

Un modèle thermo-mécanique de polycristal pour l'étude des bandes de cisaillement

Maurizio Brocato

▶ **To cite this version:**

Maurizio Brocato. Un modèle thermo-mécanique de polycristal pour l'étude des bandes de cisaillement. Matériaux. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1994. Français. NNT : . tel-00523014

HAL Id: tel-00523014
https://pastel.hal.science/tel-00523014

Submitted on 4 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

80 753

US 19526(8)

ECOLE NATIONALE
DES PONTS ET CHAUSSEES

DOCTORAT DE L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité : Structures et Matériaux

Thèse présentée par

Maurizio BROCATO

UN MODELE THERMO-MECANIQUE DE POLYCRISTAL POUR L'ETUDE DES BANDES DE CISAILLEMENT

Soutenue le 14 Janvier 1994

Jury	**G.CAPRIZ**	Président
	P.ROUGEE	Rapporteur
	C.STOLZ	Rapporteur
	E.BENVENUTO	Examinateur
	A.EHRLACHER	Examinateur
	B.MARRANDET	Examinateur

E.N.P.C.
DOC13563

EF 12

REMERCIEMENTS

Je remercie Alain Ehrlacher, Directeur du Centre d'Enseignement et de Recherche en Analyse des Matériaux de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées pour avoir dirigé cette thèse. C'est grâce à lui que j'ai eu la possibilité de commencer, poursuivre et terminer ce travail. Je lui dois non seulement le résultat témoigné par ce mémoire, mais l'ensemble de mes études en mécanique.

Je remercie Jean Bouvaist, Directeur de recherche délégué relations publiques et universitaires de Péchiney et Bernard Marrandet, Adjoint au responsable du Secteur Métallurgie de Péchiney pour avoir été promoteurs de ce travail tant du point de vue scientifique que financier. C'est grâce à l'oeuvre de Monsieur Bouvaits que j'ai pu poursuivre mes études en France et c'est grâce aux suggestions et aux indications de Monsieur Marrandet que j'ai pu m'orienter dans le vaste domaine de la métallurge des Al-Mg. Je remercie en outre Monsieur Marrandet d'avoir participé au jury d'évaluation de cette thèse.

Je remercie Paul Rougee, Professeur à l'Université Paris XIII, et Claude Stolz, Chercheur au CNRS, d'avoir accepté de rapporter sur mon travail et pour les remarques et les conseils qu'ils m'ont donnés et qui seront précieux pour l'avenir.

Je remercie Edoardo Benvenuto, Directeur de la Faculté d'Architecture de l'Université de Genova, pour l'intérêt qu'il a manifesté au cours des deux dernières années et pour avoir été examinateur de ce travail.

Je remercie Gianfranco Capriz, Professeur au Département de Mathématiques de l'Université de Pisa pour avoir accepté de présider le jury et pour l'attention qu'il a dédié à mon travail.

Merci à tous mes amis du ***CERAM*** *et au personnel de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées pour m'avoir accueilli.*

à Paola

Table des matières

P L A N
du travail

Sommaire général V
Sommaires des chapitres VII

Introduction 1

Première Partie
Etude préliminaire

Chapitre I Métallurgie 9
Chapitre II Mécanique et Thermodynamique 25

Deuxième Partie
Modèle de polycristal

Chapitre III Polycristal plan 77
Chapitre IV Polycristal 115

Troisième Partie
Etude microscopique

Chapitre V Pertinence 175
Chapitre VI Equivalence microscopique 225

Quatrième Partie
Axiomatique

Chapitre VII Axiomatique classique 261
Chapitre VIII Axiomatique "approfondie" 297

Conclusion 335

Références bibliographiques 343
Liste des illustrations 347

S O M M A I R E
général

Introduction ____ 1

1. Finalités. Objectifs. Limites.....1
2. Sujet de recherche.....3
3. Plan du travail.....5

Première Partie - Etude préliminaire

Chapitre I - Métallurgie ____ 9

1. Généralités.....9
2. Physique de la déformation.....11
3. Conclusions.....21

Chapitre II - Mécanique et Thermodynamique. ____ 25

1. Introduction.....25
2. Elasto-plasticité hétérogène en transformation finie.....27
3. Evolution des textures.....35
4. Homogénéisation des polycristaux.....39
5. Modèles simplifiés.....53
6. Instabilité et localisation.....61
7. Conclusion.....73

Deuxième Partie - Modèle de polycristal

Chapitre III - Polycristal plan ____ 77

1. Introduction.....77
2. Modèle.....79
3. Discussion.....97
4. Conclusion.....113

Chapitre IV - Polycristal ____ 115

1. Partie introductive.....115
2. Cinématique.....119
3. Mécanique.....127
4. Thermodynamique.....135
5. Comportement.....141
6. Conclusion.....171

Troisième Partie - Etude microscopique

Chapitre V - Pertinence ____ 175

1. Introduction. ... 175
2. Agrégat et phases. ... 177
3. Phases et espace des phases. ... 189
4. Observation et convolution. ... 205
5. Conclusion. ... 223

Chapitre VI - Equivalence microscopique ____ 225

1. Introduction. ... 225
2. Milieu microscopique. ... 227
3. Passage micro-macro. ... 241
4. Conclusion. ... 257

Quatrième Partie - Axiomatique

Chapitre VII - Axiomatique classique ____ 261

1. Introduction. ... 261
2. Univers matériel et monde des événements. ... 263
3. Cinématique. ... 271
4. Mécanique. ... 283
5. Thermodynamique. ... 291
6. Résumé des notations. ... 295

Chapitre VIII - Axiomatique "approfondie" ____ 297

1. Introduction. ... 297
2. Univers matériel et monde des événements "profonds" ... 299
3. Cinématique étendue. ... 311
4. Mécanique étendue. ... 323
5. Conclusion. ... 331

Conclusion ____ 335

1. Plan du travail. ... 335
2. Conclusions. ... 337
3. Suite du travail. ... 341

S O M M A I R E S
des chapitres

Introduction ____ 1

1. Finalités. Objectifs. Limites 1
2. Sujet de recherche 3
3. Plan du travail 5
   - 3.1. Première partie 5
     - 3.1.1. Etude bibliographique 5
     - 3.1.2. Modèles thermo-mécaniques 5
   - 3.2. Deuxième partie 5
     - 3.2.1. Polycristal plan 5
     - 3.2.2. Polycristal 6
   - 3.3. Troisième partie 6
     - 3.3.1. Globalisation 6
     - 3.3.2. Passage micro-macro 6
   - 3.4. Quatrième partie 6

Chapitre I

Métallurgie ____ 9

1. Généralités 9
2. Physique de la déformation 11
   - 2.1. Echelles de l'observation 11
   - 2.2. Jeux des mécanismes à l'échelle de la microstructure 12
     - 2.2.1. Dislocations 12
     - 2.2.2. Conjectures sur les micro-bandes de cisaillement 14
   - 2.3. Evolution à l'échelle des grains 16
     - 2.3.1. Conjectures sur les bandes de cisaillement 16
     - 2.3.2. Comparaison des conjectures 19
3. Conclusions 21
   - 3.1. Physique de la déformation des Al-Mg 21
     - 3.1.1. Résumé des événements avant localisation 21
     - 3.1.2. Conjectures sur la physique des bandes de cisaillement 21
   - 3.2. Modèle 23
     - 3.2.1. Scénario résumé 23
     - 3.2.2. Besoins du modèle 23

Chapitre II

Mécanique et Thermodynamique. 25

1. Introduction. 25
2. Elasto-plasticité hétérogène en transformation finie. 27
   2.1. Introduction. 27
   2.2. Tenseurs et configurations. 27
      2.2.1. Grandeurs eulériennes et lagrangiennes. 27
      2.2.2. Décomposition cinématique. 29
   2.3. Décomposition cinématique et hétérogénéité. 30
      2.3.1. Etat naturel. 30
      2.3.2. Rotations. 30
      2.3.3. Variables internes. 30
   2.4. Le choix de la configuration relâchée. 31
      2.4.1. Configurations naturelles locales. 31
      2.4.2. Configuration isocline. 31
      2.4.3. Configuration intermédiaire. 32
   2.5. Conclusion. 33
3. Evolution des textures. 35
   3.1. Introduction. 35
   3.2. Représentation de la texture, ODF. 35
      3.2.1. Techniques de mesure. 35
      3.2.2. La fonction de distribution des orientations. 35
   3.3. Equations. 36
      3.3.1. Continuité de la ODF. 36
      3.3.2. Equation d'évolution des textures. 36
   3.4. Conclusion. 37
4. Homogénéisation des polycristaux. 39
   4.1. Introduction. 39
   4.2. Passage micro-macro. 39
      4.2.1. Formulation générale. 39
      4.2.2. Eléments de volume. 39
      4.2.3. Relations micro-macro. 40
   4.2. Homogénéisation. 42
      4.2.1. Problème d'Eshelby en élasticité linéaire. 42
      4.2.2. Position du problème pour les polycristaux. 43
      4.2.3. Méthodes avec hypothèses sur l'agrégat. 44
      4.2.4. Méthode auto-cohérente. 45
   4.3. Le critère et la surface de charge locales. 47
      4.3.1. Monocristal. Loi de Schmid. 47
      4.3.2. Ecrouissage. 48
      4.3.3. Les systèmes de glissement actifs. 50
   4.4. Conclusion. 51
5. Modèles simplifiés. 53
   5.1. Introduction. 53
   5.2. Problème plan. 53
      5.2.1. Cristal plan. 53
      5.2.2. Texture. 54
      5.2.3. Cinématique. 55
   5.3. Poly-lamelle à un glissement. 57
   5.4. Poly-lamelle à deux glissements. 58
      5.3.1. Compatibilité cinématique et évolution de la texture. 58
      5.3.2. Cas particuliers. 59
   5.5. Conclusion. 60

6. Instabilité et localisation. 61
6.1. Introduction. 61
6.2. Bifurcation. 61
6.2.1. Equilibre, processus et instabilité. 61
6.2.2. Le problème incrémental élasto-plastique. 62
6.2.3. La condition de Hill pour le problème incrémental. 63
6.2.4. Une généralisation. 64
6.3. Localisation de la déformation. 65
6.3.1. Unicité locale et globale de la solution. 65
6.3.2. Perte d'ellipticité du problème en vitesse. 65
6.3.3. Localisation et stabilité de l'état actuel. 66
6.3.4. Conclusions. 68
6.4. Théorie générale. 68
6.4.1. Stabilité de l'équilibre. 68
6.4.2. Fonctionnelle pour les dissipations plastiques. 69
6.4.3. Conclusions. 70
6.4. Conclusion. 70
7. Conclusion. 73

Chapitre III

Polycristal plan _____ 77

1. Introduction. 77
2. Modèle. 79
   2.1. Géométrie et cinématique. 79
      2.1.1. Géométrie. 79
      2.1.2. Mouvement. 79
      2.1.3. Masse volumique. 80
      2.1.4. Taux de déformation. 80
      2.1.5. Déformations. 81
   2.2. Mécanique et équilibre. 82
      2.2.1. Mouvements rigidifiants. 82
      2.2.2. Principe des puissances virtuelles. 82
   2.3. Thermodynamique. 84
      2.3.1. Bilan d'énergie interne. 84
      2.3.2. Bilan d'entropie et inégalité de Clausius-Duhem. 85
   2.4. Comportement. 87
      2.4.1. Contraintes de Cauchy. 87
      2.4.2. Contraintes m. 91
      2.4.3. Contraintes D. 92
      2.4.4. Contraintes C. 92
      2.4.5. Type de réseau. 93
      2.4.6. Vérification de l'inégalité de Clausius-Duhem. 93
   2.5. Résumé des équations. 94
3. Discussion. 97
   3.1. Exemples. 97
      3.1.1. Compression. 99
      3.1.2. Cisaillement. 103
      3.1.3. Conclusion. 107
   3.2. Discussion sur le modèle. 108
      3.2.1. Comparaison avec un polycristal plan. 108
      3.2.2. Cinématique fonction de l'orientation. 109
      3.2.3. Masse volumique. 110
      3.2.4. Identification expérimentale. 111
4. Conclusion. 113

Chapitre IV

Polycristal _____ 115
1. Partie introductive. 115
1.1. Introduction. 115
1.2. Notes préliminaires. 116
1.2.1. Terminologie. 116
1.2.2. Système étudié. 116
1.2.3. Notations. 117
2. Cinématique. 119
2.1. Introduction. 119
2.2. Hypothèses de base. 119
2.2.1. Milieu continu profond. 119
2.2.2. Continuité au voisinage des points. 119
2.2.3. Filtration. 119
2.3. Description lagrangienne. 119
2.3.1. Inconnues. 119
2.3.2. Gradient de la transformation. 120
2.3.3. Equation de continuité. 120
2.3.4. Evolution des images de la métrique de l'espace tangent. 121
2.4. Description eulerienne. 122
2.4.1. Inconnues. 122
2.4.2. Gradient matériel des vitesses. 122
2.4.3. Equation de continuité. 123
2.4.4. Accélération. 123
2.5. Comparaison des descriptions. 123
2.5.1. Rapport entre inconnues lagrangiennes et eulériennes. 123
2.5.2. Rapport entre évolution et taux d'évolution des vecteurs matériels. 123
2.6. Conclusion. 124
3. Mécanique. 127
3.1. Introduction. 127
3.2. Principe des puissances virtuelles. 127
3.2.1. Puissances virtuelles. 127
3.2.2. Axiome du caractère interne. 128
3.2.3. Axiome d'identification. 130
3.3. Transports. 133
3.4. Conclusion. 134
4. Thermodynamique. 135
4.1. Introduction. 135
4.2. Premier Principe. 135
4.2.1. Définitions. 135
4.2.2. Théorème de l'énergie cinétique. 136
4.2.3. Bilan d'énergie totale et bilan d'énergie interne. 136
4.3. Deuxième Principe. 136
4.2.1. Bilan d'entropie. 136
4.2.2. Inégalité de Clausius-Duhem. 138
4.4. Transports. 139
4.5. Conclusion. 140

5. Comportement. 141
5.1. Introduction. 141
5.2. Fonctionnelles de comportement. 141
5.2.1. Bilan équations-inconnues. 141
5.2.2. Principes et hypothèses sur le comportement. 142
5.2.3. Remarque sur la simplicité matérielle. 144
5.2.4. Objectivité des fonctionnelles de comportement. 145
5.3. Fonctions de comportement. 147
5.3.1. Méthode des variables internes. 148
5.3.2. Configuration relâchée. 149
5.3.3. Configuration support et indifférence matérielle. 156
5.3.4. Lois d'état et dissipations. 158
5.3.5. Explication des hypothèses. 166
5.3.6. Généralisation. 168
5.4. Conclusion. 169
6. Conclusion. 171
6.1. Résumé du travail. 171
6.2. Résultats principaux. 171
6.3. Problèmes ouverts. 171
Comportement des phases. 171
Problèmes traités dans la suite de la thèse. 171

Chapitre V

Pertinence _____ 175

1. Introduction. 175
2. Agrégat et phases. 177
    2.1. Introduction. 177
    2.3. Agrégat et constituants. 177
        2.3.1. Agrégat hétérogène de constituants homogènes. 177
        2.3.2. Thermodynamique d'un agrégat. 179
    2.4. Fonction de phase et thermodynamique d'un agrégat. 183
        2.4.1. Fonction de phase et état radical. Définitions préliminaires. 183
        2.4.2. Observation approchée. 184
        2.4.3. Première approche du problème. 184
        2.4.4. Taille caractéristique dans l'espace des phases. 185
        2.4.5. Eléments de volume. 187
    2.5. Conclusion. 188
3. Phases et espace des phases. 189
    3.1. Introduction. 189
    3.2. Exemples. 190
        3.2.1. Phase comme ensemble de variables d'état radical. 190
        3.2.2. Phase comme morphologie. 190
        3.2.3. Phase comme rotation. 191
        3.2.4. Phase comme fragmentation de la configuration naturelle. 193
        3.2.5. Exemple. 194
    3.3. Espace des phases-orientations. 194
        3.3.1. Introduction. 194
        3.3.2. Trièdre-objet. 194
        3.3.3. Trièdre-objets dans l'espace géométrique. 195
        3.3.4. Angles d'Euler. 198
    3.4. Conclusion. 202
4. Observation et convolution. 203
    4.1. Introduction. 203
    4.2. Définitions préliminaires. 204
        4.2.1. Espace des phases. 204
        4.2.2. Espaces des fonctions test. 204
    4.3. Mesure dans l'espace des phases. 205
        4.3.1. Résolution de mesure. 206
        4.3.2. Domaine d'intégration. 206
        4.3.3. Précision de mesure. 206
    4.4. Observation des phases dans l'espace-temps. 214
        4.4.1. Signification d'une observation dans l'espace-temps. 214
        4.4.2. Remarques. 214
        4.4.3. Notation et rappels. 215
    4.5. Globalisation. 216
        4.5.1. Introduction. 216
        4.5.2. Support de la globalisation. 217
        4.5.3. Globalisation des masses. 218
    4.6. Conclusion. 219
5. Conclusion. 221

Chapitre VI

Equivalence microscopique _____ 225

1. Introduction. 225
2. Milieu microscopique. 227
   2.1. Introduction. 227
   2.2. Notes préliminaires. 228
      2.2.1. Phase pour un polycristal. 228
      2.2.2. Configurations et fonction de phase. 228
      2.2.3. Partition en phase continue. 229
      2.2.4. Lemme fondamental. 229
   2.3. Cinématique. 230
      2.3.1. Description lagrangienne. 230
      2.3.2. Description eulerienne. 231
      2.3.3. Transport. 231
   2.4. Mécanique. 231
      2.4.1. Mouvements rigidifiants. 231
      2.4.2. Vitesses et puissances virtuelles. 232
      2.4.3. Axiome d'objectivité. 232
      2.4.4. Condition d'équilibre. 234
   2.5. Thermodynamique. 235
      2.5.1. Bilan d'énergie. 235
      2.5.2. Bilan d'entropie. 239
   2.6. Conclusion. 240
3. Passage micro-macro. 241
   3.1. Introduction 241
   3.2. Notes préliminaires. 241
      3.2.1. Bases du travail. 241
      3.2.2. Notation. 242
   3.3. Cinématique. 242
      3.3.1. Relations de base. 242
      3.3.2. Grandeurs lagrangiennes. 243
      3.3.3. Grandeurs eulériennes. 244
   3.4. Mécanique. 246
      3.4.1. Mouvements rigidifiants. 246
   3.5. Thermodynamique. 247
      3.5.1. Bilan d'énergie interne. 247
      3.5.2. Bilan d'entropie. 250
   3.6. Remarques et conclusion. 253
      3.6.1. Fonctions non observables. 253
      3.6.2. Limites de l'observation. 253
      3.6.3. Postulat de l'état local. 254
4. Conclusion. 257

Chapitre VII

Axiomatique classique 261

1. Introduction 261
2. Univers matériel et monde des événements 263
2.1. Introduction 263
2.2. Univers matériel 263
2.2.1. Structure 263
2.2.2. Masse 264
2.2.3. Interactions 265
2.2.4. Conjecture d'isolement (forme universelle) 266
2.2.5. Forme 266
2.3. Monde des événements 267
2.3.1. Temps 267
2.3.2. Espace géométrique 267
2.3.3. Référentiels 268
3. Cinématique 271
3.1. Modèle du corps dans l'espace 271
3.1.1. Emplacements. Milieu continu 271
3.1.2. Frontière 271
3.1.3. Déplacement 272
3.2. Modèle local dans l'espace 272
3.2.1. Gradients 273
3.2.2. Voisinage matériel. Translation matérielle 273
3.2.3. Espace tangent 274
3.2.4. Emplacement local. Gradient matériel 274
3.2.4. Métrique de l'espace tangent 275
3.3. Modèle du corps dans l'espace-temps 277
3.3.1. Modèle du corps dans une chronologie 277
3.3.2. Cinématique dans l'espace 278
3.3.3. Cinématique de l'espace tangent 280
3.3.4. Description lagrangienne 280
4. Mécanique 283
4.1. Forces dans l'espace 283
4.1.1. Continuité des actions 283
4.1.2. Mesure force 283
4.1.3. Forces matérielles. Espace duale de l'espace tangent 284
4.2. Forces dans l'espace-temps 285
4.2.1. Forces d'inertie 285
4.2.2. Processus mécanique 286
4.3. Principe des puissances virtuelles 287
4.3.1. Puissances 287
4.3.2. Equilibre mécanique 289
5. Thermodynamique 291
5.1. Introduction 291
5.2. Thermodynamique axiomatique 291
5.2.1. Les ensembles 291
5.2.2. Les applications 292
5.2.3. Les axiomes 292
5.3. Conclusion 293
6. Résumé des notations 295

Chapitre VIII

Axiomatique "approfondie" ____ 297

1. Introduction. ... 297
2. Univers matériel et monde des événements "profonds" ... 299
   2.1. Introduction. ... 299
   2.2. Univers matériel. ... 299
      2.2.1. Définitions classiques. ... 299
      2.2.2. Formes. Matière. ... 299
      2.2.3. Uniformités. Matériau. ... 300
      2.2.4. Conjecture de représentativité. ... 301
   2.3. Monde des événements. ... 302
      2.3.1. Temps. ... 302
      2.3.2. Espace géométrique. ... 303
      2.3.3. Espace des phases. ... 304
      2.3.4. Référentiels. ... 306
   2.4. Commentaires. ... 308
3. Cinématique étendue. ... 311
   3.1. Modèle du corps dans l'espace profond. ... 311
      3.1.1. Emplacements. Milieu continu profond. ... 311
      3.1.2. Autres définitions. ... 312
   3.2. Modèle local dans l'espace profond. ... 313
      3.2.1. Gradients d'espace profond. ... 313
      3.2.2. Voisinage matériel. Translation matérielle. ... 314
      3.2.3. Espace tangent. ... 315
      3.2.4. Emplacement local. Gradient matériel. ... 315
      3.2.5. Métrique de l'espace tangent. ... 317
      3.2.6. Commentaires. ... 318
   3.3. Modèle du corps dans l'espace profond-temps. ... 319
      3.3.1. Modèle du corps dans une chronologie. ... 319
      3.3.2. Cinématique dans l'espace profond. ... 320
      3.3.3. Cinématique de l'espace tangent. ... 321
      3.3.4. Description lagrangienne. ... 321
4. Mécanique étendue. ... 323
   4.1. Forces dans l'espace profond. ... 323
      4.1.1. Continuité des actions. ... 323
      4.1.2. Mesure force. ... 323
      4.1.3. Forces matérielles. Espace dual de l'espace tangent. ... 324
   4.2. Forces dans l'espace profond-temps. ... 325
      4.2.1. Forces d'inertie. ... 325
      4.2.2. Processus mécanique profond. ... 325
   4.3. Principe des puissances virtuelles. ... 326
      4.3.1. Puissances. ... 326
      4.3.2. Equilibre mécanique profond. ... 328
5. Conclusion. ... 331
   5.1. Relations avec le Chapitre IV. ... 331
   5.2. Conclusions sur le chapitre. ... 332

Conclusion ____ 335

1. Plan du travail 335
2. Conclusions 337
   2.1. Première Partie 337
      2.1.1. Métallurgie 337
      2.1.2. Mécanique et Thermodynamique 337
   2.2. Deuxième Partie 337
      2.2.1. Polycristal plan 337
      2.2.2. Polycristal 338
   2.3. Troisième Partie 338
      2.3.1. Pertinence 338
      2.3.2. Equivalence microscopique 338
   2.4. Quatrième Partie 339
3. Suite du travail 341
   3.1. Possibilités actuelles 341
   3.2. Problèmes ouverts 341
   3.3. Voies envisageables 341

Conclusion ____ 335

1. Plan du travail....335
2. Conclusions....337
2.1. Première Partie....337
2.1.1. Métallurgie....337
2.1.2. Mécanique et Thermodynamique....337
2.2. Deuxième Partie....337
2.2.1. Polycristal plan....337
2.2.2. Polycristal....338
2.3. Troisième Partie....338
2.3.1. Pertinence....338
2.3.2. Equivalence microscopique....338
2.4. Quatrième Partie....339
3. Suite du travail....341
3.1. Possibilités actuelles....341
3.2. Problèmes ouverts....341
3.3. Voies envisageables....341

Introduction

1. Finalités. Objectifs. Limites.

Ce travail est le premier pas d'une collaboration de recherche entre le Centre des Recherches de Voreppe du Groupe Péchiney et le Centre d'Enseignement et Recherche en Analyse des Matériaux de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.

La finalité de la recherche est la formulation d'une théorie permettant la prévision de l'apparition des bandes de cisaillement dans les tôles laminées des alliages Al-Mg.

Les objectifs posés sont:

- la connaissance physique du phénomène (observations et études bibliographiques);
- la formulation d'un modèle;
- la mise au point et l'exécution des essais de laboratoire nécessaires à la validation du modèle et de ses résultats;
- la mise au point et l'exécution des simulations numériques des essais effectués selon le problème posé;
- la comparaison entre les essais de laboratoire et simulés;
- l'étude des résultats pour en déduire les relations entre les probabilités d'apparition des bandes et les variables mesurables en usine.

La travail exposé dans cette thèse se limite à l'atteinte des deux premiers objectifs de la recherche: connaissance du phénomène et formulation d'un modèle. Le premier de ces objectifs sera poursuivi par une étude bibliographique; pour ce qui concerne le deuxième, on se place dans les domaines de la thermodynamique et de la mécanique des milieux continus dissipatifs appliquées aux métaux, avec un regard particulier à la métallurgie des alliages Al-Mg.

2. Sujet de recherche.

L'apparition de bandes de cisaillement est un phénomène souvent observé en mécanique des solides; pour les métaux on peut citer les cas du formage ou du découpage à grande vitesse aussi bien que les impacts balistiques. En particulier, dans le cas que nous allons étudier en relation avec les alliages Al-Mg, il se manifeste lors du laminage à chaud (en sortie de la dernière cage du tandem) et du laminage à froid: les tôles laminées aux états métallurgiques plus durs (haute déformation et basse température) montrent des rayures orthogonales à la direction de laminage ayant une période régulière et pouvant les découper à partir de leurs bords.

Les réflexions sur ce problème, faites dans le cas des Al-Mg, ont porté, grâce surtout à la puissance croissante des moyens d'observation, à des déductions importantes dont on donne ci-dessous un aperçu.

D'après les observations par microscope optique, la largeur ($10 \div 100$ μm environ) et l'inclinaison d'une bande montrent qu'il s'agit d'un phénomène non cristallographique, dans le sens qu'il ne peut pas s'expliquer seulement à partir de données relatives à la microstructure[1]. Par exemple les bandes qui apparaissent au cours du laminage des Al-Mg ont une inclinaison d'environ 35° sur l'axe du laminage et traversent plusieurs grains aux différentes orientations cristallographiques (Cf. [Renoux, Rapp., 1992]).

Encore par observation au microscope optique on déduit la dépendance des bandes d'une troisième échelle structurale, celle des grains, car elles se manifestent plus fréquemment lorsque la morphologie granulaire devient fine et allongée (taille de l'ordre du μm). Il faut néanmoins noter que cette morphologie lamellaire n'est pas nécessaire à la formation de bandes de cisaillement (Cf. [Korbel *et al.* 1986]).

D'après les observations faites par microscope électronique on voit qu'une bande de cisaillement est constituée par l'assemblage de micro-bandes ($0.1 \div 0.4$ μm d'épaisseur) ayant des directions cristallographiques (e.g. Cf. [Korbel et Martin 1986]). Ces micro-bandes peuvent se former dans une matrice de dislocations bloquées qui ne contient ni de cellules bien définies ni une structure lamellaire parallèle au plan du laminage (Cf. Korbel *et al.* 1986]). Il est difficile d'établir le mécanisme par lequel un tel assemblage se développe (coopération d'événements indépendants ou enchaînement auto-catalytique à partir d'un phénomène isolé).

Toujours par microscope électronique on observe que le réticule cristallin subit des rotations importantes à cotés des bandes de cisaillement.

Ces observations montrent les racines cristallographiques du phénomène en question et le rôle joué par la taille des grains par rapport aux dimensions des pièces et aux directions et concentrations des contraintes.

Un bande de cisaillement est donc un phénomène d'origine microscopique, lié à l'évolution des capacités de glissement des cristaux, et un phénomène de structure, lié premièrement au développement de la texture, à la morphologie des grains et aux directions des contraintes.

On peut par conséquent affirmer que la taille du phénomène en objet dépasse l'échelle des cristaux tandis que des racines cristallographiques et morphologiques ne permettent pas de le modéliser par une approche de type milieu continu homogène classique. En particulier l'inclinaison des bandes de cisaillement ne correspond ni au plan de cisaillement maximal (critère de Tresca) ni aux plans de glissement des cristaux (facteur de Schmid). Il faut en fait remarquer que, à cause du couplage entre origines morphologiques et cristallographiques, la formulation d'un modèle limité à l'un de ces deux aspects sera toujours incomplète, ce qui mène à la nécessité d'une approche mécanique micro-macro démarrant de l'échelle des grains (e.g. de l'ordre du μm).

Une autre remarque importante est à faire sur la faisabilité d'une étude thermo-mécanique de l'instabilité d'un matériau hétérogène suivant un processus dissipatif: une étude de l'instabilité pour un matériau homogénéisé n'est pas immédiate ni dépourvue de difficultés de base (à cause du nombre de variables internes et de l'identification du potentiel thermodynamique à étudier); en outre la perte d'information microscopique d'un passage micro-macro peut priver de sens l'étude d'une instabilité macroscopique (la priorité est à donner au microscopique).

---

1 On verra avec une étude plus détaillée que la définition de "phénomène non cristallographique" n'est pas universellement acceptée. Mais, en général, l'inclinaison des bandes ne coïncide avec aucune des directions cristallographiques du réseau contigu; par conséquent, même si on suppose que ceci dérive d'une rotation localisée du réseau (Cf. [Dève et Asaro 1989]), l'explication du phénomène nécessite un modèle tenant compte des conditions de chargement macroscopiques et d'autres facteurs non cristallographiques.

En mécanique des milieux continus et thermodynamique des processus irréversibles, dans le cadre particulier de l'élasto-plasticité indépendante du temps, l'apparition des bandes de cisaillement ne peut être expliquée par les variables régissant l'état classique (i.e. homogène) du matériau, c'est à dire que les variables qui mesurent l'apparition des bandes n'ont pas d'influence pendant la phase précédant cette apparition sur l'évolution du potentiel thermodynamique choisi. Ceci est caractéristique des changements d'état.

Si le matériau est considéré élasto-visco-plastique l'apparition des bandes de cisaillement est moins brutale, mais, le transitoire étant suffisamment court, on peut toujours donner ladite définition d'instabilité comment changement d'état.

En résumé on peut donc affirmer que:

- un bande de cisaillement est un phénomène structural d'instabilité: structural car lié au mode de chargement et aux conditions au contour, d'instabilité dans le sens qu'elle représente une modification radicale de l'état;
- une bande de cisaillement traversant plusieurs dizaines de grains avec une direction non cristallographique est un ensemble de micro-bandes liées à la microstructure;
- la probabilité d'apparition de bandes de cisaillement macroscopiques croît avec l'énergie de défaut d'empilement du matériau (les bandes se manifestent pour des déformations inférieures dans les Al-Mg par rapport à l'Al pur; Cf. [Korbel *et al.* 1986]), l'angle de propagation des bandes dépend aussi de celle-ci (il peut passer de 35° environ dans les Al-Mg à plus de 40° pour le laiton-α, les Cu-Al ou les aciers inoxydables; Cf. [Lee et Chan 1991]);
- un matériau avec une texture cristallographique et morphologique accentué facilite la propagation de bandes de cisaillement (mais on observe des bandes même en absence de textures importantes).

3. Plan du travail.

3.1. Première partie.

3.1.1. Etude bibliographique.

Une première phase du travail est orientée vers la connaissance physique du phénomène des bandes de cisaillement dans les métaux déformés à basse température (inférieure à la moitié de la température de fusion de l'alliage) et vitesse de déformation élevée (bien que largement subsonique) avec un regard particulier aux Al-Mg et au laminage. Vu que l'objectif prioritaire de ce travail est la formulation d'un modèle thermo-mécanique, le choix d'une recherche bibliographique pour l'atteinte d'une connaissance physique suffisante a été obligé.

Un résumé des idées dérivées de cette étude bibliographique est présenté dans le Chapitre I avec les références nécessaires. Il ne s'agit pas d'une présentation exhaustive du sujet.

Suite de l'étude bibliographique on obtiendra un ensemble de besoins de modélisation qui définissent les points d'intérêt du travail. Cette étude bibliographique initiale, d'ailleurs, demeure d'importance fondamentale pour la suite de la recherche, notamment pour l'interprétation du modèle proposé et pour la proposition des essais à effectuer.

3.1.2. Modèles thermo-mécaniques.

L'étude des polycristaux, ainsi que celle de l'instabilité, est une des branches fondamentales de la recherche mécanique actuelle et passée, de façon qu'une présentation complète du sujet sortirait du cadre de ce travail. On fera néanmoins une brève étude préliminaire de ces sujets, dans le but d'obtenir le cadre le mieux adapté pour le problème en objet.

Comme phénomène d'instabilité structurale, les bandes de cisaillement peuvent être étudiées par la théorie de Hill et celle de Rudnicki et Rice, qui permettent de détecter l'apparition locale de l'instabilité suivant l'évolution du comportement du matériau au cours de la déformation. Par leur nature ces théories fournissent une approche en sécurité aux localisations, et elles se basent sur la connaissance du comportement tangent du matériau considéré homogène.

Par homogénéisation il est possible d'évaluer le comportement macroscopique homogène d'un polycristal en suivant l'évolution de sa texture dans le temps, une fois établi un modèle de comportement des cristaux et un modèle d'assemblage des grains.

Une approche thermo-mécanique adéquate peut donc faire évoluer le comportement du matériau homogénéisé (notamment sa surface de charge et sa surface d'écoulement) jusqu'à l'apparition d'une possible instabilité détectée par la théorie de Hill, Rudnicki et Rice, donnant ainsi un outil de prévision pour l'apparition des bandes de cisaillement.

Dans le Chapitre II on présente donc, en bref, l'ensemble des connaissances nécessaires pour bâtir un tel modèle.

3.2. Deuxième partie.

Dans la deuxième partie du travail on présente le modèle de polycristal proposé. Ce modèle sort en effet partiellement du cadre précédemment défini en constituant une voie alternative à l'homogénéisation.

Pour faciliter l'exposé on se place d'abord dans un cas simplifié moins réaliste (Ch. III), pour passer ensuite au cas plus général correspondant à un polycristal tridimensionnel en transformation finie (Ch. IV).

3.2.1. Polycristal plan.

Le cas d'un polycristal en déformation plane et avec directions de glissements des cristaux contraintes dans le plan de la déformation représente le cadre le plus simple à étudier.

Les directions de glissement d'un réseau CFC constituent un tétraèdre dans l'espace; le modèle plan idéal en objet aura donc ses directions de glissement disposées selon un triangle équilatéral dans le plan de la déformation.

En particulier pour un exemple en déformation homogène on pourra obtenir des résultats analytiques et comparer le modèle proposé avec d'autres modèles de polycristal plan repérées dans la littérature.

3.2.2. Polycristal.

Dans le Chapitre IV l'étude d'un polycristal tridimensionnel sera poursuivie avec la même méthode que pour le polycristal plan. Dans ce cas on essayera de répondre aux besoins définis dans le Chapitre I et on devra donc se placer dans un cadre relativement général.

Le type de modèle proposé permettra le couplage entre les équations classiques de la mécanique et l'étude de l'évolution des textures, mais il introduira des grandeurs constitutives dont le comportement est inconnu à l'état actuel.

Ce modèle, avant toute détermination et vérification expérimentales, doit être validé par une pertinence physique adéquate et par sa cohérence mathématique. Ces aspects sont l'objet des quatre chapitres suivants.

Le modèle en objet n'a pas été défini jusqu'à une étude de l'instabilité à cause de la priorité donnée à sa validation.

3.3. Troisième partie.

Dans la troisième partie du travail on étudie la pertinence microscopique du modèle proposé.

Cette étude sera faite par comparaison avec un modèle de milieu hétérogène, mais, en cohérence avec le modèle proposé, elle ne pourra pas s'appuyer sur une technique d'homogénéisation.

Dans le Chapitre V on définira l'opération de comparaison micro-macro, compatible avec le modèle proposé, par laquelle on obtiendra ensuite les résultats objets du Chapitre VI.

3.3.1. Globalisation.

L'opération de comparaison en objet se base sur la donnée, dans un milieu continu classique, d'une "fonction de phase" définissant, selon un modèle donné, la structure intrinsèque des points du milieu. Le rang de cette fonction sera supposé varier dans un espace métrique, dit "des phases".

Moyennant cette opération, dite de "globalisation" et ayant la forme d'une transformation intégrale, toute grandeur définie sur un milieu continu classique muni d'une telle fonction de phase pourra être transformée en une fonction de la phase dans l'espace métrique des phases.

3.3.2. Passage micro-macro.

Dans le Chapitre VI on défini d'abord les relations d'échelle entre le modèle de polycristal objet du travail et un milieu continu doué de fonction de phase qui en représente le microscopique. Ces relations seront définies en termes de rapports entre éléments de volume, c'est à dire, plus précisément, en termes de taille du volume support de l'opération de globalisation permettant le passage entre les deux modèles.

En postulant l'égalité des bilans thermo-mécaniques des deux modèles, selon les éléments de volume précédemment définis, on obtiendra l'identification microscopique des grandeurs définies dans le modèle de polycristal du Chapitre IV.

3.4. Quatrième partie.

Dans une dernière partie du travail on clarifie les mathématiques à la base du modèle proposé. Cela sera fait en s'appuyant sur l'axiomatique définie par W.Noll et C.Truesdell (exposée brièvement au Chapitre VII).

Le cadre axiomatique ainsi donné au Chapitre VIII peut être pris comme base pour la formulation d'autres modèles du même type.

PREMIERE PARTIE

Etude préliminaire

C H A P I T R E I

Métallurgie

1. Généralités.

La recherche est focalisée sur les alliages Al-Mg soumis au laminage a chaud. En particulier le cas des alliages 5086 et 5083 aux états F13 et F14 respectivement (teneur en magnésium entre 4.0 et 4.5 %, état brut de laminage à chaud) est industriellement important.

On donne ci-dessous des données typiques des cas réels:

Tab.1 (d'après [Marandet, Rapp. 1989])

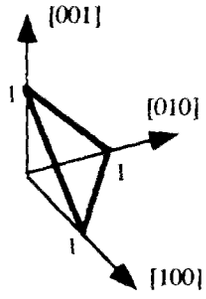
ALLIAGE	5083-01	5083-01	5083-01	5086-03	5086-03
état métallurgique	F13	F13	F12	F14	F12
teneur en Mg [%]	4.25	4.5	4.61	4.16	4.06
température [°C] en entrée	345	381	387	370	372
de bobinage	240	250	261	235	274
épaisseur [mm] en entrée	17.76	17.40	17.80	17.22	18.02
au cylindre 4	4.10	4.87	6.52	3.98	8.25
vitesse linéaire du cylindre 4 [m min]	73	67	59	69	65
déformation calculée	1.69	1.47	1.16	1.69	0.90
contrainte calculée [MPa]	211.8	206.8	216.0	211.9	165.7

Du point de vue cristallographique ces alliages ont une structure cubique à faces centrées (CFC), celle de l'aluminium, dont la majorité des atomes de magnésium se trouvent en solution solide. Ces derniers, étant de taille supérieure, stabilisent le réticule cristallin.

Pour les indices de Miller on utilise les notations (les indices négatifs seront soulignés):

(a b c) = plan;
{a b c} = ensemble de plans;
[a b c] = direction;
⟨a b c⟩ = ensemble de directions.

Dans une structure CFC on observe 12 directions compactes ⟨011⟩ qui forment par groupes de 3 des angles de 60° dans les 4 plans {111}:



Directions de glissement du CFC

rapport pas du réseau sur rayon atomique: $\frac{a}{r}=2\sqrt{2}$

plans compacts {111}

directions compactes ⟨011⟩

Dans les résultats donnés par A.Korbel et P.Martin (Cf. [Korbel et Martin 1986]) relatifs à 22 échantillons d'un Al-4.8Mg laminé (obtenus en observant les bandes dans le plan

normal à celui du laminage et contenant la direction du laminage et en supposant la bande normale à ce plan), 40% des bandes de cisaillement traverse les grains sur des plans {111}, et 7/9 de ces bandes le fait sur une direction |112|; les autres cas sont plutôt dispersés:

Tab.2

No.	direction de la bande	|110| plus proche	plan de la bande	{111} plus proche
1	121	30.0°	111	0°
2	132	19.1°	421	28.0°
3	112	30.0°	111	0°
4	251	25.3°	211	19.5°
5	871	6.5°	235	20.5°
6	311	31.5°	233	10.0°
7	121	30.0°	111	0°
8	121	30.0°	111	0°
9	110	0°	001	54.0°
10	-110	7.0°	-111	7.0°
11	110	0°	111	0°
12	011	0°	411	35.0°
13	121	30.0°	111	0°
14	153	17.0°	311	30.0°
15	311	31.5°	233	10.0°
16	411	33.5°	011	35.0°
17	413	14.0°	391	38.1°
18	121	30.0°	111	0°
19	211	30.0°	111	0°
20	301	26.6°	153	28.6°
21	541	10.8°	111	0°
22	122	19.5°	411	33.6°

d'après [Korbel et Martin 1986]

on voit donc que, bien qu'il existe des implications non cristallographiques dans l'apparition des bandes de cisaillement, les glissements multiples d'axe |112| se vérifient avec plus de facilité.

2. Physique de la déformation.

2.1. Echelles de l'observation.

L'évolution de la structure métallique au cours de la déformation est observable à trois différentes échelles.

A l'échelle de la microstructure (<1μm, observations par microscope électronique) elle est caractérisée par:

- création et annihilation de dislocations,
- organisation des dislocations en cellules et évolution de la densité de celles-ci,
- mouvement des dislocations non organisées et évolution de leur densité.

A ce niveau on observe que la densité de dislocations crées modifie la capacité du réticule cristallin d'en créer d'autres, de façon que, pour des hauts niveaux de déformation, on rejoint une densité totale limite et on observe l'équilibre entre dislocations crées et annihilées. Par conséquent l'évolution des cellules ne vient à dépendre que de leur organisation spatiale en structures de plus en plus compactes et de la densité de dislocations mobiles qui, de plus en plus bloquées, nécessitent des niveaux croissants d'énergie.

C'est la fin de ces capacités d'adaptation qui peut être vue en général comme la cause initiale de la formation des bandes de cisaillement (Cf. [Lee et Chan 1991]).

A l'échelle des grains (~1 μm, observations par microscope optique et/ou électronique) on peut observer:

- modification de la forme et de la taille des grains et formation d'une texture morphologique, avec augmentation du rapport surface-volume des grains et, par conséquence, augmentation de la densité des surfaces et des défauts d'empilement,
- rotation du réticule cristallin des grains qui engendre la formation d'une texture cristallographique,
- déformations du réticule cristallin à proximité des surfaces des grains qui modifient la stabilité des frontières.

La texture cristallographique et la morphologie des grains influent sur la propagation des bandes de cisaillement; leur rôle dans l'apparition des bandes est objet de désaccord parmi les différents auteurs.

A l'échelle de la mécanique des milieux continus (>1mm , observations à l'œil nu) on peut remarquer:

- évolution vers une structure hétérogène et anisotrope avec écrouissage cinématique et modification de la surface de charge (avec transformations de la surface éventuellement singulières),
- écrouissage isotrope négatif (diminution du diamètre moyen de la surface de charge), lié à la formation de textures cristallographiques et morphologiques,
- écoulement plastique en régime de coin, donnant une sensibilité élevée du taux de déformation aux changements de direction des contraintes.

A ce niveau les bandes de cisaillement représentent un mode de déformation avec localisation auquel le matériau a accès après un état de bifurcation du processus thermo-mécanique. La possibilité d'une telle condition peut être vérifiée par l'étude du comportement tangent et donc, en particulier, de l'évolution du potentiel de dissipation et de la surface de charge.

La texture morphologique et cristallographique évoluent, dans le cas du laminage, vers des états croissants d'anisotropie et, en même temps, l'augmentation de dislocations bloquées entraîne des contraintes auto-équilibrées de plus en plus élevées. L'évolution de la forme et de la position de la surface de charge dans l'espace des contraintes est liées directement et indépendamment aux phénomènes observés aux échelles des cristaux et des grains: un modèle pour l'étude des bandes de cisaillement doit tenir compte des niveaux inférieurs au macroscopique.

2.2. Jeux des mécanismes à l'échelle de la microstructure.

2.2.1. Dislocations.

Mécanismes.

Le premier mécanisme dissipatif, déjà observable à l'échelle de la microstructure pour des niveaux de déformation inférieurs à 3%, est la création et le mouvement de dislocations. Ce mécanisme est lié à la présence de précipités et de solutés, aux défauts d'empilement (e.g. surfaces, surfaces des grains) et à la température (mobilité croissante avec la température jusqu'à relaxation de l'énergie stockée par un recuit).

Il est important de remarquer que dans un cristal le glissement selon un plan cristallin cause l'écrouissage des plans normaux (par l'interférence entre dislocations normales) de façon que le choix du système de glissement est localement (pour chaque grain) presque définitif. Ceci entraîne que, au cours de la déformation, même après avoir tourné ses axes cristallographiques, et donc avoir modifié le rapport entre la contrainte totale et la contrainte sur le plan de glissement initialement choisi, chaque grain continue à se déformer par ce même mécanisme au moins jusqu'à que la densité des dislocations mobiles augmente sensiblement (phénomène du "overshooting"). Le choix du système de glissement étant liée initialement à un minimum d'énergie, il est évident que ceci se traduit en général dans un écrouissage positif.

Dans un cristal pur, aux bas niveaux de déformation, les dislocations crées ont beaucoup de mobilité (Cf. [Boutin, Rapp.], [Nabarro, Com. 1985], [T.Q.Thang, Thèse 1986]):

$$\rho=\rho_m+\rho_f \;\; ; \text{ initialement: } \rho_m \cong 10\rho_f \propto \varepsilon^2 \qquad 1$$

(où ρ est la densité totale des dislocations, ρ_f celle des dislocations bloquées, ρ_m celle des dislocations mobiles et ε est une norme de la déformation plastique considérée petite; la densité d'un certain ensemble de dislocations étant la somme des leurs longueurs dans l'unité de volume).

Une dislocation est influencée dans son mouvement par le voisinage d'autres dislocations du même type, à cause des interactions entre leurs champs de contraintes, par la présence de précipités durs, qui constituent des obstacles et des sources de dislocations, et par les dislocations d'autres plans cristallins, qui en modifient la forme en y générant des crans.

Par conséquent, dans un système ayant une certaine densité de précipités et de solutés, la mobilité des dislocations dépend premièrement de leur densité totale: augmentant celle-ci, les probabilités de croiser d'autres dislocations augmentent. La présence des atomes du soluté diminue la vitesse des dislocations mobiles et donc augmente leur densité pour des taux de déformation fixés. Par conséquent la distribution des dislocations est plus homogène dans l'espace et leur organisation en cellules (voir suite) est retardée par la présence de Mg en solution solide.

Déjà pour des niveaux de déformation des cristaux inférieurs à 10% un nombre significatif de dislocations a une mobilité très réduite, si bien qu'il se forme un réseau de dislocations bloquées, ou "forêt de dislocation", qui constitue un obstacle ultérieur à la mobilité:

$$\text{faibles déformations: } \rho_m>\rho_f \;\; ; \;\; \rho_m \propto \varepsilon \;\; ; \;\; \rho_f \propto \varepsilon^2 \qquad 2$$

La densité des dislocations mobiles croit plus lentement que celle des dislocations bloquées, de façon que, à partir d'un certain niveaux de déformation, on observe:

$$\rho_m < \rho_f \qquad 3$$

A ce moment[1] la forêt s'organise en cellules normales aux plans de glissement, caractérisées par des parois, plus ou moins définies, à haute densité de dislocations, et par une zone intérieure à plus faible densité de dislocations[2]. Les dimensions des cellules et l'orientation des parois dépendent de la déformation imposée et de l'énergie de défaut d'empilement du matériau (e.g.

---

[1] A 30% de réduction de l'épaisseur par laminage pour l'Al pur, contre le 50% nécessaire pour un Al-1%Mg et contre une réduction supérieure au 100% nécessaire pour un Al-3%Mg et un Al-5%Mg (Cf. [T.Q.Thang, Thèse 1986]).

[2] A l'intérieur des cellules il existe une densité élevée de dislocations dans les Al-Mg (à différence que dans l'Al pur). Ces dislocations se réorganisent aux grandes déformations donnant lieu à une fragmentation des cellules par création de nouvelles parois.

pour les Al-Mg laminés les cellules sont allongées en lentilles selon la direction du laminage et de dimension décroissante avec la concentration de Mg dans la solution solide).

Les deux densités croissent vers une valeur limite maximale de façon asymptotique (saturation), mais celle-ci est sensiblement atteinte par la densité des dislocations mobiles bien avant que par celle de la forêt de dislocations, de façon que, pour un certain niveau de déformation, les nouvelles dislocations créées accroissent seulement la densité des dislocations bloquées.

Lorsque ρ_m s'approche de sa limite, un troisième mécanisme dissipatif entre en jeux: la forêt se réorganise dans l'espace (les cellules sortent des plans de glissement) en structures de plus en plus compactes, de façon à donner mobilité aux atomes à densité totale de dislocations presque constante. Du point de vue des cellules de dislocations on observe en fait la compétition entre la création de nouvelles parois (les dislocations crées ne vont pas s'insérer dans les parois existantes car ceci augmenterait l'énergie qui y est stockée par unité de surface) et l'annihilation des parois existantes (par réorganisation des dislocations qui les constituent favorisée par la présence de défauts ponctuels et défavorisée par les atomes du soluté et par les précipités). En particulier le premier mécanisme est dominant pour des déformations moyennes (≤100%), tandis que le deuxième devient important aux grandes déformations (>100%).

On observe donc le mouvement et la multiplication des parois de dislocations qui deviennent plus minces et compactes en augmentant la déformation jusqu'à apparaître comme des surfaces de grains. Les cellules ne contiennent à ce moment que les dislocations géométriquement nécessaires à permettre les rotations du réseau (2÷4° par unité de ε).

A ce stade, il peut aussi y avoir dans un grain des micro-bandes (ou lignes de glissement) traversant plusieurs cellules avec une période constante ($3.5E\text{-}9\ \varepsilon^{-1} \sim 50\mu m$), causée par le passage d'une douzaine de dislocations, généralement sur un plan compact (Cf. [Nes, Com. 1985] pour Cu, Al, Al-Mn et Al-Mg):

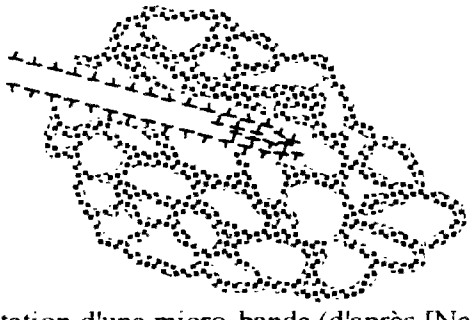


Fig.1: Représentation d'une micro-bande (d'après [Nes, Com. 1985])

On remarque en outre qu'une structure plus compacte a un nombre inférieure de configurations possibles qu'une structure, de la même morphologie, mais plus dispersée. D'un point de vue énergétique ceci implique que deux états d'équilibre ayant la même énergie totale et la même compacité ont peu de possibilités d'être proches dans l'espace des variables d'état. Dans notre cas on observe que si une force extérieure cause un changement suffisamment grand d'une partie du réseau des dislocations, l'ensemble du réseau en sera perturbé et devra évoluer vers la configuration d'équilibre la plus proche du nouvel état. Pour des haut niveaux de compacité ceci entraînera une évolution brutale et finalement destructive. En ce sens on dit que les structures de dislocations à densité de la forêt, ρ_f, élevée sont proches d'un état critique et donc peuvent subir des évolutions instables.

Energie stockée.

Lors d'une déformation à froid l'énergie d'origine mécanique stockée par unité de volume est liée premièrement à la densité totale des dislocations et aussi, mais en mesure négligeable, aux défauts ponctuels et aux déformations élastiques consécutives à l'hétérogénéité, de façon qu'on peut écrire (b vecteur de Burger, Cf. [Boutin, Rapp.]):

$$E_{stockée}=E_{dislocations}=\frac{1}{2}\mu b^2\rho \qquad 4$$

Lorsque, pour de grandes déformations à froid, il se forme une structure cellulaire sans dislocations à l'intérieur des cellules, la densité de dislocation devient proportionnelle au rapport entre la

désorientation moyenne entre cellules, Θ, et leur dimension moyenne, d_{cm}. On peut alors écrire en général (Cf. [Boutin, Rapp.]):

$$E_{stockee}=E_{dislocations}=k_1\rho+k_2\frac{\Theta}{d_{cm}} \qquad 5$$

où le terme en ρ devient négligeable aux déformations élevées.

En outre la désorientation Θ est, au moins au début de la déformation, inversement proportionnelle à la dimension des cellules d_{cm}. On remarque alors la relation valable pour de grandes déformations à froid:

$$E_{stockée}\sim\Theta^2 \qquad 6$$

à laquelle on donne une grande importance dans le modèle qui fait l'objet de ce travail.

2.2.2. Conjectures sur les micro-bandes de cisaillement.

On donne de suite les principales conjectures formulées sur la nature et l'origine des micro-bandes de cisaillement. On regroupe les auteurs suivant le schéma qu'ils proposent.

Assouplissement géométrique.

Le phénomène de l'assouplissement de texture, lié à la rotation des axes du réseau engendrée par le passage des dislocations, à été proposé initialement comme cause des bandes de cisaillement (Cf. [Dillamore *et al.* 1979]). L'existence d'un minimum du facteur de Taylor ("rapport" [3] entre la contrainte macroscopique et la cission résolue sur le plan de glissement actif) à été par conséquent utilisé comme condition nécessaire pour l'apparition des bandes de cisaillement.

Structure lamellaire.

Selon K.Morii, H.Mecking et Y.Nakayama l'apparition de bandes de cisaillement dans un monocristal de Al-3%Mg est étroitement liée au développement d'une structure de dislocations en couches, de façon que le bandes ne se forment pas si l'on supprime cette structure par une restauration (Cf. [Morii *et al.* 1985]).

Cette structure lamellaire est absente dans les monocristaux d'Al pur qui, d'ailleurs, ne manifestent pas de bandes de cisaillement dans les mêmes conditions de température et déformation que les Al-Mg: ceci confirme la relation entre la localisation de la déformation en bandes de cisaillement et la structure lamellaire des parois des dislocations, mais n'implique pas la relation cause-effet suggérée par Morii *et al.*. Il faut noter que ces auteurs observent, pour des monocristaux de Cu pur, que la direction des bandes de cisaillement n'est pas liée à celle de la structure lamellaire due au maclage, de façon que "seulement la densité volumique des macles semble avoir un effet sur la densité volumique des bandes de cisaillement".

Restauration dynamique.

Selon J.D.Embury, A.Korbel, V.S.Raghunathan et J.Rys c'est l'instabilité de la structure des dislocations qui, suite à un changement du chemin de déformation locale, est à la base de la formation de bandes de cisaillement macroscopiques (Cf. [Embury *et al.* 1984]). Ils observent, dans des monocristaux de Cu-Al laminés à chaud, une grande accumulation de dislocations (d'égal vecteur de Burger) donnant une courbure et une rotation du réseau en proximité des bandes qui, d'apparence non cristallographique, sont en effet composées d'une séquence d'événements cristallographiques (glissements et maclages pour le Cu-Al). Le fait que les bandes pénètrent la structure préexistante fait penser aux conséquence d'une instabilité. Ceci est confirmé par le fait que leur apparition (suivant Jackson et Basinski, 1967) n'est contrôlée ni par un taux d'écrouissage critique, ni par un écrouissage latent critique, ni par le flux des contraintes actuelles. Après apparition des bandes le cristal est séparé en une partie active (la bande) et une passive déchargée.

Selon A.Korbel et coauteurs (Cf. [Korbel *et al.* 1984] pour un alliage d'aluminium 7075 et [Korbel *et al.* 1986] pour un Al-4.8%Mg) un écrouissage négatif dû à la destruction ou à la modification de la structure des dislocations est la cause des micro-bandes: selon ces auteurs ni l'assouplissement géométrique de texture ni la structure lamellaire des dislocations bloquées n'est

---

[3] Dans la définition habituelle du facteur de Taylor la contrainte macroscopique est considérée comme un scalaire.

nécessaire à la formation des bandes de cisaillement. L'apparition des micro-bandes est due à une forme de restauration dynamique donnant un assouplissement local: dans une structure contenant des dislocations bloquées, telle que celle en objet, la restauration est hétérogène et donne lieu à une localisation en micro-bandes.

En imposant une déformation cyclique, de façon à éviter la formation de textures, sur un échantillon commercial d'aluminium pur (99.5% Al), A.Korbel et M.Richert montrent que la formation des bandes est indépendante du mode de déformation, de la texture (i.e. de l'assouplissement géométrique), de la structure des dislocations bloquées et de l'écrouissage macroscopique (qui demeure positif avant et après apparition des bandes) (Cf. [Korbel et Richert 1985]). Cela confirme le modèle de l'assouplissement structural dû à une restauration dynamique comme cause initiale des bandes et de la propagation par avalanche de glissements (d'après la dimension des marches sur les frontières des grains le nombre des dislocations suivant une bande est de l'ordre de mille).

Cette physique de la propagation des micro-bandes à avalanche est acceptée par la majorité des auteurs (Cf. [Embury *et al.* 1984], [Korbel et Richert 1985], [Korbel et Martin 1986], [Bird *et al.* 1987]).

Instabilité par assouplissement géométrique.

H.Dève, S.Harren, C.McCullogh et R.J.Asaro (Cf. [Dève *et al.* 1988]) considèrent que le comportement local avec écrouissage géométrique négatif et instabilité plastique (à cause de l'écoulement en régime de coin, Cf. [Hill 1966]) est à l'origine des bandes de cisaillement. Ce comportement peut éventuellement se manifester par une structure lamellaire donnant ledit écrouissage géométrique (observée par Morii *et al.*) et être consécutif à l'instabilité de la structure des dislocations (privilégiée par Embury *et al.* et Korbel *et al.*), mais ces deux phénomènes ne peuvent pas être considérés comme causes des bandes.

Ils observent (dans des monocristaux de Fe-Ti-Mn en traction) que l'écrouissage macroscopique demeure positif même lorsque, après l'apparition des bandes, toute la déformation est localisée à leur intérieur:

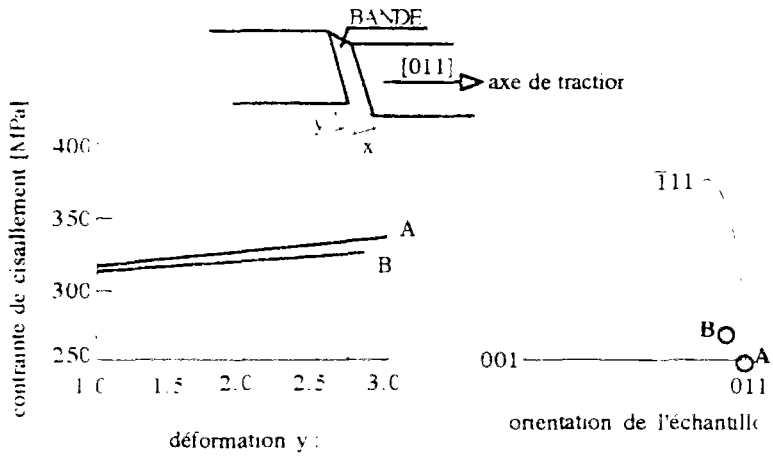


Fig.2: Ecrouissage positif après apparition des bandes de cisaillement (d'après [Dève *et al.* 1988]).

Ils observent en outre qu'il n'existe aucun endommagement avant l'apparition des bandes et que l'interface entre une bande et la matrice demeure non endommagée même sous des déformations très élevées (plus que 3.0 de déformation mesurée dans cette interface, tandis que les parties de l'échantillon extérieures à la bande se déchargent de façon élastique et suivent un mouvement rigidifiant qui exclut la formation d'autres bandes). Le réseau cristallin subit des rotations importantes (de l'ordre de 5°) en s'approchant de la bande et d'autres rotations en franchissant le bord de la bande (encore 5° dans le même sens); cette rotation fait diminuer le facteur de Schmid (rapport entre un scalaire représentant la contrainte de traction sur le monocristal et la cission résolue sur le système de glissement actif) induisant donc un écrouissage géométrique négatif.

Une autre remarque importante regarde le mode de déformation: les bandes de cisaillement n'apparaissent que si la déformation est plane, elles ont une direction de 40°÷45° sur

l'axe de traction mais manifestent des glissements à leur intérieur ayant une direction de 35° (i.e. le long de la direction de glissement [111]).

2.3. Evolution à l'échelle des grains.

En observant les grains après un recuit, on voit qu'ils ont une forme polyédrique avec un rapport surface sur volume minimum.

Au cours du laminage, la déformation plastique étant à cette échelle isochore, les grains deviennent des lentilles. Cette forme permet une plus grande densité des surfaces à l'intérieur du métal et donc une énergie stockée globalement plus élevée. La formation d'une texture morphologique est premièrement en relation avec l'augmentation de l'énergie stockée.

On peut envisager une autre conséquence en regardant qualitativement la façon dont les grains sont assemblés après et avant déformation: l'ordre de l'assemblage augmente avec la déformation. En considérant le métal comme un ensemble hétérogène de grains homogènes, on peut s'attendre, pour la direction normale au plan de laminage, que la raideur globale s'approche de sa borne inférieure homogène (disposition en parallèle) et, pour la direction du laminage, qu'elle s'approche de sa borne supérieure (disposition en série).

Encore à l'échelle des grains on voit comment les réseaux cristallins tournent sous l'effet des contraintes. Ceci peut se voir aussi dans le cas simplifié du monocristal sujet à traction ou compression simples où il est dû à des raisons de caractère purement géométrique (Cf. [Reid, Pergamon 1973]).

A cause des super-réseaux inter granulaires, l'évolution de texture d'un grain n'est pas toujours disjointe de celle des grains voisins et peut entraîner une variation de l'énergie stockée dans sa surface.

Enfin, dans les alliages Al-Mg, on observe la tendance à la formation d'une texture cristallographique marquée, avec des parois de cellules de dislocations très minces et formation de sous-grains peu importante. Ceci suggère que dans ces alliages les phénomènes cristallographiques interagissent avec de grandes longueurs d'onde dans l'espace.

2.3.1. Conjectures sur les bandes de cisaillement.

Comme pour les micro-bandes on présente l'ensemble des conjectures formulées sur les bandes de cisaillement qu'on a repéré dans la littérature.

Localisation par hétérogénéité.

Ayant soumis des Al-4.4%Mg-0.4%Mn à traction, J.E.Bird et coauteurs (Cf. [Bird *et al.* 1987]) observent que les macro-bandes de cisaillement sont orientées selon le cisaillement macroscopique maximal (45° avec l'axe de traction). Selon ces auteurs les bandes de cisaillement macroscopiques sont conséquences d'un écoulement plastique de plus en plus localisé dû initialement à l'hétérogénéité de la déformation (ces bandes ne sont donc que un état ultime de la striction en traction). Par conséquent ils considèrent un critère d'apparition des bandes liée à la forme, orientation et position de la zone plastique active par cisaillement simple dans l'échantillon.

Ce modèle, qui par ailleurs manque apparemment de pertinence avec la microstructure négligeant l'effet de l'anisotropie microscopique sur l'écoulement macroscopique, souligne bien l'importance de l'hétérogénéité dans la localisation plastique. Selon ces auteurs micro et macro-bandes sont des phénomènes séparés dus à des processus physiques différents, les premières étant en fait crées par une avalanche de dislocations.

Avalanche.

A.Korbel et P.Martin (Cf. [Korbel et Martin 1986]), par MET, observent que les micro-bandes constituant une bande de cisaillement ont des directions cristallographiques dans leurs grains d'origine. Elles sont composées par des successions d'îles à haute densité de dislocations alternées avec des zones à densité de dislocations presque nulle où la rotation du réseau cristallin est très importante (jusqu'à 30°). Ces micro-bandes traversent complètement un grain bien que parfois elles peuvent perdre leur structure caractéristique jusqu'à ne plus apparaître. Les surfaces des sous-grains sont traversées par les micro-bandes montrant des échelons qui permettent d'évaluer une déformation de l'ordre de 8 au travers de la bande.

Lorsqu'elle rejoint la surface du grain une micro-bande peut soit être arrêtée soit la traverser avec différents effets: elle peut donner lieu à des déformations importantes au delà de la surface ou se propager encore sous forme de micro-bande mais par glissement multiple (dans la

majorité des cas, les micro-bandes suivent des plans {111} dans leur grain d'origine et elles se trouvent sur un plan non cristallographique de l'autre coté de la surface de ce grain, après l'avoir éventuellement traversée). Selon A.Korbel et coauteurs c'est cette deuxième forme de propagation d'une micro-bande qui initialise, avec un processus à avalanche, une macro-bande de cisaillement.

En particulier une texture plus marquée facilite le développement des micro-bandes en macro-bandes sans être d'ailleurs nécessaire à l'apparition des bandes (Cf. [Korbel *et al.* 1986]). Il est en fait difficile tant d'établir une relation entre l'origine des bandes de cisaillement et la texture que de l'établir entre celles-ci et l'évolution de la texture (Cf. [Renoux, Rapp. 1991]).

Par MEB on observe que le réticule cristallin subit des rotations importantes à cotés des bandes de cisaillement, où il présente aussi une haute densité de dislocations libres (plus qu'ailleurs), ce qui peut venir du fait qu'à l'intérieur d'une bande de cisaillement le glissement est multiple (Cf. [Korbel *et al.* 1984], [Korbel *et al.* 1986], [Korbel et Martin 1986]).

Par MEB avec un système EBSP pour la détection locale des textures on observe que, dans les Al-Mg laminés, les bandes se manifestent de préférence dans les grains ayant des orientations particulières: en majorité dans ceux orientés selon la texture du cuivre ou presque (surtout (123)[121] [4]) et en minorité dans ceux orientés selon la texture du laiton ((110)[112]) (Cf. [Renoux, Rapp., 1991]). En outre, à cause d'une plus grande épaisseur et du fait de s'y manifester lorsqu'elles intéressent plusieurs grains, les bandes semblent plutôt traverser ces derniers grains (texture du laiton) qu'y naître. Il faut noter que les orientations citées sont celles typiques de la texture de laminage, c'est à dire celles où les grains glissent avec plus de facilité.

Le réticule cristallin a une rotation localisée au voisinage de la bande approchant sensiblement l'axe [100] à l'axe du laminage (faisant diminuer l'angle d'Euler ϕ).

A.Korbel, V.S.Raghunathan, D.Teirlinck, W.Spitzig, O.Richmond et J.D.Embury (Cf. [Korbel *et al.* 1984]) observent, pour un alliage commercial d'aluminium 7075 (Al-Zn-Cu-Mg), que les bandes apparaissent au même niveau de déformation indépendamment de la pression hydrostatique imposée. Par contre en augmentant cette pression il est possible de retarder l'endommagement et la rupture conséquente à la formation des bandes.

Selon ces auteurs, une bande qui traverse la surface d'un grain le fait grâce à une concentration des contraintes due à un glissement simple dans le grain d'origine (ce qui se déduit de la direction cristallographique de la bande et du fait que la densité des dislocations est faible des deux cotés de la bande à l'intérieur de ce grain d'origine). Dans le deuxième grain la bande se propage par glissement multiple avec une direction non cristallographique. L'ensemble d'une bande macroscopique est donc composé de régions de ces deux types (glissement simple ou multiple), la direction macroscopique résultante peut ne pas apparaître cristallographique. Ces auteurs proposent la suite d'événements:

- glissements cristallographiques simples donnant des micro-bandes dans des grains isolés,
- réorganisation spatiale de ces micro-bandes en macro-bandes traversant l'échantillon,
- endommagement lié à la dilatation due à la canalisation du mouvement des dislocations à l'intérieur des bandes (éventuellement empêché par une pression hydrostatique élevée).

A.Korbel et P.Martin (Cf. [Korbel et Martin 1986]) déduisent de leurs observations faites par MET sur des alliages Al-4.8Mg ("cross rolling") qu'une bande de cisaillement macroscopique est obtenue par propagation d'une micro-bande et non par liaison de micro-bandes séparées et d'origine indépendante. Selon ces auteurs c'est lors de la traversée d'une surface de grain qu'une micro-bande cumule assez d'énergie pour se transformer éventuellement en une macro-bande sans plus suivre les directions cristallographiques des grains successifs. Une micro-bande se propage par des groupes successifs de dislocations (îles de dislocation) qui possèdent une quantité élevée d'énergie de configuration (témoigné par la désorientation du réseau entre îles); la surface d'un grain peut efficacement amortir une telle propagation, montrant alors des contours de déformation, ou être traversée; dans ce cas la déformation au delà de la surface est toujours localisée dans une bande étroite mais elle est obtenue par glissement multiple, donnant une direction non cristallographique de propagation.

---

[4] Cette notation indique dans l'ordre le plan et l'axe cristallographiques respectivement correspondant à celui du laminage et aligné à celui du laminage.

Tant les micro que le macro-bandes se forment dans les Al-Mg plus tôt que dans l'Al ou dans d'autres alliages de l'aluminium. Dans les Al-Mg on les observe déjà dans une matrice de dislocations bloquées diffuses, sans structure lamellaire ni cellules bien définies. A l'intérieur des bandes la structure des dislocations est organisée en ensembles réguliers. L'intersection des bandes entre elles ou avec les surfaces des grains montrent une déformation de cisaillement homogène très élevée au travers des bandes.

Assouplissement géométrique.

L'assouplissement géométrique comme cause des bandes de cisaillement a été introduit par I.L.Dillamore, J.G.Roberts et A.C.Bush (Cf. [Dillamore *et al.* 1979], [Öztürk et Davies 1986]). Un facteur de Taylor (rapport entre la contrainte macroscopique - scalaire - et la cission résolue) décroissant avec la déformation est l'image d'un tel assouplissement qui résulte du développement d'orientations préférentielles.

W.Y.Yeung et B.J.Duggan considèrent une microstructure lamellaire comme nécessaire pour l'apparition des bandes (Cf. [Yeung et Duggan 1987]). Leurs calculs, basés sur le modèle de l'assouplissement géométrique de Dillamore, sont en accord avec les observations sur des métaux à faible énergie de défaut d'empilement pour des déformations inférieures à l'unité. Il est important de noter qu'ils observent une transition dans la structure interne d'une micro-bande lorsque celle-ci traverse une surface entre grains très désorientés et qu'ils n'observent aucune transition si les grains sont faiblement ou point désorientés. Ils remarquent aussi que les micro-bandes peuvent changer d'orientation après leur apparition.

Selon ces auteurs c'est le passage du premier groupe de dislocation capable de détruire la structure lamellaire qui produit un chemin plus souple pour le passage d'autres dislocations donnant origine à une bande (assouplissement de structure).

L'orientation des bandes de cisaillement macroscopiques est, selon W.B.Lee et K.C.Chan (Cf. [Lee et Chan 1991-II]), celle qui minimise le facteur de Taylor (rapport entre la contrainte macroscopique - scalaire - et la cission résolue) et le facteur d'assouplissement de texture (rapport entre incréments du facteur de Taylor et incréments de déformation par unité du facteur de Taylor)[5]: c'est donc encore l'assouplissement géométrique qui est choisi comme cause primaire des bandes.

Les bandes de cisaillement sont des véhicules de propagation des fissures, mais celles-ci ne suivent que les macro-bandes, non les micro-bandes. Cette observation, faite sur un alliage commercial 2024 d'aluminium, suggère aux mêmes auteurs (Cf. [Lee et Chan 1991-I]) qu'à l'origine de la fissuration se trouve la diminution des capacités d'accommodation plastique du matériau et non une nucléation de vides éventuellement due aux bandes de cisaillement (qui n'a pas été observée, Cf. aussi [Dève et Asaro 1989]). En outre ces auteurs remarquent qu'il existe des grains, non traversés par des bandes, qui arrêtent les fissures.

On peut synthétiser la cause de l'origine des bandes de cisaillement comme la fin des capacités de déformation par glissement plastique. En ce sens on voit que l'apparition des bandes de cisaillement se vérifie aux hauts niveaux d'écrouissage pour des raisons analogues à la fissuration et, généralement, avant celle-ci. Le fait que les fissures suivent, ensuite, la trace des bandes de cisaillement est dû à un endommagement localisé dans les bandes (Cf. [Korbel *et al.* 1984]) mais non à une origine des fissures causée par les bandes (Cf. [Lee et Chan 1991-I]).

H.E.Dève, R.J.Asaro et S.V.Harren observent dans un Al-3%Cu (déformation en "channel die") que les bandes ne sont pas associées à des micro-vides ou des micro-fissures (Cf. [Dève et Asaro 1989] et [Harren *et al.* 1988]). Ils proposent l'assouplissement géométrique (dû à la rotation du réseau cristallin) comme cause favorisant la propagation des bandes (car il permet une moindre désorientation de la bande en traversant la surface entre deux grains) et ils observent que celles-ci naissent de préférence dans des régions ayant une concentration des contraintes ou des déformations (point triples ou surfaces de l'échantillon; voir modèle de Bird *et al.*). Une restauration dynamique peut être liée à l'origine des bandes (en accord avec l'hypothèse de Korbel *et al.*), car on y observe des cellules équi-axées ayant une faible densité de dislocations à leur intérieur et une désorientation de 10÷20° entre elles.

---

5 Si ces deux conditions n'identifient pas une unique direction, ces auteurs proposent de minimiser le nombre des systèmes de glissement actifs pour accommoder un tel glissement et, faute d'un résultat unique, de choisir la direction plus proche d'un plan de glissement.

Ce modèle tient donc compte tant de l'hétérogénéité initiale que de la possibilité d'un restauration dynamique comme origines des bandes de cisaillement, et de l'assouplissement géométrique comme facteur qui en permet la propagation. Il faut noter que, du point de vue du mécanicien, c'est la possibilité d'une propagation de bandes de cisaillement qu'il faut détecter plutôt que leur initiation demeurant localisée. En ce sens le cadre donné par Dève et coauteurs est celui qui nous intéresse le plus dans la suite.

Le réseau cristallin à l'intérieur est désorienté par rapport à l'extérieur de la bande, de façon telle à augmenter la cission résolue sur le système de glissement actif dans la bande (assouplissement géométrique). Selon ces auteurs micro et macro-bandes de cisaillement représentent le même phénomène à deux échelles différentes (en particulier les premières précèdent occasionnellement les deuxièmes); ce phénomène est une conséquence naturelle du glissement cristallin: il se vérifie lorsque le rapport entre la contrainte axiale dans le monocristal et l'écrouissage du système de glissement diminue au delà d'une valeur critique. Le passage des micro aux macro-bandes de cisaillement se fait grâce à une réduction de la désorientation des micro-bandes nées dans les différents grains; cette réduction est due aux rotations de texture et aux rotations d'assouplissement géométrique des micro-bandes.

L'orientation de la micro-bande dans un monocristal dépend de celle initiale du cristal et est initialement cristallographique; la microstructure (e.g. solutions solides) n'influence que l'écrouissage du système actif et non l'orientation de la micro-bande (ce qui est prouvé en comparant les observations faites sur des monocristaux d'Al et de Ni). La désorientation entre la bande et les axes cristallographiques descend d'une rotation à l'intérieur de la bande qui minimise le facteur de Schmid (assouplissement géométrique).

Pour confirmer ce cadre physique, H.E.Dève et R.J.Asaro observent que les résultats de A.Korbel et P.Martin reportés dans nôtre travail au début de ce chapitre (Tab.2), montrant de désorientations jusqu'à 54° avec un plan {111}, peuvent être interprétés sans supposer que le plan des bandes contient la direction transversale au laminage (hypothèse qui, d'ailleurs, ne correspond pas avec leurs observations). La désorientation entre la bande et le plan {111} plus proche du grain qu'elle traverse devient alors toujours non supérieure à 10°, ce qui peut être justifiée par une rotation d'assouplissement géométrique de ce grain; l'angle entre le plan de la bande et la direction transversale au laminage est suffisamment en accord avec les observations (observé entre 0° et 20°, calculé entre 0° et 54°):

Tab.3 (Cf. Tab.2)

		angle avec le {111} plus proche dans le plan ...	
No.	plan de la bande	... du laminage	... transversal au laminage
2	421	28°	0°
5	235	20°	6°
6	233	10°	10°
9	001	54°	0°
12	411	35°	0°
14	311	30°	6°
15	233	10°	10°
17	391	38°	0°

d'après [Dève et Asaro 1989]

Il est important de noter que dans les calculs numériques basés sur ces hypothèses la raideur du polycristal est très influencée par la direction des contraintes (assouplissement "de coin").

2.3.2. Comparaison des conjectures.

On compare les scénarios proposés par les différents auteurs sur l'origine et, surtout, sur la propagation des bandes de cisaillement dans le but de définir un cadre aussi objectif que possible sur le sujet.

Il existe quelques points fondamentaux sur lesquels se concentrer:

- l'origine des bandes en termes de cause ultime, et donc l'endroit de leur apparition;
- l'origine des bandes en termes de cause générale;
- les phénomènes qui permettent la propagation des bandes;
- la nature de la propagation des bandes, i.e. quel est leur effet principal.

Les points impair dans la liste ci-dessus sont les plus controversés et, évidemment, aussi les plus importants du point de vue de la connaissance physique du phénomène. Heureusement ce sont les autres points qui nous intéressent davantage en autant que mécaniciens.

Cause générale.

Les bandes de cisaillement dérivent de la fin des capacités d'adaptation par glissement plastique des réseaux cristallins; elles sont donc étroitement liées à l'écrouissage du matériau.

L'écrouissage a plusieurs natures, mais la composante la plus importante dans les polycristaux est celle géométrique, c'est à dire liée à l'évolution des textures. L'évolution de la texture est "monotone" lorsque les grandes déformations ne sont pas cycliques, ce qui se vérifie dans la majorité des cas industriels et des essais usuels. Cela fait que habituellement l'écrouissage (qui est plutôt lié à l'évoluuon de la déformation) est associé directement à l'évolution de la texture.

La relation cause-effet qui avait été admise initialement entre le facteur de Taylor et l'apparition des bandes dérive de cette association (Cf. § 2.3.1.Assouplissement géométrique).

En effet, pour un système (corps et chargement) fixé ladite relation apparente cause-effet demeure valable et on peut donc en tenir compte pour un modèle simplifié de détection des bandes de cisaillement. Par exemple, pour un polycristal laminé, on pourra considérer la proportion volumique des cristaux orientés selon la direction à facteur de Schmid minimal comme un indicateur de la possibilité d'apparition des bandes.

Plus en général, et donc avec une fiabilité superieure, l'apparition des bandes de cisaillement doit être vue comme une conséquence d'un état critique rejoint par l'écrouissage du matériau (cela est commun à tout scénario présenté). Par conséquent c'est l'étude de la stabilité d'un système thermo-mécanique adéquat qui répond, avec le plus de généralité et de précision, à nos questions.

Cause ultime.

La connaissance de la cause ultime de l'apparition d'une macro-bande de cisaillement est peu importante du point de vue macroscopique. En fait aussi bien s'il s'agit d'une striction due à l'hétérogénéité locale (Cf. § 2.3.1.Localisation par hétérogénéité) que d'une disposition défavorable d'un joint entre un grain micro-cisaillé et le grain successif (Cf. § 2.3.1.Avalanche), que d'autres phénomènes locaux, on peut toujours supposer que l'événement cause ultime a une probabilité presque unitaire de se vérifier dans un échantillon macroscopique dès que l'écrouissage a rejoint un niveau suffisamment élevé.

Dès qu'on accepte que la cause ultime d'une bande de cisaillement est complètement locale (ce que font tous les auteurs) c'est la condition de possibilité d'apparition et celle de possibilité de propagation qui, du point de vue macroscopique, intéressent plus que la détermination de l'endroit où la bande va s'initier.

En tout cas on remarque que l'existence de micro-bandes dans des grains ayant une orientation particulière peut, avec un accord presque commun, être placée à l'origine des bandes de cisaillement. Le désaccord sur le sujet est plutôt lié au rapport entre micro et macro-bandes. L'existence d'un nombre important de grains orientés da façon défavorable vis à vis de la déformation, et donc l'apparition possible des micro-bandes, ne peut être détectée par un modèle qu'en ayant la connaissance locale de l'orientation cristallographique.

Phénomènes permettant la propagation.

Sur ce point il y a au moins une observation universellement acceptée: la propagation est facilitée par une texture cristallographique marquée. C'est donc encore la connaissance locale de l'orientation cristallographique qui doit rentrer dans un modèle pour représenter les possibilités de propagation des bandes.

Effet principal des bandes.

Il y au moins deux effets du passage des bandes de cisaillement qui ont été mis en évidence: la rotation locale du réseau cristallin et la localisation des déformations à l'intérieur des bandes, avec décharge élastique totale du reste de l'échantillon.

En particulier ce deuxième phénomène montre que les bandes de cisaillement peuvent être vues comme résultat d'une bifurcation du processus de déformation suivi par le corps: son mouvement est tel qu'il donne une déformation diffuse avant apparition des bandes et une déformation localisée après cette apparition. Le mode localisé représente une branche bifurquée démarrant du mode diffus. C'est par un tel modèle qu'elles ont été étudiées premièrement en mécanique par Hadamard et, en suite, par Hill, Rudnicki et Rice.

3. Conclusions

3.1. Physique de la déformation des Al-Mg.

3.1.1. Résumé des événements avant localisation.

Début de la déformation, $\varepsilon < 3\%$:

- création de dislocations mobiles selon des systèmes de glissement qui, choisis au début de la déformation, restent presque invariants pour chaque grain;
- les grains sont équi-axés, leur taille dépend de l'histoire du matériau;
- assouplissement négligeable causé par les premières dislocations mobiles.

Déformations moyennes, $\varepsilon \sim 10\% \div 50\%$:

- les dislocations forment une forêt; ceci entraîne la présence d'une énergie stockée dans cette forêt et un écrouissage cinématique latent (back stress);
- la forêt s'organise en cellules pour des niveaux de déformation fonctions de la concentration de la solution solide, la morphologie des cellules dépend de la contrainte appliquée;
- la texture morphologique (grains en forme des lentilles de plus en plus allongées) entraîne un écrouissage macroscopique anisotrope (surface de charge ellipsoïdale de plus en plus allongée et déformée);
- la déformation est relativement uniforme, la modification principale de la microstructure est le changement de forme des grains.

Grandes déformations, $\varepsilon \sim 100\%$:

- la densité de dislocations a un valeur limite: les cellules se vident de dislocations, les parois se multiplient et deviennent de plus en plus minces jusqu'à apparaître comme des surfaces de grains;
- la structure des cellules est de plus en plus sensible aux directions des contraintes jusqu'à devenir instable: la surface de charge montre des zones à haute courbure proches des directions principales de chargement (coïncidents avec les directions du laminage et normales au plan de laminage).
- les grains sont plus petits, très allongés et ont une texture cristallographique importante;
- la déformation tend à se localiser en bandes initialement dans des grains isolés et, en augmentant la déformation, se propageant dans plusieurs grains jusqu'à constituer une macro-bande.

Il faut noter que dans les Al-Mg la déformation est fortement non uniforme à tout niveau (e.g. il existe de grains qui, même aux déformations de l'ordre de 3, gardent leur forme initiale équi-axée agissant comme des inclusions rigides dans une matrice plastique (Cf. [Lloyd 1982]).

3.1.2. Conjectures sur la physique des bandes de cisaillement.

On a vu qu'il n'existe pas un modèle universellement accepté pour l'origine et la propagation des bandes de cisaillement. On présente de suite le modèle qu'on a déduit par l'étude bibliographique faite et qui nous semble s'adapter à la pensée de la majorité des auteurs.

Au stade des grandes déformations, les grains ont en majorité gardé le mécanisme de glissement qu'ils avaient choisi au début de la déformation, même si leur réseau a tourné depuis. Ceci entraîne un écrouissage par rotation selon les étapes suivantes:

- le choix d'un mécanisme écroui les autres à cause de l'interférence entre dislocations normales;
- la rotation locale du réseau modifie le rapport entre la contrainte macroscopique et le cisaillement sur le plan de glissement choisi de façon qu'il faut en général plus d'énergie pour maintenir ce mécanisme actif;
- le changement d'un mécanisme n'est possible que si, encore par rotation du réseau, un autre mécanisme écroui devient plus économique en énergie que le mécanisme initial;

- le mécanisme initial écrouit aussi à cause de la forêt de dislocations.

Dans l'évolution du polycristal il existe des orientations qui ont tendance à ne pas être modifiées, donnant une stabilisation de la texture.

Les grains qui n'ont pas eu leur réseau cristallin tourné car initialement orientés de façon stable, glissent sous une énergie vraisemblablement plus faible que les autres et ils cumulent donc rapidement une déformation très élevée. En conséquence d'une restauration dynamique il peut y avoir apparition des micro-bandes (lignes de glissement) dans ces grains.

D'un autre coté un grain glissant sous peu d'énergie est beaucoup moins forcé à tourner qu'un grain ayant une orientation plus raide. Ceci cause un augmentation du nombre des grains qui se trouvent dans une orientation faible par rapport à ce qu'on aurait s'il n'y avait pas de couplage entre glissements et rotations (stabilisation de la texture). Ceci fait aussi que seulement une partie réduite des grains faibles se trouvent effectivement dans l'orientation à facteur de Schmid minimal, car pour des facteurs suffisamment bas la tendance à tourner est très réduite. En conséquence on observe que une bande de cisaillement macroscopique contient plusieurs grains avec bandes faiblement désorientées: cette désorientation peut s'expliquer par la "saturation" de la possibilité de tourner des grains faibles.

Un grain "cisaillé" (i.e. montrant des lignes de glissement) peut être considéré comme une inclusion souple dans l'ensemble du métal. Le réseau qui l'entoure étant donc très sollicité, il émet des dislocations qui accélèrent localement le processus de déformation: ils font tourner les grains voisins jusqu'à la création éventuelle de super-réseaux stabilisant le grain cisaillé et ils rendent localement plus instable la forêt à cause d'une saturation locale de la densité de dislocations. En conséquence on peut observer une localisation microscopique avec un ou plusieurs grains traversés par des lignes de glissement entourées par une zone ayant une plus haute densité de dislocation que le reste du métal et montrant des rotations et même des distorsions locales du réseau cristallin.

On peut affirmer que cet écrouissage géométrique négatif du réseau se comporte comme une imperfection à l'intérieur du polycristal induisant une localisation de la déformation (Cf. [Dève *et al.* 1988]).

On remarque que un grain souple ou cisaillé a peu de possibilités de modifier son orientation une fois que l'énergie a été répartie sur les grains qui l'entourent; par conséquent, d'un point de vue statistique, les grains aux orientations faibles doivent augmenter. Un certain nombre de tels grains peut être présent même dans un échantillon n'ayant pas montré de localisations macroscopiques.

Le cisaillement local d'un ou plusieurs grains tel qu'il a été décrit a des caractéristiques importantes:

- il est presque irréversible,
- il peut se propager selon des champs de contraintes différents des champs macroscopiques,
- il se manifeste selon des directions de glissement proches de celles qui avaient été choisies initialement et donc proches de la direction de cisaillement macroscopique maximale sur un plan du réticule cristallin (facteur de Schmid maximal),
- il peut apparaître indépendamment en plusieurs point d'un échantillon sans que celui-ci soit cisaillé par bandes macroscopiques et sans qu'un écrouissage négatif ne se soit manifesté.

Lorsqu'on atteint une quantité critique de grains "souples" ou cisaillés par micro-bandes, les probabilités d'apparition d'un phénomène macroscopique (soit qu'il est généré par un ensemble suffisamment élevé de phénomènes locaux soit qu'il se vérifie par propagation de l'un de ces phénomènes) augmentent.

L'action combiné de plusieurs grains cisaillés peut modifier localement le tenseur des contraintes et causer l'activation de nouveaux mécanismes de glissement qui, en émettant des dislocations "aveugles" par rapport à la forêt existante, peuvent la détruire comme une avalanche (Cf. [Embury *et al.* 1984]).

On a vu en fait que la forêt est instable par rapport aux variations des directions de contrainte à ces niveaux de déformation, et que les directions principales de contraintes macroscopiques sont proches de zones à haute courbure de la surface de charge. De cette façon de petites rotations des axes principaux de contraintes peuvent générer de grandes variations des directions de déformations et donc forcer la naissance d'un nouveau plan de glissement. Ceci impliquerait la propagation de dislocations générées par d'autres systèmes de glissement que ceux

déjà activés qui sont aveugles par rapport à la forêt existante dans le sens qu'il ne sont pas forcement bloquées par ses branches.

La destruction locale du réseau de dislocations engendrerait l'assouplissement brutal d'une zone du matériau et l'enchaînement d'autres destructions avec des conséquences catastrophiques.

3.2. Modèle.

3.2.1. Scénario résumé.

On considère donc que une bande de cisaillement est le résultat macroscopique du processus décrit ci-dessus et qui peut se résumer par:

- localisation dans des grains dont le réseau cristallin a peu tourné depuis le début de la déformation (apparition éventuelle de micro-bandes de cisaillement);
- ces grains se comportent comme des inclusions souples modifiant le champ de contraintes et de déformations, en particulier de petites variations des contraintes induisent de grandes variations des directions de déformation;
- les nouvelles déformations détruisent la forêt de dislocation causant d'autres assouplissement;
- l'assouplissement se propage brutalement.

Ces conjectures sur les bandes de cisaillement sont en accord avec les observations et les déductions repérés dans la littérature car:

- la bande a une direction non nécessairement cristallographique;
- elle est constituée par un ensemble de micro-bandes aux directions cristallographiques qui ne traversent pas les surfaces de grains et qui se propagent à travers quelques grains en modifiant leur direction selon celle du réticule cristallin traversé (par glissement multiple);
- elle est entourée par une zone où le réseau subit des rotations importantes avec une haute densité de dislocations non organisées;
- elle se propage brutalement à partir d'un point de déclenchement par la coopération d'états critiques locaux indépendants;
- elle ne dépend pas de la pression sphérique appliquée; bien qu'elle peut être couplée avec de l'endommagement son apparition n'en dépend pas; elle n'est pas liée à un écrouissage macroscopique négatif.

Le scénario proposé est une trace de référence pour la suite du travail: on essayera de le représenter par un modèle thermo-mécanique adéquat.

3.2.2. Besoins du modèle.

En particulier on a les besoins de modélisation suivant:

- matériau initialement hétérogène et localement anisotrope;
- grandes déformations, températures importantes;
- suivie de l'évolution de la texture cristallographique et morphologique, i.e. suivie de l'évolution de l'hétérogénéité et de l'anisotropie de comportement;
- couplage entre mouvement de milieu continu et évolutions ci-dessus;
- couplage entre comportement d'ensemble et évolutions ci-dessus.

Ayant défini un tel modèle l'apparition, avec risque de propagation, des bandes de cisaillement pourra être détectée par une condition d'instabilité du système thermo-mécanique ainsi donné.

Il faut souligner l'importance de l'évolution des textures, des relations entre grains selon leurs orientations et de l'effet du taux de rotation relative entre réseaux cristallins et matière constituant les cristaux sur la puissance dissipée par le système. En fait c'est l'évolution de la texture qui mène vers de conditions favorables à l'apparition des bandes de cisaillement, c'est l'interaction entre réseaux de grains différent qui établi le début du phénomène et c'est finalement la dissipation dans la rotation relative citée qui "justifie du point de vue mécanique, l'utilisation d'un tel mécanisme de la part du matériau".

Dans le but de traduire ces besoins en un modèle particulier il convient d'analyser l'état de l'art de la thermo-mécanique des milieux continus hétérogènes dissipatifs, avec attention particulière aux polycristaux, et d'analyser en même temps les diverses théories de l'instabilité des systèmes thermo-mécaniques.

C H A P I T R E II

Mécanique et Thermodynamique.

1. Introduction.

Dans ce chapitre on examine les diverses hypothèses qui ont été formulées pour résoudre les différents passages nécessaires pour obtenir le comportement macroscopique d'un polycristal.

Le schéma de travail ne suit pas l'évolution du problème dans le temps, en montrant les différents modèles de polycristal connus (e.g. Sachs, Taylor, Taylor-Bishop-Hill, Taylor RC, auto-cohérent de Kroner et de Hill, ...). On préfère, en fait, suivre la liste des problèmes qui se posent et donner les solutions à ces problèmes indépendamment de la méthode dans laquelle ces solutions ont été pensées. La liste en objet est donnée par: le problème de l'évolution des textures, le problème du passage micro-macro, qui se décompose dans le problème du modèle d'agrégat et celui du modèle de monocristal, et le problème de l'instabilité.

Pour introduire le sujet on considère d'abord les problèmes relatifs à l'élasto-plasticité en transformation finie pour un matériau hétérogène anisotrope.

2. Elasto-plasticité hétérogène en transformation finie.

2.1. Introduction.

Dans un problème thermo-mécanique il existe des équations d'évolution et d'équilibre, écrites par rapport à la configuration actuelle, et des équations de comportement, écrites par rapport à une configuration de référence qui, souvent, ne peut pas être l'actuelle.

En transformation finie existe donc le problème du choix de la configuration de référence qui doit répondre au mieux, selon un critère de simplicité des développements successifs, à deux demandes fondamentales:

- en configuration de référence on doit pouvoir écrire et identifier le comportement,
- la configuration actuelle (et donc les équations d'évolution et d'équilibre) doit pouvoir s'identifier sans ambiguïté à partir de la configuration de référence.

Pour un matériau hétérogène ce problème devient plus délicat à cause de l'impossibilité de se référer à une configuration naturelle admissible pour l'écriture du comportement: la configuration de référence du comportement dépend de l'évolution de l'hétérogénéité dans le corps et est donc inconnue à l'instant actuel.

La configuration de référence cinématique utilisée pour une description lagrangienne du mouvement ne représente pas toujours le meilleur choix pour l'écriture du comportement: par exemple les déformations mesurées à partir de cette configuration ne sont pas complètement réversibles ou irréversibles. Dans la suite on appellera "configuration de référence", choisie toujours à l'instant initial, celle de référence pour le mouvement et "configuration support" la configuration sur laquelle on écrit plus aisement le comportement.

2.2. Tenseurs et configurations.

Une configuration du corps déterminée par la donnée d'une transformation sur la configuration de référence est appelé compatible ou réelle dans la suite (toute configuration de ce type peut être prise comme référence cinématique, la transformation donnant le transport des points matériels). On remarque que, en acceptant l'hypothèse de simplicité matérielle, il suffit de définir la configuration support du comportement par la donnée d'un transporteur des vecteurs matériels: une configuration qui peut ne pas correspondre à la configuration de référence par transformation sera appelé virtuelle (pour une configuration réelle le transporteur des vecteurs matériels est le gradient de la transformation, pour une configuration virtuelle cette propriété n'est pas requise).

Indépendamment de la signification thermodynamique des configurations en objet, on peut considérer le transport matériel des tenseurs de contrainte et de déformation entre deux configurations en fonction du transport des vecteurs matériels.

On considère une configuration initiale de référence V_0, une configuration actuelle V_t, et une troisième configuration, notée V^t, dont la relation thermo-mécanique avec les deux autres n'est pas précisée. Cette troisième configuration est une configuration support; son caractère virtuel fait qu'il n'existe pas, en général, une transformation admissible qui l'identifie à partir de la configuration de référence. Néanmoins, localement, dans une configuration virtuelle, la matière garde ses propriétés, ce qui est garanti par le fait que les vecteurs matériels issus de tout point d'une telle configuration sont liés par une transformation locale inversible aux vecteurs matériels issus du même point en configuration de référence.

Une configuration virtuelle, et donc en particulier celle support du comportement, peut être obtenue par décomposition cinématique du gradient de la transformation à un instant donné: ce gradient est la transformation locale de la configuration initiale à la configuration actuelle, en le décomposant on obtient une transformation locale de la configuration initiale à une configuration virtuelle et une transformation locale de cette configuration virtuelle à la configuration actuelle. Dans la suite on donne les notations relatives à ces passages.

2.2.1. Grandeurs eulériennes et lagrangiennes.

Les principales grandeurs mécaniques définies dans la configuration initiale sont ($\chi=[0,\infty[$ est une chronologie, $T_0(x)$ est l'espace tangent en x à l'instant 0 (ensemble des vecteurs matériels issus du point matériel placé en x à l'instant 0), $T_t(\mathfrak{x})$ est l'espace tangent en $\mathfrak{x}$ à l'instant t):

_transformation (inconnue lagrangienne) $\Xi:(x,t)\in V_0 x\chi \rightarrow \underline{x}\in V_t$ 1

_gradient de la transformation (transformation locale) $\nabla_x\Xi:(x,t)\in V_0 x\chi \rightarrow \underline{\underline{F}}(x,t)\in L(T_0(x),T_t(\underline{x}))$

i.e. $\forall \underline{v}_0\in T_0(x)\ \underline{v}_t=\underline{\underline{F}}(x,t)\cdot\underline{v}_0\in T_t(\underline{x})$

_dilatation de Cauchy $\underline{\underline{C}}(x,t)=\underline{\underline{F}}^T\cdot\underline{\underline{F}}(x,t)$

_déformation de Green-Lagrange $\underline{\underline{L}}(x,t)=\frac{1}{2}\left[\underline{\underline{C}}(x,t)-\underline{\underline{I}}\right]$

Il existe une grande liberté dans le choix d'une mesure de la déformation. Il convient de remarquer dès maintenant que lorsqu'on utilise une mesure de déformation qui descend du tenseur de dilatation droit de Cauchy, celle-ci ne tient pas compte de la rotation des axes matériels par rapport à la configuration actuelle. De façon symétrique si on utilise de mesures obtenues du tenseur de dilatation gauche de Green (ou de Green-Cauchy), G, on néglige la rotation initiale des axes.

Pour préciser ces aspects on considère les décompositions polaires possibles du gradient de la transformation à l'instant t, faisant apparaître les tenseurs d'élongation droit et gauche, U et V, et la rotation R:

$$\underline{\underline{F}}=\underline{\underline{R}}\cdot\underline{\underline{U}}=\underline{\underline{V}}\cdot\underline{\underline{R}}\quad\forall t\begin{cases}\underline{\underline{R}}^T\cdot\underline{\underline{R}}=\underline{\underline{I}}\\ \underline{\underline{U}}=\underline{\underline{U}}^T\\ \underline{\underline{V}}=\underline{\underline{V}}^T\end{cases}\qquad\text{définitions:}\begin{cases}\underline{\underline{C}}=\underline{\underline{U}}^T\cdot\underline{\underline{U}}\\ \underline{\underline{G}}=\underline{\underline{V}}\cdot\underline{\underline{V}}^T\end{cases}\rightarrow R\text{ négligé}\qquad 2$$

Pour un matériau anisotrope ceci oblige à l'introduction d'une variable de rotation, e.g. R même, qui oriente la matière en configuration actuelle par rapport à la configuration initiale (ou vice versa). Les équations de la mécanique étant écrites par rapport à l'un des deux tenseurs d'élongation[1] (d'habitude par rapport à U), aucun bilan ne porte sur R. Ceci fait du champ des rotations R(x,t) (défini à une rotation près, celle de l'observateur) un cas typique de variable interne, selon le formalisme qu'on décrira de suite (Cf. [Mandel, Cours, 1971]). Néanmoins on remarque aussi que pour les polycristaux une équation de bilan peut effectivement être écrite pour R (assurant la continuité de la fonction de distribution des orientations de texture), mais que cette équation n'est pas une équation thermo-mécanique.

En configuration actuelle on défini:

_champ de vitesse (inconnue eulerienne) $\underline{u}(\underline{x},t)$ 3

_taux d'évolution $\text{gradu}(\underline{x},t):\ \underline{v}_t\in T_t(\underline{x})\rightarrow\overset{\circ}{\underline{v}}_t\in L(R,T_t(\underline{x}))$

i.e. $\forall \underline{v}_t\in T_t(\underline{x})\ \overset{\circ}{\underline{v}}_t=\text{gradu}(\underline{x},t)\cdot\underline{v}_t$

_contrainte de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\ :\ P_{int}(V,t)=\int_V\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t):\text{symgradu}(\underline{x},t)dV_t$

Le transport matériel permet de mettre en relation ces grandeurs et de définir les contraintes dans la configuration initiale (soit $x=\Xi(x,t)$ dans les équations suivantes):

---

[1] La continuité de la masse est écrite par rapport au déterminant de F qui est celui de U et de V, le bilan des puissances est écrit par rapport aux déformations ainsi que le bilan des énergies.

_u vs Ξ $$\underline{u}(\underline{\chi},t)=\frac{\partial \underline{\Xi}(\chi,t)}{\partial t}$$ 4

_dV_0 vs dV_t $$dV_t(\chi)=J(\chi,t)dV_0(\chi)\ ;\ J(\chi,t)=\det\underline{\underline{F}}(\chi,t)$$

_gradu vs $\underline{\underline{F}}$ $$\text{gradu}(\underline{\chi},t)=\dot{\underline{\underline{F}}}\cdot\underline{\underline{F}}^{-1}(\chi,t)$$

_contrainte de Piola-Kirchhoff $$\underline{\underline{\pi}}(\chi,t)=J(\chi,t)\underline{\underline{F}}^{-1}(\chi,t)\cdot\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\chi},t)\cdot\underline{\underline{F}}^{-T}(\chi,t)$$

_contrainte nominale $$\underline{\underline{N}}(\chi,t)=J(\chi,t)\underline{\underline{F}}^{-1}(\chi,t)\cdot\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\chi},t)$$

2.2.2. Décomposition cinématique.

Comme on a dit il n'existe pas forcement une transformation qui permet d'obtenir la configuration V^i à partir de la configuration de référence: on suppose de connaître seulement une transformation locale inversible donnant pour tout tenseur matériel issus d'un point fixé en configuration de référence V_0 son image dans la configuration V^i. Soit F_{0i} cette transformation locale, on peut définir (toujours sur la configuration initiale de référence) la transformation locale correspondante donnant les images en configuration actuelle V_t des vecteurs matériels de V^i, notée F_{it}, et les déformations (de Green-Lagrange) et taux de déformation en configuration V^i:

_décomposition de la transformation locale $$\underline{\underline{F}}(\chi,t)=\underline{\underline{F}}_{jt}(\chi,t)\cdot\underline{\underline{F}}_{0i}(\chi,t)$$ 5

_décomposition des déformations $$\underline{\underline{L}}(\chi,t)=\underline{\underline{F}}_{0i}{}^{T}\cdot\underline{\underline{L}}_{jt}\cdot\underline{\underline{F}}_{0i}(\chi,t)+\underline{\underline{L}}_{0i}(\chi,t)$$

$$\underline{\underline{L}}_{jt}(\chi,t)=\frac{1}{2}\left[\underline{\underline{F}}_{jt}{}^{T}\cdot\underline{\underline{F}}_{jt}(\chi,t)-\underline{\underline{I}}\right]\ ;\ \underline{\underline{L}}_{0i}(\chi,t)=\frac{1}{2}\left[\underline{\underline{F}}_{0i}{}^{T}\cdot\underline{\underline{F}}_{0i}(\chi,t)-\underline{\underline{I}}\right]$$

_décomposition des taux d'évolution $$\dot{\underline{\underline{F}}}\cdot\underline{\underline{F}}^{-1}(\chi,t)=\underline{\underline{G}}_{jt}(\chi,t)+\underline{\underline{F}}_{jt}\cdot\underline{\underline{G}}_{0i}\cdot\underline{\underline{F}}_{jt}{}^{-1}(\chi,t)$$

$$\underline{\underline{G}}_{jt}(\chi,t)=\dot{\underline{\underline{F}}}_{jt}\cdot\underline{\underline{F}}_{jt}{}^{-1}(\chi,t)\ ;\ \underline{\underline{G}}_{0i}(\chi,t)=\dot{\underline{\underline{F}}}_{0i}\cdot\underline{\underline{F}}_{0i}{}^{-1}(\chi,t)$$

La définition des contraintes sur la configuration V^i se fait plus aisément à partir de la définition en configuration actuelle et de l'identité des puissances volumiques des efforts intérieurs:

$$J(\chi,t)\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\chi},t):\text{symgradu}(\underline{\chi},t)=J(\chi,t)\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\chi},t):\underline{\underline{G}}_{jt}(\chi,t)+\underline{\underline{\psi}}(\chi,t):\underline{\underline{G}}_{0i}(\chi,t)$$ 6

$$\underline{\underline{\psi}}(\chi,t)=J\underline{\underline{F}}_{jt}{}^{-1}(\chi,t)\cdot\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\chi},t)\,\underline{\underline{F}}_{jt}(\chi,t)=\underline{\underline{F}}_{0i}\cdot\underline{\underline{\pi}}\,\underline{\underline{F}}_{0i}{}^{T}\cdot\underline{\underline{C}}_{jt}(\chi,t)\ ;\ \underline{\underline{C}}_{jt}(\chi,t)=\underline{\underline{F}}_{jt}{}^{T}\cdot\underline{\underline{F}}_{jt}(\chi,t)$$

La contrainte ψ est associée au taux d'évolution de la configuration V^i, ce qui est une définition naturelle de contrainte dans une configuration, lorsque la dilatation est négligeable entre V^i et V_t la contrainte ψ n'est que le transporté de la contrainte de Piola-Kirchhoff sur la configuration V^i.

La même décomposition de la puissance volumique des efforts intérieurs peut être faite à partir de sa définition en configuration de référence, donnant une forme utile pour l'écriture du comportement:

$$\underline{\underline{\pi}}(\chi,t):\dot{\underline{\underline{F}}}(\chi,t)=\underline{\underline{\pi}}^{t}(\chi,t):\underline{\underline{L}}_{jt}(\chi,t)+\underline{\underline{\pi}}^{t}(\chi,t)\cdot\underline{\underline{C}}_{jt}:\dot{\underline{\underline{F}}}_{0i}\cdot\underline{\underline{F}}_{0i}{}^{-1}(\chi,t)$$ 7

$$\underline{\underline{\pi}}^{t}(\chi,t)=\underline{\underline{F}}_{0i}\cdot\underline{\underline{\pi}}\,\underline{\underline{F}}_{0i}{}^{T}(\chi,t)\ \text{i.e.}\ \underline{\underline{\psi}}(\chi,t)=\underline{\underline{\pi}}^{t}\cdot\underline{\underline{C}}_{jt}(\chi,t)$$

2.3. Décomposition cinématique et hétérogénéité.

Il est intéressant d'écrire le comportement sur une configuration relâchée, c'est à dire sur une configuration obtenue par un processus réversible de décharge à partir de la configuration actuelle. En fait pour une telle configuration support tout processus réversible autour de la configuration actuelle est un processus réversible selon le comportement écrit.

2.3.1. Etat naturel.

Si le matériau est hétérogène un processus de relaxation ne produit pas forcement une configuration localement relâchée, c'est à dire une configuration dans laquelle tout élément de matière se trouve dans son état naturel. Si, en fait, pour une configuration actuelle et une histoire données, il suffit d'imaginer une décharge adiabatique pour obtenir de façon réversible la configuration relâchée d'un corps homogène, il en est pas ainsi pour un corps hétérogène, où il peut se vérifier après une telle décharge:

- un état de contrainte non nul à cause du champ d'auto-contraintes d'hétérogénéité (énergie élastique bloquée),
- un état de l'hétérogénéité modifié de façon irréversible par rapport à la configuration avant décharge (e.g. par effet de la plasticité[2] ou à cause de la réorganisation de l'énergie élastique bloquée).

Par conséquent pour un matériau hétérogène, comme un polycristal, on peut soit écrire le comportement sur une configuration (globalement) déchargée mais non (localement) relâchée, soit l'écrire par rapport à une configuration virtuelle, localement relâchée, où l'élément de matière ne peut que être traité séparément du reste du corps (pas de compatibilité cinématique).

2.3.2. Rotations.

Une configuration comme la V^t, définie par rapport à l'initiale et l'actuelle ou, ce qui revient au même, par décomposition cinématique du gradient de la transformation entre ces deux configurations, n'est identifiée que à une rotation près:

$$\underline{\underline{F}}(x,t)=\underline{\underline{F}}_{jt}\cdot\underline{\underline{F}}_{0i}(x,t)=\underline{\underline{F}}'_{it}\cdot\underline{\underline{F}}'_{0i}(x,t)\quad \forall \underline{\underline{F}}'_{it}=\underline{\underline{R}}\cdot\underline{\underline{F}}_{jt}\quad \underline{\underline{F}}'_{0i}=\underline{\underline{R}}\cdot\underline{\underline{F}}_{0i} \qquad 8$$

$$\forall \underline{\underline{R}}(x,t):\ \underline{\underline{R}}\cdot\underline{\underline{R}}^T=\underline{\underline{I}}\quad \det\underline{\underline{R}}=1\quad \forall(x,t)$$

Pour un matériau hétérogène, lorsque cette décomposition ne doit pas assurer la compatibilité globale de la transformation, on obtient que le comportement est écrit par rapport à un élément de matière orienté de façon arbitraire par rapport à la configuration actuelle sur laquelle est imposé l'équilibre.

Il existe deux choix possibles pour résoudre cette difficulté:

- imposer que le comportement écrit est invariant par rotation de la configuration actuelle,
- orienter de façon arbitraire la configuration relâchée.

La deuxième voie introduit moins de difficultés techniques dès qu'on considère que, pour un matériau hétérogène anisotrope, l'orientation de l'anisotropie (i.e. l'orientation des réseaux cristallins pour un polycristal) est une référence naturelle pour orienter la configuration relâchée. Evidemment la diminution de la difficulté intrinsèque du problème n'est obtenue que en augmentant sa taille car il devient nécessaire de suivre l'évolution de l'anisotropie (i.e. l'évolution de texture) au cours de la transformation.

2.3.3. Variables internes.

Vu que l'état naturel ne peut être rejoint que localement dans une configuration virtuelle, on se trouve avec autant de fonctionnelles de comportements que de points matériels ou, en d'autres termes, avec un nombre virtuellement infini de variables internes.

Si l'anisotropie est la caractéristique principale de l'hétérogénéité, cet ensemble virtuellement infini de variables doit être généré par la rotation d'un système dont l'état est défini par un nombre fini de variables. Par exemple un polycristal est obtenu en assemblant un nombre élevé

---

2 Un corps homogène où se vérifie de la plasticité en décharge induit le même type de problème.

de fois la même cellule, constituée par un monocristal, avec une orientation variable des axes: pour décrire l'état thermodynamique du polycristal il suffit de décrire celui de la cellule élémentaire et de connaître le champ des rotations des axes cristallins.

2.4. Le choix de la configuration relâchée.

2.4.1. Configurations naturelles locales.

La configuration virtuelle obtenue en déchargeant tout point matériel du corps jusqu'à l'état naturel est définie à un champ de rotation des vecteurs matériels près. Pour s'affranchir de cette indétermination on peut (pour un matériau hétérogène anisotrope) suivre au cours du mouvement l'orientation locale de l'anisotropie. Le processus réversible menant localement de la configuration actuelle à la configuration naturelle locale est décrit, d'un point de vue cinématique, par une transformation locale noté E. Cette transformation, par décomposition polaire, montre une déformation pure et une rotation qui est celle des directions d'anisotropie au cours de la décharge idéale.

Le choix des axes d'anisotropie et la connaissance de leur évolution au cours du mouvement défini donc complètement le problème de la configuration support des lois de comportement. On identifie ces axes avec un trièdre directeur qui lui est solidaire (Cf. [Mandel 1982]); par exemple pour un polycristal ce trièdre peut être donné par trois axes cristallographiques [100], [010], [001]: les systèmes de glissement (définissant les directions d'anisotropie de la transformation microscopique) ont une orientation fixe par rapport à n'importe quel axe cristallographique.

On note dans ce cas la décomposition cinématique du gradient de la transformation:

$$\underline{\underline{F}}(x,t)=\underline{\underline{E}}(x,t)\cdot\underline{\underline{P}}(x,t) \qquad 9$$

(i.e. $E=F_{it}$ et $P=F_{0i}$ dans les formules de (5) à (7)).

L'état du matériau dans la configuration naturelle locale dépend de la température T, de la déformation au cours d'une transformation E (réversible), L_e, et des variables internes α_k, k=1...N. Noté ψ le potentiel énergie libre, on obtient les lois de comportement et la dissipation intrinsèque massique D_{int} dans la forme (Cf. [Stolz, Thèse, 1987]):

$$\psi(x,t)=\psi(T(x,t),\ \underline{\underline{L}}_e(x,t),\ \alpha_k(x,t))\ ;\ \underline{\underline{L}}_e(x,t)=\frac{1}{2}\left[\underline{\underline{E}}^T\cdot\underline{\underline{E}}(x,t)-\underline{\underline{I}}\right] \qquad 10$$

$$\underline{\underline{\pi}}_p(x,t)=\underline{\underline{P}}\cdot\underline{\underline{\pi}}\cdot\underline{\underline{P}}^T(x,t)=\rho_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial\underline{\underline{L}}_e}(x,t)\ ;\ s(x,t)=-\frac{\partial\psi}{\partial T}(x,t)$$

$$D_{int}=\underline{\underline{\pi}}_p:\underline{\underline{C}}_e:\dot{\underline{\underline{\beta}}}\cdot\underline{\underline{P}}^{-1}(x,t)-\rho_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_k}\dot{\alpha}_k(x,t)\geq 0$$

2.4.2. Configuration isocline.

Un matériau décrit par la donnée d'un trièdre directeur ainsi que la déformation et les autres variables d'état est dit à configuration physique.

Ce terme indique que le comportement local peut être étudié par rapport à un élément de référence orienté par le trièdre. Par exemple un polycristal est un matériau à configuration physique car son comportement peut se ramener, une fois connue l'orientation locale des axes cristallographiques, à celui d'un monocristal type (i.e. glissements irréversibles le long d'axes cristallographiques et distorsion réversible du réseau cristallin).

Pour un tel matériau on peut, localement, suivre la transformation totale par rapport à celle des trièdres directeurs. Si Θ est le champ des tenseurs orthogonaux propres donnant l'orientation des trièdres directeurs en tout point et instant par rapport à la configuration initiale, U_Θ est le tenseur d'élongation des trièdres et F est le gradient de la transformation, la transformation relative en objet, G, est telle que[3]:

---

3 On écrit la transformation des trièdres en décomposition polaire pour mettre en évidence le champ Θ qui sera utilisé tout le long de ce travail.

$$\underline{\underline{F}}(x,t)=\underline{\underline{\Theta}}\cdot\underline{\underline{U_\Theta}}(x,t)\cdot\underline{\underline{G}}(x,t) \text{ i.e. } \underline{\underline{G}}(x,t)=\underline{\underline{U}}^{-1}\cdot\underline{\underline{\Theta}}^{T}(x,t)\cdot\underline{\underline{F}}(x,t) \quad \forall x\in V_0,\forall t \qquad 11$$

G donne le mouvement de la matière relativement au "mouvement du matériau" qui est décrit par Θ U_Θ.

En général le champ Θ n'est pas continu en x. Dans le cas des polycristaux G est le gradient d'un champ de vitesse relative matière-matériau. La configuration intermédiaire entre Θ U_Θ et G est donc localement continue, la continuité d'ensemble n'étant assurée que pour la configuration initiale et actuelle.

Cette configuration obtenue, à un instant t donné, par l'ensemble des configurations locales engendrées par G(x,t) à partir de la configuration initiale est appelé configuration physique isocline à l'instant t, notée $V_{\varphi t}$. Pour un matériau à configuration physique, à un instant donné, les états locaux dans la configuration isocline sont égaux aux états locaux des points correspondants en configuration actuelle (le processus entre deux de ces systèmes est réversible): la forme des potentiels thermodynamiques ne varie pas suivant les configurations isoclines dans le temps.

La déformation de Green-Lagrange s'écrit par rapport à la configuration isocline (voir les formules de (5) à (7) avec Θ $U_\Theta=F_{it}$ et $G=F_{0i}$):

$$\underline{\underline{L}}(x,t)=\underline{\underline{G}}^{T}\cdot\underline{\underline{L_\varphi}}\cdot\underline{\underline{G}}(x,t)+\underline{\underline{L_G}}(x,t) \quad \forall x\in V_0,\forall t \qquad 12$$

$$\underline{\underline{L_\varphi}}(x,t)=\frac{1}{2}\left[\underline{\underline{U_\Theta}}^{T}\cdot\underline{\underline{U_\Theta}}(x,t)-\underline{\underline{I}}\right] ; \underline{\underline{L_G}}(x,t)=\frac{1}{2}\left[\underline{\underline{G}}^{T}\cdot\underline{\underline{G}}(x,t)-\underline{\underline{I}}\right]$$

Dans un polycristal les distorsions des trièdres sont réversibles, tandis que le mouvement relatif matière-matériau, décrit par G, est irréversible. Le potentiel énergie libre, les lois d'état et la dissipation intrinsèque sur la configuration isocline sont alors de la forme (Cf. [Stolz, Thèse, 1987]):

$$\psi(x,t)=\psi_\varphi(T(x,t),\ \underline{\underline{L_\varphi}}(x,t),\ \alpha_k(x,t)) \qquad 13$$

$$\underline{\underline{\pi_\varphi}}(x,t)=\underline{\underline{G}}\cdot\underline{\underline{\pi}}\cdot\underline{\underline{G}}^{T}(x,t)=\rho_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial\underline{\underline{L_\varphi}}}(x,t)$$

$$D_{int}=\underline{\underline{\pi_\varphi}}\cdot\underline{\underline{U_\Theta}}^{T}\cdot\underline{\underline{U_\Theta}}:\overset{\circ}{\underline{\underline{G}}}\cdot\underline{\underline{G}}^{-1}(x,t)-\rho_0(x)\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\alpha_k}\overset{\circ}{\alpha}_k(x,t)\geq 0$$

l'écriture du potentiel énergie libre en configuration initiale nécessite l'introduction du champ des orientations des trièdres comme variable interne:

$$\psi(x,t)=\psi_0(T(x,t),\ \underline{\underline{L}}(x,t),\ \underline{\underline{\Theta}}(x,t),\ \alpha_k(x,t))=\psi_\Phi(T(x,t),\ \underline{\underline{L_\Phi}}(x,t),\ \alpha_k(x,t)) \qquad 14$$

$$\underline{\underline{\pi}}(x,t)=\rho_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial\underline{\underline{L}}}(x,t)$$

$$D_{int}=\underline{\underline{\pi}}\cdot\underline{\underline{G}}^{T}\cdot\underline{\underline{U_\Theta}}^{T}\cdot\underline{\underline{U_\Theta}}:\overset{\circ}{\underline{\underline{G}}}(x,t)-\rho_0(x)\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\alpha_k}\overset{\circ}{\alpha}_k(x,t)\geq 0$$

2.4.3. Configuration intermédiaire.

Une autre façon d'éliminer l'indétermination de la configuration relâchée est d'écrire que le comportement est invariant par rotation de sa configuration support.

Dans ce cas cette configuration support est appelé intermédiaire, la décomposition cinématique s'écrit (pour distinguer les termes par rapport à la configuration naturelle locale):

$$\underline{\underline{F}}(x,t)=\underline{\underline{F_e}}(x,t)\cdot\underline{\underline{F_p}}(x,t) \qquad 15$$

(i.e. $F_e=F_{it}$ et $F_p=F_{0i}$ dans les formules de (5) à (7)).

Le comportement doit être invariant par rotation de la configuration intermédiaire V^*_t (on rappelle que cette configuration est obtenue à partir de la configuration actuelle et, donc, elle

dépend du temps). Dans un tel changement (qui ne modifie pas F) les transformations locales deviennent:

$$V^i_t \rightarrow V^i_{t'} : \begin{cases} \underline{\underline{F'}}_e(x,t)=\underline{\underline{F}}_e(x,t)\cdot\underline{\underline{Q}}^T(x,t) \\ \underline{\underline{F'}}_p(x,t)=\underline{\underline{Q}}(x,t)\cdot\underline{\underline{F}}_p(x,t) \end{cases} \quad \underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{Q}}^T=\underline{\underline{I}} \ \det\underline{\underline{Q}}=1 \ \forall(x,t) \qquad 16$$

Le tenseur de Green-Lagrange mesurant la déformation entre la configuration intermédiaire et l'actuelle et le tenseur taux de déformation de la configuration intermédiaire ne sont pas invariants par une telle rotation:

$$V^i_t \rightarrow V^i_{t'} : \begin{cases} \underline{\underline{L'}}_e(x,t)=\underline{\underline{Q}}(x,t)\cdot\underline{\underline{L}}_e(x,t)\cdot\underline{\underline{Q}}^T(x,t) \\ [\overset{\circ}{\underline{\underline{F}}}_p\cdot\underline{\underline{F}}_p^{-1}]'(x,t)=\underline{\underline{Q}}(x,t)\cdot\overset{\circ}{\underline{\underline{F}}}_p\cdot\underline{\underline{F}}_p^{-1}(x,t)\cdot\underline{\underline{Q}}^T(x,t) \end{cases} \qquad 17$$

leurs images transportées en configuration initiale par F_e^T sont invariantes; par conséquent il convient d'utiliser le taux de déformation plastique:

$$\underline{\underline{D^*}}_P(x,t)=\underline{\underline{F}}_e^{-T}(x,t)\cdot[\overset{\circ}{\underline{\underline{F}}}_p\cdot\underline{\underline{F}}_p^{-1}(x,t)]\cdot\underline{\underline{F}}_e^{-1}(x,t) \qquad 18$$

ou, par décomposition polaire de F_e:

$$\underline{\underline{D^*}}_{PR}(x,t)=\underline{\underline{R}}_e(x,t)\cdot[\overset{\circ}{\underline{\underline{F}}}_p\cdot\underline{\underline{F}}_p^{-1}(x,t)]\cdot\underline{\underline{R}}_e^T(x,t) \qquad 19$$

$$\underline{\underline{F}}_e(x,t)=\underline{\underline{U}}_e\cdot\underline{\underline{R}}_e(x,t) \ ; \ \underline{\underline{R}}_e\cdot\underline{\underline{R}}_e^T=\underline{\underline{I}} \ \det\underline{\underline{R}}_e=1 \ \forall t$$

2.5. Conclusion.

Le problème fondamental dans l'étude des transformations finies d'un corps constitué d'un matériau élasto-plastique hétérogène localement anisotrope, tel que un polycristal, est dans l'écriture du comportement. En particulier le noyau du problème réside dans la détermination d'une configuration relâchée dans laquelle le matériau soit à l'état naturel.

La voie suggéré initialement par J.Mandel pour résoudre ce problème passe par la connaissance à tout instant du champ des trièdres définissant l'orientation locale de l'anisotropie. Cette approche s'accorde bien avec les besoins de modélisation de notre problème initial car ces axes d'anisotropie ne sont, évidemment, que les axes du réseau cristallin.

3. Evolution des textures.

3.1. Introduction.

Un polycristal est un matériau hétérogène ayant un comportement local anisotrope, défini par le comportement du cristal type. A cause de cette anisotropie et de son origine il faut avoir une description locale des orientations cristallines pour pouvoir évaluer le comportement macroscopique du polycristal. Si le polycristal doit être suivi le long d'un processus de déformation il faut donc suivre l'évolution de ces orientations cristallines.

On appelle texture l'ensemble des orientations d'un polycristal vues dans son volume. On montre de suite sa représentation mathématique et les modèles qui permettent de la représenter graphiquement et de la suivre au cours de la déformation.

3.2. Représentation de la texture, ODF.

3.2.1. Techniques de mesure.

L'orientation cristalline peut être déterminée par plusieurs méthodes. Selon la technique utilisée la mesure de l'orientation a une pertinence sur les éléments de volume du polycristal liée à sa résolution spatiale; on parle alors d'orientations globales ou locales.

La technique plus commune est par diffraction de rayons X. Vue la dimension des rayons ses valeurs sont relatives à des éléments de surface contenant plusieurs grains d'un Al-Mg laminé. Il s'agit en fait d'une technique donnant en général des mesures à interpréter comme des moyennes volumiques.

La détermination locale des orientations est obtenue par MEB par technique ECP ("electron channelling patterns") ou EBSP ("electron back scattered patterns"), avec des résolutions spatiale et angulaire (Cf. [Driver, Com. 1992]):

	résolution spatiale	résolution angulaire
ECP	~5 μm	~0.2°
EBSP	~0.5 μm	2°

Dans la suite on se réfère à l'orientation cristalline locale mesurée par EBSP: il existe une carte des orientations sur le volume V_t du polycristal pour tout instant de temps t, qu'on note $\zeta(x,t)$.

A ce propos on remarque que toutes techniques de mesure citées est en effet une technique de surface; par conséquent l'extrapolation de données volumiques demande une étude statistique dont on ne s'occupe pas dans ce travail.

3.2.2. La fonction de distribution des orientations.

La texture est représenté mathématiquement par une fonction de distribution des orientations (ODF) qui défini une mesure de probabilité sur l'espace des orientations cristallines. Cette représentation mathématique est liée à la technique de détermination des texture par diffraction aux rayons X: comme déjà noté les mesures locales par MEB (ECP ou EBSP) permettent l'acquisition d'une information plus détaillé que celle contenue dans la fonction de distribution des orientations traditionnellement employé (carte des orientations).

L'espace des orientation est un espace curviligne qu'on décrira avec plus de détail dans la suite de ce travail. Pour l'instant on se limite à considérer les angles d'Euler décrivant toute orientation d'un trièdre par rapport à un système d'axes fixé dans l'espace euclidien classique. On note Z l'espace curviligne ayant les angles d'Euler comme coordonnées contravariantes; il s'agit d'un espace de Riemann de dimension 3; on l'appelle, pour abréger, espace des angles d'Euler.

La fonction de distribution des orientations, qu'on note g, est donc à support dans l'espace des angles d'Euler Z. Sur cet espace on défini une tribu, notée $\mathfrak{B}$ (e.g. la tribu borélienne), et une mesure de probabilité liée à la fonction de distribution des orientation, notée P_{ODF} (e.g. l'intégral de Lebsegue de g à support dans $\mathfrak{B}$), ce qui permet de considérer l'espace de probabilité

$(Z, \mathcal{B}, P_{ODF})$ et de considérer un processus aléatoire dans cet espace. Vu que les orientations évoluent dans le temps la mesure de probabilité sera fonction du temps.

La probabilité affectée a la boule $b \subseteq Z$ à l'instant t est mesurée par la fraction volumique des parties du polycristal qui, à l'instant t, ont leur orientation cristallographique dans cette boule; par définition de g, noté V le volume du polycristal on a:

$$\zeta=(\varphi_1,\phi,\varphi_2)\in Z\ ;\ dZ(\zeta)=\sin\phi d\varphi_1 d\phi d\varphi_2 \qquad 20$$

$$P_{ODF}(b,t)=\frac{1}{mes\{V_t\}}\int_b g(\zeta,t)dZ(\zeta)\quad \forall b\subseteq Z,\forall t$$

$$P_{ODF}(\emptyset,t)=0 \text{ et } P_{ODF}(Z,t)=1\ \forall t$$

3.3. Equations.

3.3.1. Continuité de la ODF.

La fonction de distribution des orientations est l'objet d'une étude d'évolution de texture. On considère la définition donnée (20) de mesure sur l'espace de probabilité des angles d'Euler $(Z, \mathcal{B}, P_{ODF})$, on voit que, si la fonction g est non négative et continue avec ses dérivées en tout point et si elle vérifie l'équation de continuité:

$$\frac{\partial g(\zeta,t)}{\partial t}+\mathrm{div}_\zeta\left[\, g(\zeta,t)\dot{\zeta}\,\right]=0\quad \forall\zeta\in Z,\forall t \qquad 21$$

alors les deux dernières des (20) sont toujours vérifiées (Cf. [Ribe, Int. 1988], [Wierzbanowski *et al.* 198.]. On peut aussi postuler la continuité de la densité de probabilité P_{ODF} et obtenir par conséquence des (20) l'équation locale (21) (Cf. [Rashid, 1991])[4] (D/dt indique une dérivée matérielle):

$$\frac{D}{dt}P_{ODF}(b,t)=0\quad \forall b\subseteq Z,\forall t \rightarrow (21) \qquad 22$$

On observe que l'équation de continuité ci-dessus est une dérivée "suivant l'orientation" de la fonction g qui joue le rôle d'une densité pour la masse P_{ODF}. Elle peut être obtenue suivant différentes approches et en raisonnant sur la nature physique du phénomène de l'évolution des textures. En effet cette équation donne une condition suffisante pour que l'espace de probabilité $(Z, \mathcal{B}, P_{ODF})$ ait une mesure de probabilité avec densité continue à tout instant. On peut donc résumer les hypothèses sur la physique de l'évolution des textures en disant que les orientations cristallines admettent une mesure de probabilité de densité continue évoluant continûment dans le temps. Il faut remarquer le caractère restrictif d'une telle hypothèse qui semble descendre plus du manque de résolution (dans l'espace-temps) des mesures effectuées que d'une réalité physique.

3.3.2. Equation d'évolution des textures.

Dans le but de suivre la texture au cours de la déformation, la vitesse des angles d'Euler $\dot{\zeta}$ (taux de rotation du réseau) doit être reliée aux variables du problème thermo-mécanique. Les variables d'un tel problème étant relatives à la matière, il faut en effet se donner l'équation qui régit le taux de rotation relative entre les réseaux cristallins et la matière. En général il s'agit d'un problème local de comportement: pour des conditions initiales données, le taux de rotation relative des orientations en un point dépend d'une équation dans laquelle apparaissent les taux des variables d'état en ce point et la valeur actuelle locale de l'orientation. Par exemple si on note w le tenseur taux de rotation et d le tenseur taux de déformation de la matière, on peut écrire par rapport à l'instant initial 0:

$$\begin{cases}\dot{\zeta}(\underline{x},t)=\Omega(\underline{\underline{w}}(\underline{x},t))+\mathcal{F}(T(\underline{x},t),\ \underline{\underline{d}}(\underline{x},t),\ \ldots;\ \zeta(\underline{x},t)) & \forall \underline{x}\in V_t,\forall t>0\\ \zeta(x,0)=\zeta_0(x) & \forall x\in V_0\\ \dot{\zeta}(x,0)=\Omega_0(x) & \forall x\in V_0\end{cases} \qquad 23$$

où la fonction $\mathcal{Q}$ tient compte du passage de R^3 à l'espace curviligne Z et la fonction $\mathcal{T}$ dépend du modèle proposé. Pour un cas bidimensionnel l'équation d'évolution s'écrit tout simplement avec w et d normes du taux de rotation et du taux de déformation matériels (Cf. [Ribe, Int. 1988]):

$$\overset{\circ}{\zeta}(\underline{\chi},t)=w(\underline{\chi},t)+d(\underline{\chi},t)\mathcal{T}(\zeta(\underline{\chi},t)-\zeta_0(x(\underline{\chi},t))) \quad \forall \underline{\chi}\in V_t, \forall t \qquad 24$$

L'étude de l'évolution des textures est basée sur la forme particulière choisie pour l'équation (23) et, plus particulièrement, pour la fonction $\mathcal{T}$.

3.4. Conclusion.

Du point de vue du mécanicien le passage fondamental dans l'étude des textures est la détermination de l'équation d'évolution.

Cette équation se traduit habituellement en une liaison cinématique (locale pour les métaux, plus rarement non locale) entre le taux de rotation et de déformation de la matière et le taux de rotation des réseaux cristallins (équation (23)). Il ne s'agit pas d'une équation thermo-mécanique car elle ne dérive pas de l'un des bilans usuels de la mécanique ou de la thermodynamique et, par conséquent, elle introduit une extension arbitraire de l'axiomatique classique, justifiée par l'expérience.

Par rapport à la complexité des phénomènes qui engendrent l'évolution de la texture, la donnée d'une liaison cinématique locale semble une simplification plutôt radicale. D'ailleurs les modèles basés sur de telles liaisons donnent, dans des cas limites, des résultats physiquement inacceptables (e.g. au § 5. on verra qu'on peut obtenir un monocristal par déformation limite d'un polycristal), mais ceci est habituellement négligé vu qu'on se considère toujours suffisamment loin de ces limites.

Ayant reconnu un rôle central à l'orientation cristalline dans l'apparition et la propagation des bandes de cisaillement, on peut s'attendre que un excès de simplification du modèle au niveau de l'évolution des textures diminue sa qualité prévisionnelle sur les bandes de cisaillement.

L'évolution des textures par liaison cinématique locale nous semble donc représenter plutôt un cas de polycristal "parfait". Il est légitime de se poser le problème de lui donner un statut d'équation constitutive, ce qui permettrait de caler les modèles sur les matériaux réels.

Il est également légitime de vouloir encadrer une telle équation dans une axiomatique.

4. Homogénéisation des polycristaux.

4.1. Introduction.

Un passage du microscopique au macroscopique en mécanique des milieux continus se fait dans le but de donner au comportement macroscopique d'un matériau donné une pertinence fixée à un niveau inférieur, appelé donc microscopique. Il s'agit de comparer deux modèles de milieux continus: les termes "micro" et "macro" sont relatifs à leurs échelles.

Il faut souligner que la discrimination entre parties homogènes microscopiques, qui détermine la structure microscopique du modèle de l'hétérogénéité, se fait sur la base d'observations faites à un niveau inférieur. Par exemple dans un modèle de polycristal on établie les caractéristiques des grains (parties homogènes du niveau primaire d'hétérogénéité) en observant au microscope des échantillons métalliques: il existe un modèle permettant la décision. Ce modèle n'est pas thermo-mécanique et il est obtenu grâce à la connaissance générale du matériau.

On donnera d'abord les définitions classiques mettant en relation deux descriptions à différentes échelles du même corps (§ 4.2.); ensuite on donnera un bref aperçu des méthodes d'homogénéisation employés pour les polycristaux en partant, pour des raisons de clarté, des problèmes formulés en élasticité linéaire (§ 4.3.). Dans un troisième temps (§ 4.4.) on passera à l'analyse du comportement des monocristaux; ce comportement est une donnée pour un problème d'homogénéisation, mais, comme on verra dans la suite, il est loin d'être clairement assigné pour un problème donné.

4.2. Passage micro-macro.

4.2.1. Formulation générale.

Un problème d'homogénéisation peut être formulé comme suit. Pour un corps représenté par un milieu continu hétérogène placé dans le domaine V, supposant connu les champs (micro) de contrainte σ et de taux de déformation d solutions actuelles d'un problème thermo-mécanique donné, quels sont les champs (macro) Σ et Δ qui lui sont équivalents au sens d'une condition fixée et qui sont liés par un comportement tangent homogène ? Quel est ce comportement ?

En formulant les hypothèses de causalité et d'objectivité pour les relations entre champs micro et macro, et ensuite celles d'instantanéité et d'existence d'une longueur caractéristique λ qui engendre des éléments de volume représentatifs de la structure microscopique (ici indépendants du temps) V_λ on voit qu'il s'agit de chercher les fonctionnelles:

$$\left.\begin{aligned}\underline{\underline{\Sigma}}(x,t) &= \underline{\underline{\Sigma}}\left\{\underline{\underline{\sigma}}(x',t);\ldots X(x',t)\right\}_{x'\in V_\lambda}\\ \underline{\underline{\Delta}}(x,t) &= \underline{\underline{\Delta}}\left\{\underline{\underline{d}}(x',t);\ldots Y(x',t)\right\}_{x'\in V_\lambda}\end{aligned}\right| \quad \forall x\in V_\lambda\subseteq V\ (V_\lambda \text{ représentatif}) \qquad 25$$

où X et Y sont des variables d'état. Ces fonctionnelles sont liées par l'équivalence imposée entre champs micro et macro, qui est de caractère énergétique:

$$\underline{\underline{\Sigma}}:\underline{\underline{\Delta}}(x,t) = \mathcal{F}\left\{\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{d}}(x',t)\right\}_{x'\in V_\lambda} \qquad 26$$

ou, plus particulièrement, si on peut donner un sens physique à la moyenne sur l'élément de volume représentatif V_λ (notée $\langle\ \rangle$):

$$\underline{\underline{\Sigma}}:\underline{\underline{\Delta}}(x,t) = \langle\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{d}}\rangle(x,t) \qquad 27$$

4.2.2. Eléments de volume.

Micro-hétérogénéité.

Un élément de volume représentatif est un élément dans lequel est contenue presque toute l'information sur la structure microscopique nécessaire pour l'étude des processus en objet, ce qui signifie qu'il contient un nombre suffisant d'hétérogénéités pour décrire tous cas de figure de la structure microscopique (i.e. il est "micro-hétérogène").

Pour être plus précis, on se donne une description mathématique de la structure microscopique hétérogène comme, par exemple, pour un milieu élastique hétérogène, l'application

donnant le tenseur des raideurs en tout point du milieu. On voit bien que si cette application est périodique, alors le plus petit volume représentatif est constitué par la cellule de base (taille caractéristique égale à la période). Lorsque l'application n'est pas périodique elle peut avoir des propriétés statistiques qui permettent de la représenter également à partir d'une cellule de base. Dans tout autre cas la taille caractéristique du volume représentatif doit tendre vers l'infini, ce qui signifie aussi que le rapport entre la taille caractéristique des hétérogénéités, s'il en existe une, et celle de l'élément de volume représentatif doit être très petit. On remarque alors que l'existence d'éléments de volume représentatifs est liée à la possibilité de décrire la structure microscopique de façon constante le long des processus étudiés, par une longueur caractéristique, soit-elle un période ou non.

Les éléments de volume représentatifs de taille minimale pour un problème donné sont dit représentatifs élémentaires (souvent notés VER).

Remarque sur les bandes de cisaillement.

Les processus faisant apparaître des bandes de cisaillement dans un polycristal métallique ne peuvent pas admettre une même longueur caractéristique avant et après apparition des bandes: avant la taille des grains régi l'hétérogénéité, après c'est surtout la bande, avec sa largeur, son inclinaison, la période par laquelle se manifeste, qui détermine la déformation macroscopique. On peut donc voir dès maintenant qu'une approche d'homogénéisation peut mener seulement à la détermination de l'état critique de localisation.

La probabilité que un grain ait une orientation cristalline donnée, se mesure habituellement par la fonction de distribution des orientations (ODF) qui varie au cours de la déformation avec la texture cristalline du polycristal. Si on veut modéliser un tel polycristal comme un matériau aléatoire par la donné de l'espace de probabilité $(Z,\mathcal{B},P_{ODF})$, cette espace sera variable au cours de la déformation (Cf. § 3. dans ce chapitre). En outre ces variations seront plus importantes dans tout processus qui, par formation d'une texture accentuée, conduit à l'apparition de bandes de cisaillement.

Macro-homogénéité.

En prenant un V_λ représentatif élémentaire, il existe des discontinuités virtuelles des tractions ou des vitesses sur le bord ∂V_λ obtenues par le modèle hétérogène ou par le modèle homogène équivalent:

$$\left[\underline{\underline{\sigma}}(x',t)-\underline{\underline{\Sigma}}(x,t)\right]\cdot n(x') = F(x',t) \quad \forall x'\in\partial V_\lambda$$
$$\left[u(x',t)-\underline{\underline{A}}(x,t)\cdot x'\right] = w(x',t) \quad \forall x'\in\partial V_\lambda \qquad (28)$$

Si la représentativité est assurée par un rapport élevé entre la taille de V_λ et celle des hétérogénéités, l'un de ces champs de discontinuité est négligeable[6] et on peut faire respectivement l'hypothèse de contrainte homogène ou de (taux de) déformation homogène sur ∂V_λ. En outre les résultats obtenus par l'une ou par l'autre de ces hypothèses sont d'autant plus proches entre eux que le rapport entre la taille de V_λ et celle des hétérogénéités est grand.

4.2.3. Relations micro-macro.

Lemme de Hill.

Par application du théorème de Gauss[7] on peut montrer que à l'intérieur d'un domaine V* la moyenne des taux de déformations ne dépend que des vitesses sur ∂V^* et, en absence de forces de volume, que la moyenne des contraintes ne dépend que des tractions sur ∂V^*.

Ceci permet de démontrer le lemme de Hill (ou "condition de macro-homogénéité de Hill" ou "condition de Hill-Mandel"), quelque soit les champs de contraintes équilibrées avec forces de volume nulles et de taux de déformation compatibles, non nécessairement associés (i.e. non nécessairement solutions d'un problème donné):

---

6 Cf. [Zaoui, Cours, 1991]. Ce champs fluctuent autour de moyennes nulles avec des longueurs d'onde petites par rapport à la taille du volume représentatif V_λ, ce qui rend leur effet négligeable au delà d'une couche limite d'épaisseur de l'ordre de la taille des hétérogénéités.

7 Pour que le théorème soit valable il faut que V* soit simplement connexe, que le plan tangent à ∂V^* ait un nombre fini de discontinuités, que les champs de contrainte et de vitesse soient continus dans V* et sur ∂V^* avec dérivées continues dans V*: la représentativité de V* n'est pas impliquée.

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{d}}^\circ \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}}^* \rangle : \langle \underline{\underline{d}}^\circ \rangle \qquad 29$$

tant en condition de contrainte homogène que en taux de déformation homogène. Le lemme de Hill est en effet valable sous des hypothèses beaucoup plus larges, mais cela sort du cadre de ce travail.

Relations micro-macro.

Si les éléments de volume caractéristiques sont tels que le taux de déformation microscopique est sensiblement homogène (ou presque), alors la fonctionnelle qui donne le champ des taux de déformation macroscopique est simplement la moyenne (l'indice ε dénote la condition de déformation homogène):

$$\underline{\underline{\Delta}}_\varepsilon(x,t) = \langle \underline{\underline{d}} \rangle(x,t) = \underline{\underline{d}}(x',t) \quad \forall x,x' \in V_\lambda \qquad 30$$

et l'équivalence micro-macro avec la condition de macro-homogénéité de Hill (valable en absence de forces de volume) permettent de définir la contrainte macroscopique en déformation homogène:

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle : \underline{\underline{\Delta}}_\varepsilon \rightarrow \underline{\underline{\Sigma}}_\varepsilon = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \qquad 31$$

Si la contrainte microscopique est sensiblement homogène, alors le champ des contraintes macroscopiques est (l'indice est σ pour la condition de contrainte homogène):

$$\underline{\underline{\Sigma}}_\sigma(x,t) = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle(x,t) = \underline{\underline{\sigma}}(x',t) \quad \forall x,x' \in V_\lambda \qquad 32$$

et la définition du taux de déformation macroscopique en contrainte homogène:

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}}_\sigma : \langle \underline{\underline{d}} \rangle \rightarrow \underline{\underline{\Delta}}_\sigma = \langle \underline{\underline{d}} \rangle \qquad 33$$

Les champs macroscopiques équivalents d'un point de vue énergétique aux champs microscopiques coïncident donc avec leurs moyennes sur des éléments de volume particuliers. Ces éléments de volume sont représentatifs élémentaires et soumis soit à de conditions de contrainte homogène, soit de déformation homogène. Selon la condition postulée pour le problème traité on obtient un comportement macroscopique différent, qui tend à un comportement unique si la taille de l'élément de volume est grande par rapport aux hétérogénéités.

Si on regarde l'ensemble des hypothèses et des définitions introduites on voit donc que l'objectif de l'homogénéisation est le remplacement du problème thermo-mécanique avec hétérogénéités de comportement par un problème homogène qui donne une estimation des moyennes des contraintes et des déformations sur un domaine infiniment petit d'un point de vue macroscopique et infiniment grand d'un point de vue microscopique.

Relations de localisation.

La donnée des champs macroscopiques solutions d'un problème thermo-mécanique homogénéisé peut, avec des hypothèses supplémentaires, permettre de remonter aux champs microscopiques caractéristiques. Ces hypothèses doivent être suffisantes pour obtenir des relations de localisation de la forme, sous l'hypothèse de localisation instantanée dans l'élément de volume représentatif élémentaire:

$$\underline{\underline{d}}(x',t) = \underline{\underline{\mathcal{D}}}\{\underline{\underline{\Delta}}(x,t);\dots\}_{x\in V_\lambda} \; ; \; \underline{\underline{\sigma}}(x',t) = \underline{\underline{\mathcal{S}}}\{\underline{\underline{\Sigma}}(x,t);\dots\}_{x\in V_\lambda} \qquad 34$$

avec les conditions:

$$\mathcal{D}: \begin{cases} \underline{\underline{\Delta}} = (\underline{\underline{\mathcal{D}}}\{\underline{\underline{\Delta}},\dots\}_{x\in V_\lambda})_{V_\lambda} & \forall \underline{\underline{\Delta}} \\ \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\mathcal{D}}}\{(\underline{\underline{d}})_{V_\lambda},\dots\}_{x\in V_\lambda} & \forall \underline{\underline{d}} \end{cases} \qquad 35$$

et conditions analogues pour la fonctionnelle $\mathcal{S}$ de localisation des contraintes.

On remarque que les modèles décrivant les bandes de cisaillement comme conséquences d'un assouplissement géométrique mènent à un critère d'apparition relatif à une forme "critique" de $\mathcal{S}$: si, à l'instant donné, la fonctionnelle de localisation des contraintes donne une

contrainte microscopique maximale, dans une région du corps, pour la contrainte macroscopique et les autres variables d'état données il y a formation de bandes.

4.2. Homogénéisation.

4.2.1. Problème d'Eshelby en élasticité linéaire.

Les méthodes d'homogénéisation ont été formulées initialement de façon systématique sur les matériaux à comportement élastique linéaire des hétérogénéités. Il est par conséquent plus simple de faire référence au cas de l'élasticité linéaire en transformations infinitésimales au cours de ces remarques préliminaires.

On rappelle le résultat d'Eshelby pour la solution du problème de l'équilibre élastique d'un solide hétérogène avec conditions sur les déplacements et forces de volume nulles (Cf. [Zaoui Cours 1991]). On note:

$$\underline{\underline{r}}(x,t)\ ;\ \underline{\underline{R}}(t)\ ;\ \delta\underline{\underline{r}}(x,t)=\underline{\underline{r}}(x,t)-\underline{\underline{R}}(t) \qquad 36$$

respectivement les tenseurs des raideurs microscopiques (hétérogènes sur le volume V décrit par x), macroscopiques et leur variation. On utilise une notation analogue pour les variations et pour les parties homogènes des champs microscopiques de déformation et de contrainte par rapport aux champs macroscopiques:

$$\delta\underline{\underline{\varepsilon}}(x,t)=\underline{\underline{\varepsilon}}(x,t)-\underline{\underline{E}}(t)\ ;\ \delta\underline{\underline{\sigma}}(x,t)=\underline{\underline{\sigma}}(x,t)-\underline{\underline{\Sigma}}(t) \qquad 37$$

Le problème mécanique s'écrit:

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}}(x,t)=0 \\ \underline{\underline{\sigma}}(x,t)=\underline{\underline{r}}(x,t):\underline{\underline{\varepsilon}}(x,t) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}(x,t)=\mathrm{symgrad}u(x,t) \end{array}\right\} \forall x\in V \\ u(x,t)=u^{d}(x,t) \qquad \forall x\in\partial V \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathrm{div}\underline{\underline{\Sigma}}(t)=-\mathrm{div}\delta\underline{\underline{\sigma}}(x,t) \\ \underline{\underline{\Sigma}}(t)+\delta\underline{\underline{\sigma}}(x,t)=\left[\underline{\underline{R}}(t)+\delta\underline{\underline{r}}(x,t)\right]:\underline{\underline{\varepsilon}}(x,t) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}(x,t)=\mathrm{symgrad}u(x,t) \end{array}\right\} \forall x\in V \\ u(x,t)=u^{d}(x,t) \qquad \forall x\in\partial V \end{array}\right. \qquad 38$$

et la solution peut être poursuivie en superposant idéalement les effets de deux problèmes homogènes, l'un avec forces de volume nulles et déplacements imposés sur la frontière, et l'autre avec forces de volume fictives, égales à la divergence de la variation des contraintes, et déplacements nuls sur la frontière:

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{div}[\underline{\underline{R}}(t):\mathrm{simgrad}U(x,t)]=0 & \forall x\in V \\ U(x,t)=u^{d}(x,t) & \forall x\in\partial V \end{array}\right. + \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{div}[\underline{\underline{R}}(t):\mathrm{simgrad}u(x,t)]=-f(x,t) & \forall x\in V \\ u(x,t)=0 & \forall x\in\partial V \end{array}\right. \qquad 39$$

$$f(x,t)=\mathrm{div}[\delta\underline{\underline{r}}(x,t):\mathrm{simgrad}u(x,t)]$$

ce qui, en utilisant la technique des fonctions de Green, donne l'équation intégrale pour le champ de taux de déformation solution (qui est la condition de localisation):

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(x,t)=\underline{\underline{E}}(t)-\int_{V_t}\underline{\underline{\Gamma}}(x,x',t):\delta\underline{\underline{r}}(x',t):\underline{\underline{\varepsilon}}(x',t)\,dV_t(x') \qquad 40$$

avec l'opérateur de Green modifié donné par (Φ_{n+1} classe des fonctions test à support dans l'espace-temps):

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \text{symgrad}_x\, \text{symgrad}_x\, \underline{\underline{G}} \quad \forall t \tag{41}$$

$$\underline{\underline{G}}: \begin{cases} R_{ijkh}(t) \int_{V_t} G_{hl,kj}(x,x',t)\varphi_l(x',t)dV_t(x') + \varphi_i(x,t) = 0 & \forall x \in V \\ & \forall t, \forall \varphi \in \Phi_{n+1} \\ \int_{V_t} G_{ij}(x,x',t)\varphi_j(x',t)dV_t(x') = 0 & \forall x \in \partial V \end{cases}$$

Une équation intégrale du type de la (40) peut être écrite pour des comportements non linéaires. En particulier ceci est possible dans le cas des polycristaux avec plasticité indépendante du temps car la condition de localisation peut toujours être instantanée. En outre, dans de pareils cas le comportement des hétérogénéités est multi-linéaire ("bi-linéaire" dans le sens que, selon la direction et l'intensité du chargement, la relation entre incréments de contrainte et taux de déformation est linéaire tant suivant un module élastique que suivant un module plastique), ce qui facilite le passage.

L'équation intégrale (40) peut être résolue formellement en substituant récursivement la déformation microscopique sous le signe intégral. Si on arrête le processus récursif à un certain pas, disons le n-ième, en substituant la déformation microscopique avec la macroscopique, on obtient une solution approchée à n "sites" (Cf. [Berveiller et Zaoui 1978]):

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(x,t) = \underline{\underline{A}}(x,t) : \underline{\underline{E}}(x,t) \tag{42}$$

$$\underline{\underline{A}}(x,t) = \left[\underline{\underline{I}} - \int_V \underline{\underline{\Gamma}}(x,x') : \delta\underline{\underline{r}}(x',t)dV(x') + \int_V \int_V \underline{\underline{\Gamma}}(x,x') : \delta\underline{\underline{r}}(x',t) : \underline{\underline{\Gamma}}(x',x'') : \delta\underline{\underline{r}}(x'',t)dV(x'')dV(x') - \ldots \right]$$

4.2.2. Position du problème pour les polycristaux.

On considère un polycristal constitué de grains homogènes de mesure volumique non nulle. Chaque grain a un comportement élasto-plastique indépendant du temps. On cherche à caractériser le rapport entre une solution homogène et une solution hétérogène du problème de l'équilibre élasto-plastique d'un tel milieu au moins dans les cas où ces solution existent.

On considère un élément de volume du polycristal contenant un nombre N suffisamment élevé de grains pour être représentatif, et on le soumet à des conditions au contour homogènes (soit contraintes soit déformations). La solution d'un tel problème donne les champs microscopiques relatifs aux conditions homogènes imposées.

Une approche directe de ce problème[9], sans autres simplifications, ne peut être menée, à ce jour, que par calcul numérique sur un nombre d'éléments finis homogènes de l'ordre de 1000, avec géométrie plane, ce qui peut, dans un nombre très réduit de cas, éliminer la nécessité d'une procédure d'homogénéisation pour l'obtention de résultats macroscopiques. Néanmoins dans la plus part des cas cette approche directe n'est que un pas initial vers le macroscopique.

Les approches visant la caractérisation d'un comportement macroscopique se développent à partir d'hypothèses simplificatrices:

- la méthode de Sachs, basée sur l'hypothèse de contrainte homogène dans l'agrégat,
- la méthode de Taylor et les méthodes qui en dérivent, avec hypothèse de déformation homogène dans l'agrégat,
- les méthodes auto-cohérentes, faisant une homogénéisation grain par grain avec hypothèse de déformation homogène dans le grain.

En effet on peut voir que tout résultat d'homogénéisation, selon les hypothèses de localisation par lequel il est obtenu, exprime un "désordre gradué" des hétérogénéités dans le milieu: les bornes de Voigt et Reuss représentant l'ordre parfait (désordre gradué de rang 1), celles de Hashin-Shtrikman l'isotropie locale et globale (rang 2), les modèles auto-cohérents le désordre parfait (rang infini)[10]. Or, les modèles de Sachs et de Taylor correspondent aux bornes,

9 Cf. [Zikry et Nemat-Nasser 1990] et [Nemat-Nasser 1992].

10 L'explication des bornes citées sort du cadre de ce travail (Cf. [Zaoui, Cours 1991]).

respectivement, de Voigt et Reuss et supposent donc l'ordre parfait de l'agrégat; les modèles auto-cohérents représentent un agrégat où les grains sont repartis de façon isotrope.

