



**HAL**  
open science

# Modélisation numérique des structures en béton armé

José Ramon Orengo

► **To cite this version:**

José Ramon Orengo. Modélisation numérique des structures en béton armé. Sciences de la Terre. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1990. Français. NNT : . tel-00529365

**HAL Id: tel-00529365**

**<https://pastel.hal.science/tel-00529365>**

Submitted on 25 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

147

NS 15176

(3)

X

Don

**Thèse**

présentée par

**José Ramon ORENGO**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'ÉCOLE NATIONALE DES  
PONTS ET CHAUSSES**

Sujet de la thèse

**MODELISATION NUMERIQUE DES  
STRUCTURES EN BETON ARME**

soutenue le 25 avril 1990

devant le jury composé de :

Messieurs

**HALPHEN B.**

Président

**MAZARS J.**

Rapporteur

**REYNOUARD J. M.**

Rapporteur

**ACKER P.**

Examineur

**PLISKIN L.**

Examineur



14



## **AVANT-PROPOS**

Le présent travail a été possible grâce à un Accord de Coopération Scientifique et Technique entre les Républiques d'Argentine et de France, pays auxquels je suis profondément reconnaissant.

Le fait d'avoir développé ce travail à temps partiel entre les deux pays a empêché l'utilisation continue des ressources informatiques du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.

C'est pourquoi on a développé un programme d'éléments finis particulier pour calculs non-linéaires, qui nous a permis de valider numériquement les modèles proposés dans cette thèse.



## REMERCIEMENTS

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur B. HALPHEN, Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées et Chef du Service de Mécanique du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, pour ses précieux conseils, pour l'intérêt qu'il a apporté à ce travail, pour avoir assuré les conditions indispensables à la réalisation de cette thèse ainsi que d'avoir accepté de présider le Jury.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur J. MAZARS, Professeur à l'Ecole Normale Supérieure de Cachan et Monsieur J.M. REYNOUARD, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon qui ont eu l'amabilité d'accepter la charge d'être les rapporteurs de cette thèse.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs P. ACKER, Chef de la Division Matériaux et Structures pour Ouvrages d'Art du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées et L. PLISKIN, Directeur Délégué du Génie Civil, Groupe ATILH pour leur participation au Jury.

Je remercie également l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées pour m'avoir admis à la formation pour la recherche, et le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées pour avoir mis à ma disposition les moyens nécessaires au bon déroulement de ce travail.

Mes vifs remerciements vont à Madame RAZUREL pour le soin apporté à la dactylographie et la mise en page du rapport.

Je remercie chaleureusement tous les amis du Service de Mécanique, avec un très spécial merci à Monsieur P. ARGOUL.

Cette thèse n'existerait pas sans l'affection de ma famille. Je remercie de tout mon coeur ma femme Silvia, et mes enfants. A ceux qui m'ont donné leur soutien moral et à ceux qui ont su me comprendre et m'attendre, je dédie ce travail.



## TABLE DES MATIERES

<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	P.	1
<b>CHAPITRE I - Comportement Mécanique du béton - Modélisation Constitutive</b>		
1.1. Introduction	P.	5
1.2. Comportement Mécanique Observé	P.	6
1.2.1. Comportement uniaxial	P.	6
1.2.2. Comportement biaxial	P.	17
1.2.3. Comportement triaxial	P.	20
1.2.4. Conclusions	P.	21
1.3. Modélisation Constitutive	P.	22
1.3.1. La rupture	P.	23
1.3.2. Comportement pré-rupture	P.	26
1.3.3. Comportement post-rupture	P.	31
1.3.4. Critères d'évaluation des modèles	P.	33
1.3.5. Conclusions	P.	34
<b>CHAPITRE II - Modèle d'Elasticité Incrémentale</b>		
2.1. Généralités	P.	36
2.2. Modèle Constitutif Hypoélastique Orthotrope	P.	38
2.2.1. Introduction	P.	38
2.2.2. Equations constitutives incrémentales	P.	39
2.2.3. Relation contrainte-déformation uniaxiale équivalente	P.	44
2.2.4. Coefficient du Poisson	P.	46
2.2.5. Critère de rupture	P.	47
2.2.6. Chemin de la rupture	P.	51
2.2.7. Extension au cas tridimensionnel	P.	52
2.2.8. Cycles de charge-décharge	P.	53
2.3. Critique des Modèles Orthotropes	P.	58
2.4. Simulation d'Essais	P.	59
2.5. Analyse des Résultats et Conclusions	P.	67



**CHAPITRE III - Modélisation du béton en compression -  
Plasticité avec écrouissage**

3.1. Introduction	P. 68
3.2. Plasticité Incrementale	P. 70
3.2.1. Formulation classique	P. 70
3.2.2. Modèles de surface limite	P. 75
3.3. Modèle de Plasticité Incrementale	P. 80
3.3.1. Choix du modèle	P. 80
3.3.2. Modèles avec paramètres multiples d'écrouissage	P. 82
3.4. Proposition sur l'Evaluation du Module d'Ecrouissage	P. 93
3.5. Comportement Post-rupture	P. 96
3.6. Simulation d'Essais	P. 97
3.7. Analyse des Résultats et Conclusions	P. 103

**CHAPITRE IV - Modélisation du béton en traction -  
Modélisation du béton armé en traction**

4.1. Introduction	P. 104
4.2. Modèle de Fissure Distribuée	P. 107
4.2.1. Relation contrainte-déformation de fissure	P. 110
4.2.2. Relation contrainte-déformation pour le béton fissuré	P. 116
4.2.3. Paramètres pour la fissuration	P. 117
4.2.4. Propositions pour l'utilisation du modèle	P. 121
4.3. Modèle de Fissure Distribuée pour le Béton Armé	P. 123
4.3.1. Introduction	P. 123
4.3.2. Formulation proposée pour le modèle	P. 126
4.3.2.1. Loi de comportement de la fissure	P. 128
4.3.2.2. Loi de comportement du béton entre fissures	P. 137
4.3.2.3. Loi de comportement de l'acier	P. 137
4.3.3. Equation constitutive du modèle	P. 138
4.4. Conclusions	P. 138

**CHAPITRE V - Simulation numérique des structures en béton armé**

5.1. Introduction	P. 141
5.2. Flexion et Traction dans une Poutre Encastree	P. 142
5.3. Tirants en Traction	P. 149

<b>5.4. Panneau WT3</b>	P. 161
<b>5.5. Panneau DWT2</b>	P. 169
<b>CHAPITRE VI - Le programme d'éléments finis</b>	P. 179
<b>Conclusion générale</b>	P. 183
<b>Bibliographie</b>	P. 188



## INTRODUCTION GENERALE

Dans les années récentes le béton armé a été de plus en plus utilisé pour la construction de structures complexes : bâtiments élevés, ponts de grande portée, plate-formes pour l'exploitation pétrolière, centrales nucléaires, etc.

Ces structures, étant de géométrie complexe et soumises à des chargements -environnementaux et d'exploitation - qui peuvent entraîner le matériau à des conditions au-delà de sa limite élastique, ont suscité le besoin de mieux connaître le comportement du béton armé.

Pour ces situations, les méthodes de calcul conventionnelles ou celles que donnent les réglementations actuelles ne suffisent pas à donner une représentation fiable de la relation charge-déplacement, de l'état de fissuration, de la résistance et du mode de rupture des structures.

La quantification de ces phénomènes, nécessaire pour concevoir et réaliser ces structures de façon sûre, économique et durable devra être faite au moyen de méthodes numériques, notamment la méthode des éléments finis.

Malgré le grand développement de cette méthode dans le cadre de l'analyse non-linéaire, ses possibilités sont encore limitées dans la modélisation de la réponse du béton armé, matériau composé ayant un comportement particulièrement complexe.

Cette modélisation doit inclure les caractéristiques du comportement du matériau que l'on observe dans la réalité :

- Relation contrainte déformation non-linéaire, y compris les cas d'états de contraintes multiaxiales ;
- Condition de rupture pour des états de contraintes multiaxiales ;
- Représentation du radoucissement post-rupture et de la fissuration ;
- Effets d'interaction entre le béton et l'armature ;
- Effets dépendants du temps : fluage, retrait et variation de température.

Bien que différentes recherches aient permis de mieux représenter le comportement du béton, ces recherches se poursuivent pour surmonter certaines difficultés encore présentes.

Le présent travail se situe dans ce contexte ; notre objectif est l'élaboration d'un modèle de comportement pour le béton armé, conçu pour le calcul des structures par méthodes numériques en essayant d'incorporer la plupart des facteurs de leur réponse non-linéaire.

On souhaite des résultats fiables pour les valeurs de contraintes et déformations - fissuration incluse - sur tout le trajet de chargement auquel les structures sont soumises, même dans le cas où la rupture, totale ou partielle, est atteinte.

Dans ce travail les hypothèses de notre modélisation sont :

- Comportement des structures à court terme. En effet, on ne considérera pas les déformations différées. Le retrait et le fluage du béton sont exclus de notre analyse ;
- On se place dans l'hypothèse des petits déplacements et toutes les équations s'expriment dans la configuration initiale de la structure ;
- On ne considère ni les effets dynamiques ni la variation de la température.

Le béton armé est un matériau composé typique, deux composantes étant considérées au niveau macroscopique: le béton et l'armature.

La connaissance du comportement acquise expérimentalement pour le béton et les différentes formulations pour modéliser ce comportement font l'objet du premier chapitre : il y est d'abord brièvement présentée la réponse du matériau dans des conditions de chargement monotones ou cycliques, uni ou multiaxiales, puis un aperçu sur les théories qui sont souvent utilisées pour modéliser cette réponse.

L'hypoélasticité et la plasticité incrémentale, ayant été retenues dans notre travail pour la modélisation du béton forment le sujet des deux chapitres suivants.

Le deuxième chapitre est consacré à l'hypoélasticité : on présente un modèle hypoélastique orthotrope pour les cas tridimensionnel, d'axisymétrie et d'état plan de contraintes. On propose une formulation relative au calcul des paramètres qui interviennent dans les expressions des modules tangents du matériau. Enfin, le modèle étant fondé sur le concept de déformation uniaxiale équivalente, on y a incorporé la réponse pour divers cas de chargement cyclique sans effets dynamiques.

L'implantation du modèle dans un programme d'éléments finis nous a permis de comparer sa réponse avec des données expérimentales pour différents cas de charge.

La modélisation de la réponse non-linéaire du béton au moyen de la plasticité incrémentale est le sujet du troisième chapitre.

A partir d'une analyse de la bibliographie nous avons choisi un modèle basé sur la formulation classique, avec plusieurs paramètres d'écroutissage et la surface de Chen-Chen pour les surfaces de limite d'élasticité initiale, limite d'élasticité actuelle et de rupture.

Ce modèle nécessite la connaissance des modules plastiques associés à chaque paramètre d'écroutissage ; une proposition a été faite pour leur calcul à partir d'une fonction exprimée avec les paramètres du matériau qui définissent l'évolution du domaine d'élasticité actuel. Les performances du modèle sont testées par comparaison de sa réponse avec les résultats expérimentaux obtenus dans des essais en condition de contraintes planes.

La fissuration du béton est l'un des facteurs qui contribue le plus à la réponse non-linéaire du matériau.

Deux formulations sont habituellement utilisées pour la modéliser : la fissuration discrète et la fissuration distribuée.

Bien que la modélisation discrète puisse représenter ce phénomène de façon réaliste elle est peu utilisée : en effet, la redéfinition de la topologie du maillage d'éléments finis, dont on a besoin pour suivre l'évolution des fissures, entraîne des difficultés et de gros efforts de calcul.

La fissuration distribuée qui permet une propagation automatique des fissures avec un effort de calcul relativement faible est d'un emploi plus fréquent.

La première partie du chapitre IV est consacrée à la modélisation de cette fissuration distribuée : on y résume la méthode dite locale qui permet la prise en considération de plusieurs directions de fissure en un point du matériau. Pour chaque direction de fissure on introduit une loi de "comportement de fissure" avec laquelle on peut simuler le radoucissement du matériau et l'effet d'engrènement à l'interface. Le critère de radoucissement utilisé incorpore la dimension de l'élément fini pour obtenir l'objectivité vis-à-vis du maillage utilisé.

La présence de l'armature au sein du béton rend la modélisation de la fissuration plus compliquée en raison de l'interaction entre celle-ci et le béton fissuré ; la compatibilité des déformations entre le béton fissuré et l'armature, l'effet de goujon et le glissement entre l'acier et le béton doivent s'incorporer à la réponse du matériau.

On aborde ce sujet dans la seconde partie du chapitre IV . Nous y proposons, et à notre connaissance de façon originale, un modèle de comportement pour le "matériau béton armé". La " partie béton " du matériau composé est modélisée comme un matériau élastoplastique avec écrouissage, qui peut se fissurer de façon distribuée. On lui incorpore un comportement de fissure à partir d'un diagramme de radoucissement qui, outre l'énergie de rupture en traction , renferme l'énergie consommée par le glissement de l'acier.

Le modèle considère aussi l'effet de goujon et peut inclure n'importe quelle loi d'engrènement pour la fissure.

La liaison en parallèle de l'armature avec le béton fissuré incorpore directement à notre formulation l'effet dit "tension stiffening".

Pour l'analyse numérique des structures on a élaboré dans le cadre du présent travail un programme d'éléments finis non-linéaire pour des applications en élasticité incrémentale et plasticité incrémentale.

Finalement, après avoir implanté le modèle dans ce programme d' éléments finis, on doit tester les performances numériques du modèle.

A cette validation est consacré le cinquième chapitre : on montre d'abord l'objectivité du modèle vis à vis du maillage d'éléments finis ; puis on confronte les résultats numériques avec les données obtenues surtrois cas de structures qui ont fait l'objet d'études expérimentales très poussées.

<p style="text-align: center;"><b>CHAPITRE I</b></p> <p style="text-align: center;"><b>COMPORTEMENT MECANIQUE DU BETON</b></p> <p style="text-align: center;"><b>MODELISATION CONSTITUTIVE</b></p>
--

### 1.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre sont succinctement présentées les caractéristiques fondamentales du béton ainsi que sa réponse lorsqu'il est soumis à des états de contrainte uni, bi ou tri-axiaux.

Ces connaissances, indispensables au développement mathématique de la modélisation, ont deux objectifs majeurs :

- permettre que le comportement du matériau traduit par une modélisation mathématique soit conforme à la réalité observée ;
- procurer l'information nécessaire à la détermination des constantes des matériaux qui apparaissent dans les modèles mathématiques constitutifs.

Bien qu'il soit possible d'établir un modèle sans tenir compte des effets qui interviennent à l'échelle microscopique, ceux-ci sont cependant les facteurs déterminants de la réponse mécanique du béton. C'est pourquoi leur connaissance sera d'un grand intérêt pour la modélisation du comportement du matériau. Nous les mentionnerons donc avec la relation fondamentale que nous utiliserons pour la modélisation, à savoir la relation contrainte-déformation.

Dans le présent travail, ces phénomènes et leur modélisation seront limités au comportement à court terme, c'est-à-dire lorsque le matériau est soumis à des charges quasi instantanées, mais sans effet dynamique.

Pour finir, nous envisagerons les diverses manières de représenter le comportement du béton afin de situer les modèles que nous analyserons aux chapitres suivants dans le contexte général.



## 1.2 COMPORTEMENT MECANIQUE OBSERVE

Le béton présente des caractéristiques variables de déformation sous diverses conditions et niveaux de charge.

Une grande part de la connaissance des mécanismes de son comportement résulte d'observations expérimentales réalisées sur des essais. L'accumulation des connaissances empiriques et l'expérience acquise sont des éléments très importants à prendre en considération lors de la modélisation analytique du comportement du béton.

Nous présentons maintenant le comportement observé en fonction du type de sollicitation.

### 1.2.1 Comportement uniaxial

#### Compression uniaxiale

La caractéristique dominante du comportement d'un matériau fragile et hétérogène comme le béton est la fissuration. La microfissuration qui se développe dans le mortier et aux interfaces entre le mortier et le granulat est une des causes principales déterminantes de la relation contrainte-déformation, réf. (1 et 2).

Le phénomène de microfissuration suscite un comportement non linéaire, de sorte que la loi constitutive contrainte-déformation est caractérisée par une période élastique initiale suivie d'un comportement inélastique avec écrouissage et perte progressive de rigidité suivie par une étape de radoucissement. La microfissuration est également responsable du phénomène d'augmentation du volume sous des charges de compression, phénomène connu sous le nom de dilatance, réf. (3 et 4).

Cette microfissuration existe dans le béton avant sa "mise en contrainte" par un chargement extérieur au matériau. Son origine est due à différents mécanismes physico-chimiques, réf. (11) qui ne seront pas traités dans le présent travail.

Ces microfissures ne varient pas jusqu'à ce que la charge appliquée atteigne approximativement 30 % de la valeur maximum qui provoque la rupture. A cette étape, la relation contrainte-déformation est linéaire.

Ce niveau de 30 % de la contrainte maximum est dit "début de la fissuration localisée" et divers chercheurs l'ont proposé comme limite de l'élasticité.

A l'étape qui suit, avec l'augmentation de la charge qui atteint des valeurs situées entre 30 et 50 % de la charge maximum, les fissures d'interface commencent à croître en nombre, largeur et longueur du fait de la concentration des contraintes dont elles sont le siège. Les fissures dans le mortier restent rares, la relation contrainte-déformation cessant d'être linéaire.

Pour des contraintes comprises entre 50 et 75 % de la contrainte maximum, les fissures d'interface des agrégats proches commencent à se rejoindre en formant des fissures dans le mortier, tandis que d'autres fissures d'interface continuent à grandir.

Entre 75 et 90 % de la charge ultime, il y a une nette augmentation des fissures dans le mortier. Elles deviennent plus longues et commencent à se rejoindre ; constituant, avec celles déjà formées à l'étape précédente, un maillage continu distribué dans le matériau. A cette étape, la déformation volumique (variation de volume par unité de volume) présente un comportement particulier : le signe de la vitesse de déformation volumique change, entraînant une expansion volumique pour la contrainte maximum ou des contraintes avoisinantes.

Les figures I.1 et I.2 montrent les étapes de la fissuration.

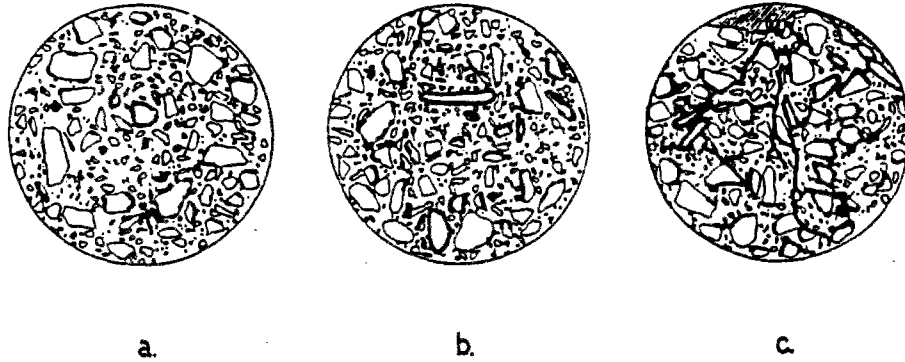


FIG. I.1 Schéma de fissuration pour compression simple -  
d'après Hsu et al (1).

- a) Avant mise en charge.
- b) Avant contrainte maximum.
- c) Après contrainte maximum.

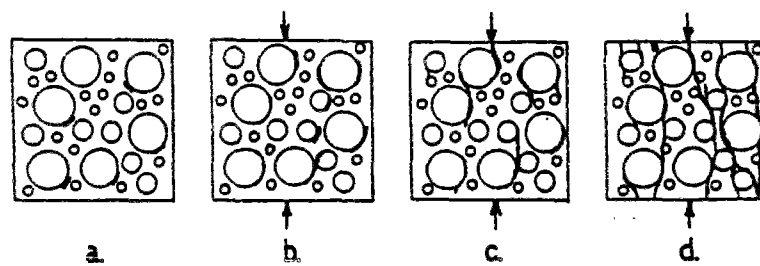


FIG. I.2. Evolution de la fissuration à partir d'examen  
pour rayons X - d'après Liu et al (2).

- a) Avant la charge.
- b) 65 % de la charge ultime.
- c) 85 % de la charge ultime.
- d) Charge ultime.

Des chercheurs ont mis en évidence un résultat intéressant : la pâte de ciment seule ne présente pas d'augmentation de volume en compression uniaxiale ; au cours d'un tel essai, l'éprouvette poursuit sa consolidation jusqu'à la rupture, réf. (5). Comme le granulat, tout seul, il ne subit aucune augmentation de volume au niveau de contraintes auquel il est soumis à l'intérieur du béton, l'expansion volumique, ou dilatance, doit être regardée comme un effet de l'hétérogénéité, qui a son origine dans le mélange de la pâte de ciment à des agrégats.

Le phénomène induit à l'interface entre l'agrégat et la pâte de ciment, et la taille de cet agrégat, c'est-à-dire la nature hétérogène du matériau, sont les facteurs déterminants du comportement inélastique du béton.

Nous ne nous intéresserons dans la suite de ce travail qu'à la modélisation du comportement macroscopique du béton, tel qu'il est représenté en compression simple à la figure I.3. Il ne faut toutefois pas oublier que le facteur essentiel, eu égard aux propriétés mécaniques de ce matériau, est son comportement microscopique qui, en définitive, détermine la relation contrainte-déformation dont la connaissance est indispensable pour le traitement des structures par la mécanique des milieux continus.

La représentation macroscopique du comportement du béton qu'on observe à partir d'un essai de compression simple, supposé homogène et considérant comme propriété du matériau tout le phénomène de microfissuration déjà mentionné, est offerte par la figure I.3.

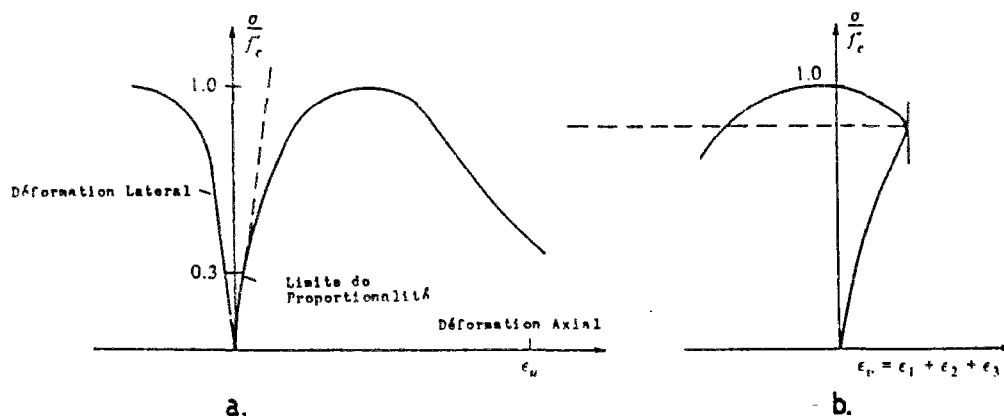


FIG. I.3 Comportement en compression simple.

a) Relation contrainte-déformation.

b) Relation contrainte-déformation volumique.

Se fondant sur des observations expérimentales, certains chercheurs, réf. (1) et (6) s'accordent pour expliquer l'évolution mécanique du béton jusqu'à la rupture comme suit :

- les fissures d'interface ne peuvent être cause de la rupture puisque celles-ci sont séparées les unes des autres ;
- la rupture ne peut se produire que si suffisamment de fissures d'interface sont reliées à des fissures du mortier ;
- le développement du maillage de fissures n'entraîne pas une perte immédiate de la capacité de résistance du matériau puisque, à cette étape, le matériau se comporte comme une structure hautement hyperstatique.

A mesure que la fissuration progresse, le nombre de chemins de contraintes possibles diminue et par voie de conséquence, l'intensité de la contrainte et l'amplitude de la déformation - le long de ces chemins restants - augmentent plus rapidement que la charge extérieure appliquée.

Lorsque le nombre de chemins de contraintes a suffisamment diminué, la capacité de résistance du matériau s'épuise et la courbe contrainte-déformation commence à descendre.

Ces considérations sur le processus de rupture permettent une interprétation du comportement de radoucissement consécutif à la contrainte maximum : la propagation de la fissuration et la diminution du nombre de chemins de contraintes sont responsables de l'épuisement graduel de la résistance, donc de la partie descendante de la courbe contrainte-déformation. Et ce phénomène ne peut pas être considéré comme une propriété du matériau.

Cette affirmation est fortement étayée par des résultats expérimentaux qui démontrent que dans la région pré-pic, la relation contrainte-déformation est la même, quelle que soit la hauteur de l'éprouvette utilisée pour l'essai, alors que dans la région post-pic, les résultats sont affectés par celle-ci réf. (7).

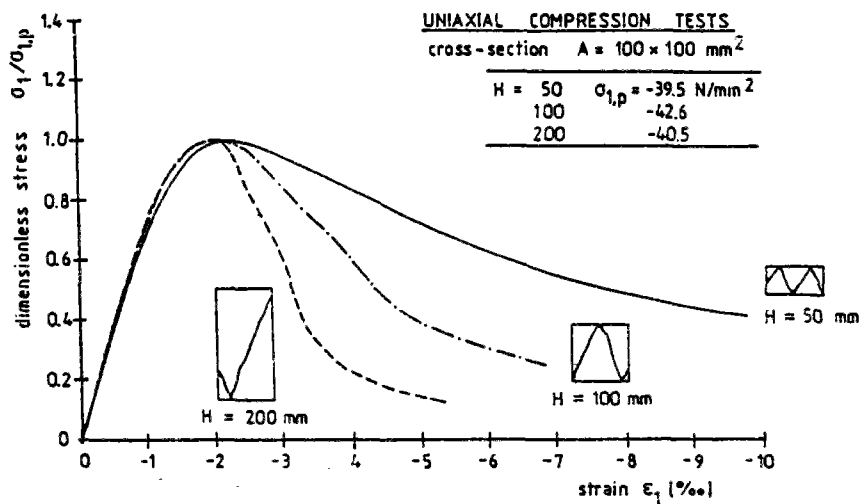


FIG. I.4 Relation contrainte-déformation en compression uniaxiale pour différents élancements, d'après Van Mier (7).

Il est aussi possible d'expliquer l'influence de la hauteur de l'éprouvette sur la partie descendante de la courbe contrainte-déformation en se fondant sur l'apparition de plans de rupture, Habib réf.(8), résultant de bandes de cisaillement provoquées par la localisation de déformations.

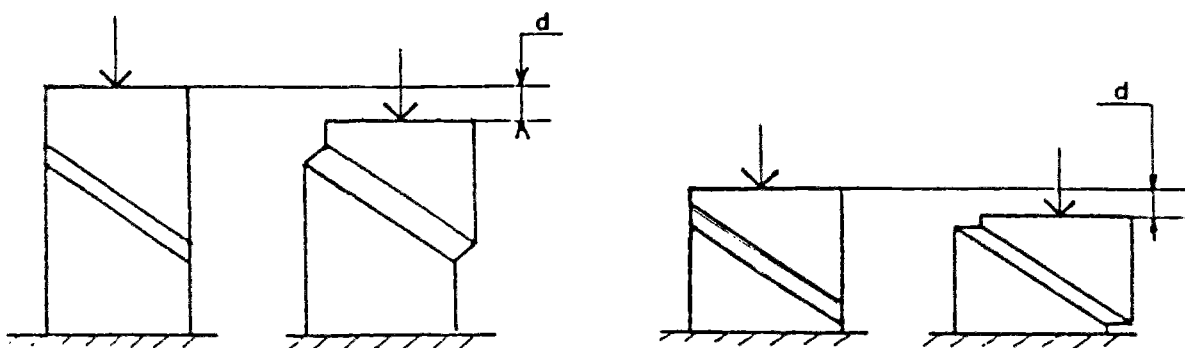


FIG. I.5 Essais de compression simple interprétés par le concept de plans de rupture.

Le déplacement  $d$  est le même pour les deux éprouvettes, mais la déformation calculée par le rapport déplacement-hauteur de l'éprouvette ne le sera pas.

Cette explication n'est pas complètement convaincante pour le béton en compression uniaxiale car on n'observe pas ce type de localisation au cours de tels essais.

Alors qu'un effort considérable a été fait pour déterminer les relations contrainte-déformation sous des charges ou des déformations monotones croissantes en compression, on dispose de beaucoup moins d'informations sur la réponse du béton sous des charges de compression cycliques.

L'effet des charges variables sur le matériau peut être divisé en deux catégories : fatigue due à un nombre élevé de cycles de charges à relativement

faibles niveaux de contrainte et effets de déformations incrémentales qui se produisent pour un petit nombre de cycles de charge à hauts niveaux de contrainte, chacun d'eux occasionnant des déformations additionnelles.

Les essais à faible nombre de cycles, réf. (9) et (10), conduisent aux conclusions suivantes :

- il y a une courbe enveloppe, courbe sur laquelle se trouvent les points de début des décharges et les points de fin des recharges. Etant donné la dispersion naturelle des essais on peut admettre qu'il existe une enveloppe unique pour toutes les histoires de charge et que celle-ci coïncide avec la courbe contrainte-déformation pour des charges monotones ;
- la courbe de décharge présente une concavité orientée dans le sens contraire à celle de la courbe de charge. Elle a une rigidité élevée quand la décharge commence et une courbure qui augmente lorsque la décharge continue. Pour la contrainte nulle il reste une déformation plastique résiduelle. On admet que cette déformation, le point de décharge et une direction verticale pour la tangente en ce point, suffisent pour la détermination de cette courbe de décharge, réf. (10) ;
- à la recharge, la courbe modifie sa courbure par rapport à celle de la décharge. La courbure augmente, d'abord lentement, puis de façon plus accentuée avec l'augmentation de la contrainte et finalement très rapidement à partir de l'intersection avec la courbe de décharge ;
- le point d'intersection des courbes de décharge et de recharge s'appelle "point commun". Le lieu des points communs de chaque courbe de décharge et de la première recharge est une limite supérieure pour les points communs, dite limite des points communs, réf. (10) ;
- si pour une courbe de décharge on effectue des cycles de chargement à des niveaux inférieurs de contraintes, tels qu'ils sont indiqués en Fig. I.6, les points communs se stabilisent sur un point dit point de stabilité. Le lieu des points de stabilité constitue une limite inférieure pour les points communs, qu'on appelle - réf. (10) - limite de stabilité ;



- la position du point commun et celle du point de stabilité dépendent principalement de la contrainte maximum et de la déformation atteinte lors de la charge préalable et elles sont indépendantes de la valeur de la contrainte minimum à laquelle commence la recharge ;
- si les cycles de chargement produisent des contraintes supérieures à la limite de stabilité, les déformations s'accroissent ;
- si les contraintes n'atteignent pas cette limite, il se forme un cycle fermé d'hystérésis pour les cycles de chargement ;
- Tout ce comportement est représenté en Fig. I.6 et I.7.

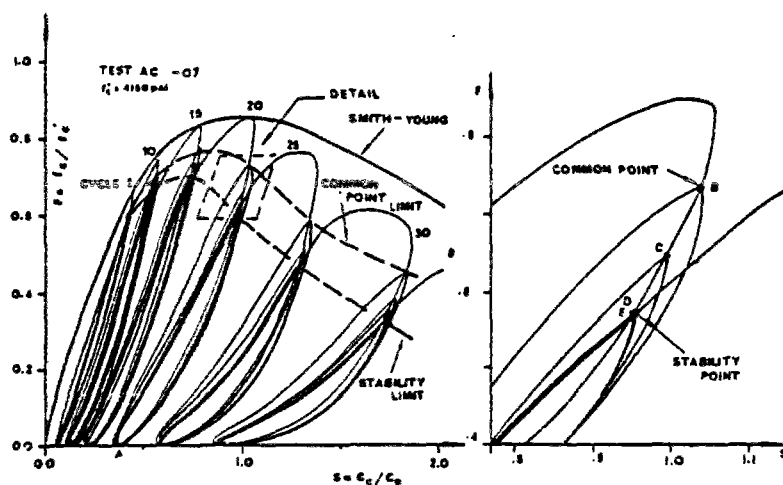


FIG. I.6 Relation contrainte-déformation pour une histoire de charge complète ; d'après Karsan et Jirsa (10)

FIG. I.7 Détail.

- les comportements en charge et en décharge - avec leurs différentes variations de rigidité - doit être interprété à travers le phénomène de microfissuration déjà mentionné, essentiellement par le fait que les lèvres de la fissure se déforment de manière non réversible, - donc non superposable - du fait de la libération du champ des contraintes initiales qui existent dans le béton avant l'application des charges, réf. (11) ;

- la perte de rigidité et la rupture du matériau au cours des cycles peuvent être comprises grâce au processus mécanique de variation et de diminution du nombre des chemins de contrainte avec la progression de la microfissuration.

En compression uniaxiale, le coefficient de Poisson  $\nu$  varie entre 0,15 et 0,22. Il reste constant jusqu'à des contraintes avoisinant 80 % de la contrainte maximum,  $f_c$ , à partir de laquelle le coefficient de Poisson "apparent" commence à augmenter.

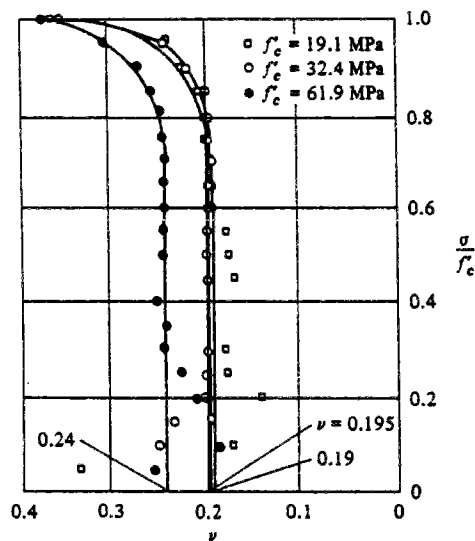


FIG. I.8 Variation du coefficient de Poisson avec le niveau de contrainte; d'après Chen (3).

#### Comportement uniaxial en traction.

Dans un essai à déformation contrôlée la forme des courbes contrainte-déformation est similaire à celle des courbes de compression précédemment décrite, mais elle montre un comportement linéaire presque jusqu'à la contrainte maximum de la traction, réf. (3).

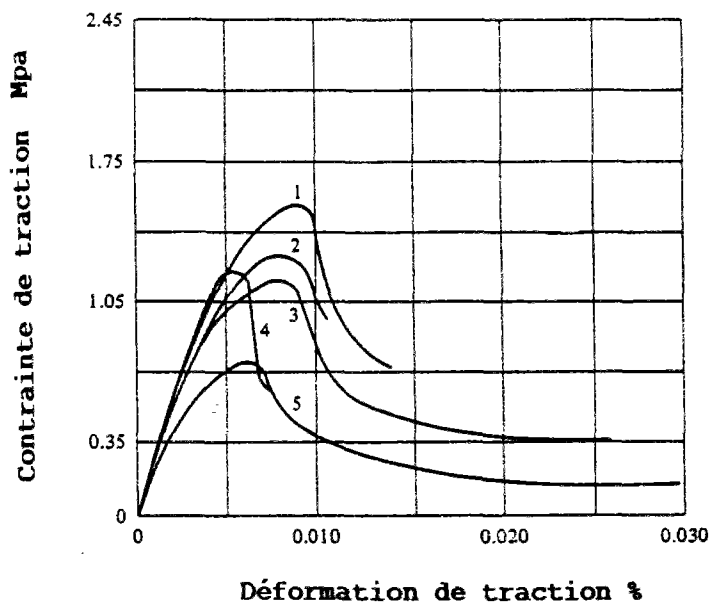


FIG. I.9 Essai de traction uniaxiale

Relation contrainte-déformation, réf. (3).

On peut distinguer trois états de comportement :

- ETAT I : Qui correspond à des contraintes inférieures à 60 % de la résistance maximum à la traction, l'augmentation de la microfissuration pouvant être négligée, et qui présente un comportement élastique linéaire. La fin de cette période marque la limite élastique.
- ETAT II : Qui correspond à des contraintes au-delà de la limite élastique. Dans un essai à déformation imposée, les microfissures d'interface commencent à croître suivant un processus stable, la courbe contrainte-déformation perdant sa linéarité. A partir d'une contrainte supérieure à 75 % de la résistance maximum commence un processus instable de propagation de fissures. La direction de la fissuration est normale à la direction de la contrainte de traction. Par voie de conséquence, la propagation des fissures entraîne une diminution de la surface résistante du matériau et on arrive au maximum de la courbe contrainte-déformation.

- ETAT III : Le développement de fissures se localise dans une petite zone du matériau, un processus de propagation rapide de fissures débutant. Ce processus est produit par celui de la réunion de quelques fissures. Une diminution de la contrainte sous déformation croissante commence à se produire.

La courbe commençant à descendre, la détermination expérimentale est difficile, réf. (3) et (12), en raison de la vitesse de la propagation des fissures.

Le rapport entre les résistances uniaxiales à la compression et à la traction varie entre les limites de  $10 \leq f'_c/f'_t \leq 20$ .

Le module d'élasticité en traction est un peu plus grand qu'en compression, le coefficient de Poisson un peu moins grand et la déformation maximum oscille entre 0,07 % et 0,15 %.

### 1.2.2. Comportement biaxial

Il existe de nombreuses structures dont le comportement peut être approché à l'aide d'états plans de contrainte ou de déformation ; le comportement du béton s'avère donc d'un grand intérêt dans cette situation. Les essais correspondants montrent que :

- le béton présente un autre comportement que dans le cas uniaxial de traction ou de compression et qu'il dépend du rapport de la contrainte biaxiale ;
- pour des états de contrainte plane et compression biaxiale, par rapport au comportement uniaxial, on observe les modifications suivantes :
  - . un accroissement de la résistance maximum qui peut aller jusqu'à environ 25 % ;
  - . un accroissement de la rigidité initiale qui peut être attribué à l'effet Poisson ;
  - . un accroissement de la déformation correspondant à la contrainte maximum, qui indique une diminution de l'endommagement interne.

- pour des états de compression-traction, la résistance à la compression diminue de manière quasi linéaire avec l'augmentation de la contrainte de tractions appliquée. On peut de même observer une diminution de la déformation pic pour cette raison.
- pour des états biaxiaux de traction, la résistance est presque la même que pour l'état uniaxial ;
- la formation de fissures a lieu approximativement dans une direction normale à la déformation maximum de traction.

Le comportement biaxial peut être résumé par les graphiques des essais de Kupfer (13) et de Nelissen (3) dans la fig. I.10.

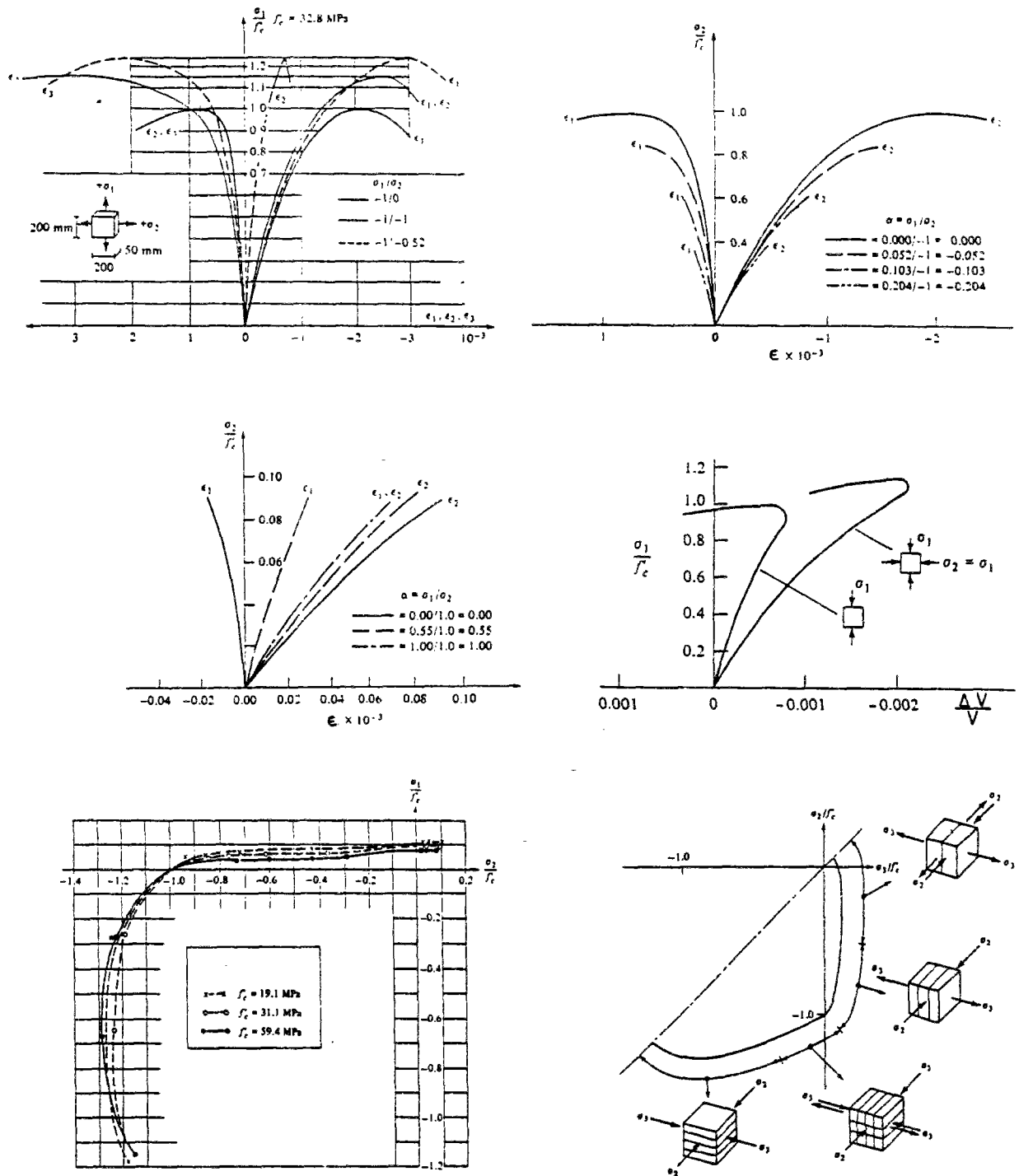


FIG. I.10 Comportement en compression biaxial, réf. (3).

- a) Relation  $\sigma$ - $\epsilon$  pour essais de compression-compression.
- b) Relation  $\sigma$ - $\epsilon$  pour essais de compression-traction.
- c) Relation  $\sigma$ - $\epsilon$  pour essais de traction-traction.
- d) Relation  $\sigma$ - $\epsilon$  volumique.
- e) Enveloppe biaxiale pour différents bétons.
- f) Modes de rupture pour chargements biaxiaux.

### 1.2.3. Comportement triaxial

Des essais ont montré qu'en fonction du degré de confinement, le béton peut apparaître comme fragile, plastique avec radoucissement, ou plastique avec écrouissage si l'on considère le comportement macroscopique, fig. I.11 a).

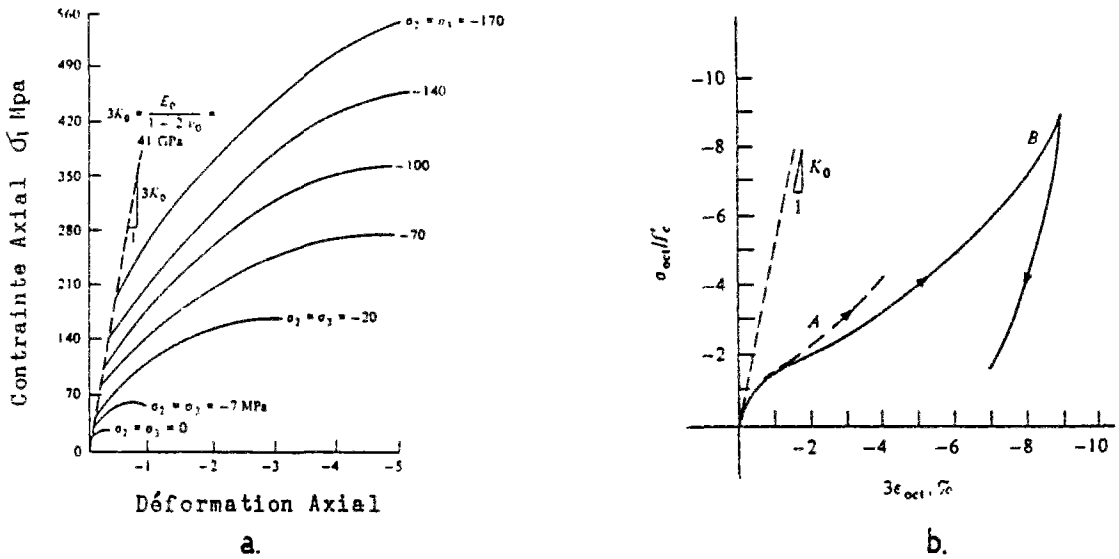


FIG. I.11 Relation contrainte-déformation pour le cas triaxial, réf. (3).

- a) Différentes valeurs de  $\sigma_2 = \sigma_3$ .
- b) Cas hydrostatique.

En fait, ce comportement est dû au développement de la microfissuration à l'interface des agrégats, dans des conditions de confinement.

Le processus de formation de fissures et le frottement entre les lèvres de celles-ci dus au fait du confinement rend le béton plus ductile et en augmente la résistance.

Un essai en compression hydrostatique permet d'observer le comportement suivant :

- on observe une première phase quasi élastique, une deuxième phase où se produit l'effondrement progressif de la structure microporeuse de la pâte et une troisième dans laquelle se produit un raidissement provoqué par la disparition des vides, fig. I.11 b).

Du fait de la rupture de la cohésion entre les grains, une décharge réduirait le matériau en poussière.

Les expérimentations montrent également que le chargement triaxial rend le matériau orthotrope, réf. (14).

Dans le cas de compression triaxiale générale, la rupture a lieu sur un plan parallèle à la contrainte de compression la plus grande ou perpendiculaire à la plus petite (la plus grande en traction).

#### **1.2.4. Conclusions**

Le béton a un comportement mécanique non linéaire et partiellement irréversible.

On peut expliquer ce comportement par la microfissuration aux interfaces entre granulats et mortier, par le développement de cette microfissuration, par le frottement entre les lèvres des fissures et par la non réversibilité de la déformation de celles-ci :

- le développement de la microfissuration qui dépendra des directions des sollicitations rend le matériau anisotrope ce qui contribue à la dépendance de la réponse vis-à-vis du chemin suivi par les sollicitations ;
- la résistance du béton à la compression et la déformation pic correspondante varient pour les états multiaxiaux de contrainte par rapport aux valeurs obtenues en compression uniaxiale.

On observe une augmentation de ces valeurs dans des conditions de compression multiaxiale et une diminution de ces valeurs dans des conditions de traction-compression combinées. Ces variations sont mises en évidence sur les schémas des figures I.10 et I.11.

- La résistance à la traction uniaxiale est très inférieure à celle en compression uniaxiale.

Pour les états multiaxiaux de traction, les valeurs expérimentales



disponibles montrent une résistance à la rupture quasi constante et sensiblement égale à celle de la traction uniaxiale.

- Au niveau microscopique, la propagation de la microfissuration et la formation de vides au sein du matériau sont responsables du comportement macroscopique observé.
- Pour des valeurs de contraintes avoisinant la résistance à la compression, apparaît une importante augmentation de la formation de vides dans le matériau qui engendre une dilatation du béton en volume - dilatance - qui s'oppose à l'action hydrostatique de l'état de contrainte appliqué.

Réciproquement, la composante hydrostatique aura un effet restrictif sur la dilatance.

- Sous des charges triaxiales, les expériences indiquent qu'il existe une surface de rupture. Elle peut être représentée dans l'espace tridimensionnel de ces contraintes. Chaque point de cette surface représente un état de contrainte qui produit la rupture du matériau.

Dans les travaux expérimentaux actuellement réalisés, cette surface semble être indépendante du chemin de charges suivi pour atteindre la rupture du matériau.

- L'apparition d'un endommagement localisé dans le matériau dès que les contraintes maximum sont atteintes, tant en traction qu'en compression, exige une analyse scrupuleuse du comportement ultérieur dans la région descendante de la courbe charge-déplacement observée lors des essais.

### **1.3 MODELISATION CONSTITUTIVE**

L'analyse non linéaire par la méthode des éléments finis a procuré un puissant instrument permettant de déterminer la distribution des contraintes et des déformations dans une structure.

Lorsque la structure est construite en béton, l'absence d'un modèle qui représente de façon adéquate le comportement du matériau constitue l'obstacle majeur à la réalisation d'une analyse structurelle rigoureuse. Ces dernières

années, ceci a suscité une intense activité de recherche sur ce thème en vue d'obtenir des modèles qui permettent de caractériser de façon sûre la réponse du béton sous l'action de cas généraux de charges.

Ces recherches ont conduit au développement d'un grand nombre de modèles constitutifs qui simulent ce comportement.

Divers travaux ont été conduits pour analyser et classer ces modèles, réf.(3), (4), (16), (17), (18), (19), les principes généraux que doivent respecter les relations constitutives correspondantes étant bien définis, réf. (20), (21), (22).

Nous ne ferons ici qu'une rapide classification générale pour nous permettre de situer dans ce cadre les modèles que nous verrons aux chapitres qui suivent.

Comme il a été dit, le comportement du béton est très différent avant la rupture, où les contraintes augmentent à mesure que les déformations augmentent, et après la rupture, où les contraintes diminuent avec l'augmentation des déformations.

Par conséquent, une étude de l'ensemble des modèles existants exige d'être organisée en fonction du comportement avant et après la rupture.

D'où l'importance qu'acquiert la détermination de la rupture.

### **1.3.1. La rupture**

La condition - ou critère - de rupture est en général établie en définissant dans l'espace de contraintes une surface de telle manière que, si un point représentant dans cet espace l'état actuel de contraintes se trouve sur la surface représentative du critère, la rupture du matériau se produit.

Pour ces surfaces représentées dans l'espace des contraintes principales, de nombreux résultats expérimentaux indiquent les caractéristiques suivantes, réf. (3) :

\* la surface doit être lisse, avec gradient unique en tout point ;

- \* elle doit être convexe au moins pour des contraintes de compression ;
- \* la forme de la surface dans une section déviatorique doit être approximativement triangulaire pour des contraintes de traction et de faibles contraintes de compression. Elle doit évoluer vers une forme presque circulaire à mesure que la contrainte de compression isotrope augmente ;
- \* les méridiens doivent être courbes, lisses et convexes ;
- \* le rapport des rayons correspondant aux états de traction et de compression simples, dans une section déviatorique doit être inférieur à l'unité ;
- \* ce rapport des rayons doit augmenter lorsque la pression isotrope augmente ; ce rapport a la valeur d'environ 0,5 pour les sections déviatoriques près du plan  $\pi$  (plan déviateur qui passe par l'origine) et atteint sa valeur la plus élevée - d'environ 0,8 - près de la pression hydrostatique correspondant à  $11/\sqrt{3} / f_c = -7$ .
- \* Les états hydrostatiques purs ou à très petit déviateur ne peuvent occasionner la rupture.

