HAL
open science

Modélisation du comportement d'un bicouche (élastique - viscoélastique) sous l'effet du retrait dans la couche viscoélastique

Hiam El Housseini

To cite this version:

Hiam El Housseini. Modélisation du comportement d'un bicouche (élastique - viscoélastique) sous l'effet du retrait dans la couche viscoélastique. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1994. Français. NNT : . tel-00523173

HAL Id: tel-00523173

https://pastel.hal.science/tel-00523173

Submitted on 4 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 22398(4)

THESE

PRESENTEE A

L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

PAR

Melle EL HOUSSEINI Hiam

Pour obtenir le diplôme de Doctorat
de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
Spécialité : Sciences et Technique du Bâtiment.

SUJET

MODELISATION DU COMPORTEMENT D'UN BICOUCHE (ELASTIQUE - VISCOELASTIQUE) SOUS L'EFFET DU RETRAIT DANS LA COUCHE VISCOELASTIQUE.

Soutenue le 8 Juillet 1994. (Rapport confidentiel jusqu'au 8 Juillet 1997.)

Composition du Jury:

MM.

D. FRANCOIS	: Président
O. ALLIX	: Rapporteur
S.M. TIJANI	: Rapporteur
A. LECLERC	: Examinateur
A. EHRLACHER	: Examinateur
J. RILLING	: Examinateur

15

REMERCIEMENTS

Les activités diverses et variées qui se sont conclues par la rédaction du présent document ont été essentiellement abritées par le centre de recherche de Marne-la-vallée du Centre Scientifique et Technique du Bâtiment.

Monsieur D. FRANCOIS, professeur à l'Ecole Centrale de Paris, m'a fait le grand honneur de présider le jury de soutenance, et je lui adresse ici mes remerciements les plus vifs.

Messieurs O. ALLIX et S.M. TIJANI, respectivement professeur à l'Ecole Normale Supérieure de Cachan et professeur à l'Ecole des Mines, ont consenti à jouer le rôle de rapporteurs de ce travail de thèse : qu'ils reçoivent ici l'expression de toute ma gratitude.

Madame A. ALAOUI, enseignante à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, et Monsieur A. EHRLACHER professeur à la même Ecole et directeur du laboratoire du CERAM, ont assumé la lourde tâche d'éclairer le chemin ténébreux ayant permis d'arriver au résultat : je ne sais comment les remercier à la hauteur de leur contribution.

L'industrie ne s'est pas désintéressée des modestes recherches dont le présent rapport constitue le compte rendu : Monsieur A. LECLERC, qui a bien voulu sacrifier le peu de temps que lui laissent ses multiples activités de directeur de Recherche-Développement à la société SOMMER pour contribuer à la qualité de cette étude et être présent au Jury, et Monsieur R. DUFOREST, qui a régulièrement suivi l'avancée des travaux, y apportant les éléments indispensables à leur traduction dans le domaine de la pratique, ont ainsi acquis le droit à ma reconnaissance pleine et entière.

Last but not least, Madame F. VETTER, chef de division, et Monsieur J. RILLING, directeur scientifique, ont été l'incarnation de l'implication du CSTB dans un travail qui, malgré mes limites, a pu se révéler suffisamment intéressant. Monsieur J. RILLING a en outre assumé, malgré ses obligations, le rôle de Directeur de Thèse avec tout son soutient scientifique et moral : ma gratitude est toute requise au CSTB à travers les deux représentants précités.

Mes remerciements infinis vont à tant d'autres qui, chacun selon ses capacités propres, ont contribué, non seulement à alléger les souffrances ayant accompagné le dur labeur que j'ai essayé de mener à bien, mais encore à insuffler quelque sérénité au climat studieux qui m'a enveloppée...

RESUME

Une modélisation de la courbure d'une dalle bicouche armée est présentée. La première couche est formée d'un matériau armé stable en voile de verre, à comportement élastique linéaire. La seconde est une couche en "matières plastiques" à base de PVC, dont le comportement est viscoélastique. L'instabilité de la structure est due au retrait induit dans la couche viscoélastique après la fabrication.

Le modèle utilisé est le Modèle Multiphasique des Matériaux Multicouches appelé "modèle M4". Il propose une modélisation alternative des structures multicouches, par rapport aux deux grands courants, bidimensionnels et tridimensionnels. Une solution analytique, à coût numérique réduit, est proposée.

Le comportement de la couche viscoélastique est identifié à un modèle de Zener. Les différentes caractéristiques du modèle sont déterminées, en se basant sur des séries d'essais expérimentaux simples, inspirés par le comportement réel du matériau.

Le problème à résoudre est donc celui de l'évolution de la géométrie de ce bicouche (Elastique - Viscoélastique) avec le temps, ainsi que le rôle de chaque paramètre dans cette évolution.

ABSTRACT

This paper presents a modelling of the bending of a reinforced double-layer floor. The first layer is made of a solid glass reinforced material with a linear elastic behaviour. The second layer is a PVC-based "plastic" layer whose behaviour is viscoelastic. The instability of the structure is caused by the shrinkage induced in the viscoelastic layer after manufacture.

The model used is the Multiphasic Multilayer Material Model called "M4 model". It provides an alternate modelling of the multilayer structures respect to the two main currents, namely the two-dimensional and three-dimensional currents. An analytical solution including a reduced numerical cost is proposed.

The behaviour of the viscoelastic layer is identified with a Zener model. The different characteristics of the model are determined based on the series of a simple experimental tests inspired by the actual behaviour of the material.

The problem to be solved is therefore the evolution with the time of the geometry of this two-layer material (Elastic - Viscoelastic), as well as the influence of each parameter on this evolution.

NOTATIONS

t : Temps.

Δt : Pas de temps.

ε^{el} : Déformation élastique.

ε_v : Déformation visqueuse.

ε_r : Déformation de retrait.

ε_{rel} : Déformation de relaxation.

$\dot{\varepsilon}_r$: Vitesse de déformation de retrait.

σ : Contrainte.

K_i : Raideur membranaire de la couche i.

K : Raideur de cisaillement d'interface.

E_i : Module d'Young de la couche i.

G_{xy} : Module de cisaillement.

η : Viscosité.

ℓ : Longueur totale.

ℓ' : Longueur de contact.

e_i : Epaisseur de la couche i.

V : Vitesse de traction.

$\tilde{u}^i$: Tenseur des déplacements dans le plan d'un point de la couche i.

u_3^i : Déplacement vertical d'un point de la couche i.

$\tilde{D}^{i,i+1}$: Tenseur de discontinuité tangente d'interface entre les couches i et i+1.

$D_3^{i,i+1}$: Discontinuité normale d'interface entre les couches i et i+1.

$\tilde{\tilde{N}}^i$: Tenseur des efforts membranaires de la couche i.

$\tilde{\tau}^{i,i+1}$: Tenseur des efforts de cisaillement d'interface entre les couches i et i+1.

$v^{i,i+1}$: Effort normal d'interface entre les couches i et i+1.

$\bar{\mu}^{i,i+1}$: Tenseur des moments de flexion de l'interface entre les couches i et i+1.

$\theta^{i,i+1}$: Moment de torsion de l'interface entre les deux couches i et i+1.

$\bar{F}^i$: Tenseur des efforts externes appliqués dans le plan du multicouche.

F_3^i : Efforts externes perpendiculaires au plan du multicouche (Poids).

$\bar{T}^i$: Tenseur des efforts externes appliqués sur le bord dans le plan du multicouche.

T_3^i : Efforts externes appliqués sur le bord, perpendiculaires au plan du multicouche.

R : Réaction du sol.

SOMMAIRE.

CHAPITRE I: INTRODUCTION. **1**

I- PRESENTATION DU SUJET. 1

II- BUT DE L'ETUDE. 1

II-1: Cause du désordre. 2

II-2: Première hypothèse: Modélisation d'un bicouche. 3

II-3: Origine du problème. 4

II-4: Deuxième hypothèse: Déformations planes. 5

II-5: Choix du modèle. 5

III- DEROULEMENT DE L'ETUDE. 6

1° PARTIE: MODELISATION DES MATERIAUX MULTICOUCHES.

CHAPITRE II: ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE. **10**

I- LES POLYMERES. 10

II- LES STRATIFIES. 11

CHAPITRE III: LE MODELE M4. ..... **16**

I- MODELE MULTIPHASIQUE DES MATERIAUX MULTICOUCHES (M4). 16

I-1: Modèle M4 général. 17

I-2: Modèle M4 simplifié. 21

I-3: Comparaison entre le modèle général et le modèle simplifié. 25

2° PARTIE : COMPORTEMENT "ELASTIQUE".

CHAPITRE IV: MODELISATION MULTIPHASIQUE D'UN BICOUCHE "CURLING" POSITIF. 28

I- INTRODUCTION. 28

II- PRESENTATION. 28

III- RESOLUTION. 30
- 1- Partie en contact avec le sol. 30
- 2- Partie soulevée du sol. 37
- 3- Calcul de la longueur de contact. 41
- 4- Forme de la déformée. 44

IV- APPLICATION: 46
- 1- Caractéristiques des couches. 46
- 2- Longueur de contact. 47
- 3- Déformée. 48
- 4- Rôle de la raideur d'interface. 49
- 5- Commentaires. 51

CHAPITRE V: MODELISATION MULTIPHASIQUE D'UN BICOUCHE. "CURLING" NEGATIF. 52

I- INTRODUCTION. 52

II- CRITERES DE DECOLLEMENT 52

III- RESULTATS. 53
- III-1: Décollement Total. 53
- III-2: Décollement Partiel. 54

IV- APPLICATION. 56
- IV-1: Décollement Total. 57
  - 1- Critères de décollement. 57
  - 2- Déformée. 57
- IV-2: Décollement Partiel. 58
  - 1- Longueur de contact. 58

2- Déformée. 60
3- Commentaires. 61

IV-3: Comparaison entre Curling positif et négatif. 61

3° PARTIE : COMPORTEMENT "VISCOELASTIQUE"

CHAPITRE VI: MODELISATION DU COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE. 64

I- EXPERIMENTATION. 64

1- Première série expérimentale:
Traction à vitesse de déplacement constante. 64

2- Deuxième série expérimentale:
Relaxation - Equilibre à l'infini. 66

3- Troisième série expérimentale:
Recouvrance - Ou retrait après fabrication. 68

II- MODELISATION. 69

1- Modèles rhéologiques analogiques. 70

2- Modèle de Zener. 71

3- Calcul des grandeurs caractéristiques du modèle de Zener. 73

III- CONCLUSION. 77

CHAPITRE VII: MODELISATION MULTIPHASIQUE "VISCOELASTIQUE". 78

I- INTRODUCTION. 78

II- METHODE DE CALCUL. 79

III- ALGORITHME. 82

IV- MODELISATION M4. 83

IIV-1: Résolution. 83

1- Partie en contact avec le sol. 83

2- Partie soulevée du sol. 86

3- Calcul de la longueur de contact. 88

4- Forme de la déformée. 89

IV-2: Application. 91
1- Caractéristiques. 91
2- Organigramme du calcul "Viscoélastique". 92
3- Comparaison entre le calcul "Elastique" et le calcul "Viscoélastique". 93

IV-3: Commentaires. 95

4° PARTIE : ANALYSE.

CHAPITRE VIII : ETUDE DE LA SENSIBILITE DES PARAMETRES. 97

I- ROLE DU POIDS PROPRE. 98

II- ROLE DU MODULE D'YOUNG DE LA COUCHE CALANDREE. 100

III- ROLE DU MODULE D'YOUNG DE LA COUCHE ARMEE 102

IV- ROLE DE L'EPAISSEUR DE LA COUCHE CALANDREE. 104

V- ROLE DE L'EPAISSEUR DE LA COUCHE ARMEE. 107

CHAPITRE IX: VALIDATION EXPERIMENTALE. 110

I- INTRODUCTION. 110

II- MESURES EXPERIMENTALES. 110
II-1: Les essais mesurés immédiatement après la fabrication. 110
II-2: Les essais mesurés après la stabilisation du retrait. 111

III- VALIDATION. 113
III-1: Caractéristiques. 113
III-2: Calcul Elastique. 114
III-3: Calcul Viscoélastique. 115

IV- CONCLUSION. 115

CHAPITRE X: CONCLUSION. **117**

1- RECAPITULATF. 117

I-1: Etude bicouche. 117

I-2: Calcul Elastique - Calcul Viscoélastique. 117

I-3: Sensibilité des paramètres. 119

II- PERSPECTIVES. 119

II-1: Dalle multicouche. 119

II-2: Rôle de la température. 120

II-3: Vieillissement des matériaux. 120

II-4: Etude en grandes perturbations. 121

ANNEXE A: REVETEMENTS DE SOL PLASTIQUES. 122

ANNEXE B: CALCUL ELASTIQUE DU CURLING NEGATIF. 129

ANNEXE C: COEFFICIENTS DU CALCUL ELASTIQUE. 148

ANNEXE D: COEFFICIENTS DU CALCUL VISCOELASTIQUE. 155

LISTE BIBLIOGRAPHIQUE. 160

CHAPITRE I

INTRODUCTION

I-PRESENTATION DU SUJET

Nous présentons, par ce travail, une mise au point d'un modèle mécanique adapté à l'analyse du comportement d'un bicouche formé d'une couche élastique et d'une couche viscoélastique. Cette structure est soumise à son poids propre et à une déformation de retrait imposée dans la couche viscoélastique. Le modèle élaboré nous permet de prévoir l'évolution , dans le temps, de la géométrie du bicouche soumis à ces chargements.

II-BUT DE L'ETUDE

Les produits concernés par notre étude sont les revêtements de sol plastiques (Annexe A) formés, principalement, d'une
•couche d'usure ou couche de surface transparente, conçue surtout pour résister au poinçonnement,
•couche armée (voile de verre imprégnée PVC), jouant un rôle important dans la stabilité dimensionnelle du multicouche dans son plan,
•sous-couche calandrée destinée à augmenter la rigidité du multicouche,
•couche d'envers, en mousse, généralement.

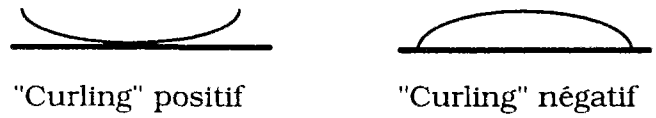
Les différentes couches sont à base de chlorure de polyvinyle (PVC).

Le but de notre étude est l'aide à la conception d'une nouvelle gamme de ces revêtements, sous forme de dalles carrées, posées (non collées) sur le sol, industriellement connues sous le nom de "Dalles Plombantes Amovibles".

La conception de ces dalles (choix des couches, leurs positions, leurs épaisseurs, ...) a été, jusqu'aujourd'hui, empirique, basée sur l'expérience des industriels. Ces derniers ont, cependant, observé l'apparition, avec le

temps, d'une incurvation de ces revêtements par rapport à leur plan initial. Ils ont attribué à ce phénomène le terme anglais "Curling". Il peut apparaître au bout d'une à plusieurs semaines après la fabrication du revêtement et cause un problème d'aspect et de fonctionnement.

Le "Curling" peut être "positif", c'est-à-dire tourné vers le haut, ou "négatif", vers le bas (fig. I-1).

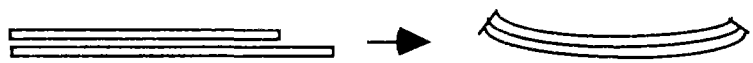


(I-1): Aspects du Curling

Afin de pouvoir modéliser ce désordre mécanique, dans le but de le limiter, il faut commencer par analyser son origine et connaître les paramètres qui l'influencent.

II-1:Cause du désordre observé

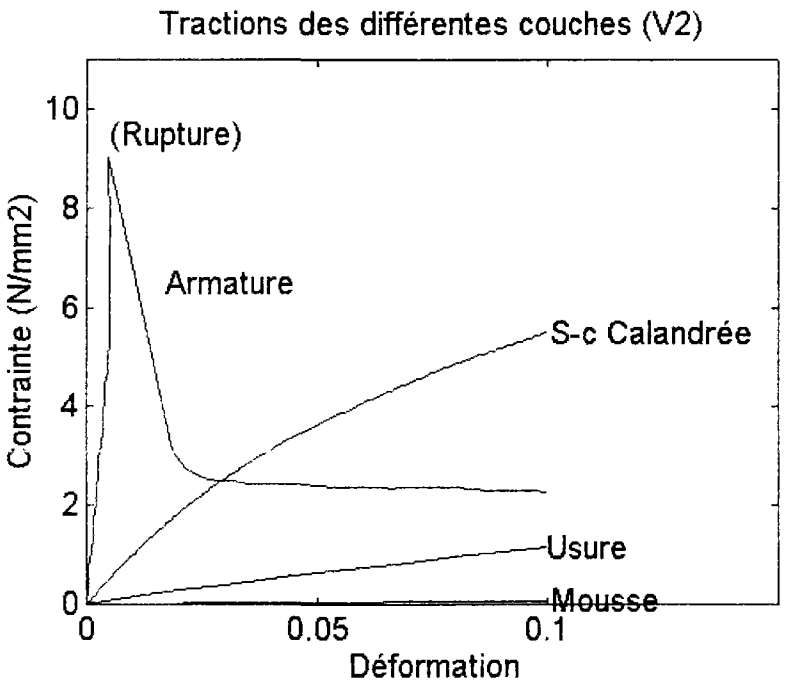
Partant d'un état initial plan, imposons un rétrécissement unidirectionnel dans le plan d'une des couches d'une structure formée de deux couches parfaitement adhérentes. Ceci entraîne une incurvation du bicouche par rapport à son plan de référence.



Le même phénomène peut être observé pour une structure formée de plusieurs couches dont l'une est stable (la couche armée), les autres, mises de part ou d'autre de la première, sont soumises à des déformations imposées, de valeurs différentes. La géométrie finale du multicouche dépendra de l'équilibre interne établi.

II-2:Première hypothèse : Modélisation d'un bicouche

Des essais de traction à vitesse de déplacement constante, réalisés sur les différentes couches isolées du composite et dont les résultats (Contraintes - Déformations) sont portés sur une même échelle, dans le graphique (fig. I-2), montrent que la couche armée et la sous-couche calandrée jouent un rôle mécanique plus important que celui des autres couches.



(I-2): Courbes (Contrainte-Déformation) de traction des 4 couches du revêtement.

Ajoutons que le processus de fabrication par calandrage de la sous-couche y crée des contraintes internes plus importantes que celles crées dans les autres couches visqueuses du revêtement obtenues par enduction (Annexe A), la soumettant ainsi à une déformation imposée jouant un rôle plus déterminant ; et que la couche armée, ajoutée au revêtement pour limiter ses déformations dans le plan, se distingue des autres par sa stabilité dimensionnelle.

L'étude du multicouche complet étant assez complexe, nous faisons une première hypothèse simplificatrice dans laquelle nous proposons de

modéliser un bicouche formé d'une armature stable et d'une couche calandrée en PVC, à déformation imposée et d'étudier le Curling résultant.

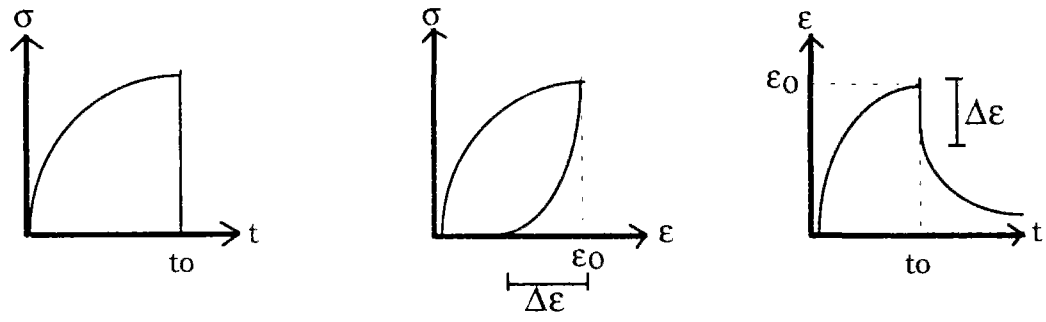
Des essais expérimentaux (détaillés au chapitre VI) montrent que la couche armée suit un comportement élastique linéaire, tandis que la calandrée présente un comportement visqueux (La contrainte dans le matériau est fonction de la vitesse de déformation).

II-3:Origine du problème

Les processus de fabrication, décrits dans l'annexe A, soumettent les différentes couches, ainsi que le multicouche, à une série de contraintes mécaniques et thermiques. A sa sortie de la chaîne de fabrication, la dalle libre n'est plus soumise à ces contraintes. La contrainte totale dans le revêtement s'annule; de même que dans chacune des deux couches.

La sous-couche, comme tout matériau ayant un comportement solide visqueux, siège d'un effet de mémoire, présente une recouvrance de la déformation après cessation de la contrainte.

La recouvrance (fig. I-3) est définie comme étant la variation de la déformation en fonction du temps, à contrainte nulle. Ce phénomène est industriellement appelé, Retrait après fabrication.



(I-3): Schéma de Recouvrance d'un matériau viscoélastique.

Désignons par t_0 l'instant où la dalle sort de sa chaîne de fabrication. A t_0, la sous-couche est munie d'une histoire de déformation $\varepsilon(t)$, fonction, bien évidemment, de son histoire de chargement au temps $t<t_0$.

A t_0, la dalle est plane. Les deux couches (Armature et sous-couche) ont des dimensions égales. L'armature garde ensuite ses dimensions; tandis que la sous-couche tend à se rétrécir. L'adhérence entre les couches explique l'apparition d'une incurvation de la structure (Curling), fonction du temps.

Dans la suite, nous noterons $\varepsilon_r(t)$ la déformation de retrait subie par la couche visqueuse à partir de l'instant t_0 ($\varepsilon_r(t_0)=0$).

II-4:Deuxième hypothèse : Déformations planes

Les contraintes mécaniques, exercées sur la sous-couche lors de sa fabrication, sont surtout dans le sens de la chaîne (Sens longitudinal). Le retrait mesuré à la sortie de la fabrication est beaucoup plus important dans le sens longitudinal que dans le sens transversal. Nous pouvons donc adopter l'hypothèse de déformations planes, en considérant que les déformations dans le sens transversal du plan de la dalle sont nulles. Cette hypothèse nous permet d'effectuer une modélisation bidimensionnelle.

II-5:Choix du modèle

Parmi les modèles de calcul des structures composites multicouches, que nous exposerons dans le chapitre II, nous choisissons le Modèle Multiphasique des Matériaux Multicouches, appelé modèle M4, élaboré, en 1993, au laboratoire CERAM (Centre d'Enseignement et de Recherche en Analyse des Matériaux) de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

M4 parait bien adapté au problème posé. Son application, en hypothèse de déformations planes, sur un bicouche, nous donnent des solutions analytiques de la description de la géométrie du Curling positif et négatif.

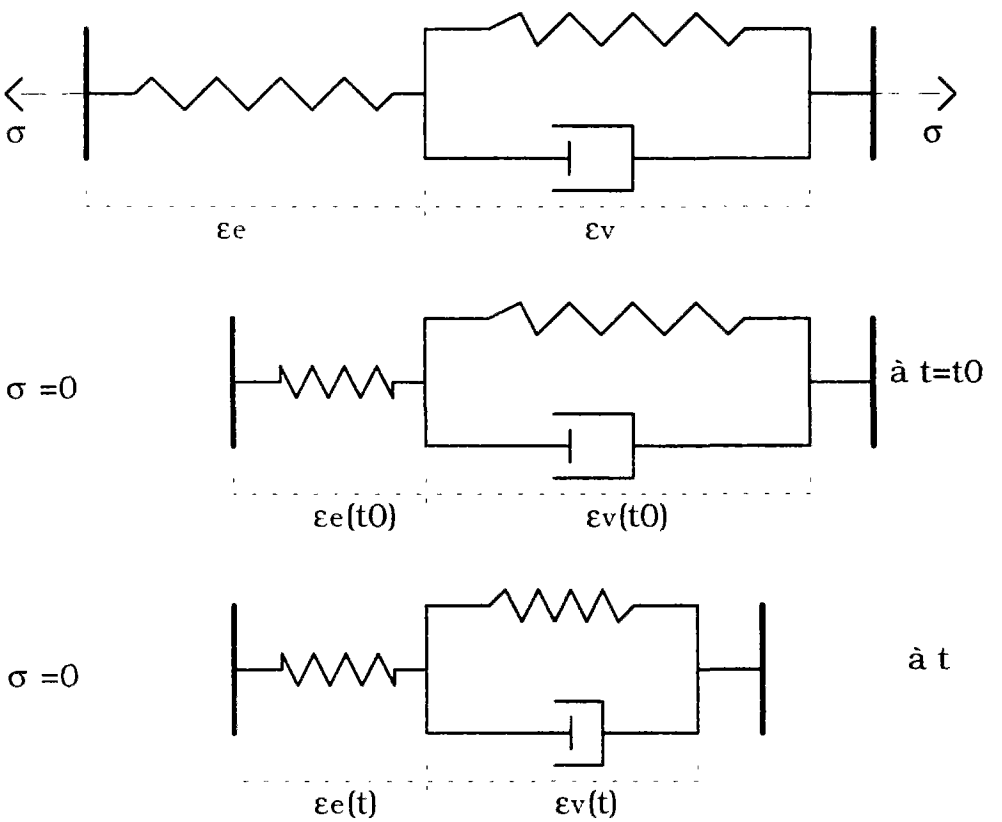
III-DEROULEMENT DE L'ETUDE

La structure à étudier est donc celle d'un bicouche (Elastique - Viscoélastique) soumis aux chargements suivants:

-Le poids propre de la dalle (Perpendiculaire au plan de la dalle).

-La déformation de retrait imposée dans le plan de la couche visqueuse suivant le sens de sa fabrication.

Les différents essais détaillés dans le chapitre VI montrent que le comportement de cette dernière peut être décrit à l'aide du modèle viscoélastique de Zener. Ce modèle est formé de deux "branches" en série, l'une ayant un comportement élastique, l'autre un comportement viscoélastique. La déformation totale de la sous-couche est égale à la somme de la déformation élastique de la branche 1 et de la déformation viscoélastique de la branche 2. A sa sortie de la chaîne de fabrication, c'est-à-dire, au temps t_0, la contrainte dans le matériau est relâchée. La partie élastique prend instantanément ses dimensions à charge nulle, tandis que la déformation visqueuse, que nous noterons ε_v, diminue avec le temps, jusqu'à l'équilibre à charge nulle.



La déformation de retrait observée n'est donc que la différence entre la déformation visqueuse à l'instant t et celle à l'instant t_0 :

$$\varepsilon_r(t) = \varepsilon_v(t) - \varepsilon_v(t_0) \qquad \textit{(E: I-1)}$$

Nous ferons notre étude en deux parties.

Dans la première partie, nous considérerons un comportement élastique linéaire pour les deux couches. La déformation totale dans le bicouche résulte de :

- La déformation dans la couche stable

$$\sigma = E.\varepsilon$$

- La somme de la déformation finale et de la déformation de retrait imposée dans la couche visqueuse

$$\sigma = E.(\varepsilon - \varepsilon_r)$$

Si à la sortie de la chaîne de fabrication, nous isolions la couche visqueuse, nous observerions une déformation progressive de retrait sous contrainte nulle. Notons $\varepsilon_r^0(t)$ cette histoire de déformation (négative).

Nous ferons, dans cette partie, un calcul itératif sur le temps, dans lequel nous considérerons que l'histoire de la déformation imposée dans la couche visqueuse du bicouche est la même que celle observée sur cette couche isolée, après sa sortie de la chaîne de fabrication : $\varepsilon_r^0(t)$. A chaque pas de temps, la contrainte dans la couche calandrée sera sous la forme :

$$\sigma(\underline{x},t) = E.\left(\varepsilon(\underline{x},t) - \varepsilon_r^0(t)\right)$$

$$\text{avec} \quad \frac{\partial \varepsilon_r^0(t)}{\partial x} = 0$$

Ce premier calcul sera appelé "Elastique".

Dans la seconde partie, nous prendrons en compte l'influence de la contrainte dans la couche calandrée sur la déformation de retrait. En effet, les équations de comportement du modèle rhéologique de Zener montrent

que l'évolution de la déformation visqueuse est fonction de la contrainte membranaire dans le matériau :

$$\dot{\varepsilon}_v(\underline{x},t) = f(\varepsilon_v(\underline{x},t),\sigma(\underline{x},t)) \qquad \textit{(E: I-2)}$$

$\underline{x}$ représente la position d'un point matériel M de la dalle.

Nous déduisons des deux relations (E: I-1) et (E: I-2) que le niveau de contrainte dans la couche calandrée influence l'évolution de la déformation de retrait :

$$\dot{\varepsilon}_r(\underline{x},t) = f(\varepsilon_r(\underline{x},t),\sigma(\underline{x},t)) \qquad \textit{(E: I-3)}$$

La déformation de retrait devient alors fonction de la position du point M appartenant à la dalle:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r(\underline{x},t)$$

Le calcul dans cette partie sera, de même, itératif sur le temps. A chaque pas de temps (très court par rapport au temps caractéristique du matériau), nous considérerons que le comportement de la sous-couche calandrée est élastique linéaire, avec une déformation de retrait imposée, fonction de $\underline{x}$:

$$\sigma(\underline{x},t) = E.(\varepsilon(\underline{x},t) - \varepsilon_r(\underline{x},t))$$

$$\text{avec} \quad \frac{\partial \varepsilon_r(\underline{x},t)}{\partial x} = f(\varepsilon_r(\underline{x},t),\sigma(\underline{x},t))$$

A chaque pas de temps, la loi de comportement viscoélastique réactualisera, suite à la relation qui lie la contrainte à la déformation visqueuse, la fonction de retrait avant de la réutiliser dans le calcul itératif.

Ce second calcul sera appelé "Viscoélastique".

PREMIERE PARTIE

MODELISATION DES MATERIAUX MULTICOUCHES

CHAPITRE II

ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

I-LES POLYMERES

De nombreuses études ont été faites sur les propriétés mécaniques et le comportement rhéologique des matières plastiques. La majeure partie de ces études traitent le polymère à l'état fondu liquide, ou au cours de sa transition vitreuse. Citons en particulier, les travaux d'AGASSANT, AVENAS et SERGENT au Cemef (Centre de Mise en Forme des Matériaux de l'Ecole des Mines de Paris) [2]. Ils ont, en premier, modélisé les différents processus de fabrication des polymères, puis ont traité le comportement viscoélastique des polymères fondus. Ces derniers, jusque-là, ont été considérés comme un liquide visqueux newtonien.

Les propriétés mécaniques du polymère à l'état solide dépendent, essentiellement, des deux aspects suivants :
1-La nature chimique du polymère à l'état fondu (unités monomères, structure macromoléculaire, masse molaire, ..).
2-Le mode de fabrication et l'histoire de son passage de l'état fondu à l'état solide.

Ce qui explique l'orientation majeure des études vers les polymères fondus.

Très peu d'études, en mécanique des matériaux, ont été faites sur les polymères à l'état solide. PEREZ [43] a suivi une approche originale, en abordant les matériaux polymères amorphes avec une démarche propre à la métallurgie solide, tout en reliant les mouvements, dans l'état solide à ceux responsables de la transition vitreuse. Il a traité des phénomènes très divers présentés par ces matériaux, en se basant sur des propriétés mécaniques: Plasticité, Evolution du module dynamique avec la température, Fluage, Relaxation, Vieillissement physique...

Dans notre étude, nous allons considérer le polymère comme un solide viscoélastique ayant le comportement d'un modèle de Zener. Les caractéristiques du modèle sont calculées en se basant sur des essais expérimentaux "simples" et "significatifs" de l'histoire de chargement des structures étudiées.

II-LES STRATIFIES

De façon générale, les matériaux composites résultent de l'association de matériaux différents, par leur nature chimique et par leur forme [10]. Lorsque ces matériaux sont empilés sous forme de plis, le composite est dit "stratifié".

La modélisation du comportement d'un stratifié peut être envisagée différemment selon l'application et les exigences requises. Des soucis de temps de calcul et de disponibilité des outils peuvent nous orienter vers des simplifications.

Nous pouvons choisir de n'en faire aucune. Le problème est alors traité, d'une façon traditionnelle, dans sa géométrie tridimensionnelle. Des codes de calcul par éléments finis ou par différences finis sont alors utilisés. Ceci implique un temps de calcul important et des précautions à la présentation des champs de contraintes tridimensionnels. Ce type de calcul sert souvent de point de comparaison et de validation pour d'autres modèles. Il est difficile de comparer et de classer toutes les méthodes tridimensionnelles. Bon nombre d'entre elles consistent à calculer au voisinage des bords les contraintes tridimensionnelles d'arrachement et de cisaillement. De telles approches ont été proposées par différents auteurs, comme ENGRAND [17], PAGANO [40], PUPO et EVENSON [46], RAJU JOHN et CREWS [47].

Les autres approches traditionnelles sont les modèles bidimensionnels de plaques et de coques . La plus ancienne des théories est celle de LOVE-KIRCHHOFF [32] postulant l'hypothèse suivante : Les particules, situées avant déformation sur une normale au feuillet moyen, restent après déformation sur une normale à ce feuillet déformé. D'autres théories, en particulier celle de REISSNER-MINDLIN [50][38], modifient cette hypothèse cinématique en supposant que les sections normales au plan ne sont plus astreintes à le rester au cours de la déformation.

D'autres corrections ont été faites sur la théorie cinématique de KIRCHHOFF-LOVE en proposant des cinématiques plus variées par VALID [54][55], CHENG [6], LEVINSON [37], REDDY [49] et RYCHTER [51].

Dans le cas des structures monocouches, ces théories de plaques et de coques étaient jugées satisfaisantes. Appliquées classiquement aux stratifiés (TSAÏ et HAHN [53]), elles le paraissent moins. Des phénomènes locaux apparaissent près des bords. Depuis 1970, des évaluations de l'erreur commise en utilisant la théorie de KIRCHHOFF-LOVE pour les stratifiés ont été faites. Citons notamment les travaux de KOITER et SIMMONDS [26], DANIELSON [8] et LADEVEZE [28] [29] qui ont estimé l'erreur sur la solution intérieure, les conditions aux limites n'étant prises en compte qu'en moyenne.

LADEVEZE [30][31] a estimé l'erreur commise sur l'ensemble de la plaque, en utilisant la théorie de KIRCHHOFF-LOVE ou celle de REISSNER-MINDLIN avec correction des effets de bords. Ces erreurs sont proches de celles estimées par DESTUYNDER [11] dans le cas de la théorie de KIRCHHOFF-LOVE. Ces travaux ont été complétés par PECASTAINGS [42] et VAN DER HEYDEN [56][57].

Parallèlement à ces études, des techniques de calcul des effets locaux, près du bord, ont été développées. Les études sur les effets de bords dans les coques stratifiées sont nombreuses. PIPES et PAGANO [45] furent parmi les premiers à étudier les phénomènes de contraintes interlaminaires par la méthode de différences finies, en déclenchant une série d'études sur l'existence ou non d'une singularité de contrainte. Les réponses à cette question ont été apportées grâce aux travaux de ALTUS et al. [4], WANG et CROSSMAN [58], YEH et TADJBAKHSH [61], DESTUYNDER STACKLER et OUSSET [12], LEGUILLON et SANCHEZ-PALENCIA [34].

Cette singularité des contraintes a entraîné une série d'études sur le plan du délaminage des stratifiés. Le problème de la poutre en extension traité par PIPES et PAGANO [45] a servi de référence. Mais le traitement de situations plus complexes a nécessité l'emploi de méthodes plus générales comme celle de la couche limite : A la solution intérieure, proposée par la théorie des plaques, en contraintes planes, se superpose une solution localisée permettant de satisfaire exactement les conditions limites. Les champs supposés plans, compte tenu des faibles épaisseurs, deviennent tridimensionnels au voisinage des bords libres (bords, trous, ..).

Les premiers qui ont montré la voie à suivre semblent être FRIEDRICHS et DRESSLER [20], en étudiant des coques homogènes et isotropes par une méthode asymptotique. ENGRAND [16] et LECUYER [34] ont calculé les contraintes d'arrachement et de cisaillement transverses pour un empilement quelconque. La solution intérieure additionnée à la solution extérieure vérifie les conditions aux limites.

D'autres auteurs au L.M.T de Cachan, comme ALLIX [3] et DAUDEVILLE [9], ont repris la méthode de couche limite en traitant différemment le problème extérieur. Par des développements en séries de Fourrier, le problème tridimensionnel à traiter est décomposé en plusieurs problèmes bidimensionnels, de petites tailles. Une étude comparative entre ces études 2D et 3D a été menée par PERRET, LECUYER, ALLIX et ENGRAND [44].

Une autre approche alternative des deux courants bidimensionnels et tridimensionnels a été proposée par les modélisations multiphasiques. Elles permettent de contracter les dimensions du modèle en considérant qu'en un point M de la structure, on a plusieurs milieux différents (Chaque point M du multicouche est formé de n particules, n étant le nombre de couches).

GARETT et BAILEY [21] ont introduit le modèle multiphasique nommé Shear-Lag Analysis qui contracte le matériau multicouche en un matériau uniaxial. Ils ont appliqué leur modèle à l'étude de la fissuration transverse des matériaux composites. En faisant l'équilibre des contraintes pour les plis pris séparément, ils ont introduit une expression du cisaillement $\tau(x)$ à l'interface des couches 1 et 2, proportionnelle à la discontinuité des champs de déplacements :

$$\tau(x) = K\left(u_1(x) - u_2(x)\right) \qquad \textit{(E: II-1)}$$

FLAGGS [19] a présenté une modélisation bidimensionnelle qui fait une extension du modèle uniaxial de GARETT et BAILEY. Sa modélisation permet de prendre en compte les efforts membranaires dans le plan des couches.

Ces deux modèles, uniaxial et bidimensionnel, restent très simples pour traiter des cas généraux. Leur généralisation retombe dans les modèles tridimensionnels de PAGANO.

PAGANO [40] a utilisé les mêmes approches en supposant une forme simple des champs de contraintes tridimensionnels. Il en déduit des efforts intérieurs généralisés qui comprennent, pour chaque couche, des efforts de

plaque. Il a ajouté à ces efforts, des efforts intérieurs d'interface entre deux couches voisines. Le modèle de PAGANO est certes très riche; mais la prise en compte des termes de flexion de chaque couche le rend assez lourd à utiliser, surtout dans le cas des stratifiés non symétriques.

EHRLACHER et NACIRI [15] ont adopté ces même approches multiphasiques en les généralisant dans un modèle qu'ils ont appelé Modèle Multiphasique des Matériaux Multicouches (M4). Géométriquement bidimensionnel, il permet de prendre en compte les chargements et efforts hors plan, tout en introduisant "naturellement" les efforts d'interface.

Le modèle M4 fait apparaître des raideurs d'interface en cisaillement et en flexion. Ces coefficients sont en cours d'identification au laboratoire CERAM, dans le cadre d'une thèse qui paraîtra prochainement.

CARON [5] s'est basé sur le modèle M4 "Simplifié", avec des chargements dans le plan de la plaque multicouche, afin de modéliser la fissuration transverse en fatigue dans les stratifiés. Son application uniaxiale du modèle M4 "simplifié" a permis de retrouver les équations du modèle Shear-Lag Analysis.

Nous allons utiliser, dans notre étude, le modèle M4 "simplifié". La complexité de cette étude réside dans la non symétrie de la structure et dans le comportement non linéaire des matériaux. Ce modèle paraît bien adapté pour prendre en compte des déformations imposées dans le plan et des chargements hors du plan, tout en donnant, directement, l'expression des efforts d'interface. Cette application sera la première application en viscoélasticité du modèle M4.

