HAL
open science

Analyse de la stabilité des ouvrages souterrains par une méthode cinématique régularisée

Armando Manuel Sequeira Nunes Antao

To cite this version:

Armando Manuel Sequeira Nunes Antao. Analyse de la stabilité des ouvrages souterrains par une méthode cinématique régularisée. Matériaux. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997. Français. NNT : . tel-00529362

HAL Id: tel-00529362

https://pastel.hal.science/tel-00529362

Submitted on 25 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N S 20910(4)

THÈSE DE DOCTORAT

DE

L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité : **GÉOTECHNIQUE**

présentée par :

Armando Manuel SEQUEIRA NUNES ANTÃO

sur le sujet :

ANALYSE DE LA STABILITÉ DES OUVRAGES SOUTERRAINS PAR UNE MÉTHODE CINÉMATIQUE RÉGULARISÉE

Soutenue le 10 Juillet 1997 devant la commission d'examen composée de :

MM	**M. FRÉMOND**	**Président du jury**
	I. SHAHROUR	**Rapporteur**
	S. TURGEMAN	**Rapporteur**
	A. GOMES CORREIA	**Examinateur**
	E. LECA	**Examinateur**
	M. PANET	**Examinateur**
	J.-P. MAGNAN	**Directeur de thèse**

23

A toute ma famille

REMERCIEMENTS

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC), sous la direction de Monsieur Jean Pierre Magnan, Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées et directeur technique au LCPC. Je tiens à lui exprimer ma gratitude pour la confiance qu'il m'a accordée et pour sa disponibilité.

Je remercie particulièrement Monsieur Eric Leca, Chef de la Section Mécanique des Sols et Fondations. Son amitié, ses conseils, sa patience et son aide dans la résolution des différents problèmes survenus dans mon travail, ont été fondamentaux et indispensables. Je lui adresse ma profonde reconnaissance.

Je voudrais également remercier les différentes personnes qui ont accepté de participer à mon jury de thèse :

Monsieur Michel Frémond, Directeur de l'UMR 113, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de thèse.

Monsieur Isam Shahrour, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille, et Monsieur Sylvain Turgeman, Professeur à l'Université Joseph Fourrier de Grenoble, qui ont bien voulu accepter la tâche d'être les rapporteurs de cette thèse.

Monsieur António Gomes Correia, Professeur à l'Universidade Técnica de Lisboa, et Monsieur Marc Panet, Président Directeur Général de Simecsol, qui m'ont fait l'honneur et le plaisir d'accepter de faire partie de ce jury.

Je remercie la « Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica, Lisboa » qui m'a accordé le financement grâce auquel j'ai pu effectuer mes recherches.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Monsieur Eric Degny, Chef de la Section Informatique-Recherche, sans lequel la rédaction et présentation de ce mémoire n'auraient pas été possibles dans d'aussi bonnes conditions.

Je tiens aussi à remercier Monsieur Jacques Oczowski pour son aide et sa disponibilité. Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Jean-Jacques Brioist et Monsieur Pierre Humbert de la Section Modèles Numériques pour leur aide dans la partie numérique.

Je remercie également Messieurs Jean Louis Salhi, Jean Le-Gouguec et Jean-Claude Berche pour leur aide précieuse concernant les problèmes d'ordre informatique et les bibliothécaires, pour leur dévouement et leur aide dans mes recherches bibliographiques.

Mes pensées vont également à tous mes camarades rencontrés au sein du LCPC. Je tiens tout particulièrement à remercier Yasmina pour son aide et son soutien dans la préparation de ce mémoire.

Je tiens aussi à évoquer tous mes amis rencontrés au sein de la Maison du Portugal. Bien que je ne puisse pas les nommer tous, je rappellerai en particulier Carlos, João Nuno et Joaquim. Je les remercie tous pour leur aide et leur compréhension dans les moments difficiles. Ma pensée va aussi à ceux qui ont habité et partagé avec moi la résidence RAG II.

Je remercie Susana, pour, surtout, sa confiance et son encouragement.

Enfin, je remercie ma famille pour m'avoir soutenu et encouragé depuis toujours.

RÉSUMÉ

Cette thèse traite le problème de la stabilité des ouvrages souterrains creusés en terrain meuble à faible profondeur. La stabilité de ce type d'ouvrages est normalement étudiée en utilisant des méthodes justifiées par l'expérience mais dont les hypothèses ne sont pas toutes cohérentes au plan mécanique.

L'application systématique du calcul à la rupture et de l'analyse limite fournit des encadrements pour les chargements conduisant à la rupture d'un système donné. Le mémoire décrit la mise en oeuvre numérique d'une forme régularisée de l'approche cinématique de l'analyse limite pour l'étude de la stabilité des ouvrages souterrains.

La résistance des sols est modélisée par des critères de Tresca, de Tresca tronqué en traction et de Mohr-Coulomb en conditions bidimensionnelles, et par des critères de Tresca et de Mohr-Coulomb pour les calculs tridimensionnels.

Les calculs reproduisent les modes de rupture observés dans les travaux souterrains et sur modèles. Les charges limites calculées sont voisines des valeurs expérimentales.

ABSTRACT

This thesis deals with the stability of shallow tunnels and underground openings constructed in soft soil. The stability of this kind of structure is usually analysed by means of computational methods that have been validated by experience but are based on assumptions that are not fully consistent with the principles of mechanics.

The limit analysis allows to provide upper and lower bounds of the rupture loads for any given mechanical system. This thesis describes the numerical implementation of a regularised approach of the kinematical method in limit analysis to the study of the stability of underground openings.

The soil resistance is modelled by the Tresca, Tresca with tension cut-off and Mohr-Coulomb criteria for two-dimensional analyses and by the Tresca and Mohr-Coulomb criteria for the three-dimensional calculations.

The calculations provide a reasonable picture of the failure mechanisms that are actually observed in nature and in small scale tests. The values calculated for the limit loads are close to those obtained experimentally.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE 7

1 ER CHAPITRE : STABILITÉ DES TUNNELS CREUSÉS EN TERRAIN MEUBLE 9

1.1 INTRODUCTION 9

1.2 TRAVAUX EXPÉRIMENTAUX 10

1.3 MÉTHODES DE L'ÉQUILIBRE LIMITE 13

1.3.1 Calculs en section courante 14

1.3.1.1 Méthode de Terzaghi (1951) 14

1.3.1.2 La méthode de Bierbäumer (Sczéchy, 1966) 19

1.3.1.3 La méthode de Balla (1963) 20

1.3.1.4 La méthode de Protodyakonov 21

1.3.1.5 Estimation empirique de la pression s'exerçant sur le toit de l'ouvrage 24

1.3.1.6 Influence du temps sur la stabilité 25

1.3.2 Calcul de la stabilité du front de taille 26

1.3.2.1 Méthode de Proctor et White (1977) 27

1.3.2.2 Méthode d'Ellstein (1986) 28

1.3.2.3 Méthode d'Anagnostou et Kovári (1994, 1996,1996a) 30

1.3.2.4 La méthode de Mohkam et Wong (1989) 33

1.3.2.5 Méthode de Murayama 34

1.4 QUELQUES RÉSULTATS ISSUS DU CALCUL À LA RUPTURE ET DE L'ANALYSE LIMITE 36

1.4.1 Introduction 36

1.4.2 Matériaux régis par un critère de Tresca 36

1.4.3 Matériaux régis par un critère de Mohr-Coulomb 37

1.4.4 Quelques résultats du calcul à la rupture concernant la stabilité des tunnels creusés en terrain meuble, à faible profondeur 38

1.5 COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTES MÉTHODES 41

1.5.1 Comparaison entre les méthodes de Broms et Bennermark (1967), Proctor et White (1977) et Ellstein (1986). 42

1.5.2 Comparaison entre les méthodes pour matériaux frottants. 43

2 ÈME CHAPITRE : MÉTHODE DE RÉGULARISATION EN ANALYSE LIMITE 49

2.1 INTRODUCTION 49

2.2 CALCUL À LA RUPTURE ET ANALYSE LIMITE 49

2.2.1 Introduction 49

2.2.2 Définitions et hypothèses préliminaires 50

2.2.3 Chargements potentiellement supportables 50

2.2.4 Détermination de l'ensemble K 51

2.2.4.1 Approche statique 51

2.2.4.2 Approche cinématique 51

2.2.5 Equivalence entre l'approche cinématique et l'approche statique. 53

2.2.5.1 Critères de résistance 53

2.2.5.1.1 Critère de Tresca 54

2.2.5.1.2 Critère de Tresca tronqué en traction. 54

2.2.5.1.3 Critère de Von Mises. 54

2.2.5.1.4 Critère de Mohr-Coulomb 54

2.2.5.2 Fonctions π 55

2.2.5.2.1 Fonction π pour le critère de Tresca 55

2.2.5.2.2 Fonction π pour le critère de Tresca tronqué en traction 55

2.2.5.2.3 Fonction π pour le critère de von Mises 56

2.2.5.2.4 Fonction π pour le critère de Mohr-Coulomb 56

2.2.6 Analyse Limite 57

2.2.6.1 Comportement rigide-plastique 57

2.2.7 Remarques finales 58

2.3 LOI DE NORTON-HOFF GÉNÉRALISÉE ; MÉTHODE CINÉMATIQUE RÉGULARISÉE (FRIÂA 1979). 58

2.3.1 Introduction 58

2.3.2 Loi de Norton-Hoff généralisée 59

2.3.3 Méthode cinématique régularisée 59

2.4 MINIMISATION DE LA FONCTIONNELLE J_p PAR LA MÉTHODE DU LAGRANGIEN AUGMENTÉ 61

2.4.1 Introduction 61

2.4.2 Le Lagrangien augmenté 61

2.4.3 Le Lagrangien augmenté dans la méthode cinématique régularisée 62

2.5 FORMULATION EN ÉLÉMENTS FINIS 63

2.5.1 Introduction 63

2.5.2 Discrétisation 64

2.5.3 Résolution du problème discrétisé 64

2.5.4 Problème local 67

2.5.5 Minimisation de J_w 68

2.6 PROGRAMMATION DANS CESAR-LCPC 71

2.6.1 Introduction 71

2.6.2 Organigramme du module LIMI 71

2.6.3 Convergence de l'algorithme 73

3ÈME CHAPITRE : EXEMPLES DE VALIDATION 75

3.1 INTRODUCTION 75

3.2 LE CRITÈRE DE TRESCA EN DÉFORMATIONS PLANES 75

3.2.1 Plaque rectangulaire 75

3.2.1.1 Borne supérieure de la charge limite fournie par LIMI ; mise en œuvre d'un processus de dichotomie dans la recherche de cette borne supérieure 77

3.2.1.2 Influence du paramètre p 85

3.2.1.3 Nombre d'itérations de relaxation par blocs 86

3.2.2 Le cylindre creux 87

3.2.2.1 Cas d'un cylindre centré 87

3.2.2.2 Forme des éléments utilisés 89

3.2.2.3 Cylindre excentré 90

3.2.3 Fouille verticale 91

3.2.4 Semelle filante 95

3.3 LE CRITÈRE DE TRESCA TRONQUÉ EN TRACTION EN DÉFORMATIONS PLANES 101

3.3.1 Fouille verticale 101

3.4 CRITÈRE DE TRESCA TRIDIMENSIONNEL 102

3.4.1 Cube triaxial 103

3.4.2 Capacité portante des fondations superficielles 105

3.4.3 Types d'éléments utilisés 107

3.5 LE CRITÈRE DE MOHR-COULOMB EN DÉFORMATIONS PLANES 108

3.5.1 La semelle filante 108

3.5.2 Fondation en bord de talus 110

3.6 CRITÈRE DE MOHR-COULOMB TRIDIMENSIONNEL 113

3.6.1 Fondation carrée (L=B) 114

3.6.2 Fondation rectangulaire (L=2B) 117

3.7 INFLUENCE DES CONDITIONS AUX LIMITES SUR LES RÉSULTATS DE LIMI 118

3.8 CONCLUSIONS. 121

4ÈME CHAPITRE : RÉSULTATS OBTENUS EN DÉFORMATIONS PLANES AVEC LE MODULE LIMI .. 123

4.1 INTRODUCTION 123

4.2 CALCULS EN SECTION COURANTE 123

4.2.1 Critère de Tresca 125

4.2.1.1 Tunnel circulaire 125

4.2.1.1.1 Cas de chargement n° 1 : pression uniforme appliquée à la surface du sol 126

4.2.1.1.2 Cas de chargement n°2 : poids volumique 131

4.2.1.1.3 Cas de chargement n° 3 : poids volumique et pression de soutènement intérieure au tunnel 134

4.2.1.1.4 Comparaison avec des résultats expérimentaux 144

4.2.1.2 Tunnel carré 145

4.2.1.2.1 Cas de chargement n° 1 : pression uniforme appliquée à la surface du sol 146

4.2.1.2.2 Cas de chargement n° 3 : poids volumique et pression de soutènement intérieure au tunnel 149

4.2.1.3 Ouverture de trappe 153

4.2.2 Critère de Tresca tronqué en traction 156

4.2.3 Critère de Mohr-Coulomb 159

4.2.3.1 Tunnel circulaire 159

4.2.3.2 Ouverture de trappe 163

4.3 COUPE LONGITUDINALE 168

4.3.1.1 Critère de Tresca 168

4.3.1.2 Critère de Tresca tronqué en traction 172

4.3.1.3 Critère de Mohr-Coulomb 173

4.4 REMARQUES FINALES 175

5 ÈME CHAPITRE : RÉSULTATS TRIDIMENSIONNELS 177

5.1 INTRODUCTION 177

5.2 CRITÈRE DE TRESCA 179

5.2.1 P=0 179

5.2.2 P/D=1 184

5.3 CRITÈRE DE MOHR-COULOMB 188

5.3.1 P=0 189

5.3.2 P≠0 195

5.4 REMARQUES FINALES 200

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES 203

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES 205

ANNEXE 1 215

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'utilisation croissante du sous-sol, notamment en site urbain, pour le développement d'infrastructures (lignes de métro, voies rapides souterraines, réseaux d'assainissement) a conduit à la construction de tunnels dans des conditions difficiles et souvent dans des sols de faibles caractéristiques mécaniques.

Ceci a été rendu possible par les nombreux développements technologiques survenus dans ce domaine au cours des dernières années. Mais ces développements technologiques doivent être accompagnés par le développement d'outils de calcul suffisamment fiables, permettant de calculer d'une façon aussi satisfaisante que possible les pressions à supporter par les soutènements, provisoires et définitifs.

D'un point de vue pratique, on dispose pour le calcul des pressions de soutènement d'une panoplie de méthodes qui manquent dans beaucoup de cas de justifications théoriques et donnent des résultats dispersés, souvent difficiles à interpréter et à appliquer.

Le calcul à la rupture et l'analyse limite constituent un outil théorique, utilisé en mécanique et plus particulièrement en mécanique des sols, capable de fournir des limites supérieures et inférieures précises des chargements capables de conduire le système à la rupture. L'obtention de limites inférieures et supérieures est liée à deux approches différentes : la détermination de champs de contraintes statiquement admissibles et respectant le critère de rupture dans le premier cas (approche statique), et la recherche de mécanismes de rupture du système étudié dans le second (approche cinématique).

Cette thèse vise à clarifier et faire le point sur quelques aspects du calcul des chargements capables de conduire à la rupture les tunnels creusés en terrain meuble à faible profondeur. Notre approche sera basée sur la mise en oeuvre numérique d'une méthode de régularisation dans le code de calcul en éléments finis CESAR-L.C.P.C. dans le cas de l'approche cinématique.

Ce mémoire est composé de cinq chapitres, divisés comme suit.

Le premier chapitre est consacré à la présentation du phénomène de rupture des tunnels creusés en terrain meuble ainsi que des méthodes dont on dispose pour l'estimation de la

pression à exercer sur le massif ou des charges à supporter par un soutènement, de façon à éviter l'effondrement de l'ensemble ouvrage-massif.

Le deuxième chapitre contient les principes du calcul à la rupture et de l'analyse limite, ainsi que ceux de la méthode de régularisation utilisée. On fait aussi la présentation de la méthode de résolution numérique, de la méthode du Lagrangien augmenté et de sa mise en oeuvre dans le code de calcul en éléments finis CESAR-L.C.P.C., dans le module appelé LIMI.

Le troisième chapitre contient des exemples de validation de la programmation effectuée.

Le quatrième chapitre contient les résultats fournis par le module LIMI pour le cas de tunnels en conditions de déformation plane. Différentes géométries ont été envisagées : en section courante et en coupe longitudinale, pour des ouvrages circulaires et carrés et pour l'ouverture d'une trappe. Des comparaisons avec les résultats de différents auteurs sont établies, ainsi que des comparaisons avec des résultats expérimentaux.

Le cinquième chapitre présente les résultats obtenus par LIMI et leur comparaison avec les résultats existants, dans le cas de la géométrie tridimensionnelle.

Enfin, ce mémoire se termine par une conclusion générale et la présentation des perspectives ouvertes par l'ensemble de notre travail.

1ER CHAPITRE

STABILITÉ DES TUNNELS CREUSÉS EN TERRAINS MEUBLES

1.1 Introduction

Un des aspects majeurs de la conception d'un tunnel est de connaître les conditions de stabilité du front de taille. Cette connaissance joue un rôle capital pour le choix de la méthode de creusement utilisée et, bien sûr, pour la sécurité des travaux. C'est aussi pendant la période allant jusqu'à la mise en place des éléments de soutènement définitifs, que se produit, en général, la plus grande partie des tassements (Peck, 1969 ; Katzenbach et Breth, 1981).

Le dimensionnement de l'ouvrage définitif nécessite une attention particulière de la part des concepteurs. Suivant la philosophie actuelle de dimensionnement, où les ouvrages sont en règle générale calculés suivant deux critères fondamentaux, l'état limite de service et l'état limite ultime, la connaissance des efforts exercés par le terrain sur l'ouvrage en cas de rupture du massif joue un rôle majeur dans le dimensionnement.

Ceci nous conduit à considérer deux problèmes distincts : le premier est celui de la stabilité du front de taille, de caractère clairement tridimensionnel, et le deuxième celui de la stabilité en section courante, normalement traité en conditions bidimensionnelles.

Ce chapitre est divisé en quatre parties. La première partie est consacrée à la présentation de quelques résultats expérimentaux, sur modèle réduit. La deuxième rassemble les méthodes et processus basés sur des approches dites d'équilibre limite. Ces méthodes donnent des estimations des charges limites, amplement utilisées dans la pratique de la mécanique des sols ; cependant, leur fiabilité est parfois difficile à préciser et seule l'expérience permet d'en définir les conditions d'application. La troisième partie regroupe les méthodes issues du calcul à la rupture et de l'analyse limite. Ces méthodes donnent un encadrement rigoureux de la charge limite (Salençon 1983) ; néanmoins, l'encadrement de la charge limite ainsi obtenu n'est pas toujours suffisamment précis pour permettre une application correcte de cette méthode dans la pratique. Dans ces deux dernières parties, on distingue aussi le calcul de la

stabilité en section courante et celui de la stabilité du front de taille. Le chapitre se termine par des exemples de calculs de stabilité du front de taille et en section courante.

1.2 Travaux expérimentaux

Les descriptions du phénomène d'instabilité des tunnels proviennent pour la plupart de travaux expérimentaux effectués sur des modèles réduits. En effet, l'observation du phénomène en vraie grandeur ne peut généralement être faite qu'à l'occasion d'accidents et donc pas en conditions contrôlées. Toutefois, quelques expériences ont été réalisées, comme par exemple celles de Suquet (1927, 1928) sur les efforts repris par le soutènement de tunnels creusés en terrain meuble, ou celles rapportées par Steiner (1993) sur la stabilité du front de taille de tunnels creusés à l'aide d'un bouclier.

Cette section rassemble quelques conclusions générales issues des travaux sur modèles réduits (notamment en centrifugeuse) réalisés au cours des 30 dernières années.

Les premières études systématiques sur l'instabilité du front de taille de tunnels creusés en terrain meuble ont été réalisées par Broms et Bennermark (1967). Ces premiers travaux, effectués sur des argiles, ont permis de caractériser les conditions de stabilité à partir d'un paramètre N, défini comme :

$$N = \frac{\sigma_S - \sigma_T + \gamma\left(C + D/2\right)}{c_u} \tag{1-1}$$

où σ_S désigne une éventuelle pression exercée en surface, σ_T une éventuelle pression de soutènement appliquée dans l'ouvrage, C la couverture du tunnel et D son diamètre, γ le poids volumique du sol et c_u la cohésion non drainée de l'argile (figure 1-1).

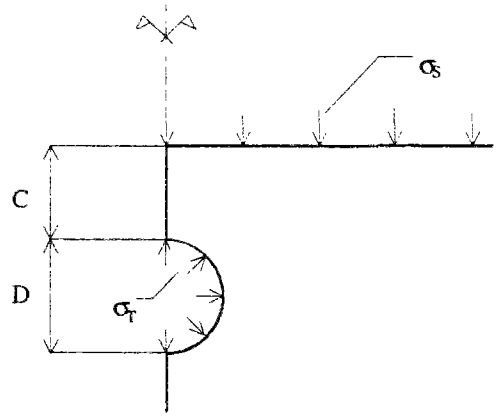


Figure 1-1. Définition de la géométrie et des chargements du problème étudié par Broms et Bennermark (1967).

À partir de ces travaux et d'une analyse de problèmes survenus pendant la construction de plusieurs ouvrages, Broms et Bennermark (1967) ont proposé des estimations du paramètre *N*, situées entre 6 et 8, valeurs au-delà desquelles l'instabilité de l'ouvrage apparaîtrait. Ces valeurs ont été modifiées par la suite : à partir de l'analyse du déroulement des travaux sur plusieurs chantiers, Peck (1969) a proposé la valeur de N=5, Attewell et Boden (1971) ont réduit cette valeur à 4,5. En réalité, ces différences proviennent du fait que ces auteurs essaient de donner une valeur unique pour le facteur de charge, alors que celui-ci dépend de la profondeur relative.

La stabilité des tunnels creusés dans des argiles a été étudiée de manière approfondie dans une série de travaux réalisés à l'Université de Cambridge, et notamment dans la thèse de Mair (1979), qui a effectué des expérimentations sur modèles centrifugés. Les dispositions expérimentales correspondantes ont été décrites par Atkinson et al. (1974) et Schofield (1980).

Ces travaux ont permis de préciser quelques idées sur la rupture dans les argiles. On constate que la rupture est très rapide, mais progressive, et se propage rapidement en surface, au moins pour les valeurs de C/D les moins élevées. Après l'effondrement, on note la présence d'une zone de rupture non déformée devant le front de taille, à peu près cylindrique, d'axe sensiblement vertical. Ce bloc est entouré de zones de grand cisaillement, qui parfois se transforment en zones de glissement par blocs.

Ces travaux ont aussi permis d'établir que la valeur de *N* à la rupture dépend du rapport C/D et que, pour des faibles valeurs de ce rapport, le facteur *N* peut même être inférieur à 4,5 ; cependant, pour des valeurs élevées de C/D (C/D≥3) la valeur de *N* se stabilise. L'influence

d'une éventuelle zone non supportée de longueur P derrière le front de taille a également été étudiée : on observe une perte de stabilité très significative entre P/D=0 et P/D=1 tandis que, pour les valeurs de P/D>2 ou 3, la réponse du massif s'apparente à celle obtenue en conditions bidimensionnelles de section courante (Mair, 1979 ; Kimura et Mair, 1981). L'ensemble de ces résultats est synthétisé sur la figure 1-2, où les valeurs de N à la rupture sont présentées.

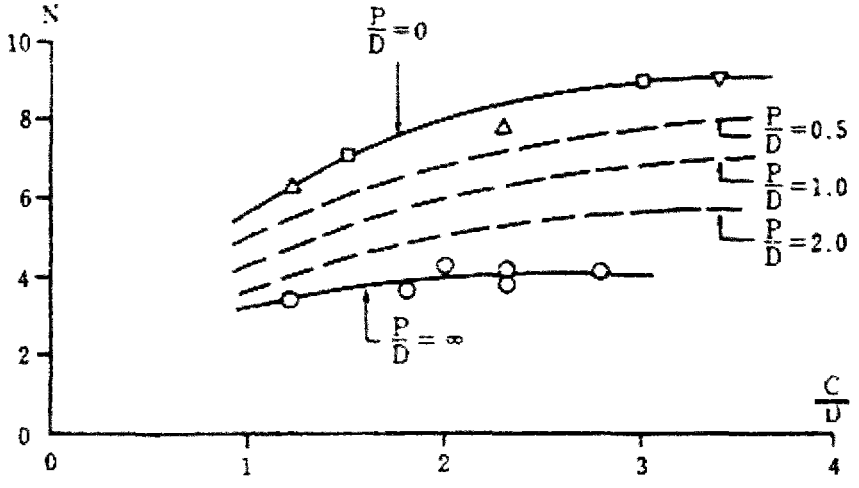


Figure 1-2. Paramètres de stabilité pour le cas des tunnels creusés en terrain purement cohérent à faible profondeur (Kimura et Mair, 1981)

Selon Atkinson et Mair (1981), la stabilité des tunnels peut être analysée à partir d'une approche analogue à celle des fondations. Dans le cas d'une analyse à court terme dans les matériaux argileux, la pression de soutènement à exercer sur le front de taille peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma_T = \sigma_S - \frac{c_u}{F_s} N + \frac{1}{2} \gamma D \left(1 + \frac{2C}{D} \right) \qquad (1\text{-}2)$$

où F_s désigne un coefficient de sécurité. Ainsi le problème de la stabilité des ouvrages se pose en termes de recherche de la valeur du paramètre N à la rupture.

Pour un ouvrage spécifique, la stabilité peut être évaluée à partir du rapport entre la valeur de N correspondant au projet et la valeur de N de rupture. Evidemment, l'ouvrage sera stable pour des valeurs inférieures à 1 (Mair et al., 1981).

La rupture des ouvrages construits dans des matériaux pulvérulents a été étudiée par Chambon (1990) en section courante et au front de taille. Les résultats en section courante corroborent ceux obtenus par Atkinson et al. (1974, 1977) et Atkinson et Potts (1977, 1977a).

Il ressort de ces travaux que l'on peut distinguer différentes phases dans le processus d'instabilité du front. Pour une pression de soutènement suffisamment élevée, la stabilité du front est assurée et n'est pas affectée par les éventuelles fluctuations de pression. La diminution de la pression se traduit par un début de mouvement du front, précédant l'instabilité. Lorsque la pression de rupture est atteinte, on observe un effondrement brutal, mais localisé à proximité du front. La zone d'éboulement ne dépasse généralement pas la limite arrière du front de taille et se présente sous la forme d'un bulbe, prenant naissance en partie inférieure du front. Les déformations se concentrent dans la limite de ce bulbe, les zones en contact avec le front de taille présentant des mouvements de corps rigide.

La pression de rupture n'est pratiquement pas affectée par la valeur du rapport C/D entre la couverture et le diamètre du tunnel, sauf pour de très faibles valeurs de ce rapport. De même, la valeur de la pression de rupture, rapportée au produit du diamètre et de la valeur du poids volumique du terrain, ne varie pas de façon significative.

Si le processus d'effondrement n'est pas arrêté, le mécanisme se développe sous la forme d'une étroite cheminée d'écoulement en direction de la surface.

Comme pour le cas des argiles, Atkinson et Mair (1981) ont proposé une formulation de la pression de soutènement en géométrie plane, similaire à celle des fondations, mais en considérant deux cas particuliers : celui d'une pression superficielle nulle et celui où la pression à la surface est suffisamment élevée pour pouvoir négliger l'effet du poids volumique du sol. Cette approche a été reprise plus tard par Leca et Dormieux (1990) dans un cadre plus général et pour la configuration tridimensionnelle correspondant à la stabilité du front de taille.

L'influence d'une longueur de tunnel non revêtue, P, a également été étudiée dans le cas des matériaux pulvérulents. König et al. (1991) ont donné quelques résultats sur l'augmentation des contraintes sur les revêtements résultant d'une augmentation du rapport P/D ; Chambon et al. (1991) ont fourni quelques résultats sur les mécanismes et pressions de rupture.

1.3 Méthodes de l'équilibre limite

Cette section est consacrée aux méthodes de calcul des pressions de soutènement à appliquer dans un ouvrage, de façon à garantir sa stabilité.

Les méthode dites de calcul à l'équilibre limite reposent sur une hypothèse de mécanisme de rupture, à priori suivant des surfaces de glissement, et l'analyse de la stabilité de la partie du massif délimitée par ces surfaces de rupture.

D'un point de vue conceptuel, l'inconvénient principal de ces méthodes est qu'elles peuvent conduire à des solutions qui sont supérieures aux charges limites réelles sur les ouvrages (Coussy et Salençon, 1979).

Comme on le verra dans la suite, les méthodes existantes aboutissent dans le cas des ouvrages souterrains à des résultats très dispersés. Cette dispersion nous paraît provenir des hypothèses faites, d'une part, sur les lignes de glissement, qui sont souvent très éloignées de celles observées expérimentalement, et, d'autre part, sur l'état des contraintes dans le massif, qui est normalement très difficile à caractériser.

1.3.1 Calculs en section courante

Le problème consiste dans ce cas à déterminer les chargements verticaux maximaux susceptibles de s'exercer sur un ouvrage en section courante. Les chargements latéraux ne sont pas considérés, mais il est clair que, dans les méthodes où l'on fait l'hypothèse que le sol situé à proximité des parois latérales est en état de poussée, la charge à reprendre doit correspondre à la charge de poussée latérale usuelle dans le cas des talus.

1.3.1.1 Méthode de Terzaghi (1951)

La figure 1-3 rappelle les hypothèses de cette méthode. Le massif de sol repose sur une zone rigide, ayant une ouverture de largeur B. Les surfaces de glissement simplifiées sont verticales et se développent entre les extrémités de l'ouvrage et la surface. La résistance au cisaillement du sol est caractérisée par le critère de Mohr-Coulomb, qui s'écrit :

$$\tau_{max} = c + \sigma \tan \varphi \qquad (1\text{-}3)$$

où c désigne la cohésion du sol et φ son angle de frottement interne, et τ_{max} le cisaillement maximal mobilisable à la rupture.

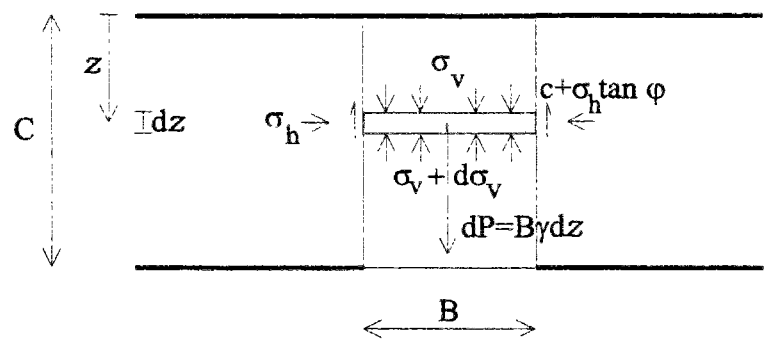


Figure 1-3. Hypothèses de la méthode de Terzaghi (1951)

Si l'on introduit, de plus, le poids volumique du sol γ, la surcharge éventuelle (uniformément distribuée) en surface σ_S et le rapport K entre les contraintes horizontale et verticale, l'équilibre d'une tranche horizontale élémentaire de sol d'épaisseur dz, située entre les lignes de rupture, peut s'écrire :

$$\left(\sigma_v - \sigma_v - d\sigma_v\right)B - 2cdz - 2\sigma_h \tan\varphi + dP = 0 \tag{1-4}$$

soit :

$$\frac{d\sigma_v}{dz} = \gamma - \frac{2c + 2K\sigma_v \tan\varphi}{B} \tag{1-5}$$

La solution de l'équation (1-5) se met sous la forme :

$$\sigma_v = \frac{B\left(\gamma - \frac{2c}{B}\right)}{2K\tan\varphi}\left(1 - e^{-\frac{2z}{B}K\tan\varphi}\right) + \sigma_s e^{-\frac{2z}{B}K\tan\varphi} \tag{1-6}$$

et la pression verticale à la profondeur C est par conséquent égale à :

$$\sigma_v = \frac{B\left(\gamma - \frac{2c}{B}\right)}{2K\tan\varphi}\left(1 - e^{-\frac{2C}{B}K\tan\varphi}\right) + \sigma_s e^{-\frac{2C}{B}K\tan\varphi} \tag{1-7}$$

Dans le cas d'un tunnel de géométrie rectangulaire (figure 1-4), Terzaghi (1951) note que, dans les zones situées au contact de l'ouvrage, on a, quelle que soit la qualité des dispositions constructives, un état de poussée indiquant un début de rupture par cisaillement. Ceci conduit à considérer que les surfaces de glissement sont des plans issus de la base de l'ouvrage et inclinés d'un angle de π/4+φ/2 par rapport à l'horizontale. Au niveau de la partie supérieure du tunnel, ces surfaces de glissement se propagent verticalement vers la surface. Il est clair que ceci ne constitue qu'une simplification de la forme des surfaces réelles.

On se ramène ainsi à la configuration représentée sur la figure 1-3, mais avec une longueur d'ouverture $B_1 = B + 2D\tan\left(\pi/4 - \varphi/2\right)$.

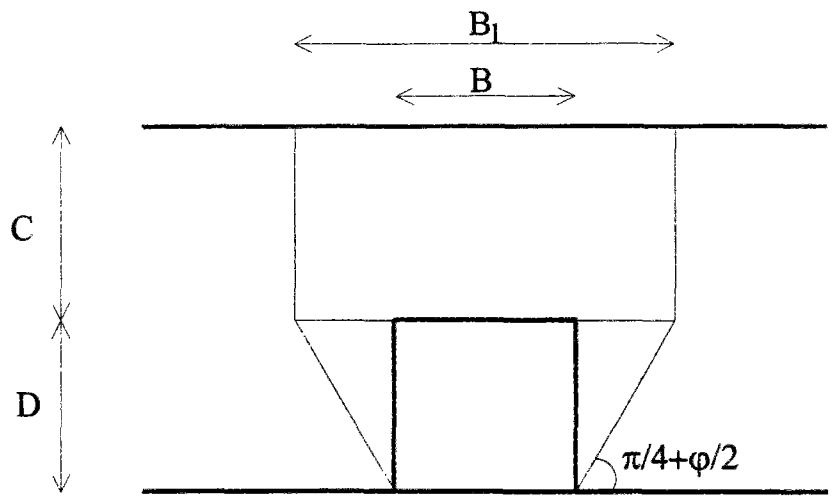


Figure 1-4. Définition géométrique des paramètres à utiliser dans la méthode de Terzaghi (1951).

La substitution de B par B_1 dans l'équation (1-7) conduit à l'expression de la pression à exercer sur le toit du tunnel pour garantir sa stabilité :

$$\sigma_T = \frac{B_1\left(\gamma - \frac{2c}{B_1}\right)}{2K\tan\varphi}\left(1 - e^{-\frac{2C}{B_1}K\tan\varphi}\right) + \sigma_s e^{-\frac{2C}{B_1}K\tan\varphi} \tag{1-8}$$

L'expression (1-8) peut être réécrite de la façon suivante :

$$\sigma_T = B_1\left(\gamma - \frac{2c}{B_1}\right)\frac{\left(1 - e^{-\frac{2C}{B_1}K\tan\varphi}\right)}{2K\tan\varphi} + \sigma_s e^{-\frac{2C}{B_1}K\tan\varphi} = B_1\left(\gamma - \frac{2c}{B_1}\right)k_a + \sigma_s k_b \tag{1-9}$$

où k_a et k_b définissent ainsi la sensibilité de σ_T à la profondeur relative et à l'angle de frottement du sol. Il est clair que, dans le cas d'une surcharge nulle en surface et pour des valeurs de $\gamma \leq \frac{2c}{B_1}$, on n'aura besoin d'aucun soutènement du tunnel, la valeur négative pour la pression signifiant que la résistance maximale au cisaillement du terrain n'est pas atteinte.

La figure 1-5, donne la forme des coefficients k_a et k_b de (1-9) dans le cas d'un tunnel carré.

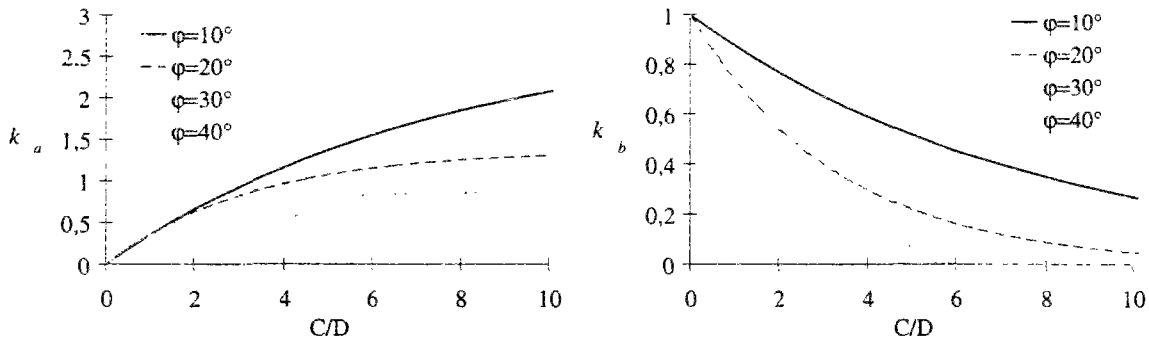


Figure 1-5. Evolution des coefficients k_a et k_b pour un tunnel carré

On remarque que le coefficient k_a diminue à mesure que l'angle de frottement augmente et se stabilise pour les valeurs de C/D les plus élevées, et que l'influence de la charge distribuée en surface diminue avec l'augmentation de la profondeur.

L'expression (1-8) suppose que le sol est homogène. Dans le cas où les propriétés mécaniques changent avec la profondeur, les calculs doivent être effectués en remplaçant, dans chaque couche, la pression σ_S par la valeur de la pression obtenue pour la couche sus-jacente.

La valeur de K joue un rôle important dans le comportement de l'approche de Terzaghi (1951). Terzaghi et Jelinek (1954) ont proposé la valeur de 1 pour ce rapport, Galczynski et Wojaszek (1989) utilisent K=(1-sin φ)/(1+sin φ) et Anagnostou et Kovári (1994) utilisent une valeur de 0,8 ou de 0,4 selon que le sol est situé au-dessus ou en-dessous de la nappe. Ces valeurs paraissent cependant difficiles à justifier du point de vue théorique. En particulier, la figure 1-6 montre que, dans le cas où K=1, une partie du cercle de Mohr (AB et symétrique) est extérieure au domaine des contraintes défini par le critère de Mohr-Coulomb. Il est aussi clair que cet état implique une rupture simultanée sur les facettes verticale et horizontale.

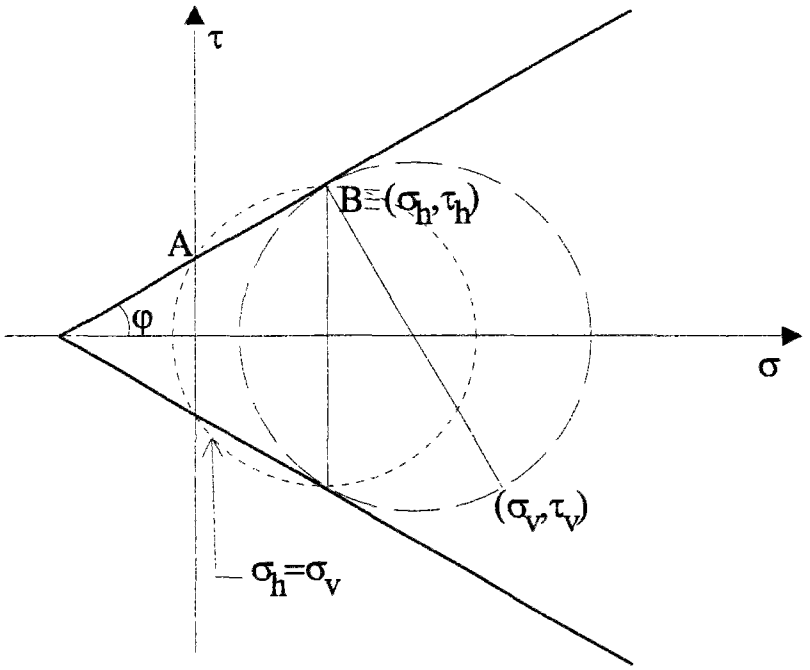


Figure 1-6. Cercle de Mohr pour la méthode de Terzaghi (1951). Convention de la mécanique des sols pour les contraintes.

Il nous semblerait plus correct d'exprimer la contrainte horizontale en fonction de la contrainte verticale. En supposant que le cisaillement maximal est atteint sur la facette verticale, à partir du cercle de Mohr, on peut écrire :

$$\sigma_h = \left(\sigma_v - 2c\tan\varphi\right)\frac{\cos^2\varphi}{1+\sin^2\varphi} \tag{1-10}$$

En réécrivant l'équation (1-4), on obtient :

$$\left(\sigma_v - \sigma_v - d\sigma_v\right)B - 2\left(c + \left(\sigma_v - 2c\tan\varphi\right)\frac{\cos^2\varphi}{1+\sin^2\varphi}\tan\varphi\right)dz + dP = 0 \tag{1-11}$$

soit :

$$\frac{d\sigma_v}{dz} = \gamma - \frac{2\cos^2\varphi}{B\left(1+\sin^2\varphi\right)}\left(c+\sigma_v\right) \tag{1-12}$$

La solution de l'équation (1-12) peut se mettre sous la forme :

$$\sigma_v = \left(\frac{\left(1+\sin^2\varphi\right)\gamma B}{2\cos^2\varphi} - c\right)\left(1 - e^{-z\frac{2\cos^2\varphi}{B\left(1+\sin^2\varphi\right)}}\right) + \sigma_s e^{-z\frac{2\cos^2\varphi}{B\left(1+\sin^2\varphi\right)}} \tag{1-13}$$

L'équation (1-13) donne ainsi la valeur de la pression verticale pour un schéma de rupture semblable à celui de Terzaghi (1951) - lignes de cisaillement maximale identiques -, mais dont les contraintes respectent le critère de rupture utilisé.

On notera, par ailleurs, que l'approche de Terzaghi (1951) avait été proposée, dans son essence, par Janssen (1895), à partir d'essais sur les pressions exercées par des matériaux granulaires (céréales) dans un silo.

1.3.1.2 La méthode de Bierbäumer (Sczéchy, 1966)

Cette méthode est décrite dans l'ouvrage de Sczéchy (1966). Elle suppose l'existence de lignes de cisaillement analogues à celles prises en compte par Terzaghi (1951).

La valeur de la résistance au cisaillement le long des surfaces de glissement est prise égale à :

$$R_C = 2\tan\varphi\tan^2(\pi/4-\varphi/2)\frac{C^2\gamma}{2} \qquad (1\text{-}14)$$

ce qui suppose la mise en poussée du terrain.

Le poids du bloc situé au dessus du tunnel est égal à :

$$P = C\gamma\left[B+2H\tan(\pi/4-\varphi/2)\right] \qquad (1\text{-}15)$$

La pression agissant effectivement en clef du tunnel peut être obtenue en prenant la différence entre (1-15) et (1-14) et en divisant le résultat par B_1 :

$$\sigma_T = C\gamma\left[1-\frac{\tan\varphi\tan^2(\pi/4-\varphi/2)C}{B+2H\tan(\pi/4-\varphi/2)}\right] \qquad (1\text{-}16)$$

Dans le cas du sol purement frottant, c'est l'expression retenue par Sczéchy (1966). On peut reprendre le raisonnement dans le cas d'un matériau présentant aussi de la cohésion, c, l'expression (1-14) se mettant alors sous la forme :

$$R_C = 2cC+2\tan\varphi\tan^2(\pi/4-\varphi/2)\frac{C^2\gamma}{2} \qquad (1\text{-}17)$$

Selon Sczéchy (1966), cette méthode donne de meilleurs résultats pour les valeurs élevées de C/B.

Toutefois, l'hypothèse que la pression horizontale est égale à la pression active semble contradictoire avec la mobilisation de la résistance au cisaillement selon des plans verticaux de rupture, dans la mesure où elle implique que les directions verticale et horizontale soient directions principales.

1.3.1.3 La méthode de Balla (1963)

La méthode de Balla (1963) s'appuie sur les mêmes concepts de lignes de cisaillement maximal que les approches précédentes. La surface de glissement est dans ce cas constituée de deux demi-cylindres, tangents aux bords supérieurs de l'ouvrage. Dans l'axe de symétrie, les demi-cylindres font un angle de $\pi/4-\varphi/2$ avec le plan horizontal. Le rayon de ces demi-cylindres est par conséquent égal à :

$$R = \frac{B}{2\left[1-\cos\left(\pi/4+\varphi/2\right)\right]} \tag{1-18}$$

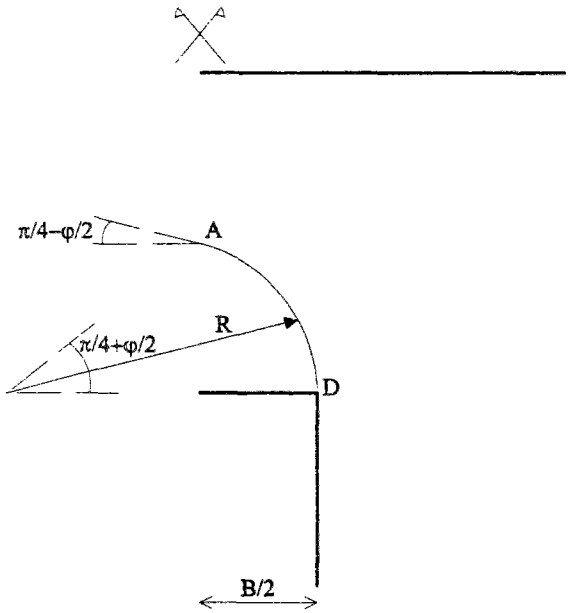


Figure 1-7. Hypothèses de la méthode de Balla.

A partir de ces hypothèses géométriques, la distribution des contraintes sur la surface de glissement est calculée à partir de l'équation de résistance au cisaillement donnée par (1-3) et des équations d'équilibre.

Après avoir calculé la résistance au cisaillement mobilisable sur la surface AD, on écrit l'équilibre vertical de la zone du massif délimitée par les points A, D et D_{sym} :

$$\underline{G}+\underline{K}_v+\underline{Q}_v+\underline{R}_p=0 \tag{1-19}$$

où G désigne le poids du bloc $ADD_{sym}A$, K_v la composante verticale de la force de cohésion agissant sur la surface de glissement, Q_v la composante verticale de la force de frottement mobilisable sur la surface de glissement et R_p la résultante de la pression agissant sur le toit de l'ouvrage.

On en déduit l'expression de la pression permettant de garantir l'équilibre du massif :

$$P_T = C\gamma\left(K_1 + \frac{B}{C}K_2 - \frac{c}{C\gamma}K_3\right) \tag{1-20}$$

où C représente la couverture du tunnel et K_1, K_2 et K_3 des coefficients pondérateurs qui dépendent de l'angle de frottement du massif (tableau 1-1).

Tableau 1-1. Valeurs des coefficients pondérateurs utilisés dans la méthode de Balla (1963).

φ (degrés)	K_1	K_2	K_3
10	0,6814	0,1502	1,8066
20	0,4145	0,2577	1,6084
30	0,2109	0,3277	1,3667
40	0,0757	0,3671	1,1016
45	0,0333	0,3774	0,9667

Il est clair que la surface de glissement doit être comprise dans le massif, c'est à dire que la hauteur de la zone en rupture :

$$h = \frac{B\cos(\pi/4 + \varphi/2)}{1 - \cos(\pi/4 + \varphi/2)} \tag{1-21}$$

doit être inférieure à *C*.

Cette méthode présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte la hauteur de l'ouvrage, ni une éventuelle pression de surface.

1.3.1.4 La méthode de Protodyakonov

La méthode de Protodyakonov est basée sur l'analyse de l'effet de voûte mobilisé dans le massif encaissant. Cet effet de voûte est modélisé par l'équilibre d'une ligne AB (figure 1-8) où les efforts dus au chargement vertical agissant le long de cette ligne correspondent à des efforts de compression.

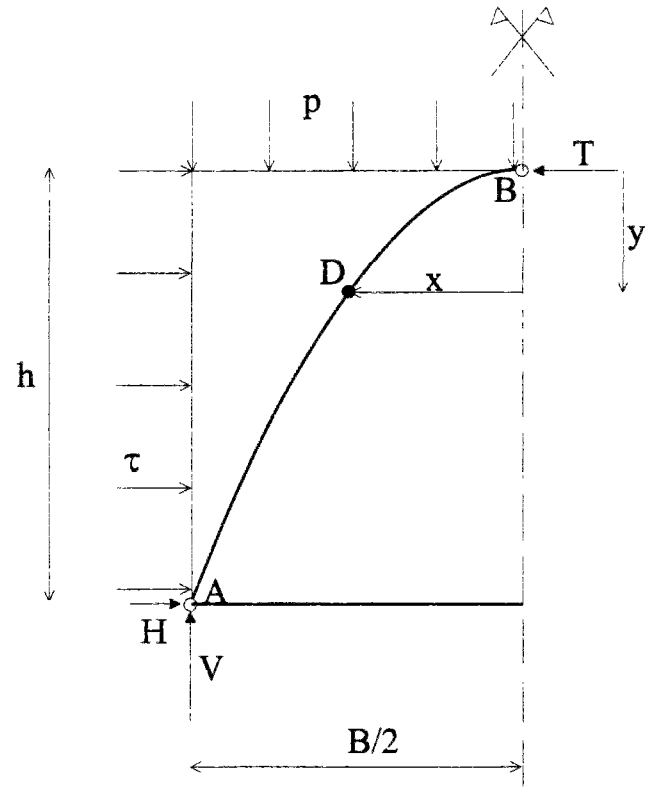


Figure 1-8. Hypothèses de la méthode de Protodyakonov.

L'équation de l'arc AB peut être déduite à partir de l'équilibre des moments par rapport à un point D de ce même arc. On obtient :

$$Ty = \frac{px^2}{2} \tag{1-22}$$

En considérant qu'au point A la composante horizontale de la réaction sur l'arc, H, est telle que les déplacements horizontaux en ce point sont empêchés par la composante de frottement dans le plan AA_{sym} associée à l'effort vertical V, on peut écrire :

$$H = Vf \tag{1-23}$$

avec $V=pB/2$ et $f = \tan\varphi$. Cette méthode tient compte d'une réserve de sécurité vis-à-vis des déplacements horizontaux du point A, due à la résistance au cisaillement du massif, τ. Ceci revient à écrire H sous la forme :

$$H = pBf/2 - h\tau \tag{1-24}$$

En remplaçant ces valeurs dans l'équation générale de la parabole (1-22), pour x=B/2 et y=h, on obtient :

$$\tau = \frac{pB(4fh - B)}{8h^2} \tag{1-25}$$

La hauteur h de la parabole peut être obtenue en dérivant (1-25) par rapport à h, ce qui permet de trouver la valeur maximale de τ :

$$h = \frac{B}{2f} \tag{1-26}$$

En reportant cette expression dans (1-25), (1-24) et dans l'équation de la parabole, on obtient l'expression de la surface de la parabole :

$$S_P = \frac{2}{3}Bh \tag{1-27}$$

La méthode suppose que le bloc délimité par la parabole doit être supporté par l'ouvrage, c'est à dire que la pression uniforme à exercer au niveau de l'ouvrage est égale à :

$$\sigma_T = \frac{2}{3}h\gamma = \frac{B\gamma}{3f} \tag{1-28}$$

Cette formule est évidemment applicable aux matériaux purement frottants. Pour le cas des matériaux frottants et cohérents, on doit remplacer la valeur de f par :

$$f = \tan\varphi + \frac{c}{\sigma_c} \tag{1-29}$$

où σ_c désigne la résistance à la compression simple. Les valeurs de ce coefficient sont données dans le tableau 1-2 pour différents types de sols.

Tableau 1-2. Valeurs de f pour la méthode de Protodyakonov.

Type de sol	facteur f
Argile dure	1,5
Argile dense	1
Loess,	0,8
Sable	0,6
Sol avec végétaux, sable humide	0,5
Silt, sols de consistance liquide	0,3

L'expérience soviétique a montré que la méthode de Protodyakonov pouvait être considérée comme fiable pour des profondeurs situées entre $\frac{B}{2\tan\varphi}$ et $\frac{B}{\tan\varphi}$. Mais, comme le note Sczéchy(1966), cette approche présente deux difficultés.

La première est que la hauteur de l'arc varie de façon linéaire avec la largeur de l'ouvrage, alors qu'on pourrait s'attendre à une relation plus complexe, englobant d'autres paramètres géométriques.

La deuxième est que les valeurs données pour le facteur f sont peu précises et peuvent, dans certaines circonstances, être sélectionnées dans des fourchettes relativement larges.

Nous pensons que le premier problème résulte de simplifications dans la construction de l'arc. Il semblerait souhaitable de prendre en compte aussi la pression horizontale dans l'équation de l'arc (qui ne se réduirait plus alors à une parabole). D'autre part, l'hypothèse que la résistance au cisaillement est uniforme sur tout l'arc ne paraît pas justifiée ; en réalité, le cisaillement devrait être nul au sommet de l'arc par des raisons de symétrie.

En ce qui concerne le facteur f, l'expression retenue pour tenir compte de la cohésion des terrains paraît discutable. L'expression (1-29) peut être réécrite sous la forme :

$$f = \tan\varphi + \frac{c}{\sigma_c} = \frac{1+\sin\varphi}{2\cos\varphi} \qquad (1\text{-}30)$$

expression qui ne dépend pas de la valeur de la cohésion.

Il est clair aussi que dans cette méthode, comme dans la précédente, la hauteur de l'ouvrage n'a pas d'influence sur la stabilité de l'ouvrage. On peut à ce sujet noter que, par exemple, Cornejo (1989) utilise la valeur B_1 de la figure 1-4 pour la largeur, contournant ainsi cette insuffisance de la méthode.

1.3.1.5 Estimation empirique de la pression s'exerçant sur le toit de l'ouvrage

Terzaghi (1977) a proposé une formule empirique, issue de ses expériences sur des sables. Elle est aussi basée sur le concept de création d'un arc de décharge au-dessus l'ouvrage. Les hypothèses correspondantes sont présentées dans la figure 1-9.

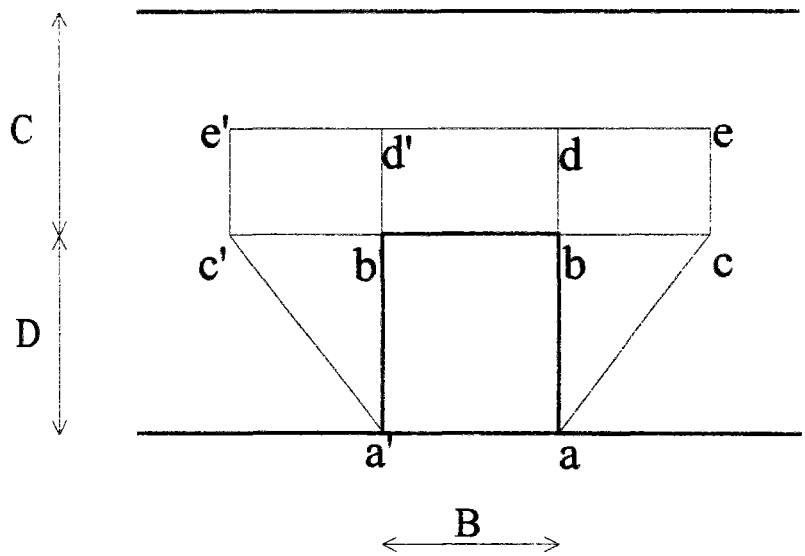


Figure 1-9. Définition des zones à supporter par l'ouvrage selon Terzaghi (1977).

La zone cbde (et son symétrique) est supportée par la zone abc (et son symétrique), tandis que la zone bdd'b' doit être supportée par le revêtement du toit du tunnel.

La hauteur maximale de la zone délimitée par cee'c' est prise égale à 0,69(B+D), pour des sables denses ou lâches secs, tandis que, pour le cas des ouvrages sous la nappe phréatique, cette valeur est pratiquement doublée. La pression à supporter au niveau du toit de l'ouvrage sera ainsi simplement la pression due au bloc bdd'b'.

1.3.1.6 Influence du temps sur la stabilité

La stabilité du massif est clairement soumise à l'influence du temps. S'il est usuel de considérer qu'en général les problèmes de stabilité dans les matériaux peu perméables se posent à court terme, des effets différés peuvent être à prendre en compte dans le cas des tunnels, du fait des variations des pressions interstitielles induites par les travaux (Samarasekera et Eisenstein, 1992 ; Atwa, 1996).

Eisenstein et Samarasekera (1992) ont étudié cette influence à partir d'un calcul de stabilité, prenant des lignes verticales comme lignes de glissement. Le mécanisme utilisé peut être vu sur la figure 1-10. C'est un mécanisme issu des travaux de Davis et al. (1980) pour le cas d'une analyse à court terme dans les matériaux purement cohérents.

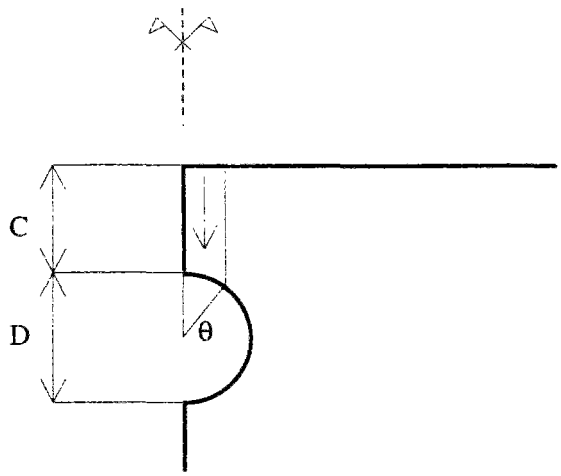


Figure 1-10. Schéma géométrique des calculs d'Eisenstein et Samarasekera (1992).

La distribution des contraintes effectives est calculée à un moment donné et le coefficient de sécurité est calculé en considérant la configuration la plus défavorable. La variation des contraintes effectives dans le temps se traduit par le changement du coefficient de sécurité, permettant aux auteurs de conclure que, au moins pour les tunnels peu profonds creusés dans des argiles surconsolidées, le coefficient de sécurité diminue avec le temps.

L'article d'Eisenstein et Samarasekera (1992) présente, de notre point de vue, l'intérêt de montrer qualitativement qu'une analyse à court terme peut ne pas suffire dans certains cas de terrains argileux. Par contre, les valeurs présentées pour la stabilité des cas étudiés soulèvent quelques questions. Les auteurs eux-mêmes notent que le mécanisme utilisé n'est pas une idéalisation parfaite de la rupture mais simplement un point de départ pour la compréhension du phénomène. En réalité, le mécanisme de Davis et al. (1980) donne les meilleurs résultats pour des profondeurs relatives nettement inférieures à celles étudiées par Eisenstein et Samarasekera (1992) et pour des matériaux caractérisés par un critère de Tresca, dont le schéma de rupture est éloigné de celui des matériaux caractérisés par un critère de Mohr-Coulomb.

1.3.2 Calcul de la stabilité du front de taille

On décrit ici les méthodes utilisées pour estimer la pression de soutènement à exercer sur le front de taille pour pouvoir garantir sa stabilité. Les deux premières méthodes correspondent à des matériaux obéissant à un critère de Tresca, tandis que les suivantes considèrent un matériau de type Mohr-Coulomb.

1.3.2.1 Méthode de Proctor et White (1977)

La progression du front de taille se traduit par une baisse progressive du confinement horizontal du terrain situé en avant du front et un chargement de ce massif. Néanmoins, la pression agissant dans cette partie du massif est inférieure à celle qui résulterait du seul poids des terres, car la résistance au cisaillement du terrain a tendance à reporter une certaine partie de ce poids sur les zones de terrain adjacentes.

La redistribution des charges (conduisant à la création de demi-voûte) est obtenue en considérant des surfaces de cisaillement maximal. Ces surfaces sont idéalisées par des plans supposés verticaux et situés à la distance $H/\cos(\pi/4)$ de la partie inférieure du front de taille (figure 1-11). On remarque que, dans le plan du front de taille, la résistance au cisaillement des terrains n'est pas prise en compte dans les calculs : on considère que la résistance du sol au cisaillement a déjà été mobilisée dans cette partie du massif en raison des tassements occasionnés par l'arrivée du tunnel.

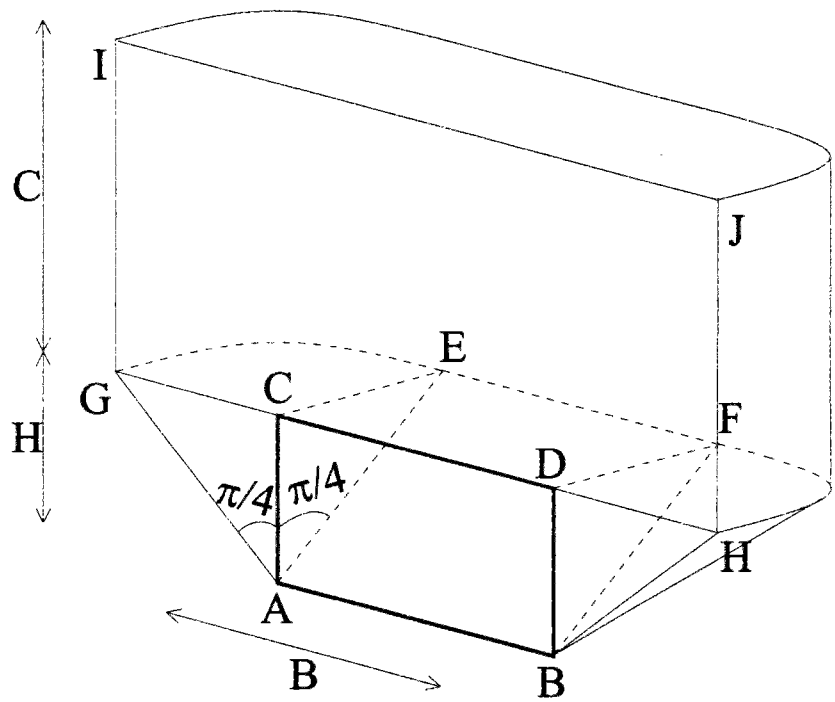


Figure 1-11. Schéma pour la méthode Proctor et White (1977).

On peut donc calculer la pression des terrains sur la surface GEFHG comme la différence entre le poids des terrains du bloc sus-jacent et la résistance mobilisable par frottement sur la surface obtenue par projection verticale de la ligne GEFH.

La pression due au poids du terrain peut se mettre sous la forme :

$$P_\gamma = \gamma C\left(BH + \frac{\pi H^2}{2}\right) \tag{1-31}$$

Cette méthode ayant été développée pour des terrains purement cohérents, la résistance mobilisable est égale à :

$$R = c_u C(\pi H + B) \tag{1-32}$$

On en déduit la pression de soutènement du tunnel :

$$p = \frac{P_\gamma - R}{BH + \frac{\pi H^2}{2}} \tag{1-33}$$

En fonction du rapport entre la pression p et la résistance à la compression simple σ_c du terrain, différentes mesures sont à envisager. Les auteurs préconisent que, pour des valeurs inférieures à 0,5, après un court délai, tous les mouvements dans le front seront maîtrisés et la stabilité sera assurée. Pour des valeurs du rapport p/σ_c situées entre 0,5 et 1, on pourra s'attendre à un mouvement (modéré), du front, qui nécessite l'utilisation d'un soutènement. Enfin, pour des valeurs de p/σ_c égales ou supérieures à 1, il y a instabilité.

Dans les cas où la valeur de p/σ_c n'est pas satisfaisante, une pression de soutènement est à prévoir pour éviter les problèmes d'instabilité du front de taille. Le calcul de cette pression doit être fait selon les auteurs en ajustant la valeur du rapport

$$\frac{p - \sigma_T}{\sigma_c} \tag{1-34}$$

où σ_T est la pression de confinement du front de taille, à 0,5.

1.3.2.2 Méthode d'Ellstein (1986)

Une autre méthode a été proposée par Ellstein (1986) pour des tunnels en terrain purement cohérents. L'ouvrage est supposée de forme carrée et creusé sous une couverture C.

Ellstein (1986) admet que la pression maximale que peut supporter le terrain situé en partie supérieure devant le front de taille est égale à $(2+\sqrt{2})c_u$. Cette valeur peut être obtenue en écrivant l'équilibre du coin représenté sur la figure 1-12, avec $R_C = c_u D^2\sqrt{2}$ et $R_L = \frac{c_u D^2}{2}$.

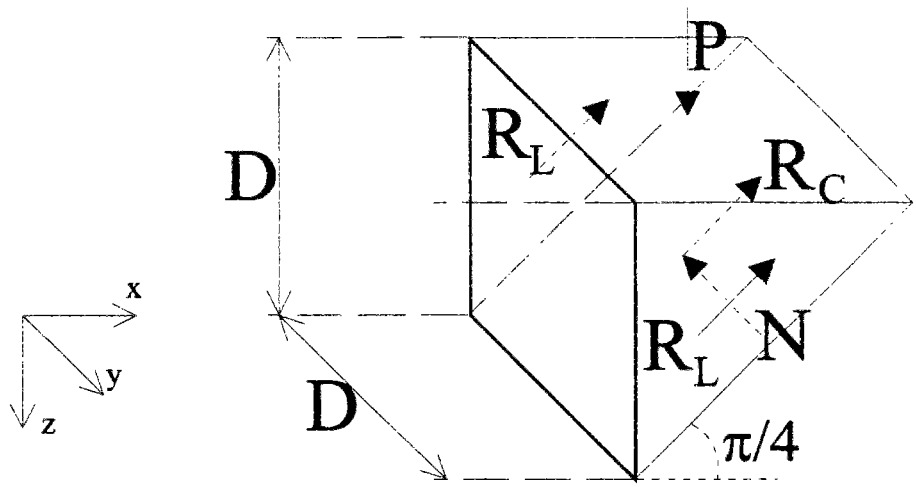


Figure 1-12. Equilibre de coin pour la méthode de Ellstein.

A l'approche du front, la contrainte verticale maximale au niveau de la clef du tunnel décroît jusqu'à la valeur $(2+\sqrt{2})c_u$. En utilisant l'expression du critère de rupture de Tresca, on peut écrire :

$$\sigma_h - \sigma_v = 2c_u \tag{1-35}$$

$$K_0\gamma C - (2+\sqrt{2})c_u = 2c_u \tag{1-36}$$

où C désigne la couverture des terrains au-dessus du tunnel.

Ellstein (1986) considère aussi deux autres termes : le premier prend en compte le poids du coin de terrain situé devant le tunnel, le deuxième tient compte de l'effet d'une masse de terrain de forme pyramidale sous-jacente au coin. L'équilibre du coin fournit l'expression de la pression admissible en clef, qui est égale à $(2+\sqrt{2})c_u-\gamma D/2-\gamma D/6$, ce qui amène à réécrire l'équation (1-36) sous la forme :

$$K_0\gamma C - \left[\left(2+\sqrt{2}\right)c_u - \gamma D/2 - \gamma D/6\right] = 2c_u \tag{1-37}$$

Ainsi, la valeur minimale de la cohésion nécessaire pour garantir la stabilité de l'ouvrage est égale à :

$$c_u = \frac{K_0\gamma C + \frac{2}{3}\gamma D}{4+\sqrt{2}} \tag{1-38}$$

L'introduction d'une pression de soutènement uniforme dans le tunnel, σ_T, augmente la pression verticale maximale permise en partie supérieure de l'ouvrage jusqu'à $(2+\sqrt{2})c_u + \sigma_T$. En injectant cette dernière valeur dans l'équation (1-35), on peut obtenir pour la pression de soutènement à exercer sur le front de taille la valeur :

$$\sigma_T = K_0 \gamma C + \frac{2}{3}\gamma D - c_u\left(4+\sqrt{2}\right) \qquad (1\text{-}39)$$

Cette méthode soulève quelques commentaires.

Premièrement, le critère de Tresca ne peut être appliqué aux contraintes verticale et horizontale que si ces dernières correspondent aux contraintes principales et qu'elles ne sont pas soumises à des changements de direction à l'approche de l'ouvrage. D'autre part, remplacer σ_h par $\gamma C K_0$ dans l'équation (1-35) revient à dire que la contrainte verticale est égale à γC, alors que cette contrainte est posée égale à $(2+\sqrt{2})c_u$ dans la même équation.

Enfin, la prise en compte, dans l'équilibre du coin, du poids d'un bloc de terrain de forme pyramidale posé sur le coin ne paraît pas satisfaisante : en réalité, utiliser le poids de la zone supérieure pour déterminer quelle est la pression que cette zone peut exercer nous paraît contradictoire.

Ellstein (1986) a comparé les résultats obtenus en utilisant sa méthode avec une formule empirique déduite des résultats expérimentaux de Kimura & Mair (1981), en prenant K_0=0,5. La concordance entre les résultats est bonne, mais il faut noter que Kimura & Mair (1981) ne font aucune référence à la valeur de K_0, paramètre déterminant de la méthode de Ellstein (1986).

1.3.2.3 Méthode d'Anagnostou et Kovári (1994, 1996,1996a)

Cette méthode est basée sur deux idées fondamentales : la première est que la pression agissant au niveau de la clef de l'ouvrage peut être déduite de la formule de Terzaghi (1951) ; la deuxième est de considérer l'équilibre d'un coin de terrain situé devant le front de taille et soumis à différents efforts. Ces calculs s'appliquent également à des ouvrages situés en-dessous de la nappe phréatique, et peuvent inclure l'effet de l'écoulement d'eau vers le tunnel. Cependant, on ne présentera ici que le cas où cet écoulement est inexistant.

Le calcul de la pression au niveau de la clef du tunnel est obtenu à partir de la formule de Terzaghi (1951), adaptée à des conditions tridimensionnelles. Par simplification, le front de taille est assimilé à un carré de côté égal au diamètre du tunnel. Le schéma de glissement utilisé est celui préconisé par Horn (1961) et repris sur la figure 1-13. Le périmètre où sont mobilisés les efforts résistants au-dessus du tunnel est égal à $2D(1+\tan\beta)$ - longueur de la ligne CDEFC, tandis que la contrainte verticale s'exerce sur une surface égale à $D^2\tan\beta$ - surface du quadrilatère CDEF. L'équation (1-7) se réécrit par conséquent sous la forme :

$$\sigma_v = \frac{R\gamma - c}{K\tan\varphi}\left(1 - e^{-\frac{C}{R}K\tan\varphi}\right) + \sigma_s e^{-\frac{C}{R}K\tan\varphi} \tag{1-40}$$

avec $R = \frac{D\tan\beta}{2(1+\tan\beta)}$. On note que, au contraire de la méthode de Proctor et White (1977), on prend en compte la résistance de la surface située dans le plan du front de taille.

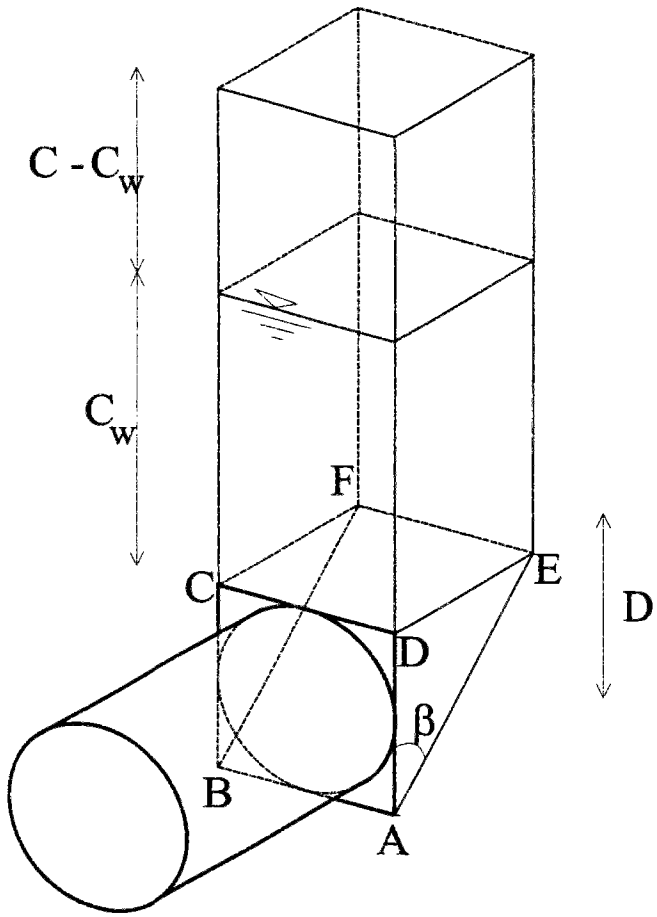


Figure 1-13. Schéma du mécanisme de glissement selon Horn (1961).

Dans le cas où l'ouvrage est creusé sous une nappe phréatique, la pression au niveau de cette nappe est calculée à partir de l'expression :

$$\sigma_{NP} = \frac{R\gamma_d - c}{K\tan\varphi}\left(1 - e^{-\frac{C-C_w}{R}K\tan\varphi}\right) + \sigma_s e^{-\frac{C-C_w}{R}K\tan\varphi} \tag{1-41}$$

et la pression au niveau de la clef de l'ouvrage vaut :

$$\sigma_{CT} = \frac{R\gamma' - c}{K_w\tan\varphi}\left(1 - e^{-\frac{C_w}{R}K_w\tan\varphi}\right) + \sigma_1 e^{-\frac{C_w}{R}K_w\tan\varphi} \tag{1-42}$$

où C désigne la couverture totale du tunnel, C_w la couverture sous la nappe phréatique, K le rapport entre les contraintes horizontale et verticale dans le terrain situé au-dessus de la nappe

phréatique et K_w le rapport entre les contraintes horizontale et verticale dans le terrain situé en dessous de la nappe phréatique. Une présentation légèrement différente de cette méthode est donnée par Anagnostou et Kovári (1994) mais elle présente l'inconvénient de s'appuyer sur un raisonnement linéaire, non applicable à la formule de Terzaghi (1951). C'est pourquoi nous avons retenu la présentation d'Anagnostou et Kovári (1996), qui paraît plus satisfaisante. Dans le cas où un écoulement se produit vers le front de taille, la formule s'altère légèrement, car il faut inclure les forces provenant des gradients hydrauliques. Bien sûr, les gradients hydrauliques doivent dans ce cas être déterminés numériquement dans l'ensemble du massif, préalablement à l'analyse de stabilité.

L'équilibre du coin est basée sur les hypothèses de distribution des efforts préconisée par la norme allemande DIN-4126 (1986) pour le calcul des parois moulées (figure 1-14).

