



**HAL**  
open science

# Analyse de l'influence des déformations plastiques dans les processus de fissuration et de fatigue par simulation numérique

Mohammad Rahimian

► **To cite this version:**

Mohammad Rahimian. Analyse de l'influence des déformations plastiques dans les processus de fissuration et de fatigue par simulation numérique. Matériaux. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1981. Français. NNT: . tel-00529368

**HAL Id: tel-00529368**

**<https://pastel.hal.science/tel-00529368v1>**

Submitted on 25 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

10398(3)

THÈSE  
présentée  
pour l'obtention du  
DIPLOME DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

à

L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES  
-PARIS-

Spécialité  
GENIE CIVIL



Option  
MECANIQUE ET STRUCTURES

par

Mohammad RAHIMIAN

ANALYSE DE L'INFLUENCE DES DEFORMATIONS PLASTIQUES  
DANS LES PROCESSUS DE FISSURATION ET DE FATIGUE  
PAR SIMULATION NUMERIQUE

SOUTENUE A PARIS LE 30 JUIN 1981 DEVANT LE JURY COMPOSE DE

- MM. Y. BAMBERGER ..... Président
- G. ROUSSELIER ..... Rapporteur
- D. FRANCOIS ..... } Examineurs
- Q.S. NGUYEN ..... }
- P. WILLM ..... }



09  
15 35



## AVANT-PROPOS

Qu'il me soit permis d'exprimer ma reconnaissance à tous ceux qui ont bien voulu s'intéresser à mon travail et sans lesquels je n'aurais pas réalisé cette thèse.

Je tiens à remercier tout particulièrement :

- Monsieur le Professeur BAMBERGER de l'honneur qu'il m'a fait en présidant le Jury ;
- Monsieur NGUYEN Quoc Son qui a dirigé mes recherches. Son aide et ses encouragements constants m'ont permis de mener à bien ce travail. Je lui exprime ici toute ma gratitude.
- Monsieur ROUSSELIER qui a bien voulu être Rapporteur de ce travail ;
- Monsieur le Professeur FRANÇOIS qui a accepté de faire partie du Jury ;
- Monsieur WILLM, Chef de projet du Groupement Fatigue composé de I.F.P., ELF-AQUITAINE, C.N.E.X.O. et des Membres du Comité Technique Associé, d'avoir rendu possible une partie importante de l'étude numérique.
- Monsieur le Professeur RADENKOVIC pour l'intérêt qu'il a témoigné à cette étude et pour les remarques qu'il a bien voulu me faire.

Cette étude a été réalisée au LABORATOIRE DE MECANIQUE DES SOLIDES de l'ECOLE POLYTECHNIQUE, et je remercie son Directeur, Monsieur HABIB, d'avoir bien voulu m'accueillir au sein de ses Equipes de Recherches.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur SALENÇON pour m'avoir permis d'effectuer ce travail dans le cadre de la formation post-scolaire de l'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES.

Ma vive sympathie s'adresse également à tous mes Collègues et Amis, en particulier Messieurs MEZIERE, PUTOT et ZNATY qui m'ont soutenu et encouragé.

Je remercie bien vivement Madame QUERU et Monsieur LEMATTRE qui ont assuré avec compétence et minutie la présentation matérielle de ces pages.



## SOMMAIRE

### INTRODUCTION

#### Chapitre I

### FISSURE DANS UN MILIEU ELASTIQUE

- I.1 Mécanique linéaire de la rupture
- I.2 Elasticité non linéaire
- I.3 Intégrale de Rice dans le milieu élastique
  - I.3.1- Définition*
  - I.3.2- Indépendance vis à vis du contour*
  - I.3.3- Problème relatif à l'intégrale J*
    - 1.3.3.1- J en fonction des singularités
    - 1.3.3.2- J en fonction de l'énergie potentielle
    - 1.3.3.3- Formule de fermeture d'Irwin
    - 1.3.3.4- L'intégrale duale I

- II.1 Comportement élastoplastique incrémental
  - II.1.1- *Seuil de Plasticité*
  - II.1.2- *Règle d'Écoulement*
- II.2 Quelques estimations utiles
  - II.2.1- *Modèle d'Irwin*
  - II.2.2- *Modèle de Barenblatt-Dugdale*
- II.3 Etude de Rice en Mode I (Loi de Hencky,  $\nu = .5$ )
  - II.3.1- *Loi de Hencky*
  - II.3.2- *Contrainte-Déformation*
  - II.3.3- *Intégrale J*
  - II.3.4- *Estimation de l'ouverture et de la taille de la zone plastique*
- II.4 Validité du calcul de Rice pour la loi incrémentale
- II.5 Estimation numérique
  - II.5.1- *Méthode de calcul*
  - II.5.2- *Définition de la structure étudiée*
  - II.5.3- *Les conditions aux limites*
  - II.5.4- *Les résultats numériques*
    - II.5.4.1 *La zone plastique*
    - II.5.4.2 *L'Ouverture, l'Écartement, la Distribution des contraintes*

- III.1 Généralité
- III.2 Analyse de force et de dissipation  
d'après Nguyen Quoc Son
- III.3 Etude du modèle élastique parfaitement plastique
- III.4 Mouvement permanent
  - III.4.1- Interprétation physique de l'intégrale J*
  - III.4.2-  $J^*$  définie par Rice en mouvement permanent*
- III.5 Etude numérique d'une fissure mobile en régime permanent
  - III.5.1- Problème étudié*
  - III.5.2- Unicité*
  - III.5.3- Méthode de calcul*
- III.6 Analyse des résultats

- IV.1 Généralités
  - IV.1.1- Description du phénomène de surcharge et Rappels des résultats expérimentaux*
  - IV.1.2- Interprétation du retard*
- IV.2 Estimation des zones plastiques en fatigue
  - IV.2.1- Zone plastique cyclique*
  - IV.2.2- Zone plastique avec surcharge*
  - IV.2.3- Evolution des zones plastiques d'après Führung*
- IV.3 Modèles de propagation des fissures, basés sur l'interaction des zones plastiques
  - IV.3.1- Modèle de Wheeler*
  - IV.3.2- Modèle de Willenborg*
  - IV.3.3- Modèle de Führung*
- IV.4 La fermeture à la pointe des fissures en fatigue
- IV.5 Modèles basés sur la notion de fermeture
  - IV.5.1- Modèle d'Elber*
  - IV.5.2- Modèle de Pellas*
  - IV.5.3- Modèle de Sunder*
- IV.6 Application du concept de la fermeture à des pièces épaisses soumises à des surcharges
  - IV.6.1- Méthode de comparaison des stries de fatigue*
- IV.7 Modèle basé sur la notion de l'écartement
  - IV.7.1- Calcul de (C.T.O.D.) à la suite de l'application d'une surcharge*
  - IV.7.2- Modèle basé sur (C.T.O.D.)*
  - IV.7.3- Estimation de la taille de la zone affectée par la surcharge*

- IV.8 Simulation numérique de l'effet d'une surcharge
  - IV.8.1- Méthode de calcul*
  - IV.8.2- Définition de la structure étudiée*
  - IV.8.3- Simulation de la propagation de fissure*
  - IV.8.4- Résultats de calcul  
(chargement à amplitude constante)*
  - IV.8.5- Résultats de calcul  
(surcharge)*
    - IV.8.5.1 Profils d'ouverture
    - IV.8.5.2 Variation du ( $\Delta K_{\text{eff}}$ )
    - IV.8.5.3 Distribution des contraintes
    - IV.8.5.4 Influence de la surcharge sur la zone plastique
    - IV.8.5.5 Vitesse de fissuration affectée par la surcharge

CONCLUSION

REFERENCES



CHAPITRE I

FISSURE DANS UN MILIEU ÉLASTIQUE



## INTRODUCTION

La simplicité relative de l'analyse des contraintes en élasticité linéaire et le fait que le chargement et la géométrie du corps fissuré interviennent très simplement par l'intermédiaire de trois paramètres en fond de fissure sont des facteurs qui ont favorisé le développement de la Mécanique Linéaire de la Rupture. Elle s'avère cependant insuffisante pour expliquer de nombreux phénomènes :

- Dans la plupart des cas usuels, lors des expériences sur éprouvette par exemple, la plasticité n'est pas confinée en-tête de fissure, mais intéresse une partie importante de la structure. La rupture se produit souvent en condition de plasticité généralisée.
- La déformation plastique en fond de fissure joue un rôle important dans les mécanismes physiques de propagation de fissure. En fatigue, par exemple, la fissure s'avance sous chargement cyclique, une modélisation des lois de propagation doit tenir compte des phénomènes observables expérimentalement, telle que la fermeture des bords libres ... Non seulement la géométrie et le chargement, mais aussi la fermeture résiduelle, l'étendue de la zone plastique ... i.e. des grandeurs liées à la plasticité en fond de fissure doivent être prises en compte.

Notre travail a pour but d'analyser, par des moyens numériques, les caractéristiques des contraintes et des déformations en fond de fissure lorsqu'on tient compte de la plasticité. Cette analyse s'effectue à partir des résultats théoriques établis dans la littérature et permet de comprendre les différentes solutions obtenues à partir de la loi de déformation (Hencky) ou à partir de la

théorie incrémentale. Le rôle de la déformation plastique sera discuté d'une manière approfondie dans l'étude des fissures de fatigue.

Le plan de l'étude est le suivant :

Les problèmes liés à la fissure fixe sont étudiés dans les deux premiers chapitres. Nous rappelons d'abord la Mécanique de la Rupture dans un milieu élastique au premier chapitre. La nature des singularités, les différentes formulations de l'intégrale  $J$  sont présentées. Les déformations plastiques sont prises en compte au deuxième chapitre. Nous rappelons les résultats connus concernant l'étendue de la zone plastique, les calculs de l'intégrale  $J$  selon Rice lorsqu'on adopte une loi de déformation. Lorsqu'on adopte la loi incrémentale, le problème est beaucoup plus difficile. La vérification par le calcul numérique des résultats de Rice & al. a été effectuée par Barsoum en plasticité parfaite. Nous avons, dans la même direction, effectué un calcul par éléments finis, en tenant compte de l'écrouissage.

Les problèmes liés à la propagation sont discutés dans les chapitres suivants.

Dans le troisième chapitre, nous avons rappelé d'abord les résultats dûs à Nguyen Q.S. sur l'analyse énergétique et sur la force due aux singularités en fond de fissure  $G$ . La définition de  $G$  conduit à une intégrale  $J_{\Gamma}$  dépendant du contour  $\Gamma$  telle que  $G = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} J_{\Gamma}$ . Les analyses de singularité, obtenues récemment par Slepyan, semblent montrer que  $G = 0$ . Notre étude numérique porte sur la vérification de cette estimation théorique. Nous nous sommes placés dans les conditions les plus simples de propagation : mode I pur, régime permanent, plasticité parfaite pour effectuer les simulations numériques. L'hypothèse de régime permanent permet d'utiliser un maillage lié à la fissure et de formuler le problème d'une manière originale.

La distribution des contraintes et des déformations sont discutées, en particulier le profil d'ouverture pour une fissure mobile est fondamentalement différent de ce qu'on obtient avec une fissure fixe.

Le quatrième chapitre est une application des connaissances et des résultats précédents à la fatigue.

La modélisation de la loi de propagation des fissures de fatigue sous chargement variable est considérée. L'influence des surcharges sur la vitesse de propagation est étudiée en détail. Nous donnons des estimations théoriques sur les zones plastiques cycliques et monotones, sur la taille de la zone affectée par la surcharge et sur l'évolution de la charge d'ouverture. Ensuite, une simulation numérique a été effectuée, tenant compte de toute l'histoire du chargement cyclique. Ce calcul numérique constitue une partie importante de notre travail. Il permet de vérifier la validité des modèles proposés par de nombreux auteurs.

I.1- MECANIQUE LINEAIRE DE LA RUPTURE  
(Contrainte, Déformation, Singularité)

La mécanique linéaire de la rupture [1] est fondée sur l'hypothèse de l'élasticité linéaire. Dans ce cadre, on sait que les contraintes et les déformations au voisinage du fond d'une fissure, sollicitée d'une ma-

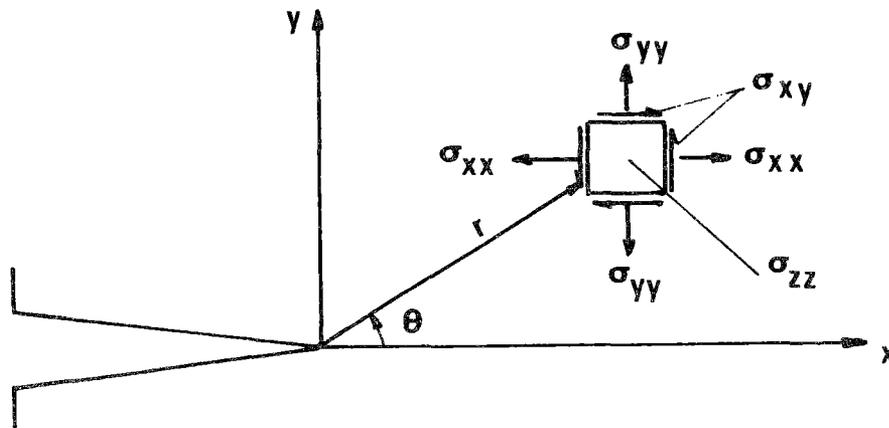


Figure 1 :  
Contrainte au voisinage de l'extrémité d'une fissure plane.

nière quelconque, admettent un développement asymptotique dont le terme le plus singulier s'écrit :

$$(1) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} &= K (2 \pi r)^{-1/2} f_{ij}(\theta) \\ \epsilon_{ij} &= K (2 \pi r)^{-1/2} g_{ij}(\theta) \end{aligned}$$

où K est le facteur d'intensité de contrainte. Il est désigné par  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  respectivement pour les modes I (mode par ouverture), II (mode de glissement droit) et III (mode de glissement vis) de sollicitation,  $f_{ij}(\theta)$  et  $g_{ij}(\theta)$  sont des fonctions donnant la répartition angulaire.

Par exemple, pour un matériau isotrope, en mode I, les relations (1) prennent la forme suivante :

$$(2) \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad \text{en déformation plane}$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad \text{en contrainte plane}$$

$$(3) \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} (\chi - \cos \theta) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ (\chi - \cos \theta) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\chi = 3 - 4\nu \quad \text{en D.P.}$$

$$\chi = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{en C.P.}$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson et  $\mu$  le module de cisaillement.

I.2- ELASTICITE NON LINEAIRE

Rappelons en élasticité non linéaire la répartition des champs de contrainte et de déformation au voisinage du fond de fissure.

Dans ce cas, la solution asymptotique a été discutée par Hutchinson [4]. Il a déterminé la singularité des contraintes et des déformations au voisinage du fond de fissure pour un matériau obéissant à une loi élastique polynomiale. La courbe de traction simple :

$$(4) \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n ,$$

peut être généralisée sous la forme tridimensionnelle :

$$(5) \quad \frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_0} = \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{S_{ij}}{\sigma_0} ,$$

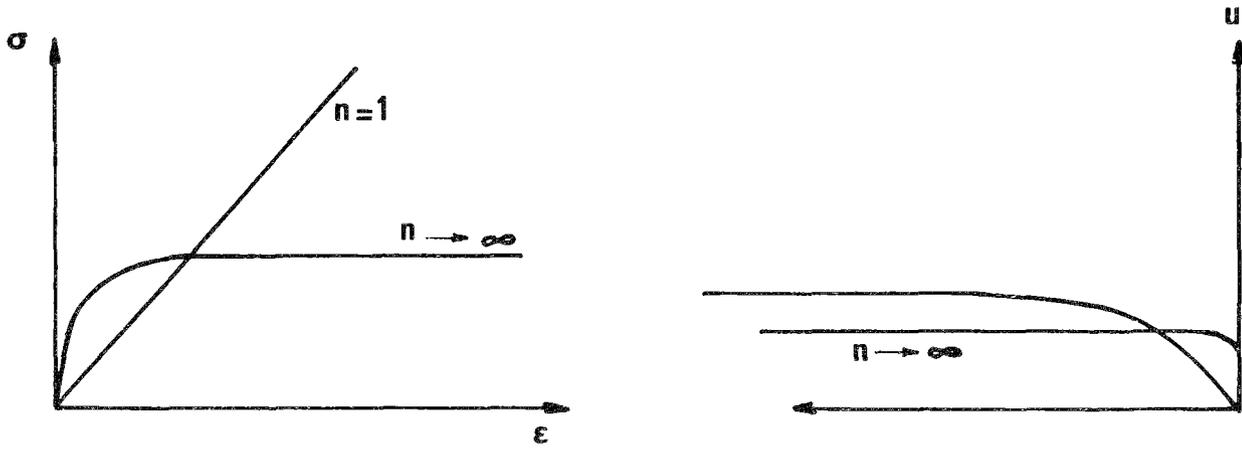
où  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$  sont les déviateurs de contrainte, et

$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ji}}$  est la contrainte effective (équivalente).

Hutchinson a établi, pour ces matériaux, que la distribution des contraintes  $\sigma_{ij}$  et des déformations  $\epsilon_{ij}$  au voisinage du fond de fissure est singulière :

$$(6) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{K}{r} \frac{1}{1+n} \hat{\sigma}_{ij}(\theta) \\ \epsilon_{ij} &= \frac{K^n}{r} \frac{n}{1+n} \hat{\epsilon}_{ij}(\theta) \\ u_i &= K^n r^{\frac{1}{1+n}} \hat{u}_i(\theta) \end{aligned}$$

Lorsque  $n=1$ , on retrouve les solutions classiques de l'élasticité linéaire (1). Lorsque  $n \rightarrow \infty$  la distribution de  $\sigma$  est indépendante de  $r$  et  $u$  possède une discontinuité d'ouverture. Cette solution est aussi celle de la loi de déformation totale (Hencky) qui est une loi de type élastique.



a- Comportement

b- Ouverture

Figure 2 :

Relation contrainte -déformation (a) et ouverture (b) en fonction de n.

I.3- INTEGRALE DE RICE DANS LE MILIEU ELASTIQUE

I.3.1- Définition :

On considère un milieu bidimensionnel avec une fissure rectiligne. Dans ce cas, l'intégrale de Rice est par définition la quantité :

$$(7) \quad J = \int_{\Gamma} (W n_1 - n_i \sigma_{ij} u_{j,1}) ds$$

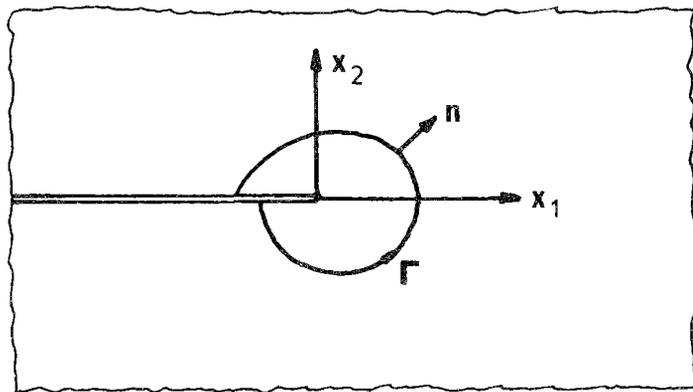


Figure 3.

$\Gamma$  est un contour ouvert et orienté dont les extrémités se trouvent sur les faces supérieure et inférieure de la fissure,  
 $n$  est la normale extérieure,  
 $s$  est l'abscisse curviligne sur  $\Gamma$ ,  
 $\sigma_{ij}$  sont les contraintes,  
 $W$  est la densité d'énergie élastique et  
 $x_1$  est l'axe dans le prolongement de la fissure.

La densité d'énergie  $W(\epsilon)$  est telle que :

$$(8) \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}}$$

### 1.3.2- Indépendance, vis à vis du contour, de l'intégrale de Rice

-----

En l'absence des efforts de volume l'intégrale J est indépendante du contour  $\Gamma$  considéré. Rappelons brièvement la démonstration :

Dans la surface hachurée  $A^*$  (fig. 4), la formule de Green donne :

$$\int_{\Gamma^*} (W n_1 - n_i \sigma_{ij} u_{j,1}) ds = \int_{A^*} \left[ \frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_{j,1}) \right] dx_1 dx_2 \quad .$$

Comme :

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_1} = \sigma_{ij} \frac{\partial (u_{j,i})}{\partial x_1} = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_{j,1}) \quad .$$

et puisque  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0$ , nous avons :

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_{j,1}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_{j,1}) \quad .$$

On en déduit :

$$\int_{\Gamma^*} (W n_1 - n_i \sigma_{ij} u_{j,1}) ds = \int_{A^*} \left[ \frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_{j,1}) \right] dx_1 dx_2 = 0 \quad .$$

Nous venons d'écrire que l'intégrale J sur un contour fermé est nulle. Par conséquent :

$$J_{\Gamma^*} = -J_{\Gamma_1} + J_{\Gamma_2} + J_{AB} + J_{B'A'} = 0 \quad .$$

Sur AB et A'B' (surface de la fissure), nous avons :

$$n_1 = 0 \quad \text{et} \quad T_i = \sigma_{ij} n_j = 0 \quad ,$$

$$\text{or} \quad J_{AB} = J_{B'A'} = 0 \quad ,$$

d'où

$$(9) \quad J_{\Gamma_1} = J_{\Gamma_2}$$

Cela prouve que l'intégrale de Rice est indépendante du contour.

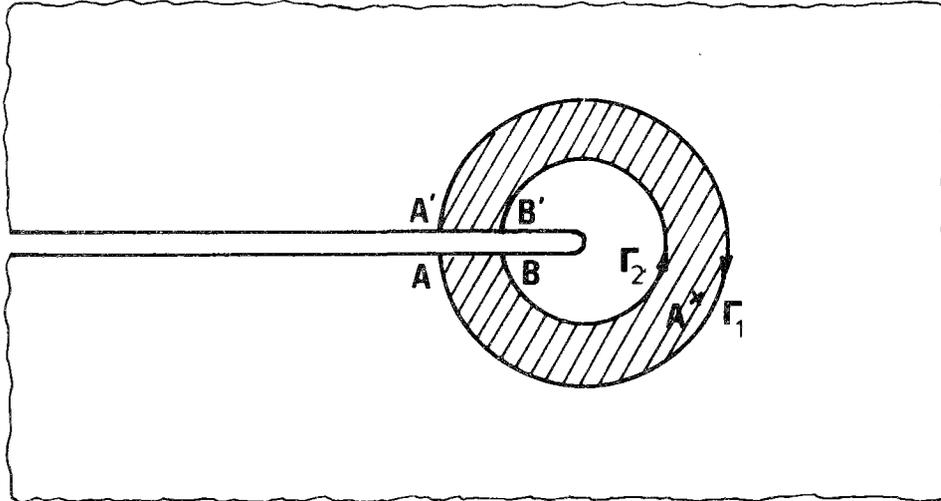


Figure 4.

I.3.3.- Problèmes relatifs à l'intégrale J :

I.3.3.1- Expression de J en fonction des singularités :

Pour le matériau élastique linéaire isotrope, la valeur de l'intégrale J est obtenue aisément par la considération des champs asymptotiques (2) (3) et par le choix d'un contour circulaire  $\Gamma$  évanouissant à la pointe de la fissure.

$$J = r \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \left[ W(r, \theta) \cos(\theta) - T(r, \theta) \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial x} \right] d\theta \quad .$$

Nous trouvons les relations suivantes :

$$(10) \quad J = \frac{\lambda + 1}{8 \mu} K_I^2 \quad ;$$

en déformation plane :

$$(11) \quad J = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2$$

et en contrainte plane :

$$(12) \quad J = \frac{1}{E} K_I^2 \quad .$$

I.3.3.2- Expression de l'intégrale J en fonction de l'énergie potentielle :

L'intégrale J peut être interprétée comme le taux de décroissance de l'énergie potentielle totale P de la structure fissurée [9] :

$$(13) \quad J = -\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{P(a + \Delta a) - P(a)}{\Delta a} = -\frac{\partial P}{\partial a}$$

avec :

$$(14) \quad P = \int_{\Omega} W \, d\Omega - \int_{S_{T_i}} T_i^d u_i \, ds \quad .$$

Rappelons que l'énergie potentielle totale est fonction de la longueur de fissure a, (les autres caractéristiques géométriques de la structure sont invariables), et les données aux limites  $T^d$  et  $u^d$  :

$$P = P(a, T^d, u^d) \quad ,$$

la dérivée partielle  $\frac{\partial P}{\partial a}$  signifie la dérivée à  $T^d$  et  $u^d$  fixés.

D'autre part, la grandeur

$$(15) \quad G = -\frac{\partial P}{\partial a}$$

est appelée taux de restitution de l'énergie. La relation  $J = G = -\frac{\partial P}{\partial a}$  donne une interprétation énergétique bien connue de l'intégrale J.

I.3.3.3.- Formule de fermeture d'Irwin :

La détermination de G taux de relaxation de l'énergie s'effectue sans difficulté à partir de sa définition (15). En mode I pur, par exemple, on a en élasticité linéaire, homogène et isotrope :

$$\begin{aligned}
 (16) \quad G &= \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{0-\Delta a}^{\Delta a} \sigma_{YY}^{(1)}(x) v^{(2)}(x) dx \\
 &= \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma_{YY}(x) v(\Delta a - x) dx \quad ,
 \end{aligned}$$

ce qui donne, en utilisant les expressions (2) et (3) :

$$\sigma_{YY}(x) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \quad , \quad v(x - \Delta a) = K_I \frac{\chi + 1}{2\mu} \sqrt{\frac{\Delta a - x}{2\pi}} \quad ,$$

soit :

$$G = \frac{\chi + 1}{2\mu} K_I^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx = \frac{\chi + 1}{8\mu} K_I^2 \quad .$$

On obtient donc en déformation plane  $G = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2$  et en contrainte plane  $G = \frac{1}{E} K_I^2$ .

La relation (16) s'obtient en appliquant sur les bords nouvellement créés de la fissure (AB) les efforts  $\lambda \sigma_{YY}^{(1)}(x)$ . Si  $\lambda = 1$ , on retrouve la fissure fermée de longueur  $\Delta a$ , le bilan énergétique s'écrit :

$$(17) \quad \phi(V^{(1)}) - \phi(V^{(2)}) = T(V^{(1)}) - T(V^{(2)}) - \int_0^1 2 \lambda d\lambda \int_0^{\Delta a} \sigma_{YY}^{(1)} v^{(2)} dx \quad ,$$

où  $\phi$  est le travail élastique,  $T$  est le travail des efforts extérieurs et l'intégrale du second membre est le travail des efforts de fermeture.

La relation (17) donne d'après la définition de G (15) la relation (16).

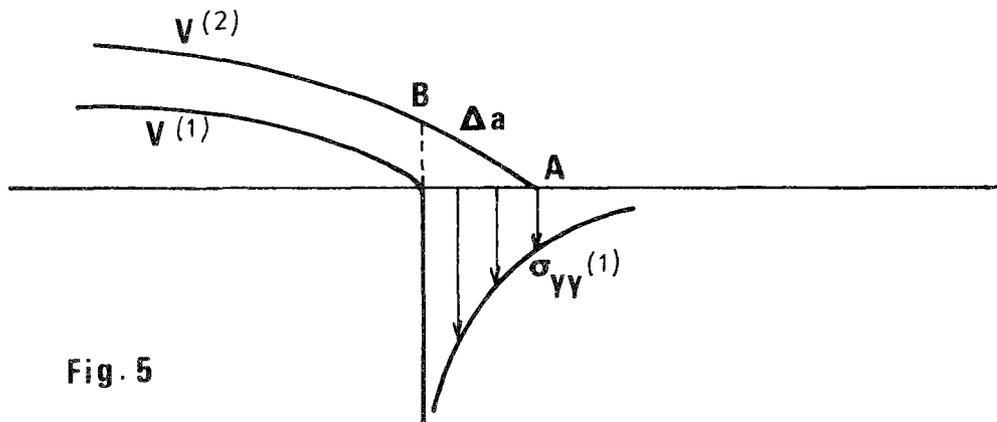


Fig. 5

Figure 5.

I.3.3.4- L'intégrale duale I :

L'intégrale duale I a été introduite par Bui [9] :

$$(18) \quad I = \int_{\Gamma} \left( -U n_1 + u_j n_k \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_1} \right) ds$$

où  $U = \int_0^{\sigma_{ij}} \epsilon_{ij} d\sigma_{ij}$  vérifie  $W(\epsilon_{ij}) + U(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$  et représente la densité d'énergie complémentaire.

Soit C l'énergie potentielle complémentaire totale, l'intégrale duale peut être écrite sous la forme :

$$I = \frac{\partial C}{\partial a}, \quad C = \int_{\Omega} U d\Omega - \int_{S_{u_i}} T_i u_i^d ds$$

Comme  $P = -C$ , nous avons :  $I = J$ .

L'intégrale I est comme l'intégrale J indépendante du contour pour un matériau élastique linéaire ou non linéaire.



## CHAPITRE II

PRISE EN COMPTE DE LA PLASTICITÉ  
DANS LE CAS D'UNE FISSURE FIXE

En Mécanique de la Rupture, il est admis généralement que la croissance d'une fissure dépend essentiellement de l'état de contrainte et de déformation locale en fond de fissure. La rupture brutale ou différée se produit lorsque l'état local atteint un état critique défini par le critère de rupture.

Lorsque le matériau est élastique, on sait maintenant que l'état local peut être décrit par des grandeurs caractéristiques qui sont des facteurs d'intensité de contrainte (cf. Chap. I), la répartition locale de contrainte ou de déformation reste la même au cours de la propagation. En particulier, si l'élasticité est linéaire, les méthodes d'analyse théorique ou numérique de l'élasticité linéaire peuvent être utilisées pour obtenir l'état local. De nombreuses études ont été consacrées à leur développement [20], [9], [7].

Lorsque les effets de viscosité ou de plasticité ne sont pas négligeables, la modélisation de la propagation doit tenir compte du comportement réel du matériau ; les solutions élastiques précédentes ne sont utilisables qu'en rupture fragile. En vue de la rupture ductile, par exemple, le modèle élastique plastique a depuis longtemps attiré l'attention des auteurs. De même, les modèles visco-élastiques ont fait récemment l'objet de discussions intéressantes [21], [22]. On doit reconnaître cependant que le problème aux limites posé dans ces conditions, à cause des non-linéarités rencontrées, est très difficile. Malgré le nombre important d'études actuellement consacrées aux problèmes de fissures, plusieurs points fondamentaux restent à éclaircir.

Dans ce chapitre, nous étudions d'abord le comportement élastoplastique incrémental et nous donnons quelques estimations utiles de la zone plastique formée au fond de la fissure. Nous donnons ensuite la répartition en contrainte, selon Rice, pour le cas particulier de déformation plane. Nous étudions également l'intégrale  $J$ , d'après Rice, pour le matériau obéissant à la loi de Hencky. Nous examinons enfin la validité du calcul de Rice dans le cas de la loi incrémentale.

II.1- COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE INCREMENTAL

II.1.1- Seuil de plasticité :

La fonction seuil est une fonction scalaire  $f$  des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  et de l'état d'érouissage de l'élément de matière. D'une façon générale, on admet qu'elle peut se mettre sous la forme [10] :

$$(19) \quad f(\sigma - \alpha) = K (\bar{\epsilon}^P) \quad ,$$

où  $\bar{\epsilon}^P$  est la déformation plastique équivalente :

$$\bar{\epsilon}^P = \int | d \bar{\epsilon}^P |$$

pour toute l'histoire du chargement.

$$d \bar{\epsilon}^P = \sqrt{2 d \epsilon_{ij}^P d \epsilon_{ij}^P}$$

$d \epsilon_{ij}^P$  sont des accroissements des déformations plastiques.

Les règles d'érouissage sont souvent données par les relations suivantes :

$$(20) \quad d \alpha = C d \bar{\epsilon}^P$$

$$(21) \quad d K = g d \bar{\epsilon}^P$$

$C$  et  $g$  sont des constantes dépendant du matériau, de la température et de l'histoire de la déformation.

- . Si  $C \neq 0$  et  $g = 0$  , on obtient le modèle d'érouissage cinématique.
- . Si  $C = 0$  et  $g \neq 0$  , on obtient le modèle d'érouissage isotrope.
- . Si  $C = 0$  et  $g = 0$  , on obtient le modèle de plasticité parfaite.

II.1.2- Règle d'écoulement :

La loi d'écoulement se déduit directement du principe du travail maximal [5] :

Rappelons les résultats suivants :

i- Si  $f(\sigma - \alpha) < K(\bar{\epsilon}^P)$ , c'est-à-dire  $\sigma$  est intérieur au domaine d'élasticité actuel. La variation de déformation est alors purement élastique :

$$(22) \quad d\epsilon = d\epsilon^{el} = L^{-1} d\sigma ,$$

$L^{-1}$  est le tenseur des coefficients élastiques.

ii- Si  $f(\sigma - \alpha) = K(\bar{\epsilon}^P)$ , c'est-à-dire  $\sigma$  correspond à la frontière du domaine d'élasticité actuel et si  $\frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma < 0$ , c'est-à-dire il y a décharge, comme le cas précédent, nous avons :

$$d\epsilon = d\epsilon^{el} .$$

iii- Si  $f(\sigma - \alpha) = K(\bar{\epsilon}^P)$  et  $\frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma > 0$  (il y a charge), nous avons alors :

$$d\epsilon = d\epsilon^{el} + d\epsilon^P ,$$

$d\epsilon^{el}$  a la même définition que précédemment, (22), et,

$$(23) \quad d\epsilon^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad \text{où} \quad \lambda > 0 .$$

- Matériau écrouissable :

La relation (23), ainsi que les règles d'écrouissage (20) et (21), permettent de préciser la valeur du multiplicateur  $\lambda$ . En effet, lorsque  $d\epsilon_{ij}^P \neq 0$ , le point  $\sigma_{ij}$  est sur la frontière du domaine d'élasticité actuel :  $f(\sigma - \alpha) = K(\bar{\epsilon}^P)$  et y reste  $f(\sigma - \alpha) = K(\bar{\epsilon}^P)$ . Par conséquent,  $df = dK$ . On aura :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = dK .$$

Nous avons les relations suivantes :

$$d \sigma = L (d \epsilon - d \epsilon^P) = L d \epsilon - L \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

$$d \alpha = C d \epsilon^P = C \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

$$d K = g d \epsilon^P = g \lambda \left( 2 \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^{1/2} ,$$

donc :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} L d \epsilon - \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} L \frac{\partial f}{\partial \sigma} + C \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = g \lambda \left( 2 \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^{1/2} ,$$

d'où :

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} L d \epsilon}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} L \frac{\partial f}{\partial \sigma} - C \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \sigma} + g \left( 2 \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^{1/2}} .$$

Comme la condition  $\frac{\partial f}{\partial \sigma} L d \epsilon > 0$  caractérise la présence de la déformation plastique, on peut poser :

$$(24) \quad \lambda = \frac{\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} L d \epsilon \rangle}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} L \frac{\partial f}{\partial \sigma} - C \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \sigma} + g \left( 2 \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^{1/2}}$$

où  $\langle x \rangle$  désigne la partie positive de  $x$ .

Définissant le module d'écroutissement  $M$  par :

$$M = - C \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \sigma} + g \left( 2 \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^{1/2} ,$$

la relation de comportement élastoplastique s'écrit sous la forme :

$$(25) \quad d \sigma = L d \epsilon - \frac{\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} L d \epsilon \rangle}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} L \frac{\partial f}{\partial \sigma} + M} L \frac{\partial f}{\partial \sigma} .$$

- Exemple pour le matériau de Von Mises :

Le critère le plus simple qui correspond le mieux au comportement élastoplastique des métaux est le critère de Von Mises. La fonction  $f$  s'écrit sous la forme :

$$(26) \quad f(\sigma - \alpha) = \left[ \frac{1}{2} (S_{ij} - \alpha_{ij}) (S_{ij} - \alpha_{ij}) \right]^{1/2},$$

où  $S_{ij}$  sont les déviateurs des  $\sigma_{ij}$ .

Supposons donc que  $f(\sigma - \alpha) = K (\bar{\epsilon}^P)$ , on aura :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = - \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{S_{ij} - \alpha_{ij}}{2 K} \quad \text{d'où} \quad d \epsilon^P = \frac{\lambda}{2K} (S - \alpha).$$

On déduit alors la valeur du module d'écrouissage  $M$  :

$$M = g + \frac{1}{2} C.$$

- Le matériau parfaitement plastique :

Dans le cas du modèle de plasticité parfaite, nous avons mentionné précédemment que  $g = C = 0$  et par conséquent  $M = 0$ , la relation (25) se met sous la forme :

$$(27) \quad d \sigma \approx L \alpha - \frac{\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} L d \epsilon \rangle}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} L \frac{\partial f}{\partial \sigma}} L \frac{\partial f}{\partial \sigma}.$$

II.2- QUELQUES ESTIMATIONS UTILES

En première approximation, la solution élastique asymptotique (2) fournit déjà quelques indications intéressantes sur la zone plastique formée en fond de fissure. Elle viole le critère de plasticité dès que le rayon vecteur est inférieur à  $r$  défini par :

- En contrainte plane :

$$(28) \quad \begin{aligned} r &= r_0 \cos^2 \frac{\theta}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}) && \text{(Tresca)} \\ r &= r_0 \cos^2 \frac{\theta}{2} (1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2}) && \text{(Misès)} \end{aligned}$$

- En déformation plane :

$$(29) \quad \begin{aligned} r &= r_0 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[ (1-2\nu) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^2 && \text{(Tresca)} \\ r &= r_0 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[ (1-2\nu)^2 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] && \text{(Misès)} \end{aligned}$$

où  $r_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K}{\sigma_0} \right)^2$ ,  $\sigma_0$  étant la contrainte limite en traction simple.

La zone plastique est a priori plus grande en contrainte plane qu'en déformation plane.

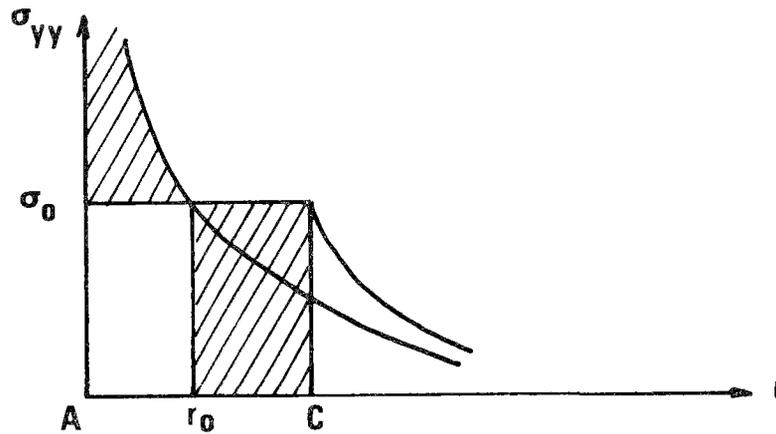
II.2.1- La taille de la zone plastique par le modèle d'Irwin :

Irwin propose que dans la zone plastique AC (figure 6), la contrainte normale  $\sigma_{yy}$  est égale à la limite d'élasticité  $\sigma_0$ . En plus, le profil des contraintes hors de la zone plastique reste celui de l'élasticité décalé d'une quantité  $AC - r_0$ , la distance  $r_0$  s'obtient en écrivant l'égalité des aires hachurées sur la figure 6 :

$$\int_0^{r_0} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} dx - \sigma_0 r_0 = \sigma_0 (AC - r_0) \quad ,$$

d'où :

$$AC = \frac{K_I}{\sigma_0} \sqrt{\frac{2r_0}{\pi}} \quad .$$



**Fig. 6**      **Modèle d'Irwin**

Nous avons :

$$\sigma_0 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_0}} \quad ,$$

ce qui donne :

$$r_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2 \quad ,$$

et :

$$(30) \quad AC = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_0} \right) \quad .$$



II.2.2- Modèle de Barenblatt-Dugdale [15],[16] :

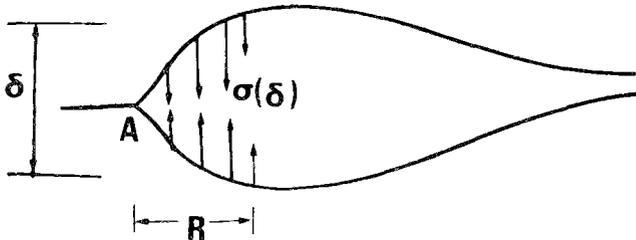


Figure 7.

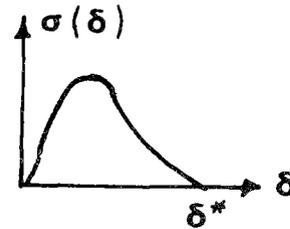


Figure 8.

Pour enlever la singularité des contraintes et des déformations, Barenblatt introduit des contraintes de cohésion attractives  $\sigma(\delta)$ , s'exerçant entre les particules situées de part et d'autre du plan de séparation sur une zone de largeur beaucoup plus petite que la longueur de la fissure (figure 7).  $\sigma(\delta)$  est une fonction non linéaire de l'écartement  $\delta$  des particules (figure 8).

L'introduction des contraintes  $\sigma(\delta)$  permet de régulariser les champs de contraintes de la manière suivante :

Il suffit qu'au point A, le facteur d'intensité  $K'(A)$ , résultant de ce nouveau système de forces, compense exactement le facteur  $K_I$  prévu par la théorie classique :

$$(31) \quad K'(A) - K_I(A) = 0 \quad .$$

Dugdale suppose que la zone plastique existante en fond de fissure a une longueur  $R$  et que tout revient à considérer une fissure fictive de longueur  $2C$ , sur les lèvres de laquelle s'exercerait une contrainte égale à la limite élastique  $\sigma_0$  du matériau.

Cette fissure, soumise au champ de contrainte  $\sigma_{YY}^\infty = \sigma$  à l'infini et au champ  $-\sigma_0$  sur la longueur  $R$ , donnerait naissance à deux facteurs d'intensité de contrainte qui s'ajoutent :

$$(32a) \quad K_I(A) = \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$(32b) \quad K'(A) = - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sigma_0 \sqrt{R} \quad .$$

La relation (32b) a été mise en évidence par un long calcul utilisant la fonction de Westergaard [1] .

Comme il ne peut pas y avoir de contrainte infinie en fond de fissure (comme le voudrait la théorie purement élastique), la taille R de la zone plastique peut être trouvée par la relation (31), ce qui supprime la singularité en  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  .

On trouve :

$$(33a) \quad R = \frac{\pi}{8} \left( \frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2 ,$$

ce qui n'est pas très différent de la taille de la zone plastique selon Irwin (30).

En contrainte plane, l'écartement du fond de fissure a été mis en évidence par ce modèle :

$$(34a) \quad \delta = \frac{\pi \sigma_\infty^2 a}{E \sigma_0} \quad .$$

Il faut signaler qu'ici les valeurs de la zone plastique (33a) et l'écartement (34a) sont des approximations au premier ordre. Les relations suivantes présentent les valeurs exactes de la zone plastique R et de l'écartement  $\delta$  trouvées par le modèle Barenblatt-Dugdale :

$$(33b) \quad R = a \left( \frac{1}{\cos \frac{\pi \sigma}{2\sigma_0}} - 1 \right) ,$$

$$(34b) \quad \delta = - \frac{8 \sigma_0 a}{\pi E} \operatorname{Ln} \left( \cos \frac{\pi \sigma}{2\sigma_0} \right) \quad .$$

En toute rigueur, ce modèle est un modèle de forces de cohésion, et non un modèle élastoplastique. Néanmoins, il est utilisé pour introduire la plasticité en fond de fissure.

II.3-

ETUDE DE RICE EN MODE I

POUR LE MATERIAU INCOMPRESSIBLE OBEISSANT A LA LOI DE HENCKY

II.3.1- Loi de Hencky :

La loi de Hencky permet des relations globales entre les contraintes  $\sigma$  et les déformations  $\varepsilon$ . Le matériau est supposé, dans la plupart des cas, parfaitement plastique et la règle de normalité pour les déformations plastiques  $\varepsilon^P$  est encore adoptée. Ces relations s'écrivent :

$$(35a) \quad \sigma = L (\varepsilon - \varepsilon^P)$$

$$\varepsilon^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad \text{avec} \quad \lambda \geq 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma) - K_0 = 0 .$$

$$(35b) \quad \sigma = L \varepsilon \quad \text{si} \quad f(\sigma) - K_0 < 0 ,$$

très souvent le critère  $f$  est celui de Misès. Nous avons alors les relations de Henky-Misès, et l'élasticité est supposée isotrope. Il est donc possible d'exprimer facilement le multiplicateur  $\lambda$  en fonction de  $e$  le tenseur déviateur des déformations.

$$(36a) \quad \lambda = 0 \quad \text{si} \quad 2 \mu^2 e e - K_0 < 0$$

$$(36b) \quad \lambda = \frac{\sqrt{2 \mu^2 e e - K_0}}{2 \mu \sqrt{K_0}} \quad \text{si} \quad 2 \mu^2 e e - K_0 \geq 0 .$$

II.3.2- Contrainte et déformation en mode I :

En plasticité, les seuls résultats connus concernent la plasticité parfaite [6]. Si nous admettons que les résultats de la théorie des lignes de glissement sont applicables à la partie adjacente à la pointe de la fissure en déformation plane, dans la zone de déformation plastique, où les

déformations élastiques deviennent négligeables devant les déformations plastiques. Le champ des lignes de glissement est représenté sur la figure 9.

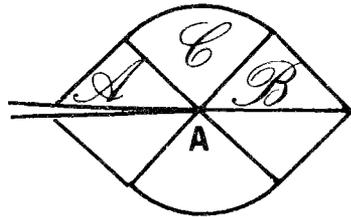


Figure 9.

Champ des lignes de glissement entourant la pointe de fissure.

Dans le triangle A, nous avons :

$$(37a) \quad \sigma_{xx} = 2 \tau_0 \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \quad \sigma_{zz} = \tau_0 \quad ,$$

où  $\tau_0$  est la limite élastique en cisaillement.

Dans le triangle B :

$$(37b) \quad \sigma_{xx} = \pi \tau_0 \quad \sigma_{yy} = (2+\pi) \tau_0 \quad \sigma_{zz} = (1+\pi) \tau_0 \quad \sigma_{xy} = 0 \quad ,$$

et dans l'éventail C :

$$(37c) \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\theta\right) \tau_0 \quad \sigma_{r\theta} = \tau_0 \quad .$$

Toutes les contraintes et déformations sont bornées à la pointe, en A, à l'exception de  $\gamma_{r\theta}$  qui est infini dans l'éventail central  $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ . Seule la singularité de la déformation dans cet éventail nous intéresse. Plaçons-nous dans le cadre de l'élasticité incompressible, admettons, en outre, que les directions de la contrainte principale et de la déformation principale coïncident. Nous avons donc, dans l'éventail central :  $\epsilon_{rr} = \epsilon_{\theta\theta} = 0$  les déplacements sont représentés sous la forme, [6] :

$$(38) \quad u_r = f'(\theta) \quad , \quad u_\theta = -f(\theta) + g(r) \quad ,$$

où  $g(0) = f(\frac{\pi}{4}) = 0$  .

La déformation  $\gamma_{r\theta}$  dans l'éventail central peut s'écrire :

$$(39) \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = \frac{1}{r} \left[ f''(\theta) + f(\theta) + r g'(r) - g(r) \right]$$

### II.3.3- L'intégrale J [6] :

-----

Dans ce paragraphe, nous étudions l'intégrale J définie par (8) pour un matériau incompressible obéissant à la loi de Hencky.

Prenons le contour circulaire  $\Gamma$  ayant pour rayon r et pour centre la pointe de la fissure. Employant les coordonnées polaires, nous avons :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta) = \frac{\partial u_r}{\partial x} \vec{e}_r + u_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial x} + \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \vec{e}_\theta + u_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial x} ,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = & \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \sin \theta + \frac{u_\theta}{r} \sin \theta \right) \vec{e}_r + \\ & + \left( -\frac{\partial u_r}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \sin \theta \right) \vec{e}_\theta . \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons :

$$\vec{T} = \sigma_{rr} \vec{e}_r + \sigma_{r\theta} \vec{e}_\theta , \quad dy = n_1 ds = \cos \theta ds \quad \text{et} \quad ds = r d\theta .$$

En prenant le contour circulaire  $\Gamma$ , l'intégrale J peut s'écrire sous la forme :

$$J = r \int_{-\pi}^{\pi} \left[ W \cos \theta - \sigma_{rr} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \sin \theta + \frac{u_\theta}{r} \sin \theta \right) - \sigma_{r\theta} \left( -\frac{\partial u_r}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \sin \theta \right) \right] d\theta ,$$

d'où :

$$(40) \quad J = r \int_{-\pi}^{\pi} \left[ W \cos \theta - \sigma_{rr} \left( \epsilon_{rr} \cos \theta - \left( \frac{1}{2} \gamma_{r\theta} - \omega \right) \sin \theta \right) \right. \\ \left. - \sigma_{r\theta} \left( \left( \frac{1}{2} \gamma_{r\theta} + \omega \right) \cos \theta - \epsilon_{\theta\theta} \sin \theta \right) \right]$$

où  $\omega$  est la rotation mesurée positivement dans le sens trigonométrique :

$$2 \omega = \frac{u_{\theta}}{r} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad .$$

Nous calculons l'intégrale  $J$  en faisant tendre  $r$  vers zéro, de telle façon que seule la portion de l'intégrale sur l'éventail central intervienne.

Les contraintes au fond de la fissure sont données par les équations (37c). Nous calculons les formes limites des expressions de la déformation  $\gamma_{r\theta}$ , de la rotation  $\omega$  et de la densité d'énergie dans l'éventail  $C$ .

- La forme limite de  $\gamma_{r\theta}$  :

En faisant tendre  $r$  vers zéro dans l'éventail  $C$ , nous avons, en envisageant l'équation (39) :

$$(41a) \quad \gamma_{r\theta} \rightarrow \gamma_0 \frac{R(\theta)}{r} \quad \text{lorsque} \quad r \rightarrow 0 \quad ,$$

où  $\gamma_0 = \frac{\tau_0}{\mu}$  est la déformation limite correspondant à  $\tau_0$ , limite élastique en cisaillement et la fonction  $R(\theta)$  peut être écrite sous la forme :

$$(41b) \quad \gamma_0 R(\theta) = f''(\theta) + f(\theta) \quad .$$

Si  $g(r)$  est une fonction linéaire de  $r$  dans toute la zone plastique, et non plus restreinte à un voisinage du fond de fissure, et si, en outre, les lignes droites de l'éventail représentent la frontière élastoplastique, alors la relation (41a) est vraie dans toute la zone plastique et  $R(\theta)$  est la distance de la pointe de la fissure à la frontière élastoplastique. Nous pouvons donc interpréter  $R(\theta)$  comme étendue de la zone plastique.

- La forme limite de  $\omega$  :

$$\omega = \frac{1}{2r} \left[ -f(\theta) + g(r) + r g'(r) - f''(\theta) \right] .$$

$$(42) \quad \omega \rightarrow -\frac{1}{2r} [f(\theta) + f''(\theta)] \text{ d'où } \omega \rightarrow -\frac{1}{2} \gamma_{r\theta} \text{ lorsque } r \rightarrow 0 .$$

- La forme limite de  $W$  :

D'après la loi de Hencky, la densité d'énergie pour un matériau élastique, parfaitement plastique, incompressible, est :

$$(43) \quad W = \int \tau(\gamma) d\gamma = \begin{cases} \mu \gamma^2 & \text{si } \gamma < \gamma_0 \\ \tau_0 \gamma - \mu \gamma_0^2 & \text{si } \gamma > \gamma_0 \end{cases} .$$

où  $\gamma$  est la déformation principale dans le problème de glissement simple ; alors, nous avons :

$$W \rightarrow \tau_0 \gamma_0 \frac{R(\theta)}{r} \text{ lorsque } r \rightarrow 0 \text{ dans } C .$$

La forme asymptotique de  $\gamma_{r\theta}$  (41a) ainsi que toutes les relations qui la suivent sont valables pour un matériau élastique et compressible.

En remplaçant les formes asymptotiques de  $\gamma_{r\theta}$ ,  $W$  et  $\omega$  dans (40), nous représentons l'expression de l'intégrale  $J$  comme suit :

$$(44) \quad J = 2 \tau_0 \gamma_0 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} R(\theta) \left[ \cos \theta + \left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\theta\right) \sin \theta \right] d\theta$$

lorsque  $r \rightarrow 0$  l'intégrale de Rice peut être associée à un déplacement : Nous calculons d'abord la forme asymptotique des déplacements  $u_x$  et  $u_y$  à partir des relations (38) en les adaptant à un repère cartésien :

$$\begin{cases} u_x = f'(\theta) \cos \theta - [g(r) - f(\theta)] \sin \theta \\ u_y = f'(\theta) \sin \theta + [g(r) - f(\theta)] \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = f'(\theta) \cos \theta + f(\theta) \sin \theta & \text{lorsque } r \rightarrow 0 \\ u_y = f'(\theta) \sin \theta - f(\theta) \cos \theta & \text{lorsque } r \rightarrow 0 \end{cases} .$$

En considérant l'équation (41a), on arrive à la forme limite des déplacements  $u_x$  et  $u_y$  :

$$(45) \quad u_x \rightarrow \gamma_0 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} R(\theta) \cos \theta \, d\theta$$

et

$$u_y \rightarrow \gamma_0 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} R(\theta) \sin \theta \, d\theta .$$

En intégrant par parties l'intégrale (44) nous avons :

$$(46) \quad J = 2 \tau_0 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} u_y(\theta) (3 + \cotg^2 \theta) \, d\theta .$$

II.3.4- Estimation sur l'étendue de la zone plastique et sur l'écartement du fond de fissure en utilisant l'intégrale J :

-----

Nous définissons l'écartement en fond de fissure  $\delta_t$  (C.O.D.), la distance comprise entre les surfaces inférieure et supérieure au voisinage du fond de la fissure, distance compatible avec la singularité des déformations dans l'éventail central :

$$(47) \quad \delta_t = 2 u_Y \left( \frac{3\pi}{4} \right) .$$

On met en évidence une borne inférieure pour  $\delta_t$  à partir de l'équation (46) et on obtient :

$$J < \tau_0 \delta_t \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (3 + \cotg^2 \theta) d\theta ,$$

d'où :

$$(48) \quad \delta_t > \frac{J}{(2+\pi) \tau_0} \quad \left( = \frac{\pi(1-\nu^2) \sigma_\infty^2 a}{(2+\pi) \tau_0 E} \text{ pour la plasticité confinée} \right) .$$

Une borne similaire a été obtenue pour la valeur maximale ( $R_{\max}$ ) de la fonction  $R(\theta)$  qui est approximativement l'étendue maximale de la zone plastique :

$$J \leq 2 \gamma_0 \tau_0 R_{\max} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[ \cos \theta + \left( 1 + \frac{3\pi}{2} - 2\theta \right) \sin \theta \right] d\theta ,$$

$$(49) \quad R_{\max} \geq \frac{J}{\sqrt{2} (2+\pi) \gamma_0 \tau_0} \quad \left( = \frac{2 \pi (1-\nu)}{\sqrt{2} (2+\pi)} \left( \frac{\sigma_\infty}{2 \tau_0} \right)^2 a \text{ pour la plasticité confinée} \right) .$$

L'intégrale de contour ne nous conduit pas à une borne supérieure de  $\delta_t$ , mais, une mesure approximative de l'écartement  $\delta_t$  peut être obtenue par le choix d'une forme raisonnable de la fonction  $R(\theta)$  ou de  $u_Y(\theta)$  (ces fonctions contiennent une constante inconnue qui peut être déterminée par J).

On s'attend à ce que la zone plastique soit approximativement symétrique par rapport à la ligne  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . On obtient à partir des équations (45) et (47) la forme suivante :  $u_Y(\theta) \approx \frac{\delta_t}{4}$ , plus une fonction antisymétrique de  $\theta$  autour de  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Ce terme antisymétrique n'apporte aucune contribution à l'intégrale  $J$ . Nous avons donc d'après (46)

$$(50) \quad J \approx \frac{1}{2} \tau_0 \delta_t \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (3 + \cotg^2 \theta) d\theta \quad ,$$

d'où :

$$\delta_t = \frac{2 J}{(2 + \pi) \tau_0} \quad ( = \frac{2 \pi (1-\nu^2) \sigma_\infty^2 a}{(2+\pi) \tau_0 E} \quad \text{plasticité confinée} ).$$

Choisissons une forme  $R(\theta)$  symétrique par rapport à  $\theta = \frac{\pi}{2}$  :

$$R(\theta) \approx R_{\max} \cos 2 \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \quad .$$

L'équation (44) nous donne :

$$J \approx 2 \tau_0 \gamma_0 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos (2\theta - \pi) \left[ \cos \theta + \left( 1 + \frac{3\pi}{2} - 2\theta \right) \sin \theta \right] d\theta \quad ,$$

d'où :

$$R_{\max} \approx \frac{3 J}{2 \sqrt{2} (2+\pi) \tau_0 \gamma_0} \quad ( = \frac{3\pi (1-\nu)}{\sqrt{2} (2+\pi)} \left( \frac{\sigma_\infty}{2\tau_0} \right)^2 a \quad \text{plasticité confinée} ) \quad .$$

## II.4- VALIDITE DU CALCUL DE RICE POUR LA LOI INCREMENTALE

Nous avons décrit précédemment que dans le cas où le matériau obéit à la loi de Hencky, les résultats de la théorie des lignes de glissements peuvent être appliqués au voisinage du fond de fissure. Les études de Rice en mode I ont été menées dans cette hypothèse.