De nombreuses études ont été faites sur les composites viscoélastiques. Les méthodes proposées pour la formulation des lois de comportement des composites sont basées soit sur l'étude du matériau en le considérant comme homogène et isotrope, soit sur la connaissance du comportement de chaque phase et sur la prévision du comportement de l'ensemble en appliquant des règles d'homogénéisation (KRUSH [27], HAMELIN [23], CORNE [7]).

JOUVE et KHALIDJ [24] ont étudié le comportement viscoélastique de chaque couche en se basant sur la loi de mélange, puis pour un ensemble de

strates formant une section de plaque multicouche. Ils proposent une solution semi-analytique en discrétisant suivant l'espace et le temps, les équations différentielles obtenues.

Nous allons voir que l'avantage de notre démarche est que les solutions que nous obtenons sont analytiques.

CHAPITRE III

LE MODELE M4

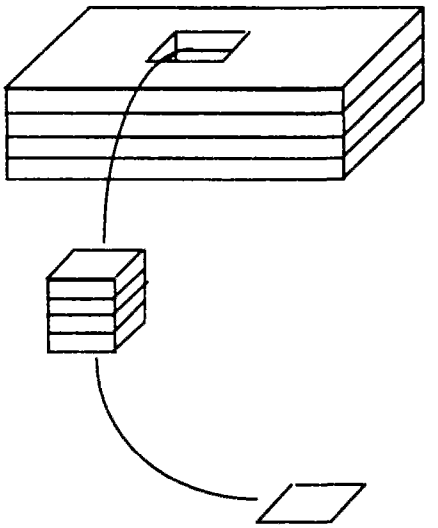
I- MODELE MULTIPHASIQUE DES MATERIAUX MULTICOUCHES (M4)

Cette méthode, élaborée par EHRLACHER et NACIRI [15] en 1993, propose une Modélisation Alternative des structures multicouches par rapport à deux grands courants:

-Les modèles Bidimensionnels de plaque qui s'avèrent incapables de prédire correctement les efforts d'interface entre les couches.

-Les modèles Tridimensionnels des structures.

Son originalité réside dans le fait que le multicouche est considéré comme une surface de R^3, et en chaque point de la surface (point de matière), il y a n particules de matériaux (n = nombre de couches).



Chaque particule a son propre champs de déplacements et les mouvements rigidifiants sont choisis de manière à redonner l'épaisseur et l'ordre

d'empilement des couches. Cette modélisation, basée sur le principe des puissances virtuelles, fait apparaître des efforts d'interface entre les couches, importants pour décrire une majeure partie des problèmes posés pour les multicouches composites.

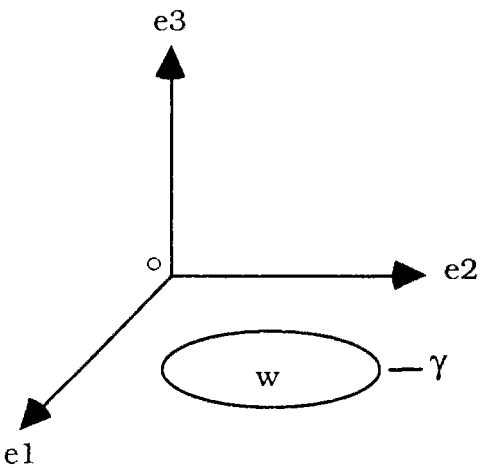
Nous exposons, dans le paragraphe suivant, le modèle M4 qui a donné naissance, suite à des hypothèses simplificatrices, à un modèle M4 "Simplifié" qui se prête, en particulier, à l'obtention de solutions analytiques.

I-1: Modèle M4 général

Pour les présentations futures du modèle et des différentes applications, nous allons adopter l'architecture suivante :

1-Géométrie

Les objets sont des surfaces de R^3 décrites par un domaine ω du plan $X_3=0$ de bord γ. La surface est supposée plane dans sa configuration de référence. Le repère choisi est le repère orthonormé $(0,e_1,e_2,e_3)$.



2-Mouvement

L'hypothèse adoptée est celle des petites perturbations. Les gradients des champs sont donc petits devant 1, et les déplacements sont petits par rapport aux dimensions de ω dans le plan $(0,e_1,e_2)$. La configuration actuelle

peut alors être confondue avec la configuration de référence (Description Lagrangienne).

Chaque point de matière M de coordonnées (X_1,X_2) de ω comporte n particules. Le mouvement de chaque particule est donné par son déplacement :

$$U(X_1,X_2)=\left\{\underline{U}^i(X_1,X_2), i\in[1,n];(X_1,X_2)\in\omega;\underline{U}^i(X_1,X_2)\in R^3\right\}$$

Le déplacement est divisé en :

$$\underline{U}^i(X_1,X_2)=\tilde{U}^i(X_1,X_2)+U_3^i(X_1,X_2)\underline{e}_3 \qquad \textit{(E: III-1)}$$

$\tilde{U}^i(X_1,X_2)$: Déplacement dans le plan.

$U_3^i(X_1,X_2)$: Déplacement perpendiculaire au plan.

[Nous laisserons le soin aux intéressés par la description de ce modèle de consulter la référence [15] "Cours de Modélisation des Matériaux Composites" enseigné par le Professeur EHRLACHER à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussés.

Un point important doit être signalé: le concept des efforts d'interface qui est à la base du Modèle Multiphasique des Matériaux Multicouches est défini de la façon suivante:
Pour "mesurer" les efforts à l'interface entre les couches p et p+1 , qui sont des efforts intérieurs, un champs de vitesses virtuelles est construit de façon à les faire "travailler" eux seulement. Il suffit, pour cela, de choisir un champs de vitesses virtuelles qui rigidifie séparément les blocs de couche 1 à p et p+1 à n.]

3-Déformations

Les déformations généralisées sont :

<u>En translation</u>

-La déformation membranaire de la couche i, de composantes dans le plan $(0,e_1,e_2)$:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_\alpha^i}{\partial X_\beta} + \frac{\partial U_\beta^i}{\partial X_\alpha}\right) \qquad \alpha,\beta \in [1,2] \qquad \textit{(E: III-2)}$$

-La discontinuité tangente d'interface entre les couches i,i+1 dans le plan $(0,e_1,e_2)$:

$$\tilde{D}^{i,i+1} = \tilde{U}^{i,i+1} + \frac{e^{i+1}}{2}\,\text{grãd}\,U_3^{i+1} - \tilde{U}^i + \frac{e^i}{2}\,\text{grãd}\,U_3^i \qquad \textit{(E: III-3)}$$

Avec : $\text{grãd}\,U_3^i = \frac{\partial U_3^i}{\partial x_1}\bar{e}_1 + \frac{\partial U_3^i}{\partial x_2}\bar{e}_2$

e^i: épaisseur de la couche i.

-La discontinuité normale d'interface entre les couches i,i+1:

$$D_3^{i,i+1} = U_3^{i+1} - U_3^i \qquad \textit{(E: III-4)}$$

<u>En rotation</u>

-La discontinuité de rotation dans le plan $(0,e_1,e_2)$:

$$w^{i,i+1} = r\left(\tilde{U}^{i+1}\right) - r\left(\tilde{U}^i\right) \qquad \textit{(E: III-5)}$$

Avec :

$$r\left(\tilde{U}^i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_2^i}{\partial X_1} - \frac{\partial U_1^i}{\partial X_2}\right) \qquad \textit{(E: III-6)}$$

-La discontinuité de rotation orthogonale au plan $(0,e_1,e_2)$:

$$\tilde{\Theta}^{i,i+1} = \text{grad}\,U_3^{i+1} - \text{grad}\,U_3^i \qquad \textit{(E: III-7)}$$

4-Contraintes

Les efforts internes sont :

-L'effort membranaire de la couche i : $\tilde{\tilde{N}}^i$

-L'effort de cisaillement d'interface i,i+1 : $\tilde{\tau}^{i,i+1}$

-L'effort normal d'interface i,i+1 : $\nu^{i,i+1}$

-Le moment de torsion de l'interface i,i+1 : $\theta^{i,i+1}$

-Le moment de flexion de l'interface i,i+1 : $\tilde{\mu}^{i,i+1}$

5-Equations d'équilibre

L'application du principe des puissances virtuelles nous conduit aux équations d'équilibre et aux conditions aux limites entre les efforts internes et les efforts externes (§6):
(P.V.I. + P.V.E. = 0 : quasi-statique)

$$\forall X_1, X_2 \in \omega$$

$$\left[\begin{array}{ll} \operatorname{div}\tilde{\tilde{N}}^i + \tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i} - \frac{1}{2}\operatorname{rot}\left(\left(\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}\right)\underline{e}_3\right) + \tilde{F}^i = 0 & (E: III-8) \\ -\operatorname{div}\left(\tilde{\mu}^{i,i+1} - \tilde{\mu}^{i-1,i} - \frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right) + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} + F_3^i = 0 & (E: III-9) \end{array}\right.$$

$\tilde{F}^i$: Efforts exterieurs appliqués dans le plan ω.

F_3^i : Efforts exterieurs perpendiculaires à ω, suivant $\underline{e}_3$.

6-Conditions aux limites

Ce sont des conditions périphériques externes au composite.

<u>En contraintes</u>

$$\forall X_1, X_2 \in \gamma:$$

$$\left[\begin{array}{ll} -\tilde{\tilde{N}}^i.\underline{n} - \frac{1}{2}\left(\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}\right)\underline{e}_3 \wedge \underline{n} + \tilde{T}^i = 0 & (E: III-10) \\ \left(\tilde{\mu}^{i,i+1} - \tilde{\mu}^{i-1,i} - \frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right).\underline{n} + T_3^i = 0 & (E: III-11) \end{array}\right.$$

$\tilde{T}^i$: Efforts extérieurs appliqués sur le bord γ dans le plan ω.

T_3^i: Efforts extérieurs appliqués sur le bord γ suivant $\underline{e}_3$ perpendiculaire au plan ω.

<u>En déplacements</u>

$\underline{U}^i = \underline{U}_d^i$ (Imposés par la structure, les symétries, ...).

Les tenseurs des efforts internes sont des tenseurs symétriques. Nous avons en chaque point (X_1,X_2) de ω : 3n+6(n-1) composantes d'efforts internes et autant de déformations.

Le comportement linéaire général du Multicouche Multiphasique ferait intervenir une "matrice" : 9n-6 x 9n-6. Cela semble peu opératoire.

Notons que, par changement d'échelle, en intégrant, par couche, les équations d'équilibre du milieu 3D, les auteurs [15] ont montré que l'on peut éliminer des équations le moment de torsion d'interface. Le modèle reste, cependant, assez complexe et il est nécessaire, pour notre application, d'adopter la version M4 Simplifié.

I-2: <u>Modèle M4 Simplifié</u>

L'idée de base de la simplification consiste à introduire une liaison entre les couches pour ce qui concerne le déplacement orthogonal au plan du multicouche :

$$U_3^i = U_3 \qquad \forall i \in \{1,n\}$$

Ceci revient à imposer une rigidité normale d'interface infinie.

Le nombre de champs scalaires cinématiques est ainsi réduit de 3n à 2n+1. Les équations d'équilibre sont alors, elles aussi, réduites à 2n+1 et ne font intervenir que les efforts membranaires $\tilde{\tilde{N}}^i$ et les cisaillements d'interface $\tilde{\tau}^{i,i+1}$:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{div}\tilde{\tilde{N}}^i + \tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i} + \tilde{F}^i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}\left[\operatorname{div}\frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right) + F_3^i\right] = 0 \end{array}\right.$$

(E: III - 12)

(E: III - 13)

Les conditions aux limites en contraintes s'écrivent :

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{\tilde{N}}^i.\underline{n} = \tilde{T}^i \\ \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right).\underline{n} - T_3^i\right] = 0 \end{array}\right.$$

(E: III - 14)

(E: III - 15)

Dans le modèle M4 Simplifié, les efforts normaux d'interface n'apparaissent plus. Le changement d'échelle pourra se faire en négligeant les contributions des composantes σ_{33} dans l'expression de l'énergie élastique en contrainte 3D. L'expression de l'énergie élastique en contrainte, associée au modèle M4 Simplifié, donne une expression dans laquelle les efforts membranaires sont découplés des efforts d'interface.

Cela conduit à l'existence, pour chaque couche, d'un tenseur de raideur membranaire d'ordre 4 tel que :

$$\tilde{\tilde{N}} = \tilde{\tilde{\tilde{\tilde{K}}}}^i : \tilde{\tilde{\varepsilon}}^i$$

(E: III-16)

Si nous considérons la raideur membranaire d'un empilement de couches identiques, nous remarquons que $\tilde{\tilde{\tilde{\tilde{K}}}}^i$ s'identifie à la raideur membranaire "classique" de la couche i.

Une dernière simplification consiste à supposer que les efforts de chaque interface peuvent être découplés. Nous considérons que pour chaque interface i,i+1 il existe un tenseur d'ordre 2 noté $\tilde{\tilde{K}}_\tau^{i,i+1}$ tel que :

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}^{i,i+1} &= \tilde{\tilde{K}}_\tau^{i,i+1}.\tilde{D}^{i,i+1} \\ &= \tilde{\tilde{K}}_\tau^{i,i+1}\left(\tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^i + \frac{e^i + e^{i+1}}{2}\,\tilde{\text{grad}}\,U_3\right) \end{aligned}$$

(E: III-17)

Remarquons que ce tenseur $\tilde{\tilde{K}}_\tau^{i,i+1}$ ressemble à la raideur d'interface K introduite par GARETT et BAILEY (E: II-1) dans leur étude uniaxiale d'un multicouche symétrique [0,90]. Ces auteurs ont donné une expression

simple du coefficient K, en supposant que tout le cisaillement est pris par la couche 90 :

$$K = \frac{G_{xy}}{d}$$

G_{xy} étant le module de cisaillement de la couche 90, d son épaisseur.

KAMIMURA [25] considère que la raideur d'interface $K^{i,i+1}$ entre deux couches i et i+1 est égale à :

$$\frac{1}{K^{i,i+1}} = \frac{1}{\frac{G^{i}_{xy}}{e^{i}}} + \frac{1}{\frac{G^{i+1}_{xy}}{e^{i+1}}} \qquad \textit{(E: III-18)}$$

Avec e^i et e^{i+1} les demi-épaisseurs des couches i et i+1.

Le changement d'échelle conduit aux résultats de KAMIMURA .

CARON [5] a effectué un changement d'échelle et a déterminé numériquement le coefficient K, par le calcul par éléments finis d'un modèle tridimensionnel, d'un multicouche carbone-epoxy T300/174 de séquence [0,90]. Il a remarqué que ce coefficient semble indépendant de la position d'un point quelconque de l'interface. (Indépendant de x dans son étude uniaxiale). Ce qui rejoint l'hypothèse de GARETT et BAILEY (E: II-1).

Dans notre étude, nous allons considérer que :

- La raideur d'interface est une constante

$$\tilde{K}^{i,i+1}_{\tau} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

- La valeur de cette raideur est égale à celle proposée par KAMIMURA (E:III-16).

Cette dernière considération n'est pas déterminante. Nous allons voir que, dans nos applications, les résultats sont très peu sensibles à la variation de la valeur de K.

Il reste, cependant, à souligner qu'il est possible de déterminer les efforts normaux d'interface en reprenant les équations d'équilibre du modèle M4 général :

$$\operatorname{div}\frac{e_i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}+\tilde{\tau}^{i-1,i}\right)+v^{i,i+1}-v^{i-1,i}+F_3^i=0 \qquad \textit{(E: III-19)}$$

Cette équation doit être comprise, néanmoins, au sens des distributions car les efforts de cisaillement d'interface peuvent être discontinus :

La dernière condition aux limites du modèle M4 Simplifié

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}+\tilde{\tau}^{i-1,i}\right).\underline{n}-T_3^i\right]=0$$

assure l'équilibre au bord en "moyenne".

Pour pouvoir assurer cet équilibre "localement "par

$$\frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}+\tilde{\tau}^{i-1,i}\right).\underline{n}-T_3^i=0 \qquad \forall\, i=1,n$$

il faut admettre que $\tilde{\tau}$ puisse être discontinu au bord de la plaque et que v puisse admettre un effort concentré de type Dirac sur ce bord :

$$\frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}+\tilde{\tau}^{i-1,i}\right).\underline{n}+\delta_b\left(v^{i,i+1}-v^{i-1,i}\right)-T_3^i=0 \qquad \textit{(E: III-20)}$$

Ce dernier point est très intéressant car cet effort concentré au bord du multicouche peut constituer un critère d'initiation du délaminage.

I-3: Comparaison entre le modèle général et le modèle simplifié

Déformations	$\tilde{\tilde{\varepsilon}}^i, \tilde{D}^{i,i+1}, D_3^{i,i+1}, w^{i,i+1}, \theta^{i,i+1}$
Contraintes	$\tilde{\tilde{N}}^i, \tilde{\tau}^{i,i+1}, v^{i,i+1}, \tilde{\mu}^{i,i+1}, \theta^{i,i+1}$
Equations d'équilibre	$\left[\begin{array}{l} \operatorname{div}\tilde{\tilde{N}}^i + \tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i} - \frac{1}{2}\operatorname{rot}\left(\left(\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}\right)\underline{e}_3\right) + \tilde{F}^i = 0 \\ -\operatorname{div}\left(\tilde{\mu}^{i,i+1} - \tilde{\mu}^{i-1,i} - \frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right) + v^{i,i+1} - v^{i-1,i} + F_3^i = 0 \end{array}\right.$
Conditions aux limites	$\left[\begin{array}{l} -\tilde{\tilde{N}}^i.\underline{n} - \frac{1}{2}\left(\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}\right)\underline{e}_3 \wedge \underline{n} + \tilde{T}^i = 0 \\ \left(\tilde{\mu}^{i,i+1} - \tilde{\mu}^{i-1,i} - \frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right).\underline{n} + T_3^i = 0 \end{array}\right.$ $\underline{U}^i = \underline{U}_d^i$
Régularité	Régularité des champs.

Modèle M4 Général.

Déformations	$\tilde{\tilde{\varepsilon}}^i, \tilde{D}^{i,i+1}$
Contraintes	$\tilde{\tilde{N}}^i, \tilde{\tau}^{i,i+1}, v^{i,i+1}$
Equations d'équilibre	$\left[\begin{array}{l} \operatorname{div}\tilde{\tilde{N}}^i + \tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i} + \tilde{F}^i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}\left[\operatorname{div}\left(\frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right) + F_3^i\right] = 0 \end{array}\right.$
Conditions aux limites	$\left[\begin{array}{l} \tilde{\tilde{N}}^i.\underline{n} = \tilde{T}^i \\ \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right).\underline{n} - T_3^i\right] = 0 \end{array}\right.$ $\underline{U}^i = \underline{U}_d^i$
Comportement	$\tilde{\tilde{N}} = \tilde{\tilde{\tilde{K}}}^i : \tilde{\tilde{\varepsilon}}^i$ $\tilde{\tau}^{i,i+1} = \tilde{\tilde{K}}_\tau^{i,i+1}.\tilde{D}^{i,i+1}$
Définition des efforts normaux	$\operatorname{div}\left(\frac{e_i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right) + v^{i,i+1} - v^{i-1,i} + F_3^i = 0$
Régularité	Discontinuité possible de $\tilde{\tau}$ avec des Dirac associés aux efforts normaux

Modèle M4 Simplifié.

C'est le modèle M4 Simplifié que nous allons utiliser dans la modélisation du "Curling". Nous traitons, en détail, dans le chapitre IV qui suit, la modélisation élastique d'une structure bicouche présentant un "Curling" positif, où les bords de la dalle sont soulevés, une partie reste en contact avec le sol. Nous montrons, dans le chapitre V, les résultats d'un calcul élastique du "Curling" négatif dans lequel la dalle est courbée vers le bas et les bords restent reposés sur le sol ainsi qu'une partie de la dalle, médiane. Dans le chapitre VIII, nous traitons le cas du "Curling" positif en viscoélasticité.

Ces applications illustreront bien, par leurs résultats, l'intérêt du modèle M4 Simplifié.

DEUXIEME PARTIE

COMPORTEMENT "ELASTIQUE"

CHAPITRE IV

MODELISATION MULTIPHASIQUE D'UN BICOUCHE "CURLING" POSITIF

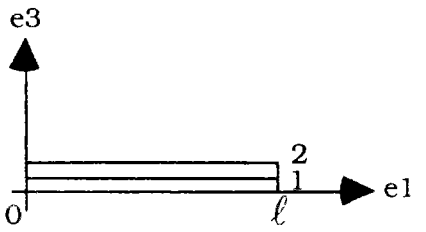
I-INTRODUCTION

S'appuyant sur le modèle M4 Simplifié, décrit dans le chapitre précédent, ce chapitre traitera le Curling d'un bicouche dont la couche inférieure est stable et la couche supérieure soumise à une déformation de retrait imposée.

L'exemple pris est celui d'une dalle formée de deux matériaux isotropes et posée librement sur le sol. Le rôle du sol apparaît dans la réaction qu'il exerce sur la dalle. Nous faisons une hypothèse de déformations planes suivant e_2 (fig. IV-1). Ainsi le problème se ramène à une étude dans le repère (e_1, e_3). Nous considérons que le comportement des deux matériaux est élastique linéaire.

II-PRESENTATION

Nous considérons, par symétrie, la moitié d'une dalle de longueur 2ℓ (fig. IV-1) dont la couche 2 subit un retrait = $\varepsilon_r^0(t)$.

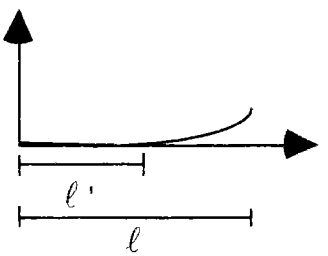


(IV-1): Schéma du bicouche (1:Elastique - 2:Viscoélastique)

La dalle est soumise à :
1-Son poids propre.
2-Une déformation de retrait dans la couche 2.

La déformation différentielle des deux couches collées entraîne une courbure de la dalle. Le Curling ainsi décrit est positif, la concavité de l'incurvation étant toujours située du côté de la couche qui subit le retrait. Cette courbure entraîne le soulèvement de la dalle dont une partie, de longueur ℓ' (Fonction de la valeur de la déformation de retrait), que nous appellerons "longueur de contact", reste en contact avec le sol.

Pour résoudre ce problème analytiquement, nous allons considérer la dalle déjà soulevée d'une longueur (ℓ-ℓ'):



La géométrie divise cette étude en deux parties :

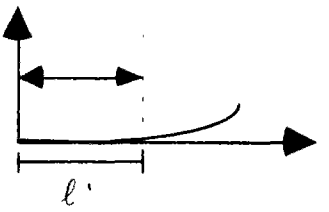
1- $x \in [0, \ell']$: La dalle est en contact avec le sol.
Les déplacements verticaux sont nuls.

2- $x \in [\ell', \ell]$: La dalle est soulevée.
La réaction du sol est nulle.

Reliées entre elles par les conditions de continuité au point d'abscisse ℓ'.

III- RESOLUTION

1-Partie en contact avec le sol: $[0,\ell']$



Suivons, pour cette première application, la même architecture que le modèle exposé au chapitre précédent.

Dans cette partie, les déplacements verticaux sont nuls : $U_3 = 0$.

1-Géométrie

Etant en hypothèse de déformations planes, toutes les déformations suivant e_2 sont prises égales à 0 : $U_2^i = 0$.
Nous considérons l'axe x de vecteur unitaire e_1.

2-Mouvement

En chaque "point de matière" de l'axe x, nous avons <u>deux</u> particules. Le mouvement de chaque particule est donné par son déplacement suivant l'axe x ($U_3 = 0$) :

$$\underline{u}^1(x) = \tilde{u}^1(x) = \begin{bmatrix} u_1^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}^2(x) = \tilde{u}^2(x) = \begin{bmatrix} u_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3-Déformations

-Déformations membranaires :

Couche1 : $\tilde{\tilde{\varepsilon}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{du_1^1}{dx} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Couche2 : $\tilde{\tilde{\varepsilon}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{du_1^2}{dx} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

-Discontinuité tangente d'interface 1,2 :

$$\tilde{D}_1^{1,2} = \begin{bmatrix} D^{1,2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les gradients des déplacements verticaux étant nuls.

4-Contraintes

-Efforts membranaires :

Couche1 : $\tilde{\tilde{N}}^1$
Couche2 : $\tilde{\tilde{N}}^2$

-Effort de cisaillement d'interface 1,2 : $\tilde{\tau}^{1,2}$

(L'effort de cisaillement entre le sol et la dalle est négligeable).

-Efforts normaux d'interfaces :

L'effort normal exercé par la couche 2 sur la couche 1 :
(Couche1, Couche2) : $v^{1,2}$

L'effort normal exercé par la couche 1 sur le sol :
(Support, Couche1) : $v^{0,1}$

5-Comportement

-Comportement membranaire:

Ce qui compte tenu des symétries de $\tilde{\tilde{N}}$ et $\tilde{\tilde{\varepsilon}}$ se réduit à :

Couche1 : $\tilde{\tilde{N}}^1 = \tilde{\tilde{\tilde{\tilde{K}}}}^1 : \tilde{\tilde{\varepsilon}}^1$

$$\begin{bmatrix} N_{11}^1 \\ N_{22}^1 \\ N_{12}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{12}^1 & K_{22}^1 & 0 \\ 0 & 0 & K_{66}^1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{du_1^1}{dx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} N_{11}^1 = K_{11}^1 . \frac{du_1^1}{dx} & (E: IV - 1) \\ N_{22}^1 = K_{12}^1 . \frac{du_1^1}{dx} & (E: IV - 2) \end{cases}$$

La couche 2 est soumise à une déformation de retrait ε_r^0 sous contrainte nulle. La déformation élastique membranaire dans cette couche est due à la déformation finale de celle-ci diminuée de la déformation de retrait. D'où :

Couche2 : $\tilde{\tilde{N}}^2 = \tilde{\tilde{\tilde{\tilde{K}}}}^2 : \tilde{\tilde{\varepsilon}}^{2^{el}}$

$$\begin{bmatrix} N_{11}^2 \\ N_{22}^2 \\ N_{12}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ K_{12}^2 & K_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & K_{66}^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{du_1^2}{dx} - \varepsilon_r^0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} N_{11}^2 = K_{11}^2 . \left(\frac{du_1^2}{dx} - \varepsilon_r^0 \right) & (E: IV - 3) \\ N_{22}^2 = K_{12}^2 . \left(\frac{du_1^2}{dx} - \varepsilon_r^0 \right) & (E: IV - 4) \end{cases}$$

-Comportement de cisaillement d'interface 1,2 :

$$\tilde{\tau}^{1,2} = \tilde{\tilde{K}}_\tau . \tilde{D}^{1,2}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1^{1,2} \\ \tau_2^{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_1^2 - u_1^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \tau_1^{1,2} = K\left(u_1^2 - u_1^1\right) & (E: IV - 5) \\ \tau_2^{1,2} = 0 & (E: IV - 6) \end{cases}$$

6-Equations d'équilibre

Les premières équations d'équilibre du modèle M4 "Simplifié" (E: III-12) donnent des relations entre les efforts membranaires, les efforts de cisaillement d'interface et les efforts externes appliqués dans le plan. Ces derniers sont nuls. Ce qui nous donne le premier système d'équation d'équilibre :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \tilde{\tilde{N}}^1 + \tilde{\tau}^{1,2} = 0 \\ \operatorname{div} \tilde{\tilde{N}}^2 - \tilde{\tau}^{1,2} = 0 \end{cases} \qquad \textit{(E: IV-7)}$$

La deuxième équation d'équilibre du modèle (E: III-13) établie une relation qui lie la somme des efforts de cisaillement d'interface entre les deux couches, sur toutes les couches, aux efforts exterieurs appliqués verticalement (Poids propres) :

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\operatorname{div} \frac{e_i}{2} \left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i} \right) + F_3^i \right) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{e_1 + e_2}{2} \operatorname{div}\left(\tilde{\tau}^{1,2} \right) + F_3^1 + F_3^2 = 0 \qquad \textit{(E: IV-8)}$$

Avec :

e_1 : épaisseur de la couche 1

e_2 : épaisseur de la couche 2

F_3^1 : poids surfacique de la couche 1

F_3^2 : poids surfacique de la couche 2

$V^{0,1}$: effort exercé par la couche 1 sur le sol.

<u>Pour simplifier ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes</u> :

$u_1^1 = u_1$

$u_1^2 = u_2$

$N_{11}^1 = N_1$

$N_{11}^2 = N_2$

$K_{11}^1 = K_1$

$K_{11}^2 = K_2$

7-Conditions aux limites

La symétrie de la dalle par rapport à la verticale nous donne les premières conditions aux limites en déplacement :

En x=0 $\quad u_1(x) = 0.$
$\quad u_2(x) = 0.$

La continuité des contraintes et des déplacements au point ℓ' entre la partie en contact avec le sol et la partie soulevée nous donne :

En $x=\ell'$ Continuité de $N_1(x)$
$N_2(x)$
$u_1(x)$
$u_2(x)$

8-Résolution des équations d'équilibre

Le premier système d'équations d'équilibre de M4 Simplifié (E: IV-7) nous donne, en remplaçant les efforts membranaires et les efforts de cisaillement d'interface par leurs valeurs en fonction des déplacements :

$$\begin{cases} K_1 \dfrac{d^2u_1}{dx^2} + K(u_2 - u_1) = 0 \\ K_2 \dfrac{d^2u_2}{dx^2} - K(u_2 - u_1) = 0 \end{cases} \qquad \textit{(E: IV-9)}$$

Posons :

$u_1 = \alpha_1 e^{wx}$

$u_2 = \alpha_2 e^{wx}$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} K_1\,\alpha_1\,w^2 + K(\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \\ K_2\,\alpha_2\,w^2 - K(\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} (K_1\,w^2 - K)\alpha_1 + K\,\alpha_2 = 0 \\ K\,\alpha_1 + (K_2\,w^2 - K)\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} K_1 w^2 - K & K \\ K & K_2 w^2 - K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour que le système d'équations possède une solution non nulle, il faut que le déterminant de la première matrice soit nul.

$$(K_1 w^2 - K)(K_2 w^2 - K) - K^2 = 0$$

$$w^2\left[K_1 K_2 w^2 - K(K_1 + K_2)\right] = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} w^2 = 0 \Rightarrow w = 0 \\ w = \pm\sqrt{\dfrac{K(K_1 + K_2)}{K_1 K_2}} \end{cases}$$

Les quatre valeurs possibles de w, dont deux sont nulles et les deux autres de signes opposés, orientent vers une expression des déplacements des deux particules de M, suivant x, sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_1 = A_1 \cosh wx + B_1 \sinh wx + D_1 x + E_1 \\ u_2 = A_2 \cosh wx + B_2 \sinh wx + D_2 x + E_2 \end{cases}$$

cosh et sinh étant respectivement les fonctions cosinus et sinus hyperbolique.

Avec, à déterminer, huit constantes, se basant sur les conditions suivantes:

1- Dans le premier système d'équations d'équilibre (E: IV-9), les termes constants et les termes en x ne figurent pas, ceci implique que :

$D_1 = D_2 \qquad\qquad E_1 = E_2$

2- Remplaçons u_1 et u_2 par leur valeur dans le système d'équations (E: IV-9) :

$$\begin{cases} K_1[A_1 w^2 \cosh wx + B_1 w^2 \sinh wx] + K[(A_2 - A_1)\cosh wx + (B_2 - B_1)\sinh wx] = 0 \\ K_2[A_2 w^2 \cosh wx + B_2 w^2 \sinh wx] - K[(A_2 - A_1)\cosh wx + (B_2 - B_1)\sinh wx] = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} [K_1 A_1 w^2 + K(A_2 - A_1)]\cosh wx + [K_1 B_1 w^2 + K(B_2 - B_1)]\sinh wx = 0 \\ [K_2 A_2 w^2 - K(A_2 - A_1)]\cosh wx + [K_2 B_2 w^2 - K(B_2 - B_1)]\sinh wx = 0 \end{cases}$$

Pour que chaque équation soit identiquement nulle pour tout x, il faut que :

$$\begin{cases} K_1 A_1 w^2 + K(A_2 - A_1) = 0 \\ K_2 A_2 w^2 - K(A_2 - A_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1 B_1 w^2 + K(B_2 - B_1) = 0 \\ K_2 B_2 w^2 - K(B_2 - B_1) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$A_2 = A_1\left[1 - \frac{K_1}{K} w^2\right] = -A_1 \frac{K_1}{K_2}$$

$$B_2 = B_1\left[1 - \frac{K_1}{K} w^2\right] = -B_1 \frac{K_1}{K_2}$$

3- Le problème représente la moitié d'une dalle, la symétrie nous impose :

$$u_1(-x) + u_1(x) = 0 \qquad \forall x$$

$$u_2(-x) + u_2(x) = 0 \qquad \forall x$$

$\Rightarrow$

$$2A_1 \cosh wx + 2E_1 = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = 0, E_1 = 0$$

$$2A_2 \cosh wx + 2E_2 = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \quad A_2 = 0, E_2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} u_1 = B_1 \sinh wx + D_1 x \\ u_2 = B_2 \sinh wx + D_1 x \end{cases}$$

En remplaçant B_2 par sa valeur en fonction de B_1, nous obtenons :

$$\begin{cases} u_1(x) = B_1 \sinh wx + D_1 x & (E: IV\text{-}10) \\ u_2(x) = -B_1 \dfrac{K_1}{K_2} \sinh wx + D_1 x & (E: IV\text{-}11) \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

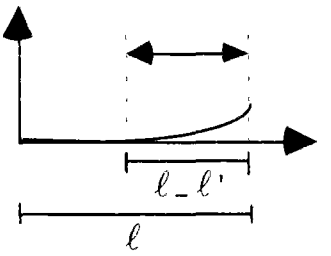
$$\begin{cases} N_1(x) = K_1 \left[B_1 w \cosh wx + D_1 \right]_{22} & (E: IV\text{-}12) \\ N_2(x) = K_2 \left[-B_1 \dfrac{K_1}{K_2} w \cosh wx + D_1 - \varepsilon_r^0 \right] & (E: IV\text{-}13) \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\tau^{1,2}(x) = -B_1 K_1 w^2 \sinh wx \qquad (E: IV\text{-}14)$$

Les deux coefficients B_1 et D_1 restent à trouver dans l'expression des déplacements des deux particules du point M(x), des efforts membranaires dans chacune des couches et du cisaillement interlaminaire à l'interface, dans la partie en contact avec le sol. Ils sont déterminés par la continuité des champs avec la partie soulevée du sol.

2-<u>Partie soulevée du sol</u>: [ℓ',ℓ]



Toutes les variables dans cette partie sont distinguées de celles de la partie précédente par un astérisque (*).

1-Mouvement

Les déplacements sont divisés en déplacements dans le plan de la dalle (suivant $\underline{e}_1$) et déplacements verticaux (suivant $\underline{e}_3$).

$$\underline{u}^{1*}(x) = u_1^* \underline{e}_1 + u_3^* \underline{e}_3$$

$$\underline{u}^{2*}(x) = u_2^* \underline{e}_1 + u_3^* \underline{e}_3$$

2-Déformations

-Déformations membranaires :

$$\text{Couche1 :} \quad \tilde{\tilde{\varepsilon}}_1^* = \begin{bmatrix} \frac{du_1^*}{dx} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Couche2 :} \quad \tilde{\tilde{\varepsilon}}_2^* = \begin{bmatrix} \frac{du_2^*}{dx} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-Discontinuité tangente d'interface 1,2 :

$$\tilde{D}_1^{1,2*} = D_1^{1,2*} \underline{e}_1 = (u_2^* - u_1^* + \frac{e_1 + e_2}{2} \operatorname{grad} u_3^*)\underline{e}_1 \qquad (E: IV\text{-}15)$$

3-Contraintes

-Efforts membranaires:

Couche1 : $\tilde{\tilde{N}}^{1*}$

Couche2 : $\tilde{\tilde{N}}^{2*}$

-Effort de cisaillement d'interface 1,2: $\tilde{\tau}^{1,2*}$

-Efforts normal d'interface 1,2: $v^{1,2*}$

L'effort normal $v^{0,1*}$exercé par la couche 1 sur le sol est nul.

4-Comportement

-Comportement membranaire :

$$\text{Couche1 :} \quad \tilde{\tilde{N}}^{1*} = \tilde{\tilde{\tilde{\tilde{K}}}}^1 : \tilde{\tilde{\varepsilon}}^{1*}$$

$$N_1^* = K_1 \frac{du_1^*}{dx} \qquad (E: IV\text{-}16)$$

L'effort membranaire, dans la couche 2, est fonction de la déformation finale dans cette couche, diminuée de la déformation de retrait :

$$\text{Couche2 :} \quad \tilde{\tilde{N}}^{2*} = \tilde{\tilde{\tilde{K}}}^{2} : \tilde{\tilde{\varepsilon}}^{2*}$$

$$N_2^* = K_2\left(\frac{du_2^*}{dx} - \varepsilon_r^0\right) \qquad \textit{(E: IV-17)}$$

-Comportement de cisaillement d'interface 1,2 :

$$\tilde{\tau}^{1,2*} = \tilde{\tilde{K}}_\tau . \tilde{D}^{1,2*}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1^{1,2*} \\ \tau_2^{1,2*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} D^{1,2*} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \tau_1^{1,2*} = K\left(u_2^* - u_1^* + \dfrac{e_1 + e_2}{2} \operatorname{grad} u_3^*\right) \\ \tau_2^{1,2*} = 0 \end{cases} \qquad \textit{(E: IV-18)}$$

5-Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre (E: III-12) du modèle M4 Simplifié nous donnent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \tilde{\tilde{N}}^{1*} + \tilde{\tau}^{1,2*} = 0 \\ \operatorname{div} \tilde{\tilde{N}}^{2*} - \tilde{\tau}^{1,2*} = 0 \end{cases} \qquad \textit{(E: IV-19)}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} K_1 \dfrac{d^2 u_1^*}{dx^2} + \tau^{1,2*} = 0 \\ K_2 \dfrac{d^2 u_2^*}{dx^2} - \tau^{1,2*} = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation d'équilibre (E: III-13) nous donne en sommant sur les deux couches :

$$\frac{e_1 + e_2}{2} \operatorname{div} \tau^{1,2*} + F_3^1 + F_3^2 = 0 \qquad \textit{(E: IV-20)}$$

6-Conditions aux limites

Au point d'abscisse ℓ', nous avons une continuité des déplacements dans le plan des deux particules du point M et des efforts membranaires dans les deux couches, entre la partie en contact avec le sol et la partie soulevée.