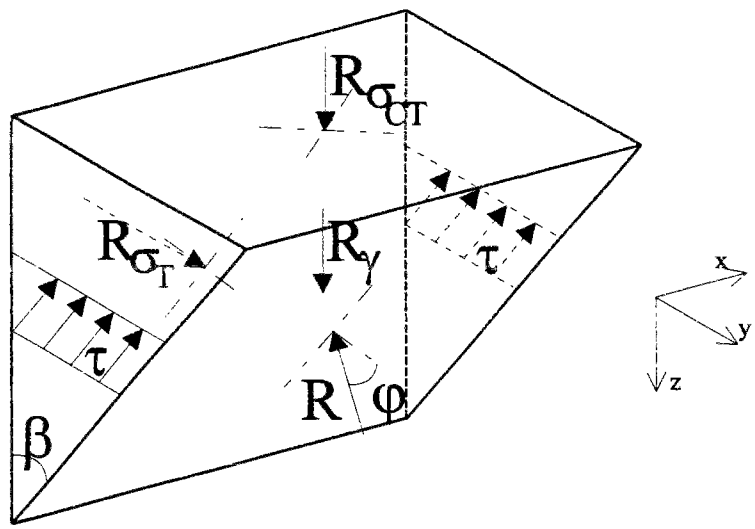


Figure 1-14. Equilibre du coin selon Anagnostou et Kovári (1994)

Dans la figure 1-14, R_{σ_T} désigne la résultante de la pression de soutènement, $R_{\sigma_{CT}}$ la résultante de la pression verticale, R_γ la résultante du poids volumique du coin et τ le cisaillement sur les parois latérales du coin. La valeur de τ est calculée à partir des indications de la norme DIN-4126 (1986). Sa valeur est égale à :

$$\tau = c + \sigma_H \tan\varphi \qquad \text{avec} \quad \sigma_H = \left[\sigma_{CT}\frac{(D-z)}{D} + \gamma z\right]K_0 \qquad (1\text{-}43)$$

ce qui donne une résistance au cisaillement moyenne sur les surfaces latérales du coin situé devant le front de $\tau_{moy} = c + K_0\left(\frac{\gamma D}{3} + \frac{2\sigma_{CT}}{3}\right)\tan\varphi$.

La valeur de K à utiliser dans les différentes formules soulève quelques questions. A partir des résultats d'essais réalisés par Gudehus et Melix (1986) et Melix (1987), Anagnostou et Kovári (1994) préconisent une valeur de K égale à 0,8 dans les terrains situés au-dessus de la nappe phréatique. Pour les terrains en-dessous de la nappe, la valeur de K est prise égale à la moitié de la valeur précédente, c'est à dire 0,4. Par contre, Anagnostou et Kovári (1996) n'utilisent plus le niveau de la nappe comme frontière pour différencier les zones de différentes valeurs de K ; dans ce dernier travail, la différentiation entre les différentes valeurs de K est faite entre les zones situées au-dessus et en-dessus de la clef du tunnel, les valeurs utilisées auparavant étant maintenues.

La démarche décrite ci-dessus permet d'obtenir une estimation de la pression de soutènement qui équilibre le système, pour un angle β donné (figure 1-14). La pression de soutènement à appliquer est égale au maximum des pressions obtenues en faisant varier l'angle β.

Jancsecz et Steiner (1994) utilisent les mêmes principes que la méthode précédente : calcul de la pression verticale sur le coin à partir de la formule de Terzaghi et maximisation de la pression de soutènement par rapport à l'angle β.

1.3.2.4 La méthode de Mohkam et Wong (1989)

Dans cette méthode, la pression verticale au niveau de la clef est calculée en utilisant la formule originale de Terzaghi (1951) pour le cas bidimensionnel. L'adaptation tridimensionnelle de cette formule, faite par Anagnostou et Kovári (1994, 1996) et Jancsecz et Steiner (1994) n'est pas utilisée ici.

Le traditionnel équilibre de coin utilisé dans les méthodes précédentes est remplacé par l'équilibre d'un solide de forme géométrique inconnue a priori. Une fonctionnelle traduisant la résistance au cisaillement est minimisée par rapport aux différents paramètres définissant la surface de glissement, avec les restrictions sur l'équilibre (bilan des forces et des moments nul) introduites sous la forme de restrictions de Lagrange.

Il faut noter que, au contraire de ce que certains auteurs ont l'habitude d'écrire, la représentation de la surface de glissement de la méthode de Mohkam et Wong (1989), reprise sur la figure 1-15, ne doit pas être entendue comme une surface réelle de glissement : la spirale logarithmique représentée sur la figure 1-15 est le résultat d'un changement de

coordonnées, et ne peut donc pas signifier autre chose qu'une visualisation mathématique de la surface de glissement.

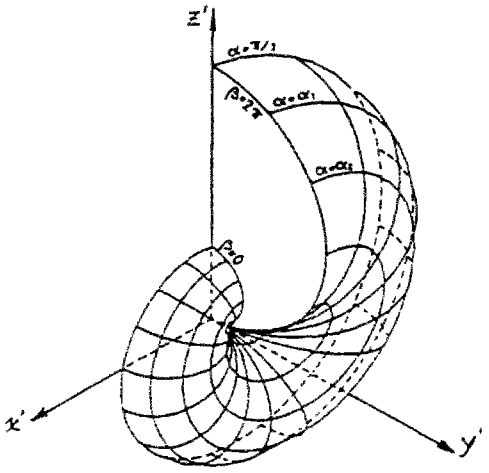


Figure 1-15. Représentation de la surface de glissement de la méthode de Mohkam et Wong (1989)

L'analyse est effectuée en termes de contraintes effectives et peut ainsi traiter l'éventuelle présence d'une nappe phréatique.

Des résultats de calcul sont présentés par Mohkam et Wong (1989), mais les comparaisons sont difficiles à faire à cause de l'absence de certains paramètres dans leur exposé.

1.3.2.5 Méthode de Murayama

La méthode de Murayama, décrite par Péra (1985), repose sur les mêmes principes fondamentaux que les approches précédentes : estimation de la pression des terres au niveau de la clef du tunnel et équilibre de la masse des terres située devant l'ouvrage.

Selon Péra (1985), la pression des terres peut être calculée dans les cas des tunnels sous faible couverture comme égale à la contrainte géostatique. Dans les cas où un effet de voûte peut se développer, les formules de Terzaghi (1951) ou de Protodyakonov peuvent être utilisées.

La surface de glissement utilisée est constituée d'une spirale logarithmique, dont la tangente fait un angle de $\pi/2-\varphi$ avec le rayon vecteur, r_θ, et qui se développe entre la partie inférieure de l'ouvrage et le niveau de la clef du tunnel (figure 1-16), l'angle entre les rayons extrêmes r_s et r_i étant égal à $\pi/4-\varphi/2$

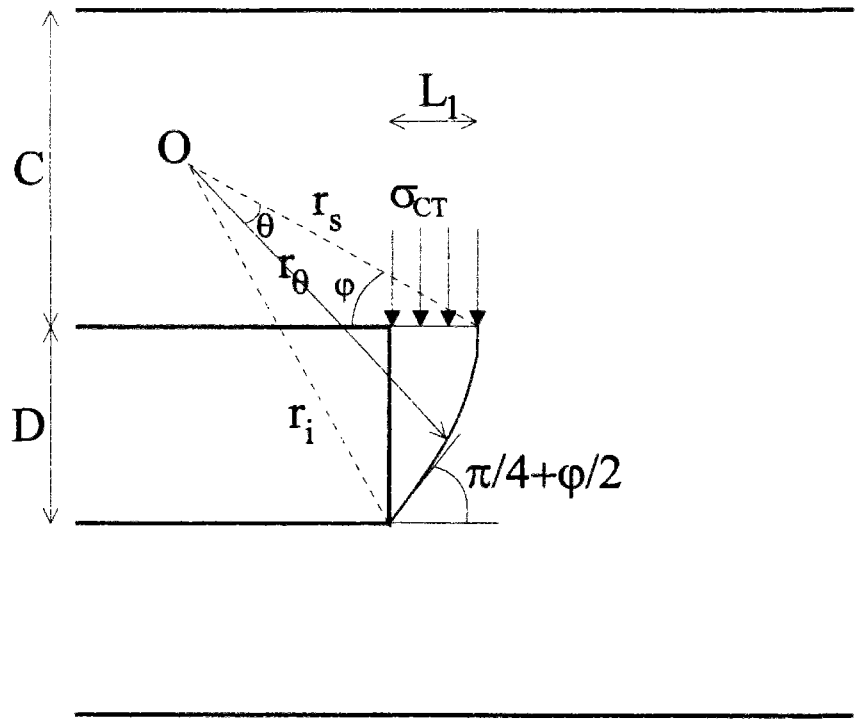


Figure 1-16. Schéma de la méthode de Murayama.

Les paramètres géométriques de la spirale sont déduits de l'expression de la spirale $r_\theta = r_s \exp(\theta \tan\varphi)$. On en déduit les expressions du diamètre D et de la profondeur L_1 :

$$D = r_s\left[\sin(\pi/4+\varphi/2)e^{\tan\varphi(\pi/4-\varphi/2)} - \sin\varphi\right] \tag{1-44}$$

et

$$L_1 = r_s\cos\varphi - r_i\cos(\pi/4+\varphi/2) \tag{1-45}$$

La pression de soutènement au front de taille est obtenue en écrivant l'équilibre des moments par rapport au point O. On remarque que, du fait que la tangente de la spirale fait un angle de π/2-φ avec le rayon vecteur, toute force appliquée sur la surface de glissement, et faisant un angle φ avec celle-ci se traduit par un moment nul. L'équilibre des moments s'écrit ainsi sous la forme :

$$R_{\sigma_T}L_{\sigma_T} = R_\gamma L_\gamma + R_{\sigma_{CT}}L_{\sigma_{CT}} - c\frac{r_i^2 - r_s^2}{2\tan\varphi} \tag{1-46}$$

où $L_{\sigma_T}, L_\gamma, L_{\sigma_{CT}}$ désignent les bras de levier des différentes résultantes. La résolution de l'équation (1-46) conduit à une estimation de la pression à appliquer sur le front de taille.

Cette méthode combine à la fois deux types d'approches bidimensionnelles, mais selon deux directions perpendiculaires. Le calcul de la pression au niveau de la clef du tunnel utilise les formules de Terzaghi (1951) ou de Protodyakonov, en considérant que l'ouvrage est très

long suivant l'axe du tunnel, et en écrivant l'équilibre de la spirale, en supposant qu'on peut prendre des conditions de déformation plane selon la direction perpendiculaire à l'axe de l'ouvrage.

1.4 Quelques résultats issus du calcul à la rupture et de l'analyse limite

1.4.1 Introduction

Etant donné que le calcul à la rupture et l'analyse limite seront présentés dans le prochain chapitre, on ne fera ici qu'une présentation de quelques résultats issus de calculs utilisant ces principes.

Le calcul à la rupture permet de calculer des bornes supérieures et inférieures des chargements potentiellement supportables par une structure, à partir de la simple connaissance de ses propriétés de résistance et de sa géométrie. Les bornes supérieures sont normalement liées à une méthode qu'on appellera cinématique ou par l'extérieur et les bornes inférieures à une méthode désignée par statique ou par l'intérieur.

Différents travaux ont été effectués au cours des 25 dernières années sur la stabilité des ouvrages souterrains, sur la base de cette approche. Cette section présente quelques résultats obtenus pour les bornes supérieures et inférieures des chargements potentiellement supportables. Dans un premier temps, on donne une vision générale des résultats et conclusions obtenus, tandis que, dans un deuxième temps, on donne quelques valeurs des bornes les plus proches de résultats d'essais.

1.4.2 Matériaux régis par un critère de Tresca

De notre point de vue, la première analyse complète en termes de bornes inférieure et supérieure des chargements supportables pour des tunnels creusés en terrains cohérents à faible profondeur a été présentée par Davis et al. (1980). Des résultats intéressants ont été obtenus en géométrie bidimensionnelle, surtout pour les plus faibles valeurs du rapport C/D. Ces bornes ont été améliorées plus tard par les travaux de Sloan et Assadi (1993), qui ont étudié de nouveaux mécanismes et mis en oeuvre des outils numériques pour la détermination des bornes inférieures et supérieures.

Ces travaux ont permis de mettre en évidence clairement la dépendance du facteur N par rapport à la profondeur relative et montré que les valeurs critiques de ce facteur pourraient être inférieures aux limites préconisées par Broms et Bennermark (1967) ou Peck (1969), aux faibles profondeurs.

Ils ont également montré qu'une pression de soutènement uniforme pouvait ne pas être suffisante pour empêcher certains mécanismes restreints de se produire au front de taille, en raison de l'influence déstabilisante du poids volumique du terrain.

En ce qui concerne le cas tridimensionnel, les bornes obtenues par Davis et al. (1980) ne permettent pas un encadrement très fin des conditions de stabilité. Des travaux postérieurs de Britto et Kusakabe (1985) et de Leca et Dormieux (1992), portant surtout sur l'approche par l'extérieur, n'ont pas permis d'améliorer les résultats de manière très significative. Leca et Dormieux (1992), en appliquant un critère de Tresca tronqué en traction aux cas des mécanismes de rupture locale, ont pu améliorer les bornes existantes pour ce type de rupture et ont suggéré que l'écart constaté entre les bornes supérieures et inférieures pouvait résulter d'une surestimation des capacités de résistance en traction du terrain dans les calculs cinématiques.

1.4.3 Matériaux régis par un critère de Mohr-Coulomb

Le cas des matériaux régis par un critère de Mohr-Coulomb a été traité, du point de vue de l'analyse limite, par Atkinson et Potts (1977), Mülhaus (1985), Chambon et Corté (1990), Leca et Panet (1988), Leca et Dormieux (1990).

Les travaux d'Atkinson et Potts (1977) ont permis de dégager des bornes inférieures et supérieures pour le cas d'un tunnel circulaire en section courante dans des matériaux purement frottants. Ces bornes ont donné un encadrement satisfaisant des résultats expérimentaux présentés par ces auteurs.

Chambon et Corté (1990) ont abordé le cas de la stabilité des tunnels creusés en terrains frottants et cohérents. Mais, au contraire des auteurs précédents, qui s'étaient intéressés à la stabilité d'un tunnel en section courante, Chambon et Corté (1990) ont étudié le cas d'une taille de mine de largeur infinie.

Les travaux de Leca et Panet (1988) et de Leca et Dormieux (1990) ont permis d'obtenir des bornes supérieures et inférieures pour la stabilité du front de taille d'un tunnel. Les résultats peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} Q_T = N_S^+ Q_S + N_\gamma^+ Q_\gamma \\ Q_T = N_S^- Q_S + N_\gamma^- Q_\gamma \end{cases} \tag{1-47}$$

où $Q_S = \left(K_p - 1\right)\frac{\sigma_S}{\sigma_c} + 1$, $Q_T = \left(K_p - 1\right)\frac{\sigma_T}{\sigma_c} + 1$, $Q_\gamma = \left(K_p - 1\right)\frac{\gamma D}{\sigma_c}$. Dans la définition précédente, K_p désigne le coefficient de butée et σ_c la résistance en compression simple du matériau. Dans l'expression (1-47), les exposants + et - affectant des coefficients N_S et N_γ correspondent respectivement aux bornes supérieure ou inférieure. Les valeurs des coefficients N_S et N_γ résultent de la minimisation des mécanismes proposés par Leca et Dormieux (1990) pour la borne supérieure et des champs de contraintes étudiés par Leca et Panet (1988) pour la borne inférieure.

Cette formulation, similaire à celle présentée d'habitude pour la capacité portante des fondations, présente néanmoins une différence conceptuelle importante : tandis que, dans le cas des fondations, ce type de formulation est normalement issu de la méthode de superposition, ce qui, comme l'a montré Matar (1978), conduit parfois à des résultats pour la capacité portante éloignés de la charge limite exacte, dans le cas de la formulation de Leca et Dormieux (1990) cette formulation donne des bornes précises pour la pression à appliquer sur le front de taille afin de garantir la stabilité de l'ouvrage. Malheureusement, l'écart entre ces bornes est parfois considérable. La comparaison avec les données expérimentales semble cependant confirmer la pertinence des bornes supérieures.

Les travaux de Leca et Dormieux (1990) ont permis aussi de mettre en évidence, et de confirmer d'un point de vue théorique, quelques résultats concernant la stabilité du front de taille, déjà entrevus auparavant pour le cas des tunnels en section courante, notamment pour ce qui est de la faible influence de la pression de surface σ_T et du rapport C/D sur la stabilité du front, à l'exception des cas de très faibles profondeurs (C/D ≤ 0,5).

1.4.4 Quelques résultats du calcul à la rupture concernant la stabilité des tunnels creusés en terrain meuble, à faible profondeur

Cette section rassemble quelques valeurs des bornes supérieure et inférieure des chargements potentiellement supportables par un tunnel creusé en terrain meuble.

Pour le cas des tunnels circulaires creusés en terrain purement cohérent, nous avons retenu les résultats de Sloan et Assadi (1993), présentés dans le tableau 1-3. Lorsque les deux bornes

sont positives, la rupture se produit lorsque la pression en surface dépasse la pression intérieure de la valeur indiquée (multipliée par la valeur de c_u). Dans le cas où les deux bornes sont négatives, la stabilité n'est assurée que pour une pression de soutènement égale à la somme de la pression en surface et de l'opposé de la valeur indiquée (multipliée par la valeur de c_u).

Ces auteurs donnent aussi des bornes pour le cas de terrains dont la cohésion varie uniformément avec la profondeur. Pour le cas des ouvrages carrés, le lecteur pourra se reporter aux travaux d'Assadi et Sloan (1990).

Tableau 1-3. Bornes supérieure et inférieure de la charge limite pour le cas des tunnels circulaires creusés en terrain purement cohérent (c_u = constante) d'après Sloan et Assadi (1993)

	Bornes inférieure et supérieure de $(\sigma_S - \sigma_T)/c_u$							
C/D	$\gamma D/c_u = 0$		$\gamma D/c_u = 1$		$\gamma D/c_u = 2$		$\gamma D/c_u = 3$	
1	2,27	2,55	1,08	1,37	-0,16	0,15	-1,60	-1,12
2	3,25	3,68	0,97	1,41	-1,40	-0,91	-3,87	-3,28
3	3,78	4,51	0,47	1,18	-2,95	-2,20	-6,49	-5,63
4	4,30	5,17	-0,08	0,80	-4,57	-3,61	-9,11	-8,08
5	4,65	5,67	-0,74	0,30	-6,20	-5,10	-11,80	-10,60

En ce qui concerne la stabilité du front de taille de tunnels creusés en terrain purement cohérent, les bornes supérieure et inférieure fournies (figure 1-17) sont celles proposées par Davis et al. (1980). Comme l'écart est très important, l'utilisation de ces bornes est délicate.

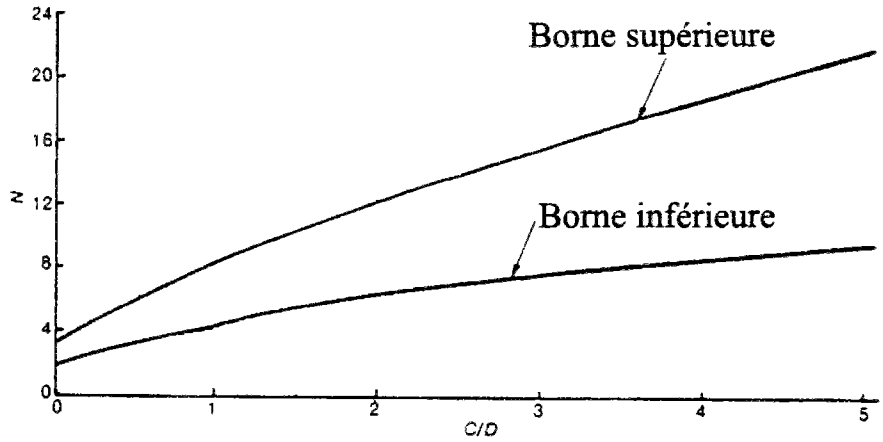


Figure 1-17. Bornes supérieure et inférieure pour la stabilité du front de taille de tunnels creusés en terrain purement cohérent (Davis et al ., 1980)

Pour le cas des terrains frottants en section courante, on dispose de plusieurs solutions proposées par Atkinson et Potts (1977).

Dans le cas où une forte surcharge est appliquée en surface, ce qui permet de négliger l'effet du poids volumique, la borne la plus représentative des essais est la borne inférieure :

$$\sigma_T = \sigma_S \left(1 + \frac{C}{D}\right)^{1-K_p} \tag{1-48}$$

Dans le cas où il n'y a pas de pression en surface, les résultats sont bien encadrés par les bornes supérieure

$$\frac{\sigma_T}{\gamma D} = \frac{1}{4\cos\varphi}\left(\frac{1}{\tan\varphi} + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \tag{1-49}$$

et inférieure

$$\frac{\sigma_T}{\gamma D} = \frac{K_p}{K_p^{\,2} - 1} \tag{1-50}$$

Enfin, pour le cas de la stabilité du front de taille des tunnels creusés en terrains frottants et cohérents, compte tenu de l'écart constaté entre les bornes inférieures et les résultats expérimentaux, on ne retiendra ici que les bornes supérieures fournies par Leca et Dormieux (1990). La figure 1-18 donne les valeurs des coefficients à appliquer dans l'équation (1-47), pour le calcul de la borne supérieure.

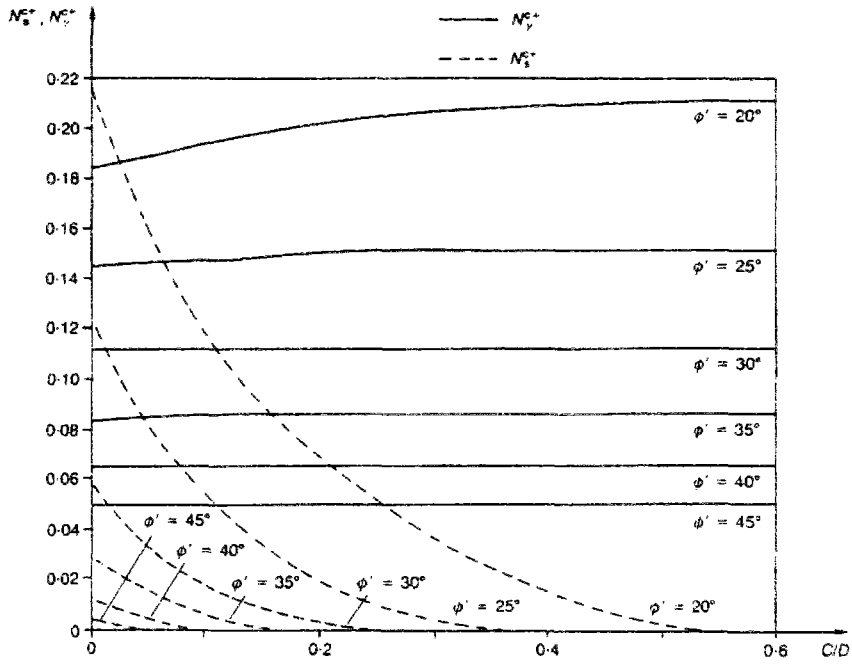


Figure 1-18. Coefficients N_γ^+ et N_S^+ de la méthode de Leca et Dormieux (1990)

1.5 Comparaison entre les différentes méthodes

Dans le but de mieux apprécier les limites des différentes approches présentées ci-dessus, une comparaison a été effectuée. On a pu constater une énorme dispersion des résultats obtenus avec les différentes méthodes, sur un cas concret, qui correspond à l'un des ouvrages projeté dans le cadre du prolongement des lignes TGV dans le sud-est de la France. Dans cette section, on donne ainsi une image des difficultés d'application pratique des différentes méthodes.

On va considérer d'abord les méthodes s'appliquant aux terrains purement cohérents, puis celles destinées aux terrains frottants et cohérents.

1.5.1 Comparaison entre les méthodes de Broms et Bennermark (1967), Proctor et White (1977) et Ellstein (1986).

Pour comparer les résultats des méthodes de Proctor et White (1977), Ellstein (1986) et l'approche proposée par Broms et Bennermark (1967), nous avons réécrit les différentes formulations sous les formes suivantes :

Proctor et White (1977) :

$$\frac{\sigma_T}{\gamma D} = \frac{C}{D} - \frac{c_u}{\gamma D}\left(1 + \frac{C}{D}\frac{1+\pi}{1+\frac{\pi}{2}}\right) \tag{1-51}$$

(en admettant que l'expression (1-34) est égale à 0,5).

Ellstein (1986) :

$$\frac{\sigma_T}{\gamma D} = \frac{C}{D} + \frac{2}{3} - \frac{c_u}{\gamma D}\left(4 + \sqrt{2}\right) \tag{1-52}$$

(en prenant K_0=1, dans l'expression (1-39)).

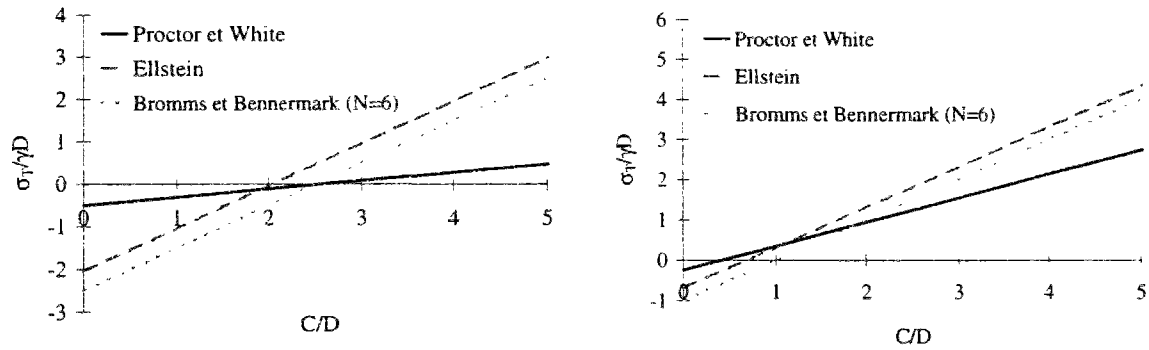
Broms et Bennermark (1967) :

$$\frac{\sigma_T}{\gamma D} = \frac{C}{D} + \frac{1}{2} - 6c_u \tag{1-53}$$

(en prenant N = 6 dans l'expression (1-2)).

Les similitudes entre ces expression sont claires. Dans les trois formules, on fait un bilan entre un terme dû au poids volumique du terrain et un autre terme provenant de sa cohésion non drainée. Les formules d'Ellstein (1986) et Broms et Bennermark (1967) conduisent à des résultats proches, qui seraient identiques si l'on retirait le poids du bloc de la pyramide dans la méthode d'Ellstein (1986), dans la mesure où la formule d'Ellstein (1986) serait alors égale à celle de Broms et Bennermark (1967) pour un N constant, égal à $4+\sqrt{2}$.

La figure 1-19 compare les résultats de ces méthodes pour deux valeurs différentes de $\gamma D/c_u$. On peut dire que, pour les valeurs étudiées de $\gamma D/c_u$, la rupture se produit pour des valeurs de la profondeur relative sensiblement égales, mais que des différences importantes peuvent apparaître dans l'estimation de la valeur de la pression de soutènement nécessaire pour assurer la stabilité du front.



a) $\gamma D/c_u=2$ b) $\gamma D/c_u=4$

Figure 1-19. Comparaison des méthodes de Broms et Bennermark (1967), de Proctor et White (1977) et d'Ellstein (1986) pour les matériaux purement cohérents.

1.5.2 Comparaison entre les méthodes pour matériaux frottants.

On présente ici une comparaison de résultats des méthodes applicables à des matériaux ayant un comportement frottant et cohérent.

On a repris pour cela un exemple traité par Anagnostou et Kovári (1996), qui concerne les essais effectués en centrifugeuse par Chambon et Corté (1994).

Il s'agit d'un tunnel circulaire de diamètre égal à 13m, le rapport C/D étant égal à 4. Le poids volumique est égal à 16,1 kN/m^3, l'angle de frottement utilisé est de 40° et la cohésion vaut 5 kPa.

On présente d'abord une comparaison des différentes méthodes en section courante. Comme la géométrie considérée généralement pour cette configuration est de forme rectangulaire, on étudie deux largeurs de voûte : la première correspond à un tunnel de forme carrée et la seconde aux hypothèses reprises sur la figure 1-20.

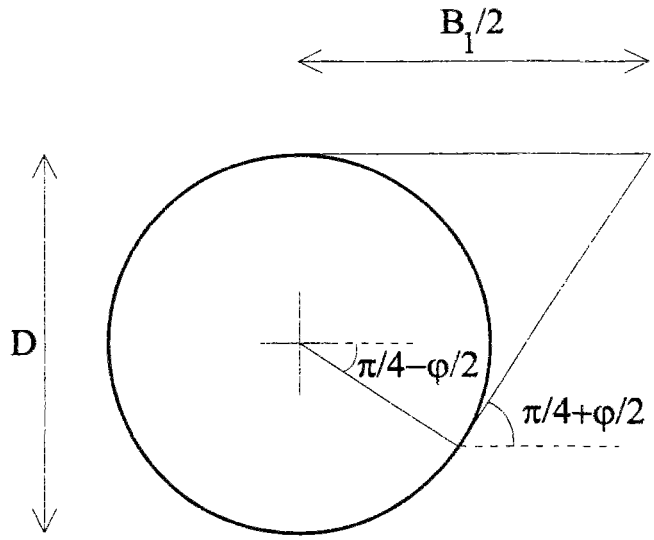


Figure 1-20. Schéma de calcul de B_1.

Pour le tunnel carré, nous avons utilisé pour les méthodes de Terzaghi (1951) et de Bierbäumer une largeur effective de $B_1 = D + 2D\tan(\pi/4 - \varphi/2)$, soit B_1=25,12 m. Pour les méthodes de Balla (1963) et Protodyakonov, nous avons aussi pris B_1 égal au diamètre, c'est à dire 13 m.

Avec les hypothèses de la figure 1-20, la valeur de B_1 est égale pour toutes les méthodes à :

$$B_1 = D\left[\frac{1+\sin(\pi/4-\varphi/2)}{\cos(\pi/4-\varphi/2)}\right], \qquad (1\text{-}54)$$

ce qui donne pour le cas présent B_1=20,41 m.

Les résultats donnés par les différentes approches sont reportés dans le tableau 1-4.

Tableau 1-4. Comparaison des valeurs des pressions fournies par les différentes méthodes (c=5 kPa, φ=40 degrés).

Méthode		Pression (kPa)
Terzaghi (K=1, B_l=25,12 m)		227,7
Terzaghi (K=1, B_l=20,41 m)		187,2
Bierbäumer	sans cohésion	448,0
B_l=20,41 m	avec cohésion	422,54
Bierbäumer	sans cohésion	521,0
B_l=25,12 m	avec cohésion	500,3
Balla (B_l=25,12 m)		206,3
Balla (B_l=20,41 m)		178,5
Balla (B_l=13 m)		134,7
Protodyakonov (B_l=25,12 m)		125,7
Protodyakonov (B_l=20,41 m)		105,2
Protodyakonov (B_l=13 m)		65,1

On peut constater la forte dispersion des résultats obtenus, avec des valeurs de σ_T comprises entre 65 kPa et 521 kPa.

D'autre part, pour un même méthode, les résultats peuvent être fortement influencés par les hypothèses faites sur la valeur de B_l.

Les formules d'Atkinson et Potts (1977), issues de l'analyse limite, fournissent un encadrement de la pression limite de soutènement, pour un cas géométrique similaire, mais dans un terrain sans cohésion, avec des valeurs comprises entre 21,8 et 47,8 kPa. En considérant l'effet de la cohésion, ces bornes devraient être encore plus basses, ce qui signifie

que c'est dans ce cas la méthode de Protodyakonov, avec un B_l =13 qui fournit la valeur de σ_T la plus proche de celle donnée par l'analyse limite. Malheureusement, cette valeur a été obtenue dans le cas où l'effet de la hauteur de l'ouvrage n'est pas pris en compte ; une valeur nettement supérieure aurait été obtenue en considérant une voûte équivalente, B_l= 20,41. D'autres aspects défavorables sont à signaler pour cette approche. Le tableau 1-5 donne les résultats correspondant à un ouvrage de caractéristiques géométriques identiques mais dans un terrain dont la cohésion serait de 50 kPa, c'est à dire 10 fois plus importante que dans le cas précédent et pour B_l=20,41 m.

Tableau 1-5. Comparaison des valeurs des pressions fournies par les différentes méthodes (c=50 kPa, φ=40 degrés).

Méthode		Pression (kPa)
Terzaghi (K=1, B_l=20,41 m)		134,3
Bierbäumer	sans cohésion	448,0
B_l=20,41 m	avec cohésion	193,24
Balla (B_l=20,41 m)		128,9
Protodyakonov (B_l=20,41 m)		105,2

Même si la valeur fournie par la méthode de Protodyakonov conduit aux valeurs les plus basses de σ_T, elle présente l'inconvénient de ne pas tenir compte de l'augmentation de la cohésion dans l'analyse de stabilité.

Le calcul de la stabilité du front de taille a été analysé par les méthodes d'Anagnostou et Kovári (1996) et de Murayama.

Cependant, comme dans la suite notre intention est de montrer les différences qui apparaissent quand on prend des hypothèses différentes pour l'équilibre du terrain situé devant le front de taille, nous avons choisi comme pression au niveau de la clef du tunnel, celle intervenant dans la méthode d'Anagnostou et Kovári (1996).

Pour calculer cette pression, on considère en première approche un angle $\beta=\pi/4-\varphi/2$ (figure 1-14), qui présente l'intérêt de ne pas être trop éloigné de la réalité, d'après les essais réalisés avec la méthode d'Anagnostou et Kovári (1996).

Le paramètre R est dans ce cas égal à 2,07 et, en supposant que K=0,8, on peut calculer la valeur de la pression verticale au niveau de la clef du tunnel P_T= 42,1 kPa.

A partir de cette valeur de la pression verticale, en considérant un K=0,4 au niveau du tunnel, on obtient pour la pression à exercer au front σ_T=12,3 kPa. Il faut noter que, en plus de la force de frottement, prévue par la norme DIN-4126 (1986), sur la surface inclinée du coin, on a aussi considéré une force résultant de la cohésion dans cette zone.

La méthode de Murayama, que nous avons programmée, conduit, par ailleurs, à une valeur σ_T =24,5 kPa.

Ces valeurs sont proches de celles obtenues dans les essais en centrifugeuse (13,4 kPa). Mais, même si la différence entre les valeurs fournies par les deux méthodes n'est pas importante, en termes absolus, on constate que les valeurs passent du simple au double, bien qu'on ait imposé la même valeur de pression au niveau de la clef. Sachant que certaines hypothèses utilisées, par exemple, par Anagnostou et Kovári (1996) doivent être ajustées de manière empirique, il est clair que les différentes méthodes peuvent conduire à de valeurs très différentes des pressions de soutènement en fonction des hypothèses retenues.

Il nous semble que cette dispersion peut conduire à retenir des valeurs de pressions de soutènement fournies par des formules très conservatrices, comme par exemple celle de Mori et al. (1991), simplement égale à la différence entre la pression des terres en repos et la pression fournie par le bouclier lui-même (exception faite des sols cohérents de caractéristiques très faibles).

Dans ces conditions, et même si cette présentation n'a pas été exhaustive, ni au niveau des méthodes existantes*, ni au niveau des calculs effectués, il paraît utile de pouvoir disposer d'un outil capable de fournir de bonnes bornes supérieures et inférieures de la charge limite.

---

* D'autres auteurs ont proposé des formulations différentes : Suquet (1920), Caquot et Kerisel (1956), Szechy (1966) ou Escatha et Mandel (1971), etc. Nous ne les avons pas présentées parce qu'elles n'apportaient pas d'informations supplémentaires par rapport aux méthodes analysées.

2ÈME CHAPITRE

MÉTHODE DE RÉGULARISATION EN ANALYSE LIMITE

2.1 Introduction

Le module LIMI du code de calcul par éléments finis CESAR-LCPC est conçu pour permettre l'étude de problèmes de stabilité par une méthode de régularisation en analyse limite.

Ce chapitre a pour objet de présenter la méthode de régularisation utilisée et sa mise en oeuvre dans le module LIMI. On rappelle, dans un premier temps, les fondements du calcul à la rupture et de l'analyse limite, puis la loi de Norton-Hoff utilisée dans cette approche et son application dans le calcul à la rupture et à l'analyse limite.

On décrit dans une deuxième partie la forme mathématique du problème mécanique qu'on se propose de résoudre, qui se ramène à la minimisation d'une fonctionnelle, puis on décrit la méthode de résolution et sa mise en oeuvre dans le cadre des éléments finis en mettant en évidence les modifications que nous avons apportées au module.

2.2 Calcul à la rupture et analyse limite

2.2.1 Introduction

La théorie du calcul à la rupture et de l'analyse limite permet de donner une estimation des conditions de stabilité d'un système mécanique, pour un domaine de résistance locale et un mode de chargement donnés.

Le calcul à la rupture permet de déterminer l'ensemble des chargements potentiellement supportables par une structure, à partir de la seule connaissance de son domaine de résistance local, de sa géométrie et de son mode de chargement. Deux approches complémentaires, les méthodes statique et cinématique, ont été développées pour la mise en oeuvre de cette théorie. L'introduction d'hypothèses supplémentaires sur le comportement du matériau constitutif de

la structure permet de garantir que les chargements potentiellement supportables mis en évidence par cette approche sont effectivement supportables par la structure (analyse limite).

2.2.2 Définitions et hypothèses préliminaires

On se donne une structure désignée par Ω, de contour Γ. Dans une partie de son contour Γ_u, on impose des déplacement nuls. La structure est soumise au chargement $(\underline{f}, \underline{T})$, où $\underline{f}$ désigne le chargement constitué par les forces volumiques et $\underline{T}$ le chargement associé aux contraintes imposées dans la partie Γ_T du contour Γ (complémentaire de Γ_u).

Le comportement mécanique du système Ω est représenté par un modèle élastique parfaitement plastique. À ce comportement, on associe un ensemble $\mathbf{G}(\underline{x})$, qui correspond au domaine de résistance du matériau constituant la structure, au point $\underline{x}$. Cet ensemble est convexe et contient strictement l'état de contraintes nul.

Le comportement du matériau est supposé élastique à l'intérieur du domaine $\mathbf{G}$* et les changements de géométrie peuvent être considérés comme négligeables. On suppose également que les chargements sont quasi-statiques et on considère comme négligeables les forces d'inertie. Dans ce cas, on rappelle qu'un chargement est dit statiquement admissible s'il vérifie les équations suivantes:

$$div\,\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = 0 \quad dans\ \Omega$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T} \quad dans \quad \Gamma_T$$

où Γ_T désigne la partie de la frontière soumise aux efforts $\underline{T}$, et $\underline{n}$ la normale au contour Γ_T.

2.2.3 Chargements potentiellement supportables

Un chargement $(\underline{f}, \underline{T})$ est potentiellement supportable s'il existe un champ de contraintes statiquement admissibles $\underline{\underline{\sigma}}$ équilibrant le chargement $(\underline{f}, \underline{T})$ et tel que $\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbf{G}$, $\forall\ \underline{x} \in \Omega$.

L'ensemble des chargements potentiellement supportables sera désigné par $\mathbf{K}$ dans la suite. Mécaniquement, la signification de $\mathbf{K}$ est la suivante: si un chargement n'appartient pas à $\mathbf{K}$, la ruine de la structure Ω est certaine sous ce chargement; par contre, si un chargement

---

* Par la suite et par simplification, on désignera $\mathbf{G}(\underline{x})$ par $\mathbf{G}$.

appartient à **K**, on ne peut rien affirmer sur la stabilité de la structure, sans avoir des précisions sur la loi de comportement du matériau (Salençon, 1983).

L'ensemble **K** a les mêmes propriétés de convexité que **G** et contient aussi le chargement nul. Les chargements appartenant à la frontière de **K** sont dits chargements extrêmes.

2.2.4 Détermination de l'ensemble K

La détermination analytique de **K** est en général impossible. Dans ces conditions, on essaye de donner un encadrement de cet ensemble, à partir des approches dites statique et cinématique, qui conduisent respectivement à la mise en évidence de bornes inférieures et supérieures de l'ensemble **K**.

2.2.4.1 Approche statique

Le théorème statique, qui conduit à une approche de **K** par l'intérieur, est inspiré directement de la définition de chargement potentiellement supportable. Il peut être énoncé comme suit:

S'il existe un champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ dans la structure Ω équilibrant le chargement $(\underline{f}, \underline{T})$, statiquement admissible et tel que $\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbf{G}$, alors la structure est potentiellement stable sous ce chargement.

L'approche statique basée sur ce théorème consiste à mettre en évidence des champs de contraintes statiquement admissibles respectant le critère de résistance. Cette méthode permet d'approcher l'ensemble **K** par l'intérieur. L'ensemble résultant de cette approche sera désigné par $\mathbf{K}_{stat}$. Il faut remarquer que, du fait de la convexité de $\mathbf{K}_{stat}$, toute droite reliant des chargements potentiellement supportables est aussi contenue dans l'ensemble des chargements potentiellement supportables.

Cette méthode est néanmoins d'application pratique difficile, en raison de la difficulté à exhiber des champs de contraintes statiquement admissibles, appartenant au convexe **G**. Cependant, quelques travaux (Lysmer, 1970, Pastor, 1978,1983, Bottero et al., 1980, Mülhaus 1986, Sloan, 1988, Mackenzie et al., 1992) se sont basés sur cette méthode.

2.2.4.2 Approche cinématique

Cette approche fait appel à la définition des fonctions :

$$\pi_G(\underline{\underline{d}}) = \sup(\underline{\underline{\sigma}}.\underline{\underline{d}} \mid \underline{\underline{\sigma}} \in G) \text{ et } \pi_G(\underline{v}) = \sup(\underline{V} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \mid \underline{\underline{\sigma}} \in G)$$

où $\underline{\underline{d}}$ désigne le tenseur des vitesses de déformation et $\underline{V}$ le vecteur des discontinuités des vitesses. La quantité $P_{rm}(\underline{v}) = \int_\Omega \pi_G(\underline{\underline{d}}) + \int_{\Gamma_d} \pi_G(\underline{v})$ représente la puissance résistante maximale dans le champ de vitesses, et la quantité $L(\underline{v}) = \int_\Omega \underline{f}.\underline{v} + \int_{\Gamma_T} \underline{T} \cdot \underline{v}$ la puissance des efforts extérieurs.

Le résultat fondamental de l'approche cinématique peut être présenté sous la forme suivante (Salençon, 1994) :

$$\forall (\underline{f}, \underline{T}) \in \mathbf{K}, \forall\ \underline{v} \text{ cinématiquement admissible } \quad L(\underline{v}) - P_{rm}(\underline{v}) \leq 0$$

On définit l'ensemble $\mathbf{K}_{cin}$ comme étant l'ensemble des chargements dont la puissance, dans tout champ de vitesses cinématiquement admissibles, est inférieure à la puissance dissipable par le système. $\mathbf{K}_{cin}$ contient le convexe $\mathbf{K}$ et par conséquent le convexe $\mathbf{K}_{stat}$ (voir figure 2-1 dans le cas d'un mode de chargement à deux paramètres Q_1 et Q_2).

L'utilisation de l'approche cinématique passe donc par la minimisation de la fonctionnelle $J(\underline{v}) = P_{rm}(\underline{v}) - L(\underline{v})$, sur l'ensemble des vitesses cinématiquement admissibles. Classiquement, l'approche de $\mathbf{K}$ par l'extérieur est mise en oeuvre en imposant des mécanismes simples, dépendant d'un nombre fini (généralement petit) de paramètres. La fonctionnelle $J(\underline{v})$ est ensuite minimisée par rapport à cet ensemble de paramètres.

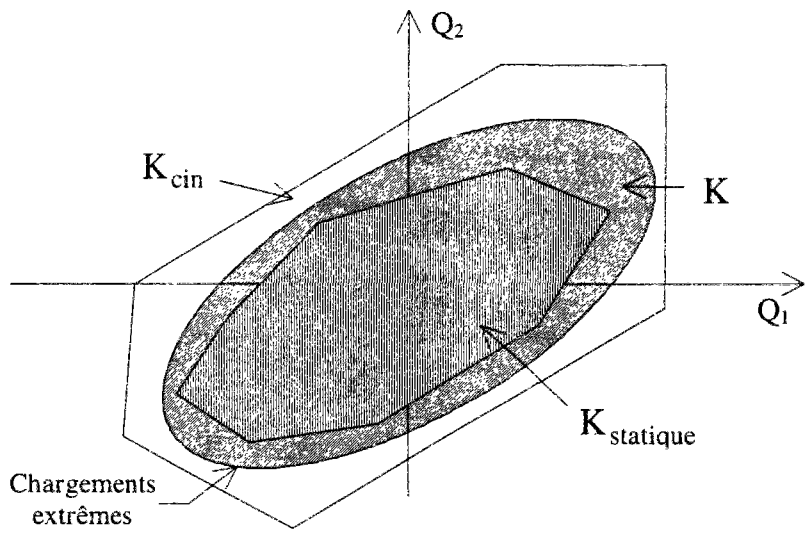


Figure 2-1. Approches par l'extérieur et par l'intérieur du convexe **K**

2.2.5 Equivalence entre l'approche cinématique et l'approche statique.

Les approches cinématique et statique permettent d'approcher le domaine **K** par l'extérieur et l'intérieur, respectivement. A priori, l'équivalence entre ces deux approches n'est pas assurée (Frémond et Friâa, 1982). Toutefois, si le convexe **G** est borné, il y a équivalence entre l'approche statique et l'approche cinématique, ce que conduit au résultat suivant:

Dans le cas où **G** est un convexe fermé et borné indépendamment de $\underline{x}$ qui contient une boule fixe de centre origine, le chargement $(\underline{f}, \underline{T})$ est potentiellement supportable si et seulement si:

$$\inf_{\underline{v} \in V} J(\underline{v}) = 0 \tag{2-1}$$

où V désigne l'espace des vitesses cinématiquement admissibles. La démonstration de ce résultat peut être trouvée dans Strang et Teman (1980) ou Frémond et Friâa (1982).

2.2.5.1 Critères de résistance

Il est commode et habituel d'utiliser, à la place des convexes **G**, des fonctions scalaires $f(\underline{\underline{\sigma}})$ pour caractériser les capacités de résistance des matériaux. Ces fonctions, qui portent le nom de critères de résistance, sont telles que:

$f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0$ <=> $\underline{\underline{\sigma}}$ appartient à l'intérieur de **G**

$f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$ <=> $\underline{\underline{\sigma}}$ appartient à la frontière de **G**

$f(\underline{\underline{\sigma}}) > 0$ <=> $\underline{\underline{\sigma}}$ n'appartient pas à **G**

La notation usuelle $f(\underline{\underline{\sigma}})$ peut laisser entendre que la valeur du critère ne dépend pas de l'orientation du repère dans l'espace, et donc peut être écrit comme fonction des invariants des contraintes principales. La valeur du critère pouvant dépendre de l'orientation des axes (Mandel 1978), l'écriture correcte d'un point de vue mathématique devait être $f_R(\underline{\underline{\sigma}})$, signifiant que la valeur du critère est déterminée pour un tenseur de contraintes calculé dans un repère donné, R (Salençon 1994). Cette dépendance de la valeur du critère vis-à-vis de l'orientation des axes apparaît dans le cas de critères anisotropes. Néanmoins, nous n'utiliserons dans notre travail que des critères isotropes et l'écriture $f(\underline{\underline{\sigma}})$ sera adoptée. Selon le théorème de représentation de Wineman et Pipkin (1964), $f(\underline{\underline{\sigma}})$ peut s'exprimer de façon équivalente comme une fonction symétrique des contraintes principales, comme une fonction

des invariants de $\underline{\underline{\sigma}}$ ou comme une fonction du premier invariant de $\underline{\underline{\sigma}}$ et des invariants de son déviateur. Dans la présente étude, nous nous limiterons aux critères de Tresca, de Tresca tronqué en traction, de von Mises et de Mohr-Coulomb. Dans la présentation qui suit, on utilise la convention de signes de la mécanique des milieux continus.

2.2.5.1.1 Critère de Tresca

Ce critère, aussi appelée de critère de cission maximale, a été proposé par Tresca en 1864. Il suppose que la plasticité en un point du matériau est atteinte quand, en ce point, la valeur de la contrainte de cisaillement est égale à la contrainte tangentielle maximale.

Son expression mathématique est :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sup(\sigma_i - \sigma_j - \sigma_0) \qquad i,j=1,2,3$$

où σ_i et σ_j désignent les valeurs des contraintes principales, σ_0 la limite de résistance en traction simple, $\sigma_0/2$ représentant la cohésion du matériau.

2.2.5.1.2 Critère de Tresca tronqué en traction.

Le critère de Tresca tronqué en traction diffère de celui de Tresca dans les cas où le matériau est soumis à des tractions, dans la mesure où on limite les tractions admissibles à une valeur donnée T. Son expression mathématique se met sous la forme :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sup(\sigma_i - \sigma_j - \sigma_0, \sigma_i - T) \qquad i,j=1,2,3$$

2.2.5.1.3 Critère de Von Mises.

Dans ce critère, la plasticité est liée à l'énergie élastique de cisaillement, ce qui revient à négliger l'influence du troisième invariant et conduit à l'expression :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{J_2} - k$$

où J_2 désigne le deuxième invariant du déviateur du tenseur des contraintes et k la limite d'élasticité en cission simple ; $k\sqrt{3}$ (respectivement -k $\sqrt{3}$) correspond à la limite d'élasticité en traction simple (respectivement, compression simple).

2.2.5.1.4 Critère de Mohr-Coulomb

Ce critère, couramment utilisé en mécanique des sols, a pour expression :

$$f(\underline{\underline{\sigma}})=\sup\{\sigma_i\,(1+\sin\phi) - \sigma_j\,(1-\sin\varphi)-2\,c\,\cos\varphi\} \qquad i,j=1,2,3$$

où c désigne la cohésion et φ l'angle de frottement interne.

En réalité, le critère utilisé dans nos développements numériques diffère légèrement du critère de Mohr-Coulomb présenté ci-dessus. Pour pouvoir remplir les conditions d'équivalence entre les approches statique et cinématique, on est en effet amené à utiliser un critère à seuil de compression maximale, la cohésion étant toujours supérieure à zéro. Son expression se met sous la forme :

$$f(\underline{\underline{\sigma}})=\sup\{\sigma_i\,(1+\sin\varphi) - \sigma_j\,(1-\sin\phi)-2\,c\,\cos\varphi,\ -\sigma_i -C\} \qquad i,j=1,2,3$$

Le domaine **G** est ainsi tronqué en compression, aucune des contraintes principales ne pouvant dépasser (en compression) la valeur -C.

2.2.5.2 Fonctions π

Comme on l'a vu au paragraphe 2.2.4.2, l'approche cinématique passe par le calcul, pour chaque critère de résistance, d'une fonction π, densité de puissance résistante maximale dans le taux de déformation (virtuel) $\underline{\underline{d}}$, sous la condition de résistance définie par **G**. La détermination de ces fonctions est décrite par Salençon (1983) ; on se limite ici à présenter les fonctions correspondant aux critères utilisés. Les constantes introduites ci-dessous ont les significations données auparavant ; $\underline{\underline{d}}$ désigne le tenseur des vitesses de déformation et les indices romains indiquent les valeurs principales de ce tenseur.

2.2.5.2.1 Fonction π pour le critère de Tresca

Les fonctions π correspondant au critère de Tresca se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} \pi_G(\underline{\underline{d}}) = \dfrac{\sigma_0}{2}\left(|d_I|+|d_{II}|+|d_{III}|\right) & si \quad tr(\underline{\underline{d}})=0 \\ \pi_G(\underline{\underline{d}}) = +\infty & sinon \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \pi_G(\underline{v}) = \dfrac{\sigma_0}{2}|\underline{V}| & si \quad \underline{V}.\underline{n}=0 \\ \pi_G(\underline{v}) = +\infty & sinon \end{cases}$$

2.2.5.2.2 Fonction π pour le critère de Tresca tronqué en traction

Les fonctions π correspondant au critère de Tresca tronqué en traction se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} \pi_G(\underline{\underline{d}}) = \frac{\sigma_0}{2}\left(|d_I| + |d_{II}| + |d_{III}| - tr(\underline{\underline{d}})\right) + T\,tr(\underline{\underline{d}}) & si \quad tr(\underline{\underline{d}}) \geq 0 \\ \pi_G(\underline{\underline{d}}) = +\infty & sinon \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \pi_G(\underline{v}) = \frac{\sigma_0}{2}\left(|\underline{V}| - \underline{V}.\underline{n}\right) + T\underline{V}.\underline{n} & si \quad \underline{V}.\underline{n} \geq 0 \\ \pi_G(\underline{v}) = +\infty & sinon \end{cases}$$

2.2.5.2.3 Fonction π pour le critère de von Mises

Les fonctions π correspondant au critère de von Mises se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} \pi_G(\underline{\underline{d}}) = k\sqrt{2tr(\underline{\underline{d}}^2)} & si \quad tr(\underline{\underline{d}}) = 0 \\ \pi_G(\underline{\underline{d}}) = +\infty & sinon \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \pi_G(\underline{v}) = k|\underline{V}| & si \quad \underline{V}.\underline{n} = 0 \\ \pi_G(\underline{v}) = +\infty & sinon \end{cases}$$

2.2.5.2.4 Fonction π pour le critère de Mohr-Coulomb

Les fonctions π correspondant au critère de Mohr-Coulomb se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} \pi_G(\underline{\underline{d}}) = Htr(\underline{\underline{d}}) & si \quad tr(\underline{\underline{d}}) \geq \left(|d_I| + |d_{II}| + |d_{III}|\right)\sin\varphi \\ \pi_G(\underline{\underline{d}}) = +\infty & sinon \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \pi_G(\underline{v}) = H\underline{V}.\underline{n} & si \quad \underline{V}.\underline{n} \geq |\underline{V}|\sin\varphi \\ \pi_G(\underline{v}) = +\infty & sinon \end{cases}$$

où H=c*cotg φ.

Il est évident qu'on utilisera uniquement des champs de vitesses « pertinents » (Salençon, 1994 a), pour lesquels la puissance de résistance maximale est finie.

2.2.6 Analyse Limite

Les développements qui précédent ne considèrent que le convexe **G**, représentant le domaine élastique et qui caractérise le niveau de contraintes à partir duquel les déformations plastiques peuvent se produire.

L'autre notion importante dans un modèle de plasticité est la détermination des déformations plastiques, celles-ci étant déduites d'un potentiel plastique et d'une règle d'écoulement. Dans notre étude, on se place dans le cadre des matériaux associés, ce qui signifie que le potentiel plastique s'identifie à la surface d'état limite du matériau. Dans ce cas, la règle d'écoulement s'écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$$

où $\dot{\lambda}$ désigne le multiplicateur plastique ($\dot{\lambda} \geq 0$).

En se basant sur les résultats de Brezis (1973) sur l'existence de la solution d'un problème d'évolution élasto-plastique, on peut énoncer le résultat suivant (Salençon 1983, 1990, 1994) :

« Tout chargement intérieur à l'ensemble **K** sera effectivement supporté par la structure ; les chargements appartenant à la frontière de **K** sont appelés chargements limites ».

Les fonctions π sont maintenant calculées directement à partir de la règle d'écoulement et la puissance résistante maximale s'identifie à la puissance dissipée plastiquement. On parle de vitesses plastiquement admissibles si elles respectent la règle d'écoulement.

L'utilisation d'une règle d'écoulement associée pourrait soulever quelques problèmes dans le cas des matériaux non associés. C'est en particulier le cas des matériaux caractérisés par un critère de Mohr-Coulomb, pour lesquels les vitesses de déformation sont calculées à partir d'un potentiel plastique différent de la fonction de charge. Toutefois cette difficulté est levée car les bornes supérieures calculées en utilisant la règle d'écoulement associée sont aussi des bornes supérieures pour le matériau non associé (Davis, 1968 ; Chen, 1975).

2.2.6.1 Comportement rigide-plastique

Le comportement rigide parfaitement plastique correspond à un matériau fictif de la même nature qu'un matériau élastique parfaitement plastique, mais pour lequel les seules déformations autorisées sont les déformations plastiques.

Dans le cas des matériaux respectant le principe du travail plastique maximal (Hill 1950) *, les chargements d'écoulement plastique libre pour une structure rigide-plastique sont les chargements limites de la structure élasto-plastique. Par conséquent, il y a équivalence du point de vue de la détermination de la charge de ruine plastique, entre le cas rigide plastique et celui résultant du passage à la limite d'un comportement élasto-plastique vers le même modèle rigide plastique (Salençon, 1983).

2.2.7 Remarques finales

L'application de la méthode cinématique passe par la minimisation de la fonctionnelle $J(\underline{v})$ (paragraphe 2.2.4.2). Cette minimisation comporte malheureusement beaucoup de difficultés sur le plan numérique, qui résultent de la nécessité d'introduire d'éventuelles surfaces de glissement. Ces problèmes apparaissent d'habitude dans le cadre de la plasticité parfaite, du fait de l'irrégularité de ses potentiels (Suquet, 1978, 1981). La méthode utilisée ici passe par la régularisation de la fonctionnelle $J(\underline{v})$ pour la loi de Norton-Hoff généralisée.

2.3 Loi de Norton-Hoff généralisée ; méthode cinématique régularisée (Friâa 1979).

2.3.1 Introduction

La loi de Norton a été proposée par cet auteur en 1929 pour modéliser le fluage secondaire des métaux. Elle peut être écrite sous la forme :

$$\dot{\varepsilon} = \alpha\sigma^n$$

où α désigne un scalaire positif, dépendant de la température et du matériau.

Cette loi a un caractère unidimensionnel et a été généralisée par Hoff (1954) pour le cas tridimensionnel.

---

* On rappelle que, pour qu'un matériau respecte le principe du travail plastique maximal, son domaine d'élasticité doit être convexe et la règle d'écoulement plastique doit être associée.

Si le coefficient de viscosité diminue, la loi de Norton-Hoff tend vers une loi rigide-plastique associée au critère de plasticité de von Mises. Friâa (1979) a associé une loi de Norton-Hoff généralisée à plusieurs critères de plasticité parfaite.

2.3.2 Loi de Norton-Hoff généralisée

Pour écrire la loi de Norton-Hoff généralisée, on commence par introduire le surpotentiel associé à la fonction d'appui π d'un convexe de résistance **G**. Ce surpotentiel, noté $\Phi_p(\underline{\underline{d}})$, a pour expression :

$$\Phi_p(\underline{\underline{d}}) = \frac{1}{p}\lambda^{1-p}[\pi(\underline{\underline{d}})]^p$$

où p et λ sont des scalaires supérieurs à un.

La loi de Norton-Hoff généralisée peut donc être écrite sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \partial\Phi_p(\underline{\underline{d}})$$

qui signifie que $\underline{\underline{\sigma}}$ appartient à l'ensemble des sous-gradients de $\Phi_p(\underline{\underline{d}})$. D'autres formulations ont été développées à partir du surpotentiel dual de Φ_p.

Ce formalisme permet l'introduction de nouveaux types de lois de Norton-Hoff. A chaque convexe de résistance, on associe un surpotentiel qui permet d'écrire la loi de Norton-Hoff généralisée du matériau. Cette loi est viscoplastique et sa viscosité dépend du paramètre p. Elle tend vers la loi rigide-plastique associée au convexe de résistance choisi quand la viscosité tend vers zéro (c'est à dire quand p tend vers 1).

2.3.3 Méthode cinématique régularisée

On a vu précédemment que la mise en oeuvre de l'approche cinématique peut revenir à calculer, entre autres, la puissance dissipée plastiquement par un matériau ayant un comportement rigide plastique parfait. Comme la loi de Norton-Hoff généralisée tend vers une loi de ce type quand la viscosité décroît vers zéro, Friâa (1979) et Casciaro et Cascini (1982) ont eu l'idée de remplacer la loi rigide parfaitement plastique par la loi de Norton-Hoff généralisée dans le calcul de la puissance dissipée. Ceci a conduit Friâa (1979) au résultat suivant.

Sous les hypothèses énoncées auparavant pour le résultat 2-1, le chargement $(\underline{f}, \underline{T})$ est potentiellement supportable si et seulement si

$$\lim_{p\to 1}\{\inf_{\underline{v}\in V} J_p(\underline{v})\} = 0 \tag{2-2}$$

où $J_p(\underline{v}) = \int_\Omega \Phi_p(\underline{\underline{d}}) - L(\underline{v})$.

Le résultat suivant, aussi dû à Friâa (1979), montre que le convexe **K** des chargements potentiellement supportables par une structure constituée d'un matériau rigide-plastique est inclus dans l'ensemble des convexes $\mathbf{K}_p$ correspondant à la loi de Norton-Hoff généralisée ; le convexe **K** correspond ainsi à la limite des convexes $\mathbf{K}_p$ quand p tend vers 1 :

la famille des convexes $\mathbf{K}_p$ est décroissante avec p, c'est-à-dire que

$p'>p>1 \Rightarrow \mathbf{K}_{p'} \supset \mathbf{K}_p$;

de plus

$$\mathbf{K} = \bigcap_{p>1} \mathbf{K}_p \tag{2-3}$$

Comme Glowinski et Le Tallec (1989) l'ont fait remarquer, la limite (2-2) est difficile à calculer numériquement avec une bonne précision. Il est ainsi préférable de remplacer ce calcul par la caractérisation suivante (Friâa, 1979) :

un chargement $(\underline{f}, \underline{T})$ est potentiellement supportable si et seulement si

$$\lim_{p\to 1} G_p(f, T) \leq 1$$

où G_p désigne la fonction convexe et homogène de degré 1 définie par :

$$G_p(\underline{f},\underline{T}) = \left\{ -\frac{p}{(p-1)\int_\Omega d\Omega} \inf[J_p(\underline{v})] \right\}^{1-\frac{1}{p}} \tag{2-4}$$

Le problème de stabilité se réduit ainsi à la minimisation de $J_p(v)$ sur l'ensemble des vitesses cinématiquement admissibles et au calcul de la fonction G_p. Cette valeur est ensuite comparée à l'unité de façon à vérifier l'appartenance du chargement considéré au domaine **K**. Pour des raisons évidentes de difficultés numériques liées à la mise en oeuvre de la formulation (2-3), les calculs seront effectués pour une valeur fixe de p, la plus proche

possible de 1, et, en vertu de l'expression 2-3 on retrouvera ainsi une borne supérieure du convexe **K**.

2.4 Minimisation de la fonctionnelle J_p par la méthode du Lagrangien augmenté

2.4.1 Introduction

Comme on l'a vu auparavant, la mise en oeuvre de la méthode de régularisation se ramène à la résolution d'un problème de minimisation. La technique utilisée, le Lagrangien augmenté, a été présentée indépendamment par Powel et par Hestenes en 1969. Elle consiste à ajouter un terme de pénalisation au Lagrangien classique, permettant ainsi une meilleure convergence de l'algorithme de résolution. Nous utiliserons cette technique pour décomposer le problème global de minimisation en deux problèmes plus faciles à résoudre, comme on le verra par la suite.

On peut remarquer que d'autres méthodes ont été proposées pour résoudre ce problème (voir par exemple Abd-Sharifabadi, 1981). Cependant, ces méthodes supposent des conditions restrictives sur la forme des fonctions d'appui du convexe **G**, contrairement à l'approche du Lagrangien augmenté.

2.4.2 Le Lagrangien augmenté

Si J(v) désigne une fonctionnelle sur un espace de Hilbert V et si B appartient à l'ensemble L(V,W) des applications linéaires de V sur un autre espace de Hilbert W, on se propose à résoudre le problème de minimiser $J(v)$ pour $v \in V$, sous la condition $Bv = c$:

$$\begin{cases} \underset{v \in V}{Min}\ J(v) \\ avec\ Bv = c \end{cases} \tag{2-5}$$

Powel (1969) et Hestenes (1969) ont proposé l'introduction du Lagrangien augmenté $\mathcal{L}_r$ défini pour r>0 comme:

$$\mathcal{L}_r(v,q)=J(v)+(\lambda, Bv-c)+\frac{r}{2}|Bv-c|^2=\mathcal{L}(v,\lambda)+\frac{r}{2}|Bv-c|^2 \tag{2-6}$$

où $|\,.\,|$ désigne la norme euclidienne et $(.,.)$ le produit scalaire usuel.

On remarque que, dans le cas où $\lambda=0$, on obtient à partir de $\mathcal{L}_r(v,q)$, la fonction classique de pénalisation associée à la restriction $Bv=c$. L'avantage du Lagrangien augmenté est de permettre, par l'introduction du terme $(\lambda,Bv-c)$, de déterminer la solution du problème (2-5) sans faire tendre r vers infini, ce qui pourrait conduire à une détérioration du conditionnement du système à résoudre. De plus, l'introduction du terme quadratique dans le Lagrangien augmenté conduit à une amélioration des propriétés de convergence des algorithmes utilisés dans la résolution (Glowinski et Le Tallec, 1989).

2.4.3 Le Lagrangien augmenté dans la méthode cinématique régularisée

On rappelle que le problème qu'on se propose de résoudre peut se mettre sous la forme :

$$\underset{v\in V}{Min} \quad J_p(\underline{v}) = P_p(\underline{v}) - L(\underline{v}) \tag{2-7}$$

où $P_p(\underline{v}) = \int_\Omega \phi_p(\underline{v})$, $L(\underline{v}) = \int_\Omega \underline{f}.\underline{v} + \int_{\Gamma_T} \underline{T}\cdot\underline{v}$ et V désigne l'ensemble des vitesses cinématiquement admissibles*. En réalité, le terme $P_p(\underline{v})$ peut être ré-écrit comme $P_p(\underline{v}) = \int_\Omega \phi_p^*(\underline{\underline{B}}\underline{v})$, ou, en introduisant une nouvelle variable $\underline{\underline{w}} = \underline{\underline{B}}\underline{v}$, comme $P_p(\underline{\underline{w}}) = \int_\Omega \phi_p^*(\underline{\underline{w}})$. L'utilisation du Lagrangien augmenté est basée sur l'équivalence triviale entre le problème (2-7) et le problème suivant (Glowinski et Le Tallec, 1989) :

$$\begin{aligned} &\underset{v\in V}{Min} \quad \left\{P(\underline{\underline{w}}) - L(\underline{v})\right\} \\ &avec \quad \underline{\underline{w}} = \underline{\underline{B}}\underline{v} \end{aligned} \tag{2-8}$$

Pour résoudre ce problème, on introduit le Lagrangien augmenté suivant:

$$\mathcal{L}_r\{(\underline{v},\underline{\underline{w}}),\underline{\underline{\lambda}}\} = P(\underline{\underline{w}}) - L(\underline{v}) + \frac{r}{2}\int_\Omega |\underline{\underline{B}}\underline{v} - \underline{\underline{w}}|^2 d\Omega + \int_\Omega \underline{\underline{\lambda}}:(\underline{\underline{B}}\underline{v} - \underline{\underline{w}})d\Omega \tag{2-9}$$

La résolution de ce Lagrangien passe par la recherche d'un point de selle défini comme $\mathcal{L}_r\{(\underline{v},\underline{\underline{w}}),\underline{\underline{\mu}}\} \le \mathcal{L}_r\{(\underline{v},\underline{\underline{w}}),\underline{\underline{\lambda}}\} \le \mathcal{L}_r\{(\underline{u},\underline{\underline{h}}),\underline{\underline{\lambda}}\}$. La solution de ce problème peut être obtenue en utilisant l'algorithme d'Usawa (Arrow et al., 1958 ; Glowinski et al., 1981 ; Fortin et Glowinski, 1982 ; Ciarlet, 1990, etc.). On peut écrire :

---

* En réalité, on restreindra la minimisation à l'ensemble des vitesses cinématiquement admissibles permettant d'obtenir des valeurs finies dans le calcul de la puissance dissipée.

Algorithme n° 1

1. $\underline{\underline{\lambda}}^1 \in W$ initialisé arbitrairement

avec $\underline{\underline{\lambda}}^n$ on détermine successivement $\underline{v}^n, \underline{\underline{w}}^n$ et $\underline{\underline{\lambda}}^{n+1}$ comme suit:

2. $\mathcal{L}_r\{(\underline{v}^n, \underline{\underline{w}}^n), \underline{\underline{\lambda}}^n\} = Min\ \mathcal{L}_r\{(\underline{u}, \underline{\underline{h}}), \underline{\underline{\lambda}}^n\} \quad \forall\{\underline{u}, \underline{\underline{h}}\} \in V \times W,$

3. $\underline{\underline{\lambda}}^{n+1} = \underline{\underline{\lambda}}^n + \rho_n(\underline{\underline{B}}\underline{u}^n - \underline{\underline{w}}^n)$

Cet algorithme suppose la résolution du point 2 à chaque itération; ceci peut être obtenu par la méthode de relaxation par blocs, qui permet de séparer la résolution en deux parties et conduit à l'algorithme suivant:

Algorithme n° 2

1. $\{\underline{\underline{w}}^0, \underline{\underline{\lambda}}^1\} \in W \times W$ initialisés arbitrairement

avec $\{\underline{\underline{w}}^{n,0} = \underline{\underline{w}}^{n-1}\}$ on détermine $\underline{v}^n$ et $\underline{\underline{w}}^n$ comme suit

2. Pour $m \geq 1$

2.1. $\mathcal{L}_r\{(\underline{v}^{n,m}, \underline{\underline{w}}^{n,m-1}), \underline{\underline{\lambda}}^n\} = Min\ \mathcal{L}_r\{(\underline{u}, \underline{\underline{w}}^{n,m-1}), \underline{\underline{\lambda}}^n\} \quad \forall \underline{u} \in V, \underline{v}^{n,m} \in V$

2.1. $\mathcal{L}_r\{(\underline{v}^{n,m}, \underline{\underline{w}}^{n,m}), \underline{\underline{\lambda}}^n\} = Min\ \mathcal{L}_r\{(\underline{v}^{n,m}, \underline{\underline{h}}), \underline{\underline{\lambda}}^n\} \quad \forall \underline{h} \in W, \underline{w}^{n,m} \in W$

3. $\underline{\underline{\lambda}}^{n+1} = \underline{\underline{\lambda}}^n + \rho_n(\underline{\underline{B}}\underline{u}^n - \underline{\underline{w}}^w)$

La convergence de cet algorithme est assurée pour des conditions très générales. On retiendra que sa convergence est assurée pour des valeurs de ρ_n telles que (Glowinski et Le Tallec, 1989) :

$$0 \leq \rho_n \leq 2r$$

2.5 Formulation en éléments finis.

2.5.1 Introduction

Les équations établies précédemment sont exprimées en termes de variables et fonctions continues sur le domaine de la structure à étudier. Pour pouvoir résoudre numériquement les

dites équations, en utilisant la technique des éléments finis, il faut remplacer les espaces V et W par des espaces discrets V_h et W_h . Ces espaces sont constitués à partir d'une discrétisation spatiale du domaine étudié et de l'approximation, dans chaque partie du domaine discrétisé, des fonctions originales par des fonctions plus simples, en général polynomiales.

Ensuite, nous décrirons la mise en oeuvre de cette méthode dans le module LIMI du programme de calcul en éléments finis CESAR-LCPC (Jiang, 1992 ; Jiang et al., 1992).

2.5.2 Discrétisation

Soit $\mathcal{D}_h$ une discrétisation du domaine Ω en un nombre N_e d'éléments, tel que $\Omega = \bigcup_{l=1,N_e} \Omega_l$,

où le diamètre de Ω_l est borné par h et tout Ω_l contient une boule fixe de rayon αh.

Pour $\mathcal{D}_h$ donné, on définit l'espace V_{hk} comme :

$$V_{hk} = \{v_h | v_h \in C^0(\Omega), v_{hk} \in P_k(E)\ \forall E \in \mathcal{D}_h, v_{h|\Gamma_u} = u_0\}$$

où $P_k(E)$ désigne l'espace des polynômes de degré $\leq k$ sur l'élément E.

L'espace W sera approché par des éléments finis similaires à ceux de l'approximation de V, en supprimant les conditions de raccord entre éléments de façon à permettre le traitement local de la partie non-linéaire. De plus, les polynômes utilisés seront de degré zéro, ce que conduit à :

$$W_{hk} = \{w_{h|E} = constante, \forall E \in \mathcal{D}_h\}$$

Le Lagrangien augmenté discrétisé ainsi obtenu peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{L}_{rh}\{(\underline{v}_h, \underline{\underline{w}}_h), \underline{\underline{\lambda}}_h\} = P(\underline{\underline{w}}_h) - L(\underline{v}_h) + \frac{r}{2}\int_\Omega |\underline{\underline{B}}\underline{v}_h - \underline{\underline{w}}_h|^2 d\Omega + \int_\Omega \underline{\underline{\lambda}}_h : (\underline{\underline{B}}\underline{v}_h - \underline{\underline{w}}_h) d\Omega \qquad (2\text{-}10)$$

2.5.3 Résolution du problème discrétisé

On introduit l'opérateur B et la matrice constante A_0 définis comme suit :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

On définit aussi les vecteurs suivants :

$$w = \{w_{11}, w_{22}, w_{33}, 2w_{12}, 2w_{23}, 2w_{31}\}$$
$$\lambda = \{\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}, 2\lambda_{12}, 2\lambda_{23}, 2\lambda_{31}\}$$

Le Lagrangien augmenté (2-10) peut se mettre sous la forme équivalente :

$$\mathcal{L}\{(v,w),\lambda\} = P(w) - L(v) + \frac{r}{2}\int_{\Omega}(Bv-w)^T.A_0.(Bv-w) + \int_{\Omega}\lambda^T : A_0.(Bv-w)$$

En désignant par l le nombre de noeuds dans l'élément $\boldsymbol{k}$, par u_i (i=1,..,l) les vitesses en ces noeuds et par N_k la fonction d'interpolation de l'élément $\boldsymbol{k}$, on peut écrire $Bv_{hk} = BN_k\boldsymbol{u}_k$.

Compte tenu des définitions précédentes, le Lagrangien augmenté discrétisé peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{rh}\{(u,v),\lambda\} = & \frac{1}{p}\sum_{E\in\mathcal{D}_h}\int_{\mathcal{D}_{hE}}\pi^p(w_E)d\Omega - \sum_{E\in\mathcal{D}_h}\int_{\mathcal{D}_{hE}}\underline{f}.N_E u_E d\Omega - \sum_{E\in\mathcal{D}_h}\int_{\mathcal{D}_{hE}\cap\Gamma_T}\underline{T}.N_E u_E d\Omega \\ & + \frac{r}{2}\sum_{E\in\mathcal{D}_h}\int_{\mathcal{D}_{hE}}(BN_E u_E - w_E)^T.A_0.(BN_E u_E - w_E)d\Omega \\ & + \sum_{E\in\mathcal{D}_h}\int_{\mathcal{D}_{hE}}\lambda_E^T.A_0.(BN_E u_E - w_E)d\Omega \end{aligned} \qquad (2\text{-}11)$$

L'application du point 2 de l'algorithme n° 2 conduit à une minimisation par relaxation par blocs, qui comporte les étapes suivantes :

À partir de la valeur initiale $w^{n,0} = w^n$, la minimisation sur la variable u conduit à la résolution du système d'équations linéaires suivant :

$$rAu^{n,m} - \sum_{E \in \mathcal{D}_h \mathcal{D}_{hE}} \int \{N_E^T \underline{f} + N_E^T B^T A_0 (\lambda_E^n - r w_E^{n,m})\} d\Omega - \sum_{E \in \mathcal{D}_h \mathcal{D}_{hE} \cap \Gamma_T} \int N_E^T \underline{T} d\Omega \qquad (2\text{-}12)$$

où A désigne une matrice telle que

$$A = \sum_{E \in \mathcal{D}_h \mathcal{D}_{hE}} \int N_E^T B^T A_0 B N_E d\Omega$$

. La minimisation sur la variable w conduit à la minimisation de la fonctionnelle suivante, pour chaque élément :

$$J^*{}_E(w_E) = \frac{1}{p} \int_{\mathcal{D}_{hE}} \pi^p(w_E) d\Omega + \frac{r}{2} \int_{\mathcal{D}_{hE}} (BN_E u_E^{n,m} - w_E)^T . A_0 . (BN_E u_E^{n,m} - w_E) d\Omega - \int_{\mathcal{D}_{hE}} \lambda_E^n . A_0 . w_E d\Omega$$

Si l'on choisit des polynômes du premier degré pour la variable u et dans la mesure où les variables w ont été définies comme constantes sur chaque élément, on peut ré-écrire la dernière expression comme:

$$J^*{}_E(w_E) = \{\frac{1}{p} \pi^p(w_E) + \frac{r}{2} (BN_E u_E^{n,m} - w_E)^T . A_0 . (BN_E u_E^{n,m} - w_E) - \lambda_E^n . A_0 . w_E\} mes(E)$$

La minimisation de la fonction $J_E(w_E) = J^*{}_E(w_E) / mes(E)$ est effectuée localement, élément par élément. Ainsi, le caractère non-linéaire de notre problème est traité uniquement localement. Ceci montre l'intérêt de l'utilisation du Lagrangien augmenté et de l'introduction de la variable supplémentaire w comme moyen de simplification du traitement du problème non linéaire.

