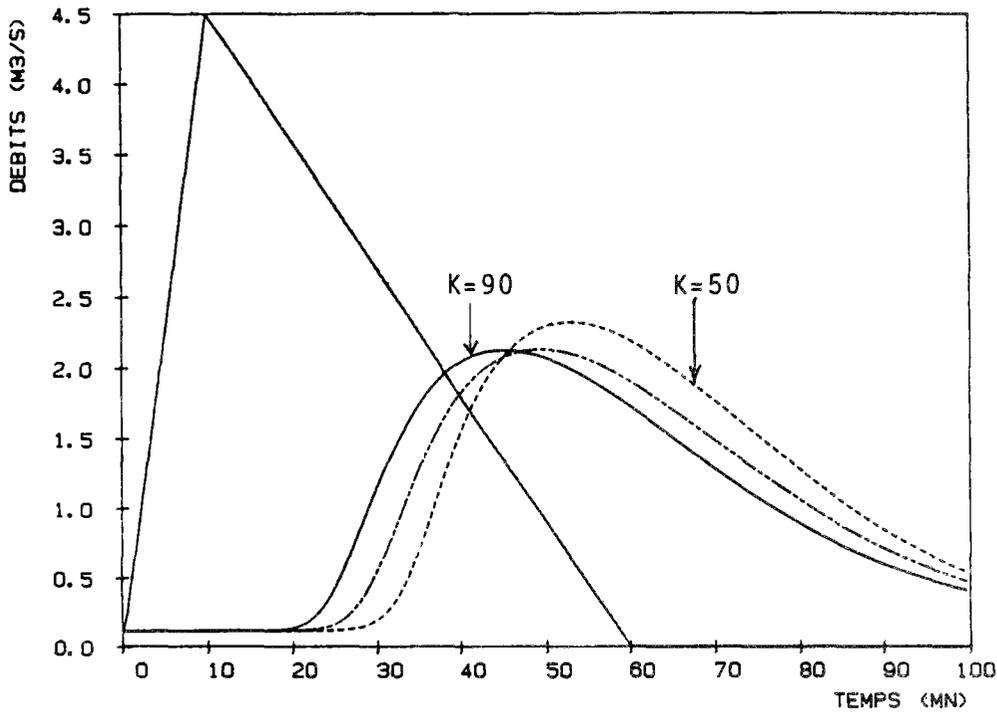
Dans ce cas, les paramètres  $Z_{\min}$  sont trois fois plus grands que les paramètres  $Z_{\min}$  calculés avec la longueur  $L = 1000$  m.

On obtient donc :

$K = 50$ et $I = 9.8^\circ/\dots$	$Z_{\min} = 0.75$
$K = 70$ et $I = 5^\circ/\dots$	$Z_{\min} = 0.36$
$K = 90$ et $I = 3^\circ/\dots$	$Z_{\min} = 0.225$

On vérifie bien que, contrairement à la figure 3.50, la courbe en trait pointillé fin (correspondant aux valeurs  $K = 50$  et  $I = 9.8^\circ/\dots$ ) est l'hydrogramme qui a subi le moins d'atténuation. La courbe en trait pointillé mixte est plus atténuée que celle en trait pointillé fin, alors qu'elle l'était moins pour une longueur 3 fois plus faible. La courbe en trait plein correspondant à une pente très faible ( $K = 90$  et  $I = 3^\circ/\dots$ ) n'est pas plus atténuée que la courbe en trait pointillé mixte car on est passé dans le domaine où  $Z$  est inférieur à 0.25 et où on assiste au changement de comportement du modèle non linéaire.

VPD ;  $K*(I^{**}.5)=1.56$  ;  $K=50$  -  $K=70$  -  $K=90$



*Figure 3.54a*

On vérifie ce qui avait été dit par MILLER et CUNGE (cf. paragraphe 2-1-3).

Plus la pente est faible, moins le travail de la force de gravité est grand et plus les phénomènes inertiels deviennent importants. Néanmoins, sur une grande longueur et pour des écoulements fluviaux, le signal principal qui finit par dominer est porté par une onde cinématique, les autres ondes s'étant propagées et atténuées rapidement. Lorsque la pente est faible, il faut naturellement une longueur importante pour atteindre une dénivellation suffisamment grande garantissant la prédominance du travail des forces de gravité et de frottement.

Plus la pente est faible, moins les ondes dynamiques s'atténuent rapidement (cf. critères du paragraphe 2-1-3). La distance à partir de laquelle les effets de ces ondes dynamiques deviennent négligeables doit donc être d'autant plus grande que la pente est faible, à condition que les conditions aval ne soient pas gênantes.

C'est bien ce qu'on constate lorsqu'on examine les différences des réponses de VPD entre un tronçon de 1000 mètres de longueur (cf. figure 3.50) et le même tronçon de 3000 mètres de longueur (cf. figure 3.54). C'est pourquoi, lorsqu'on a dépassé une certaine longueur de propagation, on peut effectivement dire que la partie la plus importante du volume de la crue se propage comme une onde cinématique diffusante à cause de la dominance du travail de la pente du fond (la gravité) dans l'équation du mouvement. Les crues sont donc fondamentalement des phénomènes paraboliques, ce qui explique que les fonctions de transfert : crue diffusante ou onde cinématique diffusive qui sont des filtres qui génèrent des réponses paraboliques, soient bien adaptées à la simulation des crues.

Lorsque le paramètre  $Z$  est inférieur à 0.25, la dénivellation entre l'amont et l'aval est trop faible. Le travail de la force de gravité est très petit et la transformation du signal d'entrée s'effectue autant par les forces de gravité et de frottement que par les forces inertielles.

Prendre un équivalent hydraulique tel que le paramètre  $Z$  soit plus grand, c'est transférer le travail des forces inertielles en travail des forces de gravité. C'est donc retomber sur le champ d'application de l'équation de la crue diffusante.

La figure 3.54b montre les réponses de VPD (trait pointillé mixte et trait pointillé serré) comparées à celles du modèle complet de Saint-Venant (trait continu et trait pointillé lâche) à différentes distances de l'amont.

Les conditions étaient les suivantes :  $K=50$ ,  $I=5^\circ/\dots$  sur un collecteur circulaire de diamètre 2600 mm. Dans ces conditions,  $K.I'^2 = 1.12$  et pour un hydrogramme de type 1,  $C(Q_{max}) = 1.15\text{m/s}$  et  $D(Q_{max}) = 2342\text{m}^2/\text{s}$ .

Les valeurs de  $Z_{min}$  sont les suivantes :

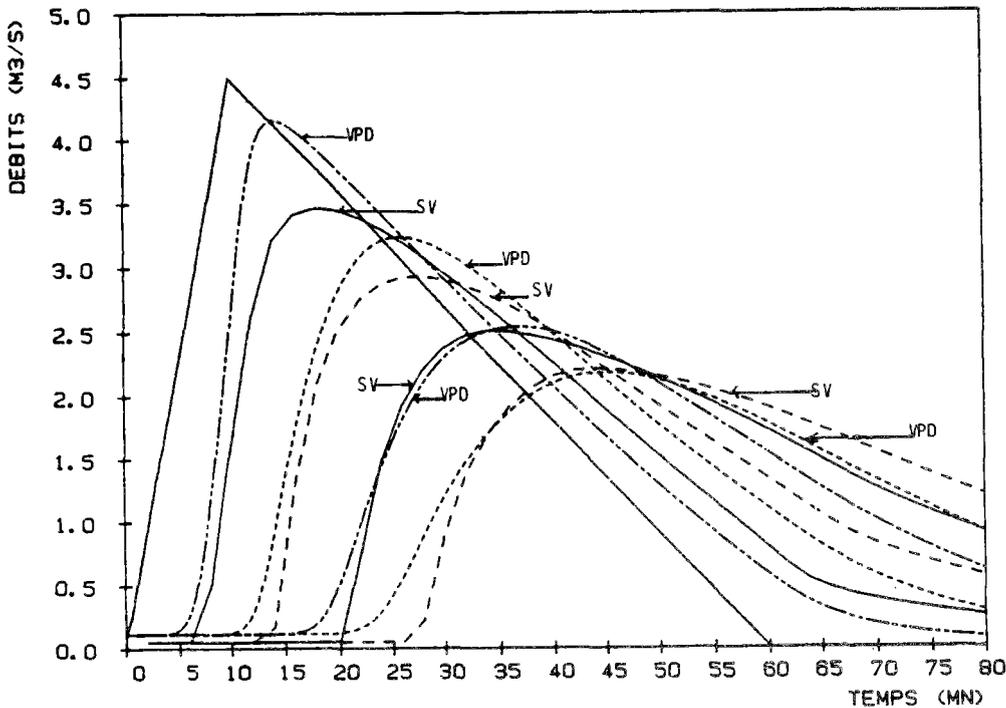
- Pour  $L = 600$  m ;  $Z_{min} = 0.07$
- Pour  $L = 1200$  m ;  $Z_{min} = 0.14$
- Pour  $L = 1800$  m ;  $Z_{min} = 0.22$
- Pour  $L = 2400$  m ;  $Z_{min} = 0.30$

A partir de  $L = 1800$  m, les réponses de VPD et de SV sont pratiquement identiques. A cette distance de l'amont, les phénomènes inertiels ont donc une influence négligeable sur la propagation du signal amont. Pour une longueur  $L$  de 1800 mètres, le nombre  $L^+ = C.Tc/L = 0.33$ .

Pour les écoulements fluviaux où  $F$  est inférieur à 1 et où la longueur  $L$  de simulation est telle que  $Z$  est très inférieur à 1, on peut appliquer un modèle de crue diffusante à condition que la longueur permette de maintenir approximativement une valeur de  $Z$  supérieure à 0.25.

Lorsque le nombre de Froude est supérieur à  $3/2$  ou à 2, le raisonnement ci-dessus n'est plus exact. On retombe sur le domaine 1 du paragraphe étudié au paragraphe 3-3-1. Pour des écoulements tels que  $F \geq 2$ , contrairement à ce qui vient d'être dit, la validité d'un modèle cinématique (le modèle de crue diffusante n'est pas stable pour de telles conditions) est d'autant plus grande que la longueur de simulation est courte (i.e que  $L^+$  est grand) et que les ondes dynamiques n'ont pas eu le temps de s'amplifier suffisamment pour modifier significativement le signal total (cf. paragraphe 3-3-1 ainsi que le critère A de prédominance des ondes cinématiques par rapport aux ondes dynamiques).

SV ; VPD -  $K*(I**0.5)=1.12$  - L=600 A 2400 - DL=600



*Figure 3.54b*

La longueur a une influence capitale sur le phénomène de propagation de crue et sur la prédominance des termes de gravité et de frottement par rapport aux termes d'inertie. Elle a une grande influence sur la validité du modèle non-linéaire de crue diffusante.

Les simulations effectuées semblent confirmer que le critère de validité du modèle de crue diffusante non-linéaire :  $Z > 0.25$  est bien adapté à la prise en compte de l'influence de la longueur, à condition de vérifier les effets des influences aval (ce que nous ferons au paragraphe 3-3-4).

### 3-3-3-8 Influence de l'hydrogramme amont

L'hydrogramme amont a comme la longueur, une influence sur la validité d'un modèle de crue diffusante. La variabilité des débits est en effet génératrice de phénomènes inertiels. Plus les variations de débits sont brutales, plus la longueur d'onde de la perturbation est courte et moins il est théoriquement possible de négliger les termes d'inertie (cf. critères sur No.Fo du paragraphe 2-1-3). Un cas typique de variation brusque est la rupture d'un barrage où l'écoulement est uniquement contrôlé (sur une certaine distance) par les termes d'inertie. En utilisant le concept de fonction de transfert, on a défini au paragraphe 2-1-3 une fréquence fondamentale du signal d'entrée (i.e. de l'hydrogramme amont) qui permet de caractériser sa variabilité. Elle est proportionnelle au temps de crue  $T_c$ .

Le comportement de la fonction de transfert constituée par le système de Saint-Venant est aussi fonction de l'intensité du signal d'entrée. La figure 3.47 montrait les fortes variations de  $D$  avec la hauteur d'eau dans le collecteur. Ainsi, le débit maximal de l'hydrogramme amont intervient aussi dans la valeur du paramètre  $Z_{min}$ . Pour un hydrogramme de type 2 où le débit maximal est égal à 50% du débit capable de la conduite, (soit  $Q_{max} = 2.4m^3/s$ ) on obtient avec les mêmes conditions que précédemment des valeurs de  $Z_{min}$  beaucoup plus fortes. La figure 3.55 montre les réponses de VPD pour les différents couples  $(K,I)$  tels que  $K.I^{1/2} = 1.56$  :

$K = 30$ et $I = 2.7^\circ/..$	$Z_{min} = 1.9$	(trait pointillé lâche)
$K = 50$ et $I = 9.8^\circ/...$	$Z_{min} = 0.685$	(trait pointillé serré)
$K = 70$ et $I = 5^\circ/...$	$Z_{min} = 0.35$	(trait pointillé mixte)
$K = 90$ et $I = 3^\circ/...$	$Z_{min} = 0.21$	(trait continu)

La figure 3.55a est donc équivalente à la figure 3.53 pour un hydrogramme de type 2. On constate que le changement de comportement du modèle VPD correspond approximativement au même tronçon que pour un hydrogramme de type 1 (tronçon défini par  $K=50$  et  $I=9.8^\circ/...$ ). Le calcul du  $Z_{min}$  ne devrait donc pas faire intervenir l'intensité de l'hydrogramme amont puisque le changement de comportement du modèle VPD ne dépend pas de celle-ci alors que  $Z_{min}$  en dépend.  $Z_{min}(\text{hydrogramme de type 2}) = 0.685$  alors que  $Z_{min}(\text{hydrogramme de type 1}) = 0.25$  pour le tronçon  $K=50$  et  $I=9.8^\circ/...$ .

Néanmoins, le changement de comportement de VPD est beaucoup moins marqué que pour un hydrogramme de type 1.

La figure 3.55b reprend le même hydrogramme amont et deux des hydrogrammes aval de la figure 3.55a en comparant avec les réponses du modèle de Saint-Venant. On a de plus agrandi l'échelle du dessin.

$K=50$  et  $I=9.8^\circ/...$  : trait continu pour le modèle de Saint-Venant et trait pointillé mixte pour le modèle VPD.

$K=70$  ,  $I=5^\circ/...$  : trait pointillé lâche pour Saint-Venant et trait pointillé serré pour VPD.

VPD ;  $K*(I^{**.5})=1.56$  ;  $K=30 - 50 - 70 - 90$

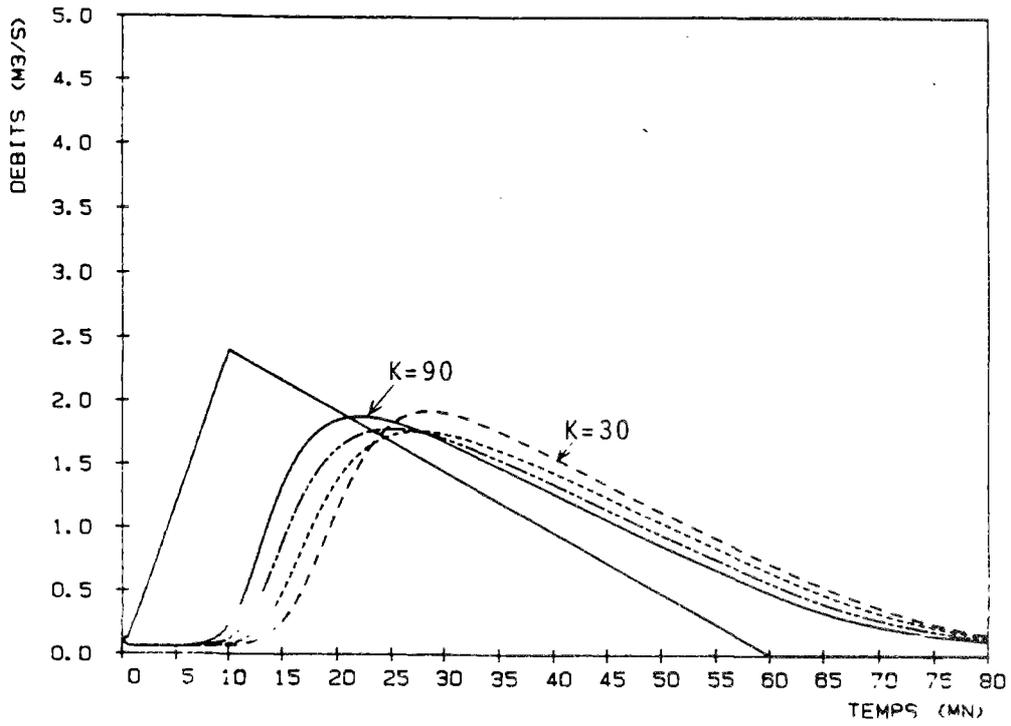


Figure 3.55a

VPD ; SV ;  $K*(I^{**.5})=1.56$  ;  $K=50 - K=70$

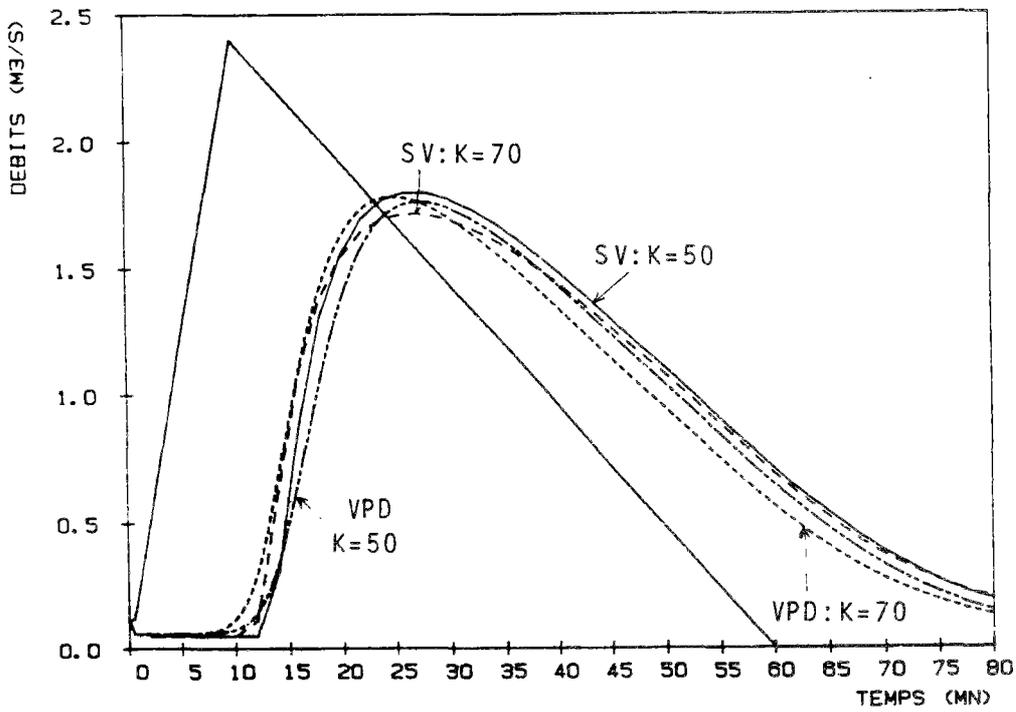


Figure 3.55b

La figure 3.55b montre que la réponse du modèle VPD sur un tronçon tel que  $K=70$  et  $I=5^\circ/\dots$ , bien que située au-delà du changement de comportement du modèle VPD (donnant  $Z_{\min}(\text{hydrogramme de type 2}) = 0.3$ ) est proche de celle du modèle complet pour le même tronçon.

Le changement de comportement du modèle VPD n'est donc pas fonction de l'hydrogramme amont mais dépend essentiellement du tronçon et de la valeur du produit  $K.I^{1/2}$ . Or, la valeur de  $Z_{\min}$  dépend de l'intensité de l'hydrogramme amont. Néanmoins, pour des hydrogrammes dont le débit maximal est beaucoup plus faible que la débitance et où le changement de comportement du modèle VPD intervient donc pour des valeurs supérieures de  $Z$ , les écarts entre les réponses sont très faibles tant que  $Z$  n'est pas inférieur à 0.25. On peut donc garder le critère  $Z > 0.25$  pour limite de validité du modèle VPD, lorsqu'il n'y a pas d'influence aval.

### 3-3-3-9 Influence de la condition limite aval

Les simulations dont les résultats ont été présentés jusqu'à présent ont été faites en calculant l'hydrogramme aval à l'extrémité du bief.

#### Modèles cinématiques

Pour intégrer l'équation de l'onde cinématique, seule la donnée d'une condition limite est nécessaire. Les schémas de résolution explicites ne font d'ailleurs intervenir que la condition limite amont pour résoudre l'équation. Calculer l'hydrogramme aval à l'extrémité du bief modélisé ou au milieu d'un bief deux fois plus long n'a donc aucune importance.

#### Modèles complets

Pour les modèles complets, la donnée d'une condition limite aval est nécessaire pour la fermeture du système permettant la résolution des équations de Saint-Venant. Lorsqu'on ne connaît pas la condition aval de l'écoulement, ni en hauteur, ni en débit et qu'on ne dispose d'aucune courbe de tarage en écoulement fluvial, on utilise une condition limite aval fictive, dite condition aval "libre". Cette condition est en général une loi univoque hauteur-débit (équation du régime uniforme).

Cette condition limite aval influe cependant sur l'écoulement à l'amont ce qui apparaît par la remontée de la caractéristique  $C_+$  qui se propage vers l'amont à la célérité  $V - (gy)^{1/2}$ . Pour limiter l'influence de cette condition aval théorique sur l'écoulement, on prolonge fictivement le bief d'une longueur suffisante, par exemple de  $(V - (gy)^{1/2}) * T_c$ .

### Modèles de crue diffusante

De manière comparable aux modèles complets, la donnée de deux conditions limites est nécessaire à l'intégration de l'équation de la crue diffusante. Les deux conditions limites nécessaires sont des fonctions  $Q(t)$ . Le schéma d'intégration VPD utilise d'ailleurs les deux conditions limites en débit amont et aval pour calculer les solutions. Comme on ne connaît en général qu'une condition limite amont (en débit), on fabrique une condition limite aval qui permet de fermer le problème (cf. § 2-2-3-1).

Néanmoins, contrairement à la condition aval des modèles complets, il est impossible de s'affranchir complètement de l'influence de la condition aval du modèle de crue diffusante car la diffusion se propage instantanément. Il existe en effet une propagation d'onde à vitesse infinie, si l'on étudie par les caractéristiques le système d'équation (2.6) (système de Saint-Venant simplifié pour construire l'équation de transport-diffusion de la crue diffusante).

On serait tenté de tester la même condition limite aval pour le modèle complet et pour le modèle de crue diffusante. Or la condition limite aval de VPD est un hydrogramme que l'on ne peut corrélérer aux hauteurs d'eau que par l'intermédiaire de la loi univoque de Manning-Strickler. La condition aval d'un modèle complet, même si elle est libre, permet d'utiliser une courbe  $Q(z)$ , ce qui permet de prendre en compte les termes d'inertie à l'amont de cette condition limite.

#### Que fait-on quand on ne connaît pas la condition limite aval?

A une distance donnée de l'amont, nous avons testé l'influence de l'éloignement de l'aval sur la réponse des modèles VPD et Saint-Venant.

La figure 3.56a montre les réponses du modèle complet de Saint-Venant pour un hydrogramme de type 1 avec un collecteur circulaire de diamètre 2600mm, de pente 5°/... , de Strickler  $K = 50$ . La condition limite aval est libre.

- l'hydrogramme en trait pointillé est mesuré à 1000 mètres de l'amont à l'aval du dernier tronçon de calcul.
- l'hydrogramme en trait continu est mesuré à 1000 mètres de l'amont mais le collecteur a été prolongé fictivement sur une grande longueur.

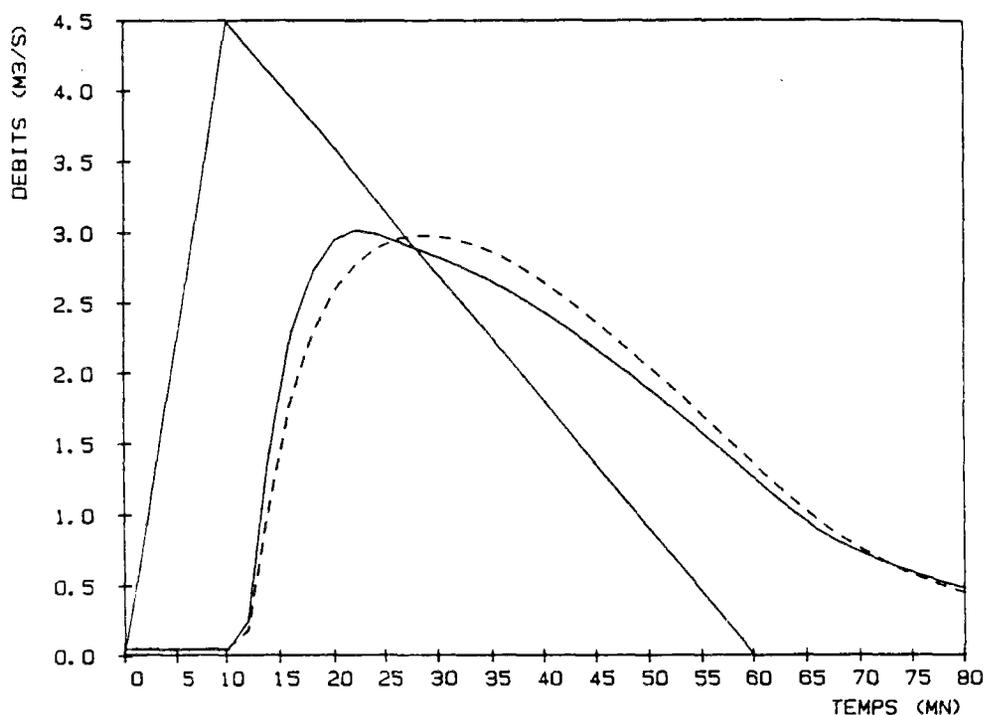
On peut noter les effets de la condition aval qui rend l'hydrogramme propagé plus "parabolique" que l'hydrogramme (trait continu) non influencé par la condition limite aval théorique (en prolongeant fictivement l'aval du bief) où la condition aval n'influe pas sur les résultats.

Avec ces conditions,  $C_{max} = 1$  m/s et  $D_{max} = 2350$  m<sup>2</sup>/s.

Pour  $L = 500$  mètres,  $Z = 0.05$

Pour  $L = 2000$  mètres,  $Z = 0.21$

## REPNSES DE SV SELON LA CONDITION AVAL



*Figure 3.56a*

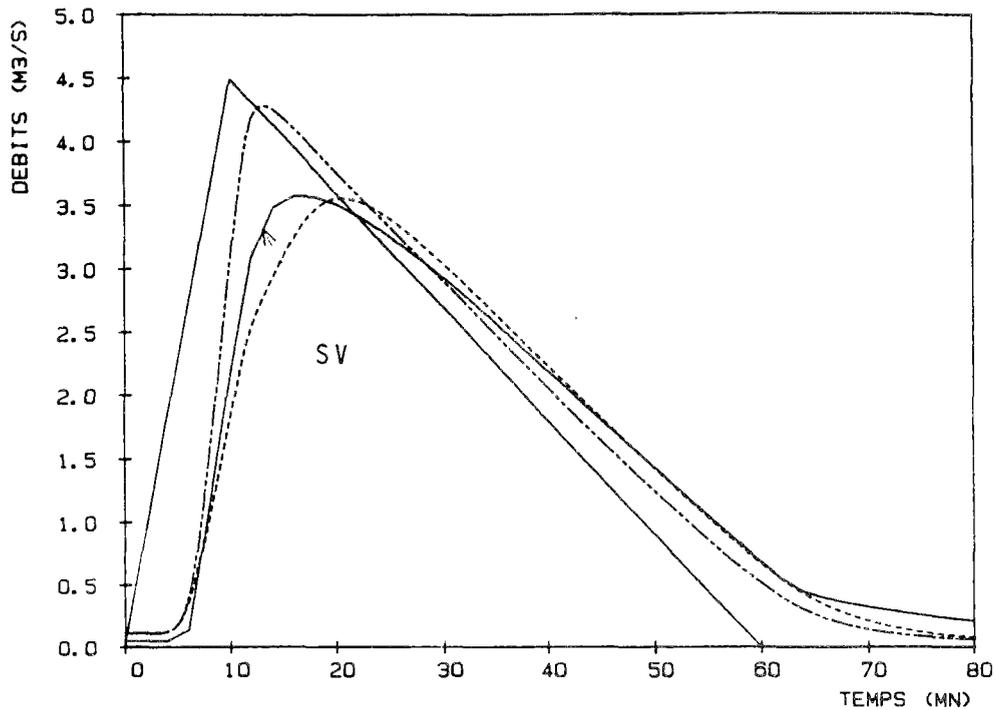
La figure 3.56b illustre l'influence de la longueur de simulation pour le modèle VPD ainsi que la comparaison des résultats de VPD et de Saint-Venant non influencés par la condition limite aval. Elle montre pour le même collecteur que celui de la figure 3.56a :

- en trait continu, la réponse du modèle complet à 500 mètres de l'amont pour une longueur de simulation de 2000 mètres ;
- en trait pointillé mixte, la réponse du modèle VPD à 500 mètres de l'amont pour une longueur de simulation de 500 mètres ;
- en trait pointillé simple, la réponse du modèle VPD à 500 mètres de l'amont pour une longueur de 2000 mètres.

Pour la réponse en trait pointillé mixte, la valeur du paramètre Z est très faible et l'hydrogramme aval est presque confondu à l'hydrogramme amont. Lorsqu'on prend une grande longueur de simulation, la réponse du modèle VPD est beaucoup plus proche de la réponse du modèle complet.

En prolongeant fictivement le bief de calcul, on obtient le même type de phénomène qu'en utilisant un tronçon hydrauliquement équivalent (comme expliqué dans le paragraphe 3-3-3-5). La prolongation du bief de calcul est donc une autre méthode qui permet de prolonger le domaine de validité de la crue diffusante non-linéaire.

SV ; VPD ; SELON DIST AVAL = 0 ; 1500



*Figure 3.56b*

Conclusion :

Si on connait la condition à la limite aval, les modèles simplifiés ne permettent pas d'en tenir compte de manière satisfaisante à cause du découplage entre les débits calculés et les hauteurs. En revanche, lorsqu'on ne connaît pas la condition limite aval, prolonger fictivement le bief pour utiliser le modèle de crue diffusante permet d'obtenir un résultat similaire à ce qu'on obtient avec un modèle complet de Saint-Venant dans les mêmes conditions.

Toute autre hypothèse sur la condition aval introduit une différence entre les réponses d'un modèle de Saint-Venant et un modèle de crue diffusante car, intrinsèquement, l'équation de la crue diffusante ne nécessite pas la même structure de condition limite que les équations de Saint-Venant.

Nous allons étudier au paragraphe 3-3-4 suivant les erreurs commises par le modèle selon des influences aval connues qui servent de conditions limites au modèle complet de Saint-Venant.

### 3-3-4 INFLUENCES AVAL ET PHENOMENES INERTIELS

Les phénomènes d'influence aval apparaissent lorsque le nombre de Froude est inférieur à 1, c'est-à-dire lorsque l'écoulement est fluvial et que la courbe caractéristique  $C_+$  remonte le courant, ce qui signifie que les conditions aval influencent l'écoulement à l'amont (cf. figure 2.2). Pour les écoulements torrentiels, les deux courbes caractéristiques descendent le courant et les conditions aval ne peuvent influencer les conditions à l'amont.

On peut distinguer pour les écoulements de type fluvial ( $F < 1$ ), deux types d'influences aval qui résultent de la remontée de la courbe caractéristique  $C_+$ .

Le premier type est une influence aval où la condition aval est dite "libre", c'est-à-dire que la hauteur aval n'est fixée que par l'écoulement lui-même. On peut détecter l'influence aval d'un écoulement en examinant la courbe de tarage  $Q(y)$ . Plus celle-ci est en forme de boucle, plus l'influence aval est forte et moins la relation de Manning-Strickler reliant la hauteur au débit de manière univoque est vraie.

Le deuxième type est une influence aval causée par un ouvrage spécial ou une singularité qui impose une hauteur d'eau à l'aval d'un écoulement. Un cas typique de ce genre d'influence aval est la remontée de la marée dans un estuaire. En assainissement, on rencontre aussi fréquemment des cas d'influence aval causés par une rivière ou un bassin de rétention dont le niveau d'eau est tel qu'il remonte dans le réseau.

#### 3-3-4-1 Programmation du calcul de la ligne d'eau dans un modèle simplifié

Les modèles simplifiés étudiés dans les chapitres précédents ne calculent pas de hauteurs d'eau autrement que par l'intermédiaire de la relation de Manning-Strickler, une fois le calcul des débits effectué. L'univocité de la relation hauteur-débit suppose, outre un calcul approché des hauteurs d'eau, que la hauteur de l'écoulement n'ait aucune influence sur la valeur des débits.

