



**HAL**  
open science

# Approche du dimensionnement des structures en béton armé par le calcul à la rupture

Daniel Averbuch

► **To cite this version:**

Daniel Averbuch. Approche du dimensionnement des structures en béton armé par le calcul à la rupture. Matériaux. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996. Français. NNT : . tel-00523025

**HAL Id: tel-00523025**

**<https://pastel.hal.science/tel-00523025>**

Submitted on 4 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 20287 (4)

X

**THÈSE**  
**présentée pour l'obtention du Diplôme de**  
**DOCTEUR**  
**DE**  
**L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES**  
**Spécialité : Structures et Matériaux**

**par Daniel AVERBUCH**

**Sujet de la thèse :**

**APPROCHE DU DIMENSIONNEMENT  
DES STRUCTURES EN BÉTON ARMÉ  
PAR LE CALCUL À LA RUPTURE**

soutenue à Paris le 5 juillet 1996

devant le jury composé de :

Président : J. MAZARS  
Rapporteurs : A. MILLARD  
J. PASTOR  
Examineurs : P. de BUHAN  
B. HALPHEN  
J. M. REYNOUARD

09





À mes parents



La dernière partie du travail de thèse, mais non la moindre, consiste à écrire la page de remerciements. C'est à cet exercice difficile que je me livre maintenant, en espérant n'oublier personne.

Je voudrais tout d'abord témoigner ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Jacky Mazars, qui a bien voulu prendre le temps de lire ce mémoire de thèse et d'en présider le jury. Messieurs Alain Millard et Joseph Pastor ont assumé la lourde tâche d'examiner ce travail en détail et d'en être les rapporteurs. Qu'ils en soient remerciés, ainsi que des suggestions et conseils qu'ils m'ont apportés. Je tiens également à adresser mes remerciements à Messieurs Bernard Halphen et Jean-Marie Reynouard pour avoir participé à l'évaluation de cette thèse.

Pour être menée à bien, une thèse demande à la fois une direction scientifique permettant d'en dessiner les principales orientations ainsi qu'une bonne ambiance de travail. Monsieur Patrick de Buhan, par ses qualités humaines et scientifiques, son souci permanent de la pédagogie et sa disponibilité a su construire ce cadre nécessaire. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude pour l'aide qu'il m'a apportée.

A ces remerciements, je souhaite associer Monsieur Samir Maghous pour les discussions que nous avons menées, notamment sur les méthodes numériques.

Ce travail n'aurait probablement pas vu le jour sans Monsieur Luc Dormieux, qui à l'occasion d'un cours de Calcul des Structures Anélastiques à l'École Nationale des Ponts et Chaussées a su me convaincre d'entreprendre une thèse. Je voudrais lui témoigner ici toute ma reconnaissance.

La qualité de l'ambiance de travail est primordiale pour la réalisation d'une thèse dans de bonnes conditions. Je voudrais donc remercier tous les membres du Centre d'Enseignement et de Recherche en Calcul des Structures et des Ouvrages —tout particulièrement Arnaud Bekaert, Emmanuel Bourgeois, Alain Corfdir, Arnould Cuvillier et Denis Garnier— pour celle qu'ils ont su créer. A ces ceux-ci, je souhaite associer les membres du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École Polytechnique, où s'est effectuée la dernière partie de la rédaction de cette thèse. Qu'ils soient convaincus de ma très sincère amitié.



# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION</b> .....	<b>2</b>
<b>CHAPITRE 1 Présentation du dimensionnement à la rupture des structures en béton armé : la problématique de l'effort tranchant.</b>	
1. Dimensionnement avec prise en compte de l'effort tranchant : études expérimentales .....	7
2. Les méthodes d'analyse .....	13
3. Commentaires et étude critique .....	18
<b>CHAPITRE 2 Présentation de la modélisation des structures en béton armé.</b>	
1. La modélisation mixte .....	24
2. L'homogénéisation en calcul à la rupture .....	48
<b>CHAPITRE 3 Approche du dimensionnement des poutres en béton armé par la théorie des milieux curvilignes.</b>	
1. Les milieux curvilignes .....	75
2. Formulation du critère de résistance d'une section en flexion composée. Position et résolution du problème auxiliaire.....	79
3. La problématique de l'effort tranchant .....	92
<b>CHAPITRE 4 Mise au point d'une méthode numérique par la programmation linéaire.</b>	
1. Approche statique .....	102
2. Approche cinématique.....	110
<b>CHAPITRE 5 Exemples d'applications. Validation et limitations de l'approche.</b>	
1. Étude de la poutre en flexion quatre points, sans renforcement transversal ...	122
2. Influence de la présence d'armatures transversales sur le comportement à la rupture des poutres .....	129
3. Comparaison avec les expériences.....	138
<b>CONCLUSIONS GÉNÉRALES</b> .....	<b>150</b>
<b>ANNEXES</b> .....	<b>153</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	<b>165</b>

## **Introduction**

Le dimensionnement à la rupture des structures en béton armé présente des difficultés inhérentes au matériau, liées notamment à son hétérogénéité et à sa fragilité. Ces caractéristiques favorisent des modes de rupture fortement localisés, avec apparition de fissures qu'il est difficile de modéliser mécaniquement puis numériquement, sans avoir recours à des moyens informatiques lourds. En effet, les approches classiques de calcul des charges extrêmes qui visent à décrire la fissuration, soit de manière diffuse, soit de manière discrète, nécessitent toutes la résolution complète d'un problème d'évolution, depuis l'état initial (mal connu, en raison de la présence de champs d'auto-contraintes dues entre autres au retrait du béton) jusqu'à la ruine de la structure. A l'inverse, les méthodes semi-empiriques employées par les ingénieurs se fondent sur l'exploitation de résultats expérimentaux au moyen de modèles simplifiés visant à rendre compte de la fissuration ainsi que des mécanismes de ruine observés.

Entre ces deux extrêmes, on ne trouve que peu de méthodes à la fois praticables par l'ingénieur, suffisamment générales et mécaniquement cohérentes. On propose donc dans ce travail une méthode de dimensionnement des structures planes en béton armé fondée sur le calcul à la rupture. Bien que la méthode présentée soit de portée générale, on se limitera volontairement dans ce mémoire à examiner au moyen de cette nouvelle approche, les difficultés liées au dimensionnement des poutres en présence d'effort tranchant. Ce problème a été choisi à la fois pour son intérêt pratique et pour sa complexité, dont témoigne la très grande quantité de travaux qui lui sont consacrés (voir par exemple Davenne, 1991). On conservera donc cette problématique comme fil conducteur tout au long de ce mémoire. Celui-ci, composé de cinq chapitres, est organisé de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, on présente la problématique du dimensionnement des poutres en présence d'effort tranchant. On donne en premier lieu une vue d'ensemble des phénomènes observés dans les nombreuses études expérimentales qui ont été menées, afin de déterminer les paramètres principaux intervenant dans ce problème. Dans une seconde partie du chapitre, on présente les principales méthodes de dimensionnement employées dans la pratique de l'ingénieur. On procède notamment à une analyse critique détaillée de la méthode du treillis (bielles et tirants), car elle est à la base des principales normes de dimensionnement actuelles.

Le chapitre deux, qui constitue un des points principaux du mémoire contient la présentation de la modélisation et de la méthode de dimensionnement proposées. Celle-ci, fondée sur le **calcul à la rupture** appliqué à des structures modélisées en contraintes planes, repose sur deux modélisations distinctes des zones renforcées par des armatures. La première, dite **modélisation mixte**, permet de considérer les armatures longitudinales comme des inclusions unidimensionnelles plongées dans un milieu continu bidimensionnel : le béton. La formulation de la modélisation mixte est introduite au moyen de la méthode des puissances virtuelles. Dans une deuxième partie, on décrit la seconde modélisation des armatures, que l'on adopte pour le renforcement transversal. Celui-ci est pris en compte au moyen de la théorie de l'**homogénéisation** en calcul à la rupture. Ce choix consiste à

considérer l'ensemble béton-armatures transversales comme un milieu continu homogène anisotrope, dont on détermine les capacités de résistance préalablement à partir des domaines de résistance des matériaux constitutifs (béton, armatures, interfaces béton-armatures), que l'on précise ici. Afin de donner une présentation complète du problème, on rappelle ensuite la formulation des approches statique et cinématique du calcul à la rupture, dans le cadre de ces modélisations. Les bases théoriques présentées ici sont ensuite illustrées dans la fin du chapitre par l'étude d'un exemple (la compression d'un bloc en matériau purement cohérent, fretté par des armatures), exemple qui permet finalement d'aborder la problématique de l'effet d'échelle, c'est à dire de l'erreur introduite sur l'évaluation du chargement ultime donnée par la méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture, par rapport au problème initial.

Le chapitre trois présente une approche simplifiée du problème du dimensionnement des poutres en béton armé au moyen de la théorie des milieux curvilignes (milieux continus unidimensionnels). En utilisant le choix de critères de résistance pour les matériaux constitutifs (armatures, béton, interfaces), on construit, au moyen d'un passage entre les modélisations tridimensionnelle et unidimensionnelle, les **critères de résistance des sections armées** sollicitées en flexion composée, formulés en termes d'effort normal et de moment fléchissant. Dans une seconde partie, on montre l'insuffisance de la représentation unidimensionnelle adoptée, en comparant les résultats obtenus pour un problème de poutre sollicitée en flexion quatre points, modélisée dans un premier temps comme un milieu continu tridimensionnel, puis comme un milieu curviligne, en faisant usage des critères construits précédemment.

Afin de pallier l'insuffisance de la description par les milieux curvilignes, a été développée une **méthode numérique** fondée sur les approches statique et cinématique du calcul à la rupture. Cette méthode, présentée dans le chapitre quatre, est une extension à la modélisation mixte des méthodes mises au point par Pastor et Turgeman, qui se fondent sur la programmation linéaire. Dans l'approche proposée, la modélisation des armatures transversales par la théorie de l'homogénéisation est également envisagée, puis mise en œuvre.

Le chapitre cinq est consacré à montrer la viabilité de la méthode sur le problème du dimensionnement des poutres avec prise en compte de l'effort tranchant. Après quelques études paramétriques permettant de mettre en évidence les variables principales du problème, on s'intéresse dans une seconde partie du chapitre aux comparaisons avec l'expérience. On montre qu'on peut obtenir une concordance satisfaisante avec les valeurs expérimentales en adoptant dans les calculs, une réduction des capacités de résistance du béton.

## **Chapitre 1**

**Présentation du dimensionnement à la rupture  
des structures en béton armé :  
la problématique de l'effort tranchant**

## Introduction

La prise en compte de l'effort tranchant dans le dimensionnement des poutres en béton armé est un problème qui a été étudié de manière expérimentale et théorique depuis très longtemps. En effet, comme le soulignent de nombreux auteurs (voir par exemple Kotsovos, 1988), si le dimensionnement des poutres à la flexion est maintenant bien connu, il n'en est pas de même en présence d'effort tranchant. La majorité des méthodes de dimensionnement actuelles sont fondées sur une analyse des très nombreux essais réalisés à ce jour (plusieurs milliers !) au moyen de modèles simplifiés, comme par exemple l'analogie du treillis. Cependant, la dispersion des essais, le nombre de paramètres intervenant ainsi que l'absence d'une modélisation mécanique cohérente permettant l'interprétation des phénomènes observés, n'ont pas permis à ce jour une unification de la théorie du dimensionnement de telles structures.

Devant la diversité des expériences réalisées et le nombre de paramètres mis en jeu, on va en premier lieu décrire les principaux essais réalisés et leurs interprétations. Ceci nous permettra de détacher de cette étude les principales caractéristiques du phénomène. Dans la seconde partie du chapitre, on présentera les modèles classiques utilisés pour le dimensionnement de telles structures, puis on procédera à leur analyse critique.

## 1. Dimensionnement des poutres avec prise en compte de l'effort tranchant : études expérimentales

On recense de très nombreuses études expérimentales effectuées depuis les années cinquante dans le but de déterminer la résistance des poutres en béton armé renforcées longitudinalement et transversalement, en présence d'effort tranchant. Ces études concernent des essais de poutres en flexion quatre (ou trois) points chargées jusqu'à la ruine (figure 1 - 1). Ces essais ont permis de dégager l'influence, sur la charge de ruine de ces structures, de certains paramètres fondamentaux. On relève notamment :

- l'élanement des poutres ( $a/d$  ou  $a/h$ ),
- le taux de renforcement longitudinal,
- le taux et la répartition des armatures transversales,
- les capacités de résistance du béton (résistance en compression et en traction simple),
- les dimensions globales de la poutre ( $a$ ,  $h$  et  $b$ ).

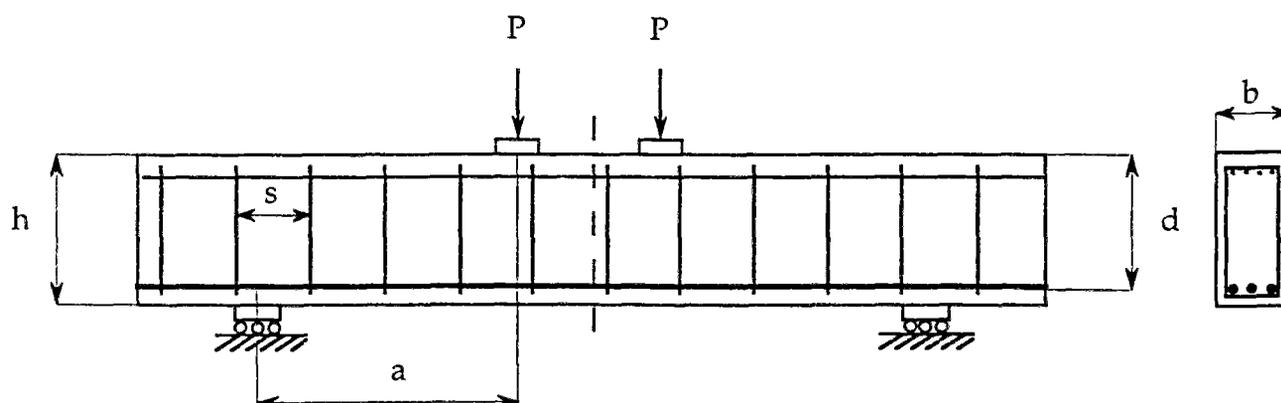


Figure 1 - 1 Flexion quatre points

Le dernier point est lié aux effets d'échelle entre la taille de la structure et la taille des hétérogénéités à l'échelle du béton (les granulats) observés par certains auteurs. Ce problème ne sera pas envisagé dans ce travail.

On va dans la suite de ce chapitre effectuer une présentation des principaux travaux expérimentaux, en insistant à chaque fois sur les paramètres étudiés.

## 1.1 Morrow et Viest, 1957

Morrow et Viest ont étudié l'influence de l'élanement des poutres ainsi que du taux de renforcement longitudinal sur la résistance en présence d'effort tranchant de poutres non renforcées transversalement, au moyen de 38 essais de flexion trois points. Ils observent que dans leur essais, seules les poutres possédant un certain taux de renforcement longitudinal étaient affectées par l'effort tranchant, les autres exhibant des mécanismes de rupture par flexion. Ces auteurs constatent une réduction du moment fléchissant atteint au droit de la charge, pour des valeurs de l'élanement (rapport  $a/d$  entre la portée  $a$  et la hauteur "utile"  $d$ ) inférieures à 6,1 (voir figure 1 - 2).

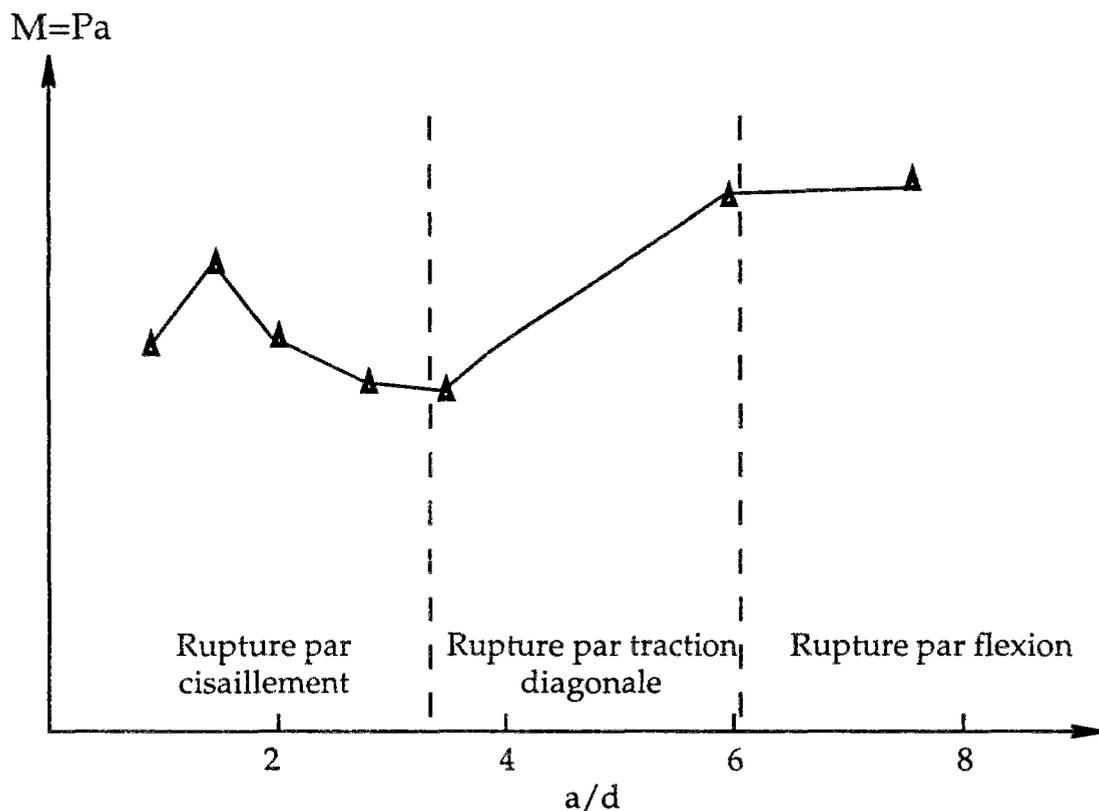


Figure 1 - 2 Evolution des modes de rupture en fonction de l'élanement  $a/d$  (d'après Morrow et Viest, 1957)

Ces valeurs correspondent à des modes de rupture par "cisaillement" (ou "cisaillement-compression"), ou par "traction diagonale" (voir figure 1 - 3). La rupture par traction diagonale est caractérisée par une ruine simultanée à l'apparition de fissures inclinées, reliant le point d'application de la charge et l'appui. Quant à la rupture par cisaillement, elle est causée par l'écrasement du béton dans la zone comprimée située sous les appuis ou les charges, à proximité d'une fissure diagonale de traction, et donne lieu à de fortes redistributions des contraintes entre le début de

la fissuration et la ruine. Les auteurs considèrent dans les deux cas, que la rupture intervient dans certaines "sections critiques" de la poutre. Ils fournissent alors à partir des résultats expérimentaux des formules empiriques permettant de déterminer l'effort tranchant à la rupture, dans les sections critiques, pour les deux modes de rupture mentionnés.

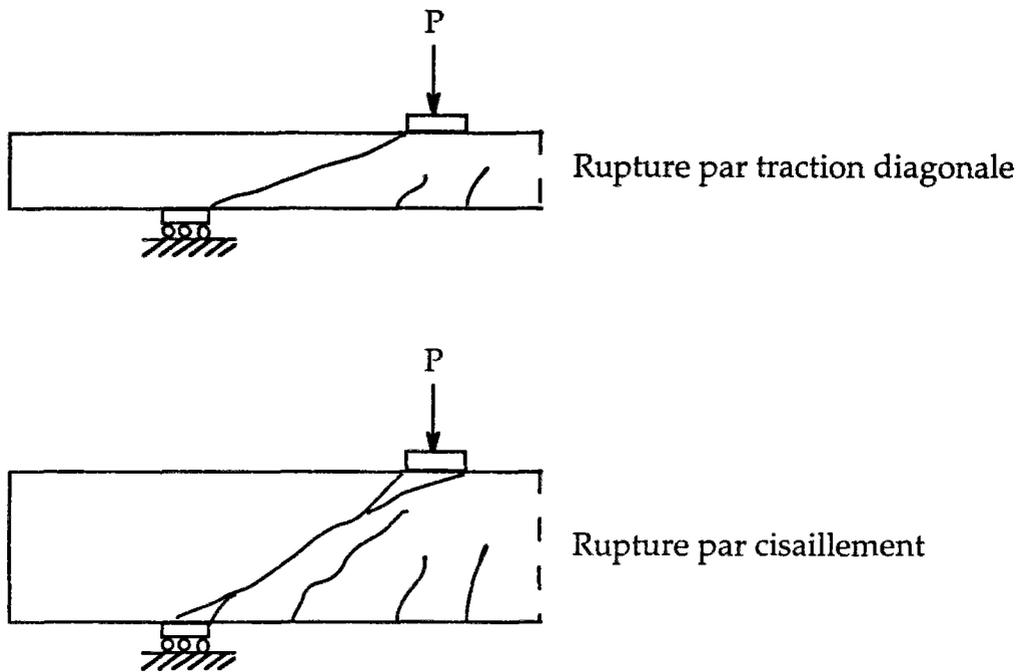


Figure 1 - 3 Schémas de rupture

## 1.2 Kani, 1964-1966

Kani s'est intéressé au même problème que Morrow et Viest. Il a mené une série de 133 essais de poutres en flexion quatre points. Ces poutres comportaient un renforcement longitudinal variable, mais pas de renforcement transversal. L'étude de Kani, plus complète que la précédente, met en évidence la pertinence de la représentation de la résistance des poutres en présence d'effort tranchant en terme de moment ultime, calculé au droit de la charge. A la suite de ses essais, il représente le rapport  $M_u/M_{fl}$  en fonction du pourcentage de renforcement longitudinal  $p$  (rapport entre la section du renforcement et l'aire transversale de la poutre), ainsi que de l'élancement  $a/d$  des poutres considérées, où  $M_u$  et  $M_{fl}$  représentent respectivement le moment ultime expérimental au droit des charges (qui se déduit aisément de la valeur de la charge de ruine  $P_u$  par la formule  $M_u = aP_u$ ), et le moment de flexion correspondant à la pleine résistance de la section (calculé suivant le "ACI building code"). Il observe ainsi une réduction de la capacité de flexion des poutres, localisée dans une zone du plan  $(a/d, p)$ , appelée "vallée de Kani" (voir figure 1 - 4). Ces résultats concordent de manière assez satisfaisante avec ceux de Morrow et Viest.

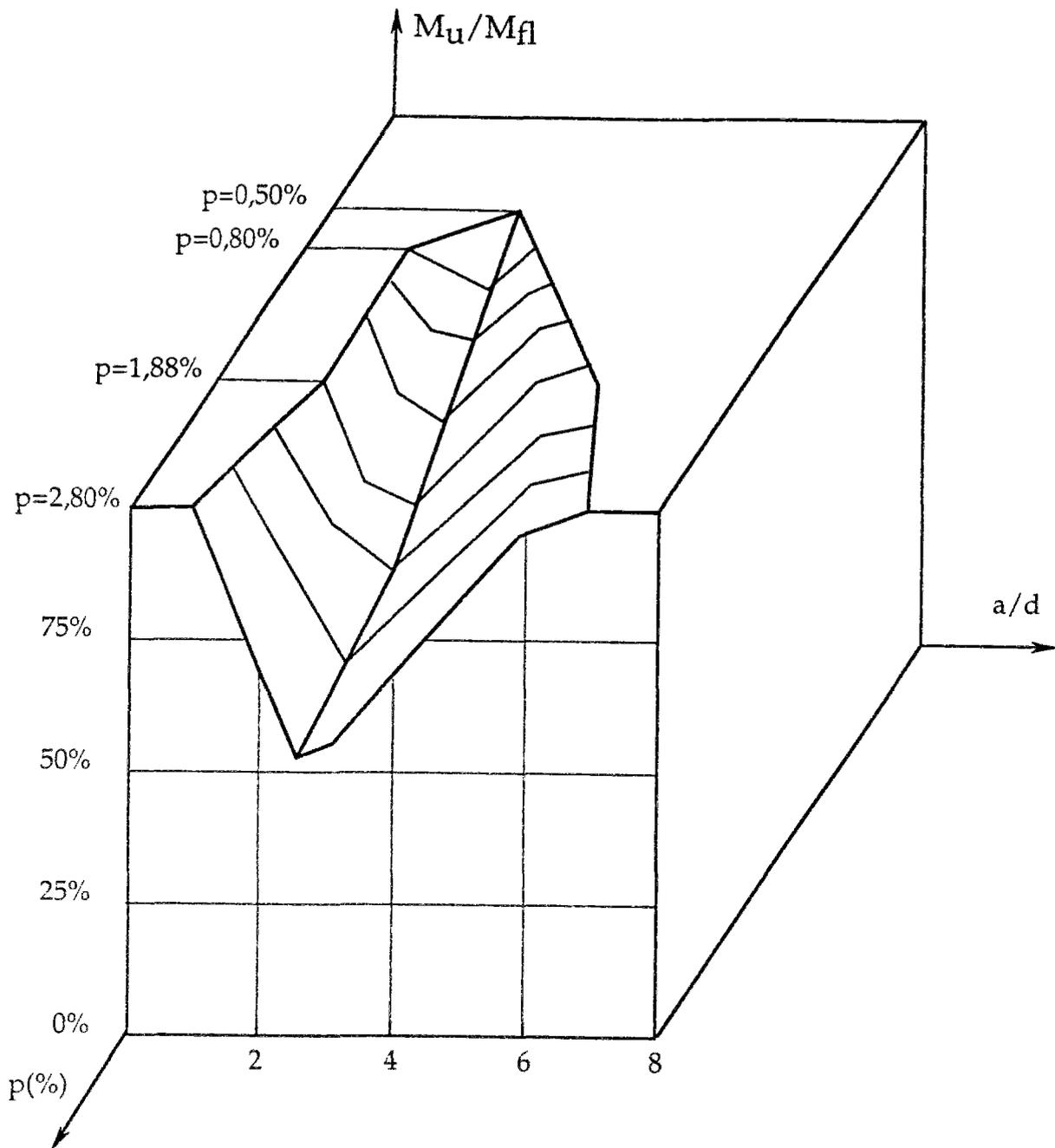


Figure 1 - 4 "Vallée" de Kani (d'après Kani, 1966)

Dans l'étude des résultats, Kani propose une analyse des mécanismes de ruine, où il interprète la fissuration observée, de manière à déduire la capacité de résistance de la poutre. Il constate l'influence de l'élançement et du taux de renforcement longitudinal sur les modes de rupture observés ainsi que sur les charges de ruine, les poutres très peu renforcées longitudinalement n'étant en fait pas influencées par l'effort tranchant ( $M_u/M_f=1$ ). Il réfute ainsi l'idée communément admise jusqu'alors, que la résistance à l'effort tranchant ne dépend que des caractéristiques mécaniques du béton en

montrant que dans la majorité des cas, elle est plutôt gouvernée pas les paramètres cités précédemment.

### 1.3 Les expériences visant à déterminer l'influence du renforcement transversal

De nombreux auteurs se sont appliqués à étudier l'influence du renforcement transversal sur la résistance des poutres, en présence d'effort tranchant. On peut citer par exemple (Kong et al., 1970), (Smith et Vansiotis, 1982), et (Rogowsky et al., 1986). Ces auteurs ont étudié l'influence du taux de renforcement transversal et de l'élancement des poutres en testant en flexion quatre points, des séries de poutres de renforcement longitudinal constant. Ils ont proposé ensuite des formules empiriques fondées sur l'exploitation de ces résultats expérimentaux permettant de prédire les charges de ruine de poutres en flexion quatre points. Tous ces auteurs ont constaté que les armatures transversales contribuaient à augmenter le moment de flexion  $M_u$  à la ruine de la structure, jusqu'à obtenir la valeur  $M_n$  correspondant à une poutre sollicitée en flexion simple. Néanmoins de nombreuses divergences subsistent quant à l'interprétation de leur fonctionnement mécanique.

On doit également mentionner en plus des précédents, l'énorme travail expérimental fourni par Kordina (Kordina et Blume, 1985 ; Kordina et Hegger, 1987) qui a réalisé une série de près de mille essais de poutres chargées jusqu'à la rupture. Il a étudié des poutres de sections transversales de formes diverses (rectangulaires, en T), en essayant notamment dans ce dernier cas de déterminer l'influence de la largeur de la membrure supérieure sur les charges de ruine. Ses études se sont également étendues au cas d'une charge répartie le long de la poutre.

### 1.4 Kotsovos, 1984-1988

Kotsovos (Kotsovos, 1984, 1986, 1988) a étudié l'influence de la répartition et de la position des cadres d'armatures transversales sur les charges limites de poutres chargées en flexion quatre points, pour diverses valeurs de l'élancement. Il a ainsi mené une série d'expériences qui l'ont poussé à rejeter certains concepts fondamentaux des analyses théoriques qui étaient menées à l'époque :

- En comparant le comportement à la rupture de poutres soumises à une flexion quatre points, dont le renforcement transversal était disposé de différentes manières (voir figure 1 - 5), il a montré que le concept de "sections critiques" tel que formulé par Morrow et Viest était incorrect. Pour ce faire, il a montré que des poutres renforcées transversalement sur toute leur longueur (renforcement de type B) avaient le même comportement que des poutres non renforcées dans la partie située entre la charge et l'appui (renforcement de type D), ce qui va à l'encontre de la notion de "sections critiques".

- Il formule alors le concept de "chemin des efforts de compression" (compressive force path). C'est, selon Kotsovos, le long de ce chemin reliant le point d'application des charges et l'appui que sont censés se transmettre les efforts de compression. D'après lui, la rupture se produirait à la suite de l'apparition de contraintes de traction le long de ce chemin, et non pas en raison d'un écrasement du béton sous les appuis.

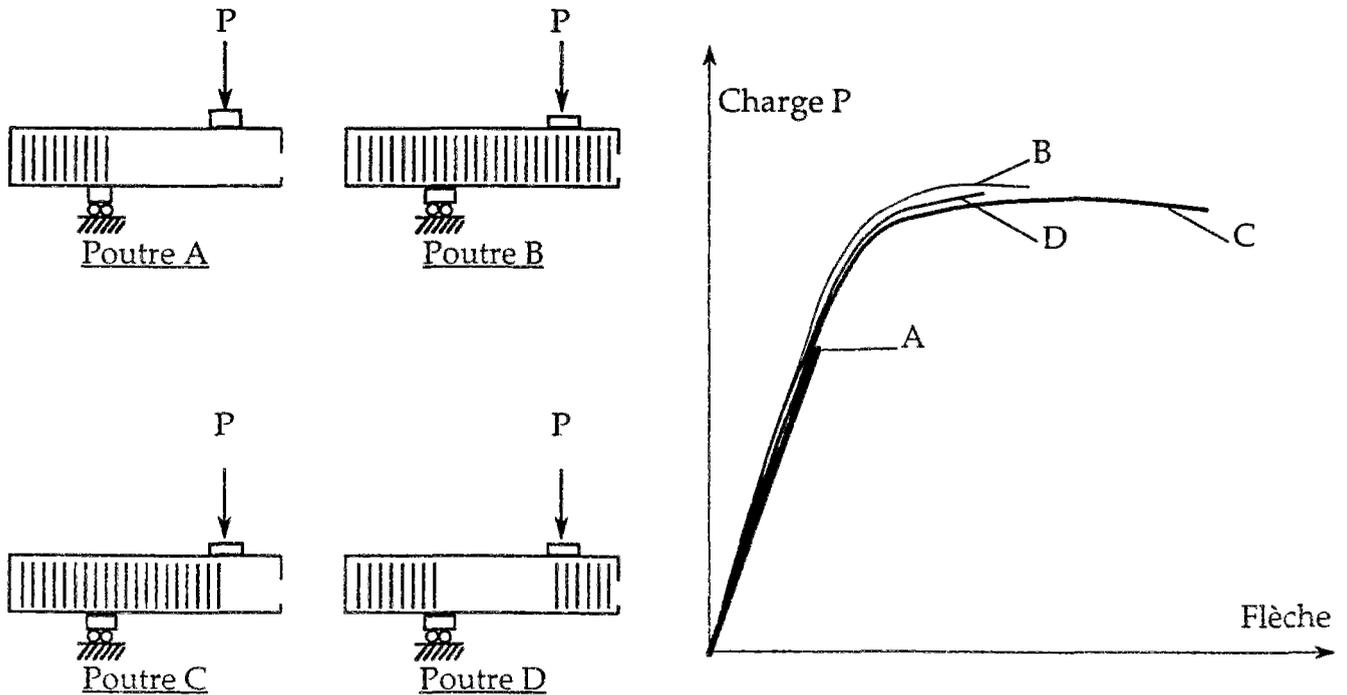


Figure 1 - 5 Comparaison de différents schémas de renforcements transversaux (d'après Kotsovos, 1988)

## 2. Les méthodes d'analyse

Après avoir donné un aperçu général des phénomènes observés dans les mécanismes de rupture des poutres en présence d'effort tranchant, on présente dans la suite les principales méthodes d'analyse de ces phénomènes et de dimensionnement utilisées. On commence par rappeler la théorie du treillis de Ritter-Mörsch qui est l'ancêtre des théories actuelles de dimensionnement avec prise en compte de l'effort tranchant. Dans la suite on présente la théorie des bielles et des tirants, qui est l'extension de la précédente à des géométries plus complexes. On montre notamment dans cette section les rapports de parenté liant cette approche et l'approche statique du calcul à la rupture.

### 2.1 Le treillis de Ritter-Mörsch

La méthode du treillis de Ritter-Mörsch (figure 1 - 6) date de la fin du siècle dernier (Ritter, 1899 et Mörsch, 1902) et fut introduite pour permettre le dimensionnement des armatures transversales des poutres en béton armé soumises à un effort tranchant. L'idée principale est que, dans la phase de service, une poutre renforcée longitudinalement et transversalement va développer des fissures diagonales inclinées à  $45^\circ$  par rapport à l'axe de la poutre. Ces fissures délimitent ainsi des "bielles" de béton, censées ne résister qu'à des efforts de compression uniaxiale. Les barres d'acier, qui forment avec les bielles de béton le treillis de Ritter-Mörsch sont censées quant à elles, ne résister qu'à des efforts de traction uniaxiale. Les efforts dans le treillis ainsi formé étant déterminés statiquement par le simple équilibre des nœuds, il est possible de calculer les efforts dans les barres verticales (armatures transversales) et de les dimensionner en conséquence.

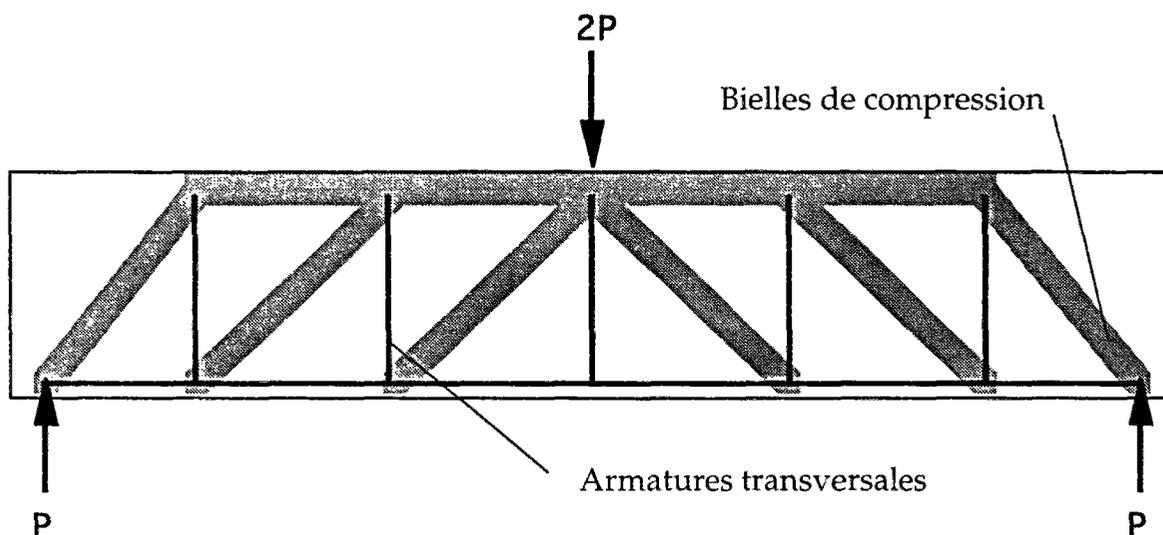


Figure 1 - 6 Treillis de Ritter-Mörsch

Le principal intérêt de la méthode du treillis réside dans sa simplicité. Elle donne une manière de calculer un ordre de grandeur des efforts dans les aciers. De nombreux essais ont cependant montré que les résultats donnés par la méthode du treillis amènent à surestimer les efforts dans les armatures. Ce modèle très simplifié est cependant à la base des codes de dimensionnement actuels.

## 2.2 La méthode des bielles et des tirants

Une des voies suivies par les ingénieurs depuis environ dix ans pour la conception des structures en béton armé est la méthode dite des **bielles et des tirants** ("Strut and tie design"). Se fondant sur l'analogie du treillis formulée pour la première fois par Ritter et Morsch, et développée notamment par Schlaich (Schlaich et al, 1987), et Marti (Marti, 1985-a, 1985-b), cette méthode a permis de concevoir des modèles mécaniques simples visant à expliquer le fonctionnement des structures en béton armé depuis la phase de service jusqu'à la phase de ruine.

Reprenant les principes proposés par Ritter et Morsch, la méthode se fonde sur la représentation du comportement d'une structure plane en béton armé par celui d'un treillis dans lequel les barres comprimées modélisent des bielles de béton, et les barres tendues les armatures. On construit donc à cet effet un treillis de barres reliées par des articulations (ou nœuds) auxquels sont appliqués les efforts extérieurs à la structure (figure 1 - 7). Ces barres sont dans le modèle, l'idéalisation d'un champ de contrainte uniaxial. La géométrie du treillis est choisie de manière à représenter le mieux possible le fonctionnement mécanique de la structure, et de permettre le dimensionnement des armatures.

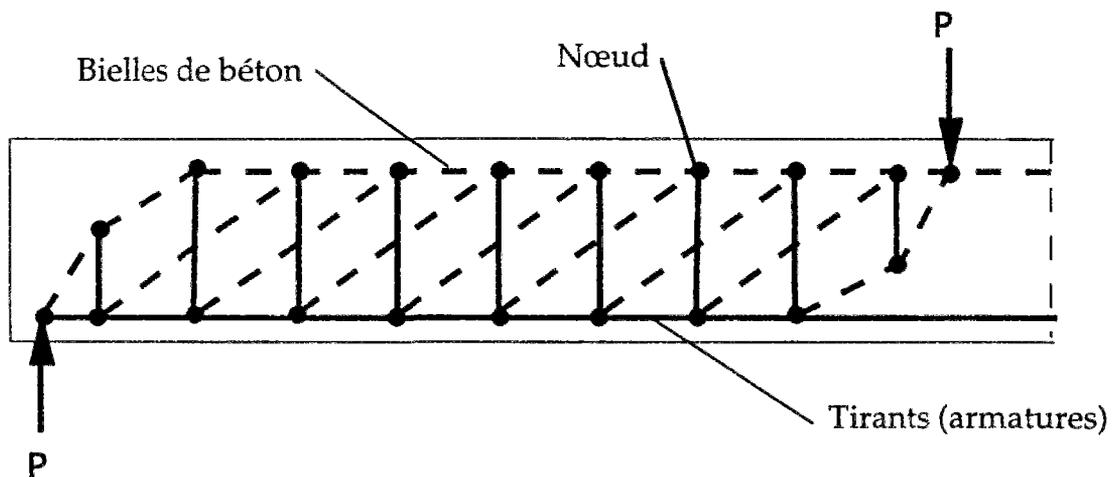


Figure 1 - 7 Modèle de bielles et tirants (d'après Schlaich et al., 1987)

Le dimensionnement par la méthode des bielles et des tirants passe, en résumé, par les étapes suivantes :

- *détermination des efforts extérieurs appliqués à l'élément de la structure à dimensionner.*
- *création et orientation du treillis de barres.* Afin de mieux représenter l'état de contraintes dans la phase "fissurée" du fonctionnement de la structure, on oriente les barres du treillis selon des directions proches des directions de contraintes principales obtenues par un calcul élastique linéaire. En effet, c'est le long de ces lignes que sont censées se produire de manière préférentielle les fissurations en phase de service.
- *détermination des efforts intérieurs au treillis.* On décrit les efforts intérieurs dans chaque barre par un scalaire représentant l'effort normal dans la barre. Suivant son signe, cette barre représente une armature (tirant ou barre tendue) ou une bielle de béton (barre comprimée). Les tensions dans les barres sont astreintes à vérifier les conditions d'équilibre, ce qui permet pour les treillis isostatiques de déterminer directement la valeur des différentes tensions dans les barres en fonction des charges, par simple équilibre de nœuds.
- *vérification de la résistance des barres et des nœuds du treillis.* On applique un critère de résistance simplifié pour les bielles ainsi que les nœuds. Ce critère peut éventuellement prendre en compte l'état de fissuration du béton, ainsi que la présence d'armatures. On le formule généralement de la manière suivante :

$$(1) \quad \sigma_b \leq \alpha f_c$$

où  $f_c$  représente la résistance en compression simple du béton et  $\alpha$  un coefficient réducteur destiné à tenir compte des différents facteurs mentionnés précédemment. Certaines formulations de la méthode (Vecchio et Collins, 1986) permettent d'évaluer ce coefficient en fonction d'une déformation estimée du béton.

- *vérification de la résistance des armatures.* Pour les armatures, on applique un critère de résistance formulé de la manière suivante:  $0 \leq N \leq N_b$ . Ce critère permet ainsi de dimensionner la section de ces armatures connaissant la valeur de l'effort normal à supporter.

De nombreux auteurs (Marti, 1985-a, 1985-b ; Jennewein, 1989 ; Siao, 1993, 1994, 1995) ont à la suite de Schlaich, tenté de valider l'emploi de la théorie du treillis pour le dimensionnement d'un certain nombre de structures, telles que les poutres courtes, les chevêtres de pile de pont, les pièces avec ouvertures, etc...

### 2.3 Le BAEL 91

Le code de dimensionnement BAEL (Béton Armé aux Etats-Limites) 91 propose une formule limitant le cisaillement moyen  $\tau_u$  (ou de manière équivalente, l'effort tranchant) dans chaque section, fondée sur l'analogie du treillis de Ritter-Mörsch, et dans laquelle est prise en compte de manière forfaitaire la résistance liée à la section de béton. On aboutit ainsi à une formule donnant la section minimale des armatures transversales :

$$(2) \quad \frac{A_t}{b_0 s_t} \geq \frac{\gamma_s (\tau_u - 0,3 f_{tj} k)}{0,9 f_c (\cos \alpha + \sin \alpha)}$$

où  $A_t$ ,  $b_0$ ,  $s_t$  désignent respectivement la section des armatures transversales (limite d'élasticité  $f_e$ , inclinés à  $\alpha$  sur l'horizontale), la largeur de l'âme de la poutre, et la distance horizontale entre deux cadres successifs.  $\gamma_s$  représente un coefficient de sécurité sur l'acier. Le terme  $0,3 f_{tj} k$  fait intervenir la résistance à la traction du béton  $f_{tj}$ , ainsi que l'état de contrainte moyen dans la section, par l'intermédiaire du coefficient  $k$ . On vérifie aisément que, sous une forme légèrement différente, la formule proposée se résume à une limitation de l'effort tranchant dans chaque section.

### 2.4 La méthode de Kordina

Kordina (Kordina et Blume, 1985 ; Kordina et Hegger, 1987) propose, de manière complètement empirique de déduire au moyen de méthodes statistiques, par calage de ses résultats expérimentaux, une formule permettant d'évaluer un cisaillement moyen  $\tau$  à la rupture. Il suppose que celui-ci peut se décomposer en la somme de deux contributions :

- la première contribution  $\tau_0$  correspond à la fraction de résistance due à la structure sans renforcement transversal.

$$(3) \quad \tau_0 = \sqrt{\frac{f'_c / 0,82}{10}} \sqrt[3]{\rho_L} \sqrt[4]{0,1d} f(\lambda_s)$$

où  $f'_c$  représente la résistance à la compression du béton,  $d$  la hauteur utile de la poutre,  $\rho_L$  le taux de renforcement longitudinal de la poutre (en pour-cents) et  $\lambda_s$  un paramètre d'élanement (le rapport  $a/d$  entre la portée d'effort tranchant et la hauteur utile de la poutre). La fonction  $f(\lambda_s)$  permet de prendre en compte la dépendance de la charge de ruine vis-à-vis de l'élanement de la poutre.

On note dans la formule proposée une dépendance vis-à-vis de la taille globale de la structure, destinée à prendre en compte un effet d'échelle.

- la seconde contribution  $\tau_1$  est relative aux armatures transversales. Elle est définie par

$$(4) \quad \tau_1 = \rho_t f_y \sqrt[4]{0,18d} f_1(\lambda_s) f_2\left(\frac{s}{d}\right)$$

où  $\rho_t$  désigne le taux de renforcement transversal (de limite d'élasticité  $f_y$ ) et les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  traduisent respectivement l'influence de l'élançement de la poutre et de l'espacement  $s$  des armatures transversales (voir figure 1 - 1) sur la valeur de la contribution  $\tau_1$ .

On notera ici dans les formules (3) et (4) proposées par Kordina la présence du paramètre d'élançement  $\lambda_s$ .

## 2.5 Dimensionnement au moyen de la résolution d'un problème d'évolution

Aux méthodes de dimensionnement semi-empiriques "d'ingénieurs" s'opposent des méthodes plus élaborées fondées sur la résolution du problème d'évolution de la structure sous son chargement. Ces méthodes, plus précises mais plus complexes que les précédentes, nécessitent toutes la définition complète du comportement des matériaux modélisés. Une des difficultés majeures que nous mentionnons ici est la modélisation des phénomènes irréversibles dans le comportement du béton. Les modèles de comportement principalement employés pour les décrire sont la **plasticité** et l'**endommagement**. Sans faire une présentation générale de ces deux théories (on pourra se rapporter à (Chen et Han, 1988) et (Mazars et Pijaudier-Cabot, 1989) pour une revue des modèles classiques respectivement de plasticité et d'endommagement appliqués au béton), on rappelle simplement que la plasticité vise à modéliser l'apparition de déformations permanentes dans un matériau soumis à une sollicitation, après relâchement de celle-ci, et est généralement associée à une certaine ductilité du matériau. En revanche, la théorie de l'endommagement vise plutôt à décrire la dégradation irréversible des caractéristiques élastiques du matériau, et s'interprète généralement comme la manifestation à l'échelle macroscopique d'un comportement fragile à l'échelle microscopique. Dans le cadre de la modélisation du béton, ces deux types de comportement peuvent être employés de manière séparée comme respectivement dans (Chen, 1992) et (Mazars, 1984), ou de manière couplée (par exemple Ulm, 1994).

Les modèles adoptés actuellement parviennent à représenter fidèlement le comportement du béton. Cependant, ils nécessitent souvent l'identification expérimentale de nombreux paramètres. De plus, l'emploi de la méthode des éléments finis s'avère indispensable dès que l'on veut résoudre un problème d'évolution, sachant que le calcul des charges de ruine pose généralement des difficultés numériques liées à la perte de convergence des algorithmes au voisinage de ces charges. De plus, aux difficultés évoquées peuvent s'ajouter certains problèmes liés à la localisation des déformations.

### 3. Commentaires et étude critique

Avant de procéder à une analyse critique des diverses méthodes de dimensionnement évoquées, nous allons résumer les divers points mis en évidence par les études expérimentales présentées précédemment :

- **Plusieurs modes de rupture** d'une poutre en béton armé sont observés. Nous nous limiterons à différencier un mode de rupture par flexion, et une seconde catégorie où nous regrouperons sous le terme impropre de "rupture par effort tranchant" tous les autres types observés.
- **L'élançement de la poutre**, que l'on peut quantifier par le rapport  $a/d$  (ou  $a/h$ ), a une influence primordiale sur le type de rupture. Plus l'élançement est faible, plus est susceptible de se produire une rupture par "effort tranchant". Il est à noter que ce paramètre est fondamental, puisque contrairement à l'élasticité où les distances de régularisation des champs de contrainte sont de l'ordre d'une fois la hauteur de la poutre (principe de Saint-Venant), on peut dans certains cas observer une influence de l'effort tranchant jusqu'à des valeurs de six de l'élançement.
- **Le taux de renforcement longitudinal** est également un des paramètres déterminant le mode de rupture. Plus le renforcement longitudinal est important, plus la ruine est susceptible de se produire par un mécanisme de type "effort tranchant". En effet, on comprend intuitivement que ce paramètre détermine la valeur la résistance à flexion de la poutre, donc en augmentant ce renforcement, on favorise plutôt une rupture par "effort tranchant". Réciproquement, pour des poutres très peu renforcées longitudinalement, on n'observe pas d'influence de l'effort tranchant, la rupture intervenant toujours par flexion.
- A renforcement longitudinal donné, on observe pour des poutres sans renforcement transversal une **réduction du moment de flexion** au droit des charges, lorsque la ruine se produit par "effort tranchant", c'est-à-dire pour des valeurs faibles de l'élançement. La courbe représentant le moment de flexion au droit de la charge à l'instant de la rupture, en fonction de l'élançement présente un minimum pour des élançements faibles, puis un plateau pour des grandes valeurs de ce paramètre (voir figure 1 - 2). La forme exacte de la courbe n'est pas établie clairement, comme en témoigne la comparaison des résultats obtenus par Kani d'une part, Morrow et Viest, d'autre part.
- **Le renforcement transversal** tend à restaurer la capacité de flexion des poutres, lorsque l'on observe une diminution due à l'effort tranchant. Le taux de renforcement transversal est cependant le paramètre dont l'influence est la plus difficile à expliquer.

Les points que nous venons de rappeler ici montrent la complexité du problème envisagé. En effet, au vu des résultats expérimentaux, ramener le problème à la détermination d'un critère de résistance formulé en terme d'effort tranchant, comme le font une partie des modèles présentés, paraît

réducteur. Ainsi, plutôt que de dimensionnement "à l'effort tranchant", il convient plutôt de parler de dimensionnement **avec prise en compte de l'effort tranchant**. En effet, le couplage moment fléchissant-effort tranchant par les équations d'équilibre fait que la sollicitation est toujours complexe, et rend donc difficile une approche théorique du problème. D'un point de vue mécanique, l'adoption d'un tel critère de résistance revient à réduire l'analyse de la stabilité de la structure à une étude unidimensionnelle, c'est à dire à conduire un calcul de type "milieu curviligne". On montrera dans le chapitre trois les difficultés liées à une telle approche, difficultés confirmées par les travaux expérimentaux de Kotsovos (Kotsovos, 1988).

La difficulté à établir un tel critère de résistance est bien illustrée par le travail de Kordina. Malgré le nombre considérable d'essais réalisés, une modélisation mécanique trop simple, ainsi que la forme arbitraire choisie pour la fonction permettant d'évaluer la résistance des poutres, en limitent la portée au seul domaine des paramètres testés au cours des essais. Ainsi, si l'on évalue le moment de flexion à la rupture au droit de la charge ( $M_u = P_u a$ ) des poutres en fonction de l'élancement (rapport entre la longueur et la hauteur de la poutre) en utilisant les formules (3) et (4), on obtient la courbe représentée sur la figure 1 - 8. Celle-ci ne présente pas d'asymptote horizontale pour les grands élancements, asymptote qui traduirait une limitation du moment fléchissant due à un mécanisme de ruine par flexion. Ceci va à l'encontre de la majorité des observations (voir par exemple la figure 1 - 2) qui montrent bien un tel schéma de rupture. Il est à noter néanmoins que l'allure générale de la courbe présente des similitudes avec celles de (Morrow et Viest) et Kani.

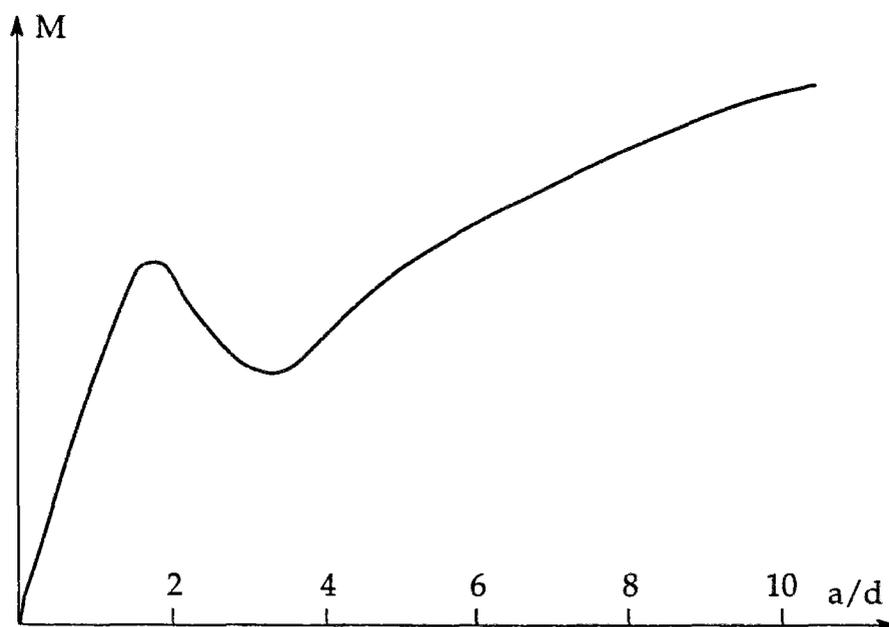


Figure 1 - 8 Moment au droit de la charge lors de la ruine (selon Kordina et Blume, 1985)

De ces diverses remarques, il apparaît clairement qu'on ne peut pas se passer d'une analyse mécanique globale du problème, ce que tente de proposer le modèle des bielles et des tirants. En effet,

au lieu de postuler a priori une formule donnant une limitation sur la valeur de l'effort tranchant supportable par les sections, on tente de traiter le problème dans son ensemble, à partir d'un certain nombre d'hypothèses mécaniques simples. On notera d'ailleurs une certaine similitude avec l'approche statique du calcul à la rupture, où l'on construit des champs de contraintes respectant les conditions d'équilibre, ainsi que les critères de résistance des matériaux. Cependant, on se restreint dans le modèle du treillis à une certaine classe de champs de contraintes (champs constants par blocs, et uniaxiaux dans les bielles de béton). De plus, les conditions d'équilibre ne sont vérifiées que de manière globale, aux nœuds du treillis. Ceci fait qu'un dimensionnement de type bielles et tirants, ne peut être considéré que comme une **approche statique "incomplète"**, si bien que l'on ne peut pas a priori interpréter les charges calculées par ce type d'approche, ni comme des minorants ni comme des majorants des charges de ruine. Une des critiques que l'on peut également formuler vis-à-vis de cette méthode est que le critère de résistance du béton n'est pas défini de manière explicite, pour un état de contraintes autre que de compression uniaxiale. Ceci amène généralement à adopter un coefficient réducteur  $\alpha$  (formule (1) ), destiné à rendre compte d'une éventuelle fissuration transversale aux bielles et plus généralement d'un état de contrainte multiaxial, ce coefficient pouvant atteindre des valeurs très faibles (voir par exemple Nielsen et al., 1978).

## Conclusion

Malgré les critiques formulées précédemment vis-à-vis du dimensionnement par la théorie du treillis, une application rigoureuse de la théorie du calcul à la rupture aux structures en béton armé paraît être une voie prometteuse. En effet, cette méthode permet une formulation mécanique claire, n'exigeant que peu d'informations sur les matériaux, et nécessite un coût numérique raisonnable pour sa mise en œuvre. Ainsi, antérieurement même à la méthode des bielles et des tirants, certains auteurs ont étudié l'application directe de la théorie du calcul à la rupture au dimensionnement des structures en béton armé. Ainsi dans (Drucker, 1961), (Chen et Drucker 1969) et (Chen et Covarrubias 1971) est posée de manière théorique la question de la validité d'une telle approche, en proposant comme critère de résistance pour le béton le critère de Coulomb tronqué en traction. Dans (Chen, 1970), une étude sur l'interprétation de l'essai brésilien de traction indirecte est présentée, et la comparaison avec les résultats expérimentaux semble montrer la validité de la démarche. A leur suite, ont été effectuées des études plus systématiques sur le dimensionnement des structures en béton armé, notamment pour le problème de l'effort tranchant dans les poutres et pour certains détails constructifs (Nielsen et al., 1978 ; Chen, 1982 ; Nielsen, 1984). Parmi des travaux plus récents, on note également la mise en œuvre de la méthode cinématique, pour le dimensionnement des poutres épaisses au moyen d'une optimisation numérique de mécanismes de blocs (Ashour et Morley, 1994). Une telle étude a conduit à l'évaluation de coefficients de réduction à adopter sur les capacités de résistance du béton afin de caler les charges limites ainsi calculées sur les valeurs expérimentales (Ashour et Morley, 1996). Cependant, la majorité des applications du calcul à la rupture aux structures en béton armé reste le plus souvent limitée au dimensionnement des dalles et coques, pour lesquelles ont été effectuées des études théoriques ainsi qu'une validation expérimentale plus ample (voir par exemple Save et Massonet, 1972).