La question est de savoir si ces répartitions de contrainte et de déformation restent valables lorsque l'on adopte la loi incrémentale à la place de la loi de Hencky.

Elles sont effectivement valables dans le cas de l'application de la loi incrémentale si les deux conditions suivantes sont remplies :

- i - Validité du schéma de Prandtl,
- ii- Trajet de contrainte radial  
(de sorte qu'il n'y a pas de décharge).

Lorsqu'on adopte la loi incrémentale, l'étude de l'intégrale J se heurte à des difficultés : en effet, l'énergie de déformation doit être écrite sous la forme :

$$(51) \quad W = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon \quad .$$

Elle dépend de tout le trajet de déformation, ce qui rend très difficile le calcul de l'intégrale J.

On se demande quelle est la signification physique de l'intégrale J définie selon (7) et (51). A priori, cette quantité n'est pas indépendante du contour  $\Gamma$ .

## II.5- ESTIMATION NUMERIQUE

Il n'existe aucune démonstration, ni vérification théorique en ce qui concerne la validité des champs de contrainte et de déformation (schéma de Prandtl), en adoptant la loi incrémentale.

Devant les difficultés théoriques du problème, le calcul numérique donne une direction d'analyse intéressante et complémentaire. Dans les applications pratiques, le recours au calcul numérique pour construire une solution approchée est la seule démarche possible en dehors des études expérimentales.

Les études numériques d'analyse des contraintes donnent assez correctement la solution d'un matériau élastoplastique, il est donc possible d'intégrer un tel calcul à des problèmes élastoplastiques de Mécanique de la Rupture.

Le calcul par éléments finis est, parmi les méthodes numériques, l'un des outils les plus utiles de la Mécanique de la Rupture.

- Matériau parfaitement plastique :

En plasticité parfaite, nous disposons de résultats intéressants qui sont dûs à Levy et al. [13] et à Barsoum [14] : ces auteurs, dans le cadre de la théorie de la plasticité incrémentale, étudient un modèle bidimensionnel en déformation plane.

Dans la référence [13], le calcul numérique de la fonction R introduite par Rice [6] et définie par (41a)

$$R(\theta) = \frac{E}{(1 + \nu) \tau_0} \lim_{r \rightarrow 0} r \gamma_{r\theta}$$

est entrepris. Rice avait proposé une approximation de  $R(\theta)$  valable pour la loi de Hencky :

$$R(\theta) = R_{\max} \cos 2 \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) ,$$

où  $R_{\max}$  est une fonction de l'intégrale J.

La comparaison de ces deux courbes est représentée sur la figure 9a. Les deux valeurs de  $R(\theta)$  montrent que la déformation  $\gamma_{r\theta}$ , dans l'éventail central, obtenue pour la loi incrémentale est de 75% par rapport à celle qui a été calculée en adoptant la loi de déformation totale.

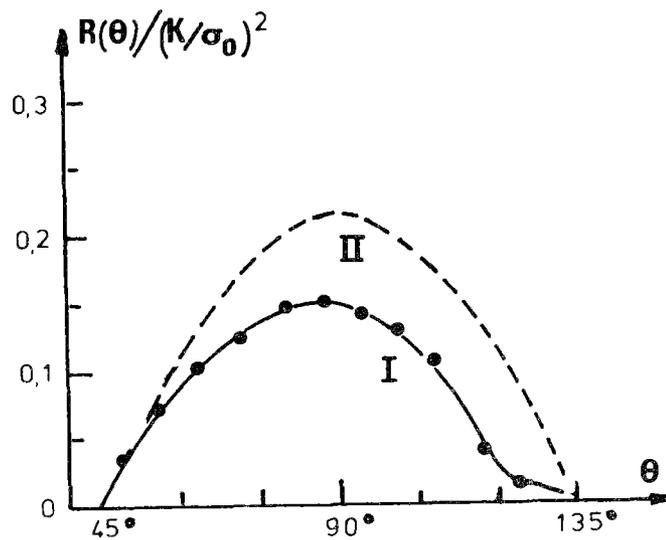
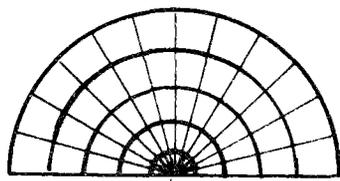
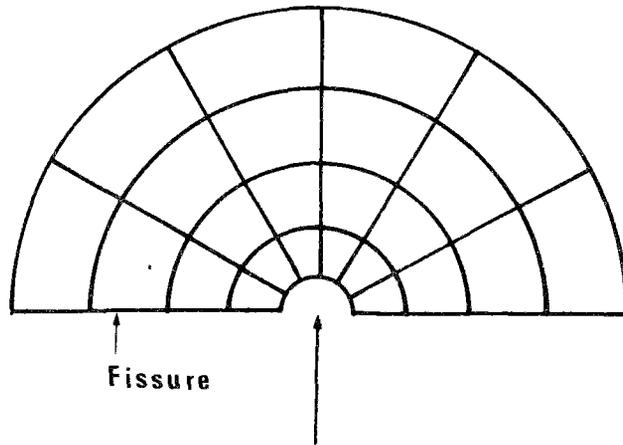


Figure 9a : (I) tiré de [13] ; (II) tiré de [6] .

Barsoum [14] considère un maillage particulier (figure 10) finement discrétisé au fond de la fissure. Sur la figure 10, est également représentée, la confirmation du schéma de Prandtl. On peut voir la convergence du résultat numérique dans ce schéma ; la convergence est d'autant meilleure, que la charge appliquée est plus grande.



Maillage de Barsoum

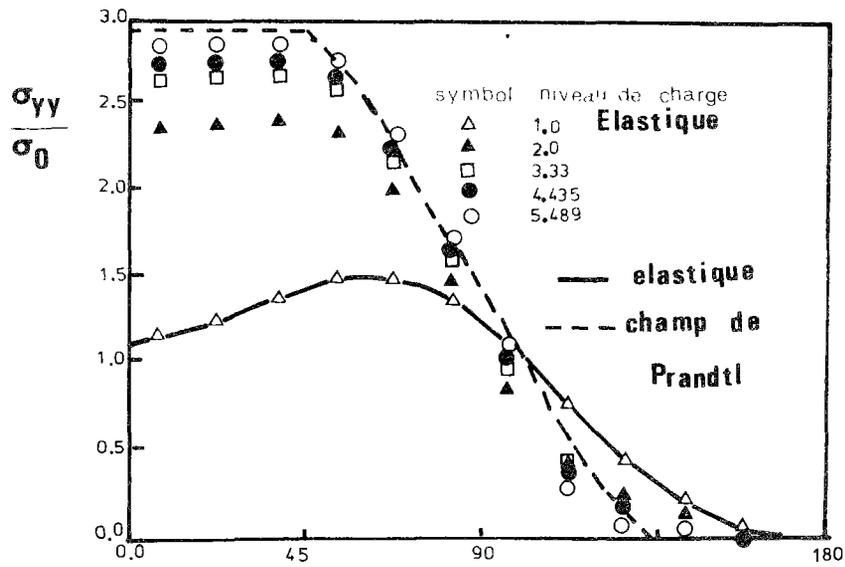


Figure 10 :

Comparaison de la distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  selon Barsoum, avec la solution du schéma de Prandtl.

- Matériau écrouissable :

Dans le même esprit, nous avons essayé de déterminer la solution numérique dans le cas des matériaux écrouissables. Nous avons choisi le code TITUS pour la réalisation de nos calculs. C'est une estimation de l'écartement du fond de fissure (C.O.D.), de la taille de la zone plastique, et de la distribution des contraintes que nous mettrons en évidence dans cette partie.

II.5.1- Méthode de calcul :

Rappelons qu'il y a deux façons de discrétiser la relation contrainte-déformation plastique entre deux étapes  $n$  et  $n + 1$  : (chap. II.1.2)

$$(52) \quad \begin{aligned} (d \varepsilon^P)_{n+1} &= \frac{1}{M} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{n+1} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{n+1} (d \sigma)_{n+1} \\ (d \varepsilon^P)_{n+1} &= \frac{1}{M} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_n \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_n (d \sigma)_{n+1} \end{aligned}$$

La première équation constitue un schéma entièrement implicite, tandis que la seconde suit un schéma explicite.

La convergence théorique du schéma implicite a été démontrée par Q.S. Nguyen [ 11 ] .

Les équations d'équilibre conduisent à un système linéaire :

$$(53) \quad K \Delta u = \Delta F \quad ,$$

dans lequel :  $K$  est la matrice de rigidité,

$\Delta u$  est le vecteur des accroissements de déplacement de chaque itération,

$\Delta F$  est le vecteur des accroissements de charge.

La résolution de ce système pour la n<sup>e</sup> étape fournit successivement  $(\Delta u)_n$ ,  $(\Delta \varepsilon)_n$  et  $(\Delta \sigma)_n$ . La méthode de la contrainte initiale (ou la rigidité constante) ramène à un système linéaire pour l'étape suivante :

$$(54) \quad K (\Delta u)_{n+1} = (\Delta F)_{n+1} = \Delta F - (\Delta F^P)_n$$

$\Delta F^P$  est le vecteur des accroissements des forces nodales dues à la déformation plastique.

Pour  $\varepsilon$  fixé à l'avance, un critère d'arrêt du processus itératif peut être constitué par le choix de n réalisant le premier la condition :

$$\| (\Delta u)_n \| < \varepsilon ,$$

$\| \|$  désigne la norme définie comme la plus grande valeur des valeurs absolues de chaque composante du vecteur considéré.

#### II.5.2- Définition de la structure étudiée :

-----

Nous analysons l'éprouvette C.T. ("Compact Tension"), dont la géométrie a été illustrée à la figure 11. En vue d'étudier l'effet d'épaisseur des expériences ont été menées. Pour une épaisseur minimale de 3mm, la plasticité est considérable et provoque la rupture totale de l'éprouvette.

Un modèle bidimensionnel en contrainte plane nous paraît représenter au mieux l'état de contrainte de l'éprouvette ayant cette épaisseur minimale de 3mm.

La figure 12 montre la courbe contrainte-déformation du modèle envisagé. Il faut signaler que cette courbe se rapporte à la nuance d'acier ST E 47. Les valeurs des caractéristiques mécaniques sont données sur la même figure. Nous remplaçons cette courbe par huit segments ; cette approximation nous paraît suffisante pour la bonne représentation de la courbe des caractéristiques du matériau.

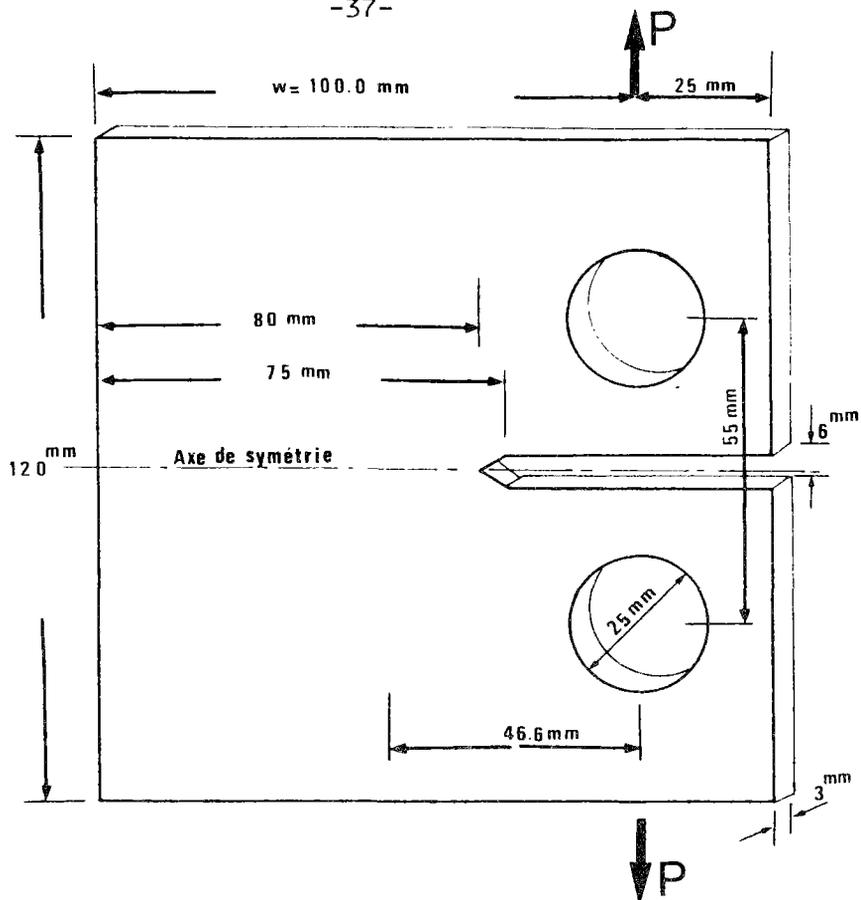


Figure 11 - Géométrie de l'éprouvette C.T.

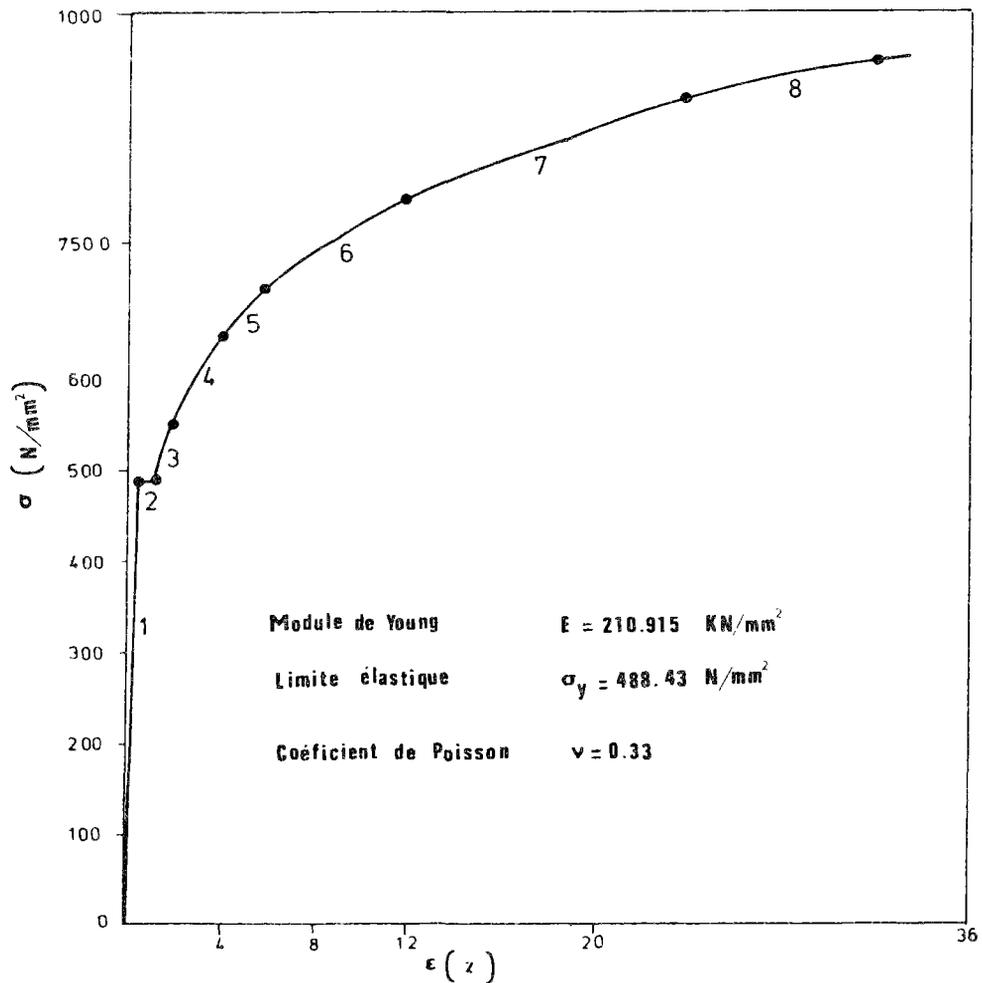


Figure 12 : Courbe de contrainte-déformation

Pour des raisons de symétrie, ainsi que pour diminuer le coût du calcul, nous considérons seulement la moitié du modèle. La discrétisation illustrée à la figure 13 est obtenue par un maillage automatique programmée par le système TITUS. Seule la région susceptible d'être plastifiée au voisinage du fond de la fissure est maillée finement. Le trou circulaire a été représenté par un polygone.

On aboutit à un problème comportant :

- 286 noeuds (572 degrés de liberté),
- 340 mailles (éléments triangulaires ou quadrilatères).

#### II.5.3- Les conditions aux limites :

-----

Tous les noeuds se trouvant sur le contour du polygone sont soumis à des charges concentrées ayant comme résultante une charge  $P$  qui s'exerce au centre du polygone.

Les noeuds de l'axe de symétrie qui se trouvent dans la partie non fissurée de la plaque sont astreints à un déplacement  $U_y$  nul (par symétrie). L'un d'entre eux est également astreint à un déplacement  $U_x$  nul (élimination du mouvement de corps solide).

Les surfaces délimitant le modèle ainsi que la surface fissurée sont libres de toute contrainte.

Ces conditions aux limites permettent d'affirmer que le problème est bien posé (il admet une solution).

BENCHMARK PROBLEMS

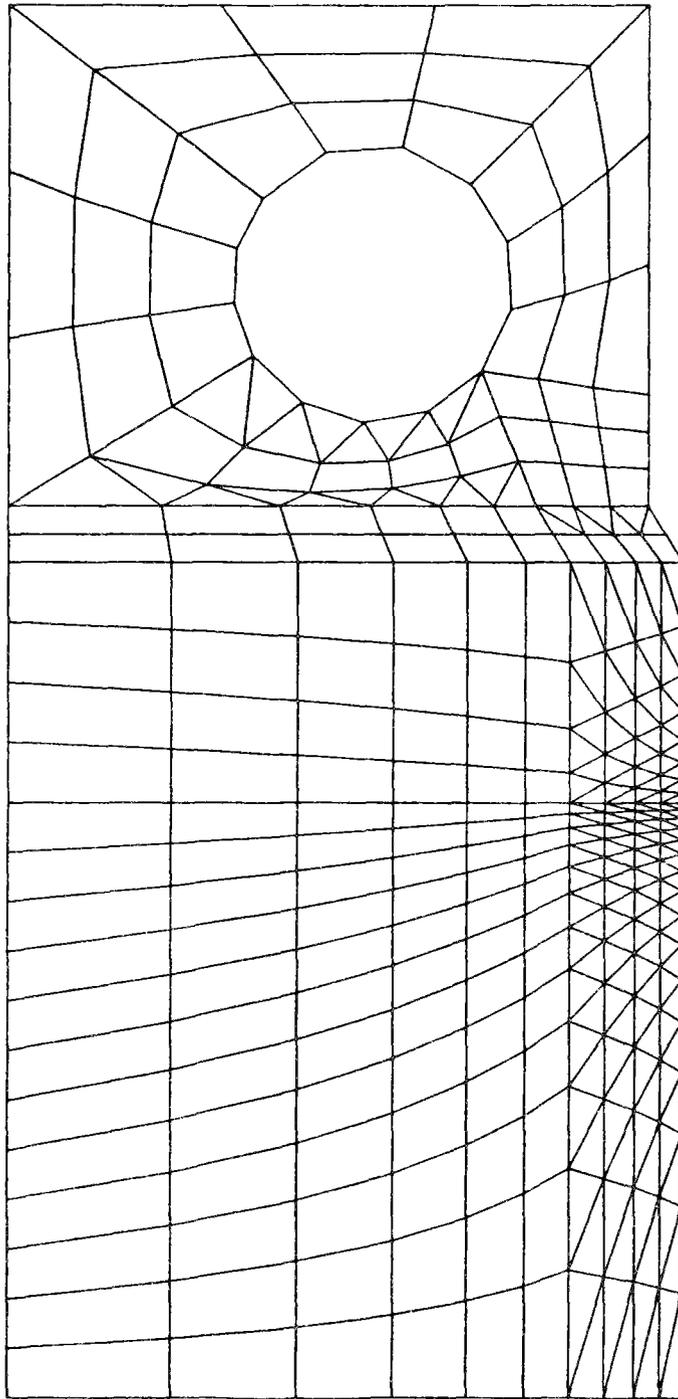


Figure 13 : FINITE-ELEMENT MODEL OF COMPACT TENSION SPECIMEN

#### II.5.4- Les résultats numériques :

Nous appliquons d'abord une charge  $P_0$  qui constitue la valeur minimale pour laquelle la maille la plus voisine du fond de la fissure est sur le point d'être plastifiée. Ensuite, nous augmentons cette charge, en moyenne de  $.2P_0$  pour chacun des onze incréments de charge. Du fait que l'on est en C.P., la convergence est assez lente, d'autant plus que le niveau du chargement appliqué est plus élevé.

##### II.5.4.1- La zone plastique :

La figure 14 montre l'évolution de la zone plastique pour différents niveaux de charge. L'allure circulaire de son contour est grosso-modo confirmée par le calcul numérique. Du côté opposé à l'entaille initiale, se développe une zone plastique qui occupe une partie importante ; nous avons la rupture totale de l'éprouvette lorsque les deux zones plastiques se rejoignent.

La dimension maximale de la zone plastique  $r_p$  (cf. figure 14), qui est justement obtenue sur l'axe du symétrie du modèle, est donnée dans le tableau 1 au cours de l'augmentation de la charge. Nous avons approximativement la relation suivante :

$$(55) \quad r_p = .27 \frac{K^2}{\sigma_0^2} \quad (\text{pour } p \leq 13^{\text{KN}}) \quad .$$

Dans le même tableau, sont indiquées les tailles de la zone plastique trouvées à partir du modèle d'Irwin.

En ce qui concerne l'état de déformation plane, nous nous référons à des résultats numériques obtenus dans la littérature.

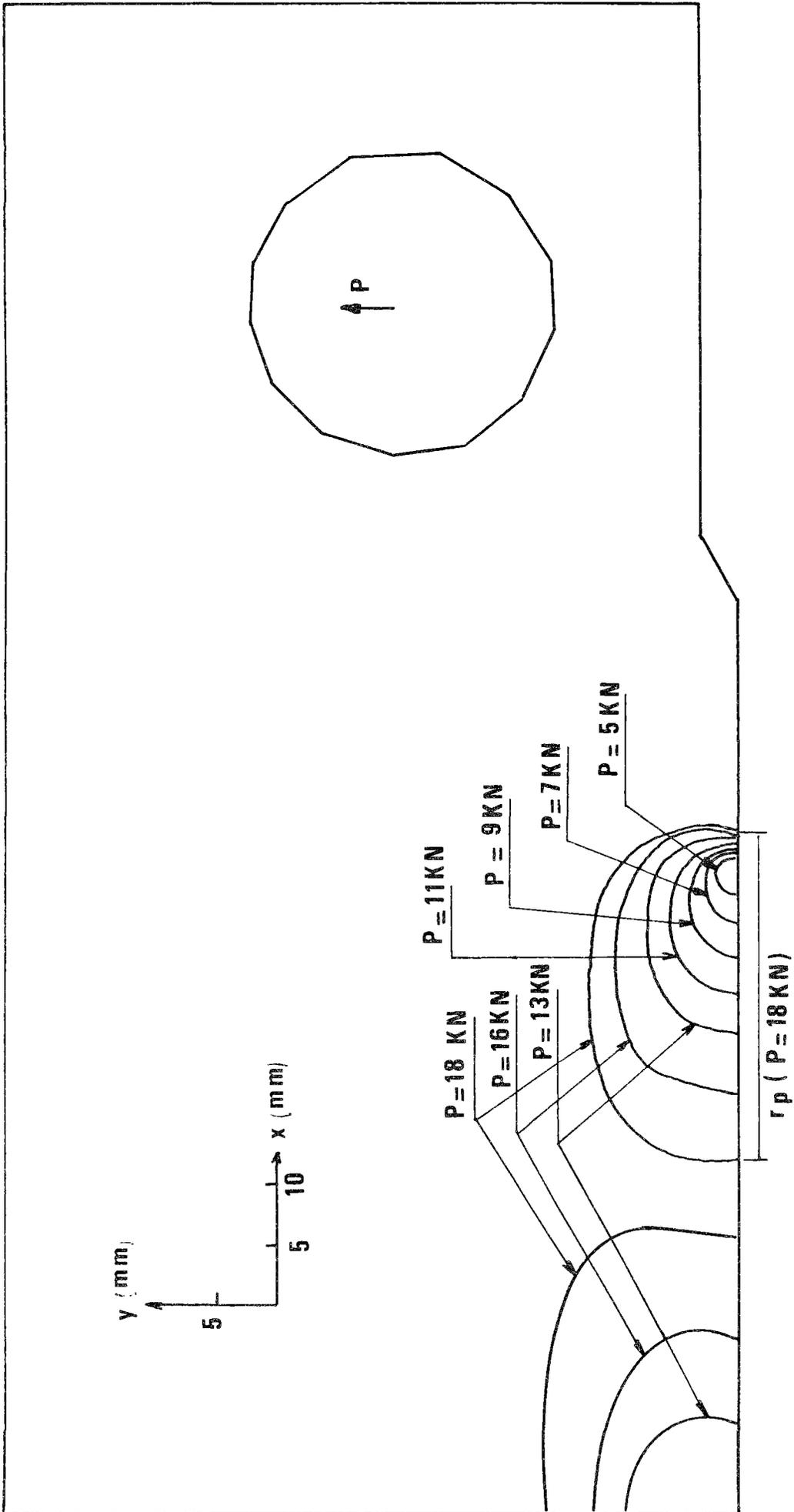


Figure 14 :

Evolution de la zone plastique à différents stades d'un chargement croissant.

P (KN)	$\delta_t$ (mm)	$r_p$ (mm)	$J_E$ (N/mm)	$K_I$ (KN/mm <sup>3/2</sup> )	$r_p$ Irwin (mm)	$\frac{\delta_t}{K^2/E \sigma_0}$	$\frac{\delta_t}{K^2/\sigma_0^2}$
5	.012	2.5	10.39	1.48	2.92	.57	.27
7	.0225	5	20.32	2.07	5.72	.54	.28
9	.0365	8	33.55	2.66	9.46	.53	.27
11	.0523	12	50.08	3.25	14.12	.51	.27
13	.0763	15.5	70.28	3.85	19.74	.53	.25
16	.121	20.5	106.08	4.73	29.89	.56	.22
18	.219	29	134.19	5.32	37.81	.8	.24

$J_E$  désigne l'intégrale J en élasticité  $J = \frac{K}{E}$  (en C.P.).

TABLEAU 1.

Rice et Tracey [12], N. Levy et al. [13] ont montré que, dans le cas où la plasticité n'est pas très étendue, la forme de la zone plastique est en "ailes de papillon", ce que nous confirmons dans le chapitre suivant concernant la fissure mobile. Ils ont trouvé que le rayon maximum de la zone plastique  $r_{p,max}$  et le rayon dans le prolongement de la fissure  $r_{p,o}$  sont respectivement :

$$r_{p,max} = 0.157 \frac{K^2}{\sigma_0^2} \quad , \quad r_{p,o} = 0.036 \frac{K^2}{\sigma_0^2}$$

$\sigma_0$  étant la limite d'élasticité.

II.5.4.2- L'ouverture, l'écartement du fond de fissure et la distribution des contraintes :

La figure 15 représente l'évolution de l'ouverture de la fissure à différents stades d'un chargement croissant, lorsque la fissure est fixe. En fond de fissure, nous remarquons une discontinuité de l'ouverture, ce qui illustre clairement la notion d'écartement en fond de fissure (C.T.O.D.) ; d'autre part, la tangente à la courbe de l'ouverture, à la pointe de la fissure, est normale à la direction de la fissure.

Rappelons que la solution élastique plastique présente une ouverture plus importante que la solution élastique. En particulier, il existe un glissement assez net en fond de fissure ; ce glissement, dû aux déformations plastiques, peut justifier le concept classique de C.T.O.D. [7], [17]. Ce résultat est bien connu dans les études numériques de fissure fixe [14], [18], [19]. Nous rappelons que l'analyse théorique à partir de la distribution de contrainte de Prandtl, due à Rice [7], donne :

$$\varepsilon \approx r^{-1} \quad , \quad u \approx \delta_t + o(r) \quad ,$$

où  $\delta_t$  représente le glissement en fond de fissure (C.T.O.D.).

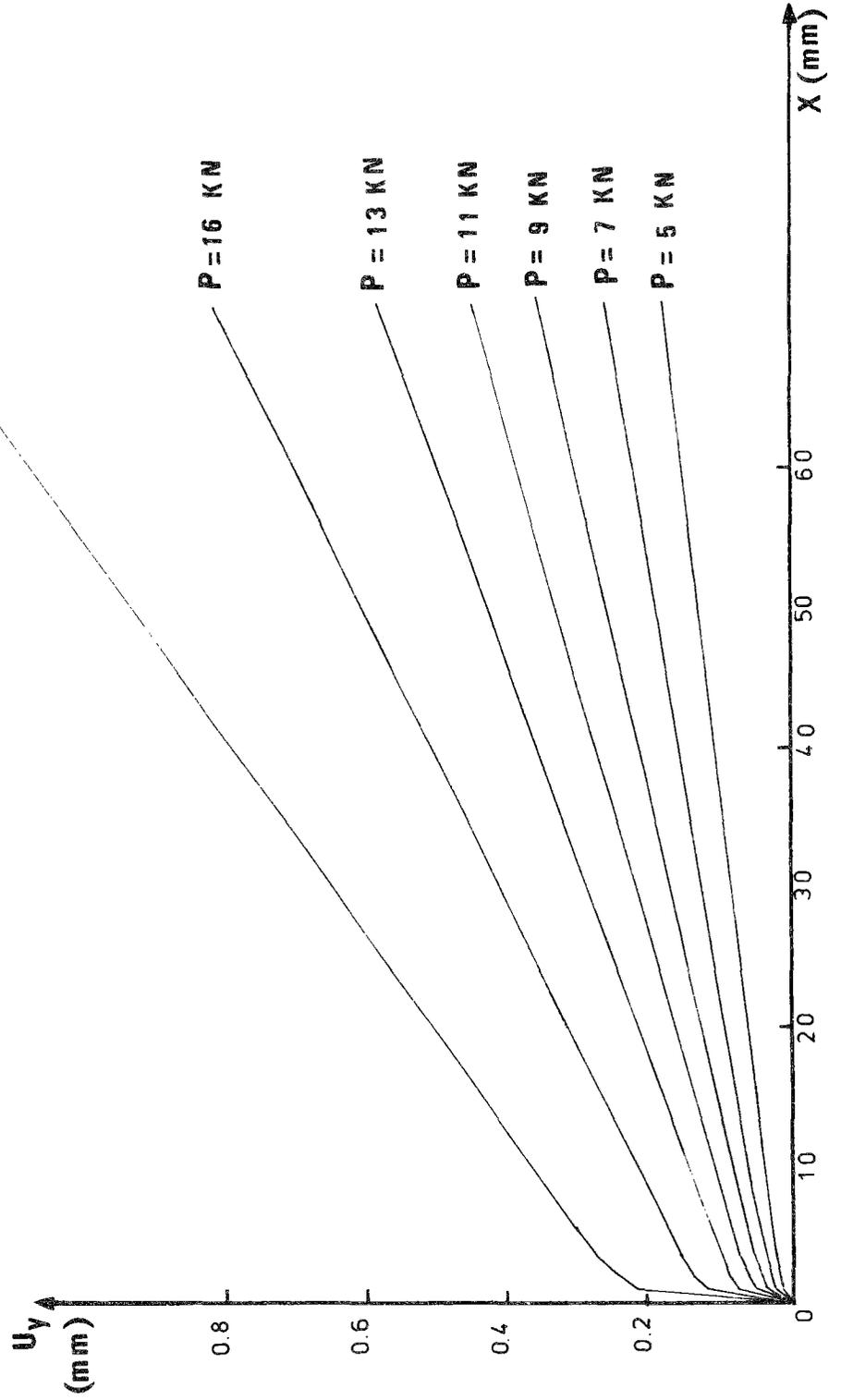
D'après le tableau 1, l'écartement en fond de fissure  $\delta_t$  peut s'écrire sous les formes équivalentes suivantes :

$$(56) \quad \delta_t = \alpha \frac{\sigma_0^2}{E} r_p \quad \text{et} \quad \delta_t = \beta J_E \quad \text{où} \quad J_E = \frac{K^2}{E} \quad ,$$

$\alpha$  varie de 4.16 à 4.64 et  $\beta$  varie de 1.04 à 1.16 pour différentes charges. Dans les relations (56)  $\sigma_0$  et  $E$  sont exprimés en  $\text{KN/mm}^2$ ,  $J$  est exprimée en  $\text{KN/mm}^{3/2}$ ,  $\delta_t$  et  $r_p$  en mm.

En pratique,  $\delta_t$  est de l'ordre de  $.01 r_p$ , selon les formules (56), par conséquent, il est nécessaire d'avoir un maillage très fin si l'on veut représenter l'écartement.

Figure 15 :  
Evolution de l'ouverture de la fissure fixe à différents stades d'un chargement.



En déformation plane, nous donnons l'ordre de grandeur de l'écartement obtenu par la référence [12], soit  $0.65 \frac{J}{\sigma_0}$  où  $J = \frac{(1-\nu^2) K^2}{E}$ . Par conséquent, on tire une relation entre  $\delta_t$  et la taille de la zone plastique  $r_{p,max}$  (la taille maximale) :

$$\delta_t \approx 4 \left( \frac{\sigma_0}{E} \right) r_{p,max} .$$

La figure 16 représente la courbe effort-déplacement donnant la liaison existant entre la variation de l'ouverture dans la direction de la charge appliquée  $\delta$  et l'intensité de cette charge  $p$ .

La figure 17 illustre l'évolution de la distribution des contraintes, sur l'axe de symétrie, au cours de l'application d'un chargement croissant. Selon le critère de Von Mises, en C.P., la contrainte  $\sigma_{YY}$ , dans le cas parfaitement plastique, ne peut excéder une valeur de  $\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 = 1.15 \sigma_0$ . Numériquement, pour des charges assez faibles, nous obtenons :

$$\sigma_{YY, max} = 517 \text{ MPa} ,$$

alors :

$$\frac{\sigma_{YY, max}}{\sigma_0} = 1.06 .$$

Pour des charges plus élevées, cette valeur atteint jusqu'à 1.68 ; valeur mettant en évidence l'écroutissement du matériau.

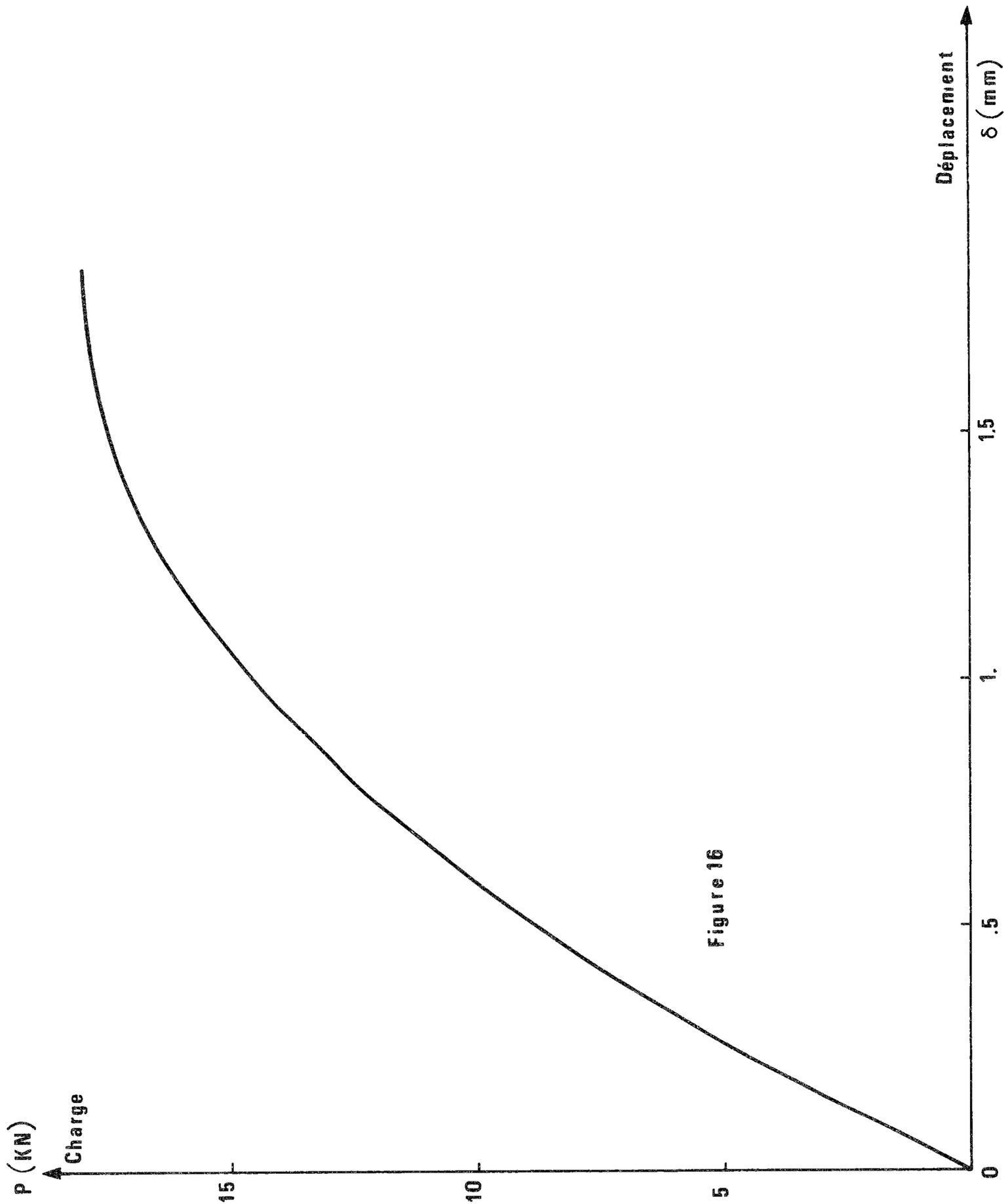


Figure 16

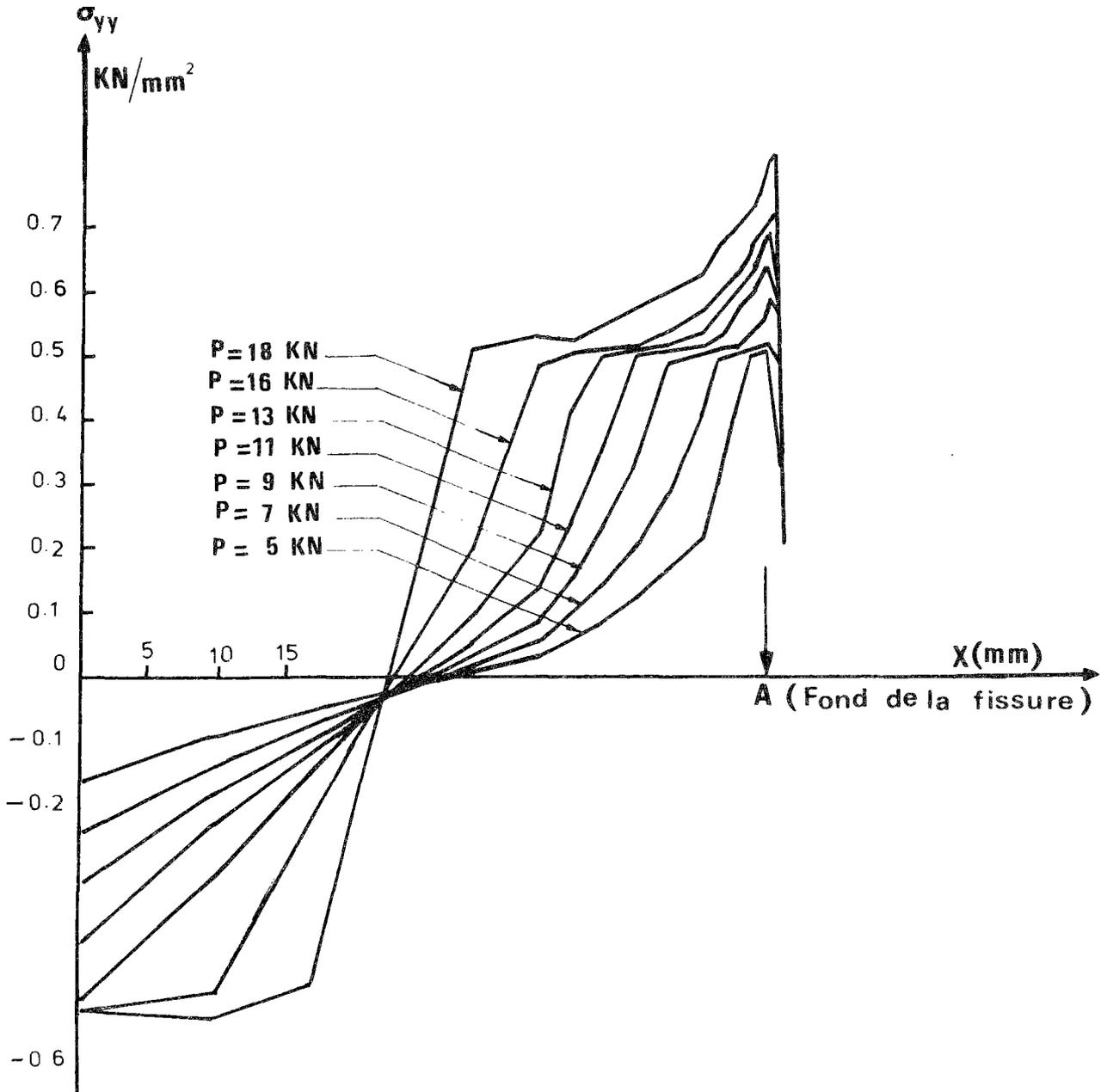


Figure 17 :

*Evolution de la distribution des contraintes, sur l'axe de symétrie, à différents stades d'un chargement croissant.*



CHAPITRE III

PRISE EN COMPTE DE LA PLASTICITÉ DANS LE CAS GÉNÉRAL  
FISSURE MOBILE

III.1- GENERALITES

La propagation de fissure est un phénomène consommateur d'énergie. L'énergie consommée est, dans la théorie de Griffith, la différence entre l'état énergétique des atomes avant et après la fissuration. Elle s'assimile à une énergie de surface,  $dW_f = 2 \gamma ds$ , et Griffith a admis que  $\gamma$ , énergie spécifique de rupture, est une constante intrinsèque. L'origine physique de l'énergie de rupture n'est pas clairement établie. Souvent, on interprète  $\gamma$  comme une énergie de surface réversible, tout en affirmant que le phénomène de rupture dissipe de l'énergie. En fait, des mesures expérimentales ont toujours montré que la consommation d'énergie que l'on peut mettre en évidence au niveau macroscopique peut se révéler très supérieure à l'énergie d'interaction des atomes. Il semble que l'énergie dépensée soit due essentiellement à la plastification locale, confinée au voisinage du fond de fissure, aux frottements entre grains le long des joints, aux mouvements des dislocations, etc..., c'est-à-dire à des mécanismes dissipatifs. Une analyse énergétique dans un milieu dissipatif devient nécessaire.

Cette analyse a été effectuée par NGUYEN Q.S. [23], [24] dans une description thermodynamique englobant tous les modèles de matériau usuels.

Il a été établi que la force due aux singularités en fond de fissure s'écrit sous la forme  $G = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} J_{\Gamma}$  où l'intégrale  $J_{\Gamma}$  dépend du contour  $\Gamma$ . Dans l'expression de  $J$ , la densité d'énergie  $W$  correspond à l'énergie élastique emmagasinée pour les matériaux élastiques-parfaitement plastiques.

Les singularités de contrainte et de déformation en fond de fissure permettent de calculer  $G$ . En particulier, des résultats récents dûs à Slepian, Rice et al., semblent montrer que  $G = 0$  en plasticité. Nous nous intéressons ici essentiellement à la vérification de cette estimation.

Dans ce but, plaçons-nous dans les conditions les plus simples de la propagation : mode I pur, régime permanent, plasticité parfaite. Le choix du mouvement permanent est intéressant pour les raisons suivantes :

- Le mouvement permanent revient à l'étude d'un problème aux limites, on évite les difficultés de l'intégration du problème d'évolution.

- On peut travailler avec un seul maillage, mobile avec la fissure. Le calcul numérique est ainsi beaucoup plus précis que si l'on avait simulé la propagation par déblocage successif.

Nous souhaitons mettre en évidence deux propriétés de la solution élasto-plastique :

- L'ouverture de la fissure est plus faible comparée à la solution élastique (a fortiori, comparée à la solution élastoplastique avec une fissure fixe, chap. II). C'est cette réduction de l'ouverture qui explique le phénomène de fermeture des bords libres des fissures en fatigue.
- La force due aux singularités  $G$  est nulle.

III.2- ANALYSE DE LA FORCE ET DE LA DISSIPATION  
d'après Nguyen Quoc Son [ 23 ], [ 24 ]

Pour simplifier la description, nous nous limitons aux cas bidimensionnels. Le solide avec fissure correspond à la figure 18, dans laquelle la fissure X'A de longueur  $\ell(t)$  est supposée rectiligne au cours de son évolution. Nous nous intéressons à la description de l'état local de contrainte, de déformation autour du fond de fissure A.

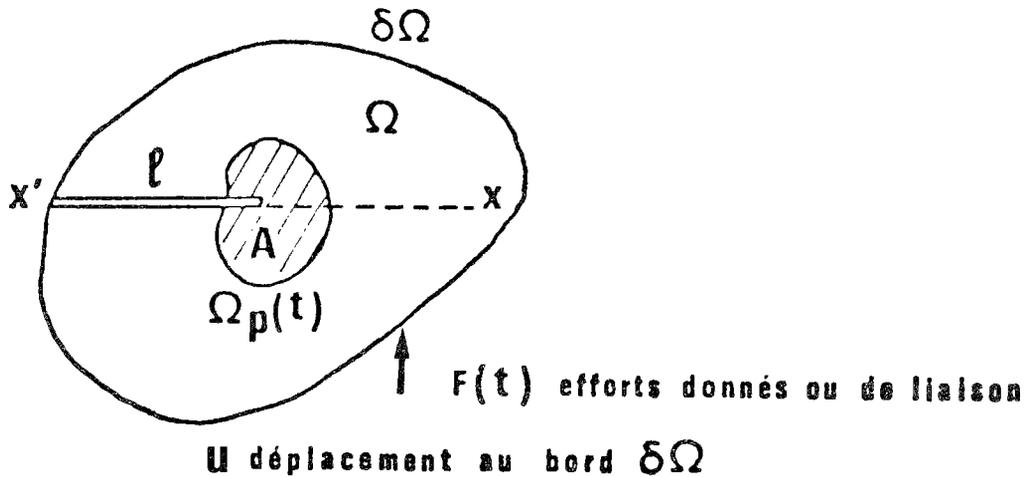


Figure 18.

La vitesse de fissuration  $\dot{\ell} = \frac{d\ell}{dt}$  correspond aux efforts extérieurs  $F(t)$  qui sont variables dans le temps. Nous désignons par  $u$  les déplacements, par  $\varepsilon$  les déformations correspondantes, qui ne sont pas nécessairement élastiques, et par  $\sigma$  les contraintes.

En transformation quasi-statique, le taux de dissipation d'énergie est donné sous la forme :

$$(57) \quad D = P_e - \frac{d}{dt} \phi ,$$

où  $P_e = \int_{\partial\Omega} F \dot{u} ds$  représente la puissance des efforts extérieurs et

$\phi = \int_{\Omega} W \, d\Omega$  est l'énergie libre du système. Pour calculer le terme  $\frac{d}{dt} \phi$ , il est nécessaire d'isoler la singularité. Soit  $B_R(t)$  une surface fermée enveloppant le fond de fissure,  $R$  désigne la plus grande dimension de  $B_R$ . Au cours de l'évolution de la fissure,  $B_R(t)$  est un domaine en translation. On désigne par  $S_R$  le contour de  $B_R$ , et par  $n$  sa normale extérieure. Soit :

$$\phi_R = \int_{\Omega - B_R(t)} W \, d\Omega \quad .$$

Le principe des travaux virtuels donne immédiatement l'expression suivante,  $\dot{u}$  étant régulier dans  $\Omega - B_R(t)$  :

$$\int_{\partial\Omega} F \dot{u} \, ds - \int_{S_R} \sigma \cdot n \cdot \dot{u} \, ds = \int_{\Omega - B_R(t)} \sigma \dot{\epsilon} \, d\Omega \quad .$$

Rappelons que la puissance intrinsèque dissipée volumique s'écrit sous la forme :

$$D = \sigma \dot{\epsilon} - \dot{W} \quad .$$

Nous trouvons alors :

$$(58) \quad P_e = \int_{\Omega - B_R(t)} \dot{W} \, d\Omega + \int_{\Omega - B_R(t)} D \, d\Omega + \int_{S_R} \sigma \cdot n \cdot \dot{u} \, ds \quad .$$

Prenant en compte que  $B_R(t)$  est un domaine en translation, nous calculons la dérivée par rapport au temps de  $\phi_R$  :

$$(59) \quad \frac{d}{dt} \phi_R = \int_{\Omega - B_R(t)} \dot{W} \, d\Omega - \int_{S_R} \dot{\ell} W n_1 \, ds \quad .$$

Considérant (58) et (59), nous obtenons :

$$(60) \quad P_e - \frac{d}{dt} \phi_R = \int_{\Omega - B_R(t)} D \, d\Omega + \dot{\ell} \int_{S_R} (W n_1 + n \cdot \sigma \cdot \frac{\dot{u}}{\ell}) \, ds \quad .$$

Si  $W$  vérifie la condition de transport parallèle des singularités,

$$(61) \quad \dot{W} = - \dot{\ell} W_{,1} + (\text{fonction intégrable}) \quad ,$$

on démontre que :

$$(62) \quad \frac{d}{dt} \phi = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \phi_R \quad .$$

Dans ce cas, le premier membre de l'égalité (60) tend vers le deuxième membre de l'égalité (57) avec  $R \rightarrow 0$ . Si la vitesse au voisinage du fond de fissure vérifie la condition de transport parallèle analogue à (61)

$$\dot{u} = -\dot{\ell} u_{,1} + (\text{fonction intégrable}) ,$$

dernier terme de (60) pouvant être écrit sous la forme :

$$(63) \quad G = \lim_{R \rightarrow 0} \int_{S_R} (W n_1 - n \sigma u_{,1}) ds \quad ,$$

où G est le taux de restitution d'énergie.

Les relations (60) et (57) nous donnent alors :

$$(64) \quad D = \int_{\Omega} D d\Omega + G \dot{\ell}$$

La puissance intrinsèque dissipée du solide fissuré se compose d'un terme de volume de densité D et d'un terme linéique le long du fond de fissure de densité  $G \dot{\ell}$ .

La condition (61) exprime le transport parallèle des singularités (ordre, répartition angulaire) dans le mouvement du front de fissure. Elle est vérifiée en particulier lorsque W possède, au voisinage de A, les expressions asymptotiques :

$$W = H(t, \dot{\ell}) r^m \tilde{W}(x - (t), y, \dot{\ell})$$

( $\dot{\ell}$  intervient en transformation dynamique).

Rappelons que les expressions (63) et (64) sont obtenues sans aucune hypothèse préalable sur le comportement du matériau ; ainsi, elles s'appliquent généralement au milieu élasto-visco-plastique.

III.3- ETUDE DU MODELE ELASTIQUE PARFAITEMENT PLASTIQUE

Dans la suite, nous limitons notre discussion aux matériaux élastiques parfaitement plastiques. Comme nous avons vu chapitre II, la détermination des singularités de contrainte, de déplacement pour ce matériau est un problème ouvert. Pour ce problème difficile, on connaît de nombreuses études théoriques ou numériques, mais les résultats obtenus ne sont pas encore entièrement satisfaisants.

Le matériau élastique parfaitement plastique est défini par les variables d'état  $(\epsilon, p)$  sous la forme  $W = W(\epsilon - p)$ ,  $\epsilon$  désigne la déformation,  $p$  la déformation plastique,  $W$  l'énergie élastique emmagasinée. Si la partie élastique est linéaire, nous avons :

$$(65) \quad W = \frac{1}{2} (\epsilon - p) \cdot L \cdot (\epsilon - p) \quad , \quad \sigma = L \cdot (\epsilon - p) \quad ,$$

où  $L$  désigne les coefficients élastiques. En plasticité incrémentale, l'évolution de la déformation plastique est donnée par le critère de plasticité  $f(\sigma) \leq 0$  et la règle de normalité :

$$\dot{p} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad \lambda \geq 0 \quad .$$

La répartition de la contrainte en fond de fissure n'est pas clairement établie pour une fissure mobile. En déformation plane, les résultats les plus intéressants sont dûs à Slepyan [27], Rice et al. [17], [26]. Rice et Sorenson ont admis que l'état de contrainte en fond de fissure est toujours le même et correspond au schéma de Prandtl (cf. Chapitre II et figure 19a). A partir de cette répartition, ils ont donné la vitesse  $\dot{u}$  associée suivant la loi de normalité et les conditions aux limites du problème lorsque  $L$  est homogène et isotrope. Dans l'éventail  $A C D$  on a :

$$(66) \left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_r = 2(2-\nu) \frac{\tau_0}{E} \sin \theta \dot{\ell} \operatorname{Log} \frac{\bar{R}}{r} + f'(\theta) \\ \dot{u}_\theta = -2(2-\nu) \frac{\tau_0}{E} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos \theta \right) \dot{\ell} \left[ -\frac{3\nu}{2-\nu} + \operatorname{Log} \frac{\bar{R}}{r} \right] - f(\theta) + g(r) \end{array} \right. ,$$

où  $\bar{R}$  désigne une longueur de référence ; les fonctions  $f(\theta)$  et  $g(r)$  restent finies  $\forall \theta, \forall r$ . Dans les régions A D E et A B C, nous avons suivant les caractéristiques  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_\alpha = \dot{u}_\theta \left( \frac{3\pi}{4}, r \right) , \quad \dot{u}_\beta \text{ fini} \quad (\text{A D E}) \\ \dot{u}_\alpha = \dot{u}_\theta \left( \frac{\pi}{4}, r \right) , \quad \dot{u}_\beta \text{ fini} \quad (\text{A B C}) \end{array} \right. .$$

En fait, la solution proposée n'est pas acceptable, car elle donne une puissance plastique dissipée négative sur A D, près de A. Une étude plus approfondie a été donnée [26] à la manière de Slepian [25]. Il est nécessaire d'introduire une zone de décharge après l'éventail de Prandtl, suivant la figure 19b. Cependant, le champ de vitesse associé à la même singularité ( $\dot{u} \sim \operatorname{Log} r$ ).

L'état de contrainte étant toujours le même, la condition de transport parallèle (61) est alors vérifiée. La formule (63) est donc valable et donne :

$$(67) \quad G = \lim_{R \rightarrow 0} \int (W n - n \sigma u_{,1}) ds = 0 ,$$

compte-tenu de la singularité de  $\dot{u}$  et de la répartition de  $\sigma$ .

La puissance intrinsèque dissipée se réduit à :

$$D = \int_{\Omega} \sigma \dot{p} d\Omega .$$

Lorsque  $\dot{\ell}(t) \neq 0$  pour  $t \in [t_0, t_1]$ , nous pouvons intégrer  $\dot{u}$  dans cet intervalle pour vérifier que la condition de transport est valable pour le champ  $u$ .

III.4- MOUVEMENT PERMANENT

III.4.1- Interprétation physique de l'intégrale J :

-----

Soit  $\Omega_p(t)$  le volume plastique actuel. Dans la pratique, souvent les conditions de charge sont telles qu'il n'existe qu'un seul domaine plastique englobant le fond de fissure A.

Si  $\Gamma$  est un contour quelconque délimitant un domaine  $V_\Gamma$  enveloppant A, on sait que l'intégrale  $J_\Gamma = \int_\Gamma (W n_1 - \sigma n_{,1} u) ds$  est constante pour les contours  $\Gamma$  réalisant la condition  $\Omega_p(t) \subset V_\Gamma$ . Peut-on donner, dans ces conditions, une interprétation physique à l'intégrale  $J_\Gamma$  ?

Soient  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  deux contours, tel que  $V_{\Gamma_0} \subset V_{\Gamma_1}$  ; nous avons :

$$J_{\Gamma_1} - J_{\Gamma_0} = - \int_{\Delta V} \sigma \cdot p_{,1} d\Omega$$

où  $\Delta V \cup V_{\Gamma_0} = V_{\Gamma_1}$  .

Or,  $p = p(X, t) = P(x - \ell(t), y, t)$  de sorte que :

$$\dot{p} = - \dot{\ell} P_{,1} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

Sauf si le régime est permanent, i.e. si la fonction P se réduit à  $P(x - \ell(t), y)$ , la quantité  $\sigma p_{,1}$  n'a pas une signification physique précise ; elle dépend de la densité de la puissance plastique dissipée  $\sigma \dot{p}$  et de  $\frac{\partial P}{\partial t}$ , qui caractérise le changement de la distribution de la déformation plastique autour de A.

