HAL
open science

Détermination du critère de résistance macroscopique d'un matériau hétérogène à structure périodique. Approche numérique

Samir Maghous

To cite this version:

Samir Maghous. Détermination du critère de résistance macroscopique d'un matériau hétérogène à structure périodique. Approche numérique. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1991. Français. NNT : . tel-00529369

HAL Id: tel-00529369

https://pastel.hal.science/tel-00529369v1

Submitted on 25 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

9323 NS 15984(4)

THÈSE

présentée pour l'obtention du Diplôme de

CENTRE DE DOCUMENTATION ET DE COMMUNICATION

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

par

Samir MAGHOUS

SUJET DE LA THÈSE :

DÉTERMINATION DU CRITÈRE DE RÉSISTANCE MACROSCOPIQUE D'UN MATÉRIAU HÉTÉROGÈNE À STRUCTURE PÉRIODIQUE

APPROCHE NUMÉRIQUE

soutenue à Paris le 31 Mai 1991

devant le jury composé de :

Président : **J. SALENÇON**

Rapporteurs : **J. PASTOR**
P. SUQUET

Examinateurs : **P. de BUHAN**
J.B. LEBLOND
J.J. MARIGO

E.N.P.C.
DOC08663

12

2

A mon Père

A ma Mère

AVANT-PROPOS

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur le Professeur Jean Salençon qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je veux lui exprimer toute ma reconnaissance pour le soutien constant et les conseils précieux qu'il m'a prodigués tout au long de mon activité de recherche.

Messieurs J. Pastor et P. Suquet ont bien voulu assurer la laborieuse tâche de rapporteurs de cette thèse. Qu'ils trouvent ici l'expression de mes vifs remerciements.

Messieurs J.B. Leblond et J.J. Marigo m'ont fait l'honneur d'examiner mon travail et d'y apporter leurs remarques, ce dont je leur suis gré.

C'est sans conteste auprès de Monsieur le Professeur Patrick de Buhan que je dois l'essentiel de ce que j'ai appris en tant que chercheur : rigueur, concision et clarté des raisonnements. Son aide constante et son amicale sollicitude à mon égard ne peuvent se résumer en quelques mots, ni l'expression de ma gratitude. Je lui exprime ici ma profonde reconnaissance pour tout ce qu'il m'a apporté en dirigeant ce travail.

Je ne saurais oublier de remercier Monsieur Luc Dormieux, dont l'aide et les encouragements m'ont été très précieux.

Mes vifs remerciements s'adressent également à Monsieur P. Lemattre pour la réalisation des figures de ce mémoire.

Je voudrais enfin exprimer mon amitié à tous mes collègues au sein du Laboratoire de Mécanique des Solides avec qui j'ai partagé d'agréables moments.

SOMMAIRE

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I CRITÈRE DE RÉSISTANCE MACROSCOPIQUE D'UN MILIEU PÉRIODIQUE : GÉNÉRALITÉS ET PREMIÈRES ÉVALUATIONS

1. Méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture 7
2. Quelques propriétés du convexe de résistance macroscopique 16
3. Cas de milieux périodiques bidimensionnels : position du problème 24
4. Calculs en contrainte plane 32
5. Calculs en déformation plane 72

CHAPITRE II MISE AU POINT D'UNE MÉTHODE NUMÉRIQUE FONDÉE SUR L'APPROCHE CINÉMATIQUE

1. Une méthode numérique d'évaluation de G^{hom} 95
2. Utilisation de la décomposition des champs cinématiques en séries de Fourier 102
3. Approche numérique par discrétisation 124

CHAPITRE III APPLICATION AU CALCUL DE LA RÉSISTANCE DE PLAQUES MINCES PERFORÉES OU RENFORCÉES

1. Exploitation des symétries du problème 146
2. Application n° 1 : cas d'une plaque mince perforée 151
3. Application n° 2 : autres formes de cavités 177
4. Application n° 3 : plaque renforcée par inclusions 188

CONCLUSION 201

ANNEXES 205

BIBLIOGRAPHIE 227

INTRODUCTION

Pour mieux répondre à des exigences accrues d'allégement, de performance et de coût des structures, de nouveaux matériaux ont été développés dans les domaines se rapportant aux sciences de l'ingénieur. Ces matériaux désignés sous le terme générique de composites, résultent de l'association de deux constituants ou plus, selon des dispositions adéquates : composites à renforts continus (fibres longues) ou discontinus (fibres courtes, particules).

A titre d'exemple, dans le secteur du génie civil, plusieurs techniques ont vu le jour dans le domaine de l'amélioration et du renforcement des sols. Afin d'accroître leurs capacités de résistance, on introduit dans ces derniers des inclusions renforçantes telles que des armatures pour la " terre armée ".

Si le développement technologique de ces produits est assez bien maîtrisé, l'étude théorique de ces nouveaux matériaux en vue de l'optimisation de leur dimensionnement est freinée par leur forte hétérogénéité, qui rend difficile la détermination de leur " comportement " par des techniques classiques de la mécanique.

Parmi les problèmes à résoudre, la question de la stabilité de tels ouvrages ou structures composites est de toute première importance. La théorie de calcul à la rupture telle qu'elle a été formulée par Salençon (1983) constitue un cadre adéquat pour mener une telle analyse de stabilité, car ne requérant que la connaissance d'un critère de résistance en tout point du solide étudié. Toutefois, la résolution directe (analytique ou numérique) du problème de calcul à la rupture posé sur la structure composite est délicate en raison précisément des fortes hétérogénéités du matériau constitutif.

La difficulté peut être levée lorsque l'on peut faire l'hypothèse que, d'une part la taille des hétérogénéités est faible par rapport aux dimensions de la structure étudiée, d'autre part que ces hétérogénéités sont réparties dans l'espace de façon régulière : il est alors possible de déterminer les capacités de résistance à l'échelle macroscopique par *la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques en calcul à la rupture* (Suquet, 1983 ; de Buhan, 1986). En effet, cette méthode permet une évaluation du critère de résistance macroscopique du composite, à partir de la connaissance de celui de chaque constituant. de Buhan (1986) en a montré l'efficacité par rapport aux approches classiques, pour l'analyse de stabilité des ouvrages en sols renforcés. En particulier, elle est la seule à même d'appréhender l'anisotropie de résistance de tels matériaux.

Notre travail constitue une application des résultats de l'homogénéisation des milieux périodiques en calcul à la rupture au calcul numérique des critères de résistance macroscopiques des matériaux composites. Il comporte trois parties :

• Nous rappelons au premier chapitre les principes généraux de cette méthode de calcul. Nous donnons ensuite quelques propriétés liées aux symétries de la structure du matériau composite. Nous montrons comment les propriétés de symétrie et de périodicité permettent de simplifier la résolution du problème de calcul à la rupture posé sur la cellule de base *(les conditions de périodicité sont alors remplaçées par des conditions aux limites classiques)*. Nous mettons alors en oeuvre ces résultats pour estimer analytiquement le convexe de résistance macroscopique dans des cas simples en contrainte plane et déformation plane.

• Après avoir souligné les limites d'une telle approche analytique, nous procédons au second chapitre à la mise au point d'une méthode numérique de détermination du critère de résistance macroscopique, fondée sur la définition cinématique de ce critère. Nous montrons comment, en se restreignant à des sous-espaces de dimension finie de l'espace des champs de vitesse périodiques sur la cellule de base, la résolution de ce problème se ramène à un problème de minimisation d'une fonction convexe par rapport à un nombre fini de variables scalaires. Lorsque le convexe de résistance en tout point est borné, cette minimisation est *sans contrainte*. Elle est effectuée à l'aide d'un algorithme spécifique.

Dans un premier temps, on construit ces sous-espaces en décomposant les champs cinématiques en séries de Fourier à des ordres finis. Après avoir illustré ce choix sur des exemples, nous en montrons les limites dues à des difficultés de convergence.

On introduit ensuite un autre procédé de construction de tels sous-espaces en s'inspirant de la méthode des éléments finis par discrétisation géométrique de la cellule. Nous validons cette approche sur quelques exemples, notamment le cas de la plaque multicouche pour lequel la solution analytique exacte est connue.

• Le troisième chapitre comporte un certain nombre d'applications (dans le cas de la contrainte plane) de la méthode numérique ainsi mise au point. Ces applications portent sur la détermination des capacités de résistance de plaque perforées ou renforcées. Ce chapitre comporte notamment une comparaison avec des résultats expérimentaux ainsi qu'avec d'autres approches numériques.

CHAPITRE I

CRITÈRE DE RÉSISTANCE MACROSCOPIQUE D'UN MILIEU PÉRIODIQUE : GÉNÉRALITÉS ET PREMIÈRES ÉVALUATIONS

1. MÉTHODE D'HOMOGÉNÉISATION EN CALCUL A LA RUPTURE
(Suquet, 1983 ; de Buhan, 1986)

Après avoir rappelé la notion de cellule de base, nous nous intéresserons ensuite, dans le cadre du calcul à la rupture, à la définition du concept de critère de résistance macroscopique.

1.1. Principe général de la méthode

Notion de cellule de base :

Soit Ω_ϵ une structure périodique fortement hétérogène. Par périodicité, nous entendons même période spatiale pour les caractéristiques géométriques et mécaniques *(en l'occurence ici, périodicité de la géométrie et des capacités de résistance)*. Le réel ϵ (positif) désigné habituellement par *facteur d'échelle*, caractérisera la taille du volume élémentaire a_ϵ qui, répété un grand nombre de fois reproduira la structure périodique. Nous appelerons alors cellule de base a , le domaine de l'espace transformé de a_ϵ par homotéthie de rapport $1/\epsilon$ centrée à l'origine *(figure 1)*, de sorte que $|a| = 1$.

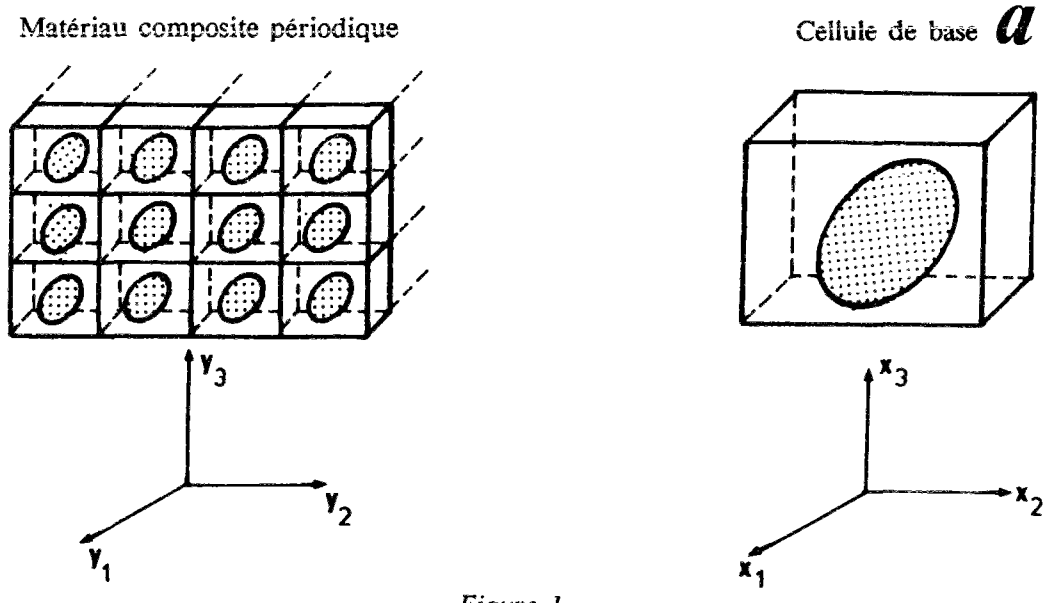


Figure 1 .

Position du problème :

Soit à étudier le domaine de stabilité d'une structure Ω_ϵ périodique qu'on suppose fortement hétérogène (i. e. $\epsilon << 1$) , soumise à un chargement caractérisé par un vecteur $\underline{Q}$ des paramètres de chargement *(figure 2.a)*. On suppose donné en tout point $\underline{y}$ de Ω_ϵ, le convexe de résistance microscopique G^ϵ ($\underline{y}$)

Pour mener à bien une telle analyse, le théorie de calcul à la rupture (Salençon, 1983) offre un cadre mécanique adéquat. Dans ce cadre, où nous nous placerons désormais, seule la donnée en tout point d'un critère de résistance suffit pour conclure quant à la stabilité de la structure étudiée.

La détermination du domaine de stabilité K^ϵ constitué des chargements *potentiellement supportables* par la structure, soulève de grandes difficultés liées essentiellement à sa forte hétérogénéité. Sa définition est donnée par :

$$\boxed{K^\epsilon = \{ \underline{Q} \mid \exists\, \underline{\underline{\sigma}} \text{ S.A. } \underline{Q} ,\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{y}) \in G^\epsilon(\underline{y}) \quad \forall\, \underline{y} \in \Omega_\epsilon \}} \qquad (1.1)$$

(l'abréviation " $\underline{\underline{\sigma}}$ S.A. $\underline{Q}$ " signifie que $\underline{\underline{\sigma}}$ est statiquement admissible avec les donnés en efforts sur la structure : équilibre et conditions aux limites en contrainte).

Suquet (1983) et de Buhan (1986) ont montré qu'un tel domaine K^ϵ converge, lorsque ϵ tend vers zéro, vers un *domaine de stabilité asymptotique* K^0 :

$$K^0 = \lim_{\epsilon \to 0} K^\epsilon$$

La complexité de la détermination directe du domaine K^0 (ou de K^ϵ , $\epsilon << 1$) justifie l'emploie d'une méthode d'homogénéisation qui, en substituant à Ω_ϵ un milieu homogène équivalent, permet de s'affranchir de la forte hétérogénéité. Nous disposons pour ce faire d'un cadre théorique constitué par *la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques en calcul à la rupture* (Suquet, 1983 ; de Buhan, 1986).

Structure homogène associée :

Cette démarche associe à la strucure périodique initiale Ω_ϵ une structure homogène Ω *(figure 2.b)* ainsi définie :

- ses caractéristiques géométriques sont identiques à celles de la structure initiale.
- elle est soumise au même mode de chargement.
- son milieu constitutif est homogène et ses capacités de résistance sont caractérisées par la donnée dans l'espace de contraintes d'un domaine de résistance " macroscopique " noté G^{hom} identique en tout point $\underline{y}$ de Ω .

Problème homogène associé :

Partant de là, l'homégénéisation consiste à remplacer le problème de détermination du domaine K^0 (c'est-à-dire en pratique de K^ϵ, avec ϵ suffisamment petit) par un problème homogène associé consistant à déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables par la structure homogène Ω précédente, défini par :

$$\boxed{K^{hom} = \{ \underline{Q} \mid \exists\, \underline{\underline{\sigma}} \text{ S.A. } \underline{Q} ,\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{y}) \in G^{hom} \quad \forall\, \underline{y} \in \Omega \}} \qquad (1.2)$$

Il apparait donc que la détermination de K^{hom} nécessite la détermination *préalable* du domaine de résistance macroscopique G^{hom} qui caractérise les capacités de résistance du matériau homogène associé. Sa construction s'effectue au niveau de *la cellule de base* a en résolvant un problème de calcul à la rupture. Il dépendra *a priori*, des capacités de résistance des différents matériaux composant a , ainsi que de leurs proportions volumiques .

Nous verrons, aux sections 1.2.2 et 1.2.3 , comment se formulent les définitions statique et cinématique de G^{hom}.

Validité de la démarche :

Le problème reste celui du lien entre la solution du problème de calcul à la rupture sur la structure homogène associée et celle du problème initial.
Un résultat établi par Suquet (1983), puis généralisé par de Buhan (1986) permet d'affirmer que les deux problèmes sont équivalents aux *effets de bord* près.

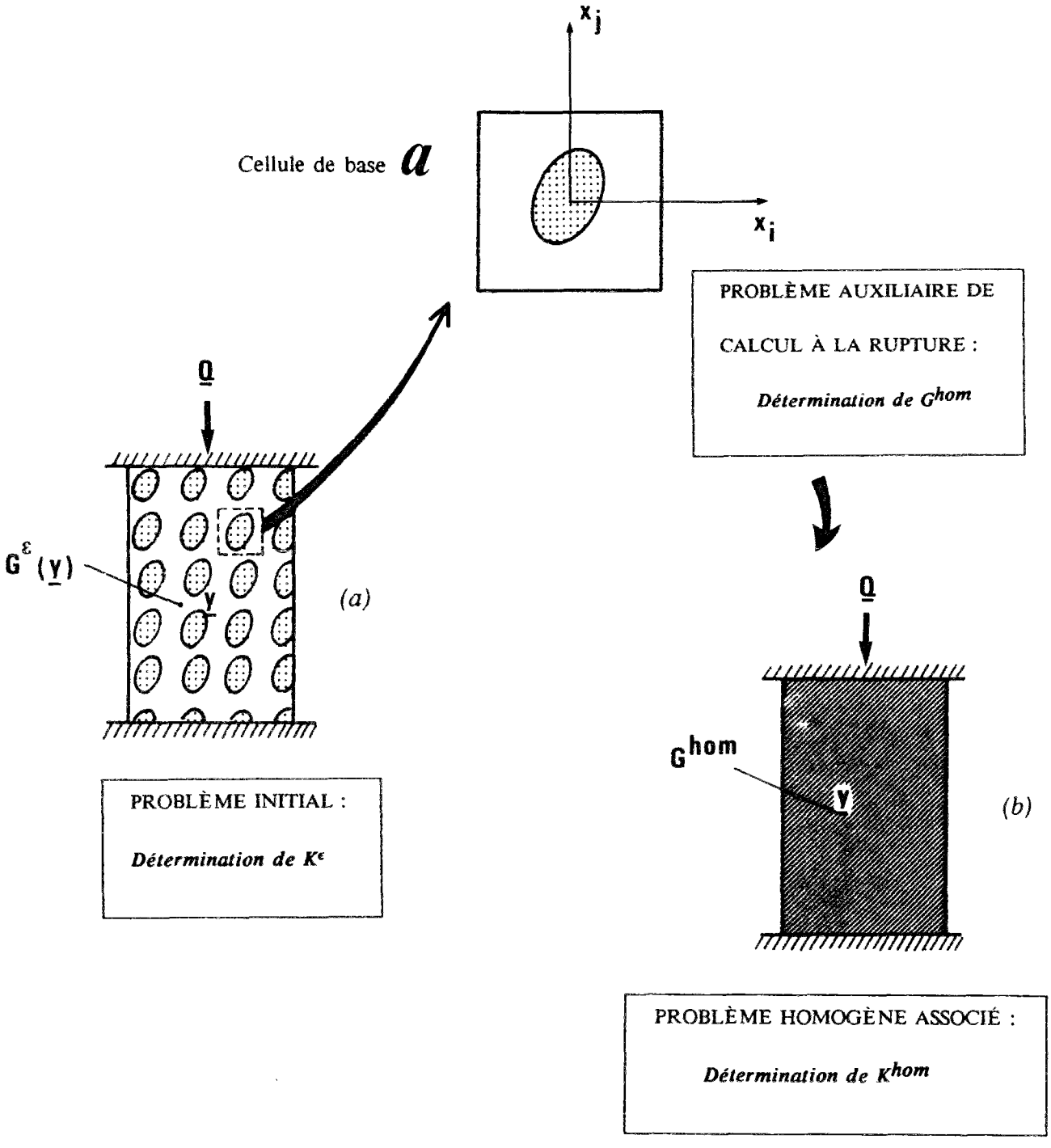


Figure 2 : Schéma résumant la méthode d'homogénéisation.

1.2. Critère de résistance macroscopique

Comme indiqué auparavant, la détermination de K^{hom} nécessite celle du critère de résistance dit macroscopique, qui est caractérisé dans l'espace des contraintes par le domaine G^{hom}. Cette détermination repose sur la résolution d'un problème auxiliaire de calcul à la rupture posé sur la cellule de base $\mathcal{a}$.

1.2.1. Définition d'un mode de chargement sur la cellule de base

D'une manière générale, la mise en évidence d'un mode de chargement est subordonnée à la donnée conjointe de l'espace vectoriel **S** des champs de contrainte statiquement admissibles et de celui noté **C**, des champs de vitesse cinématiquement admissibles.
Dans notre cas et compte tenu de la propriété de périodicité de la cellule $\mathcal{a}$, ces espaces sont définis de la façon suivante :

Espace **S** :

Un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ défini en tout point de la cellule appartient à **S** si et seulement si $\underline{\underline{\sigma}}$ vérifie :

- $\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{0} \qquad \forall\, \underline{x} \in \mathcal{a}$
- $[\,\underline{\underline{\sigma}}\,] \cdot \underline{n} = \underline{0}$ au passage d'une ligne de discontinuité de $\underline{\underline{\sigma}}$, de normale $\underline{n}$
- $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ antipériodique

Cette dernière condition exprime qu'en deux points quelconques situés sur deux faces opposées de $\mathcal{a}$, les vecteurs contraintes sont opposés *(figure 3).*

Espace **C** :

De même un champ de vitesse $\underline{v}$ appartient à **C** si et seulement si :

- $\underline{v}$ est défini sur $\mathcal{a}$
- $\underline{v}$ est continûment différentiable par morceaux sur $\mathcal{a}$
- le champ $\underline{u} = \underline{v} - \underline{\underline{D}} \cdot \underline{x}$ est périodique en $\underline{x}$ sur $\mathcal{a}$

où $\underline{\underline{D}}$ est le tenseur vitesse de déformation " macroscopique " associé à $\underline{v}$. C'est à dire :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{a}} (\,\underline{n} \otimes \underline{v} + \underline{v} \otimes \underline{n}\,)\; ds \qquad (1.3)$$

soit encore

$$\underline{\underline{D}} = \int_a \underline{\underline{d}}(\underline{v})\, da + \frac{1}{2}\int_\Sigma (\underline{n} \otimes [\underline{v}] + [\underline{v}] \otimes \underline{n})\, d\Sigma$$

où $\underline{\underline{d}}(\underline{v})$ représente le champ des taux de déformation associé à $\underline{v}$, Σ la surface de discontinuité du champ $\underline{v}$, et $[\underline{v}]$ la valeur de cette discontinuité lorsqu'on franchit la surface Σ en suivant la normale $\underline{n}$.

La périodicité du champ $\underline{u}$ signifie qu'en deux points quelconques situés sur des faces opposées de la cellule, $\underline{u}$ prend des valeurs égales. Cette condition peut s'exprimer par le fait qu'en tout point de la cellule, la vitesse de déformation est la somme d'une vitesse de déformation homogène (sa moyenne volumique $\underline{\underline{D}}$) et d'une " fluctuation " $\underline{\underline{\delta}}$ périodique, dont la moyenne volumique sur a est nulle :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x}) = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\delta}}(\underline{x}) \qquad \forall\, \underline{x} \in a$$

avec

$$\underline{\underline{\delta}} = \frac{1}{2}(\text{grad}\, \underline{u} + {}^t\text{grad}\, \underline{u}) \qquad \langle \underline{\underline{\delta}} \rangle = \underline{\underline{0}} \tag{1.4}$$

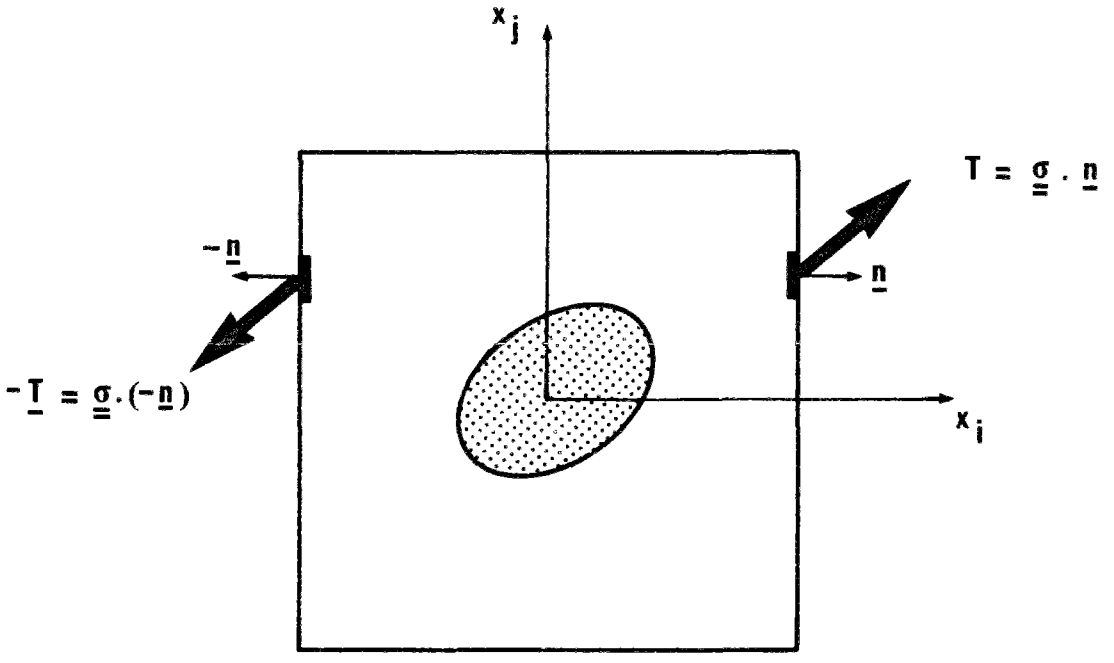


Figure 3 : Antipériodicité du champ de contrainte .

Mode de chargement :

Il a été établi (Suquet, 1982) que :

" les espaces **S** *et* **C** *définissent un mode de chargement de la cellule de base* a *qui dépend linéairement de six paramètres scalaires. "*

Plus précisément, les composantes dans un repère orthonormé $Ox_1x_2x_3$, du tenseur des contraintes " macroscopiques " $\underline{\underline{\Sigma}} = < \underline{\underline{\sigma}} >$, moyenne volumique sur la cellule de base de tout élément $\underline{\underline{\sigma}}$ de **S**, jouent le rôle de *paramètres de chargement.* De même, les composantes du tenseur vitesse de déformation " macroscopique " $\underline{\underline{D}} = < \underline{\underline{d}} >$ représentent les paramètres cinématiques associés par dualité.
On dira alors que la cellule de base est soumise à un chargement macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$, ou q'une vitesse de déformation macroscopique $\underline{\underline{D}}$ lui est imposée.

1.2.2. Définition statique de G^{hom}

Ayant précisé les conditions de chargement de la cellule de base, G^{hom} est alors défini comme l'ensemble des chargements $\underline{\underline{\Sigma}}$ supportables par la cellule. C'est à dire tels qu'il soit possible d'associer un champ de contraintes microscopiques $\underline{\underline{\sigma}}$ appartenant à **S** , dont la moyenne volumique sur a soit égale à $\underline{\underline{\Sigma}}$ et vérife la condition de résistance en tout point de la cellule. Soit :

$$\boxed{G^{hom} = \{ \underline{\underline{\Sigma}} \mid \exists\ \underline{\underline{\sigma}} \in \mathbf{S} ;\ < \underline{\underline{\sigma}} > = \underline{\underline{\Sigma}} \ ;\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad \forall\ \underline{x} \in a \}} \qquad (1.5)$$

Notons tout de suite, qu'en raison de la convexité du domaine $G(\underline{x})$ en tout point de la cellule, G^{hom} est convexe.

