HAL
open science

Modélisation numérique bidimensionnelle des écoulements en rivière : Application à l'étude des rejets thermiques

Dominique Mary

▶ **To cite this version:**

Dominique Mary. Modélisation numérique bidimensionnelle des écoulements en rivière : Application à l'étude des rejets thermiques. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1982. Français. NNT : . tel-00523027

HAL Id: tel-00523027

https://pastel.hal.science/tel-00523027

Submitted on 4 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

10943
N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

NS 10803
NS 10803 G

THESE DE DOCTEUR-INGENIEUR

présentée

à l'ECOLE NATIONALE des PONTS et CHAUSSEES

par

Dominique MARY

POUR OBTENIR LE TITRE DE DOCTEUR-INGENIEUR

ÉCOLE NATIONALE

SUJET DE LA THESE :

MODELISATION NUMERIQUE BIDIMENSIONNELLE DES ECOULEMENTS EN RIVIERE
APPLICATION A L'ETUDE DES REJETS THERMIQUES

SOUTENUE LE 30 JUIN 1982

DEVANT LE JURY COMPOSE DE :

MM. LEBRETON Président

COMOLET
POCHAT
BOULOT Examinateurs
BENQUE
NICOLLET

E.N.P.C.
DOC10923

17 M

à David de SASSOUN
et ses émules

– *Les hommes de chez toi, dit le petit prince, cultivent cinq cent mille roses dans un même jardin... et ils n'y trouvent pas ce qu'ils cherchent...*

– *Ils ne le trouvent pas, répondis-je...*

– *Et pourtant ce qu'ils cherchent pourrait être trouvé dans une seule rose ou un peu d'eau...*

Antoine de Saint-Exupéry
(Le Petit Prince)

Cette thèse a été préparée sous l'égide de
l'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES
grâce à une bourse de recherche attribuée par l'École.
Elle a été terminée grâce à l'aide financière complémentaire
accordée par la SOCIETE HYDROTECHNIQUE de FRANCE

Je remercie vivement Monsieur BENQUE qui a accepté de diriger cette thèse pour son aide constante et la qualité de ses conseils.

Je remercie Monsieur BOULOT de m'avoir permis d'entreprendre ce travail au Laboratoire National d'Hydraulique d'Electricité de France.

Je remercie Messieurs NICOLLET et HAUGUEL, chefs des Divisions Hydraulique fluviale et Recherche du L.N.H. qui ont bien voulu mettre à ma disposition les moyens et les techniques de leurs divisions.

Ma gratitude va à Monsieur LEBRETON qui a bien voulu présider le jury ainsi qu'à Messieurs COMOLET et POCHAT qui ont accepté d'en faire partie.

Je suis très reconnaissante envers l'ensemble du personnel du L.N.H. pour les aides permanentes que j'ai pu y rencontrer. Faute de pouvoir citer tout le monde, je ne nommerai que Madame DAUBERT, Messieurs DORANDEU et BOUCHARD, ainsi que Madame BISCH mais que tous soient autant remerciés.

Je remercie par ailleurs Mademoiselle THARDIVON, du service de la recherche de l'E.N.P.C pour sa disponibilité et son habileté à résoudre les problèmes administratifs.

Je remercie Mesdames JEANJEAN et MOREAU pour le soin qu'elles ont apporté à la réalisation pratique de ce mémoire.

je remercie enfin tous ceux qui, ne serait-ce que par un sourire, ont su m'aider à surmonter les découragements passagers qu'induit le travail de chercheur.

R E S U M E

Le travail essentiel de cette thèse réside dans l'élaboration d'un modèle mathématique permettant de calculer l'écoulement puis les pollutions thermiques ou chimiques en rivière. Les équations résolues sont les équations de Saint-Venant avec une hypothèse supplémentaire de "plafonnage" de la surface ("rivière à plafond"). La résolution utilise une méthode de différences finies avec un algorithme de pas fractionnaires. La discrétisation se fait sur un maillage curviligne à pas variable. Le modèle est conçu pour s'adapter à une géométrie quelconque sans ilôt. Il a été testé de façon satisfaisante sur trois cas de figures présentant un degré de difficulté croissante.

Mots clés :

Mécanique des fluides, écoulements fluviaux, modèle mathématique, analyse numérique, équation de Saint-Venant, rivière à plafond, maillage curviligne, différences finies, pas fractionnaires, mesures de vitesses, mesures thermiques.

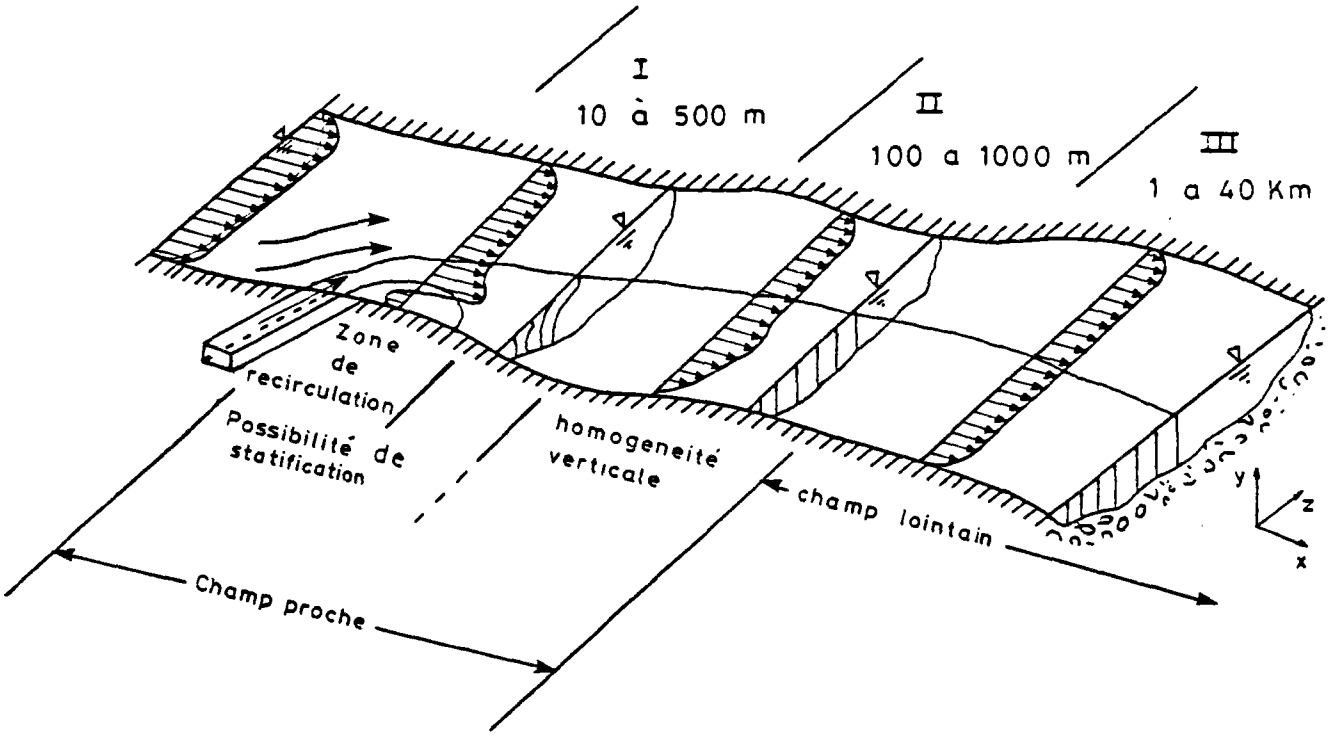
INTRODUCTION

La sensibilisation de l'opinion publique aux problèmes d'environnement a amené, ces dernières années, Electricité de France à développer son champ de recherche dans l'étude des phénomènes de rejet : rejet de polluant en mer, en rivière ou en atmosphère, panaches de vapeur d'eau des tours de réfrigération atmosphérique, tâches thermiques provenant des rejets d'eau chaude produits par la réfrigération des centrales thermiques.

Le rejet de polluants thermiques ou chimiques en rivière crée une tâche de concentration qui s'étale sur plusieurs kilomètres. Pour cette raison se développent actuellement des modèles mathématiques simulant l'extension d'une tâche et par conséquent l'impact d'un rejet de polluant sur la qualité de l'eau. De tels modèles doivent être capables de prédire dans chaque cas de figure considéré (géométrie de la rivière, configuration du rejet...) la distribution de la concentration du polluant avec un degré de précision suffisant pour des utilisations pratiques. Pour cela, il est nécessaire de bien connaître la répartition du champ de vitesse de l'écoulement, qui sera donc, dans la plupart des cas calculée par modèle mathématique.

Une brève description du comportement d'un écoulement au voisinage d'un rejet est nécessaire à ce stade pour cerner le problème numérique. Envisageons par exemple le cas d'un rejet latéral. Sur le schéma suivant [37] on voit que le jet est dévié par l'écoulement principal tandis que ce dernier est éloigné de la rive par le rejet. Il s'ensuit la formation d'un tourbillon à l'aval proche du rejet le long de la rive.

En plus de l'apparition d'une zone de recirculation, l'écoulement au voisinage du rejet est généralement compliqué par l'apparition d'effets tri-dimensionnels provoqués, soit par la géométrie du rejet, soit par une stratification due à une différence de densité des fluides (cas d'un rejet chaud par exemple). Généralement cette stratification disparaît rapidement sous l'action de la turbulence et l'écoulement retrouve un aspect d'uniformité verticale comme le montre ce schéma :



Dans une région de type II seule la répartition horizontale des grandeurs physiques présente un intérêt, aussi le problème peut être traité par un modèle bi-dimensionnel. Cette conclusion serait fausse en présence de fortes irrégularités du fond de la rivière ou de courbure en plan prononcé de l'écoulement.

Nous limitant à l'étude de la zone II d'un écoulement avec rejet dans une rivière présentant des fonds irréguliers et peu de courbure, nous pouvons raisonnablement envisager d'utiliser un modèle mathématique bi-dimensionnel pour décrire les phénomènes d'expansion de tâche.

Le modèle mathématique est d'abord validé sur le plan dynamique dans un cas un peu difficile - un bief de l'Aube - où il est comparé à des mesures ainsi qu'à un précédent calcul. Un second calcul est ensuite présenté dans lequel on a modélisé un rejet de polluant dans le canal de Miribel, dans le cadre d'une étude de pollution commandée par le service de navigation de Lyon. En dernier lieu, nous avons procédé à une série d'essais sur modèle physique afin d'obtenir des mesures de tâches thermiques dans un canal en s.

La fiabilité de ces mesures sur modèle physique nous permet de valider le calcul de l'étalement de la tâche.

Le lecteur trouvera dans ce qui suit une première partie consacrée à l'élaboration des équations physiques utilisées pour la description des phénomènes. Une hypothèse originale fait que ces dernières ne sont pas exactement équivalentes aux équations de Saint-Venant.

La seconde partie traite essentiellement de l'aspect numérique de la résolution de ces équations. Une des particularités de ce traitement est l'utilisation d'un maillage curviligne par une méthode récemment développée pour la résolution des équations de la mécanique des fluides.

Enfin, la troisième partie confronte les résultats du calcul avec les mesures disponibles sur chaque cas traité. On y trouve également les résultats des mesures effectuées sur modèle physique, ainsi que la description des essais réalisés sur ce dernier.

NOTATIONS

Repère

Le repère d'étude O x y z est attaché au plan tangent à la sphère terrestre en O, l'axe étant orthogonal à ce plan.

Constantes physiques

g	accélération de la pesanteur
μ	viscosité de cisaillement
η	viscosité de dilatation
$\nu = \frac{\mu}{\rho}$	viscosité cinématique
λ	coefficient de conductivité thermique
Cp	chaleur massique à pression constante
β	coefficient de dilatation cubique à pression constante
Ks	coefficient de rugosité de Strickler
C	coefficient de rugosité de Chezy
ρ	masse volumique
K_a	constante de Von Karmannn

Dimensions

t	temps
x,y,z	grandeurs d'espace respectivement dans la 1ère, 2ème et 3ème direction (z est sur la verticale)
$\vec{n}$	vecteur normal à la trajectoire (ou bien à la frontière)
$\vec{\tau}$	vecteur tangent à la trajectoire (ou bien à la frontière)
$\vec{N}$	vecteur normal au plan horizontal o x y.

Variables physiques

$\vec{U},\vec{V}$	vitesse
u,v,w	composantes de la vitesse dans le repère O x y z
p	pression
$p^* = p + \rho g z$	
$p^{*'} = p^* + \frac{2}{3} k = p + \rho g z + \frac{2}{3} k$	
θ	température
ψ	fonction de courant

Autres grandeurs physiques

σ, σ_{ij}	tenseur des contraintes du fluide
ε, ε_{ij}	tenseur des déformations
$e = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}$	taux de dilatation cubique
τ, τ_{ij}	tenseur des contraintes visqueuses
E	énergie interne par unité de masse
$\emptyset$	fonction de dissipation par frottement
τ_1	contrainte tangentielle horizontale
τ_o	contrainte tangentielle horizontale sur le fond
h	tirant d'eau

Changement de variables

ξ, η	dimension d'espace dans le plan associé au plan O x y
Ω	élément de surface dans le plan O x y
$\hat{\Omega}$	élément de surface associé à Ω dans le plan (ξ,η)
J	jacobien de la transformation entre les plans O x y et (ξ,η)
u',v'	composante de la vitesse dans le plan (ξ,η)

Bornes d'intégration

D	volume
dv	élément de volume
Ω_o	surface
$d\omega$	élément de surface
γ_o	contour
ds	élément de contour
Z_F	cote du fond
Z	cote de la surface
Γ_1	portion de frontière amont
Γ_2	portion de frontière comprenant les rives
Γ_3	portions de frontière amont et aval
Γ_T	frontière
Δt	pas de temps des équations thermiques
$\Delta t'$	pas de temps des équations dynamiques (généralement $\Delta t' = \Delta t$)

Grandeurs de turbulence

$-$	la barre est le symbole de l'intégration en temps : $\overline{G}$ est la moyenne temporelle durant T_o de la grandeur G.
t_{ij}	tenseur contenant la moyenne temporelle du terme de viscosité moléculaire et le tenseur de Reynolds
$t_{\theta i}$	équivalent de t_{ij} pour l'équation thermique
k	énergie turbulente
νt	viscosité turbulente
l	longueur de mélange
u^*	vitesse de frottement
Γ	viscosité thermique turbulente
α	coefficient de frottement modélisant la couche limite

Grandeur de dispersion

$\sim$	c'est le symbole de l'intégration en espace sur la verticale : $\tilde{G}$ est la moyenne verticale sur la hauteur h de la grandeur G.
T_{ij}	tenseur contenant la moyenne verticale du tenseur t_{ij} et le tenseur de dispersion.
$T_{\theta i}$	équivalent de T_{ij} pour l'équation thermique.
ν_o	viscosité "turbulente" intégrée
α_o	coefficient de forme modélisant la dispersion
Γ_o	viscosité thermique "turubulente" intégrée
$\overline{\overline{K}}$, K_{ij}	tenseur de dispersion thermique

Variables intermédiaires

$\vec{U}^o$ (Uo, Vo)	vitesse issue de l'étape de convection
θ^o	température issue de l'étape de convection
$\vec{U}$ aux (Uaux, Vaux)	vitesse issue de l'étape de diffusion.
$\vec{U}^n$ (u^n, v^n)	vitesse calculée au bout de n pas de temps
θ^n	température calculée au bout de n pas de temps

Nombres Adimensionnels

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho} g H}}$$ Nombre de Froude réduit

$$\zeta = \frac{z}{h}$$

Symboles

δ_{ij} symbole de Kronecker

Le — représente une moyenne temporelle. Le $\sim$ représente une moyenne sur la verticale. Généralement un ' indique une fluctuation de la grandeur par rapport à la valeur moyennée. On utilise la convention d'Einstein pour les sommations.

PLAN GENERAL

Pages

Introduction

Notations

1 - Première partie : Approche physique du phénomène étudié 7

1.1 - Présentation des équations ; rappels 7

1.2 - Intégration en temps - Equation de Reynolds 10

1.3 - Intégration sur une dimension d'espace - Equations de Saint-Venant 12

1.4 - Hypothèses introduites à propos de la résolution des équations de Saint-Venant 14

1.5 - Ecriture définitive des équations..... 21

2 - Deuxième partie : Approche numérique du phénomène étudié 27

2.1 - Le maillage curviligne 27

2.2 - Traitement des équations 36

2.3 - Les conditions aux limites 47

2.4 - Traitement de la pression 56

2.5 - Détermination des paramètres de calcul 63

3 - Troisième partie : Comparaison des résultats numériques avec des résultats de mesures 77

3.1 - Introduction générale 77

3.2 - Etude dynamique d'un bief de l'Aube 77

3.3 - Etude d'un rejet accidentel de polluant dans le canal de Miribel..... 89

3.4 - Etude d'un rejet chaud en comparaison avec des mesures sur un canal théorique en s 113

Conclusion 143

Pages

Références bibliographiques 149

Liste des figures 153

Annexes :

A.1 : Obtention des équations de Saint-Venant par intégration des équations de Reynolds sur une hauteur

A.2 : Considérations sur la prise en compte du tenseur de dispersion

A.3 : Détermination du coefficient de Strickler

A.4 : Inventaire de quelques méthodes de génération d'un maillage curviligne

A.5 : Discrétisation de div ($\bar{\bar{K}}$ $\overrightarrow{\text{grad}}$ Θ) en neuf points sur une grille à pas variables avec changement de coordonnées.

A.6 : Elimination des points de bord pour satisfaire à la condition $\overrightarrow{\text{grad}}\ \Theta . \vec{n} = 0$. Discrétisation et considérations numériques.

A.7 : Quelques problèmes pratiques posés par la prise en compte numérique des conditions aux limites

A.8 : Discrétisation de la pression.

PREMIERE PARTIE

APPROCHE PHYSIQUE DU PHENOMENE ETUDIE

Pages

1.1 - Présentation des équations - Rappels 7

1.1.1 - Bilan de masse 7

1.1.2 - Bilan de quantité de mouvement 7

1.1.3 - Bilan d'énergie 8

1.2 - Intégration en temps - Les équations de Reynolds 10

1.3 - Intégration sur une dimension d'espace - Les équations de Saint-Venant 12

1.4 - Hypothèses introduites à propos de la résolution des équations de Saint-Venant 14

1.4.1 - Hypothèses sur les termes contenant τ_{ij} et $\widetilde{u'_i u'_j}$ 14

1.4.2 - Hypothèses sur les termes $\tau_{iz}(Z)$ et $\widetilde{\tau_{iz}(Z_f)}$ 17

1.4.3 - Hypothèses sur les termes contenant $\widetilde{u'_i \theta'}$ et $\tau_{\theta j}$ 18

1.4.4 - Hypothèses supplémentaires propres au modèle 20

1.5 - Ecriture définitive des équations 21

I - Première partie : approche physique du phénomène étudié

1.1 - Présentation des équations - Rappels

Nous étudions a priori le cas d'un fluide classique, c'est-à-dire homogène et isotrope, newtonien.

Les équations que nous présentons dans la suite de ce paragraphe sont des équations ponctuelles.

1.1.1 - Bilan de masse

Ce bilan se traduit par :

$$\frac{d}{dt}\iiint_D \rho dv = \iiint_D \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \overrightarrow{\rho V}\right) dv = 0$$

D'où la forme locale de l'équation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \overrightarrow{V} = 0$$

Si nous supposons le fluide incompréssible - hypothèse tout à fait justifiée dans le cas de l'eau aux températures et pressions étudiées (*) - l'équation précédente se ramène à :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{V} = 0$$

1.1.2 - Bilan de quantité de mouvement

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un domaine D quelconque du fluide que l'on suit dans son mouvement s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left[\rho \overrightarrow{V}\right]_D = \left[\overrightarrow{Fe}\right]_D$$

où $\overrightarrow{Fe}$ force extérieure appliquée au domaine D peut se décomposer comme la somme des forces de volume $\overrightarrow{F}$ et des forces de surface $\overrightarrow{T}$:

$$\left[\overrightarrow{Fe}\right]_D = \left[\rho \overrightarrow{F}\right]_D + \left[\overrightarrow{T}\right]_S$$

Nous supposerons que les seules forces de volume auxquelles est soumis le fluide proviennent de l'attraction terrestre. La force $\overrightarrow{F}$ dérive donc d'un potentiel U qui est en l'occurence : $U = gz$

d'où $\overrightarrow{F} = - \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, gz$

Par ailleurs, les forces de surface ont pour composantes :

$$Ti = \frac{\partial}{\partial xj} \sigma ij$$

où $\overline{\overline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes du fluide.

(*) température de l'ordre de 15°C et pression atmosphérique.

Puisque nous faisons l'hypothèse d'un fluide newtonien :

$$\sigma ij = - p\,\delta ij + \tau\, ij = - p\,\delta ij + 2\mu\ \varepsilon ij + \eta\,\delta\, ij$$

On obtient alors l'équation vectorielle de Lamb :

$$\rho\,\frac{d\vec{V}}{dt} = - \rho\ \overrightarrow{grad}\ gz - \overrightarrow{grad}\ p + \mu\ \Delta\vec{V} + (\mu + \eta)\ \ \overrightarrow{grad}\ (div\ \vec{V})$$

qui se réduit aux équations de Navier-Stokes dans le cas d'un fluide incompressible ($div\ \vec{V} = 0$) :

$$\begin{cases} \rho\,\dfrac{du}{dt} = - \rho g\,\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu\ \Delta u \\[2ex] \rho\,\dfrac{dv}{dt} = - \rho g\,\dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{\partial p}{\partial y} + \mu\ \Delta v \\[2ex] \rho\,\dfrac{dw}{dt} = - \rho g - \dfrac{\partial p}{\partial z} + \mu\ \Delta w \end{cases}$$

Nous introduisons ici la pression $P^{*} = p + \rho gz$

Par ailleurs, nous développons les premiers membres des équations et négligeons les forces de Coriolis étant donné l'ordre de grandeur des domaines considérés (*).

D'où la forme suivante de l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial ui}{\partial t} + uj\,\frac{\partial ui}{\partial xj} = -\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial P^{*}}{\partial xi} + \nu\,\Delta ui \ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

avec $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ viscosité cinématique

L'équation (1) peut encore s'écrire compte tenu de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial ui}{\partial t} + \frac{\partial ujui}{\partial xj} = -\ \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial P^{*}}{\partial xi} + \nu\ \Delta ui$$

1.1.3 - Bilan d'énergie

Le premier principe de la thermodynamique nous dit que la variation dans le temps de l'énergie interne et de l'énergie cinétique du fluide est compensée par la puissance mécanique et calorifique fournie par l'extérieur.

(*) dimensions maximales variant de 30 m à 1 km.

En supposant que la puissance calorifique provienne uniquement des effets de conduction thermique à travers la surface limitant le domaine étudié, l'équation ponctuelle de bilan énergétique s'écrit : [11]

$$\rho \frac{dE}{dt} + p \operatorname{div} \vec{V} = \emptyset + \operatorname{div} (\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Theta) \ldots\ldots.(2)$$

On peut également écrire le premier membre de l'équation (2) sous la forme [11] :

$$\rho Cp \frac{d\Theta}{dt} - \beta \frac{dp}{dt} = \emptyset + \operatorname{div} (\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Theta)$$

$\emptyset$ est la fonction de dissipation par frottement visqueux interne :

$$\emptyset = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial ui}{\partial xj} + \frac{\partial uj}{\partial xi}\right)^2$$

Nous la négligeons devant les transferts thermiques.

β est le coefficient de dilatation thermique à pression constante aux températures du domaine d'étude (de 10°C à 20°C), son ordre de grandeur est de 10^{-4} °C^{-1}.

Comme par ailleurs d'après l'hypothèse de Boussinesq la dérivée en temps d'une petite variation de pression $\frac{d\delta p}{dt}$ est du même ordre de grandeur que $\delta p \operatorname{div} \vec{V}$, nous négligeons en définitive le terme $\beta \frac{dp}{dt}$ devant les autres termes de l'équation.

Vu les ordres de grandeurs des domaines des cas étudiés on considère la conductivité thermique λ comme constante et il vient, en définitive :

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\lambda}{\rho Cp} \Delta \Theta$$

Le système d'équations obtenu s'écrit :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x} + \nu \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial y} + \nu \Delta v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial z} + \nu \Delta w \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial u\Theta}{\partial x} + \frac{\partial v\Theta}{\partial y} + \frac{\partial w\Theta}{\partial z} = \frac{\lambda}{\rho Cp} \Delta \Theta \quad (*) \end{cases}$$

Les cinq inconnues de ce système sont u, v, w, P^* et Θ

(*) Nous avons implicitement choisi de nous intéresser à un traceur thermique. Toutefois l'équation obtenue dans le cas d'un traceur chimique inerte s'écrit exactement sous la même forme en remplaçant Θ par la concentration C du traceur et $\frac{\lambda}{\rho Cp}$ par un coefficient de diffusion D. Nous pourrons donc envisager indifféremment de traiter l'un ou l'autre type de polluant en effectuant la substitution indiquée.

1.2 - Les équations de Reynolds - Intégration en temps

Les écoulements que nous sommes amenés à étudier ne sont généralement pas laminaires. Or, les équations de Navier-Stokes qui pourraient nous fournir une solution exacte turbulente ne peuvent actuellement être résolues même par les plus gros ordinateurs existant. Nous utilisons alors une approche statistique et décomposons, d'après Reynolds, chaque grandeur sous la forme d'une valeur moyenne plus une valeur fluctuante, le temps d'intégration To étant long par rapport à l'échelle de temps de la turbulence :

$$G = \overline{G} + G' \ldots (4)$$

avec $\overline{G} = \frac{1}{To} \int_{T}^{T+To} G\, dt$ et $\int_{T}^{T+To} G' dt = 0$

Pour un fluide icompressible $\frac{d\rho}{dt} = 0$. La décomposition sous la forme (4) ne porte donc que sur les cinq grandeurs thermodynamiques : u, v, w, p^* et Θ.

En intégrant les équations (3) entre l'instant T et l'instant T + To(*) elles s'écrivent :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \\
&\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p^*}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{u'^2}\right) \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{u'w'}\right) \\
&\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}\bar{w}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p^*}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \overline{u'v'}\right) \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \overline{v'^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \overline{v'w'}\right) \\
&\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}\bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p^*}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \overline{u'w'}\right) \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \overline{v'w'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - \overline{w'^2}\right) \\
&\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}\bar{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}\bar{\theta}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{\rho Cp}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} - \overline{u'\theta'}\right) \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda}{\rho Cp}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} - \overline{v'\theta'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda}{\rho Cp}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \overline{w'\theta'}\right)
\end{aligned}\right.$$

(*) On rappelle la formule d'intégration sous le signe somme :

$$\frac{\partial}{\partial i}\int_{ko}^{kl} G.dk = \int_{ko}^{kl} \frac{\partial G}{\partial i}\, dk + G(kl)\frac{\partial kl}{\partial i} - G(ko)\frac{\partial ko}{\partial i}$$

Ce système comporte de nouvelles inconnues de type $\overline{u'iu'j}$ (tensions de Reynolds), $\overline{u'i\theta'}$. Il n'est plus fermé.

Nous poserons $tij = \nu \frac{\partial ui}{\partial xj} - \overline{u'iu'j}$

On admet généralement que le terme de viscosité moléculaire est négligeable devant la tension de Reynolds.

d'où $tij \simeq - \overline{u'iu'j}$

De même, en ce qui concerne l'équation bilan d'énergie on est amené à écrire :

$$t\theta i = \frac{\lambda}{\rho Cp} \frac{\partial \theta}{\partial xi} - \overline{u'i\theta'} \simeq - \overline{u'i\ \theta'}$$

Pour la fermeture du problème, il est nécessaire d'introduire de nouvelles hypothèses sur ces inconnues. Pour l'instant nous conservons l'écriture en tij, tθi. Comme tous les autres termes des équations comportent une -, nous omettons par la suite ce signe et écrivons finalement :

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial ui}{\partial t} + \frac{\partial ui\ uj}{\partial xj} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial xi} + \frac{\partial}{\partial xj} (tij) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial ui\theta}{\partial xi} = \frac{\partial}{\partial xi} (t\theta i) \end{cases}$$

1.3 - Les équations de Saint-Venant - Intégration sur une dimension d'espace

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, nous allons restreindre notre champ d'étude à une zone située en aval du rejet, suffisamment éloignée de ce dernier pour qu'en écoulement non stratifié (*) on puisse considérer que les phénomènes sont de nature presque bi-dimensionnelle.

Dans ce cas là, on admet que sur une même verticale la loi de répartition des grandeurs est connue. On peut alors envisager de décomposer chaque grandeur comme la somme de sa valeur moyenne sur la verticale et d'un écart à cette valeur :

$$G = \tilde{G} + G' \quad .....(6)$$

$$\tilde{G} = \frac{1}{h} \int_{Zf}^{Z} G.dz \qquad \text{et} \qquad \int_{Zf}^{Z} G'dz = 0$$

Zf = cote du fond

Z = cote de la surface libre

h = Z - Zf

On émet généralement à ce stade une première hypothèse concernant la composante verticale de l'écoulement.

On suppose que le terme d'accélération verticale d'une particule :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial wu}{\partial x} + \frac{\partial wv}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z}$$

et les termes des viscosité verticaux sont négligeables devant l'accélération de la pesanteur (contenue dans P^*).

La troisième équation dynamique devient :

$$\frac{\partial P^*}{\partial z} = 0$$

(*) On vérifie expérimentalement qu'un écoulement est non stratifié pour (A ce sujet consulter [49]).

$$Fr = \frac{u_o}{\sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho} g\, h_o}} > 7$$

u_o = vitesse moyenne de l'écoulement

h_o = hauteur moyenne du canal

$\frac{\Delta\rho}{\rho}$ = écart relatif des masses volumiques des masses d'eau chaude et froide

A 10°C pour un écart de température de 5°C on a $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 6.10^{-4}$

La condition pour Fr s'écrirait alors pour un écoulement de 5 m de tirant d'eau $u_o > 1,2$ m/s.

On peut alors écrire :

$\forall z \in [Zf, Z] \qquad P^*(z) = P^*(Z)$

soit $P(z) + \rho g z = P(Z) + \rho g Z$

d'où : $P(z) = P(Z) + \rho g (Z-z)$

Nous reviendrons plus loin sur l'importance de cette écriture.

Cette hypothèse est assez bien vérifiée loin des bords pour une rivière dont les fonds ne varient pas trop vite, lorsque les lignes de courant sont à courbure relativement faible et que la surface libre est presque horizontale (*).

En remplaçant dans le système d'équation (5) les grandeurs u, v, P^* et θ par leur expression sous la forme (6) et en intégrant ces équations locales sur une verticale, on obtient (voir annexe A.1) :

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial \widetilde{uh}}{\partial x} + \dfrac{\partial \widetilde{vh}}{\partial y} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial \tilde{u}h}{\partial t} + \dfrac{\partial \tilde{u}^2 h}{\partial x} + \dfrac{\partial \widetilde{\tilde{u}\tilde{v}h}}{\partial y} + \dfrac{\partial \widetilde{u'^2 h}}{\partial x} + \dfrac{\partial \widetilde{u'v'h}}{\partial y} = \dfrac{\partial h t11}{\partial x} + \dfrac{\partial h \widetilde{t12}}{\partial y} - \dfrac{1}{\rho} h \dfrac{\partial P^*}{\partial x} \\[2ex]
\qquad\qquad - t_{11}(Z) \dfrac{\partial Z}{\partial x} - t_{12}(Z) \dfrac{\partial Z}{\partial y} \\[2ex]
\qquad + t_{11}(Zf) \dfrac{\partial Zf}{\partial x} + t_{12}(Zf) \dfrac{\partial Zf}{\partial y} + t_{13}(Z) - t_{13}(Zf) \\[2ex]
\dfrac{\partial \tilde{v}h}{\partial t} + \dfrac{\partial \widetilde{\tilde{u}\tilde{v}h}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tilde{v}^2 h}{\partial y} + \dfrac{\partial \widetilde{u'v'h}}{\partial x} + \dfrac{\partial \widetilde{v'^2 h}}{\partial y} = \dfrac{\partial h \widetilde{t21}}{\partial x} + \dfrac{\partial h \widetilde{t22}}{\partial y} - \dfrac{1}{\rho} h \dfrac{\partial P^*}{\partial y} \\[2ex]
\qquad\qquad - t_{21}(Z) \dfrac{\partial Z}{\partial x} - t_{22}(Z) \dfrac{\partial Z}{\partial y} \\[2ex]
\qquad + t_{21}(Zf) \dfrac{\partial Zf}{\partial x} + t_{22}(Zf) \dfrac{\partial Zf}{\partial y} + t_{23}(Z) - t_{23}(Zf) \\[2ex]
\dfrac{\partial \tilde{\theta}h}{\partial t} + \dfrac{\partial \widetilde{\tilde{u}\tilde{\theta}h}}{\partial x} + \dfrac{\partial \widetilde{\tilde{v}\tilde{\theta}h}}{\partial y} + \dfrac{\partial \widetilde{u'\theta'h}}{\partial x} + \dfrac{\partial \widetilde{v'\theta'h}}{\partial y} = \dfrac{\partial h \widetilde{t\theta x}}{\partial x} + \dfrac{\partial h \widetilde{t\theta y}}{\partial y} \\[2ex]
\qquad\qquad - t\theta x(Z) \dfrac{\partial Z}{\partial x} - t\theta y(Z) \dfrac{\partial Z}{\partial y} + t\theta x(Zf) \dfrac{\partial Zf}{\partial x} + t\theta y(Zf) \dfrac{\partial Zf}{\partial y} \\[2ex]
\qquad\qquad + t\theta z(Z) - t\theta z(Zf)
\end{array}\right.$$

(*) En effet lorsqu'un courant fluide rencontre un obstacle incliné il apparaît une déformation de la surface libre qui engendre des recirculations et donc des vitesses verticales non négligeables sur une largeur égale à 1 ou 2 fois le tirant d'eau. Ces vitesses verticales sont d'autant plus fortes que la courbure des lignes de courant est forte : c'est le phénomène des courants secondaires.

Ces équations font apparaître de nombreuses nouvelles inconnues. La fermeture du problème nécessite alors de nouvelles hypothèses. Parmi celles que nous allons formuler, certaines sont courantes, d'autres propres à notre modélisation des phénomènes physiques.

1.4 - Hypothèses introduites à propos de la résolution des équations de Saint-Venant

1.4.1 - Hypothèse sur les termes contenant t_{ij} et $\widetilde{u'_i u'_j}$

L'intégration sur la hauteur fait apparaître un tenseur :

$$T_{ij} = h\tilde{t}_{ij} - h\widetilde{u'_i u'_j}$$

dans lequel on distingue, d'une part le tenseur de Reynolds intégré sur la hauteur et d'autre part un terme provenant des fluctuations des vitesses autour de leurs valeurs verticales moyennes que l'on appelle tenseur de dispersion.

La fermeture du problème exige la modélisation de ces deux termes. Envisageons tout d'abord le premier.

Une modélisation classique du tenseur de Reynolds, introduite par Boussinesq (1877) consiste à établir une analogie entre le tenseur des contraintes visqueuses et le tenseur turbulent de Reynolds en écrivant :

tenseur des contraintes : $\sigma_{ij} = (-p + \eta e)\,\delta_{ij} + 2\,\mu\,\varepsilon_{ij}$

$$t_{ij} = -\frac{2}{3}\,k\,\delta_{ij} + 2\,\nu_t\,\varepsilon_{ij} \quad \ldots\ldots (8)$$

avec $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)$

et $k = \frac{1}{2}\left(\overline{u'^2_1} + \overline{u'^2_2} + \overline{u'^2_3}\right)$

ν_t est appelé viscosité turbulente. Contrairement à la viscosité moléculaire ν du fluide qui ne dépend que de la nature de ce dernier, ν_t dépend fortement de la nature de l'écoulement et de son degré de turbulence. En particulier ν_t n'a pas de raison d'être uniforme dans l'écoulement.

Le terme $-\frac{2}{3} k \delta ij$ est introduit de façon à assurer une comptabilité entre l'expression (8) et la propriété d'incompressibilité du fluide. La quantité k représente l'énergie cinétique turbulente. Ce terme scalaire est assimilable à une pression (il agit perpendiculairement aux faces d'un petit élément de volume unité) et se retrouve généralement intégré au terme de pression.

La connaissance du tenseur de Reynolds est alors ramenée à la détermination de νt. Nous supposons que la viscosité turbulente νt n'est fonction que de z la dimension verticale.

Cette modélisation grossière de la turbulence (voir [36]) se révèle justifiée dans le domaine de notre étude où le rôle de la turbulence est très secondaire devant celui du transport et des forces de pression. Les résultats obtenus confirment a posteriori la validité de cette hypothèse.

Dans le cas où νt est constant, l'écriture du tenseur de Reynolds sous la forme (8) dans les équations de Reynolds se ramène en fait à une diffusivité ; en effet :

$$\frac{\partial ui}{\partial t} + \frac{\partial uiuj}{\partial xj} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial xi} + \frac{\partial}{\partial xj}\left(\nu t\left(\frac{\partial ui}{\partial xj} + \frac{\partial uj}{\partial xi}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial xj}\left(-\frac{2}{3} k\, \delta ij\right)$$

soit $$\frac{\partial ui}{\partial t} + \frac{\partial uiuj}{\partial xj} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial xi}\left(P^* + \frac{2}{3} k\right) + \nu t \frac{\partial^2 ui}{\partial xj^2} + \nu t \frac{\partial}{\partial xi}\underbrace{\left(\frac{\partial uj}{\partial xj}\right)}_{0} \ldots (9)$$

Le dernier terme disparaît dans le cas d'un fluide incompressible et finalement seul apparaît un terme de diffusion de viscosité νt.

Dans le cadre de notre hypothèse ce résultat est légèrement modifié. En posant :

$$P^{*'} = P^* + \frac{2}{3} k$$

$$t'ij = \nu t \frac{\partial ui}{\partial xj}$$

L'équation (9) devient :

$$\frac{\partial ui}{\partial t} + \frac{\partial uiuj}{\partial xj} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^{*'}}{\partial xi} + \frac{\partial}{\partial xj}(t'ij) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu t)\frac{\partial w}{\partial xi}$$

L'intégration de cette équation de Reynolds s'écrit de la même façon que ce que nous avons obtenu en (7). En particulier l'intégration du terme $\frac{\partial}{\partial xj}$ (t'ij) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial xj}(h\widetilde{t'ij}) - t'ij(Z)\frac{\partial Z}{\partial xj} + t'ij(Zf)\frac{\partial Zf}{\partial xj} + t'iz(Z) - t'iz(Zf) \quad i \in \{1,2\} \quad j \in \{1,2\}$$

Le premier terme contient une intégrale qui ne peut être évaluée directement :

$$\widetilde{tij} = \frac{1}{k}\int_{Zf}^{Z} \nu t(z)\frac{\partial ui}{\partial xj}(x, y, z)\, dz \quad \ldots.(10)$$

On peut montrer (voir 2.5.1), en se donnant une répartition verticale des vitesses du type proposé par Van Bendegom [45] et moyennant quelques hypothèses simples sur la répartition verticale des contraintes turbulentes, que cette intégrale se ramène à une expression de la forme :

$$\widetilde{t'ij} = \nu_0 \frac{\partial \tilde{u}i}{\partial xj}(x, y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

où ν_0 est un coefficient fonction de νt de la répartition verticale de la vitesse.

D'une manière plus générale on peut supposer (voir [36]) qu'il est raisonnable d'écrire (10) sous la forme (11) ; ν_0 intervient alors comme un coefficient de diffusion dans les équations et représente en quelque sorte la turbulence intégrée verticalement de l'écoulement. La signification physique de ce coefficient est très différente de la turbulence.

Pour un fluide visqueux la vitesse est nulle au contact d'une paroi solide immobile et donc : $ui(Zf) = 0$ d'où $t'ij(Zf) = 0$

$i = 1,2 \qquad i,j = 1,2$

Par ailleurs, nous pouvons raisonnablement supposer que la courbure de la surface libre est très faible et nous négligerons par conséquent les termes contenant $\frac{\partial Z}{\partial xj}$

Enfin, nous négligeons le terme contenant w devant les termes de vitesse horizontales et en définitive l'intégration de $\frac{\partial}{\partial xj}(t'ij) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu t)\frac{\partial w}{\partial xi}$ s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial xj}\left(\nu_0\, h\, \frac{\partial \widetilde{ui}}{\partial xj}\right) + t'iz\,(Z) - t'iz\,(Zf)$$

Laissons de côté pour l'instant les deux derniers termes de cette expression. Le premier traduit clairement que, suite à l'hypothèse que nous avons émise à propos de νt, le tenseur de Reynolds est modélisé par un terme de diffusion de viscosité $\nu_0 h$.

Le tenseur de dispersion quant à lui sera modélisé par un coefficient de forme. Dans l'état actuel des connaissances à ce sujet on pense en effet que cette modélisation est préférable à une modélisation sous la forme d'une diffusion (voir annexe A.2).

Quelques mesures effectuées dans une zone tourbillonnaire par M. Uan ont fourni comme ordre de grandeur de ce coefficient une valeur comprise en 1,03 et 1,05 [44] . Dans le domaine d'étude envisagé présentement on peut penser qu'une valeur de 1 est une première approche acceptable pour ce coefficient de forme.

1.4.2 - Hypothèse sur les termes tiz (Z) et tiz (Zf)

Ces termes représentent les contraintes au fond et à la surface. La contrainte au fond est due à la rugosité de ce dernier qui induit un frottement. Nous aurons donc :

$$-\tau iz\,(Zf) = -k_o\, ui$$

Nous choisissons pour k_o la formule de Strickler :

$$k_o = \frac{g}{K_S^2\, h^{1/3}}\, \|\vec{V}\|$$

où K_S est le coefficient de Manning-Strickler. On trouvera en annexe A.3 une table de définition de ce coefficient.

La contrainte à la surface est principalement due au vent. Nous la négligerons (*).

1.4.3 - Hypothèses sur les termes contenant $\widetilde{u' i\theta'}$ et $t\theta j$

Dans le cas d'un transfert de polluant, il a pu être montré de façon rigoureuse [50] que le tenseur inconnu $\widetilde{ui\Theta'}$ s'écrivait :

$$\widetilde{u'i\Theta'} = \overline{\overline{K}}\ \overrightarrow{grad}\ \Theta \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

où $\overline{\overline{K}}$ est un tenseur 2 x 2 appelé tenseur de dispersion thermique.

La démonstration de ce propos nécessite deux hypothèses :

- le temps caractéristique de la diffusion verticale doit être petit vis-à-vis du temps caractéristique de la convection horizontale :

$$\frac{T_{diff}}{T_{CV}} \ll 1$$

- le temps caractéristique des échanges de chaleur avec l'atmosphère doit être grand par rapport au temps caractéristique de la convection :

$$\frac{T_{CV}}{T_{ech}} \ll 1$$

La seconde hypothèse est toujours vérifiée, car les échanges à la surface sont infimes (et donc le temps caractéristique est infini).

Examinons la première hypothèse :

$$Tcv = \frac{L}{Uo}$$

(*) Cette contrainte peut s'écrire $\rho \| \vec{V'} \| \vec{V'}$ où ρ est la masse volumique de l'air et $\vec{V'}$ la vitesse relative du vent par rapport à la vitesse de surface de l'écoulement.
Un petit calcul montre que pour un canal de 1 m de profondeur avec un coefficient de Stricker de 30 on a : $\zeta iz(Zf) = 1,1\ 10^{-2} \| \vec{V} \| \vec{V}$
En l'absence de vent on aura : $\zeta iz(Z) = 1,25\ 10^{-3} \| \vec{V} \| \vec{V}$
Notre hypothèse est donc un peu grossière mais justifiée par le fait que $\zeta iz(Zf)$ reste petit devant les autres termes de l'équation.

où Uo représente une vitesse caractéristique de la convection horizontale et L une longueur caractéristique horizontale

$$T_{DIFF} = \frac{H^2}{D}$$

où H est une longueur caractéristique verticale et D un coefficient de diffusion caractéristique de la verticale.

Prenons pour L la distance au bout de laquelle l'écoulement peut être considéré comme filaire après un rejet thermique. L est de l'ordre de 10 km [26]

Soit U_o une vitesse de l'ordre de 1 m/s, H une hauteur de 5 m. Pour un Chezy de 70 (voir annexe A.3), un profil vertical de vitesse de la forme $u = U\,(\frac{z}{h})^{0,2}$, on trouve $D = 2.10^{-2}\ m^2/s$ d'où :

$$Tcv = 10\ 000\ s \qquad T_{DIFF} = 1\ 250\ s$$

La première condition n'est donc pas strictement vérifiée. Toutefois on peut raisonnablement admettre que ces hypothèses sont suffisamment vérifiées pour que la modélisation de $\widetilde{ui'\Theta'}$ sous la forme (12) soit une très bonne approche de ce tenseur. Les résultats ainsi obtenus confirment a posteriori ce raisonnement.

En ce qui concerne le tenseur $t\theta j$ il est courant d'écrire [36] :

$$t\theta j = \Gamma . \frac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial xj}$$

où Γ est la viscosité thermique turbulente. De la même façon que ce qui a été fait en dynamique on peut supposer qu'il est raisonnable d'écrire :

$$\widetilde{t\theta j} = \Gamma_o \frac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial xj}$$

Γ_o représente là encore un coefficient de turbulence intégrée sur la verticale et ne saurait être confondu avec la turbulence thermique de l'écoulement.

En définitive la contribution des deux tenseurs $\widetilde{ui\Theta'}$ et $t\theta j$ à l'équation thermique se modélise sous la forme :

$$\widetilde{ui\Theta'} + t\theta i = |\bar{\bar{K}}'\ \overrightarrow{grad}\ \Theta$$

Le tenseur $|\bar{\bar{K}}'$ diffère du tenseur $|\bar{\bar{K}}$ au niveau des termes diagonaux auxquels s'ajoutent Γ_o.

Par un raisonnement analogue à celui fait pour les vitesses, nous obtenons $t\theta x\ (Zf) = t\theta y\ (Zf) = 0$ et nous négligeons les termes contenant $\frac{\partial Z}{\partial xi}$ (courbure de la surface libre).

Considérons enfin les termes $t\theta z\ (Z)$ et $t\theta z\ (Zf)$. Ils représentent les échanges thermiques avec le milieu extérieur au fond et en surface. Nous les supposons négligeables.

1.4.4. - Hypothèses supplémentaires propres au modèle

Les hypothèses précédentes nous assurent la fermeture du problème soulevé par l'apparition de termes inconnus. Le système d'équations obtenu alors est un système entièrement soluble connu sous le nom d'équations de Saint-Venant.

En ce qui nous concerne nous allons faire quelques hypothèses complémentaires justifiées dans le cadre de notre étude.

La première de ces hypothèses est que nous considérons un rejet en régime établi, ce qui veut dire que nous nous intéressons a priori à un état permanent de l'écoulement. Dans ce cas nous supprimons des équations les termes $\frac{\partial h}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial v}{\partial t}$. Par contre, nous conservons le terme $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$ puisque nous pouvons être amenés à nous intéresser à l'évolution d'une tâche. Cela est tout à fait possible puisque l'équation thermique est entièrement découplée des équations dynamiques.

La seconde de ces hypothèses concerne la grandeur h : nous la supposons parfaitement connue en tout point. Dans la pratique, pour un écoulement fluvial donné, on connaît généralement la cote de la surface à l'amont et à l'aval, ainsi que la topographie du lit. La connaissance de h en tout point nécessite donc d'évaluer la cote de la surface libre en tout point. Etant donné la dimension des domaines étudiés, l'erreur commise en évaluant celle-ci par interpolation des valeurs connues est du même ordre de grandeur que les erreurs de mesures commises lors du relevé des fonds.

La conséquence de cette seconde hypothèse est la suivante : nous avions écrit, puisque la pression est hydrostatique

$$P(z) = P(Z) + \rho g(Z-z)$$

Habituellement on écrit $P(Z) = P$ atmosphérique $= 0$ et l'on remplace les termes de pression par un terme en Z.

Avec notre hypothèse Z est une donnée du problème. Par contre, P(Z) n'est plus nécessairement égal en tout point à la pression atmosphérique car une légère erreur sur l'évaluation a priori de h se traduit par une légère variation de la pression locale.

Physiquement, cette hypothèse peut se traduire par l'image d'une rivière "à plafond".

Le système d'équations obtenues comportera alors quatre inconnues u, v, P'^{*} (Z) et Θ différentes des quatre inconnues du système de Saint-Venant u, v, Z et Θ.

1.5 - Ecriture définitive des équations

Dans ce qui suit on omet le signe ~ de moyenne verticale afin d'alléger l'écriture. Le système d'équations s'écrit alors, moyennant les hypothèses précédentes :

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \\
&1\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^{*\prime}}{\partial x} + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_o h\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_o h\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
&\qquad - \frac{g}{K_s h^{4/3}}\, u\sqrt{u^2+v^2} \\
&1\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^{*\prime}}{\partial y} + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_o h\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_o h\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&\qquad - \frac{g}{K_s h^{4/3}}\, v\sqrt{u^2+v^2} \\
&\frac{\partial\Theta}{\partial t} + u\frac{\partial\Theta}{\partial x} + v\frac{\partial\Theta}{\partial y} = \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\left(hK_{11}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\left(hK_{12}\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial y}\left(hK_{21}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial y}\left(hK_{22}\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

Nous verrons plus loin qu'un nombre équivalent de conditions aux limites est nécessaire pour résoudre ce système.

Les problèmes numériques rencontrés se concentrent d'ailleurs essentiellement dans le traitement de ces conditions aux limites.

ECOLE NAT

DEUXIEME PARTIE

Approche Numérique du phénomène étudié

Pages

2.1 - Le maillage curviligne 27

2.1.1 - Intérêt 27

2.1.2 - Principe de génération d'un maillage curviligne 29

2.1.3 - Méthode de résolution du système de Thompson 31

2.2 - Traitement des équations 36

2.2.1 - Etape de convection 38

2.2.2 - Etape de diffusion - termes sources 40

2.2.2.1 - Diffusion thermique 40

2.2.2.2 - Diffusion des vitesses - termes sources 42

2.2.3 - Etape de continuité 43

2.3 - Les conditions aux limites 47

2.3.1 - Définition des conditions aux limites à imposer 47

2.3.1.1 - En vitesse 47

2.3.1.2 - En température 48

2.3.2 - Prise en compte numérique des conditions 48

2.3.2.1 - Etape de convection 50

2.3.2.2 - Etape de diffusion 51

2.3.2.3 - Etape de continuité 54

2.3.2.4 - Conditions initiales 55

2.4 - Traitement de la pression 56

2.4.1 - Intérêt du calcul de la pression 56

2.4.2 - Traitement de l'étape de continuité en pression 56

2.4.2.1 - La formulation en volume fini 56

2.4.2.2 - Discrétisation utilisée. Méthode de résolution. 59

2.5 - Détermination des paramètres du calcul 63

2.5.1 - Evaluation de ν_o 64

2.5.2 - Evaluation de $\bar{K}$ 68

2.5.3 - Evaluation de α 70

2 - Deuxième partie : Approche numérique du phénomène étudié

Ce modèle résout les équations intégrées précédemment obtenues (11) sur un maillage curviligne à pas variables. On utilise la méthode des pas fractionnaires en différence finie.

2.1 - Le maillage curviligne

2.1.1 - Intérêt

L'une des difficultés rencontrées par les méthodes de résolution numérique des équations de la mécanique des fluides réside aux frontières où l'on doit imposer les conditions aux limites.

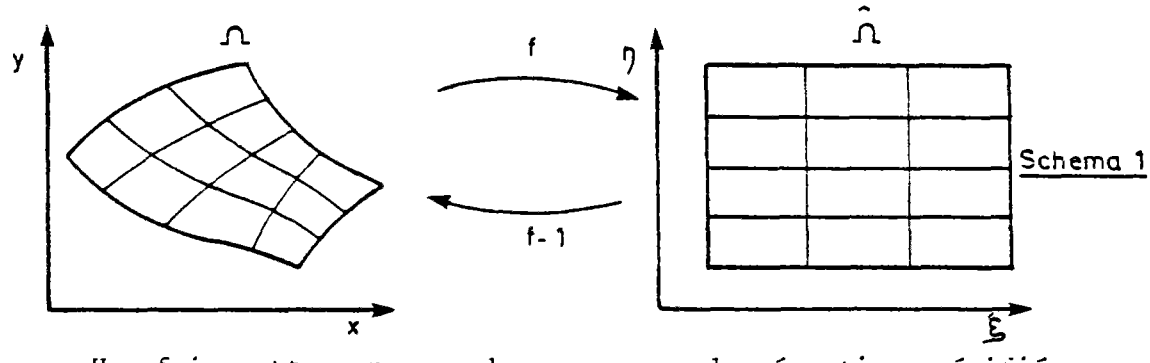
Un modèle mathématique, résolvant les équations bidimensionnelles de Saint-Venant dans une grille régulière, adapté aux cas fluviaux, avait déjà été élaboré [42] . Les problèmes rencontrés avec ce modèle se localisèrent principalement aux frontières.

D'où l'idée d'améliorer la description de ces dernières en travaillant non plus avec une grille régulière mais avec un maillage curviligne à pas variable (voir figure 1).

Ce type de maillage colle mieux à la réalité et en permet une représentation numérique plus fidèle notamment au niveau de la définition des normales aux frontières. En outre, son aspect "pas variables" permet d'affiner à volonté la grille près des bords ou dans une zone délicate.

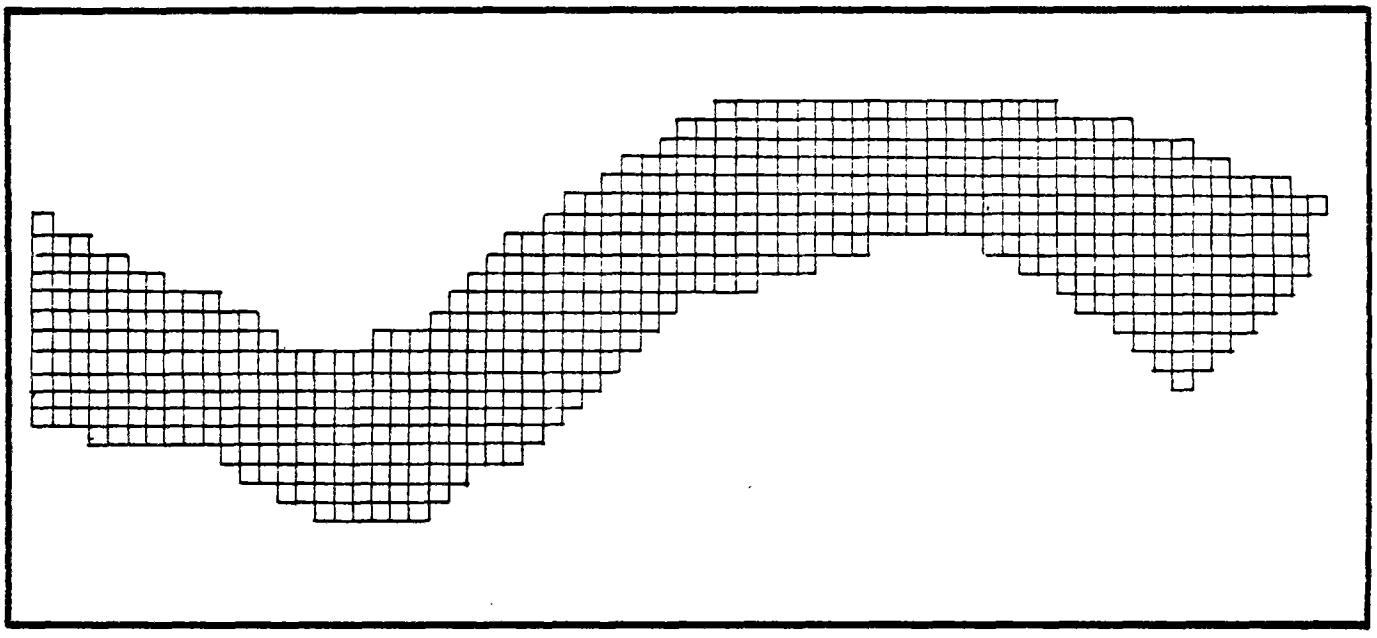
Nous décrivons plus loin la méthode utilisée pour générer le maillage.

Le principe de la résolution des équations en maillage curviligne repose alors sur la définition d'une correspondance entre la grille curviligne obtenue et une grille rectiligne.



Schema 1

Une fois cette correspondance connue, les équations vérifiées dans le plan (x,y) seront transformées par f en équations du plan (ξ , η), résolues sur cette grille rectangulaire.



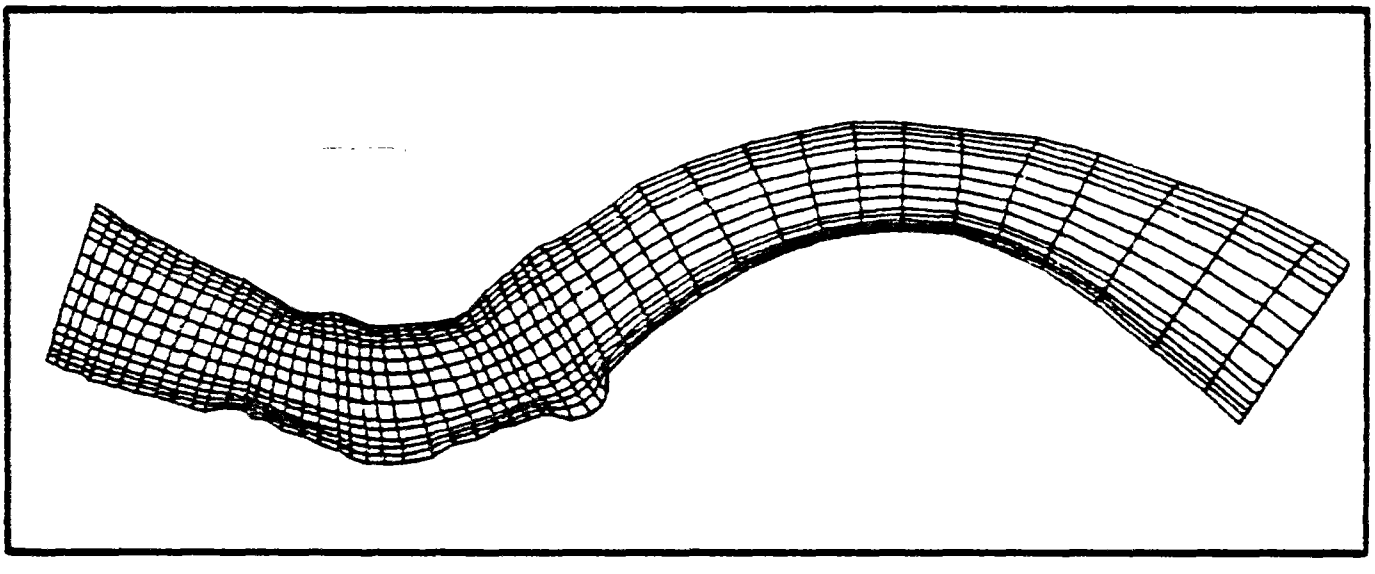


Fig. 1 COMPARAISON D'UN MAILLAGE RECTILIGNE ET D'UN MAILLAGE CURVILIGNE SUR L'AUBE

2.1.2 - Principe de génération du maillage curviligne

Dans des cas géométriques simples on peut envisager de le tracer "à la main" ou du moins de le faire calculer explicitement par l'ordinateur en lui fournissant les équations des lignes iso-coordonnées. C'est ce qui a été fait dans le cas du maillage de la figure 2.

Mais on ne saurait généraliser ce procédé à un cas de figure quelconque aussi s'est-on penché sur la mise au point de méthodes générales. Parmi celles-ci, celle de Thompson [40] a été l'une des premières et c'est elle que nous avons retenue pour traiter les cas à géométrie complexe.

Le principe en est simple, il consiste à résoudre dans $\hat{\Omega}$:

$$(14)\quad \begin{cases} \Delta\xi = 0 \\ \Delta\eta = 0 \\ \xi \text{ et } \eta \text{ donné sur le bord de } \hat{\Omega} \end{cases}$$

ξ et η sont alors solution d'un problème elliptique et le maillage possède de bonnes propriétés de régularité.