C'est donc dans ce cadre que nous proposons une méthode de dimensionnement des structures en béton armé fondée sur le calcul à la rupture. On a souhaité ici adopter une méthode proche de la pratique de l'ingénieur, dont la mise en œuvre ne nécessite ni l'identification d'un nombre important de paramètres des lois de comportement, ni un coût numérique trop élevé. Comme nous l'avons souligné, la formalisation d'une telle approche passe en premier lieu par le choix d'une modélisation mécanique du béton ainsi que des armatures, puis par le choix de critères de résistance pour ces deux constituants (éventuellement pour les interfaces). Cette présentation fait l'objet du chapitre suivant.

## **Chapitre 2**

### **Présentation de la modélisation des structures en béton armé**

## Introduction

Ce chapitre est destiné à présenter la modélisation géométrique et mécanique des structures en béton armé dont on va étudier la stabilité. On insiste dans ce chapitre sur la modélisation du composite béton armé et plus particulièrement sur les armatures. On adopte dans la suite, pour les décrire, deux types distincts de représentation. La première consiste à les considérer comme des milieux curvilignes (milieux continus unidimensionnels) inclus dans le béton considéré comme un milieu continu bidimensionnel. Cette **modélisation mixte** sera plutôt utilisée pour décrire les armatures longitudinales. La seconde modélisation que nous employerons, cette fois pour les armatures transversales des poutres, sera issue de la théorie de **l'homogénéisation en calcul à la rupture** et utilisée en raison de la régularité et de la densité de la distribution de ces armatures dans les poutres.

La première partie du chapitre est donc consacrée à la construction par la **méthode des puissances virtuelles** de la modélisation mixte, où le béton est modélisé comme un milieu continu bidimensionnel et les armatures comme des milieux curvilignes (milieux continus unidimensionnels), puis à sa mise en œuvre dans le cadre du calcul à la rupture. Après un premier exemple d'application, on s'intéresse au cas d'un bloc fretté par un grand nombre d'armatures parallèles. Ce second exemple est utilisé comme introduction à la deuxième technique que nous utiliserons pour modéliser les armatures transversales : l'homogénéisation périodique en calcul à la rupture.

La deuxième partie du chapitre est consacrée à l'application de cette théorie aux structures en béton armé. On y décrit notamment comment le critère de résistance macroscopique adopté pour modéliser le composite "béton armé renforcé transversalement" se déduit des capacités de résistances de ses composants, puis on donne un éclairage succinct sur les problèmes liés aux effets d'échelle, en nous appuyant sur notre exemple.

# 1. La modélisation mixte

## 1.1 Introduction

La résolution d'un problème de mécanique doit toujours passer par le choix d'une modélisation géométrique et mécanique. Celle-ci dépend bien sûr du degré de précision et des informations que l'on souhaite obtenir du calcul, mais aussi des moyens disponibles (analytiques, numériques, etc...) pour résoudre le problème, une fois la modélisation choisie. On peut distinguer dans la modélisation géométrique du système à étudier, plusieurs degrés de complexité croissante, allant d'une description unidimensionnelle (type milieu curviligne) généralement employée pour décrire des structures élancées, à une description tridimensionnelle (figure 2 - 1). Afin de proposer une méthode dont la mise en œuvre numérique soit réalisable sans moyens informatiques lourds et qui présente une plus grande richesse qu'une simple modélisation unidimensionnelle (les limites d'une telle modélisation seront mises en évidence dans le chapitre suivant, dans le cadre du dimensionnement des poutres en béton armé), on développe dans ce chapitre une modélisation bidimensionnelle (en contrainte plane) des structures en béton armé. Le passage entre les représentations tridimensionnelle et bidimensionnelle se fait en "distribuant" les armatures sur toute l'épaisseur de la structure. Ce choix permet d'envisager de traiter des problèmes dans lesquels la structure est soumise à un chargement dans son plan. Il est à noter que, dans le cas des structures en béton armé, du fait de la complexité de la géométrie des armatures et de la présence d'effets de confinement dus à celles-ci, il n'est pas clair qu'une modélisation bidimensionnelle soit suffisante pour traiter ce type de problèmes. En effet, bien que des structures comme des poutres soient généralement modélisées en contrainte plane, il est difficile, d'un point de vue théorique, de positionner la valeur de la charge extrême par rapport à celle que l'on obtiendrait grâce à une modélisation tridimensionnelle. On pourra se reporter à (Salençon, 1983) pour une présentation détaillée des modélisations en contrainte et déformation plane dans le cadre du calcul à la rupture.

Dans le cadre même d'une modélisation bidimensionnelle, plusieurs possibilités de description du composite béton armé s'offrent à nous. On peut :

- modéliser le béton ainsi que les armatures comme des milieux continus bidimensionnels, dotés de caractéristiques mécaniques différentes (figure 2 - 2).
- tirer parti de l'élanement des armatures afin de les représenter comme des milieux continus monodimensionnels, tout en conservant une modélisation de milieu continu bidimensionnel pour le béton (figure 2 - 3).

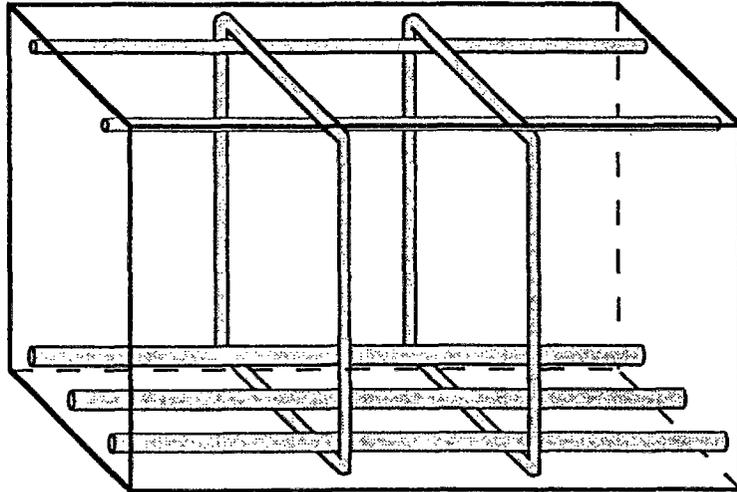


Figure 2 - 1 Modélisation tridimensionnelle

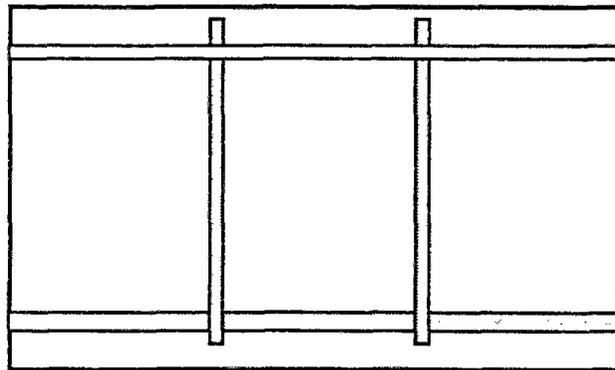


Figure 2 - 2 Modélisation bidimensionnelle

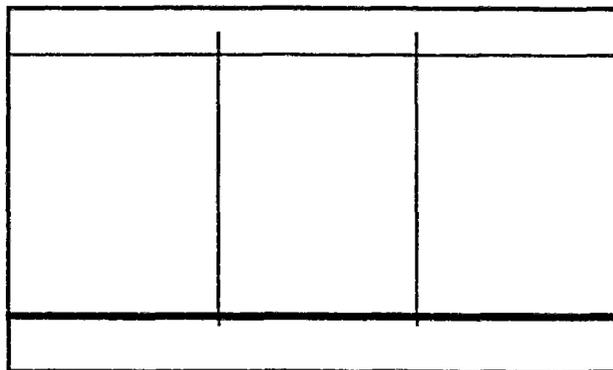


Figure 2 - 3 Modélisation mixte

Dans le cadre de ce travail, c'est la seconde formulation, appelée **modélisation mixte**, qui a été adoptée. Ce choix est fondé en premier lieu sur l'idée intuitive que, en raison de leur élancement, il est suffisant pour les applications que l'on en attend, de modéliser les armatures comme des milieux curvilignes. De plus, d'un point de vue pratique, il s'avère très difficile en calcul à la rupture, du fait de l'hétérogénéité des constituants, de construire des solutions complètes dans la modélisation bidimensionnelle, alors que la modélisation mixte se révèle souvent plus aisée à manipuler. D'autre part, pour une mise en œuvre numérique, le rapport entre le diamètre des armatures et les dimensions des structures à modéliser rend difficile la discrétisation de la géométrie, et peut introduire des causes d'imprécisions dans les calculs.

La modélisation mixte fournit donc un cadre mécanique rigoureux permettant de manipuler dans un même système des milieux continus dont les représentations géométriques et mécaniques sont différentes. Le cas de la modélisation mixte (2D-1D) et son application au calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés est présentée dans (Anthoine, 1989) et (de Buhan, 1993 ; de Buhan et Salençon, 1993), et son extension au cas (3D-2D) est envisagée dans (Chateau et Dormieux, 1995).

On effectue dans la première partie de ce chapitre une présentation générale de la modélisation mixte (2D-1D), en montrant comment on peut construire une représentation des efforts intérieurs grâce à la **méthode des puissances virtuelles** (Germain, 1973 ; Salençon, 1988). On montre ensuite la mise en œuvre de la modélisation mixte dans le cadre du calcul à la rupture puis on illustre la méthode grâce à un exemple d'application.

## 1.2 Construction de la modélisation mixte (2D-1D) par la méthode des puissances virtuelles

On considère un milieu continu curviligne orienté  $A$ , paramétré par une abscisse curviligne  $s$ ,  $s_0 \leq s \leq s_1$ , plongé dans un milieu continu bidimensionnel  $B$  du plan  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$ . La réunion des deux milieux continus est notée  $S = A \cup B$  (voir figure 2 - 4). De plus, on note  $\underline{e}_z = \underline{e}_x \wedge \underline{e}_y$ . Les points du milieu curviligne  $A$  sont décrits dans le plan  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$  par leur position  $\underline{p}(s)$ . On notera  $\underline{t}(s) = \frac{d\underline{p}}{ds}(s)$  le vecteur unitaire tangent en  $s$  à la courbe  $A$  et  $\underline{n}(s)$  le vecteur unitaire normal, tel que  $(\underline{t}(s), \underline{n}(s))$  forment une base directe.

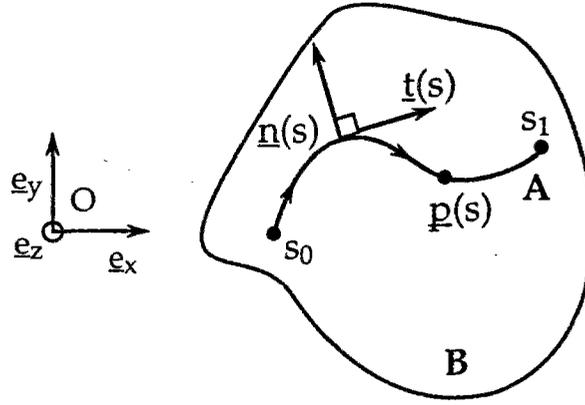


Figure 2 - 4 Modélisation géométrique du système S

### 1.2.1 Description cinématique et représentation des efforts intérieurs

On décrit les mouvements virtuels du système par un champ de vitesse  $\underline{U}_B(\underline{x})$  défini sur  $B$  et un champ de distributeurs défini le long de  $A$ , dont les éléments de réduction en  $\underline{p}(s)$  sont notés  $(\underline{U}_A(s), \Omega(s))$ . Le vecteur  $\underline{U}_A(s)$  représente la vitesse virtuelle du point du milieu curviligne  $A$  d'abscisse  $s$ , et  $\Omega(s)$  la vitesse de rotation de la microstructure associée, cette définition correspondant à la description cinématique classique d'un milieu curviligne plan (voir par exemple Salençon, 1988). Un champ de vitesse virtuel est alors défini par :

$$(1) \quad \mathbf{U} = \{ \underline{U}_B(\underline{x}), \underline{x} \in B ; (\underline{U}_A(s), \Omega(s)), s \in [s_0 ; s_1] \}$$

On suppose dans un premier temps que les champs  $\underline{U}_B(\underline{x})$  et  $(\underline{U}_A(s), \Omega(s))$  sont continus et différentiables. On fait de plus l'hypothèse de la continuité du champ de vitesse virtuel au passage de  $A$  en imposant l'égalité  $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{p}(s)} \underline{U}_B(\underline{x}) = \underline{U}_A(s)$ .

En postulant alors que la puissance des efforts intérieurs  $P_i$  est une forme linéaire du champ  $\mathbf{U}$  et de ses dérivées premières, on peut écrire :

$$(2) \quad P_i(\mathbf{U}) = - \int_B (\underline{a}(\underline{x}) \cdot \underline{U}_B(\underline{x}) + \underline{b}(\underline{x}) : \underline{\text{grad}} \underline{U}_B(\underline{x})) dS - \int_A (\underline{c}(s) \cdot \underline{U}_A(s) + d(s) \Omega(s) + \underline{e}(s) \cdot \frac{d\underline{U}_A(s)}{ds} + f(s) \frac{d\Omega(s)}{ds}) ds$$

On définit alors les mouvements rigidifiants du système. Ils correspondent à des champs  $\mathbf{U}$  tels que :

$$(3) \quad \begin{cases} \forall s, \Omega(s) = \Omega(s_0) \\ \forall s, \underline{U}_A(s) = \underline{U}_A(s_0) + \Omega(s_0) \underline{e}_z \wedge (\underline{p}(s) - \underline{p}(s_0)) \\ \forall \underline{x}, \underline{U}_B(\underline{x}) = \underline{U}_A(s_0) + \Omega(s_0) \underline{e}_z \wedge (\underline{x} - \underline{p}(s_0)) \end{cases}$$

La dernière condition assure la continuité du champ  $\underline{U}$ . On remarque qu'un tel mouvement est entièrement déterminé par la donnée de  $\underline{U}_A(s_0)$  et  $\Omega(s_0)$ .

On exploite tout d'abord la nullité de la puissance des efforts intérieurs pour tout sous-système  $S'$  de  $S$ , dans tout mouvement virtuel rigidifiant (premier énoncé de la méthode des puissances virtuelles).

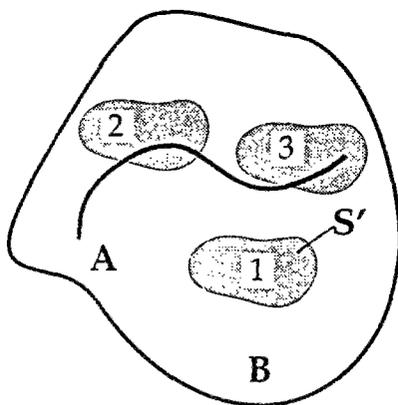


Figure 2 - 5 Types de sous-systèmes de  $S$  à considérer

On considère en premier lieu les mouvements de translation (définis par  $\Omega(s_0)=0$ ), tout d'abord pour des sous-systèmes  $S'$  d'intersection vide avec  $A$  (cas 1 de la figure 2 - 5), ce qui permet de conclure à la nullité du cofacteur  $\underline{a}(\underline{x})$ . Le cas des sous-systèmes d'intersection non vide avec  $A$  (cas 2 de la figure 2 - 5) entraîne alors la nullité de  $\underline{c}(s)$ .

On passe ensuite au cas des rotations pour des sous-systèmes de type 1 (d'intersection vide avec  $A$ ), ce qui permet de d'aboutir à la modélisation classique des efforts intérieurs par les contraintes dans un milieu continu (symétrie du tenseur  $\underline{b}(\underline{x})$ , noté  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  dans la suite). On considère ensuite des sous-systèmes de type 2 (d'intersection non vide avec  $A$ ). Le premier terme dans l'expression de la puissance des efforts intérieurs étant nul, on est ramené au cas de la modélisation des efforts intérieurs dans un milieu curviligne plan classique, si bien que l'on obtient finalement l'expression suivante :

$$(4) \quad P_i(\underline{U}) = - \int_B (\underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}_B(\underline{x})) dS - \int_A \underline{X}(s) \cdot \left( \frac{d\underline{U}_A(s)}{ds} - \Omega(s)\underline{n}(s) \right) + M(s) \frac{d\Omega(s)}{ds} ds$$

où l'on note  $\underline{d}_B(\underline{x}) = \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \underline{U}_B + \text{'grad} \underline{U}_B)$  le taux de déformation virtuel associé à  $\underline{U}_B$ . Le vecteur  $\underline{X}(s)$  se décompose classiquement suivant les vecteurs tangent et normal à la courbe  $A$  en

$\underline{X}(s) = N(s) \underline{t}(s) + V(s) \underline{n}(s)$ , où  $N$  et  $V$  représentent respectivement les efforts normal et tranchant dans le milieu curviligne.  $M$  représente le moment de flexion.

### 1.2.2 Obtention des équations d'équilibre

On établit maintenant les équations d'équilibre du système grâce au second énoncé de la méthode des puissances virtuelles, ce qui nous amène à proposer une forme de la puissance des efforts extérieurs  $P_{\text{ext}}$  appliqués à un sous-système de  $S$ . On considère en premier lieu des sous-systèmes  $S'$  de type 1 (d'intersection vide avec  $A$ ), pour lesquels la puissance des efforts extérieurs s'écrit, en présence d'un chargement volumique de densité  $\gamma$  :

$$(5) \quad P_{\text{ext}} = \int_{\partial S'} \underline{T}(\underline{x}) \cdot \underline{U}_B(\underline{x}) d\ell + \int_{S'} \gamma(\underline{x}) \cdot \underline{U}_B(\underline{x}) dS$$

On applique alors le second énoncé de la méthode des puissances virtuelles. Dans tout mouvement virtuel, on a :

$$(6) \quad P_i(\underline{U}) + P_{\text{ext}}(\underline{U}) = 0$$

Ceci permet alors, grâce au théorème de la divergence, d'obtenir les équations d'équilibre classiques du milieu continu :

$$(7) \quad \forall \underline{x} \in S', \quad \text{div } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) + \gamma(\underline{x}) = \underline{0}$$

$$(8) \quad \forall \underline{x} \in \partial S', \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}$$

On obtient également, en autorisant les discontinuités du champ  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$  au passage d'une ligne  $\Sigma$  :

$$(9) \quad \forall \underline{x} \in \Sigma, \quad \llbracket \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \rrbracket \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{0}$$

où  $\llbracket \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \rrbracket$  représente la discontinuité du champ de contrainte au passage de  $\Sigma$  en  $\underline{x}$ .

On complète la présentation par les équations d'équilibre du milieu curviligne. On considère pour ce faire les sous-systèmes  $S'$  de type 2 (voir figure 2 - 6). On note alors  $A' = A \cap S'$ . Dans un tel sous-système, le domaine  $B' = B \cap S'$  est séparé par  $A'$  en deux sous-domaines notés  $B^{**}$  et  $B^*$ , définis de telle sorte que  $\underline{n}$  soit la normale sortante à  $B^{**}$  le long de  $\Sigma$ . On note de plus  $P'_0$  et  $P'_1$  les extrémités de  $A'$ , définies dans le sens des abscisses curvilignes croissantes.

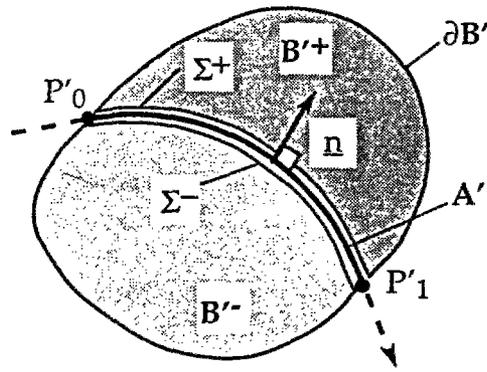


Figure 2 - 6 Sous-système S' de type 2.

On écrit la puissance des efforts extérieurs sous la forme :

$$(10) \quad P_{\text{ext}}(U) = \int_{\partial B'} \underline{T} \cdot \underline{U}_B(x) dl + \int_{B'} \underline{\chi}(x) \cdot \underline{U}_B(x) dS + \underline{R}_{P'0} \cdot \underline{U}_{A,P'0} + H_{P'0} \Omega_{P'0} + \underline{R}_{P'1} \cdot \underline{U}_{A,P'1} + H_{P'1} \Omega_{P'1}$$

Les termes supplémentaires par rapport à un sous-système de type 1 (sans intersection avec A), représentent les actions des parties du milieu curviligne A extérieures à S', sur A'. De plus, on a ici négligé les actions à distance s'exerçant sur A (comme par exemple le poids linéique des armatures).

On applique de nouveau le second énoncé de la méthode des puissances virtuelles. Dans tout mouvement virtuel, on a :

$$(11) \quad P_1(U) + P_{\text{ext}}(U) = 0$$

Soit  $\forall S', \forall U$  :

$$(12) \quad - \int_{B'} \underline{\sigma}(x) : \underline{d}_B(x) dS - \int_A \underline{\chi}(s) \cdot \left( \frac{d\underline{U}_A(s)}{ds} - \Omega(s) \underline{n}(s) \right) + M(s) \frac{d\Omega(s)}{ds} ds + \int_{B'} \underline{\chi}(x) \cdot \underline{U}_B(x) dS + \int_{\partial B'} \underline{T} \cdot \underline{U}_B(x) dl + \underline{R}_{P'0} \cdot \underline{U}_{A,P'0} + H_{P'0} \Omega_{P'0} + \underline{R}_{P'1} \cdot \underline{U}_{A,P'1} + H_{P'1} \Omega_{P'1} = 0$$

On utilise alors le théorème de la divergence appliqué à la première intégrale sur le domaine  $B'$  en tenant compte que la normale  $\underline{n}$  est sortante pour le sous-domaine  $B'^-$  et rentrante pour  $B'^+$ , puis une intégration par parties pour l'intégrale curviligne :

$$(13) \int_{B'} (\text{div } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) + \underline{\gamma}(\underline{x})) \cdot \underline{U}_B(\underline{x}) dS + \int_A \left[ \underline{U}_A(s) \cdot \frac{d\underline{X}(s)}{ds} + \Omega(s) \left( \frac{dM(s)}{ds} + \underline{X}(s) \cdot \underline{n}(s) \right) \right] ds + \int_{\Sigma'} (\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})) \cdot \underline{U}_B(\underline{x}) dl + \int_{\Sigma} -(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})) \underline{U}_B(\underline{x}) dl + \int_{\partial B} (\underline{T} \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})) \cdot \underline{U}_B(\underline{x}) dl + \underline{R}_{P_0} \cdot \underline{U}_{A,P_0} + H_{P_0} \Omega_{P_0} + \underline{R}_{P_1} \cdot \underline{U}_{A,P_1} + H_{P_1} \Omega_{P_1} + [\underline{X} \cdot \underline{U}_A]_{P_0}^{P_1} + [M\Omega]_{P_0}^{P_1} = 0$$

On a ici supposé par commodité d'écriture la continuité et la différentiabilité du champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  dans  $B'$ , sauf au passage de la ligne A, où les discontinuités sont envisagées.

En séparant les intégrales de contour des intégrales de surfaces, on obtient pour l'équilibre du milieu curviligne, en invoquant la continuité des champs de vitesse virtuels considérés, les équations suivantes :

$$(14) \begin{cases} \frac{d\underline{X}(s)}{ds} + [\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})] = 0 \\ \frac{dM(s)}{ds} + \underline{X}(s) \cdot \underline{n}(s) = 0 \end{cases}$$

où  $[[Q]]$  représente la discontinuité de la quantité Q au passage de la ligne A ( $[[Q]] = Q^+ - Q^-$ ).

On obtient également les conditions aux limites suivantes :

$$(15) \begin{cases} \underline{X}_{P_0} = - \underline{R}_{P_0} \text{ et } \underline{X}_{P_1} = \underline{R}_{P_1} \\ H_{P_0} = - M_{P_0} \text{ et } H_{P_1} = M_{P_1} \end{cases}$$

La projection des équations d'équilibre sur les directions  $\underline{n}$  et  $\underline{t}$  donne ensuite :

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{dN}{ds}(s) + \llbracket \sigma_{nt} \rrbracket (s) = 0 \\ \frac{dV}{ds}(s) + \llbracket \sigma_{nn} \rrbracket (s) = 0 \\ \frac{dM}{ds}(s) + V(s) = 0 \end{cases}$$

où l'on note  $\sigma_{nn} = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$  et  $\sigma_{nt} = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{t}$  les contraintes normale et tangentielle agissant sur la facette de normale  $\underline{n}$ .

Les équations (16) ont un sens physique très clair. Elles permettent d'expliquer la variation des efforts normal et tranchant dans les armatures comme résultant d'une discontinuité du vecteur contrainte au passage de l'armature. Les équations correspondent donc à l'équilibre d'un milieu curviligne soumis à une densité linéique d'efforts  $\llbracket \underline{\sigma}(x) \rrbracket \cdot \underline{n}(x)$ . Elles peuvent être également obtenues en considérant l'équilibre d'un segment élémentaire de poutre (voir figure 2 - 7) de longueur infinitésimale (Anthoine, 1989).

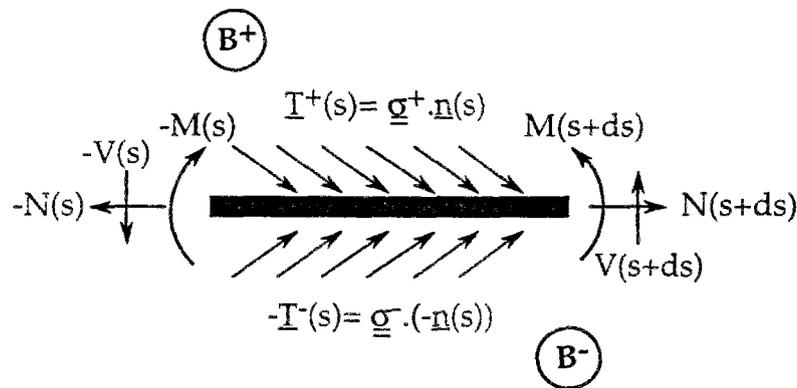


Figure 2 - 7 Equilibre d'un tronçon de poutre de longueur infinitésimale

### 1.2.3 Conditions aux limites pour le milieu curviligne

L'écriture des équations d'équilibre pour un sous-système de type 3 englobant une des extrémités de  $A$ , permet d'établir que si l'on n'autorise pas de singularité du champ de contrainte aux extrémités du milieu curviligne  $A$ , on obtient les conditions aux limites suivantes pour les efforts intérieurs au milieu curviligne  $A$  :

$$(17) \quad \begin{cases} M(s_0) = M(s_1) = 0 \\ X(s_0) = X(s_1) = 0 \end{cases}$$

### 1.2.4 Le cas des champs de vitesse virtuels continus et différentiables par morceaux

On considère maintenant le cas de champs de vitesse virtuels continus et différentiables par morceaux, afin de pouvoir prendre en compte ultérieurement des champs de vitesses virtuels discontinus, ce qui sera nécessaire dans la théorie du calcul à la rupture. Comme on a pu le voir précédemment grâce au principe des puissances virtuelles, l'expression obtenue pour la puissance des efforts intérieurs du système  $S$ , n'est autre que la somme de la contribution des milieux continus  $A$  et  $B$ . Les termes supplémentaires dans la puissance des efforts intérieurs issus des discontinuités dans les milieux continus  $A$  ou  $B$  peuvent être évalués de manière classique (voir Salençon, 1988). On obtient les expressions suivantes :

$$(18) \quad P_i^{\text{dis}}(\underline{U}_B) = - \int_{\Sigma} \underline{n}(x) \cdot \underline{\underline{\sigma}}(x) \cdot \llbracket \underline{U}_B \rrbracket d\Sigma$$

$$(19) \quad P_i^{\text{dis}}(\underline{U}_A, \Omega) = - \sum_i (\underline{X}(s_i) \cdot \llbracket \underline{U}_A \rrbracket + M(s_i) \llbracket \Omega \rrbracket)$$

On étudie maintenant le cas particulier d'un champ de vitesse continu et différentiable partout dans  $A$  et dans  $B$ , mais présentant une discontinuité de vitesse entre le milieu continu bidimensionnel et le milieu curviligne. On considère pour ce faire les sous-systèmes  $S'$  de type 2 (voir figure 2 - 8), en adoptant les mêmes notations que précédemment. A une abscisse curviligne  $s$  donnée, on note  $\underline{U}_A$  la vitesse du point matériel du milieu curviligne  $A$ , et respectivement  $\underline{U}^+$  et  $\underline{U}^-$  les limites des vitesses des points de  $B'$  lorsque  $\underline{x}$  tend vers  $\underline{p}(s)$ .

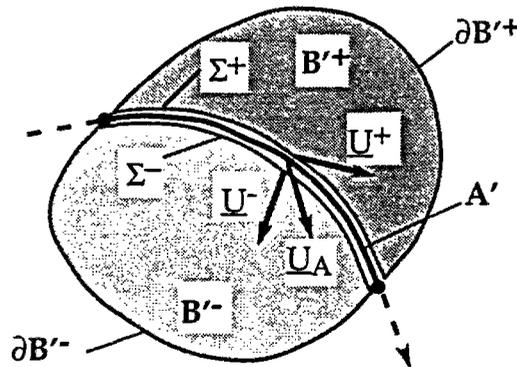


Figure 2 - 8 Discontinuité du champ de vitesse au passage du milieu curviligne

On applique le principe des puissances virtuelles séparément aux trois sous-systèmes  $B^+$ ,  $B^-$  et  $A'$ . On suppose, pour simplifier la présentation, l'absence de forces surfaciques à distance dans  $B'$  et linéiques le long de  $A'$ .

$$\text{On a pour } \mathbf{B}^{**} \text{ (resp. } \mathbf{B}^*) : - \int_{\mathbf{B}^{**}} \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}) : \underline{\underline{d}}_b(\mathbf{x}) dS + \int_{\partial \mathbf{B}^*} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{U}}_b(\mathbf{x}) dl + \int_{\Sigma} \underline{\underline{T}}^* \cdot \underline{\underline{U}}^*(\mathbf{x}) ds = 0$$

$$\text{Pour } \mathbf{A}' : \int_{\mathbf{A}'} -(\underline{\underline{X}}(s)) \cdot \left( \frac{d\underline{\underline{U}}_A(s)}{ds} - \underline{\underline{\Omega}}(s) \underline{\underline{n}}(s) \right) + M(s) \frac{d\underline{\underline{\Omega}}(s)}{ds} ds + \int_{\mathbf{A}'} -\underline{\underline{U}}_A \cdot (\underline{\underline{T}}^* + \underline{\underline{T}}) ds = 0$$

où l'on note  $\underline{\underline{T}}^*$  (resp.  $\underline{\underline{T}}$ ) le vecteur-contrainte agissant sur le milieu continu  $\mathbf{B}^{**}$  (resp.  $\mathbf{B}^*$ ) le long de  $\mathbf{A}'$ .

L'expression de la puissance des efforts extérieurs dans la deuxième équation est obtenue grâce aux équations d'équilibre (16) du milieu curviligne. On effectue ensuite la sommation de ces trois expressions :

$$(20) \quad - \int_{\mathbf{B}^{**}} \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}) : \underline{\underline{d}}_b(\mathbf{x}) dx - \int_{\mathbf{A}'} -(\underline{\underline{X}}(s)) \cdot \left( \frac{d\underline{\underline{U}}_A(s)}{ds} - \underline{\underline{\Omega}}(s) \underline{\underline{n}}(s) \right) + M(s) \frac{d\underline{\underline{\Omega}}(s)}{ds} ds + \int_{\mathbf{A}'} \underline{\underline{T}}^* \cdot (\underline{\underline{U}}^*(\mathbf{x}) - \underline{\underline{U}}_A(s)) ds \\ + \int_{\mathbf{A}'} \underline{\underline{T}} \cdot (\underline{\underline{U}}^*(\mathbf{x}) - \underline{\underline{U}}_A(s)) ds + \int_{\partial \mathbf{B}^*} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{U}}_b(\mathbf{x}) dl = 0$$

La discontinuité du champ de vitesse entre le milieu continu bidimensionnel et le milieu curviligne introduit donc un terme supplémentaire dans la puissance des efforts intérieurs du système mixte :

$$\int_{\mathbf{A}'} \underline{\underline{T}}^* \cdot (\underline{\underline{U}}^*(\mathbf{x}) - \underline{\underline{U}}_A(s)) ds + \int_{\mathbf{A}'} \underline{\underline{T}} \cdot (\underline{\underline{U}}^*(\mathbf{x}) - \underline{\underline{U}}_A(s)) ds = \int_{\mathbf{A}'} \underline{\underline{T}}^* \cdot \llbracket \underline{\underline{U}}(s) \rrbracket^+ ds + \int_{\mathbf{A}'} \underline{\underline{T}} \cdot \llbracket \underline{\underline{U}}(s) \rrbracket^- ds$$

où l'on note  $\llbracket \underline{\underline{U}}(s) \rrbracket^+ = \underline{\underline{U}}^*(\mathbf{p}(s)) - \underline{\underline{U}}_A(s)$  (resp.  $\llbracket \underline{\underline{U}}(s) \rrbracket^- = \underline{\underline{U}}^-(\mathbf{p}(s)) - \underline{\underline{U}}_A(s)$ ).

Ayant établi la représentation des efforts intérieurs et extérieurs, ainsi que les équations d'équilibre, on peut se doter maintenant de lois de comportement pour les matériaux constitutifs. On envisage dans la suite l'application de la modélisation mixte au calcul à la rupture, en présentant la mise en œuvre des approches statique puis cinématique.

### 1.3 Mise en œuvre de la modélisation mixte dans le cadre de la théorie du calcul à la rupture

On considère un système bidimensionnel  $\mathbf{S}$  constitué d'une armature modélisée par un milieu curviligne  $\mathbf{A}$  (de point courant  $\mathbf{p}(s)$ ) plongée dans du béton, représenté par un milieu continu  $\mathbf{B}$  (voir figure 2 - 9). Ce système est soumis à un chargement défini par un mode de chargement  $\underline{\underline{Q}}$  dépendant de  $n$  paramètres  $Q_i$ .

On s'intéresse à déterminer l'ensemble  $K$  des chargements  $Q$  (potentiellement) supportables par la structure, dans le cadre du calcul à la rupture. Cette analyse nécessite la connaissance de la géométrie du système, du mode de chargement qui lui est appliqué ainsi que des capacités de résistance des matériaux constitutifs.

D'après la définition du mode de chargement, la puissance des efforts extérieurs  $P_{ext}$  se met sous la forme :

$$(21) \quad P_{ext}(\mathbf{U}) = Q \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{U}),$$

où  $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{U})$  désigne le vecteur des paramètres cinématiques duaux des  $Q_i$ .

Comme précédemment, dans le milieu continu bidimensionnel  $B$ , les efforts intérieurs sont représentés par le tenseur de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$ , tandis que dans le milieu cirviligne  $A$ , ils sont décrits par un torseur  $[X]$  dont les composantes des éléments de réduction au point d'abscisse curviligne  $s$  sont notés :

$$(22) \quad [X(s)] = [P(s) ; \underline{X}(s) = N(s)\underline{t}(s) + V(s)\underline{n}(s), M(s) ]$$

Les capacités de résistance des deux matériaux sont déterminées par les domaines de résistance du béton  $G_B$  et des armatures  $G_A$ . Ces domaines de résistance sont définis de manière équivalente par les deux fonctions critères  $f_B(\underline{\underline{\sigma}})$  et  $f_A(M,N,V)$ . On peut également définir un critère de résistance  $G_I$  par l'intermédiaire d'une fonction critère  $f_I(\underline{n}, \underline{I})$  pour l'interface. Il convient cependant de noter que, contrairement aux autres constituants, la détermination expérimentale de  $G_I$  ne peut se faire que de "manière inverse", c'est-à-dire par l'interprétation d'un essai complexe, comme l'arrachement d'une barre dans un massif. Ceci rend cette détermination très délicate.

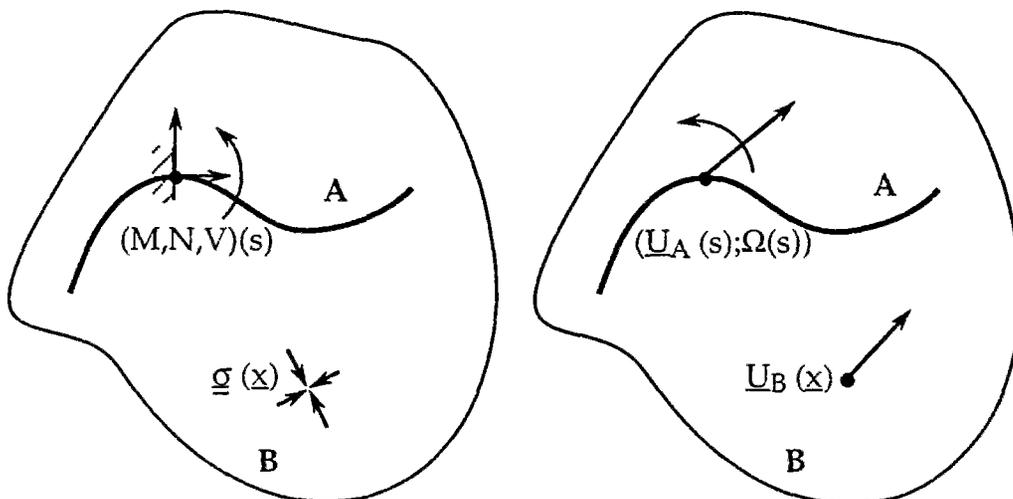


Figure 2 - 9 Approches statique et cinématique du calcul à la rupture en modélisation mixte.

### 13.1 Approche statique du calcul à la rupture

Dans ce paragraphe on étend la formulation classique de l'approche statique du calcul à la rupture à la modélisation mixte. Cette approche repose de la même manière sur la construction de champs de contrainte "mixtes"  $\{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) ; [X](s)\}$  statiquement admissibles avec le chargement et respectant les critères de résistance des constituants. Cette définition nous amène à utiliser les équations d'équilibre du milieu curviligne (16) qui relient les champs  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$  et  $[X](s)$ , obtenues dans la section précédente.

On appelle statiquement admissible avec un chargement  $\underline{Q}$  un champ de contrainte mixte  $\{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) ; [X](s)\}$  qui vérifie :

- les équations d'équilibre (en l'absence de chargement volumique) :

$$(23) \quad \forall \underline{x} \in \mathbf{B}, \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$$

$$(24) \quad \forall P(s) \in \mathbf{A}, \begin{cases} \frac{dN}{ds}(s) + \llbracket \sigma_{rn} \rrbracket(s) = 0 \\ \frac{dV}{ds}(s) + \llbracket \sigma_{rn} \rrbracket(s) = 0 \\ \frac{dM}{ds}(s) + V(s) = 0 \end{cases}$$

- les conditions aux limites en efforts (équilibre avec  $\underline{Q}$ ).

On appelle (potentiellement) supportable une charge  $\underline{Q}$  telle qu'il existe un champ mixte de contrainte  $\{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) ; [X](s)\}$  statiquement admissible dans le mode de chargement équilibrant  $\underline{Q}$  (S. A. avec  $\underline{Q}$ ), qui vérifie en tout point le critère de résistance de chaque matériau :

$$(25) \quad \begin{cases} \forall \underline{x} \in \mathbf{B}, f_b(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \\ \forall \underline{p}(s) \in \mathbf{A}, f_A(M, N, V) \leq 0 \\ \forall \underline{p}(s) \in \mathbf{A}, f_t(\underline{\underline{\sigma}}^+(\underline{p}(s)), \underline{n}(s)) \leq 0, \text{ (resp. } \underline{\underline{\sigma}}) \end{cases}$$

où l'on note  $\underline{\underline{\sigma}}^+(\underline{p}(s))$  et  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{p}(s))$  le tenseur de contraintes dans le béton de part et d'autre du point de l'armature  $\underline{p}(s)$ .

On note alors  $K$  l'ensemble des chargements  $Q$  supportables par la structure. Il est défini par :

$$K = \{ Q / \exists \{ \underline{\sigma}, [X] \} \text{ S. A. avec } Q \text{ et } \forall x \in B, f_B(\underline{\sigma}) \leq 0 ; \forall p(s) \in A, f_A(M, N, V) \leq 0 ; \\ f_i(\underline{\sigma}^*(p(s)), \underline{n}(s)) \leq 0, (\text{resp. } \underline{\sigma}^*) \}$$

Dans le cas d'un mode de chargement à un seul paramètre  $Q$ , on définit la valeur extrême  $Q^*$  supportable par la structure par :

$$Q^* = \text{Sup} \{ Q / \exists \{ \underline{\sigma}, [X] \} \text{ S. A. avec } Q \text{ et } \forall x \in B, f_B(\underline{\sigma}) \leq 0 ; \forall p(s) \in A, f_A(M, N, V) \leq 0 ; \\ f_i(\underline{\sigma}^*(p(s)), \underline{n}(s)) \leq 0, (\text{resp. } \underline{\sigma}^*) \}$$

Il est à noter que la charge  $Q^*$  est obtenue par la résolution d'un problème de maximisation d'une fonction linéaire des contraintes sous conditions non linéaires.

### 1.3.2 Approche cinématique du calcul à la rupture

On établit la formulation de l'approche cinématique du calcul à la rupture par dualisation de l'approche statique, grâce au théorème des puissances virtuelles. Les champs de vitesse virtuels à considérer sont ici encore des champs mixtes de la forme :  $U = \{ \underline{U}_B(x), \underline{U}_A(s), \Omega(s) \}$ . Ces champs sont composés de la vitesse virtuelle  $\underline{U}_B(x)$  des particules du béton et du couple  $(\underline{U}_A(s), \Omega(s))$  représentant la vitesse des points formant les armatures ainsi que la rotation de la microstructure associée (voir figure 2 - 9).

Une condition nécessaire pour qu'une charge  $Q$  soit supportable est qu'il existe un champ mixte de contrainte statiquement admissible avec  $Q$  et vérifiant les critères de résistance en tout point. On a alors nécessairement, d'après le principe des puissances virtuelles, pour tout champ de vitesse virtuel  $U$  :

$$(26) \quad P_{\text{ext}}(U) = \int_{B^=} \underline{\sigma}(x) : \underline{d}_B(x) dx + \int_A (\underline{X}(s) \cdot \left( \frac{d\underline{U}_A(s)}{ds} - \Omega(s) \underline{n}(s) \right) + M(s) \frac{d\Omega(s)}{ds}) ds \\ = \int_{B^=} \underline{\sigma}(x) : \underline{d}_B(x) dx + \int_A (N(s) \frac{d\underline{U}_A(s)}{ds} \cdot \underline{t}(s) + V(s) \cdot \left( \frac{d\underline{U}_A(s)}{ds} \cdot \underline{n}(s) - \Omega(s) \right) + M(s) \frac{d\Omega(s)}{ds}) ds$$

où l'on note  $\underline{d}_B(x) = \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \underline{U}_B + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{U}_B)$  le taux de déformation virtuel associé à  $\underline{U}_B$  dans le béton.

Si le champ  $\mathbf{U}$  est discontinu, il est nécessaire de rajouter au membre de droite de l'équation précédente les contributions des discontinuités :

- pour le béton :

$$\int_{\Sigma} \underline{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{x}) \cdot \llbracket \mathbf{U}_B \rrbracket d\Sigma$$

- pour les armatures:

$$\sum_i (N(s_i) \mathbf{t}(s_i) + V(s_i) \underline{\mathbf{n}}(s_i)) \cdot \llbracket \mathbf{U}_A(s_i) \rrbracket + M(s_i) \llbracket \Omega(s_i) \rrbracket$$

- à l'interface entre béton et armatures :

$$\int_A \mathbf{T}^+(s) \cdot \llbracket \mathbf{U} \rrbracket^+ d\Sigma + \int_A \mathbf{T}^-(s) \cdot \llbracket \mathbf{U} \rrbracket^- d\Sigma$$

On introduit alors, comme dans la formulation classique du calcul à la rupture, les fonctions d'appui  $\pi_A$ ,  $\pi_B$  et  $\pi_I$  des convexes de résistance des armatures, du béton et de l'interface béton-armature :

$$(27) \quad \pi_B(\underline{\underline{\mathbf{d}}}_B) = \sup_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \in G_B} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}}_B$$

$$(28) \quad \pi_A(\mathbf{t} \frac{d\mathbf{U}_A}{ds}; \Omega; \frac{d\Omega}{ds}) = \sup_{(M, N, V) \in G_A} \left\{ N \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{U}_A}{ds} + V \left( \frac{d\mathbf{U}_A}{ds} \cdot \underline{\mathbf{n}} - \Omega \right) + M \frac{d\Omega}{ds} \right\}$$

et respectivement, afin de prendre en compte des discontinuités de vitesse :

$$(29) \quad \pi_B(\underline{\mathbf{n}}; \llbracket \mathbf{U}_B \rrbracket) = \sup_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \in G_B} \{ \underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \llbracket \mathbf{U}_B \rrbracket \}$$

$$(30) \quad \pi_A(\mathbf{t}; \llbracket \mathbf{U}_A \rrbracket; \llbracket \Omega \rrbracket) = \sup_{(M, N, V) \in G_A} \{ N \mathbf{t} \cdot \llbracket \mathbf{U}_A \rrbracket + V \underline{\mathbf{n}} \cdot \llbracket \mathbf{U}_A \rrbracket + M \llbracket \Omega \rrbracket \}$$

$$(31) \quad \pi_I(\llbracket \mathbf{U}_I \rrbracket) = \sup_{\mathbf{I} \in G_I} (\mathbf{I} \cdot \llbracket \mathbf{U}_I \rrbracket)$$

On formule alors une condition nécessaire de stabilité sous le chargement  $\underline{Q}$  en écrivant que, pour tout champ de vitesse virtuel cinématiquement admissible (c'est-à-dire vérifiant les conditions aux limites en vitesses) on a l'inégalité suivante :

$$(32) \quad P_{\text{ext}}(\underline{U}) \leq P_{\text{res}}^{\text{max}}(\underline{U})$$

où l'on note  $P_{\text{res}}^{\text{max}}(\underline{U}) = \int_B \pi_B(\underline{d}_B) dS + \int_A \pi_A(t; \frac{d\underline{U}_A}{ds}; \frac{d\underline{\Omega}}{ds}) ds$  la puissance résistante maximale du champ de vitesse  $\underline{U}$ .

Afin de permettre la prise en compte de discontinuités de vitesses dans le champ  $\underline{U}$ , on doit rajouter à la puissance résistante maximale les termes suivants :

- pour le béton:  $\int_{\Sigma_B} \pi_B(\underline{n}; \llbracket \underline{U}_B \rrbracket) d\Sigma_B$
- pour les armatures:  $\sum_i \pi_A(t(s_i); \llbracket \underline{U}_A \rrbracket(s_i); \llbracket \underline{\Omega} \rrbracket(s_i))$
- pour l'interface entre béton et armatures :  $\int_A (\pi_t(\llbracket \underline{U} \rrbracket^+) + \pi_t(\llbracket \underline{U} \rrbracket^-)) ds$

L'équivalence entre les formulations statique et cinématique du calcul à la rupture pouvant être démontrée, sous réserve de quelques hypothèses mathématiques (voir (Frémond et Friaà, 1978) pour plus de détails), on peut alors donner la définition cinématique duale du domaine de stabilité :

$$K = \{ \underline{Q} / \forall \underline{U} \text{ C. A.}, \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{U}) \leq P_{\text{res}}^{\text{max}}(\underline{U}) \}$$

Cette définition permet la construction par "l'extérieur" du domaine de stabilité, grâce à une interprétation géométrique classique de l'inégalité  $\underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{U}) \leq P_{\text{res}}^{\text{max}}(\underline{U})$  (voir figure 2 - 10). En effet, dans l'espace des paramètres de chargements  $\underline{Q}_i$ , cette inégalité définit pour un champ  $\underline{U}$  fixé, un demi-espace contenant l'origine, à l'intérieur duquel se situe  $K$ .

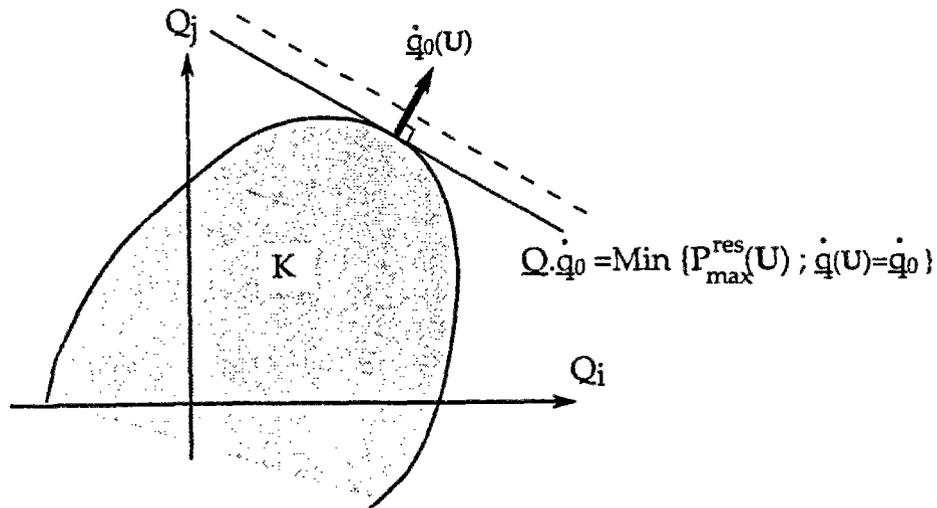


Figure 2 - 10 Approche par l'extérieur de K

Dans le cas d'un chargement défini par un seul paramètre, on peut donner la définition duale de la charge extrême  $Q^*$  :

$$Q^* = \text{Inf} \left\{ \frac{P_{\text{res}}^{\text{max}}(U)}{\dot{q}(U)} / \text{U.C.A.} ; \dot{q}(U) \geq 0 \right\}$$

Les fonctions  $P_{\text{res}}^{\text{max}}(U)$  et  $\dot{q}(U)$  étant respectivement positivement homogènes et linéaires en la variable  $U$ , on obtient la formulation équivalente :

$$Q^* = \text{Inf}_{\text{U.C.A.}} \{ P_{\text{res}}^{\text{max}}(U) ; \dot{q}(U) = 1 \}$$

On vient de montrer dans cette partie comment il est possible de construire une modélisation mécanique rigoureuse qui permette de prendre en compte des inclusions monodimensionnelles dans un milieu continu bidimensionnel. On a ensuite donné une présentation complète de l'application de la modélisation mixte au calcul à la rupture. On va maintenant, afin d'illustrer la présentation théorique qui a été faite, donner un exemple d'application de la méthode.

## 1.4 Un exemple d'application : le bloc renforcé par une armature droite

On considère un bloc rectangulaire de hauteur  $2a$  et de largeur  $2b$ , constitué d'un matériau homogène, modélisé en déformation plane (voir figure 2 - 11). Ce bloc est renforcé par une armature horizontale placée en son milieu. Ce dernier est posé sur un massif rigide et soumis à l'action d'un poinçon exerçant une force verticale  $P$ . Les interfaces entre le bloc, le massif et le poinçon seront supposées lisses. Le problème sera traité par la modélisation mixte, si bien que l'armature sera décrite comme un milieu continu monodimensionnel. On fait les hypothèses suivantes sur les capacités de résistance des matériaux :

- Le bloc est constitué d'un matériau de Tresca de cohésion  $C$ ,
- On adopte pour l'armature le critère de résistance suivant :

$$M=V=0 \text{ et } 0 \leq N \leq N_0$$

(c'est à dire qu'elle n'est susceptible de supporter que des efforts de traction inférieures à  $N_0$ . Les résistances à l'effort tranchant et au moment fléchissant sont négligées.),

- Les interfaces entre l'armature et le matériau sont supposées parfaitement adhérentes.

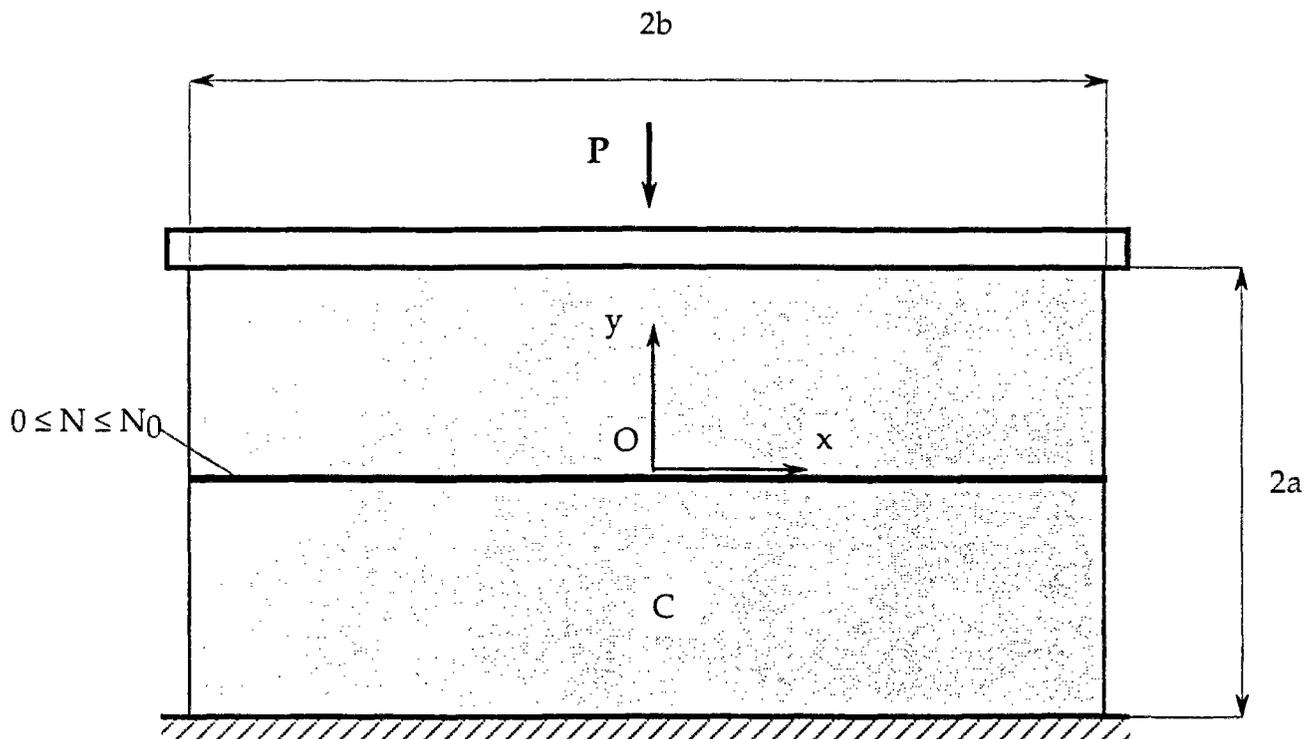


Figure 2 - 11 Géométrie du problème

On présente dans la suite, une mise en œuvre des approches statique puis cinématique de l'application du calcul à la rupture à la modélisation mixte.

### 1.4.1 Approche statique

On construit dans ce paragraphe des champs de contrainte mixtes pour illustrer l'approche statique du calcul à la rupture. Le principe de la méthode consiste à construire tout d'abord un champ de contrainte statiquement admissible dans le milieu continu bidimensionnel, puis de compléter par le champ des efforts intérieurs dans l'armature en intégrant les équations d'équilibre du milieu curviligne.

On considère le champ de contrainte constant par zone, à 10 zones défini sur la figure 2 - 12, utilisé dans (Kobayashi et Thomsen, 1965) pour un problème d'extrusion. Compte tenu des symétries du problème par rapport aux axes  $Ox$  et  $Oy$ , on se ramène à la détermination des tenseurs de contraintes dans les zones (1), (2) et (3).

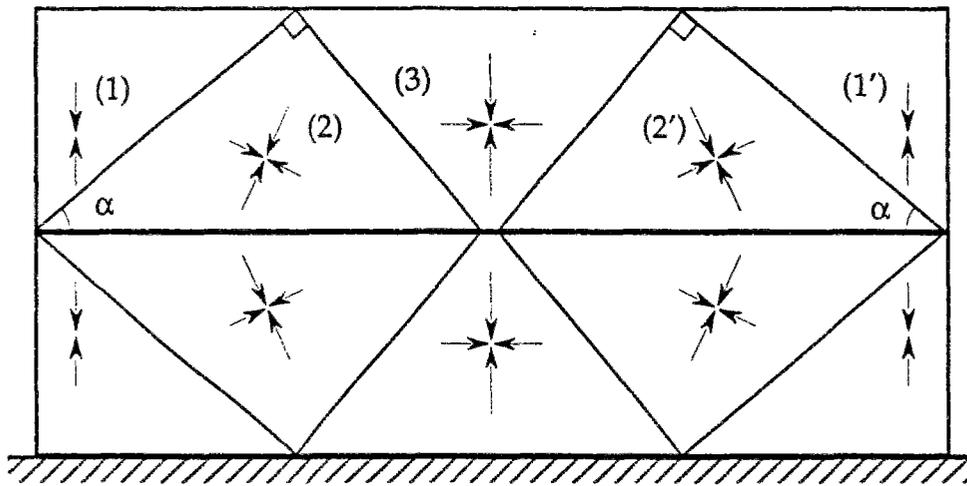


Figure 2 - 12 Champ de contrainte constant par zones.