De nombreux modèles de rupture offrant ces caractéristiques ont été proposés. Nous en présentons quelques-uns, Fig. I.12. Le plus sophistiqué de ceux-ci est celui de Willam-Warnke, à cinq paramètres, qui présente une très bonne concordance avec les résultats expérimentaux de cas multiaxiaux de contrainte, et dans une vaste plage de contraintes qui inclut des valeurs en régime de hautes compressions (Fig. I.13).

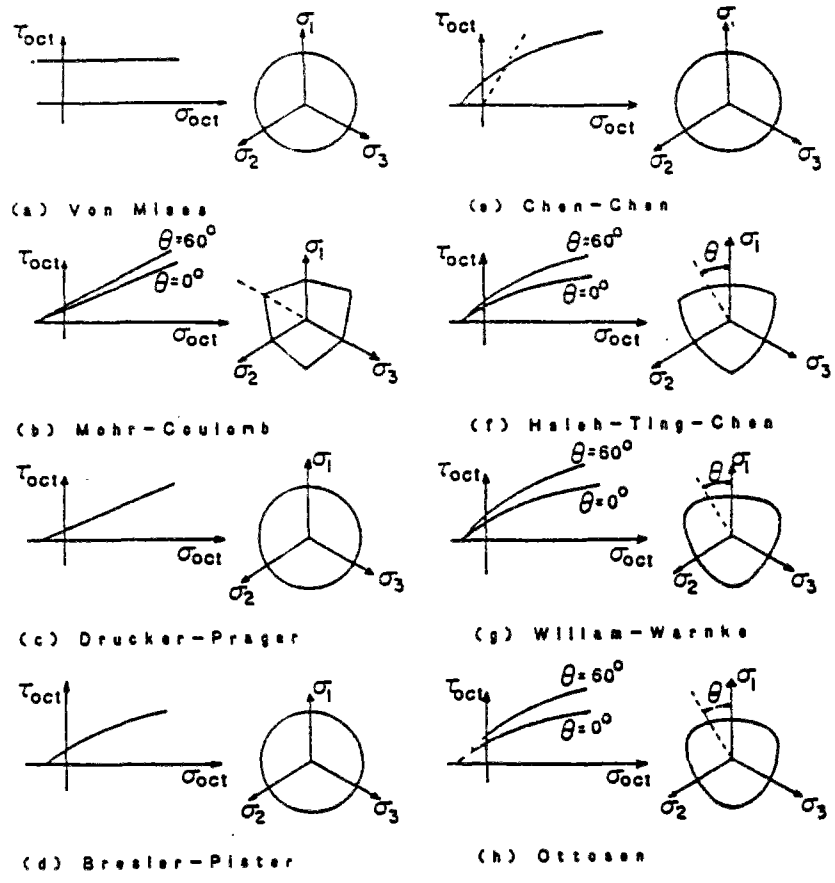


FIG. I.12 Critères de rupture, réf. (36).

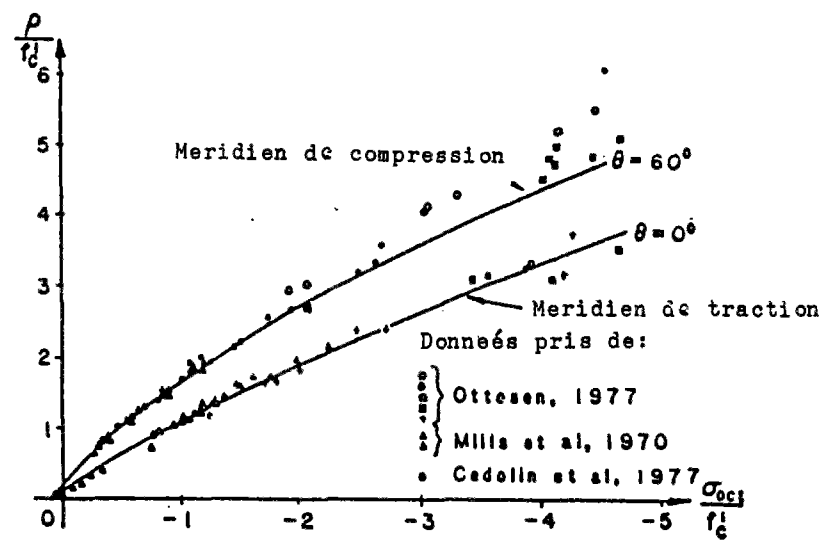


FIG. I.13 Critère de Willam-Warnke, réf. (30).

### 1.3.2. Comportement pré-rupture

Un matériau composé comme le béton est très loin d'être homogène. Toutefois, si l'on considère les propriétés du matériau comme une moyenne macroscopique, on peut le traiter comme s'il était homogène. Dans ces conditions, et comme nous l'avons déjà noté, le phénomène de la microfissuration et son incidence sur la réponse du matériau sont incluses comme si c'était une propriété de celui-ci et il est possible d'envisager le problème comme s'il s'agissait d'un milieu continu.

Bien que de nombreuses recherches soient fondées sur la nature composée du béton, la plupart des modèles considèrent celui-ci comme un matériau homogène et ont été élaborés dans le cadre de la mécanique du continu traditionnel.

Nous commenterons brièvement les modèles fondés sur l'élasticité et ceux fondés sur l'élasto-plasticité en faisant une rapide référence aux modèles de rupture plastique et à ceux qui sont fondés sur la théorie endochronique.

#### Modèles fondés sur la théorie de l'élasticité

L'élasticité linéaire est l'approche la plus ancienne et la plus simple pour modéliser la relation contrainte-déformation du béton.

Cette relation n'étant pas en réalité linéaire, il faut reformuler l'analyse avec des hypothèses basées sur l'élasticité non-linéaire.

Dans ce domaine, l'approche la plus simple est de remplacer les constantes élastiques des relations linéaires isotropes par des modules sécants issus d'observations expérimentales.

Ces modules seront exprimés en fonction des états de contrainte ou de déformation.

Cette modélisation est très simple mais présente des défauts :

- donne une réponse réversible et indépendante du chemin de charges.

L'état de contrainte est déterminé de façon univoque par l'état actuel de déformation ou vice-versa ;

- certains cycles de chargement peuvent générer de l'énergie, réf. (3), avec violation des lois de la thermodynamique.

On peut éliminer ce dernier défaut avec une formulation plus rigoureuse, dite hyperélastique, qui est basée sur l'existence de l'énergie de déformation (ou complémentaire de déformation). Cette théorie satisfait totalement aux exigences théoriques de la mécanique du continu. Elle peut représenter le phénomène d'anisotropie induite par l'état de contrainte ou de déformation, mais au prix de la connaissance de beaucoup de paramètres pour le matériau.

Néanmoins, cette théorie ne peut prendre en considération le caractère inélastique des déformations dans le béton, carence qui se manifeste lorsque le matériau est soumis à une décharge.

L'application de ces modèles devra être réalisée sur des cas de charge monotone.

L'indépendance du chemin de charge, qu'implique cette relation  $\sigma-\epsilon$  sécante, peut être éliminé grâce à une formulation hypoélastique dans laquelle les tenseurs taux de contrainte et de déformation sont reliés par le biais de modules tangents qui sont fonction de l'état de contrainte ou de déformation.

Pour des raisons de simplicité on utilise fréquemment une relation linéaire entre les tenseurs taux de contrainte et taux de déformation.

Le comportement décrit par les équations qui en résultent est "incrémentalement" réversible. Ceci justifie le terme hypoélastique utilisé par Truesdell, réf. (23).

La formulation hypoélastique peut inclure l'anisotropie induite dans le matériau. Dans ce cas, la matrice de rigidité du matériau devient anisotrope y compris dans le cas où le comportement initial du matériau est isotrope.

Ceci implique que le comportement dans les différentes directions principales de contrainte va être différent et que les axes principaux de

contrainte et de déformation ne vont pas coïncider pour des chargements non proportionnels, ce qui occasionnera un couplage entre contraintes et déformations normales et de cisaillement, il faudra, dans le cas général, 21 paramètres pour chaque point du chemin de charge, situation insurmontable du point de vue pratique.

- Sous des conditions uniaxiales de contrainte, la définition de la charge et de la décharge est évidente mais, dans des conditions multiaxiales, avec la formulation hypoélastique il n'y a pas de critère clair pour cette définition.

En dépit de ces inconvénients, quelques modèles constitutifs ont été proposés qui comportent des simplifications afin de surmonter les obstacles mentionnés.

Au chapitre qui suit nous en analyserons un, basé sur une formulation hypoélastique avec orthotropie induite.

Des considérations particulières seront faites pour tenir compte du comportement en décharge du matériau.

On peut trouver une introduction aux thèmes de l'hyperélasticité et de l'hypoélasticité en réf. (3).

#### Modèles fondés sur la théorie de la plasticité.

La théorie de la plasticité est une théorie bien établie, aux applications réussies dans le domaine des métaux.

Dans le béton, la microfissuration interne qui se développe pendant un processus de charge est l'origine d'un comportement qui peut être modélisé comme un phénomène élasto-plastique.

La déformation non linéaire que subit ce matériau est fondamentalement inélastique, puisque, dans une décharge, seule une fraction  $\epsilon_e$  de la déformation totale  $\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$  peut être récupérée,  $\epsilon_e$  étant la déformation élastique réversible,  $\epsilon_p$  la déformation plastique irréversible.

Ce phénomène peut être modélisé à travers le comportement d'un solide en élastoplasticité avec écrouissage.

Ces modèles peuvent prendre en compte la dépendance du chemin de charge et, en utilisant des fonctions appropriées pour la surface limite élastique initiale, pour l'écrouissage et pour la règle d'écoulement les résultats expérimentaux bi ou tri-axiaux peuvent être correctement représentés.

Les paramètres du matériau nécessaires à ces modèles peuvent être obtenus relativement facilement.

La théorie de la plasticité avec écrouissage, par travail ou déformation, qui peut être considérée comme une généralisation des modèles classiques d'élasticité parfaite, requiert la définition d'une surface de charge.

Il existe une surface initiale qui limite le comportement élastique du matériau et qu'on appelle "surface d'élasticité initiale" ou "surface limite élastique". Si le matériau est contraint au-delà de cette surface, une nouvelle surface limite, dite "surface actuelle d'élasticité" ou "surface de charge" se développe, se substituant à la surface initiale. A l'intérieur de cette surface, les charges et les recharges ne provoquent pas de nouvelles déformations irréversibles.

A chaque moment de l'histoire de charge correspond une surface de charge dans l'espace de contraintes qui contient tous les états de contraintes auxquels il est possible de parvenir par comportement élastique. Des contraintes au-delà de cette surface créent des déformations plastiques irréversibles. Ce processus évolue jusqu'à ce que la surface de charge atteigne la surface ultime de rupture qui définit la rupture du matériau.

Lorsqu'une surface de charge a été définie, des équations constitutives fondées sur la règle d'écoulement peuvent être déterminées dans le cadre de la plasticité associée ou bien après définition d'une surface de potentiel plastique, en plasticité non associée.

La dernière hypothèse améliore la simulation des résultats expérimentaux, surtout au niveau de la représentation des déformations volumiques, mais au



prix d'un plus gros effort de calcul, car les matrices de rigidité requises pour l'analyse par éléments finis cessent d'être symétriques.

L'application de la théorie de la plasticité au béton a été critiquée du fait que le comportement inélastique que simulent les modèles ne sont pas accompagnés de la dégradation du module élastique observé lors des expérimentations quand le matériau subit une décharge.

Autre critique à cette formulation : la définition imprécise de la surface d'élasticité initiale et les difficultés d'établir une surface de charge qui, pour représenter un comportement réaliste devrait partir d'une surface initiale fermée et aller en se dilatant jusqu'à coïncider avec la surface de rupture ultime, qui elle est ouverte.

Un modèle fondé sur la plasticité incrémentale sera analysé au chapitre III.

#### Modèles basés sur la théorie de la rupture plastique et sur la théorie endochronique.

Dans la théorie de la rupture plastique, le comportement inélastique est attribué à deux causes : au glissement plastique et à la microfissuration. La première est traitée par les concepts classiques de plasticité, alors que la seconde est modélisée à l'aide d'une fonction potentielle dans l'espace de déformations, concept dû à Dougill, réf. (24) et à partir duquel ont été développés des modèles offrant une bonne concordance avec des résultats expérimentaux pour des cas multiaxiaux de contrainte, réf. (16), (25).

Ces modèles présentent l'inconvénient d'être difficiles à introduire dans les programmes de calcul numérique ; les critères de plasticité et de dégradation élastique sont d'un maniement compliqué, et définir ces critères de manière réaliste pour le béton ne vas pas sans difficultés.

La théorie endochronique, généralisation de la théorie de la viscoplasticité par introduction du concept de temps intrinsèque fut appliquée au béton par Bazant, réf. (26).

Dans cette théorie, la dégradation de la rigidité du matériau est obtenue directement à partir de l'évolution d'une fonction d'endommagement sans recourir aux conditions de charge-décharge.

Avec cette théorie, la modélisation peut très bien représenter le comportement du béton, mais elle a le défaut, quasi insurmontable dans la pratique, d'exiger un nombre élevé de fonctions et de paramètres à obtenir par des procédés compliqués.

De même, certains de ces modèles sont incrémentalement non linéaires ce qui exige un grand effort de programmation et de temps de calcul.

### **1.3.3. Comportement post-rupture**

Les matériaux fragiles comme le béton ont deux modes de rupture : fissuration par traction et rupture par cisaillement, réf. (27).

Ces modes suscitent des comportements post-rupture distincts.

Dans la fissuration par traction, la rupture se produit, en principe, du fait de l'extension et de l'union de quelques fissures dominantes peu nombreuses. En revanche, dans la rupture par cisaillement, on observe dans une zone une densité élevée de fissures. Le glissement des particules du mortier combiné avec ces fissures est ce qui provoque une rupture par cisaillement.

Il convient donc de considérer ces deux modes de rupture séparément.

#### Rupture par fissures de traction.

Pour son traitement numérique, le plus approprié est de considérer la fissuration distribuée sous une forme continue. Cela présente des avantages considérables dans la plupart des cas en comparaison d'autres méthodes, par exemple :

- celles de fissure discrète, dont les premières applications ont été faites par Ngo et Scordellis, réf (28) ; cette méthode est très coûteuse en raison de la redéfinition nécessaire du maillage d'éléments finis pour suivre l'évolution de la fissure ;

- celles basées sur la mécanique de la rupture, activement étudiée actuellement, mais dont l'application pratique au béton est toujours controversée, réf. (3), (19).

La façon la plus simple d'envisager le cas de fissure distribuée est d'affecter des valeurs nulles à quelques paramètres du matériau lorsque la résistance maximum du matériau est atteinte.

Mais, cette formulation qui utilise un critère de résistance pour la rupture, conduit à des résultats non objectifs au niveau de l'analyse par éléments finis, réf. (12).

Bazant et Ho, réf. (29) ont surmonté cette difficulté par l'introduction de concepts de mécanique de la rupture qui, par des critères énergétiques, conduit à des modèles avec une branche descendante pour les contraintes post-pic, qui prend en compte la largeur de la zone de rupture ainsi que l'énergie libérée pendant la propagation de la fissure. Avec ces hypothèses, le module de radoucissement varie en fonction du maillage d'éléments finis, et par conséquent l'influence de ce dernier sur les résultats diminue. Un modèle basé sur cette formulation sera analysé au chapitre IV.

#### Rupture par cisaillement.

Bien que ce type de rupture soit connu à partir d'observations macroscopiques, peu de tentatives ont été faites pour modéliser ce phénomène.

Pour des états de contrainte avoisinant les pressions hydrostatiques, le mode de rupture par écrasement se produit du fait de la rupture du mortier lorsque sa résistance est faible par rapport à celle du granulat.

Comme ce mode de rupture se rencontre également dans la bande de cisaillement, le terme écrasement est fréquemment utilisé.

Quant au comportement post-rupture, quelques chercheurs font l'hypothèse qu'il y a une perte totale de résistance et d'autres un comportement parfaitement plastique. Ceci constitue des solutions limites mais qui sans un traitement prudent ont l'inconvénient déjà souligné de manquer d'objectivité par rapport au maillage d'éléments finis.

Des chercheurs ont développé des modèles reproduisant bien les résultats expérimentaux dans la région de radoucissement, réf. (16), (30), (31), (32), (33), (34).

Mais, en dépit de ces bons résultats reste la question : l'écroutissement est-il une propriété du matériau ?

Les expériences uniaxiales montrent que pour le cas de fissures par traction, il n'est pas dû aux facteurs mentionnés précédemment au paragraphe 1.2.

Cette conclusion peut être étendue au cas de rupture par cisaillement si l'on prend en compte la localisation de l'endommagement qui se produit également dans ce mode de rupture.

Le phénomène de localisation de l'endommagement étant présent, la relation contrainte-déformation dans la région de radoucissement est une relation fictive et nombre des modèles mentionnés n'ont pas de sens physique puisqu'ils modélisent la relation contrainte-déformation sans tenir compte des dimensions des éléments utilisés pour les essais.

Comme il a été dit, dans cette zone c'est la relation charge-déplacement qu'il faudrait utiliser.

#### **1.3.4. Critères d'évaluation des modèles**

Au cours des dernières années, une grande variété de modèles a été proposée pour simuler le comportement du béton. Chacun d'eux comporte certains avantages et certaines limitations qui dépendent pour une grande part des cas particuliers auxquels ils sont appliqués.

Trois critères fondamentaux peuvent être utilisés pour leur évaluation, réf. (36) :

- . Evaluation théorique des fondements du modèle par rapport aux principes de base de la mécanique du continu pour vérifier les exigences de continuité, de stabilité et d'unicité ;

- . Evaluation expérimentale des modèles quant à leur aptitude à réaliser une simulation correcte des données expérimentales pour un certain nombre d'essais et la possibilité d'obtenir les paramètres du matériau à partir d'essais standards ;
- . Evaluation numérique des modèles quant à la facilité de leur incorporation dans des programmes de calcul numérique.

C'est par un équilibre de ces exigences qu'il sera possible de réaliser l'évaluation finale du modèle.

### 1.3.5. Conclusions

Les observations qui précèdent indiquent que le comportement du béton peut être ordonné en trois étapes :

- . Comportement élastique ;
- . Comportement inélastique ;
- . Comportement localisé.

Une modélisation constitutive qui prétende réaliser la simulation du comportement complet du matériau devra absolument comporter ces étapes.

La limite entre ces étapes n'est pas évidente, celle-ci étant habituellement définie par le degré de fissuration.

Le comportement du matériau étant envisagé à partir du point de vue macroscopique se modélise comme un matériau homogène.

Pour de faibles niveaux de contrainte il sera possible d'envisager une modélisation avec élasticité linéaire isotrope.

Nous verrons dans la suite de ce travail qu'à l'étape suivante de comportement inélastique, bien que les modèles d'élasticité non linéaire puissent correctement représenter les résultats expérimentaux pour des états particuliers de charge, le meilleur équilibre entre sécurité et complexité semble offert par les modèles basés sur la théorie de la plasticité.

Les modèles les plus satisfaisants, basés sur la plasticité et la fracture, peuvent fournir de meilleures prédictions, mais leur emploi requiert une plus grande complexité et un nombre plus important de paramètres du matériau.

Considérant les imprécisions engendrées par le phénomène de localisation, le manque de résultats expérimentaux pour cette - et d'autres - situation et la dispersion des données expérimentales disponibles, réf. (35), on n'a actuellement pas besoin de modèles très sophistiqués pour la modélisation du béton.

En ce qui concerne le phénomène de localisation de l'endommagement, il faut tenir compte du fait que, dans la région post-rupture, la relation contrainte-déformation est une propriété fictive et que la prendre en considération n'a de sens que si on y incorpore l'effet structurel.

Comme on ne dispose que de très rares informations relatives à des observations microscopiques sous des charges cycliques, notamment dans la zone post-rupture, les remarques faites sur le phénomène de la localisation de l'endommagement ne sont considérées comme valables que pour des situations de charge monotones croissantes.

Pour la modélisation du comportement après la rupture, l'approche par des considérations sur la mécanique de la rupture a été appliquée avec succès au cas de rupture par fissures de traction, mais le comportement post-rupture, dans le cas de rupture de cisaillement est encore en développement.

L'apparition de nouveaux modèles, plus complets, devra être accompagnée de nouvelles expérimentations dans le domaine des charges cycliques, sur la dépendance vis-à-vis de la vitesse d'application des charges, sur les chargements non proportionnels et la réponse post-rupture.

## CHAPITRE II

### MODELE D'ELASTICITE INCREMENTALE

#### 2.1. GENERALITES

Trois techniques différentes de modélisation du béton fondées sur l'élasticité peuvent être utilisées. On trouvera en référence (3) une introduction à ces techniques et aux modèles constitutifs qu'elles engendrent :

Elastiques ou de Cauchy ;  
Hyperélastiques ou de Green ;  
Hypoélastiques.

Sur ceux-ci on a fait une brève introduction dans le chapitre qui précède.

De l'analyse comparative de ces formulations nous avons considéré la formulation hypoélastique comme celle qui offre le plus de possibilités pour la modélisation. Nous nous étendrons un peu sur ses concepts et nous analyserons l'un des modèles qui, à notre avis, présente les meilleures caractéristiques pour simuler le comportement du béton dans le cadre de l'élasticité non linéaire.

La formulation hypoélastique est utilisée pour décrire le comportement mécanique de matériaux dans lesquels l'état de contraintes dépend de l'état actuel de déformations et du chemin suivi par les charges pour atteindre cet état.

Les équations constitutives incrémentales pour des matériaux indépendants du temps peuvent s'exprimer :

$$\dot{\sigma}_{ij} = F_{ij} (\dot{\epsilon}_{kl}, \sigma_{mn})$$

où  $\sigma_{mn}$  : composantes du tenseur de contraintes.

$\dot{\sigma}_{ij}$  et  $\dot{\epsilon}_{kl}$  : composantes des tenseurs taux de contraintes et de déformations.

$F_{ij}$  : fonctions tensorielles.

Dans le cas où les taux de déformations sont reliés linéairement aux taux de contraintes à travers le module de réponse du matériau,  $C_{ijkl}$ , cette relation générale est fréquemment mise dans la pratique sous l'une des deux formes suivantes :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} (\sigma_{mn}) \dot{\epsilon}_{kl}$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} (\epsilon_{mn}) \dot{\epsilon}_{kl}$$

et où  $C_{ijkl}$  est une fonction des composantes du tenseur de contraintes ou de déformations.

Le comportement décrit par ces équations est "infinitésimalement" - ou incrémentalement réversible - fait qui a été à l'origine du terme "hypoélastique".

Selon le degré de dépendance des fonctions tensorielles  $C_{ijkl}$  des composantes du tenseur de contraintes ou de déformations  $\sigma_{mn}$  ou  $\epsilon_{mn}$ , différents types de modèles constitutifs peuvent être obtenus.

Ces formes de réponses peuvent inclure le fait pratique que dans certains matériaux initialement isotropes, cette isotropie initiale est détruite par l'histoire des sollicitations et un comportement incrémental anisotrope doit être attendu. Cette anisotropie est appelée anisotropie induite par la contrainte ou la déformation et c'est une caractéristique qu'il convient de prendre en considération lorsqu'on modélise le comportement de matériaux comme le béton ou de matériaux géologiques.

On trouvera la formulation générale des modèles hypoélastiques en référence (3).

Nous présentons maintenant un résumé du développement d'un modèle constitutif hypoélastique orthotrope pour le béton. Nous expliciterons aussi toutes les étapes nécessaires à son introduction dans un logiciel d'éléments



finis et nous étudierons sa réponse confrontée avec les résultats expérimentaux.

## 2.2. MODELE CONSTITUTIF HYPOELASTIQUE ORTHOTROPE

### 2.2.1. Introduction

On trouvera formulées ici les relations contraintes-déformations pour le béton, relations basées sur une formulation hypoélastique orthotrope. Celle-ci, due à Chen, extraite de la référence (3), correspond à une extension du modèle de Darwin et Pecknold, référence (38), au cas axisymétrique.

Sur cette formulation, quelques idées seront proposées dans ce travail pour améliorer la performance du modèle. Celles-ci ont été mises en pratique pour l'implantation de ce modèle dans le logiciel d'éléments finis utilisé pour les analyses numériques présentées dans cette thèse.

L'organisation de la présente formulation vise à :

- 1°) Permettre une introduction facile du modèle dans les logiciels d'éléments finis ;
- 2°) Permettre une application à des cas de charges cycliques ;
- 3°) Procurer les paramètres du matériau qui caractérisent son comportement à partir des essais standards.

Une variable, appelée "déformation uniaxiale équivalente", sera utilisée pour décrire les relations contrainte-déformation. Bien que son introduction ne soit pas nécessaire dans le cas de charge monotone, elle donne de toute façon une représentation condensée pour cette relation dans les cas biaxiaux et triaxiaux.

Le développement sera fait de façon résumé et dans l'ordre suivante :

- 1°) Présentation des équations constitutives incrémentales ;
- 2°) Expression de ces relations en fonction de la déformation uniaxiale équivalente ;

- 3°) Etablissement de la relation entre la déformation uniaxiale équivalente et la contrainte, à partir de laquelle on déduira le module d'élasticité incrémentale exprimé en fonction de paramètres de déformation ;
- 4°) Le module de Poisson sera exprimé à partir de données expérimentales ;
- 5°) Définition des contraintes et déformations de rupture dont on a besoin dans la relation du 3°). Ces paramètres vont dépendre de la surface de rupture en contraintes et de la surface de rupture pour les déformations qu'on voudrait utiliser.

Enfin, quelques exemples numériques seront présentés en les confrontant aux résultats expérimentaux.

### 2.2.2. Equations constitutives incrémentales

Le développement est fait dans des conditions de symétrie axiale. Nous terminerons sur l'analyse de cas particuliers d'états plans de contraintes et sur leur extension au cas plus général tri-dimensionnel.

Dans l'hypothèse d'orthotropie, axisymétrie élastique et chargement de révolution la relation constitutive exprimée dans les axes principaux d'orthotropie s'écrit :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
 d\varepsilon_1 & & E_1^{-1} & -\nu_{12}E_2^{-1} & -\nu_{13}E_3^{-1} & 0 & d\sigma_1 \\
 d\varepsilon_2 & & -\nu_{21}E_1^{-1} & E_2^{-1} & -\nu_{23}E_3^{-1} & 0 & d\sigma_2 \\
 d\varepsilon_3 & = & -\nu_{31}E_1^{-1} & -\nu_{32}E_2^{-1} & E_3^{-1} & 0 & d\sigma_3 \\
 d\gamma_{12} & & 0 & 0 & 0 & G_{12}^{-1} & d\tau_{12}
 \end{array} \quad \times \quad (2.1)$$

où les indices 1, 2, 3 indiquent les axes d'orthotropie, 3 étant l'axe de révolution, et où :

$d\varepsilon = \left\{ d\varepsilon_1 \quad d\varepsilon_2 \quad d\varepsilon_3 \quad d\gamma_{12} \right\}$  est le vecteur colonne des incréments des déformations, et, selon les hypothèses émises.

$d\sigma = \left\{ d\sigma_1 \ d\sigma_2 \ d\sigma_3 \ d\tau_{12} \right\}$  est le vecteur colonne des incréments des contraintes.

Comme la matrice doit être symétrique :

$$\nu_{12} E_1 = \nu_{21} E_2 \quad \nu_{13} E_1 = \nu_{31} E_3 \quad \nu_{23} E_2 = \nu_{32} E_3 \quad (2.2)$$

En utilisant l'équation 2.2, l'équation 2.1 peut s'exprimer :

$$\begin{array}{c} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \\ d\gamma_{12} \end{array} = \begin{array}{cccc} 1/E_1 & -\mu_{12}/\sqrt{E_1 E_2} & -\mu_{13}/\sqrt{E_1 E_3} & 0 \\ & 1/E_2 & -\mu_{23}/\sqrt{E_2 E_3} & 0 \\ & & 1/E_3 & 0 \\ & \text{SYM} & & \end{array} \times \begin{array}{c} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \\ d\tau_{12} \end{array} \quad (2.3)$$

Par inversion, on obtient :

$$d\sigma = C \ d\varepsilon \quad (2.4)$$

où  $d\sigma$  et  $d\varepsilon$  sont les vecteurs de contrainte et déformation incrémentales de l'équation (2.3) et où :

$$C = \frac{1}{\phi} \begin{array}{cccc} E_1(1-\mu_{32}^2) & \sqrt{E_1 E_2} (\mu_{13}\mu_{32} + \mu_{12}) & \sqrt{E_1 E_3} (\mu_{12}\mu_{32} + \mu_{13}) & 0 \\ & E_2(1-\mu_{13}^2) & \sqrt{E_2 E_3} (\mu_{12}\mu_{13} + \mu_{32}) & 0 \\ & & E_3(1-\mu_{12}^2) & 0 \\ & & & \phi G_{12} \end{array} \quad (2.5)$$

avec :

$$\mu_{12}^2 = \nu_{12} \nu_{21} \quad \mu_{23}^2 = \nu_{23} \nu_{32} \quad \mu_{13}^2 = \nu_{13} \nu_{31} \quad (2.6)$$

$$\phi = 1 - \mu_{12}^2 - \mu_{23}^2 - \mu_{13}^2 - 2 \mu_{12} \mu_{23} \mu_{13}$$

Si l'on représente la matrice C dans un repère distinct du repère principal d'orthotropie d'axes 1', 2' et 3 et si l'on impose la condition - issue de l'orthotropie - que le module de cisaillement soit invariant dans cette rotation, nous obtiendrons :

$$G_{12} = \frac{1}{4\phi} \left[ E_1 + E_2 - 2\mu_{12}\sqrt{E_1 E_2} - \left( \mu_{23}\sqrt{E_1} + \mu_{31}\sqrt{E_2} \right)^2 \right] \quad (2.7)$$

Cette relation nous permet de poser le problème en fonction de six modules indépendants :  $E_1, E_2, E_3, \mu_{12}, \mu_{23}, \mu_{13}$ .

#### Déformation uniaxiale équivalente.

La détermination de l'évolution des six modules hypoélastiques sera faite à l'aide du concept de déformation uniaxiale équivalente, développé par Darwin et Pecknold, référence (38), qui donne la variation de  $E_1, E_2, E_3$  en fonction des contraintes.

On réécrit l'équation (2.4).

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} d\sigma_1 & & E_1 B_{11} & E_1 B_{12} & E_1 B_{13} & 0 & d\varepsilon_1 \\ d\sigma_2 & & E_2 B_{21} & E_2 B_{22} & E_2 B_{23} & 0 & d\varepsilon_2 \\ d\sigma_3 & & E_3 B_{31} & E_3 B_{32} & E_3 B_{33} & 0 & d\varepsilon_3 \\ d\tau_{12} & & 0 & 0 & 0 & G_{12} & d\gamma_{12} \end{array} = X \quad (2.8)$$

où les coefficients  $B_{ij}$  peuvent être définis par identification des termes entre les matrices [C] des équations 2.5 et 2.8, par exemple :

$$B_{11} = \left( 1 - \mu_{32}^2 \right) / \phi \quad B_{12} = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \left( \mu_{13}\mu_{32} + \mu_{12} \right) \quad B_{13} = \sqrt{\frac{E_3}{E_1}} \left( \mu_{12}\mu_{32} + \mu_{13} \right) \dots$$

Si on explicite les relations définies par l'équation (2.8) on aura :

$$\begin{aligned}
 d\sigma_1 &= E_1 \left[ B_{11} d\varepsilon_1 + B_{12} d\varepsilon_2 + B_{13} d\varepsilon_3 \right] \\
 d\sigma_2 &= E_2 \left[ B_{21} d\varepsilon_1 + B_{22} d\varepsilon_2 + B_{23} d\varepsilon_3 \right] \\
 d\sigma_3 &= E_3 \left[ B_{31} d\varepsilon_1 + B_{32} d\varepsilon_2 + B_{33} d\varepsilon_3 \right] \\
 d\tau_{12} &= G_{12} d\gamma_{12}
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Ces relations s'expriment sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{array}{c|c|cccc|c}
 d\sigma_1 & & E_1 & 0 & 0 & 0 & d\varepsilon_{1u} \\
 d\sigma_2 & & 0 & E_2 & 0 & 0 & d\varepsilon_{2u} \\
 d\sigma_3 & = & 0 & 0 & E_3 & 0 & d\varepsilon_{3u} \\
 d\tau_{12} & & 0 & 0 & 0 & G_{12} & d\gamma_{12}
 \end{array}
 \quad X \tag{2.10}$$

Le vecteur du second membre de cette équation peut être défini comme le vecteur des "déformations incrémentales uniaxiales équivalentes", où chaque composante est définie en fonction des déformations incrémentales actuelles selon l'équation (2.9).

On obtient alors :

$$d\varepsilon_{iu} = B_{i1} d\varepsilon_1 + B_{i2} d\varepsilon_2 + B_{i3} d\varepsilon_3 \quad (i = 1,2,3) \tag{2.11}$$

D'après l'équation (2.10), la déformation uniaxiale équivalente peut être évaluée simplement comme :

$$d\varepsilon_{1u} = \frac{d\sigma_1}{E_1} \tag{2.12}$$

expression qui a la même forme dans le cas de contrainte uniaxiale, d'où la dénomination utilisée.

La déformation uniaxiale équivalente totale peut être déterminée par intégration sur tout le chemin suivi par les charges.

$$\varepsilon_{iu} = \int \frac{d\sigma_1}{E_1} \quad (2.13)$$

Un examen de l'équation 2.3 montre que l'incrément de la déformation uniaxiale équivalente est l'incrément de la déformation dans la direction  $i$  que le matériau aurait eu sous l'action d'un incrément de contrainte  $d\sigma_1$  en supposant que tous les autres incréments de contrainte sont nuls.

$d\varepsilon_{iu}$  et  $\varepsilon_{iu}$  n'ont pas les mêmes transformations dans une rotation d'axes que celles des contraintes ou déformations. Excepté dans le cas uniaxiale de contrainte, elles n'ont pas de sens physique et elles seront utilisées seulement comme une mesure sur laquelle on s'appuiera pour définir la variation des paramètres du matériau.

Les trois premières équations du groupe 2.9 ont été définies dans le repère principal d'orthotropie. On suppose que ce repère suit l'évolution des axes principaux de contraintes et que c'est dans ce repère qu'on doit définir  $d\varepsilon_{iu}$ .

La déformation uniaxiale équivalente est accumulée selon ces repères principaux qui en général changent avec l'évolution du chargement. C'est pour cela que  $\varepsilon_{iu}$  ne s'accumule pas dans une direction donnée, mais dans une direction qui change à mesure que changent également les directions des contraintes principales.

#### Cas d'état plan des contraintes

On peut l'analyser en faisant  $d\sigma_3 = 0$  et en éliminant  $d\varepsilon_3$  dans les équations 2.3 et 2.4, ce qui donne :

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 \begin{array}{l} d\sigma_1 \\ \\ d\sigma_2 \\ \\ d\tau_{12} \end{array} & -\frac{1}{1-\mu_{12}^2} & \begin{array}{l} E_1 \quad \mu_{12}\sqrt{E_1E_2} \quad 0 \\ \\ E_2 \quad 0 \\ \\ \text{SYM} \\ \\ \frac{E_1+E_2 - 2\mu_{12}\sqrt{E_1E_2}}{4} \end{array} & \begin{array}{l} d\varepsilon_1 \\ \times d\varepsilon_2 \\ \\ d\gamma_{12} \end{array}
 \end{array}$$

La direction 3 restant direction principale d'orthotropie, d'après les hypothèses faites ci-dessus, puisqu'elle est direction principale de contrainte. C'est la relation développée à l'origine par Darwin et Pecknold, réf. (38).

### 2.2.3. Relation contrainte-déformation uniaxiale équivalente

#### Cas biaxial

L'expérience montre que si les courbes contrainte-déformation qui résultent des essais biaxiaux - avec différents rapports de contraintes - sont représentées par les variables :

- Rapport contrainte-contrainte maximum  $f_c$ ,
- Rapport déformation-déformation pic  $\varepsilon_c$ ,

les courbes résultantes coïncident à peu près et peuvent être représentées par une simple expression analytique. Pour la partie correspondant aux compressions, nous emploierons l'équation suggérée par Sanz, référence (39) réécrite en termes de déformation uniaxiale équivalente.

$$\sigma_i = \frac{E_o \varepsilon_{iu}}{1 + \left[ \left( \frac{E_o}{E_s} \right) - 2 \right] \left( \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right) + \left( \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right)^2} \quad (2.14)$$

- où  $E_o$  = Module d'élasticité initial,  
 $\sigma_{ic}$  = Contrainte de compression maximale,  
 $\varepsilon_{ic}$  = Déformation uniaxiale équivalente correspondant à  $\sigma_{ic}$ ,  
 $E_s = \frac{\sigma_{ic}}{\varepsilon_{ic}}$  = module d'élasticité sécant.

Cette expression  $\sigma - \epsilon$  permet de considérer l'effet du rapport des valeurs entre des contraintes principales, à travers les valeurs de  $\sigma_{1c}$  et  $\epsilon_{1c}$ , valeurs qui dépendront de ce rapport, l'effet de Poisson étant contenu dans l'utilisation de la variable  $\epsilon_{1u}$ .

Les valeurs de  $E_1$  et  $E_2$ , seront définies par la tangente des courbes  $\sigma_1 - \epsilon_{1u}$  et  $\sigma_2 - \epsilon_{2u}$ , selon l'équation 2.14, pour les valeurs actuelles de  $\epsilon_{1u}$  et  $\epsilon_{2u}$  accumulées pendant l'histoire des charges.

Cas tridimensionnel

L'équation 2.14 peut être généralisée pour décrire la réponse du matériau, soit en compression, soit en traction. On réécrit l'équation 2.14 selon Elwi et Murray.

$$\sigma_i = \frac{E_o \epsilon_{1u}}{1 + \left[ R + \frac{E_o}{E_s} - 2 \right] \frac{\epsilon_{1u}}{\epsilon_{1c}} - (2R - 1) \left[ \frac{\epsilon_{1u}}{\epsilon_{1c}} \right]^2 + R \left[ \frac{\epsilon_{1u}}{\epsilon_{1c}} \right]^3} \quad (2.15)$$

où 
$$R = \frac{E_o}{E_s} \frac{\left[ \frac{\sigma_{1c}}{\sigma_{1f}} - 1 \right]}{\left[ \frac{\epsilon_{1f}}{\epsilon_{1c}} - 1 \right]^2} - \frac{\epsilon_{1c}}{\epsilon_{1f}}$$

Le type de courbe contrainte-déformation uniaxiale obtenu est représenté par la figure qui suit où sont mises en évidence les grandeurs qui interviennent dans R.

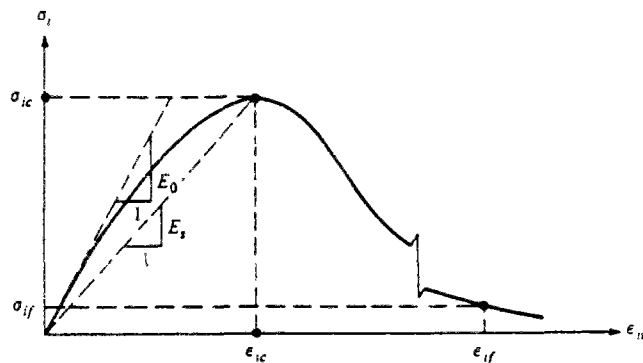


FIG. II.1 Relation contrainte-def. uniaxiale équivalente.



où  $E_0$  = Module d'élasticité initial,  
 $\sigma_{ic}$  = Contrainte maximale associée à la direction i et obtenue pour un rapport de contraintes principales déterminé,  
 $\varepsilon_{ic}$  = Déformation uniaxiale équivalente en correspondance avec  $\sigma_{ic}$ ,  
 $\sigma_{if}, \varepsilon_{if}$  = Coordonnées d'un point quelconque, sur la branche descendante de la courbe.

Pour écrire la loi de comportement sous forme incrémentale nous avons besoin du module d'élasticité tangent.

$$E_i = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_{iu}} \quad (2.16)$$

ce qui peut être obtenu par différenciation de l'équation (2.15) :

$$E_i = E_0 \frac{1 + \left[ 2R - 1 \right] \left[ \varepsilon_{iu} / \varepsilon_{ic} \right]^2 - 2R \left[ \varepsilon_{iu} / \varepsilon_{ic} \right]^3}{\left[ 1 + \left[ R + \frac{E_0}{E_s} - 2 \right] - \left[ 2R - 1 \right] \left[ \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right]^2 + R \left[ \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right]^3 \right]^2} \quad (2.17)$$

Une autre équation utilisée dans la pratique pour décrire la relation contrainte-déformation équivalente est celle que propose Popovicz, (40).

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_{ic}} = \frac{n}{n - 1 + (\varepsilon_{iu} / \varepsilon_{ic})^n} \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \quad (2.18)$$

$$\text{où } n = \frac{E_0 \varepsilon_{ic}}{E_0 \varepsilon_{ic} - \sigma_{ic}} \quad (2.19)$$

à partir de cette relation on peut calculer le module d'élasticité tangent.

$$E_i = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_{iu}} = \frac{\left[ 1 - \left[ \varepsilon_{iu} / \varepsilon_{ic} \right]^n \right] n \left[ n - 1 \right] \sigma_{ic} / \varepsilon_{ic}}{\left[ n - 1 + \left[ \varepsilon_{iu} / \varepsilon_{ic} \right]^n \right]^2} \quad (2.20)$$

#### 2.2.4. Coefficient de Poisson

Avant de déterminer la relation incrémentale, il faut déterminer les valeurs des coefficients de Poisson des équations (2.6).

Ces valeurs seront obtenues à partir des résultats d'essais de compression uniaxiale dus à Kupfer, qu'on représente (Elwi et Murray) par la fonction cubique, référence (41) :

$$\nu = \nu_0 \left[ 1 + 1,3763 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_u} - 5,3600 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_u} \right)^2 + 8,586 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_u} \right)^3 \right] \quad (2.21)$$

ou 
$$\nu = \nu_0 f \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_u} \right) \quad (2.22)$$

où  $\varepsilon$  = Déformation dans la direction uniaxiale,

$\varepsilon_u = \varepsilon_{1c}$  pour un essai uniaxial,

$\nu_0$  = Valeur initiale du coefficient.

Pour l'extension au cas tridimensionnel on supposera que le coefficient de Poisson correspondant à chaque direction est donné par la relation précédente dans laquelle on remplace les grandeurs  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_u$  par  $\varepsilon_{1u}$  et  $\varepsilon_{1c}$ .

$$\nu_i = \nu_0 f \left( \frac{\varepsilon_{1u}}{\varepsilon_{1c}} \right)$$

Les équations (2.6) peuvent maintenant s'écrire :

$$\mu_{12}^2 = \nu_1 \nu_2 \quad \mu_{23}^2 = \nu_2 \nu_3 \quad \mu_{31}^2 = \nu_3 \nu_1$$

La variable  $\phi$  de l'équation 2.5 ne doit pas s'annuler. Nous limiterons donc la validité de l'équation 2.2.1. pour des valeurs de  $\nu$  inférieures à 0.5.

### 2.2.5. Critère de rupture

L'évaluation du module incrémental des équations 2.17 ou 2.20 exige de connaître les valeurs maximums de contrainte et de déformation  $\sigma_{1c}$ ,  $\varepsilon_{1c}$  qui apparaissent dans ces expressions, c'est-à-dire les valeurs de contrainte et de déformation à la rupture.

#### Détermination de $\sigma_{1c}$

Ces valeurs dépendront du critère de rupture et du chemin suivi par les charges pour parvenir à cette rupture.

Parmi les nombreux critères existants - dont certains ont été mentionnés en 1.3.1. - pour les motifs déjà indiqués, nous retiendrons le critère de Willam-Warnke, dont le développement figure en réf. (3).

Ce critère pourra être utilisé dans sa version à trois paramètres, ce qui implique de connaître :

- $f_c$  résistance en compression simple,
- $f_t$  résistance en traction simple,
- $f_{bc}$  résistance en compression biaxiale isotrope.

ou, dans sa version plus sophistiquée à 5 paramètres qui, en dehors des 3 valeurs mentionnées requiert la connaissance de 2 paramètres issus des essais triaxiaux :

- contrainte de cisaillement moyenne  $\tau_m$  pour une valeur de contrainte isotrope de compression  $\tau_m$ , et pour un point de la surface de rupture situé sur la ligne méridienne  $\Theta = 0^\circ$  (de traction) ;
- valeur de  $\tau_m$  pour une valeur de contrainte isotrope de compression, et pour un point sur la surface de rupture situé sur la ligne méridienne  $\Theta = 60^\circ$  (de compression) ;

et où 
$$\tau_m = \sqrt{\frac{2}{5}} J_2 \quad \sigma_m = \frac{1}{3} I_1$$

$\Theta =$  angle de Lode défini par 
$$\cos 3\Theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{2/3}}$$

avec :

- $I_1$  = premier invariant du tenseur de contraintes,
- $J_2$  = deuxième invariant du tenseur déviateur de contraintes,
- $J_3$  = troisième invariant du tenseur déviateur de contraintes.

C'est à partir de la surface dans l'espace de contraintes principales qui représente ce critère de rupture, que nous allons évaluer les contraintes de rupture dont notre modèle a besoin.

Dans le cas le plus commun d'utilisation du modèle à 3 paramètres, et si on ne connaît que la résistance à la compression uniaxiale  $f_c$ , on pourra déterminer les deux autres paramètres, avec les rapports issus des essais de Kupfer, réf. (13) :

$$f_t = 0,09 f_c \quad f_{bc} = 1,16 f_c$$

#### Détermination des $\varepsilon_{1c}$

Pour le calcul de la déformation uniaxiale équivalente  $\varepsilon_{1c}$  associée à la contrainte maximum  $\sigma_{1c}$ , on fait l'hypothèse que dans l'espace des déformations uniaxiales équivalentes il existe une surface qui a la même forme que la surface de rupture dans l'espace des contraintes.

Bien que ces déformations n'aient pas signification physique, on définit des valeurs pour celles-ci qui sont analogues aux paramètres (contraintes) dont on a besoin pour la détermination de la surface de rupture dans l'espace des contraintes.

Le fait de supposer que l'allure de la surface de rupture en déformation est semblable à celle des contraintes, va nous permettre d'utiliser la même méthode numérique dans notre calcul.

Pour des cas particuliers, des états plans de contraintes, on peut obtenir des critères pour les déformations de rupture à partir des essais existants, par exemple les essais de Kupfer et Gerstle, en fonction des contraintes de rupture :

Zone compression - compression ( $\sigma_1 =$  compression,  $\sigma_2 =$  compression,  $0 \leq \alpha \leq 1$ )

$$\sigma_{2c} = \frac{1 + 3,65\alpha}{(1+\alpha)^2} f'_c \quad \varepsilon_{2c} = \varepsilon_c \left[ 3 \frac{\sigma_{2c}}{f'_c} - 2 \right]$$

$$\sigma_{1c} = \alpha \sigma_{2c} \quad \varepsilon_{1c} = \varepsilon_c \left[ -1,6 \left( \frac{\sigma_{1c}}{f'_c} \right)^3 + 2,25 \left( \frac{\sigma_{1c}}{f'_c} \right)^2 + 0,35 \frac{\sigma_{1c}}{f'_c} \right]$$

Zone compression - traction ( $\sigma_1 =$  traction,  $\sigma_2 =$  compression  $0,17 \leq \alpha \leq 0$ )

$$\sigma_{2c} = \frac{1 + 3,28 \alpha}{(1+\alpha)} f'_c$$

$$\varepsilon_{2c} = \varepsilon_c \left[ 4,42 - 8,38 \frac{\sigma_{2c}}{f'_c} + 7,54 \left( \frac{\sigma_{2c}}{f'_c} \right)^2 - 2,58 \left( \frac{\sigma_{2c}}{f'_c} \right)^3 \right]$$

$$\sigma_{1c} = \alpha \sigma_{2c} \quad \varepsilon_{1c} = \frac{\sigma_{1c}}{E_0}$$

Zone traction - compression ( $\sigma_1 =$  traction,  $\sigma_2 =$  compression,  $-\infty < \alpha < -0,17$ )

$$\sigma_{2c} \leq 0,65 f'_c$$

$$\varepsilon_{2c} = \varepsilon_c \left[ 4,42 - 8,38 \frac{\sigma_{2c}}{f'_c} + 7,54 \left( \frac{\sigma_{2c}}{f'_c} \right)^2 - 2,58 \left( \frac{\sigma_{2c}}{f'_c} \right)^3 \right]$$

$$\sigma_{1c} = f'_t \quad \varepsilon_{1c} = \frac{\sigma_{1c}}{E_0}$$

Zone traction - traction ( $\sigma_1 =$  traction,  $\sigma_2 =$  traction,  $1 < \alpha < \infty$ )

$$\sigma_{1c} = f'_t \geq \sigma_{2c} \quad \varepsilon_{1c} = \frac{f'_t}{E_0} \geq \varepsilon_{2c} = \frac{\sigma_{2c}}{E_0}$$

où  $\sigma_1, \sigma_2$  contraintes principales,

$\sigma_1$  est la contrainte maximum dans la direction  $i$ ,

$\varepsilon_1$  est la déformation maximum dans la direction  $i$ ,

$\varepsilon_c$  est la déformation maximum en essai uniaxial,

$$\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad \sigma_1 < \sigma_2 \text{ algébriquement,}$$

$f'_c$  résistance du béton en compression simple,

$f'_t$  résistance du béton en traction simple.

Bien que nous n'ayons pas une assise expérimentale suffisante, on utilisera une surface dans l'espace de déformations pour le calcul des valeurs  $\epsilon_{1c}$ . Ceci va nous permettre de disposer d'un modèle plus général applicable à n'importe quel type de structure. Nous avons choisi la surface de Willam-Warnke à 3 paramètres pour les déformations uniaxiales équivalentes, ces paramètres étant les déformations en compression et traction simples  $\epsilon_c$ ,  $\epsilon_t$  et en compression biaxiale  $\epsilon_{bc}$ , qui correspondent aux contraintes maximums.