Dans la pratique on ne recherche pas directement ξ et η mais x et y. Pour cela il faut inverser le problème (14). On obtient alors sur le domaine Ω :

$$(15)\quad \begin{cases} \alpha' \dfrac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta' \dfrac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma' \dfrac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 \\ \alpha' \dfrac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta' \dfrac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma' \dfrac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0 \\ x \text{ et } y \text{ donnés sur les frontières de } \Omega. \end{cases}$$

avec
$$\alpha' = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2$$

$$\beta' = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\gamma' = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2$$

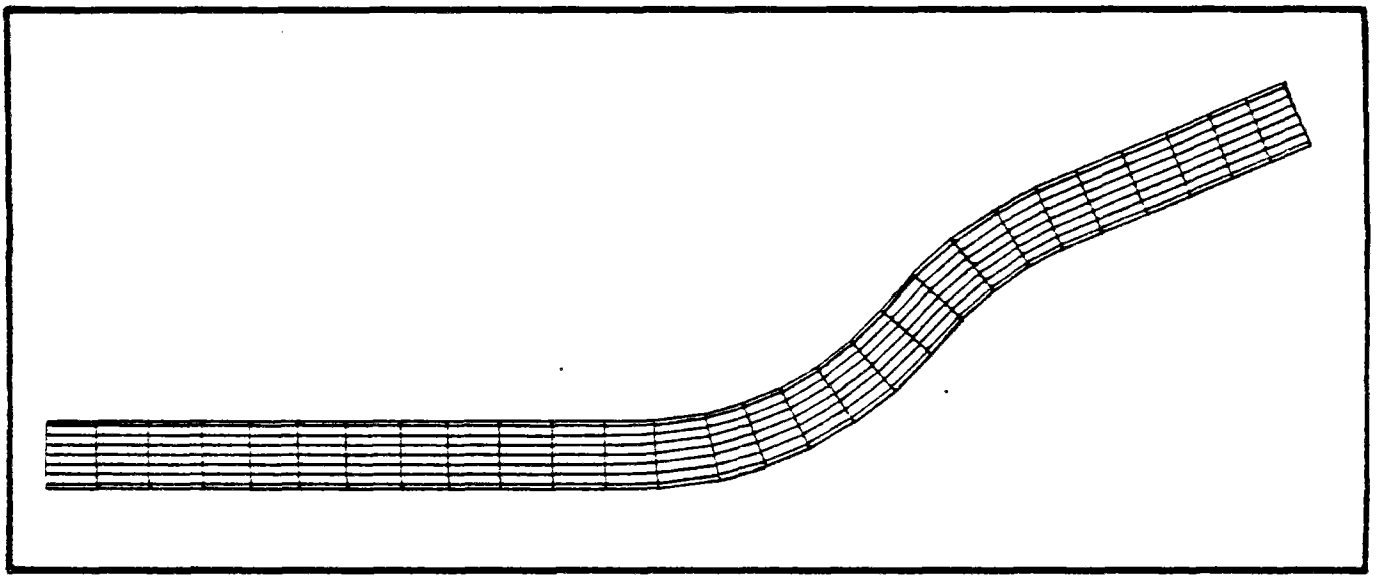


Fig. 2 MAILLAGE TRACE A LA MAIN SUR LE CANAL

Nous utilisons pour résoudre le système (15) un programme mis au point par A.M. Bisch [5] qui utilise une méthode itérative en différence finie. Ce programme calcule également les coefficients du Jacobien de la transformation f qui permet de passer de (x, y) à (ξ, η) (*).

La transformation f^{-1} se déduit de la transformation f (**). Il existe actuellement un grand nombre d'autres méthodes permettant d'obtenir un maillage curviligne. Le lecteur en trouvera un inventaire succinct en annexe A.4. En particulier un grand nombre de ces méthodes ont développé la génération de maillages orthogonaux ou localement orthogonaux dans le but de simplifier l'écriture des conditions aux limites de type Newmann. En ce qui nous concerne l'emploi de tels maillages ne se révèle pas justifié.

La méthode de Thompson est alors à la fois la plus souple de mise en oeuvre et celle qui permet d'obtenir un maillage possédant les meilleures caractéristiques de régularité, ce qui explique notre choix.

2.1.3 - Méthode de résolution du système de THOMPSON

Le système (15) est résolu pour une méthode itérative.
Connaissant x et y à l'étape n, on calcule α^n, β^n, γ^n.

On résout alors :

$$(17)\quad \begin{cases} \alpha'^n \dfrac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\,\beta'^n \dfrac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma'^n \dfrac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 \\ \alpha'^n \dfrac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\,\beta'^n \dfrac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma'^n \dfrac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0 \\ x,\ y \text{ donnés sur la frontière de } \Omega \end{cases}$$

(17) fournit les valeurs de x^{n+1}, y^{n+1}.

(*) La connaissance de cette transformation se réduit dans la pratique a la connaissance du tenseur T :

$$T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

en effet on aura, pour toute fonction f : $\vec{\text{grad}}\, f_\Omega = \overline{\overline{T}}.\ \vec{\text{grad}}\, f_{\hat{\Omega}}$

(**) rappelons :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \eta} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \eta} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \xi} \qquad \text{avec } J = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

Comme tout calcul itératif celui-ci nécessite un état initial. On a choisi pour ce dernier un maillage "linéaire" tracé en joignant 2 à 2 les points de bord situés face à face.

L'utilisateur dispose de deux degrés de liberté dans le choix d'un maillage pour un contour donné :

- choix de la transformation entre Ω et $\hat{\Omega}$ par le biais du choix de la forme du domaine projeté dans $\hat{\Omega}$.
- choix du pas du maillage par l'écartement des points sur les frontières (inférieures et gauches)

La convergence de la méthode n'est pas assurée, le problème posé n'étant pas linéaire. Lorsqu'il y a convergence celle-ci est rapide.

En cas de non convergence de la méthode c'est principalement le second degré de liberté qu'il faut faire jouer, par tâtonnements successifs. Il n'existe aucun procédé rationnel permettant d'assurer la convergence du problème.

Lorsqu'on a convergé vers une solution satisfaisante dans le domaine Ω (x, y), il faut calculer les coefficients du Jacobien de la transformation f (16). Le tenseur ainsi obtenu sera, avec les coordonnées du maillage, les seules données transmises au programme d'écoulement. Or ce tenseur est calculé indépendamment de la méthode de résolution choisie pour générer le maillage. Par conséquent, contrairement à ce qui se passe dans certaines méthodes(*), on observe une totale indépendance du calcul thermodynamique vis-à-vis du principe de génération du maillage.

On trouvera sur les figures 1, 3, 4 et 5 des exemples de maillages obtenus par résolution de (15).

Sur les deux dernières figures sont présentés deux maillages différents obtenus sur un même domaine. Dans l'encart on a tracé de façon schématique le contour des domaines projetés dans le plan $\hat{\Omega}$ (ξ,η).

(*) Lorsqu'on utilise un maillage orthogonal on se sert généralement des propriétés orthogonales de celui-ci pour simplifier les équations thermodynamiques notamment dans l'écriture des conditions aux limites. Il est également fréquent, avec la méthode de Thompson, de faire apparaître $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ dans les équations thermodynamiques afin de les simplifier. Nous ne le faisons pas.

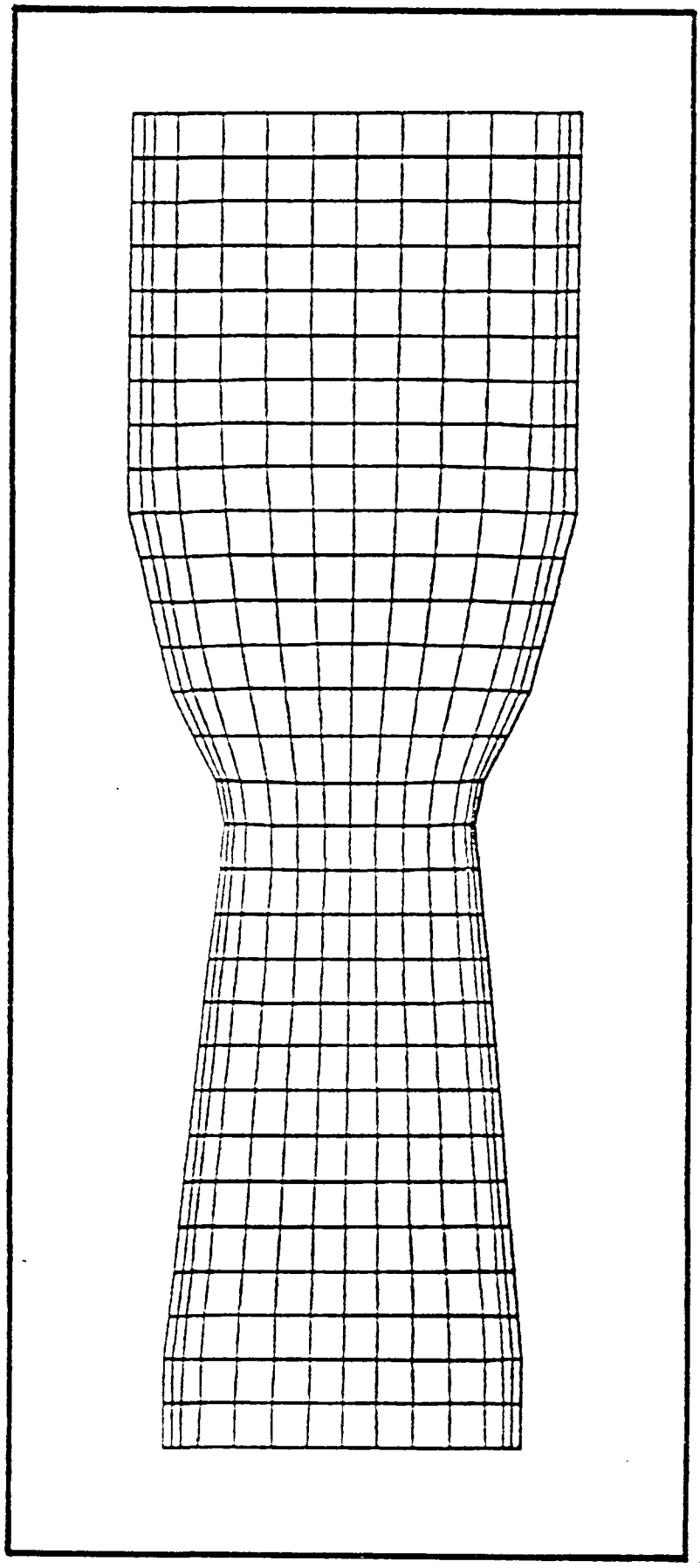


Fig. 3 MAILLAGE CURVILIGNE D'UN CONVERGENT DIVERGENT

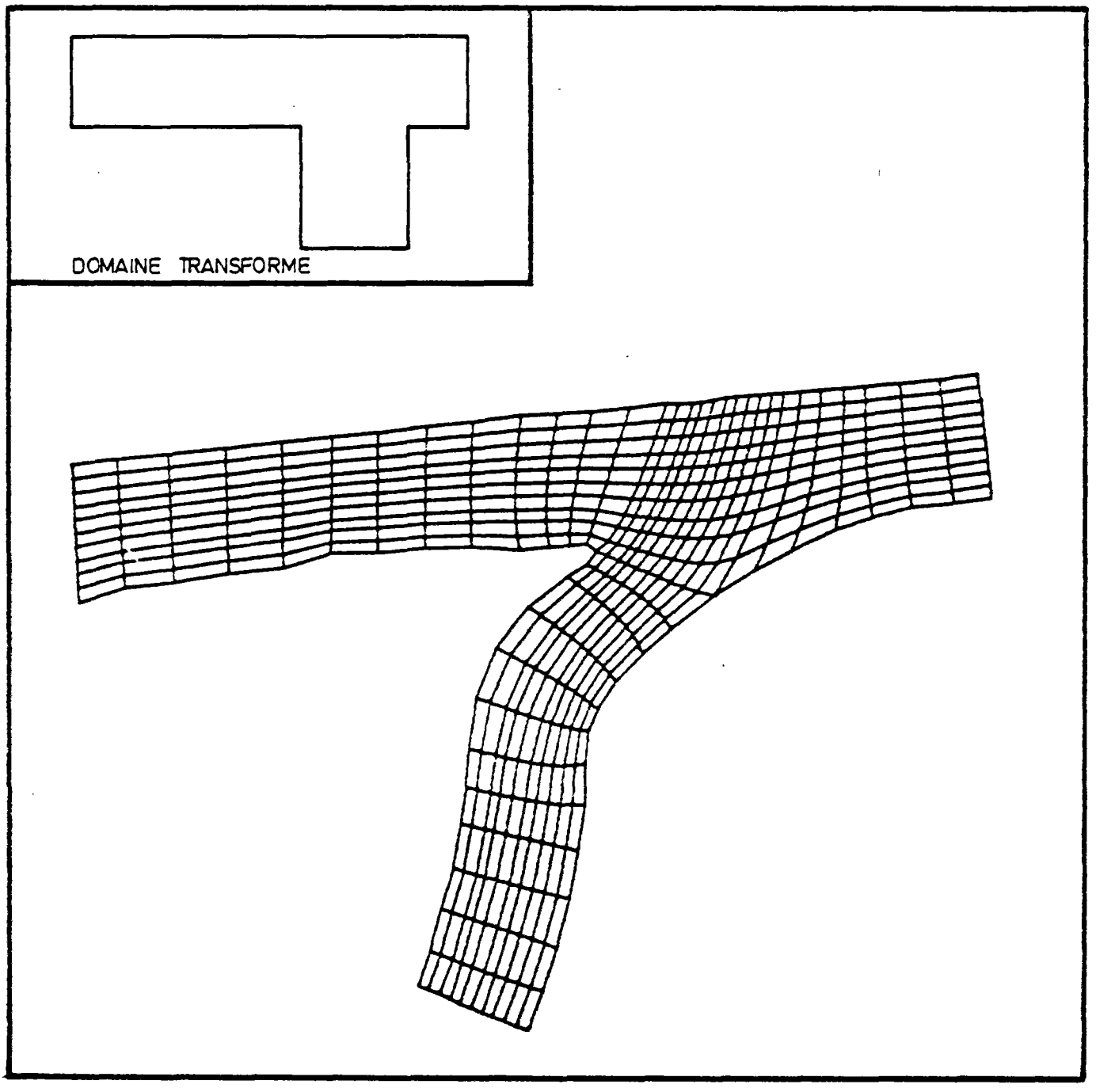


Fig. 4 PREMIER MAILLAGE CURVILIGNE DE MIRIBEL

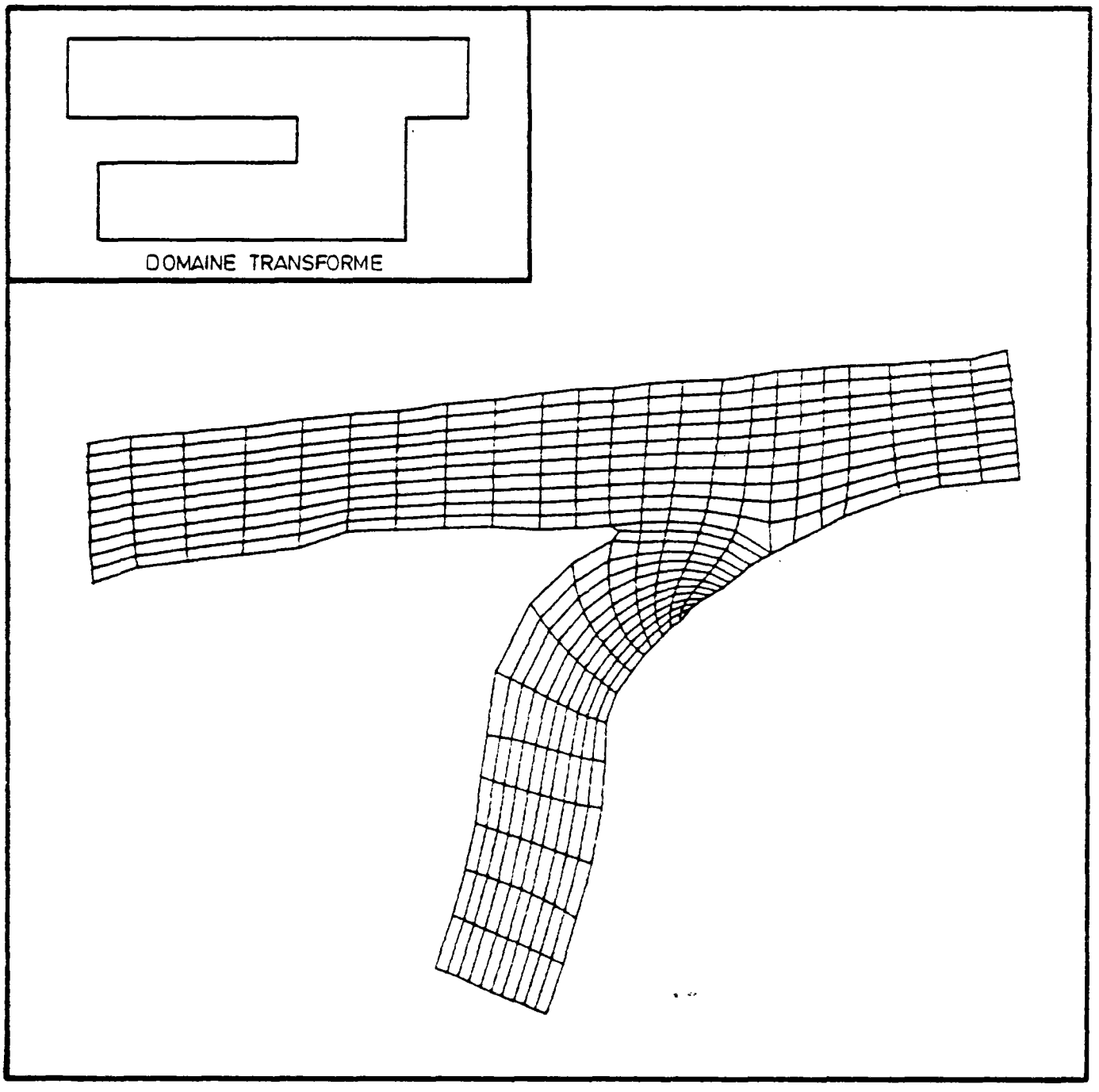


Fig.5 SECOND MAILLAIGE CURVILIGNE DE MIRIBEL

2.2 - Traitement des équations

Nous calculons dans un premier temps l'écoulement et ensuite l'évolution d'une tache thermique dans cet écoulement les vitesses calculées servant de données pour l'équation thermique, et enfin la "pression" p^* -quand on la calcule- qui permet de contrôler que les tirants d'eau ont été estimés correctement.

Les méthodes utilisées étant analogues pour les équations dynamiques et thermiques, nous les présentons simultanément.

Nous utilisons un schéma aux différences finies.

La résolution des équations dynamiques du système d'équations (13) est réalisé à l'aide d'un algorithme de pas fractionnaires [51].

Nous introduisons un champ de vitesse auxiliaire U^{aux} et utilisons le schéma de désintégration proposé par J.A Chorin pour des équations bidimensionnelles de Navier-Stokes [10] :

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{u^{aux} - u^n}{\Delta t'} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\nu_o h \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\nu_o h \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) - \dfrac{g}{K_s h^{4/3}}\, u \|\vec{U}\| \\[2ex] \dfrac{v^{aux} - v^n}{\Delta t'} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\nu_o h \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\nu_o h \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) - \dfrac{g}{K_s h^{4/3}}\, v \|\vec{U}\| \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{u^{n+1} - u^{aux}}{\Delta t'} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p^{*'}}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{v^{n+1} - v^{aux}}{\Delta t'} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p^{*'}}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial h u^{n+1}}{\partial x} + \dfrac{\partial h v^{n+1}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

La discrétisation "en temps" introduite avec $\Delta t'$ est purement artificielle. Les solutions intermédiaires trouvés, u^n, peuvent être interprétées comme des états successifs d'une rivière "à plafond", puisque cette façon de procéder revient à introduire une dérivée partielle en temps dans les équations dynamiques (mais pas dans l'équation de continuité). La convergence de cette suite u^n fournit la solution d'un état stationnaire de la rivière pour lequel les côtes de la surface sont définies.

Le choix de $\Delta t'$ n'est conditionné que par des critères numériques. Comme ces derniers sont les mêmes que pour l'équation thermique nous prendrons généralement pour $\Delta t'$ la valeur Δt du pas de discrétisation temporelle de l'équation thermique.

Dans un premier temps nous recherchons donc le champ U^{aux}. Nous choisissons d'expliciter le premier opérateur -dit de convection- et d'impliciter le second opérateur -dit de diffusion- dans les équations du système (18), soit par exemple :

$$\frac{u^{aux} - u^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} = \left[\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_o h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_o h \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{g}{K_s h^{4/3}} u \| \vec{U} \| \right]^{aux}$$

au premier membre on reconnaît une approximation de $\frac{du}{dt}$. Cela peut encore s'écrire d'un point de vue Lagrangien :

$$\frac{du}{dt} = \frac{u^{aux}(M) - u^n(M')}{\Delta t}$$

avec $\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{U}_n$ soit $\vec{OM'} = \vec{OM} - \int_{\Delta t} \vec{U}^n \, dt$

Définissons alors le champ de vecteur $U°$ par :

$$\vec{U}° (M) = \vec{U}_n (M')$$

La valeur du champ $U°$ peut être obtenu en remontant la trajectoire $\vec{OM'} = \vec{OM} - \int_{\Delta} \vec{U}_n \, dt$. Elle représente le champ de vitesse après convection pure pendant le temps Δt.

On définira de même pour la température le champ $\theta°$

avec $\theta° (M) = \theta_n (M')$ et $\vec{OM'} = \vec{OM} - \int_{\Delta t} \vec{U}^n \, dt$

Le premier schéma se décompose alors en deux étapes :

1°) détermination de $\vec{U}°$ et $\theta°$ avec :

$$\begin{cases} \vec{U}°(M) = \vec{U}_n\ (M') \\ \theta°(M) = \theta°\ (M') \\ \vec{OM'} = \vec{OM} - \int_{\Delta t} \vec{U}^n\, dt \end{cases}$$

2°) détermination de $\vec{U}aux$ et θ^{n+1}

$$\frac{\vec{U}aux\ (M) - \vec{U}°(M)}{\Delta t} = \left[\frac{1}{h}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (\nu_o h\ \frac{\partial \vec{U}aux}{\partial x}) + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial y}\ (\nu_o h\ \frac{\partial \vec{U}aux}{\partial y}) - \frac{g}{K_s h^{4/3}}\ \vec{U}aux\ \|\vec{U}aux\|\right](M)$$

$$\frac{\theta^{n+1}\ (M) - \theta°\ (M)}{\Delta t} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(hK_{11}\ \frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x}(hK_{12}\ \frac{\partial\theta^{n+1}}{dy}) + \frac{\partial}{\partial y}(hK_{21}\frac{\partial\theta^{n+}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(hK_{22}\ \frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial y})\right](M)$$

Finalement notre schéma de résolution se subdivise en trois étapes successives que nous appellerons :

Premier schéma 1° ⟶ étape de convection
Premier schéma 2° ⟶ étape de diffusion / termes - sources
Second schéma ⟶ étape de continuité

Nous allons détailler maintenant le traitement de chaque étape en nous attachant à montrer les modifications apportées par le traitement en mailles curvilignes par rapport aux formulations classiques.

2.2.1 - Etape de convection

La détermination des champs U° et θ° est obtenue en résolvant l'équation de transport :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u^n\ \frac{\partial f}{\partial x} + v^n\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

où f représente u°, v° ou θ°.

Dans le domaine $\hat{\Omega}$ (ξ, η) cette équation est transformée en :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u^n \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}.\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta}.\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + v^n \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}.\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta}.\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = 0$$

Soit en faisant apparaître :

$$u'^n = u^n.\frac{\partial \xi}{\partial x} + v^n.\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$v'n = u^n.\frac{\partial \eta}{\partial x} + v^n.\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u'^n \frac{\partial f}{\partial \xi} + v'^n \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$$

Ces trois équations peuvent encore se mettre sous la forme :

$$(20) \quad \begin{cases} u'^n = \dfrac{d\xi}{dt} \\ v'^n = \dfrac{d\eta}{dt} \\ \dfrac{df}{dt} = 0 \end{cases}$$

Ce qui traduit le fait que la grandeur f reste constante dans le temps lorsqu'on se déplace le long d'une courbe caractéristique définie par :

$$\frac{d\xi}{dt} = u'^n \quad \frac{d\eta}{dt} = v'^n$$

La résolution du système (20) par une méthode des caractéristiques peut se faire avec un splitting en direction [13] (on résout successivement l'équation de transport dans une direction puis dans l'autre) ou directement de façon bidimensionnelle [20].

La première méthode, plus rapide, a été utilisée pour les premiers cas traités. Malheureusement elle nécéssite d'utiliser un nombre de courant tablé sur les plus petites valeurs du pas d'espace ce qui est inadapté au cas d'un maillage fortement resserré localement. La seconde méthode permet de lever cette restriction en utilisant un nombre de courant calculé à partir de l'ordre de grandeur moyen des mailles. Les derniers cas ont donc été traités avec cette méthode.

2.2.2 - Etape de diffusion - terme source

Considérons en premier lieu l'étape de diffusion thermique qui ne contient pas de terme source :

2.2.2.1 - Diffusion thermique

Cette étape s'écrit :

$$\frac{\theta^{n+1}(M) - \theta^{\circ}(M)}{\Delta t} = \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\left(hK_{11}\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial x}\right) + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\left(hK_{12}\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial y}\right) + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial y}\left(hK_{21}\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial x}\right) + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial y}\left(hK_{22}\frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial y}\right)$$

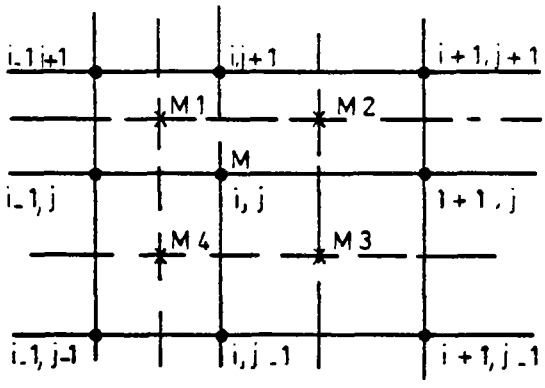
L'écriture de l'équation dans le domaine $\hat{\Omega}$ (ξ, η) va compliquer sensiblement l'expression du second membre. Il s'écrira en effet :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[hK_{11}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\cdot\xi_x + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\cdot\eta_x\right)\right]\cdot\xi_x + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[hK_{11}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\cdot\xi_x + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\cdot\eta_x\right)\right]\cdot\eta x \\
&+ \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[hK_{12}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\cdot\xi_y + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\cdot\eta_y\right)\right]\cdot\xi_x + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[hK_{12}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\cdot\xi_y + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\cdot\eta_y\right)\right]\cdot\eta x \\
(21)\quad &+ \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[hK_{21}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\cdot\xi_x + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\cdot\eta_x\right)\right]\cdot\xi_y + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[hK_{21}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\cdot\xi_x + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\cdot\eta_x\right)\right]\cdot\eta y \\
&+ \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[hK_{22}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\cdot\xi_y + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\cdot\eta_y\right)\right]\cdot\xi_y + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[hK_{22}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\cdot\xi_y + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\cdot\eta_y\right)\right]\cdot\eta y
\end{aligned}$$

où ξ_x représente $\frac{\partial\xi}{\partial x}$, de même $\xi_y = \frac{\partial\xi}{\partial y}$, $\eta_x = \frac{\partial\eta}{\partial x}$, $\eta_y = \frac{\partial\eta}{\partial y}$

Soit M (i,j) le point où s'effectue la discrétisation en espace.

L'écriture (21) du second membre nous montre que nous serons amené à faire intervenir les valeurs de la température aux 8 points entourant M :



Schema 2

On écrit les quantités :

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\cdot\xi_x + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\cdot\eta_x$$

et

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\cdot\xi_y + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\cdot\eta_y$$

aux points M_1, M_2, M_3 et M_4 puis on en déduit le second membre en M. Finalement on obtient une expression linéaire de la forme (on trouvera en annexe 5 le détail du calcul).

$$a_1.\theta(i-1,\ j+1) + a_2.\theta(i,\ j+1) + a_3.\theta(i+1,\ j+1) + a_4.\theta(i+1,\ j) + a_5.\theta(i+1, j-1)$$

$$+ a_6.\theta(i,j-1) + a_7.\theta(i-1, j-1) + a_8.\theta(i-1, j) + a_9.\theta(i,j)$$

L'écriture matricielle de cette étape est :

$$\overline{A}.\ \overline{\theta}^{\,n+1} = \frac{\overline{\theta}^{\,n+1} - \overline{\theta}^{\,\circ}}{\Delta t}$$

où $\overline{\theta^{n+1}}$ et $\overline{\theta^{\circ}}$ sont les vecteurs formés par les valeurs de θ^{n+1} et θ° aux noeuds de maillage et $\overline{A}$ la matrice des coefficients ak.

On écrit encore :

$$\underbrace{(\Delta t.\overline{A} - \overline{E})}_{\overline{B}}\ \overline{\theta^{n+1}} = -\ \overline{\theta^{\circ}}$$

($\overline{E}$ est l'identité)

On résout ce système matriciel par une méthode itérative de surrelaxation (S.O.R.). Cela veut dire que si l'on décompose $\overline{B}$ sous la forme :

$$\overline{B} = \overline{B}' - \overline{C} - \overline{C}'$$

ou $\overline{B}'$ est une matrice diagonale

$\overline{C}$, $\overline{C}'$ des matrices strictement triangulaires respectivement supérieures et inférieures.

La méthode de surrelaxation consiste à écrire [46] :

$$(\overline{B}' - \omega\,\overline{C})\ \theta^{p+1} = \left[(1-\omega)\ \overline{B}' + \omega\ \overline{C}'\right]\theta^{p} - \omega\ \overline{\theta^{\circ}}$$

où ω est le coefficient de surrelaxation dont dépend la convergence de la méthode.

et θ^{p} le résultat de la précédente itération.

Le calcul se poursuit jusqu'à ce que l'on ait p tel que :

$$\| \theta^{p+1} - \theta^{p} \| < \varepsilon$$

où ε est le seuil de convergence.

La convergence fournit la valeur de θ^{n+1}.

2.2.2.2 - <u>Diffusion des vitesses - termes sources</u>

L'équation générique de cette étape s'écrit :

$$\frac{ui^{aux}(M) - ui^{\circ}(M)}{\Delta t} = \frac{1}{h}\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu h\ \frac{\partial ui^{aux}}{\partial x}\right) + \frac{1}{h}\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu h\ \frac{\partial ui^{aux}}{\partial y}\right) - \frac{g}{K_s h^{4/3}}\ ui^{aux} \| \vec{U}^{aux} \|$$

Au second membre on distingue :

- un terme de diffusion qui sera discrétisé en 9 points avec exactement la même méthode que celle employée pour la température.

- un terme source pour lequel on utilise une méthode de Newton. Cela consiste à développer la fonction considérée (ici $u\sqrt{u^2 + v^2}$ par exemple) au premier ordre et à expliciter les termes factorisant les dérivées premières :

  Soit $f\ (u, v) = u\sqrt{u^2 + v^2}$

  on écrira : $f^{aux} = f^\circ + (u^{aux} - u^\circ)\ (\frac{\partial f}{\partial u})^\circ + (v^{aux} - v^\circ)\ (\frac{\partial f}{\partial v})^\circ$

Ce terme source va introduire un couplage entre les deux équations de la diffusion des vitesses. Les équations discrétisées s'écrivent :

$$\begin{cases} a'_1 \cdot u^{aux}\ (i,j) + a'_2 \cdot v^{aux}\ (i,j) + \sum_{k=1}^{8} a_k \cdot u_k = a_o \\ b'_1 \cdot u^{aux}\ (i,j) + b'_2 \cdot v^{aux}\ (i,j) + \sum_{k=1}^{8} b_k \cdot u_k = b_o \end{cases}$$

où u_k et v_k représentent les valeurs respectives de u et v aux 8 points entourant (i,j).

La résolution de ce système linéaire de 2 équations à deux inconnues mais fournit aisément :

$$\begin{cases} u^{aux}\ (i,j) + \sum_{k=1}^{8} (c_k \cdot u_k + d_k \cdot v_k) = e_o \\ v^{aux}\ (i,j) + \sum_{k=1}^{8} (c'_k \cdot u_k + d'_k \cdot v_k) = e'_o \end{cases}$$

Ce double système matriciel est résolu sur le même principe que celui en θ par une méthode itérative de surrelaxation.

2.2.3 - <u>Etape de continuité</u>

Elle s'écrit :

$$(22) \begin{cases} \dfrac{u^{n+1} - u^{aux}}{\Delta t} = -\dfrac{1}{\rho}\ \dfrac{\partial P'^{*}}{\partial x}^{n+1} \\ \dfrac{v^{n+1} - v^{aux}}{\Delta t} = -\dfrac{1}{\rho}\ \dfrac{\partial P'^{*}}{\partial y}^{n+1} \\ \dfrac{\partial hu^{n+1}}{\partial x} + \dfrac{\partial hv^{n+1}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Elle est résolue à l'aide de la fonction de courant ψ définie par :

$$h\ u^{n+1} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad h\ v^{n+1} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (*) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (23)$$

qui assure ainsi la vérification de l'équation de continuité.

En construisant le rotationnel à l'aide des deux premières équations il vient :

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\frac{\partial\ u^{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial\ u^{aux}}{\partial\ y} - \frac{\partial\ v^{n+1}}{\partial\ x} + \frac{\partial\ v^{aux}}{\partial\ x} = \right] 0$$

Soit :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{h}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{h}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial\ u^{aux}}{\partial\ y} - \frac{\partial\ v^{aux}}{\partial\ x} = \omega^{aux} \ \ldots\ldots\ldots \ (24)$$

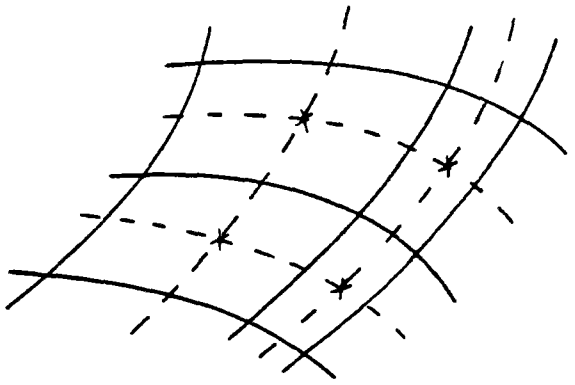
ω^{aux}, encore appelé vecteur tourbillon, présente le rotationnel du champ u^{aux}.

Cette équation de type elliptique est discrétisée et résolue de la même façon que les deux précédentes par une méthode itérative de surrelaxation (S.O.R).

D'après (23) on déduit alors le champ de vitesse U^{n+1} du champ de ψ obtenu.

(*) Nous aurons alors $d\psi = -\ h\ v^{n+1}\ dx + h\ u^{n+1}\ dy$ ..... (25)
c'est-à-dire $d\psi = -\ h\ \vec{U}.\ \vec{n}\ \|\ \vec{n}\ \|$ où $\vec{n}$ est la normale à la trajectoire du point M. Une ligne iso-ψ sera donc une ligne de courant d'où le nom fonction de courant donné à ψ.

A ce stade on introduit un second maillage intérieur au premier et centré (*):



premier maillage

second maillage

Schema 3

Les vitesses u, v sont définies sur le premier maillage, tandis que ψ est définie sur la grille intérieure. L'intérêt de ce décalage est visible au niveau de la définition même de ψ (23).

En effet l'une des fonctions étant le gradient de l'autre, le décalage des grilles sur lesquelles ces fonctions sont définies apporte un gain de précision important [2].

Pour les mêmes raisons (voir 22) la pression $P^{*'}$ est définie sur la grille interne. La température quant à elle, n'étant reliée aux variables de vitesse que par un opérateur de convection, est définie sur la grille u, v.

La résolution de l'étape de continuité en ψ ne nous fournit pas le champ de pression. L'écoulement peut ainsi être calculé en ne faisant intervenir que des conditions aux limites en vitesses (les conditions aux limites de ψ s'en déduisent d'après 23). La définition de la fonction de courant nous assure d'obtenir un champ dont la divergence est strictement nulle.

(*) Cela signifie que chaque point du second maillage est défini comme l'équi-barycentre des quatre points du premier maillage qui l'entourent.

Le calcul de la pression est envisagé dans un paragraphe ultérieur. Il est basé sur un autre type de résolution du système (22).

L'étape de continuité clôt la résolution d'un pas de "temps". La solution permanente de l'écoulement est obtenue lorsque la suite U^n a convergé.

Une particularité distingue la méthode ci-dessus décrite de la plupart des méthodes de résolution des équations de la mécanique des fluides en mailles curvilignes disponible dans la littérature (voir notamment [17], [35]).

Ces auteurs prennent comme inconnues les projections (u', v') de la vitesse sur les axes iso-coordonnées du maillage curviligne au lieu d'utiliser comme nous le faisons les composantes cartésiennes (u,v).

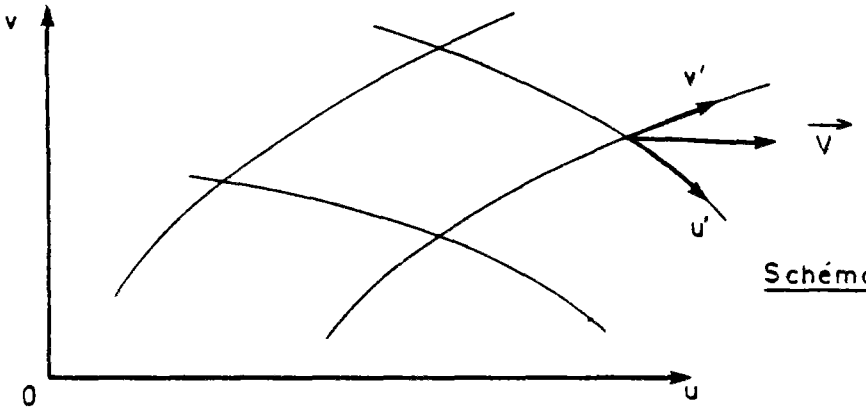


Schéma 4

De telles méthodes de résolution sont plus complexes que la notre d'une part parce qu'elles introduisent -dans l'étape de convection par exemple- un couplage entre les composantes de la vitesse, en l'occurence u' et v' et d'autre part qu'elles font apparaître des termes d'ordre inférieur. Pour ces différentes raisons les équations obtenues avec ces méthodes sont beaucoup plus délicates à résoudre précisément.

Nous allons à présent examiner, dans le paragraphe suivant la prise en compte des conditions aux limites.

2.3 - Les conditions aux limites

Le système d'équation (13) présente 4 inconnues u, v, P'^{*} et θ. Dans le mode de résolution que nous avons adopté nous avons en fait subtitué ψ à P'^{*}. De part sa définition (23), les conditions aux limites en ψ se déduisent de celle de (u, v).

2.3.1 - Définition des conditions aux limites à imposer

2.3.1.1 - En vitesse

En écoulement fluvial on dispose généralement de données sur le débit amont, voire sur le champ de vitesse-amont et l'on recherche la répartition du champ de vitesse dans l'ensemble du domaine, y compris à l'aval.

On possède donc à l'amont des conditions de type Dirichlet :

$$\begin{cases} u = u_{\Gamma_1} \\ v = v_{\Gamma_1} \end{cases} \qquad \Gamma_1 \text{ portion de frontière amont}$$

A l'aval, pour ne pas influencer la répartition des vitesses, on cherche à assurer une "sortie libre". Nous verrons plus loin comment se réalise ce type de condition, sur le plan numérique.

Enfin sur les rives (frontières solides immobiles) la vitesse du fluide visqueux qu'est l'eau est théoriquement nulle.

Mais pour des raisons analogues à ce qui se passe dans le cas d'un écoulement bidimensionnel turbulent, une telle condition de limite nécessite une très grande finesse de discrétisation pour bien décrire le profil des vitesses au voisinage de la paroi. En écoulement turbulent, une autre solution est d'écrire que le profil des vitesses dans la couche limite est de type logarithmique. On en déduit alors [2], [24] une nouvelle condition moins contraignante sur la finesse de la discrétisation.

$$(26) \qquad \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{u} \cdot \vec{\tau}}{\partial n} - \alpha\, \vec{u} \cdot \vec{\tau} = 0 \end{cases}$$

Elle revient à placer la frontière de calcul dans la couche logarithmique ($\vec{u}.\vec{\tau} \neq 0$) en imposant un frottement à cet endroit.

Dans notre cas les équations de Navier-Stokes ont été intégrées sur la verticale et le coefficient intervenant dans les termes de diffusion ne traduit plus une turbulence, mais représente l'intégration de la turbulence sur la verticale.

Par analogie il semble raisonnable d'adopter le long des rives une condition aux limites équivalente à ce qui est écrit en (26). Le coefficient α traduit le frottement relatif de l'écoulement le long des rives et devra être évalué dans chaque type d'écoulement (voir 2.5.1).

2.3.1.2 - En température

De même que pour les vitesses, on connaît en général la température amont d'où une condition de type Dirichlet :

$$\theta = \theta_{\Gamma_1} \qquad \Gamma_1 \text{ portion de frontière amont.}$$

A l'aval nous avons également une condition de "sortie libre". Enfin sur les rives on impose une condition d'adiabaticité, qui sécrit :

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)_{\Gamma_2} = 0 \qquad \Gamma_2 \text{ portion de frontière incluant les rives}$$
$$n \text{ direction normale.}$$

Examinons maintenant comment vont se traduire ces conditions sur le plan numérique de la résolution des équations.

2.3.2 - Prise en compte numérique de ces conditions aux limites

La méthode de résolution adoptée pour le système d'équation (13) calcule successivement trois champs de vitesses $U°$, U^{aux} et U^{n+1}.
Les conditions aux limites en vitesse doivent être vérifiées par le champ U^{n+1}. Les conditions aux limites imposées aux champs $U°$ et U^{aux} doivent donc théoriquement s'en déduire :

Nous avons ainsi :

$$(27) \quad U^{aux}|_{\Gamma_T} = U^{n+1}|_{\Gamma_T} + \frac{\Delta t}{\rho} \vec{\text{grad}}\, P|_{\Gamma_T}$$

et

$$(28) \quad U°|_{\Gamma_T} = U^{aux}|_{\Gamma_T} - \frac{1}{h} \text{div}\,(\nu t.h.\vec{\text{grad}}\, U\,aux)|_{\Gamma_T} - \frac{g}{K^2 h^{4/3}} U\,aux_{\Gamma_T} \| U\,aux_{\Gamma_T} \|$$

Ces conditions aux limites recouplent entre elles les inconnues des différentes étapes et introduisent la pression (même dans le cas où l'on ne la calcule pas) ce qui détruit l'avantage de la méthode utilisée. Toutefois on sait que les termes correctifs sont d'ordre $O(\Delta t)$ aussi les néglige-t-on généralement [6]. Il existe cependant des cas où cette hypothèse n'est pas valide par exemple en présence de terme source de la forme $-k\,\vec{U}\,\|\vec{U}\|$, ce qui est notre situation.

Par ailleurs on peut montrer que dans le cas où l'on dispose pour l'étape de continuité d'une condition à la limite du type $\vec{U}^{n+1}.\vec{n}|_{\Gamma_T}$ donné, la composante normale de la vitesse auxiliaire, issue de l'étape de diffusion, sur les bords $\vec{U}^{aux}.\vec{n}|_{\Gamma_T}$ n'intervient pas dans la solution obtenue pour ψ et que, par conséquent, la solution finale U^{n+1} est indépendante de la valeur choisie pour $\vec{U}^{aux}.\vec{n}|_{\Gamma_T}$.

On prend alors généralement :

$$\vec{U}^{\circ}.\vec{n} = \vec{U}^{aux}.\vec{n} = \vec{U}^{n+1}.\vec{n}$$

Ce propos a pu être démontré de façon très explicite dans le cas d'une résolution en pression (voir [6]).

Dans le cas d'une résolution en fonction de courant, on peut écrire l'étape de continuité sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^{aux}}{\Delta t} = -\dfrac{1}{\rho}\ \vec{\text{grad}}\ P \\[2ex] h\,\vec{U}^{n+1} = \vec{\text{rot}}\ (\psi\,\vec{N}) \end{cases}$$

où $\vec{N}$ désigne le vecteur normal au plan.

Soit encore :

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}}\ (\frac{1}{h}\ \vec{\text{rot}}\ (\psi\,\vec{N})) = \vec{\text{rot}}\ \vec{U}^{aux} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29) \\[2ex] h\vec{U}^{n+1} = \vec{\text{rot}}\ (\psi\,\vec{N}) \end{cases}$$

La condition à la limite s'écrit :

$\vec{U}^{n+1}.\vec{n}\,|_{\Gamma_T}$ donné ou encore $\vec{rot}\ (\Psi\,\vec{N}).\vec{n}\,|_{\Gamma_T}$ donné ..... (30)

La résolution de l'équation (29) s'écrit :

$$\iint_{\Omega_o} \vec{rot}\ (\vec{rot}\ (\psi\ \vec{N}))\ d\omega = \iint_{\Omega_o} \vec{rot}\ \vec{U}aux\ \ d\omega$$

Soit en appliquant la formule de Stokes :

$$\int_{\gamma_o} \vec{rot}\ (\psi\ \vec{N}).\vec{\tau}\ ds = \int_{\gamma_o} \vec{U}aux.\vec{\tau}\ ds \text{ ..... } (31)$$

La résolution de l'équation (31) avec pour condition à la limite (30) ne fait par intervenir $\vec{U}aux.\vec{n}|_{\Gamma}$. La solution obtenue sera donc indépendante de ce terme. Par contre elle dépend fortement comme on le voit de la valeur de $\vec{U}aux.\vec{\tau}$ d'où la nécessité d'être très rigoureux pour la "remontée" des conditions aux limites de ce terme.

Dans ce qui suit, le cheminement décrit n'a pas toujours de justification théorique mais résulte plutôt d'une longue expérience des pas fractionnaires et du découpage physique des équations.

2.3.2.1 - Etape de convection

L'opérateur résolu à cette étape ne nécessite que les valeurs de la vitesse $\vec{U}°$ sur les frontières sur lesquelles $\vec{U}°.\vec{n} < 0$.

Cela signifie que l'on n'a pas besoin de conditions aux limites pour les frontières où la vitesse est sortante ($\vec{U}.\vec{n} > 0$), ni sur celles où il y a glissement ($\vec{U}.\vec{n} = 0$). En définitive nous devons connaître $\vec{U}°$ uniquement sur les frontières à vitesse entrante.

On choisit d'imposer le long de cette frontière :

$$\vec{U}° = \vec{U}^{n+1}$$

On commet ainsi, d'après ce qui a été dit plus haut, une erreur sur la composante tangentielle de la vitesse. La composante tangentielle de $U^{n+1}|_{\Gamma_1}$ étant généralement faible, voire nulle, sur la frontière d'entrée, l'expérience montre que cette solution est une bonne approximation de la solution rigoureuse (29).

2.3.2.2 - Etape de diffusion

Envisageons en premier lieu l'étape de diffusion thermique.
On résout un système matriciel de la forme :

$$\overline{B}_1 \; \theta^{n+1} = \overline{C}_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

avec pour conditions aux limites :

$$\begin{cases} \theta^{n+1} = \theta^{\circ} \text{ sur les frontières amont} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \text{ sur le reste des frontières} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Le lecteur trouvera en annexe A.6 la description de la méthode numérique utilisée pour traiter la condition (33).

Envisageons maintenant l'étape de diffusion dynamique.
Le système résolu est de la forme :

$$\overline{B}_2 \;\; \overline{U}\,\text{aux} = \overline{C}_2$$

Les conditions aux limites sur U aux se déduisent de celles de U^{n+1} par (27).

Nous savons que cette condition ne s'applique qu'aux composantes tangentielles de la vitesse, soit :

$$\vec{U}\,\text{aux}.\;\vec{\tau}\;|\,\Gamma_T = \vec{U}^{\,n+1}.\vec{\tau}|_{\Gamma_T} + \frac{\Delta t}{\rho}\,\vec{\text{grad}}\;P.\vec{\tau}|_{\Gamma_T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Là encore l'expérience prouve que sur les frontières d'entrée et de sortie, où la composante tangentielle est généralement très faible devant la composante normale, une solution appropriée très satisfaisante peut être obtenue en prenant simplement comme condition aux limites :

$$U^{aux}\,|_{\Gamma_3} = U^{n+1}\,|_{\Gamma_3}$$

Sur les rives par contre la vitesse est tangente à la frontière et la correction doit être prise en compte.

La condition à la limite adoptée le long des rives s'écrit, pour la composante tangentielle (26) :

$$\frac{\partial \vec{U}^{n+1} \cdot \vec{\tau}}{\partial n} - \alpha \vec{U}^{n+1} \cdot \vec{\tau} = 0$$

En introduisant (34) dans le premier terme de cette équation, il vient :

$$\frac{\partial \vec{U}^{aux} \cdot \vec{\tau}}{\partial n} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial P}{\partial \tau}\right)^{n+1} - \alpha \vec{U}^{n+1} \cdot \vec{\tau} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Le second terme peut encore s'écrire :

$$\frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial P^{n+1}}{\partial \tau}\right) = \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial P^{n+1}}{\partial n}\right)$$

La condition (35) s'écrivant à la frontière on voit ainsi apparaître $\frac{\partial P^{n+1}}{\partial n}\Big|_{\Gamma}$. On peut montrer (voir 2.5.2.1) que dans le cas où l'on dispose pour, l'étape de continuité, d'une condition à la limite du type $\vec{U}^{n+1} \cdot \vec{n}\big|_{\Gamma}$ donné alors la condition à la limite pour P qui s'en déduit est nécessairement de type Newmann : $\frac{\partial P^{n+1}}{\partial n}\Big|_{\Gamma}$ donné.

Nous sommes amené à ce stade à émettre une supposition quant à la condition à la limite choisie pour P (et ce bien que nous résolvions les équations en remplaçant l'inconnue de pression pour la fonction de courant).

Nous choisissons alors pour $\frac{\partial P}{\partial \eta}\Big|_{\Gamma_2}$ une valeur couramment adoptée le long des rives (et entièrement justifiée a posteriori par l'expérience) :

$$\frac{\partial P}{\partial \eta}\Big|_{\Gamma_2} = 0$$

Compte tenu de cette condition à la limite, la condition de glissement le long des rives s'écrit alors :

$$\frac{\partial \vec{U}^{aux} \cdot \vec{\tau}}{\partial \eta} - \alpha \vec{U}^{n+1} \cdot \vec{\tau} = 0 \qquad (36)$$

Au stade de l'étape de résolution on ne peut résoudre une telle relation. On explicite alors le second terme de l'équation (36) et l'on résout, en définitive :

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\, \vec{U}^{aux}.\vec{\tau}}{\partial n} = \alpha\, \vec{U}^{n}.\vec{\tau} \\[2ex] \vec{U}^{aux}.\vec{n} = 0 \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : On aurait pu dans l'équation (35) introduire la relation (33) également au niveau du dernier terme. Compte tenu de la condition aux limites en pression on obtiendrait :

$$\frac{\partial\, \vec{U}^{aux}.\vec{\tau}}{\partial n} - \alpha\, \vec{U}^{aux}.\vec{\tau} = \alpha\, \frac{\partial P^{n+1}}{\partial \tau}$$

Pas plus que la relation (36), cette relation ne peut être résolue, au stade de l'étape de diffusion. Elle est alors généralement explicitée sous la forme :

$$\frac{\partial\, \vec{U}^{aux}.\vec{\tau}}{\partial n} - \alpha\, \vec{U}^{aux}.\vec{\tau} = \alpha\, \frac{\partial P^{n}}{\partial \tau}$$

dans le cas d'une résolution en (u, v, P) et sous la forme :

$$\frac{\partial\, \vec{U}^{aux}.\vec{\tau}}{\partial n} - \alpha\, \vec{U}^{aux}.\vec{\tau} = 0$$

dans le cas d'une résolution en u, v, ψ [24].

L'approximation faite dans ce dernier cas : $\dfrac{\partial P^{n+1}}{\partial \tau} \sim 0$ nous a paru plus grossière que celle faite dans (37) $\vec{U}^{n+1}.\vec{\tau} \sim \vec{U}^{n}.\vec{\tau}$, aussi préférons nous l'écriture obtenue en (37).

La condition aux limites (37) portant sur les vitesses est résolue numériquement de façon analogue à la condition d'adiabaticité en température. On trouvera en annexe A.6 un complément d'information concernant cette résolution.

2.3.2.3 - Etape de continuité

Cette étape se ramène, nous l'avons vu, à la résolution d'une équation matricielle de la forme :

$$\overline{\overline{C}}.\ \overline{\psi} = \overline{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

D'après la définition de ψ, nous avons vu que nous pouvons écrire (25) :

$$d\psi = h\ \vec{U}^{\,n+1}.\vec{n}\ \|\ \vec{n}\ \|$$

De cette relation on voit que l'on peut en déduire la valeur de ψ sur les frontières du domaine par intégration.

$$\psi = \psi_o + \int_\Gamma h\ \vec{U}^{n+1}.\vec{n}\ \|\ \vec{n}\ \|$$

La résolution de (38) se fait alors avec des conditions aux limites de Dirichlet.

La valeur de ψ est déterminée à une constante près ψ_o. Les vitesses étant recalculées par dérivation de ψ cette constante peut être fixée arbitrairement, elle n'influe aucunement sur le résultat final du calcul(*).

La connaissance de ψ sur les frontières se ramène alors à la connaissance de $\vec{U}^{n+1}.\vec{n}$ sur ces frontières.

En entrée U^{n+1} est parfaitement déterminé par les conditions de Dirichlet sur la vitesse.

Le long des rives la condition de profil logarithmique nous donne (26) : $\vec{U}^{\,n+1}.\vec{n} = 0$

Enfin en sortie le champ de vitesse a été évalué uniquement par l'étape de convection. En théorie cette étape est conservatrice. Toutefois, dans la pratique à cause des phénomènes numériques on observe fréquemment

---

(*) La seule restriction quant au choix de ψ_o est d'ordre numérique. On doit impérativement s'assurer de ne pas dépasser les limites en précision de la machine en choisissant pour ψ_o une valeur trop "grande" comparée aux variations de ψ entre deux mailles.

une légère perte de masse en sortie. Il serait alors difficile d'évaluer un champ conservatif à partir de conditions aux limites qui ne respectent pas la conservation du débit.

Aussi opère-t-on à un rééquilibrage du débit sortant par une simple règle de trois sur les vitesses de sortie calculées par la convection. Cet ensemble de manipulations (calcul des vitesses pour la convection, rectification du débit sortant) réalise ce que l'on appelle une sortie libre.

2.3.2.4 - Conditions initiales

La résolution envisagée étant itérative il est nécessaire de se donner un état initial.

L'écoulement recherché est un écoulement permanent et les équations que nous résolvons sont par conséquent des équations permanentes. La convergence de la méthode itérative est alors grandement accélérée si l'on se donne un état initial proche de l'état recherché.

C'est ce qu'on réalise en calculant un écoulement potentiel (*) dans le domaine étudié, avec, en entrée les conditions aux limites de l'écoulement, en sortie un débit uniforme réalisant la conservation des débits et sur les rives une vitesse nulle. L'écoulement ainsi calculé sert d'étape initiale pour la suite du calcul.

L'évolution des courants dans le calcul traduit alors l'influence des termes d'inertie (convection) et de diffusion sur cet état initial.

Le lecteur trouvera en Annexe A.7 un exposé un peu détaillé de quelques difficultés numériques rencontrées au cours de la prise en compte de ces conditions aux limites dans un maillage curviligne de forme quelconque.

(*) Un écoulement potentiel est par définition celui pour lequel en tout point $\vec{\text{rot}}\, V = 0$. Cette relation appliquée à Ψ implique $\text{div}\left(\frac{1}{h}\,\text{grad}\,\psi\right) = 0$. Dans la pratique c'est la résolution de cette équation en ψ qui nous fournit un champ de vitesse réalisant un écoulement potentiel.

2.4 - Traitement de la pression

2.4.1 - Intérêt du calcul de la pression

Le mode de résolution adopté en (u, v, ψ) est suffisant pour calculer un champ de vitesse. Toutefois ce calcul impose de se fixer a priori la valeur de la ligne d'eau sur tout le domaine. Pour vérifier a posteriori que cette valeur était quasiment correcte, il est nécessaire de calculer le champ de pression.

Cette considération nous a amené à mettre au point une résolution en pression de l'étape de continuité.

Dans le cas où ce calcul n'aboutirait pas à une pression de surface uniforme dans tout le domaine -résultat escompté- la variation obtenue est traduite en variation de pente par la relation d'hydrostaticité et une correction de la surface libre est opérée en vue d'un calcul ultérieur. Par tâtonnement successif on obtient ainsi une valeur très satisfaisante pour la cote de la surface.
Dans ce chapitre, dans un but de simplification, P'^{*} est noté simplement P.

2.4.2 - Traitement de l'étape de continuité en pression

2.4.2.1 - Formulation en volume fini

Reécrivons ici l'étape de continuité. Il vient :

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{u^{n+1} - u^{aux}}{\Delta t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P^{n+1}}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{v^{n+1} - v^{aux}}{\Delta t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial hu^{n+1}}{\partial x} + \dfrac{\partial hv^{n+1}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Le traitement en (u, v, ψ) consistait à introduire une fonction de courant ψ, de manière à ce que l'équation de continuité soit intrinsèquement vérifiée et à prendre le rotationnel des deux premières équations ce qui fournit l'équation sur ψ à résoudre :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial u^{aux}}{\partial y} - \frac{\partial v^{aux}}{\partial x}$$

Le traitement en (u, v, P) consiste à calculer u^{n+1} et v^{n+1} dans les premières équations et à reporter leurs expressions dans l'équation de continuité. On obtient alors :

$$\text{div}\,(h\,\vec{\text{grad}}\,P^{n+1}) = \frac{\rho}{\Delta t}\,\text{div}\,(h\,\vec{U}^{aux}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Cette équation nécessite une condition aux limites sur P. Cette condition se déduit de celles de la vitesse d'après (39). En effet on a pour la vitesse des conditions de Dirichlet aux bords et donc :

$$\vec{U}^{n+1}.\vec{n}\,|\,\Gamma_T \text{ donné}$$

$$\text{d'où : } -\frac{1}{\rho}\,\vec{\text{grad}}\,P.\,\vec{n}|_{\Gamma_T} = \frac{1}{\Delta t}\,(\vec{U}^{n+1}.\vec{n}|_{\Gamma_T} - \vec{U}^{aux}.\vec{n}|_{\Gamma_T}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

On aura donc pour P une condition de type Neumann.

Montrons que cette condition (41) est compatible avec (40). La condition de compatibilité s'écrit :

$$\frac{\rho}{\Delta t}\int_{\Omega} \text{div}\,h\,\vec{U}^{aux}\,d\omega = -\frac{\rho}{\Delta t}\int_{\Gamma_T} h\,(\vec{U}^{n+1}.\vec{n} - \vec{U}^{aux}.\vec{n})\,ds$$

Le premier membre de cette équation peut encore s'écrire :

$$\frac{\rho}{\Delta t}\int_{\Gamma_T} h\,\vec{U}^{aux}.\,\vec{n}\,ds$$

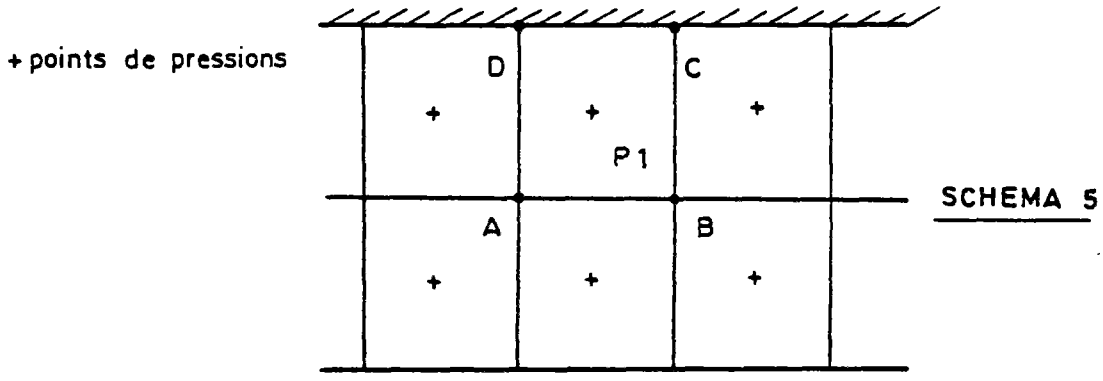
et la condition de compatibilité s'écrit :

$$\int_{\Gamma_T} \vec{U}^{n+1}.\vec{n}\,d\Gamma = 0$$

ce qui est vérifié par la conservation des débits.

La condition (41) est donc bien compatible avec (40) et l'on peut alors montrer qu'en adoptant pour (40) une formulation en volume fini le système (40), (41) admet une solution définie à une constante près dans $\left\{\Omega - \Gamma_T\right\}$ indépendante de $\vec{U}^{aux}.\vec{n}|_{\Gamma_T}$.