On construit alors les champs de contrainte grâce au diagramme des cercles de Mohr de la figure 2 - 13, correspondant aux trois zones (1), (2), (3), et respectivement (1'), (2') ainsi que leurs symétriques. En supposant le critère saturé en tout point, on obtient alors les valeurs des champs de contrainte dans ces trois zones :

$$\underline{\underline{\sigma}}_1 = -2 C \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_2 = -2 C (\cos^2(2\alpha) + \cos 2\alpha) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - 2C(\sin^2(2\alpha) + \cos 2\alpha) \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - C \sin 4\alpha (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_3 = -4 C \cos 2\alpha \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - 2 C (1 + 2\cos 2\alpha) \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$$

On notera qu'il convient d'imposer la condition  $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$ , afin que la construction par les cercles de Mohr proposée soit valable (des valeurs supérieures aboutiraient à un diagramme comprenant trois cercles confondus).

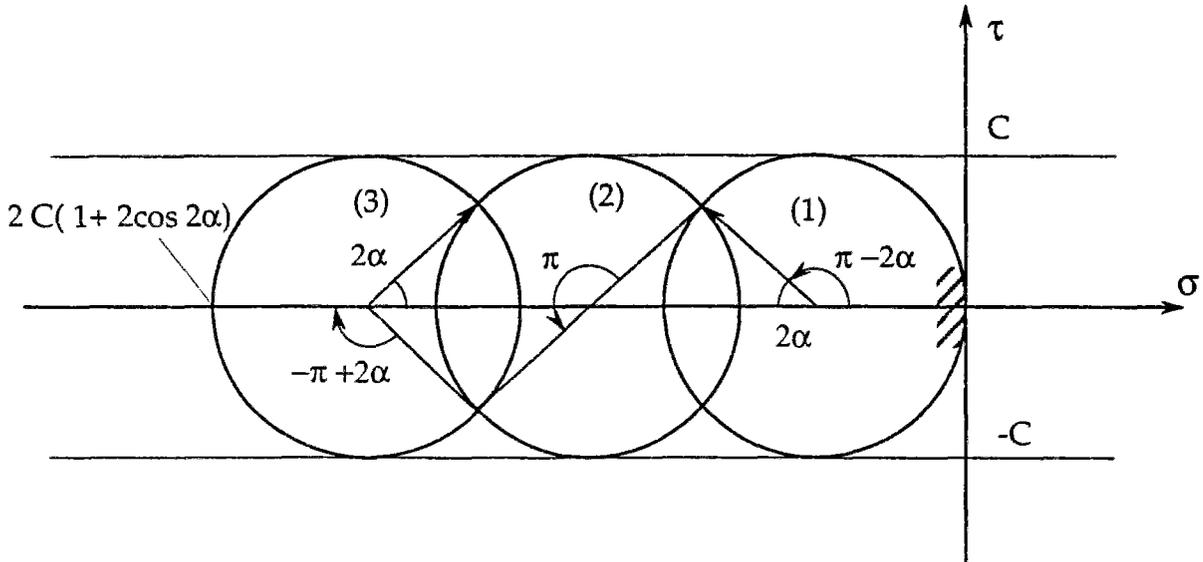


Figure 2 - 13 Représentation des états de contraintes des zones (1), (2), (3), dans le plan de Mohr

On complète ensuite le champ de contrainte mixtes, en intégrant les équations d'équilibre du milieu curviligne (16), afin d'obtenir la tension dans l'armature, qui est ainsi donnée par la formule suivante :

$$(33) \quad N(x) = - \int_{-b}^x \llbracket \sigma_{nr} \rrbracket dx$$

Ici, la prise en compte des conditions aux limites sur les efforts intérieurs (nullité du torseur des efforts intérieurs au deux extrémités) permet d'obtenir directement la distribution de tension représentée sur la figure 2- 14.

**Remarque**

On notera que, dans un cas plus général, les milieux curvilignes inclus dans le continu bidimensionnel peuvent former une structure "hyperstatique". On aurait donc à introduire de nouvelles inconnues statiques pour déterminer le champ d'efforts intérieurs dans les milieux curvilignes.

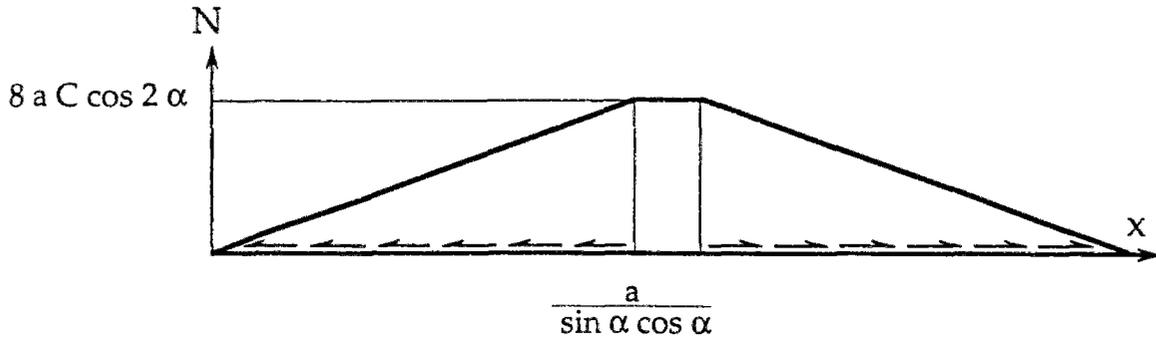


Figure 2- 14 Tension dans l'armature

Par construction, le champ de contrainte dans le continu bidimensionnel B est statiquement admissible et vérifie le critère de résistance du matériau de Tresca. Les équations d'équilibre du milieu curviligne A ayant été prises en compte, il ne reste plus qu'à imposer la condition de résistance de l'armature, et à calculer la charge P équilibrée par la distribution d'efforts construite dans cette approche. On obtient :

$$(34) \quad P = - \int_{-b}^b \sigma_{yy}(x,a) dx = 2C a \cot \alpha + 2C (1+2 \cos 2\alpha) (b - a \cot \alpha)$$

$$= 2 C b (1+2 \cos 2\alpha (1 - \frac{a}{b} \cot \alpha))$$

Cette approche est valide sous la condition géométrique  $\frac{\pi}{2} > \alpha \geq \frac{1}{2} \arcsin(2a/b)$  et la condition de résistance de l'armature  $0 \leq 8 a C \cos 2\alpha \leq N_0$ .

Pour des valeurs de  $\alpha$  comprises entre  $\arctan \frac{a}{b}$  et  $\frac{1}{2} \arcsin(2a/b)$  on adopte le champ de contrainte mixte présenté dans l'annexe 1, qui conduit à la valeur  $P=2 C b (1+2 \cos 2\alpha (1 - \frac{a}{b} \cot \alpha))$  sous la contrainte  $8 a C \cos 2\alpha \cot \alpha (\frac{b}{a} - \cot \alpha) \leq N_0$ .

On cherche ensuite la valeur maximum de P par rapport à  $\alpha$ , pour obtenir le meilleur minorant de la charge extrême.

#### 1.4.2 Approche cinématique

On doit en premier lieu calculer la valeur de la fonction  $\pi_A$  correspondant au critère de résistance de l'armature :

$$(35) \quad \pi_A (t; \frac{dU_A}{ds}; \Omega; \frac{d\Omega}{ds}) = \text{Sup}_{0 \leq N \leq N_0} \{ N t \frac{dU_A}{ds} \} = \text{Sup} \{ 0; N_0 t \frac{dU_A}{ds} \}$$

et respectivement, afin de prendre en compte des discontinuités de vitesse :

$$(36) \quad \pi_A(t; \llbracket \underline{U}_A \rrbracket; \llbracket \Omega \rrbracket) = \sup_{0 \leq N \leq N_0} \{ N t \cdot \llbracket \underline{U}_A \rrbracket \} = \sup \{ 0 ; N_0 t \cdot \llbracket \underline{U}_A \rrbracket \}$$

On rappelle la valeur de la fonction  $\pi_b$  du matériau de Tresca pour les discontinuités de vitesse :

$$(37) \quad \pi_b(\underline{n}; \llbracket \underline{U}_B \rrbracket) = C \llbracket \underline{U}_B \rrbracket \cdot t \text{ si } \llbracket \underline{U}_B \rrbracket \cdot \underline{n} = 0 \text{ et } \pi_b(\underline{n}; \llbracket \underline{U}_B \rrbracket) = +\infty \text{ sinon.}$$

On considère la famille de champs de vitesse mixtes définis sur la figure 2 - 15. Le champ de vitesse est uniforme en translation dans chaque bloc. On impose la continuité des vitesses entre le milieu continu bidimensionnel et l'armature, soit  $\underline{U}_A = \underline{U}_B$ . Le champ est alors paramétré par l'angle  $\beta$  et le module  $U$  de  $\underline{U}_A$ .

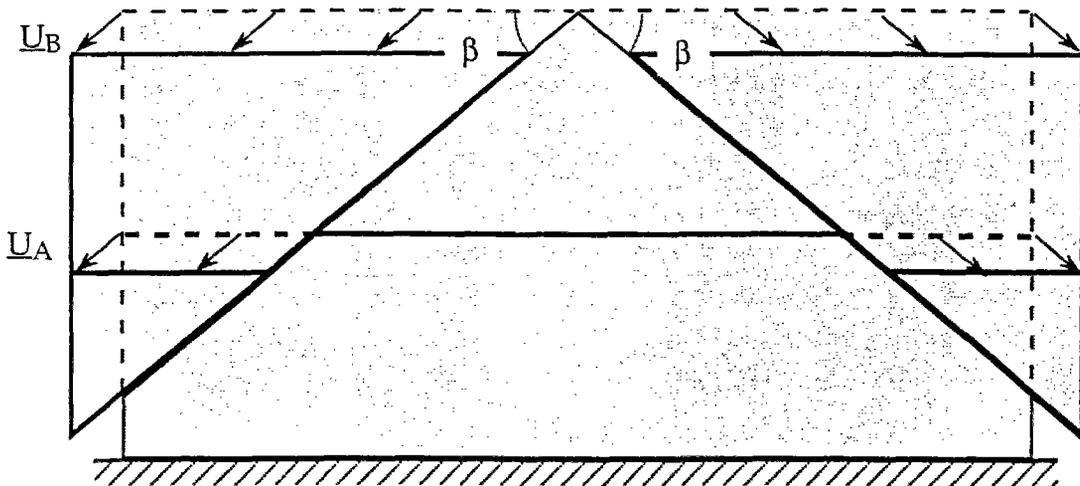


Figure 2 - 15 Approche cinématique

On calcule alors la puissance  $P_{ext}$  des efforts extérieurs. En notant  $P$  la force appliquée par le poinçon sur le massif, on obtient :

$$(38) \quad P_{ext} = PU \sin \beta$$

Selon les valeurs de l'angle  $\beta$ , on obtient différentes expressions pour la puissance résistante maximale :

$$(39) \quad P_{res}^{max} = \frac{2CUb}{\cos\beta} \quad \text{si } 0 \leq \beta \leq \arctan\frac{a}{b} = \beta_0$$

$$P_{res}^{max} = \frac{2CUb}{\cos\beta} + N_0U \cos\beta \quad \text{si } \beta_0 \leq \beta \leq \arctan\frac{2a}{b} = \beta_1$$

On optimise ensuite sur la valeur de  $\beta$  pour obtenir une borne supérieure de  $P^*$ , en fonction de  $N_0$ . On notera que dans le cas d'une armature infiniment résistante en traction ( $N_0 = +\infty$ ), les seuls champs de vitesse pertinents (pour lesquels la puissance résistante maximale n'est pas infinie) sont ceux dans lesquels la déformation longitudinale de l'armature est nulle, ce qui correspond au cas  $0 \leq \beta \leq \beta_0$ .

### 1.4.3 Résultats et commentaires

On reporte sur la figure 2 - 16 les valeurs obtenues pour  $\frac{P^*}{4bC}$  en fonction du taux de renforcement  $\lambda = \frac{N_0}{4aC}$ , pour une géométrie de  $a = 0,45 b$ .

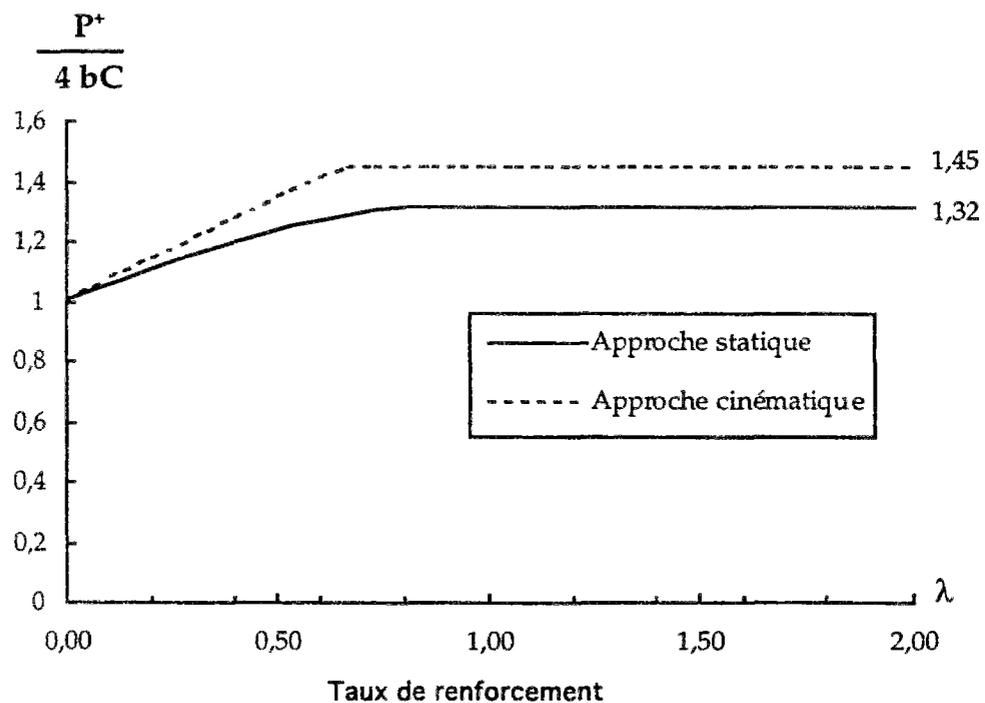


Figure 2 - 16 Comparaison des approches statique et cinématique

Les courbes précédentes permettent d'illustrer la mise en œuvre des approches statique et cinématique du calcul à la rupture. Dans l'exemple présenté, on met en évidence l'augmentation de résistance due à la présence d'une armature. Ce gain de résistance à la compression dans la direction perpendiculaire à l'armature s'interprète aisément comme la conséquence du "confinement" de la matrice dû à la présence de l'armature. On notera également l'existence d'un plateau pour la charge extrême lorsque la résistance de l'armature augmente. Ceci s'interprète simplement dans l'approche cinématique. En effet, dès que le taux de renforcement atteint une certaine valeur, les mécanismes optimaux ne déforment plus l'armature, si bien qu'une augmentation de sa résistance n'induit aucune augmentation de la charge extrême. La valeur obtenue ne dépend donc plus que de la géométrie du bloc.

## 2. L'homogénéisation en calcul à la rupture

### 2.1 L'exemple de l'éprouvette frettée

On considère maintenant le cas plus général d'un bloc carré de côté  $2b = 2pa$  ( $p \geq 1$ ), constitué d'un matériau de Tresca de cohésion  $C$ , modélisé en déformation plane. Ce bloc est renforcé par  $p$  armatures parallèles espacées entre elles d'une distance constante  $2a$ . Il est posé sur un massif rigide et soumis à l'action d'un poinçon exerçant une force verticale  $P$  sur celui-ci. Les interfaces entre le bloc, le massif et le poinçon sont supposées lisses. Le problème est traité grâce à la modélisation mixte, en adoptant les mêmes critères de résistance que dans l'exemple précédent. On présente de même que précédemment des approches statique puis cinématique du problème.

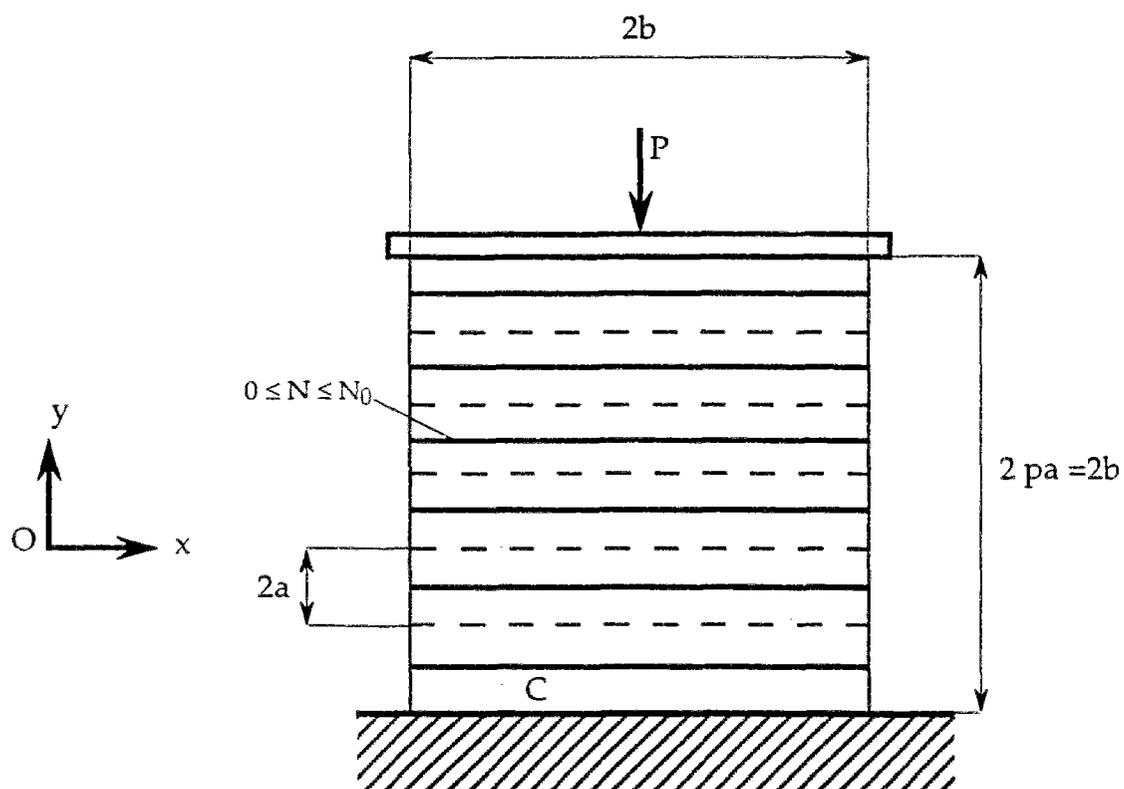


Figure 2 - 17 Le problème du bloc fretté

#### 2.1.1 Approche statique

Le principe de construction de l'approche statique que l'on utilise, consiste à employer de nouveau les champs construits dans le paragraphe précédent. Pour ce faire, on considère des champs de contrainte mixtes périodiques dans la direction  $\mathbf{e}_y$ , de période  $2a$ . On restreint donc le problème à l'étude d'une seule couche d'épaisseur  $2a$  du matériau, contenant une armature en son milieu. De même que dans l'exemple précédent, on construit alors un champ de contrainte constant par zone dans le matériau de Tresca, dont on déduit les tensions dans l'armature. Le champ est construit par

juxtaposition de n "mailles élémentaires" formées des trois triangles ( $a_i ; b_i ; c_i$ ). Ici encore, on peut construire grâce aux cercles de Mohr, les champs de contrainte dans toutes les zones, puis obtenir la tension dans l'armature. On remarquera que l'exemple précédent correspond au cas  $n=1$ .

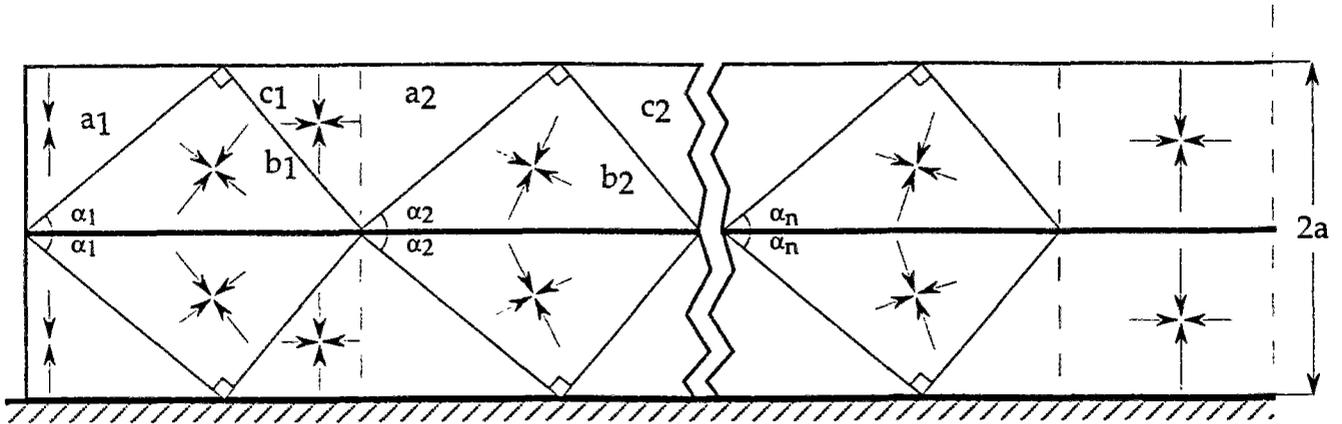


Figure 2 - 18 Construction du champ de contrainte dans une tranche d'épaisseur  $2a$  comprenant une armature

On obtient les expressions suivantes pour les valeurs du champ de contrainte dans les différentes zones :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{a,i} = -2 C e_y \otimes e_y - 4 C \sum_{j=1}^{i-1} \cos 2\alpha_j (e_x \otimes e_x + e_y \otimes e_y)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{b,i} = -2 C (\cos^2(2\alpha_i) + \cos 2\alpha_i) e_x \otimes e_x - 2C (\sin^2(2\alpha_i) + \cos 2\alpha_i) e_y \otimes e_y - C \sin 4\alpha_i (e_y \otimes e_x + e_x \otimes e_y) - 4 C \sum_{j=1}^{i-1} \cos 2\alpha_j (e_x \otimes e_x + e_y \otimes e_y)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{c,i} = -2 C e_y \otimes e_y - 4 C \sum_{j=1}^i \cos 2\alpha_j (e_x \otimes e_x + e_y \otimes e_y)$$

Les expressions précédentes ont une interprétation mécanique très claire. Le passage de la maille  $i-1$  à la maille  $i$  est obtenu en ajoutant au champ précédent un champ de contrainte isotrope de valeur :

$$- 4 C \cos 2\alpha_i (e_x \otimes e_x + e_y \otimes e_y)$$

Ceci correspond à une translation des cercles de Mohr parallèlement à l'axe  $\sigma$  dans la direction des compressions, ce qui permet d'augmenter en valeur absolue la contrainte verticale grâce à un "confinement horizontal". Les champs ainsi déterminés vérifient cette fois encore, par construction, le critère de résistance ainsi que les équations d'équilibre.

De même que précédemment, on obtient la tension le long de l'armature par intégration des équations d'équilibre, en prenant en compte les conditions aux limites du problème. Le diagramme obtenu est linéaire par morceaux :

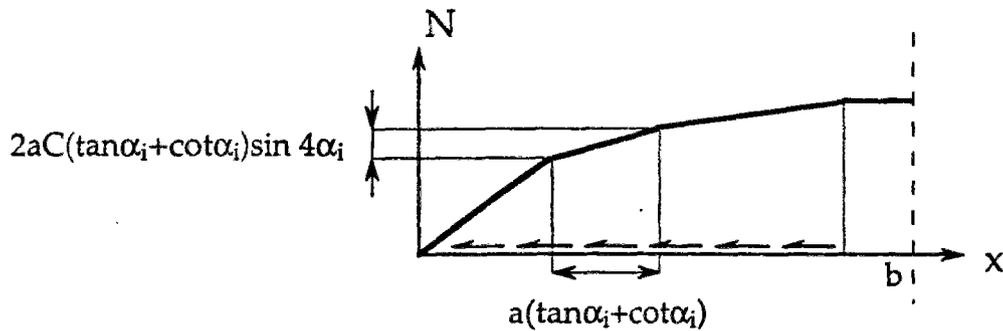


Figure 2 - 19 Tension dans les armatures

La charge équilibrée P est alors donnée par la formule suivante :

$$(40) \quad P = - \int_{-b}^b \sigma_{yy}(x,a) dx = 2 \sum_{j=1}^n \sigma_{yy}(a_j) a \cot \alpha_j + \sigma_{yy}(c_j) a \tan \alpha_j + (b - a \sum_{j=1}^n (\cot \alpha_j + \tan \alpha_j)) \sigma_{yy}(c_n)$$

On considère maintenant pour simplifier le cas particulier où tous les angles  $\alpha_i$  ont la même valeur, notée  $\alpha$ . Pour les mêmes raisons que précédemment, on impose  $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$  et l'on pose  $t = \tan(\alpha)$  ( $t \in [0;1]$ ).

On obtient pour la charge P l'expression suivante :

$$(41) \quad P = 4bC \left( 1 + 2n \frac{1-t^2}{1+t^2} - n \frac{a}{b} \frac{1-t^2}{t(1+t^2)} [n(1+t^2) + 1-t^2] \right)$$

On obtient comme précédemment la condition géométrique suivante :

$$(42) \quad \frac{na}{b} \leq \frac{t}{1+t^2}$$

On écrit de plus que la tension maximale dans l'armature reste inférieure à sa résistance :

$$(43) \quad 8naC \frac{1-t^2}{1+t^2} \leq N_0$$

On effectue ensuite une optimisation sur n et t pour obtenir les plus grands minorants de la charge extrême en fonction du paramètre de géométrie  $\varepsilon = \frac{a}{b}$  et du taux de renforcement adimensionnel  $\lambda = \frac{N_0}{4aC}$ .

### 2.1.2 Approche cinématique

On s'inspire ici aussi de l'approche cinématique proposée dans la partie précédente, en considérant la famille de mécanismes à un paramètre présentée sur la figure 2 - 20.

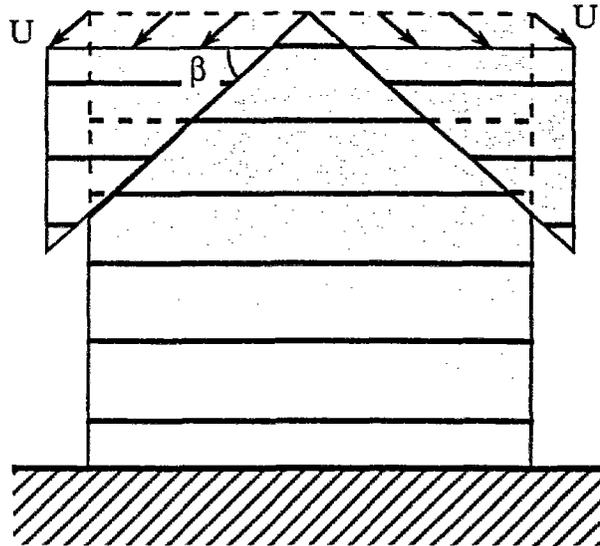


Figure 2 - 20 Mécanismes envisagés

On calcule alors la puissance  $P_{ext}$  des efforts extérieurs. En notant  $P$  la force appliquée par le poinçon sur le massif, on obtient :

$$(44) \quad P_{ext} = PU \sin \beta$$

Un calcul facile permet d'obtenir l'expression suivante pour la puissance résistante maximale :

$$(45) \quad P_{res}^{max} = \frac{2CUb}{\cos\beta} + 2 N_0 U \cos \beta m(\beta)$$

où  $m(\beta)$  représente le nombre d'armatures traversées par les discontinuités de vitesses.

On établit donc que :

$$m(\beta) = E \left( \frac{b}{2a} \operatorname{tg}\beta + \frac{1}{2} \right), \quad E(x) \text{ représentant la partie entière du réel } x.$$

On effectue ensuite une optimisation sur  $\beta$  pour obtenir des majorants de la charge extrême.

### 2.1.3 Résultats et commentaires

On présente sur la figure 2 - 21 l'influence du taux de renforcement adimensionnel  $\lambda = \frac{N_0}{4aC}$  sur la charge extrême supportée par l'éprouvette, pour diverses valeurs du paramètre d'élanement  $\epsilon = \frac{a}{b}$ :

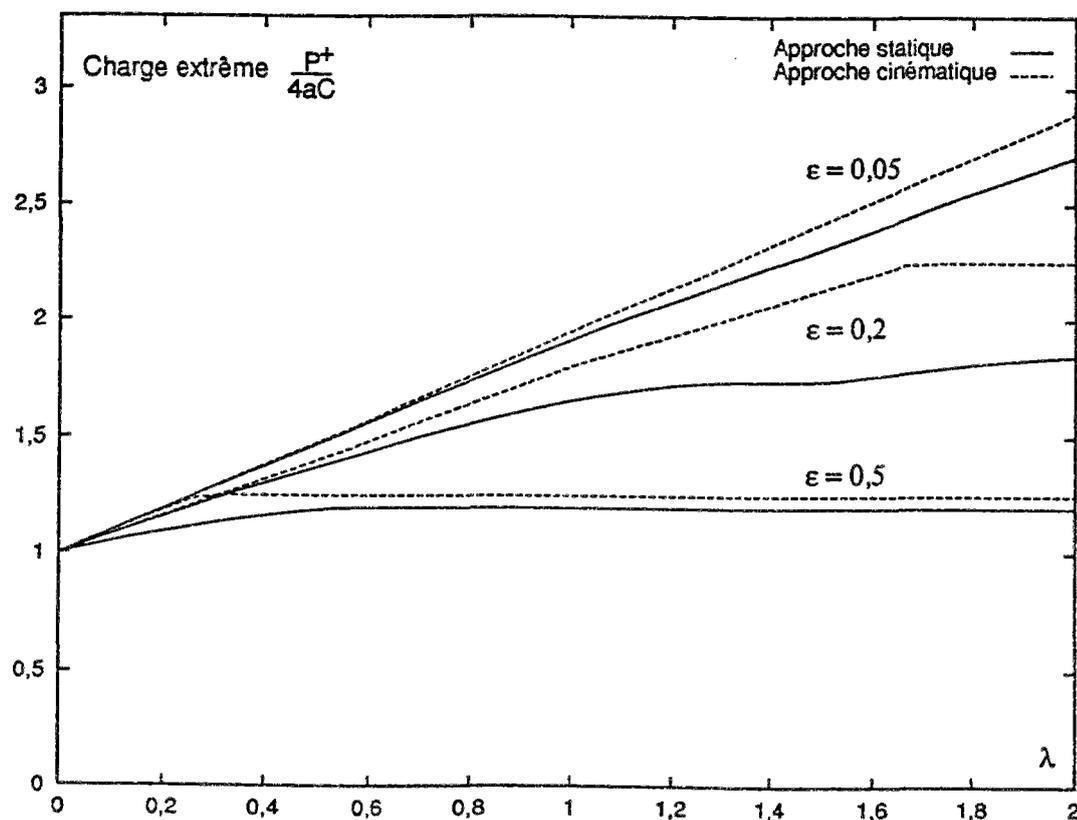


Figure 2 - 21 Influence du fretage de l'éprouvette sur sa résistance à la compression

Les résultats présentés sur la figure 2 - 21 permettent de mettre en évidence l'influence du fretage de l'éprouvette sur sa résistance à la compression. On observe les résultats suivants :

- le fretage induit un renforcement important dans la direction perpendiculaire aux armatures. Comme dans l'exemple précédent, ceci est dû au "confinement" horizontal induit par les armatures sollicitées en traction.
- on observe dans cet exemple encore, la présence d'une valeur plateau pour la charge extrême. Cette valeur ne dépend que du paramètre géométrique  $\epsilon$ , et est fonction décroissante de ce dernier.
- la courbe présente un comportement asymptotique lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro, à taux de renforcement constant. Ceci correspond à un nombre d'armatures tendant vers l'infini, la résistance de chaque armature diminuant de manière inversement proportionnelle. L'existence de

ce comportement asymptotique nous amène donc à proposer d'utiliser comme alternative à la modélisation mixte, la méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture pour prendre en compte la présence d'armatures régulièrement réparties (armatures transversales dans les poutres).

## Conclusion

Le dernier exemple présenté nous montre comment il est possible de prendre en compte dans le formalisme du calcul à la rupture, la présence d'armatures dans un massif, grâce à la modélisation mixte. Il apparaît qu'en présence d'un nombre important de renforcements, la prise en compte de chaque armature de manière discrète pose rapidement des problèmes de mise en œuvre. Ces difficultés dues à la complexité géométrique ainsi qu'au contraste des propriétés mécaniques entre béton et renforcement peuvent être palliées en considérant le composite "béton armé" comme un matériau homogène anisotrope. Le processus d'homogénéisation qui conduit à l'évaluation des caractéristiques mécaniques de ce matériau, ne peut bien sûr être appliqué qu'en présence d'une distribution régulière d'armatures. Dans le cas de poutres en béton armé, il paraît donc légitime d'appliquer cette théorie au renforcement transversal, mais de conserver une description des armatures longitudinales par la modélisation mixte. La section suivante est donc consacrée à une présentation de la théorie de l'homogénéisation périodique en calcul à la rupture. On y détaille notamment la construction du critère de résistance homogénéisé du matériau composite "béton armé renforcé transversalement". Ce sera l'occasion de définir les capacités de résistance des matériaux constitutifs (béton, armatures, interfaces), capacités de résistance qui nous serviront pour établir le critère homogénéisé.

## 2.2 La méthode d'homogénéisation périodique en calcul à la rupture

(Suquet, 1983 ; de Buhan, 1986)

### 2.2.1 Position du problème initial et principe de la méthode

On s'intéresse à la détermination du domaine de stabilité d'une structure hétérogène, notée  $\Omega_\varepsilon$ , soumise à un mode de chargement  $\underline{Q}$ . Cette structure est supposée fortement hétérogène, et l'on note dans la suite  $\varepsilon$  un paramètre représentant le rapport entre la taille des plus grandes hétérogénéités et la taille de la structure. Dans le cadre théorique du calcul à la rupture, on donne la définition statique du domaine des charges potentiellement supportables  $K^\varepsilon$ , de la manière suivante :

$$(46) \quad K^\varepsilon = \{ \underline{Q} / \exists \underline{\underline{\sigma}} \text{ S.A. avec } \underline{Q} ; \forall \underline{x} \in \Omega_\varepsilon, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \}$$

où l'on note  $\underline{\underline{\sigma}}$  S.A. avec  $\underline{Q}$ , les champs de contrainte statiquement admissibles avec  $\underline{Q}$ , c'est-à-dire vérifiant les équations d'équilibre ainsi que les conditions aux limites en contraintes.

On remarquera que le domaine  $K^\varepsilon$  ne dépend que des domaines de résistance locaux des différents matériaux, notés en chaque point  $\underline{x}$ ,  $G(\underline{x})$ , et de la géométrie de la structure.

La détermination directe du domaine  $K^\varepsilon$  (numériquement ou analytiquement) présente généralement des difficultés importantes dues à l'hétérogénéité même des constituants, difficultés que l'on peut surmonter grâce à la **méthode d'homogénéisation périodique en calcul à la rupture**. Cette méthode repose sur deux hypothèses-clés dont on discutera ultérieurement la pertinence dans le cas du béton armé :

- (A) la périodicité des caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure, (on appelle  $A_\varepsilon$  le motif élémentaire).
- (B) la forte hétérogénéité de la structure (dimensions des hétérogénéités petites devant les dimensions caractéristiques de la structure et du chargement).

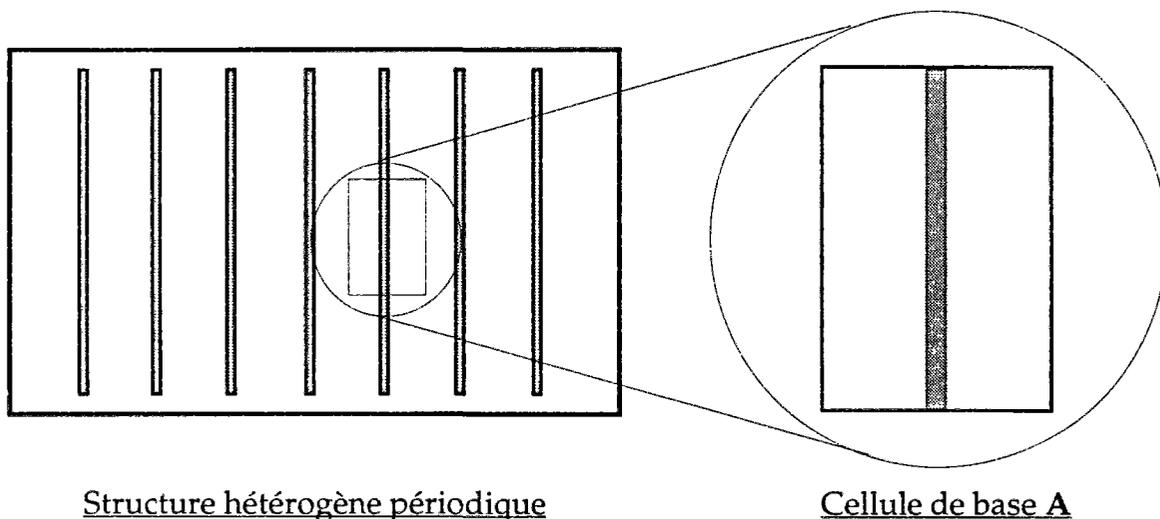
La validité de ces deux hypothèses permet alors la mise en œuvre de la théorie de l'homogénéisation périodique en calcul à la rupture, dont on expose le principe dans la suite. Cette théorie repose sur la possibilité de définir une structure puis un problème homogènes associés au problème initial, dont la résolution est généralement plus aisée que celle du problème initial.

La première étape de la méthode consiste à déterminer le critère de résistance macroscopique du matériau homogénéisé en fonction du comportement microscopique des constituants. Ceci se fait grâce à la résolution d'un problème auxiliaire de calcul à la rupture posé sur la **cellule de base  $A$** ,

déduite par homothétie du motif élémentaire  $A_e$ , de sorte que  $|A|=1$ . L'existence de cette cellule de base est liée à l'hypothèse (A). On peut ensuite formuler puis résoudre le problème homogène associé. L'hypothèse (B) quant à elle, permet d'établir des résultats de convergence des solutions du problème initial vers celles du problème homogène associé.

## 2.2.2 Détermination du critère de résistance macroscopique

Le critère de résistance macroscopique du matériau homogénéisé, noté  $G^{hom}$ , est obtenu par la résolution d'un problème auxiliaire de calcul à la rupture, posé sur la cellule de base  $A$ . On définit alors grâce au lemme de Hill généralisé, un mode de chargement de la cellule de base, qui met en relation les contraintes et taux de déformation à l'échelle microscopique et à l'échelle macroscopique. Ceci permet d'établir que le mode de chargement est déterminé par les 6 composantes du tenseur des contraintes macroscopiques  $\underline{\underline{\Sigma}}$ .



Structure hétérogène périodique

Cellule de base A

Figure 2 - 22 Définition de la cellule de base

On note alors  $S$  l'espace des champs de contrainte microscopiques  $\underline{\underline{\sigma}}$  statiquement admissibles (S. A.), définis sur la cellule de base par les conditions suivantes :

- $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$
- $[[\underline{\underline{\sigma}}]] \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}}$  sur les surfaces de discontinuités des contraintes, de normale  $\underline{\underline{n}}$ .
- $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}$  antipériodique, c'est-à-dire prenant des valeurs opposées en des points homologues de faces opposées de  $A$ .  $\underline{\underline{n}}$  représente la normale extérieure à  $A$  (voir figure 2 - 23).

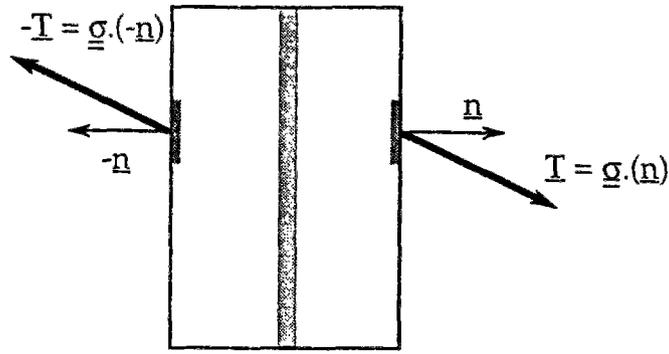


Figure 2 - 23 Conditions d'antipériodicité

On définit de même l'espace  $C$  des champs de vitesse microscopiques  $\underline{v}$  cinématiquement admissibles (C. A.) :

- $\underline{v}$  est continu et différentiable par morceaux sur  $A$ .
- $\underline{v} = \underline{F} \underline{x} + \underline{u}$ , où  $\underline{u}$  est un champ périodique sur  $A$ .

On montre tout d'abord que le tenseur  $\underline{F}$  est une fonction linéaire du champ  $\underline{v}$ , définie par l'égalité:

$$(47) \quad \underline{F} = \int_A \underline{\text{grad}} \underline{v} \, dA + \int_{\Sigma} \llbracket \underline{v} \rrbracket \otimes \underline{n} \, d\Sigma$$

où  $\llbracket \underline{v} \rrbracket$  représente la discontinuité du champ  $\underline{v}$  au passage de la surface  $\Sigma$ , de normale  $\underline{n}$ .

On définit également le taux de déformation macroscopique  $\underline{D}$  qui est lui aussi fonction linéaire du champ  $\underline{v}$  :

$$(48) \quad \underline{D} = \frac{1}{2} \int_A (\underline{\text{grad}} \underline{v} + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{v}) \, dA + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\underline{n} \otimes \llbracket \underline{v} \rrbracket + \llbracket \underline{v} \rrbracket \otimes \underline{n}) \, d\Sigma$$

On note de plus  $\underline{\delta} = \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \underline{u} + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{u})$  le taux de déformation associé à une champ  $\underline{u}$  quelconque.

|

**Définition du mode de chargement (Suquet, 1983)**

Il est formulé en écrivant le lemme de Hill généralisé sur la cellule de base  $A$  :

$$(49) \quad \forall \underline{\underline{\sigma}} \in S, \forall \underline{\underline{v}} \in C, P(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{v}}) = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}}$$

où  $P(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{v}})$  représente la puissance de déformation dans la cellule de base  $A$ ,  $\underline{\underline{D}}$  le taux de déformation macroscopique et  $\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$  la moyenne spatiale des contraintes sur la cellule de base  $A$ .

Le lemme de Hill permet de montrer que les espaces  $S$  et  $C$  définissent un mode de chargement de la cellule de base  $A$ , dépendant linéairement de six paramètres scalaires. Ces six paramètres scalaires sont les composantes dans un repère orthonormé du tenseur de contraintes macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$ , auquel est associé par dualité le tenseur vitesse de déformation macroscopique  $\underline{\underline{D}}$ .

**Définition statique de  $G^{hom}$**

Ayant précisé le mode de chargement de la cellule de base  $A$ , on définit le critère de résistance macroscopique  $G^{hom}$  des chargements supportables par la cellule :

$$(50) \quad G^{hom} = \{ \underline{\underline{\Sigma}} / \exists \underline{\underline{\sigma}} \in S ; \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} ; \forall \underline{\underline{x}} \in A, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) \in G(\underline{\underline{x}}) \}$$

**Définition cinématique de  $G^{hom}$**

La définition cinématique du critère de résistance macroscopique  $G^{hom}$  se fonde sur le raisonnement classique de dualisation en calcul à la rupture, qui permet de définir la fonction d'appui  $\Pi^{hom}$  du convexe  $G^{hom}$  par :

$$(51) \quad \Pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) = \text{Inf}_{\underline{\underline{u}} \in U} \langle \pi_{\underline{\underline{x}}}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\delta}}) \rangle$$

où  $U$  désigne l'ensemble des champs de vitesse périodiques sur  $A$ , et  $\pi_{\underline{\underline{x}}}(\cdot)$  la fonction d'appui du convexe de résistance  $G(\underline{\underline{x}})$  au point  $\underline{\underline{x}}$ .

La convexité de la fonction  $\Pi^{hom}$ , se déduisant aisément de la convexité des fonctions  $\pi_{\underline{\underline{x}}}$ , on montre que la donnée de la fonction d'appui  $\Pi^{hom}$  et du domaine  $G^{hom}$  sont équivalentes, moyennant certaines hypothèses mathématiques (voir Frémond et Friaà, 1978).

Les deux relations liant le convexe  $G^{\text{hom}}$  et sa fonction d'appui sont :

$$(52) \quad \Pi^{\text{hom}}(\underline{\underline{D}}) = \text{Sup} \{ \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} ; \underline{\underline{\Sigma}} \in G^{\text{hom}} \}$$

$$(53) \quad G^{\text{hom}} = \bigcap_{\underline{\underline{D}}} \{ \underline{\underline{\Sigma}} ; \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \Pi^{\text{hom}}(\underline{\underline{D}}) \}$$

### 2.2.3 Résolution du problème homogénéisé

#### Définition de la structure homogène associée

Ayant déterminé le critère de résistance macroscopique  $G^{\text{hom}}$ , on associe à la structure hétérogène périodique initiale, une structure homogène définie par :

- une géométrie identique à la structure initiale.
- un matériau constitutif homogène dont les capacités de résistance sont définies par le convexe  $G^{\text{hom}}$ .

#### Définition du problème homogène associé

Le problème homogène associé est un problème de calcul à la rupture posé sur la structure homogène associée à la structure initiale. Le mode de chargement auquel est soumise cette nouvelle structure est identique au mode de chargement initial, et permet de définir le domaine des chargements potentiellement supportables  $K^{\text{hom}}$  pour la structure homogène associée :

$$(54) \quad K^{\text{hom}} = \{ \underline{\underline{Q}} / \exists \underline{\underline{\sigma}} \text{ S.A. avec } \underline{\underline{Q}} ; \forall \underline{\underline{x}} \in \Omega, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) \in G^{\text{hom}} \}$$

### 2.2.4 Résultats de convergence et justification de la méthode

(Suquet, 1983) puis (de Buhan, 1986) ont établi la convergence du domaine de stabilité initial  $K^\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, vers un domaine de stabilité asymptotique, noté  $K^0$  :

$$(55) \quad K^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K^\varepsilon$$

Ces auteurs ont montré de plus que, aux effets de bord près, les domaines  $K^0$  et  $K^{\text{hom}}$  sont confondus, si bien que l'on peut ramener l'étude du problème initial à celle du problème homogène associé dès que le paramètre  $\varepsilon$  est suffisamment petit. Ce résultat de convergence justifie donc a posteriori la validité et l'intérêt de la démarche d'homogénéisation.

La méthode théorique qui vient d'être présentée permet la prise en compte de la présence d'armatures régulièrement distribuées dans le béton. Cette modélisation va donc être appliquée au cas des armatures transversales. La première étape nécessaire à l'application de la théorie de l'homogénéisation consiste, comme il a été souligné, en la détermination d'une cellule de base, puis du critère de résistance du matériau homogénéisé par la résolution d'un problème de calcul à la rupture posé sur cette cellule. On va maintenant dans le paragraphe suivant présenter les critères de résistance adoptés pour les matériaux constitutifs (béton, armatures et interfaces béton-armatures) puis le critère de résistance macroscopique que l'on en déduit.

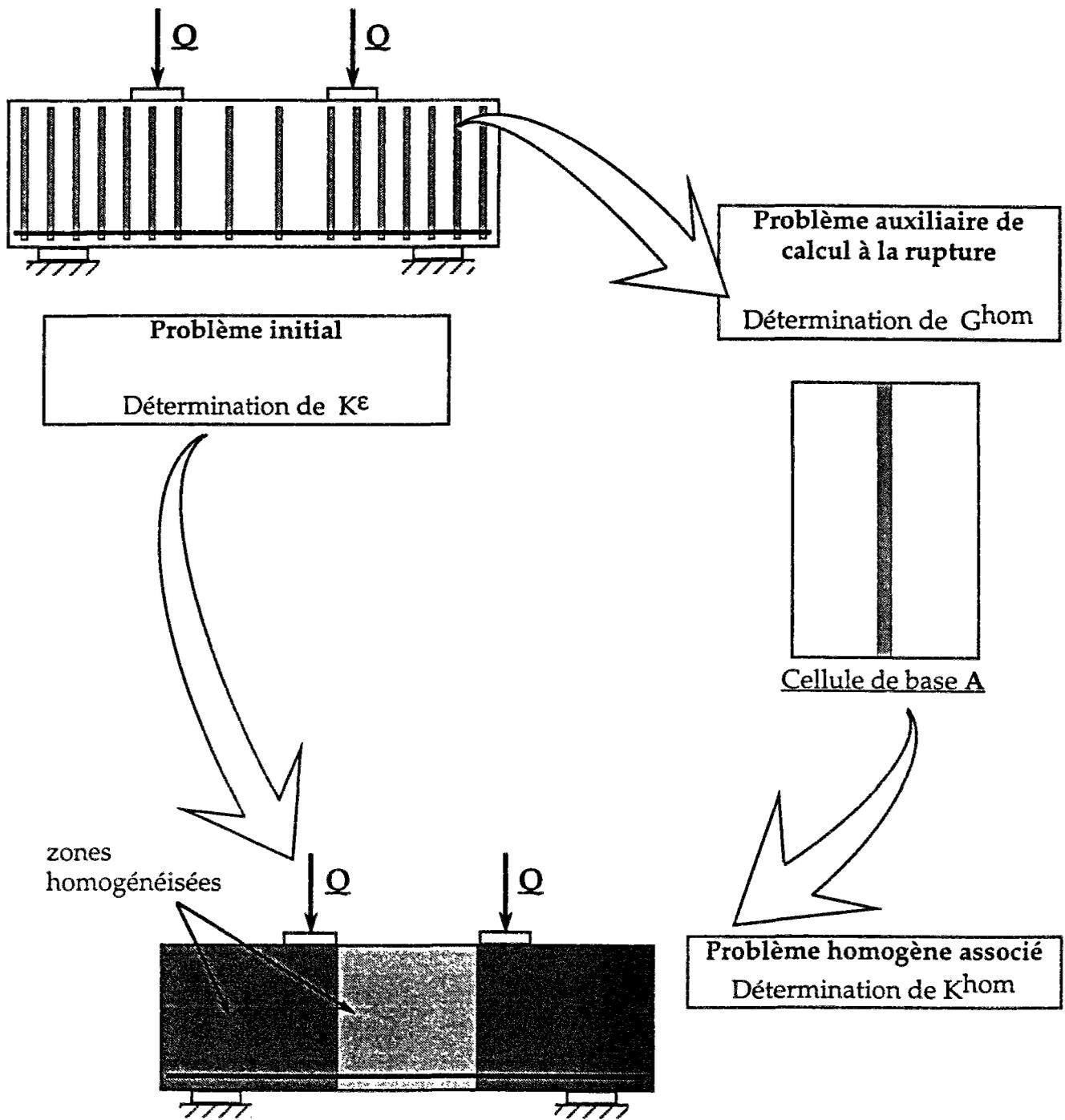


Figure 2 - 24 Résumé de la méthode d'homogénéisation

## 2.3 Choix des critères de résistance des matériaux constitutifs

Avant de définir le critère de résistance macroscopique du béton renforcé transversalement, on commence par présenter les critères choisis pour les matériaux constitutifs : béton, armatures, interface béton/armatures.

### 2.3.1 Le béton

Pour le béton, notre choix s'est porté sur un modèle simple, celui du critère de Coulomb tronqué en traction, dont la courbe intrinsèque est représentée sur la figure 3 - 25. Ce critère a en effet été adopté par divers auteurs (Nielsen et al. 1978 ; Nielsen, 1982 ; Chen, 1982) pour représenter de manière approchée le domaine de résistance du béton. Il est défini par :

$$(56) \quad f_B(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \text{ avec : } f_B(\underline{\underline{\sigma}}) = \text{Sup}_{i,j} (\sigma_i (1+\sin\varphi) - \sigma_j (1-\sin\varphi) - \sigma_c (1 - \sin\varphi) ; \sigma_i - T)$$

où  $\sigma_i$  sont les valeurs principales de  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\sigma_c$  et T représentent respectivement les résistances à la compression et à la traction simples du béton.  $\varphi$  désigne l'angle de frottement interne, que l'on choisit suivant (Chen, 1982), égal à  $\varphi=37^\circ$ .

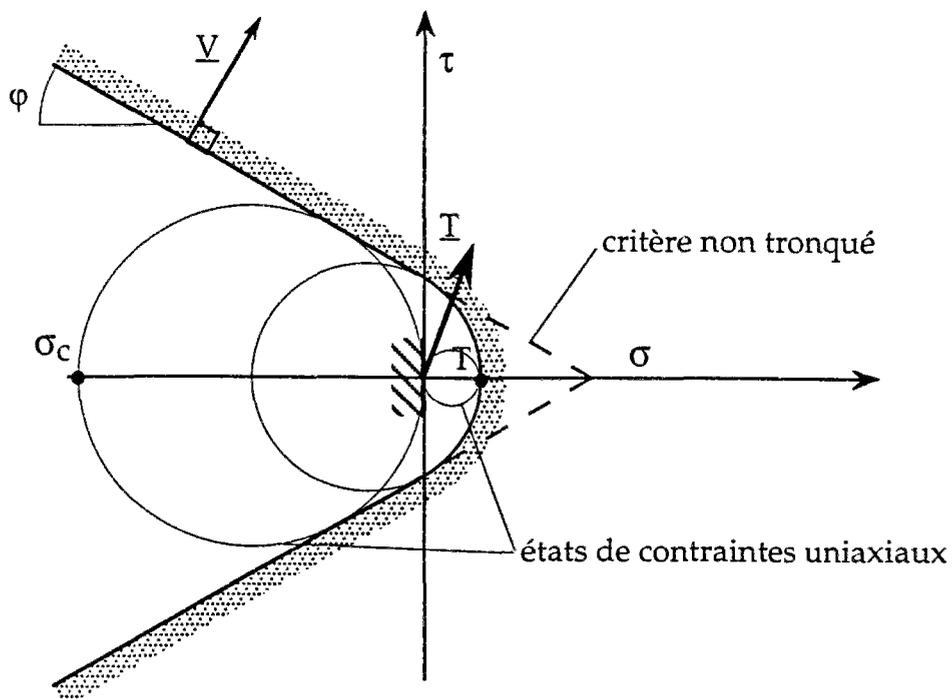


Fig 3 - 25 Choix du critère de résistance pour le matériau béton (courbe intrinsèque)

On définit de manière équivalente les fonctions  $\pi_b(\underline{d})$  et  $\pi_b(\underline{n}; \underline{V})$ , fonctions d'appui du convexe de résistance du matériau (Salençon, 1983) :

$$(57) \quad \pi_b(\underline{d}) = \frac{\sigma_c}{2} \left( \sum_{i=1}^{i=3} |d_i| - \text{tr } \underline{d} \right) + \frac{T}{1-\sin\varphi} \left( \text{tr } \underline{d} - \left( \sum_{i=1}^{i=3} |d_i| \right) \sin\varphi \right) \quad \text{pour } \text{tr } \underline{d} \geq \left( \sum_{i=1}^{i=3} |d_i| \right) \sin\varphi$$

$$= +\infty \quad \text{pour } \text{tr } \underline{d} < \left( \sum_{i=1}^{i=3} |d_i| \right) \sin\varphi$$

$$(58) \quad \pi_b(\underline{n}; \underline{V}) = \frac{\sigma_c}{2} (|\underline{V}| - \underline{V} \cdot \underline{n}) + \frac{T}{1-\sin\varphi} (\underline{V} \cdot \underline{n} - (|\underline{V}|) \sin\varphi) \quad \text{pour } \underline{V} \cdot \underline{n} \geq (|\underline{V}|) \sin\varphi$$

$$= +\infty \quad \text{pour } \underline{V} \cdot \underline{n} < (|\underline{V}|) \sin\varphi$$

Dans le cadre de notre modélisation, on aura également besoin du critère de résistance du béton en contrainte plane. Son expression analytique se déduisant aisément du critère (56), on en donne simplement une représentation en courbe intrinsèque sur la figure 2-26.