En $x=\ell'$ Continuité $N_1(\ell') = N_1^*(\ell')$
$N_2(\ell') = N_2^*(\ell')$
$u_1(\ell') = u_1^*(\ell')$
$u_2(\ell') = u_2^*(\ell')$

Ajoutons qu'au point d'abscisse ℓ', le déplacement vertical est nul :

En $x=\ell'$ $u_3(x) = 0$

La première condition aux limites du modèle M4 Simplifié (E: III-14) nous donne au point d'abscisse ℓ :

En $x=\ell$ $N_1^*(x) = 0$
$N_2^*(x) = 0$

La deuxième condition aux limites du modèle M4 Simplifié (E: III-15) nous donne au point d'abscisse ℓ :

En $x=\ell$ $\tau^{1,2*}(x) = 0$

7-Résolution des équations d'équilibre

Reprenons l'équation (E: IV-20) :

$$\frac{e_1+e_2}{2}\,\mathrm{div}\,\tau^{1,2*} + F_3 = 0$$

Tel que : $F_3 = F_3^1 + F_3^2$ est le poids propre surfacique de la dalle.

$$\tau^{1,2*} = -\frac{2F_3}{e_1+e_2}x + \alpha$$

La valeur du cisaillement à l'interface s'annule au bord libre de la dalle :

$$\tau^{1,2*} = -\frac{2F_3}{e_1+e_2}(x-\ell) \qquad \textit{(E: IV-21)}$$

Le premier système d'équations d'équilibre (E: IV-19) nous donne, en remplaçant les efforts membranaires par leurs valeurs en fonction des déplacements dans le plan :

$$\begin{cases} K_1 \dfrac{d^2 u_1^*}{dx^2} - \dfrac{2F_3}{e_1+e_2}(x-\ell) = 0 \\ K_2 \dfrac{d^2 u_2^*}{dx^2} + \dfrac{2F_3}{e_1+e_2}(x-\ell) = 0 \end{cases} \qquad \textit{(E: IV-22)}$$

La résolution de chaque équation différentielle du second ordre à variables séparées du système ci-dessus nous donne l'expression des déplacements dans le plan des deux particules du point M d'abscisse x, ainsi que les expressions des efforts membranaires dans chacune des couches :

$$\begin{cases} u_1^* = \dfrac{2F_3}{(e_1+e_2)K_1}\left(\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{\ell}{2}x^2 + \alpha_1' x + \alpha_1''\right) \\ u_2^* = -\dfrac{2F_3}{(e_1+e_2)K_2}\left(\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{\ell}{2}x^2 + \alpha_2' x + \alpha_2''\right) \end{cases}$$

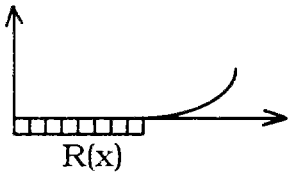
Et

$$\begin{cases} N_1^* = \dfrac{2F_3}{e_1+e_2}\left(\dfrac{x^2}{2} - \ell x + \alpha_1'\right) \\ N_2^* = -\dfrac{2F_3}{e_1+e_2}\left(\dfrac{x^2}{2} - \ell x + \alpha_2'\right) - \varepsilon_r^0 K_2 \end{cases}$$

Les six conditions aux limites donnent les valeurs des six coefficients $B_1, D_1, \alpha_1', \alpha_2', \alpha_1'', \alpha_2''$ en fonction de ℓ' (Annexe C)

3-Calcul de la longueur de contact ℓ'

Elle est calculée en écrivant l'équilibre des forces externes appliquées à la structure (fig. IV-2). Cet équilibre étant établi entre R(x), la réaction du sol, qui agit sur toute la longueur ℓ' de la dalle en contact avec le sol et le poids total de la dalle de longueur ℓ :



(IV-2): Equilibre des forces externes appliquées à la dalle.

$$\int_0^{\ell'} R(x)\,dx + \left(F_1^3 + F_2^3\right)\ell = 0 \qquad \textit{(E: IV-27)}$$

La réaction du sol sur le revêtement est égale à l'effort $v^{0,1}(x)$ qu'exerce la couche 1 sur le sol :

$$R(x) = -v^{0,1}(x)$$

La valeur de $v^{0,1}(x)$ est donnée par les équations d'équilibre (E: III-19), écrites séparément pour chaque couche, dans la partie entre 0 et ℓ'. Nous avons vu que cette écriture, qui reprend les équations d'équilibre du modèle M4 général, est possible.

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\dfrac{e_1}{2}\tau^{1,2}\right) + v^{1,2} - v^{0,1} + F_3^1 = 0 \\ \operatorname{div}\left(\dfrac{e_2}{2}\tau^{1,2}\right) - v^{1,2} + F_3^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{e_1 + e_2}{2}\tau^{1,2}\right) - v^{0,1} + F_3^1 = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$v^{0,1}(x) = \operatorname{div}\left(\frac{e_1 + e_2}{2}\tau^{1,2}(x)\right) + F_3^1 \qquad \textit{(E: IV-28)}$$

Il faut d'abord démontrer qu'on n'a pas une singularité de l'effort normal, et par suite une discontinuité de l'effort de cisaillement d'interface au point d'abscisse ℓ'.

Au point ℓ', la réaction du sol ne peut être que positive car le matériau n'est pas collé au sol :

$$R(\ell') \geq 0$$

$$\Rightarrow v^{0,1}(\ell') \leq 0$$

$$\Rightarrow \tau^{1,2^*}(\ell') - \tau^{1,2}(\ell') \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{\left[\tau^{1,2}\right]_{\ell'} \leq 0}$$

D'autre part, la discontinuité de l'effort de cisaillement d'interface est de même signe que le gradient du déplacement vertical:

$$\left[\tau^{1,2}\right] = \frac{e_1 + e_2}{2} \frac{du_3^*}{dx}$$

La pente du déplacement vertical au point ℓ' ne peut pas être négative car il ne peut y avoir interpénétration entre le revêtement et son support :

$$\frac{du_3^*}{dx}(\ell') \leq 0$$

$$\underline{\frac{du_3^*}{dx}(\ell') \geq 0}$$

Pour que ces deux conditions soient vraies en même temps :

$$\begin{cases} \dfrac{du_3^*}{dx}(\ell') \geq 0 \\ \left[\tau^{1,2}\right]_{\ell'} \leq 0 \end{cases}$$

Il faut que :

$$\frac{du_3^*}{dx}(\ell') = 0$$
$$\left[\tau^{1,2}\right]_{\ell'} = 0$$

Ce qui nous donne la continuité du cisaillement d'interface au point d'abscisse ℓ'.

En remplaçant $\tau^{1,2}(x)$ par sa valeur dans l'équation (E: IV-28) et en dérivant par rapport à x, nous obtenons :

$$v^{0,1}(x) = -\frac{e_1 + e_2}{2} K_1 B_1 w^3 \cosh wx + F_3^1$$

En intégrant entre 0 et ℓ', et en remplaçant B_1 par sa valeur calculée en utilisant les conditions de continuité (Annexe C), l'équation d'équilibre des efforts extérieurs (E: IV-27) nous donne une relation permettant de calculer la valeur de la longueur de décollement (ℓ-ℓ') dont l'expression est :

$$-\frac{\tanh w\ell'}{w}\left[\frac{KF_3}{2}\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)(\ell-\ell')^2-\varepsilon_r^0(e_1+e_2)\frac{K}{2}\right]-F_3(\ell-\ell')=0$$

$\tanh w\ell' \to 1$ si $w\ell' >> 1$ (C'est le cas des grandeurs de notre application).

$\Rightarrow$

$$\frac{KF_3}{2}\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)(\ell-\ell')^2+wF_3(\ell-\ell')-\varepsilon_r^0(e_1+e_2)\frac{K}{2}\to 0$$

C'est une équation du second degré qui nous donne une solution approchée de la longueur de décollement :

$$\ell-\ell'=-\frac{1}{w}+\sqrt{\frac{1}{w^2}+\frac{\varepsilon_r^0(e_1+e_2)}{F_3\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)}} \qquad \textit{(E: IV-30)}$$

Remarquons que :

* $\ell'=\ell$ quand $\varepsilon_r^0=0$
* ℓ-ℓ' est une fonction croissante de $|\varepsilon_r^0|$.

4-Forme de la déformée

Le comportement du cisaillement d'interface est fonction des déplacements dans le plan des deux particules du point M ainsi que du gradient du déplacement vertical en ce point (E: IV-18) :

$$\tau^{1,2*}=K(u_2^*-u_1^*+\frac{e_1+e_2}{2}\operatorname{grad}u_3^*)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e_1+e_2}{2}\operatorname{grad}u_3^*=\frac{\tau^{1,2*}}{K}+u_1^*-u_2^*$$

$\Rightarrow$

$$\frac{du_3^{\bullet}}{dx} = P\left[I\left(\frac{x^3}{6} - \frac{\ell x^2}{2} \right) + Jx + M \right]$$

Avec:

$$P = \frac{4F_3}{(e_1 + e_2)^2}$$

$$I = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

$$J = \frac{\alpha_1'}{K_1} + \frac{\alpha_2'}{K_2} - \frac{1}{K}$$

$$M = \frac{\alpha_1''}{K_1} + \frac{\alpha_2''}{K_2} + \frac{\ell}{K}$$

En intégrant, nous obtenons l'expression du déplacement vertical d'un point M du plan, qui, tracé en fonction de x, donne la forme de la dalle après déformation :

$$u_3^{\bullet} = P\left[I\left(\frac{x^4}{24} - \frac{\ell x^3}{6} \right) + J\frac{x^2}{2} + Mx + \alpha_3 \right]$$

Au point d'abscisse ℓ', le déplacement vertical est nul. Cette condition nous permet de calculer la constante d'intégration α_3 :

$$x = \ell' \Rightarrow u_3^{\bullet} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\alpha_3 = -I\left(\frac{\ell'^4}{24} - \frac{\ell\ell'^3}{6} \right) - J\frac{\ell'^2}{2} - M\ell'$$

$$\Rightarrow$$

$$u_3^{\bullet}(x) = P\left[I\left(\frac{(x^4 - \ell'^4)}{24} - \frac{\ell(x^3 - \ell'^3)}{6} \right) + J\frac{x^2 - \ell'^2}{2} + M(x - \ell') \right] \qquad \textit{(E: IV-31)}$$

IV-APPLICATION

Les calculs et les sorties graphiques sont faites à l'aide du logiciel de Calcul et de Visualisation "MATLAB" (The Math Works, Inc.).

1-Caractéristiques des couches

Nous considérons une dalle de :

-Longueur : 2ℓ = 500 mm

-Epaisseur de la couche 1 : e_1 = 0.4 mm

-Epaisseur de la couche 2 : e_2 = 1. mm

-Module d'Young de la couche 1 stable : E_1 = 200 N/mm^2 ($K_1=E_1 * e_1$)

-Module d'Young de la couche 2 avec retrait : E_2 = 20 N/mm^2 ($K_2=E_2 * e_2$)

-Poids total par mètre carré : $F_3 = -6.10^{-5}$ N/mm^2
-La raideur de cisaillement : K = 7. N/mm^3 (Calculée à partir de la formule de Kamimura (E: III-18)).

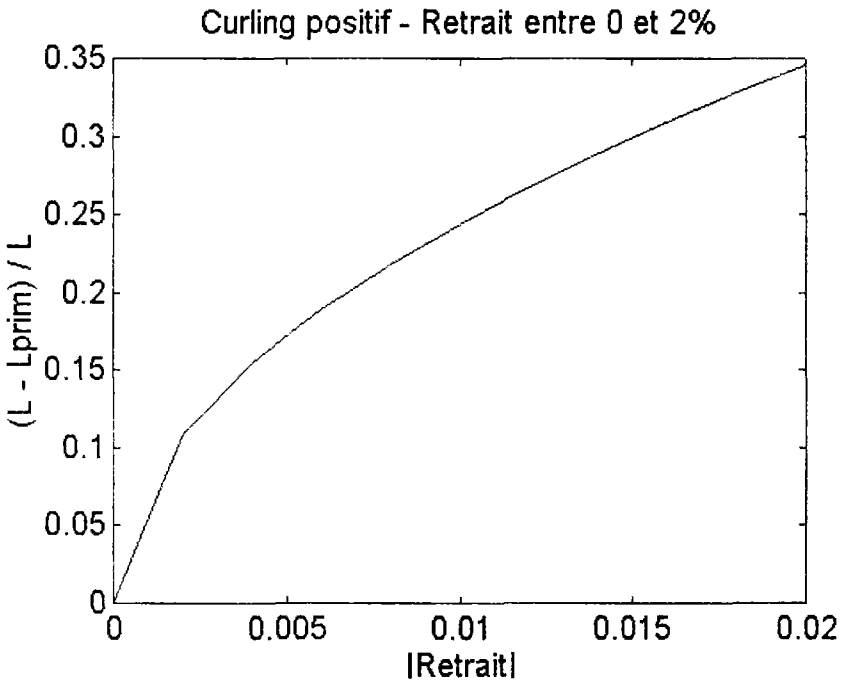
Le module d'Young de la couche stable est obtenu en mesurant la pente de la courbe (Contrainte-Déformation) de traction à vitesse constante. Celui de la couche visqueuse représente la pente de la courbe (Contrainte à l'infini - Déformation de relaxation) obtenue à partir des essais de relaxation décrits dans le chapitre VI dans la deuxième série expérimentale.

2-Longueur de contact

Reprenons l'expression approchée (E: IV-31) de la longueur de décollement

$$\ell - \ell' = -\frac{1}{w} + \sqrt{\frac{1}{w^2} + \frac{\varepsilon_r^0 (e_1 + e_2)}{F_3\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right)}}$$

Le graphique suivant (fig. IV-4) montre la variation de la longueur relative de décollement en fonction du retrait qui varie, en valeur absolue, entre 0 et 0.02 (Retrait entre 0% et 2%).



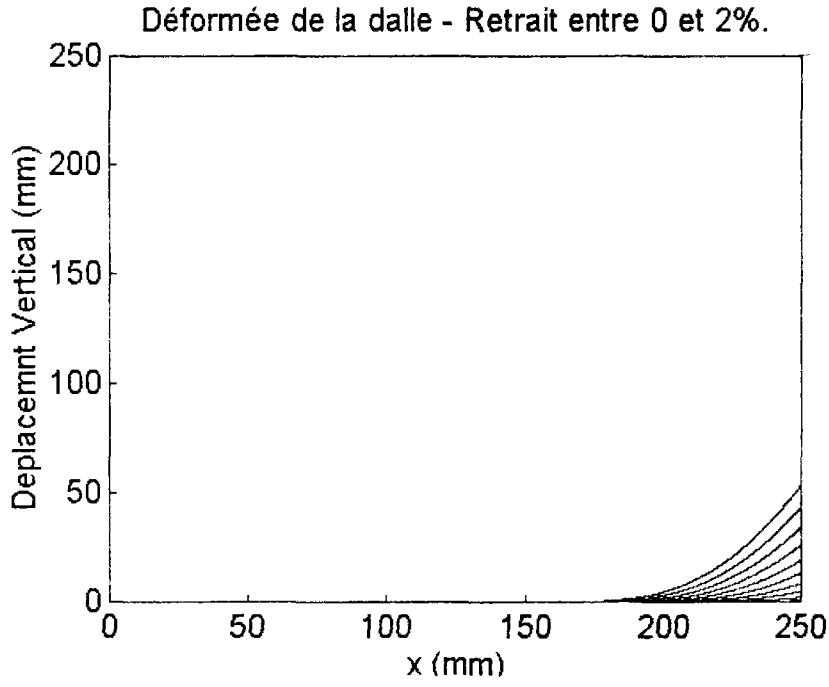
(IV-4): Variation de la longueur relative de décollement en fonction du retrait

3-Déformée

Pour une valeur de ε_r^0 donnée, remplaçons ℓ' par sa valeur dans l'expression du déplacement vertical (E: IV-32) :

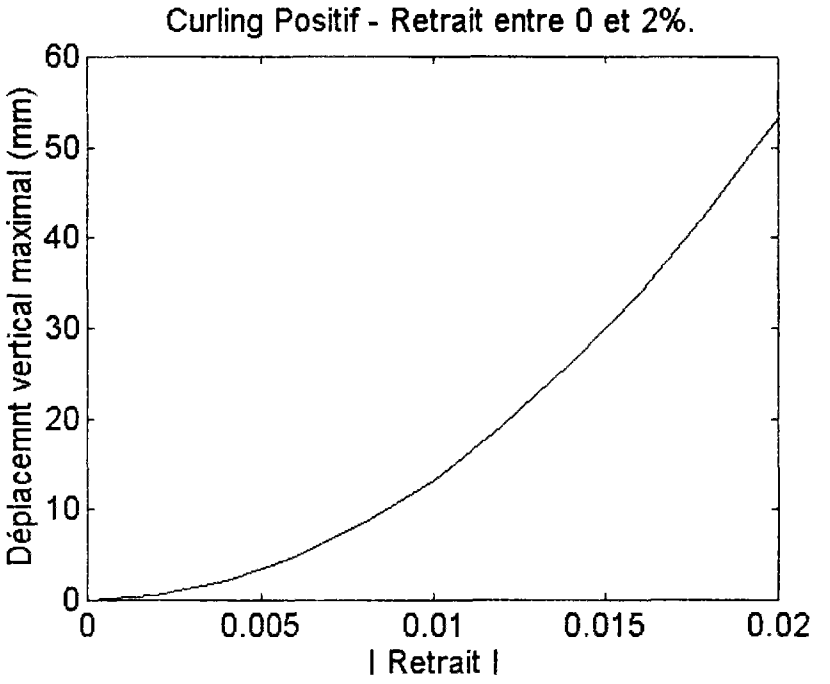
$$u_3^*(x) = P\left[I\left(\frac{\left(x^4 - \ell'^4\right)}{24} - \frac{\ell\left(x^3 - \ell'^3\right)}{6} \right) + J\frac{x^2 - \ell'^2}{2} + M(x - \ell') \right]$$

Le graphique (fig. IV-5) montre la forme de la déformée, en traçant en fonction de x le déplacement vertical pour des valeurs du retrait comprises entre 0 et 2%.



(IV-5): Forme de la dalle déformée pour plusieurs valeurs du retrait comprises entre 0 et 2%.

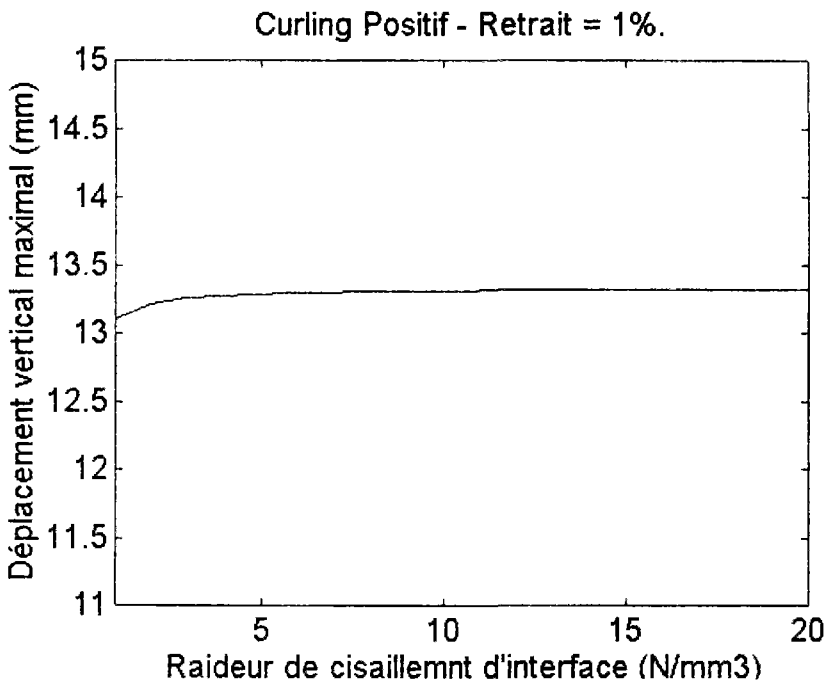
En remplaçant x par ℓ dans l'expression de u_3, nous obtenons l'évolution du déplacement vertical du bord de la dalle, en fonction du retrait (fig. IV-6)



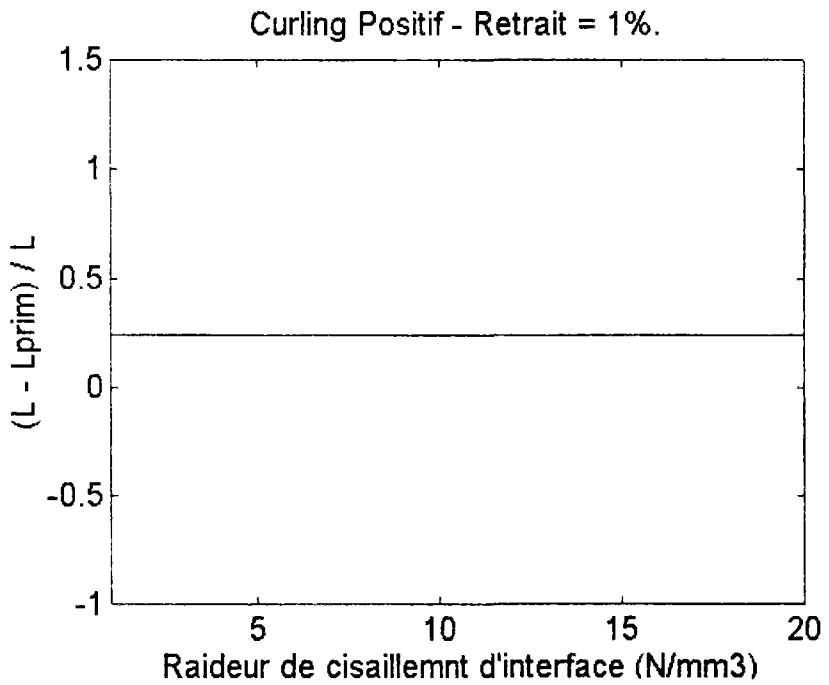
(IV-6): Valeurs du déplacement vertical du bord de la dalle pour plusieurs valeurs du retrait comprises entre 0 et 2%

4- Rôle de la raideur d'interface K

Faisons varier K entre deux valeurs 1 et 20 N/mm^3. Les graphiques (fig. IV-7) et (fig. IV-8) nous montrent que la variation de K n'influence quasiment pas le déplacement vertical maximal ni la longueur de décollement ℓ-ℓ'.



(IV-7): Variation du déplacement vertical maximal en fonction de la raideur d'interface K.



(IV-8): Variation de la longueur relative de décollement en fonction de la raideur d'interface K.

La variation de la raideur d'interface n'agissant pas sur le désordre observé, le choix de la formule qui la détermine n'est pas très critique.

5- Commentaire

1-Remarquons que la géométrie des déformées obtenues pour des valeurs de retrait inférieures à 1% sont proches de la géométrie plane initiale. Cette valeur du retrait, qui constitue un seuil de validité de notre modèle basé sur l'hypothèse de petites perturbations (H.P.P), dépend des caractéristiques des deux couches. Pour des valeurs de retrait plus élevées, l'étude devrait être faite en se basant sur l'hypothèse des grandes perturbations.

2-L'application du modèle M4 simplifié, qui néglige l'effet des moments de flexion de l'interface entre les deux couches, nous donne des valeurs non nulles de ℓ' et de u_3 pour toute valeur du retrait. Ce qui signifie que l'on a un décollement immédiat de la dalle. Ceci est un peu différent de la réalité où l'effet du poids propre de la dalle compense, dans les premiers temps, l'effet "Curling" du au retrait.

3-La déformée de la dalle obtenue par le calcul M4 Simplifié a une forme validée par l'observation des industriels. Une validation quantitative, faite à l'usine de fabrication des revêtements de sol, dans le cas du Curling positif, est présentée au chapitre VIII.

CHAPITRE V

MODELISATION MULTIPHASIQUE D'UN BICOUCHE "CURLING" NEGATIF

I-INTRODUCTION

Nous avons étudié, dans le chapitre précédent, le Curling d'un bicouche formé d'une couche supérieure stable et d'une couche inférieure soumise à une déformation imposée. Le Curling obtenu est positif. Nous reprenons, dans ce chapitre, le même bicouche en le retournant de sorte que la couche calandrée soit en contact avec le sol. Le Curling résultant est négatif. Le comportement des deux couches est considéré comme élastique linéaire.

Nous exposerons, dans ce chapitre, les résultats du calcul, détaillé dans l'annexe B, effectué suivant la même démarche que le Curling positif.

II-CRITERES DE DECOLLEMENT

Selon la valeur du retrait imposé dans la couche inférieure, le "Curling" négatif peut être complet (toute la dalle est soulevée, sauf aux deux bords) ou incomplet (une partie de la dalle reste en contact avec le sol).

Le calcul aboutit à deux valeurs du retrait qui constituent des critères déterminant la forme du Curling. Ces critères sont fonction des caractéristiques des deux couches, du poids propre total et des dimensions de la dalle. Le premier (A) est un critère de décollement, à partir duquel le Curling devient complet. Le deuxième (B) est un critère qui détermine la forme du Curling complet.

Ces deux critères ont les valeurs suivantes :

$$A = \frac{2|F_3|}{e_1 + e_2}\left[\frac{5}{12}\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right)\ell^2 + \frac{1}{K}\right]$$

$$B = \frac{2|F_3|}{e_1 + e_2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right)\ell^2 + \frac{1}{K}\right]$$

Tel que :

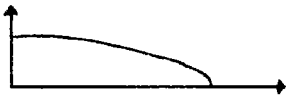
$A \geq |\varepsilon_r^0| \quad \Rightarrow$

Le Curling est incomplet
Une partie de la dalle reste en contact avec le sol

$B \geq |\varepsilon_r^0| \geq A \quad \Rightarrow$

La dalle est complètement soulevée, avec affaissement de la partie médiane

$|\varepsilon_r^0| \geq B \quad \Rightarrow$



La dalle est complètement soulevée en forme de dôme
Le déplacement vertical est maximal au centre

III-RESULTATS

III-1:Décollement Total: $|\varepsilon_r^0| \geq A$

La résolution des équations d'équilibre et des conditions aux limites du modèle M4 Simplifié donne les résultats suivants :

- Les déplacements, suivant x, de chaque particule d'un point M :

$$u_1(x) = \frac{2F_3}{(e_1 + e_2)K_1}\left(\frac{x^3}{6} - \ell^2\frac{x}{2}\right) + \varepsilon_r^0 x \qquad \textit{(E: V-1)}$$

$$u_2(x) = -\frac{2F_3}{(e_1+e_2)K_2}\left(\frac{x^3}{6} - \ell^2\frac{x}{2}\right) \qquad \textit{(E: V-2)}$$

- Les efforts membranaires, suivant x, dans chaque couche :

$$N_1(x) = \frac{F_3}{e_1+e_2}\left(x^2-\ell^2\right) \qquad \textit{(E: V-3)}$$

$$N_2(x) = -\frac{F_3}{e_1+e_2}\left(x^2-\ell^2\right) \qquad \textit{(E: V-4)}$$

- L'effort de cisaillement d'interface entre les deux couches :

$$\tau^{1.2}(x) = -\frac{2F_3}{e_1+e_2}x \qquad \textit{(E: V-5)}$$

Ce dernier effort connu, son expression dans (E: III-17) nous permet de trouver celle du déplacement vertical :

$$u_3(x) = P\left[I\frac{x^4-\ell^4}{24} + J\frac{x^2-\ell^2}{2}\right] \qquad \textit{(E: V-6)}$$

Avec:

$$P = \frac{4F_3}{(e_1+e_2)^2}$$

$$I = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

$$J = \frac{\alpha_1'}{K_1} + \frac{\alpha_2'}{K_2} - \frac{1}{K}$$

III-2:<u>Décollement Partiel</u>: $\left|\varepsilon_r^0\right| \le A$

Divisé, géométriquement, en deux parties reliées entre elles par les conditions de continuité au point de la dalle d'abscisse ℓ' :

1- $x \in [0, \ell']$: La dalle est en contact avec le sol.

La résolution des équations d'équilibre nous donne les expressions des déplacements et des efforts:

- Les déplacements dans le plan des deux particules d'un point M :

$$u_1(x) = B_1 \sinh wx + D_1 x \qquad \textit{(E: V-7)}$$

$$u_2(x) = -B_1 \frac{K_1}{K_2} \sinh wx + D_1 x \qquad \textit{(E: V-8)}$$

- Les efforts membranaires dans les deux couches :

$$N_1(x) = K_1\left[B_1\, w \cosh wx + D_1 - \varepsilon_r^0\right] \qquad \textit{(E: V-9)}$$

$$N_2(x) = K_2\left[-B_1 \frac{K_1}{K_2} w \cosh wx + D_1\right] \qquad \textit{(E: V-10)}$$

- L'effort de cisaillement d'interface :

$$\tau^{1,2}(x) = -B_1 K_1 w^2 \sinh wx \qquad \textit{(E: V-11)}$$

2- $x \in [\ell', \ell[$: La dalle est soulevée du sol.

- Les déplacements dans le plan sont :

$$u_1^*(x) = \frac{2F_3}{(e_1+e_2)K_1}\left(\frac{x^3}{6} + \alpha\frac{x^2}{2} + \alpha_1' x + \alpha_1''\right) \qquad \textit{(E: V-12)}$$

$$u_2^*(x) = -\frac{2F_3}{(e_1+e_2)K_2}\left(\frac{x^3}{6} + \alpha\frac{x^2}{2} + \alpha_2' x + \alpha_2''\right) \qquad \textit{(E: V-13)}$$

- Les efforts membranaires s'écrivent :

$$N_1^*(x) = \frac{2F_3}{e_1+e_2}\left(\frac{x^2}{2} + \alpha x + \alpha_1'\right) - \varepsilon_r^0 K_1 \qquad \textit{(E: V-14)}$$

$$N_2^*(x) = -\frac{2F_3}{e_1+e_2}\left(\frac{x^2}{2} + \alpha x + \alpha_2'\right) \qquad \textit{(E: V-15)}$$

-L'effort de cisaillement d'interface :

$$\tau^{1,2*}(x) = -\frac{2F_3}{e_1 + e_2}(x + \alpha) \qquad \textit{(E: V-16)}$$

Les conditions aux limites, les conditions de continuité et l'équation d'équilibre des efforts extérieurs nous permettent de calculer les constantes de calcul. L'expression du cisaillement d'interface (E: III-17) nous donne celle du déplacement vertical en fonction de la longueur de contact :

$$u_3^*(x) = -P\left[I\left(\frac{(x^4 - \ell^4)}{24} + \frac{\alpha(x^3 - \ell^3)}{6}\right) + J\frac{x^2 - \ell^2}{2} + M(x - \ell)\right] \qquad \textit{(E: V-17)}$$

Tel que :

$$P = \frac{-4F_3}{(e_1 + e_2)^2}$$

$$I = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

$$J = \frac{\alpha_1'}{K_1} + \frac{\alpha_2'}{K_2} - \frac{1}{K}$$

$$M = \frac{\alpha_1''}{K_1} + \frac{\alpha_2''}{K_2} - \frac{\alpha}{K}$$

Le déplacement vertical est nul au point d'abscisse ℓ', ce qui nous permet d'obtenir l'expression de la longueur de contact :

$$I\left(\frac{\ell'^4 - \ell^4}{24} + \alpha\frac{\ell'^3 - \ell^3}{6}\right) + J\frac{\ell'^2 - \ell^2}{2} + M(\ell' - \ell) = 0 \qquad \textit{(E: V-18)}$$

IV-APPLICATION

Nous considérons les mêmes caractéristiques de matériaux que dans l'application faite au chapitre précédent :

IV-1:DECOLLEMENT TOTAL

1-Critères de décollement total

Cette partie correspond à des valeurs de $|\varepsilon_r^0|$ comprises entre les deux critères A et B que nous calculons :

$$A = \frac{2|F_3|}{e_1 + e_2}\left[\frac{5}{12}\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right)\ell^2 + \frac{1}{K}\right] = 0.1395$$

$$B = \frac{2|F_3|}{e_1 + e_2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right)\ell^2 + \frac{1}{K}\right] = 0.1674$$

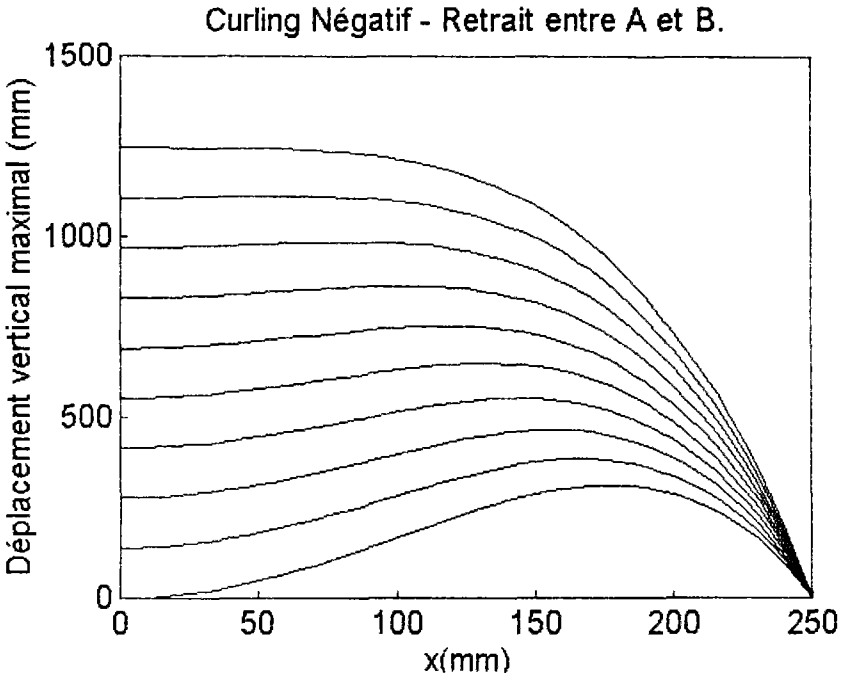
(Ces valeurs sont très grandes par rapport aux valeurs réelles du retrait mesuré en usine qui est de l'ordre de 1%).

2-Déformée

En faisant varier ε_r^0 entre les deux valeurs A et B calculées, le graphique (fig. V-3) nous montre la forme de la déformée basée sur l'expression du déplacement vertical (E: V-6).

$$u_3(x) = P\left[I\frac{x^4 - \ell^4}{24} + J\frac{x^2 - \ell^2}{2}\right]$$

La courbe supérieure correspond à la valeur de $|\varepsilon_r^0|$ égale à B, la courbe inférieure à celle égale à A.



(V-3): Forme de la dalle déformée pour plusieurs valeurs du retrait comprises entre les deux critères de décollement.

Pour une valeur de $\left|\varepsilon_r^0\right|$ inférieure à A, une partie de la dalle reste en contact avec le sol.

Etant en hypothèse de petites perturbations, les résultats obtenus dépassent la limite de validité du modèle. Celui-ci reste, néanmoins, applicable pour d'autres valeurs de données aboutissant à des géométries peu déformées par rapport à la géométrie initiale.

IV-2: DECOLLEMENT PARTIEL

1-Longueur de contact

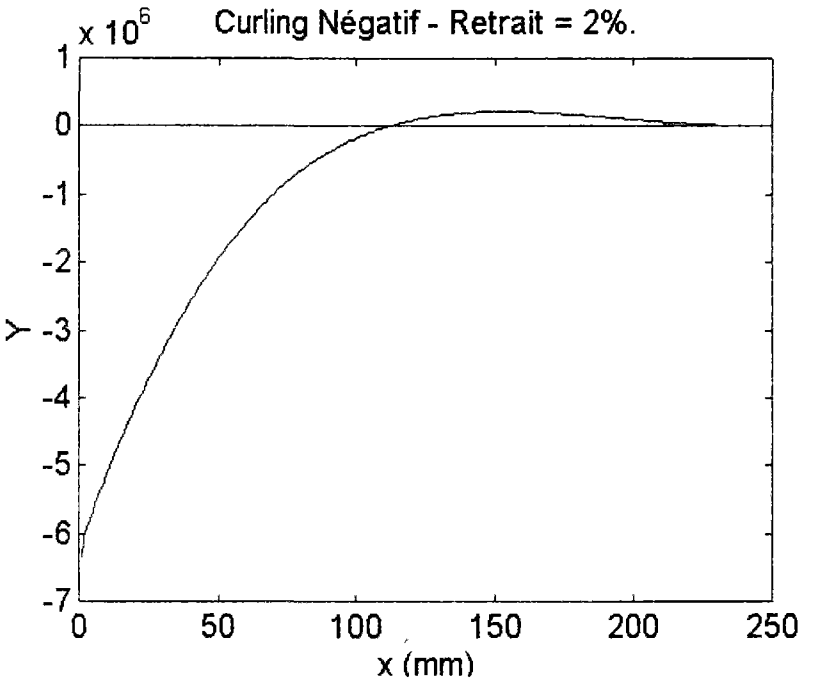
Nous remplaçons J, M et α par leurs valeurs en fonction de ℓ' dans l'expression (E: V-18) :

$$I\left(\frac{\ell'^4-\ell^4}{24}+\alpha\frac{\ell'^3-\ell^3}{6}\right)+J\frac{\ell'^2-\ell^2}{2}+M(\ell'-\ell)=0$$

Remplaçant ℓ' par x, nous traçons la courbe :

$$Y = I\left(\frac{x^4 - \ell^4}{24} + \alpha(x)\frac{x^3 - \ell^3}{6}\right) + J(x)\frac{x^2 - \ell^2}{2} + M(x)(x - \ell)$$

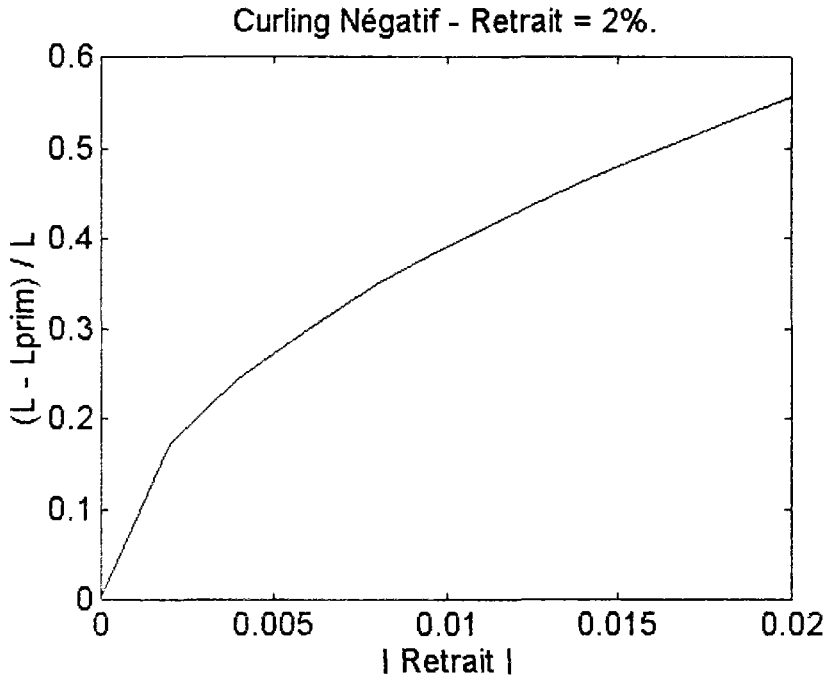
ℓ' correspond au point où Y coupe l'axe des x (fig. V-4).



(V-4): Calcul de la longueur de contact.

Nous remarquons que cette courbe coupe l'axe des x en deux points (ℓ' et ℓ), deux valeurs de x pour lesquelles u_3 s'annule.

Les valeurs de la longueur relative de décollement, trouvées en faisant varier $|\varepsilon_r^0|$ entre 0 et 2%, sont reportées dans le graphique (fig. V-5) suivant :



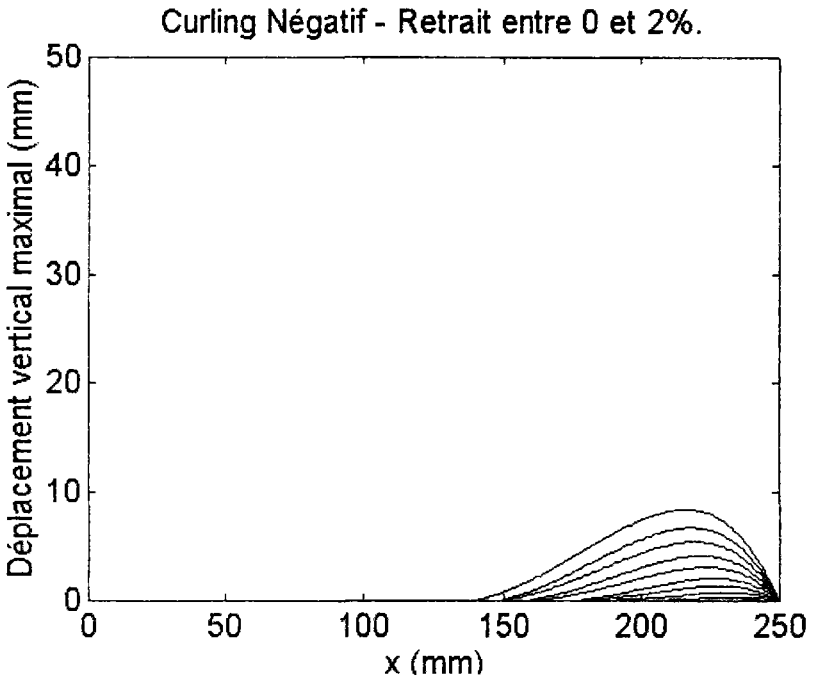
(V-5): Variation de la longueur relative de décollement en fonction du retrait.