On considère dans la suite un comportement microscopique tangent, indépendant du temps, défini, par le tenseur s_e des souplesses élastiques et par un critère f (avec loi d'écoulement associé), fonction de la contrainte locale actuelle (ainsi que du temps et éventuellement de la valeur d'un sous-ensemble des variables duales des variables d'état)[11]:

$$\underline{\underline{d}}(x,t) = \underline{\underline{s}}_t(x,t):\overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}}(x,t) = \underline{\underline{s}}_e(x,t):\overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}}(x,t) + \overset{\circ}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}(x,t);x,t) \qquad 43$$

formellement:

$$\underline{\underline{r}}_t(x,t) = \underline{\underline{s}}_t^{-1}(x,t) : \overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}}(x,t) = \underline{\underline{r}}_t(x,t):\underline{\underline{d}}(x,t) \qquad 44$$

Les variations écrites pour le problème d'Eshelby ont un sens incrémental:

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{\Sigma}}}(t)+\delta\overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}}(x,t) = \left[\underline{\underline{R}}_t(t)+\delta\underline{\underline{r}}_t(x,t)\right]:\left[\underline{\underline{\Delta}}(t)+\delta\underline{\underline{d}}(x,t)\right] \qquad 45$$

Cette équation relie les variations des incréments de contraintes aux variations des taux de déformation dès qu'on considère connu le comportement macroscopique défini par R_t:

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\underline{\underline{\Sigma}}}(t) = \underline{\underline{R}}_t(t):\underline{\underline{\Delta}}(t) \\ \delta\overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}}(x,t) = \delta\underline{\underline{r}}_t(x,t):\underline{\underline{\Delta}}(t)+\underline{\underline{r}}_t(x,t):\delta\underline{\underline{d}}(x,t) \end{cases} \qquad 46$$

elle peut donc soit directement mener à la fonctionnelle de localisation par la méthode de Sachs ou par celle de Taylor, soit être utilisée pour la recherche du comportement macroscopique par une méthode auto-cohérente.

4.2.3. Méthodes avec hypothèses sur l'agrégat.

Hypothèses de Sachs et de Taylor.

Si dans la dernière équation (46) on considère nulles les variations des incréments de contrainte (incréments homogènes des champs de contrainte microscopique), on obtient le tenseur de localisation incrémental selon l'hypothèse de Sachs (1928):

$$\delta\overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}}(x,t)=\underline{\underline{0}}\ \forall x\in V \rightarrow \delta\underline{\underline{d}}(x,t) = -\left[\underline{\underline{r}}_t^{-1}:\delta\underline{\underline{r}}_t(x,t)\right]:\underline{\underline{\Delta}}(t) \qquad 47$$

L'équilibre est en général violé par un tel modèle de polycristal, la raideur homogène tangente est surestimée car on vérifie facilement qu'elle corresponde à la borne supérieure de Voigt:

$$\underline{\underline{R}}_t(t)=\left\langle \underline{\underline{r}}_t(x,t)\right\rangle \qquad 48$$

Si, conformément à l'hypothèse de Taylor (1938), on considère homogène le taux de déformation on obtient:

$$\delta\underline{\underline{d}}(x,t)=\underline{\underline{0}}\ \forall x\in V \rightarrow \delta\overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}}(x,t) = \underline{\underline{r}}_t(x,t):\underline{\underline{\Delta}}(t) - \overset{\circ}{\underline{\underline{\Sigma}}}(t) \qquad 49$$

$$\text{i.e. } \overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}}(x,t)=\underline{\underline{r}}_t(x,t):\underline{\underline{\Delta}}(t)\ ;\ \underline{\underline{d}}(x,t)=\underline{\underline{\Delta}}(t)\ \forall x\in V$$

La compatibilité des déformations est en général violée et la raideur tangente est sous-estimée car elle correspond à la borne inférieure de Reuss:

---

11 Par exemple le critère peut dépendre de la contrainte bloquée. On considère que $\overset{\circ}{\sigma}$ représente une variation (par rapport au temps pris comme paramètre) objective de la contrainte de Cauchy qu'on ne précise pas pour l'instant.

$$\underline{\underline{R}}_t(t)=\left\langle \underline{\underline{r}}_t^{-1}(x,t)\right\rangle^{-1} \qquad 50$$

Ce modèle est d'autant moins proche de la réalité que la déformation macroscopique se localise, néanmoins il est à la base de beaucoup de travaux sur les polycristaux, grâce surtout à la relaxation partielle de l'hypothèse de déformation homogène donnant ce qu'on appelle un modèle de Taylor modifié (dû à Honneff et Mecking en 1978 et à Kocks et Chandra en 1982).

Hypothèse de Taylor relâchée.

Il existe plusieurs hypothèses obtenues en modifiant celle de déformation homogène de Taylor; en général elles considèrent des conditions homogènes mixtes en déformation et contrainte.

Selon l'hypothèse classique de Honnef et Mecking, en fonction de la forme actuelle des grains (des grains plus allongés ou désaxés s'éloignent de l'homogénéité avec le reste de l'agrégat), se vérifient des conditions homogènes mixtes en déformation et contrainte: seulement certains composantes du tenseur taux de déformation sont considérées homogènes tandis que d'autres ne le sont pas, mais les composantes qui lui correspondent du tenseur incrémental des contraintes sont alors homogènes. Par exemple en déformation plane les grains allongés sont soumis à une variation de contrainte de cisaillement homogène (composante 12) et taux de déformation normale homogènes (composantes 11 et 22).

Plus généralement, toute méthode obtenue en relâchant l'hypothèse de Taylor considère des écarts admissibles par rapport à la déformation homogène, mais ces écarts sont imposés (en fonction de la forme et de l'orientation du grain) sans souci de la cohérence de la solution microscopique (équilibre et compatibilité). C'est en effet une façon "tardive" de prendre en compte la distribution spatiale de l'hétérogénéité du polycristal qui est absolument ignorée tant en utilisant l'hypothèse de Taylor non modifiée quant par celle de Sachs (ordre parfait).

Le succès de la méthode de Taylor modifié (souvent dénoté RC pour "relaxed constrained" en opposition au "fully constrained" FC de la méthode originale) est lié surtout à sa bonne qualité dans l'étude des évolutions de texture, avec des calculs relativement simples, (Cf. [Mathur *et al.* 1990], [Harren et Asaro 1989], [Rashid 1992]) qui permet entre autre la détermination d'une surface de charge macroscopique (Cf. [Canova *et al.* 1985], [Van Houtte, Cont. 1987], [Rashid 1992]) et de la localisation en bandes de cisaillement (Cf. [Canova *et al.* 1984]). Néanmoins la correspondance avec les essais n'est pas toujours vérifiée (Cf. [Orlans-Joliet, Thèse, 1989]). En fait les textures calculées selon l'hypothèse de Taylor sont en général plus concentrées que dans les résultats expérimentaux (Cf. [Harren et Asaro 1989]). On justifie généralement cet écart comme une conséquence de l'homogénéité imposée à priori pour la déformation microscopique: en réalité les grains orientés de façon "défavorable" par rapport à la déformation macroscopique (i.e. soumis à une déformation plus élevée) tendent à modifier plus difficilement leur orientation, de façon que la texture finale reste plus diffuse (Cf. [Rashid 1992]).

4.2.4. Méthode auto-cohérente.

Cette méthode trouve son origine dans les travaux de Kröner (1961); elle a été ensuite développée dans un cadre plus général par Hill (1965) et Hutchinson (1970). Dans ce travail on se réfère principalement aux travaux de Zaoui et de Berveiller qui suivent plutôt la voie originale de Kroner (Cf. [Berveiller & Zaoui 1978], [Lipinski, Berveiller & Corvasce 1988], [Zaoui, Cours 1991]), mais on rappelle aussi les travaux de Harren suivant Hill (Cf. [Harren 1991]).

Méthode de Kröner.

Le problème est traité séparément pour chaque grain, comme un problème d'Eshelby non linéaire dans lequel le grain en objet joue le rôle d'une inclusion dans un milieu homogène. Le comportement de ce milieu homogène est à priori inconnu, de même que la forme de l'inclusion; l'inclusion se trouve dans un état soit de déformation soit de contrainte homogène, ce qui défini la continuité des champs le long de sa frontière.

Ce dernier point est important: on a vu que les hypothèses de déformation ou de contrainte homogène ont une signification d'autant plus approchée d'un modèle "exact" que la taille de l'élément de volume macro-homogène devient micro-hétérogène. Dans le cas des polycristaux un seul grain ne peut être pris pour représenter la microstructure que si on suppose qu'il représente tout autre grain du polycristal et que l'agrégation des grains pour former le polycristal n'a pas

d'importance pour les résultats[12]. Evidemment cette dernière condition coincide avec le désordre parfait qu'on a déjà vu être caractéristique de la méthode auto-cohérente.

Grâce au caractère multi-linéaire du comportement et à l'indépendance du temps, on peut considérer une fonctionnelle de localisation de forme analogue à celle d'Eshelby, mais avec densité, Γ, de l'opérateur d'Eshelby inconnu:

$$\delta\underline{\underline{d}}(x,t) = -\int_{V_t}\underline{\underline{\underline{\underline{\Gamma}}}}(x,x',t):\delta\overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}}(x',t)\,dV_t(x') \qquad 51$$

avec le comportement donné par (46), réécrit de façon à faire apparaître la partie macroscopique R_t (on néglige l'incrément de contrainte dû à la variation du taux de déformation par la variation de comportement tangent):

$$\begin{cases}\overset{\circ}{\underline{\underline{\Sigma}}}(t) = \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}_t(t):\underline{\underline{\Delta}}(t) \\ \delta\overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}}(x,t) = \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}_t(t):\delta\underline{\underline{d}}(x,t) + \delta\underline{\underline{\underline{\underline{r}}}}_t(x,t):\underline{\underline{\Delta}}(t) \quad \left(\delta\underline{\underline{\underline{\underline{r}}}}_t(x,t):\delta\underline{\underline{d}}(x,t)=\underline{\underline{0}}\right)\end{cases} \qquad 52$$

Ces équations définissent le problème de l'équilibre élasto-plastique couplé avec celui de la détermination du comportement macroscopique R_t, dès que la densité Γ est déterminée et que une hypothèse de déformation ou de contrainte homogène dans l'inclusion est formulée.

Le tenseur Γ dépend des champs de contrainte et déformation microscopiques, ce qui induit de non linéarités de nature mécaniques à cause du comportement irréversible, mais, vu que ces champs sont hétérogènes, il dépend aussi de la distribution spatiale des hétérogénéités.

En faisant l'hypothèse de contrainte homogène dans chaque grain le champ des variations incrémentales de contrainte $\delta\overset{\circ}{\sigma}$ dévient le champs étagé des incréments de contrainte de "polarisation" $\overset{\circ}{p}$ constant dans chaque grain. Si on indique par V_i le domaine occupé par l'i-ème grain à l'instant t et par $\overset{\circ}{p}_i$ l'incrément de contrainte de polarisation dans celui-ci, l'équation intégrale (51) s'écrit:

$$\delta\underline{\underline{d}}(x,t) = -\,\mathrm{mes}\{V_i\}\langle\underline{\underline{\underline{\underline{\Gamma}}}}(x,x',t)\rangle_{x'\in V_i}:\overset{\circ}{\underline{\underline{p}}}_i(t) \quad \forall x\in V_i \qquad 53$$

et donc:

$$\underline{\underline{\Delta}}(t) = \langle\underline{\underline{d}}(x,t)\rangle_{x\in V_j} + \left\langle \mathrm{mes}\{V_i\}\langle\underline{\underline{\underline{\underline{\Gamma}}}}(x,x',t)\rangle_{x'\in V_i}\right\rangle_{x\in V_j}:\overset{\circ}{\underline{\underline{p}}}_i(t) \qquad 54$$

on considère finalement les équations de comportement:

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{p}}}_i(t) = \delta\underline{\underline{\underline{\underline{r}}}}_t(x,t):\underline{\underline{d}}(x,t) \quad \forall x\in V_i \qquad 55$$

et on obtient une estimation du tenseur de localisation incrémental:

$$\langle\underline{\underline{d}}(x,t)\rangle_{x\in V_j} = \left[\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} + \left\langle \mathrm{mes}\{V_i\}\langle\underline{\underline{\underline{\underline{\Gamma}}}}(x,x',t)\rangle_{x'\in V_i}\right\rangle_{x\in V_j}\right]^{-1}:\underline{\underline{\Delta}}(t) \qquad 56$$

Méthode de Hill et Hutchinson.

L'approche due à Hill et Hutchinson, successivement développée par Nemat-Nasser et Obata (1986) pour des déformations finies est présentée brièvement ensuite selon le cadre donné par Harren pour les polycristaux en transformation finie (Cf. [Harren 1991]).

---

12 En faisant référence aux travaux sur les matériaux statistiquement homogènes et ergodiques [Sab 1991], on ne peut pas affirmer que le polycristal engendré par un grain type avec orientation du réseau statistiquement homogène est un modèle fidèle de la réalité dès qu'il se manifeste des évolutions de texture cristalline importantes, à moins que la mesure de probabilité en objet ne varie suivant l'ODF.

En se référant au tenseur de contrainte nominale N ($N=F^{-1}\cdot\pi$; F gradient de la transformation et π contrainte de Piola-Kirchhoff) on peut écrire le comportement tangent par:

$$\underline{\underline{\mathring{N}}}(x,t) = \underline{\underline{\underline{\underline{M}}}}(x,t):\underline{\underline{\mathring{F}}}(x,t)-\mathring{\gamma}_\alpha(x,t)\underline{\underline{Y}}_\alpha(x,t) \quad \forall x\in V_0, \forall t \qquad 57$$

où $\mathring{\gamma}_\alpha$ est le taux de glissement du α-ème système de glissement local. Les tenseurs M et Y peuvent être écrits en fonction de l'état actuel de la déformation, indépendamment des taux de déformation actuels et ils sont donc connus à l'instant t en tout point du milieu. Cette propriété, valable par définition pour les M et Y reliant déformations et contraintes hétérogènes (microscopiques) est supposée se vérifier aussi pour M° et Y° reliant les champs homogènes correspondants. Par conséquent le problème (commun à toute méthode auto-cohérente) de l'interaction entre un grain isolé et le milieu extérieur homogène inconnu est incrémental linéaire.

On écrit le comportement du grain isolé et de la matrice extérieure dans la forme (57), et on impose les conditions de continuité des efforts et des déplacements aux frontières entre grain et matrice en postulant en outre que les variations de contrainte et de déformation de la matrice tendent vers ceux du milieu homogène lorsque la position x tend vers l'infini (pour mieux dire en s'éloignant du grain d'une distance devenant infinie). Cette dernière condition joue le rôle de la condition de déformations homogènes tout en gardant une plus grande généralité (qui découle des mêmes propriétés assurant la validité du lemme de Hill pour les matériaux aléatoires).

La détermination de M est enfin obtenue moyennant un problème d'Eshelby.

4.4. Le critère et la surface de charge locales.

On s'intéresse dans la suite aux comportements avec dissipation indépendante du temps, par conséquent on montre les différentes hypothèses faites pour l'étude de la plasticité des monocristaux, isolés ou assemblés en un polycristal.

4.4.1. Monocristal. Loi de Schmid.

Un monocristal CFC possède 4 plans de glissement {111} avec 3 axes de glissement ⟨110⟩ par plan, ce qui donne un total de 12 glissements possibles (un glissement pouvant s'activer selon les 2 directions possibles le long d'un axe ⟨110⟩). On note:

$$S_{cfc}=\{1,2,\ldots 12\} \qquad 58$$

Pour chacune de ces directions la loi de cission critique proposé par Schmid (env.1927) est un modèle fiable lorsque les températures et les vitesses en jeu permettent de négliger l'effet d'échelle du temps (comportement élasto-plastique) [Fortunier, Thèse, 1987]:

$$\forall s\in S_{cfc}: \begin{cases} \tau_s-\tau_s^c\le 0 \quad ; \quad \mathring{\gamma}_s\ge 0 \\ (\tau_s-\tau_s^c)\mathring{\gamma}_s=0 \end{cases} \qquad 59$$

où τ_s^c est la cission seuil du système s (elle peut ne pas dépendre du système particulier).

Cette loi peut être écrite dans une forme mettant en évidence la règle de normalité et un critère f_s [Mandel, Cours, 1971], [Stolz, Thèse, 1987]. On considère que le monocristal CFC subit une transformation finie isotherme, irréversible et indépendante de l'échelle de temps, de gradient F qu'on décompose en une partie élastique E et plastique P de façon classique. Si on néglige l'influence de l'écrouissage sur l'élasticité on peut considérer l'énergie libre du monocristal comme la somme d'une fonction de la déformation élastique et d'une fonction de la déformation plastique (m_s et n_s sont la direction de glissement et sa normale pour le système de glissement s, R est le tenseur des raideurs élastiques):

$$\underline{\underline{F}}=\underline{\underline{E}}\cdot\underline{\underline{P}} \; ; \; \underline{\underline{L_e}}=\frac{1}{2}\left[\underline{\underline{E}}^{t}\cdot\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{I}}\right] \; ; \; \underline{\underline{\mathring{P}}}\cdot\underline{\underline{P}}^{-1}=\mathring{\gamma}_s m_s\otimes n_s \qquad 60$$

$$\psi(\underline{\underline{L_e}},\{\gamma_s:s\in S_{cfc}\}) = \frac{1}{2}\underline{\underline{L_e}}:\underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}:\underline{\underline{L_e}} + \psi_P(\{\gamma_s:s\in S_{cfc}\}) \rightarrow \underline{\underline{\pi}}=\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\underline{\underline{L_e}}}=\underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}:\underline{\underline{L_e}}$$

La dissipation intrinsèque s'écrit alors (on remarque que, pour des E infinitésimales à une rotation près, le premier terme s'écrit directement comme le produit de la contrainte de Piola-Kirchhoff par le taux de déformation plastique, i.e. $E^T \cdot E = I$):

$$D_{int} = \frac{\rho_0}{\rho_t} \underline{\underline{\sigma}} : \text{grad} u - \rho_0 \dot{\psi} = \underline{\underline{\pi}} \cdot \underline{\underline{E}}^T \cdot \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\beta}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} - \rho_0 \frac{\partial \psi_P}{\partial \gamma_s} \dot{\gamma}_s = \left[\underline{\underline{\pi}} \cdot \underline{\underline{E}}^T \cdot \underline{\underline{E}} : m_s \otimes n_s - \rho_0 \frac{\partial \psi_P}{\partial \gamma_s} \right] \dot{\gamma}_s = \tau_s \dot{\gamma}_s \geq 0 \qquad 61$$

où on définit la cission généralisée sur le système s, τ_s. La fonction seuil f_s relative à τ_s définit le domaine élastique C du cristal et, par règle de normalité, permet d'obtenir la loi d'évolution de l'écoulement plastique comme somme des glissement sur les 12 systèmes:

$$f_s(\tau_s) = \tau_s - \tau_s^c \; ; \; C = \left\{ \underline{\underline{\pi}} : \; f_s(\tau_s) \leq 0 \; \forall s \in S_{cfc} \right\} \qquad 62$$

$$\underline{\underline{\beta}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} = \dot{\gamma}_s m_s \otimes n_s = \frac{\partial f_s}{\partial (\underline{\underline{\pi}} \cdot \underline{\underline{E}}^T \cdot \underline{\underline{E}})} \dot{\gamma}_s \; ; \; \dot{\gamma}_s \geq 0 \; \forall s \in S_{cfc}$$

Il est intéressant de citer, pour un comportement élasto-visco-plastique, la loi de puissance employée pour la première fois par Hutchinson (1976) et ensuite utilisée dans tout étude de ce type (Cf. [Asaro et Needleman, Cours, 1984]) (les coefficients h_{sr} sont expliqués dans la suite par rapport à l'écrouissage du cristal):

$$\dot{\gamma}_s = \dot{\gamma}_s^\infty \frac{\tau_s}{\tau^o} \left[\left| \frac{\tau_s}{\tau^o} \right| \right]^{\frac{1}{m} - 1} \; ; \; \tau^o = \mathcal{F}\left(\sum_{s \in S_{cfc}} \gamma_s \right) \; ; \; \dot{\gamma}_s^\infty = h_{sr} |\dot{\gamma}_r| \qquad 63$$

qui devient à la limite de la plasticité indépendante du temps:

$$\lim_{m \to 0} \dot{\gamma}_s = \begin{cases} 0 & \text{si } |\tau_s| < \tau^o \\ \text{indéterminé} & \text{si } |\tau_s| = \tau^o \\ +\infty & \text{si } |\tau_s| > \tau^o \text{ et } \tau_s > 0 \\ -\infty & \text{si } |\tau_s| > \tau^o \text{ et } \tau_s < 0 \end{cases} \qquad 64$$

4.4.2. Ecrouissage.

Un système de glissement actif montre un écrouissage, positif ou négatif selon le niveau atteint par la déformation, qui est appelé primaire. L'interaction entre systèmes de glissement cause un écrouissage à l'intérieur d'un cristal se déformant plastiquement, appelé écrouissage latent et en général positif et plus important que le primaire. L'écrouissage peut être évalué moyennant un opérateur, h, linéaire co-variant avec les axes du cristal:

$$\dot{\tau}_s^c = h_{sr}(\tau_s, \tau_r, \ldots) \dot{\gamma}_r \; \forall s \in S_{cfc} \qquad 65$$

avec les termes avec $r \neq s$ représentant l'écrouissage latent, ceux avec $r = s$ l'écrouissage primaire.

Le fait que les différents systèmes s'écrouissent différemment diminue l'indétermination présente dans le choix des systèmes de glissement actifs dont on parlera plus loin. En particulier il a été montré par Hill (1966) que si la matrice des h_{sr} est semi-définie positive, pour des transformations infinitésimales, le comportement est obtenu sans ambiguïtés (la (65) est inversible Cf. [Asaro & Needleman, Cours, 1984]). Mais la physique du phénomène montre que la matrice h a la diagonal $s = r$ très faible par rapport aux termes hors diagonal, ce qui introduit un mauvais conditionnement des résultats.

Pour la matrice h ont été proposées plusieurs formes (Cf. [Asaro & Needleman, Cours, 1984], [Bassani 1990]):

_Taylor (1938): $h_{sr}=h \ \forall s,r$ 66

_Kocks (1963): $h_{sr}=h\delta_{sr}$

_Budianski et Wu (1962): $h_{sr}=h_s h_r$

_Hutchinson (1976) et Asaro (1983) ($q_i=1\div1.4$ rapport entre écrouissage latent de type i=1,2 et écrouissage primaire, proche de l'unité pour de systèmes de glissement coplanaires):

$$h_{sr}=\begin{cases} h & \text{si } r=s \\ hq_1\neq h & \text{si } r\neq s \text{ et r et s coplanaires} \\ hq_2 & \text{si } r\neq s \text{ et r et s non coplanaires} \end{cases} \quad 67$$

_Bassani (1990) (l'écrouissage primaire du système s dépend de la cission critique initiale, de la cission critique de saturation, du module d'écrouissage initial et après fin de la zone de glissement simple):

$$h_{ss}=f(\gamma_s,\ \gamma_r\ r\in S_{cfc})\ ;\ h_{rs}=mh_{ss}\ r\neq s \quad 68$$

Cette dernière montre, selon l'auteur, une bonne correspondance avec l'expérience pouvant représenter trois états d'écrouissage pour un glissement simple: l'état du premier glissement dans lequel il n'y a qu'un système actif ("easy glide"), l'augmentation rapide de l'écrouissage due à l'activation d'autres systèmes et le troisième état stationnaire. Dans la figure ci-dessous est présentée une simulation numérique de ce modèle en uniaxial; les pôles de 1 à 5 représentent l'orientation de l'axe de traction d'un monocristal CFC, par conséquent les graphes 2,3 et 4 sont relatifs à un glissement simple et montrent ladite allure à trois états d'écrouissage, les 1 et 5 à un glissement multiple:

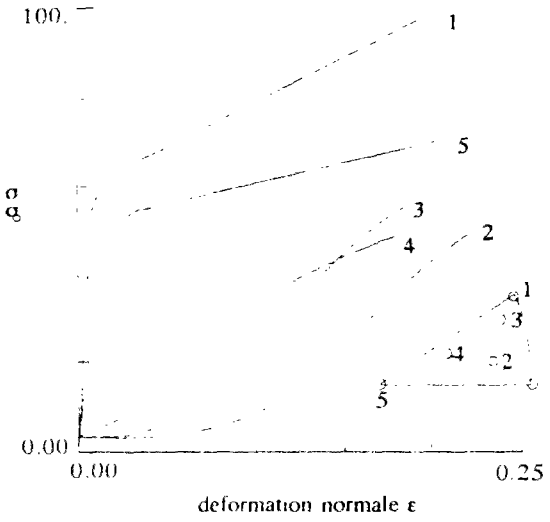


Fig.1 Ecrouissage en glissement simple ou multiple (d'après [Bassani 1990])

Finalement on cite Y.Estrin et L.P.Kubin (Cf. [Estrin et Kubin 1986]) qui considèrent des équations d'évolution des densités des dislocations mobiles ρ_m et bloquées ρ_f déduites de la compétition de ces deux densités (ε représente une norme de la déformation considérée homogène, les coefficients C_i peuvent être constants):

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial\varepsilon}=C_1\rho_f\rho_m^{-1}-C_2\rho_m-C_3\rho_f^{1/2}\ ;\ \frac{\partial\rho_f}{\partial\varepsilon}=-C_4\rho_f+C_2\rho_m+C_3\rho_f^{1/2} \quad 69$$

et proposent un comportement avec écrouissage dû à une contribution positive, liée aux incréments de ρ_f, et une contribution négative, liée aux incréments de ρ_m.

4.3.3. Les systèmes de glissement actifs.

Les 12 systèmes de glissement d'un monocristal CFC peuvent s'activer, chacun le long d'une des 2 directions possibles, de façon indépendante donnant ainsi 12! possibles combinaisons indépendantes (on ne considère pas la combinaison d'un glissement avec son opposé comme une combinaison indépendante). Si on considère qu'il faut un minimum de 5 glissements sur des directions différentes combinées pour accommoder une déformation plastique imposée (von Mises 1928), on voit qu'il existe plusieurs combinaisons parmi ces 12!/5!=3991680 compatibles entre elles, c'est à dire que la deuxième des équations (62) ne permet pas, pour un taux de déformation plastique donné de déterminer les $\dot{\gamma}_s$ de façon univoque.

Pour un polycristal sensible à l'échelle de temps (élasto-visco-plastique) cette indétermination n'existe pas, car tout système peut être actif en même temps avec un taux de glissement éventuellement très faible. Le problème est donc caractéristique des polycristaux avec plasticité indépendante du temps. Dans de pareils, cas en absence d'un critère de choix parmi les glissements, on ne peut pas définir la déformation plastique en imposant la compatibilité de la configuration actuelle.

Critère de Sachs.

Selon l'hypothèse formulée initialement par Sachs chaque grain dans l'agrégat se déforme suivant son système de glissement le plus cisaillé. Cela évidemment est cohérent avec l'hypothèse de taux de contrainte homogène dans l'agrégat et avec le manque de compatibilité qui en résulte, mais introduit un manque d'équilibre dans les interfaces entre grains voisins non équi-orientés. Bishop et Hill ont montré que sous les hypothèses de Sachs, qui considérait des contraintes et déformations macroscopiques uniaxiales et en transformation infinitésimale, une relation de ce type est valable pour tout grain (ε déformation, "a" système de glissement actif):

$$\frac{\sigma}{\tau_a} = \frac{d\gamma_a}{d\varepsilon} = M_a \qquad 70$$

avec M_a fonction de l'angle entre l'axe de chargement et l'axe du système de glissement actif a; ceci permet d'écrire le critère du cisaillement maximal sous la forme:

$$a \in S_{cfc} \text{ actif} \leftrightarrow M_a = \underset{s \in S_{cfc}}{\text{Max}} \{M_s\} \qquad 71$$

et le comportement macroscopique en fonction du comportement microscopique, avec M_o fonction de la géométrie de l'agrégat (pour une distribution homogène des orientations M_o est la moyenne de M_s sur toutes orientations possibles):

$$\dot{\tau}_s = \mathcal{T}(\dot{\gamma}_s) \text{ donné} \; ; \; \mathring{\sigma} = M_o \mathcal{T}(M_o \varepsilon) \qquad 72$$

Cette dernière équation de comportement, avec toutes ses limites, induit l'idée d'une texture pouvant assouplir l'agrégat en réduisant le M_o au dessous d'une valeur critique.

Critère de Taylor.

Un critère physiquement plus conséquent a été proposé par Taylor (1938) en postulant que la puissance volumique des efforts intérieurs de glissement (i.e. la puissance plastique) est minimum dans la combinaison effectivement active:

$$P_{int} = \underset{S_T \subseteq S_{cfc}}{\text{Min}} \left| \sum_{s \in S_T} \tau_c^s \dot{\gamma}_s \right| \; ; \; S_T \text{ minimisant est la combinaison active} \qquad 73$$

mais ce critère ne résout pas toujours le problème de l'indétermination, en particulier si les cissions critiques sont les mêmes pour tout système de glissement, lorsqu'il devient:

$$\underset{S_T \subseteq S_{cfc}}{\text{Min}} \left| \sum_{s \in S_T} \dot{\gamma}_s \right| \; ; \; S_T \text{ minimisant est la combinaison active} \qquad 74$$

Critère de Taylor-Bishop-Hill.

Bishop et Hill (1951) ont proposé un critère analogue en postulant que la puissance volumique des efforts extérieurs est maximum pour la combinaison active. Si on considère les tenseurs contrainte et taux de déformation macroscopiques homogènes sur un volume V_t, à l'instant t, on écrit en négligeant les accélérations:

$$P_{ext}(V_t,t) = -P_{int}(V_t,t) = \int_{V_t} \underline{\underline{\sigma}}(x,t):\mathrm{symgradu}(x,t)dV_t = \underline{\underline{\Sigma}}(t):\underline{\underline{\Delta}}(t) \qquad 75$$

L'hypothèse de départ de Bishop et Hill est que la puissance des efforts extérieurs n'est jamais inférieure à la puissance dissipée (intrinsèque, i.e. d'origine mécanique) et ceci est valable même pour un grain isolé (deuxième formule):

$$P_{ext}(V_t,t) \geq D_{int}(V_t,t) = \int_{V_0} \sum_{s\in S_T} \tau_s^c \dot{\gamma}_s(t)dV_0 \qquad 76$$

$$\frac{\rho_0}{\rho_t}\underline{\underline{\sigma}}:\mathrm{symgradu} \geq \sum_{s\in S_T} \tau_s^c \dot{\gamma}_s$$

Avec référence aux notations des formules (60) et (61), on voit que ceci implique une production non négative d'entropie à cause des glissements actifs:

$$\frac{\rho_0}{\rho_t}\underline{\underline{\sigma}}:\mathrm{symgradu} = \rho_0\dot{\psi} + \sum_{s\in S_T} \tau_s^c \dot{\gamma}_s = \underline{\underline{\pi}}:\underline{\underline{L}}_e^{\circ} + \sum_{s\in S_T}\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\gamma_s}\dot{\gamma}_s + \sum_{s\in S_T} \tau_s^c \dot{\gamma}_s \geq \sum_{s\in S_T} \tau_s^c \dot{\gamma}_s \qquad 77$$

Le critère s'écrit alors:

$$\underset{S_T\subseteq S_{cfc}}{\mathrm{Max}} \left\{ \underline{\underline{\pi}}:\underline{\underline{L}}_e^{\circ} + \sum_{s\in S_T}\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\gamma_s}\dot{\gamma}_s \right\} \text{ ; } S_T \text{ maximisant est la combinaison active} \qquad 78$$

et il coïncide avec celui de Taylor en absence d'accommodation élastique des cristaux; celle-ci étant toujours présente on voit que le nombre de combinaisons possibles est encore plus restreint (mais si la déformation est homogène selon l'hypothèse de Taylor FC les deux critères coïncident). En effet il a été montré (Bishop 1953) qu'on obtient un minimum de 28 combinaisons possibles avec signe indéterminé équi-compatibles dans le cas de cissions critiques égales pour tout système.

En conséquence de l'indétermination des systèmes de glissement actifs se vérifie une impossibilité de suivre les texture au cours de la déformation. Ceci est particulièrement remarquable en utilisant le critère du travail plastique minimal de Taylor. Néanmoins cette difficulté est souvent éliminée en prenant une moyenne des solutions possibles ou en en choisissant une aléatoirement.

D'autres critères décisionnels ont été proposé pour effectuer une deuxième choix après avoir minimisé la travail plastique selon la méthode de Taylor (étude au second ordre), mais cela sort du cadre de ce travail (Cf. [Fortunier, Thèse, 1987]).

4.5. Conclusion.

L'homogénéisation répond à la demande d'un comportement tangent pour les transformations finies d'un polycristal sous des conditions généralement vérifiées (les grains sont petits par rapport au système étudié). Ce comportement peut être obtenu en fonction du comportement des monocristaux.

En particulier les méthodes auto-cohérentes, étant dégagées de toute hypothèse de déformation ou de contrainte homogène dans l'agrégat, sont les mieux placées pour étudier la localisation de la déformation. D'un autre coté on a remarqué que, à cause du changement d'échelle qui se vérifie lors de l'apparition des bandes de cisaillement, tout calcul par homogénéisation doit

s'arrêter à l'instant de la localisation en bandes[13]. Cependant il est possible d'obtenir par une méthode auto-cohérente un modèle prévisionnel pour le début de la localisation.

La démarche à suivre à cette fin est itérative:

- détermination de la texture actuelle couplée à la solution du problème incrémental (l'évolution des textures dépend des vitesses actuelles),
- détermination du comportement tangent homogène en fonction de la texture actuelle (par homogénéisation la comportement du milieu est défini en fonction des comportements des grains et de leurs orientations);
- détermination de la solution incrémentale en fonction du comportement tangent.

La vérification de la stabilité du système doit être faite sur le comportement tangent selon les méthodes qui seront présentés au § 6. de ce chapitre.

L'objectif de notre travail est la prévision de l'apparition des bandes de cisaillement. Dans le Chapitre I on a vu que ceci se vérifie de façon préférentielle en présence d'une texture accentuée, ce qui signifie dans un état d'ordre du polycristal relativement loin du désordre parfait.

En fait, lorsqu'on s'approche de l'état critique d'apparition des bandes de cisaillement, l'hypothèse fondamentale des méthodes auto-cohérents (désordre parfait) dévient de moins en moins réaliste. C'est d'ailleurs le fait que l'agrégat n'agit pas de façon égale sur ses grains qui cause l'apparition systématique des bandes avec des orientations privilégiées.

En conclusion un modèle de polycristal bâti par une méthode d'homogénéisation ne répond pas aux demandes de modélisation qui résultent de l'étude du phénomène des bandes de cisaillement.

Pour résumer, la motivation principale en est que l'homogénéisation se fait sur la base d'un ordre établi du système (ordre parfait pour les méthodes de Taylor et de Sachs, désordre parfait pour les méthodes auto-cohérentes), tandis que les bandes de cisaillement se manifestent à la suite d'une évolution, d'abord progressive et finalement brutale, de l'état d'ordre du système.

---

13 Selon les observations faites à cet instant se produit un changement des longueurs d'onde de la solution dont la partie principale dévient élastique hors bande et plastique de glissement simple à l'intérieur de la bande. La présence d'un bande de cisaillement modifie donc radicalement le système à homogénéiser. D'un autre coté il n'y aurait aucun intérêt dans l'homogénéisation après apparition des bandes.

5. Modèles simplifiés.

5.1. Introduction.

On présente de suite des modèles formulés en couplant l'étude des textures aux calculs mécaniques. On se place dans un cadre simplifié, éventuellement peu représentatif d'une réalité physique.

Les modèles diffèrent dans la construction du système simplifié plus que dans leur démarche de calcul. Tout système est constitué d'éléments glissant dans un plan commun, les modèles diffèrent dans le nombre des systèmes de glissement présents dans chaque élément.

La démarche est celle brièvement citée au § 4.4., mais grâce aux simplifications introduites sur le système on peut substituer aux calculs itératifs une solution analytique sans passer par la détermination du comportement homogène.

5.2. Problème plan.

5.2.1. Cristal plan.

Les directions de glissement d'un polycristal à réseau CFC varient dans un espace tridimensionnel même si la géométrie du problème est bidimensionnelle comme, par exemple, pour une tôle en déformation plane de laminage. Pour réduire la dimension de l'espace des orientations cristallines, en vue de simplifier le problème du polycristal, il est donc nécessaire de se donner un réseau idéal comme hypothèse supplémentaire à celle de déformation plane.

Le réseau idéal doit être un réseau plan, dans le plan de la déformation, caractérisé par une orientation scalaire (angle dans le plan par rapport à un axe fixé) variable dans le temps au cours de la déformation. Avec un tel réseau il existe un champ variable scalaire supplémentaire par rapport à un problème de déformation plane pour un matériau homogène isotrope. Dans la littérature ce champ de rotations est relié localement au gradient de vitesses par une liaison purement cinématique obtenue en imposant la compatibilité des déplacements d'un cristal avec le mouvement macroscopique.

Selon la relation qui existe entre l'axe du réseau idéal identifié par la variable rotation et l'axe (ou les axes) de glissement de ce réseau on obtient des liaisons cinématiques, et par conséquent des modèles, différents. On regroupe cette famille de modèles plans avec réseau idéal plan sous le nom de modèles de poly-lamelle (pour traduire l'anglais "multiple laminæ" en analogie avec "polycristal").

Poly-lamelle à un glissement.

Un premier type de poly-lamelle est le modèle à un glissement obtenu en identifiant la direction caractéristique du réseau idéal avec la seule direction de glissement possible pour ce réseau (Cf. [van der Giessen et van Houtte 1992]). D'un point de vue physique cette direction peut être identifiée, à un certain instant de la déformation, avec celle qui assure au mieux, en absence des autres, la compatibilité avec le taux de déformation homogène du polycristal (hypothèse de Taylor). Cette condition peut être obtenue en recherchant la direction de glissement minimisant (dans R^9) l'angle entre ledit taux de déformation du polycristal et le taux de déformation du cristal; la direction de glissement objectif de la recherche est alors aussi la "plus active" (i.e. ayant une vitesse de glissement maximale) dans le cristal. Le schéma d'un poly-lamelle à un glissement est le suivant, où s_1 est en même temps la direction caractéristique du réseau plan et l'unique direction de glissement:

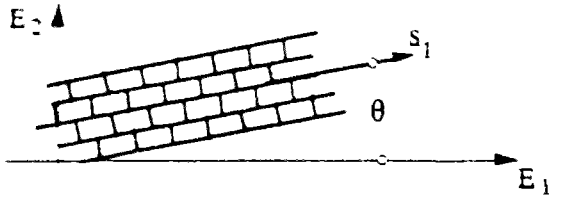


Fig.2: poly-lamelle à un glissement (d'après [van der Giessen et van Houtte 1992])

Poly-lamelle à deux glissements.

Le modèle de poly-lamelle à deux glissements considère des objets ayant deux directions de glissement orthogonales et coplanaires assemblées de façon que ce plan de glissement soit unique pour tout objet constituant le corps (Cf. [Harren *et al.* 1988], [Rashid 1992]). D'un

point de vue physique on peut voir un poly-lamelle à deux glissements comme la projection d'un polycristal sur un plan fixe; pour un polycristal à réseau CFC il s'agit dans la suite du plan (110):

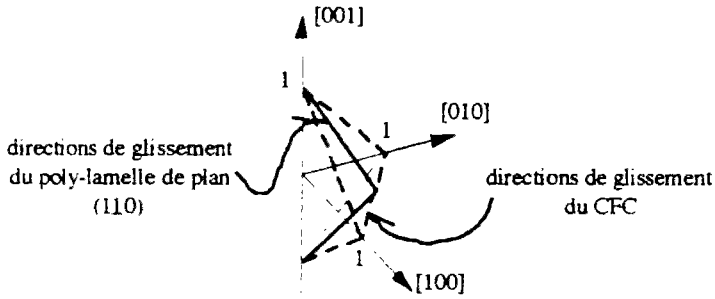
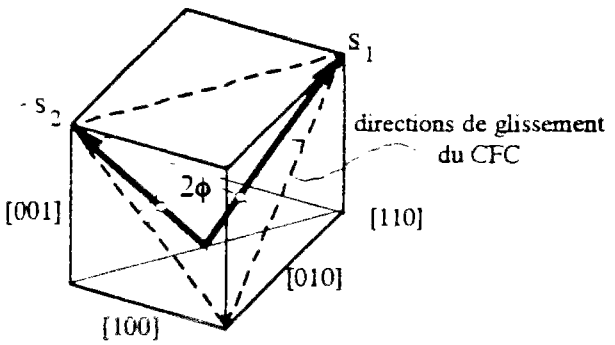


Fig.3: poly-lamelle à deux glissements (d'après [Rashid 1992])

On suppose que les systèmes de glissement (111)[011] et (111)[101] sont également actifs (donnant la ligne en bas dans la figure ci-dessus) aussi que les systèmes (111)[011] et (111)[101] (ligne en haut).

Si on considère le réseau du poly-lamelle à deux glissement dérivé de telle façon d'un réseau CFC on obtient un angle d'environs 70.5° entre les deux directions de glissement; l'axe de référence du réseau peut être choisi selon la bissectrice de l'angle entre ces deux directions:



$\phi=\pi-\arctan\sqrt{2}=35.26°$
$s_1=[112]$; $s_2=[112]$

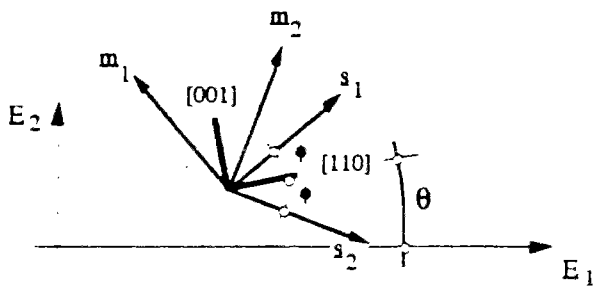


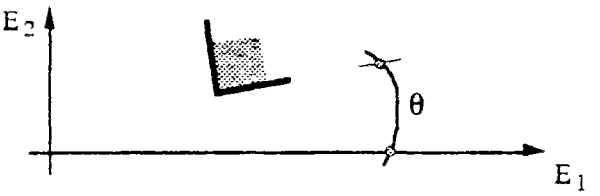
Fig.4: Poly-lamelle à deux directions

Dans la figure ci-dessus l'axe [110] donne la direction caractéristique du réseau, les directions s_1 et s_2 sont les deux directions de glissement du poly-lamelle.

5.2.2. Texture.

On considère que l'on est en déformations planes pour un poly-lamelle (soit-il à une ou à deux directions de glissement). Pour définir l'orientation d'un "cristal" plan (i.e. d'une lamelle) du poly-lamelle dans le plan de la déformation il suffit d'une variable scalaire θ, angle non matériel entre un axe solidaire au cristal (e.g. celui donnant la direction caractéristique du réseau) et un axe fixé dans le plan. L'espace des angles d'Euler est donc réduit à un intervalle de longueur π sur une géodésique donnée; les (20) s'écrivent dans ce cas:

$$\theta\in[-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}[=Z\ ;\ dZ=d\theta \qquad 79$$



$$P_{ODF}([\alpha,\beta],t)=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}g(\theta,t)d\theta\quad\forall[\alpha,\beta]\subset[-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}[,\forall t$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}g(\theta,t)d\theta=1\quad\forall t$$

Le problème de l'évolution de la ODF s'écrit (équation indéfinie de continuité, condition initiale et condition de périodicité aux bords):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g(\theta,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[g(\theta,t)\dot{\theta}\right]=0 & \forall\theta\in[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[,\forall t\\ g(\theta,0)=g_0(\theta) & \forall\theta\in[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\\ g(-\tfrac{\pi}{2},t)=g(\tfrac{\pi}{2},t) & \forall t\geq 0\end{cases} \qquad 80$$

et le problème de l'évolution de la texture est (l'instant 0 étant pris comme instant de référence avec taux d'évolution des textures nul):

$$\begin{cases}\dot{\theta}(\underline{x},t)=Q(\theta(\underline{x},t),\underline{x},t) & \forall\underline{x}\in V_t,\forall t>0\\ \theta(x,0)=\theta_0(x) & \forall x\in V_0\\ \dot{\theta}(x,0)=Q_0(\theta_0(x),x)=0 & \forall x\in V_0\end{cases} \qquad 81$$

Tant pour le poly-lamelle à un glissement que pour le poly-lamelle à deux glissements on écrira la première de ces équations par une liaison cinématique entre la vitesse de la rotation θ et les taux de déformation plastique.

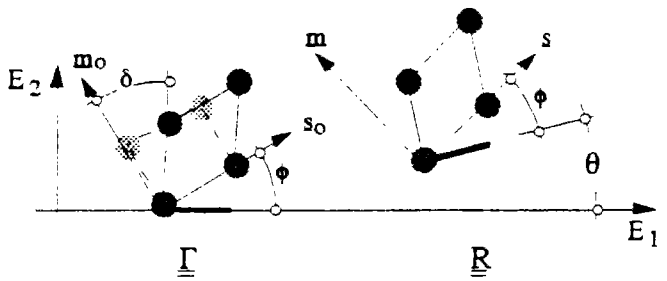
5.2.3. Cinématique.

On considère une description lagrangienne du mouvement. Pour simplifier l'écriture on considère que l'axe représentatif du réseau coincide avec l'axe E_1 du système fixe dans la configuration de référence; cette configuration est donc la configuration isocline de J. Mandel (Cf. § 2.).

On néglige les déformations et les rotations élastiques du poly-lamelle par rapport aux déformations et rotations irréversibles (i.e. déformations et rotations plastiques et rotations du réseau).

Pour comprendre la différence entre un poly-lamelle à un ou à deux systèmes de glissement on considère d'abord le cas d'un seul système de glissement de direction s avec angle fixe ϕ par rapport à l'axe représentatif du réseau. Le gradient des vitesses matérielles du cristal pour un tel glissement et pour une rotation θ de son réseau est alors (dans la figure on montre la décomposition du gradient de la transformation d'un cristal plan avec glissement d'axe s_o en configuration initiale et s en configuration actuelle; la rotation Q repère le système de glissement en configuration initiale et ne dépend donc pas du temps):

82



$$\underline{\underline{F}}=\underline{\underline{P}}=\underline{\underline{R}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}\cdot\underline{\underline{Q}}\;;\;\underline{\underline{R}}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\;;\;\underline{\underline{\Gamma}}=\begin{bmatrix}1 & \gamma\\ 0 & 1\end{bmatrix}\;;\;\gamma=\mathrm{tg}\delta\;;\;\underline{\underline{Q}}=\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{gradu}|_{(s.m)}=\dot{\underline{\underline{F}}}\cdot\underline{\underline{F}}^{-1}=\dot{\underline{\underline{R}}}\cdot\underline{\underline{R}}^{T}+\underline{\underline{R}}\cdot\dot{\underline{\underline{\Gamma}}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}\cdot\underline{\underline{R}}^{T}=\dot{\theta}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\frac{\dot{\gamma}}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\frac{\dot{\gamma}}{2}\begin{bmatrix}\sin2\theta & \cos2\theta\\ \cos2\theta & -\sin2\theta\end{bmatrix}$$

On remarque d'abord que dans l'expression du gradient des vitesses apparaissent deux taux de rotation de la matière: le premier est dû à la rotation du réseau, θ, et le deuxième au glissement plastique, γ ; la composition de ces rotations doit assurer la compatibilité au cours de la déformation. On rappelle que la géométrie du réseau est supposée ne pas varier au cours de la déformation, ce qui a été traduit dans:

$$\dot{\phi}=0 \quad \text{i.e.} \quad \dot{\underline{\underline{Q}}}(\phi)=\underline{\underline{0}}\;;\;\forall\theta,\forall t \qquad 83$$

Avec ces hypothèses si on considère aussi l'hypothèse de déformation homogène de Taylor on obtient, notés D_{ij} et W_{ij} les composantes du taux de déformation et du taux de rotation macroscopiques le système de trois équations (la trace du taux de déformation macroscopique doit toujours être nulle le milieu étant incompressible):

$$D_{11}=-D_{22}=\frac{1}{4}\dot{\gamma}\sin2\theta\;;\;D_{12}=\frac{1}{2}\dot{\gamma}\cos2\theta\;;\;W_{12}=\dot{\theta}+\frac{\dot{\gamma}}{2} \qquad 84$$

par conséquent le taux de déformation macroscopique a une seule composante indépendante.

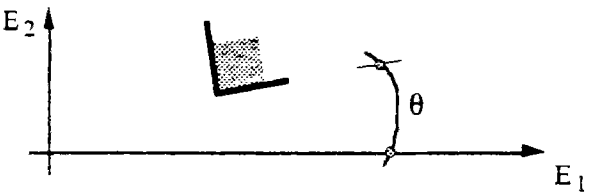
Si le poly-lamelle a deux systèmes de glissement, on doit considérer dans le schéma précédent l'angle ϕ variable dans le temps en fonction des vitesses des glissements. Par exemple pour deux systèmes de glissement avec angle ϕ_1 et ϕ_2 par rapport à l'axe du réseau, notés γ_1 et γ_2 les vecteurs glissement respectifs (par rapport à la configuration de référence) en rappelant que E_1 est aussi le directeur de l'axe du réseau dans la configuration isocline de référence, on obtient:

$$\underline{\gamma}_i=\gamma_i\cos\phi_i E_1+\gamma_i\sin\phi_i E_2\;;\;i=1,2 \qquad 85$$

$$\underline{\gamma}=\underline{\gamma}_1+\underline{\gamma}_2\rightarrow\begin{cases}\gamma(\gamma_1,\gamma_2)=\sqrt{(\gamma_i\cos\phi_i)^2+(\gamma_i\sin\phi_i)^2}\\ \phi(\gamma_1,\gamma_2)=\mathrm{arctg}\dfrac{\gamma_i\sin\phi_i}{\gamma_i\cos\phi_i}\end{cases}$$

par conséquent le gradient des vitesses s'écrit (l'angle ϕ et la rotation $Q(\phi)$ dépendent maintenant du temps):

$$\theta\in[-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}[=Z\ ;\ dZ=d\theta \qquad 79$$



$$P_{ODF}([\alpha,\beta],t)=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}g(\theta,t)d\theta \quad \forall[\alpha,\beta]\subset[-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}[,\forall t$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}g(\theta,t)d\theta=1 \quad \forall t$$

Le problème de l'évolution de la ODF s'écrit (équation indéfinie de continuité, condition initiale et condition de périodicité aux bords):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g(\theta,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[g(\theta,t)\dot{\theta}\right]=0 & \forall\theta\in[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[,\forall t\\ g(\theta,0)=g_0(\theta) & \forall\theta\in[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\\ g(-\tfrac{\pi}{2},t)=g(\tfrac{\pi}{2},t) & \forall t\geq 0\end{cases} \qquad 80$$

et le problème de l'évolution de la texture est (l'instant 0 étant pris comme instant de référence avec taux d'évolution des textures nul):

$$\begin{cases}\dot{\theta}(\underline{x},t)=Q(\theta(\underline{x},t),\underline{x},t) & \forall\underline{x}\in V_t,\forall t>0\\ \theta(x,0)=\theta_0(x) & \forall x\in V_0\\ \dot{\theta}(x,0)=Q_0(\theta_0(x),x)=0 & \forall x\in V_0\end{cases} \qquad 81$$

Tant pour le poly-lamelle à un glissement que pour le poly-lamelle à deux glissements on écrira la première de ces équations par une liaison cinématique entre la vitesse de la rotation θ et les taux de déformation plastique.

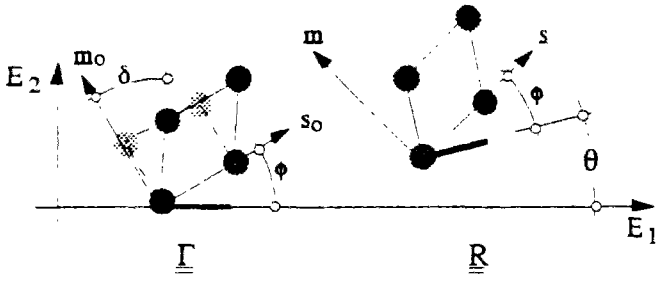
5.2.3. Cinématique.

On considère une description lagrangienne du mouvement. Pour simplifier l'écriture on considère que l'axe représentatif du réseau coincide avec l'axe E_1 du système fixe dans la configuration de référence; cette configuration est donc la configuration isocline de J. Mandel (Cf. § 2.).

On néglige les déformations et les rotations élastiques du poly-lamelle par rapport aux déformations et rotations irréversibles (i.e. déformations et rotations plastiques et rotations du réseau).

Pour comprendre la différence entre un poly-lamelle à un ou à deux systèmes de glissement on considère d'abord le cas d'un seul système de glissement de direction s avec angle fixe ϕ par rapport à l'axe représentatif du réseau. Le gradient des vitesses matérielles du cristal pour un tel glissement et pour une rotation θ de son réseau est alors (dans la figure on montre la décomposition du gradient de la transformation d'un cristal plan avec glissement d'axe s_0 en configuration initiale et s en configuration actuelle; la rotation Q repère le système de glissement en configuration initiale et ne dépend donc pas du temps):

82



$$\underline{\underline{F}}=\underline{\underline{P}}=\underline{\underline{R}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}\cdot\underline{\underline{Q}}\;;\;\underline{\underline{R}}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\;;\;\underline{\underline{\Gamma}}=\begin{bmatrix}1 & \gamma\\ 0 & 1\end{bmatrix}\;;\;\gamma=\mathrm{tg}\delta\;;\;\underline{\underline{Q}}=\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{gradu}|_{(s,m)}=\dot{\underline{\underline{F}}}\cdot\underline{\underline{F}}^{-1}=\dot{\underline{\underline{R}}}\cdot\underline{\underline{R}}^{T}+\underline{\underline{R}}\cdot\dot{\underline{\underline{\Gamma}}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}\cdot\underline{\underline{R}}^{T}=\dot{\theta}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\frac{\dot{\gamma}}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\frac{\dot{\gamma}}{2}\begin{bmatrix}\sin2\theta & \cos2\theta\\ \cos2\theta & -\sin2\theta\end{bmatrix}$$

On remarque d'abord que dans l'expression du gradient des vitesses apparaissent deux taux de rotation de la matière: le premier est dû à la rotation du réseau, θ, et le deuxième au glissement plastique, γ ; la composition de ces rotations doit assurer la compatibilité au cours de la déformation. On rappelle que la géométrie du réseau est supposée ne pas varier au cours de la déformation, ce qui a été traduit dans:

$$\dot{\phi}=0 \quad \text{i.e.} \quad \dot{\underline{\underline{Q}}}(\phi)=\underline{\underline{0}}\;;\;\forall\theta,\forall t \qquad 83$$

Avec ces hypothèses si on considère aussi l'hypothèse de déformation homogène de Taylor on obtient, notés D_{ij} et W_{ij} les composantes du taux de déformation et du taux de rotation macroscopiques le système de trois équations (la trace du taux de déformation macroscopique doit toujours être nulle le milieu étant incompressible):

$$D_{11}=-D_{22}=\frac{1}{4}\dot{\gamma}\sin2\theta\;;\;D_{12}=\frac{1}{2}\dot{\gamma}\cos2\theta\;;\;W_{12}=\dot{\theta}+\frac{\dot{\gamma}}{2} \qquad 84$$

par conséquent le taux de déformation macroscopique a une seule composante indépendante.

Si le poly-lamelle a deux systèmes de glissement, on doit considérer dans le schéma précédent l'angle ϕ variable dans le temps en fonction des vitesses des glissements. Par exemple pour deux systèmes de glissement avec angle ϕ_1 et ϕ_2 par rapport à l'axe du réseau, notés γ_1 et γ_2 les vecteurs glissement respectifs (par rapport à la configuration de référence) en rappelant que E_j est aussi le directeur de l'axe du réseau dans la configuration isocline de référence, on obtient:

$$\underline{\gamma}_i=\gamma_i\cos\phi_i E_1+\gamma_i\sin\phi_i E_2\;\;;\;i=1,2 \qquad 85$$

$$\underline{\gamma}=\underline{\gamma}_1+\underline{\gamma}_2\rightarrow\begin{cases}\gamma(\gamma_1,\gamma_2)=\sqrt{(\gamma_i\cos\phi_i)^2+(\gamma_i\sin\phi_i)^2}\\ \phi(\gamma_1,\gamma_2)=\mathrm{arctg}\dfrac{\gamma_i\sin\phi_i}{\gamma_i\cos\phi_i}\end{cases}$$

par conséquent le gradient des vitesses s'écrit (l'angle ϕ et la rotation $Q(\phi)$ dépendent maintenant du temps):

$$\text{gradu}|_{(s.m)} = \dot{\underline{\underline{F}}}\cdot\underline{\underline{F}}^{-1} = \dot{\underline{\underline{R}}}\cdot\underline{\underline{R}}^{T} + \underline{\underline{R}}\cdot\dot{\underline{\underline{\Gamma}}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}\cdot\underline{\underline{R}}^{T} + \underline{\underline{R}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}\cdot\dot{\underline{\underline{Q}}}\cdot\underline{\underline{Q}}^{T}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}\cdot\underline{\underline{R}}^{T} = \tag{86}$$

$$= \dot{\theta}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\dot{\gamma}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \dot{\phi}(2+\gamma^2)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{\dot{\gamma}}{2}\begin{bmatrix} \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ \cos 2\theta & -\sin 2\theta \end{bmatrix} + \dot{\phi}\gamma\begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2}\sin 2\phi - \cos 2\phi & \frac{\gamma}{2}\cos 2\phi + \sin 2\phi \\ \frac{\gamma}{2}\cos 2\phi + \sin 2\phi & -\frac{\gamma}{2}\sin 2\phi + \cos 2\phi \end{bmatrix}$$

et on voit apparaître trois termes de taux de rotation et deux termes de taux de déformation. En particulier on voit apparaître le taux de rotation de la résultante du glissement par rapport au réseau qui n'avait pas été prise en compte dans le modèle à un seul glissement.

Si, comme pour le cas précédent, on considère l'hypothèse de Taylor de déformation homogène dans le poly-lamelle on voit que le taux de déformation microscopique ci-dessus est compatible avec tout taux de déformation macroscopique isochore:

$$D_{11} = -D_{22} = \frac{1}{4}\dot{\gamma}\sin 2\theta + \dot{\phi}\gamma\left(\frac{\gamma}{2}\sin 2\phi - \cos 2\phi\right) \; ; \; D_{12} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}\cos 2\theta + \dot{\phi}\gamma\left(\frac{\gamma}{2}\cos 2\phi + \sin 2\phi\right) \tag{87}$$

$$W_{12} = \dot{\theta} + \frac{\dot{\gamma}}{2} + \dot{\phi}(2+\gamma^2)$$

En conclusion pour approcher un modèle de poly-lamelle à un seul glissement d'un polycristal plan on devrait tenir compte du fait que l'unique glissement pris en compte résulte de la composition d'un ensemble des glissements actifs et, par conséquent, on devrait considérer variable l'angle entre la direction de l'unique glissement en jeu et l'axe représentatif du réseau. Cet angle devient alors une grandeur constitutive.

On montre de suite les résultats obtenus avec les modèles de poly-lamelle à un et à deux glissements.

5.3. Poly-lamelle à un glissement.

Pour un poly-lamelle à un seul glissement les équations ci-dessus sont valables avec ϕ constant (formules (82) et (84)). En effet le modèle peut être complété par l'introduction de dilatations plastiques pures. En formulant l'hypothèse de Taylor de déformation homogène dans l'agrégat on obtient la liaison cinématique nécessaire pour la définition du problème de l'évolution de la texture:

$$\dot{\theta} = \mathcal{F}(\theta(t), \underline{\underline{D}}(t), \underline{\underline{W}}(t)) \quad \forall t \tag{88}$$

où D et W sont les taux de déformation et de rotation macroscopiques imposés.

On ne rentre pas dans les détails de la discussion du modèle pour lesquels on renvoie à l'article de E. van der Giessen et P. van Houtte, mais on souligne un aspect particulier du modèle présenté par ces auteurs (Cf. van der Giessen & van Houtte 1992]).

Les résultats obtenus par ces auteurs diffèrent des résultats obtenus par S.V. Harren et R.J. Asaro (Cf. [Harren et Asaro 1989]) avec un modèle de polycristal plan avec hypothèse de Taylor et méthode de Taylor-Bishop-Hill pour la détection des glissements actifs. La différence la plus importante se vérifie dans la prédiction de la ODF obtenue dans les deux cas. La raison de la différence est à rechercher dans l'absence d'un second système de glissement solidaire et compétitif avec l'unique système donné: par conséquent les réseaux tournent jusqu'à aligner leur axe de glissement avec l'axe d'élongation macroscopique maximale. Si on observe les résultats du modèle de polycristal on voit que les axes des systèmes représentatifs choisis dans les cristaux CFC se distribuent, pour des élongations élevées, des deux cotés de l'axe d'élongation avec un angle de l'ordre de 30° (ce qui, d'ailleurs, est bien en accord avec le modèle de poly-lamelle à deux glissements de M.M. Rashid présenté ci-dessous).

Les auteurs suggèrent, en particulier, de considérer un modèle de poly-lamelle à un glissement tel que chaque "lamelle" de l'ensemble représente la projection d'un système de glissement du polycristal réel (e.g. pour représenter un cristal CFC plan il faut 12 lamelles); vue la continuité de la ODF qui est utilisée ceci n'introduit pas d'autres inconnues dans le problème. Néanmoins dans un tel modèle on néglige encore le fait que les axes des systèmes de glissement d'un cristal particulier sont solidaires entre eux (e.g. les 12 lamelles représentant un cristal CFC doivent avoir la même vitesse de rotation absolue).

Pour conclure sur le poly-lamelle à un glissement on peut donc affirmer que ce modèle peut être amélioré soit en introduisant des liaisons dans l'équation de continuité de la ODF (dans ce cas une lamelle représente un système de glissement d'un cristal), soit en se donnant des lois de comportement pour la rotation et l'intensité du glissement de chaque lamelle (qui est alors l'image du glissement résultant d'un cristal entier).

Le modèle qu'on présente dans cette thèse utilise l'idée de suivre séparément chaque système de glissement du polycristal, en lui donnant une vitesse de glissement indépendamment du cristal auquel il appartient, mais, à la différence des modèles présentés, permet l'écriture de ladite liaison entre systèmes du même cristal. On remarque dès maintenant que, en suivant les 12 systèmes de glissement d'un CFC, la recherche des systèmes actifs en imposant la compatibilité n'a pas de solutions uniques, tandis que la décomposition de la contrainte sur les directions de glissement devient beaucoup plus simple si on accepte d'imposer l'équilibre pour chaque direction de glissement séparément dans le polycristal.

5.4. Poly-lamelle à deux glissements.

5.4.1. Compatibilité cinématique et évolution de la texture.

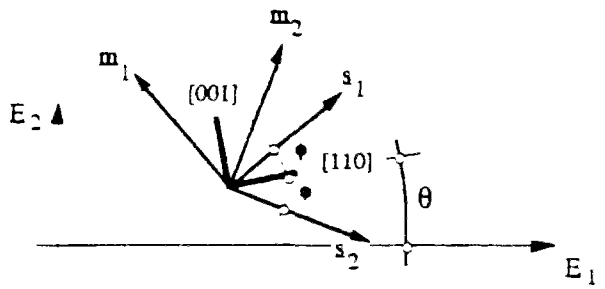
On considère le poly-lamelle à deux glissements et on fait l'hypothèse de Taylor de déformation homogène dans l'agrégat. Par conséquent les glissements et les rotations des lamelles peuvent être déduits des vitesses macroscopiques sur la base de relations purement cinématiques.

Notés s_α et m_α respectivement la direction de glissement du système de glissement α et sa normale, Ω leur taux de rotation et $\dot{\gamma}_\alpha$ le taux de glissement le long de ce système, en notant gradu le gradient des vitesses macroscopiques, l'hypothèse de Taylor s'écrit en eulerien (on rappelle que le corps est placé dans R^2 avec système de référence (E_1,E_2) et que les rotations se vérifient autour de l'axe E_3):

89

$$\text{gradu} = \underline{\underline{\Omega}} + \sum_{\alpha=1}^{2} \dot{\gamma}_\alpha s_\alpha \otimes m_\alpha$$

$$\dot{s}_\alpha = \underline{\underline{\Omega}} \cdot s_\alpha \; ; \; \dot{m}_\alpha = \underline{\underline{\Omega}} \cdot m_\alpha \quad \forall \alpha \in \{1,2\} \; ; \; \underline{\underline{\Omega}} = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Le taux de déformation d'une lamelle, égale par l'hypothèse de Taylor au taux de déformation macroscopique D_{ij} (i,j=1,2) du polycristal, est alors compatible si et seulement si:

$$\dot{\gamma}_1=\frac{2}{\sin 4\phi}(-D_{12}\sin 2\beta_2+D_{22}\cos 2\beta_2)\ ;\ \beta_2=\theta-\phi \qquad 90$$

$$\dot{\gamma}_2=\frac{2}{\sin 4\phi}(D_{12}\sin 2\beta_1+D_{22}\cos 2\beta_1)\ ;\ \beta_1=\theta+\phi$$

$$\dot{\theta}=-\Omega_{12}=\frac{1}{\sin 4\phi}[D_{22}(\cos 2\beta_2-\cos 2\beta_1)-D_{12}(\sin 2\beta_2-\sin 2\beta_1)]-W_{12}$$

L'équation de continuité de la ODF s'écrit alors:

$$\frac{\partial g(\theta,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{g(\theta,t)}{\sin 4\phi}\left[D_{22}(\cos 2\beta_2-\cos 2\beta_1)-D_{12}(\sin 2\beta_2-\sin 2\beta_1)\right]-g(\theta,t)W_{12}\right\}=0 \qquad 91$$

$$\forall\theta\in[-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}[,\forall t$$

5.3.2. Cas particuliers.

Elongation.

Pour des conditions de déformation particulières on peut obtenir une solution analytique du problème de l'évolution de la texture.

Pour une élongation simple avec matériau initialement isotrope:

$$\underline{\underline{D}}=\begin{bmatrix}-d & 0\\ 0 & d\end{bmatrix}\ ;\ \underline{\underline{W}}=0\ ;\ g(\theta,0)=1 \qquad 92$$

M.M.Rashid donne la solution (B=6d pour cristaux CFC):

$$g(\theta,t)=\left(e^{Bt}\cos^2\theta+e^{-Bt}\sin^2\theta\right)^{-1}\quad \forall\theta\in[-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}[,\forall t\ ;\ B=4d\,\frac{\sin 2\phi}{\sin 4\phi} \qquad 93$$

selon cette solution les grains tendent vers une orientation $\theta=\pi/2$ (i.e. vers la direction de l'axe d'élongation) au cours de la déformation et l'ODF donne une distribution qui tend, à l'infini, vers une distribution de Dirac centrée en $\pi/2$:

$$\forall\delta>0,\forall\theta\in[0,\pi[\setminus\{\tfrac{\pi}{2}\}\ \exists t:\ g(\theta,t)<\delta\ \text{ i.e. }\ t>\frac{1}{B}\log\left(\frac{\tan^2\theta}{\delta}\right) \qquad 94$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^{\pi} g(\theta,t)\phi(\theta)\frac{1}{\pi}d\theta=\phi(\tfrac{\pi}{2})\quad\forall\phi$$

L'état de contrainte macroscopique peut être déduit en partant de l'hypothèse d'un comportement rigido-plastique, sans écrouissage, indépendant du temps (on rappelle que, par l'hypothèse de Taylor, l'équilibre local n'est pas vérifié). La variation de la réponse contrainte dans le temps obtenue est due exclusivement à l'écrouissage de texture, négatif pour une élongation positive; pour une déformation de l'ordre de 1 la réponse est sensiblement celle d'un monocristal orienté selon l'axe de traction (i.e. avec les plans de glissement symétriques par rapport à cet axe).

La surface de charge, initialement circulaire dans le plan $2\sigma_{12}$ vs $(\sigma_{22}-\sigma_{11})$ tend pour une déformation infinie vers un losange (avec une sensible proximité de la limite au delà d'une déformation unitaire).

Cisaillement pur.

Les conditions de cisaillement pur pour un matériau initialement isotrope sont:

$$\underline{\underline{D}}=\begin{bmatrix}0 & \kappa\\ \kappa & 0\end{bmatrix}\ ;\ \underline{\underline{W}}=\begin{bmatrix}0 & \kappa\\ -\kappa & 0\end{bmatrix}\ ;\ g(\theta,0)=1 \qquad 95$$

pour lesquelles M.M.Rashid donne la solution:

$$g(\theta,t)=\frac{e^{Ct}\sin^2 2\phi}{\left[\sin(\phi+\theta)+e^{Ct}\sin(\phi-\theta)\right]^2-4e^{Ct}\sin(\phi+\theta)\sin(\phi-\theta)\sin^2\phi} \quad ; C=2\kappa\tan 2\phi \qquad 96$$

donnant une distribution qui tend vers une Dirac placé en $\theta=\phi$ pour $t\to\infty$. Il faut remarquer que le maximum de la fonction $g(\theta;t)$ n'est pas en correspondance $\theta=\phi$ pour tout instant de temps mais il s'approche de ce point lorsque $t\to\infty$:

$$\theta_{max}(t) = \frac{1}{2}\arctan\left(\coth\frac{Ct}{2}\tan 2\phi\right) \in [\frac{\pi}{4};\phi[\qquad 97$$

La composante 12 de la contrainte macroscopique décroît au cours de la déformation tendant vers la composante 12 de la réponse d'un monocristal orienté $\theta=\phi$. Par contre la différence entre la composante 22 et la composante 11 du tenseur de contrainte est croissante au cours de la déformation et ces composantes normales ne s'approchent pas des composantes de la réponse d'un monocristal.

5.5. Conclusion.

Le modèle à deux systèmes de glissement présenté a un rapport remarquable entre sa simplicité et la qualité de ses résultats.

Il a été possible d'obtenir une solution analytique des problèmes posés grâce au fait d'avoir postulé des relations inversibles entre taux de déformation et taux de glissement. En outre cette même condition relie par une liaison cinématique le taux de rotation de la matière et celui des lamelles.

Le fait que les solutions (93) et (96) donnent un monocristal pour des déformations infinies ne correspond pas à une réalité physique. Le problème à se poser est le suivant: cette limite n'est elle jamais atteinte à cause des imperfections qui éloignent le système réel du modèle, ou est-ce plutôt la relation entre taux de rotation de la matière et des réseaux qui, évoluant par exemple dans le temps, fait que cette limite n'existe pas?

De toute façon, ayant mis en évidence ce manque de réalisme dans les cas simplifiés, il est légitime de douter de la qualité de tout modèle avec liaison cinématique lorsqu'on s'approche de ladite limite (qui est très vraisemblablement le cas des bandes de cisaillement).

6. Instabilité et localisation.

6.1. Introduction.

On approche le problème de la stabilité de l'équilibre et celui de la bifurcation d'un processus thermo-mécanique en tenant compte des objectifs de ce travail.

Le phénomène des bandes de cisaillement se place à l'origine des études de localisation et une présentation exhaustive du sujet sortirait de nos limites. La discussion qui suit est donc finalisée sur la recherche et la compréhension de la méthode la plus convenable pour l'étude des bandes de cisaillement dans les polycristaux avec plasticité indépendante du temps.

6.2. Bifurcation.

6.2.1. Equilibre, processus et instabilité.

La définition d'état thermodynamique, celle d'équilibre et, par conséquent, les définitions possibles de l'instabilité sont étroitement liées. Dans la discussion qui suit, sauf mention du contraire, on se réfère aux définitions de la thermodynamique des processus irréversibles appliquée aux milieux continus moyennant le postulat de l'état local.

Il est utile de citer la définition de stabilité d'un état d'équilibre au sens de Lyapunov (ou stabilité dynamique): un état d'équilibre est stable si le résultat d'une petite perturbation de l'équilibre est un petit mouvement autour de l'état d'équilibre. L'introduction d'un potentiel de Lyapunov permet alors de détecter un état d'équilibre: dans un tel état il existe un potentiel localement convexe des variables d'état.

Supposons qu'il existe des états n'ayant que un potentiel convexe selon certaines directions et non convexe par rapport à d'autres directions. Un tel état n'est pas d'équilibre au sens de Lyapunov, mais un processus qui le traverse dans une direction appropriée (normalement à laquelle le potentiel est convexe) peut ne pas s'en apercevoir. Un processus réversible idéal n'est pas une suite d'état d'équilibre stable au sens de Lyapunov, mais il peut être vu comme une suite d'état de ce genre: le potentiel est stationnaire le long d'un tel processus et convexe, en tout état engendré par le processus, par rapport à toute autre direction.

Un processus réel peut être irréversible, dans ce cas le modèle ci-dessus n'est valable que comme modèle comparatif: on peut suivre dans l'espace des variables d'état un processus réel en le projetant sur la variété des états d'équilibre[14] (Cf. [Mushik, Lect., 1992]). On peut alors voir un état de bifurcation d'un processus réel, par rapport au processus réversible, comme un état dans lequel le potentiel est stationnaire le long de deux directions distinctes. Ces deux directions peuvent être tangentes ou non. Un processus réel n'aura qu'une branche possible à l'état donné, mais nous ne pouvons pas décider laquelle sans faire une analyse post-bifurcation: dans un état bifurqué quel mouvement suit une petite perturbation de l'équilibre?

En résumé on doit distinguer le problème de la stabilité d'un état d'équilibre de celui de la stabilité d'un processus; pour les cas bifurqués on doit distinguer une bifurcation au premier ordre (détectée par la perte d'unicité de la solution du problème incrémental) d'une bifurcation tangente; finalement, au delà d'une bifurcation on doit se demander s'il existe une branche effectivement suivie par le système et quel sont les conséquences.

Dans les problèmes mécaniques l'énergie introduite dans le système par la perturbation est une mesure objective de la grandeur de la perturbation et, en même temps, un choix possible de potentiel de Lyapunov en isotherme. Une analyse de la stabilité d'un état d'équilibre suivant ce critère est menée par Nguyen Quoc Son (Cf. en particulier [Nguyen, Lect., 1991]). Il faut noter qu'une analyse du même type, mais formulée dans un cadre beaucoup plus restreint, avait été formulée par Hill pour les matériaux standard avec comportement tangent multi-linéaire; ses résultats, largement utilisés dans la littérature, seront présentés en début de cette section avec quelques références aux travaux cités de Nguyen Quoc Son.

Un cadre général sur la stabilité de l'équilibre des systèmes élasto-plastiques et sur la stabilité des processus suivis par ces systèmes a été donné par I.Petryk (Cf. en particulier [Petryk, Lect., 1992]); on en fera une brève présentation à la fin de la section sur l'instabilité.

Vue la nature des bandes de cisaillement, on ne s'intéresse pas aux bifurcations tangentes.

---

[14] La référence aux processus réversibles est à prendre dans ce sens plus large que comme cas limite quasi-statique de processus réels très lents: une projection peut toujours être faite, tandis qu'une limite peut ne pas exister.

6.2.2. Le problème incrémental élasto-plastique.

Le problème thermo-mécanique classique avec plasticité indépendante du temps s'écrit dans la forme incrémentale locale sur la configuration actuelle (le ° indique une dérivée objective, on négligé les accélérations):

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathring{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{x},t)+\mathring{\underline{f}}(\underline{x},t)=0 \quad \forall \underline{x}\in V_t \\ \mathring{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{x},t)\cdot n=\mathring{\underline{F}}(\underline{x},t) \qquad \forall \underline{x}\in \partial V_{Ft} \end{cases} \text{ équilibre}$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{d}}(\underline{x},t)=\operatorname{sym}\operatorname{grad}u(\underline{x},t) \quad \forall \underline{x}\in V_t \\ u(\underline{x},t)=u_o(\underline{x},t) \qquad \forall \underline{x}\in \partial V_{Ut} \end{cases} \text{ compatibilité}$$

$$\mathring{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{x},t)=\underline{\underline{R}}(\underline{x},t):\underline{\underline{d}}(\underline{x},t) \quad \forall \underline{x}\in V_t \qquad \text{comportement}$$

$$(\partial V_{Ft}\cup\partial V_{Ut}=\partial V_t \text{ et } \partial V_{Ft}\cap\partial V_{Ut}=\emptyset) \qquad (98)$$

avec le comportement tangent défini par le tenseur R en fonction des raideurs élastiques, du critère de plasticité et du potentiel de dissipation selon ce qui suit.

En général le comportement d'un matériau élasto-plastique est défini par la donnée de la fonction locale instantanée énergie libre, noté ψ_o par rapport à la configuration initiale:

$$\psi_o(x,t)=\psi_o(T(x,t),\ \underline{\underline{L}}(x,t),\ \dots)\ \forall x\in V_0, \forall t \qquad (99)$$

$$s(x,t)= -\frac{\partial\psi_o}{\partial T}(x,t)\ ;\ \underline{\underline{\pi}}(x,t)=\rho_0(x)\frac{\partial\psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}}(x,t)\ ;\ \dots$$

et d'un critère f définissant un convexe admissible C dans un espace de contrainte (e.g. dans l'espace des contraintes de Cauchy sans spécifier d'avantage le problème par souci de brièveté, les points de suspension indiquent d'autres possibles variables duales):

$$C=\{\underline{\underline{\sigma}}:\ f(\underline{\underline{\sigma}},\ \dots)\le 0\} \qquad (100)$$

$$\text{si } \forall t \begin{cases} f(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t),\ \dots)<0 \\ f(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t),\ \dots)=0 \text{ et } \mathring{f}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t),\ \dots)<0 \end{cases} \text{ comportement élastique en } \underline{x}\in V_t$$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t),\ \dots)=0 \text{ et } \mathring{f}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t),\ \dots)=0 \quad \text{écoulement plastique en } \underline{x}\in V_t$$

Pour un matériau standard généralisé la dissipation intrinsèque est une fonction homogène de dégrée 1 des taux d'écoulement plastique et est éventuellement fonction d'un certain nombre de variables d'état. La donnée d'un potentiel de dissipation convexe φ^* permet alors d'obtenir les contraintes duales des écoulements plastiques; le potentiel complémentaire φ (défini éventuellement par transformation de Legendre-Fenchel) donne pour toute valeur des contraintes sur la surface du convexe C la direction de l'écoulement des variables duales (normalité généralisée):

$$D_{int}(\underline{x},t) = \frac{\partial\varphi^*}{\partial \underline{\underline{d}}_{plast}}(T(x,t),\ \underline{\underline{L}}(x,t),\ \dots):\underline{\underline{d}}_{plast}(\underline{x},t) + \dots \qquad (101)$$

$$\varphi^*=\varphi^*(\underline{\underline{d}}_{plast};\ T(x,t),\ \underline{\underline{L}}(x,t),\ \dots)\ ;\ \varphi=\varphi(\underline{\underline{\sigma}};\ T(x,t),\ \underline{\underline{L}}(x,t),\ \dots)$$

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = \underline{\underline{R}}^{-1}_{élast}(\underline{x},t):\mathring{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{x},t) + \mathring{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{x},t) = \underline{\underline{R}}^{-1}(\underline{x},t):\mathring{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{x},t)$$

$$\mathring{\lambda}(\underline{x},t)\begin{cases} =0 \text{ si comportement élastique en } \underline{x}\in V_t \\ >0 \text{ si écoulement plastique en } \underline{x}\in V_t \end{cases} \quad \forall t$$

Si le critère est suffisamment régulier (et si l'écrouissage est positif), la condition de consistance:

$$\mathring{f}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t), \ldots)\mathring{\lambda}(\underline{x},t)=0 \ \forall(\underline{x},t) \qquad 102$$

suffit pour déterminer le multiplicateur plastique λ en tout point et à tout instant.

Pour un matériau avec plasticité associée par loi de normalité la direction de l'écoulement plastique est contenue dans le cône des normales à la surface du critère dans le point où celle-ci est atteinte (sous-gradient du critère):

$$\underline{\underline{d}}=\underline{\underline{d}}_{élast}+\underline{\underline{d}}_{plast} \ ; \ \underline{\underline{d}}_{plast}(\underline{x},t)\in N_C(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)) \qquad 103$$

on peut également définir la direction de l'écoulement plastique associée par le principe de la dissipation maximale de Hill:

$$\underline{\underline{d}}=\underline{\underline{d}}_{élast}+\underline{\underline{d}}_{plast} \ ; \ \underline{\underline{d}}_{plast}: \ (\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)-\underline{\underline{\sigma}}^*):\underline{\underline{d}}_{plast}(\underline{x},t) \geq 0 \ \forall \underline{\underline{\sigma}}^*\in C \qquad 104$$

Pour un matériau avec plasticité associée avec une surface du critère sans points anguleux, $f=\varphi$ et l'écoulement plastique s'écrit:

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = \underline{\underline{R}}^{-1}_{élast}(\underline{x},t):\mathring{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{x},t) + \mathring{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{x},t) = \underline{\underline{R}}^{-1}(\underline{x},t):\mathring{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{x},t) \qquad 105$$

(s'il existe des points anguleux la même formule doit être prise avec ∂f appartenant au sous-gradient de f).

6.2.3. La condition de Hill pour le problème incrémental.

Une condition suffisante d'existence et unicité de la solution d'un tel problème[15] est que l'opérateur R soit strictement défini positif en tout point à l'intérieur du milieu, à l'instant t:

$$\forall \underline{\underline{d}}=\underline{\underline{d}}^T\neq\underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{d}}:\left[\mathrm{sym}\underline{\underline{R}}(\underline{x},t)\right]:\underline{\underline{d}}>0 \ \forall \underline{x}\in V_t \qquad 106$$

qui donne, pour les champs solution du problème incrémental, la condition:

$$\mathring{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{x},t):\underline{\underline{d}}(\underline{x},t)>0 \ \forall \underline{x}\in V_t \qquad 107$$

Il s'agit d'une condition suffisante: sa négation est nécessaire pour qu'il y ait perte d'unicité de la solution incrémentale i.e. pour qu'il y ait bifurcation angulaire à l'instant t. On voit que, indépendamment de la (106), rien ne garanti qu'il ne se vérifie pas de bifurcations tangentes à cet instant et, même si la (106) est niée, rien n'assure qu'une bifurcation angulaire se vérifie effectivement à cet instant.

Néanmoins le problème des bandes de cisaillement dans les matériaux élasto-plastiques peut raisonnablement être vu comme un cas de bifurcation angulaire car au moins le taux de déformation varie, montrant une discontinuité, lors de l'apparition d'une bande. Ceci peut être précisé en regardant une bande de cisaillement comme une onde d'accélération (étudiées en premier par Hadamard en 1903) se propageant dans le solide élasto-plastique avec une vitesse nulle: on retrouve, par définition d'onde d'accélération, une discontinuité du taux de déformation en traversant la bande-onde. On voit alors qu'une condition analogue à la (107) (dans le sens qu'elle n'est que nécessaire pour les bifurcations angulaires), mais spécifique lorsque la branche bifurquée manifeste une localisation, peut être obtenue par une étude d'existence d'ondes d'accélération statiques: c'est l'étude mené par Hill en 1962.

---

15 Pour les matériaux standards associés cette condition est due à Hill (1958), pour les non-associés à Benallal, Billardon et Geymonat (1989).

6.2.4. Une généralisation.

Les conditions (106) et (107) peuvent être généralisées pour n'importe quel ensemble de variables d'état, lorsque la normalité est valable pour tout couple associé de flux de variable d'état et contrainte duale. On en donne de suite un aperçu car certaines réflexions sur le cas général améliorent la compréhension du problème (Cf. [Nguyen, Lect., 1991]).

Soit α variable d'état solution, A contrainte associée, $N_C(A)$ cône normale au critère pour les contraintes A, en A, ψ et φ potentiel énergie libre et pseudo-potentiel de dissipation. Soit λ le paramètre unique de contrôle du chargement; le problème incrémental pour α s'écrit:

$$\mathring{\alpha}\in N_C(A) \text{ et } \forall\delta\alpha\in N_C(A): \qquad 108$$

$$(\delta\alpha-\mathring{\alpha})\cdot\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\alpha}\cdot\mathring{\alpha}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\lambda}\cdot\mathring{\lambda}\right]+\mathring{\alpha}\cdot\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(\alpha,\ \delta\alpha)-\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(\alpha,\ \mathring{\alpha})\right]\geq 0$$

et il est bien posé sous les conditions:

$$A=-\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(\alpha,\ldots)\ ;\ \mathring{\alpha}\in N_C(A)\ ;\ \alpha(0)=\alpha_0\ ;\ \alpha(t)\text{ connu} \qquad 109$$

Existence:

$$\delta\alpha\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\alpha}(\alpha,\ldots)\cdot\delta\alpha+\delta\alpha\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(\alpha,\ \delta\alpha)>0\quad\forall\delta\alpha\neq 0\ \delta\alpha\in N_C(A)$$

Unicité:

$$(\delta\beta-\delta\alpha)\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\alpha}(\alpha,\ldots)\cdot(\delta\beta-\delta\alpha)+(\delta\beta-\delta\alpha)\cdot\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(\alpha,\ \delta\beta)-\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(\alpha,\ \delta\alpha)\right]>0\quad\forall\delta\alpha\neq\delta\beta\in N_C(A)$$

on observe que les deux conditions ont la même forme, mais que la deuxième est plus restrictive car la différence $(\delta\beta-\delta\alpha)$ n'est pas restreinte par la règle de normalité $\delta\alpha\in N_C(A)$. On voit alors que la première généralise la (107) (dans laquelle d doit être solution incrémentale), tandis que la deuxième généralise la (106) (où d est un tenseur symétrique non nul quelconque).

La condition d'unicité est suffisante pour garantir la non bifurcation de type angulaire: seulement s'il existe deux solutions incrémentales distinctes il peut y avoir un changement de direction du processus à l'instant t. Ceci coincide avec l'interprétation donnée de la (106).

L'interprétation de la condition d'existence est moins immédiate. Il a été démontré que cette condition est une condition suffisante de stabilité au sens de Lyapunov si, en particulier, l'énergie dissipée est une fonction d'état ou si le critère ne dépend pas des variables d'état[16].

On considère que, en isotherme, pour un système en équilibre à l'instant 0 et une perturbation déplaçant le système pendant l'intervalle de temps de durée θ:

- l'énergie fournie par la perturbation se transforme, à l'instant t postérieur à θ, en une énergie cinétique non négative, en une énergie interne fonction d'état, et en une énergie dissipée fonction du chemin suivi;
- l'énergie interne est minimum pour le champ de vitesse solution à l'instant t, et ce minimum est égale à l'énergie libre dans l'état d'équilibre instantané qui est solution à l'instant t.
- un chemin radial minimise l'énergie dissipée si celle-ci est une fonction d'état ou si le critère ne dépend pas des variables d'état[17].

On voit alors que l'énergie de la perturbation est à tout instant t non inférieure à la somme de l'énergie libre du système à l'instant t et de l'énergie dissipée le long d'un chemin radial jusqu'à l'état actuel (si ce chemin est minimisant pour l'énergie dissipée). Cette somme est un potentiel qui ne dépend que de la distance entre l'état initial et l'état perturbé à l'instant t; si ce potentiel est convexe il assure la stabilité dynamique (au sens de Lyapunov) de l'état initial.

---

16 Pour obtenir ce résultat on montre que la différence entre l'énergie libre du système le long du chemin réel et l'énergie libre du système le long d'un chemin radial est un potentiel localement convexe et assure donc la stabilité au sens de Lyapunov (Cf. [Nguyen, Lect., 1991])

17 L'une de ces deux conditions est suffisante pour qu'un chemin radial minimise l'énergie dissipée, mais aucune des deux n'est nécessaire.

En particulier on prouve que la condition d'existence (109) de la solution du problème incrémental est une condition suffisante pour que ce potentiel soit convexe et, donc, pour la stabilité dynamique de l'état actuel.

On observe que l'énergie dissipée est une fonction d'état pour le solide linéaire de comparaison de Hill (elle ne dépend pas des flux des variables internes); un chemin radial entre deux états minimise donc toujours l'énergie dissipée par un tel solide. On voit alors comment la condition (107) pour la solution incrémentale du solide de comparaison est une condition suffisante de stabilité pour le solide réel dans l'état actuel.[18]

6.3. Localisation de la déformation.

6.3.1. Unicité locale et globale de la solution.

Hill (1962) considère la propagation des ondes d'accélération (surfaces non matérielles entraînant une discontinuité du gradient de vitesse) dans un solide avec comportement incrémental multi-linéaire par morceaux: si la vitesse de propagation d'une onde s'annule il y a perte d'unicité de la solution statique[19]. La vitesse de propagation des ondes, bien que liée au comportement local, dépend de l'ensemble du solide et des conditions aux limites; par conséquent on obtient une condition sur le comportement local qui garanti l'unicité de la solution du problème incrémental pour un solide homogène (condition suffisante qui peut devenir nécessaire selon les conditions aux limites) et, dans certains cas pour un solide hétérogène.

Il faut souligner la signification d'un critère local de perte de l'unicité de la solution: avec certaines conditions au contour en vitesse la solution peut demeurer unique.

Le critère obtenu par Hill pour l'existence locale d'ondes d'accélération statiques à l'intérieur du solide coïncide avec le critère de perte d'ellipticité locale du problème en vitesse qu'on montre de suite. Les remarques pour le passage du local au global demeurent valables.

6.3.2. Perte d'ellipticité du problème en vitesse.

Le problème (98) est non linéaire en vitesse à cause de la non linéarité du comportement tangent. On peut, suivant Hill (1958-59), écrire un problème linéaire équivalent défini sur ce qu'on appelle le "solide linéaire de comparaison".

On considère un matériau standard avec comportement incrémental multi-linéaire, par exemple un matériau élasto-plastique avec écoulement plastique standard défini par un critère f dans l'espace des contraintes de Cauchy.

Le solide linéaire de comparaison, à un instant donné, est constitué d'un matériau standard avec comportement incrémental multi-linéaire par zones, c'est à dire tel que la relation entre incréments de contrainte et de déformation ne dépend, localement, que de la zone de l'espace des contraintes (ou plus généralement des états) dans laquelle se trouve la contrainte actuelle (ou l'état actuel). Cela signifie que le comportement à la même "pente" tant en charge que en décharge même là où le critère est atteint[20]; en d'autres mots la condition de décharge à partir de la surface du critère ne se vérifie nulle part:

$$\forall t\ f(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t), \dots)=0 \rightarrow \overset{\circ}{f}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t), \dots)=0 \left(\overset{\circ}{f}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t), \dots)<0 \text{ inadmissible}\right) \forall \underline{x}\in V_t \qquad 110$$

Le solide de comparaison d'un matériau élasto-plastique à l'instant t a donc une zone élastique et une zone plastique avec un comportement défini en fonction de l'état actuel de contrainte et indépendamment de la direction du changement actuel de cet état.

---

18 Une conséquence de l'interprétation de la (107) comme condition suffisante de stabilité de l'état actuel est que les conditions écrites pour la localisation, reportées dans les paragraphes suivants, telles que présentées sont des conditions de stabilité de la solution à l'état actuel sous de perturbations ayant la forme d'une localisation de la déformation. L'interprétation comme conditions de non bifurcation n'est tout à fait correcte que si, à la place de contrôler le tenseur de comportement tangent à l'état actuel pour la solution incrémentale (selon la première des (109)), on les applique à tout tenseurs de comportement tangent possibles à l'état actuel (conformément à la deuxième des (109)). Ces sont les cas analysés par Rice et Rudnicki comme localisation continue, élastique-élastique ou plastique-plastique, ou discontinue, élastique-plastique: l'ensemble des résultats permet d'affirmer que la condition $\det(n\mathbf{H}n)>0$ est suffisante pour la non bifurcation tangente.

19 Pour une présentation du problème dans le cadre des matériaux non standards voir [Loret *et al.* 1990].

20 Et celle-ci est la moins raide pour la zone donnée, c'est à dire que entre le module tangent élastique et le module tangent plastique on choisi ce dernier, même en décharge.

Selon l'analyse de Hill (1959-61) la bifurcation ne peut pas se vérifier dans le solide réel avant qu'elle ne soit admissible dans le solide de comparaison. Ce résultat est assuré par une inégalité, appelé "propriété de convexité relative", qui montre que la différence entre le potentiel de dissipation du solide réel et celui du solide de comparaison est un potentiel convexe: si une solution incrémentale est unique pour le deuxième elle doit forcement être unique pour le premier[21].

Pour des matériaux non standards ce résultat a été étendu par Raniecki et Bruhns (1981) (Cf. [Desrues, Thèse, 1984], [Borré et Maier 1989]).

Le problème mécanique relatif au solide de comparaison est bien posé (Cf. [Benallal *et al.* 1989]) si l'opérateur qui associe à tout champ de vitesse le champ des divergences des taux de contrainte correspondantes est elliptique en tout point. Ceci se traduit dans la condition nécessaire (U espace des vitesses, U* espace des forces, R comportement tangent):

$$\mathcal{O}:\underline{u}\in U\rightarrow \mathrm{div}(\underline{\underline{R}}:\mathrm{symgrad}\underline{u})\in L(R;U^*) \qquad 111$$

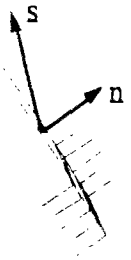
$$\mathcal{O}\ \text{elliptique} \rightarrow \forall t\ \det\left[\underline{n}\cdot\underline{\underline{R}}(\underline{x},t)\cdot\underline{n}\right]\neq 0\ \forall \underline{n}\neq 0\ \forall \underline{x}\in V_t$$

par conséquent on obtient la condition de perte d'ellipticité du problème incrémental:

$$\exists \underline{n}\neq 0\ \exists \underline{x}\in V_t : \det\left[\underline{n}\cdot\underline{\underline{R}}(\underline{x},t)\cdot\underline{n}\right]=0 \rightarrow \text{bifurcation possible à l'instant t} \qquad 112$$

Dans le mode bifurqué se vérifie dans le point $\underline{x}$ une discontinuité du gradient de vitesse d'amplitude s arbitraire le long de la direction n:

$$[\![\mathrm{grad}\underline{u}]\!](\underline{x},t)=\underline{s}\otimes\underline{n} \qquad 113$$



Si, avant que la condition (112) soit vérifiée, se vérifie une bifurcation (détectée, par exemple, par la (106) s'il s'agit d'une bifurcation angulaire), celle-ci a une branche bifurquée avec mode de déformation diffus à l'intérieur du milieu, tandis que, dès que la (112) est vérifiée, toute bifurcation possible est en mode localisé en déformation. Dans certains cas il existe une condition complémentaire sur la frontière du solide de comparaison atteinte avant la (112), mais le mode bifurqué qu'elle entraîne ne concerne pas l'intérieur du milieu (Cf. [Benallal *et al.* 1989]).

6.3.3. Localisation et stabilité de l'état actuel.

Rice et Rudnicki considèrent, dans un solide avec comportement incrémental multi-linéaire (e.g. élasto-plastique), une discontinuité du gradient de vitesse le long d'une surface de normale n. Ils écrivent les conditions de continuité des variations de contrainte et de discontinuité du gradient de vitesse et les relient dans une seule condition moyennant un comportement tangent de module H.

On considère le premier tenseur de Piola-Kirchhoff (appelé aussi tenseur de contrainte nominale de Hill), N_H, défini comme le transposé du tenseur de contrainte nominale N: on

---

21 C'est une propriété analogue à celle utilisée pour démontrer que la première des (109) est une condition suffisante pour la stabilité dynamique de l'état actuel.

On remarque que la convexité relative des potentiels de dissipation, étant une propriété incrémentale (à cause du solide réel), ne serait pas suffisante pour assurer qu'une bifurcation tangente ne se produise dans le solide réel avant que dans le solide de comparaison.

note H le tenseur donnant le comportement tangent par rapport à N_H [22]; on distingue par l'exposant + ou - les valeurs d'un champ d'un coté ou de l'autre de la discontinuité:

$$\underline{\underline{N}}=\frac{\rho_0}{\rho_t}\underline{\underline{F}}^{-1}\cdot\underline{\underline{\sigma}};\ \underline{\underline{N_H}}=\underline{\underline{N}}^T=\frac{\rho_0}{\rho_t}\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{\underline{F}}^{-T} \qquad 114$$

$$\mathring{\underline{\underline{N}}}_H=\underline{\underline{H}}:\mathring{\underline{\underline{F}}}^T$$

les conditions sur la discontinuité sont:

$$\exists n\neq 0:\begin{cases}[\![n\cdot\mathring{\underline{\underline{N}}}_H]\!]=0\\ [\![\mathring{\underline{\underline{F}}}]\!]=(\mathring{\underline{F}}\cdot n)\otimes n=g\otimes n\quad\forall g\neq 0\end{cases}\rightarrow [n\cdot\underline{\underline{H}}^{-}\cdot n]\cdot g+n\cdot[\![\underline{\underline{H}}]\!]:\mathring{\underline{\underline{F}}}^{T+}=0\ \forall g\neq 0 \qquad 115$$

l'existence d'une telle discontinuité est détectée donc par une condition égale à la (112) lorsque le comportement tangent est décrit par le même module plastique H_{plast} d'un coté et de l'autre de la discontinuité:

$$(115)\rightarrow\exists n\neq 0:\left[n\cdot\underline{\underline{H}}_{plast}\cdot n\right]\cdot g=0\ \forall g\neq 0\rightarrow\exists n\neq 0:\det\left[n\cdot\underline{\underline{H}}_{plast}\cdot n\right]=0 \qquad 116$$

On remarque qu'il n'y a pas de solution d'une telle équation avec $n\neq 0$ pour un module élastique $H_{élast}$ des deux cotés:

$$\det\left[n\cdot\underline{\underline{H}}_{élast}\cdot n\right]>0\quad\forall n\neq 0 \qquad 117$$

et la localisation est impossible dans le cas élastique-élastique.

Si le comportement tangent est élastique d'un coté et plastique de l'autre coté de la discontinuité la condition (115) s'écrit comme une condition sur le module d'écrouissage h (l'égalité devient une inégalité en introduisant dans la (115) la condition $\mathring{f}\leq 0$ en décharge; Cf. [Doghri, Thèse, 1989]):

$$(115)\rightarrow h\leq h_{critique} \qquad 118$$

cette condition est appelée de localisation "discontinue" à cause de la discontinuité du module tangent. Si l'écrouissage est égal à l'écrouissage critique cette condition correspond encore à la (112). Par conséquent, lors d'un écrouissage décroissant avec la déformation plastique cumulée dans le temps la condition (112), dite de localisation "continue" pour remarquer qu'il y a écoulement plastique des deux cotés de la discontinuité, se vérifie en premier.

Toujours pour la localisation discontinue Borré et Maier (Cf. [Borré et Maier 1989]) ont montré, pour des matériaux non standard, que la condition:

$$\exists n\neq 0:\det\left[n\cdot\underline{\underline{H}}\cdot n\right]\leq 0 \qquad 119$$

est nécessaire et suffisante; la vérification en premier dans le temps de la condition avec égalité est évidente en présence de raideurs tangentes décroissantes; la condition donnant un écrouissage minimum pour garantir la non localisation coincide donc avec celle-ci.

En conclusion l'analyse de Rice et Rudnicki donne les conditions de localisation (continue ou discontinue) pour un solide réel[23] et montre que la condition de perte d'ellipticité du problème local en vitesse du solide de comparaison (égale à celle de localisation continue) est atteinte en premier. On peut aussi dire que, dans le solide réel, la localisation est d'abord continue.

---

[22] Ce tenseur est lié au tenseur R précédemment introduit par la dérivée objective des contraintes utilisée; e.g. en utilisant la dérivée de Jaumann (Cf. [Mear & Hutchinson 1985]):

$$H_{ijkl}=R_{ijkl}+\frac{1}{2}\sigma_{ik}\delta_{jl}-\frac{1}{2}\sigma_{il}\delta_{kj}-\frac{1}{2}\sigma_{jl}\delta_{ik}-\frac{1}{2}\sigma_{jk}\delta_{il}+\sigma_{ij}\delta_{kl} \qquad 114b$$

[23] La condition donnée est nécessaire et suffisante, comme à été montré par [Borré & Maier 1989], pour qu'il y ait localisation de la déformation à l'intérieur du solide. De conditions nécessaires et suffisantes pour une localisation sur la surface du solide ont été données par [Billardon *et al.* 1990]: la singularité du comportement tangent le long d'une direction demeure nécessaire pour une telle localisation.

6.3.4. Conclusions.

La stabilité de comportement peut être détectée par plusieurs méthodes, selon la définition de stabilité qu'on se donne. Dans la théorie de la bifurcation de Hill et dans celle de Rice et Rudnicki aboutissant au même résultat principal (pour le matériaux standards et non) on considère nécessaire pour qu'il y ait bifurcation avec localisation de la déformation que le problème de l'équilibre élasto-plastique incrémental n'ait plus une solution unique, ceci étant détecté par la perte d'ellipticité du système d'équations posé.

Il faut noter que la localisation plastique et, plus particulièrement, le problème des bandes de cisaillement peuvent se traiter par cette approche une fois qu'on accepte de se restreindre aux matériaux élasto-plastiques à plasticité indépendante du temps (pour lesquels l'épaisseur de la bande est nul).

Dans la théorie de Hill on défini d'abord le solide linéaire de comparaison comme un solide élasto-plastique standard au comportement décrit par une loi multi-linéaire. Celui-ci est défini par le tenseur des modules opérateur linéaire entre incréments de déformation et incréments de contrainte, associé à la zone de l'espace des contraintes dont on poursuit le chargement en absence de bifurcation.

On montre que la bifurcation pour le solide réel ne peut pas se vérifier avant qu'elle ne soit admissible pour le solide linéaire de comparaison.

On montre finalement que, si la bifurcation se manifeste sous forme d'une bande de glissement perpendiculaire à un vecteur unitaire n et si le comportement linéaire de comparaison est défini par un tenseur du quatrième ordre H, alors la condition nécessaire de début de localisation s'écrit:

$$\exists n\neq 0 : \det\left[n\cdot \underline{\underline{H}}\cdot n \right]=0 \qquad 120$$

6.4. Théorie générale.

6.4.1. Stabilité de l'équilibre.

Une théorie de l'équilibre des systèmes élasto-plastiques a été formulée par Petryk (Cf. [Petryk, Lect. 1992]); on en donne un bref aperçu car, grâce à sa généralité, cette théorie peut être appliquée à une classe très étendue de comportements dissipatifs indépendants du temps.

Selon la définition qu'on a déjà donnée, un état est défini d'équilibre stable si de petites perturbations n'éloignent jamais sensiblement le système de cet état. Cette définition doit être précisée par la donnée du système, des perturbations dont on doit tenir compte, d'une mesure permettant de définir "petite" une perturbation et d'une mesure pour définir "petite" la distance du système d'un état d'équilibre.

On considère un système isolé (par conséquent s'il y a de chargement variables l'appareil de chargement fait partie du système) dans l'état d'équilibre $\mathcal{S}_0$; ces système est décrit par des équations de champ (dans l'espace-temps) avec des conditions initiales et au contour; les perturbations qu'on considère sont des variations des conditions initiales du système (on postule donc qu'il existe des processus engendrés par de telles perturbations). Tant la mesure de la perturbation initiale, ρ_0, que celle de la distance à l'état initial, ρ, peuvent alors être choisies comme des "métriques" dans l'ensemble des états $\mathcal{S}$ du système (avec les propriétés de non négativité et de séparation, mais pas forcement avec la propnété de symétrie et de l'inégalité triangulaire[24]), elle doivent en outre être continues et, en particulier, elles peuvent coincider.

La définition de stabilité de l'équilibre est alors selon Lyapunov-Movchan:

- un état d'équilibre $\mathcal{S}_0$ est stable pour de perturbations initiales par rapport aux métriques ρ_0 et ρ si et seulement si:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0 : \rho_0(\tau)<\delta(\varepsilon) \rightarrow \rho(t)<\varepsilon\ \forall t>\tau \qquad 121$$

---

[24] Les seules propriétés demandées sont évidemment:

$$\rho_0(\mathcal{S},\mathcal{S}_0)\geq 0 \ ; \ \rho_0(\mathcal{S}_0,\mathcal{S}_0)=0 \qquad 121b$$

$$\rho(\mathcal{S},\mathcal{S}_0)\geq 0 \ , \ \rho(\mathcal{S}_0,\mathcal{S}_0)=0 \ ; \ \rho(t)=\rho(\mathcal{S}(t),\mathcal{S}_0) \text{ continu dans le temps}$$

La méthode directe de Lyapunov permet de construire une fonctionnelle, dite de Lyapunov, dont l'existence garantit la stabilité de l'équilibre dans le sens de la (121). La définition de stabilité de l'équilibre dévient alors (R constant positif "rayon" d'un voisinage de $\mathcal{S}_0$, a(·) fonction continue monotone croissante avec a(0)=0):

- s'il existe une fonctionnelle V_L:

$$V_L:\begin{cases} V_L(\mathcal{S}_0)=0 & \\ V_L(\mathcal{S})\geq a(\rho(\mathcal{S},\mathcal{S}_0)) & \text{si } \rho(\mathcal{S},\mathcal{S}_0)<R \\ V_L(t)=V_L(\mathcal{S}(t)) \text{ non-croissante} & \text{si } \rho(\mathcal{S}(t),\mathcal{S}_0)<R \\ V_L(\mathcal{S}) \text{ continu en } \mathcal{S}_0 \text{ par rapport à } \rho_0 & \end{cases} \qquad 122$$

alors l'état d'équilibre $\mathcal{S}_0$ est stable dans le sens de la (121).

On voit que, s'il existe une fonctionnelle continue et non-croissante dans le temps le long de tout processus, la différence entre la valeur actuelle et la valeur initiale de cette fonctionnelle peut être choisie comme fonctionnelle de Lyapunov, sa valeur absolue est alors une mesure de la distance à l'état d'équilibre non perturbé:

$$\exists W:\ W(\mathcal{S})-W(\mathcal{S}_0)>0\ \forall \mathcal{S}\neq\mathcal{S}_0 \rightarrow V_L(\mathcal{S})=W(\mathcal{S})-W(\mathcal{S}_0)\ ;\ \rho_W(\mathcal{S},\mathcal{S}_0)=|W(\mathcal{S})-W(\mathcal{S}_0)| \qquad 123$$

6.4.2. Fonctionnelle pour les dissipations plastiques.

La condition classique de stabilité de l'équilibre thermostatique de Gibbs est valable en absence de dissipations d'origine non thermique (en absence de variables internes). Si on appelle H le taux de production globale d'entropie du système, dû à la somme d'une production thermique H_{therm} et d'une production intrinsèque H_{int}, on considère en général:

$$H\geq 0\ ;\ H_{therm}\geq 0\ ;\ H_{int}\geq 0 \qquad 124$$

La condition de Gibbs veut que l'état d'équilibre est celui dans lequel l'entropie (notée S) est maximum pour la valeur donnée de l'énergie interne (notée U), ayant fixé les variables internes:

$$S(\mathcal{S})-S(\mathcal{S}_0)<0\ ;\ U(\mathcal{S})-U(\mathcal{S}_0)=0\ ;\ H_{int}(\mathcal{S},\mathcal{S}_0)=0 \qquad 125$$

cette condition assure que le potentiel W obtenu par le multiplicateur de Lagrange[25] T*:

$$W(\mathcal{S})=U(\mathcal{S})-T^*S(\mathcal{S}) \qquad 126$$

donne un potentiel comme dans (123) de Lyapunov (c'est à dire qui vérifie les conditions (122)) et, par conséquent, assure la stabilité de l'équilibre au sens de Lyapunov. Ceci est vrai tant que la condition:

$$V_L(\mathcal{S})=W(\mathcal{S})-W(\mathcal{S}_0)>0\ \forall \mathcal{S}\neq\mathcal{S}_0\ ;\ H_{int}(\mathcal{S},\mathcal{S}_0)=0 \qquad 127$$

est remplie; par conséquent la formulation de Gibbs ne peut pas être acceptée en présence de dissipation intrinsèque (elle demeure valable si on se limite à étudier les cas engendrés par de perturbations initiales qui ne modifient pas les variables internes, c'est à dire en thermo-élasticité).

L'extension aux systèmes intrinsèquement dissipatifs se fait tout simplement en postulant minimum la production thermique d'entropie dans l'état d'équilibre stable, ce qui conduit à la définition du potentiel:

$$V(\mathcal{S})=U(\mathcal{S})-T^*\left[S(\mathcal{S})-S_{int}(\mathcal{S},\mathcal{S}_0,\Gamma)\right]\ ;\ S_{int}(\mathcal{S},\mathcal{S}_0,\Gamma)=\int_{\Gamma(\mathcal{S}_0,\mathcal{S})} H_{int}\,d\Gamma \qquad 128$$

---

25 Ce qui permet de ne pas parler de température pour l'état $\mathcal{S}$ qui est hors d'équilibre.

où l'entropie produite par effet des dissipations intrinsèques dépend du parcours Γ entre l'état $\mathcal{S}_0$ non perturbé et l'état $\mathcal{S}$. Si la condition:

$$V_L(\mathcal{S})=V(\mathcal{S})-V(\mathcal{S}_0)>0 \ \forall \mathcal{S}\neq\mathcal{S}_0 \qquad 129$$

est satisfaite alors l'équilibre est stable au sens de Lyapunov. Il s'agit d'une condition suffisante, vu que d'autres fonctionnelles peuvent éventuellement la remplir à la place de la fonctionnelle V définie dans la (128).

6.4.3. Conclusions.

Une condition suffisante pour la stabilité de l'équilibre d'un système en une configuration donnée est obtenue en vérifiant les conditions (122) pour la fonctionnelle différence construite à partir de la fonctionnelle définie par les (118). Le problème principal est lié à la dépendance du chemin suivi.

On obtient la condition de Hill sous forme intégrale:

$$\int_{V_t} \mathring{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{d}}:\mathcal{S}_0):\underline{\underline{d}}\ dV_t \qquad 130$$

suffisante pour que l'équilibre soit stable sous des perturbations donnant des processus isothermes et si le chargement ne dépend pas de la configuration ("dead" loading); on interprète cette condition comme une condition pour la stabilité "directionnelle" de l'équilibre: lorsqu'elle est vérifiée il ne peut pas y avoir des départs de l'état d'équilibre par des chemins de déformation "droits" cinématiquement admissibles. Un chemin est dit "droit" si le déplacement est affine dans le temps à une vitesse admissible: c'est un mode de déformation qu'on avait appelé "diffus".

On obtient aussi, comme linéarisation du problème défini par la vérification des (122), les conditions (109): elles sont valables en isotherme et en première approximation, c'est à dire en vérifiant la condition (129) dans un voisinage infinitésimal de $\mathcal{S}_0$ (la (129) est en général à vérifier dans un voisinage fini de $\mathcal{S}_0$) dans la forme:

$$\partial^2 V_{L(lin)}=\partial^2\Psi(\mathcal{S}_0)+T\partial^2 S_{int(lin)}(\partial\mathcal{S}_0,d\Gamma) \qquad 131$$

obtenue en considérant la dissipation intrinsèque linéaire par rapport aux flux des variables internes dans ce voisinage infinitésimal (ce qui est classique en thermodynamique des processus irréversibles) et en utilisant l'énergie libre à la place du terme dû à l'énergie interne et à l'entropie dans la (128) (ce qui est possible grâce à l'hypothèse de conditions isothermes; le multiplicateur de Lagrange T* est alors la température T):

$$\Psi(\mathcal{S})=U(\mathcal{S})-T^*S(\mathcal{S})=U(\mathcal{S})-TS(\mathcal{S}) \ ; \text{ i.e. } T^*=T \qquad 132$$
$$V(\mathcal{S})=\Psi(\mathcal{S})+TS_{int}(\mathcal{S},\mathcal{S}_0,\Gamma)$$

Ces restrictions de la généralité réduisent la condition suffisante de stabilité dynamique à une condition suffisante de stabilité aux perturbations modifiant le problème incrémental, c'est à dire aux bifurcations qui avait été définies angulaires.

La stabilité des processus peut aussi être étudiée en partant de considérations analogues.

6.4. Conclusion.

La condition (120) sur le comportement tangent du corps a été formulée selon un modèle qui représente bien la physique des bandes de cisaillement à basse température (localisation en bandes après bifurcation, matériau élasto-plastique); sa signification a été expliquée par plusieurs auteurs qui l'ont obtenue par des procédés divers. Néanmoins elle nécessite la détermination du comportement tangent; pour un polycristal cela oblige au passage par une méthode d'homogénéisation et donc aux limites d'un tel passage en proximité d'une bifurcation (Cf. § 5.5).

On considère que la théorie générale du §.6.4. devra être employée dès qu'on aura défini un modèle thermo-mécanique de polycristal qui répond aux exigences de modélisation ressorties de l'étude préliminaire sur la physique du phénomène des bandes de cisaillement. Par cette théorie générale on pourra obtenir une condition de localisation adéquate au modèle bâti, indépendamment de la forme de celui-ci, pourvu que le système considéré remplisse les hypothèses à la base de ladite théorie.

7. Conclusion.

L'utilisation de l'ensemble des théories illustrées dans cette partie du chapitre permet l'étude thermo-mécanique de l'instabilité plastique d'un polycristal et donc, par translation sur la réalité, l'étude des bandes de cisaillement dans les tôles laminées des alliages de l'Aluminium.

La difficulté principale d'une approche de ce type est due au changement de l'échelle géométrique qui se vérifie lors de l'apparition d'une bande de cisaillement. On a vu en fait que ce phénomène est une instabilité avec localisation de la déformation dans le processus post-critique; la détection d'une telle instabilité se fait par l'étude du comportement incrémental du corps. D'un autre coté le comportement d'un polycristal est obtenu par homogénéisation en tenant compte d'éléments de volume représentatifs qui doivent demeurer infiniment petits par rapport à l'échelle macroscopique du corps étudié. On voit alors que une approche d'homogénéisation du comportement d'un polycristal n'est pas forcement compatible avec un étude de localisation de sa déformation. En particulier on a vu que la taille (largeur) d'une bande de cisaillement peut être comparable à celle de plusieurs grains (jusqu'à une dizaine de grains); sous une telle condition il est difficile de considérer les mêmes éléments de volume représentatifs après et avant apparition des bandes.

Par conséquent on essaie dans ce travail d'utiliser les théories présentées ci-dessus pour bâtir un modèle de polycristal qui, en évitant la recherche d'un comportement homogène, conduit à une étude de l'instabilité avec localisation.

Un autre type de problème est lié à l'interaction entre grains équi-orientés dans un polycristal. On sait que l'existence de super-réseaux entre grains voisins stabilise l'évolution du polycristal et, dans le schéma proposé pour comprendre l'apparition des bandes de cisaillement, on a donné une importance primaire à cette stabilisation: c'est la disparition soudaine de cet effet qui cause la brutalité du phénomène.

Toujours au rapport entre orientations des grains voisins est lié le problème de la propagation hors de leur grain originaire des micro-bandes de cisaillement, représentant avec une bonne probabilité le germe des bandes de cisaillement.

Dans la recherche du comportement homogène l'interaction directe entre hétérogénéités est généralement négligée (en faveur du rapport entre hétérogénéités et ensemble de l'agrégat), ce qui dirige notre attention hors des méthodes d'homogénéisation.

Un dernier aspect est relatif à l'évolution des réseaux cristallins: l'hétérogénéité de la microstructure d'un polycristal n'est pas imposée à priori, c'est l'état actuel de la déformation qui détermine si un grain se déforme suivant un comportement homogène ou non. Il nous semble alors que l'écriture de lois d'évolution de la microstructure couplées avec l'évolution macroscopique du polycristal est d'importance primaire; encore une fois une méthode classique ne nous aurait pas permis de telles études.

Ce dernier point est en effet le point le plus important qui nous conduit à la recherche d'une méthode alternative: l'interaction entre niveau microscopique et macroscopique et, en particulier, l'écriture d'équations d'évolution de la microstructure, notamment de l'orientation cristalline[26]. Ces équations existent sous la forme de liaisons cinématiques avec le mouvement de la matière, les modèles qui en résultent peuvent manifester des limites physiquement inadmissibles. Un modèle de polycristal pour l'étude des bandes de cisaillement doit, avant tout, résoudre ce point.

Dans la méthode proposée on considère d'égale importance la position dans l'espace des points matériels d'un polycristal et l'orientation de ses réseaux cristallin. Par conséquent on place le polycristal non pas, comme d'habitude, dans l'espace euclidien bi- ou tri-dimensionnel, mais dans l'espace obtenu comme produit cartésien de cet espace euclidien (dans lequel est représentée la matière) avec l'espace des orientation (dans lequel on représente l'orientation des cristaux). D'un point de vue formel on développe dabord les passages classiques de la mécanique et de la thermodynamique des milieux continus en donnant ensuite une justification physique de ces passages.

Nos besoins de modélisation montrent l'intérêt d'une étude de type milieu micropolaire. C'est en effet sur un modèle de ce genre que notre travail a été conduit.

---

[26] C'est donc l'action du macroscopique sur le microscopique qui est mise en cause.

Je regrette que j'ai connu en retard, par rapport à la rédaction de ce texte, l'œuvre de Monsieur le professeur Gianfranco Capriz sur les milieux avec microstructure[27], qui aurait peut me conduire dans la bonne direction avec moins d'incertitudes. En me proposant, pour l'avenir, une plus étroite liaison avec ses travaux, j'espère que le Prof. Capriz puisse participer au Jury d'évaluation de cette thèse.

27 Ces travaux sont reportés dans la bibliographie car, bien que je n'ai pas put les utiliser comme sources pour mon travail tel qu'il est présenté ici, ils seront sûrement précieux pour la suite de la recherche.

DEUXIEME PARTIE

Modèle de polycristal

C H A P I T R E III

Polycristal plan

1. Introduction.

Ce chapitre a la finalité d'introduire, en raisonnant dans un cadre simplifié, le modèle de polycristal qui fait l'objet principal de cette thèse.

On a vu dans le Chapitre II quels sont les passages fondamentaux et les difficultés principales dans la formulation de modèles thermo-mécanique de polycristaux. Pour en donner une liste simplifiée on peut considérer:

_le modèle microscopique du cristal, i.e.:

_le comportement d'un système de glissement isolé d'un cristal (loi de Schmid, visco-plasticité, écrouissage primaire);

_l'interaction entre systèmes de glissement d'un cristal (écrouissage latent);

_la détection des systèmes de glissement actifs dans un cristal pour un mouvement de milieu continu donné sur sa surface (méthode de Taylor-Bishop-Hill);

_l'assemblage des grains, i.e.:

_l'évolution de la microstructure (texture cristallographique et morphologie des grains);

_le passage micro-macro (homogénéisation avec hypothèse de Taylor ou méthode autocohérente).

Une simplification tant du modèle microscopique que du problème de l'évolution de la texture peut être obtenue en utilisant un modèle avec cristaux plans pour étudier un polycristal en déformation plane. Des tels modèles, appelés de poly-lamelle, ont été illustrés dans le Chapitre II au § 5. auquel on renvoit pour la discussion sur le rapport entre un poly-lamelle et le polycristal plan qu'il représente.

Le problème thermo-mécanique du poly-lamelle sera traité dans ce chapitre suivant le schéma classique de la mécanique des milieux continus, mais dans un référentiel étendu: on considère que pour définir la configuration d'un poly-lamelle dans le plan il faut la donnée de la position de tout ses points et de leur orientation dans ce plan. Par conséquent, si V_t est le domaine dans R^2 occupé par le poly-lamelle à l'instant t, on considère un corps fictif qui occupe le domaine $V_t \times]0,\pi]$ dans R^3 et pour ce corps on écrit un problème d'évolution thermo-mécanique.

Le schéma du travail est le suivant:

- on défini la géométrie du cristal plan isolée (c'est à dire ses systèmes de glissement dans le plan): un cristal a plusieurs (on suppose trois) systèmes de glissement, chaque système est une lamelle de l'agrégat;
- on considère la loi de Schmid valable sur tout système de glissement;
- on considère que le voisinage d'une lamelle est l'ensemble des lamelles proches dans le plan et l'ensemble des lamelles ayant une orientation proche dans le demi-cercle;
- on considère la cinématique d'un assemblage de lamelles: cet assemblage peut se déformer tant par déplacement différentiel de ses points dans le plan que par rotation différentielle de ses systèmes de glissement, ces différentiels étant pris tant par rapport à la position dans le plan que par rapport à l'orientation des lamelles dans le demi-cercle;
- on considère des puissances virtuelles selon ladite cinématique et on obtient les conditions d'équilibre du poly-lamelle qui doivent être vérifiées pour tout point dans le plan et pour toute orientation dans le demi-cercle;

- on considère le bilan d'énergie libre avec une production locale (i.e. par point et par orientation) positive d'entropie: en considérant des états thermodynamiques locaux en tout point du poly-lamelle dans le plan et en toute orientation des lamelles dans le demi-cercle, l'état (et donc l'équilibre) est affecté au système de glissement isolé (en interaction avec les autres) et non simplement au cristal isolé (comme il serait pour des états locaux relatifs seulement aux positions géométriques dans le plan);
- on considère l'inégalité de Clausius-Duhem comme condition sur le comportement écrite en considérant que la production d'entropie, vu les systèmes locaux employés pour décrire l'état du corps, dépend tant d'échanges irréversibles entre points proches dans le plan géométrique que d'échanges entre orientations proches dans le demi-cercle;
- on écrit les équations de comportement nécessaires à fermer le bilan équations-inconnues ainsi obtenues.

On compare ensuite, moyennant un exemple qui permet l'obtention analytique de la solution du problème posé, le modèle proposé avec les modèles correspondant repérés dans la littérature, qui ont été illustrés au Ch.II § 5.

Dans la deuxième partie du chapitre, pour expliquer la pertinence géométrique du modèle, on montre comment la géométrie considérée peut être obtenue en projetant sur le plan de la déformation un cristal CFC. Par contre on ne poursuit pas avec une étude sur la pertinence du système d'équations posé et sur le comportement car il convient de se référer pour cela au cadre plus général qui sera introduit dans le chapitre suivant.

2. Modèle.

2.1. Géométrie et cinématique.

2.1.1. Géométrie.

On considère un poly-lamelle ayant une seule direction de glissement par lamelle et en géométrie plane. L'orientation d'une lamelle dans le plan est identifiée par un angle dans un intervalle de longueur π (un système de glissement peut s'activer selon deux directions). Les rotations des lamelles ne sont pas indépendantes mais liées par groupes de trois de façon à constituer un triangle équiangle:

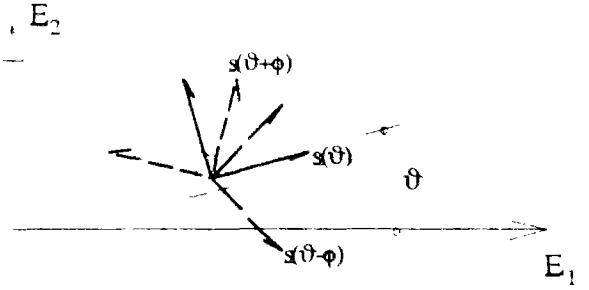


Fig.1: Schéma de poly-lamelle utilisé. $\phi=\pi/3$

Un tel groupe de trois lamelles constitue l'image d'un cristal dans le plan de la déformation. Par conséquent dans un point du plan les systèmes de glissement relatifs aux trois lamelles interagissent de façon à s'adapter à la déformation macroscopique de milieu continu. En outre il suffit de considérer un intervalle de longueur $\pi/3$ pour décrire le système.

Pour chaque lamelle on considère un comportement donné par la loi de Schmid sans écrouissage.

On suppose que l'on considère un nombre suffisant de lamelles (i.e. un volume suffisamment grand du polycristal) pour que toute grandeur dépendant de l'orientation des lamelles soit identifiable avec une fonction continue et dérivable, autant de fois qu'il faut, par rapport à cette orientation.

2.1.2. Mouvement.

La configuration d'un poly-lamelle est définie par la donné de la position géométrique dans un plan et de l'orientation dans $[-\pi/6,\pi/6[$ des ses lamelles (qu'on peut interpréter comme des points matériels avec des orientations non matérielles).

Pour une description lagrangienne du mouvement on considère une configuration de référence initiale, à l'instant 0, $V_0 \times [-\pi/6,\pi/6]$ et les transformations inconnues:

$$\underline{x}=\Xi(\underline{X},t)\in V_t \; ; \; \vartheta=\Theta(\underline{X},\theta,t)\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}[\quad \forall(\underline{X},\theta)\in V_0 \times [-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t \qquad (1)$$

Pour une description eulerienne du mouvement on considère les inconnues u, champ des vitesses dans le plan du poly-lamelle ($L(R,R^2)$ espace des vitesses dans R^2), et w, champ des vitesses de rotation des lamelles fonctions de la position actuelle dans le plan et de l'orientation actuelle dans $[-\pi/6,\pi/6]$:

$$u(\underline{x},t)\in L(R,R^2) \; ; \; w(\underline{x},\vartheta,t)\in R \quad \forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t \times [-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t \qquad (2)$$

On remarque que la transformation "géométrique" Ξ, de même que la vitesse "géométrique" u, est prise indépendante de l'orientation des lamelles: on suppose qu'il n'y a pas de filtration, c'est à dire de déplacement relatif, entre les lamelles positionnées dans un même point géométrique.

On remarque aussi que la transformation de l'orientation des lamelles dépend de leur orientation initiale, de même que leur vitesse de rotation dépend de leur orientation actuelle. La physique à la base d'un tel choix sera expliquée dans une partie suivante du chapitre.

Du point de vue des conditions initiales et au contour on a les conditions classiques pour les vitesses géométriques u. Pour les vitesses de rotation w on a les conditions analogues de repos à l'instant initial et de périodicité aux extrêmes de l'intervalle de longueur $\pi/3$ considéré (Cf. formules (II.23), (II.24) et (II.81)):

$$C_u:\begin{cases} u(\underline{x},0)=u_0(\Xi^{-1}(\underline{x},t))=0 & \forall \underline{x}\in V_t \ (\Xi^{-1}(\underline{x},t)\in V_0 \ \forall t) \\ u(\underline{x},t)=u_0(t) & \forall \underline{x}\in \partial V_{tU},\forall t \end{cases} \qquad 3$$

$$C_w:\begin{cases} w(\underline{x},\vartheta,0)=0 & \forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}] \\ w(\underline{x},-\frac{\pi}{6},t)=w(\underline{x},\frac{\pi}{6},t) & \forall \underline{x}\in V_t,\forall t \end{cases}$$

où ∂V_{tU} est la partie de la frontière où on impose les vitesses u_0 à l'instant t. Ceci donne les espaces des vitesses admissibles U et W:

$$U=\{u(\underline{x},t)\in L(R,R^2):\ u \text{ satisfait } C_u\} \qquad 4$$
$$W=\{w(\underline{x},\vartheta,t)\in R:\ w \text{ satisfait } C_w\}$$

2.1.3. Masse volumique.

On se donne, à tout instant, une masse volumique pour tout point du corps dans le domaine plan V_t et pour toute orientation dans $[-\pi/6,\pi/6]$; par hypothèse cette masse volumique sera une fonction continue et dérivable de ces variables[1]. On verra dans une partie suivante du chapitre que cette masse volumique fonction de l'orientation contient les mêmes informations d'une ODF.

On postule une équation de conservation qui s'écrit en eulerien:

$$\frac{\partial\rho(\underline{x},\vartheta,t)}{\partial t}+\mathrm{div}_{\underline{x}}\left[\rho(\underline{x},\vartheta,t)u(\underline{x},t)\right]+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\rho(\underline{x},\vartheta,t)w(\underline{x},\vartheta,t)\right]=0 \qquad 5$$

$$\forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t$$

Et en lagrangien par rapport à la masse volumique initiale (par point et orientation) ρ_0:

$$\rho_0(\underline{x},\theta)=J_{\underline{x}}(\underline{x},t)J_\theta(\underline{x},\theta,t)\rho(\underline{x},\vartheta,t)\quad \forall(\underline{x},\theta)\in V_0 x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t,\ \underline{x}=\Xi(\underline{x},t);\ \vartheta=\Theta(\underline{x},\theta,t) \qquad 6$$

$$J_{\underline{x}}(\underline{x},t)=\det\left[\frac{\partial\Xi(\underline{x},t)}{\partial\underline{x}}\right];\ J_\theta(\underline{x},\theta,t)=\frac{\partial\Theta(\underline{x},\theta,t)}{\partial\theta}$$

2.1.4. Taux de déformation.

Les interactions mécaniques entre corps (forces) sont mises en relation moyennant les puissances, fonctionnelles linéiques des taux de déformation. La définition des taux de déformation et des mouvements rigidifiants permet donc de définir les contraintes et leur équilibre avec les efforts extérieurs.

On considère un taux de déformation de la matière classique, donné par le gradient matériel géométrique des vitesses, et un "taux de déformation du matériau" donné par la dérivée par rapport à l'orientation ϑ de la vitesse de rotation des lamelles et par le gradient géométrique de cette vitesse:

---

1 Comme précédemment dit on considère à cette fin un volume suffisamment grand de matière.

$$\mathrm{grad}_{\underline{x}} u(\underline{x},t) \; ; \; \frac{\partial}{\partial \vartheta} w(\underline{x},\vartheta,t) \; ; \; \mathrm{grad}_{\underline{x}} w(\underline{x},\vartheta,t) \qquad 7$$

Le premier des nouveaux termes introduits tient compte du fait que la vitesse de rotation des lamelles varie selon leur orientation. Tant que cette dépendance était de nature strictement cinématique il n'y avait pas de raisons de considérer des puissances dues à sa variation (elles auraient été éliminées en considérant les mouvements rigidifiants). Comme dans nôtre modèle la vitesse de rotation dépend de l'orientation actuelle pour des raisons constitutives il faut considérer non nulle la puissance induite par une variation dans cette relation constitutive[2].

Il est plus facile d'expliquer la signification du troisième terme des (7), vu qu'il décrit une hétérogénéité de l'évolution des textures dans des voisinages géométriques: pour qu'il se manifeste des gradients dans le plan de la vitesse de rotation des lamelles il faut une puissance extérieure mécanique non nulle (voir note précédente).

2.1.5. Déformations.

L'état thermodynamique local d'un corps est défini par la donné d'un ensemble de variables et d'un potentiel sur cet ensemble. Parmi ces variables d'état la déformation peut apparaître, d'où la nécessité d'une définition des déformation et de relations entre déformations et taux de déformation.

Dans le modèle simplifié objet de ce chapitre on néglige les déformations réversibles, par conséquent la déformation "géométrique" de la matière n'est pas une variable d'état et on n'a pas besoin de sa définition. Par contre on considère que l'état du poly-lamelle dépend du champ des orientations des lamelles dans le plan: en passant à une thermodynamique locale il faut donc définir une fonction objective du gradient géométrique de la transformation des orientations comme variable d'état. En conclusion il faut définir une "déformation géométrique du matériau":

$$L_\Theta(\underline{x},\theta,t)=\nabla_{\underline{x}}\Theta(\underline{x},\theta,t) \qquad 8$$

on voit aisément qu'il s'agit d'un vecteur objectif qui est nul pour tout mouvement rigidifiant du poly-lamelle[3].

---

2 On voit bien l'analogie avec le passage d'une description 2-D à une description 3-D pour une plaque épaisse conservant son épaisseur tant que l'hypothèse de Kirchhoff-Love de conservation des normales demeure valable il n'y a pas de puissances dues à la rotation des sections droites (solidaires avec la surface moyenne) ni à des gradients selon la normale à la plaque. Si on considère l'hypothèse de Mindlin-Reissner par laquelle les normales demeurent droites mais perdent leur normalité à la surface moyenne, la puissance due à la rotation des sections droites dépend de l'angle de cette rotation (donc de la cote le long des normales), mais il n'y a pas de termes de gradient selon la normale. Finalement si on exclus toute hypothese simplificatrice et on considère une plaque comme un corps 3-D, il faut considérer une puissance non nulle due aux gradients selon les normales à la surface moyenne.

Le cas de Kirchhoff-Love est analogue à celui d'un poly-lamelle à un glissement avec liaison cinématique entre texture et vitesses matérielles, le cas de Mindlin-Reissner à celui d'un poly-lamelle à un glissement avec direction variable par rapport à celle de la lamelle la variable vitesse de rotation des systèmes de glissement devient indépendante du point de vue cinématique, mais il n'y a pas de puissance due à des gradients par rapport à l'orientation des lamelles.

Le cas général 3-D est analogue au modèle de poly-lamelle présenté: les gradients des vitesses par rapport à l'orientation des lamelles induisent une puissance intérieure non nulle.

3 En fait pour un changement de référentiel donnant une rotation α à l'instant t:

$$\underline{\underline{K}}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} \underline{x}'=\underline{x}_0+\underline{\underline{K}}\,\underline{x} \\ \theta'=\theta+\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Theta'(\underline{x}',\theta',t)=\Theta(\underline{x},\theta,t)+\alpha \\ \nabla_{\underline{x}'}\Theta'(\underline{x},\theta,t)=\nabla_{\underline{x}}\Theta(\underline{x},\theta,t)\cdot\underline{\underline{K}}^T \end{cases} \qquad 8b$$

et pour une rotation rigidifiante q de la configuration actuelle:

$$\Theta(\underline{x},\theta,t)=\theta+q \;\; \forall \underline{x},t \rightarrow L_\Theta(\underline{x},\theta,t)=\frac{\partial\Theta}{\partial x_1}(\underline{x},\theta,t)\underline{E}_1=\underline{0} \qquad 8c$$

2.2. Mécanique et équilibre.

2.2.1. Mouvements rigidifiants.

Les mouvements rigidifiants du poly-lamelle sont ceux de corps rigides dans le plan du problème avec orientation des lamelles fixée à la matière:

$$\text{vitesses rigidifiantes } \forall t \begin{cases} u_R(\underline{x})=u_0+\varpi\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\underline{x} \\ w_R(\underline{x},\vartheta)=\varpi \end{cases} \quad \forall u_0\in L(R,R^2),\forall\varpi\in R \tag{9}$$

2.2.2. Principe des puissances virtuelles.

On se place en absence de puissances d'accélération, on ne considère pas de forces de volume dans le poly-lamelle. On considère les champs des vitesses virtuelles:

$$u_V(\underline{x})\in L(R,R^2)\ ;\ w_V(\underline{x},\vartheta)\in R \tag{10}$$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs est, pour un sous-domaine V arbitraire du domaine occupé par le poly-lamelle dans R^2 à l'instant t:

$$P_{ext}(V,t)=\int_{\partial V} T(\underline{x},t)\cdot u_V(\underline{x})dS_t \quad \forall V\subseteq V_t,\forall t \tag{11}$$

la même puissance peut être affectée à un sous-domaine arbitraire rectangulaire[4], D, de $V_t x[-\pi/6,\pi/6]$:

$$P_{ext}(D,t)=P_{ext}(V,t) \quad \forall D=Vx[\alpha,\beta]\subseteq D_t=V_t x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t \tag{12}$$

$$P_{ext}(D,t)=\int_{\partial V x[\alpha,\beta]} T(\underline{x},\vartheta,t)\cdot u_V(\underline{x})dS_t d\vartheta \quad \forall D\subseteq D_t,\forall t$$

les fonctions T doivent donc vérifier la condition:

$$\int_{[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]} T(\underline{x},\vartheta,t)d\vartheta=T(\underline{x},t) \tag{13}$$

En conséquence du choix des taux de déformation on écrit la puissance virtuelle des efforts intérieurs dans ce sous-domaine D:

$$P_{int}(D,t)=\int_D \Big[A(\underline{x},\vartheta,t)\cdot u_V(\underline{x})-\underline{\underline{t}}(\underline{x},\vartheta,t):\mathrm{grad}_{\underline{x}}u_V(\underline{x})+B(\underline{x},\vartheta,t)w_V(\underline{x},\vartheta)- \tag{14}$$

$$-C(\underline{x},\vartheta,t)\cdot\mathrm{grad}_{\underline{x}}w_V(\underline{x},\vartheta)-D(\underline{x},\vartheta,t)\frac{\partial}{\partial\vartheta}w_V(\underline{x},\vartheta)\Big]dV_t d\vartheta \quad \forall D\subseteq D_t,\forall t$$

qui doit être nulle dans tout mouvement rigidifiant, ce qui implique:

$$\begin{cases} A(\underline{x},\vartheta,t)=0 \\ B(\underline{x},\vartheta,t)=-2\mu(\underline{x},\vartheta,t) \end{cases} \quad \forall(\underline{x},\vartheta)\in D_t,\forall t \tag{15}$$

---

[4] Un tel sous-domaine rectangulaire a une frontière du type:

$$\partial D=\partial V x[\alpha,\beta]\cup Vx\{\alpha\}\cup Vx\{\beta\} \tag{12b}$$

où V est un sous-domaine du domaine occupé par le corps dans R^2 et ∂V est sa frontière.

ayant appelé:

$$\text{antsym}\underline{\underline{t}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{t}}-\underline{\underline{t}}^T) = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{bmatrix} ; \text{sym}\underline{\underline{t}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{t}}+\underline{\underline{t}}^T) = \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad 15$$

La condition actuelle d'équilibre du poly-lamelle s'écrit alors:

$$P_{ext}(D,t) + P_{int}(D,t) = \int_{\partial V \times [\alpha,\beta]} T(\underline{x},\vartheta,t)\cdot u_V(\underline{x})dS_t d\vartheta + \quad 16$$

$$+ \int_D \Big[-\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\vartheta,t):\text{symgrad}_{\underline{x}} u_V(\underline{x}) - \mu(\underline{x},\vartheta,t)\big[\text{rot}_3 u_V(\underline{x}) + 2w_V(\underline{x},\vartheta)\big] -$$

$$-C(\underline{x},\vartheta,t)\cdot \text{grad}_{\underline{x}} w_V(\underline{x},\vartheta) - D(\underline{x},\vartheta,t)\frac{\partial}{\partial\vartheta} w_V(\underline{x},\vartheta)\Big] dV_t d\vartheta = 0$$

$$\forall D \subseteq D_t, \forall t\ ; \forall u_V(\underline{x}) \in L(R,R^2), \forall w_V(\underline{x},\vartheta) \in R$$

où on appelle:

$$\text{rot}_3 u = \text{rot}\underline{u}\cdot E_3 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} : \text{antsymgrad}_{\underline{x}} u \quad 17$$

On appelle v le taux de rotation relative matériau-matière (nul pour tout mouvement rigidifiant):

$$2v(\underline{x},\vartheta,t) = \text{rot}_3 \underline{u}(\underline{x},t) + 2w(\underline{x},\vartheta,t) \quad 18$$

on remarque qu'il existe une puissance intérieure due à ce terme. On remarque en outre que, grâce à l'hypothèse de non-filtration, on peut remplacer w avec v dans le terme en D; si on néglige les puissances associées aux dérivées secondes des vitesses géométriques u (en cohérence avec la mécanique de la déformation étudiée), on peut faire la même opération dans le terme en C.

De façon classique on déplace les dérivées partielles et, par application du lemme de Gauss, on transforme les intégrales de volume des dérivées en intégrales de surface, en tenant compte de la forme rectangulaire du domaine D:

$$-\int_D \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\vartheta,t):\text{symgrad}_{\underline{x}} u_V(\underline{x})dV_t d\vartheta = \quad 19$$

$$= -\int_{\partial V \times [\alpha,\beta]} n(\underline{x},t)\cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\vartheta,t)\cdot u_V(\underline{x})dS_t d\vartheta + \int_D \text{div}_{\underline{x}} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\vartheta,t)\cdot u_V(\underline{x})dV_t d\vartheta$$

et

$$-\int_D \mu(\underline{x},\vartheta,t)\text{rot}_3 u_V(\underline{x})dV_t d\vartheta = \int_D \text{rot}_{\underline{x}}\mu(\underline{x},\vartheta,t)\cdot u_V(\underline{x})dV_t d\vartheta \quad 20$$

où:

$$\text{rot}_{\underline{x}}\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x_2}\cdot E_1 - \frac{\partial \mu}{\partial x_1}\cdot E_2 \quad 21$$

Les autres intégrales de volume sont transformés en:

$$-\int_D C(\underline{x},\vartheta,t)\cdot \text{grad}_{\underline{x}} w_V(\underline{x},\vartheta)dV_t d\vartheta = \quad 22$$

$$= -\int_{\partial V \times [\alpha,\beta]} C(\underline{x},\vartheta,t)\cdot n(\underline{x},t) w_V(\underline{x},\vartheta)dS_t d\vartheta + \int_D \text{div}_{\underline{x}} C(\underline{x},\vartheta,t) w_V(\underline{x},\vartheta)dV_t d\vartheta$$

et

$$-\int_D D(\underline{\chi},\vartheta,t)\frac{\partial}{\partial\vartheta}w_V(\underline{\chi},\vartheta)dV_t d\vartheta = \tag{23}$$

$$= -\int\left[D(\underline{\chi},\beta,t)w_V(\underline{\chi},\beta)-D(\underline{\chi},\alpha,t)w_V(\underline{\chi},\alpha)\right]dV_t + \int_D \frac{\partial}{\partial\vartheta}D(\underline{\chi},\vartheta,t)w_V(\underline{\chi},\vartheta)dV_t d\vartheta$$

Le système est en équilibre s'il vérifie la condition du principe des puissances virtuelles:

$$P_{ext}(D,t) + P_{int}(D,t) = \tag{24}$$

$$=\int_D\left[\mathrm{div}_{\underline{\chi}}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\chi},\vartheta,t)+\mathrm{rot}_{\underline{\chi}}\mu(\underline{\chi},\vartheta,t)\right]\cdot u_V(\underline{\chi})dV_t d\vartheta +$$

$$+\int_D\left[-2\mu(\underline{\chi},\vartheta,t)+\mathrm{div}_{\underline{\chi}}\underline{\underline{C}}(\underline{\chi},\vartheta,t)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}D(\underline{\chi},\vartheta,t)\right]w_V(\underline{\chi},\vartheta)dV_t d\vartheta +$$

$$+\int_{\partial V\times[\alpha,\beta]}\left[T(\underline{\chi},\vartheta,t)-\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\chi},\vartheta,t)\cdot n(\underline{\chi},t)\right]\cdot u_V(\underline{\chi})dS_t d\vartheta - \int_{\partial V\times[\alpha,\beta]}\underline{\underline{C}}(\underline{\chi},\vartheta,t)\cdot n(\underline{\chi},t)w_V(\underline{\chi},\vartheta)dS_t d\vartheta -$$

$$-\int\left[D(\underline{\chi},\beta,t)w_V(\underline{\chi},\beta)-D(\underline{\chi},\alpha,t)w_V(\underline{\chi},\alpha)\right]dV_t = 0$$

$$\forall u_V\in L(R,R^2),\forall w_V\in R\ ;\ \forall D\subseteq D_t,\forall t$$

Les équations d'équilibre qui doivent être vérifiées localement à l'intérieur et sur la frontière du poly-lamelle sont alors:

$$\begin{cases}\begin{cases}\mathrm{div}_{\underline{\chi}}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\chi},\vartheta,t)+\mathrm{rot}_{\underline{\chi}}\mu(\underline{\chi},\vartheta,t)=0\\ -2\mu(\underline{\chi},\vartheta,t)+\mathrm{div}_{\underline{\chi}}\underline{\underline{C}}(\underline{\chi},\vartheta,t)+\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}D(\underline{\chi},\vartheta,t)=0\end{cases} & \forall(\underline{\chi},\vartheta)\in V_t x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t\\ \begin{cases}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\chi},\vartheta,t)\cdot n(\underline{\chi},t)=T(\underline{\chi},\vartheta,t)\\ \underline{\underline{C}}(\underline{\chi},\vartheta,t)\cdot n(\underline{\chi},t)=0\end{cases} & \forall(\underline{\chi},\vartheta)\in\partial V_t x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t\\ D(\underline{\chi},-\frac{\pi}{6},t)=D(\underline{\chi},\frac{\pi}{6},t) & \forall\underline{\chi}\in V_t,\forall t\end{cases} \tag{25}$$

2.3. Thermodynamique.

2.3.1. Bilan d'énergie interne.

On considère une énergie interne E et une puissance calorifique C avec des densités (massique pour la première, massique et surfacique pour la deuxième) dépendant de l'orientation ϑ des lamelles:

$$\mathring{E}(D,t)=\int_D\rho(\underline{\chi},\vartheta,t)\mathring{e}(\underline{\chi},\vartheta,t)dV_t d\vartheta \quad \forall D\subseteq D_t,\forall t \tag{26}$$

$$C(D,t)=\int_D r(\underline{\chi},\vartheta,t)dV_t d\vartheta - \int_{\partial V\times[\alpha,\beta]}q(\underline{\chi},\vartheta,t)\cdot n(\underline{\chi},t)dS_t d\vartheta \quad \forall D\subseteq D_t,\forall t$$

On écrit le bilan d'énergie interne:

$$\mathring{E}(D,t)=-P_{int}(D,t)+C(D,t)\quad \forall D\subseteq D_t,\forall t \tag{27}$$

i.e.

$$\rho(\underline{x},\vartheta,t)\mathring{e}(\underline{x},\vartheta,t)=\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\vartheta,t):\mathrm{sym}\,\mathrm{grad}_{\underline{x}}\underline{u}(\underline{x},t)+\mu(\underline{x},\vartheta,t)\left[\mathrm{rot}_3\underline{u}(\underline{x},t)+2w(\underline{x},\vartheta,t)\right]+$$
$$+C(\underline{x},\vartheta,t)\cdot\mathrm{grad}_{\underline{x}}w(\underline{x},\vartheta,t)+D(\underline{x},\vartheta,t)\frac{\partial}{\partial\vartheta}w(\underline{x},\vartheta,t)+r(\underline{x},\vartheta,t)-\mathrm{div}_{\underline{x}}\underline{q}(\underline{x},\vartheta,t)$$

$$\forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t\times\left]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right],\forall t$$

2.3.2. Bilan d'entropie et inégalité de Clausius-Duhem.

On écrit le bilan d'entropie pour une production η toujours non négative en tout point du système et pour une température qui ne dépend pas de l'orientation ϑ (on considère des flux de chaleur suffisamment rapides et hétérogènes pour rendre homogène la température). Localement on a:

$$\rho(\underline{x},\vartheta,t)T(\underline{x},t)\mathring{s}(\underline{x},\vartheta,t)= \tag{28}$$
$$=r(\underline{x},\vartheta,t)-\mathrm{div}_{\underline{x}}\underline{q}(\underline{x},\vartheta,t)+\underline{q}(\underline{x},\vartheta,t)\cdot\frac{\mathrm{grad}_{\underline{x}}T(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)}+\rho(\underline{x},\vartheta,t)T(\underline{x},t)\eta(\underline{x},\vartheta,t)$$

$$\text{avec}\ \ \eta(\underline{x},\vartheta,t)\geq 0\ \ \forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t\times\left]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right],\forall t$$

En explicitant dans le bilan d'énergie libre (définie par $\psi=e-Ts$) la dissipation volumique (définie par $D=\rho T\eta$) on obtient l'inégalité de Clausius-Duhem:

$$D(\underline{x},\vartheta,t)=\rho(\underline{x},\vartheta,t)T(\underline{x},t)\eta(\underline{x},\vartheta,t)= \tag{29}$$
$$=-\rho(\underline{x},\vartheta,t)\mathring{\psi}(\underline{x},\vartheta,t)+\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\vartheta,t):\mathrm{sym}\,\mathrm{grad}_{\underline{x}}\underline{u}(\underline{x},t)+\mu(\underline{x},\vartheta,t)\left[\mathrm{rot}_3\underline{u}(\underline{x},t)+2w(\underline{x},\vartheta,t)\right]+$$
$$+C(\underline{x},\vartheta,t)\cdot\mathrm{grad}_{\underline{x}}w(\underline{x},\vartheta,t)+D(\underline{x},\vartheta,t)\frac{\partial}{\partial\vartheta}w(\underline{x},\vartheta,t)-$$
$$-\rho(\underline{x},\vartheta,t)\mathring{T}(\underline{x},\vartheta)s(\underline{x},\vartheta,t)-\underline{q}(\underline{x},\vartheta,t)\cdot\frac{\mathrm{grad}_{\underline{x}}T(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)}\geq 0$$

$$\forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t\times\left]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right],\forall t$$

On considère que l'état local actuel dans un point du poly-lamelle est décrit par la température et par le gradient géométrique des orientations des lamelles (on néglige par hypothèse les déformations réversibles). Par conséquent le potentiel énergie libre est par rapport à la configuration initiale[5]:

$$\psi(x,\theta,t)=\psi(T(x,t),\nabla_x\Theta(x,\theta,t))\ \ \forall(x,\theta)\in V_0\times\left]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right],\forall t \tag{30}$$

Les variations de ce potentiel doivent être égales aux variations de l'énergie libre selon le bilan (29) pour tout processus thermodynamique:

---

5 L'expression (30) est objective.

$$\rho(\underline{x},\vartheta,t)\mathring{\psi}(\underline{x},\vartheta,t)= \tag{31}$$

$$=\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\vartheta,t):\mathrm{symgrad}_{\underline{x}}\underline{u}(\underline{x},t)+\mu(\underline{x},\vartheta,t)\left[\mathrm{rot}_3\underline{u}(\underline{x},t)+2w(\underline{x},\vartheta,t)\right]+$$

$$+C(\underline{x},\vartheta,t)\cdot\mathrm{grad}_{\underline{x}}w(\underline{x},\vartheta,t)+D(\underline{x},\vartheta,t)\frac{\partial}{\partial\vartheta}w(\underline{x},\vartheta,t)-$$

$$-\rho(\underline{x},\vartheta,t)\mathring{T}(\underline{x},\vartheta)s(\underline{x},\vartheta,t)-\underline{q}(\underline{x},\vartheta,t)\cdot\frac{\mathrm{grad}_{\underline{x}}T(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)}-\rho(\underline{x},\vartheta,t)T(\underline{x},t)\eta(\underline{x},\vartheta,t)=$$

$$=\rho(\underline{x},\vartheta,t)\frac{\partial\psi}{\partial T}(\underline{x},\vartheta,t)\mathring{T}(\underline{x},t)+\rho(\underline{x},\vartheta,t)\frac{\partial\psi}{\partial\nabla_x\Theta}\cdot\nabla_x\mathring{\Theta}(\underline{x},\vartheta,t)$$

$$\forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t\times]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}[,\forall t$$

pour un processus faisant varier la seule température on obtient alors la loi d'état:

$$s(\underline{x},\vartheta,t)=-\frac{\partial\psi}{\partial T}(\underline{x},t)\quad\forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t\times]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}[,\forall t \tag{32}$$

un processus qui ne fait varier que le gradient géométrique des orientations ne peut pas se vérifier pour une valeur arbitraire de la température (il se vérifie à la température de restauration); par conséquent on n'obtient pas d'autres lois d'état.

Dans l'inégalité de la dissipation, après avoir substitué la loi d'état, on distingue une dissipation thermique et une dissipation intrinsèque toujours non négatives:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{therm}}(\underline{x},\vartheta,t)=-\underline{q}(\underline{x},\vartheta,t)\cdot\frac{\mathrm{grad}_{\underline{x}}T(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)}\geq 0\quad\forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t\times]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}[,\forall t \tag{33}$$

$$\mathcal{D}_{\mathrm{int}}(\underline{x},\vartheta,t)=\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\vartheta,t):\mathrm{symgrad}_{\underline{x}}\underline{u}(\underline{x},t)+\mu(\underline{x},\vartheta,t)\left[\mathrm{rot}_3\underline{u}(\underline{x},t)+2w(\underline{x},\vartheta,t)\right]+$$

$$+(C-\rho\frac{\partial\psi}{\partial\nabla_x\Theta}\cdot\underline{\underline{F}}_{xx})(\underline{x},\vartheta,t)\cdot\mathrm{grad}_{\underline{x}}w(\underline{x},\vartheta,t)+D(\underline{x},\vartheta,t)\frac{\partial}{\partial\vartheta}w(\underline{x},\vartheta,t)\geq 0\quad\forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t\times]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}[,\forall t$$

où on a noté:

$$\underline{\underline{F}}_{xx}(\underline{x},\vartheta,t)=\nabla_x\Xi(\Xi^{-1}(\underline{x},t),\Theta^{-1}(\underline{x},\vartheta,t),t)\quad\forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t\times]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}[,\forall t \tag{34}$$

Dans un modèle simplifié la température peut être postulée homogène et constante dans le temps: les seuls effets de dissipation sont dus aux glissements et aux rotations des systèmes de glissement donnant une dissipation intrinsèque positive.

On remarque que la puissance intérieure associée au gradient géométrique des vitesses de rotation n'est pas toute dissipée. Pour simplifier la notation soit:

$$C_{irr}(\underline{x},\vartheta,t)=C(\underline{x},\vartheta,t)-\rho\frac{\partial\psi}{\partial\nabla_x\Theta}\cdot\underline{\underline{F}}_{xx}(\underline{x},\vartheta,t) \tag{35}$$

Si la dissipation est linéaire, ce qui représente des petits éloignements des états d'équilibre, un flux disparaît si son affinité disparaît. Sous une telle condition il existe un potentiel de dissipation dont la convexité assure la positivité de la dissipation (condition suffisante pour la linéarité autour d'un état d'équilibre):

$$\exists\varphi(\mathrm{symgrad}_{\underline{x}}\underline{u},v,\mathrm{grad}_{\underline{x}}w,\frac{\partial w}{\partial\vartheta})\ \text{convexe}:\ (\underline{\underline{\sigma}},\mu,C_{irr},D)\in\partial\varphi \tag{36}$$

2.4. Comportement.

Dans la suite on donne un aperçu des possibles lois de comportement pour un tel problème. On se place en isotherme pour des températures inférieures à 1/3 de la température de fusion à la pression atmosphérique du métal en objet (e.g. au dessous de 200°), ce qui nous permet de ne pas considérer l'influence de la température sur le comportement.

Pour simplifier le modèle on exclut toute dissipation d'origine thermique.

Le comportement contraintes-déformations est plastique indépendant du temps (on considère donc une échelle des temps qui valide cette hypothèse d'indépendance) avec effets élastiques négligeables. Le comportement relatif aux autres contraintes est à définir, mais, dès maintenant, on suppose qu'il est indépendant du temps aussi. Cette hypothèse semble raisonnable vu les températures en jeu et l'absence d'énergie élastique pouvant être stockée dans le système et rendue dans le temps par effet d'une réorganisation du réseau des lamelles (d'ailleurs à la température ambiante on n'observe pas d'évolutions de texture dans les alliages auxquels on s'intéresse en absence d'actions extérieures).