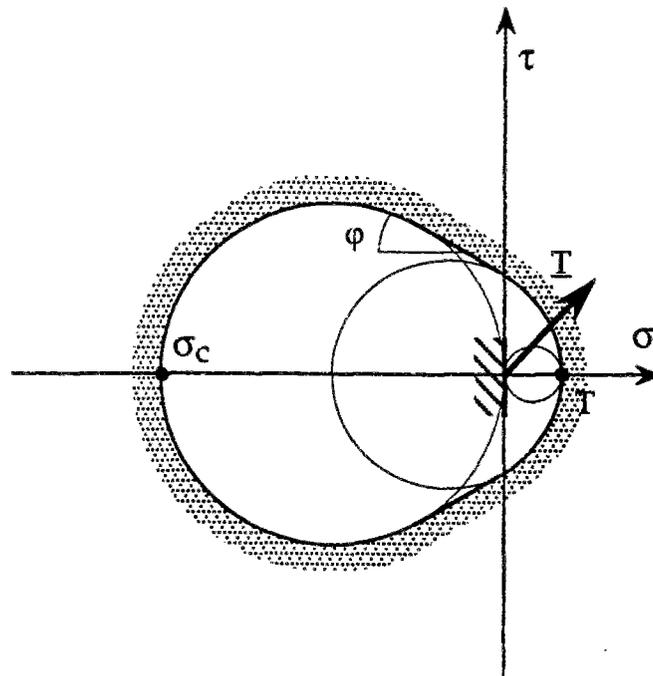


Figure 2-26 Critère de résistance du béton en contrainte plane (courbe intrinsèque)

### 2.3.2 Les armatures

Pour décrire la résistance des armatures, on adopte un critère ne portant que sur la tension. On néglige donc dans ce choix toute résistance à "l'effort tranchant" et au moment fléchissant, choix qui nous place du côté de la sécurité.

On adopte donc le critère suivant pour les armatures :

$$(59) \quad -kN_0 \leq N \leq N_0 \text{ et } V=M=0$$

où  $N_0$  représente la limite en traction de l'armature et  $k$  est un coefficient adimensionnel compris entre 0 et 1, destiné à rendre compte de la limitation de la résistance à la compression des armatures par flambement. Dans la suite on choisira généralement  $k=0$  (résistance nulle en compression). Il est à noter en effet que, d'après les dispositions réglementaires du BAEL 91, il est nécessaire de disposer des armatures transversales très peu espacées (moins de quinze fois le diamètre des armatures longitudinales) pour pouvoir éviter le flambement des armatures longitudinales, si bien que dans la majorité des cas, leur résistance à la compression doit être supposée nulle. Finalement, le critère choisi est donc :

$$(60) \quad 0 \leq N \leq N_0 \text{ et } V=M=0$$

On définit également les fonctions  $\pi_A$  correspondantes :

$$(61) \quad \pi_A \left( t; \frac{dU_A}{ds}; \Omega; \frac{d\Omega}{ds} \right) = \sup_{0 \leq N \leq N_0} \left\{ N t; \frac{dU_A}{ds} \right\} = \sup \left\{ 0; N_0 t; \frac{dU_A}{ds} \right\}$$

et, respectivement pour les discontinuités de vitesses :

$$(62) \quad \pi_A \left( t; \llbracket U_A \rrbracket \right) = \sup_{0 \leq N \leq N_0} \left\{ N t; \llbracket U_A \rrbracket \right\} = \sup \left\{ 0; N_0 t; \llbracket U_A \rrbracket \right\}$$

### 2.3.3 Interface béton / acier

Bien que la méthode permette en toute généralité de prendre en compte un critère de résistance de l'interface béton/acier, on supposera dans ce travail pour des raisons de simplicité, l'adhérence totale entre le béton et les aciers d'armatures. On se placera généralement dans des situations où le phénomène de perte d'adhérence des armatures n'intervient pas. Il est à noter cependant qu'un tel critère de résistance reste de toutes façons très difficile à déterminer expérimentalement, du fait du caractère tridimensionnel du problème de structure à résoudre pour interpréter les essais.

## 2.4 Le critère de résistance macroscopique du matériau renforcé par armatures

### 2.4.1 Choix de la cellule de base

On représente sur la figure 2 - 27 la cellule de base choisie pour déterminer le critère de résistance macroscopique du béton renforcé transversalement. Dans notre étape de la modélisation, le choix de la cellule de base se fait dans l'hypothèse d'une représentation bidimensionnelle de la structure.

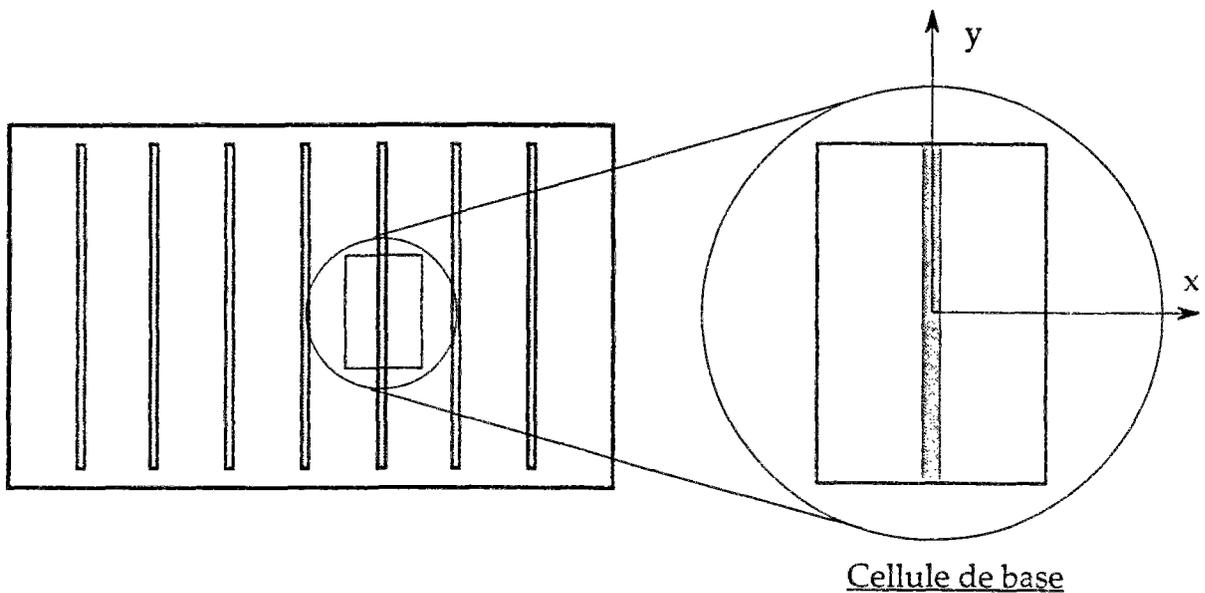


Figure 2 - 27 Géométrie de la cellule de base

Le cas que nous envisageons est celui du matériau renforcé par des armatures parallèles. Cette situation a été traitée par (de Buhan, 1985) dans le cas bidimensionnel puis (de Buhan et Taliencio, 1991) pour des matériaux composites, dans le cas tridimensionnel. Ce type de critère de résistance a également été utilisé dans le domaine des matériaux composites et dans le domaine de la géotechnique pour analyser la stabilité de massifs en terre armée (de Buhan et al., 1989 ; Abdi et al., 1994). On donne dans la suite une présentation des résultats obtenus.

## 2.4.2 Définition statique

Dans le cas où la proportion volumique armatures/béton est faible et où la capacité de résistance du matériau constituant les armatures est grande devant celle du béton, on obtient la définition suivante pour  $G^{\text{hom}}$  (dans l'hypothèse d'adhérence parfaite entre armatures et béton) :

$$(63) \quad \underline{\underline{\Sigma}} \in G^{\text{hom}} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}} + \sigma \underline{\underline{e}}_y \otimes \underline{\underline{e}}_y \\ \underline{\underline{\sigma}} \in G_B \\ 0 \leq \sigma \leq \sigma_0 \end{cases}$$

où l'on note  $G_B$  le domaine de résistance du béton et  $\sigma_0$  la résistance à la traction de chaque armature rapportée à l'unité d'aire transversale (dans l'expression précédente, on néglige toute résistance des armatures à la compression), et où l'on note  $\underline{\underline{e}}_y$  la direction du renforcement.

Il est à noter que cette définition de  $G^{\text{hom}}$  n'est valable que dans le cas de **l'adhérence parfaite entre armatures et béton**. Dans le cas contraire, on est amené à considérer une réduction de la capacité de résistance macroscopique due à des conditions de résistance de l'interface. Dans le cas que nous observons, on a bien évidemment l'inclusion  $G_B \subset G^{\text{hom}}$  qui prouve le caractère de renforcement des armatures. On notera également que le critère homogénéisé est clairement **anisotrope**, et fait apparaître la direction des armatures comme une direction privilégiée du matériau.

Dans le cas où la proportion volumique des armatures n'est plus faible devant l'unité, des travaux théoriques (de Buhan et Taliervo, 1991) ont prouvé que la définition précédente de  $G^{\text{hom}}$  constitue une approche par l'intérieur du critère de résistance homogénéisé. Des approches numériques (Francescato, 1994) ont permis également de montrer que cette définition constituait une bonne approximation du domaine de résistance macroscopique.

Il est également possible de considérer plusieurs directions de renforcement, en adoptant une formulation similaire. En notant  $\sigma_0^i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) les résistances à la traction par unité de surface perpendiculairement aux armatures de directions  $\underline{\underline{e}}_i$ , on obtient l'expression suivante pour le domaine  $G^{\text{hom}}$  (de Buhan et Taliervo, 1991) dans l'hypothèse de l'adhérence parfaite :

$$(64) \quad \underline{\underline{\Sigma}} \in G^{\text{hom}} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}} + \sum_{i=1}^n \sigma_i \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_i \\ \underline{\underline{\sigma}} \in G_B \\ 0 \leq \sigma_i \leq \sigma_0^i \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

### 2.4.3 Définition cinématique

Après avoir défini le domaine de résistance macroscopique  $G^{\text{hom}}$ , on donne une détermination duale de ce convexe par sa fonction d'appui  $\Pi^{\text{hom}}(\underline{\underline{D}})$  :

$$(65) \quad \begin{aligned} \Pi^{\text{hom}}(\underline{\underline{D}}) &= \text{Sup} (\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} ; \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}} + \sigma \underline{\underline{e}}_y \otimes \underline{\underline{e}}_y ; \underline{\underline{\sigma}} \in G_B; 0 \leq \sigma \leq \sigma_0) \\ &= \text{Sup} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} + \sigma D_{yy} ; \underline{\underline{\sigma}} \in G_B; 0 \leq \sigma \leq \sigma_0) \end{aligned}$$

Les variables  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\sigma$  étant indépendantes, on obtient:

$$(66) \quad \Pi^{\text{hom}}(\underline{\underline{D}}) = \text{Sup} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} ; \underline{\underline{\sigma}} \in G_B) + \text{Sup} (\sigma D_{yy} ; 0 \leq \sigma \leq \sigma_0)$$

D'où :

$$(67) \quad \Pi^{\text{hom}}(\underline{\underline{D}}) = \pi_B(\underline{\underline{D}}) + \sigma_0 \langle D_{yy} \rangle$$

où l'on note  $\pi_B(\underline{\underline{D}})$  la fonction d'appui du convexe de résistance  $G_B$  du matériau non renforcé, et  $\langle \rangle$  la fonction partie positive.

### 2.4.4 Représentation du critère de résistance

Afin de représenter le critère de résistance macroscopique, on définit dans le plan des vecteurs contraintes  $\underline{\underline{T}} = (T_x ; T_y)$  la famille de domaines  $G_\alpha^{\text{hom}}$  des vecteurs contraintes admissibles pour une facette de normale  $\underline{\underline{n}}$  donnée. On suppose que  $\underline{\underline{n}}$  forme un angle  $\alpha$  avec  $Ox$ , si bien que l'on a  $\underline{\underline{n}} = \cos\alpha \underline{\underline{e}}_x + \sin\alpha \underline{\underline{e}}_y$ . Pour une valeur de  $\alpha$  fixée, on obtient donc la définition suivante de  $G_\alpha^{\text{hom}}$  :

$$(68) \quad \underline{\underline{T}} \in G_\alpha^{\text{hom}} \Leftrightarrow \exists \underline{\underline{\Sigma}} \in G^{\text{hom}} \text{ tel que } \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot (\cos\alpha \underline{\underline{e}}_x + \sin\alpha \underline{\underline{e}}_y)$$

D'où :

$$(69) \quad \underline{\underline{T}} \in G_\alpha^{\text{hom}} \Leftrightarrow \exists \underline{\underline{\sigma}} \in G_B, 0 \leq \sigma \leq \sigma_0 \text{ tel que } \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\cos\alpha \underline{\underline{e}}_x + \sin\alpha \underline{\underline{e}}_y) + \sigma \sin\alpha \underline{\underline{e}}_y$$

En notant  $G_B^\alpha$  le domaine des vecteurs contraintes admissibles pour une facette de normale  $\underline{\underline{n}}$  correspondant au matériau non renforcé, on construit dans le plan  $(T_x, T_y)$ , le domaine  $G_\alpha^{\text{hom}}$  comme l'enveloppe convexe des translatés du domaine  $G_B^\alpha$  du vecteur  $\sigma \underline{\underline{e}}_y$ , pour les valeurs de  $\sigma$  comprises entre 0 et  $\sigma_0 \sin\alpha$  (voir figure 2 - 28).

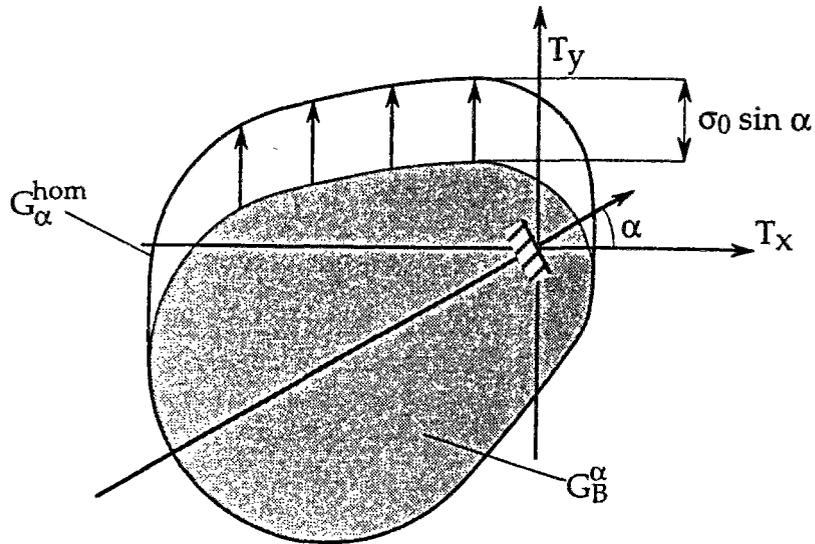


Figure 2 - 28 Représentation de  $G_{\alpha}^{\text{hom}}$

## 2.5 Un retour sur l'exemple de l'éprouvette frettée, notion d'effet d'échelle

On revient ici au problème de l'éprouvette frettée, en le traitant dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation (voir figure 2 -29), grâce au critère de résistance homogénéisé défini dans la section précédente. On compare dans la suite ces résultats avec ceux obtenus par une approche directe.

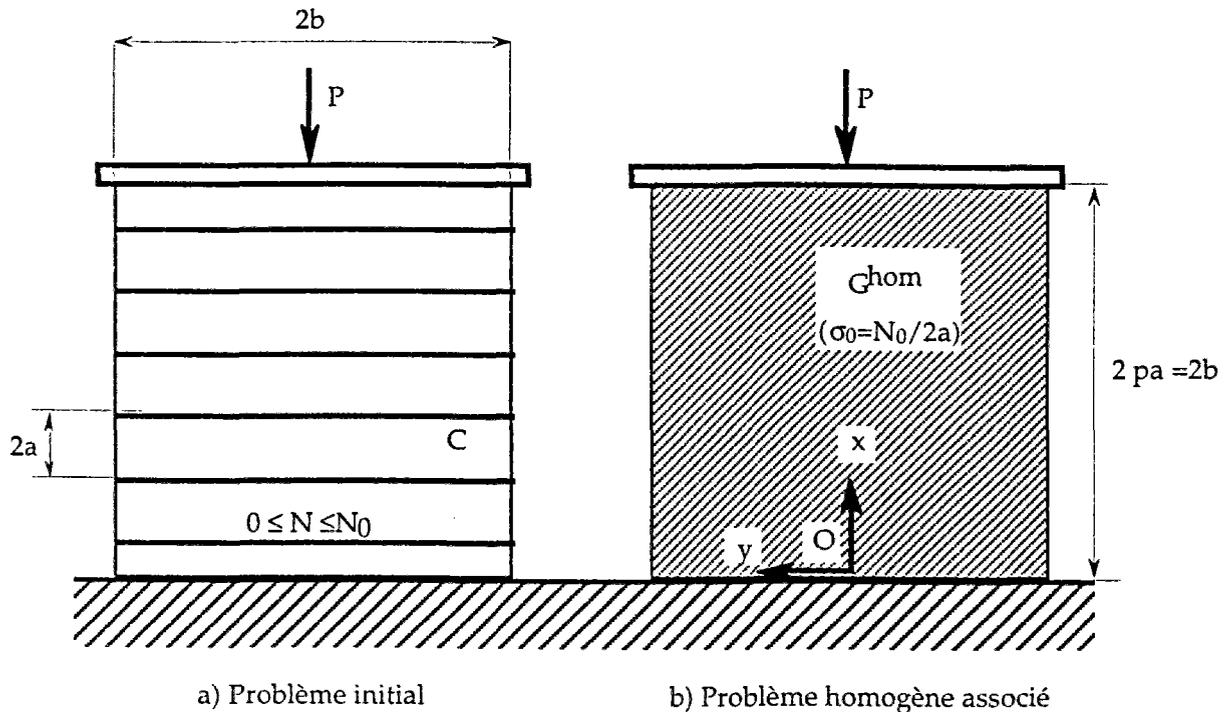


Figure 2 -29 Retour au problème du bloc fretté

## 2.5.1 Résultats et commentaires

### Approche statique

On propose pour l'approche statique un champ de contrainte uniaxial de la forme :

$$(70) \quad \underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$$

On vérifie aisément que ce champ est statiquement admissible. La plus grande valeur de la charge P est donc obtenue en choisissant pour  $\Sigma$  la résistance à la compression simple du matériau homogénéisé, perpendiculairement à la direction des armatures. D'après la définition de  $G^{\text{hom}}$ , cette résistance est obtenue pour la "décomposition" suivante du champ  $\underline{\underline{\Sigma}}$  :

$$(71) \quad \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}} + \sigma_0 \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \text{ avec } \underline{\underline{\sigma}} = -(2C + \sigma_0) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \sigma_0 \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$$

$$(72) \quad \text{soit } \underline{\underline{\Sigma}} = -(2C + \sigma_0) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$$

La résistance à la compression "macroscopique" du matériau renforcé, dans la direction x est donc égale à  $2C + \sigma_0$ . On obtient donc la minoration suivante pour la charge extrême  $P_{\text{hom}}^+$  :

$$(73) \quad P_{\text{hom}}^+ \geq 2b(2C + \sigma_0)$$

### Approche cinématique

On choisit le champ de vitesse (cinématiquement admissible) suivant :

$$(74) \quad \underline{V} = -\frac{U}{2b}(x \underline{e}_x - y \underline{e}_y) \text{ avec } U > 0$$

Le taux de déformation associé au champ  $\underline{V}$  est homogène et égal à  $\underline{\underline{D}} = \frac{U}{2b}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y)$

La puissance des efforts extérieurs est donc égale à  $P_{\text{ext}} = PU$  et la puissance résistante maximale à :

$$(75) \quad P_{\text{rés}}^{\text{max}} = \int \frac{U}{2b} (C(|D_1| + |D_2|) + \sigma_0 \langle D_{yy} \rangle) dV = 2bU(2C + \sigma_0) \quad (\text{car } \text{tr } \underline{\underline{D}} = 0)$$

On obtient donc en comparant avec les résultats de l'approche statique de la formule (73) pour  $\frac{P_{hom}^+}{4bC}$  la valeur exacte :

$$(76) \quad \frac{P_{hom}^+}{4bC} = \frac{2b(2C+\sigma_0)}{4bC} = 1+\lambda$$

où l'on note  $\lambda = \frac{\sigma_0}{2C}$  le taux de renforcement adimensionnel de l'éprouvette.

Ce résultat est à comparer avec la valeur obtenue par une approche directe dans l'annexe 2 :

$$(77) \quad \frac{P_{\epsilon}^+}{4bC} \geq (1+\lambda) (1-\epsilon f(\lambda)) \text{ pour } \epsilon \leq \epsilon_m(\lambda)$$

où l'on note  $\epsilon = \frac{a}{b}$  (voir figure 2 -29), la fonction  $\epsilon_m(\lambda)$  étant définie dans l'annexe 2.

On porte sur la figure 2 -30 les résultats obtenus par l'approche directe rapportés à la valeur obtenue par la théorie de l'homogénéisation.

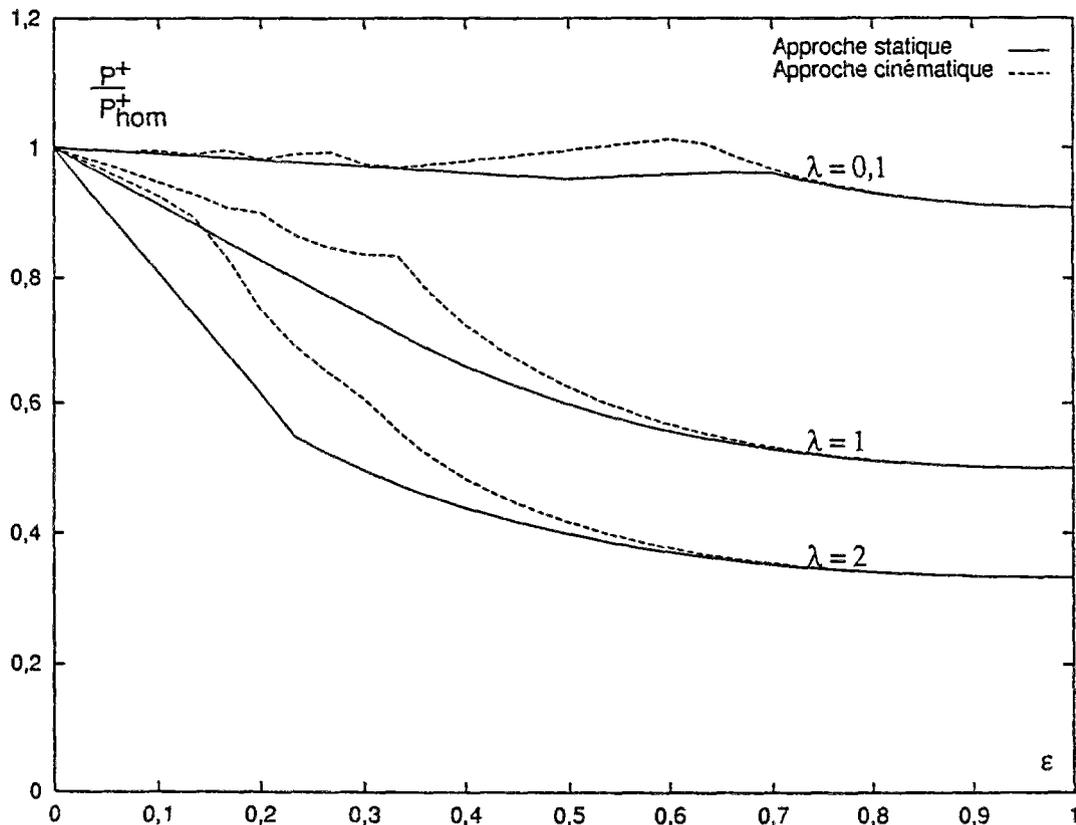


Figure 2 -30 Estimation des effets d'échelle

On peut donc faire les commentaires suivants sur les résultats obtenus par cette approche directe :

- Tout d'abord on a construit des estimations analytiques de la solution du problème initial. Cette solution fait apparaître un paramètre d'échelle  $\varepsilon$ , que l'on peut ici clairement identifier comme étant le rapport entre la distance entre deux lits d'armatures et la largeur de l'éprouvette.
- On peut montrer également sur cet exemple simple que la solution obtenue converge vers la solution du problème homogénéisé lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, tant dans l'approche statique que dans l'approche cinématique, et vérifier ainsi le théorème d'homogénéisation (55).

$$(78) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{\varepsilon}^{+} = P_{\text{hom}}^{+}$$

- On remarque également que **dans ce cas précis**, la théorie de l'homogénéisation amène à *surestimer* la valeur de la charge extrême. On notera également que l'erreur commise en substituant le problème homogénéisé au problème initial est d'autant plus importante que le rapport entre les capacités de résistance de la matrice et du renforcement est élevé (c'est-à-dire  $f(\lambda)$  croissant et  $\varepsilon_m(\lambda)$  décroissant).
- De plus, dans ce cas précis, on est en mesure d'avoir une estimation analytique de l'erreur commise en considérant le problème homogène associé à la place du problème initial. On obtient donc une **majoration** linéaire de l'erreur commise en fonction du paramètre  $\varepsilon$ , pour des valeurs faibles de ce paramètre. Cette estimation de **l'effet d'échelle** nous donne donc une information sur le domaine d'application de la théorie de l'homogénéisation à notre problème.
- Le résultat obtenu fait également apparaître naturellement une longueur d'ancrage égale à  $b \varepsilon_m(\lambda)$ , qui correspond à la longueur minimale pour saturer la résistance à la traction des armatures.

### 2.5.2 Application de la théorie de l'homogénéisation à la modélisation des armatures transversales

Au cours de ce chapitre, plusieurs hypothèses nécessaires à l'application de la théorie de l'homogénéisation ont été faites. Nous allons dans ce paragraphe discuter leur validité dans le cadre de l'étude des structures en béton armé :

- Il apparaît tout d'abord que les premières hypothèses faites sur la régularité de la distribution des armatures sont satisfaites, au moins localement, le long d'une poutre de béton armé. En effet les armatures transversales (étriers ou autres) sont généralement disposées avec un espacement constant.

- On note également que la proportion volumique de renforcement transversal dans la pratique est effectivement faible (de l'ordre d'un pour cent au maximum, pour des pièces normalement renforcées).
- De même que pour l'exemple de l'éprouvette frettée, on peut s'interroger sur l'ordre de grandeur de l'erreur commise due à l'emploi de la théorie de l'homogénéisation dans le calcul d'une poutre, en fonction du rapport entre l'espacement des armatures transversales et de la hauteur des pièces considérées. En effet, ce rapport peut atteindre des valeurs relativement importantes (de l'ordre de l'unité). Il sera donc nécessaire de s'assurer de la validité de l'emploi de la théorie de l'homogénéisation, dans la cadre du dimensionnement de poutres en béton armé renforcées transversalement.

## Conclusion

Ce chapitre montre comment il est possible d'envisager, dans le cadre théorique du calcul à la rupture, la prise en compte d'éléments monodimensionnels dans un milieu continu bidimensionnel. On a donc proposé tout d'abord d'adopter une **modélisation mixte** pour décrire le composite béton armé. Cette modélisation repose sur l'idée intuitive qu'une description monodimensionnelle des barres de renforcement suffit à représenter le comportement de la structure sous sollicitation dans son plan. La deuxième possibilité qui a été présentée consiste dans le cas de répartition régulière d'armatures (comme le renforcement transversal des poutres), à choisir un **critère de résistance homogénéisé**, pour le composite béton armé renforcé transversalement, bien entendu tout en conservant une modélisation mixte pour décrire les armatures longitudinales (voir figure 2 - 24).

La modélisation mixte combinée à la théorie de l'homogénéisation en calcul à la rupture paraît donc particulièrement adaptée au traitement des problèmes de béton armé. Le modèle ainsi bâti permet la mise en œuvre des approches statique et cinématique du calcul à la rupture, que nous avons pu illustrer sur l'exemple de l'éprouvette frettée. Nous avons ainsi observé que, de même que pour des structures homogènes, l'approche cinématique semble être la plus facile à mettre en œuvre de manière analytique. Cependant, celle-ci ne fournit que des valeurs par excès de la charge extrême. Il est donc impératif, dans une perspective de dimensionnement, de pouvoir utiliser l'approche statique du calcul à la rupture qui, elle, est du "côté de la sécurité". Il devient alors nécessaire d'avoir recours à des méthodes numériques.

Dans le but de fournir un outil permettant de présenter des approches statiques ainsi que des approches cinématiques performantes, deux programmes informatiques fondés sur la méthode des éléments finis et mettant en œuvre les deux approches ont été développés. Ces deux programmes permettant une exploration systématique d'une classe de champ de contrainte ou de champs de vitesse utilisent la modélisation mixte ainsi que l'homogénéisation. Le détail de ces programmes est présenté dans le chapitre quatre.

Cependant, dans la perspective de traiter le problème de la prise en compte de l'effort tranchant dans le dimensionnement des poutres en béton armé, nous avons entrepris, avant d'avoir recours à des méthodes numériques, de traiter ce problème en construisant à partir de notre modèle, une modélisation unidimensionnelle (modèle de milieu curviligne) des poutres. Cette modélisation passe, dans le cadre du calcul à la rupture, par la détermination du critère de résistance d'une section de poutre renforcée longitudinalement et transversalement. Le chapitre suivant est donc consacré à la présentation du critère en flexion composée ainsi construit, puis à la possibilité d'y inclure une dépendance vis-à-vis de l'effort tranchant. Les résultats obtenus dans ce chapitre serviront par la suite de base de comparaison avec les analyses numériques que nous présenterons dans le dernier chapitre.

## **Chapitre 3**

### **Approche du dimensionnement des poutres en béton armé par la théorie des milieux curvilignes**

## Introduction

Comme on l'a vu dans le premier chapitre, la majorité des méthodes de calcul réglementaires des poutres en béton armé reposent sur l'élaboration de critères de résistance formulés en termes de limitation portant sur les valeurs du moment fléchissant et de l'effort tranchant. Ces considérations amènent à se poser la question théorique de savoir dans quelle mesure on peut modéliser le comportement des poutres par celui d'un **milieu curviligne**, auquel on aurait bien entendu affecté un critère de résistance adapté. Cette question du passage d'une description tridimensionnelle à une description monodimensionnelle a donné lieu à diverses publications (voir par exemple Rigolot, 1972 ; Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia, 1992). De présentation très mathématique, ces textes établissent une **théorie asymptotique des poutres** en mettant en évidence des résultats de convergence des solutions tridimensionnelles vers les solutions des problèmes traités par la théorie des milieux curvilignes. Généralement, seul le comportement élastique est envisagé, et les résultats de convergence sont fondés sur des critères énergétiques.

Dans le cadre du calcul à la rupture, l'utilisation de la théorie des milieux curvilignes est, de même qu'en élasticité, très répandue (voir par exemple Save et Massonet, 1972), notamment pour le dimensionnement des plaques, ou des poutres métalliques. Ici encore, se pose le problème de l'existence d'un "comportement asymptotique" des poutres, que nous étudierons dans ce chapitre, dans le cadre de notre modélisation des poutres en béton armé. Dans une première partie, on rappelle brièvement la construction de la modélisation des milieux curvilignes par la méthode des puissances virtuelles. A partir des critères de résistance choisis pour le béton et les armatures, on construit un **critère de résistance en flexion composée** d'un milieu curviligne modélisant une poutre rectangulaire renforcée longitudinalement et transversalement. Ce critère est déterminé au moyen de la résolution complète d'un problème de calcul à la rupture auxiliaire posé sur un élément de poutre tridimensionnel. Dans la seconde partie du chapitre, on s'intéresse à l'existence du comportement asymptotique des poutres obéissant au modèle construit précédemment. On examinera pour ce faire un problème particulier de flexion quatre points. La comparaison d'approches cinématiques tridimensionnelles de ce problème avec la solution donnée par la théorie des milieux curvilignes permettra alors de montrer que le résultat de convergence asymptotique recherché n'est pas toujours vérifié.

## 1. Les milieux curvilignes

En raison de l'élançement de certaines structures, comme les poutres, il est habituel pour les représenter, d'utiliser une modélisation unidimensionnelle. Cette modélisation, dite des **milieux curvilignes** est fondée sur la description géométrique d'un milieu continu tridimensionnel par une courbe, appelée **courbe directrice**, à laquelle on attribue une cinématique donnée.

On peut grâce à la méthode des puissances virtuelles (Salençon, 1988) construire une représentation des efforts intérieurs associés à la donnée des mouvements virtuels du milieu curviligne. On décompose ensuite classiquement les éléments de réduction du **torseur des efforts intérieurs**  $[X(s)]$  ainsi construit, en ses composantes longitudinales et transversales afin de dégager les notions d'effort normal  $N(s)$ , effort tranchant  $V(s)$  moment de torsion  $C(s)$  et moment fléchissant  $M(s)$ . La pertinence de ce modèle repose alors sur deux points essentiels :

- En raison de la difficulté à réaliser des expériences visant à **déterminer directement le comportement** de telles structures, il est nécessaire de recourir à des moyens théoriques pour l'obtenir. Dans notre cas, on étudiera donc le choix du critère de résistance  $f(M,N,V)$  à adopter pour un tel milieu curviligne, en portant notre attention sur la possibilité d'inclure une dépendance vis-à-vis de l'effort tranchant.
- En raison de la description géométrique adoptée, la pertinence de la théorie est intimement liée à l'**élançement** des structures considérées (c'est à dire au rapport entre la longueur mesurée le long de la courbe directrice et ses dimensions transversales). La question de pouvoir estimer le domaine d'application de cette théorie apparaît donc également comme essentielle. Ce point n'est que peu abordé dans ce chapitre. On trouvera des éléments de réponse à cette question dans le dernier chapitre, où l'on effectuera une comparaison entre des approches mono- et bidimensionnelles pour le problème de référence de la flexion quatre points.

Avant de passer à l'obtention des critères de résistance des milieux curvilignes, on rappelle dans un premier temps les étapes essentielles de la modélisation au moyen de la méthode des puissances virtuelles, le principe étant le même que celui suivi dans le chapitre précédent pour construire la modélisation mixte. On se reportera à (Salençon, 1988) pour une présentation détaillée.

Reprenant les notations du chapitre deux, on définit la géométrie du milieu curviligne par la courbe orientée formée des points de position  $\underline{p}(s)$ ,  $s \in [s_0; s_1]$ . Dans un deuxième temps, on choisit l'espace des mouvements virtuels  $\underline{U}$  pour le milieu curviligne :

$$(1) \quad \underline{U} = \{ \underline{P}(s), \underline{U}(s), \underline{\omega}(s) \}$$

En postulant que la puissance des efforts intérieurs est une forme linéaire de  $\underline{U}$  et de ses dérivées premières par rapport à la variable  $s$ , puis en exploitant le premier énoncé de la méthode des puissances virtuelles (nullité de la puissance des efforts intérieurs dans les mouvements rigidifiants), on obtient l'expression générale de la puissance des efforts intérieurs :

$$(2) \quad P_i(\underline{U}) = -\underline{X}(s) \cdot \left( \frac{d\underline{U}(s)}{ds} + \underline{t}(s) \wedge \underline{\omega}(s) \right) - \underline{\Gamma}(s) \cdot \frac{d\underline{\omega}(s)}{ds}$$

où  $\underline{t}(s) = \frac{d\underline{p}(s)}{ds}$  représente le vecteur tangent en  $s$  à la courbe, au point  $\underline{p}(s)$ .

Cette expression introduit les variables d'effort  $\underline{X}(s)$  et  $\underline{\Gamma}(s)$ . Ces deux quantités se décomposent alors classiquement, en introduisant l'effort normal  $N$ , l'effort tranchant  $\underline{V}$ , le moment fléchissant  $\underline{M}$  et le couple de torsion  $C$  :

$$(3) \quad \begin{cases} \underline{X}(s) = N(s)\underline{t}(s) + \underline{V}(s) \\ \underline{\Gamma}(s) = C(s)\underline{t}(s) + \underline{M}(s) \end{cases}$$

La seconde étape de la modélisation consiste à obtenir les équations d'équilibre du milieu curviligne grâce au second postulat de la méthode des puissances virtuelles. On obtient les équations classiques :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d\underline{X}(s)}{ds} + \underline{f}(s) = 0 \\ \frac{d\underline{\Gamma}(s)}{ds} + \underline{t}(s) \wedge \underline{X}(s) = 0 \end{cases}$$

où  $\underline{f}(s)$  représente une densité linéique de forces le long du milieu curviligne (la densité linéique de moments est ici supposée nulle).

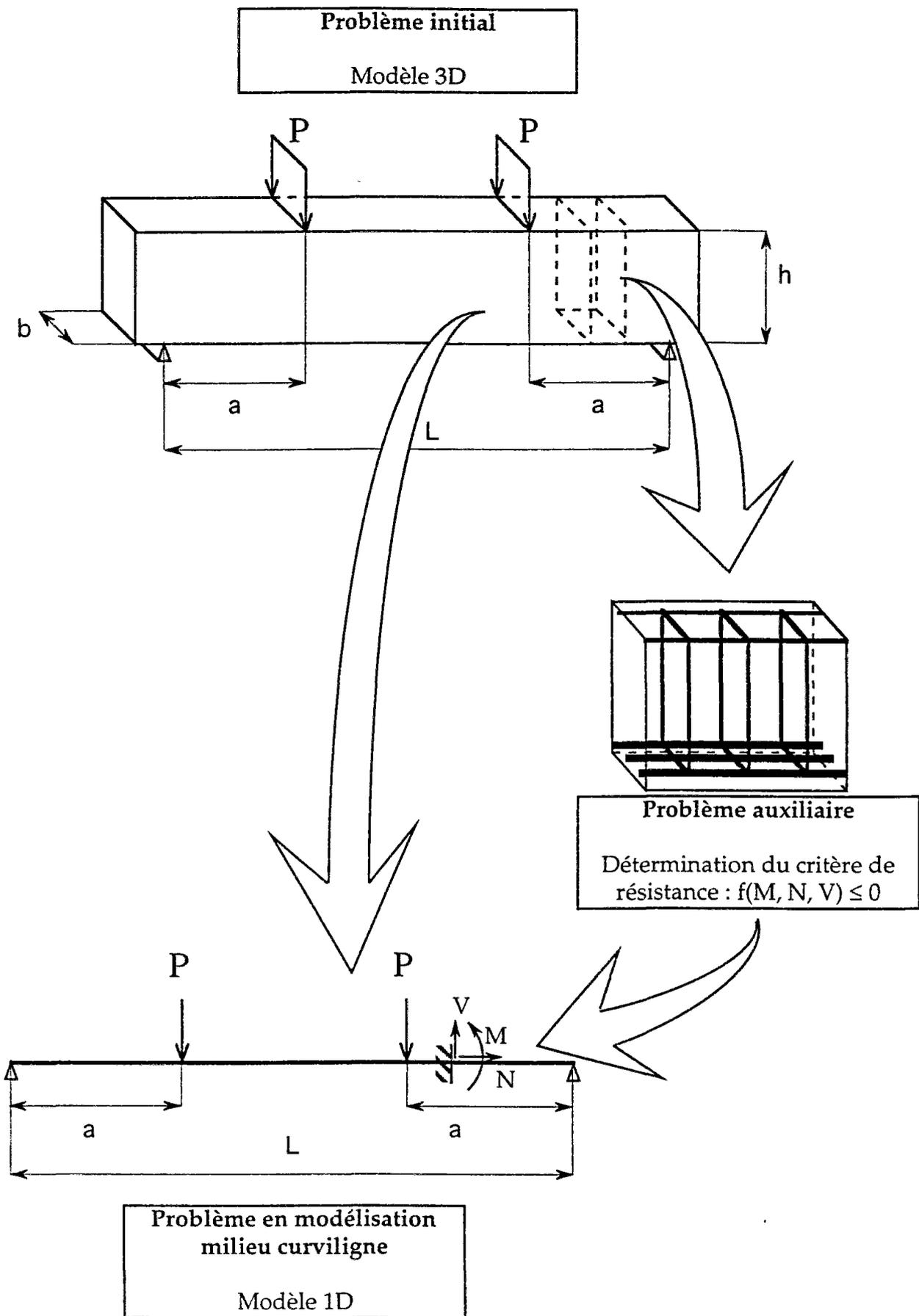


Figure 3 - 1 Résolution d'un problème de calcul à la rupture d'une poutre en béton armé par la théorie des milieux curvilignes

Dans le cadre de la théorie du calcul à la rupture, l'emploi de cette modélisation, qui jusqu'ici a été construite sans faire référence au milieu tridimensionnel, passe par la détermination du critère de résistance du milieu curviligne, qui doit s'effectuer par la résolution d'un problème de calcul à la rupture auxiliaire sur un élément représentatif de la poutre tridimensionnelle (voir figure 3 - 1). Dans le cas d'un critère de résistance portant sur le moment fléchissant et l'effort normal (on néglige l'influence de l'effort tranchant), on peut formuler aisément un problème auxiliaire permettant de déterminer un tel critère. En revanche, dès lors que l'on souhaite introduire une dépendance du critère de résistance vis-à-vis de l'effort tranchant, la formulation d'un tel problème auxiliaire se révèle plus délicate. On s'attache donc tout d'abord à déterminer le critère de résistance du poutre en béton armé, sollicitée en flexion composée.

## 2. Formulation du critère de résistance d'une section en flexion composée. Position et résolution du problème auxiliaire.

On présente dans cette partie une méthode de détermination d'un critère de résistance en flexion composée d'une poutre en béton armé. La poutre considérée comporte des armatures longitudinales. Le cas envisagé est celui d'une poutre rectangulaire, mais l'approche proposée est facilement généralisable au cas de sections quelconques. Afin de déterminer le critère de résistance de la poutre renforcée, on examinera en premier lieu le cas de la poutre homogène puis dans un deuxième temps, celui de la poutre renforcée longitudinalement.

### 2.1 Critères de résistance des matériaux constitutifs

On rappelle ici brièvement les choix faits pour les critères de résistance des matériaux.

#### 2.1.1 Le béton

Pour le béton, on choisit :

$$(5) \quad f_b(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \text{ avec : } f_b(\underline{\underline{\sigma}}) = \text{Sup}_{i,j} (\sigma_i (1+\sin\varphi) - \sigma_j (1-\sin\varphi) - \sigma_c (1 - \sin\varphi) ; \sigma_i - T)$$

où  $\sigma_i$  sont les valeurs principales de  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\sigma_c$  et  $T$  représentent respectivement les résistances à la compression et à la traction simples du béton.  $\varphi$  désigne l'angle de frottement interne, que l'on choisit selon (Chen, 1982), égal à  $\varphi=37^\circ$ .

On rappelle les valeurs des fonctions  $\pi_b(\underline{\underline{d}})$  et  $\pi_b(\underline{\underline{n}}; \underline{\underline{V}})$  correspondantes :

$$(6) \quad \pi_b(\underline{\underline{d}}) = \frac{\sigma_c}{2} \left( \sum_{i=1}^{i=3} |d_i| - \text{tr } \underline{\underline{d}} \right) + \frac{T}{1-\sin\varphi} \left( \text{tr } \underline{\underline{d}} - \left( \sum_{i=1}^{i=3} |d_i| \right) \sin\varphi \right) \quad \text{pour } \text{tr } \underline{\underline{d}} \geq \left( \sum_{i=1}^{i=3} |d_i| \right) \sin\varphi$$

$$= +\infty \quad \text{pour } \text{tr } \underline{\underline{d}} < \left( \sum_{i=1}^{i=3} |d_i| \right) \sin\varphi$$

$$(7) \quad \pi_b(\underline{\underline{n}}; \underline{\underline{V}}) = \frac{\sigma_c}{2} (|\underline{\underline{V}}| - \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{n}}) + \frac{T}{1-\sin\varphi} (\underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{n}} - (|\underline{\underline{V}}|) \sin\varphi) \quad \text{pour } \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{n}} \geq (|\underline{\underline{V}}|) \sin\varphi$$

$$= +\infty \quad \text{pour } \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{n}} < (|\underline{\underline{V}}|) \sin\varphi$$

### 2.1.2 Les armatures

On adopte le critère suivant pour les armatures :

$$(8) \quad 0 \leq N \leq N_0 \text{ et } V = M = 0$$

où  $N_0$  représente la limite en traction de l'armature.

On rappelle également les valeurs des fonctions  $\pi_A$  correspondantes :

$$(9) \quad \pi_A \left( t; \frac{dU_A}{ds}; \Omega; \frac{d\Omega}{ds} \right) = \text{Sup}_{0 \leq N \leq N_0} \left\{ N t; \frac{dU_A}{ds} \right\} = \text{Sup} \left\{ 0; N_0 t; \frac{dU_A}{ds} \right\}$$

et, respectivement pour les discontinuités de vitesses :

$$(10) \quad \pi_A \left( t; \llbracket U_A \rrbracket \right) = \text{Sup}_{0 \leq N \leq N_0} \left\{ N t; \llbracket U_A \rrbracket \right\} = \text{Sup} \left\{ 0; N t; \llbracket U_A \rrbracket \right\}$$

## 2.2 Cas de la poutre homogène

### 2.2.1 Position du problème et mode de chargement

On considère le prisme rectangulaire de béton de longueur  $l$  représenté sur la figure suivante :

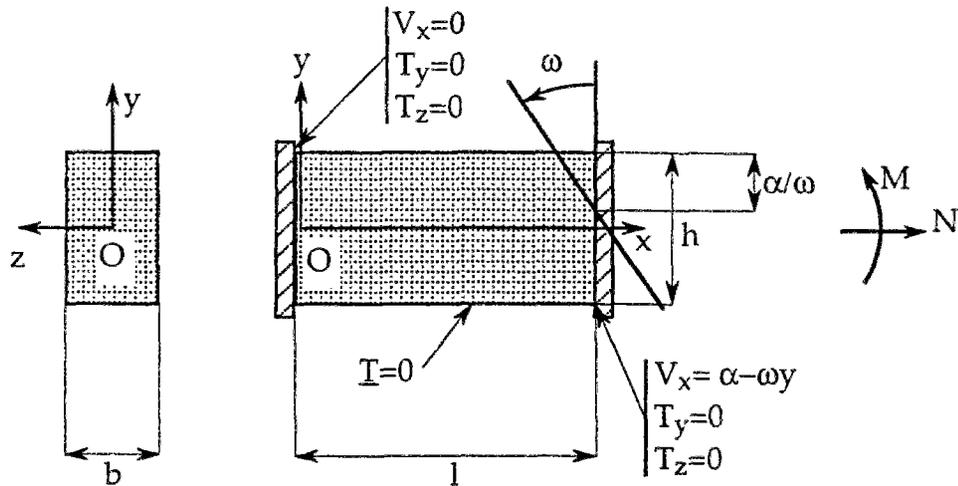


Figure 3 - 2 Problème auxiliaire de calcul à la rupture

On suppose que le tronçon de poutre considéré est soumis à un chargement appliqué à ses deux extrémités par des poinçons indéformables (figure 3 - 2). Les interfaces en  $x=0$  et  $x=l$  sont

supposées lisses, ce qui impose les conditions  $T_y=T_z=0$  en  $x=0$  et  $x=l$ . De plus, la vitesse du poinçon est définie en  $x=0$  par  $V_x=0$  et en  $x=l$  par  $V_x=\alpha - \omega y$ . Les faces latérales sont supposées libres de contraintes.

La donnée de ces conditions aux limites permet de définir le mode de chargement correspondant par le calcul de la puissance des efforts extérieurs, qui donne (la pesanteur est négligée) :

$$(11) \quad P_{\text{ext}} = \iint_{x=l} \sigma_{xx} v_x dy dz = \alpha \iint_{x=l} \sigma_{xx} dy dz + \omega \iint_{x=l} -y \sigma_{xx} dy dz = \alpha N + \omega M$$

La puissance des efforts extérieurs s'exprimant comme une forme linéaire des deux paramètres de chargement  $N$  et  $M$ , effort normal et moment fléchissant, on définit bien un mode de chargement par la donnée des conditions aux limites précédentes du problème. On remarque que les deux paramètres cinématiques duaux de  $N$  et  $M$ , respectivement  $\alpha$  et  $\omega$  s'interprètent naturellement comme la vitesse horizontale du milieu du poinçon ainsi que sa vitesse de rotation.

On s'intéresse maintenant à la détermination du domaine des chargements ( $N$ ,  $M$ ) potentiellement supportables par la structure. Pour ce faire, on propose des approches statique puis cinématique du problème.

## 2.2.2 Approche statique par l'intérieur

On considère le champ uniaxial suivant :

$$(12) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \text{ avec } \begin{cases} \sigma_{xx} = -\sigma_c \text{ pour } y \in [e; h] \\ \sigma_{xx} = \sigma_t \text{ pour } y \in [-h; e] \end{cases}$$

Dans ces formules, les valeurs de  $\sigma_t$  et  $\sigma_c$  correspondent aux contraintes limite en traction et en compression uniaxiales pour le béton modélisé par un critère de Coulomb limité en traction, soit :

$$(13) \quad \sigma_t = \text{Inf} \left( \frac{\sigma_c(1-\sin\phi)}{(1+\sin\phi)}; T \right)$$

On notera que pour le béton, on a toujours  $\sigma_t=T$ .

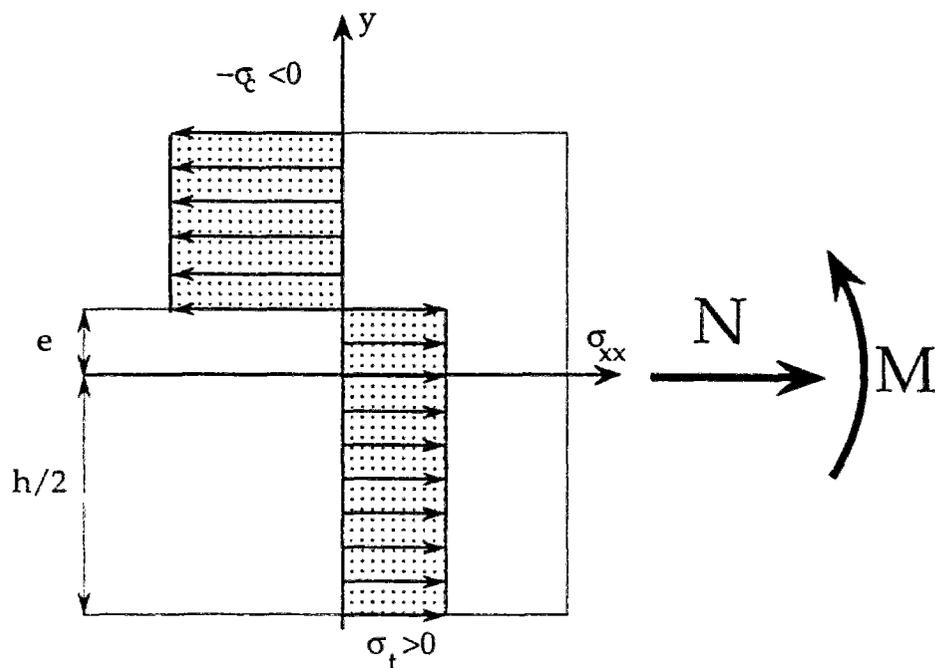


Figure 3 - 3 Champ de contrainte uniaxial

Par construction, les champs de contrainte de la famille considérée sont bien statiquement admissibles avec les données en efforts du problème. On détermine alors les valeurs de l'effort normal  $N$  et du moment fléchissant  $M$  équilibrés par ces champs :

$$(14) \quad \begin{cases} N = \iint \sigma_{xx} \, dydz \\ M = \iint -y \sigma_{xx} \, dydz \end{cases}$$

On obtient alors facilement pour chaque valeur du paramètre  $e$  :

$$(15) \quad \begin{cases} N = b \left[ \frac{h}{2} (\sigma_t - \sigma_c) + e(\sigma_t + \sigma_c) \right] \\ M = b \frac{h^2/4 - e^2}{2} (\sigma_t + \sigma_c) \end{cases}$$

Afin d'obtenir les couples  $(N, M)$  recherchés, on élimine le paramètre " $e$ " entre les deux équations définissant  $N$  et  $M$ . On obtient donc à partir de cette approche statique une première estimation par défaut du critère de résistance de la section.

Celle-ci est définie par la donnée de la fonction  $f(N, M)$  suivante :

$$(16) \quad f(N, M) = \left| \frac{M}{M_0} \right| + \left( \frac{2N - (N_c + N_t)}{N_t - N_c} \right)^2 - 1$$

où  $N_c = -bh \sigma_c$

$N_t = bh \sigma_t$

et  $M_0 = \frac{\sigma_c + \sigma_t}{8} bh^2$

Le domaine correspondant à la condition  $f(N, M) \leq 0$  (approche statique par l'intérieur) est représenté sur la figure 3 - 4.

Les deux paramètres  $N_c$  et  $N_t$  représentent respectivement les résistances en compression et en traction simple de la section.  $M_0$  représente le moment maximum que peut supporter la section. On notera que celui-ci n'est pas obtenu pour un effort normal nul (voir figure 3 - 4).

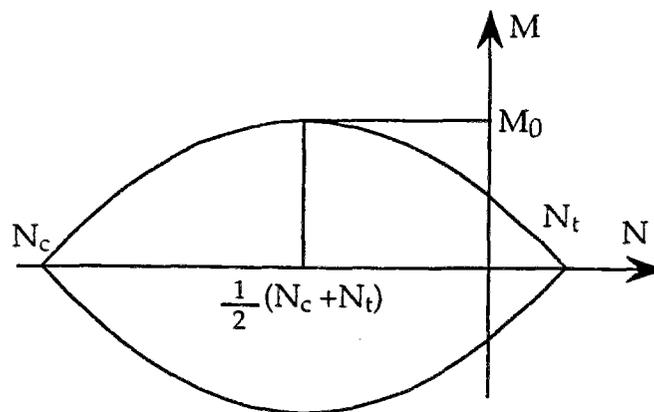


Figure 3 - 4 Approche par l'intérieur

### 2.2.3 Approche cinématique par l'extérieur

Ayant obtenu une estimation par défaut du critère de résistance de la section, nous allons maintenant montrer que ce critère correspond à la solution exacte du problème, c'est à dire que l'on peut lui associer une approche cinématique aboutissant aux mêmes valeurs des paramètres de chargement. Ce problème est traité dans (Nielsen, 1984) dans le cas de la flexion simple ( $N=0$ ) pour le matériau sans résistance à la traction ( $T=0$ ). On donne ici une approche cinématique originale permettant de traiter complètement le problème de la flexion composée, dans le cas du matériau dont le critère est tronqué en traction.

Pour ce faire, on considère le champ de vitesse suivant :

$$(17) \quad \begin{cases} V_x = (\alpha - \omega y) \frac{x}{l} \\ V_y = \frac{K_1(y)}{4\omega l} (\alpha - \omega y)^2 - \frac{\omega z^2 K_2}{4l} + \frac{\omega x^2}{2l} \\ V_z = -(\alpha - \omega y) \frac{K_2}{2l} \end{cases}$$

Par symétrie, on se limite aux valeurs suivantes des paramètres :

$$(18) \quad \omega \geq 0 \text{ et } \frac{\alpha}{\omega} \in [-h/2 ; h/2]$$

La fonction  $K_1(y)$  est choisie constante par morceaux et définie par :

- pour  $\alpha - \omega y \geq 0$ ,  $K_1(y) = K_1$
- pour  $\alpha - \omega y \leq 0$ ,  $K_1(y) = K'_1$

On vérifie immédiatement le caractère cinématiquement admissible des champs de vitesse considérés, pour toutes les valeurs des constantes  $K_1$ ,  $K'_1$ ,  $K_2$  :

- en  $x = 0$ , on a  $V_x = 0$
- en  $x = l$ , on a  $V_x = \alpha - \omega y$

On remarque que le champ de vitesse considéré est continu et l'on peut alors calculer le tenseur taux de déformation  $\underline{\underline{d}}$ , en tout point :

$$(19) \quad \underline{\underline{d}} = \frac{\alpha - \omega y}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-K_1(y)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-K_2}{2} \end{pmatrix}$$

On doit maintenant imposer des conditions sur les constantes  $K_1$ ,  $K'_1$ , et  $K_2$ , (qui par la suite, seront toujours choisies positives) afin d'assurer la pertinence du champ de vitesse vis-à-vis du critère de résistance du matériau. Celle-ci s'écrit pour le matériau de Coulomb limité en traction d'après l'équation (6) :

$$(20) \quad \text{tr } \underline{\underline{d}} \geq \left( \sum_{i=1}^{i=3} |d_i| \right) \sin \varphi$$

On obtient donc les conditions suivantes sur les constantes  $K_1, K'_1, K_2$  :

- pour  $\alpha - \omega y \geq 0$   $1 - \frac{K_1 + K_2}{2} \geq (1 + \frac{K_1 + K_2}{2}) \sin \varphi$  soit  $K_1 + K_2 \leq 2K_a$
- pour  $\alpha - \omega y \leq 0$   $1 - \frac{K'_1 + K_2}{2} \leq -(1 + \frac{K'_1 + K_2}{2}) \sin \varphi$  soit  $K'_1 + K_2 \geq 2K_p$

Les valeurs des constantes  $K_a$  et  $K_p$  sont données par les expressions classiques :

$$K_a = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \text{ et } K_p = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

Il est toujours possible de choisir pour les constantes  $K_1, K'_1, K_2$  des valeurs telles que :

$$(21) \quad \begin{cases} K_1 + K_2 = 2K_{a,\gamma} = \frac{1 - \sin \gamma}{1 + \sin \gamma} \text{ avec } \gamma \in [\varphi, \frac{\pi}{2}] \\ K'_1 + K_2 = 2K_{p,\theta} = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \text{ avec } \theta \in [\varphi, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

On vérifie d'après le sens de variation des fonctions  $K_a$  et  $K_p$  par rapport à  $\varphi$ , que ce choix des paramètres  $\gamma$  et  $\theta$  assure la pertinence du champ de vitesse vis-à-vis du critère de résistance considéré.

