



**HAL**  
open science

# Couplages hydromécaniques en milieu poreux non saturé avec changement de phase. Application au retrait de dessiccation

Thierry Lassabatère

► **To cite this version:**

Thierry Lassabatère. Couplages hydromécaniques en milieu poreux non saturé avec changement de phase. Application au retrait de dessiccation. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1994. Français. NNT: . tel-00523300

**HAL Id: tel-00523300**

**<https://pastel.hal.science/tel-00523300>**

Submitted on 4 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 19 078 (4)

X

*Thèse de doctorat  
de l'Ecole nationale des ponts et chaussées*

*section: structures et matériaux*

présentée par

**Thierry LASSABATÈRE**

pour l'obtention du titre de  
docteur de l'Ecole nationale des ponts et chaussées

**COUPLAGES HYDROMÉCANIQUES  
EN MILIEU POREUX NON SATURÉ  
AVEC CHANGEMENT DE PHASE  
APPLICATION AU RETRAIT DE DESSICCATION**

Thèse soutenue le 3 novembre 1994  
devant le jury composé de:

M. Denis AUBRY  
M. Bernard SCHREFLER

président et rapporteur  
rapporteur

Mme Odile OZANAM  
M. Paul ACKER  
M. Olivier COUSSY  
M. Luc DORMIEUX  
M. Henri VAN DAMME

examineur  
examineur  
examineur  
examineur  
examineur

15





## REMERCIEMENTS

Je voudrais en premier lieu témoigner ma reconnaissance à Monsieur Denis AUBRY, Professeur à l'École centrale de Paris, qui a bien voulu assurer la double fonction de président du jury et de rapporteur de mon travail de thèse. Qu'il en soit vivement remercié.

Les mêmes remerciements vont à Monsieur Bernard SCHREFLER, Professeur à l'Université de Padoue, pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à mon travail, notamment en acceptant d'assumer la tâche de rapporteur.

L'ensemble du jury est bien évidemment compris dans ces remerciements. Madame Odile OZANAM, ingénieur spécialiste chez Coyne et Bellier, a bien voulu lire le présent mémoire, avec une précision et une rigueur que j'ai énormément appréciées. Qu'elle en soit remerciée. Monsieur Paul ACKER, chef de la division BCOA<sup>1</sup> du LCPC<sup>2</sup> m'a toujours témoigné intérêt et sympathie: je voudrais lui dire combien son aide, ses nombreux renseignements et son immense gentillesse m'ont été précieux. Monsieur Luc DORMIEUX, ingénieur et chercheur au CERCSO, m'a également fait bénéficier de sa rigueur et de ses critiques toujours très constructives. Qu'il sache que sa caution scientifique m'est chère, autant que la sympathie qu'il m'a toujours témoignée. En fait de caution, Monsieur Henri VAN DAMME, Professeur à l'Université d'Orléans, a bien voulu apporter celle, si essentielle, du physicien. J'ai également été sensible à ses chaleureux encouragements. Qu'il trouve ici la marque de ma gratitude.

---

<sup>1</sup> Bétons et ciments pour les ouvrages d'art.

<sup>2</sup> Laboratoire central des ponts et chaussées.

Rien de ce travail n'aurait été possible sans le soutien, matériel et humain, de quelques institutions et de nombreuses personnes. Je voudrais en premier lieu remercier l'ENPC<sup>3</sup> d'avoir accepté et presque entièrement financé ce sujet. Je dois la même reconnaissance au LCPC, à la fois pour le financement des six derniers mois et pour l'encadrement idéal qu'il a su me procurer. Mes remerciements vont tout particulièrement à Monsieur Jean-François COSTE, directeur du LCPC, Monsieur Alain BONNET, directeur scientifique, qui a témoigné à plusieurs reprises de l'intérêt pour mon sujet de recherche, Madame Nicole TCHANG et Monsieur Dominique BURGUNDER.

Au sein du LCPC, j'ai fréquenté plusieurs équipes, dont j'ai toujours apprécié le chaleureux accueil. C'est en premier lieu à Monsieur Bernard HALPHEN, Professeur à l'ENPC et à l'Université de Marne-la-Vallée, ancien directeur du service de mécanique du LCPC, que je pense en écrivant ces lignes, ainsi qu'à tous les chercheurs de l'UMR 113<sup>4</sup> regroupés sous sa direction à Noisy-le-Grand, et qui m'ont témoigné une sympathie que je n'oublierai pas. C'est aussi à Monsieur Robert EYMARD, directeur du nouveau service de modélisation du LCPC, que s'adressent ces remerciements, ainsi qu'à tous les membres dudit service.

Je dois des remerciements plus particuliers aux personnes que j'ai côtoyées quotidiennement, membres de la section modèles mécaniques couplés, dont l'amitié m'a été d'un très précieux secours: Madame Mathilde AGBOTTON, Jean-Marc PICARD, Patrick DANGLA, Pierre NICOLAS. Je voudrais associer à ces remerciements tous les membres de la division BCOA du LCPC. Il serait trop long de les citer un à un, mais on ne peut bien évidemment passer sous silence le nom de Jean-Charles VINAMBRES, véritable âme de la division. Je voudrais aussi remercier nommément ceux dont les travaux ont servi de référence à mon étude, et les informations à ma réflexion: Véronique BAROGHELBOUNY, Laurent GRANGER, Jean-Michel TORRENTI, Franz ULM.

Il est des personnes extérieures au strict univers de ma thèse auxquelles je voudrais également dire ma reconnaissance. C'est le cas de Monsieur Jean-Claude BENET, Professeur à l'Université de Montpellier II, pour l'accueil bienveillant qu'il a réservé à mon travail, ainsi que toute son équipe du LMGC<sup>5</sup>. Je ne saurais non plus oublier que c'est Monsieur le Professeur Paul JOUANNA qui fut mon «initiateur», tant à la recherche qu'à la mécanique des milieux poreux, et voudrais lui dire à lui aussi un profond et sincère Merci. A lui de juger le profit que j'ai pu faire de ses enseignements et de ses conseils.

C'est pourtant à Olivier COUSSY que je dois la plus grande reconnaissance. Je voudrais lui dire combien j'ai apprécié sa disponibilité et son enthousiasme, pendant ces trois années de thèse qui, grâce à lui, furent avant tout des années de formation et de découverte. Tous ceux qui l'ont côtoyé et ont eu à travailler avec lui connaissent la richesse de son esprit et de sa sensibilité. Je ne peux donc que répéter ce que mes devanciers ont dit de lui, et souhaiter à tous les jeunes chercheurs qui débutent d'avoir la même chance que moi.

---

<sup>3</sup> Ecole nationale des ponts et chaussées.

<sup>4</sup> Unité mixte de recherche CNRS-LCPC-ENPC.

<sup>5</sup> Laboratoire de mécanique et de Génie civil.

## RÉSUMÉ

Ce travail cherche à élaborer un cadre théorique unifié et cohérent, fondé sur les principes rigoureux de la thermodynamique et permettant de modéliser une classe étendue de phénomènes physiques intervenant au sein des milieux poreux non saturés, ainsi que leur interaction avec l'état mécanique des structures. Cette classe est celle des phénomènes réactifs, parmi lesquels le changement de phase de l'eau interstitielle (dessiccation), modélisé dans l'ensemble ses manifestations (fluage, mais surtout retrait) sera abordé comme exemple particulier d'application.

Le premier chapitre rappelle les fondements de la description adoptée du milieu poreux, ainsi que le cadre thermodynamique qui sous-tend l'ensemble de la modélisation. Le chapitre II s'attache à la formulation — essentiellement nouvelle — et à l'identification d'une loi de comportement élastique non linéaire du milieu. Différents éléments de réflexion liés aux comportements microscopiques des constituants et à l'expérience, orientent le modèle vers certaines hypothèses fortes qui permettent la détermination complète et explicite de la loi de comportement macroscopique. Le chapitre III expose les différentes expériences à disposition pour l'identification de la loi de comportement, et permet d'intégrer ces expériences, en tant que caractéristiques comportementales, dans le modèle théorique. Chapitre IV et chapitre V sont des exemples d'application: le chapitre IV étudie le problème du retrait et du fluage de dessiccation en comportement couplé élastique linéaire; le chapitre V se limite au cas du retrait de dessiccation, par application du modèle poroélastique non linéaire complet. Les résultats obtenus présentent une bonne adéquation avec l'expérience.

### Mots clés

Dessiccation. Retrait de dessiccation.

Milieu poreux non saturé. Changement de phase. Poroélasticité non linéaire. Couplages hydromécaniques.

Pression capillaire. Humidité relative. Saturation. Courbe capillaire. Isothermes de sorption-désorption. Courbes d'invasion capillaire.

Surfaces d'état. Contrainte effective.



## ABSTRACT

The target of this research is to set up a unified and coherent working frame basing upon the rigorous principles of thermodynamics and making it possible to model a large class of physical phenomena acting in unsaturated porous media, as well as the related interactions with the mechanical state of the structures. This class corresponds to reactive phenomena among which one finds the phase change (desiccation) for which the whole of its subsequent actions (creep but essentially shrinkage) is modelled and which will be treated as a specific application example.

The first chapter recalls the bases of the adopted description of the porous medium as well as the global thermodynamical frame which underlays the whole modelling. Chapter II deals with the — mainly new — formulation and the identification of a non linear elastic constitutive law of the medium involved. Various reflexions elements related to the microscopic behaviours of the components and to experiments have orientated the model towards some more limitative hypotheses making it possible to have a complete and explicit determination of a law for the macroscopic behaviour. Chapter IV and V are examples of application: chapter IV studies the problem of shrinkage and creep in a coupled linear elastic behaviour. Chapter V is limited to the case of shrinkage treated by a numerical application of the whole non linear elastic model. The results obtained are in good agreement with the corresponding experiments.

### Keywords

Desiccation. Shrinkage.

Unsaturated porous media. Phase change. Non linear poroelasticity. Hydromechanical couplings.

Capillary pressure. Relative humidity. Saturation. Capillary curve. Sorption-desorption isotherms. Capillary invasion curves.

State surfaces. Effective stress.





# SOMMAIRE

REMERCIEMENTS

RÉSUMÉ

ABSTRACT

SOMMAIRE

1

CONVENTIONS

11

NOTATIONS

15

CHAPITRE INTRODUCTIF

21

<b>Chapitre I</b>	<b>27</b>
<b>DESCRIPTION ET PRINCIPES GÉNÉRAUX DE MODÉLISATION D'UN MILIEU POREUX NON SATURÉ</b>	
I.1. Description et cinématique d'un milieu poreux non saturé	28
I.1.1. Description d'un milieu poreux non saturé: échelle microscopique et échelle macroscopique	28
I.1.2. Cinématique du milieu poreux: description lagrangienne par rapport au squelette	28
I.1.3. Mouvements relatifs des fluides: notion de système ouvert	30
I.2. Equations de conservation; équations de conduction	32
I.2.1. Conservation de la masse	32
I.2.2. Equation d'équilibre du milieu	32
I.2.3. Les deux principes de la thermodynamique	33
I.2.4. Conduction de la chaleur: loi de Fourier	34
I.2.5. Conduction des constituants fluides: lois de Darcy et de Fick	34

<b>Chapitre II</b>	<b>37</b>
<b>II. LOI DE COMPORTEMENT D'UN MILIEU POREUX NON SATURÉ: LE MODÈLE ÉLASTIQUE NON LINÉAIRE</b>	
II.1. Formulation thermodynamique des relations d'état.	38
II.1.1. Thermodynamique macroscopique en milieu poreux non saturé réactif	38
II.1.2. Variables d'état macroscopiques et microscopiques: les pressions partielles	40
II.2. La loi de comportement	44
II.2.1. La loi de comportement élastique linéaire isotrope	44
II.2.2. La loi de comportement élastique non linéaire isotrope	46
II.2.3. Relations de Maxwell sur les dérivées croisées	48
II.3. Identification de la loi de comportement élastique non linéaire	50
II.3.1. Relations d'homogénéisation	51
II.3.1.1. <i>Lois d'état microscopiques</i>	51
II.3.1.2. <i>Cas de constituants disjoints</i>	53
II.3.1.3. <i>Cas d'un milieu interstitiel contenant un mélange</i>	55
II.3.1.4. <i>Cas d'un mélange de deux gaz en présence d'une phase liquide</i>	58
II.3.2. La méthode d'identification expérimentale	59
II.3.2.1. <i>Données expérimentales: expériences de sorption-désorption et d'invasion capillaire</i>	60
II.3.2.2. <i>Grandeurs expérimentales: humidité relative, pression capillaire, saturation; leur introduction dans le modèle par confrontation théorie-expérience</i>	61

II.3.2.3. <i>Confrontation modèle-expérience: les hypothèses retenues</i>	64
II.3.3. <i>Contrainte effective en milieu poreux non saturé. Surfaces d'état</i>	71
II.3.4. <i>La courbe capillaire: argumentation et allure théorique</i>	75
II.3.5. <i>Vitesse des ondes acoustiques en milieu séchant</i>	78
II.3.6. <i>Expression des coefficients de la loi de comportement macroscopique</i>	81
II.4. <i>Conclusion</i>	83
II.4.1. <i>Récapitulation et discussion des choix comportementaux de modélisation.</i>	83
II.4.2. <i>Evaluation qualitative: un exemple simple</i>	84
<b>Chapitre III</b>	<b>89</b>
<b>IDENTIFICATION EXPÉRIMENTALE DU MODÈLE POROÉLASTIQUE NON LINÉAIRE GRÂCE AUX COURBES DE SORPTION-DÉSORPTION ET D'INVASION CAPILLAIRE</b>	
III.1. <i>Présentation des expériences de sorption-désorption et d'invasion capillaire</i>	90
III.1.1. <i>L'expérience de sorption-désorption</i>	90
III.1.2. <i>L'expérience d'invasion capillaire</i>	92
III.1.3. <i>Complémentarité et limites des expériences de sorption-désorption et d'invasion capillaire</i>	93
III.2. <i>Grandeurs expérimentales et variables d'état du modèle macroscopique</i>	93
III.2.1. <i>Perte en poids et saturation</i>	93
III.2.2. <i>Validité et limites des hypothèses simplificatrices du dépouillement expérimental</i>	95

III.3. Sorption-désorption d'un milieu poreux	97
III.3.1. Ecriture des conditions de changement de phase	97
III.3.2. Equation de Kelvin	99
III.3.3. Les conditions particulières de l'expérience de sorption-désorption	100
III.4. Identification expérimentale du modèle poroélastique non linéaire	101
III.4.1. Insertion de l'isotherme de sorption-désorption dans le modèle	101
III.4.2. Evaluation et discussion des approximations expérimentales	103

## Chapitre IV 105

### APPLICATION DU MODÈLE POROÉLASTIQUE LINÉAIRE AU RETRAIT ET AU FLUAGE DE DESSICCATION D'UN MUR INFINI

IV.1. Description du problème	106
IV.1.1. Géométrie, conditions aux limites et conditions initiales	106
IV.1.2. Le comportement poroélastique linéaire	108
IV.1.3. La courbe expérimentale de sorption-désorption	109
IV.1.4. La liaison d'équilibre thermodynamique entre variables d'état	110
IV.1.5. Les lois d'écoulement	111
IV.2. Résolution du problème	111
IV.2.1. Equation d'équilibre	112
IV.2.2. Perturbation instantanée: l'état du système en $t=0^+$	113
IV.2.3. Détermination de l'ensemble des grandeurs physiques en fonction des variables d'état $\epsilon$ et $m_1$ , pour $t \geq 0^+$	114

IV.2.4. Equations de diffusion et conservation de la masse: le système différentiel	115
IV.2.5. Résolution mathématique: recherche d'une base de solutions	117
IV.2.6. Vérification des conditions du problème et détermination des coefficients inconnus	118
IV.2.7. Valeurs propres, modes propres et temps caractéristiques	123
IV.2.8. Séchage et fluage: réponse générale à des sollicitations couplées.	125
IV.3. Analyse physique du modèle et confrontation à l'expérience	130
IV.3.1. Compatibilité avec l'expérience de sorption-désorption: modes propres et phénomènes diffusifs	131
IV.3.2. Compatibilité avec l'expérience de sorption-désorption: les amplitudes	134
IV.3.3. Coefficient de diffusion et temps caractéristique de sorption-désorption.	136
IV.3.4. Ordre de grandeur du retrait de dessiccation et des contraintes internes	138
IV.3.5. Courbes de séchage dans l'épaisseur du mur à divers instants	139

## Chapitre V 143

### SIMULATION NUMÉRIQUE DU RETRAIT DE DESSICCATION D'UN MUR INFINI: APPLICATION DU MODÈLE POROÉLASTIQUE NON LINÉAIRE

V.1. Position du problème et écriture de l'équation de diffusion non linéaire	144
V.1.1. Géométrie, conditions aux limites et conditions initiales	144
V.1.2. Loi de comportement poroélastique non linéaire	145

V.1.3. Conditions de changement de phase et de sorption-désorption	146
V.1.4. Equilibre mécanique	147
V.1.5. Conservation de la masse et conduction de l'eau: l'équation de diffusion	147
V.1.6. Paramètres de la diffusion	150
<b>V.2. Formulation discrète et résolution numérique du problème</b>	<b>151</b>
V.2.1. Discrétisation de l'équation de diffusion	151
V.2.2. Méthode d'intégration numérique des coefficients non linéaires	153
V.2.3. Le processus algorithmique	156
<b>V.3. Résultat des simulations numériques</b>	<b>157</b>
V.3.1. Séchage et imbibition d'une pâte de ciment (PWT)	158
<i>V.3.1.1. Caractéristiques et données expérimentales de la simulation</i>	158
<i>V.3.1.2. Phase de séchage non linéaire: pressions interstitielles et retrait</i>	158
<i>V.3.1.3. Comparaison entre modèles linéaire et non linéaire</i>	160
<i>V.3.1.4. Chemin inverse: l'imbibition</i>	162
<i>V.3.1.5. Prise en compte d'un suintement de l'eau liquide</i>	162
<i>V.3.1.6. Cycles d'humidité relative</i>	168
V.3.2. Séchage d'une pâte de ciment (CO) et d'un béton (BO) ordinaires	176
<i>V.3.2.1. Isothermes de sorption-désorption</i>	176
<i>V.3.2.2. Résultats numériques et résultats expérimentaux</i>	177
<i>V.3.2.3. Courbes de retrait fonction de l'humidité: théorie et expérience</i>	181



CONCLUSION	185
ANNEXES	189
Annexe I	
FORMULATION EXACTE DES RELATIONS DE COMPATIBILITÉ MICRO-MACRO	191
AI.1. Cas de constituants disjoints	192
AI.2. Cas d'un mélange	192
Annexe II	
DÉMONSTRATION DU PASSAGE ENTRE LES RELATIONS SUR M ET LES RELATIONS SUR $N=M^{-1}$	195
AII.1. Cas de constituants disjoints	195
AII.2. Cas de la présence d'un mélange	196
Annexe III	
ÉNERGIE LIBRE ET LOI DE COMPORTEMENT NON LINÉAIRE ISOTROPE	197
Annexe IV	
DONNÉES EXPÉRIMENTALES DES SIMULATIONS NUMÉRIQUES ET DES EXEMPLES ANALYTIQUES	201
AIV.1. Principe de détermination des caractéristiques à partir des données expérimentales	201
AIV.2. Données relatives à la pâte de ciment PWT	204

AIV.3. Données relatives à la pâte de ciment CO (Baroghel-Bouny)	206
AIV.3. Données relatives au béton BO (Baroghel-Bouny)	208
Annexe V	
<b>RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX</b> (dans les sources bibliographiques)	211
AV.1. Profils de répartition d'eau	211
AV.1.1. Séchage du gel d'Agar (I. Mrani)	211
AV.1.2. Séchage de pâtes de ciment et de bétons ordinaires et à très hautes performances (V. Baroghel-Bouny)	212
AV.2. Valeurs du retrait de dessiccation de pâtes de ciment et de bétons ordinaires et à très hautes performances (V. Baroghel-Bouny)	212
AV.3. Vitesse des ondes acoustiques en milieu séchant (T. Cadoret)	212
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	217



## CONVENTIONS

Dans l'ensemble de ce rapport, on adoptera les conventions suivantes sur les indices répétés.

Les indices muets sont exclusivement représentés, dans ce mémoire, par les minuscules latines  $i$  et  $j$ , les majuscules latines  $I$  et  $J$  ainsi que les minuscules grecques  $\alpha$  et  $\beta$ . Tous indices autres que ces 6 lettres déterminées sont exclus des conventions qui suivent.

Lorsque, dans un produit, un indice muet est répété (deux ou plusieurs occurrences), deux cas se présentent:

- **1<sup>er</sup> cas:** aucun indice n'apparaît au bas du numéro de formule: on adopte dans ce cas la convention de sommation sur l'indice répété — c'est-à-dire qu'il faut comprendre «somme sur l'indice (...)».

Exemple:

$$(II.2) \quad \sigma: \dot{\epsilon} + g_i \dot{m}_i - S\dot{T} - \dot{\Psi} \geq 0$$

qu'il faut interpréter ainsi:

$$(II.2) \quad \sigma: \dot{\epsilon} + \sum_i g_i \dot{m}_i - S\dot{T} - \dot{\Psi} \geq 0$$

De même dans le cas de plusieurs indices répétés:

$$(II.3) \quad (g_i - g_j) m_{i \rightarrow j}^0 \geq 0$$

doit se comprendre:

$$(II.3) \quad \sum_{i,j} (g_i - g_j) m_{i \rightarrow j}^0 \geq 0$$

- 2<sup>ème</sup> cas: l'indice apparaît au bas du numéro de la formule: il faut comprendre que la formule est valable séparément pour chaque constituant que l'indice est censé pouvoir représenter, la notation ayant alors le sens de «quel que soit le constituant (...)».

Exemple:

$$(II.35)_i \quad \frac{dp_i}{\rho_i} = \frac{dp_i}{K_i}$$

La relation est valable pour tout constituant représenté par l'indice muet (i), et il n'y a évidemment pas sommation sur (i). La convention plaçant l'indice en bas de formule prenant la valeur de «quel que soit» ( $\forall$ ), il faut donc lire:

$$(II.35) \quad \forall i \quad \frac{dp_i}{\rho_i} = \frac{dp_i}{K_i}$$

De la sorte, certaines conditions logiques peuvent apparaître sous forme condensée en bas de formule, avec la même valeur de «quel que soit» ( $\forall$ ); par exemple les relations:

$$(II.52)_{I,\alpha} \quad N_{\alpha I} = N_I \quad \text{dépendant du constituant (I) extérieur au mélange, mais pas de } \alpha$$

$$(II.53)_{\alpha \neq \beta} \quad N_{\alpha\beta} = N_g \quad \text{indépendant de } \alpha \text{ et } \beta$$

qu'il faut comprendre respectivement:

$$(II.52) \quad \forall I, \forall \alpha \quad N_{\alpha I} = N_I \quad \text{dépendant du constituant (I) extérieur au mélange, mais pas de } \alpha$$

$$(II.53) \quad \forall \alpha, \forall \beta \neq \alpha \quad N_{\alpha\beta} = N_g \quad \text{indépendant de } \alpha \text{ et } \beta$$

Certains cas peuvent, bien entendu, se présenter où il y a sommation sur un indice (ne figurant pas en bas du numéro de formule) et pas sur l'autre (figurant en bas du numéro de formule). Ainsi, par exemple, la relation:

$$(II.48)_j \quad \left( \frac{b_i - \phi_i}{K_s} + \frac{\phi_i}{K_i} \right) M_{ij} = 1$$

doit-elle être lue comme suit:

$$(II.48) \quad \forall j \quad \sum_i \left( \frac{b_i - \phi_i}{K_s} + \frac{\phi_i}{K_i} \right) M_{ij} = 1$$

Les (rares) relations ne faisant pas l'objet d'une numérotation sont laissées à l'appréciation du lecteur. Généralement, le sens suffit à lever toute ambiguïté.



## TABLE DES NOTATIONS

La liste qui suit répertorie l'ensemble des notations utilisées dans le mémoire, le nom de la notion correspondante et, colonne de droite, le numéro du paragraphe de son introduction et de sa définition.

### Lettres latines

$a(p_v)$	noyau de la matrice [A] du système de diffusion linéaire discrétisé	V.2.1
$b(p_v)$	noyau de la matrice [B] du système de diffusion linéaire discrétisé	V.2.1
$b_a$	coefficient de Biot de l'air	II.3.1.4
$b_g$	coefficient de Biot du mélange	II.3.1.4
$B_i$	tenseur de Biot du constituant (i)	II.2.1
$b_i$	coefficient de Biot du constituant (i)	II.2.1
$b_l$	coefficient de Biot du liquide	II.3.1.4
$b_v$	coefficient de Biot de la vapeur	II.3.1.4
C	matrice d'élasticité non drainée du milieu poreux	II.2.1
C	teneur en eau liquide	V.1.6



$C_0$	matrice d'élasticité drainée du milieu poreux	II.2.1
$C_i$	concentration volumique du constituant (i) dans un mélange	I.2.3
$C_{i, i=1,2}$	valeurs propres de la matrice de diffusion	IV.2.5
$C_v$	concentration volumique de la vapeur dans le mélange (air+vapeur)	II.4 IV.1.1
$C_v^0$	concentration initiale de la vapeur dans le mélange (air+vapeur)	IV.2.4
$D$	coefficient global de diffusion	II.4
$E_i/M_i$ , $i=1,2$	rapport (constant) des amplitudes spectrales de $\varepsilon$ et $m_i$	IV.2.5
$E_i^n$ , $i=1,2$	amplitude de la décomposition spectrale de la déformation $\varepsilon$	IV.2.5
$g_i$	enthalpie massique du constituant (i)	I.2.3
$h$	humidité relative	II.3.2.2
$h_0$	humidité relative initiale d'un domaine matériel étudié	IV.1.1
$h_e$	humidité relative imposée aux limites d'un domaine matériel étudié	III.1.1 IV.1.1
$h^{sd}$	humidité relative sur la courbe de sorption-désorption	III.3.3
$J$	jacobien de la transformation	I.1.2
$K$	module d'incompressibilité non drainé du milieu poreux	II.2.1
$K_+$	module d'incompressibilité instantané	IV.2.2
$K_0$	module d'incompressibilité drainé du milieu poreux	II.2.1
$k_g$	perméabilité du milieu poreux au mélange gazeux	IV.1.5
$K_i$	module d'incompressibilité du constituant (i)	II.3.1.1
$k_{ij}$	tenseur de perméabilités	I.2.5
$k_l$	perméabilité du milieu poreux à la phase liquide	V.1.5
$K_s$	module d'incompressibilité de la matrice solide	II.3.1.1
$L$	distance de drainage / largeur du mur	IV.1.1
$M$	module capillaire	II.3.2.2
$M_+$	module de variation de masse instantané	IV.2.2

$m^0_{\rightarrow i}$	taux temporel d'augmentation de masse du constituant (i) par réaction chimique ou changement de phase	I.2.1
$m^0_{i\rightarrow j}$	taux temporel d'échange massique entre constituants (i) et (j) (compté positivement pour un échange de (i) vers (j)) par réaction chimique ou changement de phase	I.2.3
$M=(M_{ij})$	matrice des modules de Biot	II.2.1
$M_i$	vecteur courant de masse fluide du constituant (i)	I.2.1
$m_i$	variation de masse du constituant intersitiel (i)	I.1.3
$M_i^n$ , $i=1,2$	amplitude de la décomposition spectrale de la variation de masse liquide $m_i$	IV.2.5
$n$	nombre d'éléments finis de la discrétisation 1D	V.2.1
$n$	nombre de constituants interstitiels	II.3.1.2 II.3.1.3
$N=(N_{ij})$	inverse de la matrice $M$ des modules de Biot	II.3.1.2
$n_g$	nombre de constituants du mélange gazeux	II.3.1.3
$n_g$	nombre de points de la méthode d'intégration de Gauss	V.2.2
$N_i(x)$	fonction de forme de la discrétisation par éléments finis	V.2.1
$P$	gradient de la transformation	I.1.2
$P(\Delta P)$	«poids» («perte en poids») de l'éprouvette de référence	III.2.1
$P_{atm}$	pression atmosphérique ambiante	II.4
$P_c$	pression capillaire	II.3.2.2
$p_c'^0$	valeur de la pente initiale de la courbe capillaire $p_c=p_c(S_l)$	IV.1.3
$p_c^0$	valeur initiale de la courbe capillaire $p_c=p_c(S_l)$	IV.1.3
$P_g$	pression totale du mélange gazeux	II.3.2.2
$P_i$	pression partielle du constituant (i)	II.1.2
$p_i(t)$	pression partielle de la vapeur au noeud (i) de discrétisation par éléments finis	V.2.1
$p_i^0$	pression partielle initiale du constituant (i)	II.2.1
$P_l(\Delta P_l)$	«poids» («perte en poids») d'eau liquide de l'éprouvette de référence	III.2.1
$p_{vs}^0$	pression de vapeur saturante en «conditions standard»	II.3.2.2
$q$	vecteur courant de chaleur	I.2.3

R	constante universelle des gaz parfaits	III.1.1
S	entropie volumique du milieu poreux	I.2.3
$s_i$	entropie massique du constituant (i)	I.2.3
$S_l$	saturation en liquide	II.3.2.2
T	température du milieu poreux	I.2.3
$\mathbf{T}$	vecteur des contraintes totales	I.2.2
$\mathbf{V}$	vitesse du squelette dans un repère fixe	I.1.3
$\mathbf{V}_i$	vitesse du constituant (i) dans un repère fixe	I.1.3
$\mathbf{V}_i^r$	vitesse relative du constituant (i) par rapport au squelette	I.1.3
$\mathbf{X}$	vecteur position initial	I.1.2
$\mathbf{x}$	vecteur position actuel	I.1.2
[A]	matrice du système de diffusion linéaire discrétisé	V.2.1
[B]	matrice du système de diffusion linéaire discrétisé	V.2.1
[C]	matrice de diffusion diagonalisée	IV.2.4
[D]	matrice de diffusion	IV.2.4

### Lettres grecques

$\alpha_g$	coefficients aux points d'intégration par la méthode de Gauss	V.2.2
$\epsilon$	déformation volumique moyenne	II.2.1
$\mathbf{e}$	tenseur des déformations linéarisé	I.1.2
$\epsilon_s$	déformation volumique moyenne de la matrice solide	II.3.1.1
$\phi$	porosité du matériau	II.3.1.1
$\phi_0$	porosité initiale du matériau	II.3.1.1
$\Phi_1$	dissipation intrinsèque volumique	I.2.3
$\Phi_2$	dissipation thermique volumique	I.2.3
$\Phi_3$	dissipation volumique par transport de masse fluide	I.2.3
$\Phi_{\rightarrow}$	dissipation volumique par réaction chimique	I.2.3

$\phi_g$	fraction volumique du mélange gazeux	II.3.1.4
$\phi_i$	fraction volumique du constituant interstitiel (i)	I.1.3
$\phi_i^0$	fraction volumique initiale du constituant interstitiel (i)	I.1.3
$\lambda$	coefficient de Lamé non drainé	IV.2
$\lambda_0$	coefficient de Lamé drainé	IV.2.3
$\mu$	module de cisaillement du milieu poreux	II.2.2 II.3.1.4
$\rho_i$	masse volumique du constituant interstitiel (i)	I.1.3
$\rho_i^0$	masse volumique initiale du constituant interstitiel (i)	I.1.3
$\sigma$	contrainte volumique moyenne	II.2.1
$\sigma$	tenseur de Cauchy des contraintes totales	I.2.2
$\sigma^0$	tenseur de Cauchy initial des contraintes totales	II.2.1
$\sigma'$	contrainte effective volumique moyenne	II.3.3
$\sigma_s$	contrainte volumique moyenne de la matrice solide	II.3.1.1
$\tau$	temps caractéristique de diffusion	II.4 IV.5.7
$\xi$	vecteur déplacement	I.1.2
$\xi_g$	abscisses des points d'intégration de Gauss	V.2.2
$\Psi$	énergie libre volumique du milieu poreux	I.2.3

### Autres symboles

$\mathcal{F}$	coefficient de Fick de la diffusion de la vapeur dans le mélange (air+vapeur)	II.4 II.1.5
$\mathcal{F}_i$	tenseur de Fick de la diffusion du constituant (i) dans le mélange	I.2.5
$\mathcal{k}$	tenseur de conductivité thermique	I.2.4
$\mathcal{M}_v$	masse molaire de la vapeur	III.1
$\omega$	charge mécanique appliquée aux parois du mur infini	IV.1.1



## CHAPITRE INTRODUCTIF

«DESSICATIF, IVE adjectif et nom masculin est emprunté (1314) au bas latin *dessicativus* «propre à se dessécher», dérivé du supin (*dessicatum*) de *dessicare* «dessécher», de *de* (—>de) et *sicare* (—>sécher).

Le mot a été introduit en médecine, qualifiant en particulier une eau, un onguent ayant la propriété de dessécher une plaie (Paré). Il est passé en peinture à propos d'une huile que l'on emploie avec les couleurs pour les faire sécher plus rapidement (1694). Il est substantivé au masculin pour désigner une substance ayant la propriété de dessécher (1754).

Le nom correspondant, DESSICCATION n. f., est emprunté au XIV<sup>e</sup> siècle (*dessicacion*) au dérivé bas latin *dessicatio* «action de dessécher». Le mot, repris lui aussi par les médecins, sert ensuite de synonyme technique à *dessèchement* en chimie, agriculture, industrie agro-alimentaire; Rousseau l'emploie en herboristerie<sup>1</sup>.

Rien, sans doute, autant que l'histoire des mots ne permet de découvrir le sens profond des concepts, la variété de leurs nuances ou de leurs emplois. Ainsi découvre-t-on la longue pérennité du terme dessiccation, ainsi que la vaste étendue de son champ d'application. Signe que, tôt déjà dans l'histoire des mots, la dessiccation était identifiée comme phénomène physique fondamental, s'appliquant aux objets les plus divers de la Création et aux domaines de l'activité humaine les plus éloignés les uns des autres.

Un phénomène: «dessiccation», ou encore «séchage», «action de se dessécher», c'est-à-dire de «devenir sec»<sup>2</sup>: «sans humidité»<sup>3</sup> — l'«humidité» étant l'«état de ce qui est humide»<sup>4</sup>, à savoir «chargé d'eau ou de vapeur»<sup>5</sup>.

---

<sup>1</sup> Dictionnaire historique de la langue française, éd. A. Rey, Robert, 1993.

<sup>2</sup> Larousse de poche, 1990, définition du verbe *se dessécher*.

<sup>3</sup> *Ibid.*, définition du mot *sec*.

<sup>4</sup> *Ibid.*, définition du mot *humidité*.

<sup>5</sup> *Ibid.*, définition du mot *humide*.

Au terme de cette pérégrination sémantique, il est ainsi possible d'entrevoir ce phénomène physique que le vocabulaire (relativement) courant place sous les termes de «dessiccation» ou de «séchage»: une évaporation et un départ de l'eau interstitielle contenue dans certains matériaux poreux ou certaines substances hydratées.

Ainsi la vie courante est-elle peuplée d'expériences de dessiccation, quotidiennes et anodines, qui sont autant d'occasions de constater par la pratique que le séchage des matériaux s'accompagne généralement d'un phénomène de retrait — une déformation provoquée par l'évaporation et le départ de l'eau interstitielle: le linge qui rétrécit (peut-être bien moins au lavage qu'au séchage!), l'éponge qui se rabougrit en séchant, sont autant d'exemples simples et familiers du phénomène de retrait consécutif à la dessiccation des matériaux.

Dans le domaine du génie civil, bien que moins triviaux, les exemples ne manquent pas non plus, qui illustrent ce couplage de l'état thermodynamique des fluides interstitiels avec l'état mécanique de la structure globale. On peut penser, en premier lieu, au problème de la dessiccation des structures en béton qui s'accompagne de phénomènes expérimentalement bien connus de retrait ou — lorsque le retrait est empêché — de contraintes internes pouvant engendrer une importante fissuration<sup>6</sup>. Le même phénomène, exactement, se retrouve dans le domaine des sols et des routes, avec l'apparition de craquèlements consécutifs à un séchage trop important. C'est dire l'importance industrielle et pratique, notamment en termes de sécurité, d'une modélisation précise des interactions hydro-mécaniques et d'une prédiction fiable du retrait — ou des contraintes — consécutif au phénomène de dessiccation.

Aussi le problème de la dessiccation a-t-il déjà fait l'objet de nombreuses études dans le domaine du génie civil. Pourtant, comme si l'on privilégiait les domaines d'application du terme plutôt que son concept — le phénomène unique qu'il désigne —, ces études adoptent des approches variées, souvent très différentes, souvent aussi très «particularistes» (nombre d'entre elles n'étudient pas tant le phénomène pour lui-même que son application à un matériau particulier). L'étude des matériaux semble souvent, dans les faits, précéder celle des phénomènes.

En génie civil, les études des transferts d'eau interstitielle dans les matériaux se répartissent essentiellement entre les deux domaines déjà évoqués: sols d'un côté, bétons et matériaux de construction de l'autre. Et il est assez symptomatique de la prééminence accordée au matériau sur le phénomène que les voies d'approche, dans l'un et l'autre cas, soient sensiblement différentes — les mécaniciens des sols adoptant davantage un point de vue mécanique et macroscopique, tandis que les spécialistes du béton s'intéressent en priorité aux phénomènes physico-chimiques microscopiques et aux seuls problèmes de transfert hydrique: comme si la culture scientifique était, en génie civil, une «culture des matériaux» avant tout.

En mécanique des sols, où le couplage entre fluides interstitiels et matériau solide est essentiellement appréhendé sous son aspect mécanique (déformations, partition des contraintes), la modélisation des sols non saturés s'est énormément concentrée autour du débat sur la contrainte effective. Notion introduite par Terzaghi — repris par Bishop (1959) — pour des sols saturés, mais au prix de certaines hypothèses de comportement microscopique (matrice solide incompressible), et que nombre d'auteurs ont cherché, par tâtonnements successifs, à adapter au cas plus général des sols non saturés: ainsi Bishop & Blight (1963) ont-ils repris ce concept de manière analogue à Terzaghi en sols saturés, moyennant une certaine pondération des termes de pression en fonction de la saturation en liquide. Des travaux ultérieurs, comme ceux de Matyas & Radhakrishna (1968), ont

---

<sup>6</sup> Cf. P. Acker (1988).

corrigé et relativisé en partie le concept de «contrainte effective», introduisant préférentiellement la notion de surfaces d'état: la plupart des auteurs récemment intervenus dans le débat reprennent cette position: c'est le cas, en particulier, de Fredlund (1977), (1978), (1979), de LLoret & Alonso (1980), d'Alonso, Gens & Josa (1990), etc.

Dans le domaine des bétons, deux grandes familles de travaux sont à distinguer. La première favorise une caractérisation phénoménologique et expérimentale du comportement des matériaux et des effets de structure liés aux problèmes de diffusion et de fissuration. Le rapport de recherche écrit par P. Acker (1988) — tiré de sa thèse, repris et complété dans Acker (1991) — constitue sans doute le plus complet des recensements de tous les phénomènes comportementaux propres au béton et de leur analyse physico-chimique. C'est là, pour tout modélisateur du matériau béton, une base essentielle de départ qui permet de dégager les processus physiques microscopiques responsables des comportements macroscopiques observés. Pour ce qui concerne la caractérisation expérimentale des comportements, on pourra consulter avec le plus grand profit les thèses de J.M. Torrenti (1987) — pour les pâtes de ciment — et V. Baroghel-Bouny (1994) — pâtes de ciment et bétons. La caractérisation de la diffusion dans les bétons et matériaux de construction du même genre doit énormément à Bazant (avec Kim & Panula, 1991), qui est le premier à véritablement introduire une approche mécanique dans l'étude de tels matériaux (Bazant & Chen (1985), Bazant (1993)). Mensi, Acker & Attolou (1988) proposent pour leur part une loi phénoménologique de certains coefficients de diffusion.

En ce qui concerne les problèmes de transport et de diffusion, il est une approche assez cohérente et fructueuse qu'il convient de signaler: celle qui, sous le nom de «théorie des réseaux», s'attache à modéliser les phénomènes essentiels (changements de phase, équilibres des interfaces liquide-vapeur et capillarité, lois de transfert microscopiques de Poiseuille, etc.) à l'échelle des pores; puis, en supposant une géométrie de pores particulière, à transcrire les lois microscopiques en fonction de variables et de caractéristiques macroscopiques. A cet effet, différentes méthodes mathématiques sont employées, qui font généralement appel, à un titre ou un autre, à des considérations probabilistes: c'est à ce niveau qu'intervient la «théorie de la percolation», dont le développement doit beaucoup, en France, aux travaux de R. Lenormand<sup>7</sup>. Sous l'impulsion de J.F. Daïan (avec Mérouani, 1988; 1992) et de J. Saliba (1990), cette théorie de la percolation a été appliquée avec bonheur aux problèmes de transferts hydriques en milieu poreux, moyennant l'hypothèse limitatrice d'une géométrie particulière du réseau poreux — pores cylindriques ou sphériques, à rayons déterminés selon une distribution connue (en général par voie expérimentale).

Dans cet inventaire de travaux attachés à la modélisation des transferts hydriques en milieux poreux, il convient de citer la thèse de P. Nicolas (1992) ou encore les travaux de J.C. Benet (1981; avec Jouanna, 1982). L'un et l'autre de ces auteurs adoptent un point de vue cependant sensiblement différent de celui des «théories de réseaux» dans la mesure où ils considèrent les milieux poreux en général — et non tel ou tel matériau particulier —, dans la mesure surtout où ils adoptent, pour décrire et modéliser de tels milieux, une vision «mélange» et «milieu continu». Cependant, dans les deux cas, c'est bien sur les phénomènes de transport hydrique que se concentre l'investigation — alors que, pour sa part, l'état purement mécanique est plus ou moins passé sous silence, le milieu étant du reste supposé indéformable (Benet, 1981). Quoi qu'il en soit, une somme intéressante de ce que la littérature du genre recèle peut être trouvée dans l'ouvrage synthétique de Bear & Bachmat (1990).

---

<sup>7</sup> Cf. par exemple Guyon, Hulin & Lenormand (1984).



Pour éclairantes et productives qu'elles soient, ces dernières approches ne permettent pas directement d'atteindre l'état purement mécanique des milieux qu'elles étudient et délaissent les problèmes de couplages hydro-mécaniques entre phénomènes hydriques (pressions interstitielles, humidité) et phénomènes mécaniques (contraintes, déformations). L'intérêt d'un modèle couplé est précisément qu'il permet de prendre en compte les interactions de l'état des fluides interstitiels et de l'état mécanique global de la structure: ainsi, le retrait engendré par la seule dessiccation et par son couplage avec les grandeurs mécaniques. A cet égard, les travaux les plus notables qui permettent de représenter de tels couplages et de telles influences réciproques entre thermodynamique des fluides interstitiels sont sans aucun doute ceux qu'a réalisés, à Padoue, l'équipe du Professeur B. Schrefler (1990; avec Lewis *et alii*, 1986, 1989; avec Simoni, 1987, 1988; *et alii*, 1989, 1993). A l'intersection de la mécanique des sols et de la théorie des mélanges, ces auteurs ont mis au point un modèle très complet et très abouti de milieu poreux contenant une phase liquide et une phase gazeuse, toutes deux soumises à des lois de diffusion classique; ce modèle permet la prédiction des modifications de l'état mécanique consécutif à la diffusion du gaz ou du liquide interstitiel; de plus, la possibilité d'un changement de phase eau-vapeur a récemment été introduite dans leur modèle.

Le cadre de modélisation ici adopté s'inscrit en partie dans le prolongement des derniers travaux cités: une vision du milieu poreux comme milieu continu, avec représentation de couplages hydromécaniques. Mais dans sa plus grande généralité: même s'il est principalement visé, le phénomène de dessiccation n'est pas le seul qui puisse s'insérer dans l'approche adoptée; par ailleurs, la prise en compte d'un nombre indéterminé de fluides autorise la plus grande généralité et permet d'envisager nombre d'applications industrielles diverses.

Le milieu modélisé, en outre, n'est plus vu comme mélange: description et cinématique retenues, formulation des lois constitutives, directement et essentiellement macroscopique, sont autant de partis-pris caractéristiques d'une modélisation privilégiant le squelette (*ie.* le matériau vidé de son contenu interstitiel) et son état mécanique — contraintes, déformations, véritable enjeu d'ingénieur.

Car l'objectif est bien celui-là: offrir à l'ingénieur un outil cohérent et efficace de prédiction, dont les principes théoriques soient clairement identifiés, clairement reliés à des phénomènes physiques connus et maîtrisés.

Certes, il ne manque pas de «lois» phénoménologiques ou de règles empiriques en tous genres pour satisfaire les nécessités des calculs et prédictions de structures. Il n'est que de citer la règle de proportionnalité usuelle par laquelle on estime, à variation hygrométrique  $\Delta h$  donnée, le retrait de dessiccation  $\epsilon_{séch.}$  d'un béton ou d'une pâte de ciment:

$$\epsilon_{séch.} = k \Delta h$$

Quelle que soit ses mérites pratiques, une telle relation ne constitue pas en soi un modèle de comportement. D'abord parce que, purement empirique, elle ne s'inscrit dans aucun cadre de modélisation unifié: elle est «postulée» *ex nihilo* et découplée de toutes les autres équations du milieu (notamment l'équation de diffusion). En outre, cette règle ne correspond en aucun cas à une loi de comportement: elle n'est en effet valable que dans le seul cas du séchage du matériau, n'est absolument pas une relation intrinsèque au milieu et résulte en réalité, comme le montrera le paragraphe conclusif du chapitre V, de la combinaison d'une loi de comportement non linéaire avec la relation de Kelvin<sup>8</sup> traduisant

<sup>8</sup> Elle-même non linéaire, les non-linéarités de la loi de comportement et de la relation de Kelvin se

l'équilibre du changement de phase liquide-vapeur. Les débats sur l'argumentation intrinsèque de cette relation sont, en eux-mêmes, tout à fait révélateurs de la confusion: on hésite en effet, pour cette proportionnalité avec le retrait, entre humidité et teneur en eau  $P$ . Et si l'expérience ne permet pas de discriminer l'une de ces deux options au profit de l'autre, c'est tout simplement parce que teneur en eau et humidité sont en relation biunivoque au cours d'une expérience de séchage: par suite, un simple changement de variable (au sens purement mathématique) suffit à passer d'une proportionnalité  $(\varepsilon, \Delta h)$  à une proportionnalité  $(\varepsilon, \Delta P)$ <sup>9</sup>. Mais c'est là, en fait, un faux débat: aucune de ces deux relations n'est plus intrinsèque que l'autre; aucune n'est une loi de comportement du matériau.

Et la question de l'identification véritable de la loi intrinsèque du matériau et de l'argumentation en fonction des variables d'état pertinentes ne doit pas être réduite à un simple état d'âme de puriste sourcilieux. Elle est au contraire au centre de toute modélisation du comportement général du matériau soumis au phénomène général de dessiccation: que devient la relation empirique précédente lorsqu'un chargement mécanique est appliqué? la modélisation du fluage de dessiccation doit-elle être entreprise séparément de celle du retrait libre, ou bien, au contraire, le phénomène est-il fondamentalement le même et s'intègre-t-il dans le même cadre de modélisation?

A cette recherche d'un cadre théorique unifié et cohérent cherchant à modéliser un phénomène physique — la dessiccation — dans l'ensemble de ses conséquences — retrait, fluage, etc. —, l'approche thermodynamique était la seule qui convînt véritablement. C'est donc, dans la lignée des travaux de Biot (1962, 1972, 1977) — le premier à introduire dans l'étude des milieux poreux continus une thermodynamique des systèmes ouverts permettant de privilégier le squelette du point de vue de la description<sup>10</sup> — et de ceux de Coussy (1989a, 1989b, 1991) que s'inscrit l'étude qui suit. Encore faut-il préciser que, si le cadre de la thermodynamique des systèmes ouverts était d'ores et déjà bien maîtrisé pour nombre d'applications au comportement de milieux poreux saturés, il était loin d'en être de même pour ce qui concerne les milieux poreux non saturés. Le dernier chapitre du livre de Coussy (1991) posait bien les jalons principaux de l'étude à mener dans cette direction, mais toute la formulation et l'identification d'une loi de comportement — en particulier non linéaire — de milieu poreux non saturé restait à entreprendre depuis le commencement.

Aussi l'étude ici présentée obéit-elle à cette perspective. Le premier chapitre, rapide, rappelle les fondements de la description adoptée du milieu poreux ainsi que le cadre thermodynamique global qui sous-tend l'ensemble de la modélisation<sup>11</sup>; les variables d'état de la modélisation choisie y sont définies; enfin, par applications successives des lois de conservation et des principes de la thermodynamique, l'ensemble des équations du milieu sont introduites.

Le chapitre II, moment essentiel de l'étude, s'attache à la formulation et à l'identification d'une loi de comportement d'un tel milieu: par «réflexe premier», c'est le cadre de l'élasticité qui est retenu; mais élasticité non linéaire, par nécessité de reproduire le plus fidèlement la réalité expérimentale. Différents éléments de réflexion et d'élaboration, liés aussi bien aux comportements microscopiques des constituants qu'à certaines constatations expérimentales, permettent d'orienter le modèle vers certaines hypothèses et certains choix relativement forts — dans des limites bien déterminées. A

---

combinant en définitive pour aboutir à la relation proportionnelle courante.

<sup>9</sup> Cf. par exemple Granger, Torrenti & Diruy (1994).

<sup>10</sup> Cf. chapitre I.

<sup>11</sup> Rappels dont on trouvera de bien plus amples développements dans Coussy (1991), chap. X.

l'issue du chapitre II, la loi de comportement est entièrement et explicitement formulée en fonction des variables d'état de la modélisation.

Le chapitre III expose brièvement les différentes expériences à disposition pour l'identification de la loi de comportement choisie et formulée: expérience de sorption-désorption et expérience d'invasion capillaire auxquelles le modèle permet, à l'issue de l'enchaînement des hypothèses auquel le chapitre II a procédé, de se conformer et de se raccrocher. Le chapitre III, surtout, permet de réaliser l'introduction précise des données tirées de ces expériences dans le modèle théorique.

Chapitre IV et chapitre V sont, quant à eux, des exemples d'application du modèle à différents problèmes liés au phénomène de dessiccation. Le chapitre IV étudie le problème du retrait de dessiccation, mais aussi celui du fluage de dessiccation (dans le cas de l'application d'une charge mécanique uniforme), grâce à une loi de comportement couplée élastique linéaire: modèle simplifié, par rapport au modèle élastique non linéaire élaboré au chapitre II, mais qui permet une première appréhension qualitative des phénomènes de couplage hydro-mécanique ainsi qu'une évaluation déjà très limitative du degré de validité de différentes hypothèses fortes. Le chapitre V, enfin, se limite au cas du retrait de dessiccation, par application numérique du modèle élastique non linéaire complet, tel qu'élaboré théoriquement au chapitre II.

# Chapitre I

## DESCRIPTION ET PRINCIPES GÉNÉRAUX DE MODÉLISATION D'UN MILIEU POREUX NON SATURÉ

Ce premier chapitre est destiné à donner les éléments fondamentaux de la description macroscopique adoptée en mécanique des milieux poreux — saturés ou non saturés. La littérature scientifique regorge de nombreuses études, plus ou moins générales, qui cherchent à modéliser le comportement de matériaux poreux (bétons, sols, matériaux organiques, etc.). L'étude ici entreprise se fixe quant à elle pour cadre de modélisation la mécanique des milieux continus traditionnelle, étendue aux milieux poreux par certains travaux marquants, parmi lesquels ceux de M.A. Biot<sup>1</sup> — prolongés par O. Coussy<sup>2</sup> — occupent une place d'une importance particulière. On trouvera ainsi dans Coussy (1991) et Coussy (1994)<sup>3</sup> un exposé complet et détaillé des principes généraux de la modélisation retenue. Ne figurent ici que quelques éléments essentiels à la compréhension du cadre théorique global ainsi qu'à son application au cas particulier — qui fait l'objet des chapitres suivants — d'un modèle poroélastique non linéaire de milieu poreux non saturé avec application concrète au cas spécifique du retrait de dessiccation.

---

<sup>1</sup> Biot (1962), (1972), (1977).

<sup>2</sup> Coussy (1989a), (1989b), (1991), (1994).

<sup>3</sup> Pour les milieux poreux saturés: Coussy (1991) et Coussy (1994) chap. I & II; pour les milieux poreux non saturés: Coussy (1991) et Coussy (1994) chap. X.

## I.1. Description et cinématique d'un milieu poreux non saturé.

### I.1.1. Description d'un milieu poreux non saturé: échelle microscopique et échelle macroscopique.

On appelle milieu poreux un milieu constitué, à l'échelle microscopique, d'une matrice solide et d'un espace interstitiel contenant un ou plusieurs fluides — liquides ou gaz. Ce qui signifie d'emblée que le terme d'*espace interstitiel* ou *espace poreux* désigne exclusivement la porosité connectée du matériau, espace réellement offert à la pénétration de fluides interstitiels, par opposition à sa porosité occluse, qui n'est le lieu d'aucune filtration — du moins à l'échelle du temps d'observation considéré — et est confondue avec la matrice solide en un seul constituant. Le terme *non saturé* renvoie, pour sa part, à la présence d'une phase liquide (souvent de l'eau), auquel on s'intéresse plus particulièrement mais qui ne suffit pas à remplir l'espace poreux. Dans nombre de cas pratiques envisagés, les autres fluides interstitiels sont des gaz, formant ou non mélange.

À l'échelle macroscopique, la matrice solide (qui comprend la porosité occluse, donc) et l'espace poreux connecté constituent un ensemble appelé *squelette*. Il est important de noter d'emblée cette distinction d'échelles entre les notions de *matrice* solide et de *squelette*, la seconde englobant la première et le volume géométrique des «vides» à une échelle supérieure de description: ainsi, en particulier, la déformation macroscopique du squelette est-elle la somme des déformations «microscopiques» de la matrice et de l'espace poreux<sup>4</sup>.

Ces premières définitions mettent l'accent sur la différence des deux échelles de description considérées tour à tour: l'échelle microscopique, pour laquelle les différents constituants du milieu sont disjoints et séparables d'un point de vue géométrique — chacun pouvant donc être considéré isolément des autres à ce niveau de description; l'échelle macroscopique, à laquelle le milieu poreux est vu comme superposition de ses différents constituants (squelette et fluides interstitiels), assimilés à autant de milieux continus cinématiquement indépendants mais en interaction mécanique.

Dans la mesure où elle s'intéresse aux états observables des structures du Génie civil — l'intérêt mécanique est spécialement porté sur les déformations et les contraintes affectant le squelette —, notre description est fondamentalement macroscopique. Le milieu est ainsi considéré dans sa globalité comme un milieu continu, superposition de différents milieux homogènes continus. Pour autant, ce parti-pris fondamental n'interdit pas, lorsque nécessaire, de se référer aux particularités microscopiques des constituants isolés, en opérant un transfert entre échelle microscopique et échelle macroscopique.

### I.1.2. Cinématique du milieu poreux: description lagrangienne par rapport au squelette

À l'échelle macroscopique, c'est donc l'état mécanique du squelette qui constitue un enjeu d'ingénieur. En vertu de quoi, la description macroscopique adoptée privilégie la cinématique du squelette — donc ses déformations; les mouvements des fluides interstitiels sont pour leur part définis par référence à celui du squelette.

---

<sup>4</sup> Cf. relation (II.31).

Chaque particule du squelette, définie par sa position  $X$  dans une configuration de référence choisie, est suivie dans son mouvement et, à tout instant  $t$ , repérée par son vecteur position actuel:

$$(I.1) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x} ( X, t )$$

Par dérivation spatiale dans la configuration de référence, on définit le gradient de la transformation:

$$(I.2) \quad \mathbf{P} = \text{Grad}_X ( \mathbf{x} )$$

ainsi que son jacobien:

$$(I.3) \quad J = \det \mathbf{P}$$

Par définition, le gradient  $\mathbf{P}$  de la transformation permet de définir la différence  $d\mathbf{x}$  des positions relatives actuelles de deux points (infiniment voisins) du squelette en fonction de la valeur initiale  $d\mathbf{X}$  de cette même différence dans la configuration de référence (voir Fig. I.1.):

$$(I.4) \quad d\mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{X}$$

La relation de transport vectoriel (I.4) permet de définir, de même, les formules de transport de surfaces ou de volumes infinitésimaux du squelette. En particulier, toute particule élémentaire de volume initial  $d\Omega_0$  occupe dans la configuration actuelle un volume:

$$(I.5) \quad d\Omega = J d\Omega_0$$

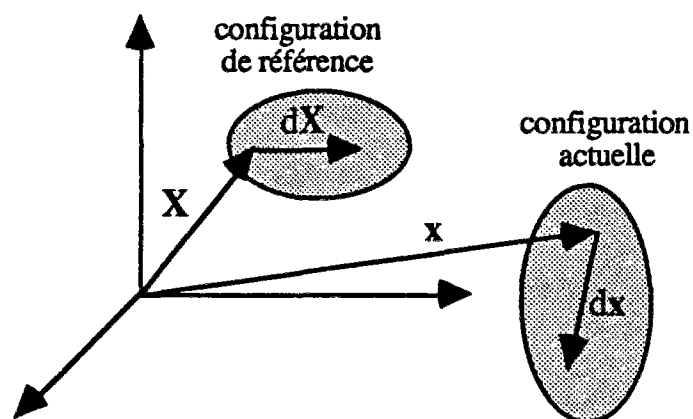


Fig. I.1.

L'ensemble des relations précédentes permettent également de définir le tenseur des déformations de Green-Lagrange:

$$(I.6) \quad \Delta = \frac{1}{2} ( {}^tP \cdot P - 1 )$$

relié de façon classique<sup>5</sup> au déplacement depuis l'état initial de référence, lequel est défini en chaque instant et pour chaque particule du squelette, par la différence vectorielle entre position actuelle et position initiale:

$$(I.7) \quad \xi = x ( X, t ) - X$$

Dans le cas, désormais adopté, de transformations infinitésimales (  $\| \text{Grad } \xi \| \ll 1$ , ce qui revient à confondre description lagrangienne et description eulérienne, configuration initiale et configuration actuelle), le tenseur de Green-Lagrange se réduit au tenseur des déformations linéarisé:

$$(I.8) \quad \varepsilon = \frac{1}{2} ( \text{Grad } \xi + {}^t\text{Grad } \xi )$$

Il peut être déduit des précédentes égalités la relation suivante entre tenseur des déformations linéarisé et jacobien de la transformation:

$$(I.9) \quad J = 1 + \text{tr } \varepsilon$$

qui montre que la trace du tenseur  $\varepsilon$  des déformations rend compte de la dilatation volumique du squelette.

### L1.3. Mouvements relatifs des fluides: notion de système ouvert.

Le choix de privilégier le squelette du point de vue de la description cinématique du milieu nous conduit, en contrepartie, à décrire les mouvements des fluides interstitiels en termes de mouvements relatifs par rapport au squelette. Ainsi introduit-on la vitesse relative  $V_i^f(x, t)$  de chaque particule de fluide (i) par rapport à la particule de squelette coïncidant avec elle à l'instant t — et repérée par sa position  $x$  dans l'état actuel. Cette vitesse relative se définit simplement, comme le représente la figure I.2., par la différence entre les vitesses respectives  $V(x, t)$  et  $V_i(x, t)$ , dans un repère fixe, de la particule squelette et de la particule de fluide (i) coïncidant à l'instant t au point géométrique repéré par  $x$ .

---

<sup>5</sup> Comme en mécanique traditionnelle des milieux continus, on a:

$$\Delta = \frac{1}{2} ( \text{Grad } \xi + {}^t\text{Grad } \xi + {}^t\text{Grad } \xi \cdot \text{Grad } \xi )$$

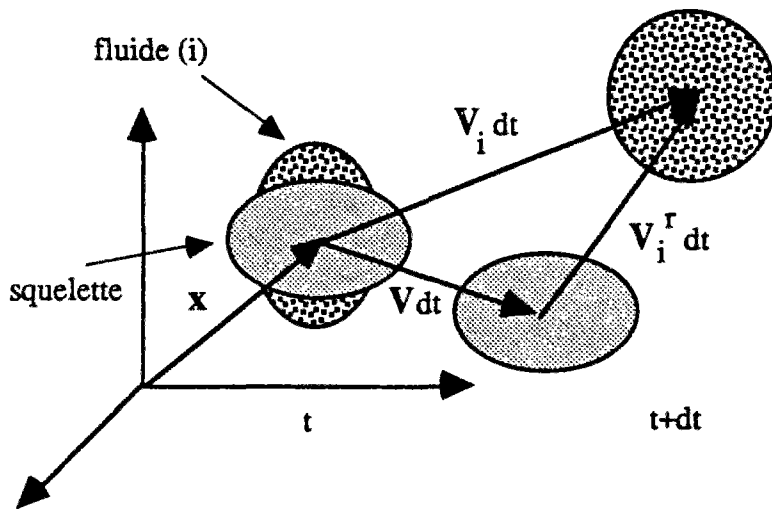


Fig. I.2.

La préséance accordée au squelette du point cinématique introduit, au plan thermodynamique, la notion de système matériel ouvert. En effet, du fait des cinématiques relatives des constituants interstitiels par rapport au squelette, la particule suivie dans le mouvement du squelette échange de la matière fluide avec l'extérieur. Ainsi la matière de fluide (i) contenue dans la particule  $d\Omega$  — repérée par sa position  $\mathbf{X}$  dans la configuration initiale — n'est-elle *a priori* jamais la même, sa masse variant au cours du temps d'une quantité  $m_i(\mathbf{X}, t) d\Omega_0$  depuis l'état initial.

Si l'on introduit la masse volumique  $\rho_i$  du fluide (i) et sa fraction volumique  $\phi_i$  (fraction de volume total occupé par le fluide (i)), on peut écrire cette variation de masse comme différence entre bilan actuel et bilan initial de la masse de fluide (i) contenue dans la particule  $d\Omega$  considérée:

$$m_i(\mathbf{X}, t) d\Omega_0 = \rho_i \phi_i d\Omega - \rho_i^0 \phi_i^0 d\Omega_0$$

d'où, à l'aide de la formule de transport (I.5) sur les volumes (et après simplification par  $d\Omega_0$ ):

$$(I.10)_i \quad m_i(\mathbf{X}, t) = J \rho_i \phi_i - \rho_i^0 \phi_i^0$$

Le choix d'une cinématique particulière, privilégiant le mouvement du squelette, introduit donc une description matérielle faisant appel à la notion de système ouvert échangeant de la matière (fluide) avec l'extérieur. Cet échange de matière (auquel peut s'ajouter un échange de matière, interne au système, par transformation chimique entre différents constituants) implique une variation de masse de chaque constituant interstitiel (i) contenu dans le système ouvert considéré, variation de masse que l'on repère par une grandeur  $m_i(\mathbf{X}, t)$  rapportée au volume initial. Du point de vue thermodynamique, il apparaît d'ores et déjà que ces grandeurs  $m_i(\mathbf{X}, t)$ , ainsi que le tenseur de déformation  $\epsilon$  précédemment introduit, seront nécessaires à la complète définition de l'état du système.



## I.2. Equations de conservation; équations de conduction.

### I.2.1. Conservation de la masse.

La description adoptée pose d'emblée le problème de l'écriture de la conservation de la masse du milieu poreux, défini en tant que système matériel ouvert. Chaque particule de ce système matériel suivie dans son mouvement est donc caractérisée par une variation de la masse de fluide interstitiel (i) qu'elle contient. Une cause de cette variation est le transport relatif de masse du constituant (i) par rapport au mouvement de la particule  $d\Omega$ . Ce transport de masse est représenté par une quantité vectorielle  $\mathbf{M}_i$  rapportée au volume initial  $d\Omega_0$  de la particule considérée et proportionnelle à la masse du fluide (i) contenu dans  $d\Omega$ , ainsi qu'à sa vitesse relative  $\mathbf{V}_i^r$  par rapport au squelette; soit, en définitive:

$$\mathbf{M}_i = J \rho_i \phi_i \mathbf{P}^{-1} \mathbf{V}_i^r$$

En fait, dans l'hypothèse où nous nous plaçons d'emblée de transformations infinitésimales, le précédent vecteur peut s'écrire au premier ordre en  $\epsilon$  ( $\|\epsilon\| \ll 1$ , donc  $J \approx 1$ ):

$$(I.11)_i \quad \mathbf{M}_i = \rho_i \phi_i \mathbf{V}_i^r$$

Le terme de variation de masse par transport relatif du fluide (i) dans le mouvement du squelette fait ainsi intervenir le flux surfacique du précédent vecteur  $\mathbf{M}_i$ , soit, en bilan volumique, sa divergence. Cependant, il peut exister des réactions chimiques entre différents constituants du milieu, également responsables de la variation de masse  $m_i$ . La conservation de la masse du constituant interstitiel (i) s'écrit donc formellement:

$$(I.12)_i \quad \dot{m}_i = -\text{Div } \mathbf{M}_i + m_{0 \rightarrow i}^0$$

où  $m_{0 \rightarrow i}^0$  représente un taux d'augmentation de masse du constituant (i) par réaction chimique ou — dans le cas qui nous occupera plus particulièrement — changement de phase.

### I.2.2. Equation d'équilibre du milieu.

On peut établir l'existence d'un tenseur  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  tel que:

$$(I.13) \quad \mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

où  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$  désigne la contrainte totale exercée sur la facette infinitésimale de normale  $\mathbf{n}$  située en un point de position  $\mathbf{x}$ . Le vecteur  $\boldsymbol{\sigma}$  correspond au tenseur de Cauchy des contraintes totales du milieu global. La conservation de la quantité de mouvement globale

d'un domaine matériel quelconque du milieu débouche, en l'absence de forces volumiques à distance et à forces d'inertie négligeables, sur la relation d'équilibre:

$$(I.14) \quad \text{Div } \sigma = 0$$

### I.2.3. Les deux principes de la thermodynamique.

De même que pour la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, on effectue le bilan d'énergie et d'entropie du système matériel global contenu dans un domaine matériel quelconque du milieu. En appliquant à un tel système le premier et le second principe de la thermodynamique, on aboutit à l'expression de l'inégalité de Clausius-Duhem en milieu poreux:

$$(I.15) \quad \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \geq 0$$

où  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$  désignent trois termes dissipatifs de natures différentes:

- une dissipation intrinsèque faisant intervenir l'entropie volumique  $S$  et l'énergie libre volumique  $\Psi$  du milieu global, ainsi que des termes de taux d'échange massique par réaction chimique entre constituants<sup>6</sup>:

$$\Phi_1 = \sigma : \dot{\epsilon} + g_i \dot{m}_i + (g_i - g_j) m_{i \rightarrow j}^0 - S \dot{T} - \dot{\Psi}$$

- une dissipation thermique, faisant apparaître un vecteur courant de chaleur  $q$ :

$$\Phi_2 = - \frac{q}{T} \text{grad} T$$

- une dissipation par transport de masse fluide faisant intervenir les enthalpies libres massiques  $g_i$  et les entropies massiques  $s_i$  des constituants interstitiels:

$$\Phi_3 = - M_i [ \text{grad } g_i + s_i \text{grad} T ]$$

Une première hypothèse de découplage de ces dissipations, relativement traditionnelle, consiste à supposer  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$  séparément et indépendamment positives. Appliquée à la dissipation intrinsèque, cette hypothèse permet d'établir les relations d'état macroscopiques du modèle: ce sera l'objet du prochain chapitre.

---

<sup>6</sup>  $m_{i \rightarrow j}^0$  est compté positivement dans le sens de la création de (j) à partir de (i); on a bien sûr les relations suivantes entre l'ensemble des termes de taux de masse  $m_{i \rightarrow j}^0$  et  $m_{j \rightarrow i}^0$ :

$$m_{j \rightarrow i}^0 = - m_{i \rightarrow j}^0$$

$$m_{\rightarrow j}^0 = \sum_i m_{i \rightarrow j}^0$$

#### L2.4. Conduction de la chaleur: loi de Fourier

Si l'on adopte l'hypothèse de normalité des mécanismes dissipatifs thermiques, qui consiste à postuler l'existence d'un potentiel de dissipation  $D_2$  fonction du vecteur  $q/T$ , convexe et nul en 0, tel que:

$$\frac{\partial D_2}{\partial (q/T)} = - \text{grad } T$$

la non-négativité de la dissipation thermique  $\Phi_2$  est alors automatiquement assurée. Si de surcroît on choisit pour  $D_2$  une forme quadratique de  $q/T$ , la précédente relation conduit à une relation linéaire entre le vecteur courant de chaleur et le gradient de température, que l'on écrit:

$$(I.16) \quad \mathbf{q} = - \mathbf{k} \cdot \text{grad } T$$

où  $\mathbf{k}$  désigne le tenseur de conductivité thermique du matériau. On retrouve donc, dans le cadre global de la modélisation thermodynamique élaborée, la traditionnelle loi de Fourier de conduction de la chaleur.

#### L2.5. Conduction des constituants fluides: lois de Darcy et de Fick.

Une hypothèse identique de normalité des mécanismes dissipatifs dus aux transports de fluides interstitiels permet de manière analogue de déduire du cadre thermodynamique général les lois linéaires usuelles de conduction des constituants interstitiels. Ainsi, pour tout constituant (i), on pourra écrire une loi de conduction de Darcy:

$$(I.17)_i \quad \frac{M_i}{\rho_i} = - k_{ij} \cdot \text{grad } p_j$$

où  $k_{ij}$  désigne le tenseur de perméabilité au fluide (i) du milieu. Dans le cas d'un mélange, il pourra être plus indiqué d'adopter une loi de Darcy pour le mélange dans son ensemble — donc une relation linéaire entre vitesse moyenne molaire et pression totale du mélange, à laquelle s'associe une loi de Fick exprimant la conduction des différents composants du mélange relativement au mouvement de l'un d'entre eux, noté *solv* (pour: solvant) et servant de référence:

$$(I.18)_i \quad \frac{M_i}{\rho_i} - \frac{M_{\text{solv}}}{\rho_{\text{solv}}} = - \mathbf{F}_i \cdot \text{grad } C_i$$

où  $C_i$  désigne la concentration de fluide (i) dans le mélange et  $\mathbf{F}_i$  le tenseur de Fick associé à la diffusion de (i) dans le mélange.

Le fait qu'aucun couplage hydrothermique n'apparaisse dans les équations de diffusion de la chaleur — (I.16) — et des fluides interstitielles — (I.17) ou (I.18) — tient à l'hypothèse de découplage des deux dissipations correspondantes,  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$ . Si l'on veut pouvoir représenter l'influence du gradient de température sur le transport des fluides et

l'influence réciproque des gradients de pressions interstitiels sur la conduction de la chaleur (effet Soret-Dufour), il est nécessaire de réviser à la base ce parti-pris en écrivant la positivité de la somme  $\Phi_2 + \Phi_3$ .

A ce stade de la présentation générale de la modélisation choisie, les équations du milieu sont complètement posées — conservation de la masse, équilibre, conduction des fluides interstitiels. Dans le cadre de la résolution de tel ou tel problème particulier, il conviendra de mieux préciser la description du milieu envisagé (le nombre de constituants et leurs rôles respectifs les uns vis-à-vis des autres), ainsi que la forme exacte des équations (en particulier de diffusion) qui lui sont associées: ce sera le cas, aux chapitres IV et V, lors de l'étude particulière d'un milieu hydraté séchant à l'air libre (séchage d'un béton ou d'une pâte de ciment par exemple).

Cependant, dans le cadre le plus général de la modélisation abordée, l'essentiel du travail reste à faire: l'établissement d'une loi de comportement de milieu poreux non saturé — loi de comportement adaptée à une certaine catégorie d'applications, à une problématique orientée par la modélisation entreprise du phénomène de dessiccation. C'est ici la tâche qui fait l'objet du chapitre à venir et qui, sans doute, constitue la contribution majeure de l'ensemble du travail présenté dans ce mémoire.



## Chapitre II

### LOI DE COMPORTEMENT D'UN MILIEU POREUX NON SATURÉ : LE MODÈLE ÉLASTIQUE NON LINÉAIRE

La détermination d'une loi de comportement adaptée à notre problème constitue l'un des pans essentiels de l'étude entreprise. En effet, alors que nombre de relations (équations de conservation des masses fluides, équation d'équilibre) sont déterminées une fois pour toutes, indépendamment du problème posé — on pourra se reporter à la formulation qu'en donne Coussy (1991, chap. X) —, le choix de la loi de comportement est conditionné, quant à lui, par les caractéristiques du matériau étudié. En l'occurrence, dans le cas qui nous occupe, le modèle rhéologique adopté devra correspondre au comportement réel des matériaux, tel qu'il est révélé par l'expérience. Ce qui implique une double difficulté : premièrement, celle du choix d'un modèle de comportement judicieux, c'est-à-dire du modèle *a priori* le plus à même, compte tenu des caractéristiques physiques du milieu envisagé, de représenter fidèlement le comportement réel des matériaux; en second lieu, celle de la détermination des différents paramètres associés à la loi de comportement choisie, en fonction, là encore, des propriétés physiques du matériau — quand leur origine est supposée bien connu d'un point de vue théorique — et, le cas échéant, des données expérimentales dont on dispose.

Cependant, une fois choisi le modèle de comportement, il est avant tout nécessaire d'adapter sa formulation traditionnelle, telle qu'on l'établit classiquement pour des milieux continus homogènes, au milieu plus complexe, hétérogène, qui fait l'objet de notre étude. Pour ce faire, il convient de reprendre le cadre thermodynamique complet dont sont tirées les équations d'état du système, en l'adaptant au milieu polyphasique qui nous intéresse : entreprise de "reconstruction" que l'on trouvera exposée dans Coussy (1991, chap. III) pour des milieux poreux saturés en un seul fluide et dans Coussy (1991, chap. X) pour un milieu

poreux non saturé. Nous nous contenterons ici de rappeler sommairement les étapes essentielles de la démarche thermodynamique, dont est finalement issue la formulation générale de la loi de comportement qui nous intéresse.

Une fois ainsi établie la formulation générale, adaptée à notre milieu poreux non saturé, de la loi de comportement choisie pour modéliser le comportement réel des matériaux, il nous restera ensuite à mettre en oeuvre les moyens théoriques et expérimentaux à notre disposition afin d'identifier chacun des paramètres du modèle.

## II.1. Formulation thermodynamique des relations d'état.

### II.1.1. Thermodynamique macroscopique en milieu poreux non saturé réactif.

L'application du second principe au système ouvert défini par une particule de milieu poreux suivie dans le mouvement du squelette conduit à l'inégalité (I.15). Laquelle, sous l'hypothèse de découplage de la dissipation intrinsèque des deux autres dissipations<sup>1</sup> — thermique et de transport de masse fluide — conduit à l'inégalité de Clausius-Duhem en milieu poreux non saturé:

$$(II.1) \quad \sigma : \dot{\epsilon} + g_i \dot{m}_i + (g_i - g_j) m_{i \rightarrow j}^0 - S \dot{T} - \dot{\Psi} \geq 0$$

expression où apparaissent les variables associées à nos variables d'état : le tenseur de Cauchy  $\sigma$  relatif au milieu considéré dans son ensemble, les enthalpies libres massiques  $g_i$  relatives aux divers constituants, ainsi que l'entropie  $S$  du milieu global.