On remarque que la construction de la matrice A est semblable à celle d'une matrice de rigidité usuelle. Elle est symétrique, définie positive et ne change pas avec les itérations, ce qui permet une seule triangularisation.

Il faut noter enfin que le Lagrangien discrétisé (2-11) n'est pas exactement identique à celui de la formulation utilisée antérieurement. En réalité, on a supprimé le terme λ^{1-p}, qui apparaît dans la loi de Norton-Hoff généralisée, car il est proche de 1 pour les petites valeurs de p (Jiang, 1994). D'ailleurs, la régularisation elle-même est indépendante de ce paramètre (Glowinski et Le Tallec, 1989).

2.5.4 Problème local

La minimisation de $J_E(w_E)$, faite localement pour chaque élément, est réalisée, en général, dans l'espace $\boldsymbol{R}^6$ pour les structures tridimensionnelles et dans $\boldsymbol{R}^3$ pour les structures bidimensionnelles. Une réduction de la dimension de ces espaces peut être obtenue en utilisant un processus de diagonalisation du problème. Cette simplification est justifiée par un résultat dû à Le Tallec (1986). Avant de le présenter, on définit les matrices suivantes :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{12} & w_{22} & w_{23} \\ w_{13} & w_{23} & w_{33} \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \qquad \Theta = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Avec ces notations, la fonction $J_E(w_E)$ peut être réécrite sous la forme :

$$J_E(w_E) = J_E(\Sigma) = \frac{1}{p}\pi^p(\Sigma) + \frac{r}{2}(\Theta - \Sigma):(\Theta - \Sigma) - \Lambda:\Sigma$$

et on en déduit le résultat suivant :

si la fonction $\pi^p(.)$ est convexe et isotrope, alors la solution Σ_0 de la minimisation de $J_E(\Sigma)$ est donnée par :

$$\Sigma_0 = Y^T \Sigma^d Y \quad , \quad S = r\Theta + \Lambda$$

où Y désigne une matrice orthogonale de $\boldsymbol{R}^{N\times N}$ (N=2 ou 3), dont les colonnes sont les vecteurs propres normalisés de la matrice S (la première colonne correspondant à la plus grande valeur propre et ainsi de suite), et Σ^d est la matrice diagonale de Σ sur $\boldsymbol{R}^{N\times N}$, qui est la solution du problème suivant :

$$\underset{\Sigma^d}{Min}\ \mathrm{J_w}(\Sigma^d) = \frac{1}{\mathrm{p}}\pi^{\mathrm{p}}(\Sigma^{\mathrm{d}}) + \frac{\mathrm{r}}{2}\Sigma^{\mathrm{d}}:\Sigma^{\mathrm{d}} - \mathrm{S}^{\mathrm{d}}:\Sigma^{\mathrm{d}} \tag{2-13}$$

où S^d désigne la matrice diagonale de S.

En désignant par d_i et A_i {i=1,..,N avec N=2 ou N=3} les termes diagonaux des matrices diagonales Σ^d et S^d respectivement, on peut ré-écrire l'expression (2-13) comme suit:

$$\begin{cases} \underset{\mathrm{d_1,..,d_N}}{Min} \quad \mathrm{J_w}(\mathrm{d_1,..,d_N}) = \frac{1}{\mathrm{p}}\pi^{\mathrm{p}}(\mathrm{d_1,..,d_N}) + \frac{\mathrm{r}}{2}\mathrm{d_i.d_i} - \mathrm{A_i.d_i} \\ (\mathrm{d_1,..,d_N}) \in \mathrm{R^N} \quad \mathrm{d_1 > d_2 > d_3} \end{cases} \tag{2-14}$$

Comme mis en évidence par Jiang (1992), la fonction J_w est une fonction continue et strictement convexe de $(d_1,..,d_N)$ et a, par conséquent, une solution unique. La résolution de ce problème passe par la diagonalisation de la matrice S, qui peut être obtenue par la méthode

de Jacobi pour le cas tridimensionnel et par la méthode de Mohr pour le cas bidimensionnel. La programmation introduite à l'origine dans le module LIMI était limitée à des restrictions de type « égalité » (Jiang, 1994, Jiang et Magnan, à paraître). Si ce mode de calcul est justifié pour des critères incompressibles, il se traduit dans le cas du critère de Mohr-Coulomb par une restriction de l'espace des vitesses plastiquement admissibles. Cependant, cette restriction n'a pas présentée d'inconvénients dans les travaux précédents réalisés avec LIMI. En réalité, dans la construction de la fonction π pour le critère de Mohr-Coulomb, l'inégalité apparaît liée au point anguleux, τ=0, et ainsi son influence se fait sentir dans les cas où l'on approche du domaine des contraintes normales en traction, comme c'est le cas pour les tunnels. Dans ces conditions, la minimisation (2-14) a dû être modifiée.

2.5.5 Minimisation de J_w

Cette présentation va être restreinte au cas du critère de Mohr-Coulomb bidimensionnel en déformations planes, les autres cas ne nécessitant que de légères adaptations par rapport à cette configuration. Plusieurs méthodes, mises au point pour les cas de minimisations sous contraintes, ont été essayées, en utilisant notamment l'algorithme d'Usawa appliqué à des Lagrangiens contenant des restrictions (Culioli, 1994). Malheureusement, cette approche n'a pas permis d'obtenir des résultats satisfaisants. Dans ces conditions, on a retenu une variante des méthodes utilisant la projection sur le domaine des contraintes (Cea, 1971 ; Ciarlet, 1990), qui, du fait des propriétés géométriques de la fonction J_w , présente un avantage de simplicité et de rapidité.

Dans le cas du critère de Mohr-Coulomb, le problème de minimisation à résoudre peut être posé comme suit :

$$\underset{d_1,d_2}{\text{Min}} \quad \{\frac{1}{p}(H(d_1+d_2))^p + \frac{r}{2}d_i.d_i - A_i.d_i\} \qquad \text{avec } d_1+d_2 \geq \sin\varphi\left(|d_1|+|d_2|\right)$$

Comme on ne considère que des valeurs de p très proches de 1, on peut simplifier le problème sous la forme suivante :

$$\underset{d_1,d_2}{\text{Min}} \quad \{\frac{1}{p}H^p(d_1+d_2) + \frac{r}{2}d_i.d_i - A_i.d_i\} \qquad \text{avec } d_1+d_2 \geq \sin\varphi\left(|d_1|+|d_2|\right)$$

De cette façon, le problème se réduit à la minimisation d'une fonction quadratique sous des contraintes d'inégalités. Comme les coefficients de deuxième degré de la fonction à minimiser

sont égaux, les courbes de niveau de cette fonction sont des boules de rayon constant en $\boldsymbol{R}^2$; cette remarque conduit à l'algorithme de minimisation suivant :

Algorithme n° 3

1. Calculer le minimum, M, de $\frac{1}{p}H^p(d_1+d_2)+\frac{r}{2}d_i.d_i - A_i.d_i$;

2. Si M appartient au domaine défini par $d_1+d_2 \geq \sin\varphi(|d_1|+|d_2|)$, zone A* de la figure 2-2, alors le minimum sous contraintes est égal à M;

3. Si M appartient au domaine B de la figure 2-2, alors le minimum sous contraintes correspond à la projection orthogonale sur les droites définissant la zone A;

4. Si M appartient au domaine C de la figure 2-2, alors le minimum sous contraintes correspond au point (0,0).

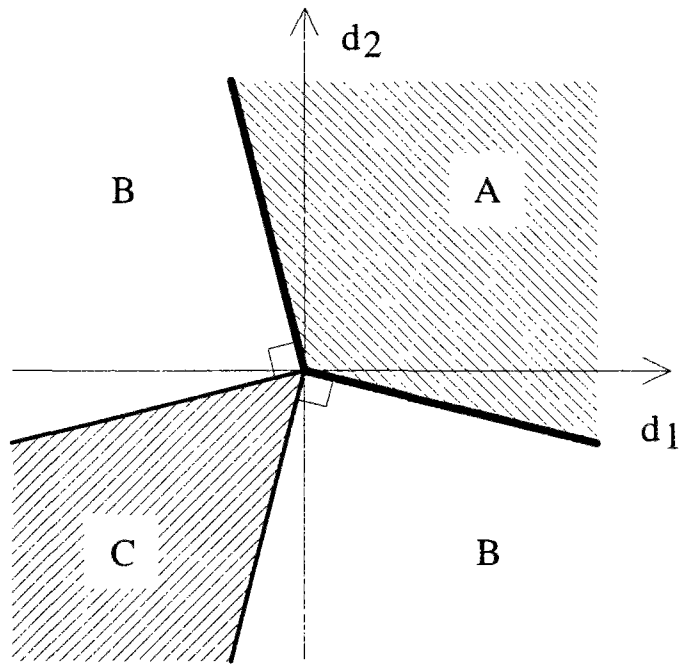


Figure 2-2. Domaine de minimisation de J_w

Il est facile de constater que cet algorithme ne nécessite pas d'itération. D'autre part, la solution du point 1 de l'algorithme passe par la résolution d'un système d'équations, qui ne présente pas de difficulté dans la mesure où le couplage entre variables est inexistant. Son introduction pour le cas où les restrictions sont des égalités est immédiat (suppression du point

* En réalité, du fait que les termes A_i sont ordonnés de façon décroissante, on ne travaille que dans le domaine défini par $d_1 \geq d_2$.

2). De même, pour le cas tridimensionnel, aucun problème particulier ne se pose, à part la définition des domaines équivalents aux domaines B et C décrits dans la figure 2-2.

On pourrait se demander pourquoi on a présenté la minimisation du critère de Mohr-Coulomb et pas la minimisation de celui de Mohr-Coulomb tronqué en compression. Pour commencer, il faut dire que la troncature du critère en compression n'était qu'une condition introduite de façon à permettre que le critère observe les conditions d'équivalence entre les approches statique et cinématique. En effet, dans les problèmes courants de géotechnique, on n'observe pas de phénomènes de rupture par compression.

Du point de vue numérique, il a été constaté que l'influence d'une troncature en compression sur les résultats disparaissait avec l'augmentation de la valeur de cette troncature (Guennouni, 1982). Dans notre cas, la fonction π pour le critère de Mohr-Coulomb tronqué en compression peut s'écrire (en retenant qu'on travaille dans le domaine $d_I \geq d_{2I}$) comme :

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = H.tr(\underline{\underline{d}}) \qquad \text{si } tr(\underline{\underline{d}}) \geq (|d_I|+|d_{III}|)\sin\varphi \tag{2-15}$$

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = \frac{2c\cos(\varphi) - C(1-\sin(\varphi))}{1+\sin(\varphi)} d_1 - Cd_2$$

$$\text{si } tr(\underline{\underline{d}}) < (|d_I|+|d_{III}|)\sin\varphi \wedge d_I \geq 0 \tag{2-16}$$

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = -C(d_I + d_{III}) \qquad \text{si } (d_I < 0 \wedge d_{III} < 0) \tag{2-17}$$

Le processus de minimisation devrait ainsi être conduit sur trois zones différentes, et on retiendrait le minimum des trois valeurs obtenues. Comme notre objectif est d'obtenir des résultats indépendants de la troncature en compression, il serait intéressant de montrer que, dans tous les cas, il y aurait une valeur de C telle que le minimum global serait celui obtenu avec (2-15). Dans l'annexe 1 on montre que, quelles que soient les valeurs de c et φ, il existe toujours une valeur de C telle que le minimum global de la fonction J_w soit obtenu pour la restriction (2-15). Ainsi, dans la programmation du module LIMI on n'a retenu que la restriction (2-15), cette approche présentant l'avantage de réduire le temps de calcul ; elle est, d'autre part, équivalente à une recherche itérative de la valeur de la troncature C pour laquelle le résultat demeure inchangé.

2.6 Programmation dans CESAR-LCPC

2.6.1 Introduction

Le programme de calcul en éléments finis CESAR-LCPC est un logiciel développé au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées. Une description générale de ce programme peut être trouvée dans Humbert (1989). Il est constitué par un pré-processeur MAX, un post-processeur PEGGY et par le programme de calcul CESAR. L'interface entre ces trois programmes est faite à travers une base de données commune.

Le traitement de l'analyse limite a été introduit dans CESAR-LCPC par Jiang (1992) et a conduit au développement du module LIMI. Les principes de ce module étant décrits dans la thèse de Jiang(1992), on se limitera à une présentation sommaire de cette approche.

2.6.2 Organigramme du module LIMI

Le module LIMI est intégré au code CESAR-LCPC. Les calculs sont donc effectués à partir des maillages fournis par MAX et les résultats graphiques sont exploités par PEGGY.

L'organigramme présenté ci-après suppose que la discrétisation spatiale de la structure est déjà connue.

1. Lecture des données :
   - 1.1. Lecture des données géométriques (contours, maillage et conditions aux limites) ;
   - 1.2. Lecture des chargements ;
   - 1.3. Lecture des paramètres de contrôle ;
2. Initialisation :
   - 2.1. Calcul de la matrice A (paragraphe 2.5.3) ;
   - 2.2. Initialisation du second membre ;
   - 2.3. Triangularisation de la matrice A ;
   - 2.4. Initialisation des variables λ et w_p
3. Calcul de l'approximation de v_p et w_p :

3.1. Résolution de (2-12) ;

3.2. Résolution de (2-14) pour chaque élément ;

Répétition de 3.1.1. et 3.1.2. pour un nombre donné d'itérations de relaxation par blocs ;

4. Actualisation du multiplicateur Lagrangien λ ;

5. Calcul de la fonction G_p ;

6. Si les points 3, 4, et 5 précédents ont été répétés un nombre minimum de fois, alors ;

6.1. Si la convergence est bonne, on vérifie le rapport entre les deux derniers chargements ;

6.1.1. Si le rapport entre les deux derniers chargements est supérieur à celui donné, actualisation du chargement et retour au point 3 ;

6.1.2. Si le rapport entre les deux derniers chargements est inférieur à celui donné, impression des résultats et fin ;

6.2. Sinon, retour au point 3.

Les commentaires donnés ci-dessous permettent de mieux comprendre ce schéma de calcul.

Le point 3 correspond à la minimisation du Lagrangien augmenté sur les vitesses (pour un multiplicateur de Lagrange λ donné). Il traduit le point 2 de l'algorithme n°2. Le point 4 (actualisation du multiplicateur de Lagrange), correspond au point 3 du même algorithme.

Les opérations exécutées dans le point 6 sont destinées à contrôler le déroulement du calcul. L'obligation d'un nombre minimum d'itérations des processus 3, 4 et 5 est due à la constatation que les premières itérations (surtout dans le cas où l'on approche du chargement limite*) donnent souvent une idée erronée de la convergence du calcul. Si la convergence est jugée bonne, l'actualisation des chargements est faite par un processus de dichotomie, qui a été introduit dans LIMI après avoir constaté de mauvaises performances du processus de modification constante du chargement, introduit dans la version précédente du module. Ce processus s'appuie sur le résultat (2-4) : si G_p est supérieur à un, le chargement se situe au-dessus du chargement limite et est par conséquent réduit d'un coefficient donné ; si, par

* On entend ici par chargement limite, la valeur du chargement limite fourni par LIMI, pour une discrétisation et pour un indice de viscosité donnés.

contre, G_p est inférieur à 1, le chargement est remplacé par une moyenne arithmétique du dernier chargement et du dernier chargement ayant une valeur de G_p supérieure à l'unité. Il est clair que l'on doit veiller à ce que le premier chargement soit en dehors du convexe $\boldsymbol{K}_p$.

Il faut préciser que, dans la version actuelle de LIMI, l'actualisation du chargement est opérée sur des efforts choisis, au contraire de la précédente version. En effet, dans la version initiale de LIMI, l'actualisation du chargement était effectuée sur tous les chargements agissant sur la structure ; cette méthode n'était pas adaptée, par exemple, au calcul de la pression à appliquer sur le front de taille d'un tunnel creusé dans un matériau donné, pour garantir sa stabilité.

2.6.3 Convergence de l'algorithme

Le processus de minimisation dépend évidemment de la convergence de la fonction G_p calculée à partir des approches utilisées pour $\underline{v}$ et $\underline{w}$. Le Tallec et Glowinski (1989) ont établi deux résultats importants de ce point de vue. Le premier, qui porte sur les erreurs de troncature, garantit la vitesse de convergence de $G_p(w_n, w_n)$ quand le coefficient de viscosité est proche de un. Le deuxième garantit que, pour un coefficient de viscosité donné, la valeur de $G_p(v_h, w_h)$ converge en décroissant vers la valeur de $G_p(\underline{f}, \underline{T})$ quand le diamètre h de la triangulation tend vers zéro.

3ÈME CHAPITRE

EXEMPLES DE VALIDATION

3.1 Introduction

Une première validation du module LIMI a été effectuée par Jiang (1992) dans sa thèse. Toutefois, une nouvelle vérification était nécessaire en raison du changement de version de CESAR-LCPC intervenu depuis l'achèvement de ses travaux et de la nouvelle programmation de la minimisation locale pour les critères existants et de la programmation du critère de Tresca tronqué en traction dans ce module. Il faut aussi rappeler que l'introduction d'un nouveau processus d'incrémentation du chargement (positif ou négatif), ainsi que l'introduction des moyens de prendre en compte des chargements indépendants doit être vérifiée. Par conséquent, on a étudié différentes configurations pour lesquelles on disposait de solutions connues, afin de vérifier la validité des résultats donnés par LIMI. Pour ce qui est de la vérification du processus d'incrémentation de chargement, on s'est restreint aux cas les plus simples correspondant au critère de Tresca en déformations planes et au critère de Tresca tridimensionnel.

3.2 Le critère de Tresca en déformations planes.

Pour ce critère, on traitera le cas d'une plaque rectangulaire, d'un cylindre creux, de la semelle filante et de la fouille verticale.

3.2.1 Plaque rectangulaire.

Ce cas est évidemment le plus simple à traiter. La géométrie, le chargement et les conditions aux limites adoptés sont présentés sur la figure 3-1.

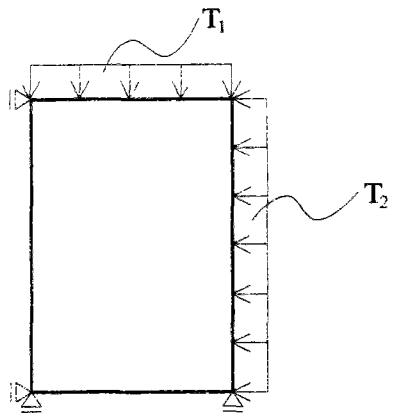


Figure 3-1. Géométrie, chargements et conditions aux limites utilisés (plaque rectangulaire).

La charge limite correspondante peut être calculée directement à partir du critère de rupture. On peut écrire:

$$|T_1 - T_2|_{lim} = 2c$$

où c désigne la cohésion du matériau et T_1 et T_2 les valeurs absolues des chargements appliqués. Le maillage représenté sur la figure 3-2 a été utilisé pour tous les calculs.

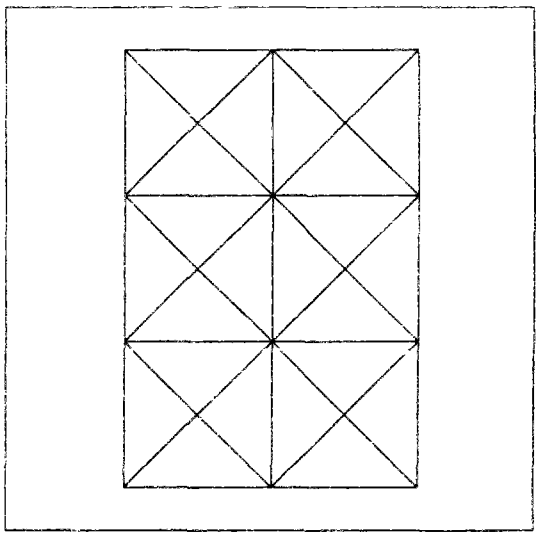


Figure 3-2. Maillage utilisé pour la plaque chargée uniformément sur ses côtés.

Cet exemple a permis de préciser les effets du processus de déchargement et de l'influence du paramètre de viscosité p sur les valeurs des bornes supérieures obtenues. Ces résultats seront utilisés dans toute la suite de nos travaux.

3.2.1.1 Borne supérieure de la charge limite fournie par LIMI ; mise en œuvre d'un processus de dichotomie dans la recherche de cette borne supérieure

Comme on l'a vu au chapitre précédent, le processus de recherche de la charge limite a été modifié par rapport à la version initiale de LIMI. En réalité, les résultats obtenus avec l'ancien processus de diminution régulière de la charge n'étaient pas complètement satisfaisants pour deux raisons :

- la première raison est que ce processus n'est pas suffisamment souple pour assurer une certaine rapidité du calcul. Si le chargement initial est éloigné de la valeur recherchée, les premiers incréments de déchargement doivent être de dimension importante et doivent être réduits au fur et à mesure qu'on s'approche de la charge limite. Ce processus doit évidement pouvoir être automatisé ;

- la deuxième raison est liée à des problèmes de convergence. Comme les incréments de chargement étaient constants dans la version initiale de LIMI, il était nécessaire d'utiliser de petits incréments pour obtenir une précision satisfaisante. Pour éviter des calculs trop longs, il fallait choisir une valeur initiale suffisamment proche de la valeur limite, ce qui peut conduire à des convergences lentes si le point de selle du Lagrangien augmenté est relativement 'plat'. La convergence de la suite des vitesses dans ces cas est parfois très difficile (il ne faut pas oublier que les multiplicateurs de Lagrange sont initialisés avec des valeurs normalement éloignées des valeurs optimales). Ceci nous a amené à initialiser les calculs avec un chargement éloigné de la valeur limite, de façon à ce que l'ensemble des vitesses de déplacement et des multiplicateurs de Lagrange puissent rapidement passer de la valeur d'initialisation à des valeurs plus proches de l'état final.

a) Cas T_2=0.

Les résultats sont dans un premier temps donnés dans le cas où T_2 est égal à zéro, la valeur initiale de T_i étant non nulle. Le tableau 3-1 donne l'évolution des paramètres G_p et J_p avec le nombre d'itérations pour chaque valeur de la charge. On rappelle que les valeurs de G_p supérieures à 1 signifient que la charge est supérieure à la valeur limite, tandis que les valeurs de G_p inférieures à 1 correspondent à une charge inférieure à la charge limite. Le premier calcul a été effectué avec une charge égale à 1,5 fois la valeur limite, la réduction initiale de la charge étant fixée à 0,8. Le processus d'incrémentation de la charge est arrêté quand le rapport

entre deux valeurs successives de la charge appliquée est inférieur à 2% (valeur choisie par l'utilisateur).

Tableau 3-1. Exemple de déroulement de calcul. T_l est la charge appliquée, T_{lim} la charge théorique.

	itération	1	5	10	15	20	25	30
T_l/T_{lim} = 1,5	J_p	-82,4730	-74,8890	-149,7400	-224,570	-299,400	-374,210	-449,020
	G_p	1,0013	1,0013	1,0014	1,0014	1,0015	1,0015	1,0015
T_l/T_{lim} = 1,2	J_p	-170,8600	-191,240	-203,1600	-215,090	-227,010	-238,930	-250,850
	G_p	1,0014	1,0014	1,0014	1,0014	1,0014	1,0014	1,0014
T_l/T_{lim} = 0,96	J_p	57,8680	50,5380	50,0420	49,5460	49,0500	48,5530	48,0570
	G_p	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
T_l/T_{lim} = 1,08	J_p	-98,3580	-95,9860	-97,8740	-99,7620	-101,650	-103,540	-105,420
	G_p	1,0013	1,0013	1,0013	1,0013	1,0013	1,0013	1,0013
T_l/T_{lim} = 1,026	J_p	-32,1200	-33,9370	-34,1290	-34,3220	-34,5140	-34,7060	-34,8990
	G_p	1,0012	1,0012	1,0012	1,0012	1,0012	1,0012	1,0012
T_l/T_{lim} = 0,9747	J_p	36,9960	35,3330	35,1310	34,9280	34,7260	34,5230	34,3210
	G_p	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
T_l/T_{lim} = 1,00035	J_p	-0,4663	0,3032	0,3032	0,3031	0,3031	0,3031	0,3030
	G_p	1,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
T_l/T_{lim} = 1,0132	J_p	-17,0970	-	-	-	-	-	-
	G_p	1,0012	-	-	-	-	-	-

Le chargement limite étant en général inconnu, il est a priori difficile de déterminer précisément sa valeur. On considère dans ces conditions que la borne supérieure de la charge limite fournie par LIMI correspond au chargement le plus proche de zéro qui permette d'obtenir, après un certain nombre d'itérations, des valeurs de G_p supérieures à 1. Dans le cas présent, cette croissance n'est pas visible dans le tableau précèdent du fait de la précision utilisée pour la présentation des résultats. Mais il est évident que la fonction G_p croîtra si la fonction J_p a un comportement décroissant.

Dans le cas étudié, la valeur de la borne supérieure à retenir devait être celle pour laquelle $\frac{T_l}{T_{lim}} = 1{,}026$. Par rapport à l'ancienne version de LIMI, la différence réside dans le fait que le calcul se serait arrêté pour la première charge conduisant à une valeur de G_p inférieure à 1 soit pour $\frac{T_l}{T_{lim}} = 0{,}96$, ce qui aurait nécessité, pour une meilleure précision, un deuxième

lancement du calcul partant de la dernière borne supérieure obtenue ($\frac{T_1}{T_{lim}} = 1{,}2$), avec des incréments de déchargement plus petits.

D'autre part, la réalisation d'un nombre minimum d'itérations pour un chargement donné est indispensable. La figure 3-3 montre l'évolution de G_p avec le nombre d'itérations, pour les différents chargements au-dessus de la charge limite. Il est clair que les courbes G_p ont tendance à croître ou à se stabiliser. Notre expérience de l'utilisation du module LIMI a montré que la valeur de G_p tend à croître si le chargement est supérieur à la valeur limite. Néanmoins, ce comportement peut ne pas apparaître tout au début des calculs. Ce fait apparaît clairement pour la première valeur de la charge pour laquelle on enregistre une oscillation initiale; pour les chargements restants, ce phénomène est moins évident ou même inexistant : pour le premier chargement les différentes variables sont initialisées à une valeur fixée (sauf pour des cas exceptionnels, les vitesses initialisées ne sont même pas plastiquement admissibles) tandis que, pour les chargements suivants, les variables reprennent les valeurs correspondant au dernier chargement.

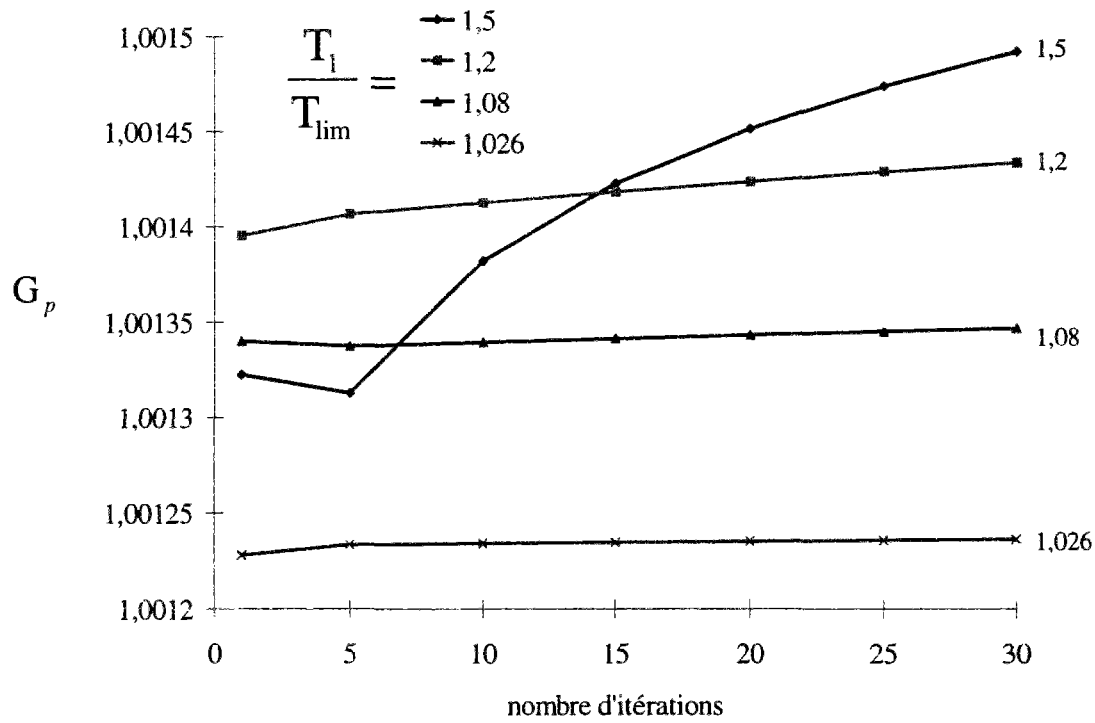


Figure 3-3. Variations de G_p avec le nombre d'itérations pour différents chargements.

La figure 3-4 donne la variation de J_p avec le nombre d'itérations pour chaque chargement. Les oscillations initiales sont aussi évidentes. Une stabilisation de J_p (sa valeur tend à décroître

très lentement si le chargement est proche de la valeur limite) apparaît à l'approche du chargement limite (on rappelle que la charge limite est celle pour laquelle J_p prend la valeur zéro).

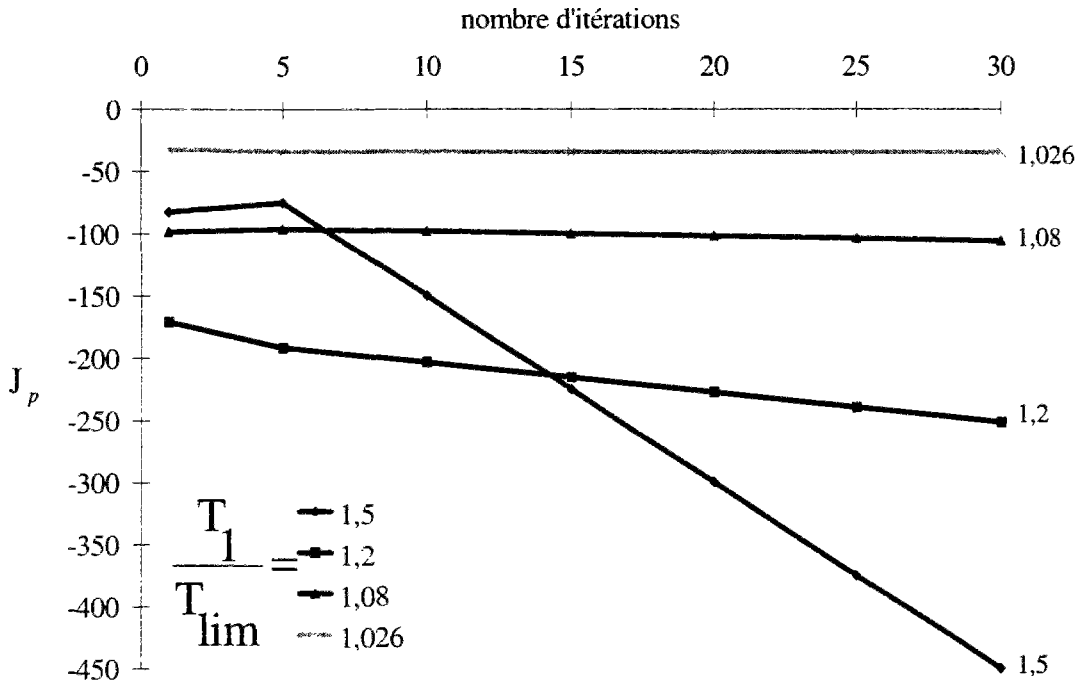


Figure 3-4. Variations de Jp avec le nombre d'itérations, pour différents chargements.

Les vitesses de déformation obtenues pour ce calcul sont montrées sur la figure 3-5. Elles correspondent à l'une des solutions classiques trouvées dans la littérature (voir par exemple Salençon, 1983), pour le cas d'une plaque écrasée entre deux supports rigides et de contact complètement lisse avec la plaque, c'est à dire à une déformation uniforme dans toute la plaque. On peut vérifier que la condition d'incompressibilité est bien respectée.

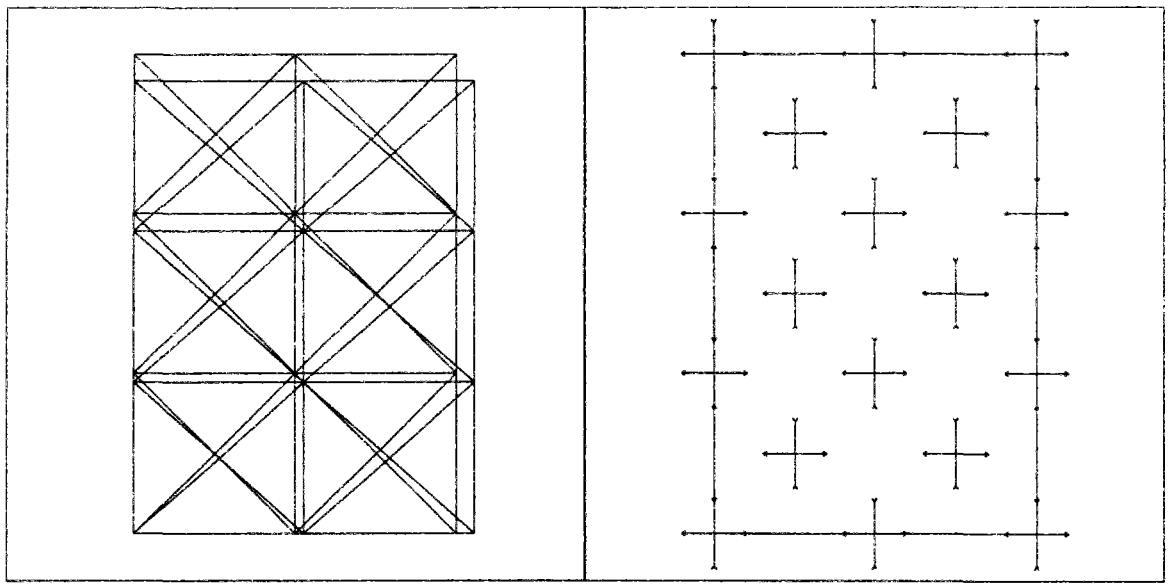


Figure 3-5. Maillage déformé et vitesses de déformation pour le cas de la plaque chargée uniformément sur ses côtés.

Il faut noter que le fait d'arriver avec le module LIMI à une borne supérieure relativement éloignée (2,6%) de la charge limite provient de deux raisons bien identifiées. D'abord l'écart minimum autorisé ici pour le rapport entre deux chargements consécutifs est trop grand pour une bonne précision. D'autre part, la charge dépend aussi de la valeur utilisée pour le coefficient p ; ce point sera abordé plus en avant. Un calcul plus poussé permet de trouver une valeur pour la borne supérieure de la charge limite égale à la valeur théorique.

Le mécanisme trouvé dans le cas de la plaque (déformation constante) correspond, comme on l'a déjà indiqué, à une solution classique de ce problème. Une autre solution, donnant la même charge limite, est obtenue à partir du mécanisme représenté sur la figure 3-6. Il est constitué par trois blocs rigides dont la vitesse relative forme un angle de 45 degrés avec la direction verticale. Ce mécanisme est aussi représentatif du cas de l'écrasement de la plaque entre deux parois rigides, ayant un contact rugueux avec la plaque, et, par conséquent, empêchant les déformations aux extrémités de la plaque.

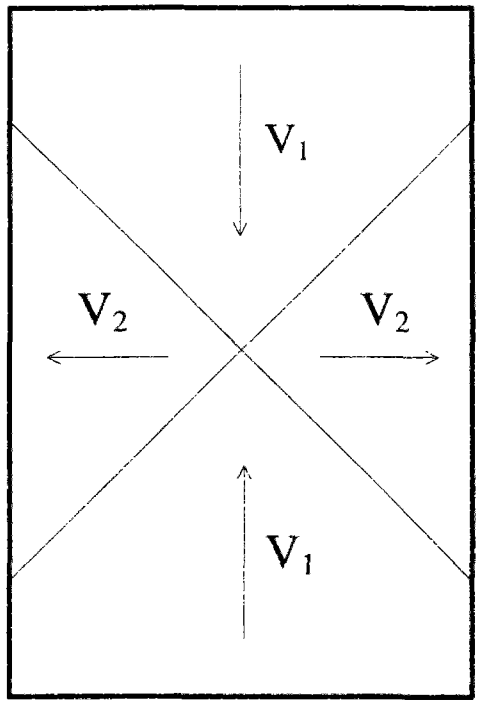


Figure 3-6. Schéma d'un mécanisme de blocs rigides pour la plaque chargée sur ses côtés.

Un mécanisme similaire, présentant une zone de déformations concentrées autour d'une bande (voir les vitesses de déformation et la ligne de glissement du mécanisme de blocs sur la figure 3-7) a été obtenu avec LIMI en introduisant une couche d'éléments de cohésion plus importante dans la partie supérieure du maillage. Cette couche empêche la déformation horizontale de la partie supérieure du système et, par conséquent, évite la solution de déformation uniforme dans toute la plaque. Par contre, cette solution nécessite un maillage beaucoup plus fin pour reproduire de façon satisfaisante la surface de glissement. Avec le maillage utilisé, beaucoup plus important numériquement que celui utilisé auparavant, on a obtenu une valeur de 1,0037 pour le rapport entre la borne supérieure de la charge limite fournie par LIMI et la charge limite théorique.

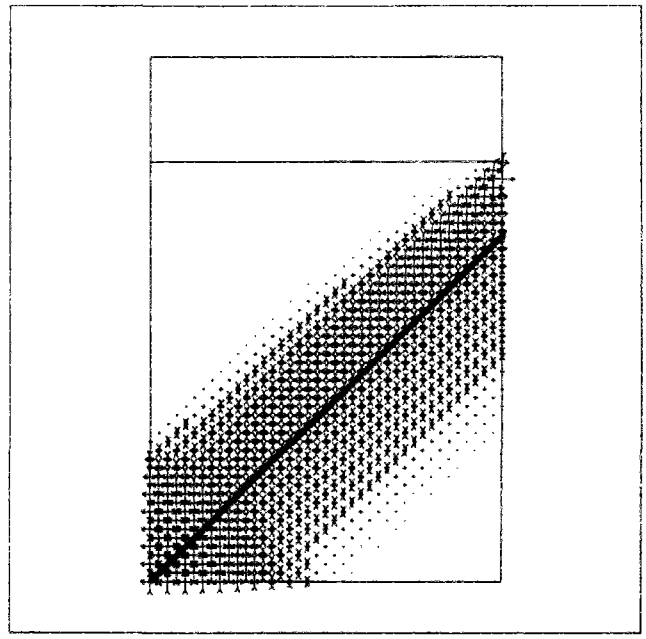


Figure 3-7. Vitesses de déformation. Le trait correspond à la surface de glissement du mécanisme de la figure 3-6.

La figure 3-8 permet de visualiser les vitesses de déplacement obtenues pour ce mécanisme. On distingue bien deux zones distinctes, présentant respectivement un mouvement horizontal uniforme et un mouvement vertical uniforme. On peut enfin rappeler que, dans les essais réalisés sur des sols, les deux types de rupture sont observés.

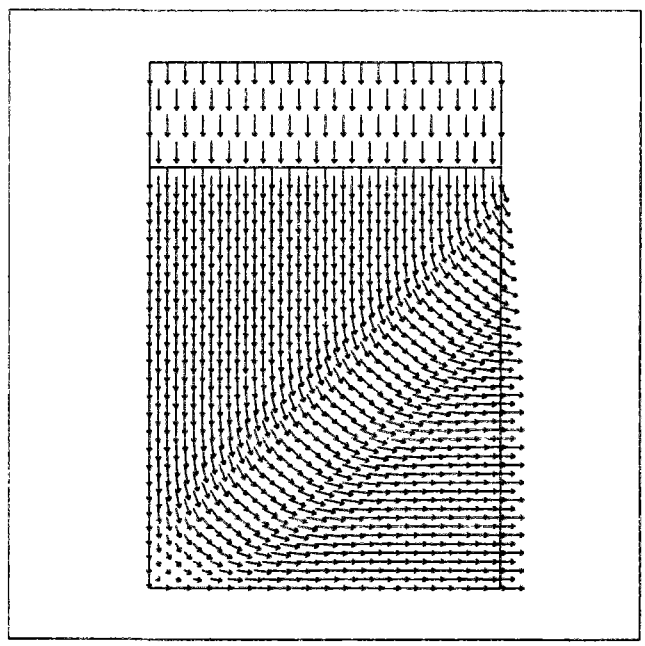


Figure 3-8. Vitesses de déplacement.

b) Cas $T_2 \neq 0$

Dans ce cas, on cherche à connaître le chargement T_1 qui, combiné avec T_2, conduirait à la ruine de la plaque. On rappelle ici que l'ancienne version de LIMI ne traitait que des cas de chargement proportionnel. Dans notre cas, le processus de déchargement doit affecter seulement un des chargements (T_1), l'autre restant constant. Le chargement est tel que $\frac{T_2}{c} = 2$, ce qui donne $\frac{T_1}{c} = 4$ comme chargement limite, la solution $\frac{T_1}{c} = 0$ étant similaire au cas de chargement antérieur. La figure 3-9 présente l'évolution de G_p pour différents chargements supérieurs à la charge limite.

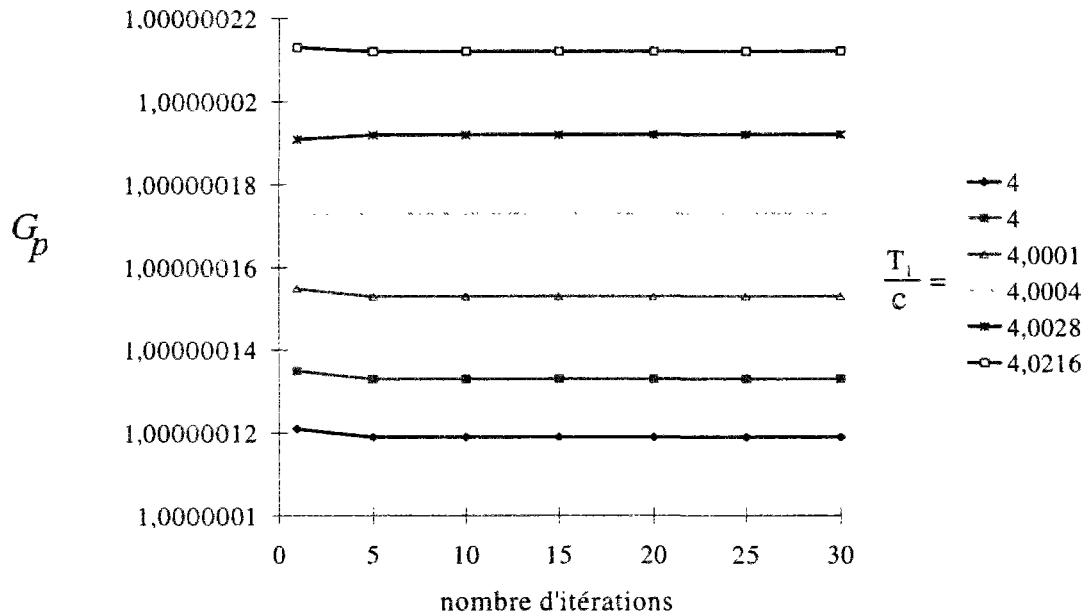


Figure 3-9. Variations de G_p avec le nombre d'itérations pour différents chargements.

On constate que les valeurs de G_p sont stabilisées pour les valeurs des chargements présentées. Ces chargements sont très proches de la charge limite théorique et on remarque même que deux valeurs de chargement apparemment égales donnent des valeurs différentes pour G_p. Ce fait est dû à la précision choisie pour la sortie des résultats, estimée amplement suffisante pour les cas courants de la géotechnique, mais pas pour ce cas. L'idée que LIMI pourrait donner une valeur inférieure à la charge limite réelle comme borne supérieure est facilement dissipée par l'analyse du tableau 3-2, où l'on trouve l'évolution des indicateurs J_p et G_p pour une valeur de $\frac{T_1}{c} = 3{,}9992$, qui confirme que LIMI a bien cerné la charge limite.

Tableau 3-2. Evolution des indicateurs G_p et J_p pour une charge $\frac{T_1}{c} = 3{,}9992$.

itération	1	5	10	15	20	25	30
G_p	4,11E-02	4,55E-02	4,55E-02	4,55E-02	4,55E-02	4,55E-02	4,55E-02
J_p	0	0	0	0	0	0	0

3.2.1.2 Influence du paramètre *p*

Comme on l'a vu dans le chapitre II, la borne supérieure de la charge limite fournie par LIMI dépend de la valeur du coefficient de viscosité p, et doit décroître avec sa valeur. D'autre part, la simplification introduite dans le paragraphe 2.5.5 est d'autant plus valide que la valeur de p est faible. La conjonction de ces deux considérations, la première à caractère théorique, l'autre à caractère numérique, conduit à utiliser une valeur de p aussi proche que possible de 1. La figure 3-10 montre l'évolution du rapport entre la borne supérieure de la charge limite donnée par LIMI et la charge limite théorique pour différentes valeurs de p, pour le cas de chargement a) précédent. On remarque que les bornes supérieures de la charge limite tendent vers la charge limite théorique quand p décroît, sa valeur se stabilisant pour $p \leq 1+10^{-4}$. Plus précisément, on peut considérer que des résultats satisfaisants peuvent être obtenus pour des p de l'ordre de $1+10^{-6}$, mais cette valeur ne doit pas être considérée comme générale. L'influence du coefficient de viscosité peut être très importante : Sassi (1996) a notamment montré qu'une modification de p pouvait se traduire par un changement de mécanisme et une borne supérieure de la charge limite plus faible. Ainsi, et pour chaque cas étudié, il est recommandé d'effectuer au moins un calcul avec un coefficient de viscosité plus faible, d'au moins un ordre de grandeur plus petit que celui utilisé dans l'analyse, avant de pouvoir conclure. Il faut toutefois noter que les résultats obtenus avec une valeur plus forte resteront du côté de la sécurité, car les bornes obtenues constituent des majorants de la charge limite réelle.

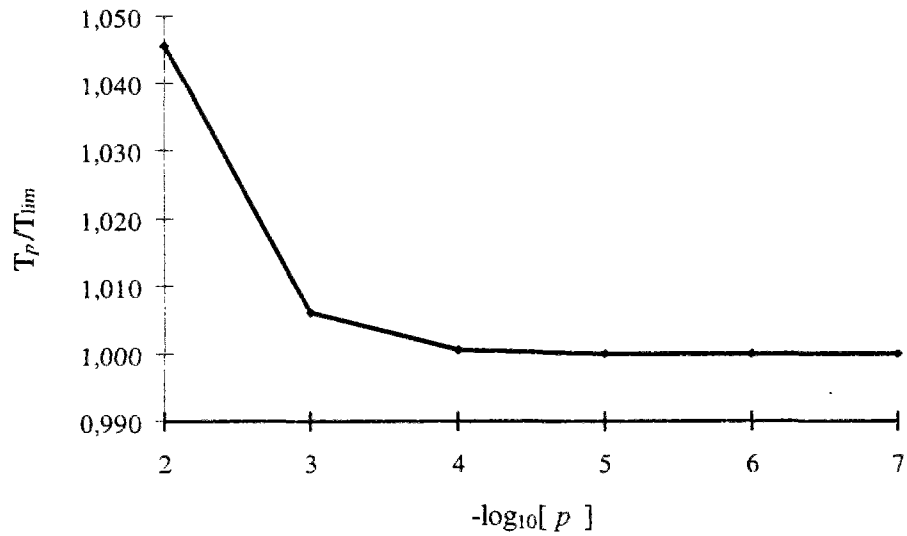


Figure 3-10. Relation entre les bornes supérieures de la charge limite données par LIMI et l'indice de viscosité p.

3.2.1.3 Nombre d'itérations de relaxation par blocs

Le nombre d'itérations de relaxation par blocs constitue évidemment un paramètre important dans la réalisation du calcul, dans la mesure où il contrôle la liaison entre les minimisations locale et globale. Un nombre élevé de relaxations par bloc conduit à un meilleur résultat global qu'un nombre réduit ; mais il nécessite des temps de calcul plus importants (on rappelle que, pour chaque itération de relaxation, on effectue une minimisation globale, qui se traduit par la résolution d'un système d'équations linéaires, et une minimisation locale pour chaque élément). Il est difficile de trouver un bon compromis entre qualité des résultats et temps de calcul modéré. A titre indicatif, les résultats présentés dans notre travail ont été, en général, obtenus avec un nombre de relaxations par blocs variant entre 2 et 3 (nombres corroborés par Guennouni et Le Tallec, 1982) ; dans certains cas de convergence difficile, cette valeur a été amenée jusqu'à un maximum de 6 relaxations par blocs.

3.2.2 Le cylindre creux

Le deuxième cas étudié est celui du cylindre creux. On décrit les résultats obtenus pour différentes configurations géométriques : tubes centrés et tubes excentrés, tubes minces et tubes épais.

Les caractéristiques géométriques de ce cas sont décrites sur la figure 3-11, dans la situation la plus générale, qui tient compte de l'existence d'un défaut de centrage du rayon intérieur, défini par une excentricité e par rapport à l'axe du cylindre extérieur.

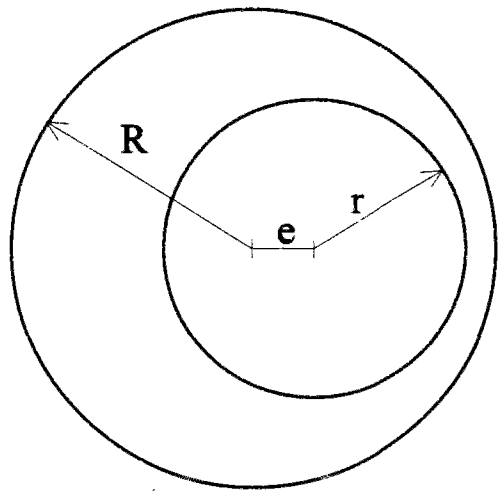


Figure 3-11. Définition géométrique du cylindre creux

3.2.2.1 Cas d'un cylindre centré

Ce cas d'étude correspond à e=0. Le chargement est constitué par une pression intérieure (l'introduction d'une pression extérieure n'affecte pas d'une façon qualitative les résultats présentés par la suite).

La charge limite théorique peut se mettre sous la forme :

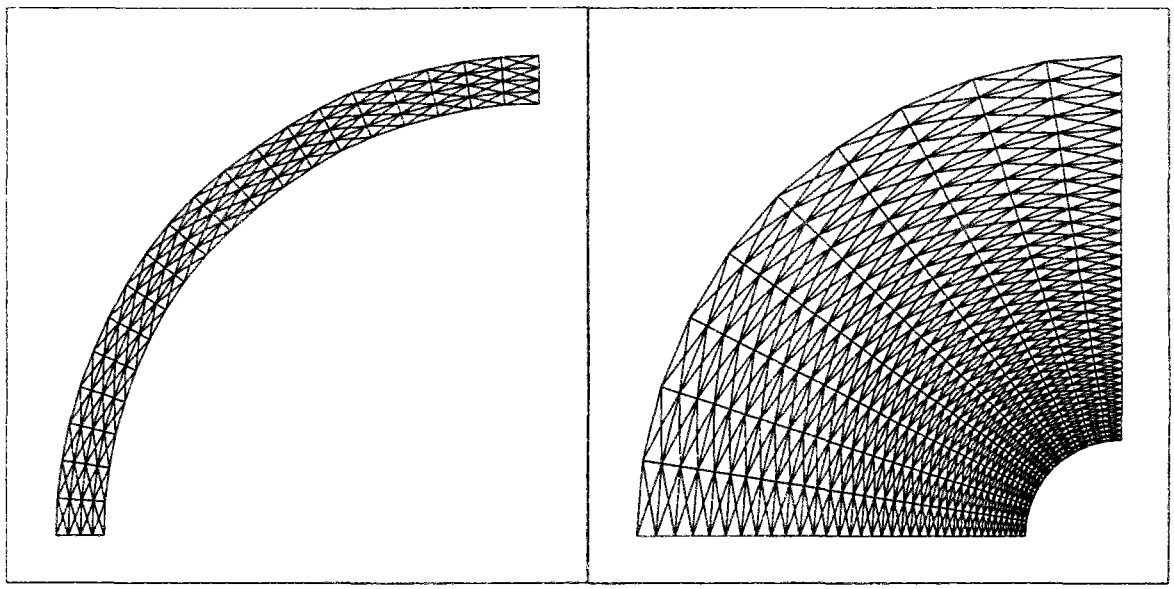
$$p_{lim} = 2c * ln(\frac{R}{r})$$

Pour faciliter les comparaisons, on a considéré un cylindre de rayon extérieur unité. Les résultats de ces calculs sont donnés dans le tableau 3-3. On peut constater qu'ils sont pratiquement identiques à ceux obtenus à partir de la solution théorique.

Tableau 3-3. Comparaisons entre les résultats de LIMI et la charge théorique ; c=1.

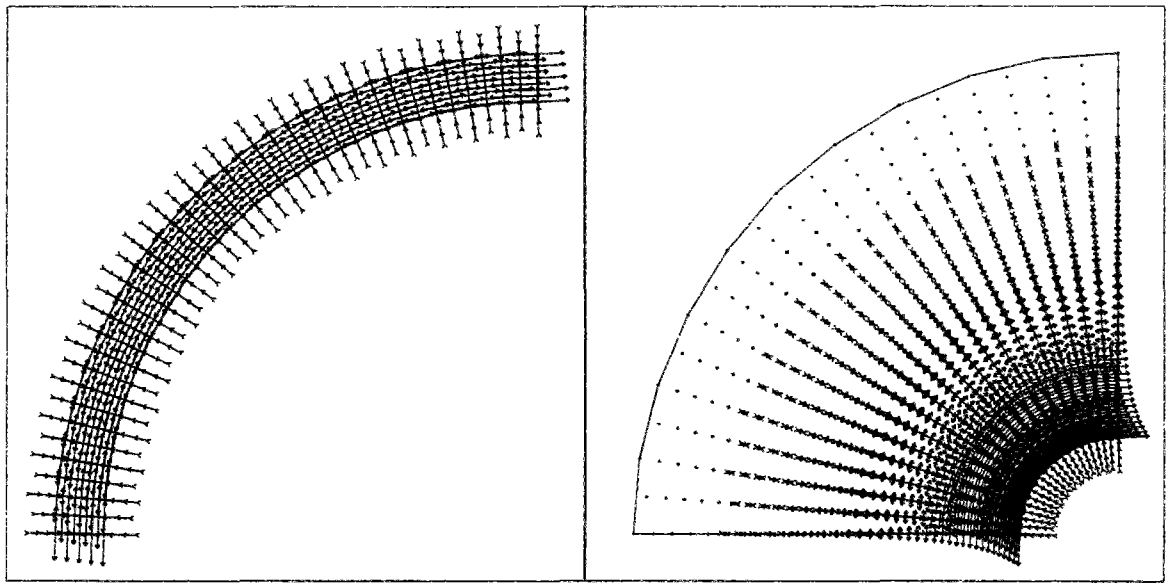
	Charge limite LIMI (1)	Charge limite théorique (2)	(1)/(2)
r=0,9	0,210925	0,210721	1.000968
r=0,7	0,715163	0,713350	1.002542
r=0,2	3,225745	3,218876	1,002134

La figure 3-12 montre les maillages utilisés pour les cas de cylindres intérieurs ayant un rayon égal à 0,9 et 0,2, respectivement. Dans le premier cas, la solution est presque constante sur l'épaisseur du tube (figure 3-13) et le maillage utilisé est par conséquent uniforme dans tout le cylindre. Par contre, le maillage a été affiné à proximité du rayon intérieur dans le deuxième cas, compte tenu de la forte variation des vitesses de déformation dans cette partie du maillage (figure 3-13).



a. r=0,9 b. r=0,2

Figure 3-12. Maillages utilisés pour les cylindres intérieurs de rayon 0,9 et 0,2



a. r=0,9 b. r=0,2

Figure 3-13. Vitesses de déformation pour les cas r=0,9 et r=0,2

3.2.2.2 Forme des éléments utilisés

Les maillages utilisés sont constitués par des assemblages de quadrilatères composés de quatre triangles (figure 3-14). Cette forme a été choisie pour respecter la condition d'incompressibilité associée à l'utilisation du critère de Tresca. En effet, des maillages quelconques, ne respectant pas la condition $\mathrm{div}\underline{v} = 0$, conduisent, en général, à un blocage de la structure. Ce phénomène a été déjà étudié par Nagtegaal et al. (1974), qui ont montré que, pour des maillages arbitraires, la déformation est constante dans toute la structure, sauf dans certains cas hasardeux de construction des maillages. Cet inconvénient peut être surmonté en utilisant des structures formées de triangles obtenus par le croisement des diagonales d'un quadrilatère (figure 3-14) ; ce type d'assemblage présente l'avantage de ne pas nécessiter de reformulation de la matrice A, au contraire d'autres types de combinaisons d'éléments (voir par exemple Needleman et Shih, 1978). D'autres méthodes existent pour contourner ces difficultés liées au respect de la condition d'incompressibilité ; Jiang (1992) a programmé une méthode où le Lagrangien augmenté incorpore la condition $\mathrm{div}\underline{v} = 0$ comme restriction. Néanmoins, cette technique est extrêmement lente et c'est la raison pour laquelle nous ne l'avons pas retenue. Une autre méthode consiste à interpoler les multiplicateurs de Lagrange par des polynômes de degré immédiatement inférieur à celui des polynômes interpolant les vitesses et à imposer la condition d'incompressibilité, non plus localement mais en moyenne

dans l'élément. On pourra se référer à Le Tallec et Ravachol (1987) pour un exemple d'application de cette méthode aux matériaux viscoélastiques.

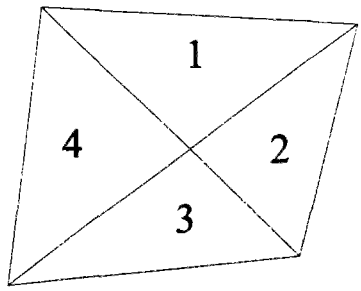


Figure 3-14. Eléments utilisés pour le cas des critères incompressibles

3.2.2.3 Cylindre excentré

Des bornes supérieures et inférieures pour ce cas ont été données par Salençon (1969). Compte tenu des conditions de symétrie de ce problème, on a limité le modèle au demi-cylindre représenté sur la figure 3-15. Pour empêcher les mouvements de translation de l'ensemble du cylindre, les vitesses de déplacement du point A ont été complètement bloquées. Comme auparavant, le chargement est constitué par une pression uniforme appliquée sur la surface du cylindre intérieur.

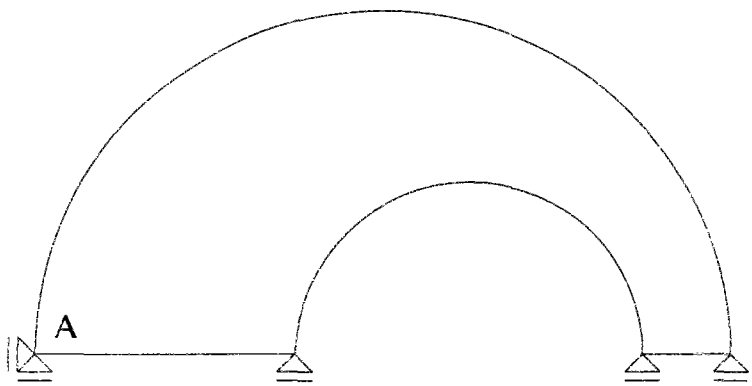


Figure 3-15. Modèle pour le cylindre excentré

Les résultats de nos calculs sont comparés avec les résultats de Salençon (1969) dans le tableau 3-4, qui rassemble les bornes supérieures obtenues par LIMI, ainsi que les bornes inférieures et supérieures fournies par Salençon (1969). On remarque que, dans le cas r=0,2 - e=0,5, la précision des résultats de Salençon (1969) est inférieure à celle des autres cas : pour

les autres valeurs des résultats numériques étaient données dans l'article de Salençon tandis que nous avons dû lire sur un graphique la valeur pour ce cas.

Tableau 3-4. Comparaison entre les résultats de LIMI et ceux de Salençon (1969)

r	e	Borne supérieure LIMI	Borne supérieure Salençon (1969)	Borne inférieure Salençon (1969)
0,200	0,100	1,529	1,526	1,504
	0,200	1,441	1,427	1,386
	0,500	0,942	1,0	0,9
0,700	0,100	0,257	0,274	0,251
	0,200	0,159	0,174	0,133

3.2.3 Fouille verticale

Ce cas, classique en mécanique des sols, va nous permettre de tirer quelques conclusions concernant la taille des éléments à employer dans le calcul. On rappelle que la formulation utilisée est basée sur l'utilisation d'éléments finis dont les fonctions approchant le champ des vitesses de déformation sont constantes par élément. Par conséquent, des maillages suffisamment fins doivent être utilisés, si l'on veut traduire les éventuelles variations spatiales de la valeur de la puissance dissipée. Le calcul de la fouille verticale a été effectué avec des maillages de différents degrés de finesse, dans le but d'étudier l'influence de la taille des éléments sur les résultats.

La géométrie et les conditions aux limites utilisées sont indiquées sur la figure 3-16. Le chargement est constitué par le poids volumique du sol et la résistance du sol est caractérisée par la cohésion non drainée, c_u ; dans ces conditions, la charge limite peut être évaluée à partir du paramètre adimensionnel $\frac{\gamma H}{c_u}$.

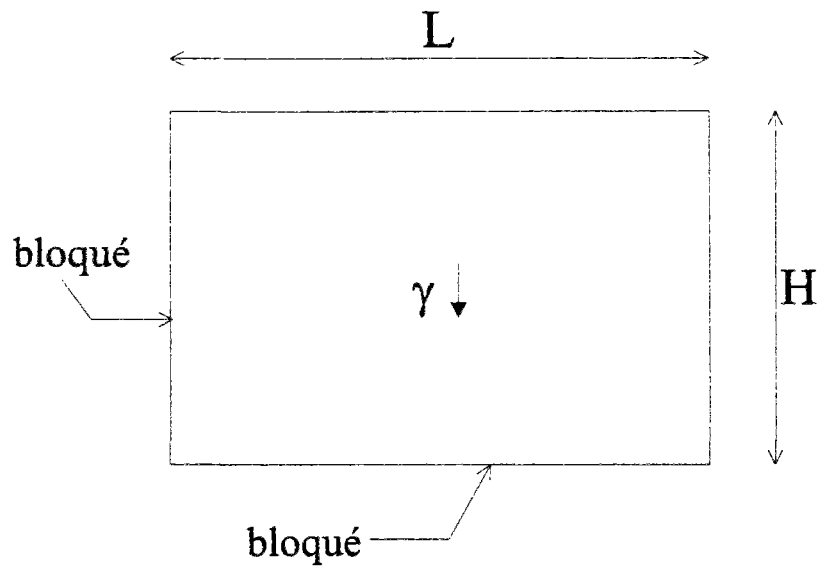


Figure 3-16. Géométrie et conditions aux limites pour le cas de la fouille verticale.

Des maillages uniformément divisés, mais de nombre d'éléments différent ont été considérés. La figure 3-17 montre l'évolution de la borne supérieure fournie par LIMI avec le nombre d'éléments sur la hauteur de la fouille.

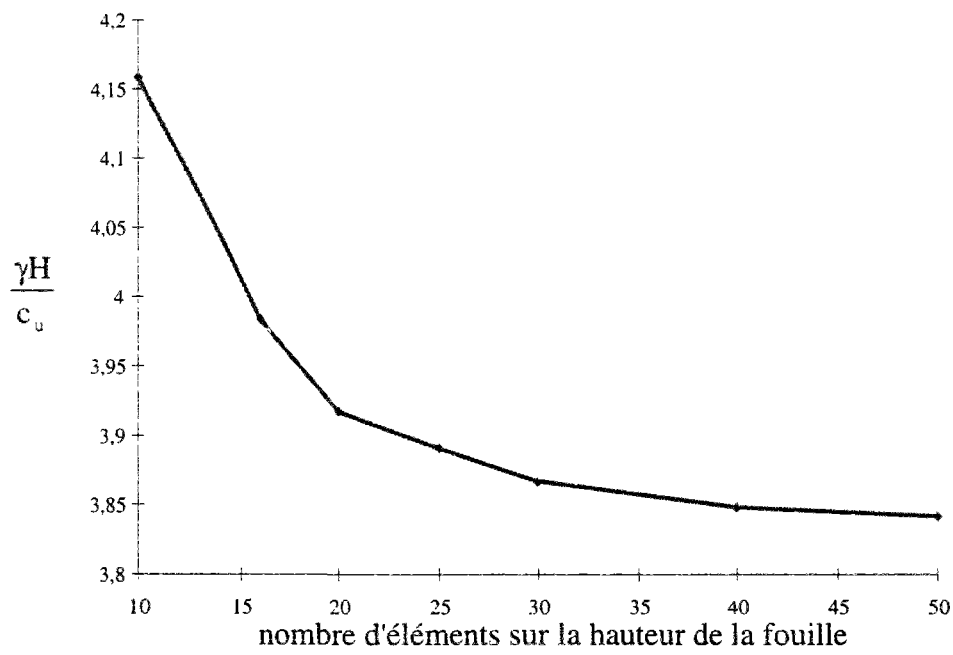


Figure 3-17. Evolution de la borne supérieure de la charge limite fournie par LIMI avec l'affinement du maillage.

Il est clair que la finesse du maillage a une influence significative sur les résultats. Mais cette influence diminue naturellement avec l'augmentation du nombre d'éléments du

maillage. Ainsi, entre les deux maillages les plus grossiers l'amélioration du résultat est de 4,2%, alors que, pour les trois derniers cas, cette amélioration n'est que de 0,6%. D'un point de vue pratique, on se donne une valeur initiale pour cerner l'amélioration produite par l'augmentation du nombre d'éléments. Dans la mesure du possible, on affinera le maillage jusqu'à que cette valeur soit obtenue. On note néanmoins que, même pour le maillage le plus grossier, le résultat obtenu est de 8% supérieur seulement au meilleur résultat obtenu.

La figure 3-18 présente le maillage déformé obtenu dans le cas où le nombre d'éléments sur la hauteur de la fouille est égal à vingt.

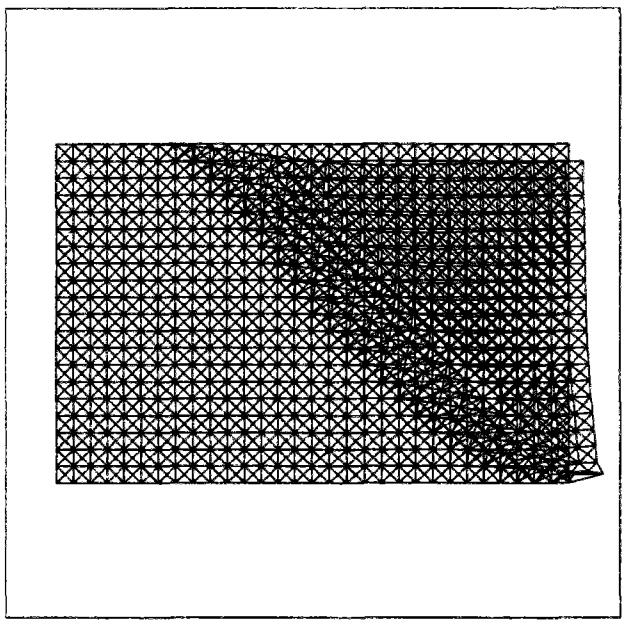


Figure 3-18. Maillage déformé pour la fouille verticale.

La figure 3-19 donne les vitesses de déformation pour le même cas de calcul. Il est clair que des vitesses de déformation dont la puissance est pratiquement nulle occupent une grande partie du maillage, ce qui traduit un comportement de blocs presque rigides*. Comme la minimisation de la puissance dissipée est faite dans chaque élément, il est clair que, dans les zones où les vitesses de déformation restent très petites ou sont différentes de zéro mais constantes, le raffinement du maillage n'est pas nécessaire.

* On utilise la qualification « presque rigide » pour des zones où les vitesses sont différentes de zéro en valeur absolue, mais très proches de cette valeur, ce qui nous permet de les considérer comme nulles du point de vue numérique.

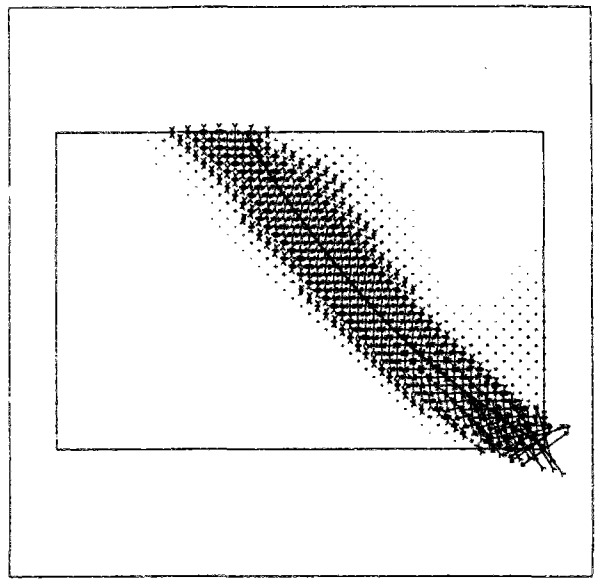


Figure 3-19. Vitesses de déformation et cercle de glissement (Taylor, 1948) pour la fouille verticale.

Pour terminer l'étude de ce cas, on remarque que la meilleure borne connue est égale à $\frac{\gamma H}{c_u} = 3{,}83$, (Taylor, 1948) ; elle a été obtenue en utilisant un mécanisme de cercle passant par le pied de la fouille. La valeur obtenue par LIMI est de 3,84, soit une erreur relative de 0,26%. Le mécanisme obtenu par LIMI, constitué par deux blocs presque rigides délimités par une bande de cisaillement, est proche de celui du mécanisme de rupture circulaire optimal utilisé par Taylor (1948), représenté sur la figure 3-19.

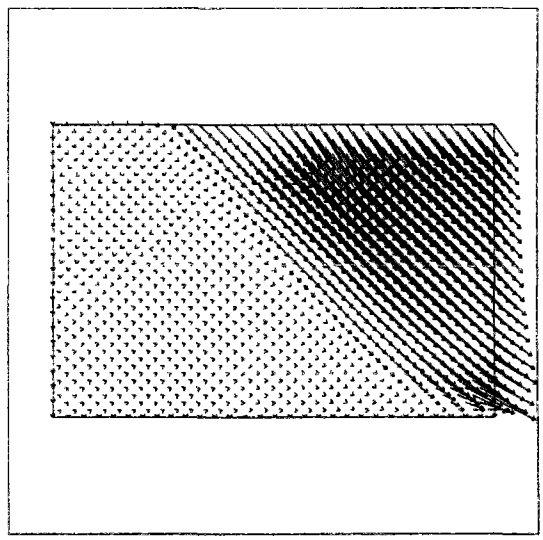


Figure 3-20. Vitesses de déplacement pour la fouille verticale.

On rappelle que le meilleur résultat pour la borne statique, obtenu par une méthode numérique (Pastor, 1978, 1983), est de $\frac{\gamma H}{c_u} = 3{,}67$.

3.2.4 Semelle filante

Ce cas a également été étudié par de nombreux auteurs (Mandel et Salençon, 1972 ; Ko et Davidson, Vesic, 1973 ; Salençon, 1974 ; Bottero, 1982 ; Matar et Salençon, 1977). On retiendra ici le cas d'un sol homogène, non pesant, de cohésion non drainée égale à c_u. Dans ces conditions, deux cas de chargement ont été envisagés : le premier correspond à une semelle souple, soumise à un chargement uniforme sur une largeur L en surface ; le deuxième cas est celui de la semelle rigide rugueuse, étant simulée à l'aide d'éléments de massif ayant une cohésion cent fois supérieure à celle du sol. Les maillages utilisés, qui tiennent compte de la symétrie du problème, pour chaque cas, sont représentés sur les figures 3-21 et 3-22, respectivement. Des conditions aux limites usuelles ont été retenues : bords inférieur et latéral de droite fixes, vitesse de déplacement horizontal nulle sur le plan latéral gauche.

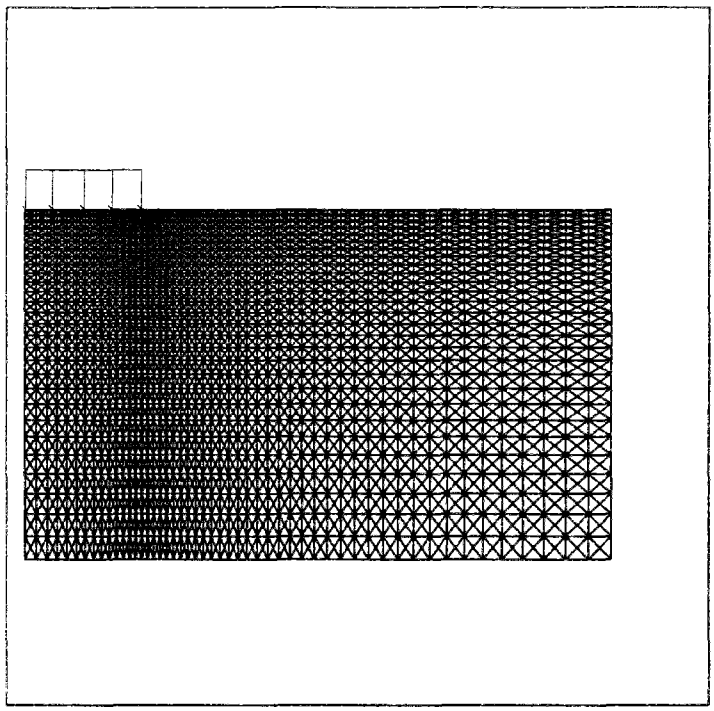


Figure 3-21. Maillage et chargement pour la semelle flexible.