Lorsque la condition aval est libre, la boucle  $Q(y)$  peut être assez large (cf. figure 3.52 par exemple au paragraphe 3-3-3-4). L'erreur commise sur le calcul de la hauteur d'eau est faible à la décrue (on est proche de la relation de Manning-Strickler) mais peut être assez importante dans la partie montante de la crue. Néanmoins, le calcul de la propagation des hydrogrammes peut s'effectuer correctement sans la prise en compte de l'influence aval naturelle de l'écoulement (cf. par exemple, les simulations du paragraphe 3-3-3 où les réponses du modèle VPD étaient identiques à celles du modèle complet alors que la courbe de tarage du modèle complet montrait une courbe  $Q(y)$  en forme de boucle).

Pour les influences aval causées par une singularité à l'aval d'un tronçon entraînant une hauteur d'eau supérieure à celle de l'écoulement avec une condition aval libre, il n'est pas possible de calculer les hauteurs d'eau par la relation de Manning-Strickler. Une influence aval causée par le niveau élevé d'une rivière en crue qui remonte dans le réseau entraîne des hauteurs d'eau non nulles même quand le débit est nul.

De plus, une condition sur une hauteur imposée à l'aval peut modifier considérablement la manière dont la crue se propage, ce qui signifie que le calcul des débits devrait pouvoir tenir compte de la condition limite aval sur la hauteur lorsque celle-ci est importante.

Dans les cas où une condition aval est imposée à l'aval d'un réseau, l'utilisation d'un modèle simplifié tel que ceux présentés dans les chapitres précédents n'est pas possible. D'une part, les hauteurs calculées n'auront aucune signification physique, d'autre part, les débits calculés indépendamment de la condition sur les hauteurs aval risquent d'être très différents des débits réels puisque ceux-ci sont conditionnés par la hauteur aval de l'écoulement.

Le calcul de la ligne d'eau peut être intégré aux modèles simplifiés. Il est alors nécessaire de construire un module qui permet de relier, à chaque pas de temps, les hauteurs calculées aux débits propagés. Des expériences de calcul de ligne d'eau sur des modèles simplifiés ont déjà été réalisées à l'étranger (VITUKI, 1986) (TODINI, BOSSI 1986).

Nous avons construit un module permettant le calcul de la ligne d'eau dans le modèle de crue diffusante non-linéaire VPD. Le choix de VPD se justifie pour deux raisons :

- c'est le modèle simplifié dont le domaine de validité est le plus important (cf. chapitre précédent) et dont les résultats ont encore une réalité physique même lorsque le nombre de Reynolds total  $R$  devient supérieur à 2, ce qui n'est pas le cas pour les modèles cinématiques et Muskingum ;
- remonter la ligne d'eau implique une structure de programme où on balaye le réseau de l'amont vers l'aval à chaque pas de temps pour le calcul de la propagation des débits (cf. partie 4). VPD est le seul des modèles construits où la boucle sur les pas de temps contient la boucle sur les pas d'espace. Ceci est dû à la méthode implicite de calcul des débits qui implique, pour le calcul des débits, l'inversion d'une matrice à chaque pas de temps.

Les conditions initiales sont les mêmes (en débit) que sans le calcul de ligne d'eau. On rajoute une condition limite  $y(t)$  qui est la hauteur d'eau en fonction du temps à l'aval du tronçon.

Le principe de la méthode est le suivant : à un pas de temps, on "descend" (i.e. on propage) les débits et on "remonte" la ligne d'eau avec les valeurs des débits propagés.

#### a) calcul de la ligne d'eau

Le calcul de la ligne d'eau se fait comme en régime permanent. On suppose qu'on a une succession de régimes permanents sur chaque tronçon de calcul. On connaît sur chaque tronçon de calcul le débit et le tirant d'eau à l'aval. Il n'y a donc pas de difficultés à "remonter" la hauteur d'eau aval de tronçon en tronçon jusqu'à l'amont du réseau. Lorsqu'on atteint la hauteur normale, les hauteurs plus en amont sont simplement calculées avec la relation de Manning-Strickler.

Il est possible que le calcul de la ligne d'eau conduise à converger vers une hauteur critique lorsqu'on remonte l'influence aval vers l'amont du réseau. Ceci signifie qu'il y a un changement de régime hydraulique. Dans ce cas, il y a un ressaut et il faudrait en théorie calculer l'impulsion minimale pour déterminer la position du ressaut (BERTILOTTI, 1973).

Le programme construit n'utilise pas l'impulsion et suppose simplement que le ressaut se situe à l'abscisse où la hauteur est égale à la hauteur critique. On franchit cette hauteur critique pour rejoindre la hauteur normale. Par ailleurs, la continuité de la hauteur d'eau est assurée puisque la hauteur limite amont d'un tronçon sert de condition limite aval au calcul de la hauteur d'eau du tronçon situé immédiatement à l'amont.

### b) Le calcul de la propagation

Il est nécessaire de tenir compte de la hauteur d'eau remontée pour propager les débits au pas de temps suivant.

Pour cela, on utilise des coefficients C et D calculés à partir des hauteurs "remontées" du pas de temps précédent.

Au lieu de calculer C par la relation  $C = dQ/dS$ , on utilise les résultats du chapitre 2-3 qui indiquaient que les courbes  $4/3 V$  et C étaient très rapprochées. On avait notamment à mi-remplissage,  $C = 4/3 V$  (cf. figure 2.12). Si on utilise la relation  $C = 4/3 V$ , il est alors possible de tenir compte des hauteurs d'eau calculées puisque V est lié à la hauteur d'eau par la relation  $V = Q/S$ .

Le calcul de la célérité peut alors simplement se faire par la relation :

$$(3.7) \quad C_i^{n+1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_i^{n+1}}{S_i^n} \quad \text{où}$$

$Q_i^{n+1}$  est le débit à propager (débit au pas de temps de calcul n+1) sur le tronçon de calcul i et  $S_i^n$  est la section mouillée moyenne sur le tronçon i calculée en fonction de la cote remontée au pas de temps précédent (pas de temps n).

Avec une telle relation, la prise en compte de hauteurs d'eau remontées donne nécessairement des célérités de propagation plus faibles que sans influence aval. En effet, la cote remontée est plus grande que le tirant d'eau normal donc la section mouillée  $S_r$  calculée à partir des cotes remontées est supérieure à la section mouillée  $S_n$  calculée sans influence aval.  $Q/S_r$  est donc inférieur à la vitesse normale  $Q/S_n$ .

Le calcul de la diffusion hydraulique D peut se faire de même en utilisant les hauteurs d'eau calculées au pas de temps précédent :

$$(3.8) \quad D = \frac{Q_i^{n+1}}{2IB_i^n}$$

D calculé ainsi peut être plus grand ou plus petit que celui calculé lorsqu'il n'y a pas d'influence aval.

$B_i^n$  (comme  $S_i^n$ ) est déterminé en fonction de la cote remontée au pas de temps précédent (pas de temps  $n$ ).

Contrairement aux cas étudiés dans le paragraphe précédent, il n'est pas possible de transformer un tronçon en un tronçon hydrauliquement équivalent si ce tronçon est soumis à une influence aval. En effet, dans ce cas, il n'est plus possible de changer la pente sans modifier les hauteurs de l'influence aval qui remonte dans le tronçon. Les figures 3.57 et 3.58 illustrent la remontée de l'influence aval en fonction de la pente du collecteur. C'est justement dans les cas de pentes faibles (cf. figure 3.57) que les influences aval sont les plus importantes et qu'elles peuvent modifier sensiblement les conditions d'écoulement.

Il n'est pas non plus possible de prolonger fictivement le tronçon car on souhaite justement observer l'influence de la condition limite aval connue, contrairement aux cas étudiés dans le paragraphe 3-3-3.

Si on sort du domaine de validité de la crue diffusante définie au chapitre précédent ( $CL/D > 1$ ), on commettra donc une erreur que l'on aurait déjà commise même sans condition limite aval. Dans ce cas, vouloir simuler la propagation des hydrogrammes par le nouveau modèle VPD peut sembler utopique.

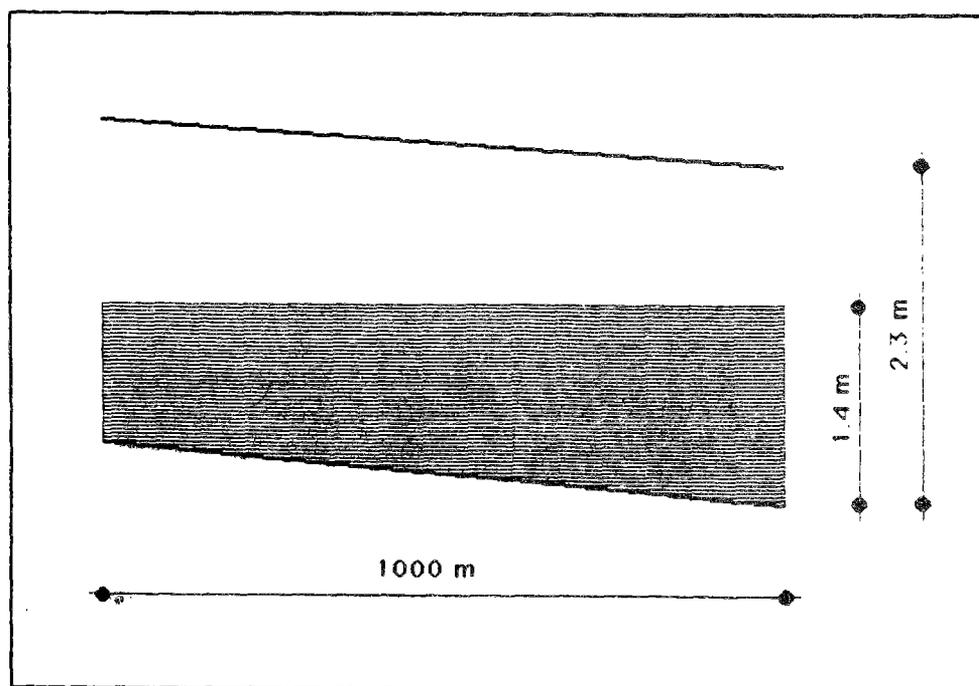


Figure 3.57

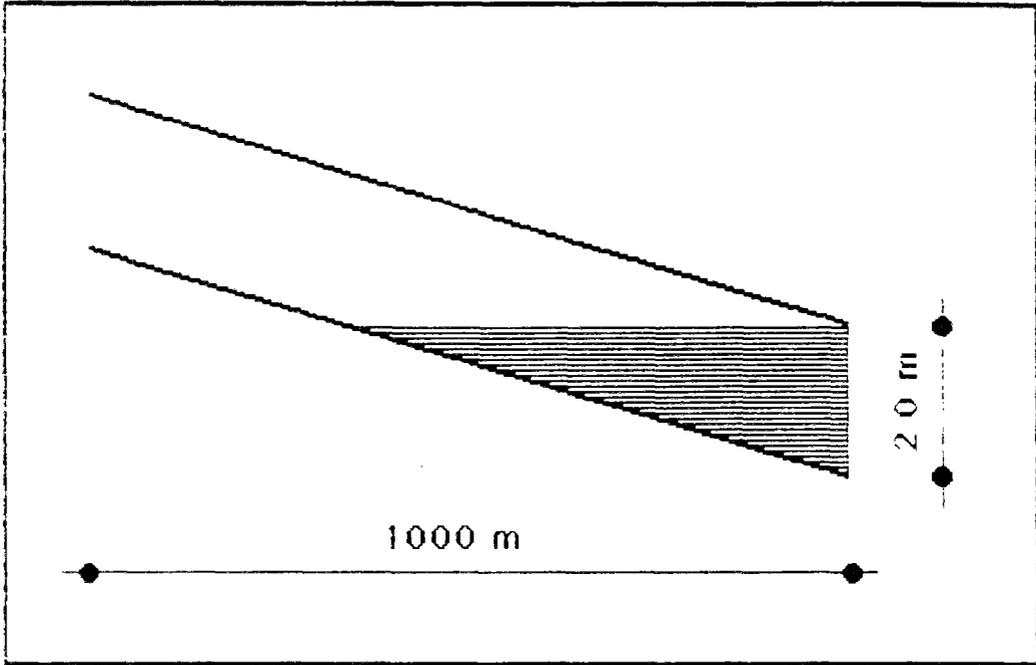


Figure 3.58

### 3-3-4-2 Etude d'un cas où Z est plus grand que 0.25

Nous avons choisi un collecteur circulaire de diamètre 2100 mm et de pente  $1'/.00$  avec un coefficient de Strickler de  $K = 70$ . Dans ces conditions, le débit capable du collecteur est de  $Deb = 4.8 \text{ m}^3/\text{s}$  et  $K.I'^{1/2} = 2.21$ . Pour un hydrogramme de type 1,  $C_m(Q_{max}) = 2 \text{ m/s}$  et  $D(Q_{max}) = 546 \text{ m}^2/\text{s}$

Pour une longueur de  $L = 1000\text{m}$ ,  $Z \approx 1$ .

On est dans le domaine d'application du modèle VPD.

Les figures 3.59 et 3.60 montrent les réponses des deux modèles (VPD et Saint-Venant) avec et sans influence aval.

Pour les deux figures, le trait continu représente la réponse du modèle de Saint-Venant sans influence aval et le trait pointillé mixte représente celle de VPD sans influence aval.

Le trait pointillé lâche représente la réponse de Saint-Venant avec 1.2 mètre d'influence aval et le trait pointillé serré, la réponse du nouveau modèle VPD avec aussi 1.2 mètre d'influence aval. La figure 3.60 représente les hauteurs d'eau mesurées à la distance  $L/2$  dans le collecteur avec les mêmes conventions pour la définition des type de trait que la figure 3.59.

### VPD ET SV AVEC ET SANS INFLUENCE AVAL

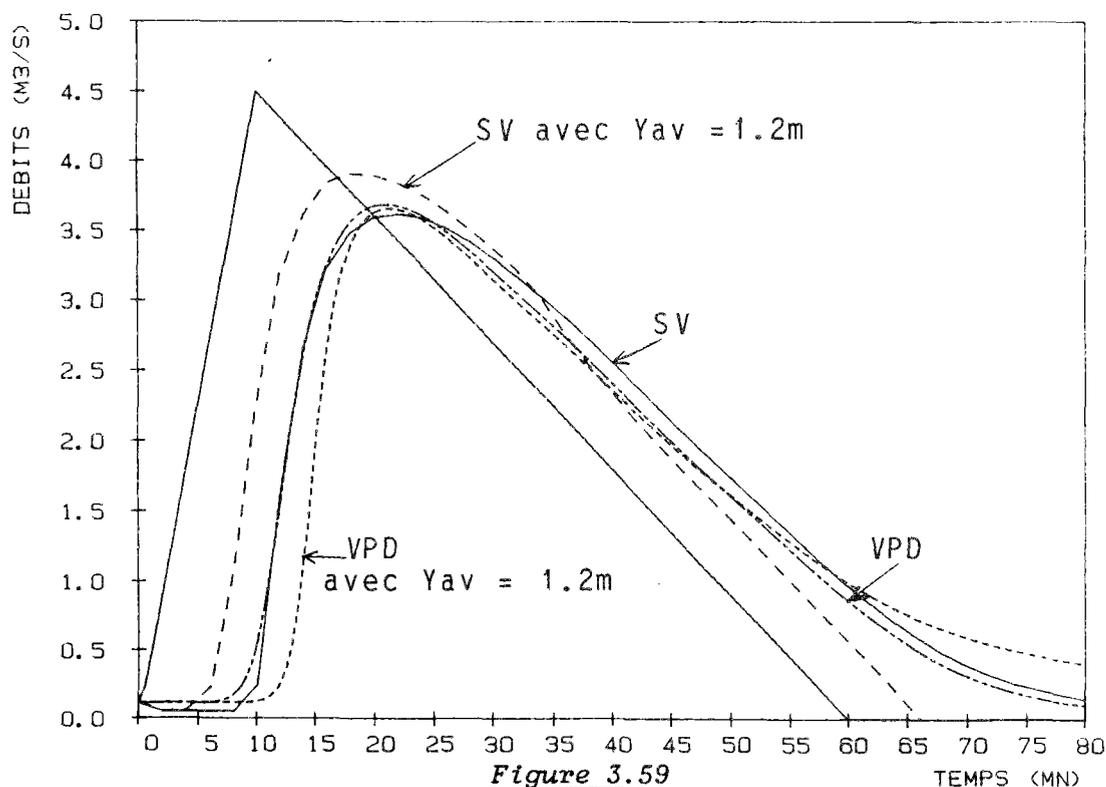
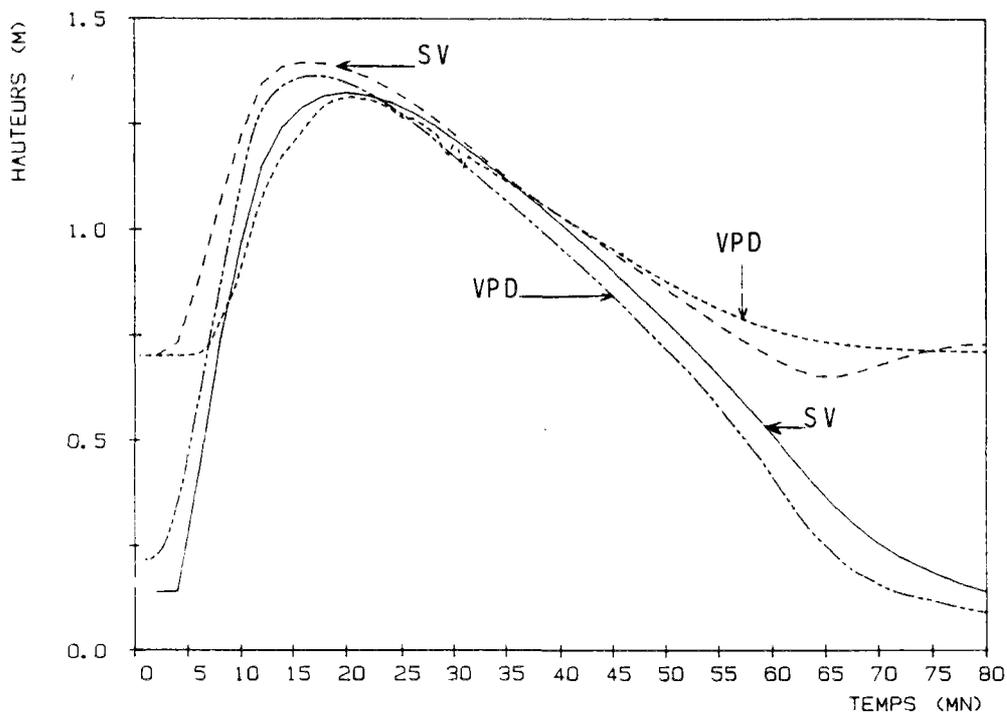


Figure 3.59

TEMPS (MN)

## SV ET VPD AVEC ET SANS INFLUENCE AVAL



*Figure 3.60*

On peut être surpris de constater que la réponse de Saint-Venant avec une influence aval est propagée plus rapidement que celle sans influence aval et que simultanément, l'atténuation du débit de pointe est moins importante.

Le modèle VPD avec influence aval ne réagit donc pas de manière identique au modèle de Saint-Venant. Néanmoins, les écarts sur les résultats restent encore acceptables et les hauteurs d'eau (sauf lors de montée et de la pointe de la crue) sont proches pour Saint-Venant et VPD lorsqu'il y a une influence aval.

Les hydrogrammes propagés sans influence aval sont quasiment identiques pour les deux modèles, ce qui confirme nos résultats du chapitre précédent. Dans le modèles VPD, lorsqu'il n'y a pas d'influence aval, ou plus exactement lorsque la condition aval est libre, les hauteurs sont simplement calculées avec la relation de Manning-Strickler comme en régime permanent uniforme. C'est pourquoi, le calcul des hauteurs par le modèle de Saint-Venant et par le modèle VPD conduisent à des courbes différentes, bien que les hydrogrammes propagés par les deux modèles soient quasiment identiques.

Lors de la crue (simulée par le modèle complet) les hauteurs sont inférieures à celles du régime permanent uniforme. Pour la décrue, on a quasiment les hauteurs d'eau du régime permanent uniforme. La pente de la ligne d'eau est donc plus raide que la pente du fond durant la montée de la crue, mais est pratiquement égale à celle-ci durant la période de décrue.

Figure 3.61, nous avons tracé, la courbe de tarage  $Q(y)$  dans le cas où il n'y a pas d'influence aval à la distance  $L/2$  de l'amont.

La courbe  $Q(y)$  correspondant à la réponse de Saint-Venant est en trait continu et la relation  $Q(y)$  du régime permanent utilisée dans VPD est en trait pointillé mixte.

Le module de calcul de la ligne d'eau (dans un modèle simplifié) lorsqu'on impose une hauteur d'eau à l'aval permet aussi de calculer la ligne d'eau lorsque la condition aval est libre. On peut utiliser alors (comme pour une condition libre d'un modèle complet), une loi hauteur-débit uniforme à l'aval du réseau et on remonte (comme lorsque la condition aval est fixée) la ligne d'eau de tronçon de calcul en tronçon de calcul.

### MANNING-STICKLER - EQUATIONS COMPLETES

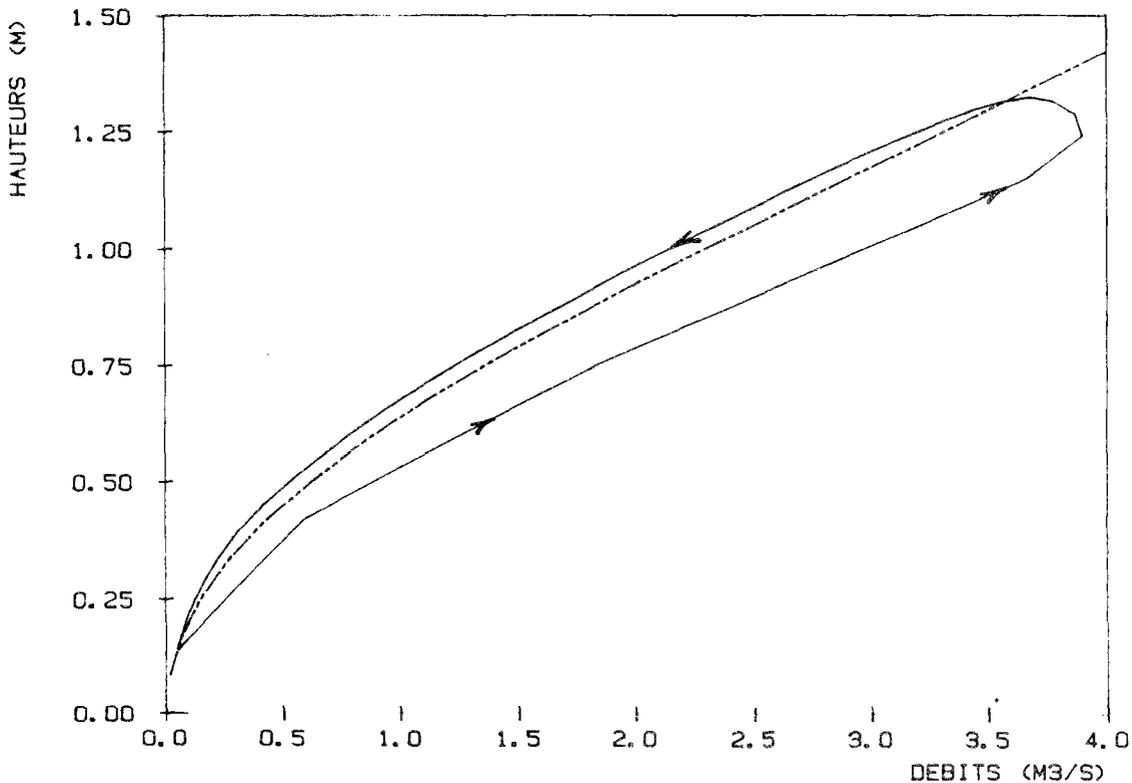
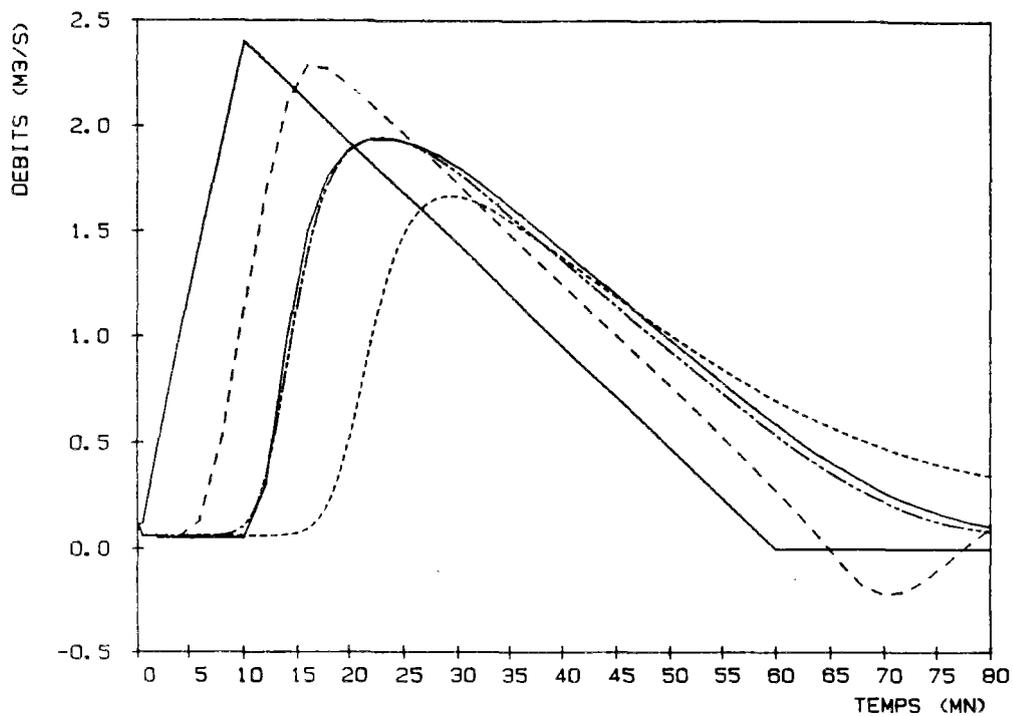


Figure 3.61

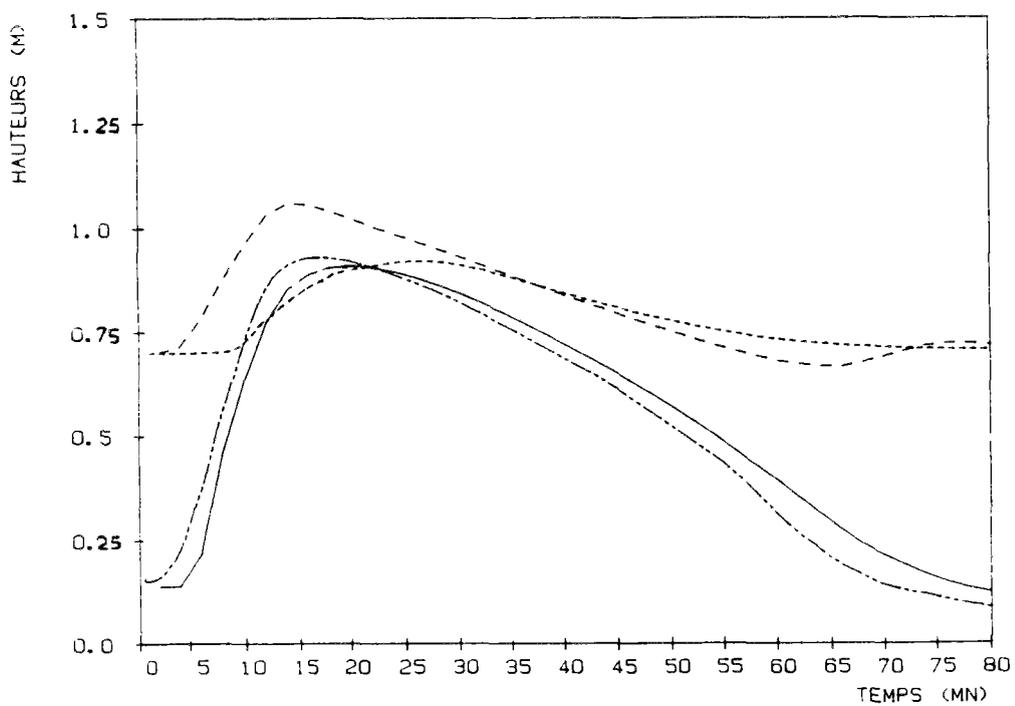
Avec la même hauteur d'influence aval (1.2 mètre) mais pour un hydrogramme de type 2, on obtient les réponses présentées sur les figures 3.62 et 3.63.

VPD - SV -  $I=0.001$  -  $K=70$  - INF. AV. = 1.2M



*Figure 3.62*

SV ET VPD AVEC ET SANS INFLUENCE AVAL



*Figure 3.63*

Les conventions de trait sont identiques à celles des figures 3.59 et 3.60. On retrouve que la réponse du modèle VPD est très proche de celle du modèle complet de Saint-Venant lorsqu'il n'y a pas d'influence aval. En revanche, l'influence aval modélisée avec VPD (trait pointillé serré) est très différente de celle modélisée par le modèle complet (trait pointillé lâche).

Les différences sont moindres sur les hauteurs (mesurées toujours à la distance  $L/2$ ) que sur les hydrogrammes mesurés à l'aval. On est toutefois loin de modéliser correctement l'effet de l'influence aval sur l'allure de l'hydrogramme propagé à l'aval du collecteur, et ceci d'autant plus que l'hydrogramme amont est faible. En effet, plus l'hydrogramme amont est faible, plus la célérité calculée par l'expression (3.7) est faible par rapport à la célérité "normale" calculée par la relation  $C = dQ/dS$ .

Dans ces conditions, l'expression de la nouvelle célérité calculée par la relation (3.7) a donc tendance à "freiner" la propagation, alors que l'influence aval simulée par le modèle complet a au contraire tendance à accélérer la propagation.

On aurait pu penser que l'influence aval dans un collecteur "freinerait" l'écoulement et atténuerait donc plus les hydrogrammes qu'avec une condition aval libre. Les hydrogrammes propagés par le modèle complet montrent qu'il n'en est rien et que l'influence aval génère en général un phénomène d'accélération et d'amplification des débits.

En fin de crue, il s'installe un phénomène d'oscillation (débits négatifs) car l'eau est "chassée" du collecteur puis remonte vers l'état d'équilibre.

La modélisation des influences aval par le modèle VPD + calcul de la ligne d'eau (tel qu'il est conçu) est d'autant moins bonne que le débit maximal de l'hydrogramme amont est faible. Moins la crue est importante, plus on se trouve dans le cas d'une propagation d'un signal de faible intensité et de courte longueur d'onde, c'est-à-dire, dans les conditions de prédominance des ondes dynamiques. De plus, nous avons constaté que plus le débit maximal de l'hydrogramme amont est faible, plus la nouvelle célérité calculée avec l'expression (3.7) est faible par rapport à la célérité normale.

### 3-3-4-3 Exemple d'un cas où $Z$ est inférieur à 0.25

D'après les résultats du paragraphe précédent, on est hors du domaine de validité du modèle de crue diffusante lorsque  $Z$  est inférieur à 0.25. Or, si l'on souhaite modéliser les effets d'une influence aval, il n'est pas possible de transformer le tronçon à modéliser en un tronçon hydrauliquement équivalent, puisque la modification de la pente entraîne une modification de l'influence aval (cf. par exemple les courbes 3.57 et 3.58).

Les caractéristiques structurelles sont les mêmes que celles de la figure 3.51 :

collecteur circulaire de diamètre 2300 mm, de longueur  $L = 1000$  m de pente  $I = 5^\circ/1000$  et de Strickler  $K = 70$ . Le débit capable est de :

$Deb = 4.8$  m<sup>3</sup>/s et le produit  $K.I^{1/2} = 1.56$

- trait continu : réponse de SV et VPD avec une condition aval libre
- trait pointillé : SV et VPD avec un niveau aval imposé à 1 mètre
- trait pointillé mixte : idem avec un niveau aval de 2 mètres.