Les contraintes μ, C et D ont été introduites par des raisonnements formels, mais leur description en termes de comportement ne peut se faire que par l'expérience. En ce sens on essaie dans la suite de les relier aux champs de vitesse du poly-lamelle seulement dans le but de développer cet exemple. D'ailleurs ceci nous permettra aussi de nous faire une idée sur l'identification expérimentale de ces grandeurs.

2.4.1. Contraintes de Cauchy.

Loi de Schmid.

Le comportement au glissement le long de l'un des 12 systèmes d'un polycristal CFC est donné par une loi de Schmid (Cf. formule (II.59)). Dans le modèle présenté on identifie un à un systèmes de glissement et lamelles, celles-ci étant identifiées par leur orientation ϑ dans le plan. On peut donc écrire:

$$\begin{cases} \tau(\vartheta)-\tau^c(\vartheta-\frac{\pi}{6},\vartheta,\vartheta+\frac{\pi}{6}) \le 0 \quad ; \quad \dot{\gamma}(\vartheta) \ge 0 \\ \left[\tau(\vartheta)-\tau^c(\vartheta-\frac{\pi}{6},\vartheta,\vartheta+\frac{\pi}{6})\right]\dot{\gamma}(\vartheta)=0 \end{cases} \quad \forall \vartheta \in [-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}] \qquad 37$$

où $\tau(\vartheta)$ est la cission sur le système d'orientation ϑ, et la cission seuil τ^c dépend de l'histoire des glissements des lamelles associées dans leur mouvement à celle en objet (écrouissage latent). Si on considère ce comportement pour un point du poly-lamelle dans son plan et pour un instant de temps on obtient la relation nécessaire dans $V_t x[-\pi/6,\pi/6]xt$.

On écrit cette relation avec écrouissage nul (cission seuil constante pour tout système) dans le but de simplifier la suite:

$$\forall (\underline{x},\vartheta) \in V_t x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}], \forall t : \begin{cases} \tau(\underline{x},\vartheta,t)-\tau^c \le 0 \quad ; \quad \dot{\gamma}(\underline{x},\vartheta,t) \ge 0 \\ \left[\tau(\underline{x},\vartheta,t)-\tau^c\right]\dot{\gamma}(\underline{x},\vartheta,t)=0 \end{cases} \qquad 38$$

Vu qu'on néglige l'élasticité on peut considérer un comportement rigide-plastique; vu que chaque système de glissement peut s'activer selon deux directions on écrit ce comportement par rapport au signe du taux de glissement:

$$\forall (\underline{x},\vartheta) \in V_t x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}], \forall t : \tau(\underline{x},\vartheta,t)=\text{sign}\left[\dot{\gamma}(\underline{x},\vartheta,t)\right]\tau^c \qquad 39$$

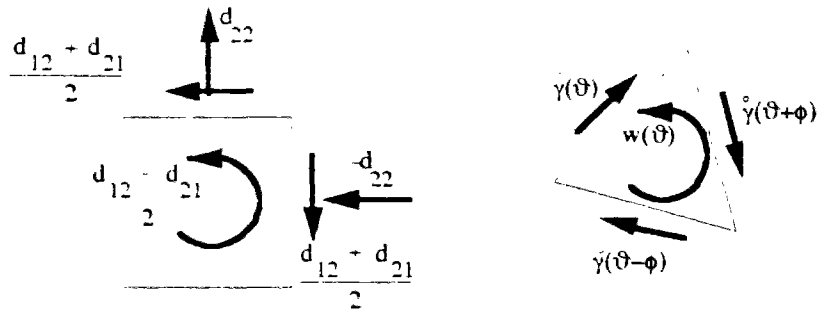
Relations de localisation.

La relation entre le taux de glissement et le taux de rotation d'un système et le taux de déformation de la matière et la définition de la cission résolue sur ce système de glissement à partir

du tenseur de contrainte de Cauchy, permettent de passer du comportement par lamelle au comportement par élément de volume du milieu continu[6]. On défini:

$$s(\vartheta)=\cos\vartheta E_1+\sin\vartheta E_2 \; ; \; m(\vartheta)=-\sin\vartheta E_1+\cos\vartheta E_2 \; ; \; m\otimes s(\vartheta)=\begin{bmatrix} \frac{-\sin 2\vartheta}{2} & -\sin^2\vartheta \\ \cos^2\vartheta & \frac{\sin 2\vartheta}{2} \end{bmatrix} \qquad 40$$

Dans un point $\underline{x}$ et à un instant de temps t fixés, la vitesse géométrique de milieu continu, u (qui ne dépend pas de l'orientation des lamelles par l'hypothèse de non filtration), est liée aux taux de glissement, $\overset{\circ}{\gamma}$, des trois lamelles représentant un cristal dans le plan de la déformation et au taux de rotation, w, des dites lamelles. On obtient donc, en absence d'autres mécanismes d'adaptation aux déformations de milieu continu que les glissements et les rotations du réseau, les conditions de compatibilité lamelle-milieu continu (ou de localisation des déformations)[7]:



$$\underline{\underline{d}}(\underline{x},t)=\mathrm{grad}_{\underline{x}}u(\underline{x},t)= \qquad 41$$

$$=\overset{\circ}{\gamma}(\underline{x},\vartheta-\tfrac{\pi}{3},t)m\otimes s(\vartheta-\tfrac{\pi}{3})+\overset{\circ}{\gamma}(\underline{x},\vartheta,t)m\otimes s(\vartheta)+\overset{\circ}{\gamma}(\underline{x},\vartheta+\tfrac{\pi}{3},t)m\otimes s(\vartheta+\tfrac{\pi}{3})+w(\underline{x},\vartheta,t)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\forall(\underline{x},\vartheta)\in\partial V_t\times]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}[,\forall t$$

Cette équation, avec hypothèse d'incompressibilité du milieu continu, donne pour toute orientation dans l'intervalle $[-\pi/6,\pi/6]$ un système de 3 équations avec les 3 inconnues taux de glissement[8]:

---

6 Ces définitions peuvent être vues comme conditions respectivement d'équilibre et de compatibilité entre lamelles et milieu continu.

7 Il faut noter que u et w sont les inconnues eulériennes du problème posé: l'un est du coté macroscopique de l'équation (41), l'autre donne l'orientation du macroscopique par rapport au microscopique.

8 On remarque que pour le poly-lamelle à deux systèmes de glissement présenté dans Ch.II § 5., ces équations de compatibilité donnent les deux taux de glissement en fonction de la partie symétrique du gradient de vitesse et une liaison cinématique entre w, la partie antisymétrique de ce gradient et ces deux taux de glissement. Dans le cas présent, ayant plus de systèmes de glissement que le nécessaire, la liaison cinématique n'existe pas. Dans un polycristal CFC on a un nombre de systèmes de glissement beaucoup plus élevé que ce qui serait nécessaire pour adapter les cristaux à tout taux de déformation extérieur, par conséquent l'absence de liaison cinématique est justifiée.

42

$$\forall(\underline{x},\vartheta)\in\partial V_t x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t$$

$$\begin{cases} -d_{11}(\underline{x},t)=d_{22}(\underline{x},t)=\frac{1}{2}\left[\mathring{\gamma}(\underline{x},\vartheta-\frac{\pi}{3},t)\sin2(\vartheta-\frac{\pi}{3})+\mathring{\gamma}(\underline{x},\vartheta,t)\sin2\vartheta+\mathring{\gamma}(\underline{x},\vartheta+\frac{\pi}{3},t)\sin2(\vartheta+\frac{\pi}{3})\right] \\ d_{12}(\underline{x},t)+w(\underline{x},\vartheta,t)=-\mathring{\gamma}(\underline{x},\vartheta-\frac{\pi}{3},t)\sin^2(\vartheta-\frac{\pi}{3})-\mathring{\gamma}(\underline{x},\vartheta,t)\sin^2\vartheta-\mathring{\gamma}(\underline{x},\vartheta+\frac{\pi}{3},t)\sin^2(\vartheta+\frac{\pi}{3}) \\ d_{21}(\underline{x},t)-w(\underline{x},\vartheta,t)=\mathring{\gamma}(\underline{x},\vartheta-\frac{\pi}{3},t)\cos^2(\vartheta-\frac{\pi}{3})+\mathring{\gamma}(\underline{x},\vartheta,t)\cos^2\vartheta+\mathring{\gamma}(\underline{x},\vartheta+\frac{\pi}{3},t)\cos^2(\vartheta+\frac{\pi}{3}) \end{cases}$$

$$\det(\underline{x},\vartheta,t)=4\sin^3\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\neq0\ \forall\vartheta$$

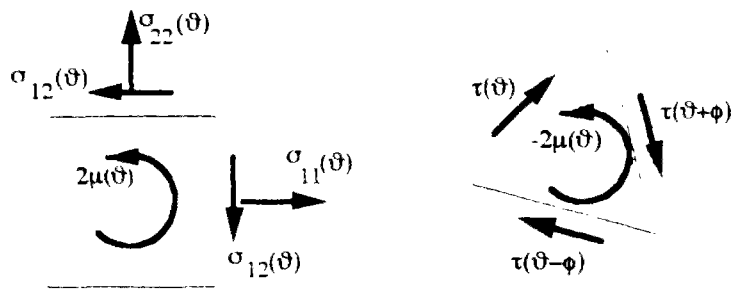
Le déterminant de ces systèmes est positif indépendamment de ϑ, de façon qu'on peut écrire le champ des taux de glissement en fonction du taux de déformation du milieu et du taux de rotation des lamelles pour tout ϑ. Pour abréger on néglige la notation des variables $\underline{x}$ et t; la solution est:

43

$$\forall(\underline{x},\vartheta)\in\partial V_t x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t$$

$$\begin{cases} \mathring{\gamma}(\vartheta-\frac{\pi}{3})=\frac{2}{3}\left[-2d_{22}\sin(2\vartheta+\frac{\pi}{3})-(d_{12}+d_{21})\cos(2\vartheta+\frac{\pi}{3})-\frac{d_{12}-d_{21}}{2}-w(\vartheta)\right] \\ \mathring{\gamma}(\vartheta)=\frac{2}{3}\left[2d_{22}\sin2\vartheta+(d_{12}+d_{21})\cos2\vartheta-\frac{d_{12}-d_{21}}{2}-w(\vartheta)\right] \\ \mathring{\gamma}(\vartheta+\frac{\pi}{3})=\frac{2}{3}\left[-2d_{22}\sin(2\vartheta-\frac{\pi}{3})-(d_{12}+d_{21})\cos(2\vartheta-\frac{\pi}{3})-\frac{d_{12}-d_{21}}{2}-w(\vartheta)\right] \end{cases}$$

La relation entre la description mécanique du système par la cinématique des trois lamelles et celle par la cinématique de milieu continu est donnée par l'égalité des densités des puissances des efforts intérieurs écrites selon les deux modèles. Cette identité doit être vérifiée quelque soit le mouvement virtuel de milieu continu avec glissements des lamelles compatibles (pour obtenir σ ou μ en fonction de τ) ou quelque soient les glissements virtuels des lamelles avec mouvement de milieu continu compatible (donnant τ en fonction de σ et μ):



44

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\vartheta,t):\mathrm{symgrad}_{\underline{x}}u_V(\underline{x})+\mu(\underline{x},\vartheta,t)\mathrm{rot}_3u_V(\underline{x})=$$

$$=\tau(\underline{x},\vartheta-\frac{\pi}{3},t)\mathring{\gamma}_V(\underline{x},\vartheta-\frac{\pi}{3})+\tau(\underline{x},\vartheta,t)\mathring{\gamma}_V(\underline{x},\vartheta)+\tau(\underline{x},\vartheta+\frac{\pi}{3},t)\mathring{\gamma}_V(\underline{x},\vartheta+\frac{\pi}{3})-2\mu(\underline{x},\vartheta,t)w_V(\underline{x},\vartheta,t)$$

$$\forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t$$

$\forall \mathrm{symgrad}_{\underline{x}}u_V, v_V$ ($\mathring{\gamma}_V$ donné par les (43)) ou $\forall\mathring{\gamma}_V$ ($\mathrm{symgrad}_{\underline{x}}u_V$ et v_V donnés par les (42))

ce qui introduit le champ τ, cission résolue sur les systèmes de glissement selon leur orientation, et donne les équations d'équilibre lamelle-milieu continu ou de localisation des contraintes. En prenant un mouvement des lamelles produit par un taux de déformation de milieu continu arbitraire avec taux de rotation relative matériau-matière nul on obtient (on néglige la notation des variables $\underline{x}$ et t dans les équations):

$$\text{symgrad}_{\underline{x}}\underline{u}_V \neq \underline{\underline{0}} \text{ et } \text{rot}_3\underline{u}_V = -2w_V \rightarrow \forall \underline{x} \in V_t, \forall t \qquad 45$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2}(\vartheta) = -\dfrac{2}{3}\tau(\vartheta-\dfrac{\pi}{3})\sin(2\vartheta+\dfrac{\pi}{3}) + \dfrac{2}{3}\tau(\vartheta)\sin 2\vartheta - \dfrac{2}{3}\tau(\vartheta+\dfrac{\pi}{3})\sin(2\vartheta-\dfrac{\pi}{3}) \\ \sigma_{12}(\vartheta) = -\dfrac{2}{3}\tau(\vartheta-\dfrac{\pi}{3})\cos(2\vartheta+\dfrac{\pi}{3}) + \dfrac{2}{3}\tau(\vartheta)\cos 2\vartheta - \dfrac{2}{3}\tau(\vartheta+\dfrac{\pi}{3})\cos(2\vartheta-\dfrac{\pi}{3}) \qquad \forall \vartheta \in [-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}] \\ \sigma_{11}(\vartheta)+\sigma_{22}(\vartheta) = p \end{cases}$$

et pour un taux de rotation relative matériau matière arbitraire:

$$\text{rot}_3\underline{u}_V \neq -2w_V \rightarrow \forall \forall \underline{x} \in V_t, \forall t \qquad 46$$

$$\mu(\vartheta) = -\frac{\tau(\vartheta-\frac{\pi}{3})+\tau(\vartheta)+\tau(\vartheta+\frac{\pi}{3})}{3} \; ; \; \forall \vartheta \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$$

finalement pour un mouvement de milieu continu produit par des taux de glissement des lamelles arbitraires:

$$\forall \underline{x} \in V_t, \forall t \qquad 47$$

$$\begin{cases} \tau(\vartheta-\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2}(\vartheta)\sin 2(\vartheta-\dfrac{\pi}{3}) + \sigma_{12}(\vartheta)\cos 2(\vartheta-\dfrac{\pi}{3}) - \mu(\vartheta) \\ \tau(\vartheta) = \dfrac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2}(\vartheta)\sin 2\vartheta + \sigma_{12}(\vartheta)\cos 2\vartheta - \mu(\vartheta) \qquad \forall \vartheta \in [-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}] \\ \tau(\vartheta+\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2}(\vartheta)\sin 2(\vartheta+\dfrac{\pi}{3}) + \sigma_{12}(\vartheta)\cos 2(\vartheta+\dfrac{\pi}{3}) - \mu(\vartheta) \end{cases}$$

Il faut noter que la contrainte μ n'apparaît pas dans les (45), de façon que les contraintes de Cauchy peuvent être calculées par les mêmes relations (45) à partir des cissions modifiées obtenues en substituant μ avec une fonction arbitraire (éventuellement nulle) dans les (47). Si on considère alors:

$$\forall \underline{x} \in V_t, \forall t \qquad 48$$

$$\begin{cases} \tau^*(\vartheta-\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2}(\vartheta)\sin 2(\vartheta-\dfrac{\pi}{3}) + \sigma_{12}(\vartheta)\cos 2(\vartheta-\dfrac{\pi}{3}) \\ \tau^*(\vartheta) = \dfrac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2}(\vartheta)\sin 2\vartheta + \sigma_{12}(\vartheta)\cos 2\vartheta \qquad \forall \vartheta \in [-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}] \\ \tau^*(\vartheta+\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2}(\vartheta)\sin 2(\vartheta+\dfrac{\pi}{3}) + \sigma_{12}(\vartheta)\cos 2(\vartheta+\dfrac{\pi}{3}) \end{cases}$$

on obtient l'équivalence des densités des puissances des efforts intérieurs des deux modèles sous la forme:

$$\forall \underline{x} \in V_t, \forall t: \qquad (49)$$

$$\tau^*(\vartheta-\frac{\pi}{3})\mathring{\gamma}(\vartheta-\frac{\pi}{3})+\tau^*(\vartheta)\mathring{\gamma}(\vartheta)+\tau^*(\vartheta+\frac{\pi}{3})\mathring{\gamma}(\underline{x},\vartheta+\frac{\pi}{3})=$$

$$=\left|\sigma_{22}(\vartheta)-\sigma_{11}(\vartheta)\right|d_{22}+\sigma_{12}(\vartheta)(d_{12}+d_{21})=\underline{\underline{\sigma}}(\vartheta):\mathrm{symgrad}_{\underline{x}}\underline{u} \;;\; \forall\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$$

Il est facile de se convaincre que les lois de Schmid sont relatives aux cissions τ^* définies dans les (49) plutôt que aux cissions τ des (48) car on ne tient pas compte de la rotation du réseau dans leur identification.

Comportement.

Le comportement des contraintes de Cauchy est défini par la loi de Schmid (40) moyennant les relations de localisation ci-dessus. L'hypothèse d'incompressibilité entraîne que le tenseur de contrainte de Cauchy ne peut être déterminé que à une pression hydrostatique arbitraire près:

$$\sigma_{11}(\underline{x},\vartheta,t)+\sigma_{22}(\underline{x},\vartheta,t)=p \quad \forall p \;\; \forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t \qquad (50)$$

Les autres relations sont:

$$\forall \underline{x} \in V_t, \forall t: \qquad (51)$$

$$\frac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2}(\vartheta)=\frac{2}{3}\tau^c\Big\{\mathrm{sign}\left|2S_-d_{22}+C_-(d_{21}+d_{12})+v(\vartheta)\right|S_-+$$
$$+\mathrm{sign}\left|2Sd_{22}+C(d_{21}+d_{12})-v(\vartheta)\right|S+\mathrm{sign}\left|2S_+d_{22}+C_+(d_{21}+d_{12})+v(\vartheta)\right|S_+\Big\}$$
$$\sigma_{12}(\vartheta)=\frac{2}{3}\tau^c\Big\{\mathrm{sign}\left|2S_-d_{22}+C_-(d_{21}+d_{12})+v(\vartheta)\right|C_-+$$
$$+\mathrm{sign}\left|2Sd_{22}+C(d_{21}+d_{12})-v(\vartheta)\right|C+\mathrm{sign}\left|2S_+d_{22}+C_+(d_{21}+d_{12})+v(\vartheta)\right|C_+\Big\}$$
$$\forall\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$$

ayant noté:

$$S_-=\sin(2\vartheta-\frac{\pi}{3}) \;;\; S=\sin2\vartheta \;;\; S_+=\sin(2\vartheta+\frac{\pi}{3}) \;;\; C_-=\cos(2\vartheta-\frac{\pi}{3}) \;;\; C=\cos2\vartheta \;;\; C_+=\cos(2\vartheta+\frac{\pi}{3}) \qquad (52)$$

$$\mathrm{sign}(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$$

2.4.2. Contraintes μ.

On remarque d'abord que l'équation (47) ne permet pas de définir le comportement de μ car le comportement des cissions τ qui y apparaissent est aussi inconnu.

La linéarité de la dissipation intrinsèque à proximité de l'équilibre impose que μ dépende de v, taux de rotation relative entre la matière (dont le taux de rotation est $-\mathrm{rot}_3u/2$) et le "matériau" (dont le taux de rotation est w). D'ailleurs, d'un point de vue physique, il est légitime de postuler qu'il ne se vérifie pas d'effets sur les contraintes (et donc sur l'équilibre du milieu) tant que la rotation relative matériau-matière est nulle, c'est à dire tant que les grains tournent suivant leur glissement plastique.

En nous appuyant sur l'intuition physique du phénomène on peut considérer un effet tel à contraster la rotation relative et, en première approximation, dépendant de façon linéaire de celle-ci. En outre on peut imaginer que ce comportement ne dépende pas de l'orientation actuelle du matériau:

$$\forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t: \mu(\underline{x},\vartheta,t)=2H(\underline{x},t)v(\underline{x},\vartheta,t) \qquad (54)$$

Pour faciliter la discussion qui suit, on considère un comportement homogène indépendant du temps (H uniforme dans l'espace et constant dans le temps)[9].

2.4.3. Contraintes D.

On regarde d'abord les cas limites par rapport aux vitesses de rotation w.

Si la dérivée de la vitesse de rotation des systèmes de glissement par rapport à leur orientation est nulle le poly-lamelle se comporte comme une seule lamelle avec les systèmes de glissement solidaires entre eux. Inversement si ce gradient devient arbitraire, dans le sens qu'il engendre une puissance intérieure toujours nulle, le poly-lamelle se comporte comme s'il n'avait qu'un seul système de glissement par lamelle et si ces lamelles pouvait tourner sous énergie nulle (i.e. sans effort). En résumé:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}w=0 \text{ (i.e. } w=w(\underline{\mathbf{x}},t)) \Rightarrow \text{systèmes solidaires} \qquad 55$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}w \text{ arbitraire} \Rightarrow \text{lamelles libres}$$

Par conséquent D ne doit pas s'annuler dans un point $\mathbf{x}$ si dans ce point ne s'annule pas $\partial w/\partial\vartheta$ aussi (pour de températures élevées on peut alors imaginer une diminution de D jusqu'à que les orientations des systèmes de glissement ne soient plus reliés aux effets mécaniques extérieurs). D'un autre coté si $D\to\infty$ il faut, pour que la puissance des efforts intérieurs soit finie, que les systèmes du poly-lamelle soient solidaires entre eux ("rigidification" de la microstructure) ce qui ne semble pas physiquement possible tant qu'il y a des déformations plastiques en jeu. En résumé on peut imaginer une valeur limite de D et une relation linéaire entre D et $\partial w/\partial\vartheta$ au voisinage du point D=0 et $\partial w/\partial\vartheta=0$.

Des discontinuités par rapport à ϑ dans la vitesse de rotation w, pour un $\mathbf{x}$ fixé, semblent peu probables en régime de transformation stable: dans un même point $\mathbf{x}$ on attend une déformation homogène et, par conséquent, on ne s'attend pas que deux réseaux ayant presque la même orientation tournent avec des vitesses très différentes. En observant l'équation d'équilibre de D sur le bord de $[-\pi/6,\pi/6]$, on voit que sur une discontinuité de w par rapport à ϑ la contrainte D devrait être nulle. En conclusion si on exclue de telles discontinuités, et si on postule la continuité de D, on peut affirmer que D est non nul en tout point où $\partial w/\partial\vartheta$ est non nul et que ce deux termes ont le même signe (de façon que leur produit soit toujours positif).

On rappelle que pour les grandes déformations plastiques l'énergie mécanique stockée dans la structure des dislocations est proportionnelle au carré de la désorientation des cellules (Cf. formule (I.6))

A partir de ces considérations un comportement linéaire pour D peut être accepté en première approximation:

$$\forall(\underline{\mathbf{x}},\vartheta)\in V_t\times[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t: D(\underline{\mathbf{x}},\vartheta,t)=K(\underline{\mathbf{x}},t)\frac{\partial w}{\partial\vartheta}(\underline{\mathbf{x}},\vartheta,t) \qquad 56$$

où le coefficient K varie éventuellement dans le temps et dans l'espace en fonction, par exemple, de la température ou du niveau d'écrouissage. Dans la suite on considère K uniforme et constant pour simplicité.

2.4.4. Contraintes C.

On put imaginer qu'un gradient d'espace de la vitesse de rotation se manifeste de façon importante là où la déformation devient moins homogène, c'est à dire comme premier symptôme d'une localisation du gradient des vitesses (voir par exemple les conjectures sur les bandes de cisaillement basées sur l'assouplissement géométrique présentées dans le Chapitre I § 2.2.2. et § 2.3.1.). Si la déformation est homogène dans un voisinage de $\mathbf{x}$, dans ce voisinage on attend un taux de rotation du matériau homogène aussi; si, au contraire, il y a une discontinuité des vitesses en $\mathbf{x}$, il faut s'attendre à une discontinuité du taux de rotation. En résumé (n soit la normale à la ligne de discontinuité):

---

9 Dans la suite du travail, en comparant l'écriture dans un référentiel et celle intrinsèque des équations d'équilibre, on verra que les contraintes B, et donc μ, dérivent de la présence du référentiel, et non de la nature intrinsèque du corps étudié. Par conséquent le comportement de ces contraintes sera plutôt à obtenir par une liaison avec les autres contraintes que par une équation constitutive.

$$\mathrm{grad}_{\underline{x}}\underline{u}(\underline{x},t)=\underline{\underline{d}}(t) \Rightarrow \mathrm{grad}_{\underline{x}}w(\underline{x},\vartheta,t)=0 \qquad 57$$

$$[\![\underline{u}]\!]_{\underline{x}}(\underline{x},t)\neq 0 \Rightarrow [\![w]\!]_{\underline{x}}(\underline{x},\vartheta,t)\neq 0 \Rightarrow \underline{C}(\underline{x},\vartheta,t)\cdot\underline{n}(\underline{x},t)=0$$

(la dernière condition sur C peut être dérivée de la lecture des équations d'équilibre sur une couche limite).

Pour simplifier l'exemple traité à présent on suppose tant la déformation que la vitesse de rotation des lamelles homogènes dans le corps, de façon qu'on considère:

$$\mathrm{grad}_{\underline{x}}\underline{u}(\underline{x},t)=\underline{\underline{d}}(t) \Rightarrow \mathrm{grad}_{\underline{x}}w(\underline{x},\vartheta,t)=0 \; ; \; \underline{C}(\underline{x},\vartheta,t)=\underline{C}_{irr}(\underline{x},\vartheta,t)=0 \qquad 58$$

2.4.5. Type de réseau.

Dans nôtre modèle la vitesse w doit être la même pour les trois lamelles représentant un même cristal, ce qui met en relation les valeurs pris par la fonction $w(\vartheta)$ pour une translation de $+\pi/3$ ou de $-\pi/3$:

$$w(\underline{x},\vartheta,t)=w(\underline{x},\vartheta+\frac{\pi}{3},t)=w(\underline{x},\vartheta-\frac{\pi}{3},t) \quad \forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t\times[0,\pi],\forall t \qquad 59$$

Cette équation peut être vue comme une liaison cinématique, elle a été implicitement postulée en étudiant le système sur un tiers du demi-cercle.

2.4.6. Vérification de l'inégalité de Clausius-Duhem.

Les comportements définis ci-dessus doivent vérifier l'inégalité de Clausius-Duhem. Faisant référence à la dissipation intrinsèque, on a, quelque soit le processus thermo-mécanique (Cf. formule (33) et formules (40), (45) et (54) et (56)):

$$\mathcal{D}_{int}(\underline{x},\vartheta,t) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\vartheta,t):\mathrm{sym}\,\mathrm{grad}_{\underline{x}}\underline{u}(\underline{x},t)+\mu(\underline{x},\vartheta,t)\left[\mathrm{rot}_3\underline{u}(\underline{x},t)+2w(\underline{x},\vartheta,t)\right]+ \qquad 60$$

$$+\underline{C}_{irr}(\underline{x},\vartheta,t)\cdot\mathrm{grad}_{\underline{x}}w(\underline{x},\vartheta,t)+D(\underline{x},\vartheta,t)\frac{\partial}{\partial\vartheta}w(\underline{x},\vartheta,t) =$$

$$= \tau^c\left\{\left|\mathring{\gamma}(\underline{x},\vartheta-\frac{\pi}{3},t)\right|+\left|\mathring{\gamma}(\underline{x},\vartheta,t)\right|+\left|\mathring{\gamma}(\underline{x},\vartheta+\frac{\pi}{3},t)\right|\right\} + 4Hv^2(\underline{x},\vartheta,t) + K\left[\frac{\partial w}{\partial\vartheta}(\underline{x},\vartheta,t)\right]^2 \geq 0$$

$$\forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t\times[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t$$

vrai pour $\tau^c>0$, $H>0$ et $K>0$.

En effet le taux de rotation relative matériau-matière, v, et le gradient du taux de rotation du matériau w par rapport à son orientation ϑ ne sont jamais disjoints, de façon que la condition $H>0$ et $K>0$, bien que suffisante avec la $\tau^c>0$ pour vérifier la (60), n'est pas nécessaire. Si les coefficients H et K ont des signes opposé ($HK<0$) il faut que la condition:

$$4Hv^2(\underline{x},\vartheta,t) + K\left[\frac{\partial w}{\partial\vartheta}(\underline{x},\vartheta,t)\right]^2 \geq 0 \quad \forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t\times[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t \qquad 61$$

$$2v(\underline{x},\vartheta,t)=\mathrm{rot}_3\underline{u}(\underline{x},t)+2w(\underline{x},\vartheta,t)$$

soit vérifiée quelque soit le processus (évidemment le cas $H<0$ et $K<0$ est exclus par la (60)).

2.5. Résumé des équations.

En conclusion on obtient, pour un poly-lamelle en isotherme en absence de forces de volume et d'accélérations, que l'évolution de la texture est régie par la condition initiale et par l'équation différentielle:

$$\rho(\underline{x},\vartheta,0)=\rho_0(\underline{x},\vartheta)\quad \forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t x[0,\pi] \tag{5}$$

$$\frac{\partial\rho(\underline{x},\vartheta,t)}{\partial t}+\mathrm{div}_{\underline{x}}\left[\rho(\underline{x},\vartheta,t)u(\underline{x},t)\right]+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\rho(\underline{x},\vartheta,t)w(\underline{x},\vartheta,t)\right]=0\quad \forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t$$

où les champs u et w sont solution du problème:
compatibilité cinématique (∂V_{tU} partie de la frontière avec vitesses imposées à l'instant t):

$$\begin{cases} u(\underline{x},0)=0 \\ w(\underline{x},\vartheta,0)=0 \end{cases} \forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}] \tag{3}$$

$$\begin{cases} u(\underline{x},t)=u_0(t) & \forall\underline{x}\in\partial V_{tU},\forall t \\ w(\underline{x},-\frac{\pi}{6},t)=w(\underline{x},\frac{\pi}{6},t) & \forall\underline{x}\in V_t,\forall t \end{cases}$$

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x},t)=\mathrm{grad}_{\underline{x}}u(\underline{x},t)\ ;\ \mathrm{tr}\underline{\underline{d}}(\underline{x},t)=0\quad \forall\underline{x}\in V_t,\forall t$$

$$v(\underline{x},\vartheta,t)=\frac{d_{12}(\underline{x},t)-d_{21}(\underline{x},t)}{2}+w(\underline{x},\vartheta,t)\quad \forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t \tag{18}$$

équilibre des forces (et définition des densités dans $[-\pi/6,\pi/6]$ des tractions):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}(\underline{x},\vartheta,t)+\dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}(\underline{x},\vartheta,t)+\dfrac{\partial\mu}{\partial x_2}(\underline{x},\vartheta,t)=0 \\ \dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}(\underline{x},\vartheta,t)-\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_2}(\underline{x},\vartheta,t)-\dfrac{\partial\mu}{\partial x_1}(\underline{x},\vartheta,t)=0 & \forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t \\ -2\mu(\underline{x},\vartheta,t)+\dfrac{\partial C_1}{\partial x_1}(\underline{x},\vartheta,t)+\dfrac{\partial C_2}{\partial x_2}(\underline{x},\vartheta,t)+\dfrac{\partial D}{\partial\vartheta}(\underline{x},\vartheta,t)=0 \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11}(\underline{x},\vartheta,t)n_1(\underline{x},t)+\sigma_{12}(\underline{x},\vartheta,t)n_2(\underline{x},t)=T_1(\underline{x},\vartheta,t) \\ \sigma_{21}(\underline{x},\vartheta,t)n_1(\underline{x},t)+\sigma_{22}(\underline{x},\vartheta,t)n_2(\underline{x},t)=T_2(\underline{x},\vartheta,t) & \forall(\underline{x},\vartheta)\in\partial V_t x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t \\ C_1(\underline{x},\vartheta,t)n_1(\underline{x},t)+C_2(\underline{x},\vartheta,t)n_2(\underline{x},t)=0 \end{cases}$$

$$D(\underline{x},-\frac{\pi}{6},t)=D(\underline{x},\frac{\pi}{6},t)\qquad \forall\underline{x}\in V_t,\forall t$$

comportement:

$$\forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t x]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}[,\forall t:$$

$$\sigma_{11}(\underline{x},\vartheta,t)+\sigma_{22}(\underline{x},\vartheta,t)=p \text{ indéterminé} \tag{50}$$

$$\frac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2}(\underline{x},\vartheta,t)=\frac{2}{3}\tau^c\Big\{\text{sign}\Big[2S_-d_{22}(\underline{x},t)+C_-(d_{21}+d_{12})(\underline{x},t)+v(\underline{x},\vartheta,t)\Big]S_-+ \tag{51}$$

$$+\text{sign}[2Sd_{22}+C(d_{21}+d_{12})-v]S+\text{sign}[2S_+d_{22}+C_+(d_{21}+d_{12})+v]S_+\}$$

$$\sigma_{12}(\underline{x},\vartheta,t)=\frac{2}{3}\tau^c\Big\{\text{sign}\Big[2S_-d_{22}(\underline{x},t)+C_-(d_{21}+d_{12})(\underline{x},t)+v(\underline{x},\vartheta,t)\Big]C_-+$$

$$+\text{sign}[2Sd_{22}+C(d_{21}+d_{12})-v]C+\text{sign}[2S_+d_{22}+C_+(d_{21}+d_{12})+v]C_+\}$$

$$\tau^c>0$$

$$\mu(\underline{x},\vartheta,t)=H(d_{12}(\underline{x},t)+d_{21}(\underline{x},t))+2Hw(\underline{x},\vartheta,t)\ ;\ H>0 \text{ (ou } H<0 \text{ sous condition (61))} \tag{54}$$

$$D(\underline{x},\vartheta,t)=K\frac{\partial w}{\partial\vartheta}(\underline{x},\vartheta,t)\ ;\ K>0 \text{ (ou } K<0 \text{ sous condition (61))} \tag{56}$$

$$C(\underline{x},\vartheta,t)=0 \tag{58}$$

3. Discussion.

3.1. Exemples.

On écrit un problème isotherme homogène d'un poly-lamelle:

- le domaine plan est limité par les droites x_2=-h/2 et x_2=h/2 (il est infini dans la direction x_1);
- sur ces deux droites on impose des tractions par unité de surface respectivement $T_i(x_1,t)$ et $-T_i(x_1,t)$ auto-équilibrés (i=1,2);
- à l'infini dans les deux directions de l'axe x_1 on impose de tractions nulles;
- on considère nulle la pression hydrostatique appliquée;
- la déformation est homogène et isochore, on suppose qu'elle peut être pilotée à l'aide des tractions T;
- on considère un problème homogène: les champs et les équations écrites dans la suite sont pour tout x dans le domaine;
- on compte les angles à partir de l'axe E_2.

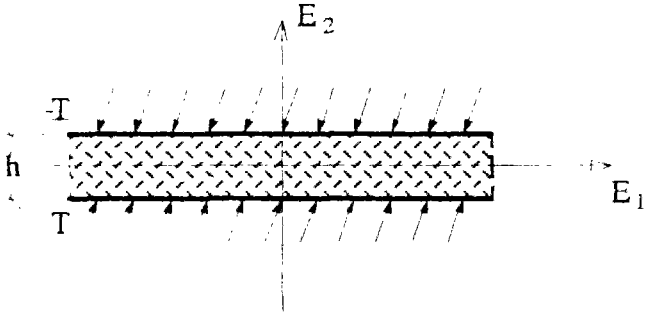


Fig.2: Géométrie de l'exemple proposé.

Le problème s'écrit ($\forall \underline{x} \in V_t$):
_conditions cinématiques initiales et au contour:

$$\begin{cases} u(0)=0 \\ w(\vartheta,0)=0 \quad \forall \vartheta \in [-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}] \end{cases} \qquad 62$$

$$\begin{cases} \exists \underline{x}^\circ=[0\ \frac{h}{2}]:\ u(\underline{x}^\circ,t)=0 \\ \\ w(-\frac{\pi}{6},t)=w(\frac{\pi}{6},t) \end{cases} \qquad \forall t$$

_équations d'équilibre:
(dans l'équilibre des forces (25) on introduit le comportement des contraintes μ, D et C établis; en outre, vu qu'on considère des champs homogènes, les deux équations indéfinies d'équilibre sur σ sont toujours vérifiées -dérivées partielles des contraintes par rapport à x toujours nulles-; finalement on tient compte des (12))

$$K\frac{\partial^2 w}{\partial\vartheta^2}(\vartheta,t)-4Hw(\vartheta,t)=2H[d_{12}(t)-d_{21}(t)] \quad \forall\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t \tag{63}$$

$$\frac{\partial w}{\partial\vartheta}(-\frac{\pi}{6},t)=\frac{\partial w}{\partial\vartheta}(\frac{\pi}{6},t) \quad \forall t$$

$$\begin{cases} 3\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\sigma_{11}(\vartheta,t)\frac{\rho(\vartheta,t)}{\rho_0}d\vartheta=T_1(t) \\ 3\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\sigma_{12}(\vartheta,t)\frac{\rho(\vartheta,t)}{\rho_0}d\vartheta=T_2(t) \end{cases} \quad \forall t \ (10)$$

_comportement des contraintes de Cauchy selon les (50), avec p=0, et (51).

La première des équation (63) ci-dessus peut être intégrée avec comme solution de l'équation homogène associée la fonction w_o:

$$K\frac{\partial^2 w_o}{\partial\vartheta^2}(\vartheta,t)-4Hw_o(\vartheta,t)=0 \quad \forall\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t \rightarrow \tag{64}$$

$$\rightarrow w_o(\vartheta,t)=X(t)e^{f\vartheta}+Z(t)e^{-f\vartheta} \ ; f^2=\frac{4H}{K}$$

et solution particulière w_+:

$$w_+(\vartheta,t)=-\frac{d_{12}(t)-d_{21}(t)}{2} \quad \forall\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t \tag{65}$$

Tenant compte des conditions de continuité aux extrémités de $[-\pi/6,\pi/6]$ (deuxième des (63)) on obtient donc pour le taux de rotation du matériau:

$$f=2\sqrt{H/K}\in R \rightarrow w(\vartheta,t)=Y(t)\mathrm{sh}(f\vartheta)-\frac{d_{12}(t)-d_{21}(t)}{2} \ ; \forall\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t \tag{66}$$

$$f=i\varphi \ ; \varphi=2\sqrt{-H/K}\in R \rightarrow w(\vartheta,t)=Y(t)\sin(\varphi\vartheta)-\frac{d_{12}(t)-d_{21}(t)}{2} \ ; \forall\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t$$

Donnant cette deuxième forme à w, la condition qui traduit l'inégalité de Clausius-Duhem si f est imaginaire est la (61):

$$K\varphi^2Y^2(t)\left[\sin^2\varphi\vartheta+\varphi^2\cos^2\varphi\vartheta\right]\geq 0 \quad \forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t x[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t \rightarrow \begin{cases} K\geq 0 \\ H\leq 0 \end{cases} \tag{67}$$

Dans ce cas le taux de rotation relative matériau-matière engendre une dissipation négative et représente donc, dès qu'il se vérifie, une tendance à diminuer l'entropie du système. D'un autre coté, pour que ce phénomène soit admissible, le gradient par rapport à l'orientation de ce taux de rotation dissipe plus d'énergie que celle ainsi cumulée. Ceci semble bien correspondre à la réalité physique (ces observations sont valables en déformation homogène).

---

10 Les tractions sont données par la somme sur le demi cercle des tractions par orientation obtenues par les contraintes de Cauchy. En fait les forces qu'on veut mesurer ne dépendent pas de l'orientation des lamelles, mais seulement de la position suivant la frontière du corps. L'intégration doit être faite dans la configuration initiale, isotrope, des lamelles, par conséquent on a écrit la densité de mesure des orientations en fonction du temps selon le principe de conservation de la masse. Cela montre le poids croissant dans la résistance d'ensemble du milieu des orientations qui augmentent de densité dans le temps.

Le taux de rotation relative matériau-matière v, qui est la partie variable avec ϑ de la fonction w, peut être aisément représenté selon les différentes valeurs du coefficient de comportement f:

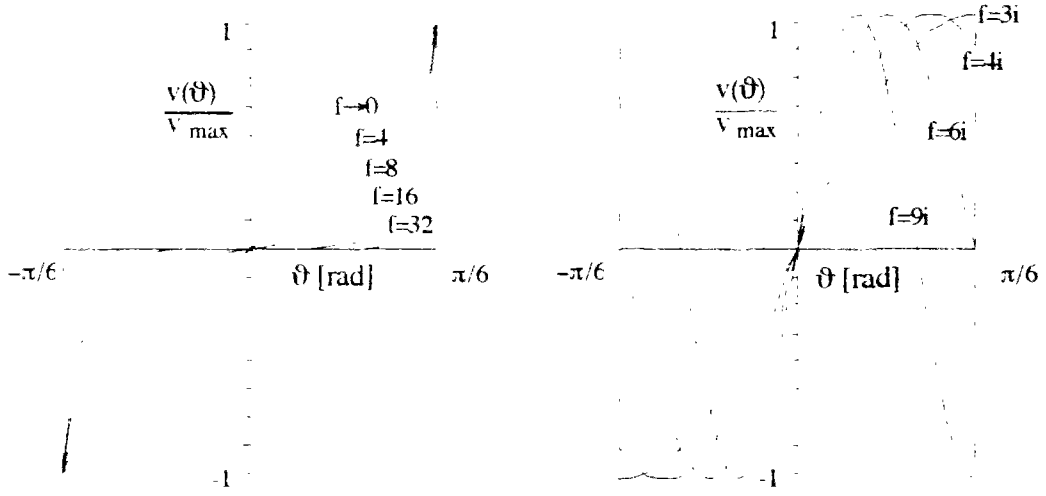


Fig.3: Graphes du taux de rotation relative v normalisée selon la valeur de f.

On remarque que, pour f réel, le maximum de v croît très rapidement avec f. On rappelle que une petite valeur de f signifie une contribution du taux de rotation des lamelles à la puissance des efforts intérieurs moins importante que celle de sa dérivée par rapport à l'orientation des lamelles.

On remarque que la courbe tracée pour f=6i correspond à celle du taux de rotation obtenue par M.M.Rashid pour le poly-lamelle à deux systèmes de glissement présenté dans Ch.II § 5. (Cf. [Rashid 1992]).

3.1.1. Compression.

On impose un taux de déformation indépendant du temps (à partir de l'instant 0) de compression pure:

$$-d_{11}(t)=d_{22}(t)=d>0\ ;\ d_{12}(t)=d_{21}(t)=0\quad \forall t\geq 0 \tag{68}$$

La première des (63) est alors homogène, les taux de rotation v et w coïncident.

Le comportement des contraintes de Cauchy donne selon les (51):

$$\forall \underline{\underline{x}}\in V_t,\forall t \tag{69}$$

$$\frac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2}(\vartheta)=\frac{2}{3}\tau^c\,\mathrm{sign}\left[2d\sin(2\vartheta-\frac{\pi}{3})+Y(t)\sin f(\vartheta-\frac{\pi}{3})\right]\sin(2\vartheta-\frac{\pi}{3})+$$

$$+\frac{2}{3}\tau^c\,\mathrm{sign}\left[2d\sin 2\vartheta-Y(t)\sin f\vartheta\right]\sin 2\vartheta+\frac{2}{3}\tau^c\,\mathrm{sign}\left[2d\sin(2\vartheta+\frac{\pi}{3})+Y(t)\sin f(\vartheta+\frac{\pi}{3})\right]\sin(2\vartheta+\frac{\pi}{3})$$

$$\sigma_{12}(\vartheta)=\frac{2}{3}\tau^c\,\mathrm{sign}\left[2d(t)\sin(2\vartheta-\frac{\pi}{3})+Y(t)\sin f(\vartheta-\frac{\pi}{3})\right]\cos(2\vartheta-\frac{\pi}{3})+$$

$$+\frac{2}{3}\tau^c\,\mathrm{sign}\left[2d(t)\sin 2\vartheta-Y(t)\sin f\vartheta\right]\cos 2\vartheta+\frac{2}{3}\tau^c\,\mathrm{sign}\left[2d(t)\sin(2\vartheta+\frac{\pi}{3})+Y(t)\sin f(\vartheta+\frac{\pi}{3})\right]\cos(2\vartheta+\frac{\pi}{3})$$

$$\forall\vartheta\in]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}[$$

La fonction taux de glissement des (43), dont le signe détermine les contraintes de Cauchy, dépend de façon très importante du coefficient de comportement f:

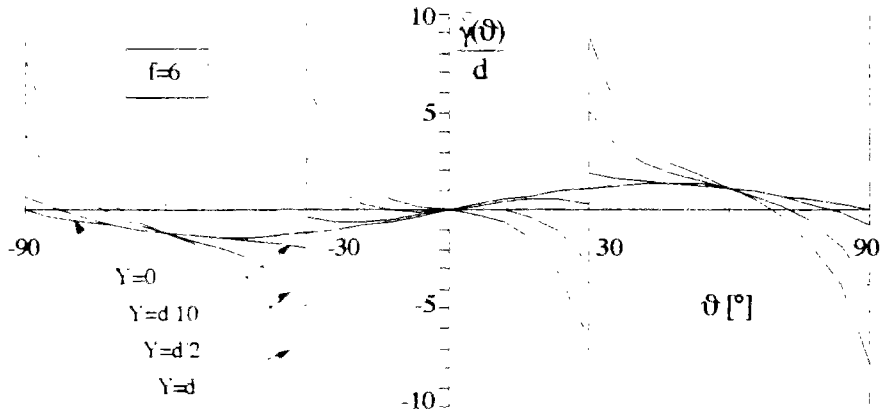


Fig.4: Graphe du taux de glissement pour f réel.

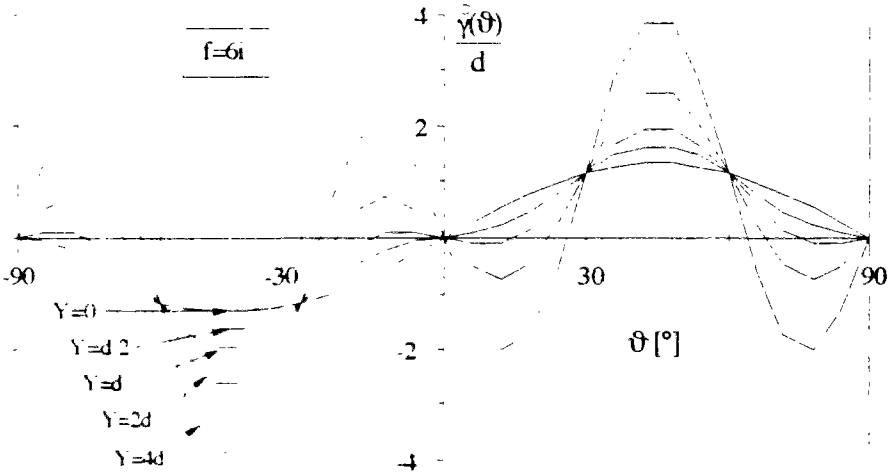


Fig.5: Graphe du taux de glissement pour f imaginaire.

En particulier si f est réel les taux de glissement sont plus importants pour les lamelles orientées à $\pm\pi/6$ et $\pm\pi/2$ indépendamment de la valeur de f, tandis que pour f imaginaire on observe des extremums relatifs du taux de glissement dans des orientations fonctions de f.

Le taux de déformation imposé étant constant dans le temps on peut supposer que le taux de rotation w est indépendant du temps aussi, mais fonction de d: on note $\dot{Y}(d)$ son amplitude.

On considère f réel (H>0), l'évolution des textures est alors régie par l'équation:

$$\frac{1}{\dot{Y}(d)}\frac{\partial\rho}{\partial t}(\vartheta,t)+\frac{\partial\rho}{\partial\vartheta}(\vartheta,t)\,sh(f\vartheta)+f\rho(\vartheta,t)\,ch(f\vartheta)=0\quad\forall\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t \tag{70}$$

et les équations analogues, par translation des fonctions sh et ch, dans les parties restantes du demi-cercle, avec condition initiale d'isotropie:

$$\rho(\vartheta,0)=\rho_0\quad\forall\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}] \tag{71}$$

L'équation aux dérivées partielles (70) peut être intégrée en utilisant la méthode des caractéristiques (Cf. [Rashid 1992]). On fait le changement de variable:

$$u=th(\frac{f\vartheta}{2})\rightarrow ch(f\vartheta)=\frac{1+u^2}{1-u^2};\ sh(f\vartheta)=\frac{2u}{1-u^2};\ \vartheta=\frac{\pi}{2}+\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\rightarrow\frac{\partial}{\partial\vartheta}=\frac{f}{2}(1-u^2)\frac{\partial}{\partial u} \tag{72}$$

l'équation s'écrit:

$$\frac{1}{fY(d)}\frac{\partial\rho}{\partial t}(u,t)+u\frac{\partial\rho}{\partial u}(u,t)+\frac{1+u^2}{1-u^2}\rho(u,t)=0 \quad \forall u\in[u(-\frac{\pi}{6}),u(\frac{\pi}{6})],\forall t \qquad 73$$

et, en introduisant deux variables s et ξ telles que:

$$\frac{\partial t}{\partial s}=\frac{1}{fY(d)} \; ; \; \frac{\partial u}{\partial s}=u \; ; \; \frac{\partial\rho}{\partial s}(\xi,s)=-\frac{1+u^2}{1-u^2}\rho(\xi,s) \quad \forall\xi,\forall s \qquad 74$$

$$\text{pour } t=0 : \begin{cases} s=0 \\ u=\xi \\ \rho=\rho_0 \end{cases}$$

on obtient:

$$s=fY(d)t \; ; \; u=\xi e^s \; ; \; \ln\frac{\rho(\xi,s)}{\rho_0}=-\int_0^s\frac{1+\xi^2e^{2s}}{1-\xi^2e^{2s}}ds \rightarrow \rho(u,s)=\rho_0e^{-s}\frac{1-u^2}{1-u^2e^{-2s}} \qquad 75$$

et donc:

$$\rho(\vartheta,t)=\rho_0\left\{ ch^2(\frac{f\vartheta}{2})\, e^{fY(d)t} - sh^2(\frac{f\vartheta}{2})\, e^{-fY(d)t} \right\}^{-1} \quad \forall\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]\ \forall t \qquad 76$$

L'intégration de l'équation de conservation de la masse dans les autres parties du demi-cercle donne le même résultat aux translations de ϑ près.

On considère la fonction obtenue en normalisant la masse volumique par rapport à la configuration initiale; dans une partie suivante du chapitre on montrera que cette fonction est la fonction de distribution des orientations de texture (ODF):

$$g(\vartheta,t)=\frac{\rho(\vartheta,t)}{\frac{3}{\pi}\int_{-\pi/6}^{\pi 6}\rho(\vartheta,t)d\vartheta}=\frac{f\pi/6}{\ln\left[\frac{1+th(f\pi/12)e^{-fY(d)t}}{1-th(f\pi/12)e^{-fY(d)t}}\right]\left[ch^2(\frac{f\vartheta}{2})e^{fY(d)t}-sh^2(\frac{f\vartheta}{2})e^{-fY(d)t}\right]} \qquad 77$$

$$\forall\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]\ \forall t$$

on en donne les graphes pour des valeurs croissantes du temps (1,2,4,8,16,32) avec un taux de rotation d'intensité Y(d)=0.01; on considère les cas f=6 et f=10:

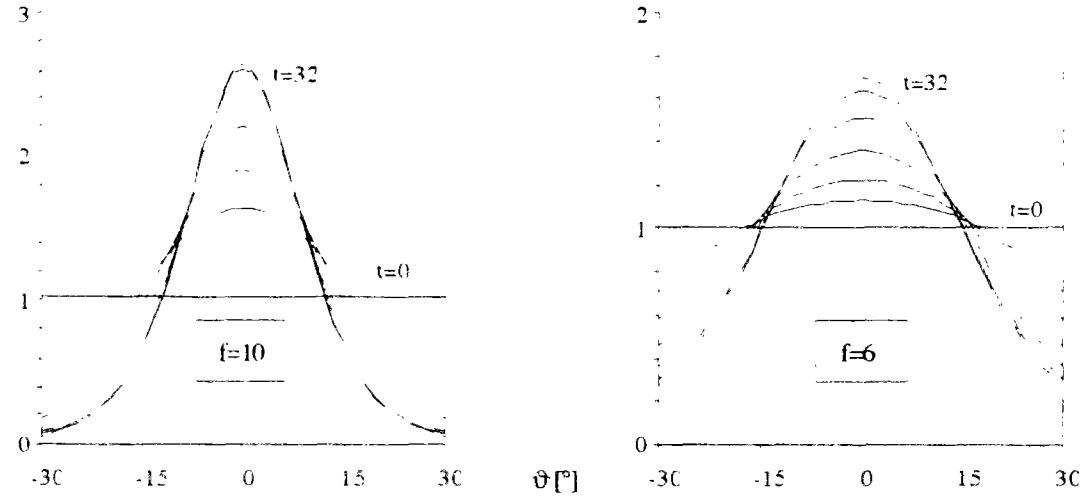


Fig.6: Evolution de la fonction d'orientation $g(\vartheta)$ en compression pour f réel.

Le maximum de g est toujours en $\vartheta=0$; en regardant son évolution en fonction de l'exposant Y(d)t on observe qu'il existe un niveau de "saturation" tel que aux instants de temps successifs il n'y a pas de variations appréciables de g (mais pour $Y(d)t\to\infty$ la fonction tend vers une Dirac centrée en 0):

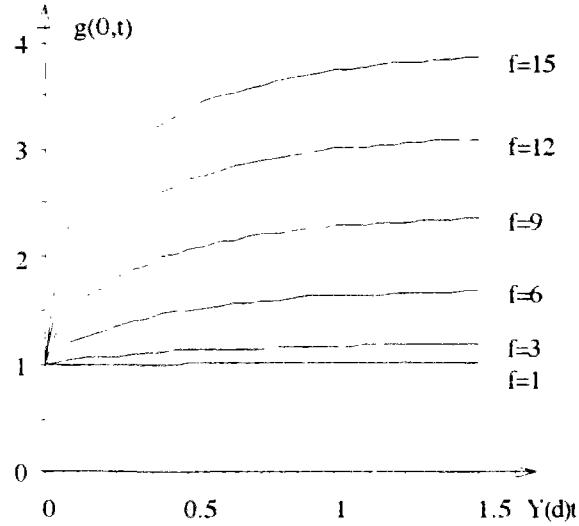


Fig.7: "Saturation" de l'évolution des textures dans le temps en compression pour f réel.

Si f est imaginaire ($H<0$) on obtient des résultats qui généralisent, pour $\varphi\neq 6$, ceux de M.M.Rashid obtenus pour le poly-lamelle à deux systèmes de glissement (Cf. [Rashid 1992]).

L'évolution des textures est régie, à partir de la condition (71) d'isotropie, par l'équation ($f=i\varphi$):

$$\frac{1}{Y(d)}\frac{\partial\rho}{\partial t}(\vartheta,t)+\frac{\partial\rho}{\partial\vartheta}(\vartheta,t)\sin(\varphi\vartheta)+\varphi\rho(\vartheta,t)\cos(\varphi\vartheta)=0 \quad \forall\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t \tag{78}$$

et les équations analogues, par translation des fonctions sin et cos, dans les parties restantes du demi-cercle.

Avec des passages analogues à ceux faits pour le cas précédent (il suffit de substituer les fonctions trigonométriques aux fonctions hyperboliques[11]) on obtient:

$$\rho(\vartheta,t)=\rho_0\left\{\cos^2(\frac{\varphi\vartheta}{2})\ e^{\varphi Y(d)t}+\sin^2(\frac{\varphi\vartheta}{2})\ e^{\varphi Y(d)t}\right\}^{-1} \quad \forall\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]\ \forall t \tag{79}$$

et les résultats correspondants, aux translations de ϑ près, dans les autres parties du demi-cercle.

La fonction obtenue en normalisant la masse volumique par rapport à la configuration initiale est[12]:

---

11 Selon les relations:

$$f=i\varphi \to \mathrm{ch}(\frac{f\vartheta}{2})=\cos(\frac{\varphi\vartheta}{2})\ ;\ \mathrm{sh}(\frac{f\vartheta}{2})=i\sin(\frac{\varphi\vartheta}{2}) \tag{79b}$$

12 On note arctg* la fonction arctg à valeurs dans $[0,\pi[$:

$$\mathrm{arctg}^*(x)=\begin{cases}\mathrm{arctg}(x) & \text{si } x>0\\ \mathrm{arctg}(x)+\pi & \text{si } x\le 0\end{cases} \tag{80b}$$

$$g(\vartheta,t)=\frac{\rho(\vartheta,t)}{\frac{3}{\pi}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\rho(\vartheta,t)d\vartheta}=\frac{\varphi\pi/12}{\arctg^*\left[\tg(\varphi\pi/12)e^{-\varphi Y(d)t}\right]\left[\cos^2(\frac{\varphi\vartheta}{2})e^{\varphi Y(d)t}+\sin^2(\frac{\varphi\vartheta}{2})e^{-\varphi Y(d)t}\right]} \qquad 80$$

$$\forall\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]\ \forall t$$

On remarque que pour $\varphi\to 6(2n+1)$ (n=0,1,2...) l'exponentielle dans la fonction arctg* dévient négligeable de façon que la masse volumique $\rho(\vartheta,t)$ a toujours une somme unitaire dans $[0,\pi]$ (Cf. [Rashid 1992]); dans les autres cas cette somme vaut 1 à l'instant 0 et tend vers $12/\varphi$ lorsque le temps tend vers l'infini.

On montre les graphes de $g(\vartheta)$ pour les mêmes valeurs du temps (1,2,4,8,16,32) et de l'intensité du taux de rotation (0.01) du cas précédent; on considère les cas f=6i et f=10i (i.e. φ=6 et φ=10):

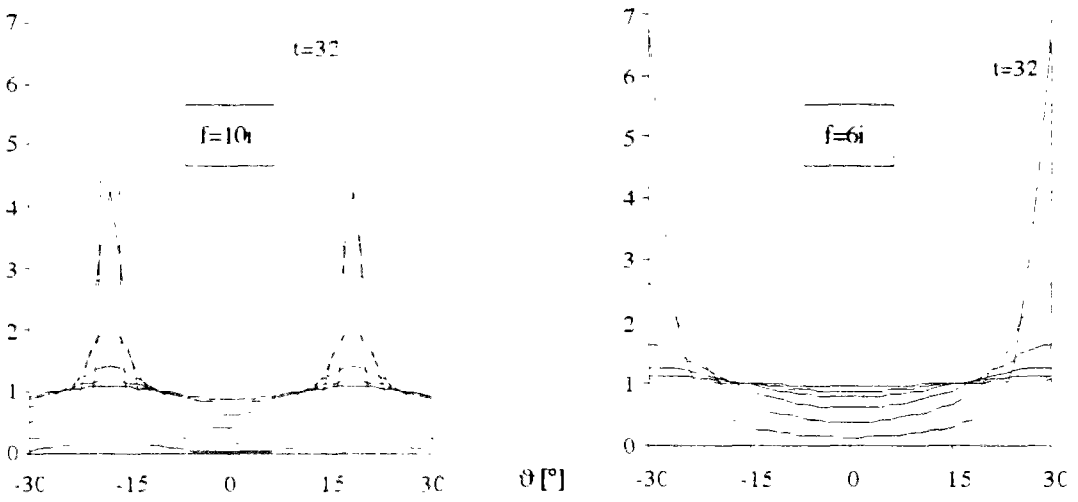


Fig.8: Evolution de la fonction d'orientation $g(\vartheta)$ en compression pour f imaginaire.

Dans ce cas il n'existe pas de niveaux de saturation; la fonction g tend vers un peigne de Dirac lorsque l'exposant Y(d)t tend vers l'infini; les mesures de ce peigne sont placées en:

$$\begin{cases}(2n+1)\frac{\pi}{6} & \text{si } f\le 6i\\ \left(\frac{n}{3}+\frac{1}{f}\right)\pi & \text{si } f>6i\end{cases} \qquad n=0,1,\ldots \qquad 81$$

3.1.2. Cisaillement.

On impose un taux de déformation de cisaillement pur indépendant du temps à partir de l'instant 0:

$$d_{11}(t)=d_{22}(t)=0\ ;\ d_{12}(t)=-d_{21}(t)=\kappa\quad\forall t\ge 0 \qquad 82$$

Le taux de rotation des lamelles w est donné par (le comportement étant indépendant du temps il en est ainsi pour Y et donc pour w):

$$w(\vartheta)=\begin{cases}Y(\kappa)\sh(f\vartheta)-\kappa & \text{si } f\in R\\ Y(\kappa)\sin(\varphi\vartheta)-\kappa & \text{si } f=i\varphi\ \ \varphi\in R\end{cases} \qquad \forall\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t\ge 0 \qquad 83$$

Le taux de rotation relative matériau-matière v est de la même forme que en compression (partie variable avec ϑ de w dans les (83)), avec amplitude Y inconnue (voir Fig.3).

La fonction taux de glissement des équations (43) est (on l'écrit dans le cas $f\in R$, le cas f imaginaire étant formellement égal en substituant les fonctions trigonométriques aux fonctions hyperboliques):

$$\overset{\circ}{\gamma}(\vartheta) = -\frac{2}{3}Y(\kappa)sh(f\vartheta) \quad \forall\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t\geq 0 \tag{84}$$

L'évolution des textures est régie, à partir de la condition (71) d'isotropie, par l'équation:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(\vartheta,t) + \frac{\partial\rho}{\partial\vartheta}(\vartheta,t)\left[Y(\kappa)sh(f\vartheta)-\kappa\right] + \rho(\vartheta,t)fY(\kappa)ch(f\vartheta)=0 \quad \forall\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall t\geq 0 \tag{85}$$

Par le changement de variable (72) on obtient l'équation:

$$\frac{1}{fY(\kappa)}\frac{\partial\rho}{\partial t}(u,t) + \frac{u^2+2yu-1}{2y}\frac{\partial\rho}{\partial u}(u,t)+\frac{1+u^2}{1-u^2}\rho(u,t)=0 \quad \forall u\in[u(-\frac{\pi}{6}),u(\frac{\pi}{6})],\forall t\geq 0 \tag{86}$$

$$y=\frac{Y(\kappa)}{\kappa}$$

et, en introduisant s et ξ comme dans les (74):

$$\frac{\partial t}{\partial s}=\frac{1}{fY(\kappa)} \;;\; \frac{\partial u}{\partial s}=\frac{1}{2y}(u^2+2yu-1) \;;\; \frac{\partial\rho}{\partial s}(\xi,s) = -\frac{1+u^2}{1-u^2}\rho(\xi,s) \quad \forall\xi,\forall s \tag{87}$$

$$\text{pour } t=0 : \begin{cases} s=0 \\ u=\xi \\ \rho=\rho_0 \end{cases}$$

la solution de la (85) est réduite à la solution des équations différentielles ci-dessus avec les conditions initiales données (inconnues t, u et ρ à déterminer dans l'ordre). La première nous donne aisement:

$$t=\frac{s}{fY(\kappa)} \tag{88}$$

La deuxième peut être intégrée par changement de variable:

$$2y\int_{\xi}^{u(\xi,s)}\frac{dz}{z^2+2yz-1}=s \;;\; x(z)=\frac{z+y}{\sqrt{1+y^2}} \rightarrow \frac{\sqrt{1+y^2}}{2y}s=-\int_{x(\xi)}^{x(u(\xi,s))}\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|_{x(\xi)}^{x(u(\xi,s))} \tag{89}$$

tout calcul fait on obtient:

$$u(\xi,s) = -y - \frac{\frac{1-\xi-y}{1+\xi+y}e^{s\sqrt{1+y^2}} - 1}{\frac{1-\xi-y}{1+\xi+y}e^{s\sqrt{1+y^2}} + 1}\sqrt{1+y^2} \tag{90}$$

$$\xi(u,t) = -y + \frac{\frac{1+u+y}{1-u-y}e^{\kappa ft\sqrt{1+y^2}} - 1}{\frac{1+u+y}{1-u-y}e^{\kappa ft\sqrt{1+y^2}} + 1}\sqrt{1+y^2}$$

La conservation de la masse est finalement régie par l'équation:

$$\ln\frac{\rho(\xi,s)}{\rho_0} = -\int_0^s \frac{1+u^2(\xi,\sigma)}{1-u^2(\xi,\sigma)}d\sigma \qquad 91$$

en écrivant $u(\xi,s)$ selon la première des (90) on obtient par intégration de la (91)[13]:

$$\rho(\xi,s) = \rho_0 \frac{1+y^2}{y}\left[\frac{1}{y} + y\cdot ch(at) + \sqrt{1+y^2}\cdot sh(at)\cdot ch(f\vartheta) + 2\cdot sh^2(\frac{at}{2})\cdot sh(f\vartheta)\right]^{-1} \qquad 92$$

$$\forall\vartheta\in]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}[\ \forall t\ ;\ a=\kappa f\sqrt{1+y^2}$$

Les graphes de la fonction g obtenue en normalisant cette masse volumique, pour des valeurs croissantes du temps (1,2,4,8,16), avec κ=0.1 et $Y(\kappa)$=0.01, pour les cas f=6 et f=10, sont (pour des valeurs du temps supérieures à celles indiquées il n'y a pas de différence remarquable par rapport à la courbe en gras):

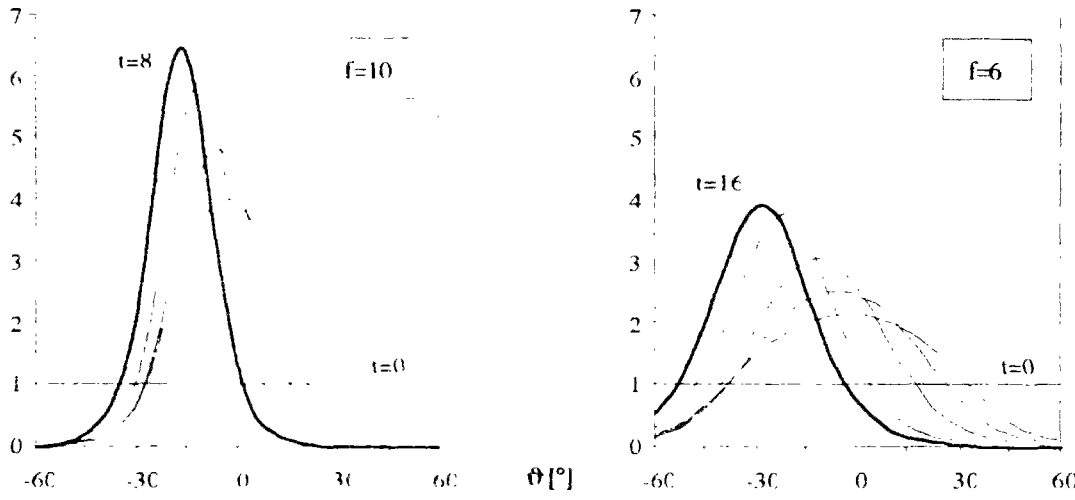


Fig.9: Evolution de la fonction d'orientation $g(\vartheta)$ en cisaillement pour f réel.

Comme pour la compression pure on observe la "saturation" de l'évolution de la fonction $g(\vartheta,t)$ (courbe t=8 pour f=10, courbe t=16 pour f=6), mais, dans le cas en objet, l'abscisse du maximum de $g(\vartheta,t)$ (qui est, g étant l'ODF, l'orientation la plus fréquent dans l'agrégat) dépend de la valeur de f et de y et varie dans le temps:

---

13 Avec les passages

$$-\int_0^s \frac{1+u^2(\xi,\sigma)}{1-u^2(\xi,\sigma)}d\sigma = -\int_0^s \frac{A\zeta^2e^{2a\sigma}+B}{(C\zeta e^{a\sigma}+D)(E\zeta e^{a\sigma}+F)}d\sigma = \int_1^{e^{as}}\left[-\frac{1}{v}+\frac{1}{v+\frac{D}{C\zeta}}+\frac{1}{v+\frac{F}{E\zeta}}\right]dv \qquad 91b$$

$$\zeta=\frac{\sqrt{1+y^2}-y-\xi}{\sqrt{1+y^2}+y+\xi}\ ;\ \alpha=\sqrt{1+y^2}\ ;\ A=2(1+y^2+y\sqrt{1+y^2})\ ;\ B=2(1+y^2-y\sqrt{1+y^2})$$

$$C=1-y-\sqrt{1+y^2}\ ,\ D=1-y+\sqrt{1+y^2}\ ;\ E=1+y+\sqrt{1+y^2}\ ;\ F=1+y-\sqrt{1+y^2}$$

$$\rightarrow \rho(\xi,s)=\rho_0 e^{-as}\left\{\frac{C\zeta+D}{C\zeta e^{as}+D}\cdot\frac{E\zeta+F}{E\zeta e^{as}+F}\right\}^{-1} \rightarrow (92)$$

$$\vartheta_{max}(t) = \frac{1}{f}\,\mathrm{arctgh}\frac{1-\mathrm{ch}(at)}{\mathrm{sh}(at)\cdot\sqrt{1+y^2}} \qquad 93$$

$$\lim_{t\to 0}\vartheta_{max}(t) = 0 \;\;\forall f \;\;;\;\; \lim_{t\to\infty}\vartheta_{max}(t) = -\frac{1}{f}\,\mathrm{arctgh}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

Le graphe de la fonction $\vartheta_{max}(t)$ est reporté de suite:

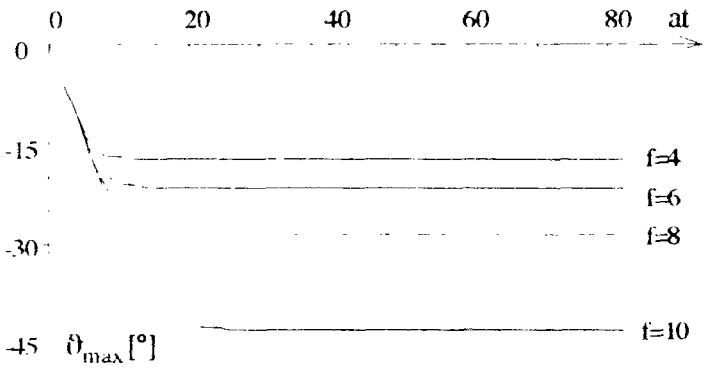


Fig.10: Evolution de l'orientation plus fréquent en cisaillement pour f réel.

Pour f imaginaire (H<0; f=iq), en déplaçant l'origine des angles de -π/2 avant de faire le même changement de variable des cas précédents, on a l'équation d'évolution de la masse:

$$v = \mathrm{tg}\left(\frac{\varphi\vartheta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad 94$$

$$\frac{1}{\varphi Y(\kappa)}\frac{\partial\rho}{\partial t}(v,t) + \frac{1}{2}\left[1-y^{-1}-(1+y^{-1})v^2\right]\frac{\partial\rho}{\partial v}(v,t) - \frac{2v}{1+v^2}\rho(v,t) = 0 \quad \forall v\in\left[v\left(-\frac{\pi}{6}\right), v\left(\frac{\pi}{6}\right)\right], \forall t\geq 0$$

Suivant la solution donnée dans [Rashid 1992] pour le même cas de cisaillement pur, on obtient[14]:

$$\rho(\vartheta,t) = \rho_0\,\frac{y^2-1}{y}\left\{-\frac{1}{y} + y\cdot\mathrm{ch}(bt) + 2\cdot\mathrm{sh}^2\left(\frac{bt}{2}\right)\cdot\cos(2\varphi\vartheta) + \sqrt{y^2-1}\cdot\mathrm{sh}(bt)\cdot\sin(2\varphi\vartheta)\right\}^{-1} \qquad 95$$

$$\forall\vartheta\in\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \;\forall t$$

$$b = \kappa f\sqrt{y^2-1}$$

et donc les graphes de la fonction $g(\vartheta,t)$ (obtenue en normalisant celle ci-dessus) pour Y=0.03, k=0.01 et t=(0,1,2,4,8,16)[15]:

---

14 Il suffit de définir α tel que:

$$2\sin^2\alpha = 1-y^{-1} \;;\; 2\cos^2\alpha = 1+y^{-1} \;;\; |y|\geq 1 \rightarrow \frac{1}{\varphi Y(\kappa)} = \frac{\cos(2\alpha)}{\varphi\kappa} \qquad 95b$$

pour que la (94) devient analogue à l'équation donnée dans [Rashid 1992]. Vu le caractère introductif de cette étude on neglige le cas |y|<1.

15 On a pris $Y(\kappa)=3\kappa$ dans le but d'obtenir, pour f=6i, exactement le résultat de [Rashid 1992] où l'angle défini à la note précedente est:

$$\alpha = \mathrm{arctang}\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad 95c$$

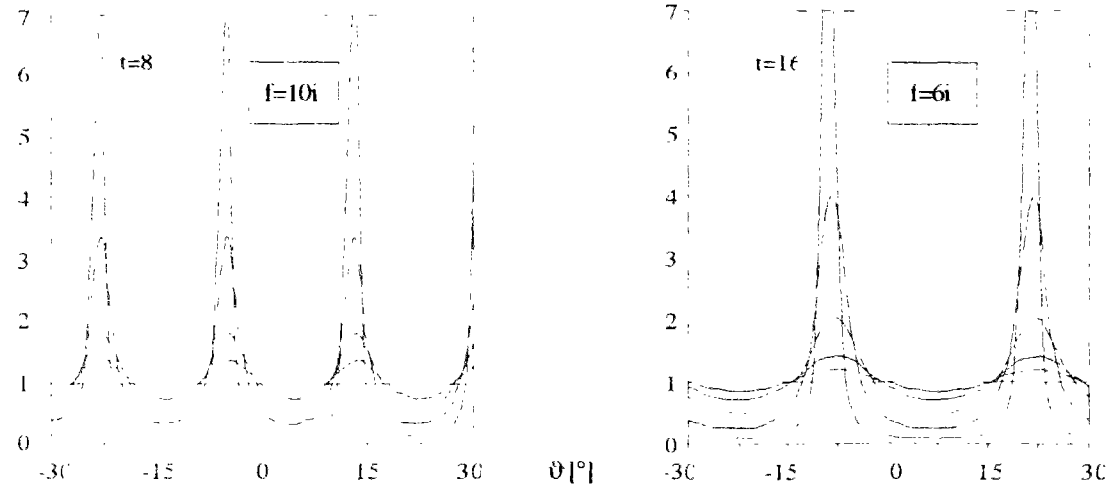


Fig.11: Evolution de la fonction d'orientation g(ϑ) en cisaillement pour f imaginaire.

On remarque que, comme en compression pure, dans le cas f=6i la fonction g(ϑ,t) coïncide avec la ρ(ϑ,t).

On observe que l'abscisse du maximum de g(ϑ,t), $\vartheta_{max}(t)$, se déplace dans le temps:

$$\vartheta_{max}(t) = \frac{1}{2\varphi}\left[\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sh}(bt)\cdot\sqrt{\gamma^2-1}}{\operatorname{ch}(bt)-1} + (2n+1)\pi\right] \qquad 96$$

$$\lim_{t\to 0}\vartheta_{max}(t) = \frac{\pi}{2\varphi}(2n-\frac{1}{2}) \;;\; \lim_{t\to\infty}\vartheta_{max}(t) = \frac{1}{2\varphi}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{1+\gamma^2} + (2n+1)\pi\right]$$

$$\forall n\in Z$$

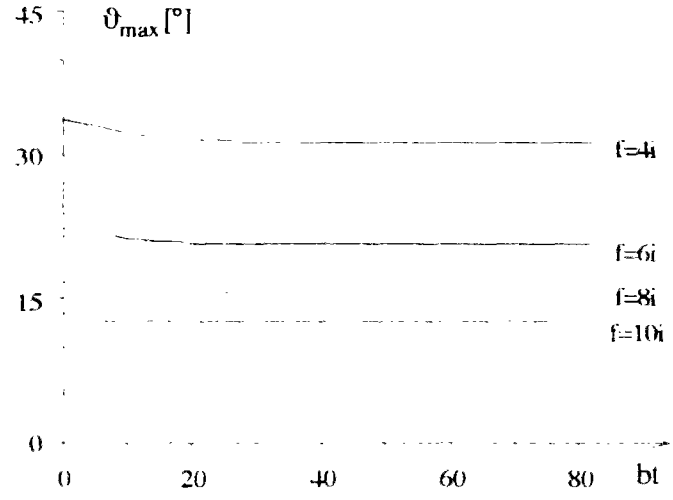


Fig.12: Evolution de l'orientation plus fréquent en cisaillement pour f imaginaire.

On remarque finalement que pour f imaginaire la longueur d'onde de la fonction en étude est de π/φ (f=iφ) tandis que pour f réel elle était de $\pi/3$, indépendamment de la valeur de f.

3.1.3. Conclusion

Pour les exemples proposés on a considéré l'équation d'évolution de la masse volumique et on en a obtenu la solution de façon analytique.

Pour résoudre complètement le problème mécanique posé il ne reste à déterminer que l'amplitude des rotations des lamelles, mais on ne dispose pas d'autres équations. En fait, ayant imposé une solution homogène tant en déformation que en contrainte, on a modifié le bilan

équations-inconnues au désavantage des premières: les deux équations d'équilibre classique des forces (premières des (25)), qui auraient, avec les équations de comportement (50) et (51), permis la détermination de l'amplitude des rotations, ne peuvent pas être employées.

On considère les équations d'équilibre des forces au contour (dernières des (63)). Ces équations donnent deux relations entre les tractions appliquées (2 scalaires $T_i(t)$) et l'intensité du taux de rotation relative matériau-matière (1 scalaire $Y(t)$) moyennant les équations de comportement des contraintes de Cauchy. Les tractions au contour sont normalement des inconnues si la déformation est imposée, ou des données si les contraintes sont imposées. Le fait d'avoir recherché une solution homogène tant en déformation que en contrainte fait que lesdites équations perdent leur signification et que l'intensité du taux de rotation relative matériau-matière demeure indéterminée.

N'ayant pas déterminé l'intensité des rotations relatives le champ de contrainte est aussi indéterminé.

Une deuxième remarque est à faire à propos de la normalité de la distribution de la masse volumique sur l'ensemble des orientations: on a vu qu'elle n'est vérifiée à tout instant que pour certains valeurs de f ($f=6(2n+1)i$; $n=0,1,\ldots$). Cela peut suggérer d'obtenir le comportement des contraintes μ (et donc B) en imposant cette normalité, et donc, pour l'exemple traité, en imposant $f=6$; dans ce cas la solution obtenue pour l'évolution des textures coïncide avec celle du poly-lamelle de Rashid.

Evidemment ces conclusions ne peuvent pas être généralisées car elles sont relatives à un cadre extrêmement simplifié du problème.

3.2. Discussion sur le modèle.

3.2.1. Comparaison avec un polycristal plan.

Le poly-lamelle étudié peut être vu comme la projection sur le plan de la déformation d'un polycristal à réseau CFC. Cette projection doit être obtenue en considérant tout système de glissement du CFC, c'est à dire en projetant les 6 axes $\langle 110 \rangle$ constituant les arêtes du tétraèdre de faces (111) sur ledit plan géométrique.

En regardant les projections d'un tétraèdre sur un plan on voit qu'il y a un minimum de 3 et un maximum de 6 axes de glissement distincts dans l'image projetée (et donc 3÷6 lamelles à prendre en compte par cristal)[16]:

---

16 Dans des orientations particulières par rapport à l'axe du laminage les projections des systèmes de glissement représentées en figure correspondent aux textures idéales respectivement:

_en haut à gauche: texture d'écrouissage du fer pour une direction du laminage horizontale, i.e. [110];

_la même: texture de Goss pour laminage vertical, i.e. [001];

_en haut au centre: texture d'écrouissage du laiton pour laminage horizontal;

_la même image mais non symétrique: texture d'écrouissage du cuivre;

_en bas à droite: texture cubique pour laminage selon un axe à 45°, e.g. [010]=[011] dans la projection.

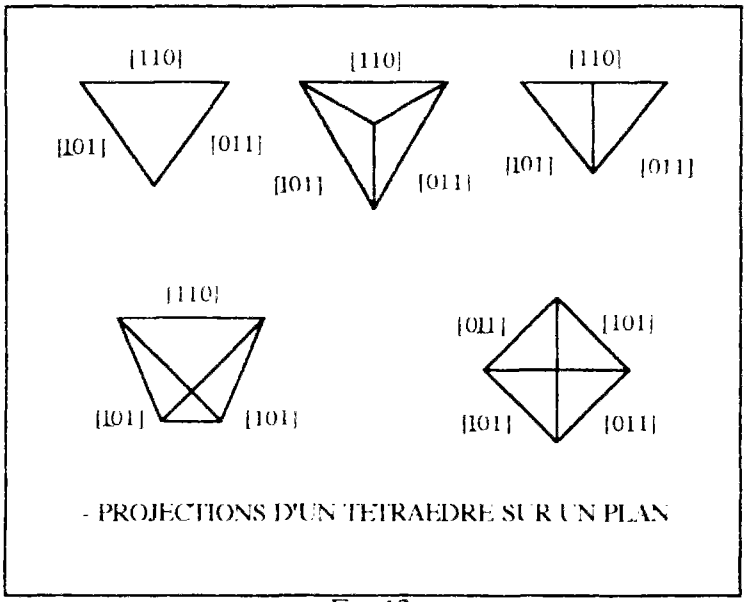


Fig.13

En effet, vue l'hypothèse de géométrie plane et vu qu'on envisage des applications avec un matériau à texture marquée, on peut s'attendre que le glissement soit localisé le long de 3 directions de glissement "principales" (on suppose que, à cause de la texture, la position en haut à gauche est la plus fréquemment rencontrée dans l'agrégat et que les autres peuvent être représentées par la donnée d'un triangle avec une approximation suffisante). En conclusion la donnée de 3 lamelles est suffisante avec une bonne approximation pour représenter les glissements d'un grain d'un polycristal CFC à la texture marquée et en déformation plane.

En considérant que l'image d'un cristal dans un plan est un triangle, qu'on prend équiangle pour simplifier (à la place du triangle [110][101][011] qui a deux angles d'ouverture φ=arctang($1/\sqrt{2}$)=35.26°), les rotations des lamelles ne sont pas indépendantes mais liées par groupes de trois.

3.2.2. Cinématique fonction de l'orientation.

Dans le modèle proposé la transformation de l'orientation des lamelles dépend de leur orientation initiale, la vitesse de rotation des lamelles dépend de leur orientation actuelle. Cette hypothèse est physiquement justifiée par les raisons suivantes.

Premièrement, dans tous modèles de poly-lamelle classiques, la compatibilité des mouvements des cristaux conduit, pour des raisons géométriques, à des équations d'évolution de la forme (e.g. les équations (II.23), (II.24) et (II.81)):

$$\overset{\circ}{\vartheta}=w=\mathfrak{f}(\underline{x},\vartheta,t) \qquad 97$$

où le taux de rotation dépend de l'orientation actuelle.

En outre l'hétérogénéité de la déformation géométrique (qu'on néglige souvent en adoptant l'hypothèse de Taylor) peut être vue comme une tendance à décharger les grains glissants sous des puissances inférieures; ces grains, caractérisés par des orientations "faibles", seront alors aussi ralentis dans leurs rotation (ce qui donne en réalité des textures moins fortes que selon les prévisions avec les modèles de Taylor). Ce phénomène fait que la relation (97) n'est pas une liaison cinématique mais une équation constitutive.

De même si, au cours d'une transformation, on texture différemment deux zones proches du matériau, qui initialement avaient la même ODF, en les ayant soumises à la même déformation géométrique, on peut affirmer que la dépendance de la vitesse de rotation de la variable d'espace est régie non plus par une liaison cinématique mais par une équation constitutive[17].

---

17 En outre, pour le modèle de poly-lamelle en objet, on a dit que chaque cristal est représenté par un groupe de trois lamelles dont les orientations sont liées. En observant les projections d'un tétraèdre dans un plan on voit que, si on veut limiter à trois ce nombre, il faut que l'angle entre ces systèmes varie (entre environs 90° et 35°) dans le but de représenter toute position du tétraèdre. Par conséquent il ne peut exister aucune liaison cinématique entre l'orientation des lamelles et la déformation de l'agrégat.

3.2.3. Masse volumique.

On s'est donné une masse volumique pour tout point du corps dans le domaine plan et pour toute orientation dans le demi-cercle. Pour traduire ce concept en termes plus couramment utilisés, cette masse volumique $\rho(\underline{x},\vartheta,t)$ n'est que la densité dans un $d\vartheta$ de la masse volumique des cristaux orientés avec un angle ϑ:

$$\rho(\underline{x},t)=\int_0^{\pi}\rho(\underline{x},\vartheta,t)d\vartheta \qquad 98$$

c'est à dire la ODF (fonction d'orientation des distributions de texture) mesurée en se rappelant que tout cristal est représenté par trois lamelles et, donc, que la masse des cristaux orientés selon un angle ζ donné doit être partagées sur trois lamelles orientées tout les 60° autour de ζ. Par exemple, en prenant comme lamelle type la première dans la Fig.13 et en prenant l'axe [110] comme référence pour le cristal, la masse des cristaux dont cet axe [110] forme un angle ζ avec l'axe du laboratoire fixé doit être repartie sur les orientations ζ (axe [110]), ζ-ϕ (axe [101]) et ζ+ϕ (axe [011]), avec ϕ=35.26°, pour obtenir l'ODF modifiée en objet.

Par conséquent la probabilité de rencontrer un système de glissement dans un intervalle $[\alpha,\beta]\subseteq[0,\pi]$ dans le point $\underline{x}$ et à l'instant t est[18]:

$$P_{ODF}([\alpha,\beta],\underline{x},t)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}g_s(\underline{x},\vartheta,t)d\vartheta=\frac{\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\rho(\underline{x},\vartheta,t)d\vartheta}{\rho(\underline{x},t)}\quad\forall[\alpha,\beta]\subseteq[0,\pi],\forall\underline{x}\in V_t,\forall t \qquad 99$$

ce qui donne la comparaison entre la ODF "par système de glissement" $g_s(\underline{x},\vartheta,t)$ et la masse volumique fonction de l'orientation $\rho(\underline{x},\vartheta,t)$.

Si on veut avoir la ODF classique $g(\underline{x},\vartheta,t)$ (i.e. par cristal) selon le modèle simplifié proposé qui voit les lamelles solidaires par groupes équiangles de trois, il suffit de considérer que la probabilité de rencontrer un de ces groupes dans l'intervalle $[-\pi/6,\pi/6]$ est unitaire:

$$\rho'(\underline{x},t)\int_{\alpha}^{\beta}g(\underline{x},\vartheta,t)d\vartheta=\int_{\alpha}^{\beta}\rho(\underline{x},\vartheta,t)d\vartheta\quad\forall[\alpha,\beta]\subseteq[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}],\forall\underline{x}\in V_t,\forall t \qquad 100$$

$$\rho'(\underline{x},t)=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\rho(\underline{x},\vartheta,t)d\vartheta\quad\forall\underline{x}\in V_t,\forall t$$

En substituant à la masse volumique fonction de l'orientation $\rho(\underline{x},\vartheta,t)$ l'ODF $g_s(\underline{x},\vartheta,t)$ et la masse volumique réelle $\rho(\underline{x},t)$, on voit, ces deux fonctions étant partout positives, que l'équation de conservation (5) est équivalente à l'équation classique de conservation de la masse et à l'équation de continuité de la ODF "par système de glissement":

$$\left\{\frac{\partial\rho(\underline{x},t)}{\partial t}+\mathrm{div}_{\underline{x}}\left[\rho(\underline{x},t)\underline{u}(\underline{x},t)\right]\right\}g_s(\underline{x},\vartheta,t)+ \qquad 101$$

$$+\left\{\frac{\partial g_s(\underline{x},\vartheta,t)}{\partial t}+\mathrm{div}_{\underline{x}}\left[g_s(\underline{x},\vartheta,t)\underline{u}(\underline{x},t)\right]+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[g_s(\underline{x},\vartheta,t)\dot{\vartheta}\right]\right\}\rho(\underline{x},t)=0$$

$$\forall(\underline{x},\vartheta)\in V_t\times[0,\pi],\forall t$$

Le fait d'utiliser une telle masse "artificielle" et d'en postuler ensuite la conservation ne contredit donc pas ce qui se fait habituellement pour l'ODF et pour la masse volumique classique séparément.

Finalement on remarque que, comme précédemment noté, les graphes donnés à la Fig.6, 8, 9 et 11 sont ceux de l'ODF $g(\vartheta)$ calculée selon la (100).

---

18 Ce point $\underline{x}$ représente un volume microscopique suffisamment petit par rapport à l'échelle macroscopique dans laquelle on s'est placé pour que la probabilité en objet ait un sens.

3.2.4. Identification expérimentale.

Dissipation intrinsèque.

Dans un polycristal réel en déformation plane on observe, selon les différents matériaux et les types de déformation imposée, la formation de textures plus ou moins concentrées dans des directions privilégiées.

Dans le modèle proposé ce phénomène semble être bien représenté par les cas avec f imaginaire et moins bien par ceux à f réel. En particulier pour f imaginaire on peut obtenir, en modifiant ce coefficient, la concentration de la texture dans n'importe quelle orientation du plan.

D'un autre coté pour f réel on observe l'arrêt de l'évolution de la texture au delà d'un niveau donné de déformation, ce qui est bien cohérent avec la réalité (la formation de monocristaux pour de déformations suffisamment élevées est physiquement impossible).

Il semble donc que le meilleur modèle doit prendre en compte des variations de H, coefficient du comportement des contraintes liées au taux de rotation relative matériau-matière, avec des valeurs initiales négatives qui deviennent positives pour des déformations élevées. Ces valeurs négatives représentent des contributions négatives au taux de production d'entropie: dans une phase initiale de la déformation l'ordre de la texture du polycristal augmente (avec production d'entropie toujours positive par dissipation liée aux gradients du taux de rotation du réseau).

Identification.

Pour que le modèle proposé soit physiquement cohérent on doit pouvoir identifier les contraintes μ, C et D introduites. Plus particulièrement, en accord avec les définitions données, il faut pouvoir mesurer la puissance associée à w (vitesse de rotation du réseau), $\mathrm{grad}_{\chi} w$ (gradient géométrique) et $\partial_{\theta} w$ (gradient par rapport à l'orientation actuelle du réseau).

Une telle identification expérimentale, bien que non envisageable à court terme, n'est pas à prion impossible. On peut au fait imaginer de coupler une mesure des orientations cristallographiques par technique EBSP avec une mesure de calorimétrie différentielle à balayage (DSC, Cf. [Lendvai *et al.* 1985]) au cours d'une restauration pour obtenir la mesure d'une énergie stockée par unité de désorientation des grains. Une identification numérique peut aussi être faite en comparant le modèle en objet avec un modèle microscopique numérique et en calculant dans ce dernier les énergies par unité de désorientation requises.

Finalement on rappelle que le coefficient f, c'est à dire le "rapport" entre les comportements des contraintes μ et D, doit être tel qu'il engendre la concentration de la texture dans les directions effectivement observées dans l'expérience.

4. Conclusion.

En conclusion le modèle de poly-lamelle proposé a l'avantage de permettre une écriture simple des lois de comportement au prix d'une augmentation de la taille du problème posé.

En particulier l'évolution des textures est régie dans ce modèle par l'évolution de grandeurs constitutives en équilibre avec les contraintes. Ceci semble mieux s'accorder avec l'expérience de la complexité du phénomène plutôt que la liaison cinématique avec la rotation plastique généralement acceptée.

Les caractéristiques principales des modèles classiques (avec liaison cinématique entre rotations du réseau et mouvement de la matière) peuvent être obtenues dans des cas particuliers.

Les difficultés d'identification qui découlent de l'introduction du nouveau modèle ne semblent pas insurmontables.

Dans le chapitre suivant on écrira le problème relatif à un polycristal tridimensionnel par le même formalisme.

C H A P I T R E IV

Polycristal

1. Partie introductive.

1.1. Introduction.

Le but de cette partie du travail est un modèle thermo-mécanique des transformations finies irréversibles d'un agrégat polycristallin. Dans le chapitre précédent on a étudié un modèle de polycristal plan avec réseau plan idéal bâti selon une approche nouvelle.

Dans le présent chapitre on considère un agrégat polycristallin comme un solide tridimensionnel constitué d'un matériau hétérogène localement anisotrope. Les constituants de ce matériau sont identifiés par l'orientation caractérisant l'anisotropie de leur comportement (i.e. l'orientation locale des axes cristallographiques), cette orientation pouvant évoluer avec une cinématique indépendante du mouvement de la matière.

L'objectif de ce chapitre est l'étude thermo-mécanique d'un polycristal selon le même formalisme que celui du chapitre précédent, mais avec une géométrie tridimensionnelle. L'espace géométrique absolu de dimension trois sera donc le référentiel dans lequel on observe la matière, l'espace des tenseurs orthogonaux droits sera le référentiel dans lequel on observe les orientations cristallines caractérisant le matériau.

Cette étude sera poursuivie sans entrer dans les motivations des choix qui le caractérisent tant si elles sont de nature mathématique que si elles découlent de la représentation d'aspects physiques. L'étude de la pertinence du modèle bâti dans ce chapitre est en fait renvoyée au Chapitre V et VI; la fondation mathématique du modèle est développée au Chapitre VII et VIII.

On décrit d'abord la cinématique d'un corps matériel vu dans un référentiel d'espace géométrique fois espace des tenseurs orthogonaux droits, selon un formalisme lagrangien sur la configuration initiale, et selon un formalisme eulerien. Moyennant le principe des puissances virtuelles, après avoir donné une forme appropriée aux vitesses rigidifiantes dans le référentiel employé, on dérive les équations d'équilibre locale.

Ensuite on écrit les bilans d'énergie (totale et interne) et d'entropie et on en déduit le nombre d'équations de comportement nécessaires pour fermer le bilan équations-inconnues.

Pour l'écriture des équations de comportement on introduit un certain nombre de concepts qui, bien que usuels dans leur contenu, apparaissent dans une lumière nouvelle dans le référentiel utilisé.

Avant de passer au développement du modèle il est nécessaire de donner quelques définitions et d'expliquer quelles sont les caractéristiques du système qu'on choisi pour représenter un polycristal. Ces notes préliminaires seront approfondies dans le Chapitre V.

1.2. Notes préliminaires.

1.2.1. Terminologie.

Dans un corps, hétérogène avec hétérogénéités anisotropes, tel qu'un polycristal, les directions locales d'anisotropie peuvent être observées au microscope. On peut alors compléter l'information sur un tel corps en rajoutant à l'emplacement géométrique de ses points matériels dans un repère macroscopique la donnée de la direction, par rapport au même repère[1], des axes d'anisotropie dans ces points. Ces axes définissent le matériau constitutif du corps.

En fait les directions d'anisotropie sont, dans ce cas, les "racines" du comportement local:

- le comportement local (microscopique) est caractérisé par la donné de ces directions;
- elles varient sans liaisons cinématiques directes avec le mouvement de la matière;
- leur évolution régie celle de l'hétérogénéité du matériau qui se manifeste au niveau macroscopique.

Dans ce chapitre on appelle "espace des phases" l'espace des tenseurs orthogonaux droits compte tenu, éventuellement, de certaines symétries des cristaux dont ces tenseurs représentent l'orientation dans l'espace géométrique absolu; on appelle "phase" une orientation dans cet espace.

On appelle "état radical" d'un élément de matière l'ensemble des informations relatives à sa structure, comme, dans les limites de ce chapitre, le type de réseau cristallin qu'on y observe à une échelle suffisamment réduite. La phase d'un système matériel n'est qu'une représentation convenable de son état radical.

On appelle finalement "espace profond" l'espace produit cartésien de l'espace géométrique et de l'espace des phases dans lesquels on décrit un certain système matériel et "milieu continu profond" ce système.

Le modèle de polycristal objet de ce chapitre est un milieu continu profond ayant les tenseurs orthogonaux comme phases. Dans la Quatrième Partie du travail on donnera le schéma axiomatique général permettant l'étude thermo-mécanique des milieux continus profonds indépendamment du choix de l'espace des phases.

On donne de suite quelques précisions sur le choix de l'espace des phases utilisé dans ce chapitre et sur ses caractéristiques, mais on renvoit au Chapitre V pour une discussion plus detaillée sur le sujet.

1.2.2. Système étudié.

Un grain cristallin à l'intérieur d'un polycristal peut être identifié avec une partie de l'agrégat montrant une structure cristallographique suffisamment homogène.

Vu de son intérieur un tel grain peut être considéré comme un ensemble d'objets matériels ayant des directions et des plans de symétrie non matériels: il peut évoluer de façon hétérogène en perdant donc, éventuellement, son identité dans l'agrégat. Dans des cas limites cette évolution peut se faire par transport de matière sans modification des axes cristallographiques ou vice versa par rotation de ces axes sans transport de matière.

Selon ce schéma, le modèle de polycristal qu'on se donne est un ensemble d'éléments qu'on appelle "trièdre-objets": un ensemble d'objets, éventuellement doués de symétries, placés dans l'espace géométrique absolu moyennant des trièdres.

L'objet, avec ses symétries, représente l'aspect physique qu'on veut étudier comme racine du comportement. Par exemple, pour un réseau CFC, l'objet peut représenter le tétraèdre constitué par 6 directions de glissement distinctes, ou il peut représenter la cellule élémentaire du réseau tout court.

Si le matériau est localement isotrope par rapport à la caractéristique qu'on veut prendre en compte dans le modèle, l'objet à considérer sera isotrope: toute position des trièdres dans l'espace sera un emplacement distinct des trièdre-objets et représentera une phase. Dès qu'il existe des symétries de la matière qui nous intéressent l'objet devra les identifier: la distance entre deux trièdre-objets (en termes de rotation minimale nécessaire pour les superposer) dépend de la signification donnée à l'objet moyennant ses axes de symétrie.

---

[1] Le repère des directions microscopiques coïncide avec le repère macroscopique, car un changement d'échelle ne modifie pas les directions.

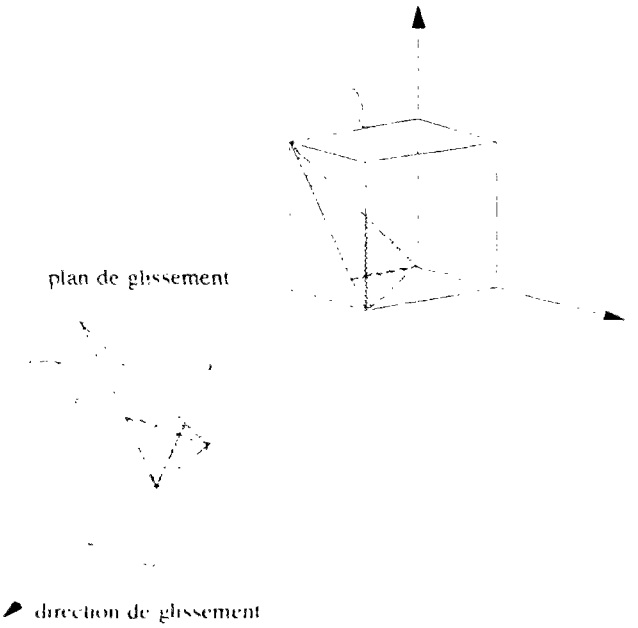


Fig.1: Objets (directions de glissement) coïncidents pour deux trièdres distincts (d'après [Dluzewski 1991])

En résumé, pour un trièdre-objet, les symétries de l'objet définissent des classes d'équivalence entre positions du trièdre dans l'espace géométrique absolu.

Dans ce chapitre on considère que l'état radical d'un polycristal est décrit par un trièdre-objet placé dans l'espace géométrique absolu. L'espace des phases est donc l'ensemble des tenseurs orthogonaux représentant les positions qui peuvent être prises par un trièdre-objet dans l'espace géométrique absolu, c'est à dire l'ensemble quotient des positions qui peuvent être prises par un trièdre dans le même espace compte tenu des symétries d'un objet qui lui est attaché.

Pour un trièdre-objet isotrope l'espace des phases est donc l'espace métrique des tenseurs orthogonaux droits; pour un trièdre objet anisotrope l'espace des phases est un ensemble quotient de cet espace métrique.

On remarque que l'espace métrique des tenseurs orthogonaux droits est isomorphe à un espace de Riemann de dimension trois, constitué par la surface d'une sphère douée d'un repère curviligne et d'un système d'angles d'Euler. Donc, l'espace des phases engendré par un trièdre-objet isotrope est cet espace curviligne tridimensionnel et, pour un trièdre-objet anisotrope, on peut fixer les bornes d'un domaine des phases en fonction des symétries de l'objet et on peut définir une distance appropriée au problème (Cf. [Dluzewski 1991]).

Dans la suite du chapitre il n'est pas nécessaire de définir d'avantage le trièdre-objet utilisé. Pour fixer les idées on peut néanmoins considérer un objet avec 6 axes de symétrie [110] (attaché au trièdre [100]) qui représente le tétraèdre ayant les directions de glissement d'un réseau CFC pour arêtes.

1.2.3. Notations.

Soit E l'espace translation de l'espace géométrique euclidien $\mathcal{E}$; on note $Q=L_{orth}(E,E)$ l'espace métrique des tenseurs orthogonaux droits (on donnera plus de précisions sur la métrique de Q dans le Chapitre V).

On fixe un repère $\mathcal{R}$ dans l'espace géométrique euclidien et un système de coordonnées cartésiennes **E** d'axes orthonormés E_i (i=1...3) dans ce repère. Ensuite l'indice **E** dénote tant les composantes d'un point de l'espace géométrique par rapport aux axes fixés que celles d'un opérateur de Q, ou d'autres espaces tensoriels sur E, par rapport aux mêmes axes. Par extension on note E_E et Q_E les ensembles des images des éléments de E et de Q dans **E**.

L'opération de translation dans Q est écrite multiplicativement avec des opérateurs qui sont des éléments de Q aussi (le produit une fois contracté de deux tenseurs orthogonaux droits est un tenseur orthogonal droit). Donc l'espace translation de Q est Q même.

Un tenseur orthogonal infinitésimal est un tenseur antisymétrique, par conséquent les opérateurs de translation infinitésimale de Q sont les tenseurs de $A=L_{as}(E,E)$.

2. Cinématique.

2.1. Introduction.

On considère tout d'abord trois hypothèses de nature cinématique sur le milieu continu profond représentant le polycristal: ce milieu est l'image d'un corps matériel massique dans l'espace profond, les mouvements de sa composante géométrique ne dépendent pas de la phase des ses points matériels.

On donne une description lagrangienne du mouvement d'un tel milieu, en en définissant en particulier les transformations, leurs gradients et les déformations. On donne une description eulerienne, en définissant les vitesses et les taux de déformation, et on compare ces deux descriptions.

2.2. Hypothèses de base.

2.2.1. Milieu continu profond.

La première hypothèse, liée à l'idée intuitive de corps matériel et à la classe de processus cinématiques définis admissibles dans cet étude, limite les transformations de l'image des corps matériels dans l'espace profond aux difféomorphismes dans l'espace translation de ce référentiel: on considère le milieu continu "profond" comme un milieu continu tant dans l'espace géométrique absolu que dans l'espace des phases.

Le référentiel ne modifiant pas la nature du corps, l'image d'un corps matériel dans l'espace profond est constituée par les images "profondes" (i.e. géométriques et par phases) de ses points matériels. Ces points seront donc suivis dans leur mouvement en utilisant le concept usuel de dérivée matérielle qui garde formellement la définition classique dans l'espace profond.

2.2.2. Continuité au voisinage des points.

La deuxième hypothèse, liée aux mêmes conditions, est de considérer l'équation de continuité de la masse valable dans l'espace profond. Par conséquent le gradient de la transformation est non singulier tant si le corps matériel modifie sa forme géométrique que s'il modifie la phase des ses points.

2.2.3. Filtration.

La troisième hypothèse, liée à la structure subordonnée de l'espace des tenseurs orthogonaux par rapport à l'espace géométrique, est de considérer la cinématique de l'image géométrique d'un point matériel indépendante de sa phase. Une conséquence de cette hypothèse est l'absence de filtration dans le modèle de polycristal bâti, c'est à dire le fait qu'il n'y a pas de mouvement géométrique relatif entre parties hétérogènes du corps coïncidents dans un même point macroscopique.

2.3. Description lagrangienne.

2.3.1. Inconnues.

Une description lagrangienne du mouvement se base sur une configuration de référence du corps matériel. En utilisant un référentiel d'espace géométrique usuel on se réfère classiquement à un emplacement géométrique de référence: la matière et sa forme (i.e. sa configuration géométrique macroscopique[2]) sont en relation biunivoque.

Dans notre cas cette relation biunivoque n'existe que par rapport à un emplacement dans l'espace profond, car une image géométrique n'est pas considérée suffisante pour représenter un corps matériel tel que un polycristal avec sa microstructure[3].

On choisi l'emplacement du corps dans l'espace profond à l'instant zéro comme configuration de référence; les points matériels sont identifiés par:

---

2 C'est à dire à un niveau fixé suffisamment grand pour en apprécier la continuité.

3 On peut se référer à l'emplacement dans l'espace profond, par exemple, relatif à l'instant initial, mais on peut aussi se référer à un emplacement fictif dans l'espace profond, par exemple tel que la configuration géométrique du corps est effectivement celle de l'instant initial et la configuration des phases voit toute phase équi-orienté: c'est la configuration isocline de J.Mandel.

$$\omega\in\Omega_0\ ;\ \omega_E=\begin{bmatrix} x \\ \underline{\underline{\theta}} \end{bmatrix}\in D_0 x Z_0 \subseteq E_E x Q_E \qquad 1$$

Les inconnues lagrangiennes sont les transformations Ω de la configuration de référence, initiale, Ω_0 en toute configuration Ω_t:

$$\Omega:\Omega_0 x\chi\rightarrow\Omega_t\ ;\ \omega=\Omega(\omega,t) \qquad 2$$

χ étant l'intervalle chronologique d'intérêt. Par rapport aux axes **E**:

$$\omega\in\Omega_t\ ;\ \omega_E=\begin{bmatrix} \underline{\underline{\chi}} \\ \underline{\underline{\vartheta}} \end{bmatrix}\in D_t x Z_t \qquad 3$$

$$\underline{\underline{\chi}}=\Xi(x,\underline{\underline{\theta}},t)\ \text{ et }\ \underline{\underline{\vartheta}}=\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)$$

2.3.2. Gradient de la transformation.

L'absence de filtration (i.e. cinématique géométrique indépendante des phases) s'écrit par rapport à **E**:

$$\nabla_\theta\Xi(x,\underline{\underline{\theta}},t)=0\ \leftrightarrow\ \Xi(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\Xi(x,t) \qquad 4$$

Le gradient de la transformation est alors de la forme:

$$F(\omega,t)=\nabla_\omega\Omega(\omega,t)\ ;\ F(\omega,t)_E=\begin{bmatrix} \underline{\underline{F}}_{xx} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{F}}_{\theta x} & \underline{\underline{F}}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \qquad 5$$

où on appelle:

$$\underline{\underline{F}}_{xx}(x,t)=\nabla_x\Xi(x,t)\ ;\ \underline{\underline{F}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\nabla_x\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\ ;\ \underline{\underline{F}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\nabla_\theta\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t) \qquad 6$$

Le produit mixte de trois vecteurs matériels orthonormés à l'instant zéro est la mesure du volume matériel engendré par ces vecteurs et il peut être choisi comme unité de référence des mesures volumiques.

Tout vecteur matériel a deux images, dans E et dans Q, car toute translation d'un point matériel profond est définie par une translation géométrique et une rotation indépendantes. Le volume matériel engendré par trois vecteurs matériels a donc aussi deux images dans l'espace profond et donc deux mesures dans R; le produit de ces deux mesures, volume géométrique et volume dans l'espace des phases, est la mesure du volume matériel dans l'espace profond.

A tout instant t le déterminant J du gradient de la transformation, F, donne le produit mixte de trois vecteurs matériels, orthonormés à l'instant zéro. L'hypothèse de continuité de la matière entraîne que J est positif pour toute transformation admissible:

$$J(\omega,t)=\det F(\omega,t)=J_x(x,t)J_\theta(x,\underline{\underline{\theta}},t)>0 \qquad 7$$

$$J_x(x,t)=\det\underline{\underline{F}}_{xx}(x,t)>0\ ;\ J_\theta(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\det\underline{\underline{F}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}},t)>0$$

2.3.3. Equation de continuité.

On emploi la notation:

$$\rho_0(\omega)=\text{masse volumique à l'instant 0 et } \rho_0(\omega)_E=\rho_0(x,\underline{\underline{\theta}}) \qquad 8$$

$$\rho(\omega,t)=\text{masse volumique dans le temps et } \rho(\omega,t)_E=\rho(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)$$

La conservation de la masse dans l'espace profond s'écrit:

$$\rho_0(\omega) = J(\omega,t)\rho(\Omega(\omega,t),t) \qquad 9$$

i.e.

$$\rho_0(x,\underline{\underline{\theta}}) = J_x(x,t)\ J_\theta(x,\underline{\underline{\theta}},t)\ \rho(\Xi(x,t),\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t),t)$$

2.3.4. Evolution des images de la métrique de l'espace tangent.

La définition d'espace tangent doit être donnée par rapport à deux emplacements d'un corps matériel dans l'espace profond en analogie avec un espace géométrique usuel. Par conséquent (grâce à la première hypothèse énoncée qui valide les concepts de point et de vecteur matériel suivis dans l'espace profond), le rapport entre les métriques de deux emplacements s'écrit, dans l'espace profond, dans la forme habituelle pour l'espace géométrique, c'est à dire moyennant le tenseur de dilatation de Cauchy-Green droit ou gauche.

Le tenseur de dilatation de Cauchy-Green droit a deux images distinctes relatives à la métrique des vecteurs de E et à celle des tenseurs de Q (les soulignés sous les tenseurs en donnent l'ordre tensoriel relatif aux axes cartésiens de **E**; les adjoints des F coincident avec leurs transposés[4]):

$$C_E(\omega,t)_{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{F}}_{xx}^T \cdot \underline{\underline{F}}_{xx} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} ; C_Q(\omega,t)_{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{F}}_{\theta x}^T : \underline{\underline{F}}_{\theta x} & \underline{\underline{F}}_{\theta x}^T : \underline{\underline{F}}_{\theta\theta} \\ \underline{\underline{F}}_{\theta\theta}^T : \underline{\underline{F}}_{\theta x} & \underline{\underline{F}}_{\theta\theta}^T : \underline{\underline{F}}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \qquad 10$$

le tenseur gauche:

$$G_E(\omega,t)_{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{F}}_{xx} \cdot \underline{\underline{F}}_{xx}^T & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} ; G_Q(\omega,t)_{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{F}}_{xx} \cdot \underline{\underline{F}}_{\theta x}^T \\ \underline{\underline{F}}_{\theta x} \cdot \underline{\underline{F}}_{xx}^T & \underline{\underline{F}}_{\theta x} \cdot \underline{\underline{F}}_{\theta x}^T + \underline{\underline{F}}_{\theta\theta} : \underline{\underline{F}}_{\theta\theta}^T \end{bmatrix} \qquad 11$$

Les tenseurs de déformation de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi entre deux emplacements dans l'espace profond sont définis en analogie avec les cas classiques:

$$L(\omega,t) = \frac{1}{2}\left[C(\omega,t)-I\right] \ ; \ A(\omega,t) = \frac{1}{2}\left[I-G(\omega,t)\right] \qquad 12$$

d'où:

$$\overset{\circ}{L}_E(\omega,t)_{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\overset{\circ}{C}_E(\omega,t)_{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathrm{sym}(\underline{\underline{F}}_{xx}^T \cdot \overset{\circ}{\underline{\underline{F}}}_{xx}) & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \qquad 13$$

$$\overset{\circ}{L}_Q(\omega,t)_{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\overset{\circ}{C}_Q(\omega,t)_{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathrm{sym}(\underline{\underline{F}}_{\theta x}^T : \overset{\circ}{\underline{\underline{F}}}_{\theta x}) & \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}_{\theta x}^T : \overset{\circ}{\underline{\underline{F}}}_{\theta\theta} + \overset{\circ}{\underline{\underline{F}}}_{\theta x}^T : \underline{\underline{F}}_{\theta\theta}) \\ \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\underline{\underline{F}}}_{\theta\theta}^T : \underline{\underline{F}}_{\theta x} + \underline{\underline{F}}_{\theta\theta}^T : \overset{\circ}{\underline{\underline{F}}}_{\theta x}) & \mathrm{sym}(\underline{\underline{F}}_{\theta\theta}^T : \overset{\circ}{\underline{\underline{F}}}_{\theta\theta}) \end{bmatrix}$$

---

[4] En notation avec indices ce transposé est obtenu par échange symétrique de tout indice (pour n'importe quel ordre tensoriel).

$$(A^T)_{jhk} = A_{khj} \ ; \ (A^T)_{ijh} = A_{hji} \qquad 10b$$

2.4. Description eulerienne.

2.4.1. Inconnues.

On se donne une configuration actuelle, à l'instant t, vue par le système **E** du repère:

$$\omega\in\Omega_t\subset\mathcal{R}\ ;\ \omega_{\mathbf{E}}=\begin{bmatrix}\underline{\mathfrak{x}}\\ \underline{\underline{\vartheta}}\end{bmatrix}\in D_t\times Z_t \qquad 14$$

les inconnues eulériennes sont les vitesses des points matériels dans la configuration instantanée données par rapport à un repère dans l'espace profond:

$$v(\omega,t)_{\mathbf{E}}=\begin{bmatrix}u(\underline{\mathfrak{x}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\\ \underline{\underline{w}}(\underline{\mathfrak{x}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\end{bmatrix}\ ;\ \begin{cases}u\in E_{\mathbf{E}}\\ \underline{\underline{w}}\in A_{\mathbf{E}}=L_{as}(E,E)_{\mathbf{E}}\end{cases} \qquad 15$$

(la vitesse des phases, w, est un tenseur antisymétrique).

2.4.2. Gradient matériel des vitesses.

Le taux d'évolution d'un vecteur matériel est donné par le gradient matériel du champ de vitesse matérielle; en configuration actuelle:

$$\mathring{u}_t = \mathrm{gradv}(\omega,t)\ u_t \qquad 16$$

Ce gradient matériel a deux images dans l'espace profond qui, vues en configuration actuelle, sont notées par "$\mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}$" et "$\mathrm{grad}_{\vartheta}$". Toute grandeur matérielle, comme une vitesse inconnue eulerienne, a deux images dans l'espace profond; par conséquent un gradient de vitesse est représenté par quatre tenseurs dans l'espace profond:

$$\mathrm{gradv}(\omega,t)_{\mathbf{E}}=\begin{bmatrix}\mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}u(\underline{\mathfrak{x}},\underline{\underline{\vartheta}},t) & \mathrm{grad}_{\vartheta}u(\underline{\mathfrak{x}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\\ \mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}\underline{\underline{w}}(\underline{\mathfrak{x}},\underline{\underline{\vartheta}},t) & \mathrm{grad}_{\vartheta}\underline{\underline{w}}(\underline{\mathfrak{x}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\end{bmatrix} \qquad 17$$

L'hypothèse d'absence de filtration (cinématique géométrique indépendante des phases) s'écrit:

$$\mathrm{grad}_{\vartheta}\ u(\underline{\mathfrak{x}},\underline{\underline{\vartheta}},t)=\underline{\underline{0}} \leftrightarrow u(\underline{\mathfrak{x}},\underline{\underline{\vartheta}},t)=u(\underline{\mathfrak{x}},t) \qquad 18$$

et donc:

$$\mathrm{gradv}(\omega,t)_{\mathbf{E}}=\begin{bmatrix}\mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}u(\underline{\mathfrak{x}},t) & \underline{\underline{0}}\\ \mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}\underline{\underline{w}}(\underline{\mathfrak{x}},\underline{\underline{\vartheta}},t) & \mathrm{grad}_{\vartheta}\underline{\underline{w}}(\underline{\mathfrak{x}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\end{bmatrix} \qquad 19$$

Par définition ces gradients associent de façon linéaire à une translation infinitésimale dans l'espace de la variable par rapport à laquelle ils sont définis ($\mathfrak{x}$ ou ϑ) une translation infinitésimale dans l'espace de la fonction dérivée (u ou w):

$$\mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}u\in L(E,E)_{\mathbf{E}}\ ;\ \mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}\underline{\underline{w}}\in L(E,A)_{\mathbf{E}}\ ;\ \mathrm{grad}_{\vartheta}\underline{\underline{w}}\in L(A,A)_{\mathbf{E}} \qquad 20$$

(la translation infinitésimale d'un tenseur antisymétrique est donnée par sa somme avec un tenseur antisymétrique infinitésimal; on rappelle qu'on note $A=L_{as}(E,E)$).

L'objectivité d'un opérateur est définie moyennant un changement adéquat du référentiel: par ce changement l'espace translation E varie dans le temps par isométrie en E'(t). Cette

isométrie se transmet sur l'espace A des tenseurs antisymétriques (la métrique de A est donnée par le produit deux fois contracté) et ses éléments sont donc objectifs; par contre elle ne se transmet pas sur l'espace des tenseurs orthogonaux droits, Q, et ses éléments ne sont pas objectifs (la métrique de Q est autre que le produit deux fois contracté, elle sera étudiée dans le chapitre suivant):

$$\phi(t):E\rightarrow E'(t)\ ;\ \phi \text{ isométrie } \forall t$$
$$A'(t)=\{a'(t)=\phi(t)a\phi^{T}(t) : a\in A\} \text{ isométrique à A } \forall t \qquad 21$$

Les éléments de A étant objectifs il en est ainsi pour les gradients de w.

2.4.3. Equation de continuité.

La conservation de la masse s'écrit dans l'espace profond:

$$\mathring{\rho}(\omega,t) = \frac{\partial \rho(\omega,t)}{\partial t} + \mathrm{grad}[\rho(\omega,t)v(\omega,t)] = 0 \quad \forall \omega\in\Omega_t, \forall t \qquad 22$$

i.e. par rapport à **E**:

$$\mathring{\rho}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) = \frac{\partial \rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)}{\partial t} + \mathrm{div}_{\mathfrak{x}}\left[\rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)\right] + \mathrm{div}_{\vartheta}\left[\rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right] = 0 \qquad 23$$
$$\forall(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}})\in D_t x Z_t, \forall t$$

2.4.4. Accélération.

Il est utile de calculer l'accélération des points matériels dans l'espace profond:

$$\Gamma(\omega,t) = \mathring{v}(\omega,t) = \frac{\partial v(\omega,t)}{\partial t} + \mathrm{grad}v(\omega,t)\cdot v(\omega,t) \qquad 24$$

i.e. par rapport à **E**:

$$\Gamma(\omega,t)_E = \begin{bmatrix} \underline{\gamma}_u(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t) \\ \underline{\underline{\gamma}}_w(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \end{bmatrix} \qquad 25$$

$$\underline{\gamma}_u(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t) = \frac{\partial \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)}{\partial t} + \mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)\cdot \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)$$

$$\underline{\underline{\gamma}}_w(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) = \frac{\partial \underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)}{\partial t} + \mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\ \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t) + \mathrm{grad}_{\vartheta}\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)$$

il faut remarquer l'indépendance de la composante géométrique de l'accélération matérielle par rapport à la vitesse des phases.

2.5. Comparaison des descriptions.

2.5.1. Rapport entre inconnues lagrangiennes et eulériennes.

On a:

$$v(\Omega(\omega,t),t) = \frac{d\Omega(\omega,t)}{dt} \qquad 26$$

et dans la base **E**:

$$u(\Xi(x,t),t) = \frac{d\Xi(x,t)}{dt}\ ;\ \underline{\underline{w}}(\Xi(x,t),\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t),t) = \frac{d\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)}{dt}\cdot\underline{\underline{\Theta}}^{T}(x,\underline{\underline{\theta}},t) \qquad 27$$

2.5.2. Rapport entre évolution et taux d'évolution des vecteurs matériels.

On considère les images d'un vecteur matériel en configuration de référence, u_0, et dans une configuration actuelle, u_t. La vitesse d'évolution d'un vecteur matériel tangent au point ω est donnée par la dérivée par rapport au temps du gradient de la transformation de ce point:

$$\mathring{u}_t=\mathring{F}(\omega,t)u_0 \qquad 28$$

et on obtient, par rapport à l'image du même vecteur en configuration actuelle:

$$\mathring{u}_t=\mathring{F}(\omega,t)u_0=\mathring{F}F^{-1}(\omega,t)u_t \rightarrow \text{gradv}(\Omega(\omega,t),t)=\mathring{F}F^{-1}(\omega,t) \qquad 29$$

ce qui montre que la partie symétrique du gradient de vitesse est le taux de déformation lié par transport matériel à la vitesse de déformation de Green-Lagrange:

$$\text{symgradv}(\Omega(\omega,t),t)=\text{sym}(\mathring{F}F^{-1})(\omega,t)=F^{-T}\mathring{E}F^{-1}(\omega,t) \qquad 30$$

Par rapport à **E** (5:

$$\mathring{F}F^{-1}(\omega,t)_E=\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathring{F}}}_{xx}\cdot\underline{\underline{F}}_{xx}^{-1} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{\mathring{F}}}_{\theta x}\cdot\underline{\underline{F}}_{xx}^{-1}-\underline{\underline{\mathring{F}}}_{\theta\theta}\cdot\underline{\underline{F}}_{\theta\theta}^{-1}:\underline{\underline{F}}_{\theta x}\cdot\underline{\underline{F}}_{xx}^{-1} & \underline{\underline{\mathring{F}}}_{\theta\theta}:\underline{\underline{F}}_{\theta\theta}^{-1} \end{bmatrix}(x,\underline{\underline{\theta}},t)= \qquad 31$$

$$=\text{gradv}(\Omega(\omega,t),t)_E=\begin{bmatrix} \text{grad}_x u & \underline{\underline{0}} \\ \text{grad}_x\underline{\underline{w}} & \text{grad}_\theta\underline{\underline{w}} \end{bmatrix}(\Xi(x,t),\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t),t)$$

La comparaison entre description eulerienne et lagrangienne donne donc la définition des gradients des vitesses en configuration actuelle par rapport à la configuration de référence:

$$\begin{cases} \text{grad}_x u(\Xi(x,t),t)=\mathring{\underline{\underline{F}}}_{xx}(x,t)\cdot\underline{\underline{F}}_{xx}^{-1}(x,t) \\ \text{grad}_x\underline{\underline{w}}(\Xi(x,t),\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t),t)=\mathring{\underline{\underline{F}}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\underline{\underline{F}}_{xx}^{-1}(x,t)-\mathring{\underline{\underline{F}}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\underline{\underline{F}}_{\theta\theta}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\underline{\underline{F}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\underline{\underline{F}}_{xx}^{-1}(x,t) \\ \text{grad}_\theta\underline{\underline{w}}(\Xi(x,t),\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t),t)=\mathring{\underline{\underline{F}}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\underline{\underline{F}}_{\theta\theta}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t) \end{cases} \qquad 32$$

2.6. Conclusion.

Grâce aux hypothèses de base la cinématique d'un milieu continu profond représentant un polycristal est formellement analogue à celle d'un milieu continu classique. En particulier on a défini deux transformations (de la géométrie et des phases) inconnues lagrangiennes et deux champs de vitesse inconnues euleriennes du problème.

Du point de vue de la description lagrangienne du mouvement, on a défini les quatre composantes du gradient de la transformation (dont le gradient par rapport aux phases de la transformation géométrique est nul par hypothèse) et, par conséquent selon le schéma classique, les images du tenseur de dilatation de Cauchy et du tenseur de déformation de Green-Lagrange.

Il faut noter qu'il existe deux tenseurs de dilatation: en fait le produit scalaire de deux vecteurs matériels vus dans l'espace profond ne peut être considéré que séparément comme produit scalaire de leurs images géométriques (vecteurs de R^n) et produit scalaire de leurs images phasiques (tenseurs de Q). Ce sujet sera approfondi dans la Quatrième Partie du travail.

---

5 L'inverse du gradient de la transformation a les images dans E et Q par rapport a **E**:

$$F^{-1}(\omega,t)_E=\begin{bmatrix} \underline{\underline{F}}_{xx}^{-1} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{F}}_{\theta\theta}^{-1}:\underline{\underline{F}}_{\theta x}\cdot\underline{\underline{F}}_{xx}^{-1} & \underline{\underline{F}}_{\theta\theta}^{-1} \end{bmatrix} \qquad 31b$$

Selon la description eulerienne du mouvement on a défini les quatre composantes du gradient des vitesses (avec même hypothèse que pour les gradients des transformations). On a remarqué qu'il s'agit de grandeurs objectives, aptes donc à l'écriture d'une puissance des efforts intérieurs.

Finalement la comparaison des deux descriptions montre un résultat tout à fait classique pour la partie géométrique du milieu et un résultat formellement classique pour la partie phasique, mais avec des expressions peu maniables pour les gradients géométriques des vitesses et des transformations des phases

3. Mécanique.

3.1. Introduction.

On a vu dans le Chapitre II que dans l'étude des polycristaux l'évolution de l'orientation des réseaux cristallins est en général obtenue par des conditions de compatibilité de la configuration actuelle. Dans le modèle proposé on écrit à cette fin des équations d'équilibre mécanique entre forces et contraintes classiques et variables de type "force" duales au taux de rotation des orientations cristallines et à ses gradients.

Le principe des puissances virtuelles permet une écriture des équation recherchées par un procédé automatique; la compréhension des résultats est liée à leur interprétation microscopique pour laquelle on renvoi à la Troisième Partie du travail; la validité du principe cité est liée à l'axiomatique de base objet de la Quatrième Partie.

On donne d'abord les hypothèses permettant l'application du principe des puissances virtuelles dans sa forme classique: efforts extérieurs continus à l'intérieur et sur la surface du corps, actions inertielles classiques (dont la partie phasique est à vérifier expérimentalement), efforts intérieurs suivant le premier gradient des vitesses. Ensuite on exploite de façon classique les deux axiomes du principe et, la continuité du milieu le permettant, on obtient les équations d'équilibre du milieu continu profond.

3.2. Principe des puissances virtuelles.

3.2.1. Puissances virtuelles.

Hypothèses.

On fait l'hypothèse, formellement classique, que la puissance des efforts extérieurs est, dans l'espace profond, une forme masse-continue, linéaire sur les vitesses aussi bien à l'intérieur d'un corps matériel (i.e. dans le volume de l'image du corps selon un emplacement profond) que sur sa frontière (i.e. sur la surface de l'image). Cela découle du postulat de continuité des interactions, particularisé pour les forces (Cf. Chapitre VII).

On suppose que le système de référence fixé est inertiel et qu'il peut varier à l'intérieur d'une classe de référentiels galiléens (donc tout système utilisé est inertiel). On suppose qu'il est possible d'isoler un système dans l'univers matériel contenant le corps à étudier, tel que les actions entre corps extérieurs au système n'affectent pas le mouvement du corps en objet et que les actions entre l'extérieur du système et le corps même sont inertielles. On considère le repère choisi (et tout autre repère éventuellement utilisé) figé avec l'extérieur d'un tel système.

Par conséquent on utilise la formulation classique du principe des puissances virtuelles, avec une puissance des accélérations dans laquelle la composante phasique de l'accélération peut éventuellement être éliminée (s'il n'y a pas lieu de considérer de forces qui lui sont associées). Cette décision ne peut que être renvoyée à une partie expérimentale du travail qui sort du contexte actuel.

Toujours avec un formalisme classique, et en cohérence avec la cinématique exposée, on écrira la puissance des efforts intérieurs selon une théorie du premier gradient dans l'espace profond.

Vitesses virtuelles.

On note les espaces des vitesses virtuelles par:

$$v_V(\omega) = \begin{bmatrix} u_V(\underline{x}) \\ \underline{\underline{w}}_V(\underline{x},\underline{v}) \end{bmatrix} \in V_V = U_V \times W_V \subseteq H \qquad 55$$

Puissances virtuelles.

On considère un sous-domaine $\Omega^* \subseteq \Omega_t$ et on défini les puissances virtuelles dans ce sous-domaine.

Puissance virtuelle des efforts extérieurs:

$$P_{ext}(u_V,\underline{\underline{w}}_V,\Omega^*)= \tag{56}$$

$$= \int_{\Omega^*}\rho(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\underline{p}_u(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot u_V(\underline{x})dV_t + \int_{\Omega^*}\rho(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\underline{\underline{p}}_w(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{w}}_V(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}})dV_t +$$

$$+ \int_{\partial\Omega^*}\underline{T}_u(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot u_V(\underline{x})dS_t + \int_{\partial\Omega^*}\underline{\underline{T}}_w(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{w}}_V(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}})dS_t$$

Puissance virtuelle des accélérations (on rappelle que l'accélération géométrique de la matière ne dépend pas de son orientation microscopique):

$$P_{acc}(u_V,\underline{\underline{w}}_V,\Omega^*)= \int_{\Omega^*}\rho(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\underline{\gamma}_u(\underline{x},t)\cdot u_V(\underline{x})dV_t + \int_{\Omega^*}\rho(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\underline{\underline{\gamma}}_w(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{w}}_V(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}})dV_t \tag{57}$$

Puissance virtuelle des efforts intérieurs:

$$P_{int}(u_V,\underline{\underline{w}}_V,\Omega^*)= \int_{\Omega^*}[A(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot u_V(\underline{x}) + \underline{\underline{B}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{w}}_V(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}}) - \underline{\underline{t}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\underline{x}}u_V(\underline{x}) - \tag{58}$$

$$- \underline{\underline{C}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\vdots\mathrm{grad}_{\underline{x}}\underline{\underline{w}}_V(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}}) - \underline{\underline{\underline{D}}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\vdots\mathrm{grad}_{\underline{\underline{\vartheta}}}\underline{\underline{w}}_V(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}})\,]dV_t$$

on remarque que le tenseur B introduit est antisymétrique, étant dual d'un tenseur antisymétrique (une éventuelle partie symétrique de B ne donnerait aucune puissance), et, pour les mêmes raisons, que C est antisymétrique sur les deux derniers indices et D sur les couples d'indices externes:

$$B\in A^*=A=L_{as}(E,E)\ \text{i.e.}\ B_{ij} = -B_{ji} \tag{59}$$

$$C\in L^*(E,A)=L(A,E^*)\ \text{i.e.}\ C_{kji} = -C_{kij}$$

$$D\in L^*(A,A)=L(A,A)\ \text{i.e.}\ D_{khji} = -D_{khij} = -D_{hkji}$$

Les éléments de A, L(E,A) et L(A,A) étant objectifs il en est ainsi pour les contraintes B, C et D qui lui sont duales.

On appelle finalement:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathrm{symt}\ ;\ \underline{\underline{\mu}} = \mathrm{antsymt} \tag{60}$$

3.2.2. Axiome du caractère interne.

Mouvements rigidifiants.

Les mouvements rigidifiants peuvent être définis moyennant les isométries infinitésimales du référentiel dans lequel le corps matériel est placé.

Le théorème de représentation montre que toute isométrie de $\mathcal{E}$, espace géométrique classique, est représentée par un tenseur orthogonal opérant sur son espace translation E. Un tenseur orthogonal infinitésimal (i.e. donnant une rotation qui tend vers zéro) est un tenseur antisymétrique, ce qui conduit aux champs de vitesse rigidifiante habituels pour la partie géométrique du mouvement du corps.

L'espace des phases choisi est un sous-groupe (à cause des symétries qui peuvent nous intéresser) de $Q=L_{orth}(E,E)$ ayant Q comme espace translation. Toute isométrie de $\mathcal{E}$ induit un isomorphisme sur E et donc encore un isomorphisme sur Q. Par conséquent le tenseur orthogonal représentant une isométrie de l'espace géométrique $\mathcal{E}$ représente la même isométrie sur l'espace des phases Q. De même, le tenseur antisymétrique représentant une isométrie infinitésimale de $\mathcal{E}$ donne cette isométrie sur Q.

Pour une description lagrangienne du mouvement rigidifiant on a donc:

$$\begin{cases}\Xi_R(x,t) = s_o(t) + \underline{\underline{R}}(t)\cdot x \\ \underline{\underline{\Theta}}_R(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \underline{\underline{R}}(t)\cdot\underline{\underline{\theta}}\end{cases} \quad s_o(t)\in E_E\ ;\ \underline{\underline{R}}(t)\in Q_E=L_{orth}(E,E)_E\ \ \forall t \tag{61}$$

Pour une description eulerienne:

$$\begin{cases} u_R(\underline{x},t) = u_o(t) + \underline{\underline{\varpi}}(t)\cdot\underline{x} \\ \underline{w}_R(\underline{x},\underline{\vartheta},t) = \underline{\underline{\varpi}}(t) \end{cases} \qquad \underline{\underline{\varpi}}(t) = -\underline{\underline{\varpi}}^T(t) \text{ i.e. } \underline{\underline{\varpi}}(t)\in A_E=L_{as}(E,E)_E \ \forall t \tag{62}$$

avec la relation entre les deux descriptions:

$$\underline{\underline{\varpi}}(t)=\dot{\underline{\underline{R}}}(t)\cdot\underline{\underline{R}}^T(t) \ \forall t \tag{63}$$

On appelle les ensembles des vitesses rigidifiantes:

$$U_R(u_o,\underline{\underline{\varpi}})=\{u_R\}\subseteq U_o \ ; \ W_R(\underline{\underline{\varpi}})=\{\underline{\underline{w}}_R\}\subseteq W_o \tag{64}$$
$$V_R(u_o,\underline{\underline{\varpi}})=\left\{\begin{bmatrix} u_R \\ \underline{\underline{w}}_R \end{bmatrix}\right\}=U_R\times W_R\subseteq V_o$$

Puissance des efforts intérieurs.

La puissance des efforts intérieurs de tout sous-domaine du milieu doit s'annuler dans tout mouvement rigidifiant:

$$P_{int}(u_R,\underline{\underline{w}}_R,\Omega^*) = 0 \quad \forall \begin{bmatrix} u_R \\ \underline{\underline{w}}_R \end{bmatrix}\in V_R, \forall\Omega^*\subseteq\Omega_t \rightarrow \tag{65}$$

$$\rightarrow P_{int}(u_R,\underline{\underline{w}}_R,\Omega^*)=P_{int}(u_o,\underline{\underline{\varpi}},\Omega^*)=$$
$$=\int_{\Omega^*}\left\{A(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot[u_o(t)+\underline{\underline{\varpi}}(t)\cdot\underline{x}] + \underline{\underline{B}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{\varpi}}(t) - \underline{\underline{\underline{\mu}}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{\varpi}}(t)\right\}dV_t = 0$$

$$\forall(u_o,\underline{\underline{\varpi}})\in E_E\times A_E, \forall\Omega^*\subseteq\Omega_t \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{pour } \underline{\underline{\varpi}}=\underline{\underline{0}} \text{ et } \forall u_o: \ A(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)=0 \ \ \forall(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}})\in\Omega_t, \forall t$$

et

$$\int_{\Omega^*}\left[\underline{\underline{B}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t) - \underline{\underline{\underline{\mu}}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right]:\underline{\underline{\varpi}}(t)dV_t = 0 \ \forall\underline{\underline{\varpi}}\in A_E, \forall\Omega^*\subseteq\Omega_t \rightarrow \tag{66}$$

$$\rightarrow \text{antsym}\underline{\underline{\underline{\mu}}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)=\underline{\underline{\underline{\mu}}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)=\underline{\underline{B}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t) \ \ \forall(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}})\in\Omega_t, \forall t$$

(il faut noter que l'égalité ci-dessus assure l'objectivité de la puissance des efforts intérieurs en toute configuration bien que écrite en configuration actuelle) la puissance des efforts intérieurs est alors:

$$P_{int}(u_V,\underline{\underline{w}}_V,\Omega^*)= \tag{67}$$
$$=\int_{\Omega^*}\{-\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t):\text{grad}_{\underline{x}}u_V(\underline{x})-\underline{\underline{B}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t):\text{grad}_{\underline{x}}u_V(\underline{x}) +$$
$$+\underline{\underline{B}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{w}}_V(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}}) - \underline{\underline{\underline{C}}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\vdots\text{grad}_{\underline{x}}\underline{\underline{w}}_V(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}}) - \underline{\underline{\underline{D}}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\vdots\text{grad}_{\underline{\vartheta}}\underline{\underline{w}}_V(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}})\}dV_t$$

on peut distinguer la puissance liée au taux de déformation de "changement de forme géométrique macroscopique" de la matière:

$$-\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t):\text{symgrad}_{\underline{x}}u_V(\underline{x}) \tag{68}$$

la puissance liée au taux de rotation relative entre géométrie macroscopique de la matière et orientation de l'anisotropie microscopique (taux de rotation relative matériau-matière):

$$-\underline{\underline{B}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t):\left[\text{antsymgrad}_{\underline{x}}u_V(\underline{x})-\underline{\underline{w}}_V(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}})\right]=\underline{\underline{B}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{v}}_V(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t) \tag{69}$$

où on note le taux de rotation relative matériau-matière:

$$\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{w}} - \text{antsymgrad}_{\underline{x}}\underline{u} \qquad 70$$

et la puissance "dans le matériau":

$$-\underline{\underline{C}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t):\text{grad}_{\underline{x}}\underline{\underline{w}}_V(\underline{x},\underline{\vartheta}) - \underline{\underline{D}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t):\text{grad}_{\vartheta}\underline{\underline{w}}_V(\underline{x},\underline{\vartheta}) \qquad 71$$

si on néglige les seconds gradients de u (en accord avec l'hypothèse déjà faite pour la puissance des efforts intérieurs):

$$\text{grad}_{\underline{x}}\underline{\underline{v}} \cong \text{grad}_{\underline{x}}\underline{\underline{w}} \quad ; \quad \text{grad}_{\vartheta}\underline{\underline{v}} = \text{grad}_{\vartheta}\underline{\underline{w}} \qquad 72$$

on obtient l'écriture de la puissance des efforts intérieurs en fonction du taux de rotation relative matériau-matière:

$$P_{int}(u_V, \underline{\underline{v}}_V, \Omega^*) = \qquad 73$$

$$= \int_{\Omega^*} \{ -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t):\text{grad}_{\underline{x}}u_V(\underline{x}) - \underline{\underline{B}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t):\underline{\underline{v}}_V(\underline{x},\underline{\vartheta}) -$$

$$-\underline{\underline{C}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t):\text{grad}_{\underline{x}}\underline{\underline{v}}_V(\underline{x},\underline{\vartheta}) - \underline{\underline{D}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t):\text{grad}_{\vartheta}\underline{\underline{v}}_V(\underline{x},\underline{\vartheta}) \}dV_t$$

3.2.3. Axiome d'identification.

Transformation des intégrales.

On considère:

$$\partial\Omega_t = D_t x \partial Z_t + \partial D_t x Z_t \qquad 74$$

et:

$$\partial\Omega^* = D^* x \partial Z^* + Z^* x \partial D^* \quad \forall \Omega^* \subseteq \Omega_t \qquad 75$$

on suppose que les normales à la surface ∂D_t ou ∂D^* ne dépendent pas des phases dans Z_t et que les normales à ∂Z_t ou ∂Z^* ne dépendent pas de la position géométrique dans D_t (domaines rectangulaires à tout instant). Faisant l'hypothèse de régularité de la surface de l'image d'un corps matériel dans l'espace profond, on peut utiliser le théorème de Gauss pour transformer les intégrales en:

$$\int_{\Omega^*} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t):\text{grad}_{\underline{x}}u_V(\underline{x})dV_t = \qquad 76$$

$$= \int_{Z^* x \partial D^*} u_V(\underline{x}) \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t) \cdot \underline{n}(\underline{x},t)dS_t - \int_{\Omega^*} \text{div}_{\underline{x}}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t) \cdot u_V(\underline{x})dV_t$$

$$\int_{\Omega^*} \underline{\underline{B}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t):\text{grad}_{\underline{x}}u_V(\underline{x})dV_t = \qquad 77$$

$$= \int_{Z^* x \partial D^*} \underline{n}(\underline{x},t) \cdot \underline{\underline{B}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t) \cdot u_V(\underline{x})dS_t + \int_{\Omega^*} \text{div}_{\underline{x}}\underline{\underline{B}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t) \cdot u_V(\underline{x})dV_t$$

B étant antisymétrique l'intégrale sur la frontière ci-dessus est nulle; le signe avant l'intégrale de volume est positif car on indique par "$\text{div}_{\underline{x}}$" la divergence obtenue par contraction des deux derniers indices du gradient:

$$\text{div}_{\underline{x}}\underline{\underline{B}} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j} E_i = -\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_i} E_j \qquad 78$$

$$\int_{\Omega^*} \underline{\underline{\underline{C}}}(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) : \mathrm{grad}_{\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}}} \underline{\underline{\underline{w}}}_V(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}}) dV_t = \tag{79}$$

$$= \int_{Z^* \times (D^* \cap \partial D_t)} \underline{n}(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},t) \cdot \underline{\underline{\underline{C}}}(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) : \underline{\underline{\underline{w}}}_V(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}}) dS_t - \int_{\Omega^*} \mathrm{div}^{(1)}_{\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) : \underline{\underline{\underline{w}}}_V(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}}) dV_t$$

où on indique entre parenthèses les indices intéressés par la divergence[6]:

$$\mathrm{div}^{(1)}_{\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}}} \underline{\underline{\underline{C}}} = \frac{\partial C_{ijk}}{\partial \mathfrak{x}_i} E_j \otimes E_k \tag{80}$$

$$\int_{\Omega^*} \underline{\underline{\underline{D}}}(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) : \mathrm{grad}_{\underline{\underline{\underline{\vartheta}}}} \underline{\underline{\underline{w}}}_V(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}}) dV_t = \tag{81}$$

$$= \int_{D^* \times (Z^* \cap \partial Z_t)} \underline{\underline{\underline{n}}}(\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) : \underline{\underline{\underline{D}}}(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) : \underline{\underline{\underline{w}}}_V(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}}) dS_t - \int_{\Omega^*} \mathrm{div}^{(1,2)}_{\underline{\underline{\underline{\vartheta}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) : \underline{\underline{\underline{w}}}_V(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}}) dV_t$$

où la divergence par rapport à la variable ϑ d'ordre deux est définie par:

$$\mathrm{div}^{(1,2)}_{\underline{\underline{\underline{\vartheta}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}} = \frac{\partial D_{ijhk}}{\partial \vartheta_{jl}} \underline{\underline{\underline{E}}}_{kh} \tag{82}$$

Equations d'équilibre.

Dans un référentiel galiléen, dans tout sous-domaine du milieu, pour tout champ de vitesse virtuelle:

$$P_{ext}(u_V, \underline{\underline{\underline{w}}}_V, \Omega^*) + P_{int}(u_V, \underline{\underline{\underline{w}}}_V, \Omega^*) = P_{acc}(u_V, \underline{\underline{\underline{w}}}_V, \Omega^*) \tag{83}$$

$$\forall \begin{bmatrix} u_V \\ \underline{\underline{\underline{w}}}_V \end{bmatrix} \in V_V, \forall \Omega^* \subseteq \Omega_t \rightarrow$$

On obtient les équations locales d'équilibre écrites en configuration actuelle[7]:

$$\rightarrow \quad \forall (\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}}) \in D_t \times Z_t, \forall t: \tag{84}$$

$$\begin{cases} \rho(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) \left[\underline{p}_u(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) - \underline{\gamma}_u(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},t) \right] + \mathrm{div}_{\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}}} \underline{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) - \mathrm{div}_{\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}}} \underline{\underline{\underline{B}}}(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) = 0 \\ \rho(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) \left[\underline{\underline{\underline{p}}}_w(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) - \underline{\underline{\underline{\gamma}}}_w(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) \right] - \underline{\underline{\underline{B}}}(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) + \mathrm{div}^{(1)}_{\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) + \mathrm{div}^{(1,2)}_{\underline{\underline{\underline{\vartheta}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) = \underline{\underline{0}} \end{cases}$$

avec conditions au contour:

$$\rightarrow \quad \forall (\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}}) \in \partial D_t \times Z_t, \forall t: \tag{85}$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) \cdot \underline{n}(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},t) = \underline{T}_u(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) \\ \underline{n}(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},t) \cdot \underline{\underline{\underline{C}}}(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) = \underline{\underline{\underline{T}}}_w(\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}},\underline{\underline{\underline{\vartheta}}},t) \end{cases}$$

---

6 La divergence notée "$\mathrm{div}^{(m)}_{\underline{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}}}$ ..." d'un tenseur d'ordre n est obtenue par contraction des indices m et n+1 du gradient par rapport à $\mathfrak{x}$ de ce tenseur. La divergence "$\mathrm{div}^{(m,p)}_{\underline{\underline{\underline{\vartheta}}}}$ ..." d'un tenseur d'ordre n est obtenue par contraction des indices m et n+2 et des indices p et n+1 de son gradient par rapport à ϑ.

7 On rappelle que le signe négatif devant la divergence de B dans la première équation est dû à la signification qu'on donne à l'opérateur div (gradient contracté sur les deux derniers indices) et au caractère antisymétrique de B.

$$\rightarrow \quad \forall(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}})\in D_t x \partial Z_t, \forall t: \tag{85}$$

$$\begin{cases} T_u(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) = 0 \\ \underline{\underline{n}}(\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{\underline{D}}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) = \underline{\underline{T_w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \end{cases}$$

La divergence d'un tenseur antisymétrique est l'opposé du rotationnel de son vecteur axial; soit $\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ le tenseur de permutation, on note:

$$b(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) = \frac{1}{2}\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}:\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \;\; ; \;\; \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) = \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}\cdot b(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \tag{86}$$

$$div_{\mathfrak{x}}\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) = -rot_{\mathfrak{x}}b(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)$$

ce qui permet d'écrire l'équations indéfinie d'équilibre relative à la contrainte de Cauchy σ comme:

$$\rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\left[\underline{p_u}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)-\underline{\gamma_u}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)\right]+div_{\mathfrak{x}}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)+rot_{\mathfrak{x}}b(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)=0 \quad \forall(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}})\in D_t x Z_t, \forall t \tag{87}$$

et montre que l'effort b joue le rôle d'un couple ponctuel.

Exemple du polycristal plan.

Pour un problème à géométrie plane et positions des trièdres contraintes dans le plan géométrique, l'espace des phases se réduit au sous-espace des tenseurs orthogonaux droits avec direction propre normale au plan géométrique; la variable dans cet espace est un angle de rotation.

Si on note la phase actuelle par ϑ:

$$\underline{\underline{\vartheta}}=\begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{w}}=w\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; w=\dot{\vartheta} \tag{88}$$

on obtient les contraintes μ, C et D définies dans le chapitre précédent par:

$$\mu=B_{12} \text{ ; i.e. } b_1=b_2=0 \text{ et } b_3=\mu \tag{89}$$

$$C_i=2C_{i12} \; (i=1,2) \text{ et } C_3=0$$

$$D=2(D_{1112}+D_{2212})\cos\vartheta-4D_{1212}\sin\vartheta$$

Par conséquent les équations d'équilibre du polycristal plan sont, compte tenu des forces de masse et des accélérations:

$$\forall(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\vartheta)\in D_t x Z_t, \forall t: \tag{90}$$

$$\begin{cases} \rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\vartheta,t)\left[\underline{p_u}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\vartheta,t)-\underline{\gamma_u}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)\right]+div_{\mathfrak{x}}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\vartheta,t)+rot_{\mathfrak{x}}b(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\vartheta,t)=0 \\ \rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\vartheta,t)\left[p_{w12}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\vartheta,t)-\gamma_{w12}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\vartheta,t)\right]-b_3(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\vartheta,t)+\dfrac{\partial C_1}{\partial \mathfrak{x}_1}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\vartheta,t)+\dfrac{\partial C_2}{\partial \mathfrak{x}_2}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\vartheta,t)+\dfrac{\partial D}{\partial \vartheta}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\vartheta,t)=0 \end{cases}$$

$$\forall(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}})\in\partial D_t x Z_t,\forall t: \qquad (90)$$

$$\begin{cases}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot n(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)=T_u(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\\ n_1(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)C_1(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)+n_2(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)C_2(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)=T_w(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\end{cases}$$

$$\forall(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}})\in D_t x\partial Z_t,\forall t:$$

$$\begin{cases}T_u(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)=0\\ D(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)=T_w(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\end{cases}$$

3.3. Transports.

L'équilibre mécanique, bien que énoncé par rapport à la configuration actuelle, est une propriété des corps matériels indépendante de leur représentation particulière. Cela signifie que chaque grandeur que nous avons introduite pour définir l'équilibre d'un corps dans une configuration n'est qu'une image dans cette configuration, c'est à dire l'élément d'une classe d'équivalence caractérisée, en toute configuration, par le fait de garantir l'équilibre sous les mêmes conditions (extérieures et intérieures). En ce sens le transport matériel d'une grandeur d'une configuration à une autre est le rapport entre deux éléments de la même classe opérant sur deux configurations différentes.

Une configuration est, par définition, l'image par rapport à un repère, dans un système de référence, d'un emplacement. La masse et les puissances d'un état donné sont définies sur les corps matériels (ou parties matérielles de ceux-ci), leurs images dans l'espace profond sont des fonctions de la position-phase, additives, de somme indépendante de l'emplacement pour toute partie matérielle du corps. En particulier, par définition de processus cinématique, la mesure masse est conservée pour tout emplacement d'un processus admissible, ce qui donne l'équation de continuité:

_soit dans la suite $(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}})=(\Xi(x,t),\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t))$; $(x,\underline{\underline{\theta}})=(\Xi^{-1}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t),\underline{\underline{\Theta}}^{-1}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t))$

$$\rho_0(x,\underline{\underline{\theta}})dV_0=\rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)dV_t \Rightarrow \rho_0(x,\underline{\underline{\theta}})=J(x,\underline{\underline{\theta}},t)\rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \qquad 91$$

Il est utile pour la suite de voir les transports matériels des contraintes, obtenus à partir de l'indépendance de la puissance intérieure de la configuration et en connaissant les transports des taux de déformation correspondantes (la valeur à l'instant t de la fonction sur la configuration initiale à gauche est égale à celle de la fonction actuelle à droite).

Transport de la contrainte B sur la configuration initiale:

$$\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)dV_t=\underline{\underline{B_0}}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\underline{\underline{\Theta}}^T\cdot\dot{\underline{\underline{\Theta}}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)dV_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B_0}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=J(x,\underline{\underline{\theta}},t)\underline{\underline{\Theta}}^T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot\underline{\underline{\Theta}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \qquad 92$$

Définition d'images de la contrainte C et D sur la configuration initiale[8]:

---

8 Ces deux contraintes sont associées à deux images du gradient de la vitesse des phases dans le référentiel choisi et représentent, donc, deux images d'une même contrainte intrinsèque. C'est la raison pour laquelle leurs transports ne peuvent pas être fait indépendamment.

$$\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\underline{\underline{\chi}}}\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)dV_t + \underline{\underline{D}}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\underline{\underline{\vartheta}}}\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)dV_t =$$

$$= \underline{\underline{C}}_o(x,\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{F}}^{T}_{\vartheta\vartheta}:\overset{\circ}{\underline{\underline{F}}}_{\vartheta x}(x,\underline{\underline{\vartheta}},t)dV_0 + \underline{\underline{D}}_o(x,\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{F}}^{T}_{\vartheta\vartheta}:\overset{\circ}{\underline{\underline{F}}}_{\vartheta\vartheta}(x,\underline{\underline{\vartheta}},t)dV_0 \Rightarrow \qquad (93)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{C}}_o(x,\underline{\underline{\vartheta}},t)=J(x,\underline{\underline{\vartheta}},t)\underline{\underline{F}}^{-1}_{xx}(\underline{\underline{\chi}},t)\cdot\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{F}}^{-T}_{\vartheta\vartheta}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \\ \underline{\underline{D}}_o(x,\underline{\underline{\vartheta}},t)=J(x,\underline{\underline{\vartheta}},t)\underline{\underline{F}}^{-1}_{\vartheta\vartheta}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\left[\underline{\underline{D}}-\underline{\underline{F}}_{\vartheta x}\cdot\underline{\underline{F}}^{-1}_{xx}\cdot\underline{\underline{C}}\right](\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{F}}^{-T}_{\vartheta\vartheta}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \end{cases}$$

Transport de la contrainte géométrique définie en configuration actuelle (dont la partie symétrique est la contrainte de Cauchy) en configuration initiale (la partie symétrique de l'image est la contrainte de Piola-Kirchhoff):

$$\left[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)+\underline{\underline{\mu}}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right]:\mathrm{grad}_{\underline{\underline{\chi}}}\underline{u}(\underline{\underline{\chi}},t)dV_t = \left[\underline{\underline{\pi}}(x,\underline{\underline{\vartheta}},t)+\underline{\underline{\beta}}(x,\underline{\underline{\vartheta}},t)\right]:\underline{\underline{F}}^{T}_{xx}\cdot\overset{\circ}{\underline{\underline{F}}}_{xx}(x,t)dV_0 \Rightarrow \qquad (94)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{\pi}}(x,\underline{\underline{\vartheta}},t)=J(x,\underline{\underline{\vartheta}},t)\underline{\underline{F}}^{-1}_{xx}(\underline{\underline{\chi}},t)\cdot\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot\underline{\underline{F}}^{T}_{xx}(\underline{\underline{\chi}},t) \quad (\underline{\underline{\pi}}=\underline{\underline{\pi}}^{T}) \\ \underline{\underline{\beta}}(x,\underline{\underline{\vartheta}},t)=J(x,\underline{\underline{\vartheta}},t)\underline{\underline{F}}^{-1}_{xx}(\underline{\underline{\chi}},t)\cdot\underline{\underline{\mu}}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot\underline{\underline{F}}^{T}_{xx}(\underline{\underline{\chi}},t) \quad (\underline{\underline{\beta}}=-\underline{\underline{\beta}}^{T}) \end{cases}$$

Il existe plusieurs définitions possibles de l'image en configuration initiale d'un opérateur défini en configuration actuelle.