La puissance des efforts extérieurs étant donnée par la formule (11), on effectue le calcul de la puissance résistante maximale  $P_{\max}^{\text{res}}$ . Comme le champ de vitesse est continu, on obtient :

$$(22) \quad P_{\max}^{\text{res}} = \iiint \pi_B(\underline{d}) dV$$

D'où :

$$(23) \quad P_{\max}^{\text{res}} = b \int_{-h/2}^{\alpha/\omega} (\alpha - \omega y) \left[ K_{a,\gamma} \sigma_c + \frac{T(\sin \gamma - \sin \varphi)}{(1 - \sin \varphi)(1 + \sin \gamma)} \right] dy + \int_{\alpha/\omega}^{h/2} (\omega y - \alpha) \left[ \sigma_c + \frac{T(\sin \delta - \sin \varphi)}{(1 - \sin \varphi)(1 + \sin \gamma)} \right] dy$$

On fixe alors :

- $\theta = \varphi$
- si  $T > K_a \sigma_c$  on prend  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  sinon  $\gamma = \varphi$

Après calculs, on obtient la valeur de la puissance résistante maximale :

$$(24) \quad P_{\max}^{\text{res}} = b \left[ \left( \frac{\alpha^2}{\omega} + \omega \frac{h^2}{4} \right) \frac{\sigma_c + \sigma_t}{2} + \alpha \frac{h}{2} (\sigma_t - \sigma_c) \right] \text{ pour } \omega \geq 0$$

Dans l'espace des paramètres de chargement (N, M), l'approche cinématique nous donne donc une approche par l'extérieur du domaine de résistance G de la section considérée. Celle-ci s'écrit :

$$(25) \quad G \subset \left\{ (M, N) / \alpha N + \omega M \leq b \left[ \left( \frac{\alpha^2}{\omega} + \omega \frac{h^2}{4} \right) \frac{\sigma_c + \sigma_t}{2} + \alpha \frac{h}{2} (\sigma_t - \sigma_c) \right] \right\} \forall \alpha \text{ et } \omega$$

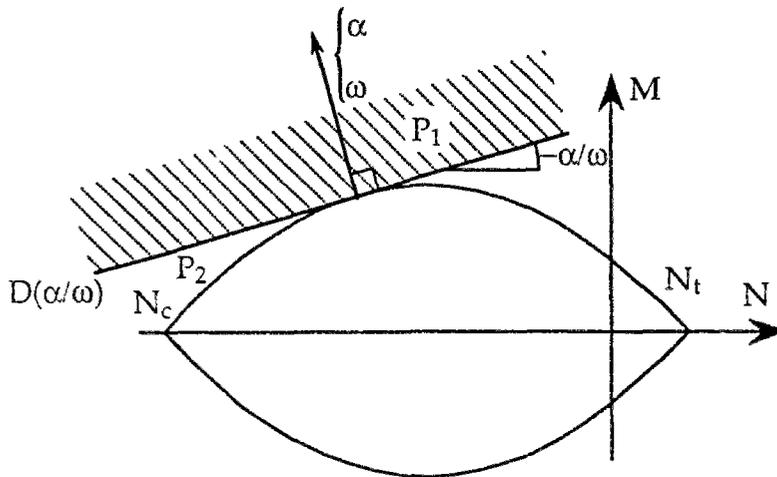


Figure 3 - 5 Approche cinématique par l'extérieur

Pour chaque valeur du paramètre  $\frac{\alpha}{\omega}$ , cette inégalité délimite un demi-espace noté  $P_2$  (voir la figure 3 - 5), contenant le domaine G. Le critère est donc inclus dans l'intersection des demi-plans  $P_2$ , pour les valeurs du paramètre  $\frac{\alpha}{\omega}$  comprises entre  $-h/2$  et  $h/2$ . La frontière de cet ensemble est l'enveloppe convexe des droites  $D(\alpha/\omega)$  obtenues pour toutes les valeurs du paramètre  $\frac{\alpha}{\omega}$ . Après calculs, on montre que l'estimation par excès du critère de résistance de la section fournie par cette approche cinématique coïncide avec celui que l'on a obtenu par l'approche statique. Il est donc déterminé par la fonction  $f^s(N, M)$  définie par la formule (16).

### Commentaires

- On remarque tout d'abord que les résultats obtenus par les approches statique et cinématique coïncident, si bien que l'on est assuré d'avoir l'expression exacte du critère de résistance de la section. De plus on vérifie que les "champs solutions" sont reliés par le théorème d'association (au moyen de la correspondance  $e = \alpha/\omega$ ) : dans l'approche statique, le critère de

résistance du matériau constituant est saturé partout où, dans l'approche cinématique le champ de vitesse considéré correspond à une déformation non nulle.

- Le critère ainsi obtenu doit être transposé à la structure modélisée comme un milieu curviligne avec précautions. En effet, pour le déterminer, on a fait implicitement le choix d'une fibre de référence (dans notre cas la fibre médiane de la poutre) pour le calcul des moments. Le critère ainsi obtenu n'est donc pas unique, et il conviendra de se le rappeler au moment de la définition du mode de chargement, lorsque l'on souhaitera traiter un problème tridimensionnel au moyen d'une modélisation par le milieu curviligne, dès lors que l'on se trouvera en présence d'effort normal. Il faudra donc prendre garde de bien choisir la même fibre, comme fibre de référence pour la définition du chargement et du critère.

- On vérifie *a posteriori* que le critère de résistance obtenu est identique à celui que l'on aurait déterminé en procédant à une analyse similaire, à partir d'une représentation bidimensionnelle de la poutre, sous l'hypothèse d'un critère de résistance du béton en contrainte plane. Ceci est dû au fait que l'approche statique solution proposée vérifie la condition de la contrainte plane. Ce résultat sera utilisé comme base de comparaison dans le chapitre cinq, où l'on mettra en œuvre par voie numérique des approches statiques et cinématiques dans le cadre de la modélisation bidimensionnelle présentée au chapitre deux.

### 2.3 Cas de la poutre renforcée longitudinalement

Dans ce paragraphe, on va étudier la présence d'armatures longitudinales et leur influence sur le critère de résistance à adopter pour le milieu curviligne. Afin de simplifier la présentation, on considère une section ne comportant qu'une seule armature longitudinale placée en  $z=0$ ,  $y=-\delta$  (voir figure 3 - 6). Les résultats obtenus sont ensuite très facilement généralisables au cas de sections possédant plusieurs armatures longitudinales. La méthode présentée est valable dans les cas des sections renforcées ou non transversalement. Il suffit, selon le cas envisagé de considérer la résistance à la compression simple relative au matériau homogène ou renforcé transversalement (voir chapitre deux). Le calcul étant similaire, on ne présente ici que le cas de la poutre non renforcée transversalement.

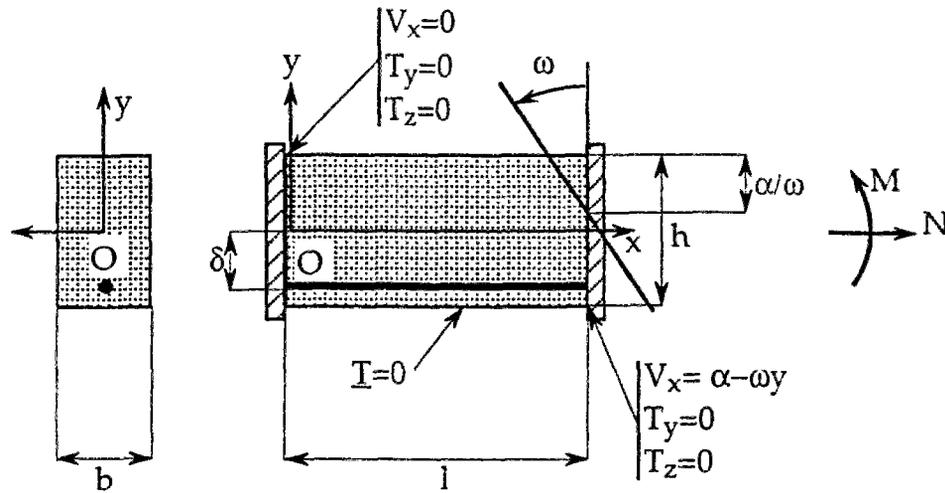


Figure 3 - 6 Section renforcée longitudinalement

### 2.3.1 Approche statique par l'intérieur

On considère dans le béton la même famille de champs de contrainte que dans la première partie, que l'on complète par un champ de tension uniforme dans l'armature de valeur  $F$  telle que  $F \in [0 ; N_0]$ .

On obtient alors pour tout couple de valeurs des paramètres  $e$  et  $F$  :

$$(26) \quad \begin{cases} N = b \left[ \frac{h}{2} (\sigma_t - \sigma_c) + e(\sigma_t + \sigma_c) \right] + F \\ M = b \frac{h^2/4 - e^2}{2} (\sigma_t + \sigma_c) + \delta F \end{cases}$$

A  $F$  fixé, on voit que le domaine obtenu est le domaine de résistance obtenu pour la poutre homogène, translaté dans le plan  $(N, M)$  du vecteur de composantes  $(F, \delta F)$ . Ceci étant vrai pour tout  $F \in [0 ; N_0]$ , le domaine de résistance ainsi obtenu contient l'ensemble réunion de ces domaines translattés pour toutes les valeurs du paramètre  $F \in [0 ; N_0]$  (voir figure 3 - 7).

### 2.3.2 Approche cinématique par l'extérieur

Pour cette nouvelle approche cinématique, on conserve la même famille de champs de vitesse que précédemment pour le béton. Ce champ est complété dans l'armature en imposant la continuité des vitesses entre le béton et le renforcement.

Pour l'armature, on choisit donc le champ de vitesse suivant, égal à la trace du champ de vitesse du béton donné par (17) en  $y=-\delta$  et  $z=0$  :

$$(27) \quad \begin{cases} U_x = (\alpha + \omega\delta) \frac{x}{l} \\ U_y = \frac{K_1(-\delta)}{4\omega l} (\alpha + \omega\delta)^2 + \frac{\omega x^2}{2l} \\ U_z = -(\alpha + \omega\delta) \frac{K_2}{2l} \end{cases}$$

La puissance des efforts extérieurs restant inchangée, on effectue le calcul de la puissance résistante maximale  $P_{rm}^A$ , due à la présence de l'armature, qui vient s'ajouter à la contribution du béton :

$$(28) \quad P_{rm}^A = \int_A \pi_A \left( t \frac{dU_A}{ds} \right) ds = \int_A \text{Sup} \left\{ 0 ; t \frac{dU_A}{ds} \right\} ds = \int_A \text{Sup} \left\{ 0 ; N_0 \frac{\alpha + \omega\delta}{l} \right\} ds$$

- si  $\alpha + \omega\delta > 0$  alors  $P_{rm}^A = N_0 (\alpha + \omega\delta)$
- si  $\alpha + \omega\delta \leq 0$  alors  $P_{rm}^A = 0$

On obtient donc pour cette approche cinématique :

- si  $\omega \geq 0$ 
  - si  $\alpha + \omega\delta \geq 0$  alors  $\alpha N + \omega M \leq b \left[ \left( \frac{\alpha^2}{\omega} + \omega \frac{h^2}{4} \right) \frac{\sigma_c + \sigma_t}{2} + \alpha \frac{h}{2} (\sigma_t - \sigma_c) \right] + N_0 (\alpha + \omega\delta)$
  - si  $\alpha + \omega\delta \leq 0$  alors  $\alpha N + \omega M \leq b \left[ \left( \frac{\alpha^2}{\omega} + \omega \frac{h^2}{4} \right) \frac{\sigma_c + \sigma_t}{2} + \alpha \frac{h}{2} (\sigma_t - \sigma_c) \right]$
- si  $\omega \leq 0$ 
  - si  $\alpha + \omega\delta \geq 0$  alors  $\alpha N + \omega M \leq -b \left[ \left( \frac{\alpha^2}{\omega} + \omega \frac{h^2}{4} \right) \frac{\sigma_c + \sigma_t}{2} + \alpha \frac{h}{2} (\sigma_t - \sigma_c) \right]$
  - si  $\alpha + \omega\delta \leq 0$  alors  $\alpha N + \omega M \leq -b \left[ \left( \frac{\alpha^2}{\omega} + \omega \frac{h^2}{4} \right) \frac{\sigma_c + \sigma_t}{2} + \alpha \frac{h}{2} (\sigma_t - \sigma_c) \right] + N_0 (\alpha + \omega\delta)$

On peut donc construire le domaine de résistance de la section à partir des inégalités précédentes. Là encore, on constate que les approches statique et cinématique coïncident et sont liées par le théorème d'association, grâce à la correspondance  $e = \alpha/\omega$ . On obtient donc le critère de résistance de la section renforcée comme l'union des domaines de résistance de la section non renforcée (figure 3 - 7), translatés du vecteur  $(F, \delta F)$  pour toutes les valeurs de  $F \in [0 ; N_0]$ .

On notera sur cette figure la valeur  $M_{fl}$  de la résistance à la flexion simple de la poutre ( $N=0$ ).  
 On calcule la valeur de  $M_{fl}$  qui nous sera utile dans la suite, en notant  $d = \delta + h/2$  :

$$(29) \quad M_{fl} = N_0 \left( d - \frac{N_0 + h \sigma_t}{2(\sigma_c + \sigma_t)} \right) + \sigma_t \frac{h}{2} \left( h - \frac{N_0 + h \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} \right) \text{ pour } N_0 \leq d \sigma_c$$

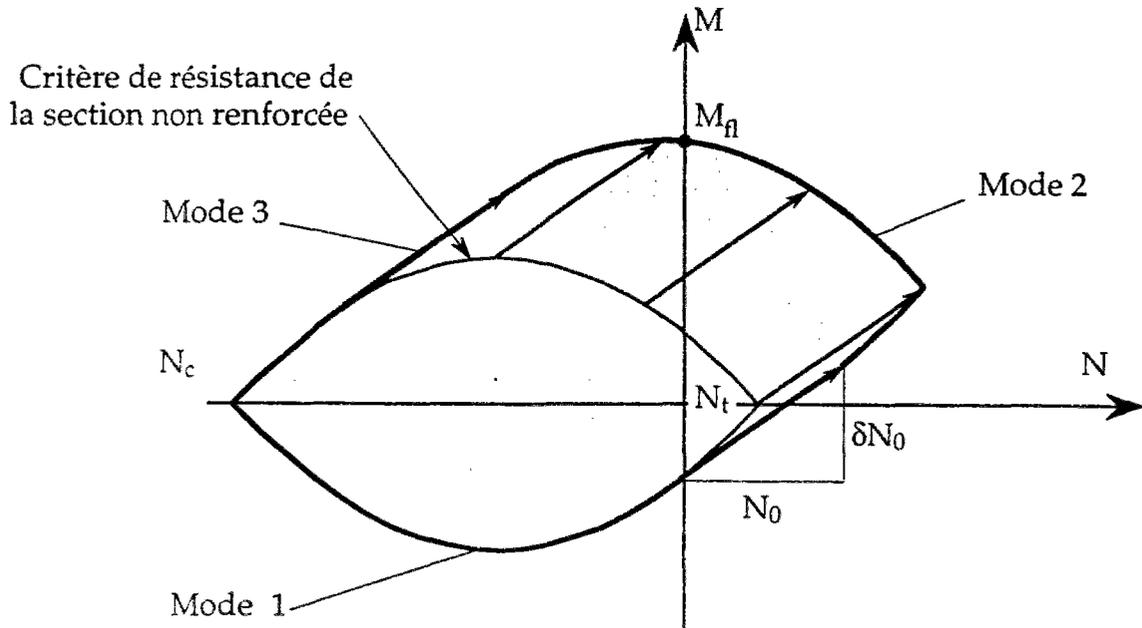
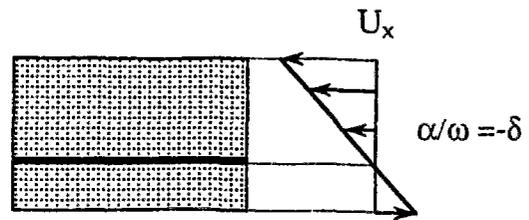


Figure 3 - 7 Critère de résistance de la section renforcée longitudinalement

Sur la figure 3 - 7 sont également représentés les modes de rupture correspondant au critère :

- le mode 1 est relatif à une rupture de la section de béton, ainsi que de l'armature en compression.
- le mode 2 correspond lui à une rupture simultanée de la section de béton, ainsi que de l'armature sollicitée cette fois en traction.

- le mode 3 est obtenu par une rupture de la section de béton seule, l'armature n'atteignant ses limites de tension, ni en traction, ni en compression.



On notera que l'on obtient des résultats similaires concernant les modes de rupture dans le cas des sols renforcés, et des matériaux composites à fibres (voir de Buhan et al., 1989).

### 3. La problématique de l'effort tranchant

Comme on l'a vu précédemment, il est possible de formuler puis de résoudre un problème auxiliaire de calcul à la rupture permettant de déterminer le critère de résistance en flexion composée d'un milieu curviligne. On va dans cette section s'intéresser à la possibilité de formuler un tel critère incluant cette fois également une dépendance vis-à-vis l'effort tranchant. Ce problème a été abordé par de nombreux auteurs pour des poutres homogènes constituées de matériaux obéissant à des critères de von Mises ou de Tresca (Green, 1954 ; Drucker, 1956 ; Hodge, 1957 ; Neal, 1961) et plus récemment (Guessab et Turgeman, 1991), dans le but de déterminer des courbes d'interaction entre moment fléchissant et effort tranchant. Ces auteurs déterminent de telles courbes en étudiant la résistance d'une poutre simplement appuyée soumise à une flexion trois points (ou des poutres encastées). La courbe d'interaction est alors déterminée en faisant varier les dimensions géométriques de la poutre, ce qui modifie le rapport entre le moment fléchissant et l'effort tranchant.

Cependant, l'existence d'un critère de résistance prenant en compte l'effort tranchant qui soit indépendant des dimensions longitudinales de la poutre n'est pas vraiment établie. En effet, on conçoit facilement que du fait que l'effort tranchant et le moment fléchissant sont liés par les équations d'équilibre du milieu curviligne, l'existence d'un critère ne dépendant que des caractéristiques des sections droites n'est pas assurée. On va dans la suite postuler l'existence d'un tel critère  $f(M,N,V)$  puis considérer un problème simple de flexion quatre points d'une poutre renforcée longitudinalement (voir figure 3 - 8). Dans ce cas particulier, on conclura à l'impossibilité de mettre en évidence un tel critère, en examinant le comportement des solutions lorsque l'élanement de la poutre devient grand. Cet exemple nous permettra de montrer que l'on est incapable, dans ce cas précis, d'exhiber un comportement asymptotique liant le milieu curviligne et un modèle tridimensionnel, dans le cadre du calcul à la rupture.

Considérons une poutre rectangulaire de hauteur  $h$ , largeur  $b$ , renforcée longitudinalement par une armature de résistance  $N_0$ . La poutre est constituée d'un matériau de Coulomb tronqué en traction, de résistance à la compression  $\sigma_c$ , et à la traction  $T$ . Cette poutre est soumise à la flexion quatre points présentée sur la figure 3 - 8. On recherche la valeur de la charge de ruine  $P^*$  de cette poutre.

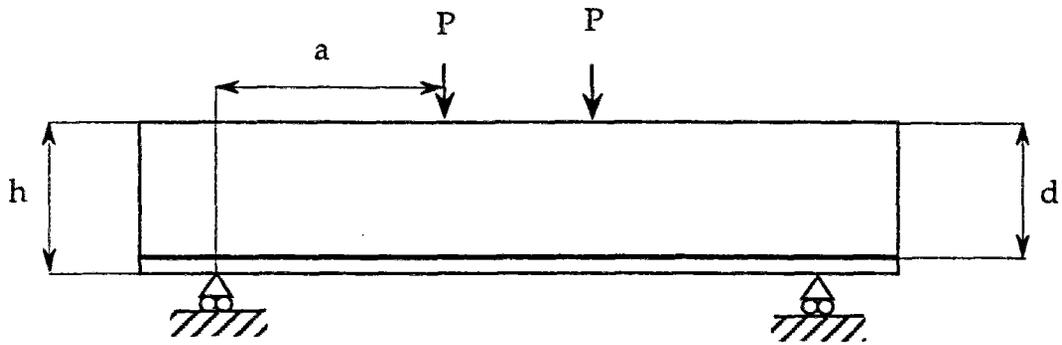


Figure 3 - 8 Flexion quatre points

Dans le cas présenté, on est dans l'impossibilité de résoudre de manière analytique le problème. On considère donc l'approche cinématique représentée sur la figure 3-9. On suppose qu'un bloc délimité en partie supérieure de la poutre par les points d'application des charges et de côtés inclinés à  $\alpha$  sur l'horizontale est animé d'un mouvement de translation verticale de vitesse  $V$ . On suppose la continuité du champ de vitesse entre le béton et l'armature.

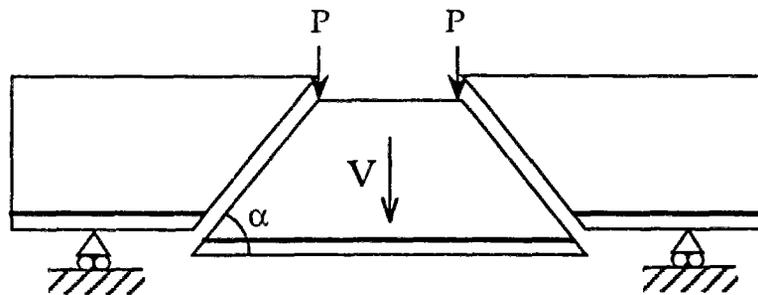


Figure 3-9 Approche cinématique par blocs

On calcule la puissance des efforts extérieurs  $P_{ext}$  :

$$(30) \quad P_{ext} = 2 P V$$

La puissance résistante maximale  $P_{res}^{max}$  se réduit à la contribution du béton, car la discontinuité de vitesse au niveau de l'armature longitudinale est perpendiculaire à celle-ci (voir la formule (10)). On obtient donc :

$$(31) \quad P_{res}^{max} = b \int \pi_B(\underline{n}, \underline{V}) dl$$

Après calculs, on obtient en utilisant la formule (7) :

$$(32) \quad P_{res}^{max} = V(bh\sigma_c \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2bhT \frac{\cos\alpha-\sin\varphi}{(1-\sin\varphi)\sin\alpha})$$

sous les conditions  $\alpha \leq \frac{\pi}{2} - \varphi$  (pertinence de la discontinuité de vitesse) et  $h \cot \alpha \leq a$  (condition géométrique).

On obtient alors une majoration de la charge extrême  $P^*$  :

$$(33) \quad P^* \leq P_1 = bh\sigma_c \frac{1-\cos\alpha}{2\sin\alpha} + bhT \frac{\cos\alpha-\sin\varphi}{(1-\sin\varphi)\sin\alpha} \quad \text{pour } \arctan \frac{h}{a} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Cette fonction de l'angle  $\alpha$  est décroissante, si bien que la plus petite borne supérieure est donnée par  $\alpha = \arctan \frac{h}{a}$ . Supposons maintenant que la résistance à la traction du béton soit nulle ( $T=0$ ), et effectuons un développement de  $P_1$  lorsque  $h$  est petit devant  $a$  (cas de la poutre élancée). On a :

$$(34) \quad P_1 = bh\sigma_c \frac{\sqrt{h^2 + a^2} - a}{2h} \underset{\frac{h}{a} \rightarrow 0}{\approx} bh\sigma_c \frac{h}{4a}$$

Ceci entraîne que :

$$(35) \quad P^* \underset{\frac{h}{a} \rightarrow 0}{\leq} bh\sigma_c \frac{h}{4a} + o(h/a)$$

Comparons maintenant ce résultat avec une approche de type milieu curviligne du même problème (voir figure 3 - 10). On suppose que le critère de résistance d'un tel milieu curviligne est défini, pour un effort normal nul (c'est le cas considéré) par la fonction  $f(M,V)$ .

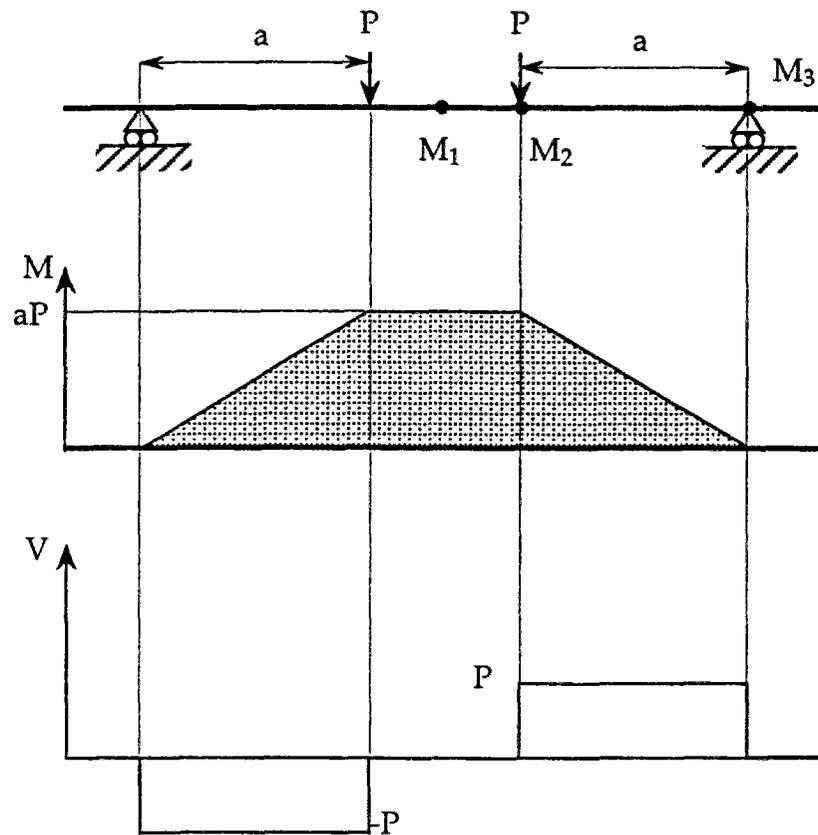


Figure 3 - 10 Approche de type milieu curviligne

Compte tenu de l'analyse statique illustrée par les diagrammes de la figure 3 - 10, on montre aisément par un raisonnement de convexité que le critère ne peut être atteint qu'en les points  $M_i$ ,  $i=1,3$  représentés sur la figure 3 - 10 et dont les efforts intérieurs ( $V$ ,  $M$ ) correspondants sont représentés sur la figure 3 - 11.

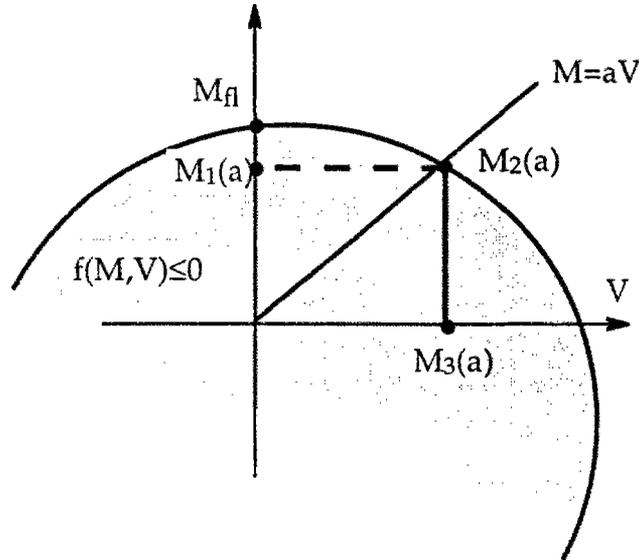


Figure 3 - 11 Critère de résistance dans le plan (V, M)

En notant  $M_{fl}$  la résistance à la flexion de la poutre en l'absence d'effort tranchant et d'effort normal (voir figure 3 - 7), et  $P^*$  la charge extrême obtenue par un calcul de type milieu curviligne, un raisonnement de continuité immédiat montre que lorsque  $a$  devient grand devant les dimensions transversales de la poutre (poutre élancée), sur le diagramme (V, M) les représentations des points  $M_1$  et  $M_2$  tendent vers le point de coordonnées  $(0, M_{fl})$  et celle de  $M_3$  tend vers le point  $(0, 0)$  si bien que l'on a :

$$(36) \quad P^* \xrightarrow{h/a \rightarrow 0} \frac{M_{fl}}{a}$$

En utilisant la valeur de la résistance en flexion simple calculée dans la première partie du chapitre et donnée par la formule (29), on montre aisément, que l'on a pour  $T = 0$  :

$$(37) \quad M_{fl} = N_0 d b \left( 1 - \frac{N_0}{2d\sigma_c} \right) \text{ pour } N_0 \leq d\sigma_c$$

Comparons maintenant les résultats de (35) et (36). L'examen de ces deux formules montre que pour certaines valeurs de la résistance de l'armature longitudinale, on peut obtenir une incompatibilité. En effet, même si les deux expressions présentent la même dépendance par rapport à la variable  $a$ , on remarque que l'approche cinématique (35) fournit une borne supérieure qui ne dépend pas du renforcement longitudinal  $N_0$ . Ceci est dû au fait que dans le mécanisme choisi, l'armature ne subit aucune extension longitudinale. On note également que si l'on fixe par exemple les

valeurs  $N_0=d\sigma_c$  et  $d=0,9 h$ , l'approche cinématique tridimensionnelle (35) fournit une **valeur inférieure** ( $0,25 bh^2\sigma_c/a$  contre  $0,405 bh^2\sigma_c/a$ ) au calcul effectué par l'approche de type milieu curviligne (36). Ceci est dû principalement au fait que la résistance à la traction du béton T a été choisie nulle, si bien que la valeur de la fonction  $\pi_B(\underline{n} ; \underline{V})$  tend vers zéro, dans la famille de mécanismes envisagés (l'angle  $\alpha$  tend vers 0). Ceci permet d'obtenir des charges extrêmes tendant également vers zéro, lorsque l'élanement tend vers l'infini. Un second facteur expliquant ce phénomène est l'anisotropie induite par le renforcement longitudinal, qui explique que l'on puisse modifier la résistance à la flexion de la poutre, sans améliorer la résistance vis-à-vis du mécanisme envisagé.

Ce résultat a priori paradoxal réfute dans ce cas extrême, toute possibilité d'exhiber un critère de résistance d'un tel milieu curviligne, prenant en compte l'effort tranchant. En effet un tel critère s'il existait, fournirait, comme on l'a montré, une valeur de la charge extrême égale à  $P^*$  (calcul effectué sans influence de l'effort tranchant) lorsque  $a$  devient grand devant  $h$  (car l'effort tranchant devient négligeable devant le moment de flexion). Or l'approche cinématique tridimensionnelle proposée fournit une borne supérieure de la charge extrême inférieure à  $P^*$ , qui serait donc incompatible avec le calcul par le modèle de type milieu curviligne.

## Conclusion

On peut dire que même si le résultat obtenu ne présente pas de caractère de généralité, l'exemple précédent a permis de montrer que l'existence d'un critère de résistance de la forme  $f(M,N,V)$  permettant un passage d'une description tridimensionnelle au modèle milieu curviligne n'est pas assurée. L'existence d'un comportement asymptotique lorsque l'élanement des poutres augmente, est certainement soumise à des conditions portant sur les paramètres de résistance des matériaux, conditions qu'une étude théorique plus complète permettrait sans doute de déterminer. On a vu également que dans le cas examiné de la flexion quatre points, la **résistance à la traction** du béton ainsi que l'élanement des poutres considérées jouaient un rôle crucial dans l'adéquation entre le modèle milieu curviligne et le problème initial. Les résultats présentés ici montrent de façon claire certaines limites d'un modèle de type milieu curviligne, ainsi que la nécessité de recourir à une modélisation bi- ou tridimensionnelle des structures. Ceci nous amène donc à utiliser des moyens numériques de calcul des charges extrêmes. Un des premiers objectifs en sera la détermination du domaine de validité de la modélisation par les milieux curvilignes, question laissée en suspens dans ce chapitre. Ce sera également un moyen d'analyse pour les géométries où une telle modélisation ne s'applique plus. On présente donc dans le chapitre suivant les méthodes numériques employées.

## **Chapitre 4**

**Mise au point d'une méthode numérique  
par la programmation linéaire**

## Introduction

Comme on l'a vu dans les chapitres précédents, la mise en œuvre analytique du calcul à la rupture se révèle souvent difficile, notamment lorsqu'il s'agit de traiter des problèmes définis sur des géométries complexes. La mise au point de méthodes numériques destinées à évaluer le comportement à la ruine des structures s'avère donc nécessaire si l'on souhaite utiliser la théorie du calcul à la rupture. Dans ce cadre théorique, de nombreuses formulations numériques ont été proposées pour la résolution de problèmes en déformation plane. Pour la plupart, ces formulations se fondent sur la méthode des éléments finis (Frémond et al., 1974 ; Delbecq et al., 1977). Des formulations de l'approche cinématique grâce à une "régularisation viscoplastique" du critère de plasticité ont été également mises en œuvre (Friàa, 1978 ; Guennouni et Le Tallec, 1982), toujours dans le cadre des éléments finis. Récemment, une nouvelle formulation numérique de l'approche cinématique a été développée dans (Maghous, 1993), et (de Buhan et Maghous, 1995), pour évaluer les charges de ruine de structures constituées de matériau de Tresca ou von Mises. Cette dernière formulation repose sur l'utilisation d'un potentiel-vecteur destiné à ramener le problème de minimisation initial à une optimisation sans contraintes.

Parallèlement aux méthodes évoquées précédemment, ont été développées des formulations numériques du calcul à la rupture fondées sur la programmation linéaire (Ceradini et Gavarini, 1965 ; Pastor 1978, 1983 ; Turgeman, 1983 ; Sloan, 1988, 1989). Ces méthodes ont été utilisées dans leurs débuts, surtout pour le dimensionnement de structures formées de poutres ou de dalles, mais ce n'est que récemment qu'elles ont pu être appliquées à des calculs de structures bi- et tridimensionnelles, ceci grâce notamment à l'augmentation de la capacité de calcul des ordinateurs modernes, et à l'optimisation des codes industriels de résolution. Ces techniques ont généralement été appliquées à l'étude de problèmes de stabilité d'ouvrages de géotechnique. Les méthodes présentées ici s'inspirent largement de ces travaux.

Le principe de la formulation numérique adoptée repose sur la possibilité de "linéariser" les critères de résistance des matériaux constituant le système, c'est à dire de trouver un convexe dans l'espace des contraintes, délimité par des portions de plans (un polytope), qui approche le convexe initial de résistance des matériaux mis en jeu. On montre alors que la discrétisation de l'espace des champs solutions, tant dans l'approche statique (Pastor, 1983) que dans l'approche cinématique (Turgeman, 1983), permet de réduire le problème initial d'optimisation sous contraintes non linéaires à la résolution d'un programme linéaire, dont le traitement numérique est beaucoup plus aisé. Le principal avantage de la méthode est alors de fournir un encadrement rigoureux des charges extrêmes du système étudié, ce qui n'est pas le cas pour une méthode de calcul d'évolution de type élasto-plastique, qui ne peut fournir que des estimations de cette valeur.

L'outil numérique qui a été développé permet donc de déterminer des bornes inférieures et supérieures des charges de ruine de structures en béton armé modélisées en **contrainte plane**, au

moyen du calcul à la rupture. Dans le cadre de la modélisation présentée dans le chapitre deux, on décrit les armatures soit au moyen de la modélisation mixte en adoptant une formulation différente de celle mise au point dans (Ciss, 1985), soit grâce à l'emploi d'un critère de résistance homogénéisé du béton pour des distributions régulières d'armatures (notamment pour les armatures transversales). La prise en compte de ce critère homogénéisé modifie légèrement la formulation numérique si bien que dans la suite, on présentera la méthode dans le cas le plus général, c'est à dire en considérant un critère homogénéisé du béton. Le cas du matériau homogène représente une simplification du cas présenté et s'en déduit donc aisément.

## 1. Approche statique

L'approche adoptée est formulée pour des éléments finis triangulaires. On impose de plus au maillage de la structure, que les armatures représentées par la modélisation mixte (décrites de manière discrète) soient localisées aux interfaces entre des éléments situés de part et d'autre de celles-ci, c'est à dire qu'aucun élément fini ne les traverse. Il est à noter que le maillage bidimensionnel ainsi défini, induit naturellement un maillage en éléments finis linéiques des armatures. D'un point de vue pratique, on définit les armatures comme une suite de segments (interfaces entre éléments), à laquelle est affectée la valeur de la résistance à la traction (la résistance d'une armature est supposée constante dans chaque élément linéique, mais il est possible de la faire varier d'un élément à l'autre afin de représenter, par exemple des lits de longueurs différentes).

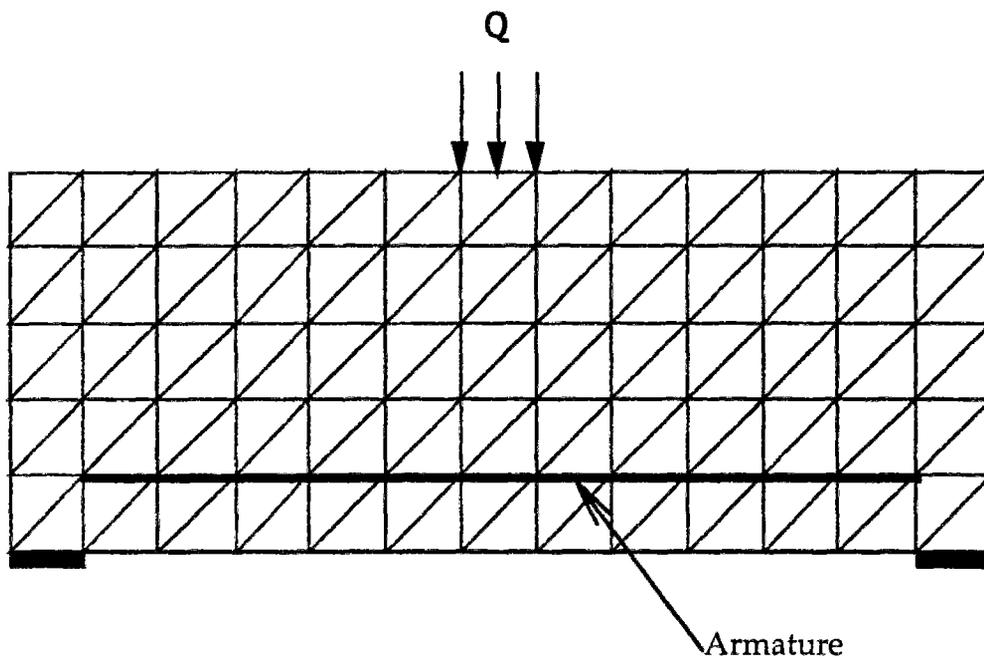


Figure 4 - 1 Maillage d'une poutre

On suppose totalement déterminées les capacités de résistance des armatures (leur limite en traction), et du béton (résistance à la compression, à la traction et angle de frottement interne) ainsi que le mode de chargement de la structure. Nous considérons ici le cas d'un seul paramètre de chargement  $Q$ . L'approche statique définit la charge extrême  $Q^*$  par une maximisation sur les champs de contrainte. Le principe de l'approche numérique consiste à rechercher la valeur maximale de la charge extrême en explorant une sous-classe de champs mixtes de contrainte, qui soient statiquement admissibles avec le chargement et vérifient en tout point les critères de résistance des matériaux considérés. Grâce à une linéarisation préalable des critères de résistance des matériaux, on ramène ce problème à la résolution d'un programme linéaire.

## 1.1 Description des champs de contrainte

Les éléments finis adoptés sont des triangles à trois noeuds, dont les fonctions d'interpolations  $N_i(x,y)$  sont linéaires. Afin de prendre en compte un critère de résistance homogénéisé du béton, en s'inspirant de la formulation de (Pastor et Abdi, 1989 ; Abdi, 1992 ; Abdi et al., 1994) on introduit en plus des trois composantes  $\{\Sigma_{xx}, \Sigma_{xy}, \Sigma_{yy}\}$  du tenseur bidimensionnel  $\underline{\underline{\Sigma}}$  des contraintes macroscopiques, une quatrième variable  $\sigma$ , si bien qu'à chaque noeud est attribué le vecteur :

$$(1) \quad \{\Sigma^i\} = \{ \Sigma_{xx}^i, \Sigma_{xy}^i, \Sigma_{yy}^i, \sigma^i \}$$

L'interpolation du champ de contrainte permet donc d'écrire, dans chaque élément :

$$(2) \quad \{\Sigma_e\} = \sum_{i=1}^3 N_i(x,y) \{\Sigma^i\}$$

où l'on note  $\{\Sigma_e\} = \{ \Sigma_{xx}(x,y), \Sigma_{xy}(x,y), \Sigma_{yy}(x,y), \sigma(x,y) \}$  le vecteur des composantes du champ de contrainte et du paramètre  $\sigma$ , dans chaque élément.

On forme alors le vecteur  $\{\Sigma\}$  des inconnues du problème :

$$(3) \quad \{\Sigma\} = \bigoplus_{i=1, n} \{\Sigma^i\}$$

où  $\bigoplus$  désigne le symbole de la somme vectorielle et  $n$  le nombre de noeuds (trois par triangle).

Dans la formulation adoptée, chaque noeud géométrique est dédoublé, ce qui autorise les discontinuités du champ de contrainte. Il a été en effet constaté que numériquement, il est préférable, voire indispensable dans certains cas, d'autoriser ces discontinuités.

Comme les fonctions d'interpolation sont linéaires dans chaque élément, ces données suffisent à déterminer complètement le champ de contrainte dans toute la structure. De même que dans l'exemple d'illustration du bloc renforcé présenté au chapitre deux, on déduit le champ de tension dans les armatures de la donnée du champ de contrainte, par intégration des équations d'équilibre (4) reliant ces deux champs :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dN}{ds}(s) + \llbracket \Sigma_{nt} \rrbracket(s) = 0 \\ \frac{dV}{ds}(s) + \llbracket \Sigma_{nn} \rrbracket(s) = 0 \\ \frac{dM}{ds}(s) + V(s) = 0 \end{cases}$$

où  $\llbracket R \rrbracket = R_2 - R_1$  représente la discontinuité du champ  $R$  au passage de l'armature (voir la figure 4-2) dans le sens de la normale  $\underline{n}$  et  $\Sigma_{nn}$  et  $\Sigma_{nt}$  les composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte appliqués à l'armature (c'est-à-dire  $\Sigma_{nn} = \underline{n} \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{n}$  et  $\Sigma_{nt} = \underline{n} \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{t}$ ). L'orientation des vecteurs  $\underline{t}$  et  $\underline{n}$  se fait de manière cohérente avec le choix du sens de variation de l'abscisse curviligne le long de l'armature ( $\underline{t}$  et  $\underline{n}$  forment une base directe).

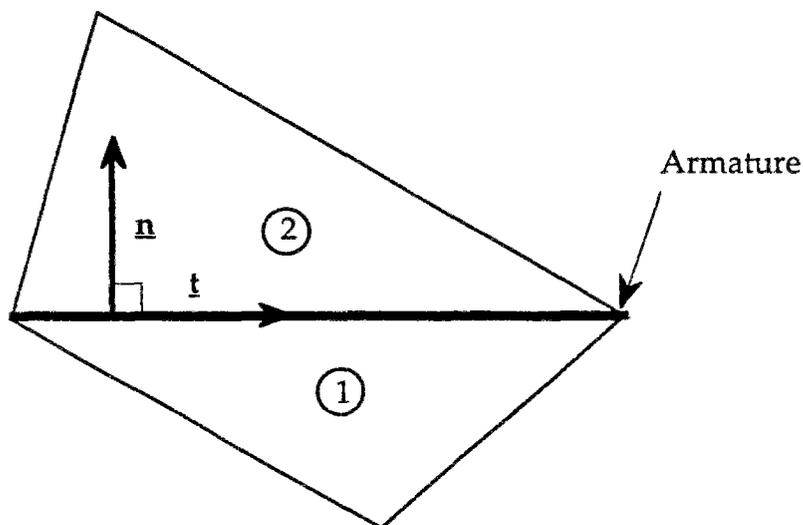


Figure 4-2 Discontinuité au passage de l'armature

## 1.2 Principe de la méthode

### 1.2.1 Calcul de la charge extrême

On explore la classe de champs mixtes de contrainte discrétisés définis dans le paragraphe précédent. Afin de mettre en œuvre l'approche statique du calcul à la rupture, on est amené à imposer les conditions suivantes sur les champs de contrainte.

## Equilibre

- (a) conditions d'équilibre à l'intérieur de l'élément.
- (b) conditions d'équilibre entre éléments (continuité du vecteur contrainte).
- (c) conditions aux limites en efforts.

## Résistance

- (d) vérification du critère linéarisé en tous les sommets des éléments (le critère de résistance du matériau étant convexe, cette condition est nécessaire et suffisante à ce que le champ de contrainte soit admissible dans tout l'élément). La linéarisation adoptée est donnée dans l'annexe trois.
- (e) vérification des conditions de résistance des armatures.

D'après le type d'éléments adoptés, les conditions (a) à (c) s'expriment aisément sous forme de conditions linéaires. La condition de résistance (d) ayant déjà été linéarisée, il nous reste à linéariser la condition (e).

D'après les équations d'équilibre (4) du milieu curviligne, comme la variation des contraintes est linéaire dans chaque élément fini, l'effort normal  $N(s)$  varie de manière quadratique par rapport à l'abscisse curviligne, dans chaque élément linéique d'armature.

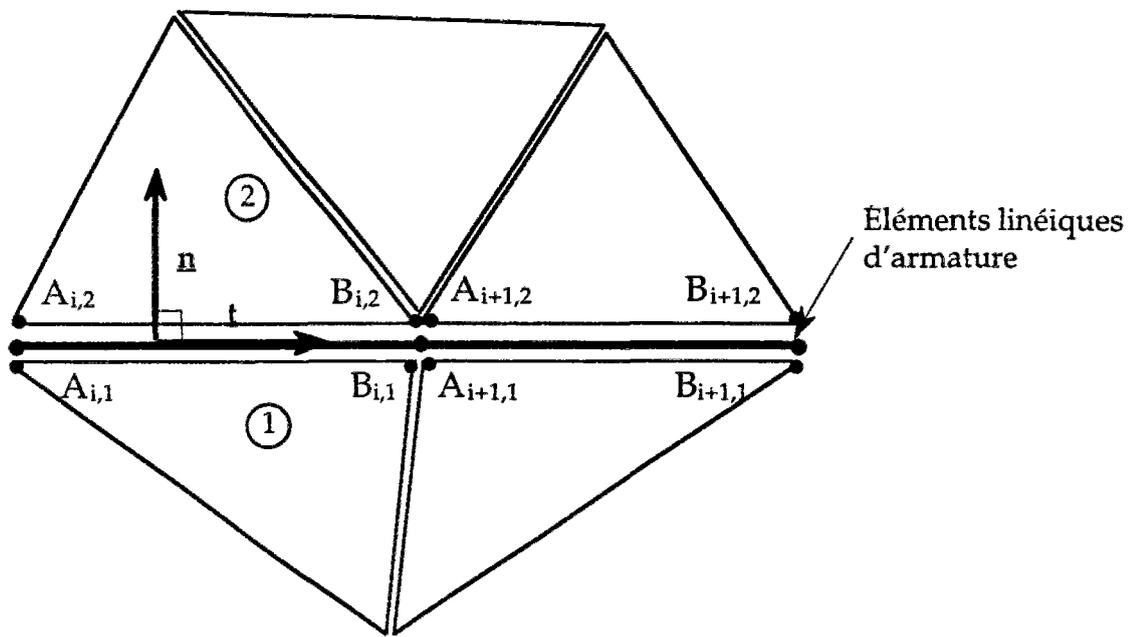


Figure 4 - 3 Eléments linéiques d'armatures

En numérotant les éléments linéiques d'armature selon un sens de parcours arbitraire, et en effectuant un changement de variable sur l'abscisse curviligne, dans l'élément  $i$  (reliant les nœuds  $A_i$  et  $B_i$ ) la distribution de l'effort normal se met sous la forme suivante :

$$(5) \quad N_i(s) = a_i s^2 + b_i s + c_i \quad s \in [0, 1]$$

où les coefficients du polynôme sont des fonctions dépendant linéairement du champ de contrainte de part et d'autre de l'armature.

On obtient par intégration des équations d'équilibre (4) les valeurs des coefficients  $a_i$  et  $b_i$  en fonction des contraintes aux nœuds adjacents. La valeur des coefficients  $c_i$  est donnée par la relation de récurrence exprimant la continuité de l'effort normal entre deux éléments linéiques successifs de la même armature. On obtient alors facilement les expressions suivantes pour les coefficients  $a_i$ ,  $b_i$ , et  $c_i$  :

$$(6) \quad \begin{cases} a_i = \frac{A_i B_i}{2} (\Sigma_{nt, A_{i,2}} - \Sigma_{nt, A_{i,1}} + \Sigma_{nt, B_{i,2}} - \Sigma_{nt, B_{i,1}}) \\ b_i = A_i B_i (\Sigma_{nt, A_{i,1}} - \Sigma_{nt, A_{i,2}}) \\ c_i = a_{i-1} + b_{i-1} + c_{i-1} \text{ et } c_0 = 0 \end{cases}$$

D'après le critère de résistance des armatures choisi au chapitre deux, il est nécessaire de vérifier le long de chaque armature une condition du type :

$$(7) \quad \forall s \in [0, 1], 0 \leq N(s) \leq N_0 \text{ et } M = V = 0$$

Les deux dernières conditions sont assurées grâce aux équations d'équilibre, en imposant la continuité de la composante normale du vecteur contrainte  $\Sigma_{nn}$  ce qui permet d'assurer que l'effort tranchant et le moment fléchissant restent nuls dans les armatures. Quant à la première, elle se ramène d'après la variation de la tension (5) le long d'un élément, à imposer deux conditions de la forme :

$$(8) \quad \forall s \in [0, 1], P(s) = a s^2 + b s + c \geq 0$$

On peut tout d'abord faire quelques remarques sur la structure de l'ensemble C des points de l'espace (a, b, c) vérifiant la condition (8). Ce domaine est clairement convexe, puisque si :

$$\forall s \in [0, 1], a_1 s^2 + b_1 s + c_1 \geq 0$$

$$\forall s \in [0, 1], a_2 s^2 + b_2 s + c_2 \geq 0$$

alors  $\forall \lambda \in [0, 1]$ , on a :

$$\forall s \in [0, 1], (\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2)s^2 + (\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2)s + (\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2) \geq 0$$

De plus il est clair que la frontière  $\partial C$  de l'ensemble C est un cône de sommet O. Cette frontière est formée des points tels que  $\text{Min}_{s \in [0, 1]} (as^2 + bs + c) = 0$

Pour construire la linéarisation recherchée, on va appuyer une suite de plans sur  $\partial C$ . On étudie donc cette surface.

Si  $a \leq 0$ , alors le minimum de  $P(s)$  est atteint en 0 ou en 1, sinon celui-ci est atteint en  $-\frac{b}{2a}$  et vaut  $c - \frac{b^2}{4a}$ . Tout point de C doit donc vérifier les deux conditions  $a + b + c \geq 0$  et  $c \geq 0$ . Si  $-\frac{b}{2a} \in [0, 1]$ , ce point doit vérifier  $c - \frac{b^2}{4a} \geq 0$ . La surface constituée des points (a, b, c) tels que  $b^2 = 4ac$  et  $-\frac{b}{2a} \in [0, 1]$  est un cône de sommet O. Afin de définir les plans recherchés, on construit donc une suite de droites passant par O et incluses dans cette surface. Ce sont les droites  $D_i$  définies par :

$$(9) \quad \begin{bmatrix} b = -2a \frac{i}{p} \\ c = a \left(\frac{i}{p}\right)^2 \end{bmatrix} \quad 0 \leq i \leq p$$

Les droites de la famille  $D_i$  passant toutes par le point  $O$ , on construit alors la famille de plans qui s'appuient sur les couples  $(D_{i+1}; D_i)$  pour  $1 \leq i \leq p$ . Ce sont les plans d'équations :

$$(10) \quad 2i(i-1)a + (2i-1)pb + 2cp^2 = 0$$

On obtient donc par ce procédé, grâce à la convexité de l'ensemble  $C$ , une linéarisation par l'intérieur de la condition (8) :

$$(11) \quad \begin{cases} a + b + c \geq 0 \\ c \geq 0 \\ 2i(i-1)a + (2i-1)pb + 2cp^2 \geq 0, \quad 1 \leq i \leq p \end{cases}$$

Cette linéarisation du critère de résistance constitue une bonne approximation de la condition (8), même pour des valeurs de  $p$  assez réduites (de l'ordre de 2 ou 3).

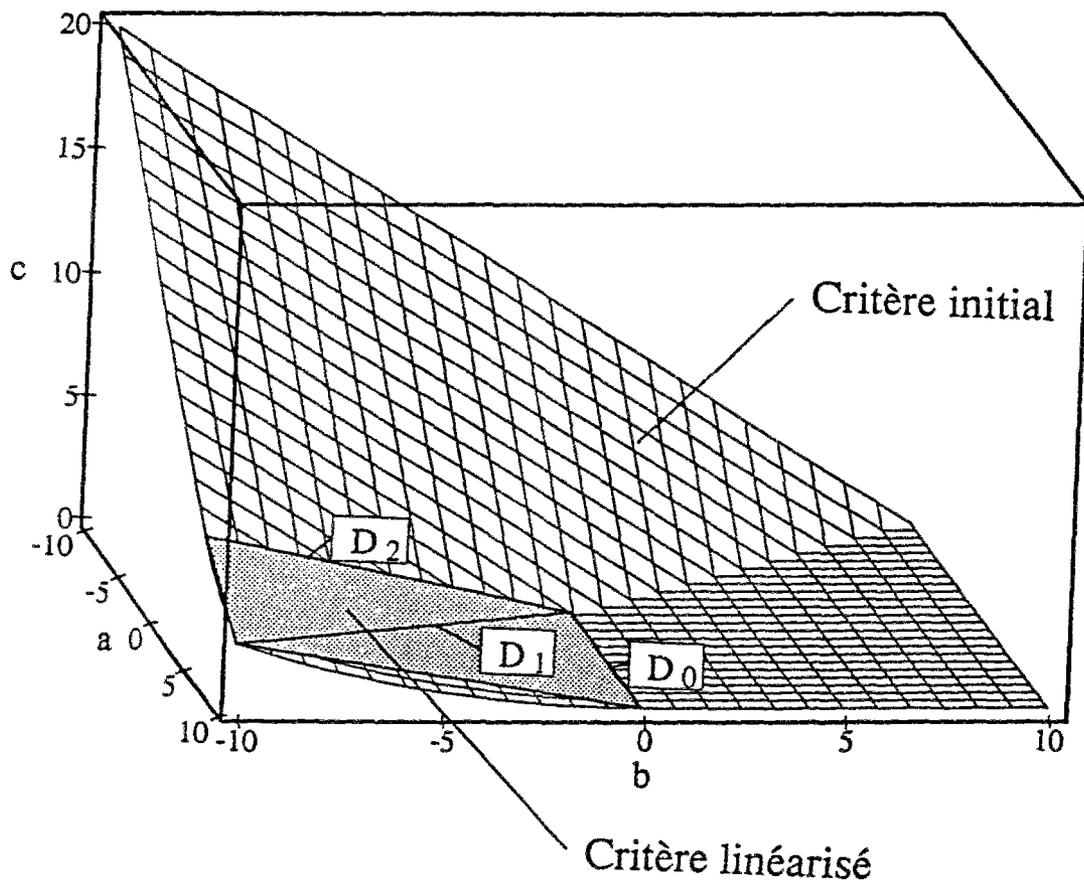


Figure 4 - 4 Linéarisation du critère ( $p=2$ )

On peut donc, en combinant (6) et (11), formuler la condition de résistance des armatures (e) sous une forme linéaire. On regroupe alors toutes les conditions linéaires portant sur le vecteur  $\{\Sigma\}$  et assurant le respect de l'équilibre ainsi que des critères de résistance.