Plaçons nous par exemple en un point situé près d'une frontière :



Soit P_1 ce point de pression. La formulation en volume fini de l'équation (36) consiste à transformer les intégrales de volume :

$$\int_{\Omega_o} \text{div}\ (h\ \vec{\text{grad}}\ P)\ d\omega = \int_{\Omega_o} \frac{\rho}{\Delta t}\ \text{div}\ (h\ \vec{U}^{aux})\ d\omega$$

en des intégrales de surface :

$$\int_{o} h\ \vec{\text{grad}}\ P.\vec{n}\ ds = \int_{\gamma_o} \frac{\rho}{\Delta t}\ h\ \vec{U}^{aux}.\vec{n}\ ds$$

Au point P_1 nous écrirons alors cette relation sur le contour de la maille de vitesse ABCD qui entoure ce point, soit :

$$\int_{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{DA}} h\ \vec{\text{grad}}\ P.\vec{n}\ ds + \int_{\overline{CD}} h\ \vec{\text{grad}}\ P.\vec{n}\ ds = \int_{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{DA}} \frac{\rho}{\Delta t}\ h\ \vec{U}^{aux}.\vec{n}\ ds + \int_{\overline{CD}} \frac{\rho}{\Delta t}\ h\ \vec{U}^{aux}.\vec{n}\ ds$$

Or d'après la condition aux limites (41) les intégrales sur $\overline{CD}$ se soustraient et il vient finalement :

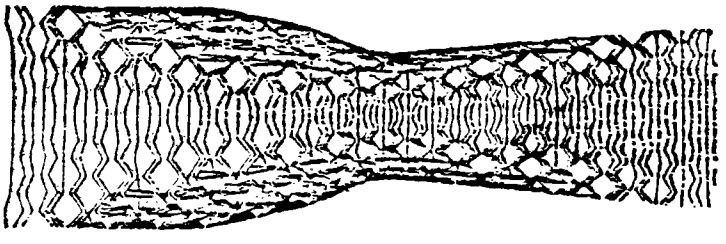
$$\int_{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{DA}} h\ \vec{\text{grad}}\ P.\vec{n}\ ds = \int_{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{DA}} \frac{\rho}{\Delta t}\ h\ \vec{U}^{aux}.\vec{n}\ ds + \int_{\overline{CD}} \frac{\rho}{\Delta t}\ h\ \vec{U}^{n+1}.\vec{n}\ ds$$

Ainsi la formulation en volume fini permet d'assurer l'indépendance de la solution obtenue pour P avec les conditions aux limites choisies pour $\vec{U}^{aux}$. Comme par ailleurs cette formulation assure numériquement une meilleure coordination entre l'ordre des équations et celui de leurs conditions aux limites, elle a été retenue pour la résolution de l'étape de continuité en pression.

2.4.2.2 - Discrétisation utilisée - Méthode de résolution

Nous avons, dans un premier temps introduit une première discrétisation en volume fini, pour cette étape. Puis, devant les difficultés soulevées, nous avons adopté comme solution définitive d'utiliser une pondération de cette discrétisation avec une seconde discrétisation en volume fini qui a l'avantage sur la première d'assurer la stabilité du calcul mais l'inconvénient de ne pas procurer une aussi bonne compatibilité entre le calcul de la pression et celui des vitesses. Le lecteur trouvera en annexe A.8 une description de ces discrétisations.

L'utilisation de la première de ces discrétisations seule, aboutit dans le cas d'un calcul en pression à une solution présentant d'importantes oscillations spaciales comme le montre la figure suivante [2] :

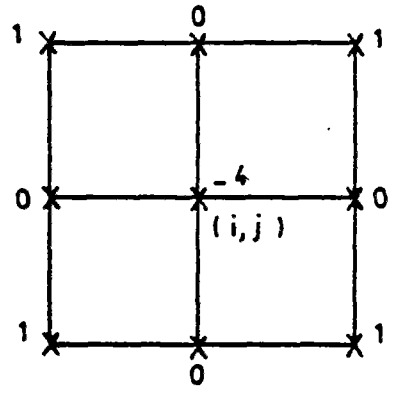


SCHEMA 6

Exemple de champ de pression obtenu
avec la première discrétisation

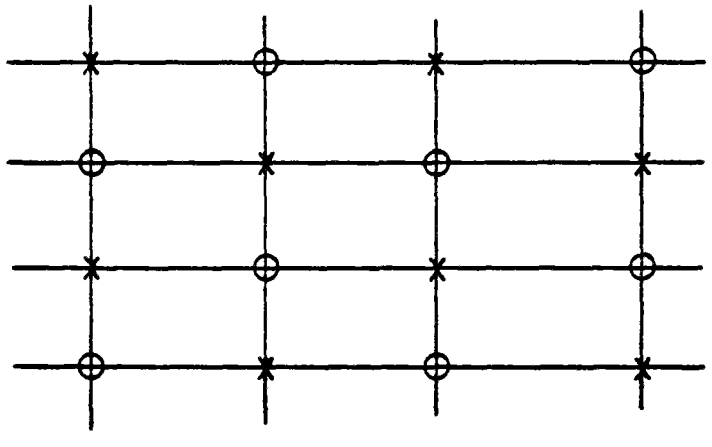
Ce phénomène peut être éclairé par la remarque suivante :

Sur un maillage rectangulaire régulier cette discrétisation conduit à attribuer aux 8 points entourant le point considéré les coefficients suivants :



SCHEMA 7

Ce qui fait que tout se passe finalement comme si l'on se trouvait en présence de deux grilles totalement découplées :



SCHEMA 8

X grille 1

O grille 2

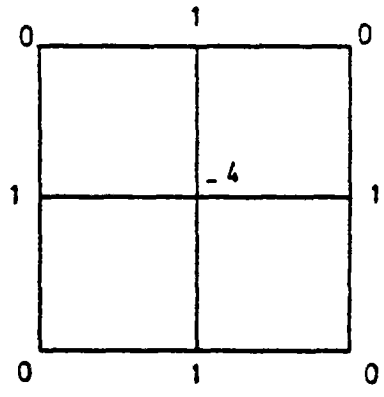
Toutefois en maillage curviligne l'apparition des coefficients de changement de variable introduit un couplage entre les 8 points entourant le point considéré. Mais comme l'on s'arrange en général, pour obtenir des maillages curvilignes peu déformés c'est-à-dire relativement proche de maillages rectilignes on peut penser que le couplage entre les deux grilles ainsi introduit est trop faible, ce qui expliquerait les oscillations observées dans un cas comme celui du schéma 6.

Cependant cette justification est à considérer avec réserve.

On a en effet observé par ailleurs des cas tests théoriques rectangulaires de petites dimensions pour lesquels les solutions obtenues ne présentent aucune oscillation.

Ainsi on est amené à penser que l'apparition d'une seconde valeur propre voisine de 0 -la première étant introduite par les conditions aux limites de type Neumann-, à l'origine du phénomène oscillatoire observé, est grandement favorisé par la forme et la taille du domaine -grand domaine de forme allongé, par exemple- ainsi que par la méthode de résolution utilisée. Ces corrélations n'ont pas encore pu être justifiées.

On a alors choisi d'introduire une pondération de cette première discrétisation avec une discrétisation qui, dans le cas d'un maillage rectiligne régulier, fournit les coefficients suivants.



SCHEMA 9

La valeur du coefficient de pondération -compris entre 0 et 1- est déterminée expérimentalement dans chaque cas traité. On sait que pour des valeurs proches de 0 on retrouve les phénomènes oscillatoires observés avec la première discrétisation seule. Par ailleurs on pense que la première discrétisation assure une meilleure compatibilité entre le calcul de la pression et celui des vitesses et l'on recommande pour cela de ne pas trop s'approcher de la valeur 1 (seconde discrétisation seule).

Plusieurs théories, parfois en contradiction, proposent différentes valeurs du coefficient de pondération. Toutefois l'influence de ce dernier étant très faible sur les valeurs numériques obtenues (en dehors de la valeur 0 qui peut introduire des oscillations) on choisit généralement pour celui-ci une valeur comprise entre 0,1 et 0,5.

La méthode utilisée est ici encore une méthode de Gauss-Seidel avec sur-relaxation. La pratique montre qu'il est nécessaire toutefois de choisir un coefficient de sur-relaxation relativement faible (de l'ordre de 1,3 à 1,4) ou bien d'utiliser une méthode symétrique de sur-relaxation pour obtenir la convergence du calcul et ce quelque soit le coefficient choisi pour la pondération des deux discrétisations.

2.5 - Détermination des paramètres du code de calcul

Les paramètres du code de calcul sont de deux sorte :

- d'une part des coefficients physiques intervenant dans les équations et dont le choix est déterminant quant à la nature du résultat établi.

- d'autre part des paramètres numériques introduits par la discrétisation des équations ou par la méthode de résolution employée. Ces paramètres ne doivent pas influer sur la nature des résultats mais uniquement sur la rapidité de convergence du calcul.

Ces derniers paramètres sont déterminés par expérience. On trouve dans la littérature quelques idées générales sur leur comportement et leur influence (voir par exemple [31]).

Toutefois, n'influant pas sur la nature des résultats, ils présentent pour nous un intérêt secondaire par rapport aux premiers qui feront l'objet de la suite de ce chapitre.

La valeur des coefficients physiques est théoriquement déterminée par la nature du problème physique traité. C'est le cas par exemple du coefficient de frottement de Strickler qui peut être calculé à partir de la connaissance de la nature du fond (courbe granulométrique par exemple, ou bien taille moyenne des aspérités, voir pour cela annexe A3).

Mais d'autres coefficients qui ne sont apparus qu'après manipulation des équations physiques ont une interprétation physique moins simple et leur évaluation s'en trouve compliquée. Comme, en tant que coefficients physiques, ils influencent très sensiblement la nature des résultats, il faut chercher cependant à les évaluer avec le maximum de précision. Nous allons donc examiner successivement les difficultés rencontrées pour l'évaluation de trois d'entre eux : ν_o, α et $\overline{\overline{K}}$.

2.5.1 - Evaluation de ν_o

L'influence de ce coefficient sur la nature de l'écoulement obtenu est très grande. Pour de fortes valeurs de ν_o on obtient un écoulement quasi-laminaire (plus de décollement aux parois, même avec un décrochement de la géométrie). Pour de faibles valeurs de ν_o au contraire l'écoulement peut être très tourbillonnaire, voir instationnaire. En deçà d'une certaine valeur ν_o n'a plus aucune influence sur l'écoulement. C'est qu'alors la diffusion induite par ν_o est devenue plus faible que la diffusion numérique induite par les erreurs de discrétisations.

Le coefficient ν_o h de viscosité introduit dans les termes de diffusion correspond en fait à une turbulence intégrée sur la hauteur. La littérature, très riche en ce qui concerne la modélisation de la turbulence, se fait rare lorsque cette turbulence est moyennée sur une verticale. Une modélisation simple de ce phénomène a été proposé par quelques auteurs sous la forme suivante [23] :

$$\nu_o \, h = C \, h \, u^*$$

ou C est une constante et u^* la vitesse de frottement.

Cette formule suppose que la turbulence n'est générée que par le frottement sur le fond. On peut penser que cette hypothèse est en défaut dans le cas d'écoulement complexe, pour lesquels la valeur de ν_o ainsi calculée sera faible devant sa valeur réelle.

Cherchons à évaluer C et u^* en fonction de grandeurs connues.

Nous suivons pour cela un raisonnement analogue à celui présenté dans [50] pour évaluer le terme de turbulence.

En supposant donc la turbulence uniquement générée par le fond et transmise par frottement des couches d'eau les unes sur les autres nous avons avec une hypothèse de longueur de mélange (Prandtl, voir [36]) :

$$\nu t = l^2 \frac{\partial u}{\partial z} = l\ u^*$$

où l représente la longueur de mélange.

Or par hypothèse nous admettons que la contrainte tangentielle horizontale décroît linéairement du fond à la surface ; il vient alors :

$$u = u^* ko^{-1} \log \zeta/\zeta_o$$

$$\tau_l = \tau_o (1 - \zeta)$$

ou $\zeta = \frac{z}{h}$

τ_l = contrainte tangentielle horizontale

τ_o : contrainte sur le fond

et $\tau_o = u^{*2} = g \frac{u^{m2}}{C}$

avec u^m vitesse moyenne verticale

C coefficient de Chezy (voir annexe A.3)

Le calcul de νt implique alors de se définir un profil vertical des vitesses. Nous choisissons pour celui-ci d'après [45] :

$$u = U\ \zeta^{\beta_o}$$

ou U est la vitesse à la surface

β_o un coefficient permettant de régler l'allure des profils verticaux de vitesse. On trouvera figure 6 un exemple de profils obtenus ainsi.

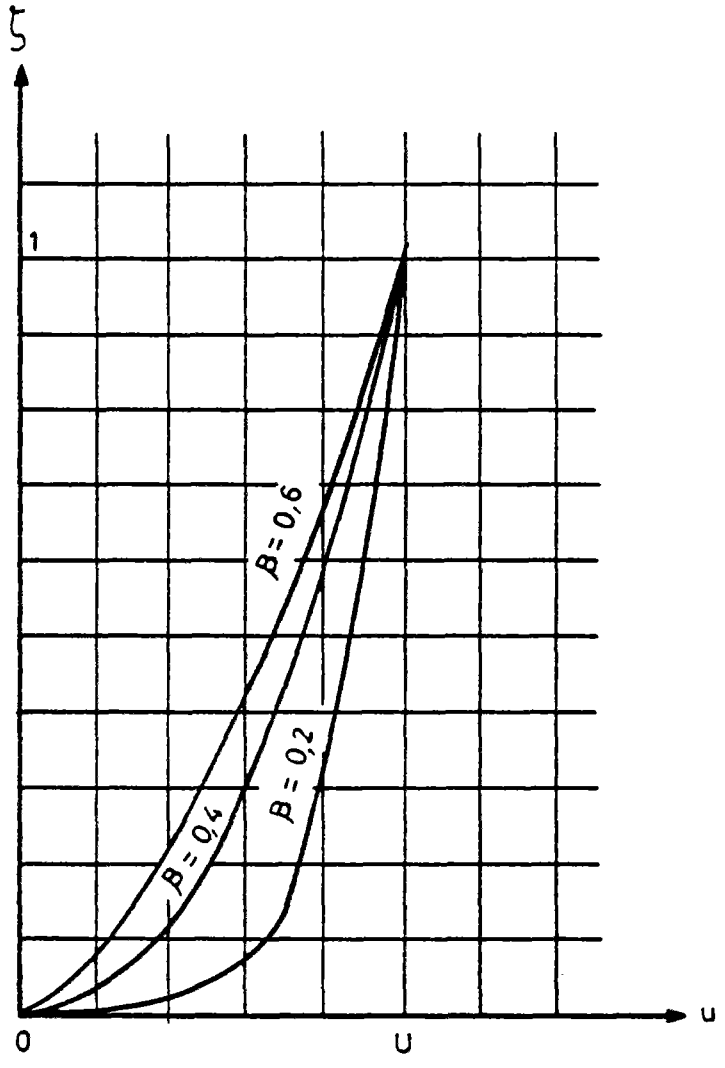


Fig. 6 - PROFILS DE VITESSE $u = U\zeta^3$ pour $\beta = 0{,}2$ $\beta = 0{,}4$ $\beta = 0{,}6$

On en déduit alors : [50] :

$$\nu t = \frac{g\ u\ m\ h}{C^2 \beta_o (\beta_o + 1)} \zeta^{1-\beta_o (1-\zeta)}$$

Revenons alors à la définition de ν_o :

$$\nu_o \frac{\partial \widetilde{ui}}{\partial xj} = \frac{1}{h} \int_{ZF}^{Z} \nu t \frac{\partial ui}{\partial xj} dz$$

Il vient :

$$\nu_o = \frac{1}{h} \frac{\int_{Z_F}^{Z} \frac{g\ u\ m\ h}{C^2\ \beta_o(\beta_o+1)} \zeta^{1-\beta_o} (1-\zeta) \frac{\partial}{\partial x} (U \zeta^{\beta_o})\ dz}{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U}{\beta_o+1} \right)}$$

D'où : $\nu_o = \dfrac{g\ u\ m\ h}{6\ C^2\ \beta_o}$

Cette dernière valeur est utilisée pour obtenir un ordre de grandeur du coefficient de viscosité turbulente intégré sur la hauteur. Rappelons que nous avons fait pour son calcul l'hypothèse que les échanges turbulents se faisaient principalement dans la direction verticale et donc que dans un écoulement complexe la valeur obtenue ainsi est plus faible que la valeur réelle de ν_o.

En utilisant les valeurs $g = 9{,}81\ m/s^2$ et $\beta_o = 0{,}17$ (d'après [22]), il vient :

$$\nu_o \sim 10\ \frac{u\,m\,h}{C^2}$$

Cette formule qui est utilisée dans le modèle pour calculer ν_o constitue une première approche de ce coefficient moyennant les hypothèses émises à ce propos.

Pour un écoulement de vitesse moyenne 1 m/s, de profondeur de l'ordre de 5 m et avec un Chezy de l'ordre de 40 ; on a $\nu_o \sim 3.10^{-2}\ m^2/s$.

2.5.2 - Evaluation de $\overline{\overline{K}}$

Ce tenseur est très important vis-à-vis du champ thermique aussi s'applique-t-on à le définir avec un maximum de rigueur.

Benqué et Warluzel [50] ont montré l'existence de ce tenseur sous certaines conditions (voir [44]) et en ont donné une écriture qui va nous permettre de l'évaluer.

Ils obtiennent en effet, sous forme adimensionnelle :

$$K_{ij} = \int_0^h \frac{dz'}{dt\,(z')} \int_0^{z'} u_i\,(u)\,du \int_0^{z'} u_j\,(v)\,dv$$

avec $u_i = u'$ si $i = 1$

$u_i = v'$ si $i = 2$

dt = coefficient de diffusion turbulente verticale.

Le calcul de ce coefficient nécessite là encore de se donner une répartition verticale des profils de vitesse.

Nous avons adopté comme description des profils verticaux de vitesse une théorie plus élaborée que la précédente, à savoir celle de De Vriend [15]. On obtient comme écriture des vitesses :

$$u = \tilde{u}\, f_m\,(Z) - \delta h\, U^* f_s\,(Z)$$

$$v = \tilde{v}\, f_m\,(Z) - \delta h\, V^* f_s\,(Z)$$

ou $Z = \frac{z-h}{h}$ z côte du point, h hauteur d'eau.

$Z' = e^{-1 - \frac{K_a C}{g}}$ K_a constante de Karman

C coefficient de Chezy (voir annexe A.3)

g gravité

f_m est la fonction de forme de la vitesse horizontale

f_s est la fonction de forme du courant secondaire.

$$f\,m\,(Z) = 1 + \frac{\sqrt{g}}{KC}\left[1 + \log\,(1+Z)\right]$$

$$f\,s\,(Z) = 2\int_{-1+Z'}^{Z} \frac{\log\,(1+Z)}{Z}\,dZ + \frac{\sqrt{g}}{KC}\int_{-1+Z'}^{Z} \frac{\log^2(1+Z)}{Z}\,dZ - 2\left(1 - \frac{\sqrt{g}}{KC}\right) f\,m\,(Z)$$

et

$$U^* = \frac{1}{2K^2\,(\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)^{3/2}}\left[(\tilde{u}^2+2\,\tilde{v}^2)\,\left(\tilde{u}\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v}\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\right) - \tilde{u}\,\tilde{v}\,\left(\tilde{u}\,\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v}\,\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right)\right]$$

$$V^* = \frac{1}{2K^2\,(\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)^{3/2}}\left[(2\,\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)\,\left(\tilde{u}\,\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v}\,\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right) - \tilde{u}\,\tilde{v}\,\left(\tilde{u}\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v}\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\right)\right]$$

On trouve pour dt (z) une expression de la forme(*).

$$dt\,(z) = K_a\,h\,u\,\frac{\sqrt{g}}{C}\,\frac{z}{h}\,\left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

On obtient alors [28]:

$$Kij = A\,ui\,uj - B_1\,(ui\,U_j^* + U_i^*\,u_j) + B_2\,U_i^*\,U_j^*$$

avec $$A = \frac{1}{H}\int_0^H \frac{dz}{dt\,(z)}\left[\int_0^z (f\,m\,(Z) - 1)\,d\zeta\right]^2$$

$$B_1 = \int_0^H \frac{dz}{dt\,(z)}\int_0^z (f\,m\,(Z) - 1)\,d\zeta\int_0^z f\,s\,(\zeta)\,d\zeta$$

$$B_2 = H\int_0^H \frac{dz}{dt\,(z)}\left[\int_0^z f\,s\,(Z)\,dZ\right]^2$$

(*) on suppose pour cela comme précédemment que la contrainte de cisaillement varie linéairement depuis le fond :

$$\tau_1 = \tau_o\,\left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

et que l'on a $\tau_o = \rho\,\frac{g}{C^2}\,\bar{u}^2$

on déduit dt de la définition de la contrainte de cisaillement $\tau_1 = o\,dt\,\frac{\partial u}{\partial z}$

On peut de cette manière évaluer au cours du calcul les coefficients de dispersion thermique à partir des champs de vitesse obtenus. Notons que les coefficients K_{ij} obtenus par cette méthode sont adimensionnels et qu'il faut les multiplier par H.U (H étant une hauteur de référence et U une vitesse horizontale de référence) avant de les utiliser.

Pratiquement ce calcul est réalisé par ordinateur, les intégrales étant calculées de façon approchée par une méthode des trapèzes. L'ordre de grandeur fournit dans [28] pour la valeur des K_{ij} offre généralement une bonne moyenne des valeurs calculées par le programme, à savoir :

$$K_{11} = 0{,}22 \text{ H.U}$$

$$K_{12} = 0.005 \text{ H.U}$$

$$K_{22} = 0.0005 \text{ H.U}$$

2.5.3 - Evaluation de α

Le coefficient α introduit dans la condition aux limites vitesses le long des rives :

$$\frac{\partial \vec{u}.\vec{\tau}}{\partial n} - \alpha\ \vec{u}.\vec{\tau} = 0$$

a une grande influence sur l'allure locale des profils transversaux de vitesses moyennes. Son influence sur l'ensemble de l'écoulement est moins importante. Toutefois le premier point nécessite qu'on accorde un grand soin à la détermination de ce coefficient lorsqu'on veut comparer des champs de vitesse.

Dans le cas d'un écoulement turbulent non moyenné sur la troisième dimension on sait évaluer cette constante. En effet une relation empirique donnant une bonne approximation d'un profil logarithmique le long d'une paroi s'écrit [2] :

$$\frac{\vec{u}.\vec{\tau}}{u^*} = \frac{1}{K_a}\ \ln \frac{\delta}{ks} + 8{,}48 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

avec : u^* vitesse de cisaillement à la paroi

K_a constante de Von Karmann

ks paramètre de rugosité

δ distance à la paroi

Compte tenu de ce que, près de la paroi, le tenseur de Reynolds est quasi-constant et de ce que les contraintes de cisaillement sont quasiment égales à la contrainte à la paroi, c'est-à-dire :

$$- \rho \overline{u'_n u'_t} = \rho u^* |u^*| = \tau_o$$

il vient :

$$u^* |u^*| = \nu_t \frac{\partial \overline{ut}}{\partial n} = \nu t \frac{\partial \vec{u}.\vec{\tau}}{\partial n}$$

La précédente hypothèse implique de supposer que la viscosité turbulente varie linéairement dans la couche limite soit :

$$\nu t = K_a |U^*| \delta$$

D'où

$$\frac{\partial u.\vec{\tau}}{\partial n} = \frac{u^*}{K_a \delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

On déduit de (42) et (43) la valeur de α :

$$\alpha = \frac{1}{\delta \left[\ln \frac{\delta}{ks} + 8,48 \; K_a \right]}$$

Rigoureusement ce raisonnement ne peut être mené que pour un écoulement turbulent plan. Dans la pratique on a admis qu'il offre, en première approximation, un ordre de grandeur raisonnable pour α dans le cas d'une turbulence intégrée en hauteur.

K_a est la constante de Von Karman à laquelle on attribue la valeur couramment admise $K_a = 0,41$. On prendra pour δ la longueur de la première maille le long de la rive (*). ks est un coefficient de rugosité que l'on évalue à partir du coefficient de Strickler [7], en supposant les rives de même nature que le fond :

$$K_s = 19,8 \log \frac{915}{ks} \text{ (ks en cm)}$$

Pour un écoulement avec un Strickler de 60 et une maille de l'ordre de 0,1 m on trouve $\alpha \sim 1,7 \; m^{-1}$.

(*) Cela suppose que la première maille est dans la couche logarithmique et nécessite pour cela un affinement du maillage près des rives.

TROISIEME PARTIE

Comparaison des résultats numériques avec des résultats de mesures

Pages

3.1 - Introduction générale 77

3.2 - Etude dynamique d'un bief de l'Aube 77

3.2.1 - Introduction 77

3.2.2 - Présentation du cas. Présentation des mesures et résultats antérieurs 77

3.2.3 - Modélisation utilisée 81

3.2.3.1 - Le maillage 81

3.2.3.2 - Description des fonds et de la surface 81

3.2.3.3 - Conditions aux limites 82

3.2.3.4 - Choix des paramètres 82

3.2.4 - Résultats 82

3.3 - Etude d'un rejet accidentel de polluant dans le canal de Miribel 89

3.3.1 - Introduction 89

3.3.2 - Présentation du cas - Présentation des résultats de mesures 92

3.3.3 - Modélisation utilisée 94

3.3.3.1 - Le maillage 94

3.3.3.2 - Description des fonds et de la surface 94

3.3.3.3 - Conditions aux limites 94

3.3.3.4 - Choix des paramètres 103

3.3.4 - Résultats 103

3.4 - Etude d'un rejet chaud en comparaison avec des mesures sur un canal théorique en S. 113

3.4.1 - Introduction 113

3.4.2 - Les mesures sur modèle physique 113

3.4.2.1 - Conception du canal - Description 113

3.4.2.2 - Définition des essais 117

3.4.2.3 - Réalisation des mesures - Résultats 119

TROISIEME PARTIE (suite)

Pages

3.4.3 - Modélisation du canal 129

3.4.3.1 - Maillage 129

3.4.3.2 - Description des fonds et de la surface 134

3.4.3.3 - Conditions aux limites 134

3.4.3.4 - Choix des paramètres 134

3.4.4 - Résultats 135

3.4.4.1 - Résultats dynamiques 135

3.4.4.2 - Résultats thermiques 135

3.4.4.3 - Calcul de la ligne d'eau 135

3.4.4.4 - Conclusion 140

3 - Troisième partie : Comparaison de résultats numériques avec des résultats de mesures

3.1 - Introduction générale

Comme nous l'avons vu dans l'introduction de ce rapport, la connaissance de la répartition d'une concentration de traceur dans un écoulement est entièrement dépendante de la connaissance du champ de vitesse de cet écoulement.

D'une manière générale on ne dispose pas de mesures de champ de vitesses avec une densité suffisante dans les biefs étudiés pour effectuer le calcul de concentration ou de chaleur. La mise au point et le calage d'un modèle numérique de courant se révèle alors être une étape préalable indispensable au calcul de dilution. C'est pourquoi nous avons mené une étude uniquement dynamique et une autre dans laquelle le calage dynamique est aussi important que l'étude thermique.

Nous allons présenter ces différentes études, au nombre de trois, par ordre de complexité croissante.

3.2 - Etude dynamique d'un bief de l'Aube

3.2.1 - Introduction

Nous avons cherché dans cette étude à valider le modèle dynamique d'écoulement en rivière. Pour cela nous avons choisi de le tester sur une portion de la rivière Aube, pour laquelle nous disposions de mesures sur modèle réduit, ainsi que de résultats d'un précédent calcul en maillage rectiligne [42].

3.2.2 - Présentation du cas - Présentation des mesures et résultats antérieurs

L'étude a été entreprise par le Laboratoire National d'Hydraulique afin de déterminer les aménagements de la prise d'eau du réservoir Aube. On a pour cela représenté sur un modèle non distordu un bief de l'Aube en amont du barrage de Beaulieu, présentant une double courbure. L'étude a porté en grande partie sur des mesures en période de crues.

Nous avons choisi de nous intéresser à la crue centénale pour laquelle nous disposons à la fois de mesures et de résultats de calcul de M.Uan [42].

Le bief étudié a une longueur de 380 mètres environ et s'inscrit dans un rectangle de 350 m de longueur et 110 m de largeur. La pente moyenne des fonds est de l'ordre de $2\ 10^{-3}$. La forme du lit est celle d'un V irrégulier, le fruit des berges varie de 0,5/1 à 6/1 mais en moyenne il est de l'ordre de 3/1. Les rayons de courbures des deux courbes sont de l'ordre de 120 m. Pour la crue étudiée la profondeur moyenne est de l'ordre de 4 m.

Une carte des fonds établie à partir de profils en travers est représentée figure 7.

Dans cette partie de l'Aube l'écoulement est rapide, le nombre de Froude moyen est de l'ordre de 0,7 et les deux courbes induisent des courants secondaires non négligeables, d'où des dévers de plus de 0,15 m. Des mesures de vitesses moyennes sur une verticale effectuées à l'aide d'un moulinet Beauvert ont permis de connaître le profil transversal des vitesses dans plusieurs sections.

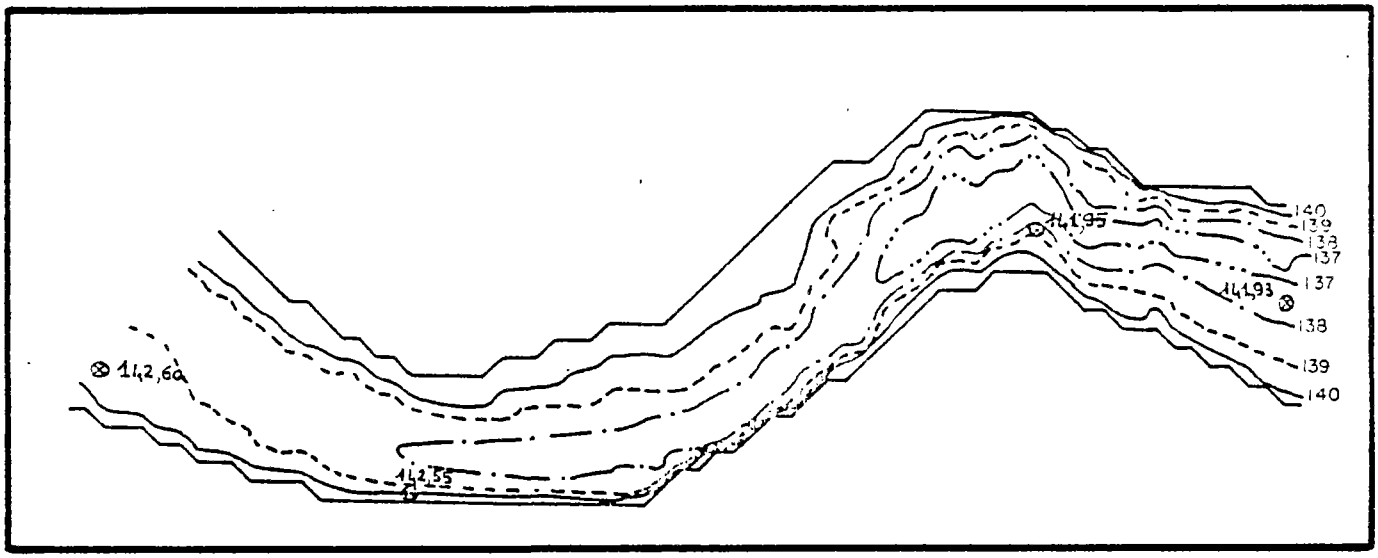
Ces mesures ont été reportées sur la figure 8, où elles servent de test comparatif pour les calculs effectués par M.Uan.

Notons qu'en un point de la section en travers, on a porté perpendiculairement à cette section la valeur du vecteur vitesse mesurée sans se préoccuper de sa direction qui n'a pas de réalité physique puisque sur une verticale les directions des vitesses peuvent différer de plusieurs dizaines de degrés. La cote du plan d'eau a été relevée à l'aide de pointes de mesure en plusieurs points : les valeurs mesurées ont été reportées sur la figure 7.

Le calcul mené par M. Uan effectuait la résolution des équations de Saint-Venant complète sur un maillage rectiligne à pas constant $\Delta x = 5$m (voir figure 1). Le nombre total de points est de 23 x 70 = 1610.

Le coefficient de Strickler a été déterminé égal à 60.
Les conditions du calcul étaient les suivantes :

- un état initial de repos, la surface libre étant horizontale à la côte 141,93 m.
- à la frontière amont fut imposée en 100 s une croissance linéaire d'un profil de débits sur la verticale proche de celui mesuré sur modèle réduit. Une erreur d'interprétation au moment du dépouillement des mesures a induit une différence entre valeurs mesurées et calculées à l'amont, visible sur la figure 8.



⊗ Côte de la surface

Echelle graphique : 50m.

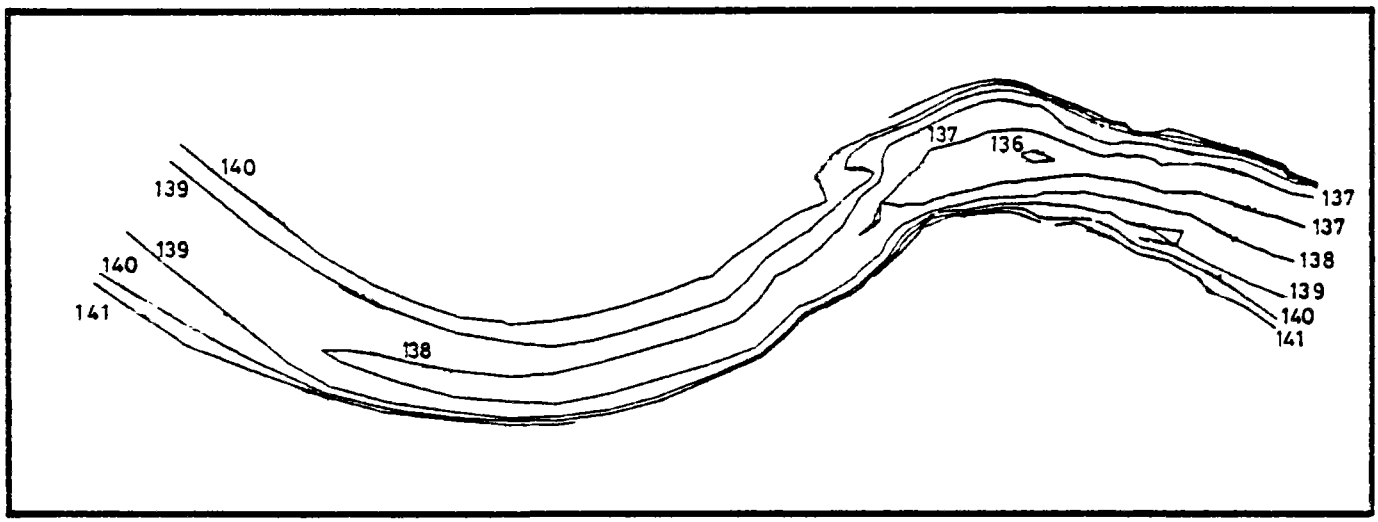


Fig. 7 en haut : CARTE TOPOGRAPHIQUE
en bas : CARTE RECONSTITUEE PAR LE CALCUL

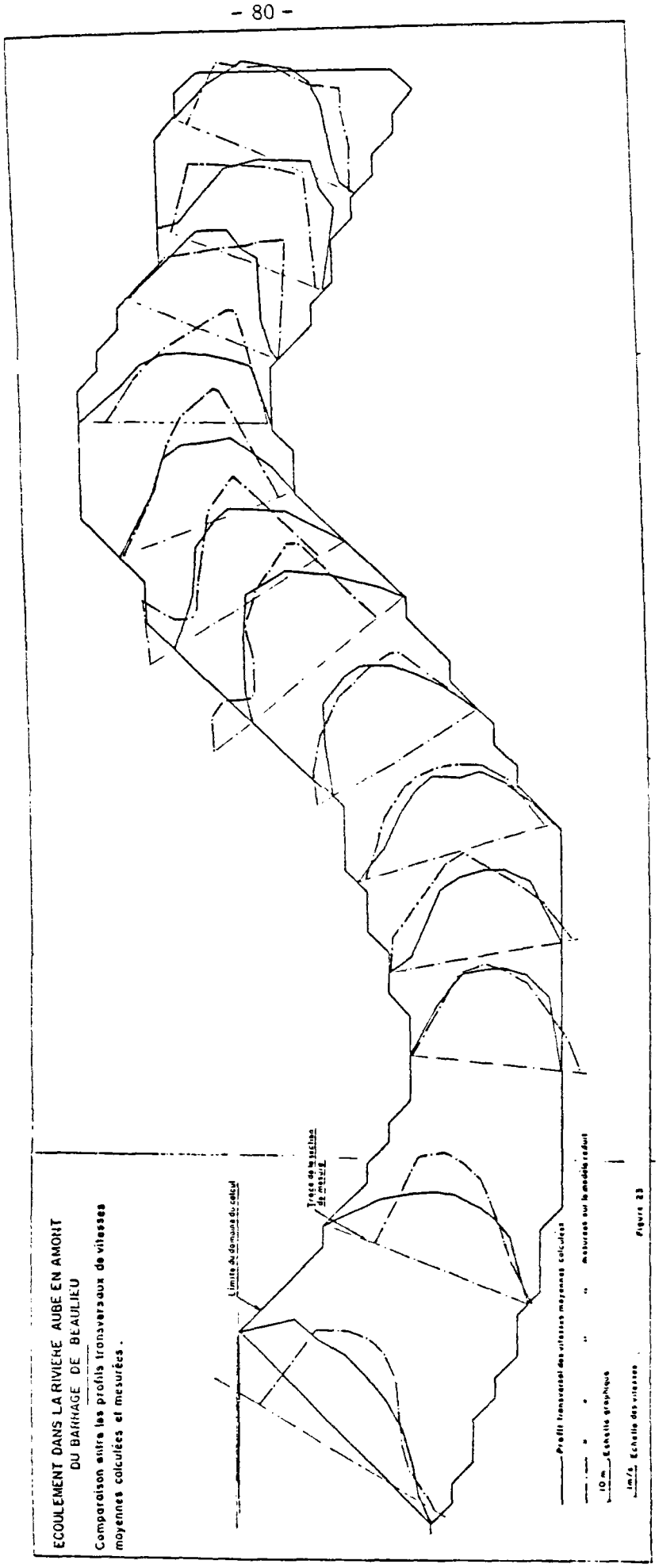


Fig. 8 (EXTRAITE DE [42])

- A la frontière aval la côte initiale de 141,93 a été maintenue. Le champ de vitesse obtenu lors de ce calcul est représenté sur la figure 8.

La principale faiblesse de ce calcul réside dans la pente de la ligne d'eau obtenue en fin de calcul qui présente un écart de 1,3 m avec la valeur mesurée, soit une erreur de 280 %. Ce résultat a pu être sensiblement amélioré par la suite en introduisant une vitesse de glissement sur les rives.

Toutefois on pourrait raisonnablement espérer supprimer ce défaut par une meilleure description des rives obtenues avec l'utilisation d'un maillage curviligne.

3.2.3 - Modélisation utilisée

3.2.3.1 - Le maillage

Le maillage curviligne a été obtenu par résolution de la méthode de Thompson. Il est représenté sur la figure 1.

Le tracé des rives a été choisi arbitrairement, leur contour naturel n'étant pas parfaitement défini. En particulier la rive gauche est, à l'état naturel, un marécage dont la végétation dense constitue une frontière floue, pas totalement imperméable à l'écoulement. La schématisation introduite par cette représentation explique les différences relevées sur les figures 12, 13 et 14 entre les limites du calcul et des mesures.

Le nombre total de points est de 15 x 53 = 795. Le pas des mailles est compris entre 2 m et 20 m dans le sens longitudinal, 1 m et 4,5 m dans le sens transversal. Le maillage a été resserré auprès des rives ainsi que dans le second coude où l'on sait qu'il doit apparaître un léger tourbillon en rive gauche.

3.2.3.2 - Description des fonds et de la surface libre

Nous avons essayé de reproduire la carte des fonds fournie par M. Uan par une méthode d'interpolation graphique. La carte ainsi obtenue est représentée sur la figure 7.

Il a été nécessaire d'adoucir artificiellement la pente d'une digue figurant à l'aval, dont les flancs verticaux introduisaient une importante perturbation au niveau du calcul. La pente de cette digue a été ramenée à la valeur de 1/1.

Dans un premier calcul on a fixé une surface libre horizontale à la côte 142.

Ensuite on a introduit une surface libre inclinée, variant linéairement dans le sens longitudinal entre la cote 142,6 à l'amont et la cote 141,95 à l'aval.

3.2.3.3 - Conditions aux limites

A l'amont le profil de vitesses mesurées a été légèrement modifié afin d'éviter d'induire un tourbillon numérique par des vitesses de valeurs strictement nulles.

Sur les rives une condition d'adhérence a été imposée, soit :

$$\vec{U} = 0$$

A l'aval la condition est de sortie libre.

3.2.3.4 - Choix des paramètres

Le pas de temps est calé sur les mailles les plus petites et les vitesses les plus grandes. On a pris $\Delta t = 0,5$ s.

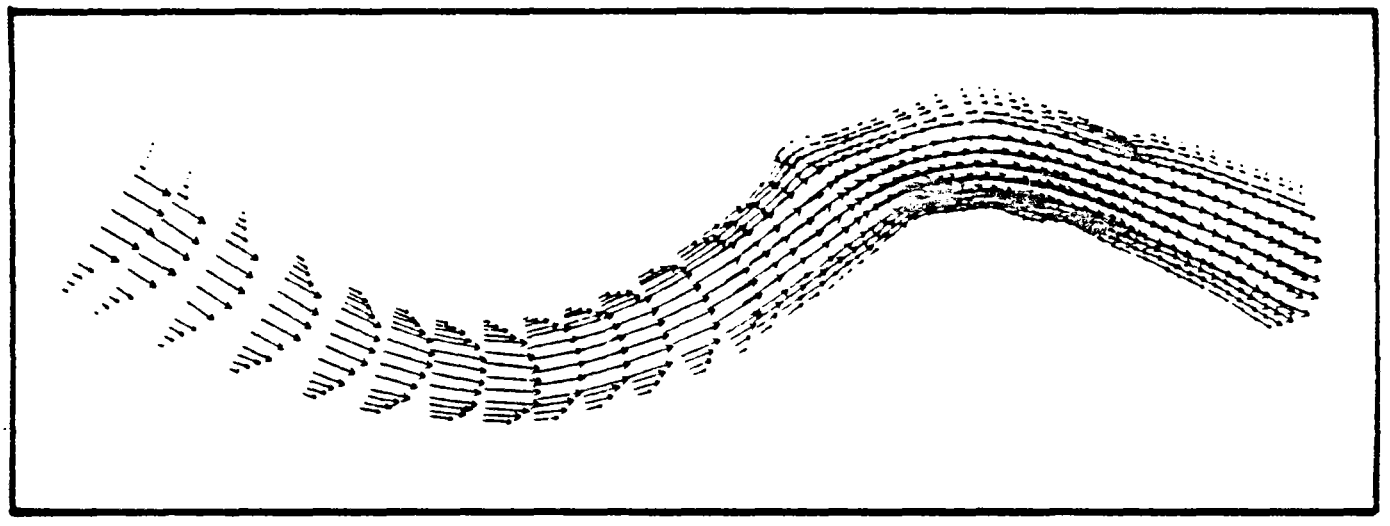
Le coefficient de Strickler est le même que dans le calcul de M. Uan : sa valeur est 60.

La valeur calculée pour ν_o d'après la méthode indiquée en 2.5.1 fournit une valeur de 0,13 m^2/s.

3.2.4 - Résultats

La figure 9 représente un champ de vitesse ainsi que les lignes de courant. Le petit tourbillon en rive gauche aval a été observé sur le modèle réduit.

On a comparé les résultats obtenus avec une surface libre horizontale ou inclinée, toutes choses égales par ailleurs. Les profils calculés ont été reportés sur la figure 10.



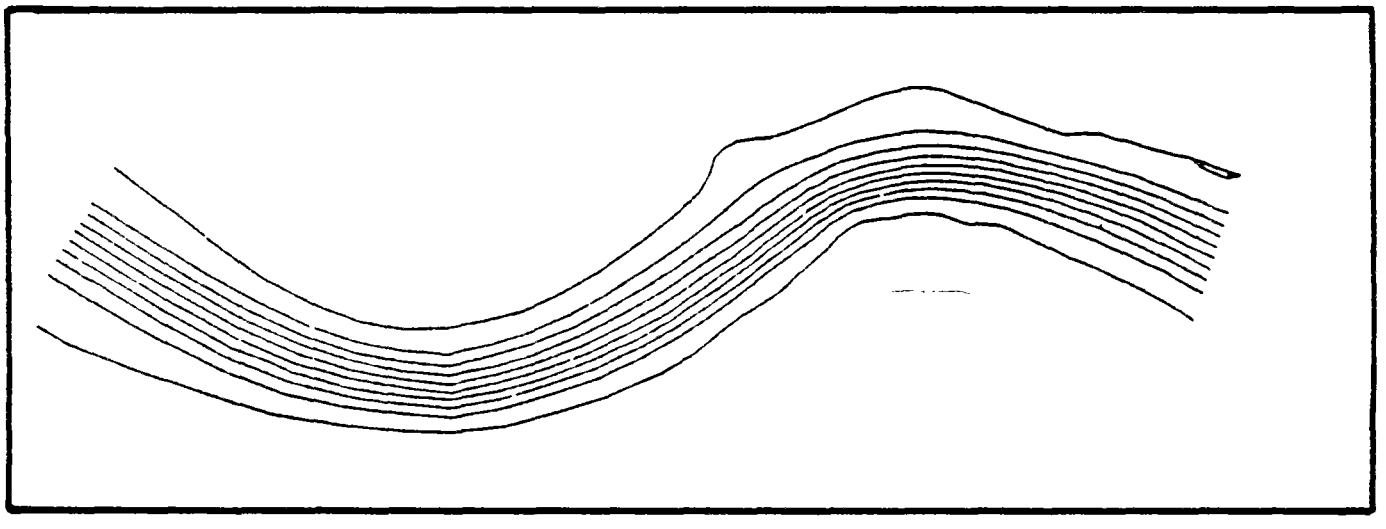


Fig. 9 CHAMP DE VITESSE ET LIGNES DE COURANT

Les résultats sont sensiblement indentiques sauf près de la sortie ou l'abaissement de la cote aval induit une augmentation légère des vitesses. La différence de débit observée entre mesures et calcul s'explique en partie par la différence de débit amont introduite et en partie par la perméabilité des frontières naturelles.

On a par ailleurs testé l'influence du coefficient ν_o. Différents résultats de calcul ont été reportés sur les figures 11 et 12. Les valeurs de ν_o offrant la meilleure concordance avec les résultats des mesures sont du même ordre de grandeur que la valeur évaluée précédemment. Pour cette valeur de ν_o, les profils calculés et mesurés sont bien comparables. Certaines différences de débit observées dans le premier coude sont explicables par les fuites de débit dans la zone marécageuse située en rive gauche, traduite sur le modèle réduit mais non sur le modèle mathématique. Ce débit de fuite se trouve d'ailleurs réinjecté en sortie du premier coude en rive gauche.

Le calcul de la pression quant à lui nous a fourni l'aspect de la surface libre représenté sur la figure 13. Les valeurs obtenues pour la pente de la surface sont un peu faibles puisqu'on trouve une différence de cote amont-aval de l'ordre de 45 cm alors que les mesures fournissent 65 cm. Par contre on retrouve bien des devers de l'ordre de 15 cm dans le second coude.

On a cherché à tester l'influence de la valeur du coefficient de Strickler, ainsi que celle de la contrainte imposée le long des rives sur la valeur de la cote de surface - les valeurs précédemment citées ont été obtenues pour un coefficient de Strickler de 60 avec une condition d'adhérence le long des rives - L'influence du coefficient de Strickler testé entre les valeurs 40 à 70 s'est révélée négligeable (variation relative de la pente d'eau de 3 à 4%) et celle de la condition à la limite sur les rives également très faibles (variation de 30% des devers et de 10% de la pente quand on passe d'une condition d'adhérence à une condition de glissement pur).

Il s'agissait de retrouver par le calcul un écoulement sur un fond variant vite, à Nombre de Froude élevé et pour lequel les courants secondaires sont assez forts.

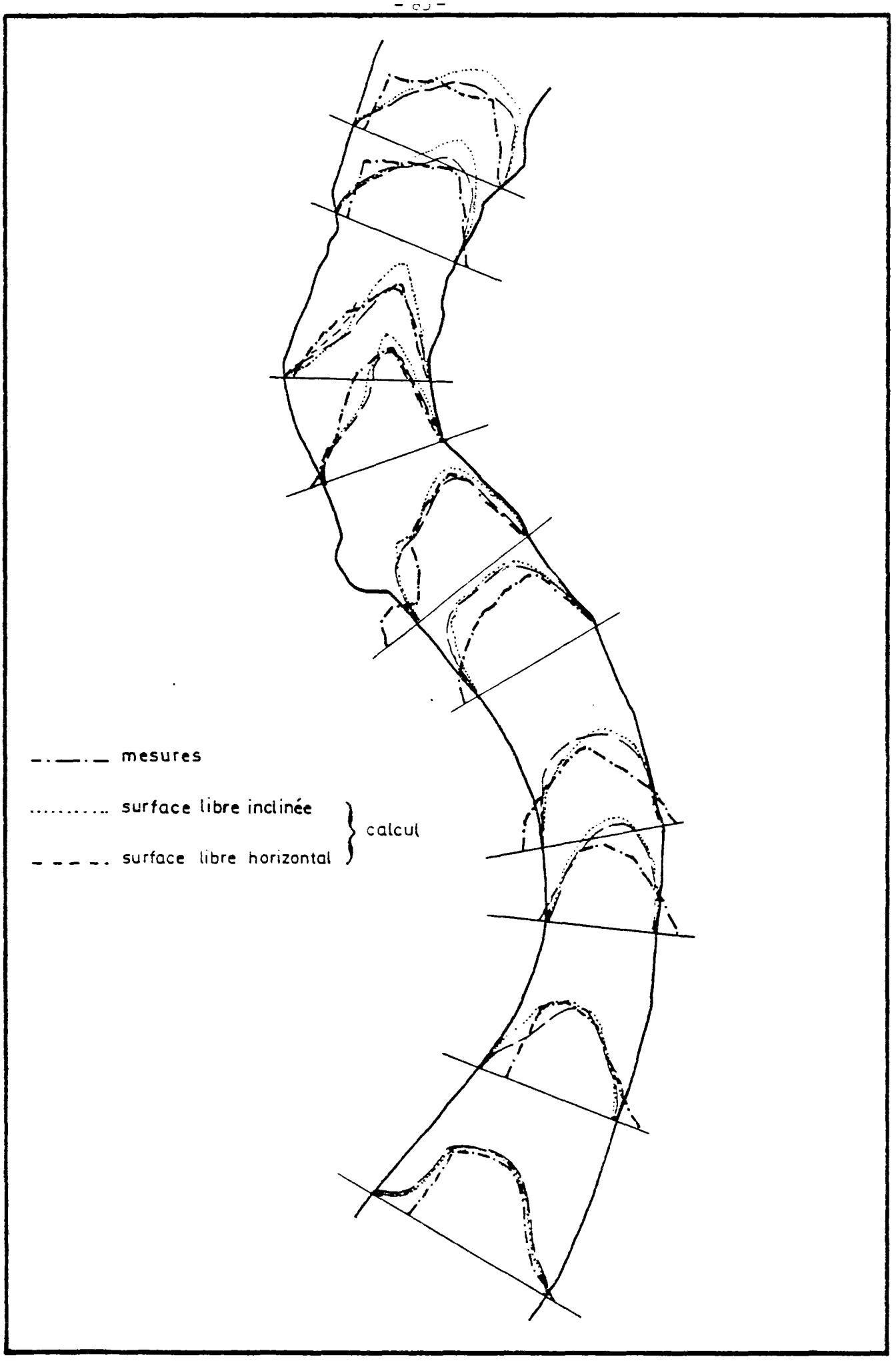


Fig.10 COMPARAISON DE PROFILS DE VITESSE MESURES ET CALCULES SUR L'AUBE POUR DIFFERENTES SURFACES.

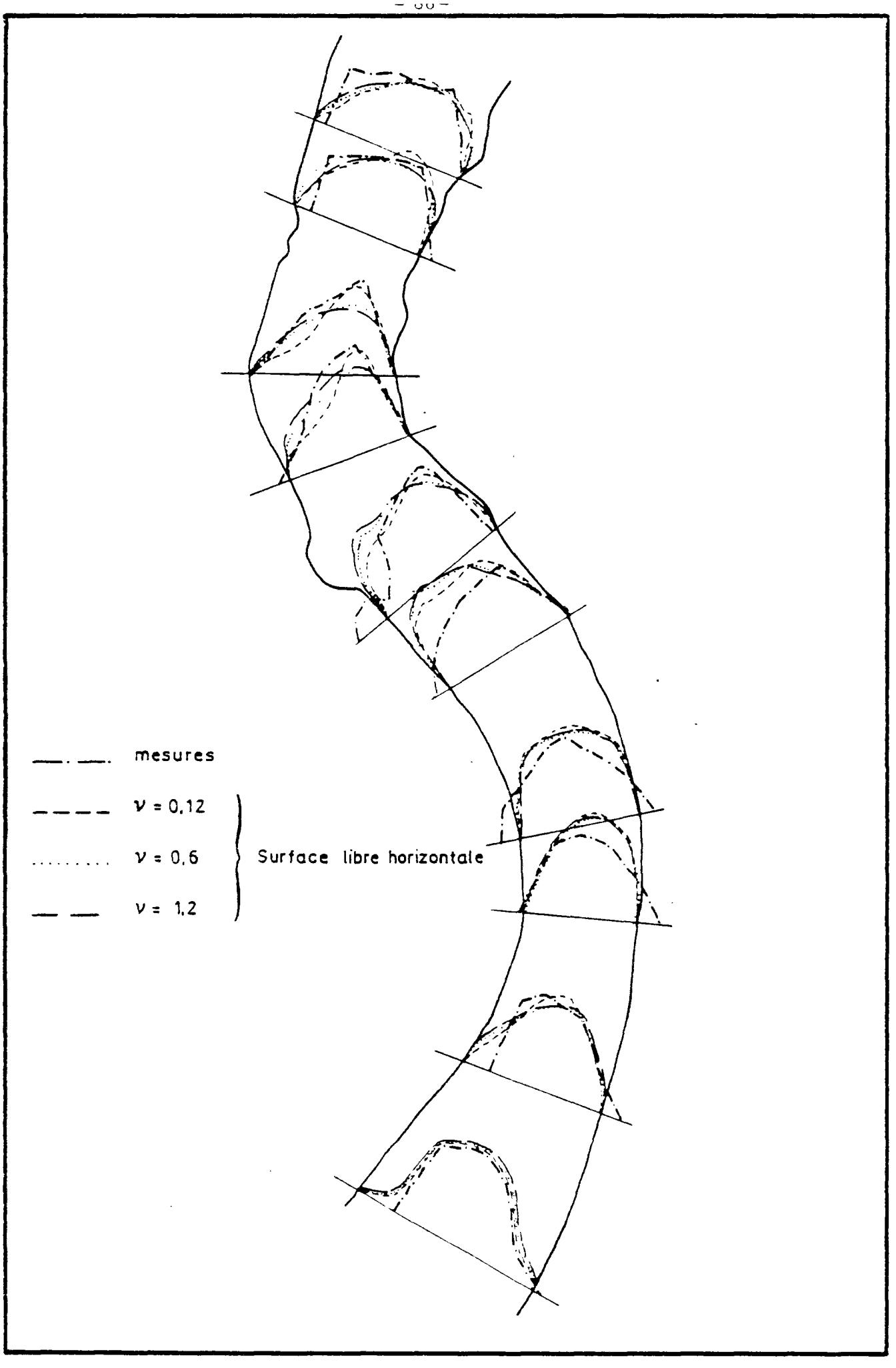


Fig. 11 COMPARAISON DE PROFILS DE VITESSE MESURES ET CALCULES SUR L'AUBE POUR DIFFERENTES VISCOSITES

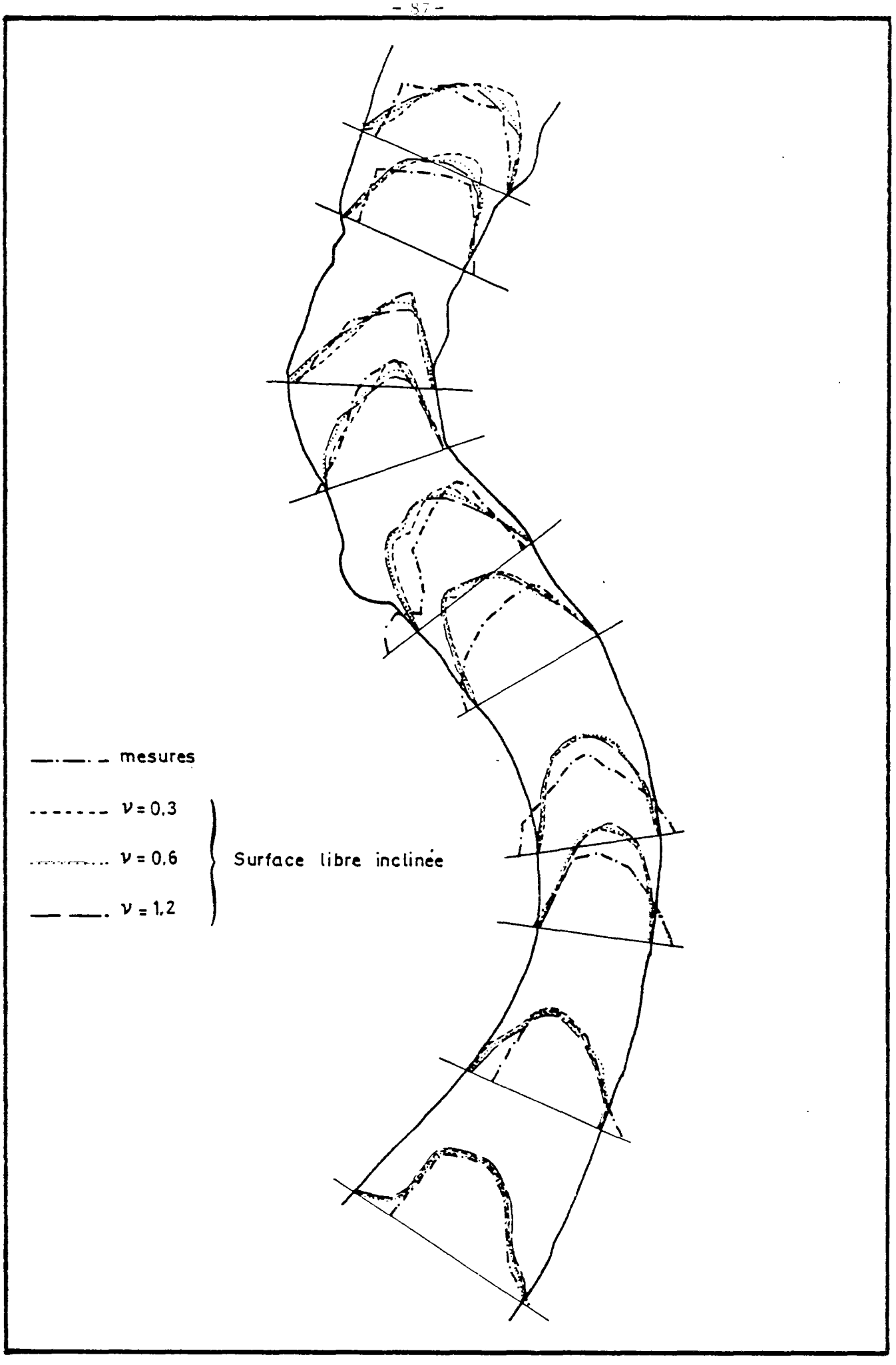


Fig. 12 COMPARAISON DE PROFILS DE VITESSE MESURES ET CALCULES SUR L'AUBE POUR DIFFERENTES VISCOSITES

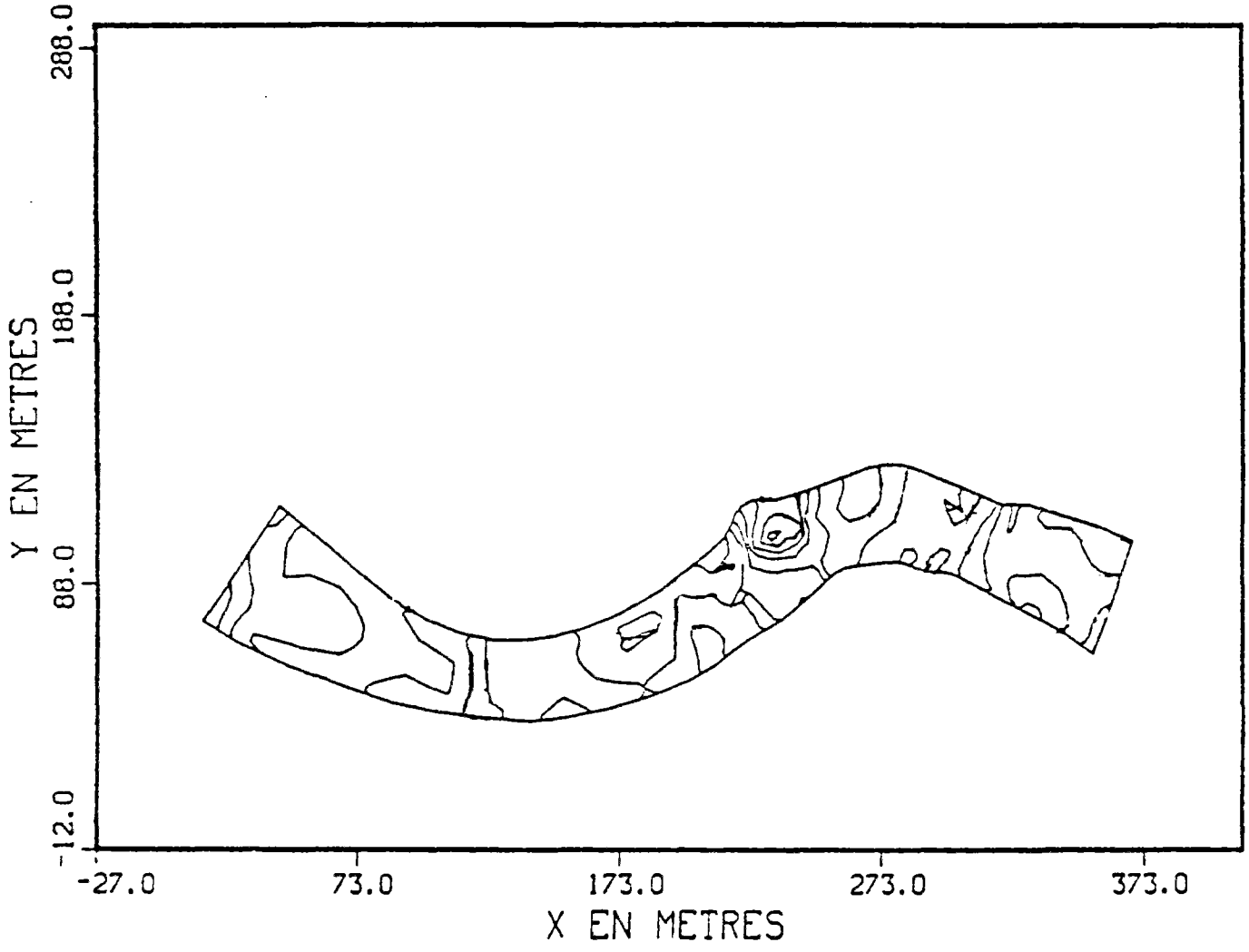


Fig. 13 CHAMP DE PRESSION DE SURFACE DONNANT L'ALLURE DE LA SURFACE LIBRE

La comparaison des champs de vitesses calculés et mesurés est satisfaisante : le calcul retrouve bien la forme générale des profils transversaux des vitesses moyennes et la valeur des vitesses avec une erreur au plus égale à 10 %.