Remarque :

Certains auteurs tel Guennouni (1987) substituent , dans la définition de **S** et donc de G^{hom} , aux conditions d'antipériodicité du vecteur contrainte les conditions aux limites :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} \qquad \text{sur le bord } \partial a$$

Ces conditions aux limites conduisent à une approche du domaine de résistance macroscopique , qu'on désigne usuellement par *" approche en contrainte homogène "*.
Il apparait immédiatement (*) qu'une telle approche conduit à une estimation par défaut de G^{hom}.

1.2.3. Définition cinématique (" duale ") de G^{hom}

L'espace C étant précisé, en utilisant le raisonnement de dualité classique en calcul à la rupture, et en supposant l'équivalence des approches statique et cinématique du domaine G^{hom}, nous pouvons écrire :

$$\boxed{\forall\ \underline{\underline{D}} \in \mathbb{R}^6 \qquad \pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) = \inf_{\underline{u} \in \mathbf{U}} \{ < \pi(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\delta}}) > \}} \qquad (1.6)$$

où π^{hom} est *la fonction d'appui* du convexe G^{hom} *(figure 4)* définie par :

$$\pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) = \sup \{ \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \ ; \ \underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \}$$

Les notations utilisées dans *(1. 6)* sont :

-) π désigne la fonction d'appui du convexe de résistance en tout point $\underline{x}$ de la cellule :
$$\pi(\underline{\underline{d}}(\underline{x})) = \sup \{ \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{x}) \ ; \ \underline{\underline{\sigma}} \in G(\underline{x}) \}$$
-) U est l'espace des champs de vitesse périodiques sur la cellule a et $\underline{\underline{\delta}}$ est défini par *(1. 4)*.

La fonction π^{hom} étant précisée, G^{hom} est défini par :

$$\boxed{G^{hom} = \bigcap_{\underline{\underline{D}} \in \mathbb{R}^6} \{ \underline{\underline{\Sigma}} \mid \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) \}} \qquad (1.7)$$

intersection, dans l'espace des contraintes macroscopiques, des demi-espaces définis par :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \pi^{hom}(\underline{\underline{D}})$$

(*) sauf bien sûr lorsque la cellule est homogène !

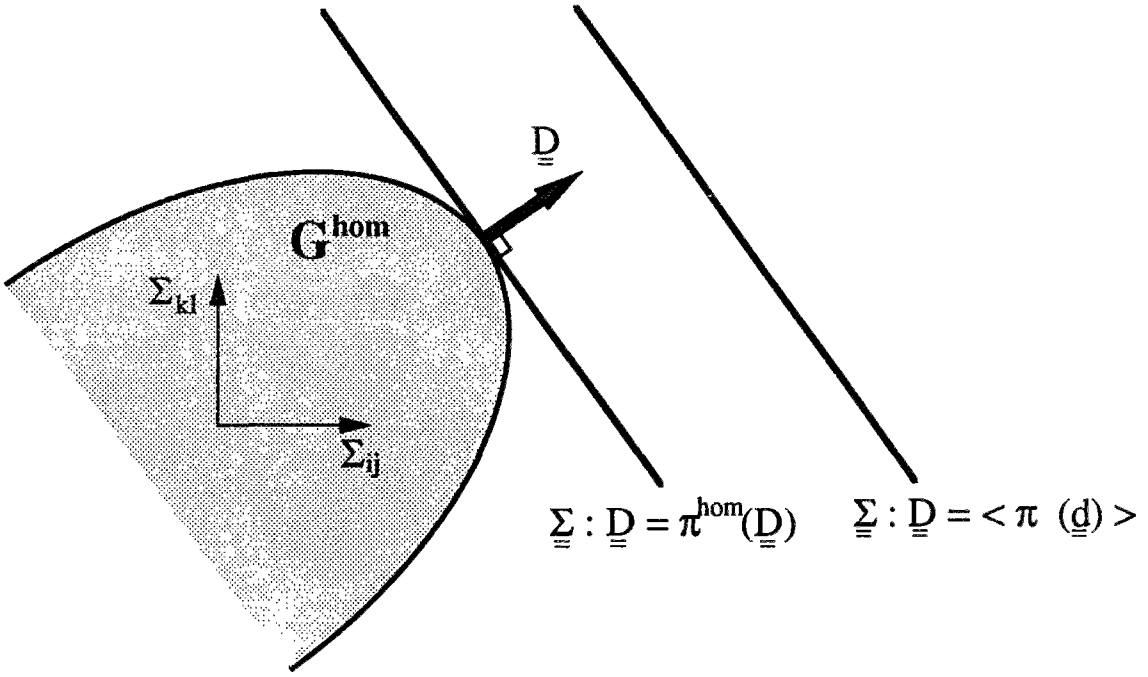


Figure 4 : Approche cinématique de G^{hom} .

Remarques :

- ainsi formulée, la définition cinématique *(1. 6)* du convexe G^{hom} apparait comme un problème de minimisation sans contrainte, de la fonctionnelle $< \pi (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\delta}}) >$, sur l'espace **U** des champs de vitesse périodiques sur la cellule.

- Comme pour les contraintes, on peut rencontrer pour la définition de C un autre type de conditions aux limites, remplaçant les conditions de périodicité du champ $\underline{u}$ par :

$$\underline{v} = \underline{\underline{D}} . \underline{x} \quad (\text{i. e. } \underline{u} = \underline{0}) \qquad \text{sur le bord } \partial a$$

Il apparait clairement que ce genre d'approche, désignée usuellement sous le terme d' " approche en déformation homogène ", conduit à une <u>surestimation</u> du convexe de résistance macroscopique G^{hom}.

2. QUELQUES PROPRIÉTÉS DU CONVEXE DE RÉSISTANCE MACROSCOPIQUE

D'une façon générale, les propriétés du convexe de résistance macroscopique découlent soit d'hypothèses sur le convexe de résistance microscopique $G(\underline{x})$ (*), soit d'hypothèses sur la géomètrie de la cellule de base.
Pour les propriétés résultant directement de celles de $G(\underline{x})$, nous renvoyons à de Buhan (1986) où elles sont explicitement décrites. Nous nous intéresserons ici exclusivement à celles liées aux conditions de symétrie de la cellule de base. Nous verrons ensuite comment elles permettent, notamment dans le cas plan, d'apporter des simplifications à la résolution du problème de calcul à la rupture défini sur la cellule de base.

2.1. Une première estimation de G^{hom} dans le cas d'un milieu poreux

Proposition : Si la cellule de base a est constituée d'un matériau homogène de convexe de résistance G, comprenant des cavités et des fissures, alors :

$$\boxed{G^{hom} \subseteq (1-p)\, G} \qquad (2.\ 1)$$

où p désigne la porosité (fraction volumique des vides).

Preuve : Pour tout $\underline{\underline{D}} \in R^6$, nous pouvons écrire d'après la définition cinématique générale :

$$\pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) \leq \langle \pi(\underline{\underline{D}}) \rangle = \int_a \pi(\underline{x}\ ,\ \underline{\underline{D}})\ da$$

(il suffit de considérer le champ $\underline{u}$ identiquement nul sur a).

(*) $\underline{x}$ est le vecteur position d'un point courant de la cellule

On désigne par π_G la fonction d'appui du convexe G, et par a^* la partie de a occupée par le matériau sain.
Alors pour tout $\underline{x}$ de a , $\pi(\underline{x}\ ,\ \underline{\underline{D}})$ vaut $\pi_G(\underline{\underline{D}})$ ou zéro selon que $\underline{x}$ appartienne à a^* ou non.
d'où :

$$\int_a \pi(\underline{\underline{D}})\ da \ = \ \int_{a^*} \pi_G(\underline{\underline{D}})\ da$$

et donc :

$$\pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) \ \leq \ |a^*|\ \pi_G(\underline{\underline{D}})$$

soit :

$$\pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) \ \leq \ (1-p)\ \pi_G(\underline{\underline{D}}) \qquad \forall\ \underline{\underline{D}} \in R^6.$$

puisque $|a| = 1$.

Ce qui équivaut à :

$$G^{hom} \subseteq (1-p)\ G$$

Remarques :

• Ce résultat très simple fournit une première estimation par excès du critère de résistance macroscopique, dans le cas de matériaux poreux, permettant notamment l'initialisation de calculs numériques plus précis (cf. Chap II).

• Rappelons le critère proposé par Gurson (1977) pour un matériau contenant des pores cylindriques circulaires :

$$C_{eq}\ (\ \Sigma'_{eq}\ )^2 + 2p\ ch(\ \Sigma'_m) \ \leq \ 1 + p^2 \qquad (\ ch : \text{cosinus hyperbolique}\ )$$

avec :

$\underline{\underline{\Sigma}}' \ = \ \underline{\underline{\Sigma}}\ /\sigma_0$ où σ_0 est la limite en traction simple du matériau sain de Von Mises.

$$(\ \Sigma'_{eq}\ )^2 = \ \frac{3}{2}\left[\ \underline{\underline{\Sigma}}' - \frac{1}{3}\ tr\underline{\underline{\Sigma}}'\ \underline{\underline{1}}\ \right] : \left[\ \underline{\underline{\Sigma}}' - \frac{1}{3}\ tr\underline{\underline{\Sigma}}'\ \underline{\underline{1}}\ \right]$$

$\Sigma'_m = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ (\ \Sigma'_{11} + \ \Sigma'_{22}\ )$ la direction 3 étant parallèle à l'axe des pores.

$C_{eq} = C_{eq}\ (p) \ \geq \ 1$

Nous constatons que ce critère respecte bien la propriété *(2. 1)* établie ci-dessus. En effet, si $\underline{\underline{\Sigma}}$ vérifie le critère de Gurson, alors :

$$C_{eq} (\Sigma'_{eq})^2 \leq 1 + p^2 - 2p \, ch(\Sigma'_m) \leq 1 + p^2 - 2p = (1 - p)^2$$

d'où :

$$\Sigma'_{eq} \leq (1 - p)$$

2.2. Conséquences des propriétés de symétrie de la cellule

2.2.1. Propriété A

Reprenant la définition adoptée par Guennouni (1987), on dira que la cellule de base a présente une symétrie matérielle par rapport à un plan (P), si ce dernier est un plan de symétrie de a et si les convexes G ($\underline{x}$) et G ($\underline{x}'$) attachés à deux points quelconques $\underline{x}$ et $\underline{x}'$ symétriques par rapport à (P) sont eux-mêmes symétriques. C'est à dire que, si l'on désigne par $\underline{\underline{P}}$ le tenseur orthogonal associé à l'opérateur de symétrie par rapport au plan (P), on a :

$$G (\underline{x}') = \underline{\underline{P}} . G (\underline{x}) . {}^t\underline{\underline{P}} = \{ \underline{\underline{P}} . \underline{\underline{\sigma}} . {}^t\underline{\underline{P}} , \underline{\underline{\sigma}} \in G (\underline{x}) \} \qquad (2. 2)$$

Proposition : Si la cellule de base présente une symétrie matérielle par rapport à (P), alors le domaine de résistance macroscopique G^{hom} est invariant par symétrie par rapport à ce même plan. C'est à dire que, du point de vue de ses capacités de résistance, le matériau homogène associé possède la symétrie matérielle par rapport à ce plan :

$$\boxed{G^{hom} = \underline{\underline{P}} . G^{hom} . {}^t\underline{\underline{P}}} \qquad (2. 3)$$

Preuve : Soit $\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom}$; alors en vertu de la définition générale *(1. 5)*, il existe $\underline{\underline{\sigma}} \in S$ tel que :

$$< \underline{\underline{\sigma}} > = \Sigma$$
$$\forall \underline{x} \in a \qquad \underline{\underline{\sigma}} (\underline{x}) \in G(\underline{x})$$

Il est facile de voir que le champ $\underline{\underline{\sigma}}'$ défini par :

$$\forall\ \underline{x} \in a \qquad \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}') \cdot {}^t\underline{\underline{P}}$$

avec

$$\underline{x}' = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{x} \in a \qquad (\textit{figure 5})$$

appartient également à **S**.

Il vérifie de plus, d'après *(2. 2)* et compte tenu de ce que $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}') \in G(\underline{x}')$:

$$\underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \qquad \forall\ \underline{x} \in a$$

La contrainte " macroscopique " qu'il équilibre est :

$$\underline{\underline{\Sigma}}' = \langle \underline{\underline{\sigma}}' \rangle = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot {}^t\underline{\underline{P}}$$

qui appartient donc bien au domaine de résistance G^{hom}.

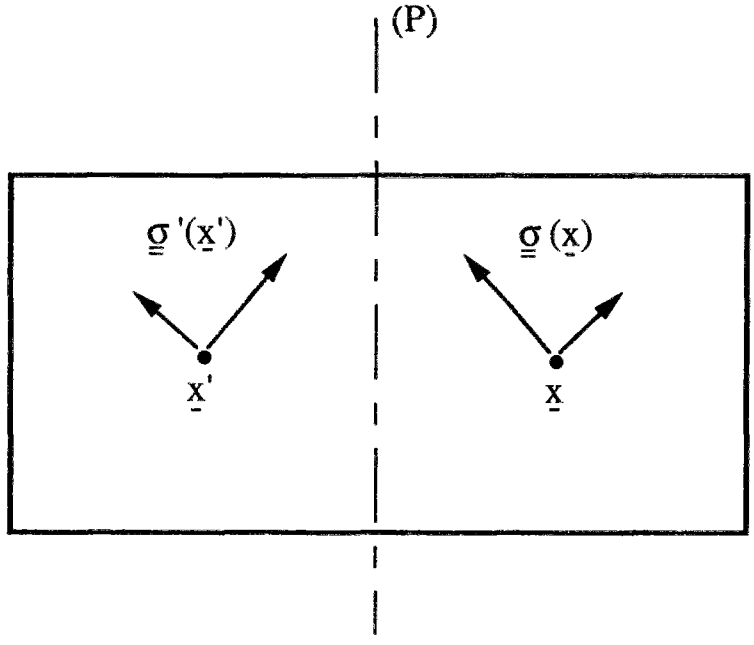


Figure 5 : Trace de a *et* (P) *dans un plan perpendiculaire à* (P) .

On peut remarquer qu'en tout point de a , $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ et $\underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}')$ admettent les mêmes valeurs principales et des directions principales symétriques par rapport à (P) .

2.2.2 Propriété B :

On dira que la cellule de base présente une symétrie matérielle par rapport à l'origine si et seulement si :

- $\forall\ \underline{x} \in a \Rightarrow -\underline{x} \in a$

et

- $\forall\ \underline{\underline{\sigma}} \in G(\underline{x}) \Rightarrow -\underline{\underline{\sigma}} \in G(-\underline{x})$

Proposition : Lorsque La cellule de base présente une symétrie matérielle par rapport à l'origine, alors G^{hom} est symétrique par rapport à l'origine de l'espace des contraintes :

$$\boxed{\forall\ \underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Rightarrow -\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom}} \qquad (2.4)$$

Preuve : La démonstration est analogue à la précédente en considérant le champ défini par :

$$\underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) = -\underline{\underline{\sigma}}(-\underline{x}) \qquad \forall\ \underline{x} \in a$$

Remarque :

Les deux propriétés précédentes *A* et *B* permettent de ne déterminer qu'en partie G^{hom} et de compléter sa construction par les symétries.

2.2.3 Propriété C :

Nous allons maintenant établir une propriété essentielle qui permet dans certains cas (notamment lors de l'étude analytique menée plus loin dans le présent chapitre), de se restreindre à une partie de la cellule de base avec des conditions aux limites classiques (i. e. : non périodiques) lors de la résolution du problème de calcul à la rupture sur a .

Proposition : Si la cellule de base présente une symétrie matérielle par rapport à un plan (P) et si le chargement macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ est invariant par cette même symétrie (i. e. : $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot {}^t\underline{\underline{P}}$) , alors la restriction de G^{hom} à ce type de chargement peut être entiérement décrite en ne considérant que les sous-espaces de champs " symétriques " :

$$\bar{S} = \{ \underline{\underline{\sigma}} \in S \ , \ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}') \cdot {}^t\underline{\underline{P}} \quad \forall \ \underline{x} \in a \}$$

pour les contraintes et :

$$\bar{C} = \{ \underline{v} \in C \ , \ \underline{v}(\underline{x}) = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{v}(\underline{x}') \quad \forall \ \underline{x} \in a \}$$

pour les vitesses.

$\underline{x}'$ désignant le symétrique de $\underline{x}$ par rapport à (P) : $\underline{x}' = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{x}$

Preuve : La démonstration de cette proposition est donnée en **Annexe I**

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES CENTRE PEDAGOGIQUE DE DOCUMENTATION ET DE COMMUNICATION

Remarques :

• Ainsi, lorsque les hypothèses conduisant à la propriété C sont remplies, on peut se restreindre à la résolution d'un problème de calcul à la rupture défini sur la demi-cellule avec des conditions aux limites mixtes (i. e. classiques) en $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{v}$ sur les bords parallèles au plan de symétrie.
Nous préciserons, à la section suivante, ces conditions aux limites lorsque la cellule a est un parallélépipède rectangle.

• Du point de vue mécanique, ce résultat est intuitif. Il signifie que compte tenu des " symétries du problème " , il suffit de se restreindre aux mécanismes de ruptures symétriques dans l'approche cinématique et aux champs de contraintes " symétriques " sur a dans l'approche statique.

2.3. Symétrie matérielle et conditions aux limites

Considérons une cellule de base a en forme de parallélépipède rectangle, munie d'un repère orthonormé (O , $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$) et présentant une symétrie matérielle par rapport au plan (P) d'équation $x_3 = 0$. *(figure 6)*

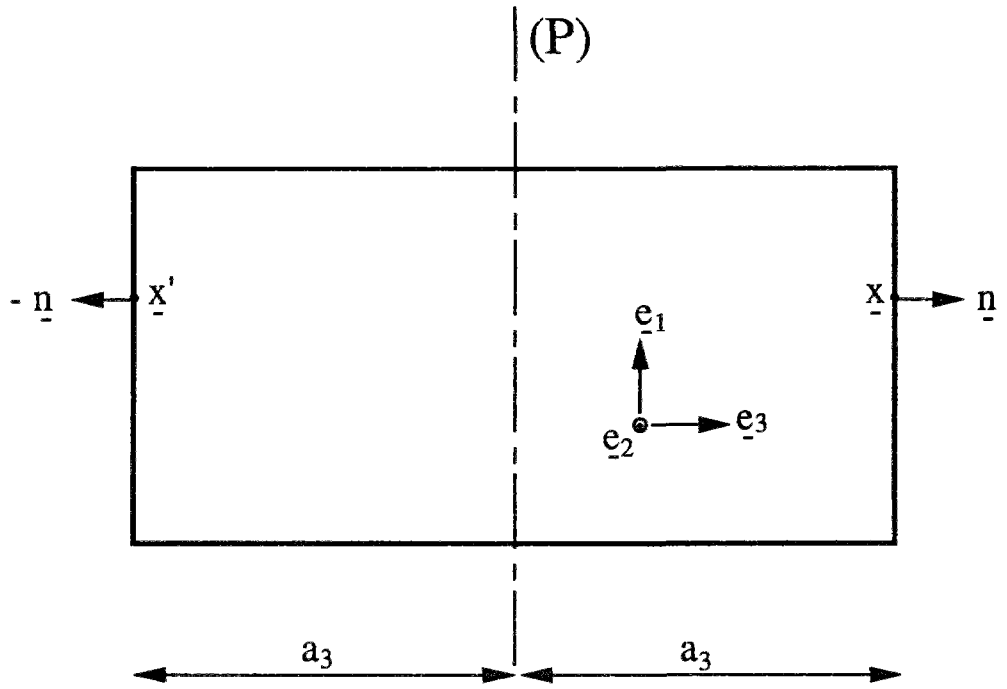


Figure 6 : Cellule a et sa trace dans le plan $x_2 = 0$

Soient deux points $\underline{x}$ et $\underline{x}'$ situés sur deux faces opposées de la cellule, parallèles au plan de symétrie (P) *(Ces deux points sont associés par périodicité et sont symétriques par rapport à ce plan).*

Conditions aux limites en contrainte :

Pour tout champ $\underline{\underline{\sigma}}$ de $\tilde{S}$, on peut écrire :

- D'une part :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n} = -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}') \cdot (-\underline{n}) \qquad \text{(antipériodicité de } \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \text{)}$$

Comme $\underline{n} = \underline{e}_3$, alors :

$$\sigma_{3i}(\underline{x}) = \sigma_{3i}(\underline{x}') \qquad i = 1, 2, 3$$

- D'autre part :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}') \cdot {}^t\underline{\underline{P}}$$

Soit :

$$\sigma_{3i}(\underline{x}) = -\sigma_{3i}(\underline{x}') \qquad i = 1, 2$$

D'où :

$$\boxed{\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0}$$

Ce qui veut dire qu'il n'y a pas de contrainte de cisaillement sur les bords de a parallèles à (P) .

Conditions aux limites en vitesse :

De même pour tout champ $\underline{v}$ de $\tilde{C}$, on peut écrire :

- D'une part :

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}') + \underline{\underline{D}} . (\underline{x} - \underline{x}') \qquad (\text{ périodicité de } \underline{u} = \underline{v} - \underline{\underline{D}} . \underline{x})$$

- D'autre part :

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\underline{P}} . \underline{v}(\underline{x}')$$

Soit :

$$v_i(\underline{x}) = v_i(\underline{x}') \qquad i = 1, 2$$

et

$$v_3(\underline{x}) = -v_3(\underline{x}')$$

Ce qui implique :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \alpha) & D_{3i} = 0 \qquad i = 1, 2 \\ \beta) & v_3(\underline{x}) = -v_3(\underline{x}') = a_3 D_{33} \end{array}}$$

Conclusion :

Les conditions aux limites sur les faces de la cellule de base parallèles au plan de symétrie (P), sont de type classique :

- Cisaillement nul : $T_1 = T_2 = 0$.
- Vitesse imposée selon Ox_3 : $v_3(\underline{x}) = -v_3(\underline{x}') = a_3 D_{33}$

3. CAS DE MILIEUX PÉRIODIQUES BIDIMENSIONNELS : POSITION DU PROBLÈME

Loin d'aborder le problème dans le cas général, nous allons illustrer, à travers des calculs analytiques, la résolution du problème de calcul à la rupture posé sur la cellule de base dans les cas simples où celle-ci est constituée d'un matériau bidimensionnel homogène et comportant une inclusion centrée (cavité, fissure ou renforcement) .

Nous commencerons par bien définir le problème sur la cellule plane : définition des espaces ***S*** *et* ***C*** *, exploitation des symétries matérielles éventuelles et de leur conséquences sur ces derniers .*

3.1. Description de la structure étudiée

La structure considérée est formée d'un milieu homogène comprenant un réseau d'inclusions (précisées plus loin), réparties selon une périodicité bidimensionnelle, telle que la cellule de base a soit un rectangle de côtés $2a_1$ et $2a_2$ et dont l'aire vaut l'unité. La cellule comprenant une inclusion, centrée en son milieu, et dont nous omettrons, pour l'instant, de préciser la nature . *(figures 7(a) et 7(b))*

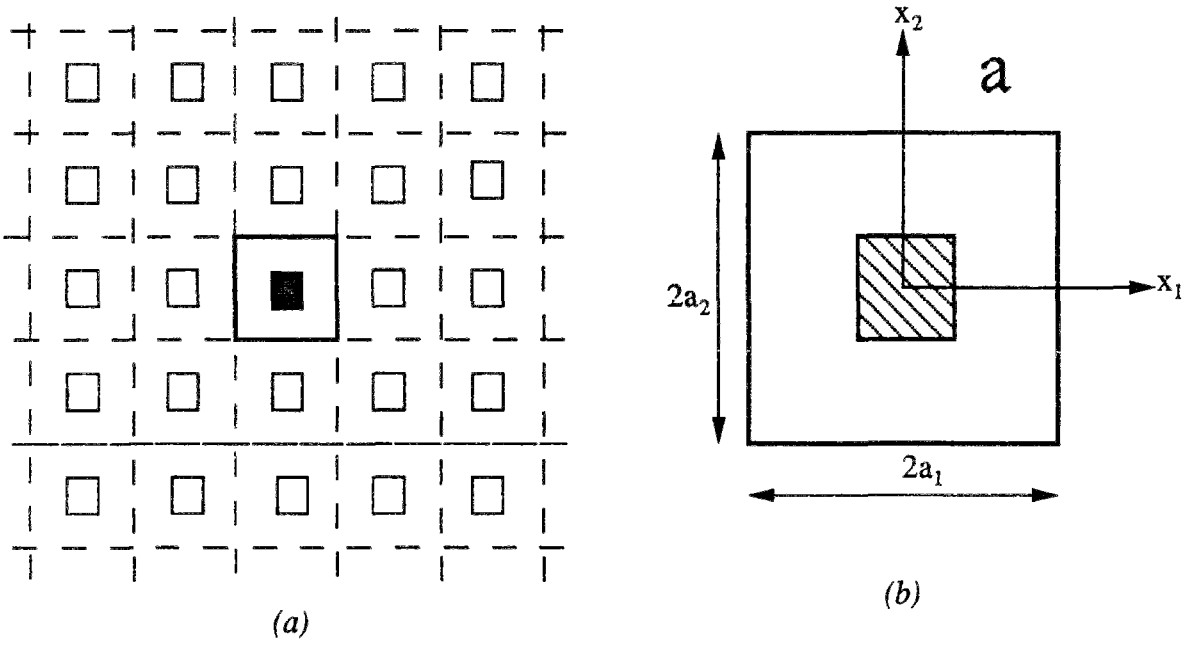


Figure 7 : Structure étudiée et cellule de base correspondante .

La matrice est supposée constituée d'un matériau homogène obéissant à un critère de résistance bidimensionnel, caractérisé par un domaine convexe G, dans l'espace des contraintes bidimensionnelles relatives au plan Ox_1x_2 de la cellule (critère de résistance en contrainte plane ou déformation plane ; cf. Salençon , 1983) .