Si on ne connaît que la déformation  $\epsilon_c$ , les paramètres  $\epsilon_t$  et  $\epsilon_{bc}$  pourront être calculés à partir des rapports issus des essais, par exemple ceux de Kupfer, réf. (13).

#### 2.2.6. Chemin de la rupture

L'utilisation de la relation contrainte-déformation uniaxiale équivalente - paragraphe 2.2.3. - a besoin des paramètres du matériau  $\sigma_{1c}$ ,  $\epsilon_{1c}$  qui sont liés à la rupture.

Nous devons trouver quel état de rupture doit être en rapport avec l'état actuel de contrainte (ou de déformation). Pour ceci, on incrémente les contraintes à partir de l'état actuel. Ces incréments, liés à un "chemin" dans l'espace de contraintes, permettront d'arriver à la surface de rupture, donc à l'état de rupture recherché.

Parmi l'infinité de chemins possibles, voici ceux qui sont souvent utilisés :

- incrémentation de la contrainte maximum de compression ;
- incrémentation d'une seule contrainte principale à la fois pour le calcul des modules qui lui sont associés ;
- incrémentation simultanée et proportionnelle de toutes les contraintes.

Nous avons choisi le dernier : un chemin rectiligne qui, partant de l'origine (état de contraintes nulles) passe par l'état actuel du matériau ; ce choix étant basé sur les considérations suivantes :

- la définition des modules tangents est réalisée sur une relation uniaxiale équivalente, concept qui permet d'utiliser les courbes de Sanz ou de

Popovicz normalisées. Ces courbes dépendent du rapport des contraintes principales dans l'état actuel. Bien que ce rapport puisse changer pour chaque pas de chargement, le rapport des contraintes principales dans un état actuel et dans l'état de rupture qui lui est associé doit être le même.

- par la suite, le chemin de contraintes devra être réalisé de telle manière que les contraintes actuelles évoluent en conservant le même rapport entre contraintes principales jusqu'à la rupture. S'il en allait autrement, nous ne pourrions pas utiliser la même courbe uniaxiale équivalente.

Selon ces considérations il faut suivre un chemin de charges particulier, dans lequel les contraintes augmentent proportionnellement jusqu'à atteindre la surface de rupture.

Le procédé numérique utilisé est le suivant :

1°) Calculer l'équation du méridien de la surface de rupture qui résulte de l'intersection de celle-ci avec un plan qui passe par l'axe hydrostatique et contient le point représentatif de l'état actuel de contraintes.

Ce plan est défini par l'angle de similarité  $\theta$  ou de Lode (parag. 2.2.5).

2°) Sur ce plan, on détermine l'intersection du méridien avec la droite qui, partant de l'origine passe par le point représentatif de l'état actuel de contraintes.

3°) A partir des coordonnées du point d'intersection, on détermine les valeurs de  $\sigma_{1c}$ . Ce procédé doit inclure des considérations particulières pour le cas de contraintes à petit déviateur, cas dans lequel la surface de rupture peut ne pas être interceptée par le chemin rectiligne de contrainte.

On procède de la même manière pour le calcul des déformations de  $\epsilon_{1c}$ .

#### **2.2.7. Extension au cas tridimensionnel**

Cela peut aisément être fait à partir de la définition des modules additionnels d'efforts tranchants  $G_{23}$  et  $G_{31}$ , évalués de la même façon que  $G_{12}$ .

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{c} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \\ d\tau_{12} \\ d\tau_{23} \\ d\tau_{31} \end{array} \right| = \begin{array}{ccc} E_1 & & \\ & E_2 & 0 \\ & & E_3 \\ & & & G_{12} \\ & 0 & & G_{23} \\ & & & & G_{31} \end{array} X \left| \begin{array}{c} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \\ d\gamma_{12} \\ d\gamma_{23} \\ d\gamma_{31} \end{array} \right|
 \end{array}$$

avec :

$$G_{23} = \frac{1}{4\phi} \left[ E_2 + E_3 - 2\mu_{23}\sqrt{E_2E_3} - \left( \sqrt{E_2}\mu_{31} + \sqrt{E_3}\mu_{12} \right)^2 \right]$$

$$G_{31} = \frac{1}{4\phi} \left[ E_3 + E_1 - 2\mu_{31}\sqrt{E_3E_1} - \left( \sqrt{E_3}\mu_{12} + \sqrt{E_1}\mu_{23} \right)^2 \right]$$

### 2.2.8 Cycles de charge - décharge

La déformation uniaxiale équivalente peut-être utilisée comme paramètre pour la prédiction à la réponse du béton sous des charges cycliques.

Parmi les formulations proposées, pour la simulation de décharge et recharge, nous utiliserons celle de Buyukozturk et Shareef, réf.(18) en raison de sa simplicité et de sa facilité d'introduction dans un programme d'éléments finis. Ce modèle étant basé sur des observations expérimentales, réf. (42), reproduit les caractéristiques principales dont on a fait mention au chapitre I, parag. 1.2.



Avec les notations pour les contraintes et déformations représentées à la figure 2.2 les différents cas s'expriment :

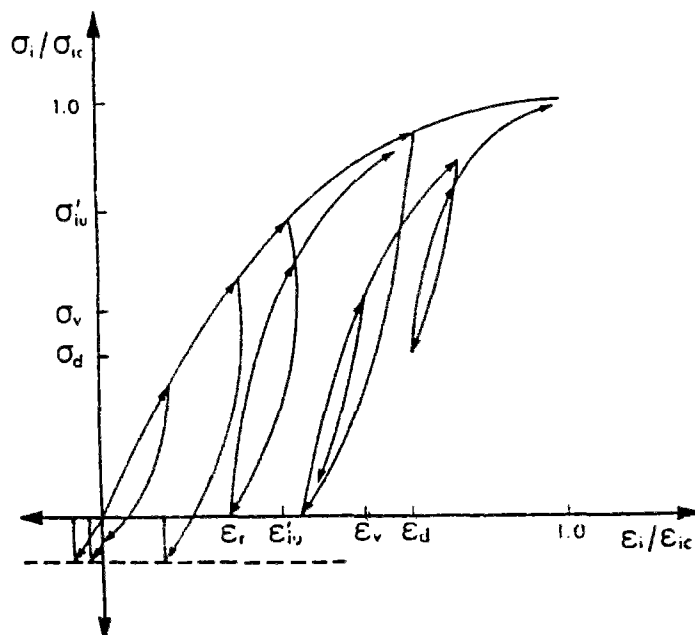


FIG. II.2 Notations pour les charges cycliques.

Décharge à partir de la courbe enveloppe

La courbe de décharge est définie au moyen d'une parabole qui a une tangente verticale au point  $\sigma'_{1u}$ ,  $\epsilon'_{1u}$  où commence la décharge et passe par le point 0,  $\epsilon_x$  où  $\epsilon_x$  est la déformation plastique résiduelle à contrainte nulle.

Sa valeur est reliée à partir d'observations expérimentales, réf. (42) (10) à la déformation  $\epsilon'_{1u}$ .

$$\frac{\epsilon_x}{\epsilon_{1c}} = 0,162 \left[ \frac{\epsilon'_{1u}}{\epsilon_{1c}} \right] + 0,334 \left[ \frac{\epsilon'_{1u}}{\epsilon_{1c}} \right]^2$$

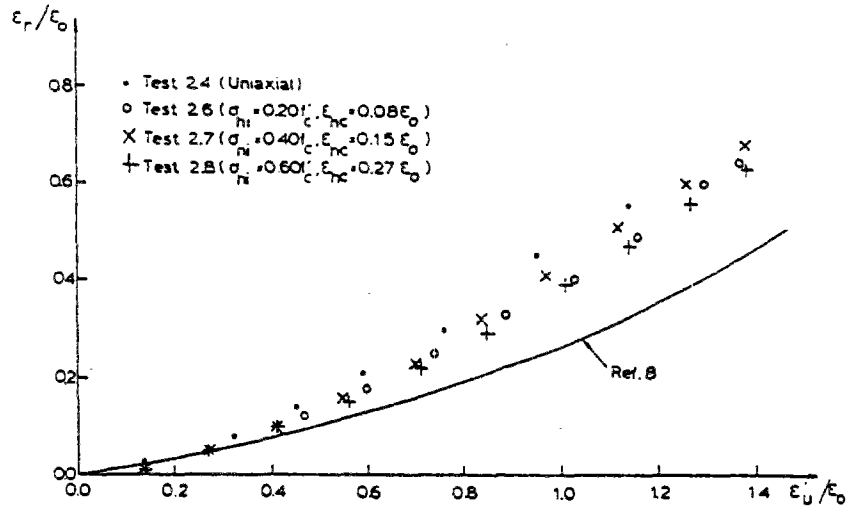


FIG. II.3 Relation expérimentale  $\epsilon'_{iu} - \epsilon_x$  réf. (10).

Relation  $\sigma - \epsilon$

$$(-1)(\epsilon_{iu} - \epsilon'_{iu}) = \frac{\epsilon'_{iu} - \epsilon_x}{\sigma'_{iu}} \left[ \sigma_i - \sigma'_{iu} \right]^2$$

Module d'élasticité tangent.

$$E_i = + \frac{1}{2 \sqrt{\left[ \frac{\epsilon'_{iu} - \epsilon_x}{\sigma'_{iu}} \right] \left[ \epsilon'_{iu} - \epsilon_{iu} \right]}}$$

Recharge à partir des contraintes nulles

C'est une expression identique à celle de la charge initiale, mais avec un module d'élasticité initial défini par la droite qui depuis  $\epsilon_x$  se dirige vers le point d'origine de la décharge.

$$E_{x0} = \frac{\sigma'_{iu}}{\epsilon'_{iu} - \epsilon_x}$$

Ainsi :

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_{ic}} = \frac{n}{n - 1 + \left( \frac{\epsilon_{iu} - \epsilon_r}{\epsilon_{ic} - \epsilon_r} \right)^n} \left( \frac{\epsilon_{iu} - \epsilon_r}{\epsilon_{ic} - \epsilon_r} \right)$$

$$n = \frac{E_{ro} (\epsilon_{ic} - \epsilon_r)}{E_{ro} (\epsilon_{ic} - \epsilon_r) - \sigma_{ic}}$$

$$E_i = \frac{\left[ 1 - \left( \frac{\epsilon_{iu} - \epsilon_r}{\epsilon_{ic} - \epsilon_r} \right)^n \right] n(n - 1) \frac{\sigma_{ic}}{\epsilon_{ic} - \epsilon_r}}{\left[ n - 1 + \left( \frac{\epsilon_{iu} - \epsilon_r}{\epsilon_{ic} - \epsilon_r} \right)^n \right]^2}$$

#### Recharge à partir d'une contrainte intermédiaire

Dans ce cas, le module d'élasticité initial de la courbe de charge initiale est remplacé par :

$$E_{roi} = \frac{\sigma'_{iu} - \sigma_d}{\epsilon'_{iu} - \epsilon_d}$$

où  $\sigma_d$  est la contrainte à partir de laquelle la recharge et  $\epsilon_d$  la déformation uniaxiale équivalente correspondante.

$$\frac{\sigma_i - \sigma_d}{\sigma_{ic} - \sigma_d} = \frac{n}{n - 1 + \left( \frac{\epsilon_{iu} - \epsilon_x}{\epsilon_{ic} - \epsilon_x} \right)^n} \left( \frac{\epsilon_{iu} - \epsilon_x}{\epsilon_{ic} - \epsilon_x} \right)$$

$$n = \frac{E_{\text{ro}}(\epsilon_{ic} - \epsilon_d)}{E_{\text{ro}}(\epsilon_{ic} - \epsilon_d) - (\sigma_{ic} - \sigma_d)}$$

$$E_i = \frac{\left[ 1 - \left( \frac{\epsilon_{iu} - \epsilon_x}{\epsilon_{ic} - \epsilon_x} \right)^n \right] n(n - 1) \frac{\sigma_{ic} - \sigma_d}{\epsilon_{ic} - \epsilon_x}}{\left[ n - 1 + \left( \frac{\epsilon_{iu} - \epsilon_x}{\epsilon_{ic} - \epsilon_x} \right)^n \right]^2}$$

### Décharge à un niveau intermédiaire

La courbe de décharge s'exprime par :

$$(\epsilon_{iu} - \epsilon_v) = - \left( \frac{\epsilon_v - \epsilon_x}{\sigma_v} \right) (\sigma_i - \sigma_v)^2$$

où  $\sigma_v$  est la contrainte à partir de laquelle on décharge,  $\epsilon_v$  la déformation uniaxiale équivalente correspondante et  $\epsilon_x$  est la déformation plastique résiduelle qui correspond à la décharge. Elle sera calculée à partir de l'expression expérimentale déjà mentionnée, avec la plus grande valeur entre  $\epsilon_{\phi}$  et  $\epsilon'_{iu}$

$$\epsilon_x = 0,162 \epsilon'_{iu} + 0,334 \frac{\epsilon'^2_{iu}}{\epsilon_{ic}} \quad \epsilon_v < \epsilon'_{iu}$$

$$\epsilon_x = 0,162 \epsilon_v + 0,334 \frac{\epsilon_v^2}{\epsilon_{ic}} \quad \epsilon_v > \epsilon'_{iu}$$

$$E_i = \frac{1}{2 \left[ \left( \frac{\epsilon_v - \epsilon_r}{\sigma_v^2} \right) (\epsilon_v - \epsilon_{iu}) \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Pour les cas de charge ou décharge, à partir d'une contrainte de traction, on utilise pour le module tangent la valeur du module d'élasticité initial.

### Critères pour l'inversion du sens de charge

On a déjà mentionné la difficulté qu'il y a à établir les critères de charge et décharge pour les modèles hypoélastiques (1.3.2.).

En simplifiant, nous emploierons le critère de changement de signe de l'incrément de la déformation uniaxiale équivalente, relative à la direction  $i$ , pour définir un changement du sens de la charge dans cette direction  $i$ .

### **2.3. CRITIQUE DES MODELES ORTHOTROPES**

Ces modèles ont été critiqués pour leur manque de respect de certaines propriétés que les équations constitutives doivent posséder, référence (43).

La critique principale est faite sur l'invariance des résultats du modèle par rapport au repère de référence choisi. Le repère de référence, étant donné l'isotropie du matériau dans son état initial, peut être choisi arbitrairement. L'évolution de l'état de contrainte et de déformation est obtenue par une relation incrémentale dépendant à la fois de l'état actuel des contraintes et des déformations.

Cette relation, anisotrope dans le cas général, a été limitée à une forme orthotrope dans le présent modèle, ne prenant pas en compte les effets du couplage entre les contraintes normales et les déformations de cisaillement et vice versa.

De ce fait les prédictions du modèle ne seront pas objectives par rapport au repère initial de coordonnées dans le cas général de chargement avec rotation entre les directions principales de contraintes et de déformations.

On devrait donc limiter l'utilisation des modèles orthotropes à des cas particuliers de chargement : des chargements monotones croissants sans rotation des directions principales de contraintes. Cette situation ne permet pas en principe l'implantation de ce modèle dans un logiciel général d'éléments finis.

Certains chercheurs pensent que l'anisotropie dans le béton ne peut avoir de signification que si des macrofissures sont présentes dans le matériau, réf. (54) ; ou dans le cas où l'état de fissuration présente une orientation très prédominante, réf. (69).

Dans l'avenir, si nous disposons de résultats sur essais faits avec rotation des axes principaux, il sera possible de confronter les résultats du modèle pour ces situations.

#### **2.4. SIMULATION D'ESSAIS**

Dans ce paragraphe on analysera les résultats du modèle en faisant la comparaison des valeurs de sa réponse avec les résultats expérimentaux de divers auteurs pour divers chemins de chargement.

On analyse des essais correspondants aux différents états de compression uniaxiale, compression biaxiale, traction biaxiale, combinaison de traction-compression, de même que différents cas de charge et décharge.

Pour ces simulations, le modèle orthotrope ayant été implanté dans un logiciel d'éléments finis, nous avons résolu une structure composée d'un élément isoparamétrique unique, à 8 noeuds. Avec cette modélisation on a évalué la réponse de l'échantillon qui est soumis aux essais.

Lorsque ce modèle emploie la surface de Willam-Warnke pour déterminer les  $\sigma_{1c}$  de rupture et les  $\varepsilon_{1c}$  de rupture, il est nécessaire de connaître les caractéristiques suivantes du matériau :

- $f_c$  résistance à la compression simple,
- $f_t$  résistance à la traction simple,
- $f_{bc}$  résistance en compression biaxiale isotrope,
- $\varepsilon_c$  déformation de rupture en compression simple,
- $\varepsilon_t$  déformation de rupture en traction simple,
- $\varepsilon_{bc}$  déformation de rupture en compression biaxiale isotrope.

Quand pour une série d'essais on ne dispose pas d'informations sur quelques-unes de ces valeurs, ces dernières ont été déterminées en se donnant les relations suivantes :

$$f_f = 0.009 f_c \qquad f_{bc} = 1.16 f_c$$

$$\varepsilon_t = 0.045 \varepsilon_c \qquad \varepsilon_{bc} = 1.18 \varepsilon_c$$

extraites des résultats expérimentaux de Kupfer, réf. (13).

Les essais sur lesquels les comparaisons ont été réalisées, sont :

- les essais biaxiaux de Kupfer, Hilsdorf, Rusch pour différents rapports de contraintes avec les paramètres suivants pour le béton, extraits de la réf. (13).

$$E_o = 32.400 \text{ MPa} \qquad \nu_o = 0.20$$

$$f_c = 32.8 \text{ MPa} \qquad f_t = 1.95 \text{ MPa} \qquad f_{bc} = 38.05 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_c = 22 \times 10^{-3} \qquad \varepsilon_t = 1 \times 10^{-4} \qquad \varepsilon_{bc} = 28 \times 10^{-3}$$

- les essais ENTPE, réalisés sur des chemins de charge séquentiels et avec les valeurs extraites de la réf. (44) :

$$\begin{array}{lll}
 E_o = 40.000 \text{ MPa} & \nu_o = 0.25 & \\
 f_c = 41.25 \text{ MPa} & f_t = 3.78 \text{ MPa} & f_{bc} = 47.85 \text{ MPa} \\
 \varepsilon_c = 2.7 \times 10^{-3} & \varepsilon_t = 1.2 \times 10^{-4} & \varepsilon_{bc} = 3.2 \times 10^{-3}
 \end{array}$$

- les essais du BAM, pour lesquels nous avons fait la simulation en prenant pour les paramètres :

$$\begin{array}{lll}
 E_o = 24.000 \text{ MPa} & \nu_o = 0.20 & \\
 f_c = 30 \text{ MPa} & f_t = 2.70 \text{ MPa} & f_{bc} = 38.05 \text{ MPa} \\
 \varepsilon_c = 2.7 \times 10^{-3} & \varepsilon_t = 1.2 \times 10^{-4} & \varepsilon_{bc} = 3.2 \times 10^{-3}
 \end{array}$$

Ces valeurs proviennent de la réf. (45).

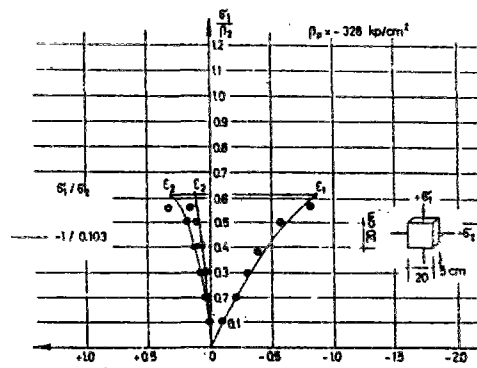
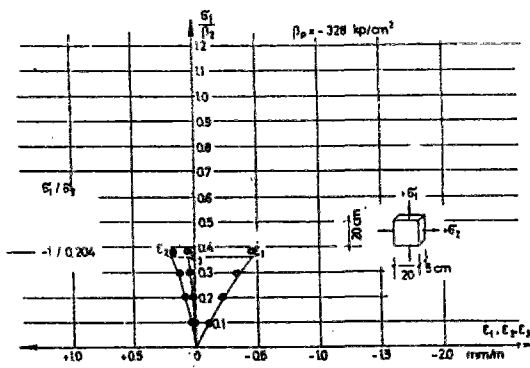
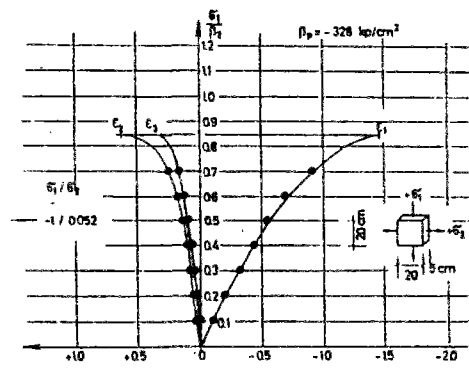
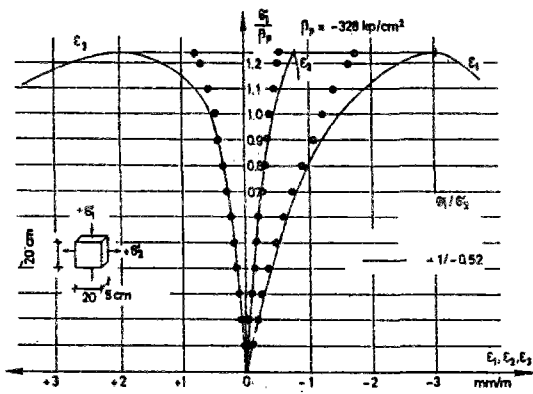
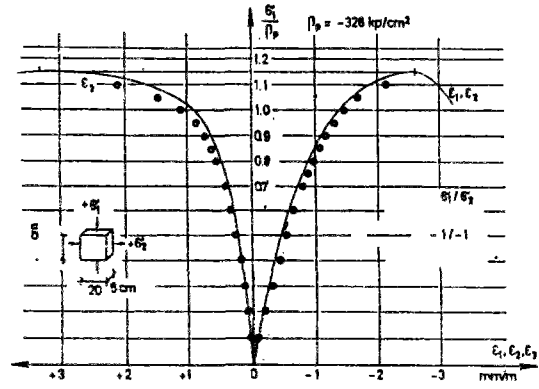
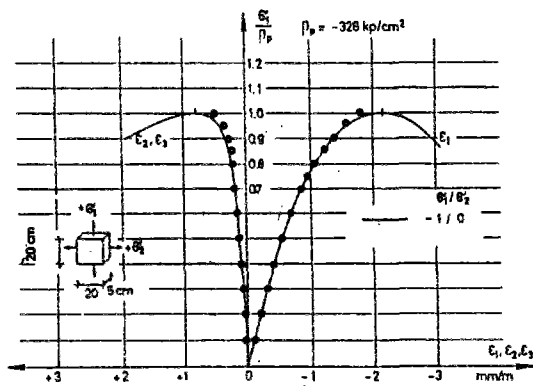
- les essais de Karsan et Jirsa, réf. (10) pour divers cas des charges cycliques, avec les valeurs suivantes pour les paramètres :

$$\begin{array}{lll}
 E_o = 32.400 \text{ MPa} & \nu_o = 0.20 & \\
 f_c = 32.8 \text{ MPa} & f_t = 1.95 \text{ MPa} & f_{bc} = 38.05 \text{ MPa} \\
 \varepsilon_c = 22 \times 10^{-3} & \varepsilon_t = 1 \times 10^{-4} & \varepsilon_{bc} = 28 \times 10^{-3}
 \end{array}$$

N'ayant pas les valeurs des paramètres expérimentaux, et les résultats étant fournis de façon normalisée par rapport à  $f_c$  et  $\varepsilon_c$ , nous avons utilisé les données qui correspondent aux essais de réf. (13). Les résultats de la simulation normalisés par rapport à  $f_c'$  sont confrontés avec les résultats expérimentaux de la réf. (10).

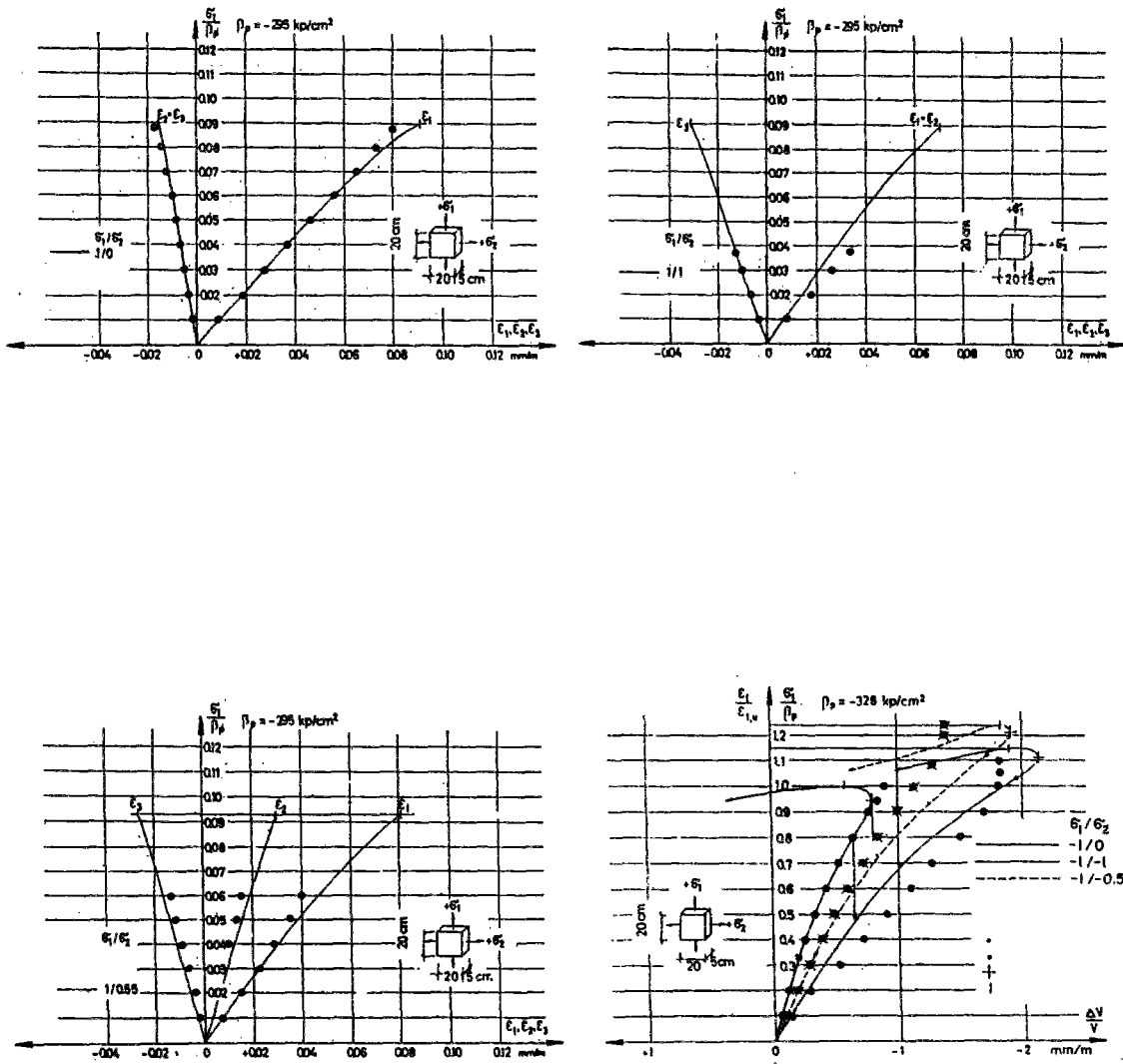
FIG. II.4 à II.7 présentent les résultats des expériences et de la simulation de celles-ci par le modèle hypoélastique.





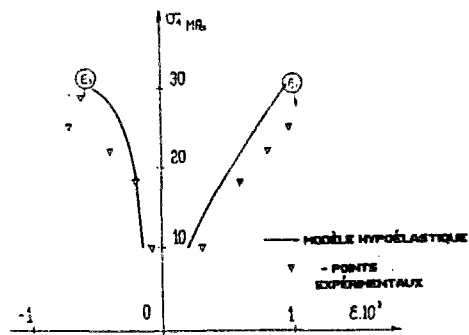
○ - MODÈLE HYPOÉLASTIQUE

FIG. II.4 Simulation des essais de KUPFER (13).

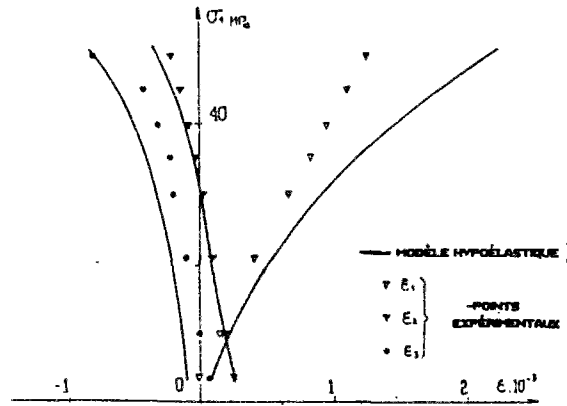


○ - MODÈLE HYPÉLASTIQUE

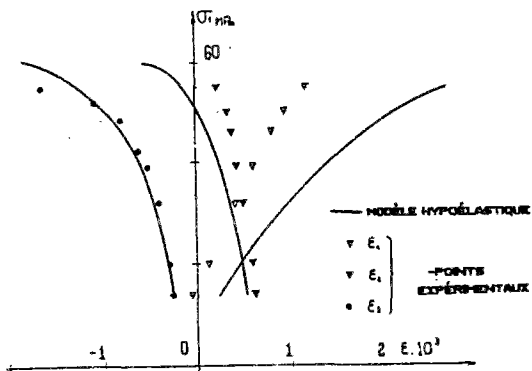
FIG. II.4 (suite) Simulation des essais de KUPFER (13).



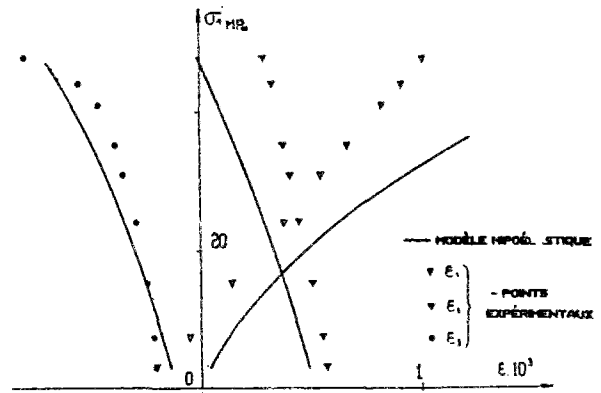
Essai Uniaxial UCI24P



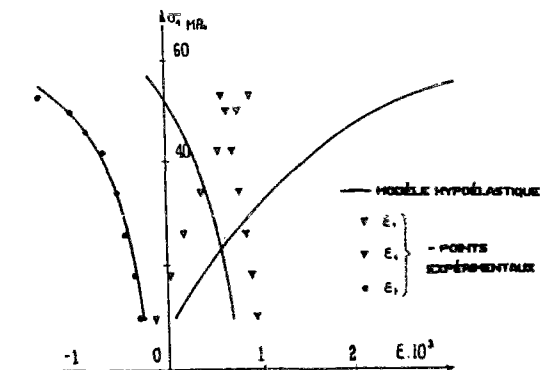
Essai BCD4P ( $\sigma_2 = 9$  MPa)



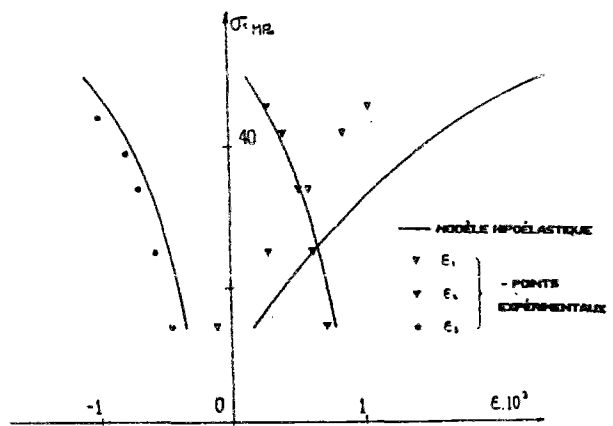
Essai BCD7P ( $\sigma_2 = 22$  MPa)



Essai BCD5P ( $\sigma_2 = 18$  MPa)

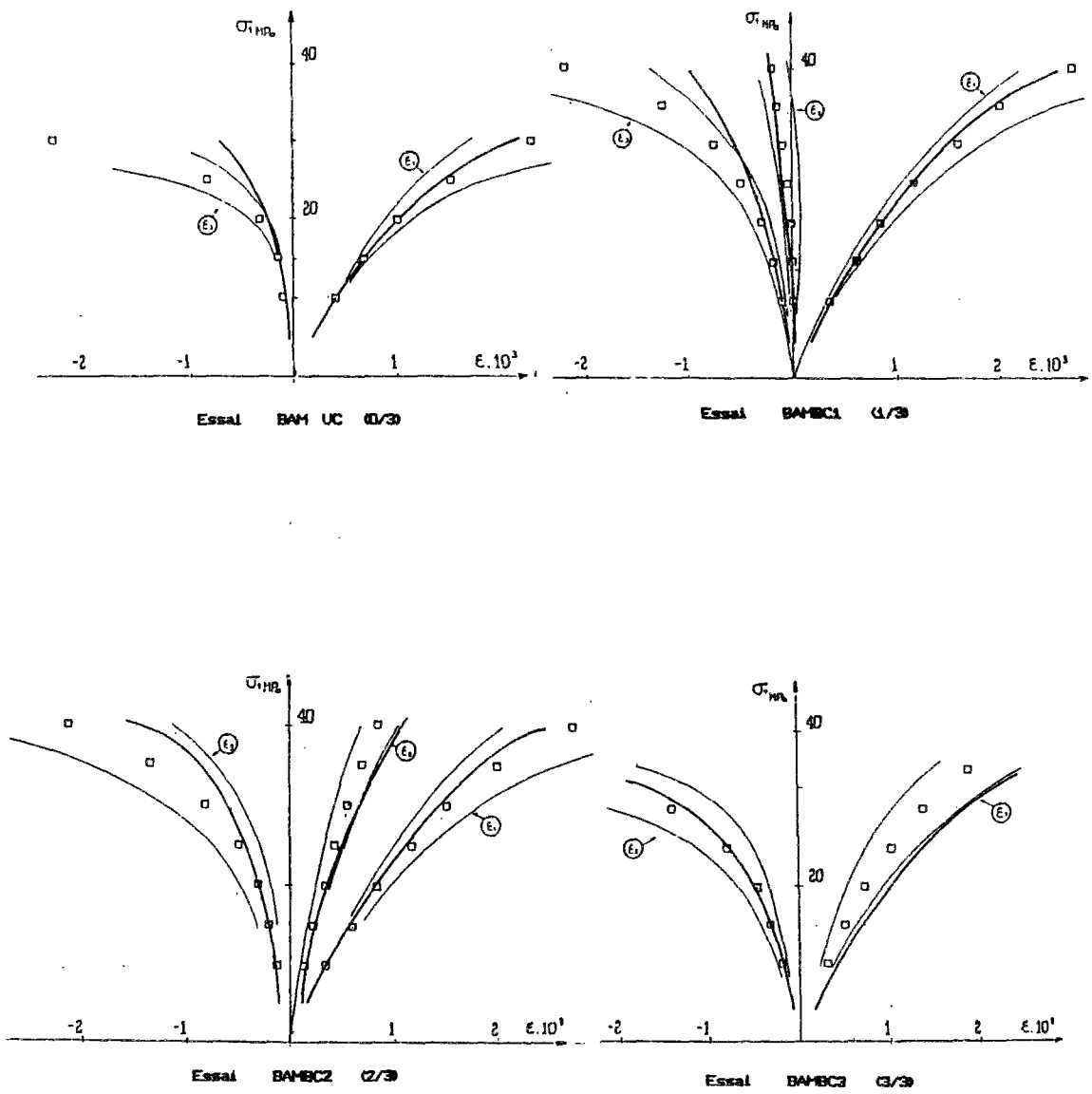





Essai BCD6P ( $\sigma_2 = 27$  MPa)



Essai BCD8P ( $\sigma_2 = 28$  MPa)

FIG. II.5 Simulation des essais de l'ENTPE (44).



- INTERVALLE DE  
 CONFIANCE À 90 %

- POINTS EXPÉRIMENTAUX

- MODÈLE HYPOÉLASTIQUE

FIG. II.6 Simulation des essais BAM (45).

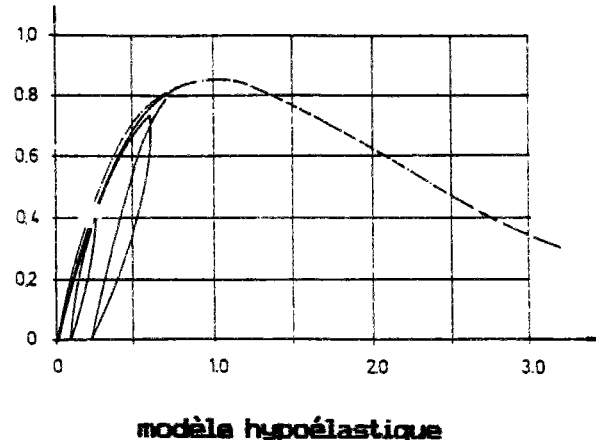
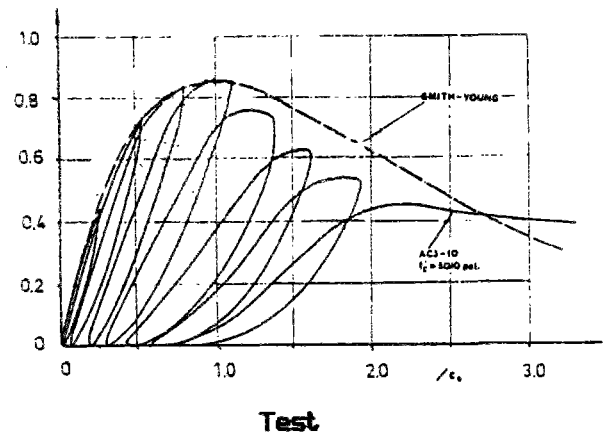
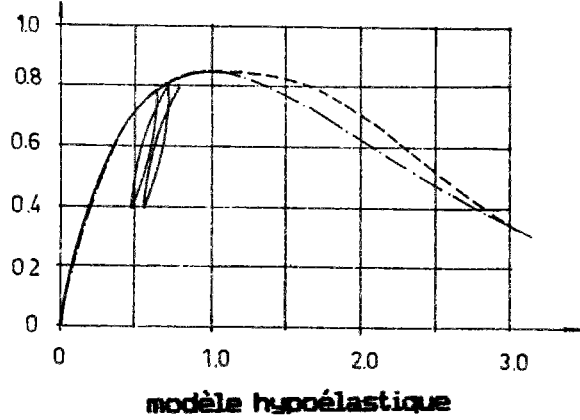
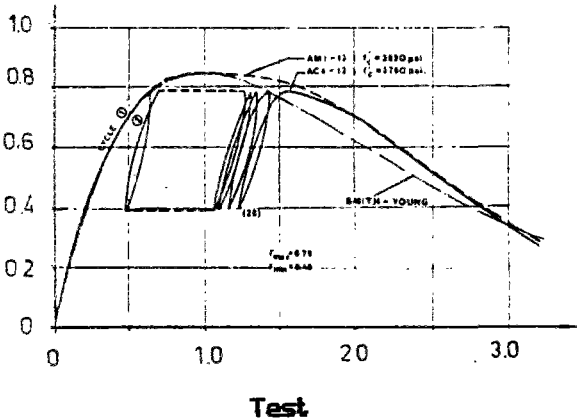
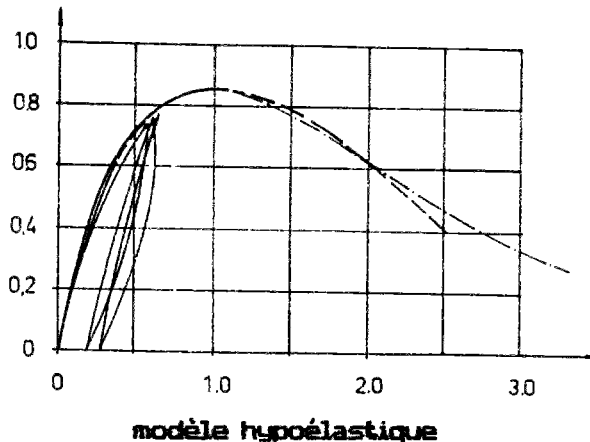
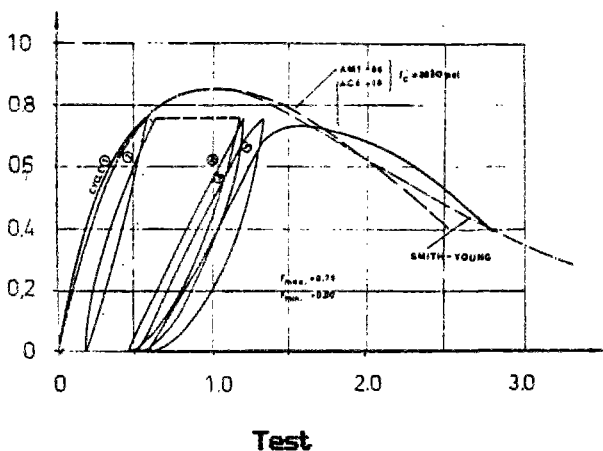
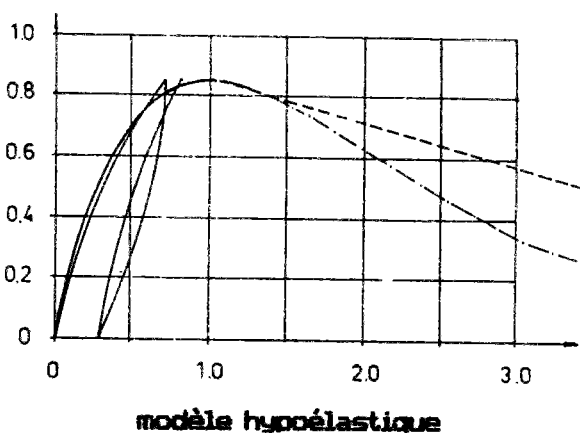
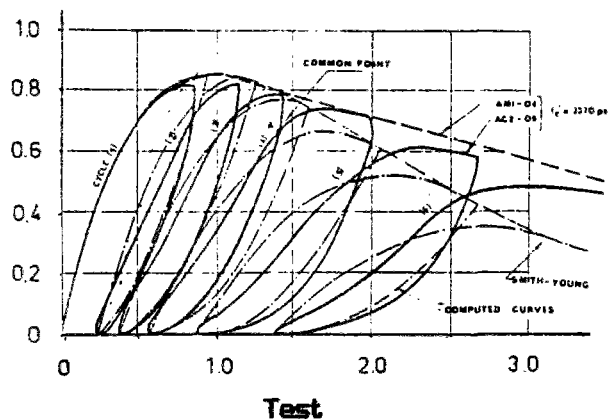


FIG. II.7 Simulation des essais de KARSAN et JIRSA (10).

## 2.5 ANALYSE DES RESULTATS ET CONCLUSIONS

Les résultats numériques sur les essais de Kupfer, réf. (13), fig. II.4 montrent une très grande concordance entre la simulation du modèle et les valeurs expérimentales. Il ne faut pas oublier que c'est à partir de ces essais qu'a été déterminée l'évolution des coefficients de Poisson en fonction de la déformation uniaxiale équivalente.

La simulation des essais de ENTPE, réf. (44), fig. II.5 présente une concordance qualitative des résultats numériques et expérimentaux, mais on constate un décalage des courbes, décalage qui est aussi observé dans la simulation de ces essais par d'autres modèles, réf. (44).

La simulation des essais du BAM, réf. (45), fig. II.6, est tout à fait satisfaisante.

Les résultats numériques sont presque toujours dans l'intervalle de confiance à 90 % fournis pour ces essais dans la réf. (45).

Finalement, la comparaison des résultats des essais cycliques de Karsan et Jirsa, réf. (10), avec ceux de la simulation met en évidence une très bonne réponse du modèle dans diverses conditions de charge-décharge qu'on représente à la fig. II.7.

Après cette analyse comparative entre les résultats des essais et leur simulation numérique, on peut conclure que la réponse du modèle est en bonne concordance avec l'expérience.

Bien qu'on ait testé le modèle sur des essais en contrainte plane, la formulation développée est générale. C'est ce souci de généralité qui nous a fait choisir l'utilisation d'une surface de rupture pour les déformations par analogie avec celle des contraintes. Malgré l'absence de fondement expérimental pour cette hypothèse, la simulation correcte des résultats expérimentaux autorise ce type de procédure dans la pratique.

<p style="text-align: center;"><b>CHAPITRE III</b></p> <p style="text-align: center;"><b>MODELISATION DU BETON EN COMPRESSION</b></p> <p style="text-align: center;"><b>PLASTICITE AVEC ECROUISSAGE</b></p>
---

### 3.1. INTRODUCTION

Nous verrons dans ce chapitre les formulations qui, pour établir les équations constitutives du béton, adoptent l'hypothèse que son comportement non linéaire qui a son origine dans la formation et le développement de microfissures, peut-être interprété comme un phénomène élasto-plastique.

Par suite, la déformation irréversible produite par la microfissuration sera considérée de la même façon que le processus de déformation irréversible qui se produit dans les matériaux avec plasticité.

Une analyse des nombreux modèles développés à partir de cette hypothèse révèle que l'emploi de modèles élasto-plastiques avec écrouissage est le plus approprié, du fait de la grande similitude de comportement entre le béton en compression et un matériau élasto-plastique avec écrouissage.

Deux grandes optiques sont possibles à l'intérieur de cette théorie :

- théorie de déformation, qui postule que l'état de contraintes détermine l'état de déformations tout au long du processus plastique ;
- théorie incrémentale, qui établit une relation entre l'incrément de déformations plastiques  $d\epsilon_{1j}^P$ , sous l'état de contraintes  $\sigma_{1j}$ , et l'incrément de contraintes  $d\sigma_{1j}$ .

Il a été démontré - réf. (3) - que dans le domaine de la plasticité, la théorie incrémentale permet, sauf pour certains chemins de charges particuliers, une simulation numérique plus proche au comportement réel du béton. Cette théorie étant bien fondée et développée, par exemple en référence (21) nous n'en ferons plus loin qu'un résumé en indiquant les concepts de

base et les relations fondamentales nécessaires au développement de ce chapitre.

Concernant la rupture, les remarques suivantes doivent être faites : la théorie mathématique de la plasticité classique repose sur une formulation contrainte-déformation qui établit la rupture en un point du matériau, lorsque l'état de contrainte et déformation présentes dans celui-ci vérifie la condition définie comme critère de rupture. Le matériau, en ce point et dans ces conditions, souffre un endommagement qui est adirectionnel.

Ce concept d'endommagement adirectionnel est contraire dans une première analyse - comme déjà mentionné au chapitre I - à ce qu'on observe expérimentalement, à savoir que l'endommagement macroscopique, qui produit la rupture, est un phénomène directionnel.

On peut admettre l'hypothèse que l'endommagement macroscopique directionnel est dû à l'endommagement microscopique adirectionnel des points situés dans une certaine zone du solide que l'on appellera "zone d'endommagement".

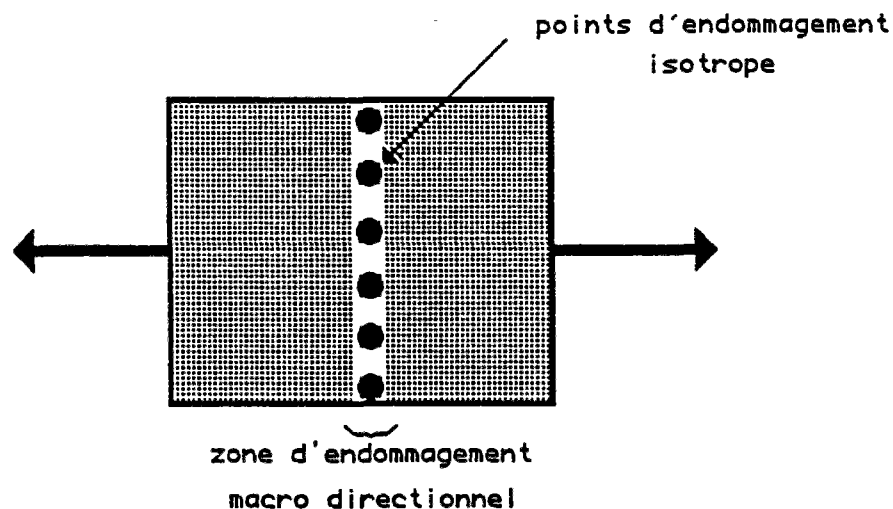


FIG. III.1 Zone d'endommagement.

La concentration de l'endommagement a pour cause un processus dit de localisation ou concentration de déformations qui se développe dans une zone de dimensions réduites. Le matériau, pour chaque point de cette zone, se trouve soumis à un processus d'écroutissement négatif ou radoucissement.



La localisation de l'endommagement, lorsque le mode de rupture est par fissures de traction, fera l'objet du prochain chapitre.

La localisation de l'endommagement, lorsque celui-ci se produit sous un état de compression prépondérante sous forme de bandes de cisaillement, sera commentée en 3.3.4..

## 3.2. PLASTICITE INCREMENTALE

### 3.2.1. Formulation classique

Cette théorie repose sur trois hypothèses fondamentales :

- la forme d'une surface limite d'élasticité initiale ;
- la règle d'écroûissage qui définit l'évolution des surfaces de charge successives ;
- la formulation d'une règle d'écoulement appropriée.

L'incrément de déformation totale  $d\epsilon_{ij}$ , est décomposé en ses composantes élastiques  $d\epsilon_{ij}^e$  et plastiques  $d\epsilon_{ij}^p$  par simple addition :

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (3.1)$$

La réponse élastique est régie par la loi de Hooke généralisée :

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e d\epsilon_{kl}^e \quad (3.2)$$

qui peut s'exprimer sous la forme :

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e (d\epsilon_{kl} - d\epsilon_{kl}^p) \quad (3.3)$$

où  $D_{ijkl}^e$  est le tenseur de rigidité élastique.

La première hypothèse de base de cette formulation est que la fonction de charge existe et dépend de l'état de contraintes, de l'état d'écroûissage de l'élément de matière et de l'histoire de la charge.

Cette fonction scalaire  $f$  est utilisée pour définir le domaine d'élasticité (initial ou actuel) et de façon que : (MM. HALPHEN et SALENÇON, réf. (21)) :

$f(\sigma) < 0$    correspondre à l'intérieur du domaine,  
 $f(\sigma) = 0$    à la frontière,  
 $f(\sigma) > 0$    à l'extérieur.