En régime permanent, nous avons  $\dot{p} = - \dot{\ell} P_{,1}$ ,  $\dot{u} = - \dot{\ell} u_{,1}$  et le calcul précédent donne :

$$J_{\Gamma_1} - J_{\Gamma_0} = \frac{1}{\dot{\ell}} \int_{\Delta V} \sigma \dot{p} d\Omega \geq 0$$

En particulier, si  $\Gamma_0$  se réduit au point A, nous avons d'après (67)

$$(68) \quad J_\Gamma = \frac{1}{\dot{l}} \int_V \sigma \dot{p} \, d\Omega \quad .$$

$J_\Gamma \dot{l}$  représente donc la puissance plastique dissipée à l'intérieur de  $\Gamma$ . L'intégrale de  $J_\Gamma$  est constante lorsque  $V_\Gamma$  contient  $\Omega_p$ . Elle diminue et tend vers zéro pour des contours de plus en plus petits.

En élasticité,  $W = W(\epsilon)$ , la formule (67) se réduit à celle de Rice-Eshelby :

$$(69) \quad G = J = \int_\Gamma (W(\epsilon) n_1 - \sigma \cdot n \cdot u_{,1}) \, ds \quad .$$

### III.4.2- L'intégrale $J^*$ :

-----

Il est intéressant de considérer ici l'intégrale  $J_\Gamma^*$  définie selon (69) avec :

$$W^* = \int_0^\epsilon \sigma \, d\epsilon \quad (\text{l'énergie de déformation}) \quad .$$

En régime permanent nous avons :

$$W^*(x, y) = W^*(a, y) + \int_a^x \sigma(\xi, y) \epsilon(\xi, y)_{,1} \, d\xi \quad ,$$

et :

$$W^*_{,1}(x, y) = \sigma(x, y) \cdot \epsilon(x, y)_{,1} \quad .$$

Cette dernière relation permet de vérifier sans difficulté que  $J_\Gamma^*$  est indépendante du contour  $\Gamma$  (l'hypothèse du régime permanent est essentielle !).

Comme  $W^* = W(\epsilon^e) + \int_0^\epsilon \sigma \, d\epsilon^p$ , en régime permanent on a  $W^*_{,1} = W_{,1} + \sigma p_{,1}$  et :

$$J_\Gamma^* = J_\Gamma + \int_{V_\Gamma} \sigma p_{,1} \, d\Omega = 0 \quad \text{d'après (68)} \quad .$$

Cette estimation, obtenue ici directement, est aussi compatible avec les résultats de Slepian, Rice et al. sur l'analyse des singularités.

### III.5- ETUDE NUMERIQUE D'UNE FISSURE MOBILE EN REGIME PERMANENT

Nous souhaitons vérifier par le calcul numérique la relation (67) lorsque la fissure est mobile.

Pour simuler la propagation d'une fissure dans un solide, la méthode habituelle consiste à procéder par déblocage successif des noeuds du maillage correspondant au front de fissure. Une telle démarche a donné de bons résultats numériques [18] , [28] , [29] , mais on se demande si la solution obtenue par une technique aussi brutale correspond encore à la solution théorique définie d'après la théorie de plasticité incrémentale.

Pour augmenter la crédibilité du calcul numérique, nous allons nous placer en régime permanent. Dans ces conditions, la solution permanente peut être formulée comme la solution d'un simple problème aux limites, que nous pouvons déterminer avec un maillage centré sur le front de fissure et se déplaçant à la même vitesse. L'hypothèse de régime permanent permet alors de procéder autrement que par déblocage, le résultat du calcul sera, théoriquement, plus satisfaisant.

#### III.5.1- Problème étudié :

-----

Nous considérons le mouvement permanent d'une fissure sollicitée suivant le mode I pur en déformation plane et en contrainte plane. L'exemple correspond à la figure 19.

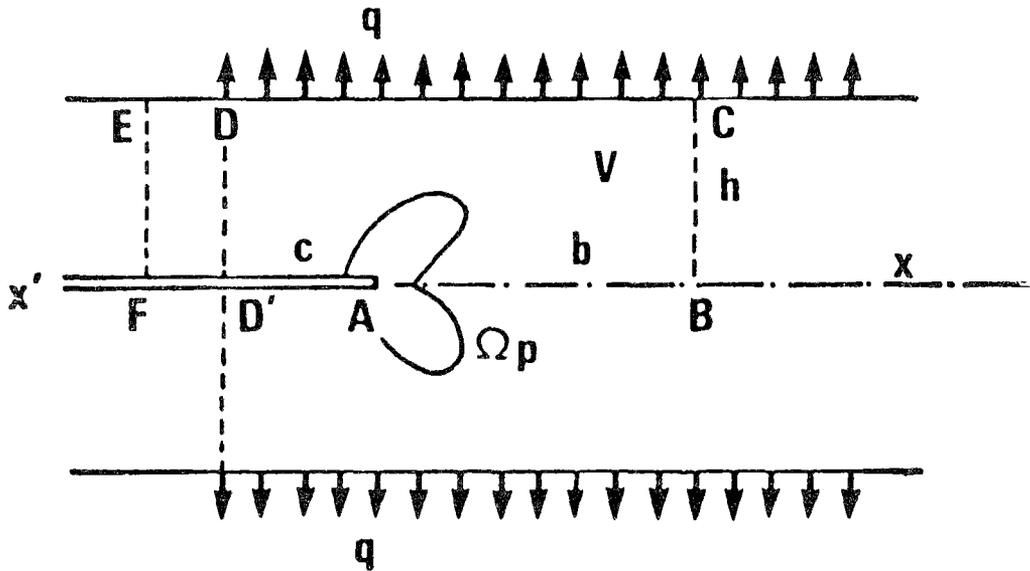


Figure 19.

La plaque, de hauteur  $2h$  et de longueur infinie suivant  $x'x$ , est soumise à des efforts de traction  $q$  mobile avec la fissure, sur les demi-droites  $-c \leq x - \ell(t) < +\infty$  des bords inférieur et supérieur. La fissure est centrale et correspond aux demi-droites  $x'a$ . Les contraintes à l'infini suivant  $x'x$  sont nulles. Le matériau est supposé initialement à l'état naturel, sans déformation résiduelle.

A partir d'une position initiale donnée, si la fissure avance à une vitesse  $\dot{\ell} \neq 0$ , l'état local autour de  $A$  atteint un régime permanent après un certain temps. Nous construisons la solution numérique approchée de la solution permanente dans un domaine  $V$  en translation avec la fissure  $V = A B C E F$ , les points  $B$  et  $F$  étant pris suffisamment loin du fond de fissure  $A$ .

Dans le repère local  $X = x - \ell$ ,  $Y = y$ , il s'agit de déterminer les champs  $\sigma(X, Y)$ ,  $\varepsilon(X, Y)$ ,  $p(X, Y)$ ,  $u(X, Y)$ , vérifiant les conditions suivantes :

- Conditions statiques :  $\text{Div } \sigma = 0$
- Conditions de liaison :  $u_Y(X, 0) = 0$  pour  $X \geq 0$

- Conditions aux limites :

. dues à la fissure :  $\sigma_{YY}(X,0) = 0, \sigma_{XY}(X,0) = 0 \quad \forall X < 0$

. dues aux charge- :  $\sigma_{XY}(X,h) = 0; \sigma_{YY}(X,h) = q \quad \forall X \geq -C$   
ments

. à l'infini :

$X \rightarrow +\infty \quad \sigma_{XY}(X,Y) = 0, \sigma_{XX}(X,Y) = 0, \sigma_{YY}(X,Y) = q$

$X \rightarrow -\infty \quad \sigma_{XY}(X,Y) = 0, \sigma_{XX}(X,Y) = 0, \sigma_{YY}(X,Y) = 0$  .

- Loi de comportement :

L désigne les coefficients élastiques ; nous avons  $\sigma = L (\epsilon - p)$ .

Dans la zone plastique  $\Omega_p$  qui correspond à  $f(\sigma) = 0$ , la règle d'écoulement plastique est vérifiée :

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad \lambda \geq 0 \\ \text{le multiplicateur plastique } \lambda \text{ est donné en fonction de la} \\ \text{vitesse } \dot{\epsilon} \text{ par :} \\ \lambda = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot L \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \cdot \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot L \cdot \dot{\epsilon} \right\rangle \end{array} \right.$$

En régime permanent,  $\dot{p} = -\dot{\ell} p_{,x}$ ,  $\dot{\epsilon} = -\dot{\ell} \epsilon_{,x}$ , nous avons donc, quelle que soit la vitesse d'avancement  $\dot{\ell}$ , la relation :

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (X,Y), \quad -p_{,x} = \frac{\alpha}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot L \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \left\langle -\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot L \cdot \epsilon_{,x} \right\rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ \alpha = 1 \quad \text{si} \quad f(\sigma) = 0 \\ \alpha = 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma) < 0 \end{array} \right.$$

On doit, d'autre part, préciser la valeur initiale de la déformation plastique. L'état initial du matériau étant supposé naturel, sans déformation plastique résiduelle, nous avons :

$$(72) \quad \lim_{X \rightarrow \infty} p(X,Y) = 0 \quad \forall Y$$

Les relations (71) et (72) permettent de calculer  $p(X, Y)$  à partir de la répartition de la déformation  $\varepsilon(X, Y)$ . Nous obtenons en effet :

$$(73) \quad p(X, Y) = \int_X^\infty \frac{\alpha}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot L \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}} < - \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot L \cdot \varepsilon_{,X} > (\xi, Y) d\xi \quad .$$

En résumé, les champs  $\sigma, \varepsilon, p$  sont reliés par les relations  $\sigma = L(\varepsilon - p)$  où  $p$  est associé à  $\varepsilon$  suivant la formule (73). On doit résoudre ainsi un problème de type élastique avec une loi de comportement non locale ; la relation (73) montre en effet que la déformation plastique au point  $(X, Y)$  dépend de l'état de déformation et de contrainte en amont, aux points  $(\xi, \eta)$  tels que  $\eta = Y, X \leq \xi \leq \infty$ , ce qui est physiquement naturel.

### III.5.2- Unicité :

-----

Nous discutons dans ce paragraphe l'unicité de la solution du problème aux limites obtenue lorsque le matériau considéré obéit au critère de Misès  $f(\sigma) = |s| - K \leq 0$ ,  $s$  étant le déviateur de contrainte.

Soient  $(\sigma_1, u_1, p_1), (\sigma_2, u_2, p_2)$  deux solutions éventuelles. Nous avons :

$$\int_V (\sigma_1 - \sigma_2) (\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2) d\Omega = \int_{\partial V} (\sigma_1 - \sigma_2) n (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) ds \quad .$$

L'intégrale du second membre est nulle sur  $CE$  et  $BF$ , d'après les conditions de forces données, elle est aussi nulle sur  $BC$  et  $EF$ , d'après les conditions asymptotiques en contrainte. Il en résulte :

$$\lim_{b, c \rightarrow \infty} \int_V (\sigma_1 - \sigma_2) L^{-1} (\sigma_{1,X} - \sigma_{2,X}) d\Omega + \int_V (\sigma_1 - \sigma_2) (P_{1,X} - P_{2,X}) d\Omega = 0 \quad ,$$

$$\lim_{b, c \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \int_0^h (\sigma_1 - \sigma_2) L^{-1} (\sigma_1 - \sigma_2) dy \right]_{-c}^b + \int_V (\sigma_1 - \sigma_2) (P_{1,X} - P_{2,X}) d\Omega = 0 \quad .$$

Comme  $\sigma_1 \equiv \sigma_2$  pour  $b \rightarrow \infty$ ,  $c \rightarrow \infty$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^h (\sigma_1 - \sigma_2) (P_{1,X} - P_{2,X}) dX dY = 0 \quad .$$

Or, la loi de normalité donne :  $(\sigma_1 - \sigma_2) (P_{1,X} - P_{2,X}) \leq 0$ , il en résulte que :

$$(74) \quad (\sigma_1 - \sigma_2) (P_{1,X} - P_{2,X}) = 0 \quad \forall (X, Y) \quad .$$

Si le matériau obéit au critère de Misès, on obtient finalement :  $S_1 = S_2$  lorsque  $P_{1,X} \neq 0$  ou lorsque  $P_{2,X} \neq 0$ .

Le déviateur de contrainte est donc unique dans la réunion des zones plastiques en charge ( $\dot{\epsilon}^p \neq 0$ ). Il s'agit d'une propriété bien connue de la solution asymptotique du problème d'évolution élasto-plastique [30], [31]. Même dans cet exemple particulier, on ne sait pas si un résultat d'unicité plus fort pourrait être établi.

### III.5.3- Méthode de calcul :

-----

La loi de comportement élastoplastique est discrétisée de la manière suivante :

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{n+1} = L (\epsilon_{n+1} - P_{n+1}) \\ - P_n + P_{n+1} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{n+1}} \quad \text{où} \quad \Lambda \geq 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma_{n+1}) = 0 \\ \Lambda = 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma_{n+1}) < 0 \quad , \end{array} \right.$$

$n+1$  désigne le point voisin, situé à l'aval de  $n$  et de même ordonnée  $y$ . Ce sont des points de discrétisation de la structure, où sont définies les grandeurs mécaniques (figure 20). Connaissant la valeur de  $p$  pour  $x = b$ , la relation (75) permet de définir partout dans  $V$  la déformation plastique  $p(\epsilon)$  et la contrainte  $\sigma(\epsilon)$  associées à un champ de déformation  $\epsilon$ . Une telle discrétisation revient à écrire la loi de normalité au point d'arrivée  $n+1$  ;

elle assure que le critère de plasticité est respecté dans toute la structure V. Il est bien connu dans les études numériques des structures élastoplastiques qu'un tel schéma donne des résultats plus intéressants que le schéma explicite obtenu directement à partir de (71), en remplaçant  $\dot{\epsilon}$  par  $\Delta\epsilon$  et  $\dot{p}$  par  $\Delta p$  [32], [33].

On réalise le schéma (75) en procédant de la façon suivante (figure 20a) :

$$\begin{aligned}
 & \text{Soit : } \sigma' = L (\epsilon_{n+1} - P_n) \\
 & \cdot \text{ Si } f(\sigma') \leq 0 \text{ alors } P_{n+1} = P_n, \quad \sigma_{n+1} = \sigma' \\
 & \cdot \text{ Si } f(\sigma') > 0 \text{ alors } P_{n+1} \neq P_n \\
 (76) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{n+1} \text{ et } P_{n+1} \text{ sont définis par les relations :} \\ \text{(i) } \sigma_{n+1} = \sigma' - L (P_{n+1} - P_n) \\ \text{(ii) } f(\sigma_{n+1}) = 0 \\ \text{(iii) } P_{n+1} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{n+1}} + P_n \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

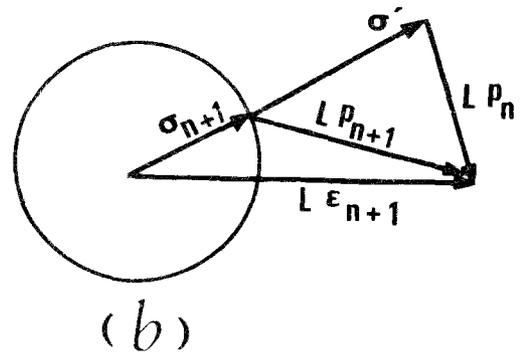
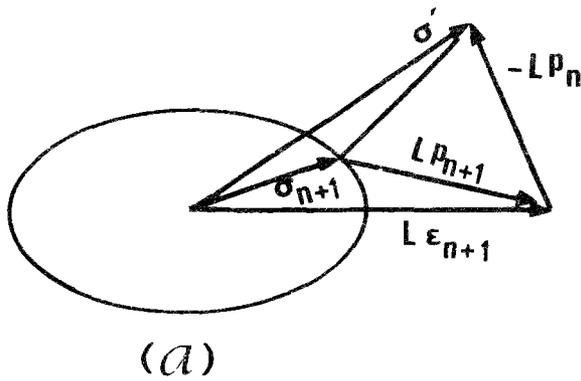


Figure 20a :

Schématisation du problème : a- en contrainte plane,  
b- en déformation plane.

Les relations (i), (ii), (iii) permettent en effet de calculer  $\sigma_{n+1}$ ,  $P_{n+1}$ ,  $\Lambda$  en fonction de  $\varepsilon_{n+1}$ .

La relation  $\varepsilon \rightarrow p(\varepsilon)$  n'est pas linéaire ; le problème aux limites ainsi défini est non-linéaire. La solution peut être obtenue par approximations successives. La méthode de rigidité constante classique (ou contraintes initiales ...) consiste à itérer à déformation plastique donnée :

- (77) {
- $\varepsilon^0$  est la solution purement élastique,
  - $\varepsilon^N$  étant supposé connu,  $\varepsilon^{N+1}$  est la solution du problème élastique linéaire à déformation résiduelle donnée  $p(\varepsilon^N)$ , calculée suivant (76) :
  - $\varepsilon^N \rightarrow \varepsilon$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$ .

La convergence ainsi que les procédés d'accélération de convergence ont été étudiés pour le problème d'évolution [32], [33], [34], [35]. Dans la pratique, on arrête les itérations lorsque l'indice  $N$  satisfait à un critère d'arrêt. Notre critère d'arrêt a été discuté dans la référence [32] ; il correspond au fait que la contrainte  $L(\varepsilon^{N+1} - P^N)$  vérifie le critère de plasticité à  $r\%$  près : le dépassement du critère de plasticité par la solution approchée est donc bien contrôlé ( $r \approx 1$  ou  $2$ ).

Nous avons discrétisé le domaine  $V$  par un maillage simple, suivant la figure 20. Chaque maille rectangulaire se compose de quatre triangles dans lesquels l'interpolation du déplacement est linéaire. Les conditions aux limites imposées sont de type mixte. Sur le côté  $BC$ , on impose seulement les conditions  $\sigma_{xy}(b, Y) = 0$ ,  $\sigma_{xx}(b, Y) = 0$ , la condition  $\sigma_{yy}(b, Y) = q$  n'est obtenue qu'à la limite, lorsque  $b \rightarrow +\infty$ .

Pour la pression considérée ( $\frac{q}{K} = 0.475$ ), la méthode itérative (77) converge très vite, et le critère d'arrêt est atteint au bout de vingt cinq itérations pour  $r = 1\%$  en déformation plane. La convergence est plus lente en contrainte plane.

### III.6- ANALYSE DES RESULTATS

Il est intéressant d'introduire une unité de longueur  $\bar{d}$  convenablement choisie. Nous définissons  $\bar{d} = \frac{2}{3} \left( \frac{q}{K} \right)^2 D'A$  qui représente l'estimation en contrainte plane par le modèle d'Irwin (voir chapitre II) de la taille de la zone plastique correspondant à une fissure centrale, de longueur  $2 D'A$  en milieu infini, soumise à la traction uniforme  $q$ . Il est bien claire que les mailles d'éléments finis en fond de fissure doivent être petites par rapport à  $\bar{d}$ . La maille élémentaire adoptée, de côté  $0,25\text{mm}$ , correspond à  $\frac{\bar{d}}{6}$ , environ (figure 20).

Nous donnons sur la figure 21 le profil de l'ouverture obtenue. Si la fissure est fixe, nous avons vu dans le chapitre II que la solution élastoplastique présente un écartement assez net en fond de fissure ; cette solution donne une ouverture plus importante que la solution élastique.

Notre calcul montre clairement les modifications de l'ouverture lorsque la fissure est mobile. En déformation plane, par rapport à la solution élastique, elle est légèrement plus faible. Cette réduction de l'ouverture est due aux déformations plastiques résiduelles.

L'intégration de relations telles que (66), [17], [26] permet de trouver théoriquement l'allure de l'ouverture. On obtient :

$$(78) \quad [u] = r C_1(r) - C_2 r \text{Log } r \quad \text{avec} \quad C_2 > 0, \quad C_1(r) \text{ régulier.}$$

Lorsque  $r \rightarrow 0$ , l'ouverture est moins forte que celle de la solution élastique, car  $-r \text{Log } r / r^{1/2} \rightarrow 0$ . Mais la tangente à la courbe de l'ouverture reste verticale pour  $r = 0$ . De cette manière, Rice a montré que la notion d'angle d'ouverture (C.O.A.) n'est pas un paramètre pour décrire convenablement l'état local. L'analyse théorique est en bon accord avec notre résultat numérique.

La distribution de la contrainte est examinée sur la figure 22. Au voisinage du fond de fissure  $A$ , le maillage adopté n'est pas assez dense

pour représenter avec suffisamment de précision les variations de  $\sigma$  en fonction de  $\theta$ , comparé par exemple à celui de Barsoum qui a effectué la même vérification que dans le cas d'une fissure fixe. Néanmoins, on peut dire que le schéma de Prandtl est à peu près retrouvé. Sur la même figure, nous avons reproduit la distribution de contrainte, estimée dans les solutions de Slepyan, Rice et al. [26]. On constate dans tous les cas (fissure fixe ou mobile), que le niveau de contrainte maximale reste inférieur à l'estimation théorique ; cet écart se réduit lorsqu'on se rapproche du fond A ou lorsque la charge appliquée  $q$  augmente.

La zone plastique est indiquée sur la figure 23. Le résultat numérique montre clairement la plastification des bords libres de la surface fissurée lorsque la fissure est mobile. Une telle plastification, qui est due aux déformations plastiques résiduelles, ne se produit pas lorsque la fissure est fixe. Nous soulignons cette différence fondamentale concernant l'état local de la réponse lorsqu'il y a propagation de la fissure. Dans les solutions de Slepyan, Rice et al. [26], cette replastification est mise en évidence par l'existence d'un secteur plastique d'angle  $\theta_0$  après la zone élastique. Si le calcul numérique n'est pas assez précis pour distinguer ces secteurs sur la figure 23, l'accord avec ces solutions théoriques est convenable.

Les figures 24 et 25 permettent de préciser l'évolution des contraintes au voisinage du bord libre.

L'intégrale de contour  $J_\Gamma$  est calculée pour plusieurs contours  $\Gamma$ . Nous vérifions d'abord que dans le cadre de l'élasticité  $J_\Gamma$  est constante quel que soit  $\Gamma$ . Ensuite, dans le cadre de la plasticité,  $J_\Gamma$  est effectivement constante pour des contours situés à l'extérieur du domaine plastique principal. Conformément à la relation (68),  $J_\Gamma$  décroît pour des contours de plus en plus petits, enveloppant le fond A (figure 26). Le calcul numérique confirme pleinement la relation (67).

Nous donnons sur les figures 27 à 31 les mêmes résultats, obtenus en contrainte plane. L'ouverture comparée à la solution élastique est encore plus faible. Ceci est normal, car en contrainte plane la déformation plastique est plus importante. La figure 30 donne l'allure de la zone plastique obtenue, de forme pratiquement circulaire. Les déformations plastiques résiduelles donnent des contraintes résiduelles moins fortes qu'en déformation plane ; la plastification des bords libres de la fissure n'a pas été observée. A notre connaissance, aucune étude théorique en contrainte plane, à la manière de Slepyan, Rice et al. [26], n'a été donnée dans la littérature. Une replastification des bords libres n'est pas exclue cependant, compte tenu des contraintes résiduelles observées sur la figure 30.

La décroissance de  $J_{\Gamma}$  pour des contours  $\Gamma$  de plus en plus petits est présentée sur la figure 31 et montre la validité de la relation (67). Nous ignorons, en contrainte plane, le comportement asymptotique de la vitesse  $\dot{\epsilon}$ . Dans la référence [24], on a établi que  $\dot{\epsilon}^p$  et  $\dot{\epsilon}$  ont la même singularité, la fonction  $\sigma \dot{\epsilon}$  est alors intégrable et donne l'estimation (67) en contrainte plane comme en déformation plane.

Dans ce chapitre, nous ne prétendons pas donner une étude exhaustive des problèmes posés par le calcul numérique de fissures élastoplastiques. L'influence du maillage est laissée de côté alors que ce paramètre peut paraître très important, aussi bien pour l'allure de l'ouverture de la fissure que pour la valeur calculée de  $J_{\Gamma}$ .

Déjà, dans le cadre purement élastique, le choix du maillage a une influence non négligeable sur la précision du calcul des facteurs d'intensité de contrainte. Le calcul des facteurs caractérisant l'état, tels que les coefficients  $C_1$ ,  $C_2$  ou  $\delta$  (l'écartement pour une fissure fixe), nécessite des précautions particulières qui doivent faire l'objet d'études approfondies. Ici, nous souhaitons mettre en évidence essentiellement deux propriétés de la solution élastoplastique en fond de fissure, lorsqu'il y a propagation.

La première propriété concerne le profil de l'ouverture. Cette ouverture est faible comparée à la solution élastique, contrairement à ce que l'on obtient avec une fissure fixe. Il s'agit d'un résultat observable dans les expériences de rupture ductile.

Par le calcul numérique, lorsque la propagation est simulée par déblocage des noeuds du maillage, on obtient les mêmes résultats. De nombreuses études numériques ont été effectuées [36],[18],[17],[29]. Ce sont souvent des études relatives à une éprouvette particulière, la réponse mécanique ne correspond pas à une solution permanente ; la méthode de déblocage est la seule envisageable. Les courbes de l'ouverture, plus ou moins régulières selon les techniques de déblocage adoptées, correspondent toujours à une faible ouverture. Un calcul par déblocage dans les conditions de notre étude nécessiterait un maillage plus adapté, car la solution permanente n'est obtenue qu'après plusieurs pas de propagation ( $> 10$ ). Pour cette raison, nous n'avons pas fait de comparaison entre les deux techniques.

La réduction de l'ouverture pour une fissure mobile joue un rôle fondamental dans le phénomène de fermeture des bords libres des fissures de fatigue [37] (cf. Chap. IV). En fatigue, le chargement est cyclique et la propagation s'effectue par cycle d'une façon progressive à faible vitesse ( $\approx 10^{-3}$  mm par cycle, par exemple). Cette propagation peut être simulée numériquement par déblocage [28] (cf. Chap. IV) pour une éprouvette sollicitée en chargement ondulé, l'ouverture sous charge maximale est comparable à celle d'une fissure mobile sous la même charge supposée monotone :

Lors de la descente et de la montée de la charge, la réponse est en effet pratiquement élastique. Cette ouverture, plus faible que l'ouverture élastique, provoque alors une fermeture partielle des bords libres sous une charge plus faible que la charge maximale. Le phénomène de fermeture s'observe surtout en contrainte plane, car l'ouverture, par rapport aux solutions élastiques, est plus faible en contrainte plane qu'en déformation plane (cf. Fig. 21 et 27).

La deuxième propriété concerne la force  $G$  définie par la relation :

$$G = \lim_{R \rightarrow 0} \int_{S_R} (W n_1 - \sigma \cdot n \cdot u_{,1}) ds \quad .$$

Nous avons vérifié l'estimation  $G = 0$  en nous plaçant dans les conditions les plus simples de propagation : mode I, fissure rectiligne, régime permanent, etc ...

Cette estimation va dans le sens des résultats de Rice [8] concernant les quantités  $J_\Gamma^*$  et  $G_\Delta$  définies par :

$$(79) \quad J_\Gamma^* = \int_\Gamma (W^* n_1 - n \cdot \sigma \cdot u_{,1}) ds \quad ,$$

$$(80) \quad G_\Delta = - \frac{dP}{d\ell} \quad .$$

Dans (79),  $W^*$  représente l'énergie de déformation  $W^* = \int_0^\epsilon \sigma d\epsilon$ ,  $W^*$  n'est pas une fonction d'état et dépend de tout le trajet de déformation de l'élément de matière. De même, dans (80),  $\Delta P$  représente la variation de la quantité  $\int_\Omega W^* d\Omega - \int_{\partial\Omega} F \cdot u ds$  qui n'est pas une fonction d'état en plasticité incrémentale.

Rice a avancé les conjectures  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} G_\Delta = 0$  et  $\lim_{\Gamma \rightarrow 0} J_\Gamma^* = 0$  dès 1968. Signalons que la deuxième relation peut être établie à partir des analyses de singularité de Slepyan, Rice et al. [26] .

En mouvement permanent, d'après le paragraphe III.4.2., rappelons que  $J_\Gamma^* = 0 \quad \forall \Gamma$ .

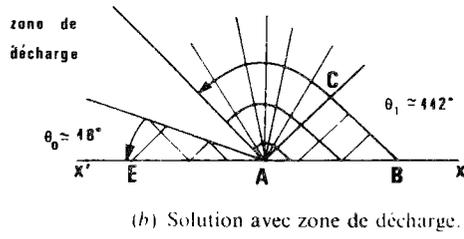
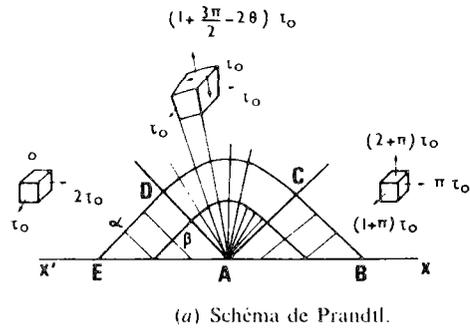


Fig. 19 — Distribution des contraintes en fond de fissure.

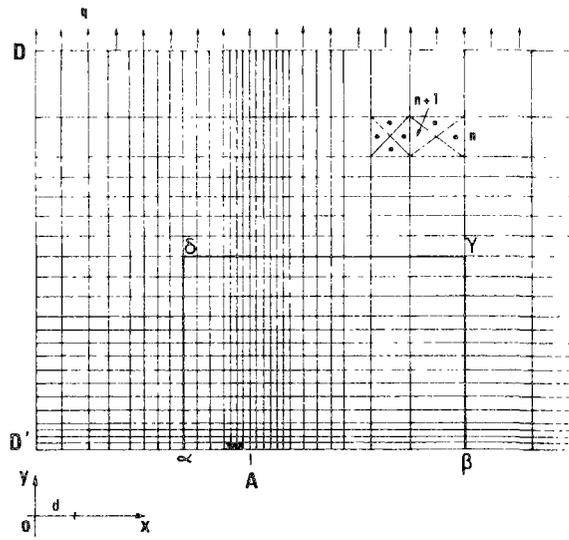


Fig. 20 — Discretisation spatiale par éléments finis.

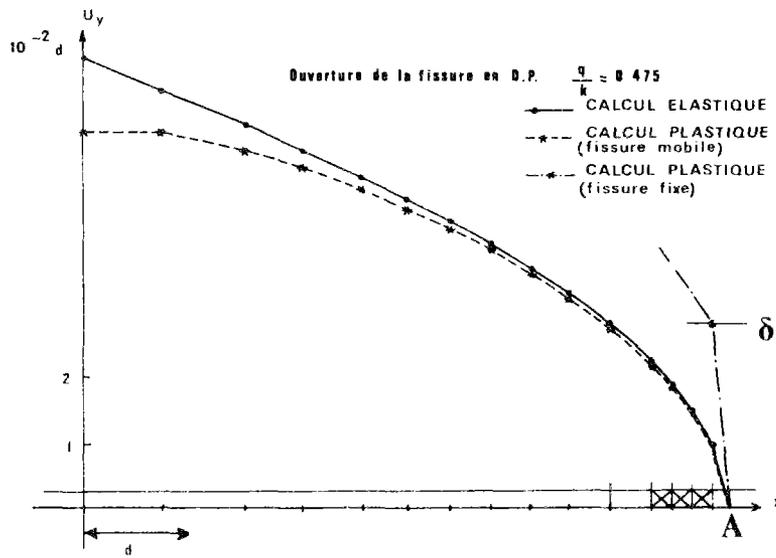


Fig. 21 - Déplacement d'ouverture en déformation plane.

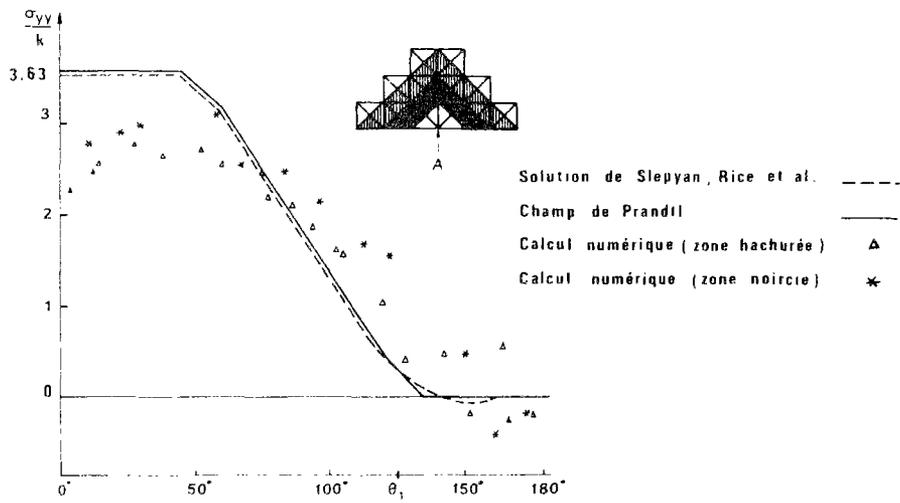


Fig. 22 - Distribution de  $\sigma_{yy}$  en fond de fissure.

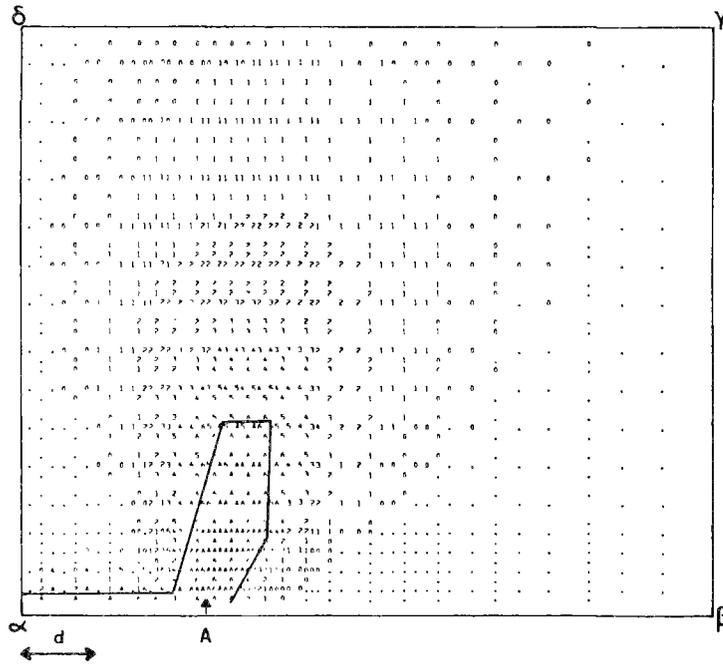


Fig. 23 - Domaine plastique en déformation plane.

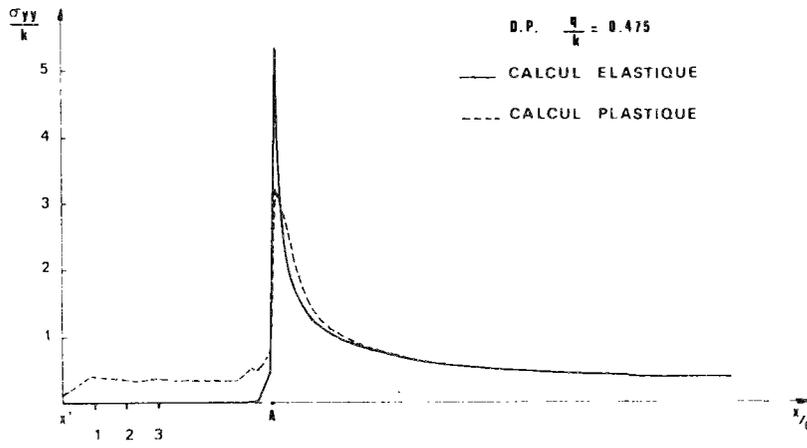


Fig. 24 - Répartition de  $\sigma_{yy}$  en déformation plane

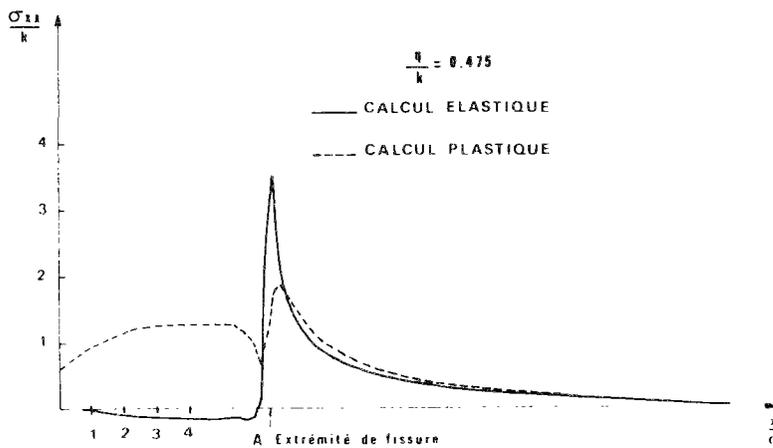


Fig. 25 - Répartition de  $\sigma_{xx}$  en déformation plane

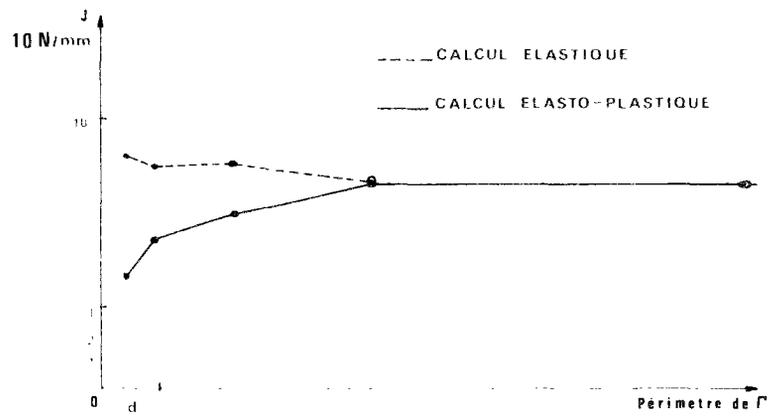


Fig. 26 - Intégrales  $J_I$  en déformation plane.

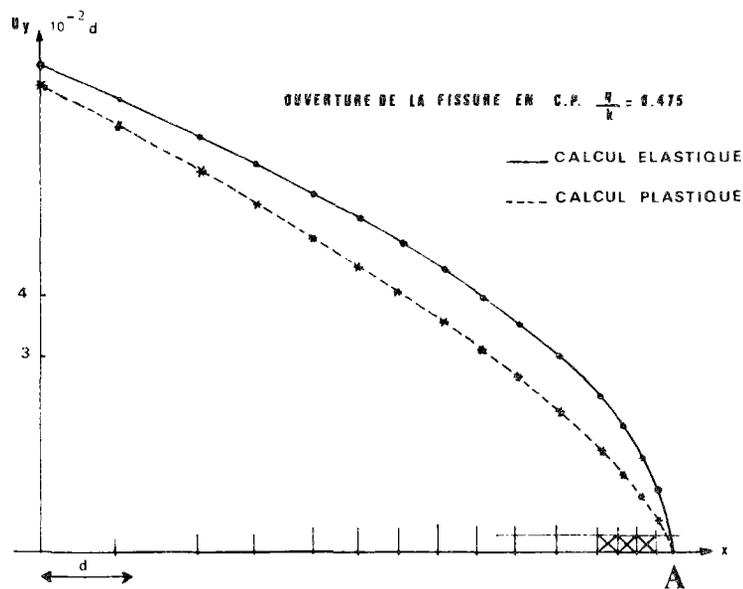


Fig. 27 - Déplacement d'ouverture en contrainte plane.

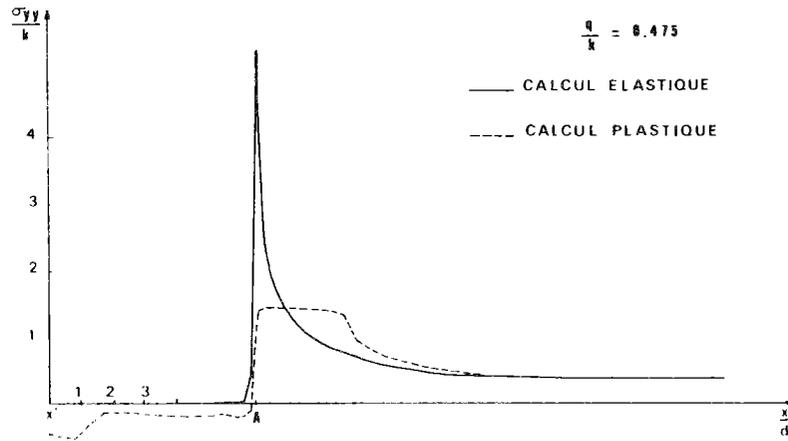


Fig. 28 - Répartition de  $\sigma_{yy}$  en contrainte plane.

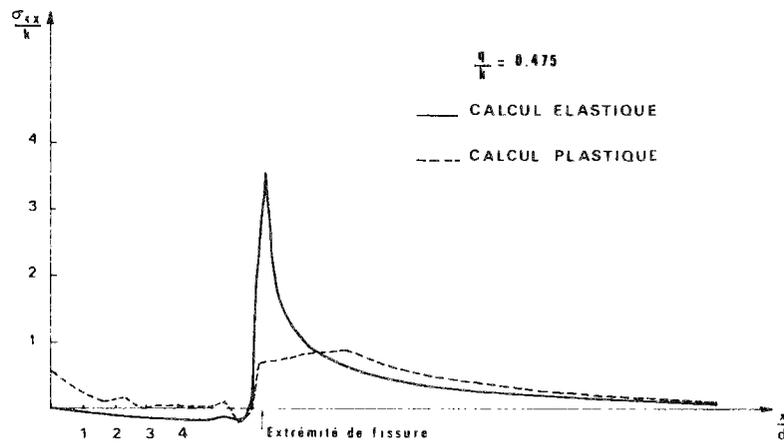


Fig. 29 - Répartition de  $\sigma_{xx}$  en contrainte plane

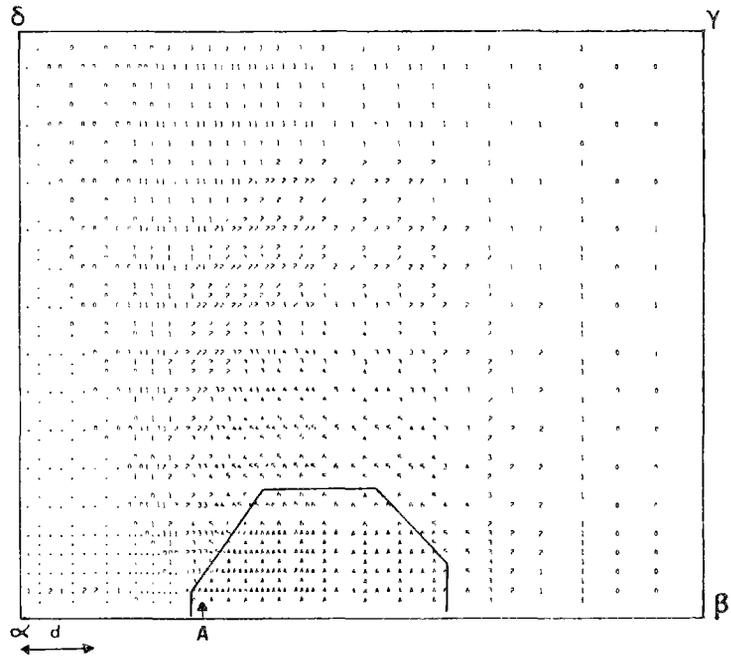


Fig 30 - Domame plastique en contrainte plane.

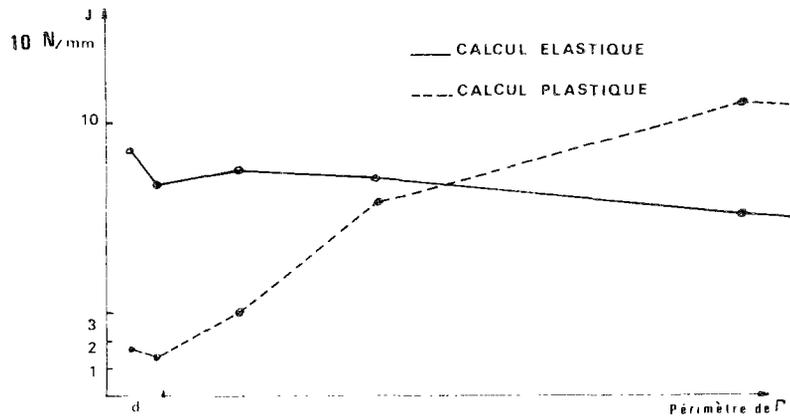


Fig 31 - Intégrales  $J_1$  en contrainte plane

CHAPITRE IV

APPLICATION À LA FATIGUE



VI.1- GENERALITES

La propagation des fissures de fatigue a été beaucoup étudiée pour des fissures sollicitées sous chargements cycliques d'amplitudes constantes. Dans ce cas, la loi de Paris peut être adoptée pour décrire l'évolution des fissures planes de contour quelconque. Il suffit, pour cela, d'exprimer la vitesse de propagation normale par cycle  $V(s)$  en fonction du facteur d'intensité des contraintes local  $K(s)$  sous la forme :

$$(81) \quad V(s) = C (\Delta K(s))^m ,$$

$s$  désignant l'abscisse curviligne d'un point courant du front de fissure actuel.

Pour les applications, on doit cependant remarquer que :

- Les déformations plastiques en fond de fissure jouent un rôle important, même si la propagation s'effectue sous sollicitations d'amplitudes constantes. Les contraintes résiduelles, les déformations résiduelles et en particulier le phénomène de fermeture à la pointe de la fissure, rendent inapplicable la loi de Paris. Plusieurs modèles ont été proposés pour tenir compte de l'effet des déformations plastiques : citons le modèle de Wheeler [42] qui introduit dans la loi de fissuration un rapport de zones plastiques à l'extrémité de la fissure. Toutefois, ce modèle ne donne pas entièrement satisfaction. La notion de la charge d'ouverture, proposée par Elber [37], est une notion très intéressante, dans la mesure où elle amène la définition d'un facteur d'intensité effectif. Cette notion a été étendue par Pellas [40] en considérant non plus la charge d'ouverture de fissure, mais la charge seuil, en-dessous de laquelle la fissure ne se propage pas.

- En pratique, les métaux de construction sont sollicités de façons diverses et parfois aléatoires (les structures en mer, par exemple, sont soumises à des sollicitations aléatoires). Sous un tel chargement, la loi de propagation est très modifiée.

D'une manière générale, on a remarqué que l'application de souscharges et de surcharges provoque des périodes d'accélération, de ralentissement ou même de blocage de la propagation de la fissure.

Afin d'étudier les lois de propagation sous chargement complexe, nous avons entrepris une étude en nous limitant au cas particulier de l'application d'une seule surcharge et en étudiant, au cours de la propagation de la fissure, l'évolution de divers paramètres qui tiennent compte de la plasticité du fond de fissure (zone plastique, charge de fermeture, écartement du fond de fissure, etc...).

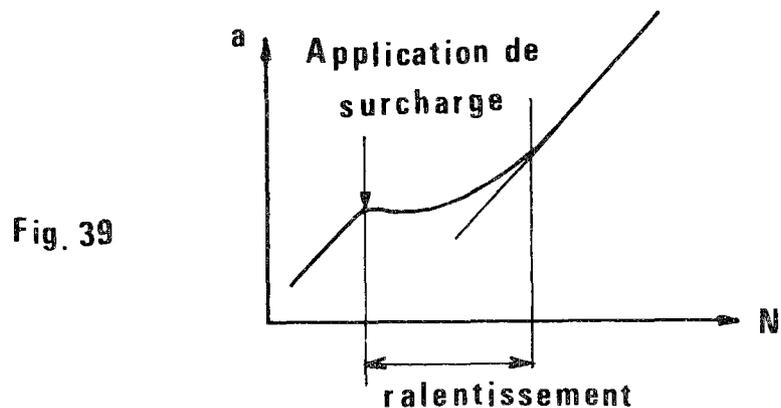
Le rôle des surcharges ajouté à un programme de chargement cyclique d'amplitude constante a fait l'objet de nombreuses études expérimentales. Les essais ont toujours montré qu'une surcharge entraîne un ralentissement plus ou moins net de la propagation.

En vue de comprendre les mécanismes réels, nous analysons ce phénomène dans le cadre de la plasticité. A partir de la notion de l'écartement du fond de fissure, nous donnons un modèle qui tient compte de la zone plastique résiduelle créée par la surcharge.

IV.1.1- Description du phénomène de surcharge et  
Rappels des résultats expérimentaux :

-----

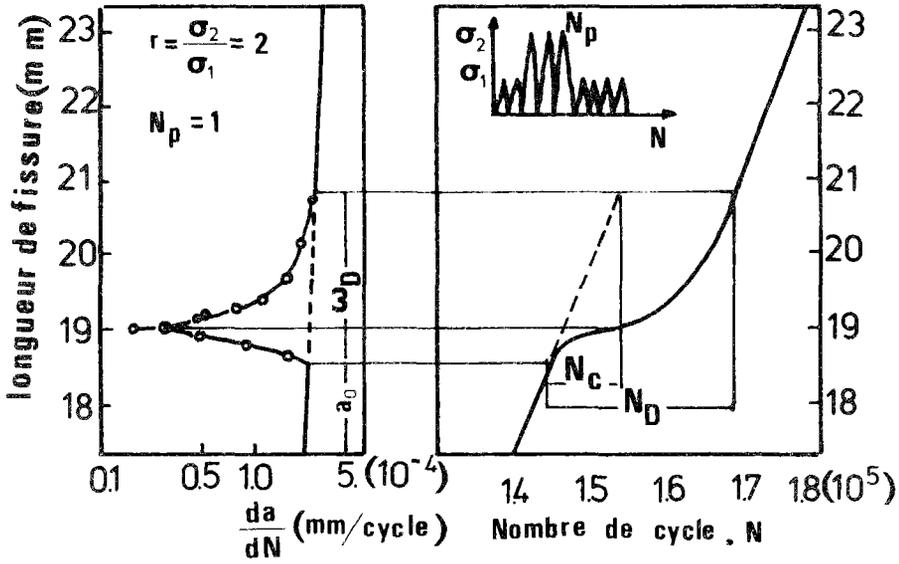
Les essais effectués (par exemple E.N.S.A.M. [38]) montrent clairement l'influence des surcharges. On remarque, en effet, sur les courbes donnant la longueur de fissure en fonction du nombre de cycles  $a(N)$ , que l'effet d'une surcharge se traduit par un ralentissement, la vitesse de propagation ne rattrape sa valeur normale qu'après un nombre de cycles plus ou moins important (fig. 32) ( $\sim 10^5$  cycles, soit des distances de l'ordre de 1mm). Dans la même direction, nous avons reproduit sur la figure 33 la variation de la vitesse dans une autre expérience due à Matsuoka et al. [39], ainsi que certains résultats expérimentaux de Pellas et al. [40] illustrant l'influence du niveau de surcharge.



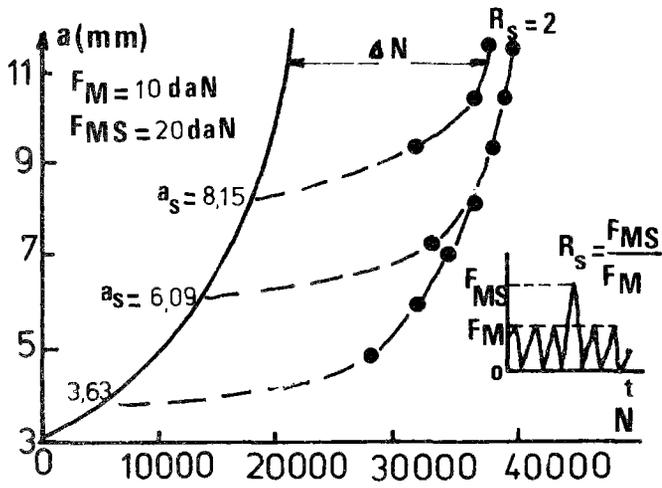
Dans la phase de transition (fig. 32 et 33), les principaux phénomènes observés expérimentalement sont :

- i - Accélération immédiate de la fissuration pendant la surcharge ;
- ii - Ralentissement de la propagation ;
- iii- Accélération de la propagation pour retrouver l'allure normale.

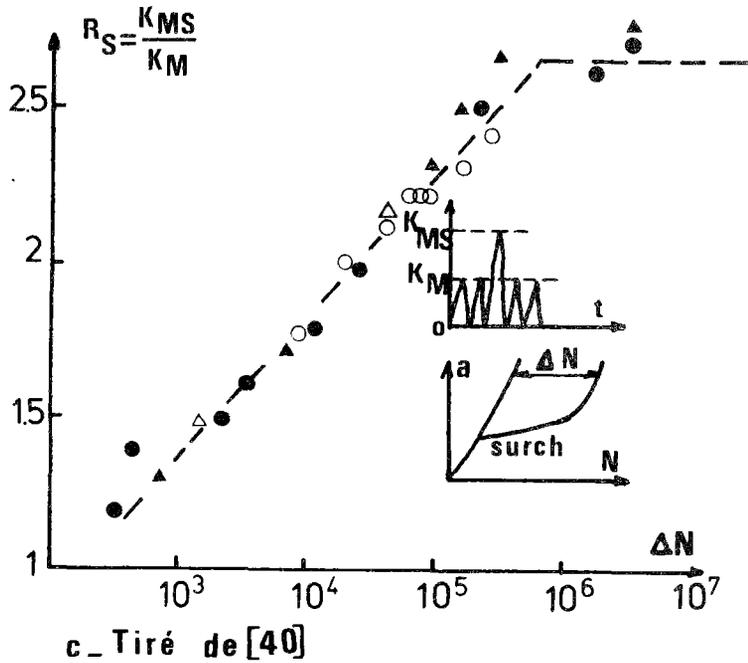
La phase i correspond à une centaine de cycles ; elle est donc négligeable par rapport aux phases suivantes.



a. Phénomène de retard pour  $\sigma_1 = 150$  MPa. Tiré de [39]



b. Tiré de [40]



c. Tiré de [40]

Figure 33

La phase  $ii$  croît avec l'intensité  $K_{ms}$  de la surcharge (figure 33), le taux de surcharge  $R_s = \frac{K_{ms}}{K_{max}}$ , et le nombre de pics de surcharge. Inversement, elle diminue lorsque le rapport de charge  $R = \frac{K_{min}}{K_{max}}$  augmente.

#### IV.1.2- Interprétation du retard de la propagation d'une fissure :

---

Divers phénomènes physiques ont été invoqués pour expliquer le retard après surcharge, ce sont principalement :

- L'émoussement de la pointe de la fissure ;
- L'écrouissage cyclique du matériau au fond de la fissure ;
- Les effets d'interaction des zones plastiques courantes et de la surcharge, ainsi que les contraintes résiduelles qui en résultent ;
- Le phénomène de fermeture de la fissure.

Il est probable que tous ces facteurs entrent en jeu, mais pas forcément simultanément. Les mêmes phénomènes physiques sont invoqués pour expliquer le blocage.

Dans la suite, nous nous limitons principalement à étudier les aspects purement mécaniques, i.e. l'influence des zones plastiques (particulièrement des contraintes résiduelles), ainsi que le phénomène de fermeture de fissure.

## IV.2- ESTIMATION DES ZONES PLASTIQUES EN FATIGUE

L'estimation de la taille de la zone plastique en fond d'une fissure de fatigue est un problème important en Mécanique de la Rupture. Si cette zone est peu étendue, elle remplit l'hypothèse de la plasticité confinée et permet alors l'utilisation de la théorie de l'élasticité linéaire. C'est, par exemple, la situation rencontrée en rupture fragile ou même en fatigue, lorsque nous modélisons la propagation par la loi de Paris. Les effets d'histoire de chargement sont par contre des phénomènes intimement liés aux déformations plastiques. Nous allons donc commencer à étudier la dimension de la zone plastique en chargement cyclique.

Lors d'un chargement cyclique (ondulé par exemple) au niveau de charge maximale, les déformations plastiques se produisent dans la zone plastique, c'est-à-dire l'ensemble des points où le critère de plasticité est atteint. A partir de la charge maximale, la décharge n'est pas purement élastique, car les points très proches du fond de fissure sont sollicités dans le sens inverse, et subissent des déformations plastiques inversées. Nous distinguerons donc deux types de zone plastique :

- la zone plastique dite "monotone" qui correspond à la charge maximale ;
- la zone plastique dite "cyclique" qui correspond à la charge minimale.

La terminologie est classique et correspond aux situations fréquemment rencontrées (fig. 34) : la zone plastique monotone est plus grande et contient la zone cyclique à l'intérieur. Un point matériel situé dans (1) subit des déformations plastiques à la charge (aucune à la décharge), tandis que dans la région (2), il subit des déformations plastiques à la charge et à la décharge, d'une façon presque alternée.

Si l'on néglige les deux bords libres, qui dans une faible épaisseur restent plastiques après l'avancement de la fissure, on peut donner de nombreuses estimations concernant l'étendue des zones plastiques considérées.

IV.2.1- Zone plastique cyclique :

La zone plastique cyclique s'obtient par décharge à partir de la charge maximale (chargement ondulé).