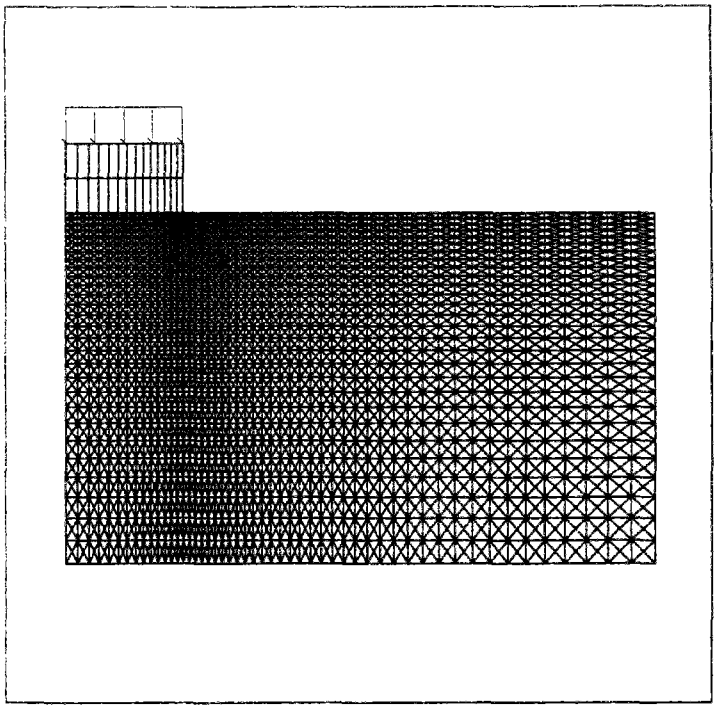


Figure 3-22. Maillage et chargement pour le cas de la semelle rigide et rugueuse.

Le résultat obtenu pour la borne supérieure de la charge limite est différent dans les deux cas. Dans le premier cas, on retrouve la valeur de 5,17 pour le rapport entre la pression de chargement et la cohésion. Dans le deuxième cas, le rapport obtenu (5,29) s'éloigne légèrement de la solution exacte (5,14), égale dans les deux cas (Salençon, 1983). En réalité, il est possible d'améliorer ce résultat avec un maillage plus fin, mais la concentration de déformations au bord de la semelle est amplifiée, ce qui empêche une visualisation des résultats. Des modifications de maillage ont été proposées par Asaoka et al. (1994) (figure 3-23) pour réduire cet effet, mais cette approche n'a pas apporté d'amélioration significative dans notre cas.

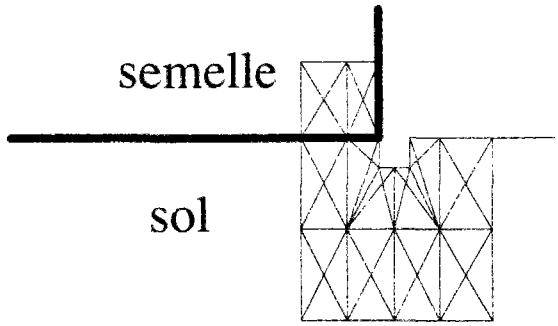


Figure 3-23. Détail du maillage de la jonction semelle-sol proposée par Asaoka et al. (1994)

Les vitesses de déformation obtenues sont représentées sur la figure 3-24 pour le premier cas et sur la figure 3-25 pour le deuxième cas.

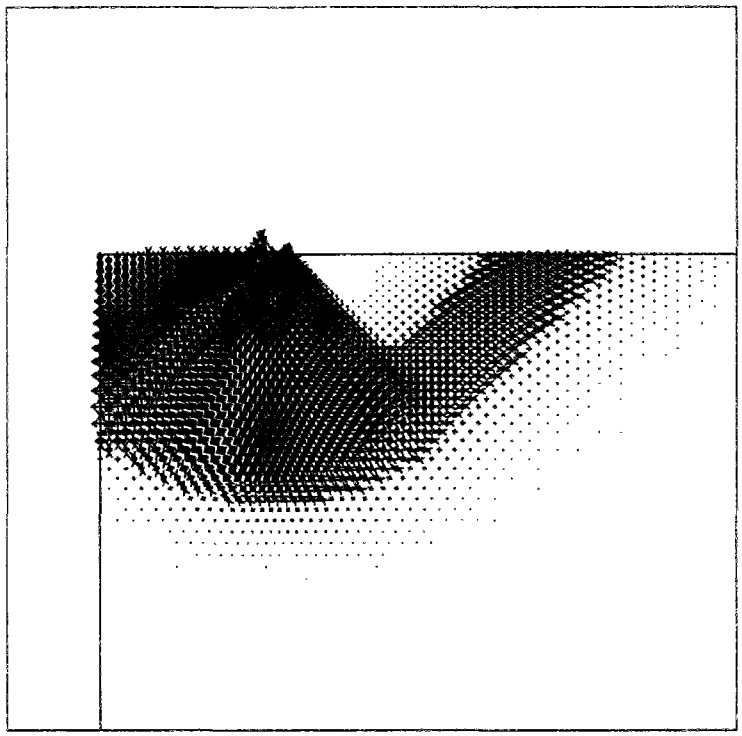


Figure 3-24. Vitesses de déformation pour la fondation flexible

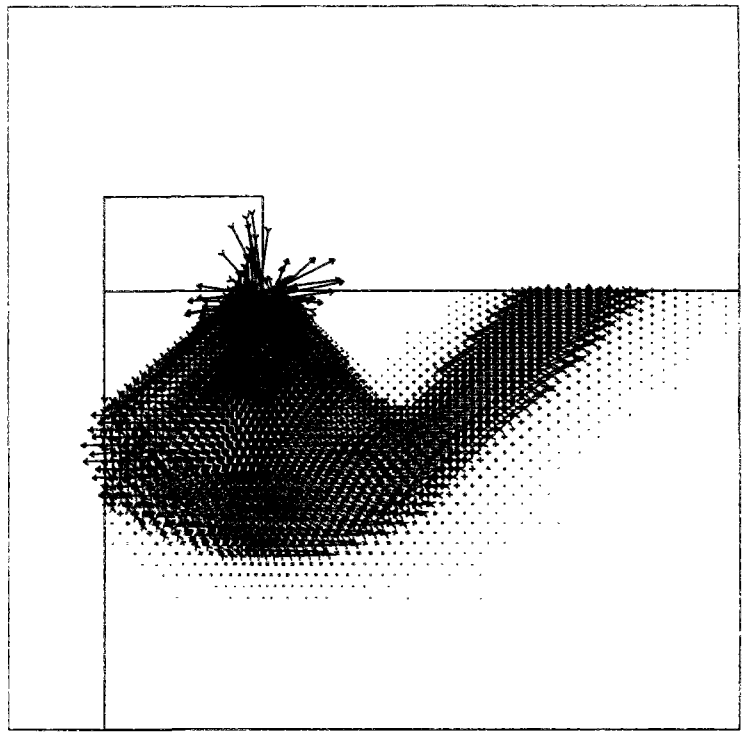


Figure 3-25. Vitesses de déformation pour la fondation rigide et rugueuse

On retrouve sur ces deux figures (surtout dans le cas de la semelle rigide) l'allure connue du mécanisme de Prandtl, utilisé dans la solution théorique (figure 3-26). Les angles indiqués sur cette figure sont ceux du schéma général pour les matériaux frottants, mais la géométrie est celle obtenue pour l'angle de frottement φ nul. Le coin triangulaire $CAA_{sym.}$ est rigide et s'enfonce verticalement comme la fondation. Sur les lignes CA et CBD (et leurs symétriques) il y a une discontinuité de vitesse. La ligne CB (et son symétrique), qui est une spirale logarithmique dans le cas général, devient un arc de cercle dans le cas de $\varphi=0$. Dans les zones CAB et ABD (et leurs symétriques), se produisent des déformations.

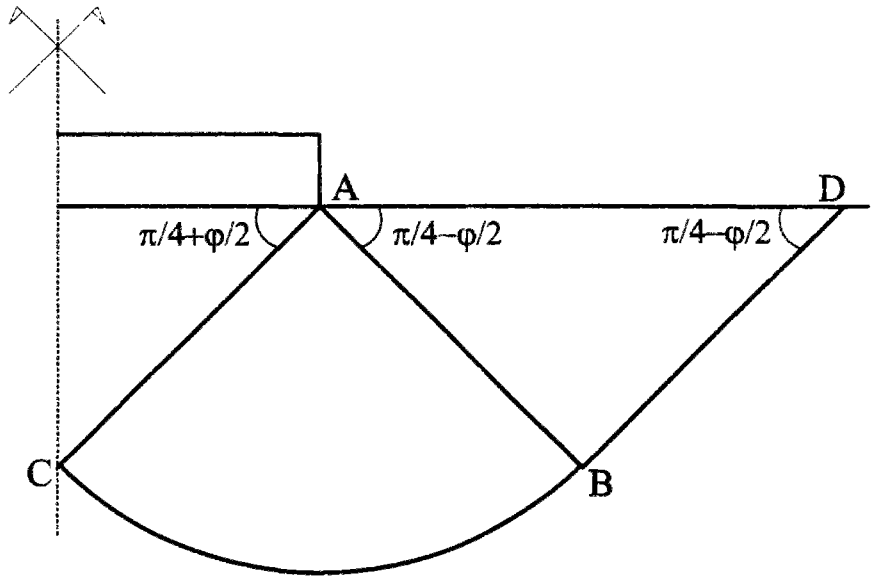


Figure 3-26. Schéma de Prandtl.

Pour le cas de la semelle rigide, la délimitation des zones du schéma de Prandtl est bien retrouvée dans les vitesses de déformation (figure 3-25) et dans les vitesses de déplacement (figure 3-28) obtenues. En effet, le coin rigide en dessous de la semelle apparaît clairement, ainsi que le secteur circulaire en déformation en dessous du bord de la fondation. Mais, dans la partie extérieure du mécanisme, on identifie un coin presque rigide se soulevant, et pas une zone en déformation. Du fait de l'existence de ce coin presque rigide, ce mécanisme est plutôt proche de celui utilisé par Salençon (1983), lequel diffère du schéma de Prandtl : il considère l'existence d'une discontinuité de vitesses sur la ligne AB (et son symétrique), la zone ABD (et symétrique) étant un bloc rigide. Néanmoins, le mécanisme de Salençon (1983) donne des résultats équivalents à ceux du schéma de Prandtl.

En ce qui concerne la fondation souple, ces observations sont aussi valides en général, sauf celle concernant l'existence du coin presque rigide en dessous de la fondation : comme les déplacements horizontaux ne sont pas empêchés par la fondation, le coin en dessous de celle ci devient une zone en déformation (figures 3-24 et 3-27). Par contre, les déformations ne se concentrent plus comme auparavant sous l'extrémité de la fondation, ce qui explique probablement que la borne obtenue pour ce cas soit meilleure.

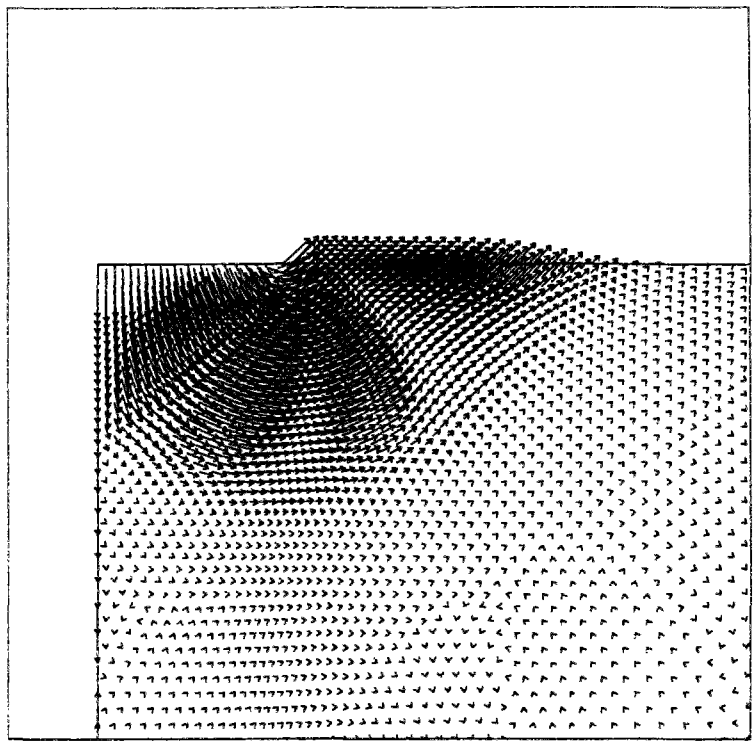


Figure 3-27. Vitesses de déplacement pour la semelle flexible

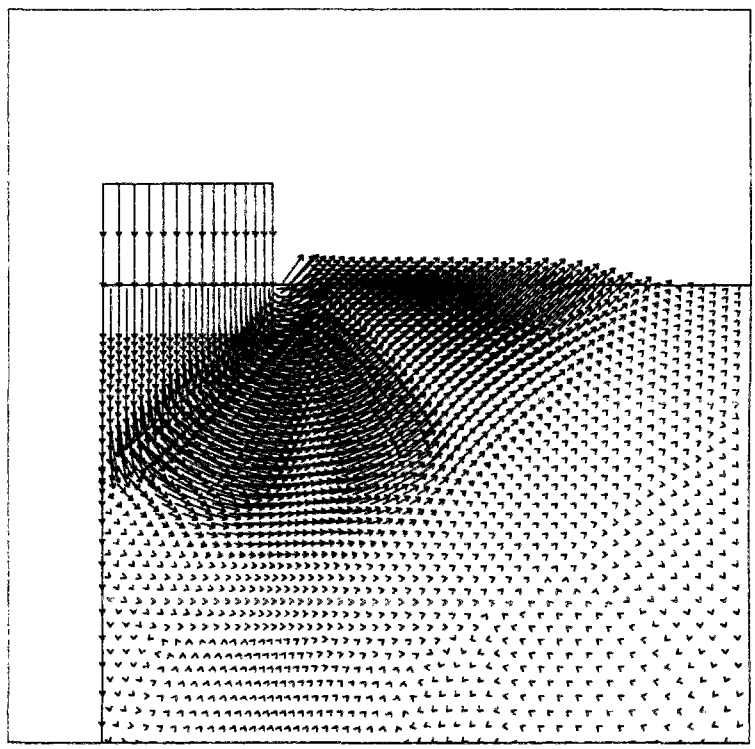


Figure 3-28. Vitesses de déplacement pour la semelle rigide et rugueuse

3.3 Le critère de Tresca tronqué en traction en déformations planes

Ce critère, dont l'expression a été donnée au deuxième chapitre, s'identifie au critère de Tresca pour des sollicitations en compression ; par contre, le domaine des contraintes admissibles est restreint en traction. Ce critère a été appliqué à l'étude de la stabilité des tunnels par Leca et Dormieux (1992) et au cas des semelles soumises à des efforts non verticaux excentrés par Salençon et Pecker (1995). Nous nous sommes intéressés ici au cas de la fouille verticale.

3.3.1 Fouille verticale

Le cas de la fouille verticale constitue un cas classique pour lequel l'introduction d'un critère de Tresca tronqué en traction permet d'améliorer la borne supérieure obtenue avec le critère de Tresca usuel. Comme on l'a vu au paragraphe 3.2.3. la meilleure valeur de la borne supérieure était telle que $\frac{\gamma H}{c_u} = 3{,}83$. L'introduction d'une troncature nulle en traction fait chuter cette borne à une valeur de 2, qui est, par ailleurs, égale à la borne inférieure. Le mécanisme optimal permettant d'obtenir cette valeur a été mis en évidence par Drucker (1953).

Plusieurs maillages, utilisant différentes valeurs du rapport H/L (figure 3-16), ont été mis en oeuvre dans notre étude. Le rapport entre les valeurs de la troncature et de la cohésion a été choisi égale à 10^{-4} ($T/c_u=10^{-4}$).

Le champ des vitesses de déformation résultant du calcul effectué dans le cas H/L égal à 1 est représenté sur la figure 3-29. Pour cette valeur de H/L, la borne supérieure de la charge limite obtenue est de $\frac{\gamma H}{c_u} = 2{,}5$.

L'analyse des vitesses de déformation permet de constater aisément qu'une grande partie du massif situé à la proximité de la fouille suit une cinématique sensiblement différente de celle obtenue avec le critère de Tresca usuel ; on note en particulier une zone de traction en partie haute, seule la zone inférieure de la fouille restant comprimée dans ce mécanisme.

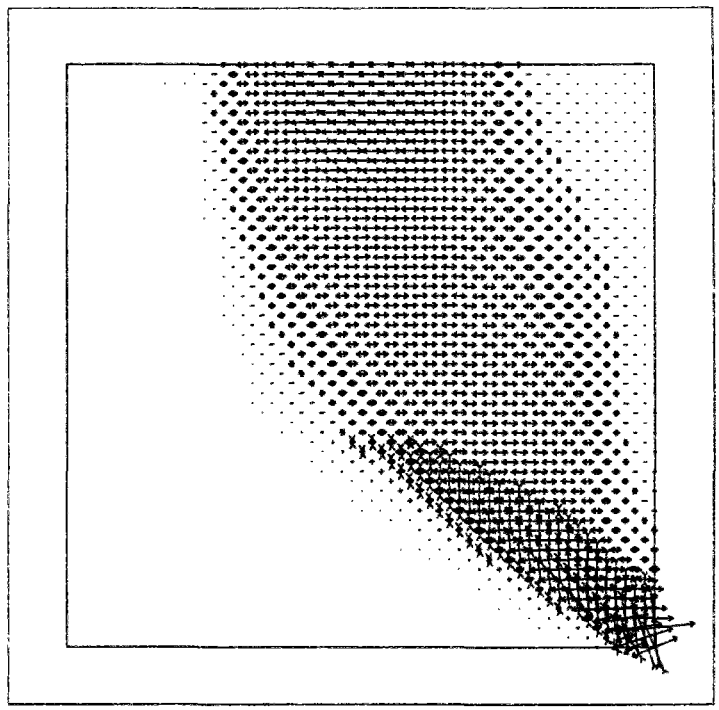


Figure 3-29. Vitesses de déformation dans le cas de la fouille verticale. Critère de Tresca tronqué en traction.

Dans la mesure où la solution de Drucker (1953) a en réalité été obtenue avec un mécanisme évanescent (en faisant tendre la largeur de la zone en rupture vers zéro), on a aussi étudié des maillages tels que H/L=0,1 ou H/L=0,01. Le premier maillage a permis de réduire la borne supérieure du chargement à $\frac{\gamma H}{c_u} = 2{,}1$; en revanche, des problèmes de convergence sont apparus avec le deuxième maillage et il n'a pas été possible de poursuivre l'amélioration du résultat.

3.4 Critère de Tresca tridimensionnel

La minimisation locale du critère de Tresca introduite à l'origine dans le module LIMI n'était pas suffisamment fiable pour permettre l'utilisation du module dans la pratique ; de ce fait, les calculs tridimensionnels étaient réalisés en utilisant un critère de Von Mises qui dans le cas des déformation planes, est équivalent au critère de Tresca, mais pas dans le cas tridimensionnel.

Pour valider notre programmation du critère de Tresca tridimensionnel, nous avons étudié deux configurations, la première correspondant à un cube soumis à des efforts sur ses différentes faces et la deuxième à une semelle rectangulaire.

3.4.1 Cube triaxial

Cette configuration constitue, par sa simplicité, l'équivalent pour le cas tridimensionnel du problème de la plaque étudié en conditions bidimensionnelles

Si l'on désigne par T_I, T_{II} et T_{III} les chargements uniformes appliqués sur chacune des trois faces, la solution théorique peut se mettre sous la forme $max\ |T_i - T_j| = 2c$ (i , j = I, II, III).

Le tableau 3-5 donne l'évolution des paramètres G_p et J_p en fonction des chargements appliqués dans le cas où $T_{III}=0$, T_{II} est constant et compris entre zéro et T_I et T_I est le chargement recherché.

Dans ce cas, la charge limite est égale à $T_I = 2c$. Si, pendant le processus de diminution de la charge, la charge T_I devient inférieure à T_{II}, celle-ci devenant ainsi un des chargements extrêmes, aucun problème ne se pose car comme la différence, constante, entre T_{II} et T_{III} serait inférieure à 2c, le chargement T_I serait simplement augmenté jusqu'au moment où sa valeur serait supérieure à la charge limite.

Tableau 3-5. Exemple de déroulement de calcul.

	itération	1	5	10	15	20	25	30
T_l/T_{lim} = 1,5	J_p	-63,02	-49,95	-99,89	-149,82	-199,75	-249,67	-299,60
	G_p	1,0013	1,0013	1,0014	1,0014	1,0015	1,0015	1,0015
T_l/T_{lim} = 1,2	J_p	-114,01	-127,61	-135,58	-143,55	-151,52	-159,49	-167,46
	G_p	1,0014	1,0014	1,0014	1,0014	1,0014	1,0014	1,0014
T_l/T_{lim} = 0,96	J_p	38,63	33,74	33,42	33,09	32,76	32,44	32,11
	G_p	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
T_l/T_{lim} = 1,08	J_p	-65,72	-64,14	-65,41	-66,68	-67,94	-69,21	-70,48
	G_p	1,0013	1,0013	1,0013	1,0013	1,0013	1,0013	1,0013
T_l/T_{lim} = 1,026	J_p	-21,48	-22,69	-22,82	-22,95	-23,08	-23,21	-23,34
	G_p	1,0012	1,0012	1,0012	1,0012	1,0012	1,0012	1,0012
T_l/T_{lim} = 0,9747	J_p	24,75	23,64	23,51	23,37	23,24	23,11	22,98
	G_p	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
T_l/T_{lim} = 1,0004	J_p	-0,31	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20
	G_p	1,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
T_l/T_{lim} = 1,0132	J_p	-11,45	-	-	-	-	-	-
	G_p	1,0012	-	-	-	-	-	-

Comme on peut le constater, le déroulement du calcul est similaire à celui de la plaque. En effet, on a choisi dans ce calcul des paramètres de déchargement et de viscosité égaux à ceux utilisés dans le cas de la plaque. L'évolution de l'indicateur J_p est identique dans les deux cas, ce qui est naturel puisqu'il est rapporté au volume du système à étudier.

La figure 3-30 montre les vitesses de déformation* obtenues pour ce calcul. Le chargement extrême maximal a été appliqué sur la surface supérieure, le chargement intermédiaire sur la surface verticale droite, la surface verticale gauche n'étant pas chargée. Les surfaces cachées ont été soumises à des conditions aux limites de déplacement nul dans la direction perpendiculaire à ces surfaces.

* En général, pour les cas tridimensionnels, on se limitera à présenter les résultats d'exploitation graphique sur les surfaces extérieures visibles.

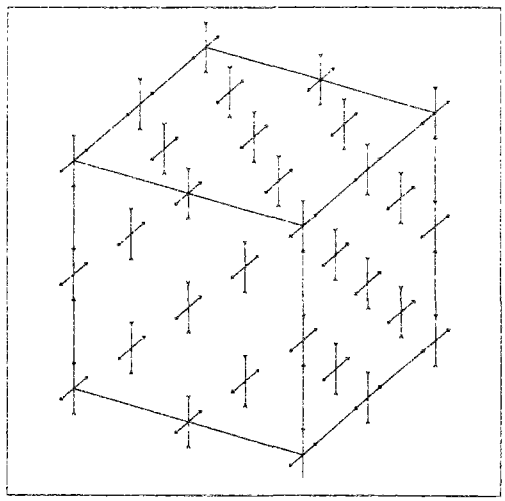


Figure 3-30.Vitesses de déformation.

3.4.2 Capacité portante des fondations superficielles

On se propose d'étudier maintenant la capacité portante d'une fondation superficielle carrée, posée sur un massif semi-infini. Comme pour le cas bidimensionnel, deux cas ont été envisagés. Le premier correspond à une fondation souple, modélisée par un chargement uniformément distribué sur le sol, le second à une semelle rigide et rugueuse (simulée à l'aide d'éléments de résistance cent fois supérieure à celle du sol, le chargement étant uniformément distribué sur ces éléments).

Dans le premier cas, on a obtenu une valeur de 5,9 pour le rapport entre la valeur du chargement uniformément distribué et la cohésion. Dans le deuxième cas, ce rapport a été estimé à 6,9.

Ces valeurs sont proches des résultats présentés par d'autres auteurs. Garnier (1995), en construisant des mécanismes tridimensionnels en calcul à la rupture, a trouvé dans le cas d'adhérence parfaite la valeur 6,4. Guennouni et le Tallec (1982), en utilisant la même approche que celle mise en oeuvre dans LIMI, ont obtenu la valeur de 7 pour le premier cas. Turgeman (1983) en utilisant une méthode de programmation linéaire et Maghous et Garnier (1995) à partir de potentiels vectoriels engendrant des champs de vitesses pertinentes, sont arrivés à des valeurs proches de 7.

Les maillages déformés et les vitesses de déformation obtenues dans les deux cas sont représentés sur les figures 3-31 et 3-32, respectivement.

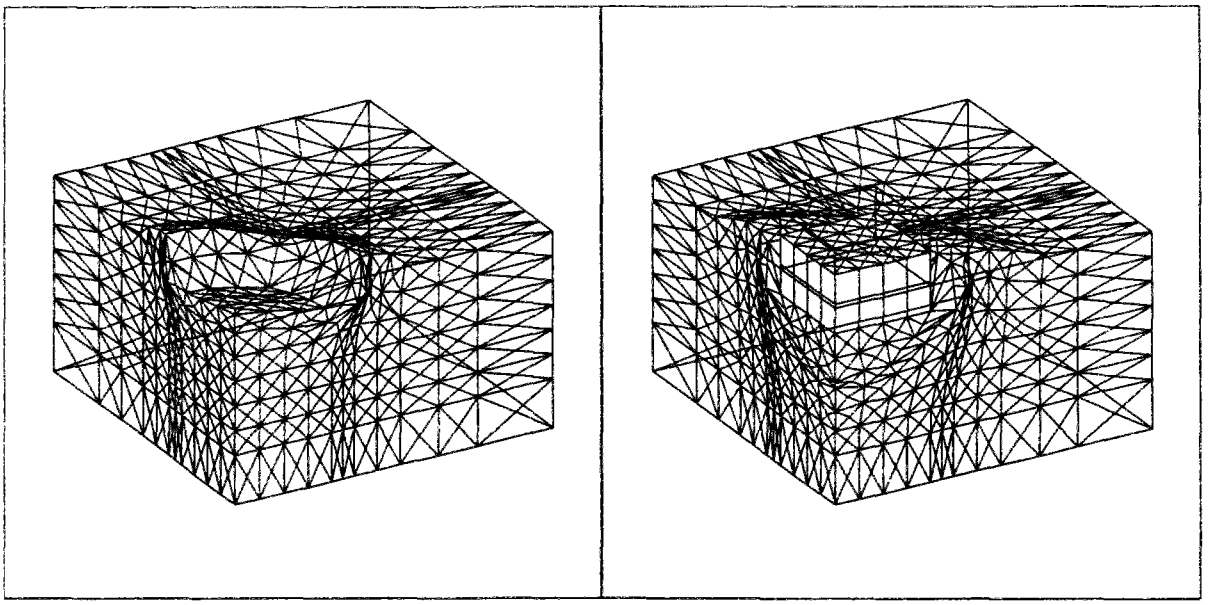


Figure 3-31. Maillages déformés.

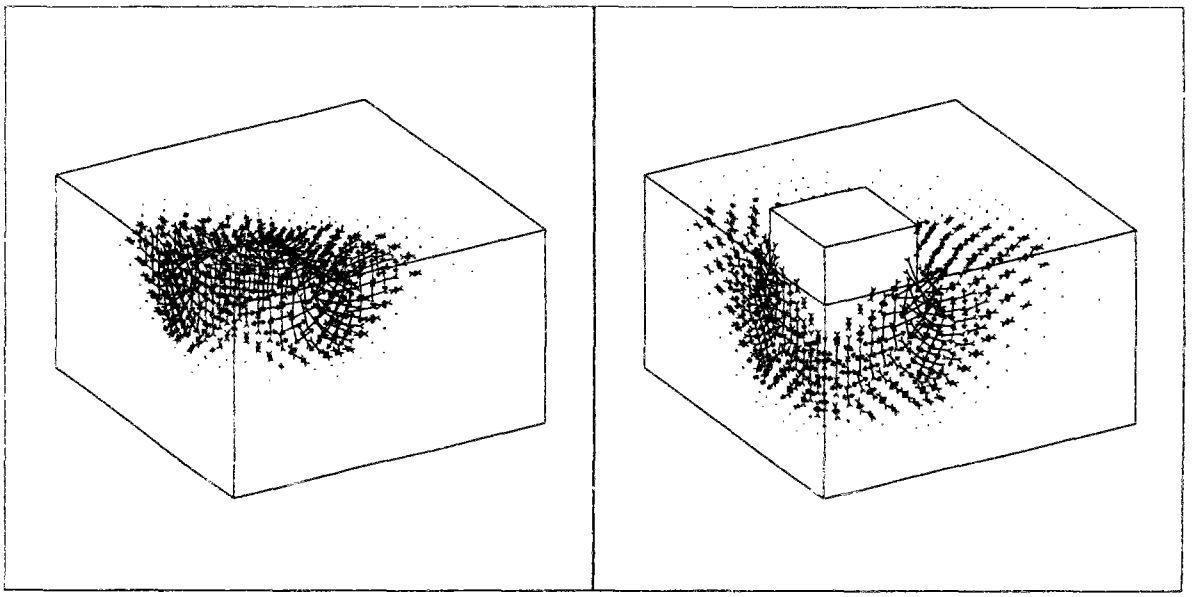


Figure 3-32. Vitesses de déformation.

On remarque, comme dans le cas bidimensionnel, que la forme d'un coin rigide sous la fondation n'apparaît que dans le deuxième cas. Cependant, au contraire du cas bidimensionnel, pour lequel des bornes supérieures analogues ont été obtenues, on arrive ici à des différences relativement importantes. La souplesse de la fondation dans le premier cas permet, comme dans le cas bidimensionnel, l'existence des déformations dans le sol situé sous la charge ; mais, au contraire du cas bidimensionnel, elles sont pratiquement inexistantes sous le centre et se concentrent dans les zones du massif situées à proximité du bord de la

fondation. Dans le deuxième cas, les déformations sont présentes dans une zone plus étendue, s'étendant en forme de bande jusqu'à l'axe de la fondation selon un angle d'approximativement $\pi/4$ avec l'horizontale. Ce changement de mécanisme est probablement le responsable de l'augmentation de la capacité portante car, dans le deuxième cas, il existe une mobilisation de la résistance du terrain dans des zones plus importantes.

3.4.3 Types d'éléments utilisés

Comme on l'a vu dans le cas bidimensionnel, l'incompressibilité du critère de Tresca peut amener au blocage des calculs si le type d'éléments n'est pas bien choisi. Dans le cas tridimensionnel, et au contraire de ce qui se passait dans le cas bidimensionnel, on ne connaît pas de forme géométrique pour les éléments (ou d'arrangements d'éléments) permettant de respecter la condition d'incompressibilité partout. Mais certains arrangements d'éléments permettent d'éviter le blocage de la structure, au moins en partie.

Dans nos calculs on utilise l'arrangement décrit dans la figure 3-33. Il s'agit de l'assemblage de 24 tétraèdres, construits à partir des diagonales d'un parallélépipède.

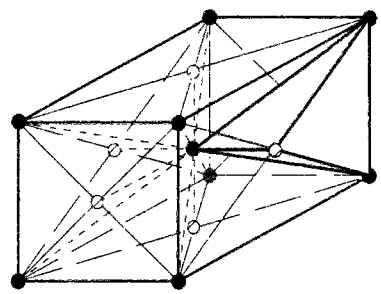


Figure 3-33. Arrangement d'éléments utilisé dans les calculs tridimensionnels

Cette configuration a donné des résultats raisonnables, mais quelques problèmes de convergence ont été rencontrés à l'approche des charges limites. Le déroulement des calculs et notre expérience avec le module LIMI nous font penser que ces problèmes sont dus au blocage du maillage. En tous cas, les résultats obtenus sont bien des bornes supérieures : les vitesses de déplacement sont cinématiquement admissibles, respectent la condition d'incompressibilité et la puissance dissipée dans ce champ de vitesses de déformation est inférieure à celle fournie par les efforts extérieurs. Le blocage provient du fait que, lorsque l'on diminue le nombre des degrés de liberté des nœuds du maillage en imposant la condition d'incompressibilité, l'ensemble des champs des vitesses de déformation réalisables est réduit, ce qui diminue également les possibilités de minimisation.

3.5 Le critère de Mohr-Coulomb en déformations planes

Le critère de Mohr-Coulomb en conditions bidimensionnelles a été appliqué comme les autres critères au cas de la plaque chargée uniformément, pour une première appréciation des résultats. On s'est, de plus, intéressé aux cas de la semelle filante et d'une semelle sur un talus.

3.5.1 La semelle filante

Les conditions aux limites et les chargements utilisés sont égaux à ceux pris en compte pour le critère de Tresca. On rappelle que le cas étudié est celui de la semelle filante sur un sol homogène non pesant.

Pour les comparaisons, on a utilisé les formules explicites présentées par Matar et Salençon (1979), issues de la solution de Prandtl, complétée par Shield (1954). La pression de chargement peut se mettre sous la forme :

$$q_u = c\cot\varphi\left[\exp(\pi\tan\varphi)\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)-1\right]$$

Les résultats obtenus au moyen du module LIMI sont comparés sur la figure 3-34 aux valeurs données par cette relation, dans le cas d'une semelle flexible et dans celui d'une semelle rigide, pour des angles de frottement inférieurs ou égaux à 30°. La valeur de la charge présentée pour φ=0 est celle calculée avec le critère de Tresca.

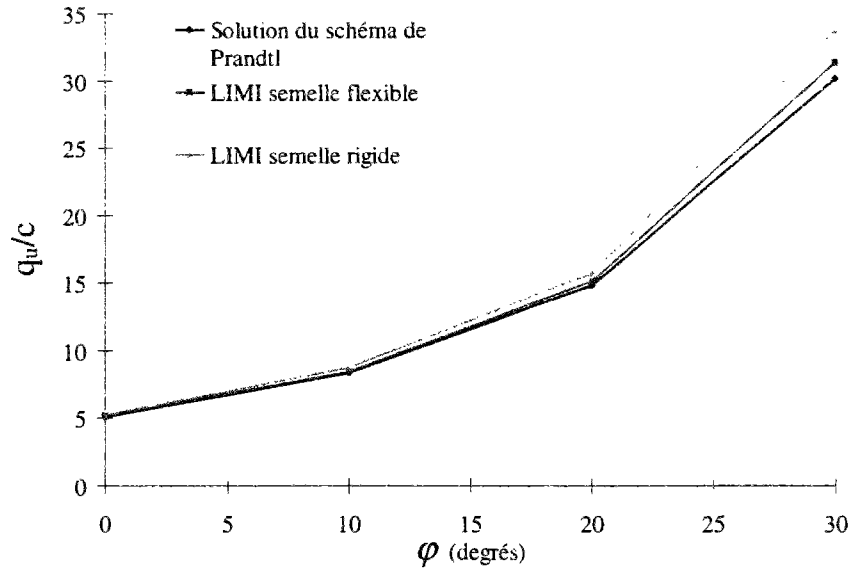


Figure 3-34. Evolution de la charge limite avec l'angle de frottement

Comme pour le cas du critère de Tresca, les résultats pour la semelle flexible restent toujours les plus proches de la solution analytique. On a observé aussi le changement de mécanisme prévu par le schéma de Prandtl. La figure 3-35, qui représente les vitesses de déformation pour le cas φ=30 degrés, montre que les zones du sol en rupture intéressent une partie plus importante du massif de fondation ; le coin rigide qui se forme en dessous de la fondation se développe en profondeur et l'extension latérale du coin augmente, accompagnant la géométrie prévue par le schéma de Prandtl.

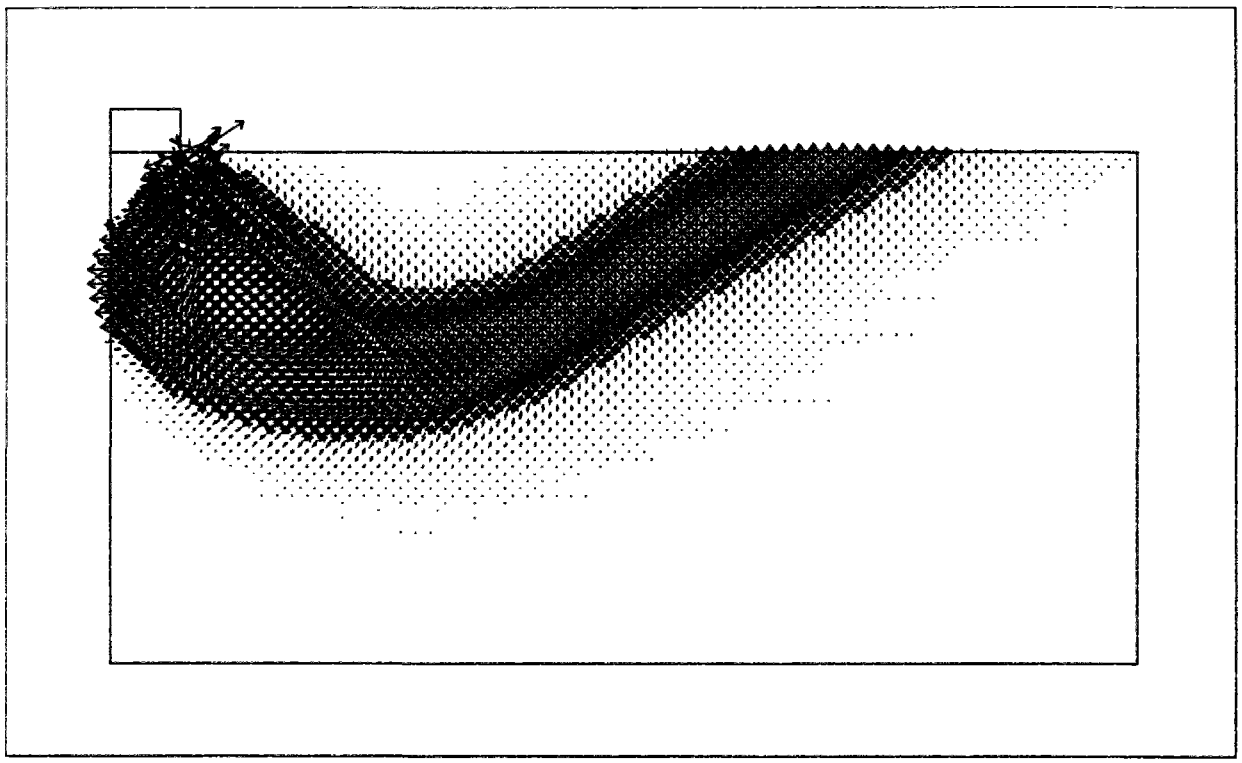
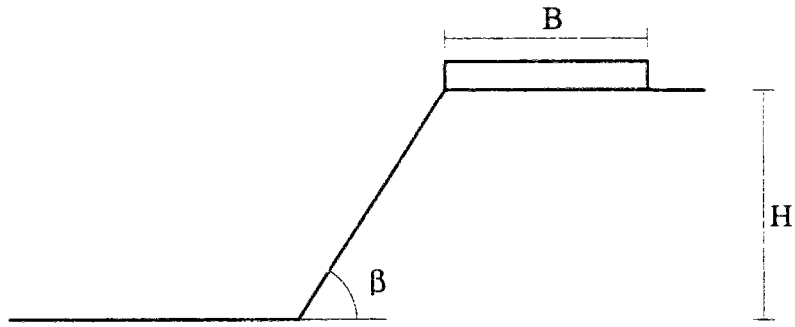


Figure 3-35. Vitesses de déformation pour φ=30 degrés.

3.5.2 Fondation en bord de talus

Les études de capacité portante présentées jusqu'à présent ont été réalisées sur des massifs semi-infinis. On s'est également intéressé au cas d'une fondation rigide située en bord de talus. La géométrie utilisée est décrite sur la figure 3-36. Les paramètres géométriques et de résistance du sol ont été choisis égaux à ceux de l'étude de Guennouni et Le Tallec (1982), qui ont, par ailleurs, utilisé une méthode de résolution semblable à celle introduite dans le module LIMI.



β=60 degrés	γ=5 kN/m^3
H=4 m	c=10 kPa
B=2,43 m	φ=30 degrés

Figure 3-36. Paramètres utilisés dans le cas de la fondation reposant sur le talus incliné.

La figure 3-37 représente le maillage déformé et les vitesses de déformation obtenus pour ce cas de calcul. On note encore la présence d'un coin presque rigide en dessous de la fondation. Avec un maillage plus fin, on peut mettre en évidence une concentration des vitesses de déformation dans des bandes (figure 3-38), le mécanisme se rapprochant alors du mécanisme de blocs proposé par Kusakabe et al. (1981).

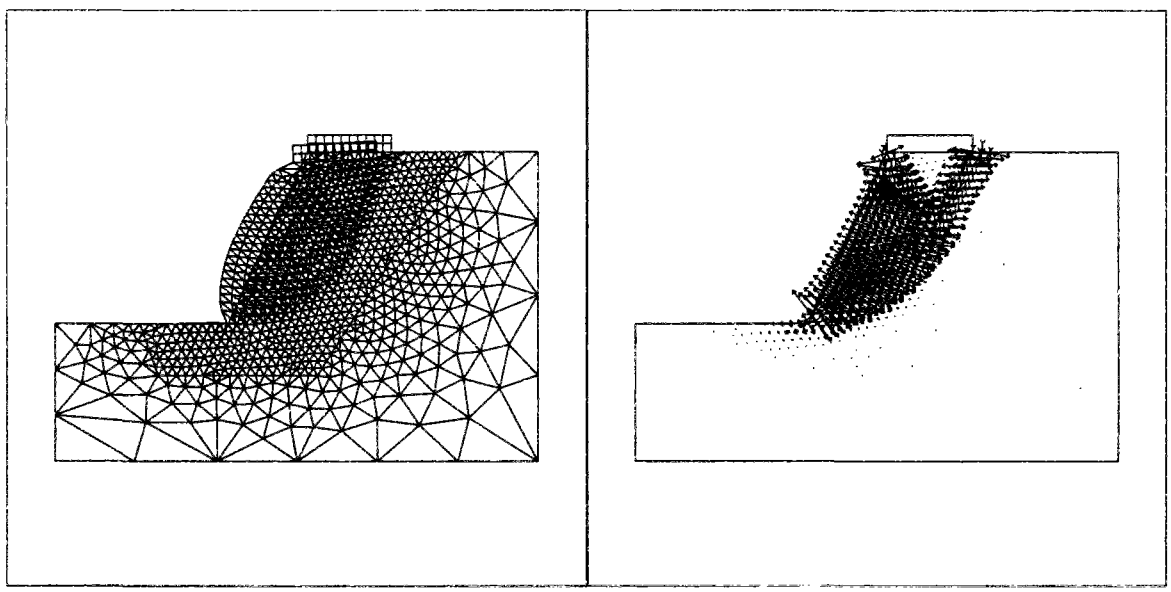


Figure 3-37. Maillage déformé et vitesses de déformation pour le cas de la fondation reposant sur un talus incliné (premier maillage)

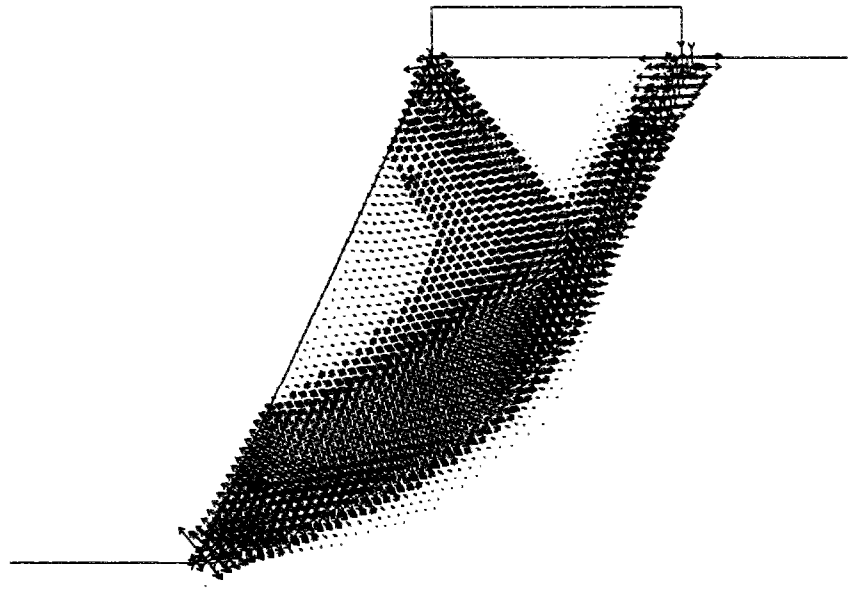


Figure 3-38. Vitesses de déformation pour le cas d'une fondation en bord de talus (deuxième maillage)

Kusakabe et al. (1981) obtiennent un chargement limite qui se met sous la forme $\frac{q}{B\gamma} = 6{,}2$, q désignant la charge surfacique sous la fondation. Les calculs effectués à l'aide du module LIMI conduisent à une valeur de 6,33, soit 2% de plus que la solution précédente. Guennouni et le Tallec (1982) avaient par ailleurs obtenu une valeur de 6,45. Cette valeur mérite un commentaire : elle a été trouvée avec un maillage beaucoup plus grossier que celui utilisé dans notre étude, ce qui pourrait être signe d'une moindre performance du module LIMI. Il faut cependant préciser que Guennouni et le Tallec (1982) ont utilisé un critère de Coulomb tronqué en compression, tel que la valeur de $\sigma_I + \sigma_{III}$ (σ_I et σ_{III} désignant les contraintes principales extrêmes) reste limitée à -30 kPa. Or, le maillage utilisé par ces auteurs était tel que la contrainte géostatique verticale atteindrait des valeurs en compression supérieures à 30 kPa en certains points (hauteur du maillage supérieure à 8 m, pour un poids volumique de 5 kN/m^3 - voir le maillage déformé présenté par Guennouni et Le Tallec (1982) sur la figure 3-39). Par conséquent, il est possible que la valeur présentée par ces auteurs ait été influencée par la troncature en compression choisie, ce qui n'est pas le cas de notre calcul ni de celui de Kusakabe et al. (1981).

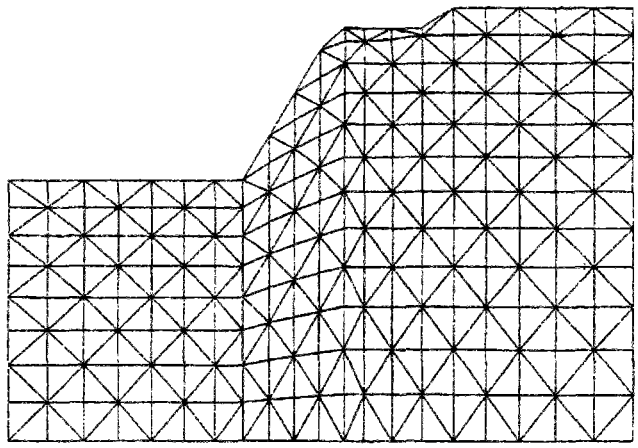


Figure 3-39. Maillage déformé du calcul de Guennouni et le Tallec (1982).

3.6 Critère de Mohr-Coulomb tridimensionnel

La validation de la programmation du critère de Mohr-Coulomb tridimensionnel a été réalisée dans le cas des fondations superficielles. Le modèle utilisé, construit en tenant compte des symétries du problème considéré, est schématisé sur la figure 3-40. On a considéré le cas d'une semelle rectangulaire, de dimensions L et B. Le sol est homogène, non pesant et le chargement est constitué par une pression uniformément répartie sur la base de la fondation.

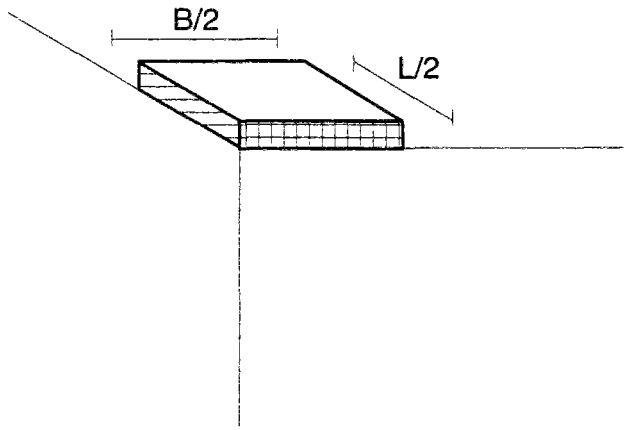


Figure 3-40. Modèle utilisé pour la semelle rectangulaire

Deux géométries ont été étudiées : L=B et L=2B.

3.6.1 Fondation carrée (L=B)

Les résultats obtenus dans le cas L=B sont représentés sur la figure 3-40, dans laquelle la borne supérieure de la charge q_u donnée par LIMI a été comparée aux bornes supérieure et inférieure obtenues par Garnier (1995) en utilisant le calcul à la rupture, ainsi qu'aux résultats obtenus par Narita et Yamagushi (1992), sur la base d'une méthode tridimensionnelle issue de la méthode des tranches.

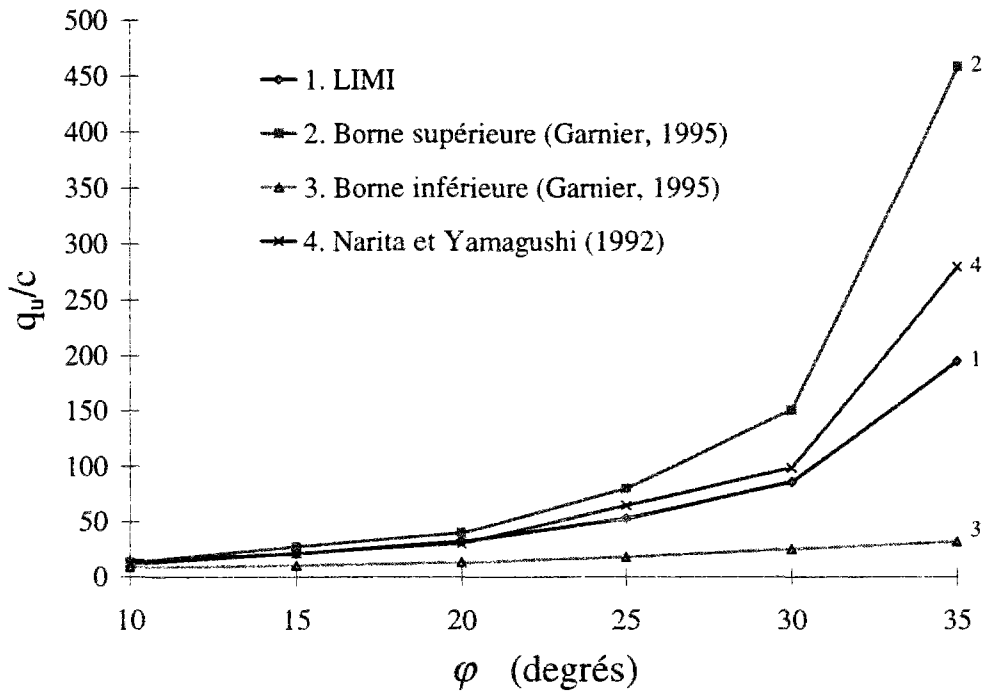


Figure 3-41. Comparaison entre les résultats de LIMI et ceux d'autres travaux pour la pression uniforme potentiellement supportable par une fondation carrée.

Garnier (1995) a également comparé ses résultats aux solutions exactes obtenues pour la capacité portante de fondations circulaires par Salençon et Matar (1982). La capacité portante des fondations rectangulaires doit être comprise entre celle des fondations circulaires qui lui sont inscrite et circonscrite (Garnier, 1995). On a donc rapporté ces deux solutions, ainsi que celles données par Garnier (1995) et LIMI sur un même diagramme (figure 3-42) donnant la valeur de Q_u (capacité portante) normalisée par cB^2, sachant que la fondation circulaire inscrite a un rayon égal à la largeur de la fondation carrée (B), et que la fondation circulaire circonscrite a un rayon égale à $B\sqrt{2}$.

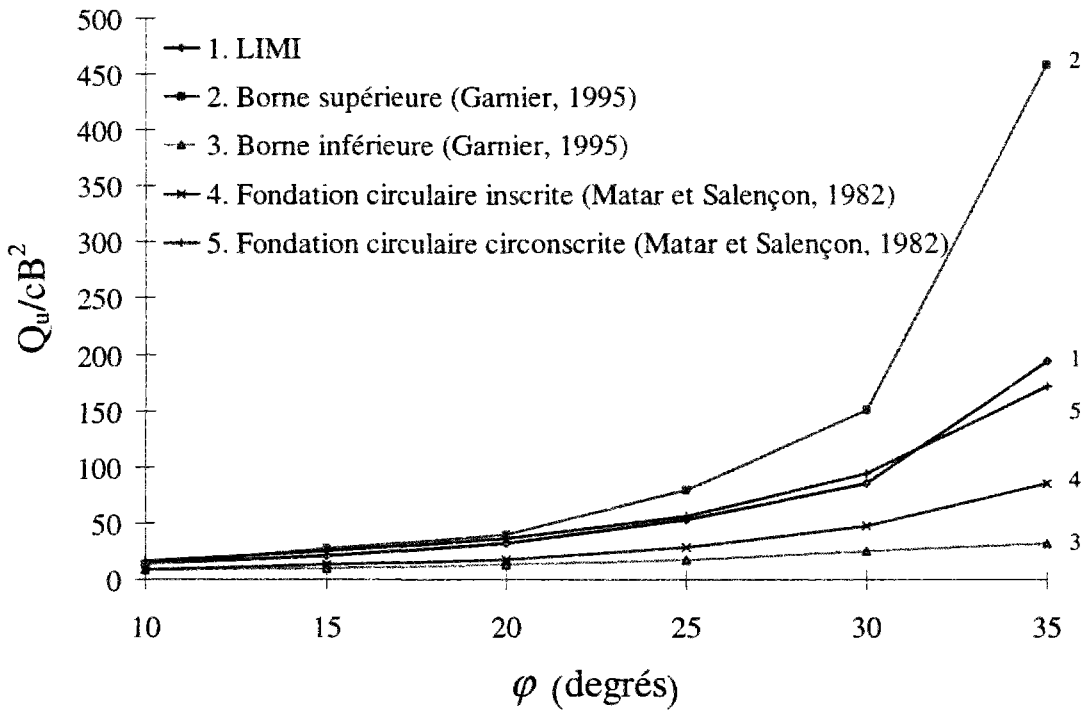


Figure 3-42. Comparaison entre les résultats de LIMI et ceux d'autres travaux pour la capacité portante d'une fondation carrée.

On remarque que, pour des angles de frottement inférieurs à 35 degrés, LIMI fournit toujours des valeurs situées entre les solutions correspondantes pour les fondations circulaires inscrite et circonscrite, l'écart entre la borne supérieure fournie par LIMI et la solution de Matar et Salençon (1982) pour la fondation circonscrite étant négligeable. La figure 3-43 donne le maillage déformé obtenu pour une fondation carrée dans le cas φ=10 degrés. La figure 3-44 donne les mêmes résultats pour un angle de frottement de 30 degrés.

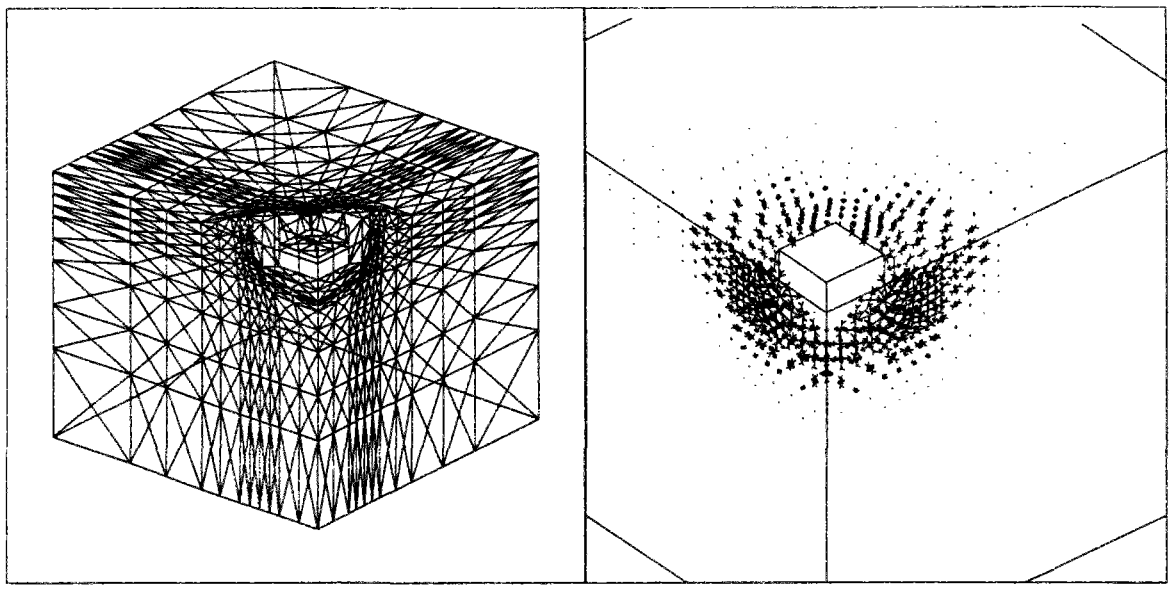


Figure 3-43. Maillage déformé et vitesse de déformation pour la semelle carrée (φ=10 degrés)

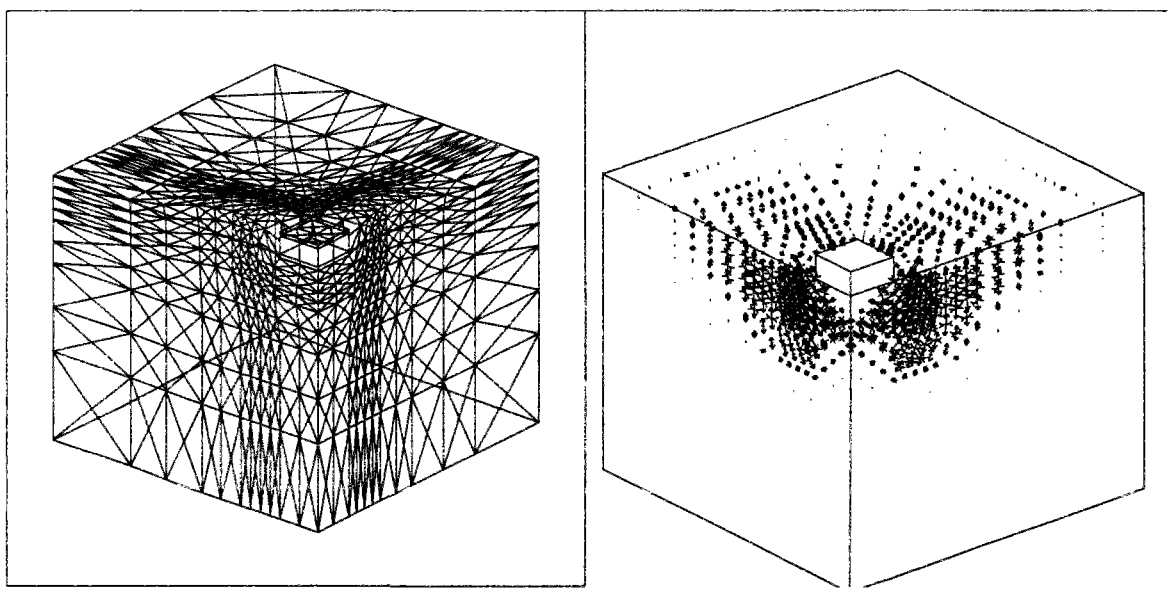


Figure 3-44. Maillage déformé et vitesse de déformation pour la semelle carrée (φ=30 degrés)

Ces figures permettent de mettre en évidence un élargissement de la zone intéressée par le mécanisme avec l'augmentation de l'angle de frottement, comme on avait déjà pu le constater dans le cas bidimensionnel. Le coin de sol rigide sous la fondation s'étend également en profondeur quand l'angle de frottement augmente.

Le résultat obtenu pour φ=35 degrés peut paraître anormal dans la mesure où la borne supérieure donnée par LIMI dépasse celle fournie par la solution de Matar et Salençon (1982)

pour la fondation circulaire circonscrite. Ce fait est lié au maillage utilisé dans les calculs. En effet, le même maillage a été mis en œuvre pour tous les calculs, indépendamment de l'angle de frottement. Or si, pour les angles de frottement les plus faibles, les mécanismes sont bien discrétisés par le maillage utilisé, ceci n'est plus tout à fait le cas pour les valeurs plus élevées de φ, en raison de la tendance du mécanisme en progresser vers les limites extérieures du maillage. Cette situation est de nature à entraîner des problèmes dans la minimisation effectuée par LIMI, un maillage restreint ayant pour effet de réduire les possibilités de minimisation du programme, ce qui peut entraîner soit l'augmentation du minimum calculé soit, dans certains cas, l'apparition de mécanismes parasites, n'ayant aucune relation avec le problème étudié. On donnera un exemple de ce type d'anomalie plus loin dans ce chapitre. La procédure de calcul devrait donc prévoir d'adapter les maillages à chaque valeur de l'angle de frottement, ce qui conduirait à des maillages plus étendus et plus fins dans les zones les plus éloignées de la fondation, pour le cas de φ=35°. Toutefois, compte tenu de la taille importante du maillage utilisé dans cette étude et des difficultés de stockage et de temps de calcul qui en résultaient, nous nous sommes limités à ce résultat (une valeur typique de rendement de ces calculs était de 3%, c'est à dire qu'un calcul de 4 heures en temps de CPU avait un temps de résidence de plus de cinq jours).

On peut néanmoins conclure que LIMI donne des résultats pertinents et qui, probablement, pourraient être encore améliorés en affinant les maillages utilisés en fonction de la configuration mécanique étudiée.

3.6.2 Fondation rectangulaire (L=2B)

Pour le cas de la fondation rectangulaire, on a pris une valeur de L égale à deux fois la valeur de B.

La figure 3-45 compare les résultats obtenus dans ce cas à ceux de Garnier (1995) et de Narita et Yamagushi (1992).

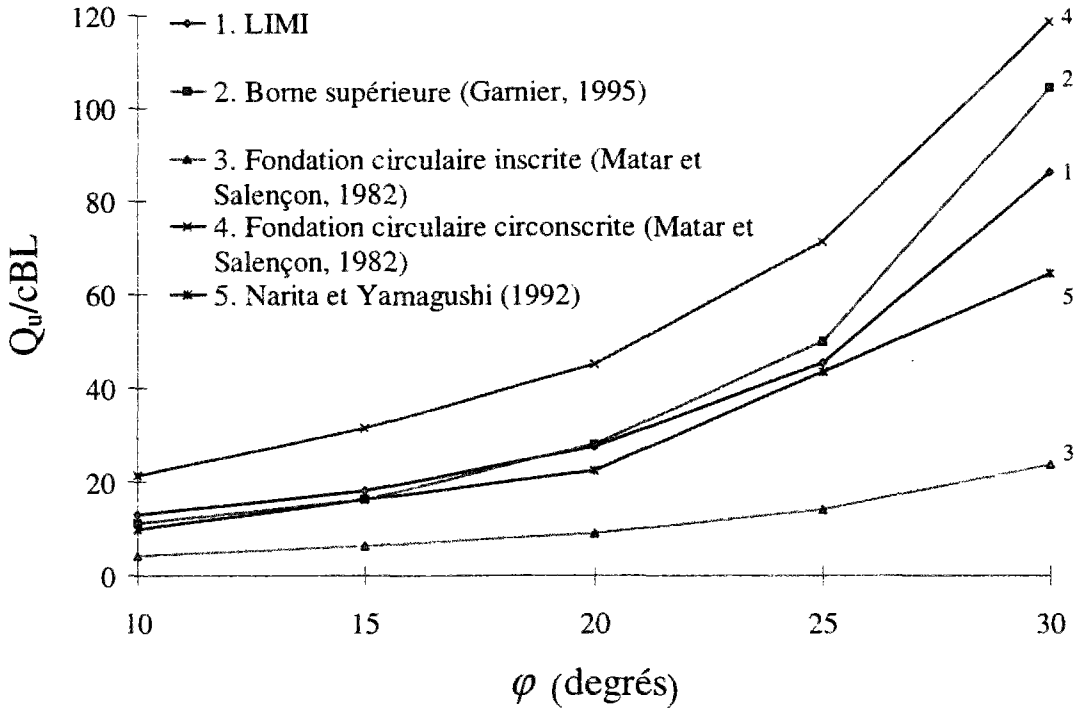


Figure 3-45. Comparaison entre les résultats de la capacité portante pour la fondation rectangulaire (B/L=0,5)

On peut remarquer que les résultats fournis par LIMI restent compris entre ceux fournis par les fondations circulaire inscrite et circonscrite pour les valeurs de φ étudiées. Par rapport aux résultats de Garnier (1995), et au contraire du cas de la fondation carrée, la solution donnée par LIMI est moins pertinente pour les angles de frottement inférieurs à 20 degrés. Il faut néanmoins remarquer que la différence entre les deux solutions est négligeable et que Garnier (1995) avait lui-même une meilleure performance de son mécanisme pour des valeurs L/B>1.

3.7 Influence des conditions aux limites sur les résultats de LIMI

On a déjà signalé les erreurs possibles liées à des maillages trop restreints compte tenu des mécanismes de rupture susceptibles de se produire dans le massif sous l'effet du chargement appliqué.

On présente ici un cas de changement de mécanisme provoqué par ce phénomène. Il s'agit d'un calcul de stabilité de tunnel peu profond creusé en terrain purement cohérent ; on utilise donc le critère de Tresca pour rendre compte des capacités de résistance du sol. Le chargement est constitué par un chargement uniforme appliqué à la surface du terrain naturel ; les

conditions aux limites sont définies par une vitesse de déplacement normale nulle sur les faces latérales et inférieure du modèle (figure 3-46).

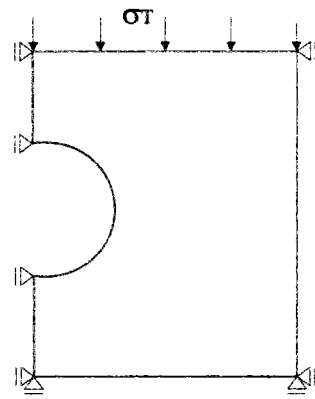


Figure 3-46. Chargement et conditions aux limites pour le cas de calcul présentant un changement de mécanisme.

Une première étude ayant fait apparaître des vitesses de déformation nulles dans une grande partie du maillage (figure 3-47), on avait décidé, dans un souci de diminuer l'importance du maillage, de rapprocher du tunnel les extrémités extérieures du maillage. Le résultat obtenu est représenté sur la figure 3-48 : il apparaît que le mécanisme obtenu est complètement différent de celui qui avait été mis en évidence avec le modèle étendu (figure 3-47), et cela, malgré le fait que le deuxième maillage puisse contenir entièrement ce mécanisme.

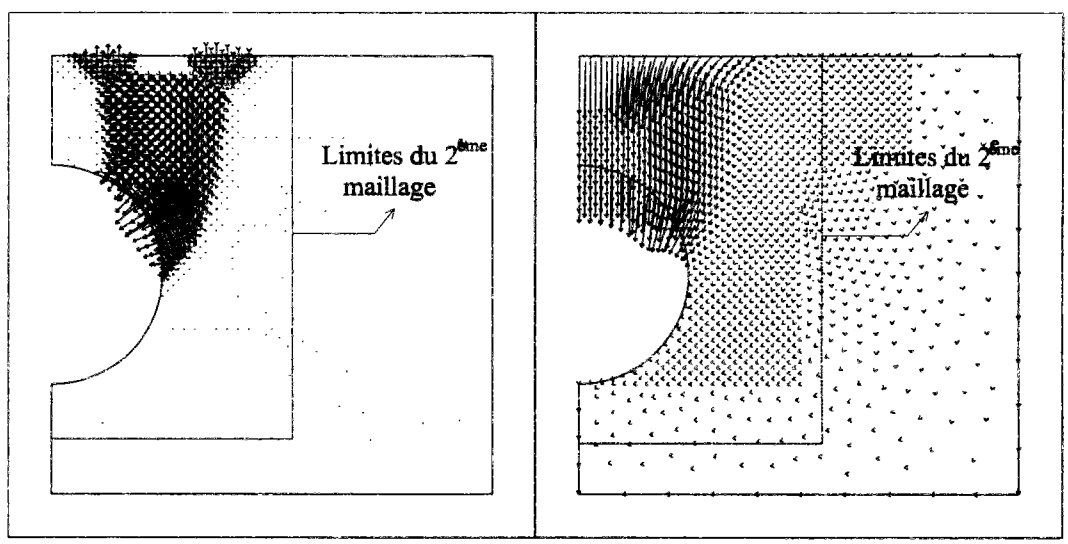


Figure 3-47. Vitesses de déformation et de déplacement pour le cas du tunnel chargé à la surface (premier maillage). Vitesse de déplacement normale bloquée sur les surfaces latérales et inférieure.

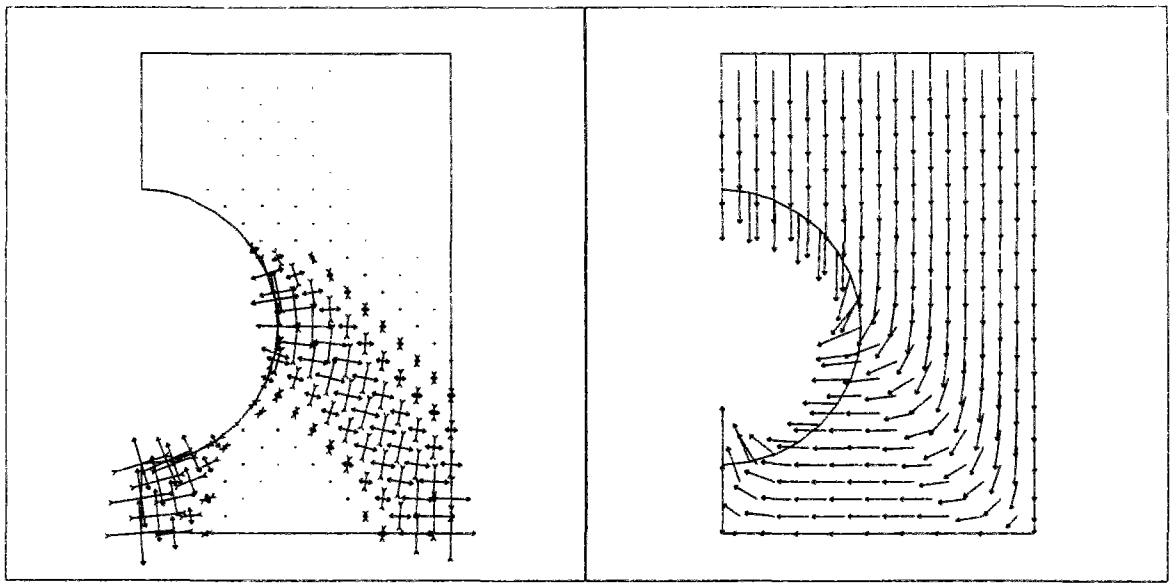


Figure 3-48. Vitesses de déformation et de déplacement pour le cas du tunnel chargé à la surface (deuxième maillage). Vitesse de déplacement normale bloquée sur les surfaces latérales et inférieure.

Cet exemple montre l'attention requise pour le choix des limites du modèle et du type de conditions aux limites. En réalité, et comme on peut voir dans la figure 3-49, le blocage complet des vitesses de déplacement aux extrémités inférieure et latérale droite permet de retrouver un mécanisme d'allure similaire à celui de la figure 3-47.

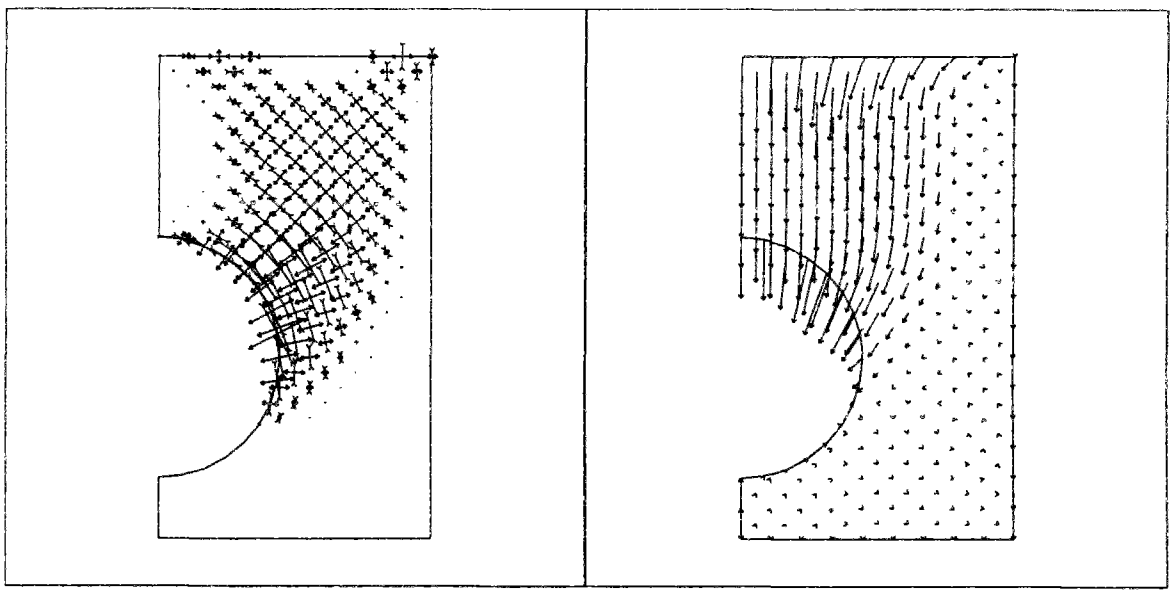


Figure 3-49. Vitesses de déformation et de déplacement pour le cas du tunnel chargé à la surface (deuxième maillage). Vitesse de déplacement normale bloquée sur la surface latérale gauche ; vitesses de déplacement bloquées sur les surfaces latérale droite et inférieure.

3.8 Conclusions.

Les exemples étudiés dans ce chapitre permettent de conclure que le module LIMI permet d'obtenir des résultats satisfaisants pour la plupart des configuration étudiées dans la littérature. Les charges limites théoriques ou les meilleures bornes supérieures connues sont en général approchées de façon satisfaisante par ce module. On peut donc considérer que notre approche de la minimisation locale est efficace et fiable. La nouvelle version de LIMI est aussi plus performante que l'ancienne, les temps de CPU pour un même calcul étant réduits à 30 à 85% du temps de calcul employé par la version ancienne. D'autre part, certains problèmes de convergence apparus en utilisant l'ancienne version pour le calcul des bornes supérieures pour le critère de Mohr-Coulomb ont été résolus.