On appellera :

- critère d'élasticité, la condition  $f < 0$  ;
- critère de limite d'élasticité, ou critère de plasticité, la condition  $f = 0$ .

On désigne souvent la fonction  $f$  elle-même par critère de plasticité.

Pour un matériau écrouissable le domaine d'élasticité actuel dépend de l'état d'écrouissage  $E$ . En introduisant donc l'état d'écrouissage  $E$  dans la fonction de charge  $f$ , on écrira  $f(\sigma, E)$  au lieu de  $f(\sigma)$ .

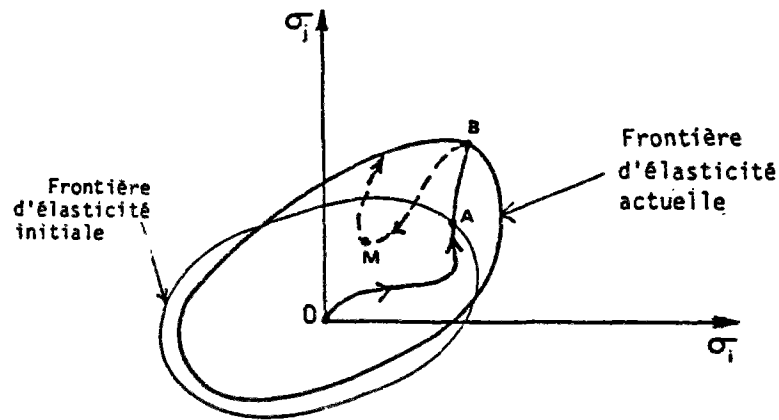


FIG. III.2 Matériau écrouissable : Domaines d'élasticité initial et actuel, réf. (21).

Dans le cas d'un matériau à écrouissage positif le domaine d'élasticité actuel n'est modifié que lorsque la variation de charge est dirigée vers

l'extérieur de sa frontière, le point de charge étant sur celle-ci. L'état d'érouissage évoluera lorsque il y a évolution de la déformation plastique.

Un des principaux problèmes de cette formulation est de déterminer la nature des surfaces de limite d'élasticité actuelle ou surfaces de charge.

Le comportement plastique qui se manifeste après que soit atteinte une surface de charge, est déterminé par une règle d'érouissage qui spécifie la forme de l'évolution de cette surface de charge dans la mesure où des déformations plastiques se produisent.

La définition de cette règle est celle qui introduit la distinction entre les différents modèles qui ont été élaborés avec la théorie de la plasticité incrémentale.

Diverses règles simplificatrices sont proposées afin de représenter l'évolution des surfaces de charge pour des matériaux avec érouissage (positif ou négatif) et aboutir à des représentation utilisables dans la pratique.

Le choix d'une règle spécifique dépendra de la facilité avec laquelle celle-ci pourra être appliquée et de son aptitude à représenter le comportement d'un matériau particulier.

Trois types de règles d'érouissage sont souvent utilisées :

- érouissage isotrope : où la surface de charge s'étend ou se contracte lorsque les déformations plastiques évoluent. L'érouissage dépend d'un paramètre scalaire unique ;
- érouissage cinématique : qui implique que la surface de charge se déplace sans se déformer dans l'espace de contraintes en conservant la dimension et la forme de la surface de charge initiale ; l'érouissage dépend d'un paramètre tensoriel ;
- érouissage mixte : qui, par une combinaison des deux précédentes procure une manière plus générale de modéliser l'érouissage.

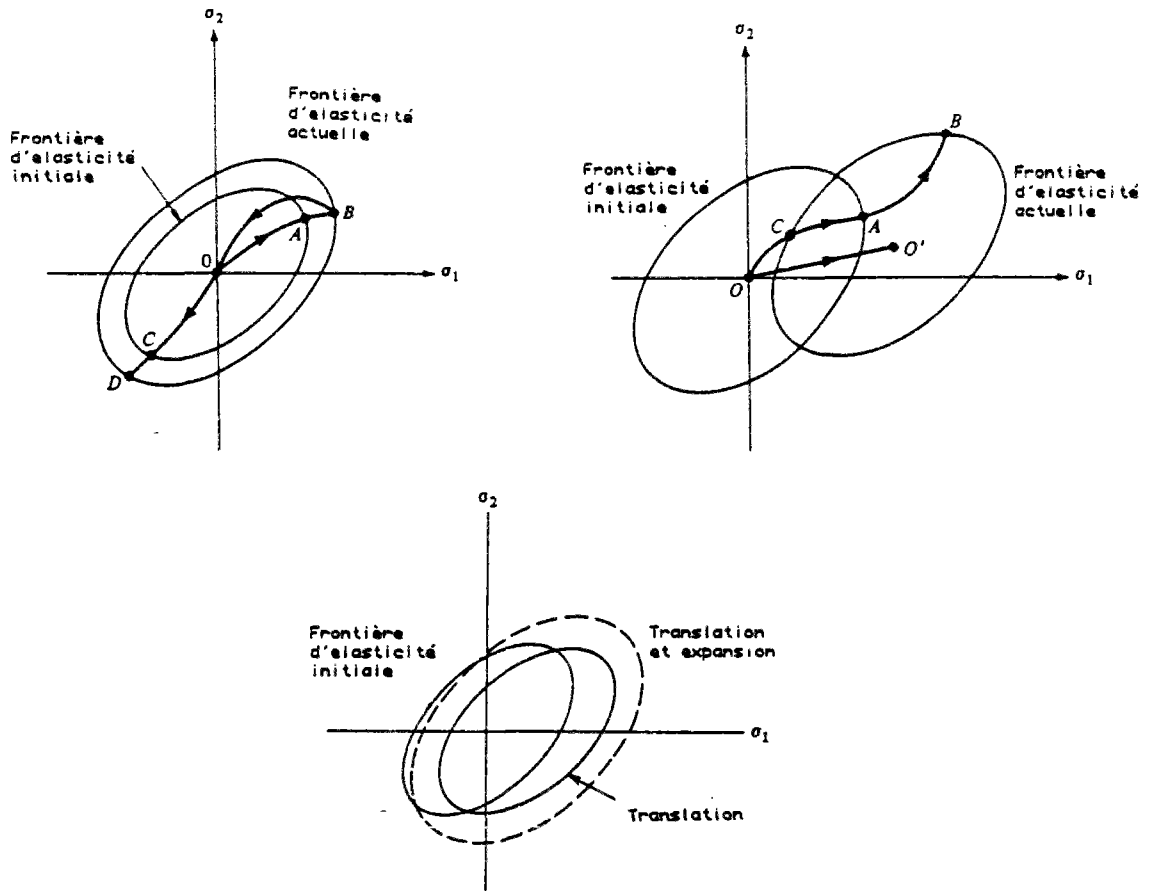


FIG. III.3 Règles d'érouissage, réf. 3.

La règle d'écoulement complète la description du comportement élastoplastique.

Lorsque la surface actuelle de limite d'élasticité est atteinte, le matériau est en état d'écoulement plastique pour des accroissements ultérieurs de charge. En introduisant le concept de potentiel plastique.

$$g(\sigma_{12}, \varepsilon_{12}^p, k)$$

on définit la règle d'écoulement par :

$$d\varepsilon_{12}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{12}} \quad (3.4)$$

où  $d\lambda \geq 0$  est une grandeur scalaire positive qui peut varier durant le processus de déformation.

Le gradient du potentiel  $\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$  définit la direction du vecteur  $d\varepsilon_{ij}^p$  et sa grandeur est déterminée par le paramètre  $d\lambda$ .

$$\text{Si } g(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k)$$

La règle d'écoulement est dite associée, le vecteur  $d\varepsilon_{ij}^p$  étant normal à la surface de charge.

La condition de consistance  $df = 0$  permet d'obtenir la relation  $\sigma$ - $\varepsilon$  sous sa forme incrémentale à l'aide de l'expression classique :

$$d\sigma_{ij} = D_{ij\kappa 1}^{eP} d\varepsilon_{\kappa 1} \quad (3.5)$$

et où

$$D_{ij\kappa 1}^{eP} = D_{ij\kappa 1}^e + D_{ij\kappa 1}^p$$

$D_{ij\kappa 1}^{eP}$  - tenseur de rigidité élasto-plastique

$D_{ij\kappa 1}^e$  = tenseur de rigidité élastique

$D_{ij\kappa 1}^p$  = tenseur de rigidité plastique, définie par :

$$D_{ij\kappa 1}^p = -\frac{1}{h} H_{ij}^* H_{\kappa 1}$$

$h$  = paramètre d'écrouissage grandeur scalaire lié à l'évolution des surfaces de charge.

$$H_{ij}^* = D_{ij\kappa 1}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_{\kappa 1}}$$

$$H_{ij} = D_{ij\kappa 1}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\kappa 1}}$$

### 3.2.2 Modèles de surface limite

Ces modèles sont fondés sur l'existence, dans l'espace des contraintes, d'une surface qui enveloppe tous les états de contraintes qu'il est possible d'atteindre en un point. On appelle cette surface par le nom de surface limite ou "bounding surface".

Ce concept, introduit à l'origine pour les métaux par Dafalias et Popov, réf. (47), (48), (49) et par Krieg (50), fut ultérieurement utilisé pour les sols, réf. (51), (52) et pour le béton par Fardis, (53), (54) et Yang, réf. (55).

Pour les cas de chargements proportionnels la surface limite est la surface de rupture. Elle reste indépendante de l'histoire de la déformation. Pour les cas de chargements cycliques la surface limite est fonction de l'histoire de la déformation.

Les essais réalisés par différents auteurs pour le cas des chargements cycliques, réf. (9), (10) montrent une contraction de la surface limite dans le cas où la déformation du matériau excède une valeur limite. (Ex. : cycles de chargement avec contraintes pic de compression supérieures à la limite de stabilité, fig. I.6). De ce fait Fardis a proposé, réf. (53), (54), que la surface limite  $F$  soit fonction des contraintes  $\sigma_{1j}$  et de la déformation principale maximum de compression  $\varepsilon_{max}$  subie par le matériau au cours de son chargement.

$$F(\sigma_{1j}, \varepsilon_{max}) = 0$$

S'il n'existe pas de macrofissures orientées on peut faire l'hypothèse d'isotropie et décrire la surface limite dans l'espace tridimensionnel des contraintes principales comme fonction de  $\varepsilon_{max}$  et des trois invariants du tenseur de contraintes :

$I_1$ , premier invariant du tenseur de contraintes,

$J_2$ ,  $J_3$ , second et troisième invariants du tenseur déviateur de contraintes.

Nous analyserons brièvement la formulation de Fardis, réf. (54).

#### SURFACE LIMITE

On propose pour la surface limite :

$$F(\sigma_{13}, \varepsilon_{\max}) = f(\varepsilon_{\max}) + g(\cos 3 \theta) \left[ a \left( \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} \right)^2 + b \left( \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} \right) \right] / \left[ \left( \frac{I_1}{f_c} + c \right) \right] = 0$$

où

$$f(\varepsilon_{\max}) = 1 \quad \text{si } \varepsilon_{\max} \leq \varepsilon_f$$

$$f(\varepsilon_{\max}) = 24 / \left[ 23 + \left( \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_f} \right)^2 \right] \quad \text{si } \varepsilon_{\max} > \varepsilon_f$$

$$\varepsilon_f = \varepsilon_0 \frac{N}{(1,3 + 0,3 \cos 3 \theta)^3}$$

N étant la valeur maximum entre :

$$3 \frac{I_1}{f_c} - 2 \quad \text{et} \quad 0,5 \frac{I_1}{f_c} + 0,1$$

$f_c$  résistance uniaxiale en compression du béton.

$\varepsilon_0$  déformation uniaxiale pour la contrainte  $f_c$ .

$$g(\cos 3 \theta) = (12 + 11 \cos 3 \theta)^{1/6}$$

$\theta$  étant l'angle de Lode défini par :

$$\cos 3 \theta = -3 \sqrt{3} J_3 / 2J_2^{3/2}$$

Toutes ces fonctions ont été définies à partir des essais de Kotsovos, réf. (15), de même que les valeurs  $a = -0,7$ ,  $b = -1,85$ ,  $c = 0,3$  qui interviennent dans l'expression de  $F(\sigma_{13}, \varepsilon_{\max})$ .

## RELATION INCREMENTALE CONTRAINTE DEFORMATION

Le modèle utilise la relation classique 3.3.

$$d\sigma_{ij} = D_{ij\kappa\lambda}^e (d\varepsilon_{\kappa\lambda} - d\varepsilon_{\kappa\lambda}^p)$$

- l'incrément de déformation  $d\varepsilon_{ij}$  est exprimé à partir de ses composantes :

$$d\varepsilon_{ij} = de_{ij} + \delta_{ij} \frac{d\varepsilon_{kk}}{3}$$

$de_{ij}$  : incrément du tenseur déviateur de déformation.

$d\varepsilon_{kk}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) : incrément de déformation volumique.

$\delta_{ij}$  : symbole de Kronecker.

- l'incrément du tenseur déviateur de déformations est exprimé à partir des composantes élastiques  $de_{ij}^e$  et plastiques  $de_{ij}^p$  :

$$de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p$$

Se basant sur des résultats expérimentaux le déviateur de la déformation plastique  $de_{ij}^p$  est considéré comme proportionnel au déviateur de contrainte  $s_{ij}$  et :

$$\frac{de_{ij}^p}{s_{ij}} = \frac{d\gamma_o^p}{\tau_o}$$

Les valeurs octaédrales  $\gamma_o^p$ ,  $\tau_o$  étant :

$$\tau_o = \sqrt{\frac{1}{3} s_{ij} s_{ij}} \quad \gamma_o^p = \sqrt{\frac{1}{3} e_{ij}^p e_{ij}^p}$$

et dans l'hypothèse de linéarité incrémentale :

$$d\gamma_o^p = d\tau_o \quad H^p$$



- à partir d'observations sur des résultats expérimentaux, l'incrément de déformation volumique s'écrit :

$$d\varepsilon_{kk} = \frac{dI_1}{3K^e} + \frac{dI_1}{3K^p} + \beta d\gamma_o^p$$

$K^e$ ,  $K^p$  modules de compressibilité volumiques, élastique et plastique.  
 $\beta$  facteur de dilatance.

- la combinaison de ces expériences dans 3.3, après un développement algébrique nous donne la relation incrémentale contrainte-déformation :

$$d\sigma = \left[ D^e - \frac{K^e}{1+K^p/K^e} JJ^T - \left( D^e A \sigma + \frac{\beta \tau_o K^p}{1+K^p/K^e} J \right) \frac{\sigma^T A D^e}{3\tau_o^2 H^p + \sigma^T A D^e A \sigma} \right] d\varepsilon$$

où

$D^e$  : matrice de rigidité élastique.

$J$  :  $(1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$

$$A : \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3 & 0 & 0 \\ & & & & 3 & 0 \\ & & & & & 3 \end{vmatrix}$$

$\frac{2}{3}$

SYM

Les auteurs obtiennent après calage sur des résultats expérimentaux, réf. (10), (15), des expressions pour  $H^P$  et  $\beta$  pour les cas de charge, décharge et recharge qui sont fonction des distances  $d$  et  $d_{max}$  jusqu'à la surface limite, et qu'on observe à la fig. III.4.

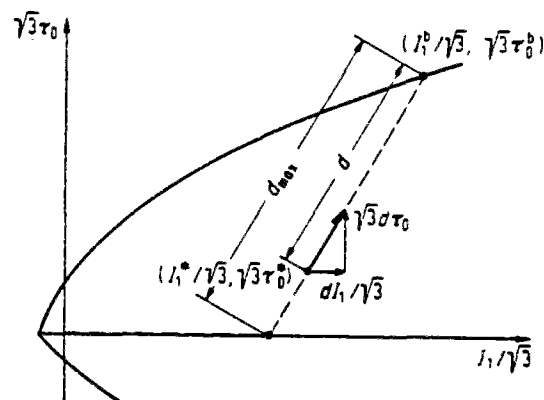


FIG. III.4 Surface limite et paramètres  $d$  et  $d_{max}$ , réf. (53).

Le module  $H^P$  et la valeur de  $\beta$  interviennent dans la détermination de la matrice  $D_{ep}$  de la relation incrémentale.

$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon$$

Après la détermination de  $D_{ep}$ , le calcul se développe selon la procédure classique de la plasticité incrémentale.

La détermination du module  $H^P$  à partir des expériences tout au long de l'histoire du chargement, fait que ce modèle ne nécessite pas la définition d'une surface limite d'élasticité initiale.

Les problèmes du modèle apparaissent au moment où on a besoin de mesurer les distances  $d$  et  $d_{max}$ .

Pour ces mesures, il faut définir une direction qui a été choisie en réf. (54) comme la direction - dans l'espace de contraintes - de la projection du vecteur d'incrément de contraintes  $d\sigma_{1,3}$  sur le plan qui contient l'axe hydrostatique et le point qui représente l'état de contrainte.

Avec cette procédure la valeur de  $H^p$  peut varier brusquement, même dans le cas où les incréments de contraintes ne modifient pas notablement l'état de contrainte du matériau.

### **3.3. MODELE DE PLASTICITE INCREMENTALE**

#### **3.3.1. Choix du modèle**

Choisir un modèle pour le béton entre les deux formulations commentées au paragraphe qui précède n'est pas une tâche facile ni une décision exempte de doute.

Les modèles à surface limite présentent les avantages mentionnés de laisser plus de liberté à la règle d'écrouissage, d'établir pour le module d'écrouissage  $H$  une relation analytique continue y compris dans les cas de chargement complexes qui incluent des cycles de charge et décharge. Ils présentent, à mon avis, l'inconvénient de dépendre, pour la détermination du module  $H$ , d'un travail intensif d'analyse des résultats expérimentaux obtenus à partir d'essais limités en nombre.

L'objet de cette analyse, est d'incorporer au modèle les modes fondamentaux du comportement du béton, sous une forme générale, afin d'ajuster ensuite, le comportement du modèle à un béton en particulier, au moyen de la résistance à la compression uniaxiale et la déformation maximum correspondante, référence (54).

On peut avoir des doutes quant à la validité générale du modèle pour n'importe quel béton et pour des situations complexes de contraintes après adaptation de seulement deux paramètres, obtenus à partir d'essais uniaxiaux.

D'autre part, dans un tel modèle, le module plastique  $H^p$  peut subir de fortes variations même pour des incréments de contraintes qui ne produisent pas un changement appréciable de l'état de contrainte du matériau.

Dans le cas d'un radoucissement du matériau, l'utilisation du modèle avec contraction de la surface limite en compression et le phénomène de localisation qui en résulte, ne permettraient pas de respecter l'objectivité par rapport au maillage d'éléments finis.

Ces considérations, jointes au fait que le phénomène physique d'écrouissage est dissimulé par les expressions analytiques du module  $H$ , nous ont conduit au choix d'un module basé sur la théorie classique de la plasticité incrémentale, avec plusieurs paramètres d'écrouissage, qui inclut dans sa formulation un concept simple et attrayant.

Si les courbes contrainte-déformation dans des conditions simples de charge sont utilisées comme modes de base de l'écrouissage, les prédictions du modèle seront, naturellement, les mêmes que ces courbes de base pour les mêmes conditions de charge.

Ceci signifie que l'utilisation d'un grand nombre de modes d'écrouissage permettra de mieux simuler les expériences et d'introduire dans la réponse du modèle le comportement général du matériau, en offrant de bonnes prédictions pour des chargement différents de ceux utilisés pour le calibrage.

En outre, les paramètres d'écrouissage du matériau auront un sens physique bien défini, ce qui est séduisant pour les futurs utilisateurs du modèle, liés à l'ingénierie structurale.

Nous présentons brièvement la formulation que nous utiliserons, due à Othani-Chen, (65).

Ensuite, on appliquera cette formulation à la surface de rupture de Chen-Chen, (65).

On fera une proposition pour l'évaluation du module d'écrouissage.

### 3.3.2. Modèle avec paramètres multiples d'érouissage

Le modèle développé par Murray, (66) qui propose une règle mixte d'érouissage, pour un état plan de contrainte, dans laquelle la résistance à la compression et la résistance à la traction dans deux directions orthogonales sont prises comme paramètres d'érouissage, constitue un précédent à cette formulation.

Un critère à M paramètres d'érouissage s'exprime sous la forme :

$$f(\sigma_{1j}, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) = 0 \quad (3.6)$$

$$\mu_M = \mu_M(\xi_M) \quad (3.7)$$

où  $\sigma_{1j}$  tenseur de contraintes.

$\mu_M$  paramètre d'érouissage du mode M qui est une fonction du énième paramètre d'endommagement  $\xi_M$ , qu'il faut définir.

Le paramètre d'endommagement  $\xi_M$  est une fonction monotone croissante et sa variation sera affectée par l'état actuel de contraintes.

Si  $\xi_T$  est l'endommagement total du matériau le paramètre d'endommagement  $\xi_M$  s'exprime :

$$\xi_M = \int d\xi_M = \int \alpha_M(\sigma_{1j}, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) d\xi_T \quad (3.8)$$

où le coefficient  $\alpha_M$  permet d'obtenir l'accroissement de l'endommagement du énième mode  $d\xi_M$  à partir de l'incrément d'endommagement total  $d\xi_T$ .

Pour un accroissement des charges qui produit un incrément d'endommagement total  $d\xi_T$ , on aura  $\alpha_M = 1$  si la condition de charge coïncide avec celle du énième mode d'érouissage.

On aura une règle mixte d'érouissage, étant donnée l'évolution de la frontière d'élasticité actuelle, équation 3.6, à partir de la variation des paramètres d'érouissage  $\mu_1$ , calculée au moyen des équations 3.8 et 3.7.

La règle d'érouissage multiparamétrique est schématisée ci-dessous :

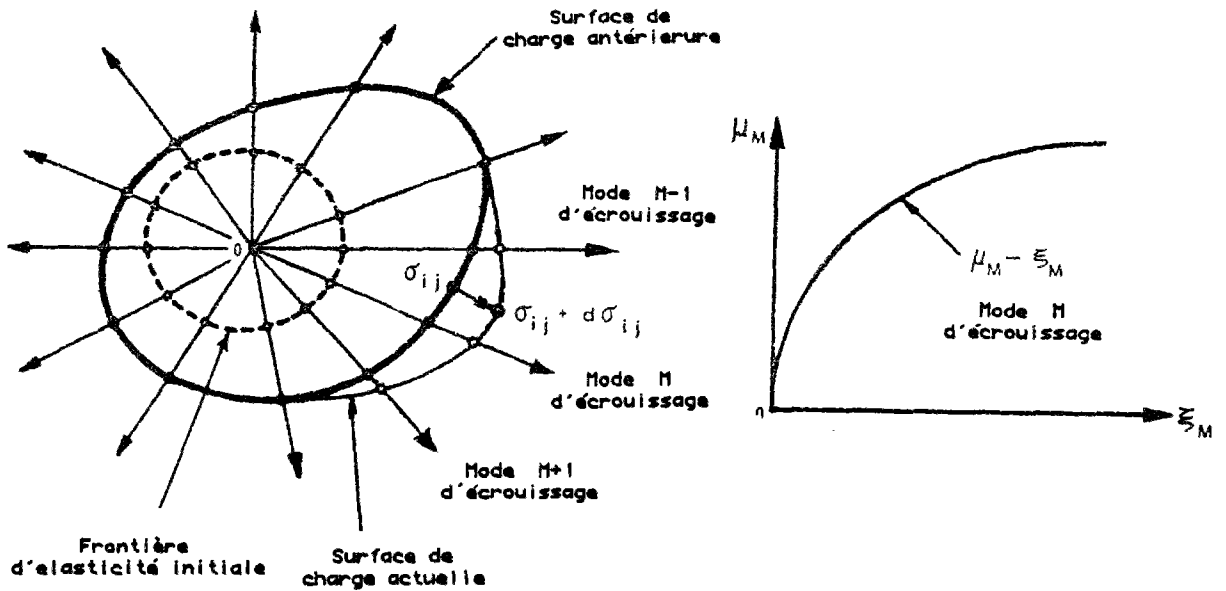


FIG. III.5 Erouissage avec plusieurs paramètres, réf. (66).

Pour représenter l'accumulation de l'endommagement total causé dans le matériau par la déformation plastique, nous emploierons la déformation plastique effective définie par :

$$\epsilon_p = \int d\epsilon_p = \int \sqrt{d\epsilon_{1j}^p d\epsilon_{1j}^p} \quad (3.9)$$

En conséquence, l'incrément du  $n^{\text{ème}}$  paramètre d'endommagement peut s'écrire :

$$d\zeta_M = \alpha_M (\sigma_{1j}, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) d\epsilon_p \quad (3.10)$$

L'équation de consistance :

$$df = 0 \quad (3.11)$$

permet de déterminer l'expression de  $d\lambda$ .

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \mu_1} d\mu_1 + \frac{\partial f}{\partial \mu_2} d\mu_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \mu_N} d\mu_N = 0 \quad (3.12)$$

en substituant Eq. 2.2. à 2.10 dans Eq. 3.12, on a :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijk1}^e (d\varepsilon_{k1} - d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{k1}}) + d\lambda \psi \sqrt{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} = 0 \quad (3.13)$$

$$\psi = \frac{\partial f}{\partial \mu_1} \frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_1} \alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial \mu_2} \frac{\partial \mu_2}{\partial \xi_2} \alpha_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \mu_N} \frac{\partial \mu_N}{\partial \xi_N} \alpha_N \quad (3.14)$$

d'où :

$$d\lambda = \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijk1}^e d\varepsilon_{k1} \quad (3.15)$$

$$h = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} D_{mnst}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_{st}} - \psi \sqrt{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}}} \quad (3.16)$$

La déformation plastique incrémentale peut s'exprimer :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{st}} D_{stkl}^e d\varepsilon_{kl} \quad (3.17)$$

Nous obtenons ainsi la relation contrainte-déformation dont nous avons besoin.

Les équations 3.17, 3.1 et 3.2, permettent de définir la matrice élasto-plastique indiquée en (3.5).

Pour appliquer cette formulation, (65), on utilise le modèle Chen-Chen (3), (67), qui définit deux fonctions distinctes pour décrire la rupture :

l'une dans la région compression-compression ; l'autre dans la région traction-traction et traction-compression.

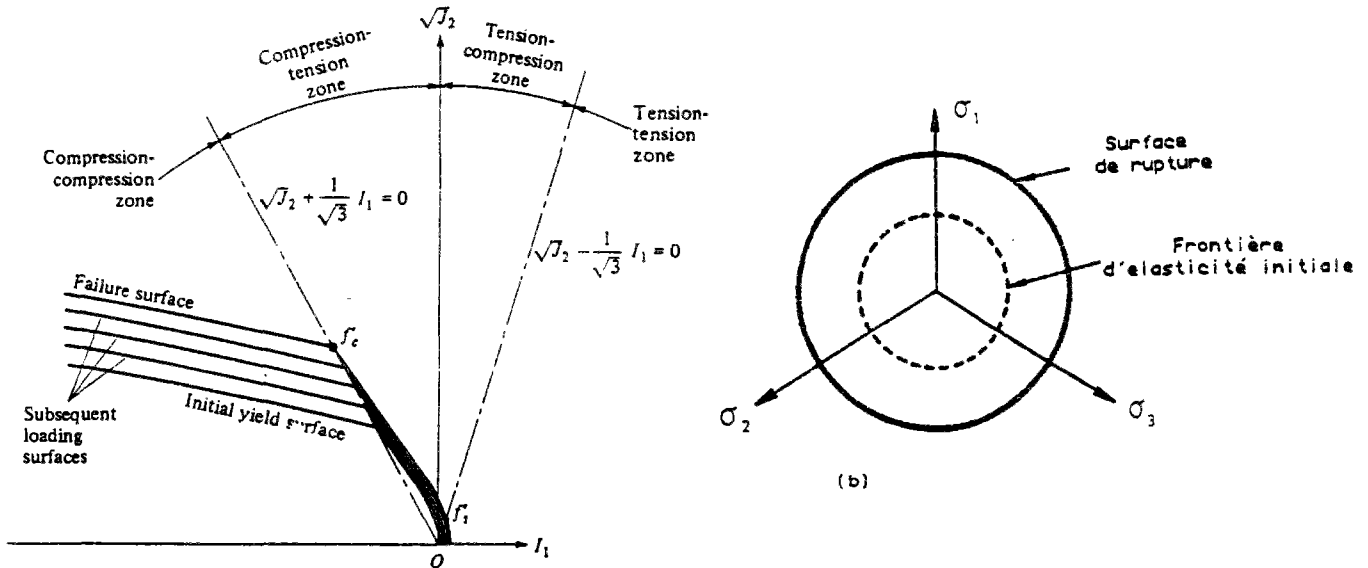


FIG. III.6 Modèle Chen-Chen, réf. (66).

Cette surface de rupture est définie par les équations :

- pour la région compression-compression :

$$f_{uc}(\sigma_{1j}) = J_2 + \frac{1}{3} A_{uc} I_1 - \tau_{uc}^2 = 0 \quad (3.18)$$

- pour les régions traction-traction et traction-compression :

$$f_{ut}(\sigma_{1j}) = J_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{1}{3} A_{ut} I_1 - \tau_{ut}^2 = 0 \quad (3.19)$$

La surface initiale est supposée avoir la même forme que celle de rupture et va donc être définie par les équations suivantes :



- compression-compression :

$$f_{oc} (\sigma_{ij}) = J_2 + \frac{1}{3} A_{oc} I_1 - \tau_{oc}^2 = 0 \quad (3.20)$$

- traction-traction et traction-compression :

$$f_{ot} (\sigma_{ij}) = J_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{1}{3} A_{ot} I_1 - \tau_{ot}^2 = 0 \quad (3.21)$$

Les indices u correspondent à la surface de rupture et les indices o à la surface initiale :

$I_1$  premier invariant du tenseur de contraintes ;

$J_2$  second invariant du tenseur déviateur de contraintes.

$A_{uc}$ ,  $\tau_{uc}$ ,  $A_{ut}$ ,  $\tau_{ut}$ ,  $A_{oc}$ ,  $\tau_{oc}$ ,  $A_{ot}$  et  $\tau_{ot}$  sont des constantes du matériau que l'on détermine à partir de paramètres obtenus par des essais simples :

$$A_{uc} = \frac{f'_{bc}{}^2 - f'_c{}^2}{2f'_{bc} - f'_c} \quad \tau_{uc}^2 = \frac{f'_c f'_{bc} (2f'_c - f'_{bc})}{3(2f'_{bc} - f'_c)} \quad (3.22)$$

$$A_{ut} = \frac{f'_c - f'_t}{2} \quad \tau_{ut}^2 = \frac{f'_c f'_t}{6}$$

où  $f'_c$ ,  $f'_t$ ,  $f'_{bc}$  sont les résistances ultimes en compression uniaxiale ; traction uniaxiale et compression biaxiale.

Des expressions similaires sont obtenues pour les valeurs des constantes correspondant aux surfaces initiales, en remplaçant les valeurs de  $f'_c$ ,  $f'_t$  et  $f'_{bc}$  par  $f_c$ ,  $f_t$  et  $f_{bc}$ , valeurs qui correspondent à la surface limite d'élasticité initiale du matériau.

$$A_{oc} = \frac{f_{bc}^2 - f_c^2}{2f_{bc} - f_c} \quad \tau_{oc}^2 = \frac{f_c f_{bc} (2f_c - f_{bc})}{3(2f_{bc} - f_c)}$$

$$A_{ot} = \frac{f_c - f_t}{2} \quad \tau_{ot}^2 = \frac{f_c f_t}{6} \quad (3.23)$$

En appliquant la formulation multiparamétrique à cette surface, la fonction de charge avec trois paramètres d'écroissage est :

$$f = f(\sigma, E) = f(\sigma_{1j}, \sigma_c, \sigma_{bc}, \sigma_t) = 0 \quad (3.24)$$

où  $\sigma_c$ ,  $\sigma_t$  et  $\sigma_{bc}$  sont les valeurs actuelles en compression simple, en traction simple, et en compression biaxiale, qui sont les valeurs à considérer pour la définition de la surface de charge.

Ces valeurs seront comprises entre celles de la surface initiale et celles de la surface de rupture. En utilisant le modèle de Chen, l'équation, pour cette surface à trois paramètres peut-être exprimée par :

- région compression-compression :

$$f(\sigma_{1j}) = J_2 + \frac{1}{3} A_c I_1 - \tau_c^2 = 0 \quad (3.25)$$

où :

$$A_c = \frac{\sigma_{bc}^2 - \sigma_c^2}{2\sigma_{bc} - \sigma_c} \quad \tau_c^2 = \frac{\sigma_c \sigma_{bc} (2\sigma_c - \sigma_{bc})}{3(2\sigma_{bc} - \sigma_c)} \quad (3.26)$$

- région traction-traction et traction-compression :

$$f(\sigma_{1j}) = J_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{1}{3} A_t I_1 - \tau_t^2 = 0 \quad (3.27)$$

avec :

$$A_t = \frac{\sigma_c - \sigma_t}{2} \quad \tau_t^2 = \frac{\sigma_c \sigma_t}{6} \quad (3.28)$$

A un extrême, lorsque les contraintes actuelles prennent les valeurs initiales :

$$f = f(\sigma_{1j}, f_c, f_{bc}, f_t) = 0 \quad (3.29)$$

la surface de charge se réduit à la surface limite d'élasticité initiale.

A l'autre extrême, lorsque les contraintes actuelles prennent les valeurs ultimes, la surface de charge coïncide avec la surface de rupture:

$$f = f(\sigma_{1j}, f'_c, f'_{bc}, f'_t) = 0 \quad (3.30)$$

Nous faisons remarquer qu'il ne faut pas que les deux surfaces, charge et rupture, coïncident pour que le matériau rompe ; il suffit qu'en un point les deux surfaces soient en contact ; par exemple dans le cas de traction uniaxiale, la rupture ultime du matériau se produira si :

$$f = f(\sigma_{1j}, f_c, f_{bc}, f'_t) = 0 \quad (3.31)$$

sans qu'il soit nécessaire que les deux surfaces coïncident.

Chaque paramètre d'érouissage est exprimé en fonction du paramètre d'endommagement associé :

$$\sigma_c = \sigma_c(\varepsilon_{pc})$$

$$\sigma_{bc} = \sigma_c(\varepsilon_{pbc}) \quad (3.32)$$

$$\sigma_t = \sigma_t(\varepsilon_{pt})$$

Ces expressions correspondent à la forme générale de l'équation 3.3,  $\varepsilon_{pc}$ ,  $\varepsilon_{pbc}$ ,  $\varepsilon_{pt}$ , étant des déformations plastiques effectives, correspondant aux modes d'érouissage définis pour ce modèle. Les relations exprimées dans l'équation 3.32 seront obtenues, en général à partir de valeurs expérimentales.

Ici surgit le problème de la distribution de l'incrément de l'endommagement interne total du matériau  $d\varepsilon_p$  entre les modes d'érouissage du matériau, comme il a été indiqué dans l'équation 3.10.

$$\varepsilon_{pc} = \int d\varepsilon_{pc} = \int \alpha_1(\sigma_{1j}, \sigma_c, \sigma_{bc}, \sigma_t) d\varepsilon_p$$

$$\varepsilon_{pbc} = \int d\varepsilon_{pbc} = \int \alpha_2(\sigma_{1j}, \sigma_c, \sigma_{bc}, \sigma_t) d\varepsilon_p \quad (3.33)$$

$$\varepsilon_{pt} = \int d\varepsilon_{pt} = \int \alpha_3(\sigma_{1j}, \sigma_c, \sigma_{bc}, \sigma_t) d\varepsilon_p$$

où  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont des coefficients qui relient l'endommagement de chaque mode d'érouissage à l'endommagement total de façon incrémentale.

Un coefficient  $\alpha_1$  prendra la valeur unitaire si le chargement que subit le matériau coïncide avec le mode d'érouissage correspondant.

La relation incrémentale élasto-plastique entre contrainte et déformation dans le cadre de la plasticité associée s'obtient à partir des équations précédentes et par des développements algébriques :

$$D_{ij\kappa l}^{ep} = D_{ij\kappa l}^e + D_{ij\kappa l}^p$$

où (3.34)

$$D_{ij\kappa l}^p = -\frac{1}{W} \phi_{ij} \phi_{\kappa l}$$

$$\phi_{ij} = 3K\rho \delta_{ij} + 2GS_{ij} \quad (3.35)$$

$$W = 9K^2\rho^2 + 4GJ_2 - \psi \sqrt{3p^2 + 2J_2} \quad (3.36)$$

avec :

$\delta_{ij}$  = symbole de Konecker,

$S_{ij}$  = tenseur déviateur de contraintes,

$K, G$  modules de compressibilité volumique et de cisaillement,

et :

$$\rho = \left( \frac{\partial f}{\partial I_1} \right) / \left( \frac{\partial f}{\partial J_2} \right) = \frac{1}{3} A + n I_1 \quad (3.37)$$

avec :

$A = A_c, n = 0$  pour compression-compression,

$A = A_t, n = -\frac{1}{3}$  pour les autres régions.

$$\psi = \alpha_1 Q_1 H_c^p + \alpha_2 Q_2 H_{bc}^p + \alpha_3 Q_3 H_t^p \quad (3.38)$$

$$H_c^p = \frac{d\sigma_c}{d\varepsilon_{pc}} \quad H_{bc}^p = \frac{d\sigma_{bc}}{d\varepsilon_{pbc}} \quad H_t^p = \frac{d\sigma_t}{d\varepsilon_{pt}} \quad (3.39)$$

l'équation 3.39 est l'expression qu'adoptent les modules plastiques pour chacun des modes d'érouissage adoptés.

$Q_1, Q_2$  et  $Q_3$  sont les dérivées de la fonction de charge par rapport aux paramètres d'érouissage:

- région compression-compression :

$$Q_1 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_c} = \frac{1}{3} \frac{1}{(2\sigma_{bc} - \sigma_c)^2} (\sigma_c^2 - 4\sigma_c \sigma_{bc} + \sigma_{bc}^2) (I_1 + 2\sigma_{bc})$$

$$Q_2 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{bc}} = \frac{2}{3} \frac{1}{(2\sigma_{bc} - \sigma_c)^2} (\sigma_c^2 - \sigma_c \sigma_{bc} + \sigma_{bc}^2) (I_1 + \sigma_c) \quad (3.40)$$

$$Q_3 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_t} = 0$$

- région traction-traction et traction-compression :

$$Q_1 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_c} = \frac{1}{6} (I_1 - \sigma_t)$$

$$Q_2 = \frac{\partial f_c}{\partial \sigma_{bc}} = 0 \quad (3.41)$$

$$Q_3 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_c} = -\frac{1}{6} (I_1 - \sigma_t)$$

Pour la détermination des paramètres  $\alpha$ , qui contrôlent l'évolution des surfaces de charge et toujours en conformité avec la référence (65), on fait les hypothèses suivantes :

- les déformations plastiques, dans la région compression-compression, ne provoquent pas d'écrouissage de traction uniaxiale ;
- les déformations plastiques, dans la région traction-traction, occasionnent seulement un écrouissage de traction uniaxiale ;
- les déformations plastiques, dans la région traction-compression et compression-traction, produisent un écrouissage dans tous les modes.

La distribution des  $\alpha$  en fonction des zones proposées en référence (65) est :

- région compression-compression :

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = 0$$

- région compression-traction et traction-compression :

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_t - I_1}{\sigma_c + \sigma_t} \quad \alpha_2 = \frac{\sigma_t - I_1}{\sigma_c + \sigma_t} \quad \alpha_3 = \frac{\sigma_c + I_1}{\sigma_c + \sigma_t} \quad (3.42)$$

- région traction-traction :

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 0 \quad \alpha_3 = 1 \quad (3.43)$$

que l'on peut représenter graphiquement.

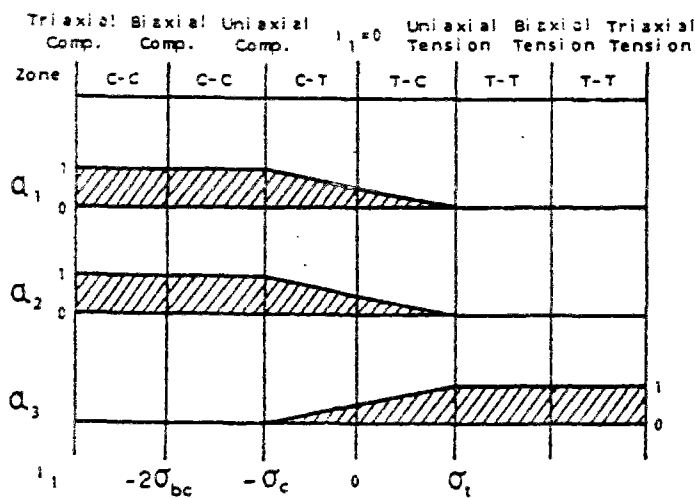


FIG. III.7 Distribution des  $\alpha_M$ .

cette mesure du dommage à travers  $\bar{\epsilon}_p$  et sa contribution aux modes d'écroutissage s'est révélée correcte, vue la concordance entre la simulation numérique et les résultats expérimentaux, à partir des comparaisons que nous présenterons à la fin de ce chapitre.

De ce fait, on n'a pas considéré nécessaire d'utiliser pour ce modèle des formes plus complexes de la distribution du dommage selon les modes

d'écrouissage : par exemple, celles proposées par Mazars et al (69) ou Oller, (59).

### 3.4 PROPOSITION SUR L'EVALUATION DU MODULE D'ECROUISSAGE

La valeur du module d'écrouissage  $H$ , définie par les expressions 3.39, est déterminée généralement à partir d'une relation expérimentale sur laquelle on ne donne pas de plus amples détails.

Pour une utilisation facile du modèle, il est préférable d'avoir une relation analytique pour l'évaluation des modules d'écrouissage basée sur des paramètres obtenus à partir des essais standards. N'ayant trouvé dans la bibliographie aucune expression qu'on puisse adapter aux besoins du présent modèle, nous proposons ici la procédure suivante :

- on suppose, de la même manière qu'au chapitre 1, que les courbes  $\sigma - \varepsilon$  correspondants à des essais biaxiaux peuvent être représentées de façon approximative par une fonction unique si on les normalise par rapport à la contrainte maximum et la déformation maximum ;
- pour cette représentation nous emploierons la courbe de Sanz, expliquée en 2.2.3, et où la déformation sera remplacée par la somme d'une composante élastique et d'une composante plastique.

Comme il est nécessaire d'avoir des déformations équivalentes aux uniaxiales pour utiliser l'équation de Sanz, nous prenons :

- la déformation plastique effective  $\varepsilon_p$  définie par l'équation 3.9 pour la composante plastique ;
- la composante élastique uniaxiale équivalente n'a pas besoin d'être définie car celle-ci est remplacée dans l'expression finale par  $\frac{\sigma}{E}$ .

L'expression de Sanz se réduit à une expression du type :

$$\sigma = \sigma(\varepsilon_p)$$

qu'on représente en Fig. III.8.



A partir de cette expression la définition pour le module H est :

$$H = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p}$$

d'où résulte l'expression :

$$N = E - \frac{\sigma^2}{E \varepsilon_{1c}^2} - \frac{E \varepsilon_p^2}{\varepsilon_{1c}^2} - 2 \frac{\sigma \varepsilon_p}{\varepsilon_{1c}^2}$$

$$D = 1. + \sigma \left( \frac{1}{\sigma_{1c}} - \frac{2}{E \varepsilon_{1c}} + \frac{2 \varepsilon_p}{E \varepsilon_{1c}^2} + \frac{E \varepsilon_p}{\sigma_{1c}} + \frac{\varepsilon_p^2}{\varepsilon_{1c}^2} \right) + \frac{\sigma^2}{E^2 \varepsilon_{1c}^2}$$

$$H = \frac{N}{D^2}$$

où E : module d'élasticité initial,

$\sigma$  : paramètre d'écroûissage ( $\sigma_c, \sigma_t, \sigma_{bc}$ ),

$\varepsilon_p$  : paramètre d'endommagement ( $\varepsilon_{pc}, \varepsilon_{pt}, \varepsilon_{pbc}$ ),

$\sigma_{1c}, \varepsilon_{1c}$  : contrainte maximum, déformation pour la contrainte maximum de la courbe des paramètres d'écroûissage.

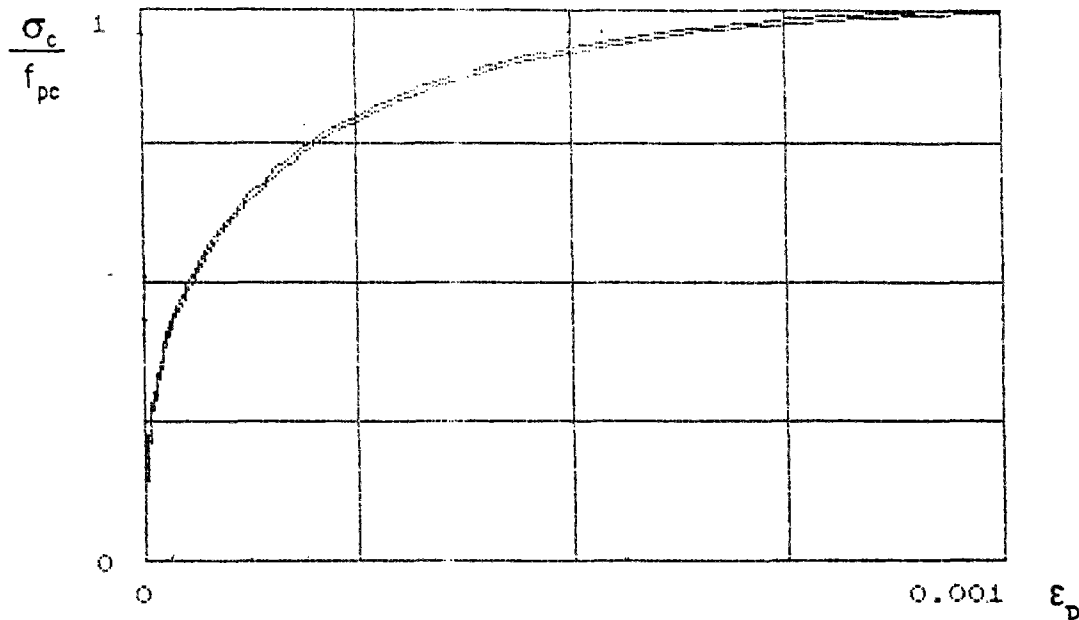


FIG. III.8 Paramètre d'érouissage en fonction du paramètre d'endommagement.

Cette expression du module H sera utilisée pour chacun des modes d'érouissage qui interviennent dans l'équation 3.2, avec les déformations plastiques définies pour chaque mode par l'équation 3.33 et avec les valeurs maximum de contraintes et déformations définies par un essai standard pour chacun des modes d'érouissage du modèle.

Comme les déformations plastiques effectives sont considérées comme égales pour les modes de compression uniaxiale et compression biaxiale, pour évaluer le module  $H_{bc}$  on emploiera dans l'expression une déformation plastique  $\epsilon_{pbc} = \epsilon_{pc} \times \alpha$ ,  $\alpha$  étant le rapport entre les déformations correspondants aux pics des courbes de compression biaxiale égale et de compression uniaxiale.

On procède de cette façon parce qu'on doit arriver à la rupture du matériau, dans les deux cas, pour la même déformation plastique, c'est-à-dire qu'on doit atteindre en même temps les sommets des deux courbes correspondants aux expressions de  $H_c$  et  $H_{bc}$ .

La légitimité de cette proposition pour le module d'écroutissage est vérifiée par la simulation correcte des résultats expérimentaux obtenue avec son utilisation dans le logiciel d'éléments finis.

### 3.5. COMPORTEMENT POST-RUPTURE

Dans un processus de charge avec compression prépondérante, l'endommagement plastique est dû à des mécanismes divers, comme l'écrasement, la distorsion et la fissuration transversale du mortier.

Ces mécanismes, étant produit dans une petite zone du matériau, sont l'origine d'une localisation de la rupture.

Dans ce cas, avec la compression prédominante et contrairement au cas de traction comme nous le verrons dans le chapitre suivant, l'énergie consommée pour la création du phénomène de rupture localisé ne peut-être attribuée à un seul mécanisme, et il est donc difficile de la rattacher à une propriété du matériau.

On peut la définir, comme dans le cas de traction à partir de l'énergie qui se dissipe dès le commencement de la localisation de déformations.

Comme nous le verrons au chapitre qui suit, dans cette situation, la réponse numérique des modèles devient dépendante du maillage d'éléments finis utilisé. On peut définir une longueur caractéristique qui normalise la consommation d'énergie à la valeur correspondante, en fonction de l'énergie spécifique que consomme le matériau et du volume d'intégration de l'élément fini où se produit cette localisation. En ajustant l'aire sous la courbe  $\sigma - \epsilon_p$  et en calculant le module plastique sur la courbe ainsi définie, le modèle est objectif par rapport au maillage d'éléments finis.

Le modèle développé permet son emploi, compte tenu de ces considérations, étant donné la manière dont est fait le calcul du module plastique à partir de la courbe de Sanz et des considérations, que nous verrons avec plus de détails dans le chapitre suivant.

Mais indépendamment de cette possibilité, nous avons besoin d'apporter comme donnée au modèle l'énergie spécifique de rupture en compression.

A cet égard, nous ne connaissons pas de valeurs expérimentales mais dans le cadre des applications pratiques, nous pouvons estimer une valeur de cette énergie pour le modèle.

De cette façon et en procédant comme nous l'avons déjà mentionné, on pourra dire que les résultats seront compris entre les valeurs limites de rupture fragile et de comportement parfaitement plastique et qu'on a objectivité par rapport au maillage d'éléments finis.

### 3.6. SIMULATION D'ESSAIS

Dans ce paragraphe on vérifiera les résultats du modèle avec paramètres multiples d'écroutissage en faisant la comparaison des valeurs de sa réponse avec les mêmes essais de Kupfer, ENTPE et BAM pris pour tester le modèle hypoélastique.

Les valeurs des paramètres du matériau sont celles qui ont déjà été utilisées, voir paragraphe 2.4.

Comme ce modèle a besoin des paramètres qui définissent la surface limite élastique initiale, on a pris, d'après réf. (66), (sauf pour  $f_t$ ) pour tous les essais :

$$f_c = 0,6 f'_c$$

$$f_t = 0,8 f'_t$$

$$f_{bc} = 0,45 f'_{bc}$$

$f_c$ ,  $f_t$ ,  $f_{bc}$  étant les valeurs des contraintes de compression uniaxiale, traction uniaxiale et de compression biaxiale isotrope pour la surface limite élastique initiale, et  $f'_c$ ,  $f'_t$ ,  $f'_{bc}$  les valeurs similaires pour la définition de la surface de rupture.