3.2. Caractérisation de l'espace S

En ne considérant que les parties bidimensionnelles des tenseurs de contraintes, on a:

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbf{S}$$
$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}\,(\,\underline{x}\,) = \underline{0} & \forall\ \underline{x} \in a \\ [\,\underline{\underline{\sigma}}\,]\,.\,\underline{n} = \underline{0} & \text{au passage d'une ligne de discontinuité de } \underline{\underline{\sigma}}\text{ , de normale } \underline{n} \\ \underline{\underline{\sigma}}\,.\,\underline{n} \ \text{ antipériodique} & \end{cases}$$

Cette dernière condition s'exprime par : $\forall\ (\,x_1,\,x_2\,) \in [\,-a_1,\,a_1\,] \times [\,-a_2,\,a_2\,]$,

$$\underline{\underline{\sigma}}_{i1}\,(\,a_1,\,x_2\,) = \underline{\underline{\sigma}}_{i1}\,(\,-a_1,\,x_2\,)$$
$$\underline{\underline{\sigma}}_{i2}\,(\,x_1,\,a_2\,) = \underline{\underline{\sigma}}_{i2}\,(\,x_1,\,-a_2\,) \qquad i = 1,\,2$$

Pour de tels champs, la moyenne sur a (c'est à dire la contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$) peut être directement calculée à partir de moyennes effectuées sur le bord de la cellule. En effet :

Proposition : Si $\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbf{S}$, alors :

$$<\underline{\underline{\sigma}}> \;=\; 2a_1 \int_{-a_2}^{a_2} \underline{\underline{\sigma}}\,(\,a_1,\,x_2\,)\,.\,(\,\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1\,)\,dx_2 \;+\; 2a_2 \int_{-a_1}^{a_1} \underline{\underline{\sigma}}\,(\,x_1,\,a_2\,)\,.\,(\,\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2\,)\,dx_1$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} <\sigma_{11}> &= 2a_1 \int_{-a_2}^{a_2} \sigma_{11}(a_1, x_2)\, dx_2 \\ <\sigma_{22}> &= 2a_2 \int_{-a_1}^{a_1} \sigma_{22}(x_1, a_2)\, dx_1 \\ <\sigma_{12}> &= 2a_1 \int_{-a_2}^{a_2} \sigma_{12}(a_1, x_2)\, dx_2 = 2a_2 \int_{-a_1}^{a_1} \sigma_{12}(x_1, a_2)\, dx_1 \end{aligned}} \qquad (3.\ 1)$$

Preuve : Soit $\underline{\underline{\sigma}} \in S$ et considérons, pour tout $\underline{x}$ de a, le tenseur défini par :

$$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}) = \underline{x} \otimes \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$$

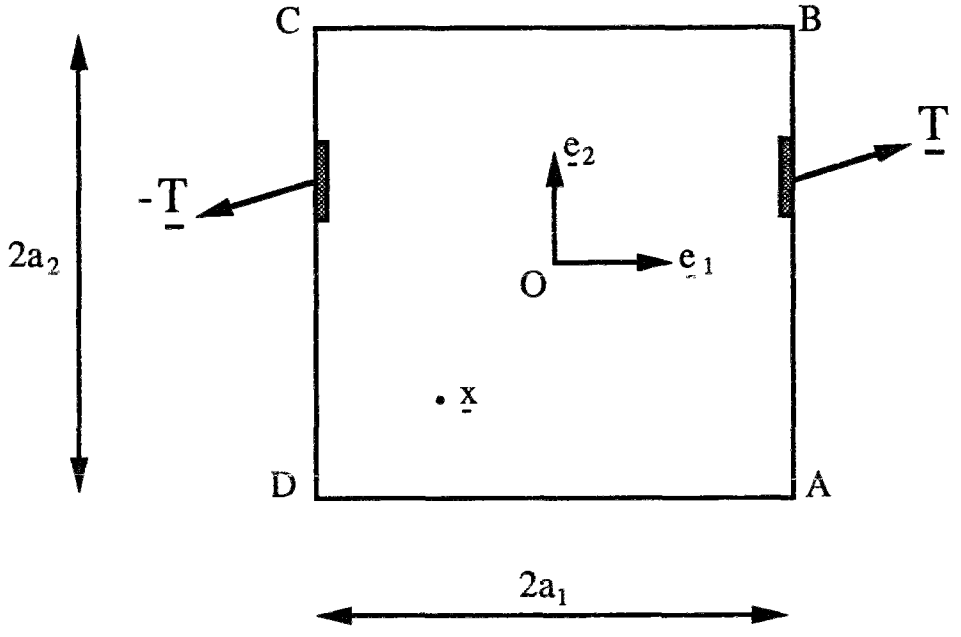


Figure 8.

On a :

$$\mathrm{div}\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}) = \mathrm{grad}\underline{x} \,.\, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) + \underline{x} \otimes \mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$$

Comme $\mathrm{grad}\,\underline{x} = \underline{\underline{1}}$ et $\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{0}$, alors :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathrm{div}\,\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x})$$

D'où :

$$<\underline{\underline{\sigma}}> = \int_a \mathrm{div}\,\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x})\,da = \int_{\partial a} \underline{\underline{\Omega}}(s).\underline{n}(s)\,ds$$

Or $\underline{\underline{\Omega}}.\underline{n} = (\underline{x} \otimes \underline{\underline{\sigma}}).\underline{n} = \underline{x} \otimes \underline{T}$ où $\underline{T}$ désigne le vecteur contrainte au point de ∂a de normale extérieure $\underline{n}$. Et donc :

$$<\underline{\underline{\sigma}}> = \int_{AB \cup CD} \underline{x} \otimes \underline{T}\,ds + \int_{BC \cup DA} \underline{x} \otimes \underline{T}\,ds$$

Utilisant l'antipériodicité de $\underline{T}$, on a par exemple, en deux points appartenant respectivement à AB et CD ayant même ordonnée et des abscisses opposées :

$$\underline{T}(\underline{x}) = -\underline{T}(\underline{x}')$$

où :

$$\underline{x} = a_1\,\underline{e}_1 + x_2\,\underline{e}_2 \quad \text{et} \quad \underline{x}' = -a_1\,\underline{e}_1 + x_2\,\underline{e}_2$$

Si bien que :

$$\int_{AB \cup CD} \underline{x} \otimes \underline{T}\,ds = 2a_1 \int_{AB} \underline{e}_1 \otimes \underline{T}\,ds$$

De même :

$$\int_{BC \cup DA} \underline{x} \otimes \underline{T}\,ds = 2a_2 \int_{BC} \underline{e}_2 \otimes \underline{T}\,ds$$

Ainsi :

$$<\underline{\underline{\sigma}}> = 2a_1 \int_{AB} \underline{e}_1 \otimes \underline{T}\,ds + 2a_2 \int_{BC} \underline{e}_2 \otimes \underline{T}\,ds$$

$$= 2a_1 \int_{AB} \underline{e}_1 \otimes (\underline{\underline{\sigma}}.e_1)\,ds + 2a_2 \int_{BC} \underline{e}_2 \otimes (\underline{\underline{\sigma}}.e_2)\,ds$$

Soit :

$$<\underline{\underline{\sigma}}> = 2a_1 \int_{AB} \underline{\underline{\sigma}}.(\underline{e}_1 \otimes e_1)\,ds + 2a_2 \int_{BC} \underline{\underline{\sigma}}.(\underline{e}_2 \otimes e_2)\,ds$$

Remarque :

Dans la définition de S , il faudrait éventuellement écrire des conditions aux limites sur le bord de l'inclusion. Si par exemple, celle-ci est une cavité, il faut écrire que $\underline{T} = \underline{0}$ sur son bord. Notons qu'il est également possible de traiter la cavité comme constituée d'un matériau de résistance nulle.

3.3. Caractérisation de l'espace C

Examinons ce que devient la définition générale de l'espace C des vitesses cinématiquement admissibles, dans le cas précis que nous considérons. En effet, il serait beaucoup plus pratique de transposer les conditions de périodicité, du champ $\underline{u} = \underline{v} - \underline{\underline{D}} \cdot \underline{x}$, directement sur le champ de vitesse $\underline{v}$.

Proposition : Outre les conditions de différentiabilité par morceaux sur la cellule a , un champ $\underline{v}$ appartiendra à C si et seulement si les quantités :

$$v_1 (a_1, x_2) - v_1 (-a_1, x_2) \quad ; \quad v_2 (a_1, x_2) - v_2 (-a_1, x_2)$$
$$v_1 (x_1, a_2) - v_1 (x_1, -a_2) \quad ; \quad v_2 (x_1, a_2) - v_2 (x_1, -a_2)$$

ne dépendent ni de x_1 ni de x_2.

Preuve : Soit $\underline{v}$ un élément de C et soit $\underline{\underline{D}}$ le tenseur vitesse de déformation macroscopique associé.

En explicitant les conditions de périodicité de $\underline{u}$ dans le repère (O, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$), on montre :

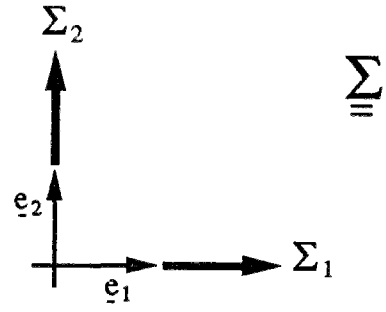
$$\boxed{\begin{aligned} 2a_1 D_{11} &= v_1 (a_1, x_2) - v_1 (-a_1, x_2) \\ 2a_2 D_{22} &= v_2 (x_1, a_2) - v_2 (x_1, -a_2) \\ &\quad \text{et} \\ 2a_1 D_{12} &= v_2 (a_1, x_2) - v_2 (-a_1, x_2) \\ 2a_2 D_{12} &= v_1 (x_1, a_2) - v_1 (x_1, -a_2) \end{aligned}} \qquad (3.\ 2)$$

3.4. Exploitation des symétries

Nous allons examiner maintenant, sous certaines hypothèses de géométrie et de chargement, une situation où la propriété *C* du 2.2.3 s'applique.

Symétries par rapport aux axes Ox_1 et Ox_2

Supposons que l'inclusion soit symétrique par rapport à ces deux axes ainsi que le chargement macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$:



La cellule a possède alors les symétries matérielles par rapport aux axes Ox_1 et Ox_2 , et on se trouve dans le domaine d'application du paragrapphe 2.2.3.

Nous pouvons donc nous ramener, pour déterminer G^{hom}, à la résolution d'un problème défini sur le quart de la cellule (que l'on continuera à noter a) : $O \leq x_1 \leq a_1$; $O \leq x_1 \leq a_1$
D'après 2.3. , les conditions aux limites sur son bord sont *(figure 9)* :

- bord $x_1 = 0$, $v_1 = 0$ (ou $u_1 = 0$) et $\sigma_{12} = 0$
- bord $x_1 = a_1$, $v_1 = a_1 D_{11}$ (ou $u_1 = 0$) et $\sigma_{12} = 0$
- bord $x_2 = 0$, $v_2 = 0$ (ou $u_2 = 0$) et $\sigma_{12} = 0$
- bord $x_2 = a_2$, $v_2 = a_2 D_{22}$ (ou $u_2 = 0$) et $\sigma_{12} = 0$

Comme pour $\underline{\underline{\Sigma}}$, les directions Ox_1 et Ox_2 sont les directions principales du tenseur vitesse de déformation macroscopique $\underline{\underline{D}}$ associé à $\underline{v}$:

$$\begin{cases} D_{11} = \dfrac{1}{a_1} v_1 (a_1, x_2) \\ D_{22} = \dfrac{1}{a_2} v_2 (a_1, x_2) \\ D_{12} = 0 \end{cases}$$

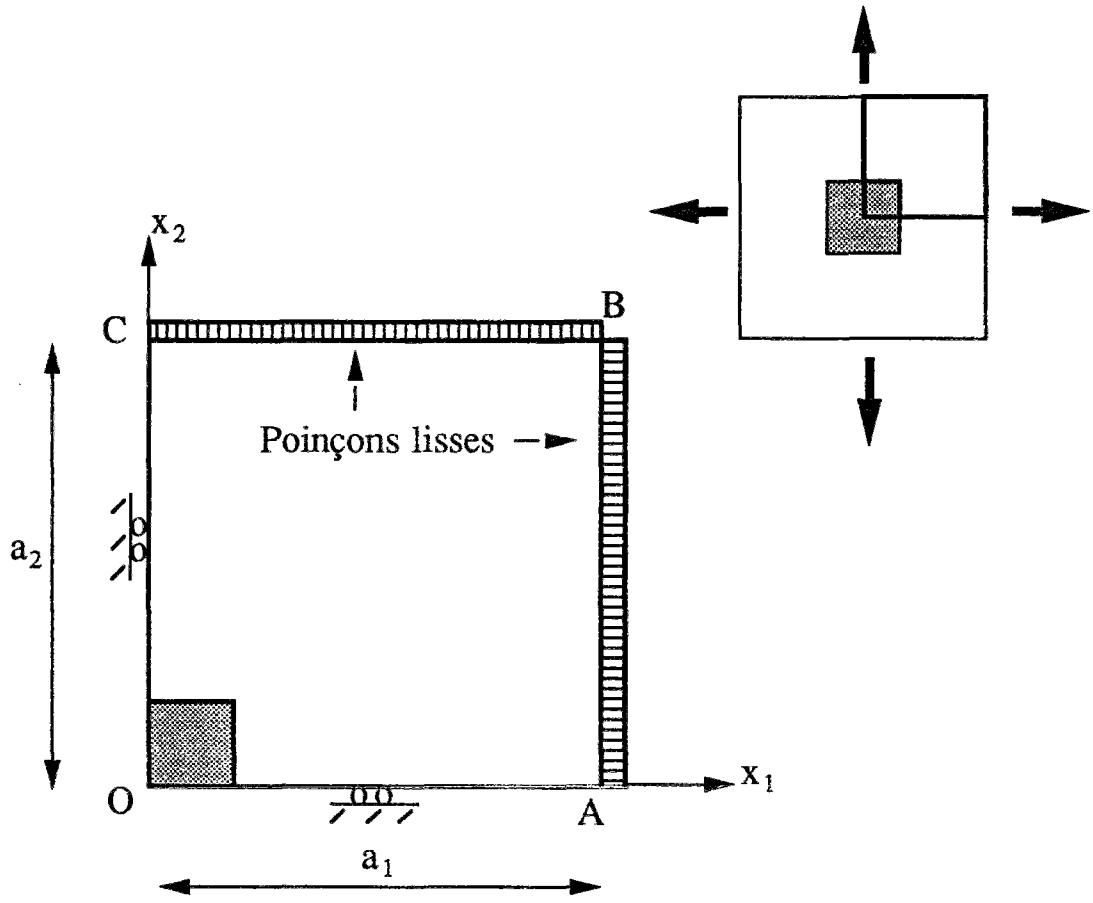


Figure 9 : Conditions aux limites sur le bord du quart de cellule.

" **Mécaniquement** " , les conditions aux limites précédentes peuvent s'interpréter comme suit :

- Poinçon rigide sur $x_1 = a_1$ (respectivement sur $x_2 = a_2$) en translation horizontale (resp. verticale) . Le contact étant bilatéral et sans frottement.

- Poinçons rigides et fixes sur $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$. Le contact étant bilatéral et sans frottement.

HYPOTHÈSES DE CALCULS :

L'objet de la suite du présent chapitre est l'estimation, par le biais de calculs analytiques, du convexe de résistance macroscopique de matériaux à structure périodique simple.
A cet effet, nous ferons les hypothèses suivantes :

- La cellule de base est carrée , $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$
- Le chargement macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ s'effectue suivant les axes $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$.

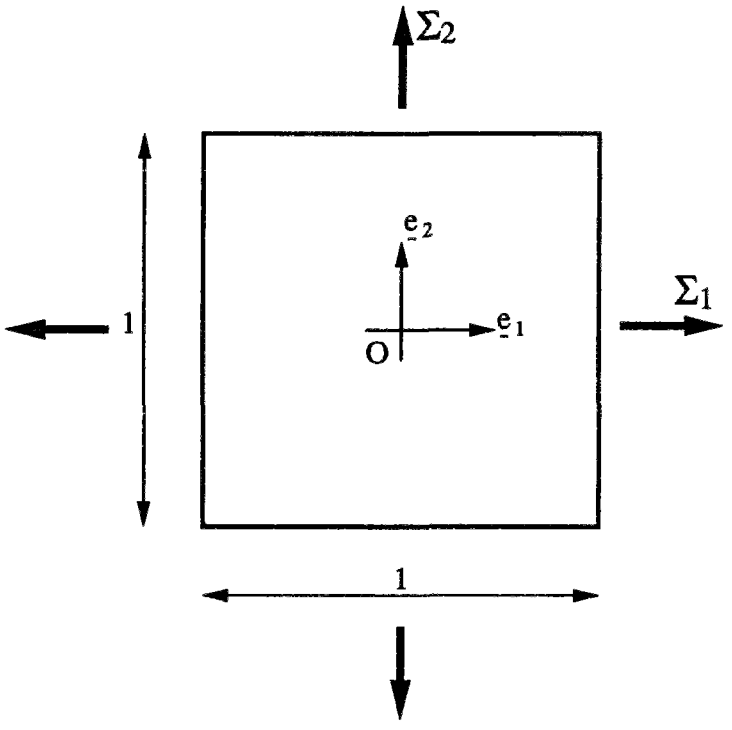


Figure 10 : Cellule de base et chargement macroscopique.

4. CALCULS EN CONTRAINTE PLANE

Dans cette section, nous nous plaçons dans l'hypohèse de contrainte plane. Ce qui revient à modéliser une plaque mince chargée dans son plan.
Quant au critère de rupture du matériau constituant la matrice de la cellule de base, nous considérerons les deux critères suivants:

- *Tresca en contrainte plane*
- *Von Mises en contrainte plane*

Dans les deux cas, G désignera le convexe de résistance du matériau " matrice " et sa résistance en traction simple sera notée σ_0.

4.1. Matériau perforé

La structure considérée est formée d'un matériau homogène comprenant un réseau périodique de cavités (ou inclusions) carrées de côté λ. On se restreint au quart de la cellule représentative avec des conditions aux limites sur les bords de celle-ci *(figure 11)* .

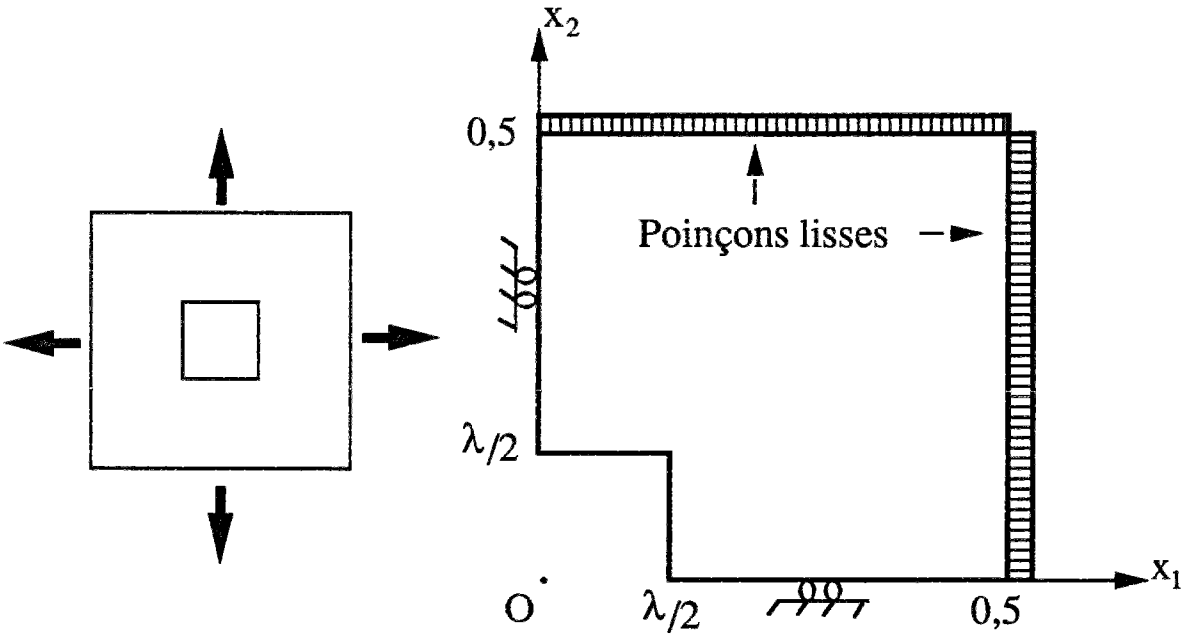


Figure 11 : Cellule de base a *de la structure poreuse étudiée .*

La porosité p vaut :

$$p = \lambda^2$$

Outre les conditions décrites précédemment en section 3, tout champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ de l'espace S devra satisfaire la condition :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0} \qquad \text{sur le bord de la cavité.}$$

Afin de construire G^{hom}, nous allons mettre en oeuvre les définitions statique et cinématique de ce convexe. Pour cela, nous commençons par définir un champ de contrainte noté $\underline{\underline{\sigma}}^{(3)}$ et qui va nous servir par la suite . Ce champ, appartenant bien évidemment à S, est homogène par morceaux sur a *(figure 12)* :

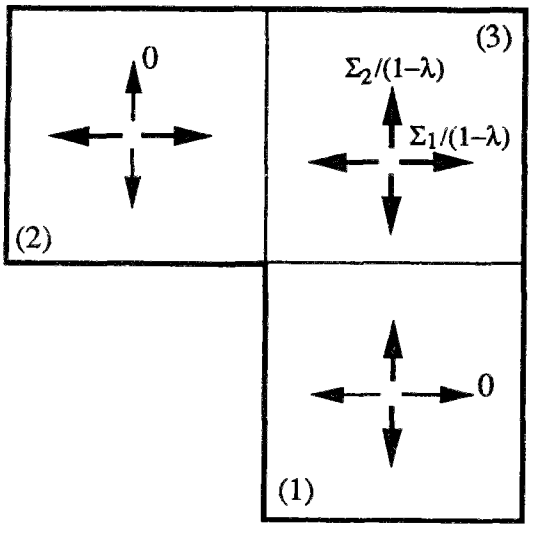


Figure 12 : Champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{(3)}$.

$\underline{\underline{\sigma}}^{(3)}$ est constant dans chacune des trois zones :

zone (1) : $$\underline{\underline{\sigma}}^{(3)} = \frac{\Sigma_2}{1-\lambda}\, \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$$

zone (2) : $$\underline{\underline{\sigma}}^{(3)} = \frac{\Sigma_1}{1-\lambda}\, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$$

zone (3) : $$\underline{\underline{\sigma}}^{(3)} = \frac{1}{1-\lambda}\, \underline{\underline{\Sigma}}$$

Remarquons qu' un tel champ vérifie bien la condition :

$$< \underline{\underline{\sigma}}^{(3)} > = \underline{\underline{\Sigma}}$$

4.1.1. Matériau de Tresca

G, convexe de résistance du matériau " matrice ", est défini par :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in G \quad \Leftrightarrow \quad \sup \{ | \sigma_1 | , | \sigma_2 | , | \sigma_1 - \sigma_2 | \} \leq \sigma_0 \qquad (4.1)$$

σ_1 et σ_2 étant les valeurs des contraintes principales du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$.

Approche statique de G^{hom} :

Grâce au champ $\underline{\underline{\sigma}}^{(3)}$ défini précédemment, et en écrivant qu'un tel champ vérifie le critère *(4. 1)* dans chacune des trois zones, on obtient immédiatement une approche statique du domaine G^{hom}, caractérisée par le convexe G^s :

$$\boxed{G^s = (1 - \lambda) G \subseteq G^{hom}} \qquad (4.2)$$

Approche cinématique de G^{hom} :

Elle repose exclusivement sur l'utilisation de champs de vitesse constants par blocs.

(a.1) soit le champ de vitesse $\underline{v}$ defini sur a par deux blocs en translation, comme indiqué sur *la figure 13.*

A ce champ, discontinu le long du segment (AB), correspond une vitesse de déformation macroscopique $\underline{\underline{D}}$, égale à (*) :

$$\underline{\underline{D}} = 2 U (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2)$$

(*) *A chaque fois que la matrice de $\underline{\underline{D}}$ dans le repère ($\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$) étant diagonale, nous noterons ses composantes D_1 et D_2 (au lieu de D_{11} et D_{22})*

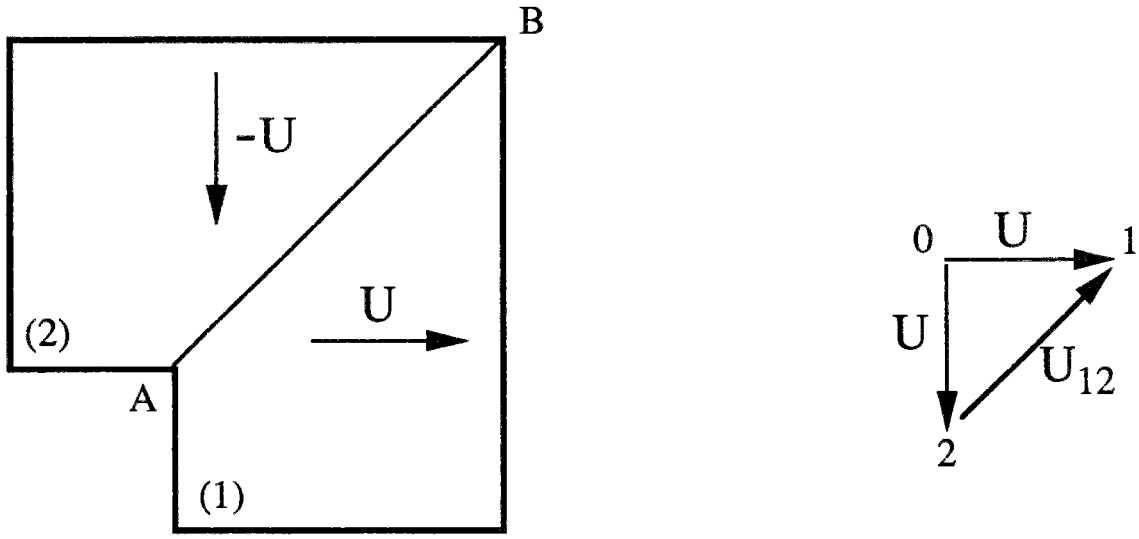


Figure 13 : Champ de vitesse et hodographe correspondant.

- la puissance des efforts extérieurs vaut :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = \Sigma_1 D_1 + \Sigma_2 D_2 = 2 (\Sigma_1 - \Sigma_2) U$$

- la puissance résistante maximale est :

$$< \pi (\underline{\underline{d}}) > = 4 \int_{AB} \pi (\underline{n}, [\underline{v}]) \, ds$$

avec

$$[\underline{v}] = U (\underline{e}_1 - \underline{e}_2) \quad ; \quad \pi (\underline{n}, [\underline{v}]) = \sigma_0 \, | U | / \sqrt{2}$$

d'où :

$$< \pi (\underline{\underline{d}}) > = 4 \, AB \, \sigma_0 \, | U | / \sqrt{2} = 2 (1 - \lambda) \sigma_0 \, | U |$$

Comme $\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Rightarrow \forall U \quad \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq < \pi (\underline{\underline{d}}) >$
alors :

$$| \Sigma_1 - \Sigma_2 | \leq (1 - \lambda) \sigma_0 \qquad (4.3)$$

(a.2) Pour compléter notre approche cinématique, considérons maintenant le champ de vitesse à deux blocs suivant :

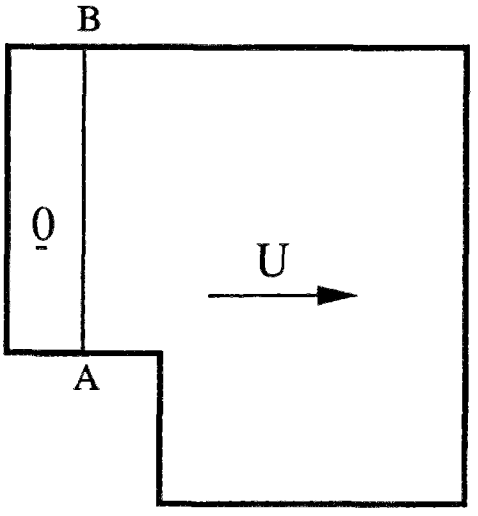


Figure 14 : Champ de vitesse virtuel sur a .

Un tel champ, induit le long du segment (AB) une discontinuité valant : $[\underline{v}] = U\,\underline{e}_1$
La vitesse de déformation macroscopique associée est :

$$\underline{\underline{D}} = 2\,U\,(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1)$$

Comme au *(a.1)*, on calcule la puissance des efforts extérieurs:

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = \Sigma_1\,D_1 + \Sigma_2\,D_2 = 2\,U\,\Sigma_1$$

et la puissance résistante maximale :

$$< \pi(\underline{\underline{d}}) > = 4 \int_{AB} \pi(\underline{n}, [\underline{v}])\,ds = 4\,AB\,|\,U\,|\,\sigma_0 = 2\,(1-\lambda)\,|\,U\,|\,\sigma_0$$

donc $\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom}$ implique que :

$$|\,\Sigma_1\,| \leq (1-\lambda)\,\sigma_0 \qquad (4.4)$$

De même, en considérant un champ de vitesse symétrique du précédent, par rapport à la diagonale $x_1 = x_2$ du carré, on obtient la condition :

$$| \Sigma_2 | \leq (1 - \lambda) \sigma_0 \qquad (4.5)$$

la combinaison des résultats *(4. 3)*, *(4. 4)* et *(4. 5)* constitue une approche par l'extérieur du domaine de résistance macroscopique G^{hom}, caractérisée par G^c :

$$\boxed{G^c = (1 - \lambda) G \supseteq G^{hom}} \qquad (4.6)$$

Conclusion :

Les approches statiques et cinématiques de G^{hom} coïncident, et on peut affirmer que :

$$\boxed{G^{hom} = (1 - \lambda) G} \qquad (4.7)$$

Soit finalement :

G^{hom} se déduit de G, par simple homothétie centrée à l'origine et de rapport (1 - λ) ou (1 - √p) p : porosité .