2-<u>Déformée</u>

Ayant calculé ℓ', nous la remplaçons par sa valeur dans l'expression de u_3 (E:V-17) :

$$u_3^{\bullet}(x) = -P\left[I\left(\frac{\left(x^4-\ell^4\right)}{24}+\frac{\alpha\left(x^3-\ell^3\right)}{6}\right)+J\frac{x^2-\ell^2}{2}+M(x-\ell)\right]$$

Ce qui nous donne la forme de la dalle déformée pour plusieurs valeur de retrait entre 0 et 2% (fig. V-6).



(V-6): Forme de la dalle déformée pour plusieurs valeurs du retrait comprises entre 0 et 2%.
(L'échelle des ordonnés est multipliée par 5)

3-<u>Commentaire</u>

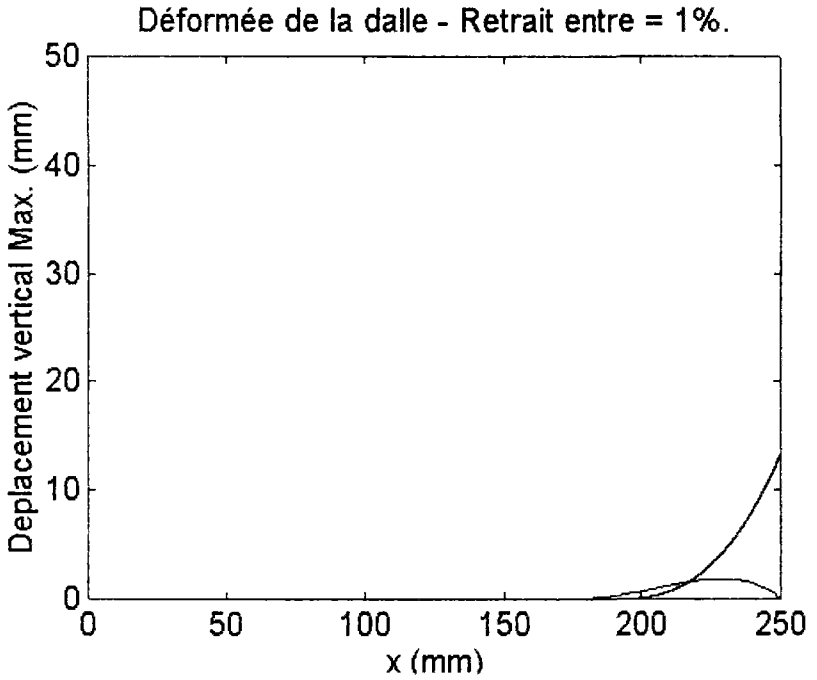
1-Etant toujours en hypothèse de petites perturbations, nous ne retenons des résultats que ceux dont la géométrie n'est pas très différente de la géométrie plane initiale.

2-La forme du Curling négatif est validée, de même que celle du Curling positif, par l'observation des industriels.

IV-3: COMPARAISON ENTRE CURLING POSITIF ET NEGATIF

La figure suivante (fig. V-7) nous montre la géométrie de la déformée de la même dalle en Curling positif et négatif.

La longueur de décollement, dans le cas du Curling négatif est plus grande que celle dans le cas du Curling positif; et inversement pour le déplacement vertical.



(V-7): Curling positif et Curling négatif pour une valeur du retrait égale à 1%.
(L'échelle des ordonnés est multipliée par 5)

Curling >0	Déplacement vertical maximal = 15.34 mm Longueur de décollement = 70.16 mm
Curling <0	Déplacement vertical maximal = 2.06 mm Longueur de décollement = 98.00 mm

Nous remarquons, visiblement, que le désordre fonctionnel causé par le Curling positif est plus important. Il est donc conseillé de mettre la couche calandrée au-dessous de l'armature dans la conception du multicouche.

TROISIEME PARTIE

COMPORTEMENT "VISCOELASTIQUE"

CHAPITRE VI

MODELISATION DU COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE

Dans la seconde partie de cette étude, le comportement de la sous-couche calandrée, formant un bicouche avec l'armature, était considéré comme élastique linéaire. Le retrait imposé dans cette sous-couche sous forme de déformation constante fut le seul point où son côté visqueux intervint.

Dans cette seconde partie, nous prendrons en considération le comportement viscoélastique de la sous-couche et l'influence de sa loi de comportement sur le retrait. Ce dernier est introduit dans le calcul comme une fonction de l'espace réactualisable avec le temps, compte tenu de sa variation en fonction de la contrainte dans le matériau.

Avant de passer, au chapitre suivant, à la modélisation "Viscoélastique", nous proposons, dans ce chapitre, de caractériser le comportement de la couche calandrée.

LEMAITRE [35] a bien décrit les différentes méthodes et appareils utilisés pour la caractérisation des matériaux élasto-visco-plastiques. Les essais sont multiples. Nous retenons ceux qui sont les plus simples ou les plus "significatifs" du "vécu" des matériaux.

I-EXPERIMENTATION

1-Première série expérimentale

Traction à vitesse de déplacement constante.

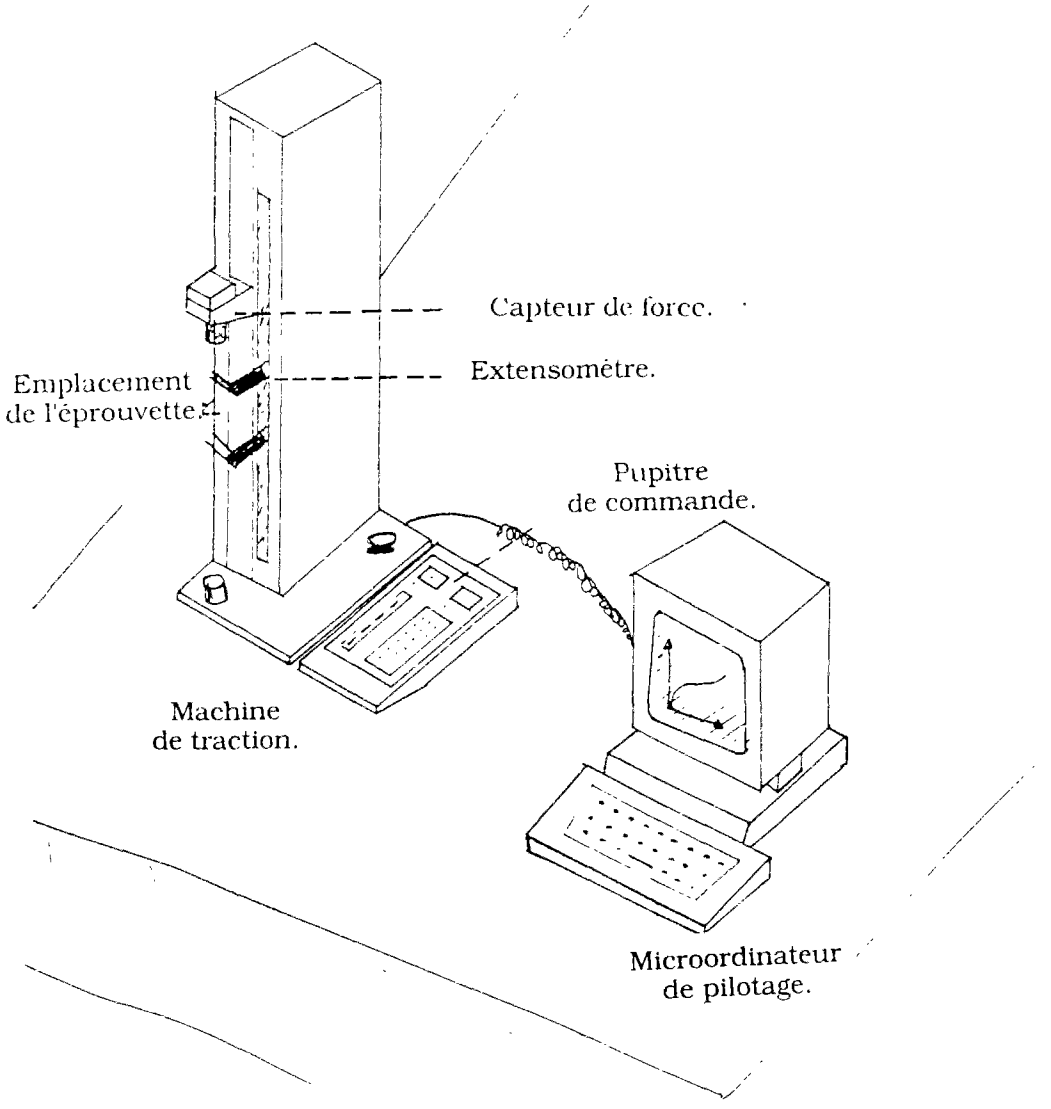
Les premiers essais d'identification du comportement du matériau sont des essais de traction à vitesse de déplacement constante, jusqu'à 10% de déformation.

L'appareil utilisé est une machine de traction (fig. VI-1), munie d'un capteur de force et d'un extensomètre adapté à la détermination des allongements jusqu'à la rupture des matériaux à grande capacité de déformation tels que les caoutchoucs, les élastomères, etc... .

Ces essais sont faits à quatre vitesses de traction différentes, allant de la vitesse 1 très faible jusqu'à la vitesse 4, assez importante.

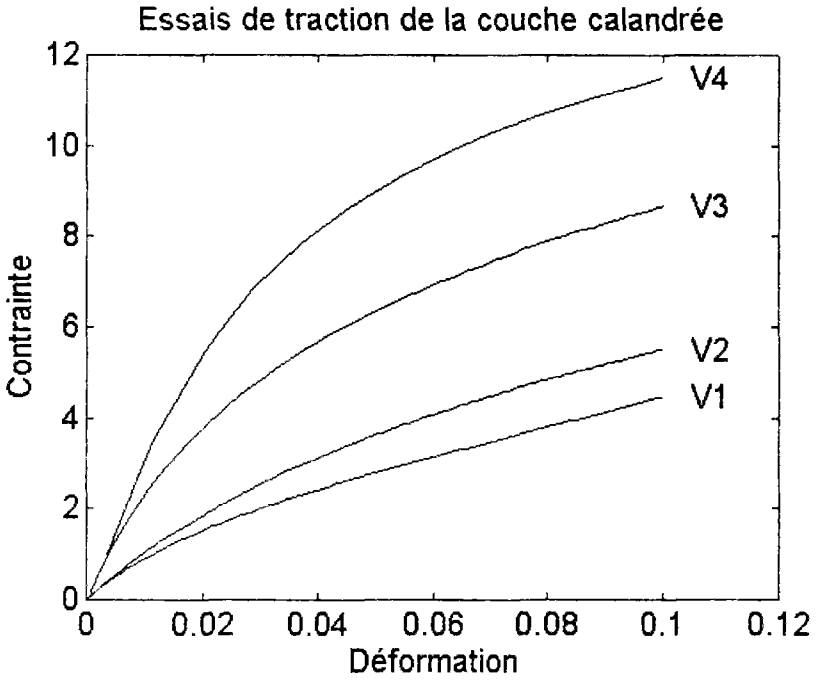
Les quatre vitesses sont :
V_1 = 0.1 mm/mn.
V_2 = 1.0 mm/mn.
V_3 = 50. mm/mn.
V_4 = 500 mm/mn.

Dispositif expérimental



(VI-1): Dispositif d'essai.

Les courbes de traction (Contrainte-Déformation) sont tracées pour les quatre vitesses à la même échelle (fig. VI-2) :



(VI-2): Courbes de traction à vitesse de déformation constante pour quatre valeurs différentes de vitesse de traction

Nous remarquons que le niveau de contrainte est fonction de la vitesse de traction. La contrainte augmente avec la vitesse pour une même déformation. Ceci met en évidence l'aspect viscoélastique : $\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$.

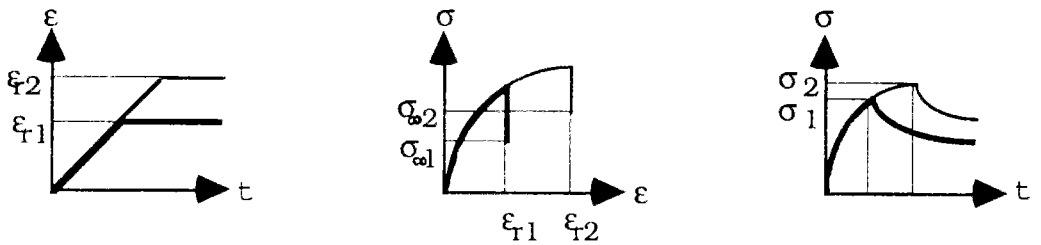
2-<u>Deuxième série expérimentale</u>

Relaxation - Equilibre à l' "infini".

Ce sont des essais de traction à vitesse de déplacement constante, suivie d'une relaxation (Variation de la contrainte en fonction du temps effectuée à une déformation ε_{rel} constante) (fig. VI-3).

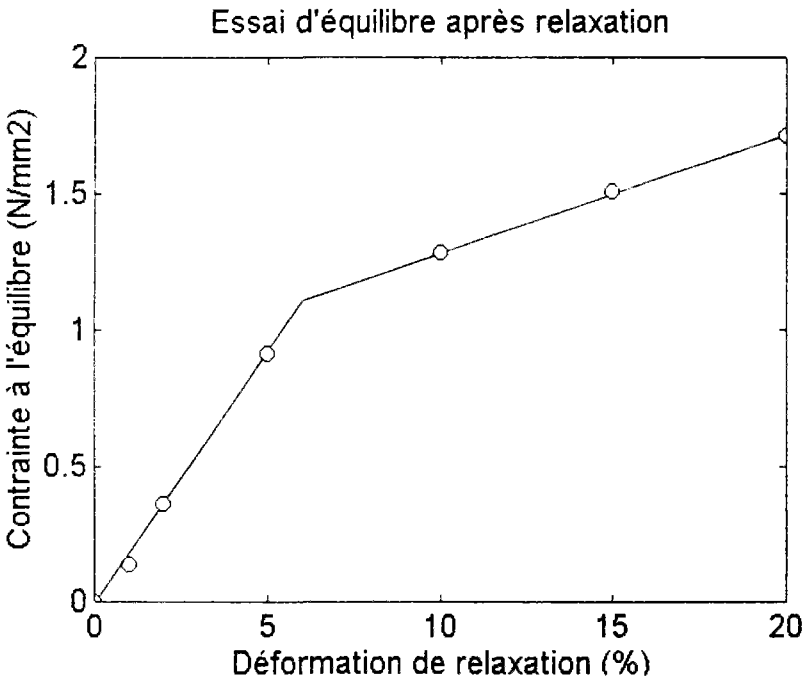
La courbe de relaxation (σ,t) tend à se stabiliser au bout d'un temps infini $(t\infty)$ asymptotiquement à une valeur $(\sigma\infty)$ de la contrainte.

Les essais sont répétés en balayant plusieurs valeurs de la déformation ε_{rel} de relaxation.



(VI-3): Schéma des essais de relaxation.

La courbe obtenue par les couples de valeurs (ε_{rel} , $\sigma\infty$) (fig. VI-4) caractérise l'équilibre du comportement après relaxation (A long terme = 5 jours).



(VI-4): Courbe d'équilibre (Contrainte-Déformation) après relaxation.

Cette courbe d'équilibre est visiblement élastoplastique présentant un seuil plastique à 6% de déformation environ.

Ces essais, répétés à plusieurs valeurs de la vitesse de traction avant relaxation, donnent, sensiblement, la même courbe d'équilibre. Ce qui montre que cet état d'équilibre du matériau caractérise son comportement indépendamment de la viscosité, pour des temps caractéristiques de quelques jours.

Les deux séries d'essais classent le comportement de la sous-couche sous le titre général de l'élasto-visco-plasticité.

Partant de l'hypothèse des petites déformations (1% de déformation) dans la description du désordre observé, nous restons toujours dans la zone élastique, c'est-à-dire en- dessous du seuil plastique.

Ce seuil caractérise bien ces matériaux "plastiques" et intéressera toute étude effectuée en grandes déformations. Ce qui limitera notre étude du comportement à la viscoélasticité.

3-Troisième série expérimentale

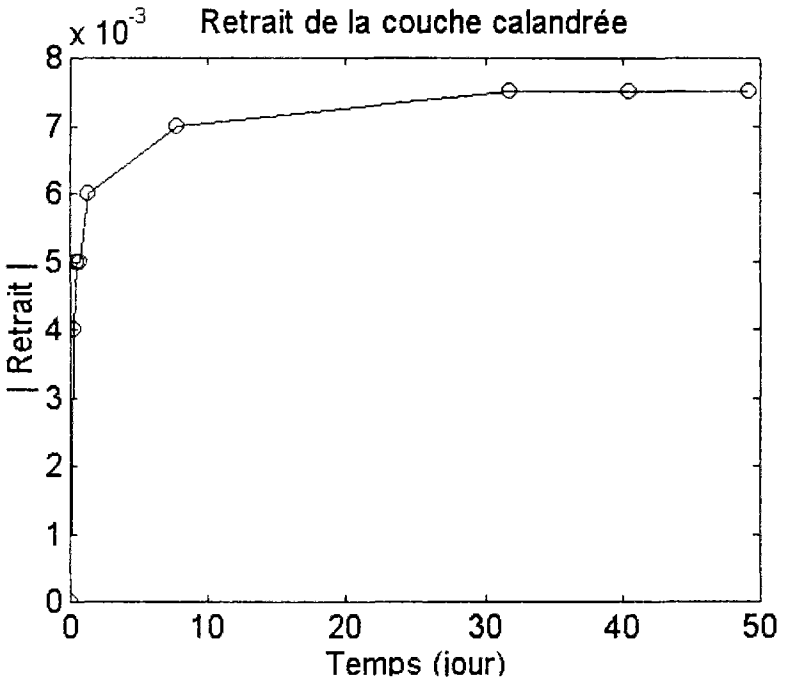
Recouvrance - Ou retrait après fabrication.

Ces essais commencent au temps t_0 qui correspond à la sortie du matériau de sa chaîne de fabrication (Ces essais sont obligatoirement faits à l'usine de fabrication).

A l'instant t_0, le matériau est relâché; la contrainte, crée lors de la fabrication à l'intérieur de celui-ci, s'annule instantanément, tandis que la déformation diminue progressivement avec le temps, en partant d'une valeur maximale (Celle que connaît le matériau au temps t_0). Cette diminution de la déformation est appelée Retrait.

Cette histoire de retrait met en évidence, encore une fois, la viscosité de ces matériaux plastiques. Elle met, de même, le doigt sur l'origine de l'instabilité dimensionnelle des revêtements de sol plastiques.

Les résultats des mesures du retrait (en sa valeur absolue) d'un échantillon de 100cm de longueur d'une sous-couche, sont présentés dans le graphique (fig. VI-5) (t_0 est pris égal à 0).



(VI-5): Retrait mesuré à l'usine en fonction du temps.

II-MODELISATION

La première série expérimentale donne des courbes de traction à différentes vitesses ayant des pentes différentes à l'origine du temps.

Ceci ressemble au comportement des matériaux qui suivent les modèles rhéologiques à plusieurs temps caractéristiques (Modèle de Zeners en parallèle).

En nous situant dans les conditions réelles de comportement concernées par l'étude:
-Petites déformations.
-Faibles vitesses de déformation.
-Comportement à long terme.
Nous pouvons limiter le comportement rhéologique à celui d'un modèle de Zener simple, élastique à court terme, viscoélastique à long terme.

Nous remarquons que le temps correspondant à l'équilibre après relaxation (5 jours) est le même que celui de la stabilisation du retrait mesuré en usine de

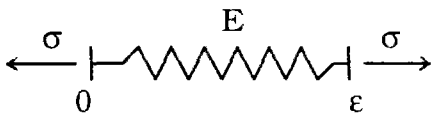
fabrication. Ceci nous permet de considérer que les 5 jours correspondent au temps caractéristique à long terme de nos matériaux.

Avant de présenter le modèle de Zener, faisons un petit rappel sur le comportement rhéologique des matériaux.

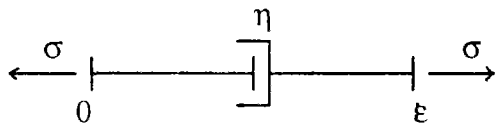
1-Modèles rhéologiques analogiques (Rappel)

Les modèles rhéologiques sont formés d'éléments simples inspirés de la mécanique dont les réponses à des sollicitations sont similaires à celles des matériaux (LEMAITRE [33]). Ces éléments mécaniques sont surtout :

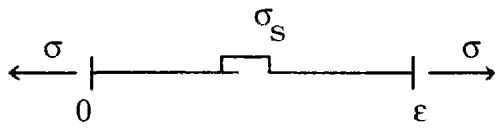
-Le ressort qui symbolise l'élasticité linéaire : $\sigma = E.\varepsilon$



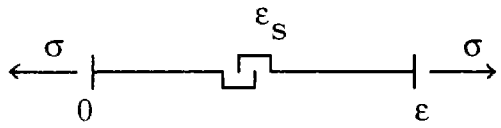
-L'amortisseur qui symbolise la viscosité : $\sigma = \eta.\dot{\varepsilon}$



-Le patin qui symbolise un seuil de contrainte : $-\sigma_s < \sigma < \sigma_s$



-La butée qui symbolise un seuil de déformation : $-\varepsilon_s \leq \varepsilon \leq \varepsilon_s$



Ces différents éléments peuvent être regroupés :

-En série

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$$

$$\sigma = \sigma_i$$

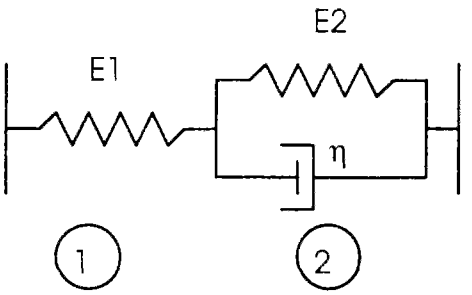
-En parallèle

$$\sigma = \sum_i \sigma_i$$

$$\varepsilon = \varepsilon_i$$

-En groupements mixtes.

2-Modèle de Zener



Il est formé de deux parties en série. La partie 1 est formée d'un ressort de module E_1, la partie 2 est formée d'un ressort de module E_2 en parallèle avec un amortisseur de viscosité η (Kelvin).

Equations caractéristiques du modèle

Nous adoptons les notations suivantes :

σ : Contrainte totale.
σ_{e1} : Contrainte dans le ressort 1.
σ_{e2} : Contrainte dans le ressort 2.
σ_v : Contrainte dans l'amortisseur.

ε : Déformation totale.
ε_{e1} : Déformation dans le ressort 1.
ε_{e2} : Déformation dans le ressort 2.
ε_v : Déformation dans l'amortisseur.

On a :

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$$
$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{e1}$$
$$\sigma_1 = \sigma_{e1} = \varepsilon_{e1} E_1$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{e2} = \varepsilon_v$$
$$\sigma_2 = \sigma_{e2} + \sigma_v = \varepsilon_{e2} E_2 + \dot{\varepsilon}_v \eta$$
$$\Rightarrow$$

$$\sigma = \varepsilon_v E_2 + \dot{\varepsilon}_v \eta \qquad \textit{(E: VI-1)}$$

Résolution des équations

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$
$$\Rightarrow$$
$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_1 &= \dot{\varepsilon}_{e1} \\
&= \frac{\dot{\sigma}_{e1}}{E_1} = \frac{\dot{\sigma}_1}{E_1} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} \\
\dot{\varepsilon}_2 &= \dot{\varepsilon}_v \\
&= \frac{\sigma_v}{\eta} = \frac{\sigma_2 - \sigma_{e2}}{\eta} \\
&= \frac{\sigma}{\eta} - \frac{\varepsilon_{e2} E_2}{\eta} = \frac{\sigma}{\eta} - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1) E_2}{\eta} \\
&= \frac{\sigma}{\eta} - \varepsilon \frac{E_2}{\eta} + \frac{\sigma}{E_1} \frac{E_2}{\eta} \\
&= \frac{E_1 + E_2}{\eta E_1} \sigma - \frac{E_2}{\eta} \varepsilon
\end{aligned}$$

En séparant les variables, nous obtenons l'équation générale du modèle de Zener reliant les contraintes (et leurs variations) aux déformations (et leurs variations).

$$\dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{\eta} \sigma = E_1 \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta} \varepsilon \qquad \textit{(E: VI-2)}$$

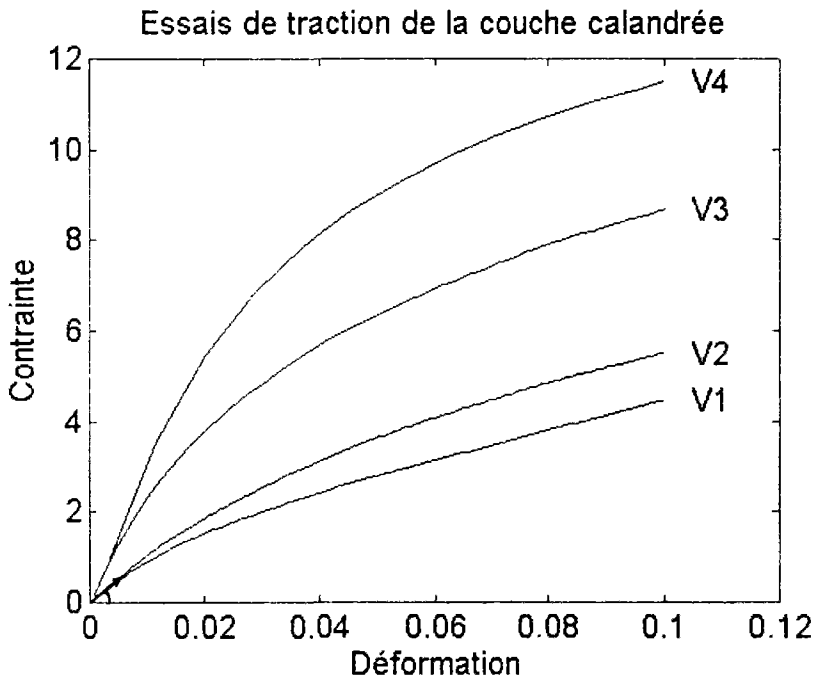
Cette expression est la formulation de la loi de comportement associée au modèle.

3-Calcul des grandeurs caractéristiques du modèle de Zener : E_1, E_2, η.

Nous allons nous baser, dans la détermination de ces trois grandeurs, sur les séries d'essais expérimentales décrites dans le paragraphe précédent.

3-1: Traction à vitesse de déformation constante

Parmi ces courbes, nous choisissons celle obtenue avec la vitesse de déformation la moins élevée (V_1). Cette vitesse de tarction, la plus petite que nous avons pu obtenir à l'aide de la machine de traction, est considérée très élevée par rapport aux vitesses du phénomène modélisé. A une grande vitesse de traction, seul le ressort E_1 du modèle choisi se déforme. Le ressort E_2 est bloqué par l'amortisseur η. Ceci peut être déduit de l'expression de la loi de comportement (E: VI-2): La vitesse de déformation, très grande par rapport à la déformation est multipliée par le module E_1. La pente à l'origine de la courbe (Contrainte - Déformation) nous donne le module $\underline{E}_1$ (fig. VI-6):



(VI-6): Courbe de traction à vitesse de déformation = V_1.

3-2: Essais de relaxation jusqu'à l'équilibre

Nou reprenons l'équation générale d'un Zener (E: VI-2) :

$$\dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{\eta}\sigma = E_1\dot{\varepsilon} + \frac{E_1E_2}{\eta}\varepsilon$$

Dans le cas d'une relaxation qui démarre à une valeur ε_{rel} de déformation :

$$\varepsilon = \varepsilon_{rel} = \text{cte.}$$

La vitesse de déformation est égale à zéro :

$$\dot{\varepsilon} = 0$$

L'équation générale devient :

$$\dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{\eta}\sigma = \frac{E_1E_2}{\eta}\varepsilon_{rel}$$

A long terme, la courbe est stabilisée, la contrainte ne varie plus avec le temps. On atteint un équilibre:

$$t \to \infty, \sigma \to \text{cte}$$
$$\Rightarrow$$
$$\dot{\sigma} \to 0$$
$$\Rightarrow$$
$$\sigma_\infty = \frac{E_1E_2}{E_1 + E_2}\varepsilon_{rel}$$

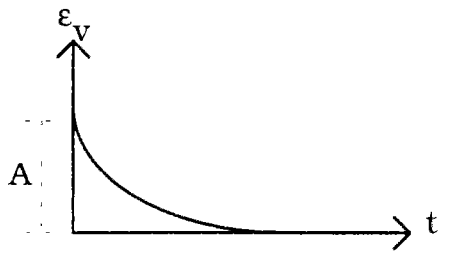
Cette dernière expression n'est que celle de la droite obtenue par le couple de valeur $(\varepsilon_{rel}, \sigma_\infty)$ de l'essai de relaxation à l'infini, décrit dans la deuxième série expérimentale.

$E = \frac{E_1E_2}{E_1 + E_2}$ est donc le module de cette courbe d'équilibre après relaxation.

Connaissant la valeur de E_1 (3-1), la détermination de E nous donne celle de $\underline{E_2}$.

3-3: Essais de Recouvrance (Retrait)

Reprenons les résultats de la courbe de recouvrance que nous avons appelé courbe de retrait. Au temps $t=t_0$, la contrainte appliquée s'annule. Le ressort E_1 du modèle de Zener est relâché instantanément. Le ressort E_2, bloqué par l'amortisseur η, reprend ses dimensions à charge nulle progressivement avec le temps. La déformation visqueuse (fig. VI-7), de valeur maximale égale à A au temps t_0, diminue.



(VI-7): Variation de la déformation visqueuse.

Or cette déformation visqueuse est reliée à la contrainte totale (égale à zéro) par la relation (E: VI-1) :

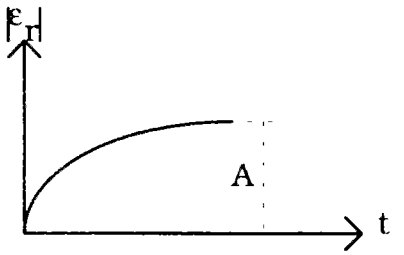
$$\dot{\varepsilon}_v + \frac{E_2}{\eta}\varepsilon_v = \frac{\sigma}{\eta} = 0$$

D'où l'expression de la déformation visqueuse en fonction du temps :

$$\varepsilon_v(t) = A\exp\left(-\frac{E_2}{\eta}t\right)$$

Le retrait, que nous mesurons, n'est que la diminution de cette déformation visqueuse à partie de sa valeur maximale d'origine, A (fig. VI-8) :

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(t) &= \varepsilon_v(t) - \varepsilon_v(0)\\ &= \varepsilon_v(t) - A\end{aligned}$$



(VI-8): Variation du retrait.

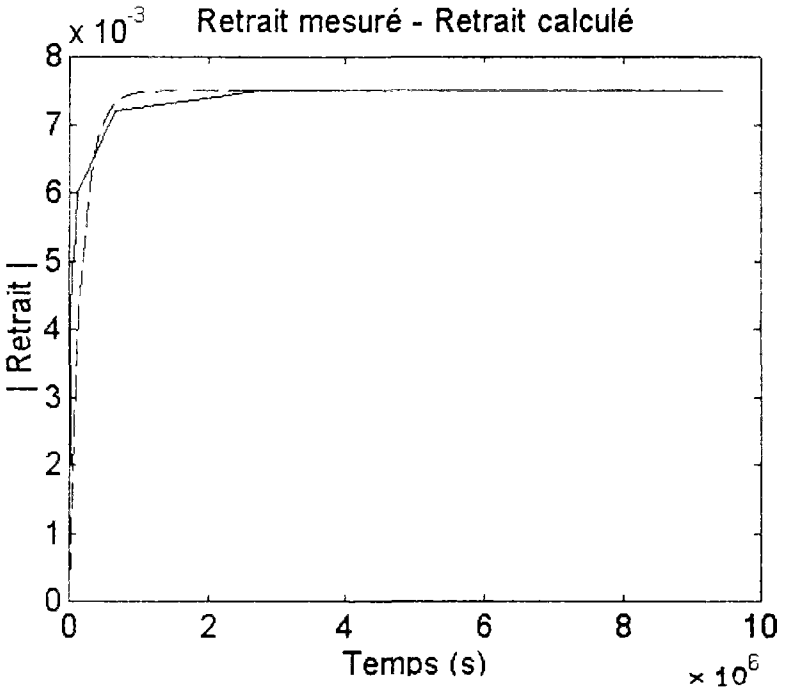
L'expression du retrait en fonction du temps sera donc :

$$\varepsilon_r(t) = A\left(\exp\left(-\frac{E_2}{\eta}t\right) - 1\right) \qquad \textit{(E: VI-3)}$$

Remarquons que quand $t \to \infty, \varepsilon_r(t) \to A$.

A est donc donnée par la valeur maximale du retrait stabilisé.

Connaissant A et E_2, nous calculons η en calant, sur la courbe de retrait mesuré, la courbe (en pointillé) de l'équation (E: VI-3) :



(VI-9): Comparaison entre le retrait mesuré en usine
et la courbe de retrait calculée théoriquement avec le modèle de Zener

III-CONCLUSION

La courbe d'équilibre après relaxation décrit le comportement de la couche calandrée à long terme. Toute déformation $\varepsilon = \varepsilon_{rel}$ du matériau y crée une contrainte σ_∞. La relation $\sigma_\infty = E.\varepsilon_{rel}$ $\left(/E = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \right)$ constitue une loi de comportement à long terme. Nous avons donc utilisé, dans notre application en calcul Elastique, ce module E comme module d'élasticité.

Dans le chapitre suivant, nous exposerons la méthode du calcul que nous appelerons calcul "Viscoélastique". Nous nous intéresserons toujours au calcul à long terme. En discrétisant sur le temps, le calcul M4 sera un calcul itératif, dans lequel le comportement de la couche calandrée sera considéré comme élastique linéaire avec une déformation de retrait imposée. Le module élastique sera le même que dans le calcul Elastique. Nous prendrons, néanmoins, en compte l'influence de la contrainte membranaire dans cette couche sur la déformation de retrait, relation imposée par la loi de comportement du matériau.

CHAPITRE VII

MODELISATION MULTIPHASIQUE "VISCOELASTIQUE"

I-INTRODUCTION

Soit $\varepsilon_V(t)$ la déformation visqueuse dans la couche viscoélastique à l'instant t. A la sortie de la chaîne de fabrication, c'est-à-dire au temps $t=t_0=0$, $\varepsilon_V(t)=\varepsilon_V(0)=A$.

Rappelons qu'à partir de cette valeur maximale A, la déformation visqueuse diminue avec le temps jusqu'au moment où elle tend vers zéro. La courbe de retrait $\varepsilon_r(t)$, que nous mesurons expérimentalement, n'est que la diminution de cette déformation visqueuse :

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(t) &= \varepsilon_v(t) - \varepsilon_v(0)\\ &= \varepsilon_v(t) - A\end{aligned}$$

Le retrait, qui constitue la seule histoire de chargement dans le calcul du "Curling" d'un bicouche est fonction du temps.

D'autre part, dans le comportement viscoélastique du matériau, une relation lie la vitesse de déformation visqueuse à la contrainte totale et à la déformation visqueuse :

$$\dot{\varepsilon}_v(t) = f(\sigma(t), \varepsilon_v(t))$$

Plus particulièrement, dans le cas du modèle de Zener :

$$\dot{\varepsilon}_v(t) = \frac{1}{\eta}\left[\sigma(t) - \varepsilon_v(t)E_2\right]$$

Or, la contrainte dans la couche viscoélastique, comme le montre le calcul M4 Elastique effectué à retrait constant, est une fonction de x (x étant l'abscisse d'un point M quelconque de la dalle, compris entre 0 et ℓ).

$$\sigma = \sigma(x,t)$$

Nous en déduisons que la déformation visqueuse, et donc <u>le retrait est une fonction de x</u>.

$$\dot{\varepsilon}_v(x,t) = \frac{1}{\eta}\sigma(x,t) - \frac{E_2}{\eta}\varepsilon_v(x,t)$$

$$\Rightarrow$$

$$\dot{\varepsilon}_r(x,t) = \frac{1}{\eta}\sigma(x,t) - \frac{E_2}{\eta}(\varepsilon_r(x,t) + A)$$

Remplaçons la contrainte dans la couche visqueuse i par sa valeur en fonction de l'effort membranaire dans cette couche.

$$\sigma(x,t) = \frac{N_i(x,t)}{e_i}$$

e_i : épaisseur de la couche i.

$$\Rightarrow$$

$$\dot{\varepsilon}_r(x,t) = \frac{N_i(x,t)}{\eta . e_i} - \frac{E_2}{\eta}(\varepsilon_r(x,t) + A) \qquad \textit{(E: VII-1)}$$

II-<u>METHODE DE CALCUL</u>

Le problème à traiter est donc un problème à deux variables x et t.

Nous partons d'un état initial de temps (t=0) où :

$\varepsilon_V(x,0) = A$
$N_i(x,0) = 0$
$\varepsilon_r(x,0) = \varepsilon_V(x,0) - A = 0$

L'équation (E: VII-1) nous donne une première valeur de la vitesse de retrait, en incrémentant sur le temps d'un pas Δt :

$$\dot{\varepsilon}_r(x,\Delta t) = f(N_i(x,0) = 0, \varepsilon_r(x,0) = 0)$$
$$\Rightarrow$$
$$\dot{\varepsilon}_r(x,\Delta t) = -\frac{E_2}{\eta} A$$

Ce qui nous donne la première valeur du retrait au temps Δt :

$$\varepsilon_r(x,\Delta t) = \varepsilon_r(x,0) + \Delta t.\dot{\varepsilon}_r(x,\Delta t)$$
$$\Rightarrow$$
$$\varepsilon_r(x,\Delta t) = -\frac{E_2}{\eta} A.\Delta t = \varepsilon_{r1} = \text{constante}$$

<u>Au premier pas de temps t, un calcul "Elastique" est effectué, en utilisant la valeur constante ε_{r1} de retrait dans le calcul Multiphasique par M4</u>. (Ce premier pas de temps est choisi infiniment petit).

Une première expression de l'effort membranaire $N_i(x)$, dans la couche i viscoélastique, est obtenue, en suivant le même calcul que dans la première partie "Elastique" de cette étude et en prenant une valeur du retrait constante égale à ε_{r1}:

$$N_i(x,\Delta t) = f(\varepsilon_{r1})$$

Nous utilisons cette expression dans le calcul de la nouvelle valeur de la vitesse de retrait:

$$\dot{\varepsilon}_r(x,2\Delta t) = f(N_i(x,\Delta t), \varepsilon_r(x,\Delta t))$$

Ce qui nous donne la nouvelle valeur du retrait, fonction de x:

$$\varepsilon_r(x,2\Delta t) = \varepsilon_r(x,\Delta t) + \Delta t.\dot{\varepsilon}_r(x,2\Delta t)$$

<u>A partir de ce second pas de temps, le calcul dans M4 est "Viscoélastique" (Le retrait est une fonction de x) et s'effectue par itérations successives</u>.