Cette formulation permet de retrouver l'expression classique de l'inégalité de Clausius-Duhem, bien connue en mécanique classique des milieux continus, et à laquelle s'ajoutent deux termes supplémentaires propres aux phases fluides prises en compte : un terme d'apport d'énergie par variation de masse fluide et un terme de dissipation dû à d'éventuelles transformations physiques ou chimiques entre différents constituants. Il est cependant usuel de supposer un découplage de la dissipation intrinsèque et de la dissipation d'origine chimique, la précédente inégalité se scindant alors en deux relations séparées et indépendantes de positivité :

$$(II.2) \quad \sigma : \dot{\epsilon} + g_i \dot{m}_i - S \dot{T} - \dot{\Psi} \geq 0$$

et

$$(II.3) \quad (g_i - g_j) m_{i \rightarrow j}^0 \geq 0$$

En outre, du fait de la réversibilité du comportement étudié par la suite, les signes d'inégalité peuvent être remplacés par des signes d'égalité dans chacune des relations ci-dessus. En particulier, appliquée à la relation (II.3), cette hypothèse de nullité de la dissipation chimique (ou de changement de phase) se traduit par une écriture macroscopique de loi d'action de masse, ce qui correspond donc à une hypothèse de réversibilité (définie macroscopiquement,

---

<sup>1</sup> Grâce au postulat de l'état local qui assure que  $\Phi_1$  ne dépend que des variables d'état et non de leurs gradients.

c'est-à-dire en termes de variables macroscopiques) de la transformation chimique considérée. Dans le cas où celle-ci fait intervenir différentes étapes réversibles et indépendantes les unes des autres, la dissipation associée peut alors être elle-même dissociée en une somme de dissipations indépendamment nulles. On peut donc définir une notion d'«indépendance macroscopique» des réactions chimiques par le découplage macroscopique des différentes dissipations chimiques intervenant dans la relation (II.3) ainsi qu'une notion de «réversibilité macroscopique» par la nullité de la dissipation macroscopique associée à chaque transformation chimique indépendante.

Afin de justifier et de guider le choix de tel ou tel découplage des dissipations macroscopiques, il est possible de relier les définitions précédentes d'«indépendance macroscopique» et de «réversibilité macroscopique» des réactions à leurs homologues microscopiques — c'est-à-dire à des considérations classiques d'indépendance et de réversibilité de réactions chimiques ou à l'échelle (microscopique) des constituants. Dès lors, au prix d'une identification (effectuée plus loin) des enthalpies libres microscopiques et macroscopiques, en appliquant séparément l'(in)égalité (II.3) à chaque réaction indépendante, et en exprimant les différents échanges de masse  $m_{i \rightarrow j}^0$  en fonction des coefficients stoechiométriques et de l'avancement de la réaction (autre identification micro-macro), on aboutit aux expressions classiques des lois d'action de masse de chaque réaction indépendante réversible — autant de lois d'action de masse qu'il y a de réactions chimiques réversibles découplées. Dans le cas d'un processus réversible faisant intervenir une série de réactions couplées, on peut retrouver, d'après (II.3), l'écriture microscopique d'une loi d'action de masse dépendant des différents degrés d'avancement de chacune des réactions impliquées<sup>2</sup>.

Le cas qui nous intéresse cependant le plus, et que nous examinerons plus en détail, est celui d'une transformation réversible, indépendante de tout autre processus, entre deux constituants (i) et (j) du milieu interstitiel: c'est en particulier le cas d'un changement de phase entre un liquide interstitiel et sa vapeur. Appliquée à cette configuration simplifiée d'une réaction chimique — ou d'un changement de phase — réversible indépendante entre deux constituants privilégiés de l'espace interstitiel, la relation (II.3) se traduit soit par l'égalité des enthalpies libres massiques, soit par l'absence d'échange de masse par réaction chimique — ou changement de phase<sup>3</sup> :

$$g_i = g_j \quad \text{s'il y a transformation } i \rightarrow j ;$$

$$m_{i \rightarrow j}^0 = 0 \quad \text{s'il n'y a pas échange de matière entre (i) et (j).}$$

Insistons une fois encore sur le fait que les arguments précédents d'indépendance et de réversibilité, au sens classique, des réactions chimiques sont des arguments essentiellement microscopiques. Se servir de telles considérations pour justifier un découplage entre dissipations macroscopiques dans la relation (II.3), et la nullité des différents termes découplés, c'est effectuer implicitement un passage micro-macro. Mais faire cette association, c'est aussi donner un statut et un sens physique aux grandeurs macroscopiques introduites, qui confère aux hypothèses macroscopiques de découplage et de nullité des dissipations la signification physique traditionnelle, microscopique, d'indépendance et de réversibilité des transformations chimiques se produisant dans le milieu. Ce qui permet, en retour, de justifier et de guider, par ces arguments microscopiques relativement bien connus, certains choix fondamentaux de découplage et de nullité des dissipations macroscopiques — comme il a été fait en (II.2) et (II.3).

<sup>2</sup> Cf. Coussy (1994), chap. X, p. 428-440.

<sup>3</sup> On fait abstraction, dans cette étude, des cas de métastabilité dans lesquels les phases (i) et (j) demeureraient (de façon instable) à potentiels chimiques différents.



Posons maintenant l'hypothèse essentielle, conforme au postulat de l'état local, que les différentes variables  $\epsilon$  et  $m_i$  introduites précédemment, par des considérations cinématiques, peuvent être prises pour variables d'état ( indépendantes ) du système, en association avec la température  $T$ , supposée homogène dans l'ensemble du milieu. Dans le cadre, désormais adopté, d'un comportement élastique, aucune autre grandeur n'est nécessaire à la définition de l'état thermodynamique du milieu, de sorte que l'on écrit:

$$(II.4) \quad \Psi = \Psi ( \epsilon , m_i , T )$$

Quant à elle, la relation (II.2) issue de l'inégalité de Clausius-Duhem nous permet d'obtenir les relations d'état macroscopiques du milieu global :

$$(II.5) \quad \sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon}$$

$$(II.6)_i \quad g_i = \frac{\partial \Psi}{\partial m_i}$$

$$(II.7) \quad S = - \frac{\partial \Psi}{\partial T}$$

Dans toute la suite de notre étude cependant, nous ferons abstraction de la température en tant que variable, dans la mesure où nous choisissons d'emblée de ne considérer que des transformations isothermes. Il est en effet couramment constaté que l'état mécanique influence peu l'état thermique: hypothèse de faible couplage des variables mécaniques vers les variables thermiques — le couplage réciproque étant, pour sa part, beaucoup plus important.

### II.1.2. Variables d'état macroscopiques et microscopiques: les pressions partielles.

Des précédentes équations d'état, c'est la seconde, exprimant l'enthalpie libre massique  $g_i$  de chaque constituant fluide comme dérivée selon l'apport de masse associé  $m_i$  d'une fonction  $\Psi$  des variables d'état, qui est caractéristique de notre modélisation milieu poreux. Les deux autres, (II.5) et (II.7), sont les relations classiques, bien connues en mécanique des milieux continus homogènes.

C'est cette relation (II.6), caractéristique de la présence de fluides interstitiels, qui va nous permettre d'exprimer l'enthalpie  $g_i$  en fonction des variables d'état macroscopiques,  $\epsilon$  et  $m_i$  — et dont il conviendra d'assurer la compatibilité avec les lois d'état microscopiques des constituants fluides.

Cependant, la formulation habituelle de la loi de comportement macroscopique fait intervenir la pression partielle  $p_i$ , de préférence à l'enthalpie  $g_i$ , comme variable caractéristique de l'état du fluide (i). Mais cette pression  $p_i$  n'est pas une grandeur macroscopique, et ne peut être introduite directement à l'échelle de notre modélisation. Elle est en réalité une variable caractérisant l'état thermodynamique du constituant (i) considéré isolément, à l'échelle microscopique. Afin de lui donner un statut et une signification

macroscopiques, il nous faut procéder en fait à un passage micro-macro par identification de l'enthalpie libre massique macroscopique du fluide (i), associée à la variable d'état macroscopique  $m_i$  selon la relation (II.6), avec son homologue microscopique défini en fonction de la pression partielle  $p_i$ . Afin de respecter cette distinction essentielle des échelles de description et des grandeurs thermodynamiques correspondantes, introduisons provisoirement une notation particulière  $g_i^{\text{micro}}$  pour désigner l'enthalpie libre massique à l'échelle microscopique. Sous sa forme microscopique, l'enthalpie libre massique  $g_i^{\text{micro}}$  s'écrit, en condition isotherme, comme fonction de la seule pression thermodynamique du fluide (i):

$$g_i^{\text{micro}} = f_i ( p_i ) , \quad \text{avec} \quad f_i' ( p_i ) = \frac{1}{\rho_i}$$

$\rho_i$  pouvant, à température fixée, être considérée comme fonction de la pression partielle  $p_i$ . L'adoption d'une telle relation microscopique entre l'enthalpie massique  $g_i^{\text{micro}}$  et la pression partielle  $p_i$  n'est pas neutre et ne va pas de soi: elle repose sur l'hypothèse selon laquelle, à l'échelle microscopique, sa pression partielle suffit à déterminer l'état thermodynamique du constituant (i) — donc, en particulier, son enthalpie libre massique. Cette hypothèse semble physiquement légitime pour tout constituant isolé, disjoint des autres et ne subissant de leur part aucune interaction moléculaire à l'échelle microscopique. En revanche, lorsque un constituant (i) du milieu interstitiel fait partie d'un mélange à l'échelle microscopique, cette relation suppose, pour pouvoir être conservée, que son enthalpie libre massique garde, dans sa définition microscopique en fonction de sa pression  $p_i$ , la même expression que dans le cas où ce constituant (i) est pur. Ce qui consiste à ignorer l'effet des autres constituants sur les grandeurs caractérisant l'état de chacun des éléments du mélange: c'est là la définition même d'un mélange idéal. Ainsi, la formulation en pressions de la loi de comportement macroscopique, telle qu'elle est ici présentée, repose sur l'hypothèse physique d'idéalité, à l'échelle microscopique, de tout éventuel mélange entre constituants interstitiels. Dans la suite de cette étude, tous les mélanges considérés entre constituants interstitiels seront donc des mélanges microscopiquement idéaux.

A l'échelle macroscopique, l'expression de l'enthalpie libre massique  $g_i$  est obtenue, grâce à la relation d'état macroscopique (II.6) relative au fluide, par dérivation de l'énergie libre  $\Psi$ :

$$g_i = \frac{\partial \Psi}{\partial m_i} ( \epsilon, m_j )$$

L'identification des deux expressions précédentes peut alors s'écrire sous la forme suivante:

$$W_i ( \epsilon, m_j, p_i ) = 0 ,$$

où l'on pose:

$$W_i ( \epsilon, m_j, p_i ) = \frac{\partial \Psi}{\partial m_i} ( \epsilon, m_j ) - f_i ( p_i ) .$$

La dérivée de cette fonction  $W_i$  par rapport à la variable  $p_i$  valant :

$$\frac{\partial W_i}{\partial p_i} (\varepsilon, m_j, p_i) = -f_i' (p_i) = -\frac{1}{\rho_i}$$

donc ne s'annulant pas, on déduit alors du *théorème de la fonction implicite* que, dans toute notre modélisation,  $p_i$  peut être légitimement considérée comme fonction des variables d'état macroscopique  $(\varepsilon, m_j)$ . De sorte que, grâce à l'identification des enthalpies libres massiques, grâce aussi à l'inversibilité de la relation microscopique entre enthalpie libre massique et pression partielle, cette dernière acquiert un statut macroscopique.

Il peut être intéressant, pour des raisons pratiques qui se présenteront plus loin, d'étudier l'inversibilité de la relation mathématique définissant la pression comme une grandeur macroscopique fonction des variables d'état macroscopiques  $\varepsilon$  et  $m_j$ . Introduisons, pour alléger le formalisme, les grandeurs vectorielles associées à nos variables et fonctions scalaires, définies comme suit :

$$\mathbf{m} = (m_j)_{j=1, n}, \quad \mathbf{p} = (p_i)_{i=1, n},$$

et  $\mathbf{W} = (W_i)_{i=1, n}$ .

Au prix d'une confusion volontaire entre un espace vectoriel et son dual, on peut considérer  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{p}$  comme deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , tandis que  $\mathbf{W}$  se définit en temps que fonction vectorielle de  $\mathbb{R}^{6n} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . L'identification des expressions microscopique et macroscopique de l'enthalpie libre massique, écrite simultanément pour l'ensemble des constituants du milieu, se met sous la forme suivante :

$$\mathbf{W} (\varepsilon, \mathbf{m}, \mathbf{p}) = 0$$

De sorte qu'en appliquant à cette fonction vectorielle  $\mathbf{W}$  le même *théorème de la fonction implicite*, mais cette fois sur la variable  $\mathbf{m}$ , on peut conclure que le vecteur  $\mathbf{m}$  s'écrit comme fonction du couple de variables  $(\varepsilon, \mathbf{p})$  à la condition nécessaire et suffisante que la dérivée partielle selon  $\mathbf{m}$  de  $\mathbf{W}$  soit inversible :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{m}} \text{ inversible.}$$

Comme, par définition, cette dérivée partielle s'identifie à la matrice  $(n,n)$  des  $(\frac{\partial W_i}{\partial m_j})_{i,j=1,n}$ , cette condition s'écrit en définitive :

$$\det \left[ \frac{\partial W_i}{\partial m_j} \right]_{i,j=1,n} \neq 0$$

ce qui s'écrit, compte tenu de l'expression de  $W_i$  :

$$\det \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m_i \partial m_j} \right]_{i,j=1,n} \neq 0$$

En définitive, la validité du changement de variables  $(\epsilon, m_i) \rightarrow (\epsilon, p_i)$  impose que la différentielle seconde à déformation bloquée de l'énergie libre  $\Psi$  soit bijective. On reviendra ultérieurement sur l'implication de cette condition sur les coefficients de la loi de comportement adoptée<sup>4</sup>.

On retiendra donc en définitive de ce long développement — qui pour paraître formel n'en est pas moins fondamental quant à la validité et la cohérence du modèle construit — que les pressions partielles, grandeurs définissant à l'échelle microscopique l'état thermodynamique de chaque constituant isolé, acquièrent un statut et une signification à l'échelle de la modélisation grâce à l'identification des enthalpies libres massiques microscopique et macroscopique de chacun des constituants interstitiels. Par la suite, on fera toujours référence à cette identification micro-macro sous la forme incrémentale suivante:

$$(II.8)_i \quad dg_i = \frac{dp_i}{\rho_i}$$

Ce statut macroscopique conféré aux pressions partielles par la relation ci-dessus se traduit, comme il a été précisément démontré, par une définition de chaque pression  $p_i$  en fonction

---

<sup>4</sup> On peut établir ce résultat par une autre démonstration, faisant appel à la transformée de Legendre-Fenchel relativement au couple de variables duales  $(g_i, m_i)$ . Pour cela, il suffit de considérer (à T fixé) la transformée  $\Psi^*$  de Legendre-Fenchel de l'énergie libre  $\Psi$ , définie comme suit:

$$\Psi^* = g_i m_i - \Psi$$

sous la condition de liaison des variables d'état que définissent les équations d'état (II.5) et (II.6). L'existence de  $\Psi$  est assurée d'après la convexité du potentiel  $\Psi$ . La différentiation de  $\Psi^*$  s'écrit alors:

$$d\Psi^* = m_i dg_i + g_i dm_i - d\Psi$$

En vertu des relations d'état (II.5) et (II.6), la différentielle de l'énergie libre  $\Psi$ , fonction des variables  $\epsilon$  et  $m_i$  s'écrit:

$$d\Psi = \sigma : d\epsilon + g_i dm_i$$

qui, introduite dans la précédente écriture différentielle de  $\Psi^*$ , conduit à la relation suivante:

$$d\Psi^* = m_i dg_i - \sigma : d\epsilon$$

$\Psi^*$  est donc fonction des variables  $g_i$  et  $\epsilon$  et l'on peut écrire:

$$m_i = \frac{\partial \Psi^*}{\partial g_i}$$

$$\sigma = - \frac{\partial \Psi^*}{\partial \epsilon}$$

ce qui démontre la réversibilité du passage d'un système de variables d'état à l'autre. L'introduction des pressions partielles et leur substitution aux enthalpies libres massiques se fait ensuite comme précédemment, grâce à la relation (II.8) de compatibilité micro-macro.

des variables d'état macroscopiques  $\epsilon$  et  $m_j$  choisies; relation le plus souvent inversible, les apports de masse pouvant ainsi s'exprimer tout aussi bien en fonction des pressions. Désormais, les pressions partielles (comme les masses volumiques) seront considérées et maniées comme des grandeurs macroscopiques, au même titre que les autres variables de la modélisation, essentiellement macroscopiques.

Enfin, la formulation désormais adoptée de notre loi de comportement macroscopique, faisant intervenir les pressions de préférence aux enthalpies, repose également sur une hypothèse physique essentielle: celle d'idéalité, à l'échelle microscopique, de tout mélange éventuel entre certains constituants interstitiels.

## II.2. La loi de comportement

### II.2.1. La loi de comportement poroélastique linéaire isotrope.

Reste, afin d'obtenir la loi de comportement du milieu, à se donner une expression particulière de l'énergie libre  $\Psi$  en fonction des variables d'état de la modélisation. L'exemple le plus classique étant celui de la loi de comportement élastique linéaire, pour lequel on postule une forme quadratique du potentiel : il en résulte alors une relation linéaire entre contraintes et déformations, qui s'écrit dans notre cadre milieux poreux:

$$(II.9) \quad \sigma - \sigma^0 = C : \epsilon - B_i M_{ij} \frac{m_j}{\rho_j^0}$$

$$(II.10)_i \quad p_i - p_i^0 = M_{ij} \left( -B_j : \epsilon + \frac{m_j}{\rho_j^0} \right)$$

Il est intéressant d'établir, à ce stade, par simple combinaison des deux relations précédentes, la dépendance directe entre contraintes, déformations et pressions partielles, qui s'écrit:

$$(II.11) \quad \sigma - \sigma^0 = C_0 : \epsilon - B_i (p_i - p_i^0)$$

L'ensemble de ces relations, qui expriment dans sa plus grande généralité le comportement poroélastique linéaire isotherme, introduisent certains jeux de coefficients dont la signification physique mérite d'être précisée.

- $C$  est la matrice classique, en élasticité linéaire, traduisant la relation linéaire entre tenseur de Cauchy  $\sigma$  et tenseur des déformations linéarisé  $\epsilon$  en conditions non drainées (c'est-à-dire en l'absence de la moindre variation de masse).

- $C_0$  est l'homologue de  $C$  en conditions drainées (c'est-à-dire à pressions interstitielles constantes).

- $B_i$  sont des tenseurs, dits tenseurs de Biot, relatifs aux différents constituants et traduisant, selon (II.9), l'interaction entre tenseur des contraintes global et apports de masse, ou bien, d'après (II.10), entre pressions des fluides interstitiels et tenseur des déformations du squelette. La relation (II.11) met plus directement en évidence la signification physique de ces grandeurs, en les présentant comme les coefficients du couplage entre contraintes

mécaniques et pressions interstitielles. Quel que soit le point de vue adopté, il est clair que c'est par l'intermédiaire de ces tenseurs  $B_i$  que s'introduit véritablement dans le modèle le couplage hydro-mécanique.

-  $M=(M_{ij})$  est une matrice dont le terme général  $M_{ij}$ , dit module de Biot, traduit l'influence réciproque entre apport de masse d'un constituant ( $j$ ) et augmentation de pression d'un autre constituant ( $i$ ).

L'ensemble de ces grandeurs ne constitue pas un jeu de données indépendantes. L'expression (II.11) ayant été obtenue par combinaison linéaire des expressions (II.9) et (II.10),  $C$ ,  $C_0$ ,  $B_i$  et  $M$  vérifient la relation suivante:

$$(II.12) \quad C = C_0 + M_{ij} B_i \otimes B_j$$

Les grandeurs  $B_i$  et  $M$  sont caractéristiques du couplage hydro-mécanique entre pressions (ou apports de masse) des différents constituants fluides occupant le réseau poreux et variables mécaniques (contraintes globales ou déformation macroscopique du squelette). Les différents coefficients introduits, dans le cadre exposé jusqu'ici d'une loi de comportement élastique linéaire, sont des constantes caractéristiques des matériaux considérés (au sens de matériaux poreux, c'est-à-dire fluides inclus).

Notons que, du fait du choix d'un potentiel quadratique pour  $\Psi$ , les matrices  $C$  et  $M$  sont nécessairement symétriques. L'isotropie du comportement se traduisant, au-delà d'une forme classique des matrices  $C$  et  $C_0$ , représentées par deux coefficients seulement (notre choix se portera préférentiellement sur le module d'incompressibilité drainé  $K_0$  et le module de cisaillement  $\mu$ ), par le fait que le tenseur de Biot de chaque constituant du mélange interstitiel se réduit à un coefficient de Biot (correspondant en fait à un tenseur sphérique du couplage pression-contrainte mécanique:  $B_i=b_i\mathbf{I}$ ). Dans le cas où les couplages hydro-mécaniques sont supposés isotropes, les coefficients de Biot peuvent se regrouper, pour l'ensemble des constituants interstitiels, en un vecteur colonne  $b=(b_i)$ , la loi de comportement poroélastique linéaire pouvant alors s'écrire en fonction des variables généralisées :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma \\ p_i \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{bmatrix} \epsilon \\ m_j/\rho_j^0 \end{bmatrix}$$

sous la forme matricielle suivante :

$$(II.13) \quad \begin{bmatrix} \sigma - \sigma_0 \\ p_i - p_i^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & (-bM)^t \\ -bM & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ m_j/\rho_j^0 \end{bmatrix}$$

Lorsque l'ensemble du comportement (y compris sa partie «purement mécanique», représentée alors par les deux coefficients  $K_0$  et  $\mu$ ) est supposé isotrope, les variables tensorielles  $\sigma$  et  $\epsilon$  peuvent alors être remplacées par leurs valeurs moyennes volumiques:

$$\sigma = \frac{1}{3} \text{tr } \sigma$$

et

$$\varepsilon = \text{tr } \varepsilon$$

dans les relations (II.9) à (II.11). On obtient alors, en remplacement du système précédent, l'écriture simplifiée qui suit de la loi de comportement:

$$(II.14) \quad \sigma - \sigma_0 = K \varepsilon - b_i M_{ij} \frac{m_j}{\rho_j^0}$$

$$(II.15)_i \quad p_i - p_i^0 = M_{ij} \left( -b_j \varepsilon + \frac{m_j}{\rho_j^0} \right)$$

$$(II.16) \quad \sigma - \sigma_0 = K_0 \varepsilon - b_i (p_i - p_i^0)$$

$$s - s_0 = 2\mu e$$

où  $\mu$  désigne le module de cisaillement du matériau,  $s$  et  $e$  les parties déviatoriques des tenseurs  $\sigma$  et  $\varepsilon$ ,  $K$ , module d'incompressibilité non drainé, étant déterminé d'après la donnée des autres coefficients grâce à la relation suivante, issue de (II.12):

$$(II.17) \quad K = K_0 + M_{ij} b_i b_j$$

Il est intéressant de commenter brièvement l'équation (II.11) et son équivalent (II.16) dans le cas isotrope. Ces relations définissent les liens entre incréments du tenseur des contraintes totales, incréments du tenseur de déformation du squelette et incréments des pressions interstitielles. Or, leur forme même montre, en particulier, qu'à contrainte totale constante, on peut constater une déformation du squelette due aux seuls effets des pressions interstitielles et du couplage hydro-mécanique. C'est là une remarque qui nous persuade d'emblée de la pertinence d'un tel modèle couplé pour ce qui touche à la modélisation de phénomènes tels que le retrait de dessiccation, déformation engendrée en l'absence de toute sollicitation mécanique extérieure par les seuls efforts capillaires qu'exercent les fluides interstitiels.

## II.2.2. La loi de comportement poroélastique non linéaire isotrope.

Compte tenu, cependant, de l'objectif visé dans cette étude, et de la volonté de prendre en compte des phases gazeuses à fortes compressibilités, une loi de comportement linéaire ne sera valable que sur de très faibles intervalles de variation. En fait, il semble d'emblée plus judicieux d'adopter une loi de comportement poroélastique non linéaire, en faisant dépendre, notamment, les différents coefficients des variables d'état de la modélisation.

La formulation d'une telle loi de comportement ne diffère guère de la précédente: la relation linéaire demeure, mais relie désormais, au lieu des variables d'état elles-mêmes, leurs incréments. La loi de comportement élastique non linéaire est en effet obtenue par différentiation des relations d'état (II.5) à (II.7) et fait intervenir la différentielle seconde de l'énergie libre  $\Psi$  — qui, contrairement au cas linéaire, n'est plus ici supposée quadratique. On exprime donc simplement et directement une relation linéaire identique entre incréments de contraintes et incréments de déformations, et dont la matrice garde la même forme que dans le cas linéaire, mais avec des coefficients dépendant des valeurs actuelles des variables d'état:

$$(II.18) \quad d\sigma = C: d\varepsilon - B_i M_{ij} \frac{dm_j}{\rho_j}$$

$$(II.19)_i \quad dp_i = M_{ij} \left( -B_j: d\varepsilon + \frac{dm_j}{\rho_j} \right)$$

$$(II.20) \quad d\sigma = C_0: d\varepsilon - B_i dp_i$$

L'ensemble des coefficients de la loi de comportement gardent la même signification physique et les mêmes caractéristiques (dimension et symétrie) que précédemment. Cependant, contrairement au cas linéaire, ce sont là des modules et coefficients tangents reliant linéairement les variations infinitésimales des variables d'état autour de l'état actuel du milieu. C'est pourquoi ces coefficients tangents dépendent désormais des variables d'état macroscopiques, ainsi que de variables relatives à chacun des divers constituants (masses volumiques en particulier). La relation (II.12) (et son équivalent (II.17) dans le cas isotrope) est conservée sous la même forme. Les coefficients  $B_i$  et  $M_{ij}$  du couplage hydro-mécanique, issus de la différentiation des relations d'état macroscopiques, s'expriment comme suit en fonction du potentiel thermodynamique  $\Psi$ :

$$(II.21)_{ij} \quad M_{ij} = \rho_i \rho_j \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m_i \partial m_j} (\varepsilon, m_k)$$

$$(II.22)_i \quad M_{ij} B_j = -\rho_i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon \partial m_i} (\varepsilon, m_k)$$

Dans la relation (II.22), le tenseur de Biot  $B_i$  est remplacé par un tenseur sphérique  $b_i \mathbf{1}$  dès lors que le couplage hydro-mécanique est supposé isotrope. Dans ce cas, d'ailleurs, comme dans le cas linéaire avec l'équation (II.13), la loi de comportement peut se mettre sous forme d'une relation matricielle entre les variables généralisées introduites au paragraphe précédent:

$$(II.23) \quad \begin{bmatrix} d\sigma \\ dp_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & (-bM)^t \\ -bM & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon \\ dm_j/\rho_j \end{bmatrix}$$

Lorsque, enfin, l'ensemble du comportement est supposé isotrope, la formulation de la loi de comportement se résume à la donnée suivante des relations entre composantes moyennes des variables d'état, comme dans le paragraphe précédent:



$$(II.24) \quad d\sigma = K d\varepsilon - b_i M_{ij} \frac{dm_j}{\rho_j}$$

$$(II.25)_i \quad dp_i = M_{ij} \left( -b_j d\varepsilon + \frac{dm_j}{\rho_j} \right)$$

$$(II.26) \quad d\sigma = K_0 d\varepsilon - b_i dp_i$$

En fait, en plus de l'hypothèse d'isotropie du matériau, ces expressions supposent une forme particulière de l'énergie libre  $\Psi$ , découplant les influences respectives de la trace  $\varepsilon$  et de la partie déviatorique  $e$  du tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

$$(II.27) \quad \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, m_j, T) = \Psi_\varepsilon(\varepsilon, m_j, T) + \Psi_e(e, m_j, T)$$

De plus, comme on le supposera dans la suite de l'étude, choisir un module de cisaillement  $\mu$  constant (dès lors déterminé une fois pour toutes à partir d'une mesure expérimentale unique), revient à ne considérer, pour la composante de  $\Psi$  déterminée par le tenseur déviatorique  $e$ , que des formes linéaires en  $\gamma = (2e:e)^{1/2}$ . Soit la forme suivante de l'énergie libre<sup>5</sup>:

$$(II.28) \quad \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, m_j, T) = \Psi_\varepsilon(\varepsilon, m_j, T) + \Psi_e^0 \gamma$$

Une forme *a priori* aussi restrictive de l'énergie libre peut paraître une importante limitation au but théorique fixé — à savoir l'élaboration d'une loi de comportement non linéaire. Cette objection apparaîtra d'autant plus justifiée lorsque, dans la pratique des calculs et des exemples traités, le module d'incompressibilité drainé tangent  $K_0$  sera pris constant (donc une dépendance linéaire en  $\varepsilon$  de la loi de comportement). En fait, par rapport à la problématique visée dans cette étude, les véritables non-linéarités résident dans l'influence des variables relatives aux fluides interstitiels et à leurs couplages avec le squelette — c'est-à-dire dans la dépendance des coefficients de la loi de comportement en fonction des variables  $m_j$  ou  $p_i$ .

La remarque précédemment faite au sujet du retrait dû aux seuls effets capillaires et à leur couplage avec la déformation demeure parfaitement valable, comme le montre immédiatement l'examen des relations de comportement (II.20) et (II.26).

### II.2.3. Relations de Maxwell sur les dérivées croisées.

La loi de comportement poroélastique non linéaire ayant ainsi été formulée, on peut établir certaines relations entre ses coefficients. Ces relations, dites de Maxwell, sont des relations de symétrie aux dérivées partielles exprimant le fait que les incréments de contrainte, déformation, apports de masse et pression apparaissant dans les équations d'état macroscopiques (II.18) à (II.20) sont des différentielles totales des variables d'état correspondantes. Ceci va de soi pour ce qui concerne les trois premières, introduites comme variables d'état reliées directement à l'échelle macroscopique par la relation fonctionnelle

<sup>5</sup> Voir annexe III.

(II.5). Ceci est également vrai pour les pressions interstitielles dont le paragraphe II.1.3. a montré qu'elles pouvaient être considérées comme grandeurs macroscopiques s'exprimant en fonction du tenseur des déformations et des apports de masse.

Parmi ces relations de symétrie, les plus intéressantes pour la suite de notre étude sont probablement celles issues de la relation (II.20). Laquelle suppose implicitement que le tenseur des contraintes puisse s'exprimer comme fonction du tenseur des déformations et des pressions partielles. Ce qui est mathématiquement correct, grâce à un changement de variables  $(\epsilon, m_j) \rightarrow (\epsilon, p_i)$  dont le § II.1.2. a montré la validité, sous la condition d'inversibilité de la différentielle seconde à déformation bloquée de l'énergie libre  $\Psi$  — condition qui, dans le cadre poroélastique adopté, équivaut de manière immédiate (grâce à la relation (II.21) de définition des coefficients  $M_{ij}$  et à la propriété de multilinéarité du déterminant) à l'inversibilité de la matrice  $M$ , soit:

$$\det M \neq 0$$

Sous cette condition, qu'on supposera implicitement vérifiée tout au long de cette étude, on est ainsi autorisé à écrire formellement:

$$m_j = m_j (\epsilon, p_i)$$

et par suite, grâce à l'injection de ce changement de variables dans la relation d'état macroscopique (II.5):

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} (\epsilon, m_j) = \sigma (\epsilon, p_i)$$

De même, toujours par le truchement du changement de variables  $(\epsilon, m_j) \rightarrow (\epsilon, p_i)$ , les coefficients de la loi de comportement peuvent être considérés comme des fonctions du tenseur de déformation et des pressions partielles. En se plaçant occasionnellement dans ce nouveau système de variables d'état, on peut ainsi déduire de la relation incrémentale (II.20), qui est donc bien une relation différentielle, les symétries suivantes:

$$(II.29)_i \quad \left( \frac{\partial B_i}{\partial \epsilon} \right)_{pk} = - \left( \frac{\partial C_0}{\partial p_i} \right)_{\epsilon, pk \neq i}$$

$$(II.30)_{i \neq j} \quad \left( \frac{\partial B_i}{\partial p_j} \right)_{\epsilon, pk \neq j} = \left( \frac{\partial B_j}{\partial p_i} \right)_{\epsilon, pk \neq i}$$

Lorsqu'on se place dans le cas d'un comportement isotrope, ces relations s'obtiennent de même entre coefficients scalaires et moyennes volumiques des variables d'état de la relation (II.26):

$$(II.31)_i \quad \left( \frac{\partial b_i}{\partial \epsilon} \right)_{pk} = - \left( \frac{\partial K_0}{\partial p_i} \right)_{\epsilon, pk \neq i}$$

$$(II.32)_{i \neq j} \quad \left( \frac{\partial b_i}{\partial p_j} \right)_{\epsilon, pk \neq j} = \left( \frac{\partial b_j}{\partial p_i} \right)_{\epsilon, pk \neq i}$$

Voilà donc établie, à ce stade, la loi de comportement macroscopique poroélastique non linéaire d'un milieu poreux non saturé, ainsi qu'un certain nombre de relations croisées entre dérivées partielles des coefficients introduits. Jusqu'alors étendue à l'ensemble des lois de comportement du genre, notre étude se bornera par la suite au cas, suffisamment pertinent pour les applications pratiques envisagées, d'un comportement isotrope.

### **II.3. Identification de la loi de comportement poroélastique non linéaire.**

Une fois postulée la forme envisagée de la loi de comportement, reste pour nous à établir l'expression des coefficients obtenus en tant que fonctions des variables d'état du modèle, et à définir leurs ordres de grandeur. A l'exception de l'hypothèse fondamentale, que traduit la relation (II.8), de coïncidence des définitions microscopique et macroscopique de l'enthalpie libre massique de chaque fluide interstitiel, la description et la modélisation ont été élaborées uniquement et directement à l'échelle macroscopique, grâce notamment au recours à une thermodynamique purement macroscopique. Mais le complet établissement d'un modèle purement macroscopique suppose que l'ensemble de ses caractéristiques soient directement appréhendées à l'échelle macroscopique. Autrement dit, il est indispensable que puissent être mises en oeuvre à cette échelle toutes les expériences nécessaires à la mesure et à la connaissance de tous les paramètres du modèle.

Or dans le cas qui nous occupe d'un milieu polyphasique, siège éventuel de réactions chimiques entre constituants ou de changements de phase, il est bien évident que les expériences nécessaires à la complète détermination des coefficients macroscopiques de la loi de comportement sont à la fois bien trop nombreuses et trop délicates pour être toutes réalisables. Plus précisément, dans le cas de l'application envisagée au cas du retrait de dessiccation, le nombre des résultats expérimentaux disponibles et utilisables à la détermination du modèle est assez réduit. Comme nous le verrons en détail dans un chapitre ultérieur, la seule donnée expérimentale à laquelle nous ayons accès, en dehors des traditionnels modules de cisaillement et d'incompressibilité, est la donnée d'une courbe reliant pression capillaire (c'est-à-dire différence de pression entre phases gazeuse et liquide) et saturation en liquide.

Cette carence oblige à recourir à d'autres moyens d'appréhension de la réalité physique. Ainsi est-on conduit, selon les circonstances, à introduire des règles de dépendance empiriques ou phénoménologiques, à formuler des hypothèses physiques ou des hypothèses de modélisation plus ou moins fortes. Mais en premier lieu, et dans le cadre le plus général de comportement poroélastique, l'écriture de relations simples d'homogénéisation permet d'introduire un certain nombre de relations entre paramètres de la loi de comportement macroscopique et caractéristiques physiques, souvent connues, des différents constituants pris isolément. Dans la perspective du milieu tel qu'il est décrit, il s'agit là d'un passage micro-macro.

Nous disposons donc en définitive de deux voies essentielles de connaissance du réel, qui débouchent sur deux méthodes distinctes de détermination des coefficients du modèle théorique macroscopique : une méthode de compatibilité micro-macro, qui consiste à prendre en considération, chaque fois qu'elles sont accessibles, les propriétés physiques élémentaires, microscopiques, des divers constituants et à les traduire en termes de coefficients macroscopiques ; une méthode d'identification expérimentale, consistant en somme à attribuer aux coefficients manquants du modèle macroscopique une valeur expérimentale — qui varie en fonction des variables d'état.

## II.3.1. Relations de compatibilité micro-macro.

### II.3.1.1. Lois d'état microscopiques.

Dans des conditions que nous expliciterons plus loin (voir § II.3.1.2. et § II.3.1.3.), nous pouvons ainsi établir, par identification micro-macro des lois de comportement microscopiques de chacun des constituants, des relations faisant intervenir les coefficients des lois microscopiques en question et les coefficients macroscopiques  $K_0$ ,  $K$ ,  $b_i$  et  $M_{ij}$  introduits dans la formulation précédente de la loi de comportement élastique non linéaire adoptée, à l'échelle macroscopique, pour la description du milieu.

Explicitons, pour ce faire, les lois de comportement (ou équations d'état) "microscopiques" des constituants considérés.

Pour la phase solide, on adoptera une loi d'élasticité linéaire classique:

$$(II.33) \quad \sigma_s = K_s \varepsilon_s$$

donc en écriture incrémentale:

$$(II.34) \quad d\sigma_s = K_s d\varepsilon_s$$

relation comportementale dans laquelle  $\sigma_s$  et  $\varepsilon_s$  désignent respectivement la contrainte et la déformation moyennes caractérisant la seule matrice solide, à l'échelle microscopique.

Pour les constituants fluides, liquides ou gaz, on écrira d'une manière générale les équations d'état sous la forme différentielle suivante:

$$(II.35)_i \quad \frac{d\rho_i}{\rho_i} = \frac{dp_i}{K_i}$$

$K_i$  désignant le coefficient d'incompressibilité du fluide (i), variable *a priori*, et fonction des variables d'état définissant l'état dudit fluide (i). Notons au passage que cette expression de la loi d'état du fluide (i) vérifie bien la remarque formulée au paragraphe II.1.2., selon laquelle, du fait de la définition même de la pression partielle, la masse volumique  $\rho_i$  et la pression  $p_i$  relatives à un même constituant (i) sont liées par une relation biunivoque, exprimée ici sous sa forme incrémentale la plus générale. De surcroît, toujours d'après les développements du § II.1.2., l'hypothèse d'idéalité des éventuels mélanges présents dans le milieu interstitiel permet de définir l'équation d'état de n'importe quel composant sous la forme (II.35). On peut en particulier remarquer que l'équation d'état d'un gaz parfait (avec  $K_i=p_i$ ) ou celle d'un fluide incompressible (avec  $K_i=\infty$  et  $\rho_i=\rho_i^0$ ) s'écrivent toutes deux sous la forme précédente.

Le procédé d'homogénéisation consiste à écrire le tenseur des contraintes macroscopique, relatif à l'ensemble du milieu poreux, comme partition des contributions, évaluées à l'échelle macroscopique, de chacun des constituants en jeu. Ainsi l'on écrira la partition suivante sur les composants:

$$(II.36) \quad d\sigma = (1-\phi) d\sigma_s - \phi_i dp_i$$

relation dans laquelle  $\phi$  désigne la porosité du milieu poreux et  $\phi_i$  la fraction volumique (c'est-à-dire la proportion du volume total) occupée par le constituant (i).

Il est important de noter à ce stade que la partition des contraintes telle qu'elle est écrite ci-dessus suppose que, en moyenne, les contraintes exercées sur les phases fluides se réduisent à des forces de pression, et que par ailleurs il existe une partition claire des différentes pressions fluides et des fractions volumiques (c'est-à-dire des volumes occupés par les différents constituants). Or cette supposition ne va pas de soi : elle impose même des "aménagements" dans les cas où plusieurs constituants peuvent être amenés à se mélanger — typiquement le cas de gaz différents (ou du moins considérés distinctement) ou de liquides miscibles.

Aussi nous faudra-t-il soigneusement préciser la partition des volumes des différents constituants du milieu, selon les cas envisagés : on examinera successivement le cas où les constituants ne se mélangent pas (donc occupent des volumes disjoints), puis celui, plus intéressant du point de vue pratique qui nous occupe en définitive, d'un mélange de deux gaz en présence d'une phase liquide.

Les différentes relations ci-dessus seront ainsi traduites en fonction des variables d'état choisies pour la description :  $\epsilon$  et  $m_i$  grâce à la relation de déformation volumique et à la définition de l'apport de masse  $m_i$ .

Pour la définition de la déformation macroscopique  $\epsilon$ , on procède, par homogénéisation, à une répartition entre la matrice solide — de déformation microscopique  $\epsilon_s$  — et l'espace poreux. Ce qui met bien l'accent sur la distinction entre matrice et squelette : défini à l'échelle macroscopique, le squelette englobe la matrice ( qui correspond à une échelle de description inférieure ) et l'espace poreux, chacun contribuant à la déformation totale macroscopique :

$$(II.37) \quad (1-\phi) \epsilon = (1-\phi_0) \epsilon_s + (\phi - \phi_0)$$

La variable de masse  $m_i$ , relative au fluide (i), peut elle aussi être reliée aux variables microscopiques définissant l'état du constituant (i), et particulièrement à sa masse volumique  $\rho_i$ , via l'écriture du bilan de masse élémentaire relatif au constituant (i) :

$$(II.38)_i \quad m_i = (1+\epsilon) \rho_i \phi_i - \rho_i^0 \phi_i^0$$

relation qui correspond en fait à la forme linéarisée de l'équation de transport (I.10). Les relations (II.37) et (II.38) s'écrivent sous la forme différentielle suivante (avec  $\phi \neq \phi_0$ ):

$$(II.39) \quad d\epsilon_s = d\epsilon - \frac{d\phi}{1-\phi}$$

$$(II.40)_i \quad dm_i = (1+\epsilon) d(\rho_i \phi_i) + \rho_i \phi_i d\epsilon$$

Tous les éléments sont donc en place pour que, par comparaison entre les relations tirées de l'analyse microscopique du milieu et la forme postulée pour le comportement global du milieu à l'échelle macroscopique, puissent être établies les différentes relations qui nous intéressent entre coefficients macroscopiques et propriétés physiques, supposées connues, de chaque constituant. Nous allons mener cette analyse en séparant les deux cas distingués ci-dessus.

### II.3.1.2. Cas de constituants disjoints.

Plaçons-nous dans un premier temps dans le cadre de l'hypothèse suivante : les différents constituants considérés occupent des volumes distincts et disjoints. Hypothèse qui exclut la prise en compte de constituants indépendants formant un mélange. De sorte que, si l'on désigne par  $\phi_i$  la fraction volumique associée à chaque constituant interstitiel (i), l'on peut écrire :

$$(II.41) \quad \sum_i \phi_i = \phi$$

L'écriture de la précédente relation sous sa forme incrémentale fait apparaître les incréments de fraction volumique  $d\phi_i$  qui, grâce à la relation (II.40) et aux équations d'état microscopiques (II.35), peuvent s'exprimer en fonction des incréments de variations de masse, de pressions et de déformation. Par sommation de ces expressions, la relation (II.41) s'exprime finalement sous la forme incrémentale suivante — au premier ordre en  $\varepsilon$ :<sup>6</sup>

$$(II.42) \quad d\phi = \sum_i \left[ \frac{dm_i}{\rho_i} - \phi_i \frac{dp_i}{K_i} \right] - \phi d\varepsilon$$

Il est intéressant, à ce niveau de l'identification, d'écrire l'ensemble des relations en fonction des pressions partielles et de la déformation. En particulier, les équations d'état macroscopiques des fluides interstitiels (II.25) permettent, après introduction de l'inverse, noté  $N$ , de la matrice de Biot  $M$ , d'exprimer simplement les variations de masse en fonction des pressions et de la déformation:

$$(II.43)_i \quad \frac{dm_i}{\rho_i} = N_{ij} dp_j + b_i d\varepsilon$$

En combinant les deux précédentes relations, on parvient ainsi à établir l'expression différentielle de la porosité en fonction de la déformation et des pressions partielles:

$$(II.44) \quad d\phi = \left( \sum_i b_i - \phi \right) d\varepsilon + \left( \sum_j N_{ij} - \frac{\phi_i}{K_i} \right) dp_i$$

De sorte qu'en combinant (II.44) avec l'équation d'état microscopique (II.34) de la matrice solide, la relation micro-macro (II.36) de partition des contraintes et la relation (II.39) de conservation des volumes, on obtient finalement:

$$(II.45) \quad d\sigma = \left( 1 - \sum_i b_i \right) K_s d\varepsilon - K_s \left( \frac{\phi_i}{K_s} - \frac{\phi_i}{K_i} + \sum_j N_{ij} \right) dp_i$$

<sup>6</sup> L'ensemble des relations mentionnées dans ce chapitre sont au premier ordre en  $\varepsilon$  (négligeable devant 1, conformément à l'hypothèse de base des déformations infinitésimales). Cependant, pour toutes les opérations de dérivation, l'expression réelle, en fonction de  $\varepsilon$ , des grandeurs obtenues est nécessaire. Ces pourquoi sont présentées dans l'annexe I les relations exactes correspondant aux relations qui figurent dans ce chapitre.

Le développement des relations d'homogénéisation et leur comparaison avec la forme des lois de comportement macroscopiques, en particulier la relation (II.24), conduit aux égalités suivantes:

$$(II.46) \quad \sum_j b_j = 1 - \frac{K_0}{K_s}$$

$$(II.47)_i \quad \sum_j N_{ij} = \frac{b_i - \phi_i}{K_s} + \frac{\phi_i}{K_i}$$

dont la combinaison permet d'obtenir un certain nombre d'équations d'identification des modules de Biot macroscopiques en fonction des modules d'incompressibilité microscopiques des différents coefficients<sup>7</sup>:

$$(II.48)_j \quad \left( \frac{b_i - \phi_i}{K_s} + \frac{\phi_i}{K_i} \right) M_{ij} = 1$$

On pourra noter la forte analogie de ces relations (II.46) et (II.48) avec celles obtenues dans le cadre des milieux poreux saturés<sup>8</sup>.

Au terme de l'identification micro-macro, il est intéressant de faire le décompte des coefficients à déterminer de la loi de comportement et de le mettre en regard de celui des relations d'homogénéisation. Ainsi, si  $n$  désigne le nombre total des coefficients interstitiels, on pourra dénombrer successivement:

2	modules ( $K_0$ et $\mu$ ) pour la matrice $C$ d'élasticité isotrope
$\frac{n(n+1)}{2}$	modules de Biot pour la matrice $M$ , symétrique
$n$	coefficients de Biot pour le vecteur $b$
$\frac{n(n+3)}{2} + 2$	nombre total de coefficients indépendants à déterminer

Dénombrons maintenant les relations indépendantes dont nous disposons ; après bref examen, on totalise :

<sup>7</sup> Voir la démonstration du passage des relations sur  $N$  aux relations sur  $M$  dans l'annexe II.

<sup>8</sup> Cf. Coussy (1991), p. 417.

1	relation (II.40) sur les coefficients de Biot du vecteur $\mathbf{b}$
$n$	relations (II.41) ou (II.42) sur les modules de Biot de la matrice $\mathbf{M}$ (ou sur ceux de son inverse $\mathbf{N}$ )
$n+1$	nombre total de relations indépendantes micro-macro

Au total, il est donc aisé de constater qu'il y a un déficit de  $\frac{n(n+1)}{2} + 1$  relations micro-macro par rapport au nombre des coefficients à déterminer.

### II.3.1.3. Cas d'un milieu interstitiel contenant un mélange.

Le paragraphe précédent étendait aux milieux non saturés les relations couramment utilisées dans le cas des milieux poreux saturés, en se fondant sur l'hypothèse de constituants interstitiels occupant des domaines disjoints de l'espace poreux (c'est l'hypothèse qui sous-tend, en effet, la relation (II.41)). Or, nombre de cas pratiques sortent de ce cadre très particulier en faisant intervenir des mélanges entre plusieurs constituants, notamment gazeux. Il convient donc maintenant d'examiner le cas des mélanges.

Pour simplifier l'étude, on supposera l'existence d'un seul mélange dans le milieu interstitiel. Toutes les autres phases seront supposées disjointes, comme précédemment. En outre, conformément à ce qui a été annoncé au § II.2.1., ce mélange sera supposé idéal, de sorte que les relations d'état de ses différents composants demeurent sous la forme adoptée en (II.35). Du point de vue des notations, on introduit deux systèmes distinctifs en employant des minuscules grecques pour les constituants du mélange et des majuscules latines pour les autres, les minuscules latines continuant de désigner indifféremment les uns et les autres.

Dès lors, on peut procéder au même raisonnement qu'au paragraphe précédent, moyennant quelques modifications. Ainsi, il convient de prêter attention au fait que, les constituants du mélange occupant un volume commun de l'espace interstitiel, dont on notera  $\phi_g$  la fraction volumique (l'indice  $g$  se réfère, par anticipation, au cas d'un mélange gazeux), la relation (II.41) se trouve remplacée par la suivante:

$$(II.49) \quad \phi_g + \sum_I \phi_I = \phi$$

En outre, le fait que les constituants du mélange soient caractérisés par la même fraction volumique  $\phi_g$  permet d'écrire, en se reportant à l'équation de conservation de la masse (II.40) combinée à l'équation d'état (II.36) de chacun d'eux:

$$(II.50)_\alpha \quad d\phi_g = \frac{dm_\alpha}{\rho_\alpha} - \phi_g \frac{dp_\alpha}{K_\alpha} - \phi_g d\varepsilon$$

ce qui, après introduction de la matrice  $\mathbf{N}$  permettant de relier les apports de masse aux pressions partielles et à la déformation volumique s'écrit:



$$(II.50b)_\alpha \quad d\phi_g = (b_\alpha - \phi_g) d\varepsilon + \sum_i N_{\alpha i} dp_i - \frac{\phi_g}{K_\alpha} dp_\alpha$$

d'où l'on déduit, du fait de l'indépendance des variables d'état (donc de l'unicité de la décomposition précédente de la différentielle  $d\phi_g$ ):

$$(II.51)_\alpha \quad b_\alpha = b_g \quad \text{indépendant de } \alpha$$

$$(II.52)_{I,\alpha} \quad N_{\alpha I} = N_I \quad \text{dépendant du constituant (I) extérieur au mélange, mais pas de } \alpha$$

$$(II.53)_{\alpha \neq \beta} \quad N_{\alpha\beta} = N_g \quad \text{indépendant de } \alpha \text{ et } \beta$$

$$(II.54)_\alpha \quad N_{\alpha\alpha} = \frac{\phi_g}{K_\alpha} + N_g$$

Ce sont là des relations de «pseudo-symétrie» entre coefficients de la loi de comportement relatifs aux constituants du mélange qui, occupant un même volume et n'exerçant entre eux aucune interaction microscopique, jouent un rôle symétrique du point de vue du couplage macroscopique avec l'état mécanique (relation (II.51)), avec les constituants extérieurs au mélange (relation (II.52)) ainsi que vis-à-vis des autres composants du mélange (relations (II.53) et (II.54)).

Une fois posées ces égalités, spécifiques d'un mélange microscopiquement idéal, on peut poursuivre, comme au précédent paragraphe, la différentiation de la relation (II.49). Ainsi, la relation (II.50) peut être aisément généralisée au cas de tout fluide (i), extérieur ou non au mélange, après simple substitution de l'indice  $\alpha$  par l'indice i, et de la fraction volumique  $\phi_g$  du mélange par celle,  $\phi_i$ , du fluide (i). De même la relation (II.43) peut être reconduite. Ces opérations accomplies, on obtient aisément les relations supplémentaires qui suivent entre coefficients macroscopiques:

$$(II.55) \quad b_g + \sum_I b_I = 1 - \frac{K_0}{K_s}$$

$$(II.56) \quad N_g + \sum_I N_I = \frac{b_g - \phi_g}{K_s}$$

$$(II.57)_I \quad N_I + \sum_J N_{IJ} = \frac{b_I - \phi_I}{K_s} + \frac{\phi_I}{K_I}$$

Les relations (II.55) et (II.56) sont les équivalents respectifs des relations (II.46) et (II.47) obtenues dans le cas de constituants disjoints. L'ensemble des relations (II.51) à (II.57) forme un système d'équations indépendantes.

De même que précédemment<sup>9</sup>, on peut transcrire ces relations micro-macro en

<sup>9</sup> Voir la démonstration du passage des relations sur N aux relations sur M dans l'annexe II.

fonction des modules de Biot  $M_{ij}$ . On obtient aisément, pour ce qui est des relations de «pseudo-symétrie»:

$$(II.58)_{i \neq \alpha} \quad \frac{M_{i\alpha}}{K_\alpha} \quad \text{indépendant de } \alpha, \text{ mais dépendant du constituant (i)}$$

$$(II.59)_{\alpha \neq \beta} \quad \phi_g \left( \frac{M_{\alpha\alpha}}{K_\alpha} - \frac{M_{\alpha\beta}}{K_\beta} \right) = 1$$

et pour ce qui est des relations complémentaires, les relations (II.56) et (II.57) sont remplacées par la suivante:

$$(II.60)_i \quad M_{ij} \left( \frac{b_i - \phi_i}{K_s} + \frac{\phi_i}{K_j} \right) - M_{i\alpha} \frac{\phi_g}{K_\alpha} = 1$$

Obtenues directement, et de manière équivalente, d'après les relations (II.52) à (II.54), (II.56) et (II.57), sur les coefficients de  $N$ , les relations (II.58) à (II.60) forment, en association avec les relations (II.51) et (II.55) sur les coefficients de Biot, un système d'équations indépendantes.

Comme précédemment, effectuons rapidement le décompte des coefficients de la loi de comportement et celui des relations d'homogénéisation obtenues. Au départ, le nombre des coefficients à déterminer est rigoureusement le même que précédemment, en fonction du nombre  $n$  des constituants interstitiels:  $\frac{n(n+3)}{2} + 2$ .

Effectuons à présent le décompte de l'ensemble des relations dont nous disposons désormais, en introduisant, en plus du nombre total  $n$  des constituants interstitiels, celui, noté  $n_g$  ( $\geq 1$ ), des composants du mélange. Du fait de leur plus grande commodité, on raisonnera de préférence sur les relations (II.51) à (II.57) portant sur  $N$  et  $b$ .

Dénombrons en premier lieu les relations, nouvelles, de «pseudo-symétrie» (II.51) à (II.54):

$n_g - 1$	relations (II.45) traduisant des égalités entre coefficients de Biot des constituants du mélange
$(n - n_g)(n_g - 1)$	relations (II.46)
$\frac{n_g(n_g - 1)}{2}$	relations (II.47)
$n_g - 1$	relations (II.48) sur les termes diagonaux de $N$ dans le mélange
$(n_g - 1)(2 + n - \frac{n_g}{2})$	nombre de relations de «pseudo-symétrie»

Reste désormais à comptabiliser les relations non encore utilisées, (II.55) à (II.57), issues de l'identification micro-macro comme au précédent paragraphe:

1	relation (II.49) sur les coefficients de Biot du vecteur <b>b</b>
1	relations (II.50) sur les modules $N_I$
$n-n_g$	relations (II.51) sur les modules $N_{II}$
$n-n_g + 2$	nombre total des relations indépendantes micro-macro

On peut finalement constater qu'il y a, tout compte fait, un déficit de  $\frac{(n-n_g)(n-n_g+3)}{2} + 2$  relations micro-macro par rapport au nombre des coefficients à déterminer. Par comparaison avec le cas précédent, la situation s'est améliorée dans la mesure où l'on dispose désormais, en plus des précédentes relations d'identification micro-macro, de relations de «pseudo-symétrie» entre constituants du mélange. C'est qu'en réalité l'hypothèse — restrictive — d'idéalité du mélange à l'échelle microscopique introduit des contraintes supplémentaires entre constituants interstitiels, qui se traduisent par ces relations supplémentaires que sont les relations de «pseudo-symétrie».

#### II.3.1.4. Cas d'un mélange de deux gaz en présence d'une phase liquide.

Étudions maintenant, dans la suite directe du paragraphe précédent et en vue de l'application ultérieure au problème concret du séchage de dessiccation, le cas particulier d'un milieu dont l'espace poreux contient un mélange de deux gaz et une phase liquide. Les deux gaz en présence seront désignés par les indices (v) (*vapeur*, sans préjuger pour l'instant d'un quelconque rôle thermodynamique vis-à-vis de la phase liquide) et (a) (*air*) ; au liquide nous attribuerons l'indice (l).

A cette étude particulière correspond un ensemble précis de variables d'état macroscopiques, au nombre de quatre : conformément au choix adopté dans le cadre le plus général, nous prendrons  $\epsilon$ ,  $m_l$ ,  $m_v$  et  $m_a$  pour variables d'état du système. Les deux constituants gazeux occupent un même espace, dont on appellera  $\phi_g$  la fraction volumique; le liquide occupant le volume complémentaire dans l'espace poreux, sa fraction volumique est  $\phi_l = \phi - \phi_g$ .

Les relations de pseudo-symétrie établies dans le cas général d'un mélange idéal peuvent s'écrire ici, en fonction des modules de Biot:

$$(II.61) \quad b_v = b_a$$

$$(II.62) \quad \frac{M_{vl}}{K_v} = \frac{M_{al}}{K_a}$$

$$(II.63) \quad \phi_g \left( \frac{M_{vv}}{K_v} - \frac{M_{av}}{K_a} \right) = 1$$

$$(II.64) \quad \phi_g \left( \frac{M_{aa}}{K_a} - \frac{M_{va}}{K_v} \right) = 1$$

On reprendra la notation  $b_g$  introduite au paragraphe précédent pour désigner la valeur commune des coefficients de Biot de la vapeur et de l'air. En second lieu, la relation d'homogénéisation sur les coefficients de Biot s'écrit ici très simplement:

$$(II.65) \quad b_l + b_g = 1 - \frac{K_0}{K_s}$$

Enfin, les relations établies en (II.60) se réduisent à deux équations à choisir parmi les trois relations similaires suivantes:

$$(II.66) \quad \left( \frac{b_i - \phi_i}{K_s} + \frac{\phi_i}{K_i} \right) M_{il} - \frac{\phi_g}{K_a} M_{al} = 1$$

$$(II.67) \quad \left( \frac{b_i - \phi_i}{K_s} + \frac{\phi_i}{K_i} \right) M_{iv} - \frac{\phi_g}{K_a} M_{av} = 1$$

$$(II.68) \quad \left( \frac{b_i - \phi_i}{K_s} + \frac{\phi_i}{K_i} \right) M_{ia} - \frac{\phi_g}{K_v} M_{va} = 1$$

L'ensemble des relations énoncées ci-dessus forme un système de 7 équations indépendantes. Par ailleurs, par application du décompte général des coefficients de la loi de comportement effectué dans les précédents paragraphes, on dénombre dans le cas présent 11 paramètres à déterminer. Soit, en définitive, un déficit de quatre relations par rapport au nombre d'informations nécessaires à la détermination de l'ensemble des coefficients.

Une remarque simple peut nous permettre de réduire à trois le nombre des relations manquantes. En effet, si l'on raisonne, pour la matrice d'élasticité, en termes de module d'incompressibilité drainé  $K_0$  et de module de cisaillement  $\mu$ , on peut d'emblée éliminer le problème de la détermination de ce dernier coefficient: les fluides interstitiels étant supposés ne reprendre aucun effort de cisaillement, le module de cisaillement  $\mu$  du milieu poreux sera le même que pour le matériau sec constituant le squelette.

### II.3.2. La méthode d'identification expérimentale.

L'insuffisance des informations fournies par la méthode d'homogénéisation nous conduit à essayer de déterminer les coefficients manquants de notre modèle macroscopique, fonctions des variables d'état, grâce à certains résultats expérimentaux à notre disposition. C'est même là, répétons-le, la démarche naturelle d'une modélisation se voulant essentiellement macroscopique — le recours à des considérations de compatibilité micro-macro ne s'imposant que du fait de la complexité du milieu et des phénomènes physiques en jeu.

En premier lieu, qui dit expérience dit application du modèle théorique général à un cadre concret bien précis: matériau, composition du milieu interstitiel, phénomènes physiques (microscopiques ou macroscopiques) mis en jeu, etc. L'ensemble de ce paragraphe se place donc dans le cas particulier décrit précédemment — et qui est celui de l'application visée — d'un milieu poreux (en pratique sol, roche, béton, pâte de ciment, etc.) dont l'espace interstitiel contient un liquide (de l'eau), et un mélange idéal de deux gaz (vapeur d'eau et air). Ajoutons, par rapport à la description précédente, que certaines des expériences considérées impliquent un changement de phase entre le liquide et la vapeur (qui devient donc sa vapeur saturante), c'est-à-dire d'une liaison thermodynamique qui n'a pas été introduite, jusqu'ici, dans le modèle, et qui le sera ultérieurement en tant que liaison entre les variables d'état.

Ceci étant précisé, la méthode d'identification expérimentale se heurte d'emblée à une difficulté majeure : comment traduire ces résultats expérimentaux en fonction de nos variables ainsi que de l'exploitation qu'on désire leur réserver?

En fait, il nous faut retraduire, en fonction des variables d'état choisies pour notre modélisation, des données expérimentales déjà récoltées et exprimées selon d'autres grandeurs.

Ainsi, le premier travail à effectuer, à ce stade, est l'identification précise des résultats qui nous sont fournis et des conditions expérimentales de leur obtention<sup>10</sup>, une identification précise des quantités mesurées et des variables en fonction desquelles ces quantités sont portées, enfin une traduction de ces grandeurs et de ces variables expérimentales en fonction des variables d'état de notre propre modélisation théorique.

Dans un deuxième temps, nous serons amené à formuler certains cadres d'hypothèses — dont les fondements physiques seront examinés — afin d'obtenir une cohérence des données expérimentales avec nos principes théoriques et de permettre leur intégration dans notre modèle. Nous verrons que, dans certains cas précis, l'ensemble des coefficients de la loi de comportement peuvent être explicitement déterminés en fonction des variables d'état  $\epsilon$  et  $m_j$ .

### II.3.2.1. Données expérimentales: expériences de sorption-désorption et d'invasion capillaire

Exposons donc, en premier lieu, la forme des données expérimentales mises à notre disposition.

Ces résultats proviennent essentiellement de deux types d'expériences, réalisées sur des bétons ou des pâtes de ciment: expériences de *sorption-désorption* et expériences d'*invasion capillaire*. L'une et l'autre font intervenir un changement de phase, supposé non dissipatif (équilibre thermodynamique) entre le constituant liquide (l) et le constituant vapeur (v) — qui devient *vapeur saturante* du liquide (l).

Dans les deux cas, en plus de cette liaison thermodynamique, on impose une condition expérimentale supplémentaire :

- dans le cas de la *sorption-désorption*, la pression totale de la phase gazeuse (air+vapeur) est supposée constante tout au long de l'expérience et homogène à l'intérieur de l'échantillon;

---

<sup>10</sup> On se bornera ici à indiquer sommairement, mais aussi clairement que possible, le principe de l'expérimentation. Une présentation des conditions réelles de l'expérience et une discussion de la validité fondamentale des résultats obtenus s'imposent, certes, mais ne seront abordées que dans le prochain chapitre — cf. § III.2. et III.4.

- dans le cas de l'*invasion capillaire*, c'est la pression de la phase liquide qui est imposée, supposée constante et homogène, tandis que l'on fait varier, en la contrôlant, la pression totale de la phase gazeuse.

### II.3.2.2. Grandeurs expérimentales: humidité relative, pression capillaire, saturation. Leur introduction dans le modèle dans le cadre de la confrontation théorie-expérience.

L'expérience de sorption-désorption fait intervenir deux grandeurs physiques, dont l'une est contrôlée au cours du processus expérimental, l'autre étant mesurée au fur et à mesure de son déroulement. La grandeur contrôlée est l'*humidité relative* ; la quantité mesurée, la *saturation en liquide* <sup>11</sup>. Explicitons chacune d'elles.

En premier lieu, l'humidité relative représente le rapport entre la pression de vapeur saturante dans l'état actuel, défini par les variables de la description, et un état de référence pour lequel la pression de vapeur est la classique pression de vapeur saturante de l'eau libre (c'est-à-dire en conditions atmosphériques, la surface de séparation entre l'eau et sa vapeur saturante étant plane). Insistons bien sur le fait que la notion d'humidité relative, ainsi définie, représente un rapport de deux pressions de vapeur saturante — car dans les deux cas on suppose un changement de phase non dissipatif, traduit par l'égalité des enthalpies libres entre la phase liquide et sa vapeur saturante.

Il ne faut donc pas se laisser abuser par l'ambiguïté du terme *humidité relative*. A chaque instant, au voisinage de la surface de séparation air-liquide, la pression de la vapeur est égale à la pression de vapeur saturante. Simplement, cette valeur de la pression de vapeur saturante varie par rapport au cas usuel de l'eau libre, justement parce que l'eau n'est plus "libre": que la surface de séparation n'est plus plane, mais incurvée ; que la pression du liquide n'est plus égale à celle de la phase gazeuse ; que s'exercent des efforts tangentiels de tension superficielle.

C'est à ce niveau qu'intervient la notion de pression capillaire, en tant que notion microscopique. L'influence de ce facteur est un phénomène bien connu dans l'étude des bétons ou des sols et relativement bien identifié à certains mécanismes microscopiques gouvernant les interfaces liquide-vapeur. Il est en effet relié, à l'échelle du pore, à une différence de pression entre phase gazeuse et phase liquide, compensée du point de vue de l'équilibre de l'interface (assimilée à une membrane) par une force tangentielle s'écrivant comme rapport d'une tension superficielle constante et du rayon de courbure du ménisque séparant liquide et gaz (loi de Laplace).

Cependant, un tel concept est essentiellement microscopique, et semble inexploitable à l'échelle macroscopique, car associé à un "rayon de ménisque" qui n'a de sens qu'à l'échelle du pore. Cette absence d'une variable macroscopique associée à la notion de rayon de ménisque fait de la loi de Laplace une loi essentiellement microscopique, non transmissible à l'échelle de notre modèle. On découvre donc ici tout le sens physique de l'identification expérimentale: la donnée des résultats de l'expérience de sorption-désorption compense la perte d'une information microscopique, d'une loi d'état microscopique (la loi de

---

<sup>11</sup> En réalité la grandeur réellement mesurée au cours de ce type d'expérience est ce qu'on appelle la *perte en poids*, et qui correspond exactement à la perte de masse de l'échantillon observé. Cependant, la plupart des courbes expérimentales retraduisent cette grandeur en termes de *saturation volumique de liquide*, et c'est donc cette variable qui intervient dans l'identification expérimentale de notre modèle. Il y a là un problème de fond qui concerne le statut réel des variables mesurées expérimentalement et leur lien exact avec celles de notre modélisation. Cette réflexion nécessaire fera l'objet du prochain chapitre – cf. § III.2 et III.4.

Laplace) gouvernant l'interface liquide-gaz que l'on peut transcrire directement à l'échelle macroscopique. En fait, une fois traduite en termes de loi constitutive du milieu, l'identification expérimentale constitue très exactement l'équivalent macroscopique de la loi microscopique de Laplace: elle exprime, directement à l'échelle macroscopique, l'équilibre des interfaces liquide-gaz.

Nous sommes donc conduit à introduire la notion de pression capillaire  $p_c$ , de façon purement macroscopique, sans référence au phénomène microscopique que décrivent les notions de "tension superficielle" et de "rayon de ménisque":

$$(II.69) \quad p_c = p_g - p_l = p_v + p_a - p_l$$

Le rapprochement de la modélisation macroscopique et des phénomènes physiques (constatés d'après l'expérience) soulève ainsi le problème de l'intégration de la notion de pression capillaire dans le modèle: dans quelle mesure celui-ci fait-il intervenir la notion (macroscopique) de pression capillaire? à quel niveau du modèle est-elle introduite? comment l'influence des effets capillaires sur la valeur des coefficients de la loi de comportement macroscopique est-elle prise en compte?

La question qui se pose ici est bien celle de la traduction des phénomènes microscopiques en termes de loi de comportement macroscopique *via* les expériences de sorption-désorption et d'invasion capillaire dont nous disposons. Ce problème de la double adéquation du modèle théorique à la réalité physico-chimique d'une part et à l'information expérimentale d'autre part fera l'objet, précisément, du paragraphe suivant.

Logiquement, il apparaît alors qu'une étroite dépendance existe entre ce phénomène de capillarité (modification des conditions de changement de phase par rapport au cas "normal": forme des surfaces de séparation, différence entre pressions des deux phases,...) et la valeur de ce quotient des pressions de vapeur saturante qui définit l'humidité relative. Cette relation existe en effet, et découle directement de l'existence d'un changement de phase non dissipatif, que traduit l'égalité des deux enthalpies — celles-ci exprimées pour la circonstance en fonction des deux pressions. Relation que nous n'explicitons pas davantage pour l'instant, mais que nous étudierons plus précisément dans un prochain paragraphe. Il est cependant important de noter d'emblée que les résultats expérimentaux pourront être exploités alternativement et indifféremment en termes d'humidité relative ou de pression capillaire, le passage de l'une à l'autre de ces deux notions étant simple et systématique, sous certaines conditions précises qui seront explicitées au chapitre III.

La présentation des expériences et des grandeurs physiques qu'elles mettent en jeu soulève, au moment de leur confrontation avec le modèle théorique mis sur pied, un certain nombre de difficultés. La première d'entre elles, et sans doute la plus évidente, est celle de la traduction des grandeurs expérimentales (humidité relative, pression capillaire, saturation en eau) en fonction de nos variables d'état, ainsi que leur introduction dans le modèle. L'humidité relative a été définie, dans le cadre d'un changement de phase, comme rapport de la pression de vapeur saturante avec la pression de vapeur saturante à même température en l'absence de phénomènes de capillarité. Dans le cas le plus général (c'est-à-dire sans supposer nécessairement une relation thermodynamique entre les constituants (v) et (l)), on pourra garder cette dénomination d'humidité relative pour désigner le rapport de la pression de vapeur (qui n'est plus nécessairement vapeur saturante du liquide (l)) avec la pression de vapeur saturante en conditions standard:

$$(II.70) \quad h = \frac{p_v}{p_{vs}^0} \quad \text{avec } p_{vs}^0 = p_{vs}^0(T)$$

De la sorte, la notion d'humidité relative intervient relativement directement et naturellement dans le modèle, par l'intermédiaire de la pression de vapeur.

La pression capillaire ayant été introduite par la relation (II.69) comme différence entre pression de mélange gazeux et pression de liquide, il est aisé de déduire des relations de comportement (II.25) son écriture différentielle en fonction des variables d'état  $\varepsilon$  et  $m_j$ :

$$(II.71) \quad dp_c = (M_{vj} + M_{aj} - M_{lj}) \left( -b_j d\varepsilon + \frac{dm_j}{\rho_j} \right)$$

Laquelle permet de mettre en évidence la façon dont la notion de pression capillaire s'inscrit dans le cadre de notre modèle : c'est par l'intermédiaire des coefficients  $M_{ij}$  et  $b_j$  de la loi de comportement précédemment adoptée que se réalise sa prise en compte. L'essentiel des difficultés se résumant alors à la détermination de ces coefficients, en fonction de propriétés physiques microscopiques ou de constatations expérimentales, détermination dans laquelle intervient nécessairement la mesure des effets capillaires mis en évidence.

Reste la saturation en liquide : la notion est simple et ne pose aucun problème particulier. Il s'agit du pourcentage du volume poreux occupé par la phase liquide, dont on établit facilement, dans l'hypothèse d'une matrice incompressible ( $K_s = \infty$ ), l'expression suivante :

$$(II.72) \quad S_l = \frac{\phi_l}{\phi} = \frac{\rho_l^0}{\rho_l} \frac{\phi_l^0 + \frac{m_l}{\rho_l^0}}{\phi_0 + \varepsilon}$$

Dans le cas d'un liquide incompressible,  $S_l$  est entièrement déterminée par les deux variables  $\varepsilon$  et  $m_l$  : aussi est-il bien justifié de garder prioritairement l'une et l'autre de ces variables pour décrire le changement de phase, et, plus spécifiquement encore, l'expérience de sorption-désorption.

Remarquons pour terminer que, si elles n'ont été introduites qu'à ce stade de la présentation (*ie.* au stade de la présentation des expériences de sorption-désorption et d'invasion capillaire), les notions d'humidité relative et de saturation en liquide dépassent ce cadre. De manière générale, l'humidité relative est une notion caractéristique de tout changement de phase susceptible de présenter des phénomènes de capillarité. La saturation en eau, quant à elle, peut être introduite à n'importe quel niveau de la modélisation. Cependant, il est à noter que la variable saturation, définie comme le rapport de deux volumes actuels — volume occupé par la phase liquide et volume poreux —, possède en soi le statut d'une variable eulérienne et non lagrangienne: contrairement aux notions de variation de masse et de déformation — grandeurs essentiellement et exclusivement lagrangiennes dans la mesure où, dans leur concept, elles font référence à la configuration initiale — la saturation telle qu'usuellement introduite n'est aucunement attachée à la matière, à une particule suivie dans son mouvement, mais doit bien plus être regardée comme un champ scalaire donné en tout point géométrique de l'espace et à tout instant considéré. Le bref calcul qui précède constitue d'ailleurs une bonne illustration de ce caractère essentiellement non lagrangien de la saturation définie en (II.72): on a vu quelles fortes hypothèses de comportement microscopique étaient nécessaires à l'expression de cette variable en fonction



des variables d'état lagrangiennes de notre modélisation. C'est pourquoi la notion de saturation en eau n'est introduite dans notre modèle que par nécessité, au stade de l'identification expérimentale<sup>12</sup>.

### II.3.2.3. Confrontation modèle-expérience: les hypothèses retenues.

En dehors des questions de passage d'un système de variables à un autre, la nature et la formulation des données expérimentales ainsi fournies nous posent deux problèmes fondamentaux.

En premier lieu, ces données sont relatives à un contexte bien particulier : celui d'un changement de phase effectué dans des conditions expérimentales précises. Comment étendre ces résultats à un cadre plus général? Comment assurer que la détermination des coefficients réalisée grâce à ces deux expériences restera valable en dehors du cadre étroit des conditions dans lesquelles celles-ci ont été effectuées? Car il n'y a aucune raison, *a priori*, pour que ces coefficients gardent la même expression, la même valeur, dans un cadre différent — hors changement de phase, en particulier.

Deuxième objection, directement liée à la précédente: la question des variables dont dépendent les coefficients ainsi déterminés. En filigrane de ce qui était présenté dans le paragraphe précédent, notamment quant à la formulation des résultats des deux expériences citées, se profile le problème des variables — de leur nombre plus que de leur statut — gouvernant la loi de comportement.

En effet, les résultats expérimentaux permettent de relier l'humidité relative (ou, après calcul, la pression capillaire) à la saturation en liquide  $S_1$ . Donc une dépendance en fonction d'une variable unique. Cependant, dans le cadre général de notre modèle, les coefficients dépendent de quatre variables indépendantes. Le cadre particulier des expériences évoquées ci-dessus imposant deux relations entre ces variables — l'une traduisant l'équilibre thermodynamique, c'est-à-dire l'égalité des enthalpies libres du liquide et de la vapeur, l'autre étant liée à la condition spécifique imposée durant l'expérience —, le nombre des variables gouvernant ces deux résultats expérimentaux devrait théoriquement être égal à deux. Or les courbes tracées ne représentent la variation des différentes grandeurs caractéristiques qu'en fonction d'une variable unique, en l'occurrence la saturation en liquide  $S_1$ . Deux questions se posent alors :

- celle du caractère éventuellement partiel des résultats expérimentaux tels qu'il sont fournis, qui oublieraient de prendre en compte l'influence, théoriquement possible, d'une deuxième variable sur les grandeurs représentées ;

- celle de l'impossibilité d'étendre *a priori* ces résultats à un cadre plus large où interviennent d'autres variables, dont nous ignorons l'influence sur les coefficients mesurés.

Ainsi est-on amené à élaborer certains cadres d'hypothèses simplificatrices, dans le but de se ramener à une identification expérimentale, dans le cas de figure le plus général, une donnée expérimentale unique (en plus de la détermination, plus «classique», des modules  $K_0$  et  $\mu$ ).

---

<sup>12</sup> Le chapitre suivant montrera d'ailleurs que ce n'est qu'au prix d'un certain malentendu dans la traduction et la mise en forme des courbes de résultats expérimentaux. En effet, il se trouve que la variable effectivement mesurée est précisément la variation de masse d'eau (ou teneur en eau) et non la saturation. Si les courbes sont — souvent — exprimées en termes de saturation, c'est au prix d'un calcul intermédiaire, d'ailleurs sujet à caution, visant à substituer la saturation à la "perte en poids".