Une première approximation dans l'esprit des modèles d'Irwin ou de Dugdale (cf. Chap. II) est donnée par la superposition de deux distributions de contraintes :

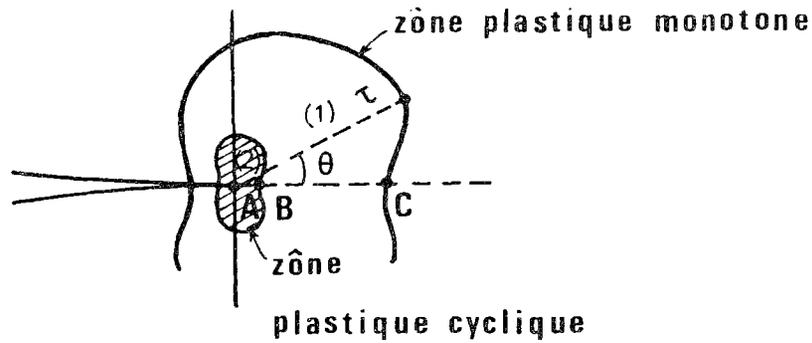
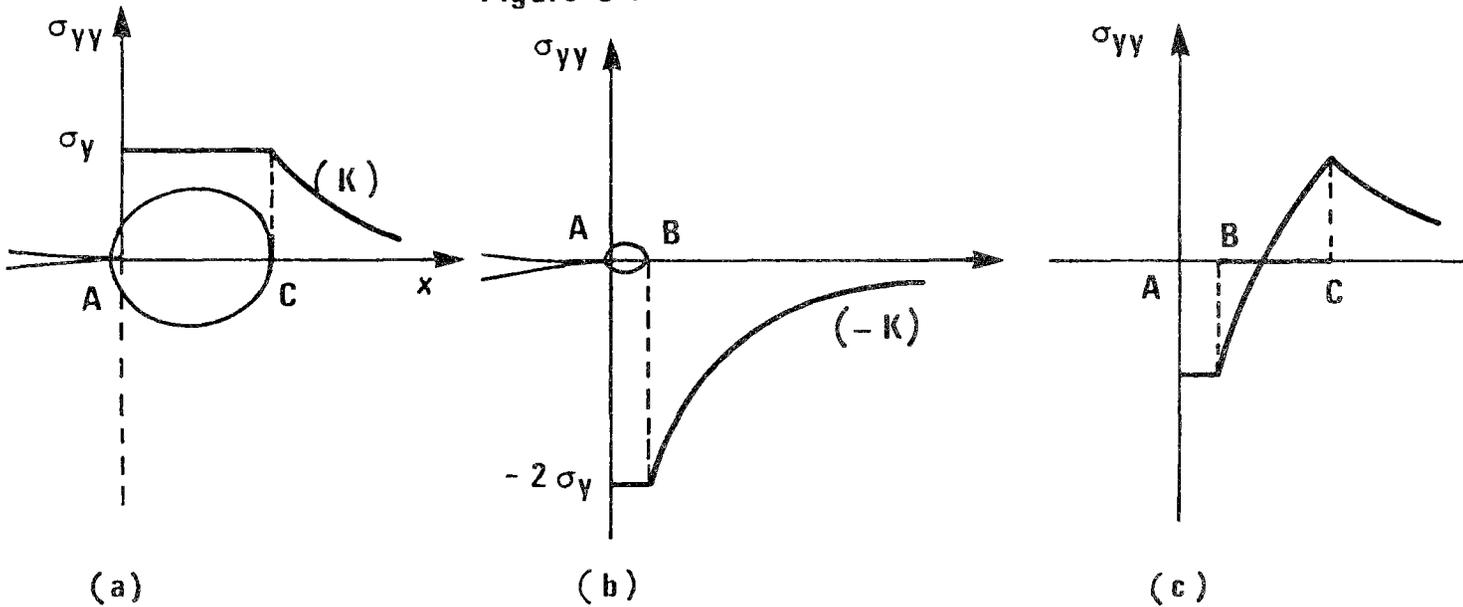


Figure 34.



Sol. Irwin  
 K chargement  
 $\sigma_y$  limite d'élasticité

Sol. Irwin  
 $-K$  chargement  
 $2\sigma_y$  limite d'élasticité

Superposition  
 de 2 états

charge maximale

problème fictif

charge minimale

Figure 35.

Comme  $AC = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K}{\sigma_y}\right)^2$  et  $AB = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K}{2\sigma_y}\right)^2$ , la zone plastique cyclique est, grosso-modo, un quart de la zone plastique monotone.

Dans le cas de chargement ondulé, la charge minimale étant la charge nulle, la distribution de contrainte résiduelle est donnée par la figure 35c. Il existe donc une zone de compression au voisinage immédiat du fond de fissure et une zone plastique résiduelle qui, dans ce cas, représente la zone plastique cyclique.

#### IV.2.2- Zone plastique avec surcharge :

Examinons, toujours dans le même esprit, ce qui se passe lorsque l'on applique une seule surcharge quand le régime permanent de propagation a été établi.

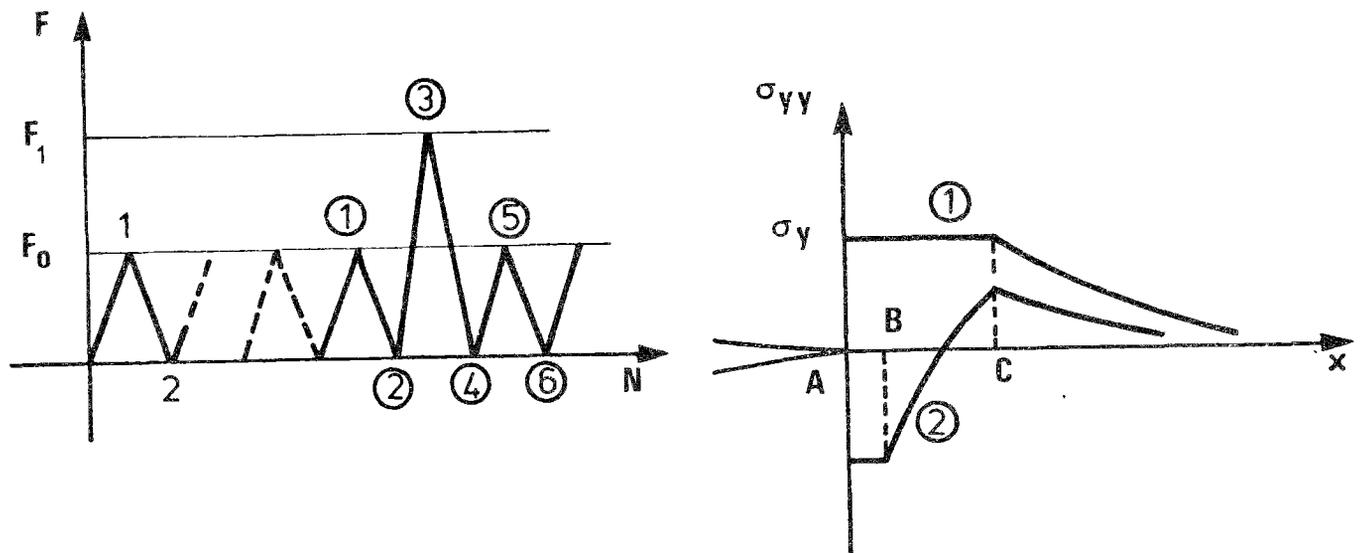


Figure 36.

Admettons que dans le régime établi les zones plastiques monotones et cycliques correspondent aux figures 35a et 35c (compte-tenu que la propagation des contraintes résiduelles ne donnent pas nécessairement la répartition 35a lors d'une montée de charge ; de même, la répartition 35a ne donne pas nécessairement 35c lors d'une descente de charge). Nous essayons de pré-

senter l'évolution des zones plastiques pour les étapes 3, 4, 5, 6 ... définies sur la figure 36.

Rien ne change pour les étapes 3 et 4, nous avons la figure 37 :

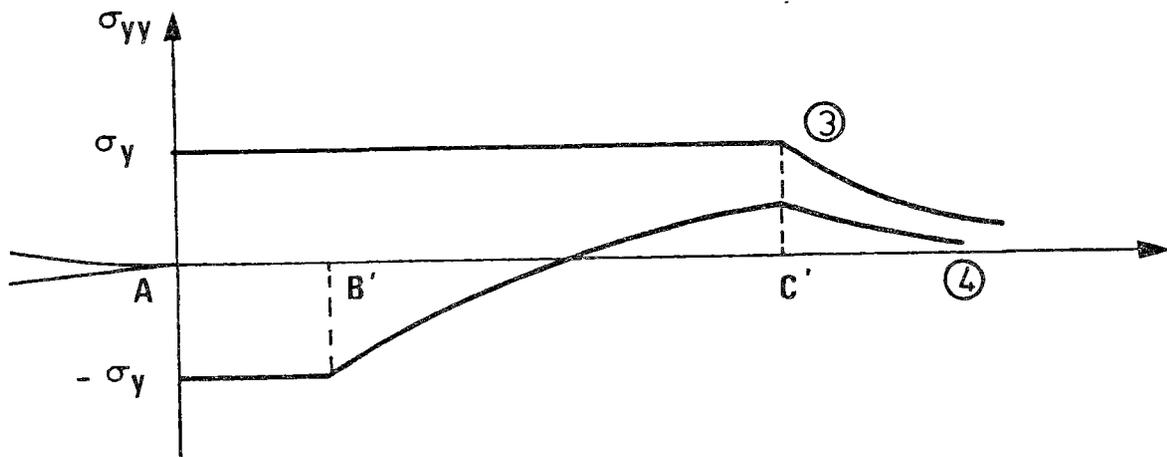


Figure 37.

Après la surcharge, nous obtenons l'étape 5 par superposition de deux répartitions 4 et 35b en changeant de signe, ce qui donne la figure 38.

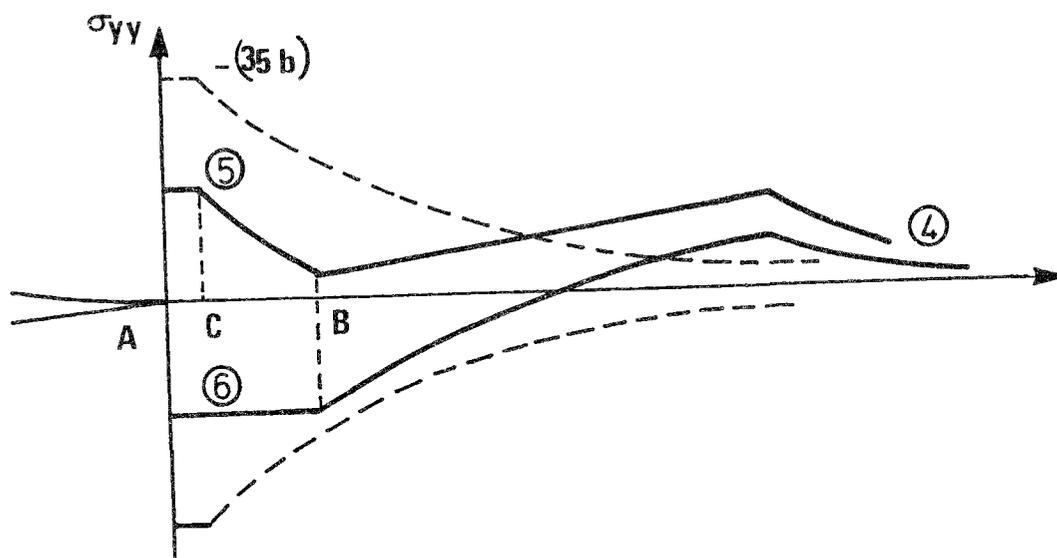


Figure 38.

Pour un rapport de surcharge  $R = \frac{F_1}{F_0} = 2$ , nous remarquons qu'à la charge maximale, la zone plastique est quatre fois plus petite qu'à la charge minimale. La zone plastique résiduelle et l'étendue de la zone de compression sont devenues très importantes par rapport à l'état courant.

Si l'on tient compte de la propagation, la répartition de  $\sigma_{yy}$  va évoluer nécessairement de 5 vers 1 et de 6 vers 2. Pendant cette phase de transition, l'avancement de la fissure s'effectue dans les conditions particulières dues à la surcharge.

IV.2.3- L'évolution de la zone plastique affectée par la surcharge.  
Modèle de Führung

---

Dans le cas d'un chargement aléatoire, Führung [41] remarque que l'état de contraintes résiduelles présente une série de discontinuité correspondant aux points frontières des différentes zones plastiques ; ces discontinuités constituent, selon lui, l'effet de mémoire dû aux déformations plastiques (figure 39).

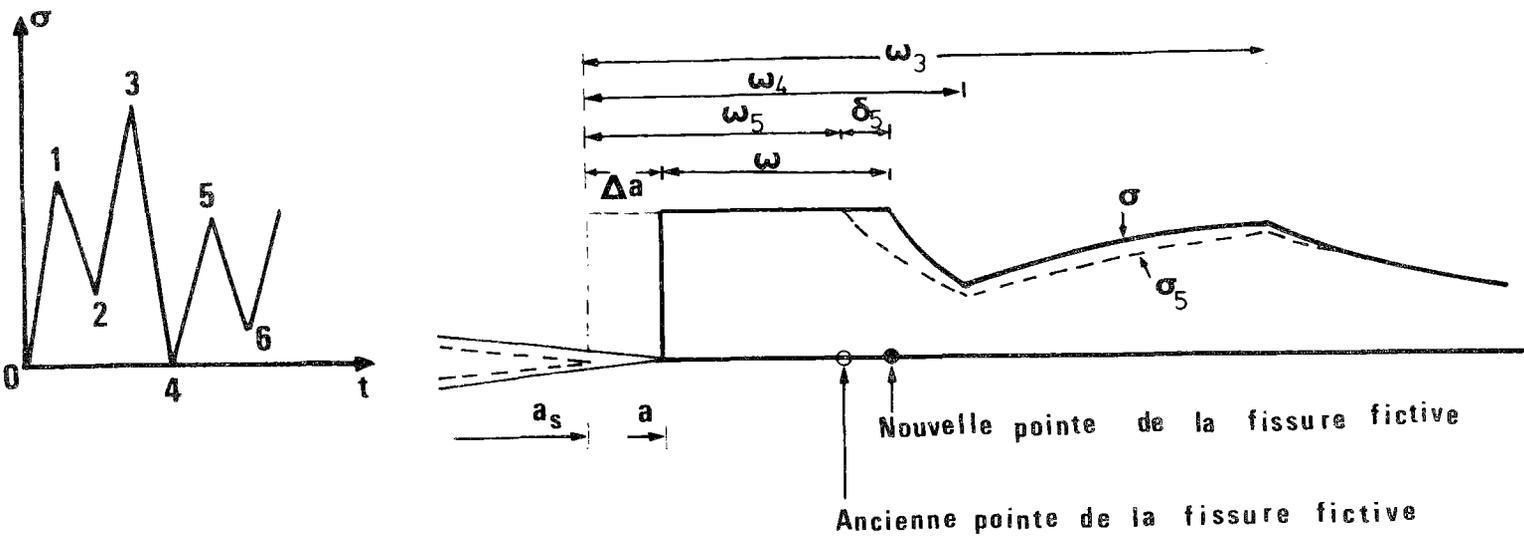


Figure 39.

La distribution des contraintes après un incrément de fissure  $\Delta a$ , implique un déplacement de la frontière élastoplastique (fig. 39).

L'équilibre des forces à la pointe de la nouvelle fissure fictive conduit aux relations suivantes [41] :

$$(82) \quad \omega = \left[ 1 - \frac{\Delta a}{\frac{\pi}{8} \left( \frac{\Delta K_5}{\sigma_Y} \right)^2} \right]^2 \frac{\pi}{8} \left( \frac{\Delta K_5}{2\sigma_Y} \right)^2 \quad \text{lorsque} \quad a + \omega \leq a_s + \omega_4 \quad ,$$

et

$$(83) \quad \omega = \left[ \frac{\frac{\Delta a}{\frac{\Delta K_4 - \Delta K_5}{\sigma_Y}} - 1}{\frac{\pi}{8} \left( \frac{\Delta K_4 - \Delta K_5}{\sigma_Y} \right)^2} \right]^2 \frac{\pi}{8} \left( \frac{\Delta K_4 - \Delta K_5}{2\sigma_Y} \right)^2 \text{ lorsque } a + \omega > a_S + \omega_4 \quad ,$$

où  $\omega$  est la taille de la nouvelle zone plastique à la suite de l'avancement de la fissure de l'incrément  $\Delta a$ ,  $a_S$  est la longueur de la fissure à l'instant de l'application de surcharge,  $a$  est la longueur actuelle de la fissure ( $a = a_S + \Delta a$ ),  $\omega_4$  est la taille de la zone plastique au point 4 (fig. 39), et  $\sigma_Y$  est la limite élastique du matériau. La taille de la zone plastique cyclique est sous la forme :

$$(84) \quad \omega_c = \left[ 1 - \frac{\Delta a}{\frac{\Delta K_6}{\sigma_Y}} \right]^2 \frac{\pi}{8} \left( \frac{\Delta K_6}{2\sigma_Y} \right)^2 \quad .$$

En particulier, la figure 40 montre l'évolution de la zone plastique monotone courante après application d'une surcharge. On remarque que le modèle de Führung prévoit la diminution de la zone plastique monotone, ce qui correspond bien à des observations expérimentales [45].

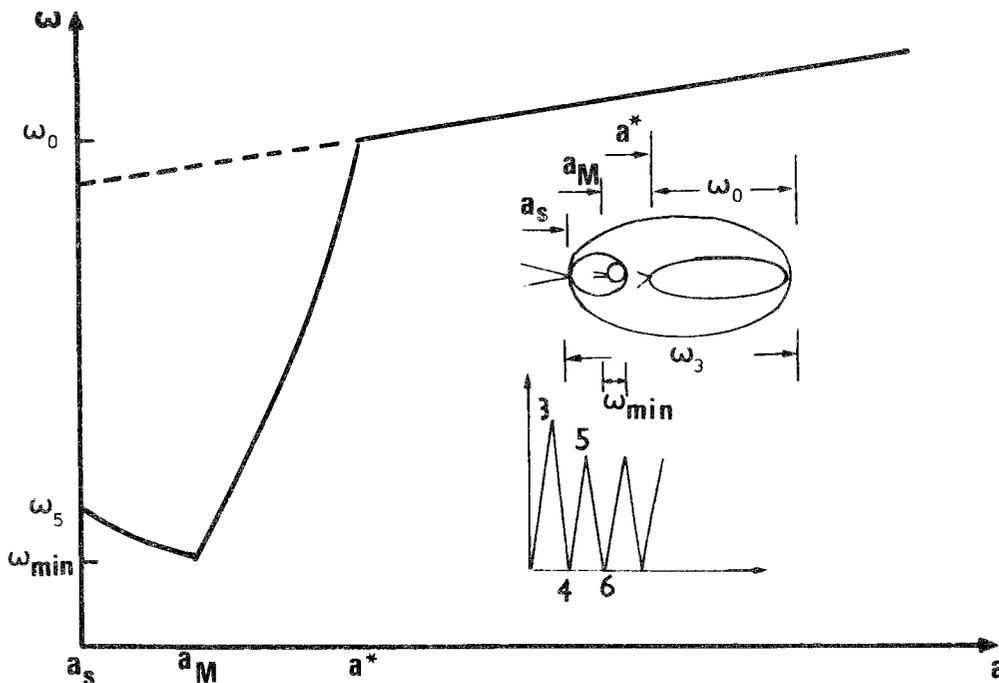


Figure 40 : Evolution de la zone plastique monotone courante après application d'une surcharge, référence [41].

IV.3- MODELES DE PROPAGATION DES FISSURES BASES SUR  
L'INTERACTION DES ZONES PLASTIQUES

Plusieurs formules ont été proposées pour modéliser la propagation de la fissure en considérant les effets d'interaction des zones plastiques courantes et de la surcharge.

IV.3.1- Modèle de Wheeler [ 42 ] :

Les phénomènes physiques qui entrent en jeu lors du retard ou de la propagation de la fissure sont principalement localisés dans la zone plastique. Il est alors naturel de penser que la propagation de la fissure sera affectée lors de la traversée de la zone plastique de surcharge  $\omega_s$  (fig. 41). C'est ainsi que Wheeler a proposé d'affecter à la vitesse un coefficient de ralentissement. Ce coefficient de ralentissement est le rapport de deux zones plastiques :

- La zone plastique monotone sous chargement courant  $\omega_0$ .
- La dimension, compte-tenu de la propagation de la zone plastique monotone due à la surcharge ( $\omega_s - \Delta a$ ).

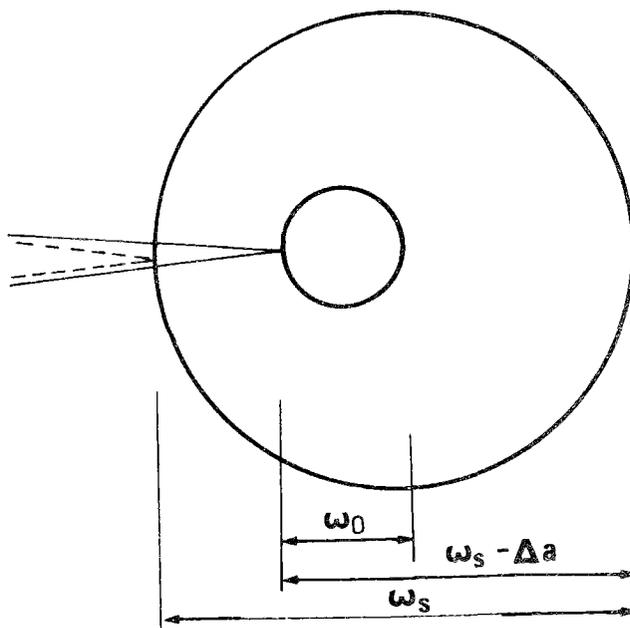


Figure 41.

Modèle de Wheeler.

La loi de fissuration s'exprime par la relation :

$$(85) \quad \frac{da}{dN} = C_p \left( \frac{da}{dN} \right)_0 ,$$

$$\text{où } C_p = \left( \frac{\omega_0}{\omega_s - \Delta a} \right)^\alpha \quad \text{si} \quad \Delta a + \omega_0 < \omega_s ,$$

$$\text{et } C_p = 1 \quad \text{si} \quad \Delta a + \omega_0 > \omega_s ,$$

$\alpha$  est un coefficient dépendant du matériau considéré,

$\left( \frac{da}{dN} \right)_0$  est la vitesse de fissuration avant la surcharge,

$\frac{da}{dN}$  est la vitesse de fissuration après la surcharge.

#### IV.3.2- Modèle de Willenborg [ 43 ] :

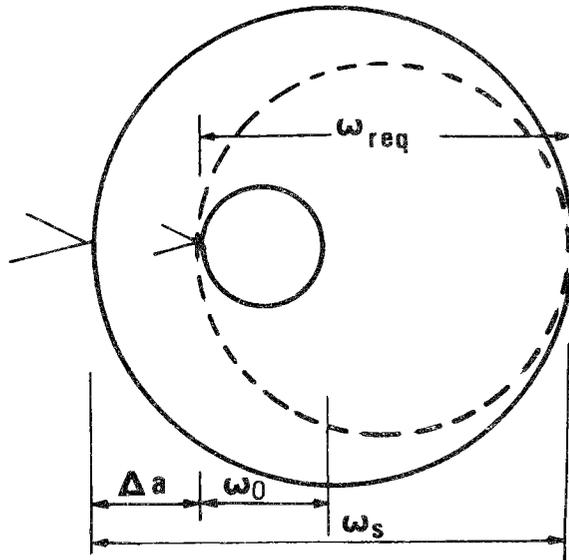


Figure 42.

Modèle de Willenborg

Le modèle de Willenborg consiste à exprimer la loi de fissuration par la relation suivante :

$$(86) \quad \frac{da}{dN} = C (\Delta K_{eff})^m .$$

Considérant les contraintes résiduelles à la pointe de la fissure, l'auteur calcule une amplitude efficace du facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K_{eff}$ .

$$\Delta K_{eff} = K_{max\ eff} - K_{min}$$

et

$$K_{max\ eff} = K_{max} - K_{red} \quad .$$

Quand la fissure se propage dans la zone plastique de surcharge pour un chargement donné, on pose :

$$K_{red} = K_{req} - K_{max} \quad ,$$

$K_{req}$  est le facteur d'intensité de contrainte qu'il faut appliquer pour que la zone plastique correspondante  $\omega_{req}$  (fig. 42) soit tangente à celle due à la surcharge  $\omega_s$  :

$$\omega_{req} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{req}}{\sigma_y} \right)^2 = \omega_s - \Delta a \quad .$$

Lorsque la zone plastique monotone courante est tangente à la zone plastique de surcharge, il n'y a plus de retard.

#### IV.3.3- Modèle de Führung [ 44 ] :

Führung propose de modifier la loi de fissuration, pour un chargement à amplitude quelconque, de la façon suivante :

$$(87a) \quad \left( \frac{da}{dN} \right)_c = f (\Delta K_c) \quad .$$

Une loi de type Paris s'écrirait alors :

$$\left( \frac{da}{dN} \right)_c = C (\Delta K_c)^m \quad ,$$

L'indice  $c$  indiquant qu'il s'agit d'un chargement à amplitude variable ;

$$(87b) \quad \Delta K_c = Q_R \cdot Q_a \cdot \Delta K \quad ,$$

$Q_R$  est le facteur du retard,

$Q_a$  est le facteur d'accélération immédiate.

Nous avons évoqué précédemment que la phase de l'accélération immédiate est négligeable, compte-tenu du fait qu'elle ne correspond qu'à une centaine de cycles (dans le cas d'un seul pic de surcharge).

Le facteur du retard est proportionnel au rapport des zones plastiques monotones correspondant respectivement à un chargement variable  $\omega_{C.V.}$  et à un chargement à amplitude constante  $\omega_0$  et dépend du rapport de charge  $R = \frac{K_{min}}{K_{max}}$ , soit :

$$Q_R = \sqrt{\omega_{C.V.}/\omega_0} / (1-R) \quad \text{si} \quad R \geq 0$$
$$Q_R = \sqrt{\omega_{C.V.}/\omega_0} \quad \text{si} \quad R \leq 0 \quad .$$

#### IV.4- LA FERMETURE A LA POINTE DES FISSURES DE FATIGUE

C'est à l'existence des contraintes résiduelles de compression à la pointe de la fissure de fatigue que l'on attribue le phénomène dit de fermeture. Ce dernier a été mis en évidence par Elber [37] sur un alliage en aluminium, en montrant que la pointe d'une fissure de fatigue peut se fermer avant que la charge appliquée à l'éprouvette ne s'annule. Seule la partie du cycle pendant laquelle la pointe de fissure est ouverte participe à la propagation. Ce phénomène est souvent invoqué pour expliquer l'influence de certains paramètres importants dans l'étude des fissures de fatigue, tels que le rapport de charge  $R$ , la valeur maximale du facteur d'intensité de contrainte  $K_{max}$ , l'épaisseur de l'éprouvette, l'environnement et la surcharge.

IV.5- MODELES BASES SUR LA NOTION DE FERMETURE A LA  
POINTE DE FISSURE DE FATIGUE

IV.5.1- Modèle d'Elber :

Elber a introduit la notion de charge d'ouverture  $F_{ou}$  de la fissure. Il propose de modifier la loi de Paris sous la forme :

$$(88) \quad \frac{da}{dN} = C (\Delta K_{eff})^m ,$$

où  $\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{ou}$  et  $K_{ou}$  est le facteur d'intensité de contrainte correspondant à  $F_{ou}$ .

$\Delta K_{eff}$  peut également s'écrire sous une autre forme :

$$\Delta K_{eff} = U (K_{max} - K_{min}) = U \Delta K .$$

Dans le cas d'un chargement constant, la valeur de U est comprise entre zéro et un. Elber exprime l'influence du rapport de charge R, sur le coefficient U, pour des alliages d'aluminium, au moyen de l'expression empirique suivante :

$$U = .5 + .4 R .$$

Ce modèle en particulier a rendu un grand service pour les études sur l'influence de la surcharge en fatigue. Dans le cas des pièces minces, il explique bien le phénomène de retard et l'arrêt complet de la fissure. L'inconvénient du mécanisme proposé par Elber est qu'il ne peut s'observer strictement qu'en contrainte plane [46], [47], [48].

Dans les éprouvettes plus épaisses, la fermeture apparaît près des surfaces libres, alors que dans la zone centrale, qui subit la déformation plane, c'est plutôt un émoussement qui se produit.

- L'influence de surcharge dans les pièces minces :

Le modèle d'Elber a servi de base à des expériences tentant d'expliquer le retard après la surcharge. Citons les essais de Trebules [49] sur l'alliage de l'aluminium 2024-T 3. En observant la progression de la fissure, à l'aide d'un microscope, il a examiné l'effet de multiples surcharges. On voit sur la figure 43 qu'en augmentant le nombre des surcharges la durée du ralentissement se prolonge. Il a remarqué, en outre, que la vitesse minimale de ralentissement diminue lorsque le nombre des surcharges augmente.

Schijve [50] continue les expériences de Trebules sur l'alliage d'aluminium. En se basant sur le modèle d'Elber, il donne l'évolution du point d'ouverture après l'application d'une ou de plusieurs surcharge. Le ralentissement et l'accélération de la vitesse de fissuration sont liés à l'évolution du point d'ouverture.

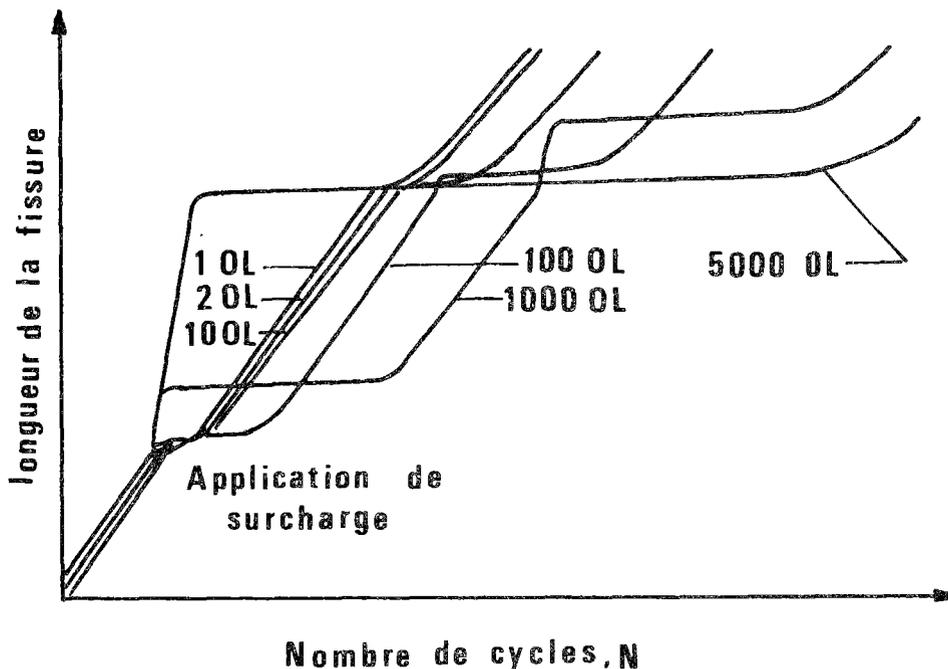


Figure 43 :

L'effet de multiples surcharges, d'après Trebules [49].

IV.5.2- Modèle de Pellas [ 40 ] :

-----

Le modèle de Pellas correspond à la notion du seuil de non propagation. Cette notion peut être étendue en considérant non plus la charge d'ouverture de fissure, mais la charge seuil en-dessous de laquelle la fissure ne se propage pas. La loi de fissuration est constituée alors par deux équations différentielles :

- la première reliant la vitesse de fissuration au facteur d'intensité des contraintes efficaces :

$$\frac{da}{dN} = C_0 (\Delta K_{eff})^m \quad \Delta K_{eff} = K_m - K_s ;$$

- la seconde donnant l'évolution du seuil de fissuration  $K_s$  en fonction du chargement appliqué (fig. 33b) :

$$(89) \quad \frac{d K_s}{dN} = \alpha(R) \left[ \frac{K_{ms}}{\beta(R)} - \frac{K_m}{\gamma(R)} \right]^m .$$

Cette expression est valable dans le cas de l'application d'une seule surcharge. Le paramètre  $m$  et les fonctions  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont à déterminer pour chaque matériau, d'après les essais de base. Du point de vue expérimental, on mesure donc le seuil de non propagation. C'est évidemment une grandeur macroscopique plus accessible que la mesure de  $F_{Ou}$ , surtout en déformation plane.

IV.5.3- Modèle de Sunder :

-----

R. Sunder [ 51 ] a proposé un modèle mathématique pour la propagation de fissure sous chargement variable. Ce modèle est fondé sur le concept de la fermeture de la fissure. Sunder considère deux types de chargement :

- Pour le type "Hilo" (fig. 44), il propose la relation exponentielle suivante :

$$(90a) \quad K_{Ou} = K_{Ou} c_2 + K_{Ou}^+ e^{-\alpha_1^2 (a-a_1)} \quad a \geq a_1 .$$

Les valeurs  $K_{Ou} c_2$ ,  $K_{Ou}^+$  et  $a$  sont illustrées sur la figure 44.

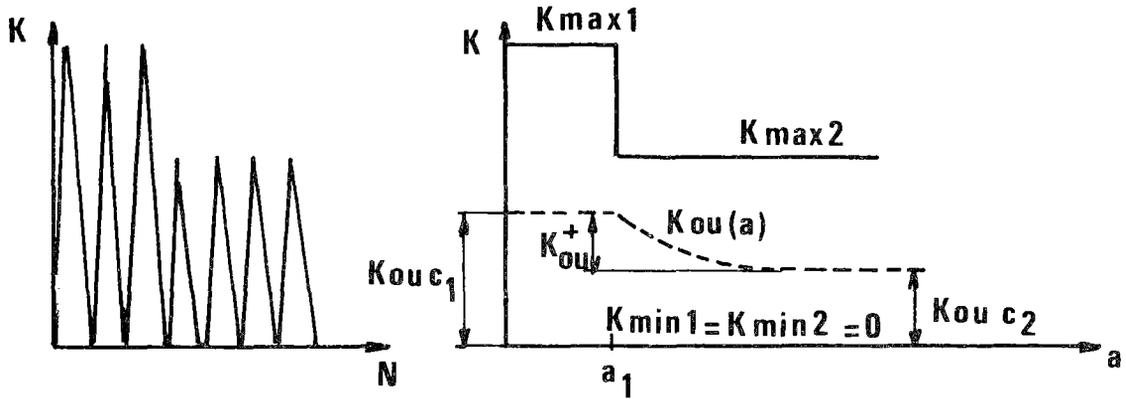


Figure 44 :

Modèle de Sunder pour le chargement de type "Hilo".

- Pour un chargement du type "Lo-Hi", Sunder propose la relation suivante :

$$(90b) \quad K_{ou} = K_{ou\ c2} + \Delta K_{ou} e^{-\alpha_2^2(a-a_1)} \quad a \geq a_1 \quad ,$$

\$K\_{ou\ c2}\$, \$\Delta K\_{ou}\$ et \$a\_1\$ sont illustrées sur la figure 45.

L'auteur donne les valeurs de \$\alpha\_1\$ et \$\alpha\_2\$ des formes suivantes :

$$\alpha_1 = \frac{K_{\alpha1}}{K_{max\ 1}^2} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{K_{\alpha2}}{\Delta K^2} \quad ,$$

où \$K\_{\alpha1}\$ et \$K\_{\alpha2}\$ sont des constantes et :

$$\Delta K = K_{max\ 2} - K_{max\ 1} \quad .$$

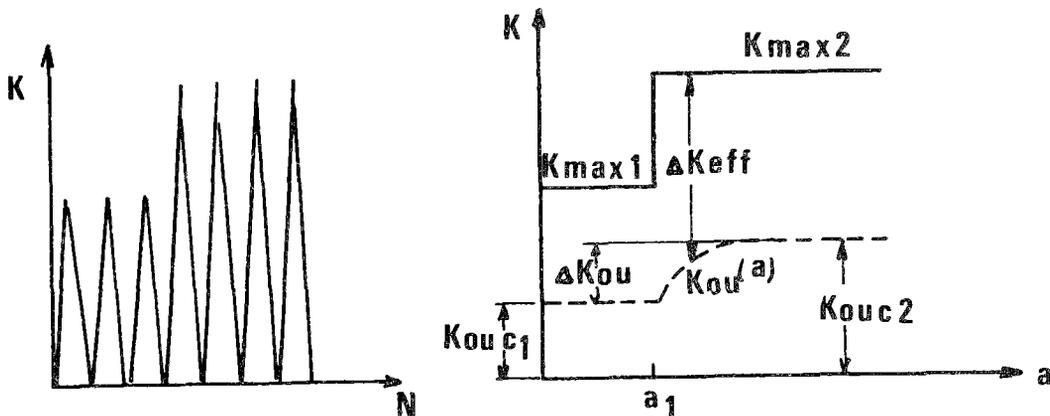


Figure 45 :

Modèle de Sunder pour le chargement de type "Lo-Hi".

IV.6- APPLICATION DU CONCEPT DE LA FERMETURE A DES PIECES EPAISSES  
SOUMISES A DES SURCHARGES

Nous schématisons l'interaction entre le retard et la fermeture de la fissure de la manière suivante (fig. 46) (cas d'une seule surcharge) :

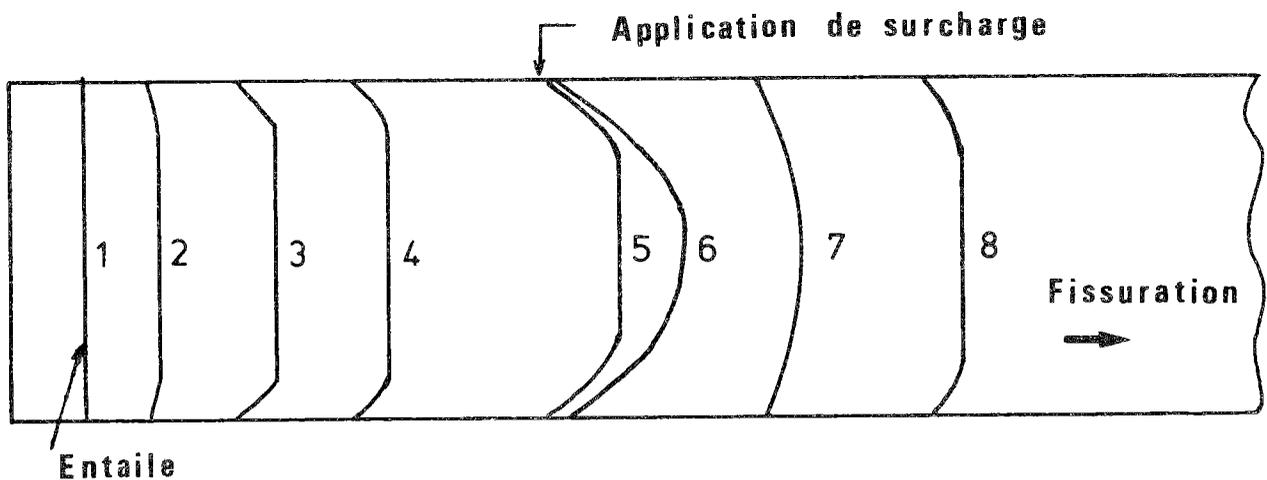


Figure 46.

Modèle de fissuration avant et après la surcharge en condition de déformation plane.

- La fissure commence à se propager à partir de l'entaille (1).
- Au début de la propagation, le fond de la fissure prend les configurations (2) et (3), ce qui montre que la fermeture à la surface est plus importante qu'au coeur de la pièce.
- La vitesse de fissuration augmente avec la courbure du front de la fissure ( $V(s) \sim (\Delta K)^2/R$  selon H.D. Bui),  $R$  est le rayon de la courbure), et diminue avec la fermeture ( $V \sim (K_{\max} - K_{ou})^n$ ). Cela nous conduit à une stabilité du front de fissure (4).

- A la suite de l'application de surcharge (5), une déchirure statique se produit au coeur de la pièce (6). La fissure reste alors bloquée (de (5) à (6)) en surface, par l'importante déformation plastique qui se développe en contrainte plane [ 52 ].
- A la configuration (6), nous avons une forte courbure en surface, par conséquent, de (6) à (7), la fissure se propage essentiellement à la surface.
- Elle trouve enfin sa stabilité (8).

Nous avons évoqué précédemment que dans le cas des pièces tridimensionnelles, le modèle d'Elber se heurte à des difficultés. En effet, peu de techniques permettent une observation au coeur des déformations à l'extrémité d'une fissure ; celles utilisées habituellement ne donnant que les déplacements en surface.

#### IV.6.1- Méthode de comparaison des stries de fatigue [ 53 ] :

-----

Pour avoir une indication indirecte sur les ouvertures en fond de fissure, une des méthodes proposées consiste à comparer les stries de fatigue, c'est-à-dire les taux de fissuration par cycle  $\frac{da}{dN}$ , laissées par une séquence de charges programmées. Faral se propose de vérifier le modèle de propagation suivant :

$$\frac{da}{dN} = C (U \Delta K)^m$$

où :

$$U = \frac{K_{\max} - K_{ou}}{K_{\max} - K_{\min}}$$

en déterminant  $K_{ou}$  au coeur de l'éprouvette.

Deux types de séquences d'essais sont envisagés, désignés par essais de type R et de type T représentés sur la figure 47.

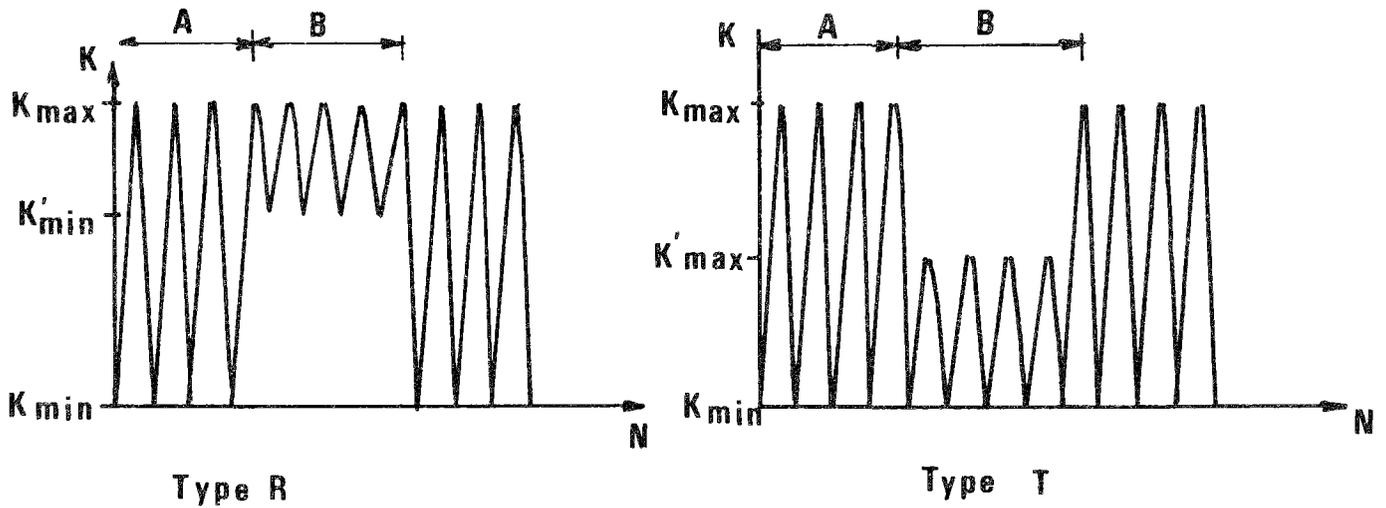


Figure 47.

Types de séquences de chargement.

Se fondant sur le modèle d'Elber, on trouve le facteur d'intensité de contrainte d'ouverture sous la forme :

$$(91a) \quad \text{pour le type R : } K_{ou} = K_{max} \left[ 1 - \sqrt{x} (1 - R) \right]$$

$$\text{où } x = \left( \frac{da}{dN} \right)_A / \left( \frac{da}{dN} \right)_B \quad \text{et} \quad R = \frac{K'_{min}}{K_{max}},$$

et :

$$(91b) \quad \text{pour le type T : } K_{ou} = K_{max} \frac{1 - \rho \sqrt{x}}{1 - \frac{n}{\sqrt{x}}}$$

$$\text{où } \rho = \frac{K'_{max}}{K_{max}}.$$

La figure 48 représente une fractographie typique. Sur cette figure, l'effet de ralentissement après surcharge est nettement visible.



Figure 48 (tirée de [ 53 ]).

IV.7- UN MODELE FONDE SUR LA NOTION DE L'ECARTEMENT AU FOND D'UNE  
FISSURE DE FATIGUE APRES APPLICATION D'UN SEUL PIC DE SURCHARGE

Nous donnons un modèle en reliant la vitesse de fissuration  $\frac{da}{dN}$  à l'écartement en fond de fissure (C.T.O.D.). Dans une première approche, on peut supposer que la vitesse de propagation est égale à la moitié de (C.T.O.D.), en se basant sur l'hypothèse que l'avancement de la fissure au cours d'un cycle se fait par glissement sur des plans de cisaillement déposés à 45° de part et d'autre de la fissure [54].

Pelloux [55] montre que la vitesse de propagation ne peut pas être une fonction linéaire de (C.T.O.D.). Il propose la relation suivante :

$$\frac{da}{dN} = C \text{ (C.T.O.D.)}^2 \quad .$$

Nous généralisons la proposition de Pelloux sous la forme :

$$(92) \quad \frac{da}{dN} = C \text{ (C.T.O.D.)}^m \quad ,$$

C et m sont caractéristiques du matériau utilisé.

IV.7.1- Calcul de (C.T.O.D.) à la suite de l'application d'une surcharge :

-----

Avant de calculer (C.T.O.D.), rappelons que la surcharge entraîne un élargissement de la zone plastique en compression résiduelle au niveau de la fissure. Il est utile de donner l'explication d'Elber [56] :

*"Le retard à la propagation d'une fissure après une surcharge peut s'expliquer en examinant le comportement de la grande zone plastique créée par la surcharge en aval de la pointe de la fissure. Le matériau élastique qui entoure cette zone plastifiée agit sur elle comme un mors et est responsable des contraintes résiduelles de compression. Tant que cette zone plas-*

tifiée est devant la pointe de la fissure, ce serrage n'a pas d'influence sur l'ouverture. Quand la fissure se propage dans la zone plastifiée, le serrage agit sur les nouvelles surfaces de rupture. Ce serrage qui s'établit à mesure que la fissure se propage dans la zone plastifiée, implique l'exercice d'une contrainte extérieure plus grande pour ouvrir la fissure, ainsi elle se propagera à vitesse plus faible dans cette zone et peut même s'arrêter".

Nous distinguons trois étapes :

- Dans le cas où la contrainte résiduelle créée par la surcharge est devant la pointe de la fissure, par conséquent, elle n'a pas d'influence sur l'ouverture, on suppose alors que la fissure est uniquement soumise à la charge de référence (charge extérieure appliquée avant et après la surcharge). Sous ce chargement, nous désignons l'écartement en fond de fissure par  $\delta_1$  (figure 48a).
- Lorsque la fissure se propage dans la zone plastique résiduelle créée par la surcharge, elle est soumise à la fois à la charge de référence et à la partie des contraintes résiduelles qu'elle a traversée (fig. 48b). Nous désignons par  $\delta_2$  l'écartement du fond de fissure sous une partie des contraintes résiduelles.
- Enfin, lorsque la fissure sort de cette zone plastique, en plus de la charge de référence, elle est soumise à des contraintes résiduelles (fig. 48c). Ces dernières produisent un écartement que nous désignerons par  $\delta_3$ .

Nous calculons les écartements du fond de fissure par le modèle de Barenblatt-Dugdale (cf. Chap. II) :

Lorsque la fissure est soumise à la charge extérieure (fig. 48a), nous avons [57] :

$$\delta_1 = \frac{8 \sigma_y a}{\pi E} \text{Log} \left( \sec \frac{\pi \sigma}{2 \sigma_y} \right) .$$

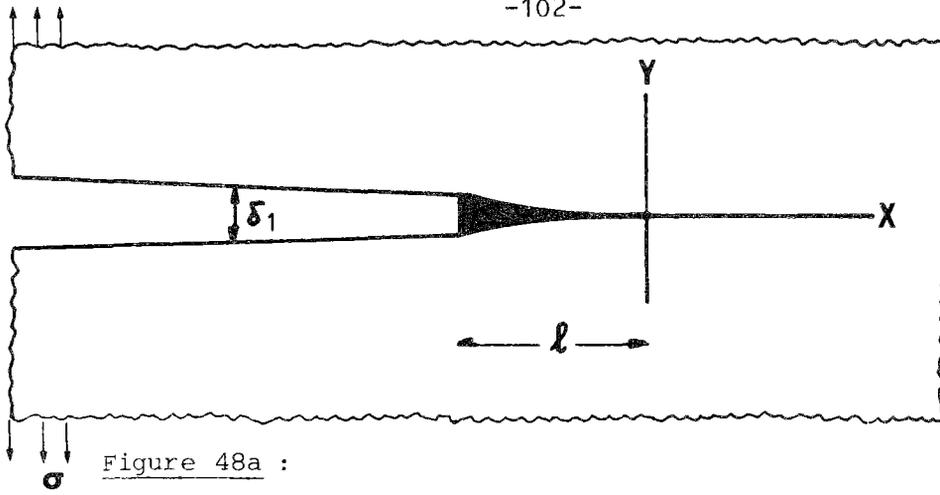


Figure 48a :

Fissure soumise à la charge extérieure de référence.

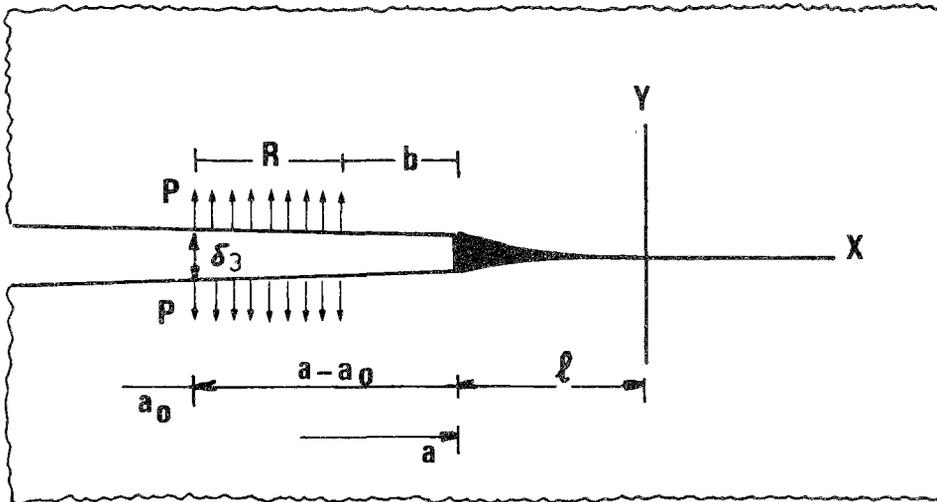


Figure 48c :

Fissure soumise à des contraintes résiduelles créées par la surcharge.

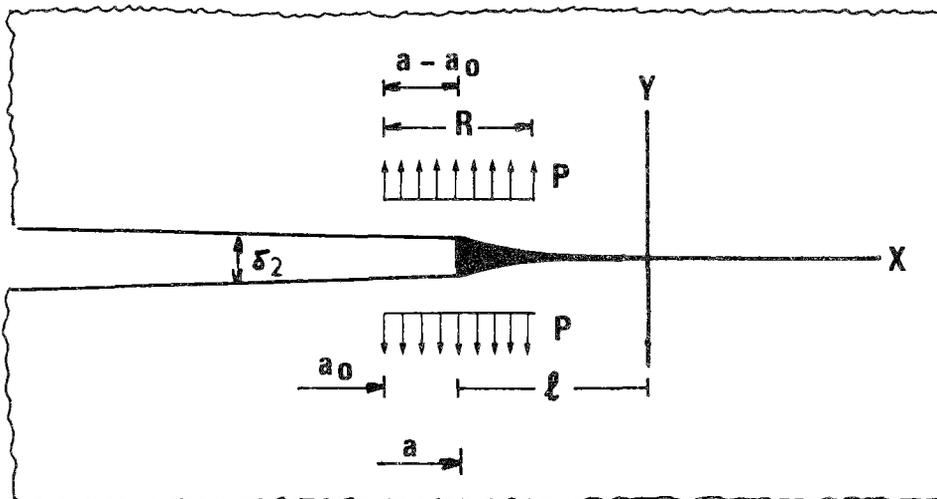


Figure 48b :

Fissure soumise à la partie des contraintes résiduelles qu'elle a traversée ( $a - a_0$ ).

Par approximation nous écrivons :

$$\delta_1 = \frac{8 \sigma_Y a}{\pi E} \operatorname{Log} \frac{1}{1 - \frac{\pi^2 \sigma^2}{8 \sigma_Y^2}} = \frac{8 \sigma_Y a}{\pi} \cdot \frac{\pi^2 \sigma^2}{8 \sigma_Y^2} ,$$

or :

$$(93) \quad \delta_1 = \frac{K_I^2}{E \sigma_Y} \quad \text{ou} \quad \delta_1 = \frac{8 \sigma_Y \ell}{\pi E} ,$$

où  $\ell$  est la dimension de la zone des forces de cohésion attractives, introduites par Barenblatt.

Lorsque la fissure traverse la zone plastique résiduelle, créée par surcharge (fig. 48b), en supposant que la contrainte résiduelle est égale à la limite élastique en traction ( $P = \sigma_Y$ ), nous avons [57] :

$$\delta_2 = \frac{8 P (a - a_0)}{\pi E} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{\ell}{(a - a_0) + \ell}} ,$$

où :

$$\frac{\ell}{a - a_0} = \frac{\left(\frac{P}{\sigma_Y}\right)^2}{2 \left(\frac{P}{\sigma_Y}\right) + 1} ,$$

puisque  $P = \sigma_Y$ , nous avons alors :  $\ell = \frac{a - a_0}{3}$

(94)

$$\delta_2 = \frac{8 \sigma_Y}{\pi E} (a - a_0) \operatorname{Ln} \sqrt{3} ,$$

$a$  est la longueur actuelle de la fissure et  $a_0$  est la longueur de la fissure à l'instant de l'application de la surcharge.

Enfin, lorsque la fissure sort de la zone plastique résiduelle, nous avons [57], figure 48c :

$$\delta_3 = \frac{8 P (a - a_0)}{\pi E} \left( \tanh^{-1} \sqrt{\frac{\ell}{(a-a_0) + \ell}} - \frac{b}{a - a_0} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{\ell}{b + \ell}} \right) ,$$

où  $b = a - a_0 - R$ ,  $R$  étant la taille de la zone plastique résiduelle produite par la surcharge  $R = \frac{\pi}{8} \left( \frac{K_S}{2\sigma_Y} \right)^2$ ,

et :

$$\frac{\ell}{a - a_0} = \frac{\left(\frac{P}{\sigma_Y}\right)^2}{1 - 4 \left(\frac{P}{\sigma_Y}\right)^2} \left( 1 + \frac{b}{a - a_0} - 2 \sqrt{\frac{b}{a - a_0} + \left(1 - \frac{b}{a - a_0}\right)^2 \left(\frac{P}{\sigma_Y}\right)^2} \right) ,$$

en prenant  $P = \sigma_Y$ , nous avons :

$$\frac{\ell}{a - a_0} = -\frac{1}{3} \left( 2 - \frac{R}{a - a_0} - 2 \sqrt{1 - \frac{R}{a - a_0} + \left(\frac{R}{a - a_0}\right)^2} \right) .$$

L'écartement  $\delta_3$  peut alors s'écrire sous la forme :

$$(95) \quad \delta_3 = \frac{8 \sigma_Y R}{\pi E} f \left( \frac{a - a_0}{R} \right) .$$

La figure (49) représente  $f \left( \frac{a - a_0}{R} \right)$  en fonction de l'accroissement de la fissure  $a - a_0$ . Nous remarquons que l'influence des contraintes résiduelles sur l'écartement  $\delta_3$  s'atténue au fur et à mesure que la fissure s'éloigne de celles-ci. Pour  $a - a_0 = 2.5 R$  la valeur de  $\delta_3$  est pratiquement négligeable.