La contrainte de Piola-Kirchhoff, choisie parmi les images en configuration initiale de la contrainte de Cauchy, a l'avantage de l'objectivité et d'être associée à la vitesse de la déformation de Green-Lagrange.

Par contre il n'est pas possible de définir des images en configuration initiale des contraintes C et D qui soient, en même temps, objectives et associées à des vitesses de déformation de type Green-Lagrange ou Euler-Almansi. On renonce pour la suite à la définition en configuration initiale de couples contrainte-déformation convenables relatives à ces deux termes.

3.4. Conclusion.

La définition formellement classique de la puissance des efforts intérieurs nous a donné quatre tenseurs de contrainte indépendants, σ, B, C et D, et un tenseur μ, partie antisymétrique de la contrainte géométrique (dont la partie symétrique est σ), lié par une équation d'objectivité au tenseur B. Par définition ces tenseurs sont tous objectifs, mais leur transport en configuration initiale n'est pas immédiat: les tenseurs C et D sont deux images d'une même grandeur intrinsèque et, par conséquent, leurs transports sont couplés. D'un autre coté le transport de la contrainte de Cauchy est classique, donnant en particulier la contrainte de Piola-Kirchhoff, et le transport de la contrainte B est analogue à celui-ci.

On a obtenu deux équations tensorielles d'équilibre à l'intérieur du corps: la première est celle classique des contraintes de Cauchy où apparaissent des couples ponctuelles dues à la contrainte B, la deuxième regarde les contraintes phasiques B, C et D. On remarque que le couplage entre les deux équations se fait par B; on remarque aussi que la deuxième équation d'équilibre est celle qui régit l'évolution des phases et donc, comme pour l'exemple du Chapitre III, l'évolution des textures.

Dans les équations d'équilibre apparaissent, outre les efforts usuels, des efforts de nature inconnue, introduits pour des raisons de complétude formelle des équations, dont le rôle et l'origine éventuels ne peuvent que être compris par une étude expérimentale qui sort du contexte actuel.

4. Thermodynamique.

4.1. Introduction.

Les hypothèses à la base de l'étude thermodynamique qui suit sont les suivantes: énergie cinétique définie par sa partie principale classique mais par rapport aux vitesses de l'espace profond, température indépendante de la phase, production d'entropie non négative en tout point du milieu continu profond (donc suivant la position géométrique et la phase). Ces hypothèses à part l'étude suit le schéma classique: définition de la partie interne et de la partie cinétique de l'énergie totale, définition des apports extérieurs d'énergie (puissances calorifique et des efforts extérieurs), postulat de conservation de l'énergie totale de tout système matériel, définition de l'apport extérieur d'entropie, postulat de production non négative d'entropie pour tout système matériel.

De façon classique les postulat énoncés pour tout système matériel seront considérés valables localement en tout point matériel en prenant une description macroscopique (i.e. suffisamment grossière) de la matière.

4.2. Premier Principe.

4.2.1. Définitions.

On considère un sous-domaine en configuration actuelle $\Omega^* \subseteq \Omega_t$ et on écrit les énergies, interne et cinétique, et les puissances, calorifique et des efforts extérieurs, reçues par ce sous-domaine.

Ces écritures, formellement classiques, se justifient en postulant l'existence d'une énergie interne aux corps matériels, indépendamment du référentiel de leur emplacement, et, notamment pour la puissance calorifique, en postulant la continuité des actions extérieures par rapport aux mesures aire et volume. La signification de l'image des énergies et des puissances donnée par l'espace profond peut s'expliquer par comparaison avec un emplacement dans un repère d'espace géométrique de niveau inférieur (passage micro-macro profond) comme on montrera dans le Chapitre VI.

Energie interne:

$$E(\Omega^*,t)= \int_{\Omega^*} \rho(\omega,t)e(\omega,t)dV_t \qquad 95$$

Energie cinétique:

$$K(\Omega^*,t)= \frac{1}{2}\int_{\Omega^*} \rho(\omega,t)v(\omega,t)\cdot v(\omega,t)dV_t \qquad 96$$

Puissance calorifique (on considère toujours des sous-domaines rectangulaires):

$$C(\Omega^*,t)= \int_{\Omega^*} r(\omega,t)dV_t - \int_{\partial\Omega^*} T_q(\omega,t)dS_t = \qquad 97$$

$$= \int_{\Omega^*} r(\underline{x},\underline{\vartheta},t)dV_t - \int_{Z^*x\partial D^*} \underline{q}(\underline{x},\underline{\vartheta},t)\cdot \underline{n}(\underline{x},t)dS_t - \int_{D^*x\partial Z^*} \underline{\underline{q}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t):\underline{\underline{n}}(\underline{\vartheta},t)dS_t =$$

$$= \int\int_{D^*xZ^*} \left[r(\underline{x},\underline{\vartheta},t) - \mathrm{div}_{\underline{x}}\underline{q}(\underline{x},\underline{\vartheta},t) - \mathrm{div}_{\underline{\vartheta}}\underline{\underline{q}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t) \right] dV_t$$

Puissance des efforts extérieurs:

$$P_{ext}(\Omega^*,t)= \int_{\Omega^*} \rho(\underline{x},\underline{\vartheta},t)\underline{p}_u(\underline{x},\underline{\vartheta},t)\cdot \underline{u}(\underline{x},t)dV_t + \int_{\Omega^*} \rho(\underline{x},\underline{\vartheta},t)\underline{\underline{p}}_w(\underline{x},\underline{\vartheta},t):\underline{\underline{w}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t)dV_t + \qquad 98$$

$$+ \int_{\partial\Omega^*} \underline{T}_u(\underline{x},\underline{\vartheta},t)\cdot \underline{u}(\underline{x},t)dS_t + \int_{\partial\Omega^*} \underline{\underline{T}}_w(\underline{x},\underline{\vartheta},t):\underline{\underline{w}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t)dS_t$$

4.2.2. Théorème de l'énergie cinétique.

Le calcul de la dérivée matérielle de l'énergie cinétique montre la validité du théorème de l'énergie cinétique dans l'espace profond:

$$\mathring{K}(\Omega^*,t)= \int_{\Omega^*}\rho(\omega,t)v(\omega,t)\cdot\mathring{v}(\omega,t)dV_t = \tag{99}$$

$$= \int_{\Omega^*}\rho(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\left[\underline{\underline{\gamma}}_u(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},t)\cdot u(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},t)+ \underline{\underline{\gamma}}_w(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{\underline{w}}}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right]dV_t = P_{acc}(\Omega^*,t)$$

par le principe des puissances virtuelles appliqué aux mouvements réels on obtient en fait:

$$\mathring{K}(\Omega^*,t) = P_{acc}(u,\underline{\underline{\underline{w}}},\Omega^*) = P_{ext}(u,\underline{\underline{\underline{w}}},\Omega^*) + P_{int}(u,\underline{\underline{\underline{w}}},\Omega^*) \tag{100}$$

4.2.3. Bilan d'énergie totale et bilan d'énergie interne.

Le premier principe de la thermodynamique énonce la conservation de l'énergie totale pour toute partie d'un corps matériel, indépendamment du référentiel choisi:

$$\left[\mathring{E}(\Omega^*,t)+\mathring{K}(\Omega^*,t)\right] = P_{ext}(\Omega^*,t) + C(\Omega^*,t) \quad \forall\ \Omega^*\subseteq\Omega_t, \forall\ t \tag{101}$$

ou, en utilisant le théorème de l'énergie cinétique (cette forme a l'avantage d'être objective):

$$\mathring{E}(\Omega^*,t) = P_{int}(\Omega^*,t) + C(\Omega^*,t) \quad \forall\ \Omega^*\subseteq\Omega_t, \forall\ t \tag{102}$$

Dans un espace profond-temps, comme dans un espace-temps, un corps en équilibre peut être vu comme un ensemble d'événements de mesure infinitésimale dans le temps et dans l'espace profond, obtenant ainsi les processus quasi-statiques locaux comme cas limite de l'équilibre thermo-statique. D'après les définitions données on obtient l'écriture locale en configuration actuelle, formalisme eulerien, du bilan d'énergie interne:

$$\rho(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\mathring{e}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\mathfrak{X}}u(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},t) +\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\left[\mathrm{grad}_{\mathfrak{X}}u(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},t)-\underline{\underline{\underline{w}}}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right]+ \tag{103}$$

$$+\underline{\underline{\underline{C}}}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\mathfrak{X}}\underline{\underline{\underline{w}}}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) +\underline{\underline{\underline{D}}}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\vartheta}\underline{\underline{\underline{w}}}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) +$$

$$+r(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) -\mathrm{div}_{\mathfrak{X}}\underline{\underline{q}}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) -\mathrm{div}_{\vartheta}\underline{\underline{q}}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \quad \forall(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}})\in\Omega_t,\forall t$$

Selon la méthode de l'état local un processus réel pour l'ensemble Ω est un ensemble de processus quasi-statiques en tout point de Ω. Ceci permet d'affirmer la validité du bilan local d'énergie interne ci-dessus dans tout processus.

4.3. Deuxième Principe.

4.2.1. Bilan d'entropie.

Dans un processus quasi-statique isotherme d'un système en contact seulement thermique avec l'extérieur, la puissance calorifique reçue est égale à la variation d'entropie du système (le transfert quasi-statique de chaleur entre systèmes à la même température donne le bilan d'entropie dans un processus réversible).

La puissance calorifique reçue pendant un processus quasi-statique à température constante par un système autrement isolé est égale à la variation d'entropie du dit système. Pour un processus quasi-statique non isotherme d'un système non isolé on a un écart instantané entre la puissance calorifique reçue et la variation d'entropie du système. Par la méthode de l'état local, tout processus de la classe étudiée est une suite dans le temps et un ensemble dans l'espace de processus

quasi-statiques locaux, chaque point matériel étant caractérisé par un état différent (i.e. il existe un gradient de température): l'écart en question sera donc instantané et local et on peut l'appeler taux de production d'entropie volumique.

On fait l'hypothèse que la température d'un point matériel placé dans l'espace profond est fonction seulement du pseudo-emplacement géométrique, c'est à dire qu'elle est indépendante de la phase en tout point matériel.

Pour tout processus réel, on postule donc le bilan:

$$\int_{\Omega^*}\rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\mathring{s}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)dV_t = \tag{104}$$

$$= \int_{\Omega^*}\frac{r(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)}dV_t - \int_{Z^*x\partial D^*}\frac{\underline{q}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot n(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)}dS_t - \int_{D^*x\partial Z^*}\frac{\underline{\underline{q}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{n}}(\underline{\underline{\vartheta}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)}dS_t + \int_{\Omega^*}\rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\eta(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)dV_t =$$

$$= \int_{\Omega^*}\left[\frac{r(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)-div_{\mathfrak{x}}\underline{q}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)+div_{\vartheta}\underline{\underline{q}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)} + \underline{q}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot\frac{grad_{\mathfrak{x}}T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)}{T^2(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)} + \rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\eta(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right]dV_t$$

$$\forall\ \Omega^*\subseteq\Omega_t, \forall t$$

On passe de ce bilan d'ensemble au bilan local d'entropie en tenant compte du caractère arbitraire du choix du domaine d'intégration et à la régularité de la fonction intégrée[9]. On peut ensuite multiplier par T>0 pour obtenir un bilan avec grandeurs homogènes à des puissances:

$$\rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)\mathring{s}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) - r(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) + div_{\mathfrak{x}}\underline{q}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) + div_{\vartheta}\underline{\underline{q}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) - \tag{105}$$

$$-\underline{q}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot\frac{grad_{\mathfrak{x}}T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)} - \rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)\eta(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) = 0 \quad \forall(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}})\in\Omega_t\ \forall t$$

Remarque sur le flux surfacique.

Grâce à l'hypothèse de température uniforme dans les points matériels d'égal emplacement géométrique, on peut modifier l'expression du flux surfacique d'entropie (avec la notation $dV_t=dV_{Et}dV_{Qt}$):

$$\int_{\partial D^*}\frac{1}{T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)}\int_{Z^*}\underline{q}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)dV_{Qt}\cdot n(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)dS_{Et} + \int_{D^*}\frac{1}{T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)}\int_{\partial Z^*}\underline{\underline{q}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{n}}(\underline{\underline{\vartheta}},t)dS_{Qt}dV_{Et} = \tag{106}$$

$$= \int_{\partial D^*}\frac{Q(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)\cdot n(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)}dS_{Et} + \int_{D^*}\frac{R(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)}dV_{Et}$$

où:

$$\int_{Z^*}\underline{q}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)dV_{Qt} = Q(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)\ ;\ \int_{\partial Z^*}\underline{\underline{q}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{n}}(\underline{\underline{\vartheta}},t)dS_{Qt} = \int_{Z^*}div_{\vartheta}\underline{\underline{q}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)dV_{Qt} = R(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t) \tag{107}$$

on reconnaît un flux d'entropie par échange de chaleur Q le long du contour géométrique ∂D^* du domaine et un flux d'entropie par un pseudo-échange volumique de chaleur R dans le domaine géométrique D^*.

---

9 Selon l'analogie micro-macro utilisée dans la Troisième Partie du travail, la régularité de la fonction intégrée descend de la régularité de la fonction d'observation qui lisse les champs microscopiques. D'un point de vue physique, c'est le fait que le vecteur flux de chaleur dépend de la variable de phase qui assure la validité d'un bilan locale d'entropie dans l'espace profond ayant cette forme, une fois que la température est, par hypothèse, indépendante des phases.

Sur la validité locale dans l'espace profond et instantanée de l'inégalité de Clausius-Duhem voir le Chapitre V.

4.2.2. Inégalité de Clausius-Duhem.

Dissipation.

On appelle dissipation (grandeur homogène à une puissance massique) le terme:

$$D(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)= T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)\eta(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \qquad 108$$

D'après le second principe de la thermodynamique, pour tout processus réel d'un corps matériel indépendamment de son emplacement dans l'espace profond[10]:

$$D(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\geq 0 \text{ dans tout processus réel } \forall(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}})\in\Omega_t\ \forall t \qquad 109$$

Energie libre.

On défini le potentiel énergie libre par:

$$\psi(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) =e(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) -T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)s(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\ \forall(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}})\in\Omega_t\ \forall t \qquad 110$$

à partir des bilans locaux d'énergie interne et d'entropie on déduit le bilan locale d'énergie libre, en eulerien:

$$\rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\mathring{\psi}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) = \qquad 111$$

$$= \rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\mathring{e}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) -\rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\mathring{T}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)s(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) -\rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)\mathring{s}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) =$$

$$= \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}u(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t) +\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\left[\mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}u(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)-\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right]+$$

$$+\underline{\underline{\underline{C}}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) +\underline{\underline{\underline{D}}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\vartheta}\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) -$$

$$-\rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\mathring{T}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)s(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) -\underline{q}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot\frac{\mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)} -\rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)D(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\ ;\ \forall(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}})\in\Omega_t\ \forall t$$

et on peut écrire le second principe de la thermodynamique sous la forme de l'inégalité de Clausius-Duhem, en eulerien, sur la configuration actuelle:

$$-\rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\mathring{\psi}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) +\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}u(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t) +\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\left[\mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}u(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)-\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right]+ \qquad 112$$

$$+\underline{\underline{\underline{C}}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) +\underline{\underline{\underline{D}}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\vartheta}\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) -$$

$$-\rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\mathring{T}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)s(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) -\underline{q}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot\frac{\mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)} = \rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)D(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\geq 0$$

$$\forall(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}})\in\Omega_t\ \forall t$$

---

10 Du fait que le flux de chaleur dépend de la variable de phase (voir interprétation microscopique du bilan d'entropie) on peut envisager que, si l'entropie d'une phase (e.g. d'un domaine géométrique à phase fixée) est censée décroître, cela se vérifie par un apport de chaleur par sa "surface" ou par une "convection" d'entropie par changement de phase et non par une production négative d'entropie massique. Sinon, d'un point de vue microscopique, le constituant dans la phase en question évoluerait localement selon un processus à production négative d'entropie qui est inadmissible. Ce raisonnement explique l'intuition physique d'une dissipation positive en tout point géométrique et pour toute phase.

A l'intérieur de cette inégalité, par des hypothèses sur le type de comportement, on pourra distinguer une partie réversible (termes dont la somme est nulle en tout point et le long de tout processus) et une partie irréversible. Par des hypothèses sur le type de dissipation on pourra, ensuite, distinguer une partie irréversible strictement dissipatrice et une partie irréversible (non dissipatrice) d'interaction entre variables internes qui représente l'échange entre sources extérieures d'énergie et changements de l'état interne[11].

4.4. Transports.

Un corps matériel est en équilibre thermodynamique indépendamment de la configuration choisie pour le décrire, de même que pour l'équilibre mécanique. Si l'équilibre thermodynamique en objet est un état local instantané, on fait l'hypothèse qu'il est indépendant de la configuration locale

L'image dans l'espace profond de l'énergie interne d'une partie matérielle d'un corps est une fonction additive d'espace, de somme indépendante de l'emplacement. La même propriété est valable pour l'entropie dans un état d'équilibre, éventuellement local instantané, et, par conséquent, pour l'énergie libre (la valeur à l'instant t de la fonction sur la configuration initiale à gauche est égale à celle de la fonction actuelle à droite):

_soit dans la suite $(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}})=(\underline{\underline{\Xi}}(\chi,t),\underline{\underline{\Theta}}(\chi,\underline{\underline{\theta}},t))$ et donc $(\chi,\underline{\underline{\theta}})=(\underline{\underline{\Xi}}^{-1}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\Theta}}^{-1}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t))$

$$\rho_0(\chi,\underline{\underline{\theta}})T(\chi,t)s_0(\chi,\underline{\underline{\theta}},t)dV_0=\rho(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)T(\underline{\underline{\chi}},t)s(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)dV_t \Rightarrow s_0(\chi,\underline{\underline{\theta}},t)=s(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \qquad 113$$

$$\rho_0(\chi,\underline{\underline{\theta}})c_0(\chi,\underline{\underline{\theta}},t)dV_0=\rho(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)c(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)dV_t \Rightarrow c_0(\chi,\underline{\underline{\theta}},t)=c(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)$$

$$\rho_0(\chi,\underline{\underline{\theta}})\psi_0(\chi,\underline{\underline{\theta}},t)dV_0=\rho(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\psi(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)dV_t \Rightarrow \psi_0(\chi,\underline{\underline{\theta}},t)=\psi(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)$$

Le transport matériel du flux de chaleur dépend de celui du vecteur surface sur lequel il agit. On doit vérifier que:

$$\underline{q}_0(\chi,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot n_0(\chi,t)dS_{\Gamma 0}=\underline{q}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot n(\underline{\underline{\chi}},t)dS_{\Gamma t} \quad \forall n_0(\chi,t)dS_{\Gamma 0} \quad \forall(\chi,\underline{\underline{\theta}})\in\partial D_0 x Z_0 \qquad 114$$

$$\underline{\underline{q}}_0(\chi,\underline{\underline{\theta}},t):\underline{n}_0(\underline{\underline{\theta}},t)dS_{Q0}=\underline{\underline{q}}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{n}}(\underline{\underline{\vartheta}},t)dS_{Qt} \quad \forall\underline{\underline{n}}_0(\underline{\underline{\theta}},t)dS_{Q0} \quad \forall(\chi,\underline{\underline{\theta}})\in D_0 x\partial Z_0$$

qui entraîne (en supposant les images des surfaces matérielles régulières dans l'espace profond):

$$\left[Div_\chi\underline{q}_0(\chi,\underline{\underline{\theta}},t)+Div_\theta\underline{q}_0(\chi,\underline{\underline{\theta}},t)\right]dV_0=\left[div_{\underline{\underline{\chi}}}\underline{q}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)+div_{\underline{\underline{\vartheta}}}\underline{q}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right]dV_t \quad \forall\, dV_0\in\Omega_0 \rightarrow \qquad 115$$

$$\rightarrow \left[Div_\chi\underline{q}_0(\chi,\underline{\underline{\theta}},t)+Div_\theta\underline{q}_0(\chi,\underline{\underline{\theta}},t)\right]=J(\chi,\underline{\underline{\theta}},t)\left[div_{\underline{\underline{\chi}}}\underline{q}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)+div_{\underline{\underline{\vartheta}}}\underline{q}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right] \quad \forall(\chi,\underline{\underline{\theta}})\in D_0 x Z_0$$

à cause de l'emplacement dans l'espace profond du flux de chaleur il est plus rapide d'utiliser cette dernière relation entre les divergences.

En multipliant par $\partial\chi_k$, compte tenu de l'indépendance de la cinématique géométrique des phases, et en intégrant à configuration actuelle fixée[12] on obtient le transport de la composante géométrique du vecteur flux de chaleur:

$$\underline{q}(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)=J^{-1}(\chi,\underline{\underline{\theta}},t)\underline{\underline{F}}_{\chi\chi}(\chi,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\underline{q}_0(\chi,\underline{\underline{\theta}},t) \qquad 116$$

---

11 Dans le chapitre précédent une interaction de ce type se vérifie entre taux de rotation relative matériau-matière et gradient par rapport aux phases de ce taux de rotation lorsque le coefficient f est imaginaire.

12 L'intégration à $\underline{\underline{F}}$ constant est valable avec approximation. Si on calcule le transport de $\underline{q}$ à partir de la conservation de la puissance calorifique par unité de surface matérielle ($\underline{q}\cdot dS$) au lieu que par élément de volume, lorsque on veut vérifier la conservation de cette dernière ($divq\ dV$) il faut négliger les seconds gradients de $\underline{u}$ dans le calcul de la divergence. Les deux approches coincident (ce n'est que la puissance surfacique qui est transportée).

en multipliant la même équation par $\delta\vartheta_{ml}$ et en intégrant (même hypothèse sur le mouvement) on obtient le transport de la composante phasique:

$$\underline{\underline{q}}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)=J^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\left[\underline{\underline{\underline{\underline{F}}}}_{\gamma x}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\underline{\underline{q}}_{ox}(x,\underline{\underline{\theta}},t)+\underline{\underline{\underline{\underline{F}}}}_{\gamma z}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\underline{\underline{q}}_{o}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\right] \qquad 117$$

le transport du flux de chaleur a donc la forme classique dès qu'on tient compte de la forme du gradient de la transformation dans l'espace profond; les relations inverses sont donc:

$$\underline{\underline{q}}_{o}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=J(x,\underline{\underline{\theta}},t)\underline{\underline{\underline{\underline{F}}}}_{xx}^{-1}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},t)\cdot\underline{\underline{q}}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \qquad 118$$

$$\underline{\underline{q}}_{o}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=J(x,\underline{\underline{\theta}},t)\left[-\underline{\underline{\underline{\underline{F}}}}_{zz}^{-1}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{\underline{\underline{F}}}}_{zx}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\underline{\underline{\underline{\underline{F}}}}_{xx}^{-1}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},t)\cdot\underline{\underline{q}}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)+\underline{\underline{\underline{\underline{F}}}}_{zz}^{-1}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{q}}(\underline{\underline{\mathfrak{X}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right]$$

4.5. Conclusion.

Dans les deux équations locales écrites, bilan d'énergie interne et inégalité de Clausius-Duhem, apparaissent des nouveaux termes. En particulier nous nous intéressons aux puissances dues à la vitesse des phases et à ses gradients: c'est la présence de ces termes dans l'inégalité de Clausius-Duhem qui nous permettra une étude du comportement des textures comme pour le modèle du Chapitre III.

Le flux de chaleur entre phases a été introduit par souci de complétude, sa signification physique reste à évaluer ainsi que, éventuellement, l'intérêt de sa détermination.

L'hypothèse sur l'uniformité de la température dans un point géométrique sera approfondie dans le Chapitre VI.

5. Comportement.

5.1. Introduction.

Dans cette partie du chapitre on défini formellement les équations de comportement nécessaires pour fermer le bilan équations-inconnues qui ressort de l'écriture des lois de conservation et de l'inégalité du second principe de la thermodynamique.

La nature du référentiel nous oblige à reprendre un à un les passages nécessaires à cette fin.

On obtient d'abord, par l'examen du problème thermo-mécanique posé, la liste des grandeurs constitutives, c'est à dire des variables du problème qui doivent être définies par une équation de comportement. Ensuite on défini l'ensemble des variables d'état et on restreint la généralité des relations entre inconnues constitutives et variables d'état par une suite classique de postulats: causalité, action locale, simplicité matérielle et indifférence matérielle.

Par la méthode des variables internes on écrit finalement les équations recherchées sous forme de fonctions locales instantanées des variables d'état et des variables internes. A cette fin il est nécessaire de définir une configuration relâchée du milieu pour laquelle on utilisera la connaissance de la transformation des phases.

Finalement on donnera aux fonctions obtenues les restrictions nécessaires pour vérifier l'inégalité de Clausius-Duhem suivant tout processus.

Quelques hypothèses sur la nature des transformations du polycristal vont nous permettre, en choisissant une forme simplifiée pour le potentiel énergie libre, l'écriture du comportement des contraintes de Cauchy du milieu continu profond en fonction du comportement classique, donné par la loi de Schmid, des monocristaux.

5.2. Fonctionnelles de comportement.

5.2.1. Bilan équations-inconnues.

Inconnues.

Dans une description lagrangienne la configuration actuelle est identifiée à partir de la configuration initiale, prise comme configuration de référence, par les champs des variables introduites[13]:

$$T(\chi,t),\ \Xi(\chi,t),\ \underline{\underline{\Theta}}(\chi,\underline{\underline{\theta}},t),\ \rho(\Xi(\chi,t),\underline{\underline{\Theta}}(\chi,\underline{\underline{\theta}},t),t) \qquad 119$$

Dans une description eulerienne les inconnues correspondantes sont les champs:

$$T(\underline{x},t),\ u(\underline{x},t),\ \underline{\underline{w}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t),\ \rho(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t) \qquad 120$$

avec la donnée en tout point des conditions à l'instant initial T_0, u_0, w_0 et ρ_0.

Equations.

On a introduit les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement (sous la forme de principe des puissances virtuelles) et de l'énergie interne (ou de l'énergie totale) et le bilan d'entropie. Ensuite on a substitué l'énergie libre à l'entropie et, d'après le second postulat de la thermodynamique, on a déduit l'inégalité de Clausius-Duhem à partir du bilan d'énergie libre.

La conservation de la masse donne 1 équation scalaire entre inconnues cinématiques et masse volumique actuelle à partir de la donnée de la masse volumique initiale ρ_0. Ce qui permet d'éliminer tout de suite la masse volumique de l'ensemble des variables d'état[14].

La conservation de la quantité de mouvement a été écrite par le principe des puissances virtuelles; on a donc introduit, outre les équations de bilan, un postulat d'objectivité de la puissance des efforts intérieurs. On a donc 3 équations vectorielles (2 équations d'équilibre et 1 équation d'objectivité) plus 3 inconnues tensorielles d'ordre 2, 1 inconnue tensorielle d'ordre 3 et 1 d'ordre 4 qui sont donc des grandeurs constitutives (ici sur la configuration actuelle):

---

13 Voir note suivante pour la masse volumique.

14 En effet la conservation de la masse est intrinsèque aux corps matériels, postulée avant tout choix d'un référentiel et d'une description particulière. C'est la raison pour laquelle la masse volumique actuelle n'est pas, en toute rigueur, une inconnue lagrangienne: la donnée de la transformation suffit pour connaître, par le calcul du déterminant de son gradient, l'évolution de la masse volumique.

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\mathfrak{L}}},\underline{\underline{\vartheta}},t),\ \underline{\underline{\mu}}(\underline{\underline{\mathfrak{L}}},\underline{\underline{\vartheta}},t),\ \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{L}}},\underline{\underline{\vartheta}},t),\ \underline{\underline{\underline{C}}}(\underline{\underline{\mathfrak{L}}},\underline{\underline{\vartheta}},t),\ \underline{\underline{\underline{D}}}(\underline{\underline{\mathfrak{L}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \qquad 121$$

Le postulat d'objectivité identifie les contraintes μ et B, par conséquent on peut éliminer tout de suite cette équation et une de ces inconnues (notamment μ) du bilan en étude.

La conservation de l'énergie totale (i.e. bilan d'énergie interne plus conservation de la quantité de mouvement en absence d'énergie cinétique de turbulence) donne 1 équation scalaire plus 1 inconnue scalaire et 1 inconnue vectorielle (constitutives, ici sur la configuration actuelle):

$$c(\underline{\underline{\mathfrak{L}}},\underline{\underline{\vartheta}},t),\ \underline{q}(\underline{\underline{\mathfrak{L}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \qquad 122$$

Le bilan d'entropie donne 1 équation scalaire plus 1 inconnue scalaire (toujours sur la configuration actuelle):

$$s(\underline{\underline{\mathfrak{L}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \qquad 123$$

La définition de l'énergie libre n'introduit pas d'autres inconnues; on substitue l'inconnue constitutive énergie libre à l'énergie interne.

Bilan équations-inconnues.

Une description lagrangienne est bien adaptée à la géométrie de la matière, tandis que, à cause des difficultés intrinsèques à la détermination de couples contrainte-déformation convenables, une description eulerienne est plus adéquate, en général, pour suivre l'évolution des phases dans la matière. On considère donc une description mixte du milieu continu profond.

En résumé on a le bilan équations-inconnues (en eulerien ou en lagrangien):

124

variables: $T(\underline{\underline{\mathfrak{L}}},t),\ \underline{u}(\underline{\underline{\mathfrak{L}}},t),\ \underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{L}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)$ ou $T(x,t),\ \Xi(x,t),\ \underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)$

équations: 1 scalaire + 2 vectorielles

inéquation: 1 scalaire

inconnues: $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\mathfrak{L}}},\underline{\underline{\vartheta}},t),\ \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{L}}},\underline{\underline{\vartheta}},t),\ \underline{\underline{\underline{C}}}(\underline{\underline{\mathfrak{L}}},\underline{\underline{\vartheta}},t),\ \underline{\underline{\underline{D}}}(\underline{\underline{\mathfrak{L}}},\underline{\underline{\vartheta}},t),\ \psi(\underline{\underline{\mathfrak{L}}},\underline{\underline{\vartheta}},t),\ \underline{q}(\underline{\underline{\mathfrak{L}}},\underline{\underline{\vartheta}},t),\ s(\underline{\underline{\mathfrak{L}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)$ ou

$\underline{\underline{\pi}}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{B_o}}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{\underline{C_o}}}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{\underline{D_o}}}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \psi_o(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{q_o}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ s_o(x,\underline{\underline{\theta}},t)$

avec les hypothèses constitutives de température et transformation géométrique uniformes par point géométrique.

$$T=T(x,t)\ ;\ \Xi=\Xi(x,t) \qquad 125$$

Il faut donc introduire une équation de comportement pour chaque inconnue constitutive (4 tensorielles, 1 vectorielle et 2 scalaires) et imposer qu'elles vérifient l'inégalité de Clausius-Duhem.

5.2.2. Principes et hypothèses sur le comportement.

On considère que les inconnues constitutives dépendent des variables d'état suivant les principes de causalité, de l'action locale, de simplicité matérielle, et d'indifférence matérielle. L'énoncé de ces principes est donné de suite.

Variables d'état.

Chaque inconnue constitutive dépend d'une équation de comportement, fonctionnelle de l'histoire des champs des variables d'état (dans la suite les équations données pour une inconnue constitutive seront valables pour tout autre inconnue sauf spécifications différentes).

Soit la notation:

$$\tau\in\chi=R^+\ ;\ \omega'\in\Omega_0 \qquad 126$$

on indique par f(y) = f{a(x); b(x); ...}$_A$ le fait que f est une fonctionnelle des variables a, b, etc., dans l'ensemble A, i.e. pour y∈A et x∈A. Les équations de comportement sont, en général, du type:

$$\psi_o(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\psi_o\left\{T(x',\tau);\ \Xi(x',\tau);\ \underline{\underline{\Theta}}(x',\underline{\underline{\theta}}',\tau)\right\}_{\Omega_0 x\chi} \qquad 127$$

Principe de causalité.

Le comportement ne dépend que du passé par rapport à l'instant t actuel et de l'instant même. L'ensemble des instant de temps qui intéressent le comportement à l'instant actuel est donc[15]:

$$\chi^<=[0,t]\subset\chi \qquad 128$$
$$\psi_o(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\psi_o\left\{T(x',\tau);\ \Xi(x',\tau);\ \underline{\underline{\Theta}}(x',\underline{\underline{\theta}}',\tau)\right\}_{\Omega_0 x\chi^<}$$

Principe de l'action locale.

L'influence des points matériels, placés en $\omega'\in\Omega_0$, non proches du point en objet, $\omega\in\Omega_0$, n'est considérée que par les gradients successifs des variables d'état en ce point ω, de façon que la fonctionnelle d'espace devient une fonction locale:

$$\psi_o(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\psi_o\Big\{T(x,\tau);\ \nabla_x T(x,\tau);\ \nabla^2_{xx}T(x,\tau);\ \ldots;\ \Xi(x,\tau);\ \nabla_x\Xi(x,\tau);\ \nabla^2_{xx}\Xi(x,\tau);\ \ldots; \qquad 129$$
$$\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},\tau);\ \nabla_x\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},\tau);\ \nabla_\theta\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},\tau);\ \nabla^2_{xx}\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},\tau);\ \nabla^2_{\theta\theta}\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},\tau);\ \nabla^2_{x\theta}\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},\tau);\ \ldots\Big\}_{\chi^<}$$

Principe de simplicité matérielle.

On ne considère que les premiers gradients des variables d'état; en outre on ne considère le premier gradient de température que pour l'équation de comportement du flux de chaleur:

$$\psi_o(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\psi_o\Big\{T(x,\tau);\ \Xi(x,\tau);\ \underline{\underline{F}}_{xx}(x,\tau);\ \underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},\tau);\ \underline{\underline{F}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}},\tau);\ \underline{\underline{F}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}},\tau)\Big\}_{\chi^<} \qquad 130$$
$$\underline{q}_o(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\underline{q}_o\Big\{T(x,\tau);\ \nabla_x T(x,\tau);\ \Xi(x,\tau);\ \underline{\underline{F}}_{xx}(x,\tau);\ \underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},\tau);\ \underline{\underline{F}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}},\tau);\ \underline{\underline{F}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}},\tau)\Big\}_{\chi^<}$$

On remarque que l'action locale et simplicité matérielle pour la partie phasique de l'emplacement profond d'un corps matériel impliquent que seulement les orientations proches interagissent.

Principe d'indifférence matérielle.

Vue l'utilisation d'un observateur dans les descriptions du mouvement adoptées[16], il faut postuler l'indépendance de la description du comportement d'après le mouvement de l'observateur dans l'espace géométrique-temps: le principe d'indifférence matérielle postule que les grandeurs constitutives sont des fonctionnelles de l'histoire des variables d'état quelque soit le mouvement du référentiel.

On remarque que les conséquences du principe d'indifférence matérielle sur les fonctionnelles de comportement peuvent être dégagées dés qu'on fixe un ensemble de variables d'état, ce qui a été fait au stade actuel de nôtre démarche. Lorsque, par la méthode des variables internes, on cherchera une évaluation des dites fonctionnelles par des fonctions actuelles instantanées (ayant fixé leur support) tant des variables déjà introduites que d'autres variables non observables, il faudra de nouveau tenir compte de ce principe.

---

15 La chronologie χ est constituée d'instants positifs à partir de l'instant 0. La configuration initiale de référence lagrangienne est celle à l'instant 0, le passé commence à cet instant 0.

16 On remarque que l'indifférence matérielle des équations d'équilibre est assurée par l'objectivité des puissances intérieures et celle de l'inégalité de Clausius-Duhem par l'objectivité de l'énergie interne.

On considère un tenseur A d'ordre p défini sur la configuration à l'instant τ, dont les composantes à l'instant t sont $A_{j1\dots jp}(t)$, par rapport à un référentiel fixé[17]. On rappelle qu'on défini objectif le tenseur A si en observant son image dans un deuxième référentiel, ayant un mouvement relatif au premier tel que[18]:

$$x'_i(\tau)=x_{oi}(\tau)+K_{ij}(\tau)x_j \;\; ; \;\; K_{is}(\tau)K_{js}(\tau)=\delta_{ij} \;\; \det[K_{ij}(\tau)]=1 \;\; \forall\tau \qquad 131$$

est la relation, en fonction du temps, entre les coordonnés instantanées d'un même point matériel dans les deux référentiels, les composantes de l'image à tout instant t de ce tenseur dans les deux référentiels sont dans la relation:

$$A'_{i1\dots ip}(t)=K_{i1j1}(\tau)\dots K_{ipjp}(\tau)A_{j1\dots jp}(t) \;\; \forall t \qquad 132$$

Selon cette définition un scalaire matériel est objectif si ses valeurs à tout instant coïncident dans les deux référentiel. Un type particulier de tenseur est donc celui qui ne voit pas ses composantes instantanées varier par changement de référentiel: toutes ses composantes sont des scalaires matériels objectifs. Plus en général un tenseur d'ordre p non objectif peut éventuellement être constitué par de tenseurs objectifs d'ordre q<p.

5.2.3. Remarque sur la simplicité matérielle.

On peut supposer que à la description macroscopique en objet correspondent des éléments de volume microscopiques représentatifs. Chacun de ces éléments de volume contient toujours un nombre suffisant de phases pour considérer que l'énergie interne (ou autre inconnue) d'une phase ne dépend pas des fractions volumiques (ou massiques) des autres phases (chaque fraction étant faible): l'ensemble des autres phases se comporte, par rapport à une phase donnée, comme un milieu homogène.

Cette hypothèse, faite d'habitude à l'échelle des grains (en considérant des éléments d'agrégat représentatifs), est à la base des méthodes d'homogénéisation présentées dans le premier chapitre de ce travail.

Ceci est vrai tant que le complémentaire d'une phase reste convexe: lorsqu'une phase traverse l'élément de volume en le découpant en deux parties disjointes (i.e. par une ligne si $D\subseteq R^2$ ou par une surface si $D\subseteq R^3$) l'énergie interne des autres phases va en dépendre. Ce même raisonnement est valable pour toute inconnue "contrainte" et pour le flux de chaleur.

Une phase représente au fait la possibilité que se vérifient des glissements microscopiques selon des directions données. Si une phase traverse un élément de volume il existe une direction de glissement admissible à l'échelle de cet élément qui a donc une raideur tangente singulière le long de cette direction: une bande de cisaillement peut découper l'élément de volume traversé.

Soit Z_p l'ensemble des phases qui ont traversé l'élément de volume microscopique (plusieurs phases peuvent traverser le même élément de volume car les intersections de mesure nulle ne sont pas significatives, néanmoins le cas d'une seule phase qui traverse l'élément de volume est, en même temps, facile à comprendre et en accord avec les observations sur les cristaux):

$$\underline{\underline{\theta}}^*\in Z^*(\underline{\underline{\theta}})=\{\underline{\underline{\theta}}\}\cup Z_p \qquad 133$$

$$\psi_o(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\psi_o\left\{T(x,\tau)\,;\,\Xi(x,\tau)\,;\,\underline{\underline{F}}_{xx}(x,\tau)\,;\,\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}}^*,\tau)\,;\,\underline{\underline{\underline{F}}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}}^*,\tau)\,;\,\underline{\underline{\underline{F}}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}}^*,\tau)\right\}\chi^{<xZ^*(\theta)}$$

$$\underline{q}_o(x,\underline{\underline{\theta}},t)=$$

$$=\underline{q}_o\left\{T(x,\tau)\,;\,\nabla_x T(x,\tau)\,;\,\Xi(x,\tau)\,;\,\underline{\underline{F}}_{xx}(x,\tau)\,;\,\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}}^*,\tau)\,;\,\underline{\underline{\underline{F}}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}}^*,\tau)\,;\,\underline{\underline{\underline{F}}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}}^*,\tau)\right\}\chi^{<xZ^*(\theta)}$$

Pour qu'une phase puisse percoler dans un agrégat tridimensionnel (selon un schéma à boules) il en faut une fraction critique théorique de 16%, qui devient 45% pour un cas

---

17 Si $t=t_o \;\forall\tau$ le tenseur est lagrangien avec instant de référence t_o; si $t=\tau \;\forall\tau$ le tenseur est eulerien.

18 On considère de référentiels équi-orientés, de façon que K est un tenseur orthogonal propre. Le changement de l'orientation du référentiel (detK=-1) n'est pas pris en compte dans ce travail.

bidimensionnel (Cf. [Scher et Zallen 1970]). La perte de connexion d'un élément de volume peut se schématiser, en première approximation, par un problème bidimensionnel, si le problème mécanique étudié est réellement bidimensionnel (auquel cas l'approche est "exacte"), ou par le produit de deux problèmes bidimensionnels, si le problème mécanique est tridimensionnel (la fraction critique peut alors être de 26%).

Pour que les hypothèses de simplicité matérielle et action locale soient admissibles dans l'espace profond (partie phasique) il faut donc que la fraction volumique de toute phase soit inférieure a une fraction critique de 26÷45%. En outre, vu la nature du phénomène étudié (cette "coupe" de l'élément de volume est plutôt figurée par un plan que par une surface discontinue) la fraction critique de 45% semble être plus pertinente. Vu donc qu'il s'agit de fractions plutôt élevées les deux hypothèses en question peuvent être initialement acceptées. Par contre, lorsqu'elles ne seront plus valables, au cours de l'évolution du matériau, on peut envisager une modification brutale du comportement ayant une direction caractéristique (celle de la phase qui traverse l'élément de volume micro). On peut alors postuler l'initiation locale (en un point géométrique x) d'une bande de cisaillement bien avant qu'il y ait instabilité de comportement au sens mécanique du terme (qui représente plutôt une bande qui est non locale).

5.2.4. Objectivité des fonctionnelles de comportement.

On a choisi un système de référence en fixant un référentiel d'espace géométrique-temps particulier. Tout autre système de référence possible est obtenu par isométrie conservant les orientations de celui-ci. L'espace des phases est l'espace des rotations absolues du matériau: il voit donc le référentiel d'espace géométrique varier par isométrie, mais il n'engendre pas d'autres référentiels en variant indépendamment de l'espace géométrique[19].

(Si on interprète l'espace des phases comme l'espace des rotations relatives matériau-géométrie de la matière, alors il n'y a pas de variations dans l'emplacement dans l'espace des phases d'un point matériel par isométrie du référentiel géométrique).

Il existe un instant de référence dans le changement de référentiel dans lequel le référentiel initial et le second référentiel coïncident. Le choix d'un instant détermine une classe de changements de référentiel; si on se restreint à une classe donnée on postule l'objectivité par rapport à l'instant de référence choisi.

Pour une transformation donnée, à toute configuration correspond un instant (même si une infinité de configurations peuvent être instantanées) et on peut donc parler d'objectivité relativement à une configuration: c'est l'invariance aux changements de référentiel ayant l'instant de la configuration comme instant de référence (i.e. ne modifiant pas ladite configuration). Une fois fixé le processus étudié, pour des comportements indépendants de l'échelle des temps (e.g. élasticité et plasticité), celui-ci joue le rôle d'un paramètre identifiant les différentes configurations du corps. Dans ce cas il convient de se référer aux configurations plutôt qu'aux instants de temps.

Pour garantir l'objectivité de la description du comportement adoptée (c'est à dire l'indifférence matérielle) il suffit de postuler l'objectivité des fonctionnelles de comportement dans leur configuration support, donc relativement à l'instant de cette configuration. On a intérêt à choisir la configuration initiale de référence cinématique (lagrangienne) à support des fonctionnelles de comportement et, donc, l'instant initial, t=0, comme référence pour les changements de référentiel.

D'après le théorème de représentation toute isométrie de l'espace géométrique-temps $\mathcal{E}\times\chi$, (i.e. changement de référentiel qui conserve l'unité de temps et l'image géométrique du produit scalaire entre vecteurs matériels) est donnée, par rapport au repère $\mathcal{R}$ qui lui est solidaire, par une transformation orthogonale et une translation donc, selon le système de coordonnées du repère **E** ou **E'**, en prenant l'instant initial de référence à ce changement (i.e. K(0)=I):

---

19 D'un point de vue formel, il est plus simple à cette fin, de considérer les phases dans l'espace des tenseurs orthogonaux droits plutôt que dans l'espace des angles d'Euler, car il faudrait, autrement, transporter le changement de référentiel géométrique dans ce dernier, avec des transformations non linéaires. C'est la raison pour laquelle on a privilégié l'utilisation des tenseurs orthogonaux euclidiens bien que le système curviligne soit numériquement plus compact.

$$\mathcal{M}\in\mathcal{B}\rightarrow\begin{cases}(\omega_E,\tau)=(\chi(\mathcal{M}),\underline{\underline{\theta}}(\mathcal{M}),\tau)\\(\omega'_{E'},\tau')=(\chi'(\mathcal{M}),\underline{\underline{\theta}}'(\mathcal{M}),\tau')\end{cases}\quad\text{avec}\begin{cases}\chi'(\tau)=\chi_o(\tau)+\underline{\underline{K}}(\tau)\cdot\chi\\\underline{\underline{\theta}}'(\tau)=\underline{\underline{K}}(\tau)\cdot\underline{\underline{\theta}}\\\tau'(\tau)=\tau+\varphi\end{cases}\qquad\underline{\underline{K}}\in Q_E\ \forall\tau\in[0,t]\tag{134}$$

on obtient alors la variation des variables:

$T'(\chi',\tau')=T(\chi,\tau)$	objectif	135
$\nabla_{\chi'}T'(\chi',\tau')=\nabla_{\chi}T(\chi,\tau)$	scalaires objectifs	
$\Xi'(\chi',\tau')=\underline{\underline{K}}(\tau)\cdot\Xi(\chi,\tau)+\chi_o(\tau)$	non objectif	
$\underline{\underline{\Theta}}'(\chi',\underline{\underline{\theta}}',\tau')=\underline{\underline{K}}(\tau)\cdot\underline{\underline{\Theta}}(\chi,\underline{\underline{\theta}},\tau)$	non objectif	
$\underline{\underline{F}}'_{\chi\chi}(\chi',\tau')=\underline{\underline{K}}(\tau)\cdot\underline{\underline{F}}_{\chi\chi}(\chi,\tau)$	non objectif	
$\underline{\underline{F}}'_{\theta\chi}(\chi',\underline{\underline{\theta}}',\tau')=\underline{\underline{K}}(\tau)\cdot\underline{\underline{F}}_{\theta\chi}(\chi,\underline{\underline{\theta}},\tau)$	non objectif	
$\underline{\underline{F}}'_{\theta\theta}(\chi',\underline{\underline{\theta}}',\tau')=\underline{\underline{K}}(\tau)\cdot\underline{\underline{F}}_{\theta\theta}(\chi,\underline{\underline{\theta}},\tau)$	non objectif	

et des inconnues[20]:

$\psi'_o(\chi',\underline{\underline{\theta}}',\tau')=\psi_o(\chi,\underline{\underline{\theta}},\tau)$	objectif	136
$s'_o(\chi',\underline{\underline{\theta}}',\tau')=s_o(\chi,\underline{\underline{\theta}},\tau)$	objectif	
$\underline{\underline{\pi}}'(\chi',\underline{\underline{\theta}}',\tau')=\underline{\underline{\pi}}(\chi,\underline{\underline{\theta}},t)$	scalaires objectifs	
$\underline{\underline{B}}_o$, $\underline{\underline{C}}_o$, $\underline{\underline{D}}_o$ non objectifs		
$\underline{\underline{B}}'(\chi',\underline{\underline{\theta}}',\tau')=\underline{\underline{K}}(\tau)\cdot\underline{\underline{B}}(\chi,\underline{\underline{\theta}},\tau)\cdot\underline{\underline{K}}^T(\tau)$	objectif	
$\underline{\underline{\underline{C}}}'(\chi',\underline{\underline{\theta}}',\tau')=(\underline{\underline{K}}(\tau)\otimes\underline{\underline{K}}(\tau)):\underline{\underline{\underline{C}}}(\chi,\underline{\underline{\theta}},\tau)\cdot\underline{\underline{K}}^T(\tau)$	objectif	
$\underline{\underline{\underline{D}}}'(\chi',\underline{\underline{\theta}}',\tau')=(\underline{\underline{K}}(\tau)\otimes\underline{\underline{K}}(\tau)):\underline{\underline{\underline{D}}}(\chi,\underline{\underline{\theta}},\tau):(\underline{\underline{K}}^T(\tau)\otimes\underline{\underline{K}}^T(\tau))$	objectif	
$\underline{q}'_o(\chi',\underline{\underline{\theta}}',\tau')=\underline{q}_o(\chi,\underline{\underline{\theta}},\tau)$	scalaires objectifs	

L'indifférence matérielle est vérifiée si les grandeurs constitutives sont des fonctionnelles de l'histoire des variables d'état quelque soit l'histoire de K(t) et $\chi_o(t)$ donnant le changement de référentiel.

Si on se limite aux grandeurs constitutives objectives ou constituées de scalaires objectifs sur la configuration initiale (i.e. ψ_o, s_o, π, q_o) on voit qu'il s'agit d'imposer que (conditions égales pour ψ_o et s_o, condition analogue pour q_o car le gradient de température est objectif en configuration initiale):

---

20 La variation des contraintes et du flux de chaleur par changement de référentiel peut être obtenue en imposant l'objectivité des puissances, e g

$$\underline{\underline{\pi}}(\chi,\underline{\underline{\theta}},t)\ \mathrm{sym}(\underline{\underline{F}}^T_{\chi\chi}\cdot\dot{\underline{\underline{F}}}_{\chi\chi})(\chi,t)=\underline{\underline{\pi}}'(\chi',\underline{\underline{\theta}}',t')\cdot\mathrm{sym}(\underline{\underline{F}}'^T_{\chi\chi}\cdot\dot{\underline{\underline{F}}}'_{\chi\chi})(\chi',t')=\tag{136b}$$

$$=\underline{\underline{K}}^T(0)\cdot\underline{\underline{\pi}}'(\chi',\underline{\underline{\theta}}',t')\ \underline{\underline{K}}(0)\ \mathrm{sym}(\underline{\underline{F}}^T_{\chi\chi}\cdot\dot{\underline{\underline{F}}}_{\chi\chi})(\chi,t)\Rightarrow\underline{\underline{\pi}}'(\chi',\underline{\underline{\theta}}',t')=\underline{\underline{K}}(0)\cdot\underline{\underline{\pi}}(\chi,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\underline{\underline{K}}^T(0)$$

Les contraintes en configuration actuelle sont objectives par définition (objectivité de la puissance des efforts intérieurs). Par contre la définition de contraintes objectives en configuration initiale n'est pas aisée pour B, C et D si on veut des déformations associées convenables.

On note:

$$(K\otimes K)_{ijhk}=K_{ik}K_{jh}\tag{136c}$$

$$\forall \underline{\underline{K}}(\tau)\ \forall \chi_o(\tau)\ \tau\in\chi \qquad 137$$

$$\underline{\underline{\pi}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\underline{\underline{\pi}}\Big\{T(x,\tau)\,;\,\underline{\underline{K}}(\tau)\,\Xi(x,\tau)+\chi_o(\tau)\,;\,\underline{\underline{K}}(\tau)\cdot\underline{\underline{F}}_{xx}(x,\tau)\,;\,\underline{\underline{K}}(\tau)\cdot\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}}^*,\tau);$$

$$\underline{\underline{K}}(\tau)\cdot\underline{\underline{F}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}}^*,\tau)\,;\,\underline{\underline{K}}(\tau)\cdot\underline{\underline{F}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}}^*,\tau)\Big\}_{\chi<\chi Z^*(\theta)}=$$

$$=\underline{\underline{\pi}}\Big\{T(x,\tau)\,;\,\Xi(x,\tau)\,;\,\underline{\underline{F}}_{xx}(x,\tau)\,;\,\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}}^*,\tau)\,;\,\underline{\underline{F}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}}^*,\tau)\,;\,\underline{\underline{F}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}}^*,\tau)\Big\}_{\chi<\chi Z^*(\theta)}\ \forall(x,\underline{\underline{\theta}},t)$$

En prenant une histoire des changements de référentiel de translation $\chi_o=-\Xi$ on voit que ces fonctionnelles ne dépendent pas de la transformation géométrique:

$$\underline{\underline{K}}(\tau)=\underline{\underline{0}}\ \forall\tau\in\chi\ \forall\chi_o(\tau)=-\Xi(x,\tau)\ \tau\in\chi\ \rightarrow \qquad 138$$

$$\rightarrow\ \underline{\underline{\pi}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\underline{\underline{\pi}}\Big\{T(x,\tau)\,;\,\underline{\underline{F}}_{xx}(x,\tau)\,;\,\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}}^*,\tau)\,;\,\underline{\underline{F}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}}^*,\tau)\,;\,\underline{\underline{F}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}}^*,\tau)\Big\}_{\chi<\chi Z^*(\theta)}\ \forall(x,\underline{\underline{\theta}},t)$$

En prenant une histoire de rotation on voit qu'il convient de modifier la notation des variables d'état selon ce qui suit. On considère une décomposition polaire du gradient de la transformation géométrique:

$$\underline{\underline{F}}_{xx}(x,t)=\underline{\underline{X}}(x,t)\cdot\underline{\underline{U}}(x,t)=\underline{\underline{V}}(x,t)\cdot\underline{\underline{X}}(x,t)\ ;\ X\in L_{orth}(E,E)\ ;\ U,V\in L_s(E,E) \qquad 139$$

par les changements de référentiel en objet on voit que le tenseur d'élongation droit, U, est objectif sur la configuration initiale (on rappelle que ce tenseur contient les mêmes informations que le tenseur de déformation de Green-Lagrange correspondant):

$$\underline{\underline{X}}'(x',\tau')=\underline{\underline{K}}(\tau)\cdot\underline{\underline{X}}(x,\tau)\ ;\ \underline{\underline{U}}'(x',\tau')=\underline{\underline{U}}(x,\tau)\ ;\ \underline{\underline{V}}'(x',\tau')=\underline{\underline{K}}(\tau)\cdot\underline{\underline{V}}(x,\tau)\cdot\underline{\underline{K}}^T(\tau) \qquad 140$$

on appelle:

$$\underline{\underline{\varpi}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\underline{\underline{X}}^T(x,t)\cdot\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t) \qquad 141$$

$$\underline{\underline{f}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\underline{\underline{X}}^T(x,t)\cdot\underline{\underline{F}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}},t)+\nabla_x\underline{\underline{X}}^T(x,t)\cdot\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\nabla_x\underline{\underline{\varpi}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)$$

$$\underline{\underline{f}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\underline{\underline{X}}^T(x,t)\cdot\underline{\underline{F}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\nabla_\theta\underline{\underline{\varpi}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)$$

tenseurs définis sur la configuration initiale et composés de scalaires objectifs, qui représentent respectivement la rotation relative matériau-matière à partir de la configuration initiale jusqu'à l'instant actuel et ses gradients.

Par des changements de référentiels arbitraires de rotation on obtient alors:

$$\underline{\underline{K}}(\tau)\neq\underline{\underline{0}}\ \forall\tau\in\chi\ \forall\chi_o(\tau)=0\ \forall\tau\in\chi\ \rightarrow \qquad 142$$

$$\rightarrow\ \underline{\underline{\pi}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\underline{\underline{\pi}}\Big\{T(x,\tau)\,;\,\underline{\underline{U}}(x,\tau)\,;\,\underline{\underline{\varpi}}(x,\underline{\underline{\theta}}^*,\tau)\,;\,\underline{\underline{f}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}}^*,\tau)\,;\,\underline{\underline{f}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}}^*,\tau)\Big\}_{\chi<\chi Z^*(\theta)}\ \forall(x,\underline{\underline{\theta}},t)$$

Les fonctionnelles ainsi écrites permettent l'étude du comportement dans le cas de dépendance en temps et en ensembles $Z^*(\theta)$ (complémentaire des phases percolées). Dans les limites de ce travail on se restreint dans la suite aux comportements indépendants de l'échelle des temps et aux polycristaux initialement non traversés par des bandes avec texture très marquée.

5.3. Fonctions de comportement.

Les grandeurs constitutives ont été écrites comme fonctionnelles du temps, dans le passé, et des phases, dans l'ensemble des phases éventuellement traversant l'élément de volume, des variables thermodynamiques. On envisage maintenant l'écriture d'une évaluation de ces

fonctionnelles par des fonctions locales sur une configuration fixée, dans le but de montrer les possibilités d'exploitation du modèle de milieu continu profond. Il faut pour cela:

- introduire un certain nombre de variables non observables censées représenter instantanément le passé et localement les phases "percolées" (méthode des variables internes),
- définir un processus de décharge thermo-élastique adéquat au choix des variables internes et, par conséquent, identifier de façon cohérente une configuration relâchée;
- définir une configuration support des fonctions de comportement (qui ne coïncide pas forcement avec la configuration de référence cinématique);
- assurer l'indifférence matérielle du comportement dans sa configuration support.

5.3.1. Méthode des variables internes.

On considère les fonctionnelles de comportement obtenues, on envisage l'évaluation de ces fonctionnelles par des fonctions locales instantanées. On considère, pour l'instant, la configuration initiale comme référence cinématique et support des fonctions recherchées; on considère que:

- l'histoire des températures n'affecte pas le comportement actuel:

$$\text{à } \{T(x,\tau):\ \tau\in\chi^{<}\} \text{ on substitue } T(x,t) \tag{143}$$

- l'histoire des élongations géométriques est caractérisée par une fonction tensorielle objective d'une partie irréversible du gradient de la transformation à définir:

$$\text{à } \{\underline{\underline{U}}(x,\tau):\ \tau\in\chi^{<}\} \text{ on substitue } \underline{\underline{U}}(x,t),\ \underline{\underline{f}}^{obj}(\underline{\underline{P}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)) \tag{144}$$

- l'histoire de la position des phases peut être représentée par une fonction objective (d'ordre tensoriel à définir) d'une partie irréversible p de la transformation Θ, à définir; l'orientation des phases ayant traversé l'élément de volume microscopique modifie le comportement local d'une façon qu'on n'approfondit pas pour l'instant (les points de suspension indiquent les variables non observables qu'il faudrait introduire à cette fin):

$$\text{à } \{\underline{\underline{\varpi}}(x,\underline{\underline{\theta}}^{*},\tau):\ \underline{\underline{\theta}}^{*}\in Z^{*}(\underline{\underline{\theta}}),\ \tau\in\chi^{<}\} \text{ on substitue } \underline{\underline{\varpi}}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ f^{obj}(\underline{\underline{p}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)),\ \ldots \tag{145}$$

- l'histoire du gradient par rapport aux phases de la transformation des phases peut être caractérisée par une fonction objective (d'ordre tensoriel à définir) d'une partie irréversible de ce gradient à définir; l'ensemble des phases percolées est représenté par d'autres variables négligées pour l'instant (termes notés "..."):

$$\text{à } \{\underline{\underline{f}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}}^{*},\tau):\ \underline{\underline{\theta}}^{*}\in Z^{*}(\underline{\underline{\theta}}),\ \tau\in\chi^{<}\} \text{ on substitue } \underline{\underline{f}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ f^{obj}(\underline{\underline{P}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}},t)),\ \ldots \tag{146}$$

- l'histoire du gradient géométrique des phases peut être caractérisée par une fonction objective (d'ordre tensoriel à définir) d'une partie irréversible de ce gradient à définir; l'effet de l'orientation des phases percolées est négligé pour l'instant (termes notés "..."):

$$\text{à } \{\underline{\underline{f}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}}^{*},\tau):\ \underline{\underline{\theta}}^{*}\in Z^{*}(\underline{\underline{\theta}}),\ \tau\in\chi^{<}\} \text{ on substitue } \underline{\underline{f}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ f^{obj}(\underline{\underline{P}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}},t)),\ \ldots \tag{147}$$

Le phénomène de la percolation d'une phase à travers l'élément de volume microscopique modifie le comportement actuel local seulement une fois qu'il s'est vérifié. On peut par conséquent le prendre en compte moyennant un jeu de variables non observables nulles jusqu'à vérification d'un critère.

Le critère en objet peut être donné par une fraction critique dépassée par une phase (par exemple un seuil pour la masse volumique par phase). Le flux de dissipation associé à ces variables après percolation peut être, selon le caractère qu'on veut donner au modèle, nul ou non nul.

Un examen plus approfondi du sujet peut en outre montrer si à la percolation d'une phase doit être associée une taille caractéristique du matériau (liée au gradient géométrique de la transformation des phases $f_{\theta x}$) et/ou une désorientation caractéristique (liée au gradient par rapport aux phases de la transformation des phases $f_{\theta\theta}$).

On renvoit ces problèmes à une phase du travail successive à cette thèse et, pour fixer les idées, on néglige la présence d'autres variables non observables dans la suite.

On néglige aussi les variables internes liées à l'histoire des phases: l'influence de l'histoire de la transformation des phases et des gradients de la transformation des phases sur l'état actuel est représentée par les valeurs actuels de ces variables. En conclusion l'effet de la transformation des phases et de ses gradients est actuel et local.

Finalement on fait l'hypothèse que l'énergie libre écrite sur la configuration initiale, ou en toute autre configuration, ne dépend pas de la valeur actuelle locale de la transformation des phases (i.e. de la rotation relative matériau matière ϖ) et de ses gradients.

En conclusion les inconnues constitutives objectives en configuration initiale sont données par des fonctions de comportement de la forme:

$$\psi_o(x,\underline{\theta},t)=\psi_o(T(x,t),\ \underline{U}(x,t),\ \underline{\underline{f}}^{obj}(\underline{\underline{P}}(x,\underline{\theta},t))) \qquad 148$$

$$\underline{\underline{\pi}}(x,\underline{\theta},t)=\underline{\underline{\pi}}(T(x,t),\ \underline{U}(x,t),\ \underline{\underline{f}}^{obj}(\underline{\underline{P}}(x,\underline{\theta},t)),\ \underline{\underline{\varpi}}(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{f}}_{\theta x}(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{f}}_{\theta\theta}(x,\underline{\theta},t))$$

$$s_o(x,\underline{\theta},t)=s_o(T(x,t),\ \underline{U}(x,t),\ \underline{\underline{f}}^{obj}(\underline{\underline{P}}(x,\underline{\theta},t)),\ \underline{\underline{\varpi}}(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{f}}_{\theta x}(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{f}}_{\theta\theta}(x,\underline{\theta},t))$$

$$\underline{q}_o(x,\underline{\theta},t)=\underline{q}_o(T(x,t),\ \nabla_x T(x,t),\ \underline{U}(x,t),\ \underline{\underline{f}}^{obj}(\underline{\underline{P}}(x,\underline{\theta},t)),\ \underline{\underline{\varpi}}(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{f}}_{\theta x}(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{f}}_{\theta\theta}(x,\underline{\theta},t))$$

Le comportement des inconnues B, C et D sera écrit en configuration actuelle pour de raisons de facilité.

5.3.2. Configuration relâchée.

Décomposition du gradient de la transformation.

On considère la décomposition du gradient de la transformation géométrique suivante:

$$\underline{\underline{F}}_{xx}(x,t)=\underline{\underline{E}}_{rev}(x,t)\cdot\underline{\underline{E}}_{blo}(x,\underline{\theta},t)\cdot\underline{\underline{\Gamma}}(x,\underline{\theta},t)\cdot\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\theta},t)\quad\forall(x,\underline{\theta},t) \qquad 149$$

dans laquelle on met en évidence, dans l'ordre, une partie élastique réversible, une élastique bloquée, une plastique due à des glissements suivant des axes fixes et une de rotation de ces axes (qu'on postule être les axes du matériau). Ces termes peuvent être groupés pour faciliter leur explication.

L'ensemble des trois derniers termes constitue la partie irréversible du gradient de la transformation géométrique; de même que la partie réversible elle est par hypothèse homogène à tout instant sur l'ensemble des phases dans un même point géométrique (cette hypothèse sera motivée dans la suite):

$$\underline{\underline{F}}_{xx}(x,t)=\underline{\underline{E}}_{rev}(x,t)\cdot\underline{\underline{F}}_{irr}(x,t)\quad\forall(x,t) \qquad 150$$

$$\forall(x,t):\ \underline{\underline{F}}_{irr}(x,t)=\underline{\underline{E}}_{blo}(x,\underline{\theta},t)\cdot\underline{\underline{\Gamma}}(x,\underline{\theta},t)\cdot\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\theta},t)\quad\forall\underline{\theta}$$

ce qui donne une condition de compatibilité qui relie, en tout point géométrique et pour tout instant, les trois champs irréversibles fonctions de θ en objet.

Les deux termes élastiques ($E_{..}$) de la (149) constituent la partie élastique du gradient de la transformation géométrique, distinguée d'une partie plastique:

$$\underline{\underline{F}}_{xx}(x,t)=\underline{\underline{E}}(x,\underline{\theta},t)\cdot\underline{\underline{P}}(x,\underline{\theta},t) \qquad 151$$

$$\underline{\underline{E}}(x,\underline{\theta},t)=\underline{\underline{E}}_{rev}(x,t)\cdot\underline{\underline{E}}_{blo}(x,\underline{\theta},t)\ ;\ \underline{\underline{P}}(x,\underline{\theta},t)=\underline{\underline{\Gamma}}(x,\underline{\theta},t)\cdot\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\theta},t)$$

Ladite partie plastique P du gradient de la transformation regroupe les deux derniers termes de sa décomposition (149). On note en fait:

$$\underline{\underline{\Gamma}}(x,\underline{\theta},t) = \underline{\underline{P}}(x,\underline{\theta},t)\cdot\underline{\underline{\Theta}}^{T}(x,\underline{\theta},t) \qquad 152$$

la partie supposée par hypothèse (comme on explique dans la suite) de glissement plastique suivant des axes fixes du gradient de la transformation géométrique. Il faut noter que cette dernière relation exprime une hypothèse constitutive.

En résumé l'état actuel local du corps est obtenu à partir de son état initial par un processus où on distingue, du coté de la géométrie de la matière, une étape élastique (i.e. non dissipatrice en elle-même) réversible (i.e. qui peut être modifiée de façon arbitraire avec un processus réversible du corps) et une élastique irréversible, une étape de glissement pur suivant les axes du matériau (i.e. un trièdre constitutif) et une de rotation de ces axes avec entraînement de la géométrie de la matière.

Chaque transporteur de la décomposition (149) en objet n'est défini, d'un point de vue cinématique (i.e. par la décomposition en elle-même), que à une rotation près. En particulier

$$\underline{\underline{E}}_{rev}(x,t)=\underline{\underline{E}}^{**}_{rev}(x,t)\cdot\underline{\underline{S}}^{T}(x,t)\ ;\ \underline{\underline{E}}_{blo}(x,\underline{\theta},t)=\underline{\underline{S}}(x,t)\cdot\underline{\underline{E}}^{**}_{blo}(x,\underline{\theta},t)\quad \forall(x,\underline{\theta},t)\ \forall\underline{\underline{S}}\in Q_E \qquad 153$$

$$\underline{\underline{E}}_{blo}(x,\underline{\theta},t)=\underline{\underline{E}}^{*}_{blo}(x,\underline{\theta},t)\cdot\underline{\underline{R}}^{T}(x,\underline{\theta},t)\ ;\ \underline{\underline{P}}(x,\underline{\theta},t)=\underline{\underline{R}}(x,\underline{\theta},t)\cdot\underline{\underline{P}}^{*}(x,\underline{\theta},t)\quad \forall(x,\underline{\theta},t)\ \forall\underline{\underline{R}}\in Q_E$$

Tant le champ S que le champ R ci-dessus sont arbitraires; on peut alors envisager un choix de l'un de ces deux champs, notamment R, tel que la partie élastique bloquée du gradient de la transformation est un tenseur symétrique (i.e. un tenseur d'élongation élastique bloquée).

Le champ S reste indéterminé, on doit s'en occuper en écrivant les équations de comportement.

Les décompositions (149), (150) et (151) permettent d'introduire les déterminants des diverses parties du gradient de la transformation géométrique et, sous hypothèse que chacun de ces déterminants est positif, la décomposition du déterminant du gradient de ladite transformation (l'hypothèse citée sera justifiée dans la suite):

$$J(x,\underline{\theta},t)=J_x(x,t)J_\theta(x,\underline{\theta},t) \qquad 154$$

$$J_x(x,t)=J_{xe}(x,\underline{\theta},t)J_{xp}(x,\underline{\theta},t)=J_{xrev}(x,t)J_{xblo}(x,\underline{\theta},t)J_{xp}(x,\underline{\theta},t)=J_{xrev}(x,t)J_{xirr}(x,t)$$

$$J\ \ (x,\underline{\theta},t)=J_{x\ \ }(x,\underline{\theta},t)J_\theta(x,\underline{\theta},t)$$

On fait l'hypothèse que la partie plastique du gradient de la transformation géométrique est isochore; par conséquent la partie élastique bloquée engendre une variation volumique indépendante de la variable de phase θ:

$$J_{xp}(x,\underline{\theta},t)=1\ ;\ J_x(x,t)=J_{xe}(x,t)=J_{xrev}(x,t)J_{xblo}(x,t)\quad \forall(x,\underline{\theta},t) \qquad 155$$

Configurations locales engendrées.

Une configuration locale est identifiée par la donnée d'un champ de transporteurs matériels sur la configuration de référence cinématique.

Les divers transporteurs identifient, au même instant de temps t, les images géométriques de configurations locales différentes entre la configuration initiale Ω_0 et l'actuelle Ω_t. Tout transporteur géométrique engendre en effet une configuration géométrique locale (en point x et orientation θ); en ce sens les configurations du corps, auxquelles on fait référence dans la suite pour des raisons de commodité, ne sont que des ensembles de configurations locales, donc localement continues dépourvues, en général, de continuité uniforme (Cf. définitions (13), (16)); on les appelle configurations virtuelles.

On défini élastique réversible (opérateur E_{rev}) le transport entre une configuration géométrique relâchée réelle, D_{tr}, et la configuration géométrique actuelle D_t, et élastique bloqué

(opérateur E_{blo}) celui entre une configuration géométrique relâchée à contraintes nulles, D_{trv}, et ladite configuration relâchée réelle.

On appelle respectivement configuration relâchée réelle et configuration relâchée virtuelle les configurations du corps dans l'espace profond ayant la partie géométrique d'égale dénomination (comme défini ci-dessus) et la partie phasique actuelle:

$$\Omega_t=D_t x Z_t \; ; \; \Omega_{tr}=D_{tr} x Z_t \; ; \; \Omega_{trv}=D_{trv} x Z_t \qquad 156$$

(on rappelle que les configurations avec v en indice ne sont que des ensembles de configurations locales).

Lorsqu'on relâche localement le matériau on obtient dans le corps des déchirures et des interpénétrations, et donc une configuration relâchée non compatible (au moins pour sa composante géométrique) avec contraintes nulles, ou un état de contraintes non nulles dans une configuration relâchée réelle du corps. La configuration géométrique à contraintes nulles est identifiée par la partie élastique du gradient de la transformation géométrique (opérateur E) à partir de la configuration géométrique actuelle, et par la partie plastique du même gradient (opérateur P) à partir de la configuration géométrique initiale. La non compatibilité de cette configuration implique que rien n'assure la continuité en tout point géométrique des dits opérateurs E et P.

Il existe une infinité de processus réversibles globales entre deux configurations liées, comme Ω_{tr} et Ω_t, ou Ω_{tr} et Ω_{trv}, par un processus réversible donné. Ceci donne à E_{rev} et E_{blo} le statut de représentant arbitrairement choisi d'une classe de transporteurs et à la configuration relâchée réelle, Ω_{tr}, celui de représentant d'une classe de configurations déterminées à un processus réversible près[21]. Le critère du choix peut, pour fixer les idées, être le minimum de l'énergie élastique bloquée dans la configuration relâchée réelle représentative. Evidemment l'indétermination disparaît dans la définition de Ω_{trv} et du transporteur élastique E.

La définition de configuration relâchée est une définition thermo-mécanique. La décomposition du gradient de la transformation géométrique représente un concept thermo-mécanique par une équation cinématique, d'où l' indétermination citée.

On remarque qu'on considère toute configuration relâchée, virtuelle ou réelle, comme obtenue à partir de la configuration actuelle par un processus localement réversible. Un tel processus ne correspond pas, en général, à une décharge thermo-mécanique extérieure du corps (possibilité de plasticité en décharge par exemple).

On appelle configuration Θ-virtuelle, $\Omega_{\Theta v}$, la configuration obtenue à partir de la configuration initiale par transport Θ, tant pour l'image géométrique de l'espace tangent que pour l'image phasique du corps. La configuration relâchée virtuelle à l'instant actuel Ω_{trv} est obtenue par transport géométrique Γ à partir de la configuration Θ-virtuelle $\Omega_{\Theta v}$.

La transformation des phases, $\Theta \in Q=L_{orth}(E,E)$, est la rotation qui identifie les directions cristallographiques actuelles à partir des directions des axes du repère géométrique absolu; elle représente l'image "matériau" de la matière. On considère cette rotation sur l'image géométrique de la matière en faisant les hypothèses constitutives suivantes:

- on donne à la géométrie de la matière une orientation initiale arbitraire, coïncidente avec l'orientation du repère géométrique absolu;
- on considère privilégié, dans le but d'écrire les équations de comportement, les directions géométriques de la matière coïncidentes avec les directions "matériau"[22].

Il faut remarquer que la (174) ne représente pas une décomposition polaire où Γ est le tenseur d'élongation associé à P: dans Γ il y a une partie d'élongation plastique pure et une de rotation relative matériau-matière (par cette définition les tenseurs d'élongation de P et Γ coïncident).

On remarque que, ayant supposé la partie élastique bloquée d'élongation pure, toute configuration locale de la géométrie de la matière, à l'exception de l'actuelle, est orientée sans ambiguïté par rapport à la configuration initiale (i.e. la rotation R des (153) est déterminée). Finalement en configuration actuelle les configurations locales sont orientées sans ambiguïté pour en

---

21 A cette indétermination il faudrait rajouter celle due à la rotation indéterminée S (Cf. formules (153)) qui a été éliminée en prenant E_{blo} d'élongation pure.

22 En fait, en d'autres termes, on admet de ne savoir écrire le comportement géométrique de la matière que par rapport à des axes dont l'évolution ne dépend pas de la cinématique géométrique de la matière (i.e. "non matériels") et que, pour cette raison, on a introduit dans le modèle pour représenter l'image "matériau" (i.e. "comportement") de la matière même.

assurer la compatibilité, mais les rotations nécessaires à cette fin (i.e. les S des (153)) sont réversibles et n'affectent pas les axes du matériau (l'orientation du trièdre constitutif ne dépend que de la transformation Θ).

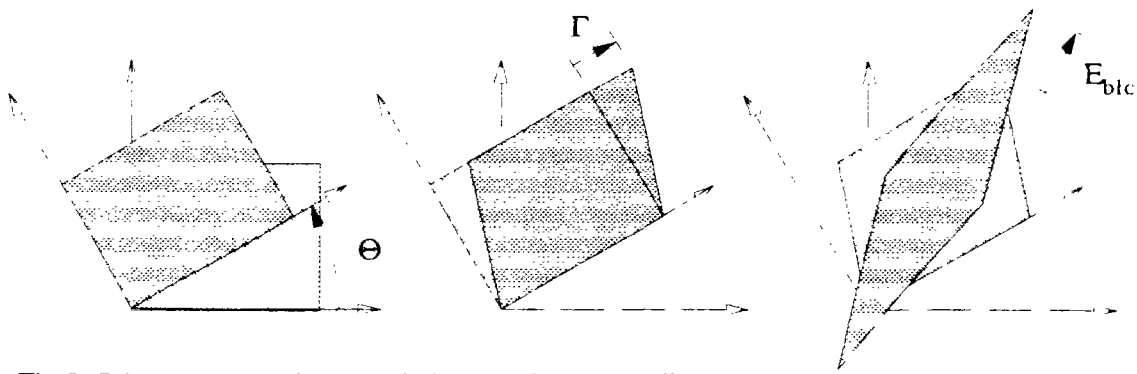


Fig.2: Décomposition de la partie irréversible du gradient de la transformation géométrique

On peut définir une masse volumique associée à chaque partie du gradient de la transformation, et donc sur chacune des configurations introduites, moyennant une équation de la forme de l'équation de conservation de la masse. Comme dans la suite on ne considère que de densités de puissance relatives à la mesure volumique initiale ou actuelle, l'introduction d'une notation pour ces masses volumiques intermédiaires ne nous sera pas nécessaire.

Le schéma à la figure 3 résume la notation adoptée.

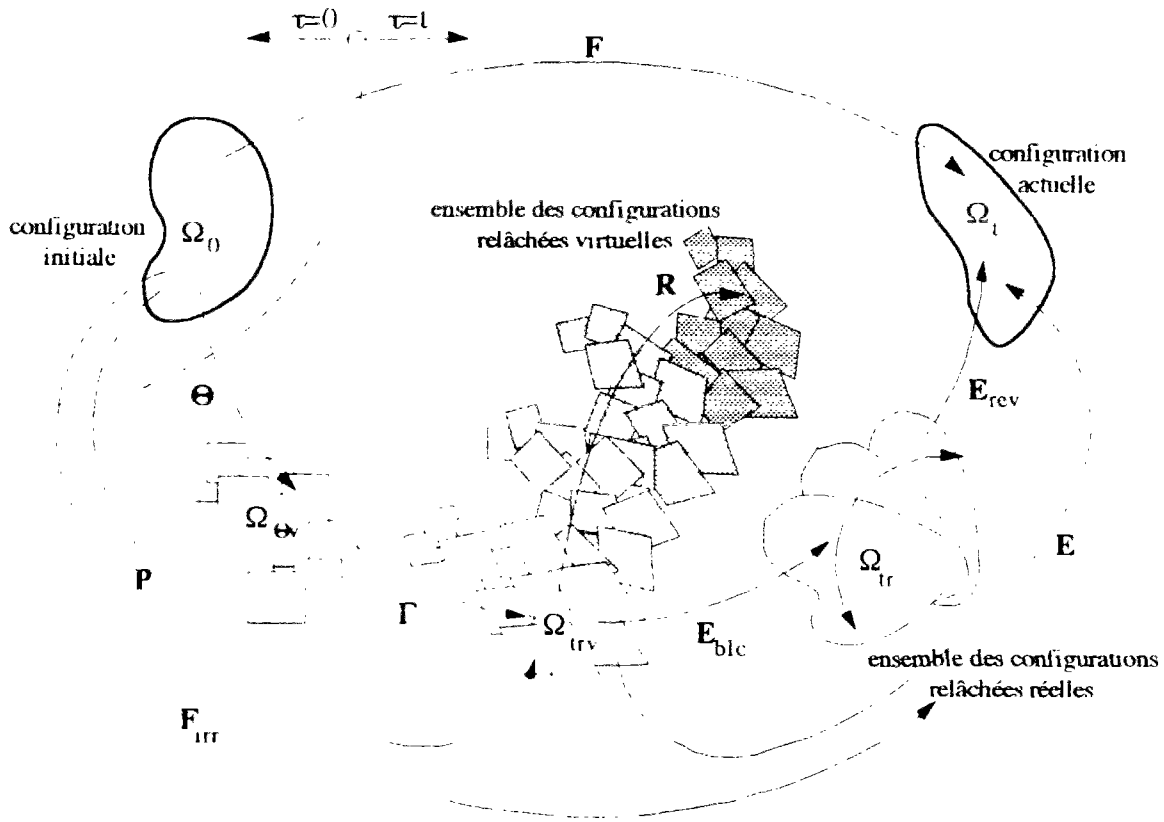


Fig.3: Schéma des décompositions du gradient de la transformation géométrique.

Hypothèses.

L'état naturel de la matière est un état à contraintes nulles et à température uniforme. En observant la matière dans un référentiel d'espace profond, dans un tel état naturel doit s'annuler tant la contrainte géométrique que les contraintes phasiques.

La configuration géométrique relâchée virtuelle, D_{trv}, peut donc représenter l'image géométrique d'un ensemble d'états naturels locaux (dépourvu de continuité géométrique). On suppose que la configuration géométrique relâchée virtuelle d'une phase est réelle: il n'y a pas d'incompatibilité des déplacements géométriques à l'intérieur d'une phase pendant une décharge thermo-élastique totale instantanée (i.e. pour un espace des phases discret, les discontinuités nécessaires à relâcher l'énergie élastique bloquée se font dans les joints entre phases).

Cette hypothèse a été traduite en une décomposition cinématique de F_{xx} dans les opérateurs E et P continus par phases et par point géométrique avec inverses continues (bien que F_{xx} ne soit fonction que de la position géométrique):

$$\forall(x,t)\ \underline{\underline{F}}_{xx}=\underline{\underline{E}}\cdot\underline{\underline{P}} : \exists|\underline{\underline{E}}^{-1} \text{ et } \exists|\underline{\underline{P}}^{-1}\ \forall(x,\underline{\theta},t) \qquad 157$$

Ladite hypothèse garantit aussi que les déterminants des diverses parties du gradient de la transformation géométrique sont positifs à tout instant et en tout point de la configuration initiale dans l'espace profond.

Dans l'espace profond la configuration naturelle locale, c'est à dire la configuration constituée d'un ensemble de configurations locales à contraintes géométriques et phasiques nulles et température homogène, est donnée par la configuration géométrique relâchée virtuelle croisée avec une configuration phasique naturelle à définir:

$$\Omega_{tn}=D_{trv}\times Z_n \qquad 158$$

Cette configuration phasique naturelle peut être une configuration isocline obtenue dès la configuration phasique initiale par transformation $I(x,\theta)$, c'est à dire après avoir réorienté tout trièdre constitutif (i.e. les axes du matériau) comme le trièdre du repère. Donc Z_n contient un seul élément, c'est à dire l'identité $I\in Q$.

Une telle transformation des phases est singulière et, par conséquent, on ne peut pas définir une masse volumique par phase en configuration naturelle isocline (la masse volumique dans une telle configuration est indépendante des phases en tout point géométrique). Par définition la masse volumique définie sur la configuration naturelle isocline est alors la masse volumique initiale à tout instant.

On remarque que l'énergie pour former les discontinuités virtuelles pendant le transport P (i.e. de D_0 à D_{trv}) et celle pour les annihiler pendant E (i.e. de D_{trv} à D_t) sont supposées s'annuler de façon à ne pas apparaître dans la transformation réelle de D_0 à D_t.

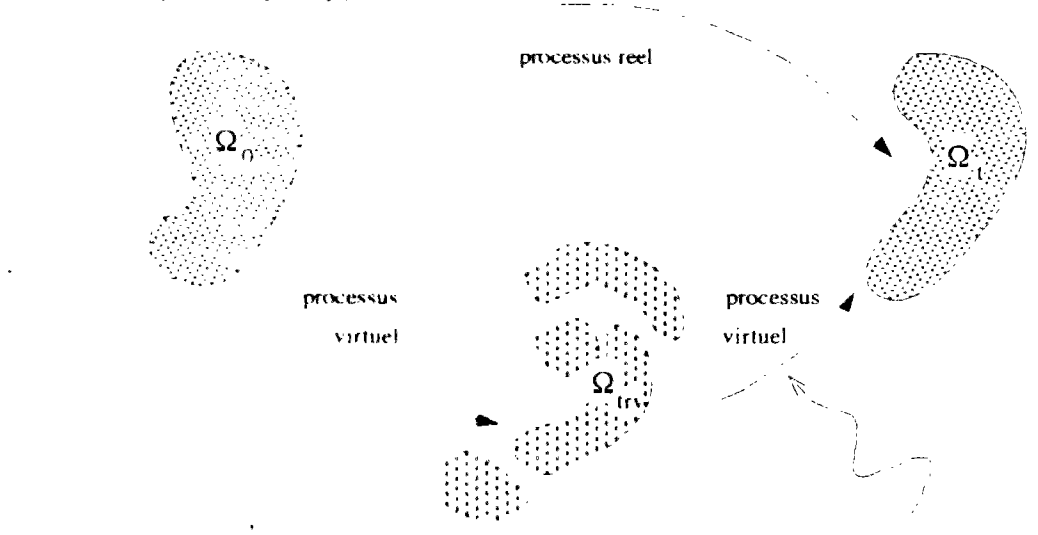


Fig.4: Jeu énergétique virtuel.

On suppose que le mouvement des phases est irréversible.

On rappelle qu'on a déjà fait l'hypothèse que toute l'histoire de ce mouvement est représentée par la position actuelle des phases et par ses gradients actuels en négligeant l'existence de variables non observables d'origine phasique. On a fait aussi l'hypothèse que l'état actuel local ne dépend pas de l'histoire de ce mouvement en prenant une énergie libre indépendante des phases.

On peut alors affirmer que le mouvement des phases se fait entre la configuration initiale et la configuration relâchée virtuelle (de Ω_0 à Ω_{trv}) ou, en d'autres mots, qu'il est gelé pendant tout processus à dissipation nulle (qu'il soit réversible ou non).

Postulat de l'état local.

Les hypothèses qu'on a présentées pour caractériser le comportement de façon actuelle et locale peuvent être résumées par le modèle de l'état local suivant.

Dans un processus irréversible d'un système thermo-mécanique hétérogène localement anisotrope tel que un polycristal, pour une échelle de temps et une échelle d'espace fixées, il existe en tout instant une classe de configurations virtuelles aux propriétés locales instantanées suivantes[23]:

(première partie)

- existence locale instantanée d'un état d'équilibre et d'un ensemble de variables d'état;
- dépendance locale instantanée de l'entropie des variables d'état égale à celle qui a lieu à l'équilibre (il existe des équations constitutives thermo-élastiques locales instantanées pour toute inconnue constitutive);
- existence locale instantanée des potentiels de dissipations (condition suffisante pour que le comportement soit de dissipation linéaire en proximité de l'équilibre, c'est à dire aussi condition suffisante pour la validité du théorème d'Onsager et pour qu'il existe des lois d'évolution et des critères);

(deuxième partie)

- existence instantanée par phase d'un trièdre constitutif, non matériel, par rapport auquel le comportement est invariant;
- existence instantanée par phase de l'état neutre après décharge thermo-élastique locale instantanée;
- unicité instantanée par phase de la déformation plastique (conjecture d'auto-cohérence par phase).

Notations conséquentes à la décomposition.

On note dans la suite les tenseurs de dilatation droits de Cauchy entre les diverses configurations et les déformations de Green-Lagrange correspondantes par:

$$\underline{\underline{C}}(x,t) = \underline{\underline{F}}_{xx}^{T} \cdot \underline{\underline{F}}_{xx}(x,t) \qquad 159$$

$$\underline{\underline{C}}_e(x,\underline{\theta},t) = \underline{\underline{E}}^{T} \underline{\underline{E}}(x,\underline{\theta},t) \qquad \underline{\underline{C}}_p(x,\underline{\theta},t) = \underline{\underline{P}}^{T} \cdot \underline{\underline{P}}(x,\underline{\theta},t)$$

$$\underline{\underline{C}}_{rev}(x,t) = \underline{\underline{E}}_{rev}^{T} \cdot \underline{\underline{E}}_{rev}(x,t) \qquad \underline{\underline{C}}_{blo}(x,\underline{\theta},t) = \underline{\underline{E}}_{blo}^{T} \cdot \underline{\underline{E}}_{blo}(x,\underline{\theta},t) \qquad \underline{\underline{C}}_{\Gamma}(x,\underline{\theta},t) = \underline{\underline{\Gamma}}^{T} \cdot \underline{\underline{\Gamma}}(x,\underline{\theta},t)$$

$$\underline{\underline{C}}_{irr\Theta}(x,\underline{\theta},t) = \underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\theta},t) \cdot \underline{\underline{C}}_{irr}(x,t) \cdot \underline{\underline{\Theta}}^{T}(x,\underline{\theta},t) \qquad \underline{\underline{C}}_{\Theta}(x,\underline{\theta},t) = \underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\theta},t) \cdot \underline{\underline{C}}(x,t) \cdot \underline{\underline{\Theta}}^{T}(x,\underline{\theta},t)$$

$$\underline{\underline{L}}_{..}(x,\underline{\theta},t) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}}_{..}(x,\underline{\theta},t) - \underline{\underline{I}})$$

Il est utile de voir les conséquences de la décomposition cinématique sur la puissance volumique (par la mesure de volume en configuration initiale) des efforts intérieurs géométriques:

---

23 Au Chapitre VI on étudiera les transformations d'un polycristal au niveau microscopique, dans les trois dernières affirmations du postulat les mots "par phase" seront alors substitués par le mot "local".

$$\underline{\underline{\pi}}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\overset{\circ}{\underline{\underline{L}}}(x,t) = \tag{160}$$

$$= \underline{\underline{\pi}}_{\Gamma}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\overset{\circ}{\underline{\underline{L}}}_{rev}(x,t) + \underline{\underline{\pi}}_{\Gamma}\cdot\underline{\underline{C}}_{rev}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\overset{\circ}{\underline{\underline{E}}}_{blo}\cdot\underline{\underline{E}}_{blo}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t) +$$
$$+ \underline{\underline{\pi}}_{\Gamma\Gamma}\cdot\underline{\underline{C}}_{\beta}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\overset{\circ}{\underline{\underline{\Gamma}}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t) + \underline{\underline{\pi}}_{\Theta}\cdot\underline{\underline{C}}_{\Theta}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\overset{\circ}{\underline{\underline{\Theta}}}\cdot\underline{\underline{\Theta}}^{T}(x,\underline{\underline{\theta}},t)$$

avec décomposition analogue (en substituant "$\overset{\circ}{L}_{rev}$" par "$E^{T}_{rev}\cdot\overset{\circ}{E}_{rev}$") pour la puissance due à la partie antisymétrique de la contrainte géométrique (appelé β en configuration initiale et μ=B en configuration actuelle); ayant défini les transportés de la contrainte géométrique sur les deux configurations relâchées introduites (respectivement relâchée virtuelle et relâchée réelle) et sur la configuration Θ-virtuelle[24]:

$$\underline{\underline{\pi}}_{\Gamma\Gamma}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \underline{\underline{P}}\cdot\underline{\underline{\pi}}\cdot\underline{\underline{P}}^{T}(x,\underline{\underline{\theta}},t) \tag{161}$$
$$\underline{\underline{\pi}}_{\Gamma}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \underline{\underline{F}}_{i\Gamma}\cdot\underline{\underline{\pi}}\cdot\underline{\underline{F}}_{i\Gamma}^{T}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \underline{\underline{E}}_{blo}\cdot\underline{\underline{\pi}}_{\Gamma\Gamma}\cdot\underline{\underline{E}}_{blo}^{T}(x,\underline{\underline{\theta}},t)$$
$$\underline{\underline{\pi}}_{\Theta}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \underline{\underline{\Theta}}\cdot\underline{\underline{\pi}}\cdot\underline{\underline{\Theta}}^{T}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \underline{\underline{\Gamma}}\cdot\underline{\underline{\pi}}_{\Gamma\Gamma}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{T}(x,\underline{\underline{\theta}},t)$$

avec relations analogues pour β (tout transporté de β est antisymétrique).

En observant la (160) on voit deux termes pour la puissance volumique d'origine élastique, l'un fonction de la vitesse de la déformation réversible de Green-Lagrange et l'autre lié au taux de déformation élastique bloquée, on voit encore un terme dû au taux de déformation plastique de glissement et un terme dû au taux de rotation du matériau.

Conditions de compatibilité cinématique.

On a éliminé l'indétermination de l'orientation de la configuration relâchée virtuelle en choisissant symétrique, de façon arbitraire, la partie élastique bloquée du gradient de la transformation géométrique. Toute la rotation géométrique entre cette configuration relâchée virtuelle et la configuration actuelle est donc réversible, mais, en général, dépend de la phase.

On note S cette rotation (Cf. formule (153)); on peut envisager deux voies:

- soit introduire la rotation S parmi les variables non observables en lui donnant une équation d'évolution;
- soit postuler l'invariance des comportements aux rotations S.

L'équation d'évolution nécessaire pour la première démarche ne peut être que une liaison cinématique entre rotations du matériau et de la matière; une telle liaison représenterait un matériau idéal.

La deuxième démarche est mieux adaptée à la physique du système en objet. Parmi les couples contrainte-déformation géométriques introduites la seule qui dépende de S est:

$$\forall\underline{\underline{S}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\in Q_{E} \rightarrow \forall(x,\underline{\underline{\theta}},t)\begin{cases}\underline{\underline{\pi}}_{\Gamma}{}^{**}=\underline{\underline{S}}\cdot\underline{\underline{\pi}}_{\Gamma}\cdot\underline{\underline{S}}^{T}\\ \underline{\underline{L}}_{rev}{}^{**}=\underline{\underline{S}}\cdot\underline{\underline{L}}_{rev}\cdot\underline{\underline{S}}^{T}\end{cases} \tag{162}$$

Toute autre couple permet l'écriture d'un comportement indépendant de S.

La configuration actuelle est réelle (i.e. globalement compatible), par conséquent le transporteur $F_{i\Gamma}$ ne doit pas dépendre des phases. On a en conclusion les conditions cinématiques à imposer sur E_{blo} en tout point matériel:

---

24 Le transporté en configuration relâchée réelle de la contrainte de Piola-Kirchhoff est défini plus proprement:

$$\underline{\underline{\pi}}_{\Gamma}{}^{*}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = J_{blo}^{-1}\underline{\underline{F}}_{i\Gamma}\cdot\underline{\underline{\pi}}\cdot\underline{\underline{F}}_{i\Gamma}^{T}(x,\underline{\underline{\theta}},t) \tag{161b}$$

mais on a préféré la définition donnée dans le texte liée aux densités de la (160) qui se réfèrent à la mesure initiale de volume. La dénomination de transporté en configuration relâchée réelle doit donc être prise au sens, non classique, des (161).

$$\underline{\underline{E}}_{blo}(x,\underline{\theta},t) : \begin{cases} \underline{\underline{E}}_{blo}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}\cdot\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\theta},t)=\underline{\underline{F}}_{irr}(x,t) \\ \\ \underline{\underline{E}}_{blo}=\underline{\underline{E}}_{blo}^{T} \end{cases} \qquad \forall(x,\underline{\theta},t) \qquad 163$$

Changement de variable dans les équations de comportement.

Les équations de comportement ont été écrites en fonction, entre autre, de l'élongation géométrique totale (contenant les mêmes informations de la déformation géométrique totale de Green-Lagrange) et d'une fonction objective à définir d'une partie du gradient de la transformation géométrique caractérisant l'histoire du corps. En décomposant ce gradient on a vu que ladite partie irréversible peut être successivement décomposée en une rotation, une partie plastique de glissement et une partie élastique bloquée.

Un changement de variable qui garantit l'indépendance de la rotation indéterminée par phase S et l'objectivité est:

$$\underline{\underline{L}}(x,t),\ \underline{f}^{obj}(\underline{\underline{P}}(x,\underline{\theta},t)) \rightarrow \underline{\underline{L}}(x,t),\ \underline{\underline{L}}_{irr}(x,t),\ \underline{\underline{L}}_{p}(x,\underline{\theta},t) \qquad 164$$

avec nouvelles variables définies sur la configuration initiale.

Un autre changement de variable qui garantit les mêmes propriétés mais qui utilise de variables définies sur la configuration relâchée virtuelle est:

$$\underline{\underline{L}}(x,t),\ \underline{f}^{obj}(\underline{\underline{P}}(x,\underline{\theta},t)) \rightarrow \underline{\underline{L}}_{e}(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{L}}_{blo}(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{\Gamma}}(x,\underline{\theta},t) \qquad 165$$

5.3.3. Configuration support et indifférence matérielle.

Le choix de la configuration support des fonctions de comportement est arbitraire et, donc, se fait sur la base d'un critère de facilité des développements successifs. Il est à cette fin utile de choisir une configuration autre que l'initiale ou l'actuelle et, en particulier, une configuration relâchée. On renvoie, dans le cas des polycristaux, aux travaux de J.Mandel, F.Sidoroff, C.Stolz pour une discussion détaillée sur les configurations relâchées isoclines, intermédiaires et naturelles respectivement prises comme configurations support (un bref aperçu sur le sujet a été donné au Chapitre II § 2.).

Dans ce travail on utilise l'emplacement du corps matériel dans l'espace profond pour définir de configurations supports convenables, qui diffèrent, dès leur nature "super" géométrique, des configurations introduites dans les démarches citées, mais les réflexions physiques de base reprennent la pensée de leurs auteurs.

Dans les développement successifs on considère deux possibles choix d'une configuration support:

- la configuration initiale de référence cinématique,
- une configuration naturelle obtenue en prenant la configuration géométrique relâchée virtuelle et la configuration phasique isocline.

Le premier choix est moins intéressant en pratique mais permet d'introduire le second. Celui-ci a l'avantage de permettre l'écriture du potentiel énergie libre dans un état naturel (contraintes nulles, température uniforme)

Indifférence matérielle.

On rappelle qu'on veut écrire un comportement instantané et indépendant du temps, il faut donc interpréter le postulat d'indifférence matérielle lorsque le temps n'est qu'un paramètre pour identifier les différentes configurations.

La décomposition cinématique donnée précédemment est relative à l'instant actuel: pour un processus donné on obtient une configuration Θ-virtuelle, un ensemble de configurations relâchées virtuelles et un ensemble de configurations relâchées réelles à tout instant. En particulier

donc une configuration géométrique relâchée virtuelle est simultanée à la configuration actuelle (instant t) ainsi que la configuration naturelle qui lui est associée[25].

Par conséquent les tenseurs introduits sont relatifs à l'instant t; ils sont objectifs s'ils vérifient la condition (132) pour τ=t.

Les diverses parties du gradient de la transformation géométrique introduites par décomposition cinématique varient dans un changement de référentiel avec instant initial de référence comme:

$$\left.\begin{array}{l}\underline{\underline{F}}'_{xx}(x',t')=\underline{\underline{K}}(t)\cdot\underline{\underline{F}}_{xx}(x,t)\\ \underline{\underline{\Theta}}'(x',\underline{\theta}',t')=\underline{\underline{K}}(t)\cdot\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\theta},t)\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\underline{\underline{E}}'_{rev}(x',t')=\underline{\underline{K}}(t)\cdot\underline{\underline{E}}_{rev}(x,t)\cdot\underline{\underline{K}}^{T}(t)\\ \underline{\underline{E}}'_{blo}(x',\underline{\theta}',t')=\underline{\underline{K}}(t)\cdot\underline{\underline{E}}_{blo}(x,\underline{\theta},t)\cdot\underline{\underline{K}}^{T}(t)\\ \underline{\underline{\Gamma}}'(x',\underline{\theta}',t')=\underline{\underline{K}}(t)\cdot\underline{\underline{\Gamma}}(x,\underline{\theta},t)\cdot\underline{\underline{K}}^{T}(t)\end{array}\right. \qquad 166$$

On voit alors que les transporteurs E_{rev}, E_{blo} et Γ sont objectifs, que les déformations de Green-Lagrange L et L_p ont leur composantes scalaires objectives et, finalement, que tout autre déformation de Green-Lagrange définie aux (159) est objective (on écrit L_e comme exemple):

$$\underline{\underline{L}}'(x',t') = \underline{\underline{L}}(x,t) \;;\; \underline{\underline{L}}'_{p}(x',\underline{\theta}',t')=\underline{\underline{L}}_{p}(x,\underline{\theta},t) \qquad 167$$
$$\underline{\underline{L}}'_{e}(x',\underline{\theta}',t')=\underline{\underline{K}}^{T}(t)\cdot\underline{\underline{L}}_{e}(x,\underline{\theta},t)\cdot\underline{\underline{K}}(t) \text{ etc....}$$

Les composantes du tenseur de Piola-Kirchhoff sont de scalaires objectives. Parmi les transportés de ce tenseur introduits on remarque en particulier que celui sur la configuration relâchée virtuelle est objectif:

$$\underline{\underline{\pi}}_{rv}'(x',\underline{\theta}',t') = \underline{\underline{K}}(t)\cdot\underline{\underline{\pi}}_{rv}(x,\underline{\theta},t)\cdot\underline{\underline{K}}^{T}(t) \qquad 168$$

Configuration initiale support.

Pour garantir l'indifférence matérielle et l'invariance aux rotations indéterminées par phase du comportement on peut donc prendre en compte des équations constitutives définies sur la configuration initiale de la forme:

$$\psi_o(x,\underline{\theta},t)=\psi_o(T(x,t),\ \underline{\underline{L}}(x,t),\ \underline{\underline{L}}_{in}(x,t),\ \underline{\underline{L}}_{p}(x,\underline{\theta},t)) \qquad 169$$
$$\underline{\underline{\pi}}(x,\underline{\theta},t)=\underline{\underline{\pi}}(T(x,t),\ \underline{\underline{L}}(x,t),\ \underline{\underline{L}}_{in}(x,t),\ \underline{\underline{L}}_{p}(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{\varpi}}(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{f}}_{\theta x}(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{f}}_{\theta\theta}(x,\underline{\theta},t))$$
$$s_o(x,\underline{\theta},t)=s_o(T(x,t),\ \underline{\underline{L}}(x,t),\ \underline{\underline{L}}_{in}(x,t),\ \underline{\underline{L}}_{p}(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{\varpi}}(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{f}}_{\theta x}(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{f}}_{\theta\theta}(x,\underline{\theta},t))$$
$$\underline{q}_o(x,\underline{\theta},t)=\underline{q}_o(T(x,t),\ \nabla_x T(x,t),\ \underline{\underline{L}}(x,t),\ \underline{\underline{L}}_{in}(x,t),\ \underline{\underline{L}}_{p}(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{\varpi}}(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{f}}_{\theta x}(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{f}}_{\theta\theta}(x,\underline{\theta},t))$$

donnant des scalaires objectifs en fonction de scalaires objectifs.

On remarque que la configuration initiale est par hypothèse à température homogène, par conséquent l'équation de la chaleur peut être sûrement écrite sur cette configuration et il n'est pas nécessaire de la considérer dans d'autres configurations.

Configuration naturelle support.

La transformation Θ donne à l'instant t l'orientation des trièdres constitutifs par rapport aux axes du repère, c'est à dire la rotation actuelle du matériau à partir d'une configuration isocline (configuration idéale dans laquelle tout trièdre coïncide avec celui du repère). Ses gradient doivent être transportés en configuration naturelle pour avoir de variables convenables:

---

25 On remarque qu'on obtient un résultat différent si on considère par changement de référentiel les configurations relâchée virtuelle et relâchée réelle solidaires à la configuration initiale, c'est à dire:

$$\underline{\underline{E}}'_{rev}=\underline{\underline{K}}\cdot\underline{\underline{E}}_{rev} \;;\; \underline{\underline{E}}'_{blo}=\underline{\underline{E}}_{blo} \;;\; \underline{\underline{\Gamma}}'=\underline{\underline{\Gamma}}\cdot\underline{\underline{K}}^{T} \;;\; \underline{\underline{\Theta}}'=\underline{\underline{K}}\cdot\underline{\underline{\Theta}} \qquad 166b$$

$$\nabla_x \underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t) \rightarrow \nabla_x \underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot \underline{\underline{P}}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\underline{\underline{\phi}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}},t) \qquad 170$$

$$\nabla_\theta \underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t) \rightarrow \nabla_\theta \underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot \underline{\underline{\theta}}^{T}=\underline{\underline{\phi}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}},t)$$

La transformation Θ est constituée de vecteurs objectifs (elle se réfère aux axes du repère à l'instant initial). Le gradient $\phi_{\theta x}$ est constitué de tenseurs d'ordre deux objectifs, le gradient $\phi_{\theta\theta}$ est constitué aussi de tenseurs d'ordre deux objectifs[26].

L'indifférence matérielle et l'invariance aux rotations indéterminées sont alors assurées sur la configuration naturelle par des équations constitutives de la forme:

$$\psi_{rv}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\psi_{rv}(T(x,t),\ \underline{\underline{L}}_e(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{L}}_{blo}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{\Gamma}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)) \qquad 171$$

$$\underline{\underline{\pi}}_{rv}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\underline{\underline{\pi}}_{rv}(T(x,t),\ \underline{\underline{L}}_e(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{L}}_{blo}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{\Gamma}}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{\phi}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{\phi}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}},t))$$

$$\underline{\underline{B}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\underline{\underline{B}}(T(x,t),\ \underline{\underline{L}}_e(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{L}}_{blo}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{\Gamma}}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{\phi}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{\phi}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}},t))$$

$$\underline{\underline{C}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\underline{\underline{C}}(T(x,t),\ \underline{\underline{L}}_e(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{L}}_{blo}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{\Gamma}}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{\phi}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{\phi}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}},t))$$

$$\underline{\underline{D}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\underline{\underline{D}}(T(x,t),\ \underline{\underline{L}}_e(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{L}}_{blo}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{\Gamma}}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{\phi}}_{\theta x}(x,\underline{\underline{\theta}},t),\ \underline{\underline{\phi}}_{\theta\theta}(x,\underline{\underline{\theta}},t))$$

En vue d'un modèle simple on peut ensuite considérer l'énergie libre dans l'état naturel indépendante de toute histoire du matériau, c'est à dire aussi de Γ.

5.3.4. Lois d'état et dissipations.

On considère séparément les deux choix envisagés pour la configuration support, d'abord la configuration initiale et après la configuration virtuelle relâchée par phase, afin de comparer les comportements ainsi écrits et de privilégier, dans les développements successifs, le plus simple.

Configuration initiale support.

L'énergie libre massique s'écrit sur la configuration initiale par une fonction constitutive de la forme:

$$\psi_o(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\psi_o(T(x,t),\ \underline{\underline{L}}(x,t),\ \underline{\underline{L}}_{in}(x,t),\ \underline{\underline{L}}_p(x,\underline{\underline{\theta}},t)) \qquad 172$$

on en calcule la dérivée matérielle (les grandeurs tensorielles sont écrites sur la configuration initiale, leurs dérivées matérielles et convectives coïncident) tenant compte du changement de variable dû à la décomposition cinématique du gradient de la transformation géométrique:

26 Entre les composantes d'un tenseur orthogonal propre il existe les relations de normalité et de positivité du déterminant.

$$\overset{\circ}{\psi}_o(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \frac{\partial \psi_o}{\partial T}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\overset{\circ}{T}(x,t) + \underline{\underline{F}}_{j\pi}\cdot\frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\underline{\underline{F}}^{T}_{j\pi}(x,t):\overset{\circ}{\underline{\underline{L}}}_{rev}(x,t) + \qquad 173$$

$$+ \underline{\underline{F}}_{j\pi}\cdot\left[\frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\underline{\underline{C}}(x,t)+\frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}_{j\pi}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\underline{\underline{C}}_{j\pi}(x,t)\right]\cdot\underline{\underline{F}}^{-1}_{j\pi}(x,t):\overset{\circ}{\underline{\underline{E}}}_{blo}\cdot\underline{\underline{E}}^{-1}_{blo}(x,\underline{\underline{\theta}},t) +$$

$$+ \underline{\underline{P}}\cdot\left[\frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\underline{\underline{C}}(x,t)+\frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}_{p}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\underline{\underline{C}}_{p}(x,\underline{\underline{\theta}},t)+\frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}_{j\pi}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\underline{\underline{C}}_{j\pi}(x,t)\right]\cdot\underline{\underline{P}}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\overset{\circ}{\underline{\underline{\Gamma}}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t) +$$

$$+ \underline{\underline{\Theta}}\cdot\left[\frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\underline{\underline{C}}(x,t)+\frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}_{p}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\underline{\underline{C}}_{p}(x,\underline{\underline{\theta}},t)+\frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}_{j\pi}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\underline{\underline{C}}_{j\pi}(x,t)\right]\cdot\underline{\underline{\Theta}}^{T}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\overset{\circ}{\underline{\underline{\Theta}}}\cdot\underline{\underline{\Theta}}^{T}(x,\underline{\underline{\theta}},t)$$

$$\forall(x,\underline{\underline{\theta}})\in\Omega_0\ \forall t$$

Par le même changement de variable la puissance des efforts intérieurs géométriques s'écrit selon la (160). La dissipation massique, dans laquelle on écrit en configuration actuelle les puissances d'origine phasique et la puissance due à la contrainte géométrique antisymétrique pour des raisons de commodité, est (Cf formule (112)):

$$D_o(x,\underline{\underline{\theta}},t) = -\left[\frac{\partial \psi_o}{\partial T} + s_o\right]_{(x,\underline{\underline{\theta}},t)}\overset{\circ}{T}(x,t) + \qquad 174$$

$$+ \underline{\underline{F}}_{j\pi}\cdot\left[\rho_0^{-1}\underline{\underline{\pi}} - \frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}}\right]_{(x,\underline{\underline{\theta}},t)}\cdot\underline{\underline{F}}^{T}_{j\pi}(x,t):\overset{\circ}{\underline{\underline{L}}}_{rev}(x,t) +$$

$$+ \underline{\underline{F}}_{j\pi}\cdot\left\{\left[\rho_0^{-1}\underline{\underline{\pi}} - \frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}}\right]\cdot\underline{\underline{C}} - \frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}_{j\pi}}\cdot\underline{\underline{C}}_{j\pi}\right\}_{(x,\underline{\underline{\theta}},t)}\cdot\underline{\underline{F}}^{-1}_{j\pi}(x,t):\overset{\circ}{\underline{\underline{E}}}_{blo}\cdot\underline{\underline{E}}^{-1}_{blo}(x,\underline{\underline{\theta}},t) +$$

$$+ \underline{\underline{P}}\cdot\left\{\left[\rho_0^{-1}\underline{\underline{\pi}} - \frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}}\right]\cdot\underline{\underline{C}} - \frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}_{p}}\cdot\underline{\underline{C}}_{p} - \frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}_{j\pi}}\cdot\underline{\underline{C}}_{j\pi}\right\}_{(x,\underline{\underline{\theta}},t)}\cdot\underline{\underline{P}}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\overset{\circ}{\underline{\underline{\Gamma}}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t) +$$

$$+ \underline{\underline{\Theta}}\cdot\left\{\left[\rho_0^{-1}\underline{\underline{\pi}} - \frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}}\right]\cdot\underline{\underline{C}} - \frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}_{p}}\cdot\underline{\underline{C}}_{p} - \frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}_{j\pi}}\cdot\underline{\underline{C}}_{j\pi}\right\}_{(x,\underline{\underline{\theta}},t)}\cdot\underline{\underline{\Theta}}^{T}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\overset{\circ}{\underline{\underline{\Theta}}}\cdot\underline{\underline{\Theta}}^{T}(x,\underline{\underline{\theta}},t) +$$

$$+ \rho^{-1}\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\left[\text{antsymgradu-}\underline{\underline{w}}\right]_{(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)} +$$

$$+ \rho^{-1}\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\text{grad}_{\mathfrak{x}}\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) + \rho^{-1}\underline{\underline{D}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\text{grad}_{\vartheta}\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) -$$

$$- \rho_0^{-1}\underline{\underline{F}}_{xx}(x,t)\cdot\underline{\underline{q}}_o(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\frac{\nabla_x T}{T}(x,t)\cdot\underline{\underline{F}}^{-1}_{xx}(x,t) \geq 0$$

$$\forall(x,\underline{\underline{\theta}},t)\in\Omega_0 x\chi\ ;\ (\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)=(\Xi(x,t),\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t),t)$$

La dissipation ci-dessus doit être non négative en tout point matériel pour tout processus réel.

Un processus donné par une variation arbitraire homogène de température tel qu'il laisse tout autre variable interne gelée est admissible[27] (on rappelle que ce sont la rotation relative matériau-matière et ses gradients les variables internes représentant les phases);

_pour $\dot{T}>0$ ou $\dot{T}<0$ à $\nabla_x T=0$, $\underline{\underline{\mathring{L}}}_{\pi}=\underline{\underline{0}}$, $\underline{\underline{\mathring{P}}}=\underline{\underline{0}}$, $\underline{\underline{\mathring{\varpi}}}=\underline{\underline{0}}$, $\underline{\mathring{f}}_{\theta x}=\underline{0}$, $\underline{\underline{\mathring{f}}}_{\theta\theta}=\underline{\underline{0}}$ on obtient:

$$s_o(x,\underline{\underline{\theta}},t) = -\frac{\partial \psi_o}{\partial T}(x,\underline{\underline{\theta}},t) \qquad 175$$

On rappelle que dans la partie élastique du gradient de la transformation on distingue une partie réversible et une partie bloquée. Un processus réversible idéal se fait par des transformations avec partie E_{rev} arbitraire, toute autre variable étant gelée (en particulier donc la puissance interne associée au taux d'évolution des phases est nulle, matériau et matière étant solidaires), la partie élastique bloquée du gradient de la transformation géométrique ne pouvant pas varier sans contributions plastiques;

_pour $\underline{\underline{\mathring{E}}}_{rev}$ quelconque, à $\underline{\underline{\mathring{E}}}_{blo}=\underline{\underline{0}}$, $\nabla_x T=0$, $\underline{\underline{\mathring{P}}}=\underline{\underline{0}}$, $\underline{\underline{\mathring{\varpi}}}=\underline{\underline{0}}$, $\underline{\mathring{f}}_{\theta x}=\underline{0}$, $\underline{\underline{\mathring{f}}}_{\theta\theta}=\underline{\underline{0}}$ on obtient:

$$\underline{\underline{\pi}}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \rho_0(x,\underline{\underline{\theta}})\,\frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}}(x,\underline{\underline{\theta}},t) \qquad 176$$

L'inégalité de Clausius-Duhem, après substitution des lois réversibles ci-dessus, permet de définir une dissipation thermique qu'on postule toujours non négative et une dissipation intrinsèque postulée, elle aussi, toujours non négative:

$$D_o(x,\underline{\underline{\theta}},t)=D_{oterm}(x,\underline{\underline{\theta}},t) + D_{oint}(x,\underline{\underline{\theta}},t) \geq 0 \quad \forall (x,\underline{\underline{\theta}},t)\in\Omega_0 x\chi \qquad 177$$

_dissipation thermique:

$$D_{oterm}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = -\rho_0^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}})\underline{\underline{F}}_{\pi x}(x,t)\,\underline{q}_o(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\frac{\nabla_x T(x,t)\cdot\underline{\underline{F}}_{xx}^{-1}(x,t)}{T(x,t)} \geq 0 \quad \forall (x,\underline{\underline{\theta}},t)\in\Omega_0 x\chi \qquad 178$$

_dissipation intrinsèque:

$$D_{oint}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = -\underline{\underline{F}}_{j\pi}\cdot\frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}_{j\pi}}\cdot\underline{\underline{F}}_{\pi}^{T}(x,t):\underline{\underline{\mathring{E}}}_{blo}\cdot\underline{\underline{E}}_{blo}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t) - \qquad 179$$

$$-\underline{\underline{P}}\cdot\left[\frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}_{p}}\cdot\underline{\underline{C}}_{p} + \frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}_{j\pi}}\cdot\underline{\underline{C}}_{j\pi}\right]_{(x,\underline{\underline{\theta}},t)}\cdot\underline{\underline{P}}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\underline{\underline{\mathring{\Gamma}}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t) -$$

$$-\left\{\underline{\underline{\Theta}}\left[\frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}_{p}}\cdot\underline{\underline{C}}_{p} + \frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}_{j\pi}}\cdot\underline{\underline{C}}_{j\pi}\right]_{(x,\underline{\underline{\theta}},t)}\cdot\underline{\underline{\Theta}}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t) - \rho^{-1}\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right\}:\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) +$$

$$+\rho^{-1}\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}u(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t) +$$

$$+\rho^{-1}\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\underline{\underline{\mathfrak{x}}}}\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) + \rho^{-1}\underline{\underline{D}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\underline{\underline{\vartheta}}}\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \geq 0$$

$$\forall (x,\underline{\underline{\theta}},t)\in\Omega_0 x\chi \;;\; (\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)=(\Xi(x,t),\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t),t)$$

dans laquelle on voit:

- dissipation par taux d'évolution de la partie élastique bloquée du gradient de la transformation géométrique (premier terme),

---

27 Ce processus est admissible pour de températures inférieures à la température de restauration. A cette température on peut en fait envisager une variation d'entropie due à la réorganisation du réseau cristallin, c'est à dire liée aux variables de phase.

- dissipation par taux de glissement plastique (deuxième terme)
- dissipation par taux de rotation des axes du matériau (troisième terme) couplée avec celle du taux de rotation de la géométrie de la matière (quatrième terme),
- dissipation par taux d'évolution des gradients des orientations cristallines (termes suivants).

Le modèle est particularisé en choisissant dans cette expression une partie d'interaction entre variables (échanges irréversibles entre sources d'énergie et changement de l'état interne) et une de dissipation pure.

Les hypothèses qu'on introduit de suite à cette fin seront justifiées et expliquées dans la dernière partie du chapitre.

On fait l'hypothèse que la variation d'énergie libre due à la déformation plastique est l'opposée de celle due à l'ensemble de la déformation:

$$\frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}} = - \frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}_p} \qquad 180$$

On appelle "contrainte bloquée"[28], noté π_b en configuration initiale, la densité volumique de la variation d'énergie libre due à la déformation irréversible:

$$\underline{\underline{\pi}}_b(x,\underline{\theta},t) = \rho_0(x,\underline{\theta}) \frac{\partial \psi_o}{\partial \underline{\underline{L}}_{in}}(x,\underline{\theta},t) \qquad 181$$

et on utilise les notations (161) pour indiquer ses images dans les diverses configurations.

En écrivant le terme dû au taux de rotation géométrique de la matière selon la décomposition du gradient de la transformation introduite, et en tenant compte de la deuxième des (94) qui défini l'image en configuration initiale, notée β, de la contrainte géométrique antisymétrique qui lui est associée, on obtient pour la dissipation intrinsèque l'expression:

$$\begin{aligned} D_{oint}(x,\underline{\theta},t) = {} & \rho^{-1} \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) : \mathring{\underline{\underline{E}}}_{rev} \cdot \underline{\underline{E}}_{rev}^{-1}(x,\underline{\theta},t) + \\ & + \rho_0^{-1} \underline{\underline{F}}_{in} \cdot \left[\underline{\underline{\beta}} \cdot \underline{\underline{C}} - \underline{\underline{\pi}}_b \cdot \underline{\underline{C}}_{in} \right]_{(x,\underline{\theta},t)} \cdot \underline{\underline{F}}_{in}^{-1}(x,t) : \mathring{\underline{\underline{E}}}_{blo} \cdot \underline{\underline{E}}_{blo}^{-1}(x,\underline{\theta},t) - \\ & + \rho_0^{-1} \underline{\underline{P}} \cdot \left[\underline{\underline{\pi}} \cdot \underline{\underline{C}}_p + \underline{\underline{\beta}} \cdot \underline{\underline{C}} - \underline{\underline{\pi}}_b \cdot \underline{\underline{C}}_{in} \right]_{(x,\underline{\theta},t)} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}(x,\underline{\theta},t) : \mathring{\underline{\underline{\Gamma}}} \cdot \underline{\underline{\Gamma}}^{-1}(x,\underline{\theta},t) + \\ & + \rho_0^{-1} \underline{\underline{\Theta}} \cdot \left[\underline{\underline{\pi}} \cdot \underline{\underline{C}}_p + \underline{\underline{\beta}} \cdot \underline{\underline{C}} - \underline{\underline{\pi}}_b \cdot \underline{\underline{C}}_{in} - \underline{\underline{B}}_o \right]_{(x,\underline{\theta},t)} \cdot \underline{\underline{\Theta}}^T(x,\underline{\theta},t) : \mathring{\underline{\underline{\Theta}}} \cdot \underline{\underline{\Theta}}^T(x,\underline{\theta},t) + \\ & + \rho^{-1} \underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) : \mathrm{grad}_{\mathfrak{z}} \underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) + \rho^{-1} \underline{\underline{D}}(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) : \mathrm{grad}_{\vartheta} \underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \geq 0 \end{aligned} \qquad 182$$

$$\forall (x,\underline{\theta},t) \in \Omega_0 \times \chi \; ; \; (\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) = (\Xi(x,t), \underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\theta},t), t)$$

La dissipation ci-dessus doit être nulle pour tout taux de rotation arbitraire de la configuration géométrique relâchée réelle lorsque toute variable d'état est gelée (ce qui correspond à une rotation arbitraire S selon la notation des (153)). On considère donc:

$$\mathring{\underline{\underline{E}}}_{rev}(x,t) \cdot \underline{\underline{E}}_{rev}^{-1}(x,t) = - \underline{\underline{E}}_{blo}^{-1}(x,\underline{\theta},t) \cdot \mathring{\underline{\underline{E}}}_{blo}(x,\underline{\theta},t) = \underline{\underline{\varphi}}(x,t) \text{ arbitraire} \qquad 183$$

et on obtient une condition qui relie la contrainte bloquée (i.e. la variation d'énergie libre par déformation géométrique irréversible) avec la contrainte actuelle de phase B:

---

28 Pour l'anglais "back stress".

$$\rho^{-1}\underline{\underline{E}}_{rev}^{-1}\cdot\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot\underline{\underline{E}}_{rev}(x,t) - \rho^{-1}\underline{\underline{E}}_{blo}^{-1}\cdot\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot\underline{\underline{E}}_{blo}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \tag{184}$$

$$= \rho_0^{-1}\underline{\underline{E}}_{irr}\cdot\underline{\underline{\pi}}_b(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\underline{\underline{F}}_{irr}^{T}(x,t) = \underline{\underline{E}}_{irr}\cdot\frac{\partial\psi_o}{\partial\underline{\underline{L}}_{irr}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\cdot\underline{\underline{F}}_{irr}^{T}(x,t)$$

$$\forall(x,\underline{\underline{\theta}},t)\in\Omega_0\times\chi\ ;\ (\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)=(\Xi(x,t),\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t),t)$$

En utilisant cette condition pour écrire le premier terme de la (182), et selon les notations (161) on obtient donc pour la dissipation intrinsèque:

$$D_{oint}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \tag{185}$$

$$= \rho_0^{-1}\left[\underline{\underline{\beta}}_r\cdot\underline{\underline{C}}_{rev} - \underline{\underline{\pi}}_b\cdot\underline{\underline{C}}_{irr}\right]_{(x,\underline{\underline{\theta}},t)}:\overset{\circ}{\underline{\underline{E}}}\cdot\underline{\underline{E}}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t) -$$

$$+ \rho_0^{-1}\left[\underline{\underline{\pi}}_{rv} + \underline{\underline{\beta}}_{rv}\cdot\underline{\underline{C}}_e - \underline{\underline{\pi}}_{brv}\cdot\underline{\underline{C}}_{blo}\right]_{(x,\underline{\underline{\theta}},t)}:\overset{\circ}{\underline{\underline{\Gamma}}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t) -$$

$$+ \rho_0^{-1}\left[\underline{\underline{\pi}}_{\Theta}\cdot\underline{\underline{C}}_r + \underline{\underline{\beta}}_{\Theta}\cdot\underline{\underline{C}}_{\Theta} - \underline{\underline{\pi}}_{b\Theta}\cdot\underline{\underline{C}}_{irr\Theta} - J\,\underline{\underline{B}}\right]_{(x,\underline{\underline{\theta}},t)}:\overset{\circ}{\underline{\underline{\Theta}}}\cdot\underline{\underline{\Theta}}^{T}(x,\underline{\underline{\theta}},t) +$$

$$+ \rho^{-1}\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\vdots\mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) + \rho^{-1}\underline{\underline{D}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\vdots\mathrm{grad}_{\vartheta}\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \geq 0$$

$$\forall(x,\underline{\underline{\theta}},t)\in\Omega_0\times\chi\ ;\ (\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)=(\Xi(x,t),\underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\underline{\theta}},t),t)$$

On fait l'hypothèse que le taux de glissement plastique est donné, pour chaque orientation θ, par la vitesse du glissement microscopique γ le long de la direction cristallographique m identifiée par la transformation Θ par rapport aux axes du repère (ici dans le plan orthogonal à n en direction m)[29]:

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{\Gamma}}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \overset{\circ}{\gamma}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\mathbf{m}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\otimes\mathbf{n}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \overset{\circ}{\gamma}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\Theta_{1i}\Theta_{2j}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{E}_j \rightarrow \tag{186}$$

$$\rightarrow \left[\overset{\circ}{\underline{\underline{\Gamma}}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}\right]_{ij}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \overset{\circ}{\gamma}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\Theta_{1i}\Theta_{2j}(x,\underline{\underline{\theta}},t)$$

et donc:

$$\rho_0^{-1}\left[\underline{\underline{\pi}}_{rv} - \underline{\underline{\pi}}_{brv}\cdot\underline{\underline{C}}_{blo}\right]_{(x,\underline{\underline{\theta}},t)}:\overset{\circ}{\underline{\underline{\Gamma}}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \rho_0^{-1}\tau(x,\underline{\underline{\theta}},t)\overset{\circ}{\gamma}(x,\underline{\underline{\theta}},t) \tag{187}$$

avec la cission τ définie par[30]:

$$\tau(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \left\{\underline{\underline{\Theta}}\cdot\left[\underline{\underline{\pi}}_{rv} - \underline{\underline{\pi}}_{brv}\cdot\underline{\underline{C}}_{blo}\right]\cdot\underline{\underline{\Theta}}^{T}\right\}_{12}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \tag{188}$$

$$= \pi_{\Theta 12}(x,\underline{\underline{\theta}},t) - \left[\underline{\underline{\Theta}}\cdot\underline{\underline{\pi}}_{brv}\cdot\underline{\underline{C}}_{blo}\cdot\underline{\underline{\Theta}}^{T}\right]_{12}(x,\underline{\underline{\theta}},t)$$

---

29 On observe que la dérivée par rapport au temps de Γ est faite avec Θ fixé et donc en gardant les axes m et n fixés

Le rapport du modèle donné avec la physique des polycristaux sera expliquée à la fin du chapitre.

30 On remarque qu'une cission définie par:

$$\tau^*(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \left\{\underline{\underline{\Theta}}\cdot\left[\underline{\underline{\pi}}_{rv} + \underline{\underline{\beta}}_{rv}\cdot\underline{\underline{C}}_e - \underline{\underline{\pi}}_{brv}\cdot\underline{\underline{C}}_{blo}\right]\cdot\underline{\underline{\Theta}}^{T}\right\}_{12}(x,\underline{\underline{\theta}},t) \tag{188b}$$

correspond, dans le cas particulier du polycristal plan, à celle définie en (II.48), tandis que la définition (188) donnée dans le texte correspond à la (II.49). La motivation qui nous conduit vers la définition (188) à la place de la (188b) ci-dessus est donc la même: pouvoir utiliser la loi de Schmid habituelle pour le comportement de la cission ainsi définie.

D'après cette définition on voit que la cission résolue sur le système de glissement d'orientation θ est donnée par la composante 12 du transporté du tenseur de Piola-Kirchhoff en configuration Θ-virtuelle diminuée d'un terme dû à la contrainte bloquée.

A l'intérieur de la dissipation intrinsèque on distingue une dissipation "dans la géométrie de la matière", postulée toujours non négative:

$$\rho_0 D_{ogeom}(x,\underline{\theta},t) = \tau(x,\underline{\theta},t)\mathring{\gamma}(x,\underline{\theta},t) - \underline{\underline{\pi}}_b \cdot \underline{\underline{C}}_{rr}(x,\underline{\theta},t):\underline{\underline{\mathring{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}(x,\underline{\theta},t) \geq 0 \qquad 189$$

$$\forall (x,\underline{\theta},t)\in\Omega_0 x\chi$$

dans laquelle on voit l'effet opposé des glissements plastiques et de la contrainte bloquée; on distingue finalement une dissipation due au taux de rotation relative matériau-matière et à ses gradients, dite, pour abréger, "dans le matériau", et postulée, elle aussi, toujours non négative:

$$\rho(\underline{\chi},\underline{\vartheta},t)D_{rel}(\underline{\chi},\underline{\vartheta},t) = \qquad 190$$

$$= J^{-1}\left[\underline{\underline{\pi}}_\Theta \cdot \underline{\underline{C}}_\Gamma - \underline{\underline{\pi}}_{b\Theta} \underline{\underline{C}}_{rr\Theta}\right]_{(x,\underline{\theta},t)}:\underline{\underline{w}}(\underline{\chi},\underline{\vartheta},t) - \underline{\underline{B}}(\underline{\chi},\underline{\vartheta},t):\left[\text{grad}u(\underline{\chi},t) - \underline{\underline{w}}(\underline{\chi},\underline{\vartheta},t)\right] +$$

$$+ \underline{\underline{C}}(\underline{\chi},\underline{\vartheta},t):\text{grad}_{\chi}\underline{\underline{w}}(\underline{\chi},\underline{\vartheta},t) + \underline{\underline{D}}(\underline{\chi},\underline{\vartheta},t):\text{grad}_{\vartheta}\underline{\underline{w}}(\underline{\chi},\underline{\vartheta},t) \geq 0$$

$$\forall (\underline{\chi},\underline{\vartheta},t)\in\Omega_t x\chi\ ;\ (x,\underline{\theta},t)=(\Xi^{-1}(\underline{\chi},t),\underline{\underline{\Theta}}^{-1}(\underline{\chi},\underline{\vartheta},t),t)$$

Cette dernière condition restreint les comportements admissibles des inconnues constitutives B, C et D.

Configuration naturelle support.

En prenant une configuration naturelle comme configuration support, on a choisi une forme pour l'équation de comportement de l'énergie libre du type:

$$\psi_{trv}(x,\underline{\theta},t)=\psi_{trv}(T(x,t),\ \underline{\underline{L}}_e(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{L}}_{blo}(x,\underline{\theta},t),\ \underline{\underline{\Gamma}}(x,\underline{\theta},t)) \qquad 191$$

sa dérivée matérielle est:

$$\mathring{\psi}_{trv}(x,\underline{\theta},t) = \qquad 192$$

$$= \frac{\partial \psi_{trv}}{\partial T}(x,\underline{\theta},t)\mathring{T}(x,t) + \underline{\underline{E}}_{blo} \cdot \frac{\partial \psi_{trv}}{\partial \underline{\underline{L}}_e} \cdot \underline{\underline{E}}_{blo}^{T}(x,\underline{\theta},t):\underline{\underline{\mathring{L}}}_{rev}(x,\underline{\theta},t) +$$

$$+ \left[\frac{\partial \psi_{trv}}{\partial \underline{\underline{L}}_e} \cdot \underline{\underline{E}}_{blo}^{T} \cdot \underline{\underline{C}}_{rev} + \frac{\partial \psi_{trv}}{\partial \underline{\underline{L}}_{blo}} \cdot \underline{\underline{E}}_{blo}^{\Gamma}\right](x,\underline{\theta},t):\underline{\underline{\mathring{E}}}_{blo}(x,\underline{\theta},t) + \frac{\partial \psi_{trv}}{\partial \underline{\underline{\Gamma}}}(x,\underline{\theta},t):\underline{\underline{\mathring{\Gamma}}}(x,\underline{\theta},t)$$

En substituant cette dérivée dans l'inégalité de la dissipation (112) on obtient les lois d'état et l'expression de la dissipation thermique et intrinsèque. En particulier les lois d'état sont:

_pour $\mathring{T}>0$ ou $\mathring{T}<0$ à $\underline{\underline{\mathring{E}}}_{rev}=\underline{\underline{0}}$, $\underline{\underline{\mathring{E}}}_{blo}=\underline{\underline{0}}$, $\underline{\underline{\mathring{\Gamma}}}=\underline{\underline{0}}$, matériau solidaire à la matière et $\nabla_x T=0$ on obtient:

$$s(x,\underline{\theta},t) = -\frac{\partial \psi_{trv}}{\partial T}(x,\underline{\theta},t) \qquad 193$$

_pour $\forall \underline{\underline{\mathring{L}}}_{rev}$ à $\underline{\underline{\mathring{E}}}_{blo}=\underline{\underline{0}}$, $\underline{\underline{\mathring{\Gamma}}}=\underline{\underline{0}}$, matériau solidaire à la matière et $\nabla_x T=0$ on obtient:

$$\underline{\underline{\pi}}_{rr}(x,\underline{\theta},t)=\rho_0(x,\underline{\theta})\frac{\partial \psi_{trv}}{\partial \underline{\underline{L}}_e}(x,\underline{\theta},t) \quad \text{i.e.} \quad \underline{\underline{\pi}}(x,\underline{\theta},t)=\rho_0(x,\underline{\theta})\ \underline{\underline{\Theta}}^T \cdot \underline{\underline{\Gamma}}^{-1} \cdot \frac{\partial \psi_{trv}}{\partial \underline{\underline{L}}_e} \cdot \underline{\underline{\Gamma}}^{-T} \cdot \underline{\underline{\Theta}}(x,\underline{\theta},t) \qquad 194$$

Ayant écrit l'énergie libre sur la configuration naturelle la loi réversible ci-dessus exprime le comportement élastique moyennant un tenseur d'ordre quatre, R, doué des symétries usuelles:

$$\underline{\underline{\pi}}_{rv}(x,\underline{\theta},t) = \underline{\underline{\underline{R}}}(x,\underline{\theta},t):\underline{\underline{L}}_e(x,\underline{\theta},t) \qquad 195$$

Le bilan des irréversibilités s'écrit, pour tout processus, en tout point matériel et en tout instant:

$$D_0(x,\underline{\theta},t) = -\underline{\underline{E}}_{blo}\cdot\frac{\partial\psi_{trv}}{\partial\underline{\underline{L}}_{blo}}\cdot\underline{\underline{E}}^{T}_{blo}(x,\underline{\theta},t):\mathring{\underline{\underline{E}}}_{blo}\cdot\underline{\underline{E}}^{-1}_{blo}(x,\underline{\theta},t) + \qquad 196$$

$$+\left[\rho_0^{-1}\underline{\underline{\pi}}_{rv}\cdot\underline{\underline{C}}_e(x,\underline{\theta},t) - \underline{\underline{\Gamma}}\cdot\frac{\partial\psi_{trv}}{\partial\underline{\underline{\Gamma}}}(x,\underline{\theta},t)\right]:\mathring{\underline{\underline{\Gamma}}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}(x,\underline{\theta},t) +$$

$$+\rho_0^{-1}\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}\cdot\underline{\underline{\pi}}_{rv}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-T}\cdot\underline{\underline{C}}_\Theta(x,\underline{\theta},t):\underline{\underline{w}}(\underline{\alpha},\underline{\vartheta},t) - \rho^{-1}\underline{\underline{B}}(\underline{\alpha},\underline{\vartheta},t):\underline{\underline{w}}(\underline{\alpha},\underline{\vartheta},t) + \rho^{-1}\underline{\underline{B}}(\underline{\alpha},\underline{\vartheta},t):\mathrm{gradu}(\underline{\alpha},t) +$$

$$+\rho^{-1}\underline{\underline{\underline{C}}}(\underline{\alpha},\underline{\vartheta},t):\mathrm{grad}_{\alpha}\underline{\underline{w}}(\underline{\alpha},\underline{\vartheta},t) + \rho^{-1}\underline{\underline{\underline{D}}}(\underline{\alpha},\underline{\vartheta},t):\mathrm{grad}_{\vartheta}\underline{\underline{w}}(\underline{\alpha},\underline{\vartheta},t) -$$

$$-\rho_0^{-1}\underline{\underline{E}}_{xx}(x,\underline{\theta},t)\cdot\underline{q}_o(x,\underline{\theta},t)\cdot\frac{\nabla_x T(x,t)\cdot\underline{\underline{F}}^{-1}_{xx}(x,t)}{T(x,t)} \geq 0$$

$$\forall(x,\underline{\theta},t)\in\Omega_0\times\chi\ ;\ (\underline{\alpha},\underline{\vartheta},t)=(\Xi(x,t),\underline{\Theta}(x,\underline{\theta},t),t)$$

La condition qui garantit que la dissipation est nulle pour toute rotation arbitraire de la configuration géométrique relâchée réelle (rotation S des (153)) est:

$$D_0(x,\underline{\theta},t)=0\ \forall\underline{\underline{q}}(x,t) = \mathring{\underline{\underline{E}}}_{rev}\cdot\underline{\underline{E}}^{-1}_{rev}(x,t) = -\underline{\underline{E}}^{-1}_{blo}\cdot\mathring{\underline{\underline{E}}}_{blo}(x,t) \rightarrow \qquad 197$$

$$\rho^{-1}\underline{\underline{E}}^{-1}_{rev}\cdot\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{E}}_{rev}(x,\underline{\theta},t) - \rho^{-1}\underline{\underline{E}}_{blo}\cdot\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{E}}^{-1}_{blo}(x,\underline{\theta},t) = \underline{\underline{E}}_{blo}\cdot\frac{\partial\psi_{trv}}{\partial\underline{\underline{L}}_{blo}}\cdot\underline{\underline{E}}^{T}_{blo}(x,\underline{\theta},t)$$

$$\forall(x,\underline{\theta},t)\in\Omega_0\times\chi$$

On fait l'hypothèse que l'histoire des glissements plastiques n'affecte pas l'état naturel du matériau (absence d'écrouissage dû à la plasticité); on appelle contrainte "naturelle" bloquée, noté π_{nb}, la densité volumique de la variation de l'énergie libre écrite en configuration naturelle due à une augmentation de la déformation élastique bloquée géométrique:

$$\frac{\partial\psi_{trv}}{\partial\underline{\underline{\Gamma}}}(x,\underline{\theta},t)=\underline{\underline{0}}\ ;\ \frac{\partial\psi_{trv}}{\partial\underline{\underline{L}}_{blo}}(x,\underline{\theta},t) = \rho_0^{-1}\underline{\underline{\pi}}_{nb}(x,\underline{\theta},t)\ \ \forall(x,\underline{\theta},t) \qquad 198$$

On fait l'hypothèse (Cf. (195)):

$$\frac{\partial^2\psi_{trv}}{\partial\underline{\underline{L}}_e\otimes\partial\underline{\underline{L}}_e}(x,\underline{\theta},t) = \frac{\partial^2\psi_{trv}}{\partial\underline{\underline{L}}_{blo}\otimes\partial\underline{\underline{L}}_{blo}}(x,\underline{\theta},t)\ \ \forall(x,\underline{\theta},t) \qquad 199$$

$$\underline{\underline{\pi}}_{nb}(x,\underline{\theta},t) = \underline{\underline{\underline{R}}}(x,\underline{\theta},t):\underline{\underline{L}}_{blo}(x,\underline{\theta},t)$$

(195) et (199) donnent alors la définition de raideur en configuration relâchée réelle, qu'on postule indépendante des phases, et la relation entre contrainte et contrainte bloquée définie ci-dessus:

$$R_{r_{ijhk}}(x,t) = R_{ijqp}(x,\underline{\underline{\theta}},t)E_{blo_{kp}}(x,\underline{\underline{\theta}},t)E_{blo_{hq}}(x,\underline{\underline{\theta}},t) \qquad 200$$

$$\underline{\underline{\pi}}_{rv}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \underline{\underline{R}}_r(x,\underline{\underline{\theta}},t):\underline{\underline{L}}_{ev}(x,t) + \underline{\underline{\pi}}_{nb}(x,\underline{\underline{\theta}},t)$$

La dissipation intrinsèque s'écrit:

$$D_o(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \qquad 201$$

$$= - \rho_0^{-1}\underline{\underline{\pi}}_{nb}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\underline{\underline{\mathring{L}}}_{blo}(x,\underline{\underline{\theta}},t) + \rho_0^{-1}\underline{\underline{\pi}}_{rv}\cdot\underline{\underline{C}}_e(x,\underline{\underline{\theta}},t):\underline{\underline{\mathring{\Gamma}}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t) +$$

$$+ \rho_0^{-1}\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}\cdot\underline{\underline{\pi}}_{rv}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-T}\cdot\underline{\underline{C}}_\Theta(x,\underline{\underline{\theta}},t):\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) - \rho^{-1}\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) + \rho^{-1}\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_u(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t) +$$

$$+ \rho^{-1}\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) + \rho^{-1}\underline{\underline{D}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\theta}\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \geq 0$$

$$\forall(x,\underline{\underline{\theta}},t)\in\Omega_0\times\chi$$

Il n'existe pas de processus réversibles par lesquels on peut modifier la déformation élastique bloquée, mais la puissance due à l'évolution de cette déformation doit donner une contribution locale à la dissipation totale qui s'annule avec d'autre termes de la (201) en tout processus.

On postule que l'inégalité ci-dessus se vérifie, dans tout processus, selon la conditions d'échange irréversible à dissipation nulle entre puissance du taux de déformation élastique bloquée (premier terme) et puissance due à la contrainte géométrique par taux de rotation des cristaux (troisième terme):

$$-\underline{\underline{\pi}}_{nb}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\underline{\underline{\mathring{L}}}_{blo}(x,\underline{\underline{\theta}},t) + \underline{\underline{\pi}}_{rv}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\underline{\underline{C}}_e\cdot\underline{\underline{\Gamma}}\cdot\underline{\underline{\mathring{\Theta}}}\cdot\underline{\underline{\Theta}}^T\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = 0 \quad \forall(x,\underline{\underline{\theta}},t)\in\Omega_0\times\chi \qquad 202$$

On voit que pour $\Gamma\in Q$ (absence de glissements plastiques à l'état actuel) et C_e négligeable cette condituon donne une évolution nulle de la déformation bloquée quel que soit l'évolution des rotations cristallines. Plus généralement cette équation donne l'évolution de la déformation bloquée en fonction de l'évolution du réseau cristallin.

En introduisant l'hypothèse (186) sur la nature du taux de glissement plastique et en définissant la cission en configuration naturelle par (le terme d'écrouissage est nul par hypothèse):

$$\tau_{rv}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \left[\underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\underline{\pi}}_{rv}\cdot\underline{\underline{C}}_e\cdot\underline{\underline{\Theta}}^T\right]_{12}(x,\underline{\underline{\theta}},t) \qquad 203$$

on obtient l'expression de la dissipation intrinsèque à la géométrie de la matière, qu'on postule toujours non négative:

$$\rho_0 D_{ogeom}(x,\underline{\underline{\theta}},t) = \tau_{rv}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\mathring{\gamma}(x,\underline{\underline{\theta}},t) \geq 0 \qquad 204$$

et la dissipation due au mouvement du matériau, elle aussi toujours non négative:

$$\rho(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)D_{rel}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) = \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\left[\mathrm{grad}_u(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},t)-\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right] + \qquad 205$$

$$+ \underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) + \underline{\underline{D}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\theta}\underline{\underline{w}}(\underline{\underline{\mathfrak{x}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \geq 0$$

On remarque que, ayant utilisé une configuration naturelle, on a su exprimer la loi d'état de la contrainte de façon simple (Cf. formule (195)) et, pouvant distinguer la contrainte bloquée de la contrainte plastique, on a simplifié la définition de la cission résolue en négligeant l'écrouissage dû à la déformation plastique (Cf. formule (203)). Finalement la dissipation a deux parties non négatives distinctes grâce à la relation (202) entre évolution de la déformation bloquée et des réseaux cristallins.

Bilan équations-inconnues.

On a introduit 7 équations fonctionnelles de comportement pour les inconnues constitutives de façon à égaliser le bilan équations-inconnues résultant de l'application des équations de bilan thermo-mécanique au système matériel proposé.

Ensuite, en vue d'obtenir les inconnues constitutives par des fonctions locales instantanées à la place des dites fonctionnelles, on a introduit des variables internes (notamment par introduction des gradients des variables d'état et, ensuite, par décomposition du gradient de la transformation géométrique), en augmentant ainsi le nombre de variables du problème.

L'exploitation de l'inégalité de Clausius-Duhem nous a permis l'écriture de 2 lois d'état en réduisant ainsi de 2 le nombre des fonctions de comportement nécessaires.

Le postulat de positivité de la dissipation thermique et de la dissipation intrinsèque et celui de l'existence d'une configuration naturelle locale, nous permettent de découpler l'étude thermique et l'étude mécanique au niveau de l'évolution actuelle locale de l'état. De même le postulat de positivité indépendante de la partie "dans la géométrie" et de la partie "dans le matériau" de la dissipation intrinsèque permet l'étude séparé de l'évolution de la déformation plastique de celui des variables phasiques.

L'hypothèse que la déformation élastique bloquée se vérifie avec dissipation nulle nous a permis de déduire de l'inégalité de la dissipation intrinsèque une équation d'évolution pour la déformation élastique bloquée.

A l'état actuel nous avons donc:

- un problème classique de diffusion de la chaleur, défini par la positivité de la dissipation thermique et par l'équation de comportement du flux de chaleur, sur lequel on n'approfondit pas la discussion;
- le problème de l'écriture de l'équation d'écoulement des vitesses de glissement plastique, qui peut être résolu par une loi de Schmid;
- le problème de la détermination du comportement des inconnues constitutives B, C et D, ou, de façon duale, celui de la définition des lois d'évolution des variables phasiques associées.

Sur ce dernier point on ne pourra donner, à ce stade, que des indications formelles, tandis que le problème de l'évolution géométrique de la matière peut être entièrement posé.

5.3.5. Explication des hypothèses.

Mouvement des phases.

En observant la physique des processus thermo-mécaniques des polycristaux, on voit que tout mouvement réversible de la géométrie de la matière entraîne une distorsion des réseaux cristallin et donc, éventuellement, une rotation locale réversible de ceux-ci. Toute autre rotation du réseau cristallin qui n'est pas entraînée par une rotation géométrique de la matière est irréversible.

Dans le modèle proposé l'espace des phases est un ensemble de tenseurs orthogonaux; ces tenseurs identifient des axes dans les cristaux par rapport aux axes du repère, et ils représentent les mouvements absolus du matériau, indépendamment des mouvements de la forme de la matière.

D'un autre coté l'état actuel local dépend, pour de raisons évidentes d'objectivité, de la rotation relative entre les axes cristallin et la géométrie de la matière et des gradients de cette rotation relative, qui décrivent, pour les dites raisons, des mouvements irréversibles.

On a par conséquent fait l'hypothèse que les variables d'état de phase sont irréversibles: il n'est pas nécessaire d'introduire d'autres variables non observables pour tenir compte de l'histoire du matériau car celle-ci est complètement décrite par les variables des phases observables à l'état actuel.

Ecrouissage.

L'écrouissage est l'effet des variables décrivants des irréversibilités sur la valeur actuelle locale de l'énergie libre. Dans le paragraphe précédent on a négligé la plus part des termes d'écrouissage pour de raisons de rapidité et de simplicité.

On a négligé la présence d'écrouissage primaire et, en partie, celui de l'écrouissage latent en prenant nulle la variation de l'énergie libre par rapport aux variations de la déformation de glissement plastique. Cette hypothèse peut être éliminé sans trop alourdir la notation.

En outre on a supposé que l'énergie libre ne dépend pas des variables de phase irréversibles.

Une dépendance locale de l'énergie libre du gradient géométrique des phases peut représenter l'effet des joints entre grains (un gradient plus élevé entraîne en réalité une densité des joints plus élevée) ainsi que l'effet de la désorientation entre grains voisins.

Le gradient des phases actuelles par rapport aux orientations initiales est corrélé à la pente de la fonction d'orientation locale des textures dans une figure des pôles. La dépendance de l'énergie libre de ce gradient peut représenter une partie de l'écrouissage latent, c'est à dire l'écrouissage dû à la tendance des orientations cristallographiques à s'approcher ou à diverger selon le contraste entre les mouvements des leurs dislocations.

Glissement des cristaux.

On considère un réseau cristallin idéal dans lequel le seul mouvement possible et le glissement plastique. La contrainte dans ce système est donnée par un tenseur indéterminé plus un tenseur donné par les cissions le long des directions de glissement (on considère pour fixer les idées un tenseur symétrique comme la contrainte de Piola-Kirchhoff en configuration naturelle locale).

Si les cristaux en objet peuvent s'écouler seulement par glissement simple (un seul système de glissement actif à la fois) le tenseur plastique a une seule composante scalaire non nulle par rapport à un système de coordonnées approprié. Si le glissement est multiple on peut considérer la cission et le taux de glissement résultants de la composition des divers systèmes de glissement, mais la relation de comportement entre ces deux variables n'est pas une relation physique (à moins d'introduire des moyennes appropriées au système étudié).

Avec ces hypothèses on peut toujours repérer les axes des cristaux de façon que la seule composante non nulle du tenseur de contrainte plastique par rapport aux axes du repère soit la 12 (et donc la 21 par symétrie) comme dans le modèle simple proposé[31].

Ce modèle représente donc une simplification par rapport au cas plus général dans lequel les cristaux se déforment par glissement multiple.

Irréversibilités non dissipatrices.

On considère un processus idéal de recristallisation: par augmentation de température un nombre suffisant de dislocations se débloquent de façon que les orientations cristallographiques se réorganisent avec diminution de leurs gradients (géométrique et phasique) et une partie de l'énergie élastique bloquée se libère donnant lieu à un processus exothermique. Le mouvement des dislocation à la base du phénomène se vérifie avec un transport de matière négligeable du point de vue macroscopique.

Si on regarde un point matériel au cours d'un tel processus on peut y voir:

- la contribution à la dissipation totale du type plasticité (termes en Γ dans les inégalités de Clausius-Duhem écrites), qui est nulle car les déformations macroscopiques, dues au transport irréversible de matière par le mouvement des dislocation, sont nulles;
- la contribution due à la variation des orientations cristallographiques et de ses gradients (i.e. "dans le matériau"), qui donne une dissipation positive, et qui représente l'effet du mouvement des dislocations dans le modèle macroscopique;
- une partie de cette contribution qui fait diminuer l'entropie du système en augmentant l'ordre du réseau (échange à dissipation nulle entre le taux de rotation et ses gradients);
- un échange à dissipation nulle entre la variation d'énergie élastique bloquée, la rotation locale du réseau cristallin et ses gradients (puissance dans le matériau): les irréversibilités liées à ces deux termes ne viennent que du fait qu'ils ne peuvent pas être activés sans dégager d'autres irréversibilité intrinsèquement dissipatrices (plasticité et/ou variation des gradients des orientations)

On a postulé un échange à dissipation nulle entre la puissance de la vitesse de déformation bloquée et une partie de la puissance des phases en vue de représenter le phénomène décrit au dernier point ci-dessus dans le modèle. On a donc considéré que cet échange à dissipation

---

31 C'est la raison pour laquelle il convient d'interpréter les phases comme les tenseurs de rotation qui superposent les axes E_1 et E_2 du repère fixe aux axes m_1 et m_2 identifiant le glissement macroscopique d'un cristal (normale au plan de glissement et direction de glissement). En ce sens l'hypothèse de continuité dans le mouvement des phases représente avec fidélité la réalité tant que ce glissement macroscopique est donné par une évolution continue des glissements simples. Pour rentrer dans le détail, le modèle proposé lisse les effets liés à l'activation ou à l'arrêt, au cours d'un processus de déformation, d'un glissement simple.

nulle ne se fait que avec la puissance exprimée par le taux de rotation des phases avec la contrainte géométrique.

5.3.6. Généralisation.

Dissipation dans la géométrie de la matière.

En général les cristaux s'écoulent par glissements multiples. La (203) doit être obtenue en partant des équations définissant le taux de déformation plastique et la puissance qui lui est associée comme somme des contributions de chaque système actif (ici pour un réseau CFC avec $S_{cfc}=\{1...12\}$ ensemble d'indices pour les systèmes de glissement de ce réseau):

$$\underline{\underline{\dot{\Gamma}}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}(x,\underline{\theta},t) = \sum_{s\in S_{cfc}} \dot{\gamma}_s(x,\underline{\theta},t)\underline{m}_s(\underline{\Theta}(x,\underline{\theta},t))\otimes\underline{n}_s(\underline{\Theta}(x,\underline{\theta},t)) \qquad 206$$

$$\underline{\pi}_{rv}\cdot\underline{C}_e(x,\underline{\theta},t):\underline{\dot{\Gamma}}\cdot\underline{\Gamma}^{-1}(x,\underline{\theta},t) = \sum_{s\in S_{cfc}} \tau_{rv_s}(x,\underline{\theta},t)\dot{\gamma}_s(x,\underline{\theta},t) \;\; ; \;\; \forall(x,\underline{\theta},t)\in\Omega_0\times\chi$$

où $m_s(x,\theta,t)$ est la direction de glissement à l'instant t du système s du cristal repéré par (x,θ) à l'instant initial, et $n_s(x,\theta,t)$ la normale au plan de glissement de ce système; il est facile de se convaincre que ces directions ne dépendent que de l'orientation actuelle des phases donnée par la transformation Θ. La définition de cission en configuration naturelle est donc dans ce cas plus général:

$$\tau_{rv_s}(x,\underline{\theta},t) = \underline{n}_s\cdot\underline{\pi}_{rv}\cdot\underline{C}_e\cdot\underline{m}_s(x,\underline{\theta},t) \quad \forall(x,\underline{\theta},t)\in\Omega_0\times\chi \;\; \forall s\in S_{cfc} \qquad 207$$

La partie de glissement plastique de la transformation géométrique est, à l'instant actuel en tout point géométrique et orientation, liée à l'histoire des glissements le long des systèmes relatifs à cette orientation et à ce point géométrique par la première des (206):

$$\underline{\underline{\Gamma}}(x,\underline{\theta},t) = \underline{\underline{\Gamma}}\left\{\gamma_s(x,\underline{\theta},\tau)\right\}_{\tau\in]0,t[,\; s\in S_{cfc}} \qquad 208$$

Par conséquent, dans les limites de l'hypothèse de l'état local, on peut considérer une forme pour l'énergie libre équivalente à la (191) moyennant une fonction:

$$\psi_{trv}(x,\underline{\theta},t)=\psi^*_{trv}(T(x,t),\; \underline{L}_e(x,\underline{\theta},t),\; \underline{L}_{blo}(x,\underline{\theta},t),\; \gamma_s(x,\underline{\theta},t))_{s\in S_{cfc}} \qquad 209$$

A la place de négliger l'écrouissage dû à la déformation plastique, selon la première des (198), on peut alors définir une cission d'écrouissage τ_{e_s} pour chaque système de glissement s relatif à l'orientation θ dans le point x et instant t, et écrire la dissipation dans la géométrie de la matière par:

$$\rho_0\frac{\partial\psi^*_{trv}}{\partial\gamma_s}(x,\underline{\theta},t) = \tau_{e_s}(x,\underline{\theta},t) \quad \forall s\in S_{cfc} \qquad 210$$

$$\rho_0 D_{ogeom}(x,\underline{\theta},t) = \sum_{s\in S_{cfc}}\left[\tau_{rv_s}(x,\underline{\theta},t)-\tau_{es}(x,\underline{\theta},t)\right]\dot{\gamma}_s(x,\underline{\theta},t) = \sum_{s\in S_{cfc}}\tau^*_s(x,\underline{\theta},t)\dot{\gamma}_s(x,\underline{\theta},t) \geq 0$$

ce qui donne la (204) dans ce cas plus général[32].