### Hypothèse H1 : matrice incompressible.

Une première hypothèse consiste à considérer que la matrice — c'est-à-dire les particules solides constituant le squelette — est incompressible. Ce qui suppose en particulier l'absence de porosité occluse, celle-ci contribuant en effet à augmenter considérablement la compressibilité des grains. Cette hypothèse s'écrit donc :

$$K_g = \infty$$

et conduit, par simplification de la relation (II.55), à un résultat tout à fait remarquable, portant sur les coefficients  $b_1$  et  $b_g$  :

$$(II.73) \quad b_g = 1 - b_1$$

Il ressort clairement de la relation (II.73), combinée aux égalités (II.31) et (II.32) entre dérivées partielles, que les coefficients  $K_0$ ,  $b_1$  et  $b_g$  sont fonctions des seules variables  $\varepsilon$  et  $p_c$ <sup>13</sup>:

$$(II.74) \quad K_0 = K_0 (\varepsilon, p_c)$$

$$(II.75) \quad b_1 = b_1 (\varepsilon, p_c) \quad \text{et} \quad b_g = b_g (\varepsilon, p_c)$$

---

<sup>13</sup> En effet, d'après l'égalité des coefficients de Biot de l'air et de la vapeur, on constate que la formulation différentielle (II.26) de la loi de comportement ne fait plus intervenir que la déformation volumique  $\varepsilon$ , la pression de liquide  $p_l$  et la pression  $p_g$  du mélange gazeux:

$$d\sigma = K_0 d\varepsilon - b_1 dp_l - b_g dp_g$$

En utilisant la relation (II.73), déduite de l'incompressibilité microscopique de la matrice, dans la précédente relation différentielle, et en effectuant les regroupements adéquats, on obtient:

$$d\sigma = K_0 d\varepsilon + b_1 dp_c - dp_g$$

qui montre que  $\sigma$  est fonction des trois variables d'état  $\varepsilon$ ,  $p_c$  et  $p_g$ , et permet d'établir, toujours selon le principe des symétries de Maxwell, les égalités aux dérivées partielles suivantes:

$$\left( \frac{\partial b_1}{\partial p_g} \right)_{\varepsilon, p_c} = 0$$

$$\left( \frac{\partial K_0}{\partial p_g} \right)_{\varepsilon, p_c} = 0$$

$$\left( \frac{\partial b_1}{\partial \varepsilon} \right)_{p_c, p_g} = \left( \frac{\partial K_0}{\partial p_c} \right)_{\varepsilon, p_g}$$

Il apparaît bien ainsi que les coefficients de Biot et le module d'incompressibilité drainé ne dépendent plus que de la déformation volumique et de la pression capillaire.

**Hypothèse H2** : matrice incompressible et  $K_0 = K_0(\epsilon)$ .

Restreignons encore le cadre de notre étude en ajoutant à H1 l'hypothèse suivante :

$$K_0 = K_0(\epsilon)$$

Cette supposition, délicate à manier, mérite quelques lignes de réflexion. Elle affirme, en fait, l'indépendance du module d'incompressibilité drainé tangent vis-à-vis des fluides interstitiels — de leurs apports de masse ou de leurs pressions. Ce qui revient à dire que, dans le cas d'une expérience parfaitement drainée autour d'un état donné quelconque, les fluides, puisqu'ils sont libres de s'écouler, ne participent pas à la rigidité du matériau, et que les valeurs de leurs pressions ne déterminent en rien celle du module  $K_0$ . Un peu de sens physique permet cependant d'entrevoir les limites d'une telle hypothèse : sans doute relativement satisfaisante pour des pressions capillaires modérées, elle a toutes les chances de s'avérer erronée dès qu'interviennent de fortes valeurs de ces pressions, pour lesquelles les fluides participent notablement à la rigidité du milieu, même en conditions drainées.

En somme, pour que cette hypothèse soit acceptable, il faut vérifier que l'on se trouve placé dans des conditions pour lesquelles les pressions interstitielles restent relativement modérées, par rapport au module d'incompressibilité du squelette à sec, ce qui semble concevable pour le cadre d'étude que nous nous sommes donné — à l'exception toutefois des cas de faibles saturations en eau, pour lesquels, à en croire les résultats expérimentaux (voir notamment les courbes de sorption-désorption), la pression capillaire peut atteindre des valeurs très élevées.

Associée à celle de l'incompressibilité de la matrice solide, cette deuxième hypothèse entraîne un résultat des plus intéressants: la dépendance des coefficients de Biot  $b_i$  en fonction de la seule pression capillaire  $p_c$  ; plus précisément, en vertu de l'égalité (II.73), on obtient successivement <sup>14</sup>:

$$(II.76) \quad b_l = b_l(p_c)$$

$$(II.77) \quad b_g = b_g(p_c) = 1 - b_l(p_c)$$

Ce qui implique, en clair, que la connaissance de l'ensemble des coefficients de Biot se ramène, du fait de la relation (II.73) traduisant l'incompressibilité de la matrice, à l'identification d'un seul d'entre eux — par exemple  $b_l$  ; et qu'en outre cette identification prend la forme d'une relation biunivoque entre  $b_l$  et la pression capillaire  $p_c$ , grandeur accessible par mesure expérimentale.

### **Hypothèse H3** : matrice et fluide incompressibles

Reprenons l'hypothèse d'incompressibilité de la matrice, mais en lui associant maintenant une autre hypothèse : celle de l'incompressibilité du liquide (l) ; on est alors placé dans les conditions suivantes :

---

<sup>14</sup> La démonstration est dans le droit fil de celle qui précède. Il suffit d'introduire dans la dernière relation de Maxwell de la note précédente l'indépendance de  $K_0$  en fonction de  $p_c$ . Le résultat (II.74/5) vient alors immédiatement.

$$K_g = \infty$$

$$K_l = \infty$$

la deuxième condition imposant corrélativement, conformément à la relation d'état (II.35) du liquide, la constance de sa masse volumique  $\rho_l$ .

Les relations de compatibilité (II.47) à (II.49) se simplifient alors considérablement et permettent, grâce aux lois d'état (II.35) des gaz (v) et (a), d'exprimer de manière explicite les coefficients  $M_{vv}$ ,  $M_{aa}$ ,  $M_{vl}$ ,  $M_{al}$  et  $M_{va}$  en fonction des variables d'état  $\epsilon$  et  $m_l$  ainsi que des coefficients d'incompressibilité respectifs,  $K_v$  et  $K_a$ , de la vapeur et de l'air :

$$(II.78) \quad M_{vv} = M_{vl} = M_{lv} = \frac{K_v}{\phi_g} = \frac{K_v}{\phi_g^0 - \frac{m_l}{\rho_l^0} + \epsilon}$$

$$(II.79) \quad M_{aa} = M_{al} = M_{la} = \frac{K_a}{\phi_g} = \frac{K_a}{\phi_g^0 - \frac{m_l}{\rho_l^0} + \epsilon}$$

$$(II.80) \quad M_{av} = M_{va} = 0$$

Remarquons en particulier la nullité du coefficient  $M_{av}$  représentant le couplage mécanique macroscopique entre les deux constituants qui composent le mélange gazeux. C'est par cette absence de couplage macroscopique entre les deux constituants gazeux que nous définirons l'idéalité à l'échelle macroscopique du mélange gazeux. Il est important de noter qu'à ce stade, cette définition de mélange idéal est une définition purement macroscopique, qu'il n'est pas évident de relier à la définition microscopique — retenue d'emblée comme hypothèse fondamentale de notre modélisation — dans la mesure, notamment, où elle fait intervenir des propriétés extérieures au mélange proprement dit : celles de la matrice solide et du liquide. Ainsi le mélange gazeux peut-il être non idéal dans son contexte macroscopique — c'est-à-dire que les deux gaz interagissent à l'échelle macroscopique — tout en étant idéal à l'échelle microscopique : il suffit pour cela que, du fait des compressibilités du solide et du liquide, les variations affectant l'un des deux gaz se répercutent sur le deuxième *via* la matrice ou le liquide, c'est-à-dire par l'effet d'une conjugaison des deux interactions air-(matrice, liquide) et vapeur-(matrice, liquide).

En fait, le coefficient  $M_{av}$  étant défini d'après la relation (II.21), il faut raisonner en termes d'enthalpies libres massiques  $g_i$ , et non selon les pressions partielles. Dans ces conditions, on s'aperçoit immédiatement de la signification du coefficient  $M_{av}$  : il représente l'influence d'une variation de masse d'air sur la valeur de l'enthalpie libre massique de la vapeur — et, réciproquement, d'un apport de masse de vapeur sur la valeur de l'enthalpie libre massique de l'air. Ainsi, si l'on suppose le liquide et le solide incompressibles — c'est-à-dire qu'ils n'interviennent pas dans l'interaction mécanique des deux constituants du mélange gazeux — la nullité de  $M_{av}$  exprime précisément l'absence d'interaction directe entre l'air et la vapeur : ce qui correspond exactement à l'hypothèse microscopique de mélange idéal, adoptée au départ de notre modélisation (cf. § II.1.2.).

Cependant, au niveau de notre modèle macroscopique, il est possible de fixer  $M_{av} \neq 0$ : ceci revient, à considérer un couplage, en termes d'enthalpies libres, entre les deux constituants du mélange gazeux. Si l'on suppose de surcroît la matrice et le liquide incompressibles, un tel couplage, représenté à l'échelle macroscopique par  $M_{av}$ , ne peut correspondre qu'à une interaction microscopique de la vapeur et de l'air : c'est dire qu'alors l'hypothèse de mélange idéal, formulée en II.1.2. n'est plus valide, et que l'égalité (II.8) qui la traduit, reliant les pressions partielles aux enthalpies libres massiques, est remplacée par l'égalité modifiée suivante:

$$dg_i = \frac{dp_i}{\rho_i^{eq}}$$

faisant intervenir, au lieu de la masse volumique réelle  $\rho_i$ , la masse volumique (dite «équivalente»)  $\rho_i^{eq}$  d'un réservoir de fluide (i) pur en équilibre thermodynamique avec le fluide (i) contenu dans le milieu réel et en interaction thermodynamique avec les autres constituants. Le rapport de cette masse volumique équivalente  $\rho_i^{eq}$  sur la masse volumique réelle  $\rho_i$  définit l'activité  $a_i$  du fluide (i) dans le milieu, fonction d'état de l'ensemble des variables macroscopiques<sup>15</sup>. C'est par l'argumentation macroscopique de l'activité  $a_i$  que le couplage microscopique des constituants interstitiels peut être représenté dans le modèle.

Ainsi, on peut conclure que le terme de couplage macroscopique  $M_{av}$  rend compte de l'interaction microscopique des deux constituants gazeux, et intègre des termes supplémentaires dus à la présence des phases solide et liquide : des termes de couplage *via* la matrice et le liquide.

Au-delà de ces expressions — partielles — de certains de nos coefficients macroscopiques en fonction de deux de nos variables d'état — en l'occurrence  $\epsilon$  et  $m_1$  — ce cadre d'hypothèses nous permet d'établir un résultat tout à fait remarquable, et qui découle immédiatement de la confrontation des relations précédentes avec l'égalité (II.71) établissant la différentielle de la pression capillaire en fonction des coefficients de la loi de comportement et des variables d'état  $\epsilon$  et  $m_1$ . On obtient en effet, après introduction des résultats (II.78) à (II.80) dans l'expression (II.71) de la différentielle  $dp_c$ :

$$(II.81) \quad dp_c = -M \left( -b_1 d\epsilon + \frac{dm_1}{\rho_1^0} \right)$$

où  $M$  est un module positif affecté à la pression capillaire, homogène à un module de Biot et défini par:

$$(II.82) \quad M = M_{ll} - (M_{vl} + M_{al})$$

La relation ci-dessus exprime en particulier l'indifférence de la pression capillaire aux variations de masse des constituants du mélange. Ainsi, dans le cas d'une matrice solide et d'une phase liquide simultanément incompressibles, il est établi que la pression capillaire ne dépend plus que de la déformation et de la variation de masse liquide:

<sup>15</sup> La pression  $p_i$ , qui est elle aussi la pression du fluide (i) pur en équilibre avec le fluide (i) interstitiel, reste quant à elle, par définition, la pression thermodynamique du fluide réel.

$$(II.83) \quad p_c = p_c (\epsilon, m_l)$$

Ce résultat est, par certains aspects, de première importance. Il nous permet, en effet, d'identifier la pression capillaire  $p_c$ , de manière tout à fait générale, à partir d'une donnée expérimentale particulière qui serait gouvernée par les seules variables  $\epsilon$  et  $m_l$ . Cependant, pour mieux permettre l'identification expérimentale, il est intéressant d'introduire ici la variable saturation en eau  $S_l$ , qui s'exprime aisément, d'après la formule (II.72), en fonction de la déformation et de la variation de masse liquide dans le cas ici considéré d'un liquide incompressible ( $\rho_l = \rho_l^0$ ). La relation (II.83) permet alors immédiatement d'établir la dépendance de la pression capillaire en fonction de la déformation volumique  $\epsilon$  et de la saturation en liquide  $S_l$ :

$$(II.84) \quad p_c = p_c (\epsilon, S_l)$$

Cette dépendance  $p_c = p_c(\epsilon, S_l)$ , établie entre grandeurs strictement macroscopiques, présente une analogie avec la loi microscopique de Laplace qu'elle est censée remplacer à l'échelle de la modélisation. La loi de Laplace relie en effet, à l'échelle du pore, la pression capillaire (différence entre pression du liquide et pression du gaz) au rayon de courbure  $R$  de l'interface liquide gaz par la relation:

$$p_c = \frac{\eta}{R}$$

où  $\eta$  désigne la tension superficielle de l'interface liquide-gaz, constante dans le volume. Cette relation microscopique, intransposable à l'échelle macroscopique par des méthodes directes d'homogénéisation (il est difficile de représenter par les variables macroscopiques une moyenne volumique de rayons de courbure), est remplacée dans le modèle par la relation (II.84). Mais, plus que d'un remplacement, on peut parler d'une analogie entre ces deux égalités. En effet, si l'on considère que la déformation  $\epsilon$  rend compte de la variation du volume poreux (la matrice solide étant incompressible) et que la saturation en liquide donne la fraction de ce volume poreux occupée par la phase liquide, on s'aperçoit que la loi macroscopique issue de (II.84) relie en fait la pression capillaire à une notion de géométrie, de répartition volumique des phases liquide et gazeuse.

Dans certains cas de réseau poreux particulièrement simple et régulier (cylindres de même rayon, par exemple) il est possible de relier mathématiquement la notion microscopique de rayon de courbure de l'interface liquide-vapeur aux deux variables macroscopiques  $\epsilon$  et  $S_l$ .

Cette liaison entre saturation, déformation et pression capillaire peut s'exprimer sous sa forme différentielle à partir — et en remplacement — de l'égalité (II.81):

$$(II.85) \quad \frac{dp_c}{M} = (b_l - S_l) d\epsilon - (\phi_0 + \epsilon) dS_l$$

Cette relation (II.85), qu'à condition d'argumenter correctement M on peut considérer comme différentielle de la saturation en fonction de la pression capillaire  $p_c$  et de la déformation  $\epsilon$ , peut être intégrée pour donner l'expression générale de  $S_1$  selon ces deux variables lorsqu'on adopte le cadre d'hypothèses plus restreint qui suit.

**Hypothèse H4 : H2 + H3.**

Regroupons en effet l'ensemble des hypothèses formulées précédemment :

- matrice et liquide incompressibles ;
- module d'incompressibilité drainé tangent fonction de la seule déformation.

La dernière de ces conditions, en particulier, implique la dépendance établie en (II.76) du coefficient de Biot du liquide en fonction de la seule pression capillaire. De sorte que, si l'on argumente le module M, ainsi que l'ensemble des autres coefficients, par la pression capillaire et la déformation, on peut considérer (II.81) comme différentielle de la variation de masse liquide et en déduire:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \frac{m_l}{\rho_l^0} \right)_{p_c} = b_l (p_c)$$

Or, la relation (II.72) liant apport de masse liquide, saturation et déformation peut s'écrire de la façon suivante:

$$\frac{m_l}{\rho_l^0} = (\phi_0 + \epsilon) S_1 - \phi_l^0$$

de sorte que, par confrontation des deux précédentes égalités, on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( (\phi_0 + \epsilon) S_1 \right)_{p_c} = b_l (p_c)$$

Son terme de droite ne dépendant que de la pression capillaire, il est aisé d'intégrer cette équation en fonction de la déformation  $\epsilon$ , et l'on montre finalement que la saturation est égale au coefficient de Biot du liquide, à un terme près qui dépend d'une fonction inconnue (notée  $s$ ) de  $p_c$ :

$$(II.86) \quad S_1 = b_l (p_c) + \frac{s(p_c)}{\phi_0 + \epsilon}$$

La relation (II.86) donne ainsi la forme générale des courbes de saturation en fonction de la déformation et de la pression capillaire. Parmi elles, il en est une qui possède un intérêt tout particulier: celle obtenue en prenant  $s=0$ , pour laquelle saturation volumique et coefficient de Biot de la phase liquide sont égaux. Cette solution particulière permet d'affirmer simultanément:

$$(II.87) \quad b_1 = S_1$$

et:

$$(II.88) \quad p_c = p_c ( S_1 )$$

Certes, il ne s'agit là que d'une solution *particulière* de l'ensemble des solutions  $S_1$  de la forme (II.86). La considérer comme expression exacte du coefficient de Biot de la phase liquide, c'est en fait énoncer une hypothèse supplémentaire, très forte. Tout le raisonnement précédent, supposant déjà un cadre restrictif d'hypothèses, ne saurait en constituer une démonstration : tout au plus une justification, plus sûrement une intuition et, en tout état de cause, une preuve de cohérence.

Cependant, si ce cas a été retenu, c'est qu'il présente des similitudes frappantes avec certains résultats expérimentaux ou théoriques plus classiques. En premier lieu, il est important de noter que le choix (II.87) du coefficient de Biot permet la continuité du modèle non saturé avec le modèle saturé en liquide ( $b_1=S_1=1$ , donc  $b_g=0$  et disparition des variables liées au mélange gazeux dans les relations de comportement) ou en gaz ( $b_1=S_1=0$ , donc disparition des variables liées au liquide dans les relations de comportement).

### II.3.3. Contrainte effective en milieu poreux non saturé. Surfaces d'état.

Mais, au delà d'une simple continuité avec le modèle saturé, le caractère le plus frappant du résultat (II.87) est qu'il permet de replacer, dans un cadre d'hypothèses bien spécifié, la notion de contrainte effective en milieu poreux non saturé, fréquemment employée, bien que souvent improprement définie, en mécanique des sols.

En effet, la contrainte effective, définie comme terme de contrainte relié à la seule variable de déformation — par prise en compte des pressions interstitielles dans la contrainte effective elle-même —, apparaît sous forme incrémentale dans la relation (II.26) de la loi de comportement:

$$(II.89) \quad d\sigma' = K_0 d\varepsilon = d\sigma + b_i dp_i$$

La relation (II.89) a bien le sens d'une relation constitutive entre l'incrément de déformation  $d\varepsilon$  et une grandeur incrémentale  $d\sigma'$  homogène à une contrainte. Mais il résulte de la relation incrémentale précédente l'impossibilité, dans le cas le plus général, de définir une contrainte effective  $\sigma'$  fonction d'état, puisque,  $d\sigma'$  n'étant pas une différentielle exacte, son intégration dépend non seulement de l'état initial et de l'état final du système, mais aussi du chemin suivi<sup>16</sup>:

$$(II.90) \quad \begin{aligned} \sigma'_{fin.} - \sigma'_{init.} &= \int_{E_{init.}}^{E_{fin.}} K_0 d\varepsilon \\ &= \sigma_{fin.} - \sigma_{init.} + \int_{E_{init.}}^{E_{fin.}} b_i dp_i \end{aligned}$$

---

<sup>16</sup> Cf. Coussy (1991), p. 419.



Ce qui permet de passer d'une relation incrémentale à une notion intégrée, fonction d'état, de contrainte effective, c'est l'hypothèse fondamentale énoncée en H2: celle de la dépendance du module d'incompressibilité  $K_0$  en fonction de la seule déformation. Il est alors clair, d'après la relation (II.82), que l'incrément  $d\sigma'$ , défini par un produit  $K_0$  de devenu différentielle exacte, peut être intégré pour donner naissance à une fonction d'état  $\sigma'$ , fonction des variables macroscopiques de la modélisation:

$$\sigma' = \sigma'(\varepsilon, m_j) = \bar{\sigma}'(\varepsilon, p_i)$$

On remarquera que le terme  $b_i dp_i$  devient nécessairement lui aussi intégrable, conformément à la double égalité incrémentale (II.89). Ce résultat découle directement des relations de Maxwell (II.32) assurant les symétries aux dérivées partielles entre les différents coefficients de Biot. Lorsque s'ajoute à l'hypothèse d'intégrabilité celle d'incompressibilité de la matrice solide (on retrouve alors l'ensemble de l'hypothèse H2) les termes différentiels de pression s'expriment aisément, en raison des différentes relations entre coefficients de Biot, en fonction de l'incrément de pression capillaire et du coefficient de Biot, fonction de la pression capillaire; on obtient en définitive:

$$(II.91) \quad \sigma' = \sigma + p_g - \int b_i(p_c) dp_c$$

Dans le cadre de l'hypothèse H4 que nous avons formulée, l'identification du coefficient de Biot à la saturation permet d'obtenir une expression de la contrainte semblable à celle que propose Bishop<sup>17</sup>, mais en écriture incrémentale seulement :

$$(II.92) \quad d\sigma' = d\sigma + dp_g + S_1 (dp_1 - dp_g)$$

expression qui présente l'avantage de coïncider avec la contrainte effective selon Terzaghi, plus classique encore, dans le cas d'un sol saturé en liquide ( $S_1 = 1$ ) ou en gaz ( $S_1 = 0$ ).

L'intégration — entre l'état actuel et l'état totalement saturé, pour lequel la contrainte effective vérifie la relation de Terzaghi — de  $d\sigma'$  à partir de l'égalité (II.92) conduit à l'expression suivante de la contrainte effective, semblable à l'expression (II.91) au remplacement de  $b_i$  par  $S_1$  près:

$$(II.93) \quad \sigma' = \sigma + p_g + \int S_1 dp_c$$

Au prix d'une intégration par partie, on peut écrire l'expression (II.92) de la contrainte effective sous la forme suivante:

$$(II.94) \quad \sigma' = \sigma + p_g + S_1 (p_1 - p_g) - \int_{S_1}^1 p_c(s) ds$$

---

<sup>17</sup> Cf. Bishop (1963).

où apparaît un premier terme intégré, correspondant exactement à la contrainte effective en milieu non saturé que propose Bishop<sup>18</sup>, corrigé par un terme additionnel égal à l'intégrale entre l'état initial et l'état final de la pression capillaire ( toujours positive ). Ce terme additionnel, d'autant moins négligeable que les effets capillaires sont plus importants, est assurément capital dans le cas des bétons. Peut-être est-il moins prépondérant dans la majorité des sols.

On voit donc en définitive la somme des hypothèses, microscopiques ( $K_s=\infty$ ,  $K_l=\infty$ ) ou macroscopiques ( $K_0=K_0(\epsilon)$ ,  $b_1=S_1$ ), qu'il convient d'adopter pour pouvoir justifier, dans le cadre d'un comportement poroélastique linéaire établi en vertu des principes de la thermodynamique, l'existence d'une contrainte effective en milieu poreux non saturé. Encore ces hypothèses conduisent-elles à une expression de la contrainte effective différente de celle souvent adoptée en mécanique des sols, d'après des considérations de moyennes volumiques de contraintes intergranulaires<sup>19</sup>.

En fait, en prenant en compte l'intégrale de la pression capillaire, la relation (II.94) pourrait bien correspondre aux expressions corrigées de la contrainte effective proposées par Matyas et Radhakrishna: l'intégrale de la pression capillaire qui y apparaît pourrait être l'équivalent macroscopique des efforts de tension superficielle que ces deux auteurs ont voulu prendre en compte à l'échelle microscopique et transcrire à l'échelle macroscopique, par un procédé de moyenne, sous forme d'une intégrale de tensions surfaciques<sup>20</sup>. Emprasons-nous de dire qu'il ne faut rien voir là de plus qu'une simple analogie, notre cheminement, du point de vue de la définition des contraintes, étant purement macroscopique.

En réalité, proposant une expression de ce genre, Matyas et Radhakrishna (1968) préfèrent introduire une distinction nette entre la notion de «contrainte effective», qu'ils considèrent purement macroscopique, et celle de «contrainte intergranulaire», établie par bilan d'efforts microscopiques. S'ils continuent à considérer un concept de «contrainte effective», c'est pour lui donner une définition purement macroscopique, hors de toute considération d'homogénéisation et de moyenne d'efforts microscopiques, en tant que grandeur reliée à la déformation par la loi de comportement macroscopique.

Contrainte intergranulaire et contrainte effective sont donc deux notions distinctes pour ces auteurs, la dernière se définissant à l'échelle purement macroscopique comme une fonction des variables d'état macroscopiques. De sorte que en lieu et place de l'expression

<sup>18</sup> *Ibid.*

<sup>19</sup> Cf. notamment Schreffler (1990).

<sup>20</sup> Cf. Matyas & Radhakrishna (1968), qui font la distinction entre une «contrainte intergranulaire» obtenue par moyenne microscopique et «contrainte effective», définie comme grandeur macroscopique reliée par la loi de comportement à la déformation (p. 432/3, 434). En ce qui concerne la «contrainte intergranulaire», à laquelle sont alors associées les classiques expressions de partition microscopique, les auteurs insistent sur la nécessité de prendre en compte dans l'analyse microscopique de la répartition des efforts un terme intégrant les efforts de tension superficielle, aboutissant à l'expression corrigée suivante (relation (10), p. 437):

$$\sigma' = \sigma + p_g + A_1 ( p_l - p_g ) - \int T ds$$

$A_1$  étant un coefficient de pondération surfacique. On notera l'analogie entre cette expression microscopique d'une «contrainte intergranulaire», grandeur microscopique, avec notre expression macroscopique (II.94) d'une «contrainte effective» purement macroscopique.

classique de Bishop donnant explicitement la contrainte effective en fonction de la contrainte totale, des pressions interstitielles et de la saturation, s'introduisent des surfaces d'état, relations fonctionnelles entre variables d'état macroscopiques  $\sigma$ ,  $p_l$ ,  $p_v$ ,  $p_g$ ,  $S_1$  et  $\epsilon^{21}$ .

On retrouve en réalité dans notre modèle cette notion de surface d'état. La relation (II.91) montre que la contrainte effective est connue dès lors qu'est identifiée l'intégrande  $b_l(p_c)$ . Or, dans le cadre d'hypothèses H3, la donnée de cette fonction de  $p_c$  équivaut à celle de la dépendance  $p_c = p_c(\epsilon, S_1)$ . Ainsi est-on amené, dans le cadre relativement général de l'hypothèse H3, à considérer des surfaces d'état  $p_c = f(\epsilon, S_1)$ .

Sur ces surfaces d'état, tout chemin est *a priori* possible, et dépend des conditions expérimentales imposées, conditions aux limites, etc. L'hypothèse consistant à supposer dans le modèle (c'est-à-dire indépendamment des conditions de l'expérience), comme il est fait en H4, l'égalité du coefficient de Biot et de la saturation en eau, correspond au choix d'une forme particulière de cette surface d'état: une surface d'état cylindrique d'axe  $\epsilon$ , de sorte que, quel que soit le chemin suivi, la pression capillaire reste toujours déterminée par la seule saturation.

H3

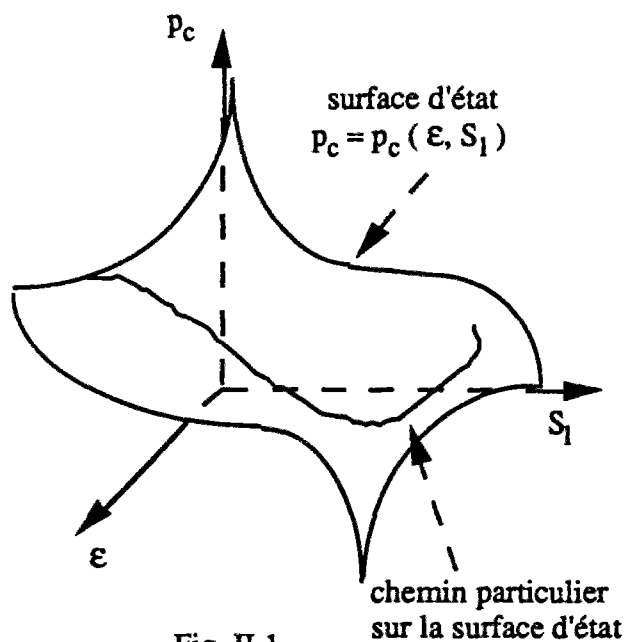


Fig. II.1

H3+H4

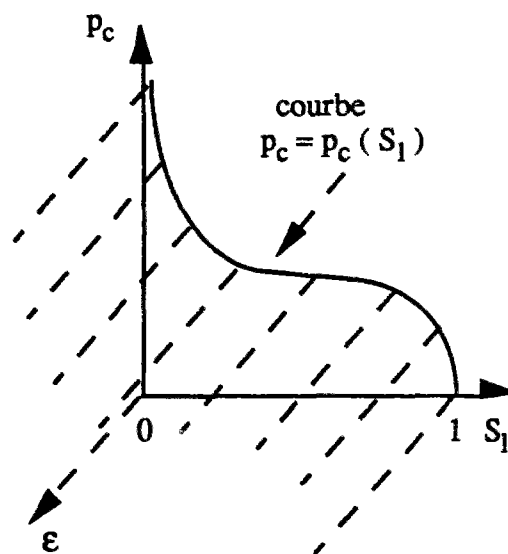


Fig. II.2

<sup>21</sup> *Ibid.*, p. 438 et suivantes.

### II.3.4. La courbe capillaire: argumentation et allure théorique.

Cependant, plus qu'au souci d'une cohérence séduisante avec des considérations théoriques relativement traditionnelles, la double hypothèse (II.87/8) répond à celui d'une identification totale et opérante du modèle élaboré. De ce point de vue, il est notable que la relation (II.88) établisse une compatibilité parfaite entre modélisation théorique et résultats expérimentaux, puisque l'ensemble des hypothèses retenues permettent de justifier la validité de courbes expérimentales donnant la pression capillaire comme fonction de la seule saturation en liquide — et ceci indépendamment du problème envisagé. Dès lors, théorie et expérience se retrouvent, montrent une certaine cohérence, et l'assimilation de celle-ci par celle-là s'avère possible, complète, et relativement immédiate.

En fait, l'ensemble des résultats énoncés jusqu'ici permettent de mieux apprécier le sens et la validité de ce parti-pris expérimental consistant à relier de manière biunivoque pression capillaire et saturation en liquide. Les hypothèses physiques d'incompressibilité de la matrice solide et du liquide interstitiel suffisent à l'établissement de la liaison (II.85) entre pression capillaire, saturation et déformation. Cette même relation différentielle montre, de manière évidente, que la pression capillaire dépend de manière biunivoque de la saturation en liquide dès lors que les déformations sont empêchées ( $d\varepsilon=0$ ): c'est en particulier le cas pour un squelette rigide. Ainsi, notre modèle permet d'étayer cette dépendance unique de la pression capillaire en fonction de la saturation en liquide (incompressible) en milieu poreux indéformable. L'hypothèse (II.87/8) stipule en fait l'extension de cette propriété au cas plus général d'un milieu poreux vérifiant l'hypothèse H4 mais non nécessairement indéformable.

Il est important de noter l'implication du parti-pris (II.88) dans le cadre global de la modélisation: il constitue en fait une hypothèse de découplage poro-mécanique partiel. En effet, la relation (II.88) stipule précisément que, à saturation en liquide donnée, la pression capillaire est entièrement déterminée, indépendamment des autres variables de la modélisation (en particulier des variables proprement mécaniques, comme la contrainte ou la déformation). Ce découplage, cependant, n'est que partiel, dans la mesure où d'autres variables relatives aux fluides interstitiels restent soumises à une forte influence des variables mécaniques. En outre, ce découplage, qui suppose une faible influence de l'état mécanique sur la pression capillaire, ne préjuge en rien de l'importance de l'influence réciproque de la pression capillaire sur les contraintes et les déformations, objet principal de l'étude.

Le modèle théorique tel qu'il a été développé jusqu'ici permet par ailleurs de retrouver certaines caractéristiques de la courbe expérimentale de pression capillaire. L'hypothèse (II.87), qui implique la dépendance univoque de  $p_c$  en fonction de  $S_l$ , une fois appliquée à la relation différentielle (II.85), permet de manière immédiate de relier le coefficient  $M$  à la dérivée de la courbe de pression capillaire:

$$(II.95) \quad \frac{dp_c}{dS_l} = -(\phi_0 + \varepsilon) M(\varepsilon, S_l)$$

Or, grâce aux relations (II.79) à (II.81), issues de la double hypothèse d'incompressibilité du liquide et de la matrice solide, il est possible de montrer que ce coefficient  $M$ , défini en (II.83), est relié au déterminant de la matrice de Biot  $M$  comme suit:

$$(II.96) \quad \det M = M_v M_a M$$

où  $M_v$  et  $M_a$  désignent les valeurs communes respectives des modules  $M_{vj}$  et des modules  $M_{aj}$  ( $j=l,v,a$ ).  $M_v$  et  $M_a$  sont des modules positifs. L'argument d'inversibilité des systèmes de variables macroscopiques et microscopiques nous a conduit à supposer que  $\det M$  ne s'annule pas (cf. §II.1.2. et II.2.3.); il en résulte, par continuité, que le déterminant de la matrice de Biot garde un signe constant, strictement positif ou négatif. On peut, par des considérations de stabilité thermodynamique, montrer que ce déterminant doit en fait rester strictement positif (cf. Coussy (1991, X)). Il ressort alors immédiatement de la relation (II.96) que le module  $M$  affecté à la pression capillaire reste toujours positif et que, en conséquence de l'égalité (II.88) qui le relie à la pente de la courbe  $p_c=p_c(S_l)$ , cette dernière est décroissante sur tout l'intervalle  $[0;1]$  du domaine des saturations<sup>22</sup>.

Considérons maintenant le cas où la pression de gaz est maintenue constante dans le milieu (cas de l'expérience de sorption-désorption). On a ainsi  $dp_g=0$ , et par suite:

$$dp_l = -dp_c = -\frac{dp_c}{dS_l} dS_l$$

ceci quel que soit l'état initial considéré; la relation est ainsi en particulier applicable à un état de complète saturation en liquide ( $S_l=1$ ), pour lequel la précédente formule s'écrira:

$$dp_l = -\frac{dp_c}{dS_l}(S_l=1) dS_l$$

Si l'on postule par ailleurs la continuité entre modèle saturé et modèle non saturé, on conserve en milieu saturé en liquide la relation précédente, qu'on appliquera à des évolutions purement saturées (donc  $dS_l=0$ ) pour lesquelles la pression de liquide sera amenée à varier ( $dp_l \neq 0$ ). La confrontation de la relation précédente avec de telles évolutions, caractéristiques d'un milieu saturé, impose ainsi que<sup>23</sup>:

$$(II.97) \quad \frac{dp_c}{dS_l}(S_l=1) = -\infty$$

Le même argument pour un état de complète désaturation en liquide — obtenu au terme d'une expérience de désaturation à pression de liquide constante ( $dp_l=0$  et  $dp_g=dp_c$ , cas de l'invasion capillaire), qui correspond à l'évolution inverse de l'expérience de sorption-désorption — nous permettrait d'établir une condition identique en  $S_l=0$ :

$$(II.98) \quad \frac{dp_c}{dS_l}(S_l=0) = -\infty$$

La courbe pression capillaire fonction de la saturation en liquide est donc bien, conformément à ce que montrent les résultats expérimentaux, une courbe décroissante, entre une valeur  $p_c^{\max}$  atteinte en  $S_l=0$  et une valeur minimale  $p_c^{\min}$  atteinte en  $S_l=1$ , avec deux tangentes verticales aux saturations extrêmes. Notre modèle ne nous permet évidemment pas de préciser davantage l'allure de la courbe. En particulier, il s'avère impossible de quantifier macroscopiquement les valeurs limites  $p_c^{\min}$  et  $p_c^{\max}$  prises par la pression capillaire. Ces deux valeurs ont pourtant une signification physique intéressante à l'échelle microscopique.

<sup>22</sup> Conclusion qui sous-entend la positivité du terme  $\phi_0+\epsilon$ , ce qui revient à supposer que la déformation de retrait est, en valeur absolue, inférieure à la porosité initiale du matériau: c'est en fait la conséquence immédiate de l'hypothèse H1 d'incompressibilité de la matrice solide, laquelle implique que seul l'espace poreux participe à la déformation macroscopique.

<sup>23</sup> Le signe négatif est déduit de la décroissance de la courbe  $p_c=p_c(S_l)$ .

Si l'on se réfère en effet à la loi de Laplace, la valeur minimale de la pression capillaire correspond à l'invasion des pores de plus grand rayon alors que sa valeur maximale est obtenue lors de l'invasion des pores de plus petit rayon. Dans l'un et l'autre cas, la loi de Laplace permet même la quantification, à l'échelle microscopique, de la pression capillaire obtenue en fonction des valeurs limites de rayons de pores.

Ces déductions correspondent assez fidèlement à l'allure traditionnelle des courbes expérimentales de pression capillaire fonction de la saturation. Celles-ci représentent toujours — au phénomène hystérétique près, que l'on néglige dans toute cette étude — une pression capillaire fonction décroissante de la saturation, s'annulant et présentant une tangente verticale en  $S_1=1$ , tendant vers  $+\infty$  en  $S_1=0$ , point de complète désaturation où la pression capillaire n'est pas définie et où, par conséquent, la tangente verticale obtenue par passage à la limite dans le modèle se transforme en asymptote<sup>24</sup>. Ceci correspond donc bien aux observations tirées du modèle théorique. Dans toute l'étude qui suivra, on se référera ainsi implicitement à la courbe expérimentale type, telle que représentée ci-dessous, et qui correspond bien à la description d'après arguments théoriques pour les valeurs limites suivantes:  $p_c^{\max} = +\infty$  et  $p_c^{\min} = 0$  (avec asymptote verticale en 0 et tangente verticale en 1).

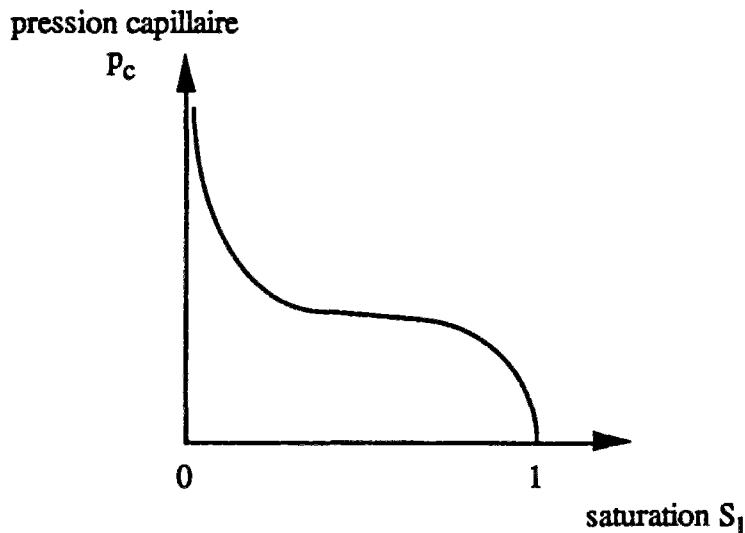


Fig. II.3

Néanmoins, les isothermes de sorption-désorption de certains matériaux, tels le béton ou la pâte de ciment, ne correspondent pas dans la réalité au profil théorique présenté ci-dessus. En effet, en  $S_1=1$ , la pente des courbes capillaires obtenues n'est pas verticale. Il y a donc un certain écart entre profil expérimental et profil déduit des différentes hypothèses théoriques formulées: la raison d'un tel décalage est sans doute à chercher dans l'aspect limité d'un certain nombre de ces hypothèses, en particulier de l'hypothèse (II.88) d'indifférence de la pression capillaire à la déformation, certainement erronée au voisinage de la saturation ( $S_1=1$ )<sup>25</sup>.

<sup>24</sup> Cf. Bourbié & alii (1986), p. 25.

<sup>25</sup> La validité et la pertinence de l'hypothèse:  $p_c=p_c(S_1)$  seront examinées plus précisément au § IV.3, à la lumière de certains enseignements du modèle linéaire.

### II.3.5. Vitesse des ondes acoustiques en milieu séchant.

Un dernier commentaire relatif à l'allure de la courbe, et en particulier des pentes infinies aux saturations extrêmes, s'avère intéressant. Il concerne la mesure de la vitesse des ondes dans un milieu poreux. Si l'on considère la propagation, dans un milieu non saturé, d'ondes de petite amplitude, on peut appliquer au modèle élastique non linéaire considéré comme une linéarisation pour de petites perturbations  $d\sigma$ ,  $d\varepsilon$ ,  $dm_j$ ,  $dp_i$ , des variables d'état autour de l'état local, les résultats connus en poroélasticité linéaire. En outre, pour des fréquences usuelles (basses fréquences, mais suffisamment élevées), le milieu se comporte comme un milieu non drainé. Les coefficients entrant en jeu sont, en conséquence, des coefficients non drainés. Ce qui conduit en particulier à l'expression suivante de la vitesse des ondes de compression<sup>26</sup>:

$$(II.99) \quad V_P = \left( \frac{K + \frac{4}{3} \mu}{\rho} \right)^{1/2}$$

où  $\rho$  est la masse volumique moyenne du milieu global:

$$(II.100) \quad \rho = \rho_s(1-\phi) + \rho_l \phi S_1 + (\rho_v + \rho_a) \phi (1-S_1) \equiv \rho_s(1-\phi) + \rho_l \phi S_1$$

L'ensemble des états actuels à partir desquels sont effectuées les sollicitations sont des états obtenus par séchage du matériau. Ainsi, pour chaque propagation d'ondes infinitésimales, l'état actuel de référence correspond à un point de la courbe de séchage, et est donc entièrement déterminé par la saturation actuelle  $S_1$ . Il est dès lors possible d'évaluer, en fonction de cette variable saturation qui définit l'ensemble des états de référence considérés, la valeur actuelle des différents coefficients.

Dans le cas d'une matrice solide incompressible, la porosité  $\phi$  s'exprime de manière simple en fonction de la déformation volumique  $\varepsilon$ , d'après la relation (II.37). Lors d'une expérience de séchage, cette déformation est directement déterminée par la pression capillaire; en effet, la relation de comportement (II.26) s'écrit, à contrainte moyenne nulle et à pression de gaz constante:

$$(II.101) \quad K_0 (\varepsilon_{\text{séch.}}) d\varepsilon_{\text{séch.}} = - S_1 \frac{dp_c}{dS_1} (S_1) dS_1$$

d'où, après intégration:

$$(II.102) \quad \varepsilon_{\text{séch.}} = \varepsilon_{\text{séch.}}(S_1)$$

et

$$(II.103) \quad \phi = \phi_{\text{séch.}}(S_1) = \frac{\phi_0 + \varepsilon_{\text{séch.}}(S_1)}{1 + \varepsilon_{\text{séch.}}(S_1)}$$

De la sorte, la connaissance de la pression capillaire (indépendante, quant à elle, de l'expérience particulière ayant servi à accéder à l'état actuel) permet de calculer la vitesse d'ondes de compression se propageant dans un milieu non saturé en cours de séchage.

<sup>26</sup> Cf. Bourbié & alii (1986), p. 83.

Ces relations nous autorisent d'ailleurs à formuler quelques résultats et à examiner certains points de comparaison entre modèle et expérience. Ainsi, à partir de la relation (II.17) reliant modules d'incompressibilité drainé et non drainé, il est possible d'évaluer précisément, en fonction de la saturation et moyennant la donnée de la courbe de pression capillaire, la vitesse  $V_P$  de propagation des ondes. On a en effet, tous calculs faits:

$$(II.104) \quad K = K_0 + \frac{P_{atm}}{\phi(1-S_1)} - \frac{S_1^2}{\phi_0 + \epsilon} p_c'(S_1)$$

avec ici:  $\phi = \phi_{séch.}(S_1)$  et  $\epsilon = \epsilon_{séch.}(S_1)$

la vitesse de propagation des ondes s'obtenant par division du précédent module par la masse volumique moyenne  $\rho$  calculée en fonction de  $S_1$  et de  $\phi_{séch.}(S_1)$ . L'étude de cette vitesse aux points caractéristiques est assez rapide.

Plaçons-nous d'abord auprès de la totale désaturation ( $S_1=0$ ). La masse volumique équivalente  $\rho$  tend vers la constante  $\rho_s(1-\phi_{séch.}(0))$ . Le numérateur admet lui aussi une limite, qu'il est possible de calculer. En effet, en remarquant que  $\epsilon_{séch.}(S_1)$  admet une limite finie  $\epsilon_{séch.}(0)$  lorsque la saturation tend vers 0, on déduit de l'expression (II.102) que l'intégrale définissant  $\epsilon_{séch.}$  converge en  $0^+$ , donc que  $S_1 p_c'(S_1)$  est intégrable en  $0^+$ . Si l'on suppose (ce qui est physiquement cohérent) que la vitesse des ondes  $V_P$  admet une limite dans  $[0; +\infty]$  lorsque l'on tend vers la totale désaturation, on peut établir le résultat suivant<sup>27</sup>:

$$S_1^2 p_c'(S_1) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad S_1 \rightarrow 0$$

d'où résulte alors, l'ensemble des quantités concernées admettant une limite finie pour la saturation zéro, que la vitesse  $V_P$  admet une limite finie en 0, qui vaut:

$$(II.105) \quad V_P(0) = \left( \frac{K_0 + \frac{4}{3} \mu + \frac{P_{atm}}{\phi_{séch.}(0)}}{\rho_s(1-\phi_{séch.}(0))} \right)^{1/2}$$

Il est également possible de montrer que la vitesse de propagation des ondes décroît lorsqu'augmente la saturation, dans un voisinage de 0. Le module  $K$  est, d'après (II.104),

<sup>27</sup> Ce résultat repose sur la règle d'intégrabilité suivante, dite de Riemann:

«Soit une fonction définie sur un intervalle  $]0;a]$ , avec  $a>0$ , positive bornée et intégrable sur tout intervalle fermé borné du domaine de définition; on suppose qu'existe  $\alpha$  réel tel que  $x^\alpha f(x)$  ait une limite  $\beta$  appartenant à  $[0; +\infty]$  lorsque  $x$  tend vers 0. Alors:

si  $\alpha < 1$  et  $\beta < +\infty$ ,  $f$  est intégrable en 0;  
si  $\alpha \geq 1$  et  $\beta \neq 0$ ,  $f$  est non intégrable en 0.»

Nous allons appliquer ce critère à notre cas afin de déterminer que  $S_1^2 p_c'(S_1) \rightarrow 0$  lorsque  $S_1 \rightarrow 0$ .

Pour cela, notons  $f(S_1) = -S_1 p_c'(S_1)$ :  $f$  est positive et continue sur  $]0;1]$ . Si l'on suppose en outre que  $V_P$  admet une limite dans  $[0; +\infty]$  lorsque l'on tend vers 0, on en déduit que  $S_1 f(S_1)$  admet également en 0 une limite  $\beta$  dans  $[0; +\infty]$ . Laquelle limite est nécessairement nulle, sans quoi on se retrouverait exactement dans le second cas de la règle précédemment citée, ce qui contredit l'intégrabilité de  $f$  en 0. Ainsi,  $\beta=0$  et le résultat annoncé est démontré.

On mène, en  $S_1=1$ , un raisonnement analogue.



équivalent à une fonction harmonique simple en  $1/(1-S_1)$ , donc croissante. La masse volumique  $\rho$  étant, conformément à son expression (II.100), équivalente en  $S_1=0$  au terme constant  $\rho_s(1-\phi_0)$ , la vitesse  $V_P$  est équivalente en  $S_1=0$  à la racine carrée d'une fonction harmonique en  $\frac{1}{1-S_1}$ .

Plaçons-nous désormais au voisinage de la saturation ( $S_1=1$ ). Il s'agit dans un premier temps d'évaluer la limite du coefficient  $K$ . Du fait de la parfaite définition de la pression capillaire en  $S_1=1$  ( $p_c(1)=0$ ), c'est-à-dire de l'intégrabilité de  $p_c'(S_1)$  en  $S_1=1$ , on peut affirmer le résultat suivant:

$$(1-S_1)p_c'(S_1) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad S_1 \rightarrow 1$$

Il en résulte alors immédiatement que le module d'incompressibilité non drainé  $K$  est équivalent, au voisinage de la totale saturation, au terme  $p_{atm}/\phi_{séch.}(1)(1-S_1)$ , qui tend vers  $+\infty$  lorsque  $S_1$  tend vers 1 (par valeurs inférieures).

La courbe exprimant la vitesse  $V_P$  de propagation des ondes en fonction de la saturation définissant l'état de référence actuel du milieu a donc l'allure suivante: limite finie en  $S_1=0^+$ ; décroissance au voisinage de  $S_1=0$ ; croissance dans un certain voisinage de  $S_1=1$ ; valeur infinie en  $S_1=1^-$ . Ce résultat est à comparer aux courbes expérimentales, obtenues pour certaines roches notamment<sup>28</sup>.

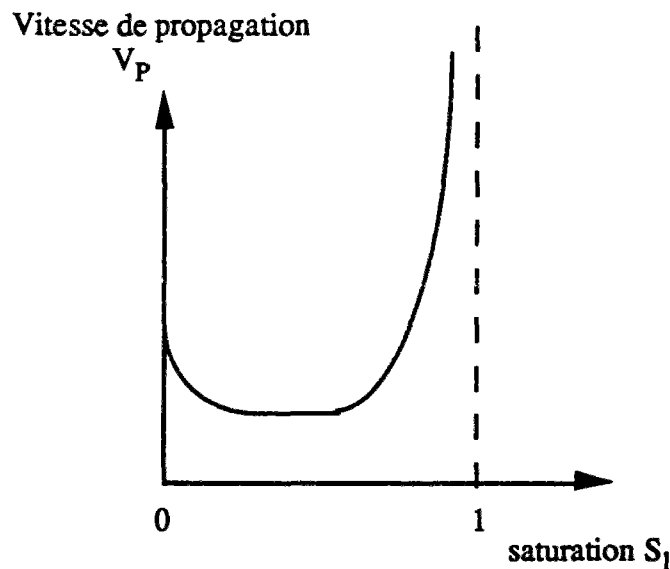


Fig. II.4

<sup>28</sup> Cf. T. Cadoret, (1993), chap. 3&5. Voir aussi annexe V, figure AV.3.

La valeur infinie pour un milieu totalement saturé en liquide provient directement de la double hypothèse d'incompressibilité de la matrice solide et du liquide interstitiel. De la sorte, le milieu, une fois saturé, devient infiniment rigide et transmet donc instantanément les sollicitations appliquées.

Au voisinage de la complète désaturation, la valeur limite obtenue pour la vitesse de propagation des ondes est liée à la compressibilité du mélange gazeux saturant l'espace poral: la forte croissance (en théorie vers des valeurs infinies) des efforts capillaires est compensée par le fait que, la saturation tendant vers 0, ces efforts n'affectent plus qu'une partie infime de la matière.

### II.3.6. Expression des coefficients de la loi de comportement macroscopique.

Plaçons nous désormais, au terme de cette série d'hypothèses, dans un cadre maximal — que nous noterons H5 — permettant de regrouper l'ensemble des conclusions précédemment dégagées.

Reprenons ainsi les différentes clauses de l'hypothèse H4 :

matrice incompressible	$K_s = \infty$
liquide incompressible	$K_l = \infty$
module d'incompressibilité drainé fonction de $\epsilon$	$K_0 = K_0(\epsilon)$

Adoptons également l'hypothèse supplémentaire de l'identification du coefficient de Biot à la saturation :

coefficient de Biot égal à la saturation	$b_1 = S_1$
--	-------------

Enfin, ajoutons l'hypothèse qui consiste à considérer les deux constituants du mélange gazeux — l'air et la vapeur — comme gaz parfaits ; ce qui revient à poser :

$$K_v = p_v$$

$$K_a = p_a$$

Dès lors, grâce à l'ensemble des résultats établis dans le précédent paragraphe, il est possible d'établir l'expression explicite des coefficients  $M_{ij}$  et  $b_i$  de la loi de comportement macroscopique en fonction des variables d'état retenues :  $\epsilon$  et  $m_i$ .

On obtient en premier lieu, conformément aux relations (II.79) à (II.81) :

$$(II.106) \quad M_{vv} = M_{v1} = M_{1v} = \frac{p_v}{\phi_g} = p_v^0 \frac{\phi_g^0 + \frac{m_v}{\rho_v^0}}{(\phi_g^0 - \frac{m_1}{\rho_1^0} + \epsilon)^2}$$

$$(II.107) \quad M_{aa} = M_{al} = M_{la} = \frac{p_a}{\phi_g} = p_a^0 \frac{\phi_g^0 + \frac{m_a}{\rho_a^0}}{(\phi_g^0 - \frac{m_l}{\rho_l^0} + \epsilon)^2}$$

$$(II.108) \quad M_{av} = M_{va} = 0$$

La connaissance du coefficient  $M(\epsilon, S_l)$  se résume quant à elle à la donnée de la dérivée de la courbe  $p_c = p_c(S_l)$ :

$$(II.109) \quad M = M(\epsilon, S_l) = -\frac{1}{\phi_0 + \epsilon} \frac{dp_c}{dS_l}$$

le module de Biot  $M_{ll}$  étant alors aussitôt déduit de la relation (II.82) qui le lie à  $M$ .

En dernier lieu, les modules de Biot du liquide et du mélange, tous deux égaux à leur saturation respective, peuvent s'exprimer en fonction des variables  $\epsilon$  et  $m_l$  grâce à l'expression (II.72) de  $S_l$ :

$$(II.110) \quad b_l = S_l = \frac{\phi_l^0 + \frac{m_l}{\rho_l^0}}{\phi_0 + \epsilon}$$

$$(II.111) \quad b_g = 1 - S_l = \frac{\phi_g^0 - \frac{m_l}{\rho_l^0} + \epsilon}{\phi_0 + \epsilon}$$

L'expression du coefficient  $M$  fait intervenir la dérivée par rapport à la saturation en liquide de la pression capillaire : c'est ici, comme nous l'avons expliqué précédemment, qu'intervient la donnée expérimentale nécessaire à notre modèle. Cette donnée, compte tenu de la dépendance de  $p_c$  en fonction d'une variable unique, est théoriquement indépendante du choix de l'expérience d'identification. Sorption-désorption, invasion capillaire, etc., toutes les données expérimentales disponibles sont censées aboutir à des identifications comparables du coefficient  $M$ .

Remarquons à ce stade que, d'après les expressions obtenues des coefficients  $M_{vj}$  et  $M_{aj}$ , les formes différentielles  $dp_v$  et  $dp_a$  s'intègrent sans difficulté en fonction de l'ensemble des variables d'état. On obtient en effet :

$$(II.112) \quad p_v = p_v^0 \frac{\phi_g^0 + \frac{m_v}{\rho_v^0}}{\phi_g^0 - \frac{m_l}{\rho_v^0} + \varepsilon}$$

$$(II.113) \quad p_a = p_a^0 \frac{\phi_g^0 + \frac{m_a}{\rho_a^0}}{\phi_g^0 - \frac{m_l}{\rho_l^0} + \varepsilon}$$

Les pressions de vapeur et d'air s'écrivent donc comme expressions explicites des variables d'état. La pression du liquide s'obtient alors, par différence, à partir de la définition (II.69) de la pression capillaire :

$$(II.114) \quad p_l = p_v^0 \frac{\phi_g^0 + \frac{m_v}{\rho_v^0}}{\phi_g^0 - \frac{m_l}{\rho_l^0} + \varepsilon} + p_a^0 \frac{\phi_g^0 + \frac{m_a}{\rho_a^0}}{\phi_g^0 - \frac{m_l}{\rho_l^0} + \varepsilon} - p_c(S_l)$$

## II.4. Conclusion

### II.4.1. Récapitulation et discussion des choix comportementaux de modélisation.

Au terme de ce chapitre, le comportement élastique (linéaire et non linéaire) d'un milieu poreux a été explicitement déterminé, conformément au cadre général que fixent les principes fondamentaux de la thermodynamique. Le problème délicat de la détermination précise du modèle, des paramètres de la loi de comportement macroscopique adoptée, a été longuement abordé. On a vu, en particulier, comment certains résultats simples d'homogénéisation permettaient d'utiliser la connaissance de certaines caractéristiques physiques des constituants microscopiques à une identification plus précise et plus complète des lois macroscopiques. Mais le moyen essentiel de la détermination d'un modèle macroscopique demeure l'identification expérimentale.

Cette intégration de l'expérience dans la modélisation impose une succession d'hypothèses précises, relativement restrictives, et qui permettent pas à pas de mettre en lumière les différentes conditions présidant à la vision traditionnelle des matériaux poreux saturés.

1/ La première de ces conditions, dans l'ordre de la simplicité, est l'incompressibilité de la matrice solide. Pour un béton, par exemple, cela consiste à supposer que l'ensemble (grains+pâte) participe très peu à la compressibilité du matériau global, laquelle est essentiellement due à la présence de fluides interstitiels. C'est cependant là une hypothèse forte, plus ou moins valable suivant les matériaux (raisonnable pour des bétons ordinaires ou

des sols mais beaucoup plus contestable pour des bétons à hautes performances<sup>29</sup>), ainsi que suivant les problèmes envisagés: on peut penser, en effet, qu'il est d'autant plus loisible de négliger la compressibilité de la matrice solide devant celle des fluides interstitiels que le milieu contient davantage de gaz, phase très compressible. Ainsi, on peut intuitivement penser que cette hypothèse simplificatrice sera plus valable pour des matériaux peu saturés en liquide.

2/ La seconde condition, portant toujours sur le comportement microscopique des matériaux, est celle d'incompressibilité du liquide interstitiel. Hypothèse dont la pertinence dépend de même du degré de saturation du matériau.

L'association de ces deux hypothèses microscopiques d'incompressibilité de la matrice solide et du liquide permet d'établir la dépendance de la pression en fonction de la déformation volumique et de la saturation seulement:  $p_c = p_c(\epsilon, S_1)$ .

Les hypothèses suivantes sont directement formulées à l'échelle macroscopique:

3/ le module d'incompressibilité drainé tangent  $K_0$  ne dépend que de la déformation:  $K_0 = K_0(\epsilon)$  — là encore liée à l'hypothèse de saturations intermédiaires; conséquemment les coefficients de Biot ne dépendent plus que de la pression capillaire:  $b_1 = b_1(p_c)$ .

4/ le coefficient de Biot du liquide est identifié à la saturation:  $b_1 = S_1$  et, conséquemment, la pression capillaire ne dépend que de la saturation:  $p_c = p_c(S_1)$ .

La dernière hypothèse, qui est en soi une hypothèse supplémentaire, s'inscrit cependant dans le cadre des précédentes. Ainsi, son degré de validité sera-t-il conditionné par celui de l'ensemble des hypothèses antérieures: au voisinage de la saturation ( $S_1 = 1$ ), où l'hypothèse d'incompressibilité de la matrice et du fluide sont contestables, on peut s'attendre à un écart entre la courbe théorique  $p_c = p_c(S_1)$  et la réalité: c'est bien ce que semblent montrer certaines constatations expérimentales<sup>30</sup>. Sans doute faudrait-il alors, dans ces zones de saturation proche de 1, considérer l'influence de la déformation  $\epsilon$ , ainsi peut-être que des autres variables d'état de la modélisation, sur la pression capillaire: c'est là une remise en cause non négligeable des pratiques expérimentales et phénoménologiques les plus courantes.

#### II.4.2. Evaluation qualitative: un exemple simple.

Cependant, on peut d'ores et déjà tester l'adéquation du modèle de comportement poroélastique linéaire à la problématique posée, dans le cadre d'hypothèses maximal résumé en H5, et qui serviront par la suite de base à l'ensemble de l'étude analytique et numérique qui suivra.

Moyennant ce cadre précis d'hypothèses, résumé en H5 (§II.3.4.), la loi de comportement poromécanique non linéaire (a fortiori linéaire) d'un milieu poreux non saturé s'avère complètement définie — sa totale détermination ne dépendant plus que de la donnée d'une unique courbe expérimentale (en plus des modules de cisaillement  $\mu$  et d'incompressibilité drainé  $K_0$ , supposés connus et généralement pris constants). Le modèle est donc opérationnel.

C'est pourquoi, avant d'envisager précisément l'application concrète du séchage de dessiccation, il paraît bon d'examiner qualitativement, par un exemple simple mais démonstratif, l'adéquation d'un tel modèle à la problématique générale du séchage, sa capacité prédictive et explicative, son apport dans la prise en compte effective des

<sup>29</sup> Cf. Granger (1994), partie II, chapitre 4, note 6.

<sup>30</sup> Cf. § II.3.4.

interactions hydro-mécaniques. Dans le paragraphe à venir, le problème de la diffusion est laissé de côté: l'analyse, purement qualitative et volontairement simplificatrice, a pour but d'évaluer la pertinence de la seule loi de comportement.

Le commentaire de la relation de comportement (II.16) a été l'occasion d'une première ébauche de mise en valeur du couplage dans le modèle — et donc de la capacité de ce dernier à rendre compte d'une déformation par simple variation des conditions de pression des fluides interstitiels, en l'absence de tout effort mécanique: c'est du fait de cette prise en compte du couplage hydro-mécanique qu'une telle modélisation peut être pressentie comme particulièrement adaptée à la prédiction du retrait de dessiccation des structures poreuses. Allons cependant un peu plus loin que cette simple remarque, et résolvons un problème complet de séchage homogène d'une éprouvette.

Considérons un certain volume d'un milieu poreux, maintenu sous contrainte moyenne nulle et contenant à l'instant initial un liquide (l) en équilibre thermodynamique avec sa vapeur (v), ainsi qu'un autre gaz, «inerte» vis-à-vis des deux autres, formant avec la vapeur (v) un mélange idéal. Laquelle condition se traduit par l'écriture, à tout instant, de l'égalité des enthalpies libres massiques  $g_l$  et  $g_v$ . Ce qui, en écriture incrémentale, par application de la relation (II.8), conduit à l'équation de Clapeyron isotherme:

$$(II.115) \quad \frac{dp_l}{\rho_l} = \frac{dp_v}{\rho_v}$$

On suppose en outre, conformément aux hypothèses traditionnelles concernant le séchage de dessiccation, que le mélange gazeux demeure à chaque instant en équilibre avec l'extérieur, à pression atmosphérique. Ainsi, à tout instant, on a:

$$(II.116) \quad dp_g = dp_v + dp_a = 0 \quad \text{et} \quad dp_l = -dp_c$$

Ces conditions étant supposées constamment remplies, on impose instantanément en tout point de l'échantillon une variation échelon  $\delta h_e$  de l'humidité relative (c'est-à-dire de la pression de vapeur), toutes les autres conditions demeurant inchangées. L'ensemble de ces sollicitations mécaniques et thermodynamiques peuvent s'écrire de manière homogène sur l'ensemble de l'échantillon, considéré comme volume représentatif:

$$(II.117) \quad d\sigma = 0$$

$$(II.118) \quad \delta p_{v\infty} = p_{v\infty} - p_v^0 = p_{v_s}^0 \delta h_e$$

où  $p_v^0$  et  $p_{v\infty}$  représentent respectivement la valeur initiale et la valeur finale de la pression de vapeur. On se propose ici de modéliser, par l'adoption de la loi poroélastique présentée en II.2.2. (appliquée à des incréments supposés faibles), la déformation provoquée par la seule variation  $\delta h_e$ .

En ce qui concerne les lois de diffusion, on choisira, par souci de simplicité, une loi de diffusion de type Fick (on néglige par hypothèse la diffusion de la phase liquide) homogène dans l'échantillon:

$$(II.119) \quad m_{v \rightarrow \text{ext}}^0 = - \frac{\rho_v(1-C_v)F}{P_{\text{atm}}} [ p_{v\infty} - (\delta p_v + p_v^0) ]$$

où  $m_{v \rightarrow ext}^{\circ}$  désigne le taux de masse de vapeur cédée à l'extérieur et  $\mathcal{F}$  une constante appelée coefficient de Fick (dont l'unité est le  $m^2 s^{-1}$ ). La conservation de la masse s'écrivant, pour le liquide et pour la vapeur respectivement:

$$(II.120) \quad dm_l = - m_{l \rightarrow v}^{\circ} dt$$

$$(II.121) \quad dm_v = ( m_{l \rightarrow v}^{\circ} - m_{v \rightarrow ext}^{\circ} ) dt$$

S'agissant de la loi de comportement, on adoptera l'ensemble des hypothèses récapitulées en H5 (§ II.3.4.). De sorte que, combinée aux relations (II.116) et (II.118), conditions particulières du problème, l'équation de comportement (II.26) s'écrit, pour les petites perturbations considérées ici:

$$(II.122) \quad 0 = K_0 \varepsilon + S_1 \delta p_c$$

qui fait bien apparaître, ainsi qu'annoncé au § II.2.1., le couplage entre efforts capillaires et déformation du squelette. Compte tenu de la relation (II.82) reliant les incréments de la pression capillaire à ceux de la déformation et de la variation de masse liquide, la précédente égalité conduit à:

$$(II.123) \quad ( K_0 + S_1^2 M ) \varepsilon = S_1 M \frac{\delta m_l}{\rho_l}$$

Or, la loi d'état macroscopique (II.25), relative à la vapeur, permet d'écrire, compte tenu des résultats (II.78) et (II.80):

$$(II.124) \quad dp_v = \frac{p_v}{\phi_g} \left( - d\varepsilon + \frac{dm_v}{\rho_v} + \frac{dm_l}{\rho_l} \right)$$

Par dérivation de (II.116) (à coefficients considérés constants dans le temps, eu égard aux faibles perturbations des variables d'état) et combinaison avec les lois (II.120) et (II.121) de conservation de la masse ainsi qu'avec la loi (II.119) de diffusion de la vapeur dans le mélange, on exprime, tous calculs faits, une relation entre dérivées temporelle de la déformation volumique et de la pression de vapeur:

$$(II.125) \quad \frac{\phi_g}{p_v} \frac{dp_v}{dt} + [1 - S_1 + \frac{\rho_l}{\rho_v} \frac{K_0 + S_1^2 M}{S_1 M}] \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{(1 - C_v)\mathcal{F}}{p_{atm}} [ p_{v^{\infty}} - (\delta p_v + p_v^0) ]$$

Equation qui, grâce à la relation de Clapeyron (II.115) et à la relation (II.122) traduisant l'équilibre mécanique, peut s'écrire en fonction d'une seule de ces deux variables — par exemple la déformation  $\varepsilon$ :

$$(II.126) \quad \left[ 1 - S_1 + \frac{\phi_g \rho_v K_0}{\rho_v \rho_l S_1} + \frac{\rho_l K_0 + S_1^2 M}{\rho_v S_1 M} \right] \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{(1 - C_v) F}{p_{atm}} \left[ p_{vs}^0 \delta h_e - \frac{\rho_v K_0}{\rho_l S_1} \varepsilon \right]$$

où l'on reconnaît une équation différentielle du premier degré en temps, à laquelle correspond une évolution exponentielle de la déformation: décroissante (retrait) pour  $\delta h_e \leq 0$  (baisse d'humidité relative), croissante (gonflement) pour  $\delta h_e \geq 0$  (augmentation d'humidité relative). De cette évolution on peut aisément, au seul regard de l'équation différentielle ci-dessus, donner le coefficient de diffusion global D:

$$(II.127) \quad \frac{1}{D} = \frac{p_{atm}}{(1 - C_v) F} \left[ \frac{\rho_l (1 - S_1) S_1}{\rho_v K_0} + \frac{\phi_g}{\rho_v} + \frac{K_0 + S_1^2 M}{K_0 M} \left( \frac{\rho_l}{\rho_v} \right)^2 \right]$$

ainsi que la déformation finale:

$$(II.128) \quad \varepsilon_{\infty} = \frac{\rho_l S_1}{\rho_v K_0} p_{vs}^0 \delta h_e$$

On peut obtenir un ordre de grandeur du résultat obtenu en l'appliquant aux données expérimentales dont J.M. Torrenti (1987) s'est servi dans son étude des pâtes de ciment (d'après des travaux antérieurs de Pihlajavaara et de Wittmann). On se place en outre dans des conditions initiales précises, correspondant à une humidité relative de l'ordre de 90%, pour laquelle les données relatives à la pâte de ciment considérée sont *grosso modo* les suivantes:

module d'Young drainé de l'ordre de 14000MPa;

coefficient de Poisson drainé: 0.25;

porosité initiale  $\phi_0$ : 35%;

pente de l'isotherme de sorption-désorption ( $S_1$  fonction de  $h$ ) de l'ordre de 1.

De la pente indiquée de la courbe de sorption-désorption, on peut déduire l'ordre de grandeur du coefficient M, dérivée (à la division par la porosité près) de la courbe intrinsèque  $p_c = p_c(S_1)$ . En effet, dans le cas d'une expérience de séchage, le liquide — qui s'évapore — est en équilibre thermodynamique avec sa vapeur; ce qui se traduit par l'égalité des enthalpies libres conduisant, dans le cas adopté désormais d'un liquide incompressible et d'une vapeur obéissant à la loi des gaz parfaits, à l'équation bien connue de Kelvin reliant humidité relative à la pression de liquide (et donc ici à la pression capillaire, puisque la phase gazeuse demeure à pression atmosphérique)<sup>31</sup>. Tous calculs faits, on obtient alors:

module de capillarité M de l'ordre de  $3 \cdot 10^8$  MPa

<sup>31</sup> Cf. § III.3.2. relation (III.13) et III.3.3. relation (III.16).



La valeur de la saturation initiale correspondant à l'humidité initiale choisie ( $h_0=90\%$ ) est également de l'ordre de 90% (lue sur la courbe expérimentale donnée par J.M. Torrenti). Le coefficient d'incompressibilité drainé est quant à lui déduit, d'après relations classiques, du module d'Young et du coefficient de Poisson:  $K_0$  est de l'ordre de 10000 MPa. La pression atmosphérique  $p_{atm}$  est prise à sa valeur standard de 1atm, soit 0.1 MPa. La pression de vapeur saturante en conditions standard  $p_{vs}^0$  est prise égale à 0.25 atm. Le milieu étant initialement très saturé, donc les effets capillaires très faibles, on peut considérer en première approximation que la vapeur est quasiment en condition standard (absence de ménisques); ce qui revient à supposer que sa pression est du même ordre que  $p_{vs}^0$ , ce qui donne une masse volumique initiale  $\rho_v$  de l'ordre de  $0.2 \text{ kgm}^{-3}$  (contre, bien entendu,  $\rho_1=10^3 \text{ kgm}^{-3}$ ).

Numériquement, ces valeurs permettent de donner un ordre de grandeur du retrait final observé; celui-ci est proportionnel à la variation d'humidité relative imposée  $\delta h_e$  selon la règle suivante:

$$\epsilon_{\infty} \# \frac{10^3 \times 0.9}{0.2 \times 10^{10}} \times 2.5 \times 10^4 \delta h_e$$

soit:

$$\epsilon_{\infty} \# 0.01 \delta h_e$$

ce qui donne un retrait de l'ordre de 1000  $\mu\text{def}$ . pour une variation d'humidité relative de 10%. Le calcul permet également de donner une relation, en ordre de grandeur, entre coefficient global de diffusion  $D$  et coefficient de Fick  $\mathcal{F}$  de la vapeur dans l'air:

$$D \# 10^{-4} \mathcal{F}$$

Dans la relation liant  $D$  à  $\mathcal{F}$ , un terme est largement prépondérant devant les autres: celui où intervient le facteur  $1/M$ , caractéristique des effets capillaires (ordres de grandeur respectifs des termes de la parenthèse:  $10^{-6}$ ,  $3.5 \cdot 10^{-6}$ ,  $8.3 \cdot 10^{-2}$  et  $2.5 \cdot 10^{-3}$ ). En pratique, c'est le coefficient  $D$  qui est mesuré. La plupart du temps, pour le genre de matériaux considéré et pour des humidités relatives comprises entre 50% et 90%, le coefficient  $D$  est de l'ordre de  $10^{-12} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ): ce qui permet de donner un ordre de grandeur approximatif du coefficient de Fick, difficile à appréhender directement:

$$\mathcal{F} \# 10^{-8}$$

Pourtant, à ce stade, on ne peut parler que d'ordre de grandeur très approximatif. Afin d'avoir accès à des notions plus fines, telles que la répartition de l'eau interstitielle dans la structure, les gradients de teneur en eau ou d'humidité, les effets de peau, etc., il est nécessaire de replacer le comportement poroélastique dans le cadre global, exposé au chapitre I, des équations de conservation et de conduction du milieu poreux. Ce sera l'objet du chapitre IV. En outre — ainsi que le montre la simple consultation de l'isotherme de sorption-désorption — les phénomènes étudiés ne sauraient être fidèlement représentés à l'échelle macroscopique par une loi linéaire. La prise en compte des non-linéarités du comportement s'impose, notamment au niveau du couplage poromécanique: cela fera l'objet des simulations numériques présentées au chapitre V.

## **Chapitre III**

### **IDENTIFICATION EXPERIMENTALE DU MODELE POROELASTIQUE NON LINEAIRE GRACE AUX COURBES DE SORPTION-DESORPTION ET D'INVASION CAPILLAIRE**

La totale détermination du modèle élaboré au chapitre II repose sur l'exploitation de certaines données expérimentales qu'il convient de présenter, d'analyser, et de replacer dans le cadre de notre modélisation. Dans la plupart des cas de matériaux, et en particulier dans celui du béton, envisagé par la suite d'un point de vue pratique, les expériences à notre disposition sont de deux sortes: sorption-désorption et invasion capillaire. On commencera d'abord par décrire chacune d'elles, puis par exprimer en termes de relations entre variables d'état macroscopiques les conditions particulières dans lesquelles ces expériences sont effectuées. En définitive, on sera à même, moyennant certaines remarques et certaines réserves, d'intégrer ces informations expérimentales dans le modèle théorique.

## III.1. Présentation des expériences de sorption-désorption et d'invasion capillaire.

### III.1.1. L'expérience de sorption-désorption.

L'expérience la plus classiquement réalisée est celle dite de «sorption-désorption», qui se traduit par des résultats expérimentaux appelés «isothermes de sorption-désorption». «Isothermes» car, comme l'indique ce mot, les expériences de sorption-désorption sont réalisées à température imposée constante (chaque isotherme correspondant à une valeur fixée de la température). De sorte que, à température donnée, l'isotherme de sorption-désorption renseigne sur certaines relations entre les autres variables d'état de la description macroscopique: pressions, variations de masse, déformations et contraintes mécaniques... Il conviendra d'expliciter correctement ces relations.

Décrivons l'expérience de séchage (désorption) d'un échantillon. Le processus expérimental suivi au cours d'une telle expérience est à peu près le suivant. Un échantillon (en général une éprouvette cylindrique), initialement saturé en liquide (ce qui correspond à une humidité relative de 100%:  $h_e=1$ ) est placé dans un milieu ambiant dont l'humidité relative est imposée et régulée, grâce à une solution saline placée à proximité (ainsi, éventuellement, qu'à une ventilation visant à homogénéiser l'atmosphère de l'aire d'expérimentation). Afin de se retrouver en équilibre avec le milieu ambiant, l'éprouvette va perdre une partie de son eau interstitielle, qui va se transformer en vapeur d'eau (laquelle émigre en majeure partie à l'extérieur de l'échantillon). On suppose l'expérience suffisamment lente pour que le mélange gazeux (vapeur+air) s'introduisant dans l'espace poral puisse être considéré, à chaque instant, en équilibre avec l'atmosphère.