## REPONSES DE SV SELON L' INFLUENCE AVAL

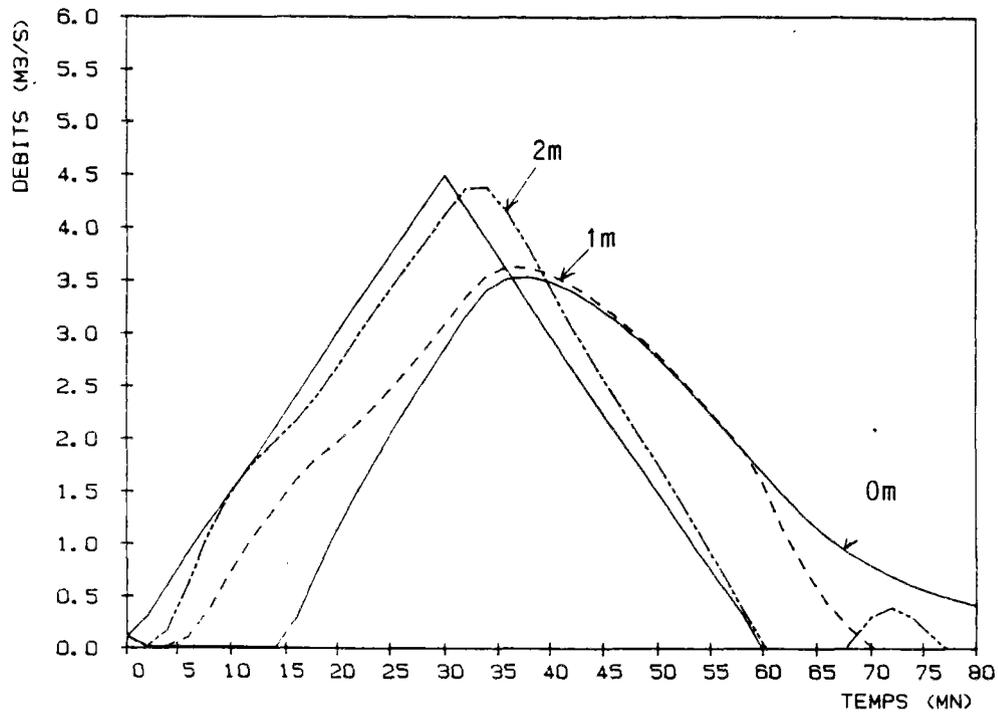


Figure 3.64

## REPONSES DE VPD SELON L' INFLUENCE AVAL

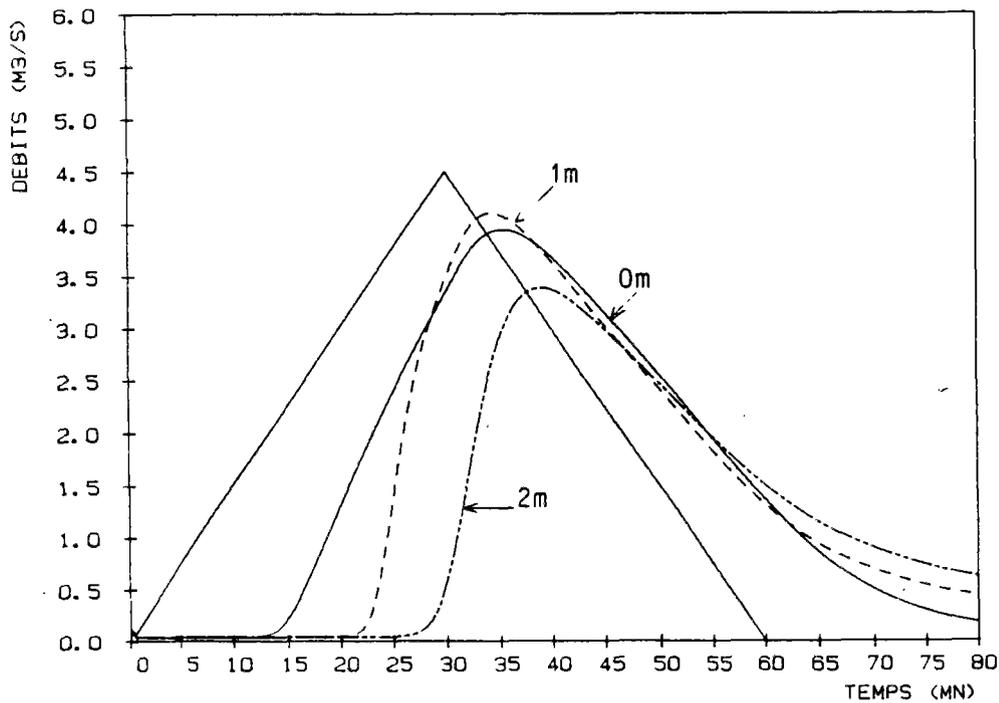


Figure 3.65

## REPONSES DE SV SELON L'INFLUENCE AVAL

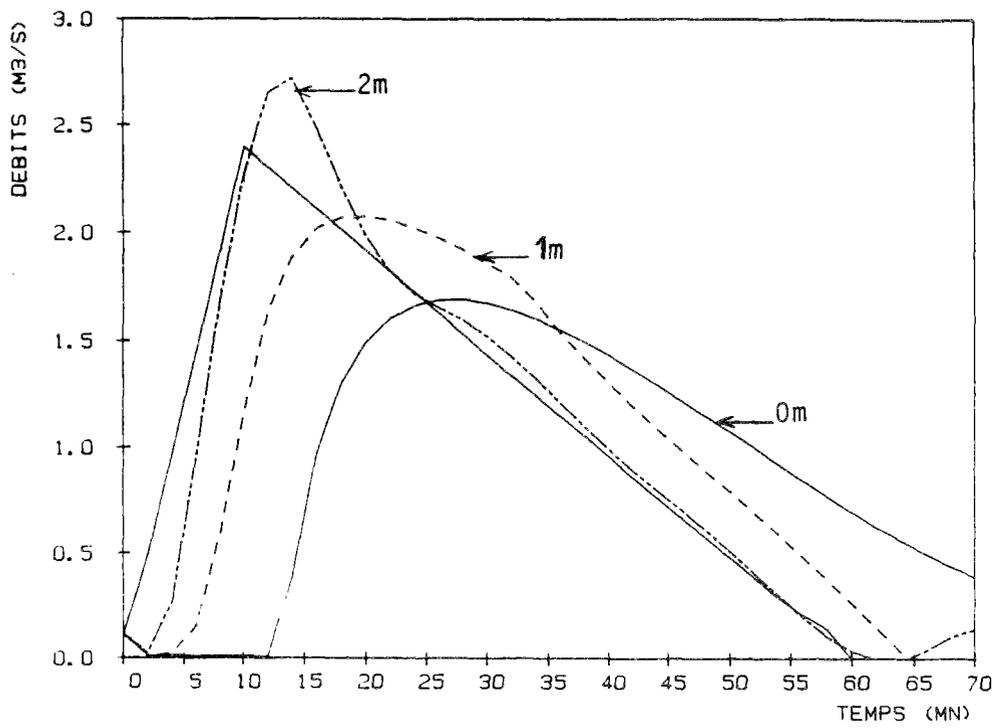


Figure 3.66

## REPONSES DE VPD SELON L'INFLUENCE AVAL

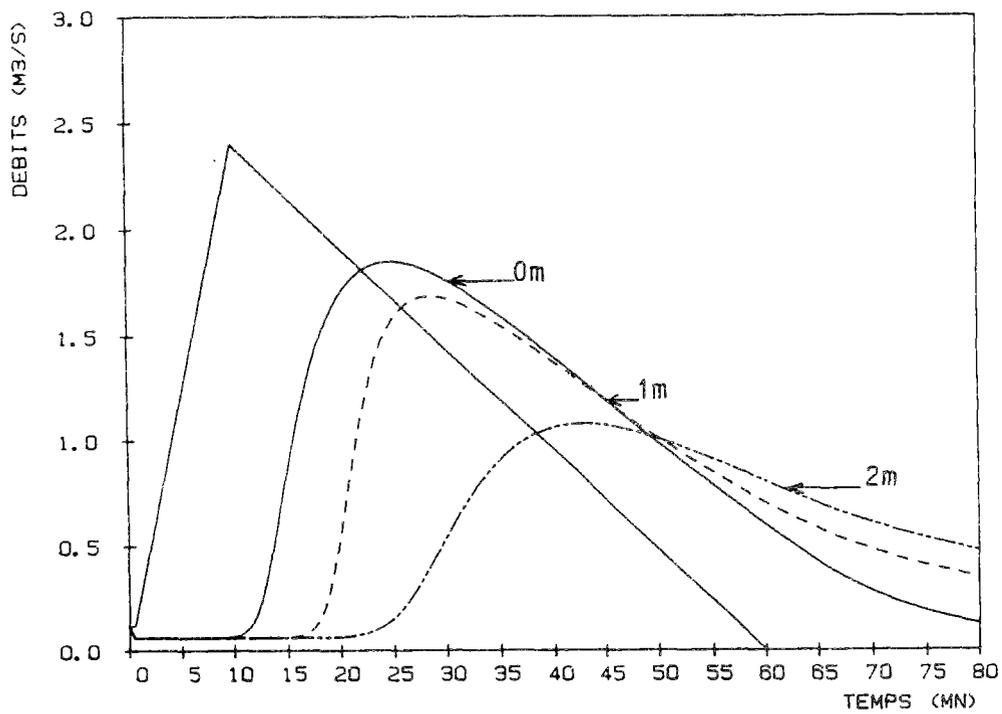


Figure 3.67

Les figures 3.64 et 3.65 montrent les réponses de Saint-Venant et du modèle VPD avec un hydrogramme de type 4. Les figures 3.66 et 3.67 montrent pour les mêmes conditions, les réponses des deux modèles avec un hydrogramme de type 2 (de faible intensité).

Avec le modèle de Saint-Venant, pour les deux types d'hydrogrammes, la propagation s'effectue d'autant plus rapidement que l'influence aval est forte. De même, l'atténuation du débit est d'autant moins grande que l'influence aval est forte. Le temps de décrue est nettement plus rapide lorsqu'il y a une influence aval que lorsque la condition limite aval est libre.

Pour l'hydrogramme de type 2, le phénomène d'amplification des débits est encore plus marqué. Pour une condition aval imposée de 2 mètres, le modèle complet génère un "sur-débit" aval, c'est-à-dire un débit maximal aval supérieur au débit maximal amont.

Avec le modèle VPD + calcul de la ligne d'eau, la diminution du paramètre C (d'autant plus importante que la hauteur d'influence aval est forte) entraîne un retard sur le départ de la crue. Puisqu'on est dans le domaine où Z est plus petit que 0.25, la diminution de C entraîne une diminution de Z. Ceci a pour effet de redresser le front d'onde (dans le cas de la propagation de l'hydrogramme de type 4) et de générer un débit maximal légèrement supérieur au débit maximal sans influence aval (cf. par exemple l'analyse de la figure 3.50).

Pour deux mètres d'influence aval, le calcul de C donne des valeurs beaucoup plus faibles et l'hydrogramme est fortement atténué, alors qu'on constatait, au contraire, une accélération de la propagation des hydrogrammes d'autant plus importante que la hauteur aval imposée était forte.

Lorsque les phénomènes inertiels sont importants, comme c'est le cas par exemple sur la figure 3.66 pour des hauteurs d'influence aval de 2 mètres, on sort du domaine de validité des modèles globaux de type VPD même avec un calcul de la ligne d'eau. Le phénomène de propagation de crue n'est plus du tout de nature parabolique.

### 3-3-4-4 Les phénomènes inertiels causés par une influence aval

#### A) Etude d'un exemple

Pour bien saisir les phénomènes d'inertie mis en évidence dans les exemples précédents, les caractéristiques choisies ont été les suivantes :

- collecteur rectangulaire ouvert de 2 mètres de large ;
- longueur du collecteur 1000 mètres ;
- pente du collecteur nulle ;
- hydrogramme en échelon : débit croissant  $0.112 \text{ m}^3/\text{s}$  à  $4.5 \text{ m}^3/\text{s}$  en 60 secondes puis constant de  $Q = 4.5 \text{ m}^3/\text{s}$  pendant toute la durée du calcul ;
- hauteur de l'influence aval initiale : 2 mètres.

Les simulations ont été effectuées avec  $K = 70$  (figures 3.69 à 3.72) et pour  $K = 40$  (figures 3.73 à 3.76) par la Société Grenobloise d'Aménagements Hydrauliques (SOGREAH) sur leur modèle complet CAREDAH.

La figure 3.68 indique la position des points où sont visualisés les résultats présentés.

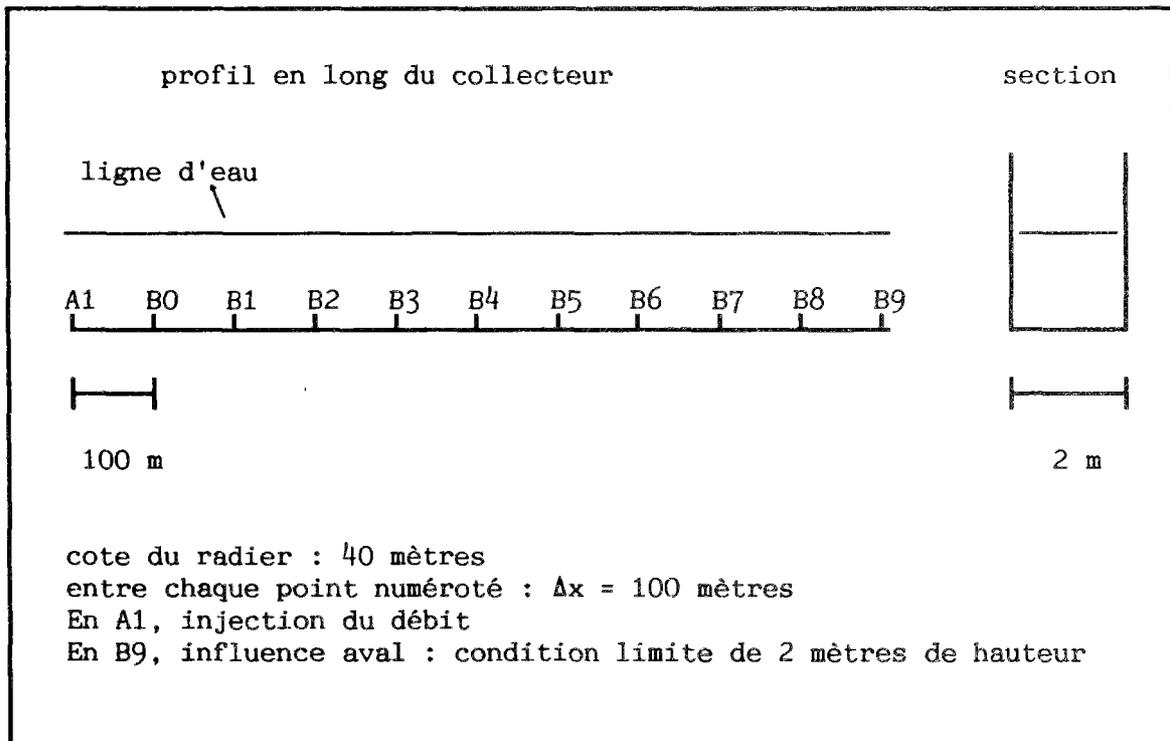


Figure 3.68

Les figures 3.69 et 3.70 montrent la variation des hauteurs et des débits aux différents points référencés du collecteur.

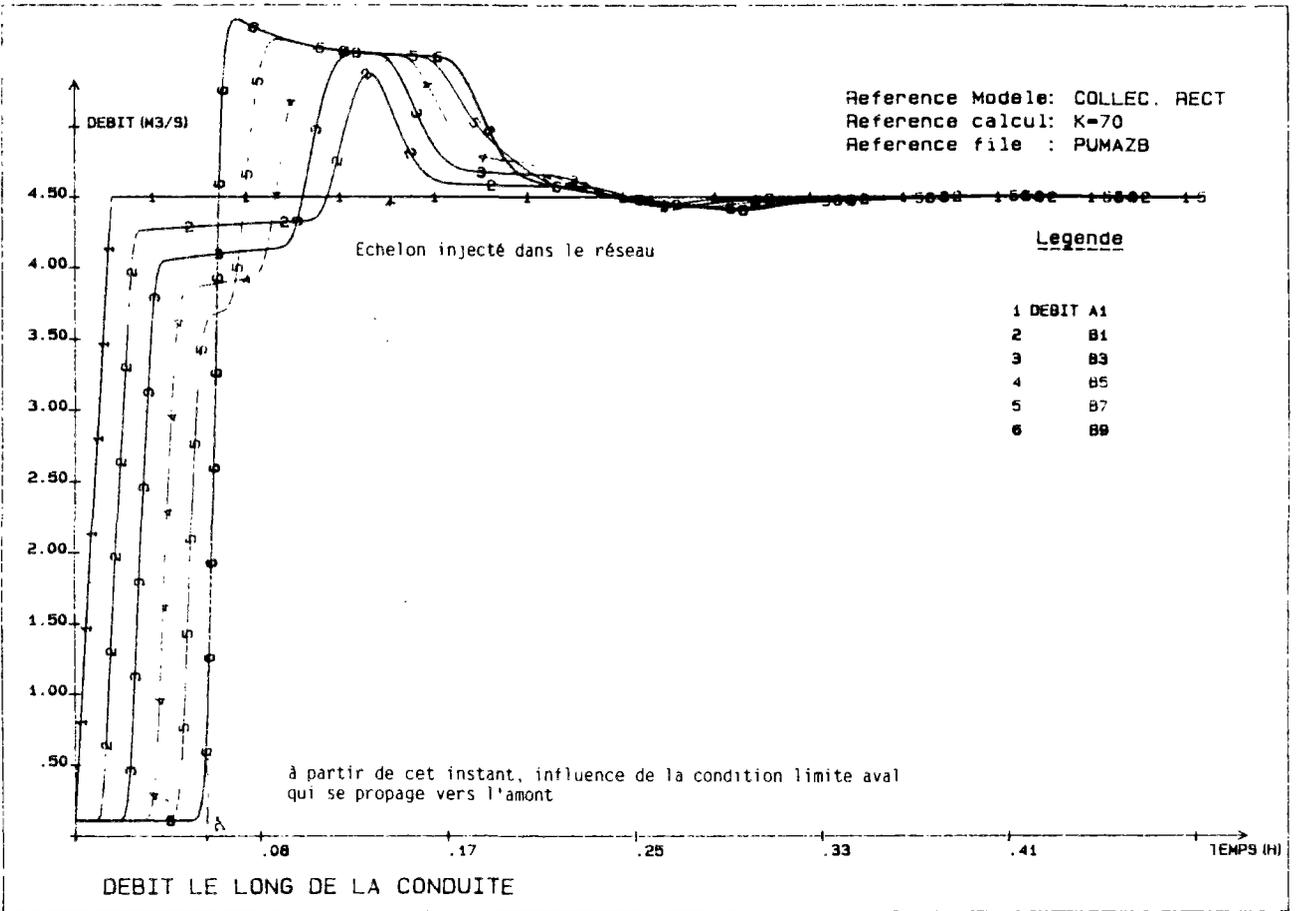


Figure 3.69

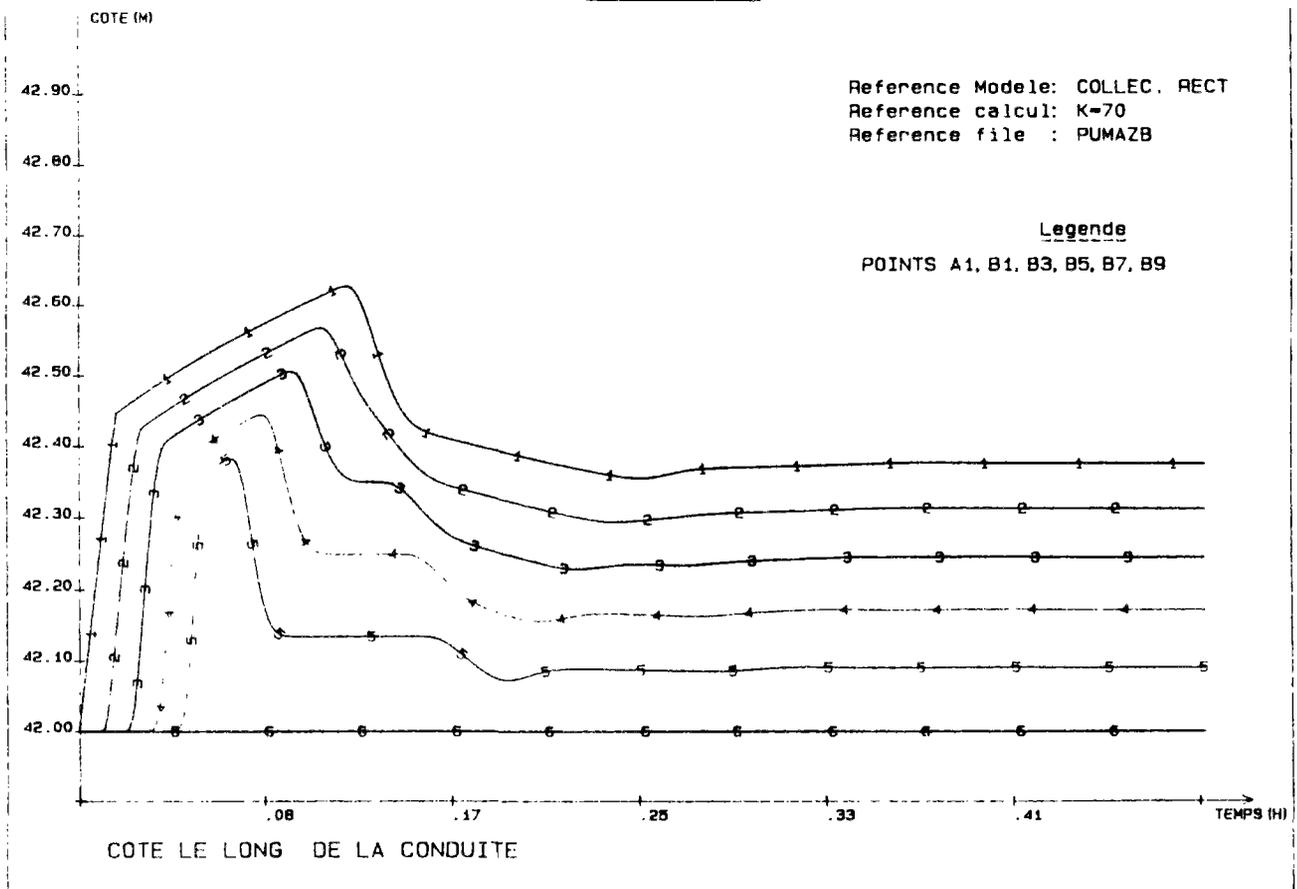


Figure 3.70

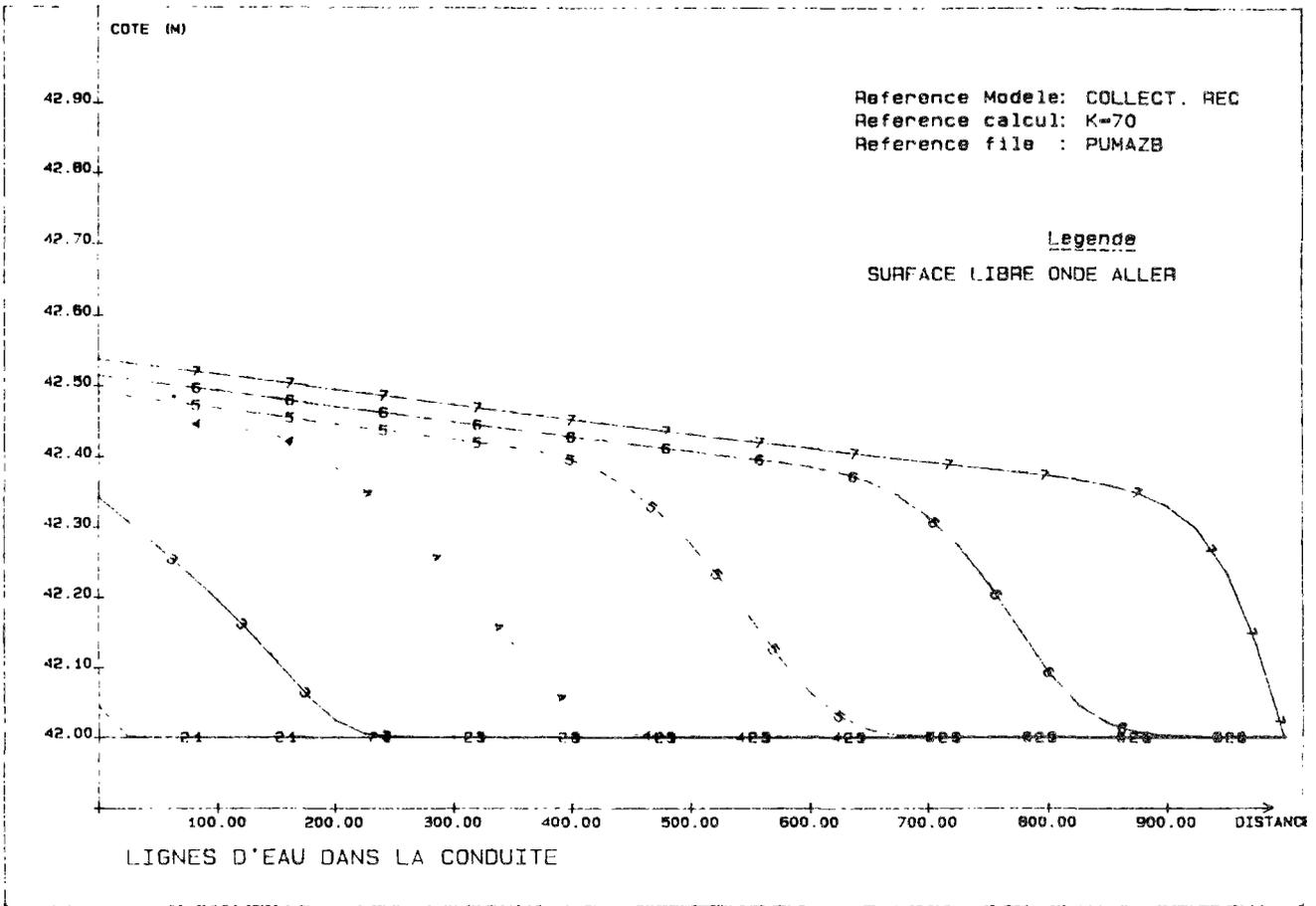


Figure 3.71

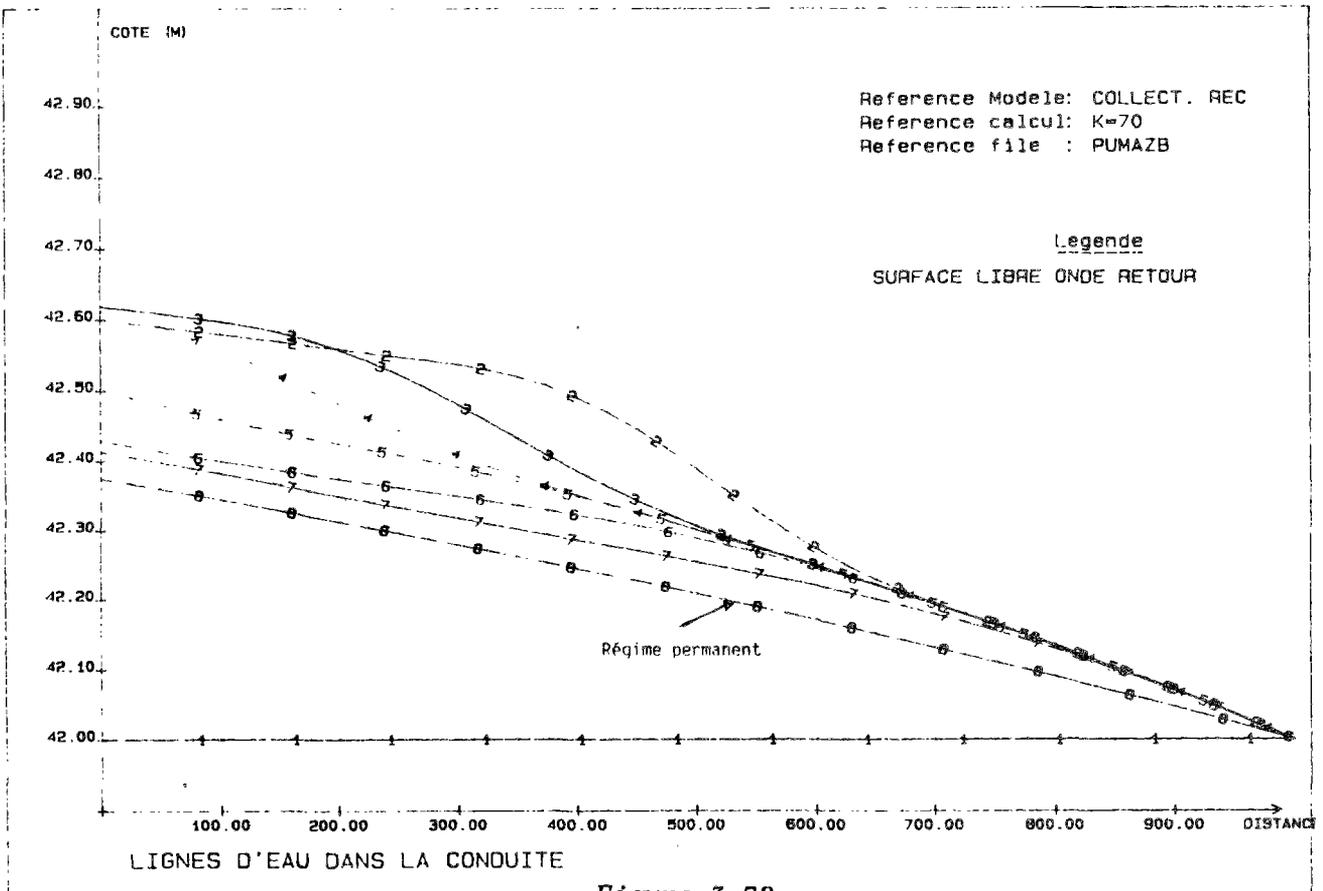


Figure 3.72

Les figures 3.69 et 3.70 peuvent être interprétées à l'aide des figures 3.71 et 3.72. L'injection de débit provoque une onde aller comme le montre la figure 3.71 qui représente divers profils en long du collecteur aux instants où la perturbation atteint successivement les points A1, B1, B3, B5, B7, et B9. Le trait n° 7 de la figure 3.71 correspond à l'instant à partir duquel il y a réflexion de l'onde sur la condition limite aval. L'onde retour provoque un affaissement rapide de la ligne d'eau et un déstockage. Ce déstockage est à l'origine des "sur-débits" représentés sur la figure 3.69. Ceux-ci sont d'autant plus importants qu'on est proche de l'aval. Ils apparaissent d'abord à l'aval et avec la remontée de l'onde retour, apparaissent successivement aux points B7, B5, B3, B1 et A1. L'onde de sur-débit suit l'onde retour et se propage vers l'amont.

L'onde aller provoque un phénomène de stockage qui engendre, lors du retour de l'onde, un phénomène de destockage caractérisé par les sur-débits observés.

Les figures 3.73 à 3.75 montrent pour des conditions analogues mais avec un Strickler de  $K = 40$ , le phénomène de stockage-déstockage observé sur les courbes 3.69 à 3.72. Cette fois, les frottements sont prépondérants et les "sur-débits" sont beaucoup plus faibles. L'équilibre est atteint beaucoup plus rapidement et le passage du régime permanent initial où  $Q = 0.112 \text{ m}^3/\text{s}$  au régime permanent final où  $Q = 4.5 \text{ m}^3/\text{s}$  s'effectue de manière régulière car les ondes dynamiques sont très vite amorties.