Ecoulement plastique.

Le comportement plastique du cristal CFC peut s'écrire, négligeant les effets d'échelle des temps, selon ce qui a été exposé au Chapitre II § 4.3.

En particulier on postule l'existence d'un pseudo-potentiel plastique φ fonction convexe de la cission en configuration naturelle. Ce pseudo-potentiel est une fonction physique, c'est à dire il est attaché au trièdre identifiant le comportement local transporté par Θ (axes $m_s(\Theta)$ et $n_s(\Theta)$).

---

[32] On remarque que τ_{e_s} représente tant l'écrouissage primaire que l'écrouissage latent, car ψ^*_{trv} est fonction de tout glissement plastique γ_i, $i\in S_{cfc}$.

Le pseudo-potentiel peut en outre dépendre des autres affinités (e.g. des variables duales des gradients de la vitesse des phases et du taux de déformation élastique bloquée), pour cette raison on le note avec des points de suspension en argument.

La vitesse de glissement du système s appartient au sous gradient du pseudo-potentiel plastique de la cission du dit système:

$$\dot{\gamma}_s(x,\underline{\underline{\theta}},t)\in\partial\varphi(\tau^*{}_s(x,\underline{\underline{\theta}},t);\ldots)\quad\forall s\in S_{cfc} \tag{211}$$

Plus particulièrement, on peut faire l'hypothèse que ce pseudo-potentiel est la fonction indicatrice d'un intervalle réel dont les bornes dépendent de l'écrouissage actuel local[33], c'est à dire de l'état actuel local, et du système de glissement s en objet (on peut supposer cet intervalle centré sur zéro si l'écrouissage est égal dans les deux directions du glissement):

$$\varphi \text{ fonction indicatrice de } [\tau_{inf_s}(\text{état}(x,\underline{\underline{\theta}},t)),\ \tau_{sup_s}(\text{état}(x,\underline{\underline{\theta}},t))] \tag{212}$$

On peut alors considérer un convexe C dans l'ensemble des tenseurs de contrainte en configuration naturelle:

$$C=\left\{\underline{\underline{\pi}}_{rv}:\ \tau_{inf_s}+\tau_{e_s}\le \underline{n}_s\cdot\underline{\underline{\pi}}_{rv}\cdot\underline{\underline{C}}_e\cdot\underline{m}_s\le\tau_{sup_s}+\tau_{e_s}\ \ \forall s\in S_{cfc}\right\} \tag{213}$$

qui ne dépend, outre que de l'écrouissage, de la transformation des phases Θ, moyennant les directions m_s et n_s, et de la partie élastique du gradient de la transformation géométrique, à moins que la dilatation due à cette partie élastique ne soit négligeable. En appelant φ_C la fonction indicatrice de ce convexe on peut écrire formellement le taux de déformation de glissement plastique par:

$$\mathring{\underline{\underline{\Gamma}}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\in\partial\varphi_C(\underline{\underline{\pi}}_{rv}(x,\underline{\underline{\theta}},t);\ \underline{\underline{\Theta}},\ \underline{\underline{C}}_e,\ \tau_{sup_s}+\tau_{e_s},\ \tau_{inf_s}+\tau_{e_s}) \tag{214}$$

On remarque en particulier que l'écoulement plastique dépend de l'orientation actuelle des cristaux.

5.4. Conclusion.

En conclusion on a séparé l'étude de la dissipation intrinsèque de celui de la dissipation thermique (pour laquelle on envisage l'écriture des équations classiques de la chaleur sans tenir compte des phases grâce à l'hypothèse de température uniforme par point géométrique).

Par rapport au comportement des contraintes de phase B, C et D on a dû se limiter à la définition d'un ensemble de variables vraisemblablement adéquat et en accord avec les principes de la thermodynamique, mais qui doit être vérifié par l'expérience.

Le comportement des contraintes de Cauchy a été explicité à partir du comportement des monocristaux et de l'élasticité homogène isotrope du milieu. En résumé on a, en tenant compte de la décomposition (151) du gradient de la transformation (Cf. formules (195), (207), (210), (213) et (214)):

$$\underline{\underline{\pi}}_{rv}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\underline{\underline{R}}(x,\underline{\underline{\theta}},t):\underline{\underline{L}}_e(x,\underline{\underline{\theta}},t) \tag{215}$$

$$\tau_{rv_s}(x,\underline{\underline{\theta}},t)=\underline{n}_s\cdot\underline{\underline{\pi}}_{rv}\cdot\underline{\underline{C}}_e\cdot\underline{m}_s(x,\underline{\underline{\theta}},t)\ \forall s\in S_{cfc}$$

$$C=\left\{\underline{\underline{\pi}}_{rv}:\ \tau_{inf_s}+\tau_{e_s}\le\tau_{rv_s}\le\tau_{sup_s}+\tau_{e_s}\ \ \forall s\in S_{cfc}\right\}\ ;\ \mathring{\underline{\underline{\Gamma}}}\cdot\underline{\underline{\Gamma}}^{-1}(x,\underline{\underline{\theta}},t)\in\partial\varphi_C(\underline{\underline{\pi}}_{rv}(x,\underline{\underline{\theta}},t);\ \ldots)$$

---

33 Voir remarques faites à propos du mouvement des phases; l'écrouissage est l'effet des irréversibilités sur l'énergie libre et en particulier

- l'écrouissage primaire et latent est l'effet des glissements plastiques;
- l'écrouissage dû aux joints et à la désorientation entre grains est l'effet du gradient géométrique des phases;
- l'écrouissage latent est aussi l'effet du gradient phasique des phases.

6. Conclusion.

6.1. Résumé du travail.

Le modèle de polycristal dans l'espace "profond" objet de ce chapitre a été défini par rapport à sa cinématique, mécanique et thermodynamique moyennant une écriture formellement usuelle des équations de bilan classiques.

Ensuite on a explicité la forme des équations de comportement valables en plasticité indépendante du temps et on a déduit les lois d'état et l'expression de la dissipation.

Des hypothèses sur la forme du potentiel énergie libre et sur la nature de la dissipation intrinsèque nous ont permis de définir complètement le problème relatif à l'évolution géométrique de la matière, tandis que celui de son évolution dans l'espace des phases demeure ouvert.

6.2. Résultats principaux.

Bien que à l'intérieur d'un formalisme classique on a obtenu une équation de conservation des phases (d'après la conservation de la masse dans l'espace profond), une équation indéfinie d'équilibre entre contraintes phasiques avec conditions au contour (d'après le principe des puissances virtuelles), et un terme de production d'entropie par phase dans l'inégalité de Clausius-Duhem.

Dans l'écriture du comportement on a eu l'avantage d'une décomposition du gradient de la transformation géométrique liée à la transformation des phases qui nous a permis de définir sans ambiguïté une configuration naturelle locale.

En postulant avec dissipation nulle la compétition entre puissance élastique bloquée et puissance de rotation des phases par les contraintes géométriques on a relié les taux d'évolution des variables cinématiques associées à ces puissances. En introduisant une hypothèse sur la nature de la déformation plastique (qui est générée par un ensemble de glissements cristallins) on a finalement obtenu la loi d'écoulement plastique de milieu continu en fonction des lois de Schmid sur les systèmes de glissement isolés.

6.3. Problèmes ouverts.

Comportement des phases.

Le comportement des phases n'a pas été défini. Les considérations faites à ce propos dans le chapitre précédent pourraient être traduites dans le contexte plus général de ce chapitre, mais, faute d'examen expérimentaux approfondis, il manqueraient d'intérêt pour les applications sans rien rajouter à la compréhension du modèle proposé.

On renvoit donc à un travail successif à cette thèse pour l'étude du comportement des phases, tout en rappelant les indications données au Chapitre III.

Problèmes traités dans la suite de la thèse.

D'autres problèmes se posent à fin de clarifier certaines passages de ce chapitre; en particulier il existe deux classes de questions:

- la pertinence physique des hypothèses faites et des équations écrites par conséquent;
- la justification mathématique des dites équations et, dans les limites de ce travail, le cadre axiomatique dans lequel ces équations se placent.

Chacune de ces deux branches du travail aurait put avoir la priorité sur les autres, y compris ce chapitre même. On a préféré la structure présente car elle montre d'abord, dans le Chapitre III dans un cas simple et dans ce Chapitre IV dans un cas plus complexe, l'objet de nos réflexions. Dans les chapitres suivants on discutera ces points qui sont les aspects fondamentaux de la nature physique et mathématique du modèle proposé.

En particulier dans le Chapitre VI on montre un comparaison entre le modèle de milieu continu "profond" et un modèle classique de milieu continu représentant le même corps à une échelle géométrique différente. Avant de pouvoir accéder à cette comparaison on établi, dans le Chapitre V, un outil d'observation à une échelle donnée de grandeurs définies à une échelle inférieure.

Dans le Chapitre VIII on donne une formulation axiomatique qui explique et justifie le concept de milieu continu "profond". A cette fin il nous sera nécessaire d'abord, dans le Chapitre VII, de rappeler le cadre axiomatique des milieux continus usuels, en particulier selon les travaux de W.Noll.

TROISIEME PARTIE

Etude microscopique

C H A P I T R E V

Pertinence

1. Introduction.

Dans la partie précédente du travail on a présenté, pour l'étude des polycristaux, un modèle de milieu, dit continu profond. Ce modèle peut être généralisé pour l'étude des corps hétérogènes avec hétérogénéités évoluants dans le temps dont les polycristaux sont un cas particulier.

Ledit modèle est obtenu en plaçant le corps hétérogène dans un référentiel constitué par un espace euclidien classique (bi- ou tridimensionnel), par un "espace des phases" et par le temps. Pour un instant de temps donné, l'image du corps dans l'espace euclidien est celle instantanée de la géométrie de sa matière, son image dans l'espace des phases est celle du matériau qui le constitue à cet instant.

Dans cette Troisième Partie du travail on approfondi la compréhension des modèles de milieu continu profond (indépendamment du choix de l'espace des phases) par comparaison avec un modèle classique de milieu continu représentant le même agrégat à une échelle inférieure. En particulier on défini d'abord, dans le Chapitre V, le formalisme et la signification d'une telle comparaison et, dans le Chapitre VI, on compare les deux systèmes. Il en résulte un certain nombre de relations entre grandeurs des deux modèles qui expliquent en termes classiques la signification des variables et des inconnues du milieu continu profond. Cela donne, en particulier, une première approche à l'étude des nouvelles contraintes introduites et donc à leur identification expérimentale.

Dans une première partie de ce Chapitre V on introduit les idées de base pour la représentation du matériau constitutif d'un corps matériel dans un espace des phases: fonction de phase et rapport entre constituants d'un agrégat. Dans la partie suivante du chapitre on approfondit ce premier concept, en donnant d'abord des exemples pour de possibles espaces des phases qui peuvent être employés pour des problèmes particuliers et, ensuite, en montrant en détail le choix des tenseurs orthogonaux droits, ou des angles d'Euler correspondants, comme phases pour un polycristal. Dans la dernière partie du chapitre on considère une opération intégrale qui permet de tenir compte de façon approchée des constituants d'un agrégat lorsque celui-ci est décrit par une fonction de phase variable dans un espace métrique[1].

On considère un milieu continu hétérogène en tout point $\mathcal{Y}$ duquel est définie une fonction "de phase", notée $\zeta(\mathcal{Y},t)$, d'une façon qui sera précisée dans la première partie de ce chapitre, qui permet de discerner le comportement local en décrivant le matériau dans l'espace métrique Z. L'opération, qu'on appelle "globalisation" pour souligner son caractère intégral, et qui fait l'objet de la deuxième partie du chapitre, s'écrit pour toute fonction $f(\mathcal{Y},t)$ définie sur le volume V_t du milieu continu hétérogène:

$$\forall \mathcal{Z}\in Z \;:\; \tilde{f}(\mathcal{Z},t)=\frac{\int_{V^*} f(\mathcal{Y},t)\,q(\zeta(\mathcal{Y},t),\mathcal{Z})\,dV_t}{\int_{V^*} dV_t} \quad \forall t\,;\, V^*\subseteq V_t \text{ tel que } \tilde{f} \text{ est indépendant de } V^* \qquad (1)$$

où q est une densité de mesure qui approche celle de Dirac avec un approximation non nulle.

---

[1] La nécessité de disposer d'une métrique sur l'espace des phases est la raison pour laquelle on à toujours défini ce dernier comme espace et non simplement comme ensemble.

Dans ce chapitre on définira en particulier la densité "d'observation" $q(\cdot,\cdot)$, et les propriétés en conséquence réquises pour l'espace des phases Z et pour la fonction de phase $\xi(y,t)$, et on définira aussi les éléments de volume V* sur lesquels une telle opération est significative. On expliquera en même temps la signification physique d'une telle opération en termes de convolution dans l'espace des phases et de mesure qdV pour les champs thermo-mécaniques microscopiques.

2. Agrégat et phases.

2.1. Introduction.

Cette partie introduit les arguments traités dans le reste du chapitre.

On donne d'abord des définitions utiles pour la discussion qui suit: caractère structural ou radical des informations disponibles sur un corps matériel et concepts d'état radical et de phase pour représenter le matériau qui constitue ce corps.

Ensuite on considère la forme globale des équations de bilan thermo-mécaniques qu'on écrit usuellement pour un milieu continu hétérogène. On voit en particulier que cette forme dépend de la mesure choisie pour définir la somme sur tout sous-domaine arbitraire des grandeurs extensives caractérisant le système: une mesure moins générale permet une forme plus spécifique au système étudié. C'est donc sur la recherche d'une mesure adéquate pour le problème à traiter qu'on devra focaliser l'attention pour les parties suivantes du chapitre.

2.3. Agrégat et constituants.

2.3.1. Agrégat hétérogène de constituants homogènes.

Caractère structural et radical.

On considère un milieu continu hétérogène avec la donnée initiale du matériau qui le constitue dans chacun de ses points. Par exemple un polycristal pour lequel, en tout point, est donné la structure et l'orientation cristalline, l'état des dislocations, la composition etc...

Le milieu dont on s'occupe dans la suite est censé représenter en effet un polycristal métallique, néanmoins on peut, plus en général, le regarder comme un agrégat cohérent de phases solides homogènes pouvant échanger de la masse entre elles (i.e. dont les points peuvent changer de phase).

L'information initiale nécessaire à une telle description est de caractère "radical": elle est observable mais non contrôlable lors d'un essai mécanique ou thermique. Ceci ne défini pas le niveau d'information en termes d'échelle d'observation pour y avoir accès mais en termes d'influence des conditions au contour thermo-mécaniques réversibles sur l'information même. On considère "structural" tout événement lié à ces conditions, et "radical" tout événement indépendant de celles-ci[2].

Pour donner un exemple, la donnée de l'orientation cristalline est une information de caractère radical: l'orientation n'est pas contrôlable et sa détermination demande des observations microscopiques. La morphologie des grains métalliques est aussi non contrôlable, et donc de caractère radical, bien que le niveau dans lequel on l'observe n'est pas forcement inférieur à celui des calculs mécaniques[3].

Remarque sur la terminologie.

On considère qu'un ensemble d'équations constitutives actuelles locales défini complètement le comportement du corps matériel en objet. On affecte donc au terme "comportement" une signification locale et instantanée: par exemple un corps se déformant plastiquement avec écrouissage voit son comportement évoluer avec celui-ci (e.g. selon la déformation plastique cumulée et la direction du taux de déformation). Le comportement donne donc la réponse du corps quelque soient les sollicitations actuelles et il dépend, dans les limites de ce travail, des processus passés suivis par le corps[4].

Le type de comportement qu'un corps matériel manifeste sous une plus grande famille de processus est par ailleurs représenté par la forme des équations constitutives par lesquelles il peut être décrit le long de ces processus. Par exemple un matériau élasto-plastique avec

---

2 Le terme événement implique l'existence d'un observateur: pour qu'une grandeur soit de caractère structural ou radical il faut d'abord qu'elle soit observable, en outre les grandeurs observées peuvent dépendre de l'observateur (i.e. ne pas être objectives). On se limite dans ce travail aux observations faites dans des référentiels inertiels.

3 Pour qu'une information soit radicale il suffit simplement qu'elle ne soit pas directement liée à l'extérieur du corps. Par conséquent, pour utiliser le langage de l'homogénéisation l'élément de volume à utiliser dans les calculs ne doit pas forcement être statistiquement représentatif pour la matière, mais seulement pour sa structure au sens mécanique, c'est à dire pour le matériau caractérisé par l'ensemble des informations radicales.

4 On remarque la distinction avec le comportement tangent qui défini la réponse du corps aux sollicitations actuelles et il dépend donc aussi de la direction du processus que le corps suit à l'instant où il est déterminé

écrouissage anisotrope a un type de comportement constant le long de tout processus ne modifiant pas sensiblement, par exemple, la fréquence des charges imposées ou la température extérieure.

Du point de vue des modèles mécaniques le type de comportement coïncide avec ce qu'on peut appeler le "matériau constitutif". Evidemment un matériau réel doit être représenté par différents matériaux constitutifs selon la classe de processus qu'il suit: dans l'exemple précédent la plasticité d'un métal peut dépendre ou non du temps selon la fréquence des charges appliquées et la température extérieure.

Les termes qu'on vient de préciser sont en effet d'emploi courant et de signification généralement plus étendue, néanmoins il a fallu en donner une définition plus étroite pour abréger la discussion qui suit.

Constituant.

Vue la distinction faite entre comportement actuel local et type de comportement sous l'ensemble des processus étudiés, ou matériau constitutif, la définition de constituant homogène d'un milieu hétérogène doit être liée à ce dernier concept.

En fait on ne peut pas définir un constituant homogène d'un milieu hétérogène comme une partie de celui-ci qui, à l'instant donné, manifeste un même comportement en tout point. Les équations constitutives thermo-mécaniques actuelles locales dépendent, dans les limites de ce travail, des processus passés suivis par le corps (à partir d'un état initial déterminé) moyennant un ensemble de variables non observables. Cette dernière propriété exclut en général la possibilité de distinguer le parties d'un milieu hétérogène par comparaison de l'ensemble de leurs équations constitutives.

Par contre il est possible d'effectuer cette partition en tenant compte du "type" de comportement qu'un point du milieu peut manifester sous un ensemble défini de processus, c'est à dire de son matériau constitutif selon les processus étudiés.

On défini alors un constituant d'un milieu hétérogène comme un ensemble de points de celui-ci qui, à l'instant donné, ont le même matériau constitutif, ce qui introduit une évaluation qui doit être faite selon un niveau de pertinence donné. L'information nécessaire pour définir le type du comportement dans un point matériel est, par définition, non structurale, car elle ne dépend pas directement du processus actuel.

En résumé un constituant a une caractérisation radicale en termes de comportement (matériau) et une configuration structurelle dans l'espace (matière). La définition est instantanée: ayant un type de comportement instantanément homogène, un constituant peut évoluer vers une fragmentation en parties hétérogènes entre elles ou s'homogénéiser avec d'autres constituants. La partition du milieu hétérogène en constituants homogènes dépend donc du temps et de l'ensemble des processus qu'on envisage d'étudier.

On appelle agrégat un milieu continu formé de constituants homogènes. L'ensemble des constituants est une partition du milieu: il recouvre le milieu avec des parties disjointes.

Remarque.

Lorsqu'on s'attache à distinguer les matériaux constitutifs de deux parties homogènes d'un milieu hétérogène, on peut, en général, mettre en évidence un certain nombre de grandeurs physiques qui caractérisent la différence (de façon plus ou moins moyennée). Par exemple deux parties d'un polycristal diffèrent par l'orientation des axes d'anisotropie plastique qui sont liés aux axes cristallins, par la compacité de leurs structures de dislocations, et ainsi de suite. Selon la grandeur physique de laquelle on fait dépendre le type du comportement, on obtient des répartitions différentes des constituants dans l'ensemble hétérogène.

Le choix des grandeurs radicales caractérisant localement le comportement, et donc la partition en constituants, est déterminant pour la qualité prévisionnelle du modèle d'agrégat. Il faut donc comprendre de quelle façon le niveau radical et structural interagissent pour effectuer les choix convenables. A cette fin on regarde dans la suite quelques détails de la thermodynamique d'un agrégat.

2.3.2. Thermodynamique d'un agrégat.

Introduction.

Quelques remarques sont nécessaires sur la thermodynamique d'un milieu hétérogène à constituants homogènes disjoints, qu'on appelle agrégat.

Une grandeur additive d'espace est additive sur des constituants disjoints. C'est le cas des variables d'état extensives, des potentiels thermodynamiques (e.g. l'énergie libre), des puissances (virtuelles ou réelles) et des masses. Par conséquent les équations de bilan thermo-mécaniques d'un agrégat (masses, puissances ou quantités de mouvement, énergie interne, entropie) peuvent être écrites tant selon une partition en constituants instantanée donnée que pour l'ensemble du milieu sans modifier leur signification.

De même on peut traiter un processus suivi par l'ensemble d'un agrégat, séparément à chaque instant et en parallèle dans chaque constituant pris comme étant un système ouvert en interactions avec les autres constituants. Du point de vue de l'ensemble du système, la façon dont les variables extensives se répartissent à l'intérieur d'un constituant n'est pas importante pourvu que soit assuré le nombre nécessaire de conditions de continuité aux frontières entre constituants.

On montre tout de suite les quelques passages initiaux de cette approche pour en dégager les conséquences.

Forme des équations globales de bilan.

Soit V_t le milieu hétérogène avec la partition en N constituants $C_i(t)$, i=1...N, qui vérifient:

$$\forall t \ \bigcup_{i=1}^{N} C_i(t)=V_t \ ; \ C_i(t)\cap C_j(t)=\emptyset \ \forall i\neq j \qquad 2$$

Soit "F" une grandeur extensive, $f(\underline{y},t)$ sa densité volumique et $p(\underline{y},t)$ son taux d'apport extérieur volumique, soit $k(\underline{y},t)$ son taux de production volumique (nul partout et à tout instant si le bilan est de conservation) dans V_t, $F(\underline{y},t,n)$ son taux de densité surfacique sur ∂V_t.

L'agrégat étant cohérent, sa vitesse matérielle est continue (i.e. il n'y a pas de filtration[6]), mais sa partition évolue de façon non matérielle car les points matériels peuvent changer de phase: les frontières entre constituants ont une vitesse non matérielle. Si $n(\underline{y},t)$ est la normale à la frontière orientée vers l'extérieur du constituant $C_i(t)$, la vitesse relative au repère fixe $w(\underline{y},t,n)$ de la frontière non matérielle $\partial C_i(t)$ peut s'écrire (sa composante tangente à la frontière n'a pas d'intérêt; on considère $\varphi>0$ pour une frontière en expansion et $\varphi<0$ pour récession):

$$\underline{w}(\underline{y},t,n)=\underline{u}(\underline{y},t)+\varphi(\underline{y},t)\underline{n}(\underline{y},t) \quad \underline{y}\in\partial C_i(t) \qquad 3$$

Le bilan global d'un constituant s'écrit:

$$\frac{d}{dt}\int_{C_i(t)} f(\underline{y},t)dV_t+\int_{\partial C_i(t)} F(\underline{y},t,n)dS_t+\int_{C_i(t)} p(\underline{y},t)dV_t+\int_{\partial C_i(t)} f(\underline{y},t)\varphi(\underline{y},t)dS_t=\int_{C_i(t)} k(\underline{y},t)dV_t \qquad 4$$

Si on considère un sous-domaine arbitraire $V^*\subseteq V_t$ et $C^*_i(t)=C_i(t)\cap V^*$, on peut écrire le bilan ci-dessus pour cet élément de volume matériel ...

... tant dans l'ensemble du sous-domaine:

$$\frac{d}{dt}\int_{V^*} f(\underline{y},t)dV_t+\int_{\partial V^*} F(\underline{y},t,n)dS_t+\int_{V^*} p(\underline{y},t)dV_t=\int_{V^*} k(\underline{y},t)dV_t \rightarrow \qquad 5$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\int_{\bigcup_{i=1}^{N} C^*_i(t)} f(\underline{y},t)dV_t+\int_{\partial\{\bigcup_{i=1}^{N} C^*_i(t)\}} F(\underline{y},t,n)dS_t+\int_{\bigcup_{i=1}^{N} C^*_i(t)} p(\underline{y},t)dV_t=\int_{\bigcup_{i=1}^{N} C^*_i(t)} k(\underline{y},t)dV_t$$

---

6 Dans ce travail on donne à ce terme le sens d'un mouvement microscopique avec vitesse continue par morceaux, les discontinuités étant localisées aux interfaces entre constituants. Par exemple il y a filtration lorsque dans un métal à température élevée les cristaux se déplacent dans une matrice liquide.

... que en sommation sur les constituants[7]:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\int_{C^*_i(t)} f(\underline{y},t)dV_t + \sum_{i=1}^{N} \left[\int_{\partial C^*_i(t)} F(\underline{y},t,n)dS_t + \int_{C_i(t)} p(\underline{y},t)dV_t + \int_{\partial C_i(t)} f(\underline{y},t)\varphi(\underline{y},t)dS_t \right] = \sum_{i=1}^{N} \int_{C^*_i(t)} k(\underline{y},t)dV_t \qquad 6$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\int_{C^*_i(t)} f(\underline{y},t)dV_t + \int_{\partial\left(\bigcup_{i=1}^{N} C^*_i(t)\right)} F(\underline{y},t,n)dS_t + \sum_{j=1}^{M} \int_{\Delta^*_j(t)} [\![F]\!](\Sigma,t,n)d\Sigma +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_{C^*_i(t)} p(\underline{y},t)dV_t + \sum_{j=1}^{M} \int_{\Delta^*_j(t)} [\![f]\!](\Sigma,t)\varphi(\Sigma,t)d\Sigma = \sum_{i=1}^{N} \int_{C^*_i(t)} k(\underline{y},t)dV_t$$

où on a noté par $\{\Delta^*_j(t): j=1...M\}$ l'ensemble des surfaces de frontière entre constituants $\Delta^*_j(t)$ à l'instant t dans V* (chaque surface étant munie des coordonnées curvilignes Σ et de mesure $d\Sigma$), et par $[\![F]\!]$ la discontinuité normale de F sur une de ces surfaces (φ est nulle sur la surface de l'union des parties ∂V^* qui est matérielle).

Si les termes correspondant dans (5) et (6) sont égaux deux à deux[8]:

$$\forall V^* \subseteq V_t, \forall t : \left| \begin{array}{l} \int_{\bigcup_{i=1}^{N} C^*_i(t)} f(\underline{y},t)dV_t = \sum_{i=1}^{N} \int_{C^*_i(t)} f(\underline{y},t)dV_t \\ \int_{\bigcup_{i=1}^{N} C^*_i(t)} p(\underline{y},t)dV_t = \sum_{i=1}^{N} \int_{C^*_i(t)} p(\underline{y},t)dV_t \\ \int_{\bigcup_{i=1}^{N} C^*_i(t)} k(\underline{y},t)dV_t = \sum_{i=1}^{N} \int_{C^*_i(t)} k(\underline{y},t)dV_t \end{array} \right. \qquad 7$$

alors l'équation de bilan d'ensemble s'écrit comme un bilan entre les discontinuités et le transport de convection par changement de phase sur les frontières:

---

7 Le terme

$$\int_{\partial\left(\bigcup_{i=1}^{N} C^*_i(t)\right)} f(\underline{y},t)\varphi(\underline{y},t)dS_t \qquad 6b$$

est nul car la frontière du sous-domaine V* est une surface matérielle

8 Si les constantes d'intégration dans le temps des deux termes de la première équation sont égales celle-ci s'écrit:

$$\forall V^* \subseteq V_t, \forall t : \int_{\bigcup_{i=1}^{N} C^*_i(t)} f(\underline{y},t)dV_t = \sum_{i=1}^{N} \int_{C^*_i(t)} f(\underline{y},t)dV_t \qquad 7b$$

En outre, par définition:

$$\int_{\partial\left(\bigcup_{i=1}^{N} C^*_i(t)\right)} F(\underline{y},t,n)dS_t + \sum_{j=1}^{M} \int_{\Delta^*_j(t)} [\![F]\!](\Sigma,t,n)d\Sigma = \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial C^*_i(t)} F(\underline{y},t,n)dS_t \qquad 7c$$

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\Delta^*_j(t)} [\![F]\!](\Sigma,t,n)d\Sigma + \sum_{j=1}^{N} \int_{\Delta^*_j(t)} [\![f]\!](\Sigma,t)\varphi(\Sigma,t)d\Sigma + \int_{\partial(\bigcup_{i=1}^{N} C^*_i(t))} f(\underline{y},t)\varphi(\underline{y},t)dS_t = 0 \qquad 8$$

$$\forall V^* \subseteq V_t, \forall t$$

Au lieu d'écrire ce bilan pour un élément de volume matériel arbitraire on peut l'écrire pour un ensemble arbitraire de constituants (dans ce cas la surface de l'union sur laquelle on écrit le bilan n'est pas toujours matérielle). Noté $I \subseteq \{1 \ldots N\}$ un ensemble d'indices extrait de $\{1 \ldots N\}$, si:

$$\forall I \subseteq \{1 \ldots N\}, \forall t : \left| \begin{array}{l} \int_{\bigcup_{i \in I} C_i(t)} f(\underline{y},t)dV_t = \sum_{i \in I} \int_{C_i(t)} f(\underline{y},t)dV_t \\ \int_{\bigcup_{i \in I} C_i(t)} p(\underline{y},t)dV_t = \sum_{i \in I} \int_{C_i(t)} p(\underline{y},t)dV_t \\ \int_{\bigcup_{i \in I} C_i(t)} k(\underline{y},t)dV_t = \sum_{i \in I} \int_{C_i(t)} k(\underline{y},t)dV_t \end{array} \right. \qquad 9$$

alors:

$$\sum_{j \in I} \int_{\Delta_j(t)} [\![F]\!](\Sigma,t,n)d\Sigma + \sum_{j \in I} \int_{\Delta_j(t)} [\![f]\!](\Sigma,t)\varphi(\Sigma,t)d\Sigma = 0 \quad \forall I \subseteq \{1 \ldots N\}, \forall t \qquad 10$$

Commentaires.

Cela permet le début de quelques réflexions.

Premièrement on voit que toute valeur locale d'une grandeur extensive dans un constituant peut être considérée d'importance secondaire pour l'ensemble du milieu. Dans les équations de bilan les termes intérieurs ne sont important que pour vérifier les équations (7) en sommation sur les constituants (et il sont donc pondérés par la mesure des volumes des constituants qu'ils intéressent) le résultat d'ensemble étant assuré par les termes de flux et échange de convection entre constituants le long de leurs frontières.

On peut donc envisager une approche par constituant au problèmes thermo-mécaniques d'un tel matériau hétérogène, dans laquelle on postule l'équation (7) vérifiée à priori et on cherche les flux entre constituants et leurs échanges de convection (premier membre de (8)), les flux extérieurs au milieu étant donnés (deuxième membre de (8) pour $V^*=V_t$).

Une deuxième réflexion porte sur la difficulté de cette approche par constituant: elle est liée à la détermination des distributions de mesure $\varphi d\Sigma$ sur les interfaces entre constituants et φdS sur les surfaces du milieu, et à la détermination de la géométrie $\{\Delta_j\}$ des-dites interfaces. Il en résulte qu'il n'y a aucun avantage opérationnel dans son utilisation intégrale. En outre, lorsque ces interfaces sont des lignes dans le plan ou des surfaces dans l'espace géométrique, il faut rajouter dans le modèle thermo-mécanique les bilans usuels le long de ces lignes (ou surfaces), ce qui introduit d'autres désavantages.

Vue ces deux considérations, si on envisage l'absence de discontinuités physiques entre constituants, bien que ceux-ci perdraient leur définition comme sous-domaines de V_t, l'approche par constituant en serait simplifiée.

Un constituant a un type de comportement, de nature radicale, et une configuration structurale, néanmoins ce qui rend deux constituants distinct c'est leur matériau constitutif. On peut envisager de se restreindre à cet aspect et perdre toute information liée localement aux frontières et une partie de l'information liée aux configurations structurales, tout en gardant, néanmoins, une description simplifiée des échanges de convection.

D'ailleurs l'information sur les frontières peut être éventuellement réintroduite dans le modèle comme phénomène radical: l'évolution instantanée de la morphologie de l'agrégat, à une

échelle géométrique donnée, ne dépend pas, ou très peu[8], des conditions actuelles de chargement (Cf. § 3.2.2. dans ce chapitre).

Mesure de volume.

Afin d'utiliser les remarques faites pour simplifier le problème on analyse la nature de l'approche par constituant précédemment exposé. Ceci nous amènera à la recherche d'une mesure de volume qui, utilisée pour intégrer des grandeurs définies sur un milieu hétérogène, transforme un problème avec constituants identifiés par une fonction de phase en un problème de milieu continu profond.

La condition (7) peut être vue comme intrinsèque à la représentation mathématique du milieu hétérogène au lieu que comme condition sur les fonctions f, p et k en bilan.

Par définition, si A est muni d'une tribu[9] $P=\{P_i\subseteq A: i\in I\}$ avec I ensemble d'indices fini ou dénombrable, et μ est une fonction complètement additive d'ensemble, mesure sur P, on a:

$$\mu(\emptyset)=0 \qquad 11$$

$$\forall J\subseteq I:\ P_i\cap P_j=\emptyset\ \forall i,j\in J,\ i\neq j\quad \mu\left(\bigcup_{j\in J}P_j\right)=\sum_{j\in J}\mu(P_j)$$

L'exemple précédemment exposé est obtenu en mesurant par la mesure de Riemann les grandeurs thermo-mécaniques en bilan: tout champ dans l'étude est une densité sur la mesure volumique de Riemann, toute grandeur globale est la mesure d'une telle densité sur le volume fini V*. Notons μ_R la mesure de Riemann et $Vol_t(P_i)$ le volume à l'instant t de la i-ème partie[10]:

$$\forall f \text{ Riemann-intégrable}: \mu_R\{f\}_{(V^*,t)}=\int_{V^*}f(\underline{y},t)dV_t=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} f(\underline{\eta}_i,t)Vol_t(P_i) \qquad 12$$

$$\{P_i\} \text{ tribu de parties disjointes de } V^* \text{ et } \underline{\eta}_i\in P_i\ \forall i$$

La limite ci-dessus, n'étant pas définie sur des éventuelles discontinuités (chaque fois qu'il y a une discontinuité de f à l'intérieur d'une partie P_i du découpage la valeur $f(\eta_i,t)$ est calculée soit d'un coté soit de l'autre de la discontinuité), il a fallu mettre en évidence une partie intérieure aux constituants et une sur leurs frontières. En outre la partie intérieure aux constituants de l'équation de bilan peut être vue comme une condition de validité de la mesure de Riemann pour les grandeurs F en bilan: pour une partition donnée en constituants, si une grandeur F (e.g. la masse) a des discontinuités, la mesure de Riemann choisie et la partition donnée les ignorent.

On rappelle la définition de mesure de Lebesgue μ_L (M^+ et M^- étant les nombres de marches arbitrairement choisies respectivement dans la partie positive et négative de f):

$$\forall f \text{ mesurable}: \mu_L\{f\}_{(V^*,t)}=\int_{V^*}f(\underline{y},t)dV_t=\sup_{\varphi_k\geq 0}\sum_{k=1}^{M^+}\varphi_k Vol_t(P_k^+)+\inf_{\varphi_h\leq 0}\sum_{h=1}^{M^-}\varphi_h Vol_t(P_h^-) \qquad 13$$

$$\forall t\begin{cases}P_k^+:\ f(\underline{y},t)\geq\varphi_k\geq 0\ \ \forall\underline{y}\in P_k^+\subseteq V^*\ \ \varphi_k\in R^{+*}\ \ \forall k\in 1\ldots M^+\\ P_h^-:\ f(\underline{y},t)\leq\varphi_h\leq 0\ \ \forall\underline{y}\in P_h^-\subseteq V^*\ \ \varphi_h\in R^{-*}\ \ \forall h\in 1\ldots M^-\end{cases}$$

---

8 On peut faire l'exemple des cellules des dislocations: pour un niveau de déformation donné la morphologie des cellules peut être prise comme une donnée caractéristique du type de comportement, indépendamment (ou presque) de la direction actuelle du processus (charge ou décharge).

9 $P=\{P_i\subseteq A: i\in I\}$ tribu sur A avec I fini ou dénombrable:

$$\exists P_i\in P:\ P_i\neq\emptyset \qquad 11b$$
$$\forall P_i\in P\ A\backslash\{P_i\}\in P$$
$$\forall J\subseteq I \text{ (J fini ou dénombrable)}\ \bigcup_{j\in J}P_j\in P$$

10 On distingue une mesure en tant que fonctionnelle de sa densité en utilisant la notation $\mu\{\cdot\}$ pour la première et $\mu(\cdot)$ pour l'autre.

La même équation de bilan qu'on a écrit pour la mesure de Riemann, s'écrit pour la mesure de Lebesgue, pour une densité volumique, surfacique et, éventuellement linéique et ponctuelle de f, p et k (dans la dérivée suivant w de f on retrouve les flux surfaciques F):

$$\int_{C_i(t)} \left\{ \frac{\partial f(\underline{x},t)}{\partial t} + div\left[f(\underline{x},t)\underline{w}(\underline{x},t,\underline{n}) \right] \right\} dV_t + \int_{C_i(t)} p(\underline{x},t)dV_t = \int_{C_i(t)} k(\underline{x},t)dV_t \qquad 14$$

et la partition du bilan en termes dans les constituants et sur leurs frontières reste "cachée" par la plus grande généralité de la mesure utilisée.

Si, donc, pour une partition du milieu hétérogène donnée, on considère une mesure la moins générale possible pour que les fonctions en bilan (de conservation ou de production) puissent être représentée (i.e. les équations (7) puissent être vérifiées) on obtient la simplification maximale acceptable par le bilan en objet (c'est à dire l'aspect plus général de ce bilan).

Inversement, si on se donne une mesure physiquement (et intuitivement) appropriée au processus et au milieu, et on postule qu'elle sera appropriée aux champs censés décrire ce processus pour ce milieu, on n'obtiendra que les informations cohérentes à la mesure choisie.

Donc, on postule:

- toute grandeur introduite dans l'étude thermo-mécanique du milieu peut être mesurée par la même mesure (i.e. elle vérifie les conditions (7) sous la même forme, la plus faible, choisie);
- la définition de mesure est radicale.

La mesure choisie induit une topologie sur l'ensemble des fonctions utilisées. En particulier il est intéressant que cette topologie soit appropriée à la précision du modèle thermo-mécanique utilisé, une mesure plus fine que la "réalité" observable étant incohérente.

Le caractère radical de cette mesure, qu'on appellera cohérente, et celui, radical aussi, de la définition d'un constituant, suggèrent de rapprocher ces deux concepts, la précision de l'une et de l'autre pouvant coïncider.

On cherchera dans la deuxième partie du chapitre à donner une méthode physiquement cohérente pour rendre opératoires ces idées, notamment par l'introduction d'une fonction d'observation approchée de la phase des points matériels.

2.4. Fonction de phase et thermodynamique d'un agrégat.

2.4.1. Fonction de phase et état radical. Définitions préliminaires.

On a introduit le concept de caractère structural ou radical d'un événement observé; on a ensuite relié la détermination du type de comportement d'un point matériel à des informations de caractère radical.

Selon ce schéma on peut définir radical toute donnée métallurgique ou morphologique sur une région petite d'un polycristal. Par exemple l'orientation cristalline locale peut être utilisée pour orienter l'anisotropie du comportement régi par un critère plastique avec contrainte de cisaillement seuil sur les plans cristallins. Une région du polycristal dans laquelle l'orientation cristalline varie suffisamment peu peut être considéré comme un grain cristallin (ou un sous-grain); l'ensemble de tout grain ayant la même orientation est un constituant de l'agrégat.

Si on considère que aucune autre information radicale n'est nécessaire pour définir le type de comportement local d'un grain cristallin, alors l'orientation cristalline défini aussi l'état radical en tout point du polycristal. On défini en fait l'état "radical" comme un état qui est représenté par un ensemble de données radicales, nécessaires et suffisantes pour définir le type de comportement en tout point du corps. Il y a donc une correspondance bijective entre les types de comportements possibles et les états radicaux observables[11].

---

11 La raison de la distinction des deux dénominations est que l'état radical est déterminé moyennant des observations locales à faire sur le corps déchargé, tandis que le comportement indique un ensemble de relations entre variables sous chargement. D'un autre coté le type de comportement est la structure mathématique du comportement (e.g. élasticité isotrope, élastoplasticité avec critère de Von Mises, etc...).

Un état radical est défini par un ensemble de données radicales. Il est légitime de voir cet ensemble de données comme l'image par une fonction "de phase" des points d'un milieu. Par exemple on peut supposer connue la carte des orientations cristallines locales, et prendre celle-ci comme rang de la fonction de phase. Cette fonction de phase donne, pour tout point du milieu hétérogène, une orientation cristalline qui, ensuite, peut être considérée comme la seule donnée (radicale) nécessaire pour définir un comportement plastique anisotrope.

Il faut noter que la fonction de phase ainsi décrite est, en général, non continue et peut ne pas être définie dans des sous ensembles matériels de mesure volumique nulle. Dans ce sens cette fonction de phase est plutôt le représentant d'une classe de fonctions continues et définies presque partout par rapport à la mesure de volume de la matière. Pour l'exemple du polycristal défini par la donnée locale des orientations cristallines, il est évident que cette donné n'est pas définie dans les joints entre grains; il faut alors supposer ces joints de mesure volumique nulle: la fonction de phase donne l'orientation cristalline en tout point de l'agrégat sauf que sur les dits joints, elle est Lebesgue-intégrable de volume.

2.4.2. Observation approchée.

On voit en résumé que, d'un coté, la partition en constituants d'un agrégat peut se faire sur la base du type du comportement local et, de l'autre, que ce type de comportement peut être déterminé sans ambiguité par la valeur locale d'une fonction de phase. Le passage à une définition plus opératoire d'un constituant est alors immédiat. Le constituant est une partie d'un milieu hétérogène caractérisée par une valeur unique de la fonction de phase.

Néanmoins cette définition n'est pas encore suffisante pour identifier comme un constituant tout ensemble de points du milieu dans la même phase (i.e. ayant une valeur de la fonction de phase identique): rien n'assure de la continuité de la fonction de phase ni de sa précision absolue. A cause des erreurs introduites par n'importe quelle fonction de phase qu'on puisse mesurer, on peut simplement affirmer qu'il existe une relation entre le concept de constituant et celui de partie à phase homogène du milieu.

Dans le cas cité du polycristal, un exemple de constituant est donné par un ensemble de grains (ou sous-grains) aux axes cristallins équi-orientés, l'orientation cristalline étant la phase choisie, mais si on s'attache à effectuer une partition du milieu en parties d'égale valeur de phase, on pourra très difficilement en retrouver la partition en grains (ou en sous-grains) qu'on observe, par exemple au microscope, sur le matériau. La difficulté citée est de nature physique, car le nombre et la précision des observations (et l'impossibilité d'obtenir un état relâchée uniforme dans un polycristal) limitent la fiabilité de la donnée locale de l'orientation cristalline.

Nous avons donc la nécessité d'introduire le concept d'observation non exacte d'une donnée locale dans la définition de constituant et, par conséquent, selon ce qui a été montré dans la première partie du chapitre, dans les équations de bilan thermo-mécanique.

Remarque sur la fonction de phase.

On suppose la fonction de phase à valeurs dans un espace métrique, qu'on note désormais Z, éventuellement à métrique non euclidienne: c'est la demande minimale pour pouvoir quantifier la précision relative d'une observation.

Pour résumer les propriétés d'une phase, on rappelle que, vue la définition d'état radical, les éléments de cet espace métrique Z sont des grandeurs observables mais non contrôlables dans un essai thermo-mécanique.

2.4.3. Première approche du problème.

Conformément aux considérations faites, on défini un constituant comme un ensemble de points où, à l'instant t, la fonction de phase a la même valeur ζ. Cette définition équivaut à dire que, à un instant t, pour tout point y d'un constituant identifié par une phase fixée ζ, la distance (dans l'espace des phases) entre la valeur de la fonction de phase en ce point y et la phase fixée ζ est nulle:

$$\forall t \ \forall \zeta \in Z \ \ C(\zeta,t)=\{y \in V_t : d_Z(\zeta(y,t),\zeta)=0\} \qquad 15$$

$$\bigcup_{\zeta \in Z} C(\zeta,t)=V_t \ ; \ C(\zeta,t)\cap C(\zeta',t)=\emptyset \ \ \forall \zeta \neq \zeta' \ \forall t$$

Il est encore équivalent de définir un constituant en regardant la densité de Dirac de la fonction distance calculée entre la phase donnée, caractérisant le constituant, et la fonction de phase dans les points du constituant[12]:

$$\forall t \ \forall \mathfrak{Z}\in Z \ C(\mathfrak{Z},t)=\{\underline{\mathfrak{y}}\in V_t: \delta(d_Z(\zeta(\underline{\mathfrak{y}},t),\mathfrak{Z}))\neq 0\} \qquad 16$$

et la somme sur un constituant d'une fonction extensive quelconque g peut s'interpréter comme l'image de la fonction g par une telle distribution composée avec celle de Dirac (notée $\delta\circ d_Z(\cdot,\mathfrak{Z})\circ\zeta$):

$$[\delta\circ d_Z(\cdot,\mathfrak{Z})\circ\zeta]\{g\}=\int_{V_t} g(\underline{\mathfrak{y}},t)\delta(d_Z(\zeta(\underline{\mathfrak{y}},t),\mathfrak{Z}))dV_t=\int_{C(\mathfrak{Z},t)} g(\underline{\mathfrak{y}},t)dV_t \qquad 17$$

La mesure du volume des constituants ainsi définis n'est non nulle que si la fonction de phase est étagée et, ceci n'étant pas à priori toujours vérifié, dans la plus part de cas l'approche thermodynamique par constituants envisagée ne peut pas s'appliquer (la phase varie continûment: sur une partie du milieu de mesure volumique non nulle on peut obtenir une partition en parties de mesure de Lebesgue nulle):

$$\exists t, \exists \mathfrak{Z}\in Z: \mathrm{Vol}_t(C(\mathfrak{Z},t))=0 \text{ i.e. } \sum_{\mathfrak{Z}\in Z}\mathrm{Vol}_t(C(\mathfrak{Z},t))\neq \mathrm{Vol}_t\{\bigcup_{\mathfrak{Z}\in Z} C(\mathfrak{Z},t)\}=\mathrm{Vol}_t\{V_t\} \rightarrow \qquad 18$$

$$\rightarrow \exists t, \exists g: \sum_{\mathfrak{Z}\in Z}\int_{V_t} g(\underline{\mathfrak{y}},t)\delta(d_Z(\zeta(\underline{\mathfrak{y}},t),\mathfrak{Z}))dV_t \neq \int_{V_t} g(\underline{\mathfrak{y}},t)dV_t$$

(g constante étant un exemple pour lequel l'égalité n'est pas vérifiée).

Par conséquent on ne peut pas définir ainsi une partition utile du domaine V_t.

Seulement si la fonction de phase prend des valeurs dans l'ensemble discret $\{\zeta_i\}i=1\ldots N$ avec continuité presque partout, elle est étagée et on obtient une partition du domaine V_t en sous-domaines disjoints par la mesure de Dirac. Les constituants sont identifiés par la fonction caractéristique de ces sous-domaines et la différence entre la mesure d'ensemble et la somme des mesures de ses parties est nulle (ce qui donne un bon modèle si la-dite différence est négligeable dans la réalité physique du phénomène):

$$\forall t \ \forall i\in\{1\ldots N\} \ C_i(t)=C(\zeta_i,t)=\{\underline{\mathfrak{y}}\in V_t: \zeta(\underline{\mathfrak{y}},t)=\zeta_j\}=\{\underline{\mathfrak{y}}\in V_t: \delta(d_Z(\zeta(\underline{\mathfrak{y}},t),\zeta_i))\neq 0\} \qquad 19$$

$$\bigcup_{i=1}^{N} C_i(t)=V_t \ ; \ C_i(t)\cap C_j(t)=\emptyset \ \ \forall i\neq j \ \forall t$$

$$\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Vol}_t\{C_i(t)\}=\mathrm{Vol}_t\{\bigcup_{i=1}^{N} C_i(t)\}=\mathrm{Vol}_t\{V_t\} \ \ \forall t$$

Cette partition vérifie donc les conditions (7) dans la forme la plus forte, pour la mesure de Dirac, à tout instant.

Ce cas particulier mis à part, il se pose le problème de la définition d'une partition du milieu qui soit cohérente avec le champ des phases (représentatif des états radicaux) et utile pour une approche thermodynamique par constituants du milieu hétérogène. Ce problème fait l'objet de la deuxième partie du chapitre.

2.4.4. Taille caractéristique dans l'espace des phases.

Exemple.

On pose le modèle suivant: un polycristal métallique est un milieu continu dans lequel une fonction de phase donne l'orientation cristalline en tout point. Ce modèle de polycristal doit être utilisé pour de calculs thermo-mécaniques de plaques d'épaisseur millimétrique.

L'orientation cristalline locale ne peut être observée que avec une précision de ±3÷4°; du même ordre de grandeur est la distorsion élastique des réseaux due à l'hétérogénéité, par conséquent la fonction de phase n'est significative que à 3÷4° près: deux points du milieu dont la

---

12 La densité de la mesure de Dirac est une classe de fonctions définies nulles partout dans R\{0} et non définies en 0, sommables sur tout intervalle ouvert de R avec somme unitaire sur R.

fonction de phase diffère seulement de 3÷4° peuvent ou non appartenir au même constituant, une résolution supérieure à cette limite serait donc incohérente[13].

D'ailleurs dans la détermination de la carte des orientations cristallines on ne peut que fixer un pas d'observation (éventuellement variable dans les trois directions de l'espace) corrélé à une taille minimale des grains caractéristique de l'agrégat (e.g. inférieur à la taille dépassée par 90% des gains selon la direction en objet): se donner un pas trop grand signifie perdre, de façon de plus en plus significative, la description morphologique des grains.

On voit donc qu'il existe une fourchette de précisions admissibles pour la description d'un polycristal en termes d'orientation cristalline locale, dont la borne inférieure est dictée par les moyens de mesure et la supérieure par les utilisations envisagées du modèle macroscopique à bâtir.

On donne ci dessous un cadre plus général pour ces limites.

Généralisation.

Il existe une fiabilité du système d'observations, mesures, modélisations et simulations nécessaires pour déterminer la fonction de phase en tout point d'un agrégat. Par conséquent la fonction de phase a une pertinence et une précision qui, l'espace des phases étant un espace métrique, peuvent être quantifiées par une distance caractéristique: deux phases écartées de plus de cette distance caractéristique peuvent être distinguées sans erreur appréciable du système de mesure.

Il s'agit d'une limite imposée par les moyens d'observation et par les modèles radicaux envisageables. Il en résulte une résolution maximale dans l'observation d'une fonction de phase cohérente avec cette limite qu'il serait illégitime de dépasser. En outre l'imposition de cette limite ne modifie pas la pertinence du modèle de l'agrégat dans son niveau radical.

La fiabilité des modèles radicaux nous donne donc une borne supérieure "naturelle", car intrinsèque au système radical, à la résolution d'observation des valeurs locales d'une fonction de phase.

D'un autre coté, dans une approche micro-macro, il est indispensable d'avoir la donnée d'une pertinence microscopique au modèle macroscopique qui soit non nulle, et, pour que l'approche soit justifiée, inférieure à la limite intrinsèque ci-dessus.

En fait, lorsqu'on choisi les systèmes radicaux et les fonctions de phase qui les représentent, on fixe idéalement une longueur d'onde typique dans les fluctuations de ladite fonction. Ces fluctuations, comme la fonction même, se situent au niveau microscopique, et, sauf à négliger les racines du modèle, elles doivent se manifester au niveau macroscopique.

Par conséquent, il existe une résolution d'observation des phases minimale, qui dépend de la définition de phase choisie par rapport au macroscopique, en dessous de laquelle le modèle devient incohérent. On obtient ainsi une limite inférieur liée au modèle macroscopique et, donc, extrinsèque au système radicale.

On peut représenter graphiquement ces concepts:

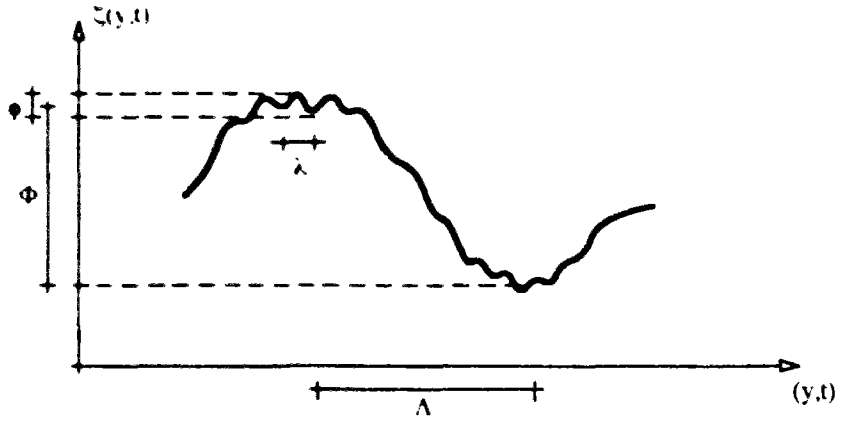


Fig.1: Fluctuations ϕ et Φ de la fonction de phase avec "longueurs" d'onde λ et Λ.

13 Cf. [Driver, Cont., 1992] à propos de la precision de l'observation des orientations cristallines.

En conclusion, la cohérence avec le niveau radicale impose un maximum intrinsèque de résolution dans l'espace des phases (résolution $\geq\phi$), tandis que la cohérence extrinsèque du modèle macroscopique en demande un minimum (résolution $\leq\Phi$). Tout choix entre ces limites donne un modèle macroscopique légitime.

2.4.5. Eléments de volume.

La résolution dont on vient de discuter n'est qu'une distance caractéristique dans Z. Plus en général, en effet, elle fixe une taille caractéristique dans l'espace des phases Z qui engendre un volume dans celui-ci. Vue l'existence d'une fonction de phase à support dans l'espace-temps et valeurs dans Z, cette caractéristique peut se transmettre de Z à l'espace-temps. En effet ceci peut être fait en toute partie du support de la fonction de phase dans laquelle celle-ci est quasi-continue, c'est à dire dans lequel la fonction de phase est continue à une oscillation négligeable près (une oscillation négligeable étant inférieure à la résolution minimale intrinsèque à Z).

Le caractère intrinsèque-extrinsèque de la résolution peut donc se transmettre, dans certains cas, sur le volume géométrique. Dans d'autres cas il peut exister des éléments de volume représentatifs élémentaires et macro-homogènes, selon les définitions classiques des problèmes d'homogénéisation[14], non directement liés aux caractéristiques de l'espace des phases.

Prenons l'exemple de l'orientation cristalline comme variable radicale: la taille des éléments de volume doit être supérieure au minimum intrinsèque au dessous duquel l'indétermination de 3÷4° devient non négligeable (les phases sont confondues dans l'espace), ce qui est garanti par tout élément de volume statistiquement représentatif de l'agrégat; d'un autre coté elle doit être inférieure au maximum extrinsèque en dessus duquel des fluctuations de niveau structural se manifestent dans l'élément de volume, ce qui est garanti par tout élément de volume macro-homogène.

Néanmoins la condition de représentativité statistique des éléments de volume caractéristiques du modèle, bien que suffisante, n'est pas nécessaire pour que celui-ci soit cohérent: on ne cherche pas, en fait, à déterminer un comportement homogène moyen sur ces éléments de volume, mais tout simplement à retrouver, par des informations microscopiques (ou, plus proprement, radicales), une partition en phases d'un agrégat macroscopique. Ce n'est que par rapport à cette partition que les éléments de volume caractéristiques doivent être représentatifs.

Pour souligner le manque d'implications mécaniques liées à leur définition, on appelle "typiques" les éléments de volume contenants assez d'information radicale pour décrire une région de l'agrégat macroscopique. On rappelle que ces éléments ne sont pas forcement représentatifs dans le sens de l'homogénéisation, du fait qu'ils peuvent en effet être sélectionnés sous des conditions moins restrictives que celle de contenir presque toute l'information statistique (disponible par des observations microscopiques) sur le corps. Par exemple un volume contenant trois grains métalliques avec trois orientations distinctes peut, moyennant la donnée de l'orientation cristalline en tout point, représenter une région de l'agrégat polycristal, mais il ne peut pas être choisi pour la recherche du comportement moyen de cet agrégat (il ne contient qu'une partie très réduite de l'information disponible, en termes d'orientations cristallines, sur la structure microscopique de l'ensemble).

Pour souligner leur relation avec les longueurs d'onde macroscopiques (prenant en compte leur dépendance en fonction de la forme locale des champs) on appelle "topiques" les éléments de volume assez petits pour être confondus avec leurs mesures macroscopiques. Il s'agit d'une propriété équivalente à la macro-homogénéité requise pour l'homogénéisation, mais vérifiée "par l'intérieur": cette dernière est obtenue par une condition sur les champs macroscopiques, tandis que le caractère topique résulte d'une observation des racines microscopiques du comportement. L'équivalence, très vraisemblable, des deux concepts ne peut, en fait, qu'être objet de conjecture.

---

14 Un élément de volume est statistiquement représentatif pour une caractéristique donnée du matériau s'il contient presque toute l'information sur cette caractéristique; il est élémentaire s'il est le plus petit élément représentatif pour l'ensemble des caractéristiques étudiées.

Un élément de volume est macro-homogène si les champs thermo-mécaniques macroscopiques coïncident au premier ordre avec leurs moyennes sur cet élément (en particulier si le lemme de macro-homogénéité de Hill-Mandel y est vérifié).

2.5. Conclusion.

Dans cette première partie du chapitre on a vu qu'il est possible d'obtenir une description thermo-mécanique simplifiée d'un agrégat hétérogène si on dispose d'une mesure de volume tenant compte de la partition en constituants du corps (cette partition pouvant évoluer dans le temps de façon indépendante de la cinématique de la matière). La description de cette partition est faite, de façon très naturelle, par une fonction associant à tout point matériel sa phase à tout instant; par conséquent la mesure de volume recherchée devra s'appuyer sur une telle fonction.

3. Phases et espace des phases.

3.1. Introduction.

Dans cette partie du chapitre on approfondi le concept de phase et d'état radical. On présente d'abord une liste de possibles fonctions de phase dans le but tant de montrer des exemples que d'améliorer la compréhension du concept général de phase; ensuite on développe l'exemple de phase comme orientation de l'espace géométrique euclidien auquel on se réfère tout le long de ce travail.

Dans une première partie on sera souvent amené à une distinction de niveaux dans les représentations d'un corps matériel dans le but d'expliquer le rôle de la fonction de phase. Il s'agit en fait de comparer les milieux continus images de ce corps matériel lorsque celui-ci est placé dans des espaces géométriques avec des échelles de longueur différentes (il n'y a pas lieu de parler spécifiquement de comparaison d'échelles de temps): c'est donc une comparaison entre milieux continus. En ce sens, les termes de "microscopique" et "macroscopique" sont purement idéaux et ils n'indiquent que des êtres d'une description à une échelle inférieure ou supérieure respectivement. Il est aussi évident qu'il existe autant de niveaux qu'on veut pour une description de milieu continu d'un corps matériel mais que tout niveau de ce type est toujours un milieu continu.

Dans le Chapitre VI on compare un milieu continu dont l'hétérogénéité est décrite par une fonction de phase avec un milieu continu qui ne voit pas l'hétérogénéité de façon aussi précise. En particulier on considère que les grandeurs qui existent dans ce dernier ont une signification de moyennes dans le premier et que à tout point du second correspond un sous-domaine fini dans le milieu avec fonction de phase, ce qui engendre les appellations de microscopique et macroscopique. La relation la plus immédiate entre ces deux milieux continus est donc celle de subordination en échelle du premier par rapport aux deuxième. Néanmoins il ne s'agit pas d'une condition nécessaire: on peut très bien imaginer deux descriptions d'un même corps matériel à la même échelle, l'une, microscopique, plus détaillée par la donnée de la fonction de phase, et l'autre, macroscopique, moins détaillée. On peut dire dans ce cas que les échelles microscopique et macroscopique coïncident, on verra dans la suite un exemple de phase pour une telle condition.

La détermination de la phase, liée à la définition d'un état radical et du matériau constitutif, se place par contre dans un niveau qui est qualitativement différent de celui d'un milieu continu, aussi petit soit-il, et qui est appelé "radical".

Il faut donc noter que, comme les niveaux dits macroscopique et microscopique ne sont pas toujours subordonnés l'un de l'autre, il en est de même pour le niveau radical: les observations à faire pour identifier une fonction de phase ne doivent pas être forcement à un niveau inférieur à celui pertinent pour le milieu microscopique ni à celui du macroscopique. Néanmoins la fonction de phase est une fonction à support dans le milieu microscopique et à valeurs dans l'espace des phases, ce qui ne doit pas induire dans l'erreur de la regarder comme une description d'une réalité de niveau plus bas. On remarque enfin qu'elle serait par construction, en général, dépourvue de toute régularité, mais qu'on la suppose au moins dérivable par morceaux dans l'espace avec dérivées Lebesgue-mesurables.

Dans les différents exemples de fonction de phase on remarquera que chaque définition de phase entraîne une taille intrinsèque qui caractérise le niveau microscopique, qu'on note b_Z par rapport à l'espace Z. Le seul aspect fondamentale de la fonction de phase est qu'elle détermine le type de comportement dans un point microscopique de façon locale et non liée au niveau même.

Par exemple, si on considère deux comportements élastiques linéaires isotropes qui ne diffèrent que par leur module d'Young, on voit que, indépendamment de l'existence d'un rapport thermodynamique macroscopique entre eux (e.g. l'un peut avoir été obtenu de l'autre par endommagement), les deux matériaux diffèrent à un niveau qui n'est pas celui de n'importe quel milieu continu microscopique, et les raisons de leur diversité sont prises en compte par la fonction de phase.

3.2. Exemples

3.2.1. Phase comme ensemble de variables d'état radical.

On peut considérer que le système radical est un système thermodynamique ouvert et le représenter par son état d'équilibre thermodynamique. Lorsque le système suit des évolutions irréversibles on utilise la méthode de l'état local en se donnant ainsi une échelle de temps appropriée au processus et une échelle d'espace qui fixe la taille du système radical. Il faut que, selon cette taille, l'état thermodynamique du système radical soit homogène pour qu'il soit caractérisé par un ensemble de variables d'état approprié, ou qu'il soit hétérogène mais au moins aléatoire stationnaire pour qu'il soit caractérisé par la donnée statistique des variables d'état (moyenne, écart type, etc...). Le choix de ces variables et la véridicité de l'hypothèse d'état local homogène, ou hétérogène aléatoire stationnaire, ou autre, dépendent du processus à simuler, des échelles relatives d'espace et de temps et de la taille du système radical par rapport au niveau microscopique.

On ne doit prendre en compte que des variables qui représentent des effets radicaux sensibles pour la précision et pour la taille fixées dans l'espace-temps du modèle microscopique, et négliger, par conséquent, les effets trop lents et trop rapides ou à longueur d'onde (dans l'espace) trop longue et trop courte, le terme 'trop' montrant la relativité de la proposition par rapport à la structure microscopique et non à la structure radicale même.

La distance b_Z à fixer sur Z ($Z=R^m$ est l'espace de phases pour un choix de m variables d'état scalaires) indique pour quelle différence entre ensembles de variables d'état (ou leurs statistiques), deux états thermodynamiques radicaux homogènes (ou hétérogènes aléatoires stationnaires) sont proches au sens de la structure microscopique. Il est important de remarquer la relativité de cette approximation par rapport au niveau microscopique, car les deux états radicaux peuvent être effectivement très différents à un niveau inférieur.

On rappelle que les variables d'état du système radical choisies pour représenter la phase doivent varier dans un espace métrique, ce qui est une condition pas toujours facile à vérifier pour de variables de nature et dimensions différentes. On prend par exemple comme variables d'état radicales $(T,\underline{\underline{\varepsilon}})$ température et déformation homogènes dans un sous-domaine de volume fini placé à une échelle inférieure à celle du niveau microscopique: il n'est pas, en général, possible d'établir une distance entre deux couple de ce type pour un comportement dissipatif. Néanmoins, si le processus suivi par le système radical est de longueur intégrable dans l'espace $Z=\{(T,\varepsilon)\}$ selon des chemins fixés (e.g. radiaux), cette distance peut être obtenue pour un comportement avec dissipation par:

$$d((T,\underline{\underline{\varepsilon}})_1,(T,\underline{\underline{\varepsilon}})_2)=\int_{\Gamma(1,2)}\partial T\,\partial(|\underline{\underline{\varepsilon}}|) \qquad 20$$

où $|\cdot|$ indique une norme du tenseur de déformation et $\Gamma(1,2)$ est la ligne idéalement suivie par le processus dans $Z=\{(T,\varepsilon)\}$ (tout couple de Z représente une température et une déformation homogènes et il n'existe donc aucun processus réel contenu dans Z pour un élément de volume radical)[16].

On observe finalement que la taille du système radical est contrôlée par la méthode de l'état local seulement au second ordre grâce à la possibilité de se donner une statistique sur l'ensemble des variables d'état.

3.2.2. Phase comme morphologie.

On peut supposer que l'une des deux hypothèses classiques de la thermo-mécanique locale (puissance des efforts intérieurs fonctionnelle linéaire du premier gradient des vitesses et postulats de l'état-action local) ne soit pas suffisamment représentative pour la classe de phénomènes

---

16 C'est le cas, par exemple, du paramètrage d'un processus de déformation à chaud d'un métal par le paramètre de Zener-Hollomon souvent utilisé en métallurgie (ZH paramètre, Q énergie d'activation d'autodiffusion, R constante des gaz, T température absolue, D norme du tenseur taux de déformation):

$$ZH(t) = D(t)\exp\left(\frac{Q}{RT(t)}\right)\ ;\ [ZH]=s^{-1}\ ;\ d((T,\underline{\underline{\varepsilon}})_1,(T,\underline{\underline{\varepsilon}})_2)=\int_{t_1}^{t_2} ZH(t)dt \qquad 20b$$

étudiés. On peut, dans ce cas, introduire des corrélations non locales au niveau du système radical, sans utiliser une thermo-mécanique non locale aux niveaux macroscopique et/ou microscopique.

Si les corrélations non locales sont macroscopiques et si l'on ne doit introduire le niveau microscopique que pour accéder au niveau radical approprié, on utilisera un modèle avec échelle égale aux deux niveaux: le niveau microscopique à utiliser est, le niveau macroscopique même.

C'est le cas si, pour un polycristal, on se donne comme système radical une représentation mathématique de la morphologie des grains, obtenue par observations statistiques dans un élément de volume approprié, sous l'hypothèse que l'évolution d'un point matériel dépend 'aussi' de la configuration spatiale du constituant dont il fait partie (un constituant étant un ensemble de grains ou sous-grains ayant les mêmes orientations cristallographiques). La distance caractéristique b_Z indique la ressemblance appréciée entre deux configurations par rapport à leur rôle dans le modèle macroscopique; elle représente, indirectement, la taille de l'élément de volume choisi pour les observations statistiques des morphologies granulaires.

C'est aussi le cas si, toujours pour un polycristal, on suppose que l'évolution de tout point macroscopique dépend 'aussi' de la configuration des bandes de cisaillement dès que celles-ci apparaissent, indépendamment du fait que ce point matériel est ou non contenu dans une bande (dans ce cas ces bandes sont macroscopiques; le même raisonnement peut se faire pour des bandes et des points microscopiques). On pourra alors choisir comme variables de phase des paramètres macroscopiques (ou microscopiques) géométriques caractérisant les bandes. La distance caractéristique représente la différence entre deux éléments de volume cisaillés appréciable par la thermo-mécanique macroscopique (ou microscopique).

3.2.3. Phase comme rotation.

Orientation de l'anisotropie.

Si le matériau étudié est microscopiquement hétérogène avec hétérogénéités anisotropes on peut enrichir l'information relative au point matériel microscopique par la donnée de l'orientation locale des axes d'anisotropie. Dans ce cas ces orientation sont les phases caractérisant le système radicale qui s'identifie avec le champ microscopique des anisotropies.

L'exemple, souvent cité dans ce travail, d'un polycristal dont on souhaite suivre l'évolution des textures sera traité en particulier à la fin de cette partie du chapitre.

Si la donnée des orientations cristallographiques est microscopique et ponctuelle, alors le système radicale sera de niveau inférieur au microscopique; si, par contre, on se donne une fonction d'orientation des textures par point (ou ensembles de points) macroscopiques, alors les niveaux microscopique et macroscopique coïncident et le système radicale est effectivement de niveau microscopique. Dans le premier cas, la distance caractéristique indique l'intervalle de fiabilité et de précision nécessaire dans la détermination d'une orientation, dans le deuxième elle identifie deux figures de pôles macroscopiquement proches.

En particulier on note que le choix de la fonction distance entre phases nécessite plus d'explications. L'étude du cas particulier des orientations cristallographiques dans un polycristal, montre son importance au sein de la méthode.

Direction de glissement.

En revenant au cas précédent, on peut évaluer plus synthétiquement non pas la donnée microscopique des orientations cristallographiques, mais celle des directions résultantes de glissement localement actives[16].

Le système radicale est alors d'un niveau inférieur au microscopique. La distance caractéristique de Z peut être identifiée, d'un point de vue thermo-mécanique, en choisissant une

---

16 Par exemple un cristal CFC a un gradient de vitesse de glissement donné par la somme des vitesses de glissement des 12 systèmes activables, mais on peut toujours repérer deux axes fictifs (m* et n*) par rapport auxquels diriger la vitesse de glissement resultante:

$$\sum_{i=1}^{12} \dot{\gamma}_i \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{n}_i = \dot{\gamma}^* \mathbf{m}^* \otimes \mathbf{n}^* \qquad 21$$

Ces axes fictifs varient dans le temps suivant l'équation ci-dessus (donc en fonction de la vitesse de rotation des axes réels et des intensités des vitesses de glissement des 12 systèmes); on peut supposer cette variation continue dans le temps avec une bonne approximation (ou moins tant qu'il ne se vérifie pas un changement des systèmes de glissement actifs).

différence d'énergie dissipée par glissements d'un grain le long des deux directions différentes négligeable pour le modèle macroscopique.

Rotation relative matériau-matière.

Dans les deux cas précédents l'évolution d'une composante du comportement local est découplée de l'évolution locale de la matière: le mouvement (rotations) d'un réseau cristallin est indépendant du mouvement des atomes qui le constituent. Par conséquent l'évolution des orientations cristallographiques, ou des textures, ou des directions de glissement ne peuvent pas dépendre exclusivement des variables et vitesses matérielles.

On peut donc choisir comme phase le 'transporteur du matériau', c'est à dire le double vecteur qui donne l'évolution des vecteurs de nature cristallographique et, par conséquent, non matérielle. On peut, de même, choisir comme phase la rotation relative entre le transporteur de la matière (le gradient de la transformation) et celui du matériau. On voit que, indépendamment de ce choix, il devient nécessaire de suivre un champ de rotations: le mouvement non matériel du matériau est une rotation.

Ce cas généralise les précédents tout en utilisant les mêmes informations microscopiques.

On considère une description lagrangienne du mouvement qui privilégie une configuration matérielle donnée (celle à l'instant zéro) prise comme configuration de référence. Il faut observer que la matière en configuration de référence joue le rôle de référentiel pour décrire toute autre configuration. Soit $T(\mathcal{M})$ l'espace tangent au point de matière $\mathcal{M}$.

On considère un champ tensoriel contravariant s d'ordre p, défini sur le domaine V_t occupé par le milieu en tout instant t et à valeurs dans un espace S. Ce champ est identifié par la suite dans le temps de ses valeurs sur les points $\mathcal{M}$ (à chaque instant t) mais il n'est pas forcement un champ matériel, c'est à dire qu'il n'appartient pas forcement à $T(\mathcal{M})$ à tout instant t (il n'est pas transporté par le mouvement)[17].

On suppose qu'il existe un champ tensoriel, du même ordre p et variance, appartenant à $T(\mathcal{M})$ (i.e. matériel) et à valeurs dans S, qu'on appelle $s^{(m)}$. On suppose aussi que les champs $s^{(m)}$ et s coïncident à l'instant initial (cela revient à choisir $s=s^{(m)}$ à l'instant zéro et à transporter $s^{(m)}$ par le mouvement de la matière ensuite).

Les champs s et $s^{(m)}$ ont les mêmes dimensions physiques et on peut donc envisager de représenter à tout instant s par $s^{(m)}$ plus le champ Φ des transformations non matérielles nécessaires à le ramener localement et instantanément à $s^{(m)}$.

Si le transporteur de s a, en décomposition polaire, le même tenseur d'élongation que le gradient de la transformation matérielle (transporteur de $s^{(m)}$), on montre facilement que Φ est un tenseur orthogonal droit.

L'hypothèse faite sur le tenseur d'élongation du transporteur non matériel introduit une liaison cinématique entre les espaces vectoriels non matériels représentés par Φ et l'espace tangent matériel ou, ce qui revient au même, la matière. Dans le cas des polycristaux cette hypothèse est physiquement cohérente dès qu'on considère les propriétés du matériau (état radical) liée aux configurations des réseaux en opposition aux propriétés de la matière (équations de bilan thermo-mécanique) liées aux positions des atomes: les mouvements relatifs entre la matière (atomes) et l'état radical (directions cristallographiques) sont des rotations.

On obtient un avantage suivant cette représentation du champ s lorsque le champ matériel $s^{(m)}$ fait partie de l'ensemble des variables et inconnues qu'on suit. On a aussi un avantage de généralité car il suffit de suivre un seul champ de rotations non matérielles Φ pour représenter tout champ tensoriel évoluant de façon non matérielle pour la même raison "radicale".

---

17 On peut admettre que ce champ tensoriel soit matériel pendant un certain intervalle de temps.

Symétrie matérielle.

Dans un cadre général, plus large que les polycristaux, et avec des définitions différentes de ce qu'on appelle ici le "matériau", une étude axiomatique de la structure engendrée sur un corps matériel par son comportement a été présentée par W. Noll (Cf. [Noll 1967]). On fait référence aussi aux travaux successifs de P. Rougee sur le même sujet (Cf. [Rougee 1980])[18].

Le cas des polycristaux, en se restreignant à la possibilité d'une rotation des axes sur lesquels est écrit le comportement par rapport aux axes de la matière, peut être déduit de ces travaux: on présente le schéma de cette déduction pour montrer un fondement très général du choix d'une fonction de phase à valeurs dans l'espace des tenseurs orthogonaux droits.

Un isomorphisme entre les voisinages de deux points matériels engendre un isomorphisme entre leurs espaces tangents et, en conséquence de l'hypothèse de simplicité matérielle qui lie les états thermodynamiques locaux à la métrique des espaces tangents, une relation (dite "uniformité") entre les comportements dans ces voisinages. Si on considère alors l'ensemble des automorphismes d'un voisinage matériel on obtient un groupe de symétries de comportement. L'etude de ces symétries et de leurs évolutions permet un approche cinématique de la structure engendrée sur un corps matériel par son comportement (i.e. l'hétérogénéité).

Dans un polycristal la plus petite rotation nécessaire pour superposer les directions d'anisotropie des voisinages de deux points matériels séparés représente l'isomorphisme entre les espaces tangents de ces deux points. La phase est donc encore une fois définie par la donnée d'une rotation.

3.2.4. Phase comme fragmentation de la configuration naturelle.

Un dernier exemple de choix de la variable de phase est relatif aux grandes déformations des polycristaux, en particulier aux problèmes connexes à la définition d'une configuration relâchée.

On ne peut pas définir une configuration relâchée pour l'ensemble d'un polycristal qui n'est pas soit non compatible (déchirures, superpositions de matière) soit à contrainte non nulle, et on est, par conséquent, amené à considérer un ensemble d'états naturels locaux auquel ne correspond pas une configuration globale conmpatible. Lorsqu'on considère une décomposition cinématique du gradient de la transformation géométrique, sa partie élastique réversible (définie par une décharge thermo-mécanique adiabatique globale) et sa partie irréversible (plastique plus élastique bloquée), définissant une configuration relâchée réelle, sont continues par hypothèse en tout point où le gradient même est continu. Par contre les parties plastique pure et élastique totale (réversible plus bloquée) du gradient de la transformation, définissant un ensemble d'états naturels locaux, en général ne sont pas continues[19].

Pouvant déterminer séparemment les parties élastique et plastique du gradient de la transformation, il est plus simple d'imposer la continuité de celui-ci si on connait les discontinuités virtuelles de la configuration naturelle et, à cette fin, on peut envisager un niveau radical approprié: la fonction de phase d'un point microscopique indique dans quelle partie virtuellement séparée du milieu en configuration naturelle se trouve ce point. On peut ainsi considérer un état relâché par phase et donc par sous-domaines microscopiques au lieu de la considérer par point microscopique[20].

On a fait dans le Chapitre IV § 5.3. l'hypothèse que les transporteurs relatifs à la configuration naturelle locale sont fonction des phases à la différence de ceux relatifs à la configuration rélachée réelle qui n'en dépendent pas. Cela signifie qu'on considère la rotation de l'orientation cristalline dans un polycristal comme variable de phase aussi bien en tant que orientation locale de l'anisotropie que comme fragmentation de la configuration naturelle.

---

18 Il faut noter que, avec des passages différents, il s'agit d'une approche analogue à celle de J. Mandel écrivant le comportement d'un polycristal en transformations finies dans une configuration de référence isocline obtenue par la donné locale d'un trièdre directeur dont le mouvement ne dépend pas de celui de la matière (Cf. [Mandel, Cours, 1971]).

19 Pour une échelle géométrique suffisamment petite (mais assez grande pour que les joints entre grains soient représentés par des surfaces) ces parties vont être continues par morceaux, avec discontinuités sur des ensembles de mesure volumique nulle (les joints entre grains pris comme des surfaces). Par contre, avec augmentation de l'échelle de la description, on peut avoir des ensembles de mesure volumique non nulle dans lesquels les parties du gradient de la transformation ne sont pas continues.

20 Avec référence aux travaux de J. Mandel, on peut supposer que la configuration relâchée locale d'une partie du milieu ayant un trièdre directeur unique est continue.

3.2.5. Exemple.

Les exemples ci-dessus ont été donnés pour introduire des idées qui seront développées dans la suite et pour mettre en évidence le fait que le choix de la fonction de phase (i.e. du système radicale) est lié au matériau, au processus, aux effets de structure à tout niveau et qu'il caractérise complètement le modèle.

Pour donner un exemple quantitatif on suppose de représenter la structure microscopique d'un alliage Al-Mg (à 3% de Mg) après laminage avec une déformation équivalente de 1 ($2/\sqrt{3}$ du logarithme naturel du rapport entre épaisseurs en entrée et en sortie) afin d'obtenir un modèle macroscopique pour l'emboutissage profond nécessaire pour la production d'emballages.

L'épaisseur de la tôle est de 1mm, celui des grain est de l'ordre de 1.0μm, la taille des cellules est de 0.3÷0.5μm (Cf. [Tran Quoc Tang, Thèse, 1986]).

Les épaisseurs à obtenir par emboutissage sont de l'ordre de l'épaisseur après laminage (1÷0.5mm) et les rayons de courbure à obtenir sont tels qu'ils justifient un modèle de coque mince (>5mm). Dans ce cas il peut être suffisant d'identifier les grains (non pas les cellules) par une fonction de phase qui donne l'orientation du trièdre identifiant le réseaux cristallin moyen dans une boule de rayon de 1.0μm (surface ou volume de niveau inférieur au microscopique), pour obtenir une répartition en phases des épaisseurs finales de la tôle assez fine.

Si les épaisseurs, ou les rayons de courbure à obtenir sont beaucoup plus faibles on pourrait être amené à une perte d'homogénéité de l'épaisseur finale dans la réalité ou à la nécessité d'utiliser une théorie des coques épaisses pour prévoir des modifications importantes de la structure microscopique dans les plis. En ce cas il faut soit considérer la contribution des cellules (qui pourraient se transformer localement en sous-grains et en grains) par des directions cristallographiques moyennées sur des boules de 0.4μm, soit introduire une variable d'endommagement à un niveau inférieur au microscopique liée à la densité de dislocations dans les parois des cellules, moyennée sur les mêmes boules, et cela si on prévoit de l'endommagement microscopique dans les plis ou si (pour la durée de vie de la structure) on doit s'occuper de la corrosion.

3.3. Espace des phases-orientations

3.3.1. Introduction.

On a vu comment la donné d'une orientation locale peut être nécessaire pour identifier la fonction de phase selon plusieurs modèles de polycristal possibles. On a vu aussi que, de façon assez générale, on peut utiliser à cette fin la rotation relative matériau-matière, c'est à dire la donnée de l'orientation d'un trièdre affecté au matériau dans les systèmes de référence solidaires à la matière.

Dans la suite on précise la structure d'un tel espace des phases. A cette fin on défini d'abord les trièdres-objets, qui sont des êtres non matériels doués d'axes de symétrie qu'on utilise comme modèle du matériau, et ensuite on décrit la métrique de l'espace des "positions" des trièdres-objets (ensemble quotient par les symétries d'un objet des orientations d'un trièdre dans l'espace géométrique) et sa topologie. Dans une dernière partie on donne les relations, indispensables pour les applications, entre angles d'Euler et tenseurs orthogonaux droits.

3.3.2. Trièdre-objet.

Le schéma de polycristal qu'on s'est donné dans le Chapitre IV est celui d'un ensemble de trièdre-objets, c'est à dire un ensemble d'objets identiques, ayant des directions et des plans de symétrie fixés, placés de façon variable dans l'espace géométrique absolu moyennant les trièdres qui lui sont attachés (un ensemble suffisamment homogène de trièdre-objets est un grain cristallin).

L'exemple le plus simple qu'on puisse imaginer est celui d'un cube placé dans l'espace géométrique: toute rotation de 90° autour d'une de ses arêtes ne modifie pas la position du cube en tant que orientations (les translations du cube ne nous intéressent pas). Pour le trièdre-cube il existe donc 24 positions équivalentes du trièdre pour chaque orientation du cube dans l'espace.

Pour passer à un exemple ayant plus d'implications pratiques on peut considérer des cristaux de structure cubique à faces centrées: si on veut que l'objet représente l'un des 12 systèmes de glissement du réseau CFC il faut tenir compte des symétries engendrées par les 4 plans de glissement {111} avec leurs 3 directions de glissement ⟨110⟩ dans l'espace géométrique: il existe 2 positions équivalentes du trièdre pour chaque orientation du plan dans l'espace (Cf. [Dluzewski

1991]) et 2 positions du plan pour chaque système, ce qui donne 4 positions équivalentes du trièdre pour chaque orientation de l'objet "système de glissement" dans l'espace (Cf. Ch.IV Fig.1).

Les symétries représentées par l'objet peuvent, comme on a vu, avoir plusieurs significations: selon les cas on peut s'intéresser, à une échelle microscopique, aux symétries géométriques (les axes cristallographiques comme pour le trièdre-cube) ou aux symétries du distributeur des vitesses de glissement des atomes (les directions de glissement dans l'exemple du CFC) ou aux symétries de comportement micro-mécanique (directions et intensité des contraintes de glissement). On peut s'intéresser à de symétries microscopiques, comme celles citées ci-dessus, ou macroscopiques, comme celle du champ des vitesses plastiques d'un élément de volume statistiquement représentatif de la structure cristalline (dont le gradient peut être représenté par un glissement simple ficitf même à une échelle non atomique selon ce qui est expliqué à la note 16 de ce chapitre).

Appelons "objet-réseau" un objet qui ne représente que la géométrie des directions de glissement d'un réseau cristallin donné, et "objet-glissement" un objet qui représente les glissement du même réseau cristallin. Ces deux objets peuvent être choisi comme modèles du même cristal et ils ont les mêmes axes de symétrie, mais pour l'objet-réseau l'orientation dans ces axes est arbitraire, tandis que pour l'objet-glissement elle ne l'est pas. Ceci implique que deux positions du trièdre, équivalentes pour un objet-réseau, peuvent exhiber des directions de glissement également dirigées mais avec glissements d'orientation opposée et, donc, peuvent ne pas être équivalentes pour un objet-glissement.

Comme noté dans le Chapitre IV, pour un trièdre-objet, les symétries de l'objet définissent des classes d'équivalence entre positions du trièdre dans l'espace géométrique absolu. En d'autres mots les symétries de l'objet entraînent une partition de l'ensemble des positions du trièdre; l'ensemble quotient de cette partition est l'ensemble des positions du trièdre-objet.

En conclusion on considère que l'état radical d'un polycristal est décrit par un trièdre-objet placé dans l'espace géométrique absolu. L'espace des phases est donc l'ensemble quotient des positions qui peuvent être prise par un trièdre dans le même espace compte tenu des symétries d'un objet qui lui est attaché: pour un trièdre-objet isotrope il s'agit de l'espace métrique des tenseurs orthogonaux droits (donnant les axes orthonormés d'un trièdre par rapport aux axes orthonormés d'un système solidaire au repère), pour un trièdre objet anisotrope d'un ensemble quotient de cet espace métrique.

L'espace métrique des tenseurs orthogonaux droits (phases d'objets isotropes) est isomorphe à un espace de Riemann de dimension trois, constitué par la surface d'une sphère douée d'un repère curviligne et d'un système d'angles d'Euler; on peut montrer que l'ensemble quotient de l'espace des tenseurs orthogonaux droits sous des conditions de symétrie (phases d'objets anisotropes) est isomorphe à un domaine dans cet espace de Riemann (Cf.[Dluzewski 1991]). Donc, l'espace des phases engendré par un trièdre-objet isotrope est un espace curviligne tridimensionnel de Riemann et, pour un trièdre-objet anisotrope, on peut fixer les bornes d'un domaine des phases en fonction des symétries de l'objet et on peut définir une distance appropriée au problème. On illustrera ce procédé: il montre l'importance du domaine des phases et de la définition de distance qu'on se donne en relation avec le modèle à bâtir.

3.3.3. Trièdre-objets dans l'espace géométrique.

Emplacement.

On considère les espaces géométriques absolus homéomorphes à un espace euclidien $\mathcal{E}$, avec espace translation E; il s'agit d'espaces de produit scalaire de dimension n (n=2 ou 3). Pour un niveau d'échelle fixé[21] on choisi un système de référence $\mathcal{E}$ et on y défini un repère $\mathcal{R}$, muni d'un système d'axes orthonormés, **E**, obtenu en plaçant $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{E}$ et en y choisissant une origine, et en choisissant une base orthonormée droite de E:

$$\mathbf{E}=(0,\{E_i\});\ 0\in\mathcal{E};\ E_i\in E\ \ i\in(1\ldots n):\ E_i\cdot E_j=\delta_{ij} \qquad 32$$

21 Comme on verra dans le Chapitre VII, fixer un niveau implique que seulement les changement isométriques sont admis pour le système de référence choisi.

Un trièdre (orthonormé) dans E est un système de n vecteurs orthogonaux de norme unitaire:

$$\mathbf{T}=\{t_i\in E\ i\in(1\ldots n):\ t_i\cdot t_j=\delta_{ij}\} \qquad 33$$

Un trièdre-objet T est identifié par un trièdre **T** et par un ensemble fini Y de directions (normales à des plans de symétrie) fixes par rapport à **T**:

$$T=(\mathbf{T},Y)\quad Y=\{m_j\ j\in(1\ldots s):\ m_j=[m_i]_j t_i\} \qquad 34$$

On considère fixé l'objet constitutif du trièdre-objet avec ses symétries, c'est à dire qu'on considère fixé l'ensemble Y. L'emplacement du trièdre-objet T dans le système de référence $\mathcal{E}$ est la position de son trièdre **T** par rapport au trièdre **E** du repère. Il s'agit d'une isométrie qui conserve les orientations qui, les trièdres étant invariants par translation, est de la forme (on note par l'indice en caractères gras l'image d'un opérateur ou d'un ensemble d'opérateurs sur une base):

$$Q=L_{orth}(E,E)\ \underline{\underline{Q}}\in Q_E \qquad 35$$

$$t_i=[t_j]_i E_j=Q_{ij}E_j\ ;\ m_j=[m_i]_j t_i=[m_i]_j Q_{ik}E_k \Rightarrow \underline{\underline{Q}}:\mathbf{E}\rightarrow\mathbf{T}$$

L'emplacement d'un trièdre-objet par rapport à un repère choisi peut donc se représenter par un tenseur orthogonal d'ordre deux (les $[m_i]_j$ ne dépendent pas de l'emplacement). L'ensemble Q des tenseurs orthogonaux est un sous-groupe (sous l'opération de composition) des isométries de E muni d'une métrique euclidienne qu'on spécifie de suite. Deux trièdres-objets T_A et T_B (constitués du même objet et donc ayant les mêmes coordonnés relatives des axes de symétrie $[m_i]_j$ pour j=1...s et i=1...n) ne peuvent pas être distingués si les directions de symétries des objets qui les constituent coïncident:

$$\forall j\in(1\ldots s)\quad m_{Aj}=\pm m_{Bj}\leftrightarrow [m_i]_j Q_{Aik}=\pm[m_h]_j Q_{Bhk} \qquad 36$$

Cela établi une relation d'équivalence à l'intérieur de Q (une fois choisi un objet Y avec ses symétries):

$$O_Y=\{(\underline{\underline{Q}}_A,\underline{\underline{Q}}_B)\in Q_E\times Q_E:\ \forall m_j\in Y\ \pm m_j\cdot(\underline{\underline{Q}}_B\cdot\underline{\underline{Q}}_A^T)=m_j\} \qquad 37$$

les classes d'équivalence sont les emplacements du trièdre-objet, notés $T(Q_T)$ car on les identifie avec un de leurs éléments; l'ensemble quotient qui en résulte est un sous-groupe et une partition du groupe Q:

$$T(\underline{\underline{Q}}_T)=\{\underline{\underline{Q}}\in Q_E:\ (\underline{\underline{Q}}_T,\underline{\underline{Q}})\in O_Y\}\ \ T(\underline{\underline{Q}}_T)\in Q_Y=Q/O_Y \qquad 38$$

Métrique.

On peut définir une métrique euclidienne sur Q et, par conséquent, sur Q_Y. Tout tenseur de Q a une direction propre n∈E avec valeur propre conjuguée réelle double et unitaire; Q est de dimension m (m=1, 2 ou 3: vecteurs propres éventuellement restreint dans un plan ou dans une direction de E), avec un espace translation de produit scalaire qu'on défini de suite. Tout tenseur de Q peut se représenter par rapport à **E** par[22]:

$$\underline{\underline{Q}}=n\otimes n+\cos\alpha\,(\underline{\underline{I}}-n\otimes n)-\sin\alpha\,\varepsilon_{ijk}(n\cdot E_i)E_j\otimes E_k \qquad 39$$

et

$$\underline{\underline{Q}}^T=n\otimes n+\cos\alpha\,(\underline{\underline{I}}-n\otimes n)+\sin\alpha\,\varepsilon_{ijk}(n\cdot E_i)E_j\otimes E_k \qquad 40$$

le transposé (et inverse) d'un tenseur de Q a une direction propre opposée et le même angle intrinsèque α, ce qui permet de définir une distance dans Q et, par conséquence, une distance entre trièdres.

---

22 ε_{ijk} tenseur de permutation euclidien (±1 selon la parité des indices ou 0 si un indice se répète)

Q est un groupe sous l'opération de composition, donc les compositions des deux tenseurs de Q appartiennent toujours à Q; en particulier celles ci-dessous, étant l'une le transposé de l'autre, ont le même angle intrinsèque:

$$\underline{\underline{Q}}_{AB} = \underline{\underline{Q}}_A^T \cdot \underline{\underline{Q}}_B \; ; \; \underline{\underline{Q}}_{BA} = \underline{\underline{Q}}_B^T \cdot \underline{\underline{Q}}_A \; : \qquad 41$$

$$\underline{\underline{Q}}_{AB} = \underline{\underline{Q}}_{BA}^T = n_{AB} \otimes n_{AB} + \cos\alpha_{AB} \, (\underline{\underline{I}} - n_{AB} \otimes n_{AB}) - \sin\alpha_{AB} \, \varepsilon_{ijk} (n_{AB} \cdot E_i) E_j \otimes E_k$$

On définit alors la distance entre deux tenseurs Q_A et Q_B de Q mesurée entre leurs images dans Q_E et, donc, on défini la distance entre deux trièdres $\mathbf{T}_A$ et $\mathbf{T}_B$ par l'angle α caractérisant la représentation par rapport à un repère d'axes **E** arbitraire du tenseur composition de Q_B avec l'inverse de Q_A:

$$d(\mathbf{T}_A, \mathbf{T}_B) = d(\underline{\underline{Q}}_A, \underline{\underline{Q}}_B) = \alpha(\underline{\underline{Q}}_A^T \cdot \underline{\underline{Q}}_B) \in [0, 2\pi[\subset R^+ \qquad 42$$

Cette définition vérifie les axiomes pour une métrique euclidienne et ne dépend pas du choix du repère[23]:

$$\forall \, (\underline{\underline{Q}}_A, \underline{\underline{Q}}_B) \in Q_E \times Q_E \quad d(\underline{\underline{Q}}_A, \underline{\underline{Q}}_B) = 0 \leftrightarrow \alpha = 0 \leftrightarrow \underline{\underline{Q}}_A^T \cdot \underline{\underline{Q}}_B = \underline{\underline{I}} \leftrightarrow \underline{\underline{Q}}_A = \underline{\underline{Q}}_B \qquad 43$$

$$\forall \, (\underline{\underline{Q}}_A, \underline{\underline{Q}}_B) \in Q_E \times Q_E \quad d(\underline{\underline{Q}}_A, \underline{\underline{Q}}_B) = d(\underline{\underline{Q}}_B, \underline{\underline{Q}}_A) \text{ car } \alpha(\underline{\underline{Q}}_A^T \cdot \underline{\underline{Q}}_B) = \alpha(\underline{\underline{Q}}_A \cdot \underline{\underline{Q}}_B^T)$$

$$\forall \, (\underline{\underline{Q}}_A, \underline{\underline{Q}}_B, \underline{\underline{Q}}_C) \in Q_E \times Q_E \times Q_E \quad d(\underline{\underline{Q}}_A, \underline{\underline{Q}}_B) \leq d(\underline{\underline{Q}}_A, \underline{\underline{Q}}_C) + d(\underline{\underline{Q}}_C, \underline{\underline{Q}}_B).$$

On peut montrer que (Cf. [Dluzewski 1991]):

$$\alpha(\underline{\underline{Q}}_A^T \cdot \underline{\underline{Q}}_B) = d(\mathbf{T}_A, \mathbf{T}_B) = \qquad 44$$

$$= \arccos \frac{l_{A(i)} \cdot l_{B(i)} + l_{A(j)} \cdot l_{B(j)} - \sqrt{(l_{A(i)} \cdot l_{B(i)} - l_{A(j)} \cdot l_{B(j)})^2 + (l_{A(i)} \cdot l_{B(j)} + l_{A(j)} \cdot l_{B(i)})^2}}{2}$$

indépendamment du repère et du choix des indices i et j≠i [24] et avec, évidamment:

$$l_{Ai} = Q_{Aij} E_j \rightarrow l_{A(k)} \cdot l_{B(h)} = Q_{A(k)i} Q_{B(h)i} \qquad 45$$

L'emplacement d'un trièdre-objet T est une classe d'équivalence $T(Q_T)$ entre emplacements de trièdres; pour définir une distance entre deux trièdres-objets T_A et T_B on peut donc choisir un critère (arbitraire mais discriminatoire) pour sélectionner une des distances mesurée entre les éléments des deux classes d'équivalence $T(Q_{T_A})$ et $T(Q_{T_B})$ dans Q_Y, de façon que cette distance soit une métrique euclidienne pour Q_Y. Soit donc cette distance, fonction de l'objet particulier Y:

$$d_Y(T_A, T_B) = \qquad 46$$

$$= \underset{\substack{\underline{\underline{Q}}_A \in T(\underline{\underline{Q}}_{T_A}) \\ \underline{\underline{Q}}_B \in T(\underline{\underline{Q}}_{T_B})}}{\text{Min}} \left(\arccos \frac{Q_{A1i} Q_{B1i} + Q_{A2i} Q_{B2i} - \sqrt{(Q_{A1i} Q_{B1i} - Q_{A2i} Q_{B2i})^2 + (Q_{A1i} Q_{B2i} + Q_{A2i} Q_{B1i})^2}}{2} \right)$$

---

23 On remarque que $d(\underline{\underline{Q}}_A, \underline{\underline{Q}}_B) = tr(\underline{\underline{Q}}_{AB})$ ne vérifierait pas le premier axiome car $tr(\underline{\underline{I}}) = 3 \neq 0$

Il faut se rappeler que Q n'est pas un espace vectoriel car on ne peut pas y définir le produit par un scalaire. Néanmoins dans Q il est défini un produit scalaire (produit deux fois contracté).

24 Si on suppose que les vecteurs des deux trièdres sont indicés de façon à constituer une base orthonormée droite de E.

Espace des phases.

On considère dans la suite l'espace des phases $\mathcal{Q}_Y=(Q_Y,d_Y)$, espace métrique obtenu par le sous-groupe partition du groupe des applications linéaires orthogonales sur E avec la métrique définie ci-dessus, générée par le choix d'un objet Y doué de symétries.

La métrique euclidienne de $\mathcal{Q}_Y$ (positive pour tout couple d'éléments non identiques) génère un espace translation qui est Q même. Soit en fait I_Y le groupe, sous composition, des isométries de $\mathcal{Q}_Y$ (qui conservent la distance d_Y), l'espace translation de $\mathcal{Q}_Y$ est le seul sous-groupe de I_Y qui est commutatif, transitif et doué d'une identité unique: c'est, en fait, $Q=L_{orth}(E,E)$ entier, écrit, comme d'habitude, multiplicativement[25]:

$$\mathcal{Q}_Y=(Q_Y,d_Y) \rightarrow Q=L_{orth}(E,E)\equiv I_{isométries}(Q) \qquad 47$$

En résumé l'espace des orientations d'un trièdre-objet T=(**T**,Y), $\mathcal{Q}_Y$, est un espace métrique de produit scalaire; l'espace des rotations (propres), Q, est son espace translation (une rotation étant une opération de translation entre deux orientations) et il est un groupe commutatif sous l'opération de composition (la composition de deux rotations est une rotation)

Par rapport au système d'axes **E** on peut introduire une base pour L(E,E) et, donc, pour Q ou Q_Y:

$$L(E,E)_{\underline{\underline{E}}}=\{L_{ij}E_i\otimes E_j : L_{ij}\in R\} \; ; \; \underline{\underline{E}}=\{E_i\otimes E_j : i,j\in\{1\ldots n\}\} \qquad 48$$

ce qui permet d'introduire un système de coordonné Q_{ij} pour les éléments de Q avec les relations entre cordonnées qui, n'étant donc pas indépendantes, constituent un système curviligne (S_n soit l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1\ldots n\}$):

$$\forall \underline{\underline{Q}}\in Q_E \quad \underline{\underline{Q}}=Q_{ij}E_i\otimes E_j \qquad 49$$

$$Q_{ik}Q_{jk}=\delta_{ij} \quad i,j\in\{1\ldots n\}; \quad \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i\in\{1\ldots n\}}Q_{i\sigma(j)}=1$$

On peut introduire d'autres systèmes de coordonnée dans Q par rapport au même référentiel $\mathcal{E}$; notamment on peut représenter tout tenseur de Q par un système d'angles d'Euler en introduisant deux bases, covariante dans Q et contravariante dans Q*, avec les coordonnées curvilignes de variance relative ($\alpha=1\ldots m$)[26]

_coordonnées z_α de base covariante $\mathbf{s}=(1,s^\alpha)$; $1\in\mathcal{Q}$ $s^\alpha\in Q$ 50

_coordonnées z^α de base contravariante $\mathbf{s}^*=(1,s_\alpha)$; $1\in\mathcal{Q}$ $s_\alpha\in Q^*$

La dimension m dépend de la dimension n de E et des éventuelles liaisons cinématiques imposées à priori sur la géométrie du problème; on note dans la suite m=1, 2 ou 3 cette dimension (avec m=3 pour n=3 en absence de liaisons cinématiques).

On montre dans la suite le passage à un système d'angles d'Euler.

3.3.4. Angles d'Euler.

Relation avec l'espace des tenseurs orthogonaux.

On suppose l'espace géométrique absolu de dimension n=3. On considère une sphère fixée au repère $\mathcal{R}$ (on peut l'imaginer de rayon unitaire et centrée à l'origine des axes **E** du repère) de façon que toute direction n de E (et, donc en particulier toute position d'un trièdre-objet) est repérée par le point sur la sphère obtenu par le rayon de direction n.

---

25 Preuve:

$$\forall \underline{\underline{Q}}_A\neq Q_E \; \forall \underline{\underline{Q}}_B\in Q_E \rightarrow \underline{\underline{Q}}_A\cdot\underline{\underline{Q}}_B=\underline{\underline{Q}}_B\cdot\underline{\underline{Q}}_A \qquad 47b$$

$$\forall \underline{\underline{Q}}_A,\underline{\underline{Q}}_B\neq Q_E \; \exists \underline{\underline{Q}}_C\in Q_E \quad \underline{\underline{Q}}_C\cdot\underline{\underline{Q}}_A=\underline{\underline{Q}}_C\cdot\underline{\underline{Q}}_B\leftrightarrow\underline{\underline{Q}}_A=\underline{\underline{Q}}_B$$

$$\exists \underline{\underline{I}}\in Q_E \; \forall \underline{\underline{Q}}_A\in Q_E \rightarrow \underline{\underline{I}}\cdot\underline{\underline{Q}}_A=\underline{\underline{Q}}_A$$

26 L'identité est l'élément neutre par rapport à la composition qui est l'addition du groupe Q. Le fait que l'identité soit l'origine des coordonnées curvilignes signifie que les angles d'Euler, z_α ou z^α, d'un trièdre placé dans l'espace géométrique absolu sont mesuré à partir des axes de **E**

On se donne un système de coordonnées curvilignes sur la sphère qui est donc un système de deux coordonnées pour les directions de l'espace translation E. Les positions d'un trièdre (orthonormé) sont alors repérées par trois coordonnées curvilignes, angles d'Euler[27]; de même on peut affirmer que tout tenseur orthogonal a une représentation dans un système d'angles d'Euler donné, par exemple, par les coordonnées direction de son vecteur propre plus l'angle intensité de ce vecteur. On obtient ainsi un espace curviligne de Riemann de dimension trois pour les positions du trièdre-objet.

Le système de coordonnée peut être choisi de façon assez large: une fois fixées trois directions de référence, par exemple coïncidentes avec les axes de **E**, il y a 31 décompositions indépendantes d'une rotation envisageables. Pour fixer les idées on considère les axes d'un trièdre identifié, par rapport à **E**, par un tenseur orthogonal Q de vecteur propre ω:

$$\iota_i = Q_{ij}(\omega)E_j \qquad 51$$
$$\alpha n=\omega = \omega_1 E_1+ \omega_2 E_2+ \omega_3 E_3$$
$$\underline{\underline{Q}}(\alpha n)=n\otimes n + \cos\alpha\ (\underline{\underline{I}} - n\otimes n) - \sin\alpha\ \varepsilon_{ijk}(n\cdot E_i)E_j\otimes E_k$$

qu'on décompose selon (il s'agit du choix courant des angles d'Euler):

_ une rotation $Q'_{ij}(\varphi_1 E_3)$ d'axe E_3:

$$\varphi_1 = \omega\cdot E_3 = \omega_3 \qquad 52$$
$$E'_i=Q'_{ij}(\varphi_1 E_3)E_j \ ;\ Q'_{ij}(\varphi_1 E_3)_{\mathbf{E}}=\begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 0\\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

_ une rotation $Q''_{ij}(\phi E'_1)$ d'axe E'_1:

$$E'_1= \cos\varphi_1\, E_1+ \sin\varphi_1\, E_2\ ;\ \phi = \omega\cdot E'_1= \omega_1\cos\varphi_1 + \omega_2\sin\varphi_1 \qquad 53$$
$$E''_i=Q''_{ij}(\phi E'_1)E'_j \ ;\ Q''_{ij}(\varphi_1 E_3)_{\mathbf{E}'}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}$$

_ une rotation $Q'''_{ij}(\varphi_2 E''_3)$ d'axe E''_3:

$$E''_3= (\sin\varphi_1 E_1 - \cos\varphi_1\, E_2)\sin\phi + \cos\phi\, E_3\ ; \qquad 54$$
$$\varphi_2 = \omega\cdot E''_3 = \omega_1\sin\varphi_1\sin\phi - \omega_2\cos\varphi_1\sin\phi + \omega_3\cos\phi$$
$$E'''_i=Q'''_{ij}(\varphi_2 E''_3)E''_j \ ;\ Q'''_{ij}(\varphi_2 E''_3)_{\mathbf{E}''}=\begin{bmatrix}\cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & 0\\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

et on obtient les relations:

$$\underline{\underline{Q}}(\omega)=Q_{ij}(\varphi_1,\phi,\varphi_2)_{\mathbf{E}}=\begin{bmatrix}\cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & 0\\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 0\\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}= \qquad 55$$
$$=\begin{bmatrix}\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\phi & \sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2\cos\phi & \sin\varphi_2\sin\phi\\ -\cos\varphi_1\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\cos\varphi_2\cos\phi & -\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\phi & \cos\varphi_2\sin\phi\\ \sin\varphi_1\sin\phi & -\cos\varphi_1\sin\phi & -\cos\phi\end{bmatrix}$$

---

27 Ayant fixé l'orientation et l'ordre des axes du trièdre: on ne considère que de trièdres droits.

$$\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \phi\\ \varphi_2\end{bmatrix}=G^{-1}(\omega)=\begin{bmatrix}\omega_3\\ \omega_1\cos\omega_3+\omega_2\sin\omega_3\\ \omega_1\sin\omega_3\sin[*]\ -\omega_2\cos\omega_3\sin[*]\ +\omega_3\cos[*]\end{bmatrix}\quad [*]=\omega_1\cos\omega_3+\omega_2\sin\omega_3$$

$$\omega = G(\varphi_1,\phi,\varphi_2) = \varphi_1 E_3 + \phi E'_1 + \varphi_2 E''_3 = \tag{57}$$
$$= \varphi_1 E_3 + \phi\left[E_1\cos\varphi_1+E_2\sin\varphi_1\right] + \varphi_2\left[\left(E_1\sin\varphi_1-E_2\cos\varphi_1\right)\sin\phi+E_3\cos\phi\right] =$$
$$=\left[\phi\cos\varphi_1+\varphi_2\sin\varphi_1\sin\phi\right]E_1+\left[\phi\sin\varphi_1-\varphi_2\cos\varphi_1\sin\phi\right]E_2+\left[\varphi_1+\varphi_2\cos\phi\right]E_3$$

(28)

Base covariante et coordonnées curvilignes.

On peut ainsi définir les vecteurs a_i (i=1...3) de base covariante avec coordonnées $(q^1,q^2,q^3)=(\varphi_1,\phi,\varphi_2)$:

$$\xi = q^i a_i = \varphi_1 a_1+\phi a_2+\varphi_2 a_3 \tag{56}$$

$$a_1 = \frac{\partial G(\varphi_1,\phi,\varphi_2)}{\partial\varphi_1} = E_3$$

$$a_2 = \frac{\partial G(\varphi_1,\phi,\varphi_2)}{\partial\phi} = E_1\cos\varphi_1+ E_2\sin\varphi_1$$

$$a_3 = \frac{\partial G(\varphi_1,\phi,\varphi_2)}{\partial\varphi_2} = E_1\sin\varphi_1\sin\phi - E_2\cos\varphi_1\sin\phi + E_3\cos\phi$$

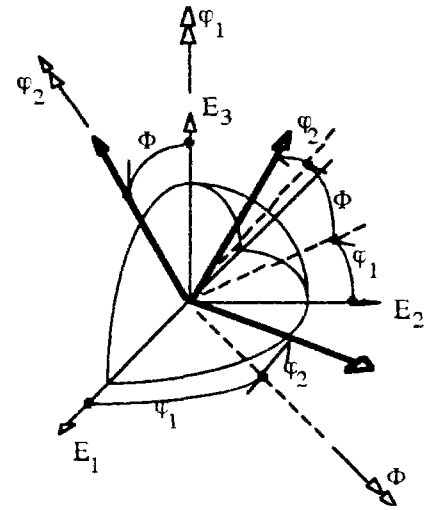


Fig.2: Angles d'Euler

On appelle Z, ou $Z_Y=Z/O_Y$, l'espace curviligne des vecteurs $\xi=q^i a_i$ positions d'un trièdre-objet, selon les symétries de l'objet constitutif Y. En absence de symétrie on a:

$$(\varphi_1,\phi,\varphi_2)\in[0,2\pi[\,x\,[0,\pi[\,x\,[0,2\pi[\tag{57}$$

Le tenseur métrique de l'espace Z est:

---

28 Pour compléter les informations utiles aux applications on donne aussi les relations entre angles d'Euler et indices de Miller (hkl)[uvw] d'une orientation (Cf. [Öztürk et Davies 1987]):

$$h=-\sin\phi\cos\varphi_2\ ;\ k=\sin\phi\sin\varphi_2\ ;\ l=\cos\phi \tag{57b}$$

$$u=\cos\varphi_1\cos\phi\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ ;\ v=-\cos\varphi_1\cos\phi\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\cos\varphi_2\ ;\ w=\cos\varphi_1\sin\phi$$

$$\cos\varphi_1=\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\frac{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}\ ;\ \cos\phi=\frac{l}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}\ ;\ \cos\varphi_2=\frac{-h}{\sqrt{h^2+k^2}}\ \text{si } h,k\neq 0$$

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\ \text{si } h,k=0$$

$$\gamma_{ij}=a_i\cdot a_j=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\phi & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \det[\gamma_{ij}] = \sin^2\phi \qquad 58$$

Métrique.

La distance entre deux trièdres-objets distincts est un réel dans un intervalle ouvert $]0,\varphi_{max}[$, avec $\varphi_{max}\leq 4\pi$ qui dépend des symétries mises en jeu par l'objet constitutif (4π étant supérieur à toute distance entre trièdres-objets isotropes). La distance est égale à l'angle de rotation entre les orientations de ces trièdres mesuré le long d'une ligne contenue dans Z_Y:

$$d_Z:(\xi,\zeta)\in Z\times Z\rightarrow d_{\mathcal{N}}(\xi,\zeta)\in[0,\varphi_{max}[\subset R^+ \; ; \; d_Z(\xi,\zeta)=0\leftrightarrow\xi=\zeta \; ; \; \varphi_{max}\leq 4\pi \qquad 59$$

$$d_{\mathcal{N}}(\xi,\zeta)=\min_{\Gamma\in Z_Y}\int_{\Gamma(\xi,\zeta)}\left(\gamma_{ij}dq^i dq^j\right)^{\frac{1}{2}}$$

où $\Gamma(\xi,\zeta)$ est cette ligne de longueur intégrable de ξ à ζ (la résolution du problème variationnel ci-dessus donnant la distance a été réduite par P.H. Dluzewski (Cf. [Dluzewski 1991]) à la formule explicite (44) après avoir démontré que le parcours minimal entre deux orientations est celui fait le long d'une géodésique)

On note donc l'espace métrique des orientations d'un trièdre-objet T=(**T**,Y) par:

$$\mathfrak{I}_Y=(Z_Y,d_Z) \qquad 60$$

l'espace des translations d'éléments de $\mathfrak{I}_Y$ en éléments de $\mathfrak{I}_Y$ est Z_Y.

Calcul différentiel et intégral.

La distance mesurée à partir d'une orientation de référence ξ fixée est une fonction ouverte et continue de la topologie de Z à celle usuelle de R: tout intervalle ouvert dans $]0,\varphi_{max}[$ est image par $d_Z(\xi,\cdot)$ d'un ouvert dans Z_Y (d'une couronne sphérique de centre ξ), {0} dans $[0,\varphi_{max}[$ est image par $d_{\mathcal{N}}(\xi,\cdot)$ de $\{\xi\}$ dans Z.

Comme l'espace des orientations Q, Z est un espace de produit scalaire avec un espace translation noté Z aussi.

Ces propriétés permettent, entre autre, de définir des voisinages et des translations infinitésimales dans Z et, par conséquent, d'appliquer le calcul différentiel aux fonctions de variable dans Z.

Il est nécessaire de définir des éléments de volume privilégiés dans Z, jouant le rôle de la tribu borélienne dans R^n, dans le but d'avoir une mesure qui associe un réel positif à tout élément de la tribu des parties de Z_Y. En effet ces éléments de volume sont obtenus facilement grâce à l'existence d'un produit mixte (forme trilinéaire alternée définie non négative) dans Z[29]:

$$\mathfrak{I}(a_1,a_2,a_3)=a_1\wedge a_2\wedge a_3=\varepsilon_{123}=\sqrt{\det\gamma}=\sin\phi\in R^+ \qquad 61$$
$$dZ=\varepsilon_{123}dq^1dq^2dq^3=\sin\phi d\varphi_1 d\phi d\varphi_2$$

Ce résultat est important car il permet de ne pas définir un élément de volume infinitésimal dans l'espace des tenseurs orthogonaux droits

---

29 E.g. W. Flügge, "Tensor Analysis and Continuum Mechanics", Springer-Verlag, 1972 (au Chapitre 3): les tenseurs de permutation covariant (qui opère sur les composantes contravariantes) et contravariant sont, pour ijk pair:

$$\varepsilon_{ijk}=\sqrt{\det\gamma} \; , \; \varepsilon^{ijk}=\frac{1}{\sqrt{\det\gamma}} \qquad 61b$$

3.4. Conclusion.

Dans cette partie du chapitre on a vu que le choix de l'espace des phases pour décrire l'hétérogénéité du comportement est assez large, de façon qu'un modèle de milieu continu profond peut être employé pour l'étude d'un nombre important de matériaux réels. En particulier on a vu que le choix des tenseurs orthogonaux droits fait pour les polycristaux permet de suivre tout cas d'hétérogénéité engendrée par l'anisotropie.

Par rapport à l'espace des tenseurs orthogonaux on a vu en détail quelle est sa métrique, de quelle façon elle peut représenter des éventuelles symétries des trièdre-objets et quelles sont les relations avec un système d'angles d'Euler. Ces dernières sont importantes pour des développements du modèle proposé, tant numériques que expérimentaux.

4. Observation et convolution.

4.1. Introduction.

Dans la partie introductive du chapitre on a envisagé l'écriture des équations de bilan thermo-mécanique pour une partition d'un agrégat en constituants moyennant une fonction de phase. On a vu que, sauf cas particuliers, la définition de constituant doit tenir compte des imprécisions intrinsèques à la fonction de phase.

On a donc besoin d'une observation des événements approchée et relative à la taille caractéristique qui règne dans le domaine des phases[30]. Par conséquent on envisage la définition d'une fonctionnelle d'observation qui opère sur les fonctions de variable dans l'espace-temps avec une approximation adéquate. Si on cherche une fonctionnelle linéaire on peut l'interpréter comme une distribution qui permettra une écriture opératoire des équations de bilan thermo-mécanique dans la forme (8).

En pratique prenons par exemple la densité volumique d'énergie interne. Il faut pouvoir décomposer cette densité en une somme de termes sur l'espace des phases: une densité volumique d'énergie interne pour chaque intervalle infinitésimale de rotation cristalline qui représente un constituant. La somme sur le volume de l'agrégat de ces densités donne une densité d'énergie interne pour chaque rotation infinitésimale, c'est à dire une densité "par phase" d'énergie interne. Ensuite, à l'aide de la même transformation pour toute grandeur en jeu, on pourra écrire des bilans thermo-mécaniques locaux "par phase" et non seulement par point géométrique.

De façon plus générale, chaque densité volumique, indépendamment de sa signification physique et de son rôle dans les bilans thermo-mécaniques, peut être décomposée en une somme (continue ou discrète). Cette opération de décomposition, supposée identique pour toute grandeur thermo-mécanique, établie une densité de mesure sur l'ensemble, continu ou discret, sur lequel la somme est évaluée; cette densité sera l'image transformée de la grandeur de départ sur l'ensemble en question. Dans la suite, pour fixer les idées et en accord avec le reste du travail, cet ensemble sera l'espace des tenseurs orthogonaux droits supposés représenter la phase d'un point matériel en tant que orientation cristalline relativement au repère fixe.

On défini d'abord une famille de distributions sur l'espace des fonctions réelles de variable réelle, paramétré par un réel qu'on appelle "approximation". Les distributions de la famille doivent converger, au sens des distributions, vers un Dirac lorsque leur approximation tend vers zéro[31]. Pour une approximation non nulle, la mesure qui engendre une distribution de ce type est donc une mesure approchée de la mesure de Dirac considérée "exacte".

Ensuite, la métrique d_Z de l'ensemble des phases Z étant choisie, on considère la fonction distance obtenue de d_Z en fixant une phase: la composition d'une mesure approchée avec cette fonction d_Z est une mesure approchée dans l'espace des phases. Ceci permet l'écriture de distributions, paramétrées par une approximation, qui opèrent sur l'espace des fonctions de variable dans Z. En particulier ceci permet la partition de la fonction unité dans Z.

Pour adapter l'outil d'observation qu'on bâti aux exigences de légitimité du modèle, on identifie l'approximation à la distance caractéristique b_Z qui mesure les limites d'observation sur Z.

Ensuite, une phase étant fixée dans Z, on considère la composition de la fonction distance avec la fonction de phase: on obtient ainsi une distribution d'observation qui opère sur l'espace des fonctions à support dans le milieu continu et à valeurs dans l'espace des phases. Moyennant cette observation on peut transformer une fonction de variable d'espace géométrique en une fonction de variable dans l'espace des phases qui a la signification d'une partition de la moyenne volumique de la fonction primitive sur l'ensemble des constituants presents dans ce volume.

Le dernier passage se fait en considérant un élément de volume de milieu continu microscopique en tout point d'un milieu continu macroscopique: les moyennes sur les volumes micro peuvent, sous les conditions usuelles de représentativité, représenter les variables macroscopiques au point macroscopique en objet. Par conséquent l'observation précédemment

---

30 On rappelle que cette taille est liée aux limites d'observations et mesures actuelles. Un événement est, selon la terminologie usuelle, un couple point géométrique-instant dans l'espace-temps.

31 La convergence au sens des distributions implique la donnée d'une classe de fonctions test. On considère à cette fin la classe des fonctions indéfiniment dérivables donnant les conditions de convergence les plus sévères.

introduite permet d'affecter une moyenne microscopique à toute phase et à tout point macroscopique, ce qui est une transformation d'une fonction de variable d'espace d'un milieu continu hétérogène microscopique en une fonction dans l'espace "profond" produit cartésien de l'espace géométrique macroscopique et de l'espace des phases.

4.2. Définitions préliminaires.

4.2.1. Espace des phases.

Dans la suite plusieurs restrictions seront imposées pour le choix d'un espace des phases sur lequel les opérations envisagées ont un sens. Pour faciliter la lecture en disposant d'un exemple constant de référence on considère un espace des phases qui résume toute propriété réquise. Dans la première partie de ce chapitre on a donné un cadre plus étendu sur ce sujet.

On considère donc l'exemple d'un polycristal à cristaux CFC avec phase égale à l'orientation cristalline locale. Selon la propriété mécanique ou géométrique à laquelle on s'intéresse le réseau cristallin manifeste des symétries différentes; sans entrer dans les détail on prend par exemple $Z=[0,2\pi[\times[0,\pi/2[\times[0,\pi/2[$ domaine repéré selon un système d'angles d'Euler dans l'espace métrique, curviligne tridimensionnel des orientations Z (Cf. [Dluzewski 1991] aussi pour la suite).

On note a_i (i=1...3) les vecteurs d'une base covariante; on appelle, avec la notation classique, $(q^1,q^2,q^3)=(\varphi_1,\phi,\varphi_2)\in Z$ les coordonnées contravariantes angles d'Euler:

$$\varphi_1\in[0,2\pi[\ ;\ \phi\in[0,\frac{\pi}{2}[\ ;\ \varphi_2\in[0,\frac{\pi}{2}[\qquad 62$$

$$\xi = q^i a_i = \varphi_1 a_1+\phi a_2+\varphi_2 a_3$$

Pour cet exemple particulier la distance entre deux orientations distinctes est un réel dans l'intervalle ouvert $]0,2\pi[$ égale à l'angle de rotation entre ces orientations:

$$d_Z:(\xi,\zeta)\in Z\times Z\rightarrow d_Z(\xi,\zeta)\in[0,2\pi[\subset R^+\ ;\ d_Z(\xi,\zeta)=0\leftrightarrow\xi=\zeta \qquad 63$$

Pour une orientation de référence ξ fixée dans Z hors de l'ensemble $\{(\varphi_1,0,\varphi_2)\in Z\}$, la distance est une fonction ouverte et continue de la topologie de Z à celle usuelle de R: tout intervalle ouvert dans $]0,2\pi[$ est image par $d_Z(\xi,\cdot)$ d'un ouvert dans $Z\setminus(\varphi_1,0,\varphi_2)$ (d'une couronne sphérique de centre ξ).

L'espace des orientations est un espace de produit scalaire; l'espace des rotations (propres) est son espace translation (une rotation étant une opération de translation entre deux orientations) et il est un groupe commutatif sous l'opération de composition (la composition de deux rotations est une rotation). Sur le domaine Z est donc défini un produit scalaire, qu'on note $\langle\cdot,\cdot\rangle_Z$ pour éviter l'écriture du tenseur métrique de Z, et une opération de translation qu'on écrit par addition (i.e. notée +).

Des éléments de volume privilégiés dans Z, dont la mesure associe un réel positif à tout élément de la tribu des parties de Z, sont:

$$dZ = \sin\phi d\varphi_1 d\phi d\varphi_2 \qquad 64$$

et on voit qu'ils sont non dégénérés pour $\phi\neq 0$.

4.2.2. Espaces des fonctions test.

Pour étudier une distribution il faut définir dans quel espace de fonctions elle opère en tant que fonctionnelle, c'est à dire qu'il faut choisir un espace de fonctions test adéquat: plus les conditions imposées sur cet espace sont sevères, plus la fonctionnelle sera générale.

Les fonctions qu'il faudra observer dans notre cas sont des champs thermo-mécaniques: fonctions à valeurs dans R, ou dans R^n, et à support borné dans l'espace-temps, $R^n\times R^+$, et, au moins, continues par morceaux; il peut y avoir de fonctions, comme par exemple la vitesse matérielle, à la dérivée n-ème continue par morceaux. Fait exception à la continuité par morceaux seulement la fonction de phase car elle n'est pas de nature mécanique.

Pour que l'application de la distribution d'observation soit toujours légitime, on choisi comme espaces des fonctions test les espaces des fonctions indéfiniment dérivables à support

borné, ce support étant, selon les différents cas, dans R ou dans R^{n+1} (pour l'espace-temps) ou dans Z (espace métrique des phases). En particulier donc on appelle:

- Φ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support borné dans R:

$$\Phi=\{\varphi(\tau):\tau\in]a,b[\subset R;\ \varphi\in C^\infty\} \qquad 65$$

- Φ_{n+1} l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support borné dans R^{n+1}:

$$\Phi_{n+1}=\{\varphi(\tau):\tau\in B\subset R^{n+1};\ \varphi\in C^\infty\} \qquad 66$$

- Φ_Z l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support borné dans Z:

$$\Phi_Z=\{\varphi(\xi):\xi\in Z_i\subseteq Z;\ \varphi\in C^\infty\} \qquad 67$$

Par ces espaces on obtient des conditions sur les distributions bien plus sévères que celles habituellement nécessaires.

4.3. Mesure dans l'espace des phases.

Le premier pas dans la construction d'une observation approchée des champs mécaniques est la régularisation des informations disponibles sur les phases: les différences trop faibles observées entre phases doivent être négligées.

La façon classique de procéder dans de cas pareils, lorsque, par exemple, un signal fonction du temps est mesuré par un instrument ayant une inertie non nulle, est d'estimer la réponse par le produit de convolution: si f(t) est le signal et g(t)dt la mesure instantanée décrivant l'instrument de mesure, la réponse h(t) est donné par:

$$h(t)=[f*g](t)=\int f(\tau)g(t-\tau)d\tau \qquad 68$$

un instrument idéal (à inertie nulle pour l'exemple en objet où on mesure dans le temps) étant représenté par une distribution de Dirac qui est l'unité pour le produit de convolution:

$$f(t)=[f*\delta](t) \qquad 69$$

Le problème qui se pose dans la transposition de cet opération dans l'espace des phases Z est dans l'interprétation du délai $t-\tau$ selon la métrique de Z et dans l'interprétation du domaine et des mesures d'intégration: l'opération que l'on obtient ne s'écrit pas comme une convolution classique et, surtout, il manque les propriétés de commutativité et distributivité caractéristiques d'un produit.

Si on considère l'orientation cristalline réelle comme un signal et l'orientation mesurée comme la réponse obtenue, on peut facilement imaginer que le système de mesure est continu (petites variations de réponse pour de petites variations du signal) et invariant par translation dans l'espace des orientations cristallines (c'est à dire par rotation). Par contre on ne peut pas affirmer que le système est linéaire car il n'est pas défini un produit par un scalaire dans l'espace des tenseurs orthogonaux droits décrivants les orientations cristallines. Ceci fait (condition nécessaire et suffisante[32]) que le système de mesure des orientations n'est pas décrit par un opérateur de convolution.

Il faut donc construire un opérateur de régularisation de toute information disponible sur les orientations cristallines, suivant l'idée d'un produit de convolution, mais qui ne sera pas linéaire.

Le résultat qu'on va obtenir est de la forme:

$$h(\xi)=\int_Z f(\zeta)\theta(d_Z(\xi,\zeta))dZ \qquad 70$$

où dZ est une mesure réelle privilégiée dans Z, d_Z est la fonction distance dans Z et θ est une densité sur la mesure dZ non linéaire en d_Z, intégrable sur tout sous-ensemble de Z. On voit qu'on peut

32 E.g. F.Roddier "Distributions et transformations de Fourier", Ediscience 1971.

interpréter cette opération en regardant h comme l'image d'une distribution de densité $\theta \propto d_Z(\xi,\cdot)$, qu'on appelle q, par la fonction f:

$$h(\xi)=q\{f;\xi\}=\int_Z f(\zeta)q(\xi,\zeta)dZ \; ; \; q(\xi,\cdot)=\theta \propto d_Z(\xi,\cdot) \;\; \forall \xi \in Z \qquad 71$$

évidemment q joue le rôle d'un observateur donnant la réponse h à un signal f, c'est pour cela qu'on l'appelle "distribution d'observation des phases".

Il faut noter qu'il s'agit d'un cas particulier de distribution car elle est toujours définie par une densité sur la mesure dZ: dans ce cas le terme distribution coïncide avec celui de mesure et avec celui de densité. En outre on se donnera des densités q particulières car définies partout sur Z: le terme de fonction lui est donc aussi approprié. Pour les raisons ci-dessus on écrira "fonction d'observation" pour indiquer q en tant que fonction sur ZxZ et "distribution d'observation" pour l'indiquer en tant que fonctionnelle sur l'espace des fonctions à support Z.

4.3.1. Résolution de mesure.

On rappelle que l'espace des phases Z est un espace métrique; la distance d_Z entre éléments de Z est, par définition:

$$d_Z:(\xi,\zeta)\in ZxZ \rightarrow d_Z(\xi,\zeta)\in R^+ \; ; \; d_Z(\xi,\zeta)=0 \leftrightarrow \xi=\zeta \qquad 72$$

L'argument $t-\tau$ de la mesure $g(t-\tau)d\tau$ a, dans le produit de convolution classique, la signification physique d'une distance entre les événements τ et t (d'un délai de temps et non d'une translation du temps pour l'exemple cité, d'une résolution d'image et non d'une translation dans le langage de l'optique). L'opération qu'on recherche s'écrit donc dans la forme:

$$dh(\xi)=f(\zeta)g(d_Z(\xi,\zeta))dZ(\zeta) \qquad 73$$

où g représente le manque de résolution pour des distances d_Z très petites.

4.3.2. Domaine d'intégration.

Le domaine d'intégration d'un produit de convolution représente l'ensemble des événements donnant un signal qui est supposé influencer la réponse. Par exemple, pour un système causal, la variable d'intégration étant le délai de temps τ entre le signal f et la réponse h, l'intégration est faite dans R^+: l'effet ne peut pas précéder la cause qui le produit.

On voit que la relation (cause-effet ou signal-réponse) entre f et h est prise en compte.

Dans la présente étude on envisage un rapport entre signal f et réponse h qui ne dépend pas du temps. Le choix de l'espace des phases entier Z comme domaine d'intégration est approprié (pourvu que, comme pour l'exemple proposé, il n'y ait pas de symétries dans sa métrique):

$$h(\xi)=\int_Z f(\zeta)g(d_Z(\xi,\zeta))dZ(\zeta) \qquad 74$$

4.3.3. Précision de mesure.

Distribution porte.

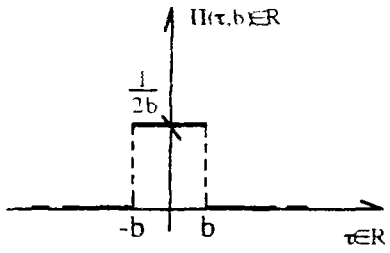
Soit $B(\xi,b)$ une boule ouverte dans Z, centrée dans une phase fixée $\xi \in Z$, de rayon $b \in R^{+*}$, qu'on appelle "boule d'indétermination". On s'attend que seulement les signaux provenants d'un voisinage fini de ξ, défini par l'ensemble $B(\xi,b)$ pour un b fixé, intéressent la phase ξ en réponse. Par conséquent on peut considérer des mesures nulles en dehors des boules $B(\xi,b)$ pour les réponses en ξ, c'est à dire des mesures de support B.

Un premier exemple s'obtient par des distributions "porte":

$$\forall b\in R^+ \quad \Pi\{\varphi;b\}=\begin{cases}=\delta\{\varphi\}=\varphi(0) \text{ si } b=0 \\ =\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}\varphi(\tau)d\tau \text{ si } b\in R^{+*}\end{cases} \quad \forall\varphi\in\Phi \qquad 75$$

Pour tout b positif il s'agit de distributions ayant une densité[33] "porte" $\Pi(\tau;b)$ sommable pour la mesure de Lebsegue $d\tau$ sur tout ensemble compact de R:

$$\Pi(\tau;b)=\begin{cases}0 & \text{pour } |\tau|<b \\ \text{indéf.} & \text{pour } |\tau|=b \\ \frac{1}{2b} & \text{pour } |\tau|>b\end{cases} \qquad 76$$



ce qui permet d'écrire la distribution porte, pour b positif, par:

$$\forall b\in R^{+*} \quad \Pi\{\varphi;b\}=\int\varphi(\tau)\Pi(\tau;b)d\tau \quad \forall\varphi\in\Phi \qquad 77$$

avec:

$$\lim_{b\to 0}\int\varphi(\tau)\Pi(\tau;b)d\tau=\delta\{\varphi\}=\varphi(0) \quad \forall\varphi\in\Phi \qquad 78$$

On considère la famille des distributions obtenues par changement de variable dans les restrictions à R+ (ou à des intervalles de R+) des densités porte moyennant la fonction distance de Z. Cette famille est engendrée par $\xi\in Z$ et paramétrée par b positif:

$$\forall\xi\in Z \text{ (fixé)} \quad \tau\in R^+ \to \zeta\in Z: d_Z(\xi,\zeta)=\tau \qquad 79$$

$$\forall\xi\in Z \ \forall b\in R^{+*} \ \forall\varphi\in\Phi_Z \quad [\Pi\circ d_Z(\xi,\cdot)]\{\varphi;b\}=$$

$$=\int_Z\varphi(\zeta)\Pi(d_Z(\xi,\zeta);b)\langle\frac{\partial d_Z(\xi,\zeta)}{\partial\zeta},d\zeta\rangle_Z=\int_Z\varphi(\zeta)\Pi(d_Z(\xi,\zeta);b)dZ(\xi)$$

où, noté $\langle\cdot,\cdot\rangle_Z$ la dualité dans Z, la mesure "volume" $dZ(\xi)$ dans le point ξ de l'espace Z est obtenue par:

$$dZ(\xi)=\langle\frac{\partial d_Z(\xi,\zeta)}{\partial\zeta},d\zeta\rangle_Z \qquad 80$$

à un intervalle infinitésimale $d\tau$ autour d'un réel positif dans l'axe réel correspond par ce changement de variable une couronne sphérique dans Z autour de ξ (lieu de points à distance égale, à un $d\tau$ près, de ξ); le changement de variable donne donc un repérage polaire des éléments de volume de Z. On peut affirmer que l'opération d'intégration garde sa signification par ce changement de variable et, dans la suite on notera simplement dZ, élément de volume convenablement choisi pour effectuer l'intégration selon mesure de Lebesgue sur Z ([34].

---

33 La densité d'une mesure ou d'une distribution représente une classe de fonctions égales presque partout. Ici par exemple toute fonction porte de la classe est obtenue en précisant les valeurs qu'elle prend en -b et b (les ensembles $\{-b\}\subset R$ e $\{b\}\subset R$ ont mesure de Lebesgue nulle).

34 La fonction distance est continue avec dérivée première continue par morceaux s'il n'y a pas de symétries à l'intérieur de Z. S'il y a des symétries dans l'espace des phases qu'on envisage d'utiliser (comme dans le cas de l'espace des angles d'Euler ou des tenseurs orthogonaux droits pris pour représenter les positions d'un objet ayant de symétries tel que un cristal) il convient de prendre Z espace quotient de l'espace des phases par ces symétries.

Le problème qui se pose pour un tel changement de variable est dans la validité de la définition obtenue du dZ par rapport à la mesure intégrale: le support Z de l'intégration est-il une tribu de parties dZ de ce type? Ces dZ

On considère les cas où le rayon b de la boule d'indétermination prend des valeurs supérieures à la taille caractéristique b_Z qui règne dans Z à cause des limites de mesure: on néglige les signaux trop proches car on ne sait pas les distinguer. La famille des distributions d'observation est donc engendrée par la densité sur la mesure de Lebesgue dZ:

$$\forall \xi \in Z \; \forall b > b_Z \in R^{+*} \quad \Pi(d_Z(\xi,\zeta);b): \zeta \in Z \rightarrow [0,k(b)] \subset R \qquad 81$$

$$\Pi = \begin{cases} k(b) & \text{pour } d_Z(\xi,\zeta) < b \text{ i.e. } \zeta \in B(\xi,b) \\ \text{non définie} & \text{pour } d_Z(\xi,\zeta) = b \\ 0 & \text{pour } d_Z(\xi,\zeta) > b \text{ i.e. } \zeta \notin B(\xi,b) \end{cases} \qquad k(b) = \frac{1}{\int_{B(\xi,b)} dZ} < \frac{1}{\int_{B_Z(\xi)} dZ} = k_Z$$

où la mesure k_Z est une caractéristique de Z représentée par un réel fini[35]. On remarque que la densité Π est normée, bornée partout dans Z, continue par morceaux, avec dérivées nulles sur le bord de la boule B, et qu'elle est douée d'une symétrie de révolution engendrée par la distance:

$$\forall \xi \in Z \; \forall b > b_Z : \quad \begin{cases} \int_Z \Pi(d_Z(\xi,\zeta);b) dZ = 1 \\ \exists M > 0 : \Pi(d_Z(\xi,\zeta);b) \le k(b) < k_Z < M \\ \Pi \in C^1 \text{ p.m.} \\ \forall \zeta' \in \mathring{B} \setminus B \quad \lim_{\zeta \to \zeta'} \Pi^{(n)}(d_Z(\xi,\zeta);b) = 0 \quad \forall n > 1 \\ \forall \zeta', \zeta'' \in Z : d_Z(\xi,\zeta') = d_Z(\xi,\zeta'') \rightarrow \Pi(d_Z(\xi,\zeta');b) = \Pi(d_Z(\xi,\zeta'');b) \end{cases} \qquad 82$$

En particulier la continuité s'explique en rappelant que, une phase étant fixée, la distance en est une fonction à dérivée première continue (continue par morceaux s'il y a des symétries dans la métrique de Z, mais il convient d'utiliser le quotient de Z sans symétries) et que la densité porte est à dérivée première continue.

La distance caractéristique b_Z a une limite inférieure physiquement définie non nulle et donc, bien que mathématiquement vérifiable (par application du théorème de Lebesgue), on ne peut pas faire appel à une propriété de convergence vers la distribution de Dirac dans Z:

$$\forall \xi \in Z \quad \lim_{b \to 0} \int_Z \varphi(\zeta) \Pi(d_Z(\xi,\zeta);b) dZ = \varphi(\xi) \quad \forall \varphi \in \Phi_Z \qquad 83$$

On fixe $b = b_Z$ et on appelle distribution porte celle obtenue pour un tel b. La réponse h à un signal f donné à support dans Z s'écrit donc par la distribution porte:

---

appartiennent à la tribu borélienne donnant ainsi une mesure de Lebesgue? Le changement étant fait par une application non bijective ceci est, en général, à prouver (les supports Z et R ne sont pas homéomorphes).

L'application utilisée pour le changement de variable est la fonction distance d'un point ξ de Z; elle est à valeurs dans $[0,2\pi[\subset R$ (vue sa définition et les symétries de l'ensemble des angles d'Euler). L'image d'une boule ouverte dans Z entourant un point ζ quelconque et ne contenant pas le point ξ de référence est un intervalle ouvert dans R, et tout intervalle ouvert contenu dans $[0,2\pi[$ peut être obtenu comme image de boules de ce type dans Z (le point 0 dans R ne peut être obtenu que pour $\zeta = \xi$). On peut alors considérer l'intégral sur Z après changement de variable comme la somme d'un intégral sur $Z \setminus \{\xi\}$ plus la mesure en ξ de la fonction intégrée. Pour le premier domaine d'intégration les dZ obtenus par changement de variable constituent une tribu (borélienne et donc l'intégrale est de Lebesgue); la mesure dans le point ξ est 1, par définition de Π, et coïncide donc avec la limite des mesures sur $Z \setminus \{\xi\}$ pur $\zeta \rightarrow \xi$.

On peut donc affirmer que, par le changement de variable fait, on obtient une intégral de Lebesgue sur le domaine Z. Le choix du dZ peut donc être fait n'importe comment dans la tribu borélienne de Z dans le but de faciliter les calculs.

35 Pour un espace Z euclidien.

$$k(b) \propto b^{-\dim(Z)} \; ; \; k_Z \propto b_Z^{-\dim(Z)} \qquad 81b$$

$$\forall f \quad h(\xi)=\int_Z f(\zeta)\Pi(d_Z(\xi,\zeta))dZ \quad \text{i.e. } h=[\Pi \triangleleft d_Z(\xi,\cdot)]\{f\} \qquad 84$$

Exemple.

Si on considère par exemple Z=[0,π[(orientation des cristaux plans pour un problème plan) on peut facilement visualiser la distance d_Z et la classe des fonctions Π en objet:

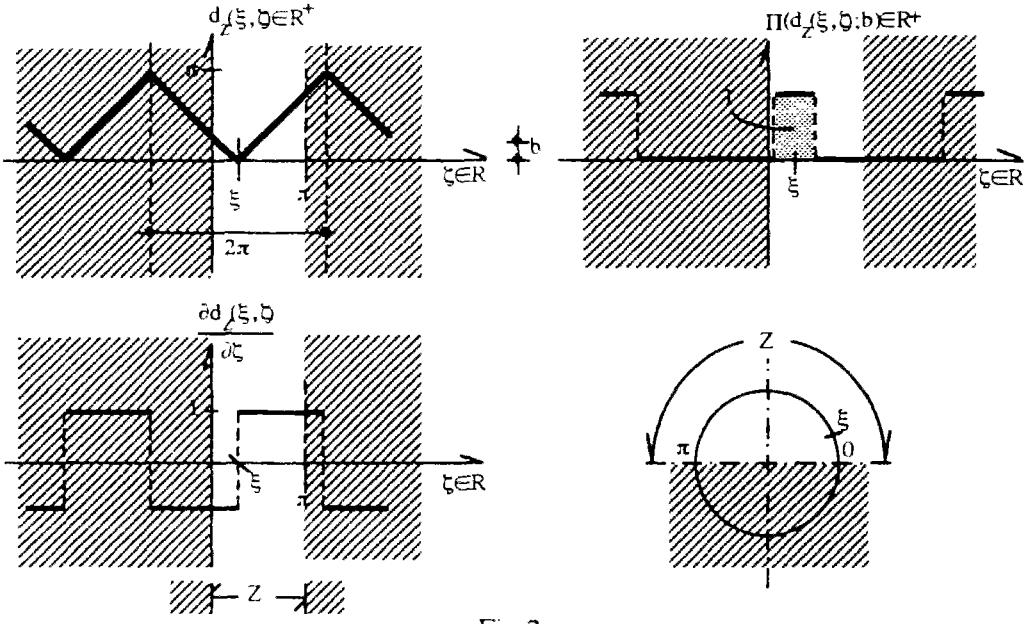


Fig.3:
Fonctions distance et mesure porte pour l'ensemble des orientations sur un demi cercle trigonométrique

Distribution cloche.

L'utilisation d'une distribution porte pour évaluer la réponse à un signal traduit une insensibilité totale de l'instrument de mesure à l'intérieur de la boule d'indétermination de rayon minimal B_Z: la valeur affectée au point ξ par l'instrument de mesure ne représente que la moyenne du champ "réel" dans la boule $B_Z(\xi)$.

En fait on peut s'attendre une plus grande sensibilité, à l'intérieur même de la boule B_Z (éventuellement pour des boules de plus grande dimension) par exemple avec une probabilité de confusion entre deux événements décroissante avec leur éloignement en phase, ce qui introduit l'utilisation de distributions "cloche" pour évaluer la précision de l'instrument de mesure.

Il s'agit de distributions paramétrées par un réel non négatif h, ayant une densité θ sur la mesure de Lebesgue pour tout h positif, on les écrit donc directement sous la forme:

$$\forall h\in R^+ \quad \theta\{\varphi;h\}=\begin{cases}=\delta\{\varphi\}=\varphi(0) & \text{si } h=0\\ =\int_R \varphi(\tau)\theta(\tau;h)d\tau & \text{si } h\in R^{+*}\end{cases} \qquad \forall\varphi\in\Phi \qquad 85$$

Les densités θ, réelles de variable réelle, sont à support dans l'intervalle ouvert borné centré dans l'origine T(h)=]-h,h[, étendues à R par zéro. Elles constituent une famille engendrée par le réel positif h qu'on appelle "approximation":

$$\forall h\in R^+ \ \theta(\tau;h):\tau\in R\rightarrow\begin{cases}\theta\in R^{+*} & \text{pour } \tau\in T(h)\\ \theta=0 & \text{pour } \tau\notin T(h)\end{cases} \qquad T(h)=]-h,h[\subset R \qquad 86$$

La famille des densités θ doit être telle qu'elle assure la convergence, au sens des distributions, vers une distribution de Dirac lorsque l'approximation tend à zéro (l'approximation mesure une distance par rapport à la valeur exacte, donc une approximation nulle donne la valeur exacte):

$$\lim_{h\to 0}\theta\{\varphi;h\}=\lim_{h\to 0}\int_R\varphi(\tau)\theta(\tau;h)d\tau=\delta\{\varphi\}=\varphi(0)\quad\forall\varphi\in\Phi\ (36) \tag{87}$$

Il existe plusieurs suites de densités normées donnant de distributions qui convergent vers un Dirac, et donc beaucoup de choix sont possibles pour θ. Les possibilités diminuent beaucoup si on veut en outre que la mesure θ soit nulle avec ses dérivées sur le bord de T(h).

On peut montrer[37] que, quelque soit h, il existe toujours une fonction positive, à support dans l'intervalle ouvert de rayon h (t(h)=h est monotone, croissante, positive), normée sur R et, en plus indéfiniment dérivable avec toutes ses dérivées nulles sur le bord du support et symétrique:

$$\forall h\in R^+\ \exists\theta:\ \begin{cases}\theta(\tau;h):\begin{cases}\theta\in R^{+*} & \text{pour } \tau\in]-h,h[\subseteq R\\ \theta=0 & \text{pour } \tau\notin]-h,h[\end{cases}\\ \theta(\tau;h)\in C^{\infty}\\ \lim_{h\to h}\theta^{(n)}(\tau;h)=0\quad\forall n\in\{0\}\cup N\\ \forall\tau\ \theta(\tau,h)=\theta(-\tau;h)\end{cases} \tag{88}$$

L'exemple en question, qui est utile pour les applications, est la fonction paramétrée par h>0:

$$\theta(\tau;h)=\frac{\gamma(\tau;h)}{\int_R\gamma(\tau;h)d\tau},\quad \gamma(\tau;h)=\begin{cases}=\exp\left[\dfrac{1}{\left[\dfrac{\tau^2}{h^2}-1\right]}\right] & \text{pour } \tau\in]-h,h[\\ =0 & \text{pour } \tau\notin]-h,h[\end{cases} \tag{89}$$

Le graphe de la fonction a la forme d'une cloche aux bords de plus en plus serrés avec l'augmentation de l'approximation

---

36 Ce qui peut être implique par les trois conditions (suffisantes):

$$\forall h>0\ \exists\alpha\in R\ \ \forall\tau\in]-\alpha,\alpha[\ \ \theta(\tau,h)\geq 0 \tag{87b}$$

$$\lim_{h\to 0}\int_R\theta(\tau;h)d\tau=1 \text{ vrai pour } \theta \text{ normé: } \int_R\theta(\tau;h)d\tau=1\ \forall h$$

$$\forall\alpha\in R\ \forall\tau\notin]-\alpha,\alpha[\ \ \lim_{h\to 0}\theta(\tau,h)=0 \text{ vrai pour } \Gamma(h)=]-t(h),t(h)[\ \forall t(h) \text{ monotone croissante positive}$$

37 E.g. L. Schwartz "Theorie des distributions", Hermann 1966.

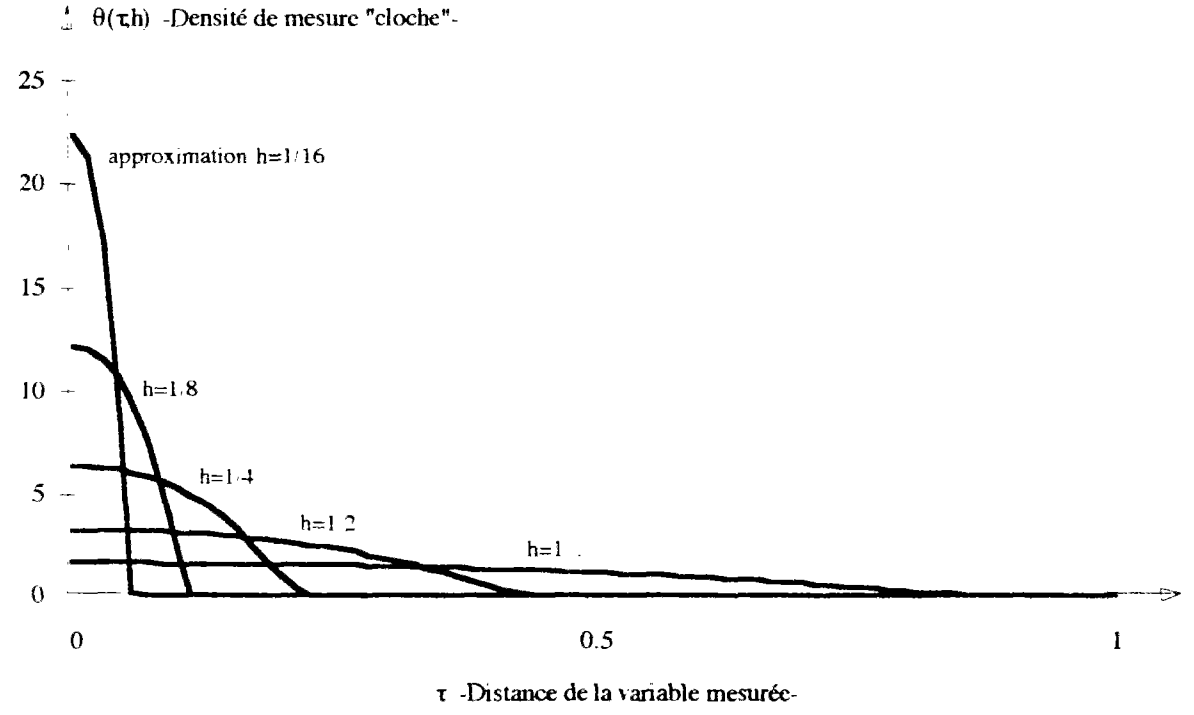


Fig.4: Graphes de densités cloche pour des différentes approximations.

La dérivée de cette fonction est telle que la distribution qui lui correspond tend vers un doublet lorsque l'approximation tend à zéro:

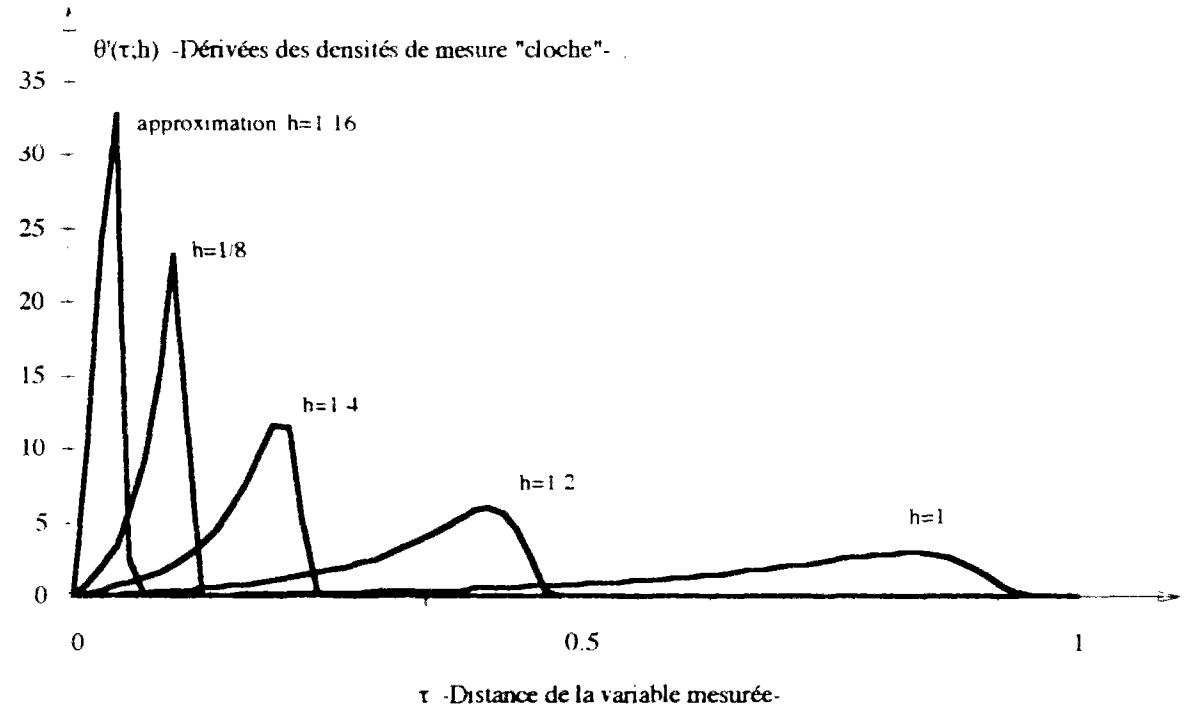


Fig.5: Graphes des dérivées des densités cloche de la figure précédente en valeur absolu.

Ensuite on considère l'observation par une distribution cloche des fonctions (ou plus généralement des distribution) de variable Z. La convergence de ces opérateurs ne doit être assurée que en distance d_Z, et il est donc cohérent que l'approximation de la mesure de l'observation soit la distance caractéristique b_Z fixée sur Z; on note donc:

$$h=b_Z\ ;\ \theta(\tau;b_Z)=\theta(\tau) \qquad 90$$

La raison de ce choix, toujours légitime, est d'avoir une approximation dans l'observation mathématique des variables extensives thermo-mécaniques égale à la résolution avec laquelle elles sont modélisées.

De même que pour la distribution porte on considère le changement de variable (fait pour la restriction des densités à R^+):

$$\forall\xi\in Z\ (\text{fixé})\ \ \tau\in R^+ \rightarrow \zeta\in Z:\ d_Z(\xi,\zeta)=\tau \qquad 91$$

$$\forall\xi\in Z\ \forall\varphi\in\Phi_Z\quad [\theta\circ d_Z(\xi,\cdot)]\{\varphi\}=\int_Z \varphi(\zeta)\theta(d_Z(\xi,\zeta))\left\langle\frac{\partial d_Z(\xi,\zeta)}{\partial\zeta},d\zeta\right\rangle_Z=\int_Z\varphi(\zeta)\theta(d_Z(\xi,\zeta))dZ(\xi)$$

avec:

$$\forall\xi\in Z\ \ \theta(d_Z(\xi,\zeta))=\frac{\gamma(d_Z(\xi,\zeta))}{\int_Z\gamma(d_Z(\xi,\zeta))dZ} \qquad 92$$

$$\gamma(d_Z(\xi,\zeta))=\begin{cases}=\exp\left[\dfrac{1}{\left[\dfrac{d_Z(\xi,\zeta)^2}{b_Z^2}-1\right]}\right] & \text{pour } d_Z(\xi,\zeta)<b_Z \text{ i.e. } \zeta\in B_Z(\xi)\\ =0 & \text{pour } d_Z(\xi,\zeta)>b_Z \text{ i.e. } \zeta\notin B_Z(\xi)\end{cases}$$

La mesure h d'un signal f à support dans l'espace des phases est donc:

$$\forall f\ \ h(\xi)=\int_Z f(\zeta)\theta(d_Z(\xi,\zeta))dZ \ \text{ i.e. }\ h=[\theta\circ d_Z(\xi,\cdot)]\{f\} \qquad 93$$

Comparaison des distributions porte et cloche.