Tout au long de cette transformation, la masse totale (squelette+eau+gaz interstitiel) de l'échantillon est mesurée. Au bout d'un temps relativement long, cette masse se stabilise autour d'une nouvelle valeur, ce qui indique que l'équilibre est rétabli entre milieu interstitiel et milieu extérieur. On reporte alors, en fonction de l'humidité relative  $h_e$  imposée la perte totale en poids de l'échantillon, qui correspond à une somme de variations de masse des constituants interstitiels: eau, vapeur et air — somme dans laquelle la part des composants gazeux est généralement négligée. De sorte qu'en définitive, chaque mesure correspondant à chaque valeur imposée de  $h_e$  donne un point expérimental dans l'espace ( $h_e, \Delta P_l$ ) — où  $\Delta P_l$  désigne la perte en poids de liquide interstitiel de l'échantillon. En pratique, dans la plupart des cas, ces résultats sont reportés dans un plan ( $h_e, S_l$ ) humidité-saturation, et livrés sous cette forme.

La manipulation est répétée pour plusieurs valeurs successives de l'humidité relative imposée  $h_e$  — jusqu'à une valeur de  $h_e$  le plus proche possible de 0 (ce qui correspond à un échantillon désaturé). Il va sans dire qu'une telle expérience prend du temps. Son déroulement est conditionné par la diffusion de la vapeur d'eau hors de l'échantillon — diffusion de type Fick de la vapeur dans le gaz puisque, la pression totale de gaz étant supposée constante, le mélange reste globalement immobile. Le temps caractéristique correspondant à chaque palier (supposé relativement faible pour qu'un ordre de grandeur linéaire soit valable) est donc proportionnel au carré de la distance de «drainage» de la vapeur (le rayon, dans le cas d'une éprouvette cylindrique) et à l'inverse du coefficient de Fick. Même pour des éprouvettes de faible diamètre, ce temps d'équilibre peut, selon les matériaux, représenter plusieurs semaines, plusieurs mois, voire plusieurs années.

L'expérience de sorption est réalisée en sens inverse (par paliers d'humidités croissantes). Si la transformation était parfaitement réversible, on retrouverait exactement la même courbe que celle de l'expérience précédente, décrite seulement en sens inverse. La réalité est toute différente: la courbe de sorption ne coïncide pas avec celle de désorption, et se situe en dessous d'elle. L'expérience de sorption-désorption présente une boucle d'hystérésis (Fig. III.1).

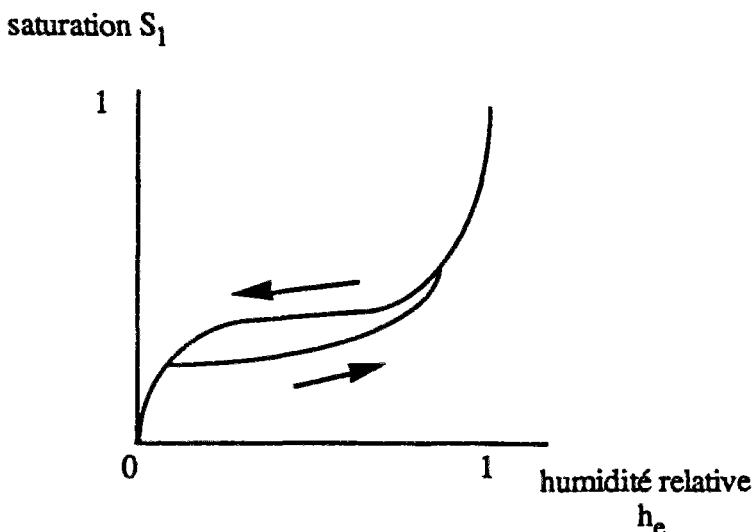


Fig. III.1

Plusieurs hypothèses ont été avancées pour expliquer ce phénomène caractéristique. Parmi elles, la plus couramment avancée est celle qui attribue l'hystérésis à la structure même du réseau poreux et au phénomène dit de «bouteille d'encre». En effet, la loi de Laplace<sup>1</sup> combinée à la relation de Kelvin<sup>2</sup> issue de l'égalité des enthalpies libres de l'eau et du gaz (pour un changement de phase supposé non dissipatif) permet de relier, à l'échelle microscopique, les rayons de pores à l'humidité relative:

$$(III.1) \quad \frac{\gamma}{r} = - \frac{\rho_l^0 R T}{\mathcal{M}_v} \ln h$$

où  $\gamma$  est une constante désignant la tension superficielle de l'interface liquide-gaz,  $R$  la constante des gaz parfaits (8,32 SI) et  $\mathcal{M}_v$  la masse molaire de la vapeur d'eau (18g/mol). Une telle formule permet d'étayer la vision d'un réseau poreux se remplissant d'eau prioritairement par les petits pores et se vidant prioritairement par les gros pores. Mais il peut se trouver qu'un gros pore soit contraint d'attendre la vidange de pores de rayon inférieur condamnant son accès afin de se vider: sa vidange se produira donc pour une valeur de l'humidité relative inférieure à celle prédite par la formule (III.1). Cette dissymétrie, due à l'arrangement du réseau, entre le remplissage et la vidange des pores peut expliquer l'hystérésis des courbes de sorption et de désorption, ainsi que la surélévation de la seconde par rapport à la première.

<sup>1</sup> Cf. notamment § II.3.2.2, p. 58, 59 et § II.3.2.3, p. 66, 67 — commentaire de la relation (II.84).

<sup>2</sup> Voir plus loin, relation (III.13).

### III.1.2. L'expérience d'invasion capillaire.

L'expérience d'invasion capillaire est assez similaire, dans son principe, à celle de sorption-désorption: il s'agit de faire varier, en la contrôlant, la pression de l'une des deux phases interstitielles en maintenant l'autre phase à pression constante. Par rapport à l'expérience précédente, les rôles sont inversés: on maintient le liquide à pression atmosphérique (expérience constamment drainée en liquide) et on impose aux limites de l'échantillon une pression de gaz variable. La différence majeure entre ces deux expériences est qu'ici la pression variable (en l'occurrence celle du mélange gazeux) est imposée directement, et non par l'intermédiaire d'une relation thermodynamique supplémentaire (changement de phase). C'est sur un tel schéma expérimental que repose le principe de la porosimétrie au mercure.

Pour le reste, le principe de la mesure (mesure de la perte en poids en fonction de la pression gazeuse imposée) reste identique à celui de l'expérience de sorption-désorption précédemment décrite.

La figure III.2 donne une représentation schématique du dispositif expérimental de l'expérience d'invasion capillaire<sup>3</sup>. L'opération consiste en fait en un drainage de l'eau interstitielle par le mélange gazeux. Ce drainage peut s'effectuer sur une gamme de saturation allant de 100% à une valeur résiduelle en deçà de laquelle, en raison de sa discontinuité, la phase liquide ne peut plus guère se déplacer. L'expérience d'invasion capillaire donne ainsi accès à une relation entre pression de gaz (imposée) et «perte en poids» (mesurée), valable sur une certaine gamme de saturation du matériau (de la saturation complète à une saturation résiduelle).

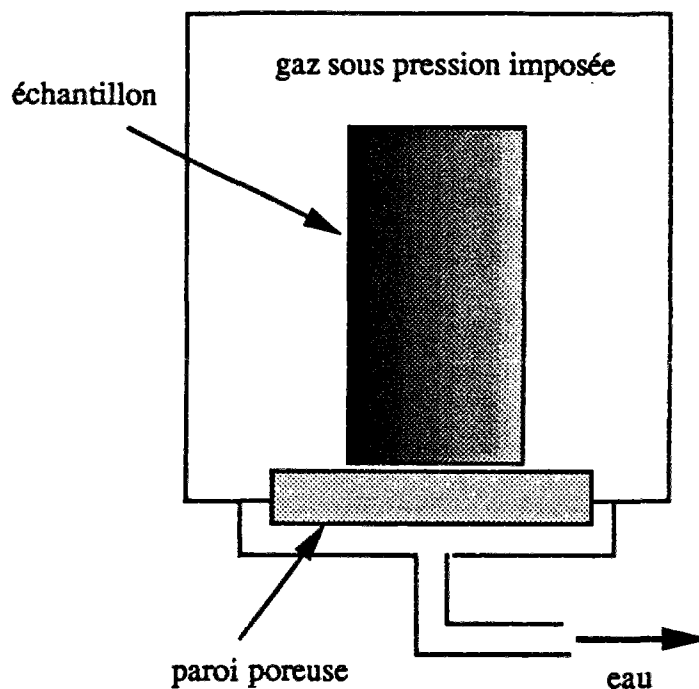


Fig. III.2

<sup>3</sup> Schéma tiré de Bourbié & alii (1986), p. 24.

### III.1.3. Complémentarité et limites des expériences de sorption-désorption et d'invasion capillaire.

Les deux expériences présentées ci-dessus sont complémentaires, dans la mesure où les informations expérimentales qu'elles délivrent couvrent deux plages différentes et complémentaires de saturation du matériau: pour les faibles saturations, on se référera ainsi aux résultats de l'expérience de sorption-désorption, tandis qu'on devra se reporter éventuellement à ceux de l'expérience d'invasion capillaire pour des saturations très proches de la valeur maximale. Cependant, l'expérience de sorption-désorption s'avère dans la plupart des cas suffisante, et plus communément pratiquée — du moins dans le domaine des bétons.

Il faut noter, en outre, que l'une et l'autre de ces deux courbes expérimentales mêlent deux phénomènes physiquement très distincts de «fixation» de l'eau interstitielle: le processus, qui nous intéresse, de condensation capillaire (donc lié au changement de phase liquide-vapeur) et celui, que notre modélisation ne permet pas de représenter, d'adsorption capillaire (correspondant à la physisorption d'un film d'eau au voisinage immédiat des parois des pores<sup>4</sup>). Aux saturations intermédiaires ou élevées, le premier phénomène est suffisamment prépondérant devant le second pour que les données expérimentales puissent lui être totalement attribuées. Aux faibles saturations, en revanche, le résultat expérimental amalgame ces deux phénomènes, de semblable importance: dans un tel cas, de toute façon, l'existence même d'une adsorption capillaire non négligeable indique les limites d'une modélisation qui, pour être complète, devrait dès lors considérer une phase supplémentaire de l'eau en distinguant entre phase vapeur, «eau libre» (ou «capillaire») et «eau liée» (correspondant à la couche adsorbée, liée au squelette)<sup>5</sup>.

## III.2. Grandeurs expérimentales et variables d'état du modèle macroscopique.

Les deux expériences principales dont on dispose ont été présentées dans le précédent paragraphe. Ce sont elles — et plus particulièrement celle de sorption-désorption — qui donneront l'information expérimentale indispensable à la complète définition du modèle. C'est pourquoi il convient, en fonction du dispositif expérimental et des principes de mesure décrits, de bien repérer les grandeurs réellement mesurées et la façon dont elles peuvent être reliées aux variables d'état macroscopiques (déformation, variations de masse et pressions) du modèle continu de milieu poreux. Cette démarche, qui a déjà été effectuée en II.3.2.1., doit ici être prolongée dans la perspective d'une analyse plus précise et plus critique des grandeurs réellement mesurées au cours du processus expérimental.

### III.2.1. Perte en poids et saturation.

Ainsi qu'il a été dit, dans les deux expériences décrites ci-dessus on impose les pressions des constituants interstitiels (l'une maintenue constante, l'autre qu'on fait varier en la contrôlant) et on mesure la variation de masse totale de l'échantillon testé au cours de la manipulation. L'hypothèse traditionnelle est alors d'attribuer cette «perte en poids» à l'évacuation de l'eau liquide interstitielle — essentiellement évacuée sous forme vapeur, après changement de phase.

<sup>4</sup> Cf. Baroghel-Bouny (1994), p. 21.

<sup>5</sup> *Ibid.*, p. 23-30. Voir aussi Saliba (1990), p. I-7 à I-10.

Raisonnons donc au niveau de l'éprouvette testée considérée comme volume élémentaire représentatif de la modélisation continue macroscopique. En nous reportant aux variables macroscopiques introduites pour la description d'un milieu continu, on écrit précisément la «perte en poids» de l'échantillon (comptée positivement dans le sens de la baisse de la masse totale) comme somme des variations de masse des trois constituants interstitiels — eau liquide, air, vapeur:

$$(III.2) \quad \Delta P = - (m_l + m_v + m_a) \Omega_0$$

où  $\Omega_0$  désigne le volume initial de l'éprouvette-VER.

Dans le cas de l'expérience de sorption-désorption, dont le principe repose sur un changement de phase liquide-vapeur, la variation totale de la masse d'eau considérée sous ses deux phases ensemble correspond à un transport hors de l'éprouvette:

$$(III.3) \quad \dot{m}_l + \dot{m}_v = - \text{Div} (M_l + M_v)$$

Le passage de l'une à l'autre des deux phases de l'eau définissant un terme d'échange de masse — compté positivement dans le sens de la vaporisation:

$$(III.4) \quad m_{l \rightarrow v}^o = \frac{1}{2} ( \dot{m}_v - \dot{m}_l - \text{Div} (M_l - M_v) )$$

La variation de masse de l'air, supposé chimiquement inerte vis-à-vis des autres constituants du milieu, se borne quant à elle à un simple phénomène de transport:

$$(III.5) \quad \dot{m}_a = - \text{Div} M_a$$

Si l'on considère isolément la «perte en poids» de la phase liquide, on écrit:

$$(III.6) \quad \Delta P_l = - m_l \Omega_0$$

Dès lors, l'eau liquide ayant un comportement microscopique quasi incompressible, la vapeur et l'air étant assimilés à des gaz parfaits à pression partielle bornée par la pression totale du mélange (maintenue constante et égale à la pression atmosphérique  $p_{atm}$ ) donc à masse volumique inférieure au millième de celle de l'eau liquide, on néglige classiquement, au cours de l'expérience de désorption, l'apport de masse sous forme de vapeur et d'air devant la perte de masse sous forme liquide (c'est-à-dire la masse d'eau initialement liquide qui quitte l'échantillon, pour l'essentiel, après transformation en vapeur et transport sous cette phase hors de l'éprouvette<sup>6</sup>). On en déduit l'hypothèse simplificatrice suivante:

$$(h1) \quad \Delta P \cong \Delta P_l = - m_l \Omega_0$$

Une seconde hypothèse souvent adoptée consiste, après division par le volume poreux considéré constant, à ramener cette variation de la masse d'eau à une variation de saturation:

$$(h2) \quad \Delta P_l \cong - \rho_l^0 \phi_0 \Delta S_l$$

<sup>6</sup> Cf. § III.2.2. Voir aussi Granger (1994), partie II, chapitre 2, § 5.2.

La combinaison de ces deux hypothèses (h1) et (h2) d'identification des grandeurs expérimentalement mesurées permet finalement de tracer des courbes d'isothermes de sorption-désorption sous forme de diagrammes humidité-saturation ( $h_e, S_1$ ).

### III.2.2. Validité et limites des hypothèses simplificatrices du dépouillement expérimental.

Il convient cependant de mesurer précisément, en les replaçant dans le contexte de notre description macroscopique, le degré d'approximation de chacune de ces deux hypothèses.

On peut d'ores et déjà avancer que (h2) revient, en ignorant la variation du volume interstitiel, à négliger l'influence du couplage hydro-mécanique sur les isothermes obtenus. En effet, en se reportant à la définition exacte de la variation de masse liquide, on peut écrire précisément:

$$m_1 \Omega_0 = \rho_1^0 [S_1 \phi \Omega - S_1^0 \phi_0 \Omega_0] = [(1+\epsilon) \phi S_1 - \phi_0 S_1^0] \rho_1^0 \Omega_0$$

et par approximation:

$$m_1 \Omega_0 \cong [S_1 - S_1^0] \rho_1^0 \phi_0 \Omega_0$$

Approximation qui conduit immédiatement à l'hypothèse (h2), et où l'on a négligé la variation de masse liquide due à une variation du volume poreux total (à saturation constante) devant celle due à une variation de saturation (à volume poreux  $\phi \Omega$  constant). Ceci revient très précisément à considérer que, en l'absence de contrainte mécanique, la variation appliquée de l'humidité relative n'induit pratiquement aucune variation de l'espace poreux de l'éprouvette. Il est d'ailleurs aisé d'établir l'expression différentielle exacte de la perte en poids — ramenée à la masse totale d'eau contenue dans l'éprouvette — en fonction des variables d'état macroscopiques:

$$(III.7) \quad \frac{dP_1}{\rho_1^0 \phi \Omega} = \frac{S_1}{\phi} d\epsilon + dS_1$$

Relation qui montre clairement que l'hypothèse (h2) consiste effectivement à négliger l'influence du retrait de dessiccation — produit par simple modification de l'hygrométrie — sur la valeur de la perte en poids. Les résultats numériques du chapitre V permettront de confirmer cette faible influence du retrait sur la valeur de la porosité totale (qu'on peut dès lors considérer quasi constante), donc sur celle de la variation de masse liquide interstitielle. Au demeurant, une simple analyse du modèle théorique permet, à la lumière des mesures expérimentales réalisées, d'étayer d'emblée la validité de l'hypothèse (h2): c'est ce que montrera précisément le §III.4.2.

L'hypothèse (h1), quant à elle, est plus délicate à analyser dans le cadre de la modélisation adoptée. Elle semble intuitivement assez fondée dans la mesure où les masses volumiques d'air et de vapeur introduits sont négligeables devant celle de l'eau liquide: ceci parce que le mélange gazeux reste à pression atmosphérique pendant tout le déroulement de l'expérience, donc très peu condensé par comparaison avec la phase liquide.



Il est cependant intéressant, à la lumière des équations de transport et d'échange de masse rappelées en (III.3) et (III.5), d'analyser certaines conséquences et de donner une interprétation physique supplémentaire de cette hypothèse. En effet, le fait de négliger  $m_v$  devant  $m_l$  consiste à postuler, d'après (III.3) et (III.5):

$$| \text{Div } M_v - m^{\circ}_{l \rightarrow v} | \ll | \text{Div } M_l + m^{\circ}_{l \rightarrow v} |$$

d'où l'on déduit finalement, à condition de considérer le transport d'eau liquide négligeable devant celui de la vapeur, ou au mieux du même ordre que lui (hypothèse classique dans le béton)<sup>7</sup>:

$$\text{Div } M_v \cong m^{\circ}_{l \rightarrow v}$$

Cette relation d'équivalence entre  $m^{\circ}_{l \rightarrow v}$  et  $\text{Div } M_v$  exprime que l'essentiel de la masse d'eau transformée en vapeur s'échappe, sous forme d'un flux de vapeur, à l'extérieur; le reliquat restant sur place, dans l'espace interstitiel, sous forme de vapeur, concerne une masse négligeable de liquide transformé. Ceci est très logiquement en rapport avec une hypothèse de forte disproportion des masses volumiques respectives de l'eau liquide et de l'eau vapeur, qui ne saurait être compensée par une éventuelle augmentation de l'espace interstitiel.

Que conclure de cet examen quant au dépouillement des résultats expérimentaux dans la perspective de la problématique théorique tracée dans les précédents chapitres?

Si l'on veut faire acte de rigueur, il convient de dépouiller les courbes expérimentales de sorption-désorption comme des relations entre humidité relative imposée — donc pression de vapeur  $p_v$  — et perte en poids réelle  $\Delta P$ . On obtient des données expérimentales sous forme de relations fonctionnelles du type:

$$p_v = f ( m_l + m_v + m_a )$$

L'expérience d'invasion capillaire consiste quant à elle en une relation entre la pression totale de la phase gazeuse et la même perte en poids  $\Delta P$ , donc:

$$p_g = f ( m_l + m_v + m_a )$$

à pression de liquide constante:  $p_l = p_{atm}$ . Encore faut-il remarquer, dès lors, que de telles courbes sont totalement dépendantes des conditions très particulières de l'expérience de sorption-désorption, et *a priori* non exploitables dans un cas plus général.

<sup>7</sup> Cf. L. Granger (1994), partie II, chapitre 2, § 5.2.. On a en effet :

$$| \text{Div } M_v - m^{\circ}_{l \rightarrow v} | \ll | \text{Div } M_l + m^{\circ}_{l \rightarrow v} |$$

qui peut s'écrire:

$$\text{Div } M_v - m^{\circ}_{l \rightarrow v} = \eta ( \text{Div } M_l + m^{\circ}_{l \rightarrow v} )$$

où  $\eta$  est une fonction à valeur absolue très petite devant 1. Dès lors, la relation précédente s'exprime:

$$\text{Div } M_v - \eta \text{Div } M_l = (1+\eta) m^{\circ}_{l \rightarrow v}$$

égalité dans laquelle on peut négliger le terme  $\eta \text{Div } M_l$  si  $\text{Div } M_l$  est du même ordre que  $\text{Div } M_v$ , ou d'un ordre inférieur.

En vertu du travail d'identification de la loi macroscopique réalisé au précédent chapitre, il semble plus judicieux et plus fructueux de traduire l'information expérimentale sous la forme selon laquelle elle a été introduite dans le modèle: celle d'une relation, indépendante du choix de l'expérience, entre pression capillaire et saturation en eau:

$$p_c = f ( S_l )$$

Retraduite sous cette forme, l'information sera en revanche exploitable dans n'importe quelle configuration. C'est à ce prix seulement que sera réalisée à plein l'identification expérimentale de la loi de comportement.

Dès lors, on comprend l'intérêt des deux hypothèses successives (h1) et (h2) qui président au dépouillement habituel des résultats de l'expérience, permettant de les exprimer comme relations entre saturation en eau et humidité relative (dans le cas de l'expérience de sorption-désorption) ou bien directement entre saturation en eau et pression capillaire (obtenue par simple différence de la pression de gaz imposée et de la pression de liquide maintenue constante, dans le cas de l'expérience d'invasion capillaire). Reste à opérer un dernier passage, préalable à l'introduction dans le modèle des données expérimentales de sorption-désorption: celui de l'humidité relative à la pression capillaire. Cette dernière ayant été introduite de manière purement macroscopique<sup>8</sup>, une telle étape nécessite la traduction de l'expérience de sorption-désorption selon notre problématique théorique et sa lecture à travers le prisme de notre modélisation.

### **III.3. Sorption-désorption d'un milieu poreux.**

Afin d'introduire correctement la donnée expérimentale dans le modèle théorique élaboré au cours des précédents chapitres, il est maintenant nécessaire de préciser l'étude du modèle en la confrontant au cadre précis et restreint des conditions expérimentales qui président à la réalisation de l'expérience de sorption-désorption. Ces conditions particulières sont posées comme liaisons locales entre variables d'état. Elles sont de deux types: l'expérience de sorption-désorption se déroule à pression de mélange gazeux constante et, surtout, suppose un changement de phase entre le liquide (l) et la vapeur (v) — qui devient dès lors sa vapeur saturante.

Nous demeurons désormais dans le cadre H5 des hypothèses exposées au chapitre II : matrice et fluide incompressibles, gaz parfaits, dépendance de  $K_0$  en fonction de la seule variable de déformation. Cependant, nous introduisons, dans tout ce qui va suivre, deux nouvelles conditions: changement de phase liquide-vapeur et constance de la pression de gaz.

#### **III.3.1. Ecriture des conditions de changement de phase.**

Le changement de phase, considéré non dissipatif, se traduit par la simple égalité des enthalpies libres massiques du liquide et de sa vapeur saturante, ainsi qu'annoncé et justifié en II.1.1.

---

<sup>8</sup> Cf. § II.3.2.1. et particulièrement la relation (II.69).

Ainsi, l'hypothèse supplémentaire de changement de phase introduit la relation suivante, valable pour tous les états considérés, c'est-à-dire pour toutes les valeurs prises en compte des différentes variables d'état :

$$(III.8) \quad g_l = g_v$$

relation qui, du fait des équations d'état du milieu global, introduit une liaison entre variables d'état :

$$(III.9) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial m_l} (\varepsilon, m_l, m_v, m_a) = \frac{\partial \Psi}{\partial m_v} (\varepsilon, m_l, m_v, m_a)$$

Il est intéressant de noter que la relation (III.9) est en fait l'écriture macroscopique de l'équation de Clapeyron en comportement poroélastique.

Formons la différence  $W_{l \rightarrow v}$  de ces deux quantités, et dérivons la partiellement par rapport à la variation de masse  $m_v$ . On obtient, par application de la relation (II.21) entre matrice jacobienne de l'énergie libre et matrice de Biot, l'expression suivante:

$$\frac{\partial W_{l \rightarrow v}}{\partial m_v} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m_v \partial m_l} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m_v^2} = \frac{M_{lv}}{\rho_l \rho_v} - \frac{M_{vv}}{\rho_v^2}$$

d'où, en vertu des expressions (II.78), issues de l'hypothèse H5, des modules  $M_{vj}$ :

$$\frac{\partial W_{l \rightarrow v}}{\partial m_v} = \frac{K_v}{\phi_g \rho_v} \left( \frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v} \right)$$

égalité par laquelle on peut s'assurer que la dérivée partielle de la fonctionnelle  $W_{l \rightarrow v}$  ne s'annule pas<sup>9</sup> et que, par conséquent, la variable d'état  $m_v$  peut s'exprimer en fonction des autres variables d'état  $\varepsilon$ ,  $m_l$  et  $m_a$ <sup>10</sup>:

$$(I.10) \quad m_v = m_v (\varepsilon, m_l, m_a)$$

Pourquoi particulariser la variable  $m_v$ ? Il est vrai qu'*a priori* n'importe laquelle des quatre variables de départ aurait pu être exprimée en fonction des trois autres. Si  $m_v$  a été choisie, c'est seulement par analogie avec la description classique du changement de phase d'un corps pur, où les seules variables d'état en jeu sont relatives au liquide et à sa vapeur saturante. Par analogie, donc, il s'est agi d'isoler, au sein de notre problème, le phénomène particulier de changement de phase.

Ceci ne laissait plus le choix qu'entre  $m_v$  et  $m_l$ . Si l'on a choisi alors de conserver  $m_l$ , et non  $m_v$ , comme variable du problème, c'est tout simplement que les courbes de sorption-désorption expriment l'évolution de grandeurs caractéristiques (humidité relative

<sup>9</sup> Sauf dans le cas particulier où la masse volumique de la vapeur et celle du liquide sont égales, ce qui correspond en fait au point critique de l'équilibre liquide-vapeur. Un tel cas constitue de toute façon un cas limite de notre modélisation, y compris du point de vue de la description et de la définition du milieu puisque, au point critique, la distinction liquide/vapeur n'est plus pertinente.

<sup>10</sup> On fait là encore usage, comme en II.1.2., du théorème mathématique de l'inversion locale.

ou pression capillaire) en fonction de la saturation en eau, laquelle est reliée, conformément à la formule (II.72), à l'apport de masse  $m_j$ .

Cette liaison entre variables peut également s'écrire sous forme différentielle, ce qui a l'avantage de faire intervenir directement les coefficients  $M_{ij}$  et  $b_j$  :

$$(III.11) \quad \frac{dm_v}{\rho_v} = \left( \frac{\frac{M_{vj}}{\rho_v} - \frac{M_{lj}}{\rho_l}}{\frac{M_{vv}}{\rho_v} - \frac{M_{lv}}{\rho_l}} b_j \right)_{j=1,v,a} d\varepsilon - \left( \frac{\frac{M_{vj}}{\rho_v} - \frac{M_{lj}}{\rho_l}}{\frac{M_{vv}}{\rho_v} - \frac{M_{lv}}{\rho_l}} \right)_{j=1,a} \frac{dm_j}{\rho_j}$$

La liaison entre variables imposée par l'hypothèse de changement de phase s'exprime donc comme relation différentielle faisant intervenir les coefficients  $b_i$  et  $M_{ij}$  de la loi de comportement. Cette dernière relation s'avère tout à fait valable dans le cas le plus général (c'est-à-dire hors de l'hypothèse H5 supposant la matrice incompressible, ainsi que le fluide, et les deux gaz parfaits) ; cependant, dans le cadre plus spécifique des hypothèses désormais retenues, la liaison thermodynamique imposée peut s'écrire directement en fonction des variables d'état.

### III.3.2. Equation de Kelvin.

Le liquide considéré étant incompressible et sa vapeur saturante étant supposée vérifier la loi des gaz parfaits, l'égalité (III.8) des enthalpies libres massiques traduisant le changement de phase non dissipatif s'écrit ici, en fonction des pressions respectives du liquide et de sa vapeur :

$$(III.12) \quad p_l = p_l^* + \frac{\rho_l^0 RT}{\mathcal{M}_v} \ln \left( \frac{p_v}{p_v^*} \right)$$

Remarquons qu'une telle égalité ne représente rien d'autre que l'intégration de la relation isotherme de Clapeyron (II.115) — relation différentielle d'égalité des enthalpies libres massiques — dans le cas particulier, désormais retenu, d'un liquide incompressible et d'une vapeur obéissant à la loi des gaz parfaits. Dans cette égalité, le couple de pressions  $(p_l^*, p_v^*)$  est censé représenter un état d'équilibre thermodynamique de référence. Insistons sur le fait que cet état de référence n'a pas besoin de correspondre à un état réellement rencontré dans le problème couplé étudié : il n'est, en effet, état de référence que du point de vue thermodynamique — celui du changement de phase liquide-vapeur.

Aussi le plus commode est-il de prendre comme état de référence thermodynamique le couple  $(p_l^*, p_v^*)$  correspondant au changement de phase de l'eau libre en conditions atmosphériques : pression de liquide et pression totale de gaz égales à la pression atmosphérique ( donc planéité de l'interface liquide-gaz et absence de toute notion de pression capillaire ), pression de vapeur  $p_{vs}^0$  fixée par la seule valeur de la température. L'égalité des enthalpies fait alors apparaître le rapport  $p_v/p_{vs}^0$ , qui correspond précisément à la notion d'humidité relative  $h$  définie en (II.70), et conduit à la fameuse loi de Kelvin:

$$(III.13) \quad p_l = p_{atm} + \frac{\rho_l^0 RT}{\mathcal{M}_v} \ln h$$

Le passage de cette écriture classique — en pression — de l'égalité des enthalpies libres massiques à une écriture adaptée à notre modèle, c'est-à-dire faisant intervenir les variables  $\epsilon$  et  $m_j$ , se fait par l'intermédiaire de la pression capillaire  $p_c$  et de l'humidité relative  $h$ . En effet, la pression capillaire s'écrit comme différence de la pression de gaz — dont on connaît l'expression intégrée en fonction des variables d'état  $\epsilon$  et  $m_j$  grâce aux égalités (II.112) et (II.113) — et la pression de liquide exprimée, *via* la loi de Kelvin (III.13), en fonction de l'humidité relative  $h$ ; ainsi:

$$(III.14) \quad p_c = p_{vs}^0 h(\epsilon, m_1, m_a) + p_a^0 \frac{\phi_g^0 + \frac{m_a}{\rho_a^0}}{\phi_g^0 - \frac{m_1}{\rho_1^0} + \epsilon} - p_{atm} - \frac{\rho_l^0 RT}{\mathcal{M}_v} \ln h(\epsilon, m_1, m_a)$$

Nous étant placé dans le cadre d'un changement de phase, nous avons choisi d'exprimer  $m_v$  comme fonction des trois autres variables. Il faut donc considérer toutes les grandeurs introduites ci-dessus, et en particulier l'humidité relative  $h$ , comme des fonctions des variables  $\epsilon$ ,  $m_1$  et  $m_a$ .

La pression capillaire étant dépendante de la seule saturation en eau  $S_1$ , et par conséquent identifiable, dans le cas de figure le plus général, à partir d'une donnée expérimentale unique, la relation précédente constitue — sitôt que l'on dispose de l'information expérimentale — une définition implicite de la fonction  $h$ , fonction des variables d'état  $\epsilon$ ,  $m_1$  et  $m_a$ .

Dès lors, l'expression reliant l'apport de masse  $m_v$  aux autres variables d'état nous est accessible, grâce à l'expression (II.112) de  $p_v$  en fonction de la déformation et des apports de masse :

$$(III.15) \quad \frac{m_v}{\rho_v^0} = -\phi_g^0 + \frac{p_{vs}^0}{p_v^0} \left( \phi_g^0 - \frac{m_1}{\rho_1^0} + \epsilon \right) h(\epsilon, m_1, m_a)$$

$p_v^0$  et  $\rho_v^0$  représentant les valeurs initiales respectives de la pression et de la masse volumique de la vapeur.

### III.3.3. Les conditions particulières de l'expérience de sorption-désorption.

Restreignons à nouveau notre champ d'investigation en supposant maintenant, en plus du changement de phase non dissipatif, que la pression totale de la phase gazeuse reste constante, en temps et en espace, et égale à la pression atmosphérique : c'est ce cadre d'hypothèses qui définit l'expérience de sorption-désorption.

La relation (III.14), établie entre humidité relative et pression capillaire dans le cas d'un changement de phase quelconque, se simplifie ici, en raison de l'égalité de la pression du mélange gazeux à la pression atmosphérique, en :

$$(III.16) \quad p_c^{sd} = - \frac{\rho_l^0 RT}{\mathcal{M}_v} \text{Log } h^{sd}$$

l'exposant (sd) servant à distinguer la pression capillaire et l'humidité relative correspondant explicitement à l'expérience de sorption-désorption.

C'est précisément cette expérience qui nous fournira la majeure partie des données expérimentales dont nous avons besoin. Rappelons que, comme cela a été décrit au paragraphe III.1.1., c'est en fait l'humidité relative qui est mesurée, et que c'est par l'intermédiaire de la formule (III.16) ci-dessus que s'en déduit la valeur correspondante de la pression capillaire. Autant dire qu'on ne mesure pas directement la pression capillaire, et que celle-ci n'est déduite, d'après l'égalité des enthalpies libres (*ie.* la loi de Kelvin), que de l'équilibre thermodynamique entre l'eau liquide et sa vapeur saturante, ainsi que du maintien de la pression totale de la phase gazeuse à la pression atmosphérique.

Il est cependant important que, compte tenu de la relation ci-dessus, l'hypothèse (II.88) de relation biunivoque entre pression capillaire  $p_c$  et saturation  $S_1$  en eau se répercute au niveau de la relation entre humidité relative de sorption-désorption  $h^{sd}$  et saturation  $S_1$ , relation nécessairement biunivoque, elle aussi. De sorte que notre modèle ne saurait rendre compte des effets hystérétiques constatés au cours des expériences de sorption-désorption, effets que nous ignorons délibérément.

Pour terminer de replacer complètement l'expérience de sorption-désorption dans la perspective de notre modélisation, précisons que dans le cadre exposé présentement les deux conditions imposées — changement de phase non dissipatif et constance de la pression de la phase gazeuse — impliquent deux liaisons entre les variables d'état ; de sorte que l'ensemble des grandeurs de ce problème ne dépendent plus que de deux d'entre elles —  $\varepsilon$  et  $m_l$ , retenues parce qu'elles interviennent dans l'expression de la saturation en eau, variable de notre identification expérimentale. Les deux variables de départ restantes,  $m_v$  et  $m_a$ , s'expriment alors en fonction des deux précédentes grâce aux deux relations suivantes:

$$(III.17) \quad \frac{m_v}{\rho_v^0} = -\phi_g^0 + \frac{p_{vs}^0}{p_v^0} \left( \phi_g^0 - \frac{m_l}{\rho_l^0} + \varepsilon \right) h^{sd} (S_1)$$

$$(III.18) \quad \frac{m_a}{\rho_a^0} = -\phi_g^0 + \frac{1}{p_a^0} \left( \phi_g^0 - \frac{m_l}{\rho_l^0} + \varepsilon \right) (p_{atm} - p_{vs}^0 h^{sd} (S_1))$$

La première de ces relations est la traduction directe, en fonction de l'humidité relative  $h^{sd}$  de l'expérience de sorption-désorption, de la relation (III.15) traduisant la dépendance de  $m_v$  en fonction des autres variables pour tout changement de phase. La deuxième découle immédiatement de la constance de la pression totale du mélange gazeux, traduite en fonction des variables macroscopiques retenues par l'intermédiaire des relations (II.112) et (II.113).

## III.4. Identification expérimentale du modèle poroélastique non linéaire.

### III.4.1. Insertion de l'isotherme de sorption-désorption dans le modèle.

Le premier paragraphe du présent chapitre a permis de présenter et de décrire l'expérience de sorption-désorption, communément pratiquée et dont les résultats sont connus et maîtrisés. Dans la seconde partie, les grandeurs du dépouillement expérimental ont été introduites et «critiquées» — du moins a-t-on mis en évidence certaines hypothèses implicites d'approximation et de non-couplage que leur manipulation traditionnelle sous-entend. Le troisième paragraphe a consisté en l'écriture, en fonction des variables d'état et

de la modélisation macroscopiques adoptées, des conditions particulières de l'expérience de sorption-désorption: de sorte que celle-ci s'inscrit désormais précisément dans le cadre du modèle général de milieu poreux non saturé.

Se pose maintenant à nous le problème essentiel du passage du particulier au général. Comment l'information expérimentale fournie par l'expérience de sorption-désorption peut-elle s'affranchir du particularisme de son obtention et être utilisée dans le cas le plus général? En somme, comment faire du résultat d'une expérience particulière un résultat intrinsèque au matériau, une loi (empirique) de comportement?

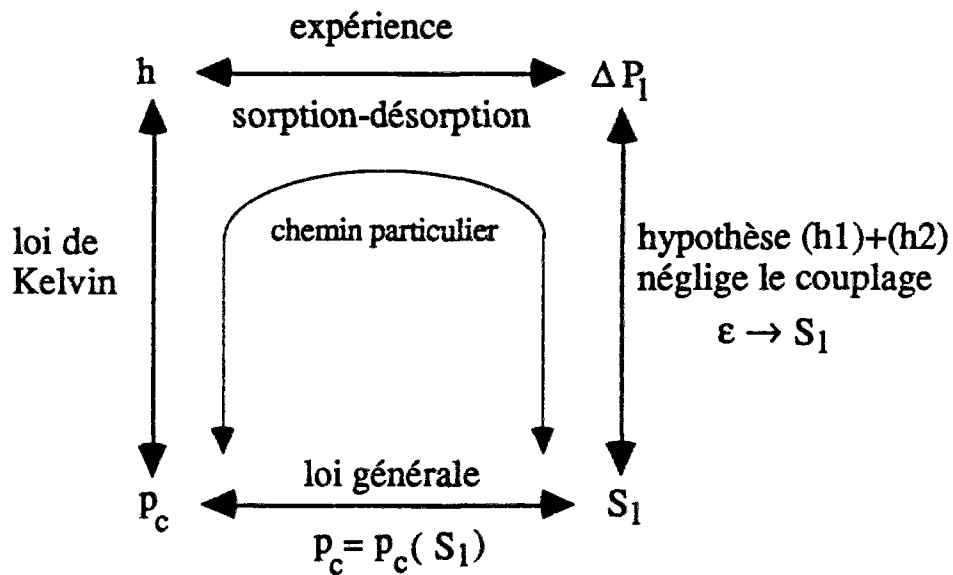


Fig. III.3.

C'est en réponse à une telle question qu'intervient l'hypothèse (II.87/8) faisant de la pression capillaire une grandeur déterminée par la donnée de la seule saturation en liquide. Dès lors qu'est établie la dépendance de  $p_c$  en fonction d'une seule variable d'état, une seule et unique expérience suffira à l'identification de la courbe. Cette expérience, c'est celle de sorption-désorption. C'est ainsi la généralité, hors toute condition restrictive, de la relation  $p_c = p_c(S_1)$  qui nous affranchit du caractère particulier et *a priori* partiel de l'information expérimentale délivrée par l'expérience de sorption-désorption. Grâce à la relation-hypothèse (II.87), la courbe  $p_c = p_c(S_1)$  obtenue au cours d'une telle expérience peut être tenue pour intrinsèque au matériau: fonction d'état, traduisant sous forme d'une loi de comportement macroscopique le comportement microscopique de l'interface liquide-vapeur (*ie.* de la loi de Laplace).

### III.4.2. Evaluation et discussion des approximations expérimentales.

Comme indiqué précédemment, le dépouillement des résultats expérimentaux et leur expression sous forme de courbes  $h=h(S_1)$  — ou  $p_c=p_c(S_1)$  — supposent les deux hypothèses (h<sub>1</sub>) et (h<sub>2</sub>) exposées en III.2. La démarche exposée dans le chapitre II permet d'évaluer *a priori*, par confrontation avec les résultats de l'expérience, la validité des approximations faites.

En effet, dans le cas d'une expérience de sorption-désorption, l'absence de contrainte appliquée ( $d\sigma=0$ ) se traduit, une fois reportée dans la relation de comportement (II.26), par l'égalité suivante reliant retrait de dessiccation et pression capillaire:

$$(III.19) \quad d\epsilon_{sd} = -\frac{S_1}{K_0} dp_c$$

qui, reportée dans la relation générale (II.81) exprimant la pression capillaire en fonction de la déformation et de la variation de masse, donne dans le cas particulier de la sorption-désorption:

$$(III.20) \quad \frac{dm_1}{\rho_1^0} = -\frac{1}{M} \left(1 + \frac{S_1^2 M}{K_0}\right) dp_c$$

En attribuant la totalité de la perte en poids de l'échantillon à la perte de masse liquide (hypothèse (h<sub>1</sub>), semble-t-il raisonnable), on mesure, au cours de l'expérience, l'évolution de  $m_1$ . De sorte que, mise en regard de l'humidité relative  $h^{sd}$  — imposée au cours de l'expérience — et donc, *via* la relation (III.16), de la pression capillaire  $p_c$ , la mesure expérimentale permet en fait d'évaluer très précisément le terme:

$$(III.21) \quad \mathcal{M} = \frac{M}{1 + \frac{S_1^2 M}{K_0}}$$

Ainsi, c'est donc le module  $\mathcal{M}$  qui est mesuré, et non le module  $M$  de la pente  $p_c=p_c(S_1)$ . Assimiler  $\mathcal{M}$  à  $M$ , c'est-à-dire supposer:

$$(III.22) \quad \mathcal{M} \cong M$$

revient en fait à négliger devant 1 le terme correctif  $\frac{S_1^2 M}{K_0}$ , qui peut s'écrire, grâce à la relation (II.95):  $\frac{S_1}{\phi_0 + \epsilon} \left[ \frac{S_1}{K_0} \frac{dp_c}{dS_1} \right]$ ; terme qui dans le cas de l'expérience de sorption désorption, est précisément égal d'après (III.19) à:  $\frac{S_1}{\phi_0 + \epsilon} \left( -\frac{d\epsilon_{sd}}{dS_1} \right)$ . Ainsi, (III.22) revient à écrire:



$$\frac{S_1}{\phi_0 + \epsilon} \left| \frac{d\epsilon_{sd}}{dS_1} \right| \ll 1$$

donc, au premier ordre en  $\epsilon$ , à écrire:

$$\frac{S_1}{\phi} |d\epsilon_{sd}| \ll |dS_1|$$

ce qui, par référence à (III.7), montre qu'un tel dépouillement des résultats expérimentaux repose bien sur l'hypothèse de faible contribution relative de la déformation à la variation de masse liquide dans le milieu: c'est l'hypothèse (h2).

Or, l'expression de cette hypothèse (h2) en fonction des modules et coefficients macroscopiques du modèle permet d'évaluer précisément son degré de validité. La relation (III.21) montre que la valeur  $M$  est inférieure à la valeur mesurée  $\mathcal{M}$ . Ainsi, le terme  $\frac{S_1^2 M}{K_0}$

est inférieur au terme mesuré  $\frac{S_1^2 \mathcal{M}}{K_0}$ , donc, *a fortiori*, au rapport  $\frac{\mathcal{M}}{K_0}$ . Or, la mesure expérimentale montre que, pour des valeurs de la saturation supérieures à 50 ou 60%, le module mesuré  $\mathcal{M}$  est de l'ordre du centième du module d'incompressibilité  $K_0$ .

Par ailleurs, le § II.3.5 a permis d'établir que le produit  $S_1^2 M$  tend vers 0 lorsque la saturation tend vers 0. On peut donc considérer l'hypothèse (h2) comme valable sur l'ensemble de la gamme des saturations.

Ainsi, la référence précise au modèle permet d'étayer l'hypothèse (h2) qui préside au dépouillement expérimental, consistant à assimiler variation de masse liquide et variation de saturation. Telles qu'elles nous sont livrées, les courbes expérimentales paraissent donc tout à fait fiables, et peuvent dès lors être exploitées selon la procédure indiquée au § III.4.1.

Ainsi la démarche théorique et expérimentale s'avère-t-elle cohérente dans son ensemble. L'hypothèse expérimentale (h2) permet une exploitation des mesures par le modèle, conforme à l'hypothèse théorique (II.87/8); alors qu'en retour, l'hypothèse théorique (II.87/8) permet d'assurer la validité de l'hypothèse expérimentale (h2). Il est d'ailleurs intéressant de noter que ces deux hypothèses, l'une théorique, l'autre expérimentale, reposent sur la même idée physique d'une faible influence de la déformation sur l'état thermodynamique du milieu interstitiel<sup>11</sup>. Il n'est dès lors pas étonnant que l'une et l'autre «marchent de concert». Pour autant, un découplage partiel dans le sens déformation—>fluides interstitiels ne préjuge en rien de l'importance du couplage réciproque: fluides interstitiels—>déformation: or c'est précisément ce dernier qui, pour l'ingénieur occupé avant tout de l'état mécanique macroscopique des structures du Génie civil, constitue le véritable enjeu et le véritable centre d'intérêt.

<sup>11</sup> Cf. §II.3.4. pour l'hypothèse théorique (II.88) et §II.2.2. pour l'hypothèse expérimentale (h2).

## Chapitre IV

### APPLICATION DU MODÈLE POROÉLASTIQUE LINÉAIRE AU RETRAIT ET AU FLUAGE DE DESSICCATION D'UN MUR INFINI

L'ensemble de ce chapitre sera consacré à un exemple de calcul simple et concret: celui du séchage et du fluage de dessiccation d'un mur.

Par souci de simplicité dans les calculs, on adoptera pour ce problème une géométrie unidimensionnelle, le mur étant supposé de longueur et hauteur infinies, de largeur finie  $L$ . Toujours par souci de simplifier et de permettre un calcul analytique complet, on étudiera le comportement poroélastique linéaire de ce mur. La prise en compte, dans ce problème, des non-linéarités de comportement mises en évidence dans la partie théorique fera l'objet d'un calcul numérique ultérieur.

L'approche linéaire, pour réductrice qu'elle soit vis-à-vis de certains phénomènes physiques intervenant dans le séchage (les courbes de capillarité sont, en effet, hautement non linéaires), permet néanmoins d'appréhender et de mesurer qualitativement le rôle et l'influence des couplages entre grandeurs mécaniques (contraintes, déformation) et grandeurs caractéristiques des fluides interstitiels (pression capillaire, humidité relative, degré de saturation). En quelque sorte, ce chapitre met l'accent sur les couplages hydro-mécaniques, tandis que le suivant, consacré à quelques simulations numériques appliquées aux mêmes configurations, insistera sur les non-linéarités du comportement.

## IV.1. Description du problème.

### IV.1.1. Géométrie, conditions aux limites et conditions initiales.

On considère donc un mur dont la hauteur et la longueur sont supposées infinies. La largeur, quant à elle, est finie et à pour mesure  $L$  (m).

Sur les surfaces planes du mur, on appliquera des sollicitations uniformes (humidité relative ou contraintes imposées) et identiques sur les deux faces, de sorte que, par sa géométrie aussi bien que par ses conditions aux limites, le problème apparaît unidimensionnel et symétrique. On est donc ramené à la résolution d'un problème gouverné par une seule variable d'espace, sur un segment  $[0, L/2]$  (correspondant à une demi-largeur), dont l'origine ( $x=0$ ) est prise au centre du mur et l'extrémité ( $x=L/2$ ) sur l'une des faces.

Le milieu considéré est celui qui a été décrit au cours des précédents chapitres: un squelette composé d'une matrice solide (grains et pâte de ciment, dans le cas du béton), dont l'espace interstitiel contient un liquide (l) et un mélange microscopiquement idéal de deux gaz: vapeur (v) et air (a). De surcroît, on se place ici délibérément dans l'hypothèse d'un équilibre thermodynamique entre le liquide (l) et sa vapeur (v), que traduit l'égalité de leurs enthalpies libres respectives (ou loi de Kelvin). De sorte que l'état thermodynamique du système est d'emblée déterminé, en tout point et tout instant, par trois seulement des quatre variables d'état *a priori* nécessaires (cf. § IV.1.4.).

Le problème ayant été décrit, d'un point de vue géométrique et physique, posons clairement les conditions initiales et les conditions aux limites envisagées.

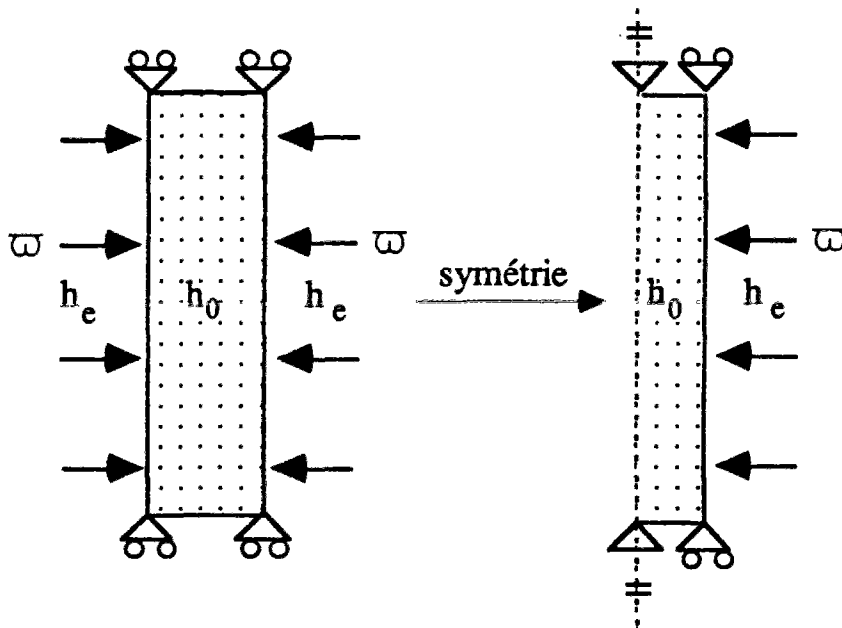


Fig. IV.1

Les conditions initiales sont supposées uniformes dans le mur: l'état initial considéré est un état d'équilibre, défini par:

**condition mécanique:**

tenseur des contraintes initial nul:

$$(IV.1) \quad \sigma_{ij}^0(x, t \leq 0) = 0$$

**conditions thermodynamiques:**

phase gazeuse en équilibre avec l'atmosphère:

$$(IV.2) \quad p_g(x, t \leq 0) = p_{atm}$$

humidité relative uniforme dans le mur:

$$(IV.3) \quad h(x, t \leq 0) = h_0$$

la loi de Kelvin déterminant alors automatiquement la valeur de la pression de liquide — donnée manquante.

Posons maintenant les conditions aux limites. Les sollicitations appliquées en  $x=L/2$  seront de deux sortes:

**condition mécanique:**

application d'une contrainte mécanique uniforme perpendiculaire à la surface:

$$(IV.4a) \quad \sigma_{xx}(x=L/2, t) = -\varpi$$

$$(IV.4b) \quad \sigma_{xy}(x=L/2, t) = \sigma_{xz}(x=L/2, t) = 0$$

**conditions thermodynamiques:**

la pression totale de gaz à la surface du mur est supposée inchangée depuis l'état initial de référence, en équilibre avec l'atmosphère:

$$(IV.5) \quad p_g(x=L/2, t) = p_{atm}$$

variation de l'humidité relative  $h_e$  imposée:

$$(IV.6) \quad h(x=L/2, t) = h_e$$

la loi de Kelvin déterminant alors automatiquement la valeur de la pression de liquide en  $x=L/2$ .

Par ailleurs, les conditions de symétrie du problème imposent les relations suivantes en  $x=0$ :

**déplacement nul:**

$$(IV.7) \quad \xi(x=0, t) = 0$$

**flux nul:** donc, avec le renfort des lois de conduction de Darcy et de Fick, des conditions de nullité en  $x=0$  des dérivées spatiales de la pression du liquide, de la pression totale du mélange gazeux et de la concentration en vapeur dans le mélange:

$$(IV.8) \quad \frac{\partial p_l}{\partial x} (x=0, t) = \frac{\partial p_g}{\partial x} (x=0, t) = \frac{\partial C_v}{\partial x} (x=0, t) = 0$$

#### IV.1.2. Le comportement poroélastique linéaire.

Comme indiqué en introduction à ce chapitre, on se bornera ici à l'étude du comportement linéaire en se plaçant dans des domaines de sollicitations (variation de l'humidité relative ou pression appliquée) suffisamment faibles (paliers de 10% maximum pour ce qui concerne l'humidité relative). De sorte que, pour ces faibles perturbations, la linéarisation du comportement autour de l'état actuel de référence (considéré comme état initial du point de vue de la linéarisation) s'avère valide. Ce qui justifie l'adoption de la loi de comportement poroélastique linéaire présentée en II.2.1., dont les coefficients sont, naturellement, les valeurs initiales des coefficients de la loi poroélastique non linéaire.

Considérons donc l'état initial défini ci-dessus. A cet état initial, entièrement déterminé par la donnée du tenseur des contraintes (nul), de l'humidité relative ( $h_0$ ) et de la pression totale de gaz ( $p_{atm}$ ) correspondent des valeurs initiales de l'ensemble des autres variables. Ainsi,  $p_c^0$ ,  $S_l^0$ ,  $p_v^0$ ,  $C_v^0$ ,  $p_a^0$ ,  $C_a^0$  désigneront les valeurs initiales respectives de la pression capillaire, de la saturation en eau, de la pression de la vapeur et de sa concentration dans le mélange gazeux, de la pression de l'air et de sa concentration dans le mélange. L'ensemble de ces valeurs sont déterminées comme suit en fonction des données du problème:

$$(IV.9) \quad p_c^0 = - \frac{\rho_l^0 RT}{\mathcal{M}_v} \ln h_0 \quad (\text{loi de Kelvin})$$

$$(IV.10) \quad S_l^0 = S_l^0 (p_c^0) \quad (\text{isotherme de sorption-désorption})$$

$$(IV.11) \quad p_v^0 = p_{vs}^0 h_0 \quad \text{et} \quad C_v^0 = \frac{p_v^0}{p_{atm}}$$

$$(IV.12) \quad p_a^0 = p_{atm} - p_v^0 \quad \text{et} \quad C_a^0 = \frac{p_a^0}{p_{atm}} = 1 - C_v^0$$

Les coefficients de la loi de comportement se calculent en fonction de ces valeurs initiales, conformément aux expressions (II.106) à (II.111) du chapitre II:

$$(IV.13) \quad M_{vv} = M_{vl} = M_{lv} = \frac{p_v^0}{\phi_g^0}$$

$$(IV.14) \quad M_{aa} = M_{al} = M_{la} = \frac{p_v^0}{\phi_g^0}$$

$$(IV.15) \quad M_{av} = M_{va} = 0$$

$$(IV.16) \quad M_{II} = \frac{p_{atm}}{\phi_g^0} - \frac{1}{\phi_0} p_c' (S_1^0) \quad (\text{d'après isotherme de sorption-désorption})$$

$$(IV.17) \quad b_l = S_1^0$$

$$(IV.18) \quad b_g = 1 - S_1^0$$

Le module d'incompressibilité drainé  $K_0(\epsilon)$  et le module de cisaillement  $\mu$  sont donnés, quant à eux, par des mesures expérimentales spécifiques et directes.

Les coefficients de la loi de comportement sont donc complètement et explicitement déterminés en fonction de l'état initial indiqué. Reportés dans les relations d'état macroscopique (isotropes) du § II.2.1., ils définissent totalement le comportement du milieu.

### IV.1.3. La courbe expérimentale de sorption-désorption.

Seule information manquant à la totale détermination de la loi de comportement: celle de la courbe de sorption-désorption. Ou plus exactement celle de sa linéarisation autour de l'état initial, qui se borne à la donnée de la saturation initiale fonction de la pression capillaire initiale (connue) et de la pente de la courbe au point considéré. Supposons donc ces deux valeurs déterminées, qu'on notera respectivement  $S_1^0$  et  $p_c'^0$ , on exprime le fait que la pression capillaire ne dépend que de la saturation par la relation linéarisée suivante:

$$(IV.19) \quad p_c = p_c^0 + p_c'^0 (S_1 - S_1^0)$$

Linéarisons par ailleurs la dépendance (II.72) de la saturation en fonction de la déformation et de l'apport de masse liquide:

$$(IV.20) \quad S_1 = S_1^0 \left( 1 + \frac{m_l}{\rho_l^0 \phi_l^0} - \frac{\epsilon}{\phi_0} \right)$$

En reportant (IV.20) dans (IV.19), on obtient l'expression linéarisée de la courbe de pression capillaire en fonction des variables d'état  $\epsilon$  et  $m_l$  retenues pour la description macroscopique du milieu:

$$(IV.21) \quad p_c = p_c^0 + p_c'^0 S_1^0 \left( \frac{m_l}{\rho_l^0 \phi_l^0} - \frac{\epsilon}{\phi_0} \right)$$

$p_c^0$  étant une valeur déterminée, d'après (IV.9), par la donnée de l'humidité relative initiale, et  $p_c'^0$  étant une valeur expérimentale à introduire — et qui représente l'information expérimentale nécessaire à la totale identification du modèle<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> La donnée expérimentale de l'isotherme de sorption-désorption se réduit en fait, dans le cadre linéaire, à celle de sa pente au point initial.

#### IV.1.4. La liaison d'équilibre thermodynamique entre variables d'état.

Le fait de supposer un changement de phase non dissipatif entre l'eau liquide (l) et sa vapeur (v) introduit une liaison thermodynamique entre variables d'état, qui s'exprime par l'égalité des enthalpies libres – c'est-à-dire, dans le cas des comportements microscopiques adoptés, par la relation de Kelvin.

Ayant pris le parti de décrire l'état du système en fonction des variables d'état macroscopiques  $\varepsilon$  et  $m_j$ , il convient de formuler selon ces variables la condition d'équilibre thermodynamique imposée. Ce qui a été réalisé au § III.3.2. et aboutit à la relation (III.15), dans laquelle la variation de masse de vapeur est exprimée en fonction des autres variables d'état par l'intermédiaire de l'humidité relative, fonction implicite (linéaire)  $\varepsilon$ ,  $m_l$  et  $m_a$  d'après la relation (III.14) (linéarisée)<sup>2</sup>.

La relation (III.14), représentant la définition implicite de  $h$  d'après la donnée de la courbe expérimentale de sorption-désorption, peut être linéarisée comme suit:

$$p_c = p_v^0 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\phi_g^0} + \frac{m_v}{\rho_v^0 \phi_g^0} + \frac{m_l}{\rho_l^0 \phi_g^0} \right) + p_a^0 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\phi_g^0} + \frac{m_a}{\rho_a^0 \phi_g^0} + \frac{m_l}{\rho_l^0 \phi_g^0} \right) - p_{atm} - \frac{\rho_l^0 RT}{\mathcal{M}_v} \ln \left[ h_0 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\phi_g^0} + \frac{m_v}{\rho_v^0 \phi_g^0} + \frac{m_l}{\rho_l^0 \phi_g^0} \right) \right]$$

soit, après linéarisation de la fonction logarithme et référence à l'expression (IV.21) de  $p_c$ :

$$p_c^0 + p_c'^0 S_l^0 \left( \frac{m_l}{\rho_l^0 \phi_l^0} - \frac{\varepsilon}{\phi_0} \right) = p_v^0 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\phi_g^0} + \frac{m_v}{\rho_v^0 \phi_g^0} + \frac{m_l}{\rho_l^0 \phi_g^0} \right) + p_a^0 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\phi_g^0} + \frac{m_a}{\rho_a^0 \phi_g^0} + \frac{m_l}{\rho_l^0 \phi_g^0} \right) - p_{atm} - \frac{\rho_l^0 RT}{\mathcal{M}_v} \left[ \ln h_0 - \frac{\varepsilon}{\phi_g^0} + \frac{m_v}{\rho_v^0 \phi_g^0} + \frac{m_l}{\rho_l^0 \phi_g^0} \right]$$

Dans cette égalité, les termes constants s'annulent (l'égalité pour des accroissements nuls de l'ensemble des variables d'état traduit l'équilibre thermodynamique dans l'état initial); de sorte que la liaison fonctionnelle entre les quatre variables d'état se simplifie:

$$(IV.22) \quad \left( \frac{\rho_l^0 RT}{\mathcal{M}_v \phi_g^0} - \frac{p_c'^0 S_l^0}{\phi_0} - \frac{p_{atm}}{\phi_g^0} \right) \varepsilon - \left( \frac{\rho_l^0 RT}{\mathcal{M}_v \phi_g^0} - \frac{p_c'^0}{\phi_0} - \frac{p_{atm}}{\phi_g^0} \right) \frac{m_l}{\rho_l^0} + \frac{1}{\phi_g^0} \left( p_v^0 - \frac{\rho_l^0 RT}{\mathcal{M}_v} \right) \frac{m_v}{\rho_v^0} + \frac{p_a^0}{\phi_g^0} \frac{m_a}{\rho_a^0} = 0$$

<sup>2</sup> Cf. § III.3.2.

#### IV.1.5. Les lois d'écoulement.

Les lois de conduction des différentes phases ou des différents constituants ont été énoncées, dans leur cadre le plus général, au chapitre I. Rappelons les ici en précisant, surtout, les phénomènes réellement pris en compte et les hypothèses physiques retenues.

On adoptera en premier lieu, dans cette étude, l'hypothèse d'une absence de mouvement de l'eau sous sa forme liquide, du fait de la très faible perméabilité du milieu à la phase liquide (par comparaison avec sa perméabilité au gaz). Ainsi, on écrira:

$$(IV.23) \quad \mathbf{M}_l = \mathbf{0}$$

Une telle hypothèse paraît raisonnable dans le cas du séchage ou du fluage du béton (dès lors, en tout cas, que l'on se place hors du domaine des saturations extrêmes); elle semble cependant souvent mise en défaut dans le cas des roches où peut s'observer un suintement, révélateur d'une diffusion et d'un transport de liquide, en concurrence avec la diffusion et le transport de la phase gazeuse.

Pour la diffusion de la phase gazeuse (c'est-à-dire du mélange dans son ensemble), on adopte une loi de Darcy classique, en négligeant tout couplage avec l'état de pression de l'eau liquide:

$$(IV.24) \quad \frac{\mathbf{M}_g}{\rho_g} = -k_g \text{ grad } p_g$$

loi de diffusion isotrope dans laquelle  $k_g$  désigne la perméabilité du milieu poreux au mélange gazeux.

Enfin, on considère un phénomène de diffusion de la vapeur à l'intérieur du mélange gazeux que l'on exprime par une loi de Fick traditionnelle:

$$(IV.25) \quad \frac{\mathbf{M}_v}{\rho_v} - \frac{\mathbf{M}_g}{\rho_g} = -F \text{ grad } C_v$$

#### IV.2. Résolution du problème.

Par raison de symétrie, on peut penser que le champ de déplacement solution du problème sera uniaxial dirigé selon (Ox). On adoptera donc une méthode de résolution par les déplacements, en cherchant *a priori* un champ solution de la forme:

$$(IV.26) \quad \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) = \xi(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_x$$

ce qui correspond à un tenseur de déformation uniaxial:

$$(IV.27) \quad \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x$$



En appliquant la relation de comportement (II.14) on montre, compte tenu de la valeur des coefficients et de la forme du déplacement, que les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes totales sont:

$$(IV.28) \quad \sigma_{xx}(x, t) = (\lambda + 2\mu) \varepsilon(x, t) - b_i M_{ij} \frac{m_j(x, t)}{\rho_j^0}$$

$$(IV.29) \quad \sigma_{xy}(x, t) = \sigma_{xz}(x, t) = \lambda \varepsilon(x, t) - b_i M_{ij} \frac{m_j(x, t)}{\rho_j^0}$$

avec les valeurs précisées plus haut des coefficients et modules de Biot.

#### IV.2.1. Equation d'équilibre.

Les relations précédentes donnant les composantes du tenseur des contraintes permettent d'écrire l'équilibre du milieu en fonction des variables d'état  $\varepsilon$  et  $m_j$ . En particulier sur la coordonnée  $\sigma_{xx}$ , qui doit vérifier:

$$(IV.30) \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 0$$

d'où la constance dans l'espace de la composante  $\sigma_{xx}$  du tenseur des contraintes:

$$(IV.31) \quad \forall (x, t \geq 0^+) \quad \sigma_{xx}(x, t) = \sigma_{xx}(x=L/2, t) = -\bar{\omega}$$

ce qui, reporté dans la relation de comportement (IV.28), donne une relation supplémentaire entre déformation et apports de masse. Si bien que, du fait de la relation (IV.22) traduisant le changement de phase eau-vapeur, à laquelle s'ajoute la condition d'équilibre (IV.31), l'état du système est entièrement déterminé par la donnée de deux variables d'état. Pour des raisons déjà exposées<sup>3</sup>, on privilégiera l'apport de masse liquide  $m_l$  et la déformation volumique  $\varepsilon$ , en fonction desquelles on exprimera l'ensemble des autres variables d'état et des grandeurs du problème. En particulier:

$$(IV.32) \quad \frac{m_v}{\rho_v^0} = \frac{\phi_g^0 \mathcal{M}_v}{\rho_l^0 RT} \bar{\omega} + \left[ 1 + \frac{\mathcal{M}_v}{\rho_l^0 RT} (\phi_g^0 (\lambda_0 + 2\mu) + p_c'^0 S_1^0 (1 - S_1^0)) \right] \varepsilon \\ - \left[ 1 + \frac{\mathcal{M}_v}{\rho_l^0 RT} p_c'^0 (1 - S_1^0)^2 \right] \frac{m_l}{\rho_l^0}$$

<sup>3</sup> Il s'agit du fait que la courbe expérimentale de sorption-désorption fait intervenir la variable saturation, laquelle se définit par la donnée de la déformation et de l'apport de masse liquide — cf. § III.3.1. et III.3.3.

d'où l'on peut également déduire, par combinaison avec la liaison thermodynamique (IV.22) entre variables, l'expression de l'apport de masse d'air  $m_a$  en fonction des deux variables choisies.

#### IV.2.2. Perturbation instantanée: l'état du système en $t=0^+$ .

Au moment précis de l'application de la sollicitation (variation d'hygrométrie ou charge uniforme), le milieu subit une modification instantanée de son état, attribuable à un comportement de type élastique non drainé. Ainsi, par exemple, à l'application d'une compression instantanée correspond un retrait instantané du squelette (déformation élastique instantanée) qui se traduit également par une diminution du volume poreux et une compression instantanée des fluides interstitiels – ceux-ci n'ayant pas le temps, instantanément, de s'écouler à l'extérieur. En fait, un tel schéma est ici compliqué par l'existence d'un changement de phase liquide-vapeur, lui aussi supposé instantané: du fait de cette possibilité d'un échange de masse instantané entre les deux phases de l'eau, on ne peut écrire que la réponse instantanée du milieu se fait à variation de masse liquide et variation de masse vapeur séparément et indépendamment nulles, et l'on est astreint à considérer l'eau interstitielle sous ses deux phases à la fois. Ainsi l'on écrira que la réponse élastique non drainée du milieu se fait sans variation de masse d'air ni de masse totale de l'eau interstitielle considérée comme corps chimique, c'est-à-dire sous ses deux phases ensemble (liquide+vapeur).

Ces deux conditions, qui s'écrivent respectivement:

$$(IV.33) \quad m_a (x, t=0^+) = 0$$

$$(IV.34) \quad m_l (x, t=0^+) + m_v (x, t=0^+) = 0$$

une fois reportées dans les relations (IV.22) et (IV.32), permettent de déterminer la valeur instantanée des deux variables d'état  $\varepsilon$  et  $m_l$  et, par suite, l'état complet du système en  $t=0^+$ . On détermine de la sorte que la perturbation instantanée de l'état du système est proportionnelle à la charge appliquée et représentée par les deux valeurs instantanées de la déformation et de la variation de masse liquide:

$$(IV.34) \quad \varepsilon (x, t=0^+) = \frac{-\overline{\omega}}{K_+} \quad \text{et} \quad m_l (x, t=0^+) = \frac{-\overline{\omega}}{M_+}$$

où  $K_+$  et  $M_+$  sont des modules que l'on peut déterminer explicitement en fonction des paramètres du modèle. Même si, étant donné la complexité des expressions exactes mises en jeu, il s'avère difficile d'en faire l'étude mathématique précise, cette dépendance peut néanmoins être commentée et analysée d'un point de vue purement physique et qualitatif. On peut en particulier avancer que la charge mécanique de compression appliquée est reprise par l'ensemble du milieu poreux, et a donc tendance à provoquer une compression des fluides interstitiels. Laquelle compression favorise la condensation des fluides interstitiels, donc un changement de phase de la vapeur vers le liquide. Changement de phase qui, par une sorte de phénomène de compensation, atténuera en retour les effets de la sollicitation, la phase liquide reprenant davantage les efforts extérieurs appliqués et soulageant ainsi les constituants gazeux, dès lors moins comprimés.

### IV.2.3. Détermination de l'ensemble des grandeurs physiques en fonction des variables d'état $\varepsilon$ et $m_1$ , pour $t \geq 0^+$ .

Une fois établies les relations entre variables d'état choisies pour la description du milieu ( $\varepsilon$  et  $m_1$ ) et les variables d'état restantes ( $m_v$  et  $m_g$ ), il est intéressant d'exprimer l'ensemble des grandeurs physiques du problème, et plus particulièrement celles intervenant dans les équations de diffusion des différents fluides interstitiels: pression totale de gaz et concentration en vapeur.

Pression partielle de la vapeur et pression partielle de l'air dans le mélange sont données par la relation de comportement générale (II.15). Grâce à l'introduction des relations de dépendance (IV.22) et (IV.32) dans (II.15), on obtient leurs expressions finales en fonction de la déformation et de l'apport de masse liquide. De sorte que, en définitive, pression partielle de vapeur et pression totale de gaz peuvent s'écrire comme suit:

$$(IV.35) \quad \frac{p_v - p_v^0}{p_v^0} = \frac{\mathcal{M}_v}{\rho_1^0 RT} \left[ \varpi + \frac{1}{\phi_0} ((\lambda_0 + 2\mu) + p_c^0 S_1^0 (1 - S_1^0)^2) \varepsilon - \frac{p_c^0 (1 - S_1^0)}{\phi_0} \frac{m_1}{\rho_1^0} \right]$$

$$(IV.36) \quad p_g - p_g^0 = \varpi + ((\lambda_0 + 2\mu) - \frac{p_c^0 (S_1^0)^2}{\phi_0}) \varepsilon + \frac{p_c^0 S_1^0}{\phi_0} \frac{m_1}{\rho_1^0}$$

Afin d'alléger les écritures et les calculs ultérieurs, introduisons d'ores et déjà des notations simplifiées en écrivant:

$$(IV.37) \quad p_v = P_v^0 + P_v^\varepsilon \varepsilon + P_v^1 \frac{m_1}{\rho_1^0}$$

$$(IV.38) \quad p_g = P_g^0 + P_g^\varepsilon \varepsilon + P_g^1 \frac{m_1}{\rho_1^0}$$

où les différents coefficients introduits sont facilement identifiés d'après confrontation avec les précédents développements des pressions de vapeur et de mélange. Insistons sur le fait que  $P_v^0$  et  $P_g^0$  ne correspondent aucunement à l'état initial ( $t \leq 0$ )<sup>4</sup> – ainsi qu'on le constate grâce aux relations (IV.35) et (IV.36) – dès lors, du moins, que la charge extérieure appliquée est non nulle: ceci du fait de la réponse instantanée non drainée en  $t=0^+$ .

Une fois ces notations simplifiées adoptées, il est aisé de déduire des développements des pressions de vapeur et de gaz l'expression linéarisée de la concentration de la vapeur dans le mélange:

<sup>4</sup> Ni, bien entendu, à l'état en  $t=0^+$  pour lequel la déformation et la variation de masse liquide instantanées sont non nulles. En fait ces grandeurs ont été introduites par des considérations purement calculatoires et n'ont pas de signification physique précise.

$$(IV.39) \quad C_v = \frac{P_v}{P_g} = \frac{P_v^0}{P_g^0} + C_v^\varepsilon \varepsilon + C_v^l \frac{m_l}{\rho_l^0}$$

avec:

$$(IV.40) \quad C_v^\varepsilon = \frac{P_v^0}{P_g^0} \left( \frac{P_v^\varepsilon}{P_v^0} - \frac{P_g^\varepsilon}{P_g^0} \right)$$

et

$$(IV.41) \quad C_v^l = \frac{P_v^0}{P_g^0} \left( \frac{P_v^l}{P_v^0} - \frac{P_g^l}{P_g^0} \right)$$

Là encore, le quotient  $P_v^0/P_g^0$  ne correspond absolument pas à une concentration initiale (ni en  $t=0$ , ni en  $t=0^+$ , dès lors que  $\varpi \neq 0$ ).

Dans la plupart des calculs ultérieurs, on se référera aux notations simplifiées introduites par les relations (IV.37) à (IV.41).

#### IV.2.4. Equations de diffusion et conservation de la masse: le système différentiel.

Rappelons sommairement les équations de conservation de la masse relatives à chacun des constituants interstitiels. Pour l'eau liquide, la perte de masse par unité de volume initial s'écrit comme somme d'un terme de transport, dû au mouvement relatif du liquide interstitiel par rapport au squelette, et d'un terme de changement de phase  $m_{l \rightarrow v}^o$ , compté positivement dans le sens de la création de vapeur:

$$(IV.42) \quad \dot{m}_l = -\text{Div } M_l - m_{l \rightarrow v}^o$$

Pour la vapeur, la variation de masse combine également ces deux contributions, la vapeur recueillant en outre toute la masse d'eau liquide cédée par changement de phase:

$$(IV.43) \quad \dot{m}_v = -\text{Div } M_v + m_{l \rightarrow v}^o$$

La variation de masse de l'air, supposé chimiquement inerte vis-à-vis des autres constituants du milieu, se borne quant à elle au seul phénomène de transport:

$$(IV.44) \quad \dot{m}_a = -\text{Div } M_a$$

Ainsi, les équations de conservation de la masse sont en fait au nombre de deux: une – la relation (IV.44) – pour l'air, une pour l'eau sous ses deux phases:

$$(IV.45) \quad \dot{m}_l + \dot{m}_v = -\text{Div } (M_l + M_v)$$

Il est clair que, du fait de la relation thermodynamique supposée entre l'eau liquide et sa vapeur, les apports de masse respectifs des deux phases sont liés<sup>5</sup>, de sorte qu'une seule équation de conservation pour l'eau sous ses deux phases suffit à la complète résolution du problème.

<sup>5</sup> Voir § III.3.1.

Afin d'établir un système d'équations aux dérivées partielles en temps et en espace, il convient de coupler ces deux équations de conservation (IV.44) et (IV.45) aux équations de diffusion (IV.23) à (IV.25). On obtient en définitive, tous calculs faits:

$$(IV.46) \quad \dot{m}_1 + \dot{m}_v = \rho_v^0 \mathcal{F} (1-C_v^0) \Delta C_v + \rho_v^0 k_g \Delta p_g$$

$$(IV.47) \quad \dot{m}_a = -\rho_a^0 \mathcal{F} C_v^0 \Delta C_v + \rho_a^0 k_g \Delta p_g$$

ce qui peut se traduire sous la forme matricielle suivante:

$$(IV.48) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} m_1 + m_v \\ m_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_v^0 (1-C_v^0) \mathcal{F} & \rho_v^0 k_g \\ -\rho_a^0 C_v^0 \mathcal{F} & \rho_a^0 k_g \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} C_v \\ p_g \end{bmatrix}$$

Il est désormais possible d'établir un système de deux équations aux dérivées partielles de deux fonctions inconnues du temps et de l'espace: les variables d'état  $\varepsilon$  et  $m_1$ . Pour ce faire, il faut et suffit que soient exprimées, en fonction de ces deux variables, l'ensemble des grandeurs intervenant dans le précédent système matriciel (IV.48).