Remarque :

Les champs statique et cinématique mis en oeuvre précédemment sont associés par la règle de normalité . Le théorème d'association (Salençon, 1983) trouve ici une illustration *(figure 15)*.

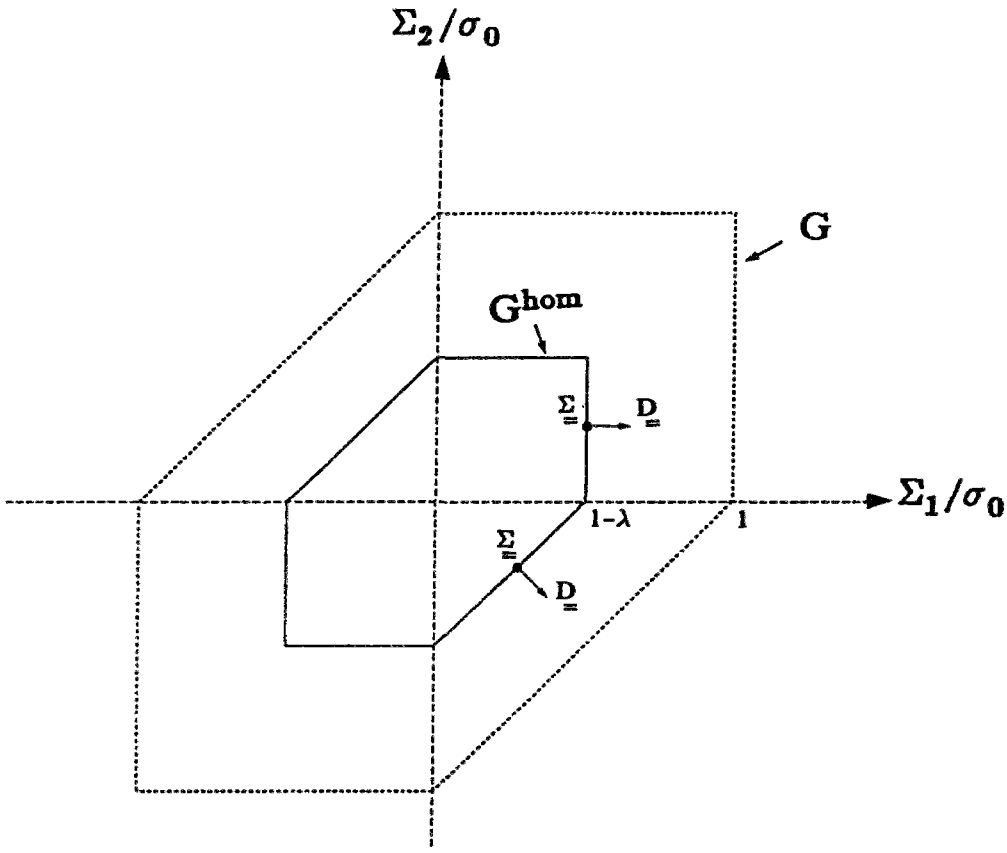


Figure 15 : Convexe G^{hom}.

- **Le long de L_1 (segment $\Sigma_1 = (1 - \lambda)\,\sigma_0$)**

- D'une part, on constate immédiatement que $\underline{\underline{D}}$ est normale extérieure à G^{hom} en $\underline{\underline{\Sigma}}$.
- D'autre part, les champs de contrainte et de vitesse sont tels que :

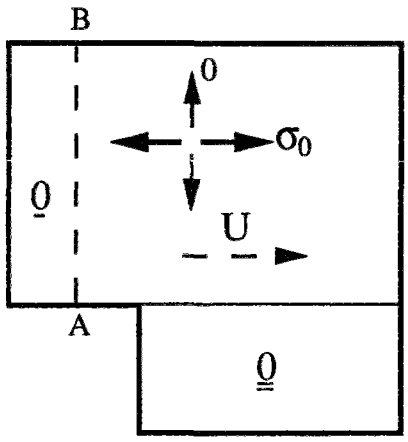


Figure 16 : Champs de contrainte et de vitesse associés.

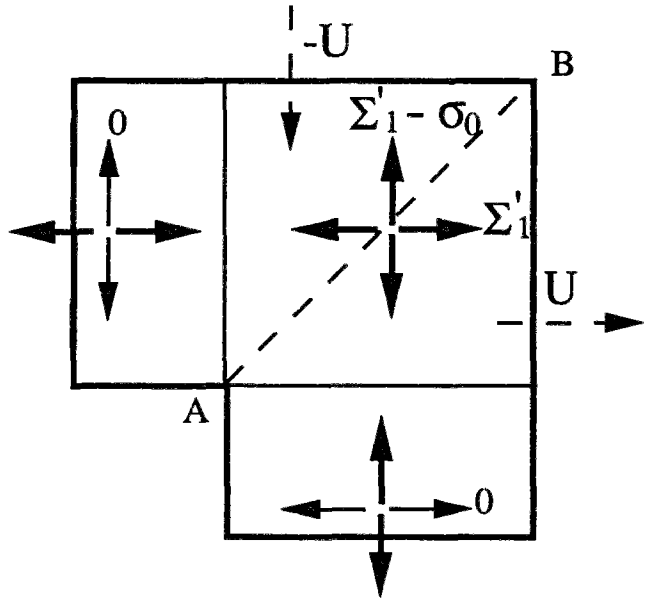
en tout point de la ligne de discontinuité (AB) :

$$(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot [\![\underline{v}]\!] = (\sigma_0 \, \underline{e}_1) \cdot (U \, \underline{e}_1) \qquad (U > 0)$$

$$= \pi(\underline{n}, [\underline{v}])$$

- **Le long de L_2 (segment $\Sigma_1 - \Sigma_2 = (1 - \lambda)\,\sigma_0$)**

$\underline{\underline{D}}$ est bien normale extérieure à G^{hom} en $\underline{\underline{\Sigma}}$ (i. e. $\underline{Q}$) , et les champs de contrainte et de vitesse sont tels que :



$$\Sigma_1' = \frac{\Sigma_1}{1 - \lambda}$$

Figure 17 : Champs de contrainte et de vitesse associés.

en tout point de la ligne de discontinuité (AB) où $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 - \underline{e}_1')$ et $[\underline{v}] = U(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$,

on a :

$$(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot [\underline{v}] = \frac{U}{\sqrt{2}}(\Sigma_1' \, \underline{e}_1 - (\Sigma_1' - \sigma_0)\, \underline{e}_2) \cdot (\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$$

$$= \sigma_0 \, U/\sqrt{2} = \pi(\underline{n}, [\underline{v}])$$

4.1.2. Matériau de Von Mises

Le critère de résistance du matériau sain, s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in G \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \leq \sigma_0^2 \qquad (4.8)$$

σ_1 et σ_2 étant les valeurs des contraintes principales du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$.

Considérons l'approche cinématique (C_1) de G^{hom}, faite à l'aide du champ $\underline{v}$ suivant :

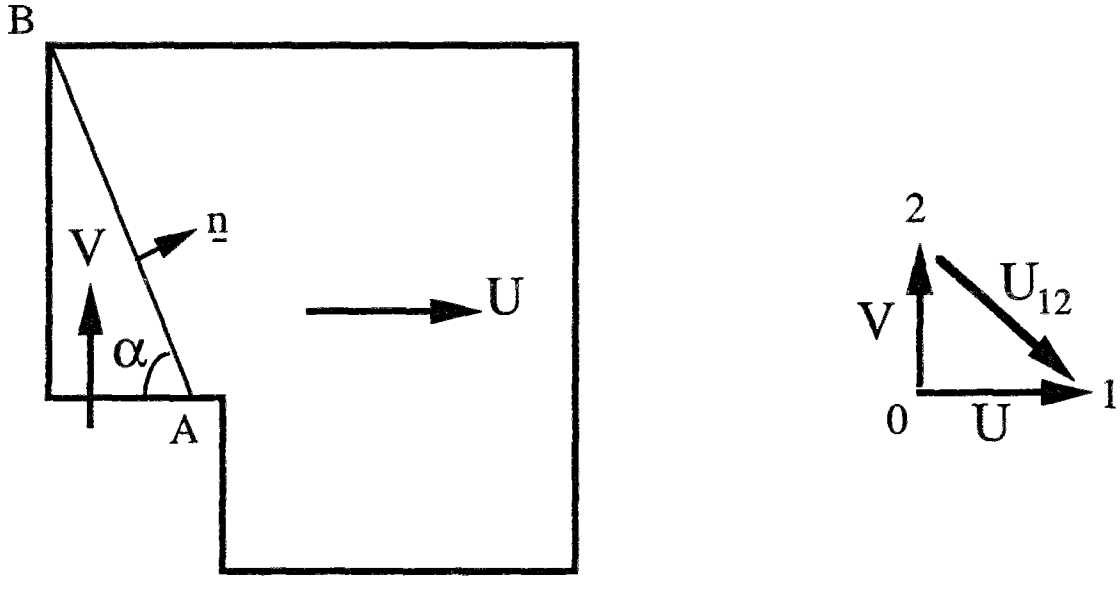


Figure 18 : Champ de vitesse considéré et hodographe des vitesses.

La seule composante non nulle du tenseur vitesse de déformation macroscopique, est $D_1 = 2\ U$.

La puissance des efforts extérieurs est :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = 2\ U\ \Sigma_1$$

La puissance résistante maximale correspondante :

$$< \pi (\underline{\underline{d}}) > = 4 \int_{AB} \pi (\underline{n}, [\underline{v}])\ ds$$

où :

$$[\underline{v}] = U\,\underline{e}_1 - V\,\underline{e}_2 \quad ; \quad \underline{n} = \sin\alpha\,\underline{e}_1 + \cos\alpha\,\underline{e}_2$$

et

$$\pi(\underline{n}, [\underline{v}]) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0 \sqrt{W_n^2 + W_t^2/4}$$

Les termes W_n et W_t correspondent respectivement à la composante normale et tangentielle de $[\underline{v}]$ suivant la direction de (AB).

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Rightarrow \qquad \forall\, U, V \qquad \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \leq \langle \pi(\underline{\underline{d}}) \rangle$$

qui conduit à une majoration du terme $|\Sigma_1|$ par une expression, dont la valeur optimale par rapport à V est obtenue pour :

$$V = \frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4 + \mathrm{tg}^2\alpha}\,U \tag{4. 9}$$

et la majoration devient alors :

$$|\Sigma_1| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}(1 - \lambda)\,\sigma_0\, f(\alpha) \tag{4. 10}$$

avec :

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sin^2\alpha\,\sqrt{1 + 4\,\mathrm{cotg}^2\alpha}} \tag{4. 11}$$

α variant dans l'intervalle $I_\alpha = [\,\alpha_0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$, $\alpha_0 = \mathrm{arctg}\,\frac{1-\lambda}{\lambda}$

L'étude des variations de f, montre que :

$$\min_{I_\alpha} f(\alpha) = \begin{cases} f(\mathrm{arctg}\,\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } \lambda \geq \sqrt{2} - 1 \\ f(\alpha_0) & \text{si } \lambda < \sqrt{2} - 1 \end{cases} \tag{4. 12}$$

Partant de là, nous sommes amenés, pour la suite, à faire la distinction entre les valeurs de λ supérieures à $\sqrt{2} - 1$ ou non.

$$\boxed{\text{A.} \quad \lambda \geq \sqrt{2} - 1 \ (\simeq 0{,}414)}$$

Notons que ce cas correspond à une porosité supérieure à $3 - 2\sqrt{2}$ ($\simeq 0{,}171$)

Approche statique de G^{hom} :

Elle est effectuée grâce au champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{(3)}$ défini au début du **4.1.** . Exprimant que ce champ vérifie le critère *(4. 8)* dans chacune des trois zones de la cellule, on obtient l'estimation statique G^s de G^{hom} suivante :

$$\boxed{G^s = (1 - \lambda)\, G^s_t \subseteq G^{hom}} \qquad (4.\ 13)$$

G^s_t représentant le domaine G " tronqué " par les droites $\Sigma_i = \pm \sigma_0$, i = 1, 2 *(figure 19)*

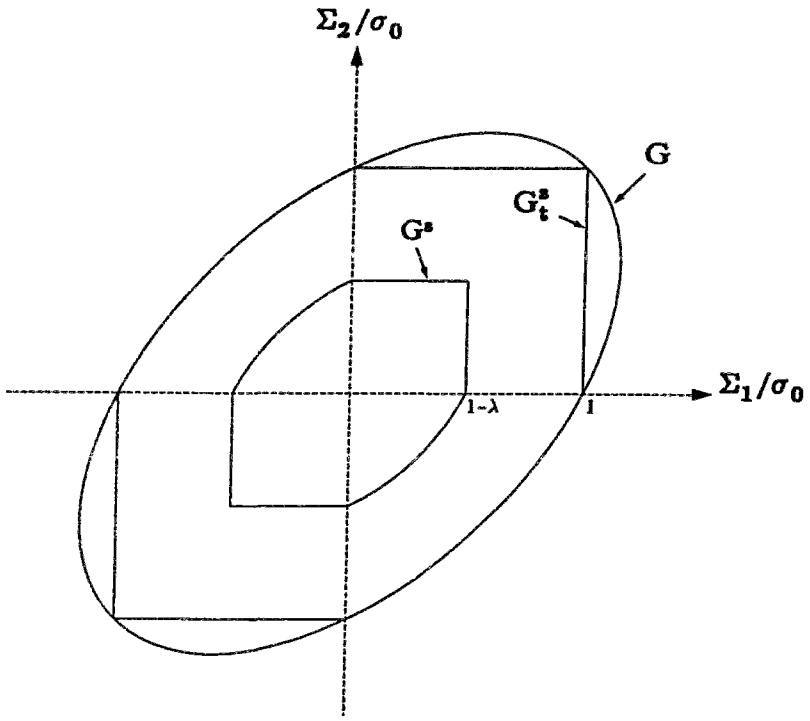


Figure 19 : Domaines G, G^S_t et G^S.

Approche cinématique de G^{hom} :

(a.1) L'approche cinématique *(C_I)* a conduit aux résultats *(4. 12)*. Elle correspond, dans le présent cas, à l'inégalité :

$$| \Sigma_1 | \leq (1 - \lambda) \sigma_0 \qquad (4.\ 14)$$

On obtient, de la même manière, une relation analogue pour Σ_2.

(a.2) Soit la classe de champs de vitesse dépendant de deux paramètres :

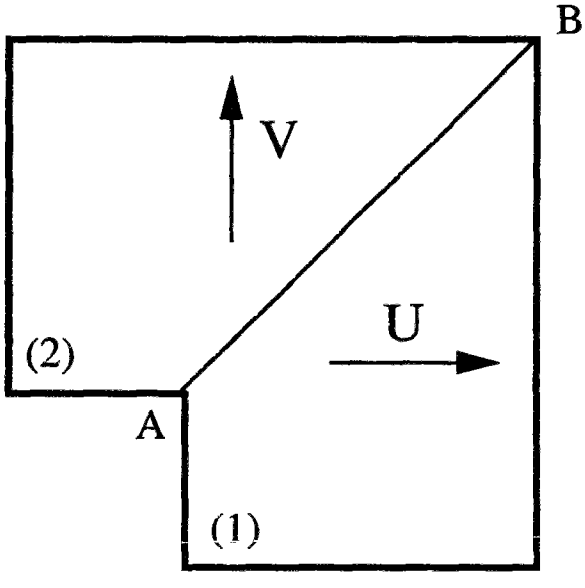


Figure 20 : Une classe de champs de vitesse avec discontinuité selon la diagonale.

Le calcul de la puissance des efforts extérieurs et de la puissance maximale résistante, conduit à :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Rightarrow$$

$$\forall\ U, V \qquad U\,\Sigma_1 + V\,\Sigma_2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} (1 - \lambda) \sigma_0 \sqrt{(U + V)^2 + \frac{1}{4} (U - V)^2} \qquad (4.\ 15)$$

L'enveloppe convexe, dans le plan (Σ_1, Σ_2), des droites précédentes a pour équation :

$$\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 - \frac{6}{5} \Sigma_1 \Sigma_2 \leq \frac{16}{15} (1 - \lambda)^2 \sigma_0^2 \qquad (4.\ 16)$$

La combinaisons des résultats du *(a)* et du *(b)*, constitue l'approche par l'extérieur G^c de G^{hom} :

$$\boxed{G^c = (1-\lambda)\, G_t^c \supseteq G^{hom}} \qquad (4.\ 17)$$

G_t^c représentant le domaine $\{ \underline{\underline{\Sigma}} \mid \Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 - \frac{6}{5}\Sigma_1 \Sigma_2 \leq \frac{16}{15}\sigma_0^2 \}$, " tronqué " par les droites $\Sigma_i = \pm\sigma_0$, i = 1, 2 *(figure 21)*

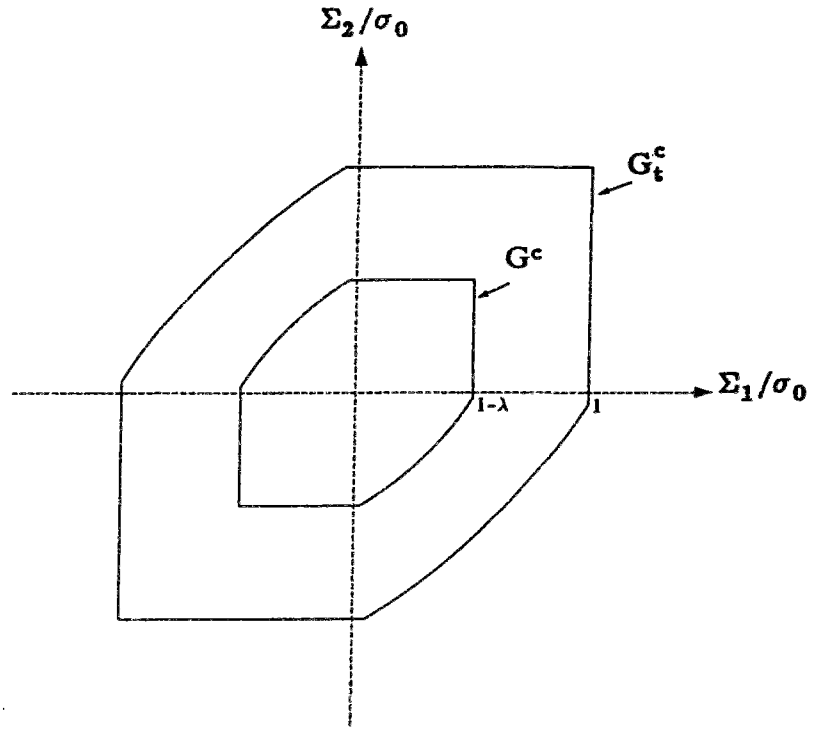


Figure 21 : Domaines G_t^c et G^c.

<u>Conclusion :</u>

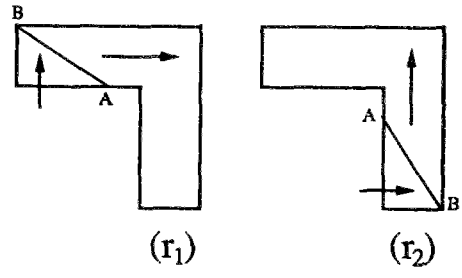
Regroupant les approches statique et cinématique, on obtient l'encadrement :

$$\boxed{(1-\lambda)\, G_t^s \subseteq G^{hom} \subseteq (1-\lambda)\, G_t^c} \qquad (4.\ 18)$$

• Dans la région du plan (Σ_1, Σ_2) correspondant à la condition $\Sigma_1 \Sigma_2 \geq 0$, les domaines encadrant le convexe macroscopique coïncident et donc, G^{hom} est déterminé exactement *(il coïncide, dans cette région, avec le domaine de résistance d'un matériau obéissant au critère de Tresca en contrainte plane dont la limite en traction simple serait (1 - λ) σ_0)*

Ainsi, le critère de résistance macroscopique ne peut plus être décrit par une fonction quadratique. L'apparition d'un point anguleux sur la frontière de G^{hom} intersectant la première bissectrice, peut s'expliquer par la non unicité, en ce point, du mécanisme de rupture correspondant.

Cette non unicité est facilement concevable : lorsque la porosité devient suffisante, la ruine survient par rupture d'un des deux ligaments : mécanisme *(r_1)* si $\Sigma_1 > \Sigma_2 \geq 0$, ou mécanisme *(r_2)* si $\Sigma_2 > \Sigma_1 \geq 0$. Ainsi lorsque $\Sigma_1 = \Sigma_2$ la rupture peut survenir selon l'un ou l'autre des deux modes ou par n'importe quelle combinaison convexe de ces deux modes de rupture .



Ce constat, ne semble pas dépendre de la forme géométrique particulière *(carrée)* de la cavité. En effet, (Debordes et coll. , 1985) on constaté numériquement, sur des cellules comportant des cavités circulaires, l'existence du point anguleux et l'allure non quadratique du critère, dès que la valeur du rayon de la cavité devenait " suffisant " .
Notons enfin que $\underline{\underline{\Sigma}}$ et $\underline{\underline{D}}$ sont associés par la règle de la normalité, ainsi que les champs statiques et cinématiques mis en oeuvre.

• En ce qui concerne la région définie par $\Sigma_1 \Sigma_2 \leq 0$, les approches statique et cinématique de G^{hom}, quoique très voisines, ne coïncident que lorsque $\Sigma_1 = - \Sigma_2$ ($= \pm (1 - \lambda) \sigma_0/\sqrt{3}$) . En ces points, G^{hom} est déterminé exactement et les champs statique et cinématique sont associés .

Nous illustrons, tout ce qui a été mentionné précédemment par une figure correspondant à $\lambda = 0{,}5 \geq \sqrt{2} - 1$.

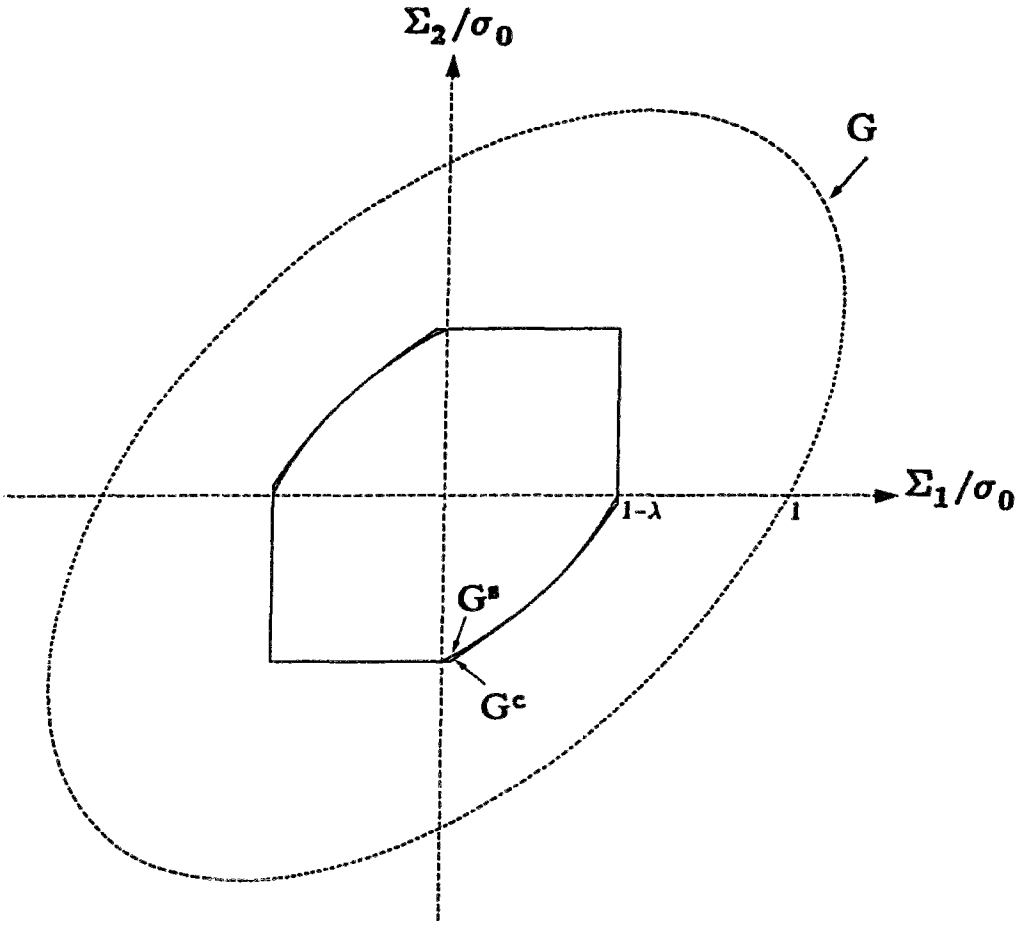


Figure 22 : Approches statique et cinématique de G^{hom} ($\lambda = 0,5$).

B. $\lambda < \sqrt{2} - 1$ ($\simeq 0,414$)

Tout les résultats concernant la région du plan définie par $\Sigma_1 \Sigma_2 \leq 0$, restent valables *(la distinction selon les valeurs de λ ne concerne finalement que la frontière de G^{hom} située dans la région définie par $\Sigma_1 \Sigma_2 \geq 0$).*

Approche statique de G^{hom} :

Elle sera améliorée grâce à un champ de contrainte à huit zones $\underline{\underline{\sigma}}^{(8)}$, constant dans chacune d'entre elles et généralisant le champ $\underline{\underline{\sigma}}^{(3)}$ utilisé précédemment *(figure 23)* .

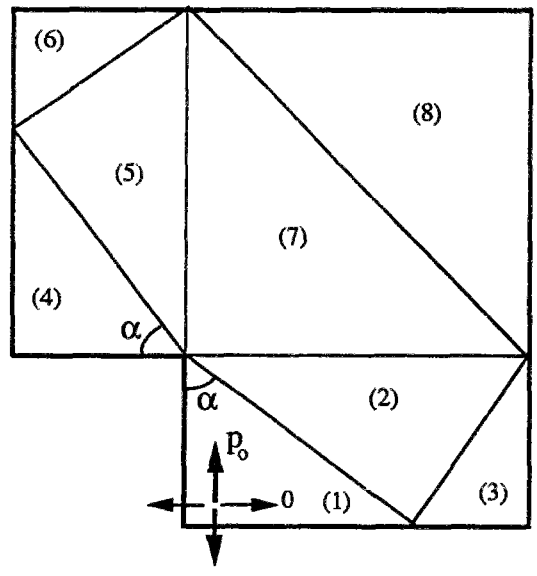


Figure 23 : Champ de contrainte à huit zone.