On montre la comparaison graphique de la régularisation par distribution porte et par distribution cloche d'un signal à support dans $[0,\pi[$ (avec symétrie en π de la distance entre orientations):

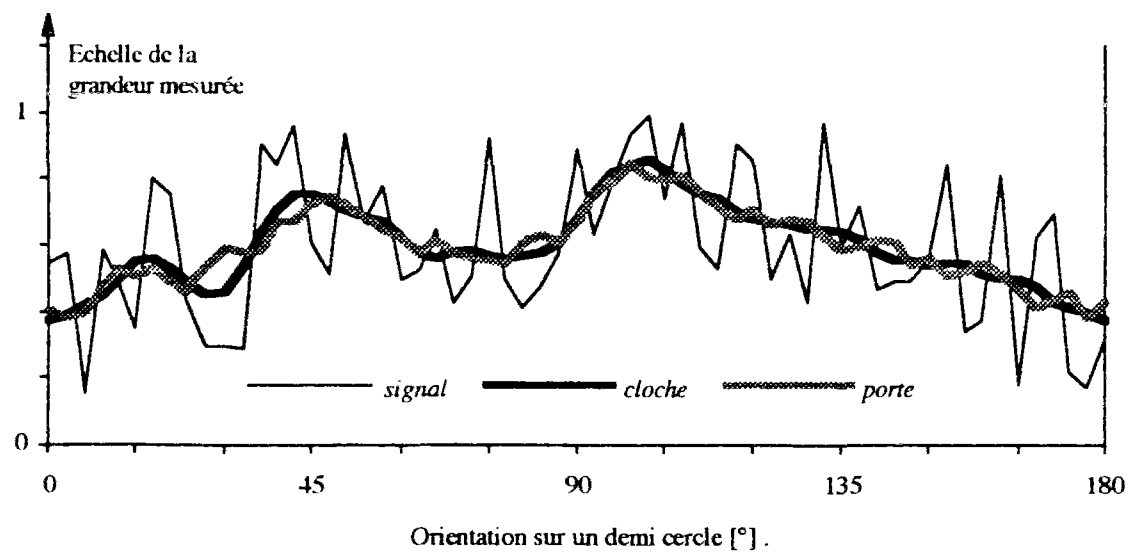


Fig.6:
Comparaison des mesures par distribution cloche et par distribution porte d'un même signal.

La différence la plus remarquable entre les deux régularisations est dans leur continuité. C'est pour cela qu'on utilise, dans la suite, des distributions cloches d'approximation b_Z.

Remarque sur l'observation cloche.

On appelle donc dans la suite "observation par distribution approchée" ou tout simplement "observation approchée" en proximité de la variable $\xi \in Z$ la fonctionnelle $q(\xi,\cdot)$:

$$\forall \xi \in Z \quad q(\xi,\cdot)=\theta \circ d_Z(\xi,\cdot) : f \in \mathfrak{T}_Z \rightarrow \mathfrak{f}(\xi) \in R \qquad 94$$

$$\mathfrak{f}(\xi)=q(\xi,\cdot)\{f\}=\int_Z f(\zeta) q(\xi,\zeta) dZ=\int_Z f(\zeta)\theta(d_Z(\xi,\zeta)) dZ$$

où $\mathfrak{T}_Z$ est l'espace des fonctions de variable dans Z (à valeurs réels). Faisant varier ξ dans Z on obtient donc une transformation par observation approchée:

$$q : f \in \mathfrak{T}_Z \rightarrow \mathfrak{f}=q\{f\} \in \mathfrak{T}_Z \qquad 95$$

En fait la fonction $\mathfrak{f}$ est continue et éventuellement dérivable en tout point ξ_o où la fonction f est continue ou dérivable[38]; sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe d'intégration:

$$\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \xi} = q\left\{\frac{\partial f}{\partial \xi}\right\} + q'\{f\} \qquad 96$$

avec:

$$q'\{f\}=\int f(\zeta)\frac{\partial q(\xi,\zeta)}{\partial \xi} dZ=\int f(\zeta)\theta'(d_Z(\xi,\zeta))\frac{\partial d_Z(\xi,\zeta)}{\partial \xi} dZ \qquad 97$$

En regardant les dérivées des densités cloche, θ', on voit qu'elles constituent une famille dont la distribution converge vers un doublet lorsque l'approximation tend vers zéro (l'application de la distribution doublet δ' à une fonction dérivable donne la valeur dans l'origine de la dérivée de la fonction):

$$\lim_{h \to 0} \theta'\{q;h\}=\delta'\{\varphi\}=\varphi'(0) \quad \forall \varphi \in \Phi \qquad 98$$

On comprend donc une des significations de l'observation approché des constituants d'un agrégat: la dérivée d'une variable observée est la somme de l'observation de sa dérivée et d'une "convection" par dérivation de l'observateur.

Pour l'exemple du polycristal, une variation dans l'énergie interne d'un grain est due à un terme de variation d'énergie à l'intérieur du grain et à l'apport d'énergie par croissance ou décroissance du grain. De même une variation dans l'énergie interne d'un ensemble équi-orienté de grains est due à la variation dans chaque grains plus un apport positif pour tout grain extérieur à l'ensemble qui s'oriente comme celui-ci et un apport négatif pour tout grain de l'ensemble qui se désoriente.

Plus généralement, la dérivation de l'observateur tient compte de l'apport d'une grandeur par changement de phase de parties du constituant (négatif) et par changement de la phase de parties d'autres constituants dans la phase du constituant (positif).

---

38 La continuité de $\mathfrak{f}$ en ξ_o se vérifie si (e.g. L. Schwartz op. cit.):

_le support de la fonction intégrée $(f \circ d_Z)$ est contenu dans un compact fixe lorsque ξ varie dans un voisinage de ξ_o,

_chacune des dérivées partielles par rapport à la variable d'intégration de la fonction intégrée est continue par rapport à la variable d'intégration

La dérivabilité en ξ_o se vérifie si la deuxième des condition ci-dessus devient:

_chacune des dérivées partielles par rapport à la variable d'intégration de la fonction intégrée est dérivable par rapport a ξ dans un voisinage de ξ_o avec dérivées partielles continues par rapport à la variable d'intégration.

On voit donc l'intérêt d'utiliser une distribution d'observation régulière et un espace des phases sans symétrie (ce qui introduirait des singularités dans $\theta \circ d_Z$ moyennant d_Z)

4.4. Observation des phases dans l'espace-temps.

4.4.1. Signification d'une observation dans l'espace-temps.

L'observation approchée introduite donne la régularisée $\hat{f}$ d'une fonction f de variable dans Z. On peut considérer l'application composée:

$$\hat{f}(\zeta(\underline{y},t))=\int_Z f(\eta)\theta(d_Z(\zeta(\underline{y},t),\eta))dZ \quad \forall(\underline{y},t)\in R^n\times R^+ \tag{99}$$

Par cette opération on affecte au point $\underline{y}$ du milieu, à l'instant t, la valeur régularisée de la fonction f qui lui correspond par la fonction de phase.

On rappelle la normalité des mesures d'observation pour tout choix de $\xi\in Z$, qui peut être vue comme une propriété de la fonction unité de $\mathcal{F}_Z$:

$$1(\xi)=\int_Z \theta(d_Z(\xi,\zeta))dZ \; ; \; 1(\cdot)\in\mathcal{F}_Z \; ; \; 1(\xi)=1 \quad \forall\xi\in Z \tag{100}$$

ceci donne a l'ensemble des mesures $\theta(d_Z(\xi,\cdot))dZ$ engendré par $\xi\in Z$ la signification de partition de l'unité sur Z (i.e. toute mesure de l'ensemble est positive et nulle en dehors d'un compact, leur somme sur Z est l'unité).

On peut alors donner à l'opération:

$$\int_{V^*} f(\underline{y},t)\theta(d_Z(\zeta(\underline{y},t),\eta))dV_t=\hat{f}(\eta,t) \quad \forall V^*\subseteq V_t, \forall t, \forall\eta\in Z \tag{101}$$

la signification de somme de la grandeur "F" de densité volumique f, à l'instant t et sur tout point du sous-domaine V*, pondérée par la partie de l'unité relative à la phase η. Le résultat de l'opération est la densité $\hat{f}$ de la même grandeur F sur la phase η.

L'ensemble engendré par $\eta\in Z$ des sommes de ce type de la grandeur F constitue une partition dans Z de la somme de F sur V*:

$$\int_Z \hat{f}(\eta,t)dZ=\int_Z\int_{V^*} f(\underline{y},t)\theta(d_Z(\zeta(\underline{y},t),\eta))dV_t dZ=\int_{V^*} f(\underline{y},t)dV_t=\int_{V^*} F \tag{102}$$

$$\forall V^*\subseteq V_t, \forall t$$

De même on peut définir la "moyenne" d'une fonction f sur une phase η dans un sous-domaine V* à l'instant t:

$$\langle f(\underline{y},t)\rangle_{V^*}(\eta,t)=\frac{\int_{V^*} f(\underline{y},t)\theta(d_Z(\zeta(\underline{y},t),\eta))dV_t}{\int_{V^*}\theta(d_Z(\zeta(\underline{y},t),\eta))dV_t} \; ; \forall V^*\subseteq V_t, \forall t, \forall\eta\in Z \tag{103}$$

mais la somme sur Z de ces moyennes ne donne pas la moyenne de f sur V*.

4.4.2. Remarques.

Pour que des moyennes de ce type soient significatives il faut que la fonction f soit reliée à la phase pour des raisons physiques qu'on veut introduire dans le modèle d'agrégat.

Dans l'exemple du polycristal cité plusieurs fois, si on s'attend que l'énergie interne d'une partie quasi-homogène de l'agrégat (ensemble de grains ou sous-grains équi-orientés à quelque dégrées près) dépend de l'orientation cristalline qui la caractérise, alors l'étude de la moyenne de l'énergie interne sur les phases est significative. Par contre, pour le même exemple, si

on suppose que le champ de température ne dépend pas de la façon dont l'agrégat se découpe en constituants, l'étude de la moyenne par phase de la température n'aura pas de sens.

En fait on verra par quelles hypothèses on peut mener une étude cohérente d'un polycristal basée sur les moyennes sur chaque orientation cristalline des champs thermo-mécaniques appropriés.

4.4.3. Notation et rappels.

Pour simplifier la notation on appelle:

$$q(\zeta(\underline{y},t),\eta)=\theta(d_Z(\zeta(\underline{y},t),\eta)) \qquad 104$$

densité de la mesure de volume qdV. Cette mesure de volume représente, de la façon la moins forte possible, la partition de l'agrégat en constituants: elle est donc la mesure recherchée pour l'écriture simplifiée des bilans thermo-mécaniques d'un agrégat sous la forme (8).

On rappelle les propriétés de la densité[39] q:

$$_q:(\zeta,\xi)\in Z\times Z\rightarrow q(\zeta,\xi)\begin{cases}\in R^{+*} & \text{si } \zeta\in B_Z(\xi)\\ =0 & \text{si } \zeta\notin B_Z(\xi)\end{cases} \qquad q\in C^1\text{p.m.} \qquad 105$$

$$_\forall(\zeta,\xi)\in Z\times Z\ q(\zeta,\xi)=q(\xi,\zeta)$$

$$_\forall\xi\in Z\ \forall\zeta'\in\partial B_Z(\xi)\ \lim_{\zeta\rightarrow\zeta'}\frac{\partial^{(n)}q(\xi,\zeta)}{\partial\zeta^{(n)}}=0\ \ \forall n=0,1$$

$$_\forall\xi\in Z\ \forall\zeta',\zeta'':\ d_Z(\xi,\zeta')=d_Z(\xi,\zeta'')\leftrightarrow q(\xi,\zeta')=q(\xi,\zeta'')$$

et en tant que fonctionnelle q:

$$q(\cdot,\xi)_Z:\varphi\in\Phi_Z\rightarrow q\{\varphi(\zeta);\xi\}_{\xi\in Z}=\int_Z\varphi(\zeta)q(\zeta,\xi)dZ(\zeta)=\varphi^*(\xi)\ \forall\xi\in Z \qquad 106$$

$$q:\varphi\in\Phi_Z\rightarrow\varphi^*\in C^1\text{p.m.}(Z)$$

De même pour la mesure composée avec la fonction de phase:

$$\forall t\ \left|\begin{array}{l}_q\circ\zeta:(\underline{y},\xi)\in V_t\times Z\rightarrow q(\zeta(\underline{y},t),\xi)\begin{cases}\in R^{+*} & \text{si } \zeta(\underline{y},t)\in B_Z(\xi)\\ =0 & \text{si } \zeta(\underline{y},t)\notin B_Z(\xi)\end{cases} \qquad q\circ\zeta\in C^1\text{p.m.}\\ \\ _\forall(\zeta,\xi)\in Z\times Z\ q(\zeta,\xi)=q(\xi,\zeta)\\ \\ _\forall\xi\in Z\ \forall\underline{y}':\zeta(\underline{y}',t)\in\partial B_Z(\xi)\ \lim_{\underline{y}\rightarrow\underline{y}'}\frac{\partial^{(n)}q(\xi,\zeta(\underline{y},t))}{\partial\underline{y}^{(n)}}=0\ \ \forall n=0,1\\ \\ _\forall\xi\in Z\ \forall(\underline{y}',\underline{y}'')\in V_t\times V_t:\ d_Z(\xi,\zeta(\underline{y}',t))=d_Z(\xi,\zeta(\underline{y}'',t))\leftrightarrow q(\xi,\zeta(\underline{y}',t))=q(\xi,\zeta(\underline{y}'',t))\end{array}\right. \qquad 107$$

et pour la fonctionnelle qui en résulte:

---

39 On rappelle aussi que le mot densité est employé dans ce cas pour une plus grande généralité: le q effectivement choisi dans ce travail est défini partout dans Z et on peut donc l'appeler fonction.

$$q(\cdot,\xi)_V:\varphi\in\Phi_{n+1}\rightarrow q\{\varphi(\underline{y},t),\xi\}_{\underline{y}\in V}=\int_V\varphi(\underline{y},t)q(\zeta(\underline{y},t),\xi)dV_t=\varphi^*(\xi,t)\ \forall\xi\in Z,\forall t \qquad 108$$

$$q:\varphi\in\Phi_{n+1}\rightarrow\varphi^*\in C^1\text{p.m.}(Z)$$

4.5. Globalisation.

4.5.1. Introduction.

On appelle globalisation l'opération:

$$\tilde{f}(V^*,\vartheta,t)=\frac{\int_{V^*}f(\underline{y},t)q(\zeta(\underline{y},t),\vartheta)dV_t}{\int_{V^*}dV_t}\quad\forall V^*\in V_t,\forall\vartheta\in Z,\forall t \qquad 109$$

telle que:

$$\int_Z\tilde{f}(V^*,\vartheta,t)dZ=\frac{\int_{V^*}f(\underline{y},t)dV_t}{\int_{V^*}dV_t}=\langle f(\underline{y},t)\rangle_{\underline{y}\in V^*} \qquad 110$$

qui a la signification d'une partition sur l'espace des phases Z des moyennes volumiques instantanées de f faites dans des éléments de volume V*.

Dans la suite on montre la signification de cette opération qui permet de corréler de champs microscopiques de variable $(\underline{y},t)$ dans le volume V* avec des champs "globalisés" (notation $\tilde{}$) de variable $(V^*,\underline{\chi},t)$. En particulier on remarquera que les V* peuvent être choisis sous des conditions très larges (la micro-représentativité et la macro-homogénéité ne sont pas nécessaires bien que suffisantes)

Prises par exemple la fonction f(y) de variable réelle[40] et la fonction de phase z(y) à valeurs dans $[0,\pi[$ reportées ci-dessous:

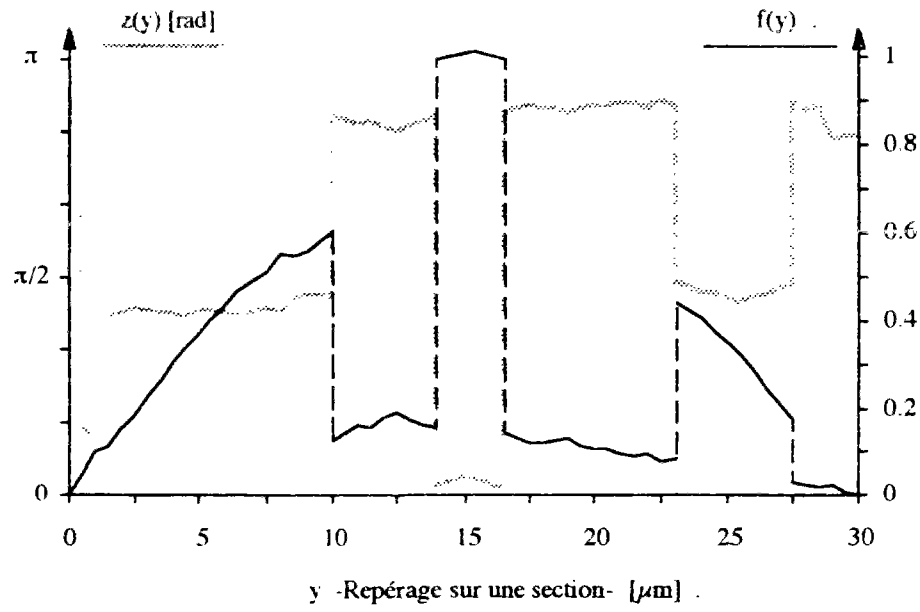


Fig.7: Exemple de fonction f(y) et de fonction de phase z(y).

40 On considère:

$$f(y)=\frac{\sin(z(y))}{z(y)}\sin(\frac{\pi y}{y_{max}}) \qquad 110b$$

avec z(y) généré aléatoirement presque étagée.

l'opération de globalisation de f(y) donne la globalisée $\tilde{f}(z)$ ici comparée avec la globalisée $\tilde{1}(z)$ de l'unité 1(y):

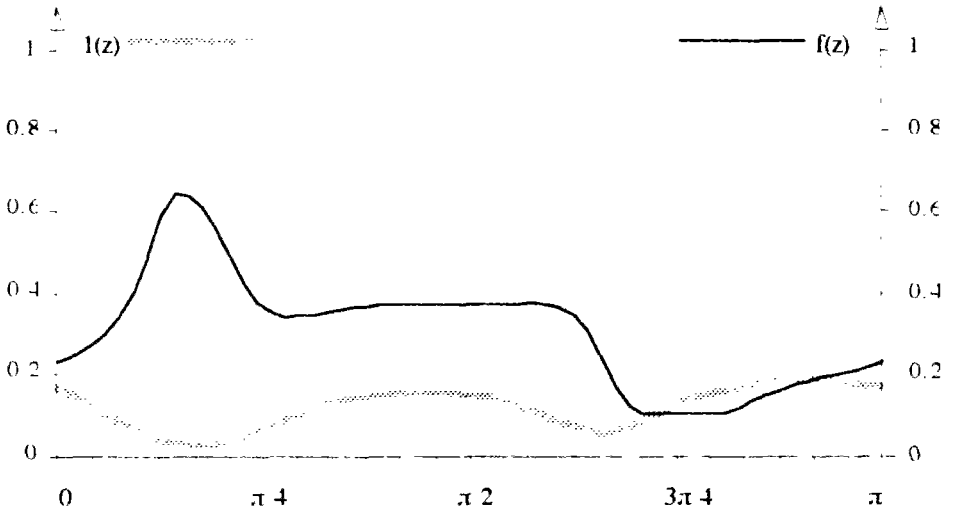


Fig.8:
Graphe de la globalisée f(z) de la fonction f(y) et de l'unité répartie sur le demi-cercle 1(z).

4.5.2. Support de la globalisation.

"Typus".

Dans l'espace euclidien $E \equiv R^n$ on considère le milieu continu hétérogène occupant le domaine $V \subseteq R^n$, introduit pour décrire un agrégat polycristallin, qu'on appellera milieu microscopique ou hétérogène.

On considère des sous-domaines $\tilde{V} \subseteq V$ typiques, c'est à dire tels qu'y soit contenue une partie, significative pour un modèle macroscopique, de l'information disponible sur la structure microscopique de l'agrégat. Ceci nous donne une borne inférieure pour la taille des sous-domaines hétérogènes a prendre en compte par rapport aux mesures géométriques et a l'homogénéité statistique (ou éventuelle périodicité) de la structure microscopique réelle.

On rappelle qu'un élément de volume statistiquement représentatif de l'agrégat pour une certain niveau microscopique contient presque toute information disponible sur la structure à ce niveau et il est donc un cas particulier d'élément de volume typique (propriété d'ergodicité).

"Topos".

Dans le même espace euclidien R^n on considère un milieu continu, occupant le domaine $D \subseteq R^n$, qu'on appellera milieu macroscopique ou homogène.

On considère des sous-domaines $\tilde{D} \subseteq D$ topiques, c'est à dire tels que les champs cinématiques et mécaniques du milieu homogène soient statistiquement bien représentés par leurs moyennes sur ces sous-domaines (ces sous-domaines sont donc macro-homogènes). Ceci donne une borne supérieure, par rapport aux mesures géométriques d'ensemble du problème réel posé, pour la taille des sous-domaines homogènes à utiliser dans ce modèle. On rappelle qu'on considère équivalents les caractères élémentaire et topique d'un élément de volume.

Partition typo-topique.

On superpose au milieu hétérogène le milieu homogène, de façon que:

$$D_t \equiv V_t \quad \forall t \qquad 111$$

On se restreint aux cas réels dans lesquels, microscopique et macroscopique superposés, il existe au moins une partition "typique" et une partition "topique" des milieux coïncidentes. On remarque que cela coïncide, pour un problème d'homogénéisation, à postuler valable le lemme de macro-homogénéité de Hill pour les éléments de volume représentatifs choisis.

On appelle $\tilde{\nabla}$ un sous-domaine quelconque, typique et topique, de cette partition et, dans la suite, on focalise l'attention sur ce sous-domaine, dit "typo-topique" (sous de conditions plus sevères, toujours valables pour notre but, ce sous-domaine peut être un élément de volume macro-homogène représentatif). C'est sur des éléments de volume de ce type que l'opération de globalisation a un sens physique précis.

4.5.3. Globalisation des masses.

Masses par phase dans un sous-domaine typique.

On considère des sous-domaines hétérogènes $\tilde{\nabla}\subseteq V\subseteq R^n$ typiques, donc l'opération d'observation par phase est applicable (statistiquement significative) à l'intérieur et sur la surface de ces sous-domaines.

La structure microscopique est identifié, à l'instant t, par:

$$\underline{y}\in\tilde{\nabla}_t\subseteq R^n\ ;\ \zeta=\zeta(\underline{y},t)\in Z_t\subseteq Z \qquad 112$$

(On remarque que le rang de la fonction des phases dans Z évolue dans le temps donnant une suite de Z_t).

On peut définir la densité de masse d'une phase ϑ sur la mesure du sous-domaine typique à l'instant t (masse moyenne dans la phase):

$$\rho(\tilde{\nabla}_t,\vartheta,t)=\frac{\int_{\tilde{V}_t}\rho(\underline{y},t)q(\zeta(\underline{y},t),\vartheta)dV_t}{\int_{\tilde{V}_t}dV_t} \qquad 113$$

Masses par phase d'un sous-domaine topique.

On considère que, à l'intérieur des sous-domaines $\tilde{D}\subseteq D$ macro-homogènes (topiques), les champs cinématiques et mécaniques du milieu homogène sont presque coïncidents avec leurs moyennes.

La configuration macroscopique à l'instant t est:

$$\underline{x}\in\tilde{D}_t\subseteq R^n\ ;\ \vartheta\in Z_t\subseteq Z \qquad 114$$

Grâce à sa définition, on peut identifier les grandeurs volumiques à l'intérieur d'un sous-domaine topique avec leurs moyennes sur le même sous-domaine. Pour les masses on écrit:

$$\rho(\underline{x},\vartheta,t)\approx\rho(\tilde{D}_t,\vartheta,t)=\frac{\int_{\tilde{D}_t}\rho(\underline{x},\vartheta,t)dV_t}{\int_{\tilde{D}_t}dV_t} \qquad 115$$

Globalisation des masses.

En comparant les expressions données pour les masses totales d'un sous-domaine typo-topique (i.e. on impose l'égalité des masses du modèle microscopique et macroscopique):

$$\rho(\tilde{D}_t,\vartheta,t)=\rho(\tilde{\nabla}_t,\vartheta,t)\rightarrow\rho(\underline{x},\vartheta,t)\approx\frac{\int_{\tilde{V}_t}\rho(\underline{y},t)q(\zeta(\underline{y},t),\vartheta)dV_t}{\int_{\tilde{V}_t}dV_t} \qquad 116$$

Par cette expression considérée exacte on obtient la définition d'une masse volumique "globalisée" obtenue à partir de la masse volumique d'un corps hétérogène et de l'observation approchée de ses constituants:

$$\rho(\underline{\mathfrak{x}},\vartheta,t)=\tilde{\rho}(\underline{\mathfrak{x}},\vartheta,t)=\frac{\int_{\tilde{V}_t(\underline{\mathfrak{x}})}\rho(\underline{\mathfrak{y}},t)q(\zeta(\underline{\mathfrak{y}},t),\vartheta)dV_t}{\int_{\tilde{V}_t(\underline{\mathfrak{x}})}dV_t} \qquad 117$$

sous condition que le sous-domaine $\tilde{V}_t(\underline{\mathfrak{x}})$ (entourant le point macroscopique $\underline{\mathfrak{x}}$ à l'instant t, soit typique et topique (i.e. suffisamment grand pour représenter la structure microscopique et suffisamment petit pour que les champs "globalisés" soient homogènes dans le modèle macroscopique).

4.6. Conclusion.

On a défini une fonctionnelle d'observation qui opère sur les fonctions de variable dans l'espace-temps avec une approximation donnée. Cette approximation a été reliée à la précision de mesure par laquelle les phases peuvent être déterminées.

Par un procédé analogue a celui suivi ci-dessus pour les masses on peut obtenir les expressions de l'énergie interne globalisée, des puissances globalisées et des dissipations globalisées. Ceci permet de comparer un modèle microscopique hétérogène de milieu continu classique avec la partie géométrique d'un milieu continu profond prise comme modèle macroscopique. Les résultats de cette comparaison s'écrivent dans la forme, ici pour une grandeur de densité massique microscopique u et macroscopique U (selon ce qui vient d'être montré, la masse volumique macroscopique est la masse volumique microscopique globalisée):

$$\tilde{\rho}U = \tilde{\rho u} \qquad 118$$

comme on verra dans le chapitre suivant.

5. Conclusion.

On a introduit d'abord la définition de fonction de phase et on a étudié en général le rapport entre constituants d'un agrégat. Ensuite on a approfondi la définition de phase par des exemples et on a étudié l'espace des tenseurs orthogonaux droits choisi comme espace des phases du modèle de polycristal proposé. Finalement on a défini une fonctionnelle donnant une image approchée d'un agrégat.

L'opération, de "globalisation", ainsi définie doit être appliquée aux variables d'un milieu continu ayant une fonction de phase définie en tout point et à valeurs dans un espace métrique; la précision par laquelle cette fonction peut être déterminée rentre dans la définition de la fonctionnelle.

Dans le Chapitre VI on considère un milieu avec fonction de phase représentant un polycristal au niveau microscopique: par globalisation les champs fonctions de la position microscopique deviennent de champs fonction du sous-domaine support de l'opération (et donc de la position macroscopique qui l'identifie) et de la phase variable dans un espace métrique. La globalisation permet donc de passer d'un modèle microscopique d'un polycristal au milieu continu profond correspondant.

C H A P I T R E VI

Equivalence microscopique

1. Introduction.

La finalité de ce chapitre est l'explication des équations et l'identification des grandeurs introduites dans la formulation du modèle de polycristal dans l'espace profond, présenté dans la Deuxième Partie, moyennant les définitions classiques de la mécanique et de la thermodynamique des milieux continus suivant des processus irréversibles. Cette identification sera faite en comparant le modèle dans l'espace profond avec un modèle dans l'espace classique, leurs échelles géométriques étant différentes.

Avec cette finalité, le premier objectif visé est l'étude thermo-mécanique d'un milieu continu équivalent, au sens d'une observation approchée par globalisation, d'un milieu hétérogène constitué de cristaux homogènes (polycristal). En appelant "phase" une orientation du réseaux cristallin, le milieu équivalent sera considéré selon une partition sur un ensemble métrique de phases, et il sera donc appelé "milieu à phase continue". Ensuite, on identifiera le rapport entre ce milieu à phase continue et le milieu continu profond objet du Chapitre IV. Il en résultera des relations d'équivalence entre grandeurs définies dans les deux milieux qui clarifieront la signification mécanique et thermodynamique du milieu continu profond[1].

Le premier objectif poursuivi dans ce chapitre est l'étude du milieu à phase continue.

Un tel milieu est un modèle de corps hétérogène obtenu en plaçant ce corps dans l'espace géométrique-temps classique et en observant ses parties matérielles selon une fonction de phase continue et une opération d'observation approchée (telle que au Chapitre V). Par cette observation les grandeurs matérielles définies en fonction de la position géométrique et du temps (e.g. l'énergie interne de toute partie du corps dans le temps est définie moyennant sa densité volumique, fonctions de la position et du temps, et une opération d'intégration sur le domaine occupé par la partie en objet à l'instant donné) sont transformées en des fonctions de la phase et du temps. Toujours en tenant compte de la même fonctionnelle d'observation, les équations usuelles de bilan (global, entre grandeurs définies suivant un domaine matériel fini, ou local, entre les densités volumiques et surfaciques de ces grandeurs, définies en tout point géométrique et instant) sont transformées en équations entre fonctions de la phase et du temps. Dans ces équations transformées apparaissent de termes d'échange entre phases.

Cette première partie du chapitre permet donc de dégager la forme de toute équation de bilan thermo-mécanique entre grandeurs fonctions des phases lorsque l'ensemble des phases est un espace métrique: il existe, outre les termes usuels (variation de la densité massique, apports volumique et surfacique, production), de termes d'échange entre phases. Ceci introduit l'objectif de la deuxième partie du chapitre qui est la compréhension des bilans thermo-mécaniques écrits dans l'espace profond.

Dans l'espace profond les grandeurs matérielles en bilan ont de densités par point géométrique et par phase dans le temps. Dans les formes locales de ces bilans (équations d'équilibre, conservation de la masse et de l'énergie interne, inégalité de Clausius-Duhem) apparaissent donc des termes qui n'ont pas lieu d'être pour un milieu continu classique. Dans la deuxième partie du présent chapitre on verra donc comment ces termes peuvent être expliqués en tant que représentants des échanges de masse, quantité de mouvement, énergie interne et entropie entre phases.

---

[1] Il s'agit de relations entre concepts la signification physique d'un tel modèle ne pouvant être dégagée que lors d'une identification expérimentale.

2. Milieu microscopique.

2.1. Introduction.

On se donne la finalité de simuler un agrégat polycristallin, ayant une structure cristalline et morphologique mutuellement données, par un modèle thermo-mécanique de milieu continu hétérogène constitué de phases homogènes, ces phases étant caractérisées par la donnée locale instantanée d'une fonction. On suppose cette fonction, dite de phase, à valeurs dans un espace métrique, continue par morceaux et dérivable avec dérivée continue presque partout dans le domaine occupé par le milieu.

L'objectif de cette première partie du chapitre est l'explication des équations de bilan de masse, quantité de mouvement, énergie et entropie pour ce type de milieu continu, dit à phase continue.

On se place dans le cadre de la thermo-mécanique des milieux continus suivant de processus irréversibles. En particulier on va considérer la thermodynamique d'un milieu à plusieurs constituants disjoints: l'état d'ensemble du système peut être décrit, en ignorant l'état local à l'intérieur de chaque constituant, en fonction des seuls échanges (de masse, quantité de mouvement, énergie et température) entre constituants (Cf. Ch.V § 2.3.).

On suppose que toute l'information dont on veut disposer sur la structure du polycristal peut être explicitée localement, c'est-à-dire qu'il y a, en tout point du milieu modèle, un espace métrique, de dimension finie ou infinie, dont les point représentent l'état de la structure au sens souhaité (indépendamment de l'état des autres points). L'état auquel on fait référence ici n'est pas l'état thermodynamique tel qui peut être déterminé par un ensemble de variables d'état, mais une caractérisation plus intrinsèque du matériau constituant la matière, tel que c'est défini dans le chapitre précédent, et qu'on a appelé état radical.

L'état radical employé dans la suite pour un polycristal est l'orientation dans l'espace géométrique absolu de son réseau cristallin: pour une échelle géométrique suffisamment petite on dispose d'un état radical caractérisant localement le milieu.

On rappelle que l'état radical est une caractérisation locale de la matière liée à sa structure dans le sens préféré pour le problème à traiter; par exemple, pour un polycristal, il peut dépendre de sa structure cristalline ou de la morphologie des grains. L'état radical d'un point matériel est un concept intrinsèque à la base de son comportement: le comportement, écrit par un ensemble de relations constitutives, dépend de l'échelle de la description mécanique (espace-temps) et des processus décrits, tandis que l'état radical de la matière n'en dépend pas. En particulier il faut remarquer que l'état radical est décrit par rapport à une échelle qui lui est pertinente, selon la convenance du modèle, mais que cette échelle ne dépend pas des échelles mécaniques choisies.

On considère comme appartenant à la même phase deux points d'un corps dans le même état radical. Vu le manque de détermination par lequel un tel état radical ne peut que être décrit, on apprécie cette équivalence entre points matériels selon l'opération de globalisation introduite dans le chapitre précédent.

L'exemple correspondant est, idéalement, un grain homogène d'un polycristal ou un ensemble de grains homogènes ayant la même orientation du réseau cristallin.

L'état thermodynamique de deux points dans la même phase (même état radical) est décrit par le même ensemble de variables et par des potentiels de même forme si et seulement si les deux points sont décrits au même niveau (mêmes échelles d'espace géométrique et de temps) et ils suivent le même type de processus[2].

Dans l'exemple en objet l'ensemble d'un polycristal est représenté dans un seul niveau et il est supposé suivre, au moins avant bifurcation, l'unique branche d'un processus thermo-mécanique stable; par conséquent chaque ensemble de grains équi-orientés manifeste le même comportement. Par contre, après bifurcation, ce comportement ne dépendra pas seulement de l'état radical mais aussi de la branche suivie: dans le cas d'une bande de cisaillement les grains équi-orientés placés à l'intérieur d'une bande ont toujours un même comportement, mais celui-ci diffère, en principe, du comportement des grains hors bande ayant la même orientation.

---

[2] Il ne faut pas négliger l'importance du processus dans le choix des variables d'état: on considère un élément de volume d'un polycristal, dont l'état radical est décrit par l'orientation du réseau cristallin dans l'espace, et on suppose que ce polycristal se trouve au delà d'un point de bifurcation, de façon que cet élément peut se trouver en équilibre sur deux branches différentes du processus (e.g. l'une avec une bande de cisaillement et l'autre non); on voit alors que deux états thermodynamiques macroscopiques peuvent différer même s'ils sont relatifs au même état radical.

2.2. Notes préliminaires.

2.2.1. Phase pour un polycristal.

A cause de sa microstructure cristalline et des directions privilégiées dans les réseaux qui en découlent, un polycristal est un agrégat hétérogène et, localement, anisotrope. La nature des déformations irréversibles, vues à l'échelle des cristaux, fait que le mouvement des petites particules matérielles n'est pas solidaire avec le mouvement des réseaux. On peut donc affirmer que, dans un polycristal, l'anisotropie locale et sa distribution volumique (régissant l'hétérogénéité qui nous intéresse) évoluent de façon non matérielle. Le comportement d'un tel agrégat est engendré par cette anisotropie et par cette hétérogénéité, et on peut, donc, affirmer qu'il évolue de façon non matérielle.

On envisage de suivre l'évolution de l'hétérogénéité due aux anisotropies locales dans les polycristaux en utilisant tout de même une cinématique de milieu homogène: ne pouvant pas suivre l'évolution de l'anisotropie moyennant le transporteur de la matière, il faudra introduire une variable cinématique de nature non matérielle. Cette variable est donc un trièdre placé dans le référentiel absolu, par conséquent la phase est la rotation qui superpose les axes du repère choisi aux axes cristallins locaux (liée à ceux de l'anisotropie)[3].

On peut représenter ces phases tant dans l'espace des tenseurs orthogonaux droits de l'espace géométrique absolu que dans l'espace des angles d'Euler correspondant. Ce dernier étant à métrique non euclidienne, on préfère la première représentation, bien que moins compacte, pour sa nature euclidienne.

On remarque que, en introduisant dans la suite le trièdre de référence **e** avec une échelle géométrique différente de celle du trièdre **E** du Chapitre IV, les images de $Q=L_{orth}(E,E)$ par ces deux bases coïncident. Cependant on utilise dans ce chapitre la notation $Q_{\mathbf{e}}$ distinguée de la Q_E du Chapitre IV pour des raisons de clarté en relation au contexte.

2.2.2. Configurations et fonction de phase.

On se place dans un référentiel d'espace géométrique absolu à métrique euclidienne, $E \equiv R^n$ (n=2 ou 3), et chronologie d'intervalles de temps (avec instants positifs), $\chi \equiv R^{+*}$, et on y introduit un repère $\mathcal{R}$ doué d'un système **e** de n axes orthonormés $\mathbf{e}_i$ (i=1...n) bases d'un système de coordonnées cartésiennes.

Soit V le domaine occupé par le milieu continu dans R^n. A l'instant zéro il est identifié par l'ensemble des n-uples positions y_i des points de matière $\mathcal{M}$ par rapport aux axes du repère; ces positions seront les références pour une description lagrangienne du mouvement:

$$\forall \mathcal{M} \in \mathcal{B} \quad \underline{y}(\mathcal{M}) \in V_0 \subseteq R^n \qquad 1$$

A l'instant t on a les n-uples positions $\underline{y}_t$:

$$\forall t \in \chi, \forall \mathcal{M} \in \mathcal{B} \quad \underline{y}(\mathcal{M},t) \in V_t \subseteq R^n \; ; \; \underline{y}(\mathcal{M},0) = \underline{y}(\mathcal{M}) \qquad 2$$

Soit $\zeta_t(\mathcal{M})$ la phase représentant l'état radical du point matériel $\mathcal{M}$ à l'instant t.

On suppose qu'il existe à tout instant une application donnant la phase pour tout point matériel; on suppose en outre que l'image de cette application varie dans un domaine Z_t dans l'espace métrique Q, qui ne dépend ni de la position géométrique du point $\mathcal{M}$, ni du point matériel $\mathcal{M}$ particulier dans $\mathcal{B}$:

$$\forall t \in \chi \quad \exists \zeta_t : \mathcal{B} \rightarrow Z_t \subseteq Q \qquad 3$$

Par la (1) on peut donc définir une "fonction de phase" sur la configuration initiale pour tout instant de temps:

---

[3] On note que cette définition de phase permet de développements simples au niveau cinématique et mécanique, mais ne peut pas être employé directement comme variable d'état. A cette fin il faudrait plutôt considérer la rotation relative matériau matière.

$$\forall t\in\chi, \forall \mathcal{M}\in\mathcal{B}\ \ \zeta_o(\underline{y}(\mathcal{M}),t)=\zeta_t(\mathcal{M}) \qquad 4$$

$$\zeta_o: V_0 x\chi \rightarrow Q$$

et par la (2), pour un instant de temps donné, on peut définir une fonction de phase actuelle sur toute configuration actuelle:

$$\forall t\in\chi, \forall \mathcal{M}\in\mathcal{B}\ \ \zeta(\underline{y}(\mathcal{M},t),t)=\zeta_t(\mathcal{M}) \qquad 5$$

$$\forall t\in\chi\ \ \zeta: V_t \rightarrow Z_t$$

ces deux fonctions donnant la même valeur pour un même point matériel à tout instant.

On omet dans la suite la notation des points matériels dans les fonctions $\zeta_o(y,t)$ et $\zeta(\underline{y},t)$ supposées continues et dérivables avec dérivées continues (au moins par morceaux).

2.2.3. Partition en phase continue.

On peut, tant en description lagrangienne que eulerienne, considérer toute somme sur un volume (ou sur une surface) hétérogène selon une partition en phases moyennant l'opération d'observation par phase introduite au Chapitre V ($\vartheta\in Q$, on note dQ l'élément différentiel de Q au lieu que dV_{Qt}, notation du Chapitre IV, car on veut remarquer qu'il ne s'agit plus d'un volume matériel comme dans l'espace profond):

$$\int_{V^*}\ldots dV_t = \int_Q \int_{V^*}\ldots q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t dQ \quad (4) \qquad 6$$

Par conséquent toute grandeur volume-continue (donc masses, puissances virtuelles, énergies, entropie) peut être prise en partition sur les phases selon la fonctionnelle d'observation ci-dessus.

En écrivant les bilans usuels pour le milieu à phase continue par cette fonctionnelle d'observation on pourra mettre en évidence des termes d'échange entre phases (notamment de quantité de mouvement, d'énergie interne, d'énergie cinétique et d'entropie) qui sont nuls en somme sur l'ensemble des phases.

Le domaine d'intégration V*, support de la fonctionnelle d'observation, n'est pas de taille arbitraire, mais fonction de la description de l'état radical du milieu (Cf. Ch.V § 2.4.5.). On note V_{tq} l'ensemble des sous-domaines de V_t qui peuvent être choisis à cette fin. On rappelle que tout élément de cet ensemble est de taille supérieure à une taille limite fixée pour des raisons de pertinence du modèle.

On peut considérer V_t généré par l'union de sous-domaines de taille minimale à l'intérieur desquels le modèle n'est plus fiable qu'en moyenne.

2.2.4. Lemme fondamental.

Classiquement, on applique le lemme fondamental pour déduire les bilans locaux à partir des bilans globaux postulés dans tout sous-domaine du milieu. En particulier, on postule d'habitude la validité d'un bilan global dans tout sous-domaine aussi petit qu'il faut pour que les fonctions intégrées y soient régulières et de signe constant.

Comme on a remarqué ci-dessus, l'hétérogénéité engendre une taille caractéristique sur le milieu continu à phase continue. Par conséquent toute fonctionnelle à support dans les parties de V_t (donc la fonctionnelle d'observation, mais aussi toute puissance d'origine mécanique ou thermique) opère dans des sous-domaines $V^*\subseteq V_{tq}$ dont la taille minimale n'est pas arbitraire. Par

---

4 On rappelle, entre autres, la condition de normalité:

$$\int_Q q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t dQ = dV_t \quad \forall \underline{y}\in V_t, \forall t \qquad 6b$$

conséquent les conditions qu'on peut déduire pour les fonctions locales intégrées sont moins sévères que d'habitude, et les résultats locaux ne peuvent être obtenus qu'à un champ non observable près.

On appelle "non observable de volume", et on note O_{V^*}, tout champ, éventuellement fonction de la phase ϑ et de n'importe quel ordre tensoriel, qui vérifie:

$$\int_{V^*} O_{V^*}(\underline{y},\underline{\underline{\vartheta}},t)dV=0 \quad \forall \underline{\underline{\vartheta}}\in Q_e, \forall V^*\subseteq V_{tq}, \forall t \qquad 7$$

Si le champ est surfacique la condition s'écrit par rapport à la surface ∂V^* de tout $V^*\subseteq V_{tq}$; la dénomination du champ est alors de "non observable de surface" et sa notation est $O_{\partial V^*}$.

En cohérence avec les arguments menant à la définition de la fonctionnelle d'observation dans le Chapitre V, on fait une hypothèse sur les systèmes qui peuvent être représentés par ce le modèle:

- toute fonctionnelle linéaire d'une fonction non observable de volume (ou de surface) à support dans V_{tq} (ou sur la surface d'un élément de V_{tq}), est négligeable:

$$\forall \mathcal{F}: \mathcal{F}\left\{O_{V^*}(\underline{y},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right\}_{y\in V^*}=0 \quad \forall \underline{\underline{\vartheta}}\in Q_e, \forall V^*\subseteq V_{tq}, \forall t \qquad 8$$

$$\forall \mathcal{G}: \mathcal{G}\left\{O_{\partial V^*}(\underline{y},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right\}_{y\in \partial V^*}=0 \quad \forall \underline{\underline{\vartheta}}\in Q_e, \forall V^*\subseteq V_{tq}, \forall t$$

2.3. Cinématique.

On fait l'hypothèse que le mouvement du corps est indépendant du point de vue cinématique de son état radical, c'est-à-dire que le milieu demeure continu au cours du mouvement même à l'interface entre phases (absence de filtration). Par conséquent on introduit une cinématique classique qui n'est pas en relation avec la partition du milieu en phases.

2.3.1. Description lagrangienne.

On choisi la configuration à l'instant zéro comme configuration de référence pour une description lagrangienne du mouvement; les inconnues lagrangiennes sont les transformations Y qui identifient la configuration actuelle (à l'instant t):

$$Y:(\underline{y},t)\in V_0 x T \rightarrow \underline{y}\in V_t \qquad 9$$

Les transports convectifs des vecteurs matériels, de leurs produits scalaires et des scalaires matériels (dont la masse volumique ρ) sont donnés respectivement par le gradient de la transformation F (transporteur de la matière), par le tenseur de dilatations de Cauchy C et par le déterminant du gradient de la transformation J (v_0 et v_t, ainsi que w_0 et w_t, images d'un vecteur matériel à l'instant 0 et t respectivement):

$$\underline{\underline{F}}(\underline{y},t)=\nabla_y Y(\underline{y},t) \;;\; \underline{\underline{C}}(\underline{y},t)=\underline{\underline{F}}^T\cdot\underline{\underline{F}}(\underline{y},t) \;;\; J(\underline{y},t)=\det\underline{\underline{F}}(\underline{y},t) \qquad 10$$

$$v_t=\underline{\underline{F}}(\underline{y},t)\cdot v_0 \;;\; w_t\cdot v_t=w_0\cdot\underline{\underline{C}}(\underline{y},t)\cdot v_0 \;;\; \rho_0(\underline{y})=J_y(\underline{y},t)\rho(Y(\underline{y},t),t)$$

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange, mesurant la déformation, est défini par:

$$\underline{\underline{L}}(\underline{y},t)=\frac{1}{2}\left[\underline{\underline{C}}(\underline{y},t)-\underline{\underline{I}}\right] \qquad 11$$

2.3.2. Description eulerienne.

On se place dans la configuration actuelle à un instant t pour une description eulerienne du mouvement. Les inconnues euleriennes sont les vitesses u des points matériels à l'instant t:

$$\underline{y}\in V_t \ ; \ u(\underline{y},t)\in U^n\subseteq L(R;R^n) \qquad 12$$

La conservation de la masse donne localement (le ° indique la dérivée matérielle, i.e. faite suivant le point $\mathcal{M}$):

$$\mathring{\rho}(\underline{y},t) = \frac{\partial\rho(\underline{y},t)}{\partial t} + \mathrm{div}_y\left[\rho(\underline{y},t)u(\underline{y},t)\right] = 0 \qquad 13$$

positions actuelles $\underline{y}$, vitesses u et accélérations γ sont reliées par :

$$u(\underline{y},t) = \mathring{\underline{y}} \ ; \ \underline{\gamma}(\underline{y},t) = \mathring{u}(\underline{y},t) = \frac{\partial u(\underline{y},t)}{\partial t} + \mathrm{grad}_y u(\underline{y},t)\cdot u(\underline{y},t) \qquad 14$$

Selon une théorie du premier gradient, l'évolution actuelle des produits scalaires des vecteurs matériels est donné par le taux de déformation qui est la partie symétrique du gradient des vitesses, le taux de rotation étant sa partie antisymétrique:

$$\mathring{\underline{v}}_t = \mathrm{grad}_y u(\underline{y},t)\cdot\underline{v}_t \ ; \ \overline{(\underline{w}_t\cdot\underline{v}_t)}^{\circ} = 2\underline{w}_t\cdot\mathrm{symgrad}_y u(\underline{y},t)\cdot\underline{v}_t \qquad 15$$

2.3.3. Transport.

La comparaison entre description lagrangienne et eulerienne montre que les vitesses euleriennes sont les dérivées, partielles par rapport au temps, des transformations lagrangiennes, et que l'image par transport contravariant en configuration actuelle du tenseur vitesse de déformation de Green Lagrange est le tenseur taux de déformation:

$$u(\underline{y},t) = \mathring{\underline{y}} = \frac{\partial Y(Y^{-1}(\underline{y},t))}{\partial t} \qquad 16$$

$$\mathrm{grad}_y u(\underline{y},t) = \underline{\underline{\mathring{F}}}(Y^{-1}(\underline{y},t),t)\cdot\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{y},t) \ ; \ \mathrm{symgrad}_y u(\underline{y},t) = \underline{\underline{F}}^{-T}(\underline{y},t)\cdot\underline{\underline{\mathring{L}}}(Y^{-1}(\underline{y},t),t)\cdot\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{y},t)$$

où la dérivée matérielle de toute grandeur définie sur la configuration initiale (Y, F et L ci-dessus) en est la dérivée partielle par rapport au temps, les axes e_i du repère étant fixés et le point y sur la configuration initiale étant aussi fixé:

$$\underline{\underline{\mathring{F}}}(\underline{y},t) = \frac{\partial F_{ij}}{\partial t}(\underline{y},t)e_i\otimes e_j \qquad 17$$

2.4. Mécanique.

2.4.1. Mouvements rigidifiants.

On considère une description eulerienne du mouvement et, d'après l'hypothèse que la cinématique est indépendante de la structure de la matière, on fait l'hypothèse classique pour les mouvements rigidifiants ($A=L_{as}(E,E)$):

$$u_R(\underline{y},t) = u_o(t)+\underline{\underline{\varpi}}(t)\cdot\underline{y}\in U_R(u_o,\underline{\underline{\varpi}})\subseteq U^n \ ; \ \forall u_o\in U^n, \forall\underline{\underline{\varpi}}\in A_e, \forall t \qquad 18$$

2.4.2. Vitesses et puissances virtuelles.

On considère des vitesses virtuelles indépendantes des phases (i.e. le mouvement dans l'espace géométrique des points matériels ne dépend pas de leur état radical):

$$\underline{u}_V(\underline{y}) \in U_V \subseteq U^n \qquad 19$$

Evidemment cette hypothèse est significative tant qu'on écrit des bilan sur des éléments de volume suffisamment grands par rapport à la longueur d'onde des éventuels champs de vitesse de filtration, ce qui explique, avec un autre argument, la limite inférieure imposée pour la taille des sous-domaines V* sur lesquels on opère.

On écrira la puissance virtuelle des efforts extérieurs comme une forme linéaire sur les vitesses virtuelles dans le volume et sur la surface, et la puissance virtuelle des efforts intérieurs comme une forme masse-continue locale, en cohérence avec la cinématique exposée, selon une théorie du premier gradient.

On se place en configuration actuelle, on considère un sous-domaine $V^* \subseteq V_{tq}$ et la partition en phases de l'élément de volume actuel dV_t. On écrit les puissances virtuelles tant pour le sous-domaine V* dans son ensemble que comme somme sur Q des puissances virtuelles dans les phases de V*.

Puissance virtuelle des efforts extérieurs:

$$P^*_{ext}(t) = \int_{V^*} \rho(\underline{y},t)\underline{p}(\underline{y},t)\cdot \underline{u}_V(\underline{y})dV_t + \int_{\partial V^*} \underline{T}(\underline{y},t)\cdot \underline{u}_V(\underline{y})dS_t = \qquad 20$$

$$= \int_Q \left\{ \int_{V^*} \rho(\underline{y},t)\underline{p}(\underline{y},t)\cdot \underline{u}_V(\underline{y})q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t + \int_{\partial V^*} \underline{T}(\underline{y},t)\cdot \underline{u}_V(\underline{y})q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dS_t \right\} dQ = \int_Q P^*_{ext}(\underline{\underline{\vartheta}},t)dQ$$

où, ainsi que dans la suite, on considère la notation simplifiée:

$$P_{ext}(\underline{u}_V, V^*, t) = P^*_{ext}(t) \;\; ; \;\; P_{ext}(\underline{u}_V, V^*, \underline{\underline{\vartheta}}, t) = P^*_{ext}(\underline{\underline{\vartheta}}, t) \qquad 21$$

Puissance virtuelle des accélérations:

$$P^*_{acc}(t) = \int_{V^*} \rho(\underline{y},t)\underline{\gamma}(\underline{y},t)\cdot \underline{u}_V(\underline{y})dV_t = \qquad 22$$

$$= \int_Q \int_{V^*} \rho(\underline{y},t)\underline{\gamma}(\underline{y},t)\cdot \underline{u}_V(\underline{y})q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t dQ = \int_Q P^*_{acc}(\underline{\underline{\vartheta}},t)dQ$$

Puissance virtuelle des efforts intérieurs:

$$P^*_{int}(t) = \int_{V^*} \left[A(\underline{y},t)\cdot \underline{u}_V(\underline{y}) - \underline{\underline{t}}(\underline{y},t) : \mathrm{grad}_{\underline{y}} \underline{u}_V(\underline{y}) \right] dV_t = \qquad 23$$

$$= \int_Q \int_{V^*} \left[A(\underline{y},t)\cdot \underline{u}_V(\underline{y}) - \underline{\underline{t}}(\underline{y},t) : \mathrm{grad}_{\underline{y}} \underline{u}_V(\underline{y}) \right] q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t dQ = \int_Q P^*_{int}(\underline{\underline{\vartheta}},t)dQ$$

2.4.3. Axiome d'objectivité.

On compare les deux écritures du principe des puissances virtuelles pour le milieu à phase continue, obtenues selon qu'on considère ledit milieu dans son ensemble ou selon une partition en phases, pour obtenir un corollaire valable dans les mouvements virtuels d'une phase

quelconque ou, ce qui revient au même, la définition d'une puissance virtuelle échangée entre phases.

On dégage d'abord les conséquences du premier axiome du principe, postulant l'objectivité de la puissance des efforts intérieurs, et après celles du deuxième axiome, définissant l'équilibre.

Pour l'ensemble.

Si on ne considère pas le milieu selon sa partition en phases, l'axiome du principe des puissances virtuelles définissant le caractère interne en référentiel galiléen de la puissance des efforts intérieurs, donne le résultat ($S=L_S(E,E)$):

$$P^*_{int}(u_R,t)=0 \ \forall u_R\in U_R, \forall V^*\subseteq V_{tq}, \forall t \rightarrow \begin{cases} \int_{V^*} A(\underline{y},t)dV_t=0 \\ \int_{V^*}\left[\underline{y}\otimes A(\underline{y},t)-\underline{\underline{t}}(\underline{y},t)\right]dV_t\in S_e \end{cases} \quad \forall V^*\subseteq V_{tq} \qquad 24$$

et donc, compte tenu des (8) (i.e. toute fonctionnelle linéaire d'un champ non observable est nulle):

$$P^*_{int}(t) = -\int_{V^*} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{y},t):\mathrm{grad}_y u_V(\underline{y})dV_t \ ; \ \underline{\underline{\sigma}}\in S_e \qquad 25$$

Par phase.

Pour le milieu considéré selon une partition en phases on considère l'axiome d'objectivité pour chaque phase séparément:

$$P^*_{int}(u_R,\underline{\underline{\vartheta}},t)=0 \ \forall u_R\in U_R, \forall \underline{\underline{\vartheta}}\in Q_e, \forall V^*\subseteq V_{tq}, \forall t \rightarrow \qquad 26$$

$$\rightarrow \begin{cases} \int_{V^*} A(\underline{y},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t=0 \\ \int_{V^*}\left[\underline{y}\otimes A(\underline{y},t)-\underline{\underline{t}}(\underline{y},t)\right]q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t\in S_e \end{cases} \quad \forall \underline{\underline{\vartheta}}\in Q_e, \forall V^*\subseteq V_{tq}, \forall t$$

et on obtient par les (8):

$$P^*_{int}(\underline{\underline{\vartheta}},t) = -\int_{V^*} \underline{\underline{\sigma_q}}(\underline{y},t):\mathrm{grad}_y u_V(\underline{y})q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t \ ; \ \underline{\underline{\sigma_q}}\in S_e \qquad 27$$

Comparaison. Contrainte.

Si on compare les puissances virtuelles de efforts intérieurs obtenues par les deux descriptions de l'éléments de volume du milieu faites (la puissance des efforts intérieurs d'ensemble est la somme sur l'ensemble des phases de la puissances observées par phase), on voit que les champs de contrainte σ et σ_q coincident grâce à l'hypothèse (8), à un champ non observable de volume près[5]:

$$P^*_{int}(t) = \int_Q P^*_{int}(\underline{\underline{\vartheta}},t)dQ \ \forall u_V\in U_V, \forall V^*\subseteq V_{tq}, \forall t \qquad 28$$

$$\downarrow$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{y},t)=\underline{\underline{\sigma_q}}(\underline{y},t)+\underline{\underline{Q}}_{V^*}(\underline{y},t) \ \forall \underline{y}\in V_t, \forall t$$

On peut en conclusion affirmer que l'écriture de l'axiome d'objectivité du principe des puissances virtuelles pour de puissances internes fonctions des phases défini le même tenseur de

5 La contrainte σ a été introduite par l'application du principe des puissances virtuelles à l'ensemble du milieu, tandis que la σ_q découle du même principe appliqué par phase: ce n'est pas, donc, le même champ en tout point microscopique $\underline{y}$.

contrainte qu'on obtient pour des puissances indépendantes des phases si on néglige toujours et partout les fonctions non observables. Par cette hypothèse (8) la différence des deux champs de contrainte n'a pas d'effet sur les fonctionnelles linéaires de ces champs.

2.4.4. Condition d'équilibre.

Pour l'ensemble.

L'axiome du principe des puissances virtuelles définissant l'équilibre mécanique à l'instant t dans un référentiel galiléen donne, le lemme fondamental ne pouvant pas être appliqué aux sous-domaines $V^* \subseteq V_{tq}$, la condition instantanée d'équilibre valable sur toute partie suffisamment étendue du milieu à phase continue:

$$P^*_{ext}(t) + P^*_{int}(t) = P^*_{acc}(t) \quad \forall u_V \in U_V, \forall V^* \subseteq V_{tq} \rightarrow \tag{29}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \int_{V^*} \left\{ \rho(\underline{\underline{y}},t)\left[\underline{\underline{p}}(\underline{\underline{y}},t)-\underline{\underline{\gamma}}(\underline{\underline{y}},t)\right]+\mathrm{div}_y \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{y}},t) \right\} dV_t = 0 \\ \qquad\qquad \forall V^* \subseteq V_{tq} \\ \int_{\partial V^*} \left[T(\underline{\underline{y}},t)-\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{y}},t)\cdot n(\underline{\underline{y}},t) \right] dS_t = 0 \end{cases}$$

Par phase.

Le même axiome s'écrit pour le milieu considéré selon sa partition en phases:

$$\int_Q \left[P^*_{ext}(\underline{\underline{\vartheta}},t)+P^*_{int}(\underline{\underline{\vartheta}},t) \right] dQ = \int_Q P^*_{acc}(\underline{\underline{\vartheta}},t) dQ \quad \forall u_V \in U_V, \forall V^* \subseteq V_{tq} \rightarrow \tag{30}$$

$$\overset{(6)}{\rightarrow} \int_Q \int_{V^*} \left\{ \rho(\underline{\underline{y}},t)\left[\underline{\underline{p}}(\underline{\underline{y}},t)-\underline{\underline{\gamma}}(\underline{\underline{y}},t)\right] q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{y}},t),\underline{\underline{\vartheta}})+\mathrm{div}_y\left[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{y}},t) q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{y}},t),\underline{\underline{\vartheta}})\right] \right\} \cdot u_V(\underline{\underline{y}}) dV_t dQ +$$

$$+ \int_Q \int_{\partial V^*} \left[T(\underline{\underline{y}},t)-\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{y}},t)\cdot n(\underline{\underline{y}},t) \right] \cdot u_V(\underline{\underline{y}}) q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{y}},t),\underline{\underline{\vartheta}}) dS_t dQ = 0$$

$$\forall u_V \in U_V, \forall V^* \subseteq V_{tq} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \int_{V^*} \left\{ \rho(\underline{\underline{y}},t)\left[\underline{\underline{p}}(\underline{\underline{y}},t)-\underline{\underline{\gamma}}(\underline{\underline{y}},t)\right]+\mathrm{div}_y \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{y}},t) \right\} q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{y}},t),\underline{\underline{\vartheta}}) dV_t + \int_{V^*} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{y}},t)\cdot \mathrm{grad}_y q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{y}},t),\underline{\underline{\vartheta}}) dV_t = 0 \\ \qquad\qquad \forall \underline{\underline{\vartheta}} \in Q_e, \forall V^* \subseteq V_{tq} \\ \int_{\partial V^*} \left[T(\underline{\underline{y}},t) -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{y}},t)\cdot n(\underline{\underline{y}},t) \right] q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{y}},t),\underline{\underline{\vartheta}}) dS_t = 0 \qquad \forall \underline{\underline{\vartheta}} \in Q_e, \forall V^* \subseteq V_{tq} \end{cases} \tag{31}$$

---

6 Le lemme de Gauss donne

$$\int_Q \int_{V^*} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{y}},t)\cdot \mathrm{grad}_y u_V(\underline{\underline{y}}) q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{y}},t),\underline{\underline{\vartheta}}) dV_t dQ = \tag{30b}$$

$$= \int_Q \int_{\partial V^*} n(\underline{\underline{y}},t)\cdot\left[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{y}},t) q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{y}},t),\underline{\underline{\vartheta}})\right]\cdot u_V(\underline{\underline{y}}) dS_t dQ + \int_Q \int_{V^*} \mathrm{div}_y\left[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{y}},t) q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{y}},t),\underline{\underline{\vartheta}})\right]\cdot u_V(\underline{\underline{y}}) dV_t dQ$$

Comparaison. Force échangée.

La définition des puissances par phase et de celles d'ensemble permet d'introduire une puissance mécanique échangée entre phases dont la somme sur l'ensemble des phases doit être toujours nulle:

$$\forall u_V \in U_V, \forall V^* \subseteq V_{tq}, \forall t \qquad 32$$

$$\int_Q \left[P^*_{ext}(\underline{\underline{\vartheta}},t)+P^*_{int}(\underline{\underline{\vartheta}},t) \right] dQ = \int_Q P^*_{acc}(\underline{\underline{\vartheta}},t)dQ$$

$$\updownarrow$$

$$P^*_{ext}(\underline{\underline{\vartheta}},t)+P^*_{int}(\underline{\underline{\vartheta}},t)=P^*_{acc}(\underline{\underline{\vartheta}},t)+P^*_{exc}(\underline{\underline{\vartheta}},t)\ \forall \underline{\underline{\vartheta}} \in Q_e, \forall P^*_{exc}: \int_Q P^*_{exc}(\underline{\underline{\vartheta}},t)dQ=0$$

La densité volumique de cette puissance échangée P^*_{exc}, et par conséquent la force qui lui est associée, peut être obtenue directement de la définition ci-dessus moyennant les résultats précédents:

$$P^*_{exc}(\underline{\underline{\vartheta}},t)=\int_{V^*} \underline{f}_{exc}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot u_V(\underline{\chi})dV_t \qquad 33$$

$$\underline{f}_{exc}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)=\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\chi},t)\cdot \mathrm{grad}_{\chi} q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\chi},t),\underline{\underline{\vartheta}})\ \ \forall \underline{\underline{\vartheta}} \in Q_e, \forall \underline{\chi} \in V_t, \forall t$$

D'après la comparaison entre la condition d'équilibre pour l'ensemble du milieu (29) et celle par phase (31) on vérifie que la somme sur l'ensemble des phases des forces f_{exc} échangées entre elles est non observable de volume:

$$\int_{V^*} \int_Q \underline{f}_{exc}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)dQdV_t=0\ \ \forall V^* \subseteq V_{tq}, \forall t \qquad 34$$

En conclusion on voit que, si on écrit le principe des puissances virtuelles en prenant une phase isolée d'un ensemble continu de phases, on obtient une condition d'équilibre (formule (31)) dans laquelle apparaît le tenseur de contrainte de Cauchy classique, à un champ négligeable près, et une force échangée entre phases dont la somme sur l'ensemble des phases est négligeable.

Le même procédé pour mettre en évidence une puissance échangée entre phases peut être suivi en comparant les écritures d'ensemble et par phase des bilans d'énergie totale et d'entropie.

2.5. Thermodynamique.

2.5.1. Bilan d'énergie.

On compare les bilans d'énergie totale écrits pour le milieu dans son ensemble et pour le milieu considéré selon sa partition en phases afin d'établir la forme du bilan d'énergie totale pour une phase quelconque ou, ce qui revient au même, pour définir un taux d'énergie échangée entre phases.

Pour l'ensemble.

On considère un sous-domaine $V^* \subseteq V_{tq}$ et on écrit les énergies, interne et cinétique, et les puissances, calorifique et des efforts extérieurs, reçues par ce sous-domaine. Ensuite on écrit la conservation de l'énergie totale. Le théorème de l'énergie cinétique étant valable en absence de filtration[7], on déduit le bilan d'énergie interne du bilan de l'énergie totale.

---

7 En présence de filtration ce n'est que la partie "principale" de l'énergie cinétique qui, par définition, vérifie ledit théorème, mettant en évidence une partie "de turbulence". Dans ce cas le théorème de l'énergie cinétique sert en fait d'axiome de l'énergie cinétique principale et la définition d'une énergie cinétique de turbulence s'impose avant de dégager le concept d'énergie interne.

L'énergie interne, l'énergie cinétique, la puissance calorifique et la puissance des efforts extérieurs sont définies par les densités volumiques et surfaciques (notation simplifiée: $E(V^*,t)=E^*(t)$):

$$E^*(t) = \int_{V^*} \rho(\underline{y},t)e(\underline{y},t)dV_t \qquad 35$$

$$K^*(t) = \frac{1}{2}\int_{V^*} \rho(\underline{y},t)u(\underline{y},t)\cdot u(\underline{y},t)dV_t$$

$$C^*(t) = \int_{V^*} r(\underline{y},t)dV_t - \int_{\partial V^*} q(\underline{y},t)\cdot n(\underline{y},t)dS_t$$

$$P^*_{ext}(t) = \int_{V^*} \rho(\underline{y},t)p(\underline{y},t)\cdot u(\underline{y},t)dV_t + \int_{\partial V^*} T(\underline{y},t)\cdot u(\underline{y},t)dS_t$$

Le théorème de l'énergie cinétique (obtenu par le principe des puissances virtuelles appliquée aux mouvements réels) donne:

$$\overset{\circ}{K}{}^*(t) = P^*_{acc}(t) = P^*_{ext}(t)+P^*_{int}(t) \quad \forall V^* \subseteq V_{tq}, \forall t \qquad 36$$

Le bilan d'énergie totale est:

$$\overset{\circ}{E}{}^*(t)+\overset{\circ}{K}{}^*(t) = P^*_{ext}(t)+C^*(t) \quad \forall V^* \subseteq V_{tq}, \forall t \qquad 37$$

Le bilan d'énergie interne (on rappelle que l'écriture locale de ces bilans ne peut pas être obtenue à cause des restrictions sur le choix de V^*):

$$\overset{\circ}{E}{}^*(t) = -P^*_{int}(t)+C^*(t) \quad \forall V^* \subseteq V_{tq}, \forall t \qquad 38$$

$$\int_{V^*} \rho(\underline{y},t)\overset{\circ}{e}(\underline{y},t)dV_t = \int_{V^*} \left[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{y},t):\mathrm{grad}_y u(\underline{y},t) + r(\underline{y},t) - \mathrm{div}_y q(\underline{y},t)\right]dV_t \quad \forall V^* \subseteq V_{tq}, \forall t$$

Par phase.

On considère le sous-domaine $V^* \subseteq V_{tq}$, on écrit les énergies, interne et cinétique, observées par phase dans ce sous-domaine (notation simplifiée: $E(V^*,\vartheta,t)=E^*(\vartheta,t)$):

$$E^*(t) = \int_Q \int_{V^*} \rho(\underline{y},t)e(\underline{y},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t dQ = \int_Q E^*(\underline{\underline{\vartheta}},t)dQ \qquad 39$$

$$K^*(t) = \frac{1}{2}\int_Q \int_{V^*} \rho(\underline{y},t)u(\underline{y},t)\cdot u(\underline{y},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t dQ = \int_Q K^*(\underline{\underline{\vartheta}},t)dQ$$

on écrit un bilan d'énergie totale par constituant en prenant les dérivées matérielles des énergies par phase ci-dessus faites à ϑ fixé[8] (on garde la même notation car ϑ ne dépend pas du temps):

---

8 Le point matériel qu'on suit dans le calcul d'une dérivée matérielle n'est pas du même type au niveau macroscopique que et niveau microscopique

- au niveau microscopique il s'agit d'une particule de matière (classique), donc, par exemple, la dérivée matérielle d'un intégral de volume d'une grandeur volumique est l'intégrale massique de la dérivée matérielle de la grandeur volumique correspondante, on en déduit que la fonction d'observation doit être dérivée sous le signe d'intégrale avec la variable observée;
- au niveau macroscopique la point matériel est placé dans l'espace profond, c'est à dire qu'il est en même temps un point géométrique et une phase et donc, par exemple, ce n'est que avec les intégrales volumiques profondes qu'on peut utiliser la règle de dérivation citée.

On en déduit que, pour que les dérivées matérielles microscopiques et macroscopiques soient compatibles il faut effectuer les premières à phase de référence (ϑ) fixée

$$\left[E^*(\underline{\underline{\vartheta}},t)+\overset{\circ}{K}^*(\underline{\underline{\vartheta}},t)\right] = P^*_{ext}(\underline{\underline{\vartheta}},t)+C^*(\underline{\underline{\vartheta}},t)+R^*(\underline{\underline{\vartheta}},t) \quad \forall \underline{\underline{\vartheta}}\in Q_e, \forall V^*\subseteq V_{tq}, \forall t \qquad 40$$

$$\int_{V^*}\rho(\underline{\underline{\chi}},t)\left[\overset{\circ}{c}(\underline{\underline{\chi}},t)+\underline{\gamma}(\underline{\underline{\chi}},t)\cdot u(\underline{\underline{\chi}},t)\right]q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t+\int_{V^*}\rho(\underline{\underline{\chi}},t)\left[e(\underline{\underline{\chi}},t)+\frac{1}{2}u(\underline{\underline{\chi}},t)\cdot u(\underline{\underline{\chi}},t)\right]\overset{\circ}{q}(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t=$$

$$=\int_{V^*}\rho(\underline{\underline{\chi}},t)\underline{p}(\underline{\underline{\chi}},t)\cdot u(\underline{\underline{\chi}},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t+\int_{\partial V^*}\underline{T}(\underline{\underline{\chi}},t)\cdot u(\underline{\underline{\chi}},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dS_t+$$

$$+\int_{V^*}r(\underline{\underline{\chi}},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t-\int_{\partial V^*}\underline{q}(\underline{\underline{\chi}},t)\cdot n(\underline{\underline{\chi}},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dS_t+R^*(\underline{\underline{\vartheta}},t)$$

$$\forall \underline{\underline{\vartheta}}\in Q_e, \forall V^*\subseteq V_{tq}, \forall t$$

où $R^*(\vartheta,t)$ est la puissance reçue par échange avec les autres phases qui est en même temps de nature thermique et mécanique, et qu'on va préciser de suite. Par définition R^*, de même que P^*_{exc}, doit être nulle en somme sur l'ensemble des phases.

Comparaison. Energie échangée.

En comparant les deux bilans d'énergie, ayant transformé les intégrales de surface en intégrales de volume par le lemme de Gauss, on obtient l'expression par phase de R^* (en intégrant (40) sur l'ensemble des phases Q, si on tient compte de la condition d'équilibre et du bilan d'énergie interne pour le milieu dans son ensemble, on voit que R^* est nul en somme sur Q):

$$R^*(\underline{\underline{\vartheta}},t) = \qquad 41$$

$$=\int_{V^*}\rho(\underline{\underline{\chi}},t)\left[e(\underline{\underline{\chi}},t)+\frac{1}{2}u(\underline{\underline{\chi}},t)\cdot u(\underline{\underline{\chi}},t)\right]\overset{\circ}{q}(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t-\int_{V^*}\left[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\chi}},t)\cdot u(\underline{\underline{\chi}},t)-\underline{q}(\underline{\underline{\chi}},t)\right]\cdot \mathrm{grad}_{\underline{\underline{\chi}}}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t$$

$$\forall \underline{\underline{\vartheta}}\in Q_e, \forall V^*\subseteq V_{tq}, \forall t$$

On peut obtenir une condition d'objectivité de la puissance échangée entre phases en imposant qu'elle est invariante lorsqu'au champ des vitesses réelles u on rajoute une vitesse de l'observateur v constante dans le temps et arbitraire[9]:

$$u'(\underline{\underline{\chi}},t)=u(\underline{\underline{\chi}},t)+v \;;\; R^{*\prime}(\underline{\underline{\vartheta}},t)-R^*(\underline{\underline{\vartheta}},t)=0 \quad \forall v, \forall \underline{\underline{\vartheta}}\in Q_e, \forall V^*\subseteq V_{tq}, \forall t \rightarrow \qquad 42$$

$$\rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_{V^*}\rho(\underline{\underline{\chi}},t)\overset{\circ}{q}(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t=0 \\ \\ \displaystyle\int_{V^*}\left[\rho(\underline{\underline{\chi}},t)u(\underline{\underline{\chi}},t)\overset{\circ}{q}(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})-\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\chi}},t)\cdot \mathrm{grad}_{\underline{\underline{\chi}}}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})\right]dV_t=0 \end{cases} \quad \forall \underline{\underline{\vartheta}}\in Q_e, \forall V^*\subseteq V_{tq}, \forall t$$

La première de ces équations est l'équation de continuité dans l'espace profond de la masse définie par globalisation (Cf. Ch.V § 4.5.3. et dans le dernière partie du présent chapitre le § 3.3.1.):

$$\int_{V_t(\underline{\underline{\chi}})}\rho(\underline{\underline{\chi}},t)\overset{\circ}{q}(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t=V_t(\underline{\underline{\chi}})\overset{\circ}{\overline{\rho(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}},t)}}=0 \quad \forall(\underline{\underline{\chi}},\underline{\underline{\vartheta}})\in\Omega_t, \forall t \qquad 43$$

---

9 La puissance échangée entre phases ne doit pas forcement être objective. Si on impose cette condition on particularise le modèle: pas d'échanges par discontinuités de vitesse, c'est à dire pas de filtration. Les deux équations qui en découlent montrent la pertinence du modèle obtenu.

on obtient ainsi une justification microscopique d'une des hypothèses de base du modèle de milieu continu profond (ce résultat assure que la masse macroscopique définie par globalisation dans l'espace profond est bien une masse au sens mécanique du terme).

La deuxième des équations (42) est la conservation de la quantité de mouvement dans les "discontinuités" entre phases, c'est à dire l'équation d'équilibre de la force f_{exc} échangée entre phases définie à la (33). On remarque que cette force est en équilibre (global sur le sous-domaine V^*) avec une quantité de mouvement échangée par "convection" grâce aux changements de phase.

Ces deux équations entraînent, comme on verra de suite, moyennant l'hypothèse (8), la nullité de la partie cinétique de la puissance échangée.

On écrit le bilan d'énergie interne par phase (par application du théorème de l'énergie cinétique):

$$\mathring{\underline{\underline{E}}}^*(\underline{\underline{\vartheta}},t) = -\underline{\underline{P}}^*_{int}(\underline{\underline{\vartheta}},t)+\underline{\underline{C}}^*(\underline{\underline{\vartheta}},t)+\underline{\underline{R}}^*_e(\underline{\underline{\vartheta}},t) \quad \forall \underline{\underline{\vartheta}}\in Q_e, \forall V^*\subseteq V_{tq}, \forall t \tag{44}$$

$$\int_{V^*}\rho(\underline{\underline{\vartheta}},t)\mathring{e}(\underline{\underline{\chi}},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t+\int_{V^*}\rho(\underline{\underline{\chi}},t)e(\underline{\underline{\chi}},t)\mathring{q}(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t=$$

$$=\int_{V^*}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\chi}},t):\mathrm{grad}_{\chi}\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{\chi}},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t+$$

$$+\int_{V^*}r(\underline{\underline{\chi}},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t-\int_{\partial V^*}\underline{q}(\underline{\underline{\chi}},t)\cdot n(\underline{\underline{\chi}},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dS_t+\underline{\underline{R}}^*_e(\underline{\underline{\vartheta}},t)$$

$$\forall \underline{\underline{\vartheta}}\in Q_e, \forall V^*\subseteq V_{tq}, \forall t$$

où $\underline{\underline{R}}^*_e(\vartheta,t)$ est la partie interne de la puissance reçue par échange avec les autres phases (i.e. le taux d'énergie interne reçue par échange).

Si on tient compte du bilan d'énergie interne pour le milieu dans son ensemble, et si on transforme l'intégrale de surface en intégrale de volume par le lemme de Gauss, on obtient la définition de la partie interne de la puissance échangée:

$$\underline{\underline{R}}^*(\underline{\underline{\vartheta}},t)=\underline{\underline{R}}^*_e(\underline{\underline{\vartheta}},t)+\underline{\underline{R}}^*_k(\underline{\underline{\vartheta}},t) \tag{45}$$

$$\underline{\underline{R}}^*_e(\underline{\underline{\vartheta}},t) = \int_{V^*}\rho(\underline{\underline{\chi}},t)c(\underline{\underline{\chi}},t)\mathring{q}(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t+\int_{V^*}\underline{q}(\underline{\underline{\chi}},t)\cdot\mathrm{grad}_{\chi}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t$$

$$\forall \underline{\underline{\vartheta}}\in Q_e, \forall V^*\subseteq V_{tq}, \forall t$$

Par conséquent la partie cinétique de la puissance échangée entre phases est:

$$\underline{\underline{R}}^*_k(\underline{\underline{\vartheta}},t) =\frac{1}{2}\int_{V^*}\rho(\underline{\underline{\chi}},t)u(\underline{\underline{\chi}},t)\cdot u(\underline{\underline{\chi}},t)\mathring{q}(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t-\int_{V^*}\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{\chi}},t)\cdot\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\chi}},t)\cdot\mathrm{grad}_{\chi}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t \tag{46}$$

$$\forall \underline{\underline{\vartheta}}\in Q_e, \forall V^*\subseteq V_{tq}, \forall t$$

On voit que, si les (42) sont vérifiées, alors, par l'hypothèse (8), cette partie cinétique est toujours nulle.

En conclusion on a l'équation qui nous sera utile dans la deuxième partie du chapitre:

$$\mathring{\underline{\underline{E}}}^*(\underline{\underline{\vartheta}},t) = \tag{47}$$

$$=\int_{V^*}\rho(\underline{\underline{\chi}},t)e(\underline{\underline{\chi}},t)\mathring{q}(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t+\int_{V^*}\left[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\chi}},t):\mathrm{grad}_{\chi}\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{\chi}},t)+r(\underline{\underline{\chi}},t)-\mathrm{div}_{\chi}\underline{q}(\underline{\underline{\chi}},t)\right]q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t$$

$$\forall \underline{\underline{\vartheta}}\in Q_e, \forall V^*\subseteq V_{tq}, \forall t$$

2.5.2. Bilan d'entropie.

Pour l'ensemble.

On écrit un bilan d'entropie pour le milieu dans son ensemble, en postulant que les apports volumique et surfacique d'entropie, dans un processus quasi-statique d'un système local isolé en contact thermique avec l'extérieur sont donnés par la puissance calorifique fournie à température constante (échange réversible de chaleur) et en rajoutant, pour tout autre processus, un taux de production locale d'entropie massique η:

$$\int_{V^*}\rho(\underline{\chi},t)\dot{s}(\underline{\chi},t)dV_t=\int_{V^*}\frac{r(\underline{\chi},t)}{T(\underline{\chi},t)}dV_t-\int_{\partial V^*}\frac{q(\underline{\chi},t)\cdot n(\underline{\chi},t)}{T(\underline{\chi},t)}dS_t+\int_{V^*}\rho(\underline{\chi},t)\eta(\underline{\chi},t)dV_t= \tag{48}$$

$$=\int_{V^*}\left[\frac{r(\underline{\chi},t)}{T(\underline{\chi},t)}-\frac{1}{T(\underline{\chi},t)}div_{\underline{\chi}}q(\underline{\chi},t)+\underline{g}(\underline{\chi},t)\cdot\frac{grad_{\underline{\chi}}T(\underline{\chi},t)}{T^2(\underline{\chi},t)}+\rho(\underline{\chi},t)\eta(\underline{\chi},t)\right]dV_t$$

$$\forall V^*\subseteq V_{tq},\forall t$$

Le domaine d'intégration n'étant pas de taille arbitraire, le postulat de positivité du taux de production d'entropie doit être écrit dans la forme de l'inégalité globale instantanée de Clausius-Duhem:

_ dans tout processus:

$$\int_{V^*}\rho(\underline{\chi},t)\dot{s}(\underline{\chi},t)dV_t-\int_{V^*}\frac{r(\underline{\chi},t)}{T(\underline{\chi},t)}dV_t+\int_{\partial V^*}\frac{q(\underline{\chi},t)\cdot n(\underline{\chi},t)}{T(\underline{\chi},t)}dS_t\geq 0\quad\forall V^*\subseteq V_{tq},\forall t \tag{49}$$

Par phase.

On considère l'entropie $S^*(t)$ d'un sous-domaine $V^*\subseteq V_{tq}$ comme somme des entropies $S^*(\vartheta,t)$ de ses phases à tout instant:

$$S^*(t)=\int_{V^*}\rho(\underline{\chi},t)s(\underline{\chi},t)dV_t=\int_{Q}\int_{V^*}\rho(\underline{\chi},t)s(\underline{\chi},t)q(\underline{\zeta}(\underline{\chi},t),\underline{\vartheta})dV_t dQ=\int_{Q}S^*(\underline{\vartheta},t)dQ \tag{50}$$

On calcule la dérivée matérielle (ϑ fixé) de l'entropie par phase $S^*(\vartheta,t)$ et on en écrit le bilan dans un sous-domaine $V^*\subseteq V_{tq}$ arbitraire. Dans ce bilan on introduit un terme H^* d'échange (éventuellement en même temps surfacique et volumique) avec les autres phases du sous-domaine, qui doit être nul en somme sur l'ensemble des phases

$$\dot{S}^*(\underline{\vartheta},t)=\int_{V^*}\rho(\underline{\chi},t)\dot{s}(\underline{\chi},t)q(\underline{\zeta}(\underline{\chi},t),\underline{\vartheta})dV_t+\int_{V^*}\rho(\underline{\chi},t)s(\underline{\chi},t)\dot{q}(\underline{\zeta}(\underline{\chi},t),\underline{\vartheta})dV_t= \tag{51}$$

$$=\int_{V^*}\frac{r(\underline{\chi},t)}{T(\underline{\chi},t)}q(\underline{\zeta}(\underline{\chi},t),\underline{\vartheta})dV_t-\int_{\partial V^*}\frac{q(\underline{\chi},t)\cdot n(\underline{\chi},t)}{T(\underline{\chi},t)}q(\underline{\zeta}(\underline{\chi},t),\underline{\vartheta})dS_t+$$

$$+\int_{V^*}\rho(\underline{\chi},t)r(\underline{\chi},t)q(\underline{\zeta}(\underline{\chi},t),\underline{\vartheta})dV_t+H^*(\underline{\vartheta},t)$$

$$\forall\underline{\vartheta}\in Q_\vartheta,\forall V^*\subseteq V_{tq},\forall t$$

Comparaison. Entropie échangée.

En comparant les deux bilans d'entropie on obtient l'expression par phase de l'échange d'entropie (en intégrant (50) sur Q et en tenant compte de (47) on voit que H^* est nul en somme sur Q):

$$H^*(\underline{\underline{\vartheta}},t)=\int_{V^*}\left[\rho(\underline{\underline{\chi}},t)s(\underline{\underline{\chi}},t)\mathring{q}(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})+\frac{1}{T(\underline{\underline{\chi}},t)}q(\underline{\underline{\chi}},t)\cdot \mathrm{grad}_{\underline{\underline{\chi}}}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})\right]dV_t \qquad 52$$

On distingue dans H* un échange de type "convection", c'est à dire par changement de phase dans le temps (premier terme), et un autre de type flux par le gradient de la fonction d'observation q, qui représente, dans le modèle à phase continue, les discontinuités entre phases présentes dans le corps hétérogène réel.

En substituant H* selon la (52) dans le bilan d'entropie par phase (51), on obtient le taux de production d'entropie par phase. On postule que l'inégalité du second principe est vérifiée pour chaque phase séparément:

$$\int_{V^*}\rho(\underline{\underline{\chi}},t)\eta(\underline{\underline{\chi}},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t = \qquad 53$$

$$=\int_{V^*}\left[\mathrm{div}_{\underline{\underline{\chi}}}\underline{q}(\underline{\underline{\chi}},t)-r(\underline{\underline{\chi}},t)-\underline{q}(\underline{\underline{\chi}},t)\cdot\frac{\mathrm{grad}_{\underline{\underline{\chi}}}T(\underline{\underline{\chi}},t)}{T(\underline{\underline{\chi}},t)}+\rho(\underline{\underline{\chi}},t)T(\underline{\underline{\chi}},t)\mathring{s}(\underline{\underline{\chi}},t)\right]q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t\geq 0$$

$$\forall\underline{\underline{\vartheta}}\in Q_e,\forall V^*\subseteq V_{tq},\forall t$$

Ce postulat est vraisemblable grâce à la régularité et à la positivité de la fonction d'observation et au caractère, arbitraire mais contraint par une taille minimale, du domaine d'intégration.

L'équation nécessaire dans la suite du chapitre est la:

$$\mathring{S}^*(\underline{\underline{\vartheta}},t) = \qquad 54$$

$$=\int_{V^*}\rho(\underline{\underline{\chi}},t)s(\underline{\underline{\chi}},t)\mathring{q}(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t+\int_{V^*}\left[\frac{r(\underline{\underline{\chi}},t)}{T(\underline{\underline{\chi}},t)}-\mathrm{div}_{\underline{\underline{\chi}}}\frac{q(\underline{\underline{\chi}},t)}{T(\underline{\underline{\chi}},t)}+\rho(\underline{\underline{\chi}},t)\eta(\underline{\underline{\chi}},t)\right]q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\chi}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t$$

$$\forall\underline{\underline{\vartheta}}\in Q_e,\forall V^*\subseteq V_{tq},\forall t$$

2.6. Conclusion.

Dans les paragraphes précédents on a vu quelle est la forme des équations de bilan thermo-mécanique pour un milieu à phase continue lorsque on veut écrire ces bilans séparément pour toute phase.

En particulier il faut introduire une puissance virtuelle échangée entre phases dans l'axiome d'équilibre du principe des puissances virtuelles, cette puissance donnant lieu à l'apparition d'une force échangée, dans les équations d'équilibre, qui doit être nulle en somme sur les phases.

Il faut tenir compte aussi d'un échange d'énergie interne et cinétique entre phases, ce dernier pouvant être considéré nul (absence de filtration), et d'un échange d'entropie.

La partie principale de la valeur locale de ces échanges (i.e. leur valeur locale à un champ non observable près) a été obtenue moyennant la fonctionnelle d'observation introduite au chapitre précédent: ce sont en fait les gradients et les dérivées par rapport au temps de la fonction d'observation qui définissent les échanges (respectivement par flux et convectifs par changement de phase).

Dans la partie suivante du chapitre on met en relation les bilans par phase écrits pour le milieu à phase continue (formules (42), (44) et (53) ci-dessus) avec les bilans correspondants dans le milieu continu profond du Chapitre IV. Cela sera fait en postulant ces bilans équivalents (même variation de quantité de mouvement, même variation d'énergie interne, même variation d'entropie) tant si on les écrit dans un élément de taille minimale du milieu à phase continu que dans le voisinage d'un point du milieu continu profond (point géométrique et orientation de phase).

3. Passage micro-macro

3.1. Introduction

Ce chapitre a la finalité d'identifier par des définitions classiques les grandeurs introduites pour le milieu continu profond du Chapitre IV. En particulier, dans la première partie, on a représenté un corps matériel hétérogène par un milieu à phase continue dans un référentiel d'espace géométrique classique; dans cette deuxième partie du chapitre, on envisage la comparaison entre le milieu à phase continue et l'image géométrique d'un milieu continu profond.

Les deux modèles à comparer étant fixés, on s'occupe premièrement du type d'équivalence à imposer entre eux. Moyennant un minimum de postulats de départ on cherchera un nombre suffisant de conditions d'équivalence pour que les grandeurs définies sur le milieu continu profond soient identifiées en fonction des grandeurs du milieu à phase continue.

Le premier objectif est donc la position du concept d'équivalence à utiliser. Cette équivalence sera définie entre images d'un même corps moyennant deux référentiels différents avec des niveaux différents d'échelle géométrique. On postule, au fait, l'égalité des bilans massique, mécanique et énergétiques des deux milieux au niveau d'éléments de volume typo-topique (i.e. selon la définition donnée au Chapitre V, de mesure précisée, cas par cas, par le problème particulier posé).

Par conséquent on obtient l'équivalence recherchée.

En particulier le deuxième objectif sera l'identification des grandeurs du milieu continu profond; en particulier avec référence à une description eulerienne:

- masse volumique actuelle par phase ρ (et masse volumique initiale par phase);
- vitesse géométrique u et des phases w;
- contrainte géométrique de Cauchy σ et contraintes des phases B, C, D;
- apport volumique de chaleur r;
- flux de chaleur géométrique q (vecteur) et des phases q (tenseur d'ordre deux);
- température T;

Le cadre thermo-mécanique est le même que dans les chapitres précédents. D'un point de vue géométrique on considère les deux milieux coïncidents: ils occupent instantanément le même domaine dans un espace géométrique absolu fixé.

3.2. Notes préliminaires.

3.2.1. Bases du travail.

On fait référence à l'opération de globalisation présentée au chapitre précédent et, en particulier, à la condition, nécessaire pour que cet opération ait un sens, d'existence de sous-domaines typo-topiques dans les images microscopique et macroscopique à comparer d'un même corps (Cf. Ch.V § 4.5.2.).

On considère un polycristal suivant un processus thermo-mécanique et ses descriptions comme milieu continu à phase continue (introduit dans ce chapitre) et comme milieu continu profond (introduit au Chapitre IV).

Plus particulierèment, on se place dans l'espace euclidien $E=R^n$ et on considère, dans le domaine V (en tant que milieu microscopique ou hétérogène), le milieu continu à phase continue. Dans ce milieu on considère des sous-domaines typiques $\tilde{\nabla}$, c'est à dire, selon la définition qui a été donnée, contenants de l'information radicale sur l'agrégat (on rappelle qu'il peut s'agir d'éléments de volume statistiquement représentatifs de la structure microscopique). L'opération d'observation par phase est statistiquement significative en prenant pour support des sous-domaines typiques; par conséquent les considérations faites dans la partie précédente du chapitre sur le modèle de milieu à phase continue sont valables par rapport à tout sous-domaine typique.

En particulier on observe que la taille de tout sous-domaine typique est inférieurement limitée, ce qui correspond aux développements faits pour le milieu à phase continue.

On rappelle que la configuration initiale et actuelle du milieu à phase continue sont:

$$\underline{x}\in\tilde{\nabla}_0\subseteq V_0\subseteq R^n \;;\; \underline{y}\in\tilde{\nabla}_t\subseteq V_t\subseteq R^n \qquad 55$$

La structure microscopique de la matière est identifiée dans ce milieu par la fonction de phase qui peut être définie tant en configuration initiale (notée $\zeta_0(y,t)$) que en configuration actuelle (notée $\zeta(\mathcal{y},t)$). Cette fonction donne la rotation nécessaire pour superposer les axes du repère aux axes cristallins locaux, par conséquent on obtient la relation entre ses images dans les deux configurations (on rappelle que $\mathcal{y}=Y(y,t)$ transformation inconnue; on remarque que l'image de la fonction des phases évolue dans le temps donnant une suite de Z_t):

$$\underline{\underline{\zeta}}_0(\underline{y},t)=\underline{\underline{\zeta}}(Y(\underline{y},t),t)\in Z_t\subseteq Q_E \qquad 56$$

Dans le même espace euclidien E on considère (en tant que milieu macroscopique ou homogène[10]) la partie géométrique, occupant le domaine D, du milieu continu profond. On considère dans ce milieu des sous-domaines topiques $\tilde{D}$, c'est à dire macro-homogènes.

La configuration initiale et l'actuelle du milieu continu profond sont respectivement:

$$x\in\tilde{D}_0\subseteq D_0\subseteq R^n\ ;\ \underline{\underline{\theta}}\in Z_0\subseteq Q_E \qquad 57$$
$$\mathcal{x}\in\tilde{D}_t\subseteq D_t\subseteq R^n\ ;\ \underline{\underline{\vartheta}}\in Z_t\subseteq Q_E$$

En superposant les images géométriques des deux milieux de façon qu'elles coïncident à tout instant, on suppose qu'il existe une partition "typique" et une partition "topique" des milieux coïncidents. On note $\tilde{\mathcal{V}}$ un sous-domaine "typo-topique" quelconque de cette partition.

Dans la suite on va comparer les bilans thermo-mécaniques écrits pour les deux milieux dans tout sous-domaine typo-topique. En particulier il suffit d'imposer l'équivalence des bilans de masse, de quantité de mouvement, d'énergie interne et d'entropie pour identifier toute variable du milieu continu profond (macroscopique) comme fonctionnelle sur l'élément de volume typo-topique de variables du milieu à phase continue (microscopique).

3.2.2. Notation.

On rappelle la notation "~" pour l'image globalisée d'un champ microscopique α moyennant la distribution d'observation de mesure actuelle qdV_t à support dans l'élément de volume typo-topique $\tilde{\mathcal{V}}$ (Cf. Ch.V formules (109) et (117)):

$$\tilde{\alpha}(x,\underline{\underline{\theta}})=\widetilde{\alpha(\underline{y})}\,(x,\underline{\underline{\theta}})\ ;\ \tilde{\alpha}(\mathcal{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)=\widetilde{\alpha(\mathcal{y},t)}\,(\mathcal{x},\underline{\underline{\vartheta}},t) \qquad 58$$

3.3. Cinématique.

3.3.1. Relations de base.

Mesures de volume.

Soit un point macroscopique x dans la configuration initiale du milieu continu profond et un sous-domaine géométrique $\tilde{\mathcal{V}}(x)$ typique et topique qui contient ce point.

On note $V_0(x)$ le volume (géométrique) initial de ce sous-domaine et $V_t(\mathcal{x},t)$ son volume actuel (le point qui est en x en configuration initiale étant en $\mathcal{x}$ en configuration actuelle indépendamment de sa phase par l'hypothèse de non filtration). On appelle dV_0 l'élément de mesure du volume microscopique (variable y) en configuration de référence et dV_t le même volume en configuration actuelle; par définition des mesures:

$$V_0(x)=\int_{\tilde{V}_0(x)}dV_0\ ;\ V_t(\mathcal{x},t)=\int_{\tilde{V}_t(\mathcal{x})}dV_t \qquad 59$$

---

10 La mention d'homogène se justifie en prenant une "couche" (orthogonale à l'espace des phases) d'épaisseur $d\vartheta$ autour de la phase ϑ du milieu continu profond: tout point de la couche est, au premier ordre, dans la même phase ϑ.

Masses volumiques.

A la base du rapport entre bilans que l'on va établir il faut donner la relation entre les masses volumiques des deux milieux (c'est à dire donc l'identification microscopique de la masse volumique macroscopique dans l'espace profond). Ceci peut se faire en comparant les masses totales obtenues selon les deux modèles d'un même sous-domaine typo-topique (par le procédé illustré au Ch. V § 4.5.). L'égalité des masses volumiques initiales d'un sous-domaine typo-topique entraîne (le caractère typique est nécessaire pour que la fonctionnelle d'observation ait un sens, le caractère topique permet de confondre la masse volumique profonde avec sa moyenne volumique):

$$\rho_0(x,\underline{\underline{\theta}}) = \frac{\int_{\tilde{V}_0(x)} \rho_0(\underline{y}) q(\underline{\underline{\zeta}}_0(\underline{y},0),\underline{\underline{\theta}}) dV_0}{\int_{\tilde{V}_0(x)} dV_0} = \tilde{\rho}_0(x,\underline{\underline{\theta}}) \qquad 60$$

A l'instant t on a la définition et l'équivalence analogues:

$$\rho(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t) = \frac{\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})} \rho(\underline{y},t) q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}}) dV_t}{\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})} dV_t} = \tilde{\rho}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t) \quad \forall t \qquad 61$$

La masse volumique du milieu continu profond est donc la masse volumique microscopique globalisée, et cela tant à l'instant initial que dans le temps[1].

La masse volumique dans un point macroscopique peut donc être notée indifféremment sans ou avec ~ (dans le premier cas elle dénote un champ défini dans l'espace profond, dans le deuxième elle dénote aussi une fonctionnelle d'un champ microscopique).

3.3.2. Grandeurs lagrangiennes.

Déterminant du gradient de la transformation géométrique.

On peut comparer les deux écritures, microscopique et macroscopique, du volume actuel d'un sous-domaine typo-topique pour en déduire le rapport entre le déterminant du gradient de la transformation microscopique, J_y, et celui du gradient de la transformation géométrique macroscopique, J_x:

---

[1] On observe que la fonction de distribution des orientations de texture (ODF), notée g, définie comme une densité de probabilité sur la mesure des orientations (Cf. formule II.20):

$$P_{ODF}(b,t) = \frac{1}{mes\{V_t\}} \int_b g(\underline{\underline{\vartheta}},t) dQ(\underline{\underline{\vartheta}}) \quad \forall b \subseteq Q, \forall t \qquad 61b$$

est déterminée en identifiant la $P_{ODF}(b,t)$ avec la fraction volumique des grains, contenus dans un élément de volume statistiquement représentatif V_t, qui, à l'instant t, ont une orientation dans l'ensemble des directions b. Par la définition de masse volumique globalisée donnée on voit qu'on peut obtenir cette densité de probabilité par:

$$g(\underline{\underline{\vartheta}},t) = \frac{\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})} \rho(\underline{y},t) q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}}) dV_t}{\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})} \rho(\underline{y},t) dV_t} = \frac{\tilde{\rho}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)}{\langle\rho\rangle(\underline{x},t)} \quad \forall t \text{ pour le point macroscopique } \underline{x} \qquad 61c$$

$$V_t(\Xi(x,t),t) = \begin{cases} = J_x(x,t)V_0(x) = J_x(x,t) \int_{\tilde{V}_{0(x)}} dV_0 \\ = \int_{\tilde{V}_t(\Xi(x,t))} dV_t = \int_{\tilde{V}_{0(x)}} J_y(\underline{y},t)dV_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{J_x(x,t) = \frac{\int_{\tilde{V}_{0(x)}} J_y(\underline{y},t)dV_0}{\int_{\tilde{V}_{0(x)}} dV_0} = \langle J_y \rangle (x,t)} \quad 62$$

la variation volumique macroscopique est la moyenne de la microscopique.

3.3.3. Grandeurs eulerienes.

Continuité de la masse.

En écrivant l'équation de continuité de la masse du milieu continu profond en eulerien, moyennant l'identification microscopique (61) de la-dite masse volumique, on obtient l'identification microscopique de la vitesse macroscopique w:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)}{\partial t} + \mathrm{div}_{\underline{x}}[\tilde{\rho}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)u(\underline{x},t)] + \mathrm{div}_{\underline{\vartheta}}[\tilde{\rho}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\underline{\underline{w}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)] = 0 \quad 63$$

les deux premiers termes de cette équation peuvent représenter la dérivée matérielle microscopique (donc avec ϑ constante) de la fonctionnelle d'observation appliquée à la masse volumique, les coordonnées microscopiques $\underline{y}$ et macroscopiques $\underline{x}$ pouvant être confondues à l'intérieur du domaine d'intégration):

$$V_t(\underline{x},t)\left\{\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t) + \mathrm{div}_{\underline{x}}[\tilde{\rho}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)u(\underline{x},t)]\right\} = \frac{D}{dt}\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})} \rho(\underline{y},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t\Big|_{\underline{\underline{\vartheta}}=cst} = \quad 64$$

$$= \int_{\tilde{V}_t(\underline{x})} \rho(\underline{y},t)\mathrm{grad}_{\underline{\underline{\zeta}}}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}}) : \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\zeta}}^T(\underline{y},t)dV_t = (12) = -\mathrm{div}_{\underline{\vartheta}} \int_{\tilde{V}_t(\underline{x})} \rho(\underline{y},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})\underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\zeta}}^T(\underline{y},t)dV_t$$

on obtient donc:

$$V_t^{-1}(\underline{x},t)\mathrm{div}_{\underline{\vartheta}} \int_{\tilde{V}_t(\underline{x})} \rho(\underline{y},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})\underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\zeta}}^T(\underline{y},t)dV_t = \mathrm{div}_{\underline{\vartheta}}[\tilde{\rho}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\underline{\underline{w}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)] \quad 65$$

par intégration des divergences on obtient l'identification microscopique de la variable cinématique macroscopique eulerienne w (la constante d'intégration étant un champ taux de rotation fonction de la seule position géométrique $\underline{x}$ et du temps, la relation ci-dessous est valable à une rotation du sous-domaine typo-topique près):

$$\tilde{\rho}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\underline{\underline{w}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t) = \frac{\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})} \rho(\underline{y},t)\underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\zeta}}^T(\underline{y},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t}{\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})} dV_t} = \rho\widetilde{\underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\zeta}}^T}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t) \quad 66$$

12 Dans la dérivée matérielle de la fonction d'observation:

$$\mathring{q}(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})\Big|_{\underline{\underline{\vartheta}}=cst} = \mathrm{grad}_{\underline{\underline{\zeta}}}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}}) : \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\zeta}}^T(\underline{y},t) \quad 64b$$

apparaît le transposé de la fonction de phase car celle-ci est, par choix, une rotation relative aux axes du repère fixe (le gradient de q par rapport à ses arguments opère sur les tenseurs anti-symétriques, translations infinitésimales dans l'espace des phases).

On rappelle que la fonction d'observation est relative aux distances dans Q; par conséquent les dérivées par rapport aux deux variables ζ et ϑ sont d'égale valeur absolue et signe opposé.

Quantité de mouvement.

L'identité de la quantité de mouvement d'un sous domaine du milieu à phase continue avec celle d'un point du milieu continu profond permet l'identification microscopique de la vitesse géométrique macroscopique u:

$$\tilde{\rho}(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)u(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t)=\frac{\int_{\tilde{V}_t(\underline{\underline{\mathfrak{z}}})}\rho(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)u(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t}{\int_{\tilde{V}_t(\underline{\underline{\mathfrak{z}}})}dV_t}=\tilde{\rho}u(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \qquad 67$$

On a fait l'hypothèse de non filtration par laquelle la vitesse géométrique ne dépend pas de la variable de phase:

$$u(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)=u(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t) \qquad 68$$

Ce qui donne, en postulant nul le gradient par rapport à ϑ de la fonctionnelle donnant $u(\mathfrak{z},t)$ selon la (67), une équation qui relie la fonctionnelle d'observation et la quantité de mouvement des particules microscopiques, et qui définit donc la pertinence de l'hypothèse de non filtration une fois que le modèle est fixé:

$$\text{grad}_{\vartheta}\frac{\tilde{\rho}u(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)}{\tilde{\rho}(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)}=\underline{\underline{0}} \rightarrow \int_{\tilde{V}_t(\underline{\underline{\mathfrak{z}}})}\rho(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)\left[u(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)-u(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t)\right]\otimes\text{grad}_{\zeta}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t=0 \qquad 69$$

La fonction de phase étant arbitraire (avec dérivée première continue), cette condition est sûrement vérifiée si le champ différence entre la vitesse de milieu à phase continue et celle du milieu continu profond est non observable dans tout élément de volume typo-topique, ce qui engendre (par l'hypothèse (8)) la condition suffisante pour la validité de la (69) (q étant infiniment dérivable et la fonction de phase ζ étant au moins C^1):

$$\int_{\tilde{V}_t(\underline{\underline{\mathfrak{z}}})}\left[u(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)-u(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t)\right]\mu(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)dV_t=0 \quad \forall\mu\in C^0 \qquad 70$$

Avec cette condition le gradient géométrique de la vitesse macroscopique est donné par la moyenne pondérée par la masse volumique du gradient de vitesse microscopique:

$$\tilde{\rho}(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\text{grad}_{\mathfrak{z}}u(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t)=V_t^{-1}(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t)\int_{\tilde{V}_t(\underline{\underline{\mathfrak{z}}})}\rho(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)\text{grad}_{\mathfrak{y}}u(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t=\tilde{\rho}\widetilde{\text{grad}_{\mathfrak{y}}u}(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \qquad 71$$

étant que:

$$\int_{\tilde{V}_t(\underline{\underline{\mathfrak{z}}})}\left[u(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)-u(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t)\right]\otimes\text{grad}_{\mathfrak{y}}\left[\rho(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t),\underline{\underline{\vartheta}})\right]dV_t=0 \qquad 72$$

D'un autre coté la (69), écrite en fonction de la seule vitesse microscopique $u(\underline{y},t)$ moyennant la (67), a comme solution particulière[13]:

$$\forall \underline{y}\in\tilde{V}_t(\underline{x}) : u(\underline{y},t)=u_o(t)+\underline{\underline{\varepsilon}}(t)\cdot\underline{y}+O_{\tilde{V}_t(\underline{x})};\ \forall u_o(t),\forall\underline{\underline{\varepsilon}}(t)\in L_e(E,E),\forall t \qquad 70$$

qui est une condition de déformation homogène dans l'élément de volume typo-topique à une fonction non observable près. Ceci permet, en dehors du cadre actuel du travail, lorsqu'on choisi des éléments de volume typo-topiques qui sont représentatifs de la structure microscopique et élémentaires, la comparaison avec un passage micro-macro par homogénéisation en déformations homogènes.

3.4. Mécanique.

3.4.1. Mouvements rigidifiants.

Mouvement géométrique.

Au niveau microscopique les mouvements rigidifiants sont:

$$u_R(\underline{y},t)=u_o(t)+\underline{\underline{\varpi}}(t)\cdot\underline{y}\ ;\ \forall\underline{\underline{\varpi}}\in A_e,\forall u_o\in L(R,E),\forall t \qquad 72$$

on obtient pour la vitesse géométrique macroscopique, en partant de son identification microscopique (67):

$$V_t(\underline{x},t)\tilde{\rho}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)u_R(\underline{x},t)= \qquad 73$$

$$=u_o(t)\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})}\rho(\underline{y},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t+\underline{\underline{\varpi}}(t)\cdot\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})}\rho(\underline{y},t)\underline{y}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t=$$

$$=V_t(\underline{x},t)\tilde{\rho}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\left[u_o(t)+\underline{\underline{\varpi}}(t)\cdot\underline{y}_G(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right]\rightarrow u_R(\underline{x},t)=u_o(t)+\underline{\underline{\varpi}}(t)\cdot\underline{x}$$

ayant identifié le point $\underline{y}_G$, barycentre des masses de la phase ϑ dans $\tilde{V}_t(\underline{x})$ (voir note précédente), avec le point $\underline{x}$:

$$\underline{y}_G(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)=\frac{\widetilde{\rho\underline{y}}}{\tilde{\rho}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)=\underline{x} \qquad 74$$

(en effet, à cause de la différence d'échelle géométrique, au niveau macroscopique tout point $\underline{y}$ du milieu microscopique contenu dans un $\tilde{V}_t(\underline{x})$ est confondu avec le point macroscopique $\underline{x}$).

Le mouvement rigidifiant de la géométrie macroscopique est donc de la forme classique, en cohérence avec le mouvement rigidifiant du milieu microscopique.

---

13 Ce qui se voit en vérifiant, par le théorème de la moyenne, l'identité:

$$\underline{y}_G(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\otimes\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})}\rho(\underline{y},t)\mathrm{grad}_{\underline{y}}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t=\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})}\rho(\underline{y},t)\underline{y}\otimes\mathrm{grad}_{\underline{y}}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t \qquad 70b$$

où on défini le barycentre de la phase ϑ dans $\tilde{V}_t(\underline{x})$ à l'instant t:

$$\underline{y}_G(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)=\frac{\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})}\rho(\underline{y},t)\underline{y}\,q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t}{\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})}\rho(\underline{y},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t}=\frac{\widetilde{\rho\underline{y}}}{\tilde{\rho}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t) \qquad 70c$$

Mouvement des phases. Positions dans l'espace des phases.

Un mouvement rigidifiant au sens du milieu continu profond est tel que l'orientation représentant le matériau suit la géométrie de la matière dans son mouvement rigide. Pour que le mouvement de l'image microscopique du corps soit rigidifiant aussi dans le sens de sa partition en phases, il faut que la fonction de phase évolue suivant la rotation du corps (on rappelle qu'on a choisi l'orientation des trièdres du réseau cristallin par rapport au repère fixe comme phase).

Cela s'exprime en affirmant que, dans tout mouvement rigidifiant au sens des phases:

$$u_R(\underline{y},t)=u_o(t)+\underline{\underline{\varpi}}(t)\cdot\underline{y} \text{ et } [\underline{\underline{\zeta}}^{\circ}\cdot\underline{\underline{\zeta}}^{T}(\underline{y},t)]_R=\underline{\underline{\varpi}}(t)\ \ \forall(u_o,\underline{\underline{\varpi}}) \qquad 75$$

Vue l'identification microscopique de la vitesse des phases dans l'espace profond, w (formule (66)), on obtient le mouvement rigidifiant macroscopique dans l'espace des phases:

$$\tilde{\rho}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\underline{\underline{w}}_R(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)=\widetilde{\rho[\underline{\underline{\zeta}}^{\circ}\cdot\underline{\underline{\zeta}}^{T}]_R}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)=\tilde{\rho}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\underline{\underline{\varpi}}(t)\rightarrow\underline{\underline{w}}_R(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)=\underline{\underline{\varpi}}(t) \qquad 76$$

ce qui confirme la définition de w_R dans l'espace profond donnée au Chapitre IV (formule (IV.62)).

3.5. Thermodynamique.

3.5.1. Bilan d'énergie interne.

La variation de l'énergie interne (ou totale) d'une phase d'un sous-domaine typo-topique est à tout instant la même tant dans le milieu à phase continue que dans le milieu continu profond, quelque soit la phase et le sous-domaine typo-topique (identifié par n'importe quel point $\underline{x}$ à son intérieur) en objet:

$$\mathring{E}(\tilde{V}_t(\underline{x}),\underline{\underline{\vartheta}},t)=\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})}\rho(\underline{y},t)\overline{e(\underline{y},t)q(\underline{\underline{\zeta}}^{\circ}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})}dV_t=V_t(\underline{x},t)\rho(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\mathring{e}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\ \ \forall(\tilde{V}_t(\underline{x}),\underline{\underline{\vartheta}},t) \qquad 77$$

i.e. (formules (47) et (IV.103)):

$$\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})}\left[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{y},t):\mathrm{grad}_{\underline{y}}\underline{u}(\underline{y},t)+r(\underline{y},t)-\mathrm{div}_{\underline{y}}\underline{q}(\underline{y},t)\right]q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t+ \qquad 78$$

$$+\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})}\rho(\underline{y},t)e(\underline{y},t)\mathring{q}(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t=$$

$$=V_t(\underline{x},t)\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t):\mathrm{grad}_{\underline{x}}\underline{u}(\underline{x},t)+V_t(\underline{x},t)\underline{\underline{B}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t):\left[\mathrm{grad}_{\underline{x}}\underline{u}(\underline{x},t)-\underline{\underline{w}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right]+$$

$$+V_t(\underline{x},t)\underline{\underline{\underline{C}}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\vdots\mathrm{grad}_{\underline{x}}\underline{\underline{w}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)+V_t(\underline{x},t)\underline{\underline{\underline{D}}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\vdots\mathrm{grad}_{\underline{\vartheta}}\underline{\underline{w}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)+$$

$$+V_t(\underline{x},t)r(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)-V_t(\underline{x},t)\mathrm{div}_{\underline{x}}\underline{q}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)-V_t(\underline{x},t)\mathrm{div}_{\underline{\vartheta}}\underline{\underline{q}}(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}},t)\quad\forall(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}})\in\Omega_t,\forall t$$

Contrainte de Cauchy.

Les deux bilans de la (78) doivent coïncider dans toute transformation macroscopique, c'est à dire quel que soient les variables u, w, q (vecteur), q (tenseur d'ordre deux) et r. On peut donc identifier deux à deux les termes des deux cotés de l'identité de façon arbitraire, pourvu que ladite identité soit vérifiée dans toute transformation macroscopique. Ceci donne donc

une explication microscopique cohérente du jeu de variables macroscopiques[14] (on note $\rightsquigarrow$ l'implication non nécessaire).

En se rappelant des définitions micro de w et u, on peut identifier la contrainte de Cauchy du milieu continu profond moyennant la contrainte de Cauchy du milieu à phase continue (il faut noter qu'une vitesse u arbitraire à gradient antisymétrique ne serait pas découplée du champ w):

$\forall u$ à gradient symétrique: $\underline{\underline{w}}=\underline{\underline{0}}$; $div_{\underline{x}}\underline{\underline{q}}=0$; $div_{\underline{\vartheta}}\underline{\underline{q}}=0$; $r=0$; (78) $\rightsquigarrow$ 79

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t):grad_{\underline{x}}u(\underline{x},t)=V_t^{-1}(\underline{x},t)\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{y},t):grad_{\underline{y}}u(\underline{y},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\vartheta})dV_t=\widetilde{\underline{\underline{\sigma}:grad_{\underline{y}}u}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t)}$$

et on peut identifier la contrainte de Cauchy macroscopique par intégration sur l'ensemble des phases:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t):grad_{\underline{x}}u(\underline{x},t)= \qquad 80$$

$$=\int_Q\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t)dQ:grad_{\underline{x}}u(\underline{x},t)=V_t^{-1}(\underline{x},t)\int_Q\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{y},t):grad_{\underline{y}}u(\underline{y},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\vartheta})dV_tdQ=$$

$$=V_t^{-1}(\underline{x},t)\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{y},t):grad_{\underline{y}}u(\underline{y},t)dV_t=(\underline{\underline{\sigma}}:grad_{\underline{y}}u)(\underline{x},t)$$

la puissance des efforts intérieurs est donc conservée en moyenne sur l'élément de volume typo-topique dans le passage micro-macro: le lemme de macro-homogénéité de Hill-Mandel est valable.

Si, en outre, se vérifie la condition (70) (i.e. toute fonctionnelle à support typo-topique de la différence entre vitesse microscopique et macroscopique est négligeable), la contrainte de Cauchy du milieu continu profond est telle que: 81

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t)\,\frac{\widetilde{\rho grad_{\underline{y}}u}}{\tilde{\rho}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t)=\widetilde{\underline{\underline{\sigma}:grad_{\underline{y}}u}}(\underline{x},\underline{\vartheta},t)$$

la puissance des efforts intérieurs par phase, calculée par globalisation, est égale à la puissance exercée par la contrainte de Cauchy du milieu continu profond par le gradient des vitesses microscopique moyen pondéré par la masse volumique (globalisation et moyenne ayant le même support typo-topique)

Chaleur.

L'apport volumique de chaleur dans l'espace profond peut être lié à la grandeur microscopique correspondante par l'identité des variations d'énergie obtenues par un apport volumique arbitraire de chaleur dans les deux modèles, tout autre flux d'énergie ou variable cinématique étant nul:

$\forall r$; $antsymgradu=\underline{\underline{0}}$; $\underline{\underline{w}}=\underline{\underline{0}}$; $div_{\underline{x}}\underline{q}=0$; $div_{\underline{\vartheta}}\underline{q}=0$; (78) $\rightsquigarrow$ 82

$$\boxed{r(\underline{x},\underline{\vartheta},t)=V_t^{-1}(\underline{x},t)\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})}r(\underline{y},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{y},t),\underline{\vartheta})dV_t=\tilde{r}(\underline{x},\underline{\vartheta},t)}$$

De façon analogue on écrit la relation entre flux de chaleur:

---

14 On remarque donc que les relations qu'on obtient dans la suite ne sont pas nécessaires, elles ne font que définir (de façon arbitraire mais physiquement conséquente) les variables du milieu continu profond: par sa nature tout passage du microscopique au macroscopique est dépourvu d'implications nécessaires.

$\forall \underline{q}; \forall \underline{\underline{q}}$; antsymgradu=$\underline{\underline{0}}$; $\underline{\underline{w}}=\underline{\underline{0}}$; (78) ~→ 83

$$V_t(\underline{\chi},t)\left[\mathrm{div}_{\chi}\underline{q}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)+\mathrm{div}_{\vartheta}\underline{\underline{q}}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right]=\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\mathrm{div}_{\gamma}\underline{q}(\underline{\gamma},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\gamma},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t$$

qui permet d'identifier[15]:

$$\boxed{\mathrm{div}_{\chi}\underline{q}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)=V_t^{-1}(\underline{\chi},t)\int_{\partial\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\underline{q}(\underline{\gamma},t)\cdot\underline{n}(\underline{\gamma},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\gamma},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t} \qquad 84$$

$$\mathrm{div}_{\vartheta}\underline{\underline{q}}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)= V_t^{-1}(\underline{\chi},t)\mathrm{div}_{\vartheta}\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\underline{q}(\underline{\gamma},t)\cdot\mathrm{grad}_{\gamma}\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\gamma},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\gamma},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t \rightarrow \text{(en intégrant)}$$

$$\rightarrow \boxed{\underline{\underline{q}}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)=\underline{\underline{q}}^*(\underline{\chi},t)+V_t^{-1}(\underline{\chi},t)\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\underline{q}(\underline{\gamma},t)\cdot\mathrm{grad}_{\gamma}\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\gamma},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\gamma},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t}$$

On remarque que le flux de chaleur inter-phasique (q tenseur d'ordre deux) est donné par la composante du flux de chaleur microscopique sur le gradient de phase observée par la fonctionnelle d'observation. Par conséquent on peut avoir, d'un point de vue du milieu continu profond, un flux inter-phasique non nul en absence de flux géométrique et vice versa, pourvu que le flux microscopique soit non nul.

La divergence géométrique macroscopique est donnée par le flux traversant la surface du sous-domaine typique microscopique.

Contraintes de phase.

Finalement on peut supposer, ayant postulée l'équivalence des bilans d'énergie interne selon les deux modèles, que les puissances en jeux par variation de phase et par la partie antisymétrique du gradient de vitesse dans un sous-domaine de l'espace profond sont égales à la puissance échangée par la "convection" duc aux changements de phase dans le sous-domaine correspondant du milieu à phase continue, pourvu que ce sous-domaine soit typo-topique:

$$V_t(\underline{\chi},t)\underline{\underline{B}}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t):\left[\mathrm{antsymgrad}_{\chi}\underline{u}(\underline{\chi},t)\ -\underline{\underline{w}}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)\right]+ \qquad 85$$

$$+V_t(\underline{\chi},t)\underline{\underline{\underline{C}}}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)\vdots\mathrm{grad}_{\chi}\underline{\underline{w}}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)+V_t(\underline{\chi},t)\underline{\underline{\underline{D}}}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)\vdots\mathrm{grad}_{\vartheta}\underline{\underline{w}}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)=$$

$$=\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\rho(\underline{\gamma},t)e(\underline{\gamma},t)\mathring{q}(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\gamma},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t$$

---

15 Passages: 84b

$$\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\underline{q}(\underline{\gamma},t)\cdot\mathrm{grad}_{\gamma}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\gamma},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t=$$

$$=\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\underline{q}(\underline{\gamma},t)\cdot\mathrm{grad}_{\zeta}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\gamma},t),\underline{\underline{\vartheta}})\vdots\mathrm{grad}_{\gamma}\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\gamma},t)dV_t=-\mathrm{div}_{\vartheta}\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\underline{q}(\underline{\gamma},t)\cdot\mathrm{grad}_{\gamma}\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\gamma},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\gamma},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t$$

En fait l'intégrale exprimant cette dernière puissance peut être écrite comme la divergence par rapport à $\underline{\underline{\vartheta}}$ d'une fonctionnelle d'observation dans laquelle apparait la vitesse de la fonction de phase[16]. Ceci montre que le second membre de la (85) ci-dessus est une puissance par taux de rotation des phases ainsi que les termes au premier membre.

3.5.2. Bilan d'entropie.

De même que pour l'énergie interne, on postule l'égalité des variations d'entropie par phase, pour tout sous-domaine typo-topique, toute phase et tout instant, obtenues par le modèle de milieu à phase continue et par celui de milieu continu profond (niveau microscopique et macroscopique):

$$\mathring{S}(\tilde{V}_t(\underline{\chi}),\underline{\underline{\vartheta}},t)=\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\rho(\underline{\chi},t)s(\underline{\chi},t)\overset{\circ}{q}(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\chi},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t=V_t(\underline{\chi},t)\tilde{\rho}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)\mathring{s}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)\quad\forall(\tilde{V}_t(\underline{\chi}),\underline{\underline{\vartheta}},t) \tag{86}$$

i.e. (Cf. formules (54) et (IV.105)):

$$\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\rho(\underline{\chi},t)s(\underline{\chi},t)\overset{\circ}{q}(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\chi},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t + \tag{87}$$

$$+\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\left[\frac{r(\underline{\chi},t)}{T(\underline{\chi},t)}-\frac{\mathrm{div}_{\underline{\chi}}\underline{q}(\underline{\chi},t)}{T(\underline{\chi},t)}+\frac{\underline{q}(\underline{\chi},t)\cdot\mathrm{grad}_{\underline{\chi}}T(\underline{\chi},t)}{T^2(\underline{\chi},t)}+\rho(\underline{\chi},t)\eta(\underline{\chi},t)\right]q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\chi},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t=$$

$$=V_t(\underline{\chi},t)\frac{r(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)}{T(\underline{\chi},t)}-V_t(\underline{\chi},t)\frac{\mathrm{div}_{\underline{\chi}}\underline{q}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)+\mathrm{div}_{\underline{\underline{\vartheta}}}\underline{\underline{q}}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)}{T(\underline{\chi},t)}+V_t(\underline{\chi},t)\underline{q}(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)\cdot\frac{\mathrm{grad}_{\underline{\chi}}T(\underline{\chi},t)}{T^2(\underline{\chi},t)}+$$

$$+V_t(\underline{\chi},t)\rho(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)\eta(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}},t)$$

$$\forall(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}})\in\Omega_t,\forall t$$

dans tout processus macroscopique, c'est à dire quel que soit r/T, q/T (vecteur), q/T (tenseur d'ordre deux) et η macroscopiques.

Les identifications de l'apport volumique d'entropie et du flux surfacique d'entropie peuvent être faites en analogie avec celles de l'apport volumique de chaleur et du flux de chaleur faites en partant du bilan d'énergie interne. Cela conduit à une condition sur le champ de température, pour que les deux identifications ainsi obtenues pour r, q (vecteur) et q (tenseur d'ordre deux) soient compatibles entre elles.

Pour identifier le taux de production d'entropie on tient compte de la nature cinématique des changements de phase et de la possibilité d'un apport de chaleur ponctuel arbitraire.

---

16 Passages:

$$\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\rho(\underline{\chi},t)e(\underline{\chi},t)\overset{\circ}{q}(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\chi},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t \tag{85b}$$

$$=\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\rho(\underline{\chi},t)e(\underline{\chi},t)\mathrm{grad}_{\underline{\underline{\zeta}}}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\chi},t),\underline{\underline{\vartheta}}):\overset{\circ}{\underline{\underline{\zeta}}}\cdot\underline{\underline{\zeta}}^T(\underline{\chi},t)dV_t=-\mathrm{div}_{\underline{\underline{\vartheta}}}\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\rho(\underline{\chi},t)e(\underline{\chi},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\chi},t),\underline{\underline{\vartheta}}\overset{\circ}{\underline{\underline{\zeta}}}\cdot\underline{\underline{\zeta}}^T(\underline{\chi},t)dV_t$$

Apport volumique et flux surfacique d'entropie.

Comme pour l'apport volumique de chaleur, on identifie le terme dans l'espace profond en $r(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)$ avec le terme microscopique en $r(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)$ dans le bilan d'entropie par phase (87):

$$\frac{r(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t)}=V_t^{-1}(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t)\int_{\tilde{V}_t(\underline{\underline{\mathfrak{z}}})}\frac{r(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t=\frac{\tilde{r}}{T}(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t) \qquad 88$$

De même on peut identifier les flux de chaleur dans l'espace profond en partant de l'identité des flux d'entropie dans le bilan d'entropie par phase (87):

$$V_t(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t)\mathrm{div}_{\mathfrak{z}}\frac{q(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t)}+V_t(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t)\frac{\mathrm{div}_{\vartheta}q(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t)}=\int_{\tilde{V}_t(\underline{\underline{\mathfrak{z}}})}\mathrm{div}_{\mathfrak{y}}\frac{q(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t\rightarrow(17) \qquad 89$$

$$\rightarrow\quad \mathrm{div}_{\mathfrak{z}}\frac{q(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t)}=V_t^{-1}(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t)\int_{\partial\tilde{V}_t(\underline{\underline{\mathfrak{z}}})}\frac{q(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)\cdot n(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dS_t$$

$$\rightarrow\quad \underline{\underline{q}}(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)=\underline{\underline{q}}^*(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t)\cdot T(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t)V_t^{-1}(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t)\int_{\tilde{V}_t(\underline{\underline{\mathfrak{z}}})}\mathrm{grad}_{\mathfrak{y}}\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)\cdot\frac{q(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t$$

Production d'entropie.

La phase qu'on utilise pour distinguer les constituants du milieu est une variable mécanique. On peut donc supposer qu'il existe des processus d'échange thermique en absence de vitesses des phases et des processus de changement de phase en absence de flux de chaleur et variations de température (cela est physiquement réaliste pourvu qu'on puisse piloter les processus en question par un apport volumique de chaleur approprié, ce qui est admissible du point de vue thermodynamique).

Il s'en suit que le terme de "convection" d'entropie par changement de phase (premier terme du premier membre de la (87)) n'est associé (aux deuxième membre) que avec celui de production d'entropie (dernier terme): le taux de production d'entropie d'une phase dans l'espace profond représente tant le taux de production d'entropie microscopique observé sur cette phase que l'entropie microscopique échangée par la "convection", due aux changements de phase, à partir des autres phases:

$$V_t(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},t)\rho(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)\eta(\underline{\underline{\mathfrak{z}}},\underline{\underline{\vartheta}},t)= \qquad 90$$

$$=\int_{\tilde{V}_t(\underline{\underline{\mathfrak{z}}})}\rho(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)\eta(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t+\mathrm{div}_{\mathfrak{z}}\int_{\tilde{V}_t(\underline{\underline{\mathfrak{z}}})}\rho(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)s(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)\overset{\circ}{\underline{\underline{\zeta}}}(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t$$

---

17 Passage:

$$\int_{\tilde{V}_t(\underline{\underline{\mathfrak{z}}})}\mathrm{div}_{\mathfrak{y}}\frac{q(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t= \qquad 89b$$

$$=\int_{\partial\tilde{V}_t(\underline{\underline{\mathfrak{z}}})}\frac{q(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)\,n(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)}{T(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t),\underline{\underline{\vartheta}})dS_t-\int_{\tilde{V}_t(\underline{\underline{\mathfrak{z}}})}\frac{q(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)\cdot\mathrm{grad}_{\mathfrak{y}}q(\underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t),\underline{\underline{\vartheta}})}{T(\underline{\underline{\mathfrak{y}}},t)}dV_t$$

Température.

En comparant l'identification microscopique de r (ou celles des q) obtenue du bilan d'énergie interne avec celle obtenue du bilan d'entropie, on obtient une condition sur la température dans l'espace profond qui est en accord avec l'hypothèse de température uniforme sur les phases (i.e. champ T dans l'espace profond indépendant de ϑ):

$$\frac{1}{T(\underline{\chi},t)}\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})} r(\underline{y},t)q(\underline{\zeta}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t = \int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\frac{r(\underline{y},t)}{T(\underline{y},t)}q(\underline{\zeta}(\underline{y},t),\underline{\underline{\vartheta}})dV_t \qquad 91$$

$$\forall(\underline{\chi},\underline{\underline{\vartheta}})\in\Omega_t,\forall t,\forall r$$

l'apport volumique extérieur de chaleur, r, étant arbitraire, cela peut s'écrire:

$$\frac{1}{T(\underline{\chi},t)}\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\varphi(\underline{y},\underline{\underline{\vartheta}},t)dV_t = \int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\frac{1}{T(\underline{y},t)}\varphi(\underline{y},\underline{\underline{\vartheta}},t)dV_t \qquad 92$$

$$\forall\varphi \text{ fonction suffisamment régulière sur } \tilde{V}_t(\underline{\chi}),\forall\underline{\underline{\vartheta}},\forall t$$

Si on considère le développement de l'inverse de la température microscopique autour de l'inverse de la température moyenne du sous-domaine typo-topique en objet, la moyenne étant pondérée par une fonction arbitraire λ:

$$T(\underline{y},t)=T_{m\lambda}(\tilde{V}_t(\underline{\chi}),t)+\theta_\lambda(\underline{y},t) \qquad 93$$

$$T_{m\lambda}(\tilde{V}_t(\underline{\chi}),t)=\frac{\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}T(\underline{y},t)\lambda(\underline{y},t)dV_t}{\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\lambda(\underline{y},t)dV_t}\ ;\ T_{m1}(\tilde{V}_t(\underline{\chi}),t)=\langle T\rangle_{(\underline{\chi},t)}\ ;\ \int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\theta_\lambda(\underline{y},t)\lambda(\underline{y},t)dV_t=0\ \forall\lambda$$

$$T^{-1}(\underline{y},t)=T^{-1}_{m\lambda}(\tilde{V}_t(\underline{\chi}),t)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^n_\lambda(\underline{y},t)}{T^{n+1}_{m\lambda}(\tilde{V}_t(\underline{\chi}),t)}$$

on obtient que la condition (92) se traduit en:

$$\frac{1}{T(\underline{\chi},t)}\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\varphi(\underline{y},t)dV_t = \qquad 94$$

$$=\frac{1}{T_{m\lambda}(\tilde{V}_t(\underline{\chi}),t)}\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\varphi(\underline{y},t)dV_t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{T^{n+1}_{m\lambda}(\tilde{V}_t(\underline{\chi}),t)}\int_{\tilde{V}_t(\underline{\chi})}\theta^n_\lambda(\underline{y},t)\varphi(\underline{y},t)dV_t\ \ \forall\varphi$$

et on obtient donc une identification microscopique de la température macroscopique qui vérifie la condition d'indépendance de la variable de phase qui avait été postulée dans le modèle macroscopique:

$$\boxed{T(\underline{\chi},t)=T_{m\lambda}(\tilde{V}_t(\underline{\chi}),t)} \qquad 95$$

si et seulement si il existe une fonction poids λ telle que (condition nécessaire et suffisante):

$$\exists\lambda:\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{T(\underline{x},t)}{T_{m\lambda}^n(\tilde{V}_t(\underline{x}),t)}\frac{\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})}\theta_\lambda^n(\underline{y},t)\varphi(\underline{y},t)dV_t}{\int_{\tilde{V}_t(\underline{x})}\varphi(\underline{y},t)dV_t}=0\quad\forall\varphi,\forall(\underline{x},\underline{\underline{\vartheta}})\in\Omega_t,\forall t \qquad 96$$

qui est vérifié si (condition suffisante):

$$\exists\lambda:\ \frac{\theta_\lambda(\underline{y},t)}{T_{m\lambda}(\tilde{V}_t(\underline{x}),t)}<<1\quad\forall\underline{y}\in\tilde{V}_t(\underline{x}),\forall\tilde{V}_t(\underline{x}),\forall t \qquad 97$$

Nous appelons cette dernière condition, lorsqu'elle est vérifiée pour $\lambda=1$ constante, condition de température presque uniforme dans tout sous-domaine typo-topique du milieu microscopique (à l'intérieur d'un tel domaine les oscillation de la température autour de la température moyenne sont négligeables par rapport à celle-ci).

Lorsque la condition de température presque uniforme est satisfaite par le milieu à phase continue, alors les deux identifications données pour l'apport volumique de chaleur et pour les flux de chaleurs, tant à partir du bilan d'énergie interne que du bilan d'entropie, coïncident.

On remarque en outre que, sous la même condition de température presque uniforme, l'échange d'entropie entre phases par flux de chaleur (qui dans le milieu à phase continue est représenté par le produit du flux de chaleur avec le gradient géométrique de la fonction de phase), est fait à température constante, et est donc réversible. Cet échange est représenté par le tenseur d'ordre deux q dans le milieu continu profond qui n'apparait pas dans l'inégalité de Clausius-Duhem, ce qui correspond bien à son caractère réversible.

3.6. Remarques et conclusion.

3.6.1. Fonctions non observables.

Une fonction, définie sur le milieu à phase continue, a été dite non observable de volume si son intégral de volume est nul quel que soit le sous-domaine typique support de l'intégration. C'est le cas, comme on a vu dans ce chapitre, des fluctuations du champ de vitesse du milieu à phase continue autour de la vitesse macroscopique qui, si le sous-domaine support de l'intégration est aussi topique, est uniforme sur ce sous-domaine.

Si le caractère typique n'engendre pas une taille minimale, on peut affirmer, par le lemme fondamental, qu'une telle fonction est nulle en tout point du milieu, et obtenir par conséquent des équations locales régissant l'évolution du milieu.

Dans notre cas cela n'est pas possible, mais on a introduit une hypothèse qui permet de faire "comme si" ce lemme pouvait être appliqué: on a négligé toute fonctionnelle linéaire des fonctions non observables à support typique (c'est à dire pourvu que les support ne soit pas trop petit; hypothèse (8)). C'est grâce à cette hypothèse qu'on a pu distinguer les termes d'échange entre phases dans les diverses équations de bilan par phase.

En conclusion, le caractère approchée de notre analyse du milieu à phase continue est évident: les échanges identifiés ne sont tels que à un champ non observable près. D'un autre coté les erreurs ainsi introduites n'affectent pas les résultats obtenus pour le milieu continu profond.

3.6.2. Limites de l'observation.

Les termes d'échange entre phases dans le modèle à phase continue sont, à la limite d'une observation exacte (noté q la fonctionnelle d'observation et δ la distribution de type Dirac donnant une observation exacte, avec référence aux définitions (33), (45), (46) et (52) et en se rappelant que toute dérivée de la mesure de Dirac peut être déplacée sur la fonction mesurée en la changeant de signe):

$$\forall \underline{\underline{\vartheta}} \in Q_e, \forall t \qquad 98$$

$$\lim_{q\to\delta} P^*_{exc}(\underline{\underline{\vartheta}},t) = -mes\{\partial V_{\vartheta t}\}\left\langle u\cdot \underline{\underline{\sigma}}\, n(\underline{\underline{y}},t)\right\rangle_{\partial V_{\vartheta t}}$$

$$\lim_{q\to\delta} R^*_e(\underline{\underline{\vartheta}},t) = -mes\{V_{\vartheta t}\}\left[\left\langle \rho \overset{\circ}{e}(\underline{\underline{y}},t)\right\rangle_{V_{\vartheta t}} - \left\langle div_{\underline{\underline{y}}}\underline{\underline{q}}(\underline{\underline{y}},t)\right\rangle_{V_{\vartheta t}}\right]$$

$$\lim_{q\to\delta} R^*_k(\underline{\underline{\vartheta}},t) = -mes\{V_{\vartheta t}\}\left\langle \rho u\cdot \underline{\underline{\gamma}}(\underline{\underline{y}},t)\right\rangle_{V_{\vartheta t}} + mes\{\partial V_{\vartheta t}\}\left\langle u\cdot \underline{\underline{\sigma}}\, n(\underline{\underline{y}},t)\right\rangle_{\partial V_{\vartheta t}}$$

$$\lim_{q\to\delta} H^*(\underline{\underline{\vartheta}},t) = -mes\{V_{\vartheta t}\}\left\langle \rho \overset{\circ}{s}(\underline{\underline{y}},t)\right\rangle_{V_{\vartheta t}} - mes\{\partial V_{\vartheta t}\}\left\langle T^{-1}\underline{\underline{q}}(\underline{\underline{y}},t)\right\rangle_{\partial V_{\vartheta t}}$$

avec $V_{\vartheta t}$ ensemble des points en phase ϑ à l'instant t, dans le sous-domaine V* support de l'observation (ce support n'étant plus restreint par la classe V_{tq}), supposé être constitué par l'union d'un ensemble fini de sous domaines de V_t (de façon que les mesures indiquées aient un sens):

$$V_{\vartheta t} = \left\{ \underline{\underline{y}} \in V^* \subseteq V_t :\ \underline{\underline{\zeta}}(\underline{\underline{y}},t) = \underline{\underline{\vartheta}} \right\} \quad \forall \underline{\underline{\vartheta}} \in Q_e, \forall t \qquad 99$$

Bien que de telles limites n'aient pas de signification physique, à cause des limites de pertinence du modèle à phase continue, ils montrent clairement la signification des termes d'échange.

3.6.3. Postulat de l'état local.

On considère le milieu à phase continue et on se pose le problème de définir des fonctions actuelles locales de comportement moyennant la méthode des variables internes. Une fois défini un ensemble de variables d'état, observables et non (parmi lesquelles peut apparaître la fonction de phase, sauf à en étudier l'objectivité), on postule que le corps dans son processus peut être décrit par un ensemble, sur le domaine qu'il occupe, et par une suite, dans le temps, d'état locaux. Chaque état local étant complètement décrit par la donnée de l'ensemble des variables d'état choisies.

L'ensemble des variables d'état est en relation avec le type de processus étudié; ces derniers étant établis, il existe une restriction sur le premier. Le choix des variables d'état est en fait soumis à la condition d'existence de processus de décharge adiabatique pouvant être décrits par relaxation d'un certain nombre de ces variables (e.g. température vers une température uniforme égale à celle de l'extérieur du corps et déformation vers un état de contrainte nulle ou sphérique), toute autre variable étant fixée à l'état actuel.

Pour un polycristal l'orientation locale du réseau est une variable du comportement qui ne peut pas être négligée. Plus particulièrement, la déformation plastique étant anisotrope, devant choisir cette déformation comme variable non observable, on a le problème d'identifier à tout instant et en tout point du milieu les directions locales de cette anisotropie, c'est à dire les directions locales de glissement.

Sans rentrer dans les détails du problème (qui ont été exposés dans le Ch.IV § 5.3.), on considère ci-dessous un postulat de l'état local formulé avec les hypothèses nécessaires, pour des matériaux hétérogènes localement anisotropes tels que les polycristaux, à l'élimination des indéterminations introduites par l'anisotropie[18].

Dans un processus irréversible d'un système thermo-mécanique hétérogène localement anisotrope, pour une échelle de temps et une échelle d'espace fixées et dans un référentiel inertiel, il existe en tout instant un ensemble de configurations locales aux propriétés locales instantanées suivantes:

---

18 Cf. [Mandel, Cours, 1971], [Mandel, 1982], [Cleja-Ţigoiu et Soós 1990], le postulat tel qu'il est présenté est une synthèse originale tirée de ces travaux.

(première partie)

- il existe un état d'équilibre local instantané défini par un ensemble de variables d'état;
- il existe des équations de comportement telles que toute inconnue constitutive est fonction locale instantanée des variables d'état;
- il existe des potentiels de dissipations locaux instantanés (condition suffisante pour la validité du théorème d'Onsager et pour qu'il existe des lois d'évolution et de critères);

(deuxième partie)

- existence locale instantanée d'un trièdre constitutif, matériel ou non, par rapport auquel le comportement est invariant;
- existence locale instantanée de l'état neutre après décharge thermo-élastique locale instantanée;
- unicité locale instantanée de la déformation plastique (conjecture d'auto-cohérence locale).

La première partie est classique pour tout milieu continu dissipatif; la deuxième précise le repère de l'application[19] (même si non matériel, comme dit au premier point) et il en postule le caractère opérationnel pour la détermination de l'état actuel (deuxième et troisième points).

Si on compare le postulat ci-dessus avec celui correspondant pour le milieu continu profond (Ch.IV § 5.3.2. "Postulat de l'état local") on voit que l'espace profond permet de "relâcher" la deuxième partie qui est, dans le postulat ci-dessus, très forte.

En fait le terme "local" fait référence aux points matériels et donc se traduit, dans le modèle classique, "en tout point géométrique". Dans le modèle profond (où ce terme devrait être traduit "par point géométrique et par phase") on a fait l'hypothèse supplémentaire que la fragmentation de la configuration géométrique naturelle correspond à la partition du milieu en phases; cela signifie qu'on donne au terme "local" en objet la signification de "par phase" qui entraîne de restrictions moins fortes (on peut avoir plusieurs points matériels dans la même phase).

19 Le trièdre constitutif est, en général, non unique. Cela donne lieu à des méthodes type Tailor-Bishop-Hill pour les métaux ou Etchecopar pour les roches qui rajoutent autant d'équations qu'il faut dans le système thermo-mécanique pour identifier un trièdre unique (en effet, mais cela revient au même, ils assurent l'unicité du système de glissement actif). Si on accepte cette démarche, au lieu de postuler l'unicité du trièdre constitutif, il faut modifier le quatrième point par "existence ... de plusieurs trièdres constitutifs,..." et rajouter dans le modèle un critère de choix (énergétique ou géométrique ou autre).

QUATRIEME PARTIE

Axiomatique

4. Conclusion.

Dans ce chapitre on a étudié la signification du modèle de polycristal dans l'espace profond et on a su l'expliquer faisant appel à des concepts et à des définitions classiques de la mécanique et de la thermodynamique des milieux continus. Par conséquent on peut accepter comme réaliste un modèle qui n'avait été introduit que par des raisonnements formels et poursuivre son étude sachant qu'elle n'est pas dépourvue d'intérêt pratique.

En outre c'est le mécanisme même de cette explication du modèle qui, permettant des comparaisons avec des modèles classiques, nous donne un moyen possible de poursuite de l'étude en objet. On rappelle en fait qu'on ne peut définir davantage le comportement lié aux contraintes de phase: ce comportement peut être inféré par une étude numérique classique (avec description d'un agrégat type) et une observation approchée par globalisation. De même, lors d'une étude expérimentale, on pourra régulariser les mesures effectuées selon le même principe.

De tels développements doivent être laissés à une phase du travail successive à la rédaction de cette thèse. Dans la partie suivante on étudie la cohérence mathématique du modèle proposé dans la Deuxième Partie du travail.

C H A P I T R E VII

Axiomatique classique

1. Introduction.

Dans cette quatrième partie du travail on défini l'axiomatique générale dans laquelle peut être encadré le modèle de polycristal présenté au Chapitre IV et l'exemple plan du Chapitre III. Cette axiomatique représente aussi, à cause de sa plus grande généralité, un outil pour bâtir d'autres modèles thermo-mécaniques non classiques dans le sens d'un "approfondissement" de la représentation des corps matériels vers les racines du comportement de leur matériau constitutif.

L'étude de ce cas général est nécessaire pour donner le définitions classiques de la mécanique de façon cohérente avec, d'un coté, l'intuition usuelle de corps matériel et, de l'autre, l'utilisation d'un référentiel d'espace "profond" (on rappelle qu'on synthétise avec cette dénomination l'espace produit cartésien de l'espace euclidien, référentiel de la géométrie de la matière, avec un espace des phases, référentiel, en bref, du comportement).

On donne d'abord, dans ce chapitre, un résumé de la mécanique axiomatique classique, selon une interprétation du cadre axiomatique dû à W.Noll et C.Truesdell (Cf. [Noll 1974] et [Truesdell 1977]), articulé en quatre parties: définition de l'univers matériel et des référentiels pour le représenter (§ 2.), cinématique (§ 3.), mécanique (§ 4.) et thermodynamique (§ 5.) des corps matériels. Ce résumé est proposé afin de fixer les notations et de faciliter la lecture, ensuite, du cas non classique: par conséquent il se limite aux passages de base et à quelques remarques utiles dans la suite. Les références bibliographiques pourront sûrement donner une vision plus large du sujet.

On souligne le fait qu'il s'agit d'une interprétation de ladite axiomatique classique car on essaye de s'approcher du cadre qu'on a plus l'habitude d'utiliser. Notamment on a modifié, dans cette présentation, la façon dont on introduit les forces et la définition de l'équilibre mécanique, en substituant au concept primitif de force celui de puissance et à la définition d'équilibre en termes de somme de vecteurs et de moments de vecteurs celle en termes de puissances virtuelles. A cette fin on a suivi la démarche présentée par P.Rougee (Cf. [Rougee 1980]). On remarque que les bases pour montrer l'équivalence des deux systèmes d'axiomes (par les forces ou par les puissances) ont été donnée par W.Noll en 1959 (Cf. [Noll 1963]).

Dans le Chapitre VIII, suivant le schéma de ce Chapitre VII, on donnera les définitions valables pour le cadre étendu proposé.

2. Univers matériel et monde des événements.

2.1. Introduction.

On défini tout d'abord une structure intrinsèque aux corps, appelés matériels, en supposant qu'ils sont soumis à une relation d'ordre, qu'ils ont une masse, qu'ils peuvent avoir une forme, qu'il existe des interactions entre eux.

La structure de l'univers matériel est spécifié davantage par l'expérience qu'on peut en avoir, c'est à dire par la représentation des corps matériels dans un monde d'événements. Dans une deuxième partie on construit donc ce référentiel.

Les notations introduites ne reprennent pas toujours celles originales pour de raisons de clarté à l'intérieur du contexte de ce travail. En outre les symboles utilisés dans ce chapitre seront repris dans le Chapitre VIII dans un contexte différent et avec une signification différente. La raison de ce choix est (outre le manque de symboles parmi les jeux usuels!) de rendre évident la ressemblance formelle du modèle "profond" à un modèle classique. Pour éviter toute confusion, les formules marquées avec un "#" (pour "classique"), à gauche de la page, sont celles relatives au cas classique qui seront définies différemment dans le chapitre suivant.

2.2. Univers matériel.

2.2.1. Structure.

Soit $\mathcal{U}$, "univers matériel", une tribu[1] d'éléments $\mathcal{B}\in\mathcal{U}$ qu'on appelle "corps matériels". On note "$\leq$" la relation d'ordre partiel sur $\mathcal{U}$ et, respectivement, "$\cup$" et "$\cap$" les opération "enveloppe minimum" et "partie commune" entre éléments de $\mathcal{U}$ engendrées par celle-ci.

On note l'ensemble des couples de corps matériels séparés:

$$(\mathcal{U}\times\mathcal{U})_{sep}=\{(\mathcal{A},\mathcal{B})\in\mathcal{U}\times\mathcal{U}:\ \mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\emptyset\} \qquad 1$$

Pour un corps materiel donné, $\mathcal{B}$, on note (soit I un ensemble d'indices fini ou dénombrable):

ensemble des parties de $\mathcal{B}$	$\mathcal{U}_{\mathcal{B}}=\{\mathcal{P}\in\mathcal{U}:\ \mathcal{P}\leq\mathcal{B}\}$	2
ens. des couples séparées	$(\mathcal{B}\times\mathcal{B})_{sep}=\{(\mathcal{P},\mathcal{Q})\in\mathcal{U}_{\mathcal{B}}\times\mathcal{U}_{\mathcal{B}}:\ \mathcal{P}\cap\mathcal{Q}=\emptyset\}$	
famille des recouvrements[2]	$R(\mathcal{B})=\{r(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{U}_{\mathcal{B}}:\ \mathcal{B}\leq\cup r(\mathcal{B})\}$	
famille des séparations[3]	$S(\mathcal{B})=\{s(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{U}_{\mathcal{B}}:\ \forall\mathcal{P}\in s(\mathcal{B})\ \mathcal{P}\cap\mathcal{Q}=\emptyset\ \forall\mathcal{Q}\in s(\mathcal{B})\setminus\{\mathcal{P}\}\}$	

---

1 Cf. [Noll 1974]

_Existence d'une relation d'ordre partiel $\leq$ sur $\mathcal{U}$

$\mathcal{A}=\mathcal{B}\leftrightarrow\mathcal{A}\leq\mathcal{B}\ \&\ \mathcal{B}\leq\mathcal{A}$ 1a

$\mathcal{A}\leq\mathcal{B}\ \&\ \mathcal{B}\leq\mathcal{C}\rightarrow\mathcal{A}\leq\mathcal{C}$

ce qui permet de définir l'enveloppe minimum $\mathcal{A}\cup\mathcal{C}$ et la partie commune $\mathcal{B}\cap\mathcal{C}$ de deux corps $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

_Existence du "corps vide", $\mathcal{O}$, et du "corps universel", $\mathcal{U}$

$\exists\mathcal{O}\in\mathcal{U},\ \exists\mathcal{U}\in\mathcal{U}\quad\mathcal{O}\leq\mathcal{B}\leq\mathcal{U}\ \forall\mathcal{B}\in\mathcal{U}$ 1b

_Existence, unicité, complémentarité par rapport à la relation d'ordre de l'extérieur $\mathcal{B}_e$ de tout corps matériel $\mathcal{B}$ et leur séparation:

définition: $\mathcal{B}\in\mathcal{U},\ \mathcal{B}_e:\ \mathcal{B}\cap\mathcal{B}_e=\mathcal{O}\ \ \mathcal{B}\cup\mathcal{B}_e=\mathcal{U}$ 1c

postulat d'existence, unicité et complémentarité $\forall\mathcal{B}\in\mathcal{U}\ \exists!\mathcal{B}_e\in\mathcal{U}$

postulat de séparation de l'extérieur $\forall\mathcal{P}\in\mathcal{U}\ \mathcal{P}\cap\mathcal{B}_e=\mathcal{O}\leftrightarrow\mathcal{P}\leq\mathcal{B}$

_Existence de la partie commune à deux corps matériels (on les définis séparés ssi elle est vide):

postulat d'existence de la partie commune $\forall\mathcal{B},\mathcal{C}\in\mathcal{U}\ \exists\mathcal{B}\cap\mathcal{C}\in\mathcal{U}$ 1d

2 L'enveloppe minimum d'un ensemble de parties (qui sont des corps matériels) est le corps matériel qui contient tout élément de l'ensemble et qui est contenu par tout corps matériel ayant la même propriété:

$$\mathcal{A}=\cup\{\mathcal{C}\}\leftrightarrow\mathcal{A}\in\mathcal{U}\ \ \forall\mathcal{C}\in\{\mathcal{C}\}\ \mathcal{C}\leq\mathcal{A}\ \&\ \forall\mathcal{D}\in\mathcal{U}:\ \forall\mathcal{C}\in\{\mathcal{C}\}\ \mathcal{C}\leq\mathcal{D}\rightarrow\mathcal{A}\leq\mathcal{D} \qquad 2a$$

3 Une séparation de $\mathcal{B}$ est un ensemble de parties séparées de $\mathcal{B}$.

famille des partitions[4] $P(\mathcal{B})=R(\mathcal{B})\cap S(\mathcal{B})$

famille des partitions dénombrables $\mathcal{P}(\mathcal{B},I)=\{p(\mathcal{B})\in P(\mathcal{B}): p(\mathcal{B})\sim I\}$

i.e. $p(\mathcal{B})=\{\mathcal{P}_i\in\mathcal{U}_{\mathcal{B}}: i\in I\ \mathcal{B}=\bigcup_{\in i}\mathcal{P}_i\ ;\ \mathcal{P}_i\cap\mathcal{P}_j=\emptyset \leftrightarrow i\neq j\}$

Le raffinement $r'(\mathcal{B})$ d'un recouvrement donné $r(\mathcal{B})$ est un recouvrement dont les éléments sont contenus, selon l'ordre partiel de l'univers matériel, dans les éléments du recouvrement donné; on note "$r'(\mathcal{B})\leq r(\mathcal{B})$":

$$r'(\mathcal{B})\leq r(\mathcal{B}) \leftrightarrow \forall\kappa\in r'(\mathcal{B})\ \exists\mathcal{R}\in r(\mathcal{B}): \kappa\leq\mathcal{R} \qquad 3$$

En conséquence de l'ordre partiel de l'univers matériel, le raffinement induit une relation d'ordre partiel sur la famille des recouvrements $R(\mathcal{B})$. On appelle "points matériels" $\mathcal{M}$ d'un corps matériel $\mathcal{B}$ les éléments du plus petit raffinement de $\mathcal{B}$ dans $R(\mathcal{B})$ si celui-ci peut être défini et s'il existe:

$$\exists\{\mathcal{M}\}\in R(\mathcal{B}): \forall r(\mathcal{B})\in R(\mathcal{B})\ \{\mathcal{M}\}\leq r(\mathcal{B}) \qquad 4$$

S'il n'est pas défini un élément inférieur dans $R(\mathcal{B})$ (c'est à dire s'il est toujours possible de trouver un raffinement pour un recouvrement donné ou si, comme dans notre cas, on ne donne pas assez de spécifications sur $\mathcal{B}$ pour parvenir à une définition précise) alors on appelle "points matériels" les éléments d'un recouvrement arbitrairement choisi dans $R(\mathcal{B})$.