Ainsi, l'on déduira aisément de la relation (IV.32) l'expression de la masse totale du corps eau (liquide+vapeur) selon la déformation et la variation de masse liquide, sous la forme:

$$(IV.49) \quad m_1 + m_v = \frac{\mathcal{M}_v \phi_g^0}{\rho_1^0 RT} \varpi + \mu_{1v}^e \varepsilon + \mu_{1v}^l \frac{m_1}{\rho_1^0}$$

De même, grâce à la relation de liaison thermodynamique (IV.22) entre variables d'état, la variation de masse d'air peut s'écrire explicitement sous la forme:

$$(IV.50) \quad m_a = -\rho_a^0 \left[ \frac{p_v^0 \mathcal{M}_v \phi_g^0}{p_a^0 \rho_1^0 RT} - \frac{1}{p_a^0} \right] \varpi + \mu_a^e \varepsilon + \mu_a^l \frac{m_1}{\rho_1^0}$$

l'ensemble des coefficients  $\mu_{1v}^e$ ,  $\mu_{1v}^l$ ,  $\mu_a^e$  et  $\mu_a^l$  étant explicitement déterminés en fonction des paramètres du problème. De sorte que, si l'on note [D] la matrice de diffusion apparaissant dans le système différentiel (IV.48), on peut, par combinaison des expressions (IV.38), (IV.39), (IV.49) et (IV.50), aboutir à l'écriture matricielle suivante des équations de diffusion et de conservation de la masse:

$$(IV.51) \quad \begin{bmatrix} \mu_{1v}^e & \mu_{1v}^l \\ \mu_a^e & \mu_a^l \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ m_1/\rho_1^0 \end{bmatrix} = [D] \begin{bmatrix} C_v^e & C_v^l \\ p_g^e & p_g^l \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} \varepsilon \\ m_1/\rho_1^0 \end{bmatrix}$$

ce qui conduit à un système d'équations aux dérivées partielles de la forme:

$$(IV.52) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ m_1/\rho_1^0 \end{bmatrix} = [C] \Delta \begin{bmatrix} \varepsilon \\ m_1/\rho_1^0 \end{bmatrix}$$

avec:

$$(IV.53) \quad [C] = \begin{bmatrix} \mu_{iv}^{\epsilon} & \mu_{iv}^l \\ \mu_a^{\epsilon} & \mu_a^l \end{bmatrix}^{-1} [D] \begin{bmatrix} C_v^{\epsilon} & C_v^l \\ P_g^{\epsilon} & P_g^l \end{bmatrix}$$

#### IV.2.5. Résolution mathématique: recherche d'une base de solutions.

On peut assurer, par des arguments de stabilité thermodynamique, que la matrice de diffusion  $[C]$  introduite ci-dessus est diagonalisable à valeurs propres réelles positives (et de plus distinctes), notées  $C_1$  et  $C_2$ . Notons  $v_1$  et  $v_2$  les vecteurs propres respectivement associés à  $C_1$  et  $C_2$ . Chacun d'eux vérifie, séparément, l'équation aux dérivées partielles:

$$(IV.54) \quad \dot{v}_i = C_i \Delta v_i$$

que l'on résout en cherchant une solution à variables séparées de la forme  $v_i = v_i^x(x) v_i^t(t)$ , laquelle s'obtient finalement sous forme d'une décomposition en série:

$$(IV.55) \quad v_i = \sum_{n=0}^{+\infty} V_i^n \cos(\omega^n x + \varphi_i^n) \exp(-C_i (\omega^n)^2 t)$$

dont les amplitudes spectrales  $V_i^n$ , les pulsations  $\omega^n$  et les phases  $\varphi_i^n$  sont à déterminer d'après les conditions du problème. Notons en particulier que les pulsations  $\omega^n$  peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. Par convention, on attribuera l'indice  $n=0$  à une éventuelle composante à pulsation nulle ( $\omega^0=0$ ), les autres indices étant supposés désigner des modes à pulsation  $\omega^n$  non nulle – et plus précisément strictement positive (puisque, du fait des propriétés de parité du cosinus, on peut toujours se ramener à une pulsation positive).

La déformation  $\epsilon$  et l'apport de masse liquide normalisé  $m_l/\rho_l^0$ , qui vérifient également le système différentiel (IV.52), s'écrivent comme combinaisons linéaires des précédents vecteurs propres  $v_i^6$ :

$$(IV.56) \quad \begin{bmatrix} \epsilon \\ m_l/\rho_l^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

d'où l'on déduit la forme générale suivante des variables  $\epsilon$  et  $m_l$ :

<sup>6</sup> A l'exception des termes constants éventuels qui, disparaissant par dérivation du système différentiel, n'ont pas à respecter la relation (IV.56). En fait, (IV.56) traduit une relation affine, et non vectorielle, entre les deux bipoints  $(\epsilon, \frac{m_l}{\rho_l^0})$  et le vecteur  $(v_1, v_2)$ .

(IV.57)

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{+\infty} [E_1^n \cos(\omega^n x + \varphi_1^n) \exp(-C_1(\omega^n)^2 t) + E_2^n \cos(\omega^n x + \varphi_2^n) \exp(-C_2(\omega^n)^2 t)]$$

(IV.58)

$$\frac{m_1}{\rho_1^0} = \sum_{n=0}^{+\infty} [M_1^n \cos(\omega^n x + \varphi_1^n) \exp(-C_1(\omega^n)^2 t) + M_2^n \cos(\omega^n x + \varphi_2^n) \exp(-C_2(\omega^n)^2 t)]$$

Il est à noter que, dans les deux précédentes expressions, les coefficients des décompositions spectrales ne sont pas indépendants entre eux. En effet, ils se déduisent de la confrontation des relations (IV.55) et (IV.56) qui donne:

$$E_i^n = E_i V_i^n \quad \text{et} \quad M_i^n = M_i V_i^n$$

d'où certains rapports constants entre ces coefficients:

$$(IV.59)_{i=1 \text{ ou } 2} \quad \forall n \geq 1 \quad \frac{E_i^n}{M_i^n} = \frac{E_i}{M_i}$$

Quant à eux, les termes  $E_i$  et  $M_i$  de la matrice de passage d'une base à l'autre proviennent directement de la diagonalisation de  $[C]$ ; ils dépendent donc exclusivement des coefficients  $\mu_{1v}^e, \mu_{1v}^l, \mu_a^e, \mu_a^l, C_v^e, C_v^l, P_g^e, P_g^l$  ainsi que des coefficients de  $[D]$ . Lesquels dépendent uniquement des conditions initiales et des caractéristiques du comportement du matériau, et aucunement des conditions aux limites imposées par l'utilisateur.

#### IV.2.6. Vérification des conditions du problème et détermination des coefficients inconnus.

La détermination des coefficients (amplitudes, pulsations et phases) de la décomposition spectrale passe par l'écriture des conditions aux limites, des conditions initiales et des conditions de symétrie, telles qu'elles ont toutes été récapitulées au § IV.1.1., que les solutions cherchées doivent vérifier.

Examinons tout d'abord la symétrie du problème, qui impose la nullité du déplacement en  $x=0$  (relation (IV.7)). L'intégration spatiale (évidente) de l'expression (IV.57) de la déformation, où apparaissent des fonctions *sinus* en lieu et place des fonctions *cosinus*, montre alors immédiatement que cette condition, du fait de l'indépendance de chaque terme de la décomposition (notamment parce que  $C_1 \neq C_2$ ), permet d'écrire:

pour  $i=1$  ou  $2, \forall n \geq 1$   $\sin(\varphi_i^n) = 0$

autrement dit:

(IV.60) $_{i=1 \text{ ou } 2} \forall n \geq 1 \quad \varphi_i^n = 0 [\pi]$

On peut remarquer que les autres conditions de symétrie (gradients de pressions et de concentration en vapeur nuls au centre) sont alors automatiquement vérifiées: ceci du fait que (IV.60) assure la nullité des gradients de  $\varepsilon$  mais aussi de  $m_1$ , en fonction desquels s'expriment les gradients de toutes les grandeurs physiques du problème.

Ecrivons maintenant la condition aux limites (IV.5) sur la pression de gaz; en se référant aux expressions (IV.36) et (IV.38) de  $p_g$  en fonction de  $\varepsilon$  et  $m_1$ , on obtient immédiatement:

(IV.61)  $\varpi + P_g^\varepsilon \varepsilon(x=L/2, t) + P_g^1 \frac{m_1}{\rho_1^0}(x=L/2, t) = 0$

soit d'après la forme cherchée des solutions:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(\omega^n \frac{L}{2}) [(P_g^\varepsilon E_1^n + P_g^1 M_1^n) \exp(-C_1(\omega^n)^2 t) + (P_g^\varepsilon E_2^n + P_g^1 M_2^n) \exp(-C_2(\omega^n)^2 t)] = 0$$

Ce qui, comme  $C_1 \neq C_2$ , impose dès lors la condition:

$\forall n \geq 1 \quad \cos(\omega^n \frac{L}{2}) = 0$

d'où il ressort que le produit  $\omega^n \frac{L}{2}$  est égal à  $\frac{\pi}{2}$  modulo  $\pi$ . Ainsi, en choisissant d'ordonner les pulsations dans l'ordre croissant, on sera assuré de respecter la condition précédente en prenant:

(IV.62)  $\forall n \geq 1 \quad \omega^n = \frac{(2n-1)\pi}{L}$

Reste l'ordre  $n=0$ , correspondant au terme constant des différentes grandeurs (pulsation nulle), pour lequel la condition aux limites (IV.61) impose:

(IV.63)  $P_g^\varepsilon (E_1^0 + E_2^0) \cos\varphi_0 + P_g^1 (M_1^0 + M_2^0) \cos\varphi_0 = -\varpi$

La condition aux limites en humidité relative s'écrit selon le même principe, par référence aux expressions (IV.35) et (IV.37) de la pression de vapeur fonction de la déformation et de l'apport de masse liquide. Dès lors, la condition (IV.6) impose:



$$(IV.64) \quad \frac{\mathcal{M}_v}{\rho_1^0 RT} \varpi + P_v^\varepsilon \varepsilon(x=L/2, t) + P_v^l \frac{m_1}{\rho_1^0} (x=L/2, t) = \frac{h_e - h_0}{h_0}$$

condition qui équivaut en fin de compte à:

$$(IV.65) \quad P_v^\varepsilon (E_1^0 + E_2^0) \cos\varphi_0 + P_v^l (M_1^0 + M_2^0) \cos\varphi_0 = \frac{h_e - h_0}{h_0} - \frac{\mathcal{M}_v}{\rho_1^0 RT} \varpi$$

Si l'on combine les deux relations (IV.63) et (IV.65) sur les termes constants des variables d'état, on obtient en bout de course le terme constant de la déformation:

$$(IV.66) \quad (E_1^0 + E_2^0) \cos\varphi_0 = \frac{(P_v^l + \frac{\mathcal{M}_v P_g^l}{\rho_1^0 RT}) \varpi + P_g^l (1 - \frac{h_e}{h_0})}{P_v^l P_g^\varepsilon - P_v^\varepsilon P_g^l}$$

ainsi que le terme constant de la variation de masse liquide:

$$(IV.67) \quad (M_1^0 + M_2^0) \cos\varphi_0 = \frac{(P_v^\varepsilon + \frac{\mathcal{M}_v P_g^\varepsilon}{\rho_1^0 RT}) \varpi + P_g^\varepsilon (1 - \frac{h_e}{h_0})}{P_v^l P_g^\varepsilon - P_v^\varepsilon P_g^l}$$

Reste enfin à vérifier les conditions initiales (IV.2) et (IV.3), auxquelles on substitue en fait, ici, les conditions (IV.34) tirées de l'analyse en  $t=0^+$  (la forme considérée des solutions ne valant d'ailleurs que pour  $t \geq 0^+$ ). Ainsi la condition de continuité de la déformation en  $t=0^+$  s'écrit-elle:

$$\frac{(P_v^l + \frac{\mathcal{M}_v P_g^l}{\rho_1^0 RT}) \varpi + P_g^l (1 - \frac{h_e}{h_0})}{P_v^l P_g^\varepsilon - P_v^\varepsilon P_g^l} + \sum_{n=0}^{+\infty} [(E_1^n + E_2^n) \cos((2n-1)\pi \frac{x}{L})] = \frac{-\varpi}{K_+}$$

Sur l'intervalle  $]0, L/2[$ , on peut regarder, à un coefficient multiplicatif près, la précédente somme en série comme le développement de Fourier d'une fonction définie sur l'intervalle  $] -L, L[ \setminus \{0\}$ , valant  $-1$  sur  $] -L/2, 0[$  et  $+1$  sur  $] 0, L/2[$ . Il en découle alors l'identification suivante:

$$(IV.68) \quad \forall n \geq 1 \quad E_1^n + E_2^n = \frac{4}{(2n-1)\pi} \left[ \frac{(P_v^l + \frac{\mathcal{M}_v P_g^l}{\rho_1^0 RT}) \varpi + P_g^l (1 - \frac{h_e}{h_0})}{P_v^l P_g^\varepsilon - P_v^\varepsilon P_g^l} - \frac{\varpi}{K_+} \right]$$

De la même façon, on identifie les coefficients de l'expression en série de l'apport de masse liquide:

$$(IV.69) \quad \forall n \geq 1 \quad M_1^n + M_2^n = -\frac{4}{(2n-1)\pi} \left[ \frac{(P_v^\varepsilon + \frac{\mathcal{M}_v P_g^\varepsilon}{\rho_1^0 RT}) \varpi + P_g^\varepsilon (1 - \frac{h_e}{h_0})}{P_v^l P_g^\varepsilon - P_v^\varepsilon P_g^l} - \frac{\varpi}{M_+} \right]$$

Du fait de la relation (IV.59) qui relie entre eux les coefficients  $E_i^n$  et  $M_i^n$ , les deux conditions (IV.68) et (IV.69) s'écrivent comme un système de deux équations à deux inconnues, en fonction de  $E_1^n$  et  $E_2^n$  par exemple. Lequel système, une fois résolu, conduit aux deux identifications suivantes:

$$(IV.70) \quad \forall n \geq 1 \quad E_1^n = \left(1 - \frac{E_1 M_2}{M_1 E_2}\right)^{-1} \frac{4}{(2n-1)\pi} \left\{ \left[ \frac{(P_v^l + \frac{\mathcal{M}_v P_g^l}{\rho_1^0 RT}) \varpi + P_g^l (1 - \frac{h_e}{h_0})}{P_v^l P_g^\varepsilon - P_v^\varepsilon P_g^l} - \frac{\varpi}{K_+} \right] \right. \\ \left. + \frac{E_2}{M_2} \left[ \frac{(P_v^\varepsilon + \frac{\mathcal{M}_v P_g^\varepsilon}{\rho_1^0 RT}) \varpi + P_g^\varepsilon (1 - \frac{h_e}{h_0})}{P_v^l P_g^\varepsilon - P_v^\varepsilon P_g^l} - \frac{\varpi}{M_+} \right] \right\}$$

$$(IV.71) \quad \forall n \geq 1 \quad E_2^n = \left(1 - \frac{E_2 M_1}{M_2 E_1}\right)^{-1} \frac{4}{(2n-1)\pi} \left\{ \left[ \frac{(P_v^l + \frac{\mathcal{M}_v P_g^l}{\rho_1^0 RT}) \varpi + P_g^l (1 - \frac{h_e}{h_0})}{P_v^l P_g^\varepsilon - P_v^\varepsilon P_g^l} - \frac{\varpi}{K_+} \right] \right. \\ \left. + \frac{E_1}{M_1} \left[ \frac{(P_v^\varepsilon + \frac{\mathcal{M}_v P_g^\varepsilon}{\rho_1^0 RT}) \varpi + P_g^\varepsilon (1 - \frac{h_e}{h_0})}{P_v^l P_g^\varepsilon - P_v^\varepsilon P_g^l} - \frac{\varpi}{M_+} \right] \right\}$$

Ces différentes relations peuvent d'ailleurs se simplifier sensiblement si l'on réintroduit les valeurs initiales des variables d'état et autres paramètres de départ, en fonction desquels les coefficients  $P_v^l$ ,  $P_g^\varepsilon$ ,  $P_v^\varepsilon$  et  $P_g^l$  ont été définis en (IV.37) et (IV.38). On obtient alors les simplifications suivantes:

$$P_v^\varepsilon + \frac{\mathcal{M}_v P_g^\varepsilon}{\rho_1^0 RT} = -\frac{\mathcal{M}_v p_c^0 S_1^0}{\rho_1^0 RT \phi_0}$$

$$P_v^l + \frac{\mathcal{M}_v P_g^l}{\rho_1^0 RT} = \frac{\mathcal{M}_v p_c^0}{\rho_1^0 RT \phi_0}$$

$$P_v^l P_g^\varepsilon - P_v^\varepsilon P_g^l = \frac{\mathcal{M}_v p_c^0}{\rho_1^0 RT \phi_0} (\lambda_0 + 2\mu)$$

Des trois précédentes relations, on peut déduire l'expression des coefficients  $E_1^n$  et  $E_2^n$  en fonction des données de départ. On obtient:

$$(IV.72) \quad \forall n \geq 1 \quad E_1^n = \left(1 - \frac{E_1 M_2}{M_1 E_2}\right)^{-1} \frac{4}{(2n-1)\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{\lambda_0 + 2\mu} (1 - S_1^0 \frac{E_2}{M_2}) + \frac{1}{M_+} \frac{E_2}{M_2} - \frac{1}{K_+} \right] \varpi \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_0 + 2\mu} (1 - S_1^0 \frac{E_2}{M_2}) \frac{\rho_1^0 R T S_1^0}{\mathfrak{M}_v} \left(1 - \frac{h_e}{h_0}\right) \right\}$$

$$(IV.73) \quad \forall n \geq 1 \quad E_2^n = \left(1 - \frac{E_2 M_1}{M_2 E_1}\right)^{-1} \frac{4}{(2n-1)\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{\lambda_0 + 2\mu} (1 - S_1^0 \frac{E_1}{M_1}) + \frac{1}{M_+} \frac{E_1}{M_1} - \frac{1}{K_+} \right] \varpi \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_0 + 2\mu} (1 - S_1^0 \frac{E_1}{M_1}) \frac{\rho_1^0 R T S_1^0}{\mathfrak{M}_v} \left(1 - \frac{h_e}{h_0}\right) \right\}$$

On en déduit, d'après (IV.59), des expressions similaires pour  $M_1^n$  et  $M_2^n$ . Comme précisé au terme du § IV.2.5., les coefficients  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $M_1$  et  $M_2$  sont indépendants des conditions aux limites, c'est-à-dire de la charge  $\varpi$  appliquée et de l'humidité relative  $h_e$  imposée sur les surfaces du mur. Ce sont donc des données «intrinsèques», déterminées par les caractéristiques du comportement du matériau, lesquelles dépendent exclusivement, dans le modèle choisi, de l'état initial.

De la sorte, on peut constater d'après les précédentes expressions des amplitudes de la décomposition modale, qu'en termes de déformation aussi bien qu'en termes de variation de masse liquide (qui correspond *grosso modo* à la «perte en poids» du mur<sup>7</sup>), la réponse à la sollicitation exercée se décompose additivement en une partie proportionnelle à la contrainte  $\varpi$  appliquée et une partie proportionnelle à la variation d'humidité relative imposée  $(h_e - h_0)/h_0$ .

Telle que proposée dans les relations (IV.72) et (IV.73) ci-dessus, la solution est entièrement déterminée en fonction des données initiales et des conditions aux limites imposées. Les rapports  $E_1/M_1$  et  $E_2/M_2$  qui interviennent dans l'expression littérale de la décomposition modale sont déterminés de manière unique par la donnée de la matrice de diffusion [C]<sup>8</sup> – laquelle dépend explicitement et exclusivement des données initiales du problème. Les amplitudes de la décomposition modale de  $\varepsilon$  et  $m_1$  sont donc parfaitement déterminées. Reste à expliciter les valeurs propres  $C_1$  et  $C_2$  de la matrice de diffusion, elles aussi déterminées d'après les coefficients de [C]: tel est l'objet du paragraphe à venir.

<sup>7</sup> Cf. § III.2.1.

<sup>8</sup> Très précisément, on peut établir les expressions suivantes de ces rapports en fonction des composantes de la matrice de diffusion [C]:

$$\frac{E_1}{M_1} = \frac{C_{11} - C_{22} + [(C_{11} - C_{22})^2 + 4C_{21}C_{12}]^{1/2}}{2C_{21}}$$

$$\frac{E_2}{M_2} = \frac{C_{11} - C_{22} - [(C_{11} - C_{22})^2 + 4C_{21}C_{12}]^{1/2}}{2C_{21}}$$

#### IV. 2.7. Valeurs propres, modes propres et temps caractéristiques.

En dépit de la lourdeur des calculs, il est intéressant de calculer les valeurs propres  $C_1$  et  $C_2$  de la matrice de diffusion  $[C]$ . Grâce à elles, il est possible de déterminer précisément les modes propres de diffusion et les temps caractéristiques associés.

Si l'on note respectivement  $[\mu]$  et  $[P]$  les matrices servant à exprimer les variations de masse de vapeur et d'air, d'une part, la pression de gaz et la concentration de vapeur dans le mélange, d'autre part, la relation (IV.53) s'écrit alors sous la forme simplifiée qui suit:

$$[C] = [\mu]^{-1} [D] [P]$$

d'où l'on déduit immédiatement:

$$\det[C] = \frac{\det[D] \det[P]}{\det[\mu]}$$

Or il est aisé de constater que:

$$(I.74) \quad \det[D] = \rho_v^0 \rho_a^0 k_g \mathcal{F}$$

dont il résulte que:

$$(IV.75) \quad \det[C] = \frac{\det[P]}{\det[\mu]} \rho_v^0 \rho_a^0 k_g \mathcal{F}$$

$$= \frac{C_v^1 P_g^\varepsilon - C_v^\varepsilon P_g^1}{\mu_{1v}^1 \mu_a^\varepsilon - \mu_{1v}^\varepsilon \mu_a^1} \rho_v^0 \rho_a^0 k_g \mathcal{F}$$

ce qui donne exactement la valeur du produit  $C_1 C_2$  des valeurs propres de la matrice de diffusion  $[C]$ .

La détermination de sa trace nécessite le calcul complet de la matrice  $[C]$ . Moyennant quoi, on obtient finalement:

$$(IV.75) \quad \text{tr}[C] = \frac{(A_1 C_v^\varepsilon - A_\varepsilon C_v^1) \mathcal{F} + (B_1 P_g^\varepsilon - B_\varepsilon P_g^1) k_g}{\det[\mu]}$$

avec les notations suivantes:

$$A_1 = \rho_a^0 C_v^0 \mu_{1v}^1 + \rho_v^0 C_a^0 \mu_a^1$$

$$A_\varepsilon = \rho_a^0 C_v^0 \mu_{1v}^\varepsilon + \rho_v^0 C_a^0 \mu_a^\varepsilon$$

$$B_I = \rho_v^0 \mu_a^I - \rho_a^0 \mu_{IV}^I$$

$$B_\varepsilon = \rho_v^0 \mu_a^\varepsilon - \rho_a^0 \mu_{IV}^\varepsilon$$

On peut donc écrire formellement, par souci de simplification des relations, le déterminant et la trace comme produit et somme de termes respectivement proportionnels à la perméabilité au gaz du matériau et au coefficient de Fick:

$$C_1 + C_2 = \text{tr} [C] = A \mathcal{F} + B k_g$$

$$C_1 C_2 = \det [C] = C k_g \mathcal{F}$$

où A, B et C sont des constantes identifiées d'après l'ensemble des relations qui précèdent. Ce qui permet finalement d'exprimer formellement les valeurs propres  $C_1$  et  $C_2$  de la matrice de diffusion en fonction des deux paramètres physiques, caractéristiques de diffusion du matériau, que sont la perméabilité  $k_g$  et le coefficient de Fick  $\mathcal{F}$ :

$$(IV.76) \quad C_1 = \frac{1}{2} [ A \mathcal{F} + B k_g + (A^2 \mathcal{F}^2 + B^2 k_g^2 + 2(AB-2C)k_g \mathcal{F})^{1/2} ]$$

$$(IV.77) \quad C_2 = \frac{1}{2} [ A \mathcal{F} + B k_g - (A^2 \mathcal{F}^2 + B^2 k_g^2 + 2(AB-2C)k_g \mathcal{F})^{1/2} ]$$

On constate, d'après les précédentes formules, que les valeurs propres  $C_1$  et  $C_2$  sont des combinaisons de  $k_g$  et  $\mathcal{F}$ , les modes propres de la matrice de diffusion correspondant ainsi à des combinaisons des modes de diffusion de Darcy-mélange et de Fick. Dans le cas où les conditions initiales et les coefficients caractéristiques du comportement du matériau permettent que soit vérifiée la relation:

$$AB = C$$

ces modes propres correspondent alors, séparément et indépendamment, à la diffusion de Darcy du mélange (associé à la valeur propre  $Bk_g$ ) et à la diffusion de Fick de la vapeur dans le mélange (associée à la valeur propre  $A\mathcal{F}$ ). Dans ce cas, et dans ce cas seulement, on peut, en appliquant des conditions aux limites adaptées, provoquer, de manière dissociée, une diffusion du mélange seul ou une diffusion de la vapeur seule dans un mélange immobile et à pression constante. Le second cas décrit correspond précisément à l'expérience de sorption-désorption telle que couramment décrite.

On verra, au paragraphe suivant, ce qu'implique la condition de compatibilité, exprimée par la relation  $AB=C$ , entre notre modèle et le cas particulier de la sorption-désorption qu'il est censé pouvoir représenter. Bornons-nous pour l'instant, dans le cadre de la résolution mathématique complète, à la plus grande généralité.

Considérons donc, sans plus de précision, la forme générale des valeurs propres  $C_1$  et  $C_2$  de la matrice de diffusion. A chacune de ces valeurs propres correspond un mode physique de diffusion de la matière (combinant, comme cela a été dit plus haut, les

processus de diffusion, de type Fick, de la vapeur dans l'air et de celui de diffusion, selon une loi de Darcy, du mélange global). A chacun de ces modes de diffusion correspond également un «temps caractéristique» situant la zone temporelle de sa prépondérance sur les autres phénomènes diffusifs, et défini simplement en fonction de la valeur propre correspondante et de la «longueur de drainage» (qui, pour un problème symétrique appliqué à un mur de longueur totale L, vaut L/2). Ainsi, successivement pour les mode (1) et le mode (2):

$$(IV.78) \quad \tau_1 = \frac{L^2}{4C_1} = \frac{L^2}{2\pi^2 [ A \mathcal{F} + B k_g + (A^2 \mathcal{F}^2 + B^2 k_g^2 + 2(AB-2C)k_g \mathcal{F})^{1/2} ]}$$

$$(IV.79) \quad \tau_2 = \frac{L^2}{4C_2} = \frac{L^2}{2\pi^2 [ A \mathcal{F} - B k_g + (A^2 \mathcal{F}^2 + B^2 k_g^2 + 2(AB-2C)k_g \mathcal{F})^{1/2} ]}$$

La comparaison des deux temps caractéristiques  $\tau_1$  et  $\tau_2$  s'avère, de manière générale, du plus haut intérêt: si ceux-ci sont du même ordre, les deux phénomènes diffusifs correspondant au mode (1) et au mode (2) se produisent sur des échelles de temps similaires, et risquent de se concurrencer (si du moins leurs amplitudes sont également comparables). Dans le cas, en revanche, où existe une différence notable entre  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , il est alors possible de distinguer *a priori* deux plages de temps successives pour chacune desquelles un phénomène serait prépondérant devant l'autre (la zone temporelle de prépondérance correspondant à un certain voisinage du temps caractéristique concerné).

#### IV.2.8. Séchage et fluage: réponse générale à des sollicitations couplées.

Les expressions (IV.66), (IV.67), (IV.72) et (IV.73) donnent la solution du problème dans le cas général où une sollicitation mécanique (pression uniforme  $\varpi$ ) est couplée à la variation imposée de l'humidité relative. Les courbes (IV.2a) et (IV.2b) représentent les profils d'humidité dans le mur (selon l'épaisseur) obtenus pour des choix donnés de paramètres caractéristiques. Courbes à l'allure «en cloche» (ou «en chameau») tout à fait caractéristique, qui traduit la possibilité théorique (car les coefficients choisis n'ont pas ici de signification physique très précise) d'une compétition entre les deux phénomènes diffusifs en jeu: d'une part la diffusion de la vapeur dans l'air, selon une loi de Fick (comme en problème de séchage), d'autre part la diffusion globale du mélange gazeux, selon une loi de Darcy barycentrique.

Les profils d'humidité représentés sur les figures (IV.2a) et (IV.2b) sont calculés pour plusieurs valeurs du temps — rapportées à un temps caractéristique moyen «tau», moyenne des deux temps caractéristiques  $\tau_1$  et  $\tau_2$  des deux phénomènes diffusifs en jeu.

C'est pourquoi aux temps faibles, les grandeurs représentées (en particulier l'humidité relative) «remontent» au dessus du palier central lorsqu'on s'éloigne du centre vers l'extérieur du mur, avant de «redescendre» pour s'égaliser aux valeurs imposées — phénomène qui met en évidence l'existence et la singularité physique d'«effets de peau». Examinée dans le temps, en un point quelconque fixé, l'évolution est du même genre: croissance puis décroissance (jusqu'à la valeur asymptotique imposée) de l'humidité relative.

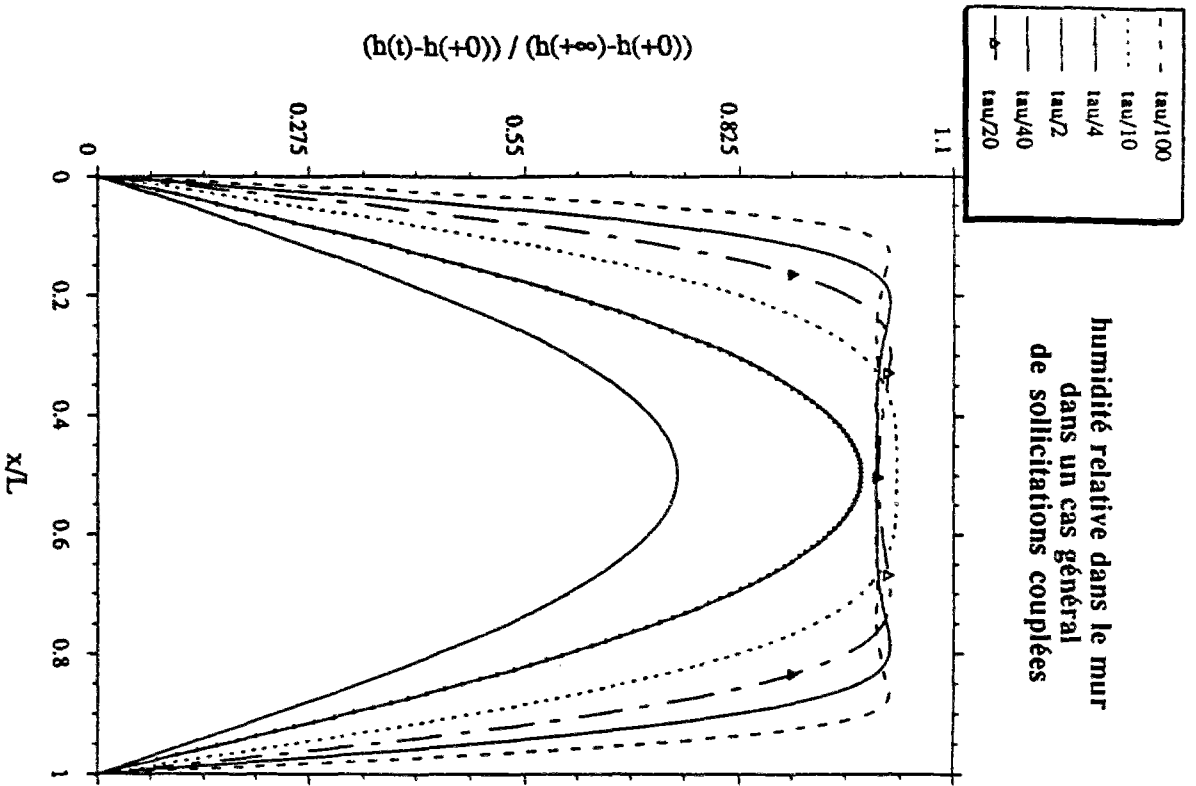


Fig. IV.2a

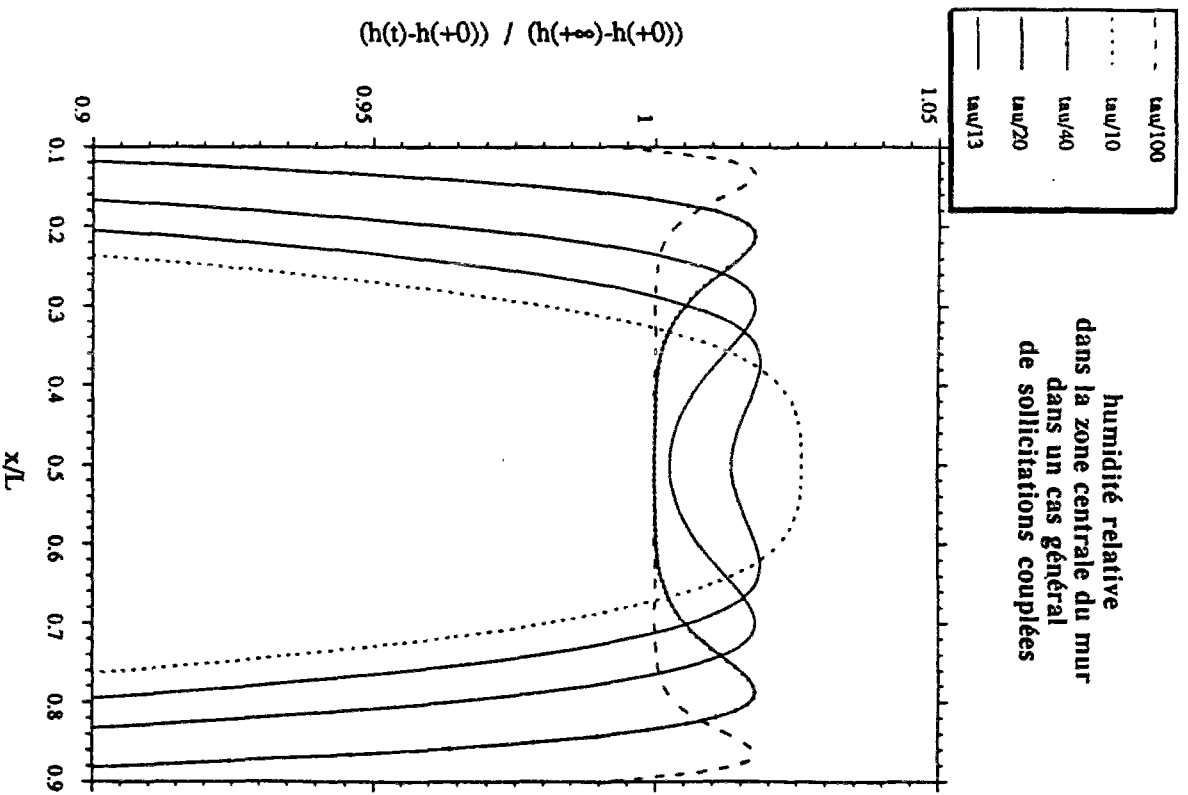


Fig. IV.2b

Il est d'ailleurs à noter que dans le cas où un chargement mécanique non nul est appliqué ( $\varpi \neq 0$ ), ces paliers centraux apparaissant pour des temps faibles ne correspondent pas à l'état initial du milieu en  $t \leq 0$  (donc en particulier à l'humidité relative  $h_0$ ) mais à l'état instantanément atteint en  $t=0^+$ . Ainsi les paliers constatés correspondent-ils aux valeurs  $h(0^+)$  et  $\varepsilon(0^+)$  calculées en IV.2.2.

Ce chargement mécanique instantané suffit à expliquer l'évolution des courbes par la mise en compétition des deux processus physiques de diffusion pris en compte. En effet, du fait de l'application d'une charge instantanée, les pressions interstitielles subissent une variation instantanée (due à un comportement instantanément non drainé des fluides interstitiels). C'est en particulier le cas du mélange gazeux qui, de ce fait, n'est plus en équilibre avec l'extérieur à pression atmosphérique: des gradients de pression totale de gaz s'établissent donc entre l'intérieur et l'extérieur du mur, enclenchant une diffusion globale du mélange gazeux dans son ensemble, qui se surajoute à la diffusion de la vapeur dans le mélange. Ainsi, ce sont les phénomènes (consécutifs) de couplage instantané et de diffusion du mélange gazeux qui sont responsables de cette allure «irrégulière», en temps et en espace, des courbes de répartition d'humidité et de déformation dans le mur.

Dans les exemples présentés sur les courbes (IV.2a) et (IV.2b), l'humidité instantanée  $h(0^+)$  est supérieure à l'humidité imposée  $h_e$ . Ceci explique la décroissance finale des courbes en fonction du temps. Cependant, en chaque point du mur, cette variation en temps n'est pas monotone: une phase de croissance de l'humidité précède la phase de décroissance finale. Cette évolution peut s'expliquer par la comparaison, en chaque point du mur, des temps caractéristiques  $\tau_1(x)$  et  $\tau_2(x)$  relatifs aux deux processus de diffusion concurrentiels:

$$(IV.80) \quad \tau_1(x) = \tau_1 \left( \frac{x}{L} \right)^2$$

$$(IV.81) \quad \tau_2(x) = \tau_2 \left( \frac{x}{L} \right)^2$$

Leur rapport est constant, égal au rapport  $\tau_1/\tau_2$ : s'il est voisin de 1, c'est que, partout dans le mur, la diffusion de la vapeur et la diffusion du mélange se produisent concomitamment. Dans le cas contraire, les deux phénomènes de diffusion peuvent être discriminés dans le temps: celui dont le temps caractéristique est le plus faible se produit d'abord, de manière prépondérante; celui dont le temps caractéristique est le plus élevé prend le relais et gouverne l'évolution globale jusqu'à l'état final. C'est cette succession des deux phénomènes diffusifs qui explique l'évolution dans le temps, en chaque point fixé, des grandeurs observées: un premier mode diffusif gouverne l'évolution aux temps faibles, dans le sens de la croissance de l'humidité, le second phénomène prenant le relais à un instant  $\tau(x)$ , pour lequel la croissance de la courbe s'inverse, et reste prépondérant jusqu'à l'équilibre final. Le temps  $\tau(x)$  d'inversion de la courbe est une fonction de l'abscisse  $x$  qu'on peut explicitement déterminer en annulant la dérivée temporelle de l'humidité relative au point considéré.

Dans l'exemple figuré par les courbes ci-contre, le déroulement des différentes phases peut être interprété comme suit:



### 1°/ phase de compression instantanée:

- le mélange gazeux dans son ensemble est comprimé, c'est-à-dire porté à une pression supérieure à la pression atmosphérique: il aura donc tendance à diffuser vers l'extérieur;

- dans le mélange, la phase vapeur est instantanément comprimée; mais, contrairement à l'air, elle compense cette compression par une condensation, c'est-à-dire un changement de phase en liquide, lui aussi instantané; de sorte que la saturation en liquide augmente, tout comme l'humidité relative instantanée  $h(0^+)$ , supérieure à la valeur initiale  $h_0$  ainsi qu'à la valeur  $h_e$  imposée aux surfaces;

- en revanche, du fait de sa transformation partielle en liquide, la vapeur voit sa concentration dans le mélange diminuer instantanément (simple bilan matériel: vapeur transformée en liquide alors que l'air est conservé); dans le cas présent, la concentration en vapeur ainsi atteinte se trouve inférieure à la concentration en vapeur à l'extérieur du mur;

2°/ phase de prépondérance de la diffusion du mélange (depuis le chargement jusqu'à un voisinage du temps caractéristique  $\tau_2$ ):

- la diffusion globale du mélange (selon une loi de Darcy) s'opère plus rapidement que celle de la vapeur dans le mélange (loi de Fick): porté à une pression supérieure à la pression atmosphérique, le mélange aura tendance à s'échapper vers l'extérieur, sa pression totale diminuant progressivement pour s'égaliser à  $p_{atm}$ ;

- en revanche, la vapeur a d'abord tendance à diffuser, dans le mélange, depuis l'extérieur vers l'intérieur, afin d'assurer l'équilibre de sa concentration; cette diffusion à tendance, dans un premier temps, à faire augmenter l'humidité relative;

- spatialement, cette phase correspond aux «pics» d'humidité relative, qui se situent près des parois aux premiers instants, avant de gagner progressivement le coeur du mur, au fur et à mesure de la diffusion; ces pics correspondent, au point considéré, au maximum de l'humidité relative atteinte;

3°/ phase de prépondérance de la diffusion de la vapeur dans l'air (depuis un voisinage du temps caractéristique  $\tau_1$  jusqu'à l'équilibre final):

- la diffusion globale du mélange (loi de Darcy) conduisant peu à peu à l'équilibre quasi complet entre pression totale de gaz à l'intérieur et à l'extérieur, c'est bientôt la diffusion de la vapeur dans l'air qui devient prépondérante;

- cette diffusion de la vapeur se fait toujours par loi de Fick; or la pression totale de gaz ayant diminué, à l'intérieur du mur, pour atteindre la même valeur qu'à l'extérieur, et l'humidité relative — donc la pression de vapeur — étant toujours supérieure à la valeur imposée  $h_e$ , la vapeur finit par devenir plus concentrée dans le mélange à l'intérieur qu'à l'extérieur du mur (contrairement à la situation initiale); la diffusion de Fick de la vapeur va donc s'inverser (de l'intérieur vers l'extérieur), permettant à l'humidité relative interne de baisser jusqu'à la valeur imposée  $h_e$ .

Il est relativement aisé de déduire l'état final du milieu de l'expression (IV.66), terme constant (et donc valeur asymptotique) du développement en série de la déformation — réécrit en fonction des données de départ. Ainsi la déformation volumique asymptotique s'obtient-elle, dans le cas général de sollicitation envisagé, par addition d'un terme proportionnel à la variation d'humidité imposée et d'un terme proportionnel à la charge mécanique appliquée:

$$(IV.82) \quad \varepsilon (x, +\infty) = - \frac{\varpi + \frac{\rho_1^0 R T S_1^0}{\mathcal{M}_v} \left(1 - \frac{h_e}{h_0}\right)}{\lambda_0 + 2\mu}$$

En fait, la simple écriture, *via* la loi de comportement, des variations des variables d'état entre l'état initial et l'état final permet de retrouver directement ce résultat. L'état thermodynamique initial est défini par la donnée des valeurs suivantes:

$$\sigma_{xx}^0 = 0, \quad p_g^0 = p_{atm}, \quad h = h_0$$

et l'état final par les valeurs suivantes:

$$\sigma_{xx}^\infty = -\varpi, \quad p_g^\infty = p_{atm}, \quad h = h_e$$

Or, appliquée à l'évolution du système entre ces deux états thermodynamiques, la loi de comportement (II.11) couplée à l'équilibre s'écrit:

$$(IV.83) \quad \sigma_{xx}^\infty - \sigma_{xx}^0 = (\lambda_0 + 2\mu) \varepsilon_\infty - (p_g^\infty - p_g^0) + S_1^0 (p_c^\infty - p_c^0)$$

ce qui, compte tenu de la définition qui précède des deux états envisagés, conduit à:

$$(IV.84) \quad (\lambda_0 + 2\mu) \varepsilon_\infty = - [ \varpi + S_1^0 (p_c^\infty - p_c^0) ]$$

Si pour finir on applique à nouveau la relation de Kelvin (III.13) au calcul de la différence  $(p_c^\infty - p_c^0)$  en fonction du rapport  $h_e/h_0$ , on obtient en bout de course — à la linéarisation près du terme en logarithme — l'expression annoncée de la déformation finale:

$$(IV.85) \quad \varepsilon_\infty = \frac{\varpi + \frac{\rho_1^0 R T S_1^0}{\mathcal{M}_v} \ln \left(\frac{h_e}{h_0}\right)}{\lambda_0 + 2\mu}$$

On peut finalement déduire de l'expression finale de la déformation celle des contraintes normales dans le plan du mur:

$$(IV.86) \quad \sigma_{yy} (x, +\infty) = \sigma_{zz} (x, +\infty) = \frac{2\mu}{\lambda_0 + 2\mu} \frac{\varpi + \frac{\rho_1^0 R T S_1^0}{\mathcal{M}_v} \left(1 - \frac{h_e}{h_0}\right)}{\lambda_0 + 2\mu}$$

Un cas cependant intéressant est celui, particulier par rapport à l'étude analytique générale qui précède, où la sollicitation mécanique est nulle ( $\varpi=0$ ) et où, par conséquent, le mur est soumis à une simple variation d'humidité relative. Mathématiquement, il y a toutes les chances pour que les solutions obtenues aient le même genre d'allures «en cloche». De telles allures seraient d'ailleurs conformes aux profils expérimentaux de répartition d'eau dans du gel d'Agar en cours de séchage, tels qu'obtenus par I. Mrani<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> Mrani (1993), p. 77, 78. Cf. annexe V, fig.AV.1a et AV.1b.

Pourtant, le couplage avec une sollicitation mécanique ayant disparu, il est plus difficile d'expliquer, dans ce cas, la variation de pression totale du gaz interne nécessaire à l'enclenchement de la diffusion-Darcy du mélange gazeux dans son ensemble. C'est pourquoi, dans nombre de matériaux tel le béton, on considère généralement que la phase gazeuse dans son ensemble demeure à pression atmosphérique pendant toute expérience de séchage. Pourtant, une telle vision n'est pas, en l'état, totalement compatible avec la solution analytique générale précédemment obtenue: admettre, dans le cas du séchage, l'absence de diffusion-Darcy du mélange dans son ensemble, supposer — par conséquent — que la seule diffusion-Fick de la vapeur dans l'air gouverne la dessiccation, revient en fait, lorsqu'on raisonne en termes de valeurs propres  $C_1$  et  $C_2$ , à identifier (à un facteur multiplicatif près) l'une d'elles au coefficient de Fick  $\mathcal{F}$  — l'autre étant alors proportionnelle, comme indiqué au § IV.2.7, à la perméabilité au gaz  $k_g$ . Il y a donc une compatibilité à assurer entre l'expression de la solution analytique générale et cette vision du processus de dessiccation qui suppose un découplage des processus physiques de diffusion Fick et Darcy.

### IV.3. Analyse physique du modèle et confrontation à l'expérience.

Le précédent paragraphe IV.2. a permis d'établir l'expression analytique complète et explicite de la solution du problème posé en IV.1. Au stade présent de cette résolution, tous les coefficients apparaissant dans les expressions (IV.72) et (IV.73) des champs de déformation et de variation de masse liquide solutions du problème sont définis d'après la donnée des conditions initiales et des caractéristiques du matériau — y compris ceux qui, en raison de l'excessive lourdeur des calculs, n'ont pas été explicitement calculés en fonction des données de départ.

C'est en particulier le cas des coefficients  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $M_1$  et  $M_2$ , qui sont les termes de la matrice de passage permettant la diagonalisation de la matrice de diffusion  $[C]$ : de tels coefficients sont bien entendu implicitement déterminés par la donnée des termes de diffusion, mais leur détermination directe nécessiterait une diagonalisation littérale de  $[C]$ , extrêmement complexe.

Les valeurs propres  $C_1$  et  $C_2$  de la matrice de diffusion ont elles aussi été explicitement déterminées en fonction des données de départ (moyennant un calcul intermédiaire relativement réalisable). On a noté qu'elles combinaient, dans le cas général de manière couplée, des modes de diffusion physiquement bien distincts tels que la diffusion selon une loi de Fick de la vapeur dans l'air et celle, obéissant à une loi de Darcy, du mélange gazeux dans son ensemble. Là se pose le problème, abordé aux § IV.2.7. et IV.2.8., de la compatibilité de ces modes diffusifs avec l'analyse physique communément reprise des phénomènes et les constatations expérimentales. En particulier, il convient que le modèle puisse rendre compte du comportement d'un matériau classique (béton, pâte de ciment, etc.) soumis à une expérience de sorption-désorption (pour des conditions initiales et aux limites adéquates). C'est donc une condition de compatibilité du modèle avec l'expérience de sorption-désorption — et son analyse physique — qu'il nous faut à présent assurer.

### IV.3.1. Compatibilité avec l'expérience de sorption-désorption: modes propres et phénomènes diffusifs.

La question de cette compatibilité entre le modèle et le cas particulier de l'expérience de sorption-désorption se pose premièrement au niveau de l'analyse modale des solutions et de son interprétation physique en termes de processus de diffusion. Le problème a été abordé plus haut. La sorption-désorption est gouvernée, à pression totale de gaz constante et uniforme, par la seule diffusion, de type Fick, de la vapeur dans l'air. Pour pouvoir rendre compte de cette expérience, il est nécessaire que l'un des modes propres du modèle corresponde donc à ce processus de diffusion de la vapeur, seule, dans le mélange — indépendamment de tout autre processus diffusif. On doit donc poser que l'une des deux valeurs propres (par convention, on prendra  $C_1$ ) ne dépend que du coefficient de Fick de diffusion de la vapeur dans l'air. Ce qui impose dès lors, d'après les expressions générales (IV.76) et (IV.77) des valeurs propres de  $[C]$ , la relation  $AB=C$  déjà rencontrée, laquelle conduit à l'expression définitive suivante des valeurs propres  $C_1$  et  $C_2$  de la matrice de diffusion:

$$(IV.87) \quad C_1 = A \mathcal{F}$$

$$(IV.88) \quad C_2 = B k_g$$

On remarque qu'en conséquence, le mode (2) de diffusion correspond au processus physique de diffusion-Darcy du mélange gazeux dans son ensemble, découplé de toute diffusion de la vapeur à l'intérieur du mélange: phénomène diffusif au cours duquel la composition du mélange reste égale, son mouvement barycentrique étant alors le même que celui de chacun des deux constituants: vapeur et air (transport «en bloc», uniforme, de la phase gazeuse).

Conservant désormais cette identification physique des modes diffusifs de la solution, qui permet la représentation par le modèle d'une expérience de sorption-désorption telle qu'usuellement réalisée et décrite, on peut alors calculer les temps caractéristiques des deux modes exponentiels apparaissant dans la solution analytique — et qui correspondent aux deux phénomènes découplés et indépendants de «Fick-vapeur» et «Darcy-mélange»:

$$(IV.89) \quad \tau_1 = \frac{L^2}{4A\mathcal{F}}$$

$$(IV.90) \quad \tau_2 = \frac{L^2}{4Bk_g}$$

Le temps  $\tau_1$  correspond au temps caractéristique du phénomène de diffusion de la vapeur dans l'air, selon la loi de Fick; c'est lui, et lui seul (car alors la diffusion globale du mélange est nulle), qui gouverne le processus de sorption-désorption. Le temps  $\tau_2$  correspond quant à lui au temps caractéristique de la diffusion de type Darcy de l'ensemble du mélange, considéré selon son mouvement barycentrique. Dans une expérience quelconque réalisée à partir des conditions exposées au § IV.1.1., ces deux phénomènes exercent des influences concomitantes (et éventuellement concurrentielles). C'est la

comparaison de ces deux temps caractéristiques qui permettra, le cas échéant, de définir des domaines temporels de prépondérance de la diffusion de type Fick de la vapeur dans l'air (au voisinage de  $\tau_1$ ) et de la diffusion de type Darcy du mélange dans son ensemble (au voisinage de  $\tau_2$ ).

Cependant, cette condition dictée par la nécessaire cohérence du modèle et de la réalité physique et expérimentale impose une liaison entre coefficients, exprimée par la relation  $AB=C^{10}$ ; laquelle impose, tous calculs faits:

$$A_l P_g^\varepsilon = A_\varepsilon P_g^l$$

qui, compte tenu des expressions de chacun de ces coefficients en fonction des données de départ, conduit à la condition suivante:

$$(IV.91) \quad p_c'^0 S_1^0 = -(\lambda_0 + 2\mu) \left(1 + \frac{\rho_l^0 RT}{\mathcal{M}_v P_{atm}}\right) \frac{\phi_0^2}{\phi_g^0}$$

Il est intéressant de constater que cette dernière égalité, valable pour n'importe quel état initial considéré (compatible avec les données du § IV.1.1.), induit une relation entre pente de la courbe de pression capillaire et saturation:

$$(IV.92) \quad p_c'(S_1) = -\phi(\lambda_0 + 2\mu) \left(1 + \frac{\rho_l^0 RT}{\mathcal{M}_v P_{atm}}\right) \frac{1}{S_1(1-S_1)}$$

les variables  $S_1$  et  $p_c$  désignant ici les valeurs actuelles de la saturation en liquide et de la pression capillaire sur la courbe de sorption-désorption. Dans la relation précédente, du fait de l'hypothèse de dépendance biunivoque en fonction de la déformation du module d'incompressibilité drainé  $K_0$  (et donc du coefficient de Lamé drainé correspondant  $\lambda_0$ )<sup>11</sup>, ainsi que de la dépendance biunivoque que la relation (II.31) établit entre  $\phi$  et  $\varepsilon$  lorsque la déformation  $\varepsilon_s$  de la matrice solide est négligée ( $K_s = \infty$ ), le terme  $\phi(\lambda_0 + 2\mu)$  devient à son tour fonction de la seule déformation macroscopique  $\varepsilon$ . Or la pression capillaire étant elle-même, conformément à l'hypothèse (II.88), fonction de la seule saturation, on déduit immédiatement de la précédente expression de  $p_c'(S_1)$  la constance du terme  $\phi(\lambda_0 + 2\mu)$ . De sorte qu'en définitive, en désignant par  $\phi_0$  et  $K_0^0$  un état de référence quelconque (pris comme état initial du point de vue de la déformation), on retire de l'enseignement

<sup>10</sup> Cette relation, déduite d'une comparaison entre temps caractéristiques de diffusion, correspond plus clairement à une hypothèse de découplage lorsqu'on écrit le système de diffusion du § IV.2.4. en fonction des grandeurs physiques «qui diffusent»: la concentration  $C_v$  de vapeur dans le mélange gazeux et la pression totale  $p_g$  dudit mélange gazeux. Écrit de la sorte, le système de diffusion fait apparaître tout naturellement un coefficient de couplage  $D_{vg}$  entre les deux variables  $C_v$  et  $p_g$  (terme non diagonal de la matrice de diffusion), qui traduit la variation de concentration due à une variation de pression de gaz imposée (à concentration de vapeur constante à l'extérieur) ou *vice versa*. La relation  $AB=2C$  correspond en fait à la nullité de ce coefficient de couplage, soit à la condition  $D_{vg}=0$ .

<sup>11</sup> Hypothèse H2 du § I.3.2.2.

précèdent une double identification portant à la fois sur la dérivée en tout point de la courbe de pression capillaire et sur l'expression en fonction de  $\epsilon$  du module d'incompressibilité drainé:

$$(IV.93) \quad p_c'(S_1) = -\phi_0 \left( K_0^0 + \frac{4}{3} \mu \right) \left( 1 + \frac{\rho_l^0 RT}{\mathcal{M}_v p_{atm}} \right) \frac{1}{S_1(1-S_1)}$$

$$(IV.94) \quad K_0(\epsilon) = \frac{\phi_0 \left( K_0^0 + \frac{4}{3} \mu \right)}{\phi_0 + \epsilon} - \frac{4}{3} \mu$$

La dépendance en  $\epsilon$  du module  $K_0$  nous autorise à négliger ses variations dans le cas (usuel) où la déformation reste négligeable devant la porosité initiale du matériau; au demeurant, on sait que certaines hypothèses fondamentales qui sous-tendent le modèle ne s'accroissent pas du cas contraire<sup>12</sup>. Par la suite, en particulier dans l'étude numérique faisant l'objet du prochain chapitre, le module d'incompressibilité drainé sera ainsi considéré constant.

L'expression explicite de la dérivée de la courbe  $p_c=p_c(S_1)$  nous permet de constater à la fois la validité et les limites du modèle adopté et des hypothèses théoriques sur lesquelles il repose. On remarquera en premier lieu que se retrouvent, dans l'expression (IV.93), la décroissance de la pression capillaire sur l'intervalle  $[0; 1]$  des saturations, de même que les deux pentes infinies à ses extrémités (complète désaturation:  $S_1=0$  et complète saturation:  $S_1=1$ ). En revanche, l'intégration exacte d'une pareille expression nous conduirait à une pression capillaire proportionnelle au logarithme du rapport  $S_1/(1-S_1)$  — ce qui correspond bien à l'allure générale de la courbe expérimentale  $p_c=p_c(S_1)$  en  $S_1=0$  (valeur infinie) mais pas en  $S_1=1$  (on obtient  $-\infty$  au lieu de 0). Il est assez symptomatique que l'on retrouve une fois de plus les mêmes incompatibilités entre courbes capillaires théorique et expérimentale dans les mêmes zones de saturations ( $S_1=1$ ): élément supplémentaire de défiance vis-à-vis de l'hypothèse d'une courbe capillaire fonction de la seule saturation en liquide au voisinage de  $S_1=1$ .

En tout état de cause, cette inadéquation de l'expression (IV.93) avec l'allure théorique de la courbe capillaire issue de l'hypothèse (II.88) prouve que l'on ne peut retenir en même temps, comme on l'a fait ici, les deux hypothèses  $p_c=p_c(S_1)$  et  $p_g=p_{atm}$  (uniformément en temps et espace, pour un calcul de dessiccation). Auprès de la totale saturation en liquide, l'une au moins de ces deux assertions se trouve prise en défaut. On a suffisamment attiré l'attention, chapitre après chapitre, sur les dangers et les limites de la première pour pouvoir avancer l'idée que, probablement, c'est cette affirmation d'une indépendance de la pression capillaire vis-à-vis de la déformation (à saturation donnée) qui constitue l'approximation la plus dangereuse et la plus pénalisante. Il faudrait donc, du moins lorsqu'on cherche à modéliser le comportement d'un matériau quasiment saturé en liquide, introduire une influence de la déformation sur l'état capillaire — c'est-à-dire abandonner (II.88) et revenir au stade antérieur (II.84):  $p_c=p_c(\epsilon, S_1)$ . C'est là un nouveau champ d'investigation qui s'ouvre pour l'expérimentateur, avant même toute intervention du modélisateur.

<sup>12</sup> En particulier l'hypothèse d'incompressibilité de la matrice dont on a montré qu'elle était incompatible avec un retrait supérieur (en valeur absolue) à la porosité initiale — cf. chap. II, n. 19.

### IV.3.2. Compatibilité avec l'expérience de sorption-désorption: les amplitudes.

En outre, la compatibilité du modèle avec l'expérience de sorption-désorption impose, au-delà de l'identification des modes propres, des relations entre les amplitudes de la décomposition modale, afin qu'aux conditions précises de l'expérience de sorption-désorption (posées en termes de conditions initiales et de conditions aux limites) corresponde effectivement le mode de diffusion (1) de la vapeur dans l'air. Du fait de la propriété d'invariance des coefficients  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $M_1$  et  $M_2$  quelles que soient les sollicitations exercées (ils ne dépendent que des termes de la matrice de diffusion [C]), on peut, sans rien changer à leurs valeurs, appliquer les expressions générales des amplitudes (IV.72) et (IV.73) à toutes sortes d'expériences associant une contrainte mécanique normale uniforme et une variation uniforme de l'hygrométrie.

Examinons donc, en termes d'amplitudes, le cas particulier de la sorption-désorption. L'état initial, tel qu'exposé d'après les conditions (IV.1) à (IV.3) et (IV.9) à (IV.12), correspond bien à un point de la courbe de sorption-désorption du matériau. Ainsi, si l'on applique pour condition aux limites:

$$\varpi = 0 \quad \text{et} \quad h_e \neq h_0$$

on réalise bien une expérience de sorption (si  $h_e \geq h_0$ ) ou de désorption (si  $h_e \leq h_0$ ) du mur. Dans un tel cas, pour que la pression totale de gaz soit, à tout instant, égale à la pression atmosphérique, il est nécessaire que:

$$\forall n \geq 1, \text{ pour } i=1 \text{ ou } 2 \quad P_g^\varepsilon E_i^n + P_g^l M_i^n = 0$$

d'où il ressort, d'après la relation (IV.59), que le rapport  $E_1/M_1$  doit vérifier:

$$(IV.95) \quad \frac{E_1}{M_1} = - \frac{P_g^l}{P_g^\varepsilon} = \frac{1}{S_1^0}$$

qui donne alors, pour tout  $n \geq 1$ ,  $E_2^n = M_2^n = 0$  et correspond à un séchage de dessiccation associé à la valeur propre  $C_1$ <sup>13</sup>.

Si l'on retient donc cette hypothèse de compatibilité des coefficients  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $M_1$  et  $M_2$  avec le cas particulier de l'expérience de sorption-désorption, on aboutit en définitive, en revenant au cas général, à une expression simplifiée et très explicite des coefficients de la décomposition modale de la déformation:

---

<sup>13</sup> L'autre possibilité:

$$\frac{E_2}{M_2} = - \frac{P_g^l}{P_g^\varepsilon} = \frac{1}{S_1^0}$$

qui donne inversement, pour tout  $n \geq 1$ ,  $E_1^n = M_1^n = 0$ , correspondrait à un séchage de dessiccation associé à la valeur propre  $C_2$ . Par convention, on a choisi d'attribuer à la diffusion de la vapeur dans l'air, phénomène diffusif gouvernant la sorption-désorption, l'indice (1).

$$(IV.96) \quad \forall n \geq 1 \quad E_1^n = \left(1 - \frac{1}{S_1^0} \frac{M_2}{E_2}\right)^{-1} \frac{4}{(2n-1)\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{\lambda_0 + 2\mu} (1 - S_1^0 \frac{E_2}{M_2}) + \frac{E_2}{M_2} \frac{1}{M_+} - \frac{1}{K_+} \right] \varpi \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_0 + 2\mu} (1 - S_1^0 \frac{E_2}{M_2}) \frac{\rho_1^0 R T S_1^0}{\mathcal{M}_v} \left(1 - \frac{h_e}{h_0}\right) \right\}$$

$$(IV.97) \quad \forall n \geq 1 \quad E_2^n = \left(1 - \frac{E_2 M_1}{M_2 E_1}\right)^{-1} \frac{4}{(2n-1)\pi} \left[ \frac{1}{S_1^0} \frac{1}{M_+} - \frac{1}{K_+} \right] \varpi$$

Il est alors notable que la décomposition selon le mode propre (2), correspondant à la diffusion barycentrique du mélange, est entièrement provoquée par la réponse élastique instantanée non drainée du milieu. On peut donc à ce stade, au terme de toutes les identifications réalisées, récapituler aussi explicitement que possible les champs solutions de déformation et de variation de masse liquide:

$$(IV.98) \quad \varepsilon(x, +\infty) = - \frac{\varpi + \frac{\rho_1^0 R T S_1^0}{\mathcal{M}_v} \left(1 - \frac{h_e}{h_0}\right)}{\lambda_0 + 2\mu} \\ + \left(1 - \frac{1}{S_1^0} \frac{M_2}{E_2}\right)^{-1} \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \left( \left[ \frac{1}{\lambda_0 + 2\mu} (1 - S_1^0 \frac{E_2}{M_2}) + \frac{E_2}{M_2} \frac{1}{M_+} - \frac{1}{K_+} \right] \varpi \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\lambda_0 + 2\mu} (1 - S_1^0 \frac{E_2}{M_2}) \frac{\rho_1^0 R T S_1^0}{\mathcal{M}_v} \left(1 - \frac{h_e}{h_0}\right) \right) \exp\left(-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 \frac{t}{\tau_1}\right) \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{S_1^0} \frac{1}{M_+} - \frac{1}{K_+} \right] \varpi \exp\left(-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 \frac{t}{\tau_2}\right) \right\} \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{L} x\right)}{2n-1}$$

$$(IV.99) \quad \frac{m_l}{\rho_1^0}(x, t) = - \frac{\varpi + \frac{\rho_1^0 R T S_1^0}{\mathcal{M}_v} \left(1 - \frac{h_e}{h_0}\right)}{\lambda_0 + 2\mu} \\ + \left(1 - \frac{1}{S_1^0} \frac{M_2}{E_2}\right)^{-1} \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \left( \left[ \frac{1}{\lambda_0 + 2\mu} (1 - S_1^0 \frac{E_2}{M_2}) + \frac{E_2}{M_2} \frac{1}{M_+} - \frac{1}{K_+} \right] \varpi \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\lambda_0 + 2\mu} (1 - S_1^0 \frac{E_2}{M_2}) \frac{\rho_1^0 R T S_1^0}{\mathcal{M}_v} \left(1 - \frac{h_e}{h_0}\right) \right) S_1^0 \exp\left(-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 \frac{t}{\tau_1}\right) \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{S_1^0} \frac{1}{M_+} - \frac{1}{K_+} \right] \frac{M_2}{E_2} \varpi \exp\left(-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 \frac{t}{\tau_2}\right) \right\} \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{L} x\right)}{2n-1}$$



### IV.3.3. Coefficient de diffusion et temps caractéristique de sorption-désorption.

Lorsque l'on se place dans le cas d'une expérience de sorption-désorption ( $\varpi=0$ , la pression totale de gaz restant partout et en chaque instant égale à la pression atmosphérique) l'équation de diffusion s'écrit comme suit en fonction d'une seule variable d'état — par exemple la déformation  $\varepsilon$ :

$$(IV.100) \quad \left[ -\frac{\rho_1^0 \phi_0}{p_c^0 S_1^0} K_1 + \rho_1^0 S_1^0 + \frac{\rho_v^0 (1-S_1^0) \mathcal{M}_v}{\rho_1^0 S_1^0 RT} \phi_0 K_1 + \rho_v^0 (1-S_1^0) \right] \frac{d\varepsilon}{dt} \\ = (1-C_v^0) \mathcal{F} \frac{\rho_v^0}{\rho_1^0 S_1^0} \frac{1}{p_{atm}} \frac{\mathcal{M}_v}{RT} K_1 \Delta\varepsilon$$

écriture dans laquelle on a, par souci de concision, désigné par  $K_1$  la somme  $\lambda_0+2\mu$ . Si l'on introduit dans l'écriture précédente le module capillaire  $M$  défini en (II.82), l'équation de diffusion devient, après division par le coefficient du second membre:

$$(IV.101) \quad \frac{p_{atm}}{(1-C_v^0) \mathcal{F}} \left[ \left( \frac{\rho_1^0}{\rho_v^0} \right)^2 \frac{1}{M} + \left( \frac{\rho_1^0}{\rho_v^0} \right)^2 \frac{S_1^0{}^2}{K_1} + \frac{\rho_1^0}{\rho_v^0} (1-S_1^0) S_1^0 \frac{1}{K_1} + \frac{\phi_g^0}{p_v^0} \right] \frac{d\varepsilon}{dt} = \Delta\varepsilon$$

relation qui met en évidence l'expression de la valeur propre de la matrice  $[C]$  liée à la diffusion de la vapeur dans l'air (à mélange gazeux immobile), et que l'on peut écrire après simplification et regroupements adéquats:

$$(IV.102) \quad \frac{1}{C_1} = \frac{p_{atm}}{(1-C_v^0) \mathcal{F}} \left[ \frac{\rho_1^0 (1-S_1^0) S_1^0}{\rho_v^0 K_1} + \frac{K_1 + S_1^0{}^2 M}{K_1 M} \left( \frac{\rho_1^0}{\rho_v^0} \right)^2 + \frac{\phi_g^0}{p_v^0} \right]$$

(IV.102) correspond très précisément à l'expression (II.127) du coefficient de diffusion de la résolution simplifiée (avec une diffusion en moyenne) qui conclut le chapitre II. Le temps caractéristique associé vaut ainsi, pour la longueur de drainage  $L/2$  du problème:

$$(IV.103) \quad \tau_1 = \frac{p_{atm} L^2}{4 (1-C_v^0) \mathcal{F}} \left[ \frac{\rho_1^0 (1-S_1^0) S_1^0}{\rho_v^0 K_1} + \frac{K_1 + S_1^0{}^2 M}{K_1 M} \left( \frac{\rho_1^0}{\rho_v^0} \right)^2 + \frac{\phi_g^0}{p_v^0} \right]$$

Etant donné l'exacte similitude des expressions obtenues dans le cas présent avec celles des caractéristiques de diffusion du problème simplifié résolu au § II.4., les ordres de grandeur calculés, à partir des mêmes données expérimentales, sont identiques. Le remplacement, dans les expressions, du module d'incompressibilité  $K_0$  par le module  $K_1=\lambda_0+2\mu$ , légèrement supérieur, modifie à peine l'ordre de grandeur de la relation entre le coefficient global de diffusion et le coefficient de Fick:

$$C_1 \# 10^{-4} \mathcal{F}$$

En pratique, dans la relation (IV.103) qui définit le temps caractéristique de séchage, le second terme est largement prépondérant<sup>14</sup>. Ainsi, on peut donner une expression simplifiée du temps caractéristique qui conserve rigoureusement son ordre de grandeur antérieur:

$$(IV.104) \quad \tau_1 = \frac{P_{atm} L^2}{4 (1-C_v^0) F} \frac{K_1 + S_1^0 M}{K_1 M} \left( \frac{\rho_1^0}{\rho_v^0} \right)^2$$

qu'on peut également écrire:

$$(IV.105) \quad \tau_1 = \frac{P_{atm} L^2}{4 (1-C_v^0) F} \left( \frac{\rho_1^0}{\rho_v^0} \right)^2 \left[ \frac{1}{M} + \frac{S_1^0 M}{K_1} \right]$$

L'expression simplifiée (IV.105) a le mérite de faire apparaître le temps caractéristique comme somme de deux termes physiquement bien identifiés et bien distincts: le terme en  $1/M$  représente la contribution des effets capillaires et le terme en  $1/K_1$  celle des paramètres purement mécaniques — en mode drainé, c'est-à-dire en l'absence d'interaction avec les fluides interstitiels. Dans le cadre de l'application numérique effectuée au paragraphe II.4., pour une pâte de ciment initialement saturée à près de 90%, le second terme l'emportait nettement devant le premier (30 fois supérieur environ): on remarque cependant que son influence relative diminue avec la saturation; on peut donc penser que, pour des domaines de saturations plus faibles, ce sont les effets capillaires qui prennent le relais et la prépondérance dans le processus de retrait<sup>15</sup>.

A cette expression simplifiée du temps caractéristique correspond bien entendu une expression simplifiée du coefficient de diffusion  $C_1$ , lequel peut s'écrire:

$$(IV.106) \quad C_1 = \frac{(1-C_v^0) F}{P_{atm}} \left( \frac{\rho_v^0}{\rho_1^0} \right)^2 M \frac{K_1}{K_1 + S_1^0 M}$$

On notera la similitude entre cette expression simplifiée du coefficient de diffusion et celle qui correspond au problème de diffusion en milieu poreux saturé, telle que la donne Coussy (1991)<sup>16</sup>. La relation (IV.106) exprimant  $C_1$  apparaît bien comme le produit de trois termes:

<sup>14</sup> Cf. l'application numérique précise en fin de § II.4.

<sup>15</sup> Ce qui peut d'ailleurs être très précisément établi dans la mesure où le §II.3.5. a montré que le terme  $S_1^2 M$  tendait vers zéro avec la saturation. D'où, *a fortiori*:

$$\frac{S_1^2 M}{K_1} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad S_1 \rightarrow 0$$

ce qui revient exactement à écrire que le terme  $1/M$  est très prépondérant devant  $S_1^2/K_1$  aux très faibles saturations.

<sup>16</sup> Cf. l'expression du coefficient de diffusion dans O. Coussy, *Mécanique des milieux poreux*, chap. VIII, relation (32), p. 327.

- un terme caractéristique de diffusion,  $\frac{(1-C_v^0)F}{P_{atm}} \left( \frac{\rho_v^0}{\rho_1^0} \right)^2$ , analogue à une perméabilité (et de même dimension, en  $m^2Pa^{-1}s^{-1}$ );

-le module capillaire M de couplage poromécanique;

- le rapport entre le module non drainé  $K_1=\lambda_0+2\mu$  et le terme  $K_1+S_1^0M$  qui correspond *grosso modo* à  $\lambda+2\mu$ , homologue drainé de  $K_1$ .

#### IV.3.4. Ordre de grandeur du retrait de dessiccation et des contraintes internes.

De l'expression générale (IV.98) du champ de déformation en fonction des paramètres de chargement (pression uniforme  $\varpi$  et variation d'humidité relative appliquées aux parois) il est aisé de déduire son expression particulière dans le cas de l'expérience de séchage. Il suffit pour cela d'annuler le terme de charge mécanique ( $\varpi=0$ ) dans la relation (IV.98), ce qui conduit à:

(IV.107)

$$\varepsilon(x, t) = -\frac{\frac{\rho_1^0 R T S_1^0}{M_v} \left(1 - \frac{h_e}{h_0}\right)}{\lambda_0 + 2\mu} \left\{ 1 + \alpha \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 \frac{t}{\tau_1}\right) \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{L} x\right)}{2n-1} \right\}$$

avec:

$$\alpha = \left(1 - \frac{1}{S_1^0} \frac{M_2}{E_2}\right)^{-1} \left(1 - S_1^0 \frac{M_2}{E_2}\right)$$

L'expression (IV.107) du champ de déformation solution du problème de pur séchage ne dépend, comme attendu, que du mode caractéristique (1) associé à la diffusion de la vapeur dans le mélange gazeux. Elle permet aisément d'obtenir la valeur théorique du retrait asymptotique dans l'ensemble du mur. Ce retrait, bien entendu homogène pour  $t \rightarrow +\infty$ , a pour valeur:

$$(IV.108) \quad \varepsilon(x, +\infty) = -\frac{\frac{\rho_1^0 R T S_1^0}{M_v} \left(1 - \frac{h_e}{h_0}\right)}{\lambda_0 + 2\mu}$$

Une telle expression recoupe bien la réalité expérimentale la plus évidente en faisant correspondre un retrait ( $\varepsilon \leq 0$ ) du matériau à une diminution de l'humidité relative ( $h_e \leq h_0$ ) et un gonflement ( $\varepsilon \geq 0$ ) à une augmentation de l'humidité relative ( $h_e \geq h_0$ ).

La connaissance du champ de déformation solution du problème permet en outre de déterminer complètement l'état de contrainte dans le mur. En fait, les deux seules composantes non nulles du tenseur des contraintes totales sont  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$ , qui sont égales et valent (par application de la loi de comportement):

$$(IV.109) \quad \sigma_{yy}(x, t) = \sigma_{zz}(x, t) = -2\mu \varepsilon(x, t)$$

Ce sont donc, dans le cas d'un retrait, des contraintes de traction s'exerçant sur des facettes perpendiculaires au plan du mur. Ces tractions croissent avec le temps et atteignent la valeur limite asymptotique donnée par:

$$(IV.110) \quad \sigma_{yy}(x, +\infty) = \sigma_{zz}(x, +\infty) = \frac{2\mu}{\lambda_0 + 2\mu} \frac{\rho_1^0 R T S_1^0}{\mathcal{M}_v} \left(1 - \frac{h_e}{h_0}\right)$$

L'ordre de grandeur approximatif de ces contraintes maximales est:  $0.7 \times 10^8 \times \left(1 - \frac{h_e}{h_0}\right)$ ; soit des contraintes maximales de l'ordre de 10 MPa pour une variation d'humidité de 10%: ce calcul approximatif montre donc combien, dans un cas comme celui-ci, le risque de fissuration par couplage hydro-mécanique est important, même pour de faibles variations de l'humidité relative.

#### IV.3.5. Courbes de séchage dans l'épaisseur du mur à différents instants.

Les figures (IV.3a) et (IV.3b) ci-contre représentent respectivement la répartition d'humidité et la déformation volumique dans le mur en différents instants donnés, tous normalisés par leur rapport au temps caractéristique de séchage  $\tau_1$  (nommé «tau» sur les figures).

Pour les temps les plus faibles, proches de  $t=0^+$ , le profil d'humidité présente un palier central pour lequel l'humidité relative demeure à sa valeur initiale  $h_0$ , tandis que la perturbation de l'état initial n'affecte véritablement que les zones proches de la surface, soumises à de très forts gradients d'humidité: ce phénomène correspond exactement à ce qu'on appelle couramment «effet de peau». Au fur et à mesure que le temps s'écoule, la diffusion affecte l'ensemble du mur: les courbes de répartition d'humidité prennent l'allure de cloches présentant un sommet au centre du mur, zone dont le drainage est plus long.