En notant p_0, la seule composante non nulle de $\underline{\underline{\sigma}}^{(8)}$ dans la zone (1) , ce champ ne dépend que deux paramètres : α et p_0 . La borne statique est alors optimisée, numériquement, en fonction de ces deux paramètres.

L'expression du champ $\underline{\underline{\sigma}}^{(8)}$, ainsi qu'une description de la méthode d'optimisation utilisée, figurent en **Annexe II** .

On constate que ce champ améliore bien l'estimation statique à trois zones dans le cas où $\lambda < \sqrt{2} - 1$.

Approche cinématique de G^{hom} :

(a.1) L'approche cinématique *(C_1)* a conduit aux résultats *(4. 12)*. Cela correspond, dans le présent cas, à l'inégalité :

$$| \Sigma_1 | \leq \frac{2}{\sqrt{3}} (1 - \lambda) \sigma_0 \, f (\alpha_0)$$

soit :

$$| \Sigma_1 | \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\lambda^2 + (1 - \lambda)^2}{\sqrt{4 \lambda^2 + (1 - \lambda)^2}} \sigma_0 \qquad (4.\ 19)$$

On obtient, de la même manière, une relation analogue pour Σ_2.

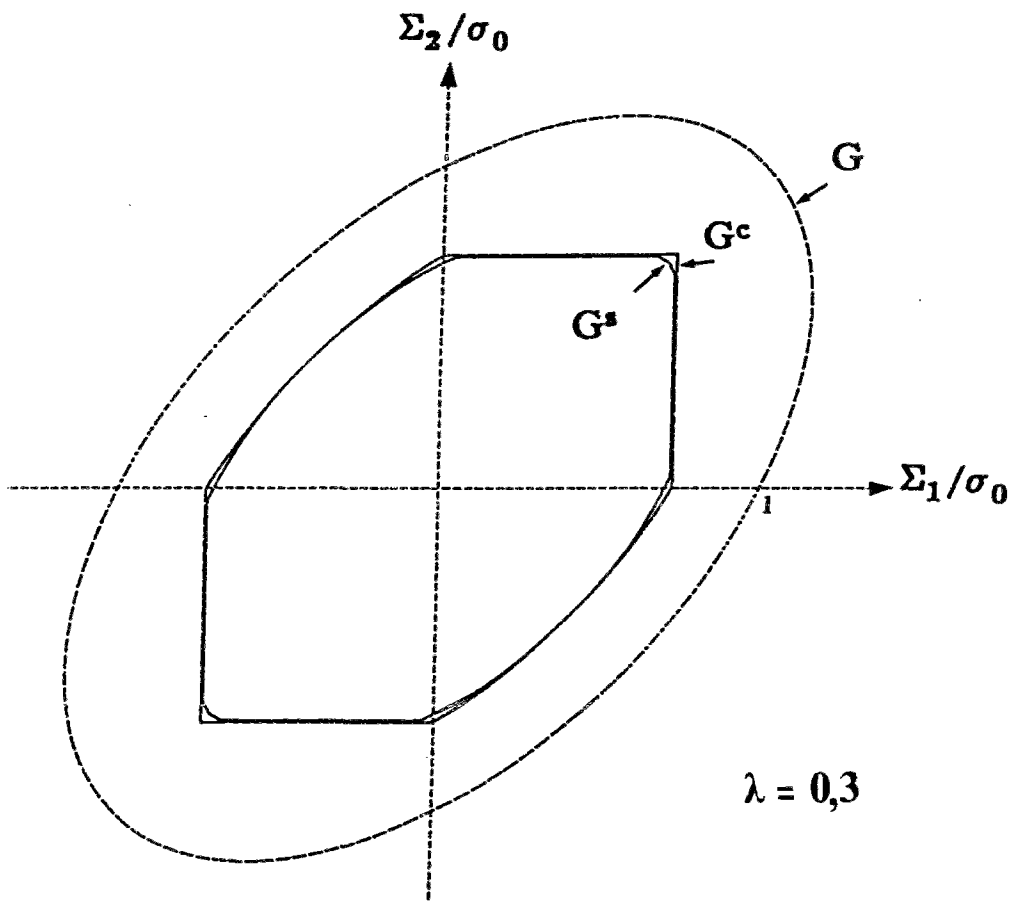
(a.2) Pour λ petit, on complète cette approche grâce à la relation *(2. 1)* :

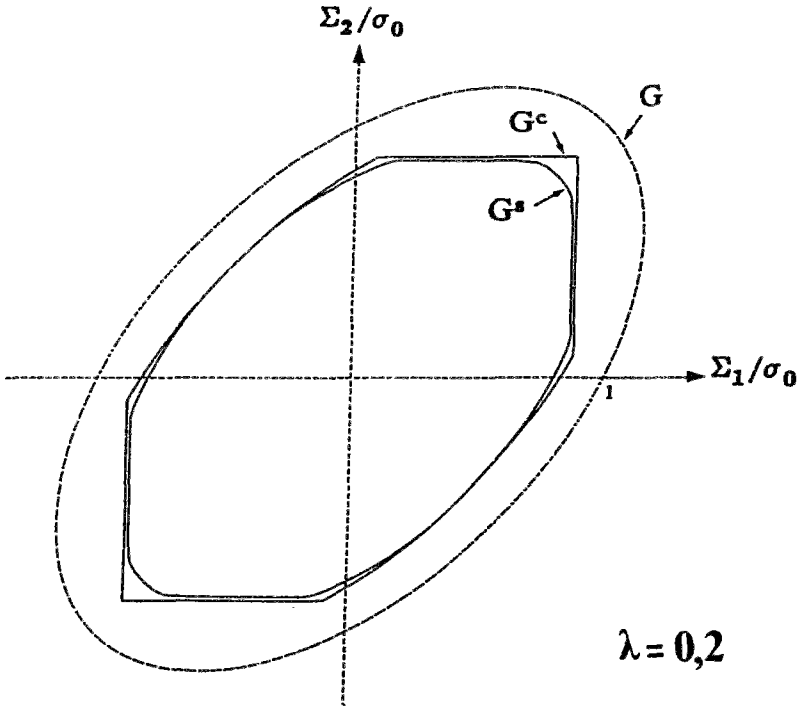
$$G^{hom} \subseteq (1 - p)\, G = (1 - \lambda^2)\, G$$

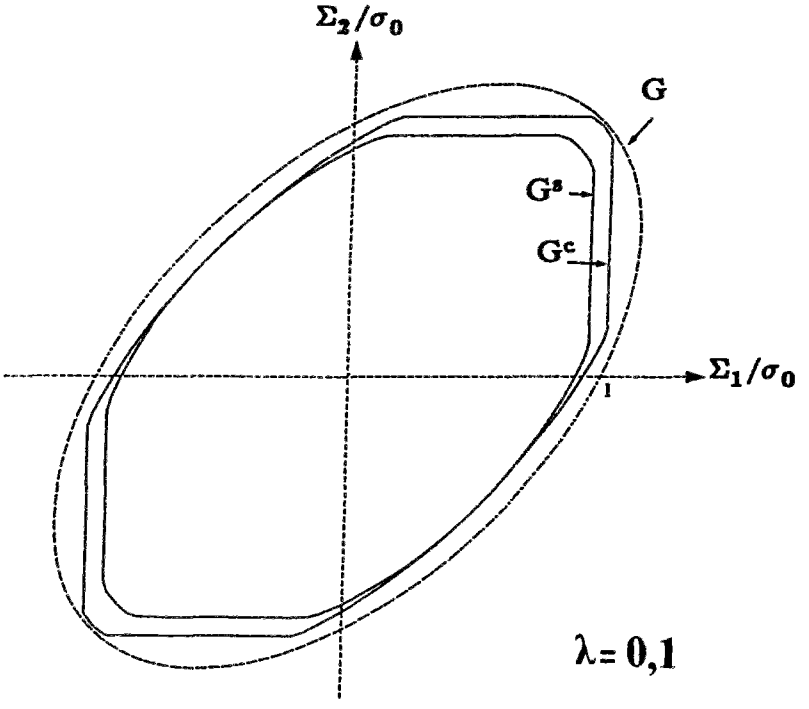
Conclusion :

Lorsque $\Sigma_1 \Sigma_2 \leq 0$, nous gardons les mêmes commentaires que ceux du cas $\lambda \geq \sqrt{2} - 1$ *(notamment solution exacte pour $\Sigma_1 = - \Sigma_2$ et règle de normalité en ces points).* Par contre, lorsque $\Sigma_1 \Sigma_2 \geq 0$, les approches statique et cinématique ne fournissent plus qu'un encadrement, quoique excellent, de G^{hom}.

Nous représentons ci-dessous, dans l'espace (Σ_1 , Σ_2) et pour différentes valeurs de $\lambda < \sqrt{2} - 1$, les domaines G^s *(statique)*, G^c *(cinématique)* et G *(matériau sain)* :







Figures 24 : G^S , G^C et G pour diverses valeurs de λ.

Remarques :

Soient K et Σ_0 les limites, respectivement en cission simple et traction simple du matériau homogénéisé.

- L'étude précédente montre que :

$$\boxed{K(\lambda) = (1-\lambda)k \qquad \forall \lambda \in [0,1]} \tag{4.20}$$

résultat obtenu pour $\Sigma_1 = -\Sigma_2$; $k = \sigma_0/\sqrt{3}$ est la limite en cission simple du matériau sain.

- - Concernant la traction simple ($\Sigma_2 = 0$) :

Reprenant les résultats de l'étude précédente, on a:

$$\Sigma_0 = (1-\lambda)\sigma_0 \qquad \text{si} \quad \sqrt{2}-1 \leq \lambda \leq 1 \tag{4.21}$$

et

$$(1-\lambda)\sigma_0 \leq \Sigma_0 \leq \Sigma_0^c \qquad \text{si} \quad 0 \leq \lambda \leq \sqrt{2}-1 \tag{4.22}$$

où

$$\Sigma_0^c/\sigma_0 = \inf\left\{ 1-\lambda^2 \ , \ \frac{4}{\sqrt{15}}(1-\lambda) \ , \ \frac{2}{\sqrt{3}} \ \frac{\lambda^2+(1-\lambda)^2}{\sqrt{4\lambda^2+(1-\lambda)^2}} \right\}$$

Nous visualisons *(figure 25)*, les variations de Σ_0 en fonction de $\lambda \in \left[0, \sqrt{2}-1\right]$. On pourra apprécier le faible écart entre les estimations statique et cinématique (écart maximal inférieur à 3,5%) .

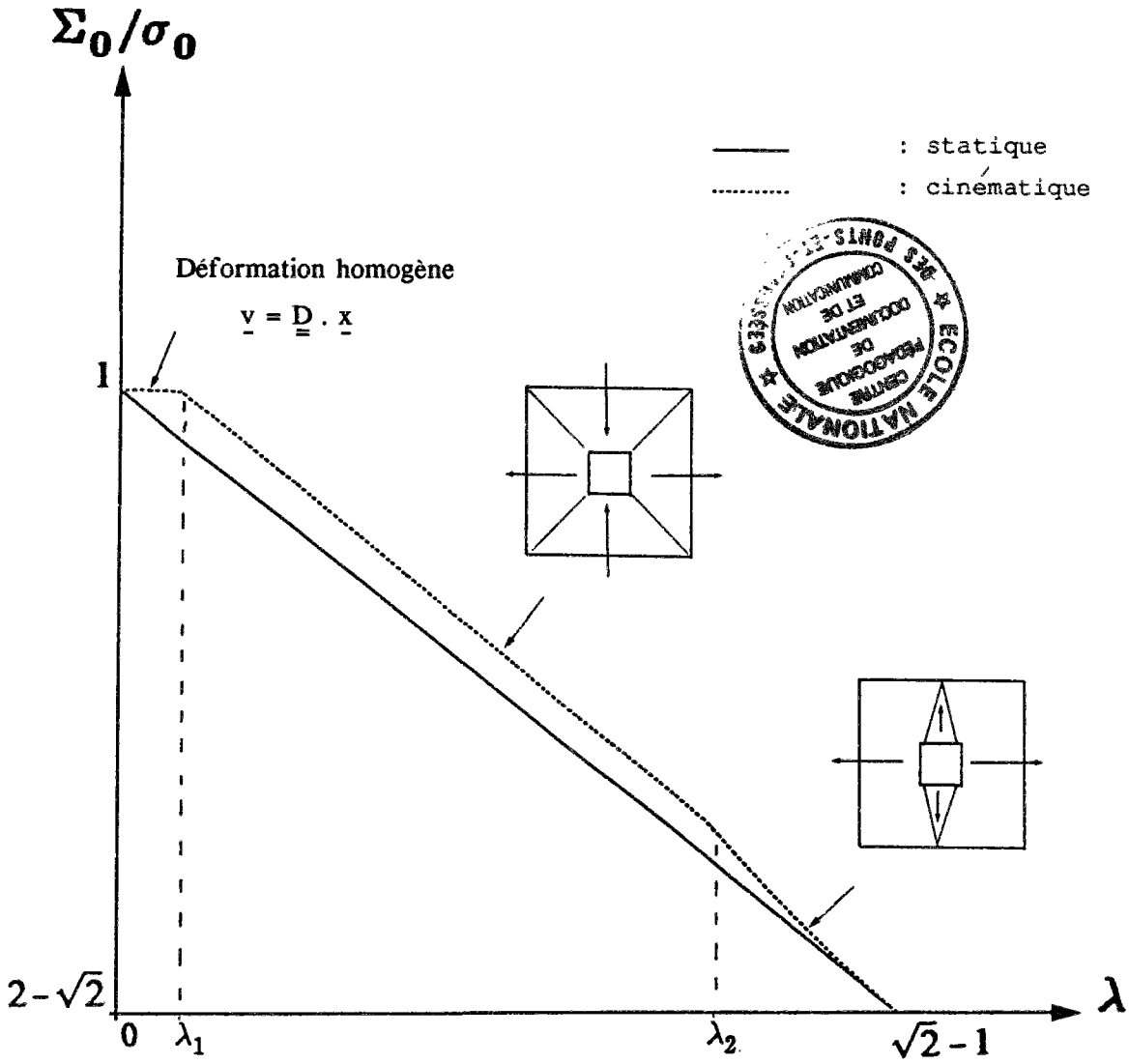


Figure 25 : Résistance en traction simple du matériau homogénéisé en fonction de λ.

où

$$\lambda_1 = \frac{4}{\sqrt{15}} - 1 \simeq 0{,}03 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \simeq 0{,}31$$

4.1.3. Remarques lorsque la cavité est de forme quelconque

Nous avons présenté, en appliquant directement les méthodes statique et cinématique, des estimations de G^{hom} dans le cas où la cavité est de forme carrée. Lorsque cette dernière est de forme quelconque, le convexe macroscopique peut être :

- soit approché en reprenant directement nos résultats, sous réserve de considérer les carrés, circonscrit pour la statique et inscrit pour la cinématique.
- soit estimé de façon plus " précise " en s'inspirant des champs statique et cinématique que nous avons utilisés.

A titre d'exemple, intéressons nous à ***la limite en traction simple*** Σ_0 du matériau homogénéisé dans le cas où la cavité est circulaire de diamètre λ, centrée au milieu de la cellule :

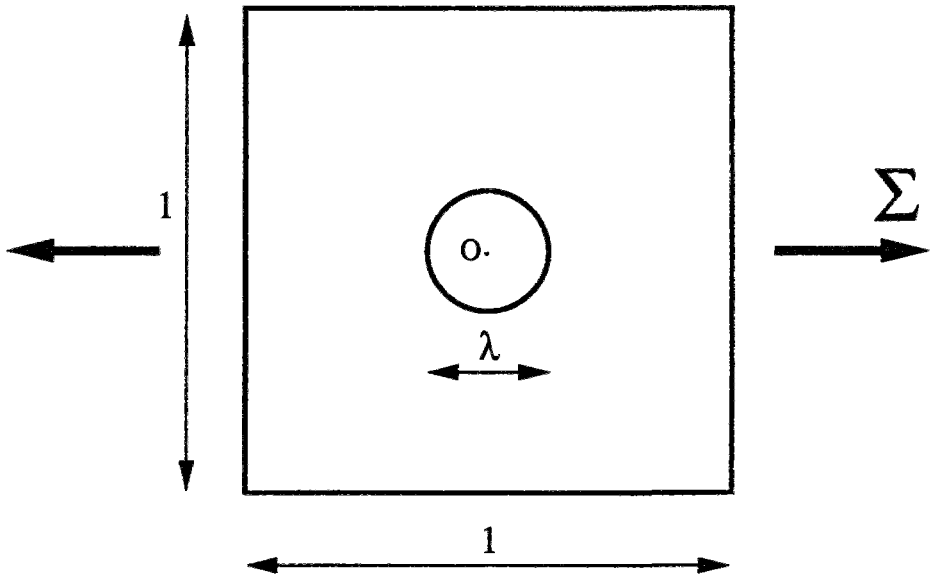
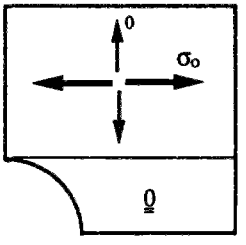


Figure 26 : Cellule de base avec cavité circulaire.

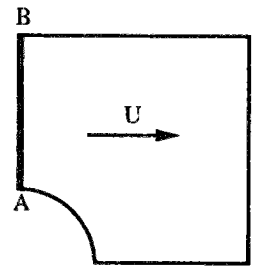
a) Matériau de Tresca

En considérant le champ statique à deux zones :

on montre que $\Sigma_0 \geq (1 - \lambda)\,\sigma_0$



Le champ de vitesse discontinu le long de (AB) :



conduit à $\Sigma_0 \leq (1-\lambda)\,\sigma_0$

Regroupant les deux inégalités précédentes on a :

$$\boxed{\Sigma_0 = (1-\lambda)\,\sigma_0} \qquad (4.23)$$

b) Matériau de Von Mises

statique :

Le champ à deux zones précédent fournit la borne :

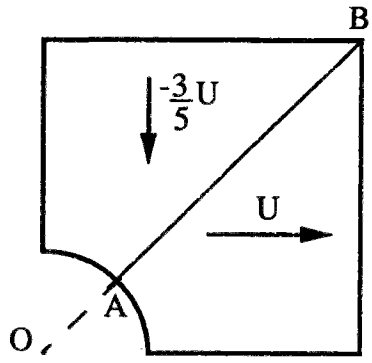
$$\Sigma_0^s = (1-\lambda)\,\sigma_0$$

cinématique :

- Le champ de vitesse à déformation homogène fournit la borne :

$$b_1^c = (1 - \pi\lambda^2/4)\,\sigma_0$$

- Le champ de vitesse (optimisé) de la figure suivante :



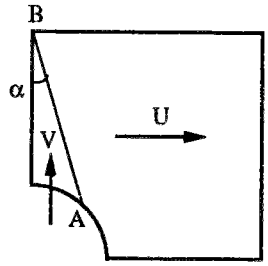
conduit à la borne :

$$b_2^c = \frac{4}{\sqrt{15}}\left(1 - \lambda/\sqrt{2}\right)\sigma_0$$

• Finalement, on considère le champ :

avec $V = \dfrac{3 \cot g\alpha}{4 + \cot g^2 \alpha} U$

la borne est optimisée par rapport à α.



Si on pose $x = \sin^2 \alpha$, on a :

$$b_3^c = \min_{0 \le x \le \lambda^2} \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 - x} - \sqrt{\lambda^2 - x}}{\sqrt{3x + 1}}$$

On pose donc :

$$\Sigma_0^c = \inf \{ b_1^c , b_2^c , b_3^c \} \quad \text{borne cinématique de } \Sigma_0 .$$

Remarques :

Ce problème a été étudié par Debordes et coll. (1985) , par l'intermédiaire de la résolution d'un problème d'évolution élastoplastique, utilisant un algorithme de plasticité. Le milieu est supposé obéir en chacun de ses points à une loi de comportement élastoplastique standard, les domaines G et G^{hom} étant respectivement interprétés comme le domaine d'élasticité du matériau et le convexe macroscopique limite du milieu homogénéisé.

En outre, nos résultats peuvent être comparés à ceux obtenus par Gaydon et McCrum (1954) . Ces derniers ont abordé la détermination de Σ_0 en mettant directement en oeuvre des champs statiques et cinématiques. mais ils imposent un chargement de la cellule de type " contrainte homogène " sur le pourtour, ce qui doit *a priori* les conduire à une sous estimation de Σ_0 (cf. § 1.3.) .

Σ_0 / σ_0 \ λ	(1) stat.	(1) ciném.	(2) stat.	(2) ciném.	(3)
0,1	0,90	0,96	0,90	0,90	-
0,2	0,80	0,88	0,80	0,80	-
0,3	0,70	0,80	0,65	0,70	0,78
0,4	0,60	0,69	0,48	0,60	-
0,5	0,50	0,56	0,30	0,40	0,56
0,6	0,40	0,44	0,20	0,24	-
0,7	0,30	0,32	0,12	0,14	0,32
0,8	0,20	0,21	0,05	0,06	-
0,9	0,10	0,10	0,02	0,03	-

(1) nos résultats.
(2) Gaydon...
(3) Debordes...

On constate sur le tableau précédent, où on a reporté nos résultats et ceux obtenus par les auteurs précités, qu'effectivement l'approche de Gaydon et McCrum sous-estime Σ_0 et que l'estimation numérique faite par Debordes et coll. s'accorde assez bien avec notre estimation cinématique.

Nous visualisons ci-après *(figure 27)*, les variations de Σ_0/σ_0 en fonction de λ. Par souci de clarté, nous ne représentons pas les estimations obtenues par Gaydon et McCrum.

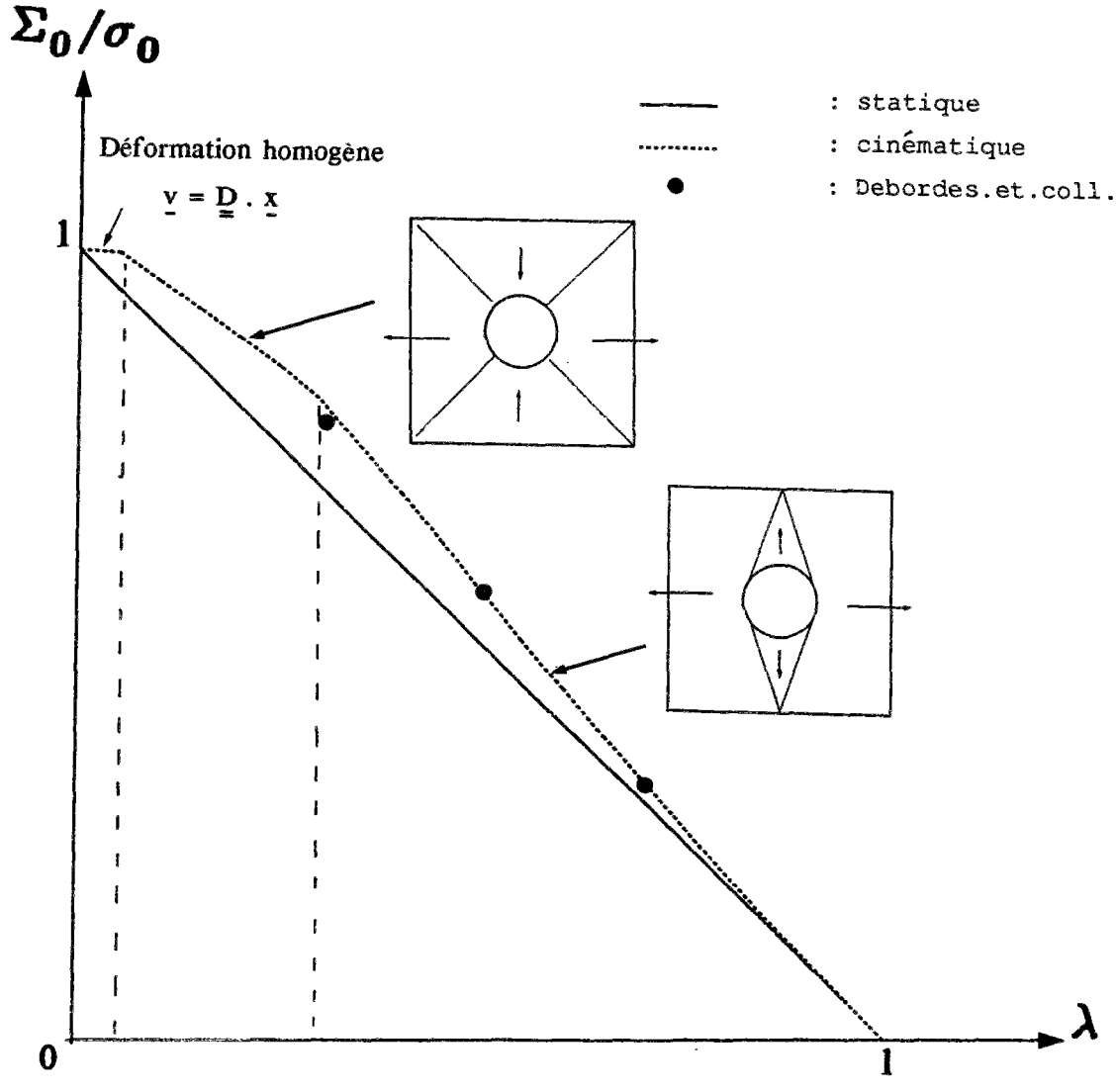


Figure 27 : Limite en traction simple du matériau homogénéisé. Cellule avec cavité circulaire.

L'écart maximal entre les bornes statique et cinématique de Σ_0 est de l'ordre de 15 % .

4.2. Matériau fissuré

On se propose de déterminer le convexe de résistance macroscopique d'un matériau fissuré. La fissure est supposée droite, de longueur λ et le contact entre les lèvres est sans frottement.

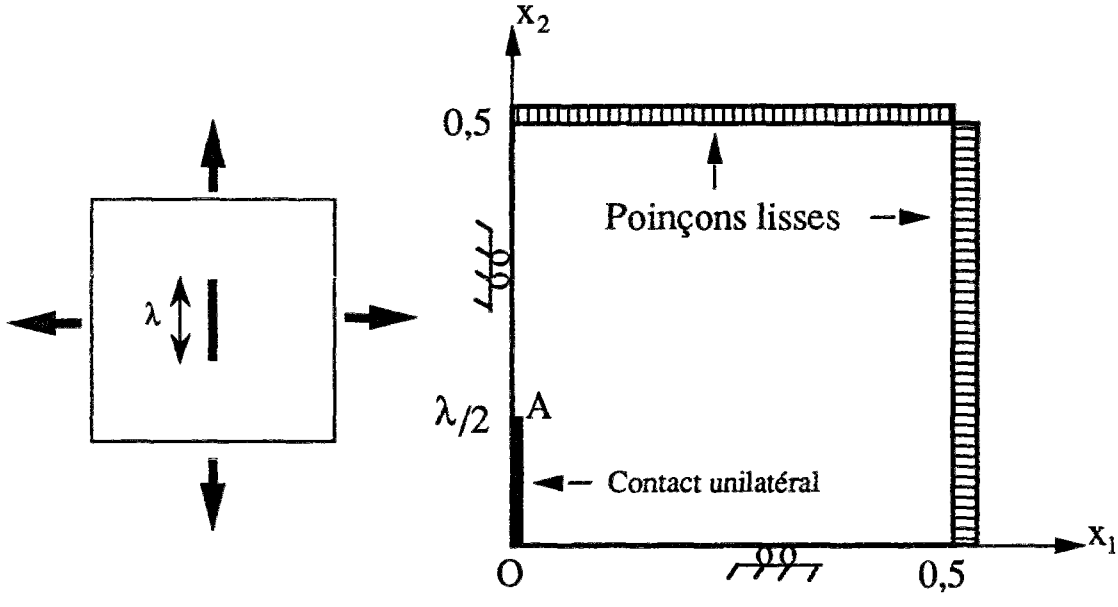


Figure 28 : Matériau fissuré.