La faible densité des mesures de cotes ne nous permet pas d'évaluer en détail la validité du calcul de la pression. Toutefois il semble a priori que les valeurs de la surface libre fournies par ce dernier soient un peu faibles par rapport aux valeurs mesurées. Cependant l'écart observé, de 30%, est beaucoup plus raisonnable que celui obtenu avec le précédent modèle (280%) et s'avère donc très encourageant pour cette méthode de calcul, étant donné la sévérité du cas traité.

3.3 - Etude d'un rejet accidentel de polluant dans le canal de Miribel

3.3.1 - Introduction

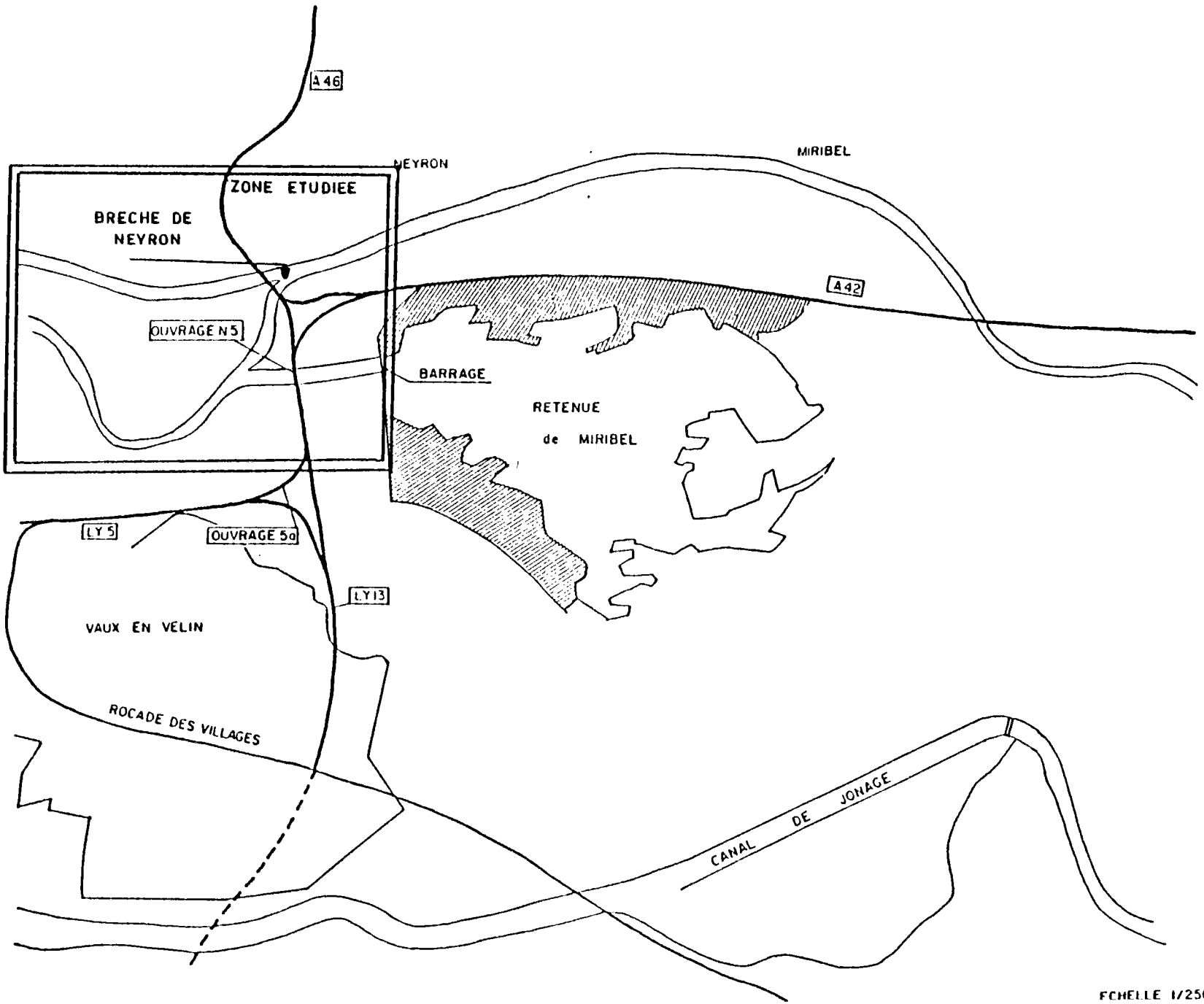
Le Rhône à l'amont de Lyon a fait l'objet de nombreuses études ces dernières années suite à différents projets d'aménagements (voir figure 14).

- projet d'aménagement de retenues d'eau entre le canal de Miribel et le canal de Jonage pour l'installation de plans d'eau de loisirs.
- projet auto-routier devant franchir le canal de Miribel en aval de la brèche de Neyron, ainsi qu'un projet d'échangeur routier à proximité de cette brèche.

Les différentes parties concernées ont commandé diverses études pour tester l'influence de ces projets notamment en cas de crues centénales. Entre autre, le service de navigation de Lyon, qui se préoccupe du maintien en état du Rhône, a voulu profiter de cette occasion pour connaître l'impact d'une pollution dans le canal de Miribel en amont de la brèche de Neyron sur la station de pompage servant à l'alimentation en eau potable de la ville de Lyon.

Cette étude, dont on trouvera le champ d'application sur la figure 15, a été entreprise sur un modèle physique préexistant. Nous avons mené un calcul en parallèle.

ETAT 1984



ECHELLE 1/25000

Fig. 14

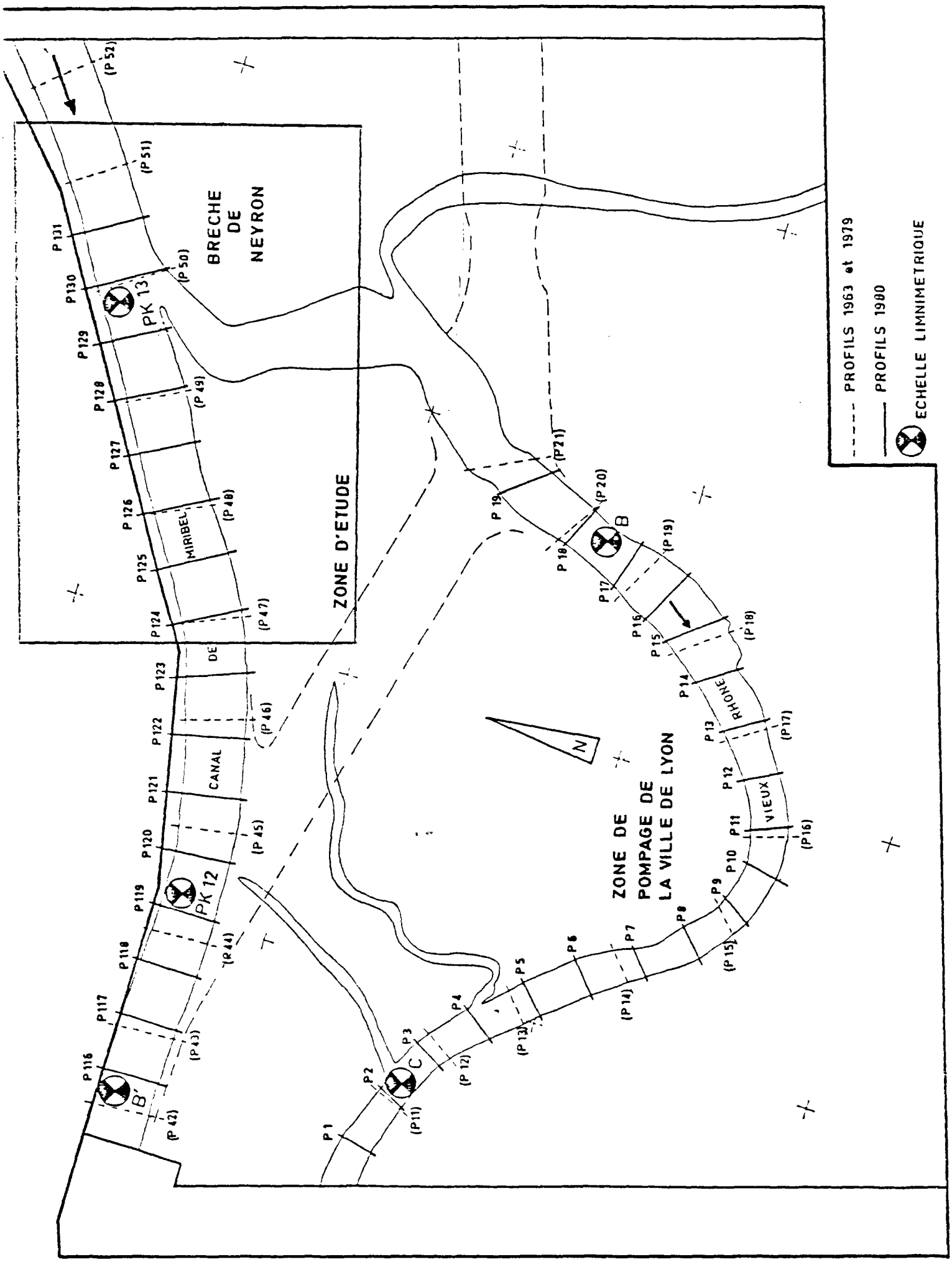

PROFILS 1963 et 1979
PROFILS 1980
ECHELLE LIMNIMETRIQUE
BRECHE DE NEYRON
ZONE D'ETUDE
MIRIBEL
CANAL DE
RHONE
VIEUX
ZONE DE POMPAGE DE LA VILLE DE LYON
PK 13
PK 12
B'
B
C
N
P 1
P 2
P 3
P 4
P 5
P 6
P 7
P 8
P 9
P 10
P 11
P 12
P 13
P 14
P 15
P 16
P 17
P 18
P 19
P 116
P 117
P 118
P 119
P 120
P 121
P 122
P 123
P 124
P 125
P 126
P 127
P 128
P 129
P 130
P 131
(P 11)
(P 12)
(P 13)
(P 14)
(P 15)
(P 16)
(P 17)
(P 18)
(P 19)
(P 20)
(P 21)
(P 41)
(P 42)
(P 43)
(P 44)
(P 45)
(P 46)
(P 47)
(P 48)
(P 49)
(P 50)
(P 51)
(P 52)

Fig. 15

Ce cas présente, en ce qui nous concerne, l'intérêt d'offrir un domaine aux contours complexes ne pouvant être projeté sur un domaine $\hat{\Omega}$ rectangulaire et de pouvoir tester ainsi le modèle dans un domaine quelconque.

3.3.2 - Présentation du cas - Présentation des résultats de mesures

Cette étude consiste à déterminer la répartition d'un polluant rejeté en amont de la brèche de Neyron, entre les deux branches de cette brèche.

La sécurité sur l'alimentation en eau de la ville de Lyon impose en effet qu'aucun polluant ne s'engage dans la dérivation du vieux Rhône.

On a donc restreint la zone d'étude au domaine environnant la brèche de Neyron. Ce domaine est représenté sur la figure 15. Nous nous sommes placés dans la situation aménagée c'est-à-dire avec un musoir redessiné et l'absence de seuil au niveau de la brèche.

L'écoulement est celui d'une crue centénale, cadre de l'étude. Le domaine étudié s'inscrit dans un rectangle de 780 m sur 550 m. Les longueurs moyennes du canal et du vieux Rhône sont de 100 m. La pente moyenne des fonds dans le canal de Miribel est de l'ordre de 2.10^{-3} et nulle dans le petit Rhône qui est dragué à la cote uniforme de 167. La forme du lit est celle d'un trapèze régulier pour le petit Rhône, a peu près régulier pour le canal. Le fruit des berges est compris entre 3/1 et 1/1. Pour la crue étudiée la profondeur moyenne est de l'ordre de 4 m. Une carte des fonds a été reconstituée à partir des profils en travers. La cote de la surface libre est mesurée en quelques points.

L'écoulement est assez rapide vitesse de l'ordre de 3 m/s mais le champ de vitesse mesuré présente un aspect très régulier, le musoir de la brèche ayant été préalablement redessiné dans ce but. On trouvera sur la figure 16 un relevé de quelques mesures de vitesse en surface faites par chrono-photographie.

L'étude d'un rejet accidentel de polluant a été représenté par un rejet de colorant sur le modèle physique et la visualisation faite par photographie. On a envisagé le cas d'un rejet continu ainsi que le cas d'un rejet instantané, les quantités rejetées étant équivalentes.

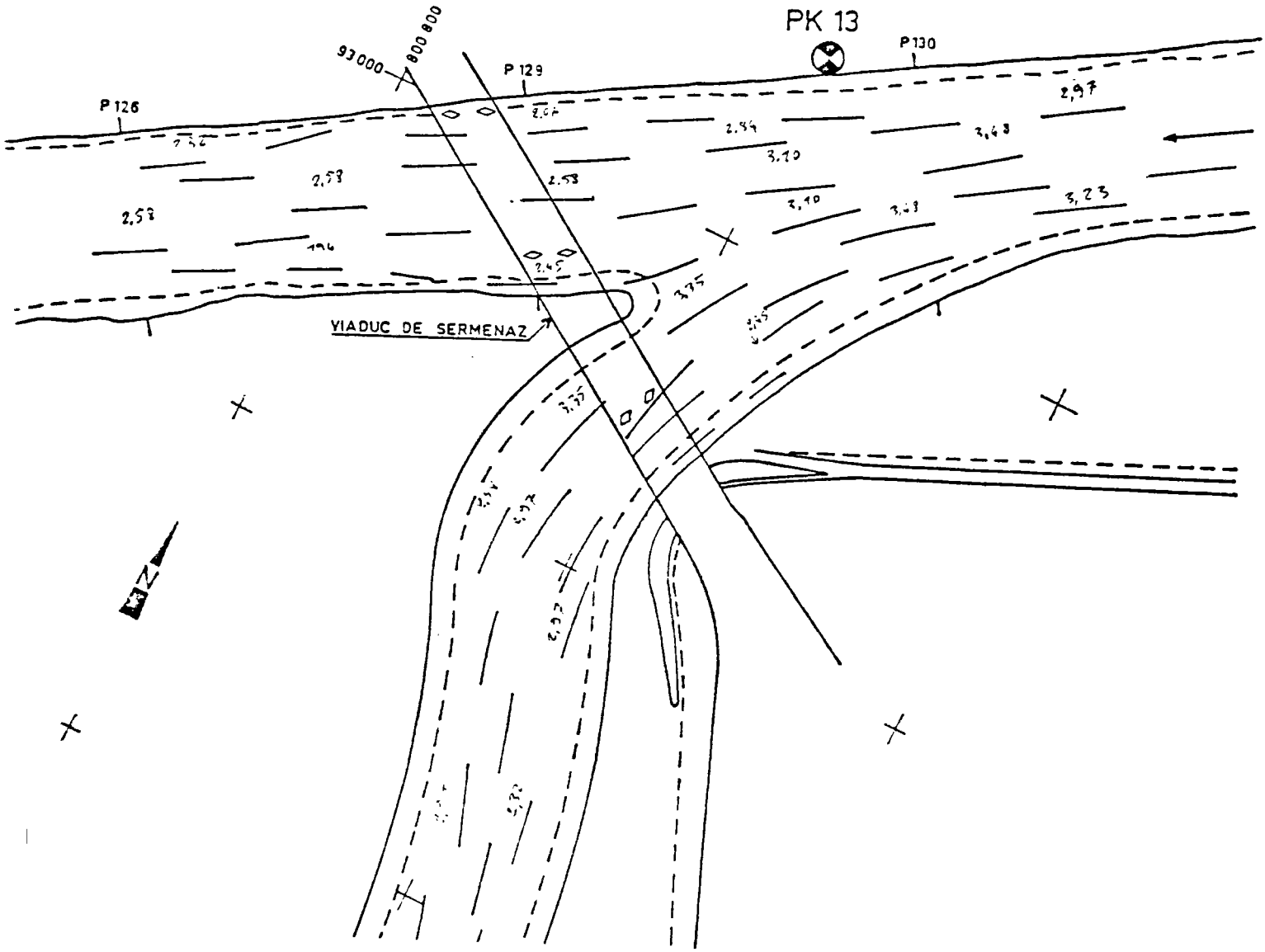


Fig. 16 MESURES DE VITESSES PAR CHRONOPHOTOGRAPHIE AUTOUR DE LA BRECHE DE NEYRON

Les rejets ont été effectués à 55 m (nature) de la rive gauche, ainsi qu'à 10 m (nature) de la rive gauche.

Les prises de vue correspondant aux différents cas étudiés sont reportées sur les figures 17, 18, 19 et 20.

3.3.3 - Modélisation utilisé

3.3.3.1 - Le maillage

Le maillage curviligne a été obtenu par résolution de la méthode de Thompson. Il est représenté sur la figure 4. Le nombre total de points est de 31 x 23 = 713, le pas des mailles est de l'ordre de 45 m dans le sens de l'écoulement et de 10 m dans le sens transversal.

Le maillage représenté sur la figure 4 a été préféré malgré un nombre de points plus important, à celui de la figure 5 car il présente une distorsion moins importante, d'où un gain de précision dans le calcul d'écoulement.

3.3.3.2 - Description des fonds et de la surface libre

La carte des fonds a été reconstituée par interpolation à partir de la carte des fonds réels (voir figure 21). Le fruit des berges a été artificiellement adouci pour éviter les perturbations locales provoquées par un gradient trop élevé du tirant d'eau.

La pente de la surface libre est interpolée à partir des valeurs connues. On suppose sa variation linéaire et longitudinale (voir figure 22).

3.3.3.3 - Conditions aux limites

A l'amont un profil de vitesse uniforme correspondant au débit de 1 400 m^3/s imposé a été introduit. Sur les rives une condition de glissement et à l'aval, une condition de sortie libre ont été imposées. Le rejet de polluant est représenté par un seul point.

Le rejet instantanné est étalé sur 3 pas de temps de calcul, ce qui représente en nature une durée de 9s (soit environ 1 s sur modèle réduit). Le rapport entre les débits aval est imposé (Annexe A.7). Sa valeur est de 0,939.

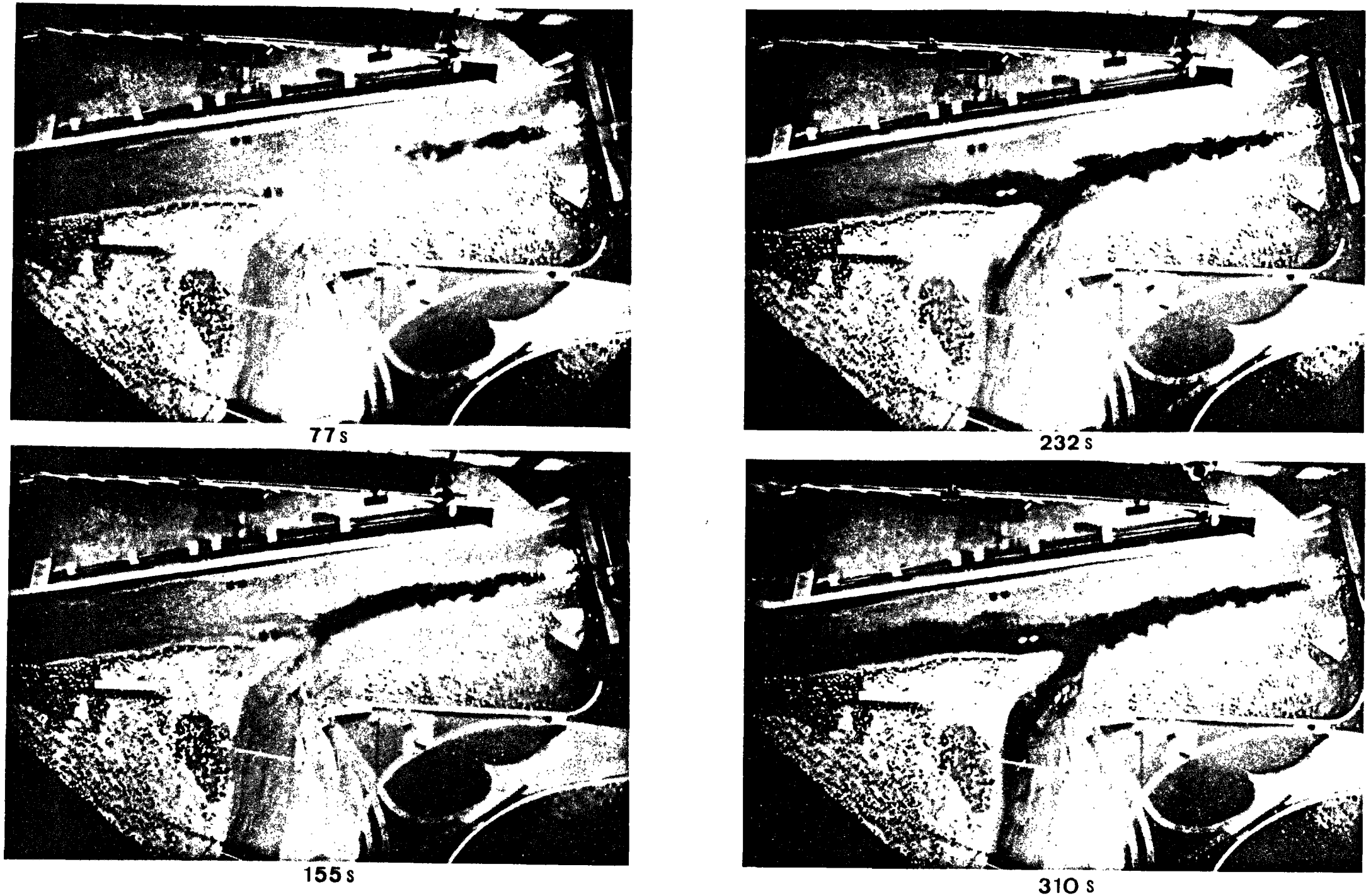
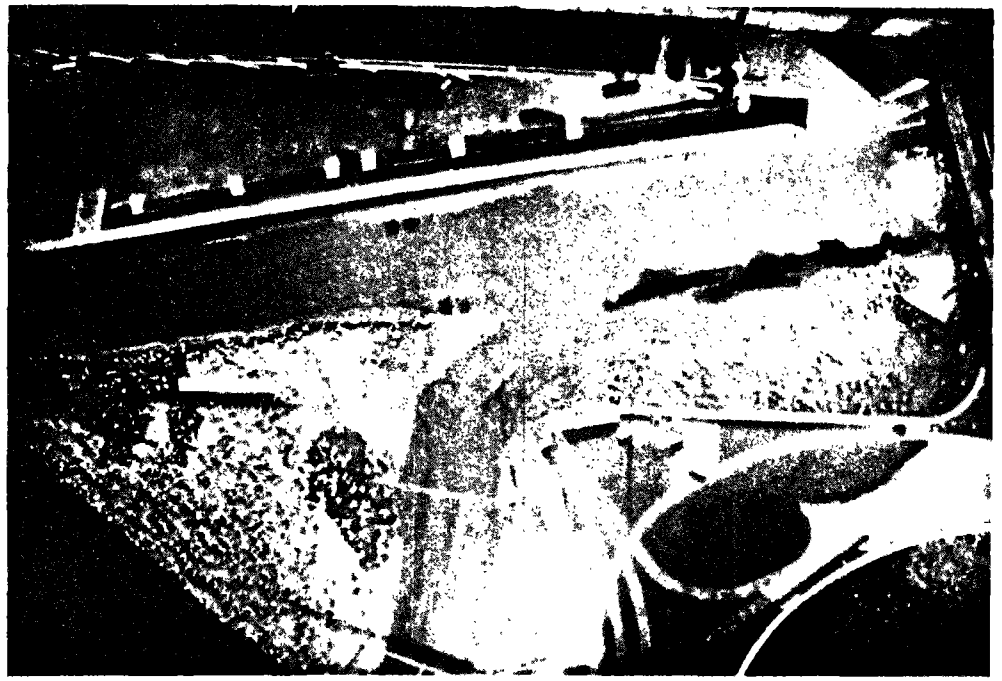
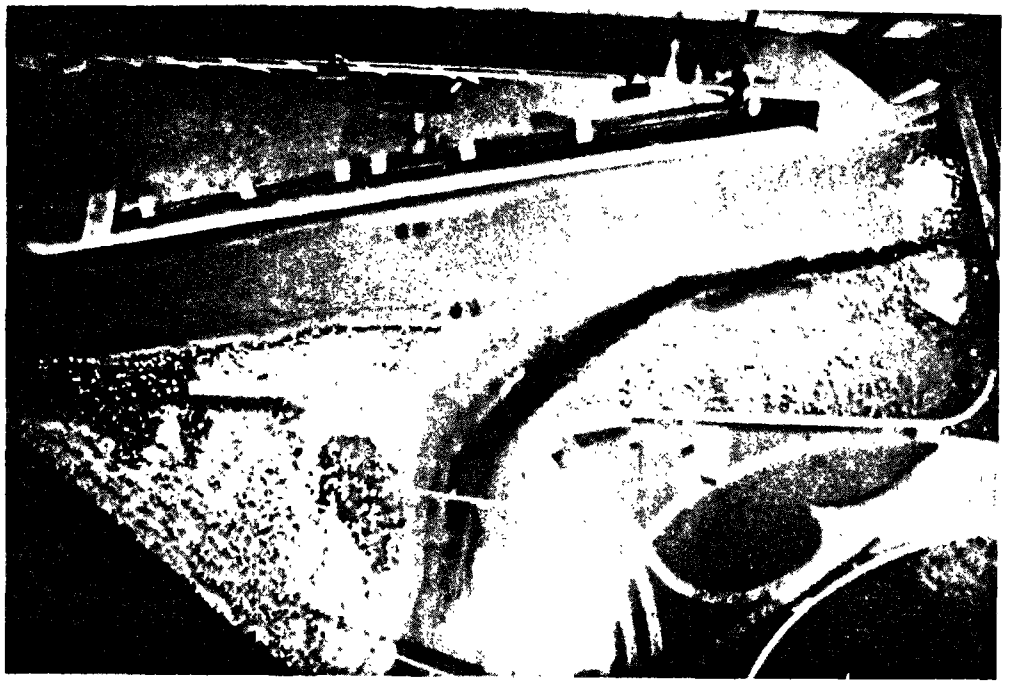


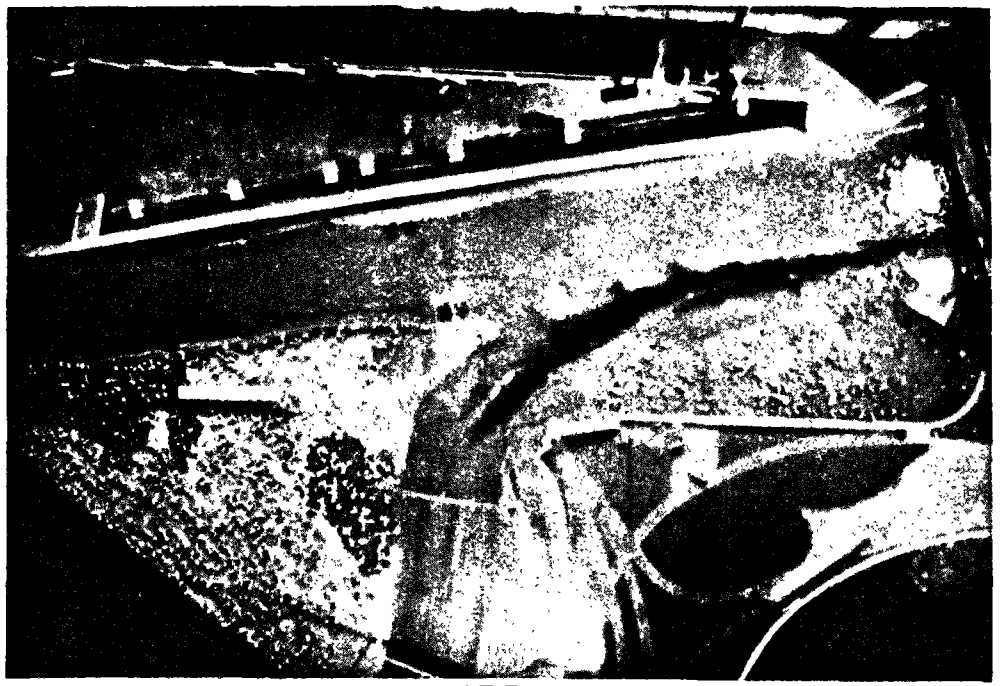
Figure 17 Rejet de polluant en continu effectué à 55 m (nature) du bord de berge



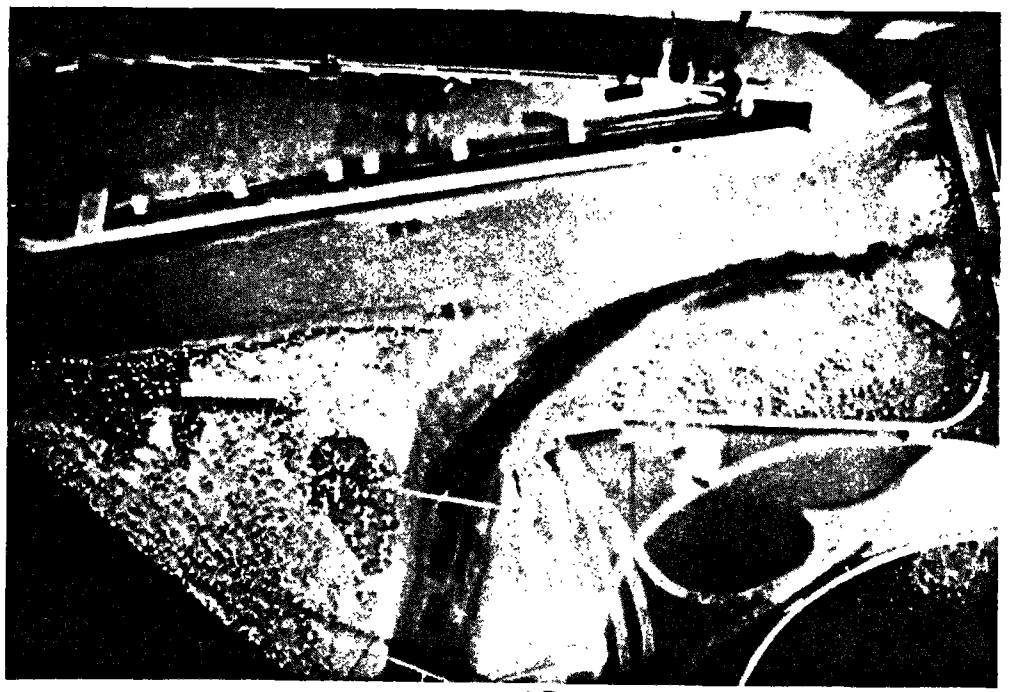
77 s



232 s

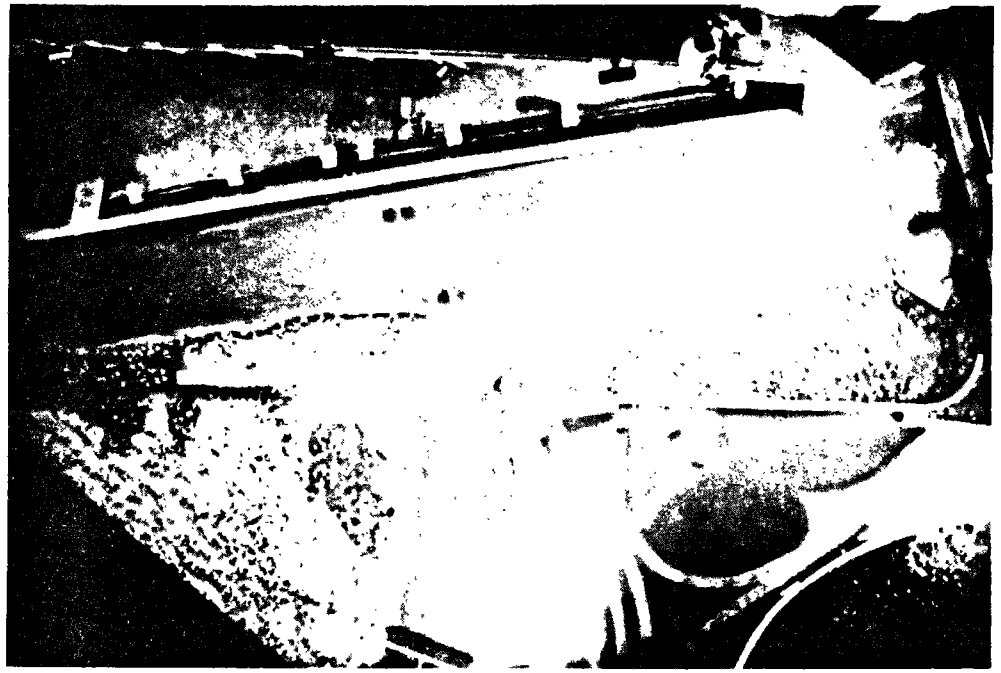


155 s

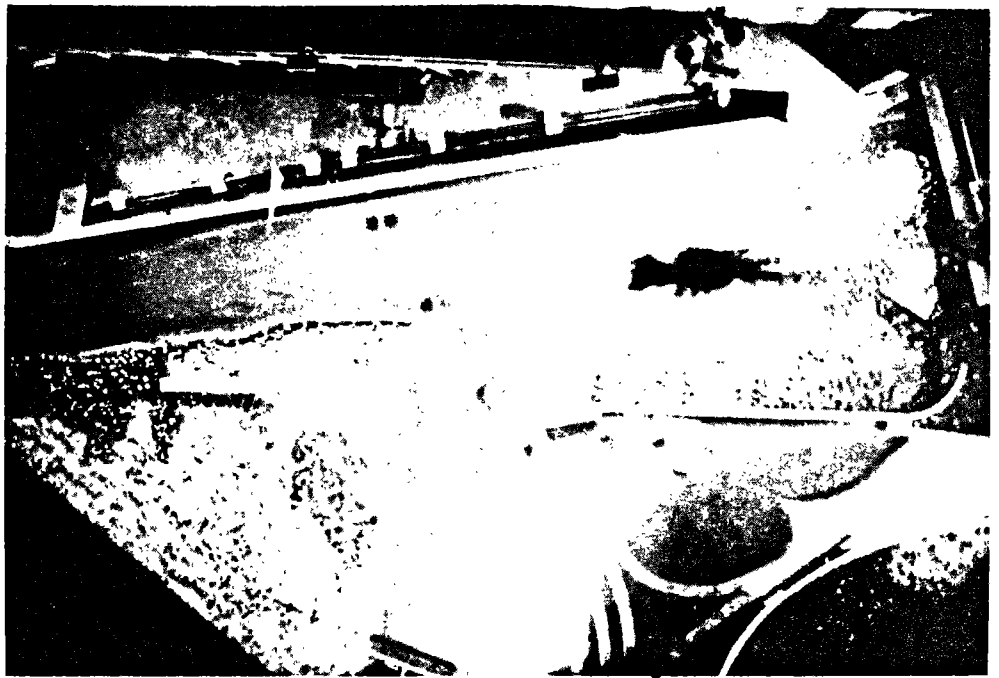


310 s

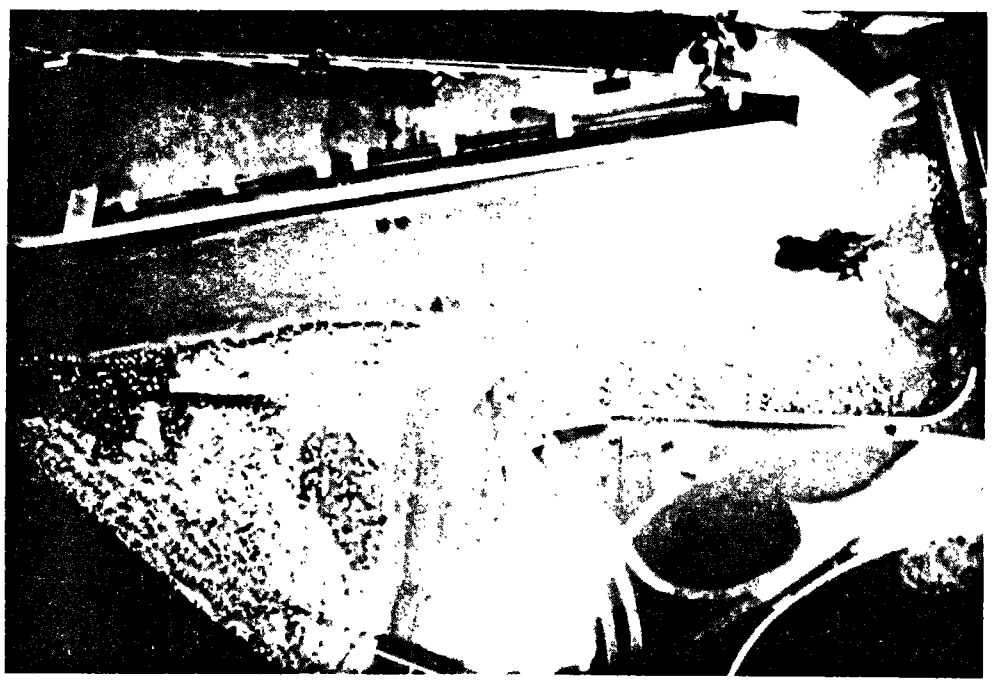
Figure 18 - Rejet de polluant en continu effectué à 10 m (nature) du bord de berge



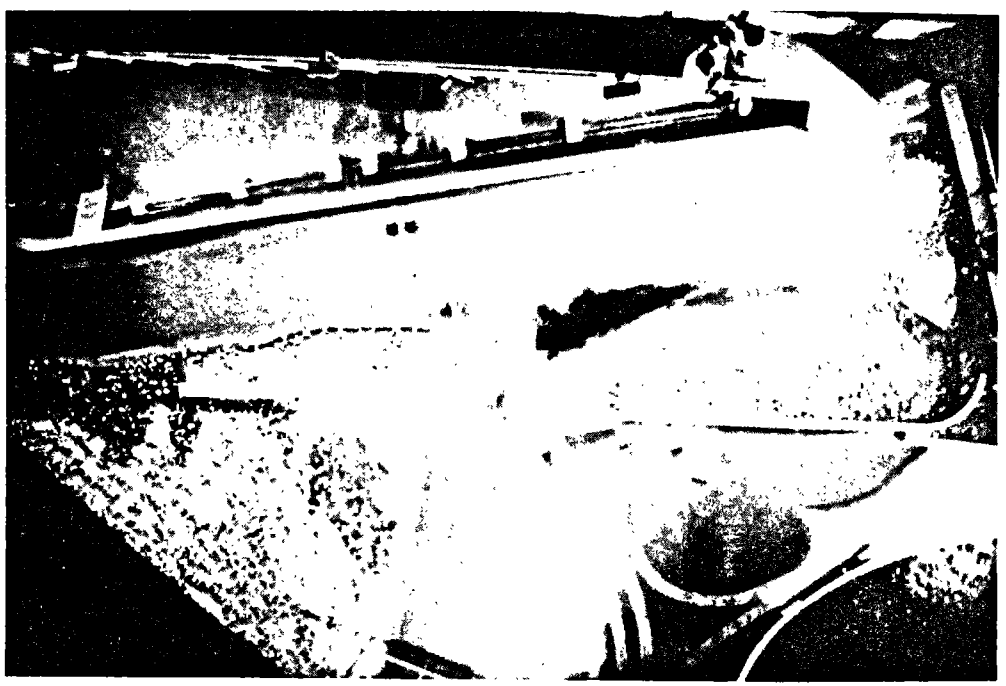
39s



116 s

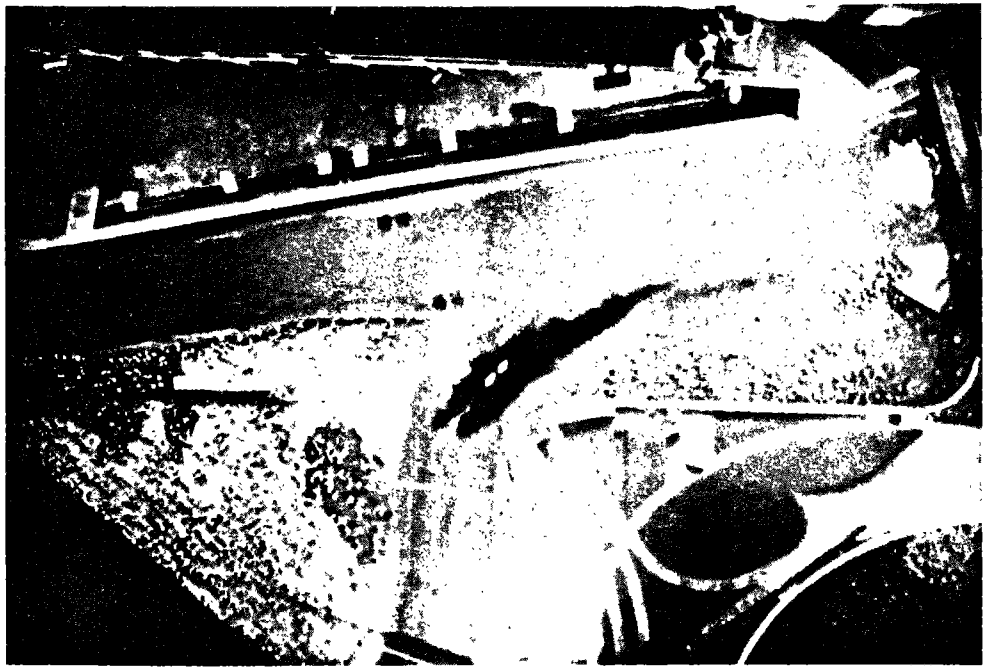


77 s

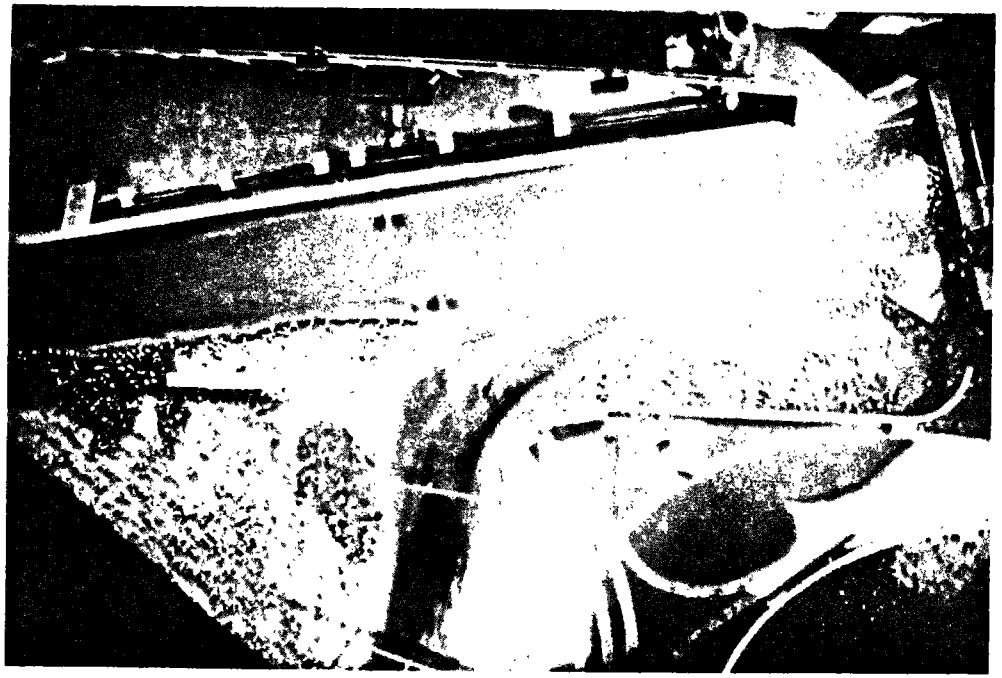


155 s

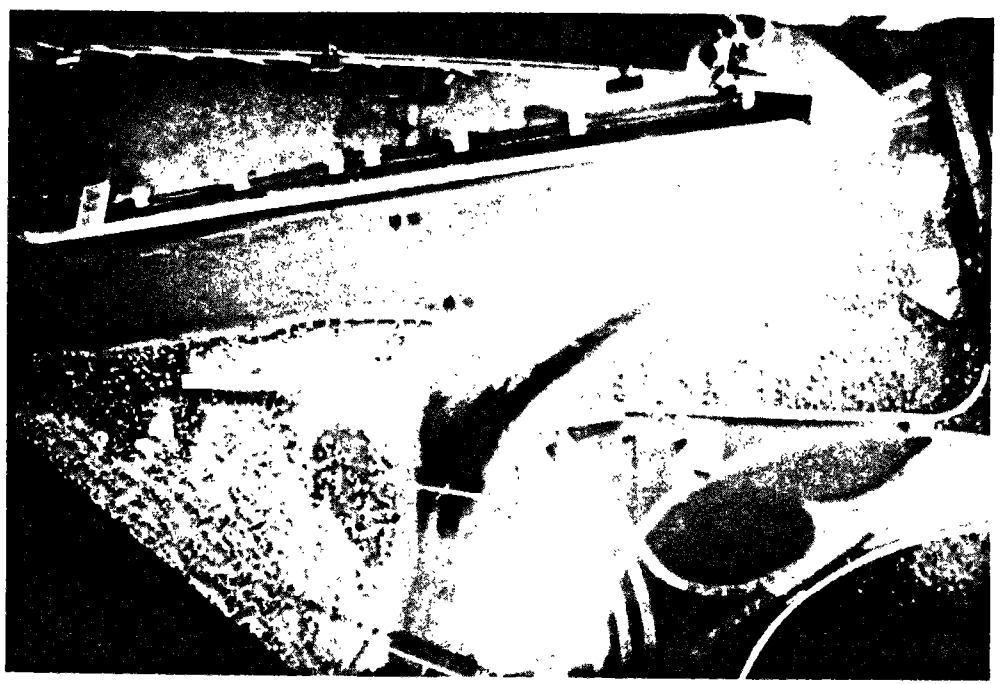
Figure 19 (planche 1) — Rejet de polluant instantané effectué à 10 m (nature) du bord de berge



194 s

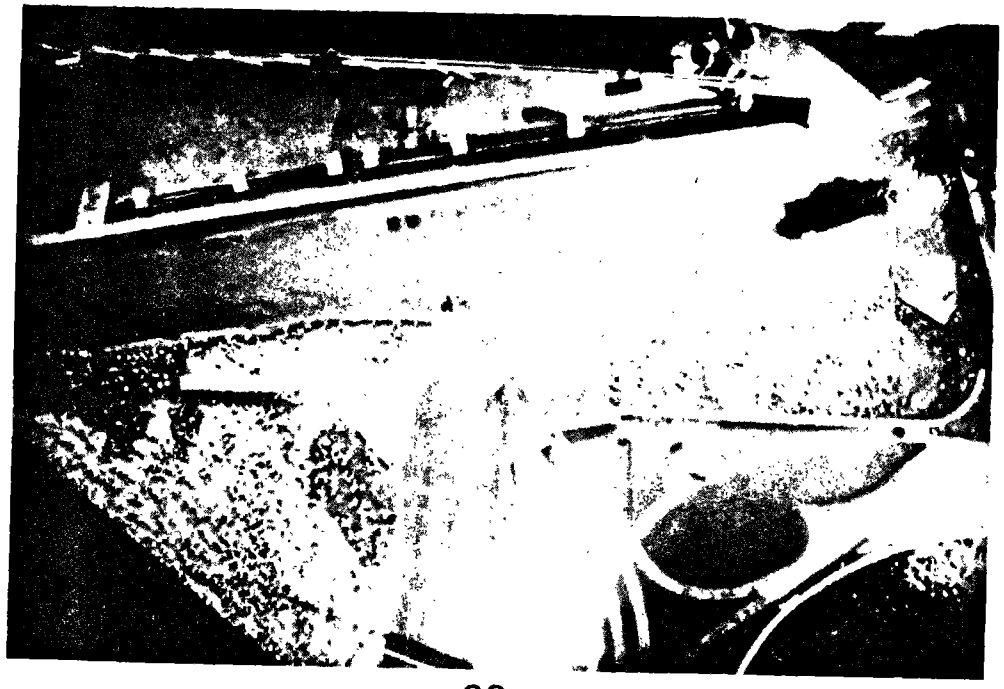


271 s

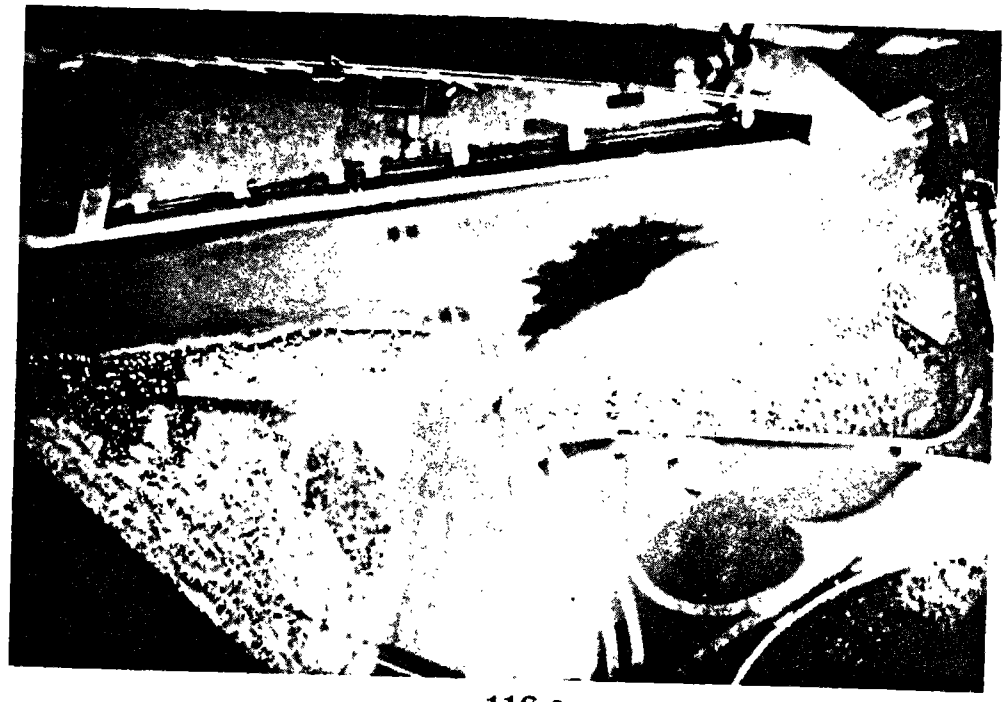


232 s

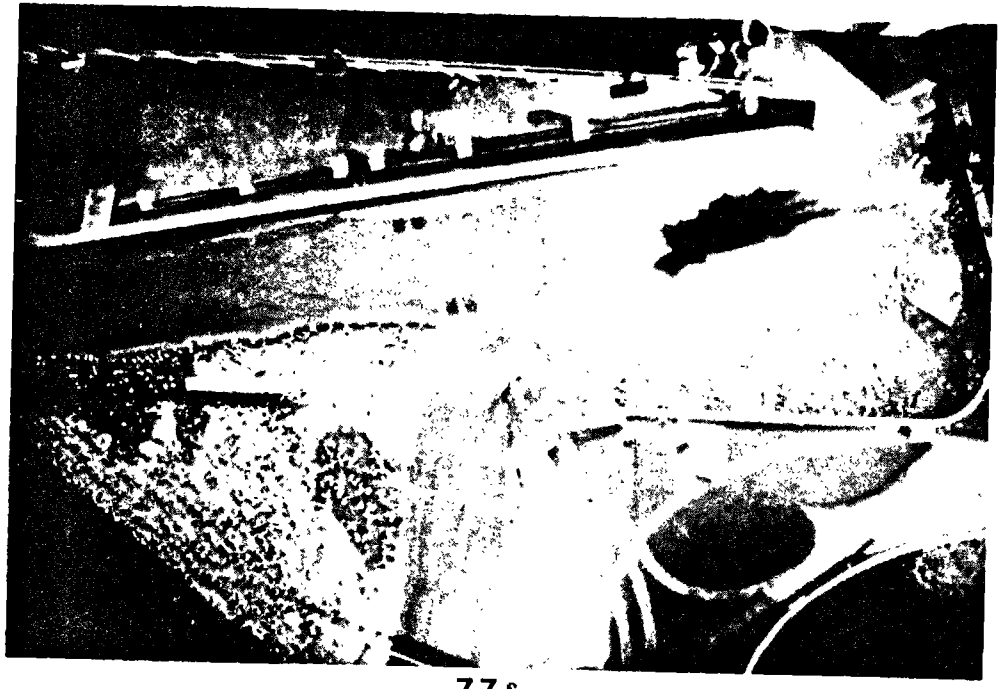
Figure 19 (planche 2)



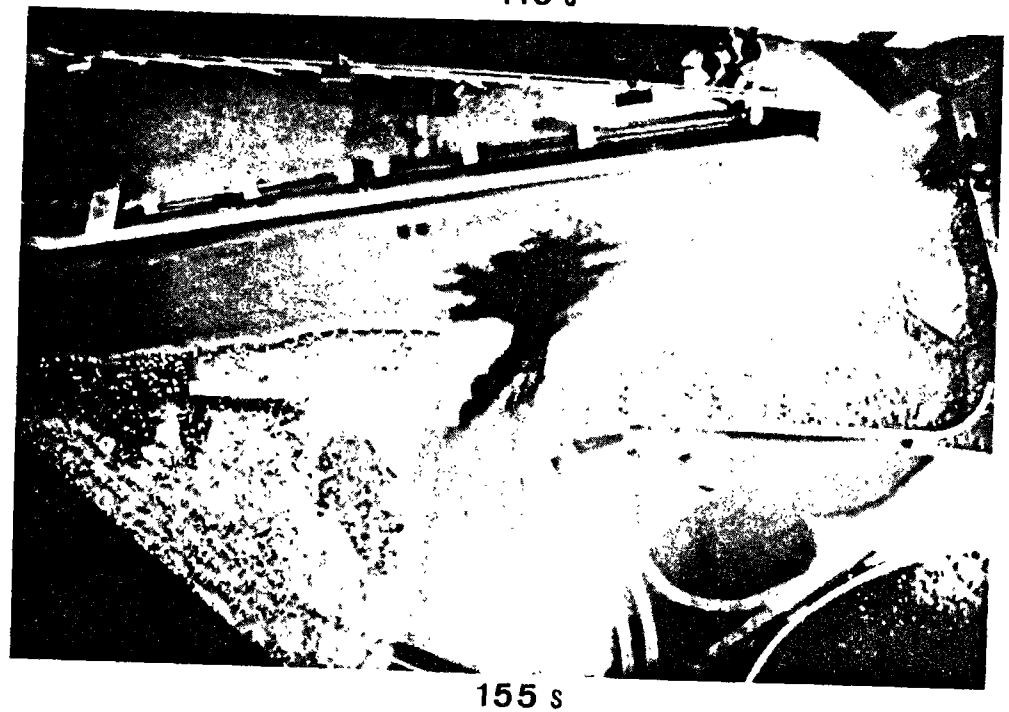
39 s



116 s

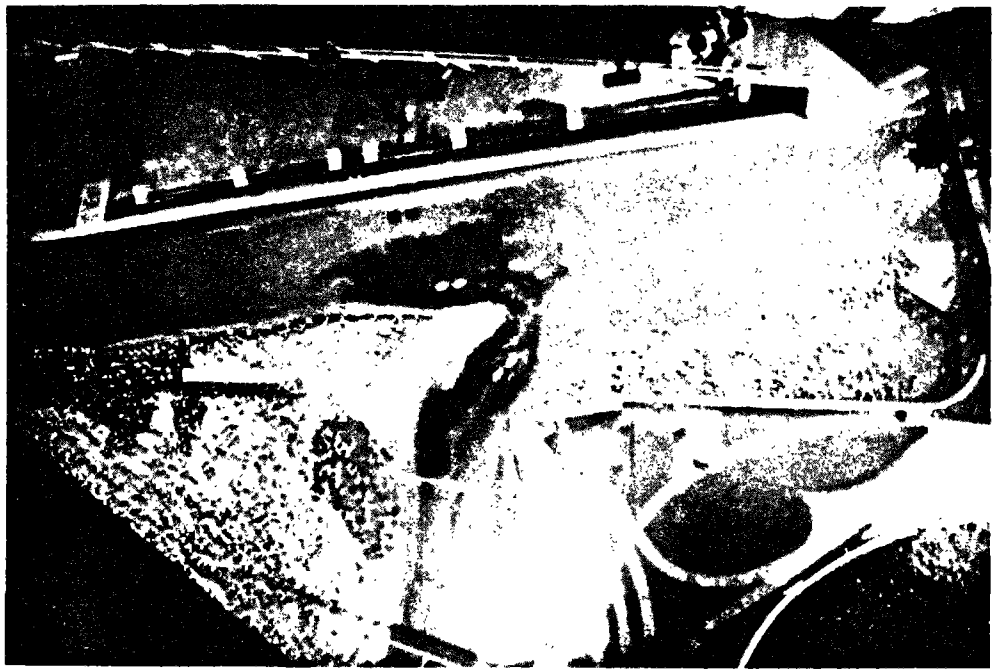


77 s

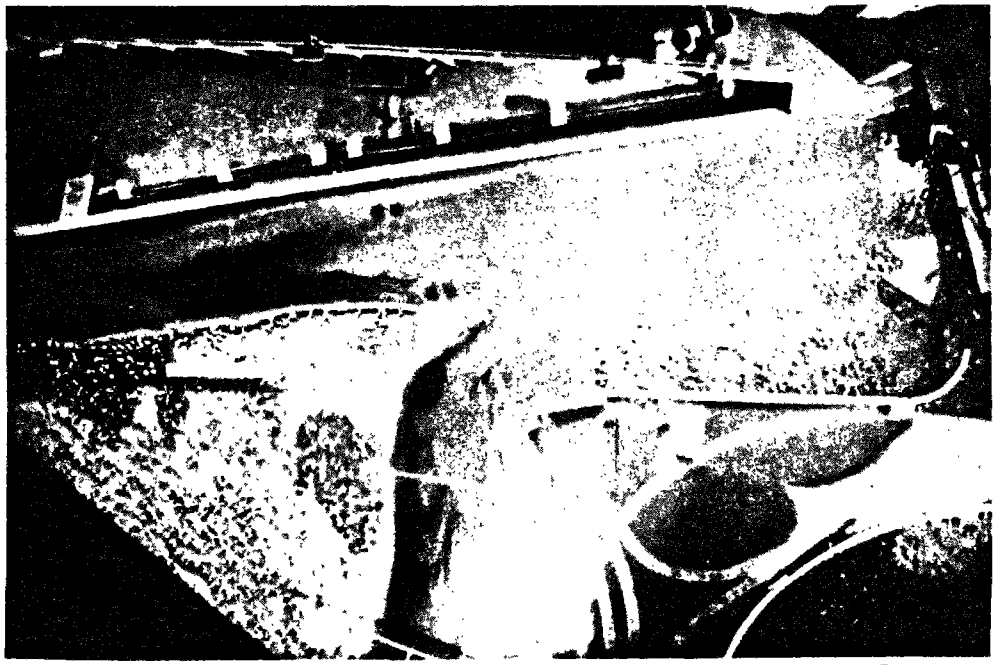


155 s

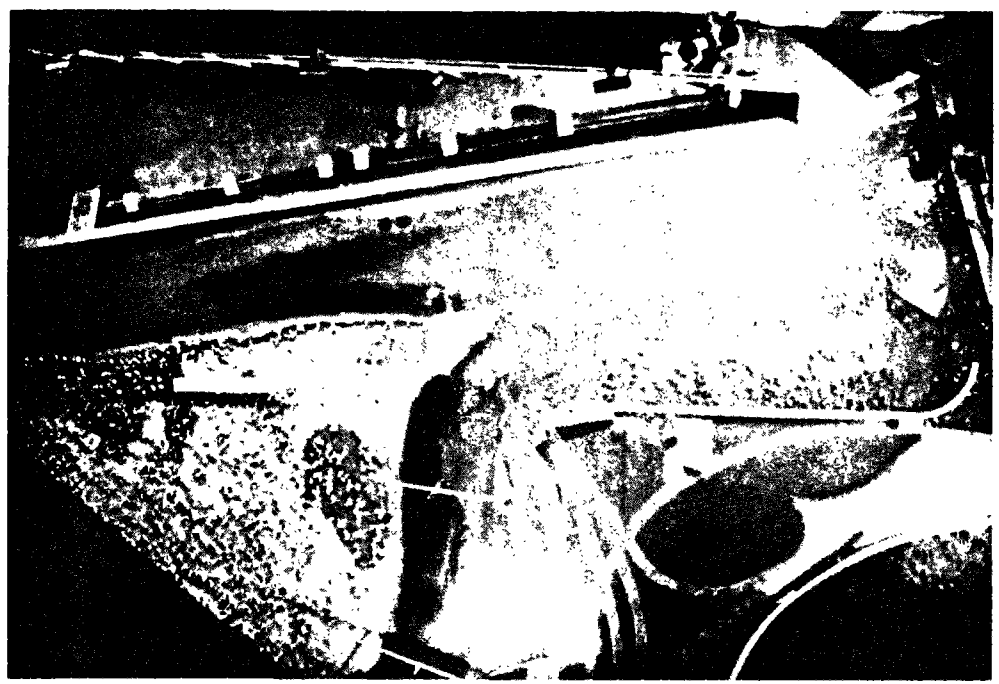
Figure 20 (planche 1) - Rejet de polluant instantané effectué à 55 m (nature) du bord de berge