En chaque point d'abscisse  $x$ , la décroissance en temps est régulière et finit par coïncider à peu près avec l'exponentielle de plus faible pulsation: cette coïncidence est obtenue lorsque le temps écoulé depuis le début du chargement devient grand devant le temps caractéristique  $\tau_1(x)$  au point considéré, défini par (IV.80).

La valeur finale de l'humidité relative, en chaque point, est évidemment la valeur  $h_e$  imposée à la surface du mur. Il est donc à noter que, du moins d'un point de vue qualitatif, les résultats obtenus présentent une bonne concordance avec les observations expérimentales traditionnelles (notamment les courbes de répartition d'humidité obtenues par gammadensimétrie).

Le modèle développé dans ce chapitre possède en outre un avantage important: il donne accès, grâce à la prise en compte des couplages hydromécaniques, à la déformation volumique engendrée, en chaque point du mur, par la perturbation purement

thermodynamique de l'équilibre capillaire. Ainsi la courbe (IV.3b) figure-t-elle le retrait consécutif au séchage du mur et à l'évaporation de son eau interstitielle. Ces courbes de retrait ont même allure (dans le temps et dans l'espace) que celles de répartition d'humidité. La valeur initiale de la déformation (correspondant au palier central des premières courbes) est évidemment nulle; la valeur asymptotique atteinte, en chaque point, est égale au retrait homogène final dont l'expression est donnée en (IV.108).

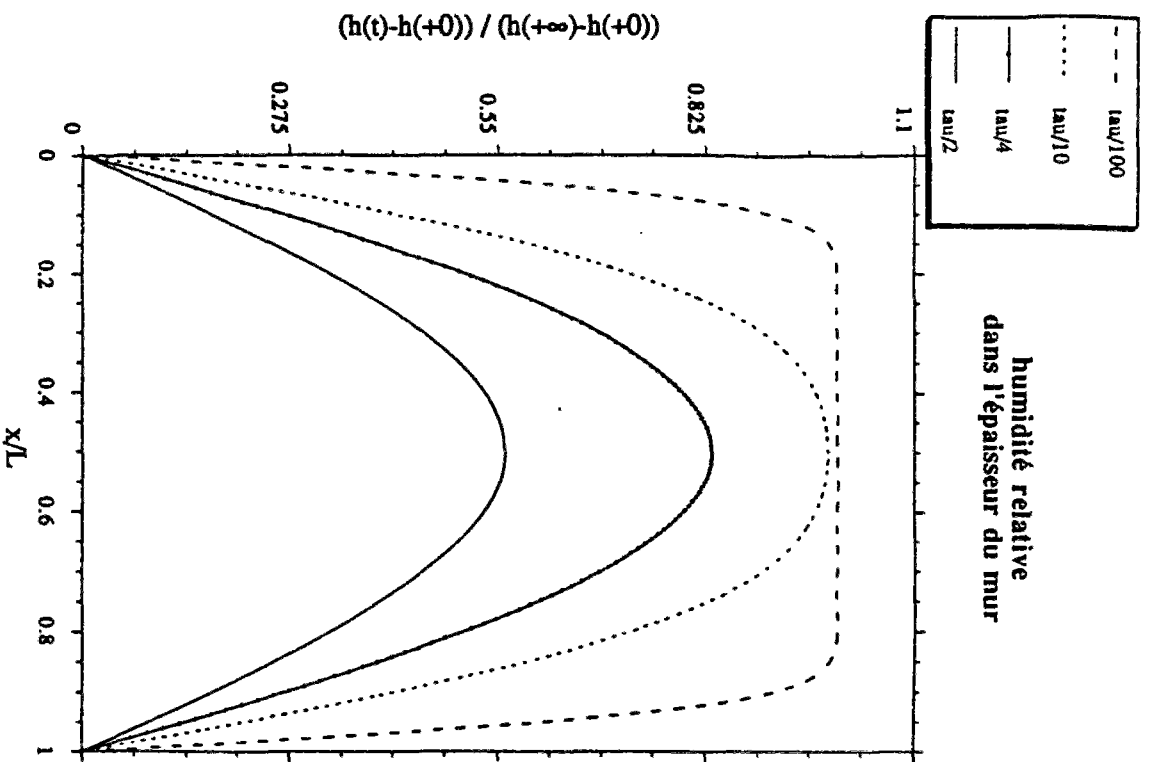


Fig. IV.3a

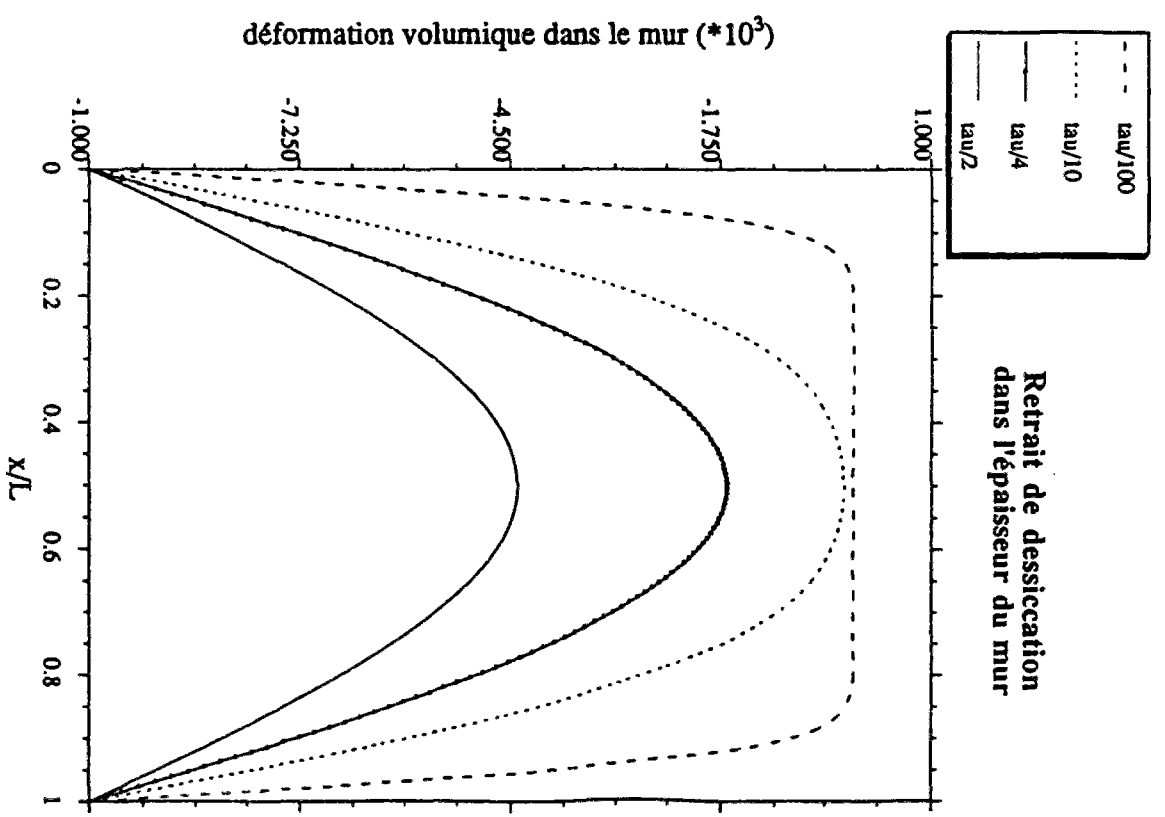


Fig. IV.3b



## Chapitre V

### **SIMULATION NUMÉRIQUE DU RETRAIT DE DESSICCATION D'UN MUR INFINI: APPLICATION DU MODÈLE POROÉLASTIQUE NON LINÉAIRE**

Le précédent chapitre a permis de présenter en détail le modèle poroélastique non saturé et sa mise en oeuvre concrète dans un cas particulier précis. Le choix d'un modèle de comportement linéaire a permis le calcul analytique du séchage et du fluage de dessiccation d'un mur à géométrie simple, mettant l'accent à la fois sur les étapes successives de la formulation complète et de la résolution d'un problème de poroélasticité, ainsi que sur les phénomènes typiques de couplage hydro-mécanique qu'un tel modèle est à même de prendre en compte et de représenter.

Cependant, les phénomènes de capillarité mis en jeu dans le séchage de matériaux tels le béton et la pâte de ciment introduisent en réalité de fortes non-linéarités de comportement. C'est pourquoi l'application de la poroélasticité à des cas usuels de séchage impose de recourir au modèle poroélastique non linéaire tel qu'il a été élaboré au chapitre II. Voilà l'objet du présent chapitre.

En conséquence, l'étude ici envisagée reprend exactement les conditions et les données de base de l'exemple précédent, à ceci près que le fluage de dessiccation de la structure, sous l'influence d'une contrainte mécanique appliquée aux parois du mur, n'est plus considéré: seul est modélisé le séchage de dessiccation du mur décrit en IV.1.1., sous l'effet d'une variation d'humidité imposée à ses faces. La résolution du problème se fait numériquement, grâce à l'adaptation au modèle poroélastique non linéaire et non saturé du code éléments finis 1D SIDOLO, développé à l'Ecole des Mines par Ph. Pilvin et G. Cailletaud<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Cf. G. Cailletaud et Ph. Pilvin (1993), p. 770-787.



## V.1. Position du problème et écriture de l'équation de diffusion non linéaire.

### V.1.1. Géométrie, conditions aux limites et conditions initiales.

On considère ainsi le même mur qu'au chapitre IV, caractérisé par un état initial identique et soumis à une simple variation d'humidité relative appliquée à ses parois. Conditions géométriques et initiales du problème sont donc définies comme en IV.1.1.; les conditions aux limites reprennent également les précédentes en les restreignant au cas d'une absence de contrainte mécanique exercée ( $\sigma = 0$ ).

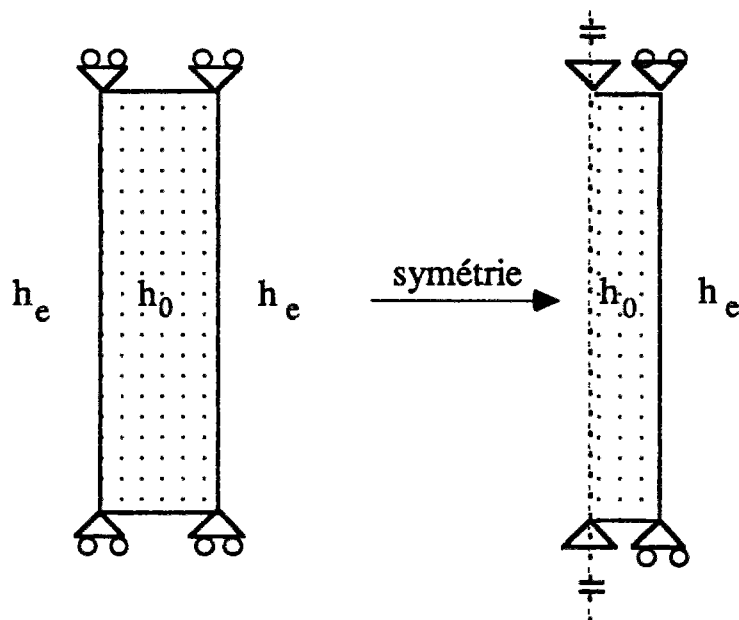


Fig. V.1

On retrouve ainsi des conditions initiales et des conditions aux limites de même type que les conditions (IV.1) à (IV.6):

**conditions initiales:**

$$(V.1)_{i,j} \quad \sigma_{ij}^0(x, t \leq 0) = 0$$

$$(V.2) \quad p_g(x, t \leq 0) = p_{atm}$$

$$(V.3) \quad h(x, t \leq 0) = h_0$$

conditions aux limites:

$$(V.4a) \quad \sigma_{xx} (x=L/2, t) = 0$$

$$(V.4b) \quad \sigma_{xy} (x=L/2, t) = \sigma_{xz} (x=L/2, t) = 0$$

$$(V.5) \quad p_g (x=L/2, t) = p_{atm}$$

$$(V.6) \quad h (x=L/2, t) = h_e$$

### V.1.2. Loi de comportement poroélastique non linéaire.

Comme annoncé en introduction de ce chapitre, la loi de comportement ici considérée est la loi de comportement poroélastique non linéaire isotrope énoncée au § II.2.2. avec les identifications finales des différents coefficients telles que récapitulées au § II.3.4. Cherchant à formuler le problème ici traité en pressions plutôt qu'en variations de masse, on considérera préférentiellement la relation de comportement (II.20) en ce qui concerne le tenseur des contraintes. En outre, les relations d'état (II.19) des fluides peuvent être inversées pour permettre le changement de variable des variations de masse vers les pressions partielles (la déformation étant conservée comme variable d'état de la description). Matriciellement, on écrit comme suit l'ensemble des relations d'état macroscopiques des fluides:

$$(V.7) \quad \begin{bmatrix} d\varepsilon \\ dp_v \\ dp_a \\ dp_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -M_v & M_v & 0 & M_v \\ -M_a & 0 & M_a & M_a \\ -M_{lj} b_j & M_v & M_a & M_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon \\ \frac{dm_v}{\rho_v} \\ \frac{dm_a}{\rho_a} \\ \frac{dm_l}{\rho_l} \end{bmatrix}$$

où, par convention,  $M_l$  désigne le module  $M_{ll}$ ,  $M_v$  et  $M_a$  désignant respectivement les modules de Biot relatifs à la vapeur et à l'air — modules qui ont une valeur commune pour chacun des deux constituants gazeux, ainsi que l'ont montré les relations (II.78) et (II.79). Si l'on se réfère désormais au module capillaire  $M$  introduit en (II.81) et relié aux précédents modules de Biot par la relation (II.82) qui s'écrit ici:

$$M = M_l - (M_v + M_a)$$

on peut inverser comme suit l'écriture matricielle des équations d'état des fluides interstitiels et obtenir de la sorte les relations incrémentales du changement de variables désiré:

$$(V.8) \quad \begin{bmatrix} d\varepsilon \\ \frac{dm_v}{\rho_v} \\ \frac{dm_a}{\rho_a} \\ \frac{dm_l}{\rho_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_g & \frac{1}{M} + \frac{1}{M_v} & \frac{1}{M} & -\frac{1}{M} \\ b_g & \frac{1}{M} & \frac{1}{M} + \frac{1}{M_a} & -\frac{1}{M} \\ b_l & -\frac{1}{M} & -\frac{1}{M} & \frac{1}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon \\ dp_v \\ dp_a \\ dp_l \end{bmatrix}$$

Par la suite, les variables choisies pour la description de l'état du système seront donc les pressions partielles et la déformation du squelette, grandeurs en fonction desquelles s'expriment plus aisément et naturellement les conditions thermodynamiques (changement de phase non dissipatif, constance de la pression de gaz) et les conditions aux limites (humidité relative, donc pression de vapeur, imposée) caractéristiques du problème de séchage étudié.

### V.1.3. Conditions de changement de phase et de sorption-désorption.

On se place exclusivement dans le cadre d'une expérience de séchage du mur, qui suppose à la fois équilibre de changement de phase entre l'eau liquide et sa vapeur saturante et équilibre de la phase gazeuse avec l'extérieur.

La première de ces conditions se traduit par l'égalité des enthalpies libres massiques de l'eau liquide et de sa vapeur<sup>2</sup>. En écriture différentielle, cette égalité débouche, après application de la relation d'homogénéisation (II.8), sur la relation de Clapeyron<sup>3</sup> entre incréments des pressions partielles de liquide et de vapeur:

$$(V.9) \quad \frac{dp_l}{\rho_l} = \frac{dp_v}{\rho_v}$$

Si l'on suppose en outre, comme il sera fait plus loin, que l'eau liquide est incompressible ( $\rho_l = \text{cte}$ ) et que sa vapeur peut être assimilée à un gaz parfait, la relation de Clapeyron (V.9) peut aisément être intégrée sous la forme, déjà présentée en (III.13), de la relation de Kelvin.

Quant à elle, la condition d'équilibre, entre l'intérieur et l'extérieur, de la phase gazeuse dans son ensemble se traduit par l'absence de variation de la pression totale de gaz en tout instant et en tout point du mur:

$$(V.10) \quad dp_g = dp_v + dp_a = 0$$

<sup>2</sup> Cf. relation (III.8).

<sup>3</sup> Déjà introduite en (II.108).

On voit donc comment l'ensemble de ces relations se posent naturellement en termes de pressions des constituants. C'est pourquoi la résolution numérique de ce problème se fera en déformation et pression — et, par choix (notamment du fait de sa relation immédiate à l'humidité relative, grandeur imposée en condition aux limites), en pression de vapeur. Les deux égalités (V.9) et (V.10) permettent d'éliminer deux variables de pression ( $p_l$  et  $p_a$ ) en fonction de la troisième ( $p_v$ ).

#### V.1.4. Equilibre mécanique.

Comme au chapitre précédent, on écrit l'équilibre mécanique du mur, qui se réduit ici à la condition:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 0$$

laquelle conduit à une relation analogue à (IV.31), mais correspondant ici à une absence totale de contrainte mécanique exercée:

$$(V.11) \quad \forall (x, t \geq 0^+) \quad \sigma_{xx}(x, t) = \sigma_{xx}(x=L/2, t) = 0$$

Après introduction de la loi de comportement non linéaire (II.20), dont les différents coefficients ont été identifiés sous leur forme définitive au § II.3.4., la relation d'équilibre (V.11) peut s'écrire en fonction des deux variables d'état  $\varepsilon$  et  $p_v$ . On obtient successivement:

$$d\sigma_{xx} = 0 = (\lambda_0 + 2\mu) d\varepsilon - S_l dp_l - S_g dp_g$$

et, grâce à (V.9) et (V.10):

$$(V.12) \quad (\lambda_0 + 2\mu) d\varepsilon = S_l \frac{\rho_l}{\rho_v} dp_v$$

En vertu de la relation d'équilibre telle que formulée en (V.12), l'ensemble du problème est décrit et peut être résolu en fonction d'une variable d'état unique: la pression de vapeur  $p_v$ .

#### V.1.5. Conservation de la masse et conduction de l'eau: l'équation de diffusion.

De la relation matricielle (V.8), il est aisé de déduire l'expression des variations de masse  $m_l$  et  $m_v$  de l'eau liquide et de sa vapeur saturante en fonction des variables de pression. On lit en effet immédiatement:

$$(V.13) \quad \frac{dm_v}{\rho_v} = b_g d\varepsilon + \left( \frac{1}{M_v} + \frac{1}{M} \right) dp_v + \frac{1}{M} dp_a - \frac{1}{M} dp_l$$

$$(V.14) \quad \frac{dm_l}{\rho_l} = b_l d\varepsilon - \frac{1}{M} dp_v - \frac{1}{M} dp_a + \frac{1}{M} dp_l$$

Deux expressions des variations de masse de vapeur et de liquide qui, compte tenu de l'identification des coefficients de Biot aux saturations, des relations entre pressions (V.9) et (V.10) imposées par le processus expérimental considéré, enfin de la relation d'équilibre (V.11), peuvent s'exprimer en fonction de la seule pression de vapeur:

$$(V.15) \quad \frac{dm_v}{\rho_v} = \left[ \frac{(1-S_1)S_1 \rho_l}{\lambda_0 + 2\mu \rho_v} + \frac{1}{M_v} - \frac{\rho_l}{\rho_v} \frac{1}{M} \right] dp_v$$

$$(V.16) \quad \frac{dm_l}{\rho_l} = \left[ \frac{S_1^2}{\lambda_0 + 2\mu} + \frac{1}{M} \right] \frac{\rho_l}{\rho_v} dp_v$$

sachant que le module capillaire  $M$ , lié à la pente de la courbe  $p_c = p_c(S_1)$ , est donné par mesure expérimentale et que le module  $M_v$  est égal, comme montré en (II.78), au rapport du module d'incompressibilité de la vapeur et de la fraction volumique de la phase gazeuse. Adoptant, comme indiqué au § II.3.4., un modèle microscopique de gaz parfait pour la vapeur (comme pour l'air), son module d'incompressibilité  $M_v$  est alors égal à la pression partielle  $p_v$  de la vapeur, laquelle est reliée linéairement à la masse volumique  $\rho_v$  par la loi classique des gaz parfaits:

$$(V.17) \quad p_v = \frac{\rho_v RT}{\mathcal{M}_v}$$

où  $\mathcal{M}_v$  désigne la masse molaire de la vapeur d'eau (=18 g/mol),  $T$  la température (fixée, en degrés Kelvin) et  $R$  la constante universelle des gaz parfaits (=8,32 SI).

Si l'on se reporte maintenant aux équations de conservation de la masse de l'eau sous ses deux formes (liquide+vapeur), telle qu'elle a été établie en (IV.45):

$$\dot{m}_l + \dot{m}_v = - \text{Div} (M_l + M_v)$$

on peut exprimer le terme  $\text{Div} (M_l + M_v)$  de transport global de l'eau en fonction de la dérivée temporelle de la pression de vapeur:

$$(V.18) \quad \text{Div} (M_l + M_v) = - \left[ \frac{\rho_v(1-S_1) + \rho_l S_1 \rho_l}{\lambda_0 + 2\mu} S_1 + \frac{\mathcal{M}_v \phi_g}{RT} + \frac{\rho_l^2}{\rho_v} \frac{1}{M} \right] \dot{p}_v$$

Pour obtenir en fin de compte l'équation de diffusion du problème, il convient de coupler l'expression précédente de la conservation de la masse d'eau avec les lois de conduction de l'eau sous ses deux phases: liquide et vapeur. Contrairement à l'hypothèse retenue d'emblée en (IV.23), on considérera ici la possibilité d'un transport non négligeable de l'eau sous sa phase liquide. Ce transport sera régi par une loi de Darcy de type classique – sans couplage avec la pression de vapeur ou la pression totale du gaz:

$$(V.19) \quad \frac{M_l}{\rho_l} = -k_l \text{ grad } p_l$$

dans laquelle le coefficient  $k_l$  désigne la perméabilité du mur à l'eau liquide (éventuellement variable, notamment en fonction de la saturation en eau liquide  $S_l$ ).

La conduction globale de la phase gazeuse, obéissant comme en (IV.24) à une loi de Darcy non couplée avec la pression de liquide, n'intervient pas dans ce problème où la pression totale de gaz est supposée partout égale et constante.

En revanche, on considérera une diffusion de Fick de la vapeur dans l'air, qui s'écrira comme en (IV.26):

$$(V.20) \quad \frac{M_v}{\rho_v} - \frac{M_a}{\rho_a} = -\mathcal{F} \text{ grad } C_v$$

pour laquelle  $\mathcal{F}$ , coefficient de Fick, sera considéré constant et évalué d'après une mesure macroscopique de la diffusivité globale du matériau.

Tous calculs faits, on obtient donc les deux expressions suivantes du vecteur courant de masse liquide et courant de masse vapeur:

$$(V.21) \quad \frac{M_l}{\rho_l} = -k_l \text{ grad } p_l$$

$$(V.22) \quad \frac{M_v}{\rho_v} = -(1-C_v) \mathcal{F} \text{ grad } C_v$$

ce qui permet de calculer le flux surfacique d'eau sous ses deux phases (liquide+vapeur) et rapporté à l'unité de volume initial:

$$(V.23) \quad \text{Div} (M_l + M_v) = -\text{Div} [ \rho_v (1-C_v) \mathcal{F} \text{ grad } C_v + \rho_l k_l \text{ grad } p_l ]$$

Le rapprochement de la conservation (V.18) de la masse totale de l'eau et de l'équation (V.21) de conduction de l'eau sous ses deux phases permet finalement d'écrire précisément l'équation de diffusion du problème:

$$\left[ \frac{\rho_v(1-S_l)+\rho_l S_l \rho_l}{\lambda_0 + 2\mu} S_l + \frac{\mathcal{M}_v \phi_g}{RT} + \frac{\rho_l^2}{\rho_v} \frac{1}{M} \right] \dot{p}_v = \text{Div} [ \rho_v (1-C_v) \mathcal{F} \text{ grad } C_v + \rho_l k_l \text{ grad } p_l ]$$

Compte tenu de la relation de Clapeyron (V.9) exprimant l'équilibre de changement de phase liquide-vapeur, et de ce que, quant à elle, la concentration de vapeur dans le mélange se définit comme le rapport de la pression de vapeur et de la pression totale de gaz, constante et égale à la pression atmosphérique, les termes de gradient apparaissant dans la précédente équation de diffusion peuvent s'écrire en fonction du gradient de la seule pression de vapeur:

(V.24)

$$\left[ \frac{\rho_v(1-S_1)+\rho_l S_1 \rho_l}{\lambda_0 + 2\mu} S_1 + \frac{\mathcal{M}_v \phi_g}{RT} + \frac{\rho_l^2}{\rho_v} \frac{1}{M} \right] \dot{p}_v = \text{Div} \left( \left[ \frac{\rho_v (1-C_v) \mathcal{F}}{P_{\text{atm}}} + \frac{\rho_l^2}{\rho_v} k_1 \right] \text{grad } p_v \right)$$

### V.1.6. Paramètres de la diffusion.

La forme de l'équation de diffusion (V.24) — qu'on peut alternativement exprimer en fonction de l'humidité relative  $h$  par simple division par la pression de vapeur saturante — correspond exactement à celle de l'équation de diffusion classiquement admise et établie dans les problèmes de séchage du béton<sup>4</sup>. Pour retrouver la forme la plus traditionnelle de cette équation de diffusion, il convient de considérer la quantité:

$$c = \frac{\rho_v(1-S_1)+\rho_l S_1 \rho_l}{\lambda_0 + 2\mu} S_1 + \frac{\mathcal{M}_v \phi_g}{RT} + \frac{\rho_l^2}{\rho_v} \frac{1}{M}$$

laquelle, du fait de la biunivocité de la relation  $(h, S_1)$  dans le cas de la sorption-désorption, peut être regardée (dans ce problème seulement) comme une fonction de l'humidité relative  $h$ . Dès lors, on peut considérer une primitive  $C(h)$  de  $c(h)$ , et écrire comme suit l'équation de diffusion (V.25):

$$C'(h) \dot{h} = \text{Div} ( C'(h) D \text{grad } h )$$

où l'on a posé:

$$(V.25) \quad D = \frac{\frac{\rho_v (1-C_v) \mathcal{F}}{P_{\text{atm}}} + \frac{\rho_l^2}{\rho_v} k_1}{\frac{\rho_v(1-S_1)+\rho_l S_1 \rho_l}{\lambda_0 + 2\mu} S_1 + \frac{\mathcal{M}_v \phi_g}{RT} + \frac{\rho_l^2}{\rho_v} \frac{1}{M}}$$

L'équation de diffusion apparaît dès lors sous sa forme traditionnelle:

$$(V.26) \quad \dot{C} = \text{Div} ( D \text{grad } C )$$

la quantité  $C$  s'identifiant alors à la teneur en eau liquide (masse de liquide par unité de volume total) et le coefficient  $D$  au coefficient de diffusion.

On peut aisément s'assurer, dans le cas où aucun transport sous forme liquide n'est pris en compte ( $k_1=0$ ), que l'on retrouve bien la même expression du coefficient de diffusion qu'en (II.127) et (IV.102) — à la différence près que, cette fois, les différents termes qui le définissent sont variables.

En supposant, comme on le fera par la suite dans l'ensemble des simulations numériques, que le coefficient  $\mathcal{F}$  de diffusion de Fick est constant et en introduisant une

---

<sup>4</sup> On pourra notamment comparer avec la forme générale de l'équation de diffusion en humidité relative telle que la reprennent, entre autres, Bazant & Kim (1991).

variation déterminée de manière empirique de la perméabilité  $k_l$  à la phase liquide en fonction de la saturation  $S_1$ , on impose en fait une dépendance précise du coefficient de diffusion global en fonction de cette même saturation  $S_1$ . Il suffit en effet, pour retrouver cette dépendance, de remarquer que pendant toute la simulation l'humidité relative correspond, à saturation donnée, à une humidité relative de sorption (ou de désorption): c'est-à-dire exactement à la valeur  $h^{sd}(S_1)$  qui correspond à la saturation  $S_1$  d'après l'isotherme de sorption-désorption. Ainsi peut-on écrire formellement, après expression de la pression de vapeur et (*via* la loi (V.17) des gaz parfaits) de la masse volumique de vapeur en fonction de leurs valeurs standard  $\rho_{vs}^0$  et  $p_{vs}^0$  ainsi que de l'humidité relative  $h=h^{sd}(S_1)$ :

$$(V.27) \quad D(S_1) = \frac{\rho_{vs}^0 \frac{F}{p_{atm}} h^{sd}(S_1) \left(1 - \frac{p_{vs}^0}{p_{atm}} h^{sd}(S_1)\right) + \frac{\rho_l^2}{\rho_{vs}^0} \frac{k_l(S_1)}{h^{sd}(S_1)}}{\frac{\rho_l(1-S_1) + \frac{\rho_l^2}{\rho_{vs}^0 h^{sd}(S_1)} S_1}{\lambda_0 + 2\mu} S_1 + \frac{\mathcal{M}_v \phi_0 (1-S_1)}{RT} + \frac{\rho_l^2}{\rho_{vs}^0} \frac{1}{M(S_1) h^{sd}(S_1)}}$$

La précédente égalité constitue en fait une approximation de la relation (V.25), qui suppose implicitement négligeable l'influence relative de la variation d'humidité sur la porosité:

$$\phi_g = (1-S_1)\phi \equiv (1-S_1)\phi_0$$

C'est là une hypothèse courante dans le domaine expérimental, et qui préside à la réalisation de bon nombre d'expériences comme au dépouillement et à l'analyse de leurs résultats (cf. §III.2.2). Les calculs numériques présentés dans ce chapitre permettront de vérifier sa validité. Moyennant quoi, la relation (V.27) pourrait constituer une loi relativement fiable (et sans doute à tester précisément) donnant la variation, au cours d'une expérience de séchage ou d'imbibition, du coefficient global de diffusion  $D$  en fonction de la saturation en eau liquide (ou, alternativement, de la valeur correspondante de l'humidité relative).

## V.2. Formulation discrète et résolution numérique du problème.

### V.2.1. Discrétisation de l'équation de diffusion.

Le logiciel SIDOLO utilisé pour les simulations numériques dont les résultats seront présentés par la suite est un logiciel éléments finis 1D en espace. L'équation différentielle (V.25) est donc discrétisée en espace puis résolue, en chaque noeud de la discrétisation choisie, en tant que problème différentiel linéaire du premier ordre en fonction du temps.

Ainsi, la discrétisation en espace passe par le choix de  $n+1$  noeuds régulièrement espacés, définissant  $n$  éléments de poutre de même longueur. Le champ de pression de vapeur (variable principale) est alors interpolé en fonction de ses valeurs aux différents noeuds par l'intermédiaire des fonctions de forme  $N_i$ :



$$(V.28) \quad p_v(x, t) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i(t) N_i(x)$$

La dérivée partielle par rapport au temps et la dérivée seconde par rapport à la variable d'espace du champ de pression s'écrivent respectivement:

$$(V.29) \quad \frac{\partial p_v}{\partial t}(x, t) = \sum_{i=1}^n \dot{p}_i(t) N_i(x)$$

et

$$(V.30) \quad \frac{\partial p_v}{\partial x}(x, t) = \sum_{i=1}^n p_i(t) N_i'(x)$$

Désignons alors par  $a(p_v)$  et  $b(p_v)$  les deux coefficients de l'équation de diffusion (V.24), qui s'écrit formellement, en fonction de l'unique coordonnée d'espace  $x$ :

$$(V.31) \quad a(p_v) \frac{\partial p_v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (b(p_v) \frac{\partial p_v}{\partial x}) = 0$$

La formulation faible de la précédente équation appliquée aux fonctions de forme  $N_j$ :

$$(V.32)_j \quad \int_0^L a \frac{\partial p_v}{\partial t} N_j(x) dx + \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} (b \frac{\partial p_v}{\partial x}) N_j(x) dx = 0$$

conduit à l'écriture discrétisée du problème de diffusion:

$$\forall j \quad \int_0^L a \sum_{i=1}^{n+1} \dot{p}_i(t) N_i(x) N_j(x) dx + \int_0^L (b \sum_{i=1}^{n+1} p_i(t) N_i'(x))' N_j(x) dx = 0$$

qui s'écrit, lorsqu'on fait sortir des termes d'intégration les différentes quantités indépendantes de l'espace:

$$\forall j \quad \sum_{i=1}^n \dot{p}_i(t) \int_0^L a N_i(x) N_j(x) dx + \sum_{i=1}^n p_i(t) \int_0^L (b N_i'(x))' N_j(x) dx = 0$$

En utilisant une intégration par parties de la deuxième intégrale:

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i(t) \int_0^L (b N_i'(x))' N_j(x) dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} p_i(t) [ b N_i'(x) N_j(x) ] - \sum_{i=1}^{n+1} p_i(t) \int_0^L b N_i'(x) N_j'(x) dx$$

La précédente écriture du problème de diffusion s'apparente alors à une écriture matricielle de la forme:

$$(V.33) \quad [A] [\dot{P}] + [B] [P] = [C]$$

où l'on définit comme suit les termes des matrices [A] et [B]:

$$(V.34)_{ij} \quad A_{ij} = \int_0^L a N_i(x) N_j(x) dx$$

$$(V.35)_{ij} \quad B_{ij} = \int_0^L b N_i'(x) N_j'(x) dx$$

le vecteur colonne [C] ayant en définitive pour seule composante non nulle:

$$(V.36) \quad C_{n+1} = -b(L)p(L)$$

qui correspond à une condition aux limites en flux imposé. Quant à elle, l'inconnue du système matriciel ci-dessus est le vecteur colonne [P] ayant pour i<sup>ème</sup> composante la pression  $p_i(t)$  au noeud (i).

## V.2.2. Méthode d'intégration numérique des coefficients non linéaires.

Dans le cas d'un comportement linéaire, les coefficients  $a$  et  $b$  qui définissent les intégrandes des termes matriciels  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  sont des constantes qui n'entrent pas en compte dans l'intégration. Dans le cas qui nous occupe ici d'un comportement non linéaire,  $a(p_v)$  et  $b(p_v)$  sont des fonctions — définies d'après l'écriture (V.24) de l'équation de diffusion — de la pression de vapeur, champ variable de la coordonnée d'espace: les coefficients  $a$  et  $b$  interviennent donc dans le calcul des intégrales  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$ , qui recourt dès lors à une méthode discrète d'intégration approchée. La méthode choisie ici, dans la programmation de la loi de comportement poroélastique non linéaire, est une méthode de Gauss classique à trois points. Elle consiste à approximer toute intégrale du type:

$$\int_0^1 f(x) dx$$

par une somme du type:

$$\sum_{g=0}^{n_g} \alpha_g f(\xi_g)$$

où les  $\xi_g$  sont  $n_g$  points déterminés de l'intervalle  $[0;1]$ , appelés points de Gauss, auxquels sont affectés des coefficients  $\alpha_g$  de pondération.

Dans l'application de cette méthode d'intégration approchée au calcul des termes matriciels  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  définis selon (V.34) et (V.35), on effectue en premier lieu un changement de variable d'espace  $X=x/h$ , où  $h$  est la longueur des  $n$  éléments poutres déterminés par les  $n+1$  noeuds du maillage ( $h=L/n$ , avec  $L$  largeur totale du mur). Les intégrations concernent alors l'intervalle  $[0;n]$ , sur lequel on choisit comme suit les fonctions de forme de la variable  $X$ :

$$(V.37)_i \quad N_i(X) = [X - (i-1)] \chi_{[i-1;i]} - [X - (i+1)] \chi_{[i;i+1]}$$

$\chi_I$  désignant la fonction caractéristique de l'intervalle  $I$ . Avec un tel choix des fonctions de forme, on s'aperçoit immédiatement que les seuls termes non nuls des matrices  $[A]$  et  $[B]$  sont les termes  $A_{ii}$ ,  $B_{ii}$ ,  $A_{i,i+1}$  et  $B_{i,i+1}$  de leurs bandes diagonales. Leur calcul est, quant à lui, explicite, et l'on aboutit finalement au calcul des intégrales suivantes, successivement pour les termes de  $[A]$  et ceux de  $[B]$ <sup>5</sup>:

$$A_{ii} = h \left[ (1-\delta_{i,1}) \int_0^1 a(p_{i-1}(1-X)+p_i X) X^2 dX + (1-\delta_{i,n+1}) \int_0^1 a(p_i(1-X)+p_{i+1} X) (1-X)^2 dX \right]$$

$$A_{i,i+1} = h \int_0^1 a(p_i(1-X)+p_{i+1} X) X(1-X) dX$$

$$B_{ii} = \frac{1}{h} \left[ (1-\delta_{i,1}) \int_0^1 b(p_{i-1}(1-X)+p_i X) dX + (1-\delta_{i,n+1}) \int_0^1 b(p_i(1-X)+p_{i+1} X) dX \right]$$

---

<sup>5</sup> L'apparition d'un terme  $\frac{1}{h}$  en facteur des coefficients de  $[B]$  au lieu d'un terme en  $h$  comme pour ceux de la matrice  $[A]$  est due au fait que, en posant  $X=\frac{x}{h}$ , on introduit des fonctions de forme  $\hat{N}_i$  de la variable  $X$  définies à partir des fonctions de forme  $N_i$  de la variable  $x$  comme suit:

$$\hat{N}_i(X) = N_i(x) = N_i(hX)$$

dont il résulte, par simple dérivation:

$$\hat{N}_i'(X) = h N_i'(hX) = h N_i'(x)$$

d'où en définitive:

$$N_i'(x) = \frac{1}{h} \hat{N}_i'(X)$$

ce qui explique que les termes de  $[B]$ , intégrales de produits  $N_i'(x) N_j'(x)$ , soient dans un rapport  $\frac{1}{h^2}$  vis-à-vis des termes de la matrice  $[A]$ , qui intègrent quant à eux des produits du type  $N_i(x) N_j(x)$ .

$$B_{i,i+1} = -\frac{1}{h} \int_0^1 a(p_i(1-X) + p_{i+1}X) dX$$

où  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker (vaut 1 si  $i=j$ , 0 sinon); et pour  $i \leq n$ :

Il en résulte l'évaluation suivante, grâce à la méthode d'intégration par points de Gauss, des termes non nuls des matrices [A] et [B]:

(V.38)

$$A_{ii} = h \sum_{g=1}^{n_g} \alpha_g [(1-\delta_{i,1})\xi_g^2 a(p_{i-1}(1-\xi_g) + p_i\xi_g) + (1-\delta_{i,n+1})(1-\xi_g)^2 a(p_i(1-\xi_g) + p_{i+1}\xi_g)]$$

$$(V.39)_i \quad A_{i,i+1} = h \sum_{g=1}^{n_g} \alpha_g [\xi_g (1-\xi_g) a(p_i(1-\xi_g) + p_{i+1}\xi_g)]$$

$$(V.40)_i \quad B_{ii} = \frac{1}{h} \sum_{g=1}^{n_g} \alpha_g [(1-\delta_{i,1}) a(p_{i-1}(1-\xi_g) + p_i\xi_g) + (1-\delta_{i,n+1}) a(p_i(1-\xi_g) + p_{i+1}\xi_g)]$$

$$(V.41)_i \quad B_{i,i+1} = \frac{1}{h} \sum_{g=1}^{n_g} \alpha_g [\xi_g a(p_i(1-\xi_g) + p_{i+1}\xi_g)]$$

Sur l'intervalle [0;1], les coordonnées des points d'intégration de Gauss et les valeurs correspondantes des coefficients de pondération sont résumées dans le tableau qui suit, pour des schémas d'intégration à 2, 3 et 4 points:

2 POINTS	0.2113249 0.7886751	0.5 0.5
3 POINTS	0.1127017 0.5 0.8872983	0.277778 0.444445 0.277778
4 POINTS	0.0694319 0.1600190 0.8399810 0.9305681	0.17399274 0.32607260 0.32607260 0.17399274

Dans l'ensemble des calculs numériques réalisés, c'est le schéma d'intégration à trois points qui est utilisé.

### V.2.3. Le processus algorithmique.

A chaque pas de calcul ( $r$ ), la procédure est ainsi la suivante:

0/ on dispose au début du pas de calcul ( $r$ ), à l'issue du pas de calcul précédent, de la valeur  $p_v^{i,r}$  de la pression de vapeur en tout noeud ( $i$ );

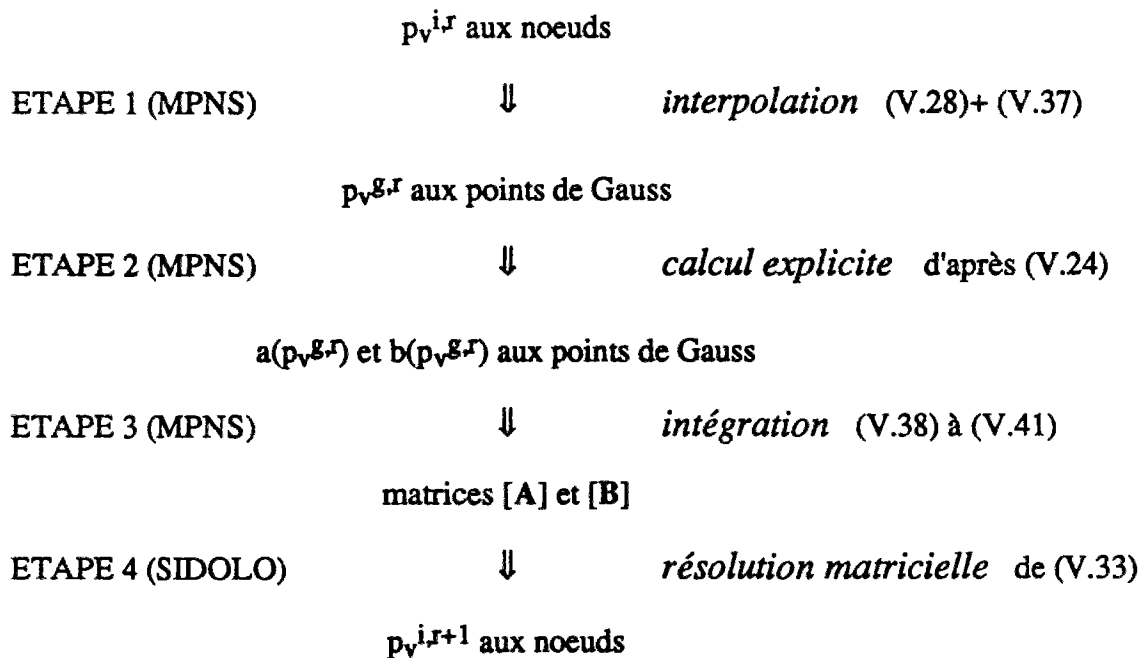
1/ par interpolation du champ de pression de vapeur, sa valeur  $p_v^{g,r}$  est connue en tout point d'intégration ( $g$ );

2/ les valeurs au pas de calcul ( $r$ ) de toutes les fonctions explicites de la pression  $p_v$  sont connues, en tout point de l'espace, grâce à l'interpolation du champ de pression en fonction de ses valeurs aux noeuds; en particulier, la valeur aux points de Gauss  $f(p_v^{g,r})$  de toute fonction explicite de la pression de vapeur; on applique ce résultat au calcul de  $a(p_v^{g,r})$  et  $b(p_v^{g,r})$ , valeurs respectives aux points d'intégration des fonctions  $a(p_v)$  et  $b(p_v)$  définies d'après (V.24) et qui interviennent dans les expressions (V.34) et (V.35) des termes  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  du système matriciel de diffusion (V.33).

3/ grâce à l'application de la méthode d'intégration exposée ci-dessus, les intégrales définissant  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  peuvent être approximées selon les formules approchées (V.38) à (V.41);

4/ le système matriciel (V.33) est alors établi au pas de calcul ( $r$ ), et sa résolution aboutit à la détermination, en tout noeud ( $i$ ), de la valeur  $p_v^{i,r+1}$  du champ de pression au pas de calcul ( $r+1$ ).

Les étapes 1 à 3 de la boucle de calcul présentée ci-dessus sont effectuées par un module programmé séparément, qui permet d'introduire le comportement choisi dans le code global SIDOLO. Le module de programmation de la loi de comportement utilisée se nomme MPNS (pour: Milieux Poreux Non Saturés). L'étape 4 est effectuée par le code général SIDOLO, qui utilise une méthode de résolution par éléments finis.



### V.3. Résultats des simulations numériques.

Dans ce paragraphe sont présentées quelques premières simulations de séchage de dessiccation. Les simulations ont été effectuées pour divers matériaux et divers jeux de données correspondants: pâte de ciment (exemples 1 et 2) et béton ordinaire (exemple 3)<sup>6</sup>.

Dans tous les cas la structure étudiée est le mur «infini» décrit au chapitre IV. Son épaisseur a été normalisée à  $L=1\text{m}$ . On peut arguer qu'une telle dimension s'avère irréaliste pour une structure fabriquée de pâte de ciment: il suffit cependant, pour rétablir la pertinence des exemples traités par rapport à la pratique, de corriger le résultat obtenu en introduisant l'effet d'échelle – effet en  $L^2$  sur le temps caractéristique<sup>7</sup>.

Dans tous les exemples traités, les données introduites de manière expérimentale sont les suivantes:

- le module d'incompressibilité drainé  $K_0$ , supposé constant;
- le module de cisaillement  $\mu$ , supposé constant;
- la courbe capillaire  $p_c=p_c(S_1)$ , obtenue à partir des courbes expérimentales de sorption-désorption.

En réalité, ce n'est pas le module d'incompressibilité drainé  $K_0$  qui est expérimentalement mesuré, mais le module d'incompressibilité non drainé  $K$ . Cependant l'expérience montre que, pour les gammes usuelles de saturations considérées, ce module  $K$  ne varie pratiquement pas<sup>8</sup>: l'influence des pressions interstitielles sur sa valeur est donc faible, ce qui autorise à le considérer constant et du même ordre de grandeur que  $K_0$ . On peut donc penser disposer, par cette mesure expérimentale, d'un ordre de grandeur satisfaisant du module d'incompressibilité  $K_0$ .

La courbe capillaire  $p_c=p_c(S_1)$  est quant à elle déduite, selon le procédé exposé au § III.4.1., des courbes expérimentales de sorption-désorption. Elle est ensuite introduite dans le code numérique sous une forme analytique approchée:

$$(V.42) \quad S_1 = [ 1 + (ap_c)^b ]^c$$

qui approxime de manière satisfaisante, sur toute la gamme des saturations considérées, l'allure de la courbe capillaire expérimentale<sup>9</sup>.

---

<sup>6</sup> Cf. Annexe IV.

<sup>7</sup> Cf. L. Granger (1994), partie II, chapitre 2, § 10.

<sup>8</sup> Cf. J.-M. Torrenti (1987), p. 40, pour l'étude des variations du module d'Young non drainé en fonction de l'humidité.

<sup>9</sup> Cf. Parker, Lenhard & Kuppusamy (1987).

### V.3.1. Séchage et imbibition d'une pâte de ciment (PWT).

#### V.3.1.1. Caractéristiques et données expérimentales de la simulation.

Le premier exemple considéré est celui de la pâte de ciment étudiée tour à tour par Pihlajavaara et Wittmann, dont J.M. Torrenti a réuni les résultats<sup>10</sup> — d'où l'appellation PWT par laquelle nous la désignerons. Les données précises relatives à cette pâte de ciment ainsi qu'à l'ensemble des caractéristiques de la simulation figurent dans l'annexe IV.1. L'isotherme expérimentale de sorption-désorption peut être approchée par une courbe du type (V.42) avec la valeur optimale suivante du jeu de paramètres (a, b, c):

$$a = 2.90735823 \cdot 10^{-8}$$

$$b = 1.388119368$$

$$c = -0.96291517$$

La simulation permet en particulier de comparer entre eux résultats du modèle non linéaire — associé à la courbe capillaire  $p_c = p_c(S_l)$  — et du modèle linéaire correspondant — dans lequel la donnée de la courbe capillaire est remplacée par celle de sa pente au point de saturation initiale:  $p_c'{}^0 = p_c'(S_l^0)$ .

Au niveau des lois de conduction, on suppose dans un premier temps la phase liquide immobile ( $k_l=0$ ). La diffusion de la vapeur d'eau dans l'air est donc le seul phénomène diffusif en jeu. Le paragraphe V.3.1.4. fera cependant exception en présentant une courte étude paramétrique de l'influence de la perméabilité à l'eau  $k_l$  et de la compétition entre phénomènes diffusifs du liquide et de la vapeur d'eau.

#### V.3.1.2. Phase de séchage non linéaire: pressions interstitielles et retrait.

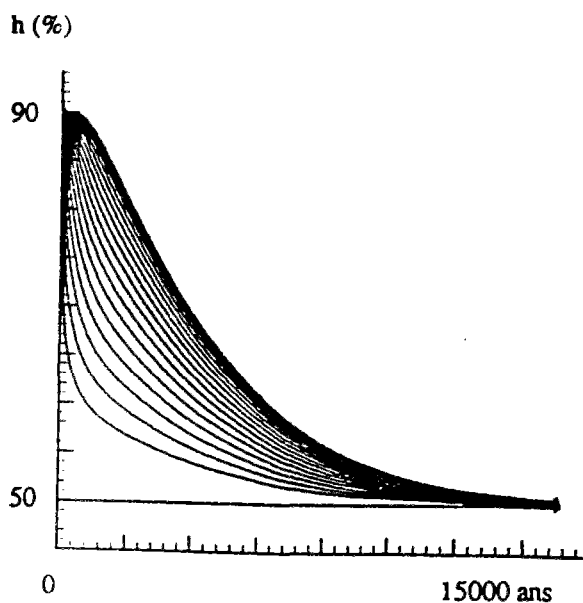
On considère dans un premier temps une expérience de séchage du mur entre son humidité relative initiale  $h_0=90\%$  et l'humidité relative extérieure  $h_e=50\%$ . Le code de calcul permet la représentation dans le temps, en plusieurs points de l'épaisseur (il s'agit des noeuds du maillage), de l'ensemble des variables d'état et grandeurs caractéristiques de la structure: humidité relative, saturation en eau, déformation volumique et contraintes mécaniques (représentées dans cet ordre sur les figures V.2a à V.2d, en fonction du temps et en chacun des noeuds — régulièrement espacés — de la discrétisation spatiale du mur).

Les résultats du modèle non linéaire confirment *a posteriori* la faible influence du couplage poromécanique sur la valeur de la porosité. Celle-ci, en effet, ne varie pratiquement pas au cours du séchage: de 35%, valeur initiale, à 34.9%, valeur finale. Le calcul semble donc corroborer l'hypothèse de faible influence du couplage sur la porosité, légitimant ainsi la conversion de la «perte en poids» en saturation lors du dépouillement expérimental<sup>11</sup>.

Ce découplage partiel n'implique pas absence totale de couplage; les déformations volumiques obtenues par simple modification de l'humidité relative (en l'absence de toute sollicitation mécanique), sont tout à fait comparables, dans le cadre des transformations infinitésimales, à celles obtenues dans les problèmes usuels de mécanique appliquée au génie civil ou industriel: de l'ordre de 1700  $\mu\text{def}$  (0.17%), dans le sens d'un retrait (voir fig. V.2c).

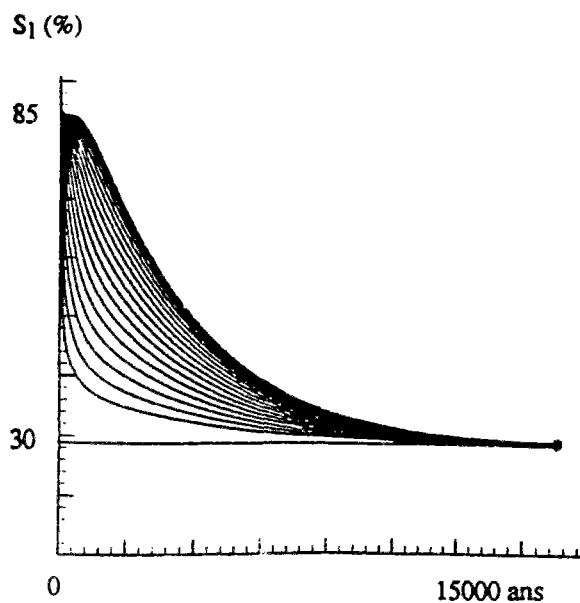
<sup>10</sup> Cf. J.M. Torrenti (1987), p. 36-41.

<sup>11</sup> Cf. § III.2. et III.4.



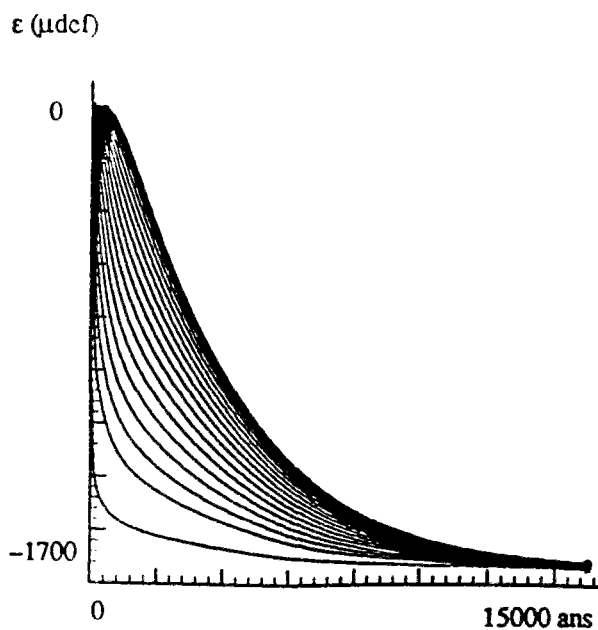
humidité relative:  
évolution dans le temps  
en plusieurs points du mur

Fig. V.2a



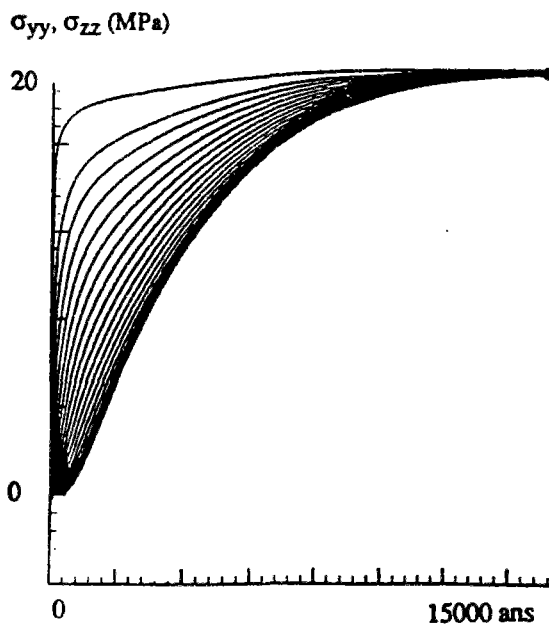
saturation:  
évolution dans le temps  
en plusieurs points du mur

Fig. V.2b



déformation volumique:  
évolution dans le temps  
en plusieurs points du mur

Fig. V.2c



contraintes normales dans le plan du mur:  
évolution dans le temps  
en plusieurs points du mur

Fig. V.2d

Fig. V.2

Résultats en comportement élastique non linéaire pour la pâte de ciment PWT



Du point de vue des contraintes engendrées, le couplage poromécanique s'avère plus important et fondamental encore: du fait des déplacements empêchés, des contraintes de traction se développent, dont les modules atteignent jusqu'à 19 MPa (voir fig. V.2d). Soit plus du quadruple de la résistance à la traction du matériau (de l'ordre de 4 MPa environ): dans un tel exemple, en réalité, les limites de validité du calcul élastique sont rapidement franchies, et l'on peut s'attendre à voir apparaître de la fissuration en mode 1, initiée en peau (zone de contraintes maximales en début de séchage) et se propageant progressivement jusqu'au centre du mur.

Remarquons enfin l'ordre de grandeur du temps caractéristique obtenu (défini, dans le cadre d'un calcul non linéaire, comme le temps nécessaire, en moyenne, à la moitié environ de la diffusion): il est ici de l'ordre de 5000 ans, pour une épaisseur de mur de 1m (donc une «distance de drainage» de 50 cm). Ordre de grandeur, auquel correspond, pour une éprouvette de 5 mm d'épaisseur, un temps caractéristique de l'ordre de 2 mois environ, semble-t-il assez réaliste<sup>12</sup>.

### V.3.1.3. Comparaison entre modèles linéaire et non linéaire.

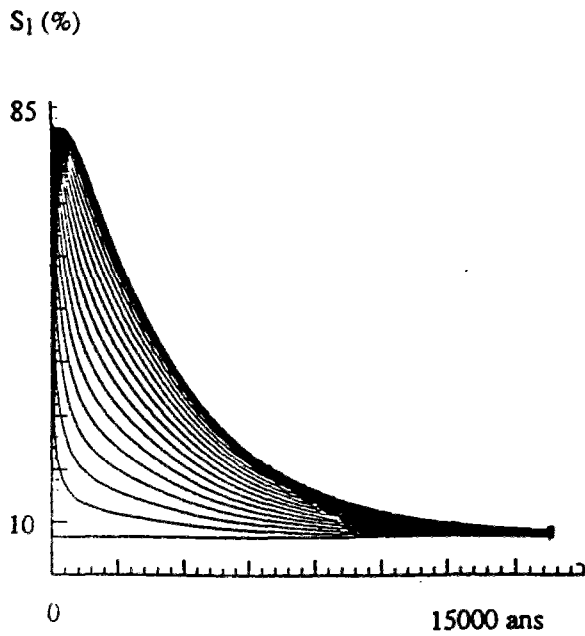
Pour l'exemple traité, la comparaison du modèle non linéaire avec le modèle linéaire montre que le second surestime le retrait et les tractions engendrées par le retrait. L'explication de ce constat réside dans la simple comparaison de la courbe capillaire  $p_c = p_c(S_1)$  — ou alternativement de la courbe de sorption-désorption  $h^{sd} = h^{sd}(S_1)$ , réellement suivie au cours de l'expérience — et de sa pente au point de saturation initiale ( $S_1 = 90\%$ ).

On remarque en effet que la courbe de sorption-désorption (resp. la courbe capillaire) se trouve, sur la plage d'humidités considérée, en dessous (resp. au dessus) de sa tangente au point de saturation initiale ( $S_1 = 90\%$ ). Ce qui veut dire que, pour une expérience «pilotée» en humidité, la valeur finale de la saturation obtenue d'après le calcul linéaire est nettement inférieure à celle obtenue par calcul non linéaire (voir fig. V.4).

S'agissant du couplage poromécanique, la relation (V.12) liant la déformation à la pression de vapeur (donc à l'humidité relative) permet de constater que, n'actualisant pas la valeur (décroissante) de la saturation dans le terme  $S_1 p / \rho_v$ , le modèle linéaire surévalue le couplage par rapport au modèle non linéaire: d'où surévaluation de la déformation (retrait de l'ordre de 2200  $\mu_{def}$  au lieu de 1700  $\mu_{def}$  — cf. fig. V.3b) et de la contrainte finale (tractions normales de l'ordre de 24 MPa sur des facettes perpendiculaires au plan du mur). Ceci implique, dans le cas particulier de l'étude présente, que le calcul linéaire, surestimant les efforts engendrés par le séchage, joue dans le sens de la sécurité. Cependant, ce constat n'est valable que dans les conditions particulières choisies: il dépend, comme le montre la comparaison de la courbe capillaire avec ses tangentes en chaque point, de l'état initial et de l'état final considérés.

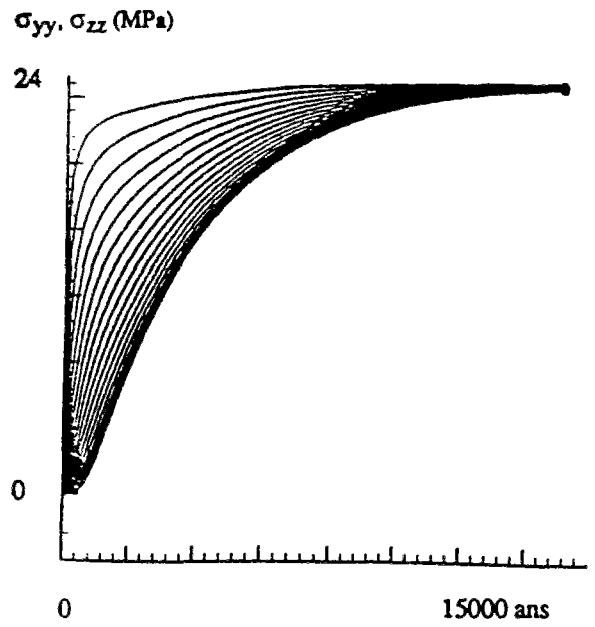
---

<sup>12</sup>  $5000 \text{ ans} \times (5 \cdot 10^{-3})^2 = 0.125 \text{ ans} = 1 \text{ mois et demi}$ . Précisément, pour des éprouvettes de 5 mm d'épaisseur et un tel palier d'humidité relative, il faut compter entre 6 mois et un an pour obtenir le séchage quasi complet de l'échantillon; ce qui correspond à un temps caractéristique de 2 mois environ, ordre de grandeur obtenu.



saturation:  
évolution dans le temps  
en plusieurs points du mur

Fig. V.3a



contraintes normales dans le plan du mur:  
évolution dans le temps  
en plusieurs points du mur

Fig. V.3b

Fig. V.3  
Résultats en comportement élastique linéaire pour la pâte de ciment PWT

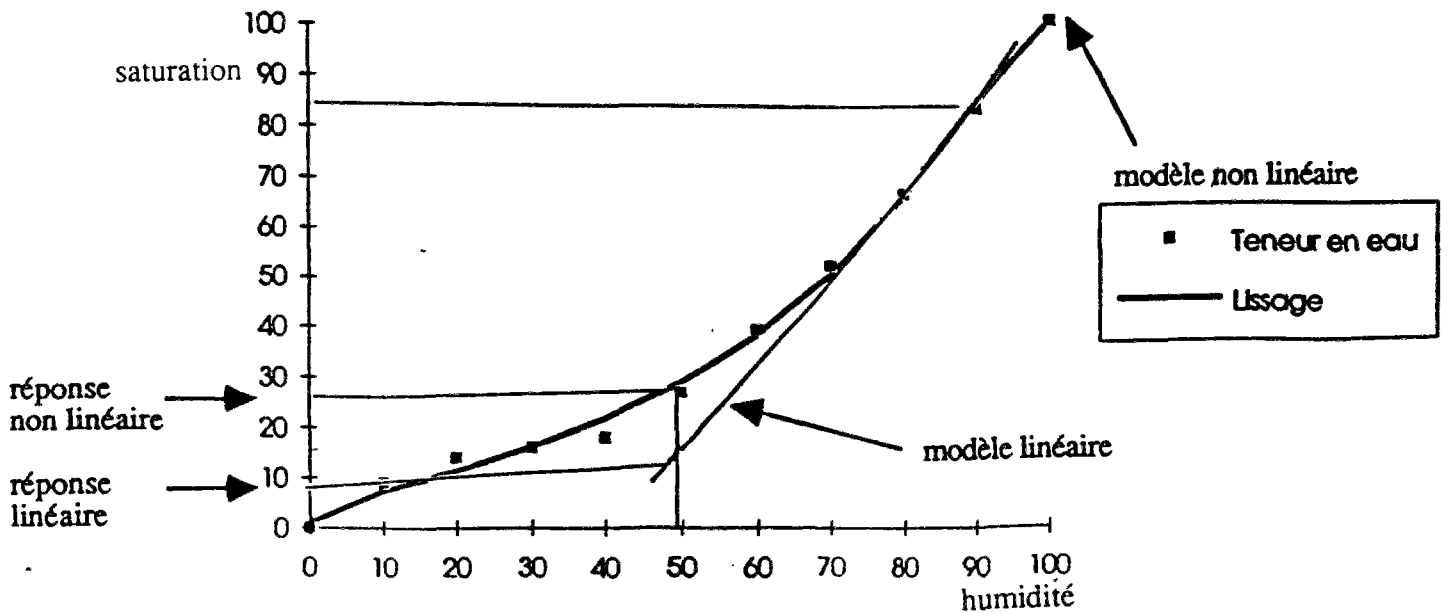


Fig. V.4  
Comparaison de l'isotherme de sorption-désorption de la pâte de ciment PWT  
(et son lissage) avec la tangente suivie en comportement linéaire

#### V.3.1.4. Chemin inverse: l'imbibition.

Si l'on considère en effet l'expérience inverse, c'est-à-dire l'imbibition du mur de 50% à 90% d'humidité relative, on remarque cette fois que le modèle linéaire sous-estime le couplage par rapport au modèle non linéaire: déformation (gonflement) de l'ordre de 1400  $\mu\text{def}$  (0.14%) contre les 1700  $\mu\text{def}$  (0.17%) du modèle non linéaire; contraintes engendrées (compressions normales) de l'ordre de 15 MPa contre 19 MPa. Cette fois, le modèle linéaire joue contre la sécurité. Encore faut-il noter, dans le cas présent, que l'imbibition s'accompagne d'une déformation de gonflement et de contraintes de compression: le matériau étudié étant beaucoup plus résistant à la compression qu'à la traction, le cas est beaucoup moins critique: contrairement à ce qui se passe pour le séchage, les contraintes de compression atteintes dans le mur sont largement inférieures à la limite de rupture.

L'isotherme de sorption-désorption utilisée ne comporte pas de boucle d'hystérésis — au demeurant, le modèle de loi de comportement élaboré au chapitre II, supposant une relation  $p_c = p_c(S_l)$  biunivoque, ne permet pas de prendre en compte un tel phénomène. Ainsi, la courbe capillaire considérée dans le calcul d'imbibition est-elle rigoureusement la même que celle du précédent calcul de séchage.

#### V3.1.5. Prise en compte d'un suintement de l'eau liquide.

Dans ce paragraphe, on étudie sommairement la possibilité d'un suintement, c'est-à-dire d'un transport de la phase liquide entrant en concurrence avec celui de la phase gazeuse. Ce phénomène de suintement, révélateur de l'existence non négligeable d'une diffusion de l'eau liquide dans le matériau, s'observe souvent dans des roches fortement saturées — il est en revanche beaucoup plus rare dans le cas des bétons ou des pâtes de ciment. Expérimentalement, on constate en particulier, au cours du séchage d'une roche initialement saturée, la nette succession de deux phases distinctes: une phase de suintement sur les parois, qui trahit la conduction de l'eau dans sa phase liquide; puis, en dessous d'un certain seuil de saturation, la disparition du suintement, la diffusion de l'eau se faisant alors essentiellement dans sa phase gazeuse.

La courte étude numérique qui suit se fixe donc un double objectif qualitatif:

- tenter de caractériser cette compétition et cette succession des deux phénomènes diffusifs, ainsi qu'un seuil de saturation marquant la fin du suintement;

- établir, grâce à une rapide étude paramétrique, les zones de perméabilités pour lesquelles — à coefficient de Fick supposé constant, indépendant de l'état macroscopique du milieu global — le suintement est prépondérant, concurrentiel ou négligeable par rapport à la diffusion de la vapeur.

Pour cette étude purement qualitative, on a testé trois formes de variation de la perméabilité en fonction de la saturation en eau liquide. Avec pour objectif principal, au fur et à mesure de ces tâtonnements successifs, de représenter (qualitativement) le plus complètement possible les phénomènes physiques couramment observés. Ainsi, les deux caractères exposés plus haut de l'observation expérimentale ont-ils été examinés pour chacune des lois de perméabilité testées: les figures V.5a, V.5c et V.5e représentent l'étude paramétrique de l'influence de la perméabilité sur la diffusion de l'humidité au centre du mur; les figures V.5b, V.5c et V.5f quantifient l'évolution du rapport des termes diffusifs de Fick et de Darcy-liquide en fonction du temps, permettant la détermination de zones de prépondérance du suintement et de zones de prépondérance de la diffusion de la vapeur.

Explicitons et commentons donc un à un les trois tests de lois de perméabilité:

**test 1:** la première loi testée est une perméabilité constante:

$$(V.43) \quad k_1 = k_1^0$$

La figure V.5a représente quatre évolutions de l'humidité dans le temps au centre du mur pour quatre valeurs différentes de cette perméabilité — traduite, graphiquement, par quatre valeurs distinctes du coefficient:

$$(V.44) \quad r = \ln \left( \frac{\mathcal{F}}{k_1^0} \right)$$

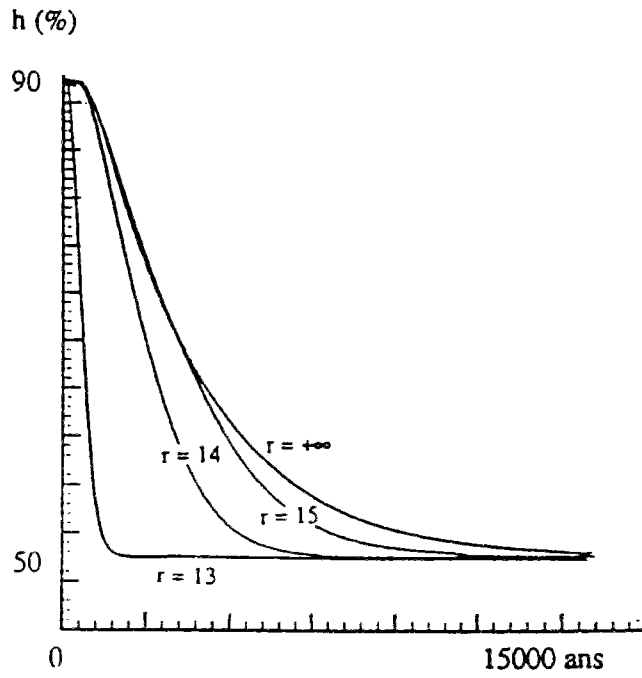
On remarque à quel point, pour une telle loi de perméabilité au liquide, une variation d'ordre de grandeur de 10 du rapport  $\mathcal{F}/k_1^0$  modifie le profil de diffusion dans le temps (comparer les deux profils obtenus pour  $r=13$  et  $r=14$ ). L'influence de la diffusion du liquide selon la loi de Darcy apparaît considérable, voire largement prépondérante, pour des valeurs de  $r$  inférieures ou égales à 14. En revanche, pour  $r \geq 15$ , l'ordre de grandeur de la perméabilité n'influence plus que faiblement le profil de diffusion, et les différentes courbes, pratiquement confondues, coïncident à peu près avec la courbe obtenue dans les cas précédemment étudiés, où toute diffusion du liquide était ignorée ( $r=+\infty$ ).

La précédente étude paramétrique montre donc l'existence d'une zone de perméabilité ( $r \leq 14$ ) où le suintement, très important, accélère considérablement l'égalisation des grandeurs avec l'extérieur, et une autre zone ( $r \geq 15$ ) de faible sensibilité de la cinétique de diffusion au même processus de suintement. Cette analyse qualitative satisfait bien entendu le sens physique le plus élémentaire.

Cependant, les courbes traçant le rapport des influences respectives des deux processus de diffusion au cours du temps, à paramètres diffusifs fixés, ne recoupe pas aussi bien la réalité expérimentale. Très précisément, si l'on se réfère à l'équation (V.24) de diffusion (ou encore à l'expression (V.25) du coefficient global  $D$  de diffusion), on définit cette influence relative par le rapport suivant, local et fonction du temps:

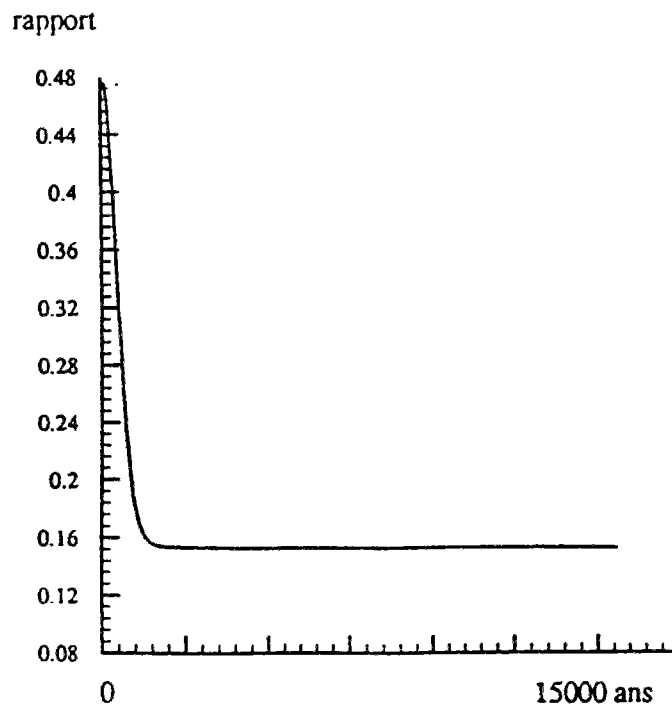
$$(V.45) \quad \frac{\text{diffusion Fick de la vapeur}}{\text{diffusion Darcy du liquide}} (x, t) = \frac{\rho_v (1-C_v) \mathcal{F}}{\frac{\rho_l^2}{\rho_v} k_1}$$

C'est ce rapport, pris en  $x=0$  (centre du mur), qui est porté en fonction du temps sur la figure V.5b, pour une perméabilité fixée, correspondant au rapport  $r=13$ . On remarque d'après cette courbe, qu'au début du séchage le processus de Fick participe deux fois moins à la diffusion globale que le processus de Darcy; et que loin de se rééquilibrer, cette disproportion des deux phénomènes diffusifs s'accroît au cours de la simulation pour atteindre une valeur asymptotique constante — diffusion de Fick huit fois inférieure à celle de Darcy. Cette évolution dans le temps ne correspond pas aux constatations expérimentales usuelles, notamment dans le cas des roches, qui relèvent au contraire la succession d'une phase initiale de prépondérance du suintement suivie d'un rééquilibrage des deux processus et d'une phase finale de prépondérance de la diffusion de vapeur. La loi de perméabilité (V.43) ne permet pas de reproduire, même qualitativement, cette évolution expérimentale.



profils d'humidité relative:  
pour différentes valeurs du rapport  $\mathcal{F}/k_1^0$   
(test 1)

Fig. V.5a



évolution dans le temps de l'importance relative  
de la diffusion Fick et de la diffusion Darcy  
pour  $\mathcal{F}/k_1^0 = 10^{13}$   
(test 1)

Fig. V.5b

On a donc, pour essayer de réaliser cette adéquation simulation/expérience, testé la loi de perméabilité suivante:

**test2:** la seconde loi testée est une fonction linéaire de la saturation:

$$(V.46) \quad k_1 = k_1^0 S_1$$

La figure V.5c représente l'évolution de l'humidité au centre du mur en fonction du temps, pour les quatre mêmes valeurs du rapport  $r$  défini en (V.44):  $r=13$ ,  $r=14$ ,  $r=15$  et  $r=+\infty$  (qui correspond à l'absence de diffusion de la phase liquide). Le commentaire est le même que précédemment, avec tout de même une moindre disparité des courbes — donc une moindre influence de l'ordre de grandeur  $k_1^0$  de la perméabilité (donc du phénomène de suintement) sur le profil global de diffusion. Par rapport aux zones de l'exemple précédent, on constate un certain resserrement: la courbe ( $r=14$ ) est très proche de la courbe ( $r=+\infty$ ), alors que la courbe ( $r=15$ ) lui est carrément superposée. Mais du point de vue qualitatif, l'analyse précédente reste, sur ce point, parfaitement valable.

La modification la plus notable, par rapport au cas précédent, porte sur l'évolution locale, en fonction du temps (et pour une même perméabilité au liquide saturant  $k_1^0$  —  $r=13$ ), du rapport des deux processus Fick et Darcy (fig. V.5d, à comparer avec V.5b). On constate une inversion totale de l'évolution aux premiers temps du séchage par rapport au test 1: la part de la diffusion de la vapeur, initialement moitié de celle de la diffusion du liquide, s'accroît avec le temps. Mais cette évolution, conforme à l'expérience, finit par s'inverser: on obtient donc un pic, un maximum de l'influence relative du terme de Fick par rapport au terme de Darcy, avant une re-décroissance partielle jusqu'à une valeur asymptotique constante.