Par conséquent, ce module peut être utilisé dans l'analyse de problèmes de stabilité bi et tridimensionnels.

4ÈME CHAPITRE

RÉSULTATS OBTENUS AVEC LE MODULE LIMI EN DÉFORMATIONS PLANES

4.1 Introduction

Les cas de stabilité de tunnels en déformations planes traités à l'aide du module LIMI peuvent être regroupés en deux catégories géométriques : les calculs en section courante et les calculs suivant une coupe parallèle à l'axe du tunnel.

Ces études de stabilité ont été effectuées en utilisant les critères de résistance suivants : Tresca, Tresca tronqué en traction et Mohr-Coulomb.

4.2 Calculs en section courante

Trois configurations ont été considérées dans les calculs effectués en section courante : tunnel circulaire, tunnel carré et ouverture de trappe. La géométrie correspondant au cas du tunnel circulaire est représentée sur la figure 4-1. La profondeur de couverture est notée C et le diamètre du tunnel D. Le cas du tunnel carré est représenté sur la figure 4-2 ; les dimensions du tunnel sont alors caractérisées par la hauteur du front, D. La figure 4-3 décrit le problème de l'ouverture d'une trappe, de largeur B et de profondeur C. Ces trois configurations ont été choisies par deux raisons fondamentales : d'une part, elles sont représentatives de géométries extrêmes pour un grand nombre d'ouvrages réels et, d'autre part, ces configurations ont fait l'objet d'études antérieures décrites dans la littérature.

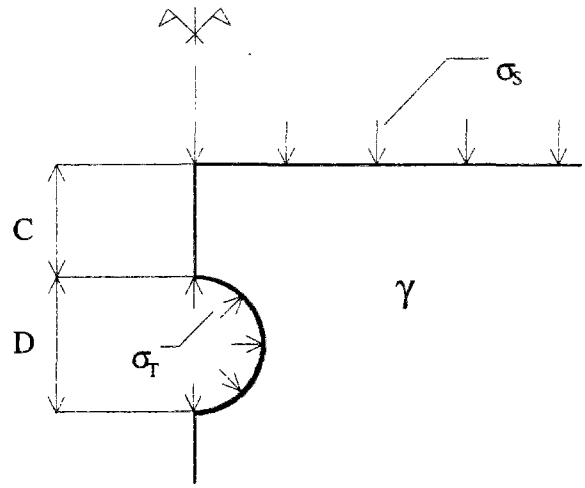


Figure 4-1. Définition géométrique et chargements pour le tunnel circulaire.

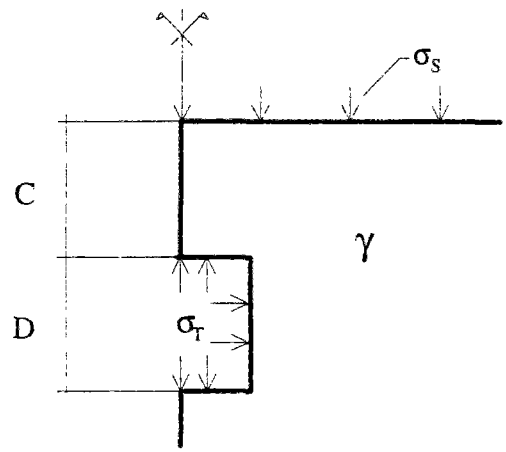


Figure 4-2. Définition géométrique et chargements pour le tunnel carré.

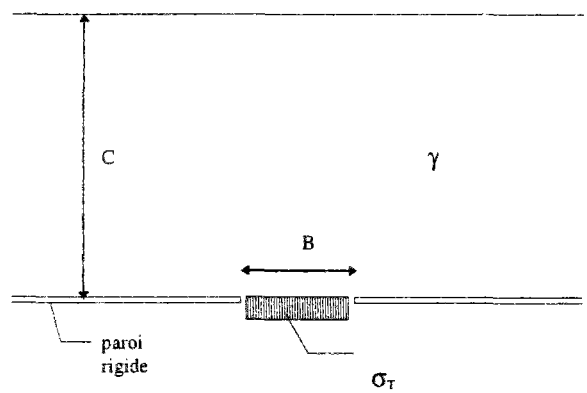


Figure 4-3. Définition géométrique et chargements pour l'ouverture de trappe.

Plusieurs cas de chargement ont été prévus. Le cas 1 correspond à la combinaison d'une pression uniforme σ_S appliquée à la surface du terrain naturel et d'une pression uniforme de

soutènement dans l'ouvrage, σ_T. Le cas 2 correspond au poids volumique du sol, γ. Enfin, le cas 3 est obtenu en combinant les cas 1 et 2, la pression σ_S pouvant éventuellement être nulle.

4.2.1 Critère de Tresca

Le critère de Tresca est utilisé dans notre étude pour modéliser le cas des terrains argileux saturés. La rupture a lieu dans ce cas à court terme et la capacité de résistance du terrain est représentée par sa cohésion non drainée c_u (Davis et al., 1980 ; Robert et Lo, 1985).

Les conditions de stabilité sont caractérisées à l'aide du paramètre adimensionnel N, proposé par Broms et Bennemark (1967). Ce paramètre, qui porte le nom de facteur de charge, s'écrit sous la forme :

$$N = \frac{\sigma_S - \sigma_T + \gamma(C + D/2)}{c_u}$$

Le coefficient N sera utilisé dans la suite pour présenter les résultats obtenus pour chaque configuration géométrique et de chargement. Etant donné la forme adimensionnelle du paramètre N, ce ne sont pas les valeurs absolues des différents termes intervenant dans l'expression de N qui comptent mais leurs rapports (Leca et Panet, 1988). Ainsi, tous les calculs effectués pour le critère de Tresca ont été réalisés avec des maillages simulant un tunnel de D=1 m et ayant une valeur de c_u=10 kPa, exception faite des cas où les paramètres sont imposés. L'indépendance des résultats de LIMI par rapport au changement des paramètres, lorsque leurs rapports restent constants, a été vérifiée.

4.2.1.1 Tunnel circulaire

Les calculs ont dans un premier temps été effectués pour le cas d'un sol non pesant, le chargement du système étant constitué d'une pression uniforme σ_s appliquée à la surface. Les calculs ont été ensuite poursuivis par l'étude de chargements constitués par le poids volumique du sol avec ou sans pression de soutènement intérieure dans le tunnel. Ces résultats ont été confrontés à ceux issus de travaux antérieurs, analytiques ou expérimentaux. Les comparaisons ont notamment été effectuées avec les résultats de Davis et al. (1980) et de Sloan et Assadi (1993). Des comparaisons ont également été entreprises avec des études expérimentales.

Ce cas géométrique avait déjà été étudié par Mengeringhausen (1992) en utilisant une version ancienne de LIMI. La dispersion des résultats obtenus avait mis en évidence des

problèmes liés à l'utilisation d'éléments triangulaires en maillage automatique et au choix des conditions limites.

4.2.1.1.1 Cas de chargement n° 1 : pression uniforme appliquée à la surface du sol

Ce cas de chargement permet une première comparaison avec les résultats de Davis et al. (1980) et de Sloan et Assadi (1993).

Les calculs ont été effectués pour des valeurs du paramètre C/D comprises entre 0,25 et 4, limites considérées comme représentatives des ouvrages souterrains peu profonds (Descoeudres, 1992). Dans les différents maillages, les déplacements ont été empêchés au niveau des extrémités inférieure et latérale la plus éloignée de l'ouvrage, les déplacements horizontaux étant, par ailleurs, bloqués dans le plan de symétrie de l'ouvrage.

La figure 4-4 représente les bornes supérieures obtenues par LIMI ainsi que les bornes supérieure et inférieure données par Davis et al. (1980) et Sloan et Assadi (1993). Dans ce dernier cas, les résultats présentés sont uniquement donnés pour des valeurs de C/D comprises entre 1 et 4. Pour ce cas de calcul, le paramètre N se réduit à $N = \frac{\sigma_S}{c_u}$

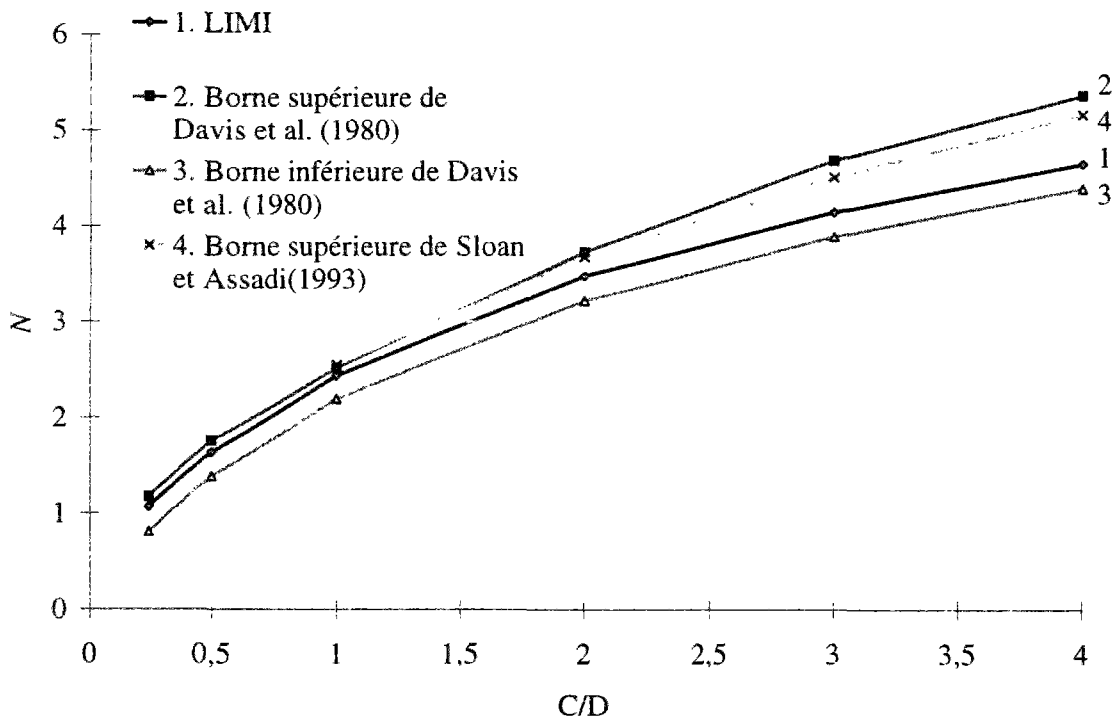


Figure 4-4. Comparaison entre les résultats de LIMI et ceux de Davis et al.(1980) pour le cas de chargement n° 1.

Comme on peut le constater, la borne supérieure fournie par LIMI est proche de la borne inférieure de la charge limite obtenue par Davis et al. (1980). L'amélioration n'est pas significative pour les valeurs de C/D inférieures à 2, mais elle l'est au-delà.

Les bornes supérieures de Davis et al. (1980) sont basées sur la minimisation de 4 mécanismes, qui sont rappelés sur la figure 4-5. Le mécanisme A (cas particulier du mécanisme C) conduit, pour ce cas de chargement, aux meilleurs résultats pour des valeurs de C/D inférieures à 0,5. Pour des valeurs de C/D comprises entre 0,5 et 3,5, les meilleures minimisations sont obtenues avec le mécanisme C. Pour les valeurs de C/D les plus élevées, c'est le mécanisme D qui fournit les bornes optimales.

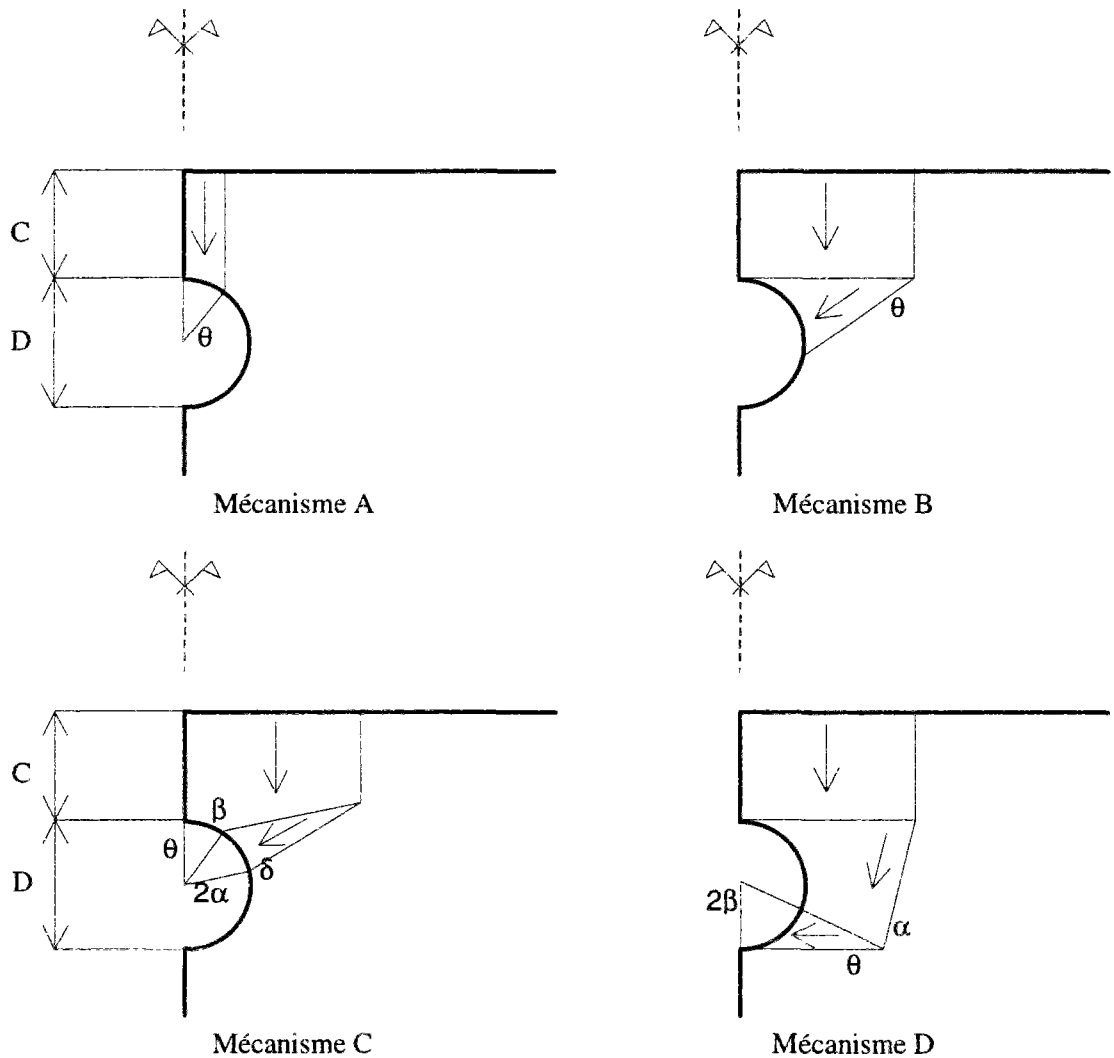


Figure 4-5. Mécanismes proposés par Davis et al. (1980).

Les résultats de Sloan et Assadi (1993) ont été obtenus avec le mécanisme présenté sur la figure 4-6, qui constitue une généralisation du mécanisme D imaginé par Davis et al. (1980).

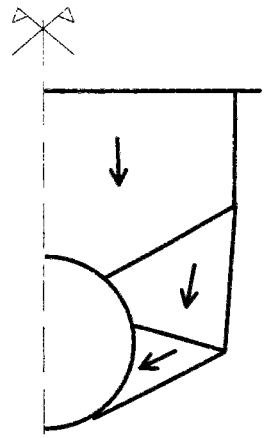


Figure 4-6. Mécanisme proposé par Sloan et Assadi (1993).

Les mécanismes fournis par LIMI sont difficilement assimilables aux mécanismes de blocs rigides étudiés analytiquement : les zones de déformation sont étendues et présentent des configurations complexes, variant en fonction de C/D. Les figures 4-7 à 4-10 présentent les résultats graphiques obtenus pour différentes valeurs du rapport C/D. A l'exception du cas C/D=4, les résultats optimaux ont été obtenus avec des maillages plus fins que ceux présentés sur ces figures : pour des rapports de C/D égaux à 0,25, 1 et 2, les éléments utilisés avaient une surface quatre fois inférieure à celle des éléments reproduits sur ces figures. Néanmoins, on a retenu ces maillages par souci de clarté visuelle, car les maillages plus fins donnaient des résultats très difficiles à dépouiller.

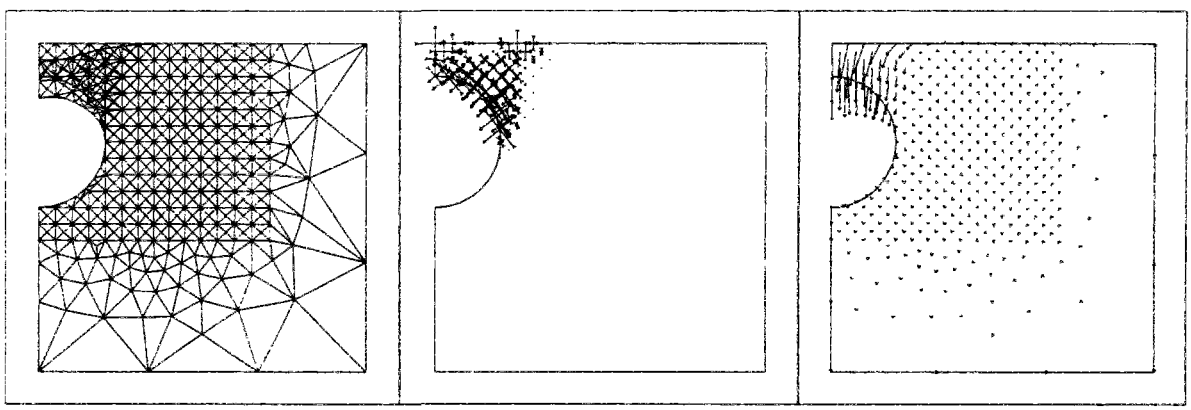


Figure 4-7. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 1. C/D=0,25.

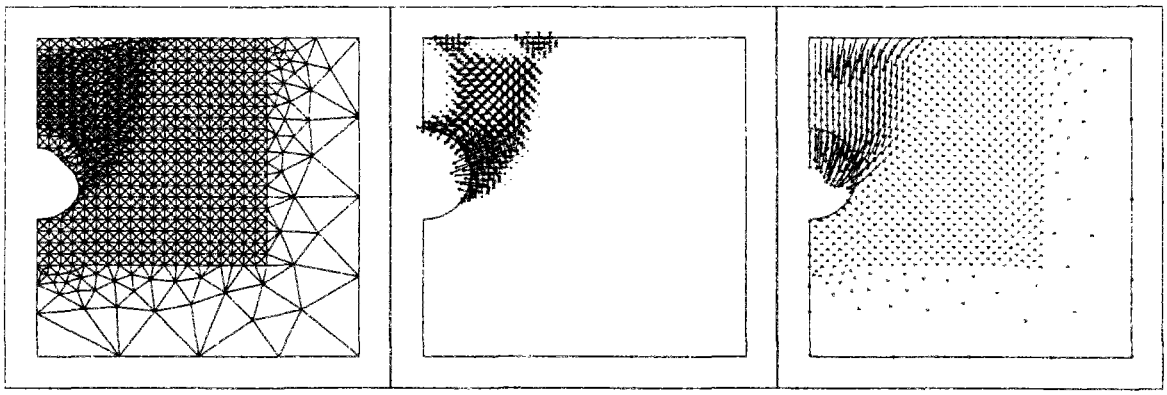


Figure 4-8. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 1. C/D=1.

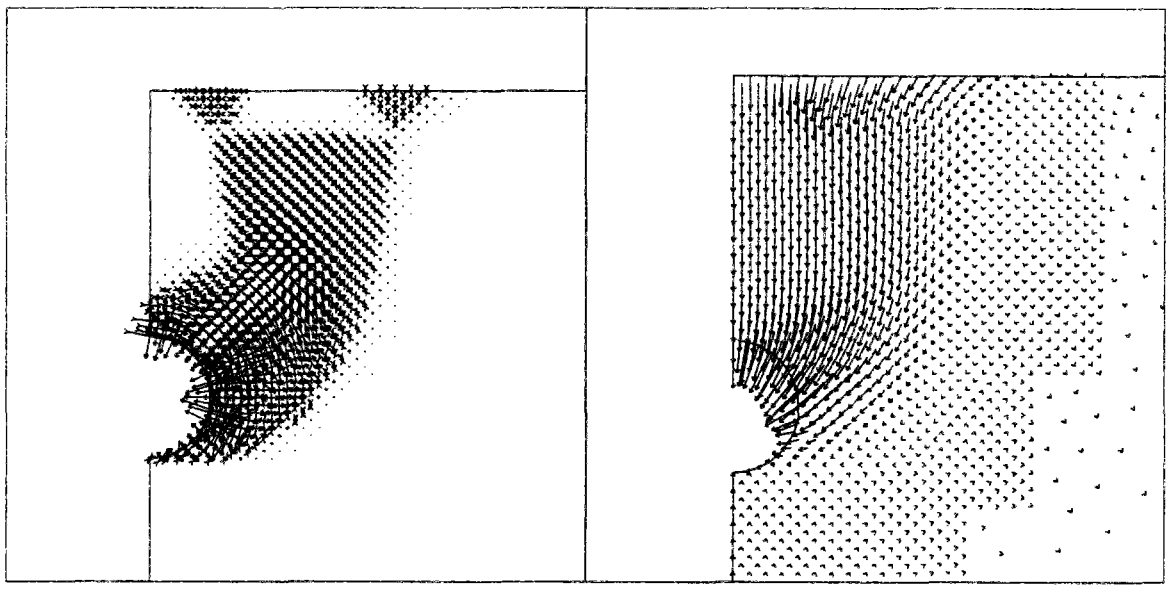


Figure 4-9. Vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 1. C/D=2.

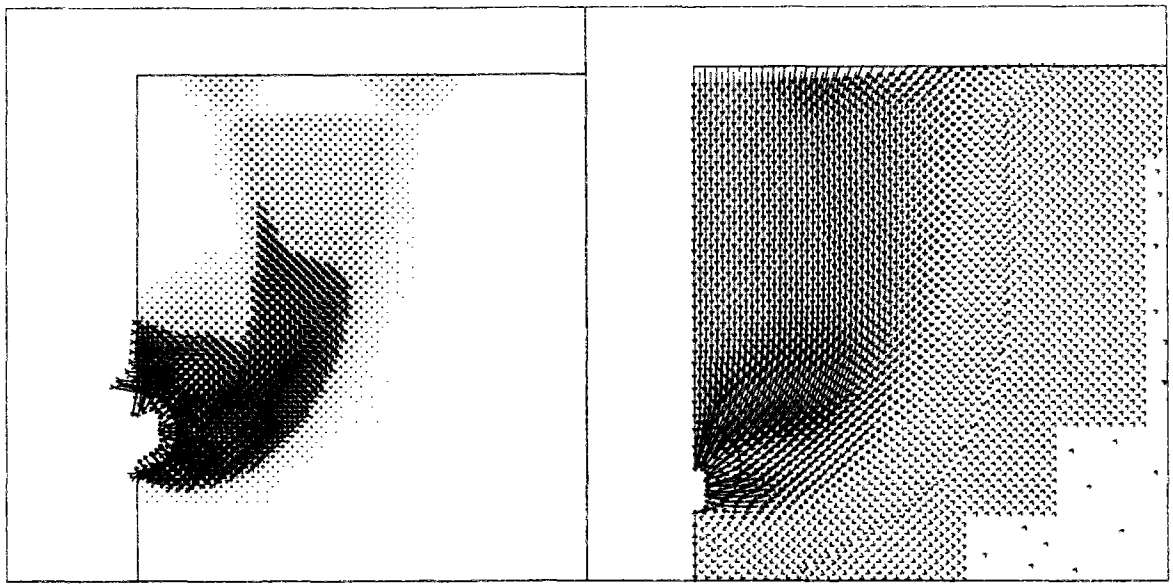


Figure 4-10. Vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 1. C/D=4.

Dans le cas C/D=0,25, le mécanisme obtenu par LIMI se restreint à la zone située au dessus du tunnel. Avec l'augmentation de la profondeur, on voit apparaître une zone non déformée, indiquant l'existence d'un bloc de rupture presque rigide. Pour les rapports C/D égaux à 1 et 2, on observe une masse latérale de sol descendant vers le tunnel, comme dans le mécanisme C de Davis et al. (1980). Pour C/D égal à 4, on observe des mouvements tout autour du tunnel et, comme dans le mécanisme D de Davis et al. (1980) ou dans celui de Sloan et Assadi (1993), on aperçoit une zone de déplacement latéral convergeant vers le tunnel en partie inférieure. Dans la partie supérieure, et au contraire du mécanisme proposé par Davis et al. (1980), il n'est pas possible d'assimiler les déplacements obtenus au-dessus du tunnel à un bloc rigide, car on observe une zone présentant une déformation importante et des changements de direction des vitesses de déplacement. Par contre, le mécanisme de Sloan et Assadi (1993) autorise des mouvements similaires à ceux donnés par LIMI.

Le champ de vitesses de déformation tend à s'étendre autour du tunnel quand on augmente C/D. Le caractère incompressible du critère de Tresca se traduit à l'échelle macroscopique par l'égalité du volume d'affaissement en surface et du volume effondré au niveau du tunnel. Comme, à mesure que le paramètre C/D croît, l'étendue du mécanisme en surface augmente, pour les plus fortes valeurs de C/D, un tassement même léger à la surface se traduit par une grande convergence dans le tunnel, justifiant la prépondérance des déformations dans cette zone.

Le changement de volume dans le système étant nul, la différence entre l'intégrale du tassement et l'intégrale de la convergence vers le tunnel est nulle, elle aussi. Ce fait et l'uniformité des pressions considérées permet de définir comme un paramètre la différence $\sigma_S - \sigma_T$. Cette considération théorique a été retrouvée par les calculs effectués au moyen du module LIMI, les résultats de stabilité ne dépendant pas de la valeur individuelle de ces deux paramètres, mais de leur différence.

Entre l'axe du tunnel et la zone non perturbée par la rupture, on peut identifier une zone de déformation qui s'étend des parois latérales du tunnel jusqu'en surface. Cette zone rejoint, à proximité de la surface, deux zones de déformation de forme triangulaire. La zone cisaillée joue le rôle de discontinuité verticale dans le mécanisme de déformation par blocs et fait la transition entre la zone non perturbée et la zone de tassement maximale, située au-dessus du tunnel.

Cette étude détaillée du mécanisme obtenu dans le cas C/D = 4 tend à montrer que l'amélioration apportée par LIMI aux résultats existants résulte de l'incapacité des mécanismes de blocs à traduire complètement la rupture du massif encaissant, et ce d'autant plus que le rapport C/D est grand.

4.2.1.1.2 Cas de chargement n°2 : poids volumique

Ce cas de chargement, dans lequel le système est uniquement soumis au poids volumique γ du terrain, a également été analysé pour plusieurs valeurs du rapport C/D. Les résultats sont représentés sur la figure 4-11.

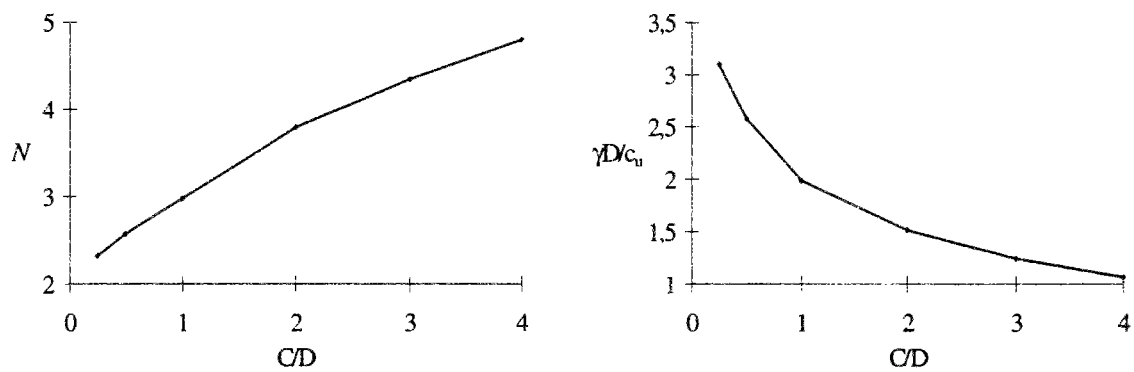


Figure 4-11. Borne supérieure des coefficients N et $\gamma D/c_u$ pour le chargement n° 2.

Résultats obtenus avec le module LIMI.

Les mécanismes mis en évidence pour ce cas de chargement ont une allure générale similaire à celle obtenue dans le cas de chargement précédent. Toutefois, la masse de sol affectée par le mécanisme est, à valeur égale du rapport C/D, plus importante.

On peut également remarquer qu'on ne retrouve pas de mécanisme particulier pour C/D=0,25, contrairement à ce qu'on avait obtenu dans le cas n° 1, et que, même pour cette valeur de C/D, on observe des mouvements latéraux autour du tunnel.

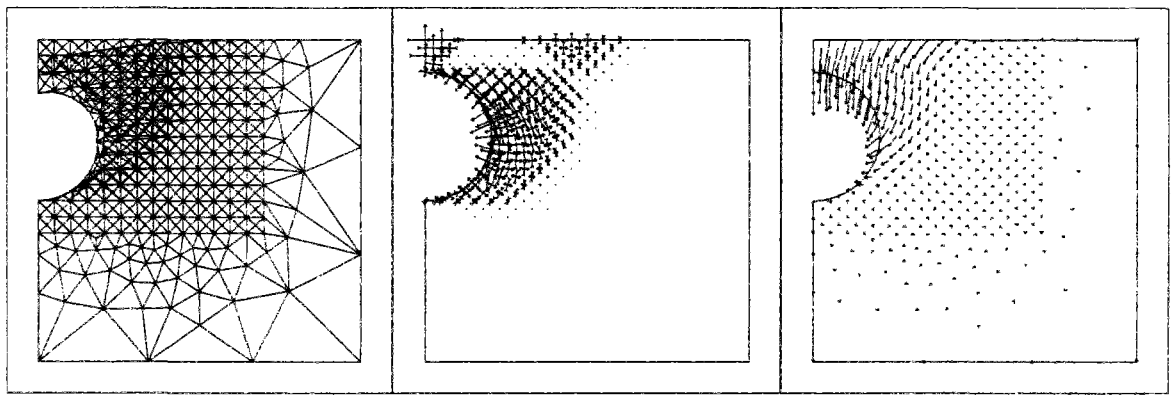


Figure 4-12. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 2. C/D=0,25.

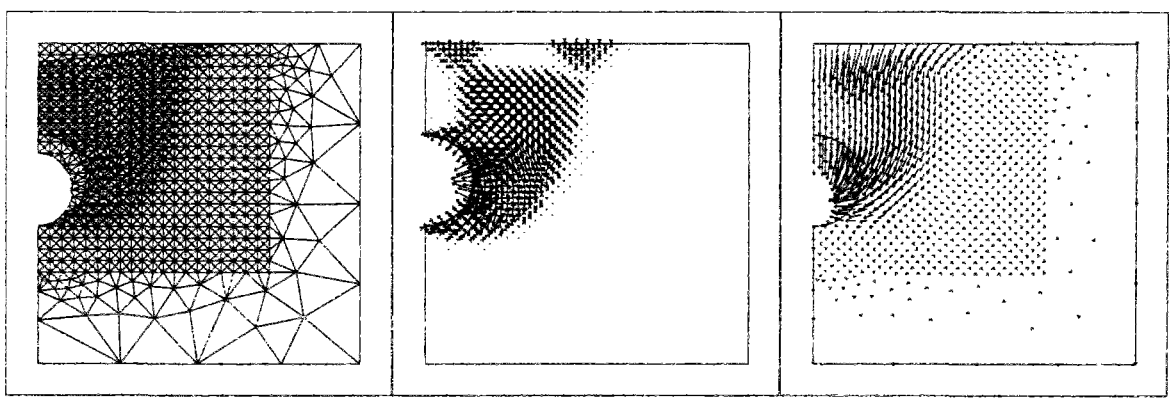


Figure 4-13. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 2. C/D=1.

Pour le cas C/D=4, la zone de terrain affectée par le mécanisme s'étend en-dessous du niveau du radier de l'ouvrage, ce qui signifie qu'il y a dans ce cas un soulèvement du terrain près du radier (figure 4-15). Ce soulèvement est évidemment inférieur aux déplacements latéraux calculés à proximité, mais il n'est pas négligeable.

Comme dans le cas précédent, pour les profondeurs relatives les plus élevées, les vitesses de déformation entourent tout le périmètre de l'ouvrage. Sur la figure 4-15, où les vitesses de

déformation pour le cas C/D=4 ont été reportées, on constate deux ordres de grandeur pour ces dernières, avec une concentration particulière sur le bord de l'ouvrage. En effet, indépendamment du chargement, l'incompressibilité du critère de Tresca impose que les volumes d'effondrement en tunnel se traduisent par des volumes égaux en surface, ce qui amène à de plus grandes déformations autour du tunnel pour les profondeurs plus élevées.

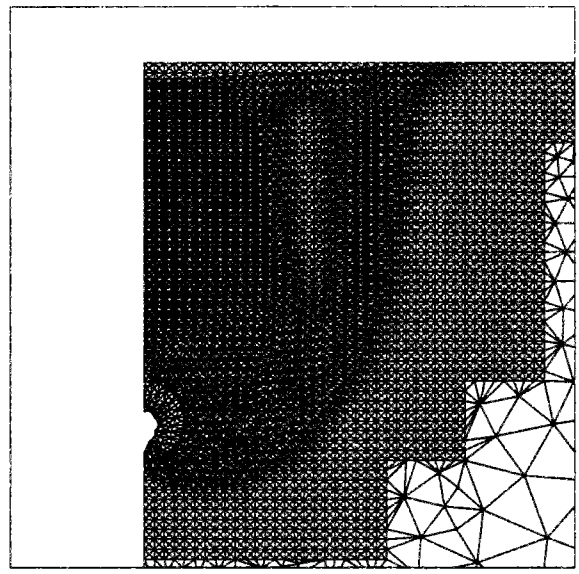


Figure 4-14. Maillage déformé pour le cas de chargement n° 2. C/D=4.

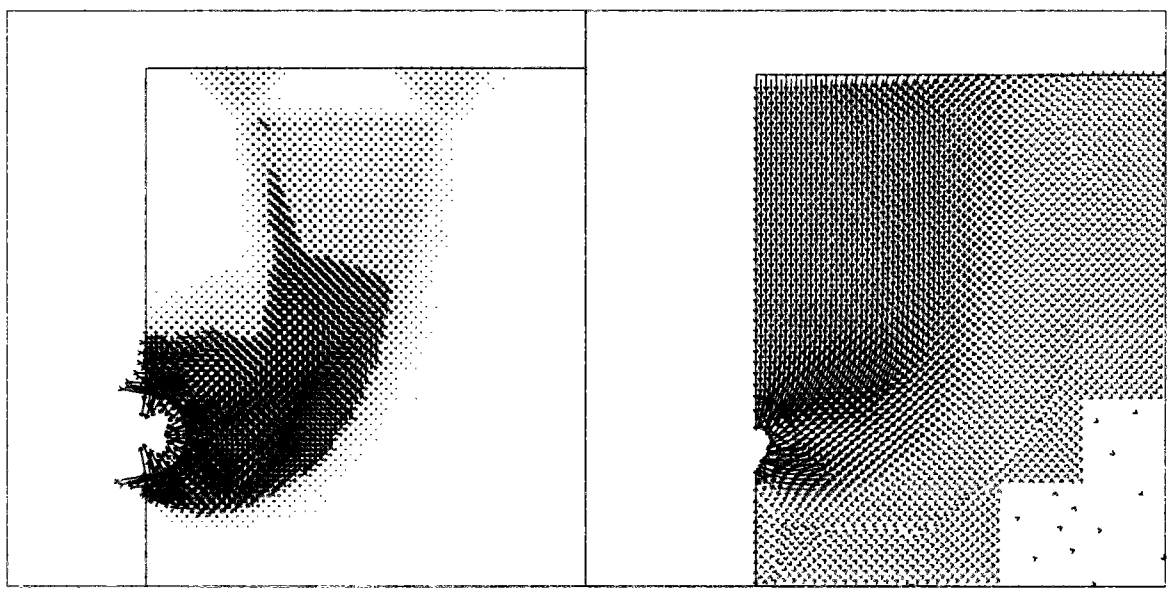


Figure 4-15. Vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 2. C/D=4.

4.2.1.1.3 Cas de chargement n° 3 : poids volumique et pression de soutènement intérieure au tunnel

Ce cas de calcul est le plus intéressant dans la mesure où il correspond au problème effectivement rencontré dans la pratique. La pression obtenue dans le calcul peut être assimilée à la pression d'air dans l'ouvrage pour garantir la stabilité pendant la construction ou à la pression à reprendre ultérieurement avec un revêtement flexible.

Pour une meilleure comparaison de nos résultats avec ceux présentés dans la littérature, on a effectué trois types de calculs, correspondant à trois valeurs distinctes du rapport $\gamma D/c_u$ ($\gamma D/c_u=2$, $\gamma D/c_u=3$ et $\gamma D/c_u=4$).

La figure 4-16 compare les résultats obtenus par LIMI pour $\gamma D/c_u=2$ et ceux obtenus, d'une part, par Davis et al. (1980) et, d'autre part, par Sloan et Assadi (1993). Les figures 4-17 et 4-18 présentent les mêmes comparaisons pour $\gamma D/c_u=3$ et 4, respectivement. Dans le dernier cas, seules les bornes inférieures qui correspondent à des valeurs de C/D supérieurs ou égales à 2 ont été représentées. Les bornes inférieures issues de l'approche de Davis et al. (1980) ont été en effet calculées à l'aide d'un outil numérique qui permet de générer des champs de contraintes plastiques dans tout le massif (Seneviratne, 1979) et, pour ces cas, on n'a pas pu fournir de solution pour C/D<2. Il ne s'agit pas là d'une instabilité inhérente à cette configuration mais simplement d'une incapacité de la méthode à générer des champs de vitesses convenables, c'est à dire statiquement et plastiquement admissibles.

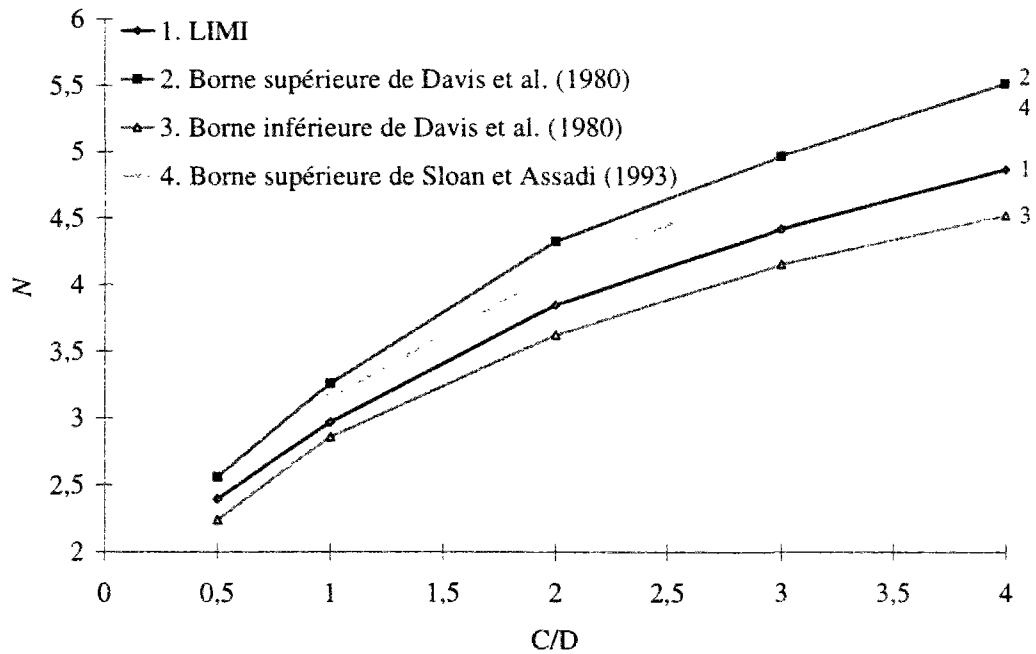


Figure 4-16. Comparaison entre les résultats de LIMI et ceux de Davis et al. (1980) et Sloan et Assadi (1993) pour le cas de chargement n° 3 ($\gamma D/c_u$=2).

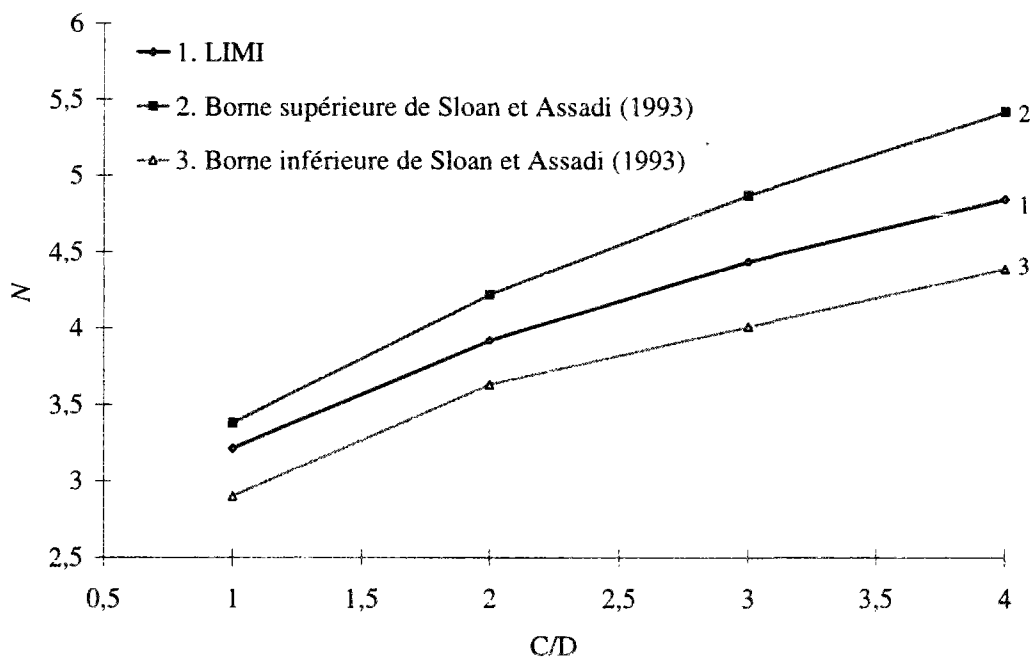


Figure 4-17. Comparaison entre les résultats de LIMI et ceux de Sloan et Assadi (1993) pour le cas de chargement n° 3 ($\gamma D/c_u$=3).

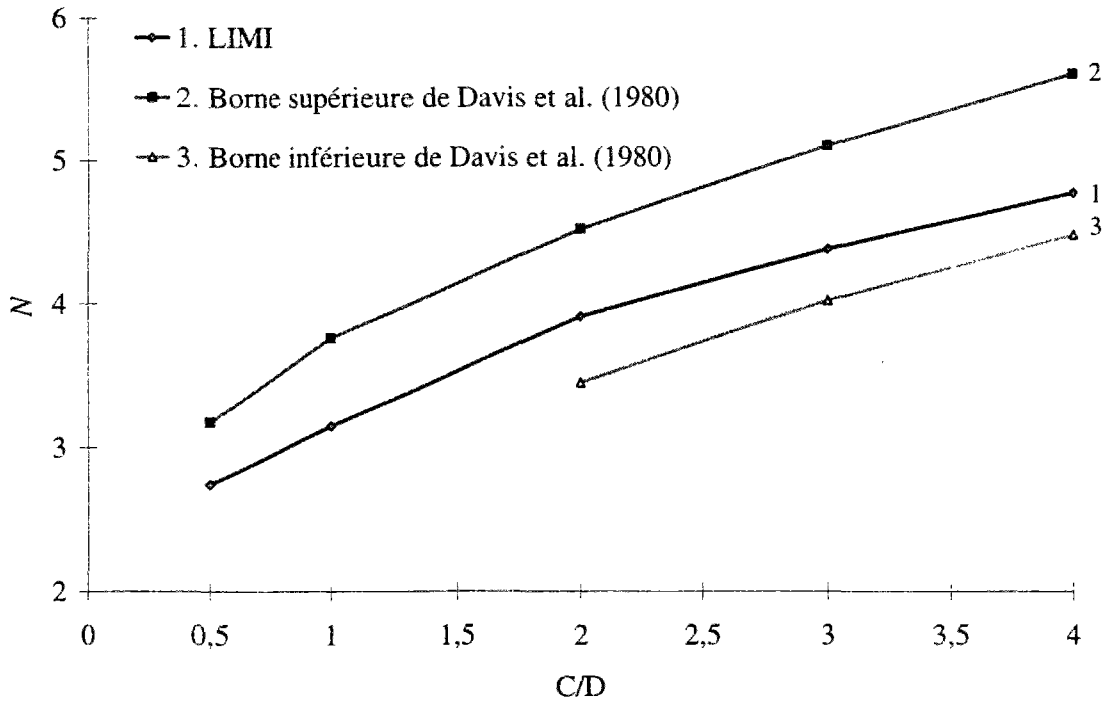


Figure 4-18. Comparaison entre les résultats de LIMI et ceux de Davis et al. (1980) pour le cas de chargement n° 3 ($\gamma D/c_u$=4).

Comme pour les cas précédents, les résultats de LIMI permettent d'approcher convenablement les bornes inférieures existantes. L'écart entre les bornes inférieures et supérieures se situe entre 4 et 10% dans les cas présentés, ce qui peut être considéré, du point de vue pratique, comme suffisamment réduit pour qu'on puisse les utiliser couramment. De plus, la différence restante pourrait bien résulter de l'imprécision des bornes inférieures.

Les mécanismes obtenus pour le cas n° 3 présentent une allure semblable à celle obtenue dans les cas 1 et 2, avec toutefois une tendance à conduire à des zones de rupture plus étendues. Cette augmentation de la zone affectée par la rupture dépend sensiblement du paramètre $\gamma D/c_u$, surtout pour les plus faibles valeurs de C/D, comme le montrent les figures 4-19 et 4-20.

Les résultats obtenus pour C/D=1 montrent en particulier des soulèvements en dessous du radier du tunnel pour $\gamma D/c_u$=4 mais pas pour le cas $\gamma D/c_u$=2 : en réalité, cette dernière configuration s'apparente au cas de chargement n° 2 (voir la figure 4-11), dans la mesure où la pression σ_T y est presque nulle.

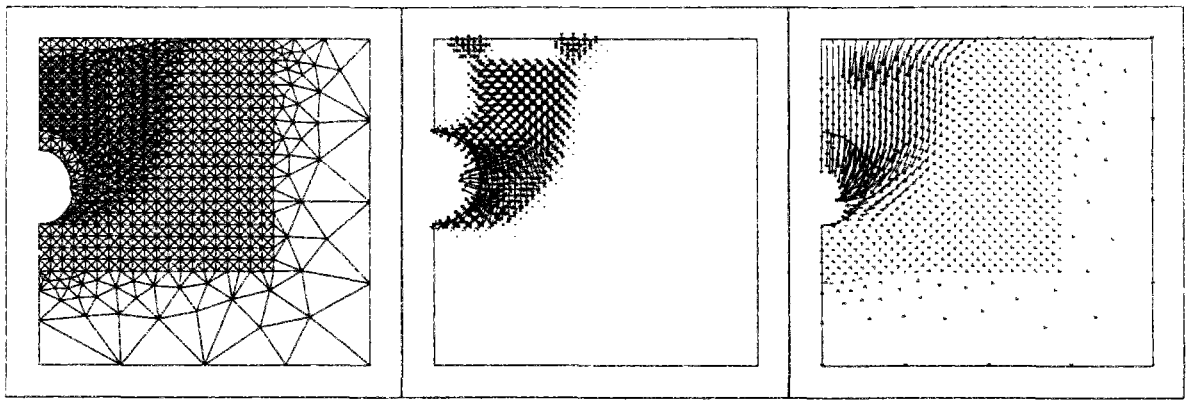


Figure 4-19. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 3 ($\gamma D/c_u$=2 et C/D=1).

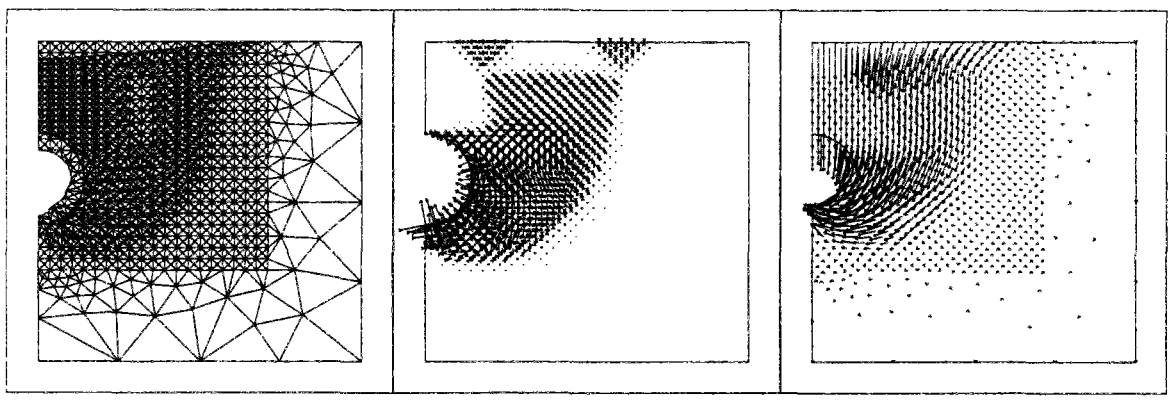


Figure 4-20. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 3 ($\gamma D/c_u$=4 et C/D=1).

Comme auparavant, pour les valeurs les plus élevées de C/D, on peut mettre en évidence deux niveaux de déformations, les plus élevées se concentrant autour de l'ouvrage, comme on peut le vérifier sur les figures 4-21 et 4-23.

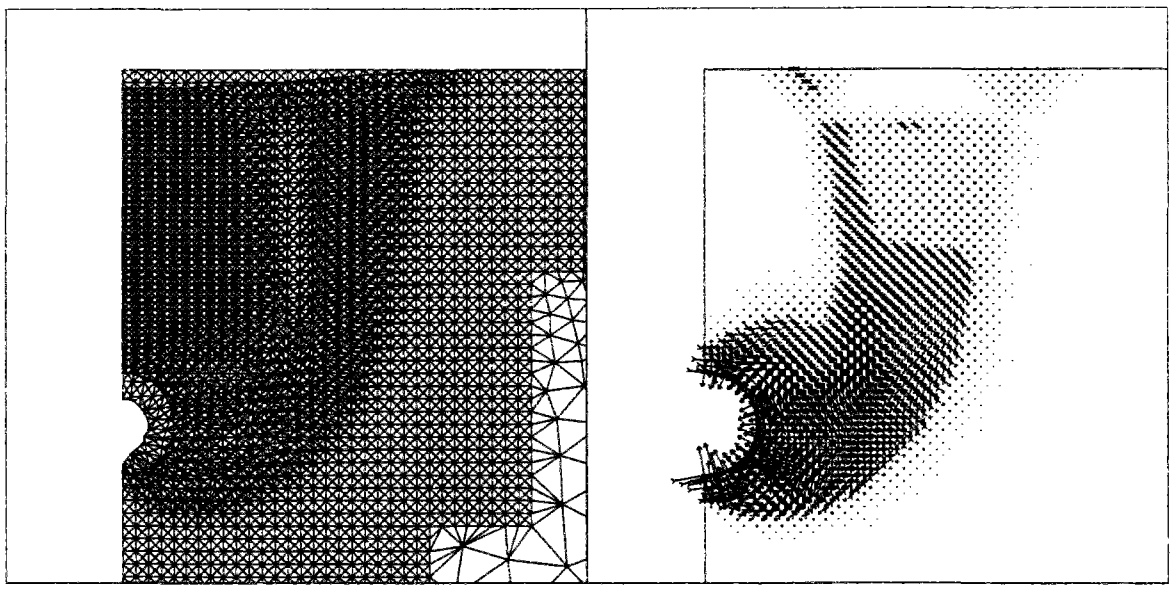


Figure 4-21. Maillage déformé et vitesses de déformation pour le cas de chargement n° 3 ($\gamma D/c_u$=2 et C/D=3).

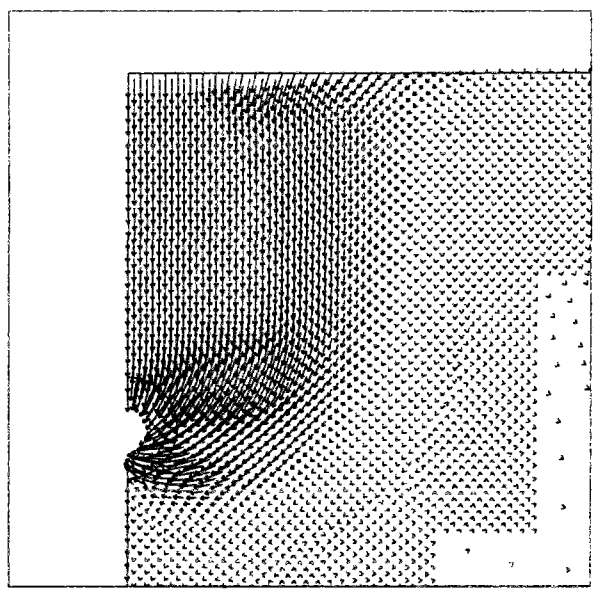


Figure 4-22. Vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 3 ($\gamma D/c_u$=2 et C/D=3).

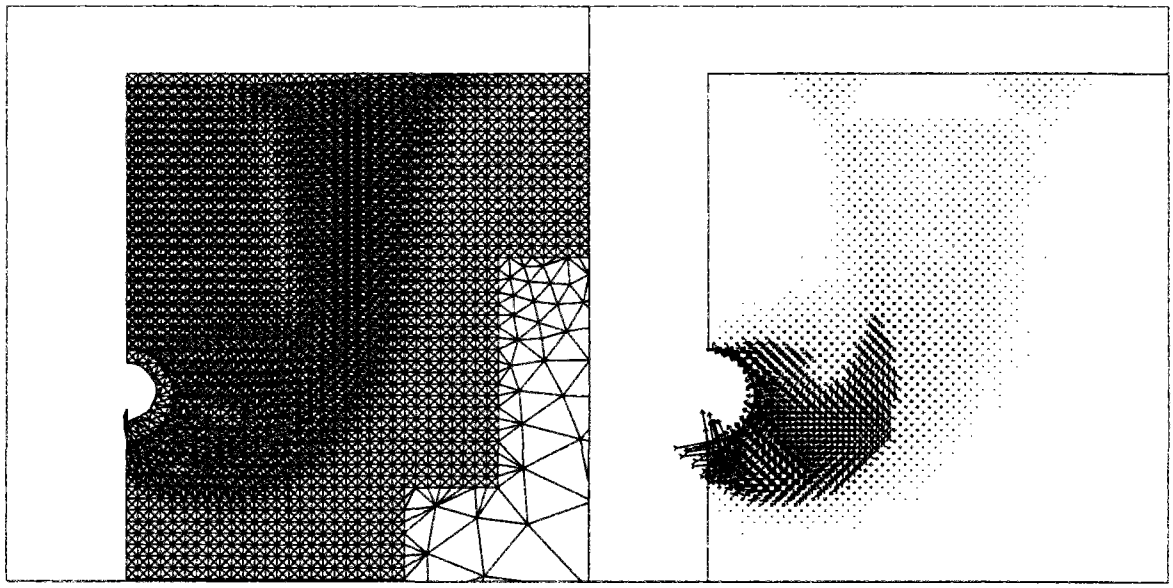


Figure 4-23. Maillage déformé et vitesses de déformation pour le cas de chargement n° 3 ($\gamma D/c_u$=4 et C/D=3).

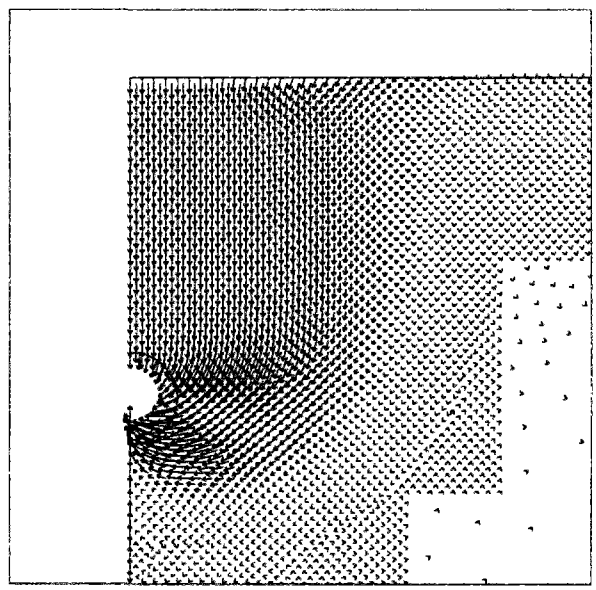


Figure 4-24. Vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 3 ($\gamma D/c_u$=2 et C/D=4).

Quand $\gamma D/c_u$ augmente, on note une concentration des vitesses de déformation dans la partie inférieure du tunnel, visible aussi bien pour C/D=1 (figure 4-20) que pour C/D=3 (figure 4-23). Ce résultat étant relié à l'augmentation de $\gamma D/c_u$, on peut penser que le développement de déformations dans cette zone pourrait contribuer dans ce cas à l'apparition de ruptures locales. En effet, comme indiqué par Davis et al. (1980), on peut établir une équivalence entre le chargement étudié et un chargement fictif agissant sur un massif non pesant, au niveau du tunnel, composé d'une force uniformément distribuée et d'un chargement

de distribution linéaire, de résultant nulle, provoquant un moment. La charge uniformément distribuée serait à l'origine de ruptures globales touchant la surface du terrain naturel, alors que la partie variable, de résultante nulle, serait à l'origine des ruptures locales. Pour pouvoir vérifier si cette hypothèse est bien traduite par LIMI, on a effectué un autre calcul, dans lequel on a donné à la pression de soutènement σ_T une distribution variant linéairement avec la profondeur, la différence entre les valeurs en clé et en radier étant égale à γD.

Le mécanisme issu de ce calcul pour le cas C/D=1 est représenté sur la figure 4-25 : on retrouve bien le même mécanisme que celui du cas de chargement n° 1 (figure 4-8). Ainsi, l'utilisation d'une pression non uniforme appliquée sur le périmètre du tunnel permet de retrouver un mécanisme pratiquement identique à celui obtenu dans le cas d'une charge uniformément répartie en surface, les effets de déstabilisation locale induits par le poids volumique du terrain étant dans ce cas neutralisés.

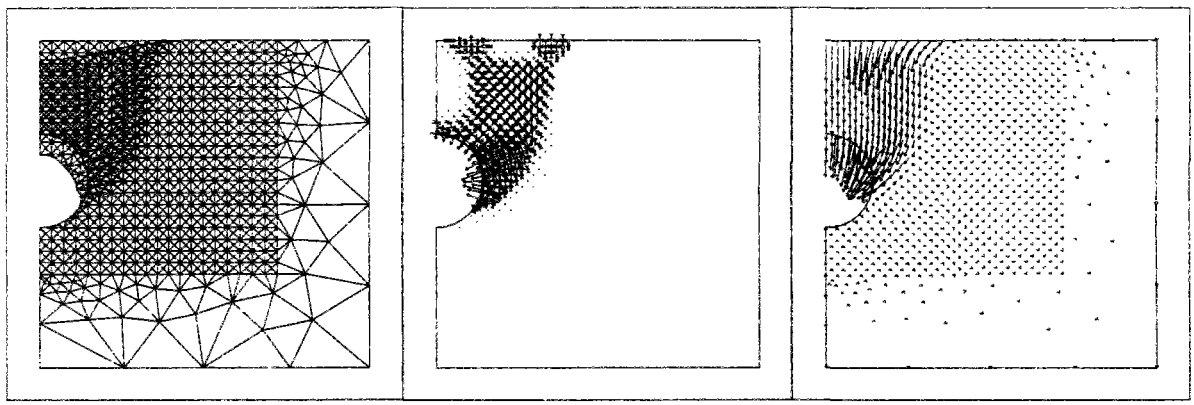


Figure 4-25. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 3, pression de soutènement de distribution linéaire (C/D=1).

Dans les travaux analytiques de calcul des bornes supérieures de rupture locale, on utilise des mécanismes restreints à la proximité du front de taille pour pouvoir modéliser ce phénomène. Avec LIMI, comme on n'intervient pas sur le choix du mécanisme, ce type de procédure n'est pas applicable. Comme les résultats analytiques ont prouvé que, dans le cas des pressions de soutènement, le rapport $\gamma D/c_u$ est limité, il est impératif que LIMI puisse reproduire, sinon les ruptures issues de mécanismes locaux, du moins le phénomène de limitation maximale du rapport $\gamma D/c_u$. Dans ce but, on a augmenté progressivement ce rapport et fait des calculs de façon à éventuellement mettre en évidence ce phénomène.

La figure 4-26 donne une représentation de $\mathbf{K}_{LIMI}$ dans le plan de chargement (γ, σ_T). On rappelle que LIMI a la possibilité d'effectuer des calculs dont la variation de la charge

s'effectue sur un seul chargement, tous les autres chargements étant maintenus constants. Ainsi on peut fixer le paramètre $\gamma D/c_u$ et trouver la pression de soutènement à exercer sur le front pour garantir la stabilité .

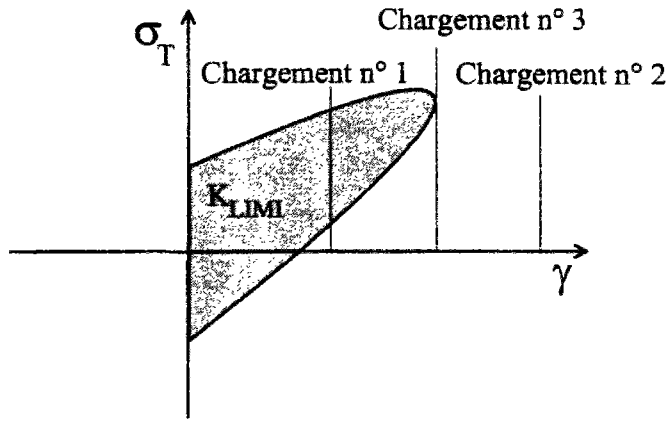


Figure 4-26. Schéma du processus déchargement.

C'est ce qui est représenté par les droites « chargement » sur la figure 4-26. Par exemple, la droite n° 1 permettrait d'obtenir deux solutions par intersection avec la frontière du domaine K_{LIMI}, une représentant la rupture par effondrement du tunnel et l'autre par explosion* . La droite n° 2 représente une valeur du poids volumique pour laquelle aucune valeur de la pression uniforme appliquée dans l'ouvrage ne garantirait sa stabilité. La détermination de la droite n° 3 nécessite plusieurs calculs destinés à trouver la valeur du poids volumique pour laquelle les valeurs des pressions limites de soutènement en effondrement et explosion seraient égales. Ce processus est difficile à mettre en œuvre et nécessite évidemment de nombreux calculs ; c'est la raison pour laquelle cette approche n'a pas été abordée systématiquement dans notre travail. Néanmoins, nous avons effectué ce type de calcul pour une configuration donnée, afin de confirmer notre raisonnement. Dans la mesure où la valeur limite de $\gamma D/c_u$ ne dépend pas de la profondeur relative, on a choisi le cas C/D=0,25 par souci d'économie dans la construction des maillages.

Les résultats de ces calculs sont donnés sur la figure 4-27. Sur cette figure, on a représenté pour chaque valeur du rapport $\gamma D/c_u$, les valeurs du rapport σ_T/c_u conduisant à des ruptures par effondrement ou explosion du tunnel. K_{LIMI} constitue par conséquent la représentation du

* Par rupture par explosion, on entend ici la rupture qui surviendrait dans l'ouvrage dans le cas d'un excès de pression dans le tunnel

domaine de stabilité fourni par le module LIMI pour ce cas géométrique. La courbe inférieure caractérise la rupture par effondrement, et la courbe supérieure la rupture par explosion. Le domaine des pressions de soutènement négatives, même s'il n'est pas vraiment réaliste d'un point de vue pratique (traction sur les parois du tunnel) a été également étudié afin de fournir une vision complète de l'allure de la courbe de rupture par effondrement.

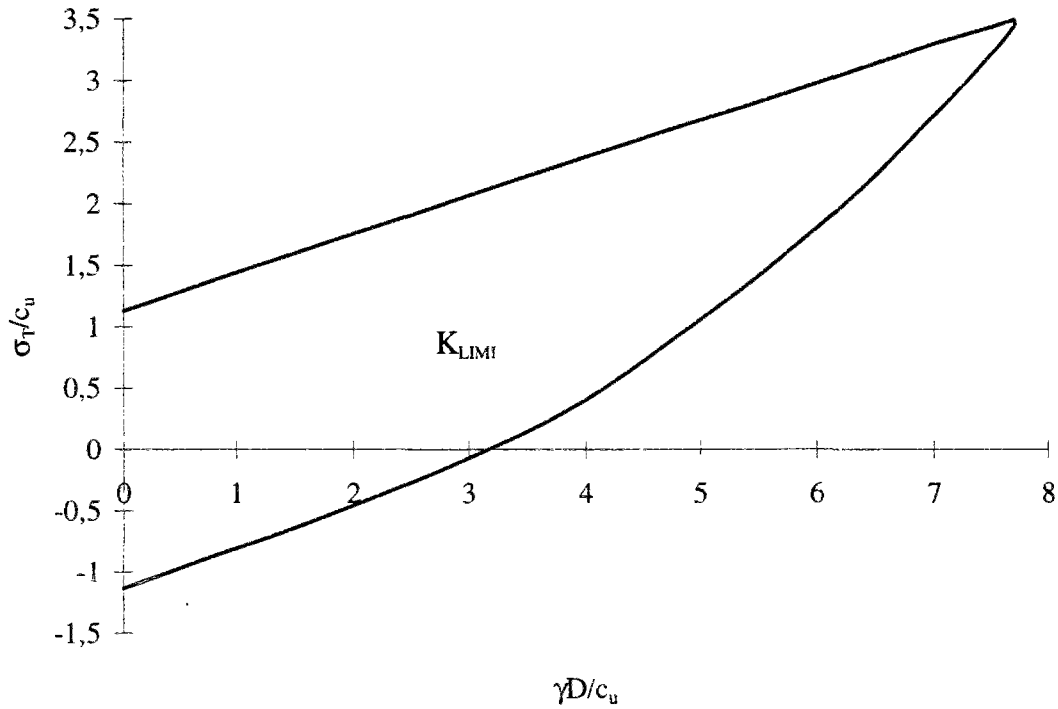


Figure 4-27. Domaine de stabilité fourni par LIMI (C/D=0,25).

Ces courbes ont été obtenues à partir de plusieurs calculs (menés pour des valeurs du rapport $\gamma D/c_u$ égales à 0-2-4-6-7-7-5 et 7,7). L'intersection entre les deux courbes délimitant le domaine $\mathbf{K}_{LIMI}$ correspond à une valeur $\gamma D/c_u$ proche de 7,7 ; on constate en effet que la différence relative entre les pressions de rupture par effondrement et par explosion est de 1,5% pour cette valeur de $\gamma D/c_u$. Par ailleurs, la stabilité n'a pu être obtenue pour $\gamma D/c_u$=7,8. Cette situation peut être considérée comme l'équivalent d'un mode de rupture local et le résultat obtenu ($\gamma D/c_u$=7,8 par excès) constitue, par conséquent, une amélioration de la borne supérieure en rupture locale établie par Davis et al. (1980) pour la même configuration ($\gamma D/c_u$=8,71).

L'allure des deux courbes représentées sur la figure 4-27 est sensiblement différente, avec notamment une allure linéaire pour la courbe correspondant à la rupture par explosion.

L'explication de ce résultat peut être trouvée en examinant l'allure des mécanismes de rupture obtenus dans chaque cas de rupture. Dans le cas de la rupture par explosion, le mécanisme obtenu (figure 4-28) est l'inverse de celui obtenu en effondrement pour $\gamma D/c_u=0$ (figure 4-7) et est indépendant de la valeur de $\gamma D/c_u$. Par conséquent, seul intervient, dans l'estimation des conditions de stabilité, le rapport entre le poids volumique du terrain et la valeur de la pression de rupture par explosion correspondante (figure 4-27).

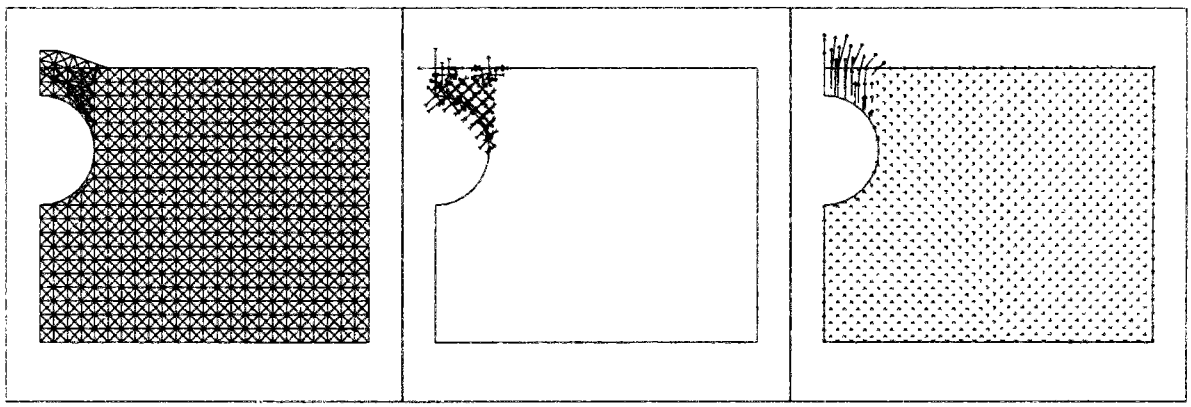


Figure 4-28. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 3, rupture par explosion ($\gamma D/c_u=6$, C/D=0,25).

En revanche, et comme on l'a montré précédemment, la géométrie du mécanisme de rupture par effondrement dépend de $\gamma D/c_u$ et une augmentation de ce rapport se traduit par la mise en mouvement d'une partie plus importante du massif encaissant (figure 4-29), ce qui explique l'allure de la courbe obtenue sur la figure 4-27 pour ce mode de rupture.

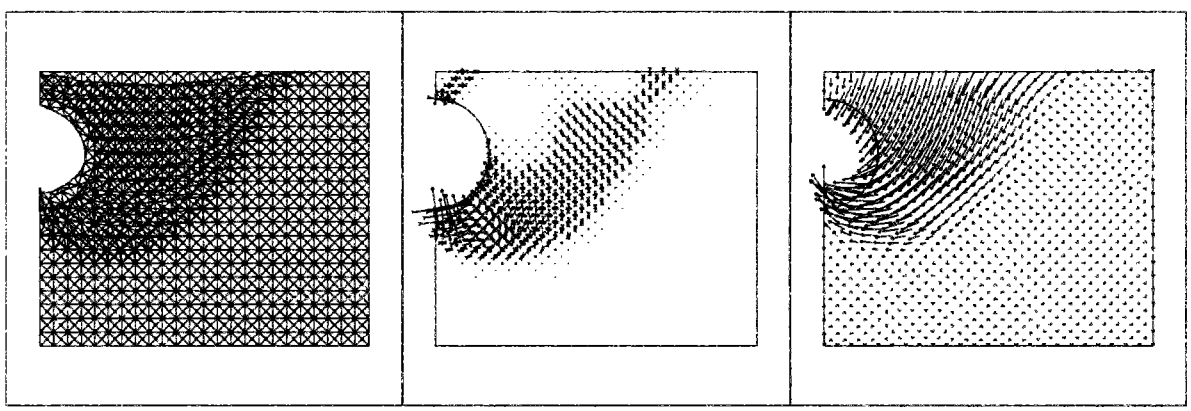


Figure 4-29. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 3, rupture par effondrement ($\gamma D/c_u=6$, C/D=0,25).

La figure 4-30 montre le mécanisme obtenu pour $\gamma D/c_u$=7,7. On voit clairement que ce mécanisme diffère légèrement de celui de $\gamma D/c_u$=6. En réalité, la partie supérieure du tunnel subit un déplacement vers le haut, signe que la rupture par explosion est toute proche. Toutefois, comme on l'a déjà mentionné, pour la valeur de $\gamma D/c_u$=7,8, on n'a pas pu obtenir une convergence du calcul : la pression nécessaire pour garantir la stabilité à la rupture par effondrement est plus élevée que celle responsable de la rupture par explosion.

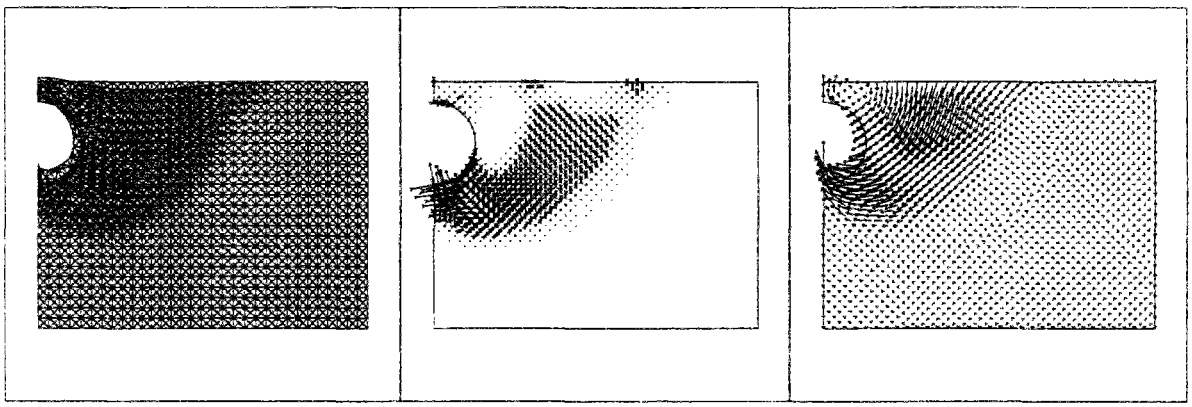


Figure 4-30. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 3, rupture par effondrement ($\gamma D/c_u$=7,7 C/D=0,25).

4.2.1.1.4 Comparaison avec des résultats expérimentaux

Nous avons pu également comparer les valeurs données par LIMI à quelques résultats expérimentaux. Nous nous sommes pour cela appuyés sur les résultats présentés par Davis et al. (1980), issus des travaux de thèse de Mair (1979) et Seneviratne (1979).