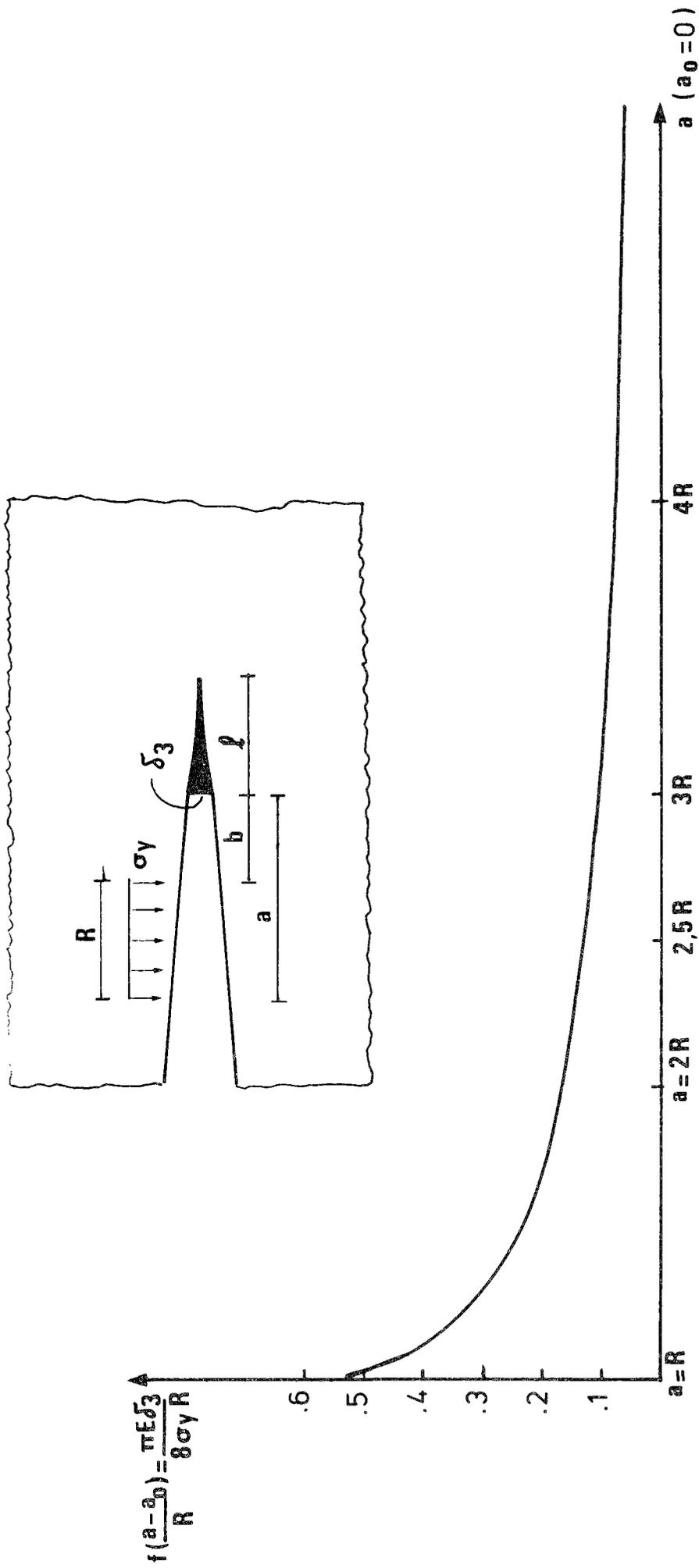


Figure 49 :

L'ouverture du fond de fissure sous le chargement fictif des contraintes résiduelles créées par la surcharge.

IV.7.2- Modèle fondé sur (C.T.O.D.) :

La relation (88) nous donne :

$$\frac{\left(\frac{da}{dN}\right)_O}{\left(\frac{da}{dN}\right)_S} = \left[ \frac{(C.T.O.D.)_O}{(C.T.O.D.)_S} \right]^m .$$

L'indice o a été utilisé pour indiquer la vitesse et l'écartement avant la surcharge, tandis que l'indice s indique ces valeurs après la surcharge.

Deux cas sont à envisager :

- Si  $a - a_o \leq R$  nous avons :

$$\frac{\left(\frac{da}{dN}\right)_O}{\left(\frac{da}{dN}\right)_S} = \frac{\delta_1}{(\delta_1 - \delta_2)}^m = \left[ \frac{\frac{K_I^2}{E \sigma_Y}}{\frac{K_I^2}{E \sigma_Y} - \frac{8 \sigma_Y}{\pi E} (a - a_o) \ln \sqrt{3}} \right]^m .$$

Supposons  $\alpha = \frac{K_S}{K_I}$ ,  $K_S$  est le facteur d'intensité de contrainte de surcharge et  $K_I$  est celui de la charge de référence. Nous avons :

$$R = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_S}{2\sigma_Y}\right) = \frac{\pi}{8} \left(\frac{\alpha K_I}{2\sigma_Y}\right)^2 ,$$

d'où :

$$K_I^2 = \frac{8 (2 \sigma_Y)^2 R}{\pi \alpha^2} .$$

Nous avons donc :

$$(96) \quad \frac{\left(\frac{da}{dN}\right)_O}{\left(\frac{da}{dN}\right)_S} = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \frac{a - a_O}{R} \ln \sqrt{3}\right]^m}, \quad a - a_O \leq R,$$

donc :

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_S = \left[1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \frac{a - a_O}{R} \ln \sqrt{3}\right]^m \left(\frac{da}{dN}\right)_O \quad a - a_O \leq R,$$

pour  $a = a_O$  nous avons  $\left(\frac{da}{dN}\right)_O = \left(\frac{da}{dN}\right)_S$ ,

pour  $a - a_O = R$ , c'est-à-dire le point pour lequel la vitesse de fissuration atteint son minimum, nous trouvons :

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{\min} = \left[1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \ln \sqrt{3}\right]^m \left(\frac{da}{dN}\right)_O.$$

- Par contre si  $a - a_O \geq R$  nous avons :

$$(97) \quad \frac{\left(\frac{da}{dN}\right)_O}{\left(\frac{da}{dN}\right)_S} = \left(\frac{\delta_1}{\delta_1 - \delta_3}\right)^m = \left[ \frac{\frac{8 \sigma_Y R}{\pi E \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}}{\frac{8 \sigma_Y R}{\pi E \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} - \frac{8 \sigma_Y R}{\pi E} f \left(\frac{a - a_O}{R}\right)} \right]^m,$$

donc :

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_S = \left[1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 f \left(\frac{a - a_O}{R}\right)\right]^m \left(\frac{da}{dN}\right)_O \quad a - a_O \geq R.$$

### IV.7.3- Estimation de la taille de la zone affectée par surcharge :

---

La zone affectée représente la zone dans laquelle la vitesse de fissuration est ralentie. Envisageons la distribution de la contrainte résiduelle créée par la surcharge, figure 50.

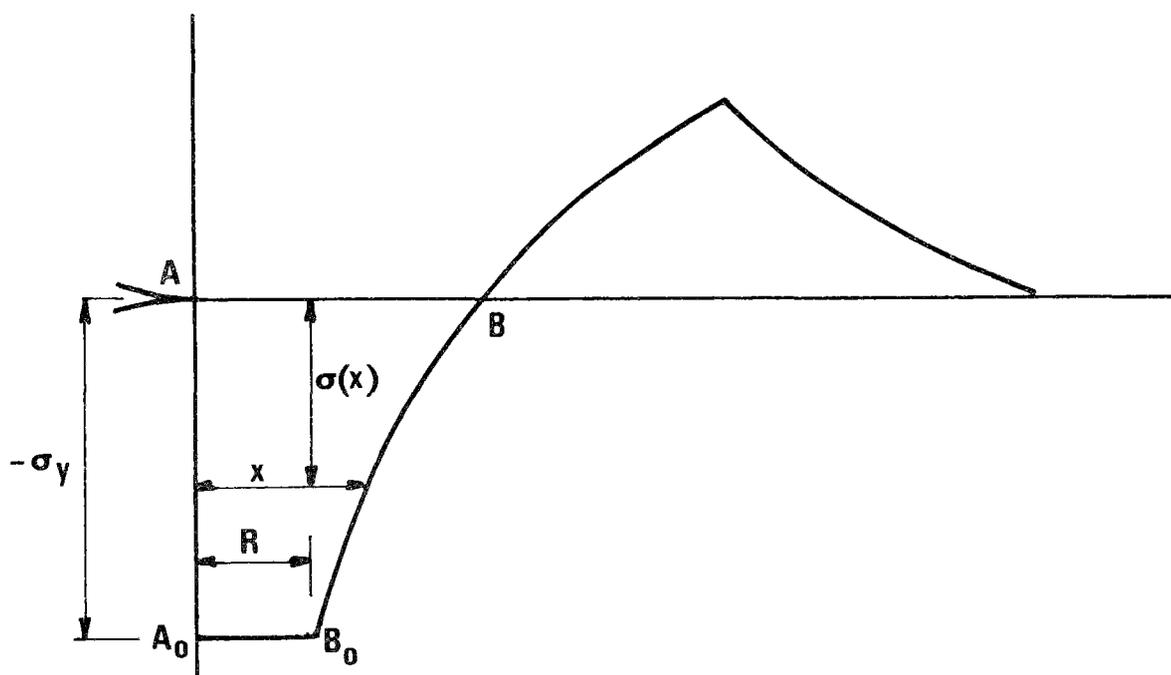


Figure 50.

*Distribution de la contrainte résiduelle.*

Nous montrons par le calcul numérique que pendant la période où la pointe de la fissure se trouve dans la partie comprimée de la contrainte résiduelle,  $AB$ , l'écartement en fond de fissure, et, par conséquent, la vitesse de fissuration sont perturbés. Pendant cette période, la répartition de la contrainte résiduelle reste invariable et fixe. Une fois la pointe de la fissure sortie de cette partie comprimée, la propagation prend sa forme initiale. Nous estimons alors que la taille de la zone affectée par la surcharge,  $a_f$ , est égale à la partie comprimée de la contrainte résiduelle  $AB$ .

La contrainte  $\sigma(x)$  dans la région élastique  $BB_0$  a été donnée sous la forme [39] (fig. 50) :

$$(98) \quad \sigma(x) = \sigma_Y \left( 1 - \sqrt{\frac{2R}{x - \frac{R}{2}}} \right) .$$

Cette formule est une extension de la solution de Rice [58], pour des fissures en mode III. La contrainte  $\sigma(x)$  s'annule pour  $x = a_f$ . Nous avons donc :

$$\sigma_Y \left( 1 - \sqrt{\frac{2R}{a_f - \frac{R}{2}}} \right) = 0 .$$

On en déduit :

$$(99) \quad a_f = 2.5 R .$$

Cette formule a été confirmée par nos calculs numériques.

- *Comparaison avec la taille de la zone affectée des autres modèles :*

---

Le modèle de Wheeler ainsi que celui de Willenborg donnent l'estimation suivante :

$$a_f = \omega_S - \omega_O ,$$

où  $\omega_S$  est la taille de la zone plastique monotone créée par la surcharge et  $\omega_O$  est la taille de la zone plastique monotone courante.

Selon ces modèles, la taille de la zone affectée est souvent légèrement supérieure à celle que nous avons estimée précédemment (99). Nous pensons que la zone plastique monotone de la surcharge ne peut pas être forcément considérée comme un facteur influant la taille de la zone affectée.

Le modèle de Mitsuoka [39] prend la taille de la zone affectée sous la forme suivante :

$$a_f = 2.5 \omega_R - \omega_O ,$$

où  $\omega_R$  est la taille de la zone plastique résiduelle créée par surcharge.

## IV.8- SIMULATION NUMERIQUE DE L'EFFET D'UNE SURCHARGE

Nous essayons de simuler, par le calcul numérique, la propagation d'une fissure de fatigue dans une éprouvette mince soumise à un programme de charge à amplitude constante comportant une surcharge.

- Nous souhaitons, dans un premier temps, vérifier les estimations de la taille des zones plastiques monotones ou cycliques ; ces estimations ont été données en liaison avec des modèles d'Irwin ou de Barenblatt-Dugdale ou de Führung. Ces estimations sont très utiles pour les applications, car elles permettent, à peu de frais, de prévoir la réponse élastoplastique dans des situations plus complexes que celles que nous étudions ici.

- Dans un deuxième temps, la simulation permet de comprendre les distributions des contraintes résiduelles avant et après la surcharge et d'obtenir des bonnes estimations de la vitesse de fissuration de la zone affectée par la surcharge. La vitesse de fissuration ainsi que la zone affectée par la surcharge peuvent être modélisées à partir de cette analyse numérique.

### IV.8.1- Méthode de calcul :

-----

Le calcul a été effectué à l'aide du programme TITUS. Il s'agit de calculer la réponse d'une éprouvette mince, élastoplastique, en contrainte plane. Le matériau est supposé élastique parfaitement plastique, obéissant au critère de Misès ( $E = 200000 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_y = 1224.7 \text{ MPa}$ ). La méthode de calcul a été abordée plus en détail dans le second chapitre.

#### IV.8.2- Définition de la structure étudiée :

-----

La figure (51) correspond à la moitié d'une plaque fissurée de hauteur 15mm, de largeur 38,5mm. La discrétisation spatiale présentée est obtenue par un maillage automatique. Seule la région entourant le fond de fissure, qui est susceptible d'être plastifiée, est maillée finement. On aboutit à 500 degrés de liberté et 287 mailles. Les conditions aux limites sont similaires à celles de l'éprouvette C.T. étudiée dans le chapitre II.

#### IV.8.3- Simulation de la propagation de fissure :

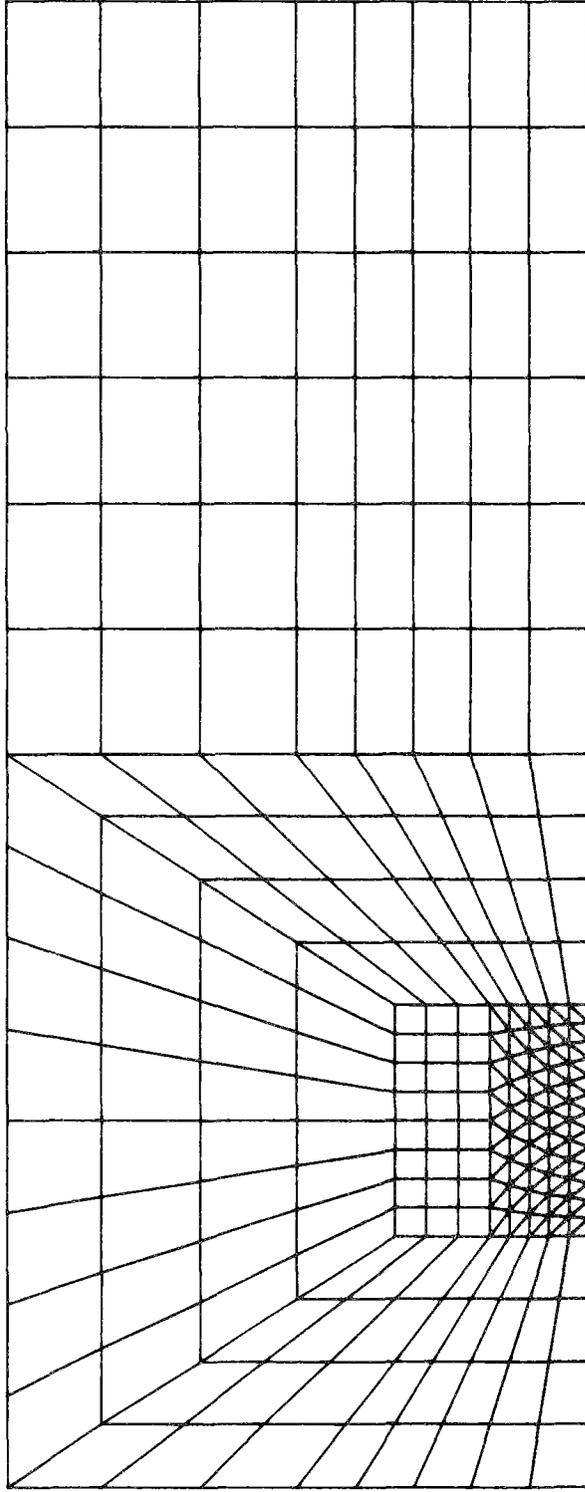
-----

L'éprouvette est soumise à une pression uniforme  $p(t)$  sur les bords supérieur et inférieur. Pour simuler la propagation, au cours de chaque montée en charge, on supprime une liaison ( $u_y = 0$ ) pour le noeud correspondant à l'extrémité de la fissure. Tout se passe comme si la fissure progresse d'une longueur égale à la dimension d'une maille. Cette méthode ne fait pas intervenir un critère de propagation, car on libère systématiquement un noeud par cycle numérique. Cette technique a été adoptée dans plusieurs études, [47], [28], [18]. Les difficultés essentielles proviennent, d'une part de la dimension des mailles, d'autre part du niveau de charge de déblocage du noeud en fond de fissure. En réalité, nous ne pouvons pas suivre la propagation réelle cycle par cycle, car cela nous implique d'utiliser des mailles de  $10^{-5}$  à  $10^{-4}$  mm, ce qui nécessite beaucoup de calculs intermédiaires. Nous modélisons le phénomène à partir d'un maillage plus grand, 0,46mm de dimension. Malgré cette différence de dimension, la solution numérique donne une bonne image de la réalité par un passage à la limite.

La propagation est simulée pour une fissure de longueur  $a = 6,96$ mm jusqu'à  $a = 8,8$ mm sous un chargement répété à amplitude constante ( $\sigma_{\min} = 0$ ,  $\sigma_{\max} = 300$  MPa). Ensuite, on applique une surcharge plus ou moins forte, les cas étudiés correspondent à  $\sigma_{\text{pic}}^1 = 440$  MPa et  $\sigma_{\text{pic}}^2 = 600$  MPa. Nous avons déblocqué le noeud en fond de fissure au niveau de la charge maximale, après la montée de charge.

Les charges de fermeture de la fissure sont déterminées à chaque étape de la propagation.

# FATIGUE SURCHARGE



Y  
X

Figure 51

L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

IV.8.4- Résultats des calculs :

-----  
(Chargement à amplitude constante)

Les figures 73 à 77 montrent l'évolution de l'ouverture de la fissure respectivement au cours du 1er au 5ème cycle de charge. Après quelques cycles, nous arrivons à une stabilisation. Ces courbes illustrent également le niveau de contrainte de fermeture. Ces valeurs de contrainte de fermeture nous permettent de définir la notion de  $\Delta K_{\text{eff}}$ .

Les figures 91 à 95 montrent les distributions de contrainte  $\sigma_{yy}$  pour la charge maximale et pour la charge minimale. Après quelques cycles, ces distributions se stabilisent.

Les figures 52 à 55 et 57 représentent l'allure de la zone plastique monotone au maximum de la charge, respectivement pour 1 ..... 5 cycles de charge. Nous avons vu dans le chapitre I que la taille de la zone plastique est :

$$\omega_{\text{IR}} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_{\text{I}}}{\sigma_{\text{Y}}} \right)^2 \quad \text{d'après le modèle d'Irwin,}$$

et :

$$\omega_{\text{DUG}} = \frac{\pi}{8} \left( \frac{\Delta K_{\text{I}}}{\sigma_{\text{Y}}} \right)^2 \quad \text{d'après Dugdale.}$$

Le tableau 2 donne, pour notre problème particulier, les tailles des zones plastiques :  $\omega_{\text{X}}$  en direction de la propagation et  $\omega_{\text{Y}}$  en direction perpendiculaire à la propagation ; ces valeurs sont calculées numériquement. Ce tableau donne également les tailles des zones plastiques selon Irwin et Dugdale.

CYCLES	$\Delta K_I$ N/mm <sup>3/2</sup>	$\omega_{IR}$ mm	$\omega_{DUG}$ mm	Calcul	
				$\omega_x$ (mm)	$\omega_y$ (mm)
1	1865	.74	.91	1.38	.5
2	1962.2	.82	1.01	1.38	.5
3	2062.1	.9	1.11	1.38	.5
4	2165	.99	1.23	1.38	1
5	2271.5	1.1	1.35	1.84	1

TABLEAU 2.

Nous avons vu précédemment que la taille de la zone plastique cyclique est grosso-modo  $\frac{1}{4}$  de celle de la zone plastique monotone. Cette estimation correspond à la plastification d'une partie de la maille. Seule la charge minimale du cinquième cycle donne une zone plastique visible, équivalent à une maille triangulaire (fig. 56).

#### IV.8.5- Résultats des calculs :

-----

##### (Surcharge)

Nous avons évoqué précédemment que l'application d'une surcharge perturbe la vitesse de fissuration, en particulier dans une zone appelée la zone affectée. Toutes les caractéristiques qui définissent l'état de fissuration sont effectivement perturbées dans cette zone.

Dans la suite, nous étudions le profil d'ouverture et l'écartement du fond de fissure, la distribution des contraintes, la variation du facteur d'intensité de contrainte effective et l'évolution des zones plastiques au cours de la propagation de fissure dans la zone affectée par la surcharge. Cette étude nous permet de donner une estimation sur le retard et de comparer la vitesse de propagation perturbée avec les modèles précédemment mentionnés.