**test 3:** la troisième et dernière loi de perméabilité testée est la suivante:

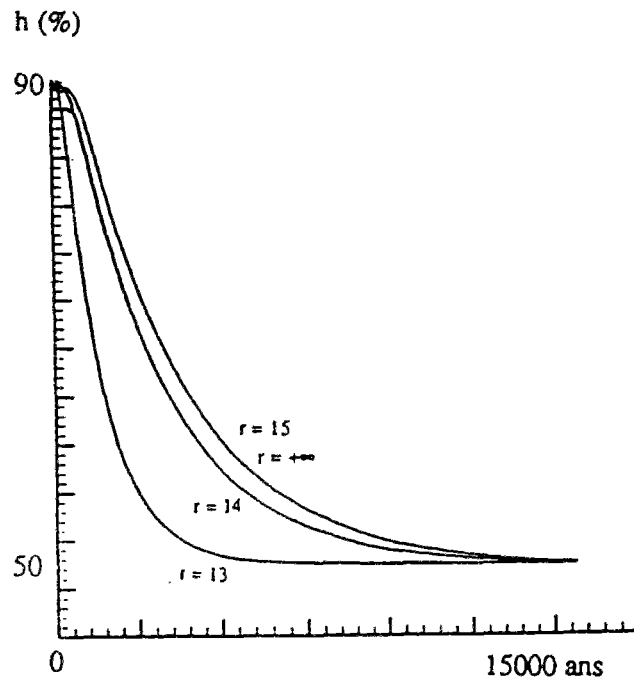
$$(V.47) \quad k_1 = k_1^0 S_1^{1/2} [1 - (1 - S_1^{-1/c})^{-c}]^2$$

où  $c$  est le même coefficient que pour le lissage (V.42) de l'isotherme de sorption-désorption et  $k_1^0$  une constante, valeur de la perméabilité du milieu saturé en liquide ( $S_1=1$ ). Cette loi analytique, associée à celle de la courbe capillaire, est tirée de Parker *et alii* (1987).

Au niveau de l'évolution dans le temps de l'évolution au centre du mur, on peut reconduire exactement l'analyse du test précédent. Le resserrement précédemment constaté s'accroît, mais à peine: en fait les figures V.5c et V.5e sont quasiment superposables.

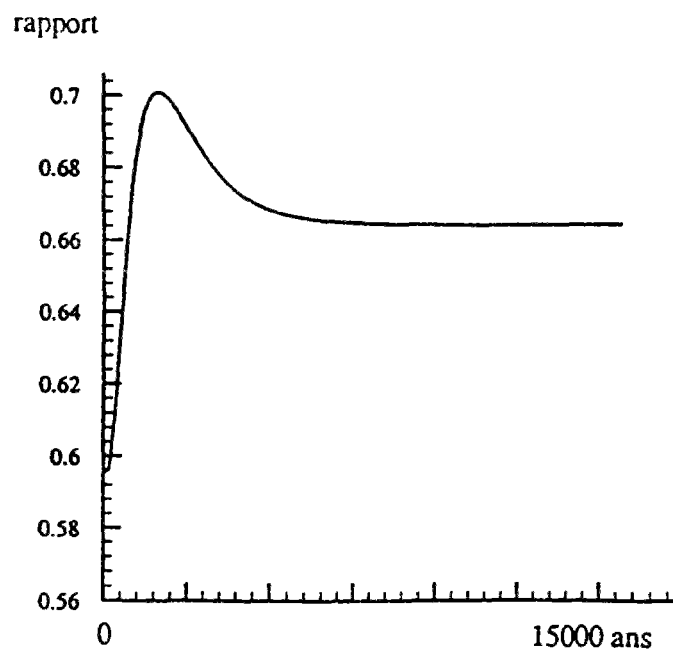
Le changement majeur concerne, comme précédemment, la courbe de comparaison locale des termes de Fick et de Darcy en fonction du temps (pour un rapport  $r$  fixé, toujours égal à 13). Cette fois, l'évolution dans le temps est tout à fait inversée (par rapport au test 1) et correspond parfaitement, du point de vue qualitatif, aux constatations expérimentales: un suintement initialement (légèrement) prépondérant, puis une importance croissante de la diffusion de Fick de la vapeur, asymptotiquement très prépondérante (7 fois supérieure).

Cette petite recherche constitue un exemple de la façon dont l'expérience permet de guider le modélisateur sur la voie d'une représentation meilleure et plus fidèle du réel. La loi de perméabilité (V.47) finalement adoptée est, quoi qu'il en soit, une loi empiriquement avérée et relativement répandue dans la littérature — en corrélation avec la forme (V.42) du lissage adopté.



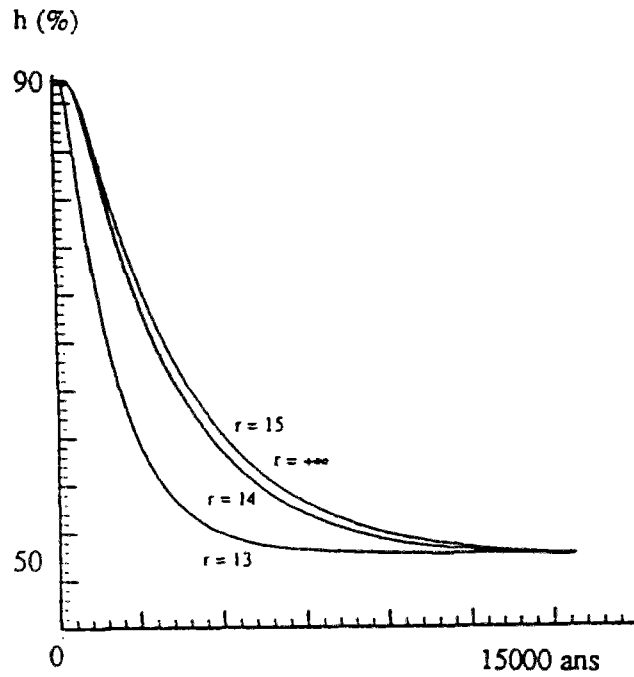
profils d'humidité relative:  
pour différentes valeurs du rapport  $\mathcal{F}/k_1^0$   
(test 2)

Fig. V.5c



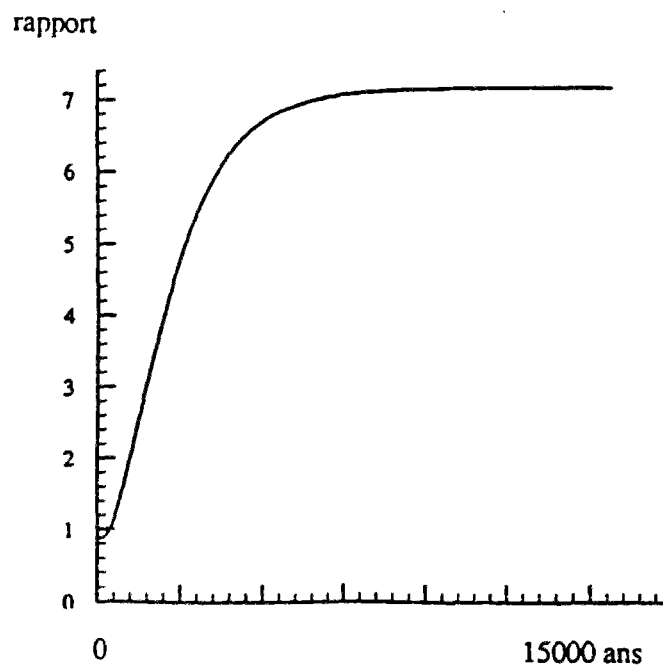
évolution dans le temps de l'importance relative  
de la diffusion Fick et de la diffusion Darcy  
pour  $\mathcal{F}/k_1^0 = 10^{13}$   
(test 2)

Fig. V.5d



profils d'humidité relative:  
pour différentes valeurs du rapport  $\mathcal{F}/k_1^0$   
(test 3)

Fig. V.5e



évolution dans le temps de l'importance relative  
de la diffusion Fick et de la diffusion Darcy  
pour  $\mathcal{F}/k_1^0 = 10^{13}$   
(test 3)

Fig. V.5f



### V.3.1.6. Cycles d'humidité relative.

Sur le même mode de calcul que dans les paragraphes V.3.1.2 à V.3.1.4. (c'est-à-dire en supposant à nouveau l'absence de suintement), on peut simuler des cycles de séchage et d'imbibition: les simulations présentées dans les figures V.6 et V.7 correspondent à des cycles d'humidité relative imposée entre 70% et 50%, pour des signaux respectivement triangulaires et carrés. Plus précisément, les évolutions d'humidité relative imposée aux surfaces du mur sont les suivantes, pour chacun des deux cycles:

**cycle1:**

$$h_{\text{inf}} = 0.5 \text{ et } h_{\text{sup}} = 0.7,$$

$$\text{pour } 0 \leq t \leq \frac{t_{\text{cycle}}}{2}: h(t) = h_{\text{inf}} + t (h_{\text{sup}} - h_{\text{inf}})$$

$$\text{pour } \frac{t_{\text{cycle}}}{2} \leq t \leq t_{\text{cycle}}: h(t) = h_{\text{sup}} - \left(2 \frac{t}{t_{\text{cycle}}} - 1\right) (h_{\text{sup}} - h_{\text{inf}})$$

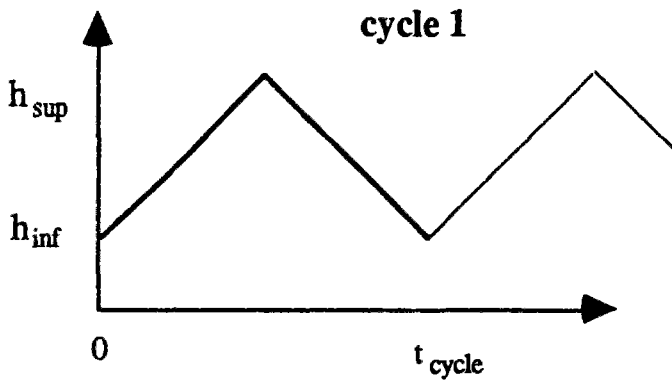


Fig V.5a

**cycle2:**

$$h_{\text{inf}} = 0.5 \text{ et } h_{\text{sup}} = 0.7,$$

$$\text{pour } 0 \leq t \leq \frac{t_{\text{cycle}}}{4}: h(t) = h_{\text{inf}}$$

$$\text{pour } \frac{t_{\text{cycle}}}{4} \leq t \leq \frac{t_{\text{cycle}}}{2}: h(t) = \frac{h_{\text{sup}} + h_{\text{inf}}}{2}$$

$$\text{pour } \frac{t_{\text{cycle}}}{2} \leq t \leq \frac{3t_{\text{cycle}}}{4}: h(t) = h_{\text{sup}}$$

$$\text{pour } \frac{3t_{\text{cycle}}}{4} \leq t \leq t_{\text{cycle}}: h(t) = \frac{h_{\text{sup}} + h_{\text{inf}}}{2}$$

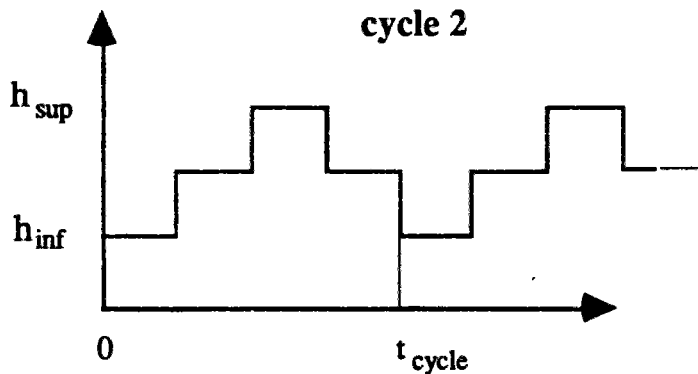


Fig V.5b

Dans les deux cas, l'état initial du mur est caractérisé par une humidité relative initiale  $h_0$  de 90%: il y a donc une première phase de séchage «hors cycle», c'est-à-dire de décroissance presque uniforme de l'humidité relative dans le mur jusqu'à la zone des valeurs imposées au cours du cycle ( $0.5 \leq h \leq 0.7$ ). Initialement semblable à un simple profil de séchage, le profil d'humidité dans le mur tend en revanche, asymptotiquement, vers un profil correspondant à la seule sollicitation cyclique (c'est-à-dire un profil dans lequel la valeur initiale  $h_0$  et la première phase de «séchage hors cycle» n'ont plus d'influence sensible, sont «oubliées»). Ce profil de diffusion asymptotique est conforme au sens physique: il suit le créneau imposé, mais avec une certaine dispersion, un certain retard des humidités locales, de plus en plus marqué au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la surface et qu'on s'approche du centre, à relier simplement au temps caractéristique  $\tau(x)$  de la diffusion de la vapeur depuis le point d'abscisse  $x$  jusqu'à l'extérieur.

Il est d'ailleurs intéressant de constater la sensibilité de ce profil de diffusion dans le mur à la durée du cycle d'humidité imposée. Les caractéristiques du matériau ayant été fixées, conformément à l'annexe IV, le temps caractéristique de diffusion est le même pour l'ensemble des simulations (de l'ordre de 5000 à 6000 ans, soit  $2 \cdot 10^{11}$ s). C'est le temps du cycle d'humidité imposé qui va varier d'un exemple à l'autre: depuis un temps de cycle long ( $t_{\text{cycle}} = 3.3 \cdot 10^{12}$ s, fig.V.6a et V.6b pour le cycle 1, V.7a et V.7b pour le cycle 2.) jusqu'à un temps de cycle court ( $t_{\text{cycle}} = 1.7 \cdot 10^{10}$ s, fig.V.6i à V.6l pour le cycle 1, V.7i à V.7l pour le cycle 2). On remarque que plus le temps de cycle est faible devant le temps caractéristique, plus les profils obtenus s'apparentent, notamment dans la zone centrale, à une diffusion moyenne, c'est-à-dire à un problème de séchage «équivalent» entre  $h_0$  et la valeur moyenne des humidités imposées<sup>13</sup>:  $\frac{h_{\text{sup}} + h_{\text{inf}}}{2}$ . En revanche, lorsque le temps du cycle est très grand devant le temps caractéristique de diffusion de la vapeur — le phénomène de diffusion étant alors très rapide devant la variation des humidités imposées — l'évolution dans le temps des humidités internes coïncide en tout point avec le cycle imposé aux surfaces<sup>14</sup>. Ceci est bien sûr le cas, en particulier, pour un cycle annuel (dans l'hypothèse d'une reproduction à l'identique des variations de l'humidité extérieure d'une

<sup>13</sup> Cf. fig.V.6i à V.6l pour le cycle 1, V.7i à V.7l pour le cycle 2.

<sup>14</sup> Cf. fig.V.6a et V.6b pour le cycle 1, V.7a et V.7b pour le cycle 2.

## Figure V.6

La figure V.6 est répartie en douze planches, numérotées de V.6a à V.6l, dans lesquelles le matériau est soumis, sur une durée totale  $t_{\text{simul}}$ , au cycle 1 de période  $t_{\text{cycle}}$  de variation de l'humidité relative. Dans tous les cas, humidité relative (colonne de gauche) et déformation volumique (colonne de droite) sont représentées.

Pour les différentes planches, les cas simulés correspondent aux caractéristiques récapitulées dans le tableau ci-dessous:

humidité relative $h$	déformation $\epsilon$	nombre de cycles	période du cycle $t_{\text{cycle}}$	temps de simulation $t_{\text{simul}}$
Fig. V.6a	Fig. V.6b	2	100000 ans	200000 ans
Fig. V.6c	Fig. V.6d	2	10000 ans	20000 ans
Fig. V.6e	Fig. V.6f	6	10000 ans	60000 ans
Fig. V.6g	Fig. V.6h	6	1000 ans	6000 ans
Fig. V.6i	Fig. V.6j	12	500 ans	6000 ans
Fig. V.6k	Fig. V.6l	36	500 ans	18000 ans

humidité relative (%)

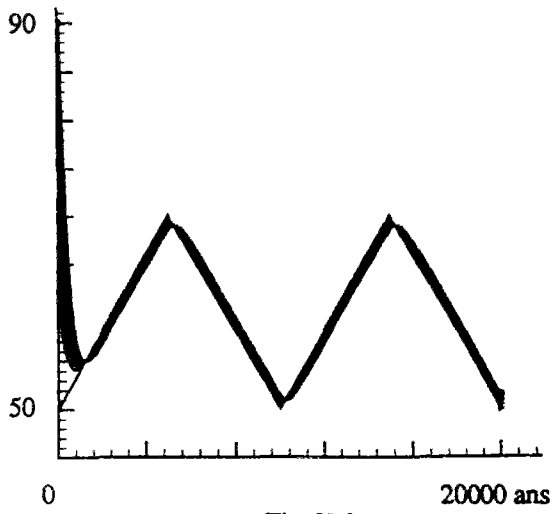


Fig. V.6a

déformation volumique ( $\mu\text{def}$ )

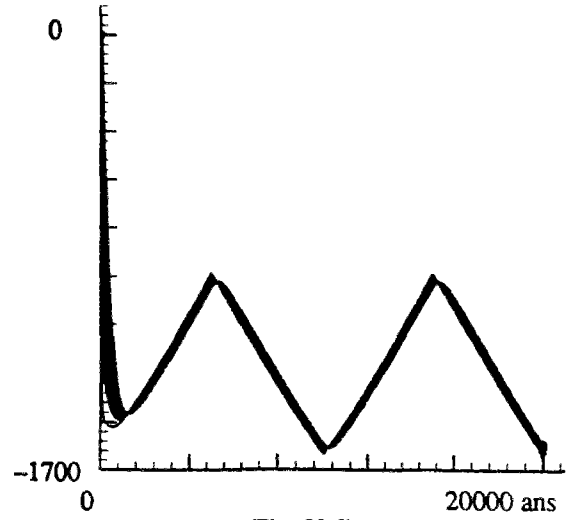


Fig. V.6b

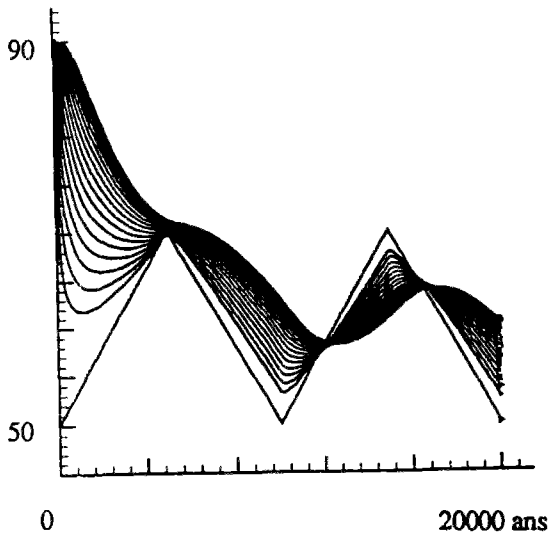


Fig. V.6c

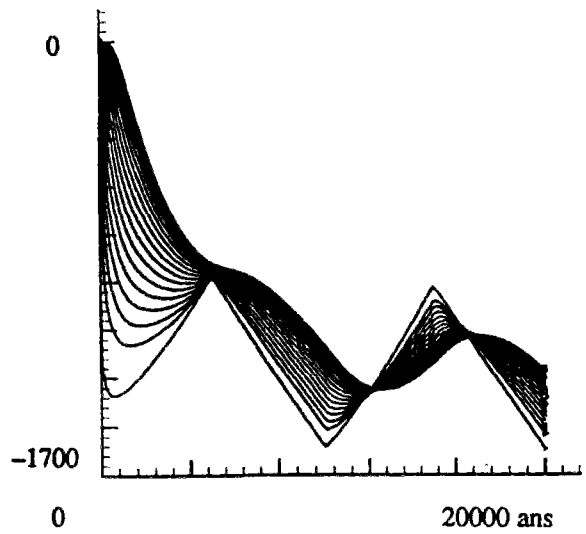


Fig. V.6d

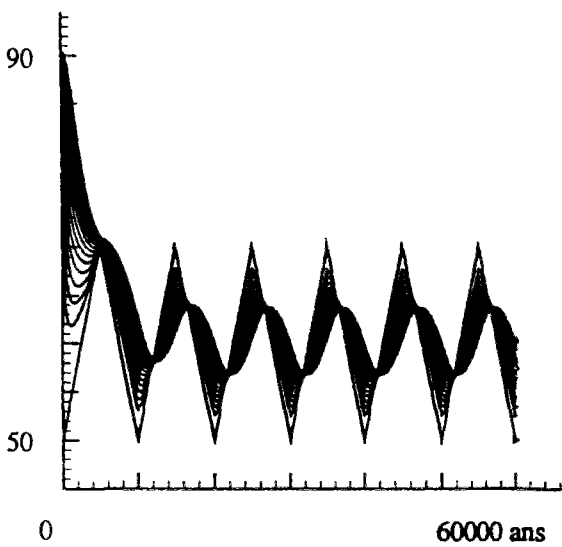


Fig. V.6e

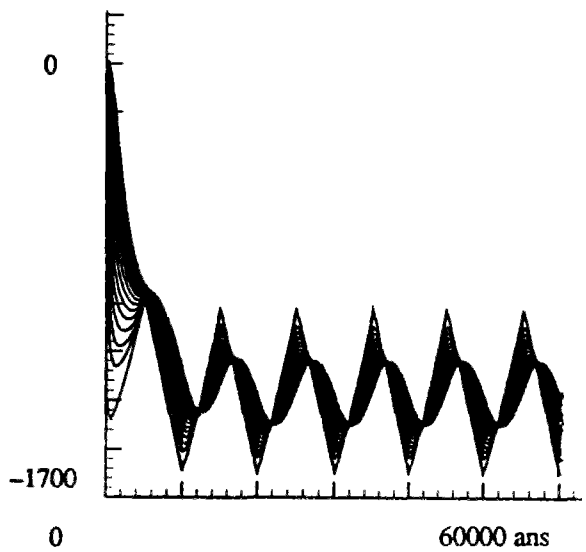


Fig. V.6f

humidité relative (%)

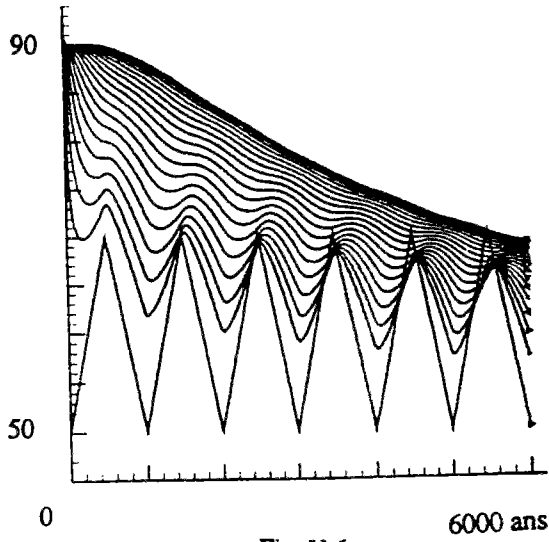


Fig. V.6g

déformation volumique ( $\mu\text{def}$ )

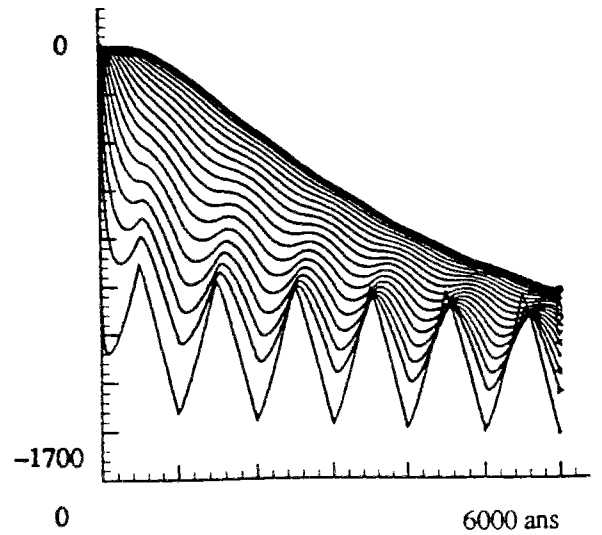


Fig. V.6h

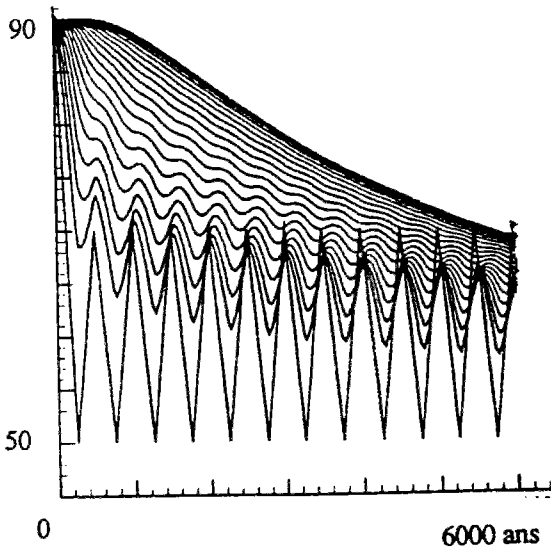


Fig. V.6i

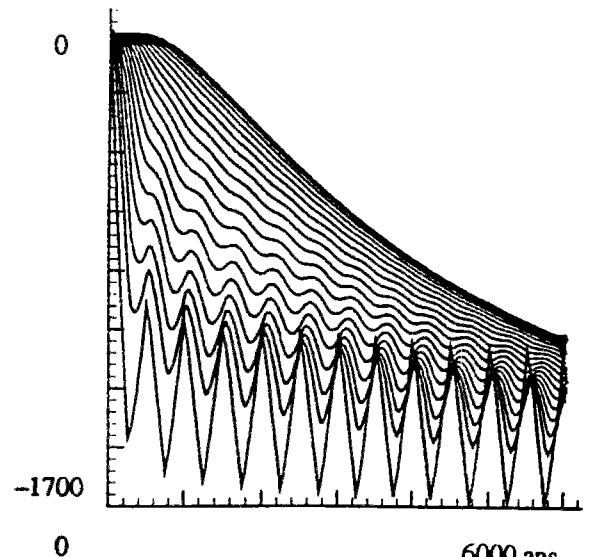


Fig. V.6j

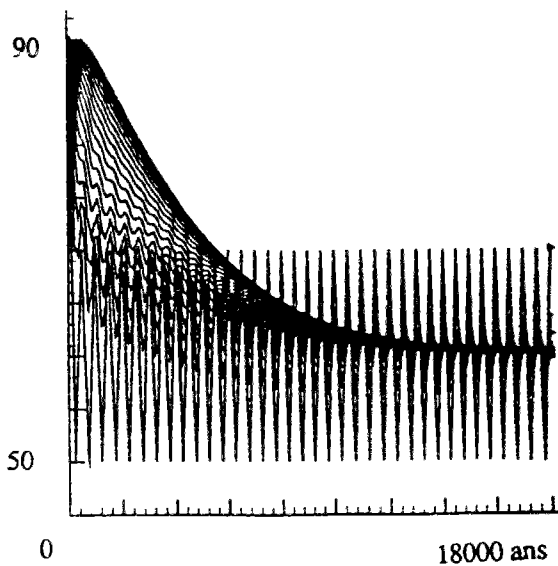


Fig. V.6k

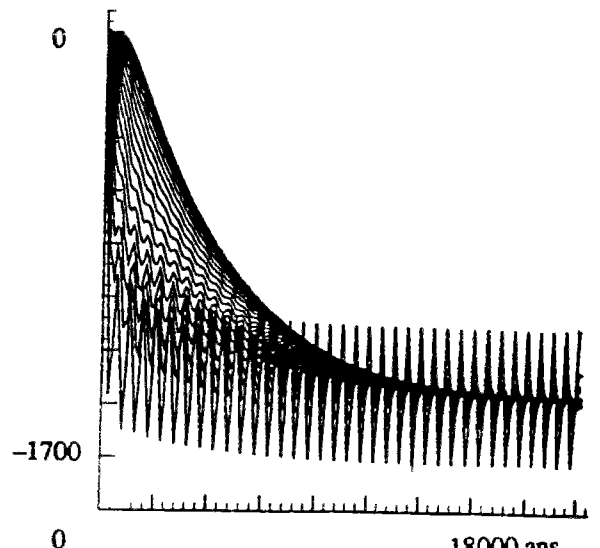


Fig. V.6l

## Figure V.7

La figure V.7 est répartie en douze planches, numérotées de V.7a à V.7l, dans lesquelles le matériau est soumis, sur une durée totale  $t_{\text{simul.}}$ , au cycle 2 (ou légèrement modifié — fig. V.7i à V.7l) de période  $t_{\text{cycle}}$  de variation de l'humidité relative. Dans tous les cas, humidité relative (colonne de gauche) et déformation volumique (colonne de droite) sont représentées.

Pour les différentes planches, les cas simulés correspondent aux caractéristiques récapitulées dans le tableau ci-dessous:

humidité relative $h$	déformation $\epsilon$	nombre de cycles	période du cycle $t_{\text{cycle}}$	temps de simulation $t_{\text{simul}}$
Fig. V.7a	Fig. V.7b	2	100000 ans	200000 ans
Fig. V.7c	Fig. V.7d	2	10000 ans	20000 ans
Fig. V.7e	Fig. V.7f	4	10000 ans	40000 ans
Fig. V.7g	Fig. V.7h	6	1000 ans	4000 ans
Fig. V.7i	Fig. V.7j	8	500 ans	4000 ans
Fig. V.7k	Fig. V.7l	36	500 ans	18000 ans

humidité relative (%)

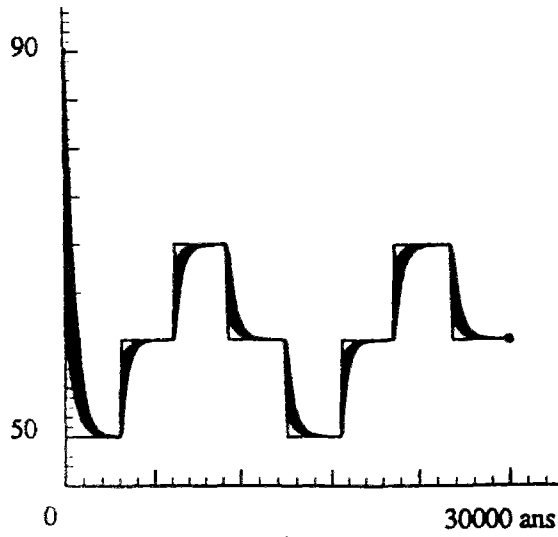


Fig. V.7a

déformation volumique ( $\mu\text{def}$ )

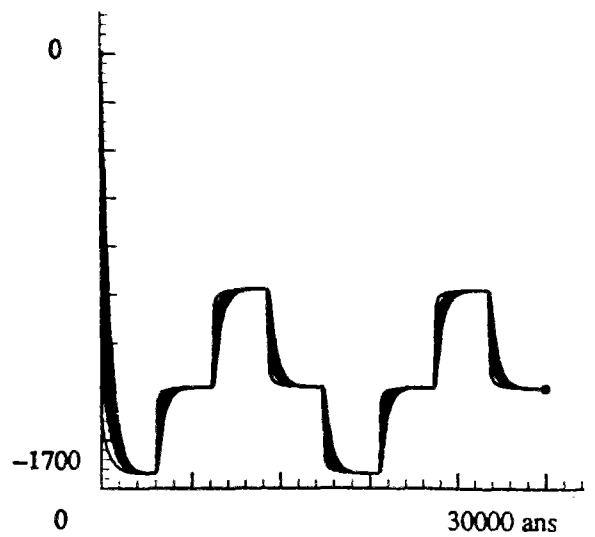


Fig. V.7b

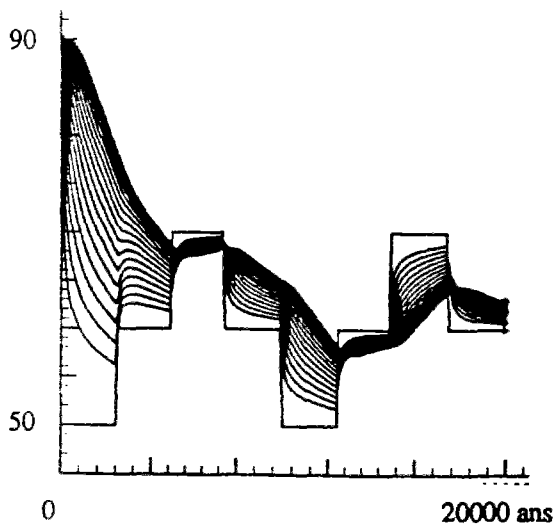


Fig. V.7c

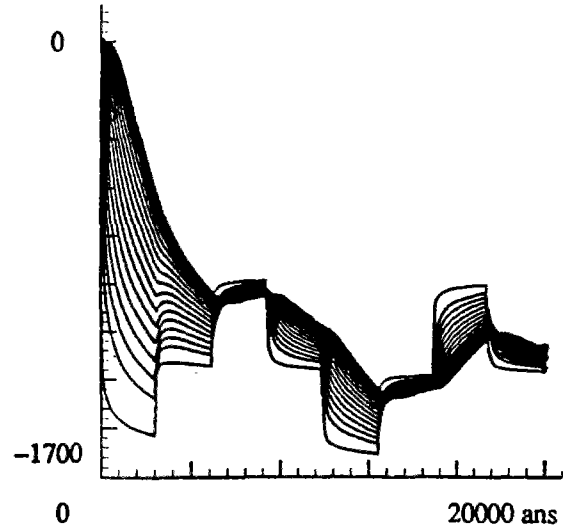


Fig. V.7d

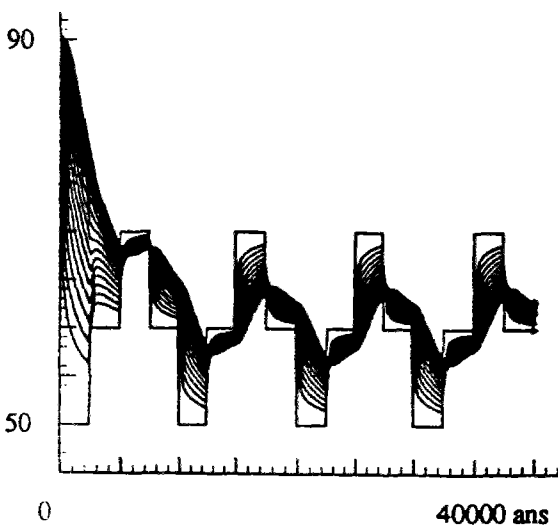


Fig. V.7e

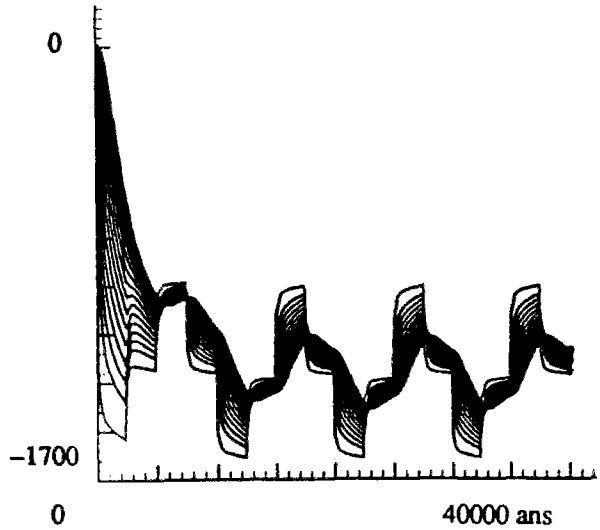


Fig. V.7f

humidité relative (%)

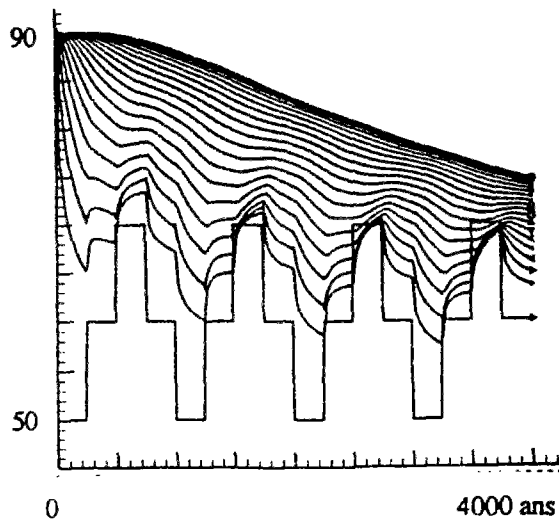


Fig. V.7g

déformation volumique ( $\mu\text{def}$ )

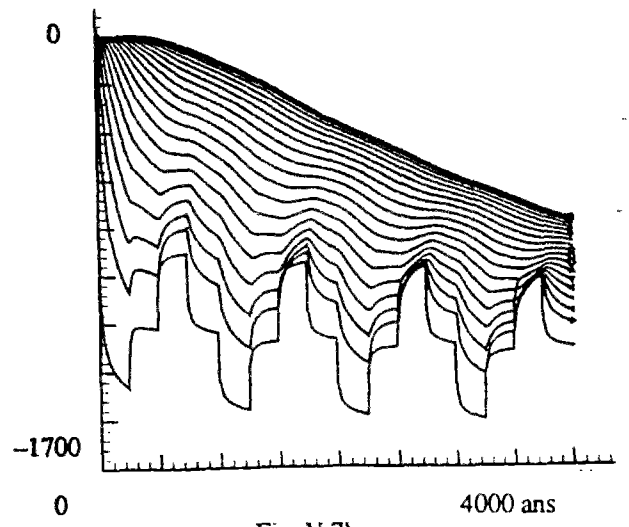


Fig. V.7h

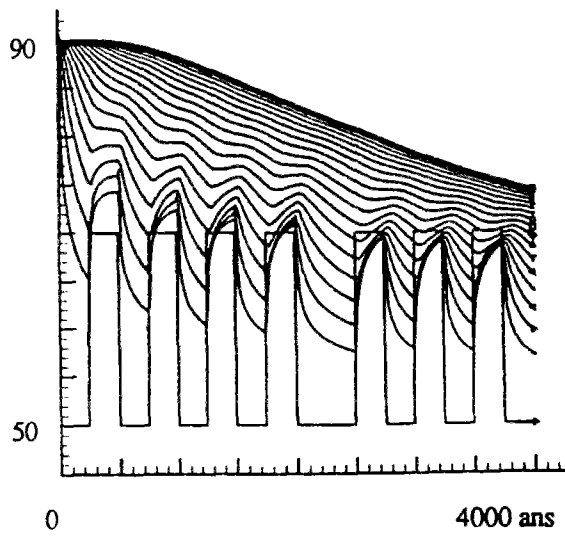


Fig. V.7i

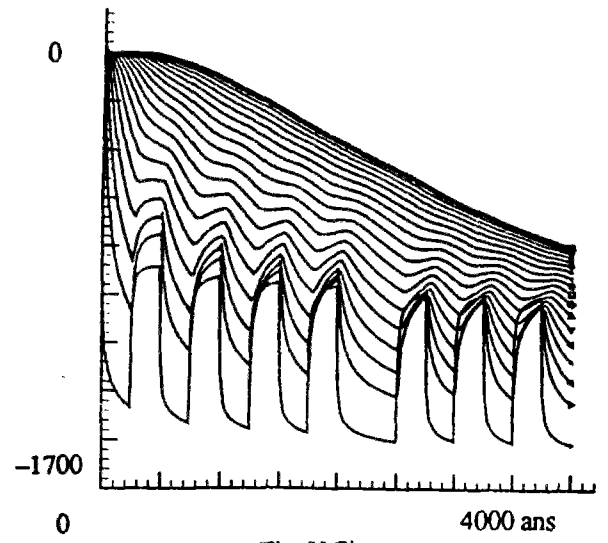


Fig. V.7j

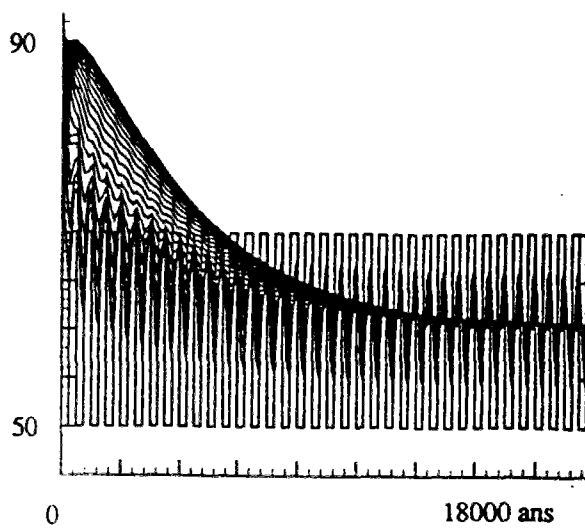


Fig. V.7k

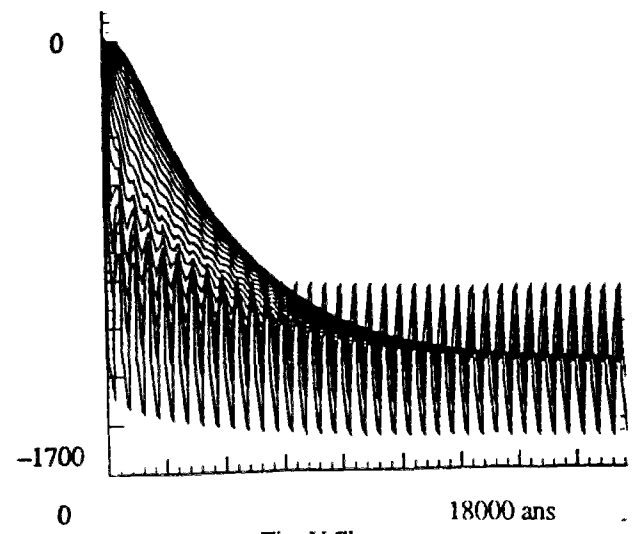


Fig. V.7l



année sur l'autre): de telles variations se produisent sur une échelle de temps tellement inférieure à celle de la diffusion complète de la vapeur que, en tout point suffisamment éloigné des surfaces du mur, le séchage peut être regardé comme un séchage moyen entre valeur initiale et moyenne des humidités externes, conformément aux exemples précédemment développés<sup>15</sup>.

### V.3.2. Séchage d'une pâte de ciment (CO) et d'un béton (BO) ordinaires.

Le deuxième exemple présenté est beaucoup moins développé du point de vue de la simulation et de l'analyse qualitative: on s'est borné au seul séchage de dessiccation du même mur, mais avec un soin supplémentaire apporté à la précision des données expérimentales et des résultats. Il s'agit donc davantage, ici, d'une étude quantitative que d'une étude qualitative. L'objectif étant la validation, sur ce type d'exemples, du modèle et du code numérique élaborés: la vérification des résultats numériques ne se fait plus seulement en termes d'ordres de grandeur mais, au contraire, en termes d'estimation précise du retrait mesuré. Une telle étude n'a pu être réalisée que grâce au travail de V. Baroghel-Bouny, à la quantification précise des caractéristiques physiques et mécaniques des matériaux qu'elle a étudiés et, surtout, la mesure expérimentale précieuse de leurs retraits<sup>16</sup>.

#### V.3.2.1. Isothermes de sorption-désorption.

La liste complète et précise des données relatives à ces deux matériaux figure en annexe IV. Comme dans l'exemple précédent, l'isotherme expérimentale de sorption-désorption peut être approchée par une courbe du type (V.42) avec la valeur optimale suivante du jeu de paramètres (a, b, c):

**pâte de ciment ordinaire CO:**

$$a = 1.9658968 \cdot 10^{-8}$$

$$b = 3.12356824$$

$$c = -0.3265763$$

**béton ordinaire BO:**

$$a = 2.3464164 \cdot 10^{-8}$$

$$b = 1.82700687$$

$$c = -0.576709$$

Les isothermes de sorption-désorption expérimentalement établies par V. Baroghel-Bouny présentent, en réalité, d'importantes boucles d'hystérésis. Cependant, n'effectuant ici que des simulations de séchage des matériaux, nous n'avons en fait conservé que la partie de ces isothermes qui correspond à la désorption.

Enfin, on ne considérera, dans ces exemples, aucune diffusion de l'eau dans sa phase liquide: le transport de la vapeur, selon une loi de Fick, est ici le seul mécanisme diffusif considéré.

---

<sup>15</sup> Cf. Granger, Torrenti & Diruy (1994), p. 57-64 — en particulier la figure 9.4 p. 63.

<sup>16</sup> Baroghel-Bouny (1994).

### V.3.2.2. Résultats numériques et résultats expérimentaux.

La comparaison entre résultats numériques et résultats expérimentaux porte essentiellement sur la déformation (retrait), véritable enjeu de départ de ce travail et de cette modélisation. Là encore, c'est la référence aux mesures expérimentales de retrait effectuées, pour ces deux matériaux, par V. Baroghel-Bouny qui permettra l'évaluation précise de la fiabilité des résultats numériques. Référons-nous donc aux valeurs expérimentales du retrait de dessiccation obtenues par V. Baroghel-Bouny<sup>17</sup>:

humidité relative (%)	retrait ( $\mu$ def) CO	retrait ( $\mu$ def) BO
90.4	0	0
80.1	733	157
71.5	1170	297
63.2	-	419
53.5	2118	663
33.0	2810	-
12.0	3485	680

L'expérience effectuée par V. Baroghel-Bouny est un séchage par paliers successifs des matériaux, entre l'humidité initiale de 90.4% et l'humidité finale de 12%. A chaque étape intermédiaire, une fois l'équilibre atteint (repéré par l'absence d'évolution de la perte en poids de l'éprouvette), le retrait radial est mesuré: c'est cette valeur qui figure dans le tableau ci-dessus, en face des humidités relatives caractérisant les différents paliers.

La valeur de la déformation correspondant à une humidité relative de 50% (valeur finale pour la simulation numérique) peut ainsi être estimée, d'après les valeurs précédentes, à 2200  $\mu$ def environ pour la pâte de ciment CO et 670  $\mu$ def pour le béton BO. A comparer aux valeurs numériques du retrait final, de l'ordre de 2700  $\mu$ def pour la pâte de ciment CO et 840  $\mu$ def pour le béton BO.

On remarquera en effet que nos valeurs sont toutes deux systématiquement supérieures à celles expérimentalement mesurées par V. Baroghel-Bouny. Qui plus est, toutes deux dans un rapport comparable: de l'ordre de 1.23 pour la pâte de ciment et 1.27 pour le béton. L'explication réside dans le simple fait que l'expérience simulée ne correspond pas exactement à l'expérience réalisée par V. Baroghel-Bouny. En effet, pour des raisons de facilité numérique, nous avons simulé dans ce chapitre la déformation uniaxiale d'un mur astreint à se déformer selon une seule direction et bloqué, en déplacement comme en flux de matière, selon deux autres directions. Dès lors, le retrait volumique ici représenté est exactement le retrait uniaxial suivant la seule direction de déplacement.

---

<sup>17</sup> *Ibid.*, p. 401.

Il n'en va pas de même pour l'expérience de dessiccation de V. Baroghel-Bouny, qui est une expérience de retrait de dessiccation au sens propre du terme: retrait libre dans toutes les directions, en l'absence de toute contrainte imposée. Là encore, le retrait reporté dans le tableau ci-dessus (ainsi que dans le tableau suivant) est un retrait uniaxial selon le diamètre de l'éprouvette: mais cette fois-ci, il ne correspond pas au retrait volumique (lequel est sans doute nettement supérieur).

Il est donc logique qu'intervienne, entre les deux déformations correspondantes (qui sont donc le retrait diamétral mesuré par V. Baroghel-Bouny et le retrait volumique de notre simulation) un rapport  $1+v/1-v$  qui, pour un coefficient de Poisson  $\nu=0.2$ , s'établit à 1.5 dans le cas de BO comme dans celui de CO<sup>18</sup>.

<sup>18</sup> En effet, dans le cas de la simulation, donc d'un retrait uniaxial, l'équilibre s'écrit sur la contrainte  $\sigma_{xx}$ , la seule qui demeure constante, et permet d'exprimer le retrait total en fonction de l'incrément de pression de vapeur conformément à la relation (V.12):

$$(\lambda_0 + 2\mu) d\varepsilon^{\text{simul}} = S_1 \frac{\rho_l}{\rho_v} dp_v$$

soit, après substitution de la pression de vapeur par l'humidité relative  $h$ , et compte tenu que dans l'expérience de retrait uniaxial  $\varepsilon = \varepsilon_{xx}$ :

$$d\varepsilon_{xx}^{\text{simul}} = \frac{S_1}{\lambda_0 + 2\mu} \frac{\rho_l}{\rho_v} p_{v_0}^0 dh$$

En revanche, dans le cas de l'expérience, c'est-à-dire du retrait libre, on traduit l'équilibre par la constance de la contrainte moyenne, comme en (II.117). Dont il résulte l'expression incrémentale suivante de la déformation volumique, conforme à la relation (II.128):

$$d\varepsilon^{\text{exp}} = \frac{S_1}{K_0} \frac{\rho_l}{\rho_v} p_{v_0}^0 dh$$

Et comme le retrait est le même dans chaque direction (isotropie du chargement et du comportement), on déduit immédiatement de la précédente relation la valeur du retrait  $\varepsilon_{xx}$  en fonction de la variation d'humidité relative imposée:

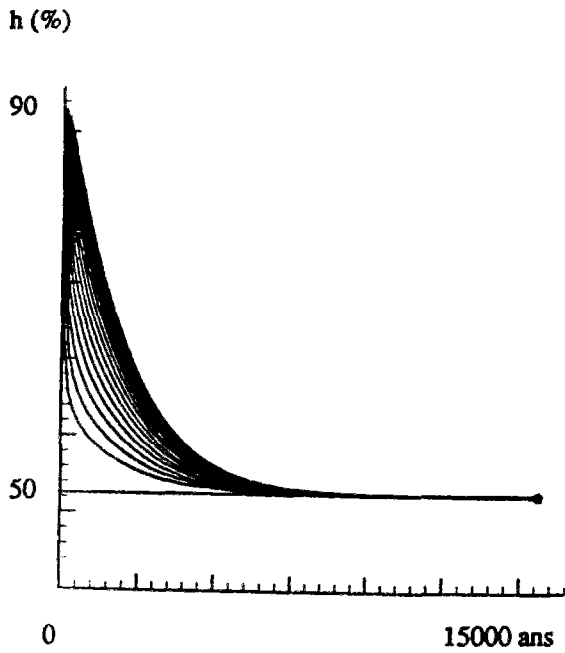
$$d\varepsilon_{xx}^{\text{exp}} = \frac{d\varepsilon}{3} = \frac{S_1}{3K_0} \frac{\rho_l}{\rho_v} p_{v_0}^0 dh$$

La comparaison des deux expressions précédentes permet d'établir que le rapport entre la déformation infinitésimale  $d\varepsilon_{xx}^{\text{simul}}$  calculée dans l'exemple numérique (uniaxial) et de la déformation  $d\varepsilon_{xx}^{\text{exp}}$  mesurée par V. Baroghel Bouny s'établit comme suit:

$$\frac{d\varepsilon_{xx}^{\text{simul}}}{d\varepsilon_{xx}^{\text{exp}}} = \frac{3K_0}{\lambda_0 + 2\mu}$$

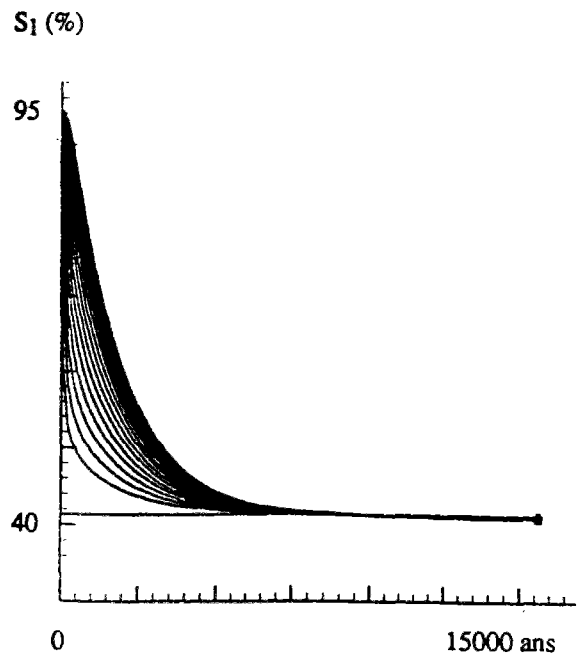
Ce rapport est donc constant, et de surcroît égal à  $1-\nu/1+\nu$ ; ce qui permet bien d'établir comme annoncé le rapport des deux déformations:

$$\frac{\varepsilon_{xx}^{\text{simul}}}{\varepsilon_{xx}^{\text{exp}}} = \frac{1+\nu}{1-\nu}$$



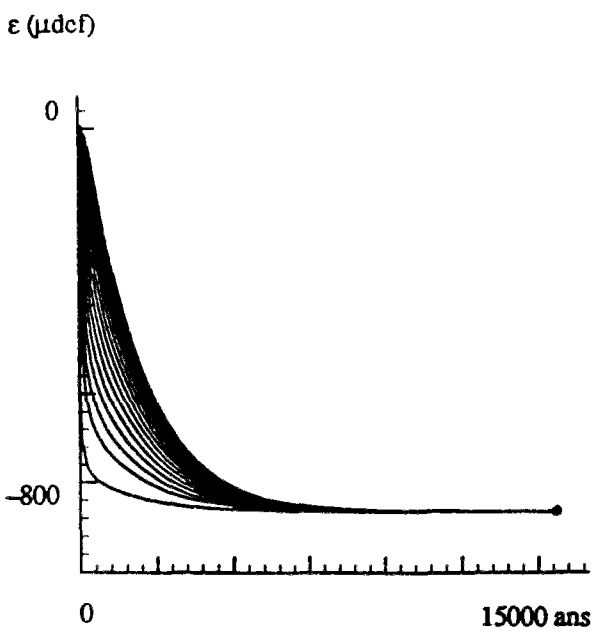
humidité relative:  
évolution dans le temps  
en plusieurs points du mur

Fig. V.9a



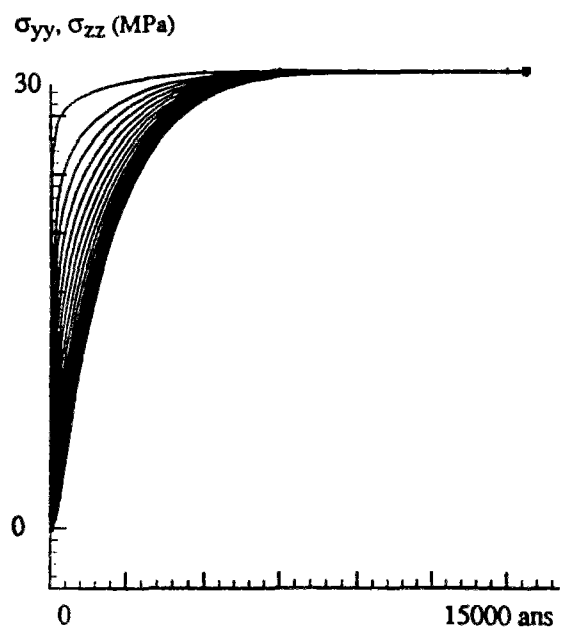
saturation:  
évolution dans le temps  
en plusieurs points du mur

Fig. V.9b



déformation volumique:  
évolution dans le temps  
en plusieurs points du mur

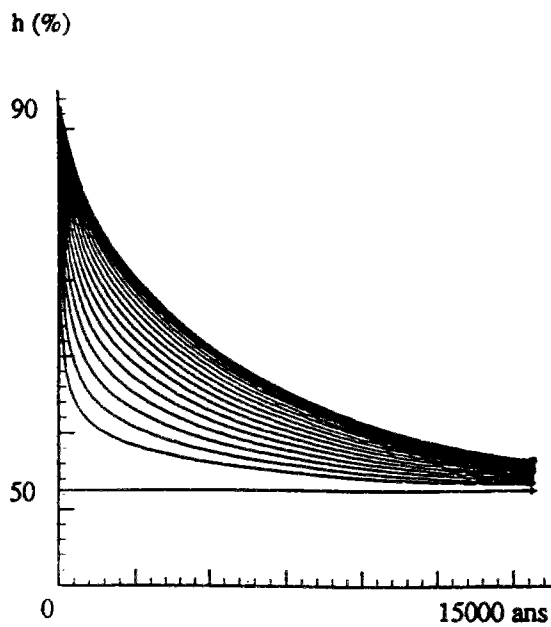
Fig. V.9c



contraintes normales dans le plan du mur:  
évolution dans le temps  
en plusieurs points du mur

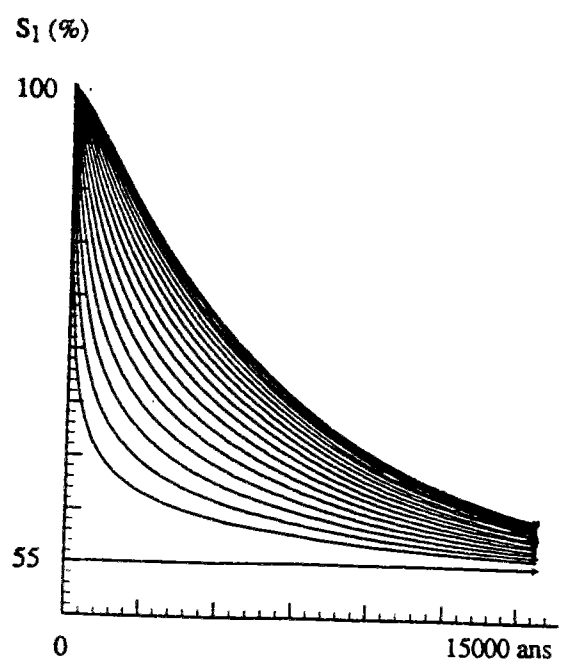
Fig. V.9d

Fig. V.9  
Résultats en comportement élastique non linéaire pour le béton BO



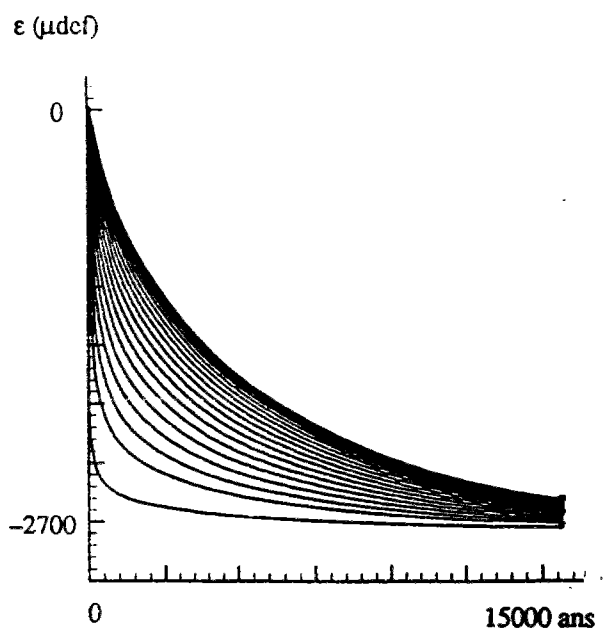
humidité relative:  
évolution dans le temps  
en plusieurs points du mur

Fig. V.8a



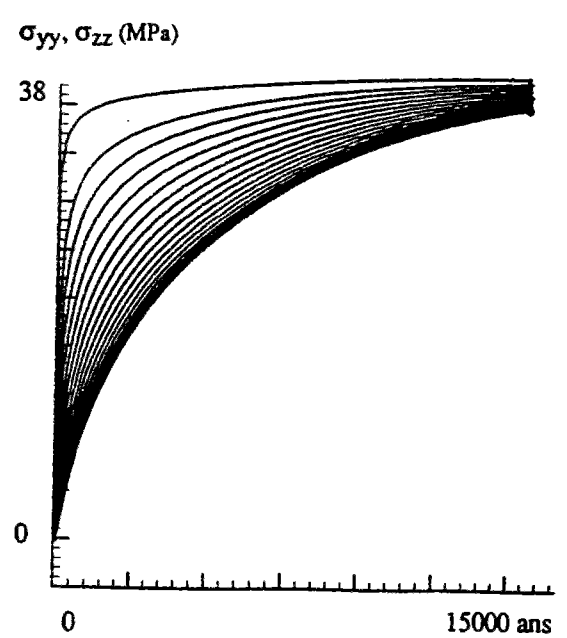
saturation:  
évolution dans le temps  
en plusieurs points du mur

Fig. V.8b



déformation volumique:  
évolution dans le temps  
en plusieurs points du mur

Fig. V.8c



contraintes normales dans le plan du mur:  
évolution dans le temps  
en plusieurs points du mur

Fig. V.8d

**Fig. V.8**  
Résultats en comportement élastique non linéaire pour la pâte de ciment CO

### V.3.2.3. Courbes de retrait fonction de l'humidité: théorie et expérience.

Il est aisé et intéressant de pousser plus loin la comparaison des résultats numériques et des résultats expérimentaux en reproduisant ce genre de simulations pour différentes valeurs finales de séchage (toujours à partir de la même valeur initiale  $h_0=90\%$ ). Les résultats numériques sont regroupées dans le tableau ci-dessous et mises en parallèle avec les données expérimentales précitées (en italique):

humidité relative (%)		retrait ( $\mu\text{def}$ ) CO		retrait ( $\mu\text{def}$ ) BO	
<i>90.4</i>		<i>0</i>		<i>0</i>	
<i>80.1</i>	90	<i>733</i>	0	<i>157</i>	0
<i>71.5</i>	80	<i>1170</i>	700	<i>297</i>	250
<i>63.2</i>	70	-	1400	<i>419</i>	460
<i>53.5</i>	60	<i>2118</i>	2100	<i>663</i>	670
	50		2700		840
	40		3500		1050
<i>33.0</i>	30	<i>2810</i>	4100	-	1240
	20				1440
<i>12.0</i>		<i>3485</i>		<i>680</i>	

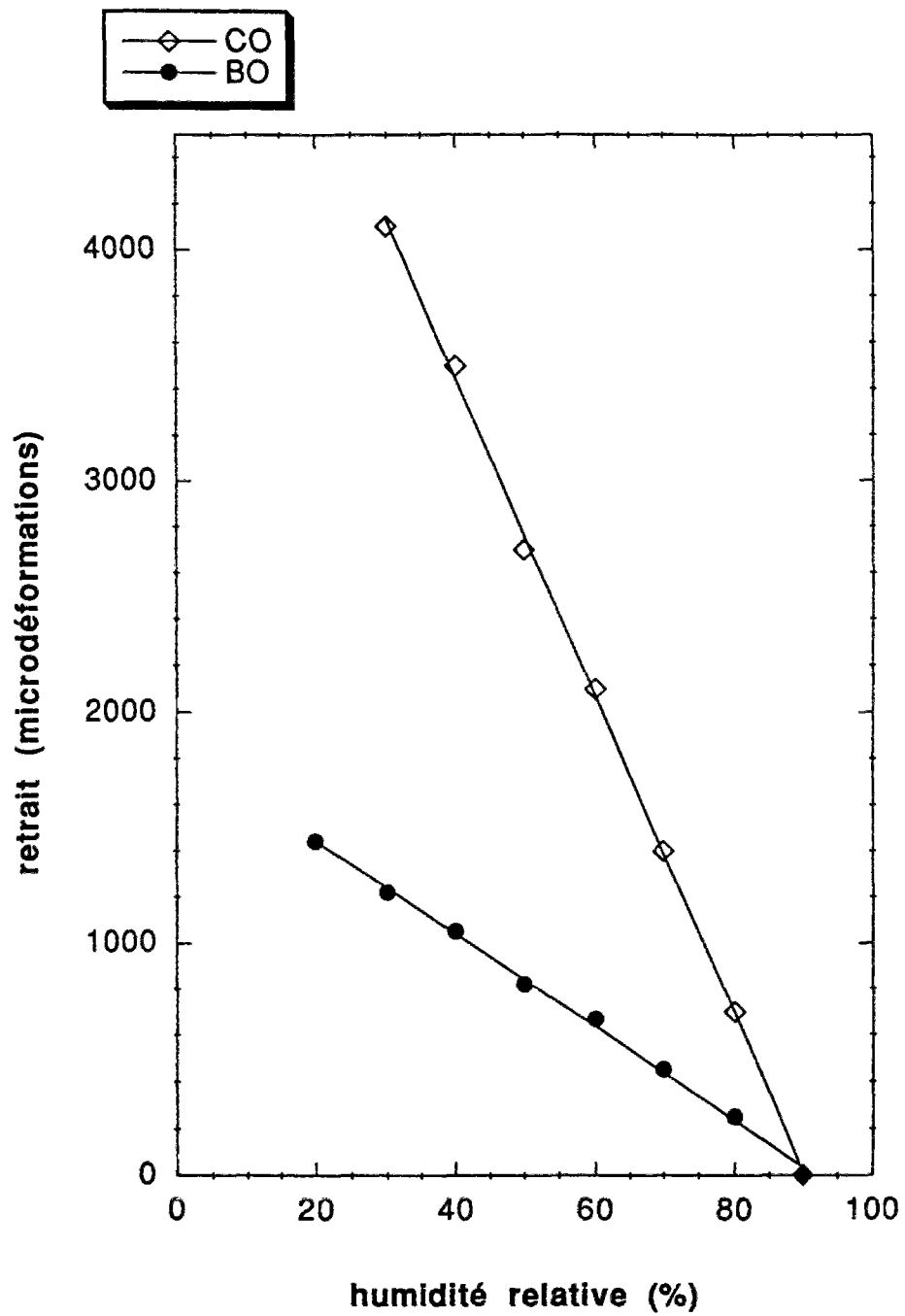
Là encore, et avec les mêmes précautions que précédemment, la comparaison entre valeurs numériques et valeurs expérimentales s'avère éclairante. D'une part, les ordres de grandeur obtenus sont tout à fait fiables. Plus précisément, si l'on multiplie le retrait obtenu par simulation par le rapport  $1+v/1-v$  (qui vaut 1.5), la courbe des valeurs théoriques vient alors coïncider presque exactement avec celle des résultats expérimentaux de V. Baroghel-Bouny. Ce qui paraît sans doute le plus remarquable dans cette coïncidence, c'est que la série des retraits numériques reproduit le même alignement que celle des retraits expérimentaux: pour la pâte de ciment CO comme pour le béton BO, les points de la courbe déformation-humidité s'alignent presque parfaitement (cf. fig. V.10).

Le fait mérite un commentaire plus précis. On retrouve bien ici cette «loi» linéaire reliant le retrait de dessiccation à la variation d'humidité relative:

$$(V.48) \quad \epsilon_{\text{séch.}} = k \Delta h$$

à laquelle se réfèrent fréquemment les études phénoménologiques (du moins dans le domaine des bétons et pâtes de ciment)<sup>19</sup>. On pourrait, par voie de conséquence, se poser la question de l'utilité — et même de la pertinence — d'un modèle de comportement relativement plus sophistiqué et plus compliqué, capable de représenter des phénomènes physiques non linéaires, quand pour finir on aboutit à la seule justification d'une «loi» phénoménologique bien connue — et mieux! déjà avérée et validée par l'expérience.

<sup>19</sup> Voir par exemple Granger & alii (1994), p. 60.



**Fig. V.10**  
**retrait de dessiccation**  
**de la pâte de ciment CO et du béton BO**  
**en fonction de l'humidité relative**

La réponse à une telle objection tient en deux temps, qui reflètent deux niveaux de réflexion. D'abord, en soi, la justification théorique de la pratique phénoménologique (et même expérimentale<sup>20</sup>) n'est pas un résultat négligeable. Surtout lorsqu'elle permet la meilleure compréhension (relativement aux mécanismes physiques) des choix phénoménologiques et expérimentaux, ainsi que la meilleure prise de conscience de leurs limites.

D'autre part, ce résultat apparent ne doit pas masquer les conclusions véritables: il serait faux de conclure à la linéarité de la loi de comportement du béton ou des pâtes de ciment, même dans le cadre étroit de l'expérience de séchage sur les plages d'humidité relative considérées. Au contraire! c'est précisément parce que la loi de comportement est non linéaire que la courbe humidité-retrait est une droite. Paradoxe?

Il convient d'abord de répéter que, de la façon dont elle est introduite, la «loi» phénoménologique (V.48) de proportionnalité n'est pas une loi de comportement: elle est liée au problème de dessiccation — et absolument inutilisable en dehors de ce contexte précis —, en tant que combinaison de la véritable loi de comportement (II.18) et de la loi de Kelvin (III.13). Or cette dernière est une relation non linéaire entre humidité et pression capillaire (terme en logarithme): c'est donc précisément la non linéarité de la loi de comportement (II.18) qui permet de «compenser» la non-linéarité de la relation d'équilibre thermodynamique et d'obtenir en définitive, un peu par hasard, la relation linéaire (V.44) liant le retrait de dessiccation à l'humidité relative.

Le comportement non linéaire, tel qu'il a été introduit dans cette étude, permet de surcroît de relier ce résultat à l'allure de l'isotherme de sorption-désorption et de prévoir *a priori*, par simple analyse graphique de cette donnée intrinsèque au matériau, les zones de validité de la règle empirique (V.44). En effet, la loi de comportement couplée à l'équilibre s'écrit, dans le cadre de l'étude menée ici — d'après (V.12):

$$(V.49) \quad d\varepsilon_{\text{séch.}} = \frac{\rho_l^0}{\lambda_0 + 2\mu} \frac{RT}{\mathcal{M}_v} \frac{S_1}{h} dh$$

Pour que la relation  $\varepsilon_{\text{séch.}}(h)$  soit une fonction linéaire sur tout l'intervalle des humidités relatives comprises entre 10% et 90%, il faut donc, d'après la précédente expression différentielle (V.45), que le terme  $S_1/h$  soit lui aussi constant sur ce même intervalle. C'est-à-dire que la saturation soit fonction linéaire de  $h$  (et, par voie de conséquence égale à  $h$ , puisque  $S_1=0$  lorsque  $h=0$  et  $S_1=1$  lorsque  $h=1$ ): c'est bien ce que l'on constate, avec une assez bonne approximation, sur ces plages d'humidité, d'après consultation des isothermes expérimentales de sorption-désorption<sup>21</sup>.

<sup>20</sup> On a en effet assez insisté, dans cette étude, sur le caractère partiel et erroné de certains choix implicites d'interprétation et de dépouillement expérimentaux, pour pouvoir soutenir que (même) l'expérience n'est jamais totalement objective, n'est jamais la donnée intrinsèque de «LA vérité».

<sup>21</sup> Cf. Annexe IV, fig. AIV.2 et AIV.3.





## CONCLUSION

La première conclusion de ce travail est la réponse à la question de départ: le modèle de comportement poroélastique, déterminé dans le cadre global de milieux poreux non saturés, paraît adapté à la représentation, à la description et à la prédiction du comportement de nombreux matériaux du Génie civil (sols, roches, bétons, pâtes de ciment, etc.) soumis au phénomène de dessiccation. L'intérêt d'un tel modèle réside sans doute essentiellement dans sa prise en compte des couplages hydro-mécaniques prépondérants et sa capacité, par voie de conséquence, à prédire la modification de l'état mécanique (contrainte, déformation) qu'engendre une sollicitation purement hydrique (variation d'humidité imposée).

Son aspect opératoire et prédictif ne doit pas, pour autant, effacer l'apport plus purement cognitif du travail réalisé. Cognitif n'étant pas synonyme de gratuit: les différentes hypothèses, formulées l'une après l'autre par progression logique vers une adéquation modèle-expérience, mettent fondamentalement à jour certains présupposés restrictifs, certaines approximations implicites qui sous-tendent les pratiques usuelles de mesure ou d'interprétation des phénomènes et en limitent la portée.

La principale de ces hypothèses étant l'isotherme de sorption-désorption traduite comme relation biunivoque entre pression capillaire (ou humidité relative) et saturation en liquide:  $p_c = p_c(S_1)$ . Implicitement, c'est découpler en quelque sorte l'état thermodynamique de l'interface liquide-vapeur de l'état mécanique global: à saturation donnée pression capillaire donnée, quelles que soient les valeurs et les évolutions de la déformation du squelette. On a attiré l'attention, tout au long de ce travail, sur le peu de fiabilité d'un tel parti-pris — ainsi que son inadéquation aux mesures expérimentales — dans un certain voisinage de la totale saturation ( $S_1=1$ ).

Autre hypothèse souvent retenue dans le problème spécifique du séchage: l'équilibre constant de la pression de gaz avec la pression atmosphérique ( $p_g = p_{atm}$ ). Une telle hypothèse est incompatible, près de  $S_1=1$ , avec  $p_c = p_c(S_1)$ , comme l'a montré,

chapitre IV, l'étude simple du modèle de comportement poroélastique linéaire. Comme il semble intuitivement plus naturel de supposer l'absence de couplages entre phénomènes diffusifs, on aura tendance à garder la vision d'une phase gazeuse demeurant à pression atmosphérique pendant l'expérience de dessiccation, et à remettre en question l'hypothèse (II.88) sur la courbe capillaire.

En définitive, s'il peut être considéré comme fiable sur tout le domaine des saturations intermédiaires, le modèle ainsi déterminé ne semble pas pouvoir s'appliquer aux cas de saturations extrêmes, particulièrement en  $S_1=1$ . Pourtant ce n'est pas du tout là faillite du cadre général de modélisation employé, mais plutôt des informations expérimentales traditionnelles qui ignorent, au niveau du dépouillement et de l'interprétation, le couplage déformation—>fluides interstitiels et sa prise en compte dans un modèle complet. Il faudrait donc procéder à de nouveaux types d'expérimentations, en mesurant notamment le retrait au cours de l'expérience de dessiccation, afin de permettre la détermination des surfaces d'état, plus générales,  $p_c=p_c(\epsilon, S_1)$ . C'est ce que V. Baroghel-Bouny a commencé de faire<sup>1</sup>.

Au terme de ces nouvelles expérimentations, plus complètes et plus précises, le modèle poroélastique non linéaire pourra alors être adapté à un cadre plus large, celui des relations (II.76) et (II.84):

$$(II.76) \quad b_1 = b_1(p_c)$$

$$(II.84) \quad p_c = p_c(\epsilon, S_1)$$

Des gammes de saturations et d'humidités relatives plus complètes pourront alors être considérées, avec une meilleure fiabilité des résultats. Mais surtout, un tel élargissement de la loi de comportement macroscopique permettra d'inclure des phénomènes physiques plus nombreux, plus divers et plus complexes dans le cadre général de la modélisation des milieux poreux: les phénomènes de chimisorption ou de physisorption, les réactions chimiques les plus diverses pourront s'insérer dans le même schéma modélisateur et conduire à la représentation macroscopique d'expériences plus riches, tels le fluage propre, le retrait endogène, etc. Encore est-il nécessaire, comme préalable à toute construction macroscopique, de connaître précisément les phénomènes physiques microscopiques responsables des phénomènes macroscopiques que l'expérience et la pratique révèlent. La balle est, là encore, tout autant dans le camp de l'expérimentateur que dans celui du modélisateur.

Pour autant, la tâche de ce dernier est loin d'être achevée. Le seul problème du retrait de dessiccation mériterait de plus amples investigations et des prolongements utiles. Comment en effet se contenter d'une loi de comportement élastique — même non linéaire — quand on sait que la dessiccation conduit fréquemment, dans des structures où le retrait est empêché, à des phénomènes cruciaux (du point de vue de la sécurité des ouvrages) de fissuration? Le modélisateur se doit donc d'élargir le champ de son investigation et de pousser plus loin la modélisation des comportements poromécaniques: prolongement naturel du comportement poroélastique, le comportement poroélastoplastique doit faire l'objet de tous ses soins, qui permettra de pousser l'étude jusqu'à la prédiction et la représentation de fissures<sup>2</sup>. Indispensable à l'achèvement de l'étude du problème de la

<sup>1</sup> Baroghel-Bouny (1994), partie V, chap. IV, §V.