Nous remarquons que pour la valeur  $f_t$ , Ohtani et Chen (66), utilise la relation :

$$f_t = 0,5 f'_t$$

Nous avons trouvé que si on utilise cette valeur, la non linéarité en traction qui en résulte est trop accentuée. Le calcul du module  $H_T$  à partir de

la courbe de Sanz et avec une limite d'élasticité initiale en traction égale à 0,8 fois la résistance maximum en traction, fournit une bonne concordance entre les résultats du modèle et les résultats des essais.

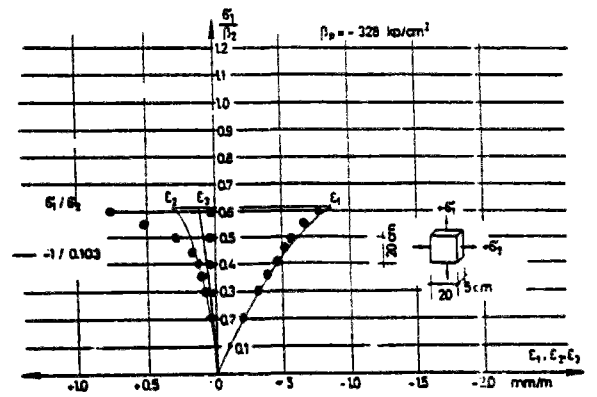
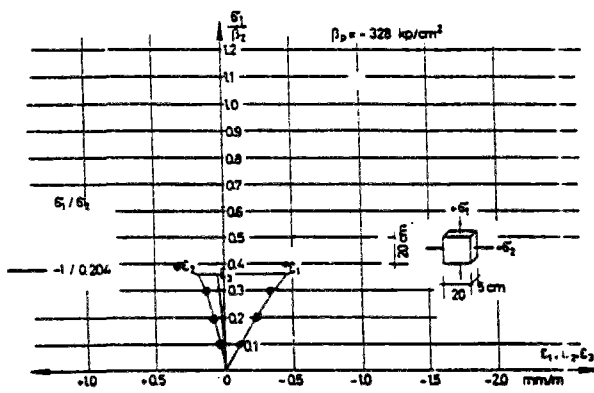
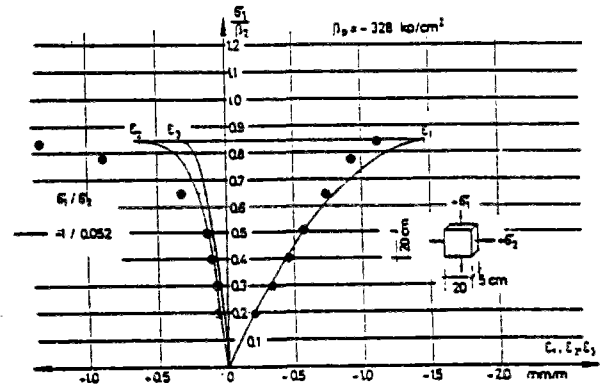
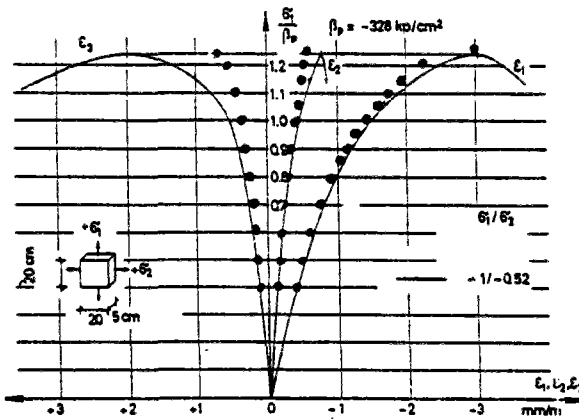
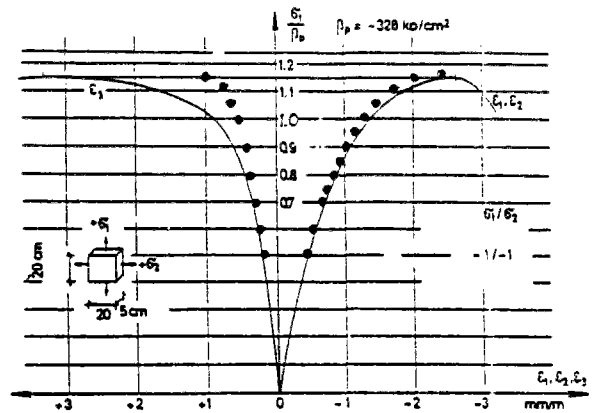
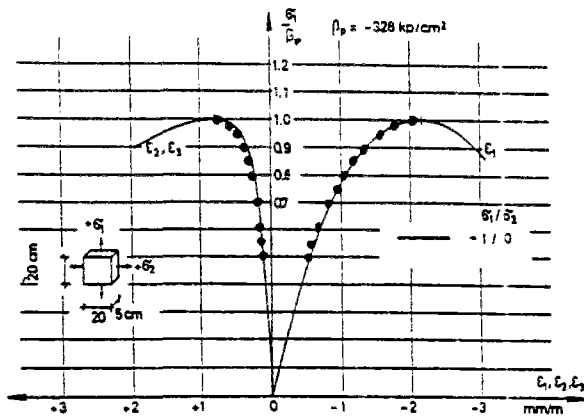


FIG. III.9 Simulation des essais de KUPFER (13)

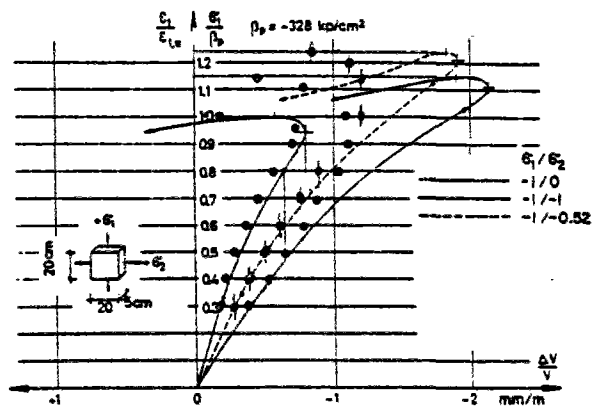
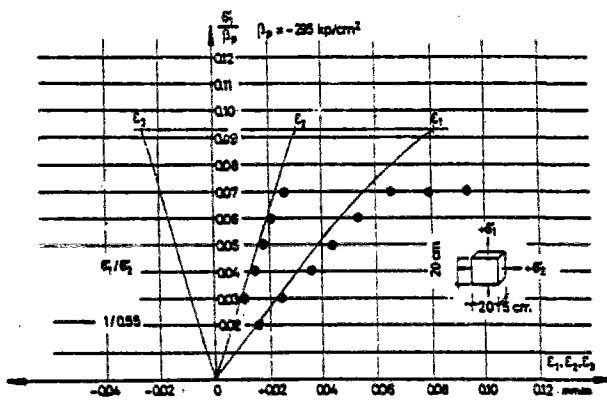
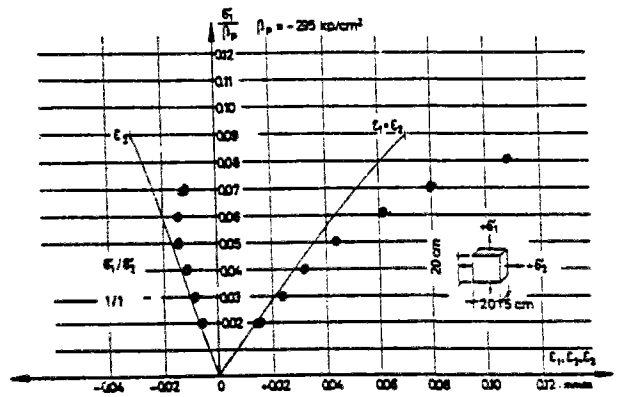
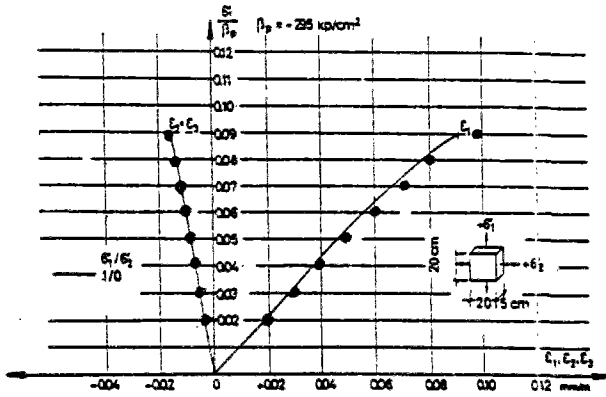


FIG. III.9 (suite) Simulation des essais de KUPFER (13)

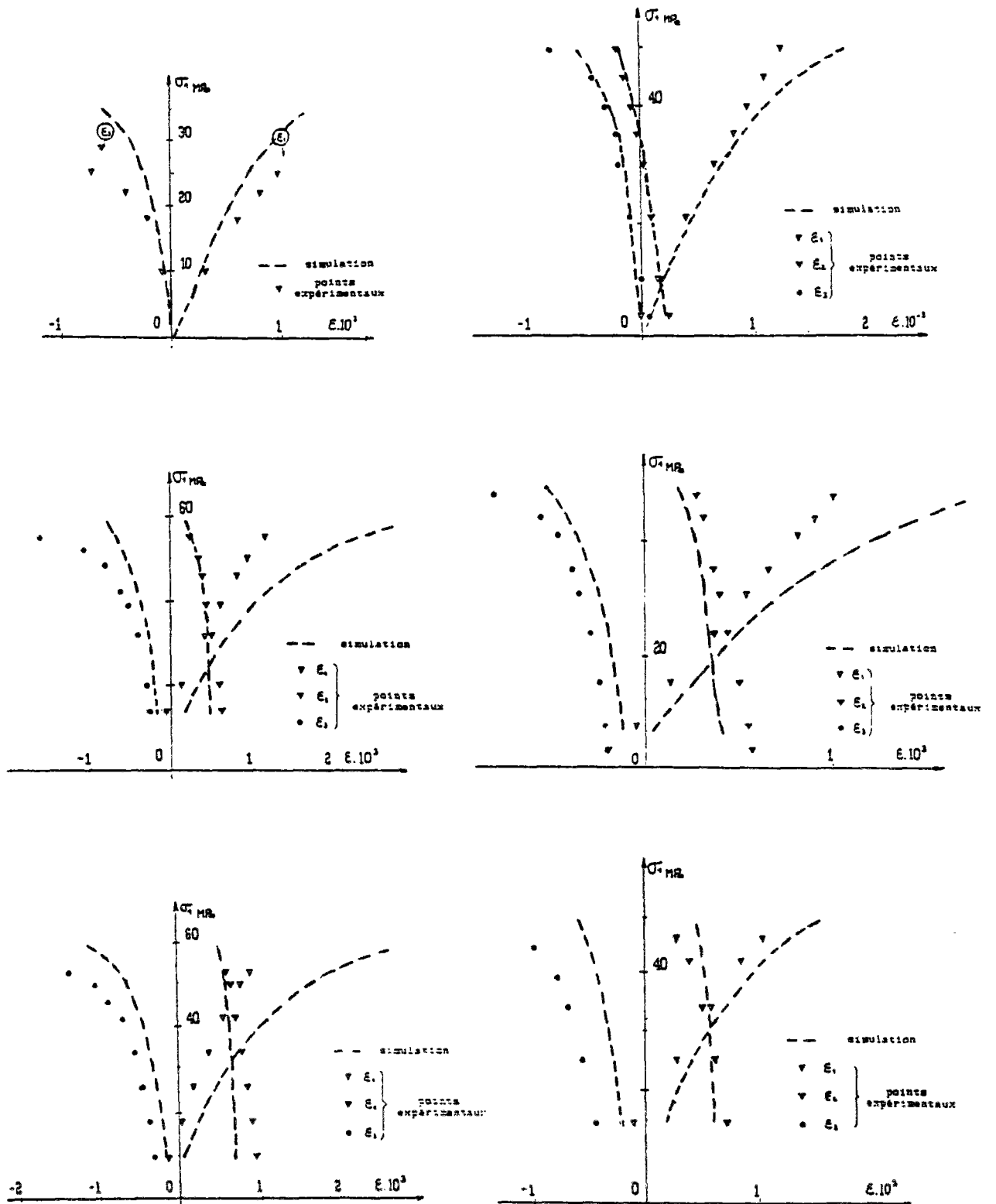
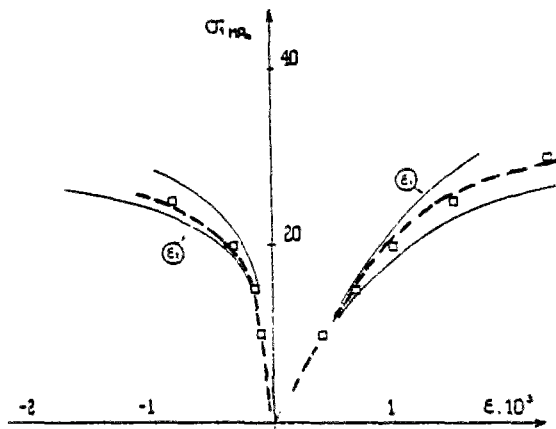
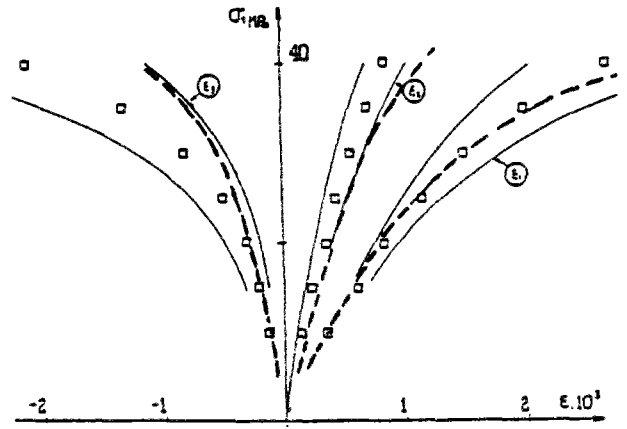


FIG. III.10 Simulation des essais de l'ENTPE (44)

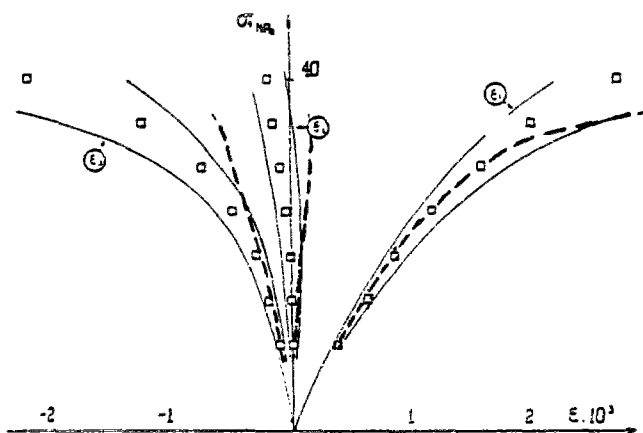




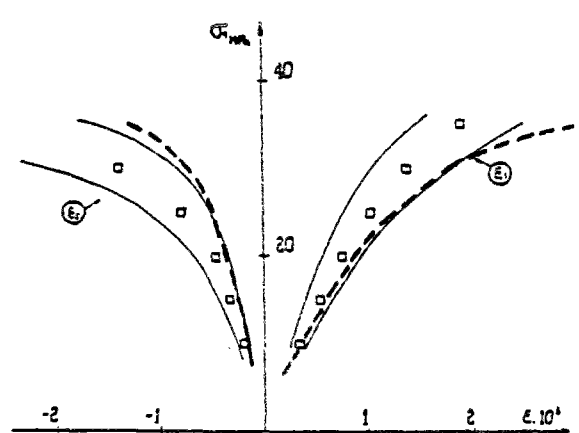
Essai BAM UC (0/3)



Essai BAMBC2 (2/3)



Essai BAMBC1 (1/3)



Essai BAMBC3 (3/3)

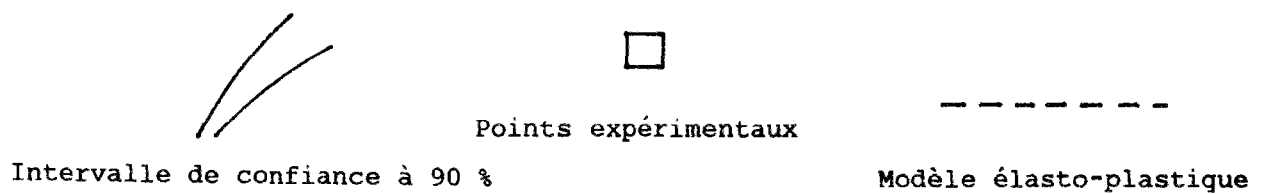


FIG. III.11 Simulation des essais BAM (45)

### 3.7. ANALYSE DES RESULTATS ET CONCLUSIONS

Les résultats numériques sur les essais de Kupfer, réf. (13), fig. III.9 montrent une bonne concordance entre la simulation du modèle et les données expérimentales.

Pour certains états de traction biaxiale le modèle donne une réponse un peu moins rigide que l'expérience.

La simulation des essais de ENTPE, réf. (44), fig. III.10, présente une concordance qualitative des résultats numériques et expérimentaux, mais on constate un décalage des courbes, décalage qui est moins accentué que dans la simulation de ces essais par le modèle hypoélastique (voir fig. II.5).

La simulation des essais du BAM, réf. (45), fig. III.11 est tout à fait satisfaisante.

Les résultats numériques sont presque toujours dans l'intervalle de confiance à 90 % fournis pour ces essais à la réf. (45).

Après cette analyse comparative entre les résultats des essais et leur simulation numérique, on peut conclure que la réponse du modèle élastoplastique est en bonne concordance avec l'expérience.

Bien qu'on ait testé le modèle sur des essais en contrainte plane, la formulation développée est générale.

## CHAPITRE IV

### MODELISATION DU BETON EN TRACTION

### MODELISATION DU BETON ARME EN TRACTION

#### 4.1. INTRODUCTION

Au cours des dernières années, l'intérêt pour le comportement du béton à la traction s'est notablement accru pour des motifs divers, tels que :

- l'importance de la résistance à la traction en situation de flexion d'une poutre et de poinçonnement d'une dalle ;
- des études récentes sur l'adhérence entre le béton et l'acier qui montrent que la résistance à la traction est un paramètre important dans ce phénomène.
- l'apparition dans l'étude de la fissuration du béton de la mécanique de la rupture qui s'avère d'un grand secours pour la compréhension de la rupture des matériaux fragiles ;
- le développement considérable des méthodes numériques, notamment des éléments finis qui exigent l'utilisation de modèles réalistes de comportement du matériau ;
- la durabilité des structures importantes qui, construites en béton armé ou précontrainte en ambiances agressives, requièrent que la fissuration soit connue et contrôlée.

La combinaison de la mécanique de la rupture et des méthodes numériques a été le facteur essentiel dans les recherches de plus en plus nombreuses effectuées sur le comportement du béton à la traction.

Si l'on examine le diagramme résultant d'un essai de traction à déformation contrôlée on peut distinguer, comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre I, le comportement suivant :

- . La contrainte croît linéairement avec la déformation jusqu'à environ 60 % de la contrainte maximum.

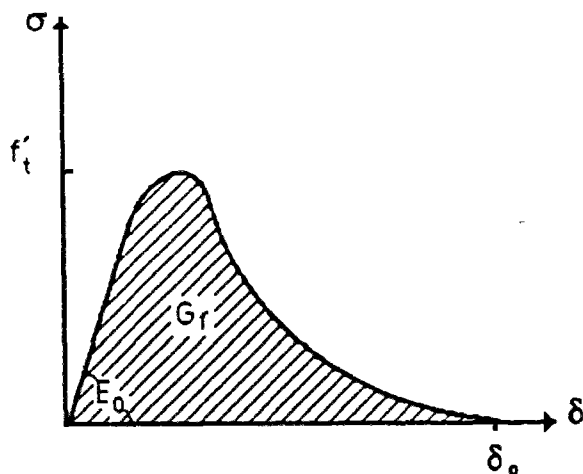


FIG. IV.1 Essai Uniaxial de Traction.

A partir de cette limite, l'accroissement de la contrainte devient non linéaire par rapport à la déformation. Lorsque la valeur maximum de la contrainte de traction  $f_c$  est atteinte, une diminution de la contrainte à déformations croissantes commence à se produire jusqu'au moment où, une certaine déformation étant atteinte, l'éprouvette se divise en deux parties.

Ce comportement montre que la résistance maximum étant atteinte, une déformation importante se produit, où le transfert de contraintes est toujours possible dans le matériau. La résistance en traction ne s'épuise pas brutalement ; elle s'épuise de façon graduelle.

Cet effet est beaucoup moins accusé que sur un matériau élasto-plastique comme l'acier, mais montre une différence marquée avec un matériau élasto-fragile idéal et permet de définir le béton comme un matériau avec radoucissement.

Pour connaître le comportement du béton à la traction on doit connaître les paramètres que définissent la courbe de Fig. IV.1 :

- le module d'élasticité initial ;
- la résistance maximum à la traction  $f'_t$  ;
- l'ouverture de fissure  $\delta_o$  pour laquelle la résistance à la traction devient nulle ;
- la forme de la branche descendante du diagramme contrainte-déformation.

L'énergie de rupture du béton  $G_F$ , c'est-à-dire l'énergie qui est libérée pour la création d'une unité d'aire de fissure que l'on considère comme un paramètre du matériau ; elle est représentée par l'aire sous la courbe de Fig. IV.1, liée à la forme de la branche descendante du diagramme et à l'ouverture de fissure  $\delta_o$ .

Les valeurs nécessaires pour définir la courbe de Fig. IV.1 devront être obtenues à partir d'un essai uniaxial de traction avec déformation contrôlée.

Le comportement à la traction du béton, Fig. IV.1, peut être lié au processus de fissuration qui se développe dans le matériau.

Initialement, un certain nombre de fissures se produisent, distribuées dans tout l'échantillon.

Dès le moment où la contrainte dans une zone, qu'on appellera zone de rupture, atteint la valeur maximum de résistance à la traction  $f_t$ , on produit une déformation additionnelle due à l'apparition de microfissures localisées dans cette zone de rupture.

Dans la zone de rupture la valeur de la contrainte diminue à mesure qu'on augmente le déplacement entre les faces des fissures. Ce phénomène, nommé radoucissement par traction, est l'origine de la branche descendante de la courbe IV. 1.

Sur la fin de cette branche, les microfissures dans la zone de rupture se joignent, donnant naissance à une macrofissure.

Etant donné la localisation de la déformation dans la zone de rupture, en dehors de cette zone, le matériau se décharge avec un processus de fermeture des microfissures qu'il y avait.

#### **4.2. MODELE DE FISSURE DISTRIBUEE**

Comme nous l'avons expliqué précédemment, cette façon d'interpréter le phénomène de la fissuration est celle qui convient le mieux pour une utilisation dans les programmes généraux de calcul et pour des problèmes où la position des fissures, comme leur inclinaison, sont inconnues "a priori".

On considèrera les discontinuités dues aux fissures comme distribuées dans une certaine zone à l'intérieur de chaque élément fini.

Les déplacements relatifs entre les lèvres des fissures seront représentés par la déformation des fissures, et la modélisation du comportement du béton fissuré sera réalisée à l'aide des relations contrainte-déformation.

Ces hypothèses sont cohérentes avec la philosophie de la méthode des éléments-finis en déplacement, établissant la continuité du champ de déplacements.

- Considérons une fissure plane mais microscopiquement rugueuse :

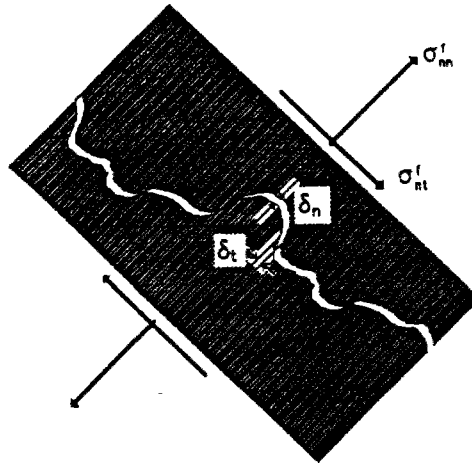


FIG. IV.2 Schéma d'une fissure.

où  $\delta_n \geq 0$  et  $\delta_t$  sont les déplacements relatifs normaux et tangentiels des lèvres de la fissure et  $\sigma_{nn}^f$  et  $\sigma_{nt}^f$  sont les contraintes associées à ces déplacements et où les indices  $n$  et  $t$  font référence aux directions normales et tangentielles.

- Prenant une moyenne sur plusieurs fissures, la relation entre les incréments de ces contraintes et de ces déplacements de fissures peut être considérée comme une propriété du matériau, que l'on peut admettre avoir la forme :

$$\begin{vmatrix} d\sigma_{nn}^f \\ d\sigma_{nt}^f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_{nn} & B_{nt} \\ B_{tn} & B_{tt} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} d\delta_n \\ d\delta_t \end{vmatrix} \quad (4.0)$$

où  $B_{nn}$ ,  $B_{nt}$ ... sont des coefficients de rigidité de fissures, qui dépendent de  $\delta_n$ ,  $\delta_t$ ,  $\sigma_{nn}^f$ ,  $\sigma_{nt}^f$  et éventuellement d'autres paramètres.

Ces déplacements relatifs seront remplacés par des déformations, dites "déformations de fissures".

Dans les modèles de fissure distribuée la déformation dans la zone de rupture et dans la direction normale aux fissures peut être étudiée à l'aide de la superposition de (voir fig. IV.3, fig. IV.4) :

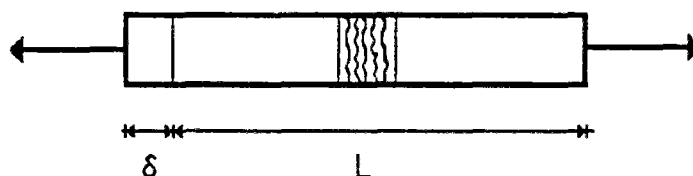


FIG. IV.3 Schéma du comportement en traction.

- La déformation  $\epsilon_{nn}^p$  du béton entre fissures, qui va être considérée comme élastique, car les expériences indiquent que la branche ascendante de la courbe, fig. IV. 1, qui représente cette déformation, possède des non-linéarités qui peuvent être négligées dans le contexte de la déformation totale par radoucissement.
- La déformation  $\epsilon_{nn}^f$ , représente l'effet d'ouverture des fissures.

Cette ouverture, moyennée sur une certaine longueur donne la déformation  $\epsilon_{nn}^f$ . Il s'avère nécessaire de définir cette longueur.



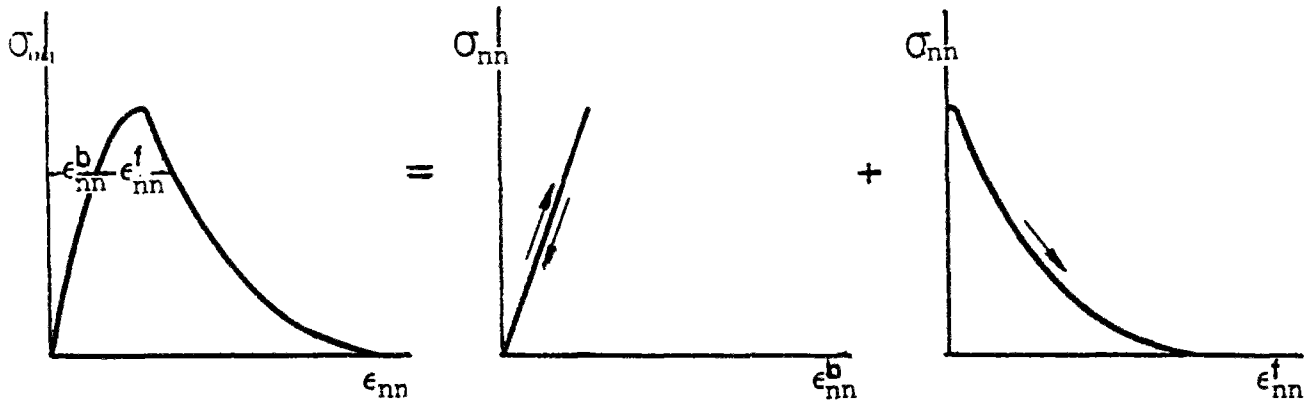


FIG. IV.4 Addition des déformations pour le béton fissuré.

Bazant et Oh, réf. (29), ont été parmi les premiers à utiliser cette procédure.

Par la suite, nous ferons un exposé sommaire du modèle que nous utiliserons dans ce travail à savoir le modèle de fissure distribuée de ROTS et d'autres, réf. (56), que nous considérons comme un des modèles les plus complets de ce type.

#### 4.2.1. Relation contrainte-déformation de fissure

La superposition de déformations mentionnée en 4.2, permet d'exprimer l'accroissement des déformations totales comme la somme de l'accroissement de déformations dans le béton et de l'accroissement de déformations de fissure.

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon^b + \Delta \epsilon^f \quad (4.1)$$

où  $\Delta \epsilon$  = vecteur d'incrément de déformations totales ;

$\Delta \epsilon^b$  = vecteur d'incrément de déformations globales du béton ;

$\Delta \epsilon^f$  = vecteur d'incrément de déformations globales de fissures.

L'avantage majeur de cette formulation est de permettre de traiter séparément le comportement de la fissure et le comportement du béton entre les fissures.

La conséquence en est qu'on peut considérer - dans un cas général - le champ de déformations du béton entre fissures comme élastoplastique, avec

fluage, effets thermiques, etc... et combiner ces effets non-linéaires avec la fissuration.

De même, le champ de déformations de la fissure peut être considéré comme la somme des contributions d'un certain nombre de fissures qui - avec différentes directions - se produisent simultanément en un point.

Ceci permet de traiter le problème de la fissuration d'une manière très générale.

Comme il est montré sur la fig. 4.2 et dans le cas d'état plan de contraintes il y aura deux déplacements relatifs entre les faces de la fissure : un déplacement d'ouverture de fissures et un déplacement de glissement de fissures.

Nous substituons aux déplacements relatifs normaux et tangentiels, qui ont une signification physique bien déterminée, les déformations de fissures locales, qui n'ont signification que dans le cadre du modèle de fissuration distribuée.

Le terme local est utilisé pour indiquer les composantes des déformations dans un système d'axes fixé dans la direction normale et tangentielle de la fissure.

Le vecteur déformation de fissure  $e^f$ , dans un tel repère, a par composantes :

$\varepsilon_{nn}^f$  : déformation locale normale de fissure ;

$\gamma_{nt}^f$  : déformation locale de glissement de fissure.

Les déformations globales de fissure s'obtiennent par une conversion des déformations locales dans le système global de coordonnées.

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x^f \\ \varepsilon_y^f \\ \gamma_{xy}^f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2\theta & -\sin\theta \cos\theta \\ \sin^2\theta & \sin\theta \cos\theta \\ 2\sin\theta \cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \varepsilon_{nn}^f \\ \gamma_{nt}^f \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

$$\varepsilon^f = N e^f$$

et où  $\varepsilon^f$  = vecteur de déformations globales de fissure ;

$e^f$  = vecteur de déformations locales de fissure ; c'est-à-dire rapporté aux axes de fissure ;

$\theta$  = angle de l'axe x global à l'axe normal de la fissure ;

N = matrice de transformation de déformations de fissure.

Les contraintes d'interface de fissure,  $\sigma_{nn}^f$  et  $\sigma_{nt}^f$ , contraintes normales et de cisaillement, comme indiqué à la fig. IV.4 pour le cas d'état plan des contraintes, sont en relation avec le vecteur global de contraintes.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{nn}^f \\ \sigma_{nt}^f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta \cos\theta \\ -\sin\theta \cos\theta & \sin\theta \cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

$$S^f = N^T \sigma$$

$S^f$  = vecteur de contraintes d'interface de fissures ;

$\sigma$  = vecteur de contraintes globales ;

$N^T$  = transposée de la matrice de transformation.

Si de nombreuses fissures, se produisent en un point, dans différentes directions le vecteur global de déformations de fissure s'obtient à partir des vecteurs individuels de chaque fissure.

$$\epsilon^f = \sum_i N_i e_i^f \quad (4.4)$$

$i$  désigne une fissure générique.

De la même manière, les contraintes d'interface de la fissure  $i$  sont en relation avec le vecteur de contraintes globales.

$$S_i^f = N_i^T \sigma \quad (4.5)$$

Pour simplifier, le développement se poursuit pour une seule direction de fissure et pour le cas d'un état plan de contraintes, l'extension étant possible aux cas d'état plan de déformation, axi-symétriques et tri-dimensionnel, et à plusieurs directions de fissure en un point.

On considère une relation incrémentale linéaire entre les contraintes locales de fissure et les déformations locales de fissure.

$$\Delta S^f = D^f \Delta e^f \quad (4.6)$$

$D^f$  = matrice d'interface de fissure qui peut prendre en compte l'effet de radoucissement par déformation en traction et d'engrènement.

$$D^f = \begin{vmatrix} D_\epsilon & 0 \\ 0 & G_c \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

$D_\epsilon$  est le module qui lie la contrainte  $\sigma_{nn}^f$  normale de fissure avec la déformation normale de fissure  $\epsilon_{nn}^f$  et doit être évalué de différentes façons selon qu'il s'agit de fissures actives (fissures en train de s'ouvrir), fissures passives (fissures en train de se fermer) et actives après avoir été passives (fissures qui s'ouvrent à nouveau).

La figure IV.5 a) donne l'interprétation de ce module  $D_r$ , tangent et négatif pour les fissures actives, sécant et positif pour les autres.

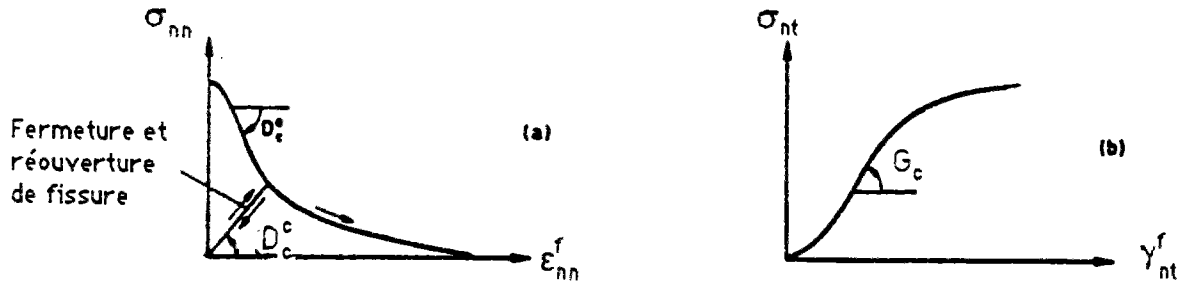


FIG. IV.5 Définition des rigidités de fissures, réf. (56).

Lorsque la fissure s'est totalement refermée c'est-à-dire que  $\epsilon_{nn}^f = 0$ , et si, pour de nouveaux incréments de charge la déformation normale à la fissure devient négative (compression), on suppose que le matériau se comporte de la même manière que s'il n'avait pas été fissuré.

Ceci permet de traiter sans difficulté les cycles de chargement avec fermeture et réouverture de fissures, par une procédure qui est simplifiée. En effet elle ne prend en compte la dégradation des propriétés élastiques introduite par la fissuration, la déformation plastique résiduelle étant nulle pour une décharge totale du matériau. Il y a des propositions à ce sujet ; par exemple Reinhardt et al (57) ont proposé une loi de comportement en décharge qui tient compte de cette déformation plastique résiduelle. Pour simplifier dans le cadre du présent travail on utilisera le diagramme de charge - recharge de la fig. IV.5.

Le module  $G_c$  permet d'établir dans le repère local la relation incrémentale entre la contrainte et la déformation de cisaillement voir fig. IV.5.

Ce modèle permet que les courbes, fig. IV.5, qui définissent les valeurs des modules  $D_r$  et  $G_c$  soient arbitrairement choisies.

Le fait de considérer comme nuls les termes hors de la diagonale principale dans l'équation 4.7 implique la non interaction entre les contraintes normales à la fissure et déformations de cisaillement de fissure et vice-versa.

Cette hypothèse, dans le cas de chargements qui entraînent une rotation des axes principaux de contraintes, est à notre avis trop simpliste. Nous allons surmonter cette difficulté à partir des considérations suivantes :

- il existe très peu de résultats expérimentaux qui montrent l'effet du couplage entre les déplacements normaux et tangentiels des fissures et les contraintes associées ;
- ces essais ont permis d'établir des lois de comportement de fissure, du type de eq. 4.0, qui sont fonction des déplacements de fissure ; par exemple Bazant et al (58, 63), Walraven et al (64) ;
- ces déplacements ne peuvent se calculer que par l'introduction d'hypothèses supplémentaires faites sur les résultats de la fissuration distribuée (voir paragraphe 4.3.2.1.). De ce fait, on introduit dans notre modèle une double approximation pour ce couplage ;
- on va considérer - paragraphe 4.2.4. - ce couplage à partir d'une variation du module de cisaillement produite par la déformation de fissure  $\epsilon_{nn}^f$  ;
- une expression pour les fonctions  $B_{nt}$  et  $B_{tn}$  de 4.0 pourrait être le sujet de futures recherches.

Dans le cas où l'on veut introduire ces fonctions, qui conduisent à une matrice d'interface  $D^f$  non symétrique (en général ce sera  $B_{nt} \neq B_{tn}$ ) on pourra utiliser une procédure similaire à celle qui va être proposée pour traiter l'effet goujon de l'armature, paragraphe 4.3.2.1..

Pour le présent travail, nous allons donc admettre :

$$B_{nt} = B_{tn} = 0 -$$

#### 4.2.2. Relation contrainte déformation pour le béton fissuré

Pour le béton sans fissure on définit une relation constitutive :

$$\Delta\sigma = D^b \Delta\varepsilon^b \quad (4.8)$$

Cette relation peut contenir les effets d'élasticité, de plasticité, etc... Si l'on considère le béton comme élastique entre les fissures,  $D^b$  sera la matrice résultant de l'application de la loi de Hooke. Si l'on considère les effets de plasticité, ce sera la matrice élastoplastique  $D_{ep}$  vue au chapitre précédent.

La loi de comportement du béton fissuré s'obtient en combinant les équations 4.1, 4.2. et 4.8.

$$\Delta\sigma = D^b (\Delta\varepsilon - N \Delta e^f) \quad (4.9)$$

A partir des équations 4.3, 4.6, on trouve l'expression qui lie l'incrément de déformations locales de fissures  $\Delta e^f$  aux incréments de déformations totales dans le repère global  $\Delta\varepsilon$ .

$$D^f \Delta e^f = N^T \Delta\sigma \quad (4.10)$$

$$\Delta e^f = \left[ D^f + N^T D^b N \right]^{-1} N^T D^b \Delta\varepsilon \quad (4.11)$$

Finalement on obtient l'équation constitutive pour le béton fissuré, qui lie l'incrément de contrainte total à l'incrément de déformation total.

$$\Delta\sigma = \left[ D^b - D^b N \left[ D^f + N^T D^b N \right]^{-1} N^T D^b \right] \Delta\varepsilon \quad (4.12)$$

Etant donné la forme que prend cette relation incrémentale, on s'aperçoit que la fissuration peut être prise en compte suivant la même procédure que la plasticité incrémentale vue au chapitre III, et de façon similaire, l'équation 4.12 montre que la matrice qui lie les incréments  $\Delta\sigma$  et  $\Delta\varepsilon$  est obtenue à partir de la matrice de rigidité élastique ou élasto-plastique, modifiée par l'effet de fissuration.

#### 4.2.3. Paramètres pour la fissuration

Les paramètres nécessaires pour définir le radoucissement par déformation du matériau sont :

- . la résistance limite à la traction  $f_t$  pour laquelle débute le processus de fissuration. Cette valeur peut être prise comme celle résultant d'un essai de traction simple ou celle qui résulte d'un critère de rupture, avec prise en compte d'un état de contraintes complexe, ce qui permettra de mieux approcher les résultats des essais biaxiaux ou triaxiaux ;
- . l'énergie de rupture  $G_f$ , supposée être une propriété du matériau et qui se définit comme la quantité d'énergie nécessaire pour créer une unité d'aire de fissure.

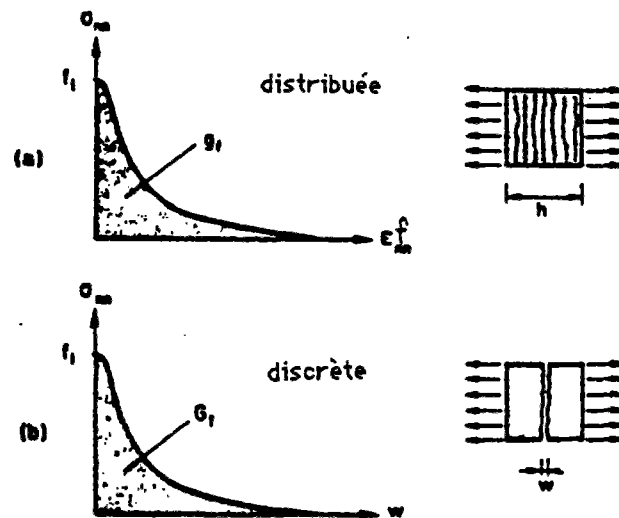


FIG. IV.6 Relation entre  $\sigma_{nn}^f$  et :

- a) Déformation de fissure.
- b) Ouverture de fissure, réf. (56).

Si  $\omega$  représente la somme des déplacements d'ouverture de fissure dans la zone de rupture, dans une représentation discrète de la fissuration :



$$G_f = \int \sigma_{nn}^f d\omega$$

Avec la représentation distribuée de la fissuration,  $\omega$  est représentée par des déformations normales de fissure agissant sur une certaine longueur dans l'élément fini, appelée largeur de zone de fissure ou longueur caractéristique  $h$ , comme indiqué fig. 4.7 ; il en résulte que l'ouverture de fissure  $\omega$  est dans ce cas :

$$\omega = \int \varepsilon_{nn}^f dh$$

et si les microfissures sont uniformément distribuées sur la longueur caractéristique :

$$\omega = h \varepsilon_{nn}^f$$

L'aire sous la courbe, Fig. IV.6 a) est :

$$g_f = \int \sigma_{nn} d\varepsilon_{nn}^f$$

d'où

$$G^f = h g_f \tag{4.13}$$

$h$  étant la longueur caractéristique de l'élément fini où la fissuration est supposée distribuée.

On a utilisé le concept de la longueur caractéristique  $h$  comme un paramètre géométrique, mis dans la relation constitutive du matériau pour obtenir l'objectivité dans la réponse du modèle vis-à-vis du maillage d'éléments finis. Il faut maintenant préciser la façon de le calculer.

Ottosen et Bazant s'accordent sur la définition de  $h$  : la plus grande longueur mesurée dans l'élément fini dans la direction normale à la fissure.

Bazant et Oh (29) proposent pour un élément fini, carré, de surface  $A_0$ , tout à fait fissuré,  $\theta$  étant l'angle entre la direction de fissure et l'axe  $x$ , la valeur :

$$h = \frac{\sqrt{A_0}}{\cos \theta}$$

Cervera et al (74), Rots et al (52) introduisent le volume associé à chaque point d'intégration dans le calcul de la longueur  $h$ . Dans ce cas et pour les fissures inclinées par rapport au maillage d'éléments finis, réf. (52) propose le calcul tel qu'il est indiqué dans la fig. IV.7.

Pour notre modèle nous avons pris en compte la proposition de fig. IV.7, mais par une simple considération géométrique, on a fait l'extension au cas d'un élément rectangulaire, avec un nombre quelconque de points d'intégration.

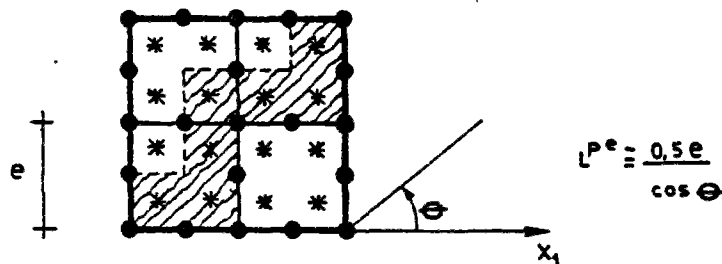


FIG. IV.7 Longueurs caractéristiques - réf. (56).  
Direction arbitraire de fissures.

D'après ces relations, la définition d'un maillage d'éléments finis détermine les longueurs caractéristiques  $h$  ; et comme  $G_x$  est une propriété du matériau il faut ajuster la valeur de l'aire  $g_x$  sous le diagramme de la fig. IV.6 a) de telle sorte que l'équation 4.13 soit vérifiée. Ceci s'obtient en

ajustant la branche descendante du diagramme contrainte-déformation, à partir de laquelle on calcule le module de radoucissement  $D_\epsilon$ . On utilisera pour  $D_\epsilon$  la notation  $D_\epsilon^\circ$  ou  $D_\epsilon^e$  selon les cas indiqués en fig. IV.5.

La fig. IV.8 montre les propositions de réf. (56) pour le diagramme de radoucissement.

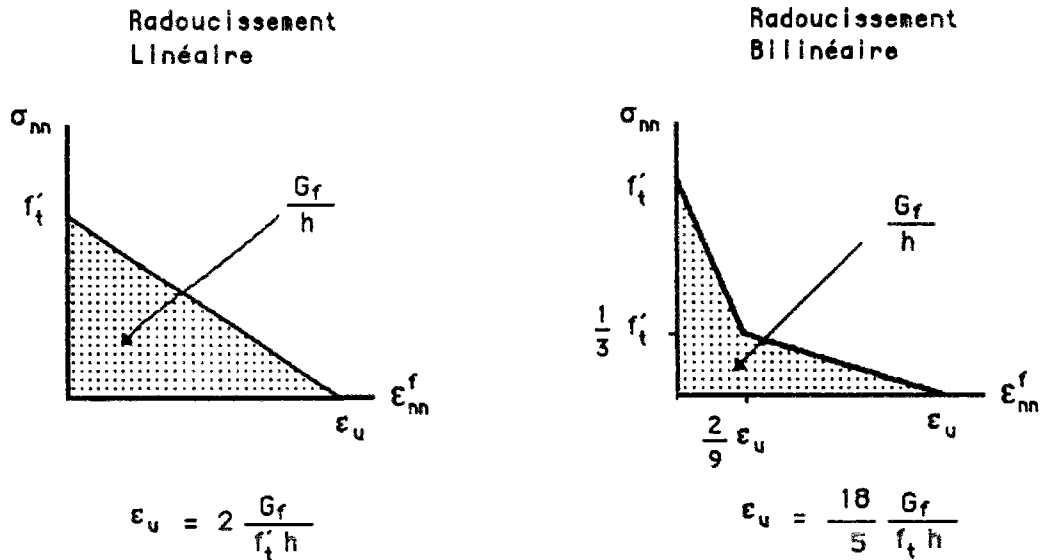


FIG. IV.8 Simplification du diagramme de radoucissement Rots et al (56).

Dans le cas de radoucissement linéaire, le module de radoucissement  $D_\epsilon^\circ$  est donné par :

$$D_\epsilon^\circ = - \frac{1}{2} \frac{f_t'^2 h}{G_f} \quad (4.14)$$

Dans le cas de radoucissement bilinéaire :

$$D_\epsilon^\circ = - \frac{5}{6} \frac{f_t'^2 h}{G_f} \quad 0 < \epsilon_{nn}^f < \frac{2}{9} \epsilon_u$$

$$D_\epsilon^\circ = - \frac{5}{42} \frac{f_t'^2 h}{G_f} \quad \frac{2}{9} \epsilon_u < \epsilon_{nn}^f < \epsilon_u \quad (4.15)$$

$\epsilon_u$  étant la déformation pour laquelle s'épuise la résistance à traction du béton.

#### 4.2.4. Propositions pour l'utilisation du modèle

Au cours des exemples numériques, il est arrivé dans le cas du radoucissement bilinéaire que la transition entre les deux droites de la branche descendante soit l'origine d'une variation trop accentuée dans certains endroits de la courbe de réponse  $\sigma$ - $\epsilon$  du matériau ; pour améliorer les résultats, on propose d'utiliser la courbe de Sanz, mentionnée au chapitre II et représentée dans celui-ci par :

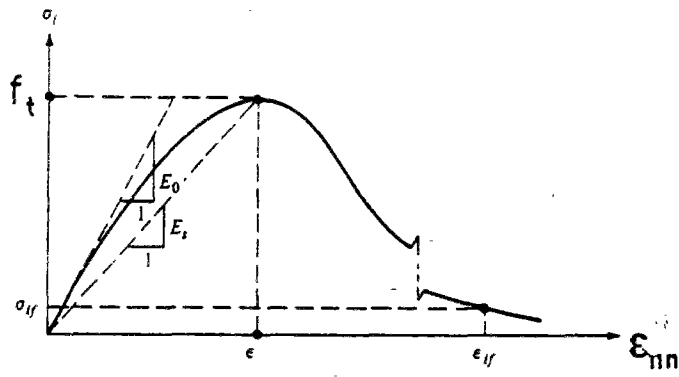


FIG. IV.9 Proposition pour le diagramme de radoucissement.

Les valeurs définies comme  $\sigma_{1f}$  et  $\epsilon_{1f}$ , coordonnées d'un point quelconque, que définissent la branche descendante de la courbe, chapitre II 2.17, seront ajustées de manière à satisfaire l'équation 4.13, permettant de renfermer une aire  $g_x$  sous la courbe ; nous réécrivons le module tangent de l'équation 2.17, chapitre II, en termes de déformation normale de fissure  $\epsilon_{nn}^f$ .

$$\sigma_1 = \frac{E_o \varepsilon_{nn}^{f*}}{1 + (R + \frac{E_o}{E_s}) \frac{\varepsilon_{nn}^{f*}}{\varepsilon_t} - (2R-1) \left(\frac{\varepsilon_{nn}^{f*}}{\varepsilon_t}\right)^2 + R \left(\frac{\varepsilon_{nn}^{f*}}{\varepsilon_t}\right)^3} \quad (4.16)$$

$$\varepsilon^{f*} = \varepsilon_t + \varepsilon_{nn}^f$$

$$D_c^o = \frac{1 + (2R-1) (\varepsilon_{nn}^{f*}/\varepsilon_t)^2 - 2R (\varepsilon_{nn}^{f*}/\varepsilon_t)^3}{\left[ \left( 1 + (R + \frac{E_o}{E_s}) \frac{\varepsilon_{nn}^{f*}}{\varepsilon_t} - (2R-1) \left(\frac{\varepsilon_{nn}^{f*}}{\varepsilon_t}\right)^2 + R \left(\frac{\varepsilon_{nn}^{f*}}{\varepsilon_t}\right)^3 \right) \right]^2} E_o \quad (4.17)$$

Nous proposons également de faire varier le module de cisaillement de fissure  $G_o$ , qui en référence (56) a été pris constant dans les applications numériques, mais en laissant ouverte la possibilité d'introduire dans le module une variation pour tenir compte de la réduction de la capacité initiale du béton à résister aux efforts de cisaillement à mesure que la fissuration progresse. Cette proposition est d'accord avec les considérations sur la nullité des fonctions  $B_{nt}$  et  $B_{tn}$  émises dans paragraphe 4.2.1..