Ces essais ont été effectués pour une valeur du rapport $\gamma D/c_u$ égale à 2,6. Les bornes de la pression de soutènement σ_T à la rupture, rapportées à la cohésion non drainée, sont présentées sur la figure 4-31, ainsi que les résultats expérimentaux correspondants.

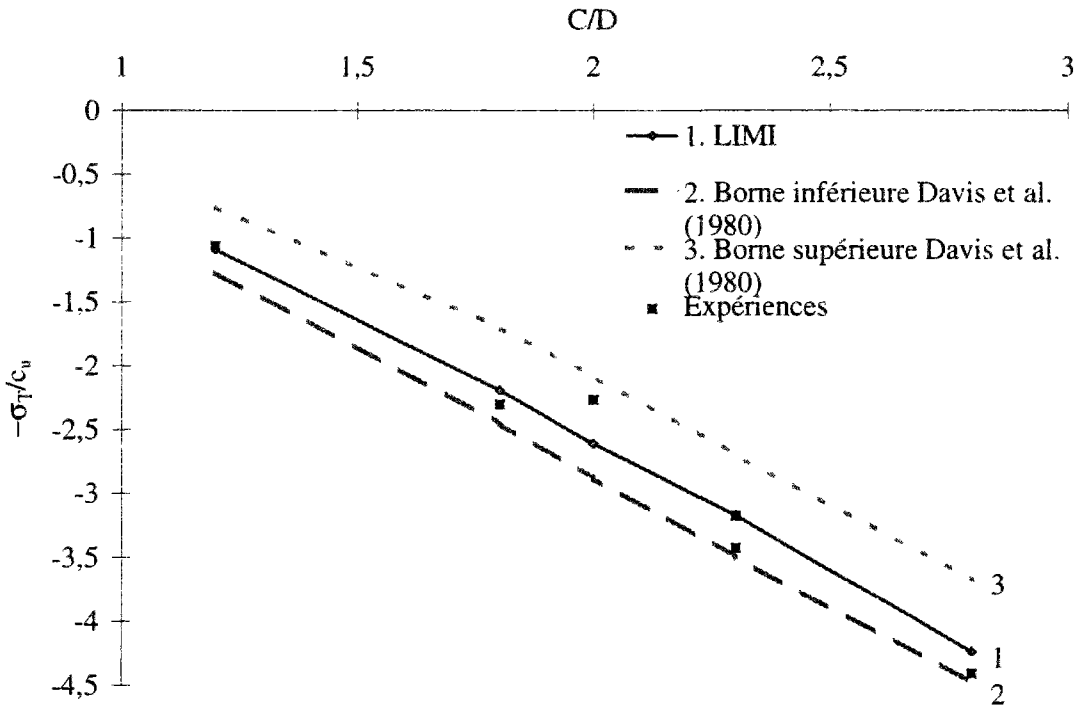


Figure 4-31. Comparaison entre résultats expérimentaux et théoriques dans le cas où $\gamma D/c_u$=2,6.

La concordance entre les résultats expérimentaux et les bornes obtenues est remarquable. Mis à part le résultat expérimental pour C/D=2, le module LIMI permet d'améliorer sensiblement la borne supérieure établie par Davis et al. (1980) et conduit à un encadrement plus précis des résultats expérimentaux. En ce qui concerne le résultat pour C/D=2, on pense que le fait qu'il soit placé hors de l'encadrement fourni par les bornes supérieures de LIMI doit être lié au déroulement de l'essai, probablement de moins bonne qualité car il se distancie nettement de l'allure générale des autres points.

4.2.1.2 Tunnel carré

Ce cas géométrique a été étudié par Assadi et Sloan (1991) et Sloan et Assadi (1991). Dans cette dernière étude, les auteurs se sont intéressés au cas d'un massif de sol ayant une cohésion croissante avec la profondeur. Nous nous sommes, dans un premier temps, limités au cas d'une cohésion constante. La description de la géométrie et des chargements a été présentée sur la figure 4-2.

Deux cas de chargement ont été envisagés (cas de chargement n° 1 et n° 3).

4.2.1.2.1 Cas de chargement n° 1 : pression uniforme appliquée à la surface du sol

Comme dans le cas du tunnel circulaire, nous nous sommes d'abord intéressés au cas d'un chargement du massif par une pression uniforme σ_s appliquée en surface. Ce cas de chargement est, comme on l'a vu précédemment, équivalent à la combinaison d'une pression uniformément distribuée en surface σ_s et d'une pression de soutènement σ_T, le paramètre de chargement étant la différence entre les deux pressions. Les résultats ont été exprimés en utilisant, comme pour le cas circulaire, le facteur de charge $N = \dfrac{\sigma_S - \sigma_T + \gamma(C + D/2)}{c_u}$.

Les résultats donnés par LIMI sont comparés avec ceux obtenus par Assadi et Sloan (1991) sur la figure 4-33. Les bornes inférieures d'Assadi et Sloan (1991) ont été déterminées à l'aide d'une méthode numérique.

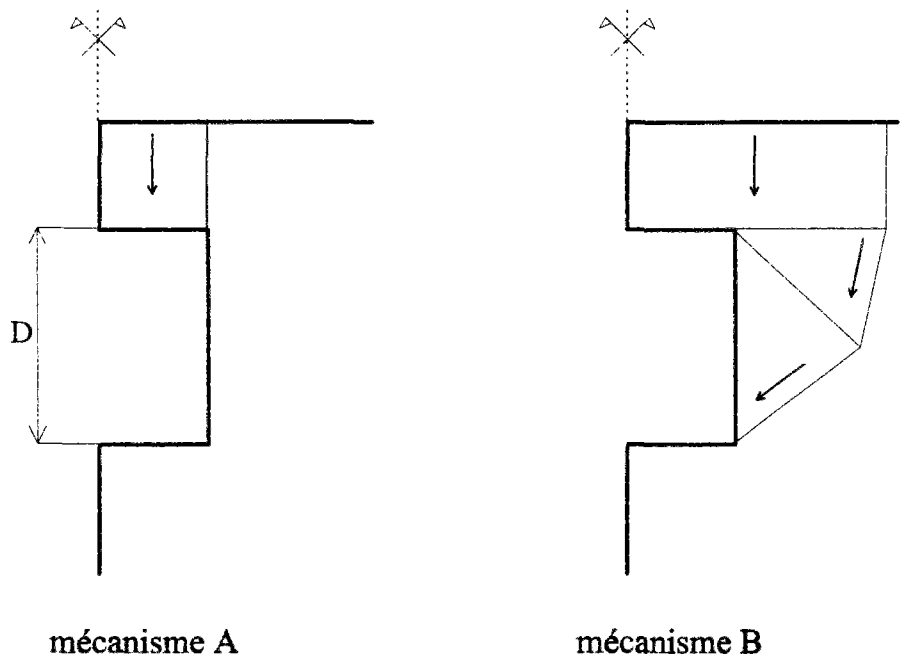


Figure 4-32. Mécanismes d'Assadi et Sloan (1991) pour le tunnel carré.

Les bornes supérieures ont été obtenues en utilisant le mécanisme A et le mécanisme B (figure4-32) respectivement pour C/D=0,5 et C/D=1, et pour C/D=2 et C/D=3 en utilisant un processus numérique de minimisation en programmation linéaire.

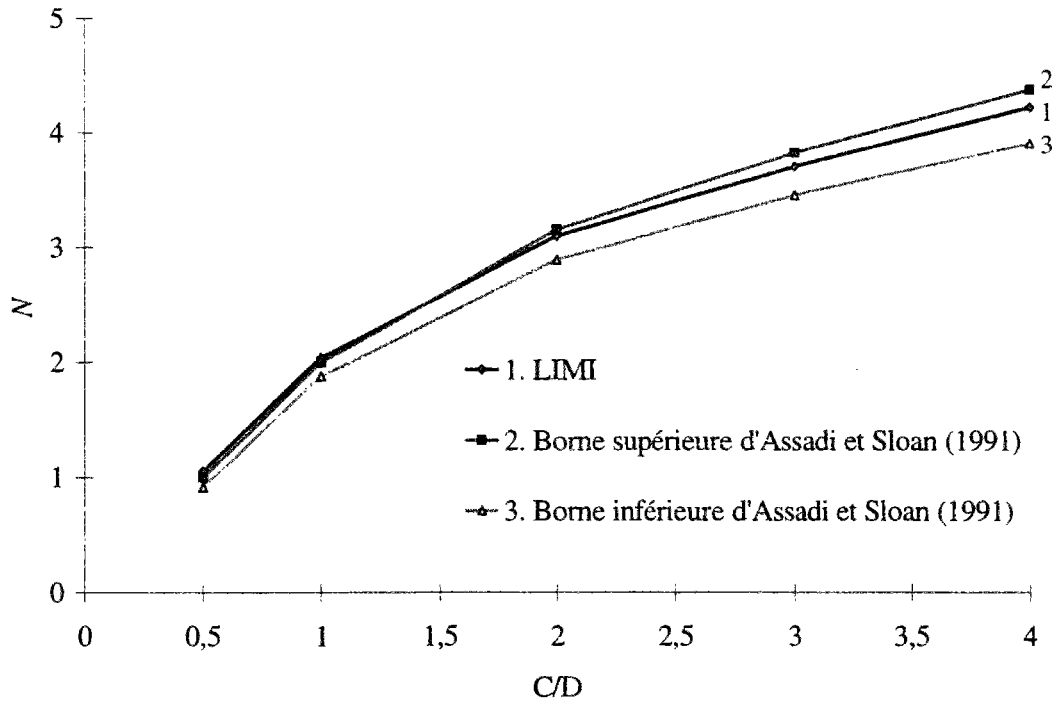


Figure 4-33. Comparaison entre les résultats de LIMI et ceux d'Assadi et Sloan (1991) pour le cas de chargement n°1.

Comme on peut le constater, les résultats de LIMI sont très légèrement supérieurs aux bornes supérieures déterminées par Assadi et Sloan (1991) pour C/D=0,5 et C/D=1. Ces dernières ont été obtenues à partir du mécanisme A. Le même type de mécanisme (figure 4-34) a été obtenu avec LIMI, mais un maillage plus fin dans la zone de concentration des vitesses de déformation serait nécessaire pour améliorer ce résultat. Pour le cas C/D=1, un mécanisme légèrement différent de celui utilisé par Assadi et Sloan (1991) a été mis en évidence, avec une zone en mouvement presque vertical descendant du dessus du toit du tunnel et une zone latérale convergeant vers le tunnel.

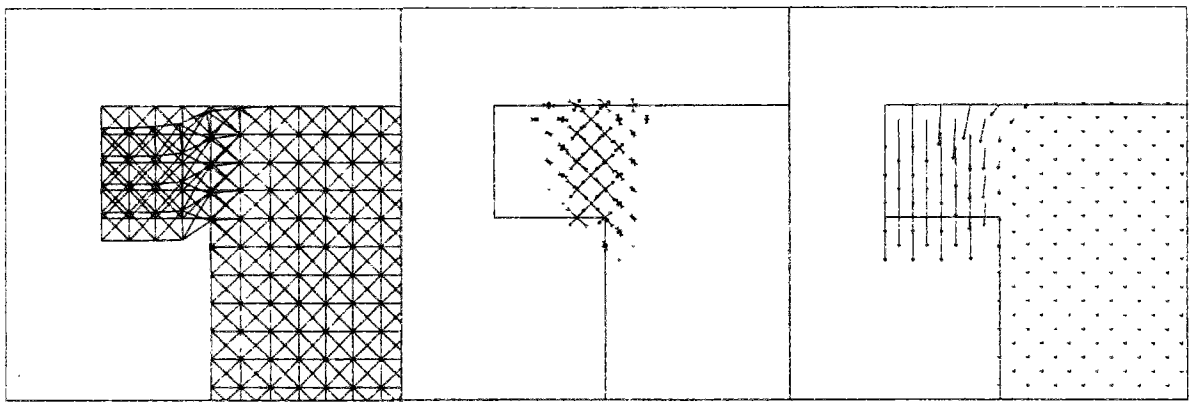


Figure 4-34. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 1 (C/D=0,5).

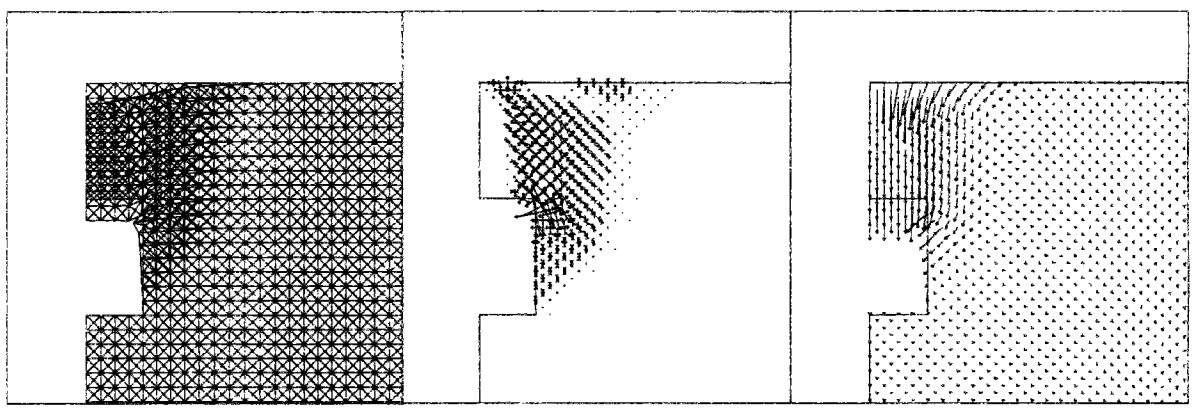


Figure 4-35. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 1 (C/D=1).

Pour les valeurs de C/D supérieures à 1, les bornes supérieures fournies par LIMI améliorent les solutions établis par Assadi et Sloan (1991). On constate aussi une nouvelle fois que les mécanismes par blocs se révèlent insuffisants pour représenter le phénomène de rupture pour les valeurs les plus élevées de C/D ; de plus, le programme de minimisation établi par Assadi et Sloan (1991) pour C/D=4 et qui permet de tenir compte de l'existence de certaines discontinuités de vitesses, s'avère moins performant que LIMI.

Contrairement aux résultats obtenus dans le cas du tunnel circulaire, pour lequel les champs de vitesses de déformation présentent une allure générale semblable pour C/D>1, on constate ici, pour des valeurs élevées du rapport C/D, l'apparition d'une concentration de vitesses de déformation qui se développe à partir du coin supérieur du tunnel jusqu'à son axe, selon un angle d'environ 45 degrés. Cette situation conduit naturellement à des mécanismes

complexes et difficiles à prendre en compte avec des schémas de rupture faisant intervenir uniquement des blocs rigides.

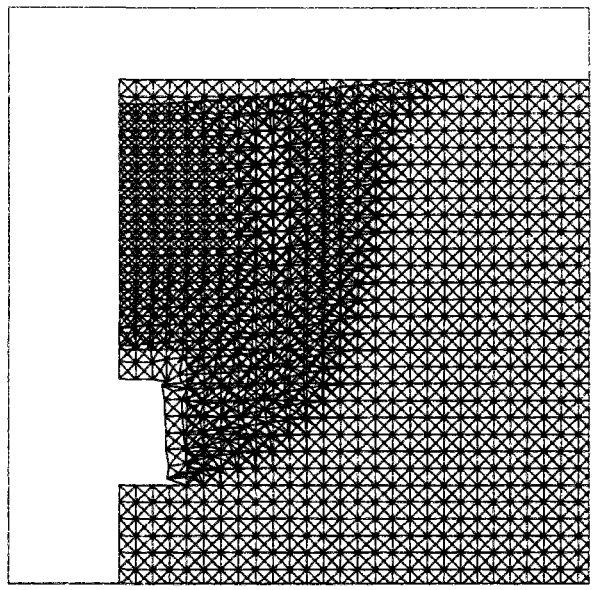


Figure 4-36. Maillage déformé pour le cas de chargement n° 1 (C/D=2).

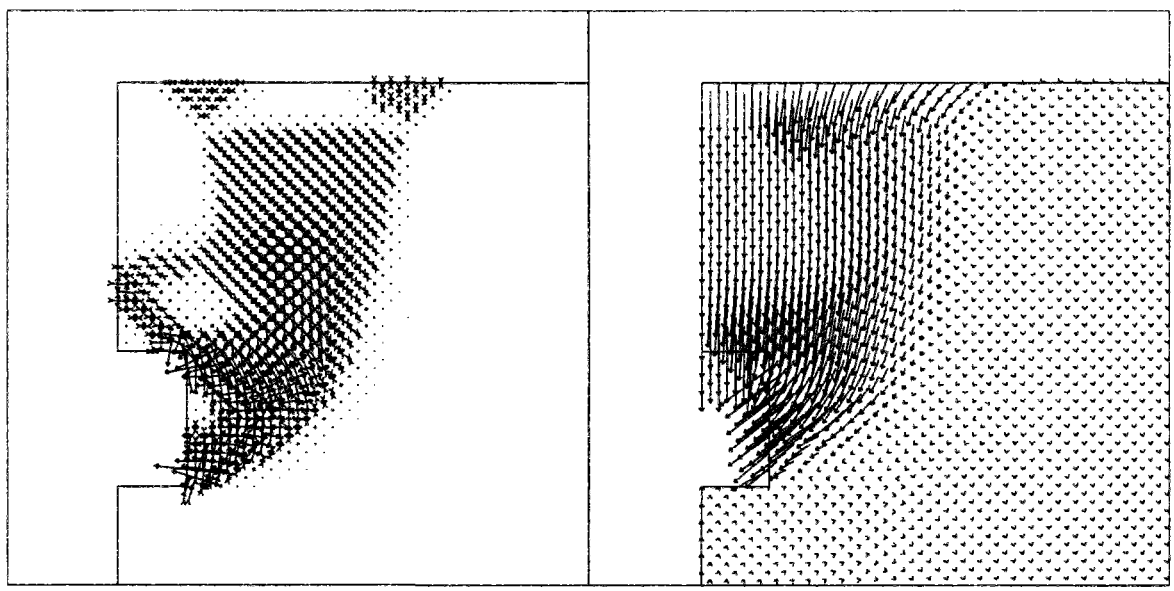


Figure 4-37. Vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 1 (C/D=2).

4.2.1.2.2 Cas de chargement n° 3 : poids volumique et pression de soutènement intérieure au tunnel

On s'est intéressé dans un deuxième temps à l'estimation de la pression de soutènement σ_T à exercer dans un tunnel, dans le cas d'un massif soumis à son poids volumique propre γ et

caractérisé par sa cohésion non drainée. On s'est limité à l'étude du cas $\gamma D/c_u = 3$, qui correspond à l'une des configurations traitées par Assadi et Sloan (1991). La figure 4-38 compare les résultats obtenus pour ce cas par LIMI et par Assadi et Sloan (1991).

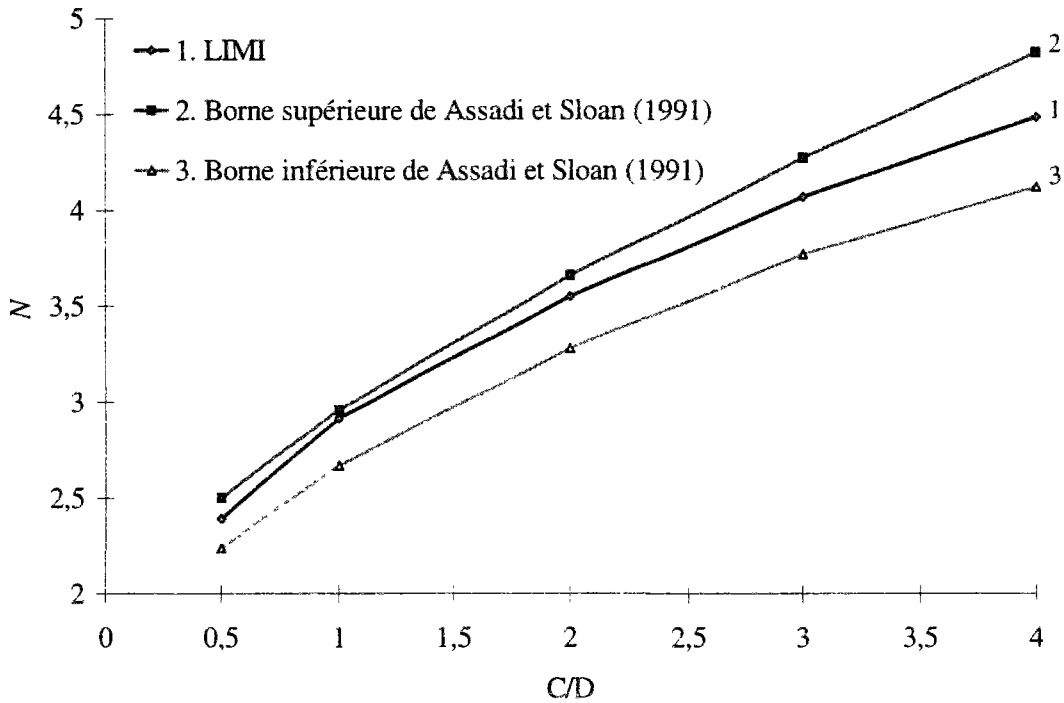


Figure 4-38. Comparaison entre les résultats d'Assadi et Sloan pour le cas du tunnel carré ($\gamma D/c_u=3$).

Les résultats présentés sur la figure 4-38 permettent de vérifier que LIMI conduit dans ce cas aussi à une amélioration de l'encadrement de la valeur du facteur de charge à la rupture. Cette amélioration est, comme auparavant, plus importante pour les valeurs plus fortes du rapport C/D.

Les mécanismes sont également sensibles à la valeur du rapport C/D.

Pour les plus petites valeurs du rapport C/D, le mécanisme obtenu par LIMI se compose d'un bloc de sol en mouvement descendant au-dessus du tunnel, accompagné d'une convergence de la paroi verticale de l'ouvrage (figures 4-39 et 4-40). Le mécanisme obtenu pour C/D = 1 s'apparente à un mécanisme par blocs rigides avec un bloc descendant en partie supérieure et un bloc en glissement selon une ligne passant par le pied de la paroi verticale, les deux blocs étant réunis par une bande de concentration des vitesses de déformation horizontale située à la hauteur du tunnel (figure 4-40).

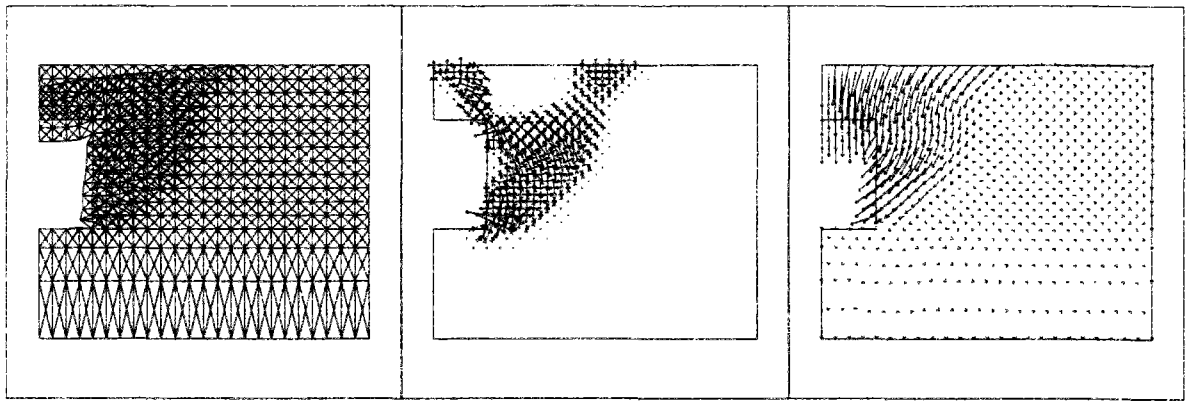


Figure 4-39. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 1 (C/D=0,5).

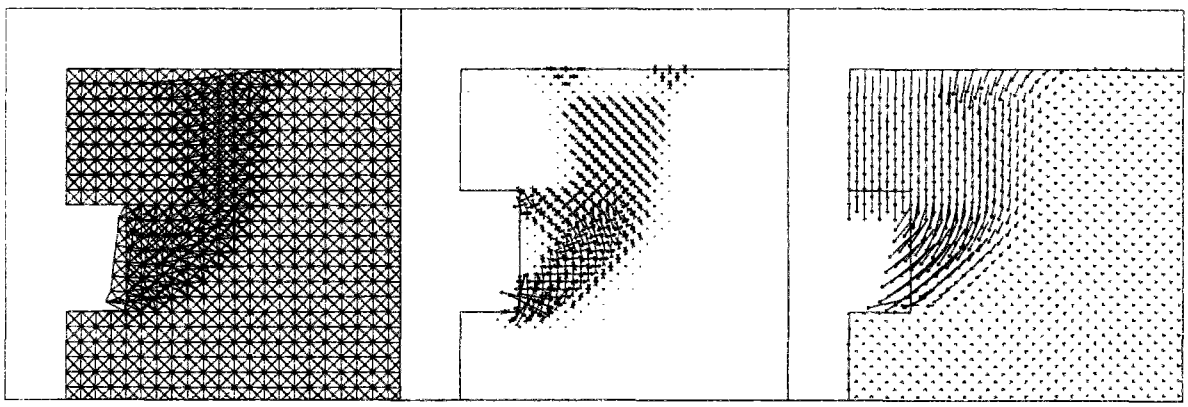


Figure 4-40. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 1 (C/D=1).

Pour C/D=4, on obtient un mécanisme plus complexe, avec une propagation plus forte du mouvement dans le massif, y compris en dessous de l'ouvrage.

Le soulèvement du radier de l'ouvrage apparaît clairement sur la figure 4-41, qui montre sous le tunnel une zone triangulaire pratiquement rigide en soulèvement. L'amplitude de ce soulèvement n'est pas négligeable car les vitesses de déplacement en dessous de l'ouvrage sont du même ordre de grandeur que celles obtenues en clé.

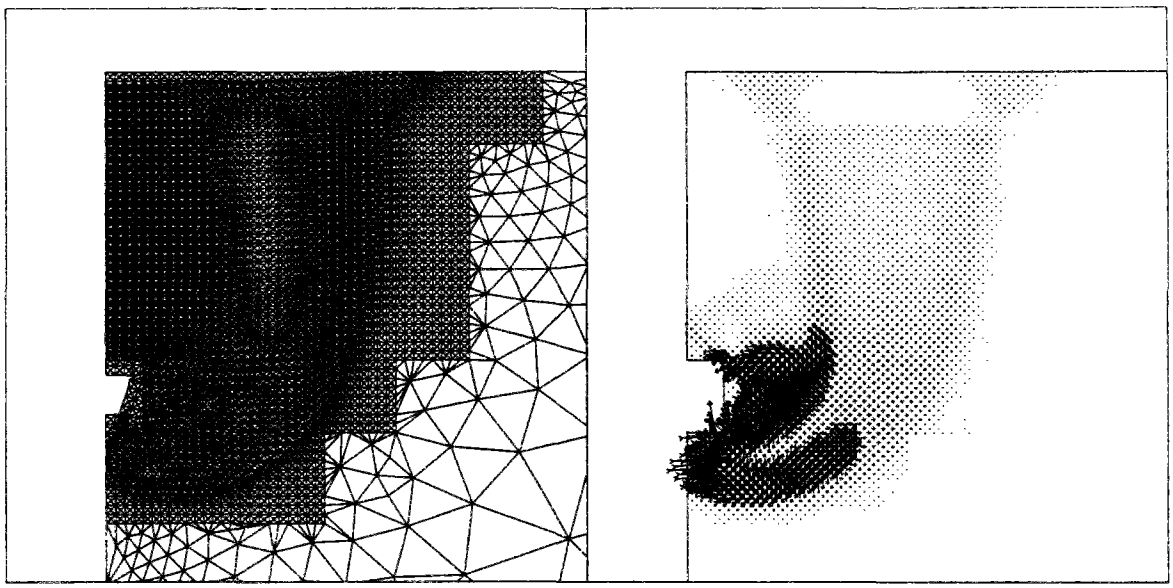


Figure 4-41. Maillage déformé et vitesses de déformation pour le cas de chargement n° 3 (C/D=4).

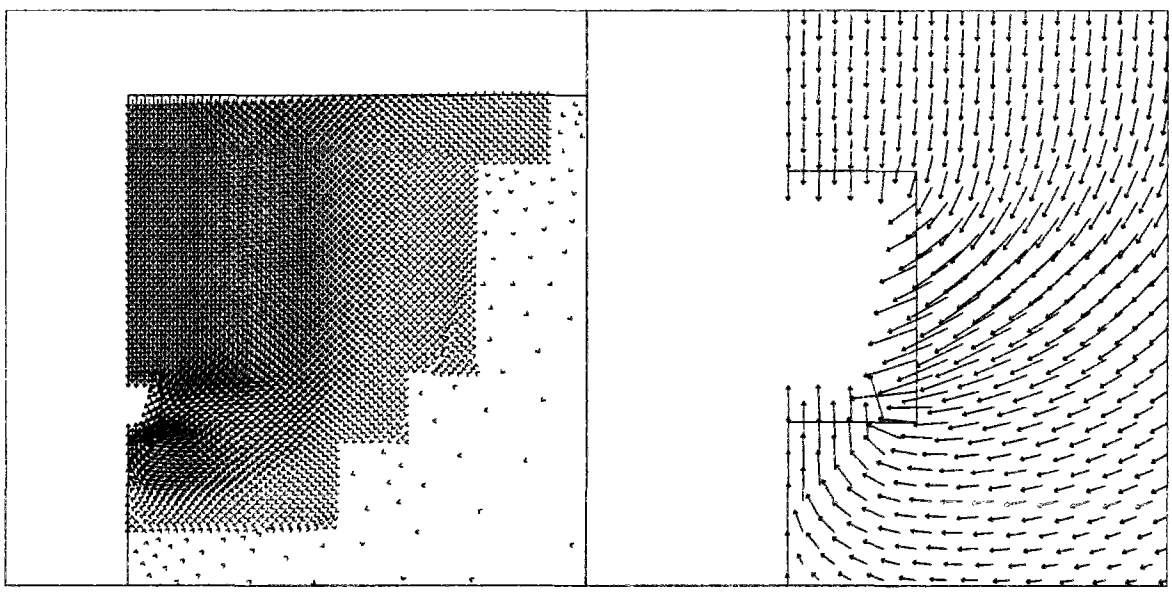


Figure 4-42. Vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 3. C/D=4.

On peut remarquer que, pour le chargement n° 1, l'amélioration des bornes supérieures obtenues par LIMI, par rapport à celles d'Assadi et Sloan (1991), n'est pas très significative, au contraire du cas de chargement n° 3. Ce résultat est probablement lié au choix soit des mécanismes, soit des maillages introduits par Assadi et Sloan (1991), qui ne permettaient pas de déplacements sous le niveau inférieur de l'ouvrage, ce qui s'avère manifestement insuffisant pour l'analyse dans ce cas de chargement n° 3.

4.2.1.3 Ouverture de trappe

Cette configuration géométrique a été décrite sur la figure 4-3. Nous avons fait l'hypothèse de l'ouverture d'une trappe suffisamment souple pour pouvoir être remplacée par une pression verticale constante σ_T. Ce cas de chargement s'assimile dans ces conditions au cas n° 3, le paramètre N étant défini comme $N = \frac{\sigma_S - \sigma_T + \gamma C}{c_u}$.

Ce cas a été traité par Davis (1968), Gunn (1980) et Sloan et al. (1990). La figure 4-43 reprend les résultats présentés dans cette dernière étude et les compare avec ceux obtenus au moyen de LIMI.

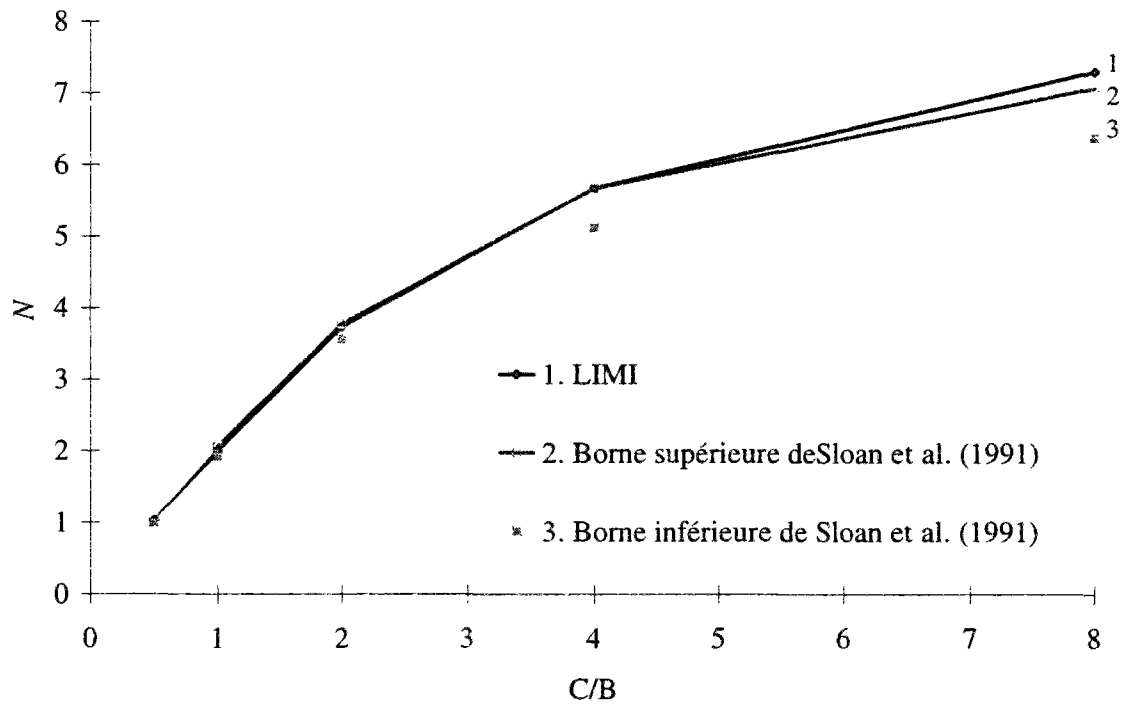


Figure 4-43. Comparaison entre les résultats de LIMI et ceux de Sloan et al. pour l'ouverture d'une trappe ($\gamma B/c_u$=3)

Les bornes supérieures de Sloan et al. (1991) coïncident pratiquement avec celles fournies par LIMI pour les valeurs de C/B égales ou inférieures à 4. Pour les valeurs de C/B<2, on peut même parler de valeur exacte de la charge limite dans la mesure où l'écart entre bornes supérieures et inférieures est négligeable.

Les mécanismes dépendent comme toujours du rapport entre la profondeur et les dimensions de l'ouvrage.

Pour C/B=0,5 (figures 4-44 et 4-45) le mécanisme est constitué par la descente pratiquement verticale de toute la zone sus-jacente à l'ouverture de la trappe : les vitesses de déplacement dans cette zone ont pratiquement toutes la même allure et les vitesses de déformation se concentrent dans une zone pratiquement verticale située dans le prolongement de la limite latérale de l'ouverture.

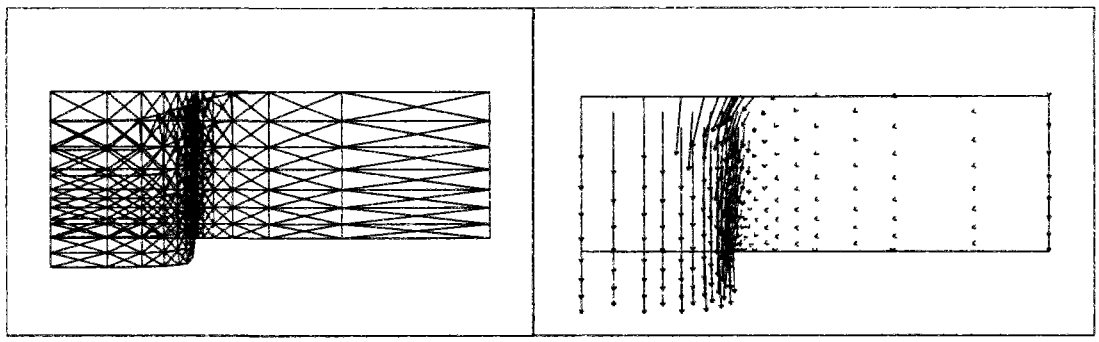


Figure 4-44. Maillage déformé et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 3 ($\gamma B/c_u$=3, C/B=0,5).

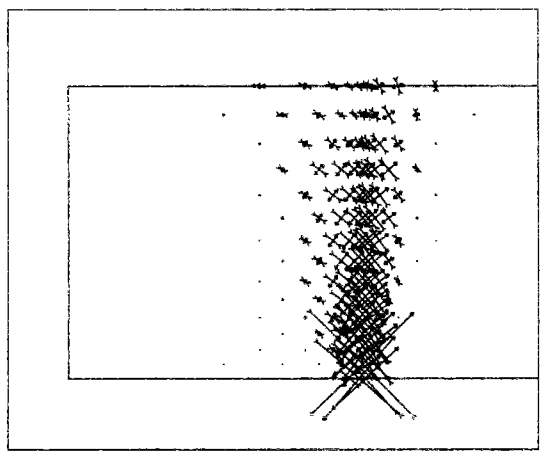


Figure 4-45. Vitesses de déformation pour le cas de chargement n° 3 ($\gamma B/c_u$=3, C/B=0,5).

Pour des profondeurs plus élevées, le mécanisme précédent disparaît pour laisser la place à un mode de rupture plus compliqué. Les figures 4-46 et 4-47 représentent les résultats pour le cas C/B=2. Deux blocs presque rigides peuvent être identifiés : le premier de forme triangulaire, sur l'ouverture de trappe et le deuxième au-dessus de la trappe, qui s'étend jusqu'à la surface. Entre ces deux blocs, on note deux bandes de concentration de vitesses de déformation. Ces zones coïncident avec les lieux de changement de direction des vitesses de déplacement. Ce mécanisme ressemble à celui présenté par Gunn (1980), représenté sur la figure 4-48.

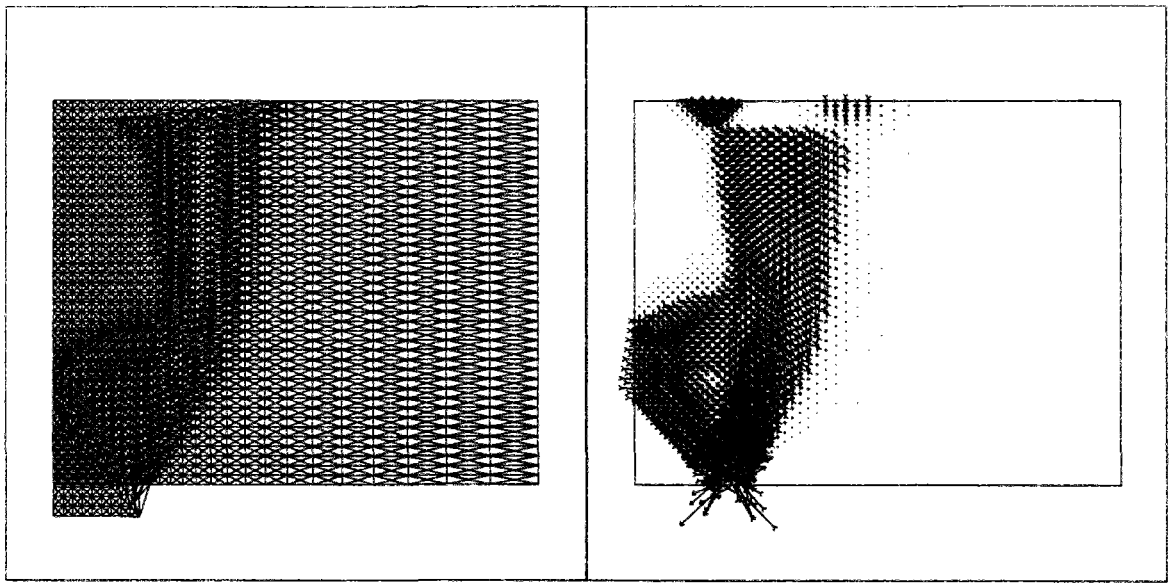


Figure 4-46. Maillage déformé et vitesses de déformation pour le cas de chargement n°3

($\gamma B/c_u$=3, C/B=2)

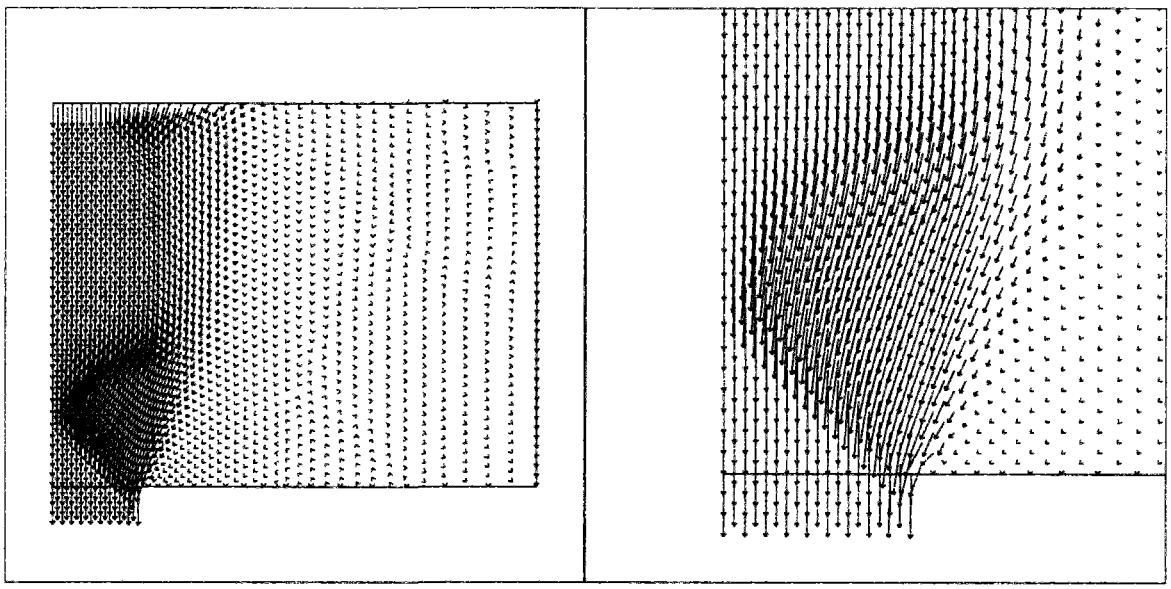


Figure 4-47. Vitesses de déplacement pour le cas de chargement n°3

($\gamma B/c_u$=3, C/B=2).

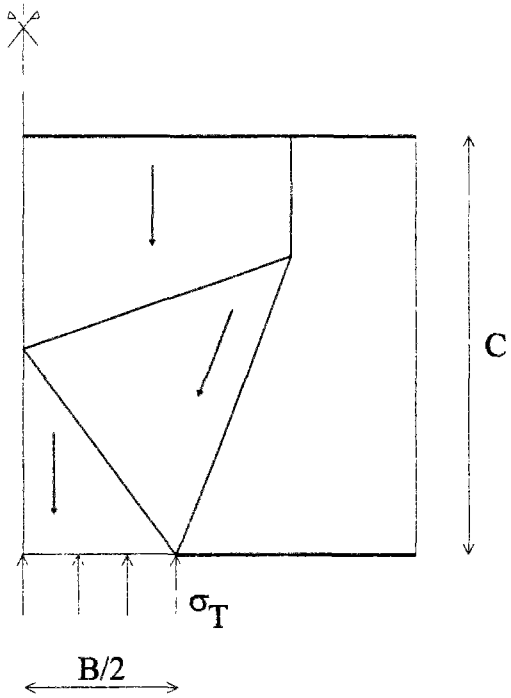


Figure 4-48. Mécanisme proposé par Gunn (1980) pour le cas de l'ouverture de trappe.

4.2.2 Critère de Tresca tronqué en traction

Le problème du défaut de résistance à la traction est bien connu en mécanique des sols. Ce phénomène est dans la pratique pris en compte en introduisant des systèmes de fissures dans les massifs de sol (voir par exemple Terzaghi, 1951 et Taylor, 1948 pour le cas des calculs de stabilité des talus).

Dans le cas des tunnels, Leca et Dormieux (1992), en utilisant la méthode du calcul à la rupture, ont montré que la borne supérieure relative aux conditions de stabilité locale pouvait être considérablement améliorée par l'introduction d'un critère de Tresca sans résistance à la traction. Dans notre étude, nous avons cherché à vérifier et quantifier ce résultat dans le cas du tunnel circulaire en section courante. Notre étude a été restreinte au cas de chargement n° 2.

La figure 4-49 donne une comparaison entre les résultats obtenus avec le critère de Tresca tronqué ou non en traction. La troncature utilisée était telle que $T/c_u=10^{-5}$, c'est à dire suffisamment petite pour qu'on puisse considérer la résistance à la traction comme négligeable.

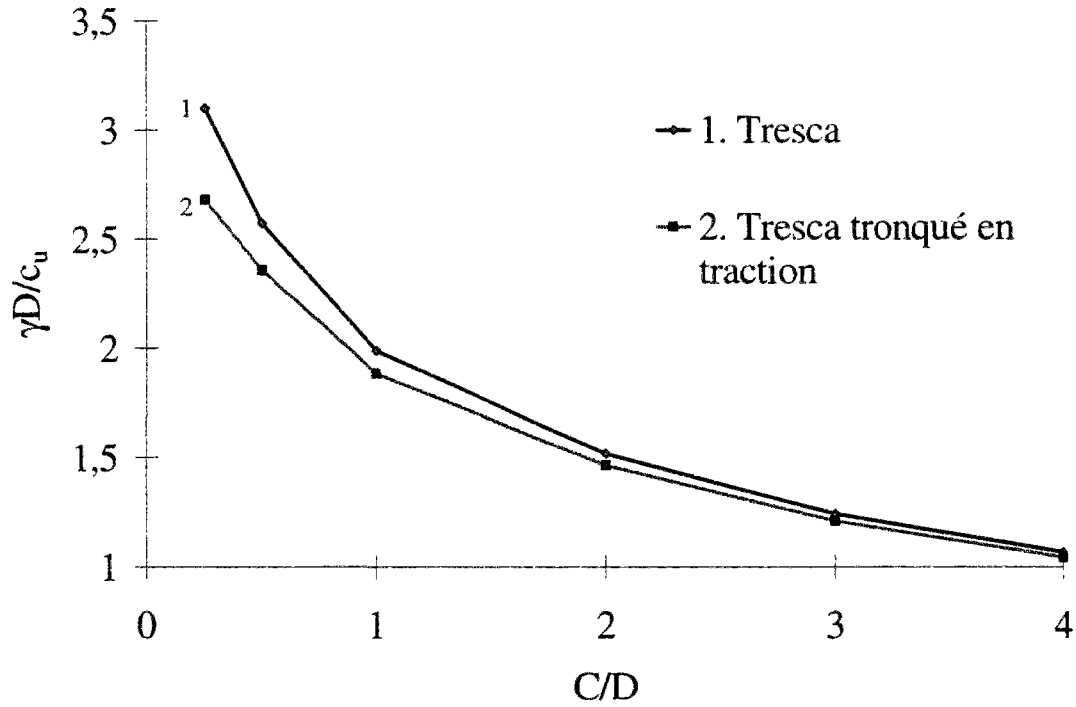


Figure 4-49. Comparaison pour le cas de chargement n° 2 entre les résultats obtenus pour le critère de Tresca et pour le critère de Tresca tronqué en traction.

Comme on peut le constater, l'écart entre les bornes fournies par les deux critères diminue clairement à mesure que le paramètre C/D croît, et devient pratiquement inexistant pour les valeurs les plus élevées de C/D.

Ce résultat est directement lié à la nature des mécanismes obtenus. La figure 4-50 présente les résultats correspondant à C/D=0,25. Par rapport au mécanisme obtenu avec un critère de Tresca (figure 4-12), la zone de déformation triangulaire en surface la plus éloignée de l'axe du tunnel a été transformée en une zone en traction. Les vitesses de déplacement dans cette zone convergent vers l'axe de l'ouvrage, ce qui traduit probablement une fissuration du terrain à ce niveau. Cette zone représente une partie non négligeable de la masse de sol intéressée par le mécanisme, ce qui explique son influence sur la borne supérieure obtenue.

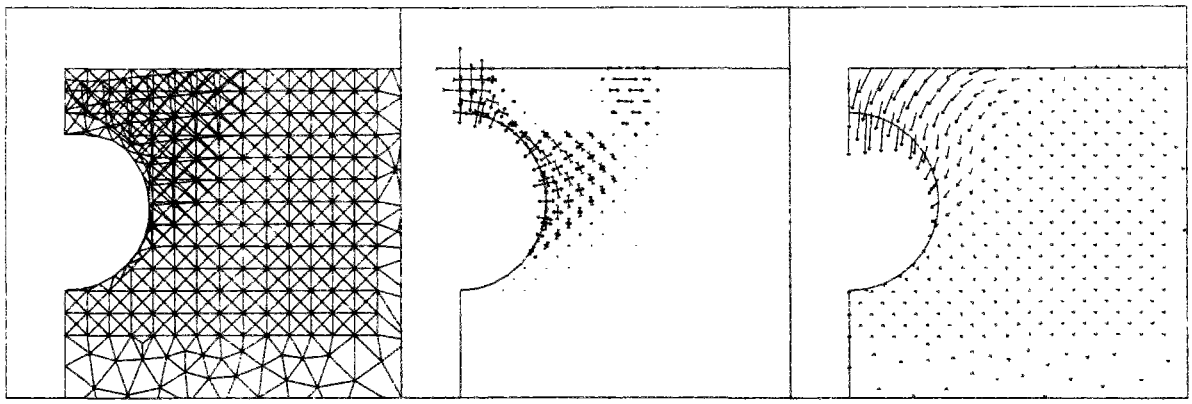


Figure 4-50. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n°2 (C/D=0,25. Critère de Tresca tronqué en traction).

À mesure que C/D augmente, la zone en traction en surface est toujours présente (figures 4-51 et 4-52), mais son importance dans l'ensemble du maillage tend à se réduire.

Au-delà de la zone en traction déjà évoquée, les valeurs des vitesses de déformation en traction dépassent les valeurs des vitesses de déformation en compression dans certaines zones situées en particulier en clé, mais ce dépassement est à peine perceptible. Par conséquent, avec l'augmentation de la profondeur, l'importance relative de la zone en traction et, bien sûr, son effet sur la puissance totale dissipée diminuent, conduisant ainsi à des résultats proches des bornes fournies par le critère de Tresca. On peut donc conclure que, dans un tunnel circulaire en section courante, à partir d'une certaine profondeur, de l'ordre de C/D=1, les zones en traction dans le massif sont d'importance réduite et ne jouent qu'un rôle minimal dans la stabilité de l'ouvrage.

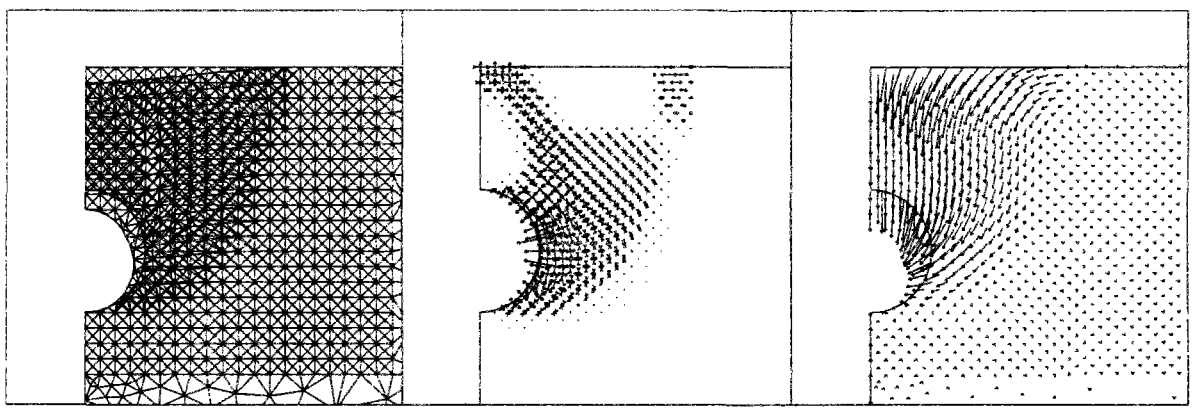


Figure 4-51. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n°2 (C/D=1. Critère de Tresca tronqué en traction).

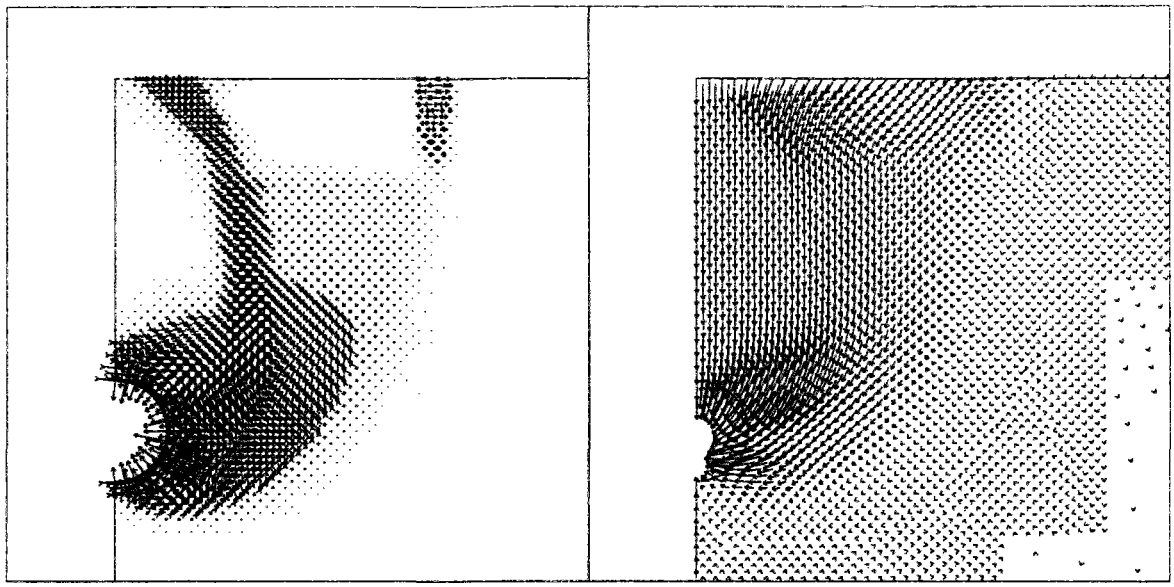


Figure 4-52. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n°2. C/D=3 (Critère de Tresca tronqué en traction).

4.2.3 Critère de Mohr-Coulomb

Le comportement intrinsèque des sols (sables ou argiles saturées en conditions drainées) est généralement caractérisé par un critère de rupture de Mohr-Coulomb, c'est à dire une cohésion c et un angle de frottement φ. Deux types de calculs ont été réalisés avec ce critère de rupture, pour un tunnel circulaire et pour l'ouverture d'une trappe. Pour le tunnel, les études antérieures permettant des comparaisons avaient été effectuées pour un matériau pulvérulent ; ceci nous a conduit à choisir une faible cohésion (c=0,0001 kPa) permettant de satisfaire la condition théorique selon laquelle l'état de contraintes nul doit être un point intérieur au domaine de résistance du terrain. Les comparaisons ont été effectuées avec des résultats théoriques et expérimentaux. Dans le cas de l'ouverture de trappe, où nous avons comparé nos résultats à ceux donnés par Terzaghi (1951), les calculs ont été effectués avec une cohésion égale au centième du produit du poids volumique du sol et de la largeur de l'ouverture.

4.2.3.1 Tunnel circulaire

Nos calculs ont été comparés aux résultats d'Atkinson et Potts (1977). Une première comparaison (présentée sur la figure 4-53) a été réalisée pour le cas du chargement constitué par une pression de surface σ_S et une pression de soutènement σ_T et pour un rapport C/D égal

à 0,5, la cohésion étant prise égale à 0,0001 kPa. Un angle de frottement de 50 degrés a été utilisé, comme indiqué par Atkinson et Potts (1977). Des descriptions des essais effectués par Atkinson et Potts (1977) ont été aussi publiées par Atkinson et al. (1975) et Atkinson et al. (1977).

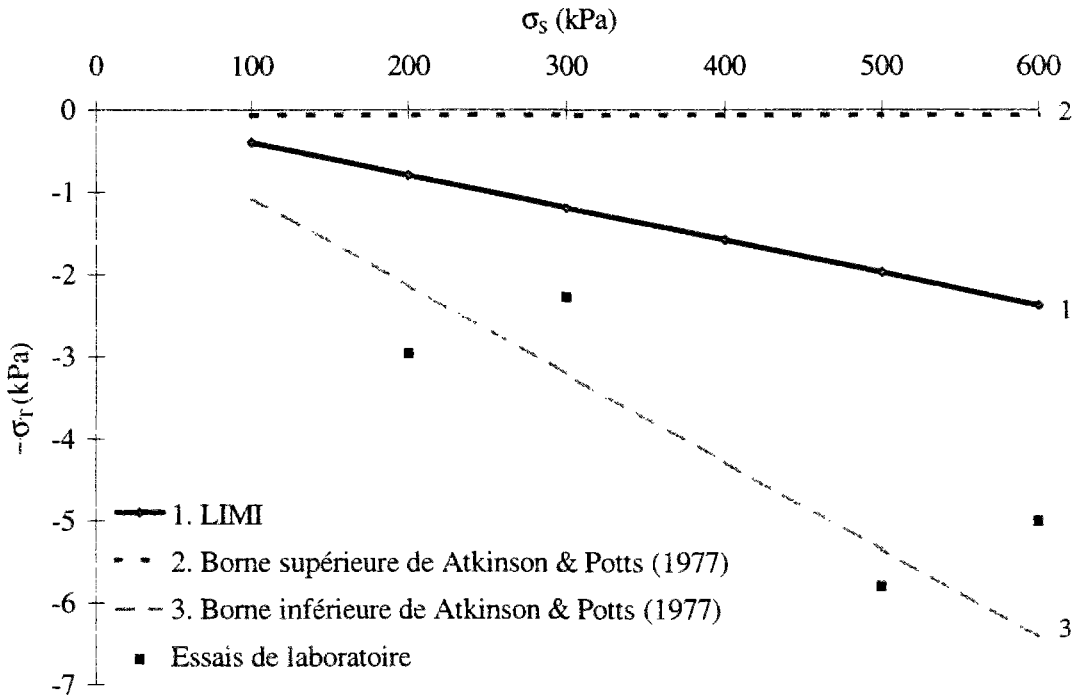


Figure 4-53. Comparaison entre les résultats de LIMI et ceux présentés par Atkinson et Potts (1977).

Les résultats obtenus avec le module LIMI apportent une amélioration importante par rapport à ceux d'Atkinson et Potts (1977), mais restent éloignés des valeurs expérimentales. Nous avons donc décidé de refaire les calculs précédents en tenant compte également du poids volumique du sol. Comme on ne disposait pas du poids volumique du sable utilisé dans les essais, on a estimé ce paramètre en faisant l'hypothèse d'un poids volumique des particules de 27 kN/m^3 et en utilisant la valeur de l'indice des vides (0,52) donnée par Atkinson et Potts (1977). Le résultat de ces calculs est présenté sur la figure 4-54. Comme on peut le vérifier, le résultat donné par LIMI est dans ce cas nettement plus proche des résultats d'essais. De plus, ces derniers présentent une allure irrégulière, ce qui est probablement le signe de difficultés expérimentales ou d'imprécisions de mesures. Ce résultat montre que l'effet de la pesanteur ne peut être négligé pour un tunnel peu profond.

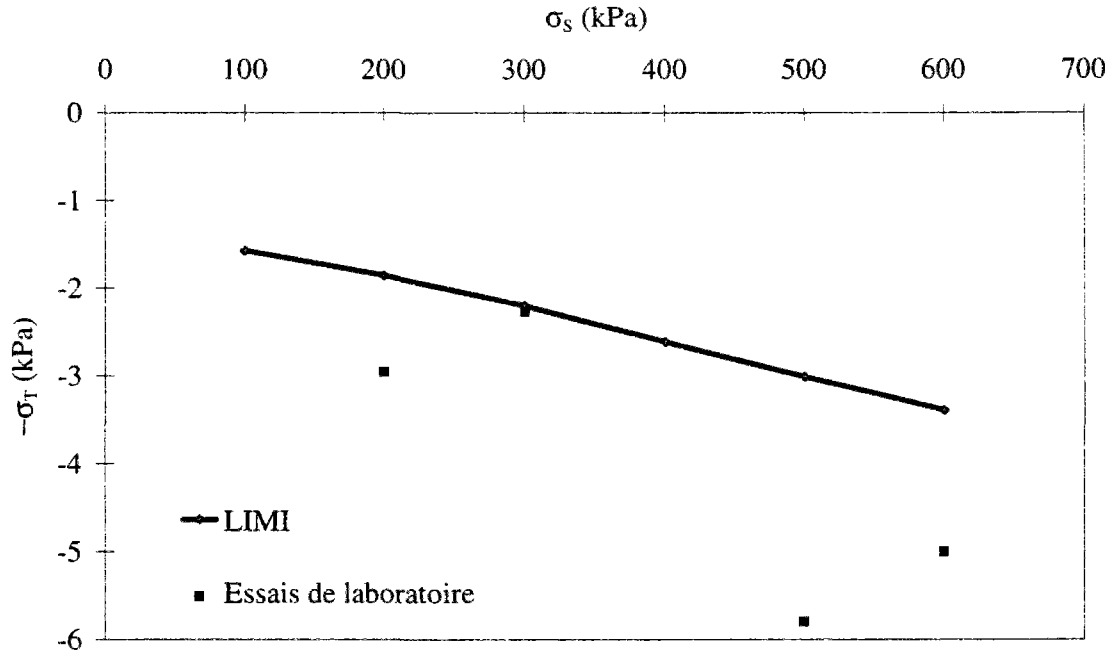


Figure 4-54. Comparaison entre les résultats de LIMI obtenu pour le chargement n° 3 et des résultats expérimentaux présentés par Atkinson et Potts (1977).

Les mécanismes obtenus diffèrent sensiblement de ceux qui avaient été calculés pour un critère de Tresca. La figure 4-55 présente le mécanisme obtenu pour un cas de chargement constitué par le poids volumique du sol γ, une pression σ_S de 600 kPa et une pression de soutènement σ_T. Comme on peut le constater, les déformations sont concentrées à proximité du tunnel et ne se propagent pas en surface. Toutefois, la non visualisation des mouvements de surface résulte d'un effet d'échelle et l'effet constaté en termes de pression limite résulte du rapport important entre les pressions σ_S et σ_T , qui compense en partie le faible niveau des vitesses de déformation en surface.

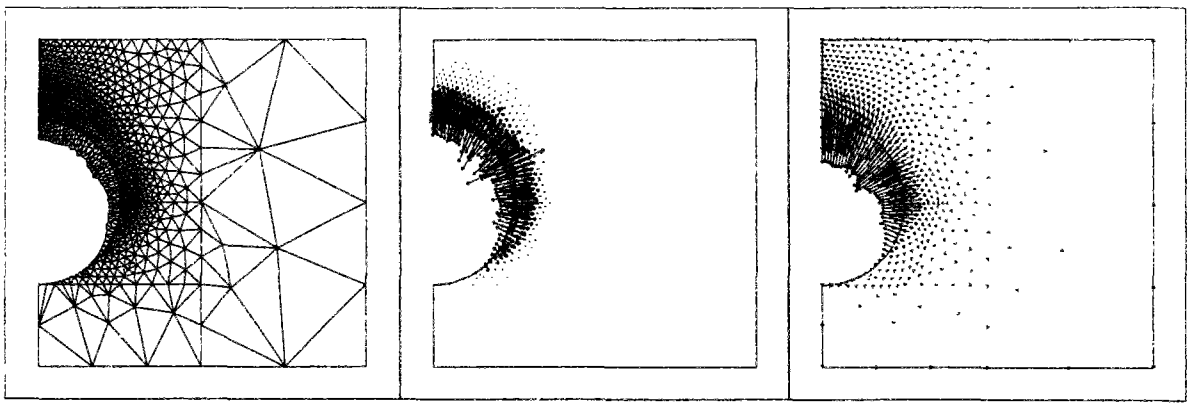


Figure 4-55. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n° 3. (σ_S=600 kPa).

La figure 4-56 compare à nouveau les résultats de LIMI avec ceux d'Atkinson et Potts (1977), mais cette fois en fonction de C/D. La pression en surface a été prise égale à zéro dans cette comparaison et le chargement est par conséquent constitué par le poids volumique γ et par la pression de soutènement σ_T. On note que l'axe de la pression de soutènement a été inversé : en réalité, dans le cas d'une rupture par effondrement, c'est la charge $-\sigma_T$ qui est responsable de la déstabilisation et non la charge σ_T.

On constate que, pour la valeur de l'angle de frottement utilisé (φ = 50 degrés), la valeur du rapport C/D n'a aucune influence sur les résultats théoriques ou numériques, ce qui traduit la mobilisation d'effets de voûte, y compris pour des valeurs très faibles de C/D, compte tenu de la valeur de l'angle de frottement.

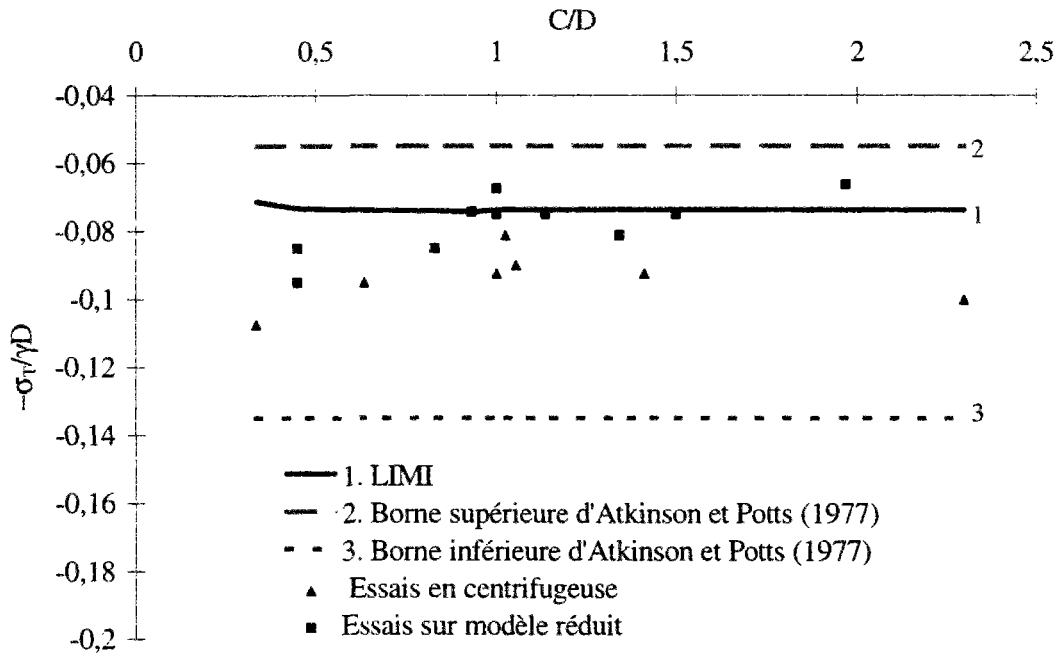


Figure 4-56. Comparaison entre les résultats de LIMI et ceux présentés en Atkinson et Potts (1977).

4.2.3.2 Ouverture de trappe

L'étude de ce cas géométrique était destinée à comparer nos résultats à ceux établis par Terzaghi (1951).

Plusieurs calculs ont été effectués, en faisant varier le paramètre C/B entre 0,5 et 2 et l'angle de frottement entre 10 degrés et 45 degrés, la cohésion étant prise égale à un centième du produit entre le poids volumique et la largeur de l'ouverture. Les résultats sont représentés sur la figure 4-57, en traits pleins pour LIMI et en traits pointillés pour les solutions proposées par Terzaghi (1951), dans le cas d'un rapport entre les contraintes horizontale et verticale égal à 1. On peut remarquer que la différence entre les résultats de LIMI et de Terzaghi (1951) diminue à mesure que l'angle de frottement augmente et que les bornes supérieures données par LIMI tendent à devenir indépendantes de la géométrie pour des angles de frottement élevés.

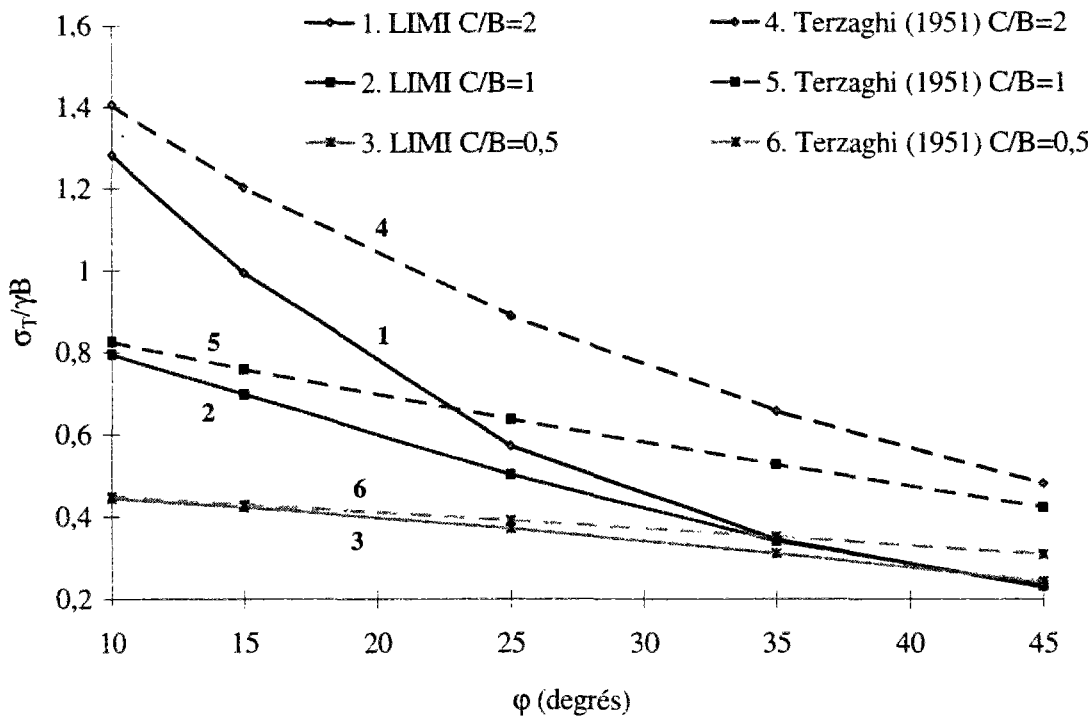


Figure 4-57. Comparaison entre les résultats de LIMI et ceux de Terzaghi (1951). (c=Bγ/100).

Ces phénomènes peuvent être expliqués par l'analyse des mécanismes obtenus. La figure 4-58 donne le mécanisme obtenu pour C/B=1 et un angle de frottement de 15 degrés. Le mécanisme mis en évidence, comportant une zone de cisaillement quasi verticale au-dessus du bord de l'ouverture, rappelle les lignes de rupture (verticales) proposées par Terzaghi (1951). Pour les petits angles de frottement, il y a une prépondérance de la cohésion sur le frottement dans la résistance au cisaillement et la méthode de Terzaghi (1951) s'approche d'un calcul de mécanisme par bloc, commenté plus loin. A mesure que l'angle de frottement croît, le mécanisme tend vers la géométrie présentée sur la figure 4-59, qui diffère complètement de la configuration de Terzaghi (1951). Cette évolution explique aussi la jonction des courbes de LIMI pour les différents cas de C/B : pour les angles de frottement les plus élevés, le mécanisme n'atteint pas la surface et la puissance des efforts extérieurs se réduit à celle du poids volumique mis en action dans la zone triangulaire délimitée par la ligne de rupture, qui est par conséquent indépendante du rapport C/B.

Le dernier mécanisme, qui s'apparente à un mécanisme de blocs rigides, confirme que la minimisation exécutée par LIMI s'opère uniquement sur l'ensemble des vitesses plastiquement admissibles. En effet, si l'on assimile la bande de cisaillement obtenue,

d'épaisseur réduite, à une zone de changement très rapide des vitesses de déplacement, les vitesses de déplacement du bloc en mouvement forment bien un angle de 45 degrés avec la ligne de rupture, qui correspond à l'angle minimum donnant des puissances finies dans ce cas (φ = 45 degrés).

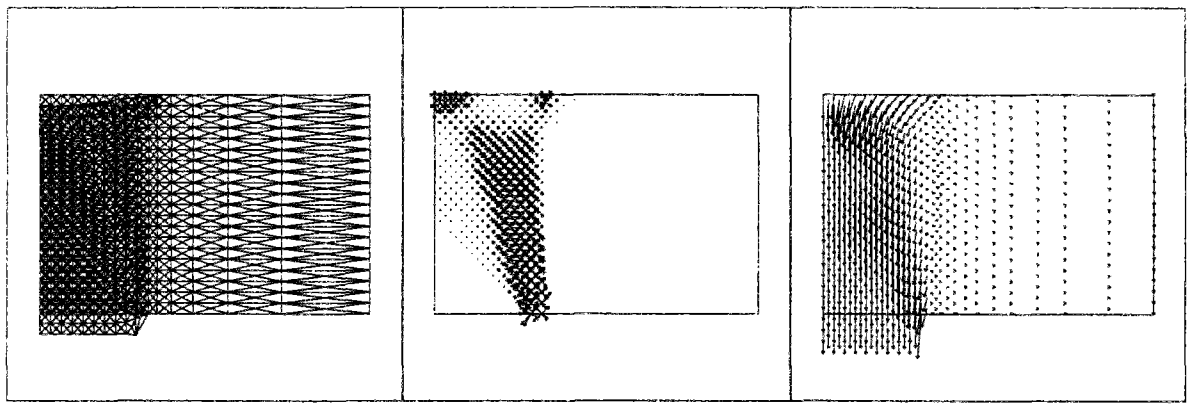


Figure 4-58. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement. (φ = 15 degrés).

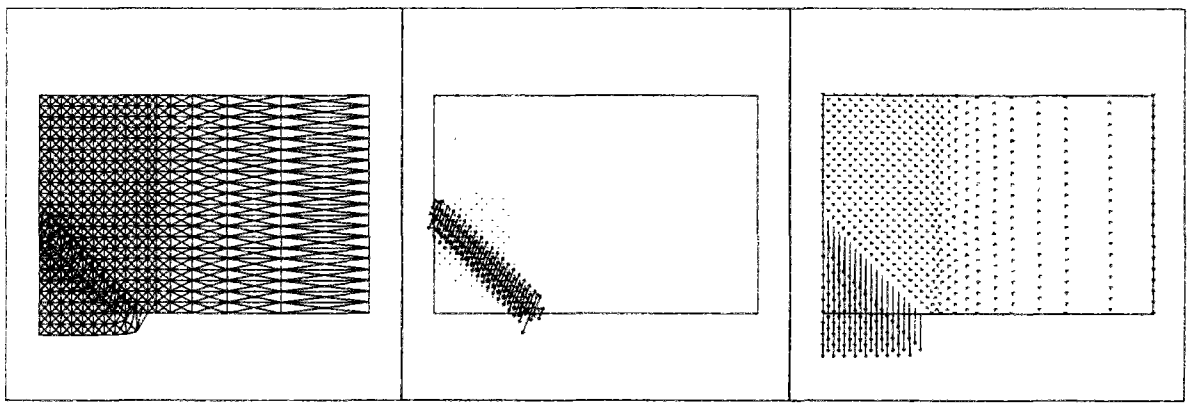


Figure 4-59. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement. (φ = 45 degrés).