D'après la définition du mode de chargement, le paramètre de chargement  $Q$  est une forme linéaire des inconnues, si bien qu'on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$(12) \quad Q = \{Q\} \cdot \{\Sigma\}$$

Le problème de calcul à la rupture initial se ramène alors au programme linéaire suivant :

Maximiser	$Q = \{Q\} \cdot \{\Sigma\}$	$(\underline{\Sigma}$ S. A. avec $Q)$
sous les contraintes :	$[E] \cdot \{\Sigma\} = \{0\}$	(équilibre)
	$[R] \cdot \{\Sigma\} \leq \{B\}$	(résistance)

où le vecteur  $\{\Sigma\}$  représente le vecteur des inconnues du problème et les matrices  $[E]$  et  $[R]$  expriment respectivement les conditions d'équilibre (a), (b), (c) et le critère de résistance des matériaux (d) et (e).

## 2. Approche cinématique

La mise en œuvre numérique de l'approche cinématique en calcul à la rupture présentée ici est inspirée des travaux de (Turgeman, 1983), et permet de la même manière que pour l'approche statique, de ramener le problème initial de minimisation d'une fonctionnelle non linéaire sous contraintes non linéaires à la résolution d'un programme linéaire. Cette méthode a été complétée de manière à pouvoir traiter des problèmes utilisant la modélisation mixte, et en incluant éventuellement la prise en compte, par la méthode d'homogénéisation, de renforcement par armatures transversales.

Afin de clarifier la présentation, on détaille en premier lieu le principe de l'approche numérique dans le cas du matériau homogène, puis dans une deuxième partie, on précise la mise en œuvre de la modélisation mixte dans le cadre de cette approche.

### 2.1 Description des champs de vitesse considérés

De même que pour l'approche statique, un maillage formé de triangles est adopté. (Dans le cadre de la modélisation mixte, celui-ci est soumis aux mêmes conditions concernant la disposition des éléments par rapport aux armatures, si bien qu'il est possible d'utiliser un même maillage pour les deux approches).

Dans chaque élément fini, le champ de vitesse est linéaire, et les discontinuités de vitesse sont permises entre éléments adjacents, si bien que l'on a dans chaque triangle :

$$(13) \quad \{u_B\} = \sum_{i=1}^3 N_i(x,y) \{u_i\}$$

où les fonctions  $N_i(x,y)$  sont les fonctions d'interpolations linéaires introduites précédemment, les vecteurs  $\{u_i\}$  les vecteurs vitesse aux nœuds correspondants, et où l'on note  $\{u_B\} = \{u_x(x,y); u_y(x,y)\}$ .

On forme ensuite le vecteur  $\{U\}$  définissant le champ de vitesse :

$$(14) \quad \{U\} = \bigoplus_{i=1, n} \{u_i\}$$

## 2.2 Principe de la méthode

Afin de simplifier la présentation, on se place ici aussi dans le cas d'un chargement défini par un seul paramètre  $Q$ , la généralisation au cas à  $n$  paramètres ne présentant pas de difficulté majeure. On présente dans la suite la méthode qui permet de ramener la formulation de l'approche cinématique à la résolution d'un programme linéaire, dans le cas d'un matériau homogène. On se reportera à (Turgeman, 1983) pour plus de détails. Les modifications apportées pour l'application de la modélisation mixte seront explicitées dans le paragraphe suivant.

Considérons un champ  $\mathbf{U}$  de vitesse correspondant au vecteur  $\{\mathbf{U}\}$  des vitesses nodales défini par (14).

On utilise la définition cinématique de la charge extrême :

$$(15) \quad Q^* = \underset{U.C.A.}{\text{Inf}} \{ P_{res}^{max}(\mathbf{U}) ; \dot{q}(\mathbf{U}) = 1 \}$$

D'après la définition du mode de chargement, la puissance des efforts extérieurs est une forme linéaire du champ de vitesse virtuel  $\mathbf{U}$ . Ce dernier étant une fonction linéaire du vecteur valeurs nodales des vitesses  $\{\mathbf{U}\}$ , il s'ensuit que  $\dot{q}(\mathbf{U})$  également. On peut donc le mettre sous la forme suivante :

$$(16) \quad \dot{q}(\mathbf{U}) = \{q\} \cdot \{\mathbf{U}\}$$

On est donc ramené à la minimisation de la fonction (non linéaire) puissance résistante maximale sous une condition linéaire, par rapport au vecteur des inconnues  $\{\mathbf{U}\}$ . On évalue alors dans le cas des éléments finis adoptés l'expression de  $P_{res}^{max}(\mathbf{U})$ . On note  $n_{el}$  le nombre d'éléments du maillage,  $S_i$  leur surface, et  $n_{int}$  le nombre d'interfaces  $I_j$  entre les éléments. Le champ de vitesse étant linéaire dans chaque élément, le taux de déformation  $\underline{d}$  est constant si bien que l'on obtient pour la puissance résistante maximale l'expression suivante :

$$(17) \quad P_{res}^{max}(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} S_i \pi_B(\underline{d}_i) + \sum_{j=1}^{n_{int}} \int_{I_j} \pi_B(\underline{n}_j, \llbracket \mathbf{U}_B \rrbracket) ds$$

Comme la fonction  $\pi_B(\underline{n}, \underline{V})$  est convexe par rapport à  $\underline{V}$  et que  $\llbracket \mathbf{U}_B \rrbracket$  varie linéairement le long d'une interface  $I_j$  entre deux éléments, on établit la majoration suivante :

$$(18) \quad \int_{I_j} \pi_B(\underline{n}_j, \llbracket \mathbf{U}_B \rrbracket) ds \leq \frac{1}{2} (\pi_B(\underline{n}_j, \llbracket \mathbf{U}_1^j \rrbracket) + \pi_B(\underline{n}_j, \llbracket \mathbf{U}_2^j \rrbracket)) l_j$$

où l'on note  $l_j$  la longueur de l'interface  $I_j$  et  $\llbracket \mathbf{U}_i^j \rrbracket$ ,  $i=1,2$  la discontinuité du champ de vitesse virtuel aux deux extrémités de l'interface  $j$ .

De cette dernière majoration, on déduit alors aisément la majoration suivante de  $P_{res}^{max}$  :

$$(19) \quad P_{res}^{max}(\mathbf{U}) \leq \sum_{i=1}^{n_{et}} S_i \pi_B(\underline{d}_i) + \sum_{j=1}^{n_{int}} \frac{1}{2} (\pi_B(\underline{\Omega}_j, \underline{\mathbb{U}}_j^I) + \pi_B(\underline{\Omega}_j, \underline{\mathbb{U}}_j^II)) l_j$$

Supposons maintenant que l'on dispose d'un critère linéarisé  $G_n$  pour le matériau constitutif. Ce critère est choisi de sorte que  $G \subset G_n$ . On définit alors l'appartenance à  $G_n$  par les inégalités suivantes, en identifiant le tenseur de contraintes macroscopique  $\underline{\Sigma}$  et le vecteur  $\{\Sigma\} = \{\Sigma_{xx}, \Sigma_{yy}, \Sigma_{xy}\}$ , de ses composantes dans un repère fixe :

$$(20) \quad \underline{\Sigma} \in G_n \Leftrightarrow \{\Sigma\} \cdot \{c_i\} \leq b_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{soit} \quad \underline{\Sigma} \in G_n \Leftrightarrow [C] \cdot \{\Sigma\} \leq \{b\}$$

où l'on note  $[C]$  la matrice formée des  $n$  vecteurs lignes  $\{c_i\}$  et  $\{b\}$  le vecteur des constantes  $b_i$ .

Le critère de résistance linéarisé étant choisi de telle manière qu'il contienne le critère original, la fonction d'appui associée à ce critère, notée  $\pi_n$ , est supérieure à la fonction d'appui  $\pi_B$  du convexe d'origine. On identifie alors le tenseur de taux de déformation  $\underline{d}$  et le vecteur  $\{d\} = (d_{xx}, d_{yy}, 2d_{xy})$  de manière à avoir  $\underline{\Sigma} : \underline{d} = \{\Sigma\} \cdot \{d\}$ . On peut ainsi définir la fonction  $\pi_n$  par :

$$(21) \quad \begin{aligned} \pi_n(\underline{d}) &= \sup_{\underline{\Sigma} \in G_n} \underline{\Sigma} : \underline{d} \\ &= \sup_{[C] \cdot \{\Sigma\} \leq \{b\}} \{\Sigma\} \cdot \{d\} \end{aligned}$$

En utilisant un résultat classique de dualisation en programmation linéaire, on peut donner la définition duale équivalente de la fonction  $\pi_n$ , en introduisant le vecteur  $\underline{\lambda}$  formé des variables duales  $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$  :

$$(22) \quad \begin{aligned} \pi_n(\underline{d}) &= \sup_{[C] \cdot \{\Sigma\} \leq \{b\}} \{\Sigma\} \cdot \{d\} \\ &= \inf_{\substack{[C] \cdot \{\lambda\} = \{d\} \\ \{\lambda\} \geq 0}} \{b\} \cdot \{d\} \end{aligned}$$

Il est à noter que les deux conditions  $[C] \cdot \{\lambda\} = \{d\}$  et  $\{\lambda\} \geq 0$  s'interprètent géométriquement de manière très simple. Elles traduisent le fait que le vecteur  $\{d\}$  appartient au cône des normales au critère  $G_n$ .

Cette dernière écriture permet, compte tenu de la minoration de  $\pi_n(\underline{d})$  par  $\pi_b(\underline{d})$  (resp. de  $\pi_n(\underline{n}, \underline{V})$  par  $\pi_b(\underline{n}, \underline{V})$ ), de reformuler la majoration (19) de la puissance résistante maximale sous la forme :

$$(23) \quad P_{res}^{max}(\underline{U}) \leq \sum_{i=1}^{n_{el}} S_i \underset{\substack{[C].\{\lambda_i\} = \{d_i\} \\ \{\lambda_i\} \geq \{0\}}}{\text{Inf}} (\{b\} \cdot \{d_i\}) + \sum_{j=1}^{n_{int}} \frac{1}{2} \left( \underset{\substack{[H].\{\lambda_1^j\} = \{U_1^j\} \\ \{\lambda_1^j\} \geq \{0\}}}{\text{Inf}} (\{f_j\} \cdot \{U_1^j\}) + \underset{\substack{[H].\{\lambda_2^j\} = \{U_2^j\} \\ \{\lambda_2^j\} \geq \{0\}}}{\text{Inf}} (\{f_j\} \cdot \{U_2^j\}) \right)$$

où l'on note  $[H](\underline{n}_i)$  et  $\{f_j\}$  la matrice et le vecteur des seconds membres, associés à la fonction  $\pi_n(\underline{n}, \underline{U})$  et  $\{U_1^j\}$  le vecteur associé à la discontinuité de vitesse  $[[U_1^j]]$ .

En pratique, on préfère, comme dans le chapitre deux, définir le domaine  $G_\alpha^n$  des vecteurs contraintes admissibles  $\underline{I}$  sur une facette de normale  $\underline{n} = \cos\alpha \underline{e}_x + \sin\alpha \underline{e}_y$  et interpréter la fonction  $\pi_n(\underline{n}, \underline{U})$  comme étant  $\text{Sup}_{\underline{I} \in G_\alpha^n} (\underline{I} \cdot \underline{V})$ . On procède alors à la linéarisation de  $G_\alpha^n$ , qui est présentée dans l'annexe trois.

On complète alors l'approche en majorant de nouveau la puissance résistante maximale de la manière suivante :

$$(24) \quad P_{res}^{max}(\underline{U}) \leq P_{res}^{lin}(\underline{U}) = \underset{\{U\}, \{\lambda_i\}, \{\lambda_1^j\}, \{\lambda_2^j\}}{\text{Inf}} \left( \sum_{i=1}^{n_{el}} S_i \{b\} \cdot \{d_i\} + \sum_{j=1}^{n_{int}} \frac{1}{2} (\{f_j\} \cdot \{U_1^j\} + \{f_j\} \cdot \{U_2^j\}) \right)$$

sous les conditions linéaires suivantes :

$$(25) \quad \begin{cases} [C].\{\lambda_i\} = \{d_i\} \\ [H].\{\lambda_k^j\} = \{U_k^j\} \quad 1 \leq i \leq n_{el}, 1 \leq j \leq n_{int}, k=1, 2 \\ \{\lambda_i\}, \{\lambda_1^j\} \geq 0 \end{cases}$$

On forme alors le vecteur  $\{\Lambda\}$  des multiplicateurs :

$$(26) \quad \{\Lambda\} = \left( \bigoplus_{i=1, n} \{\lambda_i\} \right) \bigoplus \left( \bigoplus_{\substack{j=1, p \\ k=1, 2}} \{\lambda_k^j\} \right)$$

ainsi que le vecteur des inconnues du problème :

$$(27) \quad \{V\} = \{U\} \bigoplus \{\Lambda\}$$

On notera également que les opérateurs de dérivation spatiale et de transposition d'une matrice étant linéaires, les tenseurs  $\underline{d}_i$  (constants dans chaque élément), sont des fonctions linéaires du vecteur  $\{U\}$ .

Sous la forme précédente, il apparaît alors que l'on obtient une approche cinématique du problème initial qui conduit à la résolution d'un programme linéaire, en utilisant la majoration (24) sous les conditions linéaires (16) et (25). Ce programme linéaire peut se formuler de la manière suivante :

Minimiser	$P_{res}^{lin}(\{V\}) = \{P\}, \{\Lambda\}$
sous les contraintes :	$[S] \cdot \{V\} = \{0\}$
	$\{q\} \cdot \{U\} = 1$
	$\{\Lambda\} \geq \{0\}$

où  $[S]$  est la matrice regroupant les conditions de pertinence (d'admissibilité) du champ de vitesse.

Il est à noter que la valeur de la fonctionnelle  $P_{res}^{lin}$  obtenue, n'est égale à la puissance résistante maximale du champ de vitesse considéré que dans le cas où la substitution de l'intégrale curviligne correspondant au terme de discontinuité par la demi-somme des valeurs extrêmes n'introduit pas de différence. Ceci correspond au cas où les multiplicateurs  $\{\lambda_1^j\}$  et  $\{\lambda_2^j\}$  sont colinéaires, ce qui est très souvent vérifié dans la pratique.

## 2.3 La modélisation mixte

On s'intéresse maintenant au cas de la modélisation mixte, en décrivant les modifications à apporter dans la formulation numérique de l'approche cinématique. Elles tiennent en deux points principaux : l'ajout de variables cinématiques pour définir le champ mixte de vitesse, et le calcul de la puissance résistante maximale du système.

### 2.3.1 Champ de vitesse dans les armatures

On complète la description cinématique par la donnée du champ de vitesse virtuel des armatures. Le critère de résistance adopté ne portant que sur l'effort normal, on n'attribue pas de rotation de la microstructure aux éléments d'armatures (on se restreint à un modèle "fil").

Le champ de vitesse virtuel adopté est linéaire par morceaux, le long de chaque armature, avec la possibilité de discontinuités de vitesse entre deux éléments linéiques. On obtient donc dans l'élément linéique reliant les nœuds  $i$  et  $j$  d'abscisses curvilignes  $s_i$  et  $s_j$ , l'expression suivante du champ de vitesse :

$$(28) \quad \{U_A\} = \frac{s-s_i}{s_j-s_i} \{U_i\} + \frac{s-s_j}{s_j-s_i} \{U_j\}$$

où  $\{U_i\}$  et  $\{U_j\}$  sont les vitesses aux nœuds  $i$  et  $j$  et  $\{U_A\} = \{U_x(s), U_y(s)\}$ .

Il est à noter que la formulation adoptée permet de prendre en compte d'éventuelles discontinuités de vitesse entre le béton et les armatures, et de pouvoir ainsi considérer un critère de résistance de l'interface. On se limite ici au cas d'interfaces parfaitement adhérentes entre les armatures et le béton, ce qui revient à considérer comme critère d'interface le critère de résistance du béton.

On forme ensuite le nouveau vecteur  $\{U\}$  définissant le champ mixte de vitesse :

$$(29) \quad \{U\} = \left( \bigoplus_{i=1, n} \{u_i\} \right) \bigoplus \left( \bigoplus_{j=1, p} \{U_j\} \right)$$

### 2.3.2 Evaluation de la puissance résistante maximale

Dans le cas du domaine de résistance adopté pour les armatures (voir chapitre deux), le critère de résistance est déjà défini par des conditions linéaires. On adopte donc la même procédure que dans le cas du matériau homogène pour obtenir une formulation linéaire du terme de la puissance résistante maximale provenant des armatures.

La fonction  $\pi_A$  est alors donnée par la formule suivante (on note  $\{t\}$  le vecteur unitaire tangent à l'armature) :

$$(30) \quad \begin{aligned} \pi_A (\{t\}; \frac{d\{U_A\}}{ds}) &= \text{Sup} \{ 0 ; N_0 \{t\} \cdot \frac{d\{U_A\}}{ds} \} \\ &= \text{Inf}_{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0} \{ N_0 \lambda_1 / \{t\} \cdot \frac{d\{U_A\}}{ds} = \lambda_1 - \lambda_2 \} \end{aligned}$$

Pour le type d'éléments linéiques adoptés (variation linéaire de la vitesse dans l'élément), on évalue la puissance résistante maximale correspondant à un élément situé entre les nœuds  $i$  et  $j$  (le terme correspondant à une discontinuité de vitesse se calcule de façon analogue) :

$$(31) \quad \begin{aligned} P_{res}^{lin} &= \int_{s_i}^{s_j} \pi_A (\{t\}; \frac{d\{U_A\}}{ds}) ds = \int_{s_i}^{s_j} \text{Sup} \{ 0 ; N_0 \{t\} \cdot \frac{1}{s_j - s_i} (\{U_j\} - \{U_i\}) \} ds \\ &= \text{Inf}_{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0} \{ N_0 \lambda_1 / \{t\} \cdot (\{U_j\} - \{U_i\}) = \lambda_1 - \lambda_2 \} \end{aligned}$$

Dans la formulation du problème, il suffit alors d'ajouter les contributions des armatures à la puissance résistante maximale, ainsi que celles correspondant aux discontinuités de vitesse entre le béton et les armatures (ces discontinuités sont prises en compte de la même manière que des discontinuités de vitesse dans le béton). Le problème conserve donc la forme d'un programme linéaire.

### 3. Résolution

#### 3.1 L'algorithme de résolution

Les programmes linéaires que l'on obtient sont résolus grâce au code industriel d'optimisation, XPRESS (Dash Associates, 1984-1995). L'algorithme employé par ce code est une variante de l'algorithme du simplexe inventé par Dantzig dans les années quarante. On trouvera une présentation détaillée des techniques de programmation linéaire ainsi que de l'algorithme du simplexe dans (Minoux, 1983). On donne brièvement dans ce paragraphe une idée intuitive du fonctionnement de l'algorithme du simplexe.

Soit à minimiser la fonction  $z = \underline{c} \cdot \underline{x}$  sous les conditions linéaires  $[A] \cdot \underline{x} \leq \underline{b}$

Dans l'espace des  $\underline{x}$ , l'inégalité  $[A] \cdot \underline{x} \leq \underline{b}$  définit un domaine convexe  $P$ , délimité par des plans, appelé polytope ou polyèdre (éventuellement vide, ou non borné).

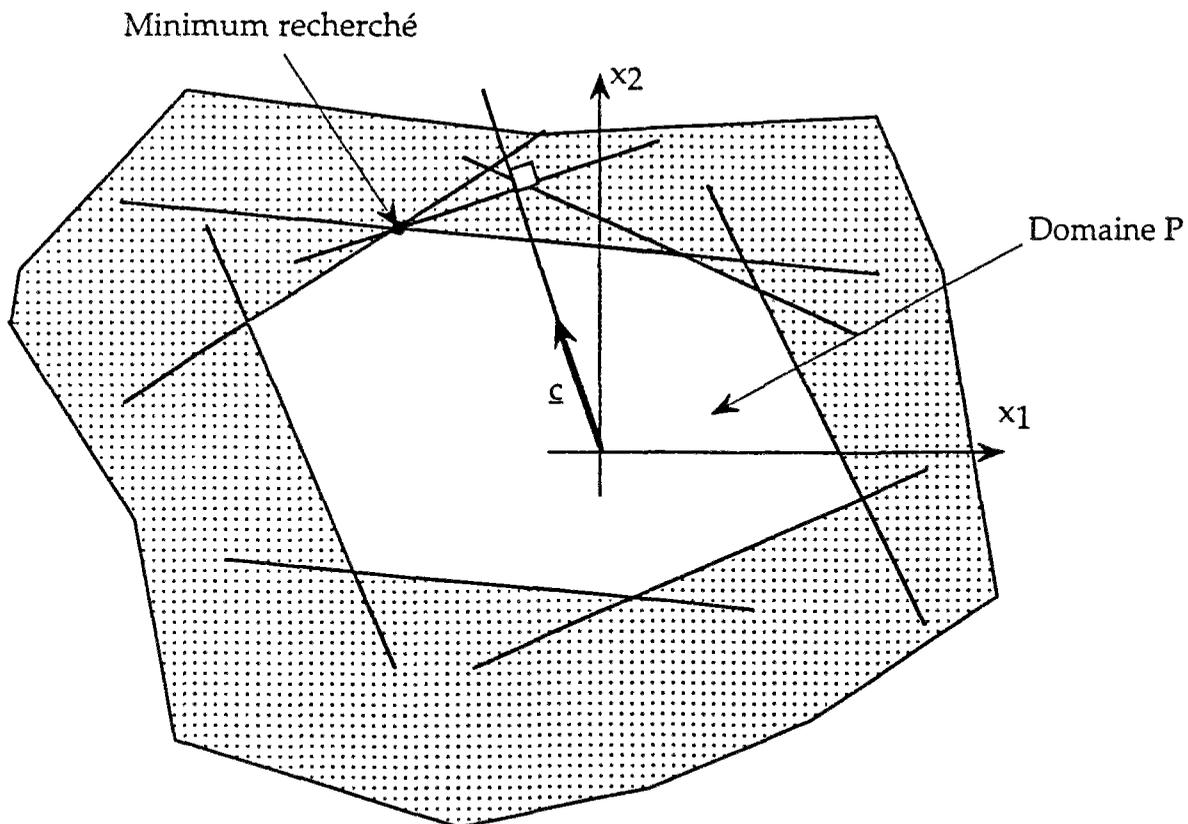


Figure 4 -5 Principe de l'algorithme du simplexe (dans  $\mathbb{R}^2$ )

Le minimum de la fonction linéaire  $z$ , s'il est atteint, ne peut pas l'être dans l'intérieur de  $P$ , car  $z$  étant une fonction régulière, son gradient serait nul, ce qui est impossible. On montre de

manière algébrique, que le minimum de la fonction  $z$  ne peut en fait être atteint qu'en les points extrêmes (ou sommets) du polytope  $P$  (voir la figure 4 -5). L'algorithme du simplexe consiste à rechercher un sommet du polytope (si ce dernier est non vide) de manière algébrique, puis à décrire une suite de sommets en atteignant à chaque itération une valeur inférieure pour  $z$ . On démontre alors que le simplexe converge en un nombre fini d'itérations.

En pratique, la résolution des programmes linéaires amène souvent à considérer le programme dual du programme initial, appelé primal. Ceci a pour but de réduire le temps de calcul, car il a été observé qu'il est préférable d'avoir des matrices de contraintes possédant plus de colonnes que de lignes. On applique donc généralement cette technique de dualisation du problème dans l'approche statique.

## Conclusion

Les deux méthodes numériques présentées permettent la mise en œuvre des approches statique et cinématique du calcul à la rupture dans le cadre de la modélisation mixte, et pour un critère de résistance homogénéisé. Nous allons donc pouvoir reprendre l'étude du problème de l'influence de l'effort tranchant sur la résistance des poutres au moyen de cet outil. Ce sera l'occasion de comparer les résultats du chapitre précédent avec une approche plus complète du problème, puis de nous livrer à la validation de notre modèle, grâce à la comparaison avec des résultats expérimentaux. Cette partie fait l'objet du chapitre suivant.

## **Chapitre 5**

### **Exemples d'applications**

#### **Validation et limitations de l'approche**

## Introduction

Après avoir montré dans les chapitres précédents comment le dimensionnement des structures en béton armé pouvait s'effectuer au moyen du calcul à la rupture, de manière analytique puis au moyen d'une mise en œuvre numérique, on va dans ce chapitre présenter des exemples d'application. On s'intéresse ici encore au dimensionnement des poutres en présence d'effort tranchant. Ce problème complexe est abordé tout d'abord par une étude paramétrique montrant l'influence des paramètres fondamentaux mis en évidence dans le premier chapitre (élancement, taux de renforcement longitudinal et transversal...) sur la résistance des poutres à l'effort tranchant. Dans cette partie, on s'interroge de nouveau sur l'importance des effets d'échelle, et sur la justification de l'utilisation de la théorie de l'homogénéisation pour modéliser les zones renforcées par armatures transversales.

Dans une seconde partie, on mène une comparaison avec les résultats expérimentaux rapportés par divers auteurs. Les écarts constatés entre les résultats d'essais et les calculs effectués nous amènent à définir des valeurs "efficaces" pour les paramètres de résistance des matériaux à introduire dans le calcul. Ainsi, on montre dans un premier temps que le fait de choisir pour la modélisation du béton une résistance à la traction très faible, permet de retrouver les résultats obtenus par Kani concernant la diminution de la capacité de flexion due à l'effort tranchant, pour des poutres sans renforcement transversal. Dans une seconde section, on compare les valeurs théoriques calculées avec des essais expérimentaux de (Smith et Vansiotis, 1982). On montre que l'on obtient un accord satisfaisant en adoptant un coefficient de réduction pour la résistance à la compression du béton. On conclut cette partie par une discussion sur la légitimité de l'application de la théorie du calcul à la rupture au dimensionnement de ce type de structures, compte tenu du caractère partiellement fragile du matériau béton.

# 1. Étude de la poutre en flexion quatre points, sans renforcement transversal

## 1.1 Position du problème

On reprend dans cette partie l'étude de la résistance d'une poutre en flexion quatre points, abordée dans le chapitre trois. On considère une poutre rectangulaire (de hauteur  $h$  et de longueur  $l$ ) constituée d'un béton homogène de résistance en compression  $\sigma_c$  et en traction  $T$  (angle de frottement interne  $\varphi=37^\circ$ ). Cette poutre (voir la figure 5 - 1) modélisée en **contrainte plane** est renforcée par une armature horizontale de résistance à la traction  $N_0$  par unité de longueur transversale à la figure (la résistance à la compression de l'armature est ici supposée nulle), située à une distance  $d$  de la face supérieure de la poutre. L'adhérence entre le béton et l'armature est considérée comme **totale**. Ne pouvant modéliser de charge ponctuelle dans l'approche statique du calcul à la rupture, on convient de définir le chargement de la structure par le biais d'une pression  $p$  uniforme appliquée sur les deux intervalles de longueur  $s$  placés de part et d'autre de l'axe de symétrie de la figure 5 - 1. La relation entre la pression  $p$  et la charge totale appliquée  $P$  est alors donnée par :

$$(1) \quad P = p s$$

Les appuis sont choisis de même largeur que la zone d'application du chargement.

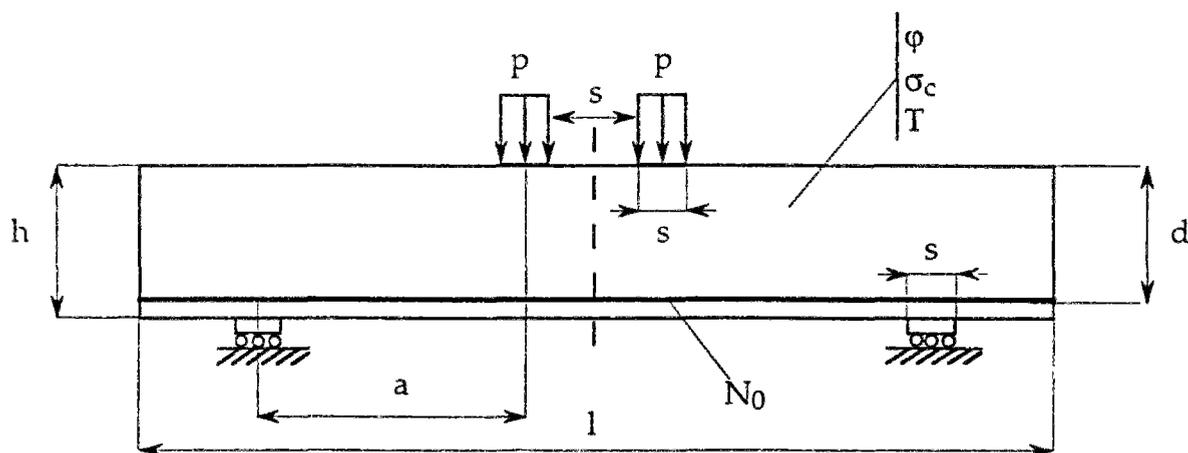


Figure 5 - 1 Géométrie du problème

Il est à noter que la valeur du paramètre  $s$  (dimension des appuis et des zones d'application du chargement) est suffisante pour que la rupture de la structure ne survienne pas par poinçonnement. De plus, on a prévu une longueur d'ancrage importante pour l'armature longitudinale (longueur supplémentaire de l'armature située au delà des appuis) de manière à éviter les modes de rupture par perte d'adhérence de celle-ci.

On introduit alors les paramètres adimensionnels suivants dont on va dégager l'influence sur la valeur de la charge extrême :

- $\rho = \frac{a}{h}$  paramètre d'élanement de la poutre,
- $\Phi = \frac{N_0}{d\sigma_c}$  taux de renforcement longitudinal de la poutre.

## 1.2 Résultats

On présente sur la figure 5 - 2 les résultats obtenus par des calculs par éléments finis (pour des raisons de symétrie, les calculs ne sont effectués que sur la moitié de la structure, en adoptant des conditions aux limites adéquates sur l'axe de symétrie : déplacement horizontal bloqué et cission nulle), pour l'approche statique ainsi que pour l'approche cinématique. Les calculs sont effectués pour les valeurs numériques suivantes :

- $\sigma_c = 20 \text{ MPa}$  ;  $T = 1 \text{ MPa}$  ;  $\varphi = 37^\circ$ .
- $h=0,55 \text{ m}$ ,  $d= 0,50 \text{ m}$  et  $s= 0,20 \text{ m}$ .

Sur la figure 5 - 2, sont représentées les valeurs des pressions  $p$  extrêmes calculées par les approches statiques et cinématiques, en fonction de deux paramètres : le taux de renforcement longitudinal  $\Phi$  et l'élanement  $\rho = a/h$ .

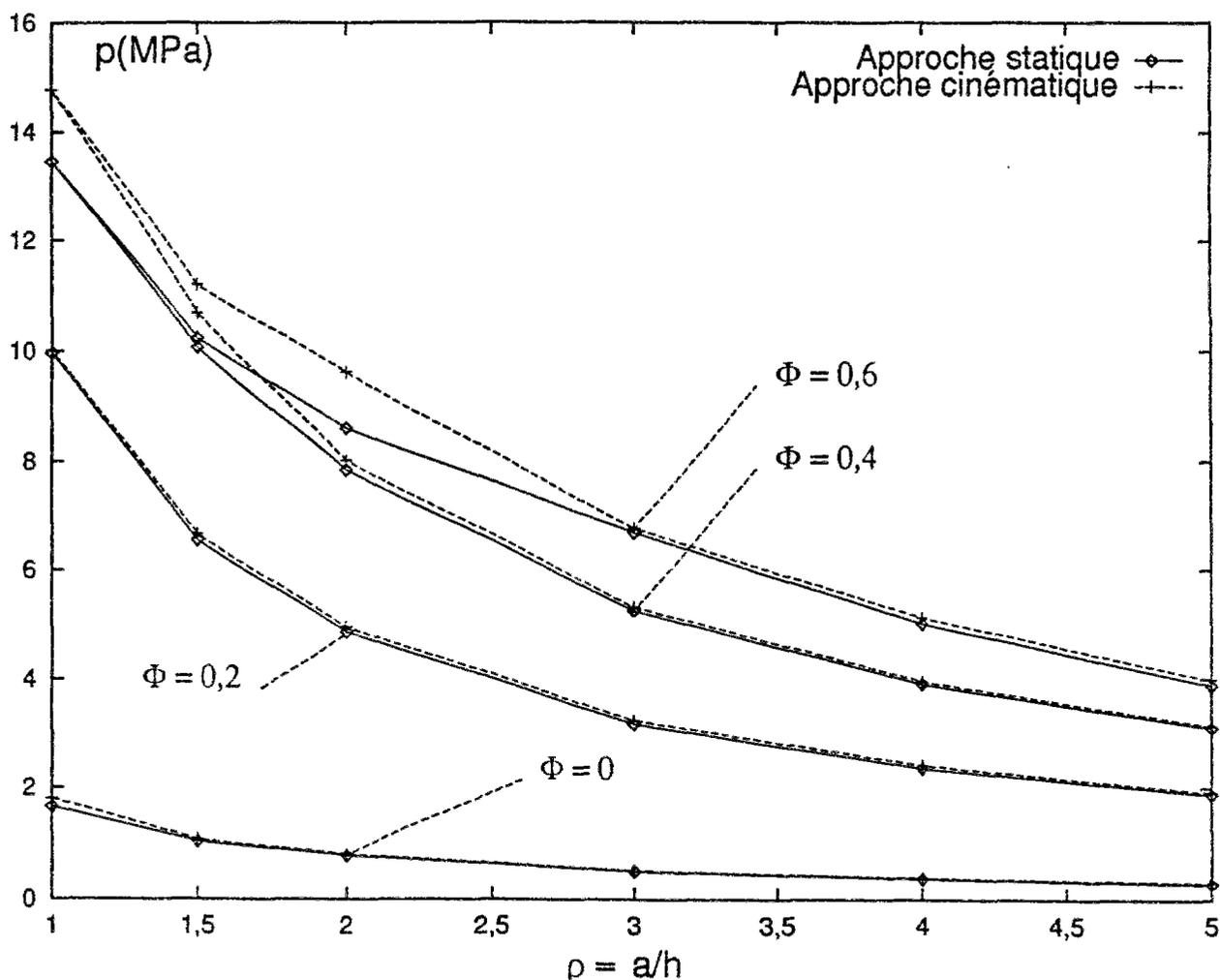


Figure 5 - 2 Résultats et comparaison des approches statique et cinématique

#### Commentaires

- On remarque tout d'abord que dans l'ensemble, l'écart entre les approches statique et cinématique est faible (il est toujours inférieur à 9%). Il convient même de noter que celui-ci est presque nul pour des valeurs de l'élanement supérieures à trois, et n'augmente significativement que pour les courbes correspondant à  $\Phi=0,4$  et  $\Phi=0,6$  et pour de faibles élanements ( $\rho \leq 3$ ). Ceci est dû, comme on le verra dans la suite, au mode de rupture observé, le cas le plus défavorable correspondant à des ruptures "localisées", donc peu faciles à reproduire numériquement.
- On remarque également que le taux de renforcement longitudinal a une influence très importante sur la valeur de la charge extrême obtenue. Néanmoins, pour des élanements faibles, on observe que la charge extrême calculée (tant dans l'approche statique que cinématique) n'augmente quasiment plus entre  $\Phi = 0,4$  et  $\Phi = 0,6$ .

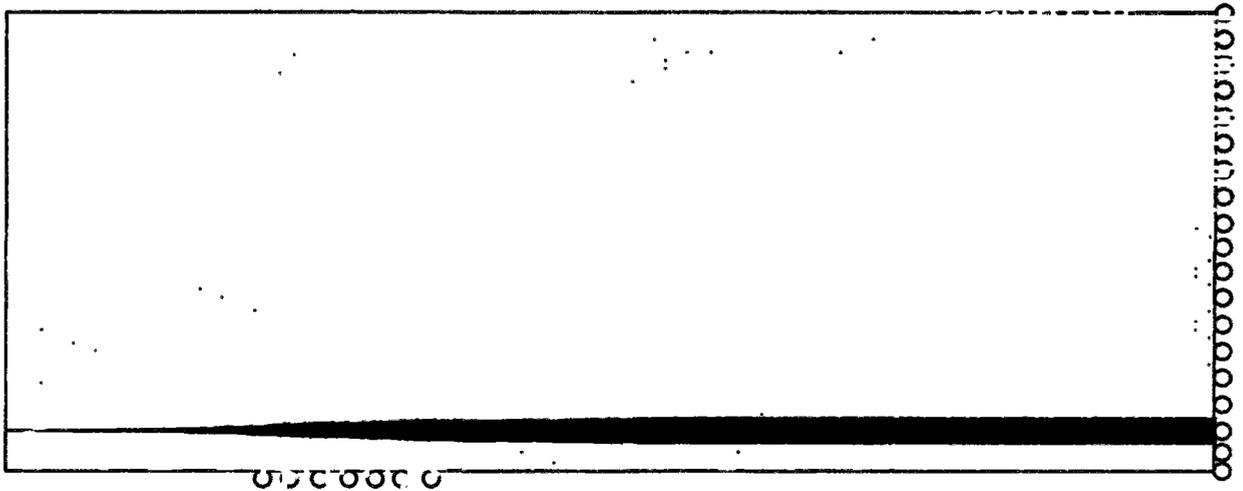


Figure 5 - 3 Approche statique :  $\rho = 1,5$  ;  $\Phi = 0,4$

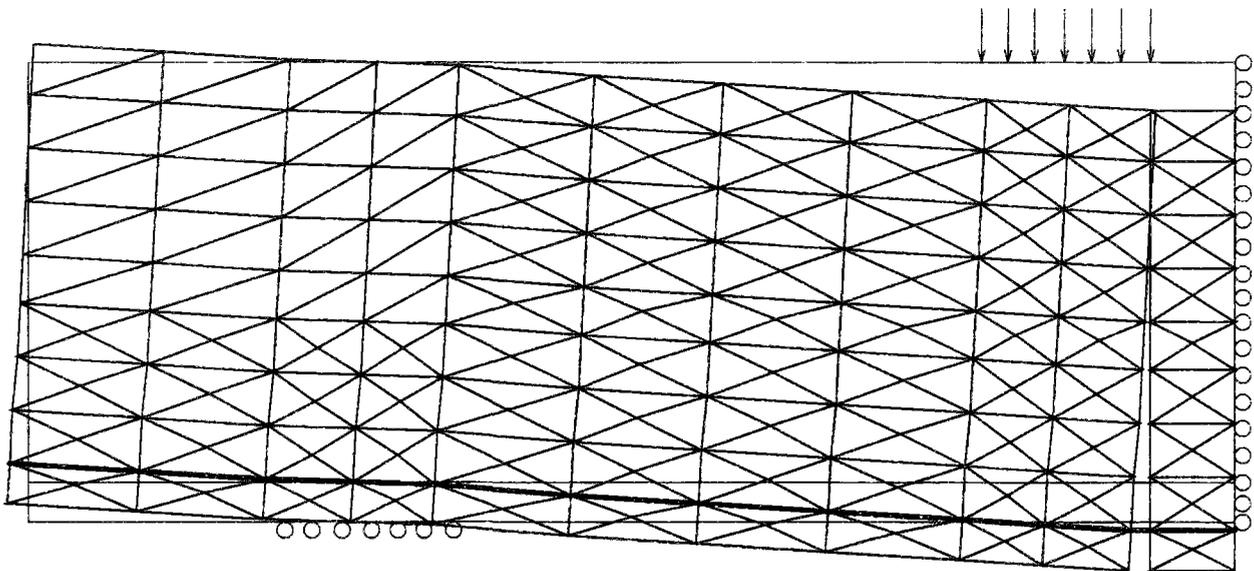


Figure 5 - 4 Approche cinématique (rupture en flexion)  $\rho = 1,5$  ;  $\Phi = 0,2$



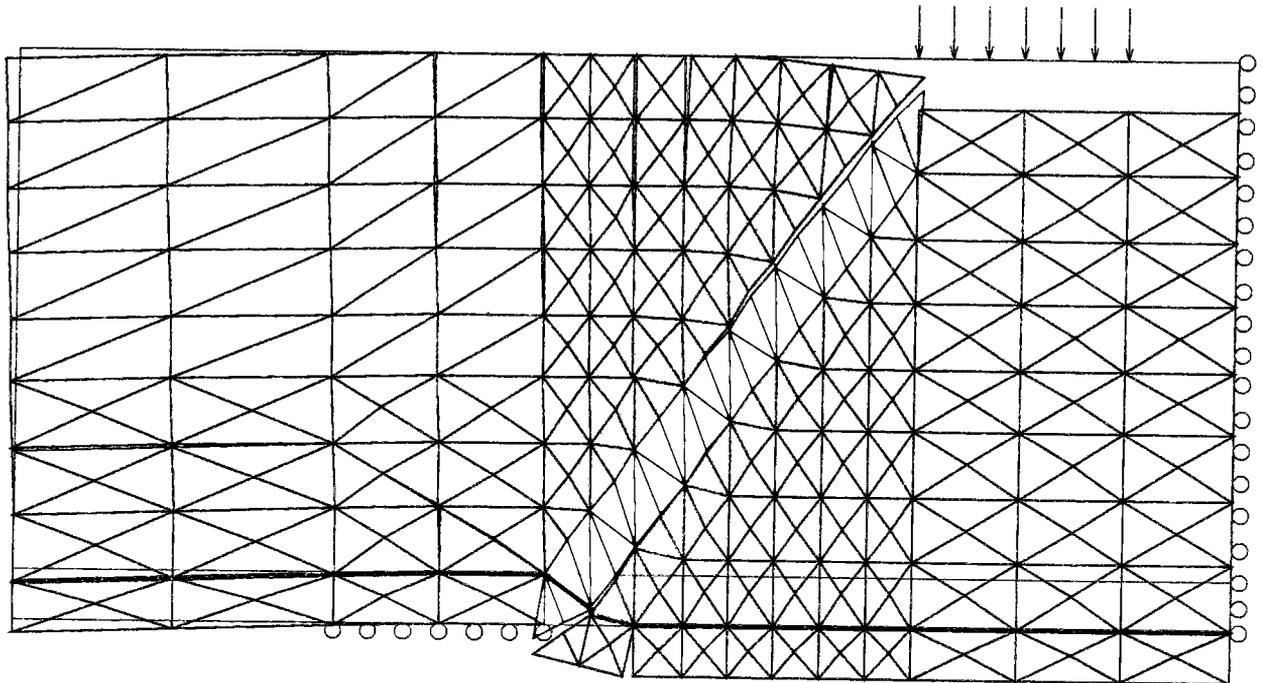


Figure 5 - 5 Approche cinématique (mécanisme de type "effort tranchant")  $\rho = 1$  ;  $\Phi = 0,5$

Afin de comparer les résultats obtenus par l'approche de type milieu curviligne présentée dans le chapitre trois et les valeurs calculées grâce à une modélisation bidimensionnelle de la structure, on représente sur la figure 5 - 6, les charges extrêmes données par l'approche statique, rapportées aux charges de ruine évaluées grâce au critère de flexion établi au chapitre trois. Pour reprendre la présentation des résultats proposée par Kani (voir le premier chapitre), on choisit de manière équivalente de représenter le rapport  $\frac{M_{st}}{M_R}$  entre le moment extrême au droit des charges (calculé par la relation  $M_{st} = a s p_{st}$ ) obtenu par l'approche par éléments finis, et la résistance à la flexion  $M_R$  calculée au chapitre trois. Dans ce dernier cas et compte tenu des conditions aux limites, l'effort normal est nul dans la poutre, si bien que l'on peut aisément calculer la valeur de  $M_R$  en fonction du taux de renforcement. En se servant de la formule (29) du chapitre trois, il vient :

$$(2) \quad M_R = \Phi \sigma_c d \left( d - \frac{d\Phi\sigma_c + h T}{2(\sigma_c + T)} \right) + T \frac{h}{2} \left( h - \frac{d\Phi\sigma_c + h T}{\sigma_c + T} \right) \text{ pour } \Phi \leq 1$$



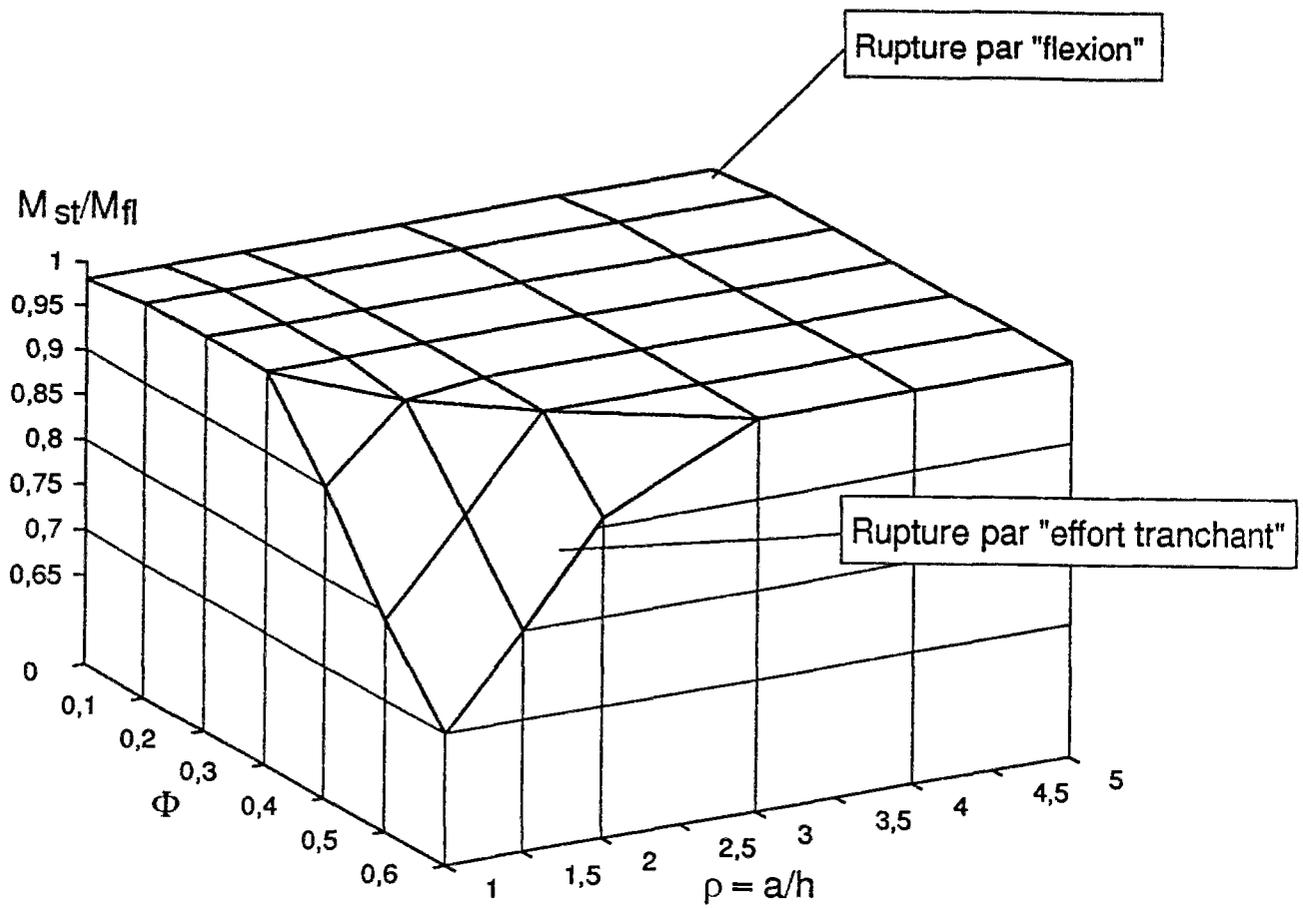


Figure 5 - 6 Comparaison approche milieu curviligne - approche directe

#### Commentaires

- On observe que la théorie des milieux curvilignes donne dans la majorité des cas, une très bonne approximation de la charge extrême ( $M_{st} / M_{fl}=1$ ). Cependant, pour des valeurs faibles de l'élanement ("poutres épaisses"), et un taux de renforcement longitudinal important, on observe que le rapport entre la charge calculée par éléments finis et la charge calculée par la théorie des milieux curvilignes décroît. On notera d'ailleurs que la valeur du moment fléchissant calculé au moyen de la théorie des milieux curvilignes représente une borne supérieure des moments calculés par une analyse bidimensionnelle du problème. Ceci justifie a posteriori le terme de réduction de la capacité de flexion, qui est souvent employé pour décrire l'influence de l'effort tranchant.
- On représente également les champs de contrainte obtenus (figure 5 - 3), les contraintes de compression étant dessinées en rouge et les tractions en noir. L'épaisseur du trait noir figurant l'armature est proportionnelle à l'effort de tension au point considéré. On notera

que le modèle des bielles et des tirants représente ici une bonne approximation des champs optimaux obtenus. On remarquera également l'influence de la zone d'ancrage de l'armature, où s'effectue une partie du transfert des efforts du béton vers les armatures (augmentation de la tension dans l'armature).

- Au vu des mécanismes de ruine obtenus par le calcul, on peut interpréter les résultats précédents. Dans la majorité des cas, la poutre rompt selon un mécanisme de type "flexion" (figure 5 - 4), où la rupture intervient dans une zone très localisée, au droit des points d'application des charges ("rotules").
- Dans le domaine des faibles élancements, et pour des poutres dont le renforcement longitudinal atteint des valeurs moyennes, apparaît un deuxième type de mode de rupture (figure 5 - 5). Il correspond à une rupture de type "effort tranchant", où les déformations sont localisées dans une bande de "cisaillement" (les isocouleurs représentent la valeur de la fonction  $\pi_b$  dans l'élément). On remarque également que l'élancement minimum à partir duquel ce type de rupture intervient est d'autant plus grand que le renforcement est important. Ceci s'interprète naturellement en notant qu'en augmentant le taux de renforcement de la section, on augmente le moment ultime, si bien que l'on "favorise" plutôt une rupture par "effort tranchant".
- On observe également que le type de mécanisme de ruine obtenu ne sollicite pas l'armature longitudinale (l'invariance de la charge extrême par rapport à ce paramètre est visible sur la figure 5 - 2). Ceci est dû au fait que dans la modélisation, les capacités de résistance des armatures, on néglige toute résistance des armatures à l'effort tranchant (effet de "goujon").

### Conclusion :

La méthode numérique proposée a permis de mettre en évidence deux modes de rupture des poutres. Un premier mécanisme de rupture par flexion, qui intervient majoritairement pour des poutres faiblement renforcées longitudinalement, ou dont l'élancement est élevé. Pour des poutres plus épaisses, on observe plutôt un deuxième type de mécanisme de ruine, qui peut s'interpréter comme un mécanisme d'effort tranchant. Le modèle proposé permet donc de déterminer les valeurs du renforcement longitudinal ainsi que de l'élancement pour lesquelles apparaît une réduction de la capacité de flexion de la poutre, due à l'effort tranchant.

C'est donc dans ce domaine de valeurs qu'apparaît la nécessité de disposer des armatures transversales visant à réduire l'influence de l'effort tranchant sur les charges de ruine.

## 2. Influence de la présence d'armatures transversales sur le comportement à la rupture des poutres

### 2.1 Effet d'échelle

On se propose dans la suite d'étudier l'influence des armatures transversales sur le comportement à la ruine des poutres. Comme on l'a montré dans le chapitre deux, on peut choisir deux types de modélisations pour rendre compte des armatures transversales. Soit les discrétiser grâce à la modélisation mixte (de la même manière que les armatures longitudinales), soit adopter un critère homogénéisé pour le matériau "béton renforcé transversalement". Cependant, dès lors qu'on adopte un comportement homogénéisé, se pose la question de l'effet d'échelle, c'est-à-dire de l'erreur commise sur les valeurs des charges extrêmes en substituant le problème homogénéisé au problème initial. Cette question est en effet d'une très grande importance pratique, et elle sous-tend la validité de la démarche d'homogénéisation.

Afin de déterminer pour quel domaine des paramètres d'échelle la théorie de l'homogénéisation constitue une approximation correcte du problème initial, on se propose d'étudier un exemple sur une géométrie fixée, en comparant les résultats numériques obtenus grâce à une modélisation mixte des armatures **longitudinales et transversales** avec le choix d'une modélisation par homogénéisation des zones renforcées par armatures transversales.

Pour ce faire, on considère le problème décrit sur la figure 5 - 7. On reprend les mêmes paramètres de résistance des matériaux que dans la section précédente, en fixant deux couples de valeurs pour le taux de renforcement longitudinal  $\Phi$  et l'élancement  $\rho$  (respectivement  $\Phi = 0,5$  et  $\rho = 1,0$  pour la figure 5 - 8 puis  $\Phi = 0,6$  et  $\rho = 2,0$  pour la figure 5 - 9). Ces valeurs correspondent dans le diagramme de la figure 5 - 6 à des mécanismes de ruine par "effort tranchant".

Pour des raisons pratiques de convergence de l'algorithme et de limitation des temps de calcul nécessaires pour effectuer cette étude, on ne disposera les armatures transversales (dans le cas de la modélisation mixte de ces dernières) que dans la zone comprise entre la charge et l'appui. Ceci est partiellement justifié par le fait que, pour les valeurs de l'élancement et du renforcement longitudinal considérées, le mécanisme de ruine obtenu en l'absence de renforcement transversal était de type "effort tranchant". Ceci sera justifié a posteriori par les résultats obtenus.

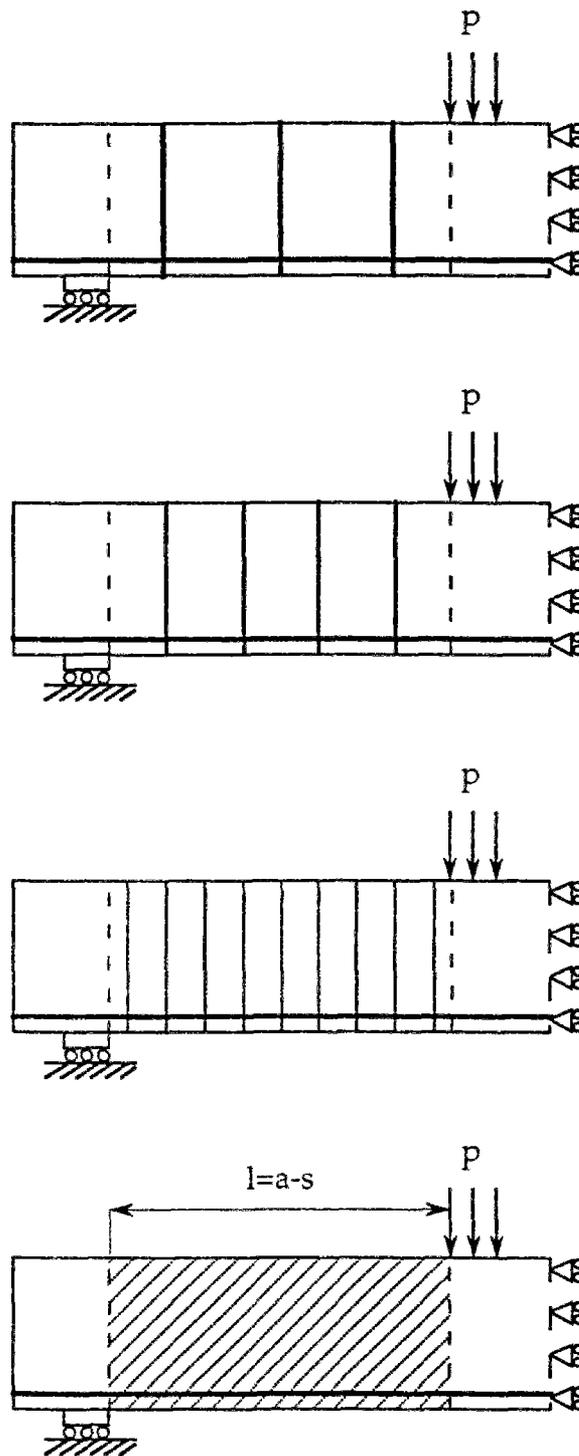


Figure 5 - 7 Analyse de l'effet d'échelle

Dans les calculs présentés, afin de pouvoir comparer les calculs en modélisation mixte avec un modèle homogénéisé, on choisira pour les armatures transversales, une résistance à la traction dont la valeur dépend du nombre d'armatures disposées. En notant  $l=a-s$  la longueur de la zone où sont réparties les armatures transversales (voir figure 5 - 7), et  $\sigma_0$  la résistance à la traction (dans la direction

$\epsilon_y$ ) induite par les armatures transversales dans la procédure d'homogénéisation (voir chapitre deux),  $n$  le nombre d'armatures transversales,  $N_t$  leur résistance à la traction par unité de longueur transversale, on a :

$$(3) \quad N_t = \frac{\sigma_0 l}{n}$$

Dans le chapitre deux, on avait vu que la rapidité de la convergence dépendait en grande partie du taux de résistance induit par les armatures. On va donc représenter l'évolution de la charge extrême obtenue par l'approche cinématique en fonction du renforcement transversal induit  $\sigma_0$ .