En tout cas, par définition, un corps matériel $\mathcal{B}$ forme une tribu de points matériels:

$$\exists\mathcal{M}\in\mathcal{B}\ ;\ \cup\{\mathcal{M}\}\in\mathcal{B}\ ;\ \forall\mathcal{M}*\in\mathcal{B}: \cup\{\{\mathcal{M}\}\setminus\{\mathcal{M}*\}\}\in\mathcal{B} \qquad 5$$

seulement s'il est défini un élément inférieur dans $R(\mathcal{B})$ (i.e. la (4) est vérifiée) les points matériels constituent la plus petite tribu sur $\mathcal{B}$. On adopte désormais une notation identique pour le corps et pour l'ensemble des ses parties[5]: $\mathcal{B}=\{\mathcal{M}\}$.

Nous avons introduit cette définition de point matériel pour de raisons de commodité et de clarté car, dans la suite, on considère certaines propriétés intrinsèques aux corps matériels comme spécifiques aux points matériels, selon le langage usuel. Il s'agit d'un procédé formel: ces propriétés sont attribuables à tout ensemble de parties d'un corps matériel, l'ensemble des points matériel étant un de ces ensembles arbitrairement choisi pour représenter toute la classe.

Pour un corps matériel donné $\mathcal{B}$, on appelle système $\mathcal{S}$, en relation avec une étude particulière du corps, un sous-ensemble de l'univers contenant le corps lui même et un nombre restreint d'autres corps matériels. Dans l'étude particulière en objet, le rapports de $\mathcal{B}$ avec l'extérieur du système, $\mathcal{S}_e=\mathcal{U}\setminus\mathcal{S}$, sont distincts des rapports avec son extérieur dans le système, $\mathcal{B}_{\mathcal{S}e}=\mathcal{B}_e\setminus\mathcal{S}_e$ ($\mathcal{B}_e=\mathcal{B}_{\mathcal{S}e}\cup\mathcal{S}_e$) par l'introduction d'actions inertielles.

2.2.2. Masse.

On postule l'existence d'une fonction "masse" non négative sur l'univers, assurant ainsi le principe de conservation de la masse (la masse d'un système matériel est fixée)[6]:

$$\exists\mu:\mathcal{B}\in\mathcal{U}\rightarrow\mu(\mathcal{B})\in R^+ \qquad 6$$

---

4 Une partition de $\mathcal{B}$ est un recouvrement-séparation finie ou dénombrable de $\mathcal{B}$.

5 Un point matériel $\mathcal{M}$ est contenu dans un corps matériel $\mathcal{B}$ par la relation d'ordre $\leq$ et il appartient à la tribu formée par $\mathcal{B}$:

$\mathcal{M}\leq\mathcal{B}\in\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ en tant que corps matériel,

$\mathcal{M}\in\{\mathcal{M}\}\in R(\mathcal{B})$ en tant que élément de la tribu.

Un point matériel est un corps matériel particulier ou arbitrairement choisi; $\mathcal{U}$ étant une tribu, un ensemble de points matériels est un corps matériel.

6 Ce postulat n'est pas toujours présent dans les travaux de Noll au niveau des corps matériels; notamment en [Noll 1973] il est modifié en une condition sur les processus admissibles.

on peut considérer l'ensemble des corps matériels de masse nulle et la famille de séparations-en-masse, et donc des partitions-en-masse, d'un corps matériel:

$$\mathcal{U}_{\neg m}=\{\mathcal{S}\in\mathcal{U}:\ \mu(\mathcal{S})=0\}\subset\mathcal{U} \qquad 7$$
$$S_m(\mathcal{B})=\{s_m(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{U}_{\mathcal{B}}:\ \forall\mathcal{P}\in s_m(\mathcal{B})\ \mu(\mathcal{P}\cap\mathcal{Q})=0\ \forall\mathcal{Q}\in s_m(\mathcal{B})\setminus\{\mathcal{P}\}\}$$
$$P_m(\mathcal{B})=R(\mathcal{B})\cap S_m(\mathcal{B})$$

la masse est additive sur les corps séparés ou séparés-en-masse:

$$\forall\mathcal{B}\in\mathcal{U}\ \forall s(\mathcal{B})\in S(\mathcal{B})\cup S_m(\mathcal{B})\ \ \mu(\bigcup s(\mathcal{B}))=\sum_{p\in s(\mathcal{B})}\mu(p) \qquad 8$$

en particulier, pour une partition ou partition-en-masse dénombrable de $\mathcal{B}$, on a:

$$\mathcal{P}_m(\mathcal{B},I)=\{p_m(\mathcal{B})\in P_m(\mathcal{B}):\ p_m(\mathcal{B})\sim I\} \qquad 9$$
$$\forall\{\mathcal{P}_i\}\in\mathcal{P}(\mathcal{B},I)\cup\mathcal{P}_m(\mathcal{B},I)\ \ \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{P}_i)=\sum_{i\in\mathbb{I}}\mu(\mathcal{P}_i)$$

la propriété additive entraîne[7]:

$$\mu(\emptyset)=0\rightarrow S(\mathcal{B})\subset S_m(\mathcal{B})\rightarrow P(\mathcal{B})\subset P_m(\mathcal{B})\rightarrow\mathcal{P}(\mathcal{B},I)\subset\mathcal{P}_m(\mathcal{B},I) \qquad 10$$

On peut donc définir sur la tribu $\mathcal{U}$ la mesure de Lebesgue μ. Tout corps matériel est mesurable par la mesure masse. On note:

$$\forall\mathcal{B}\in\mathcal{U}\ \mu(\mathcal{B})=\sum_{\mathcal{M}\in\mathcal{B}}\mu(\mathcal{M})=\int_{\mathcal{B}}d\mu \qquad 11$$

2.2.3. Interactions.

Soit V un groupe. On appelle "interaction" une fonction A entre corps séparés additive dans le sens ci-dessous:

$$A:(\mathcal{U}x\mathcal{U})_{sep}\rightarrow V \qquad 12$$
$$\forall(\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D})\in(\mathcal{U}x\mathcal{U}x\mathcal{U})_{sep}\ \text{i.e.:}\ (\mathcal{B},\mathcal{C})\in(\mathcal{U}x\mathcal{U})_{sep}\ (\mathcal{B},\mathcal{D})\in(\mathcal{U}x\mathcal{U})_{sep}\ (\mathcal{C},\mathcal{D})\in(\mathcal{U}x\mathcal{U})_{sep}$$
$$\downarrow$$
$$A(\mathcal{C}\cup\mathcal{D},\mathcal{B})=A(\mathcal{C},\mathcal{B})+A(\mathcal{D},\mathcal{B})$$

On appelle "interaction intérieure" la restriction d'une interaction à un corps matériel:

$$\forall\mathcal{B}\in\mathcal{U}\ \ A_{int}:(\mathcal{B}x\mathcal{B})_{sep}\rightarrow V \qquad 13$$

On appelle "action extérieure" à un corps matériel toute interaction entre son extérieur et une de ses parties (qui constituent une couple de corps séparés par postulat):

$$\forall\mathcal{B}\in\mathcal{U}\ \forall\mathcal{P}\in\mathcal{U}_{\mathcal{B}}\ (\mathcal{B}_c,\mathcal{P})\in(\mathcal{U}x\mathcal{U})_{sep}\ \ A_{ext}:\mathcal{P}\in\mathcal{U}_{\mathcal{B}}\rightarrow A(\mathcal{B}_c,\mathcal{P})\in V \qquad 14$$

D'après la propriété additive des interactions on voit en particulier que l'action sur une partie d'un corps matériel est la somme d'une action extérieure et d'une action intérieure au corps:

---

7 Deux corps matériels séparés-en-masse ont donc en commun une partie de masse nulle qui peut être le vide matériel en conséquence du fait que celui-ci a masse nulle. D'autres mesures, notamment dans un référentiel d'espace géométrique, peuvent mettre en évidence cette partie.

$$\forall \mathcal{B}\in\mathcal{U}\ \forall \mathcal{P}\in\mathcal{U}_{\mathcal{B}}\ A(\mathcal{P}_c,\mathcal{P})=A(\mathcal{B}_c,\mathcal{P})+A(\mathcal{B}\backslash\mathcal{P},\mathcal{P}) \qquad 15$$

formellement : $A=A_{ext}+A_{int}:\mathcal{P}\in\mathcal{U}_{\mathcal{B}}\rightarrow V$

On se limite a postuler l'existence de fonctions de ce type comme intrinsèque à l'univers matériel, leurs propriétés ne seront étudiées qu'à l'intérieur d'un référentiel ayant une topologie fixée[8] et après avoir spécifié leur nature (c'est à dire l'espace V).

Les deux types d'interactions qu'on introduira sur les corps matériels seront liés aux forces et au transfert de chaleur.

2.2.4. Conjecture d'isolement (forme universelle).

On suppose que, pour un corps matériel et un ensemble d'interactions données, il est toujours possible d'isoler un système, contenant au moins le corps, tel que la nature des interactions entre l'extérieur du système et le corps diffère de la nature des interactions entre l'extérieur du corps dans les système et le corps même.

On appelle "action extérieure dans le système" ou "action appliquée" à un corps matériel toute interaction entre son extérieur dans le système et une de ses parties:

$$\forall \mathcal{B}\in\mathcal{U}\ \forall \mathcal{P}\in\mathcal{U}_{\mathcal{B}}\ (\mathcal{B}_{sc},\mathcal{P})\in(\mathcal{U}x\mathcal{U})_{sep}\ A_{extS}:\mathcal{P}\in\mathcal{U}_{\mathcal{B}}\rightarrow A(\mathcal{B}_{sc},\mathcal{P})\in V \qquad 16$$

et "action extérieure hors du système" toute interaction entre l'extérieur du système et le parties d'un corps:

$$\forall \mathcal{B}\in\mathcal{U}\ \forall \mathcal{P}\in\mathcal{U}_{\mathcal{B}}\ (\mathcal{S}_c,\mathcal{P})\in(\mathcal{U}x\mathcal{U})_{sep}\ A_{extI}:\mathcal{P}\in\mathcal{U}_{\mathcal{B}}\rightarrow A(\mathcal{S}_c,\mathcal{P})\in V \qquad 17$$

avec:

$$\forall \mathcal{B}\in\mathcal{U}\ \forall \mathcal{P}\in\mathcal{U}_{\mathcal{B}}\ \forall \mathcal{S}\supseteq\mathcal{B}:\ A(\mathcal{B}_c,\mathcal{P})=A(\mathcal{S}_c,\mathcal{P})+A(\mathcal{B}_{sc},\mathcal{P}) \qquad 18$$

conjecture: $\forall \mathcal{B}\in\mathcal{U}\ \exists \mathcal{S}\supseteq\mathcal{B}:\ A_{ext}(\mathcal{P})=A_{extI}(\mathcal{P})+A_{extS}(\mathcal{P})\ \forall \mathcal{P}\in\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$

Par cette conjecture on peut donc distinguer les actions inertielles (i.e. hors du système) des autres actions extérieures au corps.

2.2.5. Forme.

On muni tout corps matériel $\mathcal{B}$ d'une classe Δ d'applications δ "forme[9] globale" de $\mathcal{B}$ qui associent à tout couple de points matériels de $\mathcal{B}$ une "distance dans la forme" d_δ, qui est positive si et seulement si elle est prise entre parties séparées du corps (axiome d'impénétrabilité: si la distance entre deux points est positive dans une forme de la classe Δ, elle est positive dans toute forme de la classe):

$$\delta\in\Delta\ ;\ \delta:(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')\in\mathcal{B}x\mathcal{B}\rightarrow d_\delta(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')\in R^+ \qquad 19$$

#

$$(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')\in(\mathcal{B}x\mathcal{B})_{sep}\leftrightarrow d_\delta(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')>0\ \ \forall\delta\in\Delta$$

Cela défini en tout point matériel $\mathcal{M}$ et pour toute forme globale δ une application "forme locale" $\delta_{\mathcal{M}}$, donnant une distance positive seulement pour tout point $\mathcal{M}''$ distinct de $\mathcal{M}$ (i.e. ssi $\mathcal{M}''\in\mathcal{B}\backslash\{\mathcal{M}\}$):

$$\#\qquad \forall \mathcal{M}\in\mathcal{B}\ \forall\delta\in\Delta\ \ \delta_{\mathcal{M}}:\mathcal{M}''\in\mathcal{B}\rightarrow d_\delta(\mathcal{M},\mathcal{M}'')\in R^+ \qquad 20$$

Le voisinage d'un point matériel peut être alors défini comme un ensemble de points d'un corps matériels ayant une distance évanescente du point donné en toute forme globale:

---

8 La valeur absolue de la différence entre deux masses est bien une métrique sur $\mathcal{U}$, ce qui, en induisant une topologie, permettrait une étude de la continuité, mais elle est inutile pour les applications car non reliée par l'expérience aux actions postulées.

9 On utilise le mot "forme" selon la traduction due à P. Rougee (Cf. [Rougee 1980]) de l'anglais "intrinsic configuration" de W. Noll qui a introduit ce concept (Cf. [Noll 1972]).

$$\#\quad \mathcal{V}(\mathcal{M})=\left\{\mathcal{M}'\in\mathcal{B}:\ \exists\varepsilon\in R:\ d_\delta(\mathcal{M},\mathcal{M}')<\varepsilon\quad \forall\delta\in\Delta\right\} \qquad 21$$

ceci permet l'introduction des concepts de petite translation matérielle, de vecteur matériel et d'espace tangent, mais on renvoit ces définitions à une partie suivante du chapitre, en vue d'une axiomatique non classique dans laquelle le-dit voisinage ne peut pas être ainsi défini.

2.3. Monde des événements.

Dans ce paragraphe on traduit le minimum possible des définitions en notation mathématique, car toutes ces définitions seront reprises dans la deuxième partie du chapitre.

Ce qui suit peut se résumer en disant que le monde des événements est, dans le cas classique, représenté par une classe de référentiels, dont les éléments sont obtenus par isométrie, à partir de l'espace produit cartésien de l'espace euclidien absolu et du temps. Néanmoins on présente avec plus de détails la définition du monde et des référentiels, en vue du modèle non classique objet des parties suivantes du chapitre.

2.3.1. Temps.

Soit $\mathcal{W}$, appelé "monde", un ensemble ouvert dont les éléments $e\in\mathcal{W}$ sont appelés "événements". La structure mathématique de $\mathcal{W}$ est définie, tout d'abord, par la donnée d'une fonction réelle "délai de temps" τ entre deux événements:

$$\tau:\mathcal{W}x\mathcal{W}\rightarrow R \qquad 22$$

postulée anti-symétrique, vérifiant l'égalité triangulaire et telle qu'il existe toujours un événement ayant un délai donné avec un événement donné.

Deux événements ayant un délai de temps nul sont dans une relation d'équivalence dite "simultanéité". Les classes d'événements simultanés qui en résultent sont appelées "instants"; l'ensemble des instants est le "temps", noté $\mathcal{T}$.

Le délai de temps est défini sans ambiguïté entre deux instants du temps et, outre les propriétés données, satisfait celle de séparation. La valeur absolue du délai de temps est donc une métrique euclidienne pour le temps $\mathcal{T}$, ce qui, en postulant l'existence d'un espace translation de $\mathcal{T}$ isomorphe à R ([11]), engendre que $\mathcal{T}$ est euclidien.

2.3.2. Espace géométrique.

En tant qu'ensemble d'événements simultanées, un instant de temps t_ϵ est appelé "espace géométrique instantané" et est noté $\mathcal{E}(t_\epsilon)$ [10]. On postule qu'il est euclidien, c'est à dire muni de la métrique euclidienne $d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}$ et d'un espace translation de produit scalaire, $E(t_\epsilon)$, isomorphe à R^n (n=2 ou 3)[11]:

$$\#\quad d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}:\mathcal{E}(t_\epsilon)x\mathcal{E}(t_\epsilon)\rightarrow R^+ :\begin{cases}\forall e\in\mathcal{E}(t_\epsilon): & d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}(e,e)=0\\ \forall(e,f)\in\mathcal{E}(t_\epsilon)x\mathcal{E}(t_\epsilon): & d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}(e,f)=d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}(f,e)\\ \forall(e,f,g)\in\mathcal{E}(t_\epsilon)x\mathcal{E}(t_\epsilon)x\mathcal{E}(t_\epsilon): & d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}(e,f)+d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}(f,g)\geq d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}(e,g)\\ \forall(e,f)\in\mathcal{E}(t_\epsilon)x\mathcal{E}(t_\epsilon): & d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}(e,f)=0\rightarrow e=f\end{cases} \qquad 23$$

---

10 Il faut noter que $\mathcal{E}(t_\epsilon)$ et t_ϵ sont identiques; la raison pour laquelle on a introduit la double notation est que cette identité n'est pas admise dans le cas non classique qu'on veut introduire.

11 Etant donnée une métrique sur $\mathcal{E}(t_\epsilon)$, son espace translation est unique (voir aussi le cas de l'espace translation du temps). L'axiome de séparation (quatrième propriété dans la formule (20)) n'est pas nécessaire à cette fin: l'espace translation éventuellement engendré par une pseudo-métrique est unique aussi (e.g. [Noll 1964]). C'est une propriété importante pour le passage au cas non classique du Chapitre VIII.

On appelle "position instantanée" un élément d'un espace géométrique instantané, c'est à dire un événement à l'intérieur d'un instant de temps. La distance géométrique instantanée est définie sans ambiguïté, à tout instant, entre deux positions instantanées dans $\mathcal{E}(t_e)$ par la métrique de cet espace.

On postule l'indépendance métrique de l'espace géométrique de l'instant de temps (mécanique non relativiste): la métrique $d_{\mathcal{E}(t_e)}$ ne dépend pas de l'instant de temps, on la note donc $d_{\mathcal{E}}$. En d'autres termes tout $\mathcal{E}(t_e)$ est isométrique à un espace géométrique absolu $\mathcal{E}$ (de métrique euclidienne $d_{\mathcal{E}}$) et, par conséquent, tout $E(t_e)$ est isomorphe à un espace translation absolu E isomorphe à R^n.

Un événement a donc une "position" dans l'espace géométrique absolu moyennant l'isométrie, fonction de l'instant de temps, entre son espace géométrique instantané et l'espace géométrique absolu.

On peut par conséquent définir, sans ambiguïté, la distance géométrique entre deux événements non nécessairement simultanés qui est une pseudo-métrique $d_{\mathcal{W}}$ sur le monde $\mathcal{W}$ car toute propriété de $d_{\mathcal{E}}$ (Cf. formule (23)) est conservée sauf celle de séparation[12]:

$$\# \qquad d_{\mathcal{W}}:(e,f)\in\mathcal{W}\times\mathcal{W}\rightarrow d_{\mathcal{E}}(\vartheta_{t_e}p_e,\vartheta_{t_f}p_f)\in R^+ \qquad 24$$

(où t_e est l'instant de l'événement e, p_e sa position instantanée et ϑ_{t_e} l'isométrie donnant sa position absolue, c'est à dire l'isométrie entre $\mathcal{E}(t_e)$ et $\mathcal{E}$).

On appelle coïncidents deux événements à distance géométrique nulle. Deux événements coïncidents ne peuvent pas être instantanés et vice versa.

2.3.3. Référentiels.

Référentiel. Niveau.

On introduit la définition de niveau car elle nous permet d'expliquer les raisons qui justifient le passage au modèle non classique qui nous intéresse.

Sous le postulat de non-relativité on a obtenu une partition du monde en deux ensembles quotients, le temps et l'espace géométrique absolu: un événement est déterminé de façon univoque par la donnée d'un instant de temps et d'une position dans l'espace géométrique absolu[13].

On appelle "espace-temps" l'espace produit cartésien de l'espace géométrique avec le temps, $\mathcal{E}\times\mathcal{T}$, et "référentiel" l'application ϕ qui réfère, dans le cas classique, le monde des événements dans celui-ci, et qui est, pour ce qui a été dit, un homéomorphisme:

$$\# \qquad \mathcal{W}\sim\mathcal{E}\times\mathcal{T}\ ;\ \text{i.e. } \exists\phi \text{ homéomorphisme } \phi:\mathcal{W}\rightarrow\mathcal{E}\times\mathcal{T} \qquad 25$$

Il existe donc un groupe (sous l'opération de composition) Φ de référentiels et un ensemble $\mathcal{T}$ d'espace-temps homéomorphes pour y référer le monde $\mathcal{W}$.

Deux espace-temps de $\mathcal{T}$ (i.e. homéomorphes) sont équivalents comme référentiels s'ils sont isométriques; ils appartiennent alors au même "niveau". On représente le monde des événements, en analogie aux procédures habituels de la mécanique, par le choix arbitraire d'un niveau et, dans ce niveau, d'un espace-temps de référence.

Le choix arbitraire d'un niveau est celui d'une échelle géométrique et de temps arbitraire. L'etude des conséquences des changements de niveau n'est pas l'objet de la mécanique axiomatique classique

Le choix d'un espace-temps de référence se traduit par le choix d'un système de référence (espace-temps orienté) avec le postulat supplémentaire d'indépendance du choix de

---

12 Si on écrit la dernière des (23) pour deux événements non instantanés, on peut obtenir une distance nulle (en transportant par isométrie ces deux événements sur l'espace géométrique absolu) pour deux événements forcement distincts (en tant que non instantanés).

$$\exists(e,f)\in\mathcal{W}\times\mathcal{W}:\ t_e\neq t_f\quad d_{\mathcal{W}}(e,f)=d_{\mathcal{E}}(\vartheta_{t_e}p_e,\vartheta_{t_f}p_f)=0 \qquad 24b$$

13 Deux événements simultanés et coïncidents ne sont pas distingués par la théorie classique.

l'orientation de ce système dans l'espace géométrique[14]. Le caractère arbitraire du choix de l'espace-temps de référence introduit dans la mécanique classique l'étude des conséquences des changements isométriques (et conservant l'orientation) de l'espace-temps, c'est à dire le principe d'indifférence matérielle.

Classes de référentiels. Objectivité.

En mécanique classique une grandeur est dite objective si elle est modifiée par un changement isométrique (conservant les orientations) du référentiel en tant que image, selon ce référentiel variable, d'une entité indépendante de celui-ci. Un changement isométrique du référentiel est un changement de l'espace-temps de référence à l'intérieur d'un niveau fixé.

Toute isométrie gardant les orientations admet une représentation unique de la forme:

$$\forall (p,t)\in \mathcal{E}\times\mathcal{T} \quad \exists!(p',t')\in\mathcal{E}\times\mathcal{T}\cong\mathcal{E}\times\mathcal{T}: \begin{cases} p'=p_o+c(t)+Q(t)[p-p_o] & Q\in L_{orth}(E,E),\ c\in E,\ p_o\in\mathcal{E} \\ t'=t+t & t\in R \end{cases} \qquad 26$$

Un événement est représenté, en mécanique classique, par un couple position, instant selon le choix de l'espace-temps de référence:

$$e\equiv(p,t) \rightarrow e\equiv(p',t')=(\alpha(t)+\mathcal{Q}(t)p,\ a+t) \quad \forall \mathcal{E}'\times\mathcal{T}\cong\mathcal{E}\times\mathcal{T} \qquad 27$$

Toute grandeur définie comme image dans l'univers matériel d'entités intrinsèques au corps est objective. Par contre les grandeurs définies en observant l'univers matériel par un référentiel peuvent ne pas être objectives (elles sont objectives si elles ne dépendent que du niveau). C'est le cas, par exemple, des vitesses et des accélérations des points matériels (qui seront définies dans la suite).

Dans de pareils cas on peut définir un sous-groupe des isométries de l'espace-temps tel que, à son intérieur, la grandeur en objet demeure objective. On obtient ainsi, par exemple, des référentiels galiléens, générés par des isométries gardant l'objectivité des accélérations.

Une classe de référentiels peut être aussi identifiée en postulant que à son intérieur se vérifie une relation particulière entre grandeurs intrinsèques. C'est le cas, par exemple, des référentiels inertiels, donnant une relation entre forces et quantités de mouvement (i.e. dans un tel référentiel forces et quantités de mouvement sont en relation par le théorème de D'Alambert, comme on précisera après avoir défini ces entités). La classe des référentiels inertiels est contenue dans la classe des référentiels galiléens.

Le fait de pouvoir postuler l'objectivité de certaines grandeurs relativement à des classes de référentiels facilite les développement tout en gardant une généralité suffisante pour la plus part des applications.

Unités de référence

On précise les définitions des unités et des échelles de mesure en vue de l'explication du modèle non classique.

On fixe un système de coordonnée du temps en choisissant une transformation inversible "chronologie" qui associe à chaque instant un nombre réel (classiquement non négatif) moyennant le délai entre cet instant et un instant choisi arbitrairement "initial" t_o:

$$T: t_e\in\mathcal{T}\rightarrow t_e=k\tau(t_o,t_e)+t_o\in R^+ \qquad 28$$
$$T^{-1}: t_e\in R^{+*}\rightarrow t_e\in\mathcal{T}: \tau(t_o,t_e)=\frac{(t_e-t_o)}{k}$$

14 A un espace géométrique de référence correspondent deux systèmes de référence aux orientations opposées ayant la même légitimité (Cf. [Rougee 1980]). Dans la suite on se restreint aux isométries conservant les orientations, représentées donc par des opérateurs orthogonaux, ce qui ne serait légitime que si on les applique à deux systèmes opposés pour un espace donné. Néanmoins on utilise d'habitude un seul système de référence et l'orientation de l'espace est fixée une fois pour toutes.

L'origine des coordonnées de temps est t_o (chronologie de l'instant initial), l'unité de temps est k; leur choix et celui de t_o est, classiquement, tel que l'on ait une chronologie positive à chaque instant de l'ensemble d'événements étudiés (sauf, éventuellement, à l'instant t_o, en prenant $t_o=0$).

On montre facilement que une chronologie est un homéomorphisme entre le temps $\mathcal{T}$ et R. On note, avec abus, $T\subseteq R^+$ l'image du temps $\mathcal{T}$, ou d'un intervalle de temps, moyennant la chronologie T. Le monde-référentiel classique muni d'une chronologie sera noté:

$$\# \qquad \mathcal{W}\equiv\mathcal{E}xT\ ;\ e\equiv(p,t) \qquad 29$$

Le choix de l'unité des longueurs est lié au produit scalaire de l'espace $E(t_\epsilon)$ translation de l'espace géométrique $\mathcal{E}(t_\epsilon)$. Ayant supposé l'existence d'un espace géométrique absolu, indépendant de l'instant de temps, le produit scalaire défini dans son espace translation est aussi indépendant du temps; par conséquent l'unité des longueurs peut être, bien que arbitraire, fixé une fois pour toutes en choisissant un espace géométrique de référence $\mathcal{E}$. La distance entre deux positions dans cet espace géométrique est rapporté à la distance entre deux positions arbitrairement choisies, distinctes, dans le-dit espace (on remarque que la distance est positive entre tout couple d'événements distincts) moyennant une échelle des longueurs arbitraire positive λ, et est mesuré par:

$$\mu:(e,\ell)\in\mathcal{W}x\mathcal{W}\rightarrow\mu=\lambda\frac{d_{\mathcal{W}}(e,\ell)}{d_{\mathcal{W}}(o,\ell)}\in R^+\ ;\ \lambda>0\ ;\ (o,\ell)\in\mathcal{W}x\mathcal{W}:\ d_{\mathcal{W}}(o,\ell)>0 \qquad 30$$

De même que pour l'axe des temps, ceci induit la topologie usuelle sur l'espace géométrique de référence $\mathcal{E}$ et, par homéomorphisme, sur tout espace géométrique instantané ou absolu. On peut résumer cette opération comme le choix d'un référentiel identifiant, dans un niveau d'échelle λ, un espace géométrique homéomorphe à R^3: à une position dans $\mathcal{E}$ est associé un élément de R^3.

En conclusion on obtient deux couples: unité et échelle géométrique et unité et échelle des temps pour un référentiel fixé. Tout espace-temps appartenant au niveau identifié par ce référentiel (i.e. obtenu par isométrie du même référentiel) est caractérisé par les mêmes unités et échelles de mesure et, donc, un niveau est identifié par la donné de deux couples de ce type. En outre, grâce à leur caractère arbitraire, les unités de mesures peuvent être choisies une fois pour toutes, indépendamment du niveau. Par conséquent un niveau est identifié par la donnée de deux échelles de mesure, ce qui justifie sa dénomination.

3. Cinématique.

3.1. Modèle du corps dans l'espace.

On défini la structure d'un corps matériel $\mathcal{B}$ en le plaçant dans un monde-référentiel d'espace euclidien avec chronologie d'intervalles de temps $\mathcal{W}=\mathcal{E}\times T$, $\mathcal{E}\equiv R^3$ et $T\equiv R$.

On met d'abord en relation le corps matériel avec l'espace euclidien classique. Cette opération nous donne une image plus définie des formes d'un corps matériel et permet de dégager des nouveaux concepts.

3.1.1. Emplacements. Milieu continu.

On rappelle qu'on a défini sur un corps matériel une classe Δ d'applications δ formes globales qui associent à tout couple de points matériels une distance dans la forme (positive entre points séparés; Cf. formule (19)).

On muni $\mathcal{B}$ d'une classe P d'applications "emplacement" de $\mathcal{B}$ dans des ensembles ouverts de $\mathcal{E}$ tels que:[15]

$$\kappa\in P\ ;\ \kappa:\mathcal{B}\to\kappa(\mathcal{B})\subset\mathcal{E} \tag{31}$$

#

$$\forall\kappa\in P\begin{cases}\exists|\kappa^{-1}:\kappa(\mathcal{B})\subset\mathcal{E}\to\mathcal{B}\\ \\ \exists\delta\in\Delta:\ \forall(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}\quad d_\delta(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')=d_{\mathcal{E}}(\kappa(\mathcal{M}'),\kappa(\mathcal{M}''))\end{cases}$$

(i.e. inversibles et en correspondance avec une forme globale).

La deuxième des relations ci-dessus permet de dénommer "compatibles" les emplacements de P. Elle définit une relation d'équivalence C entre emplacements qui correspondent à la même forme globale. Si on la considère localement (i.e. pour un $\mathcal{M}$ fixé à la place d'un $\mathcal{M}'$ quelconque) on a une relation d'équivalence $C_{\mathcal{M}}$, qui diffère de la précédente si on se limite à des pseudo-voisinages $\vartheta_p(\mathcal{M})$ du point matériel[16]:

#

$$C=\left\{(\kappa,\eta)\in P\times P\ |\ d_{\mathcal{E}}(\kappa(\mathcal{M}'),\kappa(\mathcal{M}''))=d_{\mathcal{E}}(\eta(\mathcal{M}'),\eta(\mathcal{M}''))\ \forall(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}\right\} \tag{32}$$

$$C_{\mathcal{M}}=\left\{(\kappa,\eta)\in C\text{ avec }\mathcal{M}'=\mathcal{M}\text{ fixé et }\forall\mathcal{M}''\in\vartheta_p(\mathcal{M})\right\}$$

Les classes d'emplacements de P/C représentent, par conjecture, toute forme globale dans Δ:

#

$$\text{conjecture: }\forall\delta\in\Delta\ \exists\kappa\in P/C \tag{33}$$

(on ne distingue pas la notation de l'emplacement quelconque de P de celle de l'emplacement en tant que représentant d'une classe de P/C). La mécanique des milieux continus classiques se limite aux corps matériels dont l'image dans l'espace géométrique absolu est un milieu continu, dénomination qui rappelle la continuité des éléments de P, en postulant bijective la relation entre P/C et Δ (i.e. entre emplacements pris en compte et formes globales):

#

$$\forall\delta\in\Delta\ \exists|\kappa\in P/C\text{ et }\forall\kappa\in P/C\ \exists|\delta\in\Delta \tag{34}$$

3.1.2. Frontière.

La frontière d'un corps matériel n'est définie que moyennant la topologie du référentiel d'espace: l'image d'un corps matériel par un emplacement quelconque donné est un domaine ouvert dans l'espace avec une frontière qu'on suppose continue par morceaux. On

---

15 Etant inversible, tout emplacement est continu, mais il n'est pas forcement ouvert, et donc bicontinu, car rien n'a été dit sur la topologie de $\mathcal{B}$. L'univers matériel et le monde des événements ne sont pas homéomorphes.

16 On appelle pseudo-voisinage d'un point matériel toute partie (de petite taille) du corps contenant le point matériel.

prolonge l'emplacement au corps complété par sa frontière en postulant qu'il garde ses propriétés de continuité.

$$\forall \mathcal{B}\in\mathcal{U}\ \forall\kappa\in P\ \partial\mathcal{B}:\ \kappa(\partial\mathcal{B})=\partial\kappa(\mathcal{B}) \qquad 37$$

$$\#$$

$$\bar{\mathcal{B}}=\mathcal{B}\cup\partial\mathcal{B}$$

$$\forall\kappa\in P\ ;\ \kappa:\ \bar{\mathcal{B}}\rightarrow\kappa(\bar{\mathcal{B}})=\kappa(\mathcal{B})\cup\partial\kappa(\mathcal{B})\subset\mathcal{E}$$

3.1.3. Déplacement.

Pour deux emplacements dans P (compatibles) on défini le "déplacement" relatif π (ici de κ_1 à κ_2):

$$\forall\kappa_1,\kappa_2\in P\quad \pi=\kappa_2\circ\kappa_1^{-1}:\mathcal{E}\rightarrow\mathcal{E}\ ;\ \pi\in D \qquad 38$$

#

les déplacements ainsi définis constituent une classe D d'applications bijectives et bicontinues jusqu'à l'ordre $p\geq 1$ entre domaines de $\mathcal{E}$.

Le déplacement entre deux emplacements équivalents en forme globales (i.e. appartenant à une même classe de P/C) est une isométrie; on l'appelle "rigidifiant".

Pour un emplacement donné dans P toute fonction C^p dont le support coïncide avec l'image du corps dans le-dit emplacement, identifie un nouvel emplacement dans P:

$$\forall\kappa_1\in P;\ \forall\ \pi:\kappa_1(\mathcal{B})\subset\mathcal{E}\rightarrow\mathcal{E}\ ;\ \pi\in C^p \qquad 39$$

$$\#$$

$$\downarrow$$

$$\kappa_2=\pi\circ\kappa_1:\ \mathcal{B}\rightarrow\kappa_2(\mathcal{B})\subset\mathcal{E}\ ;\ \kappa_2\in P$$

Par définition, un corps matériel $\mathcal{B}$ est un milieu continu si ses emplacements dans $\mathcal{E}$ sont dans la classe P ou, de façon équivalente, si ses déplacements entre domaines de $\mathcal{E}$ sont dans la classe D.

Le concept de déplacement est complètement dépendant du choix du référentiel d'espace et, en tant que application p fois continues entre ensembles ouverts de l'espace, il peut être dégagé de toute présence de corps matériels. C'est une propriété importante car l'axiome d'impénétrabilité a été postulé au niveau de l'univers matériel, en fixant la structure des formes globales et la définition de point matériel, et un processus cinématique, défini dans la suite en se donnant une chronologie sur l'univers matériel, doit le respecter. Par contre un déplacement "virtuel", dans le sens qu'il n'est pas lié à deux emplacements compatibles d'un corps matériel, mais, par exemple, à un seul emplacement de cette classe, n'est pas contraint par l'impénétrabilité:

$$\mathfrak{A}:\kappa_1(\mathcal{B})\subset\mathcal{E}\rightarrow D_2\subset\mathcal{E}\ \text{ ou }\ \mathfrak{A}:D_1\subset\mathcal{E}\rightarrow\kappa_2(\mathcal{B})\subset\mathcal{E}\ ;\ \mathfrak{A}\in C^p \qquad 40$$

A l'emplacement fictif image (i.e. D_2) ou support (i.e. D_1) d'un tel déplacement virtuel peut ne correspondre aucune forme globale.

3.2. Modèle local dans l'espace.

Grâce à la définition d'emplacement on peut construire un calcul différentiel pour les fonctions à support matériel. La donnée d'un emplacement permet en fait de définir le gradient d'une fonction matérielle dans cet emplacement, le voisinage infinitésimal d'un point matériel et ses translations infinitésimales.

En étudiant les propriétés des gradients et des translations infinitésimales ainsi définis lorsqu'on change d'emplacement on obtient les définitions des gradients matériels et des vecteurs matériels.

Il est nécessaire de regarder en détail ces passages pour pouvoir les étendre au cas de l'espace profond.

3.2.1. Gradients.

Le gradient d'une fonction f, p fois continue ($p\geq 1$), à support dans $\mathcal{E}$ et image dans $\mathcal{G}$ d'espace translation G est une application telle que, par définition[17]:

$$\forall\, f:\mathcal{E}\rightarrow\mathcal{G}\ ;\ f\in C^p\ p\geq 1\quad \exists!\ \nabla f:p\in\mathcal{E}\rightarrow \nabla f_{|p}\in L(E,G)\ : \tag{41}$$

$$f(p+u_E)-f(p)=\nabla f_{|p}\,u_E+o(u_E)\ ;\ \lim_{|u_E|\rightarrow 0} o(u_E)=0\quad \text{i.e. } o(u_E)=0\ \forall u_E\in E_o$$

où $E_o=\{u_E\in E:\ |u_E|\rightarrow 0\}$ est un voisinage infinitésimal de l'origine de E, espace translation de $\mathcal{E}$.

On défini le gradient d'une fonction f de support $\mathcal{B}$ (et image dans $\mathcal{G}$ d'espace translation G) dans l'emplacement κ par transport sur $\kappa(\mathcal{B})$ du gradient défini dans $\mathcal{E}$:

$$\#\qquad \forall\, f:\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{G}\ ;\ f\in C^p\ p\geq 1\ \ \exists!\ \nabla_\kappa f:\mathcal{M}\in\mathcal{B}\rightarrow \nabla_\kappa f_{|\mathcal{M}}=\nabla\left[f\circ\kappa^{-1}\right]_{\kappa(\mathcal{M})}\in L(E,G)\ : \tag{42}$$

$$\left[f\circ\kappa^{-1}\right](\kappa(\mathcal{M})+u_E)-\left[f\circ\kappa^{-1}\right](\kappa(\mathcal{M}))=\left[f\circ\kappa^{-1}\right](\kappa(\mathcal{M})+u_E)-f(\mathcal{M})=\nabla\left[f\circ\kappa^{-1}\right]_{\kappa(\mathcal{M})}u_E+o(u_E)$$

3.2.2. Voisinage matériel. Translation matérielle.

Par un emplacement de classe P (compatible) on associe à tout point matériel un voisinage, image inverse du voisinage de l'image du point dans $\mathcal{E}$, et on construit l'ensemble des translations d'un point matériel.

Le voisinage géométrique d'un événement p, noté $i_E(p)\subset\mathcal{E}$, est décrit par les translations infinitésimales de p dans E:

$$i_E(p)=\{p'\in\mathcal{E}:\ p'=p+u_E\ \forall u_E\in E_o\} \tag{43}$$

si l'événement p est l'emplacement d'un point matériel $\mathcal{M}$, son voisinage peut être considéré comme l'image, par l'emplacement donné, du voisinage matériel du point $\mathcal{M}$, déjà noté $\vartheta(\mathcal{M})$:

$$\#\qquad \forall\mathcal{M}\in\mathcal{B},\ \forall\kappa\in P \tag{44}$$

$$i_E(\kappa(\mathcal{M}))=\left\{p'\in\mathcal{E}:\ p'=\kappa(\mathcal{M})+u_E\ \ \forall u_E\in E_o\right\}$$

$$\vartheta(\mathcal{M})=\kappa^{-1}(i_E(\kappa(\mathcal{M})))=\left\{\mathcal{M}'\in\mathcal{B}:\ \mathcal{M}'=\kappa^{-1}(\kappa(\mathcal{M})+u_E)\ \ \forall u_E\in E_o\right\}$$

Deux vecteurs de E peuvent être comparés par rapport à deux emplacements différents de P et à un point matériel $\mathcal{M}$: ils sont équivalents s'ils translatent ce dernier dans le même point matériel $\mathcal{M}'$. S'ils sont équivalents ils représentent le même vecteur translation de $\mathcal{M}$ dans les deux emplacements différents. Soit $A(\mathcal{M})$ la relation d'équivalence dans $\mathcal{M}$ ainsi énoncé:

$$\#\qquad A(\mathcal{M})=\left\{(\kappa,u_E),(\eta,v_E)\in(P\times E)^2:\ \mathcal{M}'=\kappa^{-1}(\kappa(\mathcal{M})+u_E)=\eta^{-1}(\eta(\mathcal{M})+v_E)\right\}= \tag{45}$$

$$=\left\{(\kappa,u_E),(\eta,v_E)\in(P\times E)^2:\ \eta\circ\kappa^{-1}(\kappa(\mathcal{M})+u_E)-\eta(\mathcal{M})=v_E\right\}$$

---

17 On introduit la notation $f|_{\mathcal{M}}=f(\mathcal{M})$ pour ne pas confondre, dans la suite, les vecteurs matériels définis dans $\mathcal{M}$, $U(\mathcal{M})$, avec des valeurs de fonctions calculés en $\mathcal{M}$.

L'ensemble des vecteurs translation matérielle de $\mathcal{M}$ est donc l'ensemble quotient partition de E sous la relation d'équivalence $A(\mathcal{M})$, noté $E/A(\mathcal{M})$. Cette équivalence n'étant pas écrite par une relation linéaire entre vecteurs de E, les opérations définies sur ce dernier ne sont pas transmises sur $E/A(\mathcal{M})$ qui n'est donc pas, en général, un espace vectoriel.

3.2.3. Espace tangent.

Si on se restreint aux voisinages de $\mathcal{M}$ on obtient une condition d'équivalence plus large: pour que deux vecteurs soient équivalents il suffit qu'ils translatent (en image) $\mathcal{M}$ dans un même point de son voisinage:

$$\# \qquad A_o(\mathcal{M})=\left\{(\kappa,u_E),(\eta,v_E)\in(P\times E_o)^2:\ \eta\circ\kappa^{-1}(\kappa(\mathcal{M})+u_E)-\eta(\mathcal{M})=v_E\right\} \qquad 46$$

et si on approche la fonction donnant l'équivalence par son gradient dans $\mathcal{E}$ et on rappelle la définition du gradient des fonctions à support dans $\mathcal{B}$ (telles que les emplacements η) on obtient une relation d'équivalence linéaire:

$$\# \qquad u_E\in E_o \rightarrow \eta\circ\kappa^{-1}(\kappa(\mathcal{M})+u_E)-\eta(\mathcal{M})=(\nabla\left[\eta\circ\kappa^{-1}\right]_{\kappa(\mathcal{M})})u_E=(\nabla_\kappa\eta_{|\mathcal{M}})u_E \qquad 47$$

$$A_o(\mathcal{M})=\left\{(\kappa,u_E),(\eta,v_E)\in(P\times E_o)^2:\ (\nabla_\kappa\eta_{|\mathcal{M}})u_E=v_E\right\}$$

$$u_{E\kappa}(\mathcal{M})=\left\{v_E\in E:\ \exists\eta\in P:\ ((\kappa,u_E),(\eta,v_E))\in A_o(\mathcal{M})\right\}\in E/A_o(\mathcal{M})$$

Toute opération interne (somme et produit par un scalaire) entre éléments de E est transmise sur l'ensemble des classes d'équivalence $u_{E\kappa}(\mathcal{M})$ engendrées par $A_o(\mathcal{M})$; l'ensemble quotient $E/A_o(\mathcal{M})$ est donc un espace vectoriel.

On défini "espace tangent", $T(\mathcal{M})$, l'ensemble des "vecteurs matériels", notés $u_T(\mathcal{M})$, de $\mathcal{M}$ tels que tout vecteur de E dans une classe d'équivalence donnée représente le même vecteur matériel (une classe d'équivalence $u_{E\kappa}(\mathcal{M})$ est donc l'ensemble des images d'un vecteur matériel $u_T(\mathcal{M})$ selon tout emplacement). On note $T(\mathcal{B})$ l'ensemble des espaces tangents en tout point du corps.

Les dénominations "espace" et "vecteurs" sont justifiées du fait que, grâce à la linéarité de $E/A_o(\mathcal{M})$, on peut définir sur $T(\mathcal{M})$ toutes les opérations internes définies dans l'espace E translation du référentiel, et donc, E étant vectoriel, il en est ainsi pour $T(\mathcal{M})$.

Par contre la relation d'équivalence ne permet pas la transmission du produit scalaire de E sur $T(\mathcal{M})$ qui n'est donc pas un espace de produit scalaire (le produit scalaire entre deux vecteurs matériels n'est défini que entre leurs images pour un emplacement donné et dépende de cet emplacement).

3.2.4. Emplacement local. Gradient matériel.

On considère le vecteur matériel $u_T(\mathcal{M})\in T(\mathcal{M})$ représenté par un élément de la classe $u_{E\kappa}(\mathcal{M})\in E/A_o(\mathcal{M})$ selon tout emplacement. Pour tout choix d'un emplacement κ on peut donc définir en tout point matériel une application linéaire $a_\kappa(\mathcal{M})$ de l'espace tangent $T(\mathcal{M})$, à l'ensemble quotient $E/A_o(\mathcal{M})$, qu'on appelle "emplacement des vecteurs matériels" ou "emplacement local" (on voit facilement qu'une telle application est linéaire):

$$\# \qquad \forall\kappa\in P\ \exists!a_\kappa(\mathcal{M})\in L(T(\mathcal{M}),E/A_o(\mathcal{M})): \qquad 48$$
$$a_\kappa(\mathcal{M}):u_T(\mathcal{M})\in T(\mathcal{M})\rightarrow u_E\in u_{E\kappa}(\mathcal{M})\in E/A_o(\mathcal{M})$$

On défini le "gradient matériel" d'une fonction f de support $\mathcal{B}$ et image dans $\mathcal{G}$ d'espace translation G par (les vecteurs matériels décrivent de petites translations de $\mathcal{M}$, par conséquent dans la deuxième ligne il n'est pas nécessaire d'introduire un $o(u_T(\mathcal{M}))$ qui serait toujours nul):

$$\forall\, f:\mathcal{B}\to\mathcal{G}\ ;\ f\in C^p\ p\geq 1 \quad \exists!\ \text{gradf}:\mathcal{M}\in\mathcal{B}\to \text{gradf}_{|\mathcal{M}}\in L(T(\mathcal{M}),G)\ : \tag{49}$$

$$\forall u_T(\mathcal{M})\in T(\mathcal{M})\ :\ (\text{gradf}_{|\mathcal{M}})u_T(\mathcal{M})=f(\mathcal{M}+u_T(\mathcal{M}))-f(\mathcal{M})$$

Moyennant la relation d'équivalence linéaire $A_o(\mathcal{M})$ entre vecteurs de E (Cf. formule (47)) on obtient la définition de l'image d'un tel gradient matériel selon un emplacement donné:

$$\#\quad \forall((\kappa,u_E),(\eta,v_E))\in A_o(\mathcal{M})\to(\nabla_\kappa f_{|\mathcal{M}})u_E=(\nabla_\eta f_{|\mathcal{M}})v_E \tag{50}$$

$$\downarrow$$

$$(\text{gradf}_{|\mathcal{M}})u_T(\mathcal{M})=(\nabla_\kappa f_{|\mathcal{M}})u_E\quad \forall\kappa\in P\quad u_E=a_\kappa(\mathcal{M})u_T(\mathcal{M})$$

$$\downarrow$$

$$\text{gradf}_{|\mathcal{M}}=(\nabla_\kappa f_{|\mathcal{M}})a_\kappa(\mathcal{M})\quad \forall\kappa\in P$$

ce qui permet d'identifier l'emplacement local $a_\kappa(\mathcal{M})$ relatif à un emplacement κ donné comme (il suffit de prendre $f=\kappa$ dans la dernière relation):

$$a_\kappa(\mathcal{M})=\text{grad}\kappa_{|\mathcal{M}} \tag{51}$$

Mouvement localement rigidifiant. Transport matériel.

A la définition donnée de gradient matériel correspond une définition d'équivalence locale entre deux emplacements de P: ils sont localement équivalents s'ils engendrent le même emplacement local:

$$\kappa,\eta\in P \text{ localement équivalents en } \mathcal{M}:\ a_\kappa(\mathcal{M})=a_\eta(\mathcal{M})\ \text{ i.e. }\ \text{grad}\kappa_{|\mathcal{M}}=\text{grad}\eta_{|\mathcal{M}} \tag{52}$$

Deux emplacements localement equivalents appartiennent à la même classe de $P/C_{\mathcal{M}}$ (i.e. ils représentent les mêmes formes globales dans un voisinage de $\mathcal{M}$): un déplacement entre emplacements de ce type est localement rigidifiant en $\mathcal{M}$. L'image d'un vecteur matériel de $T(\mathcal{M})$ est égale dans deux emplacements localement équivalents en $\mathcal{M}$.

D'après la définition d'equivalence $A_o(\mathcal{M})$ on voit que le changement d'image d'un vecteur matériel pour un deplacement π est:

$$\#\quad \pi=\eta\circ\kappa^{-1}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}\ ,\ \pi\in C^p\ ;\ p\geq 1\ :\ ((\kappa,u_E),(\eta,v_E))\in A_o(\mathcal{M}) \tag{53}$$

$$v_E=(\nabla\pi_{|\kappa(\mathcal{M})})u_E\ \to\ a_\eta(\mathcal{M})=(\nabla\pi_{|\kappa(\mathcal{M})})a_\kappa(\mathcal{M})$$

Deux emplacements sont donc localement équivalents en $\mathcal{M}$ si le gradient du déplacement relatif est l'identité de E en ce point, ce déplacement est alors localement rigidifiant (définition analogue à la precedente)

$$\kappa,\eta\in P \text{ localement equivalents en } \mathcal{M}:\ \pi=\eta\circ\kappa^{-1}:\ \nabla\pi_{|\kappa(\mathcal{M})}=I_E \tag{54}$$

3.2.4. Métrique de l'espace tangent.

Définition.

L'espace tangent garde les operations internes de E mais il n'a pas de produit scalaire intrinsèque.

On peut construire, en tout point $\mathcal{M}$ du corps, un produit scalaire de $T(\mathcal{M})$ par transport du produit scalaire de E moyennant un emplacement local. Le résultat sera fonction locale de l'emplacement, non intrinsèque au voisinage matériel.

On note $T^*(\mathcal{M})=L(T(\mathcal{M}),R)$ l'espace duale de $T(\mathcal{M})$, espace vectoriel muni des mêmes opérations que $T(\mathcal{M})$; il est défini moyennant le tenseur métrique $\Gamma(\mathcal{M})$ de $T(\mathcal{M})$ selon la[18]:

$$\Gamma(\mathcal{M})\in L_S^+(T(\mathcal{M}),T^*(\mathcal{M})) : \qquad 55$$
$$\forall v_T(\mathcal{M}),u_T(\mathcal{M})\in T(\mathcal{M}) \quad \langle\Gamma(\mathcal{M})v_T(\mathcal{M}),u_T(\mathcal{M})\rangle_T=v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})$$

où " $\cdot^T$ " est le produit scalaire entre vecteurs de $T(\mathcal{M})$. Tant ce produit que ce tenseur dépendent de l'emplacement; par conséquent on suppose que la relation ci-dessus n'est valable que entre l'image du tenseur métrique de l'espace tangent dans E selon l'emplacement κ, noté $\Gamma_\kappa(\mathcal{M})$, et l'image par le même emplacement du produit scalaire de $T(\mathcal{M})$:

$$\#\quad \left.\begin{matrix}\forall v_T(\mathcal{M}),u_T(\mathcal{M})\in T(\mathcal{M})\\ \forall\kappa\in P\end{matrix}\right\} \langle\Gamma_\kappa(\mathcal{M})v_T(\mathcal{M}),u_T(\mathcal{M})\rangle_T=v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})\big|_\kappa \qquad 56$$

Détermination

L'emplacement local $a_\kappa(\mathcal{M})$ permet d'obtenir dans E un produit scalaire de $T(\mathcal{M})$, selon tout emplacement global κ:

$$\#\quad \left.\begin{matrix}\forall v_T(\mathcal{M}),u_T(\mathcal{M})\in T(\mathcal{M})\\ \forall\kappa\in P\end{matrix}\right\} v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})\big|_\kappa = (a_\kappa(\mathcal{M})v_T(\mathcal{M}))^E(a_\kappa(\mathcal{M})u_T(\mathcal{M})) \qquad 57$$

Le tenseur métrique de E est défini tel que[19]:

$$g_E\in L_S^+(E,E^*) : \forall u_E,v_E\in E \quad u_E{}^E v_E=(u_E{}^*,v_E)_E=(g_E u_E,v_E)_E \qquad 58$$

ce qui donne pour l'image du produit scalaire de $T(\mathcal{M})$ dans un emplacement κ:

$$\#\quad \left.\begin{matrix}\forall v_T(\mathcal{M}),u_T(\mathcal{M})\in T(\mathcal{M})\\ \forall\kappa\in P\end{matrix}\right\} v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})\big|_\kappa = \langle g_E a_\kappa(\mathcal{M})v_T(\mathcal{M}),a_\kappa(\mathcal{M})u_T(\mathcal{M})\rangle_E \qquad 59$$

et on obtient finalement par la (56) et la (59) la relation entre le tenseur métrique de E et l'image du tenseur métrique de $T(\mathcal{M})$ selon l'emplacement κ [20]:

$$\#\quad \forall\mathcal{M}\in\mathcal{B},\ \forall\kappa\in P \quad \Gamma_\kappa(\mathcal{M})=a_\kappa^*(\mathcal{M})g_E a_\kappa(\mathcal{M}) \qquad 60$$

On a donc identifié l'image de la métrique de l'espace tangent $T(\mathcal{M})$ dans E par un emplacement arbitrairement choisi en $\mathcal{M}$.

Si on fait varier l'emplacement κ à l'intérieur d'une classe de $P/C_{\mathcal{M}}$ les images des vecteurs matériels ne sont pas modifiées, par conséquent les images de la métrique de l'espace tangent demeurent constantes à l'intérieur de cette classe.

Remarques.

On remarque que la métrique de l'espace tangent peut être obtenue directement dès la définition de forme d'un corps matériel, mais qu'on a préféré la voie ci-dessus car elle se prête à une interprétation dans l'espace profond.

---

18 On note par $\langle\cdot,\cdot\rangle_T$ la dualité entre l'espace $T(\mathcal{M})$ et $T^*(\mathcal{M})$.

19 On note par $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ la dualité entre l'espace E et $E^*=L(E,R)$, c'est à dire l'image dans R d'un vecteur $u_E\in E$ par un opérateur $v_E{}^*\in E^*$.

20 L'adjoint de l'emplacement local $a_\kappa(\mathcal{M})$ est par définition l'opérateur $a_\kappa^*(\mathcal{M})\in L(E^*,T^*(\mathcal{M}))$.

En fait en mécanique classique l'existence d'une métrique euclidienne sur $\mathcal{B}$ pour toute forme globale (assurée par l'axiome d'impénétrabilité) engendre une structure d'espace euclidien sur l'espace tangent de tout point. La même métrique de $\mathcal{B}$ engendre, pour toute forme globale, une fonction "forme de l'élément simple" qui associe à tout point du corps la métrique de son espace tangent, égale au double gradient matériel de la fonction distance dans la forme[21]:

3.3. Modèle du corps dans l'espace-temps.

3.3.1. Modèle du corps dans une chronologie.

On introduit les concepts de processus cinématique et de mouvement en regardant un corps matériel seulement par rapport à une chronologie.

Processus cinématique.

On a défini sur un corps matériel la classe Δ des formes globales δ (Cf. formule (19)).

On défini "processus cinématique" c dans un intervalle chronologique $\chi \subseteq T$ une fonction qui associe à tout instant[22] de cet intervalle une forme globale du corps matériel; on donne l'indice χ au co-domaine d'un processus dans Δ:

$$\# \qquad \forall \chi \subseteq T \;\; c:\tau \in \chi \rightarrow \delta_\tau \in \Delta_\chi \subseteq \Delta \qquad 61$$

On défini "rigidifiant" un processus cinématique qui associe à tout instant d'un intervalle chronologique la même forme.

On appelle "admissible" un processus cinématique qui engendre une distance dans la forme fonction de classe C^2 du temps entre tout couple de points matériels séparés; on l'appelle "virtuellement admissible" si la distance est de classe C^0 entre tout couple de points sauf, éventuellement, un nombre fini d'ensembles de couples séparés-en-masse (C^0 par morceaux).

La donnée d'une suite de formes globales dans l'intervalle chronologique χ engendre, moyennant la distance dans la forme entre points matériels, une distance fonction des points et du temps. Par conséquent on peut définir, par dérivation par rapport au temps de cette distance suivant un processus cinématique admissible, la vitesse et l'accélération entre tout couple de points matériels, fonctions de classe respectivement au moins C^1 et C^0 du temps.

Par définition de dérivée, une telle vitesse est un opérateur linéaire de l'espace translation du temps (R) à l'espace translation de l'univers matériels (qui n'a pas été défini). Cet espace translation n'est en effet défini que par ses images dans un référentiel d'espace, ce qui donnera des images des vitesses et des accélérations relatives à un emplacement.

Mouvement.

On peut définir un homéomorphisme entre les images de deux processus cinématiques, c_1 et c_2, relatifs au même corps matériel $\mathcal{B}$ et, au moins, virtuellement admissibles. En particulier, si les intervalles cinématiques supports de deux processus sont d'égale durée, c'est à dire si, vue la topologie de la chronologie, l'un est obtenu par translation de l'autre sur l'axe réel[23]:

---

21 On démontre que le tenseur défini par

$$\# \qquad \Gamma : \mathcal{M} \in \mathcal{B} \rightarrow \nabla\nabla d_\delta \,|_{(\mathcal{M},\mathcal{M})} \in L_s^+(T(\mathcal{M}), T^*(\mathcal{M})) \qquad 60b$$

a une représentation unique dans tout emplacement, telle que donnée par la (60) c'est à dire qu'il coïncide avec le tenseur métrique défini dans le texte.

22 Le mot "instant" a maintenant la signification de "valeur réel de la chronologie" et non celle de "classe d'événement simultanés". Les deux significations coïncident pour une chronologie donnée.

23 La condition d'égale durée des deux processus n'est évidemment pas nécessaire pour établir un homéomorphisme entre deux processus: il suffit que leurs intervalles chronologiques soient homéomorphes, ce qui est toujours le cas. La condition évoquée simplifie néanmoins la définition ne demandant pas l'introduction d'un changement d'échelle des temps de l'un des deux processus.

$$\# \qquad \left.\begin{array}{ll} \alpha:\chi_1\rightarrow\chi_2 & \text{translation} \\ c_1:\chi_1\rightarrow\Delta_{\chi 1}\subseteq\Delta & \text{inversible} \\ c_2:\chi_2\rightarrow\Delta_{\chi 2}\subseteq\Delta & \end{array}\right\} \exists|\ m_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}}=c_2\circ\alpha\circ c_1^{-1}:\Delta_{\chi 1}\rightarrow\Delta_{\chi 2} \qquad 62$$

c'est le "mouvement" du processus c_1 par rapport au processus c_2 "de référence". On voit que tout processus peut être pris comme référence pour un mouvement, même s'il n'est pas inversible, mais, dans ce cas, le mouvement ne sera pas un homéomorphisme entre formes globales du corps matériel. Un processus rigidifiant est évidemment un choix convenable de processus de référence.

3.3.2. Cinématique dans l'espace.

Il suffit de croiser les modèles du corps selon une chronologie et dans l'espace décrit dans les paragraphes précédents pour obtenir sa description cinématique dans l'espace géométrique absolu.

Processus cinématique.

Par définition d'emplacement (Cf. deuxième des (31)) à tout processus cinématique (Cf. formule (61)) correspond une fonction qui associe à tout instant d'un intervalle chronologique une unique classe d'emplacement dans l'ensemble P/C en passant par une forme globale (l'unicité est garantie par la conjecture de la formule (34)).

Si on fait varier les emplacements à l'intérieur d'une classe de P/C on n'obtient aucune variation de forme globale, ce qui, vu par une chronologie, est un processus cinématique rigidifiant. Pour les mêmes raisons, un processus est localement rigidifiant si les emplacements varient dans P/C $_\mu$. On peut alors affirmer que un processus cinématique associe à tout instant d'un intervalle chronologique un emplacement de classe P et que, si ce processus est rigidifiant, les emplacements varient dans une classe d'équivalence de P/C, s'il est localement rigidifiant, dans une classe de P/C $_\mu$:

$$\# \qquad \forall\chi\subseteq T\ \ c:\tau\in\chi\rightarrow\delta_\tau\in\Delta\rightarrow\kappa_\tau\in P \qquad 63$$

La donnée d'un processus cinématique c correspond donc à celle d'une fonction, qu'on note κ_c, qui associe à tout point matériel d'un corps pour tout instant d'un intervalle chronologique une position dans l'espace géométrique:

$$\# \qquad c \Rightarrow \kappa_c:(\mathcal{M},\tau)\in\mathcal{B}\times\chi\rightarrow\kappa_\tau(\mathcal{M})\in\kappa_\tau(\mathcal{B})\subset\mathcal{E} \qquad 64$$

$\kappa_\tau(\mathcal{B})$ étant le domaine occupé par le corps $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{E}$ selon l'emplacement $\kappa_\tau\in P$ (i.e. à l'instant τ selon le processus c).

On remarque qu'on peut également associer à un processus cinématique une suite dans le temps de déplacements de support commun (celui-ci étant l'emplacement à l'instant initial de l'intervalle chronologique du processus). Toutes les définitions qui suivent peuvent donc être données avec une telle représentation cinématique (comme déjà noté, un milieu continu est défini par ses emplacements ou par ses déplacements de façon équivalente).

Vitesse et accélération.

Par définition un processus cinématique admissible est une fonction du temps au moins C^2; un processus cinématique virtuellement admissible est au moins C^0 dans le temps. Dans le premier cas, la dérivée par rapport au temps de la fonction κ_c de la (64) associe à toute translation du temps (l'espace translation du temps est R) une translation dans l'espace, vitesse dans l'emplacement.

Un processus cinématique admissible associe donc aussi à tout point matériel d'un corps donné, par dérivation de son emplacement, et pour chaque instant d'un intervalle chronologique une vitesse, opérateur de $V_E=L(R,E)$, qu'on appelle espace des vitesses, fonction de

$(\mathcal{M},\tau)$; de façon analogue, par une seconde dérivation, un processus cinématique associe à tout point et instant une accélération, opérateur de $L(R,V_E)$ fonction de $(\mathcal{M},\tau)$[24]:

$$\# \qquad c \Rightarrow \begin{cases} \varphi_c:(\mathcal{M},\tau)\in\mathcal{B}x\chi \rightarrow \dfrac{\partial}{\partial\tau}\kappa_c(\mathcal{M},\tau)\in V_E=L(R,E) \\ \gamma_c:(\mathcal{M},\tau)\in\mathcal{B}x\chi \rightarrow \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}\kappa_c(\mathcal{M},\tau)\in L(R,V_E) \end{cases} \qquad 65$$

Les vitesses et accélérations ci-dessus, en tant que opérateurs sur E, seront considérées comme images d'opérateurs matériels, c'est à dire d'opérateurs sur $T(\mathcal{B})$, dès qu'on définira la cinématique de l'emplacement local selon un processus cinématique donné.

Vitesses virtuelles.

Toujours en tant que opérateurs sur E les vitesses peuvent être dégagées de tout processus cinématique en perdant, par conséquent, leur définition comme dérivées par rapport au temps d'emplacements de classe P suivant un tel processus admissible.

On défini une vitesse virtuelle par:

$$\Phi_\kappa:\mathcal{B}\rightarrow V_E : \exists\kappa\in P : \Phi_\kappa\circ\kappa^{-1}\in C^0(\kappa(\mathcal{B})) \qquad 66$$

la donnée d'un emplacement "support" permet d'en définir la continuité.

Mouvement relatif.

Le mouvement d'un corps matériel, même si relatif à un autre corps matériel, peut être défini par la seule donnée d'une chronologie, mais le passage par un référentiel d'espace devient nécessaire pour associer deux à deux leurs points.

Le mouvement $m_{\mathcal{B}\mathcal{R}}$ de $\mathcal{B}$ par rapport à $\mathcal{R}$, corps matériels, est défini par la donné d'un processus cinématique $c_{\mathcal{B}}$ sur $\mathcal{B}$, d'un processus cinématique $c_{\mathcal{R}}$ sur $\mathcal{R}$ et d'une isométrie (translation) entre les intervalles chronologiques supports des deux processus; l'espace géométrique $\mathcal{E}$ permet en fait de mettre en relation les formes de deux corps matériels en passant par leurs emplacements[25]:

$$\# \qquad \left.\begin{array}{l} c_{\mathcal{B}}:\tau\in\chi_{\mathcal{B}}\rightarrow\kappa_{\mathcal{B}\tau}\in P_{\mathcal{B}} \\ c_{\mathcal{R}}:\vartheta\in\chi_{\mathcal{R}}\rightarrow\kappa_{\mathcal{R}\vartheta}\in P_{\mathcal{R}} \\ \exists a\in R:\ \vartheta=a+\tau\ \ \forall\vartheta\in\chi_{\mathcal{R}},\forall\tau\in\chi_{\mathcal{B}} \end{array}\right\} m_{\mathcal{B}\mathcal{R}}:(\mathcal{M},\tau)\in\mathcal{B}x\chi_{\mathcal{B}}\rightarrow\kappa_{\mathcal{R}\tau}^{-1}\circ\kappa_{\mathcal{B}\tau}(\mathcal{M})\in\mathcal{R} \qquad 68$$

Le processus $c_{\mathcal{R}}$ peut être choisi rigidifiant; un corps matériel $\mathcal{R}$ rigide (i.e. qui garde sa forme en tout processus cinématique) pris comme référence pour le mouvement d'autres corps matériels est un "repère".

Pour des processus cinématiques admissibles d'un corps $\mathcal{B}$ on a un mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ de classe au moins C^2 et, donc, par dérivation, un champ de vitesses relatives et un champ d'accélérations relatives au repère choisi

Une vitesse relative à un repère $\mathcal{R}$ associe à toute petite translation du temps un vecteur matériel du repère; l'espace des vitesses relatives $V_{T(\mathcal{R})}$ est donc l'image (par l'inverse de l'emplacement local des vecteurs matériels du repère) de l'espace des vitesses absolues V_E.

Mouvement virtuel.

La donné d'un ensemble de déplacements virtuels de support commun dans le temps et arbitraire $\kappa_0(\mathcal{B})$ (la variable de temps étant alors un paramètre arbitraire) permet de définir un

---

24 Tout point matériel est massif par définition, mais on peut définir de façon analogues les vitesses et les accélérations d'une partie de mesure masse nulle d'un corps matériel.

25 Le mouvement avait été défini au niveau du corps matériel en mettant en relation deux processus du même corps car l'absence d'un référentiel ne permettait pas de "sortir" du corps.

mouvement $\hat{m}$ soumis à de conditions moins restrictives que celui ci-dessus défini par rapport à deux processus cinématiques (on n'a pas introduit le concept de processus cinématique virtuel, donc tout processus cinématique est contraint par l'impénétrabilité[26]), appelé donc virtuel (on indique par $C^P(D)$ les fonctions continues de support $D \subseteq \mathcal{E}$):

$$\forall \kappa_o \in P \;\; \exists \hat{m}_\tau \in C^P(\kappa_o(\mathcal{B})) \;\; \forall \tau \in \chi \Rightarrow \hat{m}:\kappa_o(\mathcal{B}) x \chi \rightarrow \mathcal{E} \qquad 69$$

De même on peut définir les vitesses virtuelles par extension d'une définition de vitesse comme dérivée d'un mouvement. En particulier on peut voir que la composition de la dérivée par rapport au temps d'un mouvement virtuel $\hat{m}$ avec son emplacement de référence $\kappa_o(\mathcal{B})$ est une vitesse virtuelle.

3.3.3. Cinématique de l'espace tangent.

Dans un processus cinématique c, à tout emplacement instantané $\kappa_\tau(\mathcal{M})=\kappa_c(\mathcal{M},\tau)$ correspond un emplacement local, noté $a_c(\mathcal{M},\tau)=a_{\kappa_\tau}(\mathcal{M})$, et, par conséquent, on obtient l'image d'un vecteur matériel et l'image de la métrique de $T(\mathcal{M})$ dans E en fonction du temps et du point:

$$\# \qquad \forall \mathcal{M} \in \mathcal{B}, \forall \tau \in \chi \subseteq T \;\; \kappa_c \Rightarrow \qquad 70$$

$$\Rightarrow a_c(\mathcal{M},\tau)=\mathrm{grad}\kappa_c(\mathcal{M},\tau) \in L(T(\mathcal{M}),E) : \begin{cases} a_c(\mathcal{M},\tau) u_T(\mathcal{M}) \in u_{E\kappa_\tau}(\mathcal{M}) \\ \Gamma_c(\mathcal{M},\tau)=a_c^*(\mathcal{M},\tau) g_E a_c(\mathcal{M},\tau) \end{cases}$$

En tout point matériel et à tout instant, l'emplacement local $a_c(\mathcal{M},\tau)$ donne les vecteurs vitesse matérielle φ et accélération matérielle γ dont les vitesses et les accélérations de la (65) sont les images actuelles selon le processus en objet:

$$\# \qquad \forall \mathcal{M} \in \mathcal{B}, \forall \tau \in \chi \subseteq T \begin{cases} \varphi(\mathcal{M},\tau)=a_c^{-1}(\mathcal{M},\tau)\varphi_c(\mathcal{M},\tau) \in V_{T(\mathcal{M})}=L(R,T(\mathcal{M})) \\ \gamma(\mathcal{M},\tau)=a_c^{-1}(\mathcal{M},\tau)\gamma_c(\mathcal{M},\tau) \in L(R,V_{T(\mathcal{M})}) \end{cases} \qquad 71$$

On remarque que vitesse et accélération matérielles, φ et γ, dépendent du processus mais non de l'emplacement au cours du processus, tandis que leurs images dans E, φ_c et γ_c, dépendent aussi de ce dernier.

3.3.4. Description lagrangienne.

Dans la suite on défini un certain nombre de grandeurs (gradient de la transformation, tenseur de dilatation de Cauchy et de déformation de Green-Lagrange dans le temps) par rapport à un processus cinématique dans un intervalle de temps donné.

Ces grandeurs seront donc fonctions du point $\mathcal{M}$ dans le corps et de l'instant de temps τ dans l'intervalle selon ce processus c et seront donc notées $A_c(\mathcal{M},\tau)$.

Si on se réfère à un emplacement κ_0 de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{E}$ arbitraire, un processus cinématique engendre un mouvement dans le temps (repéré par l'emplacement κ_0), noté π_c, qu'on appelle "transformation":

$$\# \qquad \forall \kappa_0 \in P, \forall \tau \in \chi \subseteq T \;\; \kappa_c \Rightarrow \pi_c(\cdot,\tau)=\kappa_c(\cdot,\tau) \circ \kappa_0^{-1} : \kappa_0(\mathcal{B}) \rightarrow \kappa_\tau(\mathcal{B}) \qquad 72$$

et un changement de l'emplacement local (emplacement local instantané vu par rapport à l'emplacement local de référence), définissant la cinématique des images des vecteurs matériels, qui est le "gradient de la transformation" (Cf. formules (42) et (50) pour obtenir ce résultat):

---

26 Un processus cinématique virtuellement admissible perd, par rapport à un processus admissible, la propriété d'être dérivable dans le temps; l'impénétrabilité est liée à la continuité dans l'espace.

$$\# \qquad \forall \kappa_0 \in P, \forall \tau \in \chi \subseteq T \quad \kappa_c \Rightarrow F(\mathcal{M},\tau) \in L^+(E,E) : \tag{73}$$

$$F(\mathcal{M},\tau)=a_c(\mathcal{M},\tau)a_{\kappa_0}^{-1}(\mathcal{M})=\nabla_{\kappa_0}\kappa_c(\cdot,\tau)\big|_{\mathcal{M}}=\nabla\left[\kappa_c(\cdot,\tau)\circ\kappa_0^{-1}\right]_{\kappa_0(\mathcal{M})}=\nabla\pi_c(\mathcal{M},\tau)$$

$$u_{T\tau}=F(\mathcal{M},\tau)u_{E0}\ ;\ \forall u_{E0}\in u_{E\kappa_0}(\mathcal{M})\ ;\ u_{E\tau}\in u_{E\kappa_\tau}(\mathcal{M})$$

Pour relier à l'emplacement κ_0 les images instantanées de la métrique de $T(\mathcal{M})$ il faut définir un opérateur particulier: le tenseur de dilatation soit l'opérateur qui donne le produit scalaire de deux vecteurs matériels dans l'emplacement actuel κ_τ (éventuellement obtenu par un processus cinématique) en opérant sur leurs images dans l'emplacement de référence κ_0:

$$\# \qquad C:\mathcal{B}x\chi\rightarrow L^+(E,E) : \langle C(\mathcal{M},\tau)a_{\kappa_0}(\mathcal{M})v_T(\mathcal{M}),a_{\kappa_0}(\mathcal{M})u_T(\mathcal{M})\rangle_E=v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})\big|_{\kappa_\tau} \tag{75}$$

Par définition du produit scalaire de $T(\mathcal{M})$ dans l'emplacement actuel κ_τ et du gradient de la transformation de κ_0 à κ_τ:

$$\langle C(\mathcal{M},\tau)a_{\kappa_0}(\mathcal{M})v_T(\mathcal{M}),a_{\kappa_0}(\mathcal{M})u_T(\mathcal{M})\rangle_E= \tag{76}$$

$$\# \qquad =\langle g_E F(\mathcal{M},\tau)a_{\kappa_0}(\mathcal{M})v_T(\mathcal{M}),F(\mathcal{M},\tau)a_{\kappa_0}(\mathcal{M})u_T(\mathcal{M})\rangle_E$$

$$\downarrow$$

$$C(\mathcal{M},\tau)= F^*(\mathcal{M},\tau)\, g_E\, F(\mathcal{M},\tau)= a^{-}_{\kappa_0}{}^*(\mathcal{M})a_c^*(\mathcal{M},\tau)\, g_E\, a_c(\mathcal{M},\tau)a_{\kappa_0}^{-1}(\mathcal{M}) = a^{-}_{\kappa_0}{}^*(\mathcal{M})\Gamma_c(\mathcal{M},\tau)a_{\kappa_0}^{-1}(\mathcal{M}) =$$

$$= g_E\, a_{\kappa_0}(\mathcal{M})\Gamma_{\kappa_0}^{-1}(\mathcal{M})\Gamma_c(\mathcal{M},\tau)a_{\kappa_0}^{-1}(\mathcal{M})$$

On voit par cette dernière relation qu'au tenseur de dilatation est associé une expression intrinsèque de la forme (Cf. [Rougee 1991]):

$$\# \qquad C_{int}(\mathcal{M},\tau)=\Gamma_{\kappa_0}^{-1}(\mathcal{M})\Gamma_c(\mathcal{M},\tau)\in L^+(T(\mathcal{M}),T(\mathcal{M})) \tag{77}$$

On défini le tenseur de Green-Lagrange entre deux emplacements identifiés par les instants 0 et τ au cours d'un processus cinématique par la demi différence des dilatations dans ces deux emplacements ($C(\mathcal{M},0)=g_E$ selon la (76), ayant pris l'emplacement à l'instant 0 de référence pour la description lagrangienne du mouvement):

$$\# \qquad L(\mathcal{M},\tau)=\frac{1}{2}\left[C(\mathcal{M},\tau)-g_E\right]\in L^+(E,E) : \tag{79}$$

$$\forall u_T(\mathcal{M}),v_T(\mathcal{M})\in T(\mathcal{M})$$

$$\langle L(\mathcal{M},\tau)a_{\kappa_0}(\mathcal{M})v_T(\mathcal{M}),a_{\kappa_0}(\mathcal{M})u_T(\mathcal{M})\rangle_E = v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})\big|_{\kappa_\tau} - v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})\big|_{\kappa_0}$$

permettant de relier le produit scalaire de $T(\mathcal{M})$ dans l'emplacement κ_τ à celui dans l'emplacement κ_0, et qui peut être choisi comme mesure de la déformation entre ces deux emplacements.

4. Mécanique.

4.1. Forces dans l'espace.

4.1.1. Continuité des actions.

Une fois définis le référentiel et sa topologie on peut s'intéresser à la continuité des actions dont l'existence a été postulée au niveau des corps matériels.

On postule que les actions intérieures sont des actions "de contact" aire-continues (la norme |.| est à définir selon la nature de V; on suppose V espace vectoriel):

$$\forall \kappa\in P\ \exists k\geq 0 : |A_{int}(\mathcal{C}, \mathcal{D})| \leq k\ mes_\kappa(\partial\mathcal{C}\cap\partial\mathcal{D})\quad \forall(\mathcal{C}, \mathcal{D})\in(\mathcal{B}\times\mathcal{B})_{sep} \qquad 81$$

On postule que les actions extérieures sont des actions de contact et "à distance" et qu'elles sont donc aire-volume-continues:

$$\forall \kappa\in P\ \exists k,h>0 : |A_{ext}(\mathcal{C})| \leq k\ mes_\kappa(\mathcal{C}) + h\ mes_\kappa(\mathcal{C}\cap\partial\mathcal{B})\quad \forall\mathcal{C}\in\mathcal{U}_\mathcal{B} \qquad 82$$

L'action sur une partie d'un corps matériel, somme d'une action extérieure au corps matériel et d'une action intérieure au corps matériel, est donc aire-volume-continue. Dans la suite on note:

$$V_\kappa=mes_\kappa(\mathcal{C}) ; S_\kappa=mes_\kappa(\mathcal{C}\cap\partial\mathcal{B})\quad \forall\mathcal{C}\in\mathcal{U}_\mathcal{B} \qquad 83$$

4.1.2. Mesure force.

Une interaction à valeurs dans E* est un "système de forces" qu'on note $f_\mathcal{C}\ \mathcal{C}\in\mathcal{U}_\mathcal{B}$ pour indiquer qu'il est relatif aux parties de $\mathcal{B}$ (la notation "$f_\mathcal{C}$" particularise la "$A_{ext}(\mathcal{C})$" dans le cas des forces).

On rappelle que tout corps matériel est muni de la tribu borélienne de l'ensemble des ses parties, raffiné, au moins, jusqu'aux points matériels. Sous les deux conditions de continuité postulées, toute partie du corps, $\mathcal{C}\in\mathcal{U}_\mathcal{B}$, est mesurable dans l'emplacement κ par une mesure vectorielle $df_\mathcal{C}$ définie en tout point matériel et à valeurs dans E* [27]:

$$\#\qquad df_\mathcal{C}:\mathcal{M}\in\mathcal{C}\to E^* ; f_\mathcal{C}:\mathcal{D}\in\mathcal{C}\to f_\mathcal{C}(\mathcal{D})=\int_\mathcal{D} df_\mathcal{C}\in E^* \qquad 84$$

On peut alors démontrer (Cf. [Noll 1973]) qu'il existe des fonctions intégrables, respectivement de volume et de surface, b_{E^*} et $t_{\partial\mathcal{C}E^*}$, qu'on appelle "forces de volume" et "forces de contact", telles que:

$$\#\qquad \left.\begin{array}{l}\exists\ b_{E^*}:\mathcal{B}\to E^* \\ \exists\ t_{\partial\mathcal{C}E^*}:\partial\mathcal{C}\to E^*\quad \forall\partial\mathcal{C}\subset\mathcal{B}\end{array}\right\} : f_\mathcal{C}(\mathcal{D})=\int_\mathcal{D} df_\mathcal{C} = \int_{\mathcal{M}\in\mathcal{D}} b_{E^*}(\mathcal{M})dV_\kappa + \int_{\mathcal{M}\in\mathcal{D}\cap\partial\mathcal{C}} t_{\partial\mathcal{C}E^*}(\mathcal{M})dS_\kappa \qquad 85$$

ce qui traduit la continuité des actions, postulée dans l'univers matériel, en continuité de la mesure force dans un emplacement: la mesure force est volume-continue à l'intérieur d'une partie d'un corps matériel et aire-continue sur sa surface (dans la suite $\mathcal{M}\in\ldots$ et sous-entendu: $\mathcal{M}$ est la variable d'intégration sur les parties d'un corps matériel).

Un système particulier de forces à distance (donc volume-continues) est celui des forces de masse, tel qu'il existe une fonction p_{E^*}, "force de masse", définie pour toute position dans un référentiel[28] et intégrable par la mesure masse:

---

27 On rappelle que $\mathcal{B}$ dénote en même temps un corps et l'ensemble des ses parties.

28 D'après sa signification physique cette fonction "force massique" dépend dans un point matériel de la forme de l'univers entier (c'est à dire de la distance entre ce point et tout autre point matériel). Dans l'étude mécanique d'un corps on considère figé avec un référentiel inertiel une grand partie de son corps complémentaire (contenant presque tout l'univers sauf un ensemble, appelé "système", contenant des corps autour du corps étudié et le corps même) et donc, négligeant l'action massique entre points du même corps et négligeant l'effet sur le corps étudié des actions entre corps extérieurs au système, on peut assigner une valeur de force massique à toute position dans l'espace géométrique d'un

$$p_{E^*}:\mathcal{E}\to E^* : f_{m\mathcal{C}}(\mathcal{D})=\int_{\mathcal{D}} p_{E^*}(\kappa(\mathcal{M}))d\mu \qquad 86$$

si on ne considère que de telles forces à distance on exclue les actions des champs magnétiques et électriques qui ne sont pas masse-continues. Pour garder une plus grande généralité sans alourdir la notation on considère les forces de masse comme cas particulier de forces de volume, ce qui est d'ailleurs légitime grâce à la volume-continuité de la masse:

$$d\mu=\rho_\kappa(\mathcal{M})dV_\kappa \; ; \; b_{E^*}(\mathcal{M})=\rho_\kappa(\mathcal{M})p_{E^*}(\kappa(\mathcal{M}))+\ldots \qquad 87$$

Sous des conditions de continuité des surfaces et des actions qu'on suppose vérifiées on prouve entre autre (en particulier la deuxième égalité suppose la continuité de la fonction t_{E^*} suivant la surface $\partial\mathcal{C}$):

$$t_{\partial\mathcal{C}E^*}(\mathcal{M})=t_{E^*}(\mathcal{M},n_{\partial\mathcal{C}E})=S_E(\mathcal{M})n_{\partial\mathcal{C}E} \qquad 88$$
$$S_E:\mathcal{B}\to L(E,E^*)$$

$n_{\partial\mathcal{C}E}\in E$ étant la normale en $\mathcal{M}$ à la surface $\partial\mathcal{C}$ dans l'emplacement en objet, ce qui introduit le tenseur "contrainte" S_E. On remarque que, la surface $\partial\mathcal{C}$ étant une surface matérielle, sa normale $n_{\partial\mathcal{C}T}$ est un vecteur matériel de l'espace tangent en tout point de la surface, et donc:

$$\forall\mathcal{M}\in\partial\mathcal{C},\forall\kappa\in P \quad n_{\partial\mathcal{C}E}(\mathcal{M})=a_\kappa(\mathcal{M})n_{\partial\mathcal{C}T}(\mathcal{M}) \qquad 89$$

4.1.3. Forces matérielles. Espace duale de l'espace tangent.

Grâce aux définitions introduites un système de forces est aussi une distribution, fonctionnelle linéaire sur l'espace des fonctions à support dans le corps matériel complet $\mathcal{B}$ et à valeurs dans E, de mesure $b_{E^*}(\mathcal{M})dV_\kappa$ à l'intérieur et $t_{\partial\mathcal{C}E^*}(\mathcal{M})dS_\kappa$ sur la surface d'une partie d'un corps matériel. Soit ϕ une fonction à support matériel sur le corps complet et valeurs dans E (à un vecteur matériel est associée une telle fonction par un ensemble d'emplacements locaux sur le corps complet):

$$\forall\phi:\mathcal{M}\in\mathcal{B}\to\phi_E(\mathcal{M})\in E \qquad 90$$
$$\mathcal{P}^*(\mathcal{C},\phi)=\int_{\mathcal{C}}\phi df_{\mathcal{B}}=\int_{\mathcal{C}}(b_{E^*},\phi_E)_E dV_\kappa+\int_{\partial\mathcal{C}}(t_{\partial\mathcal{C}E^*},\phi_E)_E dS_\kappa$$

La distribution ci-dessus dépend de l'emplacement. Si, en changeant d'emplacement, on fait varier la fonction ϕ à l'intérieur d'une classe d'équivalence vecteur matériel on obtient une relation d'équivalence entre images de systèmes de force: deux distributions force sont équivalentes si elles donnent le même réel $\mathcal{P}^*$, pour toute partie $\mathcal{C}$ du corps matériel et pour tout emplacement, en opérant sur les images d'un même vecteur matériel. Cette relation d'équivalence, vu que le support de la distribution est une partie arbitrairement choisie du corps, vue la structure de tribu de tout corps matériel, et vue la validité locale de l'équivalence entre vecteurs matériels, se traduit en une équivalence locale (i.e. en tout point matériel) entre mesures forces:

$$A_0^*(\mathcal{M})= \qquad 91$$
$$=\Big\{((\kappa,b_{E^*}(\mathcal{M})dV_\kappa),(\eta,b'_{E^*}(\mathcal{M})dV_\eta))\in(P\times E^*)^2 :$$
$$\forall((\kappa,u_E),(\eta,u'_E))\in A_0(\mathcal{M}) \;\; (b_{E^*},u_E)_E dV_{\kappa|\mathcal{M}}=(b'_{E^*},u'_E)_E dV_{\eta|\mathcal{M}}\Big\}$$

---

référentiel inertiel. Les systèmes de force de masse qu'on définit à partir d'un référentiel sont donc en effet des systèmes intrinsèques à l'univers matériel.

Il faut remarquer que les forces de masse dépendent localement de l'emplacement et non de l'emplacement globale du corps.

$$\# \qquad A_o^{*\prime}(\mathcal{M}) = \qquad 92$$
$$= \Big\{ ((\kappa, t_{\partial C E^*}(\mathcal{M})dV_\kappa),(\eta, t'_{\partial C E^*}(\mathcal{M})dV_\eta)) \in (P \times E^*)^2 :$$
$$\forall ((\kappa,u_E),(\eta,u'_E)) \in A_o(\mathcal{M}) \ \langle t_{\partial C E^*}, u_E\rangle_E dS_\kappa|_{\mathcal{M}} = \langle t'_{\partial C E^*}, u'_E\rangle_E dS_\eta|_{\mathcal{M}} \Big\}$$

la normale à ∂C étant un vecteur matériel, on a aussi l'équivalence entre contraintes matérielles:

$$\# \qquad A_o^{*\prime\prime}(\mathcal{M}) = \qquad 93$$
$$= \Big\{ ((\kappa, S_E(\mathcal{M})dV_\kappa),(\eta, S'_E(\mathcal{M})dV_\eta)) \in (P \times L(E,E^*))^2 :$$
$$\forall ((\kappa,u_E),(\eta,u'_E)) \in A_o(\mathcal{M}),\ \forall ((\kappa,n_E),(\eta,n'_E)) \in A_o(\mathcal{M})$$
$$\langle S_E n_E, u_E\rangle_E dV_\kappa|_{\mathcal{M}} = \langle S'_E n'_E, u'_E\rangle_E dV_\eta|_{\mathcal{M}} \Big\}$$

On obtient donc, en tout point d'un corps, une partition de E* en ensembles quotient dont les éléments sont des vecteurs matériels. Ces ensembles sont, par définition, les espaces duaux des espaces tangents en tout point, déjà notés $T^*(\mathcal{M})$. On note les vecteurs forces matérielles par $b_{T^*}(\mathcal{M})$ et $t_{\partial C T^*}(\mathcal{M})$; on voit facilement que c'est l'inverse de l'adjoint de l'emplacement local qui en donne les images pour un emplacement fixé (il suffit d'imposer l'identité des dualités de $T(\mathcal{M})$ et de E):

$$\# \qquad \forall \kappa \in P \begin{cases} b_{T^*}(\mathcal{M}) = a^{-}{}_\kappa^*(\mathcal{M}) b_{T^*}(\mathcal{M}) & \in b_{E^*\kappa}(\mathcal{M}) = E^*/A_o^*(\mathcal{M}) \\ t_{\partial C E^*}(\mathcal{M}) = a^{-}{}_\kappa^*(\mathcal{M}) t_{\partial C T^*}(\mathcal{M}) & \in t_{\partial C E^*\kappa}(\mathcal{M}) = E^*/A_o^{*\prime}(\mathcal{M}) \\ S_E(\mathcal{M}) = a^{-}{}_\kappa^*(\mathcal{M}) S_T(\mathcal{M}) a_\kappa^{-1}(\mathcal{M}) & \in S_{E\kappa}(\mathcal{M}) = L(E,E^*)/A_o^{*\prime\prime}(\mathcal{M}) \end{cases} \qquad 94$$

La distribution force matérielle est alors définie, en prenant sur $\mathcal{B}$ un champ u_T arbitraire vecteur matériel, par:

$$\forall u_T : \mathcal{M} \in \mathcal{B} \to u_T(\mathcal{M}) \in T(\mathcal{M}) \ \forall \kappa \in P: \qquad 95$$
$$\# \qquad \mathcal{P}^*(C,u_T) = \int_C u_T(\mathcal{M}) df_{\mathcal{B}} = \int_C \langle b_{T^*}(\mathcal{M}), u_T(\mathcal{M})\rangle_T dV_\kappa + \int_{\partial C} \langle t_{\partial C T^*}(\mathcal{M}), u_T(\mathcal{M})\rangle_T dS_\kappa$$

Ces passages nous permettent de définir la puissance virtuelle dans un emplacement, et de définir par conséquent l'équilibre mécanique.

4.2. Forces dans l'espace-temps.

4.2.1. Forces d'inertie.

Les forces d'inertie sont définies par une conjecture:

- Conjecture d'isolement (forme inertielle): on suppose que, pour un corps matériel et un système de forces donnés, il est toujours possible d'isoler un système, contenant au moins le corps, tel que l'ensemble des forces échangées entre parties de l'extérieur du système (i.e. échangées à l'extérieur du système) ne doit pas être connu pour déterminer le mouvement du corps.

On appelle "système des forces appliquées", noté f_{SC}, l'ensemble des interactions entre les parties de l'extérieur au corps dans les système isolé et les parties du corps, et "système d'actions inertielles", ou "forces d'inertie", f_{IC}, l'ensemble des interactions entre l'extérieur du système et les parties du corps (avec référence aux notations et définition du § 2.2.4., la notation "f_{SC}" particularise la "$A_{extS}(C)$" et la "f_{IC}" particularise la "$A_{extI}(C)$" dans le cas des forces):

$$\forall \mathcal{B} \in \mathcal{U}\ \exists \mathcal{S} \supseteq \mathcal{B} :\ f_C = f_{IC} + f_{SC}\ \ \forall C \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}} \qquad 96$$

On postule l'existence de référentiels inertiels et la validité de l'axiome d'Euler réduit, la conservation de la masse étant postulée, au théorème de D'Alambert:

- il existe des référentiels, dit inertiels, qui voient la quantité de mouvement (somme de la vitesse relative par la mesure masse) d'un corps matériel constante dans un intervalle de temps si et seulement si le système des forces appliquées au corps est nul en somme pendant cet intervalle;
- dans tout corps matériel vu dans un référentiel inertiel le système des forces d'inertie est masse-continu et fonction du temps, et il a l'opposé du produit masse-accélération des points matériels comme mesure instantanée (la donnée d'un processus cinématique c défini ces forces d'inertie dans le temps; Cf. formules (65) et (87)):

97

$$c \Rightarrow \begin{cases} \gamma_c : \mathcal{B}x\chi \rightarrow L(R,V_E) \\ \rho_c(\mathcal{M},\tau)dV_\tau = d\mu \quad \forall \tau \in \chi \end{cases} \qquad \gamma_c d\mu : \mathcal{B}x\chi \rightarrow E^*$$

$$\forall \tau \in T \quad f_{IC}(\mathcal{D},\tau) = \int_{\mathcal{D}} df_{IC}(\tau) = -\int_{\mathcal{D}} \gamma_c(\mathcal{M},\tau)d\mu = -\int_{\mathcal{D}} \rho_c(\mathcal{M},\tau)\gamma_c(\mathcal{M},\tau)dV_\tau$$

La distribution force matérielle associée à de telles forces d'inertie est donc de densité vectorielle $\gamma(\mathcal{M},\tau)d\mu$ selon la définition (71) de l'accélération matérielle.

4.2.2. Processus mécanique.

Ayant introduit parmi les actions agissant sur le corps des forces d'inertie fonctions de l'accélération, et donc du temps pour un processus cinématique donné, la définition d'équilibre dévient relative aux emplacements instantanés suivant un tel processus. En outre les autres forces agissant sur le corps, dites appliquées, peuvent varier dans le temps (indépendamment du processus cinématique).

Ces considérations introduisent la définition suivante. Un "processus mécanique" dans l'intervalle chronologique $\chi \subseteq T$ est défini pour un corps matériel $\mathcal{B}$ (dans un référentiel inertiel) par:

- un processus cinématique c dans l'intervalle $\chi \subseteq T$ (Cf. formule (63) et (64)),
- un système de forces appliquées f_{SC} fonction du temps dans l'intervalle $\chi \subseteq T$ (Cf. formules (84) et (94)):

98

$$\forall \mathcal{C} \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}} \quad f_{SC} : \mathcal{C}x\chi \rightarrow E^* \text{ i.e. } \begin{cases} b(\mathcal{M},\tau) \in T^*(\mathcal{M}) \\ t_{\partial\mathcal{C}}(\mathcal{M},\tau) \in T^*(\mathcal{M}) \end{cases} \quad \forall (\mathcal{M},\tau) \in \mathcal{B}x\chi$$

- le principe des puissances virtuelles (défini au paragraphe suivant).

Un processus mécanique représente donc l'évolution de la forme du corps (processus cinématique) en dualité avec les actions qui l'intéressent (forces d'inertie définies par le processus cinématique et forces appliquées fonction du temps) moyennant le principe des puissances virtuelles. Ce dernier en fait établi tant l'objectivité des interactions entre parties du corps que la condition d'équilibre entre actions intérieures, extérieures et inertielles[29].

---

29 On a repris la définition de processus mécanique de Noll (Cf. [Noll 1973]) en unifiant les demandes d'équilibre des forces et d'indépendance du taux de travail du processus de référence dans celle du principe des puissances virtuelles (pour revenir aux procédures qui nous sont familières). Par conséquent on a éliminé la donnée explicite d'un processus de référence dans la définition de processus mécanique car celle-ci est contenue dans l'énoncé du-dit principe (référentiel galiléen).

On remarque que dans la suite, selon la terminologie habituelle, par "extérieur" on dénote le système des forces agissant sur la partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}$, donc, par rapport aux dénominations introduites précédemment, la somme des actions intérieures (des parties du même $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{C}$) et extérieures (du corps complémentaire de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{C}$).

4.3. Principe des puissances virtuelles.

On peut mettre en relation duale vitesses et forces au cours d'un processus mécanique. Cela peut être fait tant moyennant la distribution force matérielle, en prenant des vitesses matérielles, ce qui défini des puissances réelles, que moyennant la distribution force dans un emplacement, ce qui, en faisant le choix le plus général, qui est celui des vitesses virtuelles, défini des puissances virtuelles.

La définition des puissances virtuelles, moyennant le principe homonyme, précise celle de processus mécanique et conduit, en particulier, à la condition d'équilibre.

On remarque que les puissances virtuelles des efforts intérieurs et extérieurs peuvent être définies par la seule donnée d'un emplacement, sans faire recours à celle d'un processus mécanique; par contre il n'en est pas ainsi pour la puissance des accélération, ces dernières nécessitant un processus cinématique. En vue d'obtenir des équations d'équilibre locales instantanées, il convient néanmoins d'écrire toute puissance virtuelle relativement à l'instant actuel d'un processus mécanique donné[30].

4.3.1. Puissances.

Puissances des efforts extérieurs et des accélérations.

La puissance des efforts extérieurs est donnée par l'application de la distribution force matérielle (95) au champ de vitesse matérielle φ, cette distribution étant définie pour un système de forces appliquées fonction du temps[31]:

$$P_{ext}(\mathcal{C},\varphi,\tau) = \int_{\mathcal{C}} \langle b(\mathcal{M},\tau),\varphi(\mathcal{M},\tau)\rangle_T dV + \int_{\partial\mathcal{C}} \langle t_{\partial\mathcal{C}}(\mathcal{M},\tau),\varphi(\mathcal{M},\tau)\rangle_T dS \qquad 99$$

La puissance des accélérations est définie de façon analogue par un système de forces d'inertie:

$$P_{acc}(\mathcal{C},\varphi,\tau) = \int_{\mathcal{C}} \langle \gamma(\mathcal{M},\tau),\varphi(\mathcal{M},\tau)\rangle_T d\mu \qquad 100$$

Ces définitions sont intrinsèques et dependent de l'instant de temps selon un processus mécanique. Elles impliquent la donnée d'un référentiel inertiel et la distinction d'actions inertielles.

Soit $\hat{\varphi}_\kappa$ un champ de vitesse virtuelle défini sur le corps matériel selon l'emplacement κ continu. L'application de la distribution force à un champ arbitraire de vitesse virtuelle permet la définition de la puissance virtuelle des efforts extérieurs et de la puissance virtuelle des accélérations.

Ces deux puissances sont nécessaires pour l'écriture du principe des puissances virtuelles et, donc, pour la définition des processus mécaniques. En particulier la définition d'équilibre est liée aux puissances virtuelles des efforts extérieurs et des accélérations.

On remarque que, les vitesses virtuelles étant définies dans un référentiel particulier par rapport à un emplacement, et les forces étant définies sur le corps matériel, en énonçant un tel principe on se restreint aux référentiels pour lesquels la puissance qui résulte de leur dualité est invariante (Cf. [Noll 1963]).

Un champ de vitesse virtuelle $\hat{\varphi}_\kappa$ est un opérateur linéaire donnant en tout point matériel du corps, pour un intervalle infinitesimale de temps une translation infinitésimale dans l'espace géométrique. Cette translation peut être interprétée comme une variation infinitésimale de l'emplacement κ restreinte par la seule continuité par morceaux. Se donner un champ de vitesse virtuelle dans un emplacement est donc équivalent à se donner une petite variation arbitraire de cet emplacement non restreinte par l'impenetrabilité:

---

30 A ce propos on remarque que les grandeurs avec indice κ sont relatives à un emplacement (indépendamment d'un processus), celles avec indice c sont relatives à l'emplacement actuel $\kappa_c(\cdot,\tau)$ suivant un processus cinématique.

31 L'élément de volume matériel à l'instant τ d'un processus cinématique, dV, est défini par transport du produit mixte de E sur $T(\mathcal{M})$ (comme pour le transport du produit scalaire). L'élément de surface matérielle, dS, est défini moyennant le produit scalaire (non intrinseque) des vecteurs matériels de la surface.

Les développements suivants sont fait moyennant les puissances virtuelles, donc par rapport à un emplacement, ce qui ne demande pas plus de détails sur le sujet.

$$\forall \kappa \in P \ \ \phi_\kappa \in V_E \Leftrightarrow \delta\kappa \in E \qquad 101$$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs et la puissance virtuelle des accélérations (l'accélération étant fonction de l'emplacement actuel selon un processus cinématique) au cours d'un processus mécanique sont[32]:

$$\forall \tau \ \ P_{ext}(C,\delta\kappa) = \int_C \langle b_c(\mathcal{M},\tau),\delta\kappa(\mathcal{M})\rangle_E dV_\tau + \int_{\partial C} \langle t_{\partial C c}(\mathcal{M},\tau),\delta\kappa(\mathcal{M})\rangle_E dS_\tau \qquad 102$$

$$\forall \tau \ \ P_{acc}(C,\delta\kappa) = \int_C \rho_c(\mathcal{M},\tau)\langle \gamma_c(\mathcal{M},\tau),\delta\kappa(\mathcal{M})\rangle_E dV_\tau$$

Puissance des efforts intérieurs.

La puissance virtuelle des efforts intérieurs est, par définition, une fonctionnelle d'un champ de vitesse virtuelle définie dans un emplacement:

$$\forall \tau \ \ P_{int}(C,\phi_\kappa) = \int_C \Phi(\phi_\kappa,\tau) \qquad 103$$

Dans la définition de puissance virtuelle des efforts intérieurs on introduit trois hypothèses: continuité par rapport à la masse et caractère interne de la puissance, localisation au premier gradient de la mesure Φ_κ (e.g. Cf. [Rougee 1980]).

La continuité par rapport à la masse s'écrit (indépendamment de l'emplacement, suivant un processus: $d\mu=\rho_c(\mathcal{M},\tau)dV_\tau$):

$$\forall \tau \ \ \Phi(\phi_\kappa,\tau)=\Phi_\mu(\phi_\kappa,\tau)d\mu=\Phi_\rho(\phi_\kappa,\tau)dV_\tau \qquad 104$$

Le caractère interne des puissances intérieures est défini par l'axiome: "Pour tout champ de vitesse rigidifiant d'un corps matériel en équilibre, la puissance virtuelle intérieure est nulle dans toute partie du corps".

On remarque que la variation d'emplacement $\delta\kappa$, équivalente d'une vitesse virtuelle, engendre une variation $\delta\Gamma_\kappa(\mathcal{M})$ de l'image dans cet emplacement de la métrique de l'espace tangent. Suivant la (60):

$$\forall \kappa \in P \ \ \delta\kappa \Rightarrow \delta\Gamma_\kappa(\mathcal{M}) = 2\mathrm{sym}(a_\kappa^*(\mathcal{M})g_E\delta a_\kappa(\mathcal{M})) \ \ \forall \mathcal{M}\in\mathcal{B} \qquad 105$$

Un champ de vitesse (ou un mouvement) rigidifiant, par définition, ne modifie pas la forme globale d'un corps matériel, par conséquent la variation de la métrique de l'espace tangent $\delta\Gamma_\kappa(\mathcal{M})$ est nulle dans tout mouvement rigidifiant (dans un tel mouvement il n'y a que de variations d'emplacement à gradient matériel nul; Cf. formule (52)).

L'écriture de l'axiome du caractère interne entraîne donc la factorisation de la vitesse virtuelle de la métrique de l'espace tangent dans l'expression de la puissance des efforts intérieurs:

$$\forall \tau \ \ \Phi_\mu(\delta\kappa,\tau)_{|\mathcal{M}} = \Phi_\mu(\delta\Gamma_\kappa(\mathcal{M}),\tau)) \ \ \forall \mathcal{M}\in\mathcal{B} \qquad 106$$

La localisation au premier gradient de Φ_μ entraîne finalement (le signe négatif et le coefficient 1/2 sont dus à l'usage général):

---

32 Les forces $b_c(\mathcal{M},\tau)$ et $t_{\partial Cc}(\mathcal{M},\tau)$ dans E* sont obtenues par emplacement local $a_c(\mathcal{M},\tau)$ des forces matérielles $b(\mathcal{M},\tau)$ et $t_{\partial CE^*}(\mathcal{M},\tau)$:

$$b_c(\mathcal{M},\tau)=a^{-}{}_c{}^*(\mathcal{M},\tau)b(\mathcal{M},\tau) \ ; \ t_{\partial Cc}(\mathcal{M},\tau)=a^{-}{}_c{}^*(\mathcal{M},\tau)t_{\partial C}(\mathcal{M},\tau) \qquad 102b$$

#
$$\forall\tau \quad P_{int}(\mathcal{C},\delta\kappa) = -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}}\langle\theta_c(\mathcal{M},\tau),\delta\Gamma_\kappa(\mathcal{M})\rangle_{L(T,T^*)}d\mu \qquad 107$$

$$\theta_c:(\mathcal{M},\tau)\in\mathcal{B}x\chi\rightarrow L_S(T^*(\mathcal{M}),T(\mathcal{M}))$$

On remarque que l'emplacement κ sur lequel est définie selon la (105) la variation de la métrique de l'espace tangent peut être autre que l'emplacement actuel $\kappa_c(\cdot,\tau)$ obtenu à l'instant τ suivant un processus cinématique.

On montre que le tenseur θ_c ainsi introduit, qui dépend de l'emplacement courant $\kappa_c(\mathcal{M},\tau)$ suivant un processus, est lié au tenseur des contraintes de Cauchy σ usuel (Cf. [Rougee 1980]):

#
$$\forall\kappa\in P \quad \sigma=\rho_\kappa a_\kappa\theta_\kappa a_\kappa^*:\mathcal{B}\rightarrow L_S(E^*,E) \qquad 108$$

(la donnée du processus n'étant pas nécessaire dans cette relation).

La (107), en prenant une variation réelle de la métrique de l'espace tangent dans un interval infinitésimal de temps suivant un processus mécanique, permet l'écriture matérielle de la puissance intérieure, moyennant la dualité intrinsèque entre la contrainte θ_c et la vitesse matérielle de la métrique:

#
$$P_{int}(\mathcal{C},\tau) = -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}}\langle\theta_c(\mathcal{M},\tau),\frac{\partial}{\partial\tau}\Gamma_c(\mathcal{M},\tau)\rangle_{L_S(T,T^*)}d\mu \qquad 109$$

Moyennant la définition (105) de la variation de la métrique de l'espace tangent (prise par rapport à l'emplacement courant suivant un processus), en introduisant la contrainte:

#
$$\forall\kappa\in P \quad \tau_\kappa=\rho_\kappa g_E a_\kappa\theta_\kappa:\mathcal{B}\rightarrow L_S(T^*(\mathcal{M}),E^*) \qquad 110$$

on écrit la puissance virtuelle des efforts intérieurs:

#
$$P_{int}(\mathcal{C},\delta\kappa) = -\int_{\mathcal{C}}\langle\tau_c(\mathcal{M},\tau),\mathrm{grad}\delta\kappa(\mathcal{M})\rangle_{L(T,E)}dV_\tau \qquad 111$$

qui, par déplacement de l'opérateur grad moyennant le lemme de Gauss[33], permet l'écriture locale de la condition d'équilibre qu'on défini de suite.

4.3.2. Equilibre mécanique.

A partir des conditions introduites (continuité des forces et principe des puissances virtuelles) on obtient les équations d'équilibre mécanique du corps matériel.

La première caractéristique de l'équilibre est celle d'être une propriété des corps matériels indépendante du référentiel choisi pour leur emplacement. Néanmoins, vue la forme particulière choisi pour la puissance des accélérations, on se restreint dans ce contexte aux référentiels galiléens[34].

En outre, ayant introduit des forces inertielles fonctions de l'accélération, et donc du temps pour un processus cinématique donné, l'équilibre dévient relatif aux configurations instantanées suivant un tel processus.

Le principe s'écrit pour tout emplacement κ dans un référentiel galiléen:

#
$$\left\{ P_{ext}(\mathcal{C},\phi_\kappa)+P_{int}(\mathcal{C},\phi_\kappa)=P_{acc}(\mathcal{C},\phi_\kappa) \quad \forall\phi_\kappa:\mathcal{B}\rightarrow V_E \right\} \leftrightarrow \mathcal{B} \text{ en équilibre} \qquad 112$$

---

33 L'opérateur grad et l'opérateur div qu'on introduira dans la suite sont intrinsèques; la légitimité du passage en objet a été démontrée par P.Rougee (Cf. [Rougee 1980]).

34 En effet, dans les limites de ce travail, il suffit de se placer dans des référentiels inertiels qui ne sont que des cas particuliers de référentiels galiléens.

Dans les puissances virtuelles ci-dessus le temps identifie une forme et un système force actuels suivant un processus mécanique; par conséquent la condition d'équilibre doit être vérifiée à tout instant d'un tel processus.

L'écriture locale dans l'espace-temps de cette dernière équation, possible grâce à la continuité du référentiel et au caractère arbitraire des vitesses virtuelles, donne l'équation d'équilibre locale classique des milieux continus avec conditions au contour (ayant défini la divergence "div" comme la trace du gradient matériel[35]):

$$\#\qquad \mathcal{B} \text{ en équilibre à l'instant } \tau \qquad 113$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{cases} b_c(\mathcal{M},\tau)+\rho_c(\mathcal{M},\tau)\gamma_c(\mathcal{M},\tau)+\mathrm{div}\,\tau_c(\mathcal{M},\tau)=0 & \forall \mathcal{M}\in\mathcal{B} \\ t_{\partial\mathcal{B}c}(\mathcal{M},\tau)=\tau_c(\mathcal{M},\tau)\Gamma_c(\mathcal{M},\tau)n_{\partial\mathcal{B}T}(\mathcal{M}) & \forall \mathcal{M}\in\partial\mathcal{B} \end{cases}$$

($n_{\partial\mathcal{B}T}(\mathcal{M})\in T(\mathcal{M})$ étant la normale matérielle à la surface matérielle $\partial\mathcal{B}$).

La comparaison de l'équation d'équilibre sur la frontière avec la définition (88) du tenseur matériel S de la (98) donne les relations entre les tenseurs de contrainte introduits:

$$\#\qquad \forall \kappa\in P \begin{cases} S = a_\kappa^* \tau_\kappa \Gamma_\kappa = \rho_\kappa \Gamma_\kappa \theta_\kappa \Gamma_\kappa = a_\kappa^* g_E \sigma g_E a_\kappa \\ \tau_\kappa a_\kappa^* = g_E \sigma \end{cases} \qquad 114$$

35 L'opérateur trace dépend de l'emplacement, mais la trace d'un tenseur dépendant de l'emplacement n'en dépend pas.

5. Thermodynamique

5.1. Introduction.

Les définitions de la thermodynamique sont, par leur nature, intrinsèques. C'est la raison pour laquelle on ne les a pas données dans l'ordre utilisé pour la cinématique et la mécanique, c'est à dire d'abord dans l'univers matériel et, en suite, dans l'espace-temps.

Le cadre thermodynamique suivi par le modèle du Chapitre IV ne coincide ni avec celui de la thermodynamique rationnelle ni avec celui de la thermodynamique des processus irréversibles classique.

Bien que de moindre généralité, la thermodynamique utilisée dans le Chapitre IV ne contredit pas les axiomes thermodynamiques introduits par Noll. D'un autre coté, une étude basée sur ces axiomes n'était pas nécessaire pour la formulation de notre modèle. C'est la raison pour laquelle on ne s'occupe pas, dans le Chapitre VIII, d'étendre la thermodynamique axiomatique de Noll à l'espace profond.

On présente brièvement, par souci de complétude, le cadre axiomatique proposé par Noll (Cf. [Noll 1972]).

5.2. Thermodynamique axiomatique.

Cette théorie se base sur la définition de l' "élément matériel" qui est une septuple intrinsèque, constitué de quatre ensembles et trois applications qui le relient et structuré par cinq axiomes.

5.2.1. Les ensembles.

Le premier ensemble est l'espace tangent $T(\mathcal{M})$, le deuxième est l'ensemble des configurations thermodynamiques intrinsèques, noté $\mathcal{G}$, le troisième est l'ensemble des processus thermodynamiques admissibles, noté Π, le quatrième est l'espace des états thermodynamiques, noté E.

Pour un modèle isotherme purement mécanique la configuration thermodynamique n'est que la forme globale du corps[36], Δ, l'ensemble des processus admissibles est l'ensemble des processus cinématiques admissibles, c'est à dire des déplacements admissibles, D, ou, de façon équivalente, des emplacements compatibles P, et l'état thermodynamique n'est que l'état mécanique du corps.

Pour un modèle thermodynamique complet une configuration est un triplet forme, température, gradient de température:

$$\#\qquad \mathfrak{g}=(\delta,\ \theta,\ \mathrm{grad}\theta)\in\mathcal{G} \qquad 115$$

il s'agit donc de l'ensemble des champs des variables d'état dès qu'on se place dans un référentiel particulier (le gradient de température est aussi intrinsèque car il est défini par rapport aux translations matérielles infinitésimales).

Pour le même modèle complet l'ensemble des processus thermodynamiques est constitué par l'ensemble des processus mécaniques avec l'ensemble des processus énergétiques; un processus énergétique est, pour une chronologie donnée, χ, l'ensemble des quatres applications ($\mathcal{P}$ étant une partie du corps matériel $\mathcal{B}$):

$E:\mathcal{P}x\tau\subseteq\mathcal{B}x\chi\rightarrow R$	contenu d'énergie interne de $\mathcal{P}\in\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ à l'instant τ	116
$Q:(\mathcal{P},\mathcal{Q})x\tau\subseteq(\mathcal{B}x\mathcal{B})_{sep}x\chi\rightarrow R$	interaction puissance calorifique de $\mathcal{P}$ à $\mathcal{Q}$ à l'instant τ	
$S:\mathcal{P}x\tau\subseteq\mathcal{B}x\chi\rightarrow R$	contenu d'entropie de $\mathcal{P}$ à l'instant τ	
$\theta:\mathcal{P}x\tau\subseteq\tilde{}\mathcal{B}x\chi\rightarrow R^{+*}$	température de $\mathcal{P}$ (intérieur à $\mathcal{B}$) à l'instant τ	

ces applications devant satisfaire les lois usuelles de la thermodynamique (bilan d'énergie et d'entropie, volume-continuité et surface-continuité de la puissance calorifique, caractère additif

36 Selon une traduction mot à mot de la dénomination donnée par Noll, on peut aussi appeler Δ configuration intrinsèque.

d'espace des énergies et des entropies, production locale instantanée d'entropie non négative en tout processus).

5.2.2. Les applications.

Entre ces quatres ensembles il existe trois applications:

- l'application G* donnant une configuration pour un état donné,
- l'application S* donnant un ensemble de variables associées (affinités selon le langage de la thermodynamique des processus irréversibles) pour un état donné,
- l'application H* donnant un état final en fonction d'un état initial et d'un processus pris à partir de cet état (l'ensemble des couples état-processus compatibles en ce sens est indiqué par "fit"):

$$G^*:E\rightarrow\mathcal{G}\ ;\ S^*:E\rightarrow\mathcal{S}\ ;\ H^*:(E\times\Pi)_{fit}\rightarrow E \qquad 117$$

Dans le cas purement mécanique l'ensemble $\mathcal{S}$ est l'espace des contraintes intrinsèques $L_S(T^*(\mathcal{M}),T(\mathcal{M}))$, plus généralement il s'agit de l'espace produit cartésien de cet espace de contraintes mécaniques avec l'espace des affinités associées à θ (entropie) et gradθ (les flux de chaleur). On appelle $\mathcal{S}$ "état de contrainte" (au lieu de l'appeler ensemble des variables associées) en ce sens plus général aussi.

5.2.3. Les axiomes.

D'un point de vue qualitatif les cinq axiomes (dont une discussion complète sortirait des limites de ce travail) garantissent que:

I G* est telle que à une configuration dans $\mathcal{G}$ (i.e. à un triplet forme, température, gradient de température) correspond un seul état thermodynamique dans E (surjective);

II H* est telle que l'état obtenu à partir d'un état initial par composition de deux processus (dans l'ordre) p_1 et p_2 est égal à l'état obtenu par le processus p_2 à partir de l'état obtenu par le processus p_1 à partir de l'état initial ($\varepsilon\in E$ est un état thermodynamique):

$$H^*(\varepsilon_{init},p_2\circ p_1)=H^*(H^*(\varepsilon_{init},p_1),p_2) \qquad 118$$

III H* est telle que si les états de contrainte donnés par S* pour deux états thermodynamiques obtenus à partir de deux états thermodynamiques initiaux ε_{init1} et ε_{init2} moyennant le même processus p coïncident, alors les deux états initiaux coïncident;

$$S^*(H^*(\varepsilon_{init1},p))=S^*(H^*(\varepsilon_{init2},p)\rightarrow\varepsilon_{init1}=\varepsilon_{init2} \qquad 119$$

IV (on note E_G le sous-ensemble des états donnant de configurations $g\in\mathcal{G}$ par G*; on montre que l'ensemble des états E a la topologie naturelle de base E_G) Les E_G sont des espaces complets;

V (on appelle "processus gelé" de durée φ un processus p_{gel} qui associe à tout instant de temps d'un interval de tel durée φ la même configuration dans $\mathcal{G}$) H* est telle que:

$$\forall\varepsilon\in E\quad\lim_{\tau\rightarrow\infty}H^*(\varepsilon,p_{gel}(\varepsilon,\tau))=\lambda(\varepsilon) \qquad 120$$

$$\text{avec par définition } p_{gel}:\ \varepsilon\in E\quad p_{gel}(\varepsilon,\tau)=G^*(\varepsilon)\quad\forall\tau\in[t_{init},\infty[$$

H* est telle que la limite ci-dessus existe (on démontre alors qu'elle est unique); cette limite est par définition l'état relâché associé à ε;

VI on peut accéder à tout état en partant d'un état relâché (un état τ est accessible à partir d'un état ε si tout voisinage de τ contient des états qui peuvent être obtenus par un processus admissible en partant de ε).

5.3. Conclusion.

Les définitions données ci-dessus sont relatives à toute partie d'un corps matériel, donc, en particulier, elles sont spécifiques aux points matériels. Par conséquent on retrouve, vue la définition de configuration thermodynamique donnée (triplet forme, température, gradient matériel de température) les principes de l'action locale, de simplicité matérielle et d'indifférence matérielle qui ont été énoncés au Chapitre IV (§ 5.1.1.).

Pour obtenir l'état après un processus donné à partir d'un état initial connu, l'application H* fait appel à l'ensemble de ce processus et à l'état initial, ce qui suit le principe de causalité du Ch.IV § 5.1.1. Dans la méthode suivie au Chapitre IV on a ensuite remplacé la connaissance du passé par un ensemble de variables internes.

6. Résumé des notations.

En conclusion on donne un résumé des principales notations introduites pour faciliter la lecture du chapitre suivant.

Matière.

5	$\mathcal{M}\in\mathcal{B}\in\mathcal{U}$	points, corps et univers matériel
6	$\mu:\mathcal{U}\rightarrow R^+$	masse
12	$A:(\mathcal{U}x\mathcal{U})_{sep}\rightarrow V$	interaction
19	$\Delta=\{\delta:\mathcal{B}x\mathcal{B}\rightarrow R^+\}$; d_δ	classe des formes, forme globale et distance dans la forme

Référentiel.

25 29	$\phi:\mathcal{W}\rightarrow\mathcal{E}xT$	référentiel, monde des événements, espace géométrique absolu, chronologie d'intervalles de temps
23	$d_\mathcal{E}:\mathcal{E}x\mathcal{E}\rightarrow R^+$	distance dans l'espace géométrique absolu
24	$d_\mathcal{W}:\mathcal{W}x\mathcal{W}\rightarrow R^+$	distance géométrique entre événements

Corps dans l'espace.

31	$P=\{\kappa:\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{E}\}$	classe des emplacements compatibles
32	C, $C_\mathcal{M}$	relations d'équivalence, globale et locale, entre emplacements
37	$\bar{\mathcal{B}}=\mathcal{B}\cup\partial\mathcal{B}$	corps complet et frontière du corps
38	$D=\{\pi:\mathcal{E}\rightarrow\mathcal{E}\}$	classe des déplacements compatibles
42	$\nabla_\kappa f=\nabla\left[f\circ\kappa^{-1}\right]_{\kappa(\cdot)}$	gradient d'une fonction à support matériel selon un emplacement
47	$A_o(\mathcal{M})$	relation d'équivalence locale entre couples vecteurs et emplacements
47	$u_{E\kappa}(\mathcal{M})\in E/A_o(\mathcal{M})$	classe d'équivalence et ensemble quotient qui en résulte
-	$u_T(\mathcal{M})\in T(\mathcal{M})$	vecteur matériel et espace tangent
48	$a_\kappa(\mathcal{M}):T(\mathcal{M})\rightarrow E/A_o(\mathcal{M})$	emplacement local (définition)
50	$\text{grad}f\|_\mathcal{M}=(\nabla_\kappa f\|_\mathcal{M})a_\kappa(\mathcal{M})$	gradient matériel d'une fonction à support matériel selon un emplacement
51	$a_\kappa(\mathcal{M})=\text{grad}\kappa\|_\mathcal{M}$	emplacement local (relation avec l'emplacement)
55	$\Gamma(\mathcal{M})\in L_S^+(T(\mathcal{M}),T^*(\mathcal{M}))$	tenseur métrique de l'espace tangent (définition)
60	$\Gamma_\kappa=a_\kappa^* g_E a_\kappa\in L_S^+(T(\mathcal{M}),T^*(\mathcal{M}))$	tenseur métrique de l'espace tangent dans un emplacement (g_E tenseur métrique de E)

Corps dans le temps.

61	$c:\chi\subseteq T\rightarrow\Delta_\chi\subseteq\Delta$	processus cinématique dans un intervalle chronologique
62	$m_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}}:\Delta_{\chi 1}\rightarrow\Delta_{\chi 2}$	mouvement relatif de deux processus cinématiques du même corps

Corps dans l'espace-temps.

64 65	$c \Rightarrow \kappa_c ; \varphi_c ; \gamma_c$	fonction emplacement dans le temps selon un processus cinématique, vitesse et accélération de l'emplacement selon ce processus
66 67	$\Phi_\kappa : \mathcal{B} \to V_E$	vitesse virtuelle
68	$m_{\mathcal{B}\mathcal{R}} : \mathcal{B} \times \chi_{\mathcal{B}} \to \in \mathcal{R}$	mouvement d'un corps par rapport à un autre
69	$\hat{m} : \mathcal{E} \times \chi \to \mathcal{E}$	mouvement virtuel
70	$c \Rightarrow a_c ; \Gamma_c$	emplacement local et métrique de l'espace tangent dans le temps selon un processus cinématique
71	$\varphi = a_c^{-1} \varphi_c ; \gamma = a_c^{-1} \gamma_c$	vitesse et accélération matérielles
72	$c \Rightarrow \pi_c$	transformation (mouvement) dans le temps selon un processus cinématique
73	$F = \nabla \pi_c \in L^+(E,E)$	gradient de la transformation
76	$C \in L^+(E,E)$	tenseur de dilatation de Cauchy

Forces.

84	$f_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to E^*$	action force
85	$b_{E^*} : \mathcal{B} \to E^*$	force de volume dans un emplacement
85	$t_{\partial \mathcal{C} E^*} : \partial \mathcal{C} \to E^*$	force de contact dans un emplacement
89	$S_E : \mathcal{B} \to L(E,E^*)$	contrainte dans un emplacement
94	$b(\mathcal{U},\tau) ; t_{\partial \mathcal{C}}(\mathcal{U},\tau) , S(\mathcal{U},\tau)$	forces et contrainte matérielle suivant un processus mécanique
108	$\sigma \in L_S(E^*,E)$	contrainte de Cauchy
113	...	équations locales d'équilibre

C H A P I T R E VIII

Axiomatique "approfondie"

1. Introduction.

Ce chapitre a pour finalité l'axiomatique générale à la base du modèle de polycristal du Chapitre IV et du Chapitre III. Moyennant cette même axiomatique, en choisissant différemment l'espace des phases, on peut bâtir d'autres modèles de milieux continus profonds.

On a l'objectif de définir mouvements, déformations, contraintes, processus cinématiques et mécaniques du milieu continu profond. En particulier on doit définir le tenseur de dilatation de Cauchy dans l'espace profond et les mesures de déformation qui en dérivent, les gradients dans cet espace, les tenseurs des contraintes (par la donnée des mouvements rigidifiants) et, finalement, les équations d'équilibre du milieu continu profond.

En fonction des objectifs de ce travail, on se limite aux définitions nécessaires pour la compréhension et la correcte formulation du modèle de polycristal du Chapitre IV. Notamment on ne s'occupe pas de définir un cadre axiomatique thermodynamique approprié à l'espace profond car, par sa nature intrinsèque, toute théorie thermodynamique peut y être appliquée.

Dans ce chapitre on garde un parallèle constant avec le Chapitre VII: définition de l'univers matériel et des référentiels d'espace profond (§ 2.), cinématique "profonde" (§ 3.) et mécanique "profonde" (§ 4.). Pour faciliter les confrontes avec le cas classique on donne à gauche des formules, entre parenthèses, la référence à la formule correspondante dans le Chapitre VII.

2. Univers matériel et monde des événements "profonds".

2.1. Introduction.

Cette partie du chapitre correspond au Ch.VII § 2.; on introduit quelques définitions nouvelles avec l'objectif d'obtenir un cadre étendu convenable pour l'étude des matériaux hétérogènes avec changements de phase.

Dans le § 2.2. on défini une structure intrinsèque aux corps matériels proche de celle définie dans le cas classique: on postule qu'ils sont soumis à une relation d'ordre, qu'ils ont une masse, qu'ils peuvent avoir une forme et un matériau constitutif (ce qui n'avait pas été pris en compte, à ce niveau, dans le modèle classique) et qu'il existe des interactions entre eux.

Donc, dans cette premiere partie on donne une définition plus restrictive, par rapport à la démarche classique, de point matériel liée à la définition de matériau.

La partie originale dans le contexte du référentiel traité au § 2.3. est dans la construction d'un monde d'événements avec espace "profond" qui constitue, d'ailleurs, la base de tout notre travail. C'est pour cette raison qu'on traite plus en détail les passages relatifs à ce sujet.

2.2. Univers matériel.

2.2.1. Définitions classiques.

Structure et masse.

L'univers matériel $\mathcal{U}$ est une tribu de Boole de corps matériels massifs $\mathcal{B}\in\mathcal{U}$. On garde donc les mêmes définitions et notations introduites dans l'axiomatique classique (Ch. VII § 2.2.1. et 2.2.2.).

Interactions et conjecture d'isolement.

Les interactions, par leur nature intrinsèque à l'univers matériel, sont définies de façon classique (Ch.VII § 2.2.3.); neanmoins leurs images dans le référentiel profond qu'on va introduire seront différentes du cas classique.

On remarque que la propriété additive sur les corps séparés, propriété fondamentale des interactions, se transmet sur les points matériels d'un corps tels qui sont définis dans le paragraphe suivant. En fait, selon les définitions données dans la suite, tout couple de points non uniformes est une couple de corps materiels separés et tout couple de points à distance positive est aussi une couple de corps matériels separés. Par conséquent il existe des interactions entre points matériels à distance nulle (qui sont alors de deux matériaux différents par la conjecture de représentativité) ainsi que des interactions entre points du même matériau (à distance positive entre eux).

La conjecture d'isolement est formulée comme dans le cas classique (Ch.VII § 2.2.4.).

2.2.2. Formes. Matière.

De même que dans l'axiomatique classique, on muni tout corps matériel $\mathcal{B}$ d'une classe Δ d'applications "forme globale" de $\mathcal{B}$ qui associent à tout couple de points matériels de $\mathcal{B}$ une "distance dans la forme" vérifiant l'axiome d'impenétrabilité:

(VII.19)
$$\delta\in\Delta\ .\ \delta\ (\mathcal{M}',\mathcal{M}'')\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}\to d_\delta(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')\in R^+ \qquad 1$$

$$(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')\in(\mathcal{B}\times\mathcal{B})_{sep} \leftrightarrow d_\delta(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')>0\ \ \forall\delta\in\Delta$$

On a donc la "forme locale" (positive ssi $\mathcal{M}''\in\mathcal{B}\setminus\{\mathcal{M}\}$):

(VII.20)
$$\forall\mathcal{M}\in\mathcal{B}\ \forall\delta\in\Delta\ \ \delta\ (\mathcal{M},\mathcal{M}'')\in\mathcal{B}\to d_\delta(\mathcal{M},\mathcal{M}'')\in R^+ \qquad 2$$

On remarque que pour un ensemble de points matériels constituant une partition du corps la distance dans la forme est toujours positive. Pour un recouvrement quelconque du corps en points matériels la relation de distance nulle est une équivalence, F, donnant un ensemble quotient partition du corps tel que la distance entre classes d'équivalence est toujours positive.

On appelle "point formel", M_F, une telle classe d'équivalence et on remarque que (grâce à l'axiome d'impénétrabilité) la partition du corps en points formels est identique pour toute formes globales dans la classe Δ; on note alors $p_\Delta(\mathcal{B})$ cette partition:

$$F=\left\{(\mathcal{M},\mathcal{M}')\in\mathcal{B}x\mathcal{B}:\ \exists\delta\in\Delta:\ d_\delta(\mathcal{M},\mathcal{M}')=0\right\} \qquad 3$$

$$M_F=\left\{\mathcal{M}\in\mathcal{B}:\ M_FxM_F=F\right\}\in p_\Delta(\mathcal{B})\ ;\ \forall\delta,\delta'\in\Delta\ \mathcal{B}/F=\mathcal{B}/F'=p_\Delta(\mathcal{B})$$

La relation F, d'équivalence "formelle" est plus large que l'identité définie par la relation d'ordre partiel de l'univers matériel: il existe de points distincts et séparés qui sont formellement équivalents[1-2].

2.2.3. Uniformités. Matériau.

Pour introduire la définition de forme on a considéré le concept primitif de distance entre points matériels. En fait on ne sait déterminer une telle distance que après avoir fixé un référentiel et un emplacement du corps dans l'espace géométrique, et cette détermination est alors non ambiguë. La distance entre points matériel est cependant liée à la relation d'ordre de l'univers matériel, étant nulle entre corps non séparés.

De façon analogue, pour introduire une deuxième structure sur l'univers matériel (i.e. autre que ladite relation d'ordre) on a besoin du concept primitif de "uniformité"[3]. Ayant défini l'ensemble du modèle thermo-mécanique d'un corps, deux points "uniformes" (i.e. en relation d'uniformité) pourront être reconnus par le fait de donner la même réponse sous les mêmes sollicitations, dans des conditions permettant cette comparaison[4] (on voit alors qu'il s'agit d'une relation réflexive, symétrique et transitive, c'est à dire d'une relation d'équivalence).

On considère donc des relations d'équivalence U entre couples de points matériels qu'on appelle uniformités; dans le contexte actuel ces relations ne sont pas spécifiées davantage.

Une relation d'uniformité est plus large que l'identité définie par la relation d'ordre (i.e. en général il existe plus d'un point matériel dans une relation U) et différente de l'équivalence formelle entre points matériels (i.e. deux points à distance nulle peuvent ne pas être uniformes et deux points à distance positive peuvent être uniformes).

On appelle "uniformité globale", υ, un ensemble de relations d'uniformité constituant un recouvrement du corps $\mathcal{B}$. On considère tout corps matériel $\mathcal{B}$ muni d'une famille Y d'uniformités globales:

$$\upsilon\in Y\ ;\ \upsilon=\left\{U=\left\{(\mathcal{M},\mathcal{M}')\in\mathcal{B}x\mathcal{B}:\ \mathcal{M}\text{ uniforme à }\mathcal{M}'\right\}:\ \mathcal{B}\leq\bigcup_{U\in\upsilon}U\right\}\in R(\mathcal{B}) \qquad 4$$

---

1 La donnée d'une famille D de classes Δ de formes globales engendre une famille $P_D(\mathcal{B})$ de partitions-en-forme du corps matériel, contenue dans la famille des partitions:

$$P_D(\mathcal{B})=\left\{p_\Delta(\mathcal{B}):\ \Delta\in D\right\} \qquad 3b$$
$$(\mathcal{M}\leq\mathcal{M}')\cup(\mathcal{M}'\leq\mathcal{M})\rightarrow\forall d:(\mathcal{M},\mathcal{M}')\in d\ \text{ i.e. }\ P_D(\mathcal{B})\subseteq P(\mathcal{B})\subseteq P_m(\mathcal{B})$$

Dans la suite on considère une seule classe Δ de formes globales et, donc, une seule partition-en-forme du corps matériel.

2 Dans l'axiomatique classique la donnée d'une famille de formes globales suffit pour introduire le concept de voisinage matériel d'un point (dont l'image dans le référentiel est l'espace tangent). Dans notre cas il existe des points distincts en matériau (selon la définition qu'on introduit dans la suite) et confondus en forme et vice versa, ce qui ne nous donne pas envie de parler de voisinages tant que l'on n'a pas précisé la structure du corps par un emplacement dans l'espace profond. En suite on pourra affirmer que le voisinage matériel d'un point est obtenu comme image inverse d'un espace tangent, ce qui le prive de tout statut intrinsèque.

3 On reprend une dénomination introduite par Noll avec une définition différente mais le même but (Cf. [Noll 1967]).

4 Il faut à cette fin définir un processus et une description de l'état initial et de la réponse (en termes d'état final et de processus), ce qui ne peut se faire que dans un référentiel précis. Pour un matériau simple, pour comparer deux points il faut comparer leurs états obtenus en partant d'un même état initial pour tout processus; c'est en ce sens qu'on parle de conditions permettant la comparaison.

Une uniformité globale fait correspondre à tout point matériel d'un corps l'ensemble (éventuellement constitué seulement du même point) des points matériels qui lui sont uniformes dans le même corps.

On appelle "matériau" M_U une classe d'équivalence engendrée par une relation d'uniformité U, c'est à dire un ensemble de points matériels uniformes:

$$M_U=\{\mathcal{M}\in\mathcal{B}:\ M_U\times M_U=U\} \qquad 5$$

On voit alors qu'une uniformité globale fait correspondre un matériau à tout point matériel donnant ainsi un ensemble quotient $\mathcal{B}/\upsilon$:

$$\upsilon:\mathcal{M}\in\mathcal{B}\rightarrow M_U=\{\mathcal{M}'\in\mathcal{B}:\ (\mathcal{M},\mathcal{M}')\in U\in\upsilon\}\in\mathcal{B}/\upsilon \qquad 6$$

cet ensemble quotient est une partition du corps[5]; on l'appelle partition-en-matériau, $p_\upsilon(\mathcal{B})$. A tout corps matériel est alors associé une famille de partitions-en-matériau engendrée par la famille Y des uniformités globales υ:

$$\upsilon:\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{B}/\upsilon=p_\upsilon(\mathcal{B}) \qquad 7$$
$$P_M(\mathcal{B})=\{p_\upsilon(\mathcal{B}):\ \upsilon\in Y\}\ ;\ P_M(\mathcal{B})\subseteq P(\mathcal{B})\subseteq P_m(\mathcal{B})$$

Comme noté ci-dessus une partition-en-matériau est aussi une partition du corps et donc une partition-en-masse de celui-ci. En général on considère des matériaux contenant plus d'un point matériel massif, donc ces relations d'inclusion sont a prendre en sens strict.

On appelle homogène un corps matériel (ou une partie d'un corps matériel) dont tous les points matériels sont uniformes. Un corps homogène est constitué par un seul matériau; l'uniformité globale se réduit dans ce cas à un seul élément.

2.2.4. Conjecture de représentativité.

On suppose que pour une classe de formes globales et pour toute uniformité d'une classe d'uniformités globales, l'ensemble des points matériels d'un corps coïncide avec l'ensemble quotient des points matériels équivalents tant en forme qu'en matériau:

$$\mathcal{B}_{\Delta Y}=\{p_\Delta(\mathcal{B})\cap p_\upsilon(\mathcal{B}):\ \upsilon\in Y\}\ \text{conjecture:}\ \mathcal{B}=\{\mathcal{M}\}=\mathcal{B}_{\Delta Y} \qquad 8$$

Pour une classe de formes et d'uniformités donnée, la partition du corps en points matériels n'est plus arbitraire car un point matériel devient l'unité de représentation du corps matériel.

Il faut observer que, l'uniformité variant sans restriction dans une classe, l'impénétrabilité n'est pas valable pour le corps pris comme ensemble des tels points matériels (une classe d'équivalence point matériel n'est pas identique en toute forme et uniformité, mais seulement en toute forme pour une uniformité donnée). En mécanique classique une partition en points matériels, grâce à l'axiome d'impénétrabilité, conserve l'identité de ses éléments en toute forme globale et donc en tout processus; ayant couplé les uniformités aux formes on a perdu cette propriété.

Pour opérer avec des corps matériels formellement classiques (en termes de description comme ensembles de points matériels), on suppose non seulement que pour toute forme et uniformité aucun point matériel n'est en même temps équivalent en forme et en matériau à un autre (c'est à dire que si la distance dans la forme entre deux points est nulle ils ne sont pas uniformes et que s'ils sont uniformes leur distance est positive), mais aussi que tout point matériel conserve son identité en toute forme et uniformité (c'est à dire, grâce à l'impénétrabilité en forme, que dans un

---

5 Une partition est en même temps un recouvrement et une séparation du corps. On a construit l'uniformité globale permettant de recouvrir le corps (Cf. formule (VII.26): $\upsilon\in R(\mathcal{B})$); d'un autre coté un point matériel ne peut pas appartenir à deux uniformités distinctes et l'ensemble quotient des matériaux $\mathcal{B}/\upsilon$ est donc constitué de parties séparées du corps.

"point formel"[6] M_F il n'y a aucun couple de points uniformes et que la distance dans la forme entre points matériels d'un même "matériau"[7] M_U est positive):

$$\exists\delta\in\Delta:\ d_\delta(\mathcal{M},\mathcal{M}')=0 \rightarrow \forall\upsilon\in Y\ (\mathcal{M},\mathcal{M}')\in U\ \forall U\in\upsilon$$
$$\exists\upsilon\in Y:\ \exists U\in\upsilon:\ (\mathcal{M},\mathcal{M}')\in U \rightarrow \forall\delta\in\Delta:\ d_\delta(\mathcal{M},\mathcal{M}')>0 \qquad 9$$

2.3. Monde des événements.

2.3.1. Temps.

Comme dans le cas classique (Ch.VII § 2.3.) on note $\mathcal{W}$ le "monde", ensemble ouvert des "événements" $e\in\mathcal{W}$, et on munit $\mathcal{W}$ d'une structure mathématique définie tout d'abord par une fonction "délai de temps" entre deux événements (tout à fait égale au cas classique):

(VII.22)
$$\tau:\mathcal{W}\times\mathcal{W}\rightarrow R:\begin{cases}\forall(e,f)\in\mathcal{W}\times\mathcal{W}: & \tau(e,f)=-\tau(f,e)\ (\rightarrow\ \tau(e,e)=0)\\ \forall(e,f,g)\in\mathcal{W}\times\mathcal{W}\times\mathcal{W}: & \tau(e,f)+\tau(f,g)=\tau(e,g)\\ \forall e\in\mathcal{W}\quad\forall t\in R\quad\exists f\in\mathcal{W}: & \tau(e,f)=t\end{cases} \qquad 10$$

l'appartenance au noyau du délai de temps est une relation d'équivalence, "simultanéité", entre événements "simultanés":

$$S=\{(e,f)\in\mathcal{W}\times\mathcal{W}:\ \tau(e,f)=0\}\rightarrow\begin{cases}\forall e\in\mathcal{W} & (e,e)\in S\\ \forall(e,f)\in S & (f,e)\in S\\ \forall(e,f),(f,g)\in S & (e,g)\in S\end{cases} \qquad 11$$

qui engendre de classes d'équivalence dans $\mathcal{W}$, classes d'événements simultanés, qu'on appelle "instants":

$$\forall e\in\mathcal{W}\ ;\ t_e=\{f\in\mathcal{W}:\ (f,e)\in S\}\ ;\ t_e\in\mathcal{T}=\mathcal{W}/S \qquad 12$$

Comme noté ci-dessus, $f\in t_e$ signifie que l'événement f se vérifie à l'instant t_e, c'est à dire au même instant que l'événement e.

L'ensemble quotient des événements simultanés, $\mathcal{T}$, est une partition du monde qu'on appelle "temps". Le délai de temps est défini sans ambiguïté entre deux instants de temps:

$$\tau(t_e,t_f)=\tau(e,f)\quad\forall e\in t_e\ \text{et}\ \forall f\in t_f \qquad 13$$

et, en tant que délai entre instants, il satisfait la propriété de séparation ainsi que les propriétés du délai entre événements (Cf. formule (3)):

$$\tau:\mathcal{T}\times\mathcal{T}\rightarrow R:\begin{cases}\forall(t_e,t_f)\in\mathcal{T}\times\mathcal{T} & \tau(t_e,t_f)=-\tau(t_f,t_e)\\ \forall(t_e,t_f,t_g)\in\mathcal{T}\times\mathcal{T}\times\mathcal{T} & \tau(t_e,t_f)+\tau(t_f,t_g)=\tau(t_e,t_g)\\ \forall t_e\in\mathcal{T}\quad\forall t\in R\quad\exists t_f\in\mathcal{T} & \tau(t_e,t_f)=t\\ \forall(t_e,t_f)\in\mathcal{T}\times\mathcal{T} & \tau(t_e,t_f)=0\leftrightarrow t_e\equiv t_f\end{cases} \qquad 14$$

---

6 Classe des points à distance nulle dans une (et donc dans toute) forme.

7 Classe des points uniformes.

Par conséquent la valeur absolue du délai de temps est une métrique euclidienne sur $\mathcal{T}$, ce qui permet de postuler l'existence d'un espace translation de $\mathcal{T}$ isomorphe à R. L'espace translation est alors unique et $\mathcal{T}$ est, par définition, euclidien.

2.3.2. Espace géométrique.

Espace géométrique instantané.

On postule que tout instant de temps est muni d'une pseudo-métrique euclidienne qu'on appelle "distance instantanée":

(VII.23)

$$\forall t_\epsilon\in\mathcal{T}\quad \exists\, d_{t_\epsilon}: t_\epsilon x t_\epsilon\to R^+ : \begin{cases} \forall e\in t_\epsilon & d_{t_\epsilon}(e,e)=0 \\ \forall (e,f)\in t_\epsilon x t_\epsilon & d_{t_\epsilon}(e,f)=d_{t_\epsilon}(f,e) \\ \forall (e,f,g)\in t_\epsilon x t_\epsilon x t_\epsilon & d_{t_\epsilon}(e,f)+d_{t_\epsilon}(f,g)\geq d_{t_\epsilon}(e,g) \end{cases} \qquad 15$$

L'appartenance au noyau de la pseudo-métrique est, à un instant donné, une relation d'équivalence, "coïncidence", entre événements simultanés et "coïncidents":

$$C_{t_\epsilon}=\left\{(e,f)\in t_\epsilon x t_\epsilon:\ d_{t_\epsilon}(e,f)=0\right\}\to\begin{cases} \forall e\in t_\epsilon & (e,e)\in C_{t_\epsilon} \\ \forall (e,f)\in C_{t_\epsilon} & (f,e)\in C_{t_\epsilon} \\ \forall (e,f),(f,g)\in C_{t_\epsilon} & (e,g)\in C_{t_\epsilon} \end{cases} \qquad 16$$

Au lieu de postuler l'axiome de séparation classique pour la métrique d_{t_ϵ} (qui entraîne l'identité de l'instant de temps t_ϵ avec l'espace géométrique instantané $\mathcal{E}(t_\epsilon)$; Cf. formule (VII.23)), on considère les classes d'équivalence engendrées à chaque instant par la relation d'équivalence C_{t_ϵ} ci-dessus, c'est à dire les classes d'événements simultanés et coïncidents, qu'on appelle "positions":

$$\forall t_\epsilon\in\mathcal{T}\quad \forall e\in t_\epsilon\quad p_e=\left\{f\in t_\epsilon:\ (f,e)\in C_{t_\epsilon}\right\}=\left\{f\in\mathcal{W}:\ (f,e)\in S\cap C_{t_\epsilon}\right\} \qquad 17$$

$$p_e\in\mathcal{E}(t_\epsilon)=t_\epsilon/C_{t_\epsilon}=\mathcal{W}/(S\cap C_{t_\epsilon})$$

comme on a écrit dans les deux définitions possibles de position p_e ci-dessus, $f\in p_e$ signifie que l'événement f coïncide avec l'événement e, c'est à dire qu'il se vérifie au même instant et à distance nulle de e.

L'ensemble quotient des événements simultanés et coïncidents $\mathcal{E}(t_\epsilon)$, est une partition de l'instant de temps t_ϵ (et aussi une partition du monde $\mathcal{W}$) qu'on appelle "espace géométrique instantané". A tout instant, la distance instantanée d_{t_ϵ} est définie sans ambiguïté entre deux positions dans $\mathcal{E}(t_\epsilon)$; elle est appelé donc "distance géométrique instantanée" $d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}$:

$$d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}(p_e,p_f)=d_{t_\epsilon}(e,f)\quad \forall e\in p_e\ \forall f\in p_f\ ;\ e,f\in t_\epsilon \qquad 18$$

il s'agit d'une métrique euclidienne de $\mathcal{E}(t_\epsilon)$ à chaque instant de temps t_ϵ, car la propriété de séparation est aussi vérifiée:

$$\forall t_\epsilon\in\mathcal{T}\quad d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}:\mathcal{E}(t_\epsilon)x\mathcal{E}(t_\epsilon)\to R^+ :\begin{cases} \forall p_e\in\mathcal{E}(t_\epsilon) & d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}(p_e,p_e)=0 \\ \forall p_e,p_f\in\mathcal{E}(t_\epsilon) & d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}(p_e,p_f)=d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}(p_f,p_e) \\ \forall p_e,p_f,p_g\in\mathcal{E}(t_\epsilon) & d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}(p_e,p_f)+d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}(p_f,p_g)\geq d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}(p_e,p_g) \\ \forall p_e,p_f\in\mathcal{E}(t_\epsilon) & d_{\mathcal{E}(t_\epsilon)}(p_e,p_f)=0\leftrightarrow p_e=p_f \end{cases} \qquad 19$$

On postule que à chaque espace géométrique instantané $\mathcal{E}(t_e)$ est associé un espace translation instantané doué de produit scalaire, qu'on note $E(t_e)$, qu'on postule isomorphe à R^n (n=2 ou 3). L'espace géométrique instantané est alors euclidien, l'espace translation instantané est unique à tout instant [8].

Espace géométrique absolu.

On postule, de même que dans le cas classique, l'indépendance métrique de l'espace géométrique de l'instant de temps (mécanique non relativiste): tout $\mathcal{E}(t_e)$ est isométrique à un espace géométrique absolu $\mathcal{E}$; tout $E(t_e)$ est isomorphe à un espace translation absolu E isomorphe à R^n.

Par ces isométries tout événement a une position dans l'espace géométrique absolu. Soit l'isométrie entre un espace géométrique instantané et l'espace géométrique absolu:

$$\vartheta_{t_e}: p_e \in \mathcal{E}(t_e) \rightarrow p(e) \in \mathcal{E} \qquad 20$$

La distance géométrique entre deux positions absolues, notée $d_{\mathcal{E}}$, est, par définition de l'isométrie, égale à la distance $d_{\mathcal{E}(t_e)}$ entre leurs images obtenues par isométrie dans n'importe quel espace géométrique instantané $\mathcal{E}(t_e)$. Par conséquent la distance géométrique absolue est définie sans ambiguïté même entre événements non simultanés, et garde toute propriété des métriques $d_{\mathcal{E}(t_e)}$:

$$\forall g,f \in \mathcal{W}\ \ d_{\mathcal{E}}(p(g),p(f)) = d_{\mathcal{E}(t_e)}(\vartheta_{t_e}^{-1}p(g), \vartheta_{t_e}^{-1}p(f)) = d_{\mathcal{E}(t_e)}(\vartheta_{t_e}^{-1}\vartheta_{t_g}p_g, \vartheta_{t_e}^{-1}\vartheta_{t_f}p_f)\ \ \forall e \in \mathcal{W} \qquad 21$$

$$d_{\mathcal{E}}: \mathcal{E}x\mathcal{E} \rightarrow R^+ \text{ métrique euclidienne}^9$$

L'espace géométrique absolu $\mathcal{E}$ est donc un espace euclidien doué de la métrique $d_{\mathcal{E}}$ et de l'unique espace translation E.

Moyennant $d_{\mathcal{E}}$ on peut définir, sans ambiguïté, la distance géométrique entre événements, notée $d_{\mathcal{E}\mathcal{W}}$:

(VII.24)

$$d_{\mathcal{E}\mathcal{W}}(e,f) = d_{\mathcal{E}}(p(e),p(f))\ \ \forall e \in \vartheta_{t_e}^{-1}p(e)\ \ \forall f \in \vartheta_{t_f}^{-1}p(f) \qquad 22$$

$$d_{\mathcal{E}\mathcal{W}}: \mathcal{W}x\mathcal{W} \rightarrow R^+$$

qui est une pseudo-métrique sur le monde $\mathcal{W}$ car elle vérifie toute propriété de $d_{\mathcal{E}}$ sauf celle de séparation (il existe des événements non simultanés et coïncidents dans l'espace géométrique absolu).

Ceci permet de donner à toute position absolue la signification de classe d'équivalence sous la relation d'équivalence d'appartenance au noyau de la pseudo-métrique $d_{\mathcal{E}\mathcal{W}}$:

$$C = \left\{ (e,f) \in \mathcal{W}x\mathcal{W}:\ d_{\mathcal{E}\mathcal{W}}(e,f) = 0 \right\} \qquad 23$$

$$\forall e \in \mathcal{W}\ \ p(e) = \left\{ f \in \mathcal{W}:\ (e,f) \in C \right\}\ ;\ p(e) \in \mathcal{E} = \mathcal{W}/C$$

et à l'espace géométrique absolu celle d'ensemble quotient de ces positions, est donc de partition du monde.

2.3.3. Espace des phases.

Etat radical.

On postule que toute position instantanée p_e est munie d'une pseudo-métrique euclidienne d_{p_e} et d'un espace translation de produit scalaire de dimension finie. L'existence de la pseudo-métrique engendre l'unicité de l'espace translation. On appelle cette pseudo-métrique "radicale":

---

8 Comme déjà noté la propriété de séparation de la métrique n'est pas nécessaire à cette unicité.

9 Les propriétés d'une métrique sont transmises par isométrie. La propriété de séparation pour $d_{\mathcal{E}}$ dit que si la distance entre les positions absolues de deux événements est nulle ces deux positions sont identiques: les événements peuvent ne pas l'être (et il ne le sont pas s'ils ne sont pas simultanés).

$$\forall t_e\in\mathcal{T}\ \forall p_e\in\mathcal{E}(t_e)\ \ d_{p_e}:p_e x p_e\to R^+ : \begin{cases}\forall e\in p_e & d_{p_e}(e,e)=0\\ \forall e,f\in p_e & d_{p_e}(e,f)=d_{p_e}(f,e)\\ \forall e,f,g\in p_e & d_{p_e}(e,f)+d_{p_e}(f,g)\geq d_{p_e}(e,g)\end{cases} \qquad 24$$

La relation d'équivalence "radicale" d'appartenance au noyau de cette pseudo-métrique:

$$R_{p_e}=\left\{(e,f)\in p_e x p_e:\ d_{p_e}(e,f)=0\right\}\to\begin{cases}\forall e\in p_e & (e,e)\in R_{p_e}\\ \forall (e,f)\in R_{p_e} & (f,e)\in R_{p_e}\\ \forall (e,f),(f,g)\in R_{p_e} & (e,g)\in R_{p_e}\end{cases} \qquad 25$$

permet de considérer les classes d'équivalence radicale, qu'on appelle "état radical", et l'ensemble quotient de ces classes, dit "système radical", qui est une partition de la position instantanée:

$$\forall e\in\mathcal{W}\ \ s_e=\left\{f\in p_e:\ (f,e)\in R_{p_e}\right\}=\left\{f\in\mathcal{W}:\ (f,e)\in S\cap C_{t_e}\cap R_{p_e}\right\}\ ;\ s_e\in\mathcal{S}(p_e)=p_e/R_{p_e} \qquad 26$$

$f\in s_e$ signifie que l'événement f est radicalement équivalent à e (i.e. qu'il est dans le même état radical), c'est à dire qu'il se vérifie au même instant, à distance géométrique nulle de e et à distance radicale nulle de e.

On limite la définition du monde à cette troisième structure: on postule que le seul événement simultané, coincident et radicalement équivalent à un événement donné est l'événement même, c'est à dire que toute position instantanée est munie, en effet, d'une métrique euclidienne:

$$R_{p_e}=\left\{(e,e)\in p_e x p_e\right\}\ \text{i.e.}\ \forall (e,f)\in p_e x p_e:\ d_{p_e}(e,f)=0\leftrightarrow e=f \qquad 27$$

Donc, pour un instant et une position donnés, tout état radical contient un seul événement; le système radical est un espace euclidien (il a une métrique euclidienne et il est muni d'un espace translation $S(p_e)$ de dimension finie, m) qui coïncide avec la position instantanée:

$$s_e=\{e\}\quad \mathcal{S}(p_e)\equiv p_e \qquad 28$$

On garde la distinction de notation entre états radicaux et événements et entre système-espace radical et positions car il s'agit d'entités définies différemment: la métrique d_{p_e} de $\mathcal{S}(p_e)$ dépend de l'instant et de la position actuels, deux événements ne peuvent être confrontés en tant que états radicaux que s'ils appartiennent au même instant et à la même position.

Phase.

De même que pour l'espace géométrique, on postule la non-relativité (indépendance métrique) des systèmes radicaux tant par rapport au temps que par rapport à l'espace: tout système radical $\mathcal{S}(p_e)$ est isométrique à un espace "des phases" $\mathcal{Z}$, tout $S(p_e)$ est isomorphe à un espace translation Z isomorphe à R^m. Soit:

$$\vartheta_{p_e}:s_e\in\mathcal{S}(p_e)\to z(e)\in\mathcal{Z} \qquad 29$$

la-dite isométrie, la distance entre les images isométriques de deux états radicaux dans n'importe quel système radical est, par définition, la distance entre deux phases:

$$\forall g,f\in\mathcal{W}\ \ d_{\mathcal{Z}}(z(e),z(f))=d_{p_e}(\vartheta_{p_e}^{-1}z(g),\vartheta_{p_e}^{-1}z(f))=d_{p_e}(\vartheta_{p_e}^{-1}\vartheta_{p_g}s_g,\vartheta_{p_e}^{-1}\vartheta_{p_f}s_f)\ \ \forall e\in\mathcal{W} \qquad 30$$

$$d_{\mathcal{Z}}:\mathcal{Z}x\mathcal{Z}\to R^+\ \text{métrique euclidienne}$$

L'espace des phases $\mathcal{Z}$ est donc un espace euclidien doué de la métrique $d_{\mathcal{Z}}$ et de l'unique espace translation Z.

Moyennant $d_{\mathcal{Z}}$ on peut définir, sans ambiguité, la distance radicale entre deux événements, $d_{\mathcal{Z}\mathcal{W}}$:

$$d_{\mathcal{Z}\mathcal{W}}(e,f)=d_{\mathcal{Z}}(z(e),z(f)) \;\forall e\in\vartheta_{p_e}^{-1}z(e)\;\forall f\in\vartheta_{p_f}^{-1}z(f) \qquad 31$$
$$d_{\mathcal{Z}\mathcal{W}}:\mathcal{W}x\mathcal{W}\rightarrow R^+$$

qui est une pseudo-métrique sur le monde $\mathcal{W}$ car elle vérifie toute propriété de $d_{\mathcal{Z}}$ sauf celle de séparation (il existe des événements dans la même phase qui ne sont pas simultanés et/ou qui ne sont pas coïncidents).