La création de bandes de cisaillement partant des bords de l'ouvrage et se rejoignant dans le plan médian est bien vérifiée expérimentalement dans une première phase de la rupture (Vardoulakis et al., 1981). Ces considérations nous ont amené à imaginer un mécanisme de blocs rigides pour ce cas géométrique, similaire à celui d'Atkinson et Potts (1977) pour les tunnels circulaires. Ce mécanisme est décrit sur la figure 4-60. Il est clair que, dans le cas où les surfaces de glissement atteignent la surface, la vitesse du bloc doit faire toujours un angle φ avec ces surfaces.

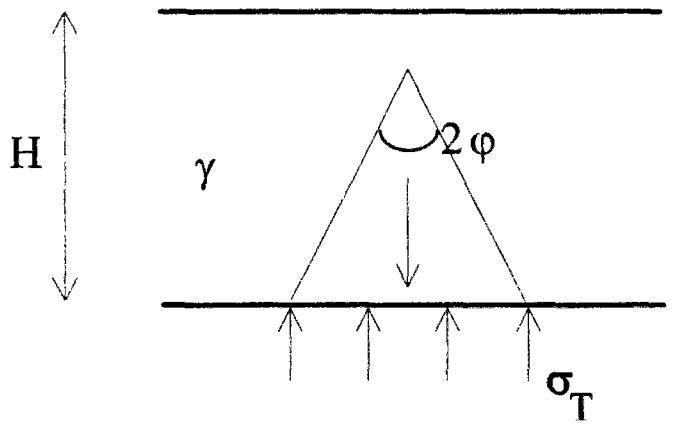


Figure 4-60. Mécanisme de bloc rigide pour l'ouverture de trappe.

La comparaison entre les résultats de ce mécanisme et ceux de LIMI est résumée sur la figure 4-61. Elle permet de vérifier que les résultats de LIMI suivent ceux du mécanisme par bloc. En particulier pour C/B = 0,5 et 1, l'écart entre les deux courbes est pratiquement inexistant. Pour C/B = 2, les résultats de LIMI apportent une légère amélioration de la borne supérieure obtenue à partir du mécanisme de blocs dans une certaine gamme des valeurs de l'angle de frottement. On retrouve, une fois de plus, les limitations des mécanismes simples, construits à partir de blocs rigides. La figure 4-62 montre le mécanisme calculé pour un angle de frottement de 15 degrés. On vérifie la présence d'une zone de concentration de déformations entre le bord de l'ouverture et le plan médian, mais cette zone a une allure complexe et n'est pas identifiable à une bande de cisaillement, qui d'ailleurs, dans la logique du mécanisme de bloc rigide, devrait faire un angle de 15 degrés avec la verticale. On distingue, de plus, une dernière bande de cisaillement, elle aussi issue du bord de l'ouverture mais en direction de la surface, ce qui constitue une différence de plus par rapport au mécanisme de bloc rigide.

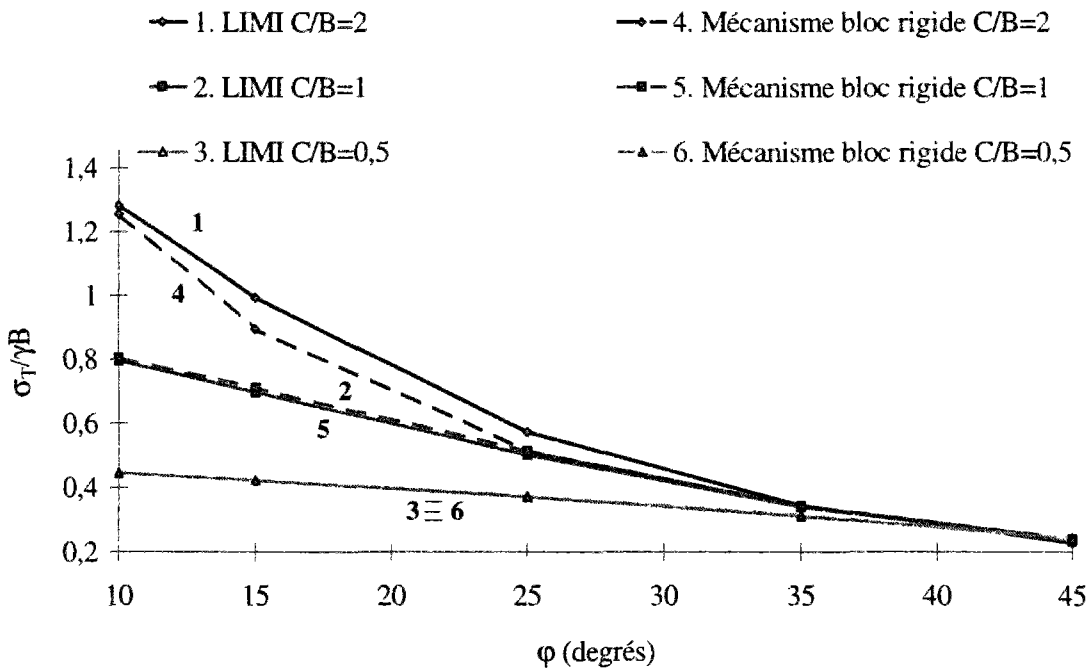


Figure 4-61. Comparaison entre les résultats de LIMI et ceux obtenus avec le mécanisme de bloc rigide.

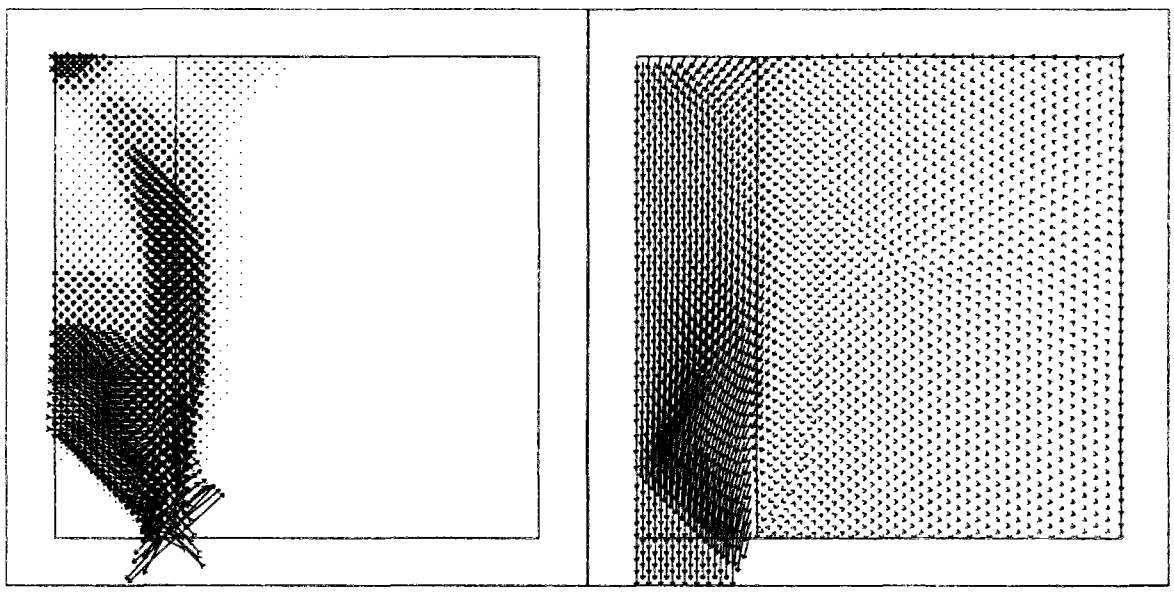


Figure 4-62. Vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour φ = 15 degrés *.

* La ligne verticale tracée sur le bord de l'ouverture n'est qu'un repère de la construction du maillage et n'a aucune relation avec les vitesses de déformation et déplacement.

Pour une évaluation plus claire des résultats de Terzaghi (1951), il nous faudrait disposer d'un champ de contraintes qui soit solution du problème statiquement et plastiquement admissible. Malheureusement, on ne connaît pas de telle solution, qui limiterait supérieurement la pression à exercer dans le terrain au niveau de l'ouverture et nous permettrait ainsi d'avoir une idée claire de l'écart entre la formule de Terzaghi (1951) et la solution exacte.

4.3 Coupe longitudinale

Ce cas représente en réalité une ouverture dont la dimension horizontale est très supérieure à la hauteur D. La géométrie correspondante est décrite sur la figure 4-63. Dans nos calculs, les déplacements de la partie supérieure et inférieure de l'ouvrage ont été complètement empêchés ; les résultats ont été comparés aux valeurs expérimentales obtenues pour des tunnels entièrement revêtus. Les chargements sont les mêmes que dans le cas des tunnels en section courante, à la différence près que la pression de soutènement σ_T est maintenant appliquée sur le front de taille.

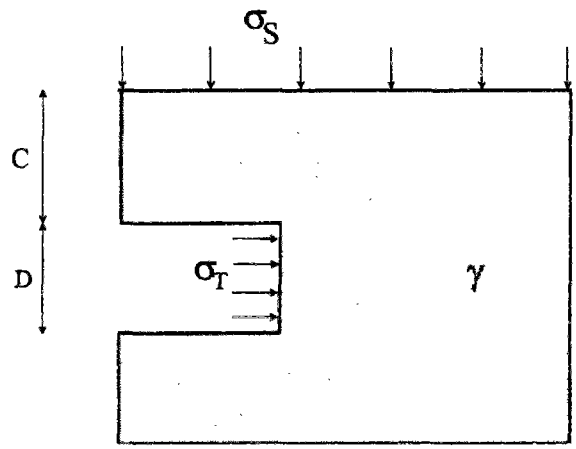


Figure 4-63. Schéma de la coupe longitudinale d'un tunnel.

4.3.1.1 Critère de Tresca

Les résultats obtenus à l'aide du module LIMI dans le cas d'un critère de Tresca sont représentés sur la figure 4-64. Deux cas de chargements ont été retenus, le cas n° 1 et le cas n° 3, avec $\gamma D/c_u=4$. Des encadrements ont été proposés par Davis et al. (1980) pour un revêtement rugueux ; pour un revêtement lisse, les bornes inférieures proviennent de

l'adaptation faite par Davis et al. (1980) des travaux d'Ewing et Hill (1967). Les bornes de LIMI représentées sur la figure 4-64 ont été calculées pour les valeurs de C/D égales à 0,5 ; 1 ; 2 et 3. Les autres ont été déterminées par interpolation linéaire.

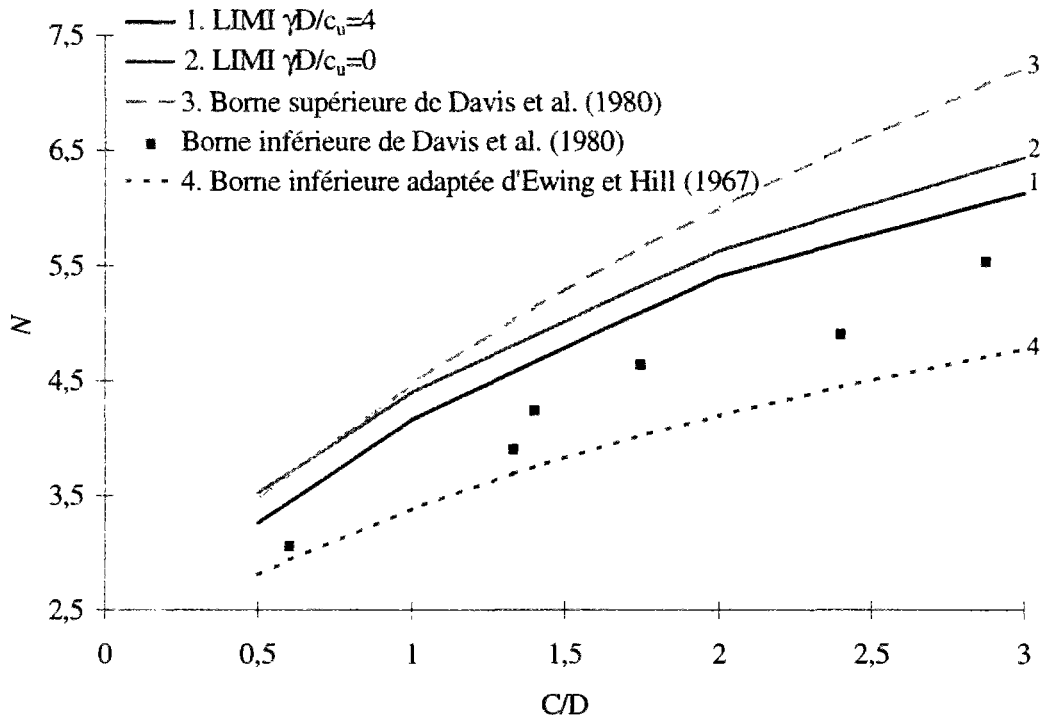


Figure 4-64. Comparaison des résultats obtenus en coupe longitudinale. Critère de Tresca.

Les bornes supérieures de Davis et al. (1980) sont valables quelle que soit la valeur de $\gamma D/c_u$, alors que les résultats obtenus à partir du module LIMI font apparaître une diminution du facteur de charge critique N quand $\gamma D/c_u$ augmente. Cette influence est faible et pratiquement indépendante de la valeur de C/D. Toutefois, même si cette réduction n'est pas importante, on pourrait se douter qu'en continuant à augmenter le rapport $\gamma D/c_u$ on arriverait à un point où la borne supérieure dépasserait la borne inférieure. Ce fait ne risque pas de se produire car la rupture locale apparaîtrait avant : pour ce cas de géométrie et de chargement, la borne supérieure de $\gamma D/c_u$ donnée par Davis et al. (1980) est de 8,28.

Les figures 4-65 et 4-66 montrent les mécanismes obtenus dans le cas $\gamma D/c_u=4$ pour C/D=0,5 et C/D=1, respectivement. Les mécanismes optimaux de Davis et al. (1980) ont été superposés aux diagrammes représentant les champs de vitesses de déformation calculés par LIMI. Pour la profondeur relative C/D=0,5, le mécanisme de Davis et al. (1980) coïncide raisonnablement avec les zones de concentration des vitesses de déformation fournies par

LIMI. On remarque que, pour C/D=1, le mécanisme calculé avec le module LIMI tend à se distinguer d'un mécanisme de blocs, comme on peut le voir sur la figure 4-67, où les vitesses de déformation obtenues par LIMI pour C/D=2 sont comparées au mécanisme optimal de Davis et al. (1980) ; en particulier, le mécanisme de Davis et al. (1980) suppose que le bloc supérieur reste toujours incliné, alors que les champs de vitesses de déplacement calculés par LIMI suggèrent plutôt un mouvement de bloc presque vertical entre la clé de l'ouvrage et la surface. Ces résultats nous semblent en accord avec les conclusions issues d'essais présentés par Schofield (1980).

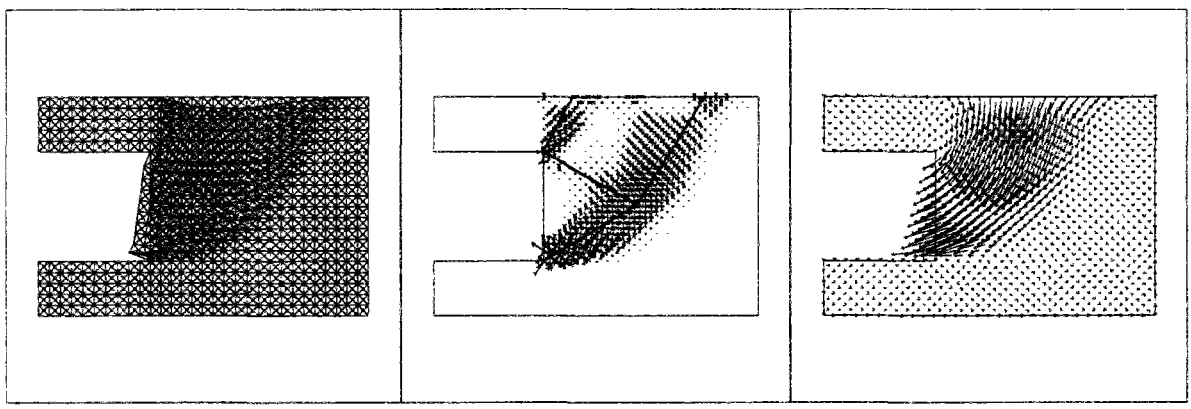


Figure 4-65. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement.

($\gamma D/c_u$=4, C/D=0,5).

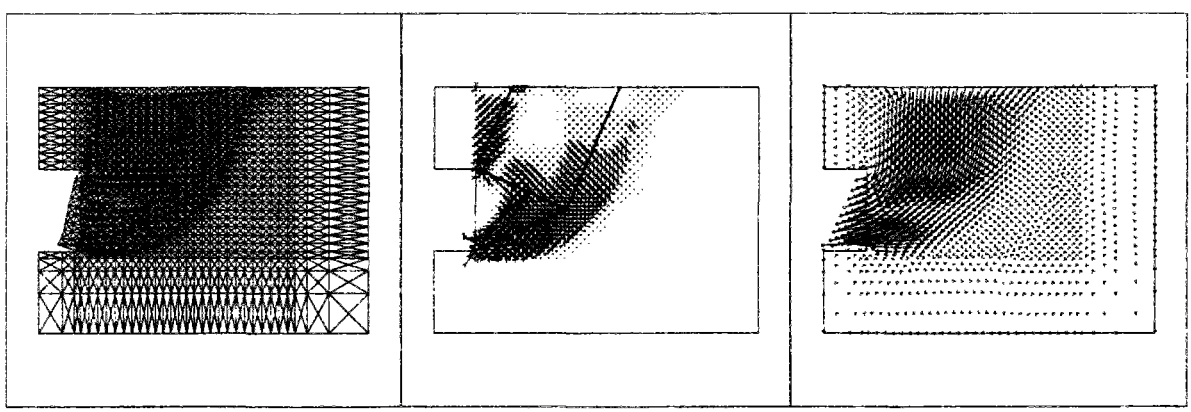


Figure 4-66. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement.

($\gamma D/c_u$=4, C/D=1).

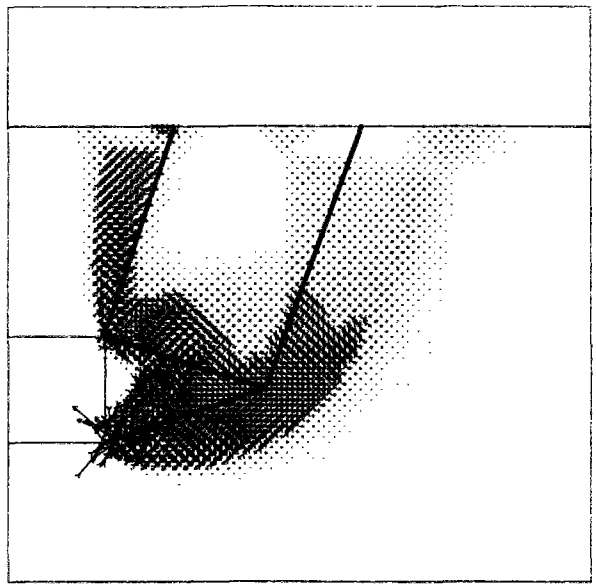


Figure 4-67. Vitesses de déformation. ($\gamma D/c_u$=4, C/D=2).

Il est aussi intéressant d'étudier la distribution des vitesses de déformation sur la hauteur du tunnel. Pour les figures 4-65 à 4-67, où le chargement était constitué par le poids volumique γ et une pression de soutènement σ_T, on a obtenu une convergence du terrain pratiquement nulle en clé, et qui augmentait linéairement avec la profondeur. Ce phénomène résulte du déséquilibre, par rapport au bilan des moments appliqués, entre la pression de soutènement appliquée et les efforts dus au poids volumique. En revanche, le mécanisme obtenu pour le cas de chargement n° 1 se traduit par une déformation uniforme sur le front de taille (figure 4-68).

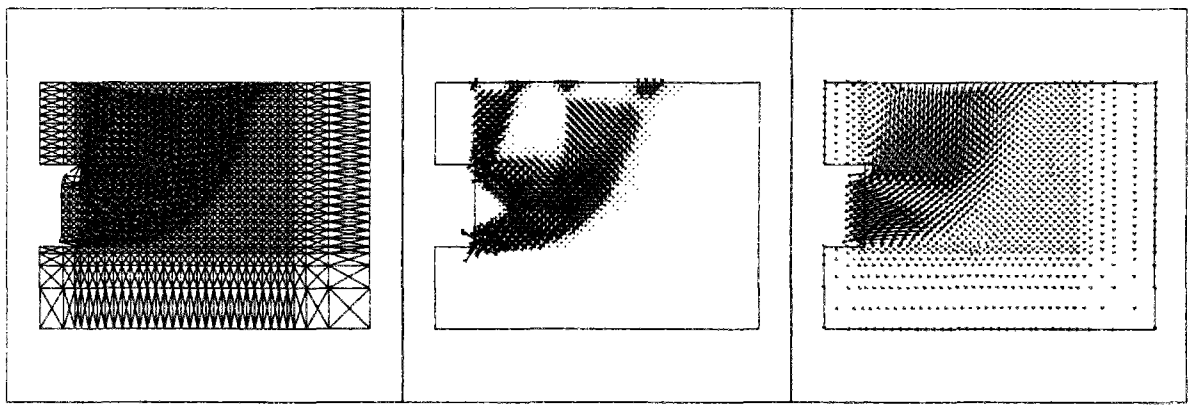


Figure 4-68. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement. ($\gamma D/c_u$=0, C/D=1).

4.3.1.2 Critère de Tresca tronqué en traction

Comme pour le cas du tunnel en section courante, l'analyse a été reprise en utilisant le critère de Tresca tronqué en traction. Les résultats sont présentés sur la figure 4-69, où ils sont comparés aux bornes inférieures de Davis et al. (1980). Les bornes de Davis et al. (1980) ont été calculées pour un matériau de Tresca classique ; néanmoins les valeurs de ces bornes inférieures ont été retenues parce que, dans les représentations graphiques des champs de contraintes utilisés, on ne décèle aucune contrainte de traction.

Les résultats pour le critère de Tresca tronqué en traction améliorent légèrement les bornes supérieures du critère de Tresca, comme l'on avait déjà constaté pour le cas du tunnel circulaire, mais cette amélioration n'est pas significative.

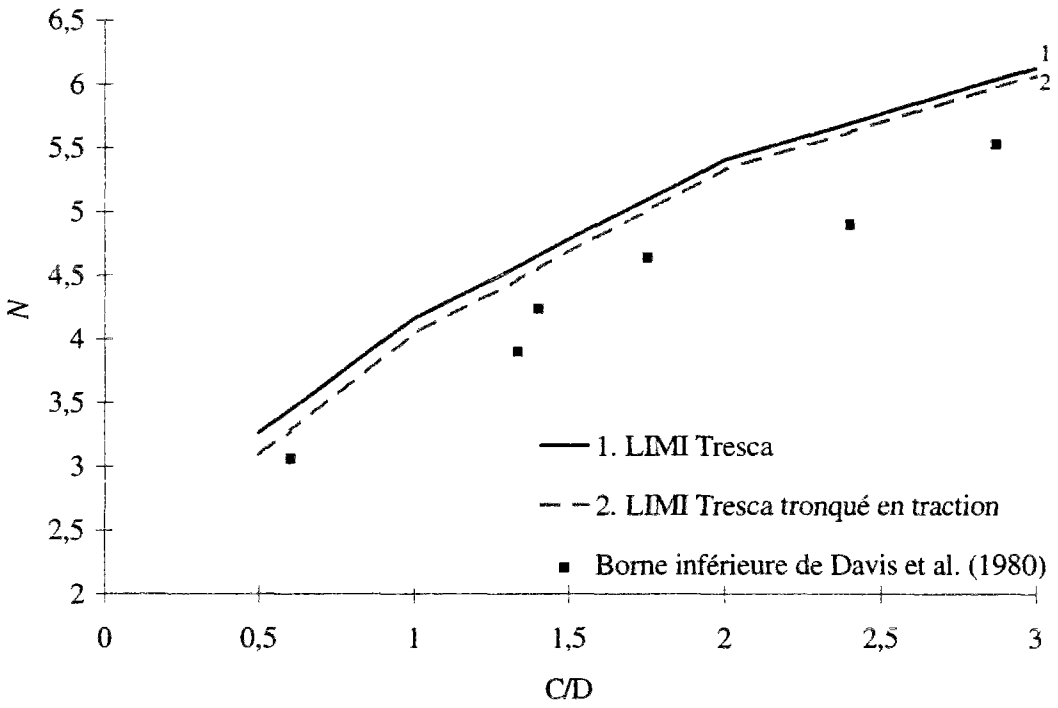


Figure 4-69. Comparaison entre les résultats du critère de Tresca et du critère de Tresca tronqué en traction. Les résultats de LIMI correspondent au cas $\gamma D/c_u=4$.

On peut penser que cette conclusion vient du fait que les zones en traction dans le massif ne sont pas très importantes (figure 4-70). En effet, on peut seulement identifier une zone en traction, proche de la surface et relativement éloignée de l'ouvrage [d'ailleurs la seule zone où, dans les essais en centrifugeuse présentés par Schofield (1980), on identifie clairement des fissures de traction] et une autre, également en surface, mais au droit du front de taille. Ces

zones sont d'étendue limitée vis-à-vis de l'ensemble du mécanisme et il est naturel que leur influence sur les résultats ne soit pas importante.

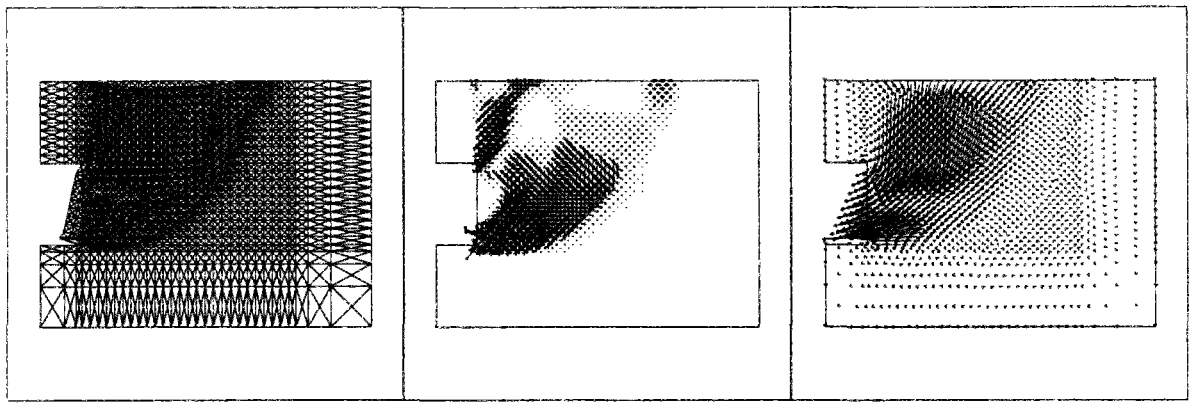


Figure 4-70. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement pour le cas de chargement n°3. ($\gamma D/c_u$=4, C/D=1. Critère de Tresca tronqué en traction).

4.3.1.3 Critère de Mohr-Coulomb

Des calculs ont été effectués également avec le critère de Mohr-Coulomb dans le but de les comparer à différents travaux expérimentaux en centrifugeuse réalisés au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, sur la stabilité des tunnels construits dans des matériaux sableux. L'ensemble de ces travaux est décrit dans plusieurs publications : Chambon (1990), Chambon et Corté (1989), Chambon et Corté (1990), Chambon et al. (1991), Chambon et Corté (1994). Nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux résultats de six essais réalisés pour des valeurs du rapport C/D de 0,5 ; 1 et 2. Pour chaque cas, deux calculs ont été réalisés avec des valeurs différentes de la cohésion, de l'angle de frottement et du poids volumique du sol. Les ouvrages étudiés font 5 m de hauteur, le chargement étant constitué par le poids volumique γ et la pression de soutènement σ_T. Les résultats correspondants sont rassemblés dans le tableau 4-1.

Tableau 4-1. Comparaison entre les résultats de LIMI et ceux de Chambon et Corté (1990, 1994).

C/D	γ (kN/m^3)	c (kPa)	φ (degrés)	σ_T (kPa) LIMI	σ_T (kPa) Chambon et Corté (1990)		σ_T (kPa) Chambon et Corté (1994)
					centrifugeuse	calcul	(centrifugeuse)
0,5	15,3	2,3	35,2	5,96	-	-	4,2
0,5	16,1	1,1	38,3	6,44	-	-	3,6
1	15,3	2,3	35,2	5,83	-	-	5,5
1	16,1	1,1	38,3	6,28	-	-	3,5
2	15,3	2,3	35,2	5,82	4,4	8,65	-
2	16,1	1,1	38,3	6,27	4	9,24	-

L'analyse de ces résultats montre que, pour les cas étudiés, la profondeur relative n'a pas d'influence sur les résultats de LIMI et que les mécanismes obtenus (figures 4-71 et 4-72) sont pratiquement indépendants du rapport C/D. La légère différence constatée entre les résultats obtenus pour C/D=0,5 résulte du fait que, dans ce cas, la surface du terrain subit des mouvements (très petits), fait aussi vérifié expérimentalement (Chambon et al., 1991).

En ce qui concerne les valeurs de la pression de soutènement à exercer sur le front, LIMI donne des valeurs toujours plus élevées que celles issues des essais en centrifugeuse ; ce fait est normal car la configuration utilisée dans nos calculs (représentant un ouvrage très large) est éloignée de celle des essais (tunnel circulaire) et est naturellement moins stable. Toutefois, ces résultats sont plus proches des valeurs expérimentales que les solutions proposées par Chambon et Corté (1990), en considérant des mécanismes de rupture bidimensionnels basés sur des blocs délimités par des spirales logarithmiques (tableau 4-1). En rappelant que l'analyse des bornes de la pression de soutènement doit être faite en termes de $-\sigma_T$, il est clair que les bornes de Chambon et Corté (1990) dépassent les bornes de LIMI ; si, au début, on a pensé qu'on devait raffiner les maillages, on est vite arrivé à la conclusion que les bornes de Chambon et Corté (1990) ne pouvaient être approchées par LIMI.

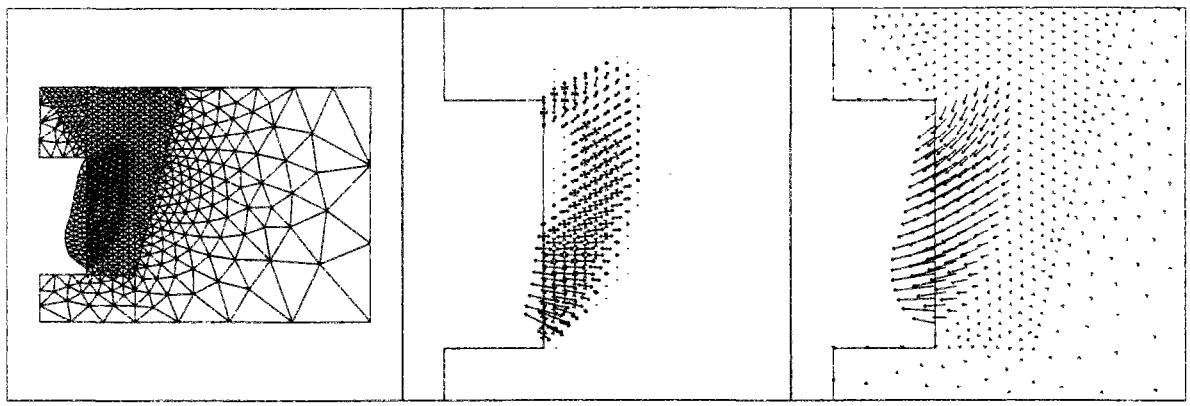


Figure 4-71. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement.

C/D=0,5, c=2,3 et φ = 35,2 degrés.

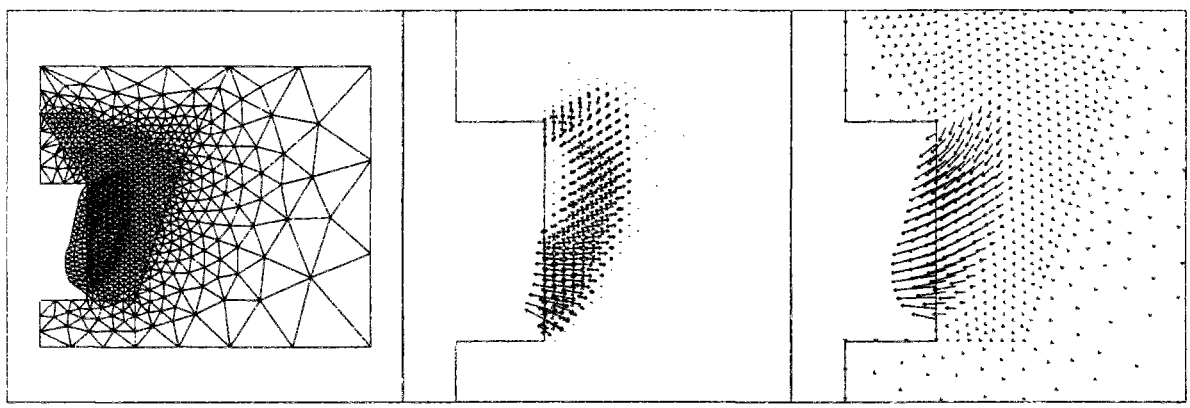


Figure 4-72. Maillage déformé, vitesses de déformation et vitesses de déplacement.

C/D=0,5, c=2,3 et φ = 35,2 degrés.

4.4 Remarques finales

Le travail présenté dans ce chapitre rend compte des possibilités d'utilisation du module LIMI dans l'analyse de la stabilité des tunnels en déformations planes.

Même si les cas étudiés ne sont pas exhaustifs, le nombre des configurations étudiées est suffisamment significatif pour mettre en évidence l'efficacité de LIMI à résoudre les problèmes de stabilité des ouvrages souterrains en géométrie bidimensionnelle. En particulier, les développements effectués à l'aide du module LIMI ont permis d'améliorer les bornes supérieures existantes pour la plupart des cas. D'autre part, la confrontation des résultats de LIMI avec ceux obtenus expérimentalement est tout à fait satisfaisante.

Ces résultats, très encourageants, nous ont convaincu de l'intérêt de chercher à étendre l'utilisation de LIMI à des cas géométriques plus proches des configurations réellement rencontrées dans la pratique et notamment au cas tridimensionnel de la stabilité du front de taille d'un tunnel en cours de creusement.

5ÈME CHAPITRE

RÉSULTATS TRIDIMENSIONNELS

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation des résultats obtenus avec le module LIMI en géométrie tridimensionnelle. La configuration retenue est celle d'un tunnel circulaire de diamètre D et de couverture C. Une distance non soutenue entre l'ouvrage et le front de taille, P, a été aussi prévue, pour l'étude de configurations transitoires en cours de travaux (figure 5-1).

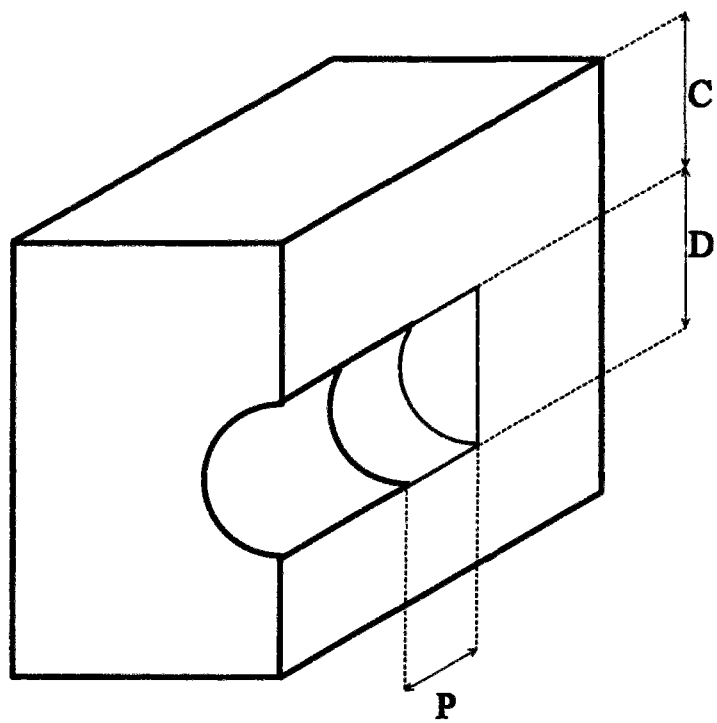


Figure 5-1. Géométrie tridimensionnelle adoptée.

Les conditions aux limites suivantes ont été retenues dans les calculs présentés dans ce chapitre : vitesses de déplacement nulles sur les surfaces inférieure, frontale, latérale du massif et dans l'ouvrage ; vitesse de déplacement normale nulle dans le plan de symétrie et dans le plan transversal recoupant l'ouvrage. Une alternative avait également été envisagée consistant à remplacer l'ouvrage par des éléments ayant des propriétés de résistance beaucoup plus élevées que celles du massif et à remplacer l'interface entre l'ouvrage et le massif par des

éléments de résistance tronquée en traction, pour simuler la possibilité de non adhérence entre l'ouvrage et le massif. Néanmoins, cette solution a été abandonnée en raison de l'alourdissement du maillage qu'elle aurait supposé ; de plus, les résultats obtenus à proximité du tunnel n'ont pas fait apparaître des déplacements justifiant une telle approche (y compris dans le cas du critère de Mohr-Coulomb avec une faible cohésion).

Les cas de chargement étudiés ont été présentés au chapitre précédent : poids volumique du terrain seul et combinaison du poids volumique du terrain avec une pression de soutènement appliquée au front de taille.

Les calculs pour le critère de Tresca ont été les derniers à être réalisés pendant notre travail en raison de la forte capacité informatique nécessaire à la réalisation de ces calculs, qui n'était pas disponible à l'époque du début de nos calculs tridimensionnels.

En effet, comme on l'a vu au chapitre précédent, l'évolution des mécanismes de rupture du front de taille est similaire à celle obtenue en poussée et tend à avoir un expression spatiale plus réduite lorsque l'angle de frottement augmente. Ainsi, contrairement au cas des semelles superficielles où l'on avait rencontré des problèmes pour les cas d'angles de frottement élevés, ce sont ici les angles de frottement les plus faibles (et à la limite le cas du critère de Tresca) qui conduisent aux mécanismes de plus grande extension spatiale. Il faut donc utiliser des maillages étendus dans le cas du critère de Tresca, au contraire de ce qui se passe pour le critère de Mohr-Coulomb, pour lequel les mécanismes obtenus sont d'extension réduite et proches du front de taille pour les angles de frottement utilisés (toujours supérieurs à 30 degrés).

La nécessité d'utiliser des maillages étendus nous a fait rencontrer des problèmes de capacité informatique. Les besoins de nos calculs en mémoire vive n'étaient pas compatibles avec les disponibilités du matériel existant au L.C.P.C. au début de cette recherche. Cette situation a été partiellement résolue avec la mise en marche, au début de la rédaction de ce mémoire, d'un nouveau serveur, ce qui a permis la réalisation de quelques calculs. En revanche, les calculs pour le cas du critère de Mohr-Coulomb ont pu être réalisés sans difficulté majeure.

5.2 Critère de Tresca

Ce cas de calcul a été, comme indiqué précédemment, le dernier à être analysé. Les maillages ont été constitués à partir d'assemblages d'éléments du type représenté sur la figure 5-2 et ont nécessité de capacités numériques considérables.

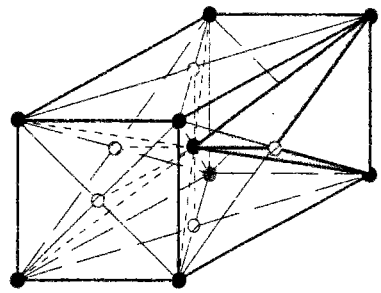


Figure 5-2. Assemblage d'éléments utilisés dans le cas du critère de Tresca.

Deux configurations géométriques ont été considérées : P=0 et P=D.

Seul le cas du chargement constitué par le poids volumique du sol a été étudié.

5.2.1 P=0

Des bornes supérieures et inférieures pour ce cas ont été proposées par Davis et al. (1980). Britto et Kusakabe (1985) et Leca et Dormieux (1992) ont étudié différents mécanismes tridimensionnels mais sans amélioration sensible des résultats des premiers auteurs, du moins pour les valeurs de C/D considérées dans notre analyse ($0{,}25 \leq C/D \leq 2$).

Les résultats obtenus à l'aide du module LIMI, ainsi que ceux de Davis et al. (1980) sont donnés sur la figure 5-3. Il est clair que les résultats de LIMI n'améliorent pas les bornes supérieures existantes, les valeurs obtenues restant très légèrement supérieures à celles de Davis et al. (1980). Sur la même figure, on a ajouté un extrait de la courbe N (C/D) donnée par Kimura et Mair (1981). Cette courbe a été établie à partir d'essais en centrifugeuse et montre une claire distance entre les bornes supérieures et les résultats obtenus expérimentalement.

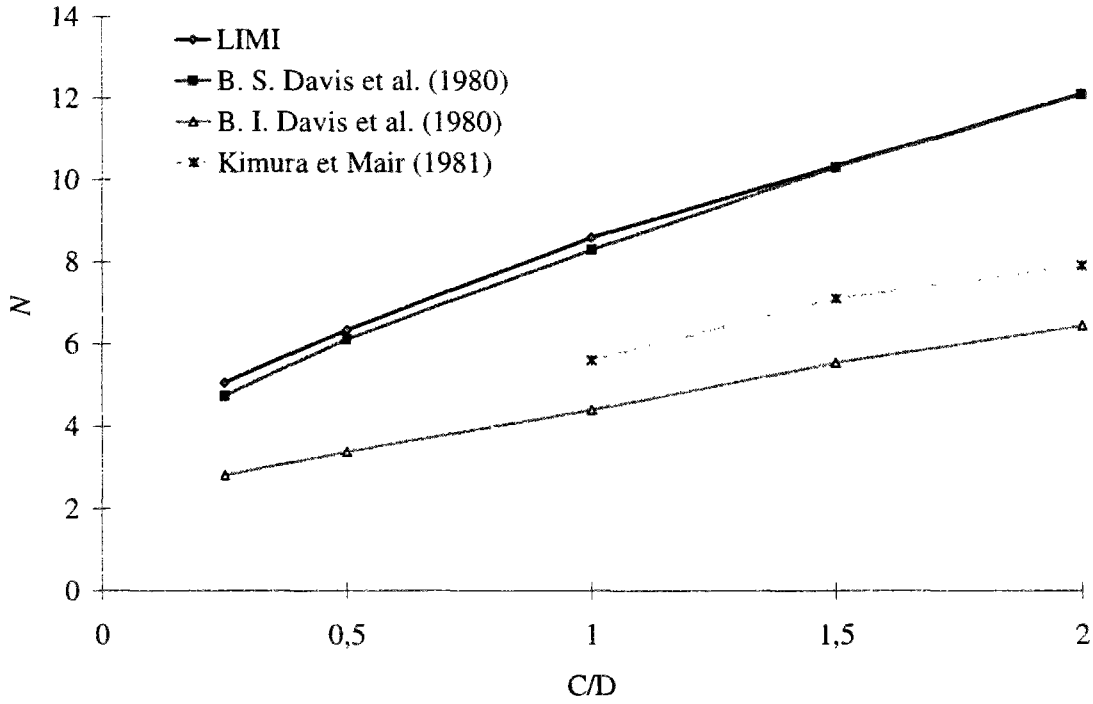


Figure 5-3. Comparaison entre les résultats de LIMI et ceux de Davis et al. (1980) et Kimura et Mair (1981).

Nous pensons que la non amélioration, par LIMI, des résultats existants est liée à la condition d'incompressibilité du critère de Tresca. En réalité, l'assemblage d'éléments utilisé améliore le comportement numérique des maillages, mais on ne connaît pas d'équivalent tridimensionnel de la disposition bidimensionnelle vérifiant partout la condition d'incompressibilité. Ainsi, pour des chargements encore éloignés de ce qu'on pourrait penser être la charge limite, il existe un certain blocage de la structure, empêchant un bon déroulement de calcul et l'obtention de meilleurs résultats.

Les figures 5-4 à 5-7 donnent les mécanismes obtenus pour les calculs effectués. Pour les cas C/D=0,25 et C/D=0,5, les maillages sont constitués par des assemblages des éléments présentés sur la figure 5-2, sauf dans les zones situées derrière le front de taille où on n'attendait pas de mouvements du terrain (ce qui a été confirmé par les résultats). Par contre, pour les deux valeurs supérieures de C/D, il n'a pas été possible d'utiliser ces types d'éléments dans toute la hauteur du maillage, en raison des limites liées à la capacité des moyens informatiques. Ainsi, pour les cas C/D=1 et C/D=2, on a décidé de prolonger simplement en hauteur le maillage utilisé pour le cas C/D=0,5. Bien qu'on ait pu penser que

cette disposition serait trop pénalisante pour le déroulement du calcul, il s'est avéré que les meilleurs résultats ont été obtenus pour le cas C/D=2. Ceci peut être expliqué à partir du raisonnement suivant : comme la vitesse de déformation est constante par élément et le nombre de ces derniers (1 élément pour C/D=1, 3 éléments pour C/D=2) est réduit dans le sens de la hauteur, les changements verticaux de la puissance dissipée sont mal modélisés par ces éléments, tandis que les changements de la puissance dissipée dans la direction horizontale sont mieux représentés. Par conséquent, les éléments de la partie supérieure du maillage ont tendance à suivre le comportement des éléments sous-jacents. On perd ainsi un peu du comportement tridimensionnel du massif, mais si l'on observe les résultats des essais décrits par Schofield (1980), on remarque que les mécanismes obtenus en centrifugeuse sont normalement constitués par un bloc descendant en avant du front de taille et délimité par des zones pratiquement verticales de cisaillement, qui s'appuient sur une zone de déformation intense devant le front de taille. Le comportement tridimensionnel dans les zones du terrain situées au-dessus de la clé du tunnel a donc moins d'importance que dans les zones situées au niveau du front de taille.

Pour les cas C/D=0,25 et C/D=0,5, les mécanismes obtenus (figures 5-4 et 5-5) rendent compte de l'existence devant le front de taille d'une zone se comportant comme un bloc presque rigide. Les vitesses de déformation sont regroupées à proximité de l'ouvrage et se propagent vers la surface, avec une intensité relativement homogène. Les cuvettes de tassement sont dans ces cas bien marquées et la déformation à la surface est du même ordre de grandeur que celle obtenue au niveau du front de taille.

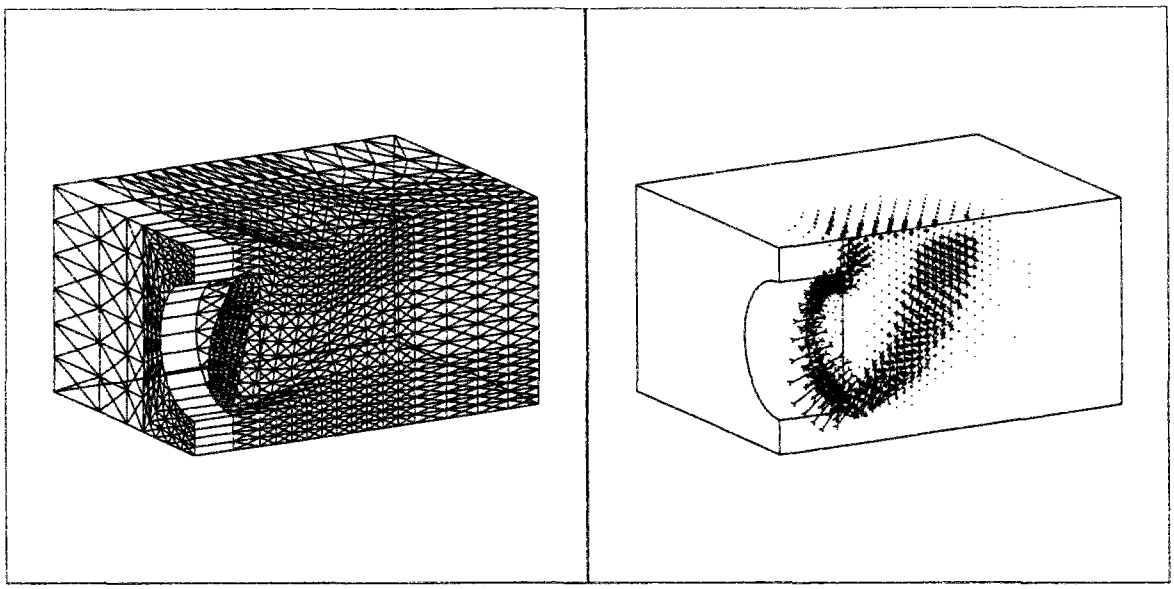


Figure 5-4. Maillage déformé et vitesses de déformation (C/D=0,25).

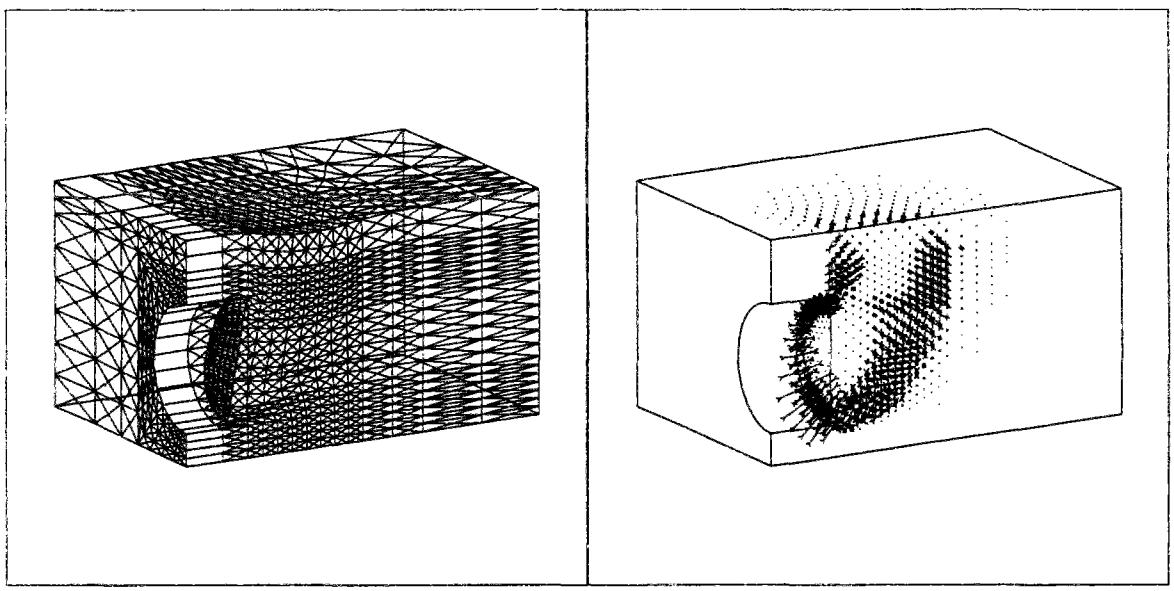


Figure 5-5. Maillage déformé et vitesses de déformation (C/D=0,5).

Avec l'augmentation de la profondeur relative, ces mécanismes sont légèrement modifiés. Les zones situées devant le front de taille qui sont peu déformées pour les faibles valeurs de C/D, disparaissent pratiquement pour C/D=1 et C/D=2. On retrouve la concentration des vitesses de déformation autour de l'ouvrage, déjà rencontrée dans le cas bidimensionnel, avec l'augmentation de C/D. Les cuvettes de déformation sont elles aussi moins marquées et l'ordre de grandeur du tassement est clairement inférieur à celui du déplacement calculé au niveau du front. Comme pour le cas bidimensionnel, on peut penser que ces observations sont liées entre elles : avec l'augmentation de C/D, les cuvettes de tassement se propagent dans le

plan horizontal et l'incompressibilité du critère de Tresca fait que des tassements moins importants en surface sont compensés par des convergences d'une grandeur supérieure sur le front de taille.

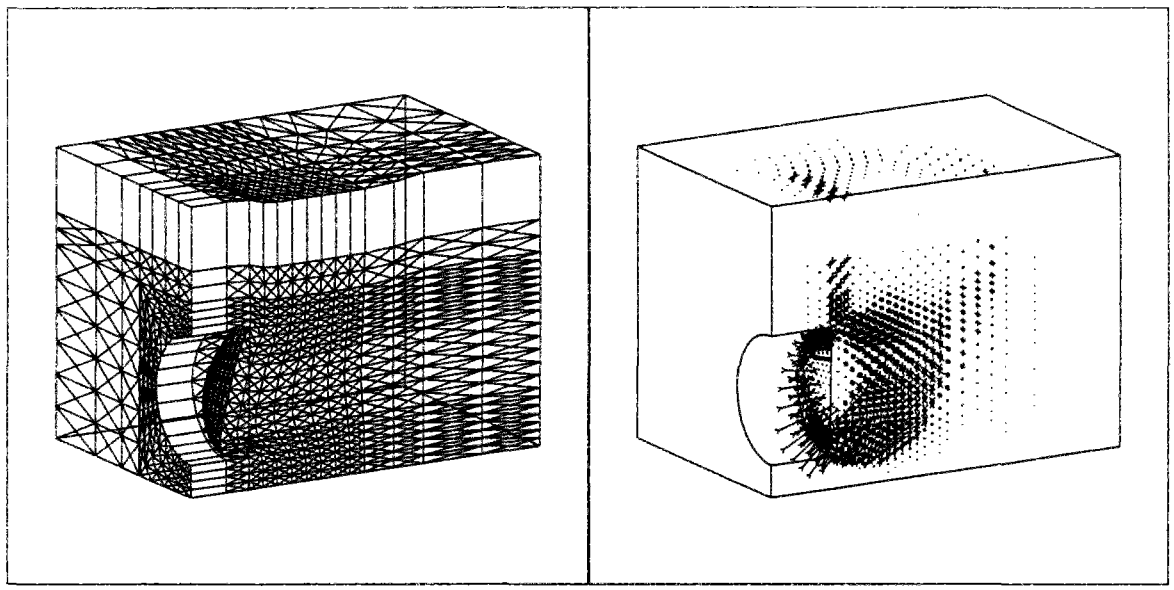


Figure 5-6. Maillage déformé et vitesses de déformation (C/D=1).

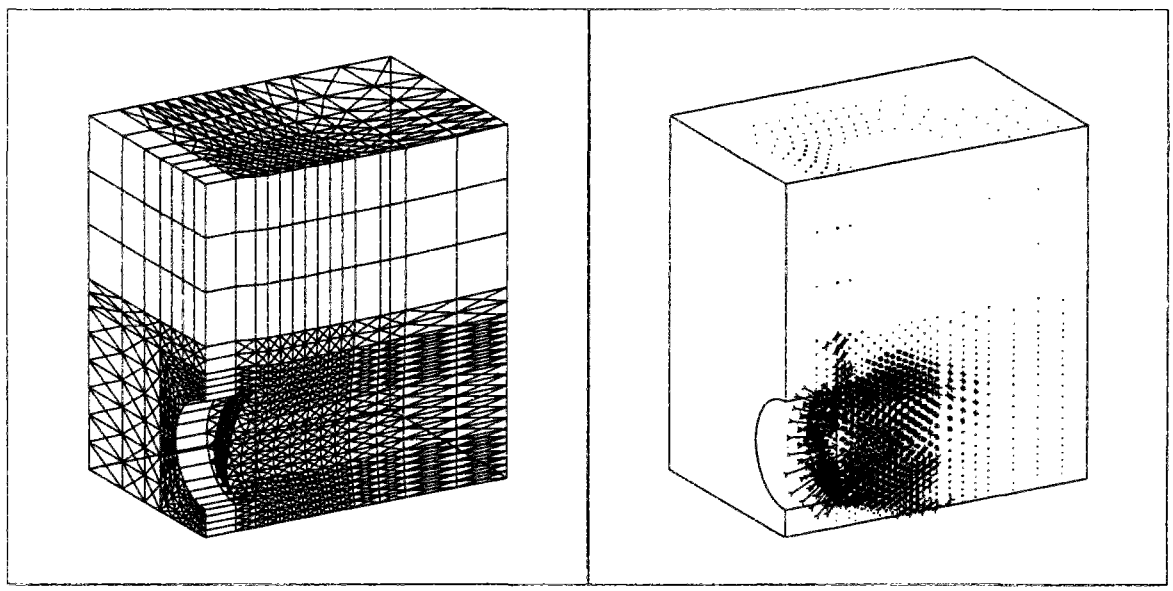


Figure 5-7. Maillage déformé et vitesses de déformation (C/D=2).

Pour les cas C/D=0,25 et C/D=0,5, les vitesses de déformation calculées en surface formaient un ensemble convexe ; par contre, pour les cas C/D=1 et C/D=2, on peut identifier une zone centrale non déformée au sein de la partie affectée par les déformations. Ceci rejoint la constatation expérimentale que les mécanismes sont constitués par des blocs rigides presque verticaux, délimités par des zones de cisaillement.

Le cas C/D=2 est le seul à présenter des mouvements dans les zones situées au-dessus l'ouvrage, fait observé expérimentalement. En réalité, pour tous les autres rapports de C/D, dans les mécanismes issus de LIMI, on n'observe de mouvements que dans le terrain situé devant le front de taille. Mais, pour cette valeur de C/D = 2, on peut repérer un léger tassement dans la zone limite de l'ouvrage.

La figure 5-8 reproduit le mécanisme obtenu en centrifugeuse pour C/D=10/7 (Schofield, 1980). On y distingue bien les zones verticales de cisaillement entourant un bloc descendant, qui ne présente pratiquement pas de déformations. Devant la face du tunnel, une zone de grande déformation est présente, comme on pouvait le voir dans les résultats de LIMI. Cette zone bascule vers le front de taille avec une prédominance des déplacements au niveau du radier, fait aussi constaté dans les mécanismes de LIMI.

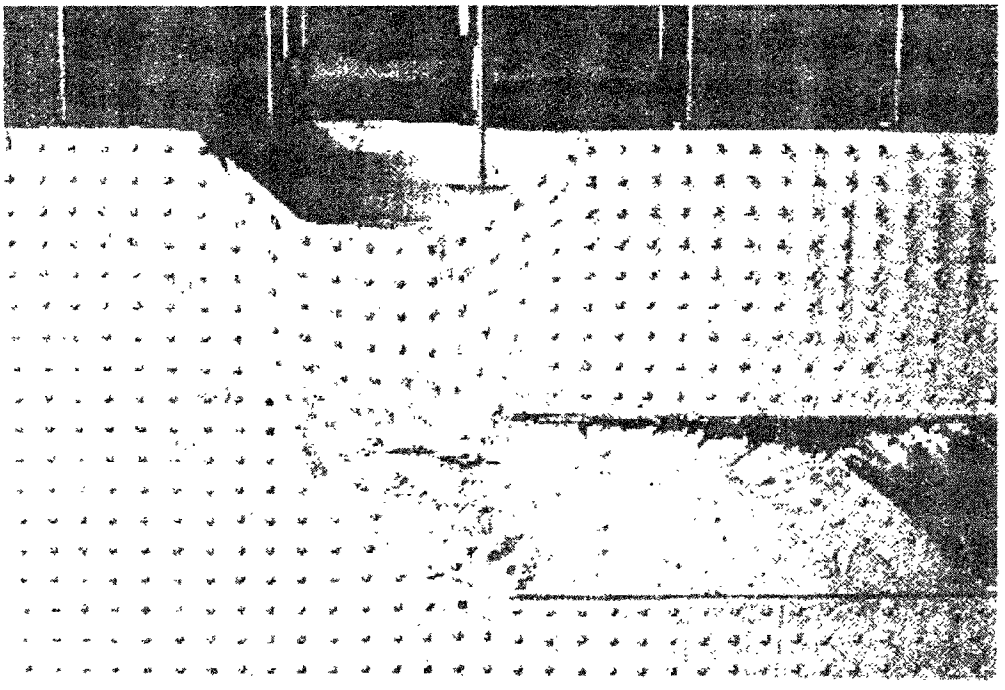


Figure 5-8. Mécanisme de rupture (Schofield, 1980) (P=0, C/D=10/7).

5.2.2 P/D=1

Comme pour le cas précédent, seul le chargement constitué par le poids volumique du sol a été considéré. On a fait varier le paramètre C/D entre 0,25 et 1. Les résultats obtenus par LIMI pour les bornes supérieures du paramètre N sont présentés dans le tableau 5-1. Schofield (1980) et Kimura et Mair (1981) donnent comme résultat expérimental à la rupture N=4 et N=4,3, respectivement.

Tableau 5-1. Valeurs obtenues avec LIMI pour la borne supérieure de N (P/D=1).

C/D	0,25	0,5	1
N (Borne supérieure, LIMI)	4,2	4,9	5,7

Comme dans le cas précédent, nos résultats sont clairement au-dessus de ceux existant dans la littérature. Cependant, il est intéressant de remarquer qu'on ne connaît pas de solutions en analyse limite pour le cas tridimensionnel du tunnel pas entièrement revêtu. En effet, les valeurs fournies par les courbes de Schofield (1980) et Kimura et Mair (1981) sont issues de courbes approchant certains essais, que l'on ne peut considérer comme des valeurs absolues mais simplement comme des valeurs résultant d'une interpolation des essais par la courbe donnée (par minimisation de l'erreur entre les points et les courbes). Il existe pour cette raison une certaine incertitude sur les valeurs de *N*. En tout cas, comme précédemment, l'analyse du déroulement du calcul nous amène à penser que le maillage souffre d'un certain blocage, pour les valeurs de la charge approchant la limite, ce qui empêche le module de donner des résultats plus intéressants.

Les figures 5-9 à 5-12 montrent les mécanismes obtenus pour les cas C/D=0,25 et C/D=1. Dans les deux cas présentés, la chute de la clé des parois non supportées est évidente ainsi que la convergence du front vers l'intérieur de l'ouvrage. Dans les deux cas, on enregistre aussi une zone de forte déformation du terrain au-dessus de l'ouvrage, à proximité du plan séparant la zone soutenue de la zone non soutenue. Dans les deux cas aussi, le front de taille est soumis à des fortes déformations mais, dans le cas C/D=0,25 ces déformations se propagent vers la surface tandis que, dans le deuxième cas, elles restent plutôt concentrées au niveau du front.

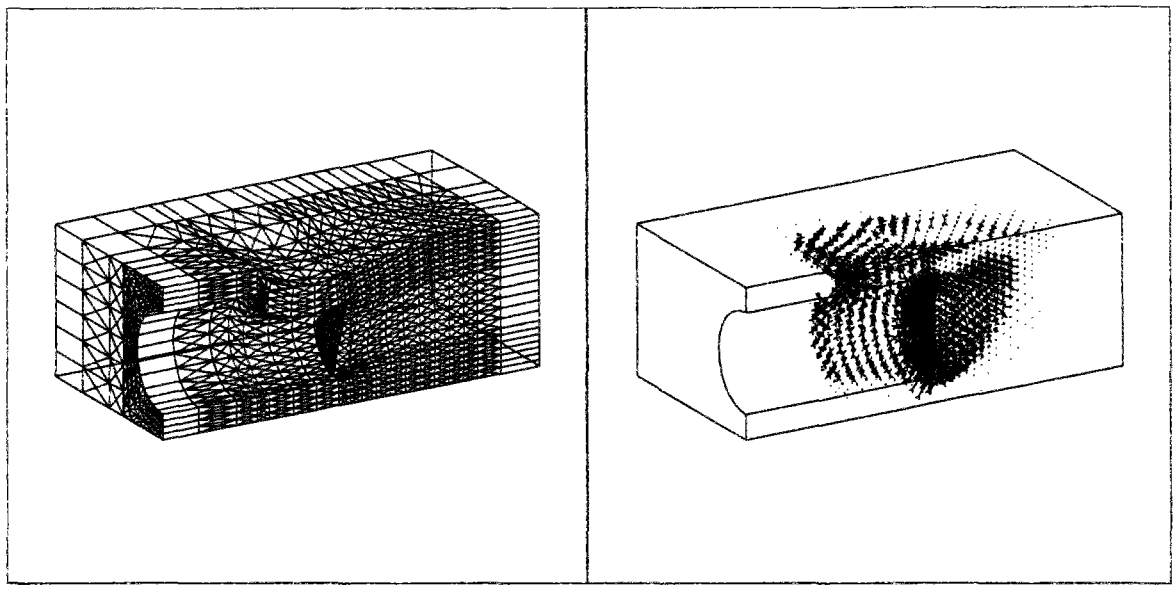


Figure 5-9. Maillage déformé et vitesses de déformation pour C/D=0,25 et P/D=1.

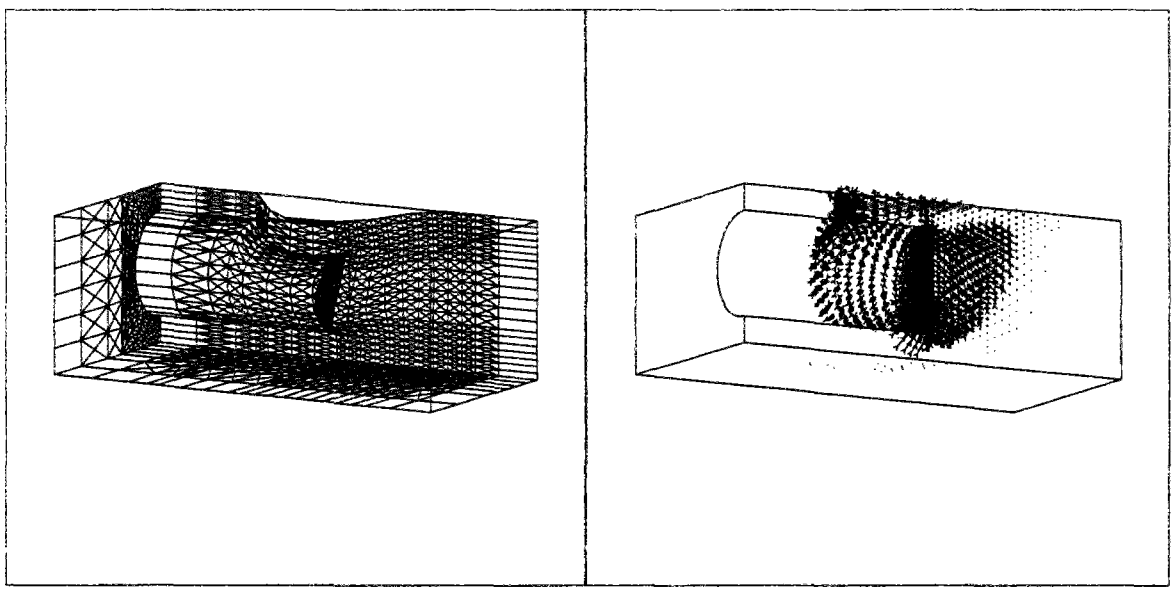


Figure 5-10. Maillage déformé et vitesses de déformation pour C/D=0,25 et P/D=1.

Si, dans le cas C/D=0,25, la déformation des parois non soutenues correspond à une simple chute du toit, dans le cas C/D=1, on peut remarquer l'existence d'une zone inférieure convergeant vers l'axe du tunnel (figure 5-12). C'est un phénomène déjà mis en évidence dans le cas bidimensionnel et qui se répète ici dans la zone où le comportement de la structure prend des allures plus proches d'un comportement bidimensionnel (voir les vitesses de déformation).

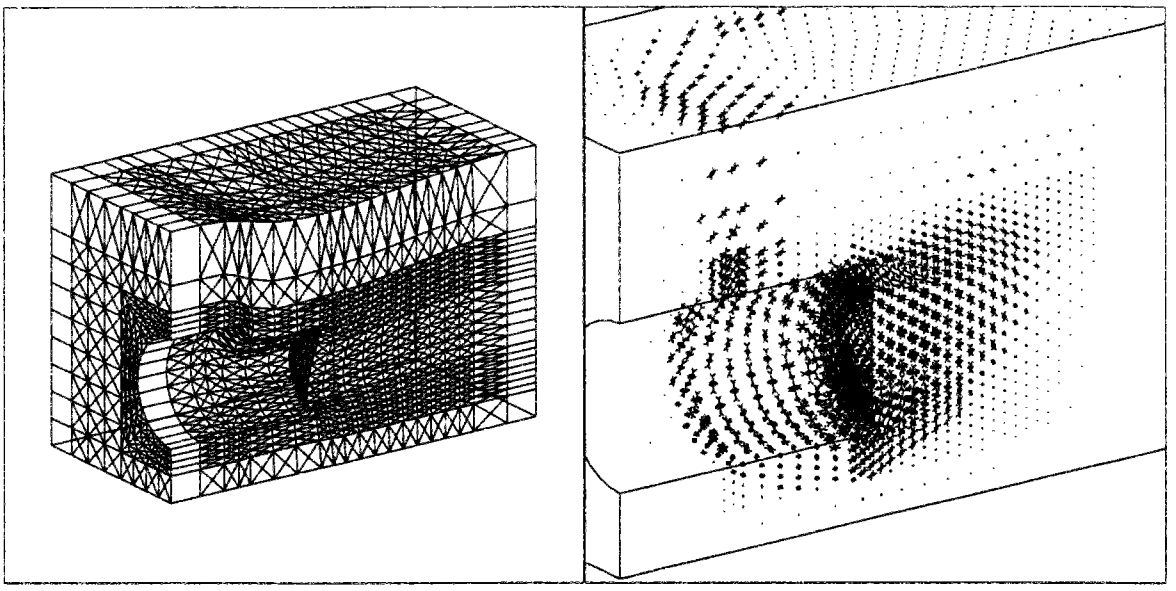


Figure 5-11. Maillage déformé et vitesses de déformation pour C/D=1 et P/D=1.

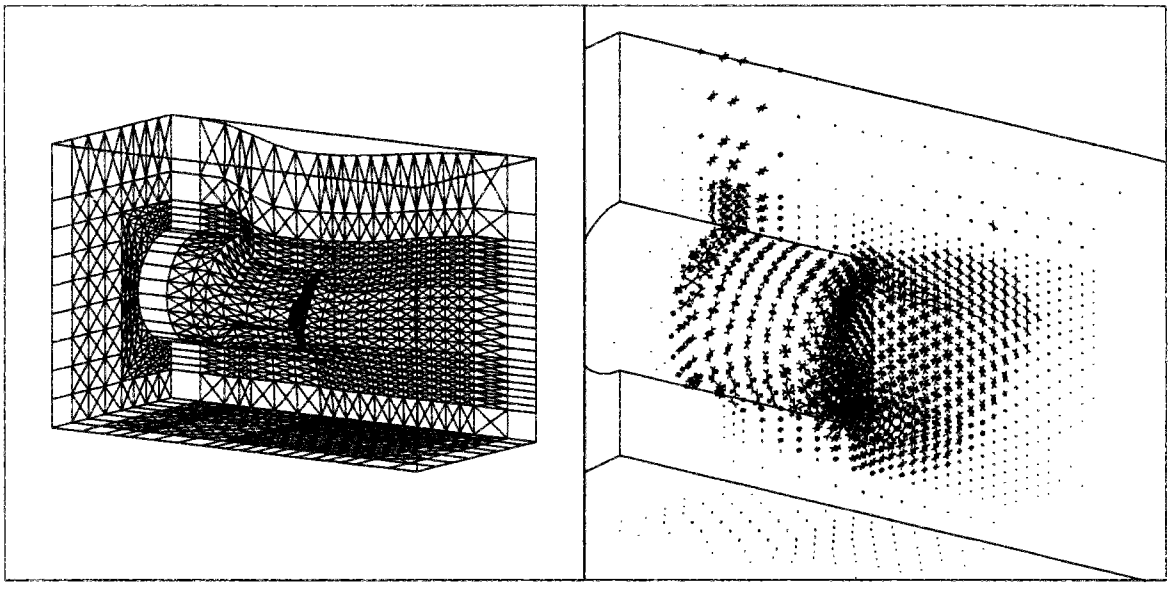


Figure 5-12. Maillage déformé et vitesses de déformation pour C/D=1 et P/D=1.

Les figures 5-13 et 5-14 reproduisent des images de ruptures en centrifugeuse (Schofield, 1980). Malheureusement, les paramètres géométriques ne coïncident pas avec ceux utilisés dans nos études. Néanmoins, certaines similitudes entre les mécanismes fournis par LIMI et ceux présentés par Schofield (1980) sont à prendre en compte : d'abord, l'existence d'un fort cisaillement dans les zones situées au-dessus de la limite du soutènement ; ensuite, pour le cas P/D=1, le basculement du front de taille existe, comme dans le mécanisme de LIMI ; enfin, il nous semble qu'une partie du matériau que si trouve dans le tube dans le cas C/D=2 ne peut provenir que de la déformation des parois.

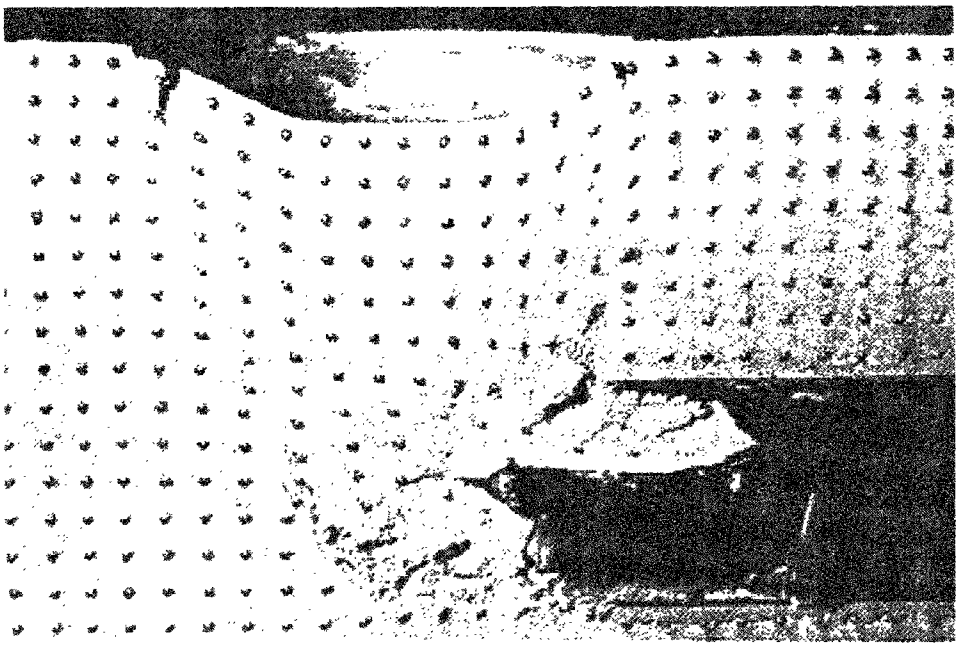


Figure 5-13. Mécanisme de rupture (Schofield, 1980). P/D=1, C/D=10/7.