##### *IV.8.5.1- Profil d'ouverture :*

~~~~~

Les figures 78 à 83 donnent l'évolution des profils d'ouverture après l'application de la surcharge de 440 MPa. Pour la surcharge de 600 MPa, ces profils sont illustrés sur les figures 84 à 90. Sur ces figures, nous remarquons les points de vue suivants :

- i - Pendant la période où la fissure traverse la zone plastique résiduelle, il nous semble qu'au maximum de la charge, la tangente à la courbe d'ouverture en fond de fissure (C.O.A.) est horizontale (fig. 79-80).
- ii - Au fur et à mesure que la fissure sort et s'éloigne de la zone plastique résiduelle, cette tangente s'incline davantage (fig. 81 et 82) (la pointe de la fissure se trouve toujours dans la zone affectée).
- iii- Lorsque la fissure sort de la zone comprimée de la contrainte résiduelle laissée par la surcharge, (C.O.A.) prend sa forme initiale ; elle est effectivement sortie de la zone affectée.

iv - En décharge, lorsque la pointe de la fissure se trouve dans la zone plastique résiduelle, elle se ferme graduellement et à la charge minimale, la partie du fond de fissure qui est sous la compression de la zone plastique se ferme complètement (fig. 79 et 80).

v - Lorsque la pointe de la fissure sort de la zone plastique résiduelle, les lèvres de celle-ci (en décharge) se touchent, non pas à la pointe de la fissure mais à l'extrémité de la zone plastique résiduelle, par conséquent il apparaît une sorte de cavité dans le voisinage du front de la fissure (fig. 81a et 81, 82).

vi - En s'éloignant de la zone plastique résiduelle, l'ouverture du fond de fissure prend sa forme initiale et la cavité disparaît (figure 83).

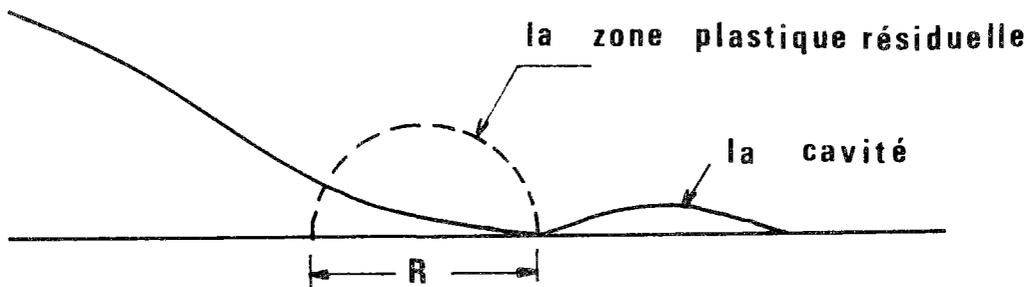


Figure 81a.

*Physionomie du profil d'ouverture lorsque la pointe de la fissure (en décharge) sort de la zone plastique résiduelle.*

Ainsi, nous pouvons calculer numériquement la taille de la zone affectée par la surcharge, soit de l'ordre de  $2.5R$ .  $R$  est la taille de la zone plastique résiduelle. Ce calcul approuve le modèle que nous avons décrit précédemment (chap. IV.8).

- Comparaison entre l'écartement calculé numériquement et celui prévu par notre modèle :

-----  
Cette comparaison a été représentée sur la figure 81b.

Signalons que le profil d'ouverture de la fissure calculé numériquement ne permet pas d'apprécier la valeur du (C.O.D.). Nous l'avons prise, sur la figure 81b, égale à l'ouverture du noeud le plus proche du fond de fissure.

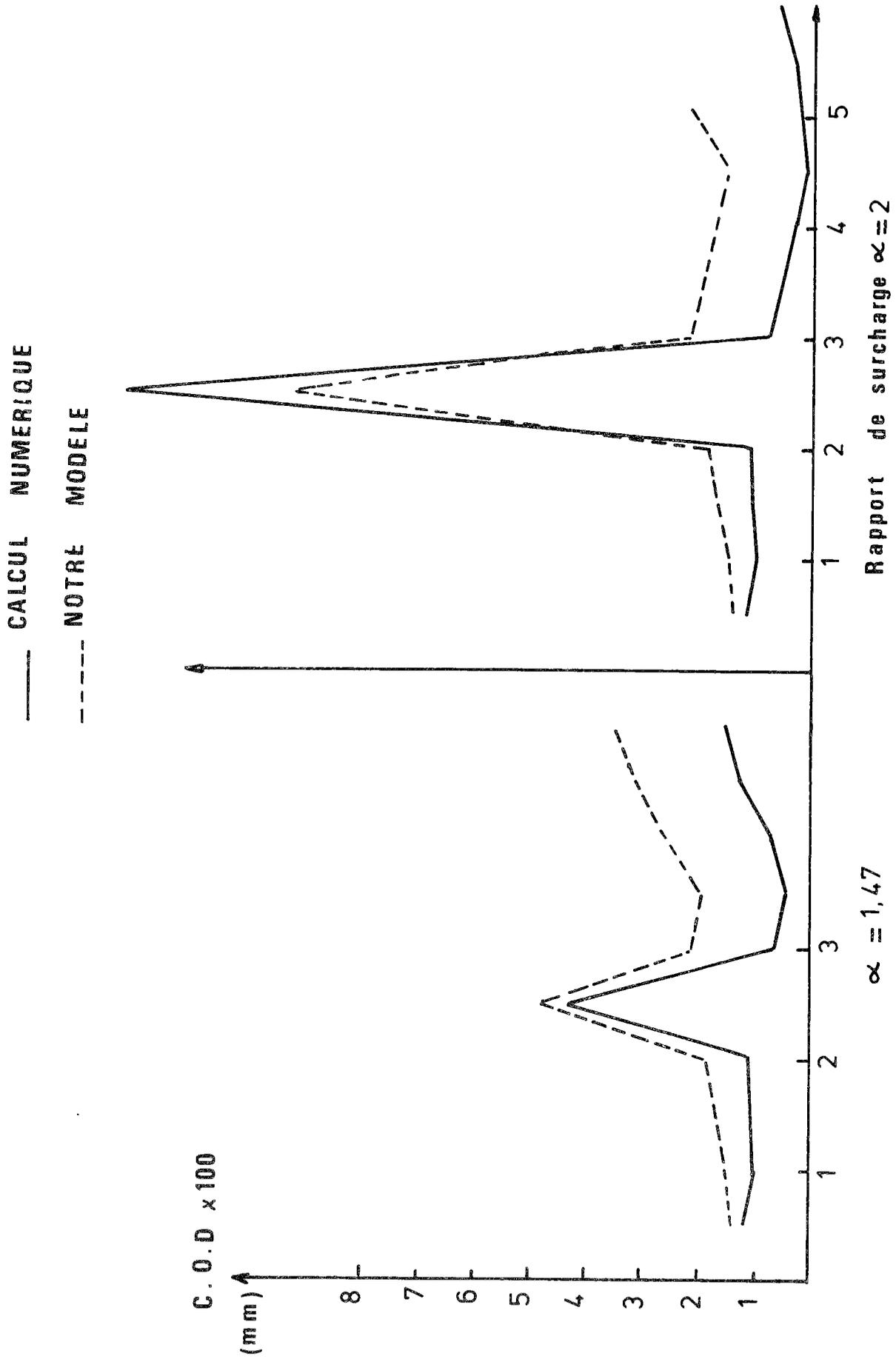


Figure 81b : Comparaison entre notre modèle et le calcul numérique.

IV.8.5.2- Variation du facteur d'intensité de contrainte effective ( $\Delta K_{eff}$ ) :

Les niveaux de contrainte de fermeture sont également illustrés sur les figures 78 à 90. Nous définissons la notion de  $\Delta K_{eff}$  à partir de ces valeurs de contrainte de fermeture. La figure 111 donne la variation de  $\Delta K_{eff}$  au cours de la propagation. On constate que  $\Delta K_{eff}$  augmente immédiatement après la surcharge. Il diminue ensuite jusqu'à une valeur minimale, puis augmente régulièrement pour rejoindre le niveau initial, avant l'application d'une surcharge. On retrouve donc les résultats expérimentaux [49], [50].

IV.8.5.3- Distribution des contraintes :

Les figures 96 à 108 montrent les distributions de contrainte  $\sigma_{yy}$  pour la charge maximale et pour la charge minimale après application d'une seule surcharge. Ces distributions correspondent bien à celles que nous avons traitées précédemment par la méthode de la superposition (chap. IV.2.2). La figure 101 montre clairement que si la pointe de la fissure sort de la partie comprimée de la contrainte résiduelle créée par la surcharge, la distribution de  $\sigma_{yy}$  prend sa forme initiale. Cette contrainte résiduelle reste invariable pendant toute la propagation.

IV.8.5.4- Influence de la surcharge sur la zone plastique :

L'allure des zones plastiques au maximum et au minimum de la charge au cours de la propagation, après la surcharge, est représentée sur les figures 59 à 72. La surcharge crée des zones plastiques monotone et cyclique (fig. 59, 60 et 68, 69), qui sont considérablement importantes. Leurs étendues semblent plus importantes que celles prédites par les modèles d'Irwin et de Dugdale (cf. Tableau 3).

| Surcharge Appliquée              |         | 440 MPa | 600 MPa |
|----------------------------------|---------|---------|---------|
| ZONE PLASTIQUE<br>MONOTONE       | CALCUL  | 3.68    | 8.55    |
|                                  | IRWIN   | 2.59    | 4.81    |
|                                  | DUGDALE | 3.19    | 5.94    |
| ZONE PLASTIQUE CYCLIQUE (CALCUL) |         | .92     | 1.84    |

TABLEAU 3.

La figure 112 montre l'évolution de la dimension de la zone plastique monotone ( $w_x$ ) au cours de la propagation de la fissure dans la zone affectée. Conformément au modèle de Führung [44], on remarque que la taille de la zone plastique diminue jusqu'à une valeur minimale ; elle augmente ensuite régulièrement pour reprendre sa valeur initiale. On constate également que la valeur minimale de  $w_x$  se produit à une distance égale à la taille de la zone plastique résiduelle (créée par surcharge) du point de l'application de la surcharge. L'évolution de la taille de la zone plastique cyclique est illustrée sur la figure 113. Cette figure montre une fois de plus que la surcharge crée une zone plastique cyclique importante qui reste invariable tant que la pointe de la fissure se trouve dans cette même zone.

IV.8.5.5.- La vitesse de fissuration affectée par la surcharge :

La figure 114 montre une comparaison entre le modèle fondé :

- sur l'écartement :

$$\frac{\left(\frac{da}{dN}\right)_o}{\left(\frac{da}{dN}\right)_c} = \left[ \frac{(C.T.O.D.)_o}{(C.T.O.D.)_c} \right]^m ;$$

- sur le modèle d'Elber :

$$\frac{\left(\frac{da}{dN}\right)_o}{\left(\frac{da}{dN}\right)_c} = \left[ \frac{(\Delta K_{eff})_o}{(\Delta K_{eff})_c} \right]^{m'}$$

- et sur le modèle de Fühning :

$$\frac{\left(\frac{da}{dN}\right)_o}{\left(\frac{da}{dN}\right)_c} = \left[ \sqrt{\frac{\omega_o}{\omega_c}} \right]^{m''}$$

Signalons que le nouveau modèle peut être amélioré en calculant les écarterments  $\delta_2$  et  $\delta_3$  sous le chargement réel de la contrainte résiduelle créée par la surcharge. En attendant, ce modèle donne une première estimation de la vitesse de fissuration après la surcharge. Il peut être généralisé pour le cas de chargement aléatoire.

### FATIGUE SURCHARGE

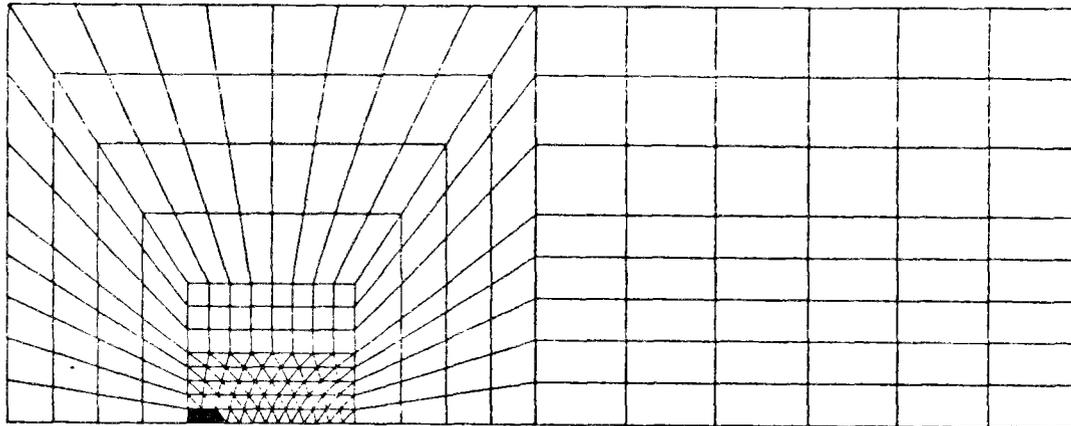
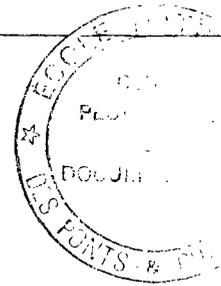


FIGURE 52 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE MONOTONE AU MAXIMUM DE LA CHARGE -1ER CYCLE-



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

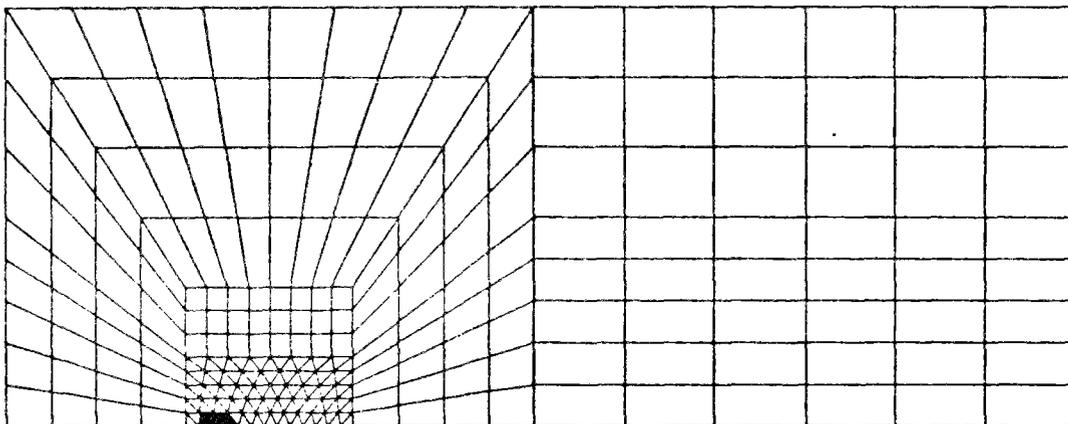


FIGURE 53 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE MONOTONE AU MAXIMUM DE LA CHARGE -2EME CYCLE-



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

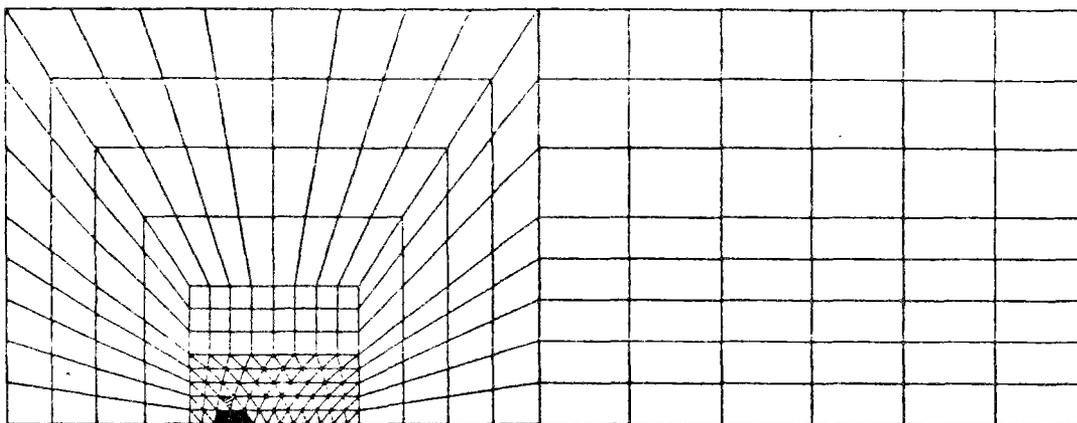


FIGURE 54 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE MONOTONE AU MAXIMUM DE LA CHARGE -3EME CYCLE-



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

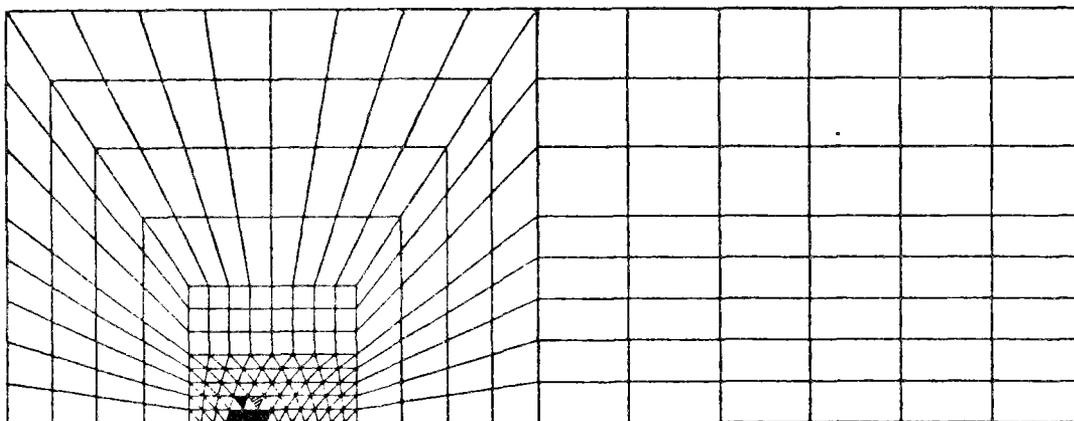


FIGURE 55 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE MONOTONE AU MAXIMUM DE LA CHARGE -4EME CYCLE-



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

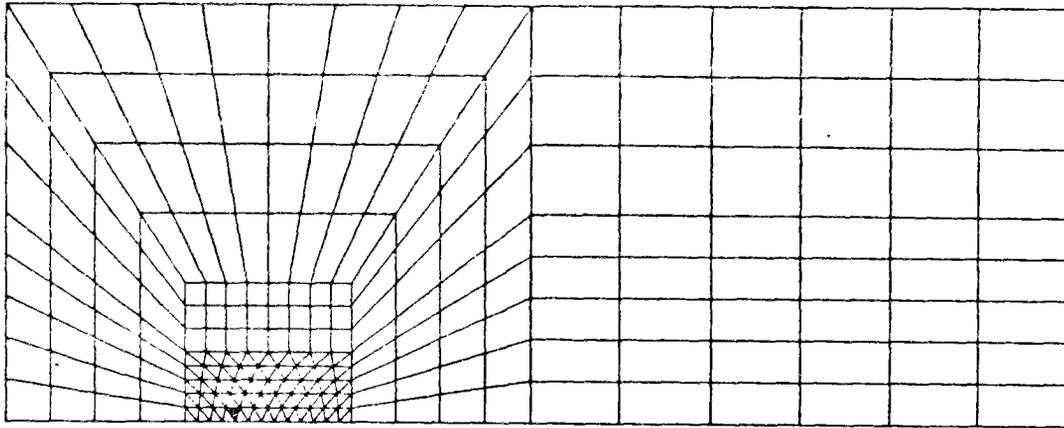


FIGURE 56 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE CYCLIQUE AU MINIMUM DE LA CHARGE -4EME CYCLE-



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

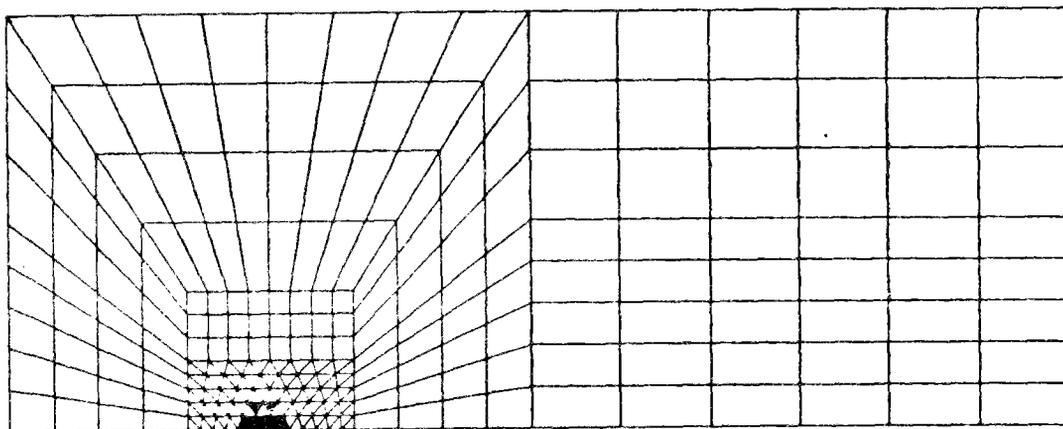


FIGURE 57 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE MONOTONE AU MAXIMUM DE LA CHARGE -5EME CYCLE-



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

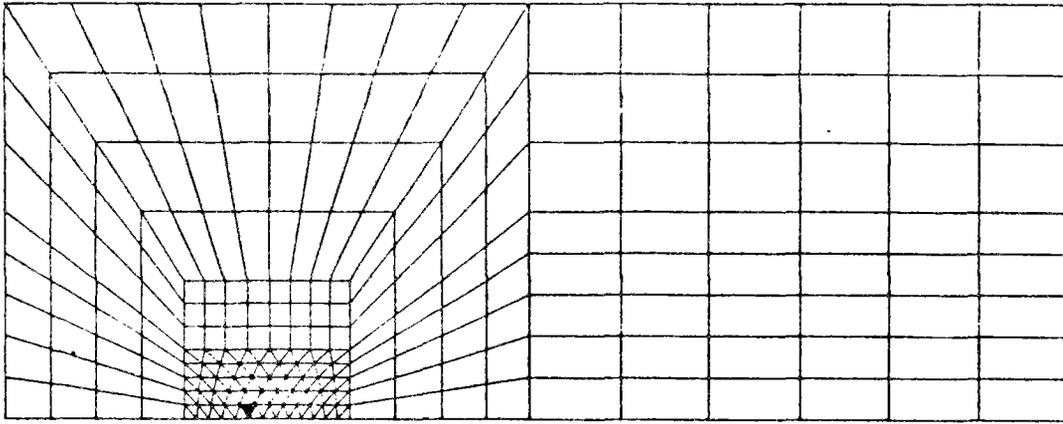


FIGURE 58 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE CYCLIQUE AU MINIMUM DE LA CHARGE -5EME CYCLE-



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

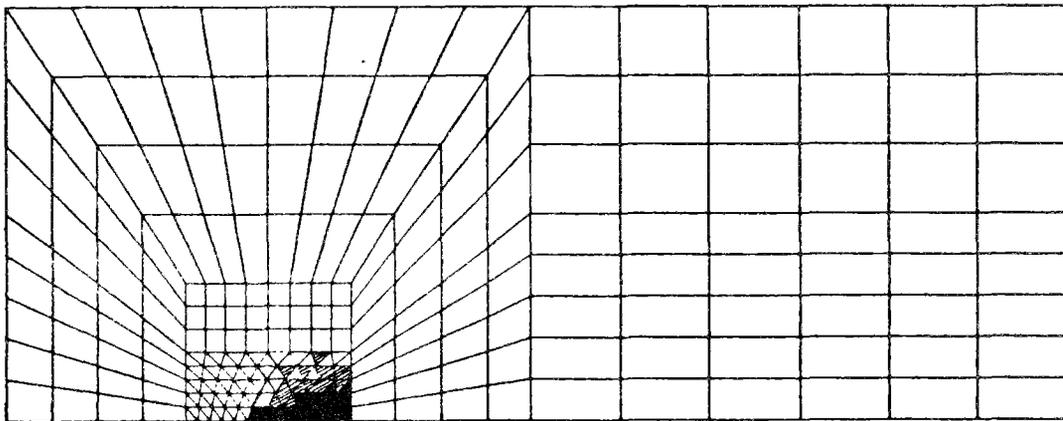


FIGURE 59 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE MONOTONE AU MAXIMUM DE LA SURCHARGE (440 MPa )



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

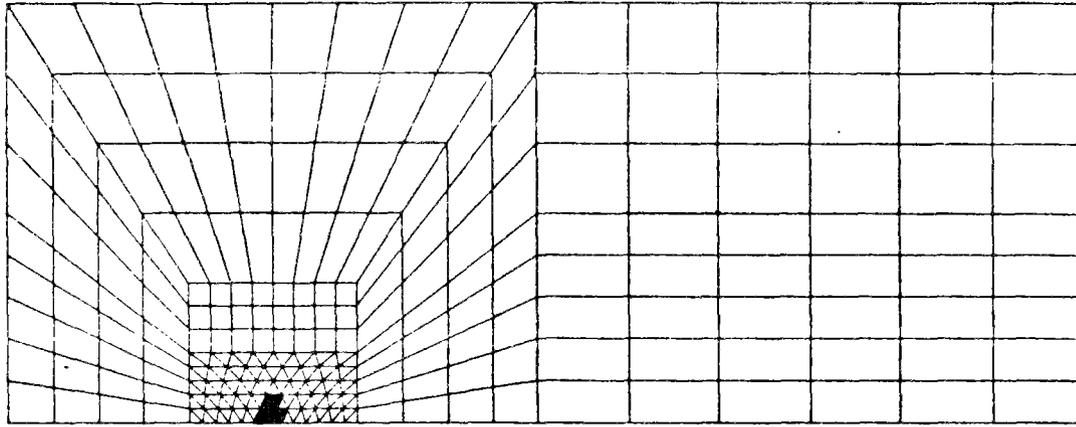


FIGURE 60 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE RESIDUELLE DUE A LA SURCHARGE  
(440 MPa ).



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

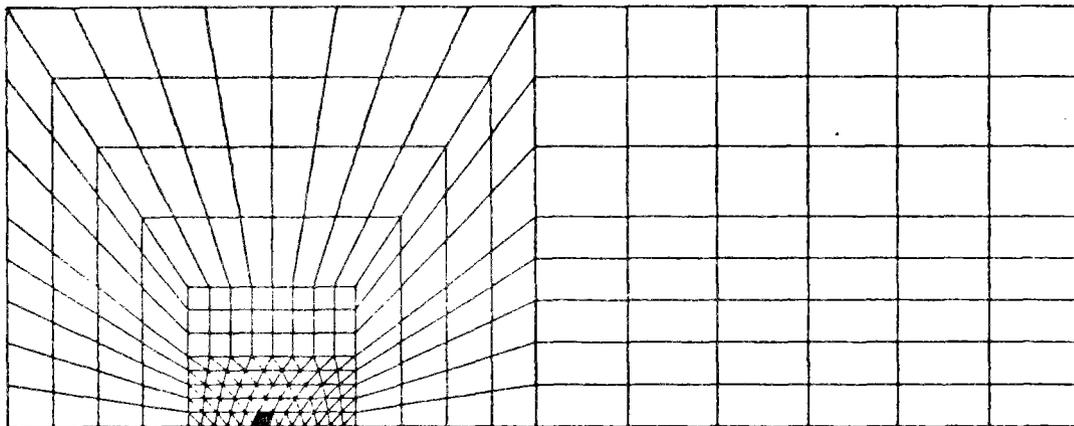


FIGURE 61 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE MONOTONE (DEVENUE CYCLIQUE) AU MAXIMUM  