On trouve dans la bibliographie plusieurs propositions concernant la manière d'envisager ce phénomène.

Parmi celles-ci, on en trouve de formes simples, du type de celles proposées par Cedolin' réf. (46), Cervenka, réf. (65), à partir des observations expérimentales.

Dans la formulation présente nous adopterons l'expression donnée à la réf. (65).

$$\frac{G_o}{G_o} = 1 - (\varepsilon_{nn}^f/0.005)^{R_1} \quad (4.18)$$

$$0.3 \leq R_1 \leq 1 \quad (4.19)$$

$G_o$  étant la valeur initiale du module de cisaillement.

#### 4.3. MODELE DE FISSURE DISTRIBUEE POUR LE BETON ARME

##### 4.3.1. Introduction

Dans l'analyse numérique, pour déterminer les déplacements, les déformations et les contraintes dans des structures construites avec ce "matériau composé" qu'est le béton armé il faudra prendre en compte l'effet de la présence des armatures dans le béton.

Les armatures pourront être considérées comme :

- . distribuées, modèle qui permet aisément d'introduire leur contribution au béton, grâce au concept d'élément multicouche ;

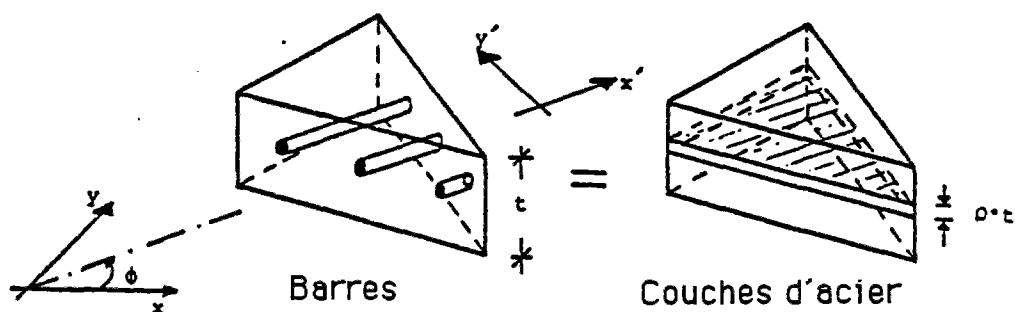


FIG. IV.10 Armature distribuée.

- . contenues, modèle dans lequel une tige d'armature est considérée comme un élément axial au sein de l'élément de béton, ayant des déplacements compatibles avec ceux du béton qui l'entoure ;

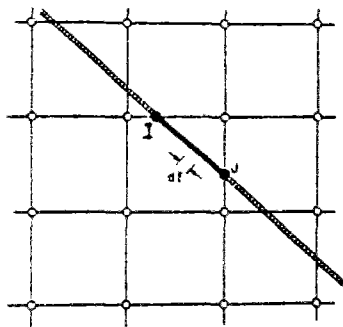


FIG. IV.11 Armature contenue.

- . discrètes, par le biais d'éléments linéaires qui agissent seulement dans la direction axiale et en rendant leurs déformations compatibles avec celles des éléments de béton à travers les noeuds communs ;

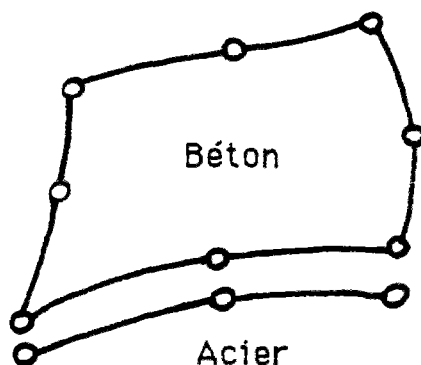


FIG. IV.12 Armature discrète.

Lorsque le béton se fissure, La présence de l'armature provoque l'apparition d'effets additionnels dont il faut tenir compte et qui sont :

- . l'effet de goujon ;

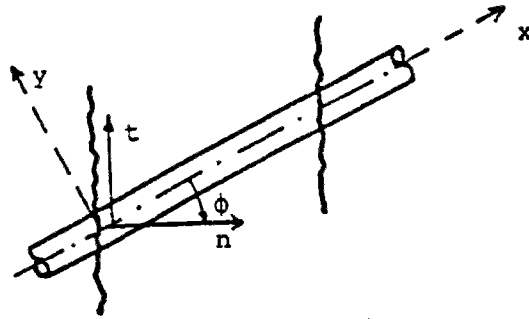


FIG. IV.13 Effet de goujon.

- . l'effet de glissement entre le béton et l'armature dans la zone de fissure.

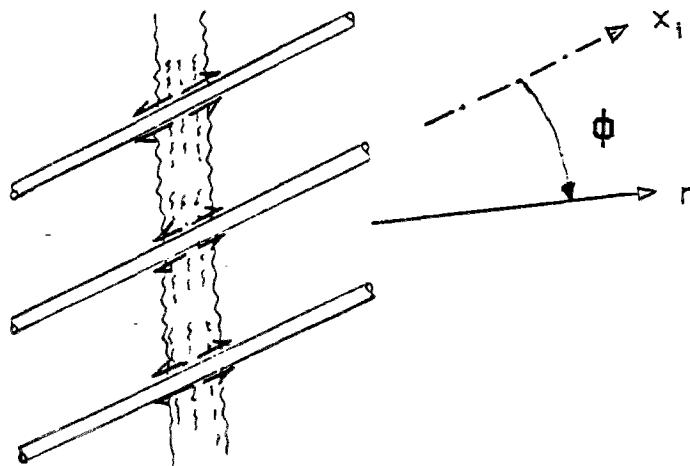


FIG. IV.14 Glissement de l'armature.



L'effet dit "tension stiffening" ou de rigidification de l'acier, par collaboration du béton entre les fissures, qui normalement est considéré comme un effet additionnel, reste dans notre formulation distribuée avec radoucissement par fissuration et continuité des déformations entre l'acier et le béton fissuré, comme un phénomène contenu dans l'équation constitutive.

#### 4.3.2. Formulation proposée pour le modèle

Nous proposons maintenant un modèle de comportement pour le "matériau béton armé". Comme le modèle est valide pour le comportement du matériau composé en un point, (qui dans le concept d'éléments finis devra être entendu comme la moyenne du comportement en un point coïncidant avec un point d'intégration de l'élément) il pourra s'appliquer à tout type d'élément.

Le modèle est formulé pour le cas d'états plans de contraintes, la formulation pouvant être étendue aux cas de symétrie axiale et d'analyse tridimensionnelle, suivant les mêmes concepts.

Le modèle est formulé sur la base des hypothèses :

- . l'acier est considéré comme un matériau n'ayant de rigidité que dans le sens des barres et uniformément réparti dans l'élément ;

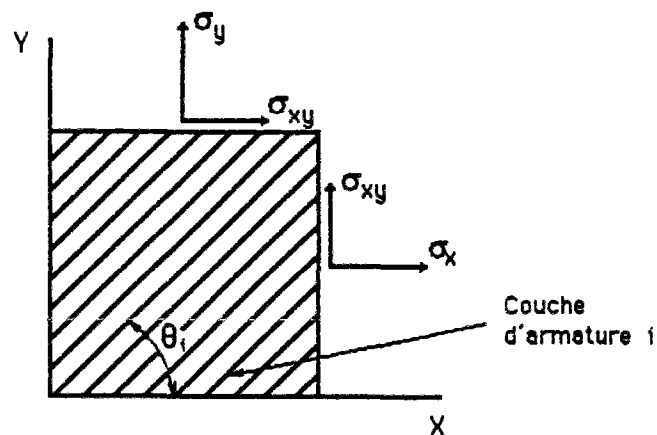


FIG. IV.15 Armature distribuée ou répartie.

- . la fissuration dans le béton est considérée de façon distribuée dans l'élément, avec les concepts et relations établis en 4.2.

- . on considère qu'il y a continuité des déformations entre l'armature et le béton fissuré.
- . au "matériau béton armé fissuré" correspond le modèle rhéologique qui suit :

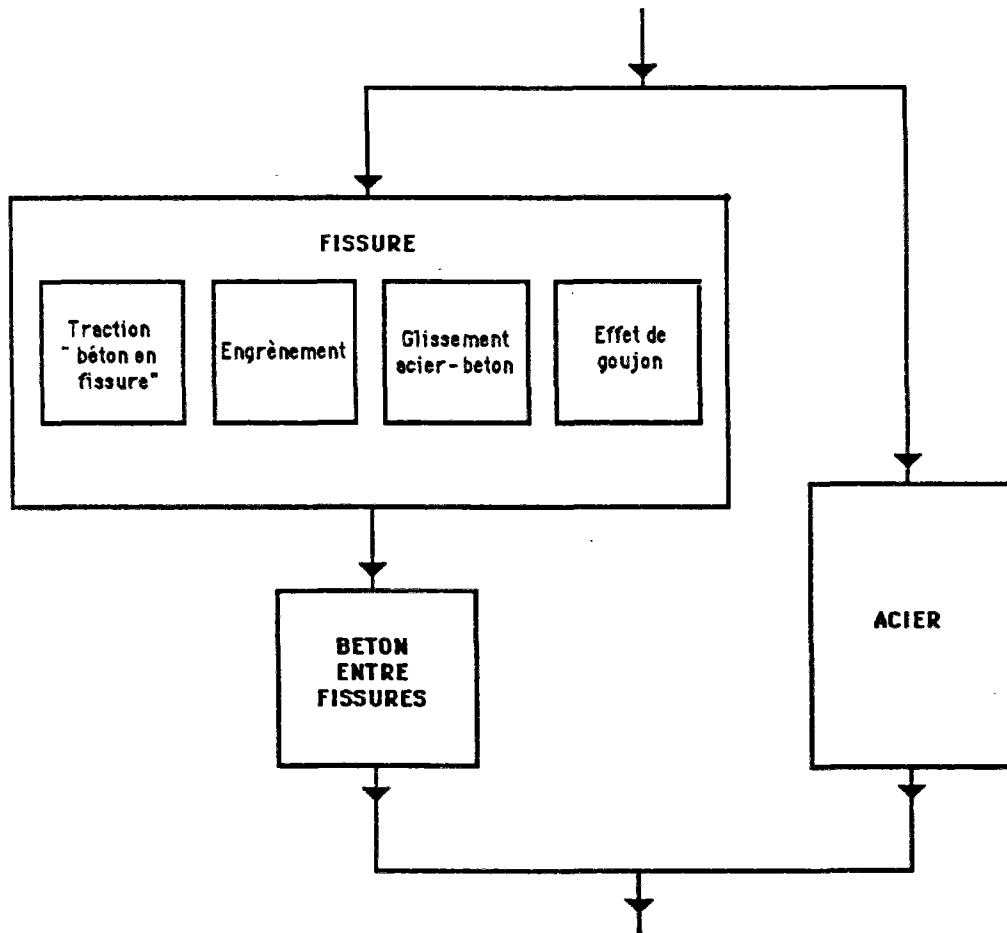


FIG. IV.16 Modèle rhéologique pour le "matériau béton armé".

Ce modèle est constitué par deux branches parallèles :

- l'une correspond au béton entre les fissures, liée en série avec l'effet produit dans la fissure, effet qui prendra en compte la présence de l'armature ;
- l'autre correspond à l'acier.

#### 4.3.2.1. Loi de comportement de la fissure

Le comportement global de la fissure sera défini à partir de la superposition directe des effets dûs à chacun des phénomènes indiqués sur le modèle rhéologique pour la fissure.

a) Béton en traction : il sera considéré comme un matériau ayant un radoucissement, avec la branche descendante du diagramme contrainte-déformation adaptée à l'énergie de rupture et au maillage des éléments finis, comme indiqué en 4.2.3..

b) Engrènement : le modèle admet sans inconvénient toute loi définie pour cet effet. Par suite de ce qui a été dit précédemment, on ne tient pas compte de cet effet dans le présent travail.

En outre, l'effet d'engrènement dans le béton seul, aura une importance moindre par rapport au comportement total de la fissure au cisaillement, du fait de la présence de l'armature qui la traverse et de la prise en considération de l'effet Goujon.

c) Glissement de l'armature : l'apparition de l'armature dans le béton et sa liaison en parallèle avec le béton dans son ensemble, comporte une égalité implicite des déformations moyennes entre l'armature et le béton fissuré. Ceci signifie des glissements localisés de l'armature près de la fissure, provoqués par le fait que la déformation de l'armature n'est pas égale à celle du béton "solide".

Cet effet suscité par la présence de l'armature dans la fissure constitue un obstacle à l'ouverture de celle-ci sous des contraintes de traction.

Afin de l'introduire dans le présent modèle constitutif nous proposons la formulation qui suit, fondée sur l'idée d'ajouter à l'énergie de rupture  $G_f$  de traction du béton, l'énergie dissipée dans ce glissement afin d'avoir une énergie de rupture du "matériau béton armé" :

- la valeur pour laquelle le processus de radoucissement à la traction débute dans le béton est définie à partir d'une valeur de résistance maximum ou déformation maximum qui n'est pas affectée par la présence de l'armature ;

- dans le processus de radoucissement, jusqu'à ce que la résistance à la traction du béton s'épuise, il y a une consommation d'énergie  $G_f$  par unité d'aire de fissure de béton, qui conduit à une déformation ultime  $\epsilon_u$  (voir fig. IV.8) ;
- si l'on considère l'énergie à consommer dans l'ouverture de fissure du "matériau béton armé", nous constatons qu'outre l'énergie  $G_f$  de rupture du béton il faudra consommer l'énergie liée au glissement de l'armature dans la zone de fissure, et par la suite :

$$G_f^* = G_f + G_{ga} \quad (4.20)$$

$G_f^*$  énergie à consommer par unité d'aire de fissure dans le matériau composé.  
 $G_f$  énergie de rupture du béton par unité d'aire de fissure, point a).  
 $G_{ga}$  énergie dissipée par glissement de l'acier, par unité d'aire de fissure.

La valeur de  $G_{ga}$  sera calculée au moyen du travail réalisé par le frottement entre l'acier et le béton, tout au long du glissement relatif sur une distance  $l_g$ .

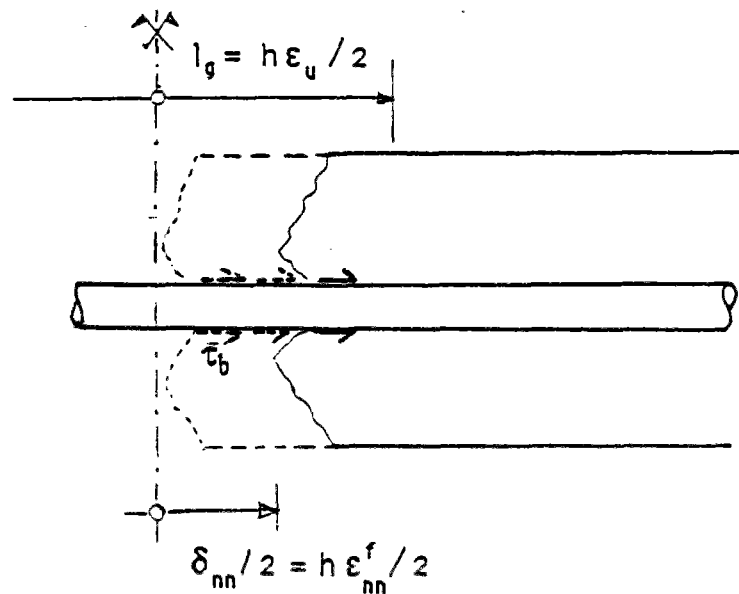


FIG. IV.17 Schéma du glissement de l'armature.

On trouve dans la littérature technique diverses propositions pour la relation entre la contrainte de cisaillement le long de l'armature et le glissement.

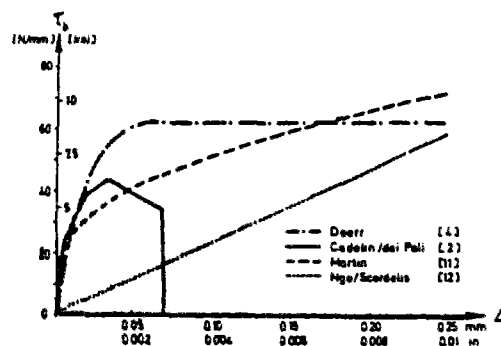


FIG. IV.18 Relations contrainte d'adhérence-glissement, réf. (70).

Nous ferons appel à l'équation de Doerr, référence (62), pour des valeurs nulles de pression latérale :

$$\frac{\tau_b}{f_t} = 3,28 \times 10^2 \Delta - 1,953 \times 10^4 \Delta^2 + 3,35 \times 10^5 \Delta^3 \quad (4.21)$$

ou  $\Delta$  [inches] est le déplacement relatif, normal à la fissure et  $f_t$  est la résistance à la traction du béton.

Le travail consommé par le glissement  $l_g$  d'une barre de part et d'autre de l'axe de la fissure sera :

$$2 \times \frac{1}{2} \int_0^{l_g} \tau_b \times \Pi \times D \times d_{1g} \quad (4.22)$$

- Considérons un groupe de barres de diamètre  $D$ , d'aire de pourcentage  $\rho$  par rapport à l'aire de béton.
- Considérons également que la longueur de glissement est l'ouverture totale de la fissure  $h \times \epsilon_u$  dans la longueur caractéristique, où :

$h$ , longueur caractéristique de la zone fissurée.  
 $\epsilon_u$  déformation maximum selon la fig. IV.8.

$$l_g = \frac{1}{2} h \epsilon_u$$

ce qui nous permet de formuler :

$$G_{ga} = \frac{2h\rho}{D} \int_0^{h \times \epsilon_u / 2} \tau_b(\Delta) d\epsilon_{nn}^f \quad (4.23)$$

avec  $\Delta = \delta_{nn}$  eq. 4.21 donnerait :

$$\tau_b = f_t (8,2 \cdot 10^2 \delta_{nn} - 4,88 \cdot 10^4 \delta_{nn}^2 + 9,88 \cdot 10^5 \delta_{nn}^3) \quad (4.24)$$

$$\delta_{nn} = h \epsilon_{nn}^f \text{ (cm)}$$

$$G_{ga} = \frac{\rho h f_t}{D} \left[ 2 \cdot 10^2 \delta_{nu}^2 - 4 \cdot 10^3 \delta_{nu}^3 + 3 \cdot 10^4 \delta_{nu}^4 \right] \quad (4.25)$$

$$\delta_{nu} = h \epsilon_u$$

bien que la limite d'interrogation est correcte, la valeur de  $\tau_b$  calculée par 4.24 peut avoir l'inconvénient de rendre  $G_{ga}$  non objective vis-à-vis du maillage des éléments finis.

En effet,  $\Delta$ , eq. 4.21 étant la vraie ouverture, discrète, de fissure on devrait la calculer, eq. 4.24 à partir de l'espacement réel, inconnu, entre fissures à la place de la longueur caractéristique  $h$ .

Nous avons envisagé trois possibilités pour surmonter cette difficulté :

a) la formulation des fissures distribuées permet de façon assez correcte la détermination de la fissuration discrète.

En effet, au début de la fissuration d'une structure, lors du calcul numérique au moyen du concept de fissure distribuée, les fissures se distribuent sur une large zone d'éléments finis.

Si l'on considère dans le modèle du comportement la possibilité de fermeture de fissures, à mesure que la fissuration progresse, un nombre limité de fissures ont une grande ouverture. La majorité des fissures restantes cessent de s'ouvrir et même certaines commencent à se fermer.

Finalement la fissuration calculée se localise sur des zones qui sont en bon accord avec les observations expérimentales.

Les considérations précédentes, issues de Rots et al (52) sont corroborées par notre simulation numérique, chapitre V, paragraphe 5.5., fig. V.21.

Dans cette situation, et surtout dans le cas que  $\epsilon_{nn}^f \geq \epsilon_u$ , c'est-à-dire, là où le béton a complété le processus de fissuration dans un point d'intégration le calcul des ouvertures  $\delta_{nn}$ ,  $\delta_{nt}$ , à partir des déformations de fissures est correctement approché.

De ce fait, on peut utiliser l'éq. 4.24 pour le calcul de  $\tau_{ga}$ .

- b) estimer l'espacement des fissures à partir des formules déterminées de façon expérimentale, par exemple, celles proposées par le CEB, pour obtenir à partir de  $\epsilon_{nn}^f$  l'ouverture de fissure  $\Delta$ .
- c) déterminer à partir des diverses expériences, par exemple celles de la fig. IV.18, une valeur moyenne de  $\tau_b$ , qu'on supposera constante dans tout le processus de glissement de l'armature.

Dans le cadre du présent travail, nous avons adopté ce dernier critère : de façon simple on adopte la valeur moyenne de la valeur finale qui donne l'expression de Doer, réf. (70). Une amélioration de cette hypothèse reste une question ouverte pour des développements futurs.

Cette énergie est occasionnée par des forces et des déplacements dans la direction de la barre (FIG. IV.14). Si la barre est inclinée selon un angle  $\phi$  par rapport à la normale à la fissure, il faudra utiliser  $\frac{h\epsilon_u}{\cos\phi}$  au lieu de  $h\epsilon_u$  pour le calcul de  $G_{ga}$ .

Considérant :

- que le glissement relatif commence quand la fissuration commence dans le béton ;
- qu'il ne se produit plus de travail par glissement lorsque le béton est complètement fissuré, auquel cas il a consommé l'énergie  $G_f$  nécessaire pour cela, et la déformation par fissuration atteint la valeur  $\epsilon_u$  ;
- que la traction totale agissant sur une fissure de matériau composé peut être considérée comme la somme de la traction dans le béton et de la force nécessaire pour ce glissement de l'armature répartie dans l'aire de fissure correspondante ;

Il apparaît que le comportement à la traction du matériau composé peut être modélisé avec les hypothèses suivantes :

- 1) Un radoucissement qui commence lorsque la traction dans le béton atteint sa résistance maximum  $f_t$  ;
- 2) Cette traction s'annule quand la déformation de fissure atteint la valeur ultime  $\epsilon_u$  définie en 4.3.2. ;
- 3) L'aire sous la courbe de radoucissement doit être égale à :

$$G_f^* = G_f + G_{ga}$$

- 4) Ce traitement conjoint du radoucissement par fissuration, point a) avec le "radoucissement" par glissement de l'armature donne les valeurs des modules de "rigidité" de fissure, fig. IV.5.

Dans la Fig. IV.19 on représente le radoucissement du "matériau béton armé", dans le cas d'un diagramme bilinéaire et d'un diagramme général, par exemple celui proposé dans le paragraphe 4.2.4..



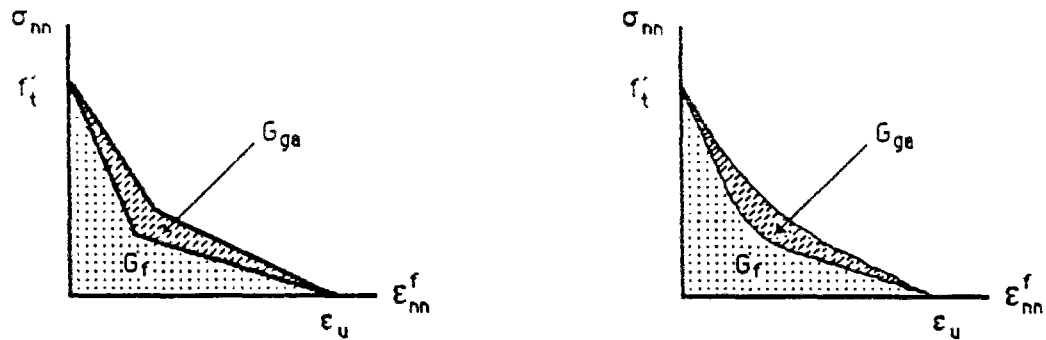


FIG. IV.19 Radoucissement du "matériau béton armé".

Cette formulation permet d'introduire l'effet local de l'armature dans le contrôle de la fissure. L'armature intervient de façon directe par le pourcentage de son aire par rapport à celle du béton et d'une façon inverse par le diamètre de la barre. Cette condition est issue d'un critère énergétique et s'accorde avec les observations expérimentales.

Nous faisons remarquer que ni la valeur maximum de la traction pour le début du radoucissement, ni la valeur finale  $\epsilon_u$  ne sont modifiées par la présence de l'armature, mais pour parvenir à un état de déformation de fissure, il faudra procurer une plus grande énergie au système, c'est-à-dire que, dans une structure, il sera nécessaire d'appliquer des charges supérieures pour atteindre le même état de fissuration, quand on considère l'effet de glissement de l'armature.

Ce fait résulte de l'obtention d'un module tangent de valeur inférieure, quand on incorpore l'énergie  $G_{ga}$  à la courbe de radoucissement.

d) L'effet goujon: c'est l'effort tangentiel exercé par l'armature qui traverse une fissure en conséquence du déplacement tangentiel relatif des lèvres de la fissure. Dans ce modèle, on adopte que les forces qui se manifestent peuvent être calculées à partir de la théorie d'une poutre encastree dans un milieu élastique, considération valide si la tige ne se

et si le béton ne s'aplatit pas sous la barre. Cette formulation, réf. (70), (61) donne la relation suivante (voir fig. IV.13).

$$\begin{vmatrix} \sigma_{nn}^g \\ \sigma_{nt}^g \end{vmatrix} = \frac{\beta^3 E_a D^2 \rho \cos \theta}{16} \begin{vmatrix} \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{nn} \\ \delta_{nt} \end{vmatrix} \quad (4.26)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{DC_{fb}}{4E_a I}}$$

D = diamètre de la barre,

$C_{fb}$  = coefficient de fondation du béton,

$E_a$  = module d'Young de l'acier,

I = moment d'inertie de la barre.

En remplaçant les valeurs :

$$\delta_{nn} = h \varepsilon_{nn}^f \quad \delta_{nt} = \varepsilon_{nt}^f \delta_{nn} \quad (4.27)$$

D'après Pruijssers (70) on trouve des valeurs expérimentales pour le module de fondation du béton, ce module étant fonction du diamètre de la barre et le déplacement tangentiel relatif des lèvres de la fissure.

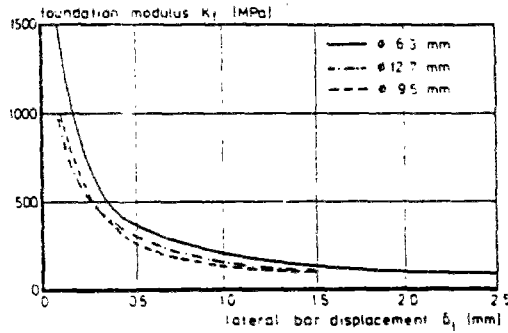


FIG. IV.20 Coefficient de fondation du béton, réf. (70).

Nous voyons que l'effet d'interaction entre les contraintes normales et les déplacements tangentiels et vice-versa, introduit une non-linéarité et une assymétrie dans la matrice de l'élasticité correspondant à cet effet.

En effet, on calcule  $\delta_{nn}$  et  $\delta_{nt}$  dans l'éq. 4.26, à partir des déformations de fissures :

$$\delta_{nn} = h \epsilon_{nn}^f$$

$$\delta_{nt} = \delta_{nn} \gamma_{nt}^f = h \epsilon_{nn}^f \gamma_{nt}^f$$

L'expression pour  $\delta_{nt}$  introduit le couplage entre les déformations de fissures. Pour surmonter cette difficulté on pourrait utiliser dans le calcul de  $\delta_{nt}$  la valeur de  $\epsilon_{nn}^f$  calculée à l'itération antérieure, que l'on appelle  $\epsilon_{nn}^{f*}$  ; on aura donc :

$$\delta_{nn} = h \epsilon_{nn}^f$$

$$\delta_{nt} = h \epsilon_{nn}^{f*} \gamma_{nt}^f$$

mais dans ce cas la matrice qui relie les déformations de fissure  $\epsilon_{nn}^f, \gamma_{nt}^f$  avec les contraintes  $\sigma_{nn}^f$  et  $\sigma_{nt}^f$  - à partir de eq. 4.26 - sera non-symétrique.

On procède comme suit : comme le processus de radoucissement est traité de façon itérative, à l'itération  $i$  de chaque pas de calcul, on calculera les contraintes dues à l'effet goujon  $\sigma_{nn}^f$  et  $\sigma_{nt}^f$  à partir de l'éq. 4.26 et des déplacements de fissures  $\delta_{nn}$  et  $\delta_{nt}$  calculés à l'itération précédente  $i-1$ . Ces

contraintes donnent naissance à des forces nodales décompensées qui, après son calcul, sont prises en compte dans l'équation de l'équilibre de l'itération  $i$  dans chaque pas de calcul.

#### 4.3.2.2. Loi de comportement du béton entre les fissures

On pourra le considérer comme élasto-plastique puisqu'il n'y a pas d'inconvénient à évaluer la matrice de l'équation constitutive  $\sigma - \varepsilon$  à partir des modèles de comportement du béton utilisés au préalable, avant la rupture.

#### 4.3.2.3. Loi de comportement de l'acier

On le considère comme un matériau élastique parfaitement plastique ayant le même comportement en traction qu'en compression.

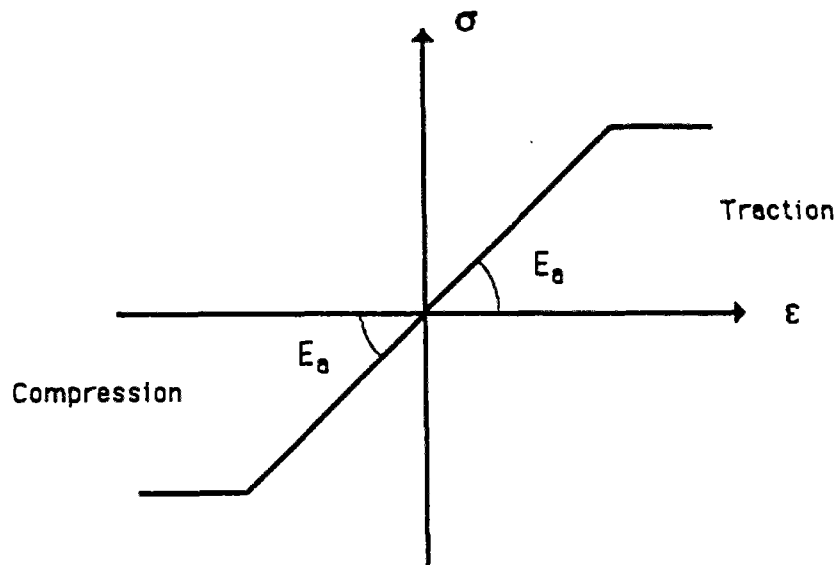


FIG. IV.21 Relation  $\sigma$ - $\varepsilon$  pour l'acier.

Si on le considère comme une couche  $i$  au sein de l'élément, avec rigidité uniquement dans la direction  $\phi_i$ ,  $\phi_i$  étant l'angle que forment les barres de l'armature  $i$  par rapport à l'axe global  $x$ , pour cette couche d'armature, la matrice d'élasticité sera :

$$D_i^* = \rho E_a T^T T \quad T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_i & \sin^2 \theta_i & \cos \theta_i \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

où n'importe quel nombre de couches d'armatures peut être pris en considération.

#### 4.3.3. Equation constitutive du modèle

On l'établit à partir de la relation incrémentale.

$$\Delta\sigma = \left[ D^b + \sum_i D_i^a - D^b N \left[ D^f + N^T D^b N \right]^{-1} N^T D^b \right] \Delta\varepsilon \quad (4.29)$$

où

$\Delta\sigma$  : vecteur d'incrément de contraintes ;

$\Delta\varepsilon$  : vecteur d'incrément de déformations ;

$D^b$  : matrice d'élasto-plasticité du béton entre les fissures ;

$D_i^a$  : matrice d'élasticité de la couche i d'armature ;

$N$  : matrice de transformation définie en 4.2.3. ;

$D^f$  : matrice de fissure, qui contient les effets définis en 4.3.2.1 de radoucissement à la traction, d'engrènement et de glissement d'armature.

Il se peut qu'il y ait n fissures différentes en un point, auquel cas l'opération matricielle correspondant à l'effet de fissure dans la relation incrémentale de l'éq. 4.29 sera répétée pour chacune des directions de fissures existant en ce point.

L'effet goujon sera traité comme force nodale décompensée comme indiquée en 4.3.2.1 d.

#### 4.4. CONCLUSIONS

Une analyse bibliographique portant sur le thème de la traction dans le béton révèle la nécessité d'utiliser les principes de mécanique de la rupture et de les introduire dans l'équation constitutive du béton pour bien représenter le phénomène et atteindre l'objectivité des résultats par rapport au maillage d'éléments finis.

Cette analyse révèle de même que le traitement de la fissuration de façon distribuée et par la méthode exposée s'avère une des plus efficaces pour le traitement de la fissuration, en permettant :

- plusieurs directions de fissures en un point ;
- de considérer le béton comme un matériau avec radoucissement en traction ;
- de prendre en compte le phénomène d'engrènement dans la fissure avec l'apparition de la dilatance.

Sur cette base, on interprète le phénomène de la traction dans le béton armé en proposant un modèle de comportement pour un matériau composé, le "matériau béton armé" qui présente des aspects qui à ma connaissance n'ont pas été traités avec cette formulation et qui permettent d'apporter une amélioration par rapport aux modèles qui existent :

- traitement du béton armé à l'aide du concept de fissure distribuée, avec une armature distribuée et avec l'effet de l'armature dans la matrice d'interface de fissure ; l'état de fissuration peut comprendre plusieurs directions des fissures en un même point ; l'armature distribuée peut être constituée de plusieurs groupes de barres d'orientations diverses ;
- la définition du radoucissement du "matériau composé béton armé" qui prend en compte le radoucissement par fissuration du béton et le radoucissement par glissement des barres de l'armature dans le béton dans la zone fissurée. Ces phénomènes sont traités conjointement et de manière objective par rapport au maillage des éléments finis.

La formulation proposée introduit comme propriété du matériau composé l'effet local de l'armature dans le contrôle de la fissuration. L'armature intervient de façon proportionnelle par le pourcentage de l'aire de l'acier par rapport à celle du béton et de façon non proportionnelle par le diamètre des barres, situation largement vérifiée dans la pratique.

Le processus utilisé dans le traitement de l'effet de goujon peut être employé comme une méthodologie générale pour "symétriser" l'équation constitutive et permettre de résoudre le problème de lois d'engrènement, qui conduisent des matrices non symétriques, à partir des logiciels standards d'éléments finis basés sur des concepts de symétrie.

<p style="text-align: center;"><b>CHAPITRE V</b></p> <p style="text-align: center;"><b>SIMULATION NUMERIQUE DES STRUCTURES</b></p> <p style="text-align: center;"><b>EN BETON ARME</b></p>
--

### 5.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre sont présentés les résultats obtenus avec le modèle du "matériau béton armé" appliqué au calcul de structures par la méthode des éléments finis.

A l'exception du premier exemple, les structures résolues sont des structures réelles qui ont fait l'objet d'études expérimentales, ce qui permettra une confrontation des résultats de la simulation numérique et de l'expérimentation.

Le modèle, avec le modèle d'élastoplasticité - chapitre III, paragraphe 3.3.2 - pour la partie béton a été implanté dans un programme d'éléments finis en élastoplasticité ; ce programme, étant développé dans le cadre du présent travail est actuellement mis au point pour des états plans. La résolution de problèmes axisymétriques ou tri-dimensionnels est une extension naturelle du développement du chapitre IV, réalisé pour le cas d'état plan de contraintes ou de déformations. Il sera nécessaire d'adapter l'état de contraintes, de déformations à la manière dont le béton se fissure et le nombre de couches d'armatures en fonction de chaque cas particulier ; selon la même philosophie que dans le cas d'état plan.

Comme le présent modèle est un modèle constitutif d'un matériau, il pourra être implanté pour tout type d'élément fini, en adaptant le calcul des matrices correspondant à chaque point d'intégration de l'élément à l'équation constitutive du chapitre IV, paragraphe 4.3 ou aux équations résultant de son adaptation aux cas d'axisymétrie ou au cas tri-dimensionnel.



## 5.2 FLEXION ET TRACTION DANS UNE POUTRE ENCASTREE

Nous présentons cet exemple pour démontrer l'objectivité de la réponse offerte par le modèle proposé quant aux différents maillages d'éléments finis à l'aide desquels on peut modéliser une même structure.

Nous avons choisi une poutre encastrée, fig. V.I, soumise à un état de flexion et à un état de traction ; cette poutre a été calculée par éléments finis à l'aide de 3 modélisations différentes : à 6, 24 et 54 éléments isoparamétriques à 8 noeuds, de taille constante, en utilisant une intégration numérique de Gauss-Legendre, avec un nombre de points variables selon la modélisation :

6 éléments	4 x 4 points d'intégration,
24 éléments	2 x 2 et 3 x 3 points d'intégration,
54 éléments	2 x 2 points d'intégration.

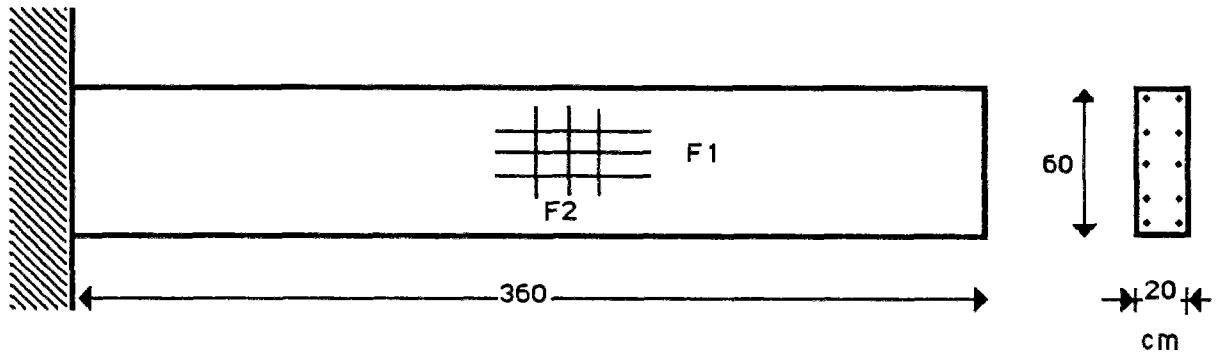
La raison de l'utilisation de si nombreux points d'intégration dans la modélisation avec 6 éléments est la nécessité de disposer d'une information suffisante tout près de l'encastrement, afin de pouvoir mieux suivre l'évolution des fissures.

Pour la résolution du système d'équations non linéaires nous avons fait appel à la méthode de la rigidité tangente avec actualisation de toutes les matrices à chaque pas de calcul - 10 pas de calcul ayant été réalisées le long du trajet de chargement de l'analyse. Les caractéristiques géométriques relatives à ce problème sont détaillées, fig. V.1.

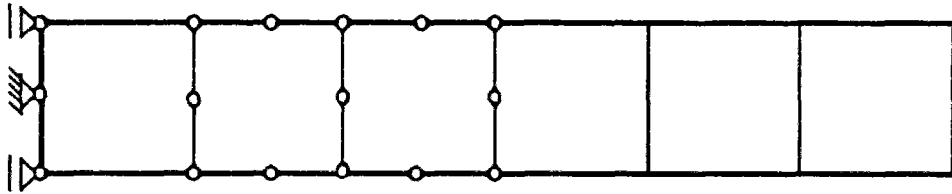
Nous avons pris pour les paramètres les valeurs suivantes (kg, cm) :

$E = 324.000$	$\nu = 0,20$	
$f_{pc} = 328$	$f_{pt} = 29,5$	$f_{pbc} = 380,5$
$f_{oc} = 197$	$f_{ot} = 23,60$	$f_{obc} = 171$
$\epsilon_c = 0,0022$	$\epsilon_t = 0,0001$	$\epsilon_{bc} = 0,0026$
$G_f = 0,100$	$E_a = 2.100.000$	$F_1 = 1 \phi 8 \text{ sep. } 5. F_2 = 0$

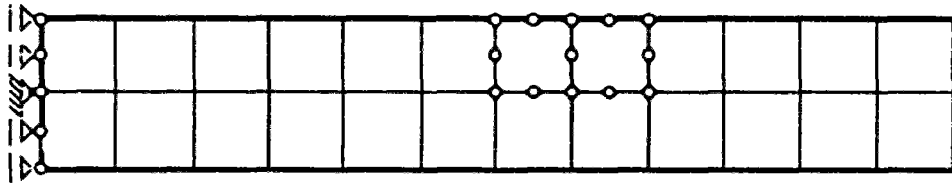
FIG V 1 ANALYSE D'OBJECTIVITE  
VIS-A-VIS DU MAILLAGE



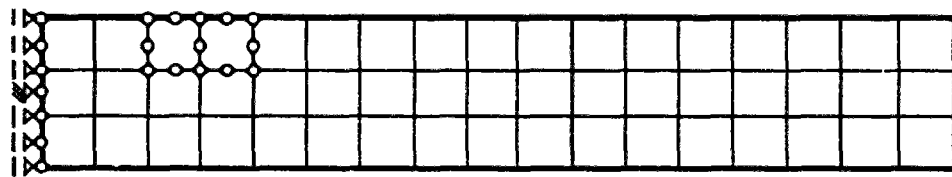
MODELISATION 1 - 6 ELEMENTS



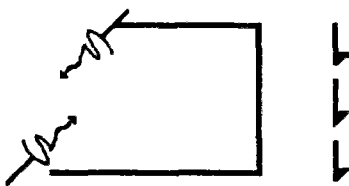
MODELISATION 2 - 24 ELEMENTS



MODELISATION 3 - 54 ELEMENTS



ETAT DE CHARGE 1



ETAT DE CHARGE 2

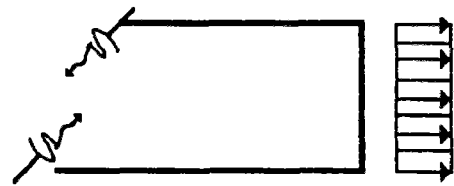
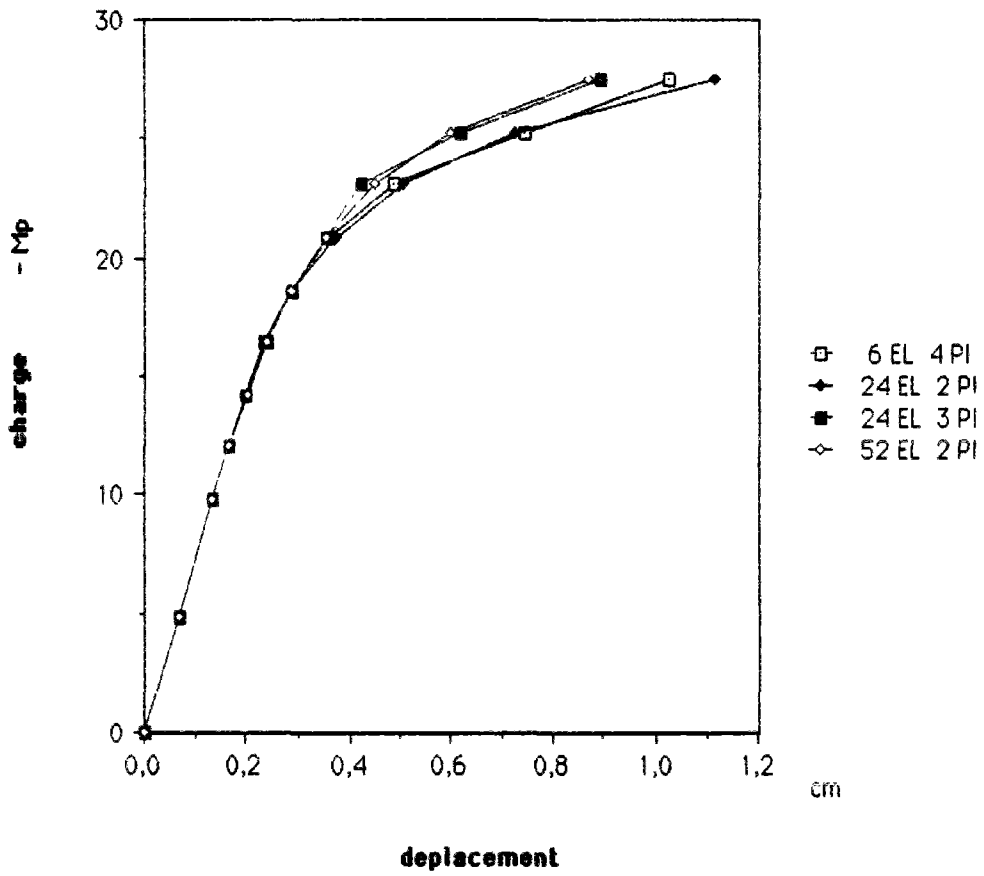
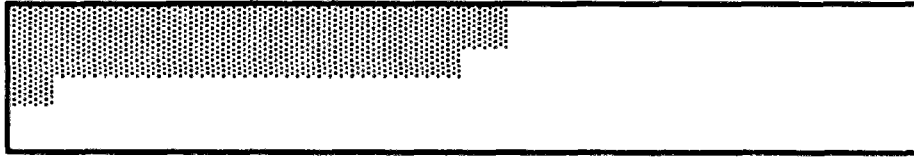


FIG V 2 COURBE GHARGE DEPLACEMENT ETAT 1



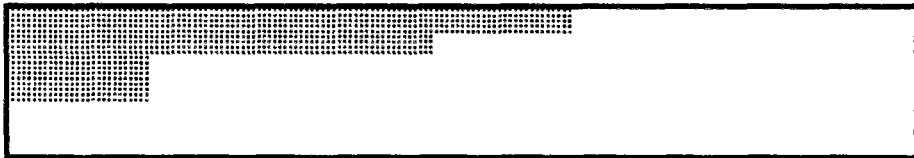
MODELISATION 6 ELEMENTS



MODELISATION 24 ELEMENTS 4 PI



MODELISATION 54 ELEMENTS



**FIG. Y . 3 FISSURATION POUR ETAT 1 DE CHARGE  
P = 28 Mp**

## Analyse des résultats

Les résultats de l'essai à la flexion sont présentés fig. V.2., courbe charge-déplacement vertical de l'extrémité libre et fig. V.3, état de fissuration.

La coïncidence exacte de toutes les courbes pour le chargement initial montre que les trois maillages donnent les mêmes résultats quant à la réponse élastique de la structure.

Avec l'évolution de la fissuration, les courbes cessent de coïncider, mais elles restent très proches. La différence entre les courbes dépend, non du maillage d'éléments finis, mais de la quantité de points d'intégration : ce sont eux qui procurent l'information pour le comportement non linéaire de la structure.

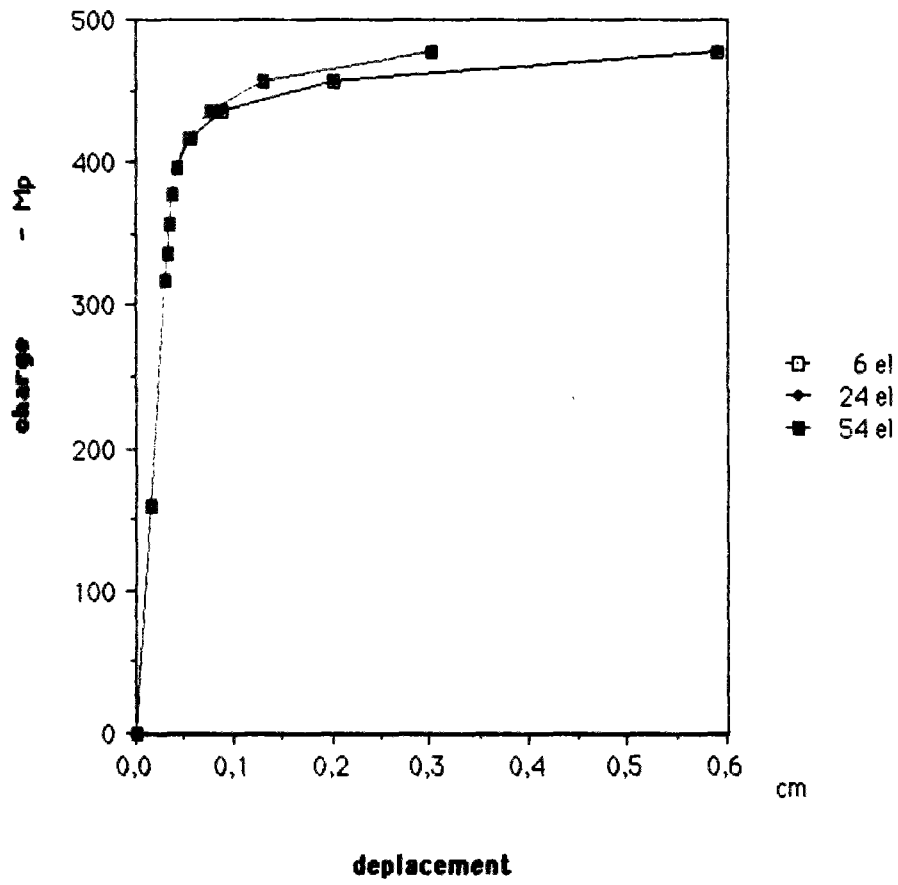
Cette conclusion, qui était intuitivement attendue, est confirmée par la coïncidence des courbes qui correspondent à 6 éléments avec 4 points d'intégration, et à 24 éléments avec 2 points d'intégration. Dans les deux cas, chaque section verticale possède 4 points d'intégration, l'information que contient la structure est pratiquement la même et les résultats concordent.

Une conclusion analogue peut être obtenue pour les modélisations à 24 éléments avec 3 points d'intégration et à 54 éléments avec 2 points d'intégration. Toutes deux possèdent 6 points d'intégration dans chaque section verticale et les courbes sont coïncidentes.