A chaque itération, c'est-à-dire, à chaque pas de temps, nous calculons la vitesse de retrait dans la couche i visqueuse, en fonction de l'effort membranaire dans cette couche, obtenu dans le calcul M4 précédent.

$$\dot{\varepsilon}_r(x,t+\Delta t) = \frac{1}{\eta e_i} N_i(x,t) - \frac{E_2}{\eta}\left(\varepsilon_r(x,t) - A\right) \qquad \textit{(E: VII-2)}$$

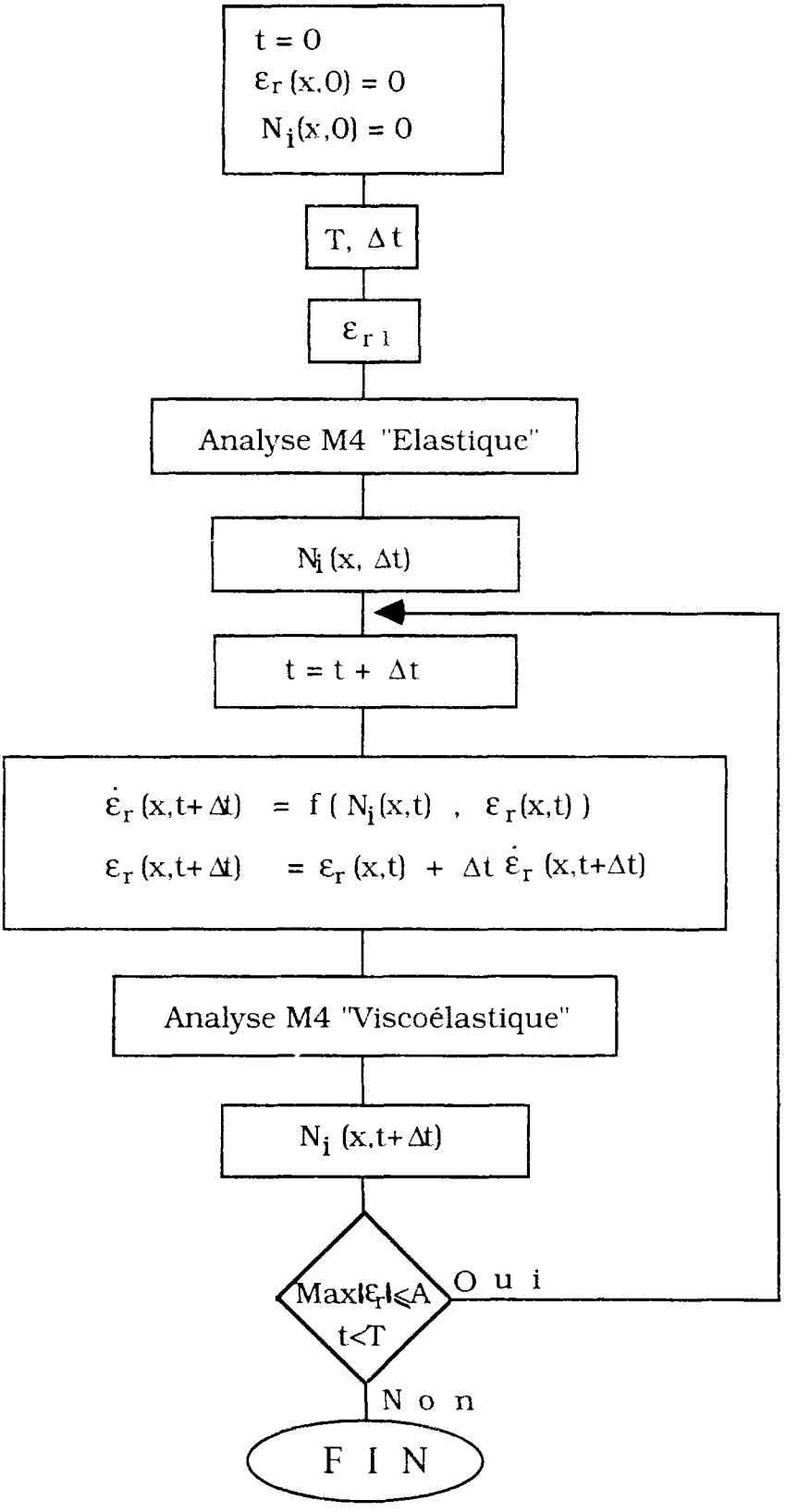
Ce qui nous donne la nouvelle valeur du retrait.

$$\varepsilon_r(x,t+\Delta t) = \varepsilon_r(x,t) + \Delta t.\dot{\varepsilon}_r(x,t+\Delta t) \qquad \textit{(E: VII-3)}$$

Valeur que nous utilisons dans le nouveau calcul, par M4, de l'effort membranaire dans la couche viscoélastique, ainsi que des autres grandeurs du modèle (Déplacements horizontaux et verticaux, efforts de cisaillement, ...) de la structure du bicouche.

III-ALGORITHME

Le raisonnement qui précède peut être décrit par l'algorithme ci-dessous :



IV-MODELISATION M4

Se basant, toujours, sur le modèle M4 "Simplifié", nous traitons, dans ce paragraphe, le problème du Curling positif d'un bicouche en calcul Viscoélastique.

Rappelons que le calcul qui suit est un calcul itératif (qui s'effectue à chaque pas de temps Δt).

Nous allons utiliser les mêmes équations et notations que dans le calcul "Elastique" d'un Curling positif fait dans le chapitre IV de la deuxième partie, en prenant en considération la dépendance du retrait du temps et de l'espace, $\varepsilon_r = \varepsilon_r(x,t)$.

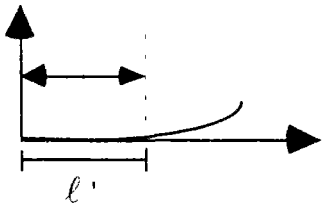
L'étude est toujours divisée en deux parties (Selon la géométrie de la déformée) :

1- $x \in [0, \ell']$: La dalle est en contact avec le sol.
Les déplacements verticaux sont nuls.

2- $x \in [\ell', \ell]$: La dalle est soulevée.
La réaction du sol est nulle.

IV-1:Résolution

1-Partie en contact avec le sol



Les équations d'équilibre (E: III-12) du modèle M4 Simplifié s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} N_1(x,t) + \tau^{1,2}(x,t) = 0 \\ \operatorname{div} N_2(x,t) - \tau^{1,2}(x,t) = 0 \end{cases} \qquad \textit{(E: VII-4)}$$

Compte tenu de la dépendance de toutes les grandeurs du temps et de l'espace, les dérivées par rapport à x sont des dérivées partielles :

$$N_1(x,t) = K_1 \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} \qquad \textit{(E: VII-5)}$$

$$N_2(x,t) = K_2\left(\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} - \varepsilon_r(x,t)\right) \qquad \textit{(E: VII-6)}$$

$$\tau^{1,2}(x,t) = K\big(u_2(x,t) - u_1(x,t)\big) \qquad \textit{(E: VII-7)}$$

Nous remplaçons les efforts membranaires et de cisaillement par leurs valeurs en fonction des déplacements dans le système d'équations d'équilibre (E: VII-4). Nous obtenons un système d'équations différentielles du second ordre en u_1 et u_2, avec un second membre fonction de x :

$$\begin{cases} K_1 \dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + K\left[u_2(x,t) - u_1(x,t)\right] = 0 \\ K_2 \dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - K\left[u_2(x,t) - u_1(x,t)\right] = K_2 \dfrac{\partial \varepsilon_r(x,t)}{\partial x} \end{cases}$$

La résolution de ce système de 2 équations différentielles [13] nous donne les valeurs de u_1 et u_2 sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_1(x,t) = -\dfrac{K}{K_1}\left[\displaystyle\int_0^x \left(\frac{\sinh w(x-u)}{w^3}\frac{\partial \varepsilon_r(u,t)}{\partial x}\right)du - \frac{1}{w^2}\int_0^x \varepsilon_r(u,t)du\right] \\ \qquad -\dfrac{K}{K_1}\left[A\cosh(wx) + B\sinh(wx)\right] + Cx + D \\ u_2(x,t) = \dfrac{K}{K_2}\left[\displaystyle\int_0^x \left(\frac{\sinh w(x-u)}{w^3}\frac{\partial \varepsilon_r(u,t)}{\partial x}\right)du\right] + \left(1 - \frac{K}{K_2 w^2}\right)\int_0^x \varepsilon_r(u,t)du \\ \qquad +\dfrac{K}{K_2}\left[A\cosh(wx) + B\sinh(wx)\right] + Cx + D \end{cases}$$

Avec la même valeur de w trouvée dans le chapitre IV.

$$w = \pm\sqrt{\frac{K(K_1 + K_2)}{K_1 K_2}}$$

Vue la symétrie de la dalle, ces déplacements sont des fonctions impaires de x.

$u_i(x) = -u_i(-x)$.

Les expressions des déplacements des deux particules d'un point M dans le plan de la dalle (suivant x) deviennent :

$$\begin{cases} u_1(x,t) = -\dfrac{K}{K_1}\left[\displaystyle\int_0^x \left(\frac{\sinh w(x-u)}{w^3}\frac{\partial \varepsilon_r(u,t)}{\partial x}\right)du - \frac{1}{w^2}\int_0^x \varepsilon_r(u,t)du\right] \\ \qquad -\dfrac{K}{K_1}B\sinh(wx) + Cx & \textit{(E: VII - 8)} \\ u_2(x,t) = \dfrac{K}{K_2}\left[\displaystyle\int_0^x \left(\frac{\sinh w(x-u)}{w^3}\frac{\partial \varepsilon_r(u,t)}{\partial x}\right)du\right] + \left(1 - \frac{K}{K_2 w^2}\right)\int_0^x \varepsilon_r(u,t)du \\ \qquad +\dfrac{K}{K_2}B\sinh(wx) + Cx & \textit{(E: VII - 9)} \end{cases}$$

Celles des efforts membranaires dans les deux couches (E: VII-5) et (E: VII-6) s'écrivent :

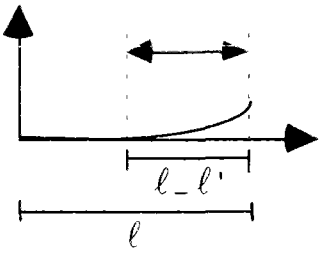
$$\begin{cases} N_1(x,t) = -K\left[\displaystyle\int_0^x \left(\frac{\cosh w(x-u)}{w^2}\frac{\partial \varepsilon_r(u,t)}{\partial x}\right)du - \frac{1}{w^2}\varepsilon_r(x,t)\right] \\ \qquad -KBw\cosh(wx) + CK_1 & \textit{(E: VII - 10)} \\ N_2(x,t) = K\left[\displaystyle\int_0^x \left(\frac{\cosh w(x-u)}{w^2}\frac{\partial \varepsilon_r(u,t)}{\partial x}\right)du - \frac{1}{w^2}\varepsilon_r(x,t)\right] \\ \qquad +KBw\cosh(wx) + CK_2 & \textit{(E: VII - 11)} \end{cases}$$

L'expression (E: VII-7) du cisaillement d'interface $\tau^{1,2}$ devient :

$$\tau^{1,2}(x,t) = K\left[u_2(x,t) - u_1(x,t)\right]$$
$$= K\left[\int_0^x \left(\frac{\sinh w(x-u)}{w}\frac{\partial \varepsilon_r(u,t)}{\partial x}\right)du + Bw^2\sinh(wx)\right] \qquad (E:\ VII-12)$$

Les deux coefficients B et C restent à déterminer.

2-Partie soulevée du sol



Les variables dans cette partie sont distinguées de celles de la partie précédente par un astérisque (*).

Notons que le retrait dans la partie soulevée, $\varepsilon_r^*(x,t)$, est fonction de l'effort membranaire $N_2^*(x,t)$.

L'équation d'équilibre (E: III-13) du modèle M4 Simplifié nous donne :

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\operatorname{div}\frac{e_i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}\right) + F_3^i\right] = 0$$
$$\Rightarrow$$
$$\frac{e_1+e_2}{2}\frac{\partial \tau^{1,2*}(x,t)}{\partial x} + F_3 = 0$$

Rappelons que $F_3 = F_3^1 + F_3^2$ est le poids surfacique total de la dalle.

$$\Rightarrow \tau^{1,2*}(x,t) = -\frac{2F_3}{e_1+e_2}x + \alpha \qquad (E:\ VII-13)$$

La valeur du cisaillement à l'interface des deux couches tend vers zéro au bord libre de la dalle:

$$x \to \ell$$
$$\Rightarrow \tau^{1,2*}(\ell,t) \to 0$$
$$\Rightarrow \tau^{1,2*}(x,t) = -\frac{2F_3}{e_1+e_2}(x-\ell)$$

L'expression du cisaillement connue, les efforts membranaires seront calculés en utilisant les équations d'équilibre (E: VII-4) :

$$\begin{cases} \operatorname{div} N_1^*(x,t) + \tau^{1,2*}(x,t) = 0 \\ \operatorname{div} N_2^*(x,t) - \tau^{1,2*}(x,t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} N_1^*(x,t) = \dfrac{2F_3}{e_1+e_2}\left(\dfrac{x^2}{2} - \ell x + \alpha_1'\right) & \textit{(E: VII - 14)} \\ N_2^*(x,t) = -\dfrac{2F_3}{e_1+e_2}\left(\dfrac{x^2}{2} - \ell x + \alpha_2'\right) & \textit{(E: VII - 15)} \end{cases}$$

A partir desquels nous obtenons les expressions des déplacements dans le plan :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1^*(x,t)}{\partial x} = \dfrac{N_1^*(x,t)}{K_1} \\ \dfrac{\partial u_2^*(x,t)}{\partial x} = \dfrac{N_2^*(x,t)}{K_2} + \varepsilon_r^*(x,t) \end{cases}$$

En intégrant entre ℓ' et x nous obtenons les expressions des déplacements dans le plan de la partie décollée :

$$\begin{cases} u_1^*(x,t) = \dfrac{2F_3}{K_1(e_1+e_2)}\left[\dfrac{x^3}{6} - \ell\dfrac{x^2}{2} + \alpha_1' x + \alpha_1''\right] & \textit{(E: VII - 16)} \\ u_2^*(x,t) = -\dfrac{2F_3}{K_2(e_1+e_2)}\left[\dfrac{x^3}{6} - \ell\dfrac{x^2}{2} + \alpha_2' x + \alpha_2''\right] + \displaystyle\int_{\ell'}^{x} \varepsilon_r^*(u,t)du & \textit{(E: VII - 17)} \end{cases}$$

Les conditions aux limites au point d'abscisse ℓ :

$$N_1^*(\ell,t)=0$$
$$N_2^*(\ell,t)=0$$

Les conditions de continuité au point d'abscisse ℓ', entre la partie en contact avec le sol et la partie soulevée:

$$N_1^*(\ell',t)=N_1(\ell',t)$$
$$N_2^*(\ell',t)=N_2(\ell',t)$$
$$u_1^*(\ell',t)=u_1(\ell',t)$$
$$u_2^*(\ell',t)=u_2(\ell',t)$$

Nous donnent les valeurs des six coefficients de calcul (Annexe D):

$$B,C,\alpha_1',\alpha_2',\alpha_1'',\alpha_2''.$$

<u>Pour alléger, nous omettons, dans ce qui suit, la variable t dans les expressions</u>.

3-<u>Calcul de la longueur de contact ℓ'</u>

Les forces exterieurs appliquées à la structure sont le poids propre de la dalle de longueur ℓ et la réaction du sol, répartie sur la partie de la dalle en contact avec le sol de longueur ℓ'. Un calcul identique à celui fait au chapitre IV nous montre qu'il y a une continuité des efforts de cisaillement d'interface au point d'abscisse ℓ'. L'équilibre de ces forces externes nous donne :

$$\int_0^{\ell'} R(x)dx + F_3^1\ell = 0 \qquad \textit{(E: VII-18)}$$

Avec:

$$R(x) = -v^{0,1}(x)$$

$v^{0,1}(x)$ étant l'effort exercé par la couche 1 sur le sol. L'équation d'équilibre (E: III-19) du modèle M4 nous permet de le calculer, comme nous avons vu au chapitre IV, dans le calcul "Elastique".

$$v^{0,1}(x) = \operatorname{div}\left(\frac{e_1+e_2}{2}\tau^{1,2}(x)\right) + F_3^i$$
$$= \frac{K(e_1+e_2)}{2}\left[\int_0^x \left(\cosh w(x-u)\frac{\partial \varepsilon_r(u)}{\partial x}\right)du + Bw^3\cosh(wx)\right] + F_3^i$$

Ce qui nous donne, en intégrant, entre 0 et ℓ', l'équation (E: VII-18) :

$$\frac{K(e_1+e_2)}{2}\left[\int_0^{\ell'}\int_0^x \cosh w(x-u)\frac{\partial \varepsilon_r(u)}{\partial x}dudx + Bw^2\sinh(w\ell')\right] - F_3^i(\ell-\ell') = 0$$

En remplaçant B par sa valeur calculée dans l'annexe D, nous obtenons une relation qui nous permet de calculer la valeur de la longueur de contact ℓ'.

$$\frac{\tanh w\ell'}{w} = \frac{\dfrac{2F_3(\ell-\ell')}{K(e_1+e_2)} - \displaystyle\int_0^{\ell'}\int_0^x \cosh w(x-u)\frac{\partial \varepsilon_r(u)}{\partial x}dudx}{-\dfrac{F_3^i w^2(\ell-\ell')^2}{K(e_1+e_2)} + \varepsilon_r(\ell') - \displaystyle\int_0^{\ell'}\cosh w(\ell'-u)\frac{\partial \varepsilon_r(u)}{\partial x}du} \qquad \textit{(E: VII-19)}$$

4-Forme de la déformée

L'effort de cisaillement d'interface entre les deux couches, dans la partie soulevée de la dalle, est fonction des déplacements dans le plan et du gradient du déplacement vertical (E: III-17):

$$\tau^{1,2*}(x) = K\left[u_2^*(x) - u_1^*(x) + \frac{e_1+e_2}{2}\operatorname{grad}u_3^*(x)\right]$$
$$\Rightarrow$$
$$\frac{\partial u_3^*(x)}{\partial x} = \frac{2}{e_1+e_2}\left[\frac{\tau^{1,2*}(x)}{K} + u_1^*(x) - u_2^*(x)\right]$$
$$\Rightarrow$$
$$\frac{\partial u_3^*(x)}{\partial x} = P\left[I\left(\frac{x^3}{6} - \ell\frac{x^2}{2}\right) + Jx + M\right] - \frac{2}{e_1+e_2}\int_{\ell'}^x \varepsilon_r^*(u)du$$

Avec :

$$P = \frac{4F_3^i}{(e_1+e_2)^2}$$

$$I = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

$$J = \frac{\alpha_1'}{K_1} + \frac{\alpha_2'}{K_2} - \frac{1}{K}$$

$$M = \frac{\alpha_1''}{K_1} + \frac{\alpha_2''}{K_2} + \frac{\ell}{K}$$

En intégrant entre ℓ' et x, nous obtenons l'expression du déplacement vertical d'un point M d'abscisse x de la partie soulevée de la dalle :

$$u_3^{\bullet}(x) = P\left[I\left(\frac{x^4}{24} - \ell\frac{x^3}{6}\right) + J\frac{x^2}{2} + Mx + \alpha\right] - \frac{2}{e_1+e_2}\int_{\ell'}^{x}\int_{\ell'}^{x}\varepsilon_r^{\bullet}(u)du^2$$

La constante d'intégration α est donnée par la condition aux limites au point d'abscisse ℓ', où le déplacement vertical est nul :

$$u_3^{\bullet}(\ell') = 0$$

Ce qui nous donne l'expression du déplacement vertical, qui tracé en fonction de x, donnent la forme de la dalle déformée.

$$u_3^{\bullet}(x) = P\left[I\left(\frac{x^4-\ell'^4}{24}\right) - \ell\left(\frac{x^3-\ell'^3}{6}\right) + J\left(\frac{x^2-\ell'^2}{2}\right) + M(x-\ell')\right] - \frac{2}{e_1+e_2}\int_{\ell'}^{x}\int_{\ell'}^{x}\varepsilon_r^{\bullet}(u)du^2$$

(E: VII-20)

IV-2:Application

1-Caractéristiques

Nous considérons la même dalle de longueur 2ℓ = 500 mm et de poids surfacique total F_3^i = 6.10^{-5} N/mm^2. La couche 1 est la couche armée élastique, la couche 2 est la sous-couche viscoélastique. Le comportement de cette dernière, soumise à une histoire de déformation de retrait $\varepsilon_r(t)$, est assimilé à un modèle de Zener simple . Nous suivons, pour la détermination des caractéristiques de la couche 2, la méthode, exposée dans le chapitre précédent, de détermination des caractéristiques d'un modèle de Zener simple.

Couche 1 :

- Epaisseur : e_1 = 0.4 mm.

- Module d'Young élastique : E_{1e} = 200 N/mm^2.

$K_1 = e_1 * E_{1e}$.

Couche 2 :

- Epaisseur : e_2 = 1 mm.

- Caractéristiques viscoélastiques:

Premier module élastique du Zener : E_{1v} = 20 N/mm^2

$K_2 = e_2 * E_{1v}$

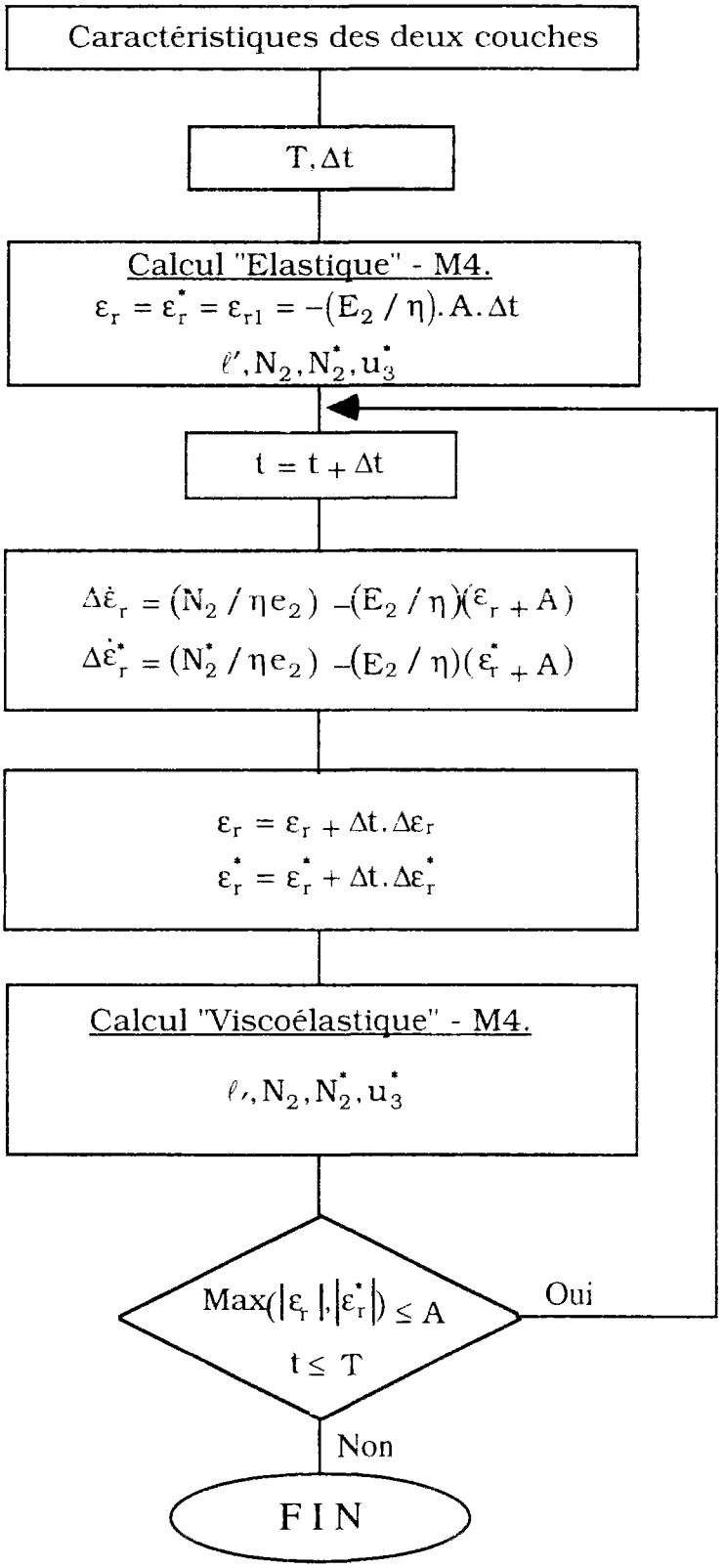
Deuxième module élastique du Zener : E_{2v} = 25 N/mm^2

$E_2 = E_{2v}$

Viscosité du Zener : $\eta = 45.10^5$ N.s/mm^2

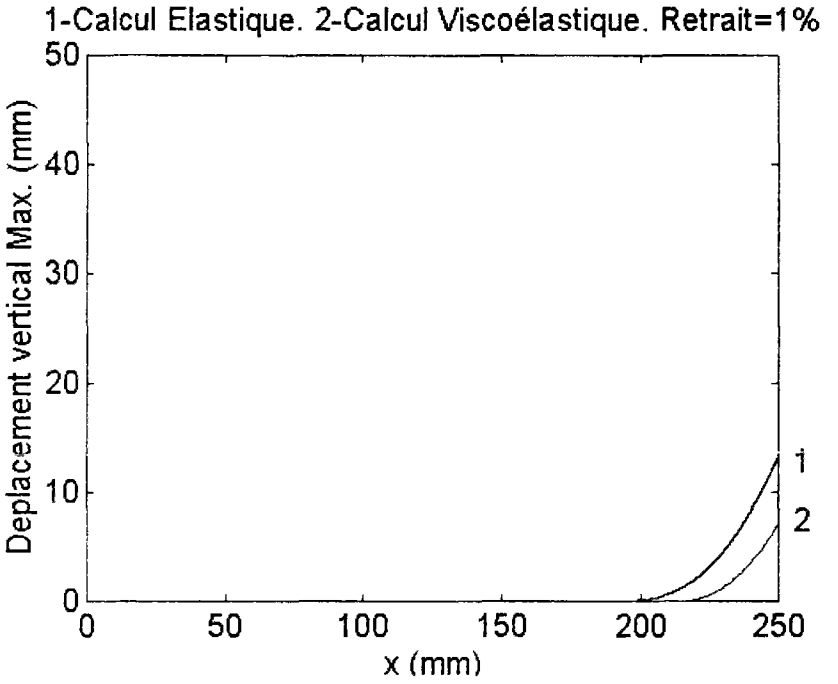
- Valeur maximale du retrait : A = 0.01

2-Organigramme du calcul "Viscoélastique"



3-Comparaison entre le calcul "Elastique" et le calcul "Viscoélastique"

Le graphique (fig.VII-1) montre le tracé de la déformée de la dalle pour deux calculs, élastique et viscoélastique, faits pour une même valeur de retrait maximal égal à 1%.



(VII-1): Forme de la dalle déformée pour une même valeur du retrait égale à 1% pour les deux calculs "Elastique" et "Viscoélastique.

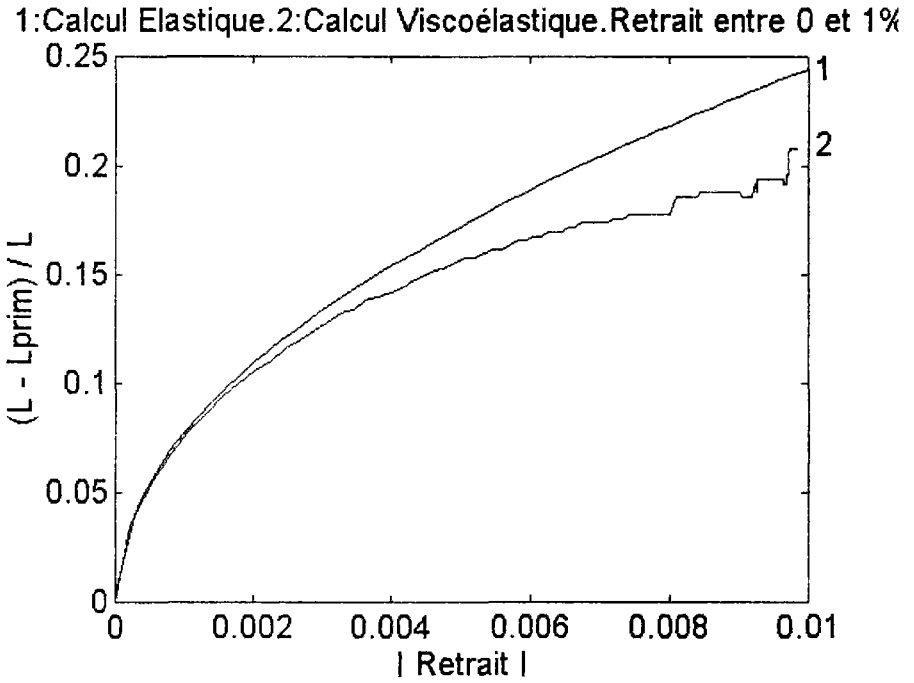
Calcul "Elastique" :

-Longueur de contact ℓ' = 189 mm
-Déplacement vertical maximal (Bout de la dalle) = 13.3 mm

Calcul "Viscoélastique" :

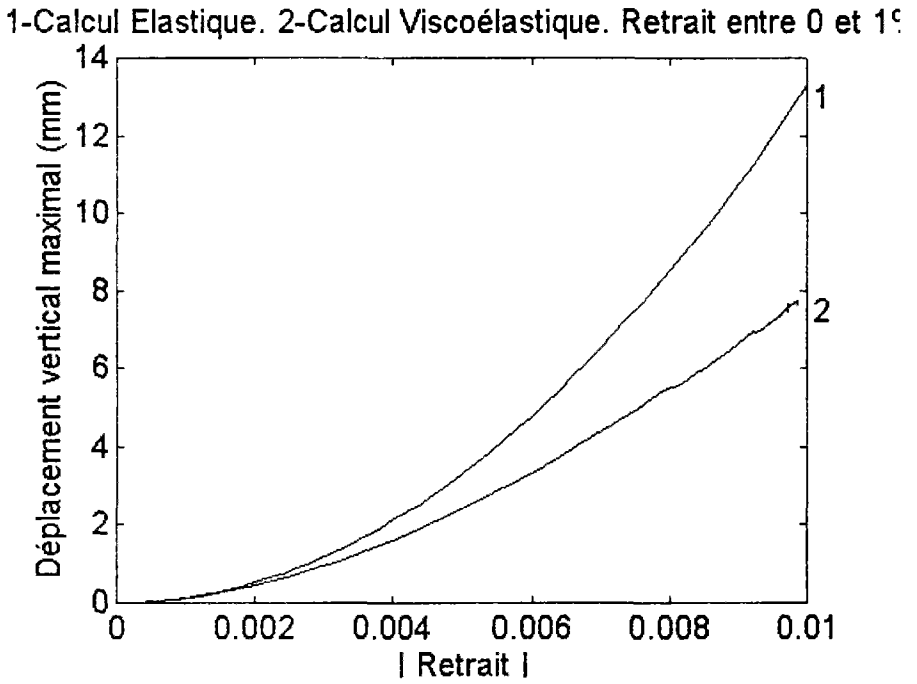
-Longueur de contact ℓ' = 202 mm
-Déplacement vertical maximal (Bout de la dalle) = 7.89 mm

La longueur de décollement (fig. VII-2), pour les mêmes valeurs de retrait maximal, est plus petite, quand la viscosité est prise en compte, comme le montre le graphique ci-dessous.



(VII-2): Variation de la longueur relative de décollement en fonction de la valeur maximale du retrait pour les deux calculs "Elastique" et "Viscoélastique".

Les déplacements verticaux sont, de même, moins importants (fig. VII-3):



(VII-3): Variation du déplacement vertical du bord de la dalle en fonction de la valeur maximale du retrait pour les deux calculs "Elastique" et "Viscoélastique".

IV-3:<u>Commentaire</u>

1- La viscosité de ces matériaux plastiques est à l'origine du phénomène du "Curling" que nous étudions. Cependant, en prenant en compte le comportement viscoélastique de la sous-couche, nous aboutissons à des résultats du "Curling" corrigés d'environ 40%, par rapport à ceux du calcul "Elastique". La viscosité paraît comme un facteur de correction. Il est donc intéressant de la prendre en considération, dans l'étude de l'évolution du désordre.

2- Se basant, toujours, sur l'hypothèse des petites perturbations (H.P.P), nous ne retenons que les résultats dont la géométrie est proche de la géométrie de référence.

3- Une étude du "Curling" négatif, en viscoélasticité, peut être menée dans le même esprit que celui du "Curling" positif. Un raisonnement identique à celui du chapitre V serait à suivre.

QUATRIEME PARTIE

ANALYSE

CHAPITRE VIII

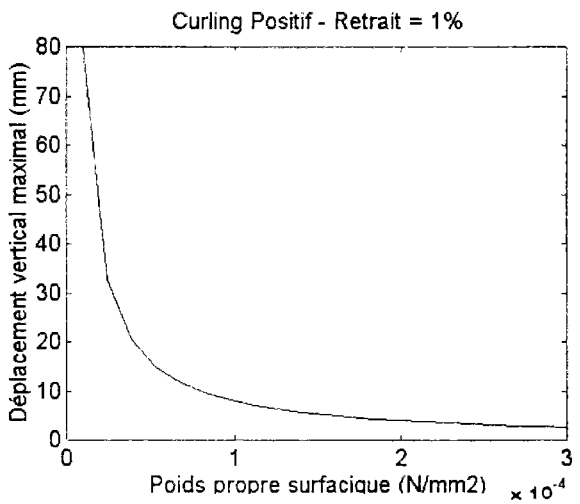
ETUDE DE LA SENSIBILITE DES PARAMETRES

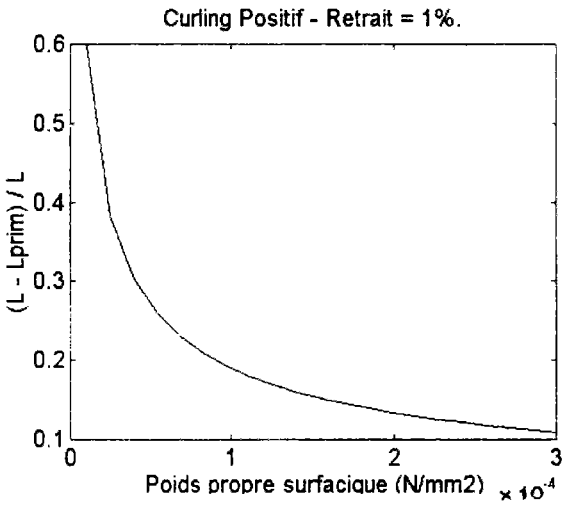
Beaucoup de facteurs entrent en jeu dans la détermination de la géométrie du "Curling" (les rigidités, les épaisseurs, le poids propre, la viscosité, ..). Nous représentons, dans ce chapitre, l'influence de chaque paramètre sur le désordre observé. Nous faisons cette étude de sensibilité des paramètres dans le cas du "Curling" positif en calcul "Elastique". Les paramètres en calculs "Elastique" et "Viscoélastique" influencent dans le même sens. La variation de ces paramètres en calcul "Elastique" nécessite un temps de calcul moins important. Ajoutons que la viscosité η n'intervient pas dans le calcul itératif M4 en viscoélasticité. Son influence apparaît sur l'évolution du désordre dans le temps.

En se basant sur les valeurs des caractéristiques utilisées dans les applications précédentes, nous avons fait varier chacune des caractéristiques autour de ces valeurs.

I- ROLE DU POIDS PROPRE

Faisons varier le poids propre surfacique F_3 de la dalle entre deux valeurs 0.1×10^{-4} et 3.0×10^{-4} N/mm^2, en gardant les mêmes valeurs déjà utilisées pour les autres grandeurs. Ceci revient à faire varier la densité des matériaux (les épaisseurs n'ayant pas changé). Nous remarquons, dans les graphiques (fig. VIII-1) , que le phénomène du "Curling" diminue en augmentant le poids propre de la dalle (Déplacement vertical maximal et longueur relative de décollement sont décroissants en fonction de F_3). Cela nous parait bien cohérent, le poids propre de la dalle étant la seule force extérieure appliquée à la dalle qui travaille dans le sens inverse du désordre. Les dalles pondérantes sont plus stables.



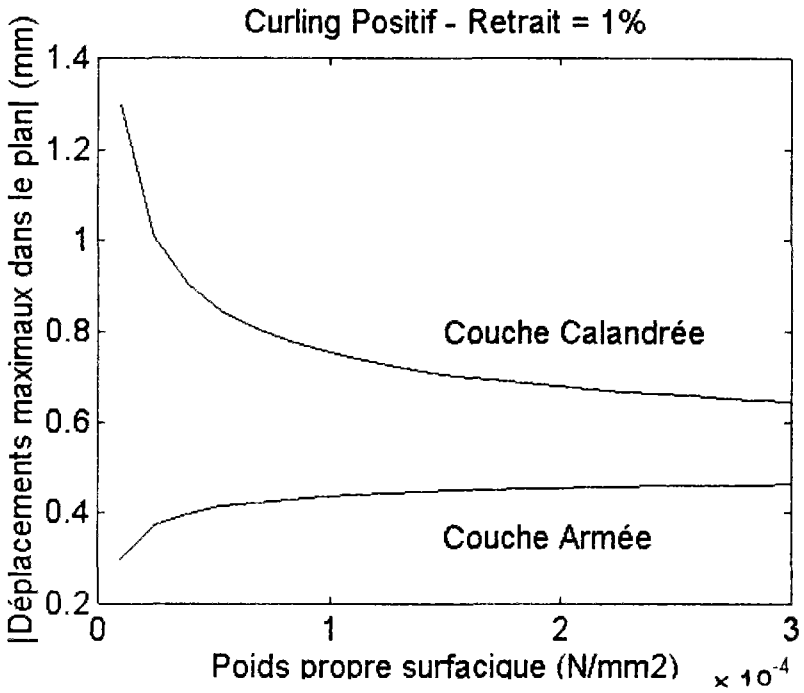


(VIII-1): *(a)* *(b)*

(a) Variation du déplacement vertical maximal en fonction du poids propre de la dalle.

(b) Variation de la longueur relative de décollement en fonction du poids propre de la dalle.