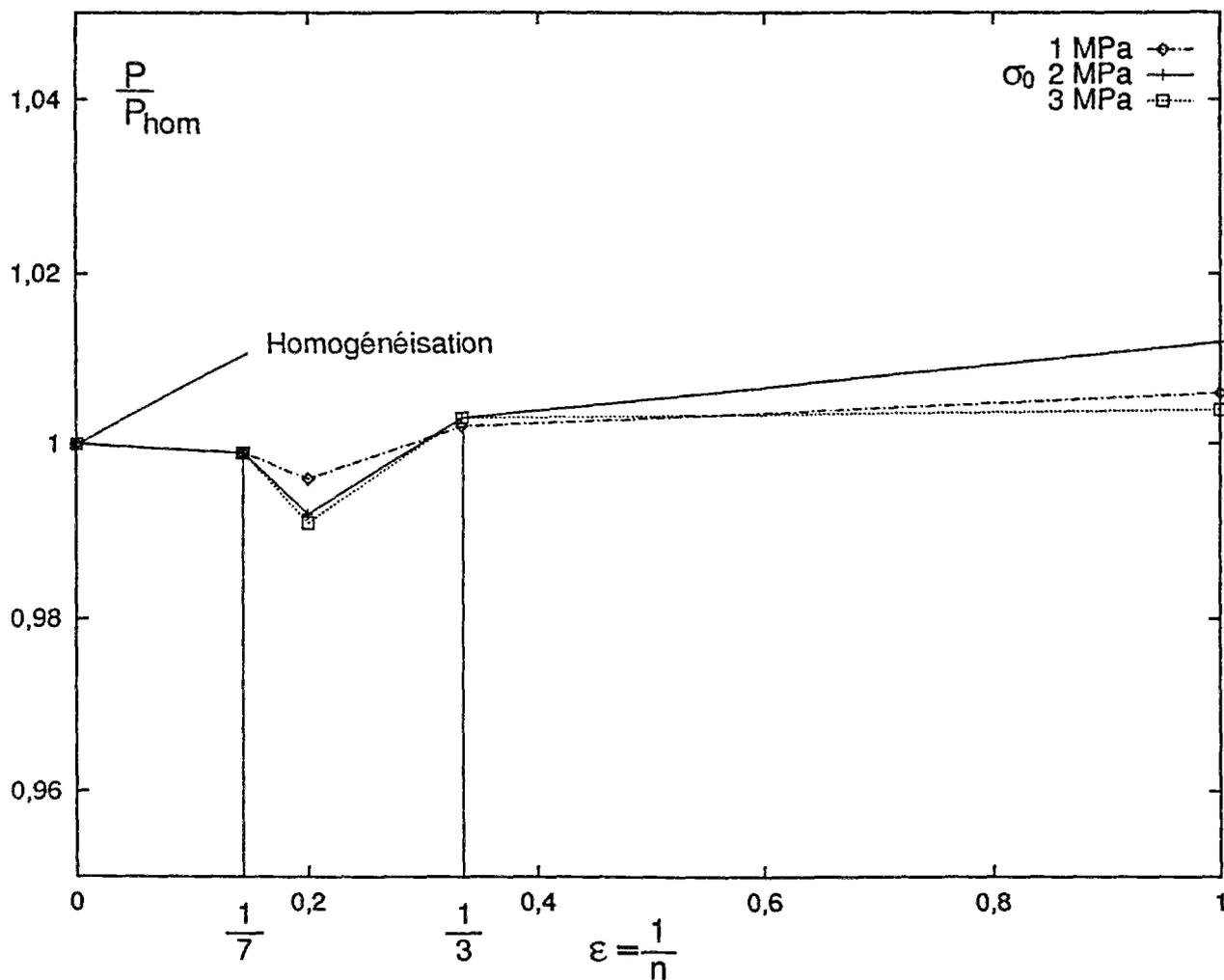


Figure 5 - 8 Comparaison modélisation mixte-homogénéisation :  $\rho = 1$ ,  $\Phi = 0,5$

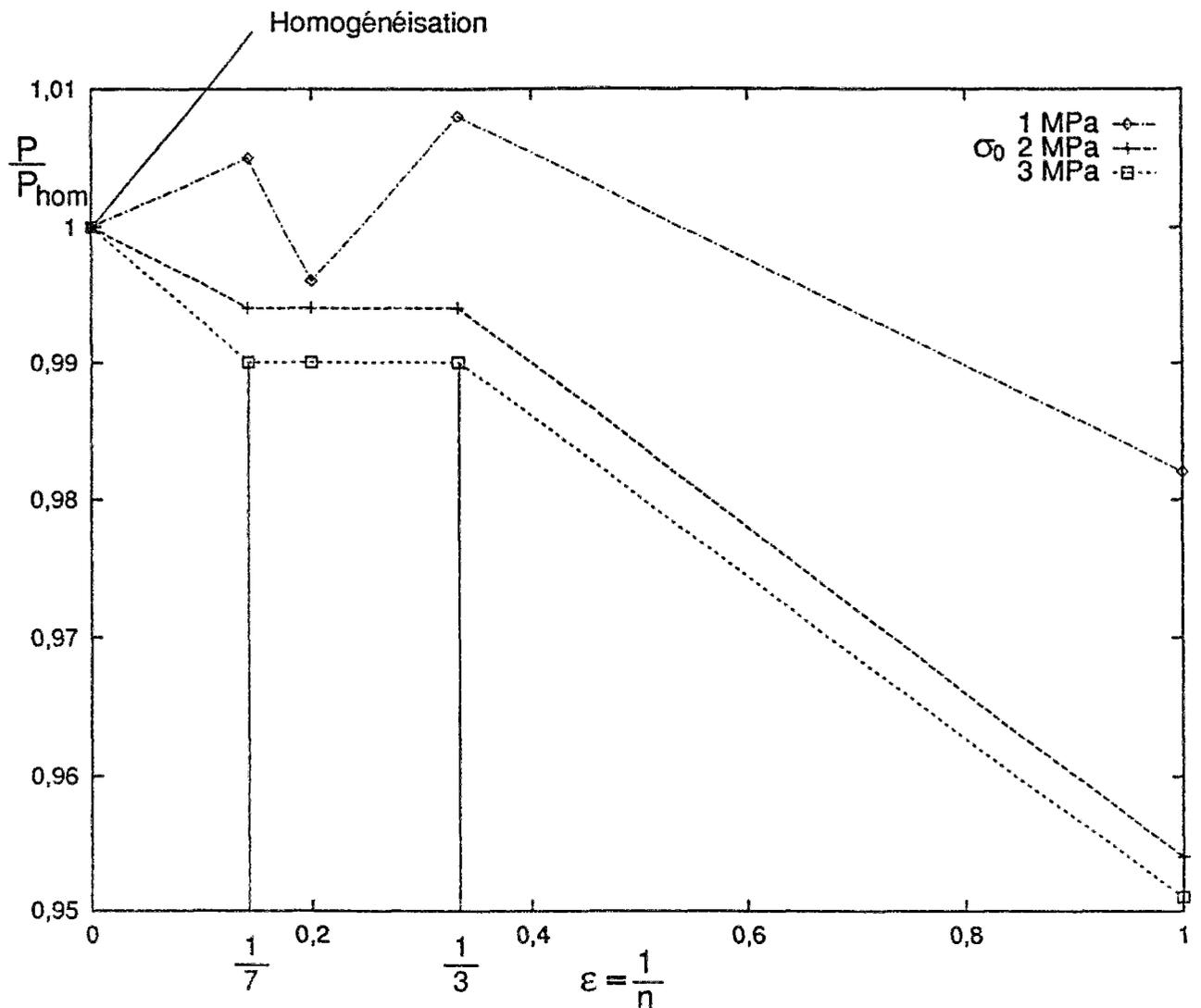


Figure 5 - 9 Comparaison modélisation mixte-homogénéisation :  $\rho = 2$ ,  $\Phi = 0,6$

#### Commentaires

- A la vue des graphiques 5 - 8 et 5 - 9, où l'on rapporte les charges calculées par la modélisation mixte à la valeur obtenue par la procédure d'homogénéisation (représentée avec la valeur  $\varepsilon=0$ ), on constate que les résultats fournis par la méthode d'homogénéisation sont en très bon accord avec les résultats obtenus par une modélisation discrète des armatures transversales, et l'on observe effectivement la convergence. En effet, l'écart de calcul entre ces valeurs est de l'ordre de quelques pour cents, même pour des nombres très réduits d'armatures.
- Dans le premier cas (figure 5 - 8), on constate que la convergence n'est pas monotone. En effet, il s'avère plus efficace de positionner la totalité du renforcement transversal à égale distance de la charge et de l'appui ( $\varepsilon=1$ ), que de le distribuer sur toute la longueur.

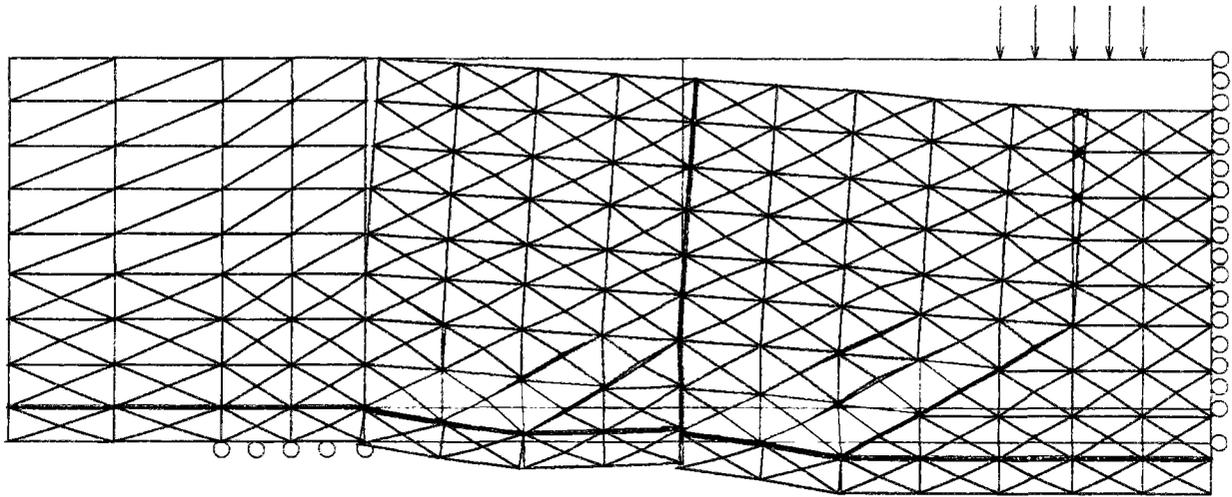


Figure 5 - 10 Mécanisme de rupture (une armature transversale)

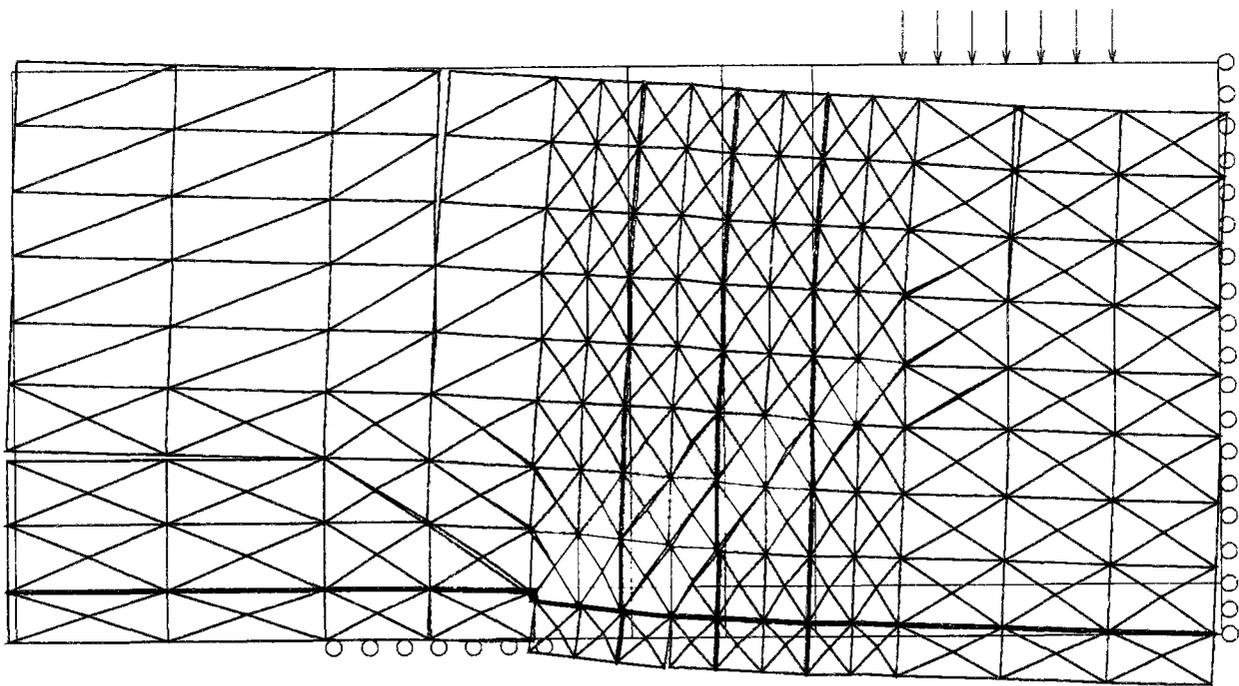


Figure 5 - 11 Mécanisme de rupture (trois armatures transversales)



- On remarque également que, contrairement à l'exemple traité au chapitre deux, on n'observe pratiquement pas de dépendance de la rapidité de convergence avec les valeurs du renforcement transversal choisies. Ceci est sûrement dû au fait que les taux de renforcement restent faibles. Néanmoins, il est à noter que ces valeurs correspondent à des taux de renforcement communément utilisés dans la pratique (les taux de renforcement transversal dépassent rarement 1%). A titre d'exemple, la norme BAEL 91 préconise simplement  $\sigma_0 \geq 0,4 \text{ MPa}$ .
- Dans le second exemple traité (figure 5 - 9), on remarque cette fois une différence plus sensible (bien que l'écart reste toujours inférieur à 5 %) entre le calcul homogénéisé, et le cas où l'on ne dispose qu'une seule armature transversale placée à égale distance de la charge et de l'appui, ce dernier se révélant ici défavorable. Ceci s'interprète en observant le mécanisme optimal obtenu (figure 5 - 10). On remarque l'existence de deux zones de déformation localisée, à droite de l'appui et de l'armature transversale. D'une certaine manière, dans ce mécanisme, les zones de déformation tentent "d'éviter" l'armature située en milieu de travée. En revanche dans les autres mécanismes observés (figure 5 - 11), les armatures transversales sont toutes sollicitées en traction.
- Dans le cas précédent (figure 5 - 10), on remarque que la distance entre cette armature et l'appui est alors de l'ordre de grandeur de la hauteur de la poutre. On rapportera cette valeur avec l'écartement maximum  $s_t$  entre armatures transversales recommandé par le BAEL 91 :

$$s_t \leq \text{Sup} (0,4 \text{ m} ; 0,9 d)$$

Dans nos calculs, cet espacement correspond également à la valeur à partir de laquelle on commence à noter une différence sensible entre homogénéisation et modélisation discrète.

## Conclusion

Les résultats numériques obtenus justifient a posteriori l'emploi de l'homogénéisation pour décrire les zones renforcées par armatures transversales. D'une manière générale, on peut observer une bonne adéquation entre les calculs effectués avec l'homogénéisation, et avec une description discrète des armatures. Ceci reste vrai tant que l'espacement des armatures transversales reste inférieur à une distance égale approximativement à la hauteur de la poutre. Dans le cas contraire, il est préférable d'adopter une description discrète des armatures employées.

## 2.2 Rôle de renforcement des armatures transversales

Ayant justifié dans le paragraphe précédent l'emploi de la théorie de l'homogénéisation pour modéliser les armatures transversales, on va maintenant s'intéresser à l'influence de celles-ci sur les charges extrêmes calculées, ainsi que sur les modes de rupture observés.

Pour ce faire, on considère un nouvel exemple dans lequel on fixe le taux de renforcement longitudinal à une valeur de  $\Phi=0,6$ . On représente les valeurs obtenues dans l'approche statique en fonction de l'élanement et du renforcement transversal, la résistance à la traction des armatures rapportée à l'unité d'aire transversale (voir le chapitre deux) étant notée ici  $\sigma_0$ . Le cas de référence de la poutre sans renforcement transversal est obtenu pour  $\sigma_0 = 0$ .

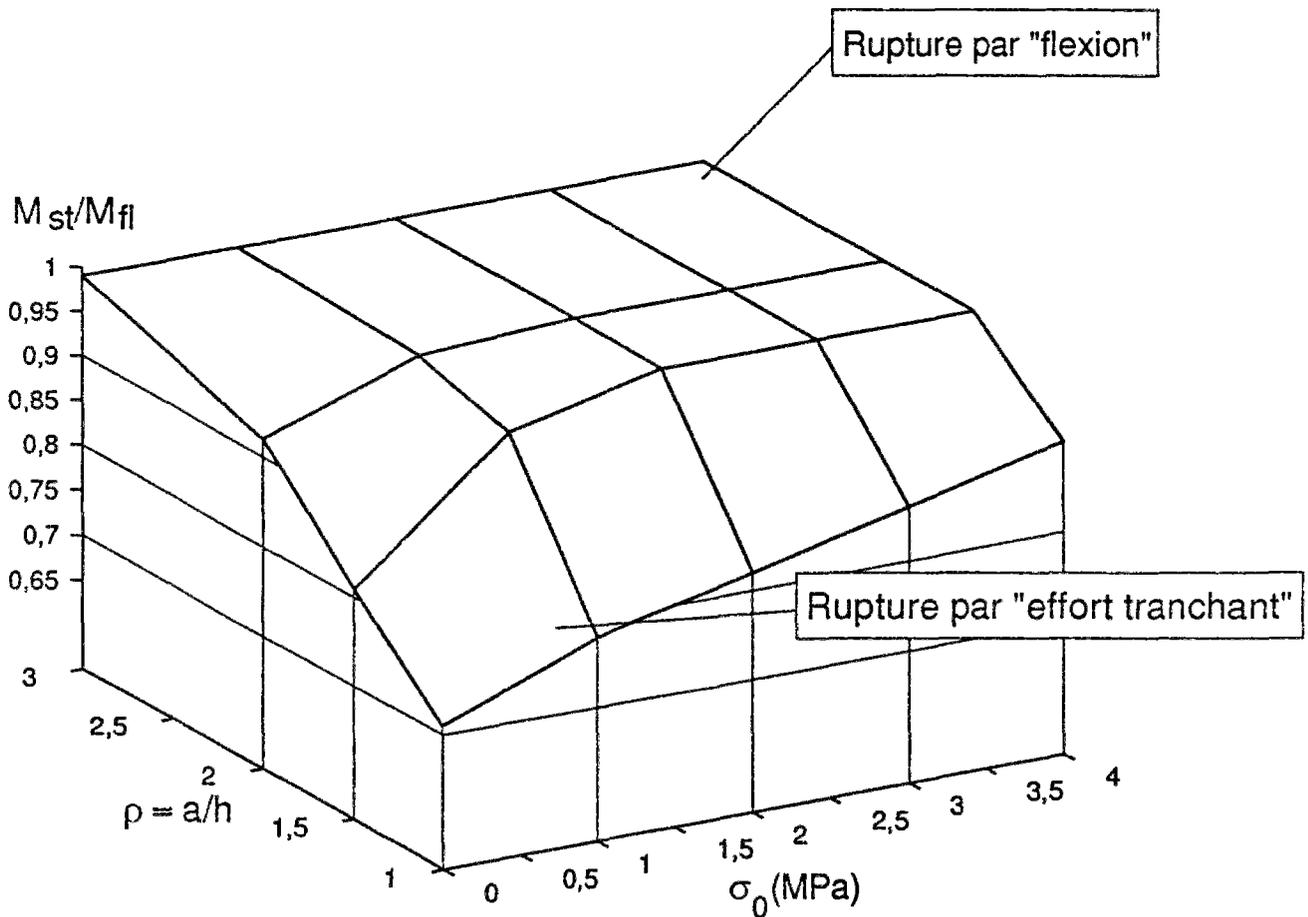
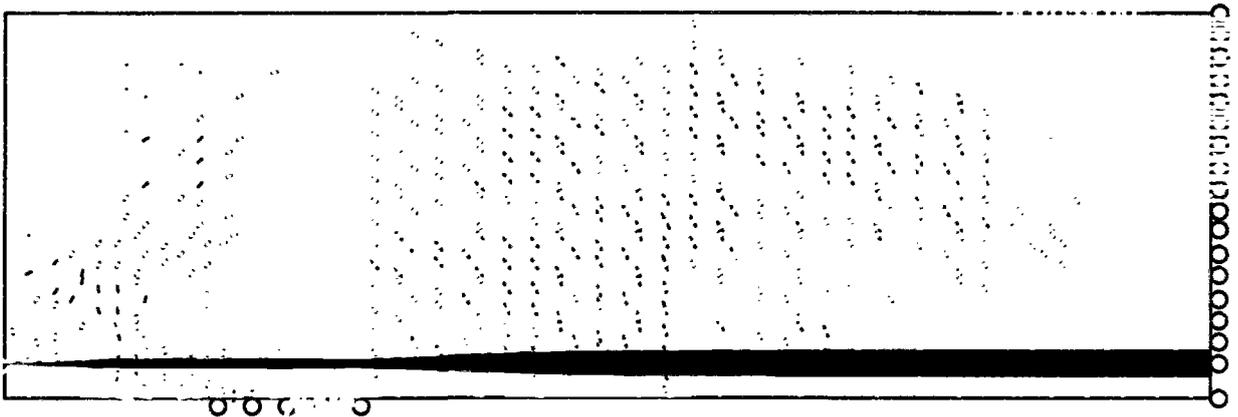


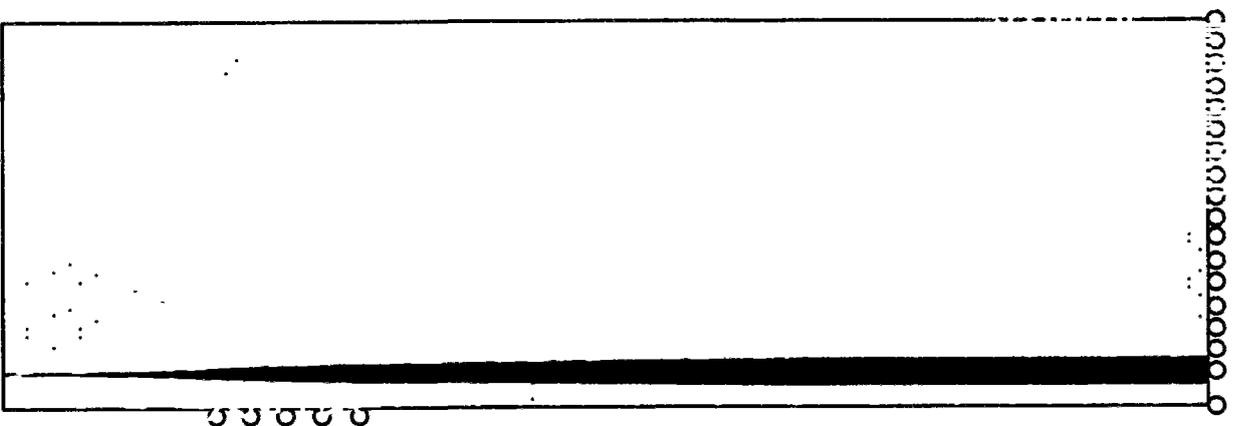
Figure 5 - 12 Influence des armatures transversales

## Commentaires

- Le graphique de la figure 5 - 12 illustre comment le renforcement transversal permet de mettre à profit la totalité de la capacité de flexion de la poutre. A partir d'une situation où la poutre rompt selon un mécanisme de type "effort tranchant", l'addition de renforcement transversal permet d'augmenter la résistance de la poutre, jusqu'à atteindre la totalité de sa capacité de flexion. A partir du moment où la charge correspondante est atteinte, on notera qu'il n'y a plus d'influence du renforcement transversal.



Poutre renforcée transversalement



Poutre non renforcée transversalement

Figure 5 - 13 Comparaison des champs de contrainte homogénéisés avec et sans renforcement transversal

$$(\sigma_0 = 3 \text{ Mpa}, \rho = 2)$$



- La comparaison des champs de contrainte homogénéisés dans des poutres renforcées ou non transversalement (figure 5 - 13) obtenus dans l'approche statique permet de visualiser l'action du renforcement transversal. On observe en effet une "rotation" des directions principales des contraintes, par rapport aux champs obtenus dans les poutres non renforcées transversalement. Ceci est conforme aux observations des expérimentateurs qui relèvent souvent une variation de l'inclinaison des fissures observées en fonction du taux de renforcement transversal.
- De plus, les contraintes observées dans la zone entre la charge et l'appui présentent une composante en traction (en noir sur les schémas), qui traduit l'action des armatures transversales. On notera également que les champs de contrainte obtenus sont en très large désaccord avec schémas de type bielles et tirants, qui par essence sont peu aptes à rendre compte d'une distribution dense d'armatures transversales.

### 3. Comparaison avec les expériences

#### 3.1 Poutres sans renforcement transversal : les expériences de Kani

Comme on l'a montré dans le premier chapitre, les expériences de Kani (Kani, 1964, 1966) permettent de mettre en évidence la réduction de la capacité de résistance à la flexion des poutres sans renforcement transversal. Kani a montré que si l'on représentait le moment fléchissant ultime rapporté au moment fléchissant calculé par la théorie des poutres, on obtenait une surface permettant de visualiser cette réduction de la capacité de flexion. Celle-ci, nulle pour des faibles taux de renforcement longitudinal, est d'autant plus grande que ce dernier est important. Le minimum est obtenu selon Kani pour des valeurs de l'élanement ( $a/d$ ) de 2,5. Cependant, si les résultats que nous avons obtenus jusqu'ici pour les poutres sans renforcement transversal (voir la figure 5 - 6) présentent bien une telle réduction de la capacité de flexion dès que la rupture se produit par "effort tranchant", la surface que nous obtenons par nos calculs ne possède pas la même forme que celle obtenue par Kani. On constate notamment que l'on n'obtient pas de ruine par effort tranchant pour des élancements dépassant des valeurs de l'ordre de trois, alors qu'expérimentalement, Kani observe de tels modes de rupture pour des valeurs nettement supérieures, ce qui induit des valeurs des charges de ruine sensiblement inférieures à celles que nous calculons.

Il apparaît donc que les résultats de notre approche sont trop "optimistes" par rapport à l'expérience. La raison principale de cette inadéquation semble être le fait que la ductilité du béton est très limitée, et qu'une approche de type calcul à la rupture suppose implicitement une certaine ductilité du matériau. Ainsi, si l'on considère la courbe de traction uniaxiale du béton (voir la figure 5 - 14) on observe une rupture quasi fragile, caractérisée par une brusque chute de la courbe de chargement au delà de son "pic". Adopter comme résistance à la traction la valeur  $T$  apparaît donc trop optimiste. En effet, si dans le mécanisme de ruine réel la rupture se produit pour des déformations importantes en certains points, la contrainte correspondante en ces mêmes points sera beaucoup plus faible (voire nulle s'il y a fissuration) que la contrainte de pic  $T$ , a priori retenue dans le calcul à la rupture. Le calcul à la rupture risque donc d'induire une surestimation des charges extrêmes, ce qui dans notre cas est conforme aux comparaisons avec les expériences que nous avons faites. Il convient donc, pour notre modèle, d'adopter comme valeur de calcul une valeur plus faible que la valeur réelle.

Cette analyse rapide est confirmée par l'étude théorique du chapitre trois, qui nous montre que la valeur de la résistance à la traction  $T$  est un des paramètres fondamentaux concernant l'influence de l'effort tranchant sur la résistance des poutres en flexion quatre points. Cependant, on a vu que si l'on choisissait de prendre une valeur nulle pour  $T$ , on n'obtenait pas, pour des poutres fortement renforcées longitudinalement, de mode de rupture en flexion, quel que soit l'élanement de

la poutre considérée. On adopte donc dans la suite comme résistance à la traction une valeur très faible mais non nulle.

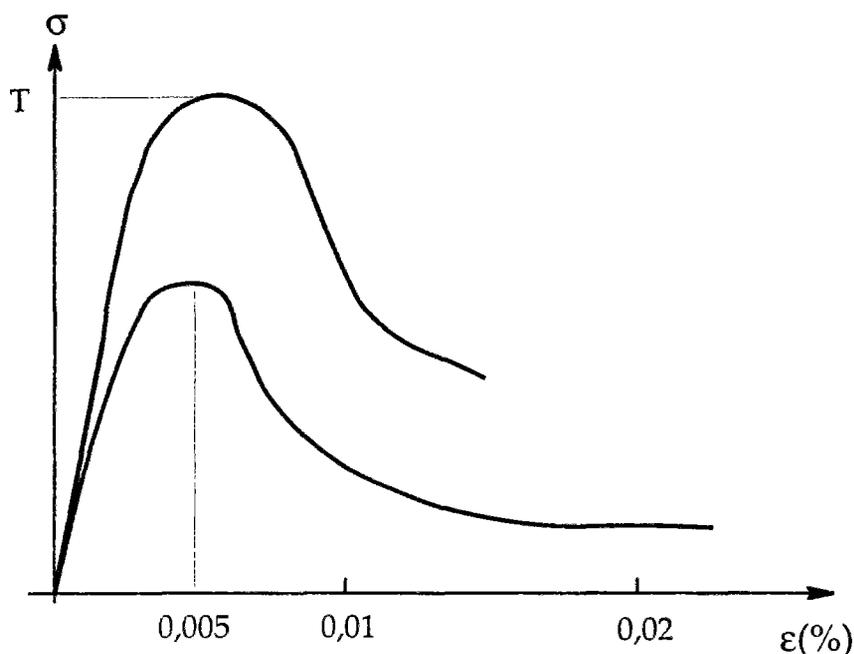


Figure 5 - 14 Courbes-typiques du comportement en traction uniaxiale de deux bétons d'après (Chen, 1982)

Dans la suite des calculs, afin de prendre également en compte le comportement radoucissant du béton en compression (figure 5 - 15), il nous a semblé nécessaire de choisir comme valeur efficace de la résistance à la compression du béton une valeur légèrement inférieure à la valeur de pic. Cependant, même si la ductilité du béton est relativement réduite en compression, la rupture ne présente pas un caractère fragile aussi marqué que celui observé en traction. La réduction des capacités de résistance à adopter est donc beaucoup moins importante, si bien que nous avons choisi de considérer comme valeur efficace, une résistance en compression égale à 85% de la valeur expérimentale. On notera néanmoins qu'en règle générale, la détermination expérimentale exacte des caractéristiques de résistance pose des problèmes. En effet, ainsi que le fait remarquer Kupfer dans (Kupfer et al., 1969), la résistance en compression mesurée d'après un essai sur éprouvette cylindrique ne coïncide avec la résistance à la compression simple du matériau que pour des spécimens dont l'élancement dépasse quatre, alors que généralement ces tests sont menés avec des éprouvettes d'élancement deux. Ceci laisse à penser que la résistance ainsi mesurée est surestimée en raison de la présence d'effets de bord et d'un confinement dû au frottement sous les plateaux de la presse. Kupfer les évalue environ à au moins 10% pour des éprouvettes standard.

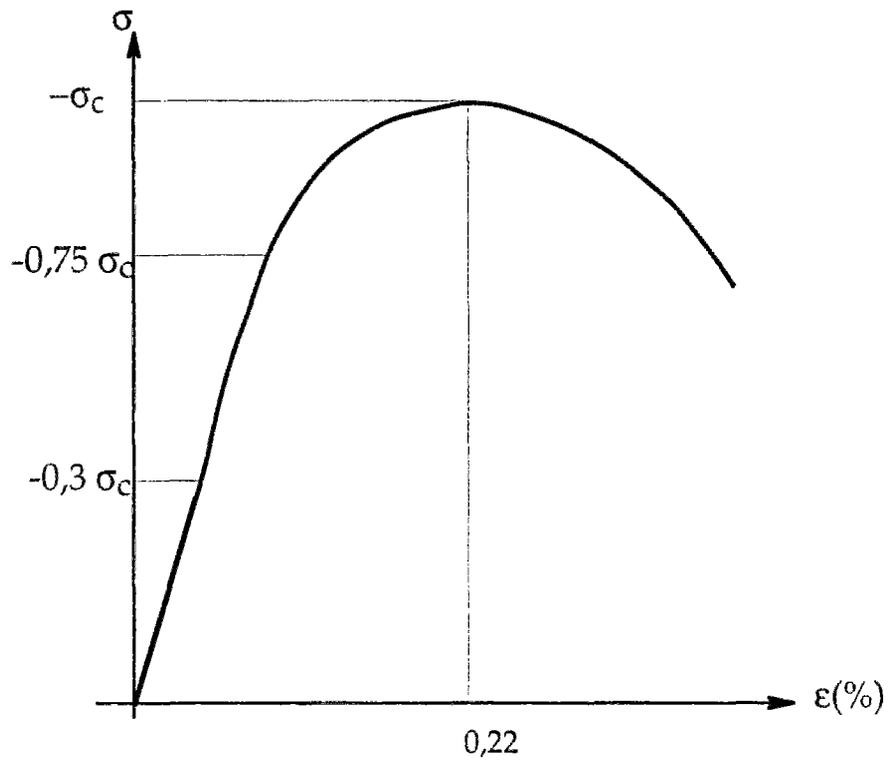


Figure 5 - 15 Comportement uniaxial du béton en compression, d'après (Kupfer et al., 1969)

### Résultats

On se propose maintenant de reprendre une partie de l'étude précédente en adoptant comme nouvelles valeurs de calcul  $T/20$  pour la résistance à la traction et  $0,85 \sigma_c$  pour la résistance à la compression. Afin de pouvoir comparer nos anciens résultats avec ces nouveaux calculs, on choisit le même mode de représentation des résultats que précédemment.

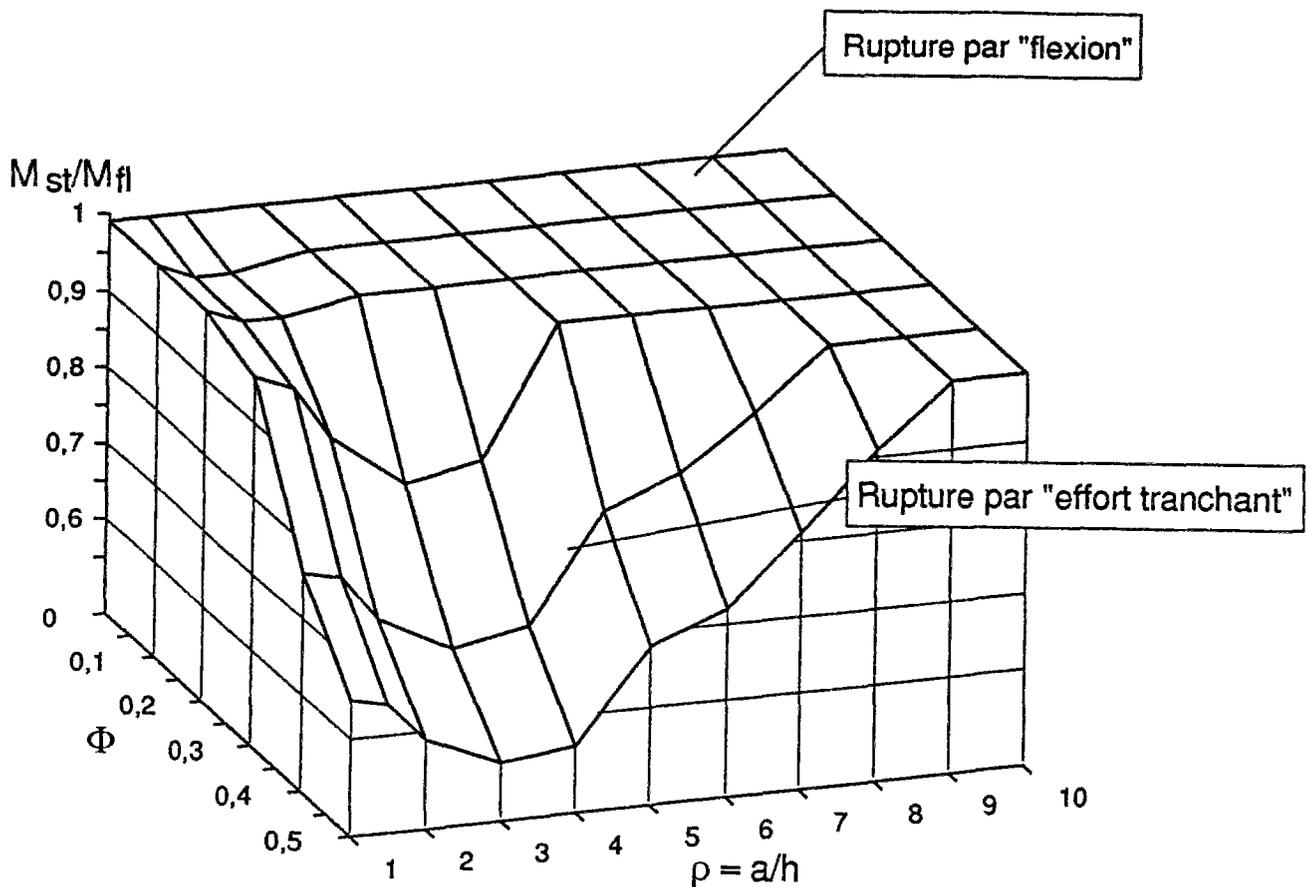


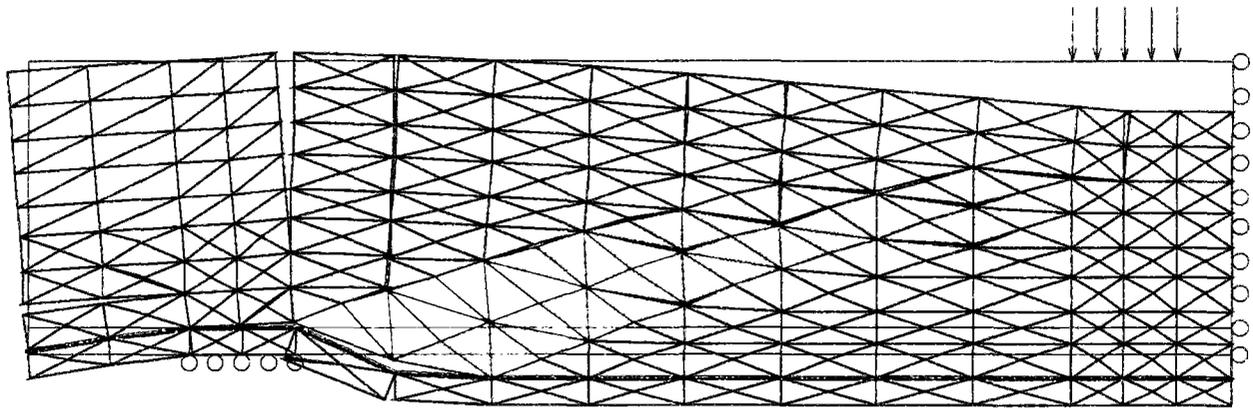
Figure 5 - 16 Influence de l'effort tranchant (calculs par l'approche statique)

#### Commentaires

- La surface obtenue (voir figure 5 - 16) présente un aspect différent de celui que nous avons pour le premier choix de la résistance à la traction  $T$ . En effet, comme le laissaient présager les résultats du chapitre trois, on obtient des modes de rupture par effort tranchant jusqu'à des valeurs de l'élanement plus importantes que précédemment. De plus l'aspect de la surface obtenue est proche de celle décrite par Kani (voir la présentation des résultats expérimentaux de Kani dans le premier chapitre). Le moment au droit de l'appui  $M_{st}$  lors la ruine présente un minimum en fonction de l'élanement, qui se situe aux alentours de trois. Ceci est à rapporter aux observations expérimentales décrites dans (Morrow et Viest, 1957) et (Kani, 1964, 1966) qui relèvent une variation similaire.
- La différence entre les surfaces des figures 5 - 6 et 5 - 16 peut éventuellement s'expliquer par l'obtention d'un mode de rupture légèrement différent (voir figure 5 - 17) des modes de rupture par "effort tranchant" présentés précédemment. Celui-ci fait apparaître une zone



rompant en compression, située près de l'appui, alors que les modes de rupture observés auparavant présentaient plutôt une bande soumise à une déformation de type cisaillement (voir figure 5 - 5). Cette explication n'est cependant pas totalement satisfaisante, et il serait intéressant de mieux comprendre la raison de ce changement de forme de la surface obtenue.



*Figure 5 - 17 Nouveau mode de rupture résultant de l'adoption de coefficients de réduction sur les résistances en traction et compression simples du béton*

## **Conclusion**

On a vu qu'on pouvait reproduire de manière assez correcte les modes de rupture des poutres en béton armé non renforcées transversalement, en choisissant une valeur faible de la résistance à la traction. Dans la suite, on va s'attacher à comparer les résultats obtenus et les essais de manière plus quantitative en nous rapportant à l'étude expérimentale décrite dans (Smith et Vansiotis, 1982). Cette partie nous fournira également l'occasion de valider notre approche par homogénéisation de la modélisation des zones renforcées par armatures transversales.



## 3.2 Les expériences de Smith et Vansiotis

Comme on l'a mentionné dans le premier chapitre, on recense dans la littérature de nombreux essais visant à mettre en évidence l'influence du renforcement transversal sur le comportement des poutres soumises à un effort tranchant. On peut citer entre autres (Kong et al., 1970), (Smith et Vansiotis, 1982) (Kordina, 1985, 1987), (Rogowsky et al., 1986). Dans la majorité des cas, ces auteurs ont réalisé de nombreux essais, en faisant varier différents paramètres (généralement l'élanement, les taux de renforcements longitudinal et transversal, la résistance à la compression du béton, etc...), afin d'en déterminer l'influence sur le comportement de ces poutres. Dans les travaux mentionnés, les auteurs s'attachent principalement à décrire les modes de ruine observés, la fissuration (espacement et ouverture) ainsi que les charges extrêmes.

Afin de tester la validité de notre modèle, nous avons choisi les essais présentés dans (Smith et Vansiotis, 1982), qui proposent une étude assez complète de l'influence du taux de renforcement transversal ainsi que de la géométrie sur les charges de ruine, pour des poutres de faible élanement.

### 3.2.1 Dispositif expérimental

Smith et Vansiotis ont effectué une série de 52 essais sur des poutres épaisses simplement appuyées. Ceux-ci consistent en quatre séries de 15, 16, 19 et 2 poutres (notées de A à D) d'élanement  $\rho = \frac{a}{h}$  respectifs 0,86 1,04 1,15 et 1,79 avec des taux de renforcement transversal variables (taux volumique de 0 à 1,25%). Toutes les poutres sont rectangulaires et chargées en flexion quatre points.

Les poutres comportent toutes un renforcement longitudinal principal constant, constitué de trois barres de format #5 (de section totale 600 mm<sup>2</sup>) ainsi qu'un renforcement longitudinal secondaire réparti dans la section. Toutes les poutres étudiées sont de même section, de hauteur  $h = 0,356$  m et d'épaisseur 0,102 m. Le béton utilisé a une résistance à la compression de l'ordre de 20 Mpa, et une résistance à la traction estimée à 2 Mpa. L'acier des armatures a une résistance de 431 Mpa (437 Mpa pour les aciers transversaux). La géométrie en est précisée sur la figure 5 - 18. On notera que toutes les poutres possèdent une longueur d'ancrage de 0,305 m destiné à éviter toute rupture par perte d'adhérence des armatures longitudinales, qui sont dépourvues de tout autre type d'ancrage. Les armatures transversales quant à elles, sont formées par des étriers (en "U") fermés. Les armatures d'âme secondaires sont constituées de barres droites, sans ancrages par courbures. La disposition des différentes armatures est précisée sur la figure 5 - 19.

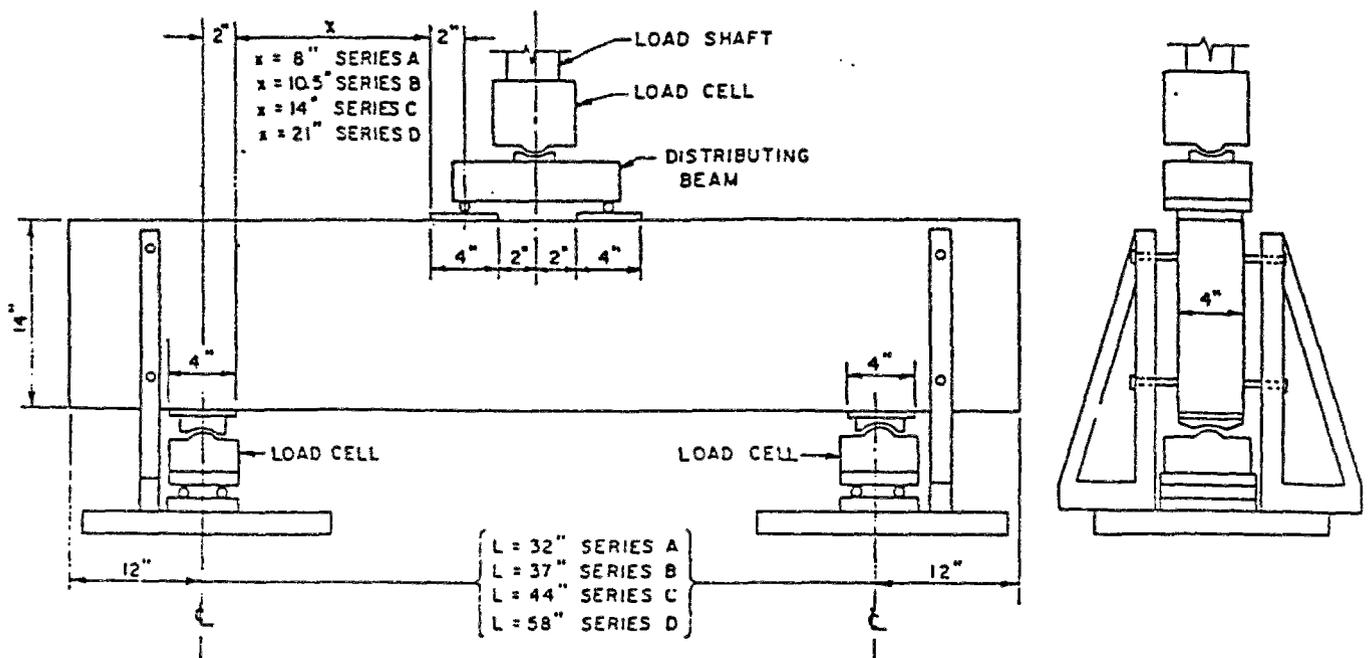


Figure 5 - 18 Géométrie des essais (d'après Smith et Vansiotis, 1982)

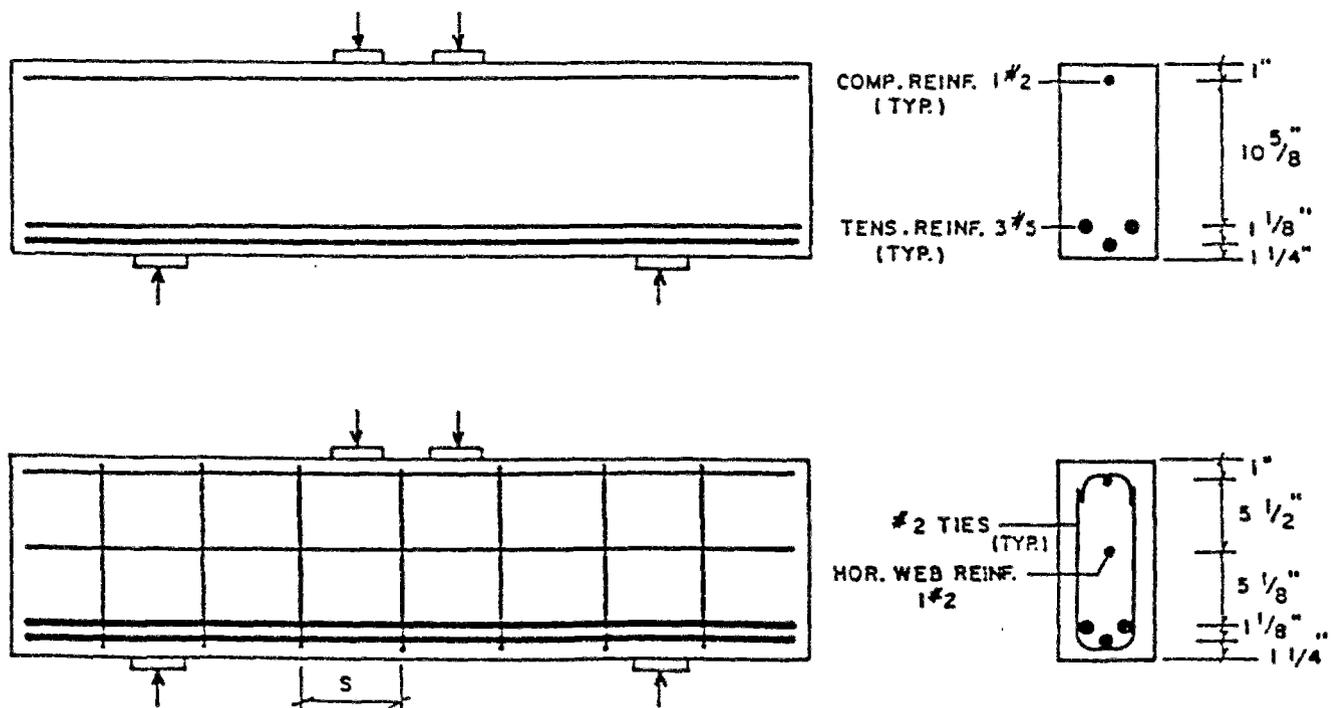


Figure 5 - 19 Disposition des armatures (d'après Smith et Vansiotis, 1982)

Les poutres sont soumises à un chargement de flexion quatre points représenté sur la figure 5 - 18. Ce chargement est appliqué au moyen de plaques de dimensions  $102 \times 102 \times 25$  mm. Des plaques identiques sont employées pour les appuis. Le chargement est incrémenté progressivement jusqu'à la rupture, et ceci à faible vitesse de chargement (8,90 kN/min).

### 3.2.2 Résultats expérimentaux

Dans l'article mentionné, Smith et Vansiotis décrivent le comportement des poutres au cours du chargement (voir figure 5 - 20). A partir d'un seuil égal à 20% de la charge de ruine, apparaissent des fissures verticales de flexion dans la région de moment maximum (étape 1). Au fur et à mesure de l'augmentation de la charge, se forment des fissures à égale distance de la charge et de l'appui (étape 2), qui se propagent d'abord vers les points de chargement puis vers les appuis. Les fissures se stabilisent ensuite vers 50 à 60 % de la charge ultime, alors qu'apparaissent de nouvelles fissures parallèles aux précédentes. A 90 % de la charge de ruine, on observe la création de fissures presque verticales situées au droit des appuis (étape 3).

Les auteurs rapportent que presque toutes les poutres ont subi des mécanismes de ruine de type "effort tranchant" (étape 4). Ils relèvent deux causes principales de la ruine des poutres :

1. Écrasement du béton dans la partie supérieure de la poutre au niveau des fissures inclinées ainsi que sous la plaque de chargement.
2. Rupture en traction du béton le long des fissures inclinées.

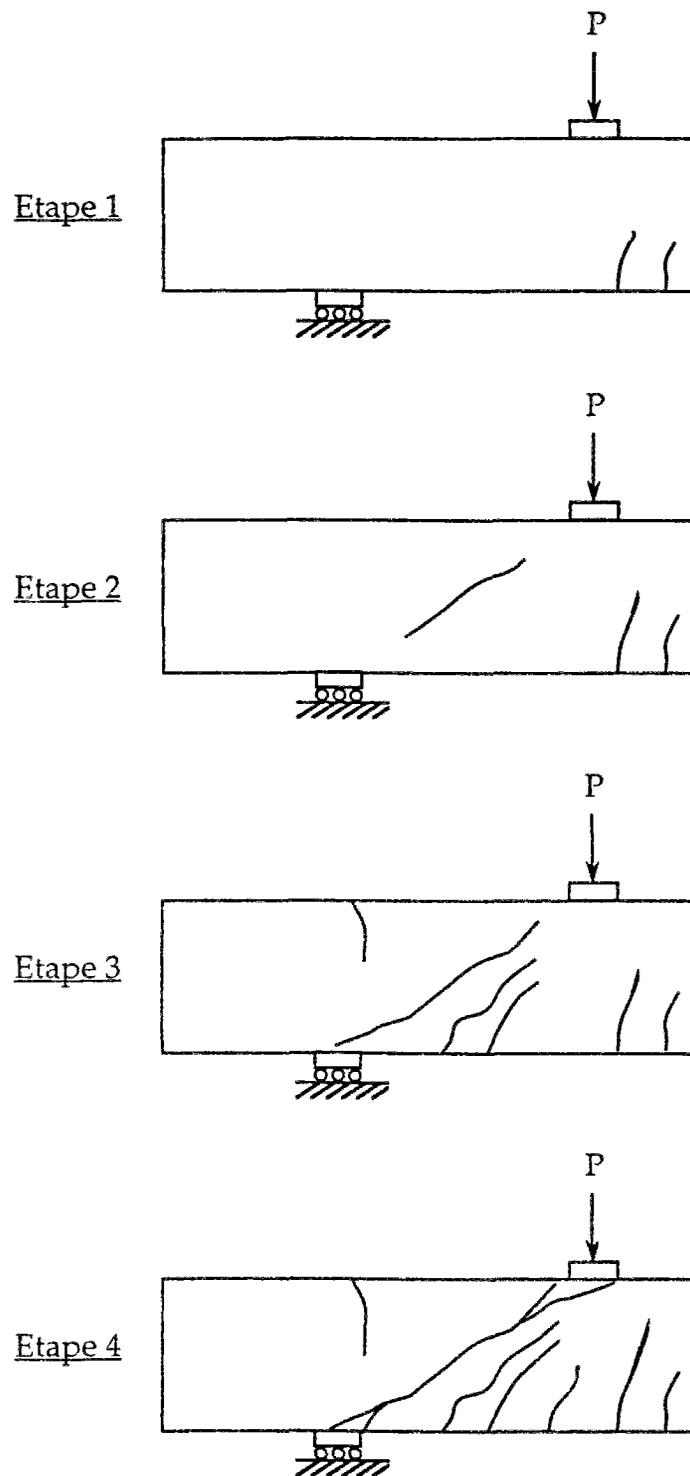


Figure 5 - 20 Évolution de la fissuration des poutres

Parmi les poutres testées, certaines ont selon les auteurs, atteint voire dépassé leur capacité de flexion  $M_{pl}$ , calculée selon les dispositions réglementaires (ACI building code). Elles correspondent aux poutres les plus élancées, et le plus renforcées transversalement. De plus, les auteurs notent que pour chaque essai, l'hypothèse d'adhérence entre le béton et les armatures longitudinales a été vérifiée.

### 3.3 Comparaison avec les calculs

Afin de pouvoir comparer directement les valeurs expérimentales avec les calculs, on a choisi de ne présenter parmi les essais que ceux pour lesquels la valeur de la résistance à la compression ne différait pas de plus de 5% de la valeur recherchée de 20 Mpa. De plus, parmi les quatre séries d'essais, n'ont été retenues que les séries A et C, qui présentaient le moins de dispersion parmi les valeurs extrêmes obtenues. Dans l'étude des résultats par les auteurs, l'influence du taux de renforcement horizontal secondaire sur la valeur des charges de ruine est examinée. Ceux-ci concluent que l'action de ce type de renforcement est négligeable. Afin de disposer d'un nombre suffisant d'expériences, on prendra donc en compte toutes les poutres, sans faire de distinction vis-à-vis de ce renforcement secondaire. En revanche, pour les calculs par éléments finis, on ne considérera pas ces armatures. Comme précédemment, on adopte des valeurs réduites pour les capacités de résistance du béton.