Outre les conditions aux limites sur le bord a déjà mentionnées, il faut écrire celles sur le bord (OA) de la fissure :

- $\sigma \leq 0$ et $\tau = 0$, soit $\sigma_{11} \leq 0$ et $\sigma_{12} = 0$
- $v_1 \geq 0$ (contact unilatéral)

Remarquons tout de suite, que ***G^{hom} coïncide avec G dans la région du plan définie par $\Sigma_1 \leq 0$*** . En effet, si Σ_1 est négatif, en considérant le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}$ constant dans la cellule, on montre le résultat annoncé : Le matériau se comporte donc comme s'il n'y avait pas de fissure.

Dorénavant, on ne s'attachera à l'estimation de G^{hom} que dans le cas de chargement macroscopique correspondant à $\underline{\Sigma_1 \geq 0}$.

4.2.1 Matériau de Tresca

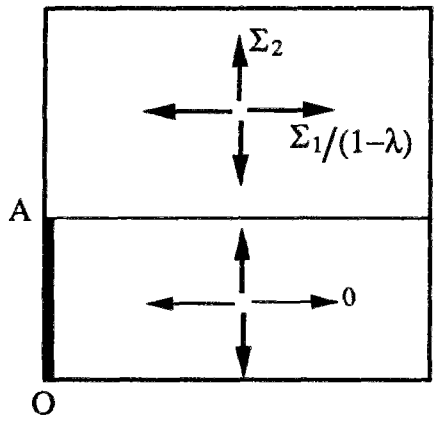
• Approche statique de G^{hom} :

On considére le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}$ à deux zones, défini sur la cellule de la façon suivante:

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}(\underline{x}) = \Sigma_2\, \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \qquad \text{si} \quad x_2 < \lambda/2$$

et

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}(\underline{x}) = \Sigma_2\, \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\Sigma_1}{1-\lambda}\, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \qquad \text{si} \quad x_2 > \lambda/2$$



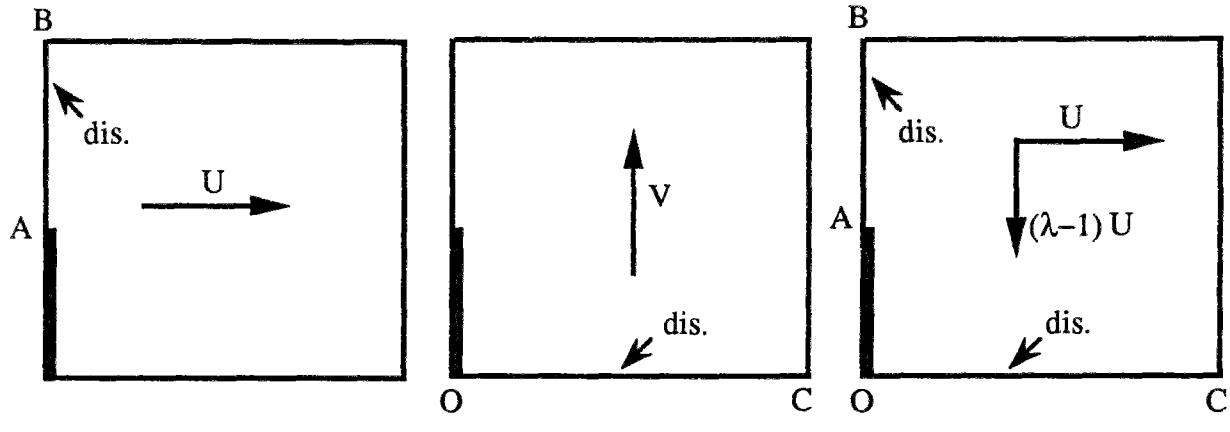
En écrivant que, pour tout $\underline{x}$ de a , $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}(\underline{x}) \in G$, on obtient l'estimation statique suivante :

$$\boxed{G^s = \mathrm{Aff}(G) \subset G} \qquad (4.24)$$

où Aff est l'affinité orthogonale d'axe Ox_2 et de rapport $(1 - \lambda)$.

• Approche cinématique de G^{hom} :

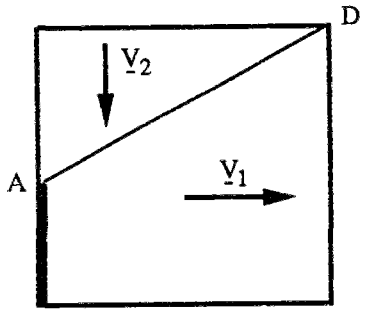
(a.1) Grâce aux trois champs de vitesse virtuels :



on obtient :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom}$$
$$\Downarrow$$
$$|\Sigma_1| \leq (1-\lambda)\sigma_0 \quad ; \quad |\Sigma_2| \leq \sigma_0 \quad \text{et} \quad |\Sigma_1 - (1-\lambda)\Sigma_2| \leq 2(1-\lambda)\sigma_0 \qquad (4.25)$$

(a.2) On considère maintenant le champ suivant :



$\underline{v}_1 = U\,\underline{e}_1$
$\underline{v}_2 = -(1-\lambda)\,U\,\underline{e}_2$

Le calcul de la puissance résistante maximale et de la puissance des efforts extérieures conduit à :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Rightarrow \quad |\Sigma_1 - (1-\lambda)\Sigma_2| \leq \frac{\sigma_0}{2}(1+(1-\lambda)^2) \qquad (4.26)$$

(a.3) L'approche est complétée par l'inclusion :

$$G^{hom} \subseteq G \qquad (4.27)$$

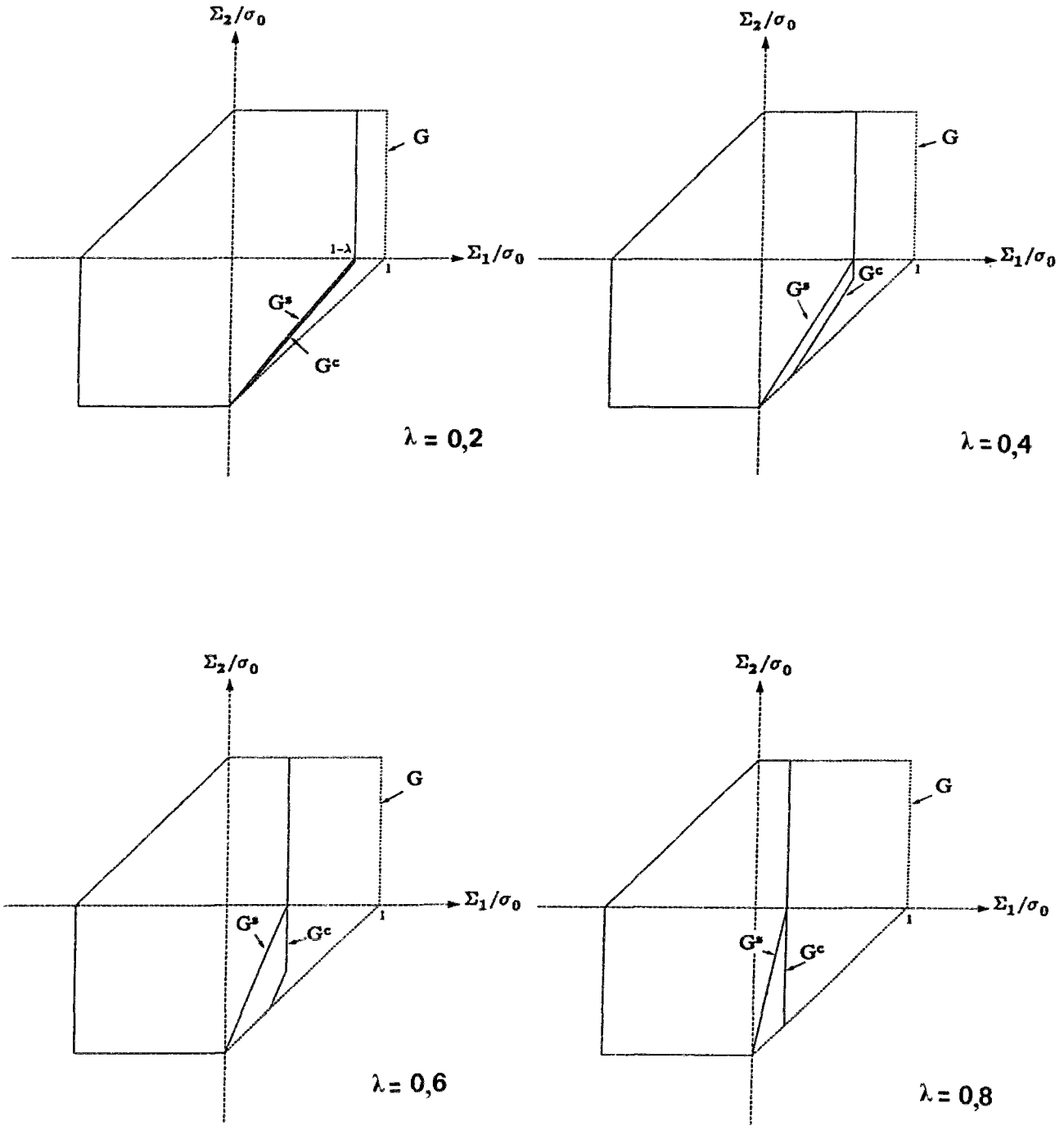
Conclusion :

On constate que G^{hom} est complétement déterminé, sauf dans le quart de plan $\Sigma_1 \geq 0$, $\Sigma_2 \leq 0$. En effet :

- $G^{hom} = G$ si $\Sigma_1 \leq 0$
- $G^{hom} = \text{Aff}(G)$ si $\Sigma_1 > 0$ et $\Sigma_2 \geq 0$
- $\text{Aff}(G) \subset G^{hom} \subset G^c$ si $\Sigma_1 \geq 0$, $\Sigma_2 \leq 0$

où G^c est défini à l'aide des relations *(4. 25)*, *(4. 2)* et *(4. 27)*.

Nous représentons ci-dessous , pour quelques valeurs de λ, les résultats des approches précédentes du convexe de résistance macroscopique. On constate que dans le quart de plan $\Sigma_1 \geq 0$, $\Sigma_2 \leq 0$, l'écart entre les bornes statique et cinématique peut devenir important. D'où la nécessité de calculs plus précis, analytiques ou numériques.



Figures 29 : Approche de G^{hom} pour matériau fissuré de Tresca.

4.2.1 Matériau de Von Mises

Rappelons tout d'abord, que $G^{hom} \subseteq G$ et que les critères de résistance du matériau fissuré du matériau sain coincident lorsque $\Sigma_1 \leq 0$. Nous tentons ci-après d'estimer G^{hom} lorsque $\Sigma_1 \geq 0$.

- Approche statique de G^{hom} :

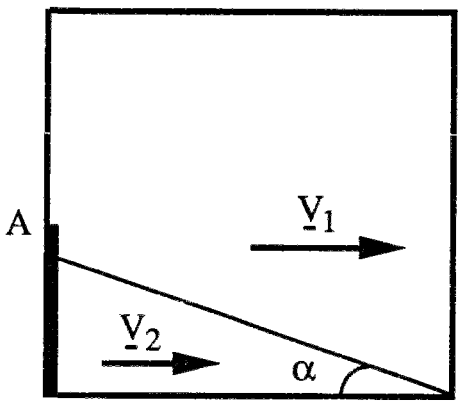
On reprend le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}$ à deux zones, défini en 4.2.1. . Ce champ conduit à l'estimation statique :

$$G^s = \mathrm{Aff}\,(G) \cap \{ \underline{\underline{\Sigma}} \; ; \; \Sigma_2 \leq \sigma_0 \} \qquad (4.28)$$

La frontière de G^s est la transformée de l'ellipse de Von Mises par l'affinité Aff, tronquée par la droite d'équation $\Sigma_2 = \sigma_0$.

- Approche cinématique de G^{hom} :

(a.1) Considérons le champ donné ci-suit :



$$\underline{v}_1 = U\,\underline{e}_2 \qquad (\,U > 0\,)$$

$$\underline{v}_2 = \frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4 + \mathrm{tg}^2\alpha}\,U\,\underline{e}_1$$

$$\alpha \in \left]\,0\,,\ \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\lambda}\,\right[$$

Ce champ conduit à :

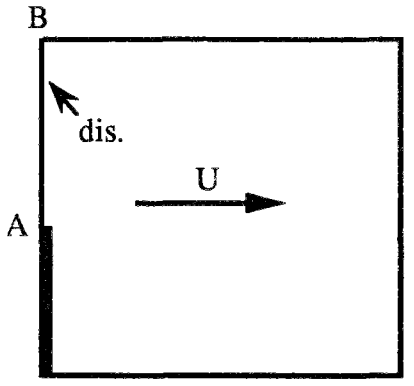
$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Rightarrow \qquad \Sigma_2 \leq \frac{2\,\sigma_0}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\sin^2\alpha\,\sqrt{1 + 4\,\mathrm{cotg}^2\alpha}}$$

Optimisant la borne par rapport à α , on obtient :

$$\Sigma_2 \leq \begin{cases} \sigma_0 & \text{si } \lambda \geq 1/\sqrt{2} \quad (\,\alpha = \mathrm{arctg}\,\sqrt{2}\,) \\ \dfrac{2\,\sigma_0}{\sqrt{3}}\,\dfrac{1 + \lambda^2}{\sqrt{1 + 4\,\lambda^2}} & \text{si } \lambda \leq 1/\sqrt{2} \quad (\,\alpha = \mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{\lambda}\,) \end{cases} \qquad (4.29)$$

Ainsi, lorsque $\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(\simeq 0{,}707)$, la condition $\Sigma_2 \leq \sigma_0$ coïncide avec celle obtenue lors de l'approche statique.

(a.2) Soit le champ de vitesse :

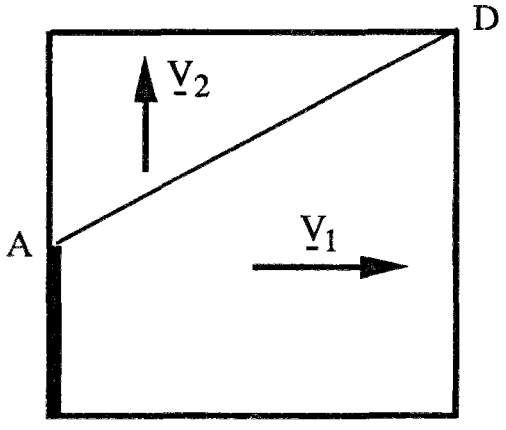


La conditon de résistance s'écrit :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Rightarrow \qquad \Sigma_1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} (1 - \lambda) \ \sigma_0 \qquad (4.30)$$

Dans le plan (Σ_1 , Σ_2) , Cette droite est tangente au domaine statique G^s au point $(\Sigma_1^* , \Sigma_2^*) = \frac{(2)}{\sqrt{3}} (1 - \lambda) \ (2 \sigma_0 , \sigma_0)$.

(a.3) Soit la famille de champs de vitesse défini par :



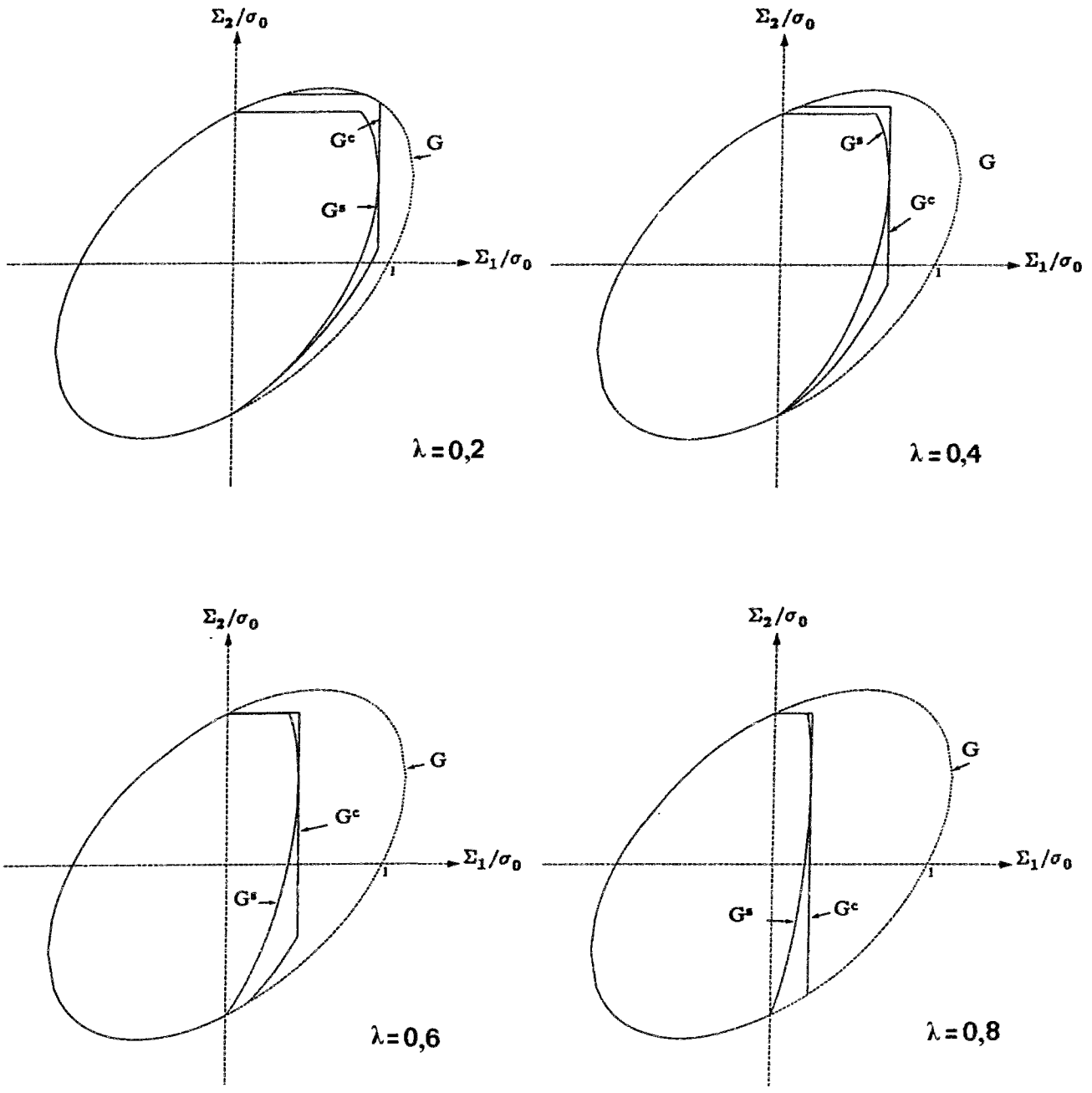
$$\underline{v}_1 = U \ \underline{e}_1 \qquad (U \geq 0)$$
$$\underline{v}_2 = V \ \underline{e}_2$$

L'enveloppe convexe des droites d'équations $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = < \pi (\underline{n} , [\underline{v}]) >$, sous la condition $U \geq 0$ est l'ensemble :

$$\begin{cases} (4 + (1 - \lambda)^2) \Sigma_1^2 + (1 + 4 (1 - \lambda)^2) \Sigma_2^2 - 6 (1 - \lambda) \Sigma_1 \Sigma_2 \leq \frac{4}{3} (1 + (1 - \lambda)^2) \sigma_0^2 \\ \text{et} \\ (4 + (1 - \lambda)^2) \Sigma_1 - 3 (1 - \lambda) \Sigma_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (4.31)$$

Conclusion :

Lorsque $\Sigma_1 > 0$, sauf en quelques points, G^{hom} n'est pas déterminé exactement mais seulement approché par défaut et par excès *(figures 30)*.



Figures 30 : Approche de G^{hom} : matériau fissuré de Von Mises.

Remarque :

Nous représentons ci-dessous les variations, en fonction de λ, des bornes statique et cinématique de la résistance en traction Σ_n, exercée transversalement à la fissure.
L'écart maximal entre ces bornes de l'ordre de 15 % .

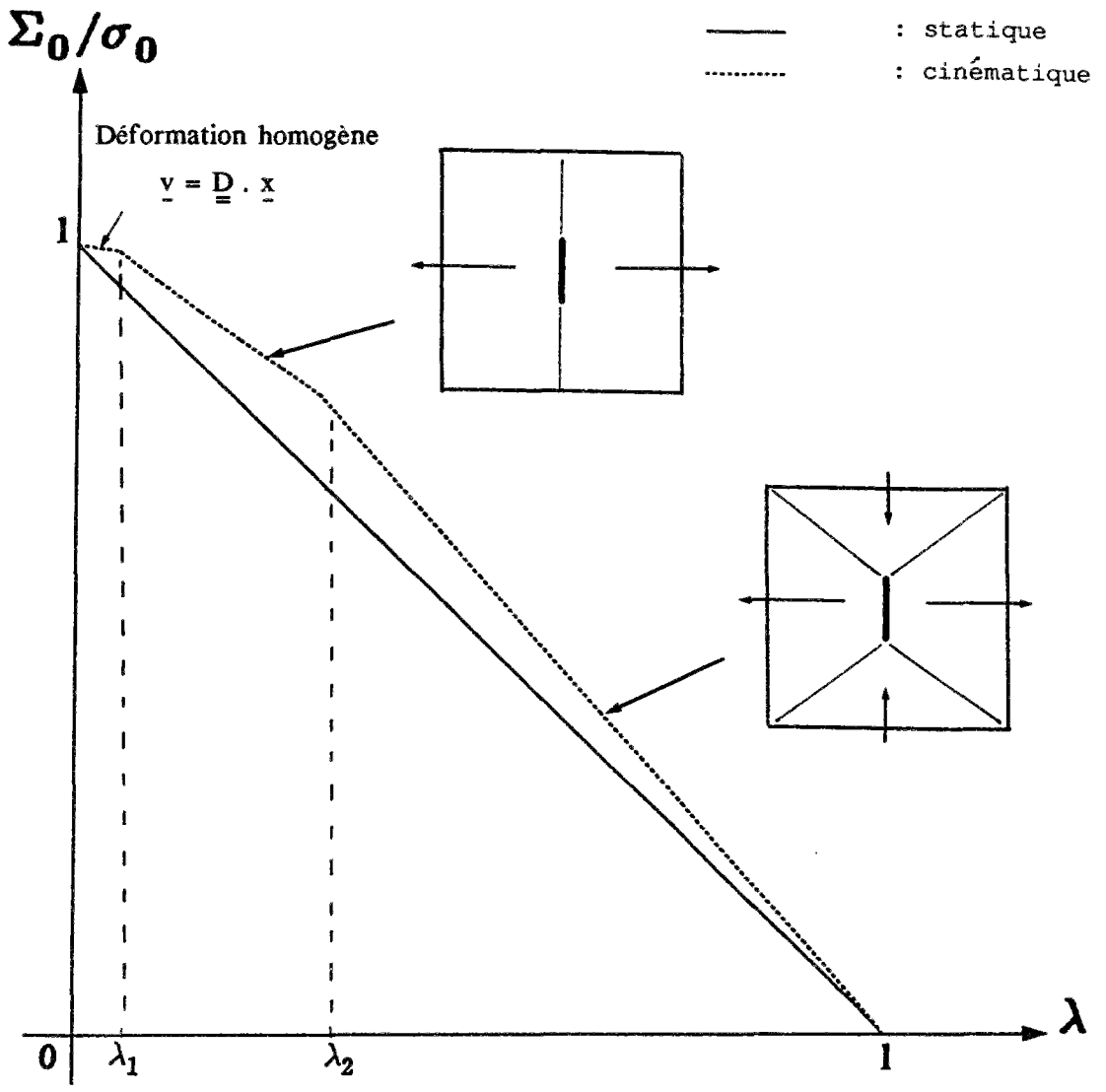


Figure 31 : Limite en traction transversale à la fissure en fonction de λ.

où

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{\frac{3\sqrt{17} - 5}{8}} \simeq 0{,}04 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1 - 1/\sqrt{2} \simeq 0{,}30$$

4.3. Matériau renforcé

On examine maintenant le cas où l'inclusion est constituée d'un matériau dont les capacités de résistance sont supérieures à celle de la matrice. Le contact inclusion-matrice est supposé à adhérence parfaite.

La forme de l'inclusion est carrée, de côté égal à λ (*figure 32*). Le matériau constitutif de :

- la matrice obéit au critère de Tresca en contrainte plane, σ_0 étant la limite en traction simple (G : convexe de résistance correspondant).
- l'inclusion obéit à un critère de Tresca ou de Von Mises en contrainte plane, de limite en traction simple σ_r telle que $\sigma_0 \leq \sigma_r$.

Notons, au préalable, que : $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{G}^{hom}$ *(4. 32)*

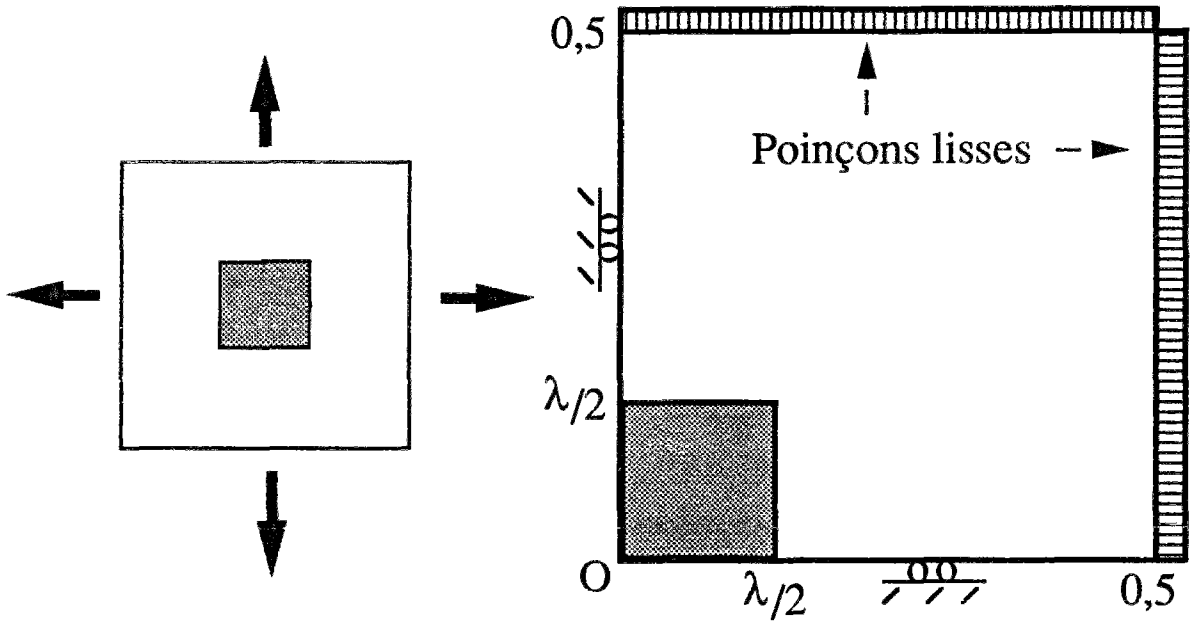


Figure 32 : Matériau renforcé.