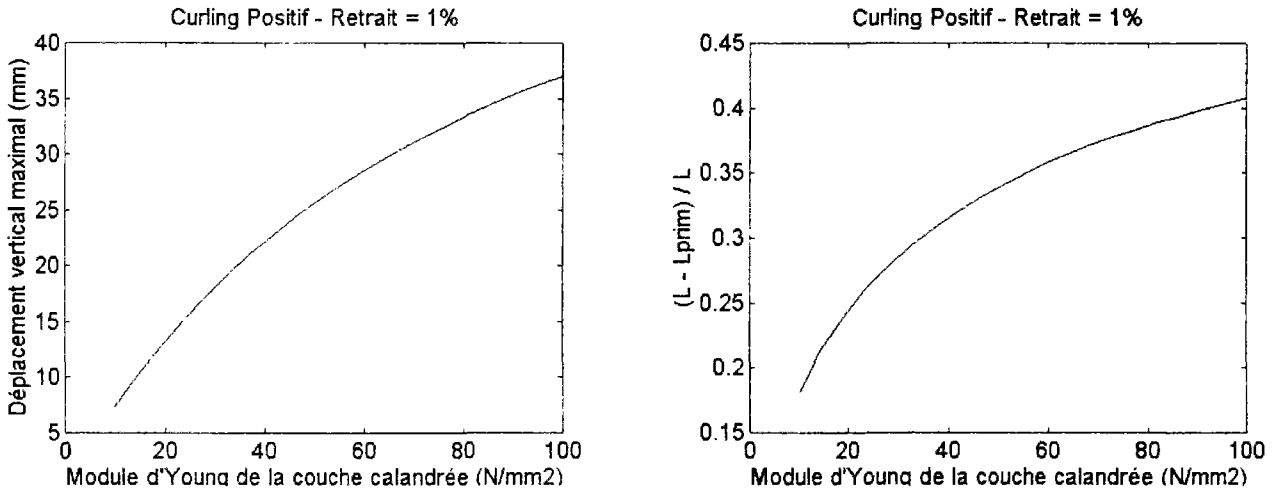
Nous traçons, dans le graphique (fig. VIII-2), la variation des déplacements dans le plan u_1 et u_2 des deux particules du point M, en fonction du poids propre de la dalle. Nous remarquons que le déplacement suivant x dans la couche calandrée diminue tandis que celui dans la couche armée augmente, de sorte à diminuer la différence entre les déplacements dans le plan des deux couches. Ceci entraîne une diminution du déplacement vertical.



(VIII-2): Variation des déplacements maximaux suivant x dans les deux couches en fonction du poids propre surfacique de la dalle.

II- ROLE DU MODULE D'YOUNG DE LA COUCHE CALANDREE

Pour une même valeur du retrait, nous faisons varier le module d'Young de la couche calandrée E_C entre deux valeurs 10 et 100 N/mm^2. Les graphiques (fig. VIII-3) nous montrent que le phénomène du "Curling" devient plus important quand E_C augmente. Ceci s'explique par une augmentation des contraintes dans les deux couches, la déformation de retrait imposée étant la même.



(VIII-3): *(a)* *(b)*

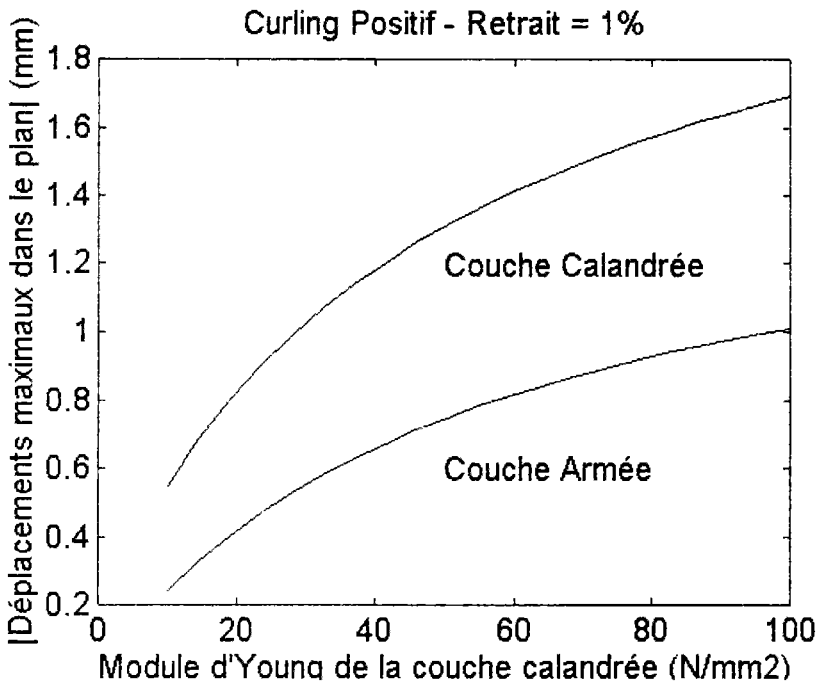
(a) *Variation du déplacement vertical maximal en fonction du module d'Young de la couche calandrée.*

(b) *Variation de la longueur relative de décollement en fonction du module d'Young de la couche calandrée.*

Nous nous devons de faire ici une remarque importante : La valeur du module d'Young de la couche calandrée dépend d'autres grandeurs comme la valeur du retrait. La détermination des paramètres du matériaux étant basée sur cette valeur du retrait. Néanmoins, même si les valeurs numériques ne sont pas réelles, le sens croissant du désordre en fonction du module E_C reste vrai.

Le graphique (fig. VIII-4) montre que les déplacements dans le plan des deux couches augmentent aussi avec le module d'Young de la couche calandrée. Ce qui veut dire qu'une augmentation du module d'Young de la couche calandrée entraîne une augmentation du "Curling" et du rétrécissement de la dalle dans

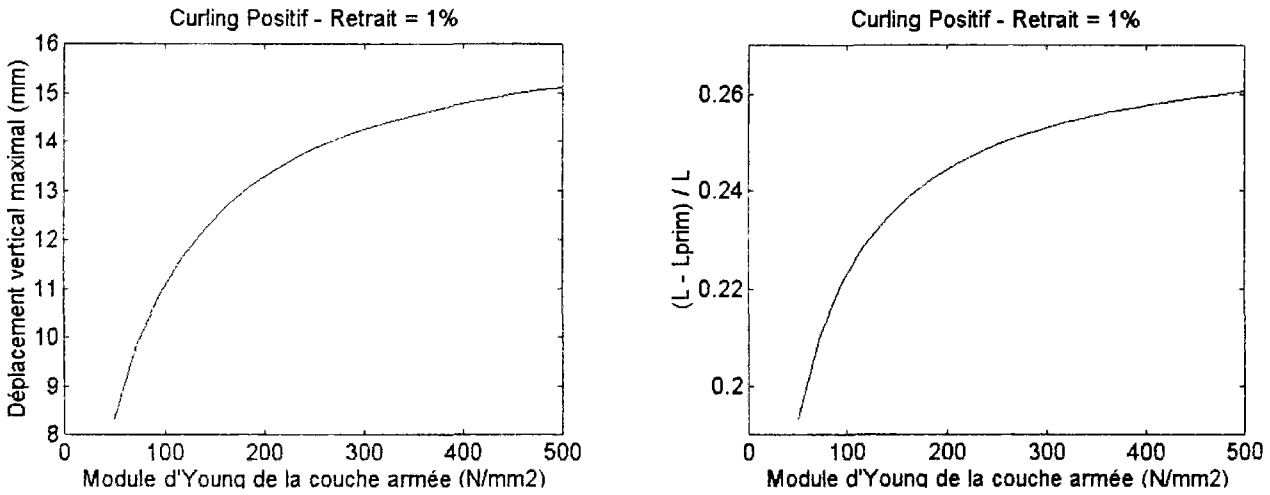
son plan. Une couche viscoélastique moins rigide donne, pour la même valeur du retrait, un désordre moins important.



(VIII-4): Variation des déplacements maximaux suivant x dans les deux couches en fonction du module d'Young de la couche calandrée.

III- ROLE DU MODULE D'YOUNG DE LA COUCHE ARMEE

Faisons varier le module d'Young de la couche armée E_a entre 50 et 500 N/mm^2. Les deux graphiques (fig. VIII-5) montrent que le déplacement vertical maximal et la longueur de décollement augmentent quand le module d'Young de la couche d'armature augmente. Ceci nous parait, au premier abord, un peu contradictoire. Cependant, en imaginant que le retrait dans la couche calandrée est équivalent à une déformation positive dans la couche armée, les résultats rejoignent ceux du paragraphe précédent.

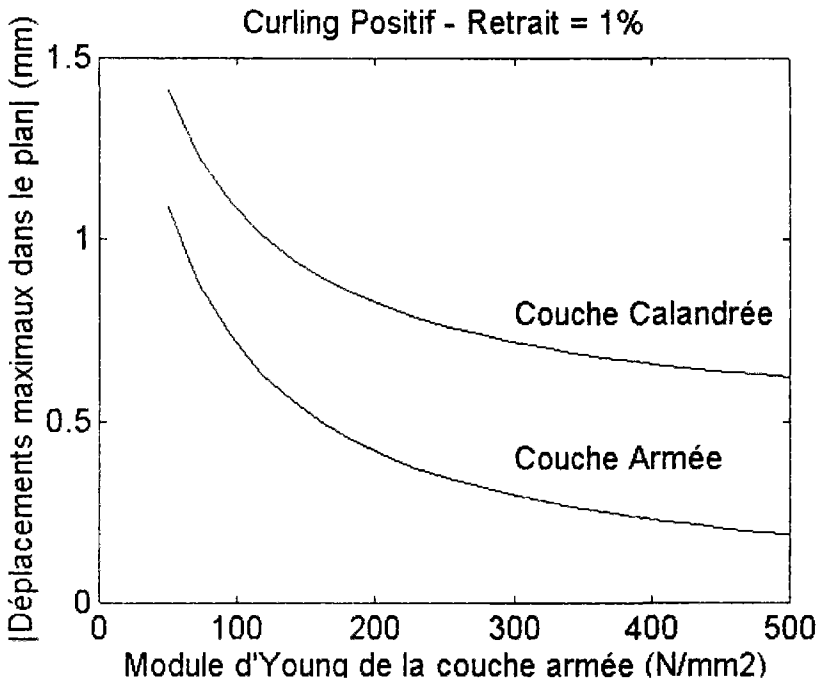


(VIII-5): *(a)* *(b)*

(a) *Variation du déplacement vertical maximal en fonction du module d'Young de la couche armée.*

(b) *Variation de la longueur relative de décollement en fonction du module d'Young de la couche armée.*

Quand la couche armée a un module d'Young relativement faible, elle suit plus facilement la déformation imposée dans la couche calandrée. La différence dimensionnelle sera réduite, ainsi que le désordre qui en résulte. Ceci est bien illustré dans le graphique (fig. IX-6) qui montre que les déplacements dans le plan des deux couches diminuent quand le module de la couche armée augmente.



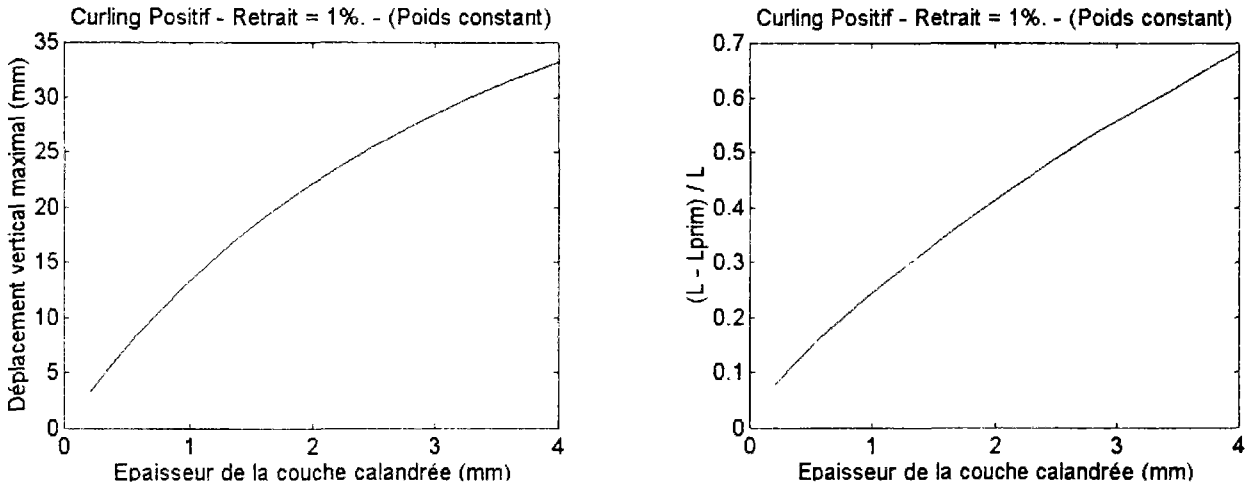
(VIII-6): Variation des déplacements maximaux suivant x dans les deux couches en fonction du module d'Young de la couche armature.

La couche armée est ajoutée au revêtement pour augmenter sa stabilité dans le plan. Plus son module d'Young augmente, plus le rétrécissement dans le plan de la dalle diminue en même temps que le "Curling" augmente. Il faut savoir trouver, dans la conception des dalles armées, un compromis du module d'Young de l'armature assez faible pour limiter les déplacements verticaux et assez élevé pour limiter les déplacements dans le plan.

IV- ROLE DE L'EPAISSEUR DE LA COUCHE CALANDREE

Nous avons envisagé deux cas:

Nous faisons varier, dans un premier cas, l'épaisseur de la couche non stable, entre les deux valeurs 0.2 et 4 mm en gardant la même valeur du poids propre de la dalle. Nous remarquons (fig. VIII-7) que, pour une même valeur du retrait imposé, le désordre est croissant avec l'épaisseur de cette couche.

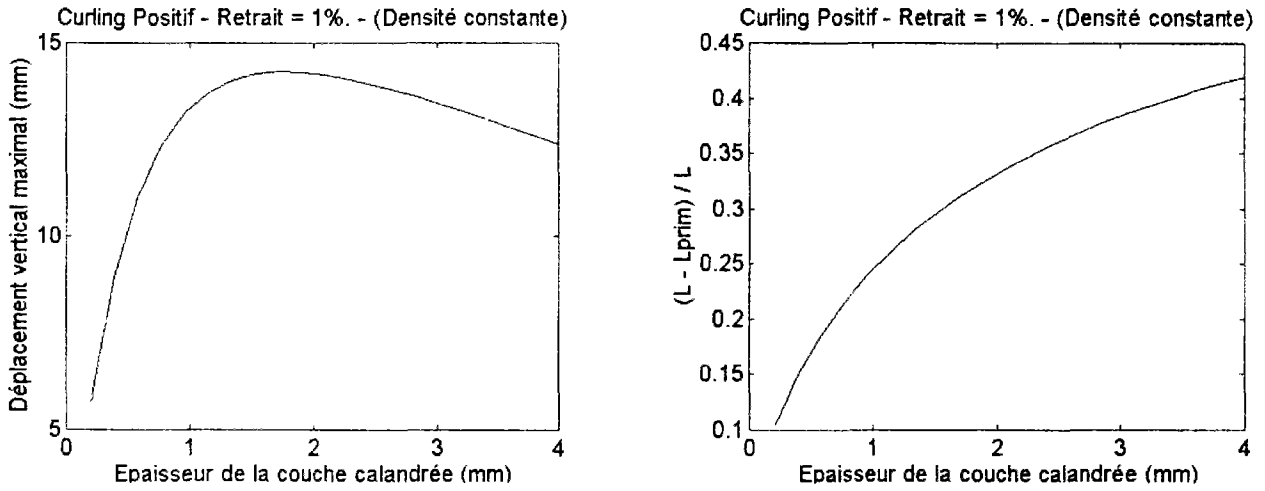


(VIII-7): *(a)* *(b)*

(a) Variation du déplacement vertical maximal en fonction de l'épaisseur de la couche calandrée.(Poids surfacique constant).

(b) Variation de la longueur relative de décollement en fonction de l'épaisseur de la couche calandrée.(Poids surfacique constant).

Dans un second cas, nous changeons, en même temps que l'épaisseur, le poids propre de la dalle, de sorte à garder la même densité des matériaux (fig. VIII-8). Ces deux grandeurs (épaisseur de la couche calandrée et poids propre de la dalle) jouent dans deux sens opposés sur la géométrie du "Curling". Ceci explique l'allure croissante puis décroissante de la courbe de variation du déplacement vertical maximal en fonction de l'épaisseur. Celle-ci présente une valeur critique, qui correspond au maximum de la courbe, et qui sera à éviter dans la conception des dalles. Nous remarquons, cependant, que la courbe de variation de la longueur relative de décollement reste croissante.

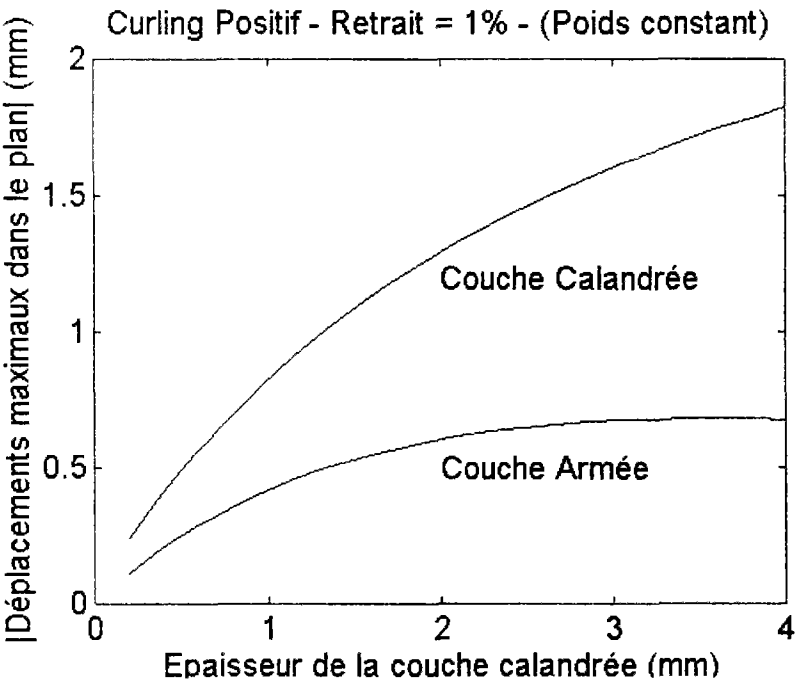


(VIII-8): *(a)* *(b)*

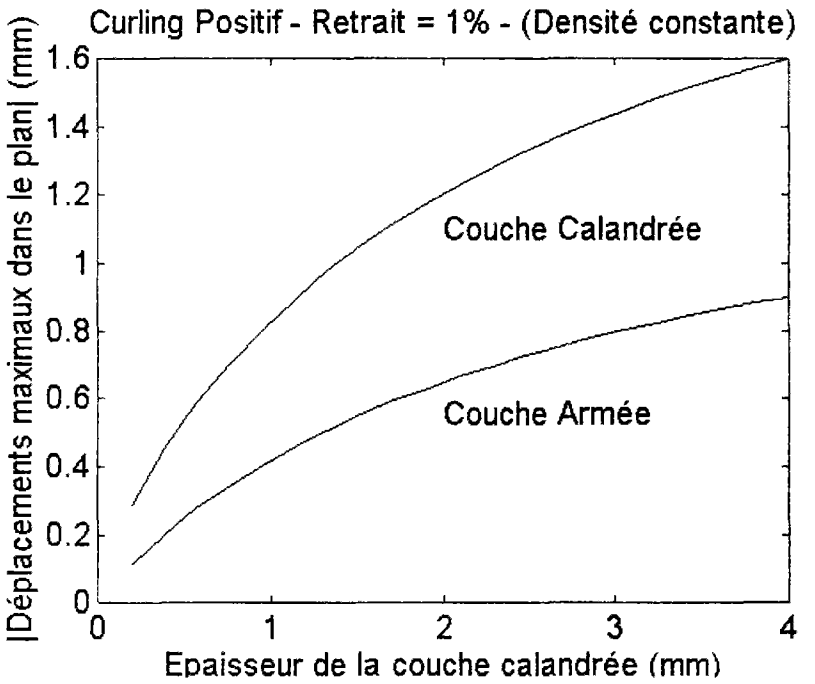
(a) Variation du déplacement vertical maximal en fonction de l'épaisseur de la couche calandrée.(Densité constante).

(b) Variation de la longueur relative de décollement en fonction de l'épaisseur de la couche calandrée.(Densité constante).

Nous traçons dans les graphiques (fig. VIII-9) et (fig. VIII-10) la variation croissante des déplacements dans le plan des deux couches en fonction de l'épaisseur de la couche calandrée, dans les deux cas précédemment décrits.



(VIII-9): Variation des déplacements maximaux suivant x dans les deux couches en fonction de l'épaisseur de la couche calandrée (Poids surfacique constant).

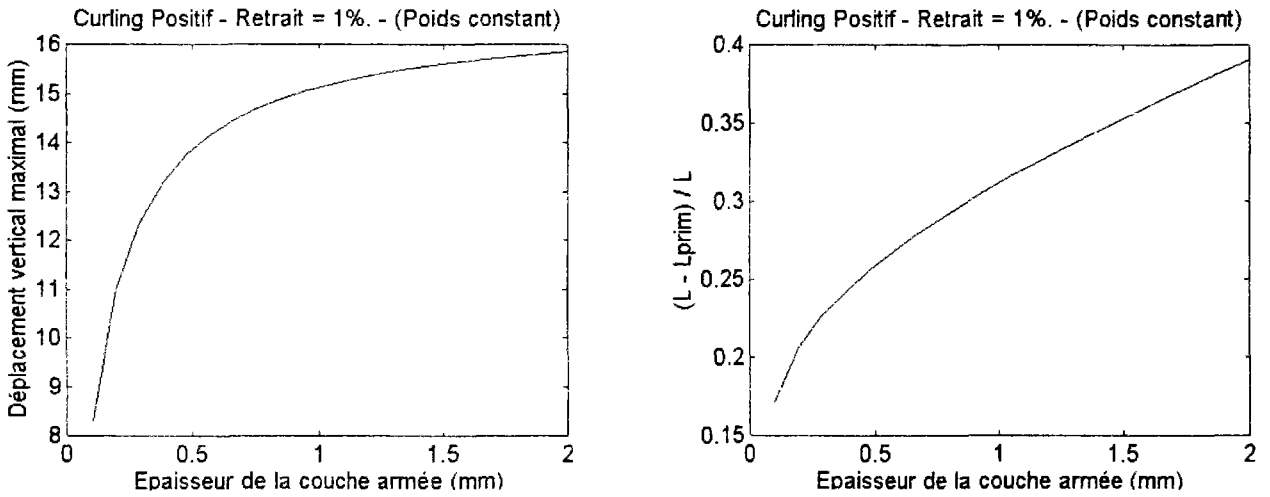


(VIII-10): Variation des déplacements maximaux suivant x dans les deux couches en fonction de l'épaisseur de la couche calandrée (Densité constante).

V- ROLE DE L'EPAISSEUR DE LA COUCHE ARMEE

Cette étude est, de même, faite en deux cas. Dans le premier cas, le poids propre de la dalle garde sa valeur constante. Nous remarquons alors que le désordre est croissant quand l'épaisseur de la couche stable, qui varie entre 0.1 et 2 mm, augmente (fig. VIII-11).

Si la couche armée n'existait pas, c'est-à-dire si son épaisseur était nulle, le "Curling" n'aurait pas lieu. La déformation de la couche calandrée serait dans le plan. Ce qui nous montre, effectivement, que plus l'épaisseur de la couche armée est grande plus le "Curling" est important.

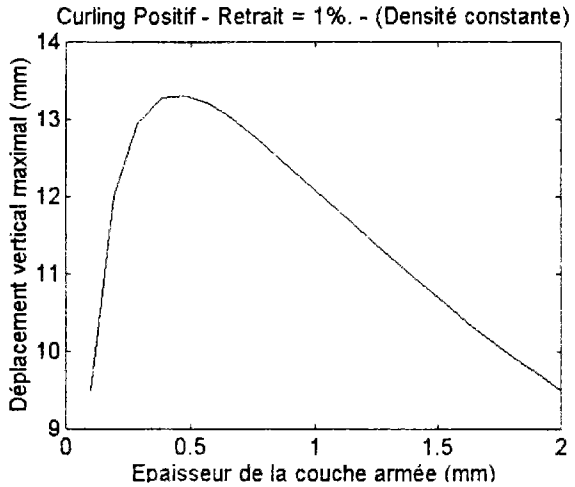


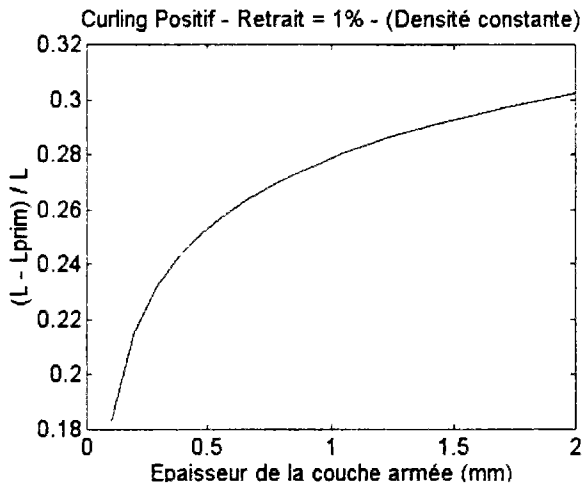
(VIII-11): *(a)* *(b)*

(a) Variation du déplacement vertical maximal en fonction de l'épaisseur de la couche armée (Poids surfacique constant).

(b) Variation de la longueur relative de décollement en fonction de l'épaisseur de la couche armée (Poids surfacique constant).

Dans le deuxième cas, nous faisons varier, en même temps que l'épaisseur de l'armature, le poids propre surfacique de la dalle de sorte à garder constante la densité des matériaux. Nous remarquons (fig. VIII-12), comme dans le paragraphe précédent, que l'épaisseur et le poids propre influencent chacun dans un sens différent la géométrie du "Curling". En les faisant varier ensemble, nous pouvons obtenir un sens croissant ou décroissant de la variation du déplacement vertical maximal. Cette courbe présente, de même, une épaisseur critique à éviter.





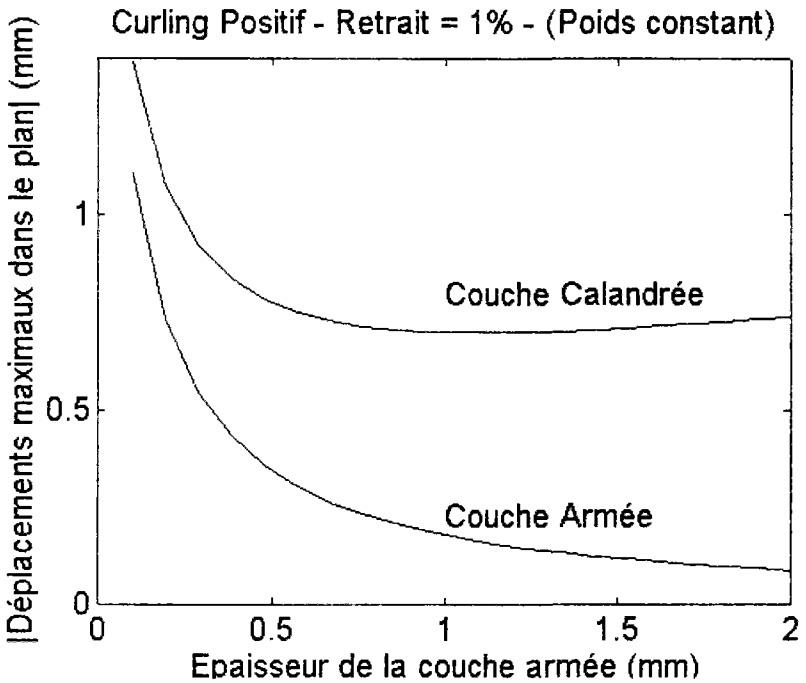
(VIII-12): *(a)* *(b)*

(a) *Variation du déplacement vertical maximal en fonction de l'épaisseur de la couche armée (Densité constante).*

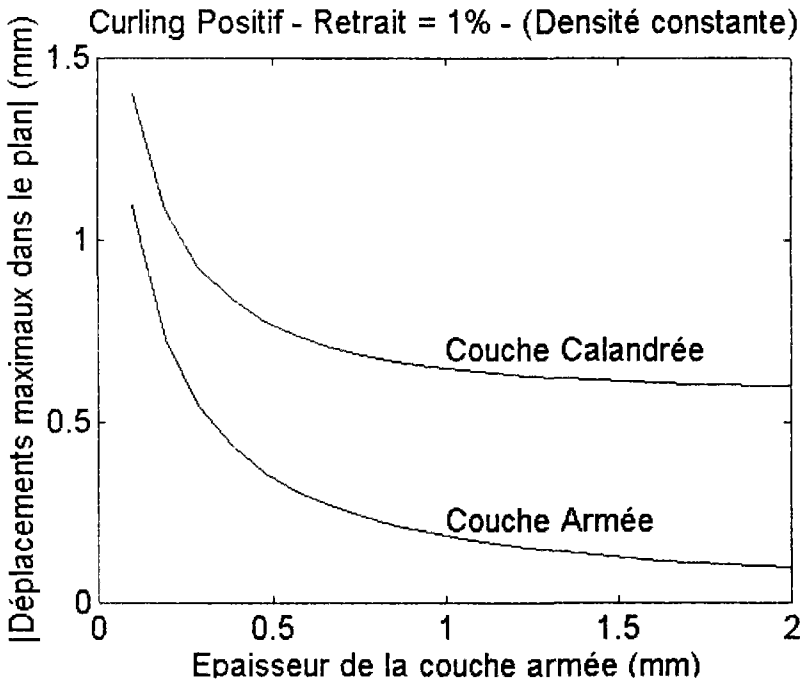
(b) *Variation de la longueur relative de décollement en fonction de l'épaisseur de la couche armée (Densité constante).*

Nous traçons, dans les graphiques (fig. VIII-13) et (fig. VIII-14) la variation des déplacements dans le plan des deux couches en fonction de l'épaisseur de la couche armée. Le sens de variation est décroissant.

Nous concluons encore une fois que cette couche armée, ajoutée au multicouche pour limiter ses variations dimensionnelles dans le plan, favorise, par sa présence, l'incurvation de la dalle hors de son plan; d'autant plus que le multicouche n'est pas symétrique.



(VIII-13): Variation des déplacements maximaux suivant x dans les deux couches en fonction de l'épaisseur de la couche armature (Poids surfacique constant).



(VIII-14): Variation des déplacements maximaux suivant x dans les deux couches en fonction de l'épaisseur de la couche armature (Densité constante).

CHAPITRE IX

VALIDATION EXPERIMENTALE

I-INTRODUCTION

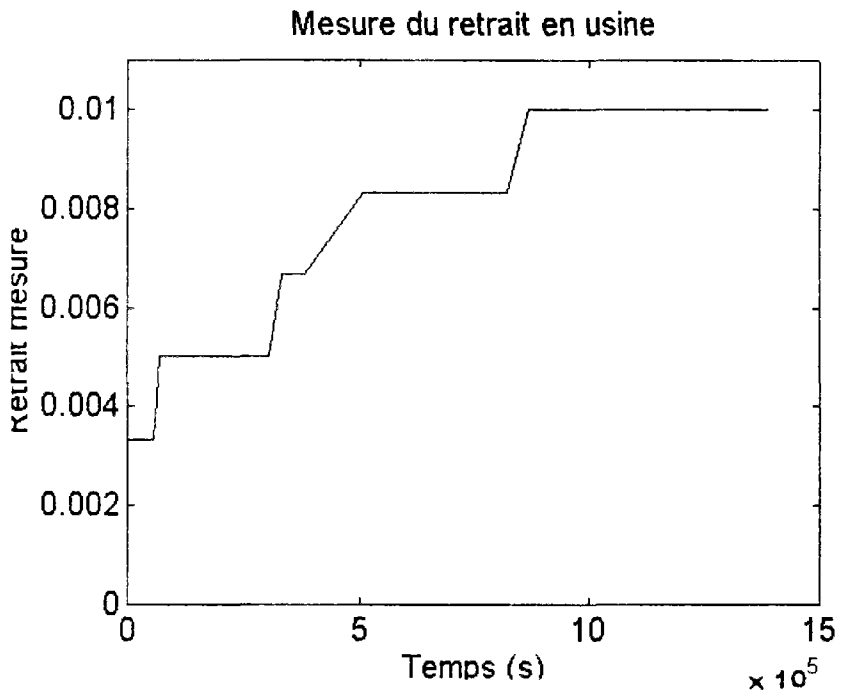
L'observation a montré que les géométries des Curling positif et négatif, obtenues par calcul, sont les mêmes que celles constatées réellement. Encouragés par cette première validation qualitative, nous avons tenté une autre, quantitative, du Curling positif d'un bicouche. Des essais expérimentaux, identiques à ceux décrits dans le chapitre VI, nous ont permis de caractériser les deux matériaux élastique et viscoélastique. Les caractéristiques obtenus sont introduits dans le modèle du Curling positif. Les résultats du calcul (Longueur de décollement, déplacement vertical) sont comparés à ceux mesurés sur un bicouche armature-calandrée formé immédiatement après la fabrication de la sous-couche.

II-MESURES EXPERIMENTALES

II-1:Les essais mesurés immédiatement après la fabrication

-Mesure du retrait de la couche calandrée :

Nous découpons, dans un lé calandré, juste à la sortie de la chaîne de fabrication ($t=t_0$), une bande sur laquelle nous posons deux repères distants de a=300mm. Nous mesurons, ensuite, en fonction du temps, la variation de la distance qui sépare les deux repères par rapport à la distance d'origine a. Les résultats des mesures du retrait sont représentés sur le graphique suivant (fig. IX-1). La valeur maximal du retrait est A=0.01. En calant la courbe théorique du retrait (E: VI-3) sur cette courbe mesurée, nous obtenons la valeur de la viscosité du matériau. $\eta=1.45.10^{+5}$ Poise.



(IX-1): Valeurs du retrait mesuré en usine.

-Elaboration du bicouche et mesure des caractéristiques du Curling :

Nous découpons, dans le même produit fabriqué, une dalle calandrée, de dimensions (300 x 300 mm), que nous couplons immédiatement avec une dalle de voile de verre (Couche armée). Nous posons le bicouche sur un support plat, la couche armée en contact avec le sol. Nous mesurons, en fonction du temps, la longueur de décollement et le déplacement vertical maximal au bord de la dalle. Les valeurs du Curling obtenues au bout de deux semaines sont :

La longueur de décollement (ℓ-ℓ') = 30 mm
Le déplacement vertical maximal = 12 mm

II-2:<u>Les essais mesurés après la stabilisation du retrait</u>

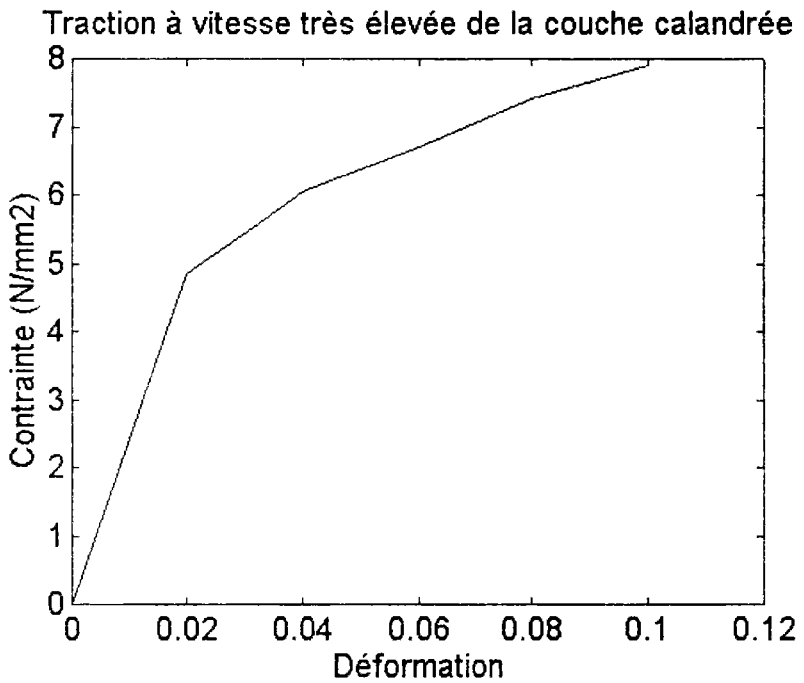
-Traction de la couche armée :

Un essai de traction à vitesse de déplacement constante égale à 1mm/mn, est effectué sur la couche armée. La courbe (contrainte-déformation) obtenue est

une droite (Comportement élastique) de pente égale au module d'Young de la couche armée. E_a = 732 N/mm^2.

-Traction à grande vitesse de la couche calandrée :

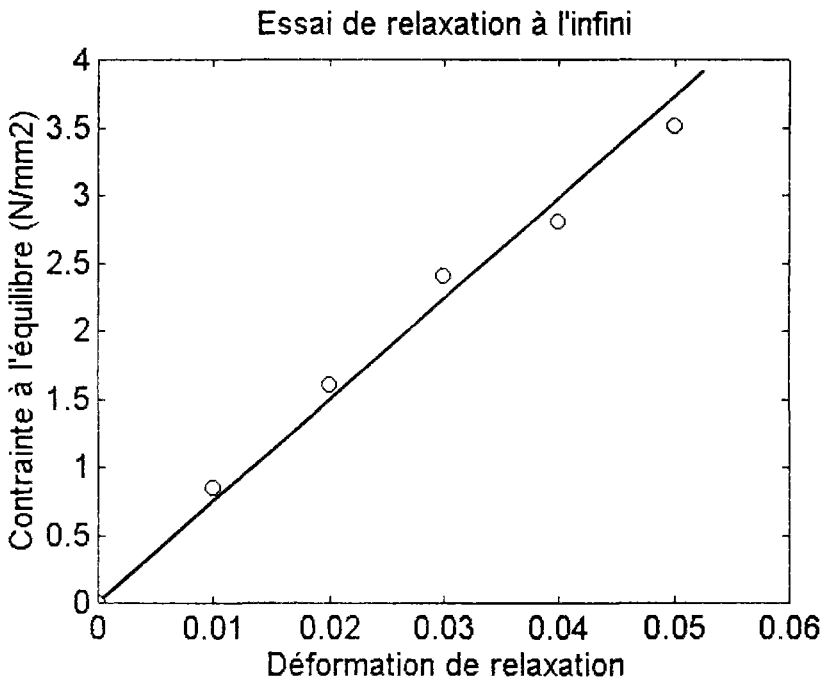
La traction à vitesse de déplacement relativement très élevée (1mm/mn) effectuée sur la couche calandrée, nous donne son module d'élasticité instantané (Chap. VI - § II-3). E_{c1} = 98 N/mm^2.



(IX-2): Courbe (Contrainte-Déformation) de traction à vitesse de déplacement élevée.

-Relaxation à l'infini de la couche calandrée :

Ce sont les essais de traction suivie de relaxation décrits dans le chapitre VI (§: I-2) qui nous donnent le module de relaxation de la couche calandrée. Les résultats forment une droite (fig. IX-3) de pente E_c=10 N/mm^2.



(IX-3): Courbe (Contrainte à l'infini - Déformation de relaxation).