La fig. V.3 montre l'état de fissuration de la poutre en flexion pour une charge proche de celle de la rupture.

Les zones fissurées de la poutre sont assez proches pour les 3 modélisations, la différence étant justifiée par le nombre différent de points d'intégration existant.

FIG. V 4 COURBE CHARGE DEPLACEMENT ETAT 2



Dans le cas du chargement en traction, les courbes charge-déplacement sont représentées, fig. V.4. Ces courbes devraient être coïncidentes puisque la solution avec éléments finis est la solution exacte et indépendante du maillage ; tous les points d'intégration sont dans les mêmes conditions. Ces courbes montrent une coïncidence parfaite pour les cas à 6 éléments (2 points d'intégration) et à 24 éléments (2 points d'intégration). Dans le cas du maillage à 54 éléments, on observe une petite différence probablement occasionnée par des différences numériques dans le calcul des matrices élastoplastiques près de la rupture et un nombre distinct de points d'intégration.

### CONCLUSIONS

Bien que la modélisation avec 6 éléments présente un faible nombre de degrés de liberté pour représenter le comportement de la structure, la bonne concordance entre les courbes charge-déplacement et les zones fissurées, pour les différents cas, permet d'accepter comme valide l'hypothèse d'objectivité posée dans les développements théoriques pour le présent modèle.

### 5.3 TIRANTS EN TRACTION

L'objet de cet exemple est de comparer les résultats de ce modèle avec les résultats expérimentaux d'essais en traction pour des déformations contrôlées, obtenus par ROSTASY, KOCH et LEONHARDT, référence 71, pour des tirants de béton armé soumis à un effort de traction.

Malgré son apparente simplicité, la modélisation numérique de ce cas présente de sérieuses difficultés, en raison du phénomène de transfert de contraintes du béton à l'acier, à partir du moment où la fissuration commence et jusqu'à ce que le béton ait épuisé sa résistance à la traction.

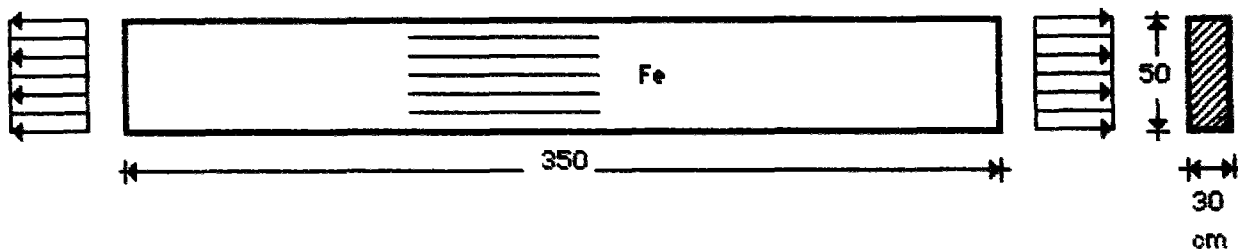
Cet effet, (tension stiffening) est généralement traité avec une approximation empirique par modification de la loi de comportement de l'acier pour prendre en considération la collaboration du béton partiellement fissuré (61) dans la résistance de l'ensemble, après que la fissuration ait débuté. Pour notre modèle, ce phénomène est incorporé dans la formulation, compte tenu des hypothèses émises en 4.3.2..

Les essais des tirants V1, V2 et V3 de référence (71) sont simulés à l'aide de la modélisation et des paramètres du matériau indiqués fig. V.5.

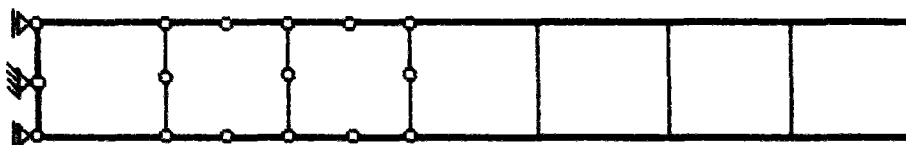
A l'exception de l'énergie de rupture  $G_f$ , les paramètres utilisés dans la simulation numérique sont issus de la bibliographie mentionnée.



**FIG Y 5 TIRANTS EN TRACTION Y1 Y2 Y3**



a) STRUCTURE



b) MODELISATION

	$f_{pc}$	$f_{pt}$	$G_f$	$E_b$	$F_e$	$E_a$
	kp/cm <sup>2</sup>	kp/cm <sup>2</sup>	kp/cm	kp/cm <sup>2</sup>	kp/cm <sup>2</sup>	kp/cm <sup>2</sup>
Y1	75	9,2	0,120	91400	5,65	2,09 10 <sup>3</sup>
Y2	87	7,5	0,100	82900	4,96	2,06 10 <sup>3</sup>
Y3	100	10,5	0,090	97100	9,92	2,06 10 <sup>3</sup>

c) PARAMÈTRES DU MATERIAU

Il est nécessaire de connaître l'énergie  $G_f$ , pour définir la branche descendante du diagramme qui représente le radoucissement du béton. Cette valeur n'étant pas fournie dans les essais cités, nous avons procédé de la manière qui suit :

- les essais procurent la valeur de la déformation pour laquelle le béton perd sa résistance à la traction et où l'acier équilibre tout l'effort normal agissant ;
- la structure de la fig. V.5 est calculée (nous aurions pu utiliser un seul élément) en faisant varier la valeur du paramètres  $G_f$  jusqu'à obtenir, simultanément, que le béton perde toute sa résistance à la traction et que la déformation soit celle que déterminent les essais des tirants pour cette situation ;
- en utilisant les paramètres du matériau issus des essais et l'énergie de rupture  $G_f$  obtenue de cette manière, on aboutira, naturellement, à une coïncidence entre les résultats de début de la fissuration et de fin de résistance à la traction du béton ;

Les énergies de rupture  $G_f$  ainsi obtenues sont détaillées dans la 3ème colonne du tableau fig. V.5.c). Ces valeurs sont en relation directe, pour notre modèle, avec les paramètres  $\epsilon_u$ ,  $f_{pe}$ , et  $h$  (fig. IV.8). Ce fait explique que pour le tirant V3 qui possède la plus haute résistance en traction du béton, mais la plus petite déformation pour épuiser cette résistance (fig. 7, 10 et 12), on obtient la valeur la plus basse de l'énergie de rupture  $G_f$  (voir tableau fig. V.5).

Il est intéressant de connaître la réponse du modèle dans des situations intermédiaires, puisque dans la pratique, cette situation de contrainte et de déformation sera celle qui correspondra à de nombreuses zones des structures en état de service.

Les fig. V.6 à V.12 présentent la confrontation des résultats numériques et expérimentaux pour les tirants V1, V2 et V3. Ces résultats apparaissent sous la forme d'une courbe charge-déplacement et du quotient effort normal sur section d'acier - déformations. Y figurent également les résultats d'une étude paramétrique sur  $G_f$ , faite sur le tirant V1, fig. V.8.

FIG V 6 COURBE CHARGE-DEPLACEMENT TIRANT V1

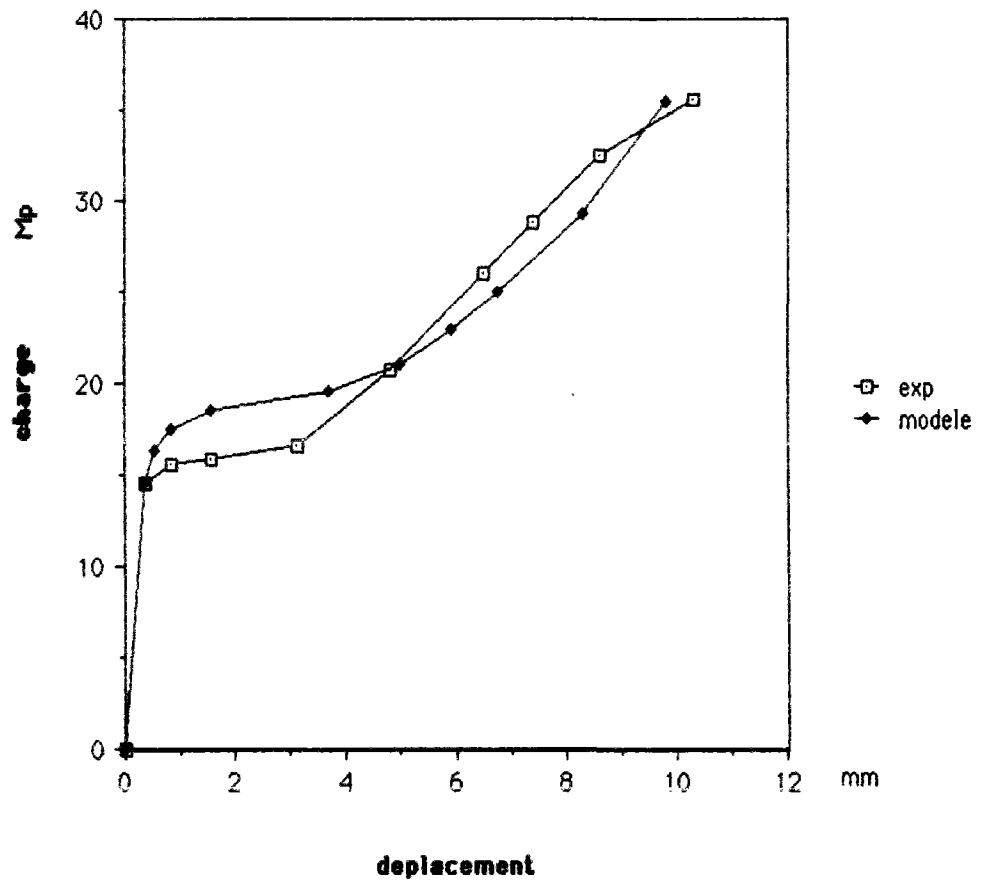


FIG V 7 TIRANT Y1 COURBE N/Fe - Deformation

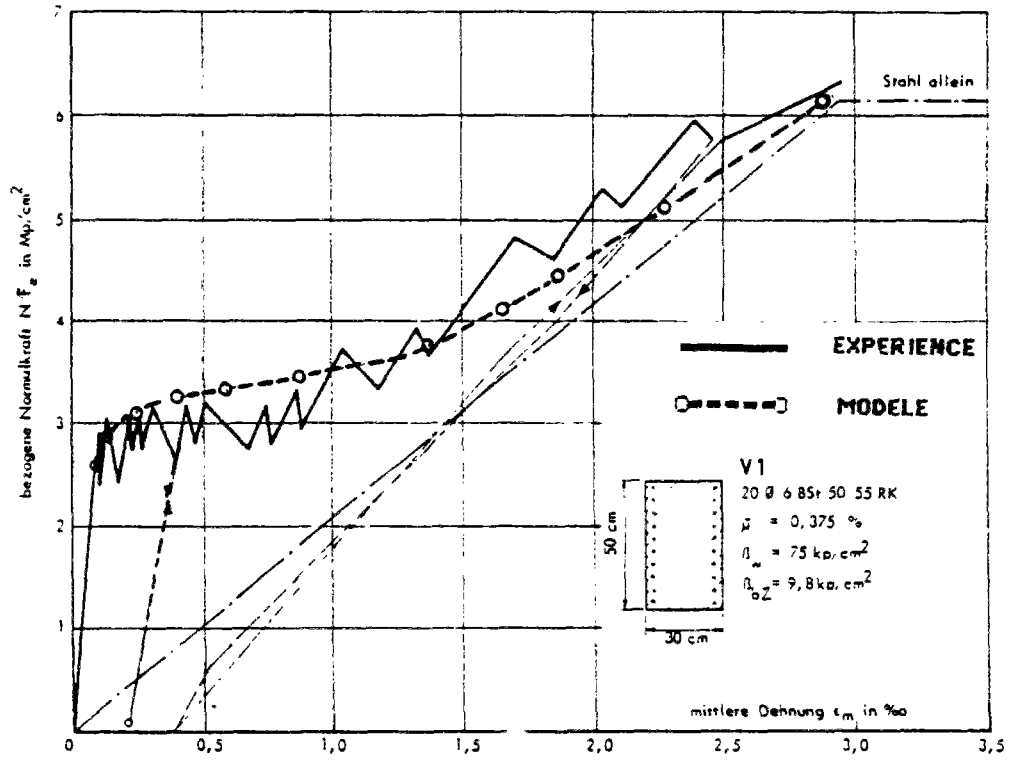


FIG V 8 - TIRANT V1 ETUDE PARAMETRIQUE SUR GF

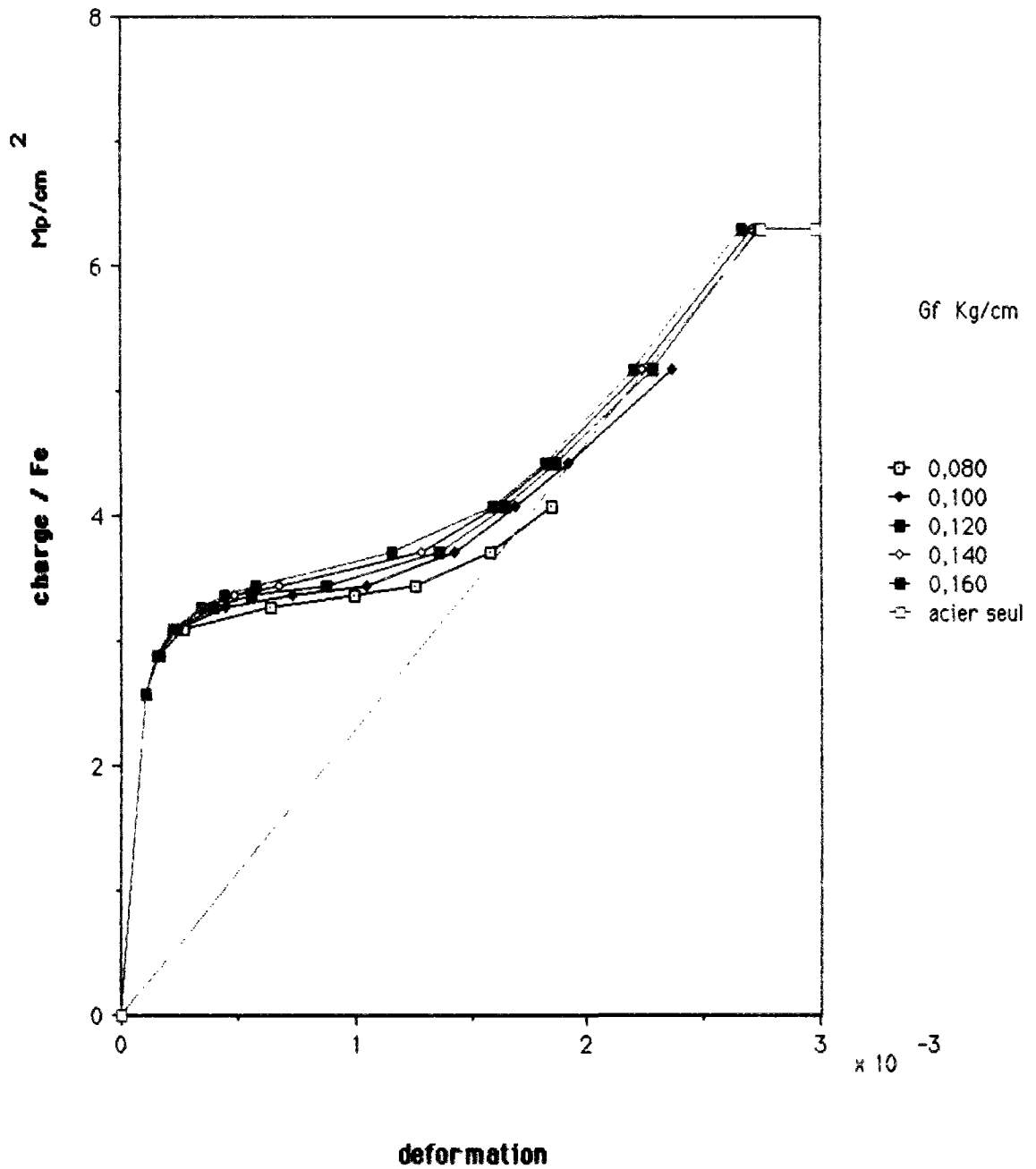
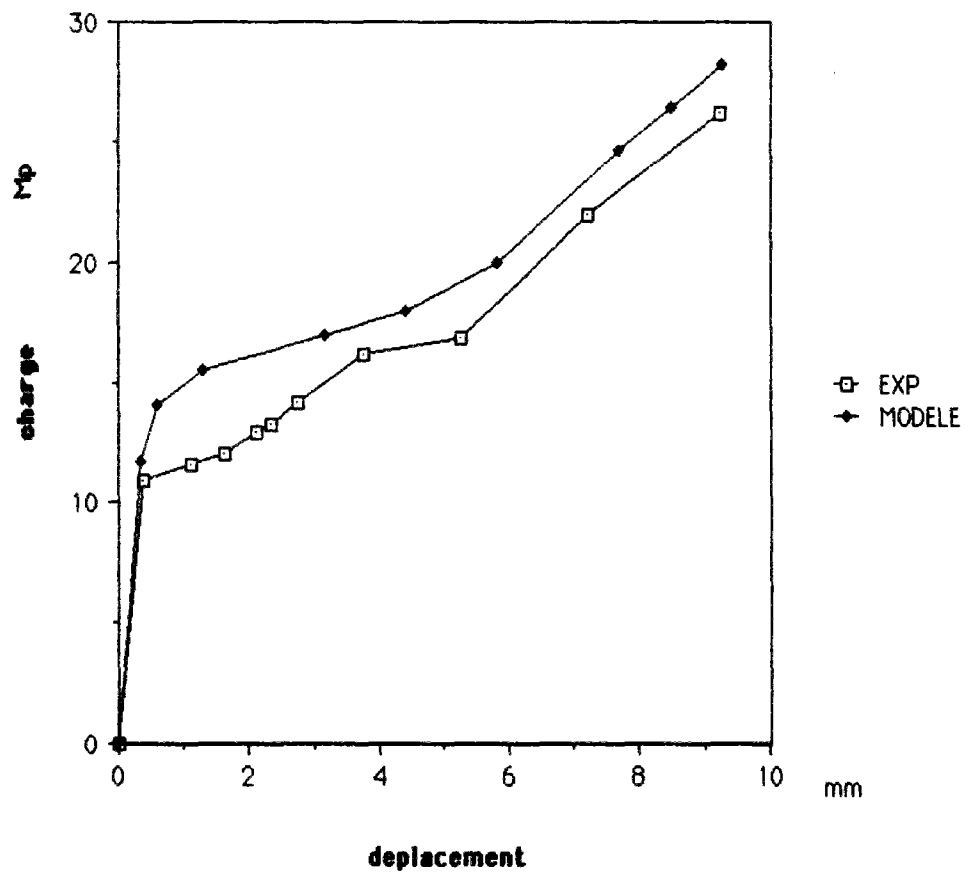


FIG V 9 COURBE CHARGE-DEPLACEMENT TIRANT V2



**FIG Y 10 TIRANT Y2 COURBE N/Fe - Deformation**

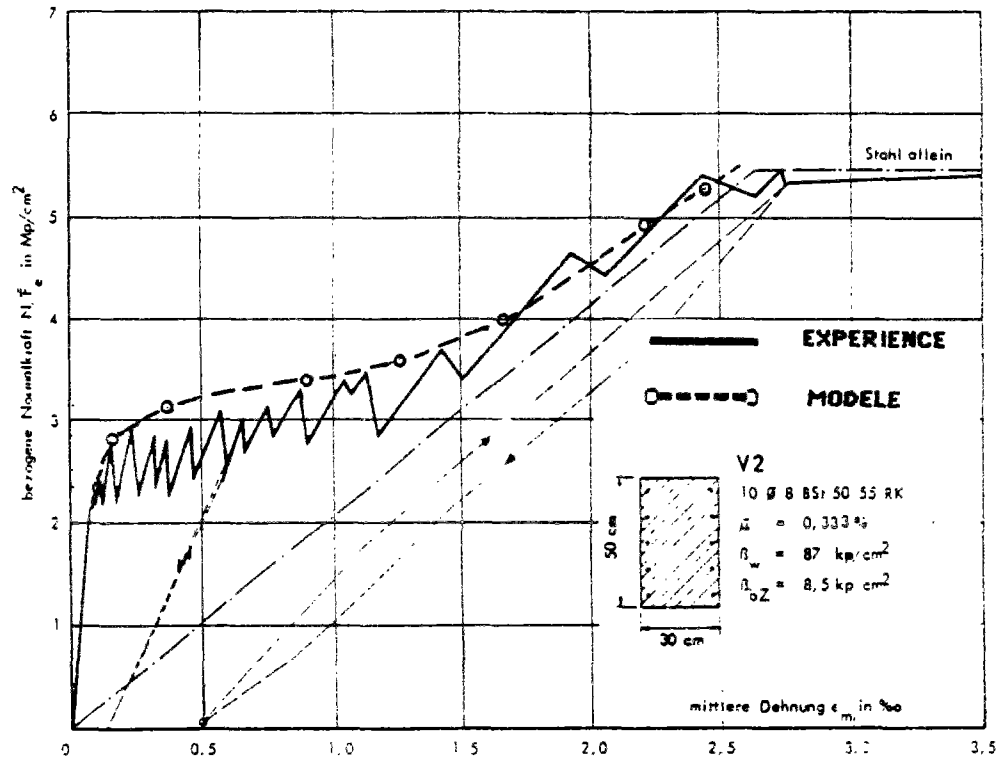
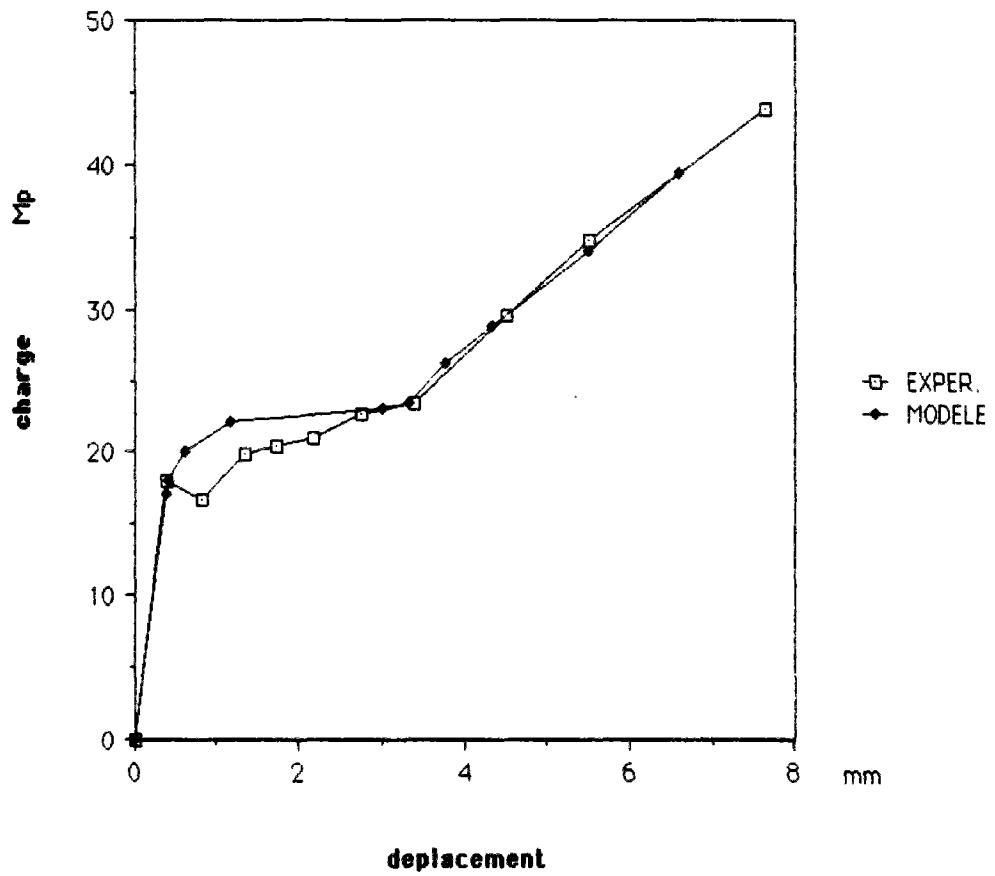
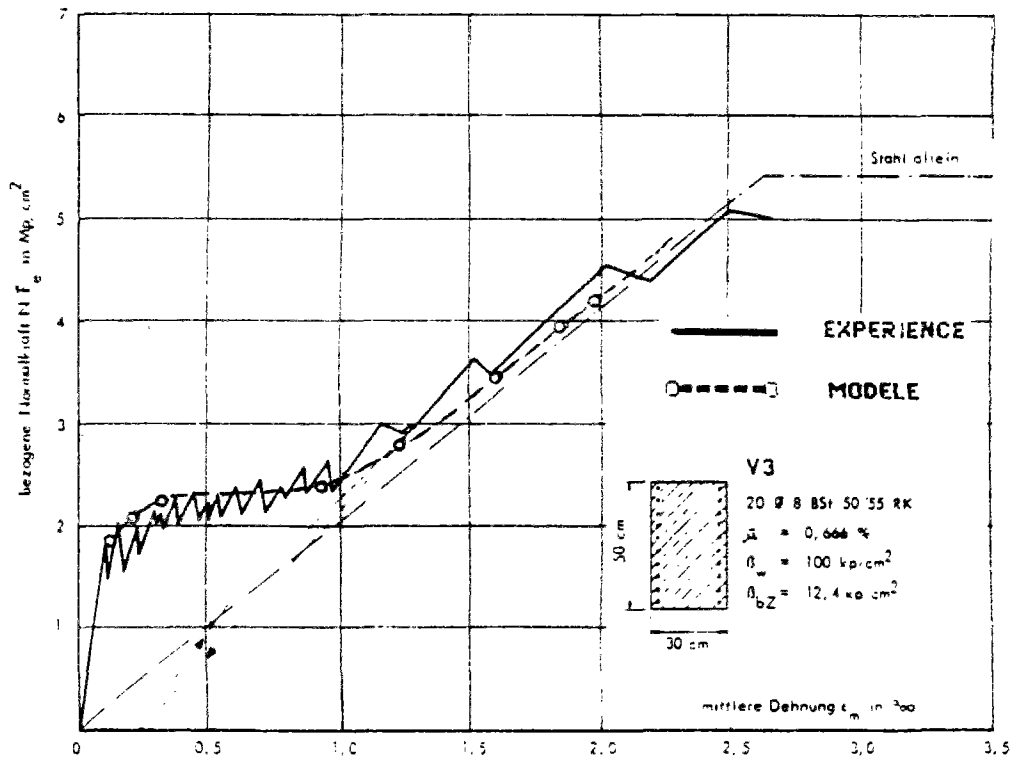


FIG V 11 COURBE CHARGE-DEPLACEMENT TIRANT V3





**FIG Y 12 TIRANT Y3 COURBE N / Fe - Deformation**



## Analyse des résultats

En procédant comme indiqué préalablement pour obtenir la valeur de l'énergie de rupture  $G_f$ , on observe que le modèle représente correctement les courbes charge-déplacement des essais de traction. La coïncidence entre les points initiaux et terminaux de la courbe correspond à l'ajustement du paramètre  $G_f$  effectué pour le matériau. Dans les états intermédiaires de fissuration, les valeurs simulées offrent une bonne concordance de la forme de la courbe avec la forme de la courbe expérimentale. Pour les points expérimentaux, des courbes charge-déplacement seuls ont été représentées les valeurs de déformations pour des charges croissantes. Les valeurs décroissantes des charges, que l'on observe sur les courbes expérimentales  $N/Fe - \epsilon$ , n'ont pas été représentées.

Il est certainement possible d'obtenir une meilleure approximation par une modification du diagramme de radoucissement bilinéaire utilisé.

La concordance du modèle avec les valeurs expérimentales, en situation intermédiaire de fissuration, est considérée comme satisfaisante.

Les résultats d'une étude paramétrique sur l'énergie de rupture  $G_f$  sont présentés fig. V.8 :

On observe que l'emploi de valeurs approchées par défaut de l'énergie de rupture, produit un épuisement prématuré de la résistance à la traction. Des valeurs approchées par excès, produisent une sur-valorisation de la résistance à la traction. Dans ce dernier cas et pour l'exemple analysé, la résistance du béton n'est pas nulle au moment où le tirant arrive à la déformation qui produit la plastification de l'acier. Cette plastification produit une augmentation importante de la déformation du tirant, déformation qui épuise subitement la résistance en traction du béton.

## CONCLUSIONS

le modèle proposé peut simuler correctement l'état de traction dans le béton armé, y compris le comportement entre la fissuration initiale et l'épuisement total de la résistance en traction du béton.

L'application de ces modèles numériques sera en général réalisée sur des structures dont l'importance puisse justifier la réalisation des essais pour déterminer les paramètres du matériau nécessaires à l'emploi de ces modèles, si on ne dispose pas de valeurs fiables pour ces paramètres.

Dans ce cas nous proposons la réalisation de :

- . un essai de résistance en compression simple et en compression biaxiale égale ;
- . un essai de traction sur un tirant de béton armé à déformation contrôlée ;
- de ce dernier essai on déduira les valeurs nécessaires pour le modèle en traction, y compris le calcul de  $G_x$ , par l'ajustement du modèle numérique aux résultats expérimentaux comme il a été précédemment indiqué ;
- l'utilisation des paramètres de traction ( $f_{pe}$ ,  $\epsilon_e$ ,  $G_x$ ) ainsi obtenus permet de supposer que ce modèle, avec le diagramme de radoucissement employé, et dans des conditions de traction pure, donnera les mêmes résultats qu'un essai de traction pure dans un tirant du même matériau ;

#### 5.4 PANNEAU WT3

Notre modèle peut s'appliquer à la détermination du comportement de structures planes. Nous choisissons d'analyser deux panneaux en béton armé sur lesquels Leonhart et Walther, réf. (72) ont réalisé une étude expérimentale très complète. L'un de ceux-ci, appelé WT3, sur deux appuis, sera analysé dans ce paragraphe, l'autre, sur 3 appuis et dit DWT2, le sera au paragraphe suivant.

Les détails de la structure et de l'essai du panneau WT3, sa modélisation et les paramètres du matériau sont présentés fig. V.13.

L'expérience a été réalisée sous des conditions de chargement imposé, l'incrément étant de 10 Mp pour chaque pas de chargement.

A propos des paramètres du matériau, nous ferons les remarques suivantes :

- le module d'élasticité initial a été altéré par rapport à la valeur issue de l'expérience, pour obtenir la concordance avec la partie élastique initiale de la courbe charge-déplacement. Cette réduction a été effectuée pour les mêmes motifs dans d'autres simulations numériques de cette cloison, réf. (61) et (73) ;
- en l'absence de valeurs expérimentales, on ajuste la valeur de  $G_f$  pour obtenir le déplacement vertical du point moyen inférieur, mesuré dans l'expérience pour une valeur de la charge totale appliquée de 80 Mp, voisine de la rupture ;
- tant les couches inférieures de l'armature que l'armature horizontale et verticale dans le reste du panneau sont introduites comme armature répartie, considérée comme caractéristique du "matériau composé béton armé".

La structure est modélisée en état plan de contrainte avec un maillage d'éléments à 8 noeuds. Pour des raisons de symétrie, seule la moitié de la structure est considérée.

Pour introduire dans le modèle les réactions d'appui, la plaque d'acier articulée de celui-ci fig. V.13 a) a également été modélisée. On a pris pour cette plaque un coefficient de Poisson égal à celui du béton, afin de réduire les perturbations introduites en ne considérant pas dans la modélisation, la couche de mortier entre la plaque d'appui et le panneau.

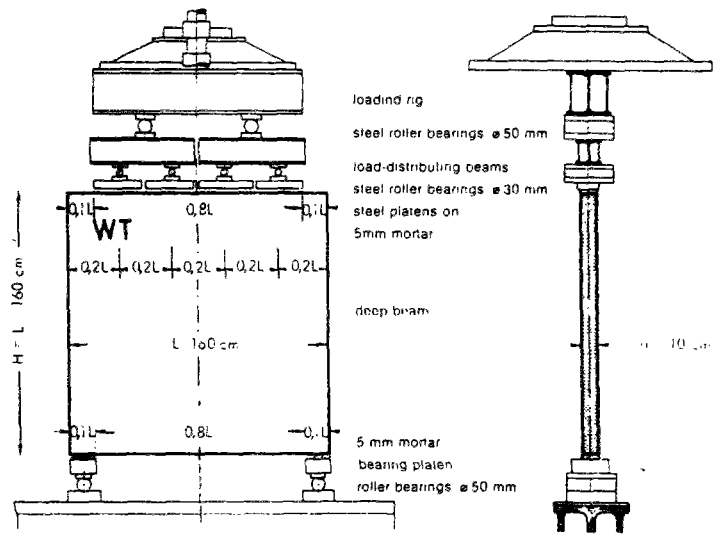
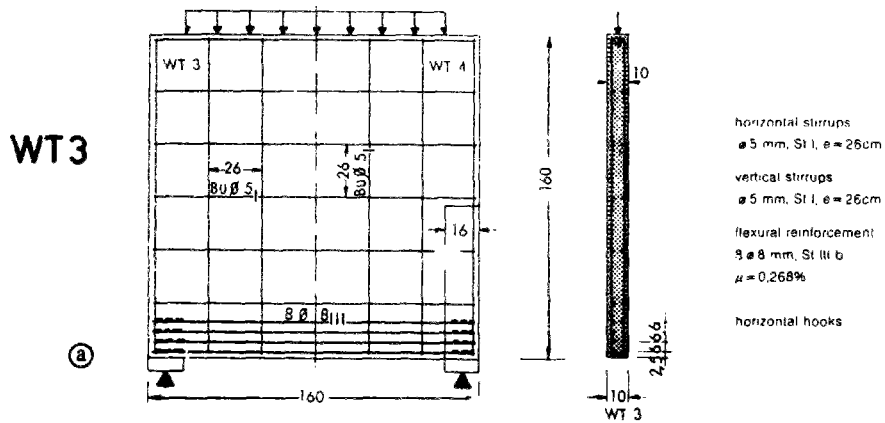
La charge extérieure est appliquée à l'aide de charges nodales, évaluées de manière à représenter une charge uniformément distribuée.

On trouve sur les fig. V.14 et V.15 la courbe charge-déplacement du point central inférieur et l'état de fissuration pour différents niveaux de charge  $P$  ;  $P$  étant la charge totale sur le panneau .

Dans la fig. V.14 b), on montre la comparaison de résultats expérimentaux avec ceux de notre modèle et d'une autre simulation, réalisée par Van Mier réf. (73).

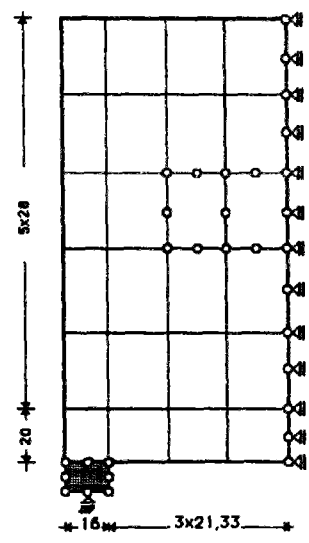
Cette dernière présente 2 courbes, ces courbes étant obtenues pour des valeurs différentes de la déformation du béton pour laquelle s'épuise sa résistance en traction : 0,0010 et 0,0019. Le béton y a été modélisé par éléments de contrainte plane à 8 noeuds, les barres d'armatures étant représentées de façon discrète, au moyen d'un élément de barres à 3 noeuds.

FIG. Y 13 PANNEAU WT3



A) CARACTERISTIQUES DU PANNEAU ET DE L'ESSAI -Ref. 73 -

B) MODELISATION



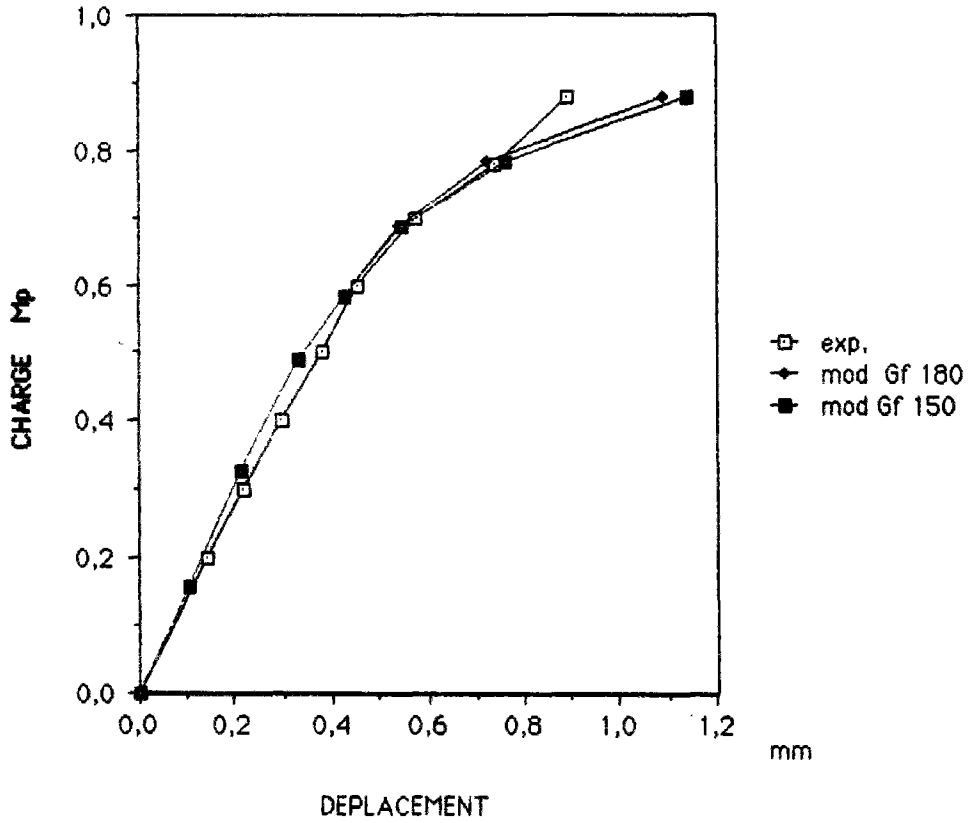
C) PARAMETRES

Kg , cm

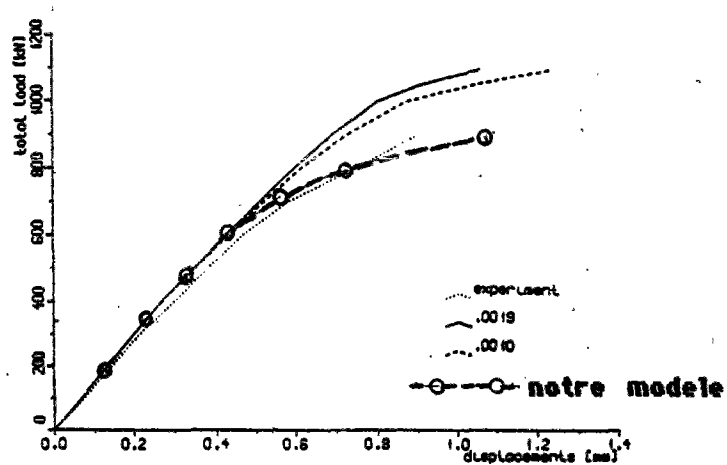
$E = 250000.$	$\nu = 0,20$
$f_{pc} = 293.$	$f_{pt} = 29,3$
$f_{pbc} = 340.$	
$f_{oc} = 210.$	$f_{ot} = 28.$
$f_{ebc} = 200.$	
$\epsilon_c = 0,0022$	$\epsilon_t = 0,00012$
$\epsilon_{bc} = 0,0026$	
$G_r = 0,180$	$f_a = 4200.$
$E_a = 2100000.$	

Points d'integration  
 4 x 4 pour les 3 couches  
 inférieures d'éléments  
 3 x 3 pour les couches rest.

FIG. V 14 WT3 COURBE CHARGE-DEPLACEMENT



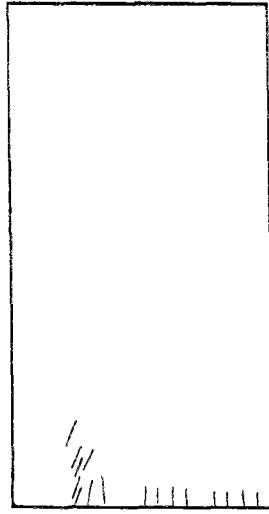
a) Expérience , notre modèle



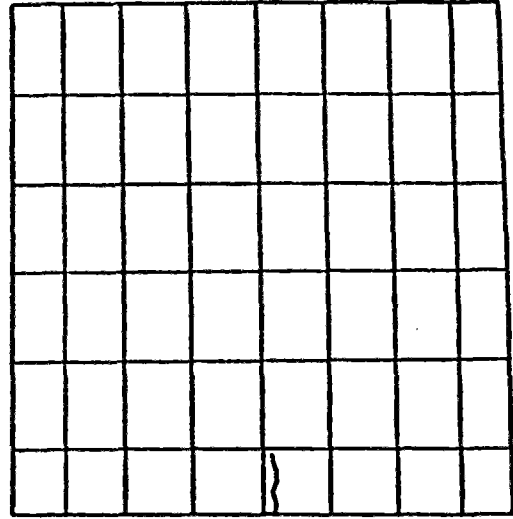
b) Expérience, notre modèle, modèle ref.(73)

**FIG Y 15 FISSURATION POUTRE CLOISON WT3**

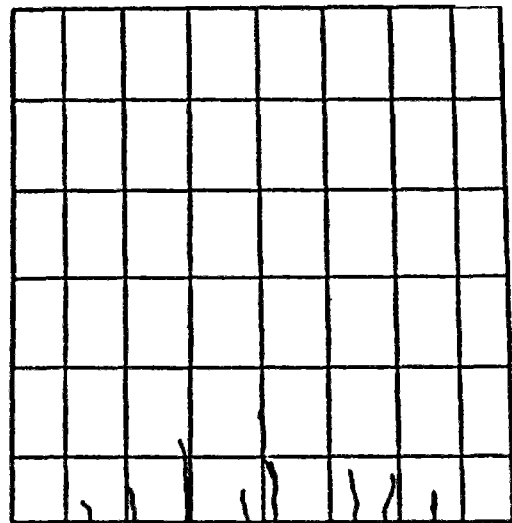
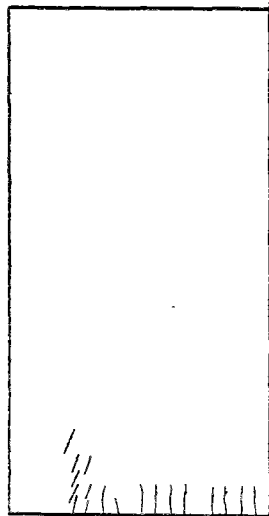
MODELE



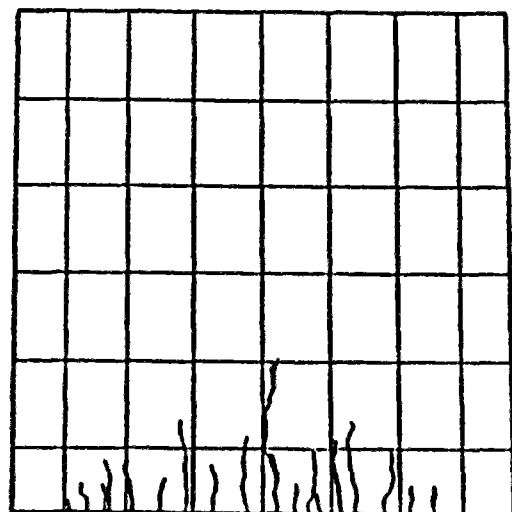
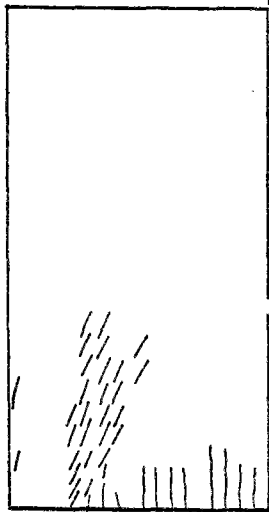
EXPERIENCE



**P = 60 Mp**



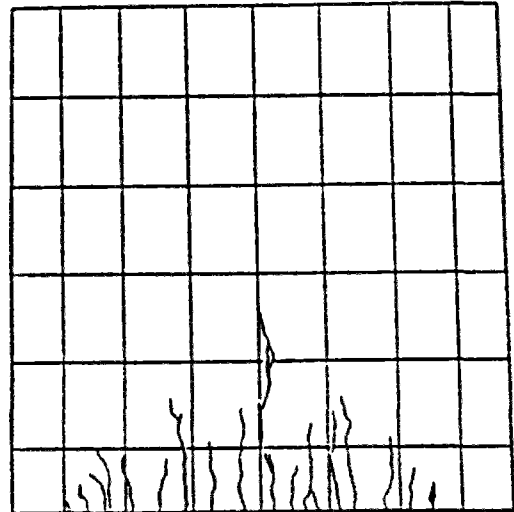
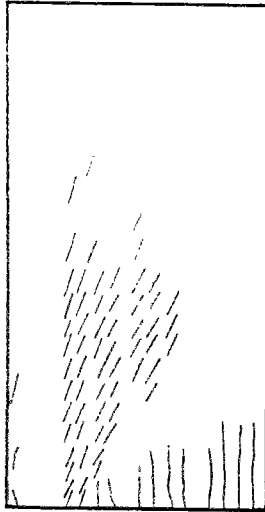
**P = 70 Mp**



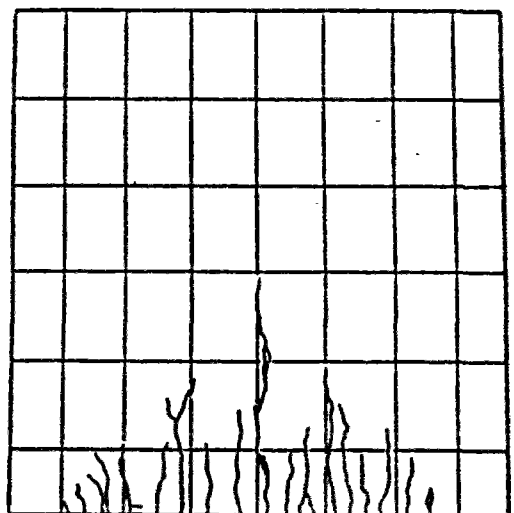
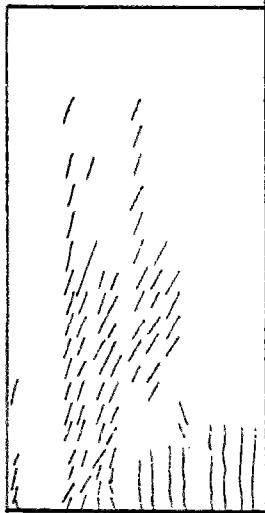


**FIG Y 15 FISSURATION POUTRE CLOISON WT3 (SUITE)**

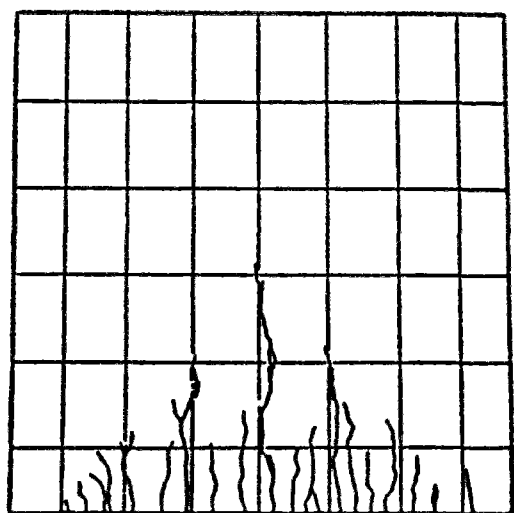
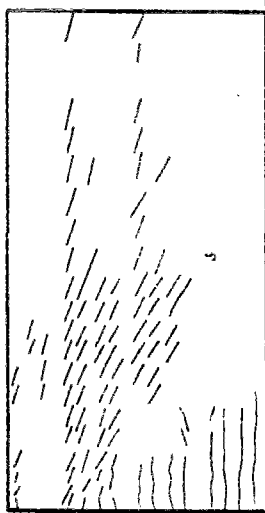
**P = 80 Mp**



**P = 90 Mp**



**P = 100 Mp**



## Analyse des résultats

La réponse globale de la structure mesurée par la courbe charge-déplacement s'ajuste correctement aux valeurs expérimentales. Si la valeur de l'énergie de rupture  $G_f$  a été bien ajustée pour faire coïncider les déplacements sous la charge maximum, toute la courbe présente une bonne concordance avec la courbe expérimentale. La charge de rupture calculée, 100 Mp est confrontée à celles évaluées expérimentalement : 100 Mp pour l'appui gauche et, après confinement de la zone de rupture, 129 Mp pour l'appui droit. Bien qu'il y ait coïncidence pour la charge de l'appui gauche, on pouvait s'attendre à une valeur intermédiaire. Cette différence peut être attribuée à deux causes :

- la valeur d'ajustement de  $G_f$ , réalisée pour obtenir la valeur correcte du déplacement pour une charge de 80 Mp. Si cet ajustement avait été effectué pour une charge plus élevée, la charge de rupture calculée s'approcherait beaucoup plus de la valeur expérimentale, mais avec pour conséquence un éloignement entre les courbes du diagramme charge-déplacement pour des valeurs de charge comprises entre 60 et 80 Mp ;
- le modèle donne une réponse moins rigide, près de la rupture, que la réponse réelle de la structure. Nous envisageons pour cela deux explications possibles :
  - . l'hypothèse de fissuration distribuée rend le matériau moins rigide ;
  - . le modèle de Chen utilisé comme "partie béton" dans le modèle de comportement du béton armé a une réponse également moins rigide que la réponse réelle pour certains rapports des contraintes principales en compression-traction (voir fig. III.9) ; et c'est un tel état de contraintes sur l'appui du panneau qui est responsable de la rupture.

Dans l'analyse de la fissuration, on observe l'apparition de fissures dominantes à côté de l'appui gauche. Ces fissures apparaissent dès le début de l'application des charges et se développent de manière prépondérantes par rapport aux fissures qui apparaissent dans le reste du panneau.

Ce phénomène a son explication mécanique dans la distribution élastique initiale des contraintes, pour laquelle la contrainte principale la plus grande apparaît à côté de la plaque d'appui. C'est cette distribution des contraintes, normales pour ce type de structure et de chargement, qui est responsable de l'état de fissuration donné par la simulation numérique. Dans l'expérimentation, cette fissuration dominante n'a pas été observée ; la fissuration qui se développe dans le milieu de la travée apparaissant comme fissuration dominante.