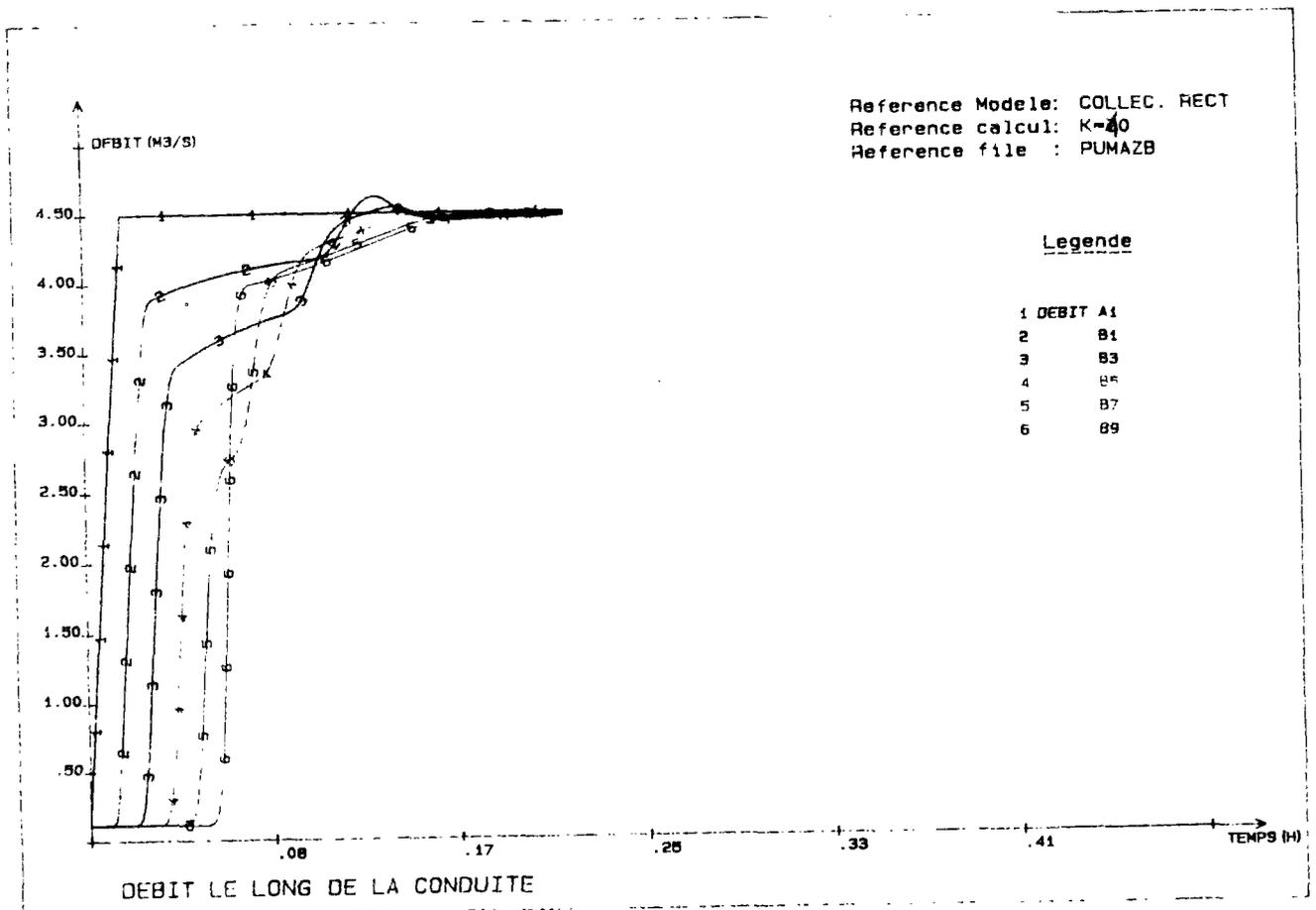


Figure 3.73

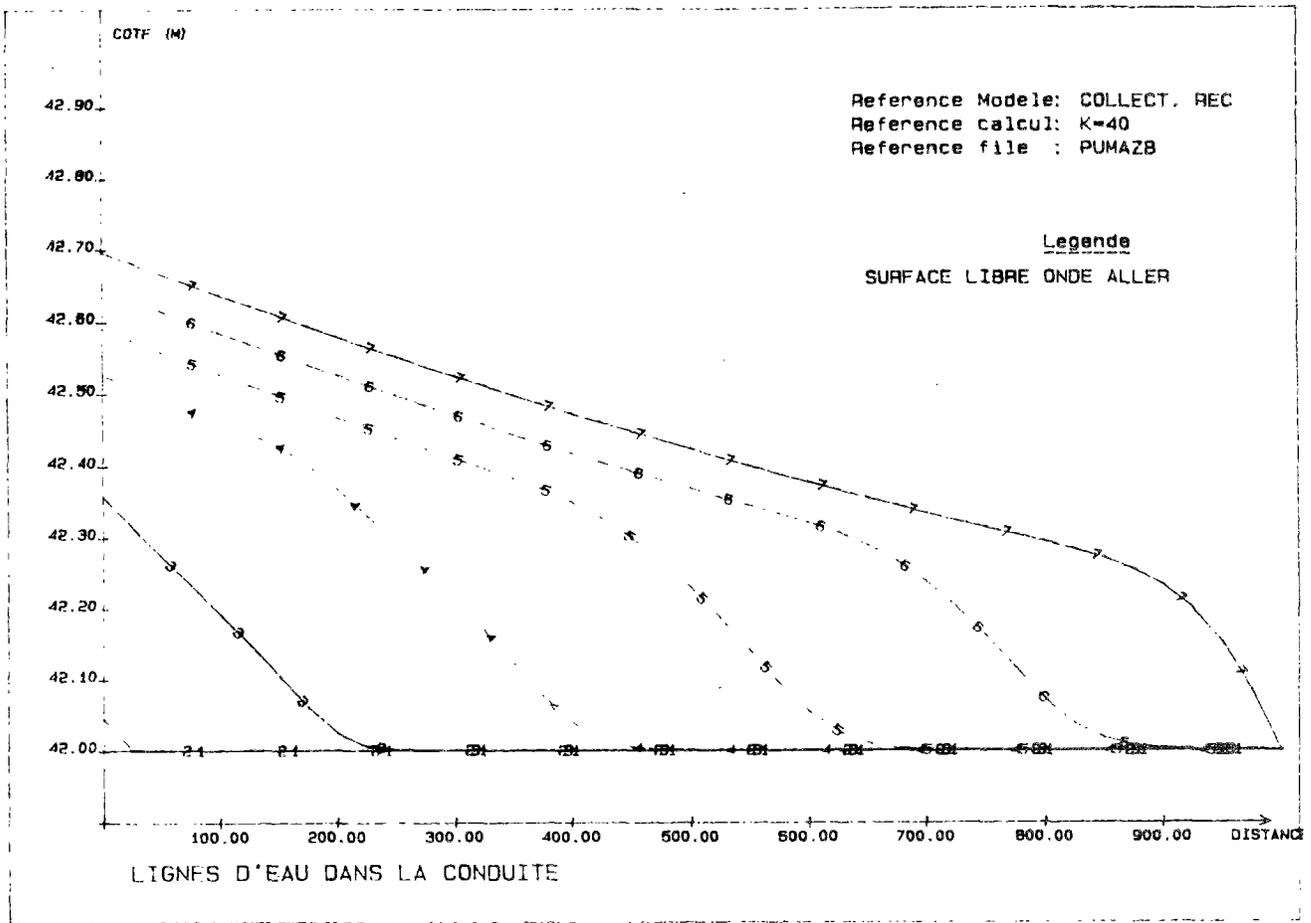


Figure 3.74

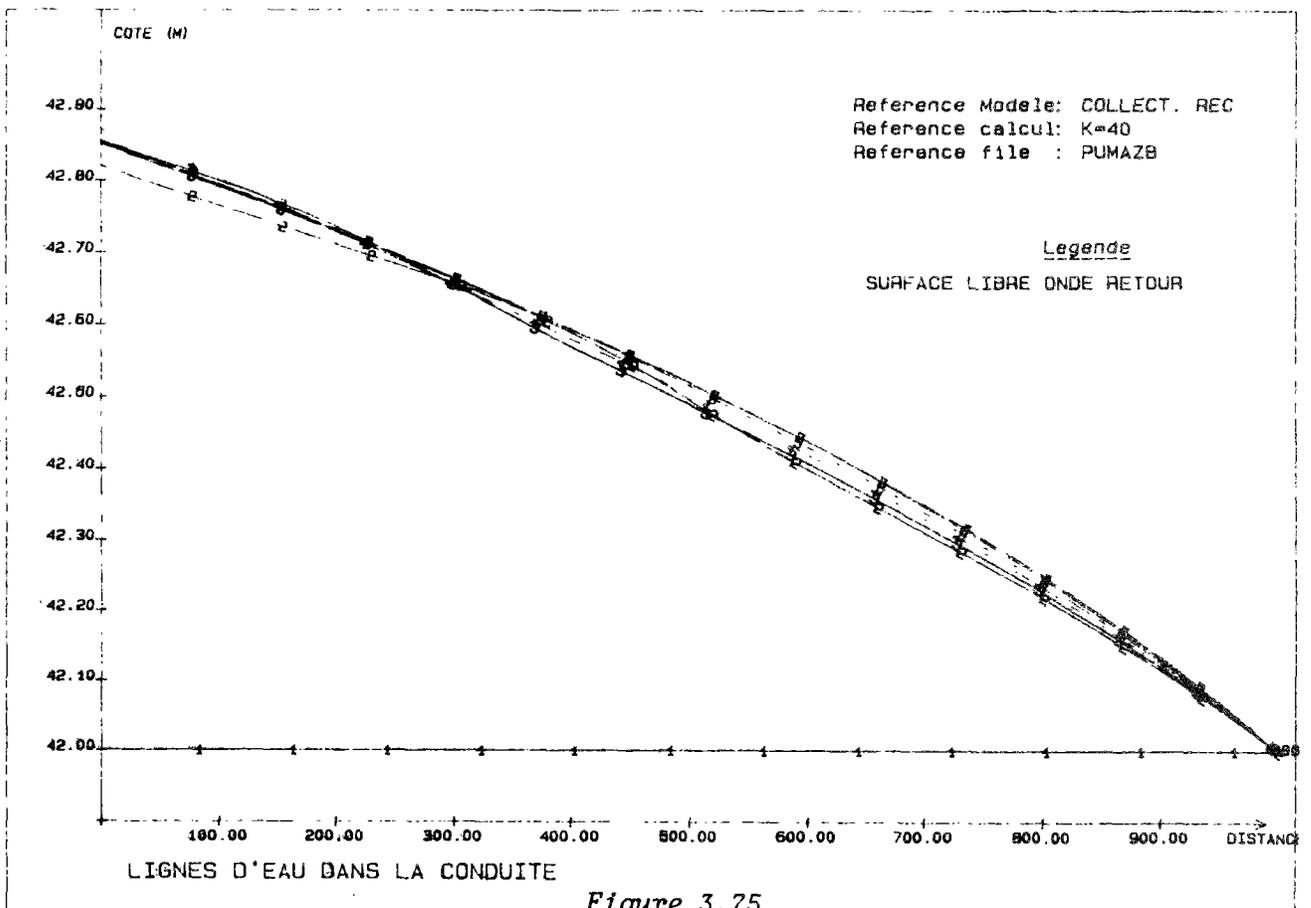


Figure 3.75

Les ordres de grandeur des différents termes de l'équation dynamique du système de Saint-Venant sont les suivants.

Dans le cas où  $K=70$  :

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = 1.73 \times 10^{-3} \quad \text{et} \quad J = \frac{Q^2}{K^2 S^2 Rh^{4/3}} = 3.22 \times 10^{-4}$$

Dans le cas où  $K = 40$  :

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = 1.73 \times 10^{-3} \quad \text{et} \quad J = \frac{Q^2}{K^2 S^2 Rh^{4/3}} = 10^{-3}$$

puisque :  $Q = 4.5 \text{ m}^3/\text{s}$  ;  $S = 4.4 \text{ m}^2$  ;  $P = 6 \text{ m}$  et  $Rh = 4.4/6 = 0.73 \text{ m}$

Pour  $K = 70$ ,  $J$  est très inférieur à  $g \cdot \partial v / \partial t$  alors que pour le cas où  $K=40$ ,  $J$  est du même ordre de grandeur que  $g \cdot \partial v / \partial t$ .

### B) Explications théoriques

Vérifions que les résultats obtenus correspondent effectivement au comportement du système de Saint-Venant et non pas à un comportement numérique du programme.

Un raisonnement théorique basé sur l'examen des caractéristiques permet d'interpréter les phénomènes de sur-débit et de stockage-destockage observés précédemment. On utilise les courbes caractéristiques et le formalisme de Saint-Venant.

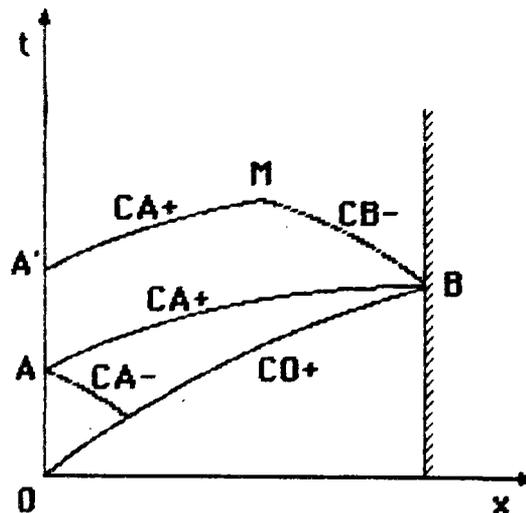


Figure 3.76

On suppose une vitesse  $W$  constante imposée à l'amont ( $x = 0$ ) à partir du temps  $t = 0$ .

Le long des courbes caractéristiques, si  $V$  est la vitesse de l'écoulement et  $C$  la célérité de l'onde, on a :

$$V + 2C = \text{constante} \quad \text{sur la } C+,$$

$$V - 2C = \text{constante} \quad \text{sur la } C-,$$

Sur la droite  $x = 0$ , le point A se déplace vers le haut et on peut écrire pour tout point A de  $x = 0$  :

$$V_A = W \text{ (condition limite)}$$

$$V_A - 2C_A = V_0 - 2C_0 = -2C_0 \quad \text{puisque} \quad V_0 = 0$$

$$\text{On obtient ainsi : } C_A = C_0 + V_A/2 = C_0 + W/2$$

La célérité  $C_A$  de l'onde qui part de A est supérieure à la célérité  $C_0$  qui part de 0.

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_A = C_0 + V_A/2 > C_0 = \left. \frac{dx}{dt} \right|_0$$

Il y a donc un risque de choc (vague déferlante sur la surface libre de type Mascaret).

S'il y a choc, on ne peut rien calculer par cette méthode.

S'il n'y a pas de choc, on peut écrire sur la courbe  $C_{A+}$  :

$$V_A + 2C_A = V_B + 2C_B$$

B est le point sur  $x = L$  à partir duquel l'écoulement est perturbé par la vitesse imposée en  $x = 0$  (cf. figure 3.76). Le temps  $t(B)$  correspond à l'instant où l'onde aller arrive en  $x = L$ .

Par ailleurs  $C_B = C_0$  (condition limite aval)

d'où on en déduit les vitesses en B :

$$V_B = W + W + 2C_0 - 2C_0 = 2W$$

On a donc une vitesse double au point B qui est le point de réflexion de l'onde aller sur la condition limite aval.

En un point M soumis à l'onde retour de B (cf. figure 3.76) :

$$V_M + 2C_M = V_{A'} + 2C_{A'} = V_A + 2C_A = 2C_0 + 2W$$

$$V_M - 2C_M = V_B - 2C_B = 2W - 2C_0$$

Finalement,  $V_M = 2W$  et  $C_M = C_0$

On peut donc conclure :

- pour l'onde aller, on propage de A en B à la célérité  $C_A = C_0 + W/2$  et l'écoulement a une vitesse  $W$  (onde aller durant laquelle s'effectue le stockage).
- pour l'onde retour, en M, on propage à la célérité  $C_0$  et l'écoulement a une vitesse  $2W$  (onde retour qui crée un destockage).

Si on calcule les débits :

$$\frac{Q}{L}(\text{onde aller}) = W \cdot \frac{C_A^2}{g} = \frac{W}{g} \cdot \left[ C_0 + \frac{W}{2} \right] = \frac{W \cdot C_0^2}{g} \cdot \left[ 1 + \frac{W}{C_0} \right]^2$$

$$\frac{Q}{L}(\text{onde retour}) = 2 \cdot \frac{W \cdot C_0^2}{g}$$

$$\underline{1^{\text{ier}} \text{ cas}} : W < C_0 \quad \text{alors } (1 + W/C_0)^2 < 2$$

Le débit de l'onde retour est supérieur à celui de l'onde aller. C'est le cas constaté sur l'exemple traité précédemment.

$$\underline{2^{\text{ème}} \text{ cas}} : W > C_0$$

Le débit de l'onde aller est supérieur à celui de l'onde retour.

### C) Conclusion

L'exemple présenté dans ce paragraphe a mis en lumière que, sous certaines conditions, les phénomènes inertiels peuvent modifier fortement la propagation des hydrogrammes. Nous avons confirmé que la valeur du coefficient de Strickler avait une grande importance. Dans le cas traité, la variabilité de la condition amont est très grande puisque le débit passe de 0.112 m<sup>3</sup>/s à 4.5 m<sup>3</sup>/s en une minute. Malgré la longueur d'onde très courte du signal amont, lorsque le coefficient de Strickler est faible (voisin de 40), les phénomènes inertiels sont très rapidement amortis.

Les exemples que nous avons présentés aux paragraphes 3-3-4-2 et 3-3-4-3 montraient des différences importantes entre Saint-Venant et le modèle VPD lorsque l'influence aval devenait forte. Néanmoins, le coefficient de Strickler était fixé à  $K = 70$ , c'est-à-dire, correspondait à des conditions d'écoulement où l'inertie peut être prépondérante (notamment dans les cas où une condition aval forte est imposée).

### 3-3-4-5 Etude d'un écoulement à frottements forts

Reprenons les conditions du paragraphe 3-3-4-3 avec un coefficient de Strickler faible, fixé à  $K = 50$ . Dans ce cas, le débit capable du collecteur diminue. Pour garder un débit capable de  $4.8 \text{ m}^3/\text{s}$ , il faut prendre un diamètre de  $2600 \text{ mm}$  (au lieu de  $2300 \text{ mm}$ ).

Pour un hydrogramme de type 1, une longueur de  $L = 1000 \text{ mètres}$ , le paramètre  $Z_{\text{min}} = 0.10$  puisque  $C(Q_{\text{max}}) = 0.97 \text{ m/s}$  et  $D(Q_{\text{max}}) = 2342 \text{ m}^2/\text{s}$

Nous avons tracé sur les figures 3.77 à 3.80, les résultats en hauteur et en débit du modèle de Saint-Venant complet SV et du modèle non-linéaire de crue diffusante VPD.

Réponses sans influence aval : trait continu SV

trait pointillé mixte : VPD

Réponses avec 1 mètre d'influence aval : trait pointillé lâche SV

trait pointillé fin VPD

La figure 3.77 montre les hydrogrammes à  $1000 \text{ mètres}$  à l'aval. Pour une longueur  $L = 1000 \text{ mètres}$ ,  $Z = 0.1 < 0.25$ . La réponse de VPD est décalée (durée de propagation plus courte que SV et atténuation plus faible). Pour une condition aval de  $1 \text{ mètre}$ , l'influence des termes d'inertie sur la réponse de SV est presque négligeable bien qu'on observe encore les effets d'amplification du débit maximal et de non-linéarité forte à la décrue.

VPD ; SV -  $I=0.0005$  -  $K=50$  - AVEC ET SANS INF. AV.

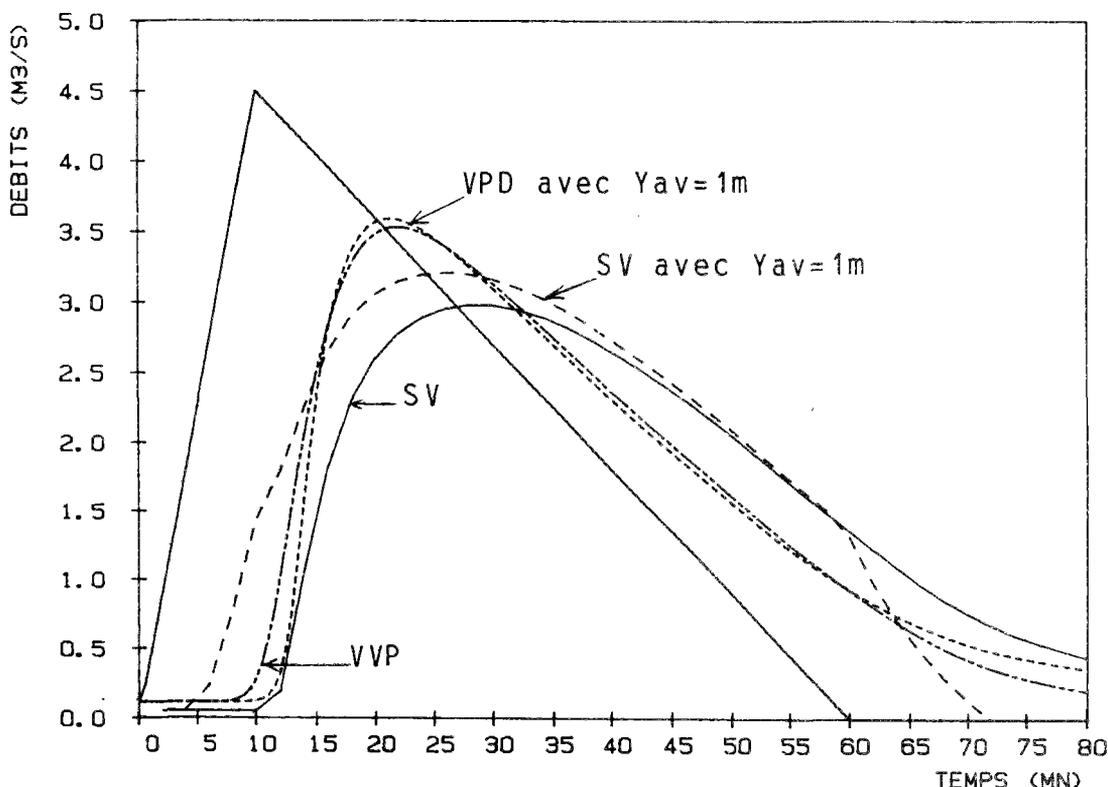


Figure 3.77

A la distance  $L = 500$  mètres de l'amont (mi-parcours entre l'amont et l'aval), bien que  $Z = 0.05$ , on bénéficie de l'éloignement de l'aval (500 mètres) ce qui permet de s'affranchir de l'influence de la condition limite aval en débit nécessaire à la fermeture des équations du schéma VPD. La réponse du modèle VPD et celle du modèle complet sont proches. L'influence de la condition aval en hauteur est faible sur la réponse de Saint-Venant comme sur celle du modèle VPD.

Les figures 3.78 et 3.79 montrent les réponses du modèle complet SV et de VPD en hauteur et en débit à la distance  $L = 500$  mètres.

La figure 3.80 montre les courbes de tarage correspondantes pour les deux modèles dans le cas où un mètre de hauteur d'eau est maintenu à l'aval du tronçon de 1000 mètres. Les courbes  $y(Q)$  sont calculées à la distance  $L = 500$  mètres ce qui explique que la hauteur de début et de fin de crue est de 75 cm puisque la pente est de  $5^\circ/\dots$ . La courbe en trait plein est la courbe  $y(Q)$  du modèle complet et la courbe en trait pointillé mixte est la courbe  $y(Q)$  du modèle simplifié.

VPD ; SV -  $I=0.0005$  -  $K=50$  - INF. AV. = 1M

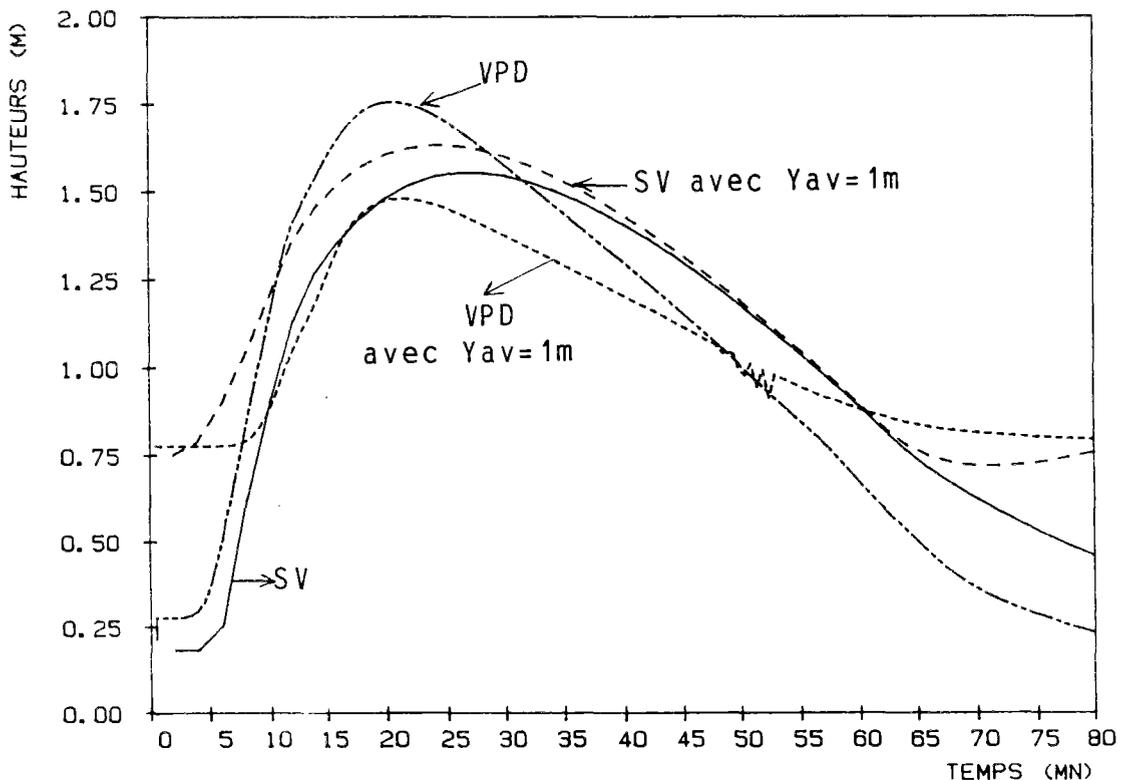
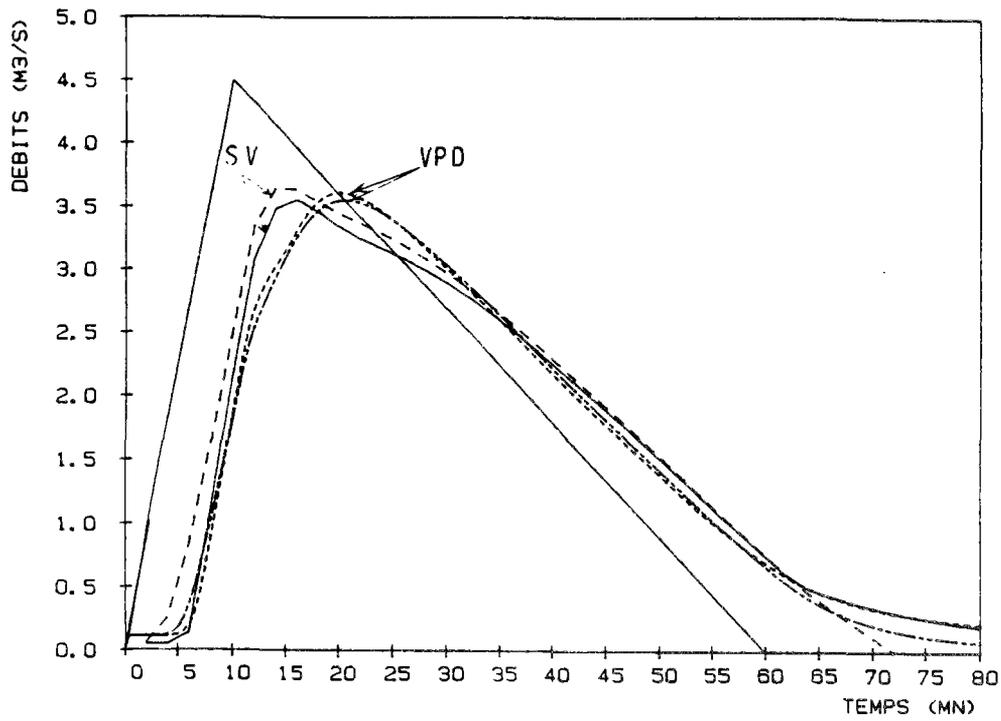


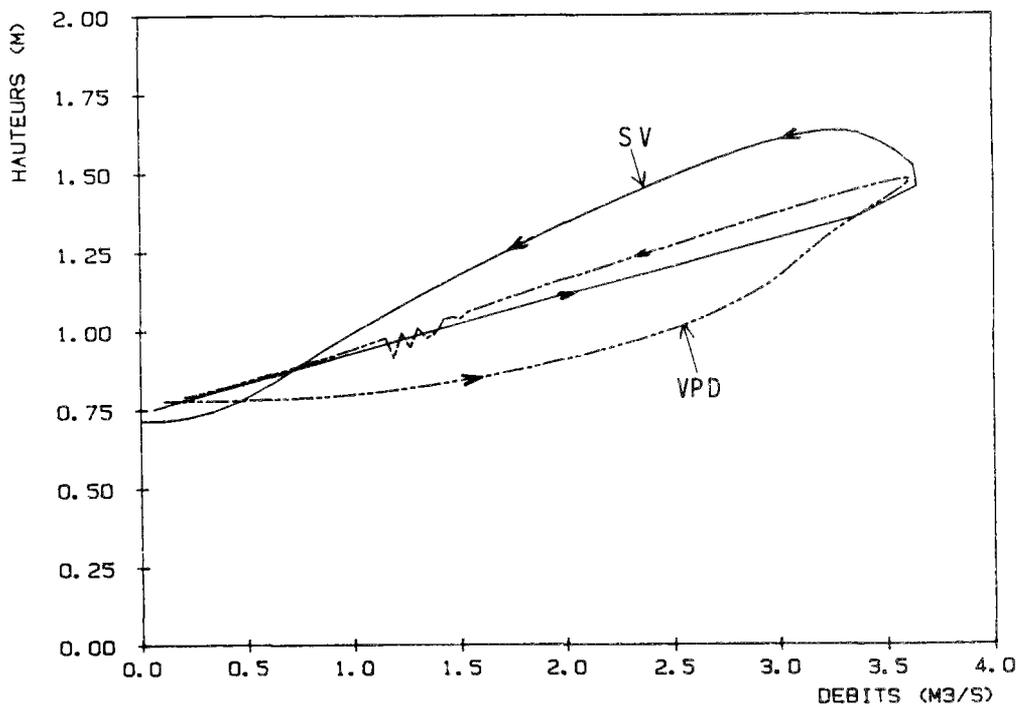
Figure 3.78

VPD ; SV -  $I=0.0005$  -  $K=50$  - AVEC ET SANS INF. AV.



*Figure 3.79*

VPD ; SV -  $I=0.0005$  -  $K=50$  - INF. AV. = 1M



*Figure 3.80*

### 3-3-4-6 Conclusions

Le calcul de la ligne d'eau du modèle VPD ne donne pas de bons résultats dans les cas où les influences aval entraînent des phénomènes inertiels importants. En revanche, l'influence d'une condition aval pourra être d'autant mieux modélisée par le modèle VPD que le Strickler est faible, que la pente est forte, et que l'hydrogramme amont à les caractéristiques : débit maximal proche du débit capable et "variabilité" lente.

### Amélioration du calcul des débits

On pourrait par ailleurs chercher d'autres expressions du calcul de C et D (après avoir remonté la ligne d'eau) qui soient physiquement acceptables et qui permettent de reproduire ces phénomènes d'accélération constatés sur les réponses du modèle complet.

Pour le modèle complet, la célérité de propagation des hydrogrammes augmente avec la hauteur d'influence aval, alors qu'elle diminue pour le modèle de crue diffusante VPD, dès que l'influence aval est forte et que les hydrogrammes propagés sont faibles. Cette diminution est conséquente à l'expression (3.7) qui relie la célérité de propagation des hydrogrammes à la hauteur d'eau remontée au pas de temps précédent.

En examinant les différentes réponses du modèle de Saint-Venant en fonction de la hauteur d'influence aval, on constate que l'augmentation de la hauteur d'influence aval a approximativement le même effet que l'augmentation du paramètre D (C étant fixé) pour le modèle de crue diffusante (cf. figure 3.50 au paragraphe 3-3-3-3) lorsque le paramètre Z est inférieur à 0.25.

La corrélation de l'augmentation de la hauteur de l'influence aval à une augmentation arbitraire (ou en tous cas, non physiquement justifiable) du paramètre D, permettrait d'obtenir dans plusieurs cas, la même atténuation et la même durée de propagation avec les deux modèles (VPD et le modèle complet de Saint-Venant).

Dans ce cas, on considère VPD non plus comme une boîte grise mais comme une boîte noire où le paramètre D est un paramètre de calage déconnecté de toute signification physique mais dont les valeurs sont choisies en fonction des contraintes physiques. Si on dispose de plusieurs mesures, on peut établir des "abaques" donnant D en fonction de la hauteur aval et de l'intensité du débit amont.

Une recherche optimale des paramètres C et D pour reproduire le mieux possible les effets constatés sur un modèle complet de Saint-Venant ou sur des données n'est pas sans difficultés :

- il n'est pas possible d'obtenir des phénomènes d'amplification (constatés par exemple sur les réponse du modèle complet pour les fortes influences aval) avec une équation parabolique de type crue diffusante, que l'on utilise un module de calcul de ligne d'eau ou non. Quelle que soit la valeur des paramètres C et D, on obtiendra toujours une réponse atténuée (ou au plus égale) de forme approximativement parabolique.