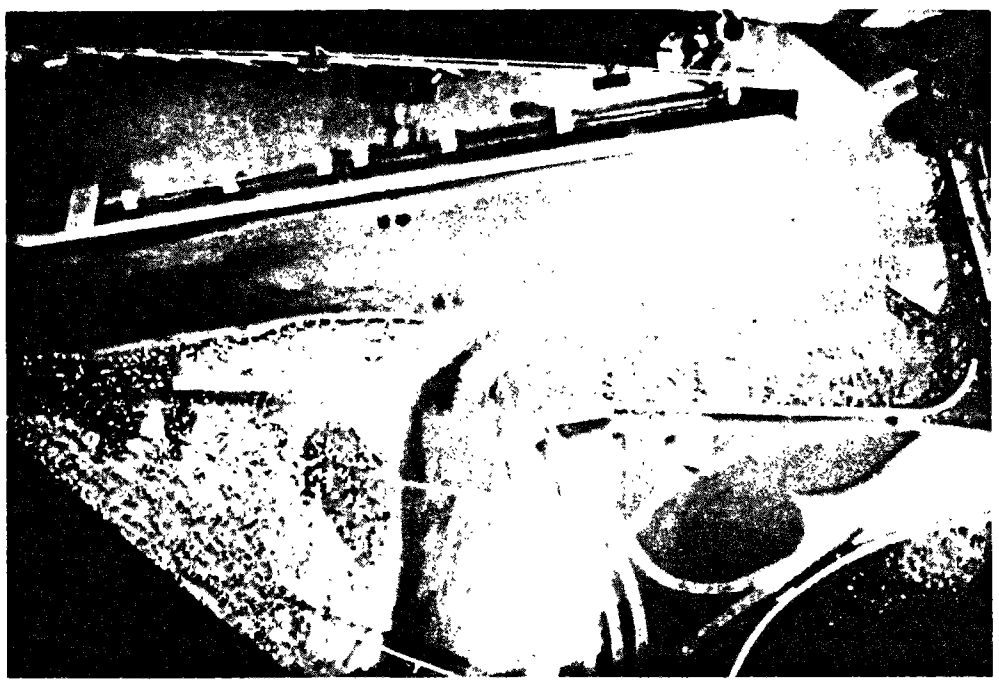
194 s



271 s



232 s



310 s

Figure 20 (planche 2)

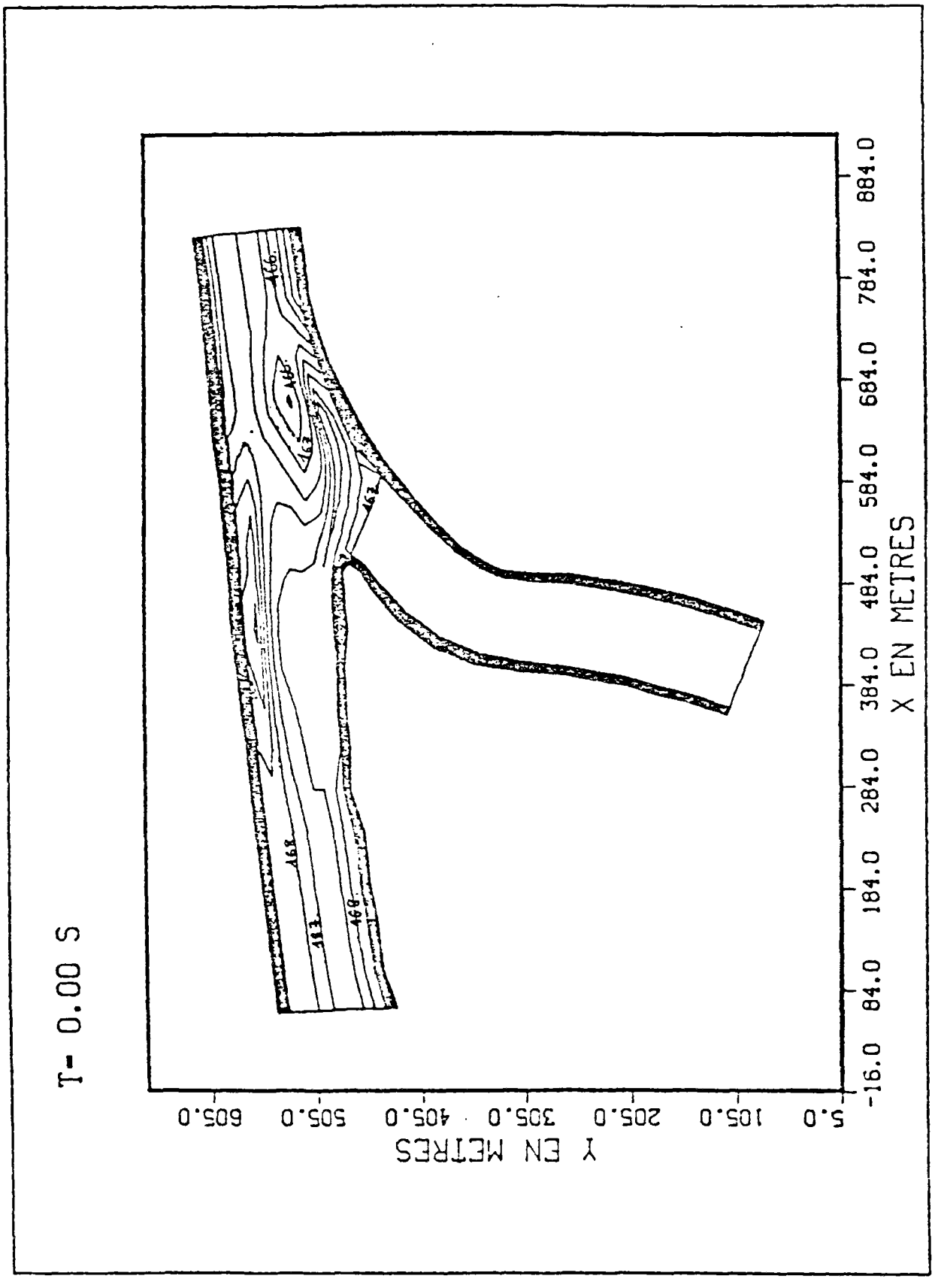


Fig. 21 CARTE DES FOND DE MIRIBEL

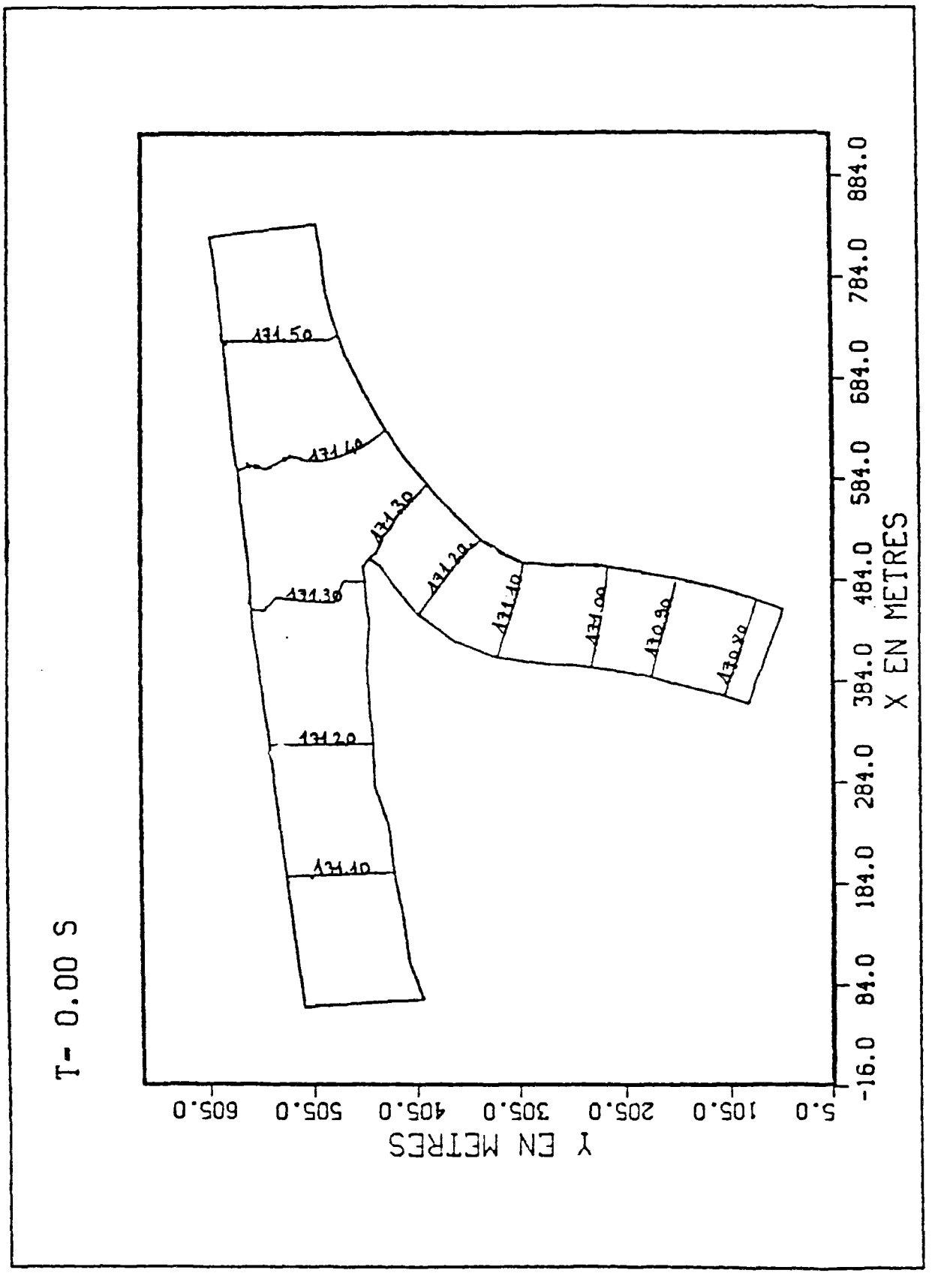


Fig. 22 SURFACE LIBRE IMPOSEE POUR MIRIBEL

3.3.3.4 - Choix des paramètres

Le choix du pas de temps a été fait en fonction des valeurs minimales des mailles et maximales des vitesses. On a choisi $\Delta t = 3$ s.

Le coefficient de Strickler pour le Rhône dans cette région est évalué entre 30 et 40. On a choisi $K_s = 35$.

La valeur calculée pour ν_o (d'après 2.5.1) fournit $\nu_o = 0,25$.

La valeur obtenue pour α d'après 2.5.3 est $\alpha = 0,03$.

Enfin le tenseur de dispersion est évalué en chaque point par la méthode décrite en 2.5.2. Les valeurs moyennes en sont :

$K_{11} = 10^{-3}$ $\quad K_{12} = 10^{-5}$ $\quad K_{22} = 3.10^{-3}$

3.3.4 - Résultats

Le champ de vitesse obtenu (figure 23) présente une allure tout aussi régulière que celui mesuré. Une comparaison point par point a été jugée peu significative étant donné la faible densité des mesures disponibles d'une part, et l'extrême régularité du champ de vitesse d'autre part.

La comparaison entre rejet calculé et mesuré est reportée sur les figures 24 à 27. La tendance générale de l'étalement de la tache est bien respectée ainsi que la vitesse de dispersion.

Cette étude a été réalisée dans une géométrie présentant un embranchement et a permis de tester le comportement du modèle dans cette situation. Eller permet également de tester le calcul d'une concentration de polluant.

Le comportement dynamique du modèle est satisfaisant mais les comparaisons avec les mesures sont peu significatives.

Le calcul de concentration a permis de retrouver la répartition générale de la tache ainsi que les temps de parcours de celle-ci, ce qui était escompté donné le caractère régulier du champ de vitesse. Un calcul de bilan a permis de vérifier que la conservation de la masse de polluant est respectée à 5% près ce qui est très raisonnable.

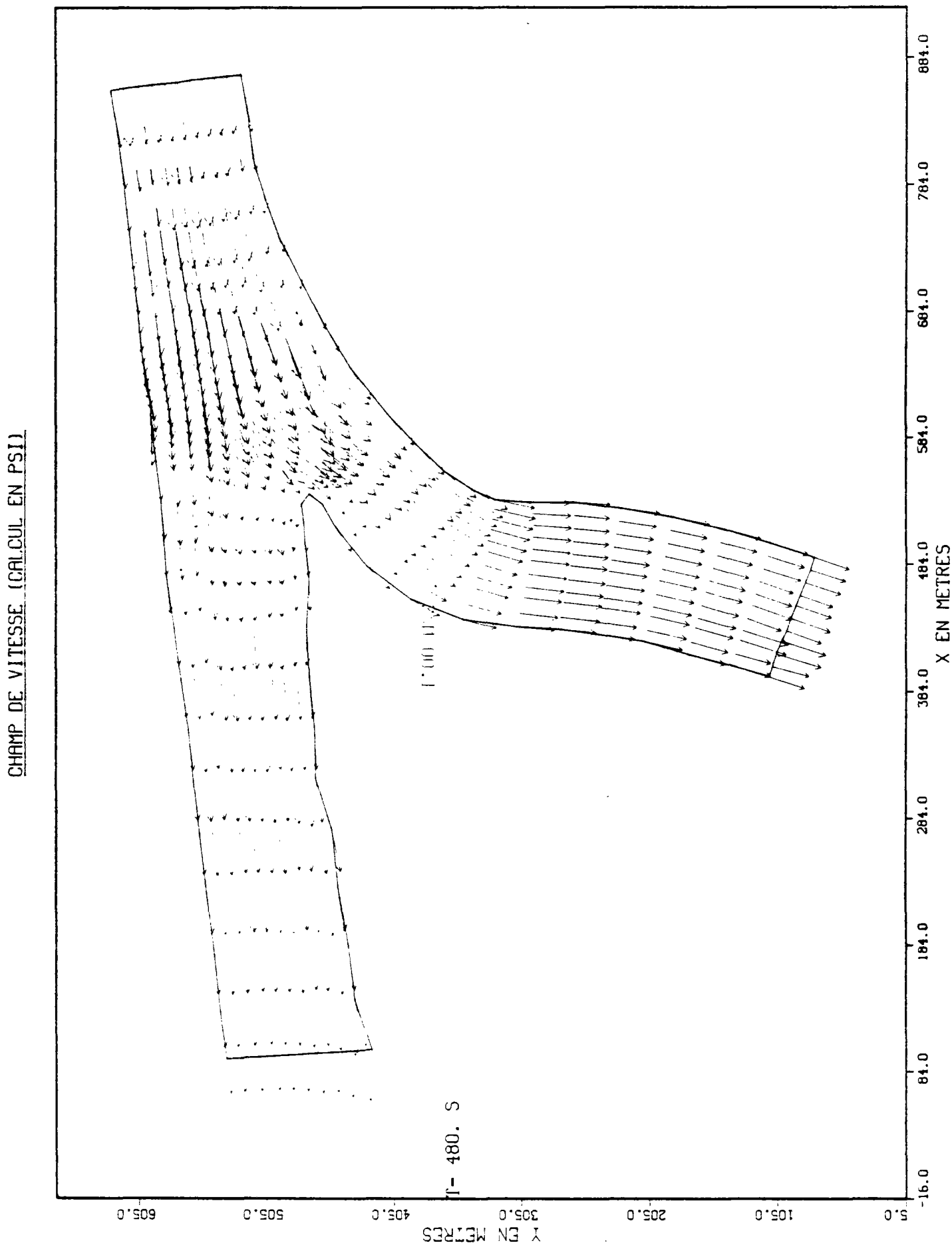


Fig. 23 CHAMP DE VITESSE CALCULE DANS MIRIBEL

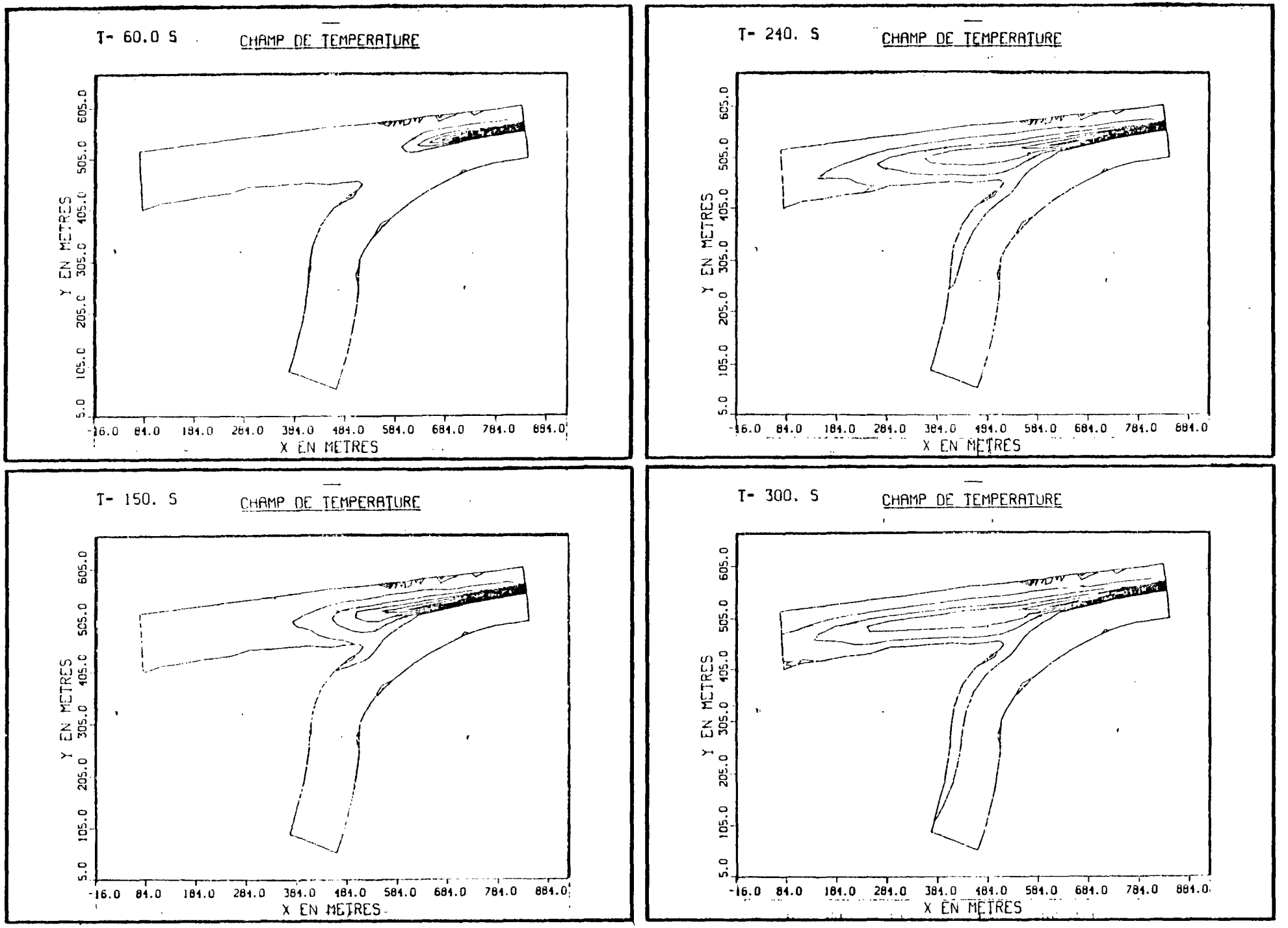


Fig. 24 CALCUL D'UN REJET DE POLLUANT EN CONTINU EFFECTUE A 55m DU BORD DE BERGE

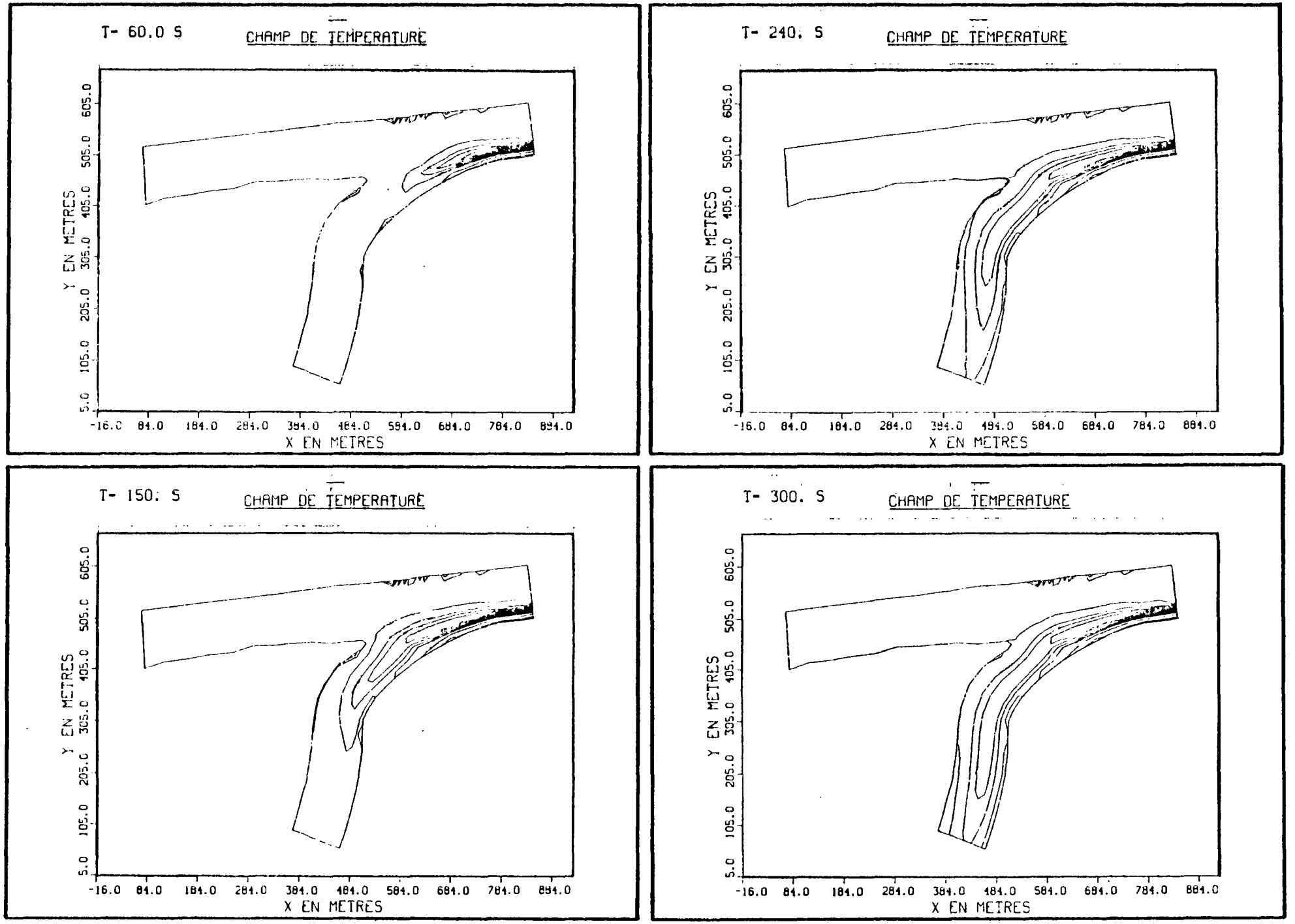


Fig. 25 CALCUL D'UN REJET DE POLLUANT EN CONTINU EFFECTUE A 10 m DU BORD DE BERGE

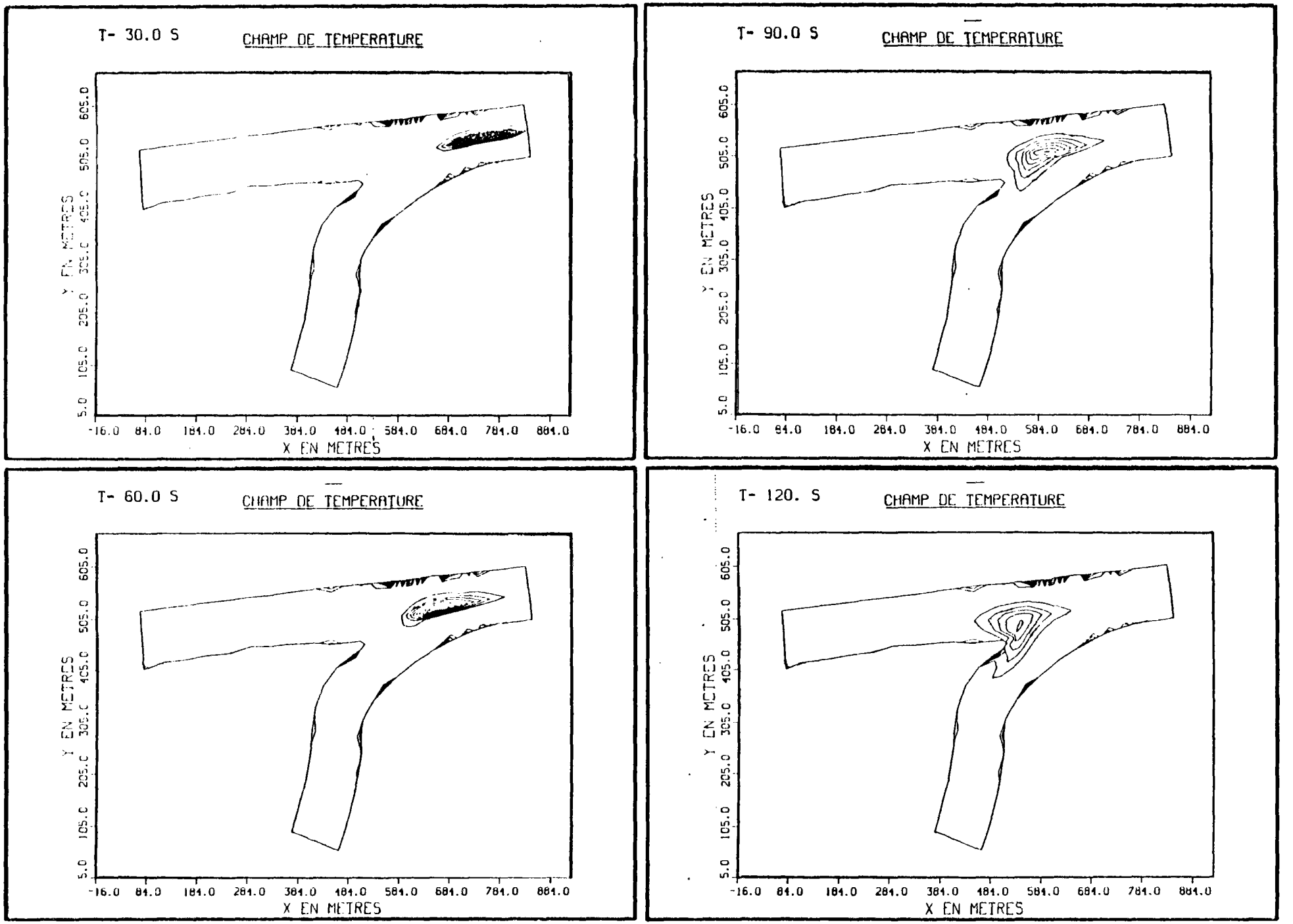


Fig. 26 (pl.1) CALCUL D'UN REJET DE POLLUANT INSTANTANNE EFFECTUE A 55 m DU BORD DE BERGE

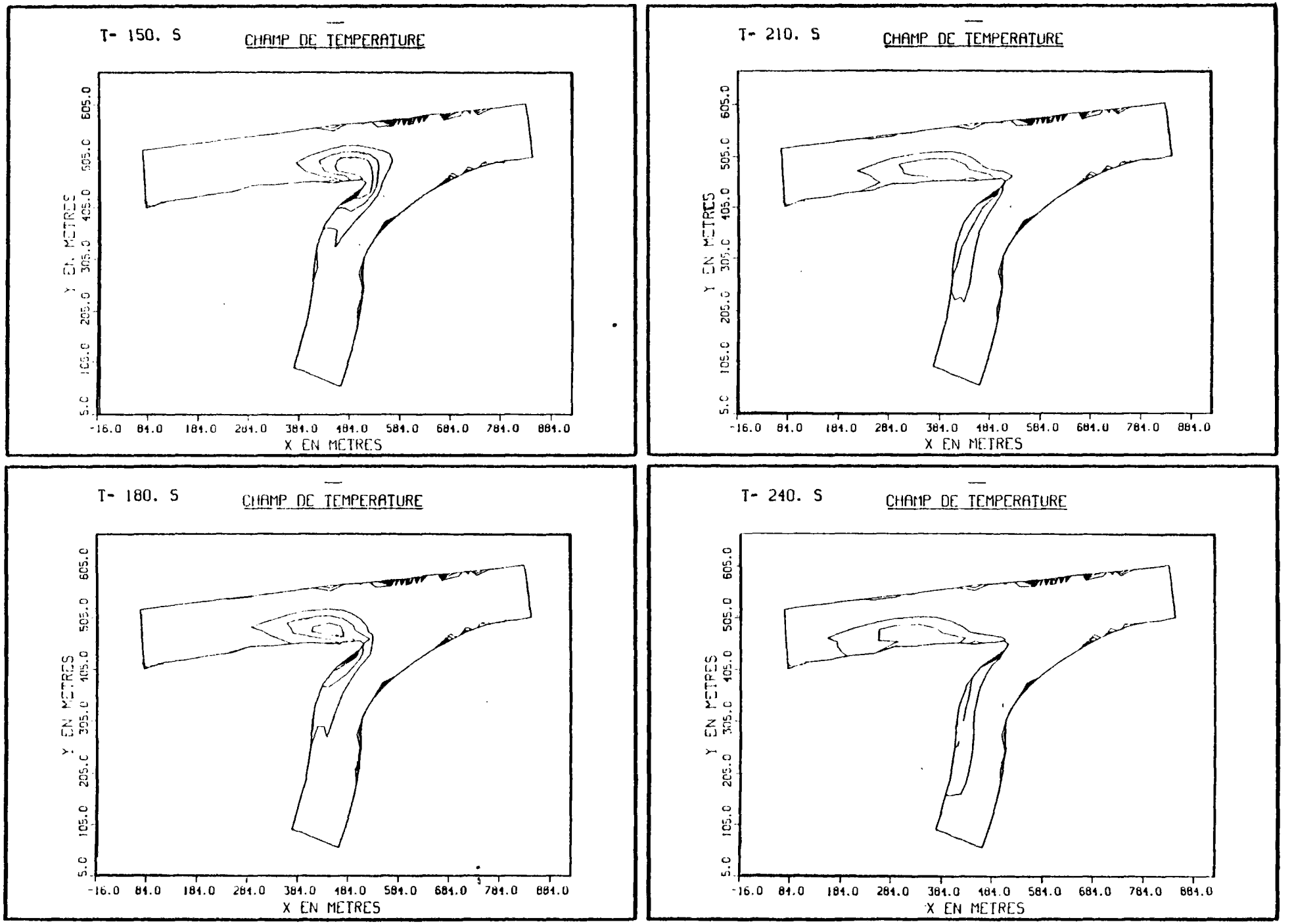
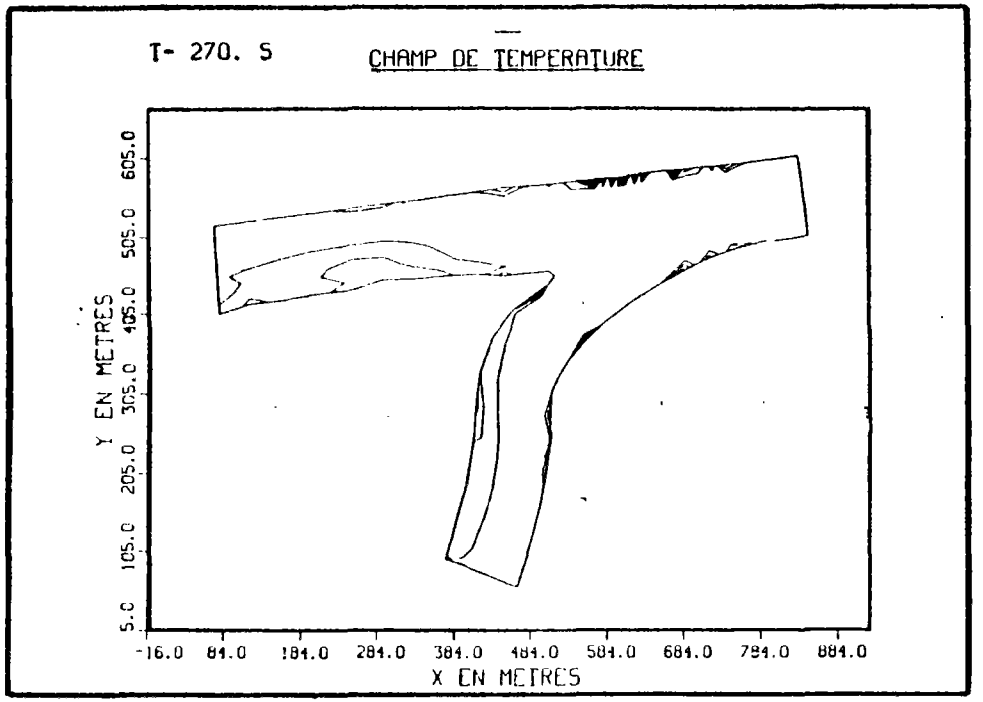


Fig. 26 (planche 2)



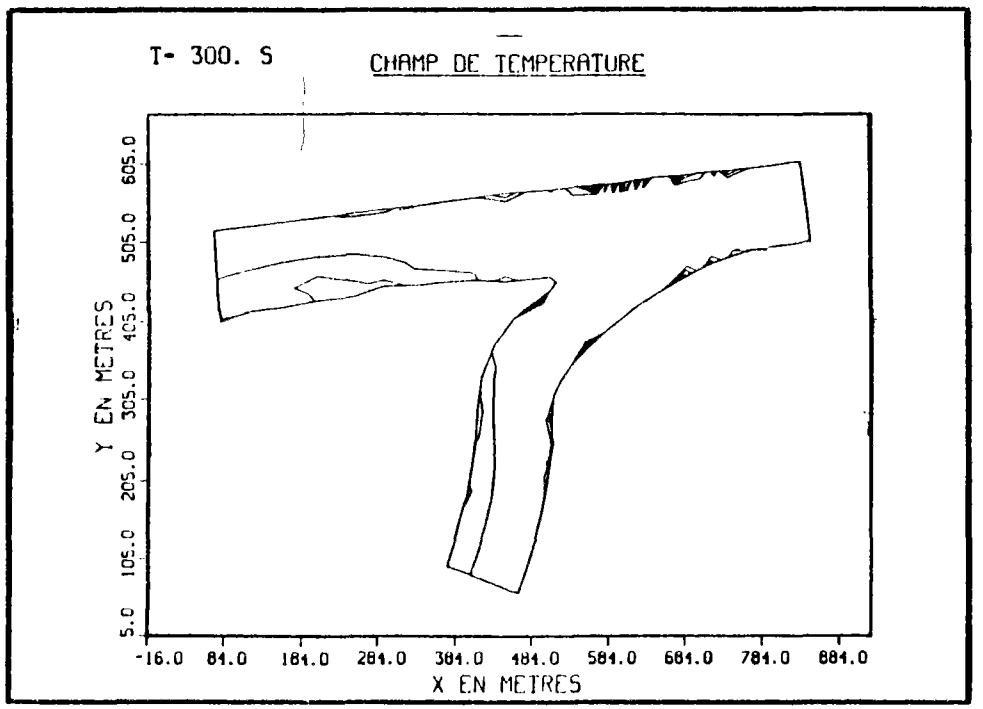
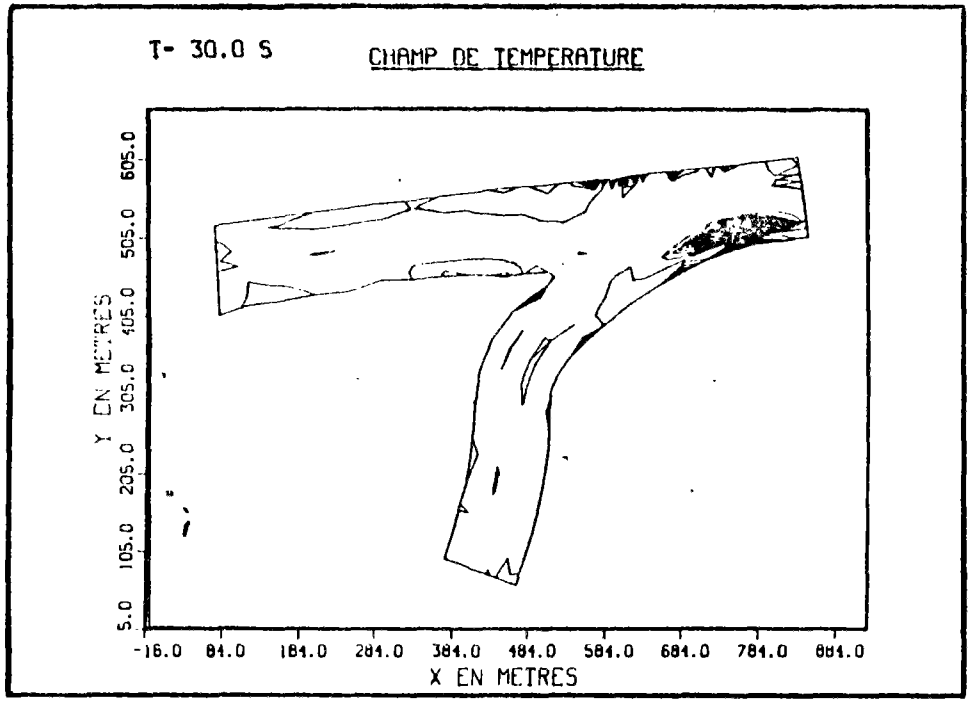
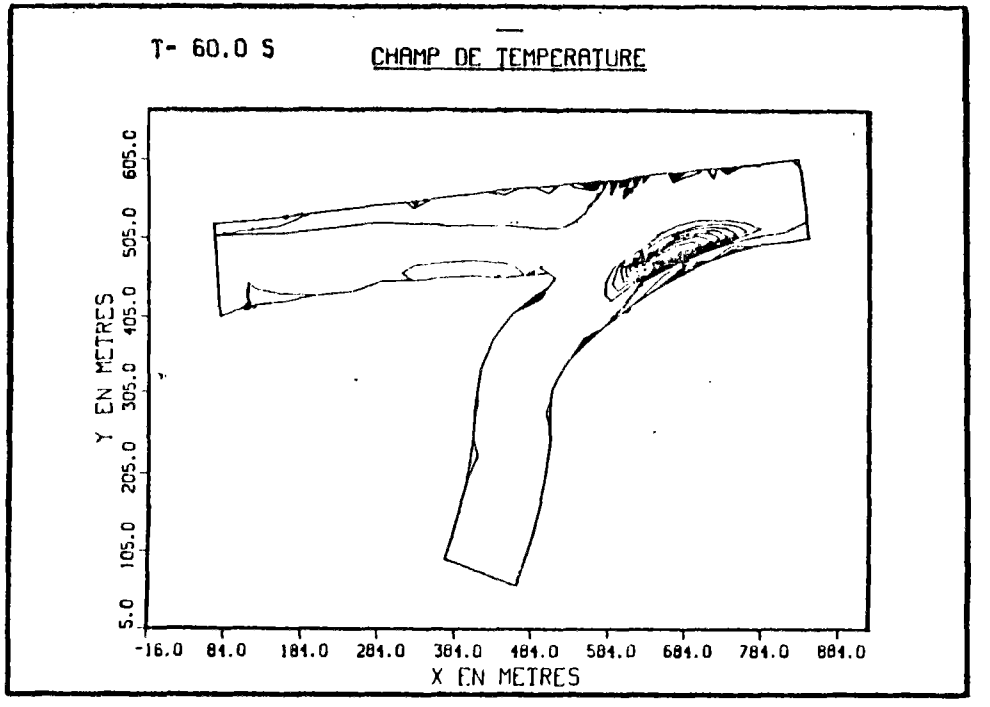


Fig. 26 (planche 3)





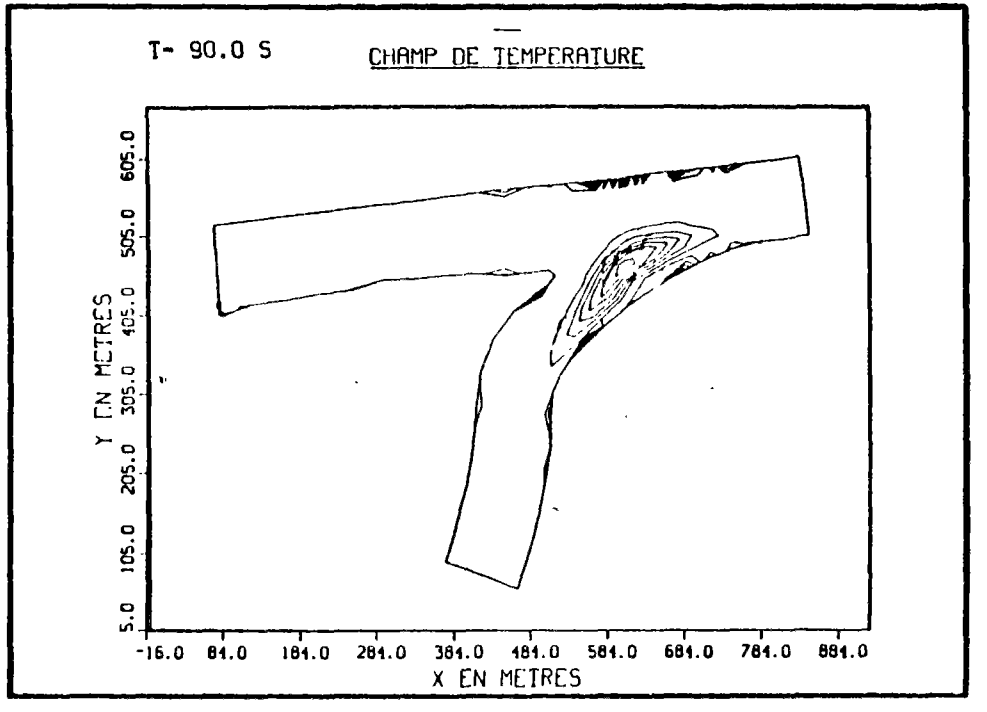
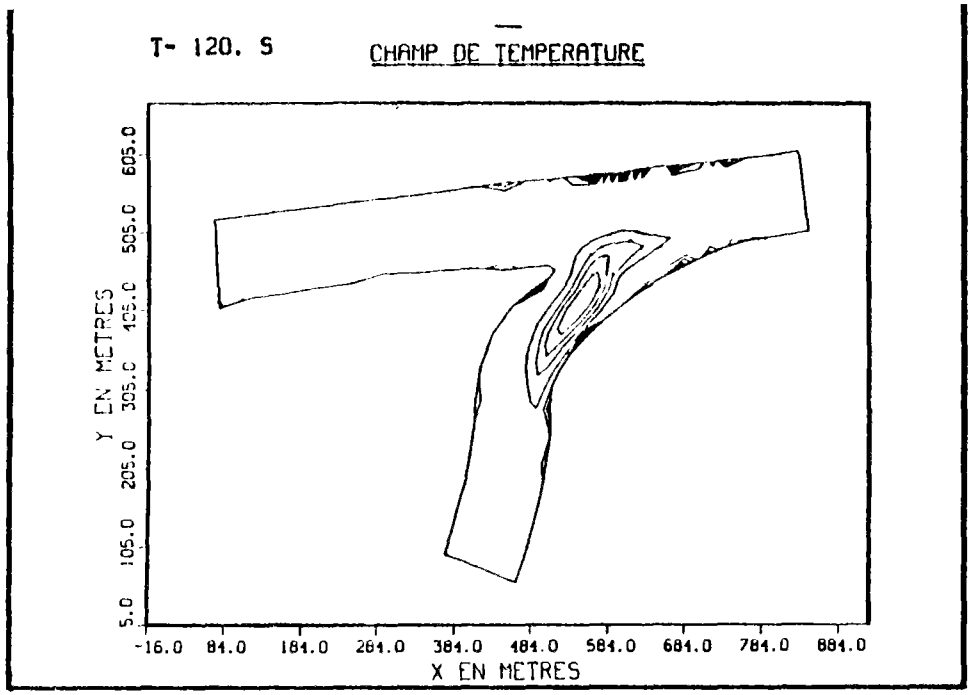
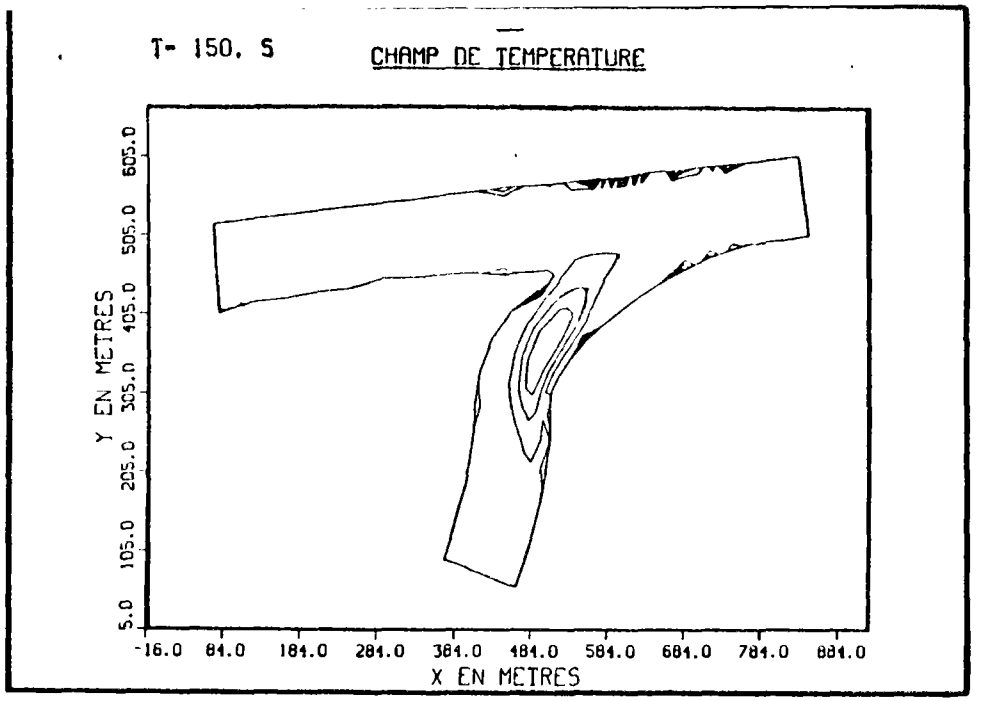


Fig. 27 (pl.1) CALCUL D'UN REJET DE POLLUANT INSTANTANNE EFFECTUE A10m DU BORD DE BERGE





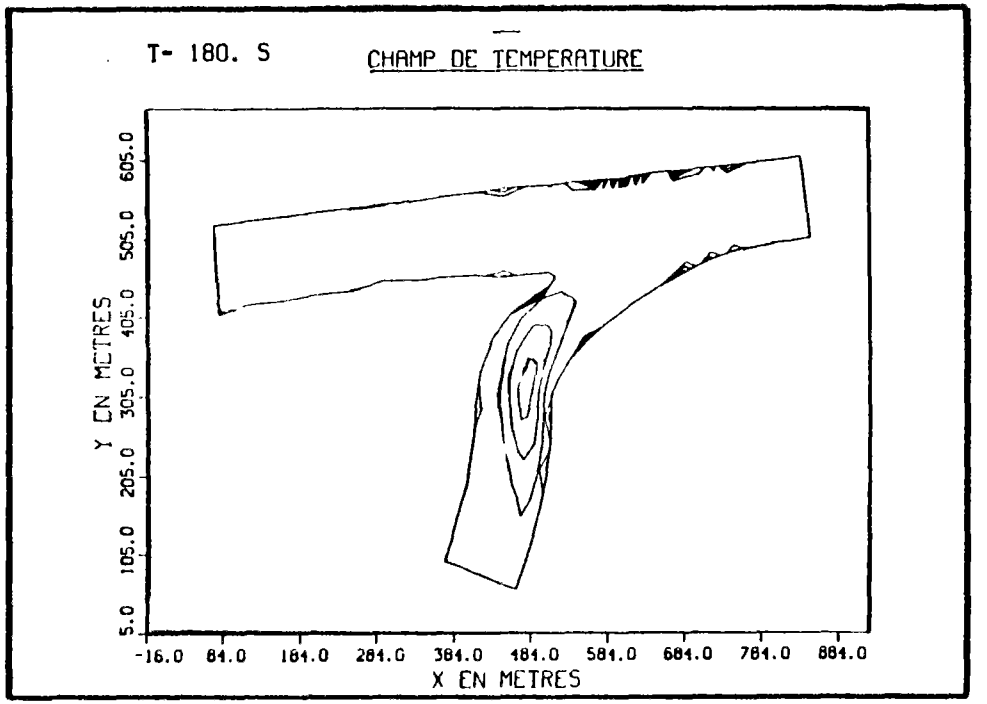
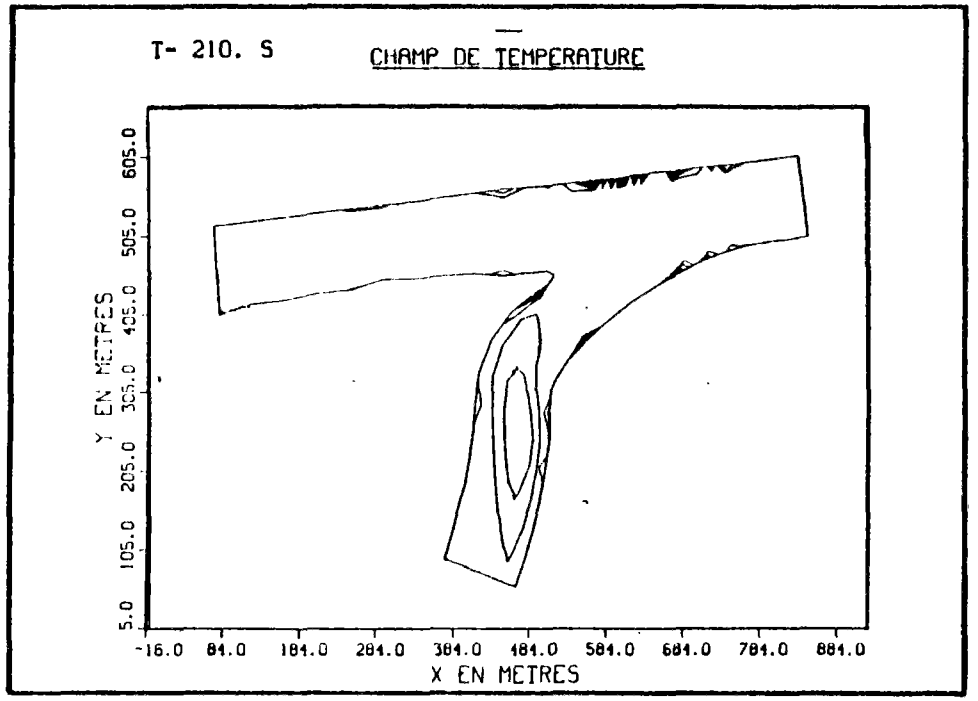
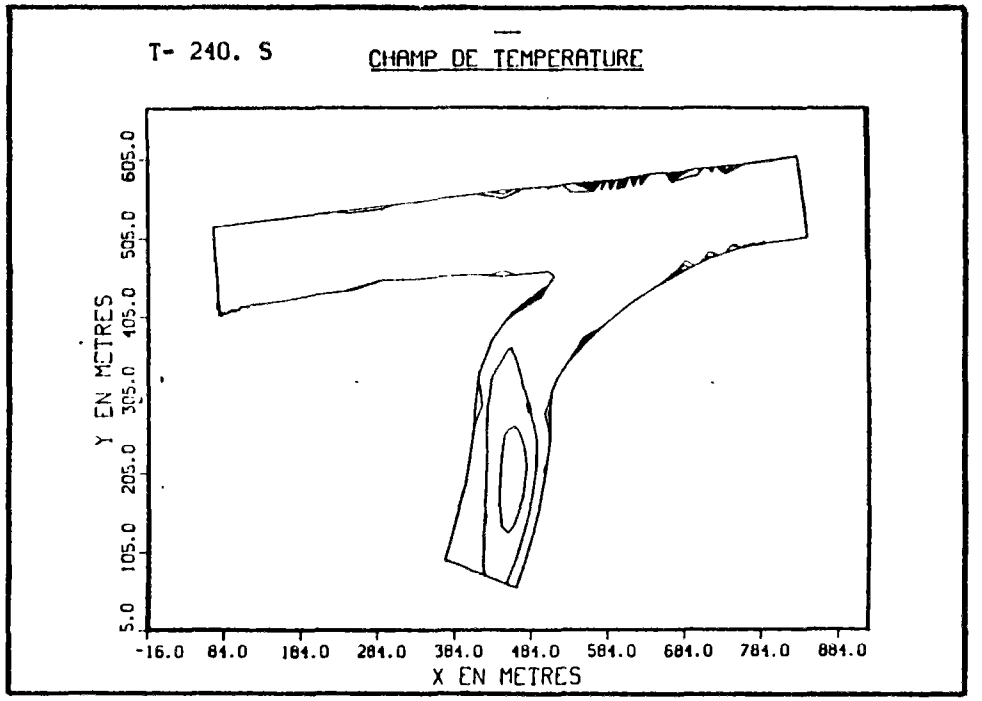


Fig. 27 (planche 2)





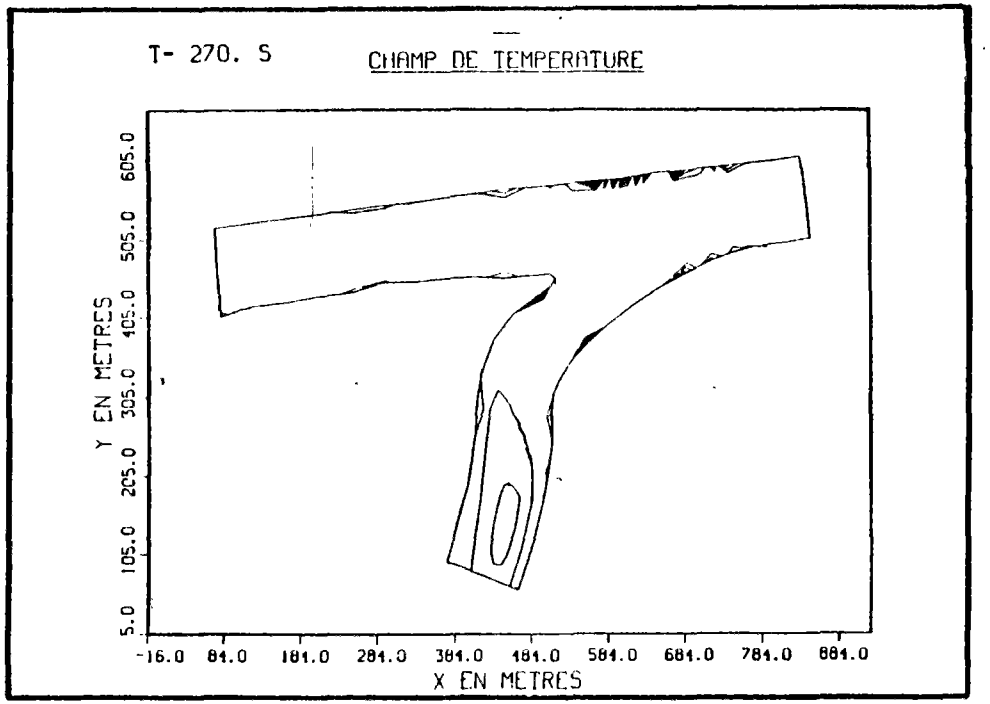


Fig. 27 (planche 3)

3.4 - Etude d'un rejet chaud en comparaison avec des mesures sur un canal théorique en S

3.4.1 - Introduction

La nécessité de comparer le modèle avec un champ de mesures thermiques denses et précises s'étant fait sentir, une installation d'essai du Laboratoire National d'Hydraulique a été mise à notre disposition pour nous permettre de concevoir un modèle et d'y réaliser ces mesures.

3.4.2 - Les mesures sur modèle physique

3.4.2.1 - Conception du canal - description

Nous avons choisi de travailler avec un canal à double courbure inversée ("en S") afin de tester le comportement d'un rejet chaud dans une telle configuration et notamment de voir si l'inversion de courant provoquée par cette configuration favorise la diffusion transversale de la tache.

Nous n'avons pas trouvé, à notre connaissance, d'exemple de ce type d'étude sur modèle théorique visant à déterminer un champ thermique: les exemples trouvés portent soit uniquement sur l'étude dynamique d'un canal théorique, en rapport avec une analyse des courants secondaires (voir [15], [32]), soit dans le cas d'une étude de champ thermique sur des mesures in-situ du champ lointain du rejet (voir [26], [30], [31], [34]). Une approche intéressante de l'étude du champ moyen d'un rejet chaud a été fait par Schatzmann et Naudasker [38] dans un canal rectiligne avec flottabilité du rejet.

Nous avons recherché pour le canal des formes géométriques simples présentant une inversion de courbure et compatibles avec l'encombrement admissible du modèle. Nous avons abouti à la géométrie en plan présentée sur la figure 28.

La section du canal est constante de largeur 1,40 m, le fond est plat, le changement de courbure est réalisé par la jonction tangentielle de deux arcs de cercle de même rayon, 7,5 m, de courbure inverse. La hauteur d'eau maximale possible est de 0,3 m, le canal étant conçu pour couler a priori avec 0,2 m de hauteur d'eau.