Remarque :

Concernant le cas où la matrice serait du type Von Mises, l'écart entre les estimations

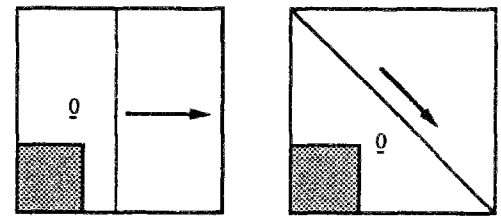
statique et cinématique de G^{hom} s'est révélé tellement important qu'on n'a pas jugé utile d'en faire état ici. Ceci montre les limites de l'approche *(semi)*-analytique et l'avantage *a contrario* d'une méthode numérique.

4.3.1. $\lambda \leq 1/2$

Dans ce cas, on peut facilement établir que $\boxed{G^{hom} = G}$. En effet, si on considère les approches cinématiques ***(a.1)*** et ***(a.2)*** ci-contre :

La condition sur λ permet d'obtenir le mécanisme ***(a.2)*** évitant toute intersection avec l'inclusion.

Les mécanismes considérés fournissent G comme estimation par l'extérieur de G^{hom}. Et compte-tenu de la relation *(4. 32)*, l'égalité ci-haut s'en trouve démontrée.



(a.1) *(a.2)*

Autrement dit, du point de vue des capacités de résistance, le composite se comporte comme si la structure était formée d'un milieu homogène équivalent à celui de la matrice :

Lorsque $\lambda \leq 1/2$ le renforcement est inefficace.

Remarquons finalement, que ce résultat ne dépend ni de la nature du renforcement (Tresca, Von Mises ...) ni de la forme géométrique de l'inclusion, pourvu qu'elle reste inscrite dans le carré d'équation : $|x_1| + |x_2| \leq 1/2$.

4.3.2. $\lambda > 1/2$

A l'aide du champ de vitesse de l'approche cinématique ***(a.1)*** ci-dessus, et du champ symétrique par rapport à la diagonale $x_1 = x_2$ de la cellule, on établit que G^{hom} coïncide avec G dans la région du plan (Σ_1 , Σ_2) définie par $\boldsymbol{\Sigma_1 \Sigma_2 \geq 0}$.

Dans la suite, on ne s'intéressera à la détermination de G^{hom} que dans la région du plan telle que $\Sigma_1 \Sigma_2 \leq 0$. Pour cela, commençons par considérer la distribution de contraintes à quatre zones homogènes suivante :

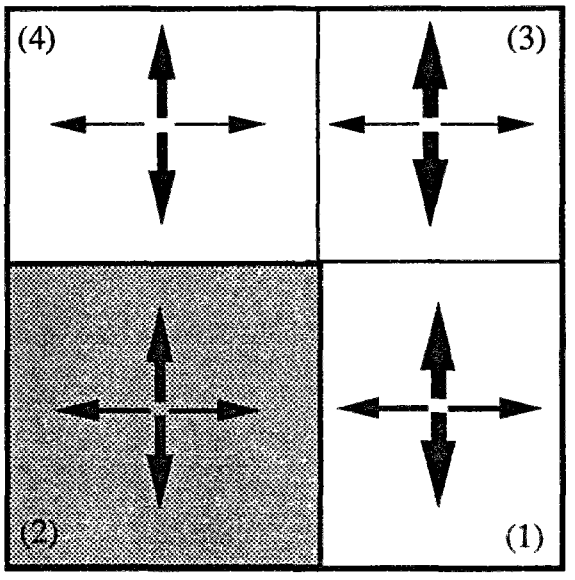


Figure 33 : Champ de contrainte à quatre zones .

En écrivant que ce champ vérifie les conditions de résistance dans les zones (1) et (3), on aboutit à la condition :

$$| \sigma_1 - \sigma_2 | \leq 2\sigma_0 \qquad \text{si l'inclusion est du type Tresca.}$$

et

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \leq 3\sigma_0^2 \qquad \text{si l'inclusion est du type Von Mises.}$$

σ_1 et σ_2 désignant les valeurs principales du tenseur des contraintes dans la zone (4), c'est à dire dans l'inclusion.

Posant $\eta = 2$ ou $\sqrt{3}$ selon que l'inclusion est du type Tresca ou Von Mises, on est amené à distinguer deux cas, selon que σ_r est inférieur ou non à $\eta\sigma_0$

A. $\sigma_0 \leq \sigma_r \leq \eta\,\sigma_0$

- *approche statique* :

On considère le champ statique particulier à quatre zones (découpage de *la figure 33*) avec, en désignant par $\underline{\underline{\sigma}}^{(i)}$ son expression dans la zone (i) :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2\sigma_0 - \frac{2}{\eta}\sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(3)} = \begin{bmatrix} \sigma_0 - \frac{2}{\eta}\sigma_r & 0 \\ 0 & \sigma_0 - \frac{2}{\eta}\sigma_r \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\sigma}}^{(4)} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 - \frac{2}{\eta}\sigma_r \end{bmatrix}$$

Ce champ satisfait toutes les conditions requises et donc, le tenseur macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}^* = < \underline{\underline{\sigma}} >$ appartient à G^{hom}. En notant $\underline{\underline{\Sigma}}^* = (s_1^* , s_2^*)$, on a :

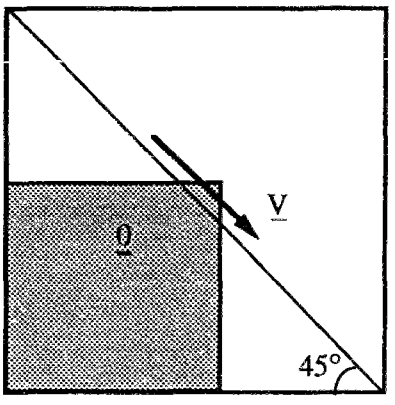
$$s_1^* = \lambda \sigma_0 + (1 - \lambda) (2\sigma_0 - \frac{2}{\eta} \sigma_r)$$
$$s_2^* = \lambda (\sigma_0 - \frac{2}{\eta} \sigma_r)$$

La symétrie de G^{hom} par rapport à la seconde bissectrice implique que le point $(-s_2^* , -s_1^*)$ appartient aussi à G^{hom} . En outre, la convexité de ce domaine assure que tous les points du segment joignant (s_1^* , s_2^*) à $(-s_2^* , -s_1^*)$, ainsi que du segment symétrique par rapport à la première bissectrice, sont dans G^{hom} .
Ces deux segments appartiennent aux droites d'équations :

$$| \Sigma_1 - \Sigma_2 | = 2 (1 - \lambda) \sigma_0 + \frac{2}{\eta} (2 \lambda - 1) \sigma_r \qquad (4.33)$$

- *approche cinématique* :

Elle est fondée sur le champ de vitesse à deux blocs en translation :



$$\underline{v} = U (\underline{e}_1 - \underline{e}_2) \qquad \text{si } x_1 + x_2 > \frac{1}{2}$$
$$\underline{v} = \underline{0} \qquad \text{si } x_1 + x_2 < \frac{1}{2}$$

Figure 34 .

Ce champ induit une discontinuité de vitesse tangentielle dans la matrice et dans l'inclusion. Il conduit à la condition :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Rightarrow \quad | \Sigma_1 - \Sigma_2 | \leq 2 (1 - \lambda) \sigma_0 + \frac{2}{\eta} (2 \lambda - 1) \sigma_r \qquad (4.34)$$

On constate que cette condition cinématique coïncide en partie avec la condition statique *(4. 33)*.

Conclusion :

Tout comme dans le cas $\lambda \leq \frac{1}{2}$, le renforcement n'apporte aucune amélioration des capacités de résistance dans la région définie par $\Sigma_1 \Sigma_2 \geq 0$.

Dans une partie de la région $\Sigma_1 \Sigma_2 < 0$, G^{hom} est déterminé exactement et le caractère renforçant s'exprime à l'aide de la contrainte $\sigma_{rn} = 2 (1 - \lambda) \sigma_0 + \frac{2}{\eta} (2 \lambda - 1) \sigma_r$. L'intensité du renforcement dans cette partie peut être appréciée à l'aide de la quantité :

$$\frac{\sigma_{rn} - \sigma_0}{\sigma_0} = (2 \lambda - 1) (\frac{2}{\eta} \frac{\sigma_r}{\sigma_0} - 1) \leq (2 \lambda - 1) \qquad (4.35)$$

Nous représentons ci-dessous , les résultats de nos estimations de G^{hom} :

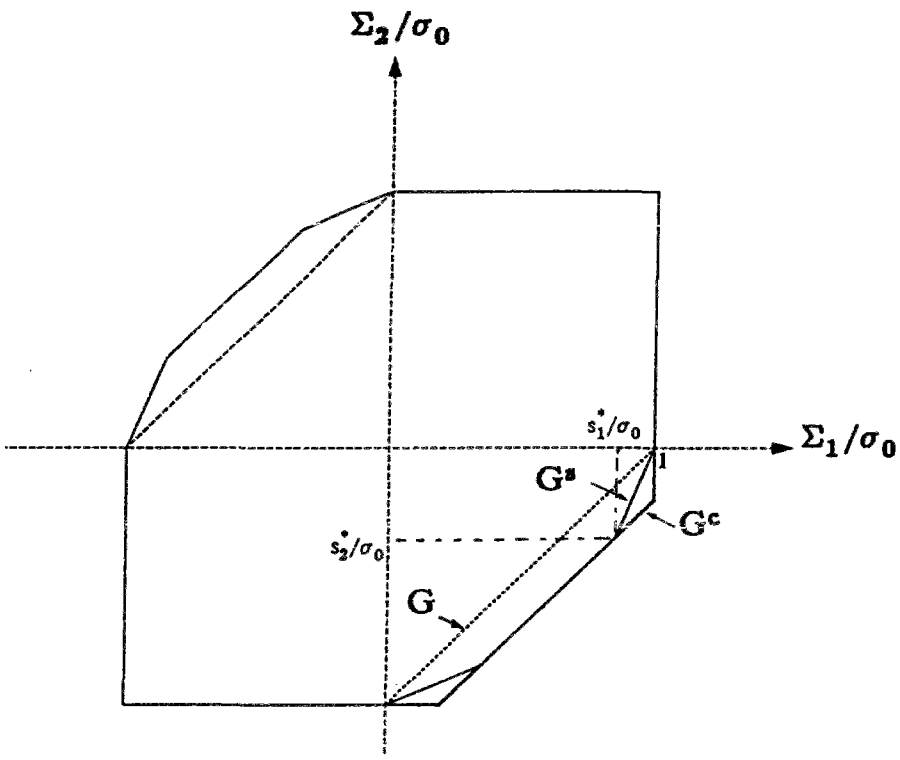


Figure 35 : Estimation de G^{hom} ; matériau renforcé et $\sigma_0 \leq \sigma_r \leq \eta \sigma_0$.

B. $\sigma_r > \eta\,\sigma_0$

Rappelons que G^{hom} coïncide toujours avec G dans les quarts de plan $\Sigma_1\,\Sigma_2 \geq 0$.

• *approche statique* :

On reprend le champ de contrainte à quatre zones utilisé en A. , mais en remplaçant tous les termes σ_r par $\eta\,\sigma_0$ afin d'assurer les conditions de résistance. C'est à dire que :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} = \sigma_0\,(\,\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1\,) \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} = \underline{\underline{0}}$$
$$\underline{\underline{\sigma}}^{(3)} = \underline{\underline{\sigma}}^{(4)} = -\sigma_0\,(\,\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2\,)$$

Ce champ satisfait toutes les conditions requises et donc, le tenseur macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}^* = \langle\,\underline{\underline{\sigma}}\,\rangle$ appartient à G^{hom}. En notant $\underline{\underline{\Sigma}}^* = (\,s_1^*\,,\,s_2^*\,)$, on a :

$$s_1^* = \lambda\,\sigma_0 \quad \text{et} \quad s_2^* = -\lambda\,\sigma_0$$

La construction du domaine statique de G^{hom} s'effectue de la même manière qu'au A. en utilisant les propriétés de symétrie et de convexité.

• *approche cinématique* :

Elle est réalisée avec le souci d'éviter toute dissipation dans l'inclusion.

(a.1) Soit le champ de vitesse $\underline{v}$:

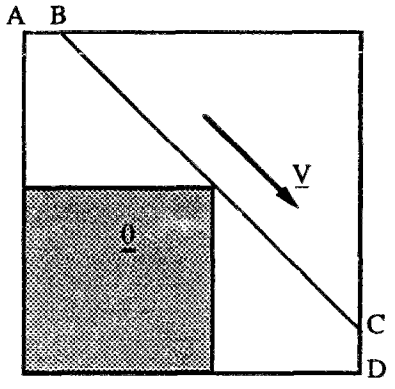


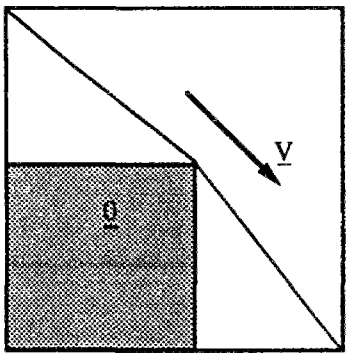
Figure 36 .

Ce champ induit deux types de discontinuités : une discontinuité tangentielle le long du segment (BC) et des discontinuités normales le long des segments (AB) et (CD) dues au non respect des conditions aux limites.
Le calcul de la puissance des efforts extérieurs et de la puissance résistante maximale conduit à :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Rightarrow \quad | \Sigma_1 - \Sigma_2 | \leq 2 \lambda \sigma_0 \qquad (4.36)$$

Ceci montre que le point $\underline{\underline{\Sigma}}^* = (\lambda \sigma_0 , -\lambda \sigma_0)$ obtenu précédemment par l'approche statique ainsi que son symétrique par rapport à la première bissectrice, est sur la frontière de G^{hom}.

(a.2) On complète l'approche par les champs suivants :



$$\underline{v} = U (\underline{e}_i - \frac{1 - \lambda}{\lambda} \underline{e}_j)$$
$$(i, j) = (1, 2) \text{ ou } (2, 1)$$

Figure 37 : champ de vitesse pour (i, j) = (1, 2)

Ils conduisent à :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Rightarrow \quad \left| \Sigma_i - \frac{1-\lambda}{\lambda} \Sigma_j \right| \leq \sigma_0 \left[\lambda + \sqrt{(1 - \lambda)^2 + (1 - \frac{1}{2 \lambda})^2} \right] \qquad (4.37)$$

Remarques :

Comme on pourra le constater sur les figures suivantes, les estimations statique et cinématique ne coïncident , lorsque $\Sigma_1 \Sigma_2 < 0$, qu'aux points $\Sigma_1 = - \Sigma_2 = \pm \lambda \sigma_0$.
Les estimations qu'on propose ne dépendent pas de σ_r, et donc ne dépendent pas de la nature de l'inclusion (Tresca ou Von Mises) . Ceci prouve aussi que pour toute valeur de σ_r ou de λ , le convexe macroscopique reste confiné dans le carré $| \Sigma_1 | \leq \sigma_0$, $| \Sigma_2 | \leq \sigma_0$
(si λ tend vers 1, la rupture se produit alors par non respect des conditions aux limites sur les bords de la cellule).

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES
CENTRE DE DOCUMENTATION PHOTOGRAPHIQUE ET DE COMMUNICATION

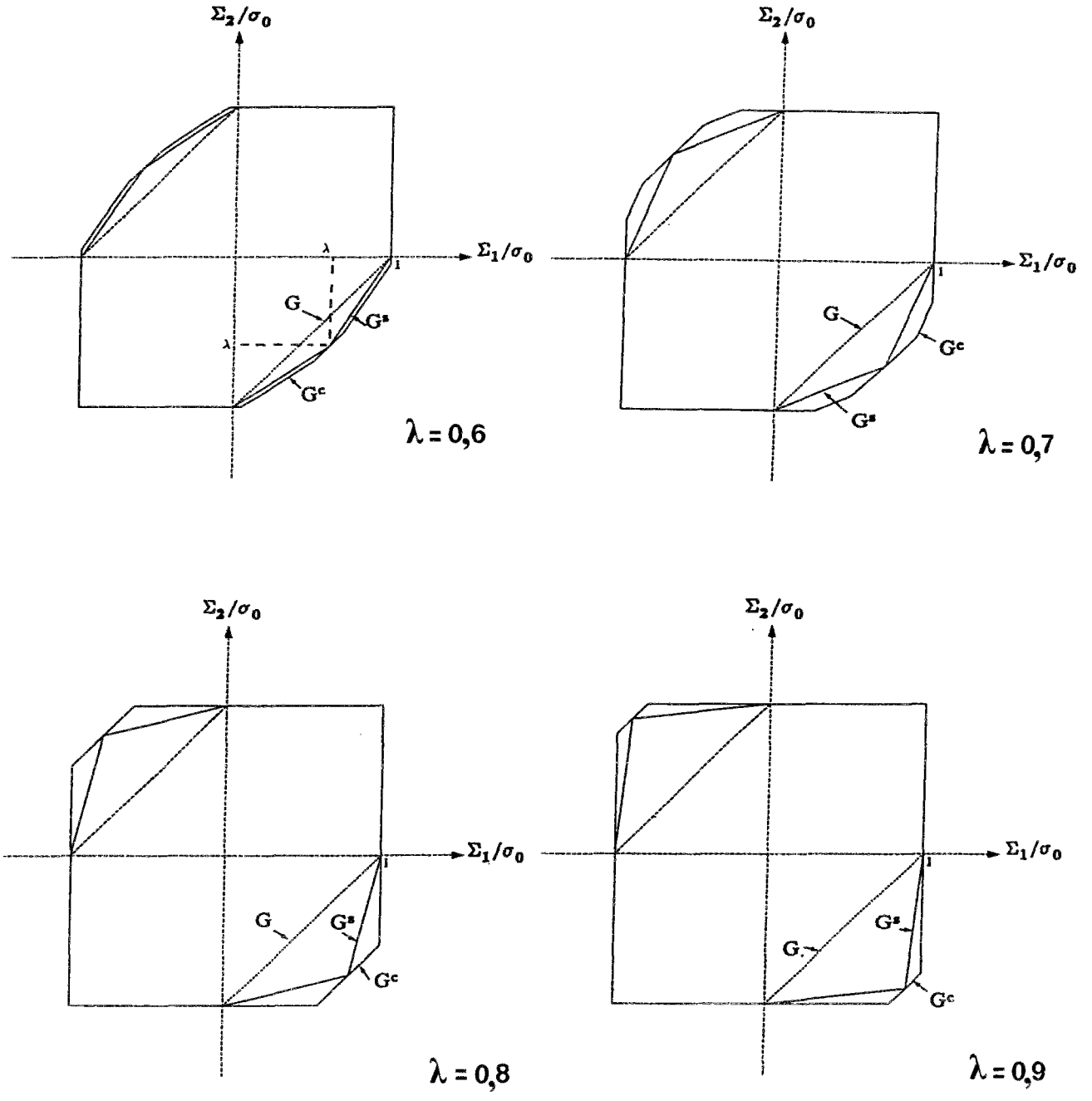


Figure 38 : Estimation de G^{hom} : matériau renforcé, $\sigma_r > \eta\,\sigma_0$.

5. CALCULS EN DÉFORMATION PLANE

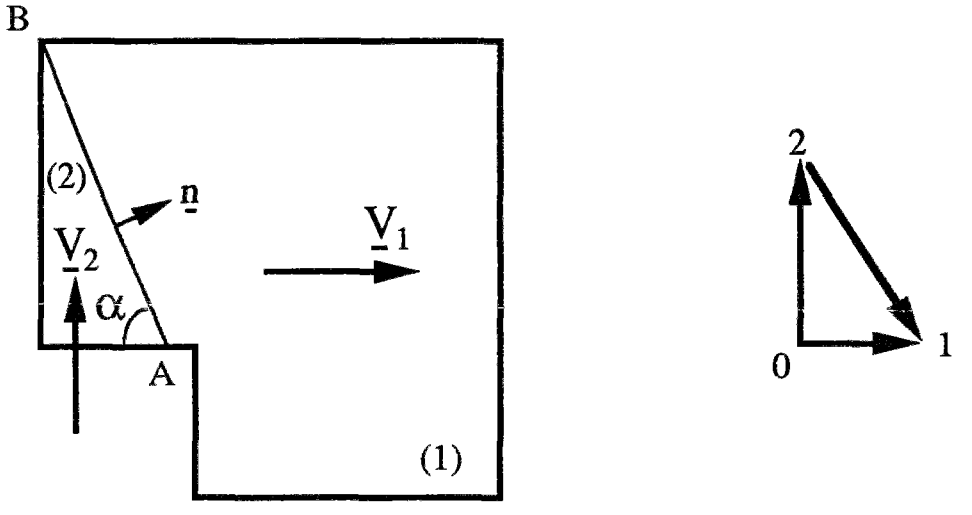
Dans cette section, nous nous plaçons dans l'hypohèse de déformation plane. Ce qui correspond à la modélisation d'un matériau homogène comprenant un réseau d'inclusions (au sens large du terme) infiniment longues dans le sens transversal au plan de chargement Ox_1x_2 .
On supposera que le matériau constituant la matrice de la cellule de base obéit au critère :

$$| \sigma_1 - \sigma_2 | \leq \sigma_0 \qquad (5.1)$$

où σ_1 *et* σ_2 *désignent les valeurs principales du tenseur des contraintes dans le plan* (σ_1 , σ_2).
(matériau du type Tresca ou Von Mises en déformation plane).
G désignera toujours le convexe de résistance associé .

5.1. Matériau avec cavités

On reprend la structure telle que la cellule de base soit formée d'un milieu homogène comprenant une cavité carrée de côté λ .
Considérons l'approche cinématique (C_1) de G^{hom}, faite à l'aide du champ $\underline{v}$ suivant :



$\underline{v}_1 = U\,\underline{e}_1$ et $\underline{v}_2 = U\,\mathrm{tg}\alpha\,\underline{e}_2$

Figure 39 : Champ de vitesse considéré et hodographe.

La seule composante non nulle du tenseur vitesse de déformation macroscopique, est $D_1 = 2\,U$.

La puissance des efforts extérieurs est : $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = 2\,U\,\Sigma_1$

La puissance résistante maximale correspondante :

$$< \pi (\underline{\underline{d}}) > \;=\; 4 \int_{AB} \pi (\underline{n}, [\underline{v}]) \, ds$$

où :

$$[\underline{v}] = U (\underline{e}_1 - \mathrm{tg}\,\alpha\, \underline{e}_2) \quad , \quad \underline{n} = \sin\alpha\, \underline{e}_1 + \cos\alpha\, \underline{e}_2$$

et

$$\pi (\underline{n}, [\underline{v}]) = \frac{1}{2} \sigma_0 \mid W_t \mid$$

Le terme W_t correspondent la composante tangentielle de $[\underline{v}]$ suivant la direction de (AB) . Notons qu'ici , la composante normale est nulle, ce qui assure une approche non triviale car $\pi (\underline{n}, [\underline{v}]) < +\infty$.

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Rightarrow \qquad \forall\, U \qquad \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} \;\leq\; < \pi (\underline{\underline{d}}) >$$

Soit :

$$\mid \Sigma_1 \mid \;\leq\; f(\alpha) = \frac{1-\lambda}{\sin 2\alpha} \sigma_0 \qquad (5.\,2)$$

α variant dans l'intervalle $I_\alpha = [\, \alpha_0 \,,\, \frac{\pi}{2} \,[$, $\alpha_0 = \mathrm{arctg}\, \frac{1-\lambda}{\lambda}$

L'étude des variations de f montre que :

$$\min_{I_\alpha} f(\alpha) = \begin{cases} f(\frac{\pi}{4}) = (1-\lambda)\,\sigma_0 & \text{si } \lambda \geq \frac{1}{2} \\ f(\alpha_0) & \text{si } \lambda \leq \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (5.\,3)$$

Partant de ce résultat, nous sommes amenés, pour la suite, à faire la distinction entre les valeurs de λ supérieures à $\frac{1}{2}$ ou non.

$$\boxed{\text{A.} \quad \lambda \geq \frac{1}{2}}$$

Ce cas correspond à une porosité supérieure à 0,25

- approche statique de G^{hom} :

Elle est effectuée grâce au champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{(3)}$ défini au début du **4.1.** . En écrivant qu'un tel champ vérifie le critère *(5. 1)* dans chacune des trois zones de la cellule, on obtient l'estimation statique G^s de G^{hom} suivante :

$$\boxed{G^s = (1 - \lambda)\, G_t^s \subseteq G^{hom}} \qquad (5.\ 4)$$

G_t^s est défini par :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G_t^s \Leftrightarrow \sup(\,|\,\Sigma_1\,|\,,\,|\,\Sigma_2\,|\,,\,|\,\Sigma_1 - \Sigma_2\,|\,) \leq \sigma_0 \qquad (5.\ 5)$$

- approche cinématique de G^{hom} :

(a.1) L'approche cinématique *(C_I)* dont les résultats sont résumés par *(5. 3)*, fournit la majoration suivante :

$$|\,\Sigma_1\,| \leq (1 - \lambda)\,\sigma_0 \qquad (5.\ 6)$$

On obtient, de la même manière, une relation analogue pour Σ_2.

(a.2) On complète cette approche grâce aux champs de vitesse suivants :

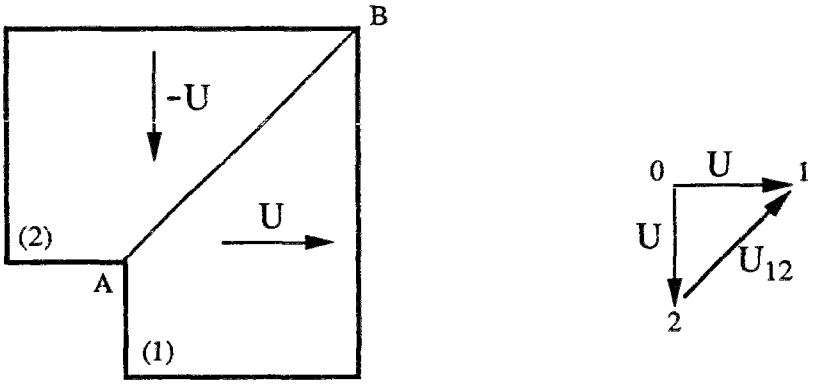


Figure 40 : Champs de vitesse considérés.

La puissance des efforts extérieurs vaut :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = 2U (\Sigma_1 - \Sigma_2)$$

La puissance résistante maximale correspondante est :

$$< \pi (\underline{\underline{d}}) > = 4 \, AB \, \frac{1}{2} \sigma_0 \, | U_t | = 2 (1 - \lambda) \sigma_0 \, | U |$$

D'où,

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Rightarrow | \Sigma_1 - \Sigma_2 | \leq (1 - \lambda) \sigma_0 \qquad (5.7)$$

En regroupant les résultats du *(a.1)* et *(a.2)*, on constate que le domaine cinématique est confondu avec son homologue statique : $(1 - \lambda) G_t^s$.

Conclusion :

$$\boxed{G^{hom} = \{ \underline{\underline{\Sigma}} , \ \sup (| \Sigma_1 | , | \Sigma_2 | , | \Sigma_1 - \Sigma_2 |) \leq (1 - \lambda) \sigma_0 \}} \qquad (5.8)$$

G^{hom} est entièrement déterminé et contrairement à G, ce domaine est borné. Le matériau perforé se comporte comme un matériau homogène obéissant à un critère de Tresca en contrainte plane, de limite en traction simple égale à $(1 - \lambda) \sigma_0$.

Remarquons que le fait que G^{hom} soit borné était, en partie, prévisible ; G^{hom} devant se réduire à l'origine lorsque λ tend vers 1.