III-VALIDATION

III-1:Caractéristiques

Les caractéristiques de la couche armée sont :

-Module d'Young : E_a = 732 N/mm^2

-Epaisseur : e_a = 0.32 mm

Celles de la couche calandrée sont :

-Module d'Young instantané : E_{c1} = 98 N/mm^2

-Module de relaxation à l'infini : E_c = 10 N/mm^2

-Viscosité : $\eta = 1.45.10^{+5}$ N.s/mm^2

-Epaisseur : e_c = 0.49 mm

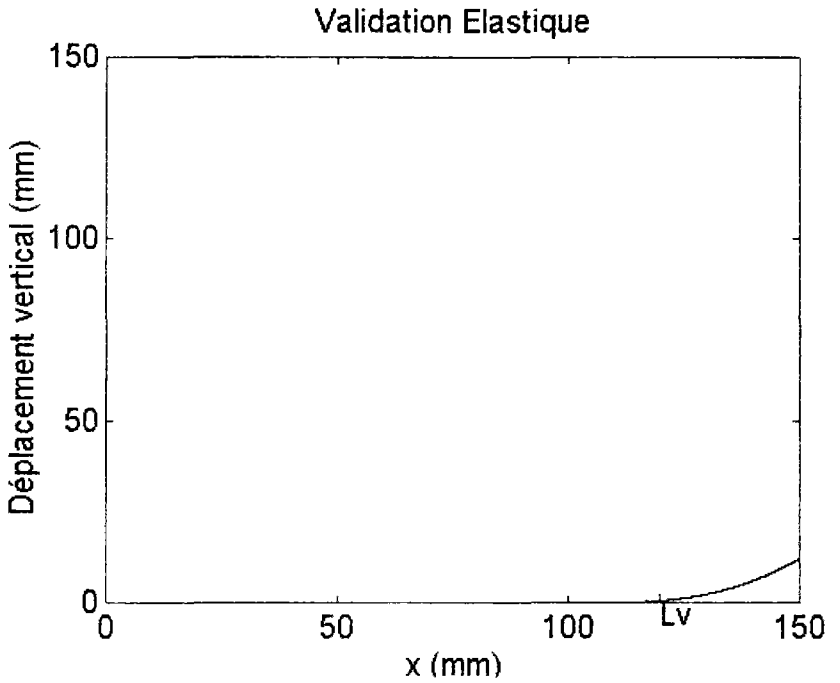
Le poids propre surfacique de la dalle : $F_3 = 2.10^{-5}$ N/mm^2

Dimensions de la dalle : 300 x 300 mm^2

La valeur maximale du retrait : A = 0.01.

III-2:Calcul Elastique

Le Curling obtenu par calcul élastique, pour la valeur maximale du retrait observé, figure dans le graphique ci-dessous (fig.: IX-4) :



(IX-4): Calcul Elastique.

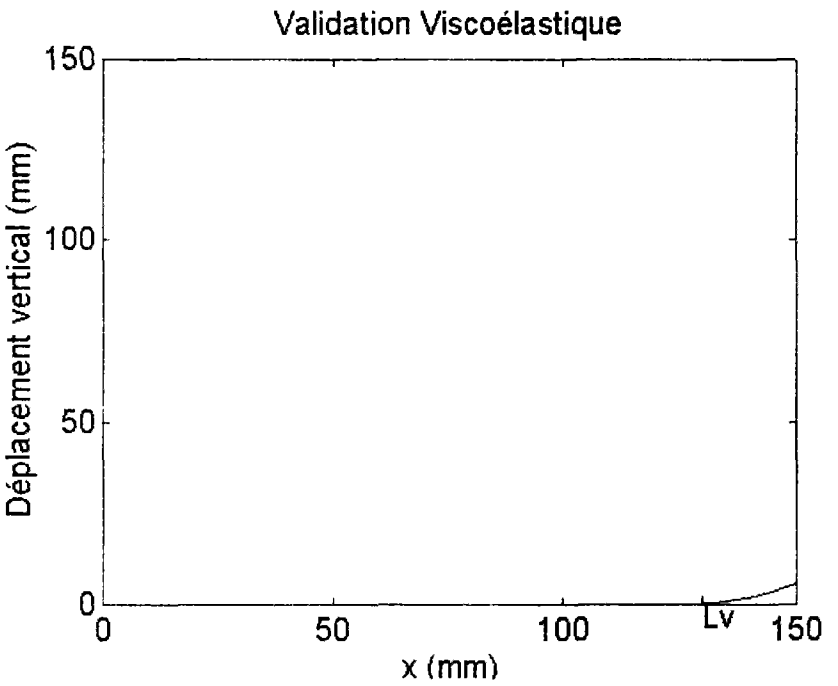
La longueur de décollement obtenue par calcul (ℓ-ℓ') = 44.09 mm
La longueur de décollement visible Lv = 30 mm
Le déplacement vertical maximal = 11.98 mm

Nous remarquons que les résultats obtenus en calcul Elastique, sont parfaitement validés par ceux mesurés en usine :

La longueur de décollement (ℓ-ℓ') = 30 mm
Le déplacement vertical maximal = 12 mm

III-3:Calcul Viscoélastique

Le calcul Viscoélastique donne, pour la dernière valeur du retrait = 1%, les résultats suivants (fig.: IX-5) :



(IX-4): Calcul Viscoélastique.

La longueur de décollement (ℓ-ℓ') = 33 mm
La longueur visible de décollement Lv = 20 mm
Le déplacement vertical maximal = 5.921 mm

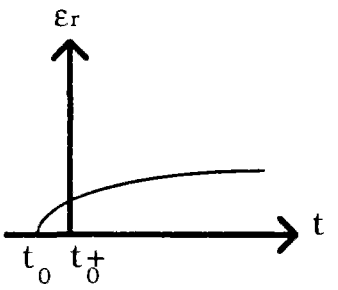
IV-CONCLUSION

Les valeurs des mesures expérimentales du Curling valident bien les résultats obtenus par le calcul Elastique et sont supérieures à ceux du calcul Viscoélastique. Ceci peut être expliqué par plusieurs raisons, vue la complexité du phénomène modélisé. Nous en citons principalement deux.

1- Le modèle viscoélastique de Zener, choisi pour décrire le comportement de la couche calandrée est un modèle simplifié. Le comportement de ce matériau est beaucoup plus compliqué. Un choix plus adéquat du modèle

viscoélastique de comportement de la sous-couche peut donner des résultats plus exacts. Notons, néanmoins, que la loi de comportement viscoélastique n'entre pas dans le calcul M4 itératif. Son rôle intervient dans la réactualisation, à chaque pas de temps, de la valeur du retrait. Une loi plus complexe ne complique pas énormément le calcul.

2- Le retrait de la couche calandrée commence instantanément à sa sortie de la chaîne de fabrication, à l'instant t_0. Il y a, cependant, un temps perdu entre t_0 et le début des mesures du retrait (t_0^+), qui correspond à la découpe d'une bande dans le lé calandré et à la mise des deux repères de mesure. L'origine du temps et du retrait mesuré est donc décalé par rapport à sa vraie position. La valeur du retrait mesuré est donc inférieure à sa valeur réelle.



Le calcul Elastique est majoré par rapport au calcul Viscoélastique. Cette majoration parait être de la même grandeur que les erreurs de mesure (perte de temps, précisions..). Il est plus prudent de se baser sur ce calcul Elastique pour toute étude de conception des dalles.

CHAPITRE X

CONCLUSION

I-RECAPITULATIF

I-1:Etude Bicouche

Le but de l'étude que nous avons menée est l'aide à la conception de dalles plastiques multicouches, posées sur le sol, industriellement appelées "Dalles Plombantes Amovibles". La seule force qui retient ces dalles non collées en contact avec le sol est leur poids propre. D'où la nécessité d'avoir des dalles stables. Ces dalles sont formées de plusieurs couches viscoélastiques munies d'une histoire de retrait imposé. Elles sont placées de part et d'autre d'une couche armée élastique et stable. Le comportement du multicouche dépend de l'équilibre interne établi.

L'étude de ces dalles multicouches complètes est est un problème complexe ; beaucoup de facteurs entrent en jeu. Afin de mieux comprendre le rôle que joue chaque couche dans la génération et l'évolution du désordre, nous avons fait notre étude sur un bicouche formé d'une armature élastique et d'une couche viscoélastique placée au-dessus (Curling >0) ou au-dessous (Curling <0) de la première.

I-2:Calcul Elastique - Calcul Viscoélastique

Nous avons modélisé le Curling en deux parties, en se basant sur le modèle M4 Simplifié (EHRLACHER et NACIRI [15]). Dans la première partie, nous avons considéré que le comportement de la couche calandrée est élastique linéaire. Elle est soumise à une déformation imposée égale à la valeur maximale constante du retrait que subit cette couche isolée, à partir de sa sortie de la fabrication.

Dans la deuxième partie, nous avons caractérisé le comportement de la couche viscoélastique en l'identifiant à un modèle de Zener simple. Une série d'essais expérimentaux nous a permis de trouver les trois caractéristiques du modèle choisi qui entrent dans l'expression de sa loi de comportement. Nous nous sommes basés sur des essais simples approchant pour le mieux le "vécu" du matériau :

- Le retrait joue un rôle important dans l'étude, il est à l'origine du désordre des dalles. Nous avons choisi la courbe du retrait mesuré en usine pour calculer la viscosité η.

- Le Curling modélisé est un phénomène à long terme. Le retrait est stabilisé au bout d'un certain temps caractéristique du matériau (5-7 jours). D'où l'intérêt de se baser sur un essai à long terme (Relaxation stabilisée au bout du même temps caractéristique) pour calculer le module d'Young élastique équivalent $E = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$.

- Nous avons choisi un essai de traction à vitesse de déformation très élevée par rapport au phénomène de retrait lent, pour calculer le premier ressort élastique du modèle de Zener E_1. Cet essai, très rapide, rappelle la relâche instantanée de ce ressort à sa sortie de la chaîne de fabrication. Le ressort E_2, couplé avec l'amortisseur, est relâché progressivement avec le temps.

La loi de comportement, ainsi établie, de la couche calandrée a montré qu'il y a une liaison entre le retrait et le niveau de contrainte membranaire dans cette couche. Dans le calcul Viscoélastique, nous avons une réactualisation, à chaque pas de temps, de la fonction de retrait. Le calcul itératif, dans M4 Simplifié, reste un calcul élastique dans lequel le retrait est une fonction de x.

Les deux calculs Elastique et Viscoélastique donnent la même géométrie du Curling. Les résultats du calcul Viscoélastique sont, néanmoins, moins importants (40%). A chaque pas de temps, la viscosité relaxe la contrainte due à la déformation imposée.

Nous avons remarqué, cependant, que les résultats de la validation expérimentale, très proches des résultats du calcul Elastique, le sont moins du calcul Viscoélastique. Le modèle de Zener, choisi pour sa simplicité, ne

décrit pas parfaitement le comportement du matériau. Le calcul Elastique, défavorable par rapport au calcul Viscoélastique, dans la mesure où il majore les effets du Curling, nous garantit une marge d'erreur due aux précisions de mesure et à la perte d'une partie du retrait mesuré. Il est préférable de s'appuyer sur ce calcul pour la conception des dalles.

I-3:Sensibilité des paramètres

Le rôle de la couche armée est de limiter les déplacements dans le plan de la dalle. Ces déplacements positifs ou négatifs (allongements ou rétrécissements) entraînent des désordres fonctionnels et d'aspect (flambement, ouverture des joints). L'étude de la sensibilité des paramètres nous a montré, cependant, que cette couche favorise le Curling: Le déplacement vertical et la longueur de décollement sont des fonctions croissantes du module d'Young et de l'épaisseur de la couche armée. Un compromis sera à trouver, répondant aux exigences des déplacements verticaux et des déplacements dans le plan.

D'autre part, le poids propre de la dalle est le seul paramètre en fonction duquel le Curling diminue. Cependant, en augmentant le poids propre des matériaux (avec une densité constante), nous augmentons les épaisseurs des couches. La variation du Curling, sous l'effet de la variation de deux paramètres influençant chacun dans un sens différent le désordre, présente des maxima Ces maxima correspondent à des valeurs d'épaisseurs des couches à éviter dans la conception des dalles.

II-PERSPECTIVES

II-2: Dalle Multicouche

Nous avons mené l'étude sur un bicouche (Armature, Sous-couche), négligeant, ainsi, le rôle des autres couches. D'autre part, le modèle M4 simplifié est basé sur une hypothèse simplificatrice qui néglige les moments de flexion. Ces deux hypothèses simplificatrices nous ont permis de visualiser la géométrie du Curling et d'étudier le rôle de chaque couche, sans alourdir le calcul. La solution des systèmes d'équations différentielles du modèle est

analytique, pour les deux calculs Elastique et Viscoélastique. Un calcul en multicouche, avec un nombre plus élevé d'équations différentielles dans le système, n'aboutira pas facilement à une solution analytique. Une discrétisation dans l'espace (suivant x) sera à faire.

II-2: Rôle de la Température

La variation dimensionnelle différentielle entre les couches, source du désordre, est due principalement, au retrait après fabrication. En réalité, ce "retrait" n'est pas, uniquement, du au comportement viscoélastique du matériau (Phénomène de recouvrance). Ce dernier connaît, tout le long de sa chaîne de fabrication (Annexe A), des températures assez élevées. Ceci crée en lui, même après le passage sur les cylindres refroidisseurs, des contraintes de dilatation thermique. Et le matériau continue à se rétrécir par refroidissement après sa sortie de la fabrication.

Ajoutons que les caractéristiques mécaniques d'un matériau viscoélastique dépendent de la température. Toutes les mesures que nous avons faites dans notre étude sont à température ambiante constante.

Une étude, qui prend en compte le rôle de la température, sera intéressante à faire.

II-3: Vieillissement des matériaux

Les différentes couches du revêtement sont des matériaux plastiques à base de PVC (Annexe A), plus ou moins chargés, selon le rôle que joue la couche dans la dalle. Un échange de plastifiants se produit entre les couches elles-mêmes, et entre le revêtement et le milieu ambiant. La composition des matériaux change, avec le temps. C'est le phénomène de "vieillissement". Il entraîne une perturbation de l'équilibre initial par changement des caractéristiques mécaniques et physiques des différentes couches.

Nous pouvons prendre en considération, dans notre étude, le vieillissement des matériaux, d'une façon simple en empilant, dans le même ordre du revêtement, les différentes couches du multicouche. Toutes les mesures de caractérisation des matériaux seraient refaites à des intervalles de temps. . Les caractéristiques seront représentés par des courbes d'évolution, donnant

le vieillissement en fonction du temps. (L'essai de retrait, qui doit être fait immédiatement après la fabrication, peut être remplacé par un autre, un essai de fluage par exemple).

III-4: Etude en Grandes Perturbations

L'hypothèse de petites perturbations que nous avons adoptée limite nos résultats à ceux dont la géométrie n'est pas très différente de la géométrie initiale. Une étude en grandes perturbations permettrait de modéliser des géométries plus évoluées. A chaque pas de temps, la géométrie devient une géométrie de référence. L'étude se ferait en utilisant, dans le modèle multiphasique, les coordonnés curvilignes d'un point M appartenant à la dalle.

ANNEXE A

REVETEMENTS DE SOL PLASTIQUES

I- HISTORIQUE

Après l'argile simplement battue, puis liée de branchage pour former le premier planchéiage, on utilisa le bois, la pierre en dalle ou en cubes assemblés en composition mosaïque artistique, la terre cuite brute puis vernissée et décorée. Jusqu'au XIX° siècle, ce furent les seuls matériaux de revêtements de sol [44].

Mais c'est seulement dans la seconde moitié de ce même XIX° siècle, à l'ère de la révolution industrielle, que, s'appuyant sur les recherches du début du siècle et sur les progrès rapides de la chimie, deux voies de recherche, bien différentes, orientèrent certains producteurs de revêtements de sol vers de nouvelles sources de matières premières conduisant à la diffusion de revêtements minces, déformables, ne constituant guère qu'une "peau" assujettie sur le support rigide.

II- REVETEMENTS DE SOL SOUPLES

Ces revêtements, en pleine évolution, ont une épaisseur au plus égale à 8mm environ. La surface d'usage est à base de caoutchouc, linoléum, textile ou plastique. Ils sont en forme de lés ou de dalles, peuvent être monocouches ou multicouches, avec présence ou non de couches armées. Ils sont collés sur leur support ou posés libres.

II-1:Composition

Ces revêtements sont formés en général de plusieurs couches :

- Couche d'usure ou de surface.
- Sous-couches.
- Armature.
- Support placé en envers du matériau.

II-2:Types

Selon la nature de la couche d'usure, on distingue :

Les revêtements textiles dont la couche de surface est constituée de matière textile naturelle, artificielle ou synthétique.

Les revêtements dont la couche de surface est constituée par un mélange aggloméré à base de liant organique. Ils peuvent se répartir en trois grandes classes :
- Revêtements à base d'élastomères: caoutchoucs naturels ou artificiels.
- Revêtement à base de linoxyne: linoléums, qui sont un mélange à chaud de l'huile de lin oxydé avec des résines et des farines de liège et de bois.
- Revêtements plastiques aimantés et surtout vinyliques à base de chlorure de polyvinyle (PVC).

III- REVETEMENTS DE SOL PLASTIQUES

Par revêtements de sol plastiques, on entend un revêtement de sol dont la couche d'usure compacte est constituée par un mélange aggloméré à base de liants organiques (naturels ou synthétiques) [39].

III-1:Matières Premières

La pâte initiale est à base de plastisol dont la formule nécessite la connaissance de deux formules fondamentales :
-Les propriétés demandées à l'objet fini.
-La rhéologie du plastisol.

Les constituants du plastisol sont :
La résine de base : PVC préparé par polymérisation en émulsion.
Les résines d'addition : Autres résines (VC/VAC) dont le but est de baisser le prix, de donner un aspect mat et de changer la viscosité.
Les plastifiants : Leur but est de conférer au produit fini souplesse et flexibilité.
Les stabilisants : Leur but est de rendre le PVC moins sensible à la lumière et à la chaleur.
Les charges : De but économique et technique, influent le comportement rhéologique.

Les colorants et pigments.
Les agents gonflants, etc., ...

III-2:Modes de Fabrication

Les revêtements de sol plastiques sont obtenus par deux modes principaux de fabrication: le *calandrage* et l'*enduction*.

III-2-1:Le Calandrage

Une calandre est une machine à cylindres permettant d'obtenir des feuilles ou des plaques en élastomères ou en matières plastiques [1].

Contrairement aux autres procédés de fabrication des matières plastiques (Extrudeuse, presse à injecter, etc., ...) où toutes les étapes de la transformation de la matière sont concentrées dans une seule machine, la chaîne de calandrage est constituée de plusieurs machines qui ont chacune un rôle à jouer dans le processus de fabrication.

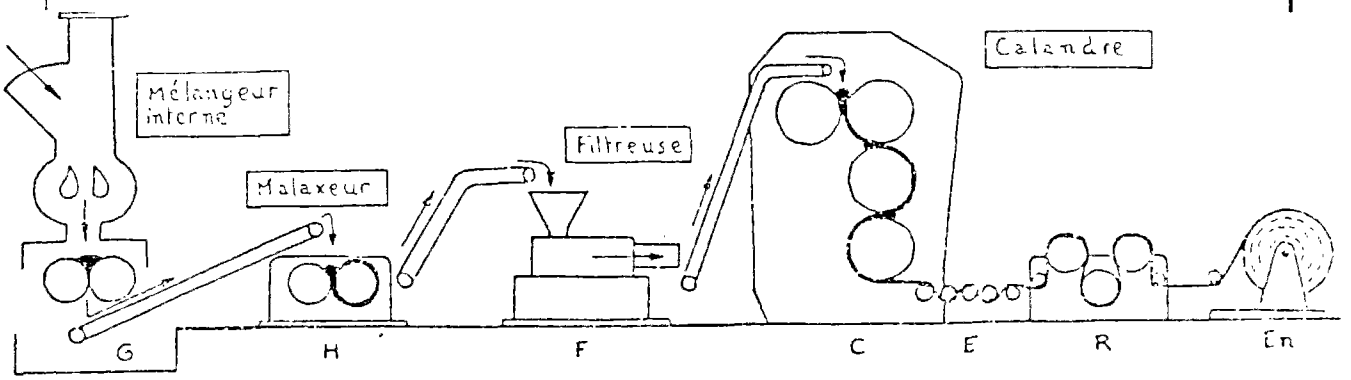
Ce dernier comporte les phases successives suivantes:

1° Mélange des constituants : PVC en poudre + Plastifiants + Charges + Colorants + Pigments + Adjuvants + ...
Ce mélange s'effectue à une température d'environ 60 à 70 °C

2° Plastification : C'est le passage de l'état de solide en poudre ou en granulés à un état liquide suffisamment homogène et fluide (C'est la gélification pour les polymères amorphes qui passent de l'état vitreux à l'état caoutchoutique en traversant la température de transition vitreuse).
On travaille le mélange sous les effets conjoints de la chaleur et de la pression (120-180 °C), avec, à la sortie, passage en laminoir pour obtenir une feuille épaisse.

3° Calandrage de la feuille brute venue du laminage par passage en calandrage chauffé (110-140°C) pour l'étirer en feuilles continues, d'épaisseur constante, découpées ensuite aux longueurs voulues.
Ces feuilles constituent :
-Soit le produit fini homogène.
-Soit des feuilles élémentaires reprises et assemblées à chaud et sous pression en plis superposés pour constituer des revêtements multicouches.

III-2-2:Schéma du Calandrage



Chaîne de Calandrage.

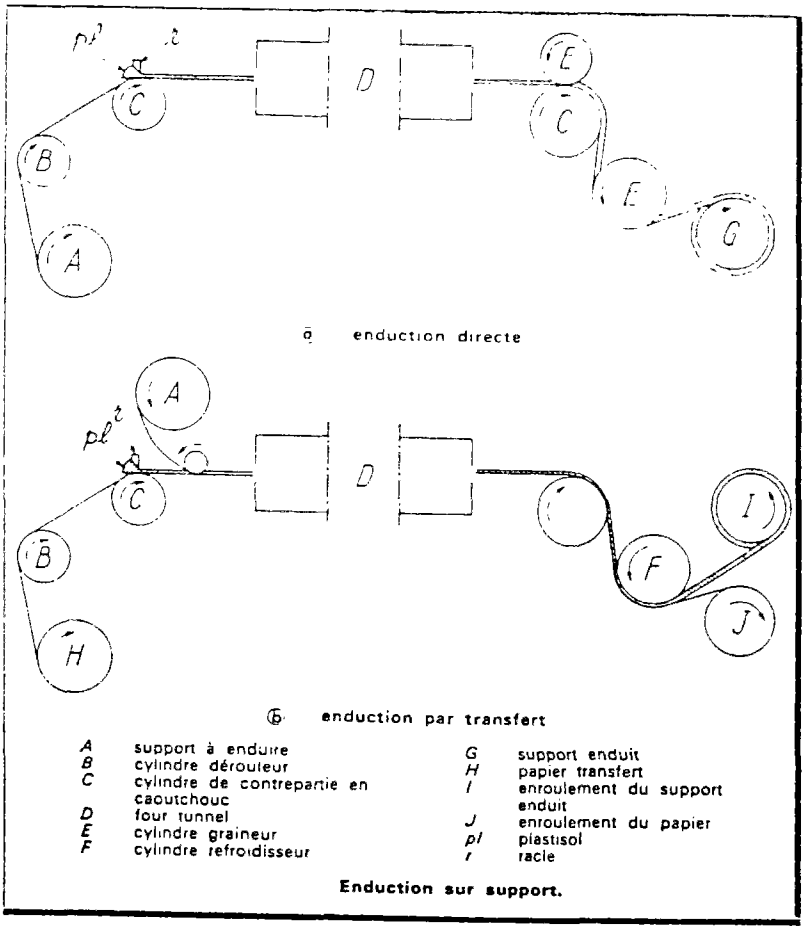
Phase M	: Mélangeage du P.V.C. et des additifs (mélangeur).
Phase G	: Gélification (gélifieur).
Phase H	: Homogénéisation (malaxeur).
Phase F	: Filtration (filtreuse).
Phase A	: Alimentation.
Phase C	: Calandrage (calandre).
Phase E	: Extraction (extracteur).
Phase R	: Refroidissement (refroidisseur).
Phase En	: Enroulage.

III-2-3:L'enduction

Ce procédé de fabrication consiste en un épandage superficiel, sous épaisseur contrôlée et constante, au moyen d'un couteau horizontal fixe, d'une composition à base de résine plastifiée, sur un support [35].

L'enduction se fait en un, deux ou trois passes au métier à enduire. La transformation de la pâte, appliquée par enduction mécanique, en un film plastique, sec et continu, est réalisée par un procédé purement physique: la gélification effectuée en tunnel chauffant.

III-2-4:Schéma de l'enduction



Enduction sur support.

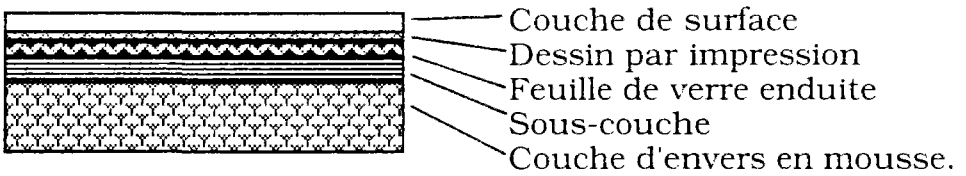
III-3:Produit Fini

Le calandrage et l'enduction peuvent être suivis de :

•Un doublage : Consistant à effectuer l'assemblage à chaud de deux ou plusieurs feuilles élémentaires entre elles.

•Un pressage : Consistant à traiter sous pression et à chaud une ou plusieurs feuilles calandrées.

III-3-1:Exemple de Composition d'un Revêtement Plastique

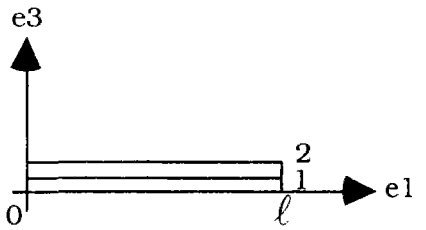


ANNEXE B

CALCUL ELASTIQUE DU CURLING NEGATIF

I-PRESENTATION

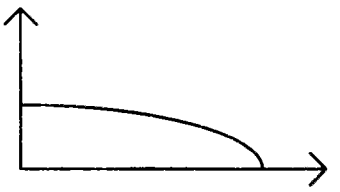
Nous considérons, par symétrie la moitié d'une dalle de longueur 2ℓ (fig. B-1) dont la couche 1 subit un retrait = ε_r^0



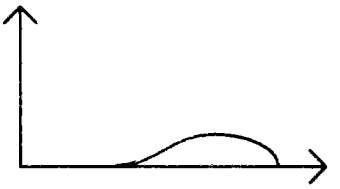
(B-1): Schéma du bicouche (1: Viscoélastique - 2: Elastique)

Selon la valeur du retrait, le "Curling" peut être complet (toute la dalle est détachée du sol, sauf aux deux points du bord) ou incomplet (une partie de la dalle reste en contact avec le sol).
Cette étude est donc divisée en deux parties :

Partie 1 : La totalité de la dalle est détachée du sol (sauf, évidemment, aux bords).



Partie 2 : Une partie de la dalle de longueur ℓ' reste en contact avec le sol.



Nous allons déterminer les critères sur les valeurs du retrait qui permettent de retrouver l'une ou l'autre géométrie.

II-1: DECOLLEMENT TOTAL

1-Résolution

Nous suivrons la même architecture que pour le modèle M4 simplifié.

1-Géométrie

Etant en déformations planes, toutes les déformations selon e_2 sont prises égales à 0 : $U_2^i = 0$.

$\Rightarrow$ Le plan est réduit à l'axe x de vecteur e_1.

2-Mouvement

En chaque "point de matière" de l'axe x, nous avons deux particules. Le mouvement de chaque particule est donné par son déplacement suivant l'axe x :

$$\underline{u}^1(x) = \begin{bmatrix} u_1^1 \\ 0 \\ u_3^1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}^2(x) = \begin{bmatrix} u_1^2 \\ 0 \\ u_3^2 \end{bmatrix}$$

3-Déformations

-Déformations membranaires :

$$\text{Couche1} : \tilde{\tilde{\varepsilon}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{du_1^1}{dx} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Couche2 : } \tilde{\tilde{\varepsilon}}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{du_1^2}{dx} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-Discontinuité tangente d'interface 1,2 :

$$\tilde{D}_1^{1,2} = D_1^{1,2}\,\underline{e}_1 = \left(u_1^2 - u_1^1 + \frac{e_1 + e_2}{2}\,\mathrm{grad}\,u_3^1 \right)\underline{e}_1$$

4-Contraintes

-Efforts membranaires :

Couche1 : $\tilde{\tilde{N}}^1$
Couche2 : $\tilde{\tilde{N}}^2$

-Effort de cisaillement d'interface 1,2 : $\tilde{\tau}^{1,2}$

-Efforts normaux d'interfaces 1,2 : $\nu^{1,2}$

L'effort normal exercé par la couche 1 sur le sol est nul, en tout point x de la dalle, sauf au bord. A ce point d'abscisse ℓ, la réaction du sol est une force ponctuelle.

5-Comportement

-Comportement membranaire:

Le comportement membranaire dans la couche 1 qui est soumise à un retrait imposé ε_r^0 à contrainte nulle est due à la déformation finale de cette couche diminuée de la déformation de retrait. D'où:

$$\text{Couche1 : } \tilde{\tilde{N}}^1 = \tilde{\tilde{\tilde{\tilde{K}}}}^1 : \tilde{\tilde{\varepsilon}}^{1^{el}}$$

$$\begin{bmatrix} N_{11}^1 \\ N_{22}^1 \\ N_{12}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{12}^1 & K_{22}^1 & 0 \\ 0 & 0 & K_{66}^1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \dfrac{du_1^1}{dx} - \varepsilon_r^0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} N_{11}^1 = K_{11}^1 . \left(\dfrac{du_1^1}{dx} - \varepsilon_r^0 \right) \\ N_{22}^1 = K_{12}^1 . \left(\dfrac{du_1^1}{dx} - \varepsilon_r^0 \right) \end{cases}$$

Couche2 : $\tilde{\tilde{N}}^2 = \tilde{\tilde{\tilde{K}}}^2 : \tilde{\tilde{\varepsilon}}^2$

$$\begin{bmatrix} N_{11}^2 \\ N_{22}^2 \\ N_{12}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ K_{12}^2 & K_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & K_{66}^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \dfrac{du_1^2}{dx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} N_{11}^2 = K_{11}^2 . \left(\dfrac{du_1^2}{dx} \right) \\ N_{22}^2 = K_{12}^1 . \left(\dfrac{du_1^2}{dx} \right) \end{cases}$$

-Comportement de cisaillement d'interface 1,2 :

$$\tilde{\tau}^{1.2} = \tilde{\tilde{K}}_\tau . \tilde{D}^{1.2}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1^{1.2} \\ \tau_2^{1.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} D^{1.2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \tau_1^{1.2} = K \left(u_1^2 - u_1^1 + \dfrac{e_1 + e_2}{2} \operatorname{grad} u_3^1 \right) \\ \tau_2^{1.2} = 0 \end{cases}$$

6-Equations d'équilibre

$$\begin{cases} \operatorname{div} \tilde{\tilde{N}}^1 + \tilde{\tau}^{1.2} = 0 \\ \operatorname{div} \tilde{\tilde{N}}^2 - \tilde{\tau}^{1.2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} K_{11}^{1}\dfrac{d^2u_1^1}{dx^2}+\tau^{1,2}=0 \\ K_{11}^{2}\dfrac{d^2u_1^2}{dx^2}-\tau^{1,2}=0 \end{cases}$$

Et

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\operatorname{div}\left(\frac{e_i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}+\tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right)+F_3^i\right]=0$$

Avec :

e_1 : épaisseur de la couche 1

e_2 : épaisseur de la couche 2

F_3^i : poids surfacique de la couche i

<u>Pour simplifier ce qui suit, utilisons les notations suivantes</u> :

$u_1^1 = u_1$
$u_1^2 = u_2$
$N_{11}^1 = N_1$
$N_{11}^2 = N_2$
$K_{11}^1 = K_1$
$K_{11}^2 = K_2$

7-Conditions aux limites

Le point x=0 correspond au milieu de la dalle, la symétrie nous impose :

En x=0 $u_1(x) = 0.$
$u_2(0x = 0.$

Au bord libre de la dalle, la contrainte membranaire passe à zéro :

En $x=\ell$ $N_1(x) = 0.$
$N_2(x) = 0.$

8-Résolution des équations d'équilibre

La deuxième équation d'équilibre du modèle nous donne :

$$\frac{e_1+e_2}{2}\operatorname{div}\tau^{1,2}+F_3=0$$

$$\Rightarrow$$

$$\tau^{1,2}=-\frac{2F_3}{e_1+e_2}x+\alpha$$

Le premier système d'équations d'équilibre nous donne :

$$\begin{cases} K_1\dfrac{d^2u_1}{dx^2}-\dfrac{2F_3}{e_1+e_2}(x-\alpha)=0 \\ K_2\dfrac{d^2u_2}{dx^2}+\dfrac{2F_3}{e_1+e_2}(x-\alpha)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} u_1=\dfrac{2F_3}{(e_1+e_2)K_1}\left(\dfrac{x^3}{6}-\alpha\dfrac{x^2}{2}+\alpha_1'x+\alpha_1''\right) \\ u_2=-\dfrac{2F_3}{(e_1+e_2)K_2}\left(\dfrac{x^3}{6}-\alpha\dfrac{x^2}{2}+\alpha_2'x+\alpha_2''\right) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} u_1(-x)=-u_1(x) \\ u_2(-x)=-u_2(x) \end{matrix}\right\}\Rightarrow u_1 \text{ et } u_2 \text{ sont deux fonctions impaires de } x$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha=\alpha_1''=0 \\ \alpha=\alpha_2''=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\tau^{1,2}=-\frac{2F_3}{e_1+e_2}x$$

Et

$$\begin{cases} u_1=\dfrac{2F_3}{(e_1+e_2)K_1}\left(\dfrac{x^3}{6}+\alpha_1'x\right) \\ u_2=-\dfrac{2F_3}{(e_1+e_2)K_2}\left(\dfrac{x^3}{6}+\alpha_2'x\right) \end{cases}$$

Remplaçant les déplacements dans le plan par leurs valeurs en fonction de x dans les expressions des efforts membranaires :

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{2F_3}{e_1+e_2}\left(\dfrac{x^2}{2}+\alpha_1'\right) - \varepsilon_r^0 K_1 \\ N_2 = -\dfrac{2F_3}{e_1+e_2}\left(\dfrac{x^2}{2}+\alpha_2'\right) \end{cases}$$

Les conditions aux limites nous donnent :

$$N_1(\ell) = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_1' = \frac{\varepsilon_r^0 K_1 (e_1+e_2)}{2F_3} - \frac{\ell^2}{2}$$

$$N_2(\ell) = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_2' = -\frac{\ell^2}{2}$$

Le déplacement suivant x de chaque particule d'un point M :

$$\begin{cases} u_1(x) = \dfrac{2F_3}{(e_1+e_2)K_1}\left(\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{\ell^2}{2}x\right) + \varepsilon_r^0 x \\ u_2(x) = -\dfrac{2F_3}{(e_1+e_2)K_2}\left(\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{\ell^2}{2}x\right) \end{cases}$$

Les contraintes membranaires, suivant x, dans chacune des couches :

$$\begin{cases} N_1(x) = \dfrac{F_3}{e_1+e_2}\left(x^2-\ell^2\right) \\ N_2(x) = -\dfrac{F_3}{e_1+e_2}\left(x^2-\ell^2\right) \end{cases}$$

Les expressions des déplacements suivant x permettent de trouver la forme de la déformée exprimée par le déplacement suivant e_3 du point M(x) dont le gradient est donné par l'expression du comportement de cisaillement à l'interface entre les deux couches.

2-Forme de la déformée

Le comportement de cisaillement d'interface :

$$\tau^{1,2} = K\left(u_2 - u_1 + \frac{e_1 + e_2}{2} \operatorname{grad} u_3 \right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{e_1 + e_2}{2} \operatorname{grad} u_3 = \frac{\tau^{1,2}}{K} + u_1 - u_2$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{du_3}{dx} = P\left[I\frac{x^3}{6} + Jx \right]$$

Avec:

$$P = \frac{4F_3}{(e_1 + e_2)^2}$$

$$I = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

$$J = \frac{\alpha_1'}{K_1} + \frac{\alpha_2'}{K_2} - \frac{1}{K}$$

$$\Rightarrow$$

$$u_3 = P\left[I\frac{x^4}{24} + J\frac{x^2}{2} + \alpha'' \right]$$

Or:

$$u_3(\ell) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$u_3(x) = P\left[I\frac{x^4 - \ell^4}{24} + J\frac{x^2 - \ell^2}{2} \right]$$

3-Critères de décollement total

Analysons la forme de la déformée suivant e_3 :

$$u_3(0) = P\left[\frac{5}{24}\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)\ell^4 + \frac{\ell^2}{2K} - \frac{\varepsilon_r^0(e_1+e_2)}{4F_3}\right]$$

On a :

$$u_3(0) \geq 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{5}{24}\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)\ell^4 + \frac{\ell^2}{2K} - \frac{\varepsilon_r^0(e_1+e_2)}{4F_3} \leq 0$$

$$(P \leq 0)$$

Si :

$$\left|\varepsilon_r^0\right| \geq \frac{2|F_3|}{e_1+e_2}\left[\frac{5}{12}\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)\ell^2 + \frac{1}{K}\right] = A$$

Ceci constitue un premier critère pour lequel le milieu de la dalle est soulevé du sol.

D'autre part :

$$\frac{du_3}{dx}(x) = P\left[I\frac{x^3}{6} + Jx\right]$$

$$\frac{du_3}{dx}(\ell) = P\left[I\frac{\ell^3}{6} + J\ell\right]$$

On a:

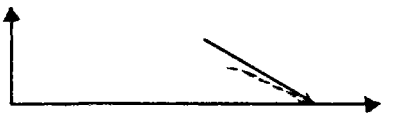
$$\frac{du_3}{dx}(\ell) \leq 0$$

Si

$$\left|\varepsilon_r^0\right| \geq \frac{2|F_3|}{e_1+e_2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)\ell^2 + \frac{1}{K}\right]$$

Cette inégalité est vérifiée si le premier critère est vérifié. Ceci veut dire que:

Quand u_3 est positif au point d'abscisse 0, la pente de la courbe au point d'abscisse ℓ est négative, c'est-à-dire au point ℓ^-, u_3 est positif, la courbe est au dessus de l'axe.



Pour savoir si la courbe reste au-dessus de l'axe sur toute la longueur ℓ, cherchons les points qui correspondent à un maximum ou un minimum de la valeur de u_3, c'est-à-dire, les points où sa dérivée première s'annule :

$$u_3'(x) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$I\frac{x^3}{6} + Jx = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$x\left(\frac{Ix^2}{6} + J\right) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 + \dfrac{6J}{I} = 0 \begin{cases} J \geq 0 \Rightarrow \exists \text{solution} \\ J \leq 0 \Rightarrow x = +\sqrt{\dfrac{-6J}{I}} \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Il existe, au plus, deux points à dérivée nulle: Le premier correspond au point d'abscisse 0, la présence du second est conditionnée par l'inégalité : $J \leq 0$:

$$J \leq 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\left|\varepsilon_r^0\right| \leq \frac{2|F_3|}{e_1 + e_2}\left[\frac{\ell^2}{2}\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right) + \frac{1}{K}\right] = B$$

B constitue un second critère pour ε_r^0, qui, dépassé, entraîne le bombement total de la dalle, n'ayant plus qu'un seul maximum correspondant au point d'abscisse 0.

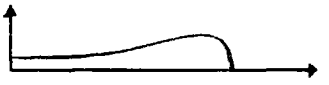
Nous concluons cette partie par deux remarques importantes.

1-Quand $u_3(0)$ est positif, c'est-à-dire quand le milieu de la dalle est détaché du sol, la pente de la courbe à $x=\ell$ est négative, toute la courbe est alors nécessairement au dessus de l'axe des x entre 0 et ℓ, toute la dalle est décollée, et il existe au plus un seul point optimal (autre que l'origine).

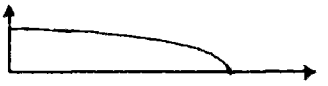
2-La forme de la déformée suivant u_3 est donnée par les critères suivants :

$A \geq |\varepsilon_r^0| \quad \Rightarrow$

$B \geq |\varepsilon_r^0| \geq A \Rightarrow$



$|\varepsilon_r^0| \geq B \quad \Rightarrow$



II-2: DECOLLEMENT PARTIEL

Elle correspond à une valeur de $|\varepsilon_r^0|$ inférieure au premier critère tel que :

$$|\varepsilon_r^0| \leq \frac{2|F_3|}{e_1+e_2}\left[\frac{5}{12}\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)\ell^2+\frac{1}{K}\right]=A$$

Une partie de la dalle est détachée, une autre partie de longueur ℓ' reste en contact avec le sol. Ces deux parties sont raccordées entre elles par les conditions de continuité au point d'abscisse ℓ'.