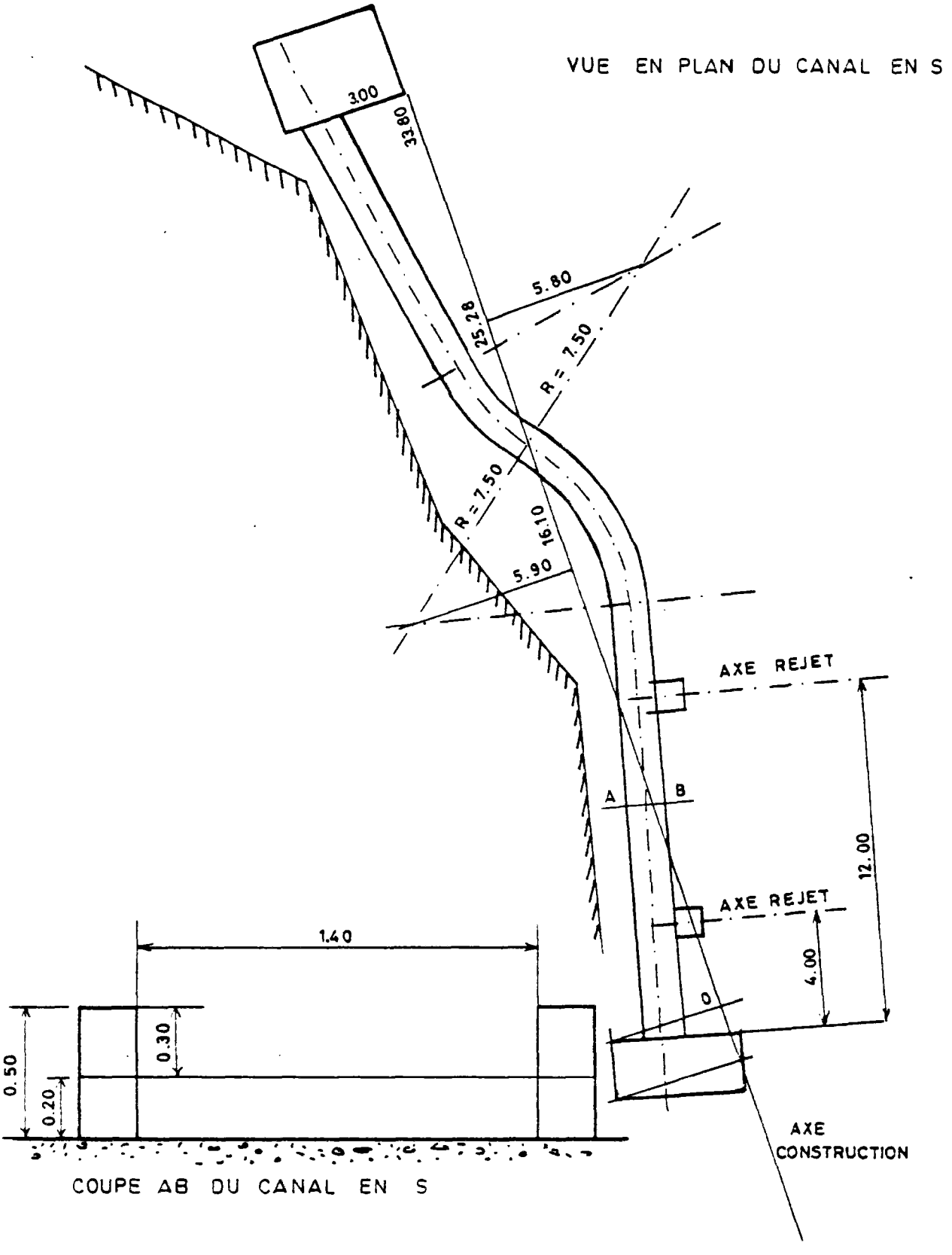


Fig. 28 GEOMETRIE EN PLAN DU CANAL EN S

Le déversoir amont a une capacité débitante de 0,21 m^3/s. Le canal a été réalisé en béton lissé.

Il a été prévu de pouvoir introduire un rejet chaud en deux points différents (voir figure 28). En ce qui concerne notre étude nous n'avons utilisé que le point de rejet amont, celui de l'aval étant réservé à l'étude des phénomènes bidimensionnels dans le champ proche du rejet. Le rejet se fait sur toute la hauteur d'eau par un canal d'amenée de 0,15 m de large. La puissance calorifique disponible est de 360 KW.

On trouve dans le tableau ci-dessous les limites inférieures et supérieures entre lesquelles il faut maintenir les vitesses pour respecter la condition de non-stratification(*), avec une différence de température de 5°C.

Géométrie : canal 1,4 m x 0,2 m rejet 0,15m x 0,2 m Echauffement : $\Delta\theta$ = 5°C		
	Limite inférieure	Limite supérieure
Canal	0,29 m/s (81 l/s) imposé par la condition de non stratification	0,58 m/s (210 l/s) imposé par le déversoir
Rejet	0,29 m/s (8,4 l/s) imposé par la condition de non stratification	0,57 m/s (17,22 l/s) imposé par la puissance de chauffe

Nous avons dressé dans le tableau suivant (fig.29) un inventaire succinct de quelques cas de figure envisageables à l'intérieur de ces contraintes en fonction du rapport K entre les valeurs absolues des vitesses moyennes du canal et du rejet.

(*) on rappelle que cette condition porte sur le nombre de Froude réduit et s'écrit (voir 1.3) $Fr' = \frac{U_o}{\sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho} g h_o}} > 7$

(m/s) Vitesse rejet	Vitesse amont	Vitesse mélange	K	Fr canal amont	Fr rejet	Fr canal aval	Fr réduit rejet	Fr réduit canal aval	Re canal amont	Re rejet	Re canal aval
0,29	0,29	0,3335	1	0,207	0,207	0,238	6,91	7,95	$0,41.10^6$	$0,43.10^5$	$0,46.10^6$
0,43	0,43	0,4945	1	0,307	0,307	0,353	10,26	11,80	$0,60.10^6$	$0,64.10^5$	$0,69.10^6$
0,57	0,57	0,6555	1	0,407	0,407	0,468	13,60	15,64	$0,80.10^6$	$0,85.10^5$	$0,91.10^6$
0,435	0,29	0,35525	1,5	0,207	0,311	0,254	10,38	8,47	$0,41.10^6$	$0,65.10^5$	$0,50.10^6$
0,57	0,38	0,4655	1,5	0,271	0,407	0,332	13,60	11,10	$0,53.10^6$	$0,85.10^5$	$0,66.10^6$
0,57	0,29	0,3755	1,96	0,207	0,407	0,268	13,60	8,95	$0,41.10^6$	$0,85.10^5$	$0,53.10^6$

Fig. 29 TABLEAU DES DIFFERENTES SITUATIONS DE MESURES ENVISAGABLES DANS LE CANAL EN S

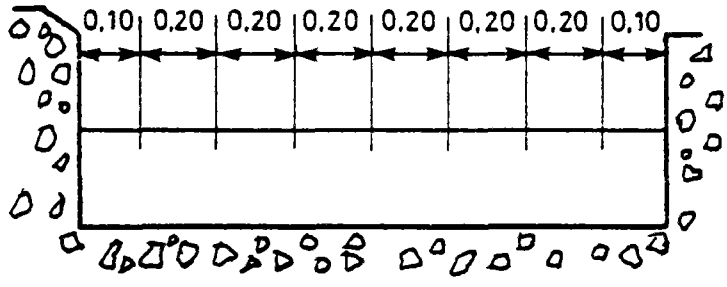
3.4.2.2 - Définition des essais

Dans le but d'obtenir des résultats comparables avec des résultats numériques nous avons décidé de procéder tout d'abord à un relevé des champs de vitesses en l'absence du rejet, puis à un relevé du champ de vitesse avec rejet isotherme et enfin à un relevé du champ thermique avec rejet chaud.

Le premier essai nous permet de confirmer la validité du code sur le plan dynamique, le second d'évaluer la zone de validité du calcul (rappelons que le calcul ne peut décrire le champ proche d'un rejet) et enfin le dernier de tester l'aspect thermique du code. Nous cherchons a priori à nous placer dans le cas ou |K est maximal, c'est-à-dire avec une vitesse de rejet importante par rapport au débit principal, de façon à placer l'étude dans un cadre proche des cas réels critiques.

Pour cela nous procédons de la façon suivante :

- détermination du degré de turbulence de l'écoulement de manière à choisir un pas de temps d'intégration pour les mesures.
- évaluation des fluctuations de vitesses sur une même verticale pour un débit de 80 l/s. On doit en effet vérifier que l'écoulement est homogène dans la troisième direction.
- Mesure des vitesses sur 12 sections uniformément réparties à raison de 7 points régulièrement espacés par section pour un écoulement sans rejet. On trouve sur la figure 30 la disposition des sections de mesure. L'espacement des points sur une section large de 1,40 m est la suivante : les deux points extrêmes sont situés à 0,10 m de leur rive respective et tous les points sont espacés de leur voisin de 0,2 m.



SCHEMA 10

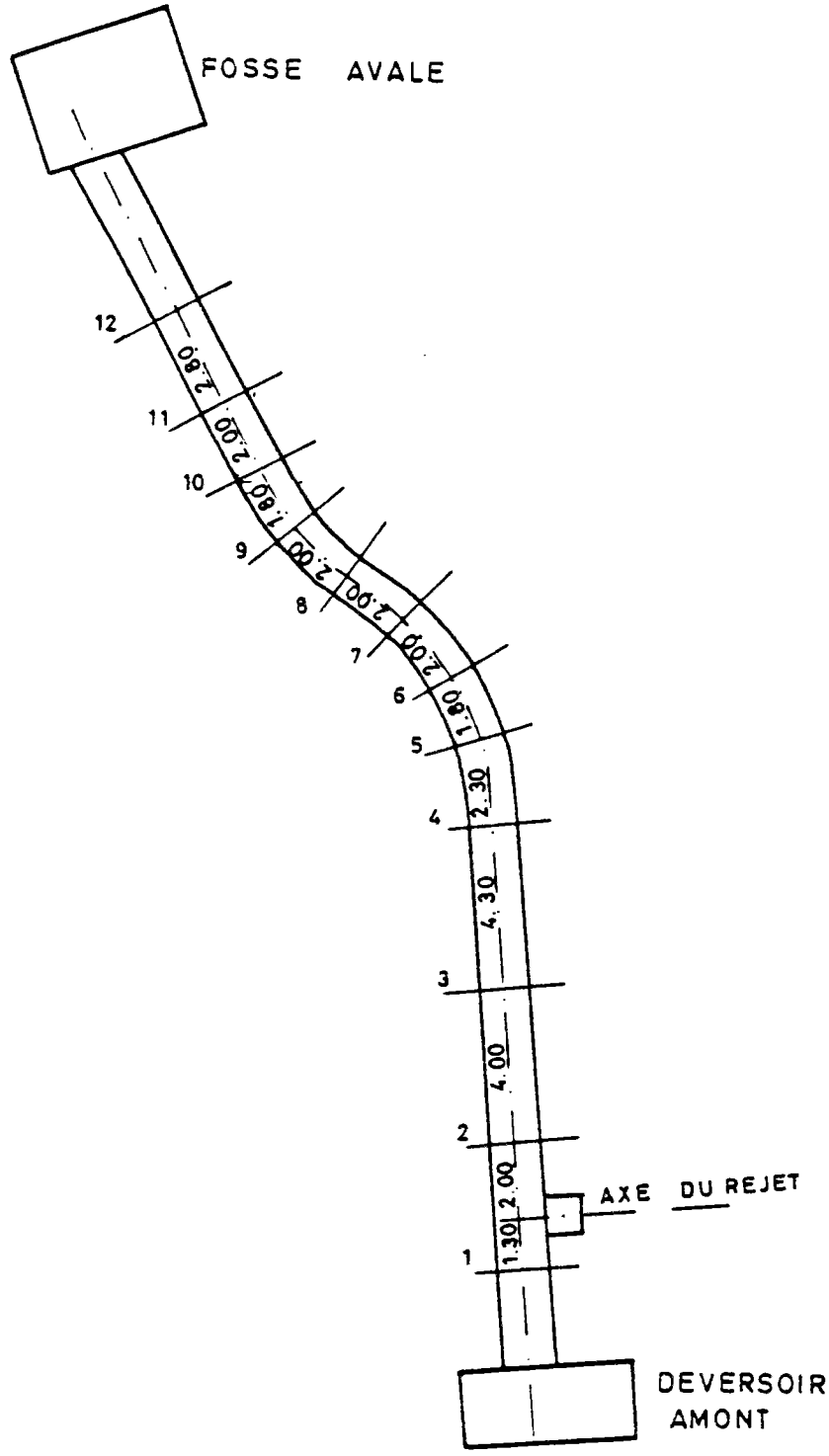


Fig.30 NUMEROTATION DES SECTIONS DE MESURE DU CANAL EN S

En chaque point on procède à 3 mesures : l'une près de la surface, l'une à mi-hauteur et l'autre au fond, ceci dans le but d'obtenir une approximation de la vitesse moyenne sur la hauteur.

Le débit dans le canal est de 80 l/s.

- Détermination pour un débit-canal de 80 l/s d'un débit-rejet acceptable en ce qui concerne les conditions d'homogénéité des vitesses sur une verticale.
- Mesure de vitesse aux mêmes points que précédemment pour un écoulement isotherme avec rejet. On procède également à 3 mesures sur la verticale en chaque point.

Le débit du canal est encore de 80 l/s, celui du rejet a été déterminé précédemment.

- Détermination d'une température de rejet assurant la non-stratification dans l'écoulement.
- Mesure du champ thermique avec $\Delta\theta$ précédemment choisi. Ces points de mesure sont répartis sur les mêmes 12 sections que pour les vitesses mais on dispose de 13 points de mesure par section régulièrement espacés de 0,10 m.

Il faut veiller à bien mesurer un écart de température et non pas une température, car la température moyenne de l'eau fluctue au cours de l'essai de façon importante.

3.4.2.3 - Réalisation des mesures - Résultats

Les mesures de vitesses sont effectuées à l'aide d'un ensemble de moulinets Beauvert à hélice quatre pales. Certaines mesures ponctuelles ont été faites à l'aide d'un micro moulinet de 1 cm de diamètre. Les mesures thermiques sont réalisées avec des sondes à semi-conducteurs et directement prélevées par une centrale de mesure.

L'essai de mesure de la turbulence de l'écoulement a été fait en un point central de la section amont de mesure.
On procède à une mesure toutes les 20 s pendant 20 mn. (voir figure 31).
On en déduit la valeur du temps d'intégration des mesures de vitesse : 100 s.

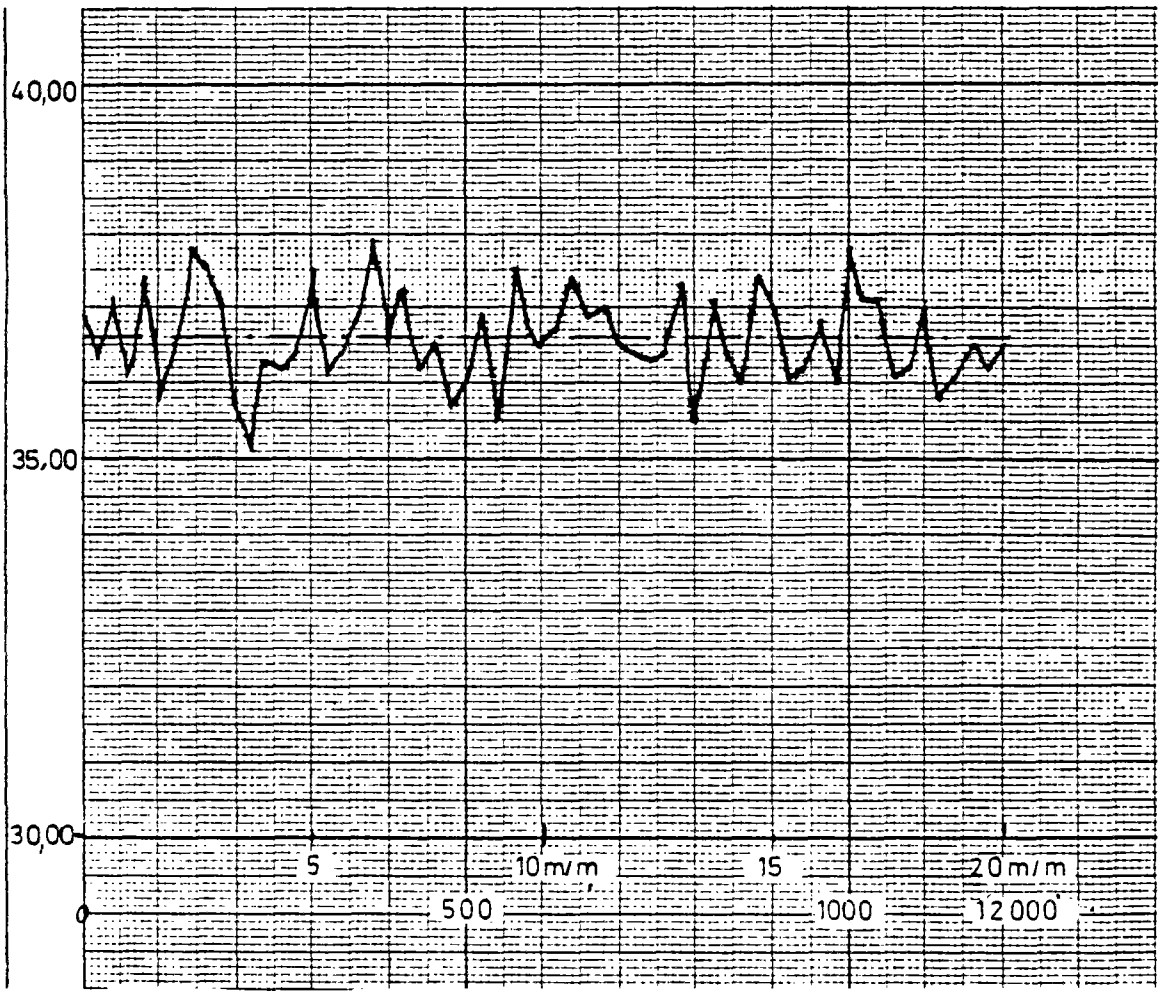


Fig.31 MESURE DE TURBULENCE DANS LE CANAL EN S

BIBLIOTHÈQUE NATIONALE

Les relevés des vitesses sur la hauteur ont été effectués avec un micro-moulinet sur les sections 3 et 8 (voir figures 32 et 33). La première section est située dans une zone rectiligne, la seconde au coeur de la seconde courbure.

La présence des courants secondaires ne se fait pas beaucoup sentir dans cette dernière. Les vitesses sont mesurées orthogonalement à la section de mesure. L'homogénéité sur la verticale est respectée de façon très satisfaisante.

Les résultats des mesures du champ de vitesse pour un écoulement sans rejet avec un débit de 80 l/s sont reportés dans le tableau de la figure 34 et sur le plan de la figure 35. Les mesures ont été faites au moulinet Beauvert. Bien que les vitesses en amont n'aient pu être totalement tranquilisées, on observe nettement l'inversion des vitesses dans le premier coude et la contre-inversion dans le second. Le dernier profil aval n'est pas très significatif car il est trop conditionné par les conditions d'écoulement dans la fosse.

On a ensuite procédé à des essais de débits pour le rejet. Un premier essai avec un débit principal de 80 l/s et un débit rejet de 15 l/s nous a fourni des profils verticaux de vitesse représentés sur la figure 36. Les points de mesures étaient situés sur une section à 3 m en aval du rejet respectivement à 0,2 m de la rive gauche, au centre et à 0,2 m de la rive droite. Les mesures ont été faites au micro-moulinet.

Nous n'avons pas obtenu, sur la verticale, une homogénéité satisfaisante des vitesses aussi avons nous décidé de recommencer l'essai avec un débit-rejet de 0,10 l/s. Les résultats obtenus dans ce dernier cas sont beaucoup plus satisfaisants quant à l'homogénéité verticale des vitesses (voir figure 37). Aussi travaillerons nous dorénavant avec un débit principal de 80 l/s et un débit-rejet de 10 l/s.

Un second champ de vitesse pour un écoulement avec rejet a été relevé. Les résultats sont reportés dans le tableau de la figure 37 et sur le plan de la figure 38. Les mêmes remarques que précédemment peuvent être faites sur l'allure du champ de vitesse.

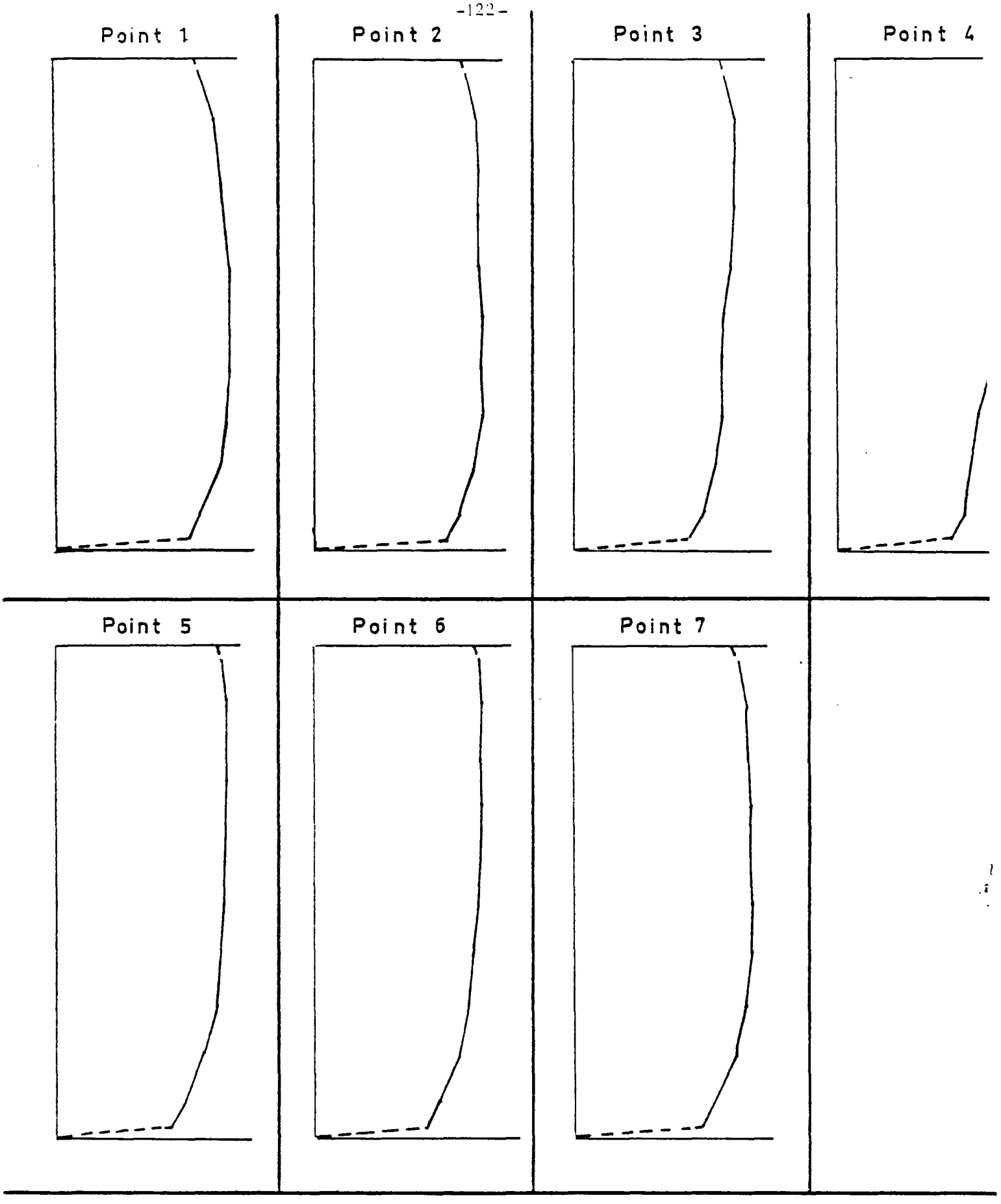


Fig.32 PROFILS VERTICAUX SECTION 3

(Point 1. rive droite au point 7. rive gauche)

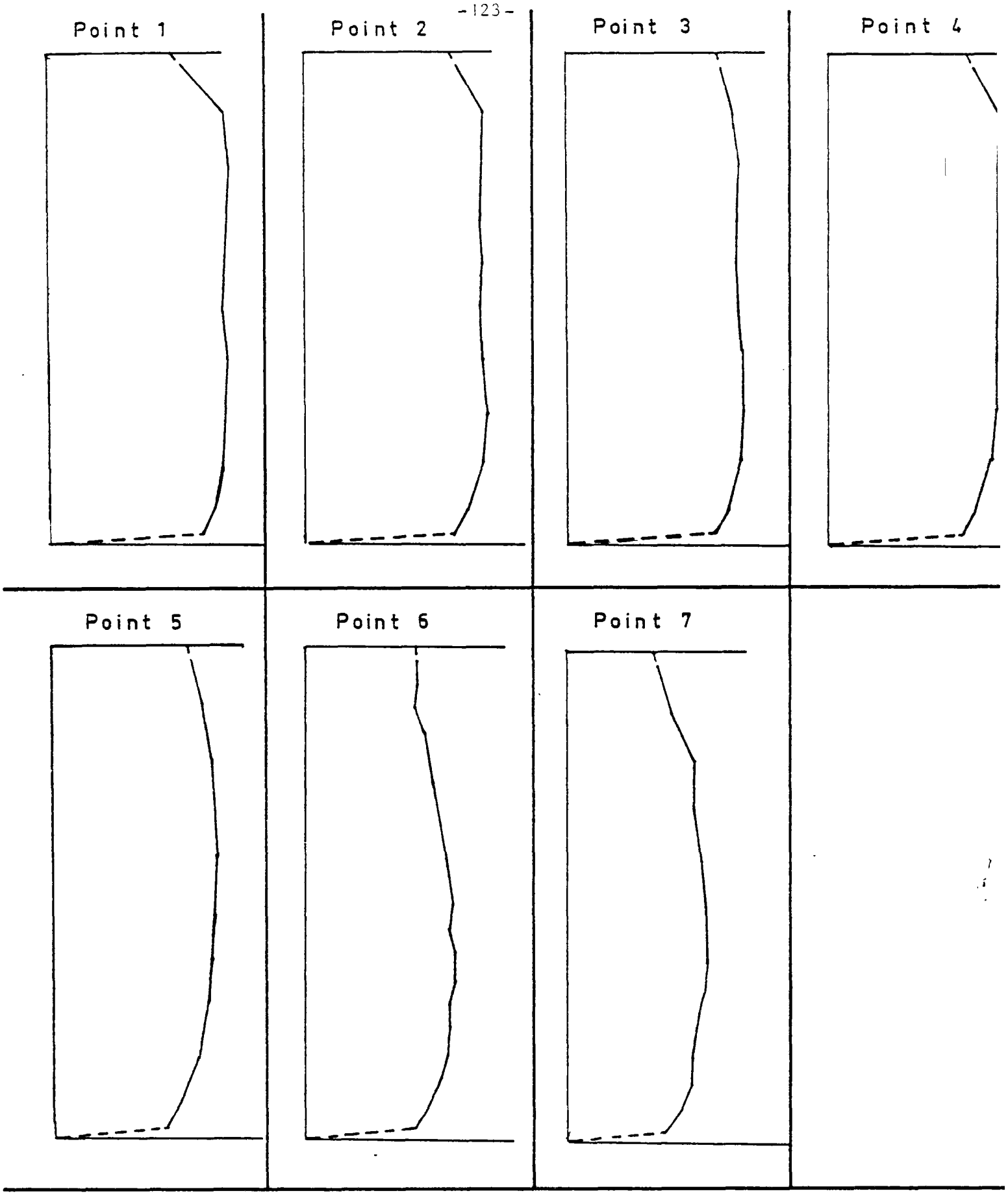


Fig. 33 PROFILS VERTICAUX SECTION 8

(Point 1. rive droite au point 7. rive gauche)

MOULINET NUMERO		R.D. 1	2	3	4	5	6	7
SECTION 1	surface	0,313	0,396	0,290	0,305	0,275	0,290	0,33
	mi-hauteur	0,295	0,380	0,290	0,274	0,306	0,310	0,30
	fond	0,271	0,371	0,274	0,255	0,319	0,293	0,31
	moyenne	0,293	0,382	0,285	0,278	0,300	0,298	0,31
SECTION 2	surface	0,313	0,376	0,304	0,311	0,310	0,322	0,32
	mi-hauteur	0,321	0,395	0,293	0,274	0,308	0,312	0,32
	fond	0,399	0,376	0,273	0,248	0,282	0,284	0,30
	moyenne	0,311	0,382	0,290	0,278	0,300	0,306	0,31
SECTION 3	surface	0,307	0,356	0,310	0,318	0,324	0,328	0,31
	mi-hauteur	0,327	0,357	0,293	0,282	0,304	0,314	0,33
	fond	0,298	0,340	0,269	0,255	0,269	0,280	0,30
	moyenne	0,311	0,351	0,291	0,285	0,299	0,307	0,31
SECTION 4	surface	0,303	0,388	0,312	0,324	0,324	0,334	0,30
	mi-hauteur	0,327	0,364	0,294	0,287	0,303	0,310	0,33
	fond	0,287	0,331	0,259	0,256	0,268	0,274	0,30
	moyenne	0,306	0,361	0,288	0,289	0,298	0,306	0,31
SECTION 5	surface	0,279	0,386	0,306	0,331	0,324	0,349	0,32
	mi-hauteur	0,308	0,387	0,281	0,288	0,306	0,329	0,34
	fond	0,267	0,354	0,263	0,250	0,279	0,283	0,30
	moyenne	0,285	0,376	0,283	0,290	0,303	0,320	0,32
SECTION 6	surface	0,291	0,384	0,316	0,333	0,318	0,357	0,26
	mi-hauteur	0,331	0,317	0,294	0,296	0,302	0,326	0,30
	fond	0,283	0,299	0,284	0,269	0,267	0,285	0,28
	moyenne	0,295	0,333	0,298	0,299	0,296	0,323	0,28
SECTION 7	surface	0,306	0,391	0,326	0,329	0,345	0,304	0,22
	mi-hauteur	0,310	0,388	0,314	0,315	0,308	0,324	0,29
	fond	0,283	0,316	0,304	0,295	0,276	0,291	0,27
	moyenne	0,300	0,365	0,315	0,313	0,310	0,306	0,26
SECTION 8	surface	0,347	0,366	0,335	0,340	0,308	0,231	0,204
	mi-hauteur	0,354	0,364	0,333	0,327	0,308	0,288	0,263
	fond	0,342	0,345	0,327	0,310	0,281	0,269	0,247
	moyenne	0,348	0,358	0,332	0,326	0,299	0,263	0,23
SECTION 9	surface	0,332	0,376	0,343	0,335	0,262	0,226	0,223
	mi-hauteur	0,340	0,382	0,350	0,333	0,314	0,286	0,252
	fond	0,308	0,361	0,330	0,305	0,278	0,269	0,220
	moyenne	0,327	0,373	0,341	0,324	0,285	0,260	0,23
SECTION 10	surface	0,280	0,367	0,350	0,319	0,273	0,277	0,264
	mi-hauteur	0,308	0,377	0,361	0,343	0,320	0,295	0,264
	fond	0,294	0,342	0,310	0,303	0,297	0,249	0,250
	moyenne	0,294	0,362	0,340	0,322	0,297	0,274	0,259
SECTION 11	surface	0,219	0,402	0,346	0,315	0,302	0,305	0,274
	mi-hauteur	0,308	0,375	0,345	0,343	0,317	0,281	0,283
	fond	0,278	0,345	0,304	0,301	0,280	0,236	0,268
	moyenne	0,268	0,374	0,332	0,320	0,300	0,274	0,275
SECTION 12	surface	0,282	0,395	0,343	0,329	0,319	0,309	0,274
	mi-hauteur	0,305	0,390	0,347	0,335	0,307	0,245	0,293
	fond	0,263	0,392	0,312	0,295	0,267	0,243	0,262
	moyenne	0,283	0,392	0,334	0,320	0,298	0,266	0,276

Fig.34 CHAMP DE VITESSE POUR UN ECOULEMENT SANS REJET
Q = 80 l/s

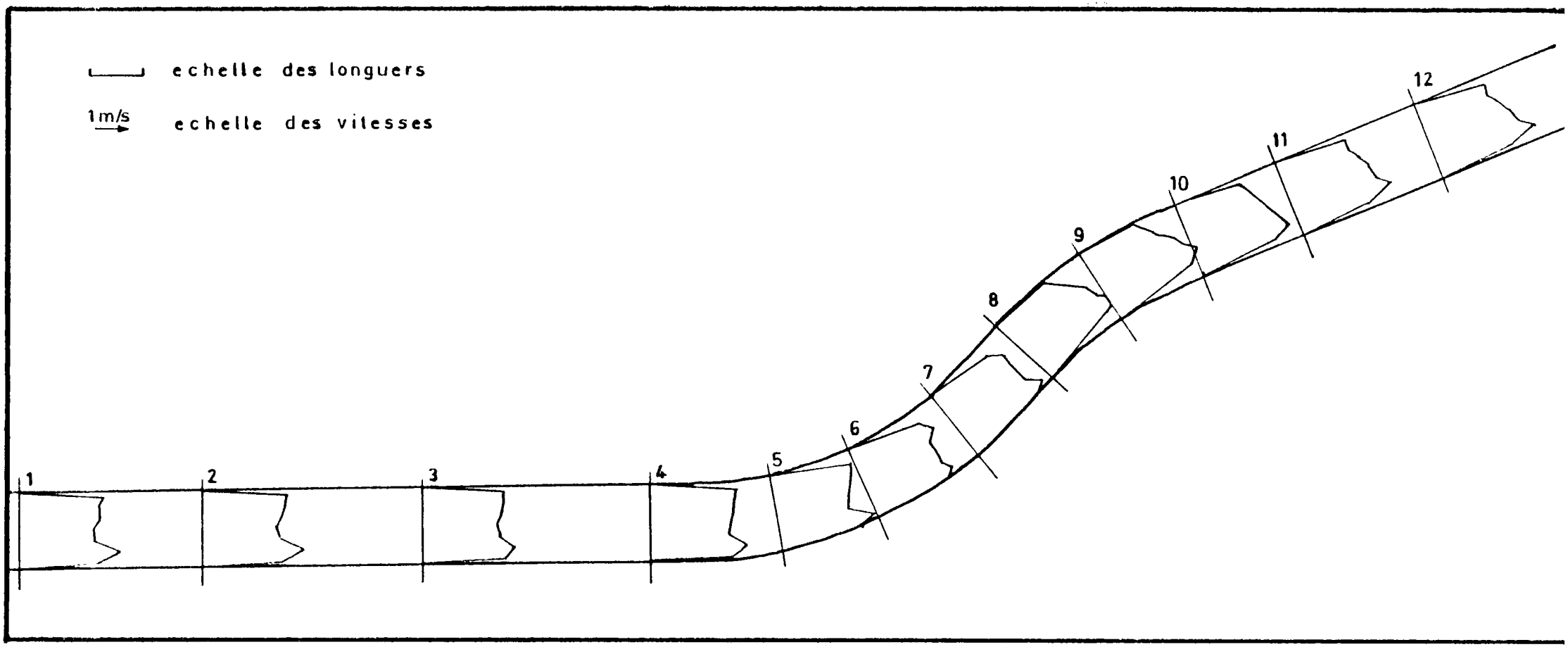


Fig. 35 CHAMP DE VITESSES MOYENNES POUR UN ECOULEMENT SANS REJET AVEC Q = 80 l/s (mesures faites au moulinet Beauvert 4 pales)

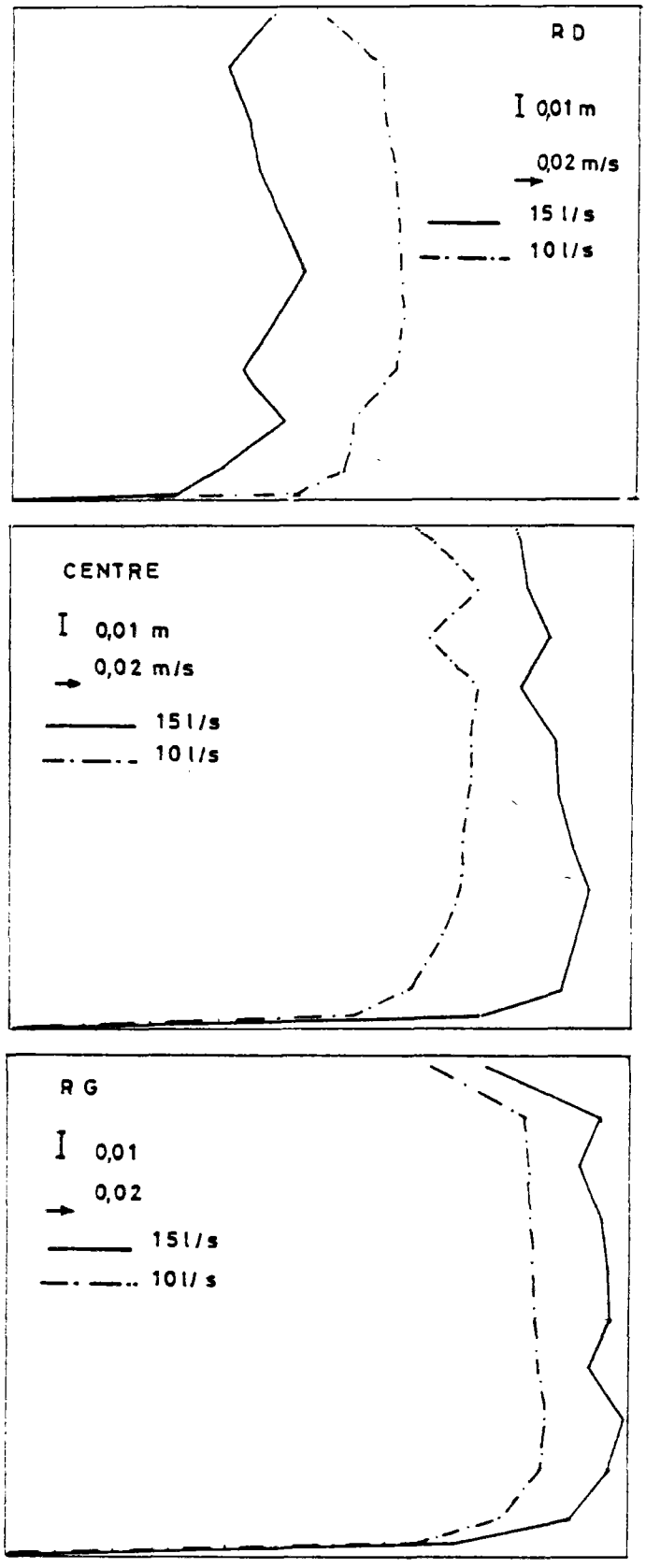


Fig. 36 COMPARAISON DE PROFILS VERTICAUX DE VITESSE POUR DEBIT REJET DE 15 l/s ET DE 10 l/s (debit ppal 80 l/s) DANS UNE ACTION SITUEE A 3 m EN AVAL DU REJET

MOULINET NUMERO		R.D. 1	2	3	4	5	6	7 R.G
SECTION 1	surface	0,311	0,300	0,282	0,286	0,269	0,276	0,333
	mi-hauteur	0,297	0,286	0,278	0,258	0,274	0,279	0,312
	fond	0,268	0,264	0,271	0,22	0,313	0,278	0,322
	moyenne	0,292	0,283	0,277	0,255	0,285	0,278	0,322
SECTION 2	surface	0,228	0,301	0,380	0,373	0,381	0,392	0,396
	mi-hauteur	0,226	0,327	0,384	0,365	0,369	0,382	0,398
	fond	0,233	0,259	0,373	0,336	0,345	0,329	0,402
	moyenne	0,229	0,296	0,379	0,358	0,365	0,368	0,400
SECTION 3	surface	0,286	0,324	0,349	0,350	0,363	0,372	0,358
	mi-hauteur	0,309	0,333	0,350	0,328	0,360	0,359	0,390
	fond	0,270	0,296	0,319	0,292	0,308	0,290	0,350
	moyenne	0,288	0,318	0,339	0,323	0,344	0,340	0,366
SECTION 4	surface	0,413	0,335	0,354	0,357	0,364	0,376	0,343
	mi-hauteur	0,398	0,331	0,341	0,334	0,347	0,342	0,398
	fond	0,388	0,292	0,312	0,291	0,299	0,283	0,349
	moyenne	0,400	0,319	0,336	0,327	0,337	0,334	0,363
SECTION 5	surface	0,372	0,322	0,350	0,352	0,363	0,389	0,367
	mi-hauteur	0,543	0,319	0,341	0,340	0,350	0,364	0,396
	fond	0,385	0,269	0,295	0,292	0,307	0,296	0,349
	moyenne	0,400	0,303	0,329	0,328	0,340	0,350	0,371
SECTION 6	surface	0,405	0,337	0,350	0,358	0,370	0,391	0,306
	mi-hauteur	0,387	0,340	0,343	0,341	0,351	0,363	0,324
	fond	0,398	0,304	0,295	0,301	0,306	0,307	0,322
	moyenne	0,396	0,327	0,329	0,333	0,342	0,354	0,317
SECTION 7	surface	0,392	0,342	0,362	0,367	0,370	0,343	0,254
	mi-hauteur	0,393	0,347	0,349	0,350	0,352	0,361	0,320
	fond	0,362	0,323	0,312	0,308	0,304	0,309	0,307
	moyenne	0,382	0,337	0,341	0,345	0,342	0,338	0,294
SECTION 8	surface	0,381	0,363	0,381	0,382	0,333	0,262	0,225
	mi-hauteur	0,369	0,366	0,372	0,363	0,340	0,302	0,281
	fond	0,347	0,345	0,341	0,323	0,298	0,285	0,263
	moyenne	0,366	0,358	0,365	0,356	0,324	0,283	0,257
SECTION 9	surface	0,359	0,382	0,390	0,360	0,287	0,250	0,261
	mi-hauteur	0,375	0,379	0,386	0,363	0,322	0,292	0,288
	fond	0,334	0,359	0,359	0,327	0,305	0,288	0,240
	moyenne	0,356	0,373	0,378	0,350	0,305	0,277	0,263
SECTION 10	surface	0,313	0,272	0,384	0,354	0,296	0,308	0,298
	mi-hauteur	0,320	0,375	0,385	0,370	0,325	0,322	0,306
	fond	0,315	0,343	0,352	0,336	0,312	0,275	0,286
	moyenne	0,316	0,330	0,374	0,353	0,311	0,302	0,297
SECTION 11	surface	0,244	0,369	0,385	0,339	0,311	0,334	0,316
	mi-hauteur	0,309	0,381	0,389	0,363	0,344	0,333	0,328
	fond	0,310	0,343	0,352	0,341	0,312	0,272	0,314
	moyenne	0,288	0,364	0,342	0,348	0,322	0,313	0,319
SECTION 12	surface	0,318	0,327	0,381	0,341	0,323	0,324	0,307
	mi-hauteur	0,326	0,356	0,382	0,356	0,336	0,314	0,327
	fond	0,313	0,328	0,345	0,320	0,282	0,261	0,294
	moyenne	0,319	0,337	0,369	0,339	0,314	0,300	0,309

Fig. 37 CHAMP DE VITESSE POUR UN ECOULEMENT AVEC REJET
DEBIT ppal = 80 l/s DEBIT rejet = 10 l/s

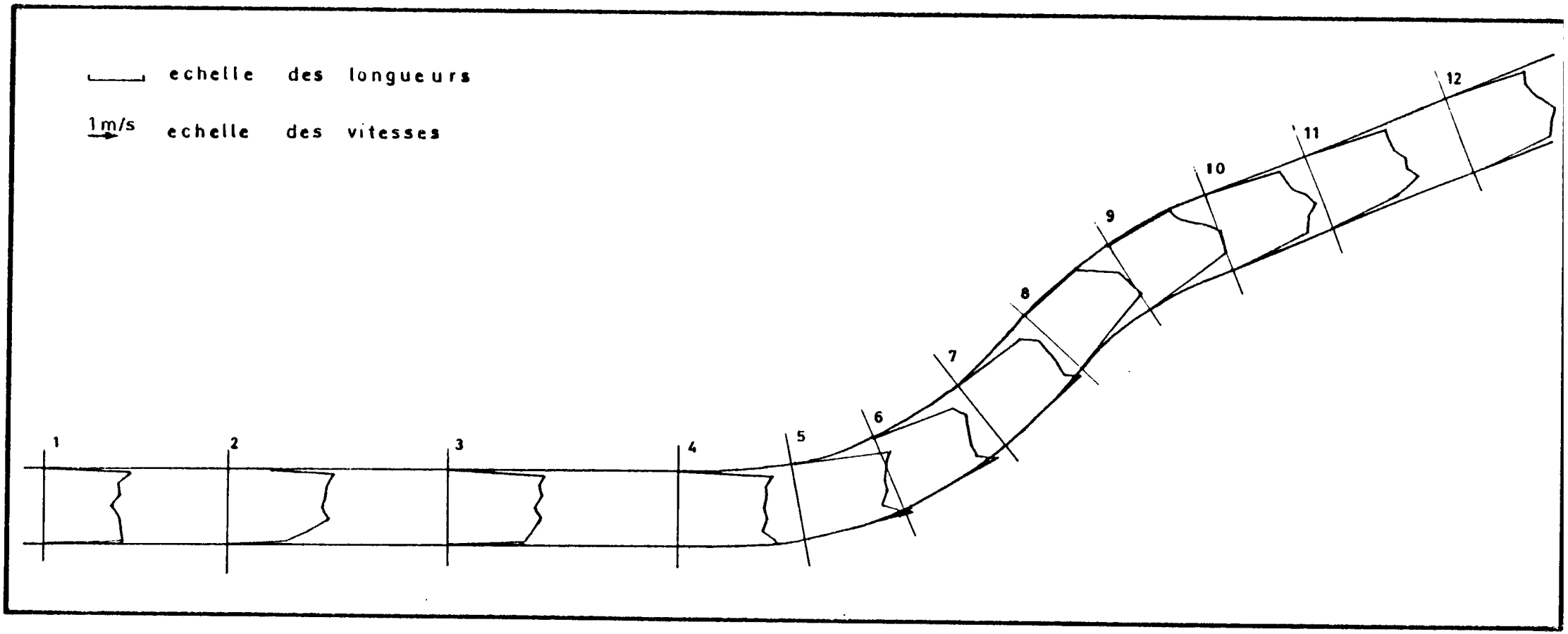


Fig. 38 CHAMP DE VITESSE MOYENNE POUR UN ECOULEMENT AVEC REJET debit ppal Q = 80 l/s debit rejet Q = 10 l/s
(mesures faites avec des moulinets Beauvert)

On introduit alors un gradient de température de 5°C dans le rejet. L'absence de stratification thermique n'étant pas observée avec suffisamment de netteté nous avons alors choisi de nous ramener à la valeur $\Delta\theta$ = 4°C plus satisfaisante sur ce critère.

Les mesures thermiques sont prélevées de façon automatique par une centrale de mesure qui réalise une scrutation continue des sondes les unes après les autres pendant un laps de temps déterminé par l'opérateur. Les valeurs moyennes en temps ne sont pas, comme pour les moulinets, le résultat d'une intégration continue, mais celui d'une moyenne de plusieurs mesures instantanées régulièrement espacées en temps. Le dépouillement des mesures est alors grandement facilité par l'utilisation de l'ordinateur qui calcule les valeurs moyennes à partir d'une bande magnétique de transmission.

Le champ thermique obtenu pour un débit principal de 80 l/s, un débit rejeté de 10 l/s et un gradient thermique $\Delta\theta$=4°C est représenté graphiquement sous forme d'isotherme sur la figure 39, sous forme de profils de gradient thermique sur la figure 40 et sous forme de tableau de valeurs sur la figure 41. Le rejet comme on le voit reste plaqué le long de sa rive et la diffusion latérale n'est pas très accentuée par la double courbure rencontrée.

3.4.3 - Modélisation du canal

3.4.3.2 - Maillage

Le maillage a été calculé analytiquement d'après description du domaine sous forme de portions de droite et d'arcs de cercle.

Un premier maillage (figure 2) a été conçu pour l'écoulement sans rejet. Il comporte 29 x 9 = 261 points.

Les sections de mesures coïncident avec les lignes isocoordonnées et les points de mesures se retrouvent aux nœuds d'intersection.

Un second maillage a été conçu (figure 42) pour l'écoulement avec rejet. Il a été sensiblement resserré au niveau du rejet afin que celui-ci soit représenté en largeur par 4 points. La condition de variation progressive des pas du maillage nous a conduit à un nombre de points de 39 x 9 = 351 points.

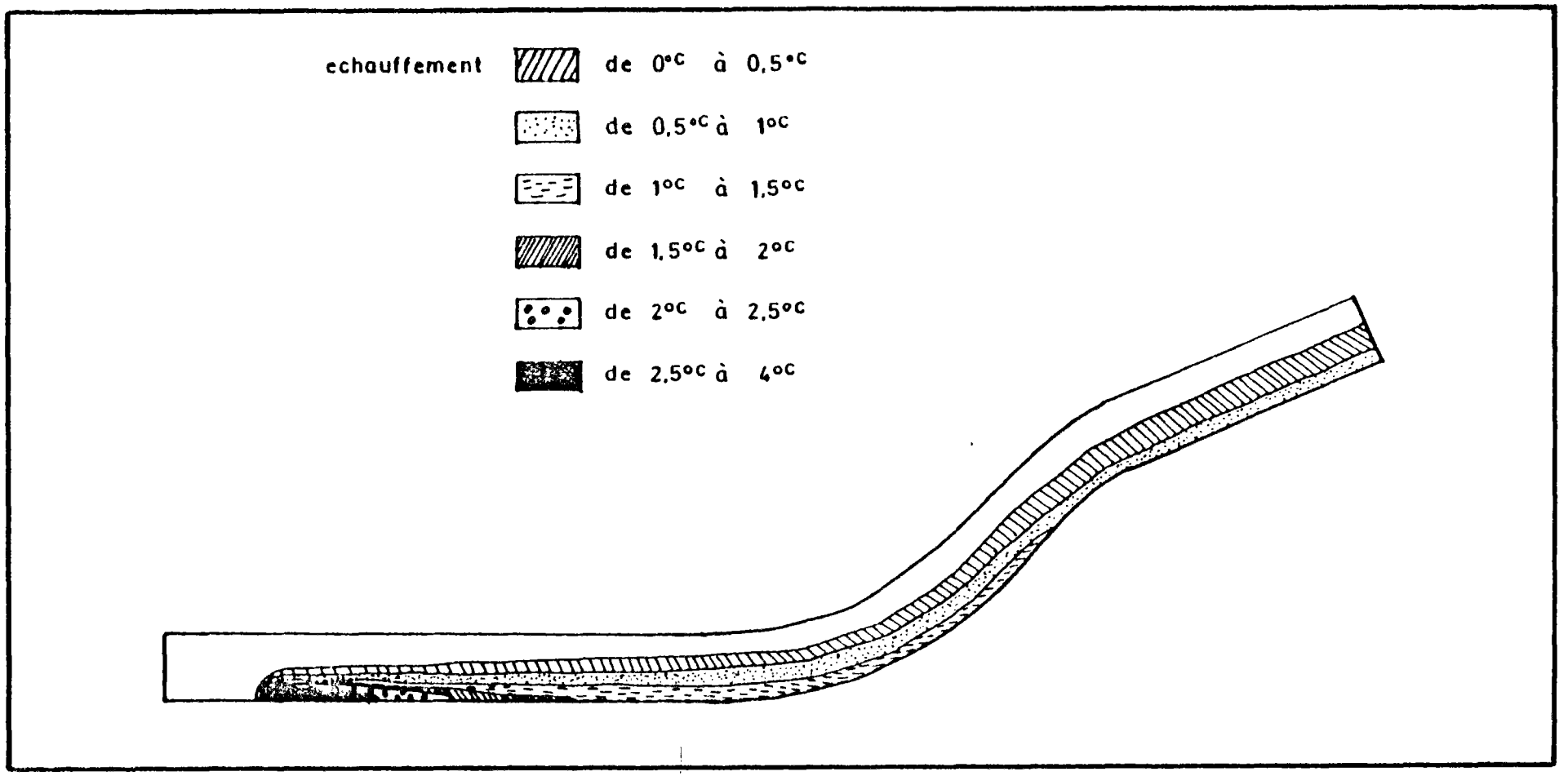


Fig. 39 ISOTHERMES DU CHAMP THERMIQUE MESURÉ

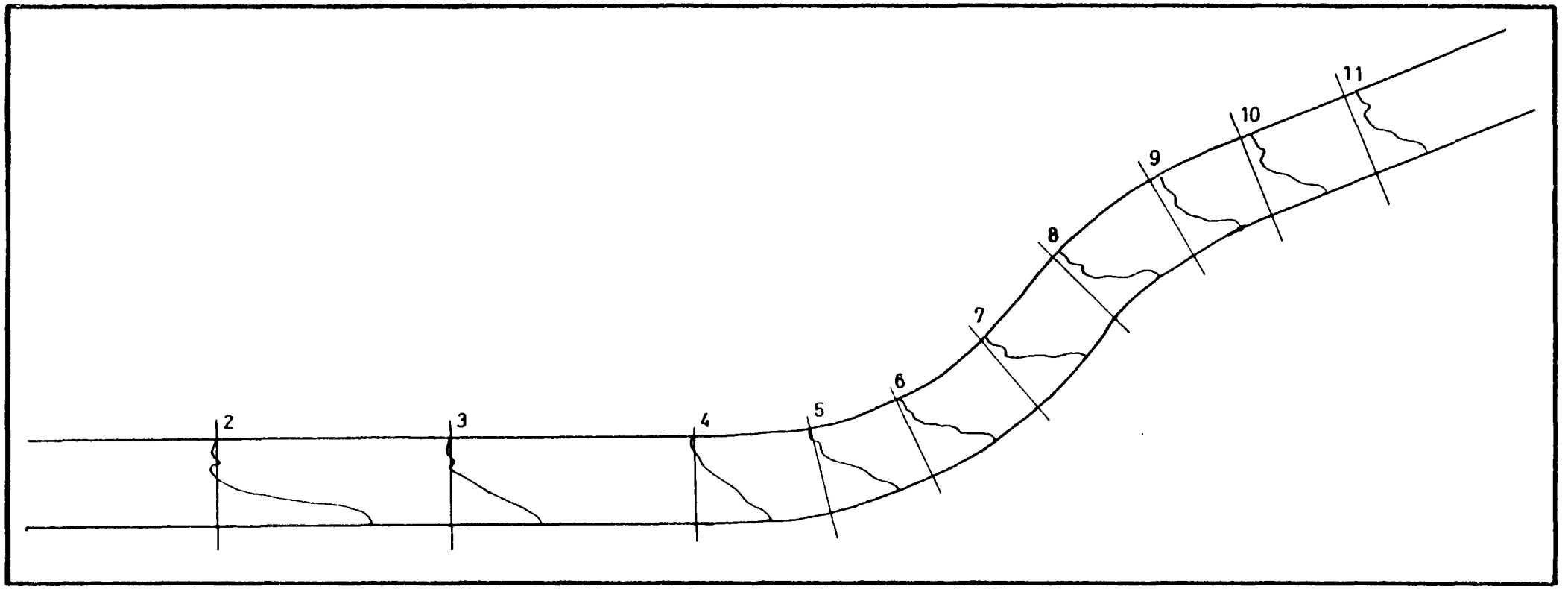


Fig. 40 PROFILS DES GRADIENTS THERMIQUES MESURÉS

TEMPERATURES MOYENNES

	S 1	S 2	S 3	S 4	S 5	S 6	S 7	S 8	S 9	S10	S11	S12	S13	TA	TR
SECTION 20200	21.20	21.18	20.93	20.23	19.81	19.36	18.84	18.61	18.56	18.70	18.61	18.60	18.63	18.64	22.66
SECTION 20100	21.21	21.08	20.52	19.52	19.02	18.96	18.78	18.63	18.57	18.71	18.62	18.62	18.65	18.66	22.67
SECTION 20001	21.10	21.09	20.72	19.89	19.11	18.68	18.59	18.61	18.57	18.71	18.62	18.61	18.64	18.66	22.69
MOYENNE EN 2	21.17	21.12	20.71	19.88	19.31	19.00	18.74	18.62	18.57	18.71	18.62	18.61	18.64	18.65	22.67
SECTION NO															
SECTION 30001	20.26	20.12	19.93	19.61	19.41	19.10	18.88	18.70	18.62	18.73	18.64	18.63	18.65	18.67	22.69
SECTION 30100	20.05	19.88	19.66	19.35	19.27	19.10	18.92	18.83	18.69	18.76	18.65	18.64	18.67	18.68	22.71
SECTION 30200	20.14	20.03	19.78	19.50	19.41	19.21	19.02	18.85	18.69	18.78	18.65	18.64	18.67	18.68	22.71
MOYENNE EN 3	20.15	20.01	19.79	19.49	19.36	19.14	18.94	18.79	18.67	18.76	18.64	18.64	18.66	18.68	22.70
SECTION NO															
SECTION 40200	19.92	19.83	19.56	19.37	19.33	19.20	19.01	18.90	18.75	18.83	18.68	18.66	18.68	18.69	22.73
SECTION 40100	19.86	19.75	19.54	19.37	19.36	19.23	19.10	19.00	18.83	18.88	18.74	18.69	18.69	18.70	22.73
SECTION 40001	20.03	19.97	19.84	19.67	19.62	19.41	19.21	19.07	18.92	18.87	18.69	18.66	18.68	18.71	22.75
MOYENNE EN 4	19.93	19.85	19.65	19.47	19.44	19.28	19.11	18.99	18.83	18.86	18.70	18.67	18.69	18.70	22.73
SECTION NO															
SECTION 50001	19.95	19.91	19.76	19.63	19.61	19.45	19.24	19.01	18.79	18.85	18.72	18.67	18.70	18.71	22.77
SECTION 50100	19.89	19.80	19.58	19.40	19.35	19.19	18.99	18.88	18.75	18.82	18.70	18.68	18.70	18.72	22.77
SECTION 50200	19.93	19.92	19.73	19.50	19.40	19.24	19.08	18.99	18.87	18.92	18.76	18.71	18.72	18.73	22.81
MOYENNE EN 5	19.92	19.88	19.69	19.51	19.45	19.29	19.10	18.96	18.80	18.86	18.73	18.69	18.71	18.72	22.79
SECTION NO															
SECTION 60200	19.89	19.88	19.71	19.57	19.56	19.42	19.21	19.12	18.99	19.05	18.88	18.82	18.79	18.73	22.81
SECTION 60100	19.80	19.75	19.57	19.35	19.33	19.15	18.94	18.87	18.78	18.86	18.71	18.69	18.72	18.73	22.63
SECTION 60001	19.86	19.84	19.66	19.49	19.45	19.27	19.08	18.93	18.77	18.81	18.70	18.68	18.71	18.72	22.61
MOYENNE EN 6	19.85	19.83	19.65	19.47	19.45	19.28	19.08	18.97	18.85	18.91	18.76	18.73	18.74	18.73	22.69
SECTION NO															
SECTION 70001	20.01	20.02	19.86	19.61	19.40	19.20	19.02	18.89	18.77	18.91	18.80	18.80	18.89	18.83	22.93
SECTION 70100	19.91	19.85	19.68	19.46	19.38	19.20	19.05	19.00	18.90	19.01	18.88	18.84	18.90	18.84	22.96
SECTION 70200	19.93	19.91	19.72	19.60	19.64	19.59	19.44	19.33	19.24	19.30	19.12	19.06	19.04	18.85	22.98
MOYENNE EN 7	19.95	19.93	19.75	19.56	19.50	19.33	19.17	19.07	18.97	19.07	18.93	18.90	18.94	18.84	22.96
SECTION NO															
SECTION 80200	19.89	19.87	19.71	19.56	19.56	19.52	19.39	19.34	19.27	19.36	19.18	19.14	19.13	18.89	22.90
SECTION 80100	19.85	19.81	19.64	19.37	19.29	19.17	19.06	19.03	18.96	19.09	18.96	18.94	19.01	18.88	22.86
SECTION 80001	19.90	19.89	19.74	19.44	19.25	19.05	18.93	18.90	18.85	18.90	18.91	18.93	18.99	18.80	22.85
MOYENNE EN 8	19.88	19.86	19.70	19.46	19.37	19.25	19.13	19.09	19.03	19.14	19.02	19.00	19.05	18.88	22.87
SECTION NO															
SECTION 90001	19.88	19.91	19.76	19.47	19.36	19.12	18.97	18.95	18.90	19.04	18.96	18.96	19.01	18.87	22.91
SECTION 90100	19.81	19.78	19.61	19.35	19.21	19.16	19.06	19.03	18.98	19.09	19.00	18.99	19.06	18.88	22.94
SECTION 90200	19.87	19.74	19.55	19.41	19.42	19.40	19.32	19.29	19.22	19.31	19.18	19.16	19.13	18.89	22.93
MOYENNE EN 9	19.86	19.81	19.64	19.41	19.34	19.23	19.12	19.09	19.03	19.15	19.05	19.04	19.07	18.88	22.93
SECTION NO															
SECTION 100200	19.80	19.67	19.50	19.35	19.37	19.33	19.23	19.24	19.17	19.30	19.17	19.12	19.13	18.91	22.91
SECTION 100100	19.90	19.84	19.69	19.52	19.43	19.23	19.12	19.11	19.06	19.21	19.13	19.15	19.17	18.94	22.84
SECTION 100001	19.93	19.91	19.79	19.63	19.53	19.28	19.08	19.06	19.02	19.16	19.08	19.08	19.11	18.95	22.81
MOYENNE EN 10	19.87	19.81	19.66	19.50	19.45	19.28	19.14	19.14	19.09	19.22	19.13	19.12	19.14	18.94	22.85
SECTION NO															
SECTION 110001	19.88	19.92	19.80	19.59	19.50	19.30	19.16	19.14	19.10	19.25	19.17	19.16	19.18	18.99	22.85
SECTION 110100	19.91	19.89	19.73	19.52	19.49	19.29	19.17	19.19	19.16	19.30	19.23	19.20	19.22	18.99	22.91
SECTION 110200	19.77	19.70	19.54	19.42	19.46	19.41	19.29	19.28	19.24	19.35	19.22	19.19	19.21	19.00	22.99
MOYENNE EN 11	19.85	19.84	19.69	19.51	19.48	19.33	19.20	19.20	19.16	19.30	19.20	19.19	19.21	18.99	22.92
SECTION NO															
SECTION 120200	19.74	19.69	19.53	19.40	19.44	19.39	19.28	19.28	19.24	19.36	19.24	19.22	19.24	19.02	23.02
SECTION 120100	19.88	19.91	19.81	19.65	19.60	19.43	19.27	19.25	19.20	19.35	19.25	19.22	19.25	19.04	23.05
SECTION 120001	19.91	19.95	19.88	19.77	19.70	19.48	19.30	19.25	19.19	19.33	19.24	19.23	19.25	19.06	23.07
MOYENNE EN 12	19.84	19.85	19.74	19.61	19.58	19.44	19.28	19.26	19.21	19.35	19.24	19.22	19.25	19.04	23.05
SECTION NO															

Fig.41 S1 est situe en rive droite S13 est situe en rive gauche

TA=Temperature en amont du rejet.TR=Temperature du rejet

Le codage des section est le suivant:

20200 signifie section 2 à 200mm du fond c'est à dire en surface

20100 signifie section 2 à 100 mm du fond c'est à dire à mi-tirant d'eau

20001 signifie section 2 à 1mm du fond

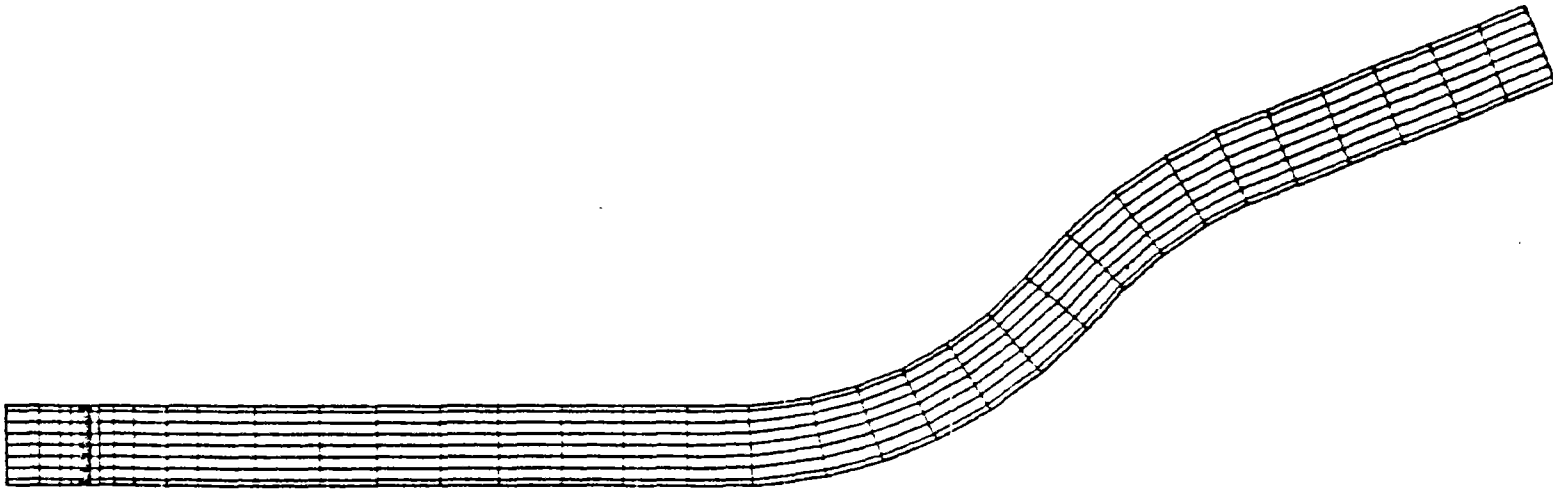


Fig. 42 SECOND MAILLAGE DU CANAL EN S

3.4.3.2 - Description des fonds et de la surface libre

Les fonds sont plats et horizontaux.