DE LA CHARGE DU 1ER CYCLE APRES LA SURCHARGE.  
(440 MPa ).



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

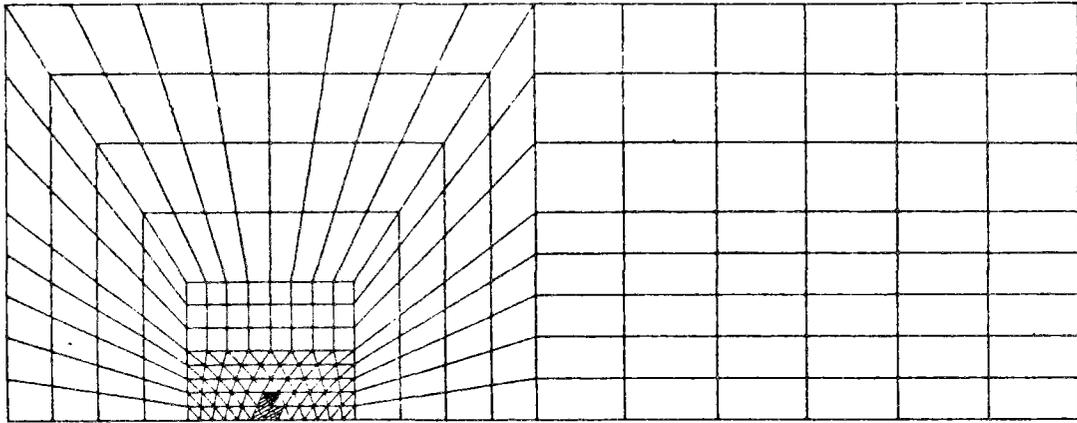


FIGURE 62 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE AU MINIMUM DE LA CHARGE DES 1ER, 2EME ET 3EME CYCLES APRES LA SURCHARGE (440 MP<sub>a</sub> ).



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

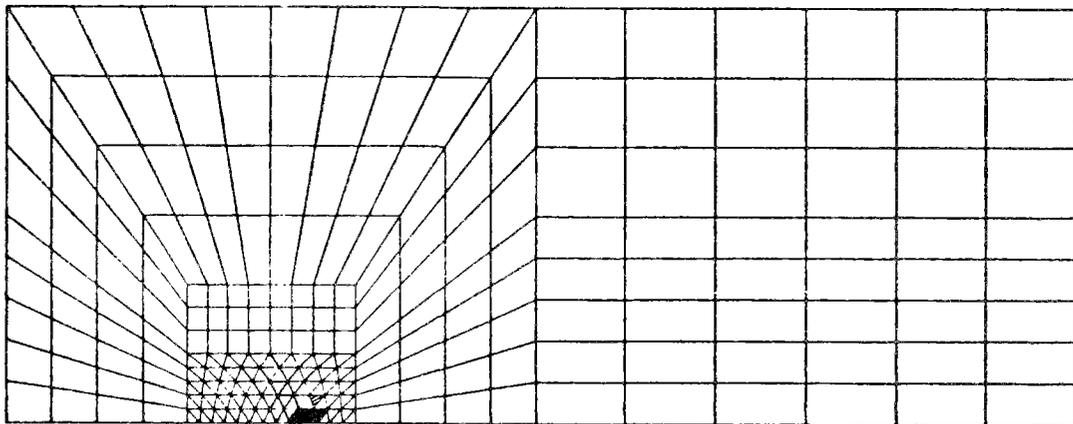


FIGURE 63 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE AU MAXIMUM DE LA CHARGE DU 4EME CYCLE APRES LA SURCHARGE. (440 MP<sub>a</sub> )



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

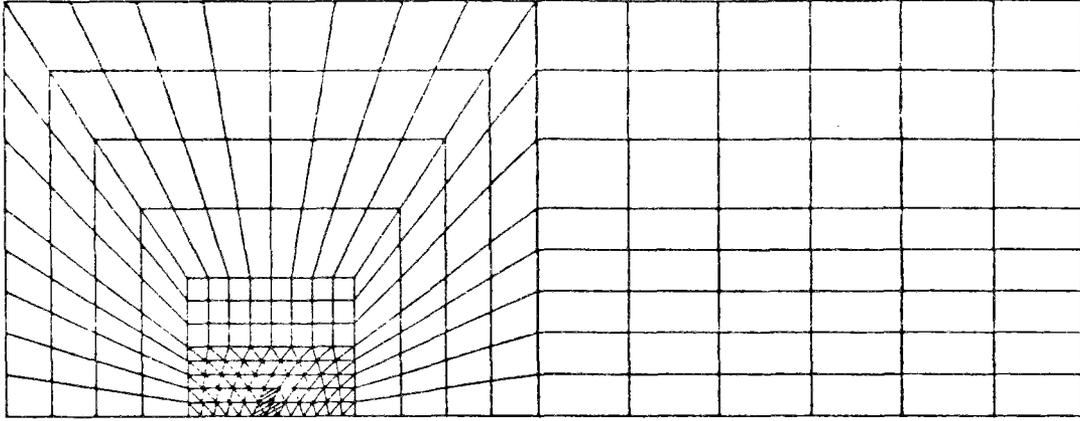


FIGURE 64 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE AU MINIMUM DE LA CHARGE DU 4EME CYCLE APRES LA SURCHARGE.

(440 MPa ).



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

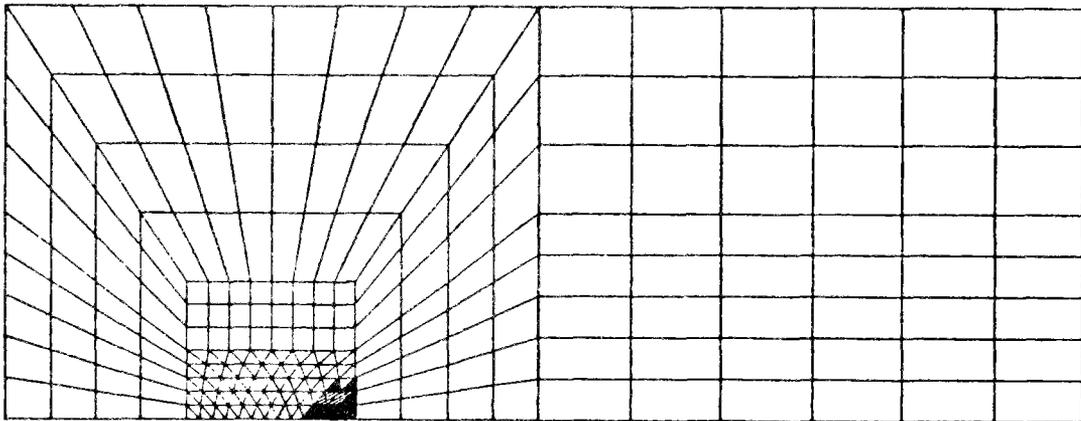


FIGURE 65 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE AU MAXIMUM DE LA CHARGE DU 5EME CYCLE APRES LA SURCHARGE.

(440 MPa ).



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

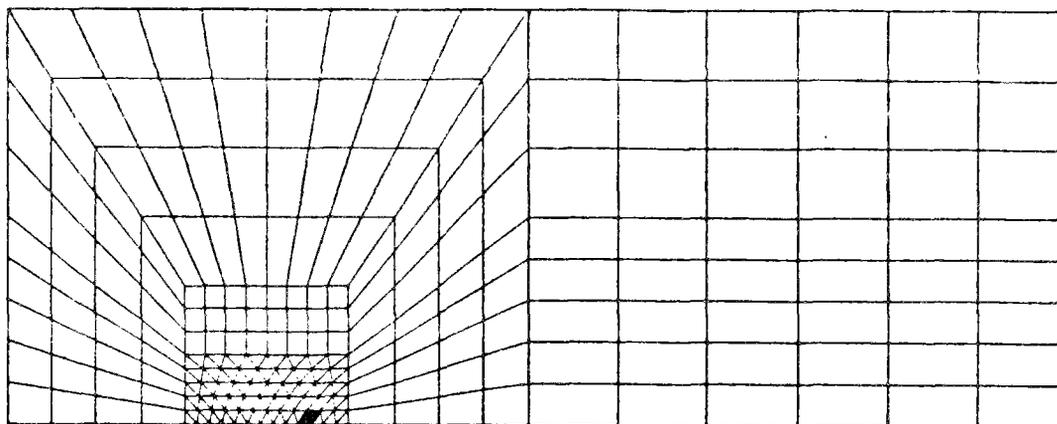


FIGURE 66 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE AU MINIMUM DE LA CHARGE DU 5EME CYCLE APRES LA SURCHARGE.  
(440 MPa ).



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

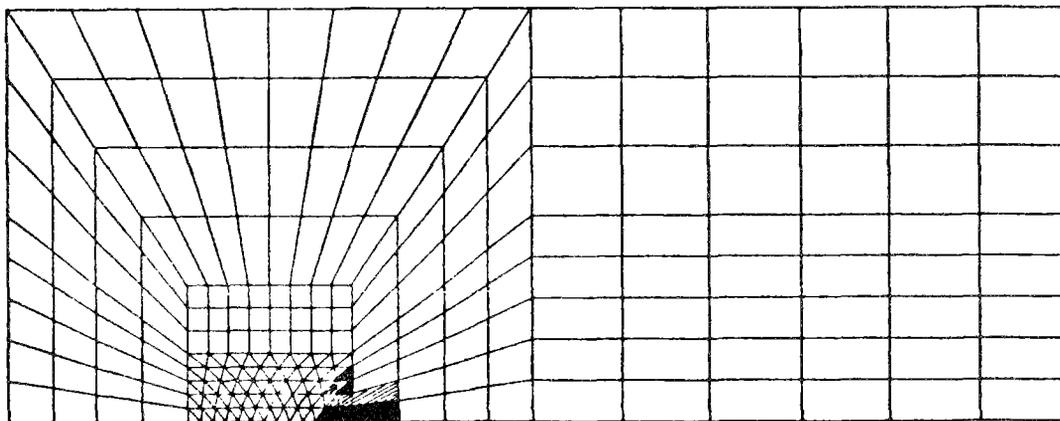


FIGURE 67 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE MONOTONE AU MAXIMUM DE LA CHARGE DU 6EME CYCLE APRES LA SURCHARGE.  
(440 MPa ).



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

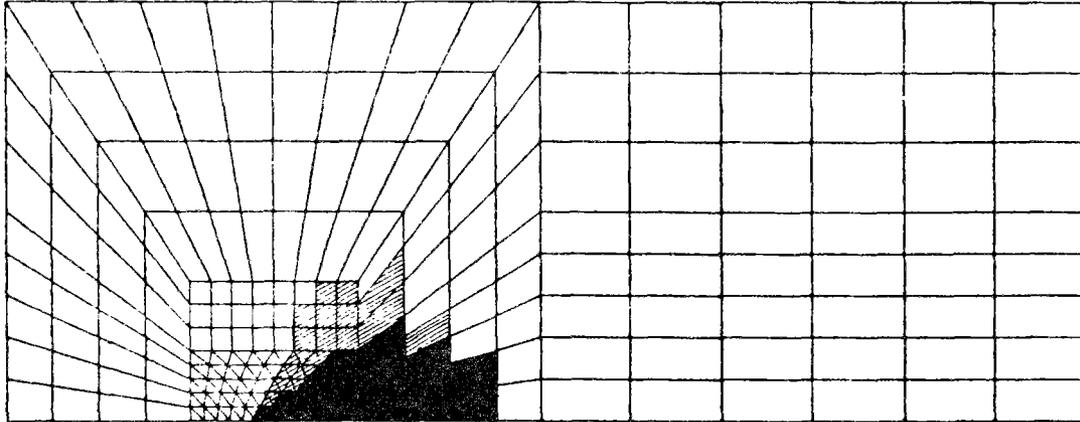


FIGURE 68 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE MONOTONE AU MAXIMUM DE LA SURCHARGE.  
(600 MP<sub>a</sub> ).



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

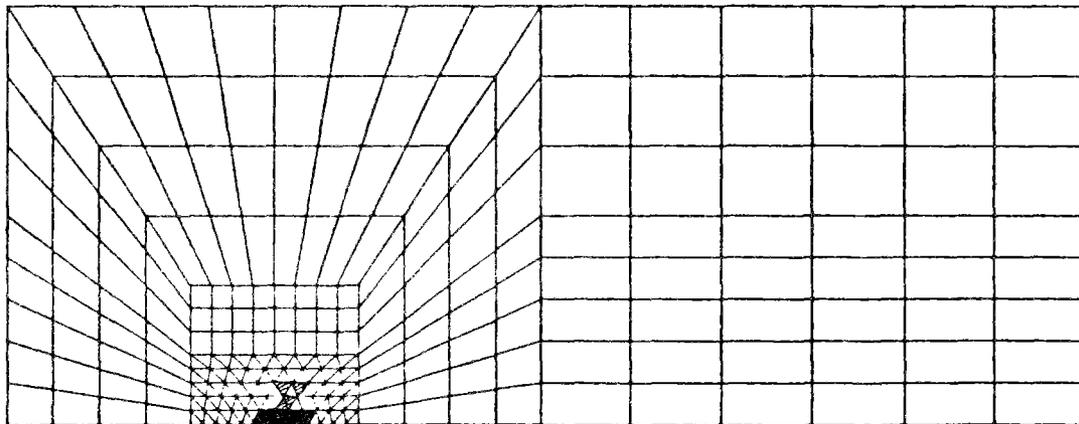


FIGURE 69 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE RESIDUELLE AU MINIMUM DE LA CHARGE DE TOUS LES  
CYCLES APRES LA SURCHARGE  
(600 MP<sub>a</sub> )



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

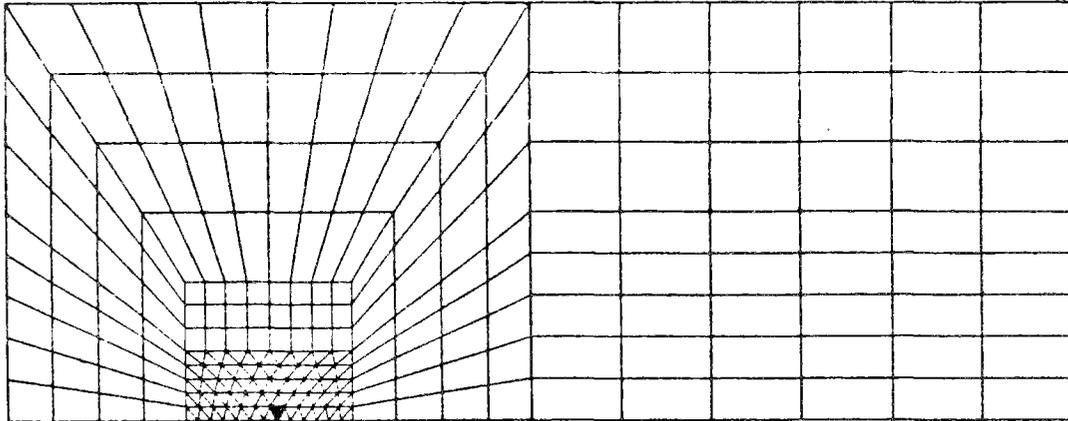


FIGURE 70 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE MONOTONE (DEVENUE CYCLIQUE) AU MAXIMUM DE LA CHARGE DU 1ER CYCLE APRES LA SURCHARGE (600 MPa ).



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

### FATIGUE SURCHARGE

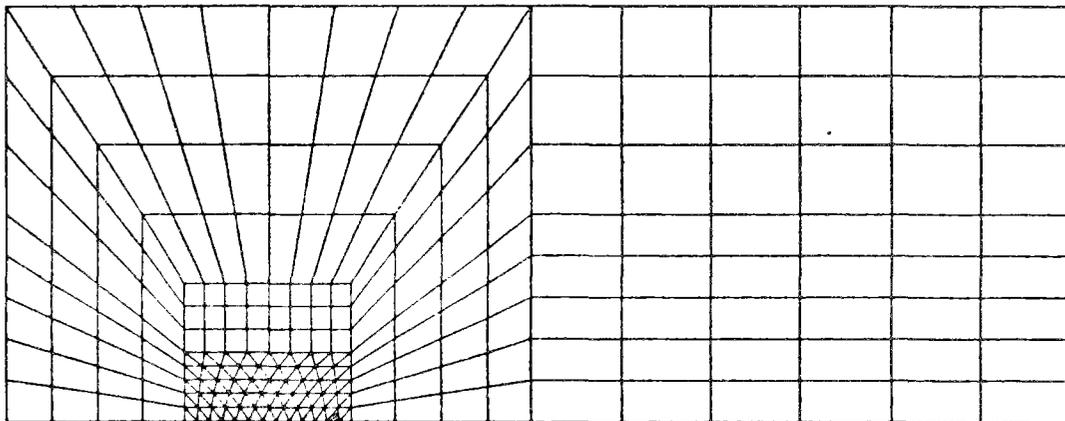


FIGURE 71 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE AU MAXIMUM DE LA CHARGE DU 6EME CYCLE APRES LA SURCHARGE (600 MPa ).



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

# FATIGUE SURCHARGE

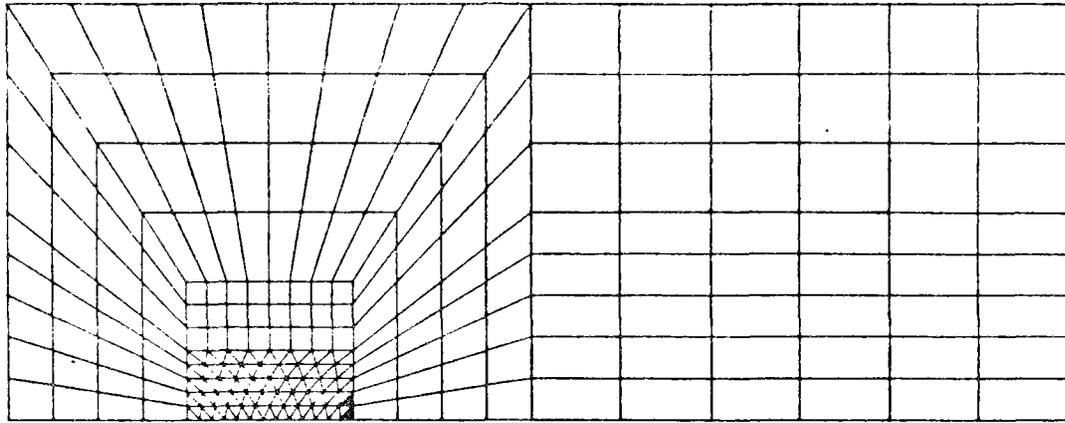


FIGURE 72 : ALLURE DE LA ZONE PLASTIQUE AU MAXIMUM DE LA CHARGE DU 7EME CYCLE APRES LA SURCHARGE (600 MP<sub>a</sub> ).



L INFLUENCE DE SURCHARGE EN FATIGUE

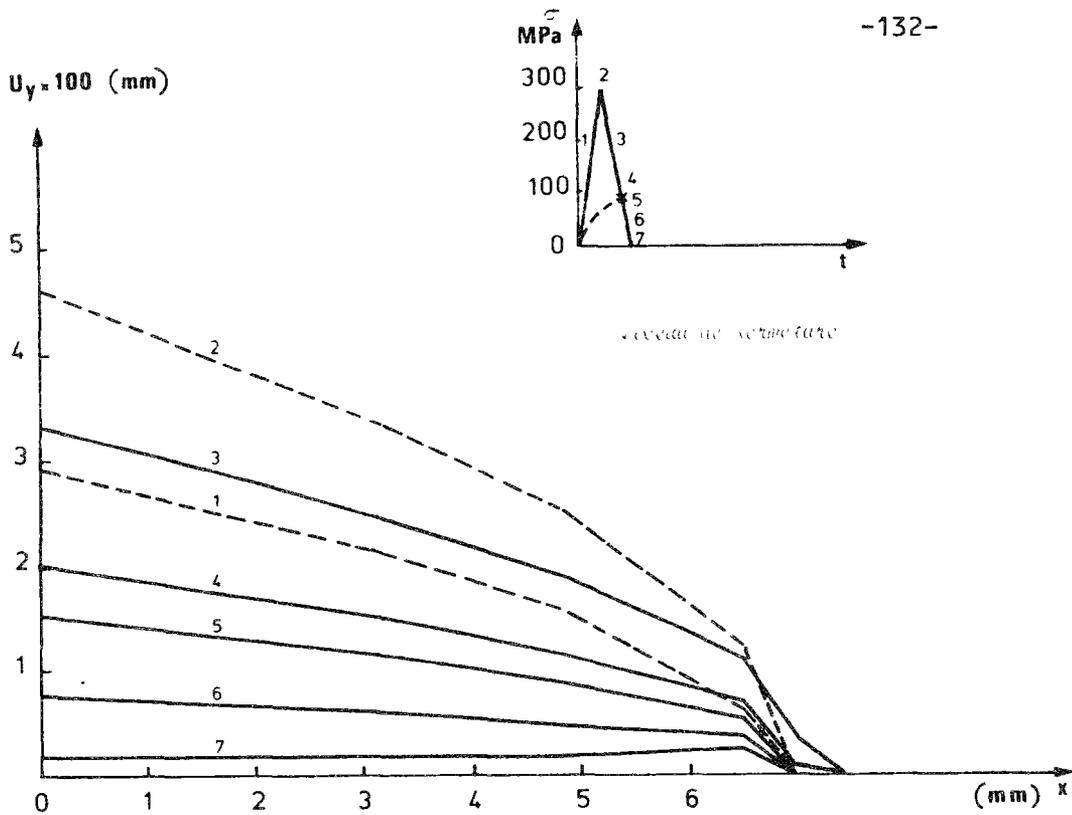


FIGURE 73 : OUVERTURE DE LA FISSURE AU COURS DU 1ER CYCLE.

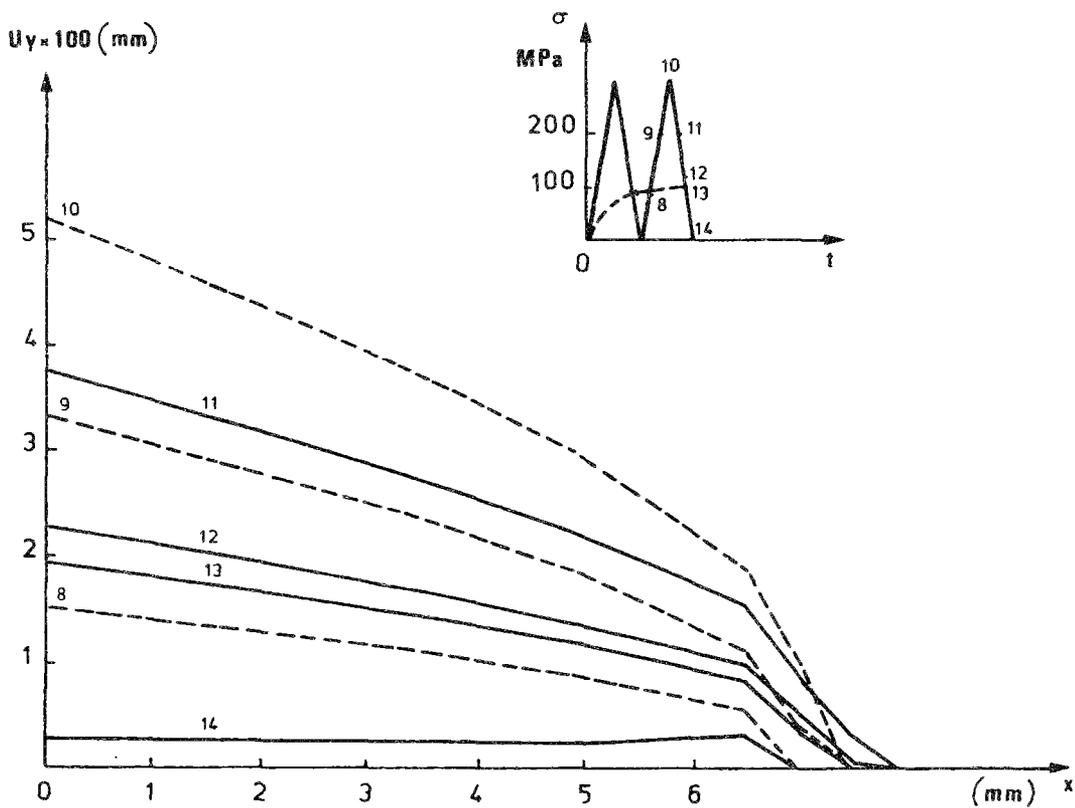


FIGURE 74 : OUVERTURE DE LA FISSURE AU COURS DU 2EME CYCLE.

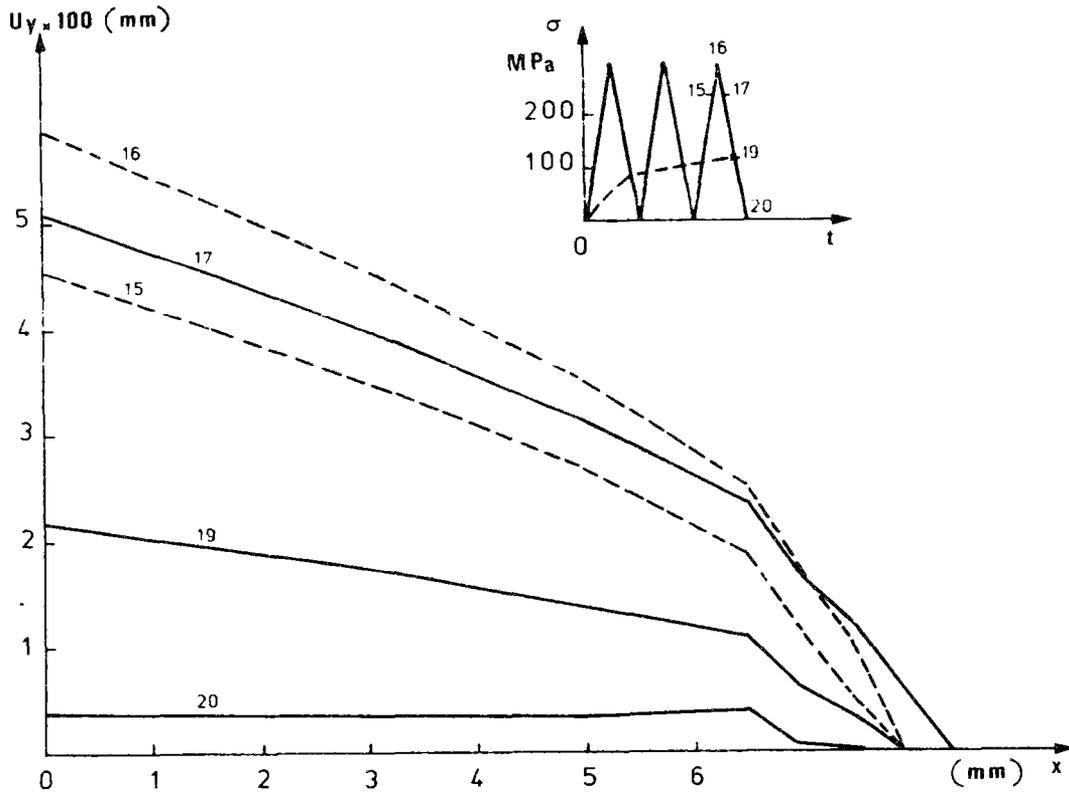


FIGURE 75 : OUVERTURE DE LA FISSURE AU COURS DU 3EME CYCLE.

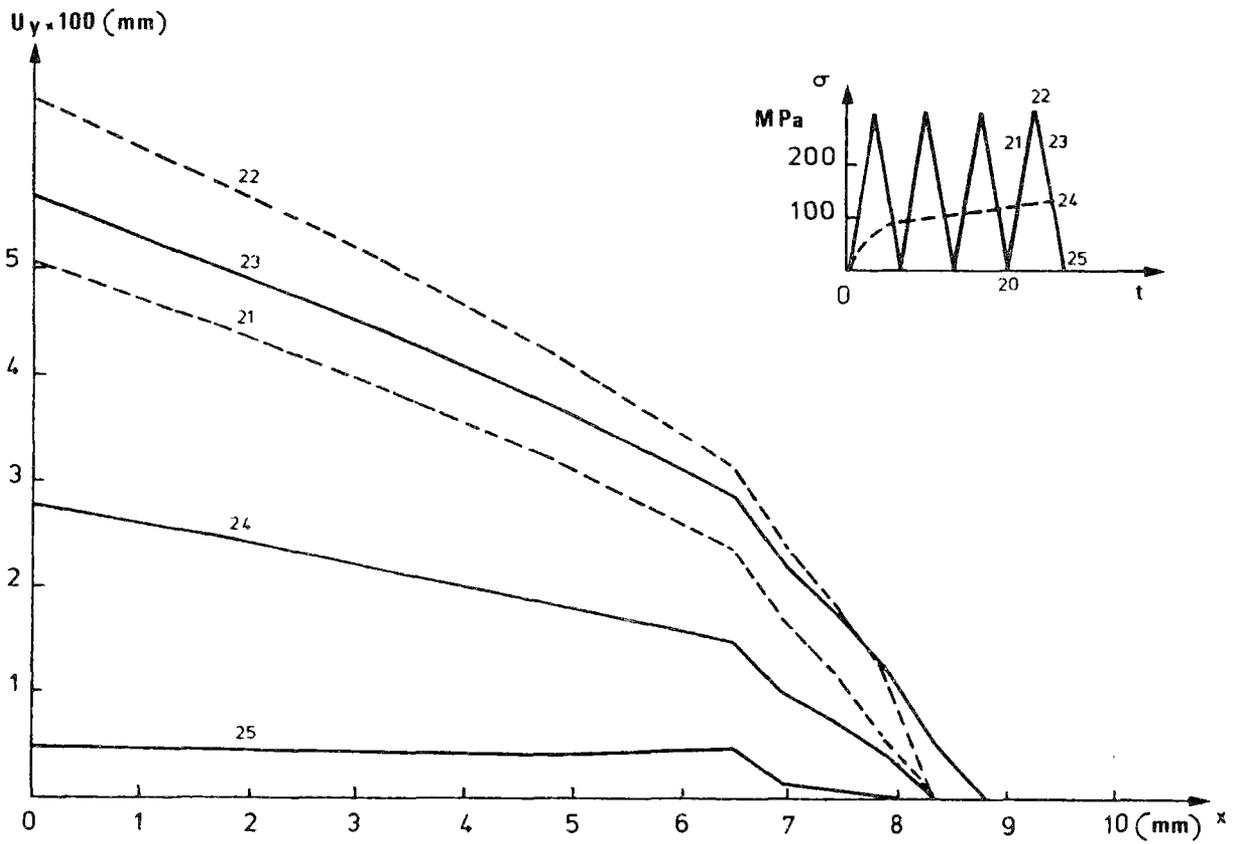


FIGURE 76 : OUVERTURE DE LA FISSURE AU COURS DU 4EME CYCLE.

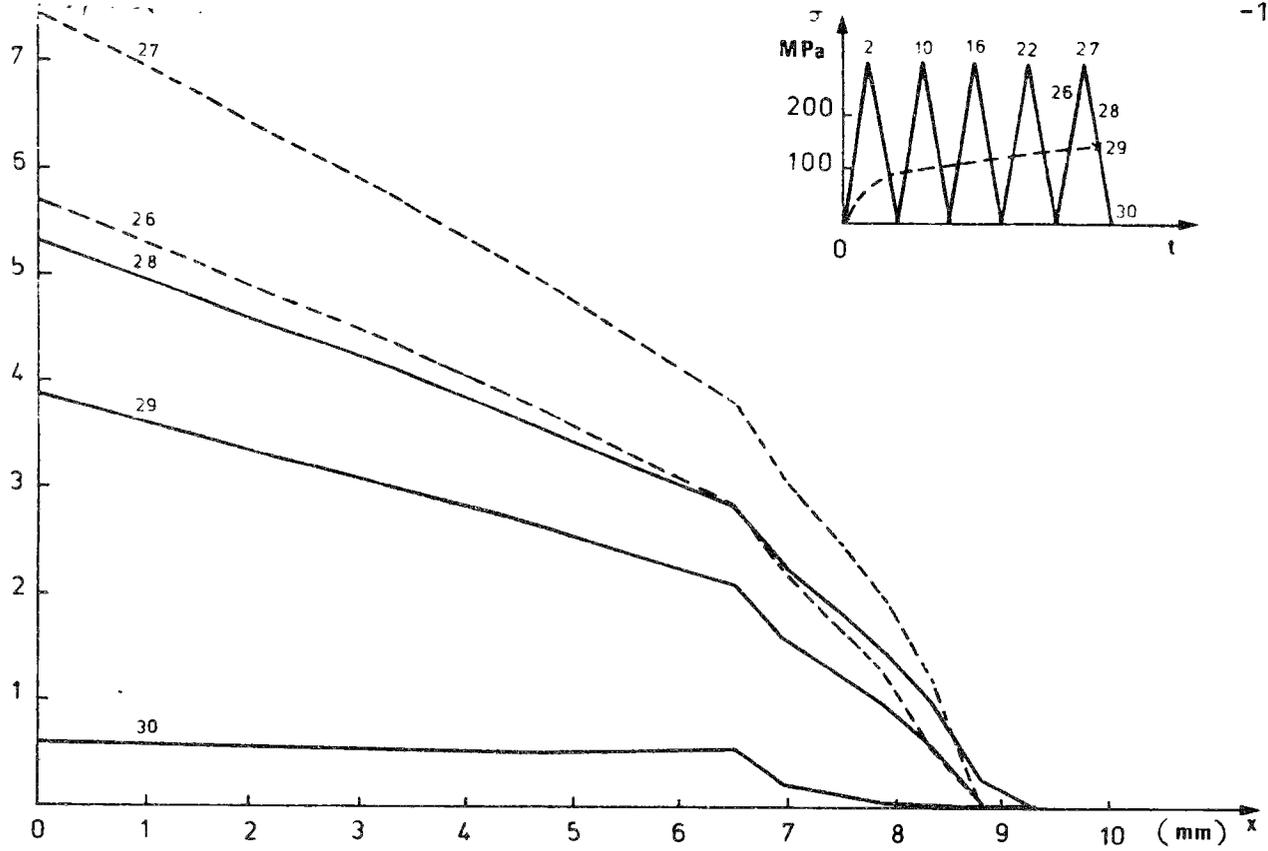


FIGURE 77 : OUVERTURE DE LA FISSURE AU COURS DU 5EME CYCLE.

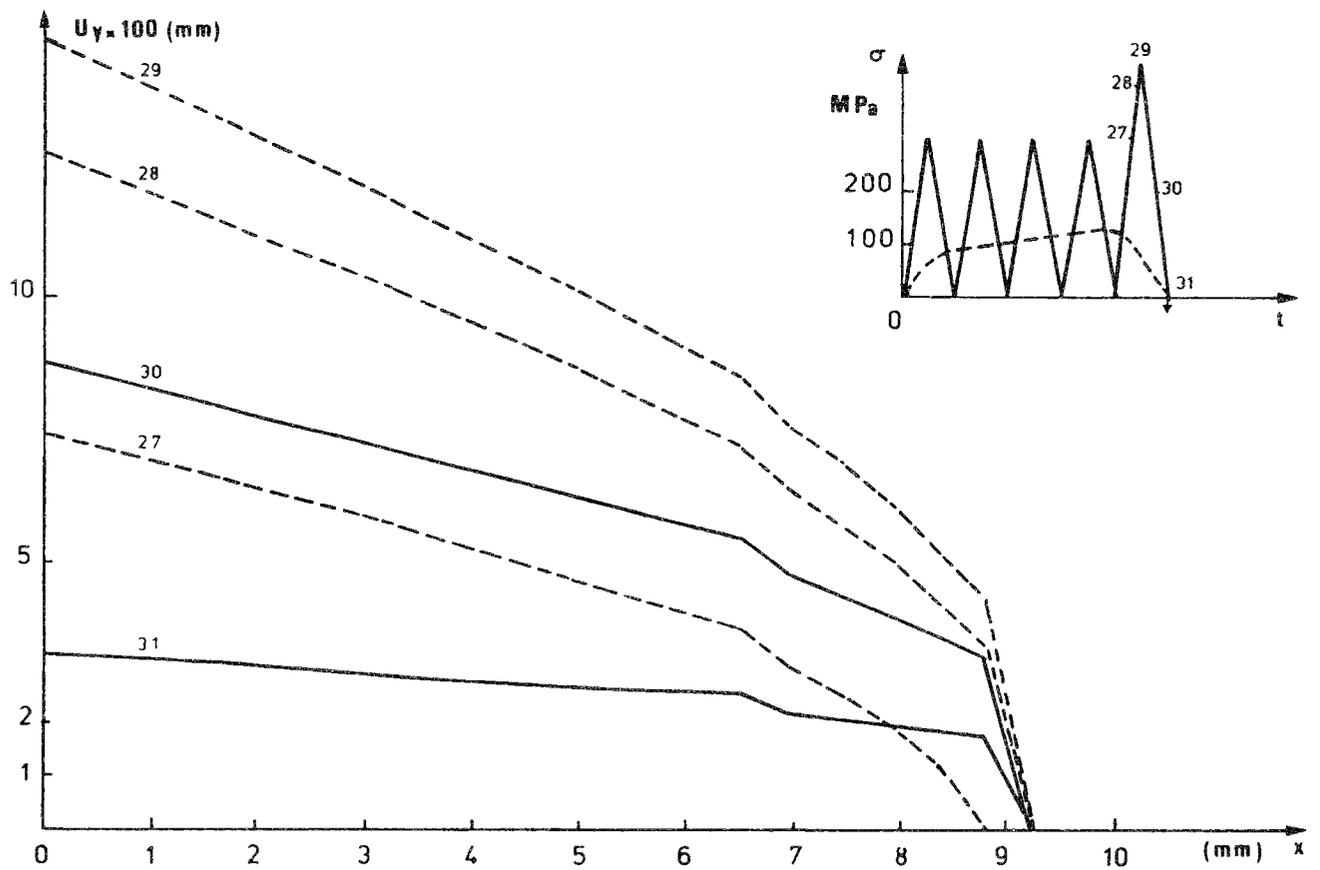


FIGURE 78 : OUVERTURE DE LA FISSURE AU COURS DE LA SURCHARGE.

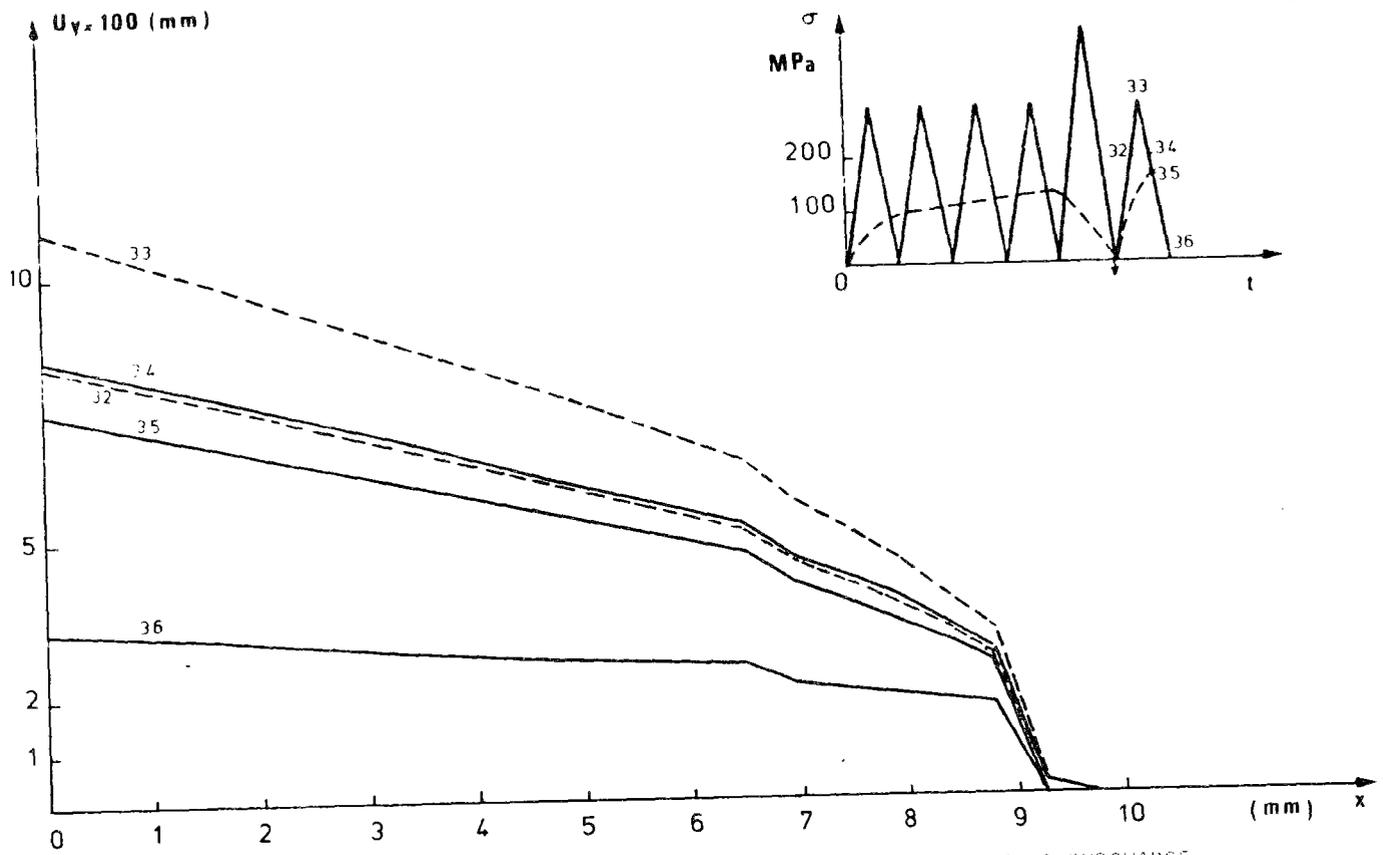


FIGURE 79 : OUVERTURE DE LA FISSURE AU COURS DU 1ER CYCLE APRES LA SURCHARGE.

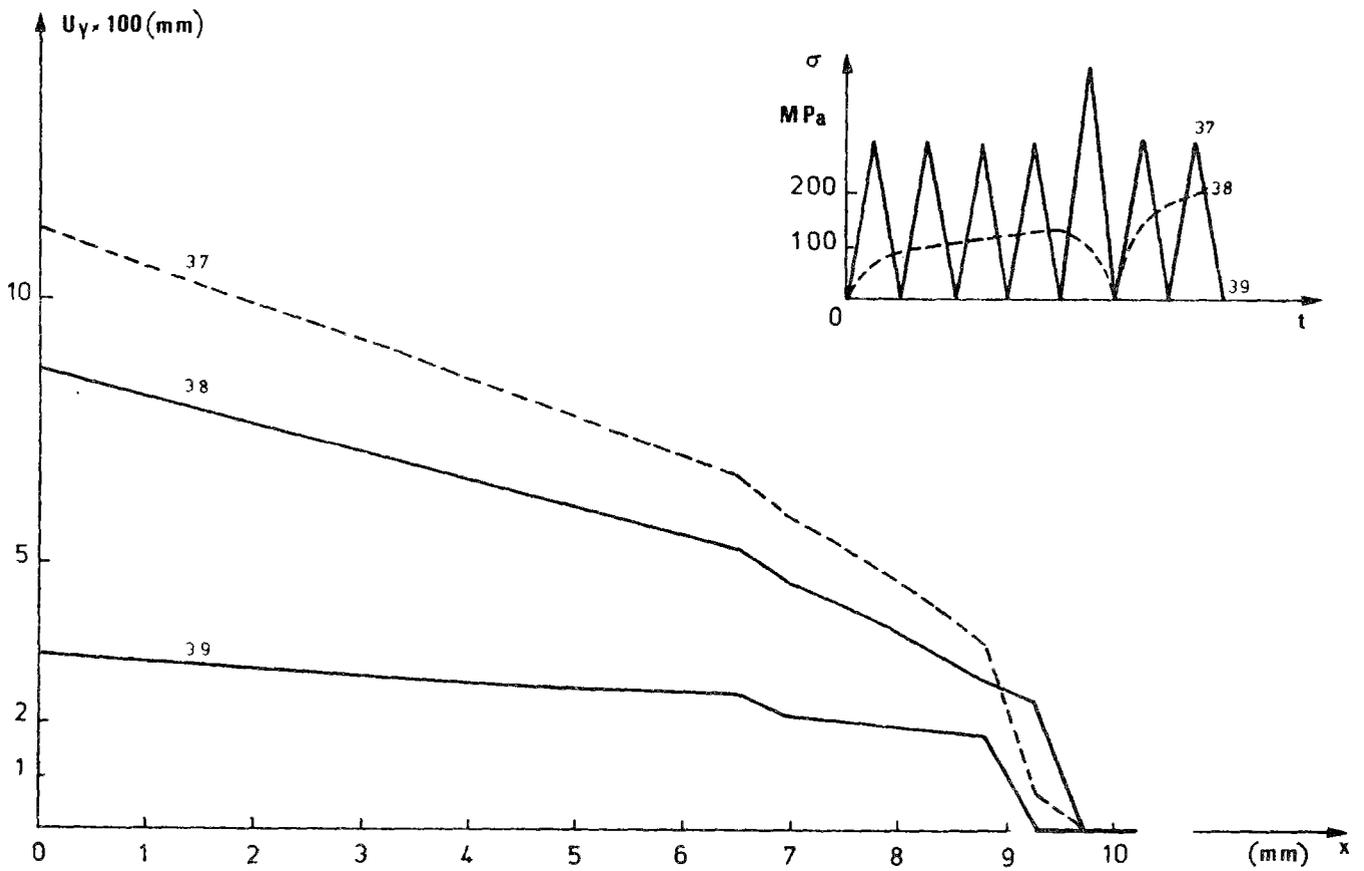


FIGURE 80 : OUVERTURE DE LA FISSURE AU COURS DU 2EME CYCLE APRES LA SURCHARGE.

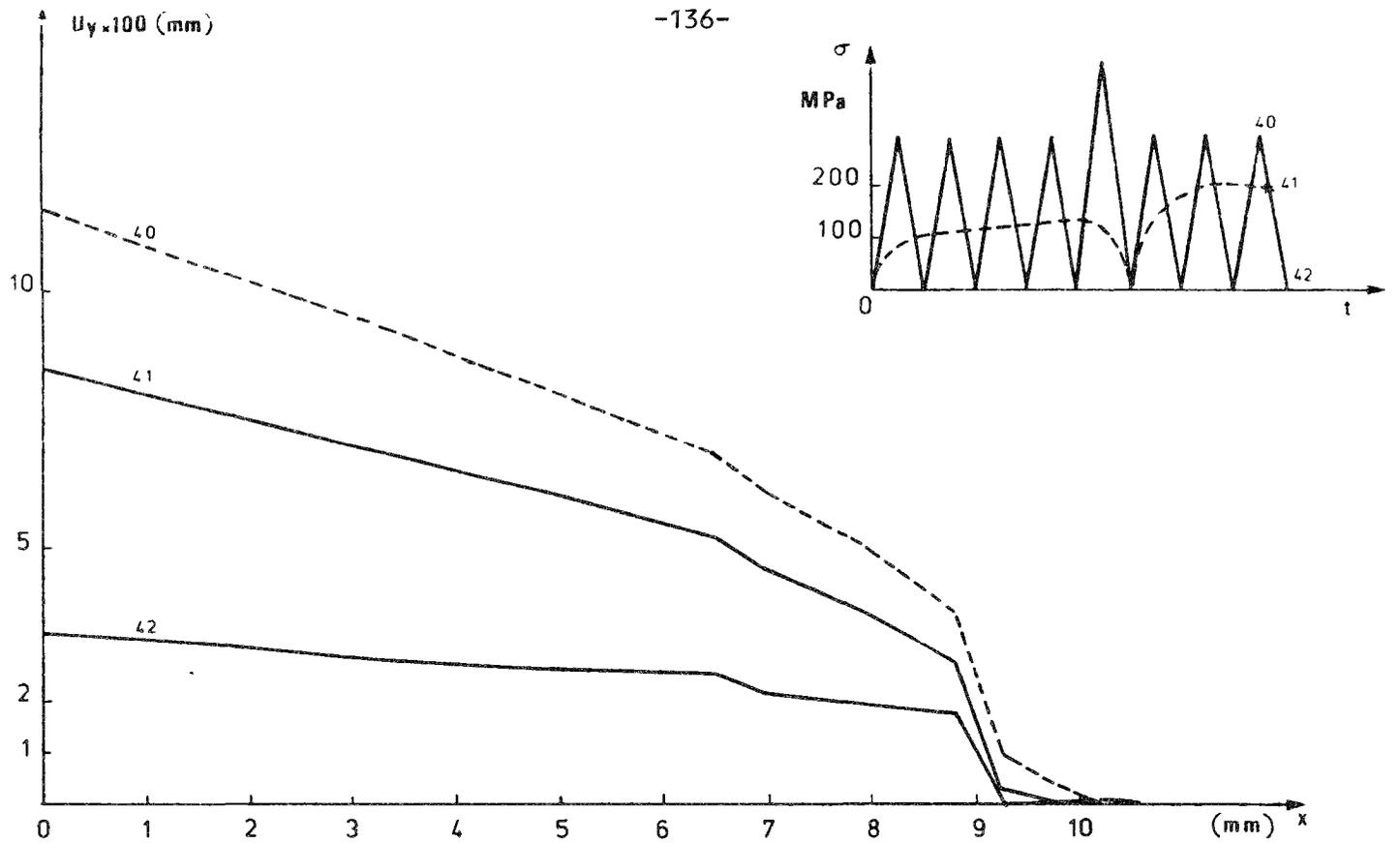


FIGURE 81 : OUVERTURE DE LA FISSURE AU COURS DU 3EME CYCLE APRES LA SURCHARGE.

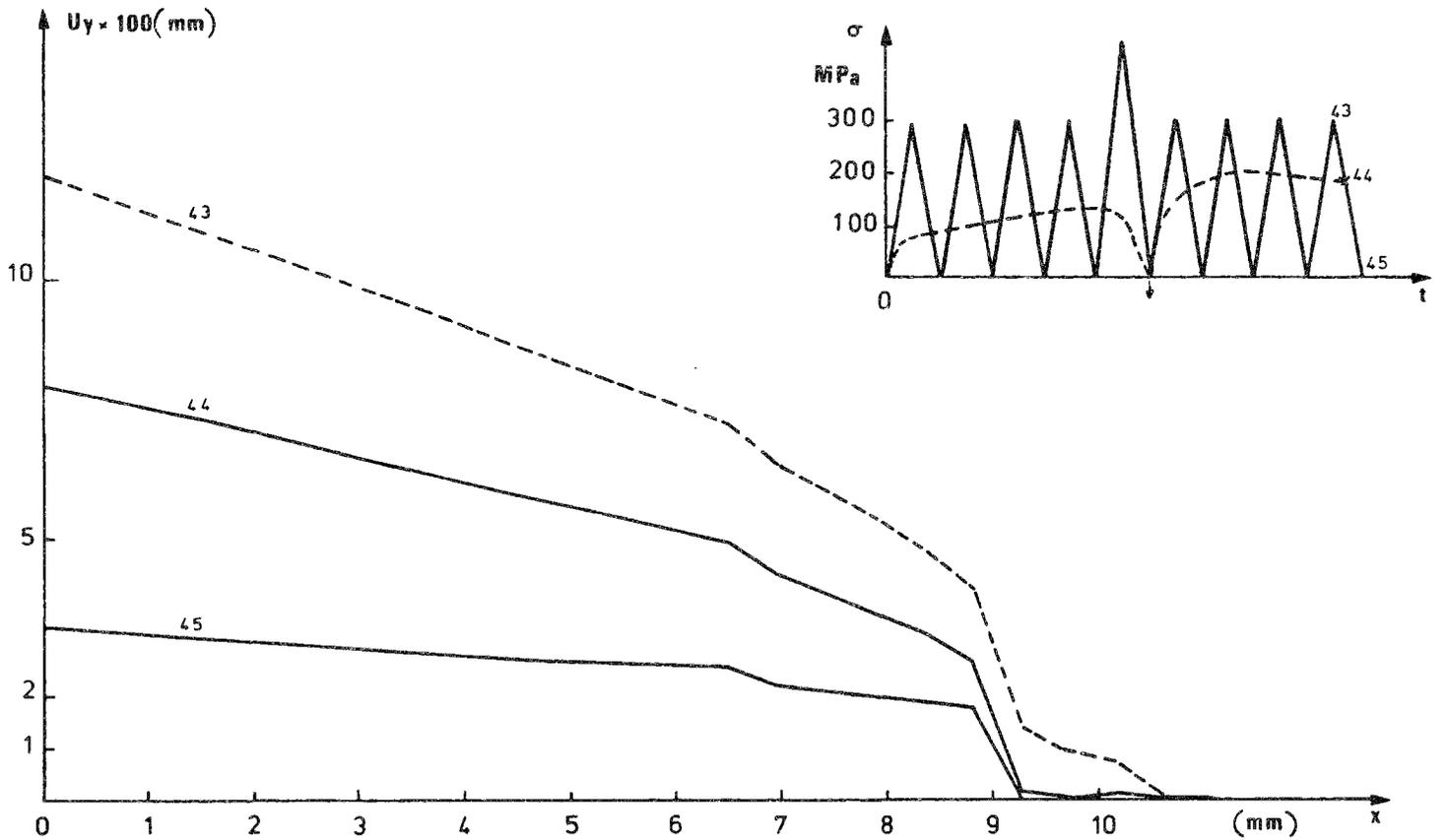


FIGURE 82 : OUVERTURE DE LA FISSURE AU COURS DU 4EME CYCLE APRES LA SURCHARGE.

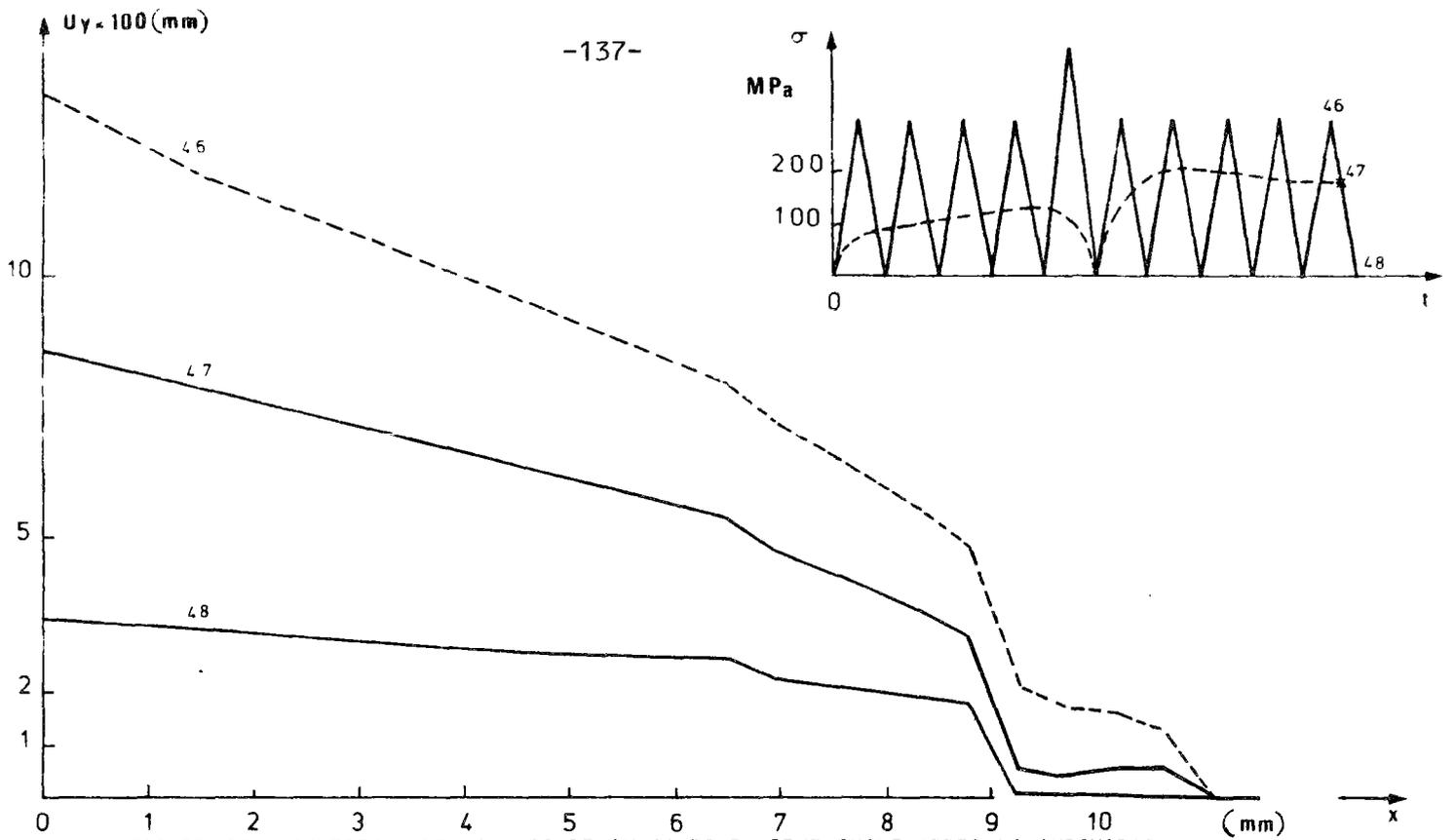


FIGURE 83 : OUVERTURE DE LA FISSURE AU COURS DU 5EME CYCLE APRES LA SURCHARGE.

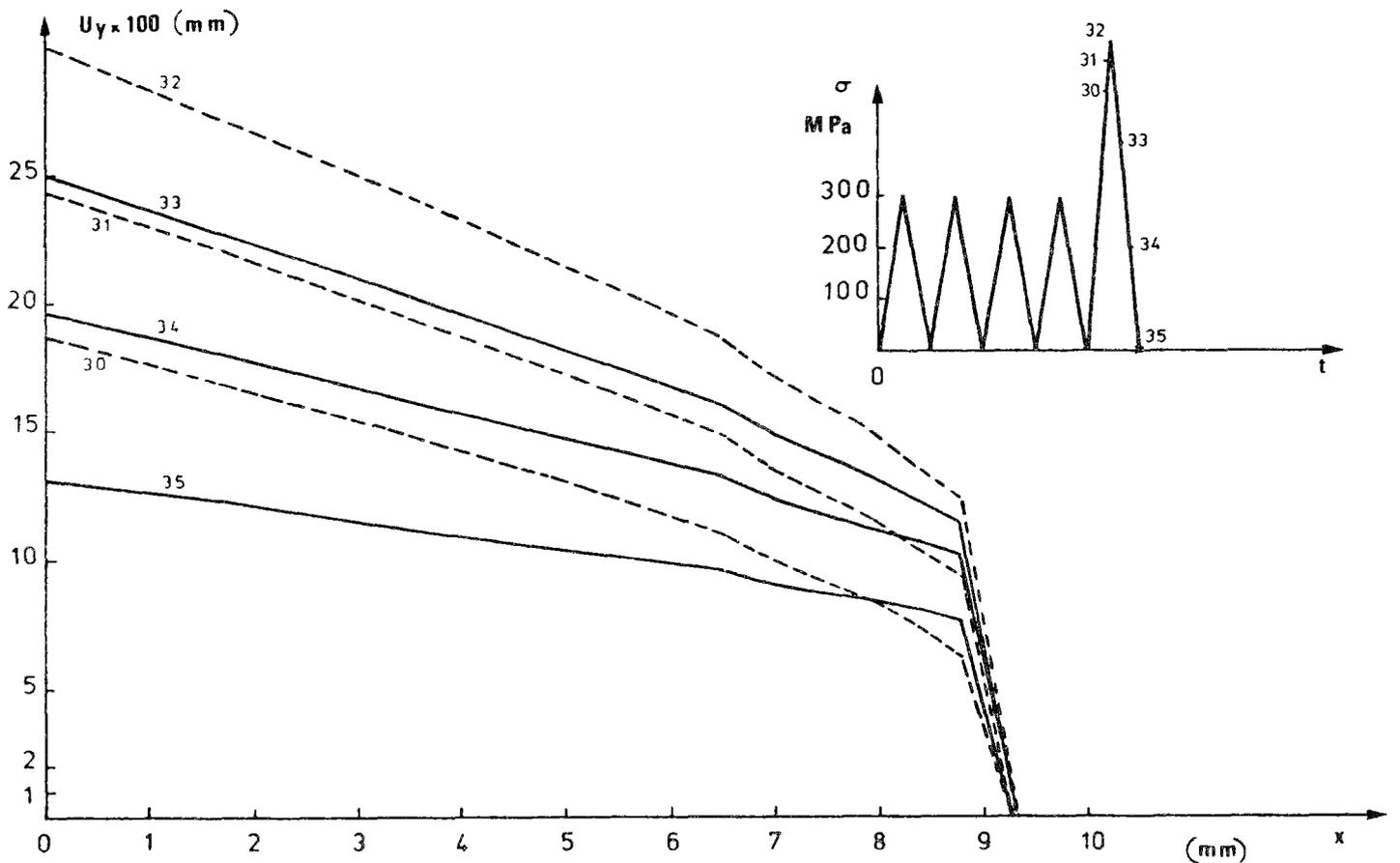


FIGURE 84 : OUVERTURE DE LA FISSURE AU COURS DE LA SURCHARGE (600 MPa).

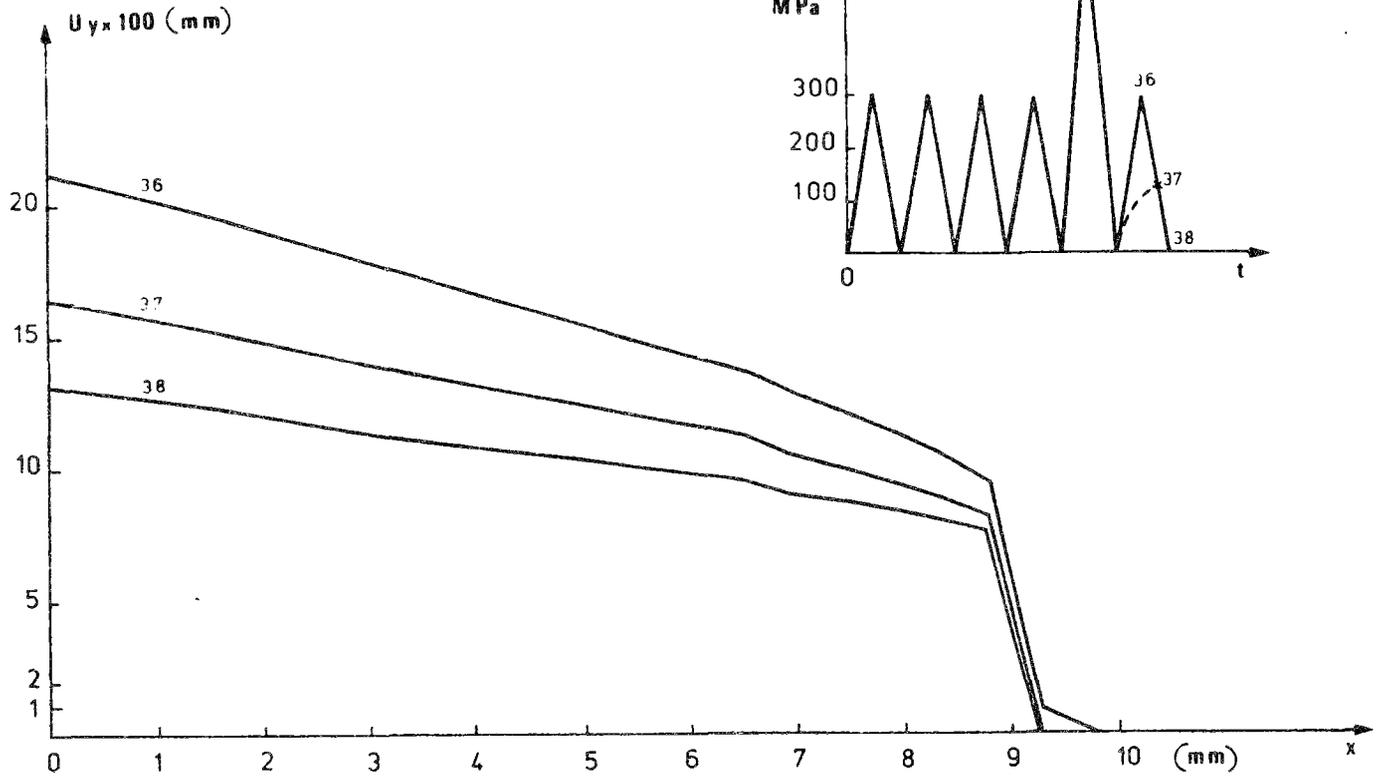


FIGURE 85 : OUVERTURE DE LA FISSURE AU COURS DU 1ER CYCLE APRES LA SURCHARGE 600 MPa ;

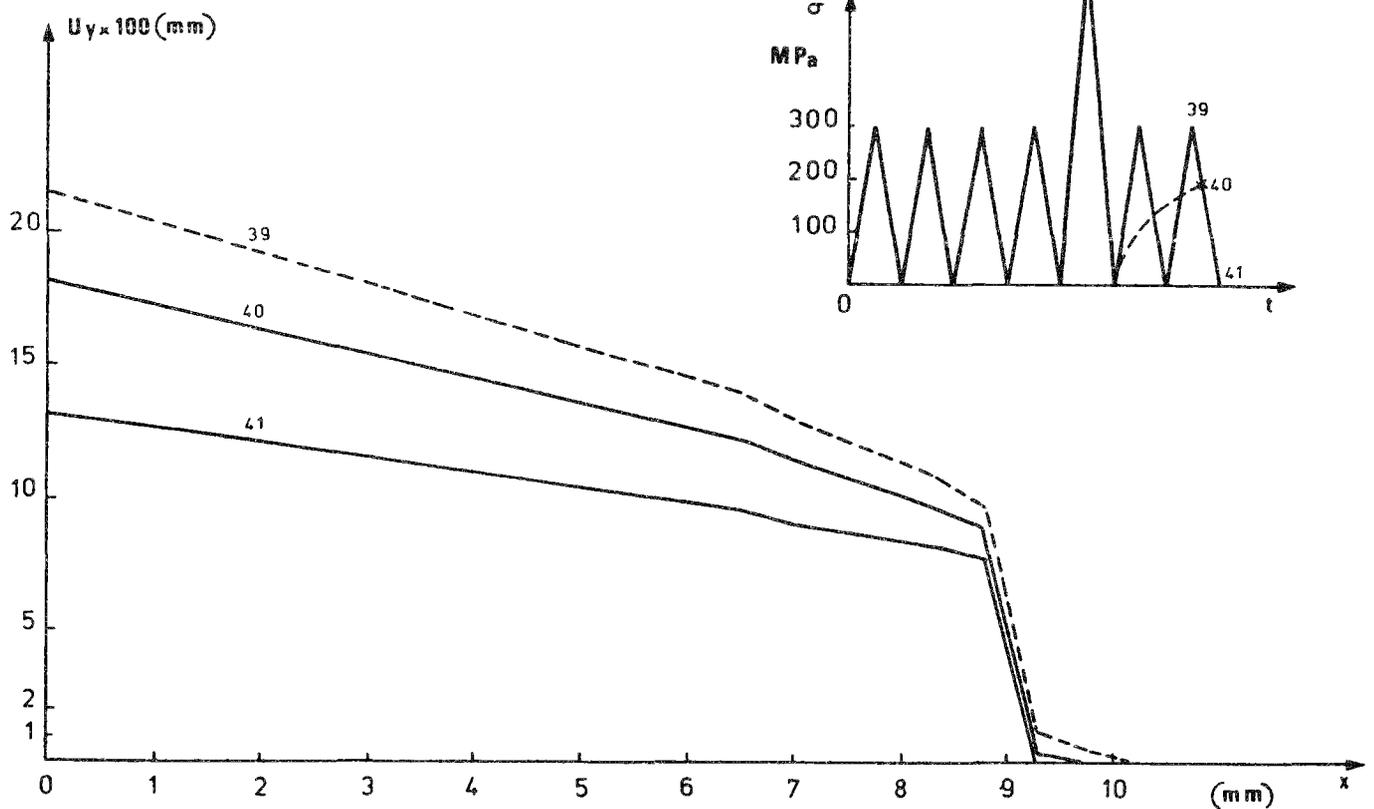


FIGURE 86 : OUVERTURE DE LA FISSURE AU COURS DU 2EME CYCLE APRES LA SURCHARGE 600 MPa

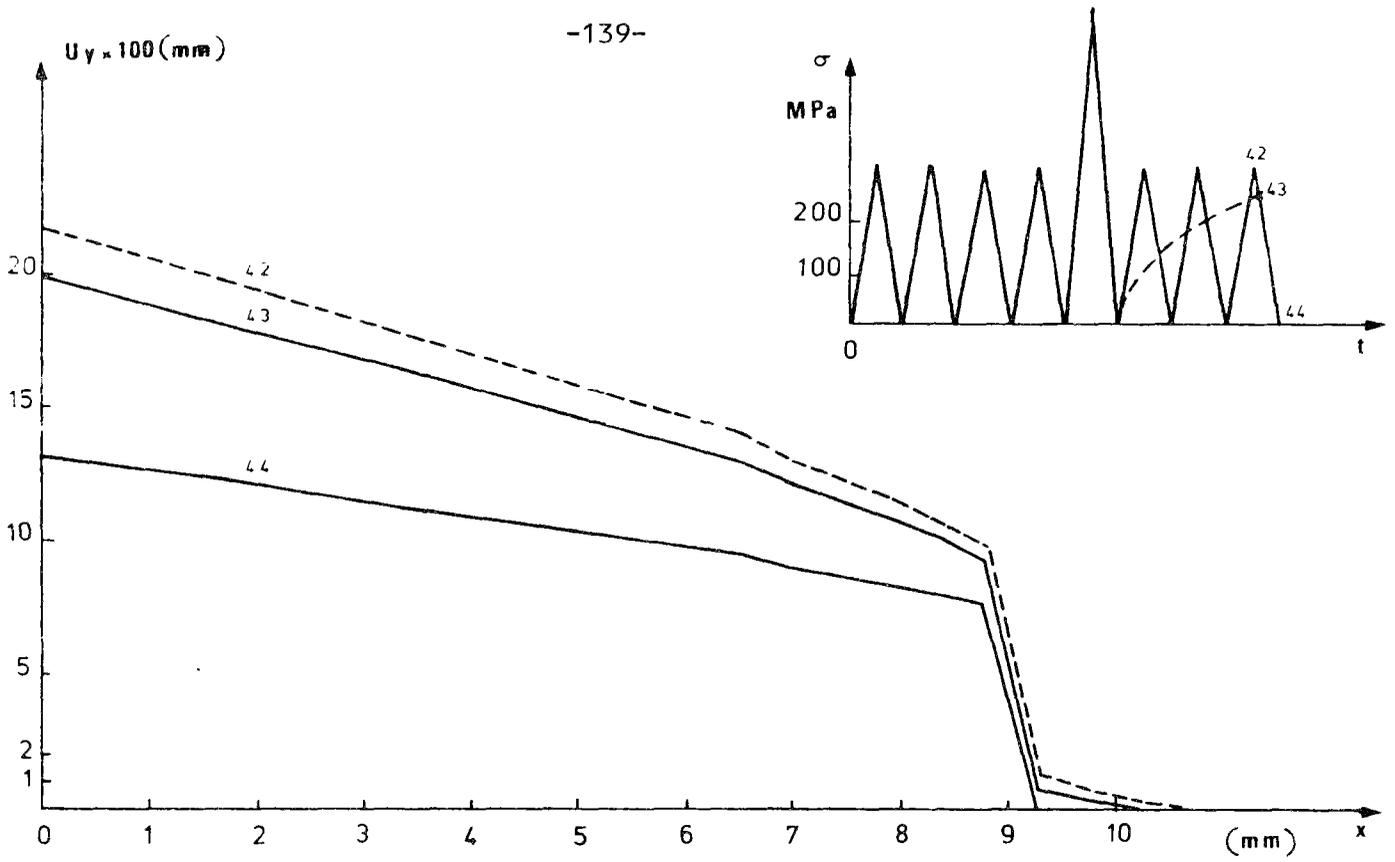


FIGURE 87 : OUVERTURE DE LA FISSURE AU COURS DU 3EME CYCLE APRES LA SURCHARGE 600 MPa

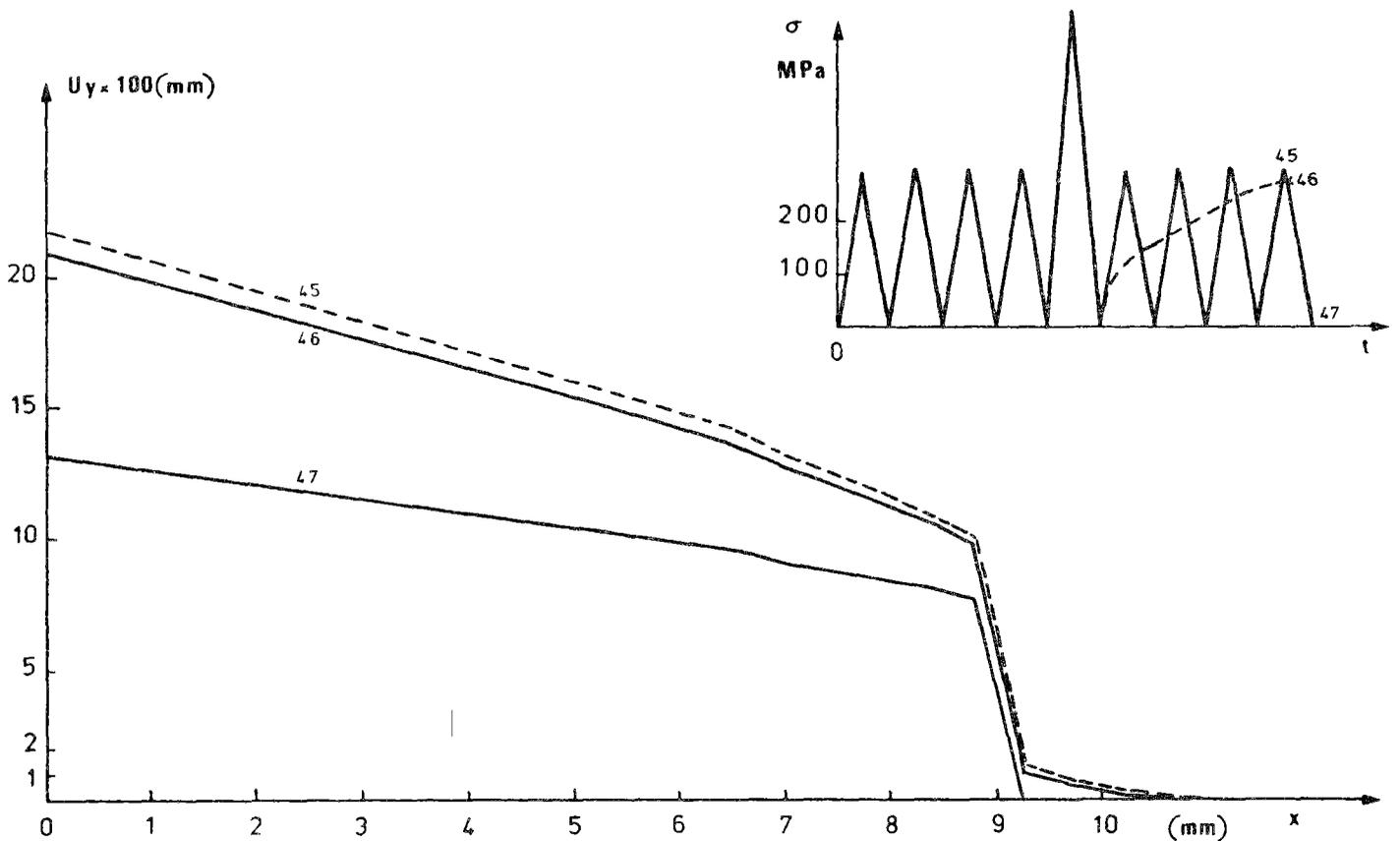


FIGURE 88 : OUVERTURE DE LA FISSURE AU COURS DU 4EME CYCLE APRES LA SURCHARGE 600 MPa

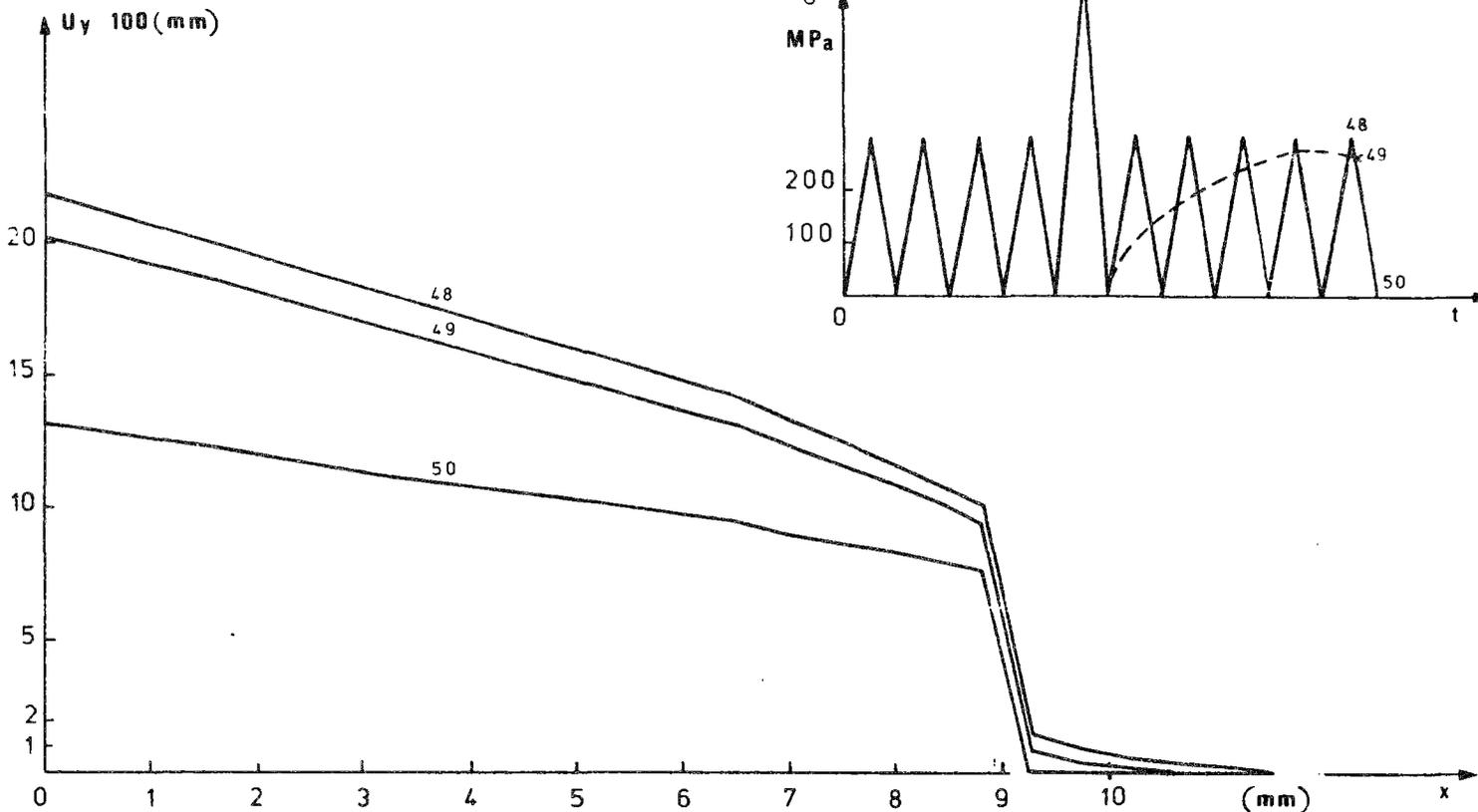


FIGURE 89 : OUVERTURE DE LA FISSURE AU COURS DU 5EME CYCLE APRES LA SURCHARGE 600 MPa

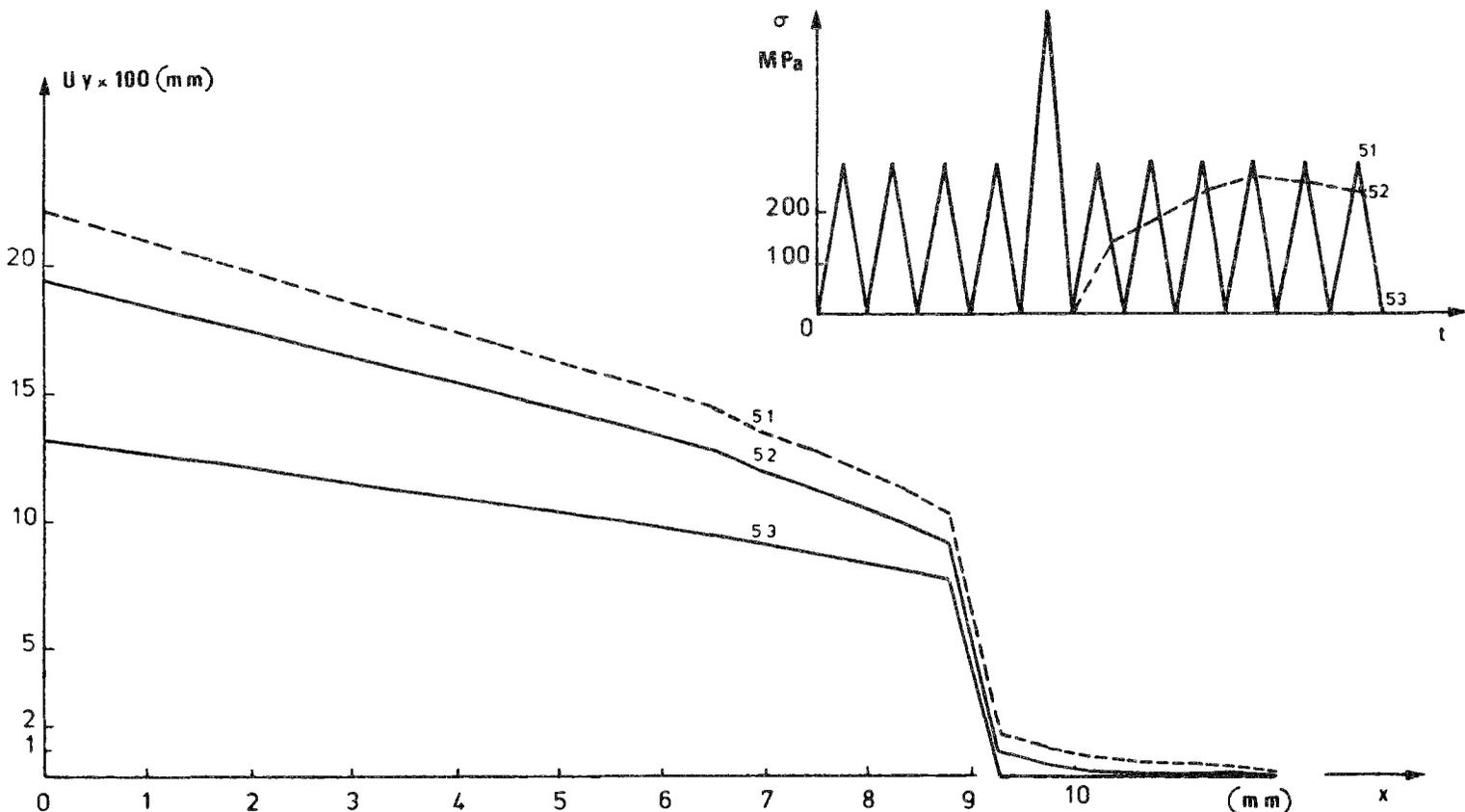


FIGURE 90 : OUVERTURE DE LA FISSURE AU COURS DU 6EME CYCLE APRES LA SURCHARGE 600 MPa

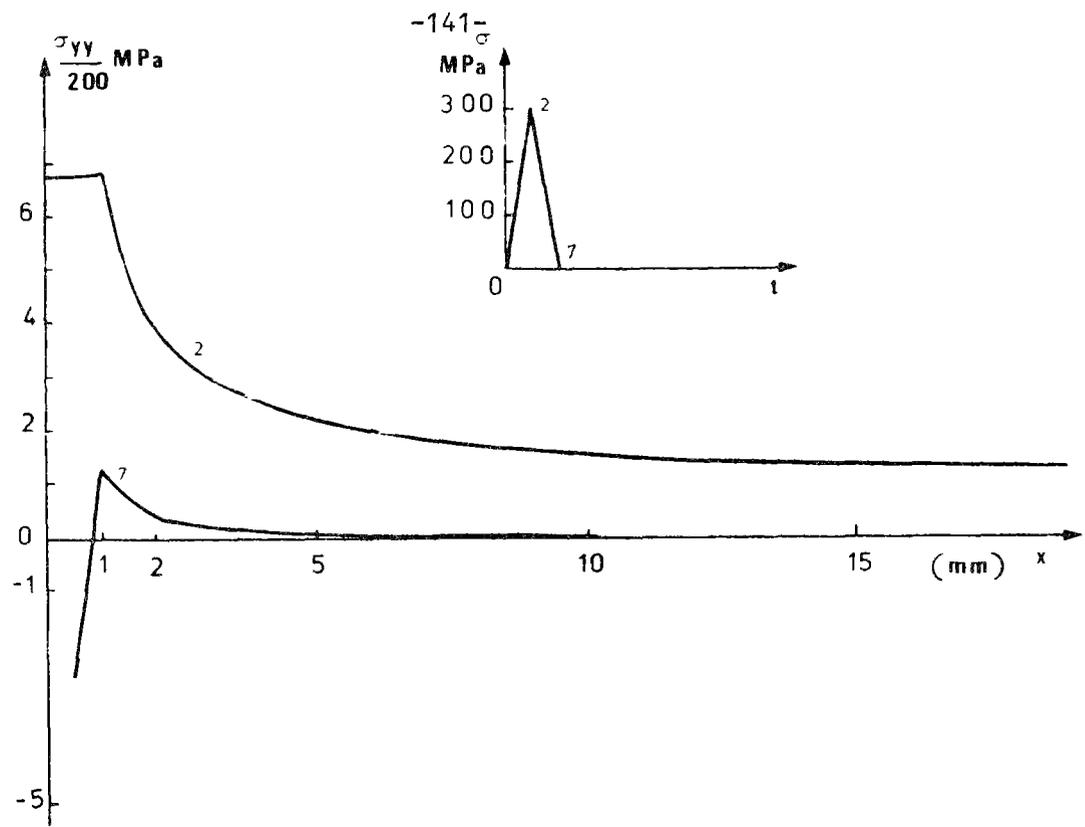


FIGURE 91 : CONTRAINTE  $\sigma_{yy}$  POUR LES CHARGES MAXIMALE ET MINIMALE - 1ER CYCLE.

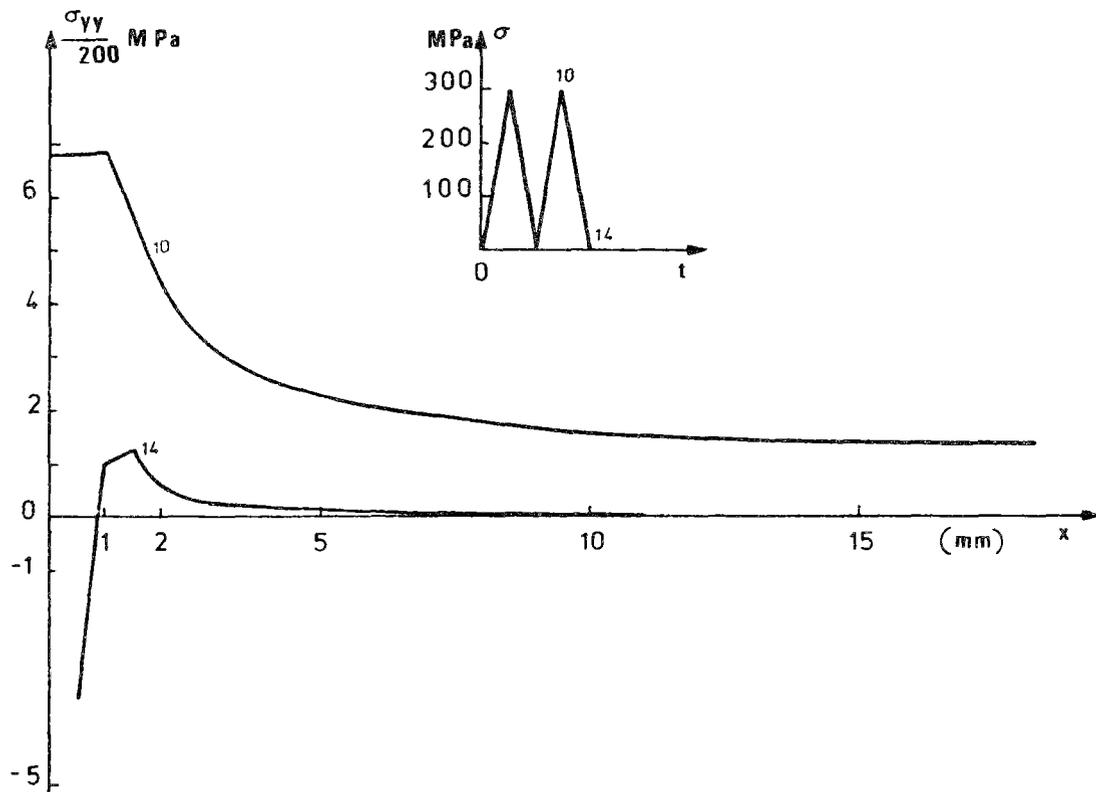


FIGURE 92 : CONTRAINTE  $\sigma_{yy}$  POUR LES CHARGES MAXIMALE ET MINIMALE - 2EME CYCLE.

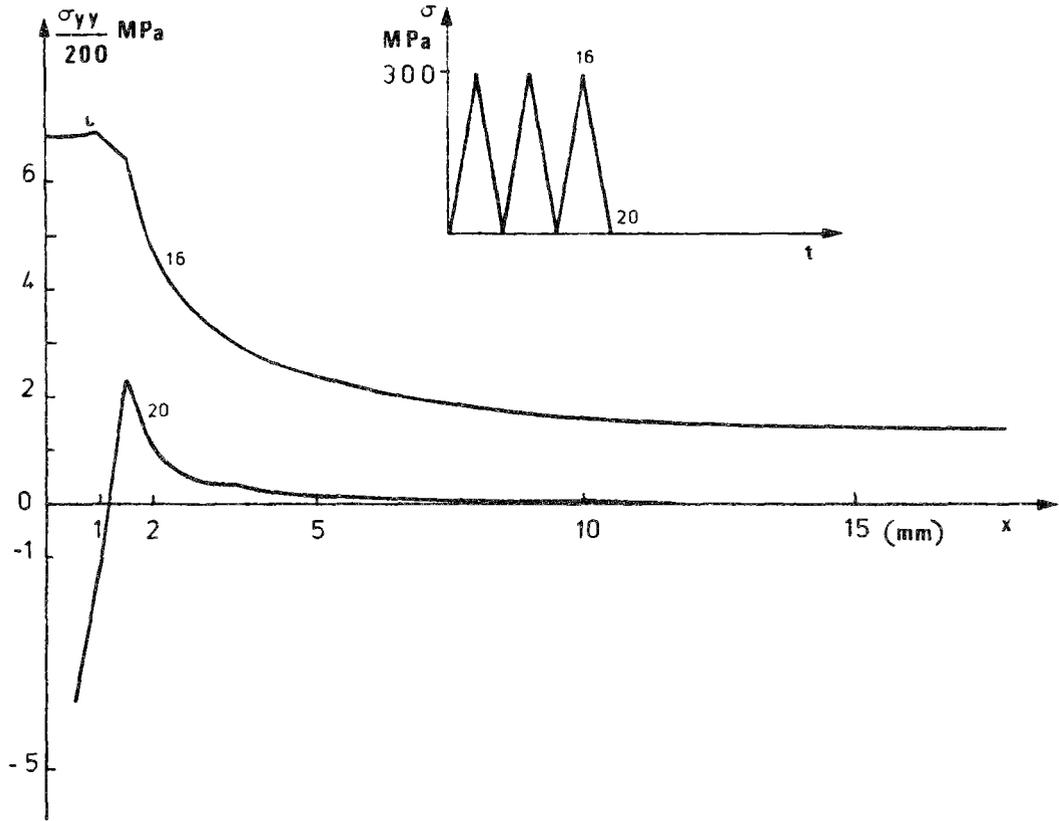


FIGURE 93 : CONTRAINTE  $\sigma_{yy}$  POUR LES CHARGES MAXIMALE ET MINIMALE - 3EME CYCLE.

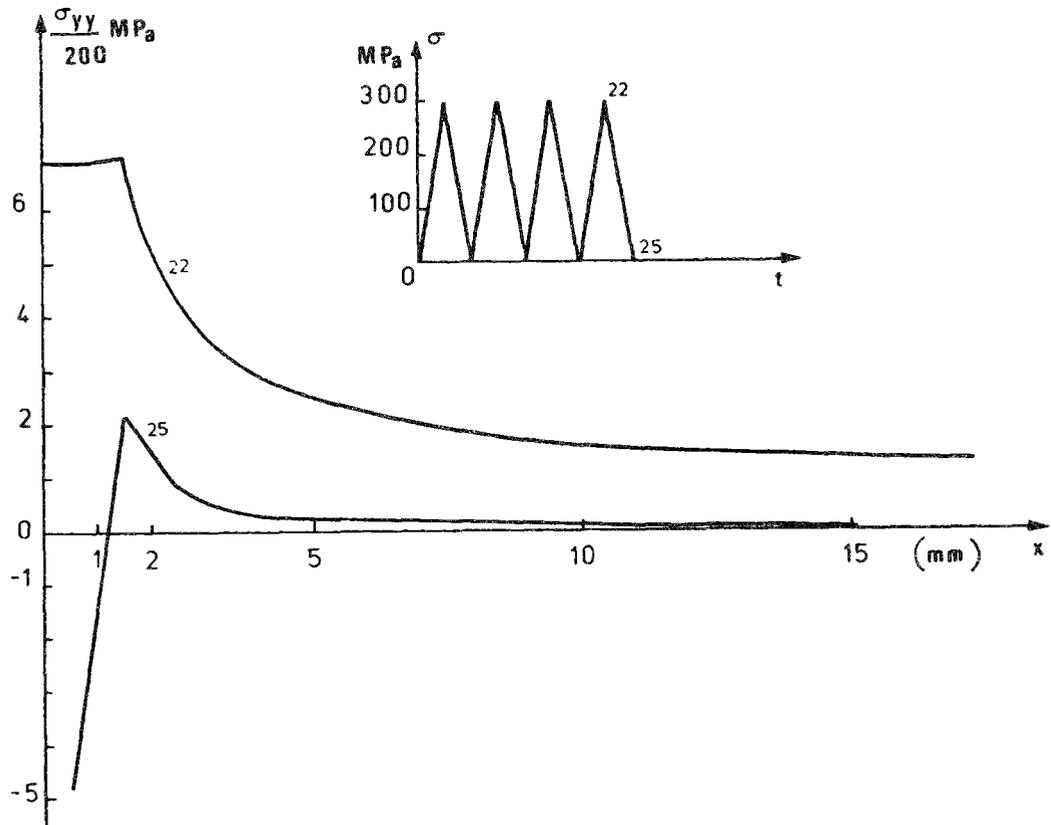


FIGURE 94 : CONTRAINTE  $\sigma_{yy}$  POUR LES CHARGES MAXIMALE ET MINIMALE - 4EME CYCLE.

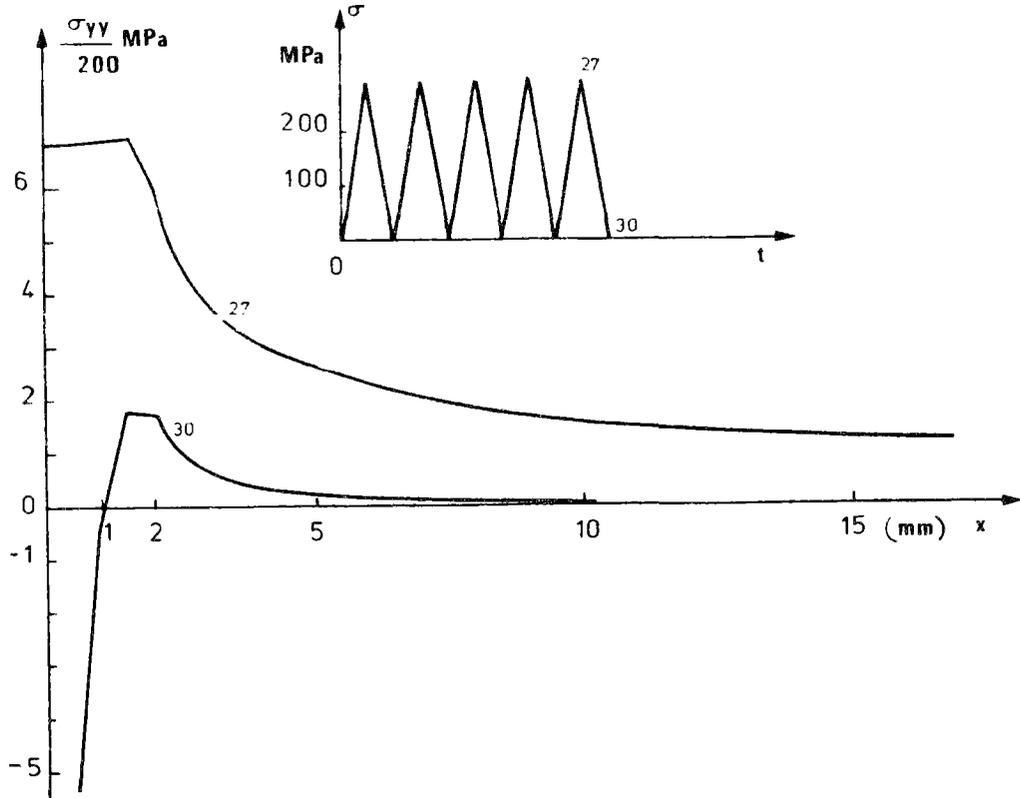


FIGURE 95 : CONTRAINTE  $\sigma_{yy}$  POUR LES CHARGES MAXIMALE ET MINIMALE - SEME CYCLE .

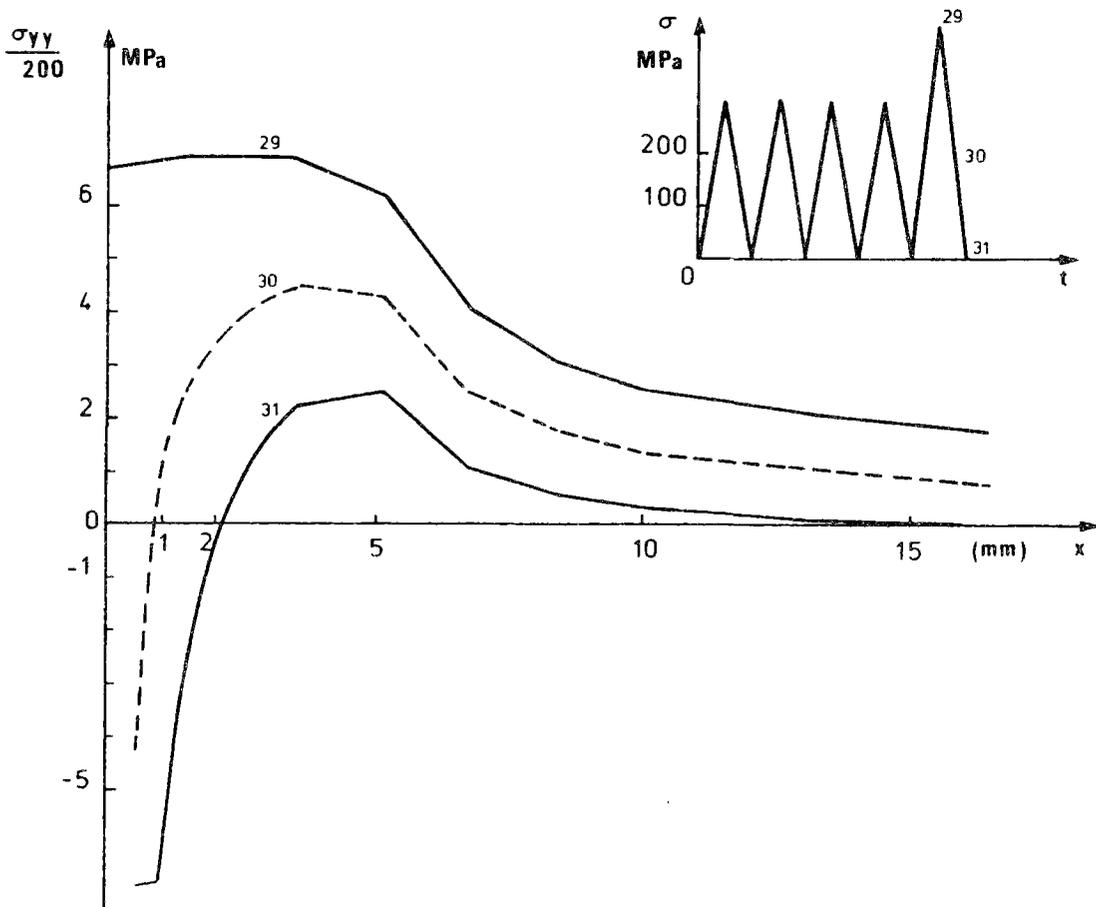


FIGURE 96 : CONTRAINTE  $\sigma_{yy}$  AU COURS DE LA SURCHARGE 440 MPa

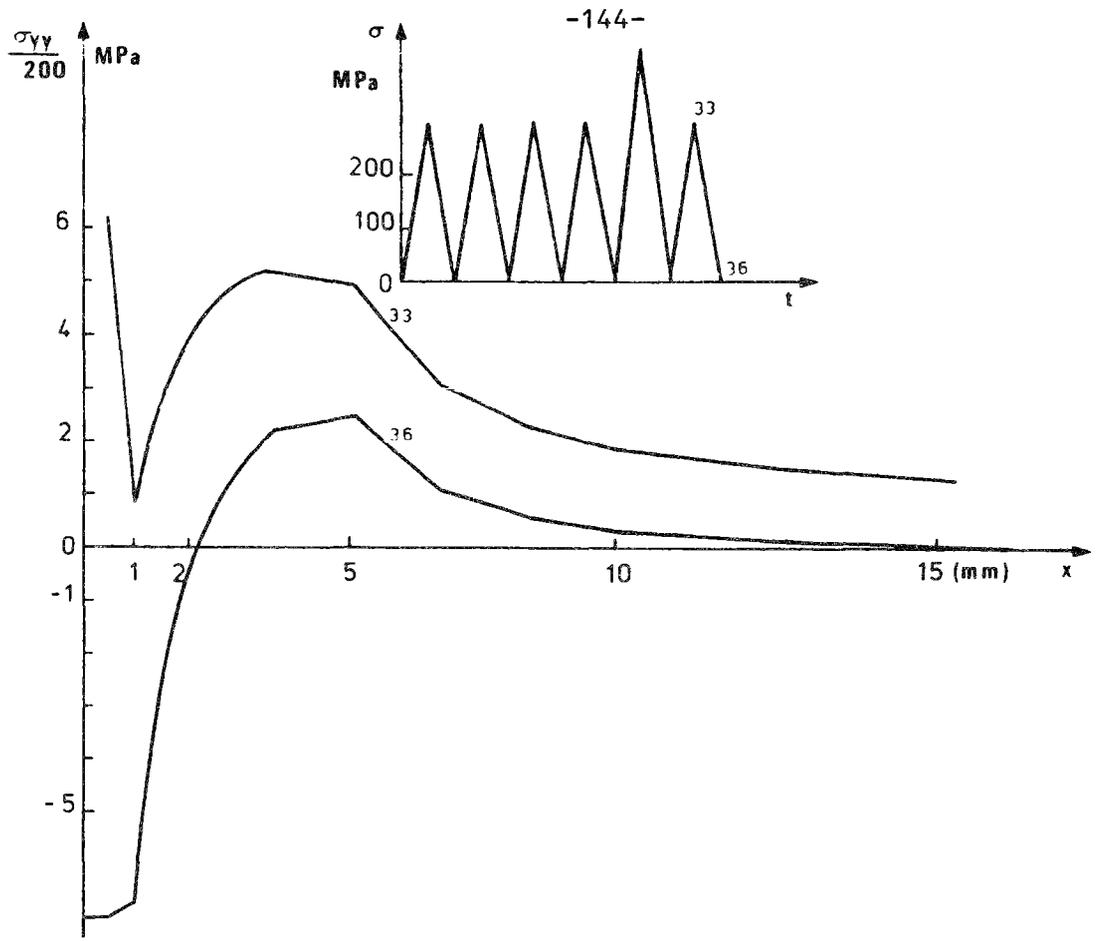


FIGURE 97 : CONTRAINTE  $\sigma_{yy}$  - 1ER CYCLE APRES LA SURCHARGE.

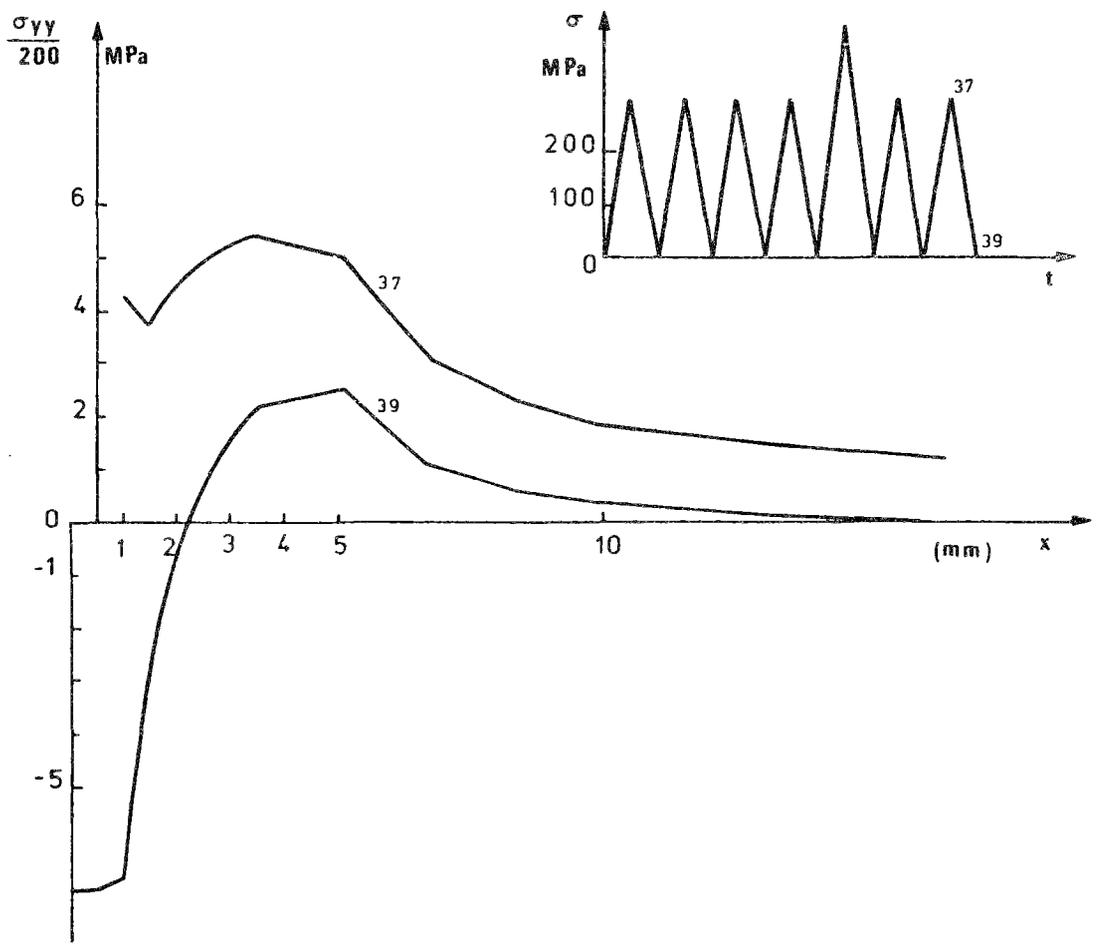


FIGURE 98 : CONTRAINTE  $\sigma_{yy}$  - 2EME CYCLE APRES LA SURCHARGE.

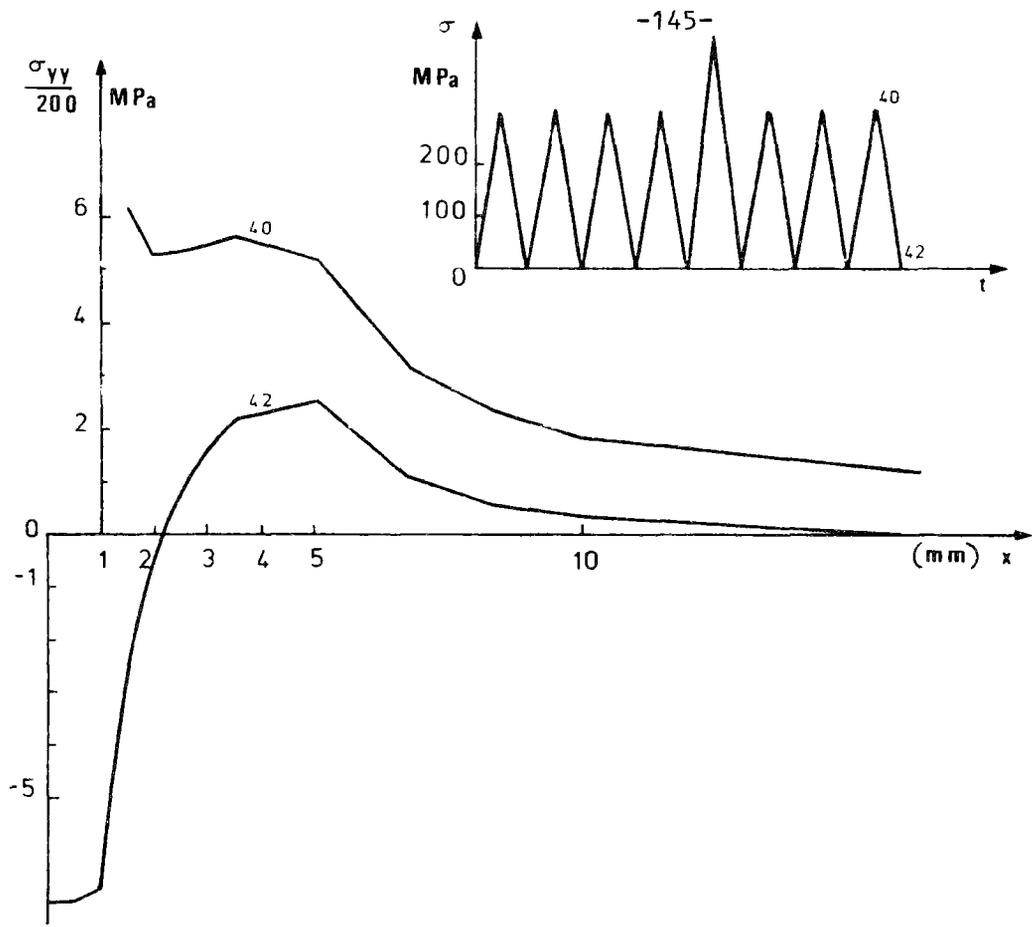


FIGURE 99: CONTRAINTE  $\sigma_{yy}$  - 3EME CYCLE APRES LA SURCHARGE.

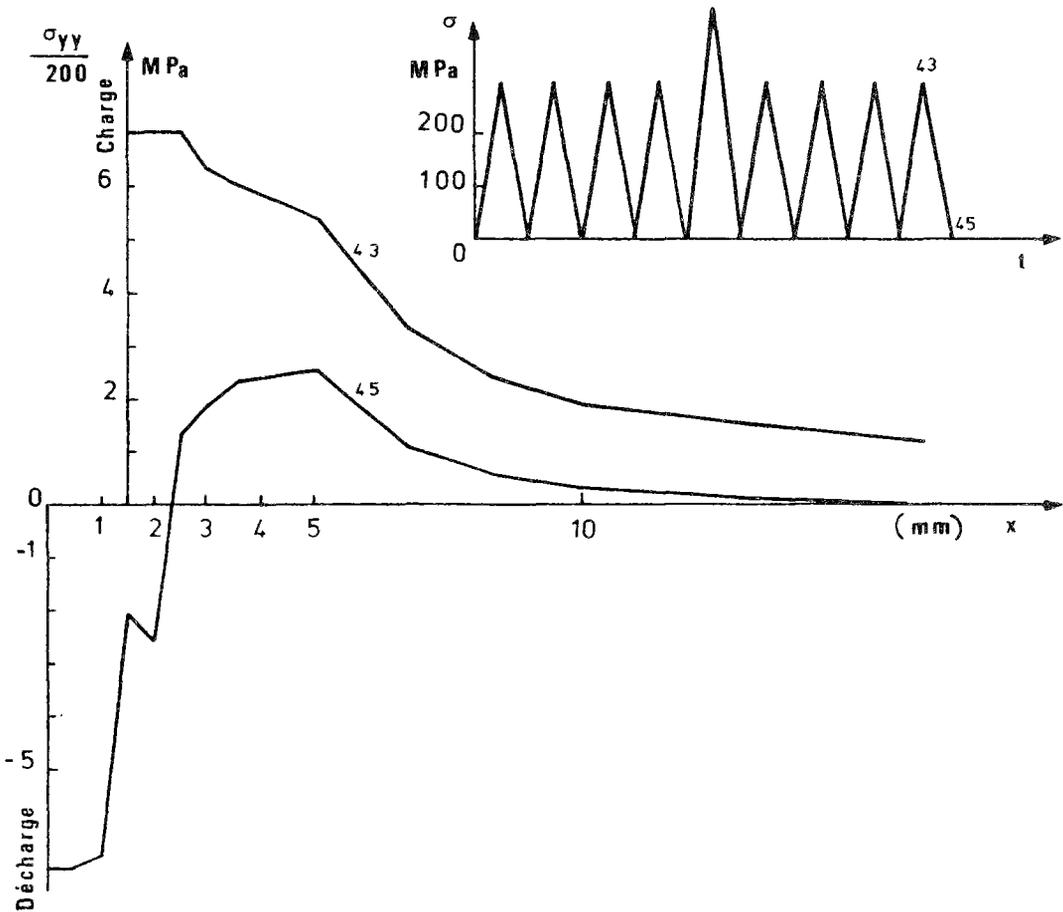


FIGURE 100: CONTRAINTE  $\sigma_{yy}$  - 4EME CYCLE APRES LA SURCHARGE.

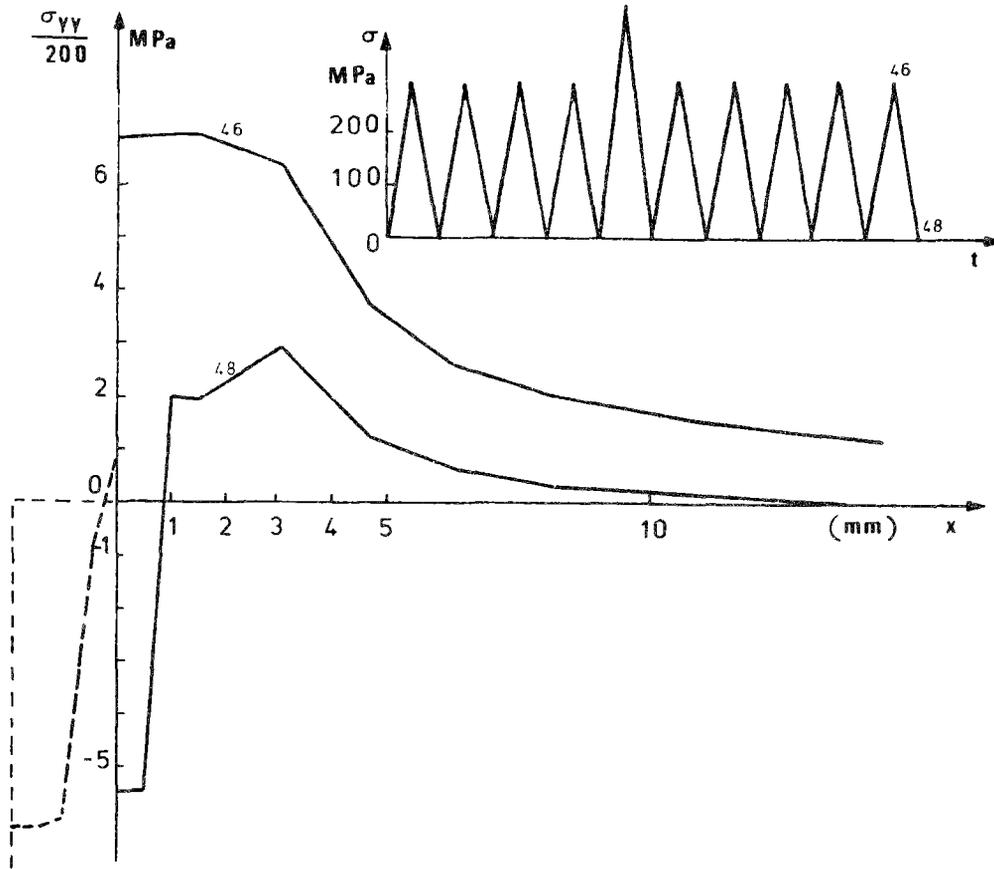


FIGURE 101 : CONTRAINTE  $\sigma_{yy}$  - 5EME CYCLE APRES LA SURCHARGE.

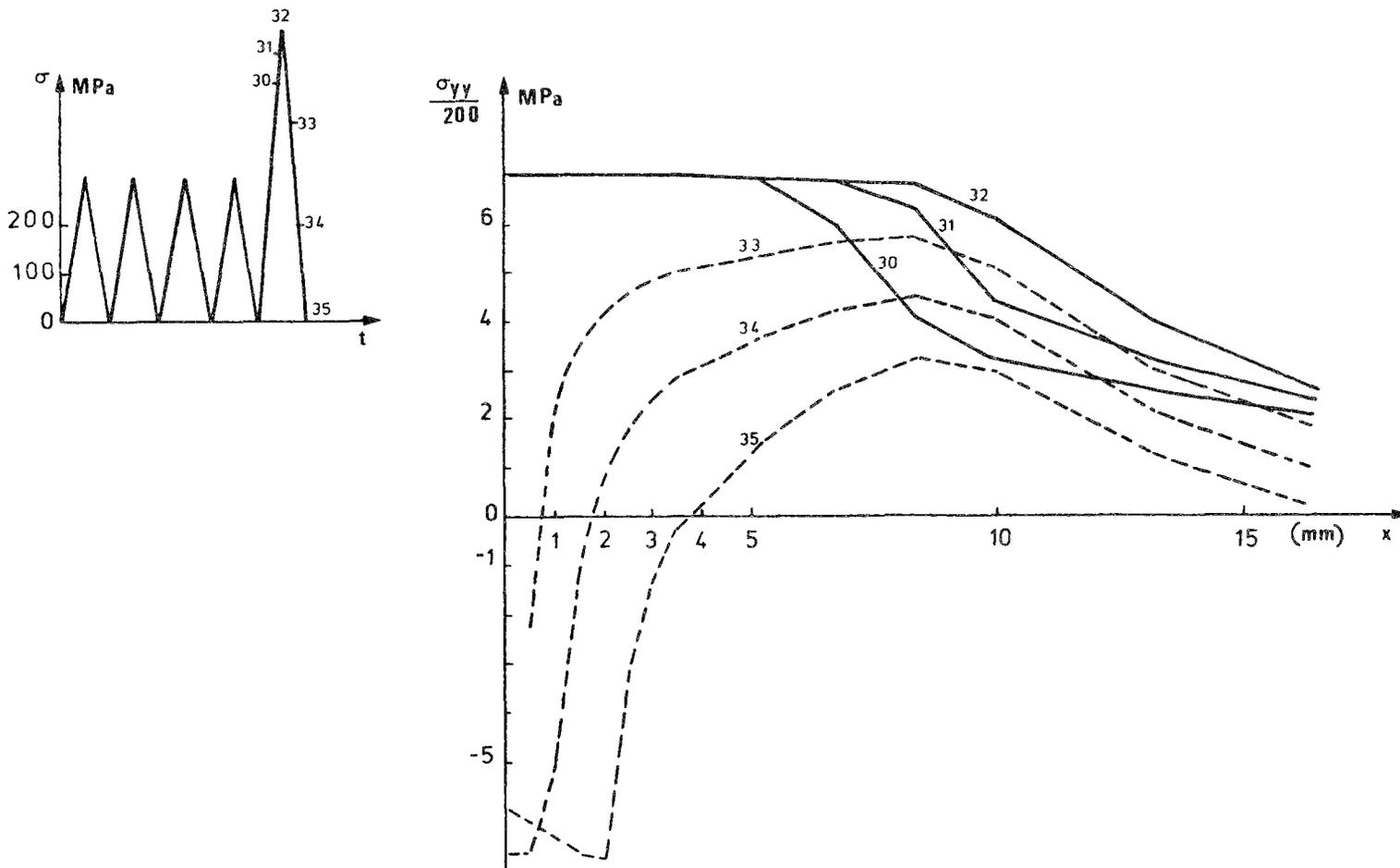


FIGURE 102 : CONTRAINTE  $\sigma_{yy}$  AU COURS DE LA SURCHARGE 600 MPa

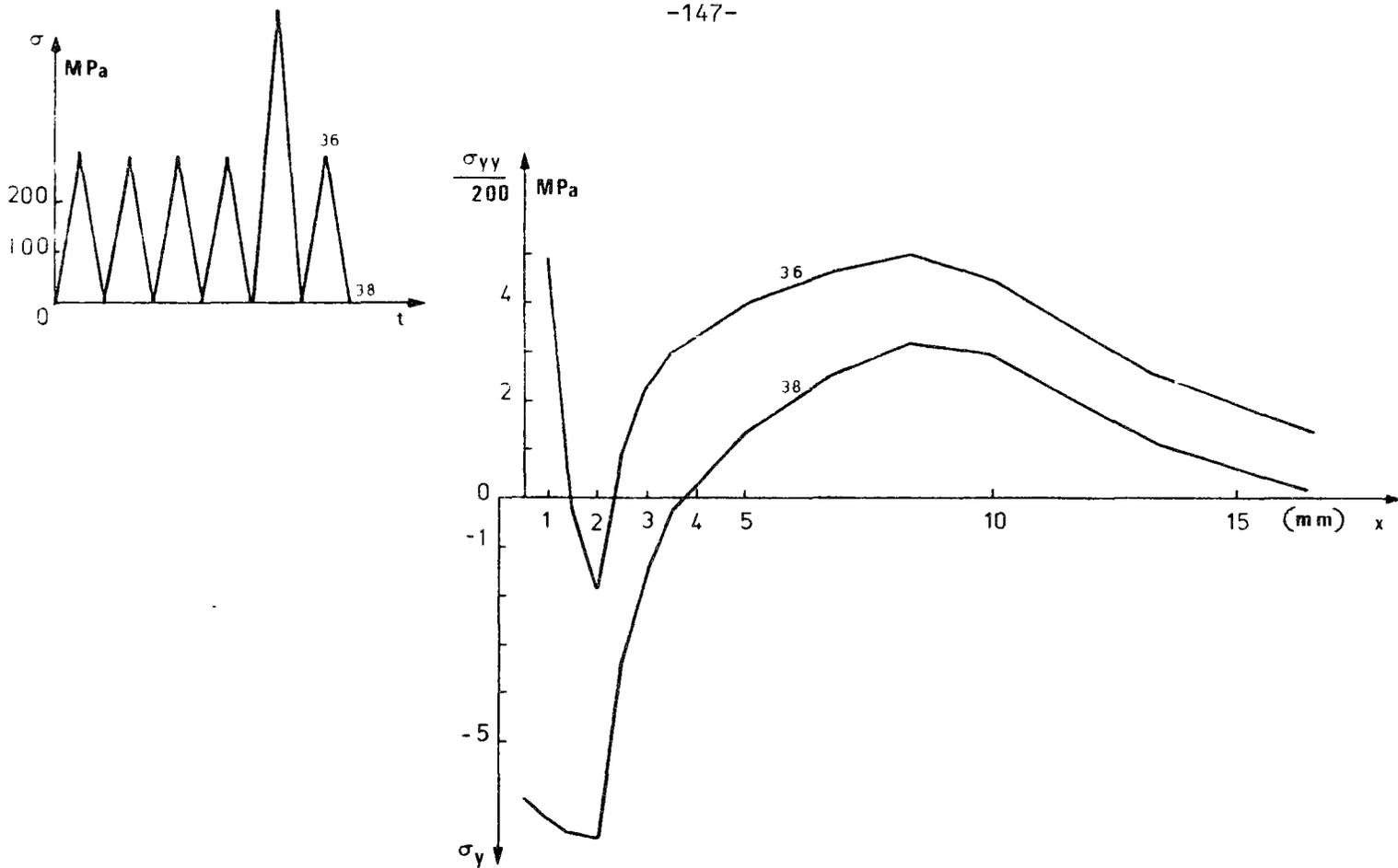


FIGURE 103 : CONTRAINTE  $\sigma_{yy}$  AU COURS DE LA SURCHARGE 600 MPa  
1ER CYCLE APRES LA SURCHARGE.

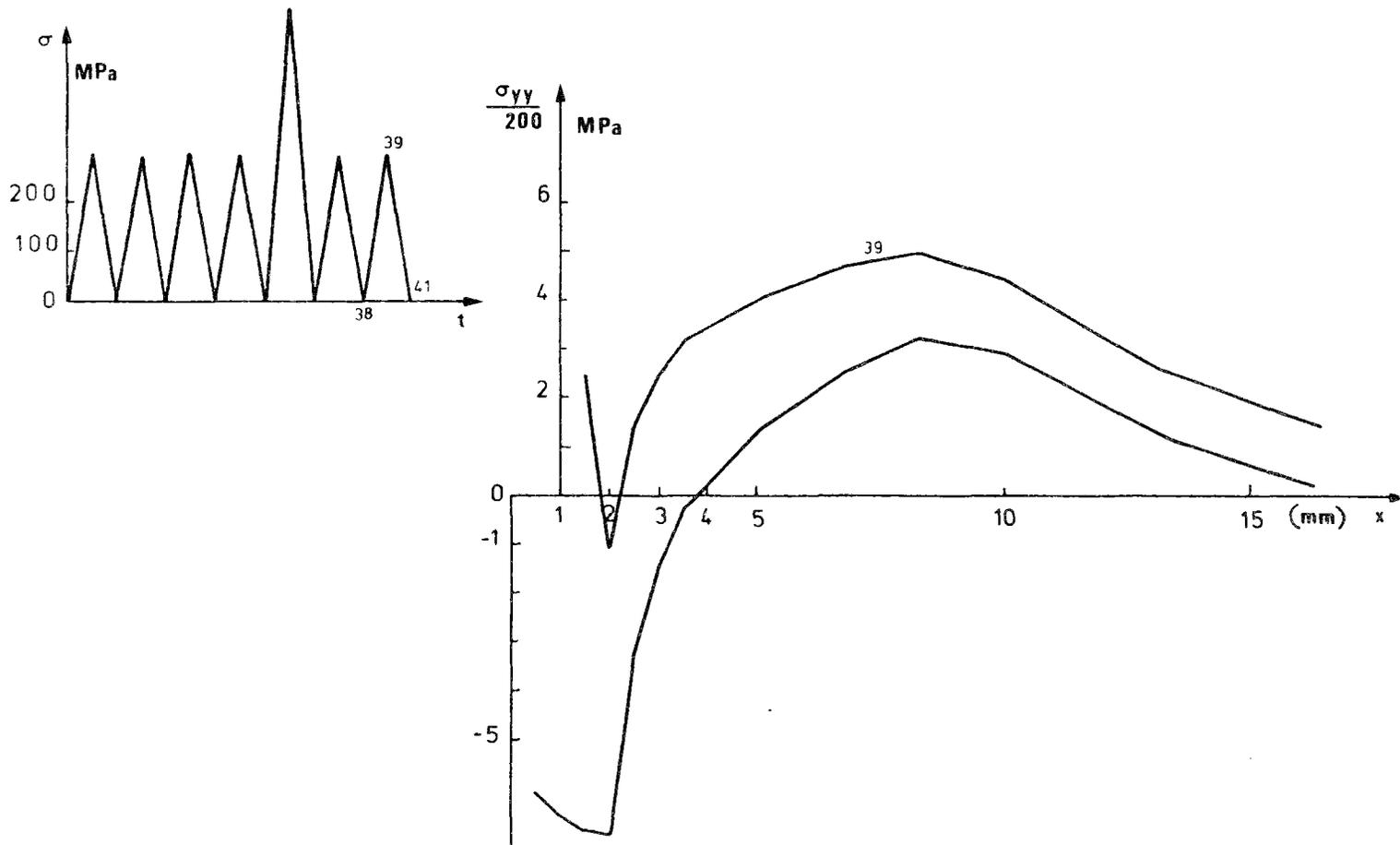


FIGURE 104 : CONTRAINTE  $\sigma_{yy}$  AU COURS DE LA SURCHARGE 600 MPa  
2EME CYCLE APRES LA SURCHARGE.

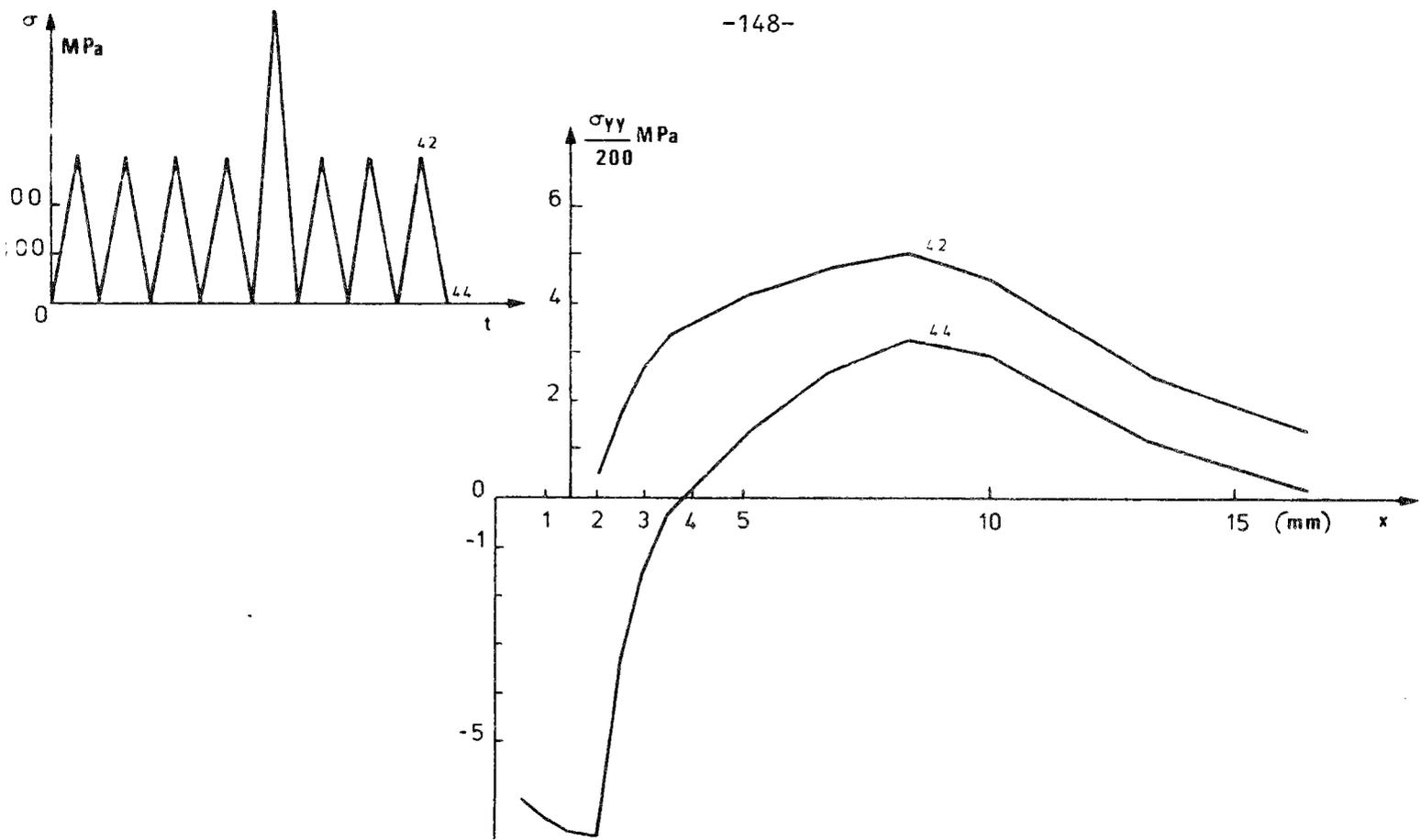


FIGURE 105: CONTRAINTE  $\sigma_{yy}$  AU COURS DE LA SURCHARGE 600 MPa  
3EME CYCLE APRES LA SURCHARGE.

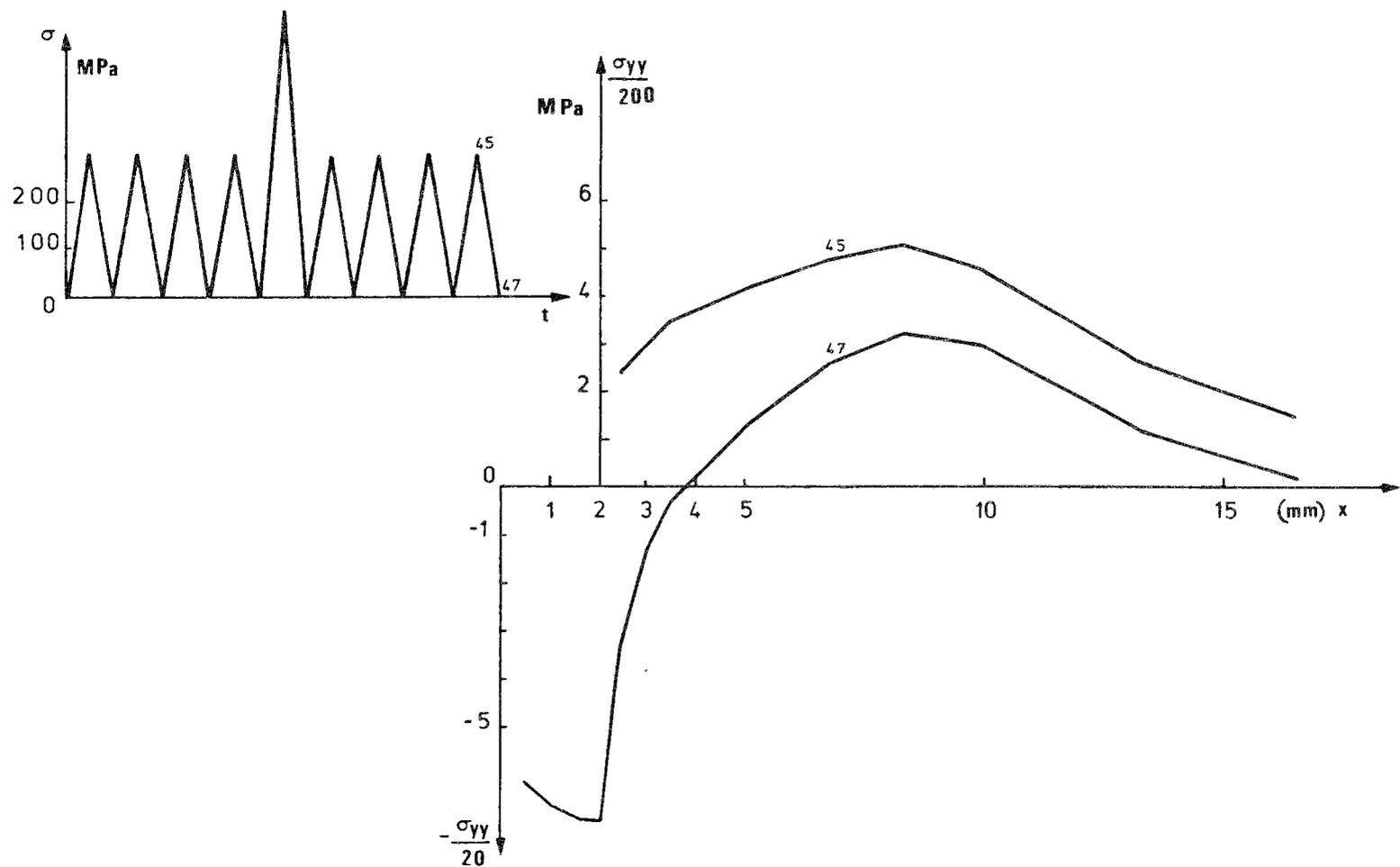


FIGURE 106: CONTRAINTE  $\sigma_{yy}$  AU COURS DE LA SURCHARGE 600 MPa  
4EME CYCLE APRES LA SURCHARGE.

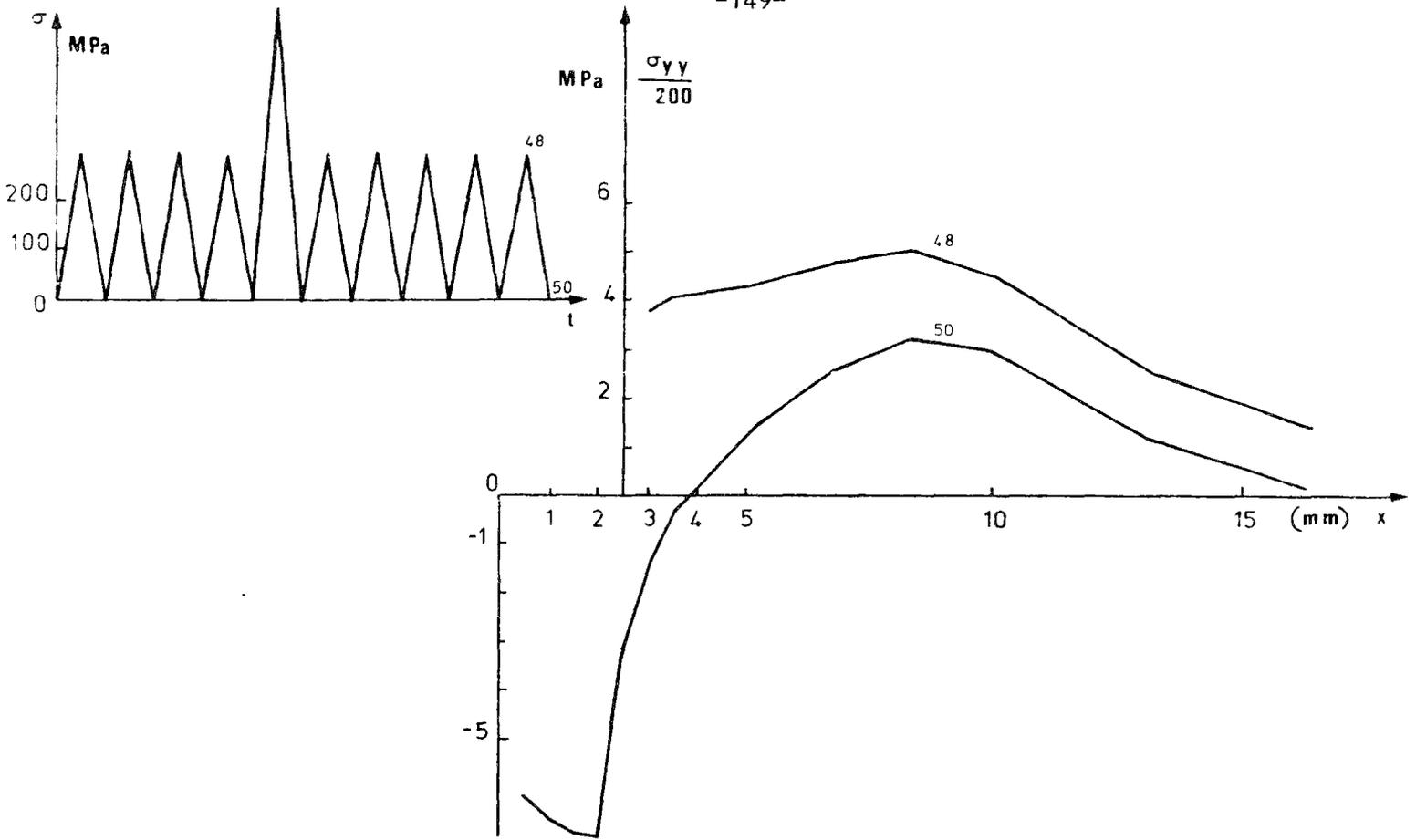


FIGURE 107 : CONTRAINTE  $\sigma_{yy}$  AU COURS DE LA SURCHARGE 600 MPa  
5EME CYCLE APRES LA SURCHARGE.

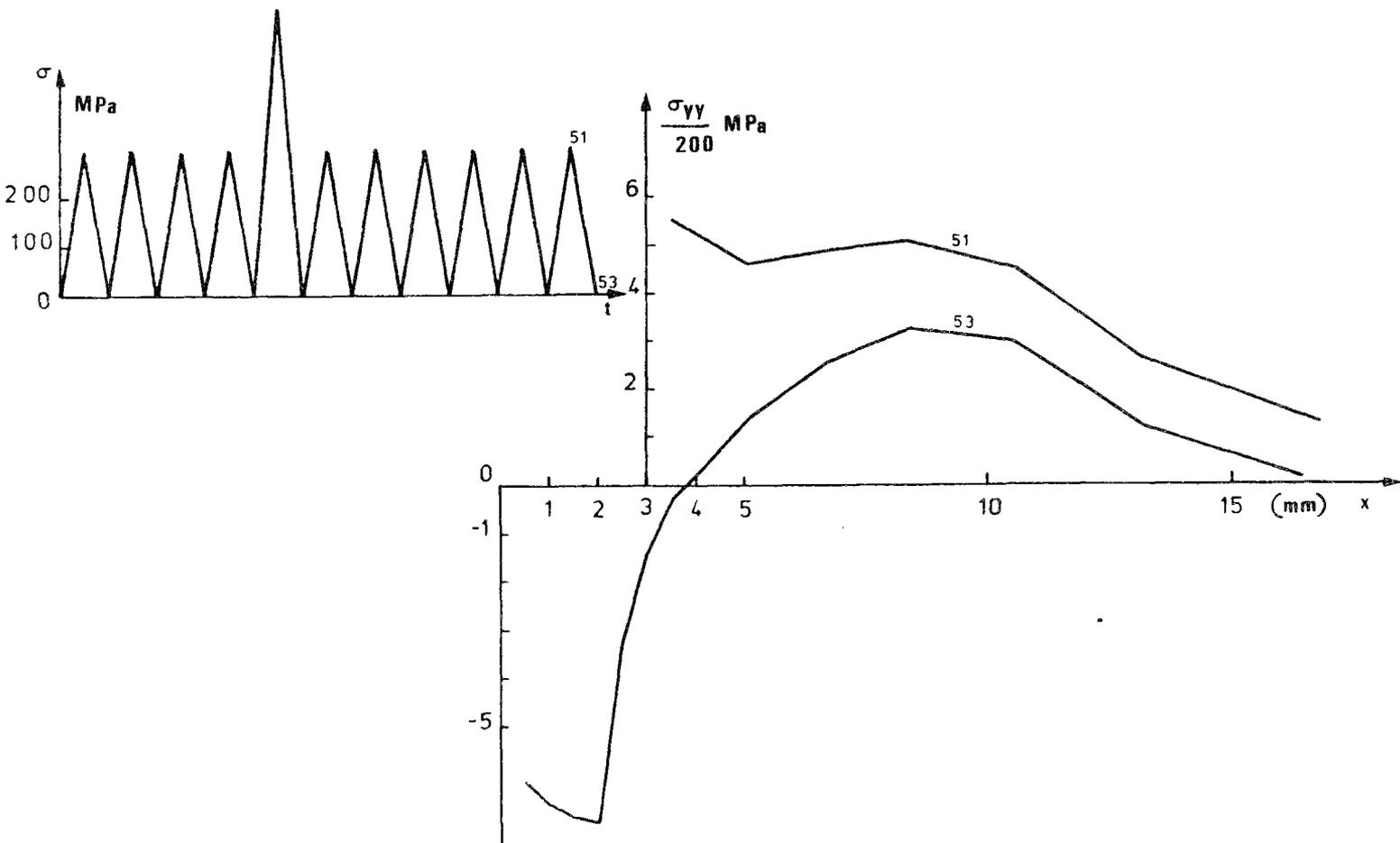


FIGURE 108 : CONTRAINTE  $\sigma_{yy}$  AU COURS DE LA SURCHARGE 600 MPa  
6EME CYCLE APRES LA SURCHARGE.

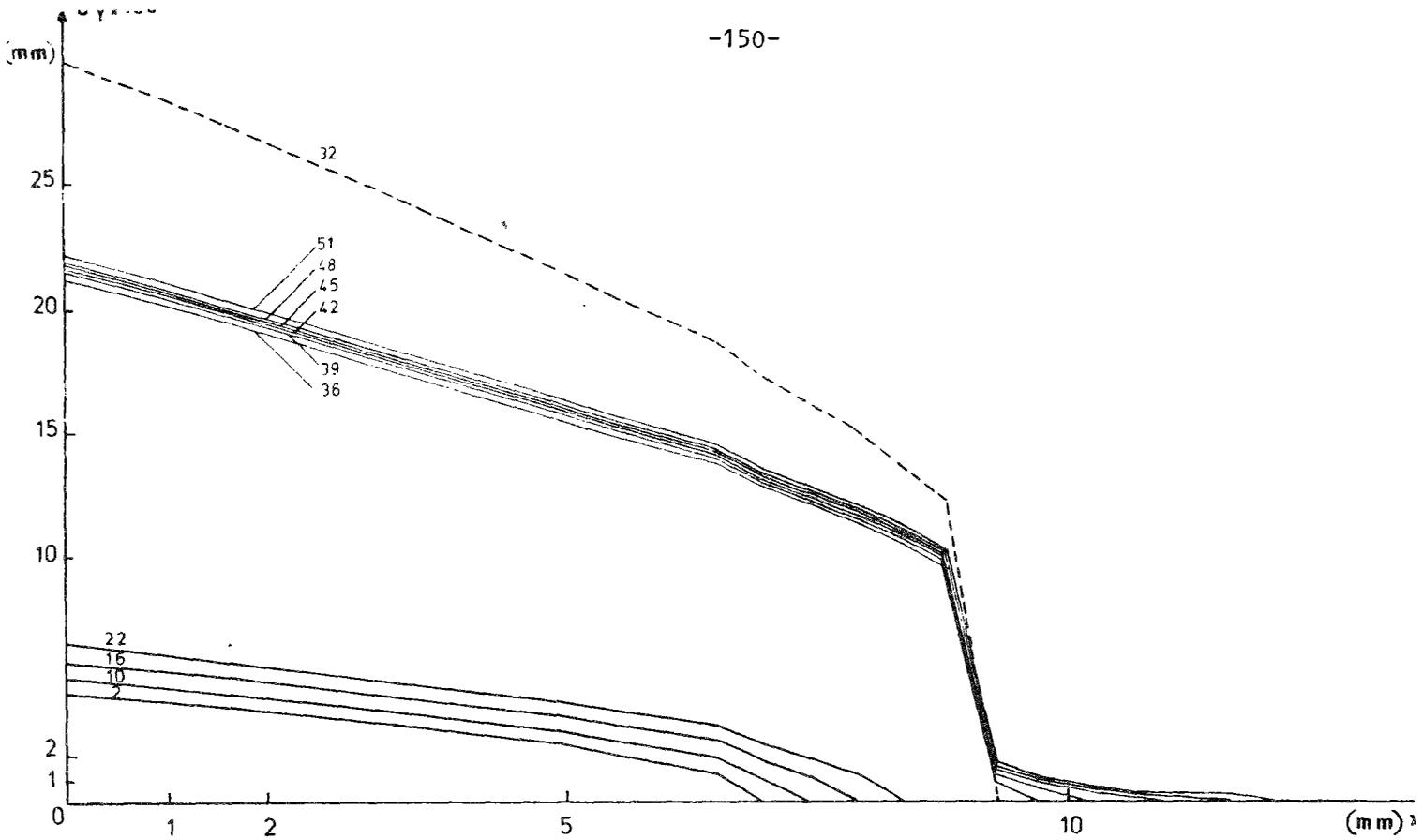


FIGURE 109 : OUVERTURE MAXIMALE AVANT ET APRES LA SURCHARGE 600 MPa

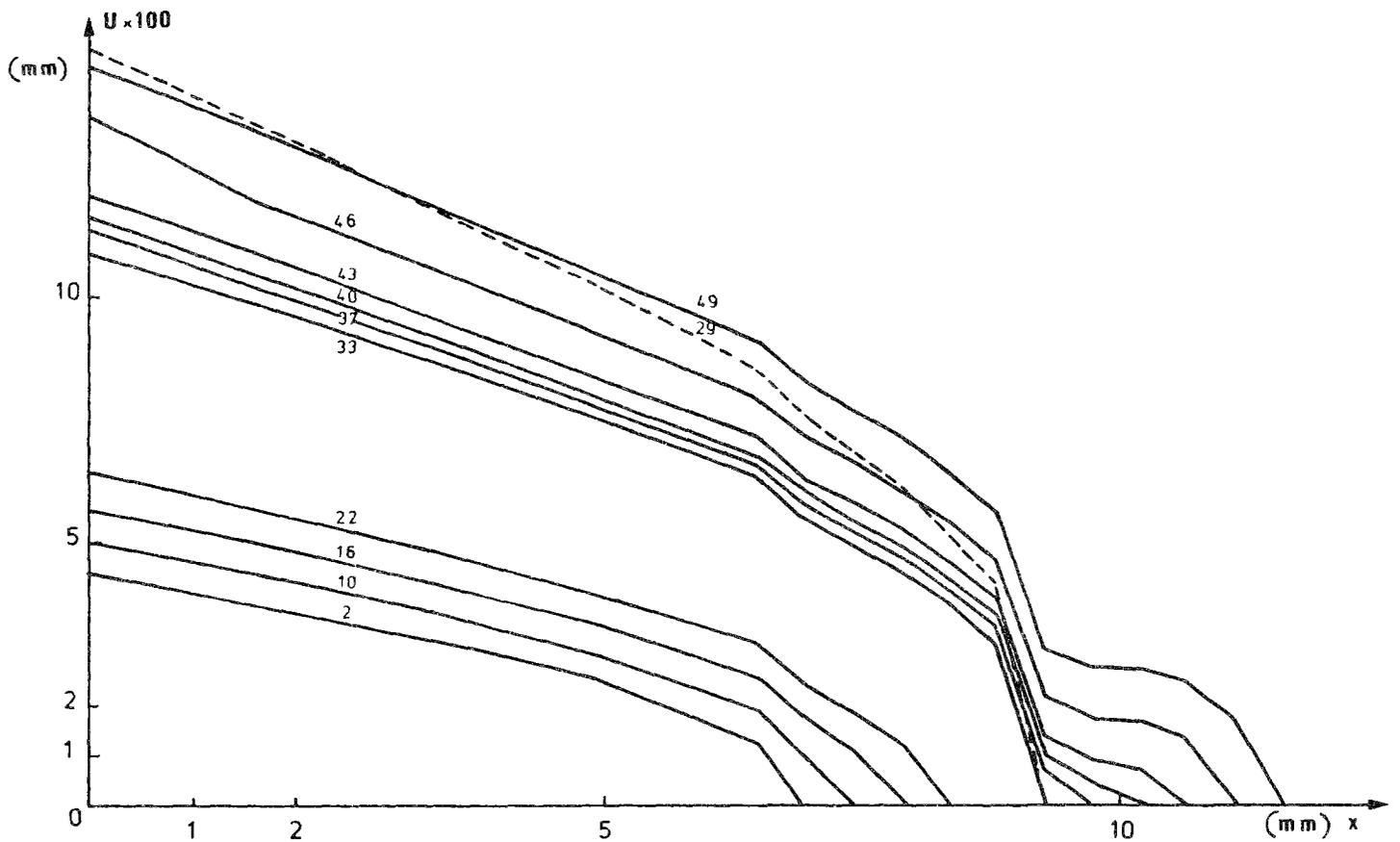


FIGURE 110 : OUVERTURE MAXIMALE AVANT ET APRES LA SURCHARGE 440 Pa

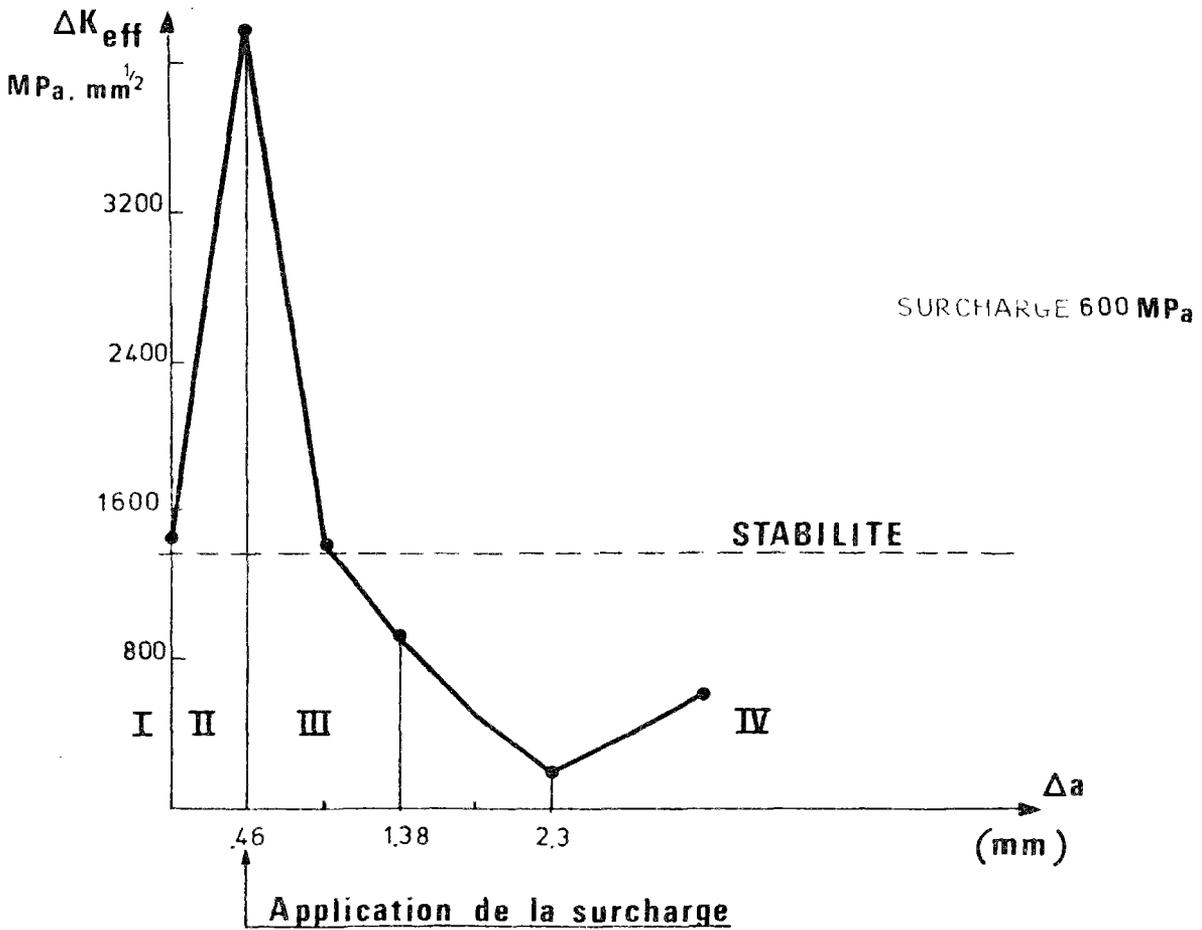
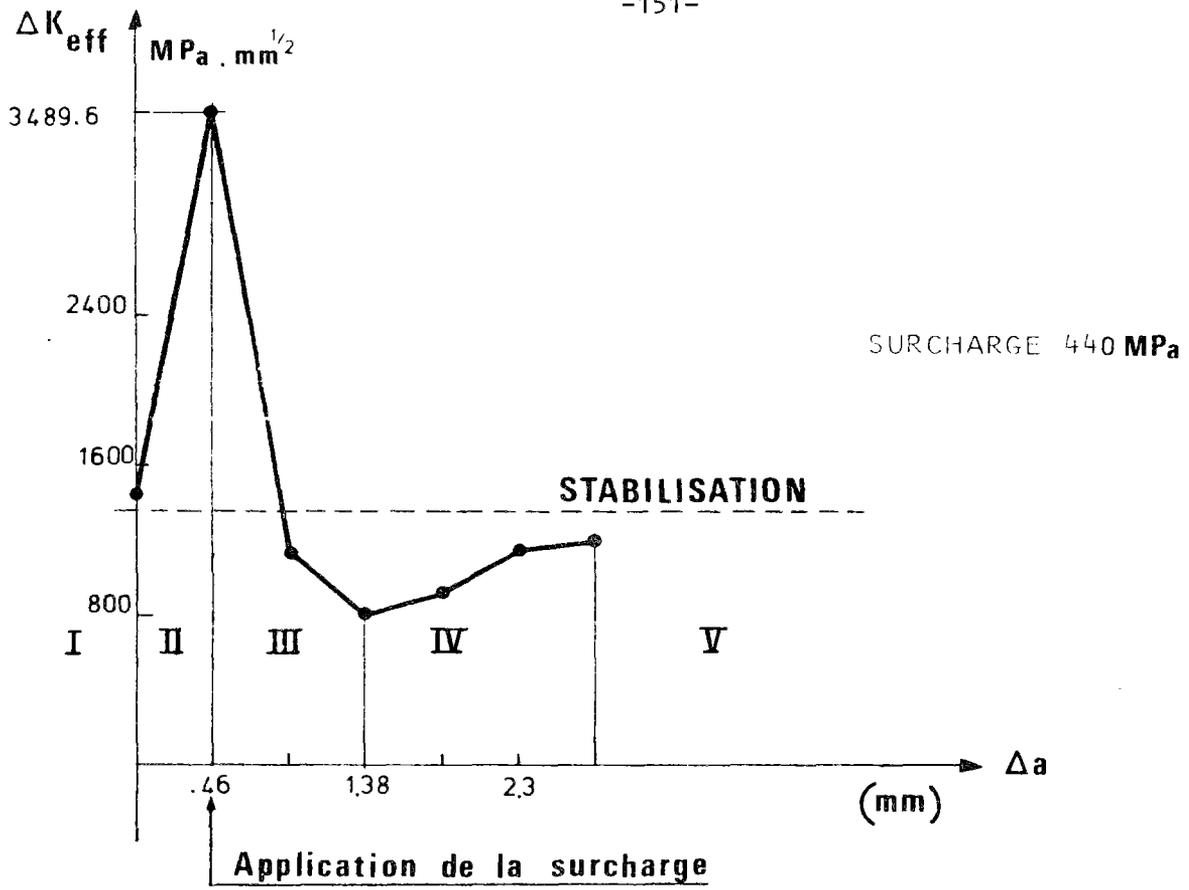


FIGURE 111 : VARIATION DU  $\Delta K$  EFFECTIF

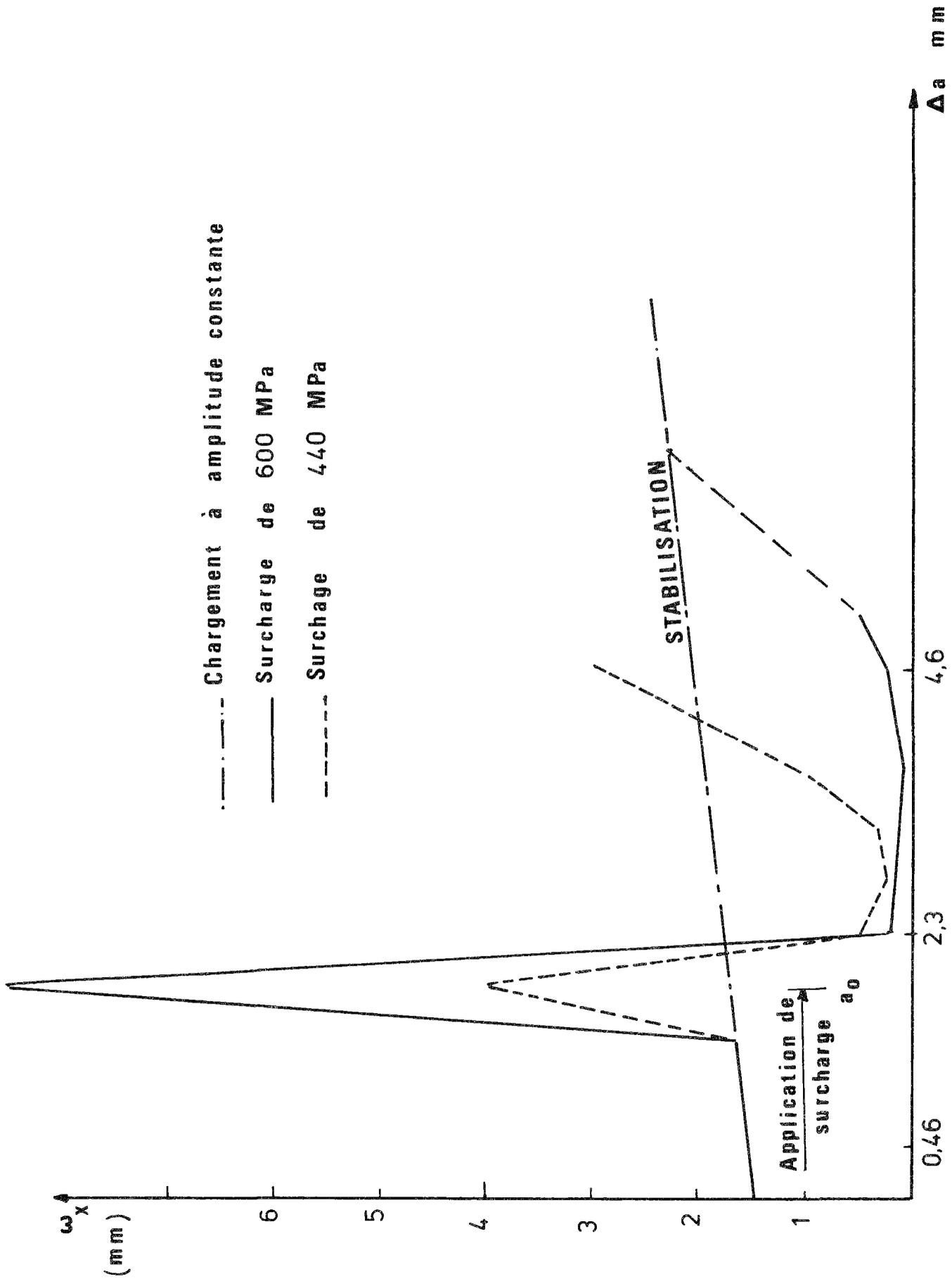


Figure 112 :

Variation de la taille de la zone plastique monotone au cours de la propagation.

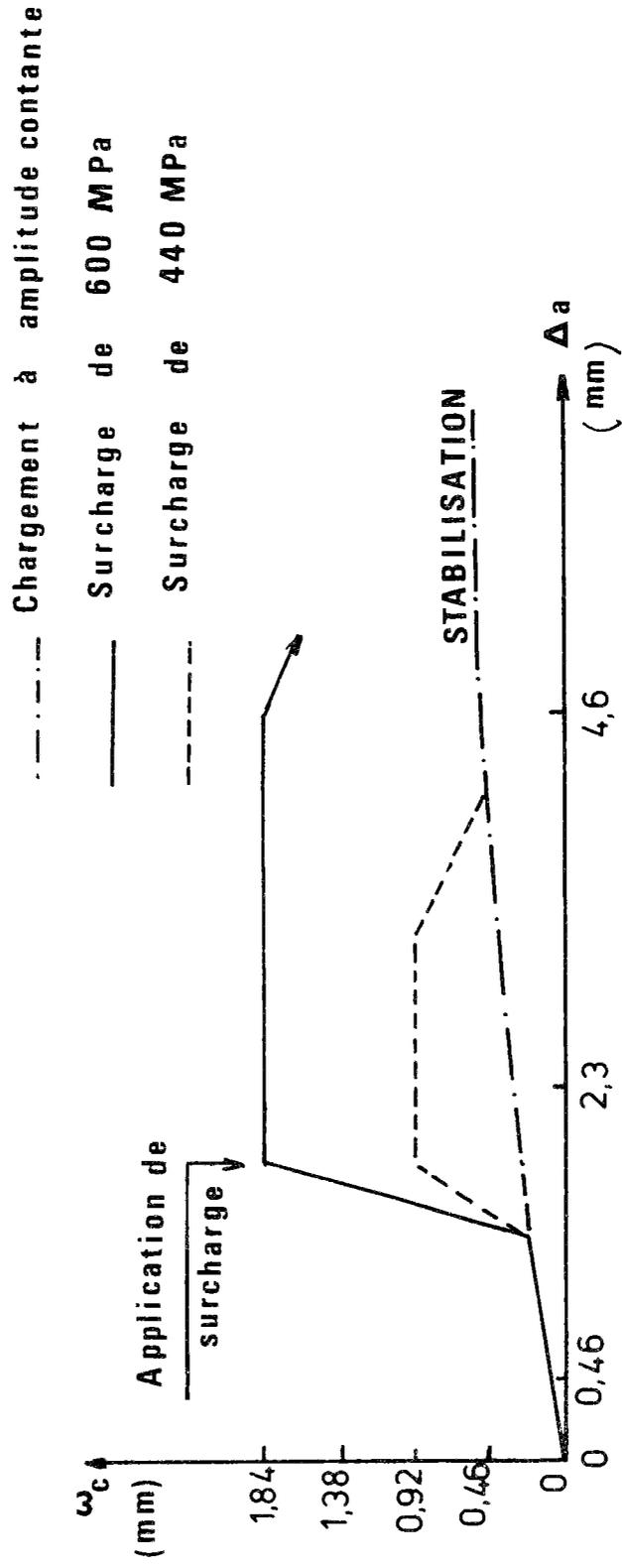


Figure 113 :

Variation de la taille de la zone plastique cyclique au cours de la propagation.

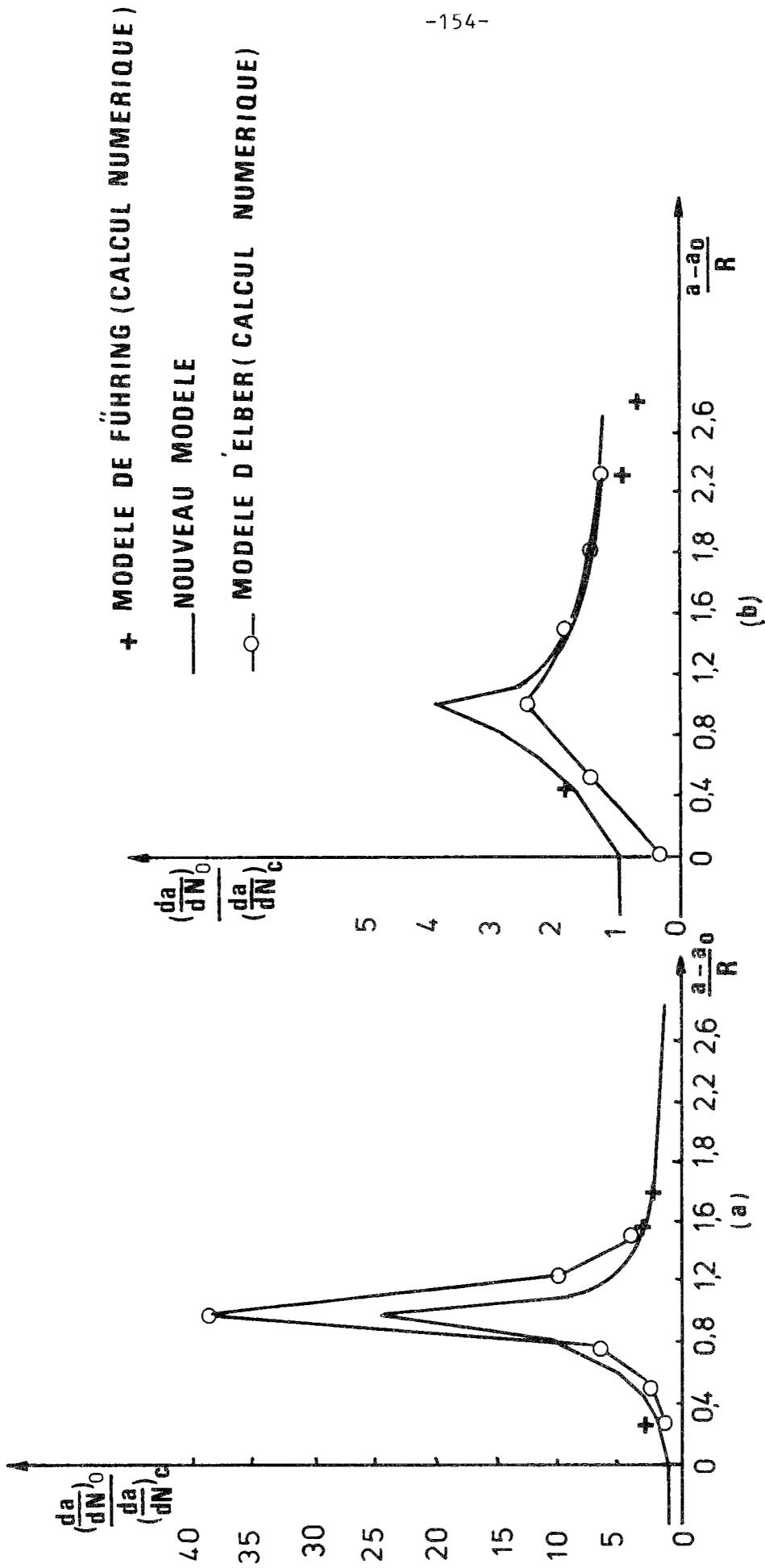


Figure 114 :

Comparaison du nouveau modèle avec le calcul numérique des rapports  $(da/dN)_0 / (da/dN)_c$

(a) - Le rapport de charge  $\alpha = 2$  .

(b) -  $\alpha = 1.47$  ,  $m = 4$  .

CONCLUSION

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la déformation plastique en fond de fissure. Nous avons montré que cette dernière a une grande influence sur la propagation de la fissure, que ce soit pour un chargement monotone ou cyclique.

Au cours de notre étude, les résultats suivants ont été mis en évidence :