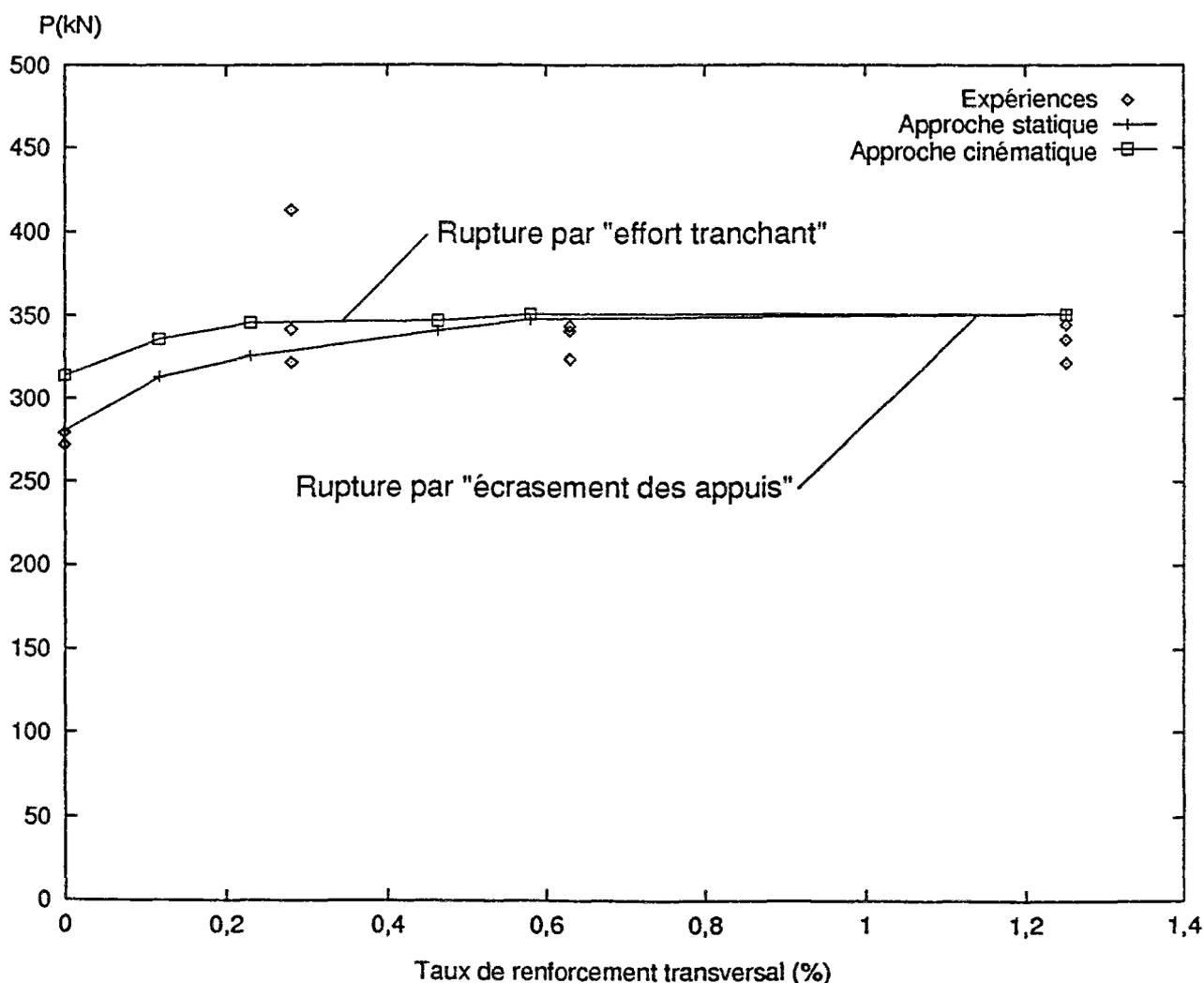


Figure 5 - 21 Comparaisons expériences-calculs pour la série A

## Résultats

Les deux figures (5 - 21) et (5 - 22) montrent une bonne concordance entre les essais et les calculs, malgré une dispersion importante des résultats expérimentaux. Ici encore, on obtient par le calcul plusieurs modes de rupture. Les poutres de la série A présentent un premier mode de rupture par "effort tranchant", ainsi qu'un second qui correspond à un écrasement des appuis. La comparaison des mécanismes optimaux obtenus et de la fissuration expérimentale observée permet de relever certaines similitudes. Dans le deuxième cas (série C), qui correspond à des poutres dont l'élanement est plus important, on observe encore deux modes de rupture distincts. Le premier correspond à une rupture de type "effort tranchant", tandis que le second est un mécanisme de flexion. Dans les deux cas, les valeurs numériques obtenues montrent que la modélisation des armatures transversales par la théorie de l'homogénéisation permet de rendre compte de manière convenable de l'action de celles-ci, qui restent toutefois limitée.

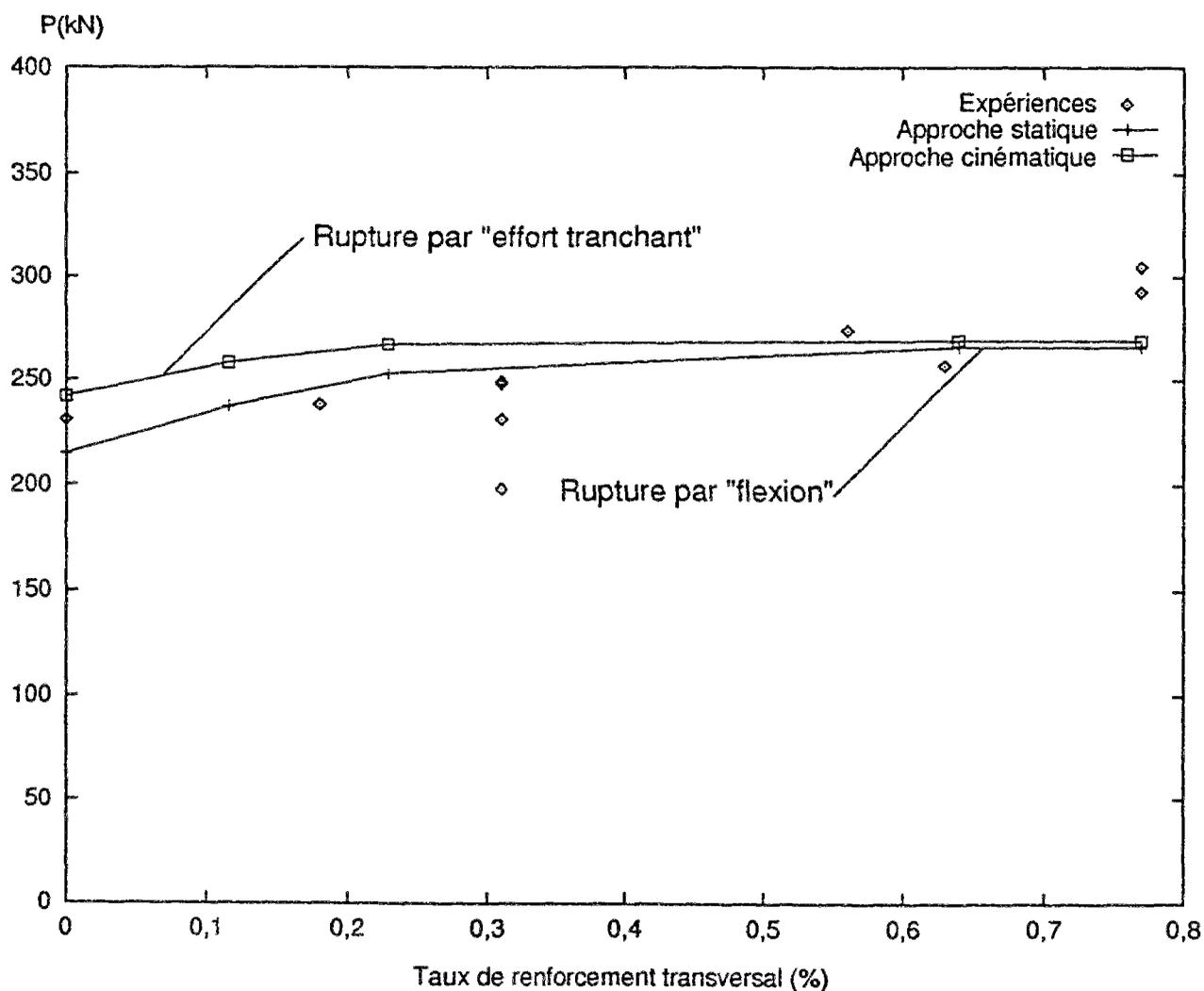


Figure 5 - 22 Comparaisons expériences-calculs pour la série C

## Conclusions

Nous avons donné dans ce chapitre, un exemple d'application de la méthode de dimensionnement proposée dans le chapitre deux. L'étude que nous avons menée sur la prise en compte de l'effort tranchant dans la rupture des poutres a permis tout d'abord de montrer que la mise en œuvre pratique de la méthode était relativement aisée et permettait d'entreprendre des études paramétriques assez complètes.

Dans la majorité des cas présentés, la précision des résultats obtenus, évaluée par comparaison entre les approches statique et cinématique, s'est avérée très satisfaisante (la charge de ruine est connue au pire à dix pour-cents près). De plus une étude paramétrique de comparaison entre une modélisation mixte des armatures transversales et une modélisation par homogénéisation a montré que pour des espacements standards entre armatures transversales, il était légitime d'employer la théorie de l'homogénéisation.

Dans un deuxième temps, on a montré qu'en adoptant des caractéristiques de résistance réduites pour le béton, le modèle proposé et son traitement numérique permettaient d'obtenir une concordance satisfaisante entre les résultats expérimentaux et les calculs, tant pour les poutres non renforcées transversalement que pour celles pourvues d'un tel renforcement. Cependant on peut s'interroger sur la détermination des coefficients réducteurs à adopter. Il paraît clair que leurs valeurs ne comportent a priori aucun caractère de généralité, et peuvent dépendre de la qualité du béton employé. Les valeurs que nous avons choisies (un vingtième de la résistance à la traction et  $0,85 \sigma_c$  pour la résistance à la compression) nous ont néanmoins permis d'obtenir des résultats de calculs réalistes pour des bétons de qualité moyenne, tant pour les valeurs des charges de ruine, que pour les modes de rupture obtenus. Ces résultats sont donc encourageants pour l'emploi du calcul à la rupture appliqué au dimensionnement des structures en béton armé. En effet, si a priori le calcul à la rupture peut paraître trop optimiste en raison de la ductilité limitée du béton en compression et de sa fragilité en traction, notre étude a montré que moyennant un ajustement des caractéristiques de résistance du matériau, on pouvait obtenir une concordance correcte entre les résultats expérimentaux et la modélisation. Il convient cependant d'être prudent car à ce point, la méthode nécessite encore des études comparatives pour diverses qualités de béton, avant de pouvoir se prononcer sur la validité de la méthode (il serait notamment intéressant d'étudier les bétons de fibres, qui sont réputés plus ductiles). Notre travail fournit l'outil théorique permettant d'entreprendre de telles études.

## **Conclusions générales**

Il est temps maintenant, à la suite de notre étude, de dresser un bilan des acquis, et d'envisager des perspectives pour l'avenir.

Nous avons au cours de ce travail, formulé puis mis en œuvre analytiquement et numériquement, une méthode de dimensionnement des structures en béton armé fondée sur le calcul à la rupture. Celle-ci repose sur une modélisation du composite béton armé, où les armatures longitudinales sont décrites comme des inclusions unidimensionnelles plongées dans un milieu continu bidimensionnel : le béton. Les zones renforcées par armatures transversales, sont en revanche modélisées dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation en calcul à la rupture.

Nous intéressent plus particulièrement au problème de la flexion quatre points, et plus spécifiquement à la prise en compte de l'effort tranchant dans la résistance des poutres, nous avons pu mettre en évidence les limites d'un calcul de type milieu curviligne, dès lors que l'élanement de la poutre est trop faible. Dans un deuxième temps, nous avons validé l'emploi de la théorie de l'homogénéisation pour représenter les zones renforcées par armatures transversales, en évaluant l'effet d'échelle, grâce à une comparaison entre une description discrète et homogénéisée de ces armatures. Revenant dans la suite à la flexion quatre points, nous avons montré qu'il était possible d'obtenir une concordance satisfaisante entre calculs et expériences, tant pour les modes de ruine que pour les charges extrêmes, en tenant compte de la ductilité réduite du béton dans le choix des capacités de résistance du matériau.

Les résultats obtenus sont donc encourageants. La méthode numérique que nous avons développée semble donner des résultats de précision satisfaisante vis-à-vis du but recherché, et ce pour un temps de calcul raisonnable, si bien que l'on peut penser à l'appliquer à d'autres ouvrages relevant de la modélisation mixte en calcul à la rupture, notamment dans le domaine de la géotechnique (modélisation de rideaux de palplanches, tirants actifs et passifs, gabions cellulaires...). La méthode semble être encore limitée par une certaine dépendance des résultats vis-à-vis du maillage, inconvénient dont l'importance est atténuée par la possibilité d'obtenir une estimation de l'erreur commise sur la charge de ruine par comparaison des approches statique et cinématique. Une étude des conditions de localisation suivie de l'utilisation de maillages adaptatifs pourrait éventuellement permettre de lever cette difficulté.

D'un point de vue plus fondamental, il paraît encore prématuré de valider complètement la méthode, pour le dimensionnement de structures quelconques en béton armé. Un travail systématique de comparaison entre expériences et modélisation reste à faire, pour les divers types de béton existant. Parmi les applications auxquelles on peut penser, il semble intéressant d'envisager les bétons de fibre, matériaux réputés plus ductiles que les bétons classiques, et dont le comportement pourrait se prêter plus aisément à notre approche. De plus, nos résultats ne sont a priori valables que pour la problématique envisagée. Il serait donc nécessaire d'aborder d'autres géométries de pièces massives,

(comme des bossages d'ancrage de précontrainte, chevêtres, pièces avec des ouvertures, etc...) en ayant chaque fois recours à l'expérimentation, pour valider complètement la méthode.

## **Annexes**

## Annexe 1

### Une autre approche statique pour le bloc renforcé par une armature droite

On construit de manière analogue à l'approche proposée dans le chapitre deux, un champ de contrainte mixte statiquement admissible et respectant les conditions de résistance des matériaux. Pour ce faire, on considère le champ de contrainte constant par zone, à 12 zones représenté sur la figure A1 - 1. D'après les symétries du problème par rapport aux axes  $Ox$  et  $Oy$ , on se ramène à la détermination des tenseurs de contraintes dans les zones (1), (2), (3) et (4).

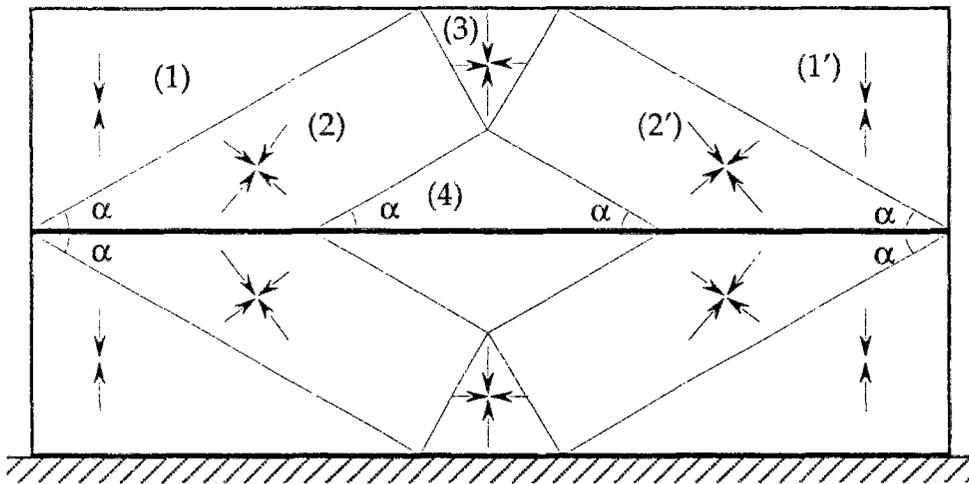


Figure A1 - 1 Champ de contrainte constant par zones

On construit alors les champs de contrainte grâce au diagramme des cercles de Mohr de la figure A1 - 2 correspondant aux zones (1), (2), (3) et (4) en supposant le critère de résistance du bloc saturé, puis respectivement (1'), (2') et leurs symétriques.

On obtient alors les valeurs des champs de contrainte dans ces quatre zones :

$$\underline{\underline{\sigma}}_1 = -2 C \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_2 = -2 C (\cos^2(2\alpha) + \cos 2\alpha) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - 2C(\sin^2(2\alpha) + \cos 2\alpha) \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - C \sin 4\alpha (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_3 = -4 C \cos 2\alpha \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - 2 C (1 + 2\cos 2\alpha) \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_4 = \underline{\underline{\sigma}}_1$$

Il convient de plus d'imposer la condition  $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$ , afin que la construction par les cercles de Mohr proposée soit valable (des valeurs supérieures aboutiraient à un diagramme correspondant à trois cercles confondus).

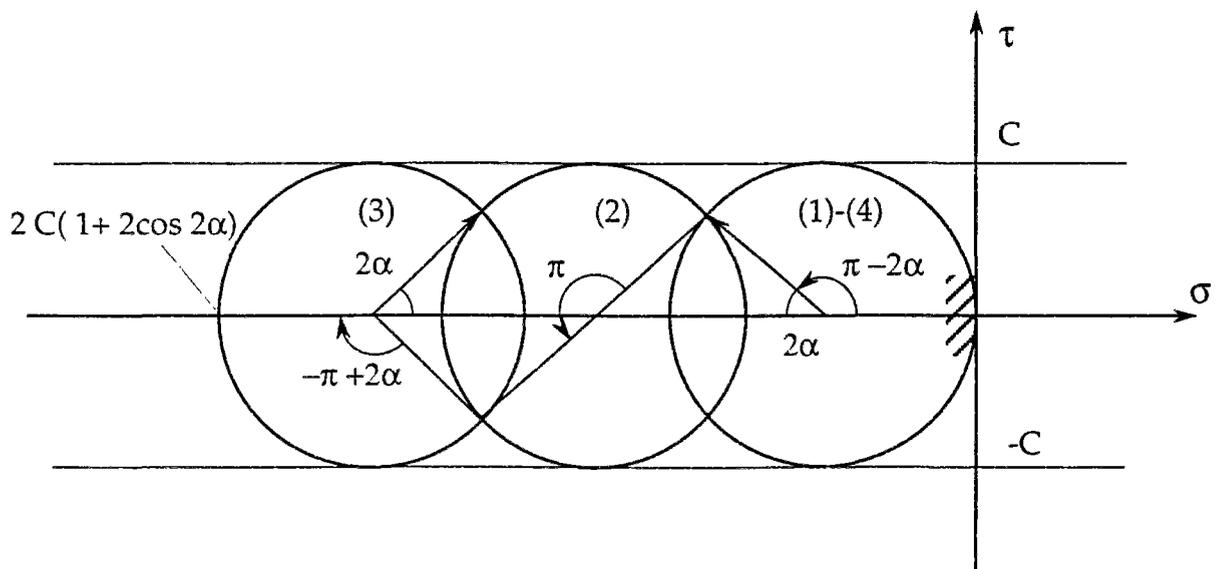


Figure A1 - 2 Représentation des états de contraintes des zones (1), (2), (3) et (4), dans le plan de Mohr

On complète ensuite le champ de contrainte mixte, en intégrant les équations d'équilibre du milieu curviligne, afin d'obtenir la tension dans l'armature. Ici, la prise en compte des conditions aux limites sur les efforts intérieurs permet d'obtenir directement la distribution de tension représentée sur la figure A 1 - 3.

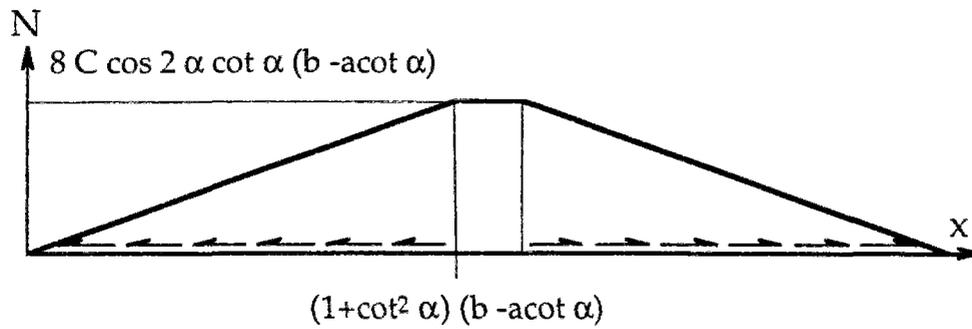


Figure A 1 - 3 Tension dans l'armature

Par construction, le champ de contrainte dans le milieu continu bidimensionnel  $\mathbf{B}$  est statiquement admissible et vérifie le critère de résistance du matériau de Tresca. Les équations d'équilibre du milieu curviligne  $\mathbf{A}$  ayant été prises en compte, on calcule la charge  $P^*$  équilibrée par la distribution d'efforts construite dans cette approche. On obtient :

$$(1) \quad P^* = 2C a \cot \alpha + 2C (1+2 \cos 2\alpha) (b - a \cot \alpha) = 2 C b (1+2 \cos 2\alpha (1 - \frac{a}{b} \cot \alpha))$$

Cette approche est valide sous les conditions suivantes :

- $\frac{\pi}{2} > \alpha \geq \arctan \frac{a}{b}$  (géométrie)
- $8 a C \cos 2\alpha \cot \alpha (\frac{b}{a} - \cot \alpha) \leq N_0$  (résistance de l'armature).

## Annexe 2

### Estimation de l'effet d'échelle par l'approche statique pour le bloc fretté

D'après les calculs présentés dans le chapitre deux, une borne inférieure de la charge extrême  $P^*$  est donnée par l'expression :

$$(1) \quad P = 4bC \left(1 + 2n \frac{1-t^2}{1+t^2} - n \frac{a}{b} \frac{1-t^2}{t(1+t^2)} [n(1+t^2) + 1-t^2] \right)$$

pour tous  $n \geq 1$  et  $t$  vérifiant les deux conditions suivantes :

$$(a) \quad \frac{na}{b} \leq \frac{t}{1+t^2} \quad (\text{géométrie})$$

$$(b) \quad 8 na C \frac{1-t^2}{1+t^2} \leq N_0 \quad (\text{résistance de l'armature})$$

En supposant que la résistance de l'armature est saturée après la dernière maille, on obtient la relation suivante, qui vérifie naturellement la condition (b) :

$$(2) \quad N_0 = 8 na C \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Dans la suite on note comme dans le corps du texte :

$$\sigma_0 = \frac{N_0}{2a} \quad \text{la résistance moyenne par unité d'épaisseur induite par l'armature,}$$

$$\text{et } \lambda = \frac{\sigma_0}{2C} \quad \text{le taux de renforcement relatif entre l'armature et le matériau de base.}$$

On calcule ensuite la charge équilibrée par le champ, en reportant dans l'expression (1) la valeur de  $n$  donnée par (2). La charge  $P$  vaut donc après calculs :

$$(3) \quad \frac{P}{4bC} = (1 + \lambda) \left( 1 - \varepsilon \frac{\lambda}{4(1+\lambda)} \left( \frac{\lambda (1+t^2)^2 + 2 (1-t^2)^2}{t(1-t^2)} \right) \right)$$

où l'on note  $\varepsilon = \frac{a}{b}$  le rapport d'échelle caractéristique de la géométrie.

On est donc amené à rechercher le minimum de la fonction  $g(t) = \frac{\lambda (1+t^2)^2 + 2 (1-t^2)^2}{t(1-t^2)}$  pour  $t \in [0;1]$ , afin de maximiser la valeur de  $P$ .

On calcule  $g'(t) = \frac{\lambda (1+t^2)}{t^2(1-t^2)^2} (t^4 (\lambda+2) - 2t^2(3\lambda+2) + \lambda+2)$  dont la seule racine dans  $[0;1]$  est :

$$(4) \quad t_0(\lambda) = \frac{\sqrt{2(1+\lambda)} - \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda+2}}$$

La valeur maximale de la charge est donc égale à :

$$(5) \quad \frac{P}{4bC} = (1 + \lambda) \left( 1 - \varepsilon \frac{\lambda}{4(1+\lambda)} \left( \frac{\lambda (1+t_0(\lambda)^2)^2 + 2 (1-t_0(\lambda)^2)^2}{t_0(\lambda) (1-t_0(\lambda)^2)} \right) \right)$$

Le résultat obtenu est valable sous la condition géométrique (a) que l'on réécrit sous la forme suivante, en reportant la valeur de  $n$  donnée par (2) :

$$(6) \quad n \varepsilon \frac{1+t_0(\lambda)^2}{t_0(\lambda)} \leq 1$$

$$(7) \quad \text{soit } \varepsilon \leq \varepsilon_m(\lambda) = \frac{2t(1-t_0(\lambda)^2)}{\lambda(1+t_0(\lambda)^2)^2}$$

Après calculs, on obtient :

$$(8) \quad \varepsilon_m(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda+2}}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda+1}}$$

## Annexe 3

### Linéarisation du critère de résistance de Coulomb tronqué en traction

Le but de la linéarisation des critères de résistance est de fournir un jeu de plans (d'hyperplans) dans l'espace des variables d'effort qui "approche" le mieux possible le critère de résistance initial du matériau considéré. De plus, il est indispensable, si l'on souhaite construire de véritables approches statiques, que le domaine de résistance linéarisé soit inclus dans le domaine de résistance initial (linéarisation par l'intérieur). De même, dans l'approche cinématique, le domaine initial doit être inclus dans le domaine linéarisé (voir figure A3 - 1). Les linéarisations adoptées pour l'approche cinématique sont donc légèrement différentes et font l'objet du paragraphe suivant.

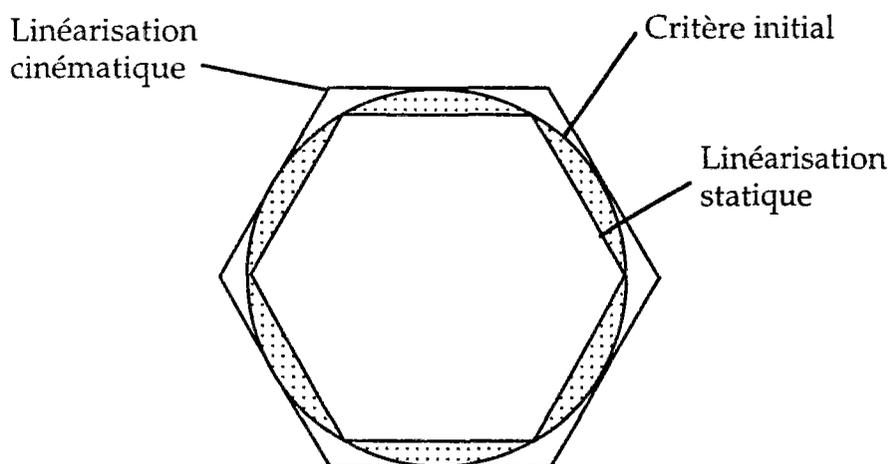


Figure A3 - 1 Principe des linéarisations statique et cinématique

### A3 -1. Approche statique

Le problème posé est donc de trouver un ensemble de plans délimitant une région de l'espace  $(\sigma_{xx}, \sqrt{2} \sigma_{xy}, \sigma_{yy})$  incluse dans le domaine de résistance du matériau. On va d'abord traiter le cas du matériau homogène, le cas du critère homogénéisé correspondant à un matériau renforcé, s'en déduisant immédiatement.

#### A 3 -1.1 Cas du matériau homogène

On peut tout d'abord faire la remarque que dans l'espace  $(\sigma_{xx}, \sqrt{2} \sigma_{xy}, \sigma_{yy})$ , tout critère de résistance isotrope possède une symétrie de révolution autour de l'axe D défini par  $(\sigma_{xx} = \sigma_{yy} ; \sigma_{xy} = 0)$ .

En effet, on montre facilement que les cercles centrés sur D et situés dans les plans perpendiculaires sont les lieux des points correspondant à des contraintes principales  $\sigma_I$  et  $\sigma_{II}$  constantes données. Le critère de résistance étant isotrope, il n'est défini que par la valeur de ces contraintes principales. Le domaine de résistance présente bien donc la symétrie annoncée.

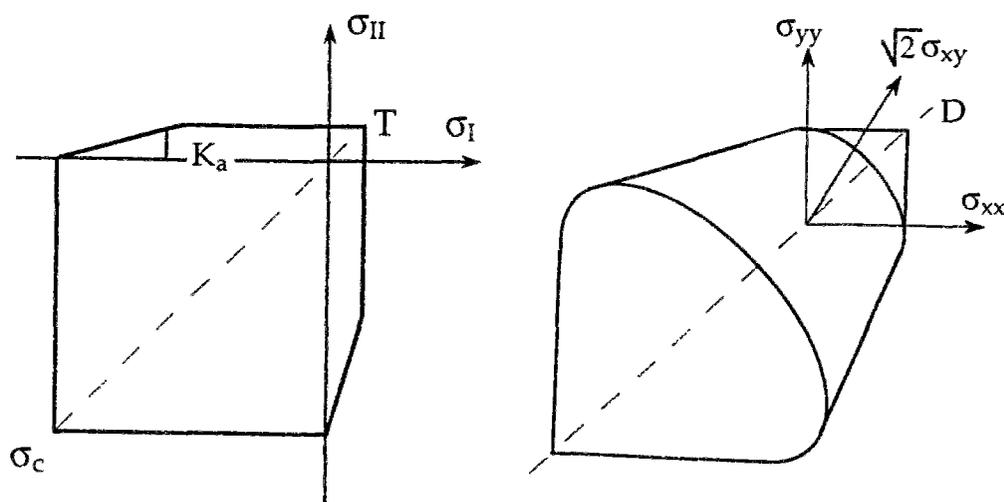


Figure A3 - 2 Critère de résistance de Coulomb tronqué, en contrainte plane

Dans le plan  $(\sigma_I, \sigma_{II})$ , le critère de résistance de Coulomb tronqué en traction est délimité par des segments de droites. Dans l'espace  $(\sigma_{xx}, \sqrt{2} \sigma_{xy}, \sigma_{yy})$ , la surface du critère est donc constituée de troncs de cônes (voir figure A3 - 2). Le principe de la linéarisation consiste donc, comme dans le cas de la déformation plane (voir Pastor, 1983), à appuyer des plans sur un ensemble de génératrices

régulièrement réparties sur la surface de ces troncs de cône (voir figure A3 - 3 ). Des calculs géométriques simples donnent alors les 3 n conditions fournissant la linéarisation du critère :

$$\begin{cases} \sigma_x \left( \cos \frac{2i\pi}{n} + \sin \varphi \cos \frac{\pi}{n} \right) + \sigma_y \left( -\cos \frac{2i\pi}{n} + \sin \varphi \cos \frac{\pi}{n} \right) - 2 \sigma_{xy} \sin \frac{2i\pi}{n} \leq 2(1-\cos\varphi) \sigma_c \cos \frac{\pi}{n} \\ \sigma_x \left( \cos \frac{2i\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n} \right) + \sigma_y \left( -\cos \frac{2i\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n} \right) - 2 \sigma_{xy} \sin \frac{2i\pi}{n} \leq 2\sigma_c \cos \frac{\pi}{n} \\ \sigma_x \left( \cos \frac{2i\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{n} \right) + \sigma_y \left( -\cos \frac{2i\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{n} \right) - 2 \sigma_{xy} \sin \frac{2i\pi}{n} \leq 2T \cos \frac{\pi}{n} \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n$$

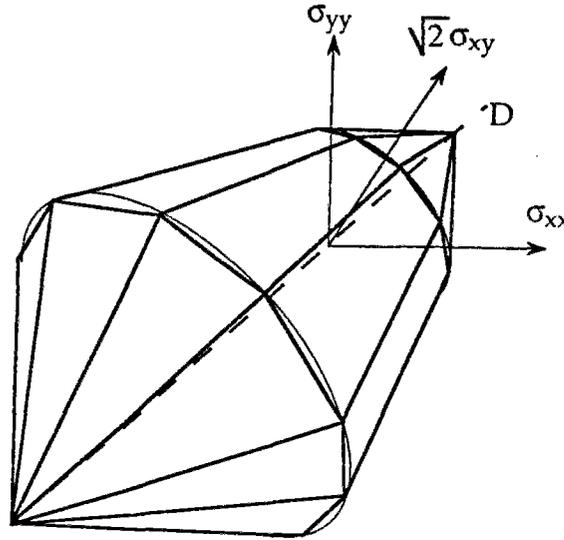


Figure A3 - 3 Critère de résistance linéarisé en contrainte plane (statique)

### A 3 - 1.2 Cas du matériau renforcé par armatures

D'après la forme du critère de résistance, on est amené à introduire le paramètre supplémentaire  $\sigma$  (voir chapitre deux). Le renforcement étant positionné selon la direction Oy, on obtient immédiatement la linéarisation recherchée, d'après la définition statique de  $G^{\text{hom}}$  :

$$\begin{cases} \Sigma_{xx} \left( \cos \frac{2i\pi}{n} + \sin \varphi \cos \frac{\pi}{n} \right) + (\Sigma_{yy} - \sigma) \left( -\cos \frac{2i\pi}{n} + \sin \varphi \cos \frac{\pi}{n} \right) - 2 \Sigma_{xy} \sin \frac{2i\pi}{n} \leq 2(1-\cos\varphi) \sigma_c \cos \frac{\pi}{n} \\ \Sigma_{xx} \left( \cos \frac{2i\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n} \right) + (\Sigma_{yy} - \sigma) \left( -\cos \frac{2i\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n} \right) - 2 \Sigma_{xy} \sin \frac{2i\pi}{n} \leq 2\sigma_c \cos \frac{\pi}{n} \\ \Sigma_{xx} \left( \cos \frac{2i\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{n} \right) + (\Sigma_{yy} - \sigma) \left( -\cos \frac{2i\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{n} \right) - 2 \Sigma_{xy} \sin \frac{2i\pi}{n} \leq 2T \cos \frac{\pi}{n} \\ -\sigma \leq 0 \\ \sigma \leq \sigma_0 \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n$$

## A 3 - 2. Approche cinématique

On examine dans la suite la linéarisation cinématique du critère de Coulomb tronqué en traction en présence d'armatures, le cas homogène s'en déduisant aisément. Comme il a été expliqué dans le chapitre quatre, on doit effectuer la linéarisation d'une part du domaine  $G^{\text{hom}}$ , d'autre part de l'ensemble  $G_{\alpha}^{\text{hom}}$  des vecteurs contraintes admissibles sur une facette de normale  $\underline{n} = \cos\alpha \underline{e}_x + \sin\alpha \underline{e}_y$ .

### A 3 - 2.1 Domaine $G^{\text{hom}}$

Dans le cas de l'approche cinématique, la linéarisation à adopter doit nécessairement constituer une approximation par excès du critère de résistance initial. La méthode de linéarisation est similaire à celle adoptée dans l'approche statique, mais on choisit cette fois des plans tangents au critère original si bien que l'on obtient pour le matériau homogénéisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{xx} (\sin \varphi - \cos \frac{2i\pi}{n}) + (\Sigma_{yy} - \sigma) (\cos \frac{2i\pi}{n} + \sin \varphi) - 2 \Sigma_{xy} \sin \frac{2i\pi}{n} \leq 2(1 - \cos \varphi) \sigma_c \\ \Sigma_{xx} (\cos \frac{2i\pi}{n} - 1) - (\Sigma_{yy} - \sigma) (1 + \cos \frac{2i\pi}{n}) + 2 \Sigma_{xy} \sin \frac{2i\pi}{n} \leq 2\sigma_c \\ \Sigma_{xx} (1 - \cos \frac{2i\pi}{n}) + (\Sigma_{yy} - \sigma) (1 + \cos \frac{2i\pi}{n}) - 2 \Sigma_{xy} \sin \frac{2i\pi}{n} \leq 2T \\ -\sigma \leq 0 \\ \sigma \leq \sigma_0 \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq n$$

### A 3 - 2.2 Domaine $G_{\alpha}^{\text{hom}}$

Pour établir la linéarisation du domaine  $G_{\alpha}^{\text{hom}}$ , on se sert d'une représentation en coordonnées polaires de ce domaine, suivant la figure A3 - 4. On obtient alors la linéarisation suivante :

$$(1) \quad T_x \cos(\alpha + \alpha_k) + T_y \sin(\alpha + \alpha_k) \leq r(\alpha_k) \text{ avec } \alpha_k = \frac{2k\pi}{n}, 0 \leq k \leq n$$

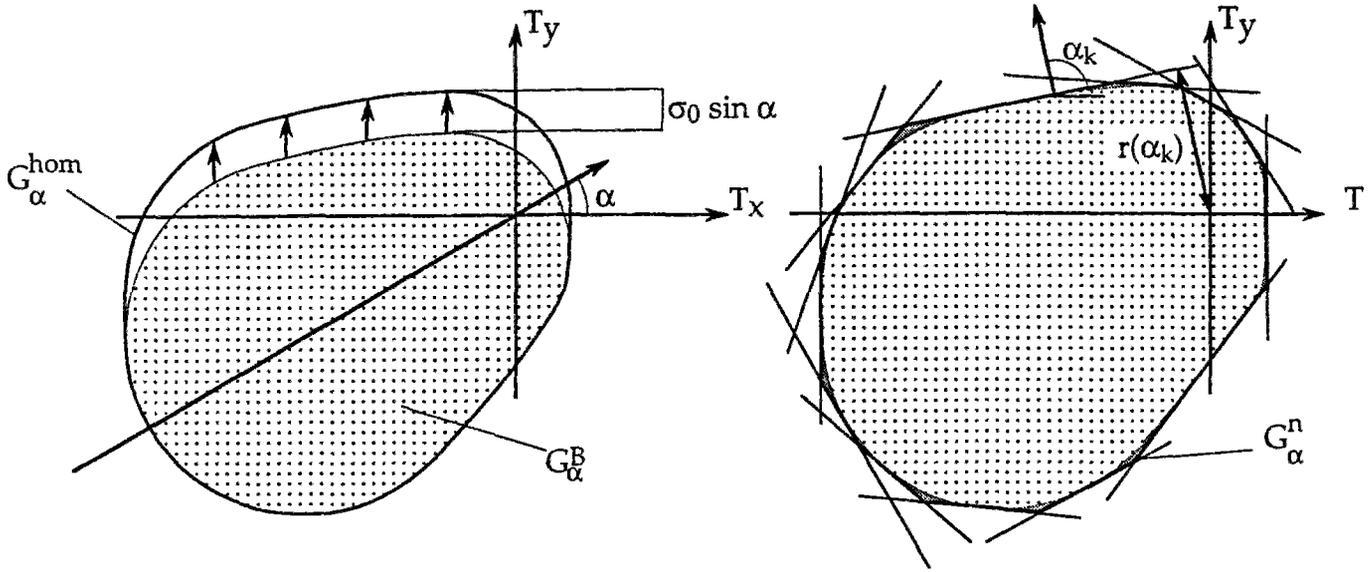


Figure A3 - 4 Linéarisation du domaine  $G_{\alpha}^{hom}$

La définition de la fonction  $r(\alpha_k)$  est ensuite obtenue géométriquement pour des valeurs de  $\alpha$  comprises entre 0 et  $\pi$  (on se restreint à cet intervalle par symétrie) :

- Si  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \varphi$ 
  - Si  $\frac{3\pi}{2} + \varphi \leq \alpha_k \leq 2\pi - \alpha$ ,  $r(\alpha_k) = \frac{1}{2}(T(1-K_r) + \sigma_c) + \frac{1}{2}(T(1+K_r) - \sigma_c)\cos\alpha_k$
  - Si  $2\pi - \alpha \leq \alpha_k \leq \frac{\pi}{2} - \varphi$ ,  $r(\alpha_k) = \frac{1}{2}(T(1-K_r) + \sigma_c) + \frac{1}{2}(T(1+K_r) - \sigma_c)\cos\alpha_k + \sigma_0 \sin(\alpha + \alpha_k)\sin\alpha$
  - Si  $\frac{\pi}{2} - \varphi \leq \alpha_k \leq \pi - \alpha$ ,  $r(\alpha_k) = \frac{\sigma_c}{2}(1 - \cos\alpha_k) + \sigma_0 \sin(\alpha + \alpha_k)\sin\alpha$
  - Si  $\pi - \alpha \leq \alpha_k \leq \frac{3\pi}{2} + \varphi$ ,  $r(\alpha_k) = \frac{\sigma_c}{2}(1 - \cos\alpha_k)$
- Si  $\frac{\pi}{2} - \varphi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} + \varphi$ 
  - Si  $\frac{3\pi}{2} + \varphi \leq \alpha_k \leq \frac{\pi}{2} - \varphi$ ,  $r(\alpha_k) = \frac{1}{2}(T(1-K_r) + \sigma_c) + \frac{1}{2}(T(1+K_r) - \sigma_c)\cos\alpha_k + \sigma_0 \sin(\alpha + \alpha_k)\sin\alpha$
  - Si  $\frac{\pi}{2} - \varphi \leq \alpha_k \leq \pi - \alpha$ ,  $r(\alpha_k) = \frac{\sigma_c}{2}(1 - \cos\alpha_k) + \sigma_0 \sin(\alpha + \alpha_k)\sin\alpha$
  - Si  $\pi - \alpha \leq \alpha_k \leq 2\pi - \alpha$ ,  $r(\alpha_k) = \frac{\sigma_c}{2}(1 - \cos\alpha_k)$
  - Si  $2\pi - \alpha \leq \alpha_k \leq \frac{3\pi}{2} + \varphi$ ,  $r(\alpha_k) = \frac{\sigma_c}{2}(1 - \cos\alpha_k) + \sigma_0 \sin(\alpha + \alpha_k)\sin\alpha$

- Si  $\frac{\pi}{2} + \varphi \leq \alpha \leq \pi$ 
  - Si  $\frac{3\pi}{2} + \varphi \leq \alpha_k \leq \pi - \alpha$ ,  $r(\alpha_k) = \frac{1}{2}(T(1-K_r) + \sigma_c) + \frac{1}{2}(T(1+K_r) - \sigma_c)\cos\alpha_k + \sigma_0\sin(\alpha + \alpha_k)\sin\alpha$
  - Si  $\pi - \alpha \leq \alpha_k \leq \frac{\pi}{2} - \varphi$ ,  $r(\alpha_k) = \frac{1}{2}(T(1-K_r) + \sigma_c) + \frac{1}{2}(T(1+K_r) - \sigma_c)\cos\alpha_k$
  - Si  $\frac{\pi}{2} - \varphi \leq \alpha_k \leq 2\pi - \alpha$ ,  $r(\alpha_k) = \frac{\sigma_c}{2}(1 - \cos\alpha_k)$
  - Si  $2\pi - \alpha \leq \alpha_k \leq \frac{3\pi}{2} + \varphi$ ,  $r(\alpha_k) = \frac{\sigma_c}{2}(1 - \cos\alpha_k) + \sigma_0\sin(\alpha + \alpha_k)\sin\alpha$

## **Bibliographie**

1. **Abdi R. (1992)** Charges limites d'ouvrages en sol renforcé : approches statique et cinématique. Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier. Grenoble.
2. **Abdi R., de Buhan P., Pastor J. (1994)** Calculation of the critical height of a homogenized reinforced soil wall: a numerical approach. *Int. JI for Num. Analyt. Methods in Geomechanics*, V18, p 485-505.
3. **Anthoine A. (1989)** Mixed modelling of reinforced soils within the framework of the yield design theory. *Computers and Geotechnics*. p 67-82.
4. **Ashour A.F., Morley C.T. (1994)** The numerical determination of shear mechanisms in reinforced concrete beams. *The Structural Engineer* Vol 72 N°23-24, Dec, p 395-400.
5. **Ashour A.F., Morley C.T. (1996)** Effectiveness factor of concrete in continuous deep beams. *Jnal of structural engineering* Vol 122 N°2, Feb, p 169-178.
6. **de Buhan P. (1985)** Critère de rupture macroscopique d'un matériau renforcé par armatures. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 301, Série II, n° 9.
7. **de Buhan P. (1986)** Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés. Thèse de Doctorat ès Sc. Université Pierre-et-Marie-Curie.
8. **de Buhan P. (1993)** Application of the yield design theory to the mechanics of reinforced soils. *International Centre for Mechanical Sciences. Evaluation of global bearing capacities of structures*. Ed. by G. Sacchi Landriani and J. Salençon. Springer Verlag 46-90. Courses and lectures N° 332.
9. **de Buhan P., Maghous S. (1995)**, A straightforward numerical method for evaluating the ultimate loads of structures. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 14, N°2, p 309-328.
10. **de Buhan P., Mangiavacchi R., Nova R., Pellegrini G. and Salençon J. (1989)** Yield design of reinforced earth walls by a homogenization method. *Géotechnique* 39, N° 2, p 189-201.
11. **de Buhan P., Salençon J. (1993)**. A comprehensive stability analysis of soil nailed structures *Eur. J. Mech., A/Solids*, 12, N°3, p 325-345.
12. **de Buhan P., Taliercio A. (1991)** A homogenization approach to the yield strength of composite materials. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 10, N°2, p 129-154.
13. **Ceradini G., Gavarini C. (1965)** Calcolo a rottura e programmazione lineare. *Giornale del Genio Civile* n° 1-2.

14. **Chateau X., Dormieux L. (1995)** Homogénéisation d'un milieu poreux non saturé : Lemme de Hill et applications. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 320, Série IIb, p 627-634.
15. **Chen W.F. Drucker DC (1969)** Bearing capacity of concrete blocks or rock. Jnal Eng. Mech. Div. Vol 95 Aug, p 965-978.
16. **Chen W.F. (1970)** Extensibility of concrete and theorems of limit analysis Jnal Eng. Mech. Div. Vol 96 June, p 341-352.
17. **Chen W.F. Covarrubias (1971)** Bearing capacity of concrete blocks. Jnal Eng. Mech. Div. Vol 97 Oct, p 1413-1430.
18. **Chen W.F. (1982)** Plasticity in reinforced concrete. McGraw-Hill.
19. **Chen W.F., Han D.J. (1988)** Plasticity for structural engineers. Springer Verlag, New York.
20. **Ciss A., (1985)** Etude de la stabilité des massifs en sol renforcé par armatures métalliques à l'aide de formulations numériques des méthodes de l'analyse limite. Thèse de doctorat. U.S.M.G.-I.N.P.G., Grenoble.
21. **Dash Associates (1984-1995)** XPRESS-MP reference manual, Blisworth, UK.
22. **Davenne L. (1991)** Modélisation de l'influence des armatures transversales sur le comportement non linéaire d'éléments de béton armé. Thèse de l'Université Paris 6.
23. **Delbecq J. M., Frémond M., Pecker A., Salençon J., (1977)**, Eléments finis en plasticité et viscoplasticité, J. Méc. Appl. Vol 1, p 267-303.
24. **Drucker DC (1956)** The effect of shear on the plastic bending of beams. Journal of Applied Mechanics. Vol 23 Trans. ASME, vol 78, p 509-514.
25. **Drucker DC (1961)** On structural concrete and the theorems of limit analysis. Int. Ass. Bridge Struc. Eng. Pub., Vol 21.
26. **Francescato P. (1994)** Prédiction du comportement plastique des matériaux hétérogènes à constituants métalliques. Application aux composites à matrice métallique à fibres continues et aux plaques perforées. Thèse de l'Université Joseph Fourier. Grenoble.
27. **Frémond M., Friaà A. (1978)** Analyse limite. Comparaison des méthodes statique et cinématique, C.R. Acad. Sci. Paris, 286 Série A, p 107-110.

28. **Frémond M., Pecker A., Salençon J. (1974)** Méthodes variationnelles pour le matériau rigide plastique. Symp franco-polonais "Rhéologie et Mécanique des sols", Nice.
29. **Friàa A. (1978).** Le matériau de Norton-Hoff généralisé et ses applications en analyse limite. C. R. Acad. Sci. Paris, Vol 286, Série A, p 107-110.
30. **Germain P. (1973)** Cours de mécanique des milieux continus. Masson. Paris.
31. **Green A.P. (1954)** A theory of plastic yielding due to bending of cantilevers and beams. Jnal of physics of solids. Vol 3, Part I: 1-15, Part II, p 143-155.
32. **Guennouni T. Le Tallec P. (1982)** Calcul à la rupture : régularisation de Norton-Hoff et lagrangien augmenté. J. Méc. Th. App. Vol 2 n°1, p 75-99.
33. **Guessab B., Turgeman S. (1991)** Generalized strength yield criterion for bar structures. Plasticity 91 Symp. 12-16 août 1991. Grenoble.
34. **Hodge P.G. (1957)** Interaction curves for shear and bending of plastic beams. Journal of applied mechanics. Vol 24 Trans ASME, vol 79 p 453-456.
35. **Jennewein M. (1989)** Zum Bemessen des Stahlbetons mit Stabwerkmodellen. Institut für Tragwerksentwurf und -konstruktion Universität Stuttgart.
36. **Kani G.N.J. (1964)** The riddle of shear failure and its solution, ACI Proceedings, V61, n°4, avril, p 441-454.
37. **Kani G.N.J. (1966)** Basic facts concerning shear failure, ACI Jnal, V63, n°6, p 675-691.
38. **Kobayashi S., Thomsen E. G. (1965)** Upper and lower bound solution in axisymmetric compression and extrusion problems. Int. J. Mech. Sci. V7 (2), p 127-143.
39. **Kong F.K., Robins P., Cole D. (1970)** Web reinforcement effects on deep beams. ACI Journal V67 December, p 1010-1017.
40. **Kordina K., Blume F. (1985)** Empirische Zusammenhänge zur Ermittlung der Schubtragfähigkeit stabförmiger Stahlbetonelemente. Deutscher Ausschluß für Stahlbetonbau Heft 364. TU Braunschweig.
41. **Kordina K., Hegger J. (1987)** Zur Schubtragfähigkeit von Stahlbeton- und Spannbetonbalken. Beton - und Stahlbetonbau. Vol 1, p 5-9.
42. **Kotsovos M. D. (1984)** Behavior of reinforced concrete beams with shear span to depth ratio between 1.0 and 2.5. ACI Jnal. Vol. 81.N° 3, p 279-286.

43. **Kotsovos M. D. (1986)** Behavior of reinforced concrete beams with shear span to depth ratio greater than 2.5. ACI Jnal. Vol. 83.N° 6, p 1026-1034.
44. **Kotsovos M. D. (1988)** Compressive force path concept : basis for reinforced concrete ultimate state design. Aci Jnal. Vol. 85.N° 1, p 68-75.
45. **Kupfer H., Hilsdorf, H., Rusch H. (1969)** Behavior of concrete under biaxial stresses. ACI Journal V66. August, p 656-666.
46. **Maghous S. (1993)** Numerical prediction of ultimate loads: case of von Mises and Tresca materials. Mech. Res. Comm. Vol 20(6), p 467-474.
47. **Marti P. (1985-a)** Basic tools of reinforced concrete beam design. ACI Journal V82, Jan-Feb, p 46-56.
48. **Marti P. (1985-b)** Truss models in detailing. Concrete International, Dec, p 66-73.
49. **Mazars J. (1984)** Application de la mécanique de l'endommagement au comportement et à la rupture du béton de structure. Thèse de Doctorat d'état. Paris.
50. **Mazars J., Pijaudier-Cabot G. (1989)** Continuum damage theory. Application to concrete. Jnal Eng. Mech. V115, Feb, p 345-365.
51. **Minoux (1983)** Programmation mathématique. Théorie et algorithmes. Dunod.
52. **Morrow J. Viest I. M. (1957)** Shear strength of reinforced concrete frame members without web reinforcement. ACI Jnal. Proc. V. 53 No 9, March, p 833-849.
53. **Mörsch E. (1902)** Der Eisenbetonbau, seine Anwendung und Theorie. 3<sup>ème</sup> édition Mc Graw-Hill. New York (1909).
54. **Neal B. G. (1961)** The effect of shear and normal forces on the fully plastic moment of a beam of rectangular cross section. Jnal appl. mech. V28 Trans ASME June, p 269-274.
55. **Nielsen M. P. , Bræstrup M.W., Jensen B.C., Bach Finn, (1978)** Concrete plasticity. Danish society for structural science and engineering. Lingby.
56. **Nielsen M. P. (1984)** Limit analysis and concrete plasticity. Prentice-Hall.
57. **Pastor J. (1978)** Analyse limite : détermination numérique de solutions statiques complètes. Application au talus vertical. Journal de mécanique appliquée, Vol 2, n°2, p 176-196.

58. Pastor J., Abdi R. (1989) Analyse limite et homogénéisation. Approche numérique. 9<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique. Metz.
59. Pastor J. (1983) Application de la théorie de l'analyse limite aux milieux isotropes et orthotropes de révolution. Formulation numérique de l'approche statique par la méthode des éléments finis. Thèse de Doctorat d'Etat, U.S.M.G.-I.N.P.G., Grenoble.
60. Rigolot A. (1972) Sur une théorie asymptotique des poutres. Journal de Mécanique Vol 2, n°4, Dec, p 674-703.
61. Ritter W. (1899) Die Bauweise Hennebique. Schweizerische Bauzeitung (Zürich) V33 n°7, p 59-61.
62. Rogowsky D. MacGregor J. and Ong S. (1986) Tests of reinforced concrete deep beams. ACI Journal V83 July-august, p 614-623.
63. Salençon J. (1983) Calcul à la rupture et analyse limite. Presses de l'ENPC, Paris.
64. Salençon J. (1988) Mécanique des milieux continus. Ellipses, Paris.
65. Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E. (1992) Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation. Masson.
66. Save M. Massonet Ch. (1972) Calcul plastique des constructions. Ed. CBLIA, Bruxelles.
67. Schlaich J. Schäfer K., Jennewein M. (1987) Toward a consistent design of structural concrete. PCI Journal 32,3°, p 74-150.
68. Siao W. B. (1993) Strut-and-Tie model for shear behavior in deep beams and pike caps failing in diagonal splitting. ACI structural journal V90. No. 4 July-August, p 356-363.
69. Siao W. B. (1994) Shear strength of short reinforced concrete walls, corbels and deep beams. ACI structural journal V91. No. 2 March-April, p 123-132.
70. Siao W. B. (1995) Deep beams revisited. ACI structural journal V92. Jan-Feb, p 95-102.
71. Sloan S. W. (1988) Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming. Int. J. Num. Anal. Methods in Geomechanics. V12, p 61-77.
72. Sloan S. W. (1989) Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming. Int. J. Num. Anal. Methods in Geomechanics. V13, p 263-282.

73. **Smith K. N. and Vantsiotis (1982)** Shear strength of deep beams. ACI Journal V79, May-June, p 201-213.
74. **Suquet P. (1983)** Analyse limite et homogénéisation. C. R. Acad. Sci. Paris, 296, série II, p 1355-1358.
75. **Turgeman S. (1983)** Contribution au calcul des charges limites en milieux isotropes et orthotropes de révolution par une approche cinématique numérique. Thèse de Doctorat d'Etat, U.S.M.G.-I.N.P.G., Grenoble.
76. **Ulm F. J. (1994)** Modèle élastoplastique avec endommagement du béton de structures. Application au calcul statique et dynamique de structures en béton armé et béton précontraint. Thèse de Doctorat de l'ENPC.
77. **Vecchio F. and Collins M. (1986)** The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. ACI Journal V83 March-April, p 219 231.





Ce travail est destiné à mettre au point une méthode de dimensionnement à l'État Limite Ultime des structures en béton armé fondée sur le calcul à la rupture. La méthode propose une analyse bidimensionnelle, en contrainte plane, dans laquelle les armatures sont représentées comme des milieux continus unidimensionnels plongés dans le béton considéré comme un milieu continu bidimensionnel (modélisation mixte). Appliquant la méthode à la prise en compte de l'effort tranchant dans le dimensionnement des poutres en flexion, on propose de modéliser le renforcement transversal des poutres par la procédure d'homogénéisation en calcul à la rupture, tout en conservant une modélisation discrète des armatures longitudinales. Ayant choisi des critères de résistance simplifiés pour le béton et les armatures, on montre ensuite les limites d'une approche unidimensionnelle du dimensionnement des poutres par le calcul à la rupture. On développe donc une approche numérique fondée sur la programmation linéaire dans le cadre de la méthode des éléments finis. Cette dernière approche permet ainsi d'évaluer l'influence de l'effort tranchant sur la résistance des poutres et de déterminer le domaine de validité de l'approche unidimensionnelle proposée précédemment. La modélisation et l'approche numérique sont finalement validées par comparaison avec des résultats expérimentaux.

This work is devoted to the implementation of a method based on limit analysis for the Ultimate State Design of reinforced concrete structures. This method is based on a 2D analysis in plane stress in which the reinforcement bars are represented by 1D continua embedded in the 2D continuum describing the concrete (mixed modelling). Dealing with the shear design of reinforced concrete beams, we model the transverse reinforcement (stirrups) using an homogenization procedure for limit analysis, while keeping a discrete representation for the longitudinal reinforcement. After choosing yield criteria for the concrete and the reinforcement bars, we show the limits of a 1D approach for the design of beams. We therefore implement a numerical approach that is based on linear programming, within the framework of the finite element method. This latter approach allows us to evaluate the influence of shear on the strength of beams and to determine the field of validity of the 1D approach. The model and numerical approach are eventually validated by comparison of calculations with experimental results.

Mots-clés : Béton armé, État Limite Ultime, calcul à la rupture, modélisation mixte, homogénéisation, approche numérique, modélisation poutre, effort tranchant.