<sup>2</sup> Cf. le travail de B. Fauchet (1991) sur l'adaptation d'un modèle poroplastique à la fissuration des barrages en béton, grâce à l'interprétation de la fissuration en terme de porosité plastique.

dessiccation, cette orientation préside d'autant plus à toute modélisation efficace de problèmes plus complexes comme le retrait endogène, le fluage (propre ou de dessiccation), l'alcali-réaction, etc.

L'approche développée dans cette étude semble donc riche d'extensions et de développements futurs, pleine de promesses. Encore ces promesses dépendent-elles, à la base, du dialogue nécessaire entre modélisateur et expérimentateur, du va-et-vient permanent entre théorie et expérience: en ce domaine il ne doit y avoir ni séparation, ni préséance. Le présent travail montre au contraire comment la modélisation, loin d'être un pur produit de l'esprit, s'inspire fortement des leçons de l'expérience; comment aussi, en retour, elle réinterroge l'expérience en suggérant certaines de ses limites et certaines modifications aux pratiques courantes: modélisation et expérimentation doivent s'inspirer et s'épauler mutuellement, marcher de concert.

S'il pouvait constituer un plaidoyer convaincant de ce principe, le présent travail aurait atteint l'essentiel de son but.



## **ANNEXES**



# Annexe I

## FORMULATION EXACTE DES RELATIONS D'HOMOGENEISATION

Dans cette annexe, l'ensemble des relations de compatibilité micro-macro présentées au paragraphe II.3.1. sont présentées dans leur formulation exacte en fonction de la déformation volumique  $\varepsilon$  — c'est-à-dire avant application de l'hypothèse de déformations infinitésimales  $\|\varepsilon\| \ll 1$  dans les expressions exactes. Pour elle-même, l'expression simplifiée des coefficients suffit; cependant, pour toutes les opérations de dérivation de ces coefficients — par exemple au moment de l'application des relations de Maxwell entre dérivées croisées —, il est indispensable de disposer de leur formulation exacte en fonction des variables d'état. C'est là l'intérêt principal de la présentation qui suit.

Afin de faciliter la comparaison des expressions exactes et simplifiées, on choisit d'attribuer à chacune des relations qui suivent le numéro de la relation simplifiée qui lui correspond dans le texte du chapitre II.



**AI.1. Cas de constituants disjoints (§ II.3.2.1.2.).**

$$(AI.42) \quad d\phi = \sum \left[ \frac{dm_i}{(1+\varepsilon)\rho_i} - \phi_i \frac{dp_i}{K_i} \right] - \phi \frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

$$(AI.43)_i \quad \frac{dm_i}{\rho_i} = N_{ij} dp_j + b_i d\varepsilon \quad (\text{inchangée})$$

$$(AI.44) \quad d\phi = \left( \sum_i b_i - \phi \right) \frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon} + \sum_i \left( \sum_j \frac{N_{ij}}{1+\varepsilon} - \frac{\phi_i}{K_i} \right) dp_i$$

$$(AI.45) \quad d\sigma = \left( 1 - \sum_i \frac{b_i}{1+\varepsilon} - \frac{\varepsilon\phi}{1+\varepsilon} \right) K_s d\varepsilon - K_s \left( \frac{\phi_i}{K_s} - \frac{\phi_i}{K_i} + \sum_j \frac{N_{ij}}{1+\varepsilon} \right) dp_i$$

$$(AI.46) \quad \sum_i b_i = \varepsilon\phi + (1+\varepsilon) \left( 1 - \frac{K_0}{K_s} \right)$$

$$(AI.47)_i \quad \sum_j N_{ij} = (1+\varepsilon) \left( \frac{b_i - \phi_i}{K_s} + \frac{\phi_i}{K_i} \right)$$

$$(AI.48)_j \quad \left( \frac{b_i - \phi_i}{K_s} + \frac{\phi_i}{K_i} \right) M_{ij} = \frac{1}{1+\varepsilon}$$

**AI.1. Cas d'un mélange (§II.3.2.1.3.).**

$$(AI.50)_\alpha \quad d\phi = \frac{dm_\alpha}{(1+\varepsilon)\rho_\alpha} - \phi \frac{dp_\alpha}{K_\alpha} - \phi \frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

$$(AI.50b)_\alpha \quad d\phi_g = (b_\alpha - \phi_g) \frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{N_{\alpha i} dp_i}{1+\varepsilon} - \frac{\phi_g}{K_\alpha} dp_\alpha$$

- (AI.51) $_{\alpha}$        $b_{\alpha} = b_g$       indépendant de  $\alpha$  (inchangé)
- (AI.52) $_{I,\alpha}$        $N_{\alpha I} = N_I$       dépendant du constituant (I) extérieur au mélange,  
mais pas de  $\alpha$  (inchangé)
- (AI.53) $_{\alpha \neq \beta}$        $N_{\alpha\beta} = N_g$       indépendant de  $\alpha$  et  $\beta$  (inchangé)
- (AI.54) $_{\alpha}$        $N_{\alpha\alpha} = (1+\epsilon) \frac{\phi_g}{K_{\alpha}} + N_g$
- (AI.55)       $b_g + \sum_I b_I = \epsilon\phi + (1+\epsilon) \left(1 - \frac{K_0}{K_s}\right)$



## Annexe II

### DEMONSTRATION DU PASSAGE ENTRE RELATIONS SUR M ET RELATIONS SUR $N=M^{-1}$

#### AII.1. Cas de constituants disjoints.

En introduisant les notations vectorielles suivantes:

$$\mathbf{b} = (b_i) \quad \boldsymbol{\phi} = (\phi_i) \quad \frac{\boldsymbol{\phi}}{\mathbf{K}} = \left( \frac{\phi_i}{K_i} \right)$$

et en désignant par  $\mathbf{1}$  le vecteur unicolonne dont toutes les composantes valent 1 (à ne pas confondre, ici, avec le tenseur unité) on peut écrire (II.47) sous la forme vectorielle suivante:

$$\frac{1}{\mathbf{K}_s} (\mathbf{b} - \boldsymbol{\phi}) + \frac{\boldsymbol{\phi}}{\mathbf{K}} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{1}$$

Soit, en multipliant chaque membre de l'égalité précédente par  $\mathbf{M} = \mathbf{N}^{-1}$ :

$$\mathbf{M} \cdot \left( \frac{1}{\mathbf{K}_s} (\mathbf{b} - \boldsymbol{\phi}) + \frac{\boldsymbol{\phi}}{\mathbf{K}} \right) = \mathbf{1}$$

Et donc, comme  $\mathbf{M}$  est symétrique:

$${}^tM. \left( \frac{1}{K_s} (b - \phi) + \frac{\phi}{K} \right) = 1$$

qui correspond exactement à l'égalité (II.48)

### II.1. Cas de la présence d'un mélange.

La démonstration du passage des relations sur N aux relations sur M est identique dans le cas d'un mélange. Désignons en effet par des minuscules grecques les composants du mélange, par des majuscules latines les constituants interstitiels extérieurs au mélange, les minuscules latines continuant de désigner indistinctement l'ensemble des fluides interstitiels, supposés numérotés dans un certain ordre pour les besoins de la démonstration. Grâce à cette numérotation, on peut associer à chaque fluide (i) un vecteur unicolonne  $e_i$  dont la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée vaut 1, les autres étant nulles: par construction, la famille  $(e_i)$  forme une base de  $\mathbb{R}^n$ .

Dès lors, en considérant deux composants ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ) du mélange, on peut écrire:

$$N. (e_\alpha - e_\beta) = (N_{i\alpha} - N_{i\beta})$$

d'où, les termes  $N_{\alpha\alpha} - N_{\alpha\beta}$  et  $N_{\beta\alpha} - N_{\beta\beta}$  étant, grâce aux relations (II.52) à (II.53), les seules coordonnées non nulles du précédent vecteur (avec, d'après (II.53),  $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = N_g$ ):

$$N. (e_\alpha - e_\beta) = (N_{\alpha\alpha} - N_g) e_\alpha + (N_g - N_{\beta\beta}) e_\beta$$

La relation (II.54), à son tour appliquée à la précédente égalité, permet d'obtenir:

$$N. (e_\alpha - e_\beta) = \frac{\phi_g}{K_\alpha} e_\alpha - \frac{\phi_g}{K_\beta} e_\beta$$

Appliquons dès lors la matrice  $M = N^{-1}$  aux deux termes de la précédente égalité; il vient:

$$e_\alpha - e_\beta = M. \left( \frac{\phi_g}{K_\alpha} e_\alpha - \frac{\phi_g}{K_\beta} e_\beta \right)$$

relation vectorielle qui, par décomposition selon les vecteurs de la base  $(e_i)$  de son terme de droite, peut s'écrire sous la forme suivante:

$$e_\alpha - e_\beta = \left( \frac{\phi_g}{K_\alpha} M_{\alpha\alpha} - \frac{\phi_g}{K_\beta} M_{\alpha\beta} \right) e_\alpha + \left( \frac{\phi_g}{K_\alpha} M_{\beta\alpha} - \frac{\phi_g}{K_\beta} M_{\beta\beta} \right) e_\beta \\ + \left( \frac{\phi_g}{K_\alpha} M_{i\alpha} - \frac{\phi_g}{K_\beta} M_{i\beta} \right)_{i \neq \alpha, \beta} e_i$$

La décomposition de la précédente égalité sur la  $\alpha^{\text{ième}}$  (ou la  $\beta^{\text{ième}}$ ) coordonnée permet de retrouver la relation (II.59); sa décomposition sur la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée ( $i \neq \alpha, \beta$ ) permettant quant à elle d'établir la propriété (II.58).

## Annexe III

### ENERGIE LIBRE ET LOI DE COMPORTEMENT NON LINÉAIRE ISOTROPE

Cette annexe a pour objectif de préciser la forme du potentiel  $\Psi$  que supposent les relations de comportement non linéaires introduites en (II.24), (II.25) et (II.26). L'intérêt est notamment de montrer que ces relations supposent une certaine forme de dépendance en fonction du tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — les autres variables d'état de la modélisation n'entrant pas en jeu dans ce débat. Ainsi, le développement qui suit omet délibérément l'influence des variables  $m_j$  et  $T$  — qui ne modifieraient la démonstration que par l'ajout de termes différentiels sans conséquence sur sa validité.

Rappelons la relation d'état (II.5) liant le tenseur de Cauchy des contraintes totales à celui des déformations, dans le cas le plus général:

$$(II.5) \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

Si l'on désigne respectivement par  $\varepsilon$  la trace du tenseur des déformations et par  $\mathbf{e}$  le tenseur déviatorique associé:

$$(AIII.1) \quad \varepsilon = \text{tr } \mathbf{e}$$

$$(AIII.2) \quad \mathbf{e} = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} \mathbf{1}$$

on peut retranscrire la relation d'état (II.5) en fonction de ces deux variables indépendantes de déformation:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\mathbf{e}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} \frac{d\mathbf{e}}{d\mathbf{e}} \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \mathbf{1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} \right) \mathbf{1} \end{aligned}$$

d'où

$$(AIII.3) \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} \right) \right) \mathbf{1}$$

De la précédente écriture de  $\boldsymbol{\sigma}$ , il ressort notamment que:

$$(AIII.4) \quad \sigma = \frac{\text{tr } \boldsymbol{\sigma}}{3} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon}$$

soit, par différentiation:

$$(AIII.5) \quad d\sigma = d \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon^2} d\varepsilon + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{e} \partial \varepsilon} : d\mathbf{e}$$

Le fait de supposer l'égalité différentielle:

$$(AIII.6) \quad d\sigma = K_0 d\varepsilon$$

toujours vérifiée impose, d'après la précédente écriture différentielle de  $d\sigma$ , que les dérivées secondes de l'énergie libre  $\Psi$  vérifient:

$$(AIII.7) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon^2} = K_0(\varepsilon)$$

$$(AIII.8) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{e} \partial \varepsilon} = f(\mathbf{e}) \mathbf{1}$$

Cependant, si l'on se place d'emblée dans le cas d'un comportement isotrope pour lequel l'énergie libre dépend des deux invariants  $\epsilon$  et  $\gamma = (2e:e)^{1/2}$ , on peut écrire:

$$(AIII.9) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial e} = \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{de} = \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} e$$

d'où, en particulier:

$$(AIII.10) \quad \text{tr} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial e} \right) = 0$$

qui, modifie comme suit certaines des précédentes relations:

$$(AIII.11) \quad \sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial e} + \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} \mathbf{1}$$

$$(AIII.12) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial e \partial \epsilon} = 0$$

Dès lors, la forme générale postulée de l'énergie libre est bien celle annoncée en (II.27):

$$(AIII.13) \quad \Psi(\mathbf{e}, m_j, T) = \Psi_\epsilon(\epsilon, m_j, T) + \Psi_\gamma(\gamma, m_j, T)$$

En outre, le tenseur  $s$  des contraintes déviatoriques s'obtient à son tour aisément, puisque, d'après (AIII.3) et (AIII.10), on obtient immédiatement:

$$(AIII.14) \quad s = \frac{\partial \Psi}{\partial e}$$

d'où, par simple différentiation:

$$(AIII.15) \quad ds = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial e^2} de + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial e \partial \epsilon} d\epsilon$$

et la dérivée seconde croisée de l'énergie libre étant nulle, il en résulte simplement:

$$(AIII.16) \quad ds = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial e^2} de$$

avec  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial e^2}$  fonction de  $e$ , et même plus précisément de  $\gamma$ , du fait de l'hypothèse d'isotropie du milieu. Etant donné le découplage (II.27) déjà retenu, la précédente relation entre  $ds$  et  $de$  s'écrit en fonction de la seule partie  $\Psi_\gamma$  de l'énergie libre qui dépende de la variable  $e$ :



$$(AIII.17) \quad ds = \frac{\partial^2 \Psi_\gamma}{\partial e^2} de$$

Dès lors, affirmer que l'incrément du déviateur des contraintes est colinéaire, selon un rapport  $\mu$  constant, à celui des déformations conduit à supposer une dépendance à l'ordre 2 en  $e$  de la fonction  $\Psi_\gamma$ , c'est-à-dire une dépendance linéaire en fonction du second invariant  $\gamma = (2\mathbf{e}:\mathbf{e})^{1/2}$ . Ce qui revient bien à postuler la forme particulière suivante de l'énergie libre  $\Psi$ , conformément à la relation (II.28):

$$(AIII.18) \quad \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, m_j, T) = \Psi_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, m_j, T) + \Psi_\gamma^0 \gamma$$

Une fois cette hypothèse adoptée, il est licite de considérer que la matrice d'élasticité drainée  $\mathbf{C}_0$  est totalement représentée par deux paramètres: un module d'incompressibilité drainé  $K_0$ , dépendant des variables d'état  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $m_j$  et  $T$ , et un module de cisaillement  $\mu$  constant.

## Annexe IV

### DONNEES EXPERIMENTALES DES SIMULATIONS NUMERIQUES ET DES EXEMPLES ANALYTIQUES

#### AIV.1. Principe de détermination des caractéristiques à partir des données expérimentales.

Les trois exemples numériques traités ont été empruntés à la littérature expérimentale: le premier concerne une pâte de ciment étudiée successivement par Pihlajavaara et Wittmann, puis par J.M. Torrenti qui regroupa les données et travaux de ses deux devanciers<sup>1</sup>. Par souci de commodité, cette pâte de ciment sera désignée par l'abréviation PWT.

L'exemple suivant est celui d'une autre pâte de ciment, étudiée par V. Baroghel-Bouny<sup>2</sup>: ciment ordinaire, de rapport eau sur ciment (E/C) égal à 0.35, et que l'on désignera par l'abréviation CO.

Dernier exemple, celui d'un béton ordinaire étudié par V. Baroghel-Bouny, dont le rapport E/C vaut 0.487, et que l'on désigne par l'abréviation BO.

---

<sup>1</sup> Cf. Torrenti (1987), p. 40.

<sup>2</sup> Baroghel-Bouny (1994).

### Données mécaniques et physiques:

Les données mécaniques portent sur le module d'Young  $E$  et le coefficient de poisson  $\nu$  non drainés. Comme le montre l'étude de la variation de  $E$  en fonction de l'humidité relative, dans une expérience de séchage, pour la pâte de ciment PWT, le module d'Young non drainé peut être considéré constant sur l'ensemble de la plage des humidités relatives — ou des saturations: sa valeur est alors la même que celle du module drainé  $E_0$ . Par conséquent, dans l'ensemble des cas proposés, on supposera constants et égaux les modules d'Young drainé et non drainé:  $E=E_0=cte$ . On fera la même hypothèse pour le coefficient de Poisson:  $\nu=\nu_0=cte$ . Dès lors, pour passer du système  $(E, \nu)$  au système  $(K_0, \mu)$ , il suffit d'appliquer les relations suivantes<sup>3</sup>:

$$(AIV.1) \quad 3K_0 = \frac{E}{1-2\nu}$$

$$(AIV.2) \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

La mesure de la porosité initiale est relativement classique et ne pose pas de problème particulier — si ce n'est l'hypothèse de faible variation de la porosité au cours du séchage<sup>4</sup>, dont le calcul numérique permet de vérifier la validité<sup>5</sup>.

La valeur  $p_{atm}$  de la pression ambiante du mélange gazeux sera la pression atmosphérique standard ( $10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$ ). Pour cette valeur standard de la pression atmosphérique et pour une valeur «standard» de la température (autour de 20 à 25°C) la pression de vapeur saturante est de l'ordre de  $2.5 \cdot 10^4 \text{ Pa} (=0.25 \text{ atm})$ .

Reste le problème du coefficient de diffusion. Sa mesure expérimentale se fait globalement, sur l'ensemble de l'éprouvette. Elle ne permet donc pas de discerner les contributions respectives des différents processus de diffusion. Cependant, dans le cas où seule intervient la diffusion-Fick de la vapeur dans l'air, le coefficient global  $D$  peut alors être lié au coefficient microscopique de Fick  $\mathcal{F}$ <sup>6</sup>. Faisant par ailleurs l'hypothèse d'invariance de ce coefficient de Fick microscopique  $\mathcal{F}$ , on déduit définitivement sa valeur de la mesure initiale du coefficient global de transfert  $D$ . Cette méthode, reposant sur de fortes hypothèses, peut être contestée dans l'absolu et dans le détail; elle reste une bonne méthode d'approche de l'ordre de grandeur, difficile à appréhender, du coefficient de diffusion de Fick.

Dans le tableau des données caractéristiques figurent:

- colonne de droite, les grandeurs accessibles par mesure expérimentale;
- colonne centrale, les grandeurs déduites, par calcul, des précédentes;
- colonne de droite les valeurs respectives des différentes grandeurs introduites.

<sup>3</sup> Cf. Coussy (1991), p. 102.

<sup>4</sup> Cf. § III.2 et III.4.2.

<sup>5</sup> Cf. § V.3.1.2. etc.

<sup>6</sup> Cf. § IV.3.3 ainsi que les relations (IV.102) et (V.25).

### Les isothermes de sorption-désorption:

Lorsque les isothermes de sorption sont directement libellées en termes de saturation en eau liquide fonction de l'humidité relative (PWT), elles seront approchées sous cette forme même par une fonction analytique adéquate.

Dans les autres cas, le résultat expérimental figure sous forme de courbes humidité relative - teneur en eau, et doivent être, avant (BO) ou après (CO) lissage, retranscrites en termes de relations fonctionnelles entre humidité et saturation. Pour cela, il convient d'établir la relation entre saturation en eau  $S_1$  et teneur en eau  $w_1$ .

Soit  $P_1$  la masse de l'eau interstitielle contenue dans un volume matériel élémentaire du matériau. Soit  $P_s$  la masse de ce même volume à sec (vidé de toute eau). La teneur en eau est définie par le rapport de ces deux masses:

$$w_1 = \frac{P_1}{P_{sec}}$$

L'ensemble de ces grandeurs peuvent être retranscrites en fonction des variables d'état de notre modélisation. En effet:

$$P_{sec} = \rho_s (1 - \phi_{sec}) \Omega_{sec}$$

où  $\rho_s$  désigne la masse volumique de la matrice solide,  $\phi_{sec}$  sa porosité à sec, enfin  $\Omega_{sec}$  le volume géométrique occupé, à sec, par le volume matériel élémentaire considéré. De même:

$$P_1 = \rho_1 \phi_1 \Omega = \rho_1 \phi S_1 \Omega$$

où  $\rho_1$  désigne la masse volumique de l'eau liquide,  $S_1$  sa saturation volumique,  $\phi$  la porosité du matériau dans l'état considéré, enfin  $\Omega$  le volume géométrique actuel occupé par le VER matériel considéré.

Soit  $w_1^{sat} = P_1^{sat} / P_{sec}$  la teneur en eau du matériau dans l'état de complète saturation ( $S_1=1$ ). Faisons le rapport  $w_1/w_1^{sat}$ :

$$\frac{w_1}{w_1^{sat}} = \frac{\rho_1 \phi S_1 \Omega}{\rho_1 \phi_{sat} \Omega_{sat}} = \frac{\phi S_1 \Omega}{\phi_{sat} \Omega_{sat}}$$

En négligeant, conformément à l'hypothèse des petites déformations ( $\|e\| \ll 1$ ), la déformation volumique, on obtient d'après (I.5) et (I.9):

$$\frac{w_1}{w_1^{sat}} = \frac{\phi S_1}{\phi_{sat}}$$

c'est là qu'intervient l'hypothèse expérimentale (h2) de faible influence du retrait de dessiccation sur la porosité, qui permet de considérer cette dernière constante, et d'écrire la saturation en liquide comme le rapport de la teneur en eau actuelle à la teneur en eau du matériau saturé:

$$(AIV.3) \quad S_1 = \frac{w_1}{w_1^{sat}}$$

Ainsi les données en teneur en eau peuvent-elles, avant ou après lissage, être retranscrites en fonction de la saturation.

Une fois obtenue le lissage optimal — pour un certain choix de fonction analytique d'approximation — de l'isotherme expérimentale de sorption-désorption, la courbe capillaire  $p_c = p_c(S_1)$  peut en être déduite, conformément à la procédure indiquée au § III.4.1., sous sa forme analytique approchée.

## AIV.2. Données relatives à la pâte de ciment PWT.

Caractéristiques expérimentales	Caractéristiques déduites	Valeurs
$\phi_0$	.....	0.35
$P_{atm}$	.....	$10^5$ Pa (1 atm)
$P_{vs}^0$	.....	$2.5 \cdot 10^4$ Pa (0.25 atm)
D	.....	$10^{-12} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
.....	<b>F</b>	$10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
E	.....	14 GPa
$\nu$	.....	0.25
.....	$K_0$	9.33 GPa
.....	$\mu$	5.6 GPa

### Courbe isotherme de sorption-désorption de la pâte de ciment PWT

humidité relative (%)	saturation (%)	lissage
100.0	100.0	100.0
90.0	83.0	84.3376
80.0	66.0	65.6365
70.0	52.0	50.0564
60.0	39.0	37.9983
50.0	27.0	28.7811
40.0	18.0	21.6602
30.0	16.0	16.0324
20.0	14.0	11.4222
10.0	9.0	7.3690
0.0	0.0	0.0

Le lissage de la courbe expérimentale a été obtenu par une fonction du type<sup>7</sup>:

$$(AIV.4) \quad S_1 = [ 1 + (a \ln h)^b ]^c$$

avec la valeur optimale suivante des coefficients a, b et c:

$$a = -2.90735823$$

$$b = 1.388119368$$

$$c = -0.96291517$$

La figure (AIV.1) représente graphiquement la courbe expérimentale et son lissage, permettant de constater leur bonne coïncidence sur la plage d'humidités relatives ou de saturations qui nous intéresse (10%-90%).

---

<sup>7</sup> Cf. Parker, Lenhard & Kuppusamy (1987).

### AIV.3. Données relatives à la pâte de ciment CO (Baroghel-Bouny).

rapport eau/ciment: E/C=0.35

Caractéristiques expérimentales	Caractéristiques déduites	Valeurs
$\phi_0$	.....	0.35
$P_{atm}$	.....	$10^5$ Pa (1 atm)
$P_{vs}^0$	.....	$2.5 \cdot 10^4$ Pa (0.25 atm)
D	.....	$10^{-12} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
.....	<b>F</b>	$10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
E	.....	17 GPa
$\nu$	.....	0.25
.....	$K_0$	11.33 GPa
.....	$\mu$	6.8 GPa

#### Courbe isotherme de sorption-désorption

humidité relative (%)	teneur en eau (%)	lissage
100.0		<i>14.3137934</i>
97.0		
90.4	14.228	14.2550896
80.1	13.734	13.6816023
71.5	12.404	12.4326174
63.2	10.676	10.7035904
53.5	8.687	8.58957552
44.0		
33.0	4.724	5.09997158
22.8	3.960	3.8342109
12.0	3.141	2.6646797
3.0	0.000	

La valeur expérimentale de la teneur en eau du matériau saturé étant inconnue, le lissage porte directement sur la courbe  $w_1=w_1(h)$ . Là encore, l'approximation a été obtenue par une fonctions du type:

$$(AIV.5) \quad w_1 = w_1^{sat} [ 1 + (a \ln h)^b ]^c$$

avec la valeur optimale suivante des coefficients a, b, c et  $w_1^{sat}$ :

$$\begin{aligned} a &= -2.44644956 \\ b &= 3.12356824 \\ c &= -0.3265763 \\ w_1^{sat} &= 14.3137934 (\%) \end{aligned}$$

la valeur  $w_1^{sat}$  (=14.3137934 g/100g) correspondant à la teneur en eau de la pâte de ciment CO saturée, obtenue par interpolation du lissage obtenu, sur les précédentes valeurs, de la courbe expérimentale.

La figure (AIV.2) représente la teneur en eau fonction de l'humidité imposée et son lissage: on constate, là encore, la bonne coïncidence de ces deux courbes pour les plages de variations considérées. En fait, l'expérience montre, pour ce matériau, une forte hystérésis: les courbes suivies en sorption et désorption diffèrent largement. La courbe choisie, et ici présentée, est celle qui intervient dans le problème de séchage évoqué au chapitre V: l'isotherme de désorption<sup>8</sup>.

---

<sup>8</sup> Cf. Baroghel-Bouny (1994), p. 314-322.



#### AIV.4. Données relatives au béton BO (Baroghel-Bouny).

rapport eau/ciment: E/C=0.487

Caractéristiques expérimentales	Caractéristiques déduites	Valeurs
$\phi_0$	.....	0.12
$P_{atm}$	.....	$10^5$ Pa (1 atm)
$P_{vs}^0$	.....	$2.5 \cdot 10^4$ Pa (0.25 atm)
D	.....	$10^{-12} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
.....	<b>F</b>	$10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
E	.....	45 GPa
$\nu$	.....	0.25
.....	$K_0$	30 GPa
.....	$\mu$	18 GPa

#### Courbe isotherme de sorption-désorption

humidité relative (%)	teneur en eau (%)	saturation (%)	lissage
100.0	3.808	100.	99.998664
97.0	3.687	96.822479	99.320791
90.4	3.572	93.802521	94.351023
80.1	3.068	80.567227	80.793519
71.5	2.638	69.275210	67.991306
63.2			
53.5	1.729	45.404412	45.138679
44.0	1.350	35.451681	35.982702
33.0	0.957	25.131303	27.350707
22.8	0.795	20.877101	20.732576
12.0	0.631	16.570378	14.443705
3.0	0.000		

Le lissage a été obtenu par une fonctions du type (AIV.4), avec la valeur optimale suivante des coefficients a, b et c:

$$a = -2.90199805$$

$$b = 1.82500687$$

$$c = -1.01795219$$

La figure AIV.3 représente la saturation fonction de l'humidité imposée et son lissage: on constate, là encore, la bonne coïncidence de ces deux courbes pour les plages de variations considérées. En fait, l'expérience montre, pour ce matériau, une forte hystérésis: les courbes suivie en sorption et désorption diffèrent largement. La courbe choisie, et ici présentée, est celle qui intervient dans le problème de séchage évoqué au chapitre V: l'isotherme de désorption<sup>9</sup>.

---

<sup>9</sup> *Ibid.*

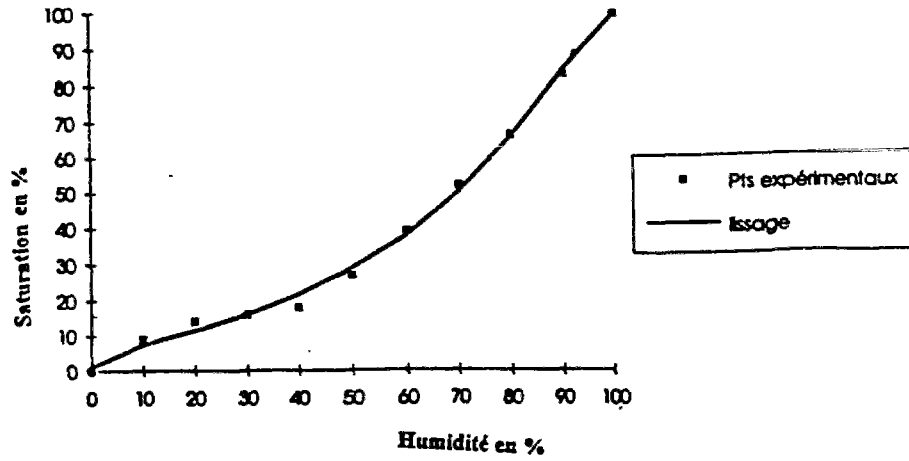


Fig. AIV.1  
Isotherme de sorption-désorption de la pâte de ciment PWT et son lissage

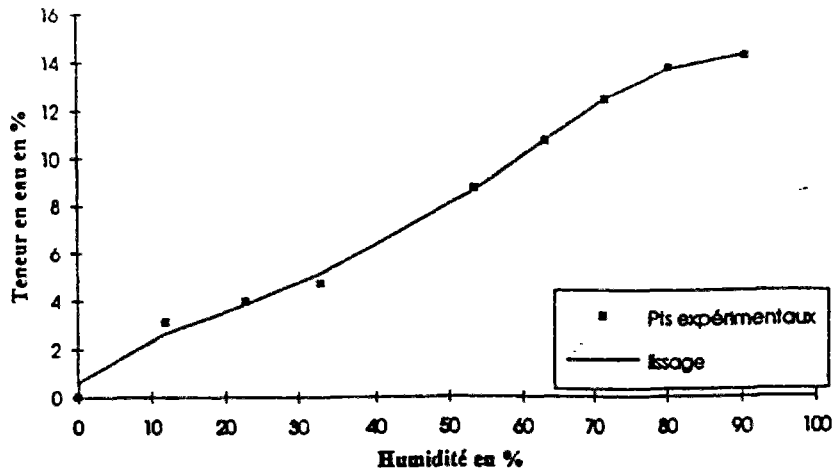


Fig. AIV.2  
Isotherme de sorption-désorption de la pâte de ciment CO et son lissage

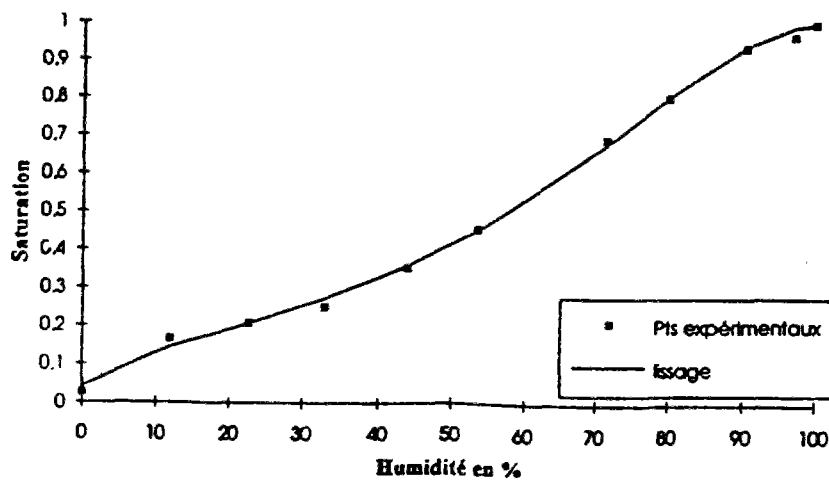


Fig. AIV.3  
Isotherme de sorption-désorption du béton BO et son lissage

# Annexe V

## RESULTATS EXPERIMENTAUX (dans les sources bibliographiques)

Figurent dans cette annexe quelques résultats expérimentaux glanés dans la littérature du genre et qui permettent une estimation de la validité des résultats, analytiques ou numériques, issus du modèle de comportement poroélastique non linéaire. Dans l'ensemble, ces résultats expérimentaux sont ici livrés à l'état brut. Leur commentaire éventuel, et leur mise en parallèle avec les résultats théoriques du présent travail, prennent place, le cas échéant, au coeur du mémoire proprement dit.

### AV.1. Profils de répartition d'eau.

Voici quelques profils expérimentaux de répartition d'eau dans une éprouvette (en fonction de la position de chaque point sur le diamètre de l'éprouvette).

#### AV.1.1 Séchage du gel d'Agar (I. Mrani).

I. Mrani a étudié, au cours de sa thèse de doctorat de l'Université de Montpellier II, le problème du séchage du gel d'Agar (modélisé comme milieu poreux saturé en comportement élastique). Problème pour lequel il a procédé à certaines mesures expérimentales de profils de teneur en eau dans une éprouvette. Les profils obtenus, pour différentes durées de séchage, sont représentés sur la figure (AV.1)<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Mrani (1993), p. 77, 78.

On remarquera en particulier l'allure en cloche, caractéristique, aux premiers instants du séchage (t=1h, t=2h, t=3h, notamment). Ces allures sont sans doute à rapprocher de celles, théoriques, obtenues au chapitre IV — bien que ce rapprochement semble d'interprétation délicate.

### AV.1.2. Séchage de pâtes de ciment et de bétons ordinaires et à très hautes performances (V Baroghel-Bouny).

V. Baroghel-Bouny a étudié le séchage des pâtes de ciment et des bétons ordinaires et à très hautes performances. Pour un séchage à humidité relative de 50%, elle obtient différents profils de répartition de l'eau liquide. Ces profils figurent sur la planche (AV.2)<sup>2</sup>. On notera là encore la très grande similitude présentée avec les courbes analytiques de séchage de dessiccation obtenues au chapitre IV.

### AV.2. Valeurs du retrait de dessiccation de pâtes de ciment et de bétons ordinaires et à très hautes performances (V Baroghel-Bouny).

Le tableau qui suit présente les valeurs du retrait radial de dessiccation obtenu par V. Baroghel-Bouny<sup>3</sup> pour différentes valeurs de l'humidité relative comprises entre 90.4% (valeur initiale du séchage) et 12% (valeur finale), sur différents matériaux: ciment ordinaire (CO), ciment à très hautes performances (CH), béton ordinaire (BO) et béton à très hautes performances (BH).

humidité relative (%)	retrait ( $\mu\text{def}$ ) CO	retrait ( $\mu\text{def}$ ) CH	retrait ( $\mu\text{def}$ ) BO	retrait ( $\mu\text{def}$ ) BH
90.4	0	0	0	0
80.1	733	500	157	186
71.5	1170	818	297	231
63.2	-	1250	419	-
53.5	2118	1635	663	351
33.0	2810	-	-	417
12.0	3485	-	680	496

### AV.3. Vitesse des ondes acoustiques en milieu séchant (T. Cadoret).

T. Cadoret a mesuré, dans le cadre de sa thèse<sup>4</sup>, l'évolution de la vitesse des ondes acoustiques de compression en fonction de la saturation d'une roche (saturation obtenue par séchage de l'échantillon testé). Les résultats obtenus, pour de basses fréquences, figurent sur la planche (AV.3).

<sup>2</sup> Baroghel-Bouny (1994), p. 383

<sup>3</sup> *Ibid.*, p. 401.

<sup>4</sup> T. Cadoret (1993).

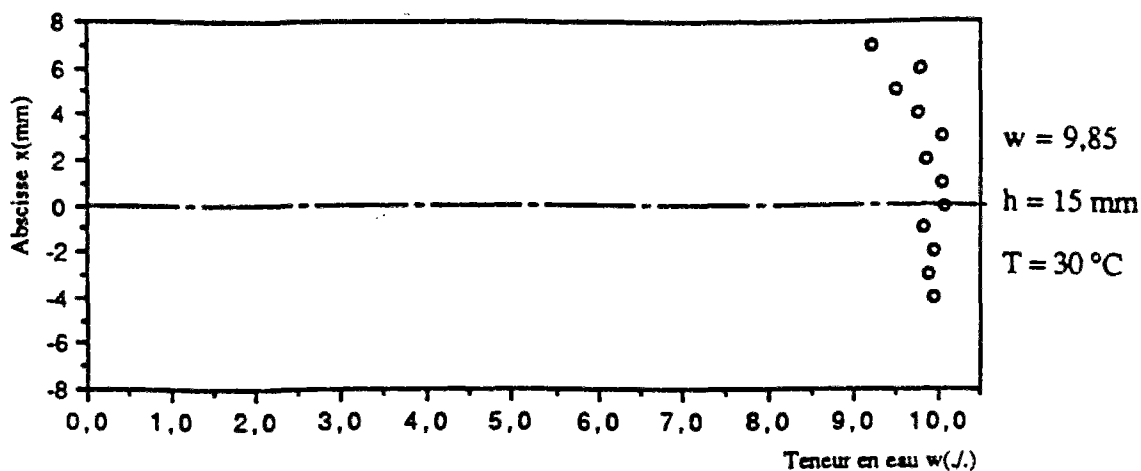


Fig. 28.1 Profil de teneur en eau à l'instant  $t = 0 \text{ h}$ .

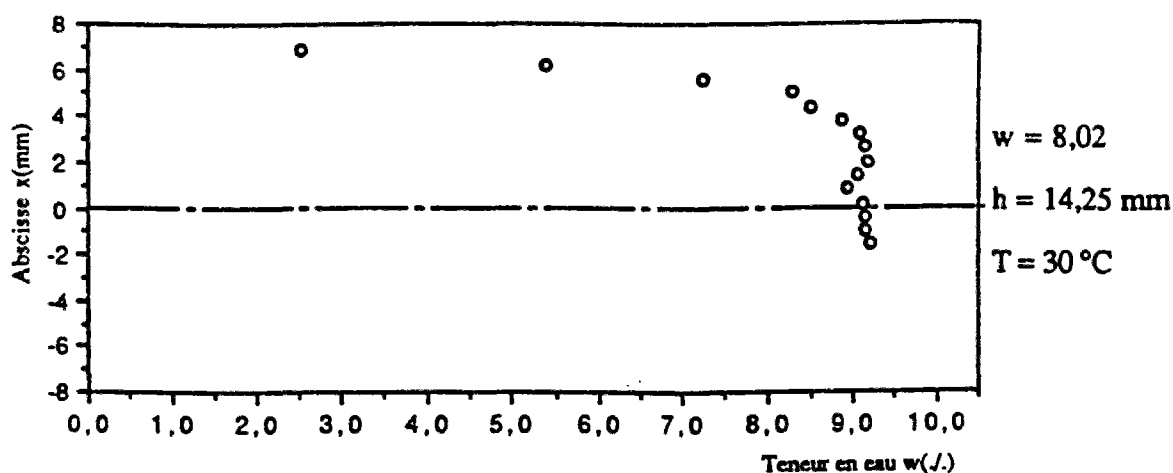


Fig. 28.2 Profil de teneur en eau à l'instant  $t = 1 \text{ h}$ .

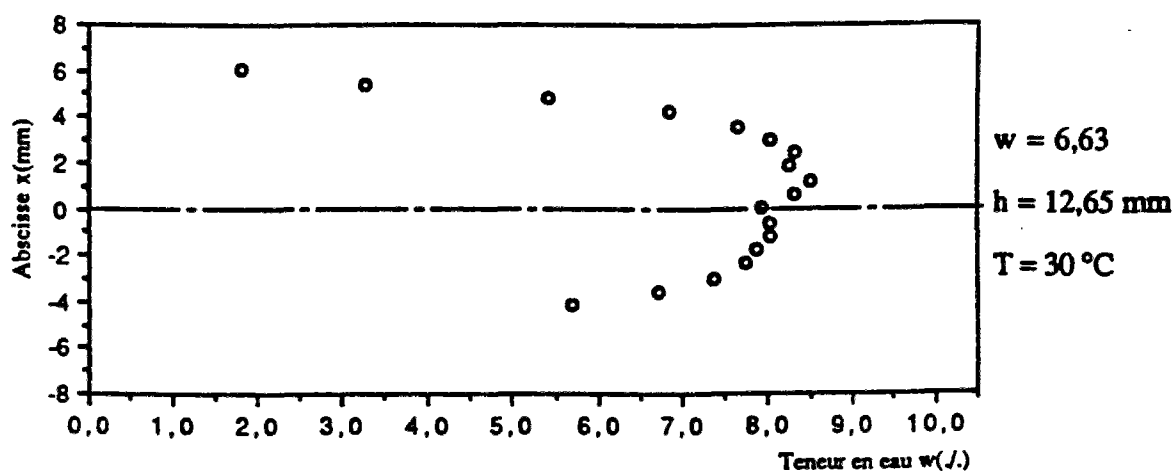


Fig. 28.3 Profil de teneur en eau à l'instant  $t = 2 \text{ h}$ .

Fig. AV.1a.

Profils de teneur en eau dans une éprouvette de gel d'Agar en cours de séchage  
 (courbes tirées de I. Mrani, *Transport de matière fluide en biconstituant élastique*, p. 77)

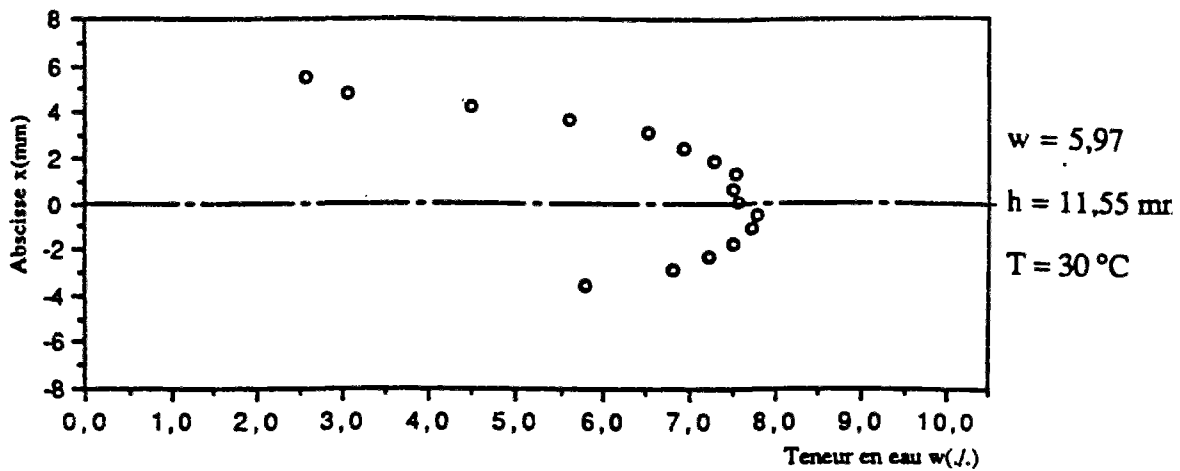


Fig. 28.4 Profil de teneur en eau à l'instant  $t = 3 \text{ h}$ .

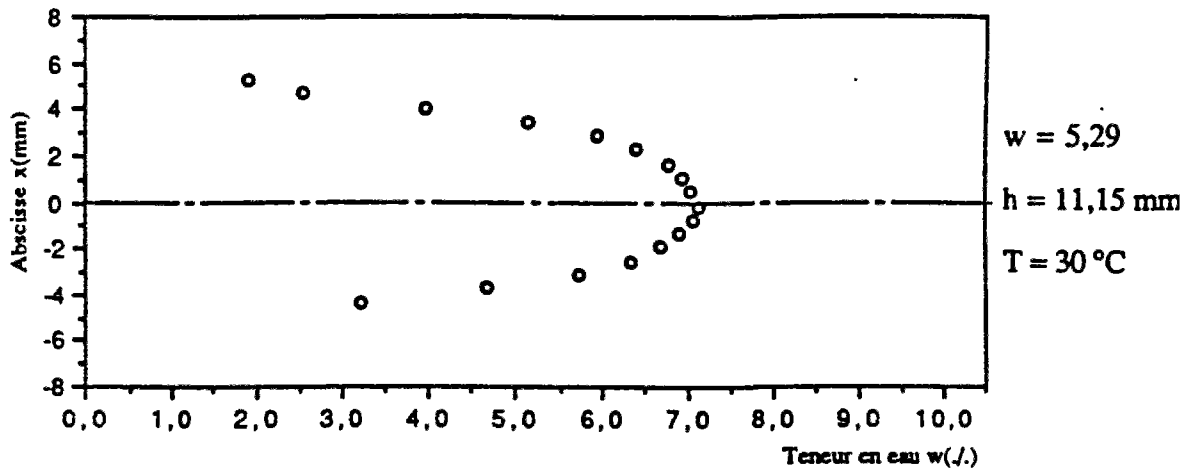


Fig. 28.5 Profil de teneur en eau à l'instant  $t = 4 \text{ h}$ .

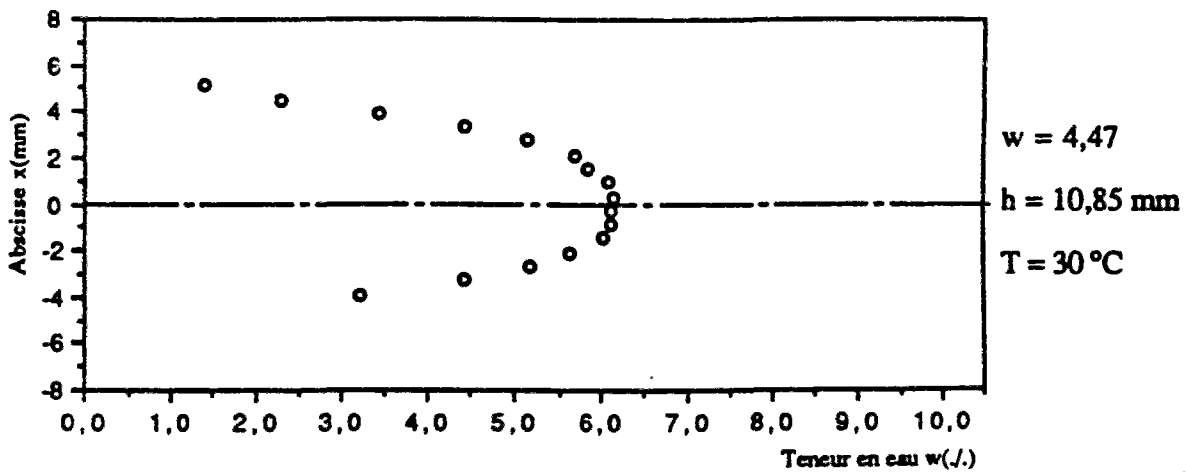


Fig. 28.6 Profil de teneur en eau à l'instant  $t = 5 \text{ h}$ .

Fig. AV.1b.

Profils de teneur en eau dans une éprouvette de gel d'Agar en cours de séchage  
 (courbes tirées de L. Mrani, *Transport de matière fluide en biconstituant élastique*, p. 78)

Séchage à H.R. = 50 %

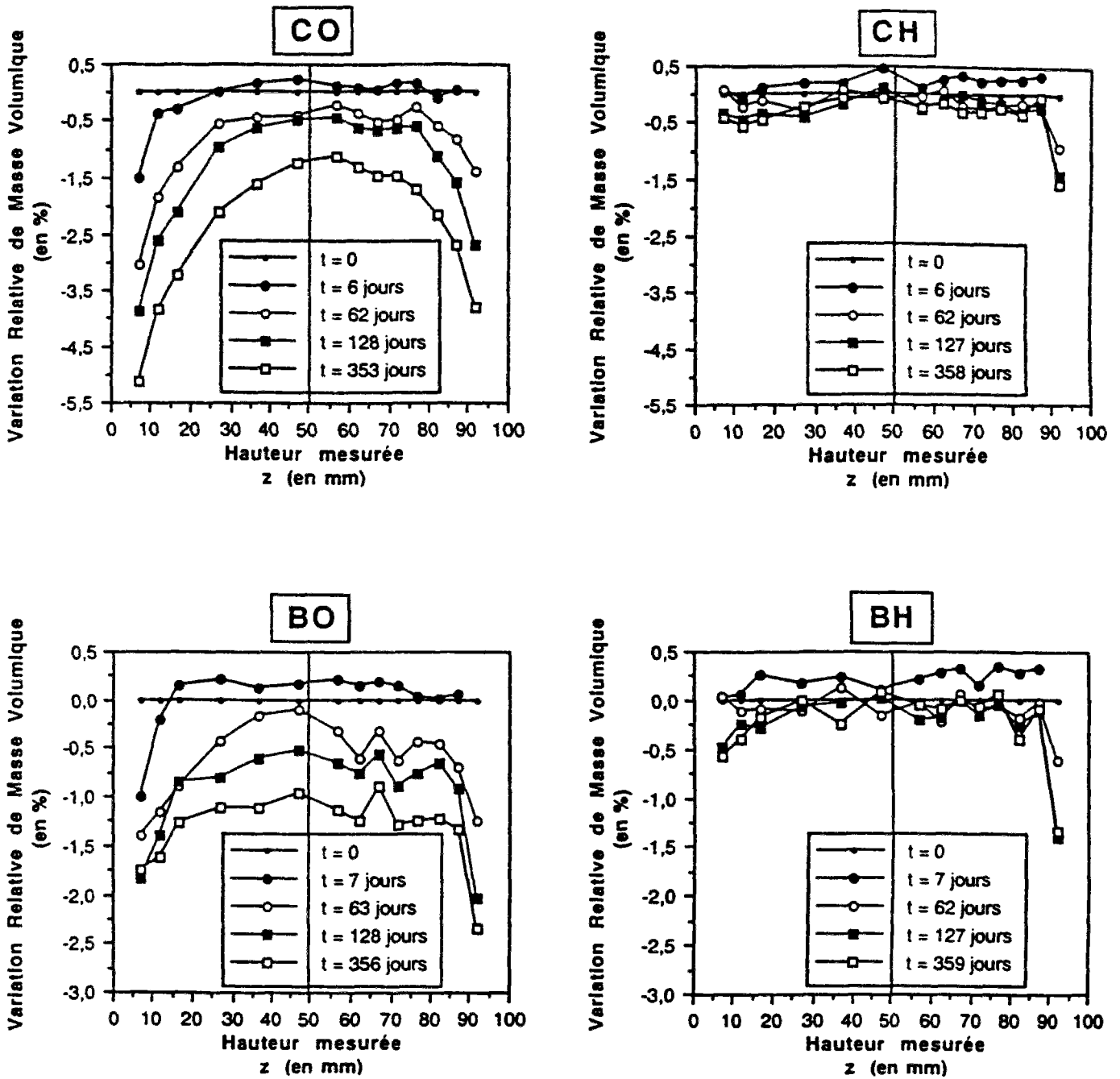


Fig. AV.2.

Profils de teneur en eau dans des éprouvettes de ciment et de béton en cours de séchage  
(courbes tirées de V. Baroghel-Bouny, *Caractérisation microstructurale et hydrique des pâtes de ciment et des bétons ordinaires et à très hautes performances*, p. 383)



### Séchage du calcaire d'Estailades

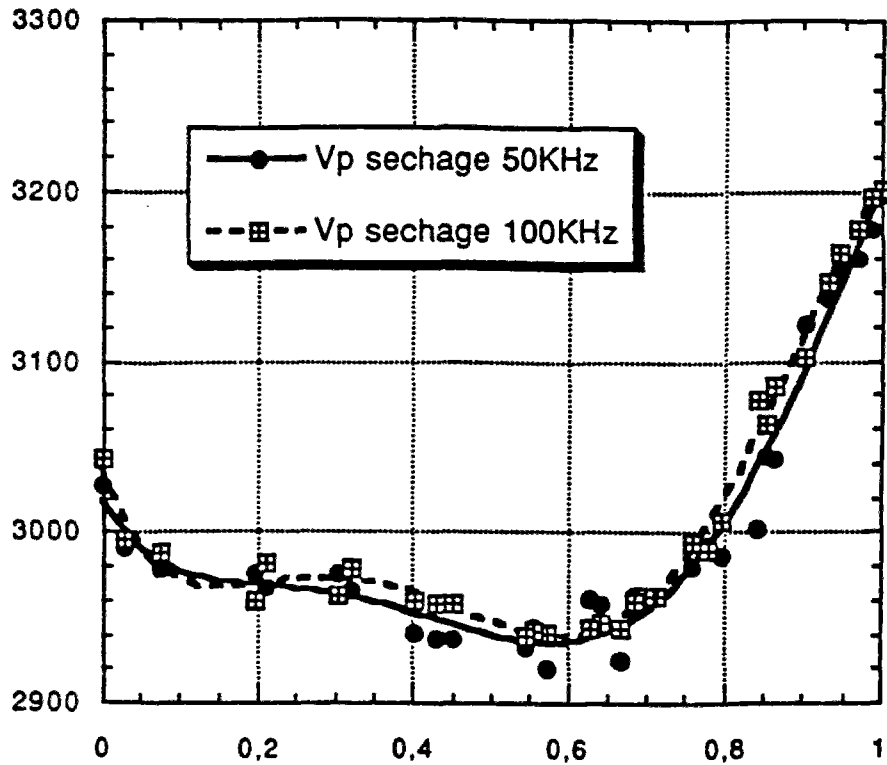


Figure 5.4 : Séchage du calcaire d'Estailades. Les courbes sont issues d'une régression polynomiale de degré 5 à partir des points expérimentaux.

Fig. AV.3.

Vitesse de propagation des ondes de compression dans une roche en fonction de la saturation

(courbes tirées de T. Cadoret, *Effet de la saturation eau/gaz sur les propriétés acoustiques des roches. Etude aux fréquences sonores et ultrasonores*, p. 105)

## BIBLIOGRAPHIE

ACKER, P. (1986), *Effets thermiques dans les bétons en cours de fabrication et applications aux ouvrages d'art*, Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, n° 442, février 1986, série: béton 235.

ACKER, P. (1988), *Comportement mécanique du béton: apports de l'approche physico-chimique*, Rapport de recherche LPC, n°152, juillet 1988.

ACKER, P. (1991), *Retraits et fissurations du béton: causes, mécanismes, modèles*, AFPC, 1991.

ACKER, P. (1993), *Recommendation for measurement of time-dependent strains of concrete loaded in compression*, Creep and Shrinkage of Concrete, Proceedings of the Fifth International RILEM Symposium, Z.P. Bazant & I. Carol (eds.), Barcelona, September 6-9, 1993.

ACKER, P. (1993), *Why and how?*, Creep and Shrinkage of Concrete, Proceedings of the Fifth International RILEM Symposium, Z.P. Bazant & I. Carol (eds.), Barcelona, September 6-9, 1993.

ACKER, P., BOUNY, V., PIAU, J.M. & TORRENTI, J.M. (1990), *Effets thermiques et hydriques dans les bétons*, Rapport d'activité du Greco Géomatériaux, groupe 4 "interactions", 1990.

ALONSO, E.E., GENS, A. & JOSA, A. (1990), *A constitutive model for partially saturated soils*, Géotechnique 40, n°3, 405-430 (1990).

AUBRY, D. & MODARESSI, H., *Dynamic analysis of saturated non linear media*, Numerical methods and constitutive modelling in Geomechanics, éd. C.S. Desai & G. Gioda, Springer-Verlag, Wien-New York.

AURIA, R., BENET, J.C., COUSIN, B. & SAINTE-BEUVE, J. (1991), *Drying of Natural Rubber in Sheet Form - Internal Structure and Water Transfer*, Journal of Natural Rubb. Research, vol. 6(4), 1991, 267-280.

BAGGIO, P., BONACINA, C. & STRADA, M. (1993), *Modellazione del trasporto di calore e di massa nel calcestruzzo cellulare*, Atti del 47° congresso nazionale ATI, Parma, 16-18 settembre 1992.

BAGGIO, P., BONACINA, C., FASSINA, V. & STEVAN, A.G. (1993), *Analysis of moisture migration in the walls of the S. Maria dei Miracoli church in Venice*, International congress on the conservation of stone and other materials, Paris, June 29th-July 1st, 1993.

BAGGIO, P., BONACINA, C., GRINZATO, E., BISON, P. & BRESSAN, C. (1992), *Determinazione delle caratteristiche termoigrometriche dei materiali da costruzione porosi*, Atti del 47° congresso nazionale ATI, Parma, 16-18 settembre 1992.

BARBOUX, P., COUSSY, O. & DORMIEUX, L. (1992), *Une modélisation macroscopique du gonflement des argiles*, Rapport provisoire.

BAROGHEL-BOUNY, V. (1994), *Caractérisation microstructurale et hydrique des pâtes de ciment et des bétons ordinaires et à très hautes performances*, Thèse de l'Ecole nationale des ponts et chaussées, juin 1994.

BAZANT, Z.P. & CHERN, J.C. (1985), *Concrete creep at variable humidity: constitutive law and mechanism*, Matériaux et Constructions, vol. 18, n°103.

BAZANT, Z.P. & KIM J.K. (1991), *Consequences of diffusion theory for shrinkage of concrete*, Materials and Structures/ Matériaux et Constructions, 1991, 24, 323-326.

BAZANT, Z.P. (1993), *Preliminary guidelines and recommendation for characterizing creep and shrinkage in structural design codes*, Creep and Shrinkage of Concrete, Proceedings of the Fifth International RILEM Symposium, Z.P. Bazant & I. Carol (eds.), Barcelona, September 6-9, 1993.

BAZANT, Z.P. (1993), *Theory of creep and interaction with fracture*, Creep and Shrinkage of Concrete, Proceedings of the Fifth International RILEM Symposium, Z.P. Bazant & I. Carol (eds.), Barcelona, September 6-9, 1993.

BAZANT, Z.P., KIM J.K. & PANULA, L. (1991), *Improved prediction model for time-dependent deformations of concrete: Part 1-Shrinkage*, Materials and Structures/ Matériaux et Constructions, 1991, 24, 327-345.

BEAR, J. & BACHMAT, Y. (1990), *Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / Boston / Londres, 1990.

BEER, G., BOOKER, J.R. & CARTER, J.P. (1991), *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Proceedings of the seventh international conference on computer methods and advances in geomechanics, A.A. Balkema, Rotterdam, Brookfield, 1991.

BENET, J.C. & JOUANNA, P. (1982), *Phenomenological relation of phase change of water in a porous medium: experimental verification and measurement of the*

*phenomenological coefficient*, International Journal of Heat and Mass Transfer, vol 25, N°11, p. 1747-1754, 1982.

BIOT, M.A. (1962), *Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media*, Journal of Applied Physics, n°33, p. 1482-1498, 1962.

BIOT, M.A. (1972), *Theory of finite deformations of porous solids*, Indiana University Mathematical Journal, n° 21-7, p. 597-620, 1972.

BIOT, M.A. (1977), *Variational Lagrangian-thermodynamics of non isothermal finite strain. Mechanics of porous solid and thermomolecular diffusion*, International Journal of Solids and Structures, n°13, p. 579-597, 1977.

BISHOP, A.W. & BLIGHT, G.E. (1963), *Some aspects of effective stress in saturated and partly saturated soils*, Géotechnique 13, n°3, 177-197 (1963).

BISHOP, A.W. (1959), *The principle of effective stress*, Tecknisk Ukeflad, N°39, 1959.

BOURBIÉ, T., COUSSY, O. & ZINSZNER, B. (1986), *Acoustique des milieux poreux*, Technip, 1986.

BOURNAZEL, J.P., MAZARS, J. & MORANVILLE-REGOURD, M., (1990), *Effets mécaniques dus à l'hydratation du ciment. Modélisation thermodynamique*, Rapport d'activité du Greco Géomatériaux, groupe 4 "interactions", 1990.

BUIL, M. (1987), *Les retraits du béton*, Actes des Journées de Physique des Laboratoires des ponts et chaussées, Les Arcs, 1987.

CADORET, T. (1993), *Effet de la saturation eau/gaz sur les propriétés acoustiques des roches. Etude aux fréquences sonores et ultrasonores*, Thèse de doctorat de l'Université de Paris VII, décembre 1993.

CAILLETAUD G. & PILVIN, Ph. (1993), *Identification, problèmes inverses: un concept modulaire*, Actes du colloque national en calcul de structures, Giens, 11-14 mai 1993, vol. 2, p. 770-787.

CHAUBE, R.P., SHIMOMURA, T. & MAEKAWA, K. (1993), *Multi-phase water movement in concrete as a multi-component system*, Creep and Shrinkage of Concrete, Proceedings of the Fifth International RILEM Symposium, Z.P. Bazant & I. Carol (eds.), Barcelona, September 6-9, 1993.

COUSSY, O. & LASSABATÈRE, T. (1994), *Comportement mécanique des milieux poreux partiellement saturés*, "Mécanique des milieux poreux. Théorie et applications", Actes de l'École d'été du CFMR, Aussois, 1994, chap. 14 (à paraître).

COUSSY, O. (1989a) *Thermodynamics of saturated porous solids in finite deformation*, European Journal of Mechanics, A/Solids, n°8, p. 281-293

COUSSY, O. (1989b), *A general theory of thermoporoelastoplasticity for saturated porous materials*, Transport in porous media, n°4, p. 281-293.

COUSSY, O. (1991), *Mécanique des milieux poreux*, Technip, 1991.

- COUSSY, O. (1994), *Thermomechanics of porous continua*, John Wiley & Sons, 1995.
- CRAUSSE, P., PRAZAK, J. & ZARCONE, C. (1989), *Remarques concernant certains aspects du séchage en milieu poreux*, *Compte rendu de l'Académie des Sciences*, t. 309, Série II, p. 173-178.
- DAÏAN, J.F. & MÉROUANI, L. (1988), *Experimental and numerical study of drying. Compared behaviours of two building materials*, 1988.
- DAÏAN, J.F. (1992), *Modélisation des phénomènes de transport en milieux poreux par réseaux de pores: problèmes de structure*, exposé dans le cadre du séminaire LCPC/CNRS, Orléans, 9-10 avril 1992.
- DAIAN, J.F. (1992), *From pore-size distribution to moisture transport properties: particular problems for large pore-size distributions*, IDS'92, 8th Int. Drying Symp. Montréal, August 2-5 1992.
- DANGLA, P. (1992), *Méthodes de résolution numérique en thermo-poro-anélasticité*, Rapport interne du LCPC, 1992.
- DE BOER, R. & EHLERS, W. (1990), *The development of the concept of effective stress*, *Acta Mechanica*, n°83, p. 77-92, 1990.
- DORMIEUX, L., COUSSY, O. & DE BUHAN, P. (1991), *Modélisation mécanique d'un milieu polyphasique par la méthode des puissances virtuelles*, C.R.A.S., tome 313, série II, n°8, oct. 1991.
- EL YOUSOUFI, M.S. & SAIX, C. (1993), *Sur la validation d'un modèle de consolidation thermique de sols non saturés*, Actes du 11ème congrès français de mécanique, Lille-Villeneuve d'Ascq, 1993.
- FAUCHET, B. (1991), *Analyse poroplastique des barrages en béton et de leurs fondations. Rôle de la pression interstitielle*, Thèse de doctorat de l'Ecole nationale des ponts et chaussées, 1991.
- FREDLUND, D.G., *Second Canadian geotechnical Colloquium: Appropriate concepts and technology for unsaturated soils*, *Can. Geotech. J.*, vol. 16, 121-139 (1979).
- FREDLUND, D.G. & MORGENSTERN, N.R. (1977), *Stress State Variables for Unsaturated Soils*, *Journal of the geotechnical engineering division*, May 1977.
- FREDLUND, D.G. & RAHARDJO, H. (1985), *Theoretical context for understanding unsaturated residual soil behaviour*, *Tropical S'85*.
- FREDLUND, D.G., MORGENSTERN, N.R. & WIDGER, R.A. (1978), *The shear strength of unsaturated soils*, *Can. Geotech. J.*, vol. 15 (1978).
- FRIAA, A., MENSI, R. & ACKER, P., (1987) *Etude du transfert simultané de la teneur en eau et de la chaleur dans le béton*, *Proceedings of the First International RILEM Congress*, vol. 3: Durability of construction materials, Chapman and Hall, Versailles, 1987, p. 1266-1273.

GARBOCZI, E.J. (1990), *Perméabilité, diffusivité, et paramètres microstructuraux: revue critique*, Cement and Concrete research, vol. 20, 1990.

GRANGER, L. (1994), *Comportement différé du béton dans les enceintes de centrales nucléaires. Analyse et modélisation*, Thèse de l'Ecole nationale des ponts et chaussées, 1995.

GRANGER, L., TORRENTI, J.M. & DIRUY, M. (1994), *Simulation numérique du retrait du béton sous hygrométrie variable*, Bulletin de liaison des laboratoires des ponts et chaussées, n°190, mars-avril 1994.

GRANGER, L., TORRENTI, J.M. & ITHURRALDE, G. (1993), *Delayed behavior of concrete in nuclear power plant containments: analysis and modeling*, Creep and Shrinkage of Concrete, Proceedings of the Fifth International RILEM Symposium, Z.P. Bazant & I. Carol (eds.), Barcelona, September 6-9, 1993.

GUYON, E., HULIN, J.P. & LENORMAND, R. (1984), *Application de la percolation à la physique des milieux poreux*, Annales des Mines, n°5-6, 1984.

HUA, C. (1992), *Analyses et modélisations du retrait d'autodessiccation de la pâte de ciment durcissante*, Thèse de doctorat de l'Ecole nationale des ponts et chaussées, 1992.

JOUHARI, M. (1992), *Fissuration des milieux poreux saturés*, Thèse de doctorat de l'Ecole nationale des ponts et chaussées, 1992.

KENDALL, K., ALFORD N. McN. & BIRCHALL, J.D. (1987), *Elasticity of particle assemblies as a measure of the surface energy of solids*, Proc. R. Soc. Lond. A 412, 269-283 (1987).

KÜMPEL, H.J. (1991), *Poroelasticity: parameters reviewed*, Geophys. j. Int. (1991) 105, 783-799.

LASSABATÈRE, T. & COUSSY, O. (1994), *Le retrait de dessiccation: un modèle continu poromécanique*, Actes des Journées des sciences de l'ingénieur, Presqu'île de Giens, octobre 1994.

LASSABATÈRE, T. & COUSSY, O. (1994), *Dessiccation des bétons: couplage hygromécaniques en milieu poreux non saturé*, Actes de la Première réunion annuelle du réseau de laboratoires GEO, 21-25 novembre 1994, Aussois (à paraître).

LASSABATÈRE, T. (1993), *Thermomechanics of unsaturated porous media: a micro-macro approach*, Proceedings of the First Forum of Young Researchers, Liège, July 18-23, 1993.

LASSABATÈRE, Th. & COUSSY, O. (1993), *Retrait de dessiccation et fluage induit dans les milieux poreux*, Actes du 11ème congrès français de mécanique, Lille-Villeneuve d'Ascq, 1993.

LEGAIT, B. & JACQUIN, C. (1984), *Écoulements diphasiques en milieux poreux: convergence des phénomènes microscopiques et macroscopiques*, Annales des Mines, n°5-6, 1984.

- LEWIS, R.W., MAJORANA, C.E. & SCHREFLER, B.A. (1986), *A Coupled Finite Element Model for the Consolidation of Nonisothermal Elastoplastic Porous Media*, *Transport in Porous Media* 1, (1986), 155-178.
- LEWIS, R.W., ROBERTS, P.J. & SCHREFLER, B.A. (1989), *Finite Element Modelling of Two-Phase Heat and Fluid Flow in Deforming Porous Media*, *Transport in Porous Media*, 4, 319-334, 1989.
- LE ROY, R. & DE LARRARD, F. (1993), *Creep and shrinkage of high-performance concrete: the LCPC experience*, *Creep and Shrinkage of Concrete*, Proceedings of the Fifth International RILEM Symposium, Z.P. Bazant & I. Carol (eds.), Barcelona, September 6-9, 1993.
- LLORET, A. & ALONSO, E.E. (1980), *Consolidation of unsaturated soils including swelling and collapse behaviour*, *Géotechnique* 30, n°4, 449-477 (1980).
- MATYAS, E.L. & RADHAKRISHNA, H.S. (1968), *Volume change characteristics of partially saturated soils*, *Géotechnique* 18, 432-448 (1968).
- MENSI, R., ACKER, P. & ATTOLOU, A. (1988), *Séchage du béton: analyse et modélisation*, *Materials and Structures/ Matériaux et construction*, 1988, 21, 3-12.
- MIGNARD, E. & BENET, J.C. (1989), *Diffusion of methyl bromide in soil*, *Journal of Soil Science*, 1989, 40, 151-165.
- MRANI, I. (1993), *Transport de matière en milieu biconstituant élastique. Application au séchage de gel d'agar*, Thèse de doctorat de l'Université de Montpellier II, 1993.
- MRANI, I., FRAS, G. & BENET, J.C. (1993), *Conrantes de séchage dans une sphère de biopolymère*, Actes du 11ème congrès français de mécanique, Lille-Villeneuve d'Ascq, 1993.
- NICOLAS, P. (1992), *Modélisation mathématique et numérique des transferts d'humidité en milieu poreux*, Thèse de doctorat de l'Université de Paris VI, 1992.
- OULD AMY, M. (1990), *Modélisation numérique des écoulements et des déformations dans les barrages en terre construits sur sols mous*, Thèse de doctorat de l'Ecole nationale des ponts et chaussées, 1990.
- OZANAM, O. (1988), *Modélisation numérique des sols élastoplastiques non saturés — Application aux barrages en remblais*, Thèse de doctorat de l'Ecole centrale des arts et manufactures, mars 1988.
- PARKER, J.C., LENHARD, R.J. & KUPPUSAMY, T. (1987), *A Parametric Model for Constitutive Properties Governing Multiphase Flow in Porous Media*, *Water Resources Research*, vol 23, n°4, p. 618-624, avril 1987.
- PARKER, J.C., LENHARD, R.J. & KUPPUSAMY, T. (1987), *Finite-Element Analysis of Multiphase Immiscible Flow Through Soils*, *Water Resources Research*, vol 23, n°4, p. 625-631, avril 1987.
- PARROTT, L.J. (1988), *Moisture profiles in drying concrete*, *Advances in Cement Research*, vol. 1, n°3, July 1988.

PATEL, R.G., PARROTT, L.J., MARTIN, J.A. & KILLOH, D.C. (1985), *Gradients of microstructure and diffusion properties in cement paste caused by drying*, Cement and Concrete research, vol. 15, pp. 343-356, 1985.

PIHLAJAVAARA, S.E., (1982), *Estimation of Drying of Concrete at Different Relative Humidities and Temperatures of Ambient Air with Special Discussion about Fundamental Features of Drying and Shrinkage*, Creep and Shrinkage in Concrete Structures, éd. Z.P. Bazant & F.H. Wittmann, 1982, John Wiley and Sons Ltd.

PLAS, F. & PALUT, J.M. (1992), *Evaluation des transferts hydriques entre le massif argileux et les excavations*, Phébus, Agence nationale pour la gestion des déchets radioactifs, Rapport d'avancement n°1, janvier 1992-juin 1992.

SAETTA, A.V., SCHREFLER, B.A. (1992), *Analisi dei fenomeni di diffusione di sostanze aggressive all'interno delle strutture di calcestruzzo armato*, Studi e Ricerche, vol. 13, 1992.

SAIX, C. & JOUANA P. (1989), *Modalisation thermo-hydro-mécanique d'un sol par méthode mixte*, Can. Geotech. J. 26, 418-426 (1989)

SAIX, C. & JOUANA P. (1990), *Appareil triaxial pour l'étude du comportement thermique de sols non saturés*, Can. Geotech. J. 27, 119-128 (1990)

SAIX, C. (1987), *Contribution à l'étude des sols non saturés en température*, Thèse de doctorat d'Etat, mention Sciences, Université de Montpellier II, 1987.

SAIX, C. (1991), *Consolidation thermique par chaleur d'un sol non saturé*, Can. Geotech. J. 28, 42-50 (1991)

SALIBA, J. & DAÏAN, J.F. (1990), *Modélisation des migrations d'humidité dans un mortier de ciment fissuré*, Rapport d'activité du Greco Géomatériaux, groupe 4 "interactions", 1990.

SALIBA, J. (1990), *Propriétés de transfert hydrique des mortiers de ciment: modélisation à l'échelle microscopique; étude à l'échelle macroscopiques des effets dynamiques des hétérogénéités*, Thèse de doctorat de l'Université de Grenoble I, 1990.

SCHREFLER, B.A. & ZHAN XIAOYONG (1993), *A Fully Coupled Model for Water Flow and Airflow in Deformable Porous Media*, Water resources research, vol. 29, n°1, p. 155-167, jan. 1993.

SCHREFLER, B.A. & SIMONI, L. (1987), *Non-isothermal consolidation of unbounded porous media using mapped infinite elements*, Communication in applied numerical methods, vol. 3, 445-452 (1987).

SCHREFLER, B.A. & SIMONI, L. (1988), *A unified approach to the analysis of saturated-unsaturated elastoplastic porous media*, Numerical Methods in Geomechanics, Swoboda (éd.), A.A. Balkema, Rotterdam, Brookfield, 1988.

SCHREFLER, B.A. & SIMONI, L., LI XIKUI & ZIENKIEWICZ, O.C. (1990), *Mechanics of Partially Saturated Porous Media*, Numerical methods and constitutive modelling in geomechanics, Springer-Verlag, Vienne, 1990.



SCHREFLER, B.A. (1990), *Recent advances in numerical modelling of Geomaterials*, Key note lecture, III EPMESC CONT. MACAU 1990, Meccanica.

SCHREFLER, B.A., SIMONI, L. & MAJORANA, C.E. (1989), *A general model for the mechanics of saturated-unsaturated porous materials*, Materials and Structures/ Matériaux et Constructions, 1989, 22, 323-334.

SCHREFLER, B.A., SIMONI, L. & ZHAN, X.Y. (1993), *Advances in heat and mass transfer simulation in deforming porous media*, Proc. of the 2nd Asian Pacific Conf on Coupled Mechanics, 1993.

SCHREFLER, B.A., SIMONI, L., ZHAN, X.Y. (1993), *Pollutant transport in deformable semi-saturated geomaterials*, Seminar on Impact of Computational Mechanics to Engineering Problems, Sydney, N.S.W Australia, 2nd August 1993.

SIMONI, L. & SCHREFFLER, B.A. (1991), *A staggered finite-element solution for water and gas flow in deforming porous media*, Communication in applied numerical methods, vol. 7, 213-223 (1991).

TORRENTI, J.-M. (1987), *Comportement multiaxial du béton: aspects expérimentaux et modélisation*, Thèse de l'Ecole nationale des ponts et chaussées, 1987.

VAUCLIN, M. & VACHAUD, G. (1984), *Transferts hydriques dans les sols non saturés, non homogènes*, Annales des Mines, n°5-6, 1984.

WITTMANN, F.H. (1993), *On the influence of stress on shrinkage of concrete*, Creep and Shrinkage of Concrete, Proceedings of the Fifth International RILEM Symposium, Z.P. Bazant & I. Carol (eds.), Barcelona, September 6-9, 1993.

ZIENKIEWICZ, O.C., SCHREFLER, B.A., SIMONI, L., XIE, Y.M. & ZHAN, X.Y. (1991), *Two and three phase behaviour in semi-saturated soil dynamics*, Non linear computational mechanics, A state of the art, P. Wriggers & W. Wagner (eds.), Springer-Verlag, 1991.

ZIENKIEWICZ, O.C., XIE, Y.M., SCHREFFLER, B.A., LEDESMA, A. & BICANIC, N. (1990), *Static and dynamic behaviour of soils: a rational approach to quantitative solutions. II. Semi-saturated problems*, Proc. R. Soc. Lond. A 429, 311-321 (1990).