Le calcul a utilisé une surface libre également plane et horizontale.

3.4.3.3 - Conditions aux limites

A l'amont on impose successivement les différents profils mesurés correspondants aux différents cas de mesures effectués.

A l'aval on réalise une sortie libre.

Sur les rives on impose une condition de glissement.

Pour le calcul thermique on impose à l'amont une température uniforme, dans le rejet une température également uniforme supérieure de 4°C à la précédente et à l'aval une condition de sortie libre.

3.4.3.4 - Choix des paramètres

Le choix du pas de temps s'est calé sur les valeurs moyennes des mailles et des vitesses (l'utilisation d'un convecteur bidimensionnel [20] évite en effet de modifier ce pas de temps dans le cas d'un resserrement des mailles comme celui provoqué par l'introduction du rejet). Sa valeur est de 3 s.

La valeur du coefficient de Strickler pour du béton lissé est de 90.

Le calcul de ν_o fournit une valeur de 10^{-5} m^2/s.

Le calcul de α d'après 2.5.3 fournit $\alpha = 1$.

Le calcul du tenseur de dispersion thermique fournit,

$$K_{11} = 0,132.10^{-2} \qquad K_{12} = 0,3.10^{-3} \qquad K_{22} = 0,3.10^{-2}$$

3.4.4 - Résultats

3.4.4.1 - Résultats dynamiques

On trouvera sur la figure 43 une comparaison entre les profils mesurés et les profils calculés dans le cas d'un écoulement sans rejet.

Ces comparaisons ont révélées un degré de concordance satisfaisant.

On trouvera par ailleurs sur la figure 44 une comparaison entre profils mesurés et calculés dans le cas d'un écoulement avec rejet.

3.4.4.2 - Résultats thermiques

On trouvera sur la figure 45 une comparaison entre les profils de gradients thermiques mesurés et calculés pour différentes valeurs de K_{22}. On constate que la valeur précédemment calculée est celle qui fournit les résultats les plus satisfaisants.

3.4.4.3 - Calcul de la ligne d'eau

Les valeurs mesurées sur modèle de la ligne d'eau nous ont fourni un écart amont-aval de sa côte d'environ 2 mm.

Par ailleurs une évaluation sommaire de cette variation de cote faite en supposant que la perte de charge correspondante est entièrement compensée par le frottement sur le fond, fournit :

$$J = \frac{\Delta Z}{L} = \frac{Q^2}{K_s^2 \; S^2 \; R^{4/3}} = 1{,}26 \; 10^{-4}$$

d'où $\Delta Z \sim 3{,}8$ mm.

Le calcul de la pression fournit, pour ΔZ un ordre de grandeur de 2,5 mm. Cette valeur est tout à fait en accord avec les ordres de grandeurs précédemment évoqués.

Ce calcul fournit également des dévers dans les coudes, correspondant à une variation de cote de l'ordre du millimètre. Cette valeur trop faible n'a pu être mesurée sur le modèle, la précision d'une telle mesure étant justement de l'ordre du millimètre.

On trouvera sur la figure 46 une allure de la surface calculée.

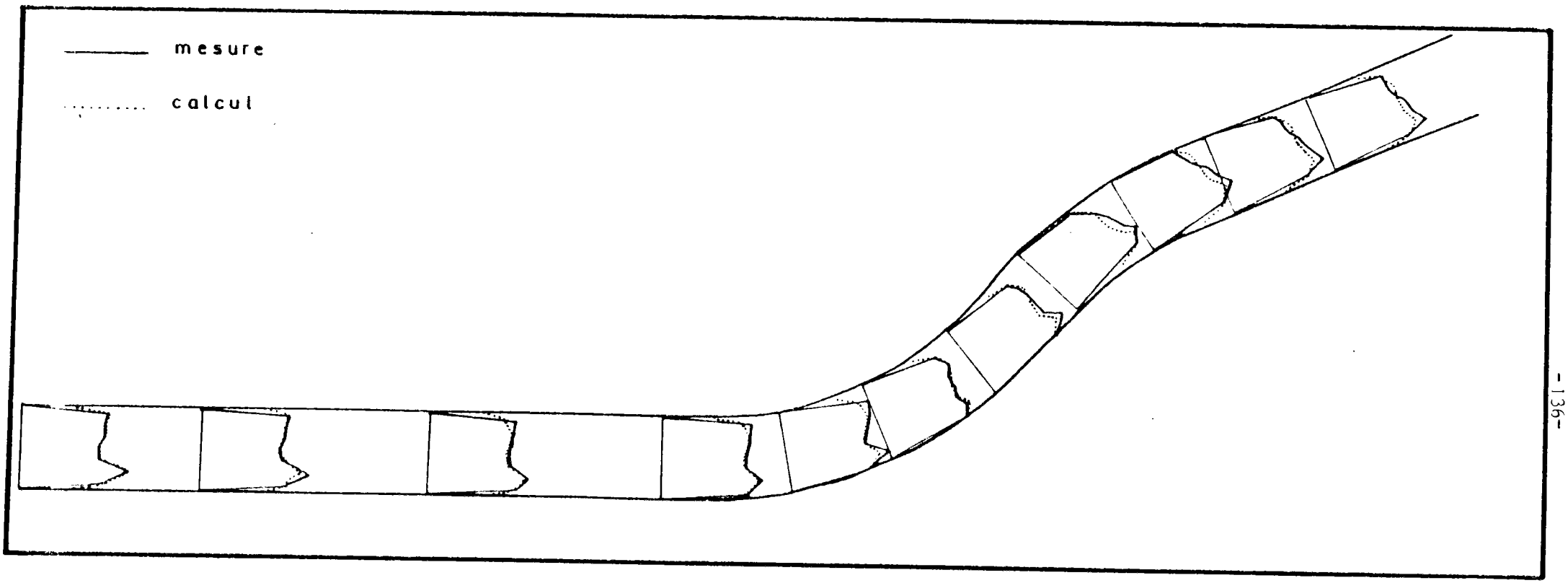


Fig.43 COMPARAISON MESURES / CALCUL DANS LE CAS D'UN ECOULEMENT SANS REJET

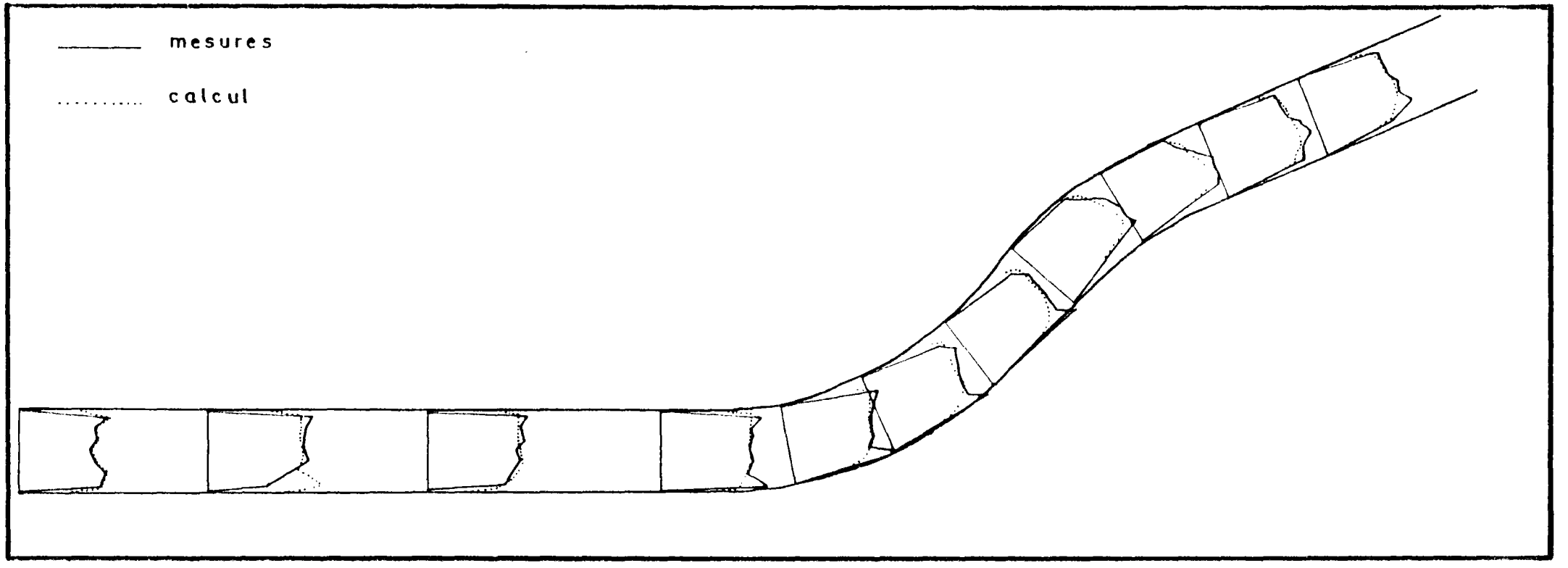


Fig. 44 COMPARAISON MESURES/CALCUL DANS LE CAS D'UN ECOULEMENT AVEC REJET ISOTHERME

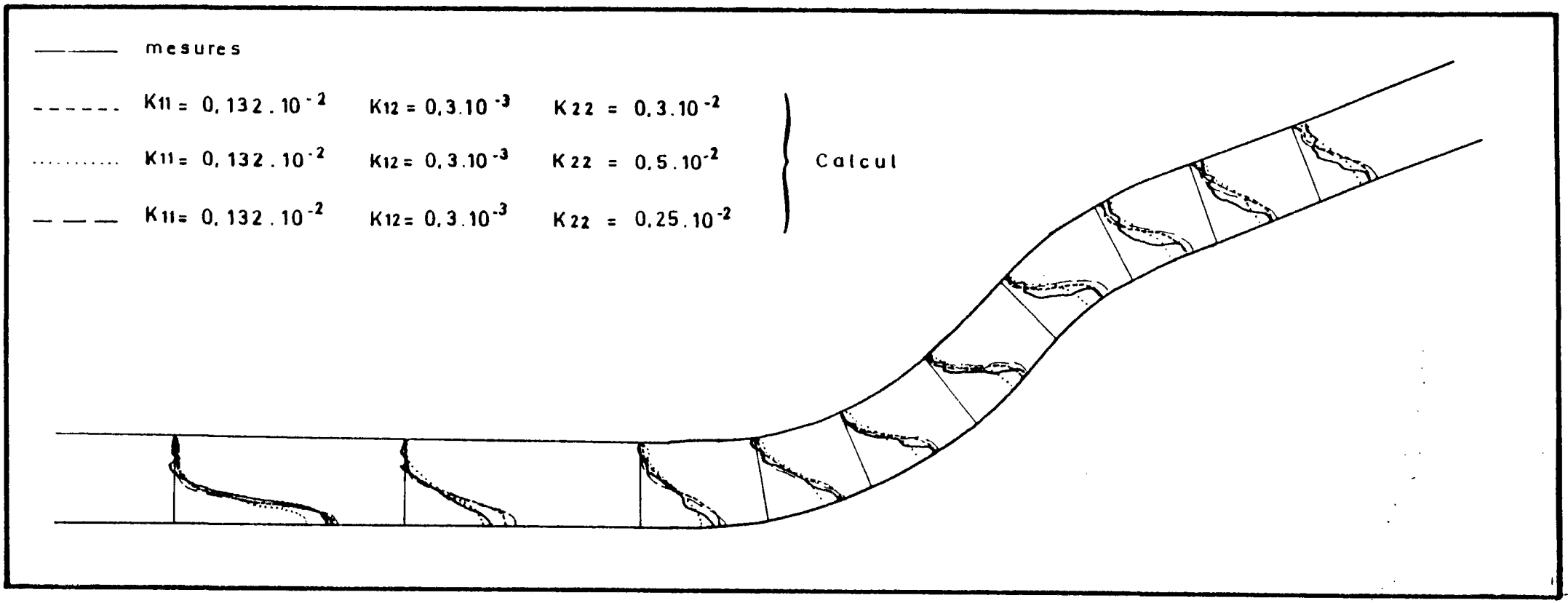


Fig. 45 COMPARAISON MESURES /CALCUL DE GRADIENTS THERMIQUES POUR DIFFERENTES VALEURS DE K_{22}

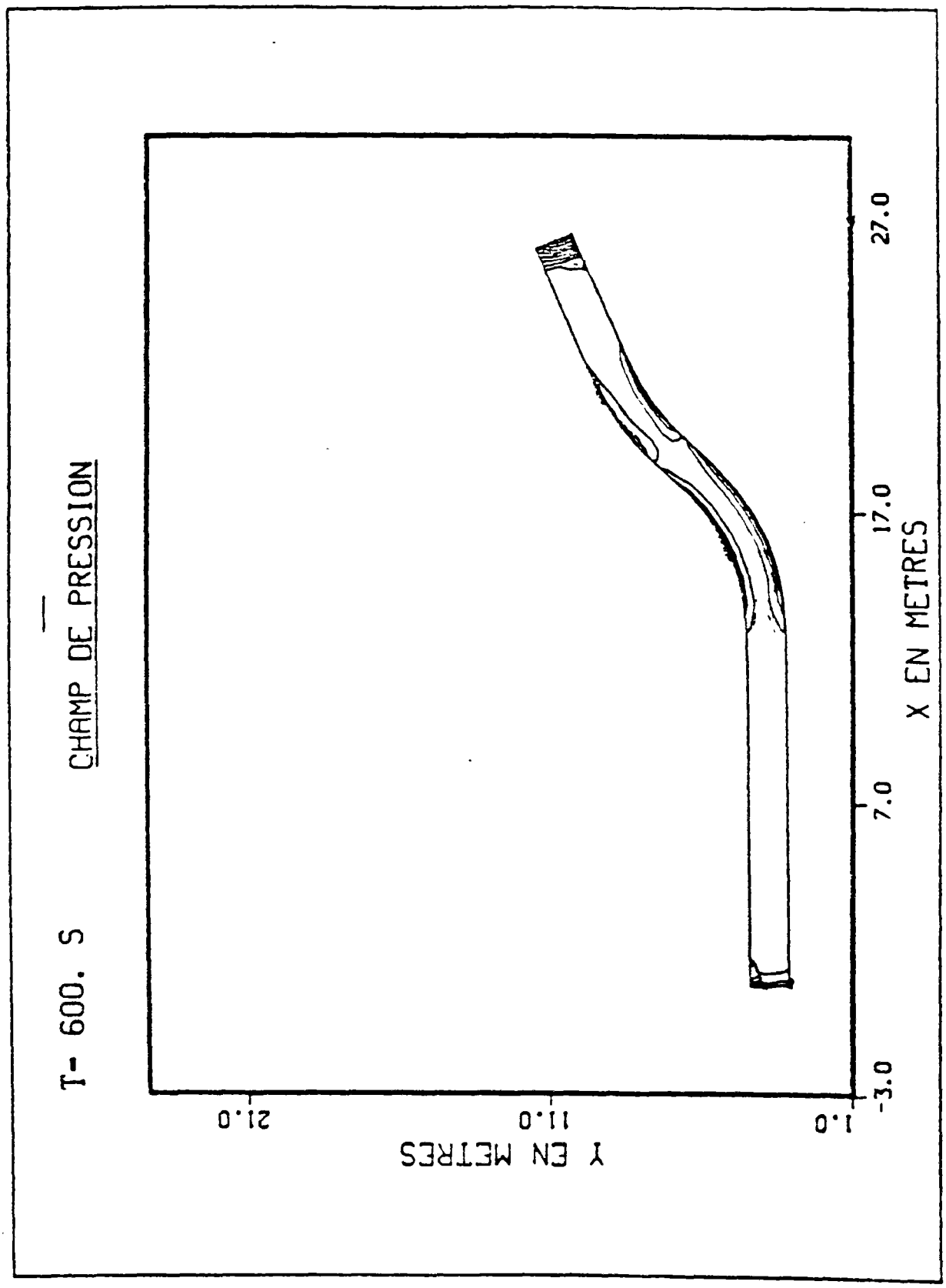


Fig.46 ALLURE DE LA SURFACE LIBRE CALCULEE POUR UN ECOULEMENT SANS VENT DANS LE CANAL EN S

3.4.4.4 - Conclusion

Cette étude menée conjointement sur modèle physique et sur le modèle mathématique nous a offert la meilleure occasion de valider ce dernier.

Son comportement s'est révélé satisfaisant tant sur le plan dynamique que thermique dans un cas présentant une double courbure en plan de l'écoulement. L'évolution de la tache thermique est reproduite de façon très satisfaisante dans le champ moyen.

Par ailleurs l'ordre de grandeur de la ligne d'eau calculée est en accord avec les valeurs mesurées ou évaluées de façon sommaire.

CONCLUSION

Les phénomènes de rejet en rivière sont décrits en toute généralité par les équations fondamentales de la mécanique des fluides qu'il est possible de simplifier grâce à l'approximation d'incompressibilité locale du mouvement : équation de continuité, équations de Navier-Stokes, équation de la chaleur.

Dans le domaine d'étude que nous nous sommes fixé (étude du champ voisin d'un rejet excluant le champ proche), lorsqu'on se place en régime d'écoulement non stratifié il est raisonnable d'admettre avoir une connaissance suffisante des profils verticaux de vitesses et de température pour pouvoir décrire le mouvement moyen du fluide par les équations intégrées de Saint-Venant.

Nous intéressant à l'évolution d'un traceur -thermique ou autre- dans un écoulement fluvial stabilisé, nous recherchons un état permanent de l'écoulement et par conséquent résolvons les équations permanentes de Saint-Venant tandis que l'équation de la chaleur est résolue en régime non permanent.

Une hypothèse originale supplémentaire nous permet de simplifier un peu plus ce système. Considérant un écoulement fluvial permanent pour lequel la cote de la surface libre est connue en quelques points il est possible d'évaluer la valeur de cette cote en tout point -par un modèle filaire par exemple- sans que l'erreur d'évaluation introduite ainsi soit d'un ordre de grandeur différent de la précision des relevés topographiques des fonds. Cette hypothèse nous conduit à considérer alors, dans les équations, la quantité h -tirant d'eau- comme une donnée tandis que la pression -en dépit de l'hypothèse de répartition hydrostatique- devient une inconnue du problème. On obtient ainsi un système d'équations où les inconnues, au nombre de quatre, sont : les deux composantes de la vitesse moyennée sur la hauteur, la pression -en un point de la colonne d'eau, par exemple à la surface- et la température.

Au cours de la résolution de ce système, pour laquelle nous utilisons un algorithme de pas fractionnaires, nous éliminons la variable pression et faisons apparaître une variable appelée fonction de courant. Le calcul hydrodynamique s'effectue ainsi sans que la pression n'intervienne ni ne soit calculée. Toutefois, pour vérifier a posteriori la validité du choix de la hauteur d'eau introduite en donnée initiale nous calculons la pression à la surface et vérifions qu'elle est uniforme.

La méthode de discrétisation choisie est une méthode de différence finie.

Outre l'analyse numérique des équations, une modélisation de ce type présente trois difficultés principales : la description du domaine de calcul, la définition et la prise en compte des conditions aux limites du domaine et la simulation des termes "non fermés" -turbulence intégrée sur la verticale, dispersion-.

Le domaine de calcul est reproduit d'une manière très fidèle par un maillage curviligne dont les frontières sont confondues avec les berges de la rivière étudiée. L'utilisation d'un tel maillage ne modifie pas le principe des méthodes de résolution habituelles ; seule l'écriture discrétisée des équations s'en trouve sensiblement alourdie.

Les conditions aux limites en vitesse et en température sont imposées à l'amont telles qu'on les suppose dans la réalité -d'après mesure-.A l'aval on réalise une sortie libre.

Le long des rives on a substitué à la condition réelle d'adhérence une condition de profil logarithmique du même type que celle que l'on utilise pour la modélisation d'une couche limite en écoulement turbulent. En température une condition d' adiabaticité est imposée le long des rives.

Les conditions aux limites sur la fonction de courant, ainsi que celles sur la pression utilisée pour le calcul de cette dernière, se déduisent des conditions sur la vitesse.

La simulation des termes provenant de l'intégration de la turbulence sur la hauteur est prise en compte sous la forme d'un terme diffusif tandis que la dispersion dynamique est intégrée aux termes d'inertie par un coefficient de forme.

Les termes non-fermés de l'équation de la chaleur -représentant également une turbulence intégrée et une dispersion thermique- sont eux strictement évalués comme des termes diffusifs.

Le calage du modèle mathématique nécessite la connaissance de différents coefficients apparus avec ces dernières interprétations. Ceux-ci sont évalués moyennant quelques hypothèses simples sur la turbulence -variation linéaire de la contrainte tangentielle horizontale, diffusion turbulente constante dans le plan- et sur l'allure des profils verticaux de vitesses- profil de Van Bendegom, de De Vriend-.

La validation de ce modèle a nécessité la confrontation avec des résultats de mesures. Outre l'utilisation de mesures anciennes et en cours nous avons pour cela conçu un modèle physique sur lequel ont été réalisées diverses mesures nous permettant de valider au mieux le modèle- mesures de vitesses, mesures de champ thermiques-.

Dans leur ensemble les résultats obtenus au cours de ces différentes comparaisons se sont montrés satisfaisants tant sur le plan dynamique que thermique et ce, pour des valeurs des coefficients utilisés proches de ceux évalués par la théorie.

On peut envisager pour ce modèle, destiné à évaluer la dilution d'un traceur dans un écoulement fluvial permanent, plusieurs extensions : développer à partir de ce qui existe une résolution utilisant la variable de pression à la place de la variable fonction de courant, ce qui affranchirait le modèle de certaines conditions aux limites ; introduire physiquement la possibilité de prendre en compte des obstacles au sein de l'écoulement -pile de pont, iles- ; introduire une modélisation plus fine de la turbulence intégrée permettant de prendre en compte d'une meilleure façon les phénomènes tourbillonnaires.

Les résultats obtenus ont prouvé que la modélisation ici présentée peut constituer un bon outil, évidemment encore perfectible, pour la recherche de la solution de problèmes concrets.

B I B L I O G R A P H I E

[1] ABAUZIT J.B. Comparaison de deux modèles de jets turbulents à surface libre dans les courants traversiers. Rapport de Stage.

[2] ALFRINK B.J. The Computation of Turbulent Recirculating flow using curvilinear finite differences. Application of the k-ε model to the flow in dredged trenches Electricité de France rapport HE/41/81.22 (1981).

[3] AURIOL G. Résolution des équations de Navier-Stokes en mailles curviligne. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. Travail de fin d'étude (1980).

[4] BENQUE J.P. Une tentative de généralisation des équations de Saint-Venant. Electricité de France rapport E41/80.14 (1980).

[5] BISCH A.M. Modèle bidimensionnel d'écoulement autour d'obstacles. Application aux tours de refroidissement atmosphérique à tirage naturel. Electricité de France HE/41/81.14 (1981).

[6] CAHOUET J. Etude de la Houle pour les équations de Navier-Stokes. Rapport Electricité de France HE/41/82.04 (1982).

[7] CARLIER M. Hydraulique générale et appliquée Collection du centre de recherches et d'essais de Chatou. Eyrolles.

[8] CARO-CORDERO R. SAYRE W.W. Mixing of power-plant heated effluents with the Missouri River. A.I.H.R Report N° 203 1977.

[9] Cours de formation continue de l'E.N.P.C. Aspects liés à la mécanique des fluides des problèmes d'environnement.

[10] CHORIN A.J. Numerical Solution of the Navier-Stokes equations. Math. Comp. 22 (1968) 745-762.

[11] COMOLET Mécanique Expérimentale des fluides. Tome II Dynamique des fluides réels, turbo-machines. 2ème édition (1976) Masson.

[12] COUSTOLS E. Résolution des équations de Navier-Stokes en mailles curvilignes. Applications : écoulement dans un convergent divergent. Electricité de France. Rapport de stage (1981).

[13] DAUBERT O. Programme HYP1
Electricité de France C41/74.12 (1974).

[14] DAVIES C.W. An initial Value Approach to the production of discrete orthogonal coordinates.
J. Computationnal Phys. 39 (1981) 164-178.

[15] DE VRIEND H.J. Velocity redistribution in curved rectangular channels.
J. Fluid Mech (1981) vol. 107 p. 423-439.

[16] DE VRIEND H.J. A mathematical model of steady flow in curved shallow channels.
J. of Hyd. Research 15 (1977) n° 1.

[17] DRESSLER R.F. New non linear Shallow-flow equations with curvature
Journal of Hydraulic Research 16 (1978) n°3.

[18] DWYER H.A.
KEE R.J.
SANDERS B.R. Adaptation Grid Method fo problems in fluid Mechanics and head transfer.
A.I.A.A. Paper 79-1464 (1979).

[19] EISEMAN P.R. A Multi-surface Method of Coordinates Generation.
J. Computational Phys. 33 (1979) 118-150.

[20] ESPOSITO P. Resolution bidimensionnelle des équations de transport par la méthode des caractéristiques.
Electricité de France HE/41/81.16 (1981).

[21] FISCHER H.B. Longitudinal dispersion and turbulent Mixing in open channel Flow.

[22] FLOKSTRA C. The closure problem for depth - averaged two dimensionnal flow.
AIRH - A106.

[23] FLOKSTRA C. Aspects of modelling horizontal momentum transfer in shallow flow
Rapport Delft Hydraulics Laboratory R 1150
(à paraître).

[24] GOUSSEBAILE J. Modélisation d'écoulements et de transferts de chaleur par une méthode de différences finies en mailles curvilignes non orthogonales
Electricité de France HE/41/81/27 (1981).

[25] HAUSSLING H.J. Boundary-Fided Coordinates for Accurate Numerical Solution of Multibody Flow Problems
J. of Comp. Physics 30 107 - 124 (1979).

[26] HOLLEY E.R. ABRAHAM G. Field tests on transverse mixing in rivers J. of the Hydraulic Division December 1973 2313 - 2331

[27] HUG M. Mécanique des fluides appliquées Cours de l'E.N.P.C. Eyrolles (1975).

[28] KALN J. LAGHMAM A. Calcul d'une tâche thermique en rivière par un modèle bidimensionnel Electricité de France E43/79-28 (1979)

[29] LANDAU L. LIFCHITZ E. Mécanique des Fluides Editions de Moscou (1971).

[30] LAU Y.L. KRISHNAPPAN B.G. Transverse Dispersion in Rectangular Channels Journal of the Hydraulics division 1977. p. 1173-1189.

[31] LAU Y.L. KRISHNAPPAN B.G. Modeling Transverse Mixing in Natural Streams. Journal of the Hydraulic division 1981 p. 209-226.

[32] LESCHZINER M.A. Calculation of strongly curved open channel flow Journal of the hydraulic division 1979 p. 1297-1312.

[33] MOBLEY C.D. On the numerical Generation of Boundary Fitted orthogonal curvilinear coordinates systems. J. of Comp. Physics 34 124-135 (1980).

[34] PAILY P.Paily Mixing zone analysis for River Plumes Journal of the Hydraulic division 1981 p. 731-746.

[35] POPE J.B. The calculation of turbulent recirculating flows in General orghogonal coordinates. J. Comp. Physics 26 196-217 (1978).

[36] RODI W. Turbulence Models and their application in Hydraulics. I.A.H.R. Section of fundamental division II : Experimental and Mathematical Fluid Dynamics (1980).

[37] RODI W. PAVLOVIC R.N. SRIVATSA S.K. Prediction of Pollutant Spreading in rivers

[38] SCHATZMANN M. NAUDASCHER F. Design Criteria for coohing - Water Outlet Structures Journal of the Hydraulic division 1980 p. 398-408.

[39] STEGER J.L. SORENSON R.L. Automatic Mesh-Point Clustering near a Boundary in grid generation with elliptic partial differential equations. J. Comp. Physics 33 405-410 (1979).

[40] THAMES F.C. THOMPSON J.F. MASTIN C.W — Numerical Solution of the Navier Stokes equations for arbitrary two dimensional airfoils Missipi State University.

[41] THOMAS P.D. MIDDLECOFFT J.F. — Direct Control of the Grid Pant Distribution in Meshes Generated by Elliptic Equations AIAA Journal 79 - 1462 R (1979).

[42] UAN M. — Modèle bidimensionnel d'écoulement à surface libre en rivière Electricité de France E43/78-65 (1978).

[43] UAN M. — Etude d'un modèle simplifié d'évolution des courants secondaires dans les coudes des canaux et rivières. Electricité de France E43/79-47 (1979).

[44] UAN M. — Communication personnelle.

[45] Some considerations on river morphology and river improvement De Ingenieur 1947 B.1-11.

[46] VARGA R. — Matric Iterative Analysis Printice Hall, Englewold Cliffs, N.J., 1962.

[47] VIOLLET P.L. — Etudes de jets dans les courants traversiers et dans les milieux stratifiés. Thèse de docteur Ingénieur de l'ENPC (1977).

[48] VIOLLET P.L. — Comparaison de deux méthodes itératives pour la résolution d'une équation de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet. Electricité de France E44/78-8 (1978).

[49] VIOLLET P.L. — Propositon d'un critère pour la destruction ou la persistance d'une stratification stable consécutive à l'émission d'un bicouche. Electricité de France E44/79-6 (1979).

[50] WARLUZEL A. BENQUE J.P. — Dispersion dans une mer à marée Electricité de France HE041/79.09 (1978).

[51] YANENKO N.N — Méthode à pas fractionnaires Collection intersciences - Colin (1968).

LISTE DES FIGURES

Figure		Page
1	Comparaison d'un maillage rectiligne et d'un maillage curviligne sur l'Aube	28
2	Maillage tracé à la main sur le canal	30
3	Maillage curviligne d'un convergent divergent	33
4	Premier maillage curviligne de Miribel	34
5	Second maillage curviligne de Miribel	35
6	Profil de vitesse $u = U\zeta^{\beta_o}$ pour $\beta_o = 0,2$, $\beta_o = 0,4$, $\beta_o = 0,6$.	66
7	Cartes des fonds de l'Aube	79
8	Profils de vitesses calculés par M. Uan dans l'Aube	80
9	Champ de vitesse et ligne de courant calculés dans l'Aube	83
10	Comparaison de profils mesurés et calculés sur l'Aube (différentes surfaces)	85
11	Comparaison de profils mesurés et calculés sur l'Aube (différentes viscosités)	86
12	Comparaison de profils mesurés et calculés sur l'Aube (différentes viscosités)	87
13	Champ de pression de surface donnant l'allure de la surface libre dans l'Aube	88
14	Plan général de la zone d'aménagement de Miribel	90
15	Plan des environs de La Brèche de Neyron	91
16	Mesures de vitesses par chronophotographie autour de La Brèche de Neyron (Miribel)	93
17	Rejet de polluant en continu effectué à 55 m (nature) du bord de Berge (Miribel)	95
18	Rejet de polluant en continu effectué à 10 m (nature) du bord de Berge (Miribel)	96

Figure		Page
19	Rejet de polluant instantané effectué à 10 m du bord de berge (Miribel)	97
20	Rejet de polluant instantané effectué à 55 m (nature) du bord de berge (Miribel)	99
21	Carte des fonds de Miribel	101
22	Surface libre imposée pour Miribel	102
23	Champ de vitesse calculé dans Miribel	104
24	Calcul d'un rejet de polluant effectué en continu à 50 m du bord de berge (Miribel)	105
25	Calcul d'un rejet de polluant effectué en continu à 10 m du bord de berge (Miribel)	106
26	Calcul d'un rejet de polluant instantanné effectué à 50 m du bord de Berge (Miribel)	107
27	Calcul d'un rejet de polluant instantanné effectué à 10 m du bord de berge (Miribel)	110
28	Géométrie en plan du canal en S	114
29	Tableau des différentes situations de mesures envisageables dans le canal en S	116
30	Numérotation des sections de mesure du canal en S	118
31	Mesure de turbulence dans le canal en S	120
32	Profils verticaux de vitesses dans la section 3 du canal en S	122
33	Profils verticaux de vitesses dans la section 8 du canal en S	123
34	Tableau des mesures de vitesses pour un écoulement sans rejet à 80 l/s dans le canal en S	124
35	Profils transversaux de vitesses moyennes pour un écoulement sans rejet à 80 l/s dans le canal en S	125

Figure		*Page*
36	Comparaison des profils verticaux de vitesse pour un débit rejet de 15 l/s et de 10 l/s (débit principal 80 l/s) dans une section située à 3 m en aval du rejet	126
37	Tableau des mesures de vitesse pour un écoulement isotherme avec rejet (Q = 80 l/s ; q = 10 l/s) dans le canal en S	127
38	Profils transversaux des vitesses moyennes pour un écoulement isotherme avec rejet (Q = 80 l/s ; q = 10 l/s) dans le canal en S	128
39	Isothermes du champ thermique mesuré dans le canal en S ($\Delta\theta$ = 4°C)	130
40	Profil des gradients thermiques moyens mesurés dans le canal en S ($\Delta\theta$ = 4°C)	131
41	Tableau des mesures de température dans le canal en S	132
42	Second maillage du canal en S	133
43	Comparaison des profils de vitesses mesurés et calculés dans le cas d'un écoulement sans rejet dans le canal en S.	136
44	Comparaison des profils de vitesses mesurés et calculés dans le cas d'un écoulement isotherme avec rejet dans le canal en S.	137
45	Comparaison des gradients thermiques mesurés et calculés dans le canal en S	138
46	Allure de la surface libre calculée pour un écoulement sans rejet dans le canal en S	139

ANNEXES

A N N E X E A.1

OBTENTION DES EQUATIONS DE SAINT-VENANT PAR INTEGRATION DES EQUATIONS DE REYNOLDS SUR UNE HAUTEUR

Rappelons les équations de Reynolds obtenues au 1.2 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = o \\[2ex] \dfrac{\partial ui}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial ui\,uj}{\partial xj} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P^*}{\partial xi} + \sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial tij}{\partial xj} \quad i = 1,\ 2,\ 3 \\[2ex] \dfrac{\partial \theta}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial \theta\, uj}{\partial xj} = \sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial t\theta j}{\partial xj} \end{cases}$$

Nous décomposons les grandeurs u, v, w, θ et P^* sous la forme :

$$G = \overline{G} + G'$$

avec $\overline{G} = \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{Z_F}^{Z} G.\ dz$, d'où $\displaystyle\int_{Z_F}^{Z} G'\ dz = 0$

Z = côte de la surface

Z_F = côte du fond

$h = Z - Z_F$ = hauteur d'eau

Intégration de l'équation de continuité

Considérons les termes les uns après les autres :

$$\int_{Z_F}^{Z} \frac{\partial u}{\partial x}.dz = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{Z_F}^{Z} u dz\right) - u\ (Z)\ \frac{\partial Z}{\partial x} + u\ (Z_F)\ \frac{\partial Z_F}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\ (\bar{u}\ h) - u\ (Z)\ \frac{\partial Z}{\partial x} + u\ (Z_F)\ \frac{\partial Z_F}{\partial x}$$

de même on obtient :

$$\int_{Z_F}^{Z} \frac{\partial v}{\partial y} . dz = \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} h) - v (Z) \frac{\partial Z}{\partial y} + v (Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial y}$$

enfin :

$$\int_{Z_F}^{Z} \frac{\partial w}{\partial z} . dz = \left[w \right]_{Z_F}^{Z} = w (Z) - w (Z_F)$$

L'équation intégrée de l'équation de continuité s'écrit alors :

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}h}{\partial y} + w (Z) - u (Z) \frac{\partial Z}{\partial x} - v (Z) \frac{\partial Z}{\partial y} - w (Z_F) + u (Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial x}$$

$$+ v (Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial y} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$$

Or, la condition d'imperméabilité à la surface s'écrit :

$$w (Z) = \frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + u (Z) \frac{\partial Z}{\partial x} + v (Z) \frac{\partial Z}{\partial y} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$$

d'où : $w (Z) - u (Z) \frac{\partial Z}{\partial x} - v (Z) \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial t}$

de même : $w (Z_F) - u (Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial x} - v (Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial y} = \frac{\partial Z_F}{\partial t} \cdots\cdots\cdots (iii)$

les six derniers termes de l'équation (i), deviennent donc :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{\partial Z_F}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

Soit :

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}h}{dy} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

Intégration de l'équation dynamique

Traitons d'abord le premier membre de la première équation terme à terme :

$$\int_{Z_F}^{Z} \frac{\partial u}{\partial t} .dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{Z_F}^{Z} u\, dz - u\,(Z)\, \frac{\partial Z}{\partial t} + u\,(Z_F)\, \frac{\partial ZF}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} - u\,(Z)\, \frac{\partial Z}{\partial t} + u\,(Z_F)\, \frac{\partial ZF}{\partial t}$$

$$\int_{ZF}^{Z} \frac{\partial u^2}{\partial x} .dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_F}^{Z} u^2\, dz - \bar{u}^2\,(Z)\, \frac{\partial Z}{\partial x} + u^2\,(Z_F)\, \frac{\partial ZF}{\partial x}$$

examinons : $\int_{Z_F}^{Z} u^2\, dz$

$$\int_{ZF}^{Z} u^2\, dz = \int_{Z_F}^{Z} (\bar{u} + u')^2\, dz = \int_{Z_F}^{Z} \bar{u}^2\, dz + \int_{Z_F}^{Z} 2u'.\bar{u}\, dz + \int_{Z_F}^{Z} u'^2\, dz$$

compte tenu de ce que $\bar{u}$ est indépendant de z et de ce que $\int_{Z_F}^{Z} u'dz = 0$ on a :

$$\int_{Z_F}^{Z} u^2\, dz = \bar{u}^2\, h + \int_{Z_F}^{Z} u'^2\, dz = \bar{u}'^2\, h + \overline{u'^2}.\, h$$

D'où :

$$\int_{Z_F}^{Z} \frac{\partial u^2}{\partial x}\, dz = \frac{\partial \bar{u}^2 h}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'^2}\, h}{\partial x} - u^2\,(Z)\, \frac{\partial Z}{\partial x} + u^2\,(Z_F)\, \frac{\partial ZF}{\partial x}$$

De même on obtient :

$$\int_{Z_F}^{Z} \frac{\partial uv}{\partial y}\, dz = \frac{\partial \bar{u}.\bar{v}\, h}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'\, v'\, h}}{\partial y} - uv\,(Z)\, \frac{\partial Z}{\partial y} + uv\,(Z_F)\, \frac{\partial Z_F}{\partial y}$$

Enfin :

$$\int_{Z_F}^{Z} \frac{\partial uw}{\partial z} .dz = \Big[u\,w\Big]_{Z_F}^{Z} = u\,w\,(Z) - u\,w\,(Z_F)$$

Le premier membre de la première équation dynamique s'écrit alors :

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2 h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\,\bar{v}\,h}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'^2}.h}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}h}{\partial y}$$

$$+ u\,(Z) \left[- \frac{\partial Z}{\partial t} - u\,(Z) \frac{\partial Z}{\partial x} - v\,(Z) \frac{\partial Z}{\partial y} + w\,(Z) \right]$$

$$+ u\,(Z_F) \left[\frac{\partial Z_F}{\partial t} + u\,(Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial x} + v\,(Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial y} - w\,(Z_F) \right]$$

Compte tenu de (ii) et (iii) les termes entre crochets facteurs de u (Z) et de u (Z_F) sont strictement nuls.

Le premier membre de la première équation dynamique s'écrit donc simplement :

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{d\bar{u}^2 h}{\partial x} + \frac{\bar{u}\,\bar{v}\,h}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'^2}\,h}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'\,v'}\,h}{\partial y}$$

Considérons à présent le second membre de cette même équation, terme après terme. Il vient :

$$\int_{Z_F}^{Z} \frac{\partial P^*}{\partial x} . dz = \int_{Z_F}^{Z} \frac{\partial \bar{P}^*}{\partial x}\, dz + \int_{Z_F}^{Z} \frac{\partial P'^*}{\partial x}\, dz$$

$$= \frac{\partial \bar{P}^*}{\partial x} . h + \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_F}^{Z} P^{*'} dz - P^{*'}(Z) \frac{\partial Z}{\partial x} + P'^*(Z_F) \frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$= h.\ \frac{\partial \bar{P}^*}{\partial x} - P^{*'}\ (Z)\ \frac{\partial Z}{\partial x} + P^{*'}\ (Z_F)\ \frac{\partial ZF}{\partial x}$$

Remarquons qu'on aurait également pu développer cette intégrale sous la forme :

$$\int_{Z_F}^{Z} \frac{\partial P^*}{\partial x}\, dz = \frac{\partial h\, \overline{P^*}}{\partial x} - P^* (Z) \frac{\partial Z}{\partial x} + P^* (Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial x}$$

Le choix de l'une ou l'autre forme est totalement arbitraire mais mais l'on préfère généralement la première écriture car dans le cas d'une pression hydrostatique on a : $P^{*'} (z) = 0$.
et l'intégrale se ramène alors au seul terme $h \frac{\partial P^*}{\partial x}$

Considérons maintenant :

$$\int_{Z_F}^{Z} \frac{\partial t11}{\partial x}\, dz$$

On peut également écrire :

soit $$\int_{Z_F}^{Z} \frac{\partial t11}{\partial x}\, dz = \frac{\partial \overline{t11}\, h}{\partial x} - t_{11} (Z) \frac{\partial Z}{\partial x} + t_{11} (Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial x}$$

soit $$\int_{Z_F}^{Z} \frac{\partial t11}{\partial x}\, dz = \frac{\partial \overline{t11}}{\partial x} . h - t_{11}' (Z) \frac{\partial Z}{\partial x} + t'_{11} (Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial x}$$

C'est la première écriture qui sera conservée par la suite bien que là encore le choix soit totalement arbitraire et difficile à interpréter.

De même on écrira :

$$\int_{Z_F}^{Z} \frac{\partial t12}{\partial y}\, dz = \frac{\partial \overline{t12.h}}{\partial y} - t_{12} (Z) \frac{\partial Z}{\partial y} + t_{12} (Z_F) \frac{\partial Z_F}{\partial y}$$

et enfin :

$$\int_{Z_F}^{Z} \frac{\partial t13}{dz}\, dz = \Big[t13\Big]_{Z_F}^{Z} = t_{13} (Z) - t_{13} (Z_F)$$

En définitive cette première équation s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2 h}{\partial x} + \frac{d\,\bar{u}\,\bar{v}\,h}{\partial y} + \frac{\partial\,\overline{u'^2}\,h}{\partial x} + \frac{\partial\,\overline{u'\,v'}\,h}{\partial y} = P^{*'}\,(Z)\,\frac{\partial Z}{\partial x} - P^{*'}\,(Z_F)\,\frac{\partial Z_F}{\partial x}$$

$$- \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \overline{P^*}}{\partial x}\,.\,h + \frac{\partial \overline{t_{11}}\,h}{\partial x} + \frac{\partial \overline{t_{12}}\,h}{\partial y} + t_{13}\,(Z) - t_{13}\,(Z_F)$$

$$- t_{11}\,(Z)\,\frac{\partial Z}{\partial x} - t_{12}\,(Z)\,\frac{\partial Z}{\partial y} + t_{11}\,(Z_F)\,\frac{\partial Z_F}{\partial x} + t_{12}\,(Z_F)\,\frac{\partial Z_F}{\partial y}$$

Le traitement de la seconde équation dynamique ainsi que celui de l'équation énergétique sont strictement identiques à ce qui vient d'être fait et fournissent des équations de même nature.

Celui de la troisième équation diffère légèrement des précédents par le traitement du terme de pression qui est réduit à :

$$\int_{Z_F}^{Z} \frac{\partial P^*}{\partial z}\,dz = \Big[P^*\Big]_{Z_F}^{Z} = P^*\,(Z) - P^*\,(Z_F)$$

Pour les autres termes on applique exactement les mêmes méthodes que celles décrites ci-dessus.

On trouvera l'écriture complète des équations intégrées au 1.3.

A N N E X E A.2

CONSIDERATIONS SUR LA PRISE EN COMPTE DU TENSEUR DE DISPERSION

L'intégration des équations de Reynolds sur la verticale fait apparaître un nouveau tenseur :

$$\widetilde{u'i\ u'j}$$

qui traduit l'effet des variations de la vitesse autour de sa valeur moyenne verticale.

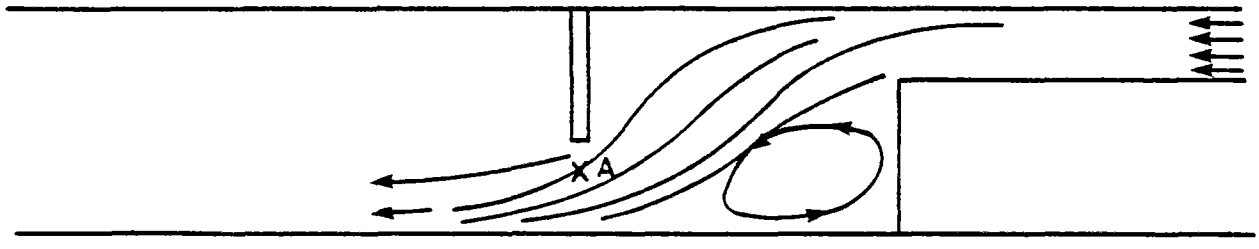
La fermeture du problème de résolution des équations intégrées nécessite de relier ce tenseur aux grandeurs connues du mouvement moyen.

En partant de l'idée que ce tenseur pouvait être pris en compte par un coefficient de forme :

$$\widetilde{u'i\ u'j} = \mu_o\ h\ \tilde{u}i.\ \tilde{u}j$$

M. Uan a cherché à évaluer le coefficient μ_o d'une part par des mesures expérimentales en canal, d'autre part en s'appuyant sur la théorie développée par De Vriend [15] .

Ces mesures ont été effectuées au point A du canal dont une vue en plan est rapportée ci-dessous :



Le canal a une largeur de 3 m, une profondeur de 0,3 m et le débit est de 75 l/s.

Au voisinage du point A les courants secondaires sont forts : on observe une différence de direction des vitesses de 30° entre le fond et la surface.

Les mesures ont été effectuées en 9 points régulièrement disposés à l'aide d'un fil de laine (direction) et d'un moulinet Beauvert (intensité)

Les résultats ont permis de dégager deux conclusions principales :

- d'une part on a trouvé pour μ_o une valeur comprise entre 0,03 et 0,05,
- d'autre part on s'aperçoit que la prise en compte du tenseur de dispersion sous la forme d'une diffusion fournirait un coefficient de dispersion ν_D du même ordre de grandeur que le coefficient de viscosité turbulente ν_t (calculé dans le cas des courants secondaires d'après Rozovski [44]). Cette dernière constatation amène à penser que les deux phénomènes sont du même ordre de grandeur.

Dans le cas ou l'on introduit le tenseur de dispersion par le biais du coefficient de forme dans les termes d'inertie ces mêmes mesures ont montré que l'on modifiait ces derniers d'environ 10% de leur valeur.

En appliquant les formules de répartition verticale des vitesses de De Vriend (voir II.5.2) au calcul du tenseur de dispersion. M. Uan a trouvé dans le cas d'un coefficient de Chezy de 40, la valeur de 0,035 pour μ_o, en accord avec les mesures.

Il a trouvé pour le tenseur de dispersion les expressions suivantes :

$$\widetilde{u'^2} = A\,u^2 h + B\,h^3\,U^{*2} - 2\,Ch^2\,u\,U^*$$

$$\widetilde{u'v'} = A\,u\,v\,h + B\,h^3\,V^*\,U^* - C\,h^2\,(u\,V^* + v\,U^*)$$

$$\widetilde{v'^2} = A\,v^2 h + B\,h^3\,V^{*2} - 2\,C\,h^2\,v\,V^*$$

ou A, B et C sont des intégrales dans lesquelles interviennent des formes des profils et U^* et V^* représentent les couplages entre les deux directions :

$$U^* = \frac{1}{2\,K_a^2\,(u^2 + v^2)^{3/2}}\left[(u^2 + 2\,v^2)\,(u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y}) - uv\,(u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y})\right]$$

$$V^* \quad \frac{1}{2\,K_a^2\,(u^2 + v^2)^{3/2}}\left[(2\,u^2 + v^2)\,(u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y}) - u\,v\,(u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y})\right]$$

En raisonnant sur un écoulement bidimensionnel intégré - et donc monodimensionnel - J.P. Benqué est arrivé, moyennant certaines hypothèses, à la même conclusion, à savoir que le terme $\widetilde{u'i\ u'j}$ devait être intégré par un coefficient de forme aux termes d'inertie [4].

Les hypothèses faites au cours de son calcul sont les suivantes :

- La variation de vitesse horizontale sur la profondeur reste faible devant la vitesse moyenne.
- L'échelle des hauteurs est très petite devant l'échelle des longueurs (les ondes de surface libre sont des ondes longues)
- L'échelle des temps de diffusion est très petite devant celle de convection c'est-à-dire que la diffusion turbulente sur la verticale agit plus vite que la convection horizontale.

Moyennant ces restrictions il montre que l'on a :

$$\widetilde{u'2} = A_1 \frac{\tau\ v^2\ h}{\rho\ \tilde{u}^2} \pm C_1 \frac{\tau v}{\rho}\ 2h + B_1\ \tilde{u}^2 h$$

où A_1, B_1 et C_1 sont des coefficients de forme calculés une fois pour toute.

C. Flokstra [23], quant à lui, on obtient des résultats tout à fait analogue en se basant sur l'hypothèse de répartition verticale des vitesses de Van Bendegom [45] ; celle-ci s'écrit :

$$\frac{\vec{u}.\vec{\tau}}{\tilde{u}} = \frac{n+1}{n} \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{n}} = f_1 \left(\frac{z}{h}\right)$$

$$\frac{\vec{u}.\vec{n}}{\tilde{u}} = \frac{h}{K_a^2\ R} \left[- \frac{n\ (n+1)^2}{n+3} \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{n}} + \frac{n^2\ (n+1)}{n+2} \int_0^{\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{n}}} \frac{1-x^{n+2}}{1-x^n}\, dx = f_2\left(\frac{z}{h}\right)\right.$$

ou $\vec{n}$ et $\vec{\tau}$ représentent respectivement la normale et la tangente à la ligne de courant locale, K_a la constante de Von Karman.

R le rayon de courbure moyen en plan de l'écoulement et $\tilde{u}$ la vitesse moyenne verticale.

Il en déduit l'écriture suivante du tenseur de dispersion :

$$\widetilde{u'^2} = \alpha\, \tilde{u}^2 - 2\,\beta\, \widetilde{uv} + \gamma\, \tilde{v}^2$$

$$\widetilde{u'v'} = \beta\, \tilde{u}^2 + (\alpha - \gamma)\, \widetilde{uv} - \beta\, \tilde{v}^2$$

$$\widetilde{v'^2} = \gamma\, \tilde{u}^2 + 2\,\beta\, \widetilde{uv} + \alpha\, \tilde{v}^2$$

avec $$\alpha = \int_0^1 f_1^{\,2} \left(\frac{z}{h}\right) d\left(\frac{z}{h}\right)$$

$$\beta = \frac{h}{R} \int_0^1 f_1 \left(\frac{z}{h}\right) f_2 \left(\frac{z}{h}\right) d\left(\frac{z}{h}\right)$$

$$\gamma = \frac{h^2}{R^2} \int_0^1 f_2^{\,2} \left(\frac{z}{h}\right) d\left(\frac{z}{h}\right)$$

On voit que lorsque R tend vers l'infini β et γ deviennent négligeables et l'écriture du tenseur se ramène à :

$$\widetilde{u'^2} = \alpha\, \tilde{u}^2$$

$$\widetilde{u'v'} = \alpha\, \widetilde{uv}$$

$$\widetilde{v'^2} = \alpha\, \tilde{v}^2$$

Cette formulation fournit, en faisant varier $\frac{1}{n}$ entre 0,17 et 0,6 (voir 2.5.1) un coefficient μ_o compris entre 0,02 et 0,06. Ces résultats sont concordants avec ceux obtenus par M.Uan.

A N N E X E A.3

DETERMINATION DU COEFFICIENT DE STRICKLER

La littérature fournit de nombreuses formules empiriques permettant le calcul du coefficient de Manning-Strickler (consulter [7] par exemple).

L'une des plus simples est la formule de Strickler pour parois en matériaux non cohérents.

$$K = 26 \left(\frac{R}{d35}\right)^{1/6}$$

ou R est le rayon hydraulique du canal

d35 le diamètre auquel correspond 35 % (en poids) de matériau de diamètre supérieur.

La plupart de ces formules nécessitent de connaître la courbe granulométrique du matériau ou encore la dimension moyenne des rugosités des parois.

Généralement on peut se contenter de déterminer un ordre de grandeur du coefficient à l'aide du tableau suivant (extrait de [7]).

N° des catégories (1)	C de Chézy	$k = \frac{1}{n}$ de Manning strickler	γ de Bazin
1	35 à 32	23 à 26	2,20 à 3
2	33 à 38	27 à 29	2 à 2,70
3	39 à 42	30 à 33	1,80 à 2,50
4	43 à 45	34 à 37	1,75 à 2
5	46 à 48	38 à 40	1,50 à 1,80
6	49 à 52	41 à 42	1,40 à 1,70
7	50 à 55	43 à 45	1,20 à 1,50
8	56 à 65	46 à 50	1 à 1,50

1 - Petits cours d'eau de montagne à fond très irrégulier, largeur de l'ordre de 10 à 30 mètres.

2 - Cours d'eau de montagnes larges de 30 à 50 mètres, avec pentes supérieures à 0,002 et fond de gros graviers (par exemple 10 à 20 centimètres de diamètre pour beaucoup d'entre eux).

3 - Rivières de largeur comparable ou supérieure, à pente comprise entre 0,0008 et 0,002, avec fond de graviers dont le diamètre extrême en général ne dépasse pas 8 à 10 centimètres (Rhin à Bâle).

4 - Pente comprise entre 0.0006 et 0,0008, graviers de 4 à 8 centimètres (Rhône à Lyon).

5 - Même pente mais cailloux plus petits (Rhône à la Porte de Scex avant le Léman).

6 - Pente inférieure à 0,0006 et supérieure à 0,00025, cailloux très petits ou sable (Danube à Vienne).

7 - Cours d'eau peu turbulents, avec pentes de 0,00012 à 0,00025, fond de sable et de boue (Seine, Saône, Rhin inférieur).

8 - Très gros cours d'eau à très faible pente (moins de 0,00012) et fond très lisse (Volga, Danube hongrois, Mississipi inférieur).

A N N E X E A.4

INVENTAIRE DE QUELQUES METHODES DE GENERATION D'UN MAILLAGE CURVILIGNE

La méthode de Thompson [40] évoquée au chapitre 2.1 se présente en fait d'une manière un peu plus complexe et générale. Il s'agit de générer un maillage curviligne sur le domaine Ω (x,y) en établissant une correspondance entre ce dernier et une grille rectiligne du domaine $\hat{\Omega}$ (ξ,η). On obtient ce maillage par résolution dans $\hat{\Omega}$ du système.

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi,\eta) \\[2ex] \xi, \eta \text{ donnés sur les frontières de } \hat{\Omega} \end{cases}$$

Ou P et Q sont donnés par :

$$P(\xi,\eta) = \sum_{m=1}^{M} a_m \frac{\xi - \xi_m}{|\xi - \xi_m|} e^{-c_m|\xi-\xi_m|} + \sum_{n=1}^{N} b_n \frac{\xi-\xi_n}{|\xi-\xi_n|} e^{-d_n\sqrt{(\xi-\xi_n)^2 + (\eta-\eta_n)^2}}$$

$$Q(\xi,\eta) = \sum_{m'=1}^{M'} a_{m'} \frac{\eta - \eta_{m'}}{|\eta - \eta_{m'}|} e^{-c_{m'}|\eta-\eta_{m'}|} + \sum_{n'=1}^{N'} b_{n'} \frac{\eta-\eta_{n'}}{|\eta-\eta_{n'}|} e^{-d_{n'}\sqrt{(\xi-\xi_{n'})^2 + (\eta-\eta_{n'})^2}}$$

Les premiers termes de P et Q ont pour effet respectivement de resserrer le maillage dans la direction ξ autour des lignes $\xi = \xi_m$ et dans la direction η autour des lignes $\eta = \eta_{m'}$.

Les seconds termes de P et Q ont pour effet de resserrer le maillage respectivement autour des points ($\xi = \xi_\eta$; $\eta = \eta_n$) et ($\xi - \xi_{n'}$; $\eta = \eta_{n'}$). Ces termes sources sont a priori d'un grand intérêt puisqu'ils agissent comme des aimants permettant d'affiner le maillage localement sans affecter les lignes isocoordonnées concernées sur toute leur longueur.

Dans la pratique ce procédé introduit souvent une distorsion des mailles qui peut être gênante pour le calcul de l'écoulement. L'existence de ces termes sources permettant de resserrer à volonté le maillage rend inutile l'utilisation d'un pas variable dans le domaine projeté (ξ, η).