- en particulier, on a pu noter sur les exemples précédents qu'à débit maximal et durée de propagation identiques, l'aplatissement de l'hydrogramme amont était toujours plus faible avec le modèle VPD qu'avec le modèle SV.
- après avoir déterminé la réponse de Saint-Venant, il est toujours possible de choisir C et D tels que la réponse de VPD soit identique en ce qui concerne la durée de propagation et l'atténuation du débit de pointe (tant qu'il n'y a pas de phénomènes de "sur-débites"). Néanmoins, si le calcul de C et D ne se fait pas par des relations physiquement réalistes, (telles que celles choisies pour VPD), il sera difficile d'effectuer des simulations destinées à prévoir le comportement du réseau.

### Impossibilité de modéliser les phénomènes inertiels

Le modèle de crue diffusante avec ou sans calcul de ligne d'eau est avant tout un modèle global. Il ne permet pas de modéliser des phénomènes inertiels tels que ceux qui ont été modélisés dans le paragraphe précédent.

Lorsque des phénomènes inertiels importants sont détectés ou présumés, il est préférable d'utiliser un modèle complet de Saint-Venant.

Toutefois, s'ils sont très importants (tels que ceux du paragraphe précédent où  $K = 70$ ), la modélisation du modèle complet ne garantit pas une simulation d'un comportement qui se produit effectivement dans la réalité. Numériquement, le modèle complet peut intégrer correctement le système de Saint-Venant mais on est ici aux limites de validité des équations de Saint-Venant. Les phénomènes d'accélération, stockage, et déstockage sont modélisés correctement par Saint-Venant que si l'accélération verticale est négligeable, ce qui n'est sans doute pas toujours le cas, compte tenu de la nature des phénomènes. Par ailleurs, nous sommes toujours restés dans l'hypothèse où aucun choc n'était généré mais les chocs ne sont pas du tout à exclure si des conditions telles que celles simulées au paragraphe précédent se trouvent être effectivement celles d'un cas réel concret.

Le module de calcul de la ligne d'eau de VPD ne permet pas de modéliser les phénomènes inertiels qui modifient les conditions de l'écoulement lorsque l'influence aval est forte. Si ces phénomènes inertiels sont jugés peu importants, le module de calcul de la ligne d'eau permet en revanche d'évaluer approximativement les hauteurs d'eau dans les tronçons soumis à l'influence aval, plus précisément qu'avec la simple relation de Manning-Strickler.

### Amélioration du calcul de la ligne d'eau

La modélisation de la ligne d'eau dans un modèle de crue diffusante tel que le modèle VPD ne permet donc pas d'obtenir un modèle équivalent à un modèle complet. On peut néanmoins améliorer le module actuel de calcul de la ligne d'eau. En effet, il n'est pas prévu de modéliser l'influence aval d'un écoulement fluvial lorsque la condition aval est libre. Néanmoins, en donnant une condition limite identique à celle utilisée dans le modèle complet, de type loi hauteur-débit univoque à l'aval du réseau, il est possible de remonter la ligne d'eau par le calcul de celle-ci comme si on était en régime permanent.

On pourrait ainsi retrouver la courbe de tarage obtenue avec le modèle complet quand la condition aval est libre.

De même, au lieu d'interrompre le calcul des hauteurs dès que la hauteur normale est atteinte, on pourrait continuer celui-ci jusqu'en amont du réseau. Ce calcul complet permettrait de prendre en compte le phénomène d'hystérésis de la courbe  $Q(y)$  modélisé par le modèle complet.

#### Lien entre phénomènes inertiels et condition limite aval

Nous avons pu constater au cours des paragraphes 3-3-3 et 3-3-4 que les phénomènes inertiels (d'onde dynamique) sont étroitement liés aux conditions limites, et plus particulièrement aux conditions à la limite aval.

Lorsqu'on ne connait pas la condition limite aval, les différences entre les réponses de Saint-Venant et celles d'un modèle de crue diffusante sont souvent négligeables, pourvu qu'on prolonge fictivement l'aval du bief de calcul pour limiter l'influence de la condition aval théorique sur les réponses de Saint-Venant et du modèle de crue diffusante.

Lorsqu'on connait la condition limite aval, on ne peut pas la prendre en compte de la même manière dans le modèle complet et dans les modèles simplifiés. Le découplage entre la hauteur et le débit dans les modèles simplifiés empêche de modéliser le "dynamisme de l'écoulement" et les phénomènes inertiels qui sont causés par la condition limite aval.

Les conditions théoriques de validité des modèles simplifiés étudiées dans le paragraphe 2-1-3 en fonction des ordres de grandeur des termes de l'équation de Saint-Venant ne pouvait donc pas aboutir à des critères précis puisqu'il n'était pas possible de prendre en compte l'influence des conditions limites. Notre étude confirme que dans la plupart des cas où la condition aval est inconnue (et supposée sans influence sur l'amont), les modèles simplifiés sont applicables. Dans les autres cas, l'atténuation des ondes dynamiques est beaucoup fonction du coefficient de Strickler, mais aussi de la pente. Les ondes dynamiques sont d'autant plus importantes dans le phénomène de propagation de crue que la hauteur de l'influence aval est forte.

### 3-3-5 CONCLUSIONS

#### 3-3-5-1 Domaines de validité hydraulique des modèles

Nous avons déterminé des domaines d'application des différents modèles simplifiés, par référence à un modèle complet de Saint-Venant.

Le premier domaine correspond à des collecteurs de pente de l'ordre de 1% ou plus, où le nombre de Froude est supérieur à 1.5, et où le nombre de Reynolds total R est inférieur à 0.05.

Le modèle complet a un comportement de translation simple. La durée de propagation des réponses du modèle complet peut être calculée par l'une des relations permettant le calcul de km (cf. §3-2-4-2). L'atténuation des débits est négligeable ce qui permet d'utiliser un modèle de translation simple. Il faut néanmoins vérifier que la longueur de simulation n'est pas trop grande (par exemple, ne dépasse pas C.Tc). Tous les modèles simplifiés sont utilisables sauf VPD qui est instable (cf. §3-2-2-9).

Le deuxième domaine correspond à des collecteurs de pente moyenne (voisine de 5°/..) où le nombre de Froude est voisin de 1, et où R reste compris entre 0.05 et 0.5. Dans ce cas, on peut en général identifier la diffusion des modèles cinématiques à la diffusion hydraulique D (voir les clauses restrictives dans la conclusion 3-2). Tous les modèles sont alors équivalents et peuvent être utilisés.

Les termes d'inertie des équations de Saint-Venant sont négligeables et la condition limite aval nécessaire à la fermeture du système de Saint-Venant n'a pas d'influence sur l'écoulement.

Le troisième domaine est défini par  $0.5 < R < 2$ . Les modèles cinématiques et Muskingum ne peuvent en général être appliqués en identifiant la diffusion numérique des schémas à la diffusion hydraulique D :

- soit parce que la diffusion numérique n'est plus "pilotable" par l'intermédiaire du paramètre  $\theta$  (cf. résultats des paragraphes 3-2-2-6 et 3-2-2-7 pages 173 à 175);
- soit parce que le nombre de Reynolds local  $Cr$  est supérieur à 2, (à cause du choix d'un pas d'espace petit ou de pentes trop faibles).

Dans ce domaine, le modèle de crue diffusante a un fonctionnement numérique normal et reste applicable tant que le changement de comportement du modèle n'est pas apparu (ce qui doit être en général le cas puisque R reste inférieur à 2).

Le quatrième domaine est défini par  $R > R_c \approx 2$  et correspond en général aux cas de pentes très faibles où le comportement du modèle de crue diffusante est "non-hydraulique". Les autres modèles simplifiés ne sont plus applicables.

#### a) Définition du 4<sup>ème</sup> domaine

Pour un hydrogramme donné et un tronçon donné, l'utilisation de plusieurs tronçons hydrauliquement équivalents donnera des réponses dont l'allure sera identique à celle de la figure 3.55a (cf. page 236). Partant d'une pente forte et d'un coefficient de Strickler faible, la diminution de  $I$  (lorsqu'on fait varier  $K$  pour que  $K.I^{1/2}$  reste constant) fait augmenter l'atténuation des hydrogrammes propagés qui passe par un maximum avant de diminuer.

Nous appellerons "tronçon critique" de coefficient  $K$  critique (noté  $K_i$ ) et de pente  $I$  (notée  $I_i$ ), le tronçon qui entraîne le maximum d'atténuation pour le modèle de crue diffusante VPD et qui détermine la limite du 4<sup>ème</sup> domaine (notée  $R_c$ ). La pente critique  $I_c$  qui définit le passage d'un régime fluvial à un régime torrentiel n'a évidemment aucun rapport avec la pente  $I_i$  ainsi définie.

Le changement de comportement du noyau  $h_q$  correspond à  $R_c = 0.5$  (cf. figure 3.34 du paragraphe 3-2-5-1) et ne dépend pas de  $k_m = L/C$  alors qu'il en dépend pour la réponse d'Hayami (résultat du produit de convolution du noyau  $h_q$  avec l'hydrogramme amont) ainsi que pour le modèle numérique de crue diffusante. Il intervient néanmoins toujours pour des valeurs de  $R$  supérieures à 0.5 et généralement proches de 2. Le domaine est donc à définir avant chaque application.

#### b) Recherche du tronçon critique

La recherche du tronçon critique hydrauliquement équivalent peut être effectuée simplement à l'aide d'un modèle de crue diffusante semi-linéaire ( $D$  constant). Des simulations avec quelques valeurs de  $D(Q_{max}) = D_m$  correspondant à plusieurs tronçons de  $K$  et  $I$  donnés ( $K$  et  $I$  tels que le produit  $K.I^{1/2}$  soit égal au produit  $K.I^{1/2}$  du tronçon réel) permettront de trouver facilement le tronçon critique. On peut essayer des valeurs de  $D_m$  telles que  $R$  soit proche de 2 puisque  $R_c = 2$  correspond approximativement au changement de comportement du modèle de crue diffusante.

#### c) Utilisation du modèle de crue diffusante

Si la pente du tronçon réel est supérieure à la pente  $I_i$ , on pourra utiliser le modèle de crue diffusante directement. Ce cas sera fréquent quand la grande valeur de  $R$  sera causée plutôt par une longueur courte que par une pente faible.

Si la pente du tronçon réel est inférieure à la pente critique  $I_i$ , on est dans un domaine où les modèles de Saint-Venant et de crue diffusante ont des comportements opposés. S'il y a des conditions aval importantes, on ne peut pas utiliser le modèle de crue diffusante. Sinon, après comparaison des réponses du modèle de crue diffusante avec le tronçon réel et le tronçon critique, deux solutions sont possibles :

- si les différences sont peu importantes, on pourra utiliser le modèle de crue diffusante avec le tronçon réel, en prenant toutefois garde de ne pas propager des hydrogrammes très différents de celui ayant servi à évaluer les différences entre les réponses

- avec le tronçon réel et avec le tronçon critique ;
- si les **différences** de réponse entre le tronçon réel et le tronçon critique sont **importantes**, on aura deux solutions pour étendre le domaine de validité de la crue diffusante :
    - on peut **utiliser le tronçon critique** hydrauliquement équivalent au tronçon réel qui permettra d'obtenir une réponse du modèle de crue diffusante proche de celle du modèle complet ;
    - on peut **prolonger fictivement** le tronçon pour diminuer l'influence de la condition limite aval en débit (nécessaire à la résolution du schéma d'intégration de l'équation de la crue diffusante).

### 3-3-5-2 Remarques sur le modèle de crue diffusante

#### a) Le rôle des termes d'inertie

La différence entre un modèle de crue diffusante et un modèle de Saint-Venant complet provient plus des **conditions limites** (celles qui concernent les hauteurs) que de la suppression des termes d'inertie.

Les phénomènes dynamiques représentés par les termes d'inertie n'ont vraiment d'importance que lorsque l'influence d'aval est importante, c'est-à-dire justement lorsque la condition limite aval modifie sensiblement les caractéristiques de l'écoulement.

#### b) Prise en compte de la condition limite aval

Un calcul de la ligne d'eau (aval-amont) intégré au modèle de crue diffusante (tel que celui présenté au paragraphe 3-3-4-4), permet de prendre en compte une hauteur d'influence aval et ainsi de retrouver partiellement l'information sur les hauteurs. Néanmoins, le calcul n'est valable que si cette influence aval ne modifie pas notablement les débits propagés, c'est-à-dire si les phénomènes dynamiques restent faibles (cf. §3-3-4-6 pages 265 à 268)

Le modèle de résolution numérique de l'équation de la crue diffusante permet naturellement de prendre en compte un débit aval comme condition limite. Lorsque le débit aval est inconnu, on peut tester l'influence de la condition limite aval (en débit) sur un modèle de crue diffusante non-linéaire en comparant les réponses du modèle d'Hayami avec le modèle numérique lorsque les paramètres C et D sont choisis constants et identiques à ceux du modèle d'Hayami. Dans ce cas, les différences entre les réponses seront des différences causées par la condition limite aval du modèle numérique (à condition que le schéma de résolution soit consistant et stable).

#### c) Critique du modèle VPD ?

Les **modèles linéaires** cinématiques et Muskingum conservent par construction les **volumes**. De même, il est possible de même de contrôler la conservation des volumes avec les modèles non-linéaires à l'aide par exemple de l'astuce expérimentale présentée dans le paragraphe 3-2-3-3.

Il est en revanche impossible de faire un bilan de masse pour vérifier la conservation des volumes avec un modèle de crue diffusante. Pour des écoulements de pente moyenne entrant notamment dans le domaine 2 précédemment défini, la conservation des volumes est facilement contrôlable, en jouant par exemple sur les paramètres de pondération du schéma (pour VPD, il s'agit des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ ).

Lorsqu'on est dans le domaine où la condition aval (en débit) du modèle de crue diffusante commence à avoir une influence sur les résultats, on est aussi dans un domaine où augmenter la longueur pour s'affranchir de cette influence (comme expliqué ci-avant) entraîne une **perte de volume** importante. Il devient difficile, voire impossible de trouver des valeurs des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  ainsi que des méthodes de calcul du paramètre instantané  $C$  tels que le modèle soit conservatif.

En réalité, on ne sait pas si c'est l'équation de la crue diffusante elle-même, ou le schéma qui "absorbe" du volume. Il est tout à fait possible que le volume manquant soit simplement un volume qui reste dans le collecteur quand il n'y a plus de mouvement.

#### d) Proposition

On pourrait penser à transformer le système (2.6) (système de Saint-Venant où les termes d'inertie sont éliminés) en une équation de transport-diffusion faisant intervenir les hauteurs d'eau et non plus les débits. Ainsi, on aurait une variable d'état (la hauteur  $y$ ) au lieu d'un flux (le débit  $Q$ ). On pourrait donc faire le bilan de masse sur chaque pas de temps. Ce bilan permettrait de trouver un schéma qui permette de **conserver les volumes** (même éventuellement d'une manière artificielle). De plus, la résolution en hauteur de l'équation de la diffusion permettrait de mieux prendre en compte la condition limite aval, notamment lorsqu'on rajoute un module de calcul de la ligne d'eau. En effet, on pourrait alors fermer le système avec la condition limite aval que l'on remonte. En résolvant la propagation en débit, on est obligé d'utiliser une condition limite aval (un débit) qui ne peut être reliée à une condition limite réelle.

L'inconvénient de cette méthode est que, le gain sur la condition limite aval est perdu au niveau de la condition amont. En effet, il faut transformer la condition limite amont (l'hydrogramme amont) par la relation de Manning-Strickler pour obtenir des hauteurs ce qui peut conduire à des résultats dont il est difficile de vérifier le sens physique. Une étude sur un tel modèle pourrait être menée aussi bien dans le cadre de l'assainissement que dans le cadre de l'hydraulique fluviale.

Le problème de la conservation des volumes pourrait être résolu facilement avec le module de calcul de la ligne d'eau car ce module permet de faire le bilan de masse à chaque pas de temps et de réajuster, si nécessaire les débits ou les hauteurs.

*QUATRIEME PARTIE*

---

*CONDITIONS D'UTILISATION  
DES MODELES*



La comparaison des modèles entreprise dans les parties 2 et 3 ne concernait que des conditions d'écoulement à surface libre que l'on pouvait rencontrer sur un tronçon unique ne contenant aucune singularité structurelle. Or, l'adaptation des modèles aux spécificités de l'assainissement ne peut se mesurer à la seule capacité de simuler l'écoulement à surface libre sur un tronçon unique régulier.

En effet, les spécificités de l'utilisation des modèles en assainissement font souvent appel aux possibilités suivantes :

- modéliser des structures particulières de réseau ;
- modéliser des mises en charge des écoulements ;
- être adaptés aux contraintes d'utilisation.

Dans le chapitre 4-1, nous examinerons la capacité des modèles à s'adapter à des structures particulières de réseau (réseaux maillés, ...), des conditions spéciales d'écoulement, et des contraintes d'utilisation. Ce chapitre 4-1 est donc un complément à l'étude menée dans les parties 2 et 3, destiné à donner des indications (découlant de notre étude), permettant de guider le choix éventuel de modèles en fonction de besoins particuliers.

Sans entrer dans les détails de modélisation, nous limiterons notre étude aux possibilités d'adaptation des modèles aux spécificités de l'assainissement. Ces possibilités sont fonctions :

- de la structure de base des modèles ;
- des conditions limites qu'ils utilisent.

Dans le chapitre 4-2, nous nous sommes placés du point de vue de l'utilisateur de modèle pour examiner l'adéquation entre les possibilités de modélisation et les besoins des collectivités locales. En particulier, nous avons enquêté sur les possibilités de disposer de données (structures du réseau et conditions limites) dont les modèles mathématiques ne peuvent se passer.



## 4-1 POSSIBILITES D'ADAPTATION DES MODELES AUX SPECIFICITES DES CONDITIONS D'ASSAINISSEMENT

### Structure des modèles

D'après l'étude faite dans les parties 2 et 3, deux structures de modèles sont envisageables.

#### Structure 1

La boucle sur l'espace, (c'est-à-dire la boucle sur les tronçons de calcul du réseau) contient la boucle sur les pas de temps.

C'est la structure la moins performante mais la plus simple à mettre en oeuvre.

Elle interdit la prise en compte de phénomènes dont les effets se propagent vers l'amont et remontent le réseau. Les calculs ont lieu successivement et nécessairement de l'amont vers l'aval du réseau en une seule fois. Les entrées d'un module de calcul sont les sorties du précédent et ses sorties constituent les entrées du suivant, sans qu'il soit possible de modifier les calculs déjà effectués.

Chaque hydrogramme est donc propagé entièrement de tronçon de calcul en tronçon de calcul. Si le noeud aval du tronçon est lui-même un point d'introduction de débit ou un noeud jonction, les hydrogrammes sont additionnés et le calcul peut continuer en propageant de proche en proche l'hydrogramme résultant vers l'aval.

Le modèle agit comme un transformateur "local" d'hydrogramme. La modification des hydrogrammes se fait "ponctuellement" (sur chaque pas d'espace) sans tenir compte de ce qui se passe à l'aval de l'écoulement.

Les modèles de type Muskingum ou cinématiques qui n'utilisent qu'une condition limite amont peuvent être construits selon cette structure.

#### Structure 2

La boucle sur les pas de temps contient la boucle sur l'espace.

A chaque pas de temps, le modèle calcule les caractéristiques de l'écoulement dans tout le réseau. Cette structure permet donc de prendre en compte une condition aval qui influence l'écoulement à son amont.

Les **modèles complets** sont obligatoirement construits selon cette structure car la résolution des équations de Saint-Venant nécessite la donnée des conditions aval de l'écoulement. A chaque pas de temps, le débit amont et la cote aval permettent de calculer les couples hauteur-débit en tous points situés entre l'amont et l'aval. Les schémas implicites calculent les solutions

des équations de Saint-Venant en inversant une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de noeuds du réseau. Un noeud sépare deux tronçons de définition.

La structure de type 2 permet d'intervenir, à chaque pas de temps sur les résultats.

Ainsi, on peut modifier ou corriger les résultats obtenus en recommençant le calcul avec d'autres hypothèses. C'est le principe du calcul itératif permettant de détecter les zones de mise en charge.

On peut aussi calculer une ligne d'eau au même pas de temps de calcul dans le réseau et en tenir compte pour le calcul de la propagation des débits au pas de temps suivant.

Cette structure permet donc d'effectuer, à un même pas de temps, des "aller-retours" entre l'amont et l'aval du réseau pour tenir compte des résultats à l'aval qui influent sur les conditions amont de l'écoulement.

Pour les **modèles cinématiques et Muskingum**, selon les caractéristiques requises, on pourra construire une structure de type 1 ou une structure de type 2.

Pour les **modèles implicites** de type VPD, la structure de type 2 est requise, puisqu'il n'est pas possible de déterminer les débits de proche en proche, et que le calcul de tous les débits se fait, comme pour les modèles complets, par l'inversion d'une matrice. Néanmoins, la condition limite aval nécessaire à la fermeture des équations et à l'inversion de la matrice est une "fausse" condition limite qui ne fait pas intervenir la hauteur aval. Ceci signifie qu'il est nécessaire d'utiliser une matrice par tronçon de définition du réseau.

Le nombre de matrices à inverser est égal au nombre de tronçons de définition décrivant le réseau. Pour un tronçon de définition donné de longueur L, le nombre de ligne de la matrice à inverser est égal à  $\Delta x/L$  (où  $\Delta x$  est le pas d'espace).

Les modèles de crue diffusante implicites sont donc en réalité uniquement "localement" implicites. Ils peuvent être programmés, comme les modèles explicites, avec une structure de type 1. La seule différence avec les modèles explicites réside dans le fait que le calcul de la propagation des hydrogrammes ne se fait pas explicitement de pas d'espace en pas d'espace, mais se fait explicitement de tronçon de définition en tronçon de définition.

Si on souhaite tenir compte des conditions aval de l'écoulement, telles que des influences aval ou des passages en charge, il est nécessaire de construire les modèles (schémas explicites ou implicites) avec une structure de type 2.

Que ce soit par itération ou par simple balayage amont-aval, aval-amont, les calculs débits et des hauteurs sont toujours "découplés" dans un modèle simplifié (ou dans un modèle complet explicite). Le calcul simultané des hauteurs et des débits, tel qu'il est réalisé dans un modèle complet implicite, ne peut être reproduit dans un modèle simplifié. Il y aura toujours, au minimum, un pas de temps de décalage entre le calcul de la hauteur et celui du débit.

## Conclusions

Il est possible de prévoir des structures intermédiaires entre la structure 1 et la structure 2. On découpe le réseau en plusieurs sous-réseaux hydrauliquement indépendants. L'indépendance hydraulique signifie que l'hydrogramme obtenu à l'aval d'un sous-réseau (servant de condition limite amont au sous-réseau situé à son aval) n'est pas influencé par l'écoulement dans les sous-réseaux aval. Le balayage amont-aval, aval-amont et la prise en compte d'une condition aval ne peut se faire qu'à l'intérieur d'un sous-réseau.

Ces deux types de structures impliquent des différences importantes sur les possibilités des modèles. En effet, les modules pouvant simuler le fonctionnement de singularités ou les écoulements sortant des domaines d'application des modèles d'écoulement à surface libre (écoulements en charge, par exemple) seront différents selon le type de structure.

## Conditions limites

Les équations des modèles simplifiés présentées dans la partie 2 ne font pas intervenir les hauteurs d'eau. Seule, la condition limite amont sur les débits est propagée vers l'aval et permet de déterminer les hydrogrammes en chaque point du réseau. Toutefois, le modèle de crue diffusante utilise une condition limite aval en débit et permet ainsi de tenir compte d'un débit aval imposé provenant par exemple d'un ouvrage spécial.

Il n'en reste pas moins que l'information éventuelle sur les hauteurs ne peut venir que de l'utilisation de la relation de Manning-Strickler. Celle-ci est en général inapplicable dès qu'il y a des phénomènes d'influence aval dus aux conditions fluviales d'écoulement ou dus à des singularités. Nous verrons dans les paragraphes suivants les limites qu'entraîne cette perte d'information sur les hauteurs d'eau.

Nous avons vu qu'il était toutefois possible de "récupérer" l'information sur les hauteurs d'eau en rajoutant au modèle simplifié de base, un module de calcul de la ligne d'eau qui permet de remonter à chaque pas de temps, la condition limite aval de l'écoulement. L'intégration d'un module de calcul de ligne d'eau nécessite un modèle de structure 2.

Nous avons présenté dans le chapitre 3-3, les différences qu'on obtenait entre un calcul de la ligne d'eau par un modèle simplifié et la ligne d'eau obtenue par un modèle complet. La précision des résultats est d'autant meilleure que les phénomènes inertiels sont faibles.

#### 4-1-1 ADAPTATION A DES CONDITIONS

##### STRUCTURELLES PARTICULIERES

###### 4-1-1-1 Modélisation dans un réseau maillé

###### A) Pour les modèles complets

Pour les modèles complets, la méthode consiste à utiliser les équations complètes de Saint-Venant, auxquelles on ajoute une loi de comportement spécifique aux noeuds du réseau, carrefours de plusieurs canalisations. La seule loi utilisée à ce jour est celle de l'égalité des hauteurs d'eau dans chaque canalisation ayant un même noeud-carrefour comme extrémité (on pourrait aussi imaginer de remplacer l'égalité des hauteurs par l'égalité des charges ou des quantités de mouvement) (FREROT 1988). La mise en oeuvre de la méthode conduit à résoudre un système d'équations non linéaires de nombre égal à celui des noeuds de maillage.

La méthode permet ainsi de tenir compte des influences aval pour la détermination des écoulements dans les mailles.

###### B) Modèles simplifiés

Pour les modèles simplifiés, une méthode de ce type est impossible puisqu'il n'y a pas de calcul de hauteurs. La modélisation d'un réseau maillé peut néanmoins être réalisée de la manière suivante :

La notion de **maille** est remplacée par celle de **bifurcation**. On suppose qu'à tout noeud disposant de plusieurs conduites aval, la répartition du débit amont entre ces conduites se fait en fonction d'un critère simple indépendant des maillages situés à l'aval. Cette hypothèse suppose en fait que l'écoulement est uniquement sous contrôle amont et qu'il n'y a pas d'effets d'influence aval. Les bifurcations sont alors traitées comme des singularités à partir de lois théoriques ou expérimentales.

La principale difficulté de cette méthode est la détermination des critères de répartition des débits. Un critère simple peut être la répartition des débits selon le débit capable respectif des canalisations partant de la bifurcation. On pense néanmoins aujourd'hui que les angles que font entre elles les canalisations aux noeuds de bifurcation jouent un rôle non négligeable dans la répartition des débits.

La structure du modèle de simulation de l'ensemble du réseau est donc identique à celle concernant les réseaux ramifiés, avec inclusion d'une transformation spécifique des hydrogrammes au droit des bifurcations, et simple sommation de ces hydrogrammes lors des confluences.

Cette méthode, permettant un modèle de structure 1, est néanmoins soumise à des conditions d'utilisation plus restrictive que la méthode de l'égalité des hauteurs car elle ne permet pas de prendre en compte des effets d'influence aval. Or les effets des influences aval sont souvent très importants dans les réseaux maillés. Ils peuvent aller parfois jusqu'à conditionner le sens de l'écoulement et entraîner des écoulements à contre pente!

### C) Modèle avec calcul de la ligne d'eau

Avec un modèle simplifié où est intégré un module de calcul de la ligne d'eau, il serait possible d'élaborer une méthode pour déterminer l'écoulement dans un réseau maillé. La remontée de la ligne d'eau dans les mailles peut se faire sans difficulté en utilisant l'égalité des hauteurs au droit des jonctions. Le problème est de retrouver la même hauteur d'eau aux bifurcations, en ayant remonté la ligne d'eau par les branches des mailles. Si les cotes remontées dans les différentes branches d'une maille ne sont pas égales au droit de la bifurcation où les branches se rejoignent, il est nécessaire de lancer un calcul itératif qui redétermine de nouveaux débits pour que les hauteurs aux bifurcations des mailles soient égales.

Les débits (calcul amont-aval) aux bifurcations pourraient être répartis proportionnellement aux hauteurs d'eau calculées dans les branches de la maille, lors du balayage aval-amont au pas de temps précédent.

Deux inconvénients peuvent limiter l'application de cette méthode :

- il n'est pas certain qu'il soit possible de trouver un calcul itératif qui converge.
- Quel sera la réalité physique de l'état final trouvé par le modèle après itération ?

Pour la mise en oeuvre de cette méthode, un travail important de mise au point serait nécessaire.

#### 4-1-1-2 Modélisation de singularités

On modélise les singularités à l'aide de modules indépendants, intégrés fréquemment sous forme de sous-programmes au modèle de base. Ces modules de simulation sont en général construits de la manière suivante :

- ils utilisent les grandeurs calculées par le modèle, c'est-à-dire le débit pour les modèles simplifiés ou les couples hauteur-débit pour les modèles complets,
- ils calculent avec ces grandeurs les caractéristiques de l'écoulement le long ou au droit de la singularité
- ils restituent au modèle de base les grandeurs (débit ou couple hauteur-débit) qui lui sont nécessaires pour poursuivre le calcul de l'écoulement.

La construction de ces modules peut se faire de manière indépendante au modèle de simulation. Les modules sont d'ailleurs souvent calés à partir de recherches expérimentales menées spécialement pour améliorer les possibilités de modélisation de telle ou telle singularité, indépendamment de l'utilisation d'un modèle de simulation.

Néanmoins, la possibilité d'intégrer tel ou tel module à un modèle de base sera fonction du type de modèle programmé, et des conditions limites utilisées par les modèles.

### Modèles simplifiés classiques

Aucune singularité dont le fonctionnement dépend des hauteurs d'eau ne peut être modélisée correctement dans des modèles simplifiés, car on ne pourra pas raccorder correctement les conditions limites (les hauteurs) des modules spéciaux aux modèles. Les conditions limites (en hauteur) qui peuvent être transmises du modèle au module spécial de calcul ne seront pas exactes dans la plupart des cas, puisqu'elles seront issues de la relation de Manning-Strickler qui suppose une hauteur normale. Cette remarque n'est cependant pas exacte pour les singularités au droit desquelles on dispose d'une courbe de tarage  $Q(z)$ , qui permet de ne pas utiliser la relation de Manning-Strickler pour déduire les hauteurs des débits.

### Modèle simplifié avec calcul de la ligne d'eau

Avec un calcul de la ligne d'eau intégré à un modèle simplifié, on utilise les hauteurs comme condition limite. Il est donc possible de modéliser plus précisément le fonctionnement des singularités et d'utiliser alors les mêmes modules que ceux d'un modèle complet. Ici encore, un travail de mise au point et de contrôle serait nécessaire pour vérifier les limites des possibilités de cette méthode.

## 4-1-2 ADAPTATION A DES CONDITIONS

### HYDRAULIQUES PARTICULIERES

#### 4-1-2-1 Modélisation des mises en charge

Du point de vue de la mécanique, les écoulements en charge semblent plus simples à représenter que les écoulements à surface libre, la section mouillée étant alors égale à la section du collecteur et la propagation de l'onde quasi-instantanée. C'est moins le phénomène lui-même que la partie du réseau qui se met en charge qu'il est difficile de modéliser. En effet, les mises en charge évoluent au cours du temps et se déplacent à l'intérieur du réseau.

Il est donc indispensable que le modèle de simulation des écoulements en charge soit compatible avec le modèle de simulation des écoulements à surface libre, les deux types de modèle devant s'appliquer alternativement aux mêmes parties du réseau. Cette contrainte rend particulièrement délicate la représentation des mises en charge dans les modèles de simulation des écoulements en réseau d'assainissement, et conduit le plus souvent à des approximations importantes.

La plus grande difficulté réside dans la détermination des zones mises en charge à chaque instant. En effet, la hauteur de charge dans une canalisation est fonction des débits amont qui y parviennent, mais réciproquement, ces débits sont influencés par la hauteur de charge.

C'est pourquoi la plupart des méthodes construites à ce jour, pour simuler les mises en charge, utilisent des artifices de calcul.

Remarquons tout de suite que la simulation correcte des phénomènes de mise en charge devrait exiger que le modèle soit construit selon la structure 2 (i.e la structure où la boucle sur les temps contient la boucle sur l'espace), puisque les phénomènes de mise en charge influent sur le calcul des caractéristiques de l'écoulement en amont du point de mise en charge.

Selon le type de modèle utilisé, les artifices de calcul sont différents.

#### A) Les modèles complets

Pour les modèles complets, l'artifice de calcul le plus couramment utilisé est la fente. Cette méthode consiste à considérer la canalisation ouverte sur sa partie supérieure et reliée à l'air libre par une fente très fine comme l'illustre la figure 3.81 ci dessous.