- Le schéma de Prandtl représente une bonne approximation de l'état de contrainte au fond d'une fissure en déformation plane.
- Lorsque la fissure est mobile, le résultat numérique montre clairement la plastification des bords libres de la surface fissurée, surtout en état de déformation plane. Une telle plastification, qui est due aux déformations plastiques résiduelles, ne se produit pas lorsque la fissure est fixe.
- Lorsque la fissure est mobile, l'ouverture de la fissure est plus faible comparée à la solution élastique. C'est cette réduction de l'ouverture qui explique le phénomène de fermeture des bords libres des fissures en fatigue.
- L'intégrale  $J$ , numériquement, tend vers zéro pour les contours de plus en plus petits.
- Le calcul numérique montre clairement l'influence de la zone plastique résiduelle sur la propagation de fissure de fatigue, en contrainte plane. L'application d'une surcharge entraîne un ralentissement plus ou moins net de la propagation.
- A partir de la notion de l'écartement du fond de fissure, nous donnons un modèle qui tient compte de la zone plastique résiduelle créée par surcharge.

BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] FRANCOIS-JOLY, *La rupture des métaux*, Ecole d'Eté de la Colle-sur-Loup, Masson, Septembre 1970.
- [ 2 ] G.R. IRWIN, *Analysis of Stress and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate*, J. Appl. Mech., 24, pp. 361-364, (1957).
- [ 3 ] M.L. WILLIAMS, *On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack*, J. Appl. Mech. 24, p. 109, (1957).
- [ 4 ] J.W. HUTCHINSON, *Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material*, J. Mech. Phys. Solids, 16, pp. 13-31 (1968).
- [ 5 ] J. SALENCON et B. HALPHEN, *Cours de Calcul des Structures Inélastiques*, E.N.P.C., (1979).
- [ 6 ] J.R. RICE, *A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks*, J. Appl. Mech., pp. 379-386, (Juin 1968).
- [ 7 ] J.R. RICE, *Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture*, Vol. 2, Ed. Leibowitz, pp. 191-308 (1968).
- [ 8 ] J.R. RICE, *Some Computational Problems in Elastic-Plastic Crack Mechanics*, Numerical Methods in Fracture Mechanics, Swansea, (1978).
- [ 9 ] H.D. BUI, *La Mécanique de la Rupture Fragile*, Masson, Paris, (1977).
- [ 10 ] Notice de TITUS, *Plasticité*
- [ 11 ] Q.S. NGUYEN, *Contribution à la Théorie Macroscopique de l'élastoplasticité avec écrouissage*, 1ère Thèse de Doctorat d'Etat Sciences Physiques, Université Paris VI, (1973).
- [ 12 ] RICE and TRACEY, *Computational Fracture Mechanics*, Academic Press, New-York (1973)
- [ 13 ] N. LEVY and al., *Small scale Yielding Near a Crack in Plane Strain : A Finite Element Analysis*, Inter. J. Fr. Mech., Vol. 7, n° 2, (1971).
- [ 14 ] ROSHDY S. BARSOUM, *Triangular Quarter-Point Elements as Elastic and Perfectly-Plastic Crack Tip Elements*, Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 12, pp. 85-98, (1977).
- [ 15 ] G.I. BARENBLATT, *Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture*, Advance in Applied Mechanics, Vol. 7, 1962.
- [ 16 ] D. DUGDALE, *Yielding of Steel Sheets Containing Slits*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 8, 1960.

- [ 17] J.R. RICE, E.P. SORENSON, *Continuing Crack Tip Deformation and Fracture for Plane Strain Crack Growth in Elastic Plastic Solids*, J. Mech. Phys. Solids, p. 163-186, (1978)
- [ 18] Y. D'ESCATHA et al., *Fatigue et Rupture : Applications aux Structures*, Séminaire "Matériaux et Structures sous Chargement Cyclique", Ecole Polytechnique, (1978).
- [ 19] Q.S. NGUYEN, *Normal Dissipativity and Energy Criteria in Fracture*, IUTAM Symposium "Variational Methods in the Mechanics of Solids", Evanston (1978).
- [ 20] J.D. ACHENBACH, *Dynamic effects in Brittle Fracture*, Mechanics Today, Vol. 1, Pergamon Press, (1974).
- [ 21] G.P. CHEREPANOV, *Crack Propagation in Continuous media*, P.M.M., Vol. 31, p. 476-488, (1967).
- [ 22] L.M. KACHANOV, *Crack Growth under Creep Conditions*, Mech. Tver. Tela, Vol. 13, p. 97, (1978).
- [ 23] Q.S. NGUYEN, *Une description thermodynamique du problème de fissure mobile*, C.R. Acad. Sc., (1979).
- [ 24] Q.S. NGUYEN, *Méthodes Energétiques en Mécanique de la Rupture*, Journal de Mécanique, Vol. 19, n° 2, 1980.
- [ 25] L.I. SLEPYAN, *Deformation at the Edge of a Growing Crack*, M. Tver. Tela, Vol. 8, p. 125, (1973).
- [ 26] J.R. RICE, W.J. DRUGAN, T.L. SHAM, *Elastic Plastic Analysis of Growing Cracks*, Technical Report, Brown University, (1979).
- [ 27] L.I. SLEPYAN, *Growing Crack During Plane Deformation of an Elastic Plastic Body*, Mek. Tver. Tela, 9, p. 57-67, (1974).
- [ 28] J.C. NEWMAN, *A Finite Element Analysis of Fatigue Crack Closure*, ASTM - STP 590, p. 281, (1976).
- [ 29] E.P. SORENSON, *A Numerical Investigation of Plane Strain Stable Crack Growth under Small Scale Yielding Conditions*, ASTM, Symp. "Elastic Plastic Fracture", (1977).
- [ 30] B. HALPHEN, *Problèmes Quasi-statiques en Viscoplasticité*, Thèse, Paris (1978).
- [ 31] L.M. KACHANOV, *Fondations of the Theory of Plasticity*, North. Holl., (1977).
- [ 32] Q.S. NGUYEN, *On the Elastic Plastic Initial Boundary Value Problem and its Numerical Integration*, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 11, (1977).
- [ 33] O.C. ZIENKIEWICZ, VALLIAPPAN S., I.P. KING, *Elastic Plastic Solutions of Engineering Problem, "Initial Stress"*, Finite Element Approach, Int. J. Num. Meth. Engng (1969).
- [ 34] A. MENDELSON, *Plasticity Theory and Application*, Mc Millan (1968).

- [ 35 ] B. MERCIER, *Sur la Théorie et l'Analyse Numérique des Problèmes de Plasticité*, Thèse, Paris, (1977).
- [ 36 ] H. ANDERSON, *A Finite Element Representation of Stable Crack Growth*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 21, p. 337, (1973).
- [ 37 ] W. ELBER, *The Significance of Fatigue Crack Closure*, A.S.T.M.-S.T.P. 486, p. 230, (1971).
- [ 38 ] A.N.M.T. Rapport technique n° 11
- [ 39 ] S. MATSUOKA et K. TANOKA, *The Retardation Phenomenon of Fatigue Crack Growth in HT 80 Steel*, Eng. Fract. Mech., Vol. 8, p. 507, (1976).
- [ 40 ] J. PELLAS, G. BAUDIN, N. ROBERT, *Progression des Fissures sous Chargements Réels : Modélisation en vue de Calcul Prévisionnel Mécanique*, Matériaux, Electricité, p. 112, (1977).
- [ 41 ] H. FÜHRING, T. SEEGER, *Structural Memory of Cracked Components under irregular loading*, A.S.T.M., S.T.P. 677, p. 144-167, (1979).
- [ 42 ] O.E. WHEELER, *Spectrum Loading and Crack Growth*, J. Basic Eng., p. 181, (1972).
- [ 43 ] J. WILLENBORG, R.M. ENGLE, H.A. WOOD, *A crack Growth Retardation Model Using an Effective Stress Concept*, Technical Memorandum 71-1, FBR, (1971).
- [ 44 ] H. FÜHRING, *Fatigue Crack Growth Analysis for Random Loading Based on a Generalised Memory Criterion*, 2nd International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics, Swansea, U.K., (1980).
- [ 45 ] M. LOUAH, *Mécanismes de Retard dans la Progression de Fissure après Surcharge dans le cas des Aciers*, Thèse, Metz, (1980).
- [ 46 ] K. DANG VAN, D. RADENKOVIC, *Croissance des Fissures en Fatigue*, Séminaire sur "Matériaux et Structure sous chargement cyclique", Palaiseau, (1978).
- [ 47 ] M. TRUCHON, *La Fermeture à la Pointe des Fissures de Fatigue*, Journées GAMNI, Mécanique Matériaux Electricité, p. 112, (1977).
- [ 48 ] J. BOZEC, *Propagation d'une Fissure de Fatigue dans une éprouvette de Flexion. Etude Expérimentale et Simulation Numérique*, Thèse de Docteur-Ingénieur, Bordeaux, (1977).
- [ 49 ] V.W. TREBULES, R. ROBERT, R.W. HERTZBERG, *Effet of Multiple Overloads on Fatigue Crack Propagation in 2024 T3 aluminium alloy*, A.S.T.M., S.T.P. 536, p. 115.
- [ 50 ] J. SCHIJVE, *Four Lectures on Fatigue Crack Growth*, Engng. Frac. Mech., Vol. 11, p. 167-221, (1979).
- [ 51 ] R. SUNDER, *A Mathematical Model of Fatigue Crack Propagation Under Variable Amplitude Loading*, Engng Frac. Mech., Vol. 12, p. 155-165, (1979).
- [ 52 ] C. BATHIAS, *Mécanique et Mécanisme de la Fissuration par Fatigue*.

- [ 53 ] M. FARAL, *Fractographic Investigation of Crack Closure*, Thèse M.I.T. (1978).
- [ 54 ] C. BATHIAS, *Etude des Mécanismes de la Fissuration par Fatigue des Aciers Ferritiques et des Aciers Austénitiques*, Thèse, Poitiers, (1974).
- [ 55 ] R.M.N. PELLOUX, *Crack Extension by Alternating shear*, Engng Frac. Mech., Vol. 1, p. 697-704, (1970).
- [ 56 ] W. ELBER, *Fatigue Crack Closure under Cyclic Tension*, Eng. Fract. Mech., Vol. 2, p. 37, (1970).
- [ 57 ] TADA et al., *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Hellrtown, Pennsylvania, (1973).
- [ 58 ] J.R. RICE, *Mechanics of Crack Tips Deformation and Extension by Fatigue*, A.S.T.M. - S.T.P. 415, p. 247 (1967).