Une explication possible de cette différence se trouve dans la restriction du déplacement horizontal qui peut avoir existé sur les appuis au cours de l'expérimentation. Cette action fait obstacle au développement de la fissuration adjacente à l'appui (voir fig. V.13).

Au niveau des résultats du modèle, on enregistre un second groupe de fissures dominantes au centre de la travée qui sont cause du transfert direct des charges verticales à la zone sur les appuis, lesquels, finalement, rompent par compression. Ce sont ces fissures qui coïncident avec celles observées dans l'expérimentation, fig. V.15.

## CONCLUSION

Ce modèle peut correctement représenter la réponse globale d'un panneau de béton armé sur deux appuis. La courbe charge-déplacement du point central inférieur de la structure présente une bonne concordance avec la courbe expérimentale.

La charge de rupture est raisonnablement estimée.

L'état de fissuration, avec fissures dominantes près de l'appui qui est représenté par la simulation numérique, état que l'on pensait devoir se produire, n'est pas observé lors de l'expérimentation.

L'état de fissuration au centre de la travée représente l'état observé expérimentalement dans cette zone.

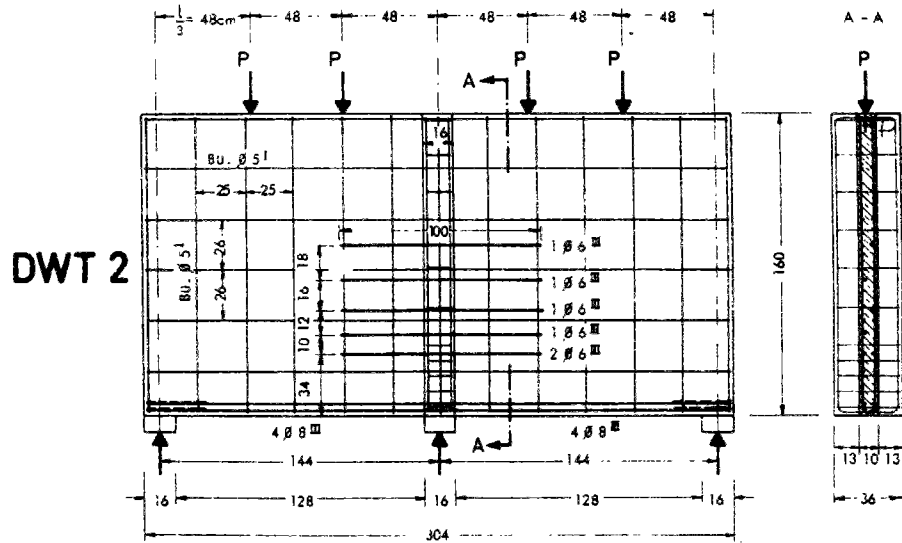
## 5.5 PANNEAU DWT2

On compare maintenant les résultats du modèle et les valeurs expérimentales obtenus sur une poutre-cloison sur trois appuis, analysée expérimentalement par Leonhard et Walther, réf. (71). Cette poutre-cloison DWT2 présente un état de fissuration où prédomine la fissuration par cisaillement que l'on considère comme un exemple intéressant pour la vérification du modèle.

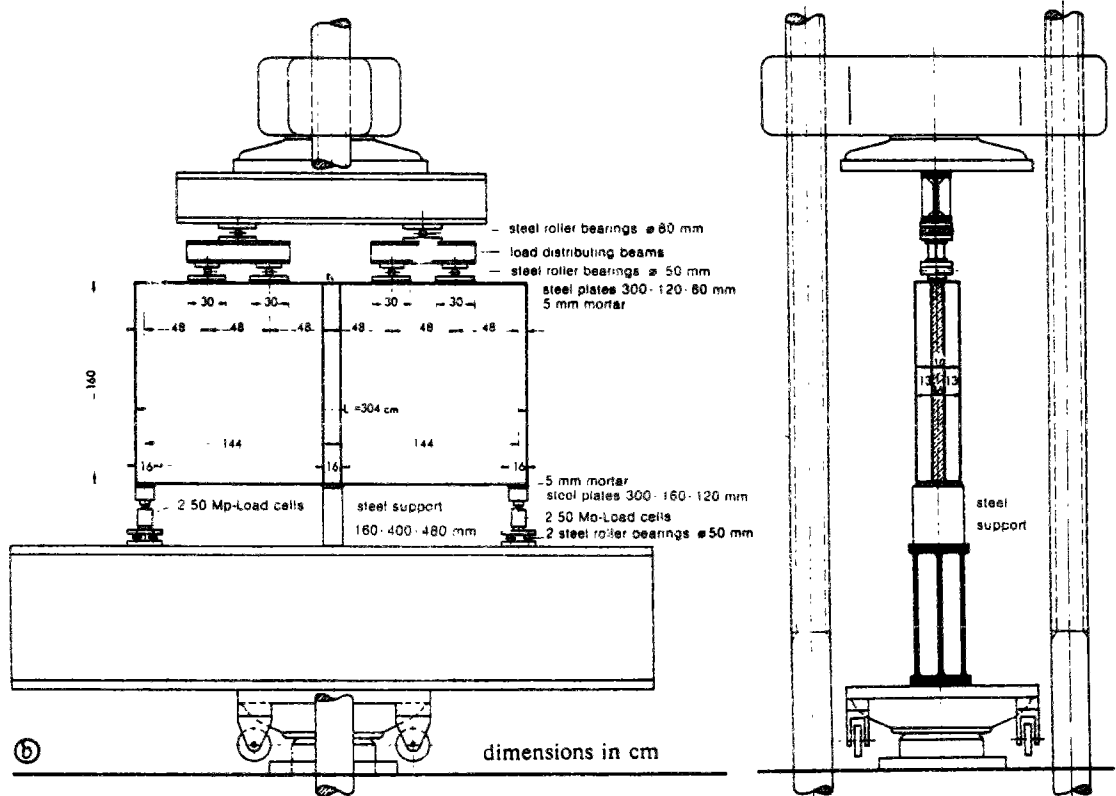
Les caractéristiques géométriques, l'armature, la charge, les appuis et le schéma de l'essai sont représentés, fig. V. 16.

L'expérience a été réalisée sous des conditions de chargement imposé, l'incrément étant de 10 Mp pour chaque pas de chargement jusqu'à 200 Mp ; et de 20 Mp au-delà de cette valeur jusqu'à la rupture.

**FIG Y 16 POUTRE CLOISON DWT2**  
**CARACTERISTIQUES DU PANNEAU ET DE L'ESSAI -Ref. 73-**



Ⓐ dimensions in cm, ø reinforcement in mm



Ⓑ dimensions in cm

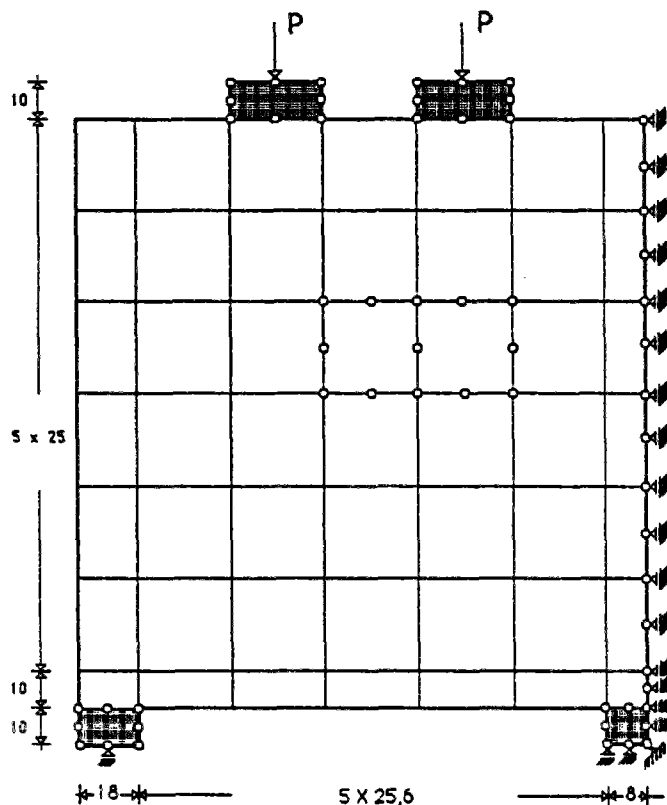
L'essai montre que les premières fissures apparaissent à 50 cm de l'appui droit de la poutre à un niveau de charge de  $4P = 120 \text{ Mp}$ .

Les fissures de cisaillement à côté de l'appui central apparaissent subitement pendant l'accroissement de la charge de 140 Mp à 160 Mp ; leur développement est l'origine du plateau de la courbe charge-déplacement que montre l'expérimentation, fig. V.18.

Après ce plateau, la charge continue d'augmenter lentement avec les déplacements, jusqu'à la rupture.

Deux zones de rupture se développent ; l'une à côté de la plaque de chargement, l'autre à côté de l'appui central.

La poutre-cloison est calculée par éléments finis, avec la modélisation et les paramètres indiqués, fig. V.17 :



Paramètres	Kg , cm
$E = 320000.$	$\nu = 0,20$
$f_{pc} = 302.$	$f_{pt} = 30,2$
$f_{pbc} = 357.$	
$f_{ac} = 185.$	$f_{et} = 28,5$
$f_{abc} = 178.$	
$\epsilon_c = 0,0022$	$\epsilon_t = 0,00012$
$\epsilon_{bc} = 0,0026$	
$G_f = 0,180$	
$E_a = 2100000.$	

Points d'integration  
3 x 3 pour tous les éléments

FIG V 17 MODELISATION DWT2

Pour les paramètres du matériau on a pris les valeurs de l'essai original, à l'exception du module d'élasticité pour lequel on a pris la valeur inférieure afin qu'il y ait coïncidence entre les courbes calculées et expérimentales dans la partie élastique initiale.

Pour l'énergie de rupture  $G_E$ , on a adopté la valeur utilisée pour le calcul du panneau WT3.

L'armature a été prise en compte de façon distribuée à l'intérieur de chaque élément, car cette façon de considérer l'armature est celle qui correspond au "matériau béton armé". L'armature inférieure a été considérée comme distribuée dans une hauteur de 10 cm - qui s'avère excessive - cette disposition ayant été adoptée pour éviter de placer de nombreux éléments pour la modéliser ou d'utiliser des éléments comportant une trop grande distorsion. Les plaques d'appui et les plaques d'application des charges (fig. V.16) ont été modélisées en tant que parties de la structure, avec des éléments ayant les caractéristiques de l'acier et un coefficient de Poisson égal à celui du béton (mêmes considérations que pour WT3).

#### Analyse des résultats

Fig. V.18, les valeurs charge-déplacements calculées, sont comparées aux valeurs expérimentales. A la figure V.19 on ajoute à cette comparaison la simulation d'un autre modèle, Van Mier réf. (73).

L'observation des courbes charge-déplacement, calculée et expérimentale, montrent une bonne coïncidence pour la période élastique initiale.

Le comportement particulier de la structure entre 140 et 160 Mp est dû à la formation et au développement des fissures de cisaillement qui apparaissent au voisinage du support central. Ce comportement est simulé de façon adéquate par le modèle. A partir de la charge  $4P = 160$  Mp qui correspond à la fin du plateau de la courbe, la réponse expérimentale de la structure se rigidifie. Le modèle simule également cette rigidification, mais sur une moins grande échelle que la structure. On a obtenu une charge de rupture dans la simulation numérique :  $4p = 210$  Mp, alors qu'elle est :  $4p = 255$  Mp dans l'expérience.

FIG V 18 DTW2 COURBE CHARGE-DEPLACEMENT

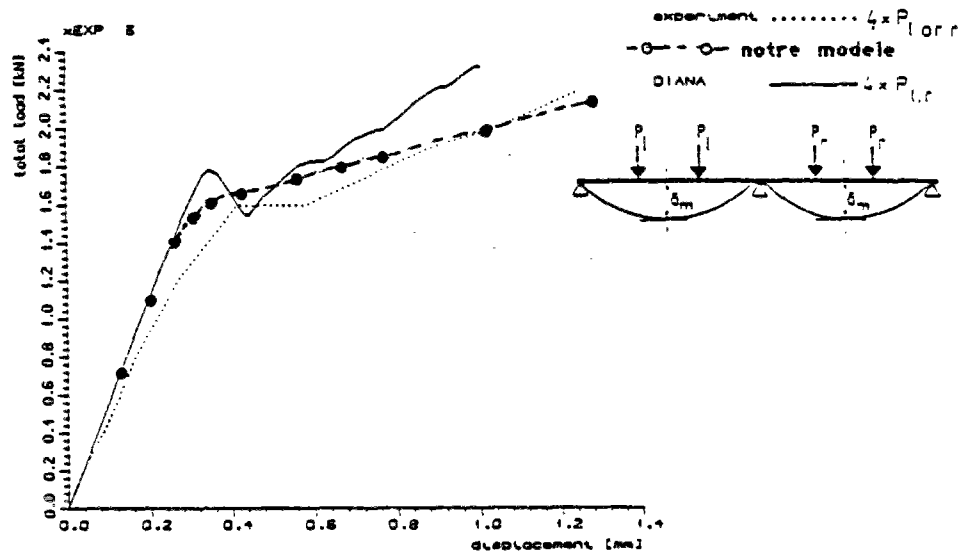
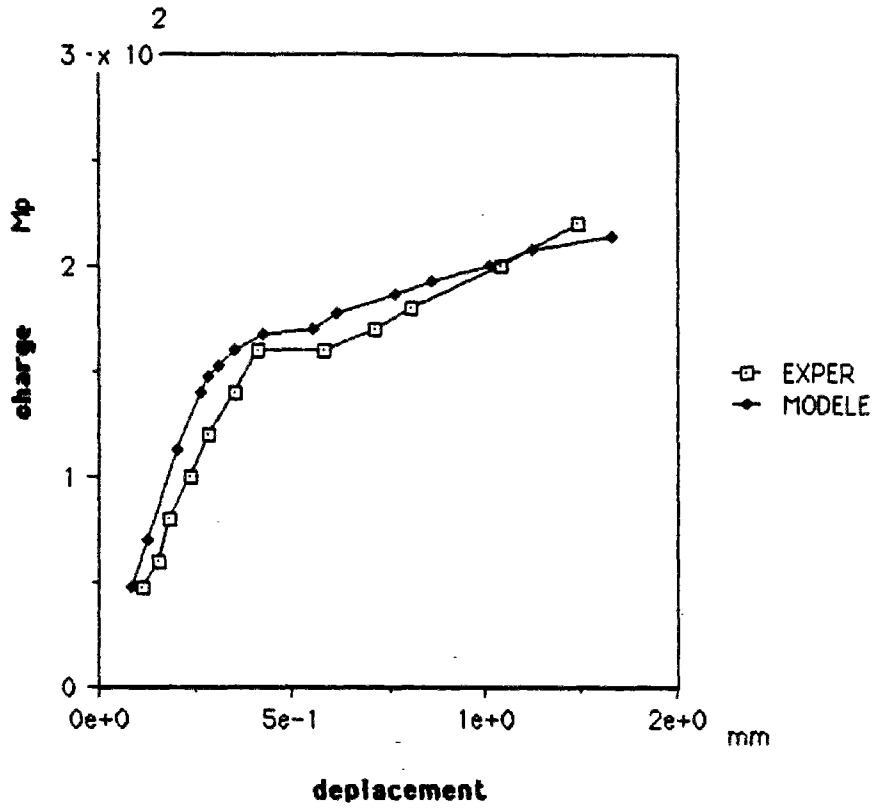


FIG V 19 DWT2 COURBE CHARGE - DEPLACEMENT

Comparaison avec d'outre modèle -Ref. 73-



Cette différence peut être attribuée aux faits suivants :

- une réponse du modèle moins rigide, près de la rupture ; nous avons déjà mentionné deux possibles explications pour ce phénomène dans le paragraphe qui précède ;
- la distribution répartie de l'armature qu'on a utilisée pour la modélisation de cette structure : nous avons mentionné la distribution sur une hauteur excessive de l'armature inférieure principale. Ce fait entraîne une réduction de la résistance de la structure. On peut ajouter que la même situation des barres  $\varnothing 6$  près du support central ;
- la valeur de l'énergie de rupture  $G_F$  utilisée pour le calcul. On a pris la valeur issue de l'ajustement de la courbe charge-déplacement pour la cloison WT3 ; étant donné la similitude des paramètres du béton donnés pour WT3 et DWT2. Si on avait ajusté la valeur de  $G_F$  sur la courbe de DWT2, on aurait mieux approché la charge de rupture.

Dans la fig. V.20, on présente le schéma de la fissuration calculé et comparé avec celui obtenu expérimentalement.

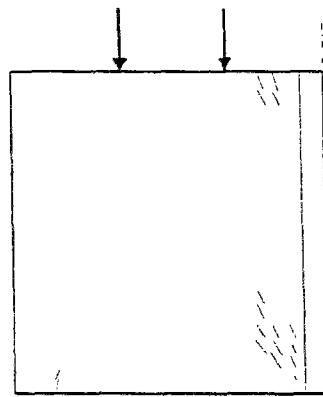
Les fissures de cisaillement à côté du support central sont très bien simulées par le modèle.

La fissure du centre de travée observée expérimentalement est reproduite par le modèle, mais plus près de l'appui extérieur. Cette différence peut être conséquence de la restriction du déplacement horizontal sur l'appui extérieur au cours de l'essai.

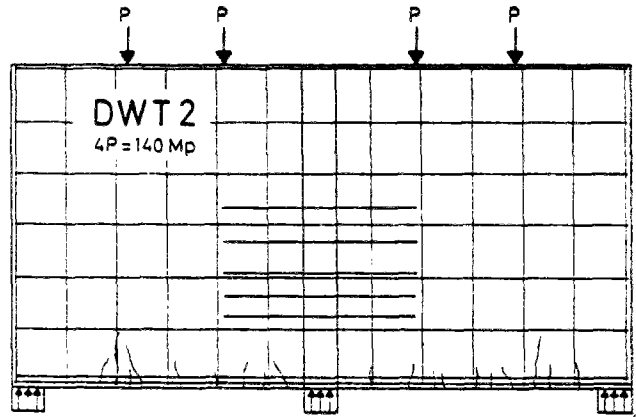
La direction et la longueur des fissures calculées par le modèle sont en bonne concordance avec les observations expérimentales.

A un niveau de charge de 160 Mp on note le grand développement des fissures de cisaillement à côté du support central et celles-ci sont responsables du plateau observé sur la courbe charge-déplacement.

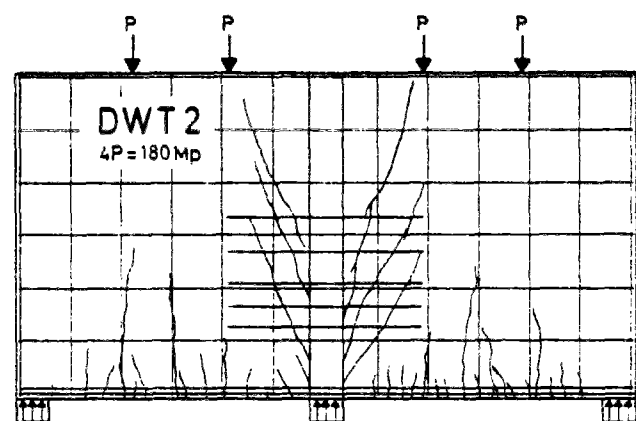
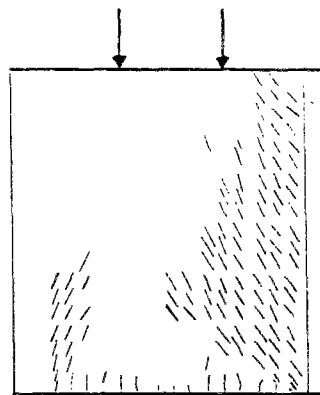
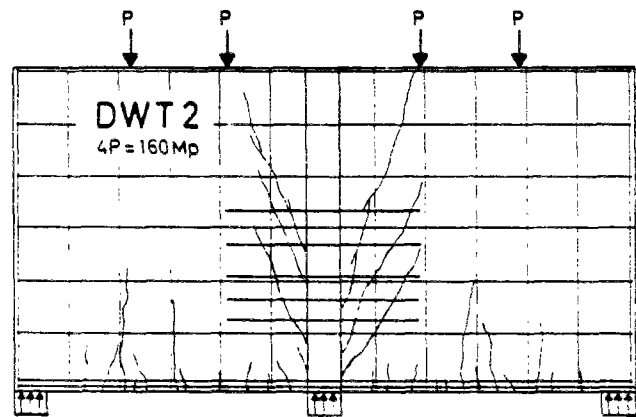
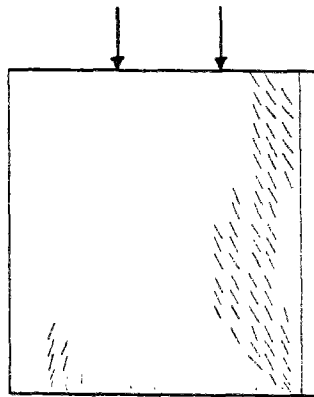
FIG V 20 FISSURATION POURRE CLOISON DWT2



MODELE



EXPERIENCE



## FIG V 20 FISSURATION POUTRE CLOISON DWT2 SUITE

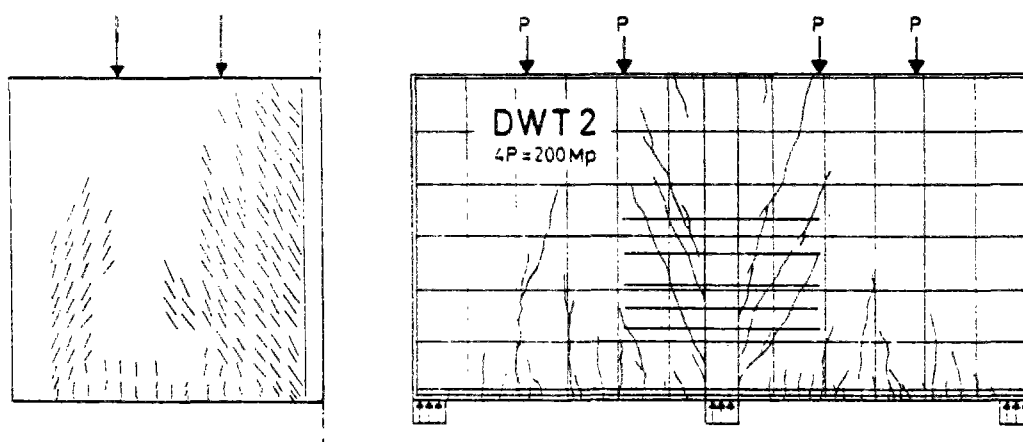


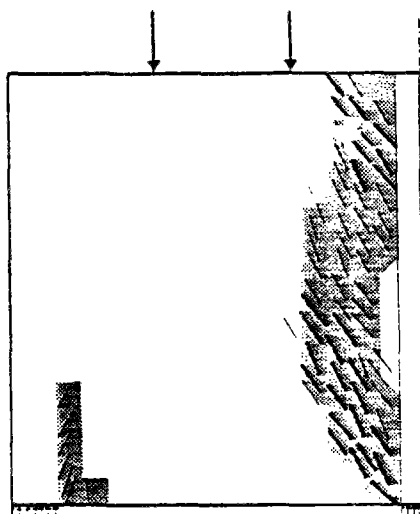
Fig. V.21, on peut remarquer la concordance au niveau de la rupture entre l'expérience et les valeurs numériques représentées par les fissures ayant une ouverture supérieure à celle qui correspond à l'épuisement du béton à la traction ( $\epsilon_f \geq \epsilon_{u1}$ ) et pour les zones où le modèle a trouvé la plastification de l'acier.

Les mécanismes de rupture à côté de l'appui central et près de la plaque de chargement sont très bien simulés par le modèle.

La fissuration que montre l'expérience en milieu de travée à la rupture est reproduite par le modèle de façon moins prononcée.




Pour justifier cette différence on remarque le fait que la figure qui montre la rupture expérimentale correspond à une charge plus grande que celle de la simulation.

FIG V 21 RUPTURE DWT2



EXPERIENCE  $4P = 255 \text{ Mp}$

MODELE  $4P = 210 \text{ Mp}$

-  PLASTIFICATION DE L'ACIER
-  FISSURES AVEC  $\sigma_f > 150 \times \sigma_u$
-  FISSURES AVEC  $\sigma_f > 100 \times \sigma_u$

## CONCLUSIONS

- La courbe charge-déplacement de la simulation est en bonne concordance avec la courbe expérimentale.
- L'état de fissuration, l'apparition subite et le développement des fissures de cisaillement sont bien représentés par le modèle.
- L'état de rupture réel est bien évalué par le modèle.
- La réponse générale du modèle représente de façon assez adéquate la réponse expérimentale de la structure.

Il faut souligner :

- Le fait de n'avoir modifié aucun paramètre par rapport aux valeurs originales de la structure  $G_f$  ayant été calculé sur le processus mentionné pour le panneau WT3.
- Avec la seule exception de l'armature principale inférieure, on n'a pas forcé le maillage d'éléments finis à suivre une disposition particulière d'armature.

## CHAPITRE VI

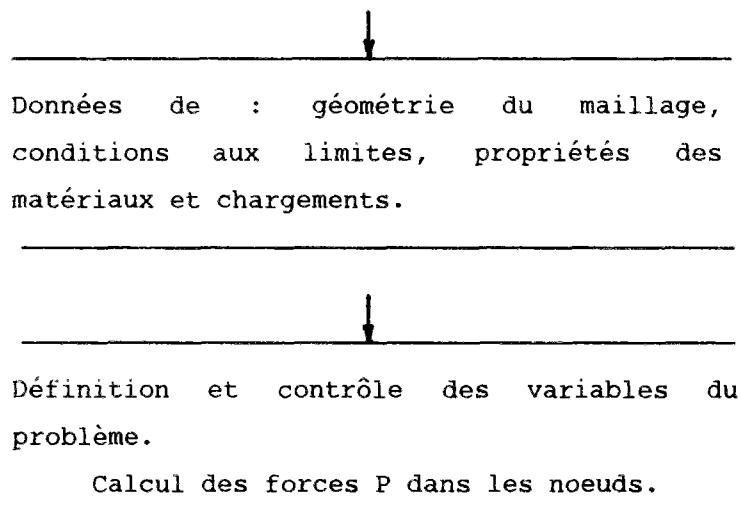
### LE PROGRAMME D'ÉLÉMENTS FINIS

La discrétisation par éléments finis d'un problème non-linéaire conduit à un système d'équations non-linéaire. Sa solution peut être obtenue par une suite de résolutions linéaires. A chaque itération on s'approche de la solution du problème à mesure qu'on minimise l'erreur résiduelle.

Fondée sur un programme d'éléments finis pour des problèmes linéaires que nous avons développé au préalable, on a écrit dans le cadre de ce travail un programme particulier pour le calcul des structures avec non-linéarité physique ; ce programme utilise la méthode de Newton-Rapshon standart (qu'on peut combiner avec Newton-Rapshon modifié), en combinaison avec une procédure d'Euler, voir Zienckiewics, réf. (75), Hinton et Owen, réf. (76).

La matrice du système d'équations est stockée avec la largeur de bande variable et le système résolu par la procédure de Bathe, réf. (77), pour le cas de matrices sumétriques et la largeur de bande variable.

Le schéma du programme est le suivant :



↓

---

Incrément des charges  $m = 1$

Itération  $i = 1$

---

↓

1. Détermination des forces dans les noeuds,  
pour l'incrément  $m$  de charges.

$$\Delta R_m$$

---

↓

Dans la première itération on adopte comme  
forces résiduelles.

$$\Delta R_{m,i} = \Delta P_m$$

---

↓

2. Calcul de déplacement des noeuds pour  
l'incrément  $m$  des charges.

$$K_{Tm,i} = \sum_e K_{Tm,i}^e = \sum_e \int_{V^e} B^T D_{m,i-1}^{ep} B \, dv$$

$$K_{Tm,i} \Delta U_{m,i} = \Delta R_{m,i}$$

---

↓

Actualisation de déplacements.

$$U_{m,i} = U_{m,i-1} + \Delta_{m,i}$$

---

↓

Calcul de déformations dans les points  
d'intégration de chaque élément  $e$ .

$$\Delta \varepsilon_{e,m,i} = B_e \Delta U_{e,m,i}$$

$$\varepsilon_{e,m,i} = \varepsilon_{e,m,i-1} + \Delta \varepsilon_{e,m,i}$$

---

---

↓

---

Intégration de la loi élastoplastique :

$$\Delta \sigma_{e,m,i} = D_{m,i-1}^{ep} \Delta \varepsilon_{e,m,i-1}$$

et actualisation de contraintes.

$$\sigma_{e,i} = \sigma_{e,i-1} + \Delta \sigma_{e,m,i}$$

---

↓

---

Calcul des forces résiduelles.

$$\Delta R_{e,m,i} = \int_{V^e} B^T \Delta \sigma_{m,i}^e dv$$

$$\Delta R_{m,i+1} = \sum_e \Delta R_{e,m,i} - \Delta P$$

---

↓

---

Test de convergence. Si le niveau de contraintes n'obtient pas l'équilibre on recommence une nouvelle itération en 2.

$$\text{Norme } | \Delta R_{m,i+1} | \geq 0$$

---

←  $i = i + 1$

↓

---

Impression des résultats pour l'incrément m des charges.

---

↓

---

Si on n'est pas arrivé au niveau total des charges appliquées, on recommence par 1.

---

←  $m = m + 1$



La stratégie mentionnée ci-dessus, tout à fait classique, est du type utilisée dans la plupart des codes non-linéaires d'éléments finis ; dans ces stratégies "classiques" on itère sur le champ de déplacement, à chargement constant, pour l'élimination des erreurs résiduelles. Ce processus peut entraîner des problèmes de convergence au voisinage des points critiques de la réponse de la structure.

Pour améliorer cette situation, il est nécessaire d'itérer dans l'espace combiné des déplacements et du niveau de chargement.

L'implantation d'une telle stratégie, fondée sur la méthode du "plan tangent" (Risk), ou de "l'arc constant" (Cristfield), reste une question ouverte pour des développements futurs.

## CONCLUSION GENERALE

### L'OBJECTIF

Notre objectif principal étant la modélisation du comportement du béton armé, nous avons élaboré un modèle pour le calcul par éléments finis des structures en béton armé.

### LA DEMARCHE

Dans une première étape, nous avons fait une introduction au comportement mécanique à court terme du béton sous différents états de chargement. Bien que le comportement macroscopique soit le but de notre modélisation, on a remarqué l'incidence de la microfissuration sur ce comportement.

A la lumière d'une étude préalable sur les différentes formulations pour modéliser la réponse du béton, nous nous sommes attachés, dans une deuxième étape, à examiner les avantages et les inconvénients des deux formulations qui nous ont paru les meilleurs pour représenter la "partie béton" de notre modèle.

Ces formulations étant l'hypoélasticité et la plasticité incrémentale nous avons choisi pour la mise en oeuvre numérique un modèle élastoplastique avec paramètres multiples d'écrouissage. Leur implantation dans un programme d'éléments finis élaboré dans le cadre du présent travail nous a permis de connaître les performances des deux modèles.

La troisième étape a consisté à analyser la fissuration dans le béton. Entre les différentes possibilités de la modéliser, la formulation de " fissures distribuées ", avec un traitement dit " local " a été retenue pour l'introduire dans notre modèle. Comme la géométrie de l'élément fini intervient dans le diagramme de radoucissement du béton, la formulation est objective vis-à-vis du maillage d'éléments finis.

L'effet de l'armature lié de façon " compatible " au béton fissuré a constitué une quatrième étape.

On propose un modèle rhéologique pour le "matériau béton armé". Ce modèle est basé sur un comportement élastoplastique avec paramètres multiples d'écroutissement pour "la partie béton".

On lui incorpore le comportement de fissure de façon distribuée.

L'armature, liée en " parallèle " au béton déformé, est aussi prise en compte au " niveau fissure ": on tient compte de l'effet goujon et du glissement acier-armature.

Le modèle permet de considérer un nombre quelconque de directions des fissures et de couches d'armature.

Finalement, on a validé dans une dernière étape le modèle du matériau composé.

Après avoir implanté le modèle dans le programme d'éléments finis, on a analysé l'objectivité des résultats par rapport au maillage d'élément finis. On a confronté les résultats du modèle avec les résultats expérimentaux de trois structures en béton armé , en état plan de contraintes.

## **LES RESULTATS**

Pour le modèle hypoélastique orthotrope les valeurs de rupture des contraintes et des déformations dont on a besoin pour le calcul des modules du matériau ont été calculés à partir du critère de Willam-Warnke. Bien que pour les déformations cette hypothèse n'a pas d'assise expérimentale, la retenir permet l'utilisation du modèle dans les cas les plus généraux.

La simulation d'essais réalisés par divers auteurs en situations uni et biaxiales, avec différents rapports de contraintes et même dans le cas de chargements cycliques ont montré la bonne capacité du modèle à simuler de tels essais.

Pour le modèle élastoplastique, on a utilisé le critère de Chen-Chen pour la limite d'élasticité initiale et les surfaces de charge successives.

Pour les modules plastiques associés à chaque paramètre d'écroutissement, on a proposé dans le présent travail une expression analytique qui permet leur calcul à partir des paramètres qui définissent l'évolution des surfaces de charge.

La comparaison des résultats du modèle avec ceux de différentes expériences confirment ses bonnes performances.

Finalement nous proposons une relation constitutive complète pour le calcul non-linéaire des structures en béton armé.

Cette relation comprend :

- Traitement conjoint de l'armature et du béton ; le béton ayant un comportement non-linéaire et pouvant se fissurer de façon distribuée, à écrouissage négatif, et avec la méthode dite locale.
- Comportement non-linéaire du béton, avant la fissuration et entre les fissures après la fissuration.

Bien que nous ayons utilisé un modèle élastoplastique, la formulation retenue permet d'employer n'importe quelle loi de comportement pour le béton.

- Un critère pour le début de la fissuration qui tient compte de l'état multiaxial des contraintes.
- La considération du radoucissement du béton par la fissuration. Le diagramme de radoucissement, étant fonction de l'énergie de rupture en traction et de la géométrie de l'élément fini, donne des résultats objectifs vis-à-vis du maillage.
- Considération du glissement entre l'acier et le béton : l'énergie consommée pendant ce processus est ajoutée à l'énergie de rupture en traction dans le diagramme de radoucissement du béton. On introduit de cette façon le concept de radoucissement du béton armé.
- La considération de l'effet de goujon dans la fissure.
- Le modèle permet un nombre quelconque de directions de fissure et de couches d'armatures.
- On peut définir n'importe quelle loi d'engrènement pour chaque direction de fissure.

- La rigidité axiale de l'armature, supposée distribuée, étant liée de façon compatible avec le béton fissuré, inclut le phénomène dit " tension stiffening " dans la relation constitutive.

Les résultats du modèle ont été comparés avec les données expérimentales sur trois exemples de structures en état plan de contrainte.

Bien que nous ayons utilisé un élément fini à 8 noeuds dans les différentes modélisations, la relation constitutive du matériau peut être introduite dans n'importe quel type d'élément fini.

Les résultats peuvent être considérés comme bons. Il reproduisent de manière satisfaisante la courbe charge-déplacement jusqu'à la rupture dans les structures que nous avons examiné.

L'évolution de la fissuration est bien déterminée pour le modèle, à partir de leur début et tout au long de son histoire. Nous remarquons l'importance de ce fait, par rapport à la détermination de la fissuration pour des états de service des structures.

La représentation "répartie" des armatures nous a dispensé de l'utilisation des éléments spéciaux pour la modéliser. Cette approche permet une certaine liberté du maillage par rapport à la disposition de l'armature, bien que tenir compte de sa présence pour mailler la structure soit préférable ; en effet il sera convenable que le principe de la répartition uniforme des barres dans un élément de béton armé de la modélisation, soit proche de la réalité.

## **LES VOIES OUVERTES**

L'expérience acquise nous amène à proposer une suite à ce travail :

- On devrait essayer des critères de ruptures plus complets que celui de Chen-Chen dans la formulation élastoplastique, par exemple ceux d'Ottossen et Willam-Warnke, et dans l'hypothèse de plasticité non-associée.
- L'incorporation à ce modèle élastoplastique des critères pour le cas de chargement cycliques.

- L'approfondissement de la connaissance du phénomène de glissement acier-béton avec un calcul plus précis de l'énergie consommée dans ce processus.
- Analyse du phénomène d'engrènement dans la fissure et incorporation d'une loi pour tenir compte de cet effet dans le modèle.
- Extension du modèle au cas tridimensionnel.
- L'incorporation des effets différés dans le béton et l'acier pour l'extension de notre modèle au calcul des structures en béton précontraint.

## BIBLIOGRAPHIE

- 1 - **HSU T.T.C., SLATE F.O., STURMAN G.M., WINTER G.**  
Microcracking of Plain Concrete and the Shape of the Stress-Strain Curve. ACI Journal, V. 60 n° 62, 1963.
- 2 - **LIU T.C.Y., NILSON A.H., SLATE F.O.**  
Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Uniaxial and Biaxial Compression. ACI Journal, V. 69, Mai 1972.
- 3 - **CHEN W.F.**  
Plasticity in Reinforced Concrete,  
Mc Graw Hill, 1982.
- 4 - **CHEN W.F., TING E.**  
Constitutive Models for Concrete Structures,  
Journal ASME, Vol. 106 EM1, 1980.
- 5 - **SHAH S.P., CHANDRA S.**  
Critical Stress, Volume Change and Microcracking of Concrete,  
ACI Journal, Vol. 65, 1968.
- 6 - **KRISHNASWAMY**  
Microcracking of Plain Concrete Under Uniaxial Compressive Loading  
Indian Concrete, Journal, Vol. 66, 1969.
- 7 - **VAN MIER J.G.M.**  
Strain Softening of Concrete Under Multiaxial Conditions.  
These Docteur Ingénieur.  
Technische Hogeschool Eindhoven, 1984.
- 8 - **HABIB Pierre**  
Quelques remarques relatives à la modélisation du radoucissement.  
International Conference on concrete under multiaxial conditions -  
Colloque RILEM-Toulouse, 1984.

- 9 - **SINHA B.P., GERSTLE K.H., TULIN L.G.**  
Stress Strain Relations for Concrete Under Ciclic Loading.  
ACI Journal, V. 61, Feb. 1964.
- 10 - **KARSAN I.D., JIRSA J.O.**  
Behavior of Concrete Under Compressive Loadings.  
Journal of Struct. Div. ASME, Vol. 95, Dec. 1969.
- 11 - **ACKER P.**  
Comportement mecanique du beton : Apports de l'approche physico-chimique,  
Thèse de Doctorat - Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1987.
- 12 - **BAZANT Z.P.**  
Inestability, ductility and size effect in Strain Softening concrete.  
Journal ASME - Eng. Mechac. Div., Vol. 102 EM2, 1976.
- 13 - **KUPFERT H., HILSDORF H.K., RUSCH H.**  
Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses.  
ACI Journal, Vol. 66 n° 8, 1969.
- 14 - **MAZARS J.**  
Mécanismes Physiques de Rupture et Modèles de Comportement Mécanique du  
Béton Hydraulique.  
Le Béton Hydraulique - Ch. 17  
PRESSES E.N.P.C., 1982.
- 15 - **KOTSOVOS M.D.**  
Effect of Stress Path on the Behavior of Concrete under Triaxial Stress  
States. ACI Journal, Vol. 76, Féb. 1979.
- 16 - **BAZANT Z.P., KIM S.**  
Plastic Fracturing Theory for Concrete,  
Journal ASME, Vol. 105 EM3, 1979.
- 17 - **DARVE F.**  
Une Formulation Incrémentale des Lois Rhéologiques - Application aux  
sols. Thèse d'Etat - USM et INPG, Grenoble 1978



- 18 - **BUYUKOZTURK O., SHAREEF S.S.**  
Constitutive Modeling of Concrete in Finite Element Analysis.  
Computers and Structures, Vol. 31 n° 3, 1985
- 19 - **ASCE (1982). Spec. Publ.**  
State of the Art Report on : Finite Element Analysis of Reinforced  
Concrete.
- 20 - **MALVERN L.E.**  
Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium.  
Prentice Hall 1969.
- 21 - **HALPHEN B., SALENÇON J.**  
Elasto-Plasticité.  
Presses de l'E.N.P.C., 1987.
- 22 - **LEMAITRE J., CHABOCHE**  
Mécanique des Matériaux Solides, 1985.
- 23 - **TRUESDELL C.**  
Hypoelasticity.  
J. Ration. Mech. Anal., Vol. 4 n° 1, 1955.
- 24 - **DOUGILL J.W.**  
On Stable Progressively Fracturing Solides.  
Jour. Applied Math. Physics (ZAMP) 27 - 1976.
- 25 - **HAN D.J., CHEN W.F.**  
Strain Space Plasticity Formulation for Hardening - Softening Material  
with elasto-plastic coupling.  
Int. Journal Solids Structures, Vol. 22 n° 8, 1986.
- 26 - **BAZANT Z.P.**  
Endochronic Inelasticity and Incremental Plasticity.  
Int. Journal of Solids and Structures, Vol. 14 n° 9, 1978.

- 27 - **CHEN W.F., YAMAGUCHI E.**  
On Constitutive Modeling of Concrete Materials Proceedings "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures". Tokyo 1985.
- 28 - **NGO D., SCORDELIS A.**  
Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams.  
Journal ACI, Vol. 64 n° 3, 1967.
- 29 - **BAZANT Z.P., HO B.H.**  
Crack band Theory for Fracture of Concrete.  
Materiaux et Constructions, Vol. 16 n° 93, 1983.
- 30 - **HAN D.J., CHEN W.F.**  
Constitutive Modeling in Analysis of Concrete Structures.  
Journal of Engineering Mechanics, Vol. 114 n° 4, April 1987 ASCE.
- 31 - **KLISINSKI M., MROZ Z.**  
Description of Inelastic Deformation and Degradation of Concret.  
Institute of Fundamental Technological Research Warszawa, 1987.
- 32 - **SIMO J.C., SU J.M.**  
Strain and Stress Based Continuum Damage Model - Part I.  
Int. J., Solides and Structures, Vol. 23 n° 7 1987.
- 33 - **FRANTZISKONIS G., DESAI G.S.**  
Constitutive Model With Strain Softening.  
Int S. Solides and Structures, Vol. 23 n° 6, 1987.
- 34 - **ONATE E., OLLER S., OLIVER J., LOBLINER J.**  
A Fully Elastoplastic Constitutive Model for non Linear Analysis of Concrete.  
Int. Conf. on Num. Methods in Ing. ; Theory and Applications - Numeta.  
Eds Pande G. and Middleton J. - Martinus Nishoff Publishers - 1987.
- 35 - **GERSTLE K.H., ASCHALL H., et autres**  
Behaviour of Concrete Under Multiaxial Stress States.  
Journal Engineering Mechanics ASCE, Vol. 106 EM6 1980.

- 36 - CHEN W.F.**  
Constitutive Relations for Concrete, Rock and Soils : Discusser's Report.  
Mechanics of Geomaterial (Ed. Bazant) 1985.
- 37 - NELSON, BALADI**  
Outrunning Ground Shoch Computed with Differents Models.  
J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 103 EM3, 1977.
- 38 - DARWIN D., PECKNOLD D.A.**  
Non linear Biaxial Stress-Strain Law for Concrete.  
J. of Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 103 EM2, 1977.
- 39 - SAENZ L.P.**  
Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete.  
ACI Journal, Vol. 61 n° 3, 1964.
- 40 - POPOVICS S.**  
A numerical Approach to the Complete Stress-Strain Curve of Concrete.  
Cement and Concret Research, Vol. 3, 1973.
- 41 - MURRAY D.W.**  
Octahedral Based Incremental Stress-Strain Matrices.  
J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 105 EM4, 1979.
- 42 - BUYUKOZTURK O., TSENG T.M.**  
Concrete in Biaxial Ciclic Compression.  
Journal of Str. Eng. ASCE, Vol. 110 n° 3, 1984.
- 43 - BAZANT Z.**  
Comment on Orthotropic Models for Concrete and Geomaterials.  
Journal ASCE, Vol. 109 n° 3, June 1983.
- 44 - TORRENTI J.M.**  
Comportement Multiaxial du Béton : Aspects Expérimentaux et Modélisation.  
Thèse Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1987.
- 45 - SCHICKERT G. WINKLER H.**  
Results of test Concerning Strength and Strain of Concret Subjected to

Multiaxial Compressive Stresses.

Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, heft 277, Berlin.

**46 - CEDOLIN L., CRUTZEN Y.R.J., DEI POLI S.**

Triaxial Stress-Strain Relationship for Concret.

ASCE - Journal of EMD, Vol. 103 EM3, 1977.

**47 - DAFALIAS Y.F., POPOV E.P.**

A Model of Nonlinearly Hardening Materials for Complex Loading.

Acta Mechanica 21, 1975.

**48 - DAFALIAS Y.F., POPOV E.P.**

Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity.

Journal Appl. Mech. Transactions of ASME, 43 - pp. 646-651, 1976.

**49 - DAFALIAS Y.F., POPOV E.P.**

Cyclic Loading for Materials with a Vanishing Elastic Region.

Nuclear Eng. and Des. 41, 1977.

**50 - KRIEG**

A practical two Surfaces Plasticity Theory.

Journal Appl. Mech. Trans of ASME, 42, 1975.

**51 - MROZ Z., NORRIS V.A., ZIENKIEWICZ O.C.**

An Isotropic Hardening Model for Soils and its Application to Cyclic Loadind. Int. J. Numer Analyt. Meth. Geomech., 1979.

**52 - MROZ Z., NORRIS V.A., ZIENKIEWICZ O.C.**

Application of an Anisotropic Nardening Model in the Analysis of Elastoplastic Deformation of Soil.

Geotechnique 29, 1979.

**53 - FARDIS M.N., ALIBE B., TASSOULAS J.L.**

Monotonic an Cyclic Constitutive Law for Concrete.

J. Eng. Mech. ASCE 108 EM2, 1983.

**54 - FARDIS M.N., CHEN E.S.**

A Cyclic Multiaxial Model for Concrete. Computational Mechanics 1, 1986.

- 55 - **YANG B.L., DAFALIAS Y.F., HERRMANN L.R.**  
 A Bounding Surface Plasticity Model for Concrete.  
 J. Eng. Mech. ASCE 111/EM3, 1985.
- 56 - **ROTS J.G., NAUTA P., KUSTERS G., BLAAUWENDRAAD J.**  
 Smeared Crack Approach and Fracture Localization in Concrete.  
 Heron, Vol. 30 n° 1, 1985.
- 57 - **REINHARDT H.W., CORNELISSEN H.A.W., HORDIJK D.A.**  
 Tensile Test and Failure Analysis of Concrete.  
 J. Struct. Eng. ASCE Nov. 1986.
- 58 - **BAZANT Z.P., GAMBAROVA P.**  
 Rough Cracks in Reinforced Concrete.  
 Journal of Struc. Div. ASCE, Vol. 106 n° ST4, April 1980.
- 59 - **OLLER S.**  
 Un Modelo de Dano continuo para Materiales Friccionales. Tesis Doctoral  
 Escuela Tecnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
 Barcelona, 1988.
- 60 - **CHANG, TANIGUCHI, CHEN W.F.**  
 Non Linear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Panels.  
 Journal of Str. Eng. ASCE, Vol. 113 n° 1, Janvier 1987.
- 61 - **FRANTZESKAKIS C.**  
 Contribution à la Modélisation des Structures en Béton Armé par la  
 Méthode des Elements Finis.  
 Thèse de Doctorat - E.N.P.C., Juin 1987.
- 62 - **KEUSER, MEHLHORN**  
 Finite Element Models for bond Problems.  
 Journal Str. Eng. ASCE, Vol. 113 n° 10, October 1987.
- 63 - **BAZANT Z.P., TSUBAKI T.**  
 Slip - Dilatancy Model for Cracked Reinforced Concrete.  
 Journal Str. Division ASCE, Vol. 106 ST9, Sept. 1980.

- 64 - WALRAVEN J.C., REINHARDT H.W.**  
Theory and Experiments on the Mechanical Behaviour of Cracks in Plain and Reinforced Concrete Subjected to Shear Loading.  
Heron, Vol. 26 n° 1
- 65 - CERVENKA V.**  
Constitutive Model for Cracked Reinforced Concrete.  
ACI Journal 82, 1985.
- 66 - OHTANI Y., CHEN W.F.**  
Multiple Hardening Plasticity for Concrete Materials.  
Journal of Eng. Mechanics, ASCE, Vol. 114 n° 11, Nov. 1988.
- 67 - MURRAY D.W. et autres**  
Concrete Plasticity Theory for Biaxial Stress Analysis.  
Journal Enf. Mech. ASCE, Vol. 106 n° 6, 1979.
- 68 - CHEN A., CHEN W.F.**  
Constitutive Relations for Concrete.  
J. Eng. Mechanic ASCE 101, Vol. 4, 1975.
- 69 - MAZARS J. et PIJAUDIER-CABOT G.**  
Continuum Damage Theory - Application to Concrete.  
Journal of Engineering Mechanics - ASCE, Vol. 115 n° 2, February 1989.
- 70 - PRUIJSSERS A.F.**  
Theoretical and Experimental Analysis of the Behaviour of Cracked Concrete under Monotonic and Cyclic Sheard Loading.  
Heron, Vol. 33 n° 4, 1988.
- 71 - ROTASY F., KOCH R., LEONHARDT F.**  
"Zur Mindestbewehrung für Zwang von Außenwänden aus Stahlleichtbeton"  
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H 267, Berlin.
- 72 - LEONHARDT F., WALTHER R.**  
"Wandartige Träger"  
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 178, Berlin.

**73 - VAN MIER J.G.M.**

Examples of Non-Linear Analysis of Reinforced Concrete Structures with Diana.

Heron, Vol. 32 n° 3, 1987.

**74 - CERVERA M., HINTON E., HASSAN O.**

Non Linear Analysis of Reinforced Plate and Shell Structures Using 20 - Nodes Isoparametric Brick Elements.

Computers and Structures

Vol. 25 n° 6, 1987.

**75 - ZIENKIEWICZ O.C.**

La méthode des éléments finis.

Edition française.

Mc Graw-Hill, Paris 1979.

**76 - HINTON E., OWEN D.R.J.**

Finite Elements in Plasticity

Pineridge Press Ld.

Swansea U.K. 1980.

**77 - BATHE K.J.**

Finite Element Procedures in Engineering Analysis.

Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982.