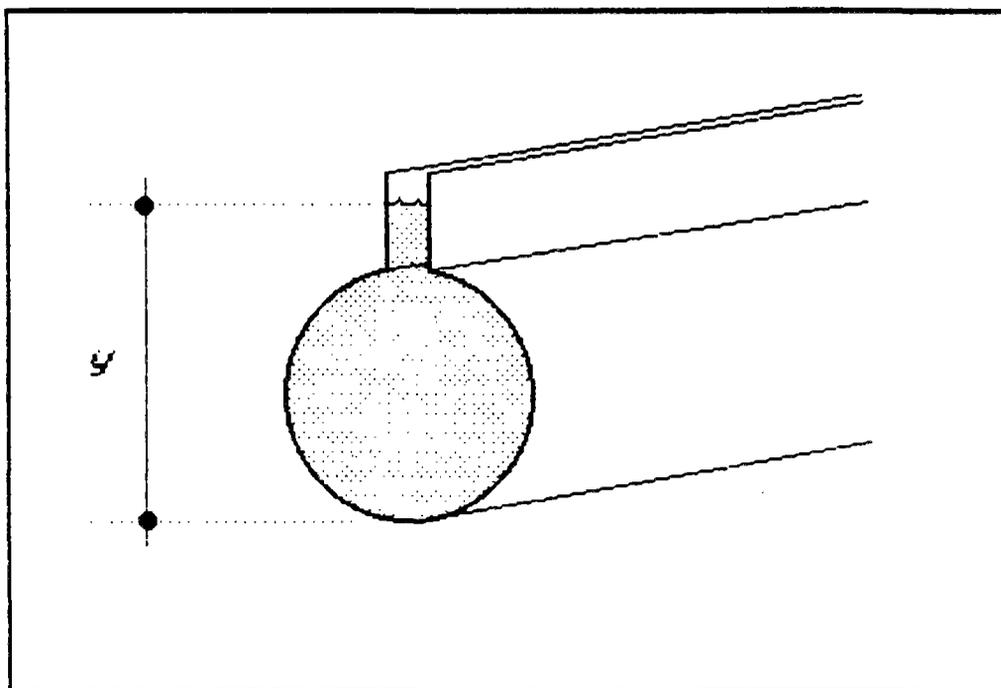


Figure 3.81

Le calcul peut être ainsi mené entièrement à surface libre, la hauteur ( $y$ ) de la figure 3.81 représentant fictivement la hauteur de mise en charge.

Cet artifice permettant le calcul des mises en charge ne peut être utilisé qu'avec un modèle d'écoulement assurant un calcul précis des hauteurs d'eau.

La méthode a l'avantage de délimiter une zone de mise en charge et de quantifier cette charge. Cependant, elle ne représente pas correctement l'influence de cette mise en charge sur l'écoulement amont, car elle néglige les phénomènes d'onde dynamique qui s'en suivent. La zone de mise en charge et l'écoulement à surface libre la précédant ne sont donc pas exactement simulés (CHEVEREAU 1974) et (SOGREAH 1974).

En revanche, cette méthode permet de simuler des phénomènes de mise en charge provenant d'une forte influence aval même si le débit transitant dans le tronçon est inférieur au débit capable.

## B) Les modèles simplifiés

Quelle que soit la méthode de simulation des mises en charge dans les modèles simplifiés, celle-ci ne pourra que détecter les mises en charge dues à un débit supérieur au débit capable du tronçon. Il sera donc impossible de modéliser des mises en charge causées par une influence aval.

Quelles sont les possibilités de modélisation du phénomène de mise en charge pour les modèles simplifiés?

### \*) La méthode du stockage

Le débit excédentaire, calculé par un modèle d'écoulement à surface libre, est stocké jusqu'à ce que l'écoulement puisse à nouveau se faire à surface libre. A partir de ce moment, il est partiellement ou intégralement réintroduit dans le réseau.

Bien sûr, l'influence de la mise en charge sur le réseau n'est pas prise en compte et la zone de mise en charge n'existe pas. Ce type de méthode peut être utilisé avec une structure de type 1

### \*\*\*) La méthode de calcul itératif

L'idée de la méthode est d'utiliser l'équation de Bernoulli entre deux pas de temps, où l'écoulement est supposé permanent. Elle impose, à chaque pas de temps, un double calcul itératif (CHOCAT 1978) :

- on commence par propager les débits de l'amont vers l'aval. Lorsqu'on rencontre un tronçon dont la capacité est insuffisante pour l'évacuation du débit d'entrée, on arrête le calcul de la propagation et on recherche l'ensemble des tronçons amont pouvant être influencés par cette mise en charge ;
- c'est alors qu'intervient le calcul itératif. On détermine alternativement, pour les tronçons influencés, les hauteurs de charge résultant des débits (ce calcul ayant lieu de l'aval vers l'amont, à l'aide de l'équation de Bernoulli) puis les débits résultant des hauteurs de charge précédentes (ce calcul ayant lieu de l'amont vers l'aval à l'aide d'un modèle de propagation de type réservoir non linéaire). Le calcul est mené jusqu'à l'établissement d'un équilibre.

On continue alors la propagation sur les tronçons suivants. Le problème est que si le tronçon suivant est de nouveau insuffisant, toute la procédure itérative de recherche des tronçons influencés doit être reprise.

Cette méthode comme la méthode du stockage ne permet que la modélisation de mises en charge provenant de l'amont dont la cause est l'insuffisance de la canalisation, sauf si le modèle peut prendre en compte des conditions aux limites aval sur la hauteur d'eau.

### \*\*\*) Le calcul de la cote piézométrique

Avec le modèle VPD où le calcul de la ligne d'eau est incorporé au modèle, il est possible de modéliser les mises en charge causées par une forte influence aval, même lorsque le débit qui transite dans le tronçon est inférieur au débit capable. Dans ce cas, l'aval est nécessairement en charge.

La condition limite aval est donc une cote piézométrique aval que l'on remonte (par un calcul de ligne d'eau des écoulements en charge), jusqu'à ce qu'elle devienne inférieure ou égale à la cote plafond du collecteur. Après quoi, on continue à remonter la cote jusqu'à l'amont du tronçon par le calcul de la ligne d'eau à surface libre, comme expliqué au paragraphe 3-3-4-1.

Pour la propagation des hydrogrammes jusqu'au point de mise en charge, on procède comme expliqué au paragraphe 3-3-4-1. Le point de mise en charge est déterminé, à chaque pas de temps, lors du calcul aval-amont de la ligne piézométrique. On propage les débits intantamment (i.e. avec une célérité infinie), du point de mise en charge jusqu'à l'aval du tronçon en charge.

Il n'est pas possible d'utiliser l'artifice de la fente car on ne peut pas calculer précisément les paramètres C et D des modèles simplifiés avec une géométrie de type collecteur fendu.

On ne peut donc pas modéliser, avec le calcul de la ligne d'eau, les mises en charge provenant d'un débit capable trop faible des tronçons.

### 4-1-3 ADAPTATION AUX CONDITIONS D'UTILISATION

#### 4-1-3-1 Robustesse des modèles simplifiés et fragilité des modèles complets

##### a) Les modèles simplifiés

La variable débit est la seule caractéristique de l'écoulement calculée par un modèle simplifié. Cette restriction a l'avantage de conduire à une structure de modèle très robuste. En effet, que ce soit la complexité de la structure du réseau (au niveau des tronçons ou des singularités) ou la violence des événements hydrauliques à propager, le fait de calculer les conditions d'écoulement dans le réseau en calculant les hydrogrammes de proche en proche de l'amont vers l'aval assure une grande sécurité au fonctionnement du modèle.

Ceci s'explique par la manière dont les modèles simplifiés utilisent les données.

Le modèle utilise les données structurelles du réseau en préparant pour chaque tronçon de calcul, les paramètres suivants :

- le débit capable
- la célérité moyenne (si le modèle est linéaire) et éventuellement la célérité instantanée (si le modèle est non-linéaire)
- un coefficient de diffusion hydraulique ou numérique selon le modèle.

Une fois les méthodes de calage choisies (cf. chapitre 2-4), la détermination de ces paramètres est très simple et n'est soumise à aucune restriction, même si les sections ont des formes très irrégulières et quelles que soient les singularités rencontrées. Si les canalisations sont "truffées" de singularités dont on ne souhaite pas, a priori, modéliser le fonctionnement, celles-ci pourront simplement être omises ou prises en compte dans le calage du coefficient de Strickler.

Pour peu que l'on respecte les conditions de stabilité numérique dépendant de la violence de l'hydrogramme à propager, le calcul de la propagation des hydrogrammes pourra s'effectuer sans problèmes de l'amont vers l'aval du réseau.

Cette robustesse du fonctionnement du modèle est due à l'utilisation du débit comme seule caractéristique de l'écoulement. L'imbrication de la boucle de temps dans la boucle d'espace ou l'opposé n'est pas cause de la robustesse ou de la fragilité d'un modèle. En revanche, dans les cas où le calcul s'arrête pour cause de dysfonctionnement du modèle, la détection et l'analyse de la cause de l'erreur est beaucoup plus simple pour des modèles de structure 1 (boucle sur les temps dans la boucle sur les tronçons) que pour des modèles de structure 2.

## b) Les modèles complets

L'obligation de calculer hauteurs et débits à chaque pas d'espace rend fragile les modèles complets. En effet, le calcul des hauteurs d'eau peut s'avérer délicat au droit des singularités et même des demi-singularités.

Nous appelons demi-singularité, une singularité qui en est une pour les modèles complets mais qui n'en est pas pour les modèles simplifiés. Les changements de pente ou de section font partie de ce type de singularité. Pour les modèles complets, ces demi-singularités peuvent être la cause de ressauts hydrauliques ou de variations brusques de hauteur d'eau qui peuvent créer des incidents de calcul. Pour les modèles simplifiés, ces demi-singularités délimitent simplement des tronçons de calcul. Pour chaque tronçon de calcul, les nouveaux paramètres calculés en fonction des nouvelles caractéristiques sont utilisés pour effectuer le calcul de la propagation des hydrogrammes.

Au niveau des singularités, un décrochement de radier par exemple, ne pourra pas être pris en compte au niveau d'un modèle simplifié (on peut considérer qu'un décrochement de radier est une demi-singularité au sens de notre définition précédente). Le calcul des débits s'effectuera avec les paramètres déterminés en fonction de la pente, la section, etc... du tronçon à l'amont du décrochement de radier. Puis, les débits obtenus seront propagés avec les paramètres déterminés en fonction de la pente, la section, etc..; du tronçon situé à l'aval du décrochement.

En revanche, pour le modèle complet, la détermination des hauteurs de part et d'autre du décrochement peut engendrer des instabilités de calcul et conduire à l'arrêt du modèle.

De manière générale, les problèmes de fragilité des modèles complets proviennent du fait que la hauteur d'eau est une variable souvent discontinue dont la détermination en tant que solution d'équations différentielles pose des problèmes (toute solution d'équation différentielle est au minimum continue!). Par ailleurs, les fortes variations de débit entraînant des fortes variations de hauteur sont aussi délicates à modéliser sans un calage fin des différents paramètres du modèle complet. Un calage fin du modèle signifie souvent, la recherche de conditions initiales qui permettent de faire couler suffisamment d'eau pour que les hauteurs ne passent pas sous les radiers.

Dans le cadre d'une étude ne nécessitant pas la détermination des hauteurs d'eau, la non-modélisation de singularités (décrochement de radier, etc...) peut être envisagée mais il est souvent plus délicat de ne pas modéliser certaines singularités avec un modèle complet en raison de la nécessité de fournir des données "dégradées" au modèle. Si l'on souhaite connaître les hauteurs d'eau, il sera nécessaire de recueillir les données fines concernant la description du réseau et le temps passé à "caler" le modèle ne sera pas considéré comme du temps perdu.

## Conclusions

Beaucoup de singularités n'influent pas directement sur les débits transitant dans le réseau. Si leur modélisation est fastidieuse en raison des problèmes qu'elles soulèvent, il est intéressant de ne pas les modéliser ce qui est plus délicat avec un modèle complet qu'avec un modèle simplifié.

#### 4-1-3-2 Temps calcul et place mémoire

Le temps calcul d'un modèle simplifié est plus court que celui d'un modèle complet.

Les modèles explicites conduisent aux temps de calcul les plus courts puisque la propagation d'un hydrogramme complet sur un tronçon de calcul peut se faire en  $m.N_t$  opérations (où  $N_t$  est le nombre de valeurs discrètes de l'hydrogramme et  $m$  est le nombre de paramètres et coefficients utilisés pour le modèle). Le calcul total pourra s'effectuer en  $N_e.m.N_t$  opérations (si  $N_e$  représente le nombre de tronçons de calcul).

Les modèles implicites (type PVD) conduisent à des temps de calcul légèrement plus long puisqu'il est nécessaire d'inverser une matrice tri-diagonale à chaque pas de temps de calcul. La taille de la matrice est égale au nombre de tronçons de calcul du réseau. L'inversion de la matrice tridiagonale du modèle VPD nécessite au plus  $8.N_e$  opérations. Le temps de calcul sera donc environ 10 fois plus long que pour un modèle explicite.

Les modèles complets implicites effectuent au minimum  $m'.N_e^2.N_t$  opérations ou  $m'$  est le nombre de coefficients à déterminer. Le temps de calcul croît avec le carré du nombre de tronçons de calcul  $N_e$ , ce qui peut être fortement pénalisant pour certaines applications spécifiques. Par exemple, pour des besoins en temps réel, il peut être nécessaire d'utiliser un modèle capable de fournir en quelques minutes des résultats permettant d'agir sur le réseau (en temps réel). Il pourra alors être nécessaire d'utiliser des modèles simplifiés pour avoir un temps de calcul minimum.

Les problèmes éventuels de place mémoire tendent de plus en plus à s'estomper en raison des progrès rapides du matériel informatique et notamment des micro-ordinateurs. En revanche, même avec les progrès du matériel, le temps de calcul sera toujours plus long pour les modèles complets que pour les modèles simplifiés, et reste aujourd'hui une contrainte pénalisante pour certaines applications.

#### 4-1-3-3 Aspect formation et interprétation des résultats

Le concept de transformateur d'hydrogrammes est un concept très "formateur" qui permet une interprétation simple des résultats. Le fonctionnement d'un modèle simplifié (avec une structure de type 1) qui propage de proche en proche de l'amont vers l'aval les hydrogrammes permet de s'approprier rapidement les notions de superposition d'hydrogrammes, d'atténuation du débit de pointe, de durée moyenne de propagation. Les modèles simplifiés peuvent donc être utilisés comme outil de formation du personnel.

En revanche, les modèles dont la boucle sur les temps est contenue dans la boucle sur les tronçons sont des outils pour hommes d'étude plus confirmés. Sur des cas spécifiques, la différence entre les résultats de modèles simplifiés et de modèles complets peut être un élément intéressant de formation (cf. par exemple, les simulations présentées au paragraphe 3-3-4). Pour des techniciens peu formés aux problèmes hydrauliques, la formation par l'utilisation de modèles complets est sans doute moins recommandée.

## 4-2 LA DIFFICULTE DE DISPOSER DE DONNEES

Dans les parties 2 et 3, nous sommes restés à un niveau théorique d'utilisation des modèles sans faire référence à leurs conditions d'application effectives par les collectivités locales. Or, les conditions réelles d'utilisation des modèles mathématiques sont rendues complexes par :

- la difficulté à recueillir les données nécessaires au fonctionnement des modèles et les difficultés d'estimer les incertitudes sur les données ;
- la difficulté d'apprécier l'échelle de grandeur et le degré de connaissance des phénomènes nécessaires pour satisfaire les objectifs.

Quel serait l'intérêt de vouloir commettre moins de 5% d'erreurs sur le calcul d'un débit alors que la description du réseau est incertaine et que les conditions limites que l'on donne au modèle (par exemple, les hydrogrammes amont) sont connues avec une marge d'erreurs de 50% (erreurs cumulées d'une mauvaise connaissance de la pluie et d'une transformation pluie-débit approximative) ?

Quel serait par ailleurs l'intérêt de vouloir décrire très précisément le fonctionnement hydraulique d'un réseau alors que pour certains besoins, la connaissance approximative d'un débit maximal peut suffire?

Quel que soit le degré de connaissance requis, les services techniques des villes ne disposent en général que de très peu de données concernant la pluie, les bassins versants et leur réseau d'assainissement. Les informations archivées (données, mesures, etc...) sont très variables d'un service à un autre et d'un site à un autre. La quantité et la qualité de ces informations sont fonctions, d'une part de l'histoire de la ville et de son réseau, d'autre part du mode d'archivage des données recueillies. Dans la plupart des cas, la quantité de données nécessaires à l'utilisation de modèles mathématiques est supérieure aux données à la disposition du service.

Il est donc nécessaire de faire appel à différentes techniques d'acquisition de données complémentaires qui sont :

- les enquêtes de terrain
- les mesures hydrologiques ou hydrauliques

Parmi les enquêtes de terrain et les mesures, on peut distinguer :

- les relevés topographiques du terrain
- les enquêtes de surface
- les relevés topographiques du réseau
- les enquêtes en réseau
- les mesures de pluie
- les mesures de hauteur d'eau
- les mesures de débit

Sous le terme enquête de surface et enquête en réseau, il est question des visites effectuées par un expert du service, pour vérifier la validité des données utilisées.

La difficulté et le coût des campagnes d'acquisition de données ainsi que la nécessité d'utiliser des mesures pour vérifier les résultats des simulations ne sont-ils pas de nature à réduire fortement l'intérêt d'utiliser des modèles de simulation ?

Quelle confiance doit-on accorder aux résultats des simulations ?  
Comment leur interprétation doit-elle se faire ?

Les paragraphes 4-2-1 et 4-2-2 montrent comment il est possible d'utiliser des modèles mathématiques malgré une certaine méconnaissance du terrain. L'utilisation d'outils de simulation est en effet un moyen précieux pour faire reculer cette méconnaissance et mieux gérer les problèmes posés. Ces chapitres sont présentés sous forme de dialogue entre les exploitants non-utilisateurs de modèles et les experts de l'utilisation d'outils de simulation sur le terrain.

## 4-2-1 LES CONNAISSANCES SUR LA PLUIE ET LES BASSINS VERSANTS

### 4-2-1-1 La pluie

*Les informations que l'on peut avoir sur la pluie semblent imprécises et peu nombreuses. Que connaît-on de cette pluie qui déclenche la succession de phénomènes que l'on souhaite pouvoir connaître et maîtriser et qui permet de donner les conditions limites aux modèles de simulation ?*

Le type de connaissance nécessaire de la pluie sur une zone urbaine sera totalement différent selon qu'il s'agira d'un projet de planification, de conception ou de gestion.

*Que peut-on utiliser comme données minimales pour la planification de l'urbanisation, la prévision, la conception, et éventuellement le dimensionnement des ouvrages d'assainissement ?*

Pour des projets de planification de l'urbanisation, de conception ou de dimensionnement de parties du réseau d'assainissement, on peut utiliser des données statistiques sur la pluviométrie de la région.

Les travaux d'exploitation statistiques de séries d'enregistrement ont permis d'améliorer les pluies de projet :

- construction de pluies de projet-hyétogramme types pour des périodes de retour données (DESBORDES 1974).
- détermination de lois statistiques pour les principaux paramètres de construction de pluies de projet et génération par tirage au hasard de séries de pluies artificielles.
- meilleure estimation du concept de lame d'eau décennale et émergence des relations "intensité-durée-surface" de pluie-fréquence (HEMAIN, RAOUS, et al 1983).

*Pour diagnostiquer des causes de dysfonctionnement du réseau d'assainissement et pour des objectifs de gestion, il est nécessaire de pouvoir mesurer la pluie tombée. Les possibilités de mesure de pluie permettent-elles de répondre aux besoins ?*

La connaissance de la pluie dépend de l'utilisation qu'on en fait. Pour des objectifs de diagnostic, seule la mesure de pluie est nécessaire. Pour des objectifs de gestion, la prévision peut avoir un rôle important.

Par exemple, la gestion en temps réel de certains organes d'un réseau d'assainissement peut exiger la connaissance de la quantité de pluie tombée sur la ville par pas de temps de cinq minutes et une bonne prévision de la pluie destinée à tomber dans la demi-heure qui suit (DENOEU 1988), (VOGEL 1980), (ANDRIEU, JACQUET 1987).

Pour la protection de chantiers, la sécurité des équipes d'interventions dans le réseau, et pour la surveillance de "points faibles" sur le réseau, la prévision de pluie améliore le confort et la sécurité de l'exploitation du réseau.

*Quels sont les outils qui permettent de mesurer la pluie ?*

On peut mesurer la pluie tombée de deux manières :

- soit avec des pluviographes qui mesurent en un endroit, la quantité de pluie précipitée ;
- soit avec l'image obtenue par le radar météorologique.

Le pluviographe donne une mesure ponctuelle intégrée sur le temps alors que le radar donne au contraire une mesure quasi-instantanée intégrée sur l'espace.

*Le radar peut-il être utilisé comme un appareil de mesure de pluie ? Les pluviographes ne sont-ils pas nécessaires au calibrage de l'image qu'il fournit ?*

On a longtemps considéré la mesure de pluie par pluviographes comme la mesure de référence, et jusqu'à présent, la quasi-totalité des études hydrologiques se sont appuyées sur les observations de ces appareils. Dans ce contexte, le radar constitue plutôt une approche complémentaire, la combinaison des deux dispositifs permettant de minimiser les erreurs que chacun, employé seul, aurait commis (WILSON, BRANDES 1979), (ANDRIEU 1986).

L'intérêt du radar est d'autant plus faible que la densité de pluviographes est forte (WILSON, BRANDES 1979). Il est en revanche très utile pour des zones où la densité de pluviographes est faible mais suffisante pour assurer son calibrage. Il y a donc un optimum à rechercher entre la précision du calibrage de l'image et la densité requise de pluviographes nécessaire à ce calibrage.

*Pourquoi les pluviographes qui mesurent effectivement la pluie qui tombe ne doivent-ils pas être considérés comme une référence ?*

H. ANDRIEU a présenté dans sa thèse (ANDRIEU 1986) les principales causes d'erreurs de mesure sur les pluviographes.

Au niveau local de l'appareil, ce sont :

- les effets du vent
- la sous-estimation de l'intensité de pluie (par saturation du pluviographe) lors de fortes précipitations.

Outre les problèmes locaux liés au fonctionnement de chaque appareil, l'intégration sur la surface de la pluie tombée mesurée ponctuellement en quelques points peut conduire à des sous-estimations ou à des sur-estimations importantes du volume d'eau effectivement tombé. Ces erreurs seront d'autant plus significatives que la densité de pluviographes est faible et que la

durée d'intégration dans le temps est courte (erreurs fortes en début de précipitation) (CLIFT 1985), (DESBORDES 1987).

S'il n'y a pas de télétransmission des mesures (les télétransmissions sont utilisées lorsqu'il est nécessaire de connaître les mesures en temps réel) le problème de la synchronisation entre les pluviographes (calibrage de l'origine des temps) peut induire des erreurs sur l'extrapolation du déplacement de la pluie et le calcul de la lame d'eau.

*Mais le manque de fiabilité des images radar ne risque-t-il pas de générer des erreurs encore beaucoup plus grandes ?*

On commence à mieux maîtriser les erreurs de mesure de pluie par le radar qui peuvent être classées en trois catégories (par exemple, DENOEU 1988) :

- les erreurs de mesure de réflectivité
- les erreurs sur la transformation réflectivité-intensité
- les écarts entre la pluie mesurée en altitude et la pluie au sol.

Le premier type d'erreur peut concerner l'électronique, les défauts d'étalonnage du radar, ou les méthodes de calcul de l'intégration de la pluie sur les mailles.

Les erreurs sur la transformation réflectivité-intensité sont surtout importantes lorsqu'on fait une erreur sur les caractéristiques de la distribution des gouttes d'eau, ou sur la nature des précipitations. On peut, par exemple, fortement surestimer une précipitation si on prend de la grêle pour de la pluie.

La pluie d'altitude mesurée peut être différente de la pluie au sol si les effets d'advection et d'évaporation sont importants. Certaines pluies orographiques (de basse altitude) peuvent être masquées. Ces causes d'erreur dépendent fortement de la distance au radar et de l'angle de site (angle entre le faisceau envoyé et le sol).

Le radar peut donner une bonne mesure de pluie si on prend certaines précautions d'emploi (DENOEU 1988) :

- distance au radar réduite (maximum 80 kms)
- absence d'échos fixes qui brouillent les images
- angle de site faible (pour mesurer la pluie à une altitude raisonnable au dessus de la zone concernée).
- fréquence d'acquisition des images suffisantes pour améliorer l'intégration dans le temps.

Le radar comme instrument de mesure de la pluie est d'ailleurs utilisé quantitativement dès cette année en Seine Saint-Denis (EINFALT, DENOEU 1987a).

*Pourquoi est-il resté si peu utilisé ?*

L'utilisation qualitative et jusqu'à présent exclusivement expérimentale du radar météo peut s'expliquer par deux raisons (G. JACQUET, communication personnelle) :

- les résultats médiocres des premières études (dont on peut expliquer les causes aujourd'hui) ont fait prendre du retard au développement d'une utilisation quantitative du radar ;
- les agglomérations qui utilisent des mesures de pluie pour la gestion de leur réseau d'assainissement sont encore rares.
- enfin, le coût d'achat ou la dépendance à la météorologie nationale, la spécialisation du personnel aussi bien pour l'emploi du radar que pour le traitement de ses informations, ainsi que les coûts de fonctionnement résultant des problèmes de calibrage permanents, rendent encore contraignante son utilisation.

*Pour la prévision, le radar semble très bien adapté puisqu'on peut suivre la propagation des zones pluvieuses.*

Il faut nuancer cet a priori car l'efficacité du radar en prévision est très variable selon les conditions météorologiques (DENOEUX 1988).

Lorsqu'une zone pluvieuse se déplace par effets d'advection, la situation est favorable à une bonne prévision par le radar. On peut extrapoler le déplacement de la zone de pluie et prévoir les précipitations 1 heure à 1 heure 30 à l'avance (EINFALT, DENOEUX 1987b).

En revanche, le cas de cellules orageuses qui naissent et se développent "sur place" avec une très faible advection rend difficile la prévision avec le radar. Or, certaines pluies très intenses peuvent survenir dans ce genre de situations et il n'est pas rare d'avoir des séries d'événements exceptionnels très proches (JACQUET 1987). On aura, grâce au radar, une bonne perception du phénomène même si la prévision quantitative reste difficile.

Le radar permet en tous cas (EINFALT, DENOEUX 1987) :

- de mettre en évidence l'hétérogénéité et la grande disparité de la taille des cellules orageuses ;
- de mieux décrire les pluies dangereuses pour le ruissellement urbain par des observations combinées sur image radar et sur réseau de pluviographes.

Par exemple, les cas suivants ont été constatés dans deux départements de la région Parisienne :

- A cause d'un taux d'assainissement individuel très élevé, le pourcentage des surfaces actives (ruisselant effectivement dans le réseau) s'est révélé beaucoup plus faible que celui des surfaces imperméabilisées (D.D.E. Val-De-Marne, communication personnelle)

- On a découvert que quelques dizaines d'hectares de voies ferrées étaient drainées par un réseau particulier et ne devaient donc pas être pris en compte dans le calcul du ruissellement (D.D.E. Seine Saint-Denis, communication personnelle).

*En a-t-on fini avec les enquêtes et les mesures lorsqu'on a identifié les surfaces raccordées aux réseaux ?*

Hélas, non !

Selon les types de pluie, les surfaces perméables peuvent aussi contribuer fortement au ruissellement (lorsqu'elles sont gorgées d'eau et que l'infiltration dans le sol est très faible, par exemple).

A Bordeaux, par exemple, l'utilisation d'un modèle de simulation confrontée à des mesures de débit a permis de constater que lors de fortes pluies d'orage, le débit prévu par le modèle de transformation pluie-débit (calé avec le coefficient d'imperméabilisation des bassins versants) était nettement inférieur au débit mesuré. Une vérification sur le terrain a permis de constater que des vignes en pente raide situées sur les bassins versants au milieu de zones urbaines provoquaient (pour de violents événements orageux) un ruissellement très important, comme si les surfaces étaient imperméabilisées (GUICHARD 1987).

Sur cette même ville, une campagne de mesures en cours semble montrer que pour des bassins versants de petite taille (1 à 3 ha), le débit ruisselé est nettement dépendant de l'immédiat antécédent pluviométrique.

Ces constatations sont complémentaires de l'identification, pour des bassins versants de Seine Saint-Denis, de l'importance de la "fonction de production" de la pluie ruisselée, transformant la "pluie brute", c'est-à-dire la lame d'eau précipitée sur un bassin versant, en "pluie nette", c'est-à-dire la lame d'eau qui ruissellera effectivement dans le réseau. MM. BERTILLOTTI et JACQUET ont montré qu'on pouvait obtenir des résultats nettement plus précis avec des modèles qui font augmenter en cours de pluie le rendement de cette fonction de production (BERTILLOTTI, JACQUET 1982)

Le ruissellement peut donc aussi dépendre fortement du type de pluie ; les pluies longues et d'intensité soutenue pouvant élargir notablement les surfaces actives.

#### 4-2-1-2 Les bassins versants

*Pour modéliser le ruissellement sur une zone urbaine, comment décrire la structure des bassins versants ?*

Le ruissellement fait appel à la notion de surfaces actives (qui ruissellent) et de surfaces non actives (qui ne ruissellent pas ou peu).

Par un travail sur photos aériennes ou plus habituellement sur le Plan d'Occupation des Sols (P.O.S.) avec contrôle sur le terrain, on décompose chacun des types de surfaces du bassin versant en deux catégories :

- les surfaces imperméabilisées telles que toits, chaussées, parkings, etc...
- les surfaces non imperméabilisées telles que des zones rurales, jardins, terrains vagues, etc...

Pour aller plus vite mais moins précisément on se contente parfois d'identifier le type d'urbanisation et de dire : à tel type d'urbanisation correspond tel coefficient de ruissellement.

Pour aller au-delà, il faut passer par l'analyse des mesures. Le P.O.S ou les photos aériennes ne sont pas toujours à jour et il n'est pas souvent précisé où en est l'urbanisation prévue sur le P.O.S. Enfin, ni les photos aériennes, ni les plans ne permettent d'identifier les surfaces non raccordées au réseau.

*Le ruissellement dépend non seulement du type de surface mais encore de la pente de celle-ci. Or la pente moyenne d'un bassin versant peut être très délicate à déterminer. De plus, comment faudra-t-il définir l'échelle de grandeur du découpage des sous-bassins versants?*

Il est en effet impossible de ne pas prendre des pentes moyennes qui risquent de donner des résultats inexacts. La détermination de la taille et des sous-bassins versants d'une zone urbaine conduit donc nécessairement à une forte simplification de la réalité. Mais la pente reste d'un impact relativement limité. Le coefficient de puissance dont il est affecté dans les modèles de CAQUOT et de DESBORDES reste faible ce qui diminue son influence sur les débits ruisselés.

*La connaissance du taux de surface imperméable est-elle suffisante pour le calage des modèles de ruissellement ?*

Outre le fait que le découpage en deux types de surfaces peut s'avérer délicat, on ne peut assimiler qu'en première approximation le taux de surfaces imperméabilisées en liaison directe avec le réseau au pourcentage des surfaces actives.

*Jusqu'où faut-il aller dans les détails de la description des caractéristiques d'un bassin versant? Faudrait-il pouvoir modéliser le cheminement de chaque goutte de pluie?*

Certainement pas! Les modèles dérivés de l'analyse des systèmes qui permettent de déterminer à peu près correctement des transformations pluie-débit (environ 20% d'incertitude sur le débit de pointe) sont la preuve que la réponse à cette dernière question est non (DESBORDES 1987).

Par ailleurs, on peut escompter des progrès sur les modèles conceptuels, grâce aux recherches actuellement en cours. Des informations centralisées dans une banque de données (mesures) à Belgrade au niveau mondial (YEN 1987), (MAKSIMOVIC 1987) pourraient permettre un meilleur calage de ces modèles. Des voies prometteuses, sur la répartition spatio-temporelle de la pluie, semblent devoir aboutir à une meilleure connaissance des débits entrant dans les parties modélisées du réseau :

- une meilleure analyse de la fonction de production (BERTIOTTI, JACQUET 1982) ;
- une meilleure connaissance des facteurs physiques des écoulements de surface (REED 1987) ;
- une approche morphométrique du bassin versant (AGNESE, LA LOGGIA 1987).

Aucune étude ne justifierait une modélisation à une échelle microscopique (celle de la goutte d'eau) de la pluie et du ruissellement sur un bassin versant.

*Quel est le degré de connaissance suffisant pour pouvoir utiliser des modèles de ruissellement ?*

Selon les besoins, le niveau de représentation des phénomènes sera différent. On identifiera les différences sur la nature et la précision des données requises pour élaborer une stratégie de recueil et d'exploitation de ces données. En fonction des différents usages des données qui peuvent être faits, on pourra ainsi évaluer les phénomènes modélisés et ceux négligés.