Ceci permet d'identifier une phase comme une classe d'équivalence entre événements sous la relation d'équivalence d'appartenance au noyau de $\delta_{\mathcal{Z}\mathcal{W}}$, c'est à dire de distance nulle dans l'espace des phases:

$$Ph=\left\{(e,f)\in\mathcal{W}x\mathcal{W}:\; d_{\mathcal{Z}\mathcal{W}}(e,f)=0\right\} \qquad 32$$
$$\forall e\in\mathcal{W}\;\; z(e)=\left\{f\in\mathcal{W}:\;(e,f)\in Ph\right\}\;;\; z(e)\in\mathcal{Z}=\mathcal{W}/Ph$$

L'espace des phases, ensemble quotient des phases, est donc un espace euclidien partition du monde.

Il faut remarquer que l'isométrie entre un espace radical et l'espace des phases dépend de la position et du temps. L'etat radical d'un événement est donc représenté par la phase du-dit événement à une isométrie près, cette isométrie étant arbitraire à chaque instant et dans chaque position instantanée.

On restreint la généralité du modèle en rajoutant une hypothèse qui représente l'intuition que nous avons des espaces des phases dans les cas particuliers qu'on va traiter, mais qui n'est pas fondamentale pour l'ensemble de la théorie:

- pour tout événement e l'isométrie entre le système radical de sa position, $\mathcal{S}(p_e)$, et l'espace des phases choisi, $\mathcal{Z}$, ne dépend que de l'isométrie entre l'espace géométrique instantané de l'événement, $\mathcal{E}(t_e)$, et l'espace géométrique absolu choisi, $\mathcal{E}$.

En d'autres termes on suppose qu'il existe un unique système radical pour chaque espace géométrique instantané, indépendamment de la position dans cet espace[10] (Cf. formules (15) et (25)):

$$\forall e\in\mathcal{W}\;\;\vartheta_{t_e}:\mathcal{E}(t_e)\rightarrow\mathcal{E}\;\;\exists!\vartheta(\vartheta_{t_e}):\mathcal{S}(p_e)\rightarrow\mathcal{Z}\;\;\forall p_e\in\mathcal{E}(t_e) \qquad 33$$

Par conséquent l'état radical d'un événement est représenté par la phase de l'événement sans ambiguité dans un espace géométrique donné. En outre l'isométrie entre deux systèmes radicaux est déterminée (de façon univoque via l'espace des phases choisi) par l'isométrie entre les espace géométriques correspondants.

2.3.4. Référentiels.

Référentiel.

Sous le postulat de non-relativité on a obtenu une partition du monde en trois ensembles quotients, le temps, l'espace géométrique absolu et l'espace des phases: un événement du monde est déterminé de façon univoque par son appartenance à une classe d'équivalence dans chaque ensemble quotient, c'est à dire par la donnée d'un instant de temps, d'une position dans l'espace géométrique absolu et d'une phase dans l'espace des phases[11]:

---

10 On traitera des cas dans lesquels l'état radical est de nature géométrique, sous-espace de l'espace translation de $\mathcal{E}(t_e)$, du type $\mathcal{S}(p_e)\sim L_{orth}(E(t_e),E(t_e))$; par conséquent on introduit cette liaison au niveau du référentiel car on observe effectivement la géométrie de la matière et les phases dans le même espace géométrique.

Pour un espace des phases de nature non géométrique (tel que par exemple celui des rapports en masse d'un mélange) cette hypothèse ne doit pas être introduite.

11 Cette unicité signifie que deux événements simultanés, coïncidents et radicalement équivalents ne sont pas distingués par la théorie présentée.

$$\forall t\in\mathcal{T},\ p\in\mathcal{E},\ z\in\mathcal{Z}\quad \exists!\ e\in\mathcal{W}:\ e\in t\cap p\cap z \tag{34}$$

Le monde des événements qu'on étudie est donc équivalent en topologie au produit cartésien espace géométrique, espace des phases, temps:

(VII.25) $$\mathcal{W}\sim\mathcal{E}x\mathcal{Z}x\mathcal{T}\ ;\ \text{i.e. } \exists\phi \text{ homéomorphisme } \phi:\mathcal{W}\rightarrow\mathcal{E}x\mathcal{Z}x\mathcal{T} \tag{35}$$

On appelle "espace-phase-temps" ce produit cartésien $\mathcal{E}x\mathcal{Z}x\mathcal{T}$ et "référentiel" un homéomorphisme ϕ entre le monde dans celui-ci. Les homéomorphismes constituants un groupe sous l'opération de composition, il existe un groupe Φ de référentiels et un ensemble $\mathcal{F}$ d'espace-phase-temps homéomorphes pour y référer le monde $\mathcal{W}$.

Référentiels inertiels et galiléens sont définis selon ce qui a été dit dans le cas classique (Cf. Ch.VII § 2.3.3.).

Niveau.

Comme pour le cas classique, entre éléments de $\mathcal{F}$ l'isométrie est une relation d'équivalence:

$$I=\left\{(\mathcal{E}x\mathcal{Z}x\mathcal{T},\mathcal{E}'x\mathcal{Z}'x\mathcal{T}')\in\mathcal{F}x\mathcal{F}:\ \mathcal{E}x\mathcal{Z}x\mathcal{T}\cong\mathcal{E}'x\mathcal{Z}'x\mathcal{T}'\right\} \tag{36}$$

Un "niveau" est une classe d'équivalence constituée d'espace-phase-temps isométriques et il est identifié par un de ses éléments arbitrairement choisi comme référence (on ne modifie pas la notation de l'espace-phase-temps choisi comme référence car ce choix est arbitraire):

$$n(\mathcal{E}x\mathcal{Z}x\mathcal{T})=\left\{\mathcal{E}'x\mathcal{Z}'x\mathcal{T}'\in\mathcal{F}:\ (\mathcal{E}x\mathcal{Z}x\mathcal{T},\mathcal{E}'x\mathcal{Z}'x\mathcal{T}')\in I\right\}\ ;\ n(\mathcal{E}x\mathcal{Z}x\mathcal{T})\in\mathcal{F}/I \tag{37}$$

L'ensemble quotient des niveaux est une partition de l'ensemble des espace-phase-temps et, donc, engendre une partition du groupe des référentiels.

On représente le monde des événements, en analogie aux procédures habituelles de la mécanique, par le choix arbitraire d'un niveau et par le choix, arbitraire dans ce niveau, d'un espace-phase-temps de référence. Ayant supposé l'isométrie entre deux espace des phases fonction des isométries entre les espaces géométriques correspondants (Cf. formule (30)) on doit se limiter à choisir un niveau et, dans ce niveau, un espace-temps de référence.

Le choix arbitraire d'un niveau induit l'indépendance multiplicative des distances (géométriques, entre phases et entre instants de temps), c'est à dire le choix d'une échelle arbitraire, comme dans le cas classique.

Le caractère arbitraire de l'espace-temps de référence introduit, comme dans le cas classique, la nécessité d'une étude de l'indifférence matérielle du modèle.

Changement de référentiel dans un niveau.

On a fait l'hypothèse (Cf. formule (VII.51)) que les isométries entre systèmes radicaux sont fonctions des isométries entre les espace géométriques correspondants. Par conséquent si on considère une isométrie gardant les orientations de l'espace-temps de référence on obtient une isométrie de l'espace-phase-temps unique.

Une telle isométrie, admet une représentation de la forme[12]:

12 On a deux ensembles d'isométries: les isométries, fonctions arbitraires de l'instant de temps, entre espaces géométriques instantanés et absolu (écrites dans la forme unique donnée par le théorème de représentation), et les isométries, fonctions des précédentes, entre espaces radicaux et espace des phases. La définition de la fonction G dépend des opérations définies sur $\mathcal{Z}$.

(VII.26) $$\forall \mathcal{E}'x\mathcal{Z}'x\mathcal{T}'\in n(\mathcal{E}x\mathcal{Z}x\mathcal{T}) \text{ i.e. } \mathcal{E}'x\mathcal{Z}'x\mathcal{T}' \cong \mathcal{E}x\mathcal{Z}x\mathcal{T}$$ 38

$$\forall (p,z,t)\in \mathcal{E}x\mathcal{Z}x\mathcal{T} \quad \exists !(p',z',t')\in \mathcal{E}'x\mathcal{Z}'x\mathcal{T}': \begin{cases} p'=p_0+c(t)+Q(t)[p-p_0] & Q\in L_{orth}(E,E),\ c\in E,\ p_0\in\mathcal{E} \\ z'=G(c(t),Q(t),z) & \\ t'=t+t & t\in R \end{cases}$$

Un événement, à un certain niveau, est un triplet position, phase, instant selon le choix de l'espace-phase-temps de référence dans ce niveau:

(VII.27) $$e\equiv(p,z,t) \rightarrow e\equiv(p',z',t') \quad \forall \mathcal{E}'x\mathcal{Z}'x\mathcal{T}'\in n(\mathcal{E}x\mathcal{Z}x\mathcal{T})$$ 39

Changement de niveau. Espace profond.

L'etude des consequences des changements de niveau n'est pas l'objet de la mécanique classique axiomatique. On a introduit le concept d'état radical pour "approfondir" la vision de la mécanique vers des niveaux différents de celui arbitrairement choisi, sans enquêter directement sur les changements de niveau et, donc, en gardant formellement la structure classique.

On appelle espace "profond" l'espace produit cartésien entre l'espace géométrique absolu et l'espace des phases:

$$\mathcal{H}\equiv\mathcal{E}x\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{W}\sim\mathcal{H}x\mathcal{T} \; ; e\equiv(h,t)$$ 40

dans la suite on peut constater que tout développement se fait formellement dans le respect de l'analogie entre un référentiel classique d'espace-temps et le référentiel introduit d'espace-phase-temps qu'on appelle d'espace profond-temps, c'est à dire dans l'analogie entre espace géométrique absolu classique et espace profond.

Unités de référence

De même que dans le cas classique on peut choisir une chronologie T d'intervalles de temps. Le monde-référentiel muni d'une chronologie sera noté:

(VII.29) $$\mathcal{W}\sim\mathcal{E}x\mathcal{Z}xT\equiv\mathcal{H}xT \; ; e\equiv(p,z,t)\equiv(h,t)$$ 41

La mesure des longueurs peut être définie comme dans le cas classique, mais, on rappelle que, pour n'importe quelle échelle de mesure il existe des événements distincts à distance nulle (si l'unité de distance est prise entre deux événements distincts mais coïncidents, alors toute mesure de distance est indéterminée)

De même on peut introduire une unité et une échelle des mesures entre phases dans l'espace des phases de référence. Cela dépend de la nature des états radicaux et sort, donc, du cadre actuel.

En conclusion on obtient trois couples: unité et échelle géométrique, unité et échelle des phases, unité et échelle des temps pour un référentiel fixé. Tout espace-phase-temps dans un niveau est caractérisé par les mêmes unités et échelles de mesure. Les unités de mesures peuvent être choisies une fois pour toutes, de façon qu'un niveau soit identifié par la donnée de trois échelles de mesure.

2.4. Commentaires.

En mécanique classique un evenement est un couple ordonné "position" dans l'espace $\mathcal{E}$ et "instant" dans le temps $\mathcal{T}$, espaces metriques usuels, homéomorphes respectivement à R^3 et R. En outre l'espace $\mathcal{E}$ est euclidien, ce qui permet de lui associer un espace translation de produit scalaire E isomorphe à R^3. Nous avons associé à chaque position dans $\mathcal{E}\equiv R^3$ un espace euclidien "système radical" et, en postulant la non-relativité des systèmes radicaux, nous avons identifié un événement avec un triplet ordonné position, instant, "phase", cette dernière étant dans un espace $\mathcal{Z}$ homéomorphe à R^m et euclidien, avec espace translation Z.

En mécanique classique on ne considère que des changements de référentiel isométriques de façon que, grâce au fait de référer le monde dans un espace-temps homéomorphe à R^4, l'échelle de la représentation soit totalement arbitraire et, donc, choisie à posteriori.

Les conséquences du caractère arbitraire de l'échelle d'espace ne rentrent pas dans la formulation classique: on exclue implicitement toute hiérarchie d'échelle. Néanmoins, lors de l'étude du comportement, dès qu'on adopte une thermodynamique simplifiée (état local, variables internes, etc...) les dimensions définissent la pertinence du modèle bâti. On peut résumer en affirmant que certaines propriétés des matériaux ne sont pas topologiques et que la mécanique classique se place implicitement en absence de telles variations.

Si on ne se limite pas aux référentiels isométriques, le choix d'un référentiel devient le choix d'une classe d'équivalence sous les homéomorphismes conservant les orientations; représenter le monde dans un référentiel est donc le représenter sur toute une classe de référentiels équivalents, c'est à dire le représenter dans toute échelle d'espace-temps une fois fixées les orientations et la topologie (usuelle) de l'espace-temps.

Au lieu d'évaluer les conséquences des changements de référentiel non isométriques dans la description du monde, on peut envisager de représenter ce dernier dans une classe de référentiels: on choisi les orientations des axes (en fixant un élément de la classe) et on fait varier l'échelle dans un ensemble approprié. Un événement sera alors un triplet ordonné "position dans l'espace", "instant de temps", "échelle d'espace-temps": deux événements qui ne diffèrent pas par leur position ou instant se vérifient à deux échelles différentes.

Par exemple pour une seule échelle des temps et deux échelles d'espace, un événement sera un triplet ordonné "position dans l'espace macroscopique" (échelle supérieure), "position dans l'espace microscopique" (échelle inférieure), "temps". La description du monde devra être invariante par changement isométrique de ces référentiels.

Il est alors également possible d'imaginer un événement, pour une échelle d'espace-temps fixée, comme référé par un triplet "position dans l'espace", "instant de temps", "état radical", en introduisant le concept d'état radical: tout événement qui, pour une échelle d'espace-temps donnée, ne peut être défini par l'expérience humaine en fixant la position et l'instant est une modification d'un état radical.

Cela n'est légitime que si on suppose l'existence des tels événement. En effet si on observe un échantillon métallique se déformer à l'échelle millimétrique on n'a aucune expérience de l'évolution de sa texture et, si on observe celle-ci au microscope optique, on ignore l'évolution des réseaux de dislocations, et ainsi de suite jusqu'à l'apparition (horrible!) du vide, bien au delà de notre domaine d'intérêts.

Il ne s'agit pas d'un problème intrinsèque à la mécanique car le fait de référer le monde des événement dans un espace-temps homéomorphe à R^4 permet non seulement d'en choisir à posteriori l'échelle mais, surtout, de la rendre totalement arbitraire.

C'est le fait de fixer à priori l'échelle du référentiel et l'impossibilité objective d'observer ou décrire le trop petit ou le trop grand par rapport à une échelle donnée qui fait que certains événements ne peuvent pas être objet d'expérience dans l'espace temps. Dans l'expérience humaine du mécanicien non seulement les temps très longs deviennent évanescents mais aussi (et surtout!) les temps très courts et les dimensions géométriques très petites ou très grandes.

Ces limites sont admises implicitement dans les cas classiques, mais on peut utiliser la structure axiomatique de la mécanique classique pour franchir partiellement cet espace "évanescent".

On observe que, grâce à la définition d'état radical donnée, dès qu'on se donne une échelle, définie macroscopique, d'espace et de temps on obtient une ou plusieurs échelles de pertinence radicale conséquentes. Avant d'introduire les référentiels d'espace, d'état radical et de temps on considère fixée une échelle macroscopique: tout changement de référentiel à prendre en compte sera alors isométrique de façon à ne pas changer l'échelle macroscopique.

La masse, les formes, les actions intérieures et extérieures et l'existence d'une classe de matériaux ont été définies sur les corps matériels, indépendamment de leur représentation dans un monde d'événements.

En mécanique classique la conservation de la masse, c'est à dire le fait de munir l'univers matériel d'une mesure masse, se traduit dans le référentiel d'espace en une relation avec la

mesure volume. Dans un référentiel d'espace profond le même postulat se traduira donc en une relation analogue avec une mesure de volume profond.

L'introduction des formes au niveau des corps matériels permet de définir les propriétés des images des corps matériels dans tout espace profond en cohérence avec ce qui est postulé dans l'univers matériel, notamment, l'impénétrabilité des corps.

De même que pour la conservation de la masse, le principe des puissances virtuelles, qui énonce les propriétés des actions intérieures et extérieures "forces" vues dans un référentiel particulier et qui permet d'établir les relations d'équilibre entre ces actions, sera énoncé par analogie dans le référentiel d'espace profond donnant lieu aux équations d'équilibre correspondantes. On peut soulever l'objection que ce principe dérive d'un ensemble d'expériences humaines qui n'ont pas été faites dans cet espace profond; on peut alors accepter sa transposition "littéraire" (ou plutôt mathématique) comme un premier "sondage" de ce nouveau référentiel.

Il faut observer que la légitimité mathématique de ce passage réside dans le postulat de continuité des forces dans un emplacement dans l'espace profond, c'est à dire dans l'expérience d'actions continues entre phases[13] qu'on fera dans la suite de ce chapitre. D'ailleurs, le fait d'utiliser un espace de référence ayant la même topologie que l'espace géométrique habituellement utilisé (la topologie usuelle de R^n), nous permet de ne pas considérer plus restrictive la continuité sous la forme postulée dans l'espace profond que celle habituellement postulée.

Les mêmes remarques sont valable pour les actions "échange de chaleur": l'existence des flux correspondants entre événements d'un espace profond ne peut être admise que en supposant vérifiée une continuité d'actions entre phases dont on n'a aucune expérience directe.

Finalement l'expérience d'un état thermodynamique des parties d'un corps matériel comme événement d'un espace profond doit, elle aussi, être admise sans vérification directe, mais avec la justification supplémentaire d'être formellement égale à ce qui doit habituellement être admis pour l'état local d'un matériau hétérogène.

En fait, l'élément matériel utilisé par Noll dans la thermodynamique axiomatique est défini en tout point matériel; par conséquent ces derniers ont le rôle de représentants tant de la forme du corps que de son comportement. L'utilisation d'un référentiel d'espace profond dans le but de ne pas restreindre le modèle physique des points matériels aux seules formes géométriques de la matière est donc justifiée.

---

13 On veut souligner que les actions forces existent entre corps par un postulat classique, et que ce n'est que l'expérience de ces actions entre événements qui ne diffèrent que pour leur phase qui peut être mise en cause.

3. Cinématique étendue.

3.1. Modèle du corps dans l'espace profond.

On défini davantage la structure d'un corps matériel $\mathcal{B}$ en le plaçant dans le monde des événements selon un référentiel d'espace profond avec chronologie d'intervalles de temps $\mathcal{W}\sim\mathcal{H}\times T$ avec $\mathcal{H}=\mathcal{E}\times\mathcal{Z}$.

Vue la structure de l'espace profond-temps de référence, on peut séparer l'espace profond absolu $\mathcal{H}$ de l'axe chronologique T et on peut introduire un certain nombre de concepts en mettant en relation un corps matériel avec l'espace profond. Vue l'analogie de l'espace profond avec un espace géométrique habituel, ces concepts seront formellement proches de ceux qu'on utilise d'habitude (Cf. Ch.VII § 3.).

Le fait de considérer de partitions en matériau du corps donne aux emplacements la signification supplémentaire de position des points matériels dans l'espace des phases.

3.1.1. Emplacements. Milieu continu profond.

On rappelle qu'on a défini sur un corps matériel une classe Δ d'applications δ, formes globales, et une classe Υ de classes υ de relations d'équivalence U, uniformités (Cf. formules (1) et (4)).

On muni $\mathcal{B}$ d'une classe P d'applications "emplacement", de $\mathcal{B}$ dans des ensembles ouverts de $\mathcal{H}$, tels que:

$$\text{(VII.31)}\qquad \kappa\in P\ ;\ \kappa:\mathcal{B}\to\kappa(\mathcal{B})=\kappa_{\mathcal{E}}(\mathcal{B})\times\kappa_{\mathcal{Z}}(\mathcal{B})\subset\mathcal{H} \qquad 42$$

$$\forall\kappa\in P\begin{cases}\exists!\kappa^{-1}:\mathcal{H}\to\mathcal{B}\\ \exists\delta\in\Delta:\ \forall(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}\quad d_{\delta}(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')=d_{\mathcal{E}}(\kappa_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}'),\kappa_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}''))\\ \exists\upsilon\in\Upsilon:\ \forall(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}\ \left[\exists U\in\upsilon:(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')\in U\right]\leftrightarrow\left[d_{\mathcal{Z}}(\kappa_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}'),\kappa_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}''))=0\right]\end{cases}$$

(i.e. inversibles, en correspondance avec une forme globale et une uniformité globale) où on a noté par $\kappa_{\mathcal{E}}$ et $\kappa_{\mathcal{Z}}$ les projections d'un emplacement sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{Z}$ respectivement, qu'on appelle de "pseudo-emplacement" géométrique et phasique[14].

Les emplacements donnant les mêmes distances géométriques correspondent à la même forme globale et sont donc équivalents par rapport à la deuxième des conditions ci-dessus (qu'on appelera condition de compatibilité). L'ensemble quotient de P par rapport à cette équivalence est engendré de façon univoque par les formes globales:

$$\text{(VII.32)}\quad C_E=\left\{(\kappa,\eta)\in P\times P\ \ d_{\mathcal{E}}(\kappa_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}'),\kappa_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}''))=d_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}'),\eta_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}''))\ \ \forall(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}\right\} \qquad 43$$

$$\forall\delta\in\Delta\ \exists\kappa\in P/C_E:\ \forall(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}\ \ d_{\delta}(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')=d_{\mathcal{E}}(\kappa_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}'),\kappa_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}''))$$

La troisième condition sur les emplacements de P (condition d'uniformité) montre que deux emplacements à distance nulle dans l'espace des phases représentent deux points matériels du même matériau: la condition de distance nulle dans $\mathcal{Z}$ est une condition d'équivalence, image, dans l'espace profond, de la condition d'uniformité. Une uniformité globale engendre une classe unique dans l'ensemble quotient de P par rapport à cette équivalence:

---

14 On place les indices tout de suite à droite de la grandeur qu'ils dénotent, donc, par exemple, avec référence à un processus cinématique tel qu'il sera défini dans la suite, $\kappa_{\mathcal{E}\tau}$ est l'image à l'instant τ de la projection $\kappa_{\mathcal{E}}$ de l'emplacement κ sur $\mathcal{E}$, et $\kappa_{\tau\mathcal{E}}$ est la projection sur $\mathcal{E}$ de l'emplacement κ_{τ} relatif à l'instant τ: ces deux entités coïncident dans le cas des emplacement, mais peuvent ne pas coincider pour des grandeurs définies différemment.

$$C_Z=\left\{(\kappa,\eta)\in P\times P:\ d_{\mathfrak{Z}}(\kappa_Z(\mathcal{M}'),\kappa_Z(\mathcal{M}''))=0\leftrightarrow d_{\mathfrak{Z}}(\eta_Z(\mathcal{M}'),\eta_Z(\mathcal{M}''))\ \ \forall(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}\right\} \quad 44$$

$$\forall\upsilon\in Y\ \exists|\kappa\in P/C_Z:\ \forall U\in\upsilon\ \ (\mathcal{M}',\mathcal{M}'')\in U\leftrightarrow d_{\mathfrak{Z}}(\kappa_Z(\mathcal{M}'),\kappa_Z(\mathcal{M}''))=0$$

Les relations ci-dessus définissent une relation d'équivalence entre emplacements qui correspondent à la même forme et uniformité globales. Si on les considère localement (i.e. pour un $\mathcal{M}$ fixé à la place d'un $\mathcal{M}'$ quelconque) on a aussi une relation d'équivalence, qui diffère de la précédente si on se limite à de pseudo-voisinages $\vartheta(\mathcal{M})$ du point matériel:

$$C=\left\{(\kappa,\eta)\in P\times P\ \middle|\ \begin{matrix} d_{\mathfrak{E}}(\kappa_E(\mathcal{M}'),\kappa_E(\mathcal{M}''))=d_{\mathfrak{E}}(\eta_E(\mathcal{M}'),\eta_E(\mathcal{M}'')) \\ d_{\mathfrak{Z}}(\kappa_Z(\mathcal{M}'),\kappa_Z(\mathcal{M}''))=0\leftrightarrow d_{\mathfrak{Z}}(\eta_Z(\mathcal{M}'),\eta_Z(\mathcal{M}''))=0 \end{matrix}\ \ \forall(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}\right\} \quad 45$$

$$C_{\mathcal{M}}=\left\{(\kappa,\eta)\in C\ \text{avec}\ \mathcal{M}'=\mathcal{M}\ \text{fixé et}\ \forall\mathcal{M}''\in\vartheta(\mathcal{M})\right\}$$

La conjecture de représentativité assure, dans ce cas non classique, que les classes d'emplacements de P/C représentent toute forme et uniformité globales dans $\Delta\times Y$.

(VII.33) conjecture: $\forall(\delta,\upsilon)\in\Delta\times Y\ \exists\kappa\in P/C$ 46

On restreint nos considérations aux corps matériels dont l'image dans un espace profond est un "milieu continu profond", dénomination qui rappelle la continuité des éléments de P, en postulant bijective la relation entre P/C et $\Delta\times Y$:

(VII.34) $\forall(\delta,\upsilon)\in\Delta\times Y\ \exists|\kappa\in P/C$ et $\forall\kappa\in P/C\ \exists|(\delta,\upsilon)\in\Delta\times Y$ 47

i.e.

$$\left\{\forall\delta\in\Delta\ \exists|\kappa\in P/C_E\ \text{et}\ \forall\kappa\in P/C_E\ \exists|\delta\in\Delta\right\}\ \text{et}\ \left\{\forall\upsilon\in Y\ \exists|\kappa\in P/C_Z\ \text{et}\ \forall\kappa\in P/C_Z\ \exists|\upsilon\in Y\right\}$$

Les pseudo-emplacements géométrique et phasique sont, en général, non inversibles; leurs restrictions aux ensembles quotient $\mathcal{B}/F$ (corps formel) et $\mathcal{B}/\upsilon$ (partition-en-matériau) sont inversibles:

$$\kappa_E:\mathcal{B}\to\kappa_E(\mathcal{B})\subset\mathcal{E}\ \ \exists\kappa_E^{-1};\ \ \kappa_Z:\mathcal{B}\to\kappa_Z(\mathcal{B})\subset\mathfrak{Z}\ \ \exists\kappa_Z^{-1} \quad 48$$

$$\kappa^*_E:\mathcal{B}/F\to\kappa^*_E(\mathcal{B}/F)\subset\mathcal{E}\ \ \exists\kappa^*_E{}^{-1};\ \ \kappa^*_Z:\mathcal{B}/\upsilon\to\kappa^*_Z(\mathcal{B}/\upsilon)\subset\mathfrak{Z}\ \ \exists\kappa^*_Z{}^{-1}$$

ayant défini ces restrictions comme des classes de pseudo-emplacements $\kappa_E(\mathcal{M})$ et $\kappa_Z(\mathcal{M})$ équivalents en tant que relatifs à un même élément de $\mathcal{B}/F$ ou de $\mathcal{B}/\upsilon$. On appelle:

emplacement d'un point formel: $\forall\kappa_E(\mathcal{M})\times\kappa_Z(\mathcal{B})\in\kappa^*_E(\mathcal{B}/F)\times\kappa_Z(\mathcal{B})$ 49

emplacement d'un matériau: $\forall\kappa_E(\mathcal{B})\times\kappa_Z(\mathcal{M})\in\kappa_E(\mathcal{B})\times\kappa^*_Z(\mathcal{B}/\upsilon)$

3.1.2. Autres définitions.

Frontière.

La frontière d'un corps matériel est définie, comme dans le cas classique, par l'image inverse de la frontière de son emplacement dans l'espace profond. L'image d'un corps matériel par un emplacement donné est en fait un domaine ouvert dans l'espace profond avec une frontière qu'on suppose continue par morceaux:

(VII.37) $\forall\mathcal{B}\in\mathcal{U}\ \forall\kappa\in P\ \partial\mathcal{B}:\ \kappa(\partial\mathcal{B})=\partial\kappa(\mathcal{B})$ i.e.: $\kappa_E(\partial\mathcal{B})=\partial\kappa_E(\mathcal{B})$ et $\kappa_Z(\partial\mathcal{B})=\partial\kappa_Z(\mathcal{B})$ 50

$$\bar{\mathcal{B}}=\mathcal{B}\cup\partial\mathcal{B}$$

$$\forall\kappa\in P\ ;\ \kappa:\ \bar{\mathcal{B}}\to\kappa(\bar{\mathcal{B}})=\kappa(\mathcal{B})\cup\partial\kappa(\mathcal{B})\subset\mathcal{H}$$

Déplacement.

Pour deux emplacements de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{H}$ de classe P on défini le déplacement relatif dans la classe D:

$$\forall \kappa_1,\kappa_2 \in P \quad \pi=\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1}:\mathcal{H}\rightarrow\mathcal{H} \; ; \pi\in D \tag{VII.38}$$ 51

application bijective et bicontinue jusqu'à l'ordre $p\geq 1$ entre domaines de $\mathcal{H}$.

Le déplacement entre deux emplacements équivalents en forme et uniformité globales (i.e. d'une même classe de P/C) est une isométrie; on l'appelle déplacement rigidifiant profond.

Pour un emplacement donné dans P toute fonction C^p dont le support coïncide avec l'image du corps dans le-dit emplacement, identifie un nouvel emplacement dans P (Cf. formule (VII.39)). Par définition, un corps matériel $\mathcal{B}$ est un milieu continu profond si ses emplacements dans l'espace profond $\mathcal{H}$ sont de classe P ou, de façon équivalente, si ses déplacements entre domaines de $\mathcal{H}$ sont de classe D.

On défini "virtuel" un déplacement qui, en tant que application entre domaines de l'espace profond, n'est pas contraint par l'impénétrabilité:

$$\mathring{\pi}:\kappa_1(\mathcal{B})\subset\mathcal{H}\rightarrow\Omega_2\subset\mathcal{H} \text{ ou } \mathring{\pi}:\Omega_1\subset\mathcal{H}\rightarrow\kappa_2(\mathcal{B})\subset\mathcal{H} \; ; \; \mathring{\pi}\in C^p \tag{VII.40}$$ 52

3.2. Modèle local dans l'espace profond.

Par analogie avec le procédé classique du Ch.VII § 3.2. on obtient un calcul différentiel pour les fonctions à support matériel. Par la donnée d'un emplacement on défini le gradient d'une fonction matérielle, le voisinage infinitésimal et les translations infinitésimales d'un point matériel. Gradients et vecteurs matériels dans l'espace profond résultent en suite de l'étude des gradients et des translations ainsi définis dans un emplacement.

3.2.1. Gradients d'espace profond.

Il faut tout d'abord noter que l'espace profond $\mathcal{H}$ est le produit de deux espaces métriques mais il n'a pas de métrique[15]; le voisinage d'un événement $h=(p,\mathcal{z})$ ne peut donc être défini que par le produit cartésien des voisinages de ses composantes p dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{z}$ dans $\mathcal{Z}$. Soit E_o et Z_o des ensembles autours de l'origine des espaces translation E et Z, soit H_o leur produit cartésien:

$$E_o=\{u_E\in E: |u_E|\rightarrow 0\} \; ; Z_o=\{u_Z\in Z: |u_Z|\rightarrow 0\} \; ; H_o=E_o x Z_o \tag{53}$$

Le gradient d'une fonction f, p fois continue ($p\geq 1$), à support dans $\mathcal{H}$ et image dans $\mathcal{G}$ d'espace translation G, doit donc être défini moyennant deux opérateurs distincts sur les translations de E et sur celles de Z (soit $h=(p,\mathcal{z})$ et $u_H=(u_E,u_Z)$)[16]:

$$\forall \, f:\mathcal{H}\rightarrow\mathcal{G} \; ; f\in C^p \; p\geq 1 \quad \exists|\, \nabla f:h\in\mathcal{H}\rightarrow \nabla f_{|h}\in L(H,G) : \tag{VII.41}$$ 54

$$f(h+u_H)-f(h)=\nabla f_{|h}u_H+o(u_H) \; ; \; \forall u_H\in H_o \; o(u_H)=0$$

$$\nabla f_{|h}u_H=\nabla_E f_{|(p,\mathcal{z})}u_E+\nabla_Z f_{|(p,\mathcal{z})}u_Z \quad \forall u_H\in H_o$$

---

15 En général il n'y a pas de signification physique pour une métrique de $\mathcal{H}$ et il n'y a pas moyen de définir comme petite une translation dans H autrement que en prenant ses composantes petites dans E et Z séparément.

16 La définition suivante explique aussi le rapport, noté formellement $u_H=(u_E,u_Z)$, entre translations dans H et translations dans E et dans Z:

$$u_H=(\nabla_E h)u_E+(\nabla_Z h)u_Z \tag{54b}$$

ces deux opérateurs, gradient géométrique et gradient des phases, étant tels que[17]:

$$\nabla_E f:h\in\mathfrak{H}\rightarrow\nabla_E f\,|_h\in L(E,G):\ f(p+u_E,\mathfrak{z})-f(p,\mathfrak{z})=\nabla_E f\,|_{(p,\mathfrak{z})}u_E+o(u_E)\ ;\ \lim_{|u_E|\rightarrow 0}o(u_E)=0 \qquad 55$$

$$\nabla_Z f:h\in\mathfrak{H}\rightarrow\nabla_Z f\,|_h\in L(Z,G):\ f(p,\mathfrak{z}+u_Z)-f(p,\mathfrak{z})=\nabla_Z f\,|_{(p,\mathfrak{z})}u_Z+o(u_Z)\ ;\ \lim_{|u_Z|\rightarrow 0}o(u_Z)=0$$

On défini le gradient d'une fonction f de support $\mathcal{B}$ et image dans $\mathcal{G}$ d'espace translation G, dans l'emplacement κ par transport sur $\kappa(\mathcal{B})$ du gradient dans $\mathfrak{H}$:

(VII.42) $$\forall\, f:\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{G}\ ;\ f\in C^p\ p\geq 1\quad \exists!\ \nabla_\kappa f:\mathcal{M}\in\mathcal{B}\rightarrow\nabla_\kappa f\,|_{\mathcal{M}}=\nabla\left[f\circ\kappa^{-1}\right]_{\kappa(\mathcal{M})}\in L(H,G): \qquad 56$$

$$\left[f\circ\kappa^{-1}\right](\kappa(\mathcal{M})+u_H)-\left[f\circ\kappa^{-1}\right](\kappa(\mathcal{M}))=\left[f\circ\kappa^{-1}\right](\kappa(\mathcal{M})+u_H)-f(\mathcal{M})=\nabla\left[f\circ\kappa^{-1}\right]_{\kappa(\mathcal{M})}u_H+o(u_H)$$

$$\nabla_\kappa f\,|_{\mathcal{M}}u_H=\nabla_{\Gamma\kappa}f\,|_{\mathcal{M}}u_E+\nabla_{Z\kappa}f\,|_{\mathcal{M}}u_Z\quad\forall u_H\in H_o:\ \nabla_{E\kappa}f=\nabla_E\left[f\circ\kappa^{-1}\right]\ ;\ \nabla_{Z\kappa}f=\nabla_Z\left[f\circ\kappa^{-1}\right]$$

3.2.2. Voisinage matériel. Translation matérielle.

Par un emplacement de classe P on peut associer à tout point matériel un voisinage obtenu comme image inverse du voisinage de l'image du point dans l'espace profond. En outre, l'espace profond ayant un espace translation associé, on peut construire l'ensemble des translations d'un point matériel par le même procédé.

Le voisinage d'un événement $h=(p,\mathfrak{z})$, noté $i(h)\subset\mathfrak{H}$, est décrit par les petites translations de h moyennant leurs projections sur E et Z:

(VII.43) $$i(h)=i(p,\mathfrak{z})=i(p)\times i(\mathfrak{z})=\left\{(p',\mathfrak{z}')\in\mathcal{E}\times\mathfrak{Z}:\ p'=p+u_E\ \forall u_E\in E_o\ ,\ \mathfrak{z}'=\mathfrak{z}+u_Z\ \forall u_Z\in Z_o\right\} \qquad 57$$

si l'événement h est l'emplacement d'un point matériel $\mathcal{M}$, le voisinage ci-dessus peut être considéré comme l'image, par l'emplacement donné, du voisinage matériel du point $\mathcal{M}$, noté $\vartheta(\mathcal{M})$:

(VII.44) $$\forall\mathcal{M}\in\mathcal{B},\ \forall\kappa\in P \qquad 58$$

$$i(\kappa(\mathcal{M}))=\left\{(p',\mathfrak{z}')\in\mathcal{E}\times\mathfrak{Z}:\ p'=\kappa_E(\mathcal{M})+u_E\ \forall u_E\in E_o\ ,\ \mathfrak{z}'=\kappa_Z(\mathcal{M})+u_Z\ \forall u_Z\in Z_o\right\}$$

$$\vartheta(\mathcal{M})=\kappa^{-1}(i(\kappa(\mathcal{M})))=\left\{\mathcal{M}'\in\mathcal{B}:\ \mathcal{M}'=\kappa^{-1}(\kappa_E(\mathcal{M})+u_E,\kappa_Z(\mathcal{M})+u_Z)\ \forall u_E\in E_o\ \forall u_Z\in Z_o\right\}$$

Deux vecteurs de l'espace translation H dans deux emplacements de classe P sont équivalents en un point donné $\mathcal{M}$ s'ils le translatent dans un même point matériel $\mathcal{M}'$. Dans ce cas ils représentent le même vecteur translation de $\mathcal{M}$ dans les deux emplacements différents. Soit $A(\mathcal{M})$ cette relation d'équivalence dans $\mathcal{M}$:

$$A(\mathcal{M})=\left\{(\kappa,u_H),(\eta,v_H)\in(P\times H)^2:\mathcal{M}'=\kappa^{-1}(\kappa_E(\mathcal{M})+u_E,\kappa_Z(\mathcal{M})+u_Z)=\eta^{-1}(\eta_E(\mathcal{M})+v_E,\eta_Z(\mathcal{M})+v_Z)\right\}=$$

(VII.45) $$=\left\{(\kappa,u_H),(\eta,v_H)\in(P\times H)^2:\ \eta\circ\kappa^{-1}(\kappa(\mathcal{M})+u_H)-\eta(\mathcal{M})=v_H\right\} \qquad 59$$

L'ensemble $H/A(\mathcal{M})$ est l'ensemble des vecteurs translation matérielle de $\mathcal{M}$; il n'est pas un espace vectoriel, car l'équivalence $A(\mathcal{M})$ n'est pas écrite par une relation linéaire entre vecteurs de H.

---

17 A propos de la notation "+" suivante, il faut remarquer que la somme définie sur $\mathfrak{Z}$ n'est pas forcement la même que celle définie sur $\mathcal{E}$; voir par exemple le cas du modèle de polycristal traité au Chapitre IV.

3.2.3. Espace tangent.

Pour que deux vecteurs soient équivalents il suffit, dans un sens plus large, qu'ils translatent (en image) $\mathcal{M}$ dans un même point de son voisinage:

(VII.46) $$A_o(\mathcal{M})=\left\{(\kappa,u_H),(\eta,v_H)\in(PxH_o)^2:\ \eta o\kappa^{-1}(\kappa(\mathcal{M})+u_H)-\eta(\mathcal{M})=v_H\right\} \qquad 60$$

on obtient une relation d'équivalence linéaire en introduisant le gradient:

(VII.47) $$u_H\in H_o\rightarrow \eta o\kappa^{-1}(\kappa(\mathcal{M})+u_H)-\eta(\mathcal{M})=(\nabla\left[\eta o\kappa^{-1}\right]_{\kappa(\mathcal{M})})u_H=(\nabla_\kappa\eta_{|\mathcal{M}})u_H \qquad 61$$

$$A_o(\mathcal{M})=\left\{(\kappa,u_H),(\eta,v_H)\in(PxH_o)^2:\ (\nabla_\kappa\eta_{|\mathcal{M}})u_H=v_H\right\}$$
$$u_{H\kappa}(\mathcal{M})=\left\{v_H\in H:\ \exists\eta\in P:\ ((\kappa,u_H),(\eta,v_H))\in A_o(\mathcal{M})\right\}\in H/A_o(\mathcal{M})$$

telle, par conséquence de la linéarité, que l'ensemble quotient $H/A_o(\mathcal{M})$ est un espace vectoriel ($u_{H\kappa}(\mathcal{M})$ classe d'équivalence est donc un vecteur):

$$\forall\alpha\in R\ \forall((\kappa,u_H),(\eta,v_H))\in A_o(\mathcal{M})\rightarrow((\kappa,\alpha u_H),(\eta,\alpha v_H))\in A_o(\mathcal{M}) \qquad 62$$
$$\forall((\kappa,u_{H1}),(\eta,v_{H1}))\in A_o(\mathcal{M})\ \forall((\kappa,u_{H2}),(\eta,v_{H2}))\in A_o(\mathcal{M})\rightarrow((\kappa,u_{H1}+u_{H2}),(\eta,v_{H1}+v_{H2}))\in A_o(\mathcal{M})$$

i.e.:

$$\forall\alpha\in R\ \forall u_{H\kappa}(\mathcal{M})\in H/A_o(\mathcal{M})\rightarrow\alpha u_{H\kappa}(\mathcal{M})\in H/A_o(\mathcal{M})$$
$$\forall u_{H1\kappa}(\mathcal{M}),u_{H2\kappa}(\mathcal{M})\in H/A_o(\mathcal{M})\rightarrow u_{H1\kappa}(\mathcal{M})+u_{H2\kappa}(\mathcal{M})=(u_{H1}+u_{H2})_\kappa(\mathcal{M})\in H/A_o(\mathcal{M})$$

Une classe $u_{H\kappa}(\mathcal{M})\in H/A_o(\mathcal{M})$ représente un unique vecteur matériel qu'on note $u_T(\mathcal{M})$ en tant que entité indépendante de l'emplacement $\kappa\in P$; l'ensemble des ces vecteurs est l'espace tangent au point $T(\mathcal{M})$.

On peut définir sur $T(\mathcal{M})$ toutes les opérations internes définies dans les deux espaces translations du référentiel, E et Z, et donc, E étant vectoriel, il en est ainsi pour $T(\mathcal{M})$[18]. Par contre $T(\mathcal{M})$ n'est pas un espace de produit scalaire: on ne peut définir que le produit scalaire des images de deux vecteurs matériels selon un emplacement, et ce produit dépend de l'emplacement.

3.2.4. Emplacement local. Gradient matériel.

Un vecteur matériel $u_T(\mathcal{M})$ est représenté par un et un seul vecteur de H dans chaque emplacement. On appelle "emplacement des vecteurs matériels" ou "emplacement local" l'application donnant l'image de tout vecteur matériel dans H selon l'emplacement du corps (cet image étant unique il existe une seule application de ce type pour chaque emplacement global); on vérifie facilement qu'il s'agit d'une application linéaire[19]:

(VII.48) $$\forall\kappa\in P\ \exists!a_\kappa(\mathcal{M})\in L(T(\mathcal{M}),H/A_o(\mathcal{M})) \qquad 63$$

Le "gradient matériel" d'une fonction f est par définition (la formule (VII.49) du cas classique demeure valable formellement dans le cas actuel en tenant compte de la signification courante des symboles):

---

18 Par exemple si E est un espace vectoriel et Z un groupe commutatif (sans produit par un scalaire), $T(\mathcal{M})$ est un espace vectoriel tel que l'image dans H de la somme de deux vecteurs matériels est la somme de leurs images (définie indépendamment sur leurs composantes E et Z) et l'image du produit d'un vecteur matériel par un scalaire est, dans E, le produit de son image dans E par ce scalaire et, dans Z, l'image même.

19 Il suffit de définir la somme est le produit par un scalaire dans $T(\mathcal{M})$ tels que leurs images donnent la somme et le produit par un scalaire de $H/A_o(\mathcal{M})$.

$$\forall\, f:\mathcal{B}\to\mathcal{G}\ ;\ f\in C^p\ p\geq 1\quad \exists!\ gradf:\mathcal{M}\in\mathcal{B}\to gradf_{|\mathcal{M}}\in L(T(\mathcal{M}),G)\ : \tag{VII.49}$$

$$\forall u_T(\mathcal{M})\in T(\mathcal{M})\ :\ (gradf_{|\mathcal{M}})u_T(\mathcal{M})=f(\mathcal{M}+u_T(\mathcal{M}))-f(\mathcal{M})$$

L'expression de ce gradient selon un emplacement du corps est obtenue moyennant la relation d'équivalence $A_o(\mathcal{M})$:

(VII.50)

$$\forall((\kappa,u_H),(\eta,v_H))\in A_o(\mathcal{M})\to(\nabla_\kappa f_{|\mathcal{M}})u_H=(\nabla_\eta f_{|\mathcal{M}})v_H \tag{64}$$

$$\downarrow$$

$$(gradf_{|\mathcal{M}})u_T(\mathcal{M})=(\nabla_\kappa f_{|\mathcal{M}})u_H\quad\forall\kappa\in P\quad u_H=a_\kappa(\mathcal{M})u_T(\mathcal{M})$$

$$\downarrow$$

$$gradf_{|\mathcal{M}}=(\nabla_\kappa f_{|\mathcal{M}})a_\kappa(\mathcal{M})\quad\forall\kappa\in P$$

$$\downarrow$$

$$a_\kappa(\mathcal{M})=grad\kappa_{|\mathcal{M}}$$

L'emplacement local dans l'espace translation géométrique $a_{\kappa E}(\mathcal{M})$ et dans l'espace translation des phases $a_{\kappa Z}(\mathcal{M})$ sont donnés par les projection, respectivement sur E et sur Z, de $a_\kappa(\mathcal{M})$ (soit $u_H=(u_E,u_Z)$):

$$a_\kappa(\mathcal{M})=(a_{\kappa E}(\mathcal{M}),a_{\kappa Z}(\mathcal{M}))\begin{cases}u_E=a_{\kappa E}(\mathcal{M})u_T(\mathcal{M}) & a_{\kappa E}(\mathcal{M})=grad\kappa_{E|\mathcal{M}}\\ u_Z=a_{\kappa Z}(\mathcal{M})u_T(\mathcal{M}) & a_{\kappa Z}(\mathcal{M})=grad\kappa_{Z|\mathcal{M}}\end{cases} \tag{65}$$

les relations entre les projections de l'emplacement local et les respectives projections de l'emplacement dérivent du caractère linéaire de l'opérateur gradient matériel.

Mouvement localement rigidifiant. Transport matériel.

De même que dans le cas classique, à la définition d'emplacement local comme gradient matériel de l'emplacement du corps correspond une définition d'équivalence locale entre deux emplacements de P: ils sont équivalents s'ils engendrent le même emplacement local:

$$\kappa,\eta\in P\text{ localement équivalents en }\mathcal{M}:\ a_\kappa(\mathcal{M})=a_\eta(\mathcal{M})\ \text{ i.e. }\ grad\kappa_{|\mathcal{M}}=grad\eta_{|\mathcal{M}} \tag{VII.52}$$

Deux emplacements localement équivalents appartiennent à la même classe de $P/C_{\mathcal{M}}$ (i.e. ils représentent les mêmes forme et uniformité globales dans un voisinage de $\mathcal{M}$): un déplacement entre emplacements de ce type est localement rigidifiant (en forme et en matériau) en $\mathcal{M}$. L'image d'un vecteur matériel de $T(\mathcal{M})$ est égale dans deux emplacements localement équivalents en $\mathcal{M}$.

Le changement d'image d'un vecteur matériel pour un déplacement π est (d'après l'équivalence $A_o(\mathcal{M})$):

(VII.53)

$$\pi=\eta\circ\kappa^{-1}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}\ ;\ \pi\in C^p\ ;\ p\geq 1\ ;\ ((\kappa,u_H),(\eta,v_H))\in A_o(\mathcal{M}) \tag{66}$$

$$v_H=(\nabla\pi_{|\kappa(\mathcal{M})})u_H\to a_\eta(\mathcal{M})=(\nabla\pi_{|\kappa(\mathcal{M})})a_\kappa(\mathcal{M})$$

Deux emplacements sont donc équivalents si le gradient du déplacement relatif est l'identité de H, ce déplacement est alors localement rigidifiant (définition analogue à la précédente):

(VII.54)

$$\kappa,\eta\in P\text{ localement équivalents en }\mathcal{M}:\ \pi=\eta\circ\kappa^{-1}:\ \nabla\pi_{|\kappa(\mathcal{M})}=I_H \tag{67}$$

3.2.5. Métrique de l'espace tangent.

Définition.

L'espace tangent garde les opérations internes de E et Z mais il n'a pas de produit scalaire intrinsèque. Comme dans le cas classique, on peut construire un produit scalaire de $T(\mathcal{M})$ par transport des produits scalaires de E et Z moyennant un emplacement local. Le résultat sera fonction locale de l'emplacement, non intrinsèque au voisinage matériel.

Ce transport ne peut se faire que séparément pour la métrique de E et pour celle de Z, ce qui donne deux images du produit dans $T(\mathcal{M})$ respectivement dans E et Z, distinctes pour toute classe de $P/C_{\mathcal{M}}$.

Il faut tout d'abord observer qu'on ne peut définir un espace duale de H que comme $H^*=E^*xZ^*$, en donnant à la dualité entre H et H* le sens[20]:

$$\forall u_H=(u_E,u_Z)\in H=ExZ, \forall v_H=(v_E,v_Z)\in H^*=E^*xZ^* \quad \langle v_H,u_H\rangle_H = \langle v_E,u_E\rangle_E + \langle v_Z,u_Z\rangle_Z \qquad 68$$

(les dualités dans E et dans Z étant connues).

Le tenseur métrique de $T(\mathcal{M})$ est l'application linéaire symétrique définie positive de $T(\mathcal{M})$ à son duale $T^*(\mathcal{M})$ donnant la dualité entre ces deux espaces. Pour définir cette dualité, et donc ce tenseur, il faut avoir recours aux projections de l'espace tangent (et de son dual) dans E et Z séparément. On considère:

$$\Gamma(\mathcal{M})\in L_S^+(T(\mathcal{M}),T^*(\mathcal{M})) \qquad 69$$

tenseur métrique de l'espace tangent en $\mathcal{M}$, et on le défini tel que ses images dans E et dans Z selon un emplacement κ de classe P, notées $\Gamma_{E\kappa}(\mathcal{M})$ et $\Gamma_{Z\kappa}(\mathcal{M})$, donnent les images correspondantes d'un produit scalaire de $T(\mathcal{M})$, noté " $\cdot^T$ " mais, il faut le rappeler, non intrinsèque (cette définition est à comparer avec la (VII.56) et avec celle de la formule (VII.55): dans ce cas non classique le recours aux emplacement dévient obligé):

(VII.56)
$$\left.\begin{array}{l}\forall v_T(\mathcal{M}),u_T(\mathcal{M})\in T(\mathcal{M})\\ \forall \kappa\in P\end{array}\right\}\begin{cases}\langle\Gamma_{E\kappa}(\mathcal{M})v_T(\mathcal{M}),u_T(\mathcal{M})\rangle_T = v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})\,|_{E\kappa}\\ \langle\Gamma_{Z\kappa}(\mathcal{M})v_T(\mathcal{M}),u_T(\mathcal{M})\rangle_T = v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})\,|_{Z\kappa}\end{cases} \qquad 70$$

Détermination.

L'emplacement local $a_\kappa(\mathcal{M})$, selon un emplacement κ, donne ces deux images, dans E et Z, d'un produit scalaire de $T(\mathcal{M})$ (selon la notation introduite le vecteur $a_{\kappa E}(\mathcal{M})v_T(\mathcal{M})$ est la projection sur E de l'image selon l'emplacement κ du vecteur matériel $v_T(\mathcal{M})$, on relie donc les images du tenseur métrique au produit scalaire des telles projections):

(VII.57)
$$\left.\begin{array}{l}\forall v_T(\mathcal{M}),u_T(\mathcal{M})\in T(\mathcal{M})\\ \forall \kappa\in P\end{array}\right\}\begin{cases}v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})\,|_{E\kappa} = (a_{\kappa E}(\mathcal{M})v_T(\mathcal{M}))^E(a_{\kappa E}(\mathcal{M})u_T(\mathcal{M}))\\ v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})\,|_{Z\kappa} = (a_{\kappa Z}(\mathcal{M})v_T(\mathcal{M}))^Z(a_{\kappa Z}(\mathcal{M})u_I(\mathcal{M}))\end{cases} \qquad 71$$

Les tenseurs métriques de E et Z sont, par définition, tels que:

(VII.58)
$$\begin{aligned} &g_E\in L_S^+(E,E^*): \forall u_E,v_E\in E \quad u_E{}^E v_E=\langle u_E^*,u_E\rangle_E=\langle g_E u_E,u_E\rangle_E\\ &g_Z\in L_S^+(Z,Z^*): \forall u_Z,v_Z\in Z \quad u_Z{}^Z v_Z=\langle u_Z^*,u_Z\rangle_Z=\langle g_Z u_Z,u_Z\rangle_Z\end{aligned} \qquad 72$$

ce qui donne pour les images du produit scalaire de $T(\mathcal{M})$ dans un emplacement κ:

---

20 On rappelle qu'on note par $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ la dualité entre E et E* (ou Z et Z* ou $T(\mathcal{M})$ et $T^*(\mathcal{M})$ selon l'indice).

(VII.59)
$$\forall v_T(\mathcal{M}),u_T(\mathcal{M})\in T(\mathcal{M}) \left\{ \begin{array}{l} \forall \kappa\in P \left\{ \begin{array}{l} v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})_{|E\kappa} = \langle g_E a_{\kappa E}(\mathcal{M}) v_T(\mathcal{M}), a_{\kappa E}(\mathcal{M}) u_T(\mathcal{M})\rangle_E \\ v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})_{|Z\kappa} = \langle g_Z a_{\kappa Z}(\mathcal{M}) v_T(\mathcal{M}), a_{\kappa Z}(\mathcal{M}) u_T(\mathcal{M})\rangle_Z \end{array} \right. \end{array} \right. \quad 73$$

en utilisant les trois formules (70), (71) et (73) on obtient les relations entre les tenseurs métriques de E et Z et les images du tenseur métrique de $T(\mathcal{M})$ dans ce deux espaces[21]:

(VII.60)
$$\forall v_T(\mathcal{M}),u_T(\mathcal{M})\in T(\mathcal{M}) \left\{ \begin{array}{l} \forall \kappa\in P \left\{ \begin{array}{l} \langle \Gamma_{E\kappa}(\mathcal{M}) v_T(\mathcal{M}), u_T(\mathcal{M})\rangle_T = \langle g_E a_{\kappa E}(\mathcal{M}) v_T(\mathcal{M}), a_{\kappa E}(\mathcal{M}) u_T(\mathcal{M})\rangle_E \\ \langle \Gamma_{Z\kappa}(\mathcal{M}) v_T(\mathcal{M}), u_T(\mathcal{M})\rangle_T = \langle g_Z a_{\kappa Z}(\mathcal{M}) v_T(\mathcal{M}), a_{\kappa Z}(\mathcal{M}) u_T(\mathcal{M})\rangle_Z \end{array} \right. \end{array} \right. \quad 74$$

$$\downarrow$$

$$\forall \mathcal{M}\in\mathcal{B},\ \forall \kappa\in P$$

$$\Gamma_{E\kappa}(\mathcal{M}) = a^*_{\kappa E}(\mathcal{M}) g_E a_{\kappa E}(\mathcal{M}) \qquad \Gamma_{Z\kappa}(\mathcal{M}) = a^*_{\kappa Z}(\mathcal{M}) g_Z a_{\kappa Z}(\mathcal{M})$$

Par analogie au cas classique, on a donc identifié les images de la métrique de l'espace tangent $T(\mathcal{M})$ dans E et Z par un emplacement arbitrairement choisi en $\mathcal{M}$.

A cause du manque de continuité des distances dans la forme que nous avons introduit, les passages permettant, dans le cas classique, de définir la métrique de l'espace tangent par la forme de l'élément simple (Cf. Ch.VII § 3.2.4."Remarques") ne sont pas possibles. On doit donc soit introduire une métrique euclidienne sur $\mathcal{B}$ soit la transporter, comme on a fait arbitrairement par un emplacement, à partir de la métrique du référentiel.

Donc, dans le cas des milieux continus profonds, il n'y a pas d'autres déterminations possibles de la métrique de l'espace tangent que celle des ses deux images ci-dessus.

3.2.6. Commentaires.

Dimensions de l'espace tangent.

L'ensemble $\mathcal{B}$ des points matériels (aspect particulier d'un corps matériel $\mathcal{B}$) a une fonction séparation (la distance dans la forme) qui n'est pas une métrique euclidienne; sous cette condition un espace translation de $\mathcal{B}$ est unique s'il existe, mais, en effet, l'ensemble des translations de $\mathcal{B}$ n'a pas la structure d'un espace vectoriel. Un espace tangent est l'espace translation du voisinage infinitésimale d'un point matériel, il a une structure d'espace vectoriel et, la distance dans la forme pouvant s'interpréter comme une fonction séparation dans le voisinage d'un point, il est unique.

A partir des considérations faites on ne peut pas déduire la dimension de l'espace tangent ni la nature de sa métrique qui doivent, donc, être postulées. Le choix d'un référentiel d'espace profond est alors tel que la somme des dimensions des espaces translation E et Z, n+m (n=2 ou 3), donne la dimension, ainsi postulée, de l'espace tangent.

Nature du milieu continu profond.

A l'origine du concept de vecteur matériel on a introduit une relation d'équivalence entre couples vecteurs de H et emplacements dans $\mathcal{H}$ (Cf. formule (60)).

---

21 L'adjoint d'un emplacement local est défini par les adjoints des projections de cet emplacement:

$$\forall \mathcal{M}\in\mathcal{B},\forall \kappa\in P\ \ a^*_\kappa(\mathcal{M}) = (a^*_{\kappa E}(\mathcal{M}), a^*_{\kappa Z}(\mathcal{M})) : \quad 74b$$

$$\left. \begin{array}{l} a^*_{\kappa E}(\mathcal{M})\in L(E^*,T^*(\mathcal{M})) \ : \ \langle g_E a_{\kappa E}(\mathcal{M}) v_T(\mathcal{M}), a_{\kappa E}(\mathcal{M}) u_T(\mathcal{M})\rangle_E = \langle a^*_{\kappa E}(\mathcal{M}) g_E a_{\kappa E}(\mathcal{M}) v_T(\mathcal{M}), u_T(\mathcal{M})\rangle_T \\ a^*_{\kappa Z}(\mathcal{M})\in L(Z^*,T^*(\mathcal{M})) \ : \ \langle g_Z a_{\kappa Z}(\mathcal{M}) v_T(\mathcal{M}), a_{\kappa Z}(\mathcal{M}) u_T(\mathcal{M})\rangle_Z = \langle a^*_{\kappa Z}(\mathcal{M}) g_Z a_{\kappa Z}(\mathcal{M}) v_T(\mathcal{M}), u_T(\mathcal{M})\rangle_T \end{array} \right\}$$

$$\forall v_T(\mathcal{M}),u_T(\mathcal{M})\in T(\mathcal{M})$$

En général on ne peut établir de classes d'équivalence entre couples vecteurs de E et emplacements dans $\mathcal{E}$, ou entre couples de Z et $\mathcal{Z}$, séparément, que pour des emplacements particuliers. Par conséquent l'espace tangent en tout point d'un milieu continu "profond" ne peut pas s'interpréter comme le produit cartésien d'un espace tangent géométrique par un espace tangent des phases (les projections d'un vecteur matériel sur E et Z n'ont pas un statut de vecteurs matériels).

Ecritures formelles.

D'après la nature de H=ExZ le gradient d'une fonction f à support matériel a deux composantes distinctes dans E et dans Z (Cf. formule (56)). On peut écrire formellement:

$$\nabla_{\kappa} f = (\nabla_{E\kappa} f, \nabla_{Z\kappa} f) \qquad 75$$

On peut aussi écrire le gradient matériel formellement par:

$$\mathrm{grad}\, f = (\mathrm{grad}_E f, \mathrm{grad}_Z f) \qquad 76$$

mais, pour les mêmes raisons que pour les composantes d'un vecteur matériel, grad_E et grad_Z ne représentent pas directement de classes d'équivalence. Par conséquent le transport entre configurations du gradient d'une fonction doit être fait en tenant compte du fait que, même si ce gradient est écrit selon la décomposition ci-dessus, ses composantes ne peuvent pas être transportées individuellement. C'est le cas du transport des contraintes et des taux de déformation des phases dans le modèle du Chapitre IV.

3.3. Modèle du corps dans l'espace profond-temps.

3.3.1. Modèle du corps dans une chronologie.

Ayant séparé l'espace profond absolu $\mathfrak{H}$ de l'axe chronologique T, on peut introduire les concepts de processus cinématique et de mouvement en regardant un corps matériel seulement par rapport à une chronologie: le choix d'un référentiel d'espace ou d'un référentiel d'espace profond ne modifie donc pas la nature de ces concepts.

Ensuite c'est l'introduction du concept d'uniformité et la partition du corps en matériaux qui donnent une signification différente de la classique a ces termes.

Processus cinématique profond.

On rappelle que sur un corps matériel existe une classe Δ d'applications formes globales qui associent à tout couple de points matériels une distance dans la forme (positive entre points séparés) et il existe une classe Y d'uniformités globales, donnant une classe de partitions-en-matériau de $\mathcal{B}$ (Cf. formules (1) et (4)).

On défini un "processus cinématique profond" dans un intervalle chronologique $\chi \subseteq T$ une fonction qui associe à tout instant de l'intervalle une forme globale du corps matériel dans Δ et une uniformité globale sur ses points dans Y (et donc une partition-en-matériau du corps matériel dans $P_M(\mathcal{B})$); on donne l'indice χ aux rang d'un processus dans Δ et Y (ou $P_M(\mathcal{B})$):

(VII.61)
$$\forall \chi \subseteq T \;\; c{:}\tau \in \chi \rightarrow \begin{pmatrix} \delta_\tau \in \Delta_\chi \subseteq \Delta \\ \upsilon_\tau \in Y_\chi \subseteq Y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \delta_\tau \in \Delta_\chi \\ \mathcal{B}/\upsilon_\tau \in P_\chi(\mathcal{B}) \end{pmatrix} \qquad 77$$

La cinématique d'un milieu continu profond est donc enrichie par la notion de changement de phase: l'uniformité globale (et donc les matériaux) varie dans le temps.

Un processus cinématique profond est rigidifiant s'il associe à tout instant d'un intervalle chronologique la même forme et la même uniformité globales; il est "rigidifiant en forme" ou "rigidifiant en matériau" s'il associe à tout instant de l'intervalle respectivement la même forme globale ou la même uniformité globale.

Un processus cinématique profond est admissible s'il engendre une distance dans la forme fonction de classe C^2 du temps entre tout couple de points matériels; il est virtuellement admissible si cette distance est de classe C^0 entre tout couple de points sauf, éventuellement, un nombre fini d'ensembles de couples séparés-en-masse (C^0 par morceaux).

Comme dans le cas classique on obtient, par un processus cinématique admissible, une distance entre points du corps fonction du temps et, par dérivation, une vitesse et une accélération entre points.

Mouvement.

Les images de deux processus cinématiques c_1 et c_2 d'un même corps peuvent être comparées, de même que dans la théorie classique, pour obtenir le mouvement du corps dans le processus c_1 par rapport au processus c_2 de référence. Avec hypothèse d'égale durée des deux processus:

(VII.62)

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha:\chi_1\rightarrow\chi_2 & \text{translation} \\ c_1:\chi_1\rightarrow\Delta_{\chi 1}\times Y_{\chi 1}\subseteq\Delta\times Y & \text{inversible} \\ c_2:\chi_2\rightarrow\Delta_{\chi 2}\times Y_{\chi 2}\subseteq\Delta\times Y & \end{array}\right\} \exists!\, m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}=c_2\circ\alpha\circ c_1^{-1}:\Delta_{\chi 1}\times Y_{\chi 1}\rightarrow\Delta_{\chi 2}\times Y_{\chi 2} \qquad 78$$

3.3.2. Cinématique dans l'espace profond.

Processus cinématique profond.

Comme pour le cas classique, par un processus cinématique, à tout instant d'un intervalle chronologique correspond un emplacement de classe P en passant par une forme et uniformité globales. Si le processus est rigidifiant, les emplacements varient dans une classe d'équivalence de P/C, s'il est localement rigidifiant, dans $P/C_{\mathcal{M}}$ [22]:

(VII.63)

$$\forall\chi\subseteq T\quad c:\tau\in\chi\rightarrow\begin{pmatrix}\delta_\tau\in\Delta\\ \upsilon_\tau\in Y\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\kappa_{E\tau}\\ \kappa_{Z\tau}\end{pmatrix}\rightarrow\kappa_\tau\in P \qquad 79$$

La donnée de c correspond donc à celle d'une fonction κ_c qui associe à tout point matériel d'un corps pour tout instant d'un intervalle chronologique une position et une phase dans l'espace profond:

(VII.64)

$$c\Rightarrow\kappa_c:(\mathcal{M},\tau)\in R\times\chi\rightarrow\kappa_\tau(\mathcal{M})=(\kappa_{E\tau}(\mathcal{M}),\kappa_{Z\tau}(\mathcal{M}))\in\kappa_\tau(\mathcal{B})\subset\mathcal{H}=\mathcal{E}\times\mathcal{Z} \qquad 80$$

Vitesse et accélération.

De même que dans le cas classique, un processus cinématique associe, par dérivation dans le temps, à tout point matériel d'un corps donné et pour tout instant d'un intervalle chronologique une vitesse, opérateur de $V_{Ex\mathcal{Z}}=L(R,E\times Z)$, espace des vitesses profondes, et une accélération, opérateur de $L(R,V_{Ex\mathcal{Z}})$, fonctions de $(\mathcal{M},\tau)$:

(VII.65)

$$c\Rightarrow\begin{cases}\varphi_c:(\mathcal{M},\tau)\in R\times\chi\rightarrow\dfrac{\partial}{\partial\tau}\kappa_c(\mathcal{M},\tau)\in V_{EZ}=L(R,E\times Z) & \varphi_c=(\varphi_{cE},\varphi_{cZ})\\ \gamma_c:(\mathcal{M},\tau)\in R\times\chi\rightarrow\dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}\kappa_c(\mathcal{M},\tau)\in L(R,V_{E\times Z}) & \gamma_c=(\gamma_{cE},\gamma_{cZ})\end{cases} \qquad 81$$

où les projections des vitesses et des accélérations sur E et Z correspondent aux dérivées des projections respectives de l'emplacement.

Vitesses virtuelles.

Comme pour les vitesses classiques on peut définir les vitesses virtuelles par rapport à un emplacement compatible (de classe P):

(VII.66)

$$\Phi_\kappa:P\rightarrow V_{Ex\mathcal{Z}}:\exists\kappa\in P:\Phi_{\kappa'}\circ\kappa^{-1}\in C^0(\kappa(\mathcal{B})) \qquad 82$$

---

22 L'ordre dans la notation des emplacements entre instant et projection est indifférent: $\kappa_{E\tau}=\kappa_{\tau E}$ et $\kappa_{Z\tau}=\kappa_{\tau Z}$.

Mouvement relatif et virtuel.

L'espace profond permet de mettre en relation les formes et uniformités de deux corps matériels, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}$, moyennant leurs processus cinématiques comme dans le cas classique. La formule (VII.68) relative à ce dernier cas demeure formellement valable pour des emplacements dans l'espace profond.

Un corps matériel qui garde sa forme et uniformité globales en tout processus cinématique profond peut être pris comme référence pour le mouvement d'autres corps matériels en tant que "repère". Par rapport à un tel repère on peut également définir les vitesses et les accélérations relatives.

Toujours par analogie au cas classique on défini un mouvement virtuel par la donné d'un ensemble de déplacements virtuels de support commun dans le temps et arbitraire $\kappa_0(\mathcal{B})$:

(VII.69) $$\forall \kappa_0 \in P \ \exists \hat{h}_\tau \in C^p(\kappa_0(\mathcal{B})) \ \forall \tau \in \chi \Rightarrow \hat{h}: \kappa_0(\mathcal{B}) \times \chi \rightarrow \mathcal{Y} \qquad 83$$

3.3.3. Cinématique de l'espace tangent.

Dans un processus cinématique à la suite dans le temps des emplacements instantanés $\kappa_\tau = \kappa_c(\cdot,\tau)$ correspond en tout point une suite d'emplacements locaux $a_c(\mathcal{M},\tau) = a_{\kappa_\tau}(\mathcal{M})$. Les images d'un vecteur matériel et les deux images de la métrique de $T(\mathcal{M})$ dans E et Z en fonction du temps sont donc:

(VII.70) $$\forall \mathcal{M} \in \mathcal{B}, \forall \tau \in \chi \subseteq T \ \kappa_c \Rightarrow \qquad 84$$

$$\Rightarrow a_c(\mathcal{M},\tau) = \mathrm{grad}\kappa_c(\mathcal{M},\tau) \in L(T(\mathcal{M}),H) : \begin{cases} a_c(\mathcal{M},\tau) u_T(\mathcal{M}) \in u_{H\kappa_\tau}(\mathcal{M}) \\ \Gamma_c(\mathcal{M},\tau): \begin{cases} \Gamma_{Ec}(\mathcal{M},\tau) = a^*_{cE}(\mathcal{M},\tau) g_E a_{cE}(\mathcal{M},\tau) \\ \Gamma_{Zc}(\mathcal{M},\tau) = a^*_{cZ}(\mathcal{M},\tau) g_Z a_{cZ}(\mathcal{M},\tau) \end{cases} \end{cases}$$

Comme dans le cas classique $a_c(\mathcal{M},\tau)$ donne la vitesse matérielle φ et l'accélération matérielle γ dont les vitesses et les accélérations de la (VII.65) sont les images actuelles selon le processus en objet (la formule (VII.71) demeure valable avec la signification actuelle des symboles).

3.3.4. Description lagrangienne.

Faisant référence à un emplacement $\kappa_0(\mathcal{B}) \subset \mathcal{Y}$ arbitraire, un processus cinématique engendre un déplacement dans le temps, dit transformation:

(VII.72) $$\forall \kappa_0 \in P \ \forall \tau \in \chi \subseteq T \ \kappa_c \Rightarrow \qquad 85$$

$$\Rightarrow \pi_c(\cdot,\tau) = \kappa_c(\cdot,\tau) \circ \kappa_0^{-1} : \kappa_0(\mathcal{B}) \rightarrow \kappa_\tau(\mathcal{B}) \begin{cases} \pi_{Ec}(\cdot,\tau) = \kappa_{cE}(\cdot,\tau) \circ \kappa_0^{-1} : \kappa_0(\mathcal{B}) \rightarrow \kappa_{E\tau}(\mathcal{B}) \\ \pi_{Zc}(\cdot,\tau) = \kappa_{cZ}(\cdot,\tau) \circ \kappa_0^{-1} : \kappa_0(\mathcal{B}) \rightarrow \kappa_{Z\tau}(\mathcal{B}) \end{cases}$$

et un déplacement local, gradient de la transformation, qui décrit, en image profonde, l'évolution des vecteurs matériels:

(VII.73) $$\forall \kappa_0 \in P, \forall \tau \in \chi \subseteq T \quad \kappa_c \Rightarrow F(\mathcal{M},\tau) \in L^+(H,H) : \qquad 86$$

$$F(\mathcal{M},\tau)=a_c(\mathcal{M},\tau)a_{\kappa_0}^{-1}(\mathcal{M})=\nabla\pi_c(\mathcal{M},\tau) \; ; \; F=(F_E,F_Z) : \begin{cases} F_E=a_{cE}a_{\kappa_0}^{-1}=\nabla\pi_{Ec} & \in L^+(H,E) \\ F_Z=a_{cZ}a_{\kappa_0}^{-1}=\nabla\pi_{Zc} & \in L^+(H,Z) \end{cases}$$

$$u_{H\tau}=(u_{E\tau},u_{Z\tau})=(F_E(\mathcal{M},\tau),F_Z(\mathcal{M},\tau))u_{H0}=F(\mathcal{M},\tau)u_{H0} \; ; \; \forall u_{H0} \in u_{H\kappa_0}(\mathcal{M}) \; ; \; u_{H\tau} \in u_{H\kappa_\tau}(\mathcal{M})$$

On remarque que F_E et F_Z, obtenus par les projections a_{cE} et a_{cZ} de l'emplacement local actuel sur E et Z, sont bien les gradients dans $\mathfrak{H}$ des images de la transformation π_{Ec} et π_{Zc} respectivement sur E et Z définies à la (85) (pour le vérifier il suffit de reprendre les passages de la (VII.73) avec les définitions actuelles des symboles).

Le tenseur de dilatation décrit l'évolution de la métrique de l'espace tangent, on le défini par ses composantes sur E et Z (il faut noter que C_E et C_Z , comme L_E et L_Z définis dans la suite, sont des opérateurs de L(H,H)):

(VII.75) $$C:\mathfrak{B}x\chi \rightarrow L^+(H,H) \qquad 87$$

$$C=(C_E,C_Z) : \begin{cases} C_E : \; (C_E(\mathcal{M},\tau)a_{\kappa_0}(\mathcal{M})v_T(\mathcal{M}),a_{\kappa_0}(\mathcal{M})u_T(\mathcal{M}))_E=v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})\big|_{E\kappa_\tau} \\ C_Z : \; (C_Z(\mathcal{M},\tau)a_{\kappa_0}(\mathcal{M})v_T(\mathcal{M}),a_{\kappa_0}(\mathcal{M})u_T(\mathcal{M}))_Z=v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})\big|_{Z\kappa_\tau} \end{cases}$$

Par définition du produit scalaire de $T(\mathcal{M})$ dans l'emplacement actuel $\kappa_\tau=\kappa_c(\cdot,\tau)$ et du gradient de la transformation de κ_0 à κ_τ, on obtient (passages analogues à ceux de la (VII.76)):

(VII.76) $$C_E(\mathcal{M},\tau) = F_E^*(\mathcal{M},\tau)g_E F_E(\mathcal{M},\tau) = a^{-}_{\kappa_0}{}^*(\mathcal{M})\Gamma_{Ec}(\mathcal{M},\tau)a^{-1}_{\kappa_0}(\mathcal{M}) \qquad 88$$
$$C_Z(\mathcal{M},\tau) = F_Z^*(\mathcal{M},\tau)g_Z F_Z(\mathcal{M},\tau) = a^{-}_{\kappa_0}{}^*(\mathcal{M})\Gamma_{Zc}(\mathcal{M},\tau)a^{-1}_{\kappa_0}(\mathcal{M})$$

L'expression intrinsèque (VII.77) du tenseur de dilatation peut être écrite en fonction des images du tenseur métrique dans E et Z en introduisant deux tenseurs intrinsèques C_{Eint} et C_{Zint}:

(VII.77) $$C_{int}=(C_{Eint},C_{Zint}) \in L^+(T(\mathcal{M}),T(\mathcal{M})) : \begin{cases} C_{Eint}(\mathcal{M},\tau)=\Gamma^{-1}_{\kappa_0}(\mathcal{M})\Gamma_{Ec}(\mathcal{M},\tau) \\ C_{Zint}(\mathcal{M},\tau)=\Gamma^{-1}_{\kappa_0}(\mathcal{M})\Gamma_{Zc}(\mathcal{M},\tau) \end{cases} \qquad 89$$

dont les images dans E et Z sont respectivement C_E et C_Z.

Le tenseur de Green-Lagrange, défini en analogie au cas classique, a aussi deux images distinctes dans E et Z (dans ce cas $C(\mathcal{M},0)$ correspond aux deux tenseurs métriques g_E et g_Z séparément si on se réfère à l'emplacement à l'instant 0):

(VII.79) $$L(\mathcal{M},\tau)=\frac{1}{2}\left[C(\mathcal{M},\tau)-C(\mathcal{M},0)\right] \in L^+(H,H) : \qquad 90$$

$$\forall u_T(\mathcal{M}),v_T(\mathcal{M}) \in T(\mathcal{M})$$
$$(L_E(\mathcal{M},\tau)a_{\kappa_0}(\mathcal{M})v_T(\mathcal{M}),a_{\kappa_0}(\mathcal{M})u_T(\mathcal{M}))_E = v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})\big|_{E\kappa_\tau} - v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})\big|_{E\kappa_0}$$
$$(L_Z(\mathcal{M},\tau)a_{\kappa_0}(\mathcal{M})v_T(\mathcal{M}),a_{\kappa_0}(\mathcal{M})u_T(\mathcal{M}))_Z = v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})\big|_{Z\kappa_\tau} - v_T(\mathcal{M})^T u_T(\mathcal{M})\big|_{Z\kappa_0}$$

Ce tenseur, en tant que image du changement du produit scalaire de $T(\mathcal{M})$, peut être choisi comme mesure de la déformation entre l'emplacement κ_τ et l'emplacement κ_0 même pour les milieux continus profonds.

4. Mécanique étendue.

4.1. Forces dans l'espace profond.

4.1.1. Continuité des actions.

Les emplacements des corps matériels dans l'espace profond permettent l'utilisation de la topologie de cet espace pour étudier les fonctions définies sur les corps matériels, et, en particulier, les forces.

Au niveau du corps matériel on fait les mêmes hypothèses que dans le cas classique; celles-ci, interprétées dans l'espace profond, introduisent des nouveautés sur le modèle (V espace vectoriel avec norme |.|; on utilise ensuite les notations de la formule (VII.83)):

- les actions intérieures sont des actions de contact aire-continues par rapport à un emplacement dans l'espace profond[23] (Cf. formule (VII.81));
- les actions extérieures sont des actions de contact et à distance, aire-volume-continues (Cf. formule (VII.82);
- l'action sur une partie d'un corps matériel, étant somme d'une action extérieure et d'une action intérieure au corps, est aire-volume-continue.

4.1.2. Mesure force.

Une interaction à valeurs dans $H^*=E^*xZ^*$ (espace duale de l'espace translation de l'espace profond) est un "système de forces profondes"[24] qu'on note $f_{\mathcal{C}}$ $\mathcal{C}\in\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ pour indiquer qu'il est relatif aux parties de $\mathcal{B}$.

De même que dans le cas classique, sous les deux conditions de continuité postulées, tout $\mathcal{C}\in\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ est mesurable dans l'emplacement κ par une mesure vectorielle $df_{\mathcal{C}}$ définie en tout point matériel et à valeurs dans E^*xZ^*:

(VII.84)
$$df_{\mathcal{C}}:\mathcal{M}\in\mathcal{C}\to H^*\ ;\ f_{\mathcal{C}}:\mathcal{D}\in\mathcal{C}\to f_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})=\int_{\mathcal{D}}df_{\mathcal{C}}\in H^* \qquad 91$$

Les conditions étant les mêmes que pour le cas classique, la continuité des actions postulée dans l'univers matériel se traduit également[25] en continuité de la mesure force dans un emplacement de classe P^1: il existe des fonctions, forces de volume b_κ et forces de contact $t_{\partial\mathcal{C}\kappa}$, intégrables, respectivement de volume et de surface, telles que (les grandeurs avec indice E^* et Z^* étant leurs projections sur ces espaces):

(VII.85)
$$\left.\begin{array}{l}\exists\ b_{H^*}:\mathcal{M}\in\mathcal{B}\to(b_{E^*}(\mathcal{M}),b_{Z^*}(\mathcal{M}))\in E^*xZ^*\\ \exists\ t_{\partial\mathcal{C}H^*}:\mathcal{M}\in\partial\mathcal{C}\to(t_{\partial\mathcal{C}E^*}(\mathcal{M}),t_{\partial\mathcal{C}Z^*}(\mathcal{M}))\in E^*xZ^*\quad\forall\partial\mathcal{C}\subset\mathcal{B}\end{array}\right\}: \qquad 92$$

$$f_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})=\int_{\mathcal{D}}df_{\mathcal{C}}=\int_{\mathcal{D}}b_{H^*}(\mathcal{M})dV_\kappa+\int_{\mathcal{D}\cap\partial\mathcal{C}}t_{\partial\mathcal{C}H^*}(\mathcal{M})dS_\kappa$$

La contrainte peut aussi être introduite en analogie au cas classique, en supposant continues les surfaces des parties matérielles étudiées (et continue la fonction t_{H^*} ci-dessous suivant la surface $\partial\mathcal{C}$, $n_{\partial\mathcal{C}H}\in H$ étant la normale en $\mathcal{M}$ à la surface $\partial\mathcal{C}$ dans l'emplacement κ):

(VII.88)
$$\exists S_H:\ \mathcal{B}\to L(H,H^*)\quad t_{\partial\mathcal{C}H^*}(\mathcal{M})=t_{H^*}(\mathcal{M},n_{\partial\mathcal{C}H})=S_H(\mathcal{M})n_{\partial\mathcal{C}H} \qquad 93$$

---

23 La mesure d'une frontière est une aire, celle d'un corps est un volume, si le référentiel se limite à l'espace géométrique absolu. On garde les dénominations pour simplifier.

24 La définition classique considère une force comme un élément de l'espace translation E. Le fait de rajouter une composante dans l'espace translation Z est légitime et arbitraire.

25 La démonstration citée pour le cas classique demeure valable.

Les forces de masse sont définies comme dans le cas classique; vue leur signification physique on considère leur densité massique fonction locale du seul pseudo-emplacement géométrique:

(VII.86)
$$p_{H^*}:p\in\mathcal{E}\rightarrow(p_{E^*}(p),p_{Z^*}(p))\in E^*xZ^* : f_{m\mathcal{C}}(\mathcal{D})=\int_{\mathcal{D}}p_{H^*}(\kappa_E(\mathcal{M}))d\mu \qquad 94$$

on les considère, pour alléger la notation, comme cas particulier de forces de volume (Cf. formule (VII.87) avec H* à la place de E*).

4.1.3. Forces matérielles. Espace dual de l'espace tangent.

Un système de forces est donc aussi une distribution, fonctionnelle linéaire sur l'espace des fonctions à support dans le corps matériel complet $\mathcal{B}$ et à valeurs dans H=ExZ, de mesure $b_{H^*}(\mathcal{M})dV_\kappa$ à l'intérieur et $t_{\partial CH^*}(\mathcal{M})dS_\kappa$ sur la surface d'une partie d'un corps matériel:

(VII.90)
$$\forall\phi:\mathcal{M}\in\mathcal{B}\rightarrow(\phi_E(\mathcal{M}),\phi_Z(\mathcal{M}))\in ExZ \qquad 95$$

$$\mathcal{P}^*(\mathcal{C},\phi)=\int_{\mathcal{C}}\phi df_{\mathcal{B}}=\int_{\mathcal{C}}\left[\langle b_{E^*},\phi_E\rangle_E+\langle b_{Z^*},\phi_Z\rangle_Z\right]dV_\kappa+\int_{\partial\mathcal{C}}\left[\langle t_{\partial CE^*}(\mathcal{M}),\phi_E\rangle_E+\langle t_{\partial CZ^*}(\mathcal{M}),\phi_Z\rangle_Z\right]dS_\kappa$$

Ceci permet d'introduire, comme pour le cas classique, la relation d'équivalence locale entre mesures forces:

(VII.91)
$$A_o^*(\mathcal{M})= \qquad 96$$
$$=\Big\{((\kappa,b_{H^*}(\mathcal{M})dV_\kappa),(\eta,b'_{H^*}(\mathcal{M})dV_\eta))\in(PxH^*)^2:\ \forall((\kappa,u_H),(\eta,u'_H))\in A_o(\mathcal{M})$$
$$\left[\langle b_{E^*},u_E\rangle_E+\langle b_{Z^*},u_Z\rangle_Z\right]dV_{\kappa\,|\,\mathcal{M}}=\left[\langle b'_{E^*},u'_E\rangle_E+\langle b'_{Z^*},u'_Z\rangle_Z\right]dV_{\eta\,|\,\mathcal{M}}\Big\}$$

(VII.92)
$$A_o^{*\prime}(\mathcal{M})= \qquad 97$$
$$=\Big\{((\kappa,t_{\partial CH^*}(\mathcal{M})dV_\kappa),(\eta,t'_{\partial CH^*}(\mathcal{M})dV_\eta))\in(PxH^*)^2:\ \forall((\kappa,u_H),(\eta,u'_H))\in A_o(\mathcal{M})$$
$$\left[\langle t_{\partial CE^*},u_F\rangle_E+\langle t_{\partial CZ^*},u_Z\rangle_Z\right]dS_{\kappa\,|\,\mathcal{M}}=\left[\langle t'_{\partial CE^*},u'_E\rangle_E+\langle t'_{\partial CZ^*},u'_Z\rangle_Z\right]dS_{\eta\,|\,\mathcal{M}}\Big\}$$

(VII.93)
$$A_o^{*\prime\prime}(\mathcal{M})= \qquad 98$$
$$=\Big\{((\kappa,S_H(\mathcal{M})dV_\kappa),(\eta,S'_H(\mathcal{M})dV_\eta))\in(PxL(H,H^*))^2:$$
$$\forall((\kappa,u_H),(\eta,u'_H))\in A_o(\mathcal{M}),\ \forall((\kappa,n_H),(\eta,n'_H))\in A_o(\mathcal{M})$$
$$\left[\langle(S_Hn_H)_{E^*},u_E\rangle_E+\langle(S_Hn_H)_{Z^*},u_Z\rangle_Z\right]dV_{\kappa\,|\,\mathcal{M}}=\left[\langle(S'_Hn'_H)_{E^*},v_E\rangle_E+\langle(S'_Hn'_H)_{Z^*},v_Z\rangle_Z\right]dV_{\eta\,|\,\mathcal{M}}\Big\}$$

On obtient donc, en tout point d'un corps, une partition de l'espace H* en ensembles quotients (ensembles des images d'un vecteur matériel) qui sont, par définition, les espaces duaux des espaces tangents en tout point, notés $T^*(\mathcal{M})$. On note les vecteurs forces matérielles par $b_{T^*}(\mathcal{M})$ et $t_{\partial CT^*}(\mathcal{M})$, ils ont une double image, dans E* et dans Z*, pour tout emplacement[26]:

---

26 On rappelle que tout vecteur matériel a une classe d'images équivalentes dans H qui sont des doubles images dans E et Z, espaces de produit scalaire (H n'a pas de produit scalaire). Le produit scalaire de deux vecteurs matériels (et donc aussi la norme d'un vecteur matériel) a été défini moyennant ses images dans E et Z, en fonction d'un emplacement. On peut donc voir un vecteur matériel comme un vecteur d'un espace translation de l'univers matériel qui n'est défini que par ses images dans E et Z. Les mêmes hypothèses et passages sont valables pour les systèmes de forces matérielles, interactions à valeurs dans H*: il s'agit d'êtres intrinsèques à l'univers matériel dont on connait une image particulière par un emplacement dans H*.

On rappelle, en relation à la formule suivante, qu'on ne peut pas définir l'inverse des projections des emplacements locaux $a_{\kappa E}(\mathcal{M})$ et $a_{\kappa E}(\mathcal{M})$ (les pseudo-emplacements ne sont pas inversibles en tout point).

(VII.94)
$$\forall \kappa\in P \begin{cases} \left(a^*_{\kappa E}(\mathcal{M})b_{E^*}(\mathcal{M}) \ , \ a^*_{\kappa Z}(\mathcal{M})b_{Z^*}(\mathcal{M}) \right) = b_{T^*}(\mathcal{M}) \\ \left(a^*_{\kappa E}(\mathcal{M})t_{\partial CE^*}(\mathcal{M}) \ , \ a^*_{\kappa Z}(\mathcal{M})t_{\partial CZ^*}(\mathcal{M}) \right) = t_{\partial CT^*}(\mathcal{M}) \\ \left(a^*_{\kappa E}(\mathcal{M})(S_H(\mathcal{M})a_\kappa(\mathcal{M}))_{E^*} \ , \ a^*_{\kappa Z}(\mathcal{M})(S_H(\mathcal{M})a_\kappa(\mathcal{M}))_{Z^*} \right) = S_T(\mathcal{M}) \end{cases}$$ 99

La distribution force matérielle est donc formellement égale à celle du cas classique:

$$\forall u_T:\mathcal{M}\in \mathcal{B}\rightarrow u_T(\mathcal{M})\in T(\mathcal{M}) \ \forall \kappa\in P: \qquad \text{(VII.95)}$$
$$\mathcal{P}^*(C,u_T)= \int_C u_T(\mathcal{M})df_{\mathcal{B}} = \int_C \langle b_{T^*}(\mathcal{M}),u_T(\mathcal{M})\rangle_T dV_\kappa + \int_{\partial C} \langle t_{\partial CT^*}(\mathcal{M}),u_T(\mathcal{M})\rangle_T dS_\kappa$$

Ces passages nous permettent de définir la puissance virtuelle sur un emplacement dans un référentiel d'espace profond de façon analogue à ce qui se fait habituellement dans l'espace géométrique absolu, et de définir par conséquent l'équilibre mécanique profond. Ils nous donnent aussi une interprétation des forces et des contraintes dans l'espace des phases.

4.2. Forces dans l'espace profond-temps.

4.2.1. Forces d'inertie.

L'existence d'actions inertielles est intrinsèque à la nature de l'univers matériel observé, habituellement, dans un référentiel inertiel d'espace géométrique absolu: on postule d'habitude l'existence de forces de ce type à valeurs dans E*.

Le fait de considérer des forces d'inertie à valeurs dans E*xZ* dérive d'une double position: d'abord on considère que les forces habituellement vues dans E* ne sont que l'image de forces intrinsèques à l'univers matériel, et, deuxièmement, on prend en compte l'image de ces forces intrinsèques dans un référentiel d'espace profond et donc dans E*xZ*. Le problème de la signification physique de la composante dans Z* des forces ainsi obtenues sort du cadre actuel de travail.

On considère donc qu'il existe sur tout corps matériel vu dans une chronologie, pour la classe de référentiels utilisés, un système de forces matérielles masse-continu et fonction du temps, ayant l'opposé du produit masse-accélération des points matériels comme mesure instantanée:

(VII.97)
$$c \Rightarrow \begin{cases} \gamma_c:\mathcal{B}x\chi\rightarrow L(R,V_{ExZ}) \\ \rho_c(\mathcal{M},\tau)dV_\tau=d\mu \ \ \forall\tau\in\chi \end{cases} \qquad \gamma_c d\mu:\mathcal{B}x\chi\rightarrow E^*xZ^*$$ 100

$$\forall\tau\in T \ f_{IC}(\mathcal{D},\tau)= \int_{\mathcal{D}} df_{IC}(\tau) = -\int_{\mathcal{D}} \gamma_c(\mathcal{M},\tau)d\mu = -\int_{\mathcal{D}} \rho_c(\mathcal{M},\tau)\gamma_c(\mathcal{M},\tau)dV_\tau$$

4.2.2. Processus mécanique profond.

En analogie à la définition classique, un processus mécanique profond dans l'intervalle chronologique $\chi\subseteq T$ est défini pour un corps matériel $\mathcal{B}$ (dans un référentiel inertiel) par:

- un processus cinématique profond c dans l'intervalle $\chi\subseteq T$ (Cf. formule (77) et (79)),
- un système de forces appliquées f_{SC} fonction du temps dans l'intervalle $\chi\subseteq T$ (Cf. formules (VII.96), (91) et (99)):

(VII.98)
$$\forall C\in\mathcal{U}_{\mathcal{B}} \ f_{SC}: Cx\chi\rightarrow E^*xZ^*$$ 101

- le principe des puissances virtuelles (défini aux paragraphes suivants).

Un processus mécanique représente donc l'évolution de la forme et des matériaux du corps (processus cinématique profond) en dualité avec les actions qui l'intéressent (forces d'inertie définies et appliquées) moyennant le principe des puissances virtuelles.

On rappelle que ces forces agissent tant entre points séparés en forme (i.e. toujours distincts dans l'espace géométrique) que entre points séparés en matériau (i.e. éventuellement confondus dans l'espace géométrique).

4.3. Principe des puissances virtuelles.

4.3.1. Puissances.

On utilise la méthode des puissances virtuelles afin d'obtenir la condition d'équilibre des forces dans un référentiel d'espace profond par un procédé axiomatique basé sur l'intuition des corps matériels indépendamment de tout emplacement.

Les puissances virtuelles seront définies par rapport à l'emplacement courant d'un processus mécanique.

Puissances des efforts extérieurs et des accélérations.

La puissance des efforts extérieurs et la puissance des accélérations, définies, de façon analogue à la classique, par application de la distribution force matérielle aux champs de vitesse réels, sont données par les formules classiques (VII.99) et (VII.100), compte tenu de la signification courante des symboles.

Comme pour le cas classique, se donner un champ de vitesse virtuelle dans un emplacement est équivalent à se donner une petite variation arbitraire de cet emplacement non restreinte par l'impénétrabilité:

(VII.101)
$$\forall \kappa \in P \quad \phi \in V_{ExZ} \Leftrightarrow \delta\kappa \in ExZ \qquad 102$$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs et la puissance virtuelle des accélérations, définies donc aussi de façon analogue à la classique, compte tenu de la nature de l'espace profond, sont[27]:

(VII.102)
$$\forall \tau \quad P_{ext}(C,\delta\kappa) = \int_C \left[\langle b_{cE^*}(\mathcal{M},\tau), \delta\kappa_E(\mathcal{M}) \rangle_E + \langle b_{cZ^*}(\mathcal{M},\tau), \delta\kappa_Z(\mathcal{M}) \rangle_Z \right] dV_\tau + \qquad 103$$

$$+ \int_{\partial C} \left[\langle t_{\partial C cE^*}(\mathcal{M},\tau), \delta\kappa_E(\mathcal{M}) \rangle_E + \langle t_{\partial C cZ^*}(\mathcal{M},\tau), \delta\kappa_Z(\mathcal{M}) \rangle_Z \right] dS_\tau$$

$$\forall \tau \quad P_{acc}(C,\delta\kappa) = \int_C \rho_c(\mathcal{M},\tau) \left[\langle \gamma_{cE^*}(\mathcal{M},\tau), \delta\kappa_E(\mathcal{M}) \rangle_E + \langle \gamma_{cZ^*}(\mathcal{M},\tau), \delta\kappa_Z(\mathcal{M}) \rangle_Z \right] dV_\tau$$

Puissance des efforts intérieurs.

Comme dans le cas classique, une variation arbitraire $\delta\kappa$ de l'emplacement, équivalente d'une vitesse virtuelle, engendre une variation de l'image dans κ de la métrique de l'espace tangent. A la différence du cas classique, pour les milieux continus profonds on n'a déterminé que deux images distinctes de cette métrique, dans E et dans Z; ce sont par conséquent ces images qui reflètent la variation arbitraire de l'emplacement (Cf. formule (74)):

(VII. 105)
$$\forall \kappa \in P \quad \delta\kappa \Rightarrow \delta\Gamma_\kappa = (\delta\Gamma_{E\kappa}, \delta\Gamma_{Z\kappa}) : \begin{cases} \delta\Gamma_{E\kappa}(\mathcal{M}) = 2\mathrm{sym}(a^*_{\kappa E}(\mathcal{M}) g_E \delta a_{\kappa E}(\mathcal{M})) \\ \delta\Gamma_{Z\kappa}(\mathcal{M}) = 2\mathrm{sym}(a^*_{\kappa Z}(\mathcal{M}) g_Z \delta a_{\kappa Z}(\mathcal{M})) \end{cases} \quad \forall \mathcal{M} \in \mathcal{B} \qquad 104$$

Les hypothèses qu'on introduit sur la puissance des efforts intérieurs sont les mêmes que dans le cas classique, car on considère ces dernières relatives à la nature intrinsèque des corps matériels et non au référentiel nécessaire pour les observer.

---

27 Avec:

$$\left(a^*_{cE}(\mathcal{M},\tau) b_{cE^*}(\mathcal{M},\tau) \ , \ a^*_{cZ}(\mathcal{M},\tau) b_{cZ^*}(\mathcal{M},\tau) \right) = b(\mathcal{M},\tau) \qquad 103b$$

et formules analogues pour $t_{\partial C}$ et γ.

_ la puissance virtuelle des efforts intérieures est une fonctionnelle d'un champ de vitesse virtuelle défini dans un emplacement (la formule (VII.103) demeure valable avec les nouvelles notations). Cette fonctionnelle est masse-continu, de densité locale au premier gradient du champ de vitesse et vérifie l'axiome du caractère interne des puissances intérieures (qu'on énoncera de suite).

La continuité par rapport à la masse s'exprime par la même formule (VII.104) que dans le cas classique (en tenant compte de la signification actuelle des symboles).

La localisation au premier gradient s'écrit (signes et coefficients 1/2 selon l'usage général):

$$\forall\tau\ P_{int}(\mathcal{C},\delta\kappa) = \int_{\mathcal{C}}\Big\{\langle\alpha_{E^*c}(\mathcal{M},\tau),\delta\kappa_E(\mathcal{M})\rangle_E + \langle\alpha_{Z^*c}(\mathcal{M},\tau),\delta\kappa_Z(\mathcal{M})\rangle_Z - \\ - \tfrac{1}{2}\langle\theta_{Ec}(\mathcal{M},\tau),\delta\Gamma_{E\kappa}(\mathcal{M})\rangle_{L_s(T,T^*)} - \tfrac{1}{2}\langle\theta_{Zc}(\mathcal{M},\tau),\delta\Gamma_{Z\kappa}(\mathcal{M})\rangle_{L_s(T,T^*)}\Big\}d\mu \qquad 105$$

ayant introduit les champs pour un processus mécanique donné:

$$\alpha_{E^*c}:\mathcal{B}x\chi\to E^*\ ;\ \alpha_{Z^*c}:\mathcal{B}x\chi\to Z^* \qquad 106$$
$$\theta_{Ec}:\mathcal{B}x\chi\to L_s(T(\mathcal{M}),T^*(\mathcal{M}))^*\ ;\ \theta_{Zc}:\mathcal{B}x\chi\to L_s(T(\mathcal{M}),T^*(\mathcal{M}))^*$$

Le caractère interne des puissances intérieures est défini par l'axiome:

_ "Pour tout champ de vitesse rigidifiant un corps matériel en équilibre, la puissance virtuelle intérieure est nulle dans toute partie du corps".

On rappelle que un déplacement rigidifiant "profond" ne modifie ni la forme ni l'uniformité globale d'un corps matériel. On remarque que pour deux emplacement équivalents en forme et en matériau (i.e. couplés en C de la formule (45)) il existe une isométrie entre leurs pseudo-emplacements géométriques et une fonction continue (donc un homéomorphisme) entre leurs pseudo-emplacements phasiques. La conjecture de représentativité (47) assure que si la forme et l'uniformité globales d'un corps matériel ne sont pas modifiées, son emplacement ne varie qu'à l'intérieur d'une classe de P/C, donc il varie par isométrie du pseudo-emplacement géométrique et par homéomorphisme du pseudo-emplacement phasique. Cette dernière condition n'est pas utile pour caractériser les mouvements rigidifiants car tout mouvement est, par définition, un homéomorphisme.

L'emplacement d'un corps matériel dans l'espace profond a une structure mathématique plus fine que celle qui a été définie sur le corps matériel même: l'espace des phases est un espace métrique euclidien, ce qui est plus qu'une partition du corps matériel en classes d'équivalence-en-matériau. Par conséquent la condition précédemment énoncée, basé sur la définition de mouvement rigidifiant, bien que correcte pour un corps matériel n'est pas assez restrictive pour ses emplacements dans l'espace profond.

On identifie alors les mouvements rigidifiants du corps avec les isométries de l'espace de référence transportées sur le corps par son emplacement dans cet espace[28]. La composition d'une isométrie infinitésimale avec un emplacement quelconque est bien une variation arbitraire de cet emplacement et, donc, on peut lui faire correspondre une vitesse virtuelle.

Soit $\mathcal{K}_{\mathcal{E}x\mathcal{E}}$ le groupe des isométries infinitésimales de l'espace profond $\mathcal{E}x\mathcal{E}$:

$$\forall k\in\mathcal{K}_{\mathcal{E}x\mathcal{E}}\ \delta_{rig}\kappa = k\circ\kappa\ \ \forall\kappa\in P \qquad 107$$

on énonce le caractère interne des efforts intérieurs en postulant que:

_ "Pour toute isométrie infinitésimale du référentiel dans lequel est placé un corps matériel en équilibre la puissance virtuelle intérieure est nulle dans toute partie du corps quelque-soit son emplacement"[29]:

$$\forall k\in\mathcal{K}_{\mathcal{E}x\mathcal{E}}\ P_{int}(\mathcal{C},k\circ\kappa)=0\ \ \forall\mathcal{C}\in\mathcal{B},\forall\kappa\in P \qquad 108$$

---

28 Les deux définitions coïncident pour un référentiel d'espace géométrique usuel.

29 Noll utilise directement l'isométrie du référentiel comme mouvement rigidifiant et défini par conséquent un travail virtuel (Cf. [Noll 1973]).

On rappelle qu'on a postulé, lors de la construction du référentiel d'espace profond, qu'il existe un unique espace des phases pour chaque espace géométrique instantané, ce qui met les isométries de $\mathfrak{Z}$ en relation avec celles de $\mathcal{E}$. Par conséquent il suffit de se donner une isométrie infinitésimale de l'espace géométrique $\mathcal{E}$ pour définir un mouvement rigidifiant du corps dans l'espace profond.

Ce procédé a été suivi dans le Chapitre IV où aux translations de E ne correspond aucune variation de $\mathfrak{Z}=Q=L_{orth}(E,E)$, et où les rotations de E sont, par définition, les translations de Z=Q.

Par conséquent de son caractère interne la puissance virtuelle des efforts intérieurs ne dépend que des variations arbitraires de la métrique géométrique de l'espace tangent et de la métrique phasique de l'espace tangent (qui sont nulles, par définition, pour toute isométrie de l'espace tangent).

En conclusion, avec les hypothèses faites, la puissance des efforts intérieurs s'écrit sous la forme:

(VII.107)
$$\forall\tau \quad P_{int}(\mathcal{C},\delta\kappa) = \qquad 109$$

$$= -\int_{\mathcal{C}} \left\{ \langle \tau_{Ec}(\mathcal{M},\tau), \mathrm{grad}\delta\kappa_E(\mathcal{M})\rangle_{L(T,E)} + \langle \tau_{Zc}(\mathcal{M},\tau), \mathrm{grad}\delta\kappa_Z(\mathcal{M})\rangle_{L(T,Z)} \right\} dV_\tau = 0$$

où on note:

(VII.110)
$$\forall\kappa\in P \begin{cases} \tau_{E\kappa}=\rho_\kappa g_E a_{\kappa E}\theta_{E\kappa} \in L(T^*(\mathcal{M}),E^*) \\ \tau_{Z\kappa}=\rho_\kappa g_Z a_{\kappa Z}\theta_{Z\kappa} \in L(T^*(\mathcal{M}),Z^*) \end{cases} \qquad 110$$

Pour une variation réelle de la métrique de l'espace tangent dans un interval infinitésimal de temps suivant un processus mécanique, on obtient la puissance des efforts intérieurs:

(VII. 109)
$$P_{int}(\mathcal{C},\tau) = -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} \left\{ \langle \theta_{Ec}(\mathcal{M},\tau), \frac{\partial}{\partial\tau}\Gamma_{Ec}(\mathcal{M},\tau)\rangle_{L_s(T,T^*)} + \langle \theta_{Zc}(\mathcal{M},\tau), \frac{\partial}{\partial\tau}\Gamma_{Zc}(\mathcal{M},\tau)\rangle_{L_s(T,T^*)} \right\} d\mu \qquad 111$$

4.3.2. Equilibre mécanique profond.

A partir des conditions introduites (continuité des forces et principe des puissances virtuelles) on obtient les équations d'équilibre qui, il faut le remarquer, ne dépendent pas du référentiel de l'emplacement: l'équilibre est une propriété des corps matériels indépendante de leur emplacement dans un référentiel particulier (c'est pour cette raison qu'on a noté "$\mathcal{B}$ en équilibre" et non "$\mathcal{B}$ en équilibre dans κ" dans la définition précédente). Cette considération légitime l'écriture du principe des puissances virtuelles dans un référentiel d'espace profond une fois admise l'existence (et la continuité) d'actions du type force à valeurs dans l'espace dual de l'espace translation des phases.

Le principe s'écrit pour tout emplacement κ dans un référentiel d'espace profond:

(VII.112)
$$\left\{ P_{ext}(\mathcal{C},\Phi_\kappa)+P_{int}(\mathcal{C},\Phi_\kappa)=P_{acc}(\mathcal{C},\Phi_\kappa) \ \forall\Phi_\kappa:\mathcal{B}\to V_{ExZ} \right\} \leftrightarrow \mathcal{B} \text{ en équilibre} \qquad 112$$

L'équilibre est défini moyennant les vitesses virtuelles[30], bien qu'il s'agit d'une condition intrinsèque à un corps matériel: les équations locales d'équilibre ne sont donc dans notre cas que une double image (dans E et dans Z) d'équations intrinsèques.

---

30 Les vitesses virtuelles sont définies avec une liberté plus grande grâce à leur dépendance du référentiel (l'axiome d'impénétrabilité n'est pas forcement vérifié), mais, surtout, les mouvements rigidifiants (et donc la puissance des efforts intérieurs) ont été définis moyennant les isométries infinitésimales d'un référentiel.

(VII.113)

$\mathcal{B}$ en équilibre à l'instant τ 113

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} b_{cE}(\mathcal{M},\tau)+\rho_c(\mathcal{M},\tau)\gamma_{cE}(\mathcal{M},\tau)+\mathrm{div}\tau_{Ec}(\mathcal{M},\tau)=0 \\ b_{cZ}(\mathcal{M},\tau)+\rho_c(\mathcal{M},\tau)\gamma_{cZ}(\mathcal{M},\tau)+\mathrm{div}\tau_{Zc}(\mathcal{M},\tau)=0 \end{cases} & \forall \mathcal{M}\in\mathcal{B} \\ \begin{cases} t_{\partial\mathcal{B}cE}(\mathcal{M},\tau)=\tau_{Ec}(\mathcal{M},\tau)\Gamma_{Ec}(\mathcal{M},\tau)n_{\partial\mathcal{B}T}(\mathcal{M}) \\ t_{\partial\mathcal{B}cZ}(\mathcal{M},\tau)=\tau_{Zc}(\mathcal{M},\tau)\Gamma_{Zc}(\mathcal{M},\tau)n_{\partial\mathcal{B}T}(\mathcal{M}) \end{cases} & \forall \mathcal{M}\in\partial\mathcal{B} \end{cases}$$

On remarque que l'opérateur divergence matérielle, défini comme trace du gradient matériel, peut formellement être écrit par (Cf. formule (76)):

$$\mathrm{div}\cdot=(\mathrm{div}_{E}\cdot,\mathrm{div}_{Z}\cdot) \qquad 114$$

Dans le cas du polycristal traité au Chapitre IV, la contrainte géométrique τ_{Ec} ne dépend pas de la variable de phase, de façon que sa div_Z est nulle à tout instant.

La contrainte B qui apparait, dans le Chapitre IV, dans les deux équations d'équilibre à l'intérieur du corps (égale en configuration actuelle à la partie antisymétrique du tenseur de contrainte géométrique en conséquence de l'objectivité des puissances intérieures) est présente à cause du caractère non intrinsèque des équations écrites: le couplage entre les deux équations est "artificiellement" introduit dans le modèle par l'utilisation d'une description spatiale (lagrangienne ou eulerienne) des corps matériels.

5. Conclusion.

5.1. Relations avec le Chapitre IV.

On donne de suite les relations entre les définitions et les notations du présent chapitre et celles du Chapitre IV. On envisage en fait la possibilité de modifier l'ordre de lecture de ce deux chapitres une fois encadré l'objet final du travail, c'est à dire le modèle de polycristal.

Coordonnées.

Dans le Chapitre IV on a choisi un repère $\mathcal{R}$, corps matériel rigide placé dans $\mathcal{E}$, muni d'un système **E** d'axes orthonormés identifiés par la base $E_i \in E$ i=1...n (n=2 ou 3) avec origine dans $\mathcal{E}$. Tout point ω du repère $\mathcal{R}$ a été identifié du point de vue géométrique par trois coordonnées relatives aux axes E_i (i.e. un vecteur de E). Le trièdre **E** a aussi été pris comme référence (i.e. origine dans $\mathcal{E}$) pour les éléments de Z, de façon que toute orientation dans l'espace des phases a été identifiée avec une rotation des E_i, c'est à dire avec un tenseur de $Q=L_{orth}(E,E)$.

Un élément h du référentiel $\mathcal{H}=\mathcal{E}x\mathcal{E}$ est donc identifié par rapport à un emplacement donné (inversible) $\kappa_{\mathcal{R}}$ du repère $\mathcal{R}$, par un point ω de $\mathcal{R}$ [31]:

$$h=\kappa_{\mathcal{R}}(\omega) \qquad 115$$

Le même événement h est alors identifié, moyennant le système de coordonné cartésiennes d'axes **E**, par un couple ordonné position relative au repère, x, et orientation des phases par rapport aux axes du repère, θ, noté:

$$\omega \rightarrow \omega_E = \begin{bmatrix} x \\ \underline{\underline{\theta}} \end{bmatrix} \in H_E \; ; \; \begin{cases} x = x_i E_i \in E_E \\ \underline{\underline{\theta}} = \theta_{ij} E_i \otimes E_j \in Q_E = L_{orth}(E,E)_E \end{cases} \qquad 116$$

Configurations.

En description lagrangienne dans l'espace la configuration de référence est un emplacement arbitraire de référence vu par rapport au repère:

$$\omega = \kappa_{\mathcal{R}}^{-1} \circ \kappa_0(\mathcal{M}) \in \Omega_0 \subset \mathcal{R} \; ; \; \forall \mathcal{M} \in \mathcal{B} \qquad 117$$

la configuration actuelle est également liée à l'emplacement actuel selon un processus cinématique (Cf. formule (80)):

$$\omega = \kappa_{\mathcal{R}}^{-1} \circ \kappa_t(\mathcal{M}) \in \Omega_t \subset \mathcal{R} \; ; \; \forall \mathcal{M} \in \mathcal{B} \; \forall t \qquad 118$$

Selon le trièdre orthonormé **E**, fixé dans le repère $\mathcal{R}$, ces configurations sont identifiées dans H par:

$$\omega_E = \begin{bmatrix} x \\ \underline{\underline{\theta}} \end{bmatrix} ; \begin{cases} x = x_i E_i \in D_0 \subseteq E_E \\ \underline{\underline{\theta}} = \theta_{ij} E_i \otimes E_j \in Z_0 \subseteq Q_E \end{cases} \quad \text{à l'instant 0} \qquad 119$$

$$\omega_E = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{\underline{\vartheta}} \end{bmatrix} ; \begin{cases} \underline{x} = x_i E_i \in D_t \subseteq E_E \\ \underline{\underline{\vartheta}} = \vartheta_{ij} E_i \otimes E_j \in Z_t \subseteq Q_E \end{cases} \quad \text{à l'instant t}$$

Masse volumique.

La masse volumique ρ du Chapitre IV synthétise la notation (l'inverse de l'emplacement étant calculé à $\tau=0$ ou $\tau=t$ fixé; Cf. formule (IV.31))):

$$\rho_0(\omega) dV_0 = \mu(\kappa_0^{-1} \circ \kappa_{\mathcal{R}}(\omega)) \text{ et } \rho_0(\omega)_E = \rho_0(x, \underline{\underline{\theta}}) \qquad 120$$

$$\rho(\omega,t) dV_t = \mu(\kappa_t^{-1} \circ \kappa_{\mathcal{R}}(\omega)) \text{ et } \rho(\omega,t)_E = \rho(\underline{x}, \underline{\underline{\vartheta}}, t)$$

---

31 A tout événement correspond un point du repère, vue le caractère arbitraire de l'emplacement κ^* de ce dernier.

Transformation et gradient de la transformation.

La transformation inconnue lagrangienne Ω du Chapitre IV est (Cf. formules (85) et (IV.25)):

$$\Omega(\omega,t)=\kappa^{-1}_{\mathcal{R}t}\circ\pi_c(\cdot,t)\circ\kappa_{\mathcal{R}t}(\omega) \qquad 121$$

son gradient F avec les deux images F_E et F_Z dans l'espace profond sont (Cf. formules (86) et (IV.28) et (IV.29)):

$$F(\omega,t) = \kappa^{-1}_{\mathcal{R}t}\circ\nabla\pi_c(\cdot,t)\circ\kappa_{\mathcal{R}t}(\omega) = \nabla_\omega\Omega(\omega,t) \qquad 122$$

$$F_E(\omega,t) = \kappa^{-1}_{\mathcal{R}t}\circ\nabla\pi_{Ec}(\cdot,t)\kappa_{\mathcal{R}t}(\omega)\ ;\ F_Z(\omega,t) = \kappa^{-1}_{\mathcal{R}t}\circ\nabla\pi_{Zc}(\cdot,t)\kappa_{\mathcal{R}t}(\omega)$$

$$F(\omega,t)_E = \nabla_\omega\Omega(\omega,t)_E = \begin{bmatrix} F_E(x,t) \\ F_Z(x,\underline{\underline{\theta}},t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{F}}_{xx} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{F}}_{\theta x} & \underline{\underline{F}}_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

Vitesse.

Le mouvement profond d'un corps matériel relatif à un repère, $m_{\mathcal{R}\mathcal{R}}$, est défini par l'image d'un processus cinématique c du corps par rapport à un processus $c_{\mathcal{R}}$ donné sur le repère d'égale durée (par analogie au cas classique Cf. formule (VII.68)).

Les vitesses et les accélérations intrinsèques ont été définies par dérivation de la fonction emplacement dans le temps suivant un processus cinématique (Cf. formule (81)). Cette fonction est représentée dans le Chapitre IV à l'aide de la cinématique du repère $\mathcal{R}$. En configuration actuelle on a donc (description eulerienne; terme d'entraînement plus terme relatif):

$$v(\omega,t)=\frac{\partial m_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(\cdot,t)}{\partial\tau}\circ m^{-1}_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(\omega,t)\in V_{ExZ}|_{\mathcal{R}} \Rightarrow \qquad 123$$

$$\Rightarrow v=\left[\dot{\kappa}^{\circ\,1}_{\mathcal{R}t}\circ\kappa_{\mathcal{R}t} + \kappa^{-1}_{\mathcal{R}t}\circ\frac{\partial\kappa}{\partial\tau}_c(\cdot,t)\circ\kappa_c^{-1}(\cdot,t)\circ\kappa_{\mathcal{R}t}\right]$$

5.2. Conclusions sur le chapitre.

On a suivi le schéma du classique présenté au Chapitre VII pour la fondation du modèle de milieu continu profond. Les passages à la base de toute définition donnée sont les suivants:

- déduction des propriétés des corps matériels à partir de leurs représentations en tant que milieux continus (cela étant fait à l'aide de l'axiomatique de W.Noll objet du Chapitre VII).
- définition des propriétés nécessaires sur les milieux continus profonds pour que ceux-ci puissent représenter proprement de corps matériels.

Les définitions ainsi données clarifient la signification des milieux continus profonds et permettent le début d'une étude pouvant étendre l'axiomatique classique.

En particulier on a considéré l'unité de représentation des corps, c'est à dire le point matériel, définie par une position dans l'espace géométrique et par une phase dans l'espace des phases: cela permet l'introduction de la caractérisation physique des corps directement au niveau de la cinématique et de la mécanique. Cette possibilité donne un intérêt théorique, avec finalités pratiques évidentes, à l'étude des milieux continus profonds en général.

Par rapport au présent travail, les passages fait dans ce chapitre à partir de définition générales nous ont clarifié la signification mathématique des termes introduits dans le modèle du Chapitre IV.

En particulier on peut voir que les tenseurs de dilatation de Cauchy et de déformation de Green-Lagrange ont deux images distinctes dans les deux espaces de la représentation. Par conséquent il en est ainsi pour le tenseur de contrainte et pour les équations d'équilibre.

Cela explique la signification des contraintes σ, C et D du modèle du Chapitre IV, et l'utilisation de déformations et de taux de déformation géométriques et phasiques dans ce modèle. Cela explique aussi le fait d'avoir considéré couplés les transports entre configurations des contraintes C et D.

Finalement l'écriture intrinsèque des équations d'équilibre montre que la raison d'être du tenseur noté B, introduit dans le Chapitre IV, est le caractère interne des efforts intérieurs selon une représentation spatiale de la matière. La nature non intrinsèque de ce tenseur fait qu'il ne doit pas être objet d'une équation constitutive, mais plutôt d'une liaison interne (de nature mécanique).

En revenant au modèle simplifié du Chapitre III on pourra donc regarder la discussion relative au coefficient de comportement f (racine du rapport entre la "raideur" des rotations du réseau et celle de leur gradient) comme une discussion sur une possible liaison entre contrainte B et D. Pour définir la question on croit nécessaire une étude expérimentale approfondi et une étude numérique du polycristal plan du Chapitre III avec déformation hétérogène.

Conclusion

1. Plan du travail.

Le travail a été présenté en quatre parties, pour un total de huit chapitres.

Dans la première partie on a donné, dans le Chapitre I, un résumé des théories actuellement en discussion sur la physique du phénomène des bandes de cisaillement dans les métaux (avec référence aux alliages d'aluminium), et, dans le Chapitre II, un résumé des modèles thermo-mécaniques centrés sur de tels problèmes.

Dans la deuxième partie du travail on a présenté le modèle de polycristal proposé.

En particulier dans le Chapitre III on a présenté un modèle de polycristal plan en déformations planes, dit de poly-lamelle, suivant la formulation de milieu continu "profond" qui fait l'objet principal de ce travail (Ch.III § 1.). On a considéré un exemple, de compression simple, pour lequel l'étude des solutions possibles, selon des comportements simplifiés, donne des résultats qui peuvent être comparés avec les modèles classiques correspondants (Ch.III § 2.).

Le Chapitre III permet d'introduire les milieux continus "profonds" et le modèle tridimensionnel objet du Chapitre IV. Dans celui-ci on donne le modèle de milieu continu profond correspondant à un polycristal tridimensionnel en transformation finie (Ch.IV § de 1. à 5.). On choisi à cette fin les orientations cristallines dans l'espace comme phases (ensemble des dimensions de l'espace "profond" en plus par rapport à celles de l'espace géométrique usuel). Ce modèle, avant toute détermination et vérification expérimentales, a dû être étudié par rapport à sa pertinence physique et à sa cohérence mathématique. Ces aspects sont l'objet des quatre chapitres suivants.

Dans la troisième partie du travail on a étudié la pertinence microscopique du modèle proposé.

En particulier dans le Chapitre V on a d'abord analysé, en général, la thermo-mécanique des matériaux multi-phasiques avec changements de phase (Ch.V § 1.). Ensuite on a regardé les définitions possibles de phase et quels sont les caractéristiques nécessaires pour qu'une variable de phase permet une formulation de milieu continu profond (Ch.V § 2.). Finalement on a introduit une opération intégrale d'observation approchée, dite de globalisation, qui permet de transformer un milieu continu ayant une fonction de phase en un milieu continu profond (Ch.V § 3.).

Dans le Chapitre VI on a défini d'abord les bilans thermo-mécaniques d'un milieu continu avec fonction de phase (Ch VI § 2.). Ensuite, par application de l'opération de globalisation objet du Chapitre V, on a identifié les grandeurs définies sur un milieu à phase continue avec celles du milieu continu avec fonction de phase: ce passage explique la pertinence microscopique du milieu continu profond.

Dans la quatrième et dernière partie de ce travail on a clarifié les passages et les hypothèses mathématiques permettant la formulation du modèle de milieu continu profond.

Dans le Chapitre VII on a donné un résumé de la mécanique axiomatique classique (basé sur les travaux de W.Noll).

Dans le Chapitre VIII on a donné les définitions nécessaires pour les milieux continus profonds. En outre ce cadre axiomatique défini un modèle général de milieu continu profond, indépendamment du choix de la phase.

2. Conclusions.

2.1. Première Partie.

2.1.1. Métallurgie.

L'étude bibliographique de la métallurgie des bandes de cisaillement montre que celles-ci ont des origines microscopiques (à l'échelle des cellules de dislocations), mais qu'elles sont aussi liées aux niveaux supérieurs. En particulier on a vu qu'il se manifeste de micro-bandes de cisaillement, de taille de l'ordre de celle des grains, dans un état de déformation de la structure cristalline de peu antérieur à celui d'apparition des macro-bandes de cisaillement qui nous intéressent. La relation entre ces deux phénomènes étant objet de désaccord parmi les auteurs confrontés.

Les points sur lesquels il existe une certaine uniformité d'interprétation sont liés à la morphologie et à la cristallographie avec texture marquée lors de l'apparition des bandes (pour des processus de déformation type laminage à froid) et aux niveaux élevés d'écrouissage, visibles par une structuration importante des dislocations bloquées. Le phénomène a, de toute façon, les caractéristiques d'une instabilité du système qui se forme aux hauts niveaux d'écrouissage par déformation.

Sur la base de ces points on a considéré un certain nombre de demandes de modélisation pour simuler l'apparition des bandes de cisaillement dans un polycristal idéal. En particulier apparaît nécessaire le couplage entre processus thermo-mécanique suivi par le système et évolution de la texture, et l'interaction, dans cette évolution, entre orientations différentes du réseaux et entre grains non équi-orientés.

2.1.2. Mécanique et Thermodynamique.

On a considéré un classement des problèmes à aborder pour l'étude de la stabilité des polycristaux en transformation finie: l'existence d'un état local approprié, l'évolution des textures, le comportement homogène et celui des monocristaux, l'instabilité des processus suivis par les systèmes indépendants du temps.

L'ensemble des modèles ainsi repérés dans la littérature permet une étude qui ne satisfait pas les demandes ressorties de l'étude bibliographique et qui, par ailleurs, n'est pas dépourvue de difficultés techniques et intrinsèques. En particulier ce sont, d'abord, les interactions entre modèle mécanique et évolution des textures qui ne répond pas à nos exigences et, ensuite, la compatibilité entre une étude de localisation fait sur un module tangent homogène et la recherche d'un tel comportement.

2.2. Deuxième Partie.

2.2.1. Polycristal plan.

Dans le modèle de polycristal plan proposé l'évolution des textures est régie par des grandeurs en équilibre avec les contraintes.

Ce modèle représente bien, pour un choix convenable du paramètre de comportement f, le phénomène de la formation de textures plus ou moins concentrées dans des directions privilégiées au cours de la déformation. Pour un choix différent de f le modèle montre l'arrêt de l'évolution de la texture au delà d'un niveau donné de déformation, ce qui est réaliste pour des déformations élevées.

Il suffit de regarder l'inégalité de Clausius-Duhem selon ces différentes valeurs du paramètre de comportement f pour comprendre qu'une évolution du comportement donnant une concentration initiale et une stabilisation successive de la texture doit provenir de contributions négatives au taux de production d'entropie: dans une phase initiale de la déformation l'ordre de la texture du polycristal augmente (la production d'entropie demeure positive dans cette phase à cause des dissipations liées aux gradients du taux de rotation du réseau cristallin).

Le paramètre f en objet est le rapport entre les contraintes (scalaires dans le modèle plan) μ et D, duales respectivement du taux de rotation relative matériau-matière et du gradient phasique du taux de rotation des phases. En modifiant ce paramètre on peut, non seulement suivre l'évolution des texture comme expliqué ci-dessus, mais aussi modifier les directions privilégiées par cette évolution. Il résulte, du modèle mécanique intrinsèque étudié dans le Chapitre VI, que la

contrainte μ n'est pas une grandeur constitutive, mais plutôt le résultat d'une liaison interne: c'est donc le paramètre f qui régie cette liaison.

En conclusion le modèle de poly-lamelle proposé a l'avantage de permettre une écriture simple des lois de comportement au prix d'une augmentation de la taille du problème posé.

Les caractéristiques principales des modèles classiques (avec liaison cinématique entre rotations du réseau et mouvement de la matière) peuvent être obtenues dans des cas particuliers.

L'identification expérimentale des contraintes introduites dans le modèle se base sur la possibilité de mesurer la densité d'énergie stockée par unité de désorientation des grains. Une identification numérique peut être faite par comparaison avec un modèle microscopique. Des identifications de ce type ne semblent pas de difficulté insurmontable.

2.2.2. Polycristal.

On a défini d'abord la cinématique, mécanique et thermodynamique du modèle de polycristal dans l'espace profond en suivant un formalisme classique. Ce formalisme est justifié dans le Chapitre VIII.

On a obtenu ainsi, outre les équations usuelles, l'équation de conservation des phases, l'équation indéfinie d'équilibre entre contraintes phasiques avec conditions au contour, et un terme de production d'entropie par phase dans l'inégalité de Clausius-Duhem.

Ensuite on a explicité la forme des équations de comportement valables en plasticité indépendante du temps et on a déduit les lois d'état et l'expression de la dissipation. A cette fin on a eu l'avantage d'une décomposition du gradient de la transformation géométrique liée à la transformation des phases qui définit sans ambiguïté une configuration naturelle locale.

Des hypothèses sur la dissipation intrinsèque permettent de définir complètement le problème relatif à l'évolution géométrique de la matière: en postulant non dissipatrice la compétition entre puissance élastique bloquée et puissance de rotation des phases par les contraintes géométriques on a relié les taux d'évolution des variables cinématiques associées à ces puissances; en introduisant une hypothèse sur la nature de la déformation plastique on a obtenu la loi d'écoulement plastique de milieu continu en fonction des lois de Schmid données sur les systèmes de glissement isolés.

Le problème constitutif de l'évolution du corps dans l'espace des phases demeure ouvert.

L'instabilité du système doit aussi être étudiée, mais on peut envisager une approche simplifiée pour détecter le risque d'apparition des bandes de cisaillement: il suffit de contrôler qu'aucune phase ne rejoint une densité critique au delà de laquelle elle peut percoler en traversant l'élément de volume du polycristal, donnant lieu à une bande de cisaillement (ou à des conditions favorables pour son apparition). Comme l'on suit la densité des orientations cristallines (phases) dans le temps à l'intérieur du corps, une telle vérification est très simple. La densité critique a été indiquée moyennant un modèle simple de percolation, mais elle pourra être déterminée expérimentalement.

2.3. Troisième Partie.

2.3.1. Pertinence.

L'objectif principal du cinquième chapitre est l'obtention d'un outil d'observation approchée à une échelle donnée de grandeurs définies à une échelle inférieure. Cet outil devant tenir compte des phases, on a donné d'abord les précisions nécessaires sur les possibles espaces des phases et sur l'espace des tenseurs orthogonaux droits (constituant les phases choisies).

L'outil en objet est appelé fonctionnelle d'observation ou opération de globalisation: comme pour une transformation linéaire, il donne une fonction des phases pour toute fonction d'espace définie sur un domaine ayant aussi une fonction de phase. Il s'agit d'un opérateur non linéaire à cause de la nature de l'espace des phases choisi.

2.3.2. Equivalence microscopique.

En écrivant, pour un milieu avec fonction de phase continue (dit milieu à phase continue), les équations de bilan thermo-mécanique séparément pour toute phase, il faut introduire une puissance virtuelle, une énergie interne et une cinétique, et une entropie échangée entre phases.

Ceci donne lieu à une force et à des puissances échangées qui doivent être nulles en somme sur les phases.

La partie principale de la valeur locale de ces échanges a été obtenue moyennant la globalisation: ce sont en fait les dérivées partielles de la fonction d'observation qui définissent ces échanges.

Les bilans par phase écrits pour le milieu à phase continue et pour le milieu continu profond ont été comparés en postulant qu'ils sont équivalents tant dans un élément de taille minimale du milieu à phase continu que dans un point du milieu continu profond (point géométrique et orientation de phase). Cela explique, faisant appel à des concepts et à des définitions classiques de la thermo-mécanique des milieux continus, la signification du modèle de polycristal dans l'espace profond qui, introduit par de raisonnements formels, n'est donc pas dépourvu d'intérêt pratique.

En particulier on a remarqué que les nouvelles contraintes définies dans ce dernier représentent le flux d'énergie interne qui se vérifie dans un matériau multi-phasique par effet des changements de phase (formule (VI.85)).

2.4. Quatrième Partie.

Les définitions liées à la nature intrinsèque des corps matériels, vues dans un cadre étendu, clarifient la signification des milieux continus profonds: on considère que l'unité de représentation des corps est une position dans l'espace géométrique et une phase dans l'espace des phases.

Cette étude liée à l'axiomatique classique de W.Noll nous a permis de définir la nature mathématique des grandeurs données sur le milieu continu profond.

En particulier on a vu que les tenseurs de dilatation de Cauchy et de déformation de Green-Lagrange ont deux images distinctes dans les deux espaces de la représentation; par conséquent il en est ainsi pour le tenseur de contrainte et pour les équations d'équilibre. cela explique la signification des contraintes σ, C et D du modèle du Chapitre III et IV, et l'utilisation de déformations et de taux de déformation géométriques et phasiques dans ce modèle. En particulier on remarque que les contraintes C et D représentent un seul être intrinsèque et il doivent être donc objet d'une seule étude de comportement.

Finalement l'écriture intrinsèque des équations d'équilibre a montré que la raison d'être du tenseur noté B, introduit dans le Chapitre III, est le caractère interne des efforts intérieurs selon une représentation spatiale de la matière. La nature non intrinsèque de ce tenseur fait qu'il ne doit pas être objet d'une équation constitutive, mais plutôt d'une liaison interne (de nature mécanique).

3. Suite du travail.

3.1. Possibilités actuelles.

A l'état actuel on ne peut pas obtenir de résultats quantitatifs d'un modèle de milieu continu profond à cause du manque de connaissance du comportement des contraintes de phase.

D'un autre coté le modèle se propose, hors des limites de ce travail, comme outil d'étude: le déroulement de l'axiomatique étendue proposée pour d'autres choix des phases peut donner de nouvelles interprétation des modèles connus (à ce propos on a donné une liste, non exhaustive, des choix possibles d'un espace des phases; Ch. V § 2.2.).

Il faut aussi noter que, à coté des questions n'ayant pas encore de solution, on a aussi obtenu un certain nombre de simplification et de réponses satisfaisantes du modèle qui, d'ailleurs, justifient notre intérêt futur (voir par exemple la décomposition cinématique dans l'espace profond, l'écriture du comportement des contraintes de Cauchy, l'explication microscopique des grandeurs profondes, etc.).

3.2. Problèmes ouverts.

Nous avons la sensation d'avoir ouvert plus de problèmes que nous n'en avons résolus! Mais c'est par la solution de ces problèmes qu'on espère parvenir à un outil effectivement adapté aux exigences de l'étude envisagée.

La partie principale des problèmes théoriques d'un modèle de milieu continu profond a été résolue, au moins dans les limites qu'on s'est posé.

Le problème fondamental est donc dans l'absence d'équations de comportement (et de liaison interne) pour la partie "phasique" du modèle. De ce point de vue le passage micro-macro des Chapitres V et VI du travail donne les indications principales pour la suite.

Toujours sur ce point il faut remarquer que la puissance actuelle des moyens d'observation permet, dès qu'on se donne des objectifs précis, l'obtention des données nécessaires à ce modèle.

Parallèlement au problème du comportement se présente celui des conditions au contour et des actions extérieures et inertielles: qu'est ce que sont les "forces" duales des rotations des cristaux? Une réponse à cette question pourrait venir de l'application de la globalisation aux systèmes des forces.

3.3. Voies envisageables.

On peut envisager deux voies parallèles pour la suite du travail et une troisième voie d'approfondissement du modèle proposé avec une plus grande précision sur l'instabilité.

Une première voie est celle de la recherche expérimentale des lois de comportement manquantes. Il s'agit, comme déjà dit, d'obtenir de mesures de densité d'énergie stockée au cours de la déformation et de comparer ces énergies avec la vitesse d'évolution des orientations cristallines et ses gradients.

Une deuxième voie, qui peut rendre la première plus aisée si elle est conduite en même temps, est celle d'obtenir ces lois de comportement par des modèles numériques. Par exemple on peut considérer un modèle numérique d'un élément de volume représentatif d'un polycristal et déduire l'évolution des grandeurs constitutives profondes par globalisation.

Par rapport à l'instabilité plastique on peut dire beaucoup plus que ce qui a été fait. En particulier on a, d'un coté, la possibilité d'améliorer l'étude des bandes de cisaillement comme phénomène de percolation d'une phase (ou d'un ensemble de phases aux orientations proches) dans l'agrégat. D'un autre coté on peut essayer d'obtenir la plasticité macroscopique du milieu continu profond à partir de l'instabilité plastique des cristaux.

Une remarque conclusive doit être faite par rapport à l'une des motivations principales à l'origine du modèle présenté, et qui a été cachée jusqu'à présent, qui est celle de bâtir un système destiné au calcul numérique en parallèle. L'objectif ultime, de ce point de vue, est celui de considérer le milieu continu profond comme un ensemble de milieux continus homogènes simples avec un minimum d'interaction entre eux.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Com.= Communication, Cont.= Contribution, Rapp = Rapport Interne, Lect.= Lecture

[1] R.J.Asaro, A.Needleman, "Texture development and strain hardening in rate dependent polycrystals", Cours, Division of Engineering - Brown University, Providence, U.S.A., 1984.

[2] J.L.Bassani, "Single crystal hardening", Appl. Mech. Rev. vol 43, no 5, Part 2, pp. S320-S327, May 1990.

[3] B.Bay, N.Hansen, D.A.Hughes, D.Kuhlmann-Wilsdorf, "Evolution of F.C.C. deformation structures in polyslip", Acta metall. mater., Vol. 40, No. 2, pp. 205-219, 1992.

[4] A.Benallal, R.Billardon, G.Geymonat, "Condition de bifurcation à l'intérieur et aux frontières pour une classe de matériaux non-standards", C.R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série II, pp. 893-898, 1989.

[5] M.Berveiller, A.Zaoui, "An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals", J.Mech Phys. Solids, Vol. 26, pp. 325-344, 1978.

[6] J.E.Bird, J.M.Carlson, "Shear band formation during sheet forming", Journal of Metals, pp.47-54, November 1986.

[7] J.E.Bird, K.E.Newman, K.Narasimhan, J.M.Carlson, "Heterogeneous initiation and growth of sample-scale shear bands during necking of Al-Mg sheet", *Acta metall.* Vol. 35, No. 12, pp. 2971-2982, 1987.

[8] G.Borré, G.Maier, "On linear versus nonlinear flow rules in strain localization analysis", Meccanica, **24** (1989), 36-41.

[9] F.R.Boutin, "Metallurgie de la mise en forme de l'aluminium et de ses alliages", C.R.V. rapport N°1751.

[10] H.B.Callen, "Thermodynamics and an introduction to Thermostatistics", Second Edition, John Wiley & Sons.

[11] G.R.Canova, U.F.Kocks, M.G.Stout, "On the origin of shear bands in textured polycristals", Scripta Metallurgica Vol. 18, pp. 437-442, 1984.

[12] G.R.Canova, U.F.Kocks, C.N.Tomé, J.J.Jonas, "The yield surface of textured polycrystals", J.Mech. Phys. Solids, Vol. 33, No. 4, pp. 371-397, 1985.

[13] G.Capriz, "Continui con microstruttura", Bollettino U.M.I., Vol. 6, No. 3-A, pp. 181-195, 1984.

[14] G.Capriz, "Continua with latent microstructure", Arch. R.Mech., Vol. 90, No. 1, pp. 43-56, 1985.

[15] G.Capriz, E.G.Virga, "Interactions in general continua with microstructure", Arch. R. Mech., Vol. 109, No. 4, pp. 323-342, 1990.

[16] S.Cleja Ţigoiu, E.Soós, "Elastoviscoplastic models with relaxed configurations and internal state variables", Appl. Mech. Rev., Vol. 43, No. 7, pp. 131-151, July 1990.

[17] J.Desrues, "La localisation de la déformation dans les matériaux granulaires", Thèse, Université Scientifique et Médicale de Grenoble et Institut National Polytechnique de Grenoble, 1984.

[18] H.E.Dève, S.Harren, C.McCullough, R.J.Asaro, "Micro and macroscopic aspects of shear band formation in internally nitrided single crystals of Fe-Ti-Mn alloys", *Acta metall.* Vol. 36, No. 2, pp. 341-365, 1988.

[19] H.E.Dève, R.J.Asaro, "The development of plastic failure modes in crystalline materials: shear bands in F.C.C. polycrystals", Metallurgical Transactions Vol. 20A, pp.579-593, 1989.

[20] I.L.Dillamore, J.G.Roberts, A.C.Bush, "Occurrence of shear bands in heavily rolled cubic metals", Metal Science, pp.73-77, February 1979.
[21] P.H.Dluzewski, "Some remarks on the integration domain of the slip orientations", Arch. Mech., 39, 4, pp. 419-422, 1987.
[22] P.H.Dluzewski, "Cristal orientation spaces and remarks on the modelling of polycrystal anisotropy", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 39, No. 5, pp. 651-661, 1991.
[23] I.Doghri, "Etude de la localisation de l'endommagement", Thèse, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1989.
[24] J.Driver, "Progrès dans la détermination des microtextures par microscopie électronique à balayage", Com. Journées d'Automne de la Société Française de Métallurgie et de Matériaux, Mémoires et Etudes Scientifiques Revue de Métallurgie, pp. 508, Septembre 1992.

[25] Y.Estrin, L.P.Kubin, "Local strain hardening and nonuniformity of plastic deformation", Acta metall. Vol. 34, No. 12, pp. 2455-2464, 1986.
[26] J.D.Embury, A.Korbel, V.S.Raghunathan, J.Rys, "Shear band formation in cold rolled Cu-6%Al single crystals", *Acta metall.* Vol. 32, No. 11, pp. 1883-1894, 1984.

[27] W.Flügge, "Tensor Analysis and Continuum Mechanics", Springer-Verlag, 1972.
[28] R.Fortunier, "Contribution à l'étude de la déformation plastique des cristaux et des polycristaux", hèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 1987.

[29] G.Geymonat, "Bifurcation and localization in rate-independent materials. Some theoretical considerations" in "Bifurcation and instability of dissipative systems", Lect. Centro Internazionale di Scienze Meccaniche, Udine, 59 pp., June 17-21, 1991.

[30] S.V.Harren, R.J.Asaro, "Nonuniform deformations in polycristals and aspects of the validity of the Taylor model", J.Mech. Phys. Solids, Vol. 37, No. 2, pp. 191-232, 1989.
[31] S.V.Harren, H.E.Dève, R.J.Asaro, Overview no.72, "Shear band formation in plane strain compression", *Acta metall.* Vol. 36, No. 9, pp. 2435-2480, 1988.
[32] S.V.Harren, "The finite deformation of rate-dependent polycrystals - I. A self-consistent framework", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 39, No. 3, pp. 345-360, 1991.
[33] S.V.Harren, "The finite deformation of rate-dependent polycrystals - II. A comparison of the self-consistent and Taylor methods", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 39, No. 3, pp. 361-383, 1991.

[34] S.R.Kalidindi, C.A.Bronkhorst, L.Anand, "Crystallographic texture evolution in bulk deformation processing of FC metals", Mech. Phys. Solids, Vol. 40, No. 3, pp. 537-569, 1992.
[35] A.Korbel, V.S.Raghunathan, D.Teirlinck, W.Spitzig, O.Richmond, J.D.Embury, "A structural study of the influence of pressure on shear band formation", *Acta metall.* Vol. 32, No. 4, pp. 511-519, 1984
[36] A.Korbel, J.D.Embury, M.Hatherly, P.L.Martin, H.W.Erbsloh, "Microstructural aspects of strain localization in Al-Mg alloys", *Acta metall.* Vol. 34, No. 10, pp. 1999-2009, 1986.
[37] A.Korbel, P.Martin, "Microscopic versus macroscopic aspect of shear bands deformation", *Acta metall.* Vol. 34, No. 10, pp. 1905-1909, 1986.
[38] A.Korbel, M.Richert, "Formation of shear bands during cyclic deformation of aluminium", *Acta metall.* Vol. 33, No. 11, pp. 1971-1978, 1985.
[39] T.Kurtyka, M.Życzkowski, "A geometric description of distortional plastic hardening of deviatoric materials", Arch. Mech., 37, 4-5, pp. 383-395, 1985.
[40] T.Kurtyka, "Parameter identification of distortional model of subsequent yield surfaces", Arch. Mech., 40, 4, pp. 433-454, 1988.

[41] D.J.Lloyd, E.F.Butryn, M.Ryvola, "Deformation morphology in cold rolled Al-Mg alloys", eds. Microstructural Science, Vol. 10, Elsevier, 1982.
[42] W.B.Lee, K.C.Chan, "A microplasticity analysis of shear band cracks in rolled 2024 aluminium alloy", *International Journal of Fracture* 52, pp. 207-221, 1991.

[43] W.B.Lee, K.C.Chan, "A criterion for the prediction of shear band angles in F.C.C. metals", *Acta metall.* Vol. 39, No. 3, pp. 411-417, 1991.

[44] J.Lendvai, G.Honyek, A.Juhasz, I.Kovacs, "A differential scanning calorimetry study of the release of stored energy in an Al-Fe alloy", Scripta Metallurgica Vol. 19, pp. 943-946, 1985.

[45] P.Lipinski, M.Berveiller, F.Corvasce, "Statistical approach to elastoplastic behavior of polycrystals at finite deformations", Arch. Mech., 40, 5-6, pp. 725-740, 1988.

[46] B.Loret, J.H.Prévost, O.Harireche, "Loss of hyperbolicitiy in elastic-plastic solids with deviatoric associativity", Eur. J. Mech., A/Solids, 9, No. 3, pp. 225-231, 1990,

[47] J.Mandel, "Plasticité classique et viscoplasticité", Cours at Centro Internazionale di Scienze Meccaniche, Udine, Springer-Verlag, 1971.

[48] J.Mandel, "Définition d'un repère privilégié pour l'étude des transformations anélastiques du polycristal", Journal de Mécanique théorique et appliquée, Vol. 1, No. 1, pp. 7-23, 1982.

[49] B.Marandet, C.Poux, Ph. Lequeu, "Etude des conditions d'apparition des bandes de cisaillement en laminage à chaud. Cas des alliages 5083 et 5086", rapport C.R.V. No. 2413, Juillet 1989.

[50] K.K.Mathur, P.R.Dawson, U.F.Kocks, "On modeling anisotropy in deformation processes involving textured polycrystals with distorted grain shape", Mechanics of Materials, 10, pp. 183-202, 1990.

[51] M.E.Mear, J.W.Hutchinson, "Influence of yeld surface curvature on flow localisation in dilatant plasticity", Mechanics of Materials, 4 (1985), 395-407.

[52] M.M.Mehrabadi, S.Nemat-Nasser, "Some basic kinematical relations for finite deformations of continua", Mechanics of Materials, 6, pp. 127-138, 1987.

[53] K.Morii, H.Mecking, Y.Nakayama, "Development of shear bands in F.C.C. single crystals", *Acta metall.* Vol. 33, No. 3, pp. 379-386, 1985.

[54] W.Muschik, "Non equilibrium thermodynamics with application to solids" in "Non-equilibrium thermodynamics with application to solids", Lect. Centro Internazionale di Scienze Meccaniche, Udine, 45 pp., September 28 - October 9, 1992.

[55] F.R.N.Nabarro, "Work hardening of face-centered cubic single crystals" in "Strength of Metals and Alloys (ICSMA 7)", Proceedings of the 7th Int. Conf. on the Strength of Metals and Alloys, Montreal, Canada, 12-16 August 1985, Vol. 3, Pergamon Press, pp.1667-1700, 1985.

[56] S.Nemat-Nasser, "Phenomenological theories of elastoplasticity and strain localization at high strain rates", Appl.Mech.Rev. Vol. 45, No. 3, Part 2, pp. S19-S45, March 1992.

[57] E.Nes, W.B.Hutchinson, A.A.Ridha, "On the formation of microbands during plastic straining of metals" in "Strength of Metals and Alloys (ICSMA 7)", Proceedings of the 7th Int. Conf. on the Strength of Metals and Alloys, Montreal, Canada, 12-16 August 1985, Vol. 3, Pergamon Press, pp.57-62, 1985.

[58] W.Noll, "La mécanique classique basée sur un axiome d'objectivité" (1959) dans "The Foundations of Mechanics and Thermodynamics, Selected Papers by W. Noll", Springer-Verlag, 1974.

[59] W.Noll, "Euclidean Geometry and Mikowskian Chronometry" (1964) dans "The Foundations of Mechanics and Thermodynamics, Selected Papers by W. Noll", Springer-Verlag, 1974.

[60] W.Noll, "Space-Time Structures in Classical Mechanics" (1967) dans "The Foundations of Mechanics and Thermodynamics, Selected Papers by W. Noll", Springer-Verlag, 1974.

[61] W.Noll, "Materially Uniform Simple Bodies with Inhomogeneities" (1967) dans "The Foundations of Mechanics and Thermodynamics, Selected Papers by W. Noll", Springer-Verlag, 1974.

[62] W.Noll, "A New Matematical Theory of Simple Materials" (1972) dans "The Foundations of Mechanics and Thermodynamics, Selected Papers by W. Noll", Springer-Verlag, 1974.

[63] W.Noll, "Lectures on the Foundations of Continuum Mechanics and Thermodynamics" (1973) dans "The Foundations of Mechanics and Thermodynamics, Selected Papers by W. Noll", Springer-Verlag, 1974.

[64] Q.S.Nguyen, H.Petryk, "A constitutive inequality for time-independent dissipative solids", C.R.Acad.Sci.Paris, t. 312, Série II, pp. 7-12, 1991.

[65] Q.S.Nguyen, "Bifurcation and stability of the time-independent standard dissipative systems" in "Bifurcation and instability of dissipative systems", Lect. Centro Internazionale di Scienze Meccaniche. Udine, 51 pp., June 17-21, 1991.

[66] B.Orlans-Joliet, "Déformation plastique de monocristaux de structure cubique centrée en compression plane", Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines de saint-Etienne, 1989.

[67] T.Öztürk, G.J.Davies, "Texture softening and strain instability in F.C.C. metals: plane-strain deformation", Acta metall. Vol. 35, No. 9, pp. 2307-2314, 1987.

[68] H.Petryk, "On constitutive inequalities and bifurcation in elastic-plastic solids with yeld-surface vertex", *J.Mech.Phys.Solids* Vol. 37, No. 2, pp. 265-291, 1989.

[69] H.Petryk, "General theory of bifurcation and stability in time-independent plasticity" in "Bifurcation and instability of dissipative systems", Lect. Centro Internazionale di Scienze Meccaniche, Udine, 64 pp., June 17-21, 1991.

[70] H.Petryk, "Stability and constitutive inequalities in plasticity" in "Non-equilibrium thermodynamics with application to solids", Lect. Centro Internazionale di Scienze Meccaniche, Udine, 64 pp., September 28 - October 2, 1992.

[71] H.Petryk, "Material instability and strain-rate discontinuities in incrementally nonlinear continua", *J.Mech.Phys.Solids* Vol. 40, No. 6, pp. 1227-1250, 1992.

[72] B.Raniecki, S.K.Samanta, "The thermodynamic model of a rigid-plastic solid with kinematic hardening, plastic spin and orientation vatiables", Arch. Mech., 41, 5, pp. 747-758, 1989.

[73] M.M.Rashid, "Texture evolution and plastic response of two-dimensional polycrystals", *J.Mech.Phys.Solids* Vol. 40, No. 5, pp. 1009-1029, 1992.

[74] C.N.Reid, "Deformation Geometry for Material Scientists", International Series on Material Science and Technology Vol. 11, Pergamon Press, 1973.

[75] C.Renoux, B.Chenal, O.Engler, "Shear banding in binary Al-alloys", Institut für Metallkunde und Metallphysik - Aachen, Germany, 1992.

[76] N.M.Ribe, "A Continuum Theory for Lattice Preferred Orientation", Int. Ecole Normale Superieure, Departement de Geologie, Paris, 1988.

[77] F.Roddier, "Distributions et transformations de Fourier", Ediscience, 1971.

[78] P.Rougee, "Formulation lagrangienne intrinsèque en mécanique des milieux continus", *Journal de Mécanique*, Vol. 19, No. 1, pp. 7-32, 1980.

[79] P.Rougee, "La variété des formes d'un élément simple et son utilisation dans la formulation lagrangienne intrinsèque du comportement", C.R.Acad. Sci. Paris, t. 306, Série II, p. 947-952, 1988.

[80] P.Rougee, "A new Lagrangian intrinsic approach to large deformations in continuous media", *Eur. J. Mech., A/Solids*, Vol. 10, No. 1, pp. 15-39, 1991.

[81] H.Scher, R.Zallen, "Critical density in percolation processes", J.Chem.Phys., Vol. 53, pp.3759-3761, 1970.

[82] L.Schwartz, "Théorie des distributions", Hermann, 1966.

[83] A.Skalli Housseyni, "Etude théorique et expérimentale de la déformation plastique en compression plane de cristaux d'aluminium", Thèse, Université Scientifique et Medicale de Grenoble et Institut National Polytechnique de Grenoble, 1984.

[84] G.Sornberger, B.Marandet, F.R.Boutin, "Experimental study of shear band formation in Al-Mg alloys", 8th ILMT, Leoben-Vienna, 1987.

[85] C.Stolz, "Anélasticité et stabilité", Thèse, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1987.

[86] Tran Quoc Thang, "Propriétés mécaniques et micro-structure d'alliages industriels d'aluminium prédéformés par laminage", Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1986.

[87] C.A.Truesdell, "A First Course in Rational Continuum Mechanics", Academic Press, 1977.

[88] Van der Giessen, P. van Houtte, "A 2D analytical multiple slip model for continuum texture development and plastic spin", Mechanics of Materials 13, pp. 93-115, 1992.

[89] Van Houtte, "Problems related to the relaxed constraints theories for the plastic deformation of polycristals", Cont. "Theoretical Methods of Texture Analysis", Ed. H.J.Bunge, Deutsche Gesellschaft für Metallkunde, Informationsgesellschaft - Verlag, pp. 241-249, 1987.

[90] Van Houtte, "Yield locus calculation from texture data", Cont. "Theoretical Methods of Texture Analysis", Ed. H.J.Bunge, Deutsche Gesellschaft für Metallkunde, Informationsgesellschaft - Verlag, pp. 273-278, 1987.

[91] K.Wierzbanowski, A.Hihi, M.Berveiller, A.Clément, "Rolling textures predicted by self-consistent model and continuity equation", Com. 7th Int. Conf. on Textures of Materials - ICOTOM 7 - Netherlands Society for Material Science, pp. 179-183, 1984.

[92] W.Y.Yeung, B.J.Duggan, "Shear band angles in rolled F.C.C. materials", *Acta metall.* Vol. 35, No. 2, pp. 541-548, 1987.

[93] A.Zaoui, "Matériaux hétérogènes", Cours at Ecole Polytechnique, Departement de Mécanique, Palaiseau, 1991.

[94] M.A.Zikry, S.Nemat-Nasser, "High strain-rate localization and failure of crystalline materials", Mechanics of Materials, 10, pp. 215-237, 1990.

L I S T E
des illustrations

Chapitre I

Fig.1
Représentation d'une micro-bande (d'après [Nes, Com. 1985]) 13
Fig.2
Ecrouissage positif après apparition des bandes de cisaillement (d'après [Dève et al. 1988]) 15

Chapitre II

Fig.1
Ecrouissage en glissement simple ou multiple (d'après [Bassani 1990]) 49
Fig.2
Poly-lamelle à un glissement (d'après [van der Giessen et van Houtte 1992]) 53
Fig.3
Poly-lamelle à deux glissements (d'après [Rashid 1992]) 54
Fig.4
Poly-lamelle à deux directions 54

Chapitre III

Fig.1
Schéma de poly-lamelle utilisé. f=π/3 79
Fig.2
Géométrie de l'exemple proposé. 97
Fig.3
Graphes du taux de rotation relative v normalisée selon la valeur de f 99
Fig.4
Graphe du taux de glissement pour f réel 100
Fig.5
Graphe du taux de glissement pour f imaginaire 100
Fig.6
Evolution de la fonction d'orientation g(ϑ) en compression pour f réel. 101
Fig.7
"Saturation" de l'évolution des textures dans le temps en compression pour f réel. 102
Fig.8
Evolution de la fonction d'orientation g(ϑ) en compression pour f imaginaire. 103
Fig.9
Evolution de la fonction d'orientation g(ϑ) en cisaillement pour f réel 105
Fig.10
Evolution de l'orientation plus fréquent en cisaillement pour f réel. 106
Fig.11
Evolution de la fonction d'orientation g(ϑ) en cisaillement pour f imaginaire 107
Fig.12
Evolution de l'orientation plus fréquent en cisaillement pour f imaginaire. 107
Fig.13
Projections d'un tétraèdre sur un plan. 109

Chapitre IV

Fig.1
Objets (directions de glissement) coïncidents pour deux trièdres distincts (d'après [Dluzewski 1991]) 117
Fig.2
Décomposition de la partie irréversible du gradient de la transformation géométrique 152
Fig.3
Schéma des décompositions du gradient de la transformation géométrique. 152
Fig.4
Jeu énergétique virtuel. 153

Chapitre V

Fig.1
Fluctuations ϕ et Φ de la fonction de phase avec "longueurs" d'onde λ et Λ. 186
Fig.2
Angles d'Euler 200
Fig.3
Fonctions distance et mesure porte pour l'ensemble des orientations sur un demi cercle trigonométrique 211
Fig.4
Graphes de densités cloche pour des différentes approximations. 213
Fig.5
Graphes des dérivées des densités cloche de la figure précédente en valeur absolu. 213
Fig.6
Comparaison des mesures par distribution cloche et par distribution porte d'un même signal. 214
Fig.7
Exemple de fonction f(y) et de fonction de phase z(y). 218
Fig.8
Graphe de la globalisée f(z) de la fonction f(y) et de l'unité répartie sur le demi-cercle 1(z). 219