Le problème (1) est inversé et s'écrit dans Ω :

$$\begin{cases} \alpha \dfrac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \dfrac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \dfrac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = - J^2 \left(P \dfrac{\partial x}{\partial \xi} + Q \dfrac{\partial x}{\partial \eta}\right) \\[2ex] \alpha \dfrac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \dfrac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \dfrac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = - J^2 \left(P \dfrac{\partial y}{\partial \xi} + Q \dfrac{\partial y}{\partial \eta}\right) \\[2ex] x \text{ et } y \text{ donnés sur les frontières de } \Omega. \end{cases}$$

Remarquons au passage :
dans la transformation définie par (1), le Laplacien d'une fonction f définie dans Ω s'écrira :

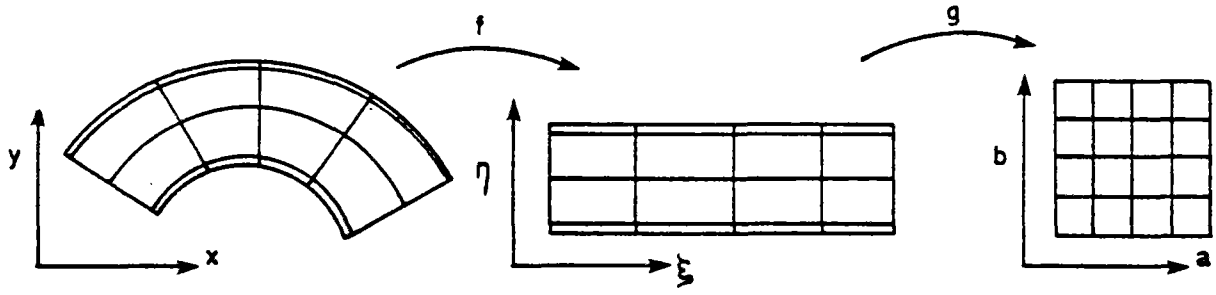
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \sigma \frac{\partial f}{\partial \eta} + \tau \frac{\partial f}{\partial \xi} \qquad (3)$$

avec : $\sigma = - J \left[\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \left(P \dfrac{\partial x}{\partial \xi} + Q \dfrac{\partial x}{\partial \eta}\right) - \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \left(P \dfrac{\partial y}{\partial \xi} + Q \dfrac{\partial y}{\partial \eta}\right)\right]$

$$\tau = + J \left[\frac{\partial y}{\partial \eta} \left(P \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial x}{\partial \eta} \left(P \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\right]$$

On voit que l'utilisation d'un maillage curviligne déterminé par une méthode de Thompson simplifiée (P = Q = 0 voir chap. II.1) a introduit dans l'écriture du Laplacien une dérivée seconde croisée, tandis que la méthode générale de Thompson ajoute à l'écriture de ce Laplacien deux dérivées premières.

Une autre méthode que celle énoncée ci-dessus a été développée récemment pour s'affranchir de la contrainte des pas variables (voir [24]). Elle consiste à envisager la composition des deux transformations suivantes où f est une transformation de Thompson simple (avec P = Q = 0) :



La composée des deux transformations, g o f, définit alors une transformation entre un maillage curviligne à pas variable et une grille rectiligne à pas constant. Toutefois l'utilisation de f seule ou de g o f ne sont pas équivalentes. Considérons par exemple la dérivée : $\frac{\partial F}{\partial x}$ définie sur le maillage curviligne.

Ecrivons la successivement sur la grille (ξ,η) et sur la grille (a, b)

- sur (ξ,η)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Soit (i,j) le point de calcul. Nous aurons :

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi_{i-1} + \xi_i} \left[(F_{i+1,j} - F_{i,j}) \frac{\xi_{i-1}}{\xi_i} + (F_{i,j} - F_{i-1,j}) \frac{\xi_i}{\xi_{i-1}} \right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{1}{\eta_{j-1} + \eta_j} \left[(F_{i,j+1} - F_{i,j}) \frac{\eta_{j-1}}{\eta_j} + (F_{i,j} - F_{i,j-1}) \frac{\eta_j}{\eta_{j-1}} \right]$$

Ou ξ_i est l'intervalle, dans le plan ξ,η entre les points i et i+1 .

ξ_{i-1}	"	"	"	"	i-1 et i
η_j	"	"	"	"	j et j+1
η_{j-1}	"	"	"	"	j-1 et j

D'où :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\xi_{i-1} + \xi_i} \cdot \frac{\xi_{i-1}}{\xi_i} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}(i\,j) \cdot F_{i+1,j}$$

$$- \frac{1}{\xi_{i-1} + \xi_i} \cdot \frac{\xi_i}{\xi_{i-1}} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}(i,j) \cdot F_{i-1,j}$$

$$+ \frac{1}{\eta_{j-1} + \eta_j} \cdot \frac{\eta_{j-1}}{\eta_j} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}(i,j) \cdot F_{i,j+1} \qquad (4)$$

$$- \frac{1}{\eta_{j-1} + \eta_j} \cdot \frac{\eta_j}{\eta_{j-1}} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}(i,j) \cdot F_{i,j-1}$$

$$+ \left[\frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{\xi_i\,\xi_{i-1}} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\eta_j - \eta_{j-1}}{\eta_j\,\eta_{j-1}} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \cdot F_{i,j}$$

- sur (a, b)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial a} \left[\frac{\partial a}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] + \frac{\partial F}{\partial b} \left[\frac{\partial b}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]$$

Or la transformation $(\xi,\eta) \rightarrow (a,b)$ correspond à une dilatation et le tenseur de cette transformation est diagonal.

Donc :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial a} \left(\frac{\partial a}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \frac{\partial F}{\partial b} \left(\frac{\partial b}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

Au point (i,j) nous aurons :

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{1}{2}\,(F_{i+1,j} - F_{i-1,j})$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \frac{1}{2}\,(F_{i,j+1} - F_{i,j-1})$$

D'où :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial a}{\partial \xi}\,(i,j)\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,(i,j)\,F_{i+1,j}$$

$$- \frac{1}{2}\,\frac{\partial a}{\partial \xi}\,(i,j)\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,(i,j)\,F_{i-1,j}$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{\partial b}{\partial \eta}\,(i,j)\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\,(i,j)\,F_{i,j+1}$$

$$- \frac{1}{2}\,\frac{\partial b}{\partial \eta}\,(i,j)\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\,(i,j)\,F_{i,j-1}$$

Or :

$$\frac{\partial a}{\partial \xi}(i,j) = \frac{1}{\xi_{i-1} + \xi_i}\left[\frac{\xi_{i-1}}{\xi i} + \frac{\xi_i}{\xi_{i-1}}\right] . \Delta a$$

$$\frac{\partial b}{\partial \eta}\,(i,j) = \frac{1}{\eta_{j-1} + \eta_j}\left[\frac{\eta_{j-1}}{\eta_j} + \frac{\eta_j}{\eta_{j-1}}\right] . \Delta b$$

Soit, avec $\Delta a = \Delta b = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} = {} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\xi_{i-1} + \xi_i}\left[\frac{\xi_{i-1}}{\xi_i} + \frac{\xi_i}{\xi_{i-1}}\right] . \frac{\partial \xi}{\partial x}(i,j) \,.\, F_{i+1,j} \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\xi_{i-1} + \xi_i}\left[\frac{\xi i-1}{\xi_i} + \frac{\xi i}{\xi_{i-1}}\right] \frac{\partial \xi}{\partial x}(i,j) \,.\, F_{i-1,j} \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\eta_{j-1} + \eta_j}\left[\frac{\eta_{j-1}}{\eta_j} + \frac{\eta_j}{\eta_{j-1}}\right] \frac{\partial \eta}{\partial x}(i,j) \,.\, F_{i,j+1} \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\eta_{j-1} + \eta_j}\left[\frac{\eta j-1}{\eta_j} + \frac{\eta j}{\eta_{j-1}}\right] \frac{\partial \eta}{\partial x}(i,j) \,.\, F_{i,j-1}
\end{aligned} \qquad (5)$$

On voit que les expressions (4) et (5) ne sauraient en aucun cas être équivalentes (sauf si g est l'identité, bien sûr) et donc les deux méthodes - celle utilisant f et celle utilisant $g \circ f$ - sont sensiblement différentes. Toutefois dans la pratique, les résultats obtenus avec l'une et l'autre sont équivalents, dans le cas d'un maillage régulier. Le critère de choix de l'une ou l'autre méthode portera donc sur des considérations pratiques.

L'avantage principal de la méthode de Thompson (ou de la méthode composée $g \circ f$) est l'entière liberté laissé à l'utilisateur de définir, d'une part l'emplacement des points de bord, d'autre part l'écartement des lignes iso-coordonnées. Son inconvénient est la complication de l'écriture des équations différentielles comme cela apparaît en (3).

Toutefois cela n'augmente pas la largeur de bande des matrices de résolution d'une façon trop importante, ni ne modifie le caractère des équations.

Un autre inconvénient de cette méthode (dont les solutions offrent par ailleurs généralement de bonnes propriétés de régularité) est le caractère aléatoire de la convergence du système (2) qui dépend à la fois du choix des conditions aux limites (choix des points de bord) et de celui des termes sources P et Q. Il n'existe aucun procédé rationnel pour déterminer ces derniers de manière à s'assurer de la convergence du calcul : il faut donc procéder par tâtonnements successifs jusqu'à l'obtention d'un maillage jugé satisfaisant par un œuil averti.

Enfin lors de l'utilisation d'un tel maillage pour la résolution des équations de la mécanique des fluides une difficulté importante apparaît aux conditions aux limites :

En effet certaines d'entre elles portent sur le flux normal traversant la frontière à savoir :

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f . \vec{n}$$

Sur une frontière quelconque d'un maillage curviligne nous aurons $\vec{n}\left|\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix}\right.$ où n_1 et n_2 sont non-nuls d'où :

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \underbrace{\left(n_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + n_2 \frac{\partial \xi}{\partial y}\right)}_{a} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \underbrace{\left(n_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} + n_2 \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)}_{b} \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

Sur un maillage quelconque les termes a et b sont généralement non nuls et l'écriture d'une condition aux limites portant sur $\frac{\partial f}{\partial n}$ aura pour effet d'opérer un couplage, à la frontière, entre les variations de f dans la première direction et dans la deuxième direction. Ce phénomène, outre la complexité qu'il introduit dans la résolution des équations favorise les "fuites" le long des bords par perte de précision.

On peut imaginer supprimer cette difficulté en générant un maillage orthogonal au niveau des frontières. C'est ce qu'ontfait Steger et Sorenson [39], et Thomas et Niddlecof [41]. La transformation utilisée est toujours obtenue à partir de la résolution d'un système elliptique (1), mais on contrôle la valeur des angles d'intersection entre les lignes isocoordonnées et la frontière.

On peut également envisager de construire un maillage entièrement orthogonal, ce qui allège l'écriture des équations à l'intérieur du domaine. Pope [35] a mis au point une telle méthode fondée sur la résolution d'une équation de Laplace pour les coordonnées cartésiennes. La solution est obtenue par une méthode itérative en différence finie.

Mobley et Stewart [33] eux sont partis de la méthode de Thompson qu'ils ont modifié de manière à obtenir un maillage orthogonal. Comparée à la méthode de Pope, cette dernière permet un meilleur contrôle de l'écartement des lignes isocoordonnées.

On peut encore envisager "l'orthogonalisation" d'un maillage a priori quelconque. En général cette opération conserve une direction du maillage préexistant ([14]).

La méthode de Thompson peut s'appliquer à une donnée quelconque contenant par exemple des îlots. D'autres méthodes satisfaisant au critère d'orthogonalité ont été développées pour répondre aux aspects spécifiques du traitement des îlots ([19], [25]).

Enfin signalons l'intérêt de la méthode de Dwyer [18] . Elle s'adresse aux écoulements non permanents dont les contours évoluent dans le temps (par exemple écoulement à surface libre). On pourrait envisager pour traiter ce type de cas de recalculer à chaque pas de temps le maillage entier. Cette méthode serait longue et coûteuse.

Dans la méthode Dwyer le domaine discrétisé est fixe dans le temps mais, comme dans le plan physique, les nœuds sont déplacés dans le temps, et la transformation des coordonnées et le calcul de l'écoulement sont couplés.

A N N E X E A.5

DISCRETISATION DE DIV ($\overline{\overline{K}}$ $\overrightarrow{\text{grad}}\,\theta$) EN 9 POINTS SUR UNE GRILLE VARIABLE AVEC CHANGEMENT DE VARIABLES

Nous avons vu que l'expression div ($\overline{\overline{K}}$ $\overrightarrow{\text{grad}}\,\theta$) s'écrit (2.2.2.1) :

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & \frac{\partial}{\partial\xi}\left[K_{11}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\,\xi_x + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\,\eta_x\right)\right]\xi_x + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[K_{11}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\,\xi_x + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\,\eta_x\right)\right]\eta_x \\
& + \frac{\partial}{\partial\xi}\left[K_{12}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\,\xi_y + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\,\eta_y\right)\right]\xi_x + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[K_{12}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\,\xi_y + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\,\eta_y\right)\right]\eta_x \\
& + \frac{\partial}{\partial\xi}\left[K_{21}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\,\xi_x + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\,\eta_x\right)\right]\xi_y + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[K_{21}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\,\xi_x + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\,\eta_x\right)\right]\eta_y \\
& + \frac{\partial}{\partial\xi}\left[K_{22}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\,\xi_y + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\,\eta_y\right)\right]\xi_y + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[K_{22}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\,\xi_y + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\,\eta_y\right)\right]\eta_y
\end{aligned}
$$

En regroupant les termes de même nature et en posant :

$$L_{11} = K_{11}\,\xi_x + K_{12}\,\xi_y$$

$$L_{21} = K_{21}\,\xi_x + K_{12}\,\xi_y$$

$$L_{12} = K_{11}\,\eta_x + K_{12}\,\eta_y$$

$$L_{22} = K_{21}\,\eta_x + K_{22}\,\eta_y$$

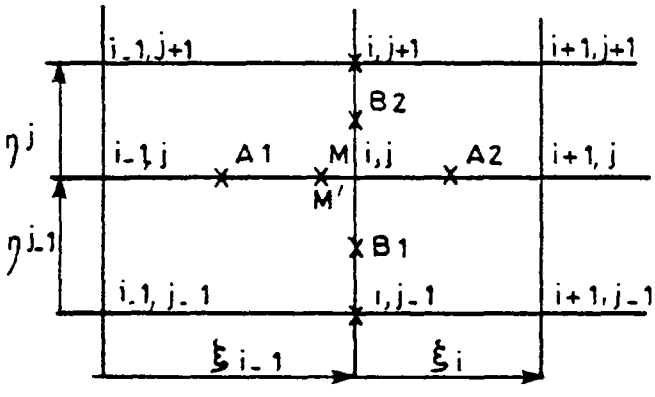
L'expression (1) se réduit à :

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial\xi}\left(L_{11}\,\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)\xi_x + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(L_{21}\,\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)\xi_y \\
+\ & \frac{\partial}{\partial\eta}\left(L_{11}\,\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)\eta_x + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(L_{21}\,\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)\eta_y \\
+\ & \frac{\partial}{\partial\xi}\left(L_{12}\,\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)\xi_x + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(L_{22}\,\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)\xi_y \\
+\ & \frac{\partial}{\partial\eta}\left(L_{12}\,\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)\eta_x + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(L_{22}\,\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)\eta_y
\end{aligned}
$$

On a donc finalement quatre types différents d'expression à discrétiser :

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(J\frac{\partial}{\partial\xi}\right),\ \frac{\partial}{\partial\xi}\left(J\frac{\partial}{\partial\eta}\right),\ \frac{\partial}{\partial\eta}\left(J\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\ \text{et}\ \frac{\partial}{\partial\eta}\left(J\frac{\partial}{\partial\eta}\right)$$

Où J est un coefficient fonction d'espace $J(\xi, \eta)$ défini aux mêmes points que la fonction θ.



Considérons d'abord le terme :

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(J\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)$$

on évalue $J\frac{\partial\theta}{\partial\xi}$ aux points A_1 et A_2 sous la forme :

$$\left(J\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)_{A_1} = \frac{J_{i-1,j} + J_{i,j}}{2} \times \frac{\theta_{i,j}-\theta_{i-1,j}}{\xi_{i-1}}$$

ensuite on obtient :

$$\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(J\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)\right](M) = \frac{2}{\xi_{i-1}+\xi_i}\left[J\frac{\partial\theta}{\partial\xi}(A_2) - J\frac{\partial\theta}{\partial\xi}(A_1)\right]$$

En fait cette solution n'est pas exacte en mailles variables car on obtient $\frac{\partial}{\partial\xi}\left(J\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)$ non pas au point M mais en M', milieu de $A_1 A_2$. On perd ainsi la précision d'ordre 2 du calcul pour se ramener à une précision d'ordre 1. Toutefois, dans le cas de mailles variant continuement l'erreur commise est très faible.

On discrétisera de même $\frac{\partial}{\partial\eta}\left(J\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)$ en se servant des points B_1 et B_2, à l'ordre 1.

Considérons maintenant $\frac{\partial}{\partial\eta}\left(J\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)$

On évalue $\frac{\partial\theta}{\partial\xi}$ aux points $(i, j+1)$, (i,j) et $(i,j-1)$ à l'ordre 2 par une interpolation parabolique. On aura par exemple :

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)_{i,j} = \frac{1}{\xi_{i-1}+\xi_i}\left[\frac{\theta_{i+1,j}-\theta_{i,j}}{\xi_i}\cdot\xi_{i-1} + \frac{\theta_{i,j}-\theta_{i-1,j}}{\xi_{i-1}}\cdot\xi_i\right]$$

Ensuite on évalue $\frac{\partial}{\partial \eta}\left(J \frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right)$ par une interpolation parabolique dans la direction η au point M.

Cette discrétisation est d'ordre 2.

On voit que l'on a donc perdu un ordre à cause des termes de la forme $\frac{\partial}{\partial \xi}\left(J \frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right)$. On peut imaginer une façon de supprimer cet inconvénient :

Connaissant θ et J aux points (i-1,j), (i,j) et (i+1,j) on peut définir une interpolation parabolique de θ et J.

$$\theta = \theta_2\, \xi^2 + \theta_1\, \xi + \theta_o$$

et $$J = J_2\, \xi^2 + J_1\, \xi + J_o$$

où θ_2, θ_1, θ_o, J_2, J_1, J_o sont obtenus en résolvant :

$$\begin{cases} \theta\,(i-1,j) = \theta_2\,(\xi_{i-1})^2 - \theta_1\,\xi_{i-1} + \theta_o \\ \theta\,(i,j) = \theta_o \\ \theta\,(i+1,j) = \theta_2\,\xi_i^{\,2} + \theta_1\,\xi_i + \theta_o \end{cases}$$

$$\begin{cases} J\,(i-1,j) = J_2\,(\xi_{i-1})^2 - J_1\,\xi_{i-1} + J_o \\ J\,(i,j) = J_o \\ J\,(i+1,j) = J_2\,(\xi_i)^2 + J_1\,(\xi_i) + J_o \end{cases}$$

et alors on peut calculer :

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(J \frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(J_2\,\xi^2 + J_1\,\xi + J_o)\,(2\theta_2\xi + \theta_1)\right]$$

$$= (2\,J_2\,\xi + J_1)\,(2\theta_2\xi + \theta_1) + (J_2\xi^2 + J_1\xi + J_o)\,2\theta_2$$

Soit au point M :

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(J \frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right)\right](M) = J_1\,\theta_1 + 2\,J_o\,\theta_2$$

Actuellement c'est la discrétisation d'ordre 1 qui a été retenue. Le lecteur trouvera ci-joint l'expression des coefficients de discrétisation aux neufs points entourant(i,j).

Dans le cas d'un Laplacien pur par exemple il suffit de remplacer K_{11} par 1, K_{12} par 0, K_{21} par 0 et K_{22} par 1. Dans le cas d'un maillage rectiligne on aura : $\xi_x = 1$ $\xi_y = \eta_x = 0$ et $\eta_y = 1$. Cette discrétisation peut donc s'adapter à grand nombre d'équation de type parabolique.

Dans notre programme elle sert à résoudre la diffusion des vitesses, la diffusion thermique ainsi que l'équation de continuité en ψ.

$\theta(i-1,j+1)$	$\frac{1}{\xi_i \cdot \xi_{i-1}(\xi_i+\xi_{i-1})\eta_j \cdot \eta_{j-1}(\eta_j+\eta_{j-1})} \eta_{j-1}^2 \xi_i^2 \left[L11(i,j+1)\eta_x(i,j) + L21(i,j+1)\eta_y(i,j) + L12(i-1,j)\xi_x(i,j) + L22(i-1,j)\xi_y(i,j)\right]$
$\theta(i,j+1)$	$\frac{1}{\eta_j\ (\eta_j+\eta_{j-1})} (L12\ (i,j+1) + L12\ (i,j))\ \eta_x\ (i,j) + (L22\ (i,j+1) + L22\ (i,j))\ \eta_y\ (i,j)$ $+ \frac{1}{\xi_i \cdot \xi_{i-1} \cdot (\xi_i+\xi_{i-1}) \cdot \eta_j \cdot \eta_{j-1} \cdot (\eta_j+\eta_{j-1})} \eta_{j-1}^2 (\xi_i^2 - \xi_{i-1}^2) \left[L11(i,j+1)\eta_x(i,j) + L21(i,j+1)\eta_y(i,j) + L12(i,j)\xi_x(i,j) + L22(i,j)\xi_y(i,j)\right.$
$\theta(i+1,j+1)$	$\frac{1}{\xi_i \cdot \xi_{i-1}(\xi_i+\xi_{i-1})\eta_j \cdot \eta_{j-1}(\eta_j+\eta_{j-1})} \xi_{i-1}^2 \eta_{j-1}^2 \left[L11(i,j+1)\eta_x(i,j) + L21(i,j+1)\eta_y(i,j) + L12(i+1,j)\xi_x(i,j) + L22(i+1,j)\xi_y(i,j)\right]$
$\theta(i+1,j)$	$\frac{1}{\xi_i\ (\xi_i + \xi_{i-1})} \left[(L11(i,j) + L11\ (i+1,j))\ \xi_x\ (i,j) + (L21\ (i,j) + L21\ (i+1,j))\ \xi_y(i,j)\right]$ $+ \frac{1}{\xi_i\ \xi_{i-1}(\xi_i+\xi_{i-1})\eta_j\ \eta_{j-1}(\eta_j+\eta_{j-1})} \xi_{i-1}^2 (\eta_j^2 - \eta_{j-1}^2) \left[L11(i,j)\eta_x(i,j) + L21(i,j)\eta_y(i,j) + L12(i+1,j)\xi_x(i,j) + L22(i+1,j)\xi_y(i,j)\right]$
$\theta(i+1,j-1)$	$- \frac{1}{\xi_i\ \xi_{i-1}(\xi_i+\xi_{i-1})\eta_j\ \eta_{j-1}(\eta_j+\eta_{j-1})} \eta_j^2\ \xi_{i-1}^2 \left[L11(i,j-1)\eta_x(i,j) + L21(i,j-1)\ \eta_y(i,j) + L12(i+1,j)\ \xi_x(i,j) + L22(i+1,j)\xi_y(i,j)\right]$
$\theta(i,j-1)$	$\frac{1}{\eta_{j-1}(\eta_j+\eta_{j-1})} \left[(L12(i,j) + L12(i,j-1))\ \eta_x(i,j) + (L22(i,j) + L22(i,j-1)\ \eta_y\ (i,j)\right]$ $+ \frac{1}{\xi_i\ \xi_{i-1}(\xi_i+\xi_{i-1})\ \eta_j\ \eta_{j-1}(\eta_j+\eta_{j-1})} \eta_j^2\ (\xi_{i-1}^2 - \xi_i^2) \left[L11(i,j-1)\eta_x(i,j) + L21(i,j-1)\ \eta_y(i,j) + L12(i,j)\xi_x(i,j) + L22(i,j)\xi_y(i,j)\right]$
	$\frac{1}{\xi_i\ \xi_{i-1}(\xi_i+\xi_{i-1})\eta_j\ \eta_{j-1}(\eta_{j-1}+\eta_j)} \xi i^2 \eta j^2 \left[L11(i,j-1)\eta_x(i,j) + L21(i,j-1)\ \eta_y(i,j) + L12(i-1,j)\ \xi_x(i,j) + L22(i-1,j)\xi_y(i,j)\right]$

$\theta i-1,j$	$\frac{1}{\xi_{i-1}\,(\xi_i+\xi_{i-1})}\left[(L11\,(i-1,j)+L11\,(i,j))\,\xi_x\,(i,j)+(L21\,(i-1,j)+L21\,(i,j))\,\xi_y\,(i,j)\right]$ $+\frac{1}{\xi_i.\xi_{i-1}.(\xi_i+\xi_{i-1}).\eta_j.\eta_{j-1}.(\eta_j+\eta_{j-1})}\xi_i^2(\eta_{j-1}^2-\eta_j^2)\left[L11(i,j)\eta_x(i,j)+L21(i,j)\,\eta_y(i,j)+L12(i-1,j)\xi_x(i,j)+L22(i-1,j)\xi_y(i,j\right.$
$\theta i,j$	$-\frac{1}{\xi_i\,(\xi_i+\xi_{i-1})}\left[(L11\,(i,j)+L11\,(i+1,j))\,\xi_x\,(i,j)+(L21\,(i,j)+L21\,(i+1,j))\,\xi_y\,(i,j)\right]$ $-\frac{1}{\xi_{i-1}\,(\xi_i+\xi_{i-1})}\left[(L11\,(i-1,j)+L11\,(i,j))\,\xi_x\,(i,j)+(L21\,(i-1,j)+L21\,(i,j))\,\xi_y\,(i,j)\right]$ $-\frac{1}{\eta_j\,(\eta_j+\eta_{j-1})}\left[(L12\,(i,j+1)+L12\,(i,j))\,\eta_x\,(i,j)+(L22\,(i,j+1)+L22\,(i,j))\,\eta_y(i,j)\right]$ $-\frac{1}{\eta_{j-1}\,(\eta_j+\eta_{j-1})}\left[(L12\,(i,j)+L12\,(i,j-1))\,\eta_x\,(i,j)+(L22\,(i,j)+L22\,(i,j-1))\,\eta_y(i,j)\right]$ $+\frac{1}{\xi_i.\xi_{i-1}.(\xi_i+\xi_{i-1}).\eta_j.\eta_{j-1}.(\eta_j+\eta_{j-1})}(\xi_i^2-\xi_{i-1}^2)(\eta_j^2-\eta_{j-1}^2)\left[L11(i,j)\eta_x(i,j)+L21(i,j)\eta_y(i,j)+L12(i,j)\xi_x(i,j)+L22(i,j)\xi_y(i,j)\right.$

A N N E X E A.6

ELIMINATION DES POINTS DE BORD POUR SATISFAIRE A LA CONDITION $\vec{\text{grad}}\ \theta.\vec{n} = 0$

D'une façon générale l'écriture d'une condition aux limites de type Neumann aux points de bord opère, en maillage curviligne non orthogonal un couplage entre ces points et leurs voisins latéraux immédiats (sur le schéma 1 par exemple, l'écriture d'une telle condition au point 6 fera intervenir les points 5 et 7).

La méthode utilisée alors consiste à éliminer ces points de bord. Pour cela on résout localement la condition de Neumann (on évalue ainsi les points 5,6 et 7 en fonction des points intérieurs voisins) et l'on reporte les expressions calculées dans la matrice de discrétisation de l'étape considérée afin d'éliminer ces points. La résolution du système ne porte alors que sur les points intérieurs du domaine ainsi que sur les points de frontière avec condition de Dirichlet. Ensuite les points de bord avec condition de Neumann sont recalculés par résolution locale de cette condition à partir des points intérieurs.

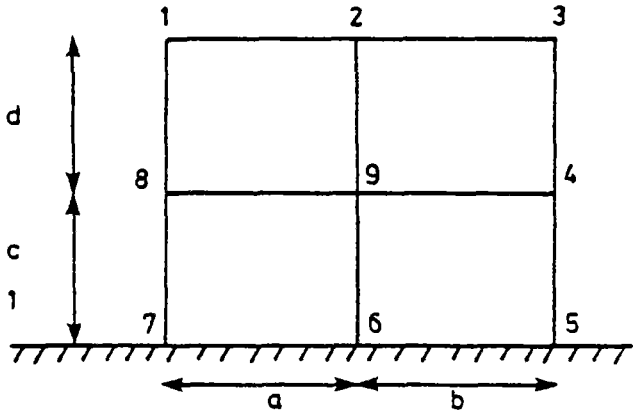
Dans ce qui suit nous allons détailler le calcul induit par cette élimination.

Considérons un point situé sur un bord inférieur. Les résultats pour un bord gauche, supérieur ou droit se déduiront des suivants en effectuant une rotation respectivement de $\frac{\Pi}{2}$, Π ou $\frac{3\Pi}{2}$.

Considérons par ailleurs que ce point est entouré de deux points pour lesquels la condition $\vec{\text{grad}}\ \theta.\vec{n} = 0$ s'applique. S'il n'en était pas ainsi le principe de la méthode appliquée serait le même mais les résultats sensiblement différents. On trouvera plus loin une rapide description de la méthode employée dans ces cas là.

Résumons notre situation : Nous nous plaçons en un point de bord courant situé sur un bord inférieur et la condition aux limites $\vec{\text{grad}}\ \theta.\vec{n} = 0$ est appliquée à ce point ainsi qu'à ses deux voisins.

schema 1



Nous numérotons les points de la façon indiquée sur le schéma ci-contre.

Ecrivons la condition $\vec{\text{grad}}\ \theta . \vec{n} = 0$ au point 6 :

$$\vec{\text{grad}}\ \theta \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \dfrac{\partial\theta}{\partial\xi}\ \xi_x + \dfrac{\partial\theta}{\partial\eta}\ \eta_x \\[2ex] \dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{\partial\theta}{\partial\xi}\ \xi_y + \dfrac{\partial\theta}{\partial\eta}\ \eta_y \end{array} \right. \qquad \vec{n} \left| \begin{array}{l} n_1 = \dfrac{\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} \\[2ex] n_2 = \dfrac{\eta_y}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} \end{array} \right.$$

La condition $\vec{\text{grad}}\ \theta . \vec{n} = 0$ s'écrit alors :

$$A \frac{\partial\theta}{\partial\xi} + B \frac{\partial\theta}{\partial\eta} = 0 \quad \text{avec} \quad A = \xi_x\, n_1 + \xi_y\, n_2$$

$$B = \eta_x\, n_1 + \eta_y\, n_2$$

Au point 6 on écrira :

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi} = \frac{1}{a+b} \left[\frac{\theta 5 - \theta 6}{b} \cdot a + \frac{\theta 6 - \theta 7}{a} \cdot b \right]$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta} = \frac{1}{c+d} \left[\frac{d + 2c}{c} (\theta_9 - \theta_6) - c\ \frac{\theta 2 - \theta 9}{d} \right]$$

D'où :

$$(\vec{\text{grad}}\ \theta . \vec{n})_6 = 0 \longmapsto \mathcal{A}_6\ \theta_6 = C_{16}\ \theta_9 + C_{26}\ \theta_2 + C_{36}\ \theta_5 + C_{46}\ \theta_7 \quad (1)$$

avec :

$$\mathcal{A}_6 = \frac{(-a+b)}{ab} \times A_6 - \frac{d+2c}{c(c+d)} \times B_6$$

$$C_{16} = -\frac{c+d}{cd}\ B_6$$

$$C_{26} = \frac{c}{d(c+d)}\ B_6$$

$$C_{36} = -\frac{a}{b(a+b)}\ A_6$$

$$C_{46} = \frac{b}{a(a+b)}\ A_6$$

On voit que l'expression (1) obtenue fait intervenir les points 5 et 7 voisins du point 6. Dans le cas où les conditions aux limites en ces points seraient de type Dirichlet ne se pose aucun problème puisque θ sera connu en ces points. Par contre dans le cas que nous avons envisagé où la condition de Neumann $\frac{\partial\theta}{\partial n} = 0$ est appliquée en ces points nous nous trouvons en présence d'une série d'équations de type (1) à résoudre le long de la frontière.

Cela introduit alors des dissymétries à l'intérieur de la matrice de résolution de l'étape de diffusion qui n'est plus une matrice bande diagonale. Les difficultés numériques que soulèverait une telle matrice ont été évitées en adoptant la solution d'une résolution locale de l'équation (1).

Pour cela nous allons écrire aux points 5 et 7 la condition $\vec{\text{grad}}\ \theta . \vec{n} = 0$

<u>Point 5</u>

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi} = \frac{1}{a+b}\left[-\frac{b}{a}(\theta_6 - \theta_7) + \frac{2b+a}{b}(\theta_5 - \theta_6)\right]$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta} = \frac{1}{c+d}\left[\frac{d+2c}{c}(\theta_4-\theta_5) - \frac{c}{d}(\theta_3-\theta_4)\right]$$

D'où :

$$\mathcal{A}_5\ \theta_5 = C_{15}\ \theta_4 + C_{25}\ \theta_3 + C_{35}\ \theta_6 + C_{45}\ \theta_7 \qquad (2)$$

avec :

$$\mathcal{A}_5 = \frac{a+2b}{b(a+b)}\ A_5 - \frac{d+2c}{c(c+d)}\ B_5$$

$$C_{15} = \frac{c+d}{cd}\ B_5$$

$$C_{25} = \frac{c}{d(c+d)}\ B_5$$

$$C_{35} = \frac{+(a+b)}{ab}\ A_5$$

$$C_{45} = \frac{-b}{a(a+b)}\ A_5$$

Point 7

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi} = \frac{1}{a+b}\left[\frac{b+2a}{a}(\theta_6 - \theta_7) - \frac{a}{b}(\theta_5 - \theta_6)\right]$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta} = \frac{1}{c+d}\left[\frac{d+2c}{c}(\theta_8 - \theta_7) - \frac{c}{d}(\theta_1 - \theta_8)\right]$$

d'où :

$$\mathcal{A}_7\ \theta_7 = C_{17}\ \theta_8 + C_{27}\ \theta_1 + C_{37}\ \theta_6 + C_{47}\ \theta_5$$

avec :

$$\mathcal{A}_7 = \frac{-(2a+b)}{a\ (a+b)}\ A_7 - \frac{d+2\ c}{c\ (c+d)}\ B_7$$

$$C_{17} = \frac{-(c+d)}{cd}\ B_7$$

$$C_{27} = \frac{c}{d\ (c+d)}\ B_7$$

$$C_{37} = \frac{a+b}{a\ b}\ A_7$$

$$C_{47} = \frac{-a}{b\ (a+b)}\ A_7$$

Finalement θ_5, θ_6, θ_7 sont solution du système de 3 équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_5\ \theta_5 - C_{35}\ \theta_6 - C_{45}\ \theta_7 = C_{15}\ \theta_4 + C_{25}\ \theta_3 \\ -C_{36}\ \theta_5 + \mathcal{A}_6\ \theta_6 - C_{46}\ \theta_7 = C_{16}\ \theta_9 + C_{26}\ \theta_2 \\ -C_{47}\ \theta_5 - C_{37}\ \theta_6 + \mathcal{A}_7\ \theta_7 = C_{17}\ \theta_8 + C_{27}\ \theta_1 \end{cases}$$

La résolution de ce système permet d'exprimer θ_5, θ_6, θ_7 en fonction de θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, θ_8 et θ_9 nous avons :

$$(3) \quad \begin{cases} \theta_5 = r_{51}\,\theta_1 + r_{52}\,\theta_2 + r_{53}\,\theta_3 + r_{54}\,\theta_4 + r_{58}\,\theta_8 + r_{59}\,\theta_9 \\ \theta_6 = r_{61}\,\theta_1 + r_{62}\,\theta_2 + r_{63}\,\theta_3 + r_{64}\,\theta_4 + r_{68}\,\theta_8 + r_{69}\,\theta_9 \\ \theta_7 = r_{71}\,\theta_1 + r_{72}\,\theta_2 + r_{73}\,\theta_3 + r_{74}\,\theta_4 + r_{78}\,\theta_8 + r_{79}\,\theta_9 \end{cases}$$

avec :

$$r_{51} = \frac{1}{\Delta}\,(C_{35}\,C_{46} + \mathcal{A}_6\,C_{45})\,C_{27}$$

$$r_{52} = \frac{1}{\Delta}\,(\mathcal{A}_7\,C_{35} + C_{37}\,C_{45})\,C_{26}$$

$$r_{53} = \frac{1}{\Delta}\,(\mathcal{A}_6\,\mathcal{A}_7 - C_{37}\,C_{46})\,C_{25}$$

$$r_{54} = \frac{1}{\Delta}\,(\mathcal{A}_6\,\mathcal{A}_7 - C_{37}\,C_{46})\,C_{15}$$

$$r_{58} = \frac{1}{\Delta}\,(C_{35}\,C_{46} + \mathcal{A}_6\,C_{45})\,C_{17}$$

$$r_{59} = \frac{1}{\Delta}\,(\mathcal{A}_7\,C_{35} + C_{37}\,C_{45})\,C_{16}$$

$$r_{61} = \frac{1}{\Delta}\,(C_{46}\,\mathcal{A}_5 + C_{36}\,C_{45})\,C_{27}$$

$$r_{62} + \frac{1}{\Delta}\,(\mathcal{A}_5\,\mathcal{A}_7 - C_{47}\,C_{45})\,C_{26}$$

$$r_{63} = \frac{1}{\Delta}\,(C_{47}\,C_{46} + C_{36}\,\mathcal{A}_7)\,C_{25}$$

$$r_{64} = \frac{1}{\Delta}\,(C_{47}\,C_{46} + C_{36}\,\mathcal{A}_7)\,C_{15}$$

$$r_{68} = \frac{1}{\Delta}\,(\mathcal{A}_5\,C_{46} + C_{36}\,C_{45})\,C_{17}$$

$$r_{69} = \frac{1}{\Delta}\,(\mathcal{A}_5\,\mathcal{A}_7 - C_{47}\,C_{45})\,C_{16}$$

$$r_{71} = \frac{1}{\Delta}\,(\mathcal{A}_5\,\mathcal{A}_6 - C_{36}\,C_{35})\,C_{27}$$

$$r_{72} = \frac{1}{\Delta}\,(\mathcal{A}_5\,C_{37} + C_{47}\,C_{35})\,C_{26}$$

$$r_{73} = \frac{1}{\Delta} (C_{36}\ C_{37} + C_{47}\ \mathcal{A}_6)\ C_{25}$$

$$r_{74} = \frac{1}{\Delta} (C_{36}\ C_{37} + C_{47}\ \mathcal{A}_6)\ C_{15}$$

$$r_{78} = \frac{1}{\Delta} (\mathcal{A}_5\ \mathcal{A}_6 - C_{36}\ C_{35})\ C_{17}$$

$$r_{79} = \frac{1}{\Delta} (\mathcal{A}_5\ C_{37} + C_{47}\ C_{35})\ C_{16}$$

et

$$\Delta = \mathcal{A}_5\ \mathcal{A}_6\ \mathcal{A}_7 - \mathcal{A}_5\ C_{37}\ C_{46} - C_{36}\ C_{35}\ \mathcal{A}_7 - C_{36}\ C_{37}\ C_{45}$$
$$- C_{47}\ C_{35}\ C_{46} - C_{47}\ \mathcal{A}_6\ C_{45}$$

La discrétisation de l'étape de diffusion en un point courant intérieur du domaine aboutissait (2.2.2.1) pour le premier membre à une expression de la forme :

$$a_1\ \theta_1 + a_2\ \theta_2 + a_3\ \theta_3 + a_4\ \theta_4 + a_5\ \theta_5 + a_6\ \theta_6 + a_7\ \theta_7 + a_8\ \theta_8 \qquad (4)$$
$$+ a_9\ \theta_9$$

Pour un point tel que le point 9 représenté sur le schéma 1 l'élimination des points de bords va consister à remplacer θ_5, θ_6 et θ_7 dans l'expression (4) par leur valeur calculée en (3). On obtient en définitive :

$$a'_1\ \theta_1 + a'_2\ \theta_2 + a'_3\ \theta_3 + a'_4\ \theta_4 + a'_8\ \theta_8 + a'_9\ \theta_9 \qquad (5)$$

avec $\quad a'_i = a_i + r_{5i}\ a_5 + r_{6i}\ a_6 + r_{7i}\ a_7$

L'expression (5) remplace l'expression (4) pour tous les points dans la situation décrite au début.

Envisageons maintenant le cas où, par exemple, la condition $\vec{\text{grad}}\ \theta . \vec{n} = 0$ serait vérifiée pour le point 6 et le point 5, mais pas le point 7 en lequel on disposerait d'une condition de Dirichlet.

Dans ce cas la méthode utilisée est exactement semblable si ce n'est que l'on n'écrit que (1) et (2). On obtient alors un système de deux équations à deux inconnus θ_5 et θ_6 et dans l'expression (4) seules ces deux grandeurs disparaîtront.

De la même façon on obtiendra les différentes discrétisations correspondant aux différentes situations possibles.

Pour un coin le traitement serait exactement le même. La définition de la normale dans l'angle est obtenue en moyennant les normales des deux bords de l'angle.

Si les 5 points situés sur la frontière de l'angle satisfont tous à la condition $\vec{\text{grad}}\ \theta.\vec{n} = 0$ l'application de la précédente méthode amène à résoudre un système linéaire de cinq équations à cinq inconnues.

La condition aux limites de glissement pour les vitesses

$$\frac{\partial\ \vec{u}.\vec{\tau}}{\partial n} - \alpha\ \vec{u}.\vec{\tau} = 0 \qquad \vec{u}.\vec{n} = 0 \tag{6}$$

se traite de la même façon que la condition $\vec{\text{grad}}\ \theta.\vec{n} = 0$.

Une différence importante est à noter toutefois : cette expression couple les composantes u et v de la vitesse. Ceci signifie que dans le cas d'un angle avec glissement on serait amené à résoudre un système linéaire de 10 équations à 10 inconnues.

Pour éviter la lourdeur d'un tel calcul on introduit la variable auxiliaire u' de la façon suivante :

$$\vec{u}.\vec{n} = 0 \quad \longrightarrow \quad u.n_1 + v\ n_2 = 0$$

$$\longrightarrow \quad \frac{u}{n2} = -\frac{v}{n1} = u'$$

Dans l'expression $\frac{\partial \vec{u}.\vec{\tau}}{\partial n} - \alpha \vec{u}.\vec{\tau} = 0$ on remplacera systématiquement u et v par $u'.n_2$ et $- u'.n_1$ ce qui divise par deux l'ordre des systèmes obtenus. Les méthodes utilisées ensuite sont exactement du même type que celles décrites pour la température. Leur écriture est simplement un peu plus complexe puisque l'expression (6) est plus compliquée. Notamment il faudra veiller à rester cohérent tout au long des transformations avec le signe de la normale.

ANNEXE A.7

QUELQUES PROBLEMES PRATIQUES POSES PAR LA PRISE EN COMPTE NUMERIQUE DES CONDITIONS AUX LIMITES

D'une manière très générale la principale difficulté dans l'élaboration d'un modèle mathématique est d'assurer le meilleur compromis entre, d'une part la condition d'universalité du modèle et, d'autre part, les contraintes techniques et financières qui limitent impérativement la taille (*) du modèle.

Cette difficulté est particulièrement sensible dans le traitement des conditions aux limites. Considérons en effet un domaine quelconque Ω . La résolution se fera sur son transformé $\hat{\Omega}$. Ce domaine rectiligne comporte quatre types de bords (supérieur, inférieur, gauche et droit) et huit types d'angles (inférieur gauche saillant, inférieur gauche rentrant,...).

Supposons que l'on envisage n types de conditions aux limites possibles en chaque point de bord. Pour un point de bord courant il faut également connaître la situation de ses deux voisins. D'où en définitive $4\ n^3$ situations à envisager pour chaque point situé sur un bord. Pour les angles la situation est encore plus complexe et l'on obtient $8 \times 5 \times n^3$ situations possibles par angle.

Dans la pratique de simples considérations d'ordre physique ou géométrique diminuent grandement les chiffres précédemment obtenus. De plus un certain nombre de situations peuvent être numériquement interdites dans le modèle d'écoulement mais physiquement prises en compte après une modification au niveau du maillage.

Cependant la taille du modèle mathématique s'est considérablement accrue avec la prise en compte d'une géométrie quelconque, et la lourdeur du calcul qui en découle se trouve parfois en conflit avec l'universalité recherchée.

(*) La taille d'un modèle mathématique se mesure en nombre d'instructions exécutables. La "grosseur" d'un programme est un handicap tant en place mémoire qu'en temps machine et se traduit généralement par une hausse sensible du coût du modèle.

Indiquons simplement que dans tous les cas où une difficulté de ce type a été soulevée nous avons envoyé de faire primer le "bon sens" physique sur l'universalité numérique en gardant bien en vue l'idée que ce modèle est conçu pour traiter des écoulements fluviaux en régime permanent.

Nous exposons ci-dessous quelques uns des cas les plus significatifs rencontrés.

* Cas d'un angle rentrant avec vitesse de glissement

Envisageons le cas représenté par le schéma ci-contre d'une séparation en deux d'un écoulement. Supposons que les conditions aux limites sur les deux bords de l'angle ainsi qu'en M soient des conditions de glissement.

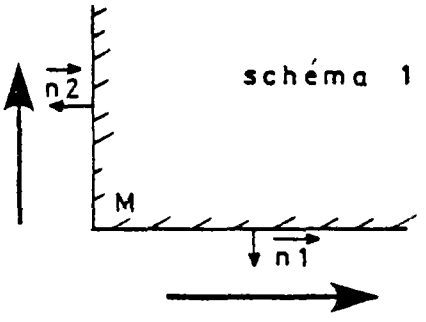


schéma 1

Le problème qui se pose est alors de savoir comment définir la normale $\vec{n}_M$ au point M. En effet si l'on définit $\vec{n}_M$ comme la moyenne de $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ alors la condition d'imperméabilité à la paroi $\vec{u}.\vec{n} = 0$ fait que l'on se retrouve dans la situation suivante :

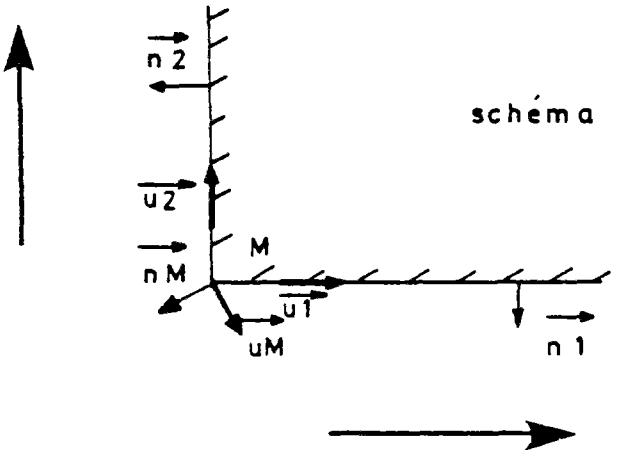


schéma 2

La solution adoptée devant ce dilemne est dictée par l'intuition physique : elle consiste à écrire que la vitesse au point de séparation de l'écoulement M' est nulle : $\vec{u}M' = \vec{0}$ et que ce point est peu différent de M, d'où $\vec{u}M \sim \vec{0}$.

De même on imposera dans le cas d'une confluence une vitesse nulle au point de rencontre des deux écoulements. Ainsi évite-t-on de se retrouver avec une vitesse incongrue dans un angle, inconvénient d'ailleurs essentiellement esthétique car l'écoulement local sur les frontières n'a que peu d'influence sur l'ensemble de l'écoulement.

Dans le cas d'un angle rentrant contourné par un écoulement, la situation, bien que moins complexe n'offre pas non plus de solution numériquement évidente.

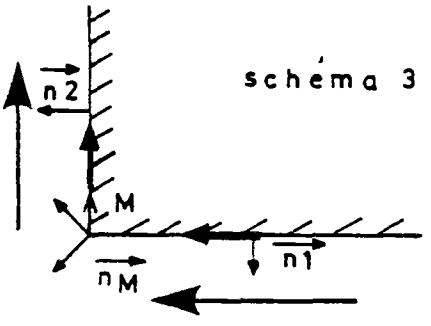


schéma 3

La définition de la normale utilisée ici est la moyenne des normales $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ des bords de l'angle.

Lorsque les débits de part et d'autre de l'angle sont très différents, on aboutit à la situation représentée sur le schéma 3.

On peut alors penser qu'il serait bon de pondérer l'inclinaison de la normale en M en fonction des débits circulant le long de chaque face de l'angle. Outre les problèmes "éthiques" posés par la définition numérique de ces débits, cette transformation, qui rend les normales dépendantes des débits, rendrait le calcul des coefficients de discrétisation itératif, alors qu'actuellement ils sont calculés une fois pour toutes en début de calcul.

Cette transformation alourdirait le calcul d'une façon beaucoup trop importante pour le but recherché puisque d'une part l'on sait que l'écoulement local sur les rives n' influence que très peu l'ensemble de l'écoulement et d'autre part la situation décrite par le schéma 3 n'est gênante que dans le cas d'une disparité très importante entre les débits de part et d'autre de l'angle ce qui n'est pas le cas le plus courant.

En définitive dans cette situation la légèreté du modèle prévaut sur son universalité sans que ce choix n'ait de conséquences sensibles sur la physique de l'écoulement.

* Calcul de ψ le long d'un angle rentrant

Le calcul de ψ sur les frontières pose d'une manière générale une question d'éthique puisque ψ est défini sur un maillage intérieur à une demi-maille de la frontière du maillage sur lequel sont données les conditions aux limites réelles (limites réelles du domaine) à partir desquelles se fait le calcul de ψ.

En écoulement fluvial, sur un domaine à transformé rectangulaire ce problème reste un point de discussion théorique sans conséquence importante au niveau pratique, la solution généralement adoptée étant de faire comme si ψ à une demi-maille du bord était le même que ψ sur le bord.

Des problèmes pratiques apparaissent avec le cas des angles rentrants :

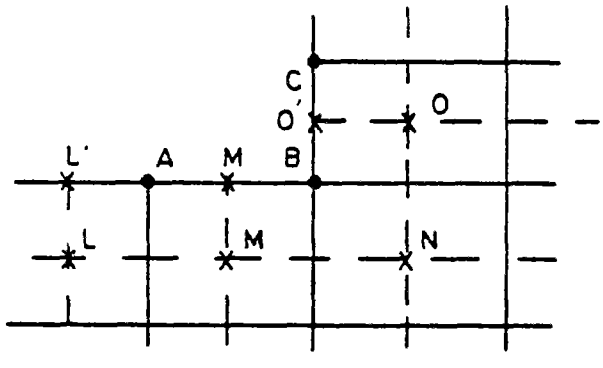


schéma 4

Entre L et M on écrira, de façon classique

$$\psi\ (M) = \psi\ (M') = \psi\ (L') + \int_{L'}^{M'} h\ \vec{u}.\vec{n}\|\vec{n}\|\ ds = \psi\ (L) + \int_{L'}^{M'} h\ \vec{u}.\vec{n}\|\vec{n}\|\ ds$$

Si la projection des points M et O sur la frontière fournit de façon claire M' et O', la projection de N est moins évidente.

D'autre part on a :

$$\psi\ (O) = \psi\ (M) + \int_{M'}^{O'} h\ \vec{u}.\vec{n}\|\vec{n}\|ds = \overbrace{\psi(M) + \int_{M'}^{N'} h\ \vec{u}.\vec{n}\|\vec{n}\|ds}^{\psi\ (N')} + \int_{N'}^{O'} h\ \vec{u}.\vec{n}\|\vec{n}\|ds$$

Cette équation ne suffit pas à définir N' et finalement la valeur de ψ (N') est choisie arbitrairement de façon à ce que :

$$|\psi(N') - \psi\ (M')| \leqslant |\psi\ (O') - \psi\ (M')|$$

La solution qui a été adoptée dans le modèle est de considérer entre M et N la composante de $\vec{V}_B$ orthogonale au bord AB et entre N et O sa composante orthogonale à BC. Entre M et O on aura ainsi bien pris en compte $\vec{V}_B$.

Cette solution, qui correspond à une intuition physique simple pourra toutefois se trouver inapropriée dans certain cas de figure. Il semble inenvisageable d'aboutir, pour ce type de problème à une solution universelle.

* <u>Condition de répartition des débits</u>

Dans un calcul où l'on utilise une résolution en u, v, P les conditions aux limites en pression exigent de connaître la valeur de la côte du fluide aux différentes sections d'entrée et de sortie. Dans le cas d'une résolution en u, v, ψ cette condition devient la connaissance de la répartition des débits en entrée et en sortie.

Or s'il est simple de programmer une répartition de débit entre no branches (no fixé) il est en revanche extrêmement lourd d'envisager la programmation de cette répartition pour un nombre n quelconque de branche.

La lourdeur de la généralisation du modèle qui en découle est sans proportion avec la probabilité de rencontrer de telles situations. Nous avons alors décidé de restreindre notre résolution à l'étude d'un domaine comportant une ou deux branches de sortie. Un utilisateur désireux d'étudier le cas d'un domaine présentant no branches de sortie, no $\geqslant$3 pourrait facilement déduire de notre modélisation celle qu'il devrait adopter.

Là encore on s'est trouvé dans une situation où la généralisation de la méthode adoptée, à un cas de figure quelconque aurait entrainé une surcharge numérique sans rapport avec la probabilité des situations envisagées. La restriction envisagée alors correspond à un raisonnement de "bon sens" justifié par l'expérience au détriment d'une universalité numérique sans réalité concrète.

ANNEXE A.8

DISCRETISATION DE LA PRESSION

Nous envisageons ici successivement la première discrétisation utilisée, la seconde discrétisation élaborée puis envisageons la réalisation pratique de ces deux discrétisations et plus spécialement de la seconde.

Rappelons simplement que nous cherchons à discrétiser le premier membre de l'équation de pression suivante (formulée en volume fini) :

$$\int_\Gamma h \, \vec{\text{grad}} \, P^* . \vec{n} \, ds = \int_\Gamma \frac{\rho}{\Delta t} h \, \vec{U}^{aux} . \vec{n} \, ds \qquad (1)$$

* Première et deuxième discrétisation

Considérons le cas d'un point courant intérieur.

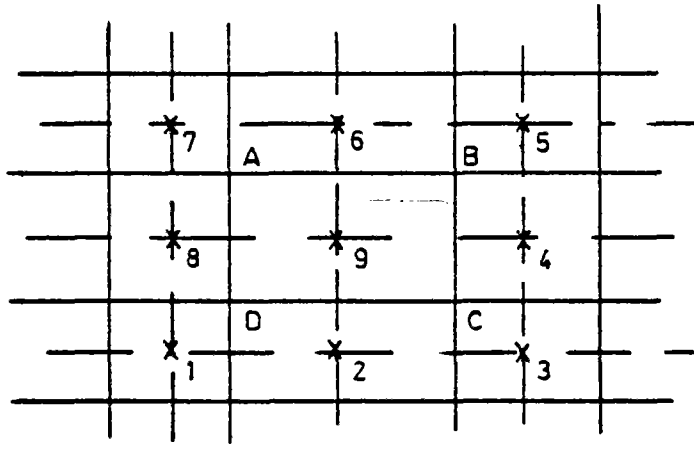


schéma 1

Considérons la maille ABCD qui entoure ce point.

Sur le bord AB nous pourrons écrire au choix :

$$\int_{AB} h \, \vec{\text{grad}} \, P^* . \vec{n} \, ds = \frac{1}{2} \left[(h \, \vec{\text{grad}} \, P^* . \vec{n})_A + (h \, \vec{\text{grad}} \, P^* . \vec{n})_B \right] \Delta_{AB}$$

ou bien

$$\int_{AB} h \, \vec{\text{grad}} \, P^* . n \, ds = (h \, \vec{\text{grad}} \, P^*)_{\frac{A+B}{2}} . \vec{n}_{\frac{A+B}{2}} \, \Delta_{AB}$$

La première écriture est plus satisfaisante sur le plan de l'interprétation de l'intégrale sous forme de trapèze (discrétisation d'une intégrale), la seconde l'est plus sur le plan de la définition de la normale au centre d'un segment.

Les deux écritures peuvent être utilisées, nous avons conservé la première.

Pour définir $\vec{\text{grad}}\, P^* . \vec{n}$ en A nous faisons intervenir les points de pression 6, 7, 8 et 9. De même en B interviennent les points 4, 5, 6 et 9. Toutefois là encore on peut envisager deux solutions :

$\vec{\text{grad}}\, P^* . \vec{n}$ se transforme facilement en une expression linéaire de $\frac{\partial P}{\partial \xi}$ et $\frac{\partial P}{\partial \eta}$.

Nous pouvons alors écrire $\frac{\partial P}{\partial \xi}$

- en A comme la moyenne de $\frac{P_6 - P_7}{\xi_A}$ et de $\frac{P_9 - P_8}{\xi_A}$

- en B comme la moyenne de $\frac{P_5 - P_6}{\xi_B}$ $\frac{P_4 - P_9}{\xi_B}$

La différence se situe au niveau de $\frac{\partial P}{\partial \eta}$. Nous pouvons en effet choisir soit de l'écrire :

* - en A comme la moyenne de $\frac{P_6 - P_9}{\eta}$ et de $\frac{P_7 - P_8}{\eta}$

- en B comme la moyenne de $\frac{P_5 - P_4}{\eta}$ et de $\frac{P_6 - P_9}{\eta}$

* soit de l'écrire directement en A et B comme $\frac{P_6 - P_9}{\eta}$

La première écriture conduit à la première discrétisation, et la seconde à la seconde discrétisation.

★ Calcul pratique de la pondération des deux discrétisations

On trouvera en [3] un exposé du principe de calcul des coefficients de la première discrétisation de la pression. Ce procédé a été appliqué dans notre cas, les seules modifications importantes étant l'introduction d'une hauteur d'eau dans les expressions à discrétiser et l'utilisation d'une grille à pas variables au lieu de pas constants.

L'introduction de la pondération entre les deux discrétisations (voir 2.4) est grandement facilitée par la remarque suivante :

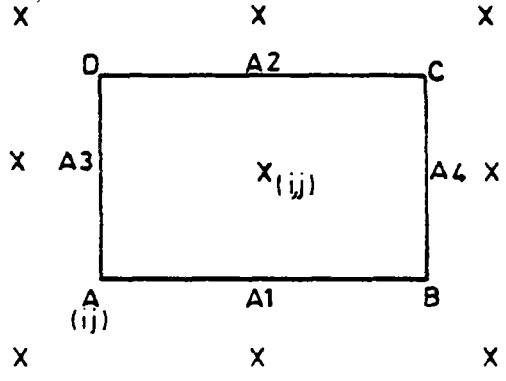


schéma 2

Considérons le point de pression (i,j). Il est entouré de 4 points de vitesses A, B, C, D. Nous avons vu que nous transformons l'intégrale de volume de la maille ABCD en une intégrale de contour :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(h\ \vec{\operatorname{grad}}\ P)\ d\omega = \int_{\Gamma} h\ \vec{\operatorname{grad}}\ P.\vec{n}\ ds$$

et que cette intégrale de contour se décompose elle-même en 4 intégrales A_1, A_2, A_3 et A_4 correspondant aux quatre faces de la maille. Considérons par exemple A_1 :

$$A_1 = \int_A^B h\ \vec{\operatorname{grad}}\ P.\vec{n}\ ds$$

nous avons $\vec{\operatorname{grad}}\ P \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial \xi} \cdot \xi_x + \dfrac{\partial P}{\partial \eta} \cdot \eta_x \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial \xi} \cdot \xi_y + \dfrac{\partial P}{\partial \eta} \cdot \eta_y \end{array} \right.$

$$\text{et } \vec{n} \left| \begin{array}{l} \dfrac{-\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} \\ \\ \dfrac{-\eta_y}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} \end{array} \right.$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}\ d\xi = \frac{1}{J}\sqrt{\eta_y^2 + \eta_x^2}\ d\xi$$

avec $J = \xi_x \cdot \eta_y - \eta_x \cdot \xi_y$

D'où : $A_1 = -h \left[\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \eta_x + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \eta_y\right] \cdot \frac{1}{J} \cdot d\xi$

avec la discrétisation compatible on écrit :

$$\left[\frac{\partial P}{\partial x}\ AB\right]_1 = \frac{1}{2}\ \left(\frac{\partial P}{\partial x} A + \frac{\partial P}{\partial x} B\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} A.\xi_x A + \frac{\partial P}{\partial x} B.\xi_x B + \frac{\partial P}{\partial \eta} A.\eta_x A + \frac{\partial P}{\partial \eta} B\, \eta_x B\right]$$

avec la seconde discrétisation on a :

$$\left[\frac{\partial P}{\partial x}\ AB\right]_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial P}{\partial \xi} A.\xi_x A + \frac{\partial P}{\partial \xi} B.\xi_x B\right] + \frac{\partial P}{\partial \eta}\ \frac{A+B}{2} \cdot \eta_x\ \frac{A+B}{2}$$

Ecrivons une pondération des deux termes sous la forme :

$$(1 - \lambda) \cdot \left[\frac{\partial P}{\partial x} AB\right]_1 + \lambda \cdot \left[\frac{\partial P}{\partial x} AB\right]_2$$

$$= \left[\frac{\partial P}{\partial x} AB\right]_1 - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} A.\xi_x A + \frac{\partial P}{\partial \xi} B.\xi_x B + \frac{\partial P}{\partial \eta} A.\eta_x A + \frac{\partial P}{\partial \eta} B.\eta_x B\right)$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} A.\xi_x A + \frac{\partial P}{\partial \xi} B.\xi_x B\right) + \lambda . \frac{\partial P}{\partial \eta} \frac{A+B}{2} . \eta_x \frac{A+B}{2}$$

$$= \left[\frac{\partial P}{\partial x} AB\right]_1 + \lambda \left[\frac{\partial P}{\partial \eta} \frac{A+B}{2} . \eta_x \frac{A+B}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial \eta} A.\eta_x A + \frac{\partial P}{\partial \eta} B.\eta_x B\right)\right]$$

En définitive l'introduction d'une pondération avec la seconde discrétisation se ramène uniquement à la discrétisation du facteur de λ du type précédent. Le terme centré en $\frac{A+B}{2}$ se discrétise aisément, quant aux termes en A et B il suffit de reprendre ce qui a été fait dans la discrétisation compatible.