Prenons pour exemple , le besoin de tester l'impact de l'urbanisation de plusieurs zones situées à l'amont d'un réseau existant. Il faut découper les zones en bassins versants, donner la taille (de quelques hectares à quelques dizaines d'hectares) et essayer par exemple quelques pluies de projet qui fourniront, pour un coefficient d'imperméabilisation donné, un débit à l'exutoire des bassins versants qu'il faudra injecter dans le réseau existant (HEMAIN 1983).

On pourra ainsi déterminer, pour chaque bassin versant, un coefficient d'imperméabilisation fictif maximum à ne pas dépasser dans le but de déterminer par exemple, des critères comparatifs de risque de saturation du réseau aval en fonction de l'urbanisation de chaque bassin versant testé.

Il n'est pas nécessaire de collecter d'autres informations que le contour (donc la surface) et la pente moyenne des bassins versants que l'on souhaite tester. Le calage précis de la transformation pluie-débit ne sera pas indispensable pour quantifier, entre les diverses alternatives d'urbanisation, celles qui provoqueraient des risques de saturation du réseau aval existant.

Si, pour certains bassins, le coefficient d'imperméabilisation critique (celui au delà duquel le réseau aval existant risque d'être saturé) est inférieur aux prévisions d'urbanisation, on pourra tester à l'aide du modèle, les différentes possibilités permettant de diminuer la surcharge du réseau aval. Les alternatives possibles sont nombreuses.

Au niveau de l'amont, on pourra tester :

- l'impact de plusieurs types d'urbanisation (auxquels correspondent des coefficients d'imperméabilisation différents) sur les surplus de flux hydrauliques déversés dans le réseau aval ;
- les possibilités de techniques d'infiltration et de stockage (chaussées poreuses, toitures terrasses, fossés absorbants, bassins de rétention, ...) destinées à diminuer le coefficient de ruissellement ou à diminuer le débit de pointe.

Au niveau du réseau aval :

- les possibilités de renforcement du réseau (construction d'un collecteur de délestage, d'un maillage, etc...)

Toutes ces études ne nécessiteront en général pas de données très précises sur la pluie et les bassins versants.

En revanche, pour l'élaboration de règles de gestion hydraulique ou pour la gestion en temps réel, les mesures et les prévisions de pluie ne seront utilisables efficacement que si les modèles de ruissellement garantissent une bonne transformation pluie-débit. Il est alors nécessaire pour le calage préalable du modèle pluie-débit de disposer de mesures précises sur un certain nombre d'événements pluvieux significatifs ainsi que des mesures de débits qui leur sont associées.

Ce n'est qu'après confrontation des résultats des modèles avec les mesures et divergence de ceux-ci que des études complémentaires sur l'apport précis des bassins versants (en fonction non seulement des coefficients de ruissellement mais aussi des types de pluie, des antécédents pluviométriques, etc...) doivent être envisagées.

4-2-2 L'UTILISATION DE MODELES D'ECOULEMENT  
MALGRE LES DONNEES INCERTAINES  
SUR LE RESEAU

4-2-2-1 La structure d'un réseau

*On pourrait supposer que les données concernant la structure du réseau (position des tronçons, pentes, ouvrages spéciaux, etc...) sont en général connues par le service qui en a la charge. Hélas, dans bien des cas, les données n'ont jamais été recueillies et beaucoup de services ne possèdent aucun plan à jour de leur réseau. De plus, les quelques données archivées risquent d'être devenues fausses ou au minimum incertaines.*

*Comment sortir de cette situation et par quoi commencer ?*

La méconnaissance de la structure des réseaux d'assainissement s'explique par l'histoire des villes dont les grandes lignes ont été rappelées au chapitre 1-1. Les réseaux qui existent souvent depuis plus d'un siècle sont soumis régulièrement à des travaux d'extension, de restructuration et à des modifications de leur contexte.

On commencera par une revue critique des documents disponibles en essayant de repérer les dégradations d'information dont les causes peuvent être multiples et dues par exemple :

- à un collecteur qui a été obturé
- à des collecteurs qui n'apparaissent sur aucun plan
- à d'anciens plans qui n'ont pas été modifiés après travaux
- à l'absence de plans de recollement ou à des plans de recollement qui sont en réalité les plans de projet
- au changement de la référence de la cote du nivellement général de la France (cote NGF) en 1968 qui n'a pas été systématiquement reporté sur les plans
- à des ouvrages spéciaux ou à des adaptations d'urgence ne figurant sur aucun plan
- à des modifications accidentelles (naturelles ou dues à des travaux ne concernant pas directement le réseau) du réseau d'assainissement qui a bougé dans le sol
- etc...

Cela passe donc par une enquête historique sur les modifications du réseau.

Pour la modélisation de la propagation des hydrogrammes dans le réseau, il faut connaître au minimum l'existence des tronçons, leur longueur et leur pente (cf. partie 3), ainsi que les caractéristiques hydrauliques des ouvrages spéciaux (tels que déversoirs, bassins de rétention, etc...) qui n'ont pas uniquement pour effet d'augmenter les pertes de charge (i.e de diminuer le coefficient de Strickler) .

Il est donc inévitable d'aller vérifier l'exactitude des plans du service (quand ils existent) en organisant des enquêtes de terrain. Pour connaître ou vérifier les pentes de certains collecteurs, il sera nécessaire d'exécuter des relevés topographiques pour mesurer précisément certaines cotes. Cependant, les données rapatriées ne sont pas sans risque d'erreur.

Par exemple, il s'avère parfois utile d'encadrer le travail des géomètres pour vérifier si la mesure est bien prise au niveau du radier et non pas simplement au fond du regard même s'il y a de l'eau dans le collecteur! La cote du fond du regard peut correspondre à la cote de la banquette et non pas à celle de la cunette, ou bien, le béton du regard peut s'être dégradé plus vite que celui des tronçons. Une erreur sur les cotes entraîne une erreur sur les pentes des tronçons et on a vu en partie 3 que la pente avait une importance capitale sur la propagation des hydrogrammes dans le réseau.

*Sur quelles données est-il plus particulièrement utile d'exercer un contrôle ?*

Il est naturel de compter un minimum de pourcentage d'erreurs sur les mesures relevées, même si les erreurs ne sont pas dues à une mauvaise compréhension du travail à réaliser.

Le contrôle de la cohérence des données, et notamment des pentes des collecteurs, permettra d'éviter un certain nombre d'erreurs et de focaliser les endroits où il sera nécessaire d'aller vérifier leur exactitude.

La forme des sections est une donnée capitale pour le calcul des hauteurs, dans les tronçons du réseau. Or l'ensablement ou les dépôts solidifiés peuvent modifier cette forme. Il sera toujours difficile d'avoir des informations sur l'ensablement car celui-ci est en perpétuelle évolution. Pour le calcul des débits, elle a moins d'importance comme on l'a montré dans le chapitre 3-2. En revanche, il est toujours nécessaire de pouvoir déterminer le débit capable de la conduite (qui dépend de la forme de la section).

Par ailleurs, le taux d'ensablement et l'état des parois des collecteurs, dont l'évaluation est aussi très délicate, doivent permettre de déterminer le frottement des parois, souvent traduit par le coefficient de Strickler. La valeur de ce paramètre a une grande influence sur les résultats des modèles mathématiques comme nous l'avons examiné dans la partie 3.

Mais les erreurs sur le coefficient de Strickler des tronçons s'atténuent du fait des singularités, comme les cheminées de regards ou les descentes d'avaloirs (qui modifient les pertes de charges) dont la modélisation est souvent éludée. Certaines d'entre elles sont omises car méconnues (elles n'apparaissent sur aucun plan). Avec quelques mesures, on pourra fixer une valeur moyenne du coefficient de Strickler qui permettra dans la plupart des cas d'intégrer les incertitudes sur la rugosité des tronçons et les pertes de charges singulières non modélisées.

*Une description simplifiée de la géométrie du réseau est-elle donc suffisante pour pouvoir modéliser correctement les phénomènes? Néanmoins, certaines singularités perturbent le fonctionnement du réseau et devraient apparaître dans la description du réseau pour la modélisation. Comment choisir entre celles qu'on omet et celles qu'on prend en compte ?*

L'expérience permettra de trier, entre les singularités, celles que l'on peut intégrer dans une valeur plus faible du coefficient de Strickler et celles que l'on prend en compte à l'aide "d'équivalents hydrauliques" plus ou moins complexes.

Les effets des singularités qui ne se "répercutent" pas, ou qui n'ont une incidence sensible que sur quelques centaines de mètres de réseau linéaire en écoulement libre, ne sont pas intéressantes à modéliser. Un pré-examen hydraulique et des rapides calculs de dégrossissage permettront d'optimiser le nombre de singularités qu'il est nécessaire de modéliser en fonction des besoins de chaque étude.

Il est là encore nécessaire de connaître l'information que l'on souhaite recueillir de la modélisation.

Si le but est d'obtenir les valeurs des débits en certains points du réseau, on pourra en général se contenter d'intégrer la plupart des singularités ainsi que la méconnaissance des coefficients de Strickler exacts dans une valeur moyenne "faible" du coefficient de Strickler, calée à partir d'un point de mesure.

Si en revanche, il s'agit de déterminer les hauteurs de déversoirs d'orage, il sera nécessaire de connaître précisément les hauteurs d'eau donc les singularités ayant une influence sur ces hauteurs (décrochements de radier, seuils, ..).

Les modèles ne donnant pas de résultats précis sur les hauteurs nécessiteront donc moins de données que les modèles complets. Une description précise du réseau doit donc être à la mesure des outils d'analyse utilisés ainsi que des besoins.

Enfin, des progrès ont été réalisés dans la quantification des pertes de charge et des coefficients d'écoulement, par exemple au niveau des jonctions de trois collecteurs ayant des régimes d'écoulement différents (CHRISTODELOU 1987), au niveau des regards ou charges (HOWRTH 1987), au niveau de clapets anti-retours (BURRONS 1987).

#### 4-2-2-2 Le fonctionnement d'un réseau

*Il est clair que si la structure du réseau est mal connue, les phénomènes hydrauliques qui s'y produisent sont encore moins connus, comment y avoir accès ?*

Lors d'événements pluvieux, la plupart des phénomènes ne sont pas observables directement. Seules, certaines grandeurs ponctuelles telles que débits ou hauteurs peuvent être obtenues par l'intermédiaire d'appareils de mesures. Il n'y a hélas pas de "radar réseau" (l'équivalent du radar météo) qui pourrait mesurer à un instant donné, les hauteurs d'eau en tous points du réseau!

*Comment déterminer le nombre d'appareils nécessaire et leur position dans le réseau? Faudra-t-il prévoir des mesures de hauteurs ou des mesures de débits? L'installation des appareils sera t-elle définitive ou temporaire?*

Ici aussi, le modélisateur expérimenté saura doser, peut-être en plusieurs étapes, la nature, le nombre, la précision, l'emplacement des mesures à effectuer.

Les appareils de mesures en réseau d'assainissement peuvent être utilisés pour vérifier :

- les apports d'un bassin versant : mesure à l'exutoire ;
- le rôle des apports de 2 branches importantes ;
- les débits à l'amont ou à l'aval d'un "point noir" ;
- les conditions des écoulements au niveau d'un futur ouvrage (bassin, déversoir, délestage) à dimensionner.

Par ailleurs, les sites "favorables" sont très rares et quand on en trouve un, on s'y installe même s'il ne correspond pas exactement au site où l'on souhaitait effectivement mesurer une hauteur ou un débit. Un site favorable est un site où l'appareil de mesures est facile d'accès et où les conditions d'écoulement sont suffisamment régulières pour que les mesures ne soient pas perturbées par des phénomènes locaux (turbulences, ...).

*Les mesures sont faites localement. Comment peut-on s'assurer de leur représentativité ?*

Les sources d'erreurs sur la mesure dues aux appareils utilisés sont grandes (décalage des temps, mesures modifiées par le passage de solides divers ou de bulles d'air) et l'estimation de ces erreurs est difficile à effectuer. Une maintenance régulière des appareils, des vérifications et des réglages suffisamment fréquents permettent de diminuer les risques de mauvaises mesures, sans les éliminer totalement.

Il peut aussi arriver que le service d'entretien modifie temporairement la position d'un déversoir ou d'une vanne. Cette modification peut entraîner à l'amont de fortes influences aval ou à l'aval, une modification sensible des débits. Si un appareil de mesure se trouve dans les zones d'influence, la bonne interprétation de la mesure sera conditionnée par la connaissance de cette modification.

Ces difficultés peuvent être surmontées si on renforce la communication entre les services d'entretien et d'exploitation qui agissent sur le réseau, et les services chargés des études.

Cette communication peut être stimulée par une explication rapide des mesures. Elle permettra de détecter très rapidement les anomalies pouvant correspondre à des interventions sur le réseau et ainsi d'identifier plus sûrement les causes de dysfonctionnement avec les exploitants ou les responsables des travaux.

*Avec des données incertaines et des conditions aux limites très imprécises, comment utiliser les modèles de simulation ?*

Reprenons le besoin de tester l'impact d'un projet d'urbanisation à l'amont d'un réseau. Le calage du modèle pourra être effectué sur le réseau existant avec très peu de mesures. Un événement pluvieux réel mesuré auquel correspond une mesure de hauteur ou de débit pourra dans la plupart des cas suffire au calage du modèle. Et ceci déjà pourra faire découvrir des problèmes de dysfonctionnement du réseau aval jusqu'alors insoupçonnés.

Ainsi, le diagnostic rapide du fonctionnement du réseau nécessaire à la planification de l'urbanisation peut permettre de faire apparaître des anomalies et d'autres besoins. C'est d'ailleurs ce qui se produit souvent.

Par exemple, à Bordeaux, l'utilisation d'un modèle mathématique pour déterminer les zones susceptibles d'être ouvertes à l'urbanisation a révélé que le réseau existant était déjà saturé. De graves inondations l'année suivante ont confirmé les résultats du modèle!

Pour des besoins de dimensionnement de conduites, une évaluation du débit maximum susceptible de transiter dans le tronçon à dimensionner suffira à valider les décisions. On pourra alors utiliser une pluie de projet sur la zone à urbaniser qui permettra de fournir les hydrogrammes amont (conditions limites) du modèle de simulation. Un modèle simplifié pourra en général suffire pour un tel besoin.

Pour des besoins de gestion automatisée de bassins de retenue en série, la modélisation de l'écoulement peut nécessiter la connaissance à dix centimètres près de la hauteur d'eau en certains points du réseau, notamment au droit des vannes de vidange des bassins de retenue.

La prévision de la pluie peut permettre, si divers scénarios de fonctionnement du réseau peuvent être simulés en temps réel, d'envisager une gestion en temps réel d'un bassin de retenue, comme c'est le cas dans le département de Seine Saint-Denis. Dans ce cas, il devient possible d'éviter certaines inondations (qui ne l'auraient pas été sans une prévision de pluie et une gestion "centralisée" du bassin de retenue) à l'amont et à l'aval du bassin en agissant sur la position des vannes durant l'événement pluvieux (JACQUET, FREROT 1983), (FREROT 1987).

Ceci implique de disposer dans le modèle de simulation de modules représentant les mouvements d'organes mobiles et prenant en compte leurs effets sur l'écoulement dans le réseau (SOGREAH 1981).

*Qu'y a-t-il à faire lorsqu'il s'avère impossible d'effectuer un calage du modèle à l'aide des mesures obtenues ?*

Il sera nécessaire d'effectuer des enquêtes complémentaires :

- pour vérifier les coefficients d'imperméabilisation et les surfaces effectivement raccordées au réseau
- pour vérifier les données sur la structure du réseau et notamment l'existence de singularités pouvant jouer un rôle important sur la valeur du débit de pointe ou sur son temps de propagation.

Il ne faut pas tomber dans la généralisation abusive en prétendant que lorsqu'il y a divergence entre les mesures et les simulations, c'est forcément le réseau qui est mal décrit. Il peut y avoir aussi des défauts de modélisation, à cause d'un modèle inadapté aux conditions d'écoulement (cf. chapitre 3-3 et 3-4) (par exemple, non prise en compte d'une influence aval, ...)

Enfin, on peut aussi si les besoins le permettent, admettre un certain décalage entre les résultats du modèle et les mesures. Par exemple, en Seine Saint-Denis, un modèle de simulation donnait systématiquement des résultats de 20% à 40% inférieurs aux mesures. Du fait que les erreurs étaient systématiques, les résultats ont pu être exploités en gardant à l'esprit le fait qu'ils étaient inférieurs aux débits réels.

Quels que soient les besoins, l'utilisation d'un modèle de simulation permet progressivement d'affiner la connaissance du fonctionnement du réseau. De plus, elle oblige à clarifier la connaissance du terrain et des phénomènes à gérer, indispensable pour prendre les décisions avec plus de lucidité.

Le modèle de simulation considéré comme un simple outil supplémentaire d'acquisition d'informations, au même titre que les mesures, peut jouer le rôle de médium entre les données et les objectifs. Outre le fait qu'il permet de guider le recueil des données, de minimiser éventuellement celui-ci, et de tester la qualité de ces données, il permet surtout d'appréhender les conséquences d'investissements et de consignes de gestion. C'est aussi grâce à l'utilisation de modèles mathématiques et à la non adéquation des résultats aux mesures qu'il est possible de détecter des erreurs commises sur la description du réseau. La confrontation des résultats des modèles aux mesures est donc riche d'enseignements.

Les exemples de désordres et de dysfonctionnements décrits dans les paragraphes précédents proviennent d'ailleurs de services qui utilisent des modèles mathématiques de simulation. Elles n'auraient pas été possibles sans l'utilisation de modèles de simulation.

Multiplier les points de mesures et les enquêtes de terrain sans une utilisation simultanée de modèles de simulation ne permet qu'une utilisation partielle des données. Or, le coût de la collecte de données ou de mesures est très important et souvent bien supérieur au coût d'un modèle mathématique et de son utilisation. Par exemple, la Communauté Urbaine de Bordeaux a dépensé depuis 1976, 20 Millions de Francs pour les études (sur 200 Millions de travaux, soit 10% du coût des travaux) et seulement 100 000 Francs pour l'acquisition d'un modèle mathématique! Pour le département de Seine Saint-Denis, en 1972, 300 000 Francs pour l'acquisition d'un modèle avec le calage sur le réseau, alors que l'ensemble des investissements s'est élevé à 700 Millions de Francs en 12 ans.

Le coût des outils de simulation a considérablement baissé en raison de la baisse des coûts informatiques, d'un certain amortissement et de la concurrence. Actuellement, c'est le recueil des données qui coûte cher. L'utilisation d'un modèle de simulation oblige à effectuer ce travail d'acquisition de données. Or, la gestion et la conception lucide et efficace des réseaux d'assainissement ne peut contourner cette nécessité d'acquérir des données. L'utilisation de modèles de simulation permet une meilleure planification des données à recueillir et une meilleure exploitation de celles-ci.

Les outils développés ces dernières années, dont plusieurs ont été présentés au congrès de Lausanne en Septembre 1987, techniquement plus performants que la plupart des "vieux" logiciels, ont intégré les récents progrès du matériel informatique. Ils peuvent fonctionner sur micro-ordinateur, sont d'une grande convivialité, utilisent des sorties graphiques, des saisies de données sur tables à digitaliser, etc...

#### 4-2-2-3 Conclusion

Les modèles mathématiques, en simulant (même de manière éventuellement simplifiée) les phénomènes dans l'espace et dans le temps permettent de comprendre les mécanismes complexes de fonctionnement des bassins versants urbains et des réseaux d'assainissement. Ils ont été conçus comme des outils susceptibles de simuler des phénomènes dont la fréquence d'apparition est rare et qui servent de référence pour le dimensionnement des ouvrages. Ils permettent ainsi de valider la conception de nouveaux ouvrages et d'évaluer leur mode de gestion.

Pour certains besoins, les modèles peuvent être utilisés sans mesure de pluie, en utilisant des "pluies de projet", basées sur des exploitations statistiques de mesures de pluie réalisées sur des sites comparables. Ils pourront donner une idée du fonctionnement du réseau surtout pour des études de planification de l'urbanisation et de conception de collecteurs ou de bassin de retenue.

Mais ils seront beaucoup plus précis et performants lorsque leurs résultats pourront être confrontés à des mesures. Alors, on pourra ajuster leurs paramètres et procéder si nécessaire à une véritable reconstitution des événements pluvieux entraînant des désordres; reconstitution au cours de laquelle on pourra plus sûrement identifier les causes de dysfonctionnement.

Souvent, résultats et événements observés seront très discordants. La tentation sera grande, alors, de mettre en cause soit les mesures, soit les modèles. Mais, dans la plupart des cas, l'origine sera ailleurs : dans la mauvaise description du réseau qu'on aura fournie au modèle (BACHOC, BEREBI et. al. 1984).



*CONCLUSION GENERALE*



Les modèles de simulation de l'écoulement dans les réseaux d'assainissement sont nombreux, mais les différences entre les modèles le sont beaucoup moins. La famille des modèles simplifiés qui est constitué des modèles de crue diffusante, des modèles cinématiques, et des modèles Muskingum peuvent en réalité intégrer la même équation : l'équation de la crue diffusante. Ils peuvent en théorie ne pas l'intégrer mais pour que leur domaine de validité soit le plus étendu possible, on cherche en général à fixer leurs paramètres pour qu'ils l'intègrent. En effet, le modèle de crue diffusante est le modèle simplifié le plus "hydraulique" des différents modèles simplifiés.

### Contenu physique des modèles simplifiés

Les schémas d'intégration directe de l'équation de la crue diffusante convergent vers la solution de cette équation, s'ils sont stables et consistants.

Les modèles cinématiques et Muskingum convergent aussi vers la solution de l'équation de la crue diffusante, s'ils sont stables et si leur diffusion numérique peut être identifiée à la diffusion hydraulique (il est abusif de parler de consistance du schéma pour ces modèles).

Donc à plusieurs équations et plusieurs approches de départ, ne correspond en réalité qu'une seule solution! Il faut toutefois moduler cette conclusion car, selon les modèles, le domaine où il est possible de faire converger les solutions vers les solutions de l'équation de la crue diffusante est différent.

Les modèles cinématiques et Muskingum peuvent intégrer l'équation de la crue diffusante pour des pentes raides alors que les schémas d'intégration directe ne le peuvent en général pas.

Les modèles cinématiques et Muskingum ne convergent en général vers les solutions de l'équation de la crue diffusante que dans le domaine où le nombre de Reynolds  $R$  reste inférieur à 0.5 (i.e que si les pentes restent suffisamment fortes).

En revanche, les schémas qui intègrent directement l'équation de la crue diffusante restent convergents même pour des conditions où  $R$  est supérieur à 0.5.

Etant donc ramené au problème de la validité d'une seule équation (celle de la crue diffusante), nous avons ensuite comparé les solutions de l'équation de la crue diffusante avec les solutions des équations de Saint-Venant, afin d'établir les domaines de validité de l'équation de la crue diffusante.

### Différences entre Saint-Venant et la crue diffusante

Pour les cas où les modèles cinématiques et Muskingum sont applicables (correspondant en général aux cas où  $R < 0.5$ ), les solutions des équations de Saint-Venant et celles des modèles simplifiés sont quasiment identiques, et ceci quelles que soient les conditions limites. La fonction de transfert constituée des équations de Saint-Venant se comporte comme celle de l'équation de la crue diffusante.

Pour les cas de pentes faibles ( $R > 0.5$ ) où les modèles cinématiques et Muskingum ne peuvent plus être utilisés, nous avons exploré les différences de comportement du modèle de crue diffusante et du modèle complet. Nous avons constaté que c'est moins la simplification des termes d'inertie des équations de Saint-Venant, que la perte d'une partie des conditions limites nécessaires à la fermeture du système de Saint-Venant, qui entraîne des différences entre les deux modèles.

Nous avons exploré les possibilités d'étendre le domaine d'application de la crue diffusante en jouant sur les paramètres hydrauliques du modèle, puis sur les conditions limites. Nous avons alors constaté que, pour les cas où la condition limite aval était inconnue (ou était supposée ne pas avoir d'influence sur l'écoulement amont), le modèle de crue diffusante permettait de reproduire très correctement les réponses du modèle complet de Saint-Venant, et ceci même pour des pentes très faibles (de l'ordre de 5 pour dix milles et des conditions limites amont fortement variable (débit capable atteint en dix minutes en partant d'un débit nul).

Pour tester la possibilité de prendre en compte une condition limite aval connue, nous avons construit un module de calcul de la ligne d'eau dans le modèle de crue diffusante qui permet de "récupérer" une partie des conditions limites utilisées par le modèle complet.

Pour des conditions limites aval approximativement inférieures au mi-remplissage du collecteur, et lorsque le nombre de Reynolds  $R$  reste inférieur à 2, le modèle de crue diffusante "amélioré" permet de reproduire à peu près correctement les hauteurs d'eau et les débits.

La modélisation par un modèle de crue diffusante d'écoulements à influence aval connue est d'autant moins bonne que la condition aval est forte, et que le nombre de Reynolds total  $R$  est petit (ce qui est le cas lorsque le coefficient de Strickler est grand, et que les pentes sont faibles). Dans de telles conditions, les phénomènes inertiels causés par la condition limite aval sont importants. Ces phénomènes ne peuvent être modélisés par le modèle de crue diffusante qui restera toujours un modèle global de type transport-diffusion même si on "couple" les hauteurs d'eau aux débits par un module de calcul de la ligne d'eau.

Les résultats obtenus n'en restent pas moins encourageants. Les possibilités du calcul de la ligne d'eau dans un modèle de crue diffusante pourraient être explorées pour des conditions particulières de structure et d'écoulement qui ont été examinées dans la partie 4.

### Perspectives

La finalité de notre recherche était de favoriser la diffusion des outils informatiques. Or le taux d'utilisation des modèles de simulation de l'écoulement dans les réseaux d'assainissement en régime transitoire reste toujours très faible. Une synthèse sur les outils existants n'est certainement pas suffisante pour que les collectivités locales et les hommes d'étude se décident à les utiliser. Les raisons de la non-utilisation de ces outils dépassent très souvent le domaine technique et sont plutôt d'ordre politique, culturel et social.

Par ailleurs, bien que ce soit dans le but de convaincre les utilisateurs potentiels des outils étudiés dans cette thèse que nous avons rédigé les parties 1 et 4, on a constaté depuis longtemps les limites des longs discours.

Ainsi, si on souhaite poursuivre des efforts de recherche pour augmenter le taux de diffusion des modèles, le développement d'outils modernes de sensibilisation et de formation est sans doute le moyen le plus efficace.

On peut donc supposer que ce travail de thèse n'atteindra pas le but poursuivi, que si les actions suivantes sont poursuivies :

- la construction de package informatique, (c'est-à-dire d'un logiciel qui contient plusieurs modèles que l'on peut choisir en option). Les critères de choix explorés dans cette thèse pourront être utilisés lors de la construction d'un tel logiciel, et pour son utilisation.
- le développement d'outils de sensibilisation et de formation qui pourront s'appuyer d'une part sur les parties 1 et 4, et d'autre part sur les tests de comparaison entre les modèles qui pourraient être utilisés dans des sessions de formation.



## LISTE DES ABREVIATIONS

Les revues :

JHD : Journal of Hydraulic Division

JHR : Journal of Hydraulic Research

Les organismes :

AIRH : Association Internationale de la Recherche en Hydraulique

ASCE : American Society of Civil Engineers

CERGRENE : Centre d'Enseignement et de Recherche Gestion des  
Ressources Naturelles et de l'Environnement

CRU : Centre de Recherche en Urbanisme

DDE : Direction Départementale de l'Équipement

DGCL : Direction Générale des Collectivités Locales

DUP : Direction de l'Urbanisme et des Paysages

ENGREF : Ecole Nationale du Génie Rural des Eaux et Forêts

ENPC : Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

GAR : Groupe d'action régional

INSA : Institut National des Sciences Appliquées

LHM : Laboratoire d'Hydrologie Mathématique de Montpellier

SOGREAH : Société Grenobloise d'Aménagement Hydraulique

SHF : Société Hydrotechnique de France

STU : Service Technique de l'Urbanisme

UFRGS : Université Fédérale du Rio Grande do Sul



## BIBLIOGRAPHIE

*ANDRIEU H. - 1986*

"Interprétation de mesures du radar Rodin de Trappes pour la connaissance en temps réel des précipitations en Seine Saint-Denis et Val-De-Marne"

Thèse de DI - ENPC - CERGRENE - 190 P. - 21 Janv. 1986.

*ANDRIEU H. - 1987*

"Le radar météo de Trappes et l'estimation des intensités pluvieuses en Seine Sanit-Denis - Intérêt pour la gestion automatisée"

La houille blanche, n° 6 - pp. 447 à 458 - 1987

*AMEIN M., CHU H.L. - 1975*

"Implicit Numerical Modeling of Unsteady Flows"

JHD - ASCE, Vol. 101 - n. HY6 -

Proc. Paper 11378 - pp. 717-732 - June 1975.

*BACHOC A. - 1979a*

"Pour agir en connaissance de cause"

Notice publicitaire du programme RERAM - août 1979

*BACHOC A. - 1979b*

"Modélisation des réseaux d'assainissement pluvial. Besoins et revue des outils existant en France."

Colloque de l'Agence Financière de Bassin de Seine Normandie - Royaumont - Sept. 1979

*BACHOC A. - 1984*

"Pour commencer à automatiser la gestion du réseau d'assainissement en Seine Saint-Denis ... DISONS DOUZE ANS".

Département de la Seine Saint-Denis. Direction Départementale de l'Équipement, Arrondissement Opérationnel n° 3 - document - 99 pages

*BACHOC A., THEVENOT D. - 1987*

"Quels outils pour quelle dépollution?" Journées Inter G.A.R. -

18 p. 11-12 Juin 1987

*BACHOC A., BERREBI R., COGEZ C., HELARY J.C. - 1984*

"Informatique et assainissement : l'expérience de la DDE de Seine Saint-Denis"

Colloque AFCET "Informatique et Décentralisation" mars 1984

*BIENVENU J.*

"La gestion automatisée des réseaux d'assainissement"

Travail de Fin d'Études - ENPC

*BOCQUILLON C. - 1978*

"Propagation des écoulements transitoires intermittents dans les systèmes hydrauliques à surface libre"

Rapport pour le STU - 85 p. - Décembre 1978.

**BOCQUILLON C., MOUSSA R. - 1987**

C.O.M.O.D. Logiciel de choix de modèles d'ondes diffusantes et de leurs caractéristiques. Colloque SHF - 14 pages - Novembre 1987

**BUJON G., HERREMANS L. - 1987**

"Les eaux pluviales, quels impacts sur le milieu récepteur ? La dépollution est-elle nécessaire ?"

Agence Financière de Bassin Seine- Normandie - 1987.

**BCEOM - 1982**

Bureau Central d'Etudes pour les Equipements d'Outre Mer

Ecouram 2. - Programme informatique pour la simulation de l'écoulement, le calcul des lignes d'eau et le dimensionnement des déversoirs dans les réseaux ramifiés en écoulement libre -

BCEOM, 130 pages. avril 1982.

**BENJAMIN WYLIE E. 1972**

"Water Surface profiles in divided channels" - Calcul des lignes d'eau à embranchements multiples." JHR 10 - n° 3 - pp. 325-341 - 1972

**BOSC E. - 1878**

"Dictionnaire raisonné d'architecture"

Paris -1878

**BROD P. et MOGIS D. - 1980**

"Essais de validation expérimentale de modèles d'écoulement en canalisation"

Projet de fin d'études - INSA de Lyon, Département Génie Civil et Urbanisme - 1980

**CHEVEREAU G. - 1974**

"Modèles mathématiques et simulation des écoulements dans les réseaux d'assainissement urbains ramifiés ou maillés"

Conférence - Congrès National des Ingénieurs des Villes de France - 1974.

**CHOCAT B. - 1978**

"Un modèle de simulation des écoulements dans les réseaux d'assainissement pluvial"

Thèse de D.I. - INSA de Lyon - 300 p. - 1978.

**CHOCAT B. - 1981**

"Un système d'aide à la gestion, la prévision et la conception des équipements d'assainissement"

Thèse D'état 8119 - INSA de Lyon - 322 p. - 1981.

**CHOCAT B., BREUIL B. - 1984**

"Les nouvelles méthodes de conception des réseaux d'assainissement - Présentation du KIT modèle"

INSA - 25 au 27 Septembre 1984.

**CHOCAT B., PEYRETTI G. - 1979**

"Essai de classification des modèles utilisés en hydrologie urbaine"  
Revue T.S.M. L'eau - pp. 93-97 - Février 1979

**CHOCAT B., THIBAUT S.**

"Sciences et techniques de l'assainissement"  
Cours INSA de Lyon, Département Génie Civil et Urbanisme - 4 tomes -  
400 p.

**CHOCAT B., BARRAUD S., THIBAUT S.**

Présentation du modèle de propagation en conduite du système SERAIL -  
INSA de Lyon, Département Génie Civil et Urbanisme - 25 pages.