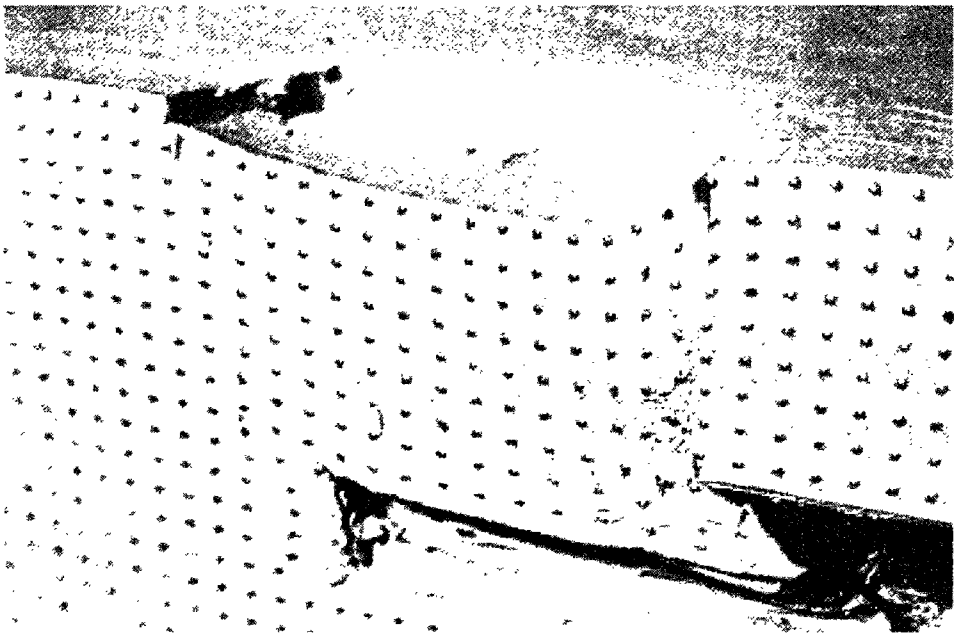


Figure 5-14. Mécanisme de rupture (Schofield, 1980). P/D=2, C/D=10/7

5.3 Critère de Mohr-Coulomb

Les calculs avec le critère de Mohr-Coulomb ont été effectués, d'une part, pour un tunnel soutenu jusqu'au front de taille (P=0) et, d'autre part, pour différentes valeurs de la distance entre le soutènement de la galerie et le front de taille. Le chargement était dans tous les cas le

poids volumique du sol et une pression de soutènement uniformément appliquée sur le front de taille et la partie non revêtue des parois.

5.3.1 P=0

Les résultats des calculs ont été comparés avec ceux de Leca et Dormieux (1990) et avec les résultats expérimentaux issus de la thèse de Chambon (1990).

Le tableau 5-2 donne les paramètres de résistance et les valeurs de C/D correspondant aux quatre cas étudiés ; tous les calculs ont été effectués pour un diamètre de 4 m.

Tableau 5-2. Définition des différents paramètres (D=4m).

Cas	C/D	γ (kN/m^3)	c (kPa)	φ (degrés)
1	1	15,3	2,3	35,2
2	1	16,1	1,1	38,3
3	2	15,3	2,3	35,2
4	2	16,1	1,1	38,3

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 5-3, où sont données les valeurs de la borne supérieure de la pression de soutènement obtenue par LIMI et celles issues des formules de Leca et Dormieux (1990) pour la même borne. Les pressions limites expérimentales sont issues des essais présentés par Chambon et Corté (1989). On rappelle que l'apparente inversion de bornes supérieure et inférieure est dû au fait que les effets déstabilisants doivent être analysés en termes de - σ_T.

Tableau 5-3. Comparaison entre les résultats de LIMI et des résultats analytiques et expérimentaux (D=4 m).

Cas	Borne supérieure σ_T (kPa) LIMI	Borne supérieure σ_T (kPa) Leca et Dormieux (1990)	Borne inférieure σ_T (kPa) Leca et Dormieux (1990)	$\sigma_{T\,lim}$ (kPa) Chambon et Corté (1989)
1	2,03	2,00	29,36	5,53
2	3,35	3,31	29,90	3,00
3	2,03	2,00	46,26	4,38
4	3,35	3,31	43,88	4,08

On peu remarquer que les bornes supérieures obtenues par LIMI sont très proches de celles de Leca et Dormieux (1990). Par contre, les résultats disponibles pour les bornes inférieures sont très éloignés de ceux fournis par les approches cinématiques, tant analytiques (Leca et Dormieux, 1990) que numériques (LIMI). Il est également clair que la comparaison avec les résultats expérimentaux montre que les bornes supérieures paraissent beaucoup plus réalistes que les solutions statiques. D'ailleurs, l'écart entre les bornes inférieures et les pressions expérimentales est considérable. Cette idée est encore renforcée par l'analyse des pressions déterminant le début des mouvements dans le front de taille (p_{dm}), pendant des essais en centrifugeuse. Les valeurs de ces pressions, ainsi que les valeurs limites à la rupture sont données dans le tableau 5-4, pour un tunnel de 5 m de diamètre (Chambon et Corté, 1994).

Ainsi, pour un diamètre supérieur à celui considéré dans l'analyse du tableau 5-3, on n'observe aucun mouvement dans le front de taille pour des pressions de soutènement très inférieures à celle fournie par la solution statique. Ce fait renforce l'idée que des progrès restent nécessaires du côté de l'approche statique.

Tableau 5-4. Pressions déterminant le début des mouvements dans le front de taille (p_{dm}) et pressions limites (p_{lim}). D=5 m. Chambon et Corté (1994)

C/D	γ (kN/m^3)	p_{dm} (kPa)	p_{lim} (kPa)
1	15,3	20,2	5,5
1	16,1	20,1	3,5
2	15,3	20,1	4,2

Les mécanismes obtenus pour les cas 1 et 2 sont présentés sur les figures 5-15 et 5-16. La différence entre ces mécanismes est très petite, le mécanisme du cas 2, du fait du plus fort angle de frottement employé dans ce cas, étant légèrement moins étendu dans sa partie supérieure. Les mécanismes mis en évidence sont constitués par le mouvement d'une zone presque rigide, délimitée par une surface en forme de calotte sphérique au front de taille.

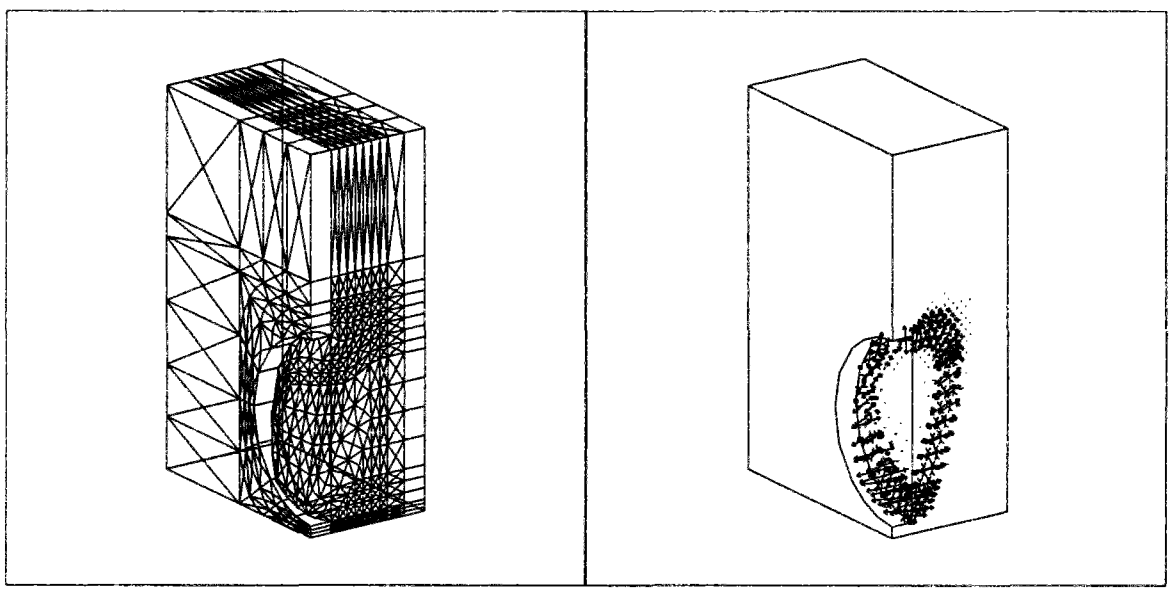


Figure 5-15. Maillage déformé et vitesses de déformation.

(C/D=1 ; c=2,3 kPa et φ=35,2 degrés).

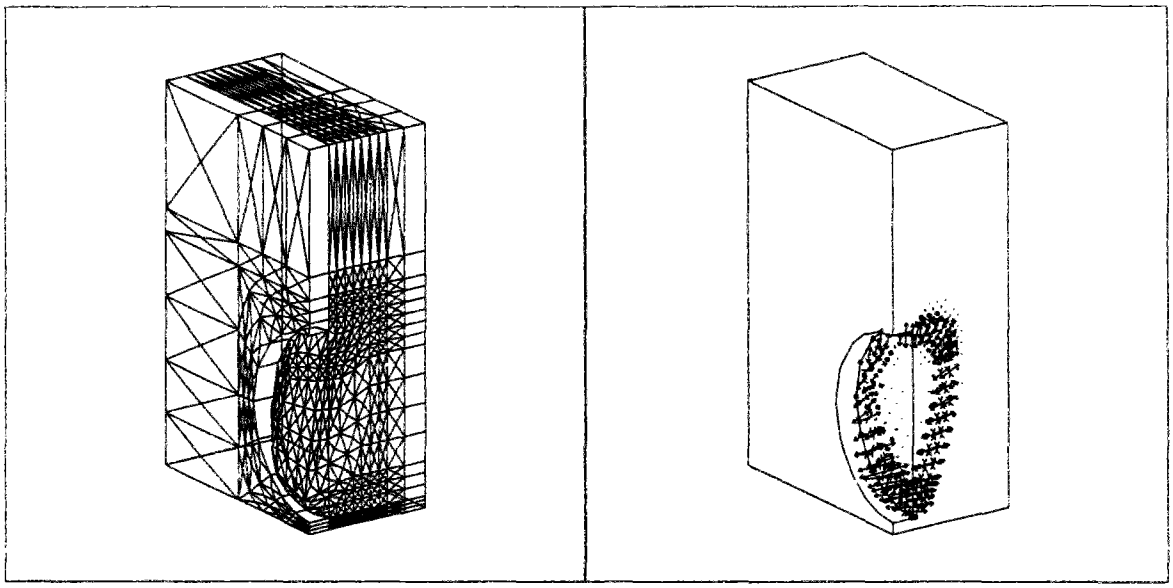


Figure 5-16. Maillage déformé et vitesses de déformation.

(C/D=1 ; c=1,1 kPa et φ=38,3 degrés).

Le mécanisme observé étant restreint à une partie limitée du maillage, y compris dans son extension verticale, les mêmes maillages ont été utilisés pour les cas 3 et 4, en ajoutant des éléments plus grossiers de façon à atteindre une profondeur relative de C/D=2.

Les résultats sont présentés sur les figures 5-17 et 5-18. On peut remarquer que les mécanismes obtenus sont identiques à ceux du cas C/D=1. Cette observation explique que les résultats de la borne supérieure soient les mêmes pour les cas C/D=1 et C/D=2.

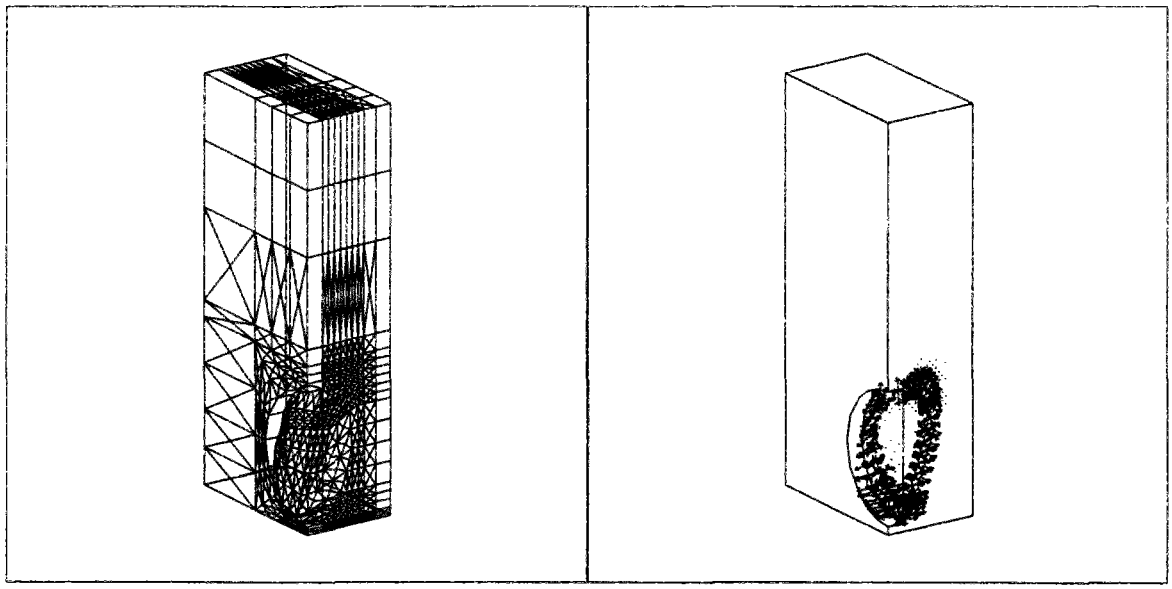


Figure 5-17. Maillage déformé et vitesses de déformation.

(C/D=2 ; c=2,3 kPa et φ=35,2 degrés).

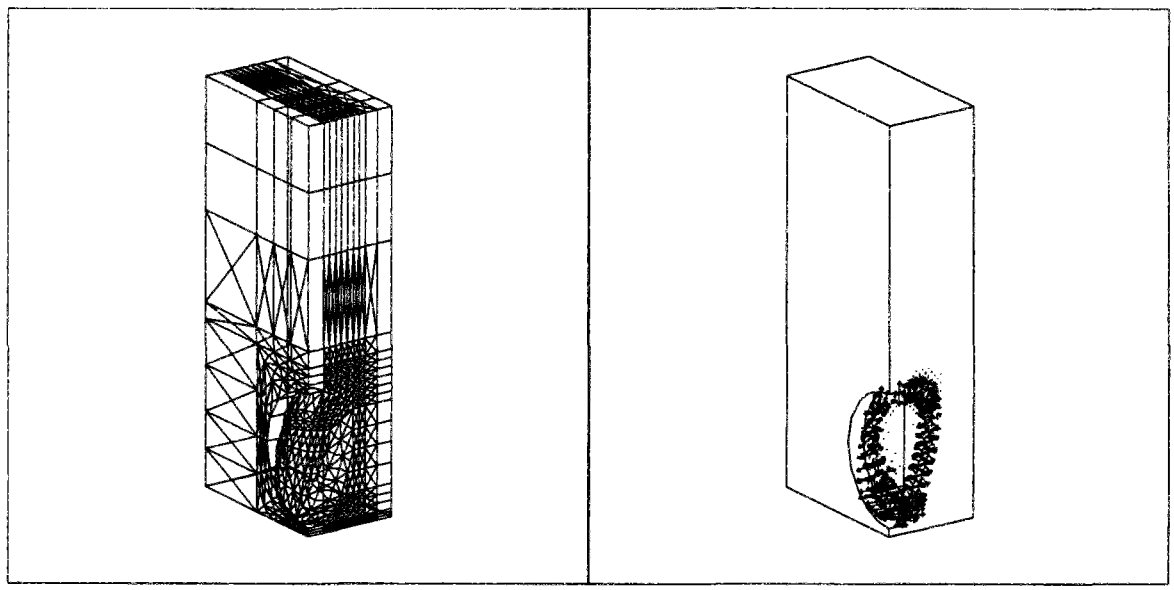


Figure 5-18. Maillage déformé et vitesses de déformation.

(C/D=2 ; c=1,1 kPa et φ=38,3 degrés).

Ces mécanismes se présentent sous la forme d'un bulbe de rupture analogue à ceux obtenus en centrifugeuse, avec néanmoins une extension moindre dans le sens de la hauteur. En revanche, nos mécanismes sont relativement proches de ceux obtenus par Leca et Dormieux (1990). La figure 5-19 donne une autre vue du maillage déformé et des vitesses de déformation pour le cas 1. On a également dessiné sur cette figure la trace, dans le plan de

symétrie du tunnel, du mécanisme optimal proposé par Leca et Dormieux (1990) pour ce cas. Ce dernier est constitué par deux blocs rigides, de forme conique et d'angle au sommet 2φ, et d'axe vertical pour le bloc supérieur.

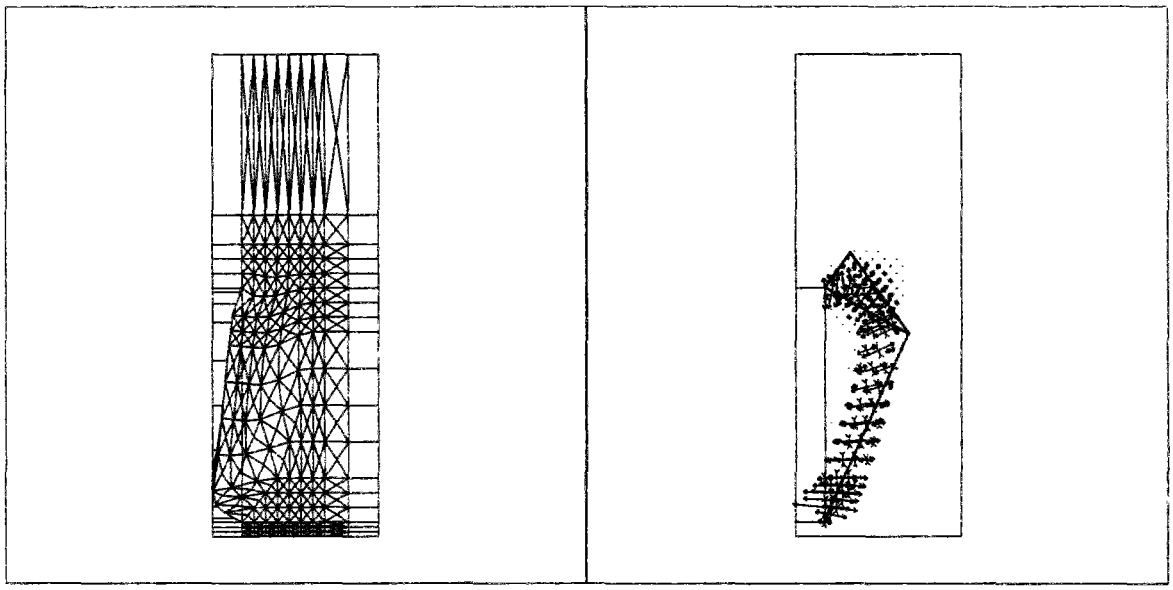


Figure 5-19. Maillage déformé et vitesses de déformation.

(C/D=1 ; c=2,3 kPa et φ=35,2degrés).

Toutefois, les mécanismes de Leca et Dormieux (1990) sont formés par des cônes qui ne débouchent que dans la partie centrale du front, alors que l'étendue radiale du mécanisme calculé par LIMI est plus importante (figure 5-20).

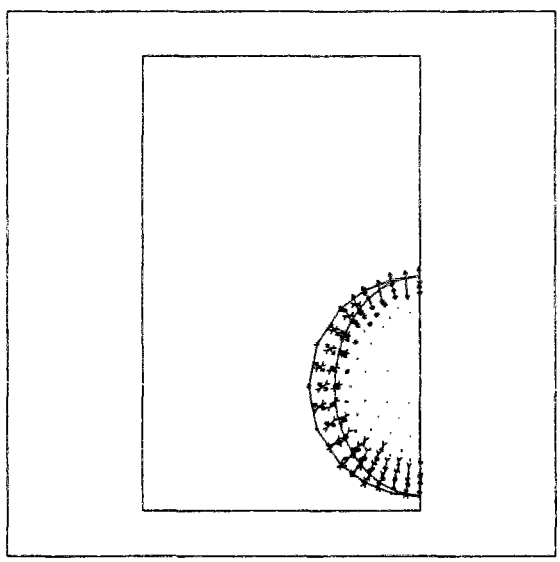


Figure 5-20. Vitesses de déformation. (C/D=1 ; c=2,3 kPa et φ=35,2degrés).

Les comparaisons avec les mécanismes obtenus en centrifugeuse sont plus délicates. On peut dire que les mécanismes obtenus par LIMI restent toujours intérieurs aux géométries obtenues expérimentalement, mais ces dernières sont toujours plus étendues aussi bien en direction de la surface que devant le front. A ce propos, Monnet et al. (1989) signalent qu'à partir de ses travaux expérimentaux Yamazaki (1982) donne comme fourchette pour le rapport entre l'étendue frontale du mécanisme et le diamètre du tunnel des valeurs de 0,4 à 0,6, tandis que nos mécanismes conduisent plutôt à des valeurs de l'ordre de 0,3.

Ce résultat pourrait, selon nous, être expliqué par le processus d'obtention de ces mécanismes. On peut en effet rappeler que la rupture dans les matériaux pulvérulents est toujours très brusque et que, si la pression au front n'est pas rétablie après l'amorce de la rupture, on assiste à la formation d'une cheminée d'écoulement débouchant en surface. Le rétablissement de la pression doit être effectué dans un délai le plus court possible, de façon à ce que les déformations enregistrées soient les plus proches possibles de celles à la rupture ; Chambon (1990) signale que, du fait de la rapidité du phénomène d'effondrement, il est très difficile d'obtenir les déformations correspondant à la rupture (immédiatement avant). Néanmoins, même si les mécanismes expérimentaux sont plus étendus que ceux obtenus par LIMI, des ressemblances existent puisque les mécanismes des essais en centrifugeuse ont aussi une forme de bulbe et les zones de cisaillement sont concentrées sur les surfaces délimitant le mécanisme.

5.3.2 P≠0

Les études portant sur des tunnels partiellement supportés en paroi sont au nombre de trois. Pour la comparaison de nos résultats à des valeurs expérimentales, nous avons repris les résultats d'essais présentés par Chambon et al. (1991).

Le tunnel a un diamètre de 13 m, le paramètre C/D est égal à 4 et P/D est pris égal à 0,1, 0,2 ou 0,4. Les essais ont été réalisés avec le sable standard de l'université de Bochum, qui présent un angle de frottement de 36,5 degrés et un poids volumique de 16,7 kN/m^3 (König et al., 1991). Comme toujours dans le cas où l'on modélise un matériau pulvérulent, une cohésion réduite a été adoptée pour les calculs.

Les valeurs des bornes supérieures données par LIMI, ainsi que les pressions limites obtenues expérimentalement, sont rapportées dans le tableau 5-5.

Tableau 5-5. Bornes supérieures (LIMI) et valeurs expérimentales de la pression de soutènement pour les différentes valeurs de P/D - D=13 m, C/D=4.

P/D	Borne supérieure σ_T (kPa) LIMI	σ_{Tlim} (kPa) Chambon et al. (1991)
0,1	17,6	13,4
0,2	17,7	14,4
0,4	18,1	32,6

Les bornes supérieures fournies par LIMI croissent logiquement avec l'augmentation du paramètre P/D. Néanmoins, cette croissance est beaucoup moins marquée que celle enregistrée dans les essais. L'ordre de grandeur est cohérent avec les valeurs expérimentales, mais des différences importantes existent entre les deux approches. Ainsi, pour P/D=0,1 et 0,2 on obtient des pressions plus élevées que Chambon et al. (1991), tandis que, pour le cas P/D=0,4, le résultat obtenu par LIMI reste relativement éloigné, par défaut, de celui fourni par les essais.

Ces différences sont difficiles à expliquer. Dans les deux premiers cas, pour lesquels les résultats des essais sont inférieurs à ceux obtenus par LIMI, il est probable que l'existence d'une faible cohésion soit responsable de la meilleure stabilité constatée expérimentalement. Pour les mêmes diamètre et profondeur relative, l'utilisation des expressions de Leca et Dormieux (1990) pour le cas P/D=0 donne comme borne supérieure pour la pression de soutènement une pression de 17,5 kPa, valeur très proche, mais inférieure, à celles fournies par LIMI pour P/D=0,1 et P/D=0,2.

Dans le cas P/D=0,4, on pourrait penser que l'écart pourrait être dû à une insuffisance de finesse du maillage. Toutefois, les maillages utilisés sont déjà le résultat de plusieurs raffinements et les différents calculs effectués avec le module LIMI n'ont jamais conduit à des améliorations de l'ordre de 100% par une amélioration de la finesse du maillage. La valeur de 32,6 kPa donnée par Chambon et al. (1991) est beaucoup plus proche des pressions calculées par LIMI en section courante, soit 38,8 kPa.

Les figures 5-21 à 5-26 présentent les résultats graphiques des différents cas étudiés. Comme déjà indiqué, ces maillages sont le résultat de plusieurs raffinements à partir d'un maillage initial. Compte tenu des résultats présentés par Chambon et al. (1991) pour les mécanismes expérimentaux, on s'attendait à observer, au moins pour le cas P/D=0,4, une

propagation en hauteur des déformations. Ce phénomène n'a pas été observé dans nos calculs, nos mécanismes restant toujours proches de la clé du tunnel ; par conséquent, la partie supérieure du maillage a été construite à partir du prolongement par translation du maillage utilisé dans la partie inférieure.

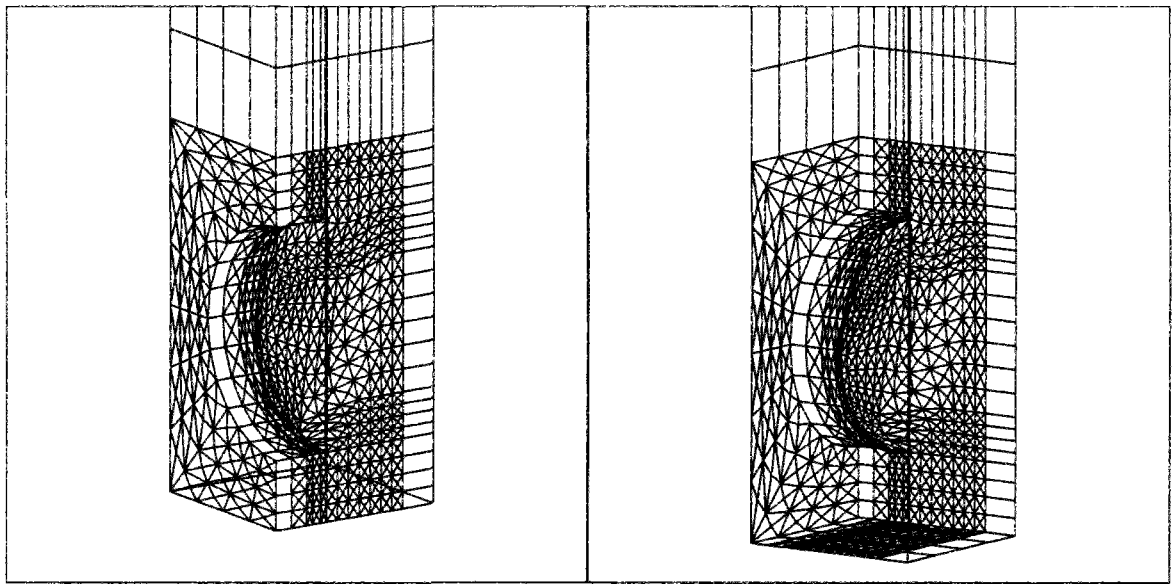


Figure 5-21. Maillages déformés pour le cas P/D=0,1.

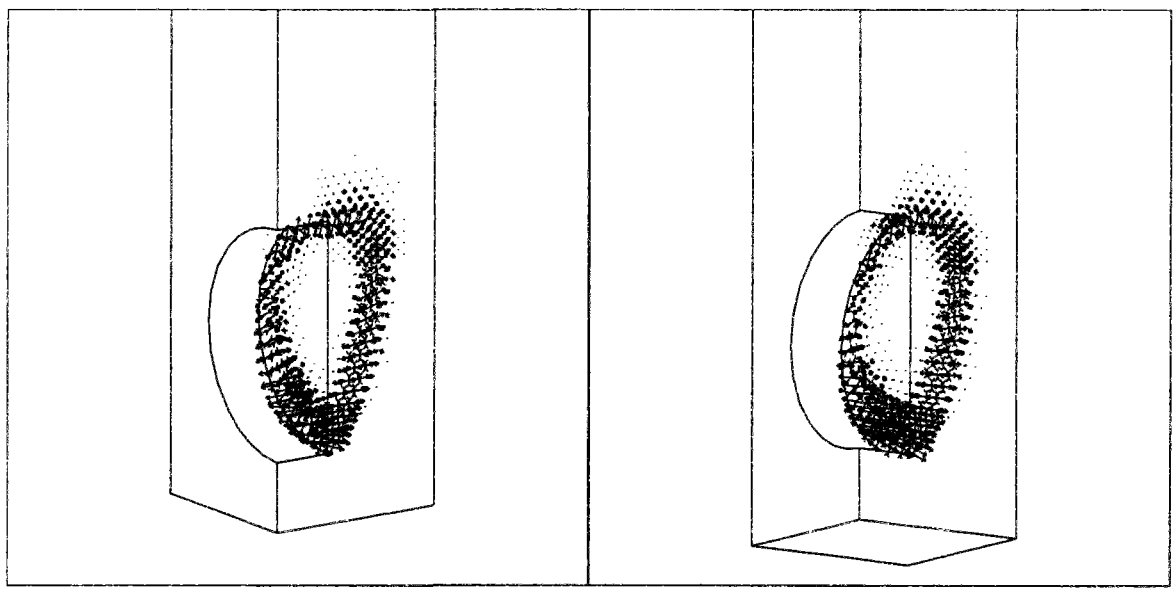


Figure 5-22. Vitesses de déformation pour le cas P/D=0,1.

Les figures 5-21 et 5-22 présentent deux vues des maillages déformés et des vitesses de déformation pour le cas P/D=0,1. L'allure générale est identique à celle trouvée auparavant pour P/D=0. On remarque que la partie de l'ouvrage non supportée ne présente pas de déformation importante. Seule la zone proche de la clé du tunnel fait apparaître des vitesses de

déformation non nulles, mais inférieures à celles qui se développent sur le front de taille. On peut dire que le mouvement de convergence du front a une importance beaucoup plus importante dans le mécanisme que l'effet de la chute du toit ou même de la convergence latérale des parois non soutenues.

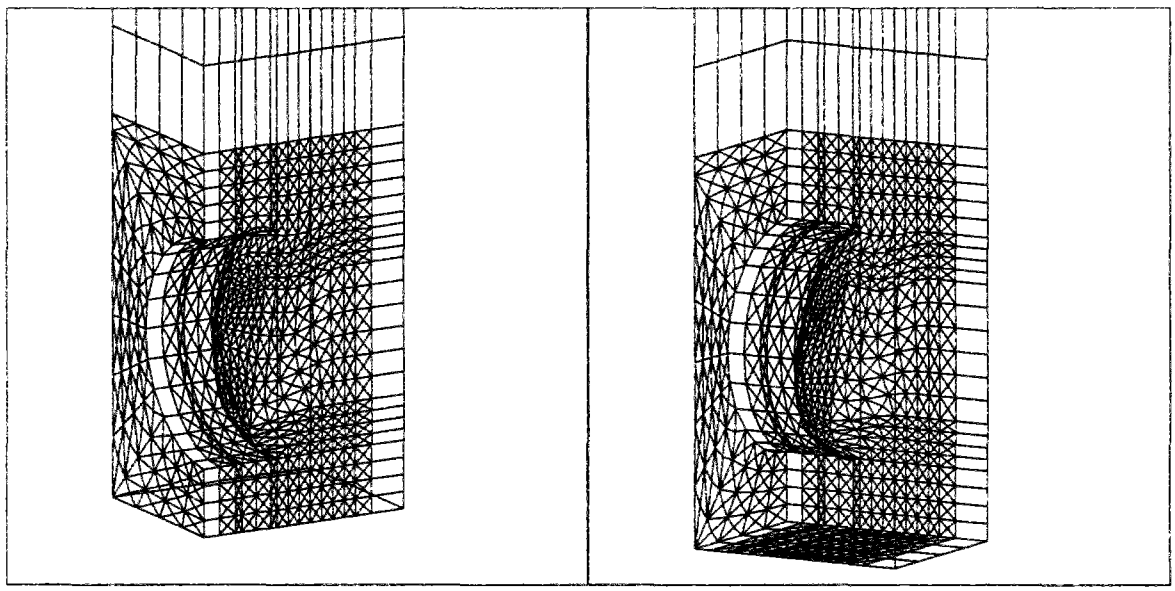


Figure 5-23. Maillages déformés pour le cas P/D=0,2.

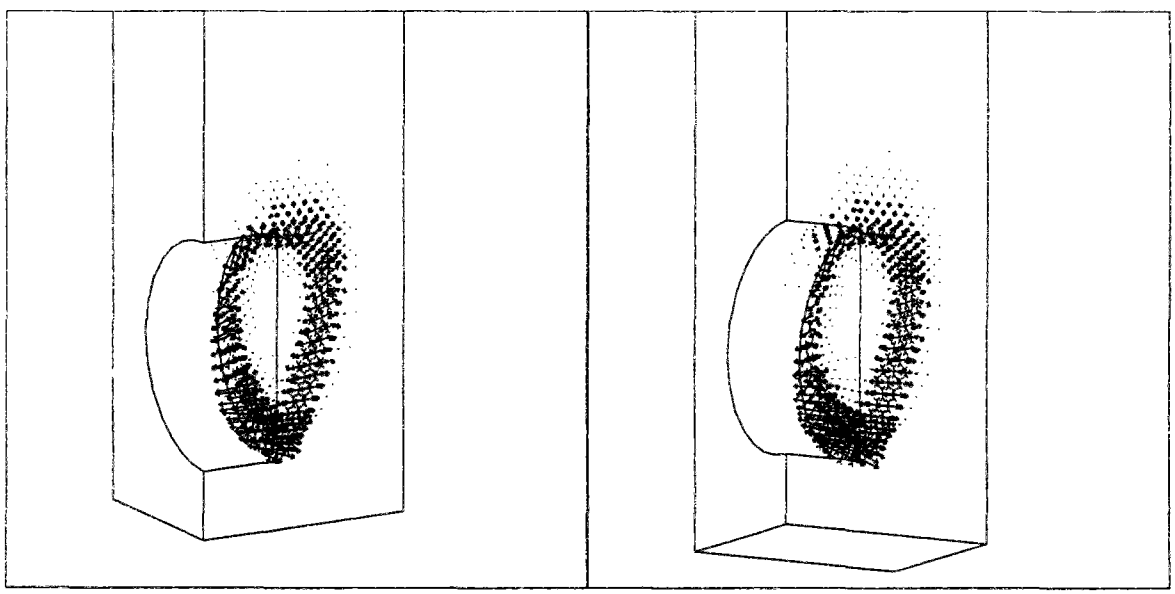


Figure 5-24. Vitesses de déformation pour le cas P/D=0,2.

Pour le cas P/D=0,2 (figures 5-23 et 5-24), on commence à distinguer des déformations dans le toit du tunnel, mais elles restent toujours inférieures à celles calculées sur le front de taille.

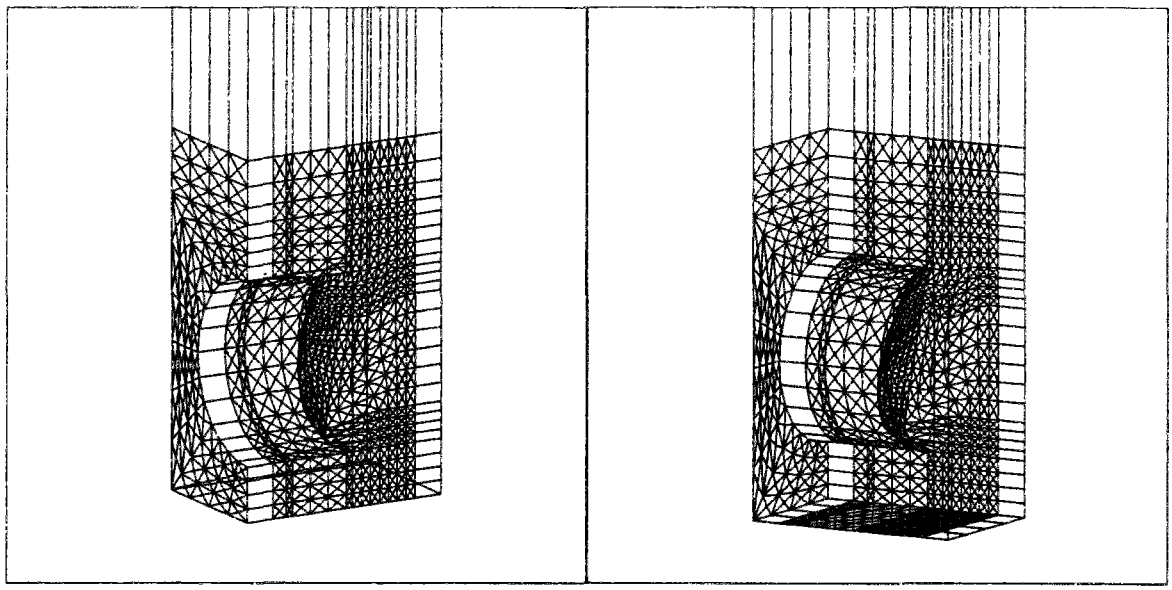


Figure 5-25. Maillages déformés pour le cas P/D=0,4.

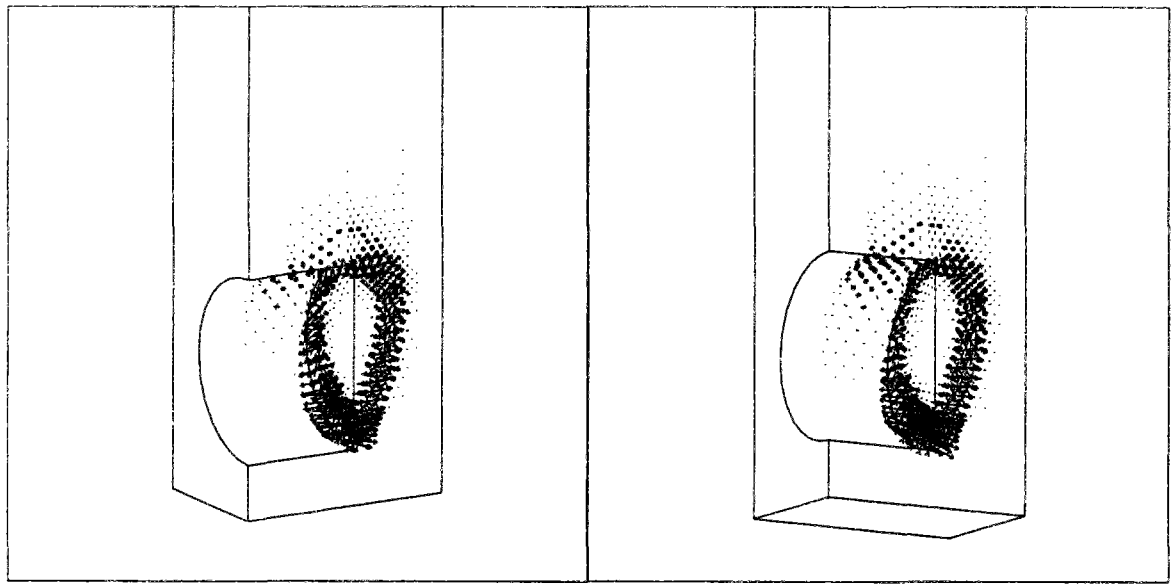


Figure 5-26. Vitesses de déformation pour le cas P/D=0,4.

Finalement, dans le cas P/D=0,4, les mouvements de convergence vers l'intérieur du tunnel, auparavant limités à la clé, commencent à se propager le long des parois latérales. Dans tous les cas, même s'il est possible de distinguer des zones de plus grande amplitude dans la partie non soutenue de l'ouvrage, l'ordre de grandeur de ces mouvements reste toujours sensiblement inférieur à celui obtenu au front de taille.

L'allure des zones de déformation décrites par Chambon et al. (1991) diffère considérablement de celle des mécanismes donnés par LIMI. L'extension en hauteur des zones déformées est significative, allant approximativement de deux diamètres pour le cas

P/D=0,1 jusqu'à la surface pour le cas P/D=0,4. On rappelle qu'avec P/D=0, et pour des valeurs des paramètres de résistance similaires, les zones déformées ne dépassent pas en hauteur un diamètre. Selon Chambon et al. (1991), cette propagation des zones déformées vers la surface, surtout observée pour P/D≥0,2 est due au fait que la rupture s'amorce dans ces cas dans la partie non soutenue de l'ouvrage et non sur le front de taille. Le module LIMI aboutit à des résultats différents, en raison de la prépondérance des déformations du front par rapport à celles de la partie non soutenue de l'ouvrage.

Il existe une possibilité que les conditions aux limites utilisées, empêchant toutes les vitesses de déplacement dans l'ouvrage, limitent les mécanismes et donnent une fausse stabilité au massif. Cependant, nous pensons que ce problème n'existe pas : d'abord, comme on l'a vu, même les mécanismes bidimensionnels ne dépassent jamais une hauteur limitée par rapport à la clé, normalement comprise entre 1 et 2 diamètres ; d'un autre côté, étant donné la cohésion très faible utilisée, il nous semble qu'une liberté suffisante est laissée aux éléments proches de l'ouvrage pour qu'ils puissent se déformer.

5.4 Remarques finales

L'utilisation du module LIMI en conditions tridimensionnelles a permis de mettre en évidence deux points importants.

Le premier est la capacité du module à résoudre des problèmes géométriquement compliqués, et de déterminer automatiquement des mécanismes capables de fournir des bornes supérieures de qualité pour les chargements limites (au moins dans le cas du critère de Mohr-Coulomb).

Le deuxième point est la nécessité d'améliorer le traitement du critère de Tresca. En effet, même si les mécanismes obtenus dans les calculs effectués à l'aide de ce critère sont logiques, le déroulement du calcul nous amène à penser que les éléments utilisés ne sont pas suffisamment performants dans le cas des matériaux incompressibles, ce qui conduit à un certain degré de blocage de la structure. Ainsi, l'utilisation d'éléments respectant en moyenne la condition d'incompressibilité nous semble nécessaire.

Toutefois, il nous semble que, d'une manière générale, l'utilisation tridimensionnelle de LIMI est possible et peut fournir de résultats satisfaisants, y compris pour des conditions géométriques difficiles.

Une dernière remarque peut être faite sur le temps de calcul nécessaire à l'exécution du module LIMI. Ce temps dépend du nombre de chargements testés et est très variable d'un cas à l'autre. Comme référence, nous donnerons le temps moyen de résolution de chaque valeur de chargement pour le calcul présenté dans le paragraphe 5.2.1., pour le cas C/D=2. Chaque valeur de chargement a nécessité une heure et deux minutes de temps de CPU d'une machine SUN Ultra Sparc, pour résoudre 35 itérations sur la suite des vitesses, chacune comportant 3 itérations de relaxation par blocs. Evidemment, ce temps est loin du temps de résidence en machine : du fait des énormes besoins en mémoire de ce calcul, qui ne sont pas supportables par la capacité de mémoire vive de la machine disponible au L.C.P.C., l'utilisation de mémoire sur disque dur fait que le temps de résidence en machine est au moins 3 à 10 fois le temps CPU de calcul. Un calcul comme celui qui a été présenté nécessitait typiquement 3 à 4 jours de résidence dans la machine, ce temps pouvant aller dans certains cas jusqu'à 5 ou 6 jours.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Le travail présenté dans ce mémoire peut être divisé en trois parties : la première traite de l'utilisation et du développement du module LIMI, la deuxième concerne la synthèse et la clarification de certaines méthodes existantes pour le calcul de la stabilité de tunnels creusés en terrain meuble et, finalement, la troisième consiste en l'application du module LIMI au calcul de la stabilité des tunnels creusés en terrain meuble.

En ce qui concerne le développement de LIMI, nous avons apporté des changements au processus de modification du chargement et introduit une nouvelle formulation de la minimisation locale. La conjonction de ces deux aspects a permis une utilisation plus souple et rapide du module. De plus, quelques problèmes de convergence ont été éliminés.

La mise en oeuvre du critère de Tresca tronqué en traction a été aussi une partie de notre travail. La validation des résultats montre que LIMI peut être efficace avec ce type de calculs.

Globalement, LIMI fournit des bornes supérieures des chargements limites de bonne qualité. En effet, à part le cas des calculs tridimensionnels avec le critère de Tresca, les résultats fournis par LIMI ont permis d'approcher ou d'améliorer les bornes supérieures existantes ; de plus, la comparaison avec des résultats expérimentaux concernant la stabilité des tunnels est aussi très encourageante et nous amène à penser que les bornes supérieures fournies par LIMI peuvent, dans le cas d'une utilisation correcte du module, être très proches des charges limites des structures.

Néanmoins, l'utilisation du critère de Tresca ou d'autres critères incompressibles, en géométrie tridimensionnelle, nécessite l'approfondissement des solutions à utiliser pour pouvoir éliminer les problèmes de blocage des maillages.

Le travail effectué sur les résultats existants concernant la stabilité des tunnels creusés en terrain meuble a mis en évidence la dispersion des résultats obtenus par les méthodes traditionnelles. En effet, les méthodes existantes ont montré quelques limitations, soit du point de vue théorique, soit du point de vue de leur application pratique, ce qui encourage le

développement de méthodes rigoureuses au plan théorique et fiables pour les applications pratiques.

C'est dans ce cadre que se situe l'application du module LIMI au calcul de stabilité des tunnels creusés en terrain meuble. Nous pensons pouvoir affirmer que, dans le cas bidimensionnel, les exemples traités dans notre travail ont été suffisamment étendus pour montrer que les résultats fournis par LIMI sont de très bonne qualité. Dans le cas tridimensionnel, du fait de la nécessité de moyens de calcul plus importants, soit du point de vue de la capacité informatique, soit du point de vue du temps de calcul, le nombre d'exemples traités a été naturellement plus réduit. Cependant, les résultats obtenus et leur comparaison aux résultats précédents nous laissent croire que, dans ce cas aussi, le module LIMI peut fournir des bornes limites de qualité.

Ainsi, nous pensons avoir contribué au développement d'un outil de calcul qui, bien utilisé, est puissant et peut contribuer fortement à l'obtention d'un bon encadrement des chargements limites d'une structure. Cependant, quelques améliorations peuvent être envisagées. Dans un premier temps, il faut résoudre les problèmes de blocage apparus pour les critères incompressibles, dans le cas tridimensionnel. Par la suite, il serait souhaitable de pouvoir prendre en compte d'autres types de chargement utilisés en géotechnique, notamment les efforts produits par des écoulements dans le massif. Enfin, il serait très utile de compléter le module LIMI par un module capable de fournir des bornes inférieures des chargements limites : même si notre conviction est que les résultats de LIMI sont très proches des chargements limites, du fait des approximations (majorantes) induites par la régularisation et sa mise en oeuvre numérique, on ne pourra avoir une idée précise du niveau d'approximation des résultats obtenus, dans le cas où les bornes inférieures existantes sont de mauvaise qualité, que si l'on dispose d'un outil d'approche statique.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Abd-Sharifabadi, H (1981) 'Structure visco-plastique en matériau de Norton-Hoff, applications en géophysique et en analyse limite', thèse de Doctorat, E.N.P.C., Paris.

Adachi, T. ; Tamura, T. (1992) 'A limit load analysis by rigid-plastic finite element method', Numerical Models in Geomechanics, Pande & Pietruszcak (eds.), Balkema, pp. 329-338.

Anagnostou, G. ; Kovári, K. (1994) 'The face stability of slurry-shield-driven tunnels', *Tunnelling and Underground Space Technology*, Vol. 9, N° 2, pp. 165-174.

Anagnostou, G. ; Kovári, K. (1996) 'Face stability conditions with earth pressure balanced shields', *Tunnelling and Underground Space Technology*, Vol. 11, N° 2, pp. 165-173.

Anagnostou, G. ; Kovári, K. (1996 a) 'Face stability in slurry and EPB shield tunnelling', Geotechnical aspects of underground construction in soft ground, Mair et Taylor (editeurs), Balkema, Rotterdam.

Arrow, K. J.; Hurwicz, L.; Usawa, H. (1958) 'Studies in nonlinear programming', Stanford University Press, Stanford.

Asaoka, A.; Kodaka, T. ; Pokharel, G. (1994) 'Stability analysis of reinforced soil structures using rigid plastic finite element method', Soils and Foundations, Vol. 31, n° 1, pp. 107-118.

Assadi, A. ; Sloan S. W. (1991) 'Undrained stability of shallow square tunnel', *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 117, n°8, pp. 1152-1173.

Atkinson, J. H. ; Brown, E. T. ; Potts, D. M. (1975) 'Collapse of shallow unlined circular tunnels in dense sand', *Tunnels & Tunnelling* 7, pp. 81-87.

Atkinson, J. H. ; Cairncross, A. M. ; James, R. J. (1974) 'Model tests on shallow tunnels in sand and clay', *Tunnels & Tunnelling*, uillet 1974, pp. 28-32.

Atkinson, J. H. ; Mair, R. J. (1981) 'Soil mechanics aspects of soft ground tunnelling', Ground engineering, Juillet, pp. 20-38.

Atkinson, J. H. ; Potts, D. M. (1977) 'Stability of a shallow circular tunnel in cohesionless soil', Géotechnique, 27, N° 2, pp. 203-215.

Atkinson, J. H. ; Potts, D. M. (1977) 'Subsidence above shallow tunnels in soft ground', *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 103, n° GT4, pp. 307-325.

Atkinson, J. H. ; Potts, D. M. ; Schofield, A. N. (1977) 'Centrifugal model tests on shallow tunnels in sand', *Tunnels & Tunnelling* 9, pp. 59-64.

Attewell, O. B. ; Boden, J. B. (1971) 'Development of stability ratios for tunnels driven in clay', *Tunnels & Tunnelling*, Mai 1971, pp. 195-198.

Atwa, M. (1996) 'Analyse numérique des écoulements d'eau et de la consolidation des sols autour des tunnels creusés dans l'argile', Thèse de Doctorat, E. N. P. C., Paris.

Balla, A. (1963) 'Rock pressure determined from shearing resistance', Proc. Int. Conf. Soil Mechanics, Budapest, pp. 461-471.

Bottero, A. (1982) 'Capacité portante d'une fondation de grande longueur sur un sol cohérent non homogène', Revue Française de Géotechnique, N° 19, pp. 5-20.

Bottero, A. ; Negre, R. ; Pastor, J. ; Turgeman, S. (1980) 'Finite element method and limit analysis theory for soil mechanics problems', Computer Methods in Appl. Mech. And Eng., 22, pp. 131-149.

Britto, A. M. ; Kusakabe, O. (1985) 'Upper bound mechanisms for undrained axisymetric problems', 5th Int. Conference in Numerical Methods in Geomechanics, Nagoya.

Brezis, H. (1973) 'Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de construction dans les espaces de Hilbert', North Holland, Mathematic Studies.

Broms, B. B. ; Bennermark, H. (1967) 'Stability of clay at vertical openings', Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, SM 1, pp. 71-94.

Caquot, A. Kerisel, J. (1956) 'Traité de Mécanique des Sols', Gauthier-Villars, Paris.

Casciaro, R. ; Cascini L. (1982) 'A mixed formulation and mixed finite elements for limit analysis', Int. Journal Numerical Methods Engineering, 18, pp. 211-243.

Cea, J. (1971) 'Optimisation, théorie et algorithmes', Méthodes Mathématiques de l'Informatique, Dunod, Paris.

Ciarlet, P. G. (1990) 'Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation', Masson, Paris.

Chambon, P. (1990) 'Étude sur modèles réduits centrifugés. Application aux tunnels à faible profondeur en terrain meuble pulvérulent', Thèse de Doctorat, Université de Nantes.

Chambon, P. ; Corté, J.-F. (1989). 'Stabilité du front de taille d'un tunnel faiblement enterré : Modélisation en centrifugeuse'. Colloque Tunnels et Micro-tunnels en terrains meubles, Presses de l'ENPC, Paris, pp. 307-315.

Chambon, P. ; Corté, J.-F. (1990). 'Stabilité du front de taille d'un tunnel dans un milieu frottant. Approche cinématique en calcul à la rupture'. Revue Française de Géotechnique, n° 51, pp. 51-59.

Chambon, P. ; Corté, J.-F. (1994). 'Shallow tunnels in cohesionless soil : stability of tunnels face', *Journal of Geotechnical Engineering,* Vol. 120, n° 7, pp. 1148-1165.

Chambon, P. ; Corté, J.-F. ; Garnier, J. ; König, D. (1991) 'Face stability of shallow tunnels in granular soils', Proc. Int. Conf. Centrifuge, Balkema, Rotterdam, pp. 99-106.

Chen, W. F. (1975) 'Limit Analysis et Soil Plasticity', Elsevier.

Cornejo, J. (1989) 'Instability at the face : its repercussions for tunnelling technology', Tunnells and Tunnelling, avril, pp. 69-74.

Coussy, O. ; Salençon, J. (1979) 'Analyse de la stabilité des ouvrages en terre par le calcul à la rupture', Annales des Ponts et Chaussées, 4eme trimestre.

Culioli, J.-C. (1994) 'Introduction à l'optimisation', Ellipses, Paris.

Davis, E. H. (1968) 'Theories of plasticity and the failure of soil masses', Soil Mechanics, selected topics, ed. by Lee, E. K., Butterworths, pp. 341-380.

Davis, E. H. ; Gunn, M. J. ; Mair, R. J. ; Seneviratne, H. N. (1980) 'The stability of shallow tunnels and underground openings in cohesive material', Géotechnique, 30, N° 4, pp. 397-416.

Descoeudres, M (1992) 'Reconnaissances géologiques et géotechniques dans les sols et les roches', Géotechnique des tunnels, E.N.P.C. Paris.

DIN 4126, (1986) Ortbeton-Schlitzwände, Konstruktion und Ausführung.

Drucker, D. C. (1953) 'Limit analysis of two and three dimensional soil mechanics problems', Journal Mech. Phys. Solids, vol 1, n° 4.

Eisenstein, Z. ; Samarasekera, L. (1992) 'Stability of unsupported tunnels in clay', Canadian Geotechnical Journal, 29, pp. 609-613.

Ellstein, A. R. (1986) 'Heading failure of tunnels excavated in soft soil', Tunnels and Tunnelling, Juin, pp. 51-54.

Escatha, Y. ; Mandel, J. (1971) 'Profondeur critique d'éboulement d'un souterrain', C. R. Académie des Sciences de Paris, t. 273, série A, pp. 470-473.

Fortin, M.; Glowinski, R. (1982) 'Méthodes de Lagrangien augmenté. Application à la résolution de problèmes aux limites', Dunod-Bordas, Paris.

Frémond, M.; Friâa, A. (1982) 'Les méthodes statique et cinématique en calcul à la rupture et analyse limite', *Journal de Mécanique théorique et appliquée,* vol. 1, N° 5, pp. 881-905.

Friâa, A. (1979) 'La loi de Norton-Hoff généralisée en plasticité et viscoplasticité', Thèse de doctorat d'État, Université Pierre et Marie Curie, Paris.

Garnier, D. (1995) 'Analyse par la théorie du calcul à la rupture des facteurs de réduction de la capacité portante de fondations superficielles', Thèse de Doctorat, E. N. P. C., Paris.

Galczynski, S. ; Wojaszek, A. (1989) 'Loads of high depth tunnels in a soft ground medium', in Tunnels et micro-tunnels en terrain meuble, du chantier à la théorie. Presses des Ponts et Chaussées, pp. 332-338.

Glowinski, R.; Le Tallec P. (1989) 'Augmented Lagrangian and operator-splitting methods in non-linear mechanics', Studies in applied mathematics, Philadelphia.

Glowinski, R.; Lions, J. L.; Tremolières R. (1981) 'Numerical analysis of variational inequalities', North-Holland, Amsterdam, New York.

Gudehus, G ; Melix, P (1986) 'Standsicherheitsnachweise fuer Bauzustaende von Tunneln in schwach kohaesivem Gebirge. STUVA, Forschung + Praxis 30, pp. 142-152.

Guennouni, T. (1982) 'Matériau de Norton-Hoff pour divers critères de la plasticité de la mécanique des sols', Thèse de Doctorat, E. N. P. C., Paris.

Guennouni, T. ; Le Tallec, P. (1982) 'Calcul à la rupture : régularisation de Norton-Hoff et Lagrangien Augmenté', Jl. de Mécanique théorique et appliquée, Vol. 2, N° 1, pp. 75-99.

Gunn, M. J. (1980) 'Limit analysis of undrained stability problems using a very small computer', Proc. Symp. on computer applications to geotechnical problems in highway enginneering, Cambridge University.

Hestenes M. (1969) 'Multiplier and gradient methods', J. Optim. Theory Appl., Vol. 4, n° 5, pp. 303-320.

Hill, R. (1950) 'The mathematical theory of plasticity', Clarendon Press, Oxford.

Hoff, H.J. (1954) 'Aproximate analysis of structures in presence of moderately large creep deformations'. Quart. Appl. Math., vol 12, n° 1, pp. 9-55.

Horn, M. (1961) 'Horizontaler Erddruck auf senkrechte Abschlußflächen von Tunnelröhren. Landeskonferenz des ungarischen Tiefbauindustrie, Budapest, (Traduction allemande, STUVA Düsseldorf).

Humbert, P. (1989) 'CESAR-LCPC: Un code général de calcul par éléments finis', Bulletin de liaison des Laboratoires de Ponts et Chaussées, n° 160.

Jancsecz, S. ; Steiner, W. (1994) 'Face support for a large mix-shield in heterogeneous ground conditions', Tunnelling 94, London.

Janssen, H. A. (1895) 'Versuche über Getreidedruck in Silozellen', Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, XXXIX, N° 35, pp. 1045-1049.

Jiang, G.-L. (1992) 'Application de l'analyse limite à l'étude de stabilité des massifs de sol', Thèse de Doctorat, E.N.P.C., Paris.

Jiang, G.-L. (1994) 'Regularized method in limit analysis', Journal of Engineering Mechanics, Vol. 120, N° 6, pp. 1179-1197.

Jiang, G.-L.; Magnan, J.-P. (à paraître) 'Stability analysis of enbankments : comparision of limit analysis with methods of slices', Géotechnique, accepté pour publication.

Jiang, G.-L.; Magnan, J.-P.; Mestat, P. (1992) 'Quelques applications de l'analyse limite cinématique en éléments finis', Géotechnique et Informatique, Presses E.N.P.C., Paris, pp. 245-252.

Katzenbach, R. ; Breth, H. (1981) 'Non-linear 3-D analysis for NATM in Franckfurt clay', Proc. 10th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Stockholm, pp. 315-318.

Kimura, T. ; Mair, R. J. (1981) 'Centrifugal testing of model tunnels in soft clay'', Proc. 10th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Stockholm, pp. 319-322.

Ko, H. Y. ; Davidson, L. W. (1973) 'Bearing capacity of footing in plane strain', J. Soil Mechanics and Found. Div., ASCE, vol 99, n° SM1.

König, D. ; Güttler, U. ; Jessberger, H. L. (1991) 'Stress redistributions during tunnel and shaft constructions', Centrifuge 91, Ed. Ko, Balkema, Rotterdam, pp. 128-135.

Kusakabe, O. ; Kimura, T ; Yamagushi, H. (1981) 'Bearing capacity of slopes under strip loads on the top surfaces', Soils and foundations, Vol. 21, n° 4, pp. 29-41.

Le Tallec, P. (1986) 'Numerical solution of viscoplastic flow problems by augmented Lagrangian', IMA J. Num. Anal., n°6, pp. 185-219.

Le Tallec, P. ; Ravachol, M. (1987) 'Approximation par éléments finis d'écoulements progressivement incompressibles', C. R. Académie de Sciences de Paris, Série I, pp. 697-700.

Leca, E. ; Dormieux, L. (1990) 'Upper and lower bound solutions for the face stability of shallow circular tunnels in frictional material', *Géotechnique*, 40, n° 4, pp. 581-606.

Leca, E. ; Dormieux, L. (1992) 'Contribution à l'étude de la stabilité du front de taille d'un tunnel en milieu cohérent', Revue Française de Géotechnique, N° 61, pp. 5-16.

Leca, E. ; Panet, M. (1988) 'Application du calcul à la rupture à la stabilité du front de taille d'un tunnel', Revue Française de Géotechnique, N° 43, pp. 5-19.

Lysmer, J. (1970) 'Limit analysis of plane problems in soil mechanics', Journal of the Soil Mechanics and Found. Div., ASCE, SM4, pp. 1311-1334.

Mackenzie, D. ; Shi, J. ; Boyle, J. T. (1994) 'Finite element modelling for limit analysis by the elastic compensation method', Computers & Structures, Vol. 51, N° 4, pp. 403-410.

Mair, R. J. (1979) 'Centrifugal modelling of tunnel construction in soft clay', Thèse de Doctorat, Cambridge University.

Mair, R. J. ; Gunn, M. J. ; O'Reilly, M. P. (1981) 'Ground mouvements around shallow tunnels in soft clay', Proc. 10th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Stockholm, pp. 323-328.

Mandel, J. (1978) 'Propriétés mécaniques des matériaux', Eyrolles, Paris.

Mandel, J. ; Salençon, J. (1972) 'Force portante d'un sol sur une assise rigide (étude théorique), *Géotechnique*, 22, n° 1, pp. 79-93.

Matar, M. ; Salençon, J. (1977) 'Capacité portante d'une semelle filante sur un sol purement cohérent d'épaisseur limitée et de cohésion variable avec la profondeur', Revue Française de Géotechnique, N° 1, pp. 79-93.

Matar, M. ; Salençon, J. (1979) 'Capacité portante des semelles filantes', Revue Française de Géotechnique, N° 9, pp. 51-76.

Melix, P (1987) 'Modellversuche und Berechnungen zur Standsicherheit oerflächennaher Tunnel. Veröff. des Inst. für Boden und Felsmechanik der Univ. Fridericiana in Karlsruhe, 103.

Mengeringhausen, T. (1992) 'Application des méthodes de régularisation en calcul à la rupture, à la stabilité de tunnels peu profonds', Mémoire de D.E.A., E.N.P.C., Paris.

Mohkam, M. ; Wong, Y. W. (1989) 'Three dimensional stability analysis of the tunnel face under fluide pressure', Numerical Methods in Geomechanics, ed. Swoboda, Balkema, Rotterdam, pp. 2271-2278.

Monnet, J. ; Chaffois, S. ; Chapeau, C., Mohkam, M. (1989) 'Theoretical and experimental studies of a tunnel face in a gravel site. Part II : experimental and numerical analysis', Numerical Models in Geomechanics, Ed. Pietruszczak et Pande, Elsevier, pp. 505-514.

Mori, A. ; Tamura, M. ; Kurhara, K ; Shibata, H. (1991) 'A suitable slurry pressure in slurry-type shield tunnelling', Tunnelling 91, Elsevier, pp. 361-369.

Mühlhaus, H.-B. (1985) 'Lower bound solutions for circular tunnels in two and three dimensions', Rock Mechanics and Rock Engineering 18, pp. 37-52.

Nagtegaal, J. C. ; Parks, D. M. ; Rice, J. R. (1974) 'On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range', Computer Methods in Appl. Mech. And Eng., 4, pp. 153-177.

Narita, K. ; Yamagushi, H. (1992) 'Three-dimensional bearing capacity analysis of foundations by use of a method of slices', Soils and Foundations, Vol. 32, N° 4, pp. 143-155.

Needleman, A. ; Shih, C. F. (1978) 'A finite element method for plane strain deformations of uncompressible solids', Computer Methods in Appl. Mech. And Eng., 15, pp. 223-240.

Norton, F.H. (1929) 'The creep of steel at high temperature', Mc Graw Hill, New York.

Pastor, J. (1978) 'Analyse limite: détermination numérique de solutions statiques complètes. Application au talus vertical'. Journal de Mécanique Appliquée, vol. 2, n°2, pp. 167-196.

Pastor, J. (1983) 'Application de la théorie de l'analyse limite aux milieux isotropes et orthotropes de révolution'. Thèse de Doctorat d'Etat, Institut National Polytechnique de Grenoble.

Peck, R. B. (1969) 'Deep excavations and tunnelling in soft ground'. Proc. 7th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Mexico, State of the Art volume, pp. 225-290.

Powell, M. J. D. (1969); A method for nonlinear constraints in minimisation problems' in Optimisation, Chapitre 19, R. Fletcher ed., Academic Press, New York.

Proctor, R. V. ; White, T. L. (1977) Earth tunneling with steel supports. Ed. Proctor and White, Commercial Shearing, Inc., Ohio.

Robert, M. C. NG ; LO, K. Y. (1985) 'The measurements of soil parameters relevant to tunnelling in clays', Can. Geotech. J., 22, pp. 375-391.

Salençon, J. (1969) 'Pression limite dans un tube présentat un défaut de centrage', Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, série de sciences techniques, Vol. XVII, n ° 7, pp. 347-353.

Salençon, J. (1983) 'Calcul à la rupture et analyse limite', Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

Salençon, J. (1990) 'An introduction to the yield design theory and its applications to soil mechanics', *Eur. J. Mech., A/Solids*, 9, n°5, pp. 477-500.

Salençon, J. (1994) 'Introduction à l'élasto-plasticité et au calcul à la rupture', École Polytechnique, Edition du Bicentenaire.

Salençon, J. (1994 a), 'Approche théorique du calcul aux états limites ultimes', Les grands systèmes des sciences et de la technologie, Recherches en Mathématiques appliquées, RMA 28, pp 701-722.

Salençon, J. ; Matar, M. (1982) 'Capacité portante des fondations superficielles circulaires', Jl. Mec. Théorique et Appliquée, Vol. 1, n° 2, pp. 237-267.

Salençon, J. ; Pecker, A. (1995) 'Ultimate bearing capacity of shallow foundations under inclined and eccentric loads. Part II: purely cohesive soils without tensile strength', *Eur. J Mech., A/Solids*, 14, n° 3,pp. 377-396.

Samarasekera, L. ; Eisenstein, Z. (1992) 'Pore pressures around tunnels in clay', Canadian Geotechnical Journal, 29, pp. 819-831.

Schofield, A. N. (1980) 'Cambridge geotechnical centrifuge operations', Géotechnique, 30, n° 3, pp. 227-268.

Seneviratne, H. N. (1979) 'Deformations and pore pressure variations around shallow tunnels in soft clay'. Thèse de Doctorat, Cambridge University.

Sassi, K. (1996) 'Contributions à l'étude des mécanismes de déformation des pentes instables', Thèse de Doctorat, I.N.S.A., Lyon.

Shield, R. T. 'Plastic potential and Prandtl bearing capacity solution', J. Appl. Mech. Trans ASME, Vol. 21, pp. 193-194.

Sloan, S. W. (1988) 'Limit analysis of plane problems in soil mechanics', Num. Methods in Geomechanics, pp. 257-264.

Sloan, S. W. ; Assadi, A. (1991) 'Undrained stability of a square tunnel in a soil whose strenght increases linearly with depth', *Computer and Geotechnics*, 12, pp. 321-346.

Sloan, S. W. ; Assadi, A., Purushothaman, N. (1990) 'Undrained stability of a trapdoor', *Géotechnique* 40, N° 1, pp. 45-62.

Sloan, S. W. ; Assadi, A. (1993) 'Stability of shallow tunnels in soft ground'. Proceedings of the Wroth Memorial Symposium, Oxford, July 1992. Predictive Soil Mechanics, Thomas Thelford, London, pp. 644-663.

Steiner, W. (1993) 'Experience with an 11.6 meter diameter mix-shield : the importance of the ground-machine interface', Procceedings of the Rapid Excavation and Tunnelling Conference, juin 13-17.

Strang, G., Teman, R. (1980) 'Duality and relaxation in the variational problems of plasticity', J. Mécanique, 19, pp. 493-527.

Suquet, M. (1920) 'Sur la détermination des efforts auxquels les voûtes des souterrains sont appelées résister', Annales des Ponts et Chaussées, I, pp. 96-103.

Suquet, M. (1927) 'Pression exercée par les terres sur les voûtes des souterrains', Annales de Ponts et Chaussées, V, pp. 191-198.

Suquet, M. (1928) 'Pression exercée par les terres sur les voûtes des souterrains', Note complémentaire, Annales de Ponts et Chaussées, VI, pp. 179-187

Suquet, P.M. (1978) 'Existence et régularité des solutions des équations de la plasticité parfaite'. Thèse de Doctorat de 3ème cycle. Université de Pierre et Marie Curie, Paris.

Suquet, P.M. (1981) 'Sur les équations de la plasticité: existence et régularité des solutions', *Journal de Mécanique,* Vol. 20, N° 1, pp3-39.

Széchy, K. (1966) 'The art of tunnelling', Akdémiai Kiadó, Budapest.

Taylor, D. W. (1948). Fundamentals of Soil Mechanics, John Wiley.

Terzaghi, K. (1951) 'Mécanique théorique des sols', Dunod, Paris.

Terzaghi, K. (1977) 'Rock defects and loads on tunnel supports', Rock tunneling with steel supports, ed. Proctor and White, Commercial Shearing, Inc., Ohio.

Terzaghi, K. ; Jelinek, R. (1954) 'Theoretische Bodenmechanik', Springer-Verlag, Berlin.

Turgeman, S. (1983) 'Contribution au calcul des charges limites en milieux isotropes et orthotropes de révolution par une approche cinématique numérique, Thèse de Doctorat ès Sciences, Grenoble.

Vardoulakis, I. ; Graf, B. ; Gudehus, G. (1981) 'Trap-door problem with dry sand : a statical approach based upon model test kinematics', International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 5, pp. 57-78.

Wineman, A. S. ; Pipkin, A. C. (1964) 'Material symmetry restrictions on constitutive equations', Arch. Rat. Mech. An., vol 17, pp. 184-214.

Yamazaki, H. (1982) 'Stability of tunnel face and control of excavation in mud shield tunnelling', Thèse de Doctorat, Tokyo.

ANNEXE 1

Le calcul qui suit est destiné à voir si, pour le cas du critère de Mohr-Coulomb tronqué en compression, la minimisation peut être réduite à seulement un de ses termes. Le problème à résoudre est de la forme (on retient seulement la partie du domaine tel que $d_I \geq d_{III}$) :

$$\underset{d_I, d_{III}}{\text{Min}} \quad \{\frac{1}{p}\pi(\underline{\underline{d}}) + \frac{r}{2} d_i . d_i - A_i . d_i\} \qquad \text{A (1-1)}$$

π étant définie comme :

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = H . tr(\underline{\underline{d}}) \qquad \text{si } tr(\underline{\underline{d}}) \geq (|d_I| + |d_{III}|) \sin\varphi \qquad \text{A (1-2)}$$

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = \frac{2c\cos(\varphi) - C(1 - \sin(\varphi))}{1 + \sin(\varphi)} d_I - C d_{III}$$

$$\text{si } tr(\underline{\underline{d}}) < (|d_I| + |d_{III}|) \sin\varphi \wedge d_I \geq 0 \qquad \text{A (1-3)}$$

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = -C(d_I + d_{III}) \qquad \text{si } (d_I < 0 \wedge d_{III} < 0) \qquad \text{A (1-4)}$$

La minimisation de la fonctionnelle A (1-1) doit être effectuée en remplaçant la fonction π par ses différentes valeurs, et dans chaque domaine d'existence correspondant.

Si π prend la forme A (1-2), on obtiendra une valeur pour le minimum, située entre $-M_1$ et zéro, M_1 désignant une valeur positive ou égale à zéro, fonction de c, φ, A_I, A_{II} et A_{III}.

Pour montrer que la minimisation globale peut ne pas dépendre de la valeur de la troncature en compression, C , il suffit de montrer que, quelle que soit la valeur de A_i, c et φ, on peut trouver une valeur de C pour laquelle la fonction définie en A (1-1) est positive. Dans ce but on commence par réécrire cette fonction, en prenant π définie comme en A (1-3) :

$$F_1 = \frac{r}{2} d_i . d_i - A_i . d_i + \frac{2c\cos(\varphi) - C(1 - \sin(\varphi))}{1 + \sin(\varphi)} d_I - C d_{III}$$

Le premier terme de F est clairement positif, il reste à savoir s'il en est de même pour la partie $-A_i . d_i + \frac{2c\cos(\varphi) - C(1 - \sin(\varphi))}{1 + \sin(\varphi)} d_I - C d_{III}$. On pose :

$$-A_i . d_i + \frac{2c\cos(\varphi) - C(1 - \sin(\varphi))}{1 + \sin(\varphi)} d_I - C d_{III} \geq 0$$

et on résout par rapport à C, ce qui donne :

$$-[(1 - \sin(\varphi)) d_I + (1 + \sin(\varphi)) d_{III}] C \geq (1 + \sin(\varphi))(A_i . d_i + \frac{2c\cos(\varphi)}{1 + \sin(\varphi)} d_I)$$

Comme le domaine de validité est tel que $tr(\underline{\underline{d}}) < (|d_I|+|d_{III}|)\sin\varphi \wedge d_I \geq 0$, on arrive à la conclusion que $(1-\sin(\varphi))d_I + (1+\sin(\varphi))d_{III} \leq 0$, et ainsi on peut écrire :

$$C \geq \frac{(1+\sin(\varphi))(A_i.d_i + \frac{2c\cos(\varphi)}{1+\sin(\varphi)}d_I)}{-[(1-\sin(\phi))d_I + (1+\sin(\varphi))d_{III}]} \qquad \text{A (1-5)}$$

On peut dire ainsi que : $\forall A_i, \forall c, \forall \varphi, \quad \exists C : F_I \geq 0$, c'est à dire que, quelles que soient les valeurs des constantes A et des coefficients c et φ, il y a toujours une valeur de C pour laquelle la fonction F_I ne prend que des valeurs positives.

On pourrait penser que, du fait de la relation A (1-5), il faudrait faire tendre C vers l'infini, dans les cas où les d_i prennent des valeurs de plus en plus grandes. En réalité, pour ces valeurs la démarche employée n'a pas lieu car comme la fonction F_I est de forme parabolique on peut garantir que, pour des valeurs (d_I, d_{III}) de module supérieur à une valeur déterminée, $F_I>0$.

Une démarche similaire à celle utilisée montrerait que l'on peut aussi arriver aux mêmes résultats en utilisant la fonction π définie par l'expression A (1-4).

Ainsi, pour que le minimum global de la fonction se trouve dans la zone définie par A (1-2), il suffirait de prendre la plus grande valeur de C ; on a montré ainsi que la minimisation locale avec un critère de Mohr-Coulomb tronqué en compression peut toujours être indépendante de cette troncature, et que, dans le cas où on n'a pas besoin de connaître les résultats de son influence, on peut éviter de l'inclure dans le processus de minimisation locale de la puissance dissipée.