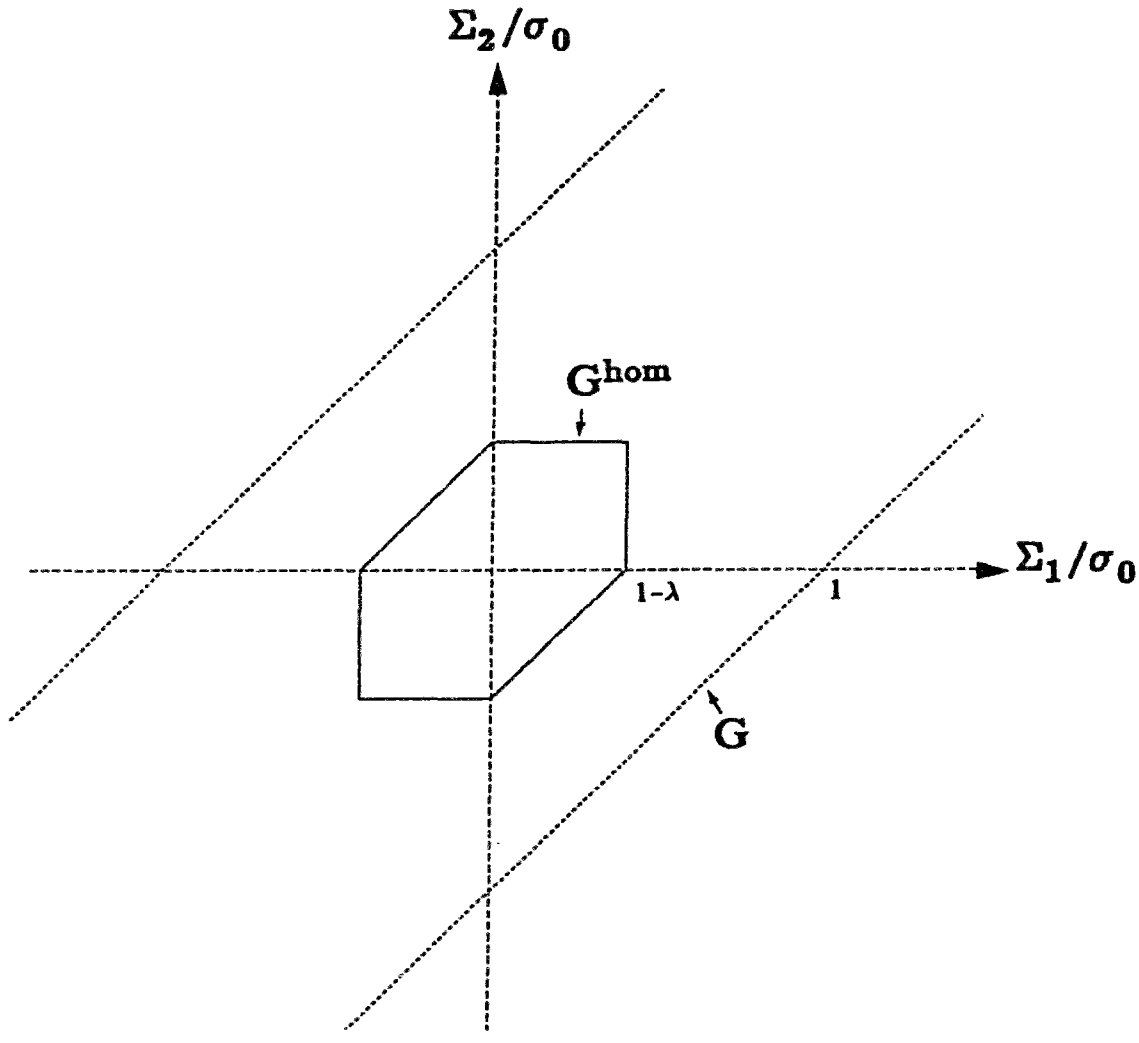


Figure 41 : Convexe G^{hom} dans le cas poreux avec $\lambda \geq \frac{1}{2}$.

Remarque :

Les champs statique et cinématique mis en oeuvre précédemment sont associés au sens du théorème d'association (Salençon , 1983).

B. $\lambda < \frac{1}{2}$

On se place dans le cas où la porosité est inférieure à 0,25 .

Compte-tenu des champs mis en oeuvre précédemment, on peut affirmer que G^{hom} coïncide toujours avec $(1 - \lambda) G$, dans la région du plan définie par $\Sigma_1 \Sigma_2 \leq 0$.
Nous ne nous attacherons donc à améliorer les approches statique et cinématique de G^{hom} que lorsque $\Sigma_1 \Sigma_2 > 0$.

- approche statique de G^{hom} :

(a.1) On reprend la distribution de contrainte à 8 zones déjà utilisée en **4.1.2** , et dont les détails figurent **Annexe II.** Cette approche améliore bien celle à 3 zones.

(a.2) Soit le champ de contrainte suivant :

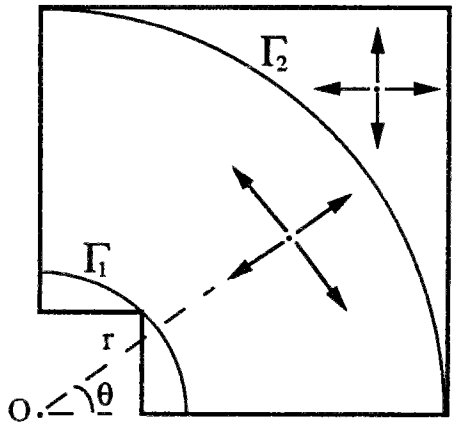


Figure 42 .

Γ_1 et Γ_2 représentent des arcs de cercles centrés en O et de rayons respectifs $r_1 = \lambda/\sqrt{2}$ et $r_2 = 1/2$.
En coordonnés polaires (r , θ) , le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ s'écrit :

- $r < r_1$: $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0$.
- $r_1 < r < r_2$: $\sigma_{rr} = \sigma_0 \, \mathrm{Ln} \, \frac{r}{r_1}$, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + \sigma_0$, $\sigma_{r\theta} = 0$.
- $r_2 < r$: $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_0 \, \mathrm{Ln} \, \frac{r_2}{r_1}$, $\sigma_{r\theta} = 0$. *(champ isotrope)*

Grâce à ce champ ainsi défini, on montre que

$$\underline{\underline{\Sigma}}^* = < \underline{\underline{\sigma}} > = \left(\sigma_0 \text{ Ln } \sqrt{2}/2\lambda \, , \, \sigma_0 \text{ Ln } \sqrt{2}/2\lambda \right)$$

appartient à G^{hom}, ainsi que $-\underline{\underline{\Sigma}}^*$.

On utilisera la convexité de G^{hom} pour compléter la construction du domaine statique. Remarquons que lorsque $\lambda \to 0$ alors $\text{Ln } \frac{1}{\lambda} \to +\infty$, et on retrouve bien le domaine de résistance du matériau sain.

- approche cinématique de G^{hom} :

(a.1) On reprend toujours les résultats *(5. 3)* de l'approche cinématique *(C_1)* . Dans ce cas la valeur $\frac{\pi}{4}$ n'est plus possible pour l'angle α (limitations géométriques). On obtient ainsi, l'inégalité :

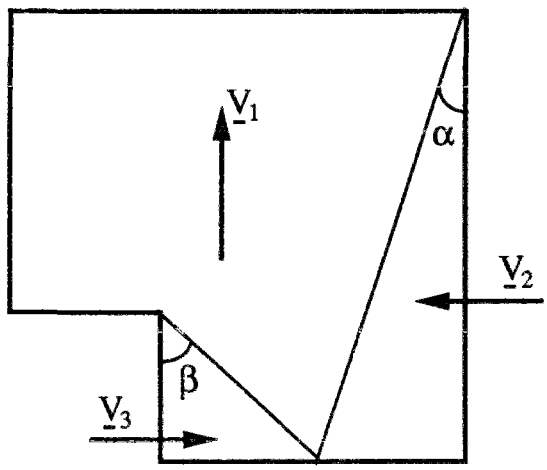
$$| \Sigma_1 | \leq f(\alpha_0)$$

soit :

$$| \Sigma_1 | \leq \frac{\lambda^2 + (1 - \lambda)^2}{2\lambda} \sigma_0 \qquad (5.8)$$

On obtient, de la même manière, une relation analogue pour Σ_2.

(a.2) On complète l'approche cinématique à l'aide du champ suivant :



$\underline{v}_1 = U \, \underline{e}_2 \quad (U > 0)$
$\underline{v}_2 = -U\text{tg}\alpha \, \underline{e}_1$
$\underline{v}_3 = U\text{tg}\beta \, \underline{e}_1$

Figure 43 .

(On ne s'occupe que de la partie du plan $0 < \Sigma_1 \leq \Sigma_2$)

Le calcul de la puissance des efforts extérieurs et de la puissance maximale résistante, montre que :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \quad \Rightarrow \quad \forall\ \alpha \in [\ 0\ ,\ \mathrm{arctg}(1 - \lambda)\ ]\ ,$$

$$\frac{1}{\sigma_0}\,\Sigma_2 \quad \leq \quad \frac{1}{\sigma_0}\,\mathrm{tg}\alpha\ \Sigma_1 + \frac{1}{2}\,(\ 1 + \mathrm{tg}^2\alpha + \lambda + (\ 1 - \lambda - \mathrm{tg}\alpha\ )^2/\lambda\ ) \qquad (5.\ 9)$$

L'optimisation par rapport à α se fait de la façon suivante : Pour tout $\frac{1}{\sigma_0}\,\Sigma_1 \in \left[\ 0\ ,\ \frac{1-\lambda}{\lambda}\ \right]$, α est choisi tel que :

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1 - \lambda - \lambda\ \Sigma_1/\sigma_0}{1 + \lambda} \qquad (5.\ 10)$$

On peut facilement vérifier qu'avec un tel choix, α reste dans l'intervalle $[\ 0\ ,\ \mathrm{arctg}(1 - \lambda)\ ]$. L'inégalité *(5. 9)* s'écrit alors :

$$\frac{1}{\sigma_0}\,\Sigma_2 \quad \leq \quad \frac{1}{2(1 + \lambda)}\,(\ -\lambda\ (\Sigma_1/\sigma_0)^2 + 2(1 - \lambda)\ \Sigma_1/\sigma_2 + 2(\ 1 + \lambda^2\ )\ ) \qquad (5.\ 11)$$

Ce domaine est délimité par une parabole .

Finalement, nous ne retiendrons de cette approche que la partie correspondant à $\frac{1}{\sigma_0}\,\Sigma_1 \in [\ 0\ ,\ \Sigma_l\ ]$, avec $\Sigma_l = -2 + (1 + \lambda)\sqrt{\frac{2}{\lambda}}$ " abscisse " du point intersection de la parabole avec la droite $\Sigma_1 = \Sigma_2$.
L'approche est complétée par symétrie par rapport à la première bissectrice.

Conclusion :

Si G^{hom} est déterminé exactement ($= (\ 1 - \lambda\ )\ G$) dans les quarts de plan $\Sigma_1\ \Sigma_2 \leq 0$, il n'en est pas de même dans les régions complémentaires du plan. L'écart entre les approches statique et cinématique s'accroit au fur et à mesure que λ s'approche de zéro.

Afin d'améliorer cet encadrement, il faudrait recourir à une approche numérique, ce qui ne va pas sans difficultés à cause de la condition traduisant la non variation de volume des champs de vitesse virtuels.

Nous donnons ci-après, les graphiques illustrant nos approches dans le cas $\lambda < \frac{1}{2}$:

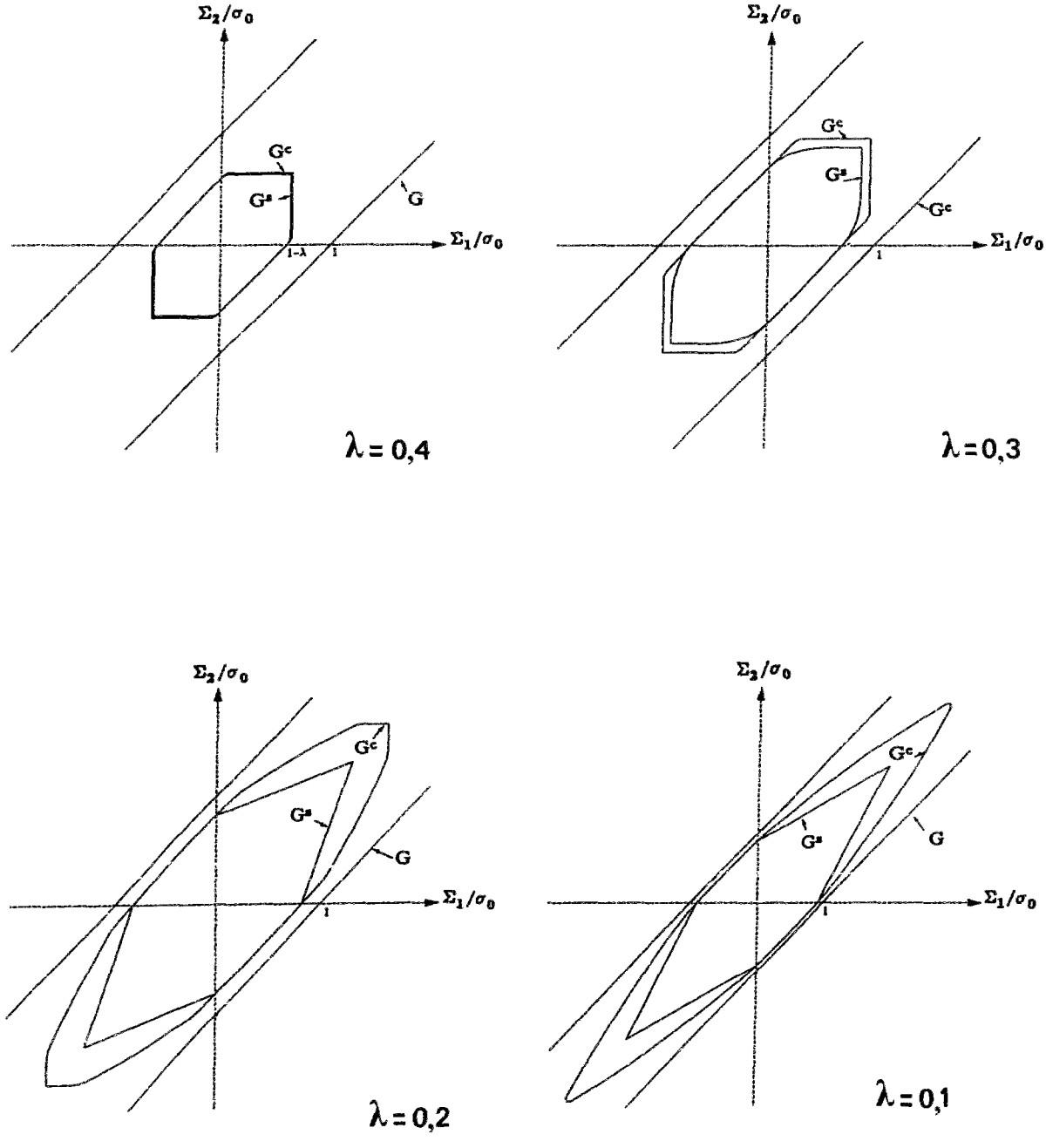


Figure 44 : Approche du convexe G^{hom} . Matériau poreux avec $\lambda < \frac{1}{2}$.

Limite en traction isotrope ($\Sigma_1 = \Sigma_2$) du matériau poreux

Il est intéressant d'étudier les variations de Σ_{is}, limite en traction isotrope, en fonction de λ. Tout d'abord, on a :

$$\Sigma_{is} = (1 - \lambda) \sigma_0 \qquad \text{si } \lambda \geq \frac{1}{2} \qquad (5.12)$$

$$\Sigma^s_{is} \leq \Sigma_{is} \leq \Sigma^c_{is} \qquad \text{si } \lambda < \frac{1}{2} \qquad (5.13)$$

Σ^s_{is} est la borne statique , dont la valeur est le maximum des deux bornes :

- $b^s_1 = \sigma_0 \text{ Ln} \left[\sqrt{2}/2\lambda \right]$.
- b^s_2 , obtenue à l'aide du champ à huit zones $\underline{\underline{\sigma}}$ [8].

Σ^c_{is} son homologue cinématique, est le minimum des deux bornes :

- $b^c_1 = \dfrac{\lambda^2 + (1 - \lambda)^2}{2\lambda} \sigma_0$, et découle de l'approche cinématique *(C_1)* .
- $b^c_2 = -2 \sigma_0 + (1 + \lambda)\sqrt{2/\lambda}\, \sigma_0$, obtenue grâce au champ de *la figure 43* .

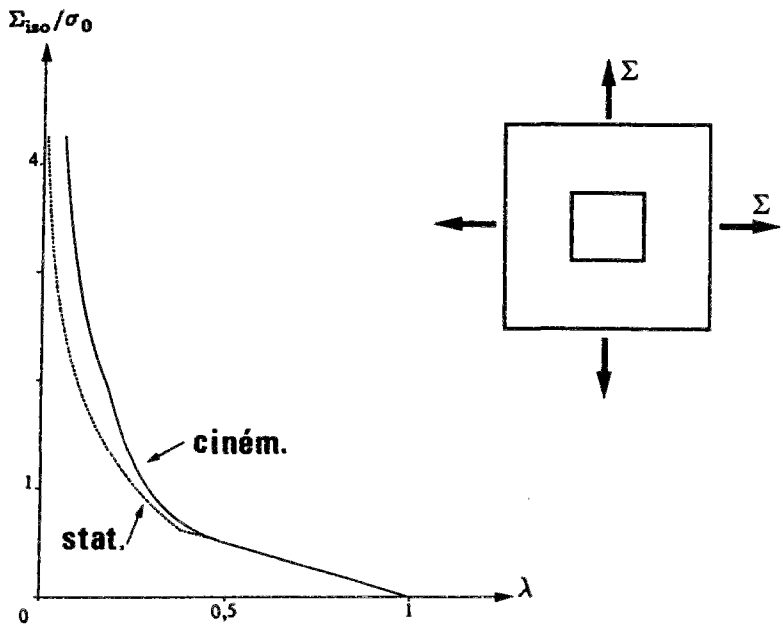


Figure 45 : Limite en traction isotrope du matériau poreux.

On constate que pour λ petit, l'encadrement devient très grossier.

Remarques concernant une cavité de forme quelconque

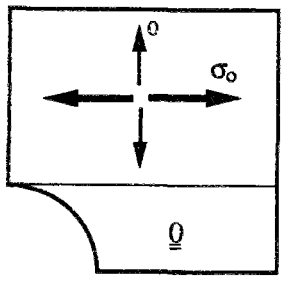
Tout ce qu'a été mentionné lors de la contrainte plane reste valable (reprise des résultats en adoptant le carré inscrit et circonscrit ...)

Considérons à titre d'exemple, le cas d'une cavité circulaire centrée à l'origine et de diamétre λ, et intéressons-nous à la limite en traction simple Σ_0 *(dans le plan* $\Sigma_1.\Sigma_2$ *)* du matériau homogénéisé.

Procédant toujours de la même manière :

$$(1 - \lambda) \sigma_0 \leq \Sigma_0 \leq \Sigma_0^c \qquad (5.14)$$

La borne statique étant obtenue à l'aide du champ de contrainte à deux zones :



Par contre :

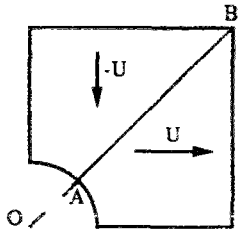
$$\Sigma_0^c = \min \left\{ (1 - \lambda/\sqrt{2}) \sigma_0 \, , \; \frac{1 - \lambda^2}{2 \lambda} \sigma_0 \right\} \qquad (5.15)$$

Soit :

- $\Sigma_0^c = (1 - \lambda/\sqrt{2}) \sigma_0$

pour $0 \leq \lambda \leq \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2 + \sqrt{2}} \simeq 0{,}57$.

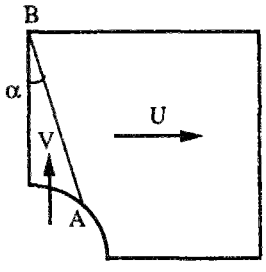
Cette borne est obtenue à l'aide du mécanisme ci-contre .



- $\Sigma_0^c = \dfrac{1 - \lambda^2}{2 \lambda} \sigma_0$

pour $\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2 + \sqrt{2}} \leq \lambda \leq 1$.

Avec le mécanisme correspondant .



$V = U/tg\alpha$

$\alpha_{opt} = arctg\lambda$

Ce problème a été abordé numériquement par Guennouni (1987) via une technique de "régularisation viscoplastique", mais avec des conditions en contrainte uniforme sur le bord de la cellule, sous-estimant donc a priori Σ_0.

Nous reportons sur *la figure 46* les variations de Σ_0 en fonction de λ. On constate que dans un intervalle autour de $\lambda_0 \simeq 0{,}57$, l'estimation donnée n'est pas trés précise (écart maximal, obtenu pour $\lambda = \lambda_0$, de l'ordre de 30 %) .

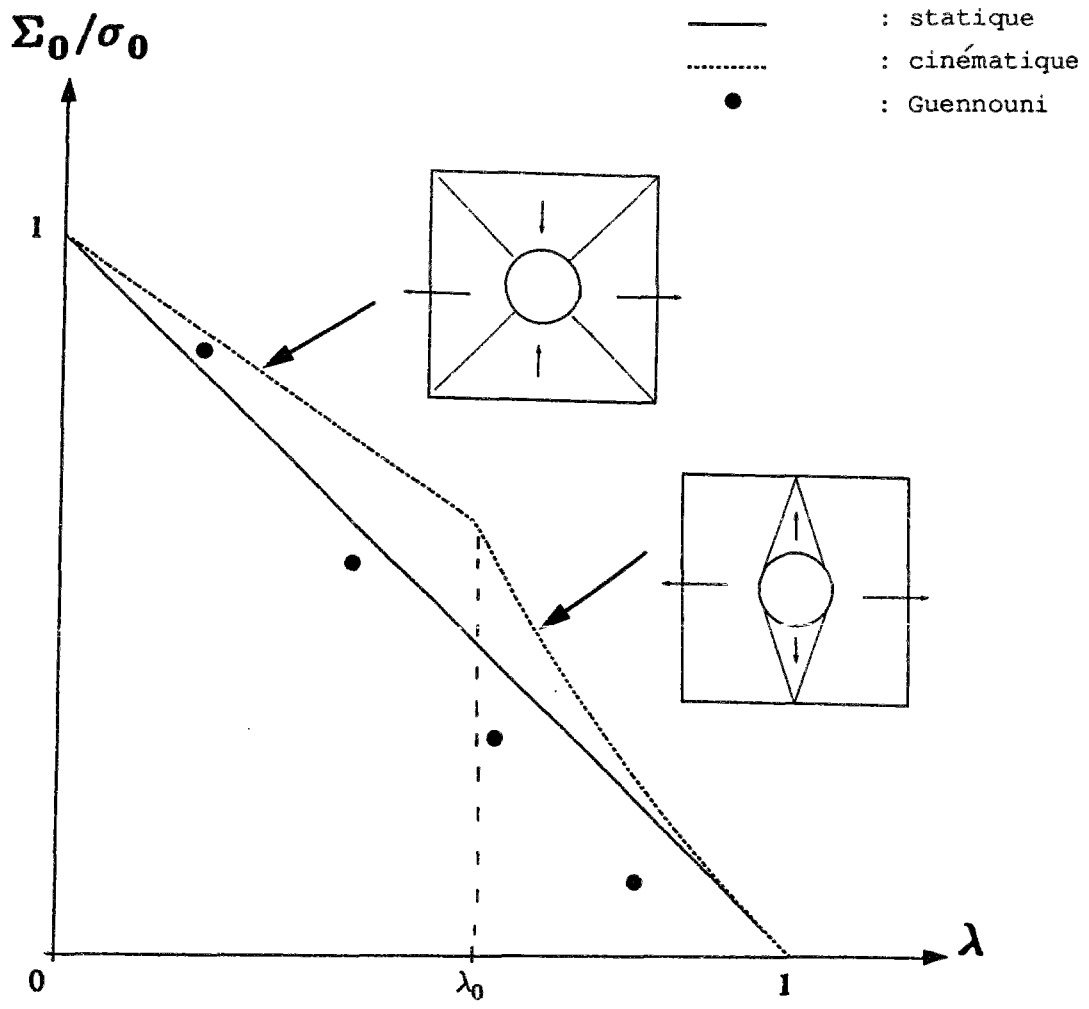


Figure 46 : Traction simple du matériau homogénéisé en fonction de λ. Cas d'une cavité circulaire .

5.2 Matériau renforcé

On reprend la structure renforcée étudiée dans le cas de la contrainte plane en supposant que le matériau de renforcement obéit à un critére de forme identique à celle de la matrice (critére de type *(5. 1)*). La limite en traction simple dans le plan (σ_1 , σ_2) sera notée σ_r ($\geq \sigma_0$) .

Comme en tout point de la cellule, le critère de résistance ne porte que sur la partie déviatorique du tenseur des contraintes alors, son homologue à l'échelle macroscopique (de Buhan , 1986) est nécessairement de la forme :

$$| \Sigma_1 - \Sigma_2 | \leq \Sigma_0 \qquad (5.\ 16)$$

La détermination de ce critère revient donc, à celle de Σ_0. Nous distinguerons ci-après, les cas $\lambda \leq 1/2$ et $\lambda > 1/2$.

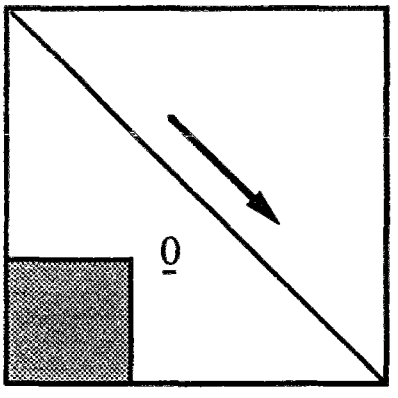
5.2.1. $\lambda \leq \frac{1}{2}$

On montre qu'alors :

$$G^{hom} = G \qquad (5.\ 17)$$

Autrement dit, $\Sigma_0 = \sigma_0$.

Ce résultat est obtenu directement en considérant l'approche cinématique :



Ce champ conduit à la condition $| \Sigma_1 - \Sigma_2 | \leq \sigma_0$, et compte-tenu du fait que $G \subseteq G^{hom}$, le résultat s'en trouve établi.

Ainsi, lorsque la " taille " de l'inclusion n'est pas suffisante, son caractére renforçant ne se manifeste pas, et ceci indépendamment de sa forme géométrique, pourvu qu'elle soit inscrite dans le carré d'équation : $|x_1| + |x_2| \leq 1/2$.
Cette condition permet en effet de faire passer un plan de discontinuité de vitesse entièrement dans la matrice .

5.2.2. $\lambda > \frac{1}{2}$

A l'aide du champ de contrainte à quatre zones déjà utilisée dans le cas du matériau renforcé en contrainte plane (cf. § **4.3.2.** ; *figure 33*) , nous sommes amenés à distinguer les cas $\sigma_r \leq 3\,\sigma_0$ et $\sigma_r > 3\,\sigma_0$ ou non. Nous rappelons que cette distinction ne repose sur aucune considération mécanique *a priori*, mais résulte directement de la manière dont nous construisons notre approche statique.

A. $\sigma_0 \leq \sigma_r \leq 3\,\sigma_0$

On reprend le champ de contrainte à quatre zones :