**CLAUDE V. - 1985**

"Strasbourg 1850 - 1914, Assainissement et politiques urbaines"  
Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, Ecole des hautes études en sciences sociales -  
Paris - 372 pages - Mars 1985

**CLIFT - 1985**

"Use of radar in meteorology"  
Technical note n° 181 - World Meteorological Organization -  
W.M.O n° 625 - Genève 1985

**COGEZ Cl. - 1983**

Informatique et conception des réseaux d'assainissement -  
Communication - Stage ENPC n° 5554 - 18 pages - Octobre 1983

**COGEZ Cl. - 1987**

Les eaux pluviales urbaines : L'état de crise - Caractéristiques et  
Implications - SHF C87.17 - 6 pages - Novembre 1987

**CORBIN A. - 1983**

"Le miasme et la jonquille - L'odorat et l'imaginaire social au  
18<sup>ème</sup> et 19<sup>ème</sup> siècle"  
Aubier - Collection Historique - 1983

**CUNGE J.A. - 1969**

"On the subject of flood propagation computation method (Muskingum  
method)" - Journal of Hydraulic Research (JHR) - International  
Association for Hydraulic Research (AIRH) - Vol. 7 n° 2 - pp. 205-230  
- 1969.

**CUNGE J.A. - 1976**

"L'hydrologie et l'ingénieur - Transfert dans les chenaux et  
rivières, Modèles mathématiques en hydraulique fluviale; Problèmes de  
simulation"  
Sessions de perfectionnement pour ingénieurs - ENSHG - Institut  
national polytechnique de Grenoble - 20 au 24 septembre 1976.

**CUNGE J.A., CAYLA O. - 1980**

"Etude générale du ruissellement urbain - IV - Modèle de Muskingum"  
Ministère de l'Equipement et du Logement - STU - DEU - 1980

*DAUBERT A. - 1964*

"Quelques aspects de la propagation des crues"  
La Houille Blanche - n. 3 - pp. 341-346 - 1964

*DDE 93 - 1981*

"Gestion automatisée du réseau d'assainissement départemental"  
Rapport du Préfet au Conseil Général - nov. 1981

*DENOEUX T. 1988*

"Evaluation des performances d'une prévision radar en vue  
d'application à l'hydrologie urbaine"  
Rapport CERGRENE - Convention plan urbain - Janvier 1988

*DESBORDES M. - 1979*

"La modélisation en assainissement : un outil efficace pour l'aide à  
la décision"  
LHM 30/79, 39 p., STU-Paris - 1979

*DESBORDES M. - 1983*

"La modélisation en hydrologie urbaine"  
Stage ENPC : Informatique et conception des réseaux d'assainissement  
- communication - 16 pages - 11 au 13 octobre 83

*DESBORDES M. - 1985*

"Les incertitudes associées à la métrologie en hydrologie urbaine;  
leurs incidences sur l'estimation des coefficients de ruissellement"  
Document LHM - 105 pages manuscrites - Octobre 1985.

*DESBORDES M. - 1987*

"Contribution à l'analyse et à la modélisation des mécanismes  
hydrologiques en milieu urbain"  
Thèse d'Etat - Université des Sciences et Techniques du Languedoc -  
242 p. - 22/5/87.

*DESBORDES M., DEUTSCH J.C. - 1982*

"Incertitudes de mesure et modélisation en hydrologie urbaine"  
Stage ENPC : Les nouvelles méthodes de conception des réseaux  
d'assainissement - communication - 11 pages - 25 au 27 septembre 84

*DESBORDES M., RAOUS P., TREVISIOL Y. - 1982*

"Méthodologie du calage des modèles de ruissellement pluvial"  
LHM 39/82, STU-Paris 85 p., 1982

*DESBORDES M., TREVISIOL Y., DELMAS V. - 1984*

"Modèle de pluie pour la prise en compte des apports des zones  
perméables en milieu urbain"  
Sciences et Techniques de l'Eau (Canada), 17(2), p. 149-153 - 1984

*DEUTSCH J.C. - 1982*

"Caractérisation de la pollution des eaux de ruissellement"  
Société Hydrotechnique de France - 17<sup>e</sup> journées de l'Hydraulique -  
Nantes - Question II - Rapport N° 1 - Nantes 14-16 Sept. 1982

**DUBY G.**

"Histoire de l'urbanisme en 5 volumes" - Seuil

Tome n° 1 : "La ville antique, des origines au IX<sup>ème</sup> siècle"  
- 650 pages - 1980

Tome n° 2 : "La ville médiévale, des carolingiens à la renaissance" - 651 pages - 1980

Tome n° 3 : "La ville classique, de la renaissance aux révolutions" - 653 pages - 1983

Tome n° 4 : "La ville de l'âge industriel, le cycle Haussmannien (1840-1940)" - 665 pages - 1983

Tome n° 5 : "La ville aujourd'hui, croissance urbaine et crise de la cité".

**DUPUY G. - 1978a**

"Urbanisme et technique : chronique d'un mariage de raison"

Paris - CRU - 420 pages - 1978

**DUPUY G. - 1978b**

Comment l'on fabriquait la science opérationnelle urbaine vers les années 1940. La circulaire de CAQUOT - 1978

**DUPUY G., KNAEBEL G. - 1982**

"Assainir la ville hier et aujourd'hui"

Dunod - Les pratiques de l'espace - 92 p. - juin 1982.

**EINFALT Th., DENOEU Th 1987a**

"Radar rainfall forecasting for real time control of a sewer system"  
- Proceedings de la 4<sup>ème</sup> conférence internationale de l'hydrologie urbaine - topics in urban drainage hydraulics and hydrology -  
Lausanne - Sept. 1987.

**EINFALT Th., DENOEU Th 1987b**

"Utilisation d'images radar en prévision de pluie" - Actes du 6<sup>ème</sup>  
congrès : "Reconnaissance des formes et Intelligence Artificielle",  
AFCET - Antibes - Nov. 1987

**ENPC - 1978/1979**

"Eléments de mécanique des fluides appliquée" -

Cours de l'ENPC - 1978/1979

**ESKENAZI E. - 1975**

"Contribution à l'étude du transfert pluie nette - débit résultant  
des bassins versants hydrologiques"

Thèse, 241 p., Faculté des Sciences Appliquées - Université de Liège,  
Belgique, 1975.

**FAUQUIER C., JACQUET G., - 1985**

"Principes de choix des paramètres de calcul du programme PUMA"

DDE Seine Saint Denis - Mars 1985

**FREROT A., BREUIL B., - 1984**

"Les nouvelles méthodes de conception des réseaux d'assainissement"

ENPC - Direction de la Formation Continue - Stage n° 5036 -  
15 au 27 septembre 1984 - ENPC - PARIS.

*FREROT A., GAILLARD J., - 1983*

"Conception des réseaux d'assainissement"  
ENPC, CERGRENE - 131 pages - Oct. 1983 -

*FREROT A. - 1987*

"Procédures d'optimisation des consignes de gestion d'un réseau d'assainissement automatisé"  
Thèse, 263 p., Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris-1987.

*GILL M.A. - 1979*

"Translatory characteristics of the Muskingum method of flood routing" - Journal of Hydrology, volume 40 - pp. 17-29 - 1979.

*GOUBERT J.P. - 1986*

"La conquête de l'eau" - Collection Pluriel - Robert Laffont, Paris  
296 pages - 1986.

*GRIJSEN J.G., VREUGDENHIL C.B.*

"Numerical representation of flood waves in rivers"  
Delft hydraulics laboratory - publication n° 165 - June 1976

*GUERAND R.H. - 1983*

"La bataille du tout à l'égout Parisien" - Revue Histoire n° 35 -  
pp. 66 à 74 - 1983

*GUILLERME A. - 1984*

"Les temps de l'eau : la cité, l'eau et les techniques"  
Collection milieux, éditions du Champ Vallon, 01420 Seyssel, France -  
264p. - 1984.

*HAYAMI - 1951*

"On the propagation of flood waves"  
Kyoto : Japan, Kyoto University - Disaster Prevention Research  
Institute - Bull 1 - 16 p. - 1951.

*HEMAIN J.C - 1980*

Approche méthodologique pour l'étude de la pollution du ruissellement  
pluvial urbain - Thèse D.I - 232 pages - USTL, Montpellier

*HEMAIN J.C. - 1983*

"Guide de construction des pluies de projet"  
LHM, 24/83, - STU, Paris - 136 p. - 1983.

*HOLLY, MAZAUDOU B. - 1981*

"Introduction d'un système de régulation. Amélioration des sous  
programmes existants de CAREDAS."  
SOGREAH - Mai 1981

*HUBERT G. - 1989 (A paraître)*

"Approche méthodologique pour l'aménagement des cours d'eau en milieu  
urbain" - Thèse de Doctorat - INSA de LYON - 1989

**HUG M. - 1975**

"ENPC - Cours de mécanique des fluides appliqués"

Eyrolles - Ch. II, Ch. VIII, CH. XV - 1975

**HYDRATEC - 1979**

"Amélioration et exploitation du réseau d'égouts parisien"

Annexe G - "Formulation mathématique des écoulements en réseau à surface libre" - 1979.

**HYDRATEC - 1983**

"Réseaux d'assainissement - Le programme HYDRA"

Hydratec - 11 pages - Novembre 1983.

**JACQUET G., FREROT A. - 1983**

"Elaboration du système évolutif d'aide à la conduite du réseau de Seine Saint Denis. Gestion des stockages et prévision météorologique"

Informatique, automatisme et assainissement - ENPC - Sept. 1983

**JACQUET G., ANDRIEU H., DENOEUX Th. - 1987**

"About radar rainfall measurement" - Proceedings of the 12<sup>th</sup> congrès international de l'IAHR, topics in urban drainage hydraulics and hydrology - Lausanne 31 Août au 4 sept. 1987.

**JACQUET G., Einfalt T., Denoeux T., Andrieu H., Pircher V., David P.**

"Principes d'évaluation des méthodes de mesure et de prévision de pluie par radar en hydrologie urbaine"

Eau et Informatique, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, pp. 76-85 - 1986.

**JONES S.B. - 1981**

"Choice of space and time steps in the Muskingum-Cunge flood routing method"

Proceedings, Institute of Civil Engineers - Part 2, 71 pp. 759-772 - Sept 1981.

**KATHIRITHAMBY SIVALOGANATHAN - 1978**

"Flood Routing by Characteristics Methods"

JHD - ASCE - Vol. 104 - n. HY7 - July 1978

**KATHIRITHAMBY SIVALOGANATHAN - 1979**

"Channel flow computations using characteristics"

JHD - ASCE - Vol. 105 - n. HY7 - pp. 899 à 911 - July 1979.

**KNAEBEL G. - 1979**

"La perception sociale du "sale" comme élément explicatif de l'assainissement exclusif par réseaux d'égouts"

Note - 1979

**KNAEBEL G. - 1985**

"Evacuer ou retenir le ruissellement pluvial? Les implications et les limites d'une nouvelle problématique." - 8 pages -

Communication à RENCONTRES DIAGONALE 5/6.2.1985

**KOUSSIS A. - 1976**

"An approximative dynamic flood routing method"

Proceedings of the international symposium on unsteady flow in open channels - paper L1 - Newcastle-Upon-Tyne - England - 1976.

**KOUSSIS A. - 1978**

"Theoretical estimation of flood routing parameters"

Journal of the Hydraulics Division - ASCE - Vol 104, n HY1 - Proc. paper 13456 - pp. 109-115 - janvier 1978.

**KOUSSIS A. - 1980**

"Comparaison of Muskingum Method difference schemes"

JHD - ASCE - Vol 106, n HY5 - pp. 925-929 - May 1980

**KOVACS Y. - 1984**

"Rapport n° 1 - Modèles de simulation d'écoulement unidimensionnel à surface libre"

ENPC, CERGRENE - 34 p. - Janv. 1984.

**KOVACS Y. - 1984**

"Notice du programme ECOUL"

ENPC, CERGRENE - Rapport - 33 p. - Oct. 1984.

**KUNDZEWICZ Z.W. - 1980**

Discussion of "Approximate flood routing methods : A review"

JHD - ASCE - Vol. 106 - n. HY12 - pp. 2072-2075 - Dec. 1980.

**KUNDZEWICZ Z.W., STRUPCZEWSKI W.G. - 1982**

"Approximate translation in the Muskingum Model"

Journal des Sciences Hydrologiques - Vol. 27 - n°1 - pp. 19-27 - 1982

**LANCELOT B. - 1985**

"La gestion automatisée des réseaux d'assainissement : analyse d'un processus d'innovation technologique"

Thèse 3ème cycle - Université de Paris-Val-de-Marne, Créteil - 1985.

**LAPORTE D. - 1978**

Histoire de la merde - Paris - Chritian Bourgeois 1978.

**LARINIER M., SAUCEROTTE H. 1970**

"La propagation des crues à partir des hypothèses d'Hayami"

Note Hyd. 16/70, E.D.F. 45 pages - Mai 1970

**LAURENSEN E.M. - 1964**

"A catchment storage model for runoff routing"

Journal of hydrology - Vol. 2, pp. 141-163 - 1964

**LIGHTHILL F.R.S., WHITHAM G.B. - 1955**

"On kinematic waves, 1, Flood movement in long rivers",

Proceedings, Royal Society of London - Series A, Vol. 229 - pp. 281-316 - 1955

*MILLER W.A., CUNGE J.A. - 1975*

"Simplified equations of unsteady flow"

Unsteady flow in open channels (3 volumes) Mohammad and Yevjevich - Water Resources Publications - Fort Collins, Colorado - chap. 5 - pp. 183-257 - 1975.

*MILLER W.A., WOOLHISER D.A. - 1975*

"Choice of models" - Unsteady flow in open channels (3 volumes)

K. Mohmood and V. Yevjevich - Water Ressources Publications - Fort Collins, Colorado - Chapitre 9, pp. 367-378 - 1975

*MINISTERES de l'Intérieur, de la Culture de l'Environnement, de l'Équipement et de l'Aménagement du Territoire, de l'Agriculture, de la Santé et de la Sécurité Sociale - 1977*

"Instruction technique relative aux réseaux d'assainissement des agglomérations"

Circulaire interministérielle n° 77-284 du 22 juin 1977 - Paris, Imprimerie Nationale - 1977

*MINISTERE de la Reconstruction et de l'Urbanisme - 1949*

"Circulaire CG 1333 du 22 février 1949 ; instruction technique relative à l'assainissement des agglomérations"

Paris - Imprimerie Nationale - 1949.

*NASH J.E. - 1959*

"A note on the Muskingum flood-routing method"

Journal of geophysical research - vol. 64 - pp. 1053-1056 - 1959

*OLIVRY D. - 1987*

"L'eau dans la ville" - Revue : aménagement et nature n° 87 - Environnement en milieu urbain 22<sup>ème</sup> année - pp. 6 à 10

*OLIVRY D., HUBERT G. - 1986*

"L'eau dans les politiques locales d'environnement urbain - Analyse de quelques études de cas" - CERGRENE, Ministère de l'Environnement - Rapport - Décembre 1986.

*PETER J.J., YEVJEVICH V. - 1974*

"Simulation accuracies of gradually Varied Flow"

JHD - ASCE - Vol. 100 - n.HY7 - Proc. Paper 10677 - PP. 1011-1030 - July 1974

*POCHAT R. - 1980*

"Mécanique des fluides - Hydraulique à surface libre"

Hanoi, Ecole d'été - ENGREF - 283 p. - 1980.

*PONCE V.M., ASCE - 1979*

"Simplified Muskingum Routing Equation"

JHD - ASCE - Vol. 105 - n. HY 1 (technical notes) - pp. 85-91 - Jan. 1979.

*PONCE V.M. - 1980*

"Linear Reservoirs and Numerical Diffusion"

JHD - ASCE - Vol. 106 - n. HY5 - pp. 691-699 - May 1980.

**PONCE V.M. - 1983**

Closure to discussion of "Accuracy criteria in diffusion routing"  
JHD - ASCE - Vol. 109 - n. HY5 - pp. 806-807 - May 1983.

**PONCE V.M., THEURER F.D. - 1980**

Discussion of "Approximate Flood Routing Methods : a review"  
by P.E. Weinmann and E.M. Laurenson - JHD ASCE - Vol. 106 - n. HY11 -  
pp. 1945-1947 - Nov. 1980

**PONCE V.M. and THEURER F.D. - 1982**

"Accuracy Criteria in Diffusion Routing"  
JHD - ASCE - Vol.108 - n. HY6 - pp. 747-757 - June 1982.

**PONCE V.M., YEVJEEVICH V. - 1978**

"Muskingum Cunge Method with variable parameters"  
JHD - ASCE - Vol. 104 - n. HY12 - technical notes - pp. 1663-1667 -  
December 1978.

**PONCE V.M., CHEN Y.H., SIMONS D.B. - 1979**

"Unconditional Stability in Convection Computations"  
JHD - ASCE - Vol. 105 - n. HY9 - pp. 1079-1086 - Sept. 1979

**PONCE V.M., LI R.M., SIMONS D.B. - 1978**

"Applicability of Kinematic and Diffusion Models"  
JHD - ASCE - Vol. 104 - n. HY3 - pp. 353-360 - Mars 1978.

**PONCE V.M., YEVJEVICH V., SIMONS D.B. - 1978**

"The numerical dispersion of the Muskingum Method"  
Proceedings 26 th hydraulics division speciality conference- ASCE -  
College Park Md. - Aug. 1978.

**PRICE R.K. - 1973a**

"Variable parameter diffusion methods for flood routing"  
Rep INT 115 - Hydraulics research station - Wallingford 1973

**PRICE R.K. - 1973b**

"Flood routing methods for British rivers"  
Report n° 3, Hydraulics Research Station -  
Wallingford 1973.

**PRICE R.K. - 1973c**

"Flood routing methods for British rivers"  
Proc. Inst. of Civil Eng. 55 - pp. 913-930 - December 1973.

**PRICE R.K. - 1979**

"A comparison of four numerical methods for flood routing"  
JHD - ASCE - Vol. 100 - n. HY7 - pp. 879-899 - July 1979.

**PRICE R.K. - 1980**

Discussion of "Approximate flood routing methods : a review"  
by P.E. Weinmann and E.M. Lawrenson - JHD - ASCE - Vol. 106, n. HY11  
- pp. 1947-1948 - Nov. 1980.

*Procès-Verbal de Conférence* entre Mr. l'architecte Voyer de la Ville du Mans et Mr. l'ingénieur des Ponts et Chaussées chargé du service des Grands Travaux - 1869

Projet d'amélioration des abords du port et de la rue du port.  
Ville du Mans - Service spécial grands travaux - 3 Dec. 1869.

*RENARD D. - 1987*

"Pollution et dépollution des eaux pluviales. Quels enjeux ?"

Direction Régionale de l'Équipement d'Ile-de-France - 1987.

*SCHILLING - 1984*

"Short term flow forecasting for real time stormwater control" -

3<sup>ème</sup> conférence internationale en hydrologie urbaine - pp. 1111 à 1119 - Göteborg 1984

*SEVUC A.S., YEN B.C. - 1982*

"Sewer network routing by dynamic wave characteristics"

JHD - ASCE - Vol. 108 - n. HY3 - pp. 379-398 - May 1982

*SHF - 1982*

"L'assainissement de demain; hydraulique des eaux pluviales et usées"

Dix septièmes journées de l'hydraulique - compte rendu des séances - Nantes 14 - 16 Septembre 1982

*SOGREAH*

"Modèle mathématique de simulation des écoulements dans les réseaux d'assainissement urbains. Programme CAREDAS"

*SRIDHARAN K., KUMAR M.S. - 1981*

"Parametric study of flood wave propagation"

JHD - ASCE - Vol. 107 - n. HY9 - pp. 1061-1076 - Sept. 1981.

*STEPIEN I - 1984*

"On the numerical solution of the Saint-Venant Equations"

Journal of hydrologie - 67 : pp. 1-11 - 1984.

*STRUPCZEWSKI W., KUNDZEWICZ Z. - 1979*

"Translatory characteristics of the Muskingum method of flood routing"

Journal of Hydrology - Vol 40 - pp. 17-29 - 1979.

*STRUPCZEWSKI W., KUNDZEWICZ Z. - 1980a*

"Muskingum method revisited"

48 (n. 3/4) pp. 327-342 - May 1980.

*STRUPCZEWSKI W., KUNDZEWICZ Z. - 1980b*

"Translatory characteristics of the Muskingum method of flood routing"

A comment - Journal of Hydrology, 48 - pp. 363-368 - 1980.

*STU - 1979*

Ministère de l'Intérieur, D.G.C.L., Ministère de l'Environnement et du Cadre de Vie - DUP-STU - "Calcul des réseaux d'assainissement des agglomérations - RERAM Notice d'analyse" - STU Paris - Août 1979

*STU - 1982*

La maîtrise du ruissellement des eaux pluviales - Quelques solutions pour l'amélioration du cadre de vie - Ministère de l'Urbanisme et du Logement - D.U.P. - document bleu - 61 pages - Octobre 1982

*STU - 1986*

"Guide des logiciels français d'hydrologie urbaine"

Synthèse des travaux du groupe de travail : "Logiciel Français d'Hydrologie urbaine" du Service Technique de l'Urbanisme (STU), - 134 p. - STU - Juin 1986 -

*SZABO J., BARTHA P.*

"A non-linear cascade model"

Water Resources Development Research Center, VITUKI Budapest, H-1453, P.O.Box 27. Hongrie

*THIBAUT S. - 1979*

"Eléments pour une phénoménologie en hydrologie urbaine"

Thèse de Docteur-Ingénieur - INSA de Lyon - 270 pages - 1979

*THIRRIOT C. - 1982*

"L'égoutier et le savant - Compte moral pour universitaire en cure d'assainissement".

Conférence inaugurale aux 17<sup>e</sup> journées de l'hydraulique (SMF) - Nantes - Sept. 1982

*TODINI E., BOSSI E. - 1986*

"Méthode de calcul de propagation de crue par un schéma inconditionnellement stable, appliqué à la prévision et au contrôle en temps réel"

AIRH - JHR, vol. 24 n° 5, - pp. 405 - 424. - 1986

*TUCCI C. - 1986*

Modèles mathématiques en hydrologie et en hydraulique - Revista Brasileira De Engenharia (RBE) - 3 tomes - cours en portugais - Juin 1986

*VOGEL - 1980*

"Real time measurement of convective precipitation over an urban area" - Proceedings of the Oxford Symposium - publication n° 129 - AISH - pp. 95 à 102 - Avril 1980.

*WEINMANN P. E., LAURENSEN E. M. - 1979*

"Approximate flood routing methods : a review"

JHD - ASCE - Vol. 105, n. HY12 - pp. 1521-1536 - December 1979.

*WEINMANN P. E., LAURENSEN E. M. - 1981*

Closure to discussion of "Approximate flood routing methods : a review"

JHD - ASCE - Vol. 107 - n.HY9 - pp. 1112-1114 - Sept. 1981

**WIGNYOSUKARTO B. - 1982**

"Ecoulement transitoire en canal"

Stage d'un diplôme d'étude approfondies (D.E.A.)

Institut de Mécanique de Grenoble - Société du Canal de Provence

REF. 40.82-1430 - Octobre 1982

**YEVJEVICH V. - 1975**

"Unsteady flow in open channels - Introduction"

K.MAHMOOD and V. YEVJEVICH

Water Ressources Publications - Fort Collins, Colorado 80522, USA -

3 volumes - pp. 1-27 - 1975.

**YEVJEVICH V. - 1975**

"Unsteady flow in open channels"

K.MAHMOOD and V. YEVJEVICH

Water Ressources Publications - Fort Collins, Colorado 80522, USA -

3 volumes - 1975.



**ANNEXES**



## ANNEXE 1

Calcul permettant de formuler l'équation de la crue diffusante à partir du système d'équation de Saint-Venant simplifié des termes d'inertie dans l'équation dynamique.

Lorsqu'il n'y a pas d'apports latéraux, le système (2.6) s'écrit :

$$(2.6) \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x} = I - J \end{array} \right.$$

Par définition de B, puisque  $dS = B \cdot dy$ , on a :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = B \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = B \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$$

Par ailleurs, puisque par définition  $z = z_f + y$ , on a :

$$\frac{\partial y}{\partial x} - I = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z_f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

Le système (2.6) peut donc aussi s'écrire sous la forme :

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial x} + B \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad (a) \\ \frac{\partial z}{\partial x} = -J \quad (b) \end{array} \right.$$

Dérivons l'équation (a) par rapport à  $x$  ( $t$  étant fixé) et l'équation (b) par rapport à  $t$  ( $x$  étant fixé) pour éliminer les dérivées croisées de  $z$ . Si on appelle (a') et (b'), les équations obtenues après dérivation et qu'on effectue l'opération (a') - B.(b'), on obtient alors l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{dB}{dx} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} - B \cdot \frac{dJ}{dt} = 0$$

avec, puisque  $B = B(x, z)$  et  $J = J(Q, z, x)$  :

$$\frac{dB}{dx} = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$$

Soit finalement :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \left[ \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right] \cdot \frac{\partial z}{\partial t} - B \cdot \left[ \frac{\partial J}{\partial Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \right] = 0$$

On utilise à nouveau les équations (a) et (b) pour supprimer les dérivées partielles de  $z$  par rapport à  $x$  et  $t$ . En effet, on a :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -J$$

ce qui donne finalement, en regroupant les termes en  $\partial Q/\partial x$ , l'équation dite équation de la crue diffusante :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{1}{B} \left[ \frac{\partial B}{\partial x} - J \cdot \frac{\partial B}{\partial z} + B \cdot \frac{\partial J}{\partial z} \right] \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} - B \cdot \frac{\partial J}{\partial Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

En divisant cette équation par  $B \cdot \partial J/\partial Q$ , on obtient l'équation de la crue diffusante qui s'écrit classiquement sous la forme :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = D \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

si l'on a posé :

$$C = \frac{\left[ \frac{\partial B}{\partial x} - J \cdot \frac{\partial B}{\partial z} \right]}{B^2 \cdot \frac{\partial J}{\partial Q}} - \frac{\frac{\partial J}{\partial z}}{B \cdot \frac{\partial J}{\partial Q}} \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{B \cdot \frac{\partial J}{\partial Q}}$$

$$C = \underbrace{\hspace{10em}}_{Tf} + \underbrace{\hspace{5em}}_{Cs}$$

-  $Tf$  est un terme de forme qui disparaît quand les berges sont verticales et restent parallèles.

-  $Cs$  est connu sous le nom de célérité de Kleitz-Seddon

## ANNEXE 2

Détermination de la célérité de propagation de l'onde cinématique pour un collecteur circulaire et pour un collecteur rectangulaire.

Notations :

K : coefficient de Strickler  
I : pente de la conduite

y : hauteur d'eau  
Rh : rayon hydraulique  
S : section mouillée  
B : largeur au miroir  
P : périmètre mouillé

On a vu que la célérité de l'onde cinématique s'exprime par la relation  $C = dQ/dS$  (cf. annexe 1).

La formule de Manning-Strickler nous donne :

$$Q = K S \sqrt{I} \cdot Rh^{2/3} = K \sqrt{I} \frac{S^{5/3}}{P^{2/3}}$$

$$\text{Ainsi } dQ = \left[ \frac{\partial Q}{\partial S} \right]_P dS + \left[ \frac{\partial Q}{\partial P} \right]_S dP = \frac{5}{3} \cdot K \sqrt{I} \frac{S^{2/3}}{P^{2/3}} dS - \frac{2}{3} \cdot K \sqrt{I} \frac{S^{5/3}}{P^{5/3}} dP$$

$$\text{d'où : } \frac{dQ}{dS} = \frac{5}{3} \cdot K \sqrt{I} \cdot Rh^{2/3} - \frac{2}{3} \cdot K \sqrt{I} \cdot Rh^{5/3} \cdot \frac{dP}{dS} = \frac{5}{3} \cdot V - Ts$$

$$\text{puisque } V = \frac{Q}{S} = K \sqrt{I} \cdot Rh^{2/3}$$

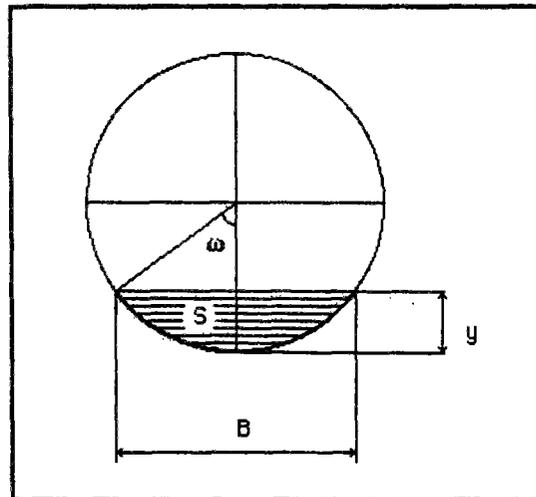
$$\text{soit encore : } \frac{dQ}{dS} = \frac{5}{3} \cdot V - \frac{2}{3} \cdot V \cdot Rh \cdot \frac{dP}{dS}$$

### A) Collecteur circulaire

Soit  $\omega$ , l'angle caractérisant la hauteur d'eau dans le collecteur comme indiqué sur la figure ci-contre.

$\omega$  varie entre 0 et  $\pi$ .

Soit R, le rayon de la conduite (à ne pas confondre avec le rayon hydraulique Rh)



Exprimons  $R_h$ ,  $S$ ,  $B$  et  $y$  en fonction de l'angle  $\omega$ . On a directement :

$$y = R(1 - \cos\omega)$$

$$P = 2R\omega$$

$$B = 2R\sin\omega$$

$$S = \omega R^2 - \frac{2(R\cos\omega)(R\sin\omega)}{2} = R^2\left(\omega - \frac{\sin 2\omega}{2}\right)$$

$$R_h = \frac{S}{P} = \frac{R}{2} \left[ 1 - \frac{\sin 2\omega}{2\omega} \right]$$

On peut exprimer  $T_s$  en fonction de  $\omega$  :

$$dP = 2Rd\omega \quad ; \quad dS = R^2(1 - \cos 2\omega)d\omega$$

$$\text{d'où : } \frac{dP}{dS} = \frac{2}{R(1 - \cos 2\omega)} = \frac{1}{R\sin^2\omega}$$

$$\text{Finalement : } T_s = \frac{2}{3} \cdot K\sqrt{I} \cdot R_h^{5/3} \cdot \frac{1}{R\sin^2\omega} = \frac{2}{3} \cdot V \cdot \left[ \frac{R_h}{R\sin^2\omega} \right]$$

Calculons de même le terme de forme  $T_f$  qui est utilisé pour le calcul du coefficient  $C$  de la crue diffusante (cf. annexe 1).

Nous avons vu que  $T_f$  avait pour expression :

$$T_f = \frac{D}{B} \cdot \left[ \frac{\partial B}{\partial x} - J \cdot \frac{\partial B}{\partial y} \right] \quad \text{avec} \quad D = \frac{Q}{2JB}$$

Dans le cas d'un collecteur circulaire,  $\partial B/\partial x = 0$

$$\text{d'où : } T_f = - \frac{Q}{2B^2} \cdot \frac{\partial B}{\partial y}$$

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{dB}{dy} = \frac{2R\cos\omega}{R\sin\omega} = \frac{2}{\text{tg}\omega}$$

$$\text{Finalement, } T_f = - \frac{Q}{2B^2 \text{tg}\omega}$$

Les trois formules permettant le calcul de  $C$ , dans le cas d'un collecteur circulaire sont :

$$1) \quad C_{e1} = \frac{5}{3} V$$

$$2) \quad C_{e2} = \frac{5}{3} V - T_s$$

$$3) \quad C_{e3} = \frac{5}{3} V - T_s + T_f$$

avec les expressions ci-dessus pour  $T_s$  et  $T_f$

## B) Collecteur rectangulaire

Soit L : la largeur du collecteur

Soit H : la hauteur du collecteur

On peut exprimer Rh, S, B et y en fonction de L et H

$$P = 2.y + L$$

$$B = L = \text{constante}$$

$$S = L.y$$

$$Rh = \frac{S}{P} = \frac{L.y}{L + 2.y}$$

On peut donc exprimer dS et dP en fonction de L.

$$dS = L.dy \quad \text{et} \quad dP = 2.dy$$

Finalement, d'après l'expression de Ts trouvée précédemment, on a :

$$Ts = \frac{4}{3}.V. \frac{y}{L + 2.y}$$

Pour des canaux de grande largeur où le terme  $y/(L + 2y)$  est inférieur à 0.1, le terme Ts est négligeable.

Par contre, en assainissement où les collecteurs sont en général tels que L soit du même ordre de grandeur que y, le terme Ts ne peut être négligé.

Le terme Tf (cf.annexe 1) du coefficient C de la crue diffusante est nul car B est constant ce qui entraîne que les dérivées partielles :

$\partial B/\partial x$  et  $\partial B/\partial y$  sont nulles.

Les valeurs de C peuvent être calculées par les deux relations :

$$1) \quad Ce1 = \frac{5}{3} V$$

$$2) \quad Ce2 = \frac{5}{3} V - Ts$$