1- $x \in [0,\ell']$: La dalle est en contact avec le sol.
Les déplacements verticaux sont nuls.

2- $x \in [\ell',\ell[$: La dalle est soulevée du sol.
La réaction du sol est nulle..

1-Partie en contact avec le sol

Les déplacements suivant e_3 sont nuls. Ce qui réduit l'expression de la discontinuité tangente d'interface 1,2 à :

$$D_1^{1,2} = u_2 - u_1$$

Et aux efforts normaux d'interface 1,2 est ajouté celui exercé par la couche 1 sur le sol : $\nu^{0,1}$.

Les équations d'équilibre deviennent :

Equations d'équilibres :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \tilde{\tilde{N}}^1 + \tilde{\tau}^{1,2} = 0 \\ \operatorname{div} \tilde{\tilde{N}}^2 - \tilde{\tau}^{1,2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} K_{11}^1 \dfrac{d^2 u_1^1}{dx^2} + K\left(u_1^2 - u_1^1\right) = 0 \\ K_{11}^2 \dfrac{d^2 u_1^2}{dx^2} - K\left(u_1^2 - u_1^1\right) = 0 \end{cases}$$

Et

$$\sum_{i=1}^{2} \left[\operatorname{div}\left(\frac{e_i}{2} \left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i} \right) \right) + F_3^i \right] = 0$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

Conditions aux limites

A x=0 $\quad u_1(x) = 0.$
$\quad u_2(x) = 0.$

A x=ℓ' $\quad$ Continuité entre les parties détachée et non détachée du sol, de
$N_1(x)$
$N_2(x)$
$u_1(x)$
$u_2(x)$

Résolution des équations d'équilibre

$$\begin{cases} K_1 \dfrac{d^2u_1}{dx^2} + K(u_2 - u_1) = 0 \\ K_2 \dfrac{d^2u_2}{dx^2} - K(u_2 - u_1) = 0 \end{cases}$$

Posons:

$u_1 = \alpha_1 e^{wx}$

$u_2 = \alpha_2 e^{wx}$

$$\begin{pmatrix} K_1 w^2 - K & K \\ K & K_2 w^2 - K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour que le système d'équations possède une solution non nulle, il faut que le déterminant de la première matrice soit nul :

$$(K_1 w^2 - K)(K_2 w^2 - K) - K^2 = 0$$

$$K_1 K_2 w^2 - K w^2 (K_1 + K_2) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} w^2 = 0 \Rightarrow w = 0 \\ w = \pm\sqrt{\dfrac{K(K_1 + K_2)}{K_1 K_2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = A_1 \cosh wx + B_1 \sinh wx + D_1 x + E_1 \\ u_2 = A_2 \cosh wx + B_2 \sinh wx + D_2 x + E_2 \end{cases}$$

Ce qui donne l'expression des déplacements des deux particules de M, avec, à déterminer, huit constantes, se basant sur des conditions aux limites.

Un raisonnement identique à celui fait au chapitre précédant, nous emmène à l'expression suivante des déplacements dans le plan :

$$\begin{cases} u_1(x) = B_1 \sinh wx + D_1 x \\ u_2(x) = -B_1 \dfrac{K_1}{K_2} \sinh wx + D_1 x \end{cases}$$

Ce qui nous donne les efforts membranaires et de cisaillement :

$$\begin{cases} N_1(x) = K_1\left[B_1\, w\cosh wx + D_1 - \varepsilon_r^0\right] \\ N_2(x) = K_2\left[-B_1\dfrac{K_1}{K_2}\, w\cosh wx + D_1\right] \end{cases}$$

$$\tau^{1,2}(x) = -B_1K_1w^2\sinh wx$$

Deux inconnus B_1 et D_1 restent à trouver.

2-<u>Partie soulevée du sol</u>

Toutes les variables dans cette partie sont distinguées de celles de la partie précédente par un astérisque (*).

Résolution des équations d'équilibre

La deuxième équation d'équilibre nous donne :

$$\frac{e_1+e_2}{2}\operatorname{div}\tau^{1,2*} + F_3 = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\tau^{1,2*} = -\frac{2F_3}{e_1+e_2}(x+\alpha)$$

α est une première constante d'intégration.

Le premier système d'équations d'équilibre nous donne :

$$\begin{cases} K_1\dfrac{d^2u_1^*}{dx} - \dfrac{2F_3}{e_1+e_2}(x+\alpha) = 0 \\ K_2\dfrac{d^2u_2^*}{dx} + \dfrac{2F_3}{e_1+e_2}(x+\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} u_1^* = \dfrac{2F_3}{(e_1+e_2)K_1}\left(\dfrac{x^3}{6} + \alpha\dfrac{x^2}{2} + \alpha_1'x + \alpha_1''\right) \\ u_2^* = -\dfrac{2F_3}{(e_1+e_2)K_2}\left(\dfrac{x^3}{6} + \alpha\dfrac{x^2}{2} + \alpha_2'x + \alpha_2''\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} N_1^* = \dfrac{2F_3}{e_1+e_2}\left(\dfrac{x^2}{2}+\alpha x+\alpha_1'\right)-\varepsilon_r^0 K_1 \\ N_2^* = -\dfrac{2F_3}{e_1+e_2}\left(\dfrac{x^2}{2}+\alpha x+\alpha_2'\right) \end{cases}$$

Les six conditions aux limites :

A $x=\ell'$ Continuité $N_1(x) = N_1^*(x)$

$N_2(x) = N_2^*(x)$

$u_1(x) = u_1^*(x)$

$u_2(x) = u_2^*(x)$

A $x=\ell$ $N_1^*(x)=0$

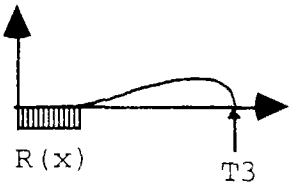
$N_2^*(x)=0$

Nous donnent les valeurs des constantes $B_1, D_1, \alpha_1', \alpha_2', \alpha_1'', \alpha_2''$ en fonction des deux valeurs α et ℓ', encore inconnues.

3-Forme de la déformée

Calcul de α :

Elle est calculée, en fonction de ℓ' en faisant l'équilibre des forces externes appliquées à la structure (fig. B-2) :



(B-2): Forces extérieures appliquées à la structure.

Désignons par T_3 la réaction ponctuelle du sol appliquée au bord de la dalle, R(x) celle répartie sur la partie entre 0 et ℓ'. F_3 est le poids surfacique propre de la dalle, que nous considérons uniformément réparti sur toute la longueur ℓ de la dalle.

Faisons l'équilibre de toutes ces forces extérieures appliquées à la structure :

$$T_3 + F_3\,\ell + \int_0^{\ell'} R(x)\,dx = 0$$

Avec:

$$R(x) = -v^{0,1}(x)$$

$$\Rightarrow$$

$$T_3 = \int_0^{\ell'} v^{0,1}(x)\,dx - F_3\,\ell$$

Nous avons démontré, comme dans le chapitre IV, la continuité de l'effort de cisaillement d'interface au point d'abscisse ℓ'.

Or la valeur de $v^{0,1}$ est donnée par :

$$\mathrm{div}\left(\frac{e_1 + e_2}{2}\tau^{1,2}\right) - v^{0,1} + F_3 = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$v^{0,1}(x) = -\frac{e_1 + e_2}{2} K_1 B_1 w^3 \cosh wx + F_3$$

$$\Rightarrow$$

$$T_3 = -\frac{e_1 + e_2}{2} K_1 B_1 w^2 \sinh w\ell' - F_3(\ell - \ell')$$

Le deuxième système d'équations de conditions aux limites, dans la partie entre ℓ' et ℓ, nous donne :

$$\begin{cases} \frac{e_1}{2}\tau^{1,2*}(\ell) + \delta.v^{1,2*} = T_3 \\ \frac{e_2}{2}\tau^{1,2*}(\ell) - \delta.v^{1,2*} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{e_1 + e_2}{2}\tau^{1,2*}(\ell) = T_3$$

$v^{0,1*}$ étant égal à 0 dans cette partie détachée du sol.

$\Rightarrow$

$$\tau^{1,2*}(\ell) = -B_1 K_1 w^2 \sinh w\ell' - \frac{2F_3}{e_1 + e_2}(\ell - \ell')$$

Or

$$\tau^{1,2*}(\ell) = -\frac{2F_3}{e_1 + e_2}(\ell + \alpha)$$

$\Rightarrow$

$$\alpha = \frac{e_1 + e_2}{2F_3} B_1 K_1 w^2 \sinh w\ell' - \ell'$$

En remplaçant B_1 par sa valeur calculée dans l'annexe B :

$$\alpha = \frac{K \frac{\tanh w\ell'}{w}\left[\frac{\ell'^2 - \ell^2}{2}\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right) + \varepsilon_r^0 K \frac{e_1 + e_2}{2F_3}\right] - \ell'}{1 - K \frac{\tanh w\ell'}{w}\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right)(\ell' - \ell)}$$

C'est l'expression de la constante α, en fonction de la longueur de contact ℓ', qui reste à déterminer, en se basant sur les conditions aux limites du déplacement vertical.

La déformée suivant e_3

La déformée est donnée par le tracé du déplacement suivant e_3, en fonction de x. Le gradient du déplacement vertical est dans l'expression du comportement de cisaillement à l'interface :

$$\tau^{1,2*} = K(u_2^* - u_1^* + \frac{e_1 + e_2}{2} \operatorname{grad} u_3^*)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e_1 + e_2}{2} \operatorname{grad} u_3^* = \frac{\tau^{1,2*}}{K} + u_1^* - u_2^*$$

$\Rightarrow$

$$\frac{du_3^*}{dx} = -P\left[I\left(\frac{x^3}{6} + \frac{\alpha x^2}{2}\right) + Jx + M\right]$$

Avec :

$$P = \frac{-4\,F_3}{(e_1+e_2)^2}$$

$$I = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

$$J = \frac{\alpha_1'}{K_1} + \frac{\alpha_2'}{K_2} - \frac{1}{K}$$

$$M = \frac{\alpha_1''}{K_1} + \frac{\alpha_2''}{K_2} - \frac{\alpha}{K}$$

$$\Rightarrow$$

$$u_3^{\bullet} = -P\left[I\left(\frac{x^4}{24} + \frac{\alpha\,x^3}{6}\right) + J\frac{x^2}{2} + Mx + \alpha_3\right]$$

L'extrémité de la dalle étant en contact avec le sol :

$$x = \ell \Rightarrow u_3^{\bullet} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\alpha_3 = -I\left(\frac{\ell^4}{24} + \frac{\alpha\ell^3}{6}\right) - J\frac{\ell^2}{2} - M\,\ell$$

$$\Rightarrow$$

$$u_3^{\bullet}(x) = -P\left[I\left(\frac{(x^4-\ell^4)}{24} + \frac{\alpha(x^3-\ell^3)}{6}\right) + J\frac{x^2-\ell^2}{2} + M(x-\ell)\right]$$

Tous les coefficients de u_3 sont paramétrés par ℓ'.

4-Calcul de la longueur de contact ℓ'

u_3 s'annule pour deux valeurs de x qui sont ℓ et ℓ' :

$$u_3(\ell') = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$I\left(\frac{\ell'^4 - \ell^4}{24} + \alpha\frac{\ell'^3 - \ell^3}{6}\right) + J\frac{\ell'^2 - \ell^2}{2} + M(\ell' - \ell) = 0$$

Le remplacement de tous les coefficients par leurs valeurs en fonction de ℓ' nous donne la valeur de ℓ'.

ANNEXE C

COEFFICIENTS DU CALCUL ELASTIQUE

I-CURLING POSITIF

$[0 \to \ell]$:

$$\begin{cases} u_1(x) = B_1 \sinh wx + D_1 x \\ u_2(x) = -B_1 \dfrac{K_1}{K_2} \sinh wx + D_1 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1(x) = K_1 [B_1 w \cosh wx + D_1] \\ N_2(x) = K_2 \left[-B_1 \dfrac{K_1}{K_2} w \cosh wx + D_1 - \varepsilon_r^0 \right] \end{cases}$$

$$\tau^{1.2}(x) = -B_1 K_1 w^2 \sinh wx$$

$[\ell' \to \ell]$:

$$\begin{cases} u_1^*(x) = \dfrac{2F_3}{(e_1 + e_2)K_1} \left[\dfrac{x^3}{6} - \ell \dfrac{x^2}{2} + \alpha_1' x + \alpha_1'' \right] \\ u_2^*(x) = -\dfrac{2F_3}{(e_1 + e_2)K_2} \left[\dfrac{x^3}{6} - \ell \dfrac{x^2}{2} + \alpha_2' x + \alpha_2'' \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1^*(x) = \dfrac{2F_3}{e_1 + e_2} \left[\dfrac{x^2}{2} - \ell x + \alpha_1' \right] \\ N_2^*(x) = -\dfrac{2F_3}{e_1 + e_2} \left[\dfrac{x^2}{2} - \ell x + \alpha_2' \right] - \varepsilon_r^0 K_2 \end{cases}$$

$$\tau^{1.2*}(x) = -\frac{2F_3}{e_1 + e_2}(x - \ell)$$

Conditions aux limites

$$N_1^*(\ell) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\ell^2}{2} - \ell^2 + \alpha_1' = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_1' = \frac{\ell^2}{2}$$

$$N_2^*(\ell) = 0$$
$$\Rightarrow -\frac{2F_3}{e_1 + e_2}\left(\frac{\ell^2}{2} - \ell^2 + \alpha_2'\right) - \varepsilon_r^0 K_2 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_2' = -\frac{\varepsilon_r^0 K_2 (e_1 + e_2)}{2F_3} + \frac{\ell^2}{2}$$

$$\Rightarrow$$
$$\begin{cases} N_1^*(x) = \dfrac{F_3}{e_1 + e_2}(x - \ell)^2 \\ N_2^*(x) = -\dfrac{F_3}{e_1 + e_2}(x - \ell)^2 \end{cases}$$

Conditions de continuité

$$N_1^*(\ell') = N_1(\ell')$$
$$\Rightarrow \frac{F_3}{e_1 + e_2}(\ell - \ell')^2 = K_1\left[B_1 w \cosh w\ell' + D_1\right]$$

$$N_2^*(\ell') = N_2(\ell')$$
$$\Rightarrow -\frac{F_3}{e_1 + e_2}(\ell - \ell')^2 = K_2\left[-B_1 \frac{K_1}{K_2} w \cosh w\ell' + D_1 - \varepsilon_r^0\right]$$

En additionnant membre à membre ces deux équations, on obtient la valeur de B_1 :

$$\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)\frac{F_3}{e_1+e_2}(\ell-\ell')^2=\frac{K_1}{K}w^3\cosh w\ell' B_1+\varepsilon_r^0$$

$$\Rightarrow$$

$$B_1=\frac{K}{K_1 w^3\cosh w\ell'}\left[\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)\frac{F_3}{e_1+e_2}(\ell-\ell')^2-\varepsilon_r^0\right]$$

En remplaçant dans la première équation, on obtient la valeur de D_1 en fonction de B_1 :

$$D_1=\frac{F_3}{K_1(e_1+e_2)}(\ell-\ell')^2-B_1 w\cosh w\ell'$$

$$u_1^*(\ell')=u_1(\ell')$$

$$\Rightarrow\frac{2F_3}{(e_1+e_2)K_1}\left[\frac{\ell'^3}{6}-\ell\frac{\ell'^2}{2}+\alpha_1'\ell'+\alpha_1''\right]=B_1\sinh w\ell'+D_1\ell'$$

$$\Rightarrow$$

$$\alpha_1''=\frac{K_1(e_1+e_2)}{2F_3}\left[B_1\sinh w\ell'+D_1\ell'\right]-\left[\frac{\ell'^3}{6}-\ell\frac{\ell'^2}{2}+\alpha_1'\ell'\right]$$

$$u_2^*(\ell')=u_2(\ell')$$

$$\Rightarrow-\frac{2F_3}{(e_1+e_2)K_2}\left[\frac{\ell'^3}{6}-\ell\frac{\ell'^2}{2}+\alpha_2'\ell'+\alpha_2''\right]=B_2\sinh w\ell'+D_1\ell'$$

$$\Rightarrow$$

$$\alpha_2''=-\frac{K_2(e_1+e_2)}{2F_3}\left[B_2\sinh w\ell'+D_1\ell'\right]-\left[\frac{\ell'^3}{6}-\ell\frac{\ell'^2}{2}+\alpha_2'\ell'\right]$$

II-CURLING NEGATIF

$[0 \to \ell']$:

$$\begin{cases} u_1(x) = B_1 \sinh wx + D_1 x \\ u_2(x) = -B_1 \dfrac{K_1}{K_2} \sinh wx + D_1 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1(x) = K_1\left[B_1 w \cosh wx + D_1 - \varepsilon_r^0\right] \\ N_2(x) = K_2\left[-B_1 \dfrac{K_1}{K_2} w \cosh wx + D_1\right] \end{cases}$$

$$\tau^{1,2}(x) = -B_1 K_1 w^2 \sinh wx$$

$[\ell' \to \ell]$:

$$\begin{cases} u_1^*(x) = \dfrac{2F_3}{(e_1+e_2)K_1}\left[\dfrac{x^3}{6} + \alpha\dfrac{x^2}{2} + \alpha_1' x + \alpha_1''\right] \\ u_2^*(x) = -\dfrac{2F_3}{(e_1+e_2)K_2}\left[\dfrac{x^3}{6} + \alpha\dfrac{x^2}{2} + \alpha_2' x + \alpha_2''\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1^*(x) = \dfrac{2F_3}{e_1+e_2}\left[\dfrac{x^2}{2} + \alpha x + \alpha_1'\right] - \varepsilon_r^0 K_1 \\ N_2^*(x) = -\dfrac{2F_3}{e_1+e_2}\left[\dfrac{x^2}{2} + \alpha x + \alpha_2'\right] \end{cases}$$

$$\tau^{1,2*}(x) = -\frac{2F_3}{e_1+e_2}(x+\alpha)$$

Conditions aux limites

$N_1^*(\ell) = 0 \Rightarrow$

$$\alpha_1' = \varepsilon_r^0 K_1 \frac{e_1 + e_2}{2F_3} - \frac{\ell^2}{2} - \alpha\ell$$

$N_2^*(\ell) = 0 \Rightarrow$

$$\alpha_2' = -\frac{\ell^2}{2} - \alpha\ell$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} N_1^*(\ell) = \dfrac{2F_3}{e_1 + e_2}\left[\dfrac{x^2}{2} + \alpha x - \dfrac{\ell^2}{2} - \alpha\ell\right] \\ N_2^*(\ell) = -\dfrac{2F_3}{e_1 + e_2}\left[\dfrac{x^2}{2} + \alpha x - \dfrac{\ell^2}{2} - \alpha\ell\right] \end{cases}$$

Conditions de continuité

$N_1^*(\ell') = N_1(\ell')$

$$\Rightarrow \frac{2F_3}{e_1 + e_2}\left[\frac{\ell'^2}{2} + \alpha\ell' - \frac{\ell^2}{2} - \alpha\ell\right] = K_1\left[B_1 w \cosh w\ell' + D_1 - \varepsilon_r^0\right]$$

$N_2^*(\ell') = N_2(\ell')$

$$\Rightarrow -\frac{2F_3}{e_1 + e_2}\left[\frac{\ell'^2}{2} + \alpha\ell' - \frac{\ell^2}{2} - \alpha\ell\right] = K_2\left[-B_1 \frac{K_1}{K_2} w \cosh w\ell' + D_1\right]$$

En additionnant membre à membre les deux équations, nous obtenons la valeur de B_1 :

$$\frac{F_3}{e_1+e_2}\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)(\ell'-\ell)(\ell'+\ell+2\alpha)=B_1\frac{K_1}{K}w^3\cosh w\ell'-\varepsilon_r^0$$

$$\Rightarrow$$

$$B_1=\frac{K}{K_1 w^3\cosh w\ell'}\left[-\frac{F_3}{e_1+e_2}\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)(\ell-\ell')(\ell+\ell'+2\alpha)+\varepsilon_r^0\right]$$

La première équation nous donne D_1 :

$$D_1=-\frac{F_3}{K_1(e_1+e_2)}(\ell-\ell')(\ell+\ell'+2\alpha)-B_1 w\cosh w\ell'+\varepsilon_r^0$$

$$u_1^{\bullet}(\ell')=u_1(\ell')$$

$$\Rightarrow\frac{2F_3}{(e_1+e_2)K_1}\left[\frac{\ell'^3}{6}+\alpha\frac{\ell'^2}{2}+\alpha_1'\ell'+\alpha_1''\right]=B_1\sinh w\ell'+D_1\ell'$$

$$\Rightarrow\alpha_1''=\frac{K_1(e_1+e_2)}{2F_3}\left[B_1\sinh w\ell'+D_1\ell'\right]-\left[\frac{\ell'^3}{6}+\alpha\frac{\ell'^2}{2}+\alpha_1'\ell'\right]$$

$$u_2^{\bullet}(\ell')=u_2(\ell')$$

$$\Rightarrow-\frac{2F_3}{(e_1+e_2)K_2}\left[\frac{\ell'^3}{6}+\alpha\frac{\ell'^2}{2}+\alpha_2'\ell'+\alpha_2''\right]=B_2\sinh w\ell'+D_1\ell'$$

$$\Rightarrow\alpha_2''=-\frac{K_2(e_1+e_2)}{2F_3}\left[-B_1\frac{K_1}{K_2}\sinh w\ell'+D_1\ell'\right]-\left[\frac{\ell'^3}{6}+\alpha\frac{\ell'^2}{2}+\alpha_2'\ell'\right]$$

ANNEXE D

COEFFICIENTS DU CALCUL VISCOELASTIQUE

CURLING POSITIF

$[0 \to \ell]$:

$$\begin{cases} u_1(x) = -\dfrac{K}{K_1}\left[\displaystyle\int_0^x\left(\dfrac{\sinh w(x-u)}{w^3}\dfrac{\partial\varepsilon_r(u)}{\partial x}\right)du - \dfrac{1}{w^2}\int_0^x \varepsilon_r(u)du\right] - \dfrac{K}{K_1}B\sinh wx + Cx \\ u_2(x) = \dfrac{K}{K_2}\left[\displaystyle\int_0^x\left(\dfrac{\sinh w(x-u)}{w^3}\dfrac{\partial\varepsilon_r(u)}{\partial x}\right)du\right] + \left(1 - \dfrac{K}{K_2 w^2}\right)\int_0^x \varepsilon_r(u)du + \dfrac{K}{K_2}B\sinh wx + Cx \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1(x) = -K\left[\displaystyle\int_0^x\left(\dfrac{\cosh w(x-u)}{w^2}\dfrac{\partial\varepsilon_r(u)}{\partial x}\right)du - \dfrac{\varepsilon_r(x)}{w^2} + Bw\cosh wx\right] + CK_1 \\ N_2(x) = K\left[\displaystyle\int_0^x\left(\dfrac{\cosh w(x-u)}{w^2}\dfrac{\partial\varepsilon_r(u)}{\partial x}\right)du - \dfrac{\varepsilon_r(x)}{w^2} + Bw\cosh wx\right] + CK_2 \end{cases}$$

$$\tau^{1,2}(x) = K\left[\int_0^x\left(\frac{\sinh w(x-u)}{w}\frac{\partial\varepsilon_r(u)}{\partial x}\right)du + Bw^2\sinh wx\right]$$

$[\ell' \to \ell]$:

$$\begin{cases} u_1^{\bullet}(x) = \dfrac{2F_3}{(e_1+e_2)K_1}\left[\dfrac{x^3}{6} - \ell\dfrac{x^2}{2} + \alpha_1' x + \alpha_1''\right] \\ u_2^{\bullet}(x) = -\dfrac{2F_3}{(e_1+e_2)K_2}\left[\dfrac{x^3}{6} - \ell\dfrac{x^2}{2} + \alpha_2' x + \alpha_2''\right] + \displaystyle\int_{\ell'}^x \varepsilon_r^{\bullet}(u)du \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1^{\bullet}(x) = \dfrac{2F_3}{e_1+e_2}\left[\dfrac{x^2}{2} - \ell x + \alpha_1'\right] \\ N_2^{\bullet}(x) = -\dfrac{2F_3}{e_1+e_2}\left[\dfrac{x^2}{2} - \ell x + \alpha_2'\right] \end{cases}$$

$$\tau^{1,2\bullet}(x) = -\frac{2F_3}{e_1+e_2}(x-\ell)$$

Conditions aux limites

$$N_1^*(\ell) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\ell^2}{2} - \ell^2 + \alpha_1' = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_1' = \frac{\ell^2}{2}$$

$$N_2^*(\ell) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\ell^2}{2} - \ell^2 + \alpha_2' = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_2' = \frac{\ell^2}{2}$$

$$\Rightarrow$$
$$\begin{cases} N_1^*(x) = \dfrac{F_3}{e_1 + e_2}(x - \ell)^2 \\ N_2^*(x) = -\dfrac{F_3}{e_1 + e_2}(x - \ell)^2 \end{cases}$$

Conditions de continuité

<u>En efforts</u>

$$N_1^*(\ell') = N_1(\ell')$$
$$\Rightarrow \frac{F_3}{e_1 + e_2}(\ell - \ell')^2 = -K\left[\int_0^{\ell'}\left(\frac{\cosh w(\ell' - u}{w^3}\frac{\partial\varepsilon_r(u)}{w^2}\right)du - \frac{\varepsilon_r(\ell')}{w^2} + Bw\cosh w\ell'\right] + CK_1$$

$$N_2^*(\ell') = N_2(\ell')$$
$$\Rightarrow -\frac{F_3}{e_1 + e_2}(\ell - \ell')^2 = K\left[\int_0^{\ell'}\left(\frac{\cosh w(\ell' - u}{w^3}\frac{\partial\varepsilon_r(u)}{w^2}\right)du - \frac{\varepsilon_r(\ell')}{w^2} + Bw\cosh w\ell'\right] + CK_2$$

En additionnant membre à membre ces deux équations, nous obtenons la valeur de C:

$$C = 0$$

En remplaçant dans la première équation, nous obtenons la valeur de B en fonction de ℓ':

$$B = \frac{1}{w\cosh w\ell'}\left[-\frac{F_3}{K(e_1+e_2)}(\ell-\ell')^2 - \int_0^{\ell'}\left(\frac{\cosh w(\ell'-u)}{w^2}\frac{\partial\varepsilon_r(u)}{\partial x}\right)du + \frac{\varepsilon_r(\ell')}{w^2}\right]$$

<u>En déplacements</u>

$$u_1^*(\ell') = u_1(\ell')$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{2F_3}{(e_1+e_2)K_1}\left[\frac{\ell'^3}{6} - \ell\frac{\ell'^2}{2} + \alpha_1'\ell' + \alpha_1''\right] =$$
$$-\frac{K}{K_1}\left[\int_0^{\ell'}\left(\frac{\sinh w(\ell'-u)}{w^3}\frac{\partial\varepsilon_r(u)}{\partial x}\right)du - \int_0^{\ell'}\frac{\varepsilon_r(u)}{w^2}du + B\sinh w\ell'\right]$$

$$\Rightarrow$$

$$\alpha_1'' = -\frac{K(e_1+e_2)}{2F_3}\left[\int_0^{\ell'}\left(\frac{\sinh w(\ell'-u)}{w^3}\frac{\partial\varepsilon_r(u)}{\partial x}\right)du - \int_0^{\ell'}\frac{\varepsilon_r(u)}{w^2}du + B\sinh w\ell'\right]$$
$$-\left[\frac{\ell'^3}{6} - \ell\frac{\ell'^2}{2} + \alpha_1'\ell'\right]$$

$$u_2^*(\ell') = u_2(\ell')$$

$$\Rightarrow$$

$$-\frac{2F_3}{(e_1+e_2)K_2}\left[\frac{\ell'^3}{6} - \ell\frac{\ell'^2}{2} + \alpha_2'\ell' + \alpha_2''\right] =$$

$$\frac{K}{K_2}\left[\int_0^{\ell'}\left(\frac{\sinh w(\ell'-u)}{w^3}\frac{\partial\varepsilon_r(u)}{\partial x}\right)du\right] + \left(1 - \frac{K}{K_2 w^2}\right)\int_0^{\ell'}\frac{\varepsilon_r(u)}{w^2}du + \frac{K}{K_2}B\sinh w\ell'$$

$$\Rightarrow$$

$$\alpha_2'' = -\frac{K(e_1+e_2)}{2F_3}\left[\int_0^{\ell'}\left(\frac{\sinh w(\ell'-u)}{w^3}\frac{\partial\varepsilon_r(u)}{\partial x}\right)du - \left(1 - \frac{K_2}{Kw^2}\right)\int_0^{\ell'}\frac{\varepsilon_r(u)}{w^2}du + B\sinh w\ell'\right]$$

$$-\left[\frac{\ell'^3}{6} - \ell\frac{\ell'^2}{2} + \alpha_2'\ell'\right]$$

LISTE BIBLIOGRAPHIQUE

[1] : AGASSANT J.F. : "Le calandrage des matières thermoplastiques".
Thèse de doctorat de Paris 6 - 1980.

[2] : AGASSANT J.F. , AVENAS P. , SERGENT J.Ph. : "La mise en forme des matières plastiques".
Technique et Documentation - 1986.

[3] : ALLIX O. : "Modélisation du comportement des composites stratifiés".
Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie - 1989.

[4] : ALTUS E. & al. : "Free edge effect in angle ply laminates - A new three dimensional finite difference solution".
J. of Composite Materials , Vol. 14 , p 21 - 1980.

[5] : CARON J.F : "Modélisation de la cinétique de fissuration transverse en fatigue dans les stratifiés".
Thèse de doctorat de l'ENPC - 1993.

[6] : CHENG S. : "Elasticity theory of plates and a refined theory".
J. of Applied Mechanics , Vol. 46 , pp 644-650 - 1979.

[7] : CORNE P. : "Composite bobiné en état de contrainte plane de compression-Viscoélasticité linéaire".
Compte rendu des 4èmes journées internationales sur les composites.
Ed. Pluralis , pp 281-300 - Paris 11-13 sept. 1984.

[8] : DANIELSON D.A. : "Improved error estimates in the linear theory of thin elastic shells".
Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. B 74 , pp 294-300.

[9] : DAUDEVILLE L. : "Une méthode simple pour l'analyse du délaminage des structures composites stratifiés".
Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie - 1992.

[10] : DAVIAUD R. , FILLIATRE C. : "Introduction aux matériaux composites".
Tome 1. Editions du CNRS - Institut des matériaux composites - 1983.

[11] : DESTUYNDER P. : "Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques".
Thèse d'Etat de l'Université de Paris VI - 1980.

[12] : DESTUYNDER P. , STACKLER C. , OUSSET Y. : "Calcul des singularités de contrainte d'effets de bord".
Effet de bords et singularité dans les matériaux composites stratifiés.
Annales des composites , ed. AMAC , pp 81-96 - 1987.

[13] : DOUCHET J. , ZWAHLEN B. : "Calcul différentiel et intégral". Tome 3.
Presses polytechniques romandes - 1987.

[14] : DUMONTET H. : "Homogéneisation et effets de bords dans les matériaux composites".
Thèse d'Etat de l'Université Pierre et Marie Curie - 1990.

[15] : EHRLACHER A. , NACIRI T. : "Modélisation des matériaux composites".
Cours de D.E.A "Mécanique des solides et structures" - Chap. 7.
Paris 6 - Ecole Nationale des Ponts et Chaussées - 1993.

[16] : ENGRAND D. : "Effets de bords libres dans les plaques composites symétriques chargées dans leur plan".
La Recherche Aérospatiale , N°1 - Jan. Fev. 1982.

[17] : ENGRAND D. : "Some local effects in composites plates".
Local effects in the analysis of structures.
LADEVEZE- Elsevier Science - 1985.

[18] : ENGRAND D. : "Effets de bords libres dans les plaques composites symétriques chargées dans leur plan".
La Recherche Aérospatiale , pp 57-80 - Jan. Fev. 1992.

[19] : FLAGGS D.F : "Prediction of tensile matrix failure in composites laminates"
J. Composite Materials , Vol. 19 - Jannuary 1985.

[20] : FREDRICHS K.O. , DRESSLER R.F. : "A boundary layer theory for elastic plates".
Comm. on Pure and Applied Mathematics , Vol. 14 , pp 1-33 - 1961.

[21] : GARETT K.W , BAILEY J.E. : "Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of a glass fibre-reinforced polyester".

[22] : GILETTA D. : "Composites 2D: Modélisation et identification de la couche élémentaire".
Thèse de Docteur Ingénieur , Université Paris VI - 1985.

[23] : HAMELIN P. : "Contribution à l'étude du comportement rhéologique de liants viscoélastiques en vue de l'analyse du fluage des matériaux composites utilisés sous forme de structure en génie civil".
Thèse de Doctorat d'Etat , INSA Lyon , Université Claude Bernard - 1979.

[24] : JOUVE P. , KHELIDJ A. : "Modélisation du comportement viscoélastique linéaire des plaques composites multicouches".
Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux publics.
N°497 , pp 78-89 - Oct. 1991.

[25] : KAMIMURA K. : "Modélisation théorique de la croissance de l'endommagement appliquée à la théorie des plaques stratifiées".
J. de Mécanique Théorique et Appliquée. Vol. 4 - 1985.

[26] : KOITER W.T. , SIMONDS J.G. : "Foundations of shell theory".
Proc. 13th Int. Cong. of Theor. And Appl. Mech. , pp 150-176 ,
Springer-Verlag - 1972.

[27] : KRUCH S. : "Comportement global des matériaux composites viscoélastique".
Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI - 1988.

[28] : LADEVEZE P. : "Comparaison de modèles de milieu continu".
Thèse d'Etat de l'Université de Paris VI - 1975.

[29] : LADEVEZE P. : "Justification de la théorie linéaire des coques élastiques".
J. de Mécanique , Vol. 15 , N°5 , pp 813-856 - 1976.

[30] : LADEVEZE P. : "Une nouvelle version de la théorie de Reissner-Mindlin pour les plaques homogènes orthotropes".
C.R. Acad. Sci. . t. 305. Série II - 1987.

[31] : LADEVEZE P. : "Une nouvelle version de la théorie des plaques de Kirchhoff-Love".
C.R. Acad. Sci. . t. 312. Série II - 1991.

[32] : LAROZE S. , BARRAU J.J. : "Mécanique des structures". Tome 1.
Eyrolles- 1988.

[33] : LAROZE S. , BARRAU J.J. : "Mécanique des structures". Tome 2.
EYROLLES- 1988.

[34] : LEGUILLON D. , SANCHEZ-PALENCIA E. : "Effets de bords et singularité dans les matériaux composites".
Effets de bords et singularité dans les matériaux composites stratifiés.
Annales des composites , ed. AMAC , pp 7-20 - 1987.

[35] : LEMAITRE J. : "Sur la détermination des lois de comportement des matériaux élasto-visco-plastiques".
Thèse de Doctorat de la Faculté des Sciences d'Orsay Université de Paris - 1971.

[36] : LEMAITRE J. , CHABOCHE J.L : "Mécanique des matériaux solides".
Dunod - 1985.

[37] : LEVINSON M. : "An accurate simple theory of statics and dynamics of elastic plates".
Mech. Res. Commun , Vol. 7 - 1980.

[38] : MINDLIN R.D. : "Influence of rotatory inertia and shear on the flexural motions of isotropic elastic plates".
J. of Applied Mechanics , Vol. 18 , N° 31 - 1951.

[39] : MORTIER J. : "Les revêtements de sol plastiques".
Cahiers techniques du Moniteur , N°9.

[40] : PAGANO N.J : "Stress fields in composite laminates".
Int. J. of Structures , vol. 14 , pp 385-400 - 1978.

[41] : PAGANO N.J, SONI S.R : "Global local laminate variational model".
Int. Journal of Solids Structures , Vol. 19 , N° 3 , pp 297-228 - 1983.

[42] : PECASTAINGS F. : "Approximation au second ordre des déplacements et des contraintes dans une plaque épaisse en flexion".
Birhauser Verlag - Basel - Zamp. , Vol. 38 , N° 6 , pp 893-904 - Nov.87.

[43] : PEREZ J. : "Physique et mécanique des polymères amorphes".
Technique et Documentation - 1992.

[44] : PERRET L. , LECUYER F. , ALLIX O. , ENGRAND D. : "Perforated composite plates effects of the curvature on three dimensional stress distribution around holes - Comparaison between two different techniques".
Proceeding of ICCM7 , Hawaï - 1991.

[45] : PIPES R.B , PAGANO N.J. : "Interlaminair stresses in composites laminates under uniform axial extension".
J. Composite Materials , Vol. 4 , pp 538-548 - 1970.

[46] : PUPO A.H. , EVENSON H.A. : "Interlaminar shear in laminated composites under generalized plane stress".
J. Composite Materials , Vol. 4 , pp 204-220 - 1970.

[47] : RAJU I.S. , JHON H. , CREW J.R. : "Interlaminar stress singularities at a streight free edge in composites laminates".
NASA Langley Research Center 23665 - 1980.

[48] : RATABOULE R. : "Les revêtements de sol actuels".
S.D.T.B.T.P - 1966.

[49] : REDDY J.N. :"A simple higher ordre theory for laminated composite plates".
J. of Applied Mechanics , Vol. 51 , pp 745-751 - 1984.

[50] : REISSNER E. : "The effect of transverse deformation on the bending of elastic plates".
J. of Applied Mechanics , Vol. 12 - 1945.

[51] : RYCHTER Z. : "A six ordre plate theory".
J. of Applied Mechanics , Vol. 54 , pp 275-279 - 1984.

[52] : SPICKER R.L. , CHOU S.C : "Edge effects in symetric composite laminates: importance of satisfaying the traction-free-edge condition".
J. of Composite Materials , Vol. 14 , pp 2-20 - 1980.

[53] : TSAÏ S.W. , HAHN H.T. : "Introduction to composite materials".
Technomic Publishing Comp. - 1980.

[54] : VALID R. : "La théorie linéaire des coques et son application aux calculs anélastiques".
Thèse d'Etat Poitiers , Publ. ONERA , N° 147 - 1973.

[55] : VALID R. : "La mécanique des mélieux continus et le calcul des structures".
Ecole d'Eté d'Analyse Numérique , CEA , INRIA , EDF , ed. Eyrolles - 1977.

[56] : VAN DER HEIJDEN A. : "On modified boundary conditions for the free edges of a shell".
Thesis Technische Hogeschool Delft , Delft University Press - 1976.

[57] : VAN DER HEIJDEN : "On the influence of the free edges in plates and shells". Local effects in the analysis of structures , LADEVEZE , Elsevier Science - 1985.

[58] : WANG A.S.D. , CROSSMAN F.W. : "Some new results on edge effect in symetric composite laminates". J. of Composite Materials , Vol. 11 , pp 92-106 - 1977.

[59] : WANG S.S. , CHOI I. : "Boundary layer effects in composite laminates. Free edge stress solutions and basic characteristics". J. of Applied Mechanics ASME , vol. 49 , pp 541-550 - 1982.

[60] : WHITCOMB J.D & Al. : "Reliability of the finite element method for calculating free edge stresses in compositte laminates". J. Computers& Structures , Vol. 15 , N°1 , pp 33-37 - 1982.

[61] : YEH J.R. , TADJBAKHSH I.G. : "Stress singularity in composite laminates by finite element method". J. of Composite Materials , Vol. 20 , pp 347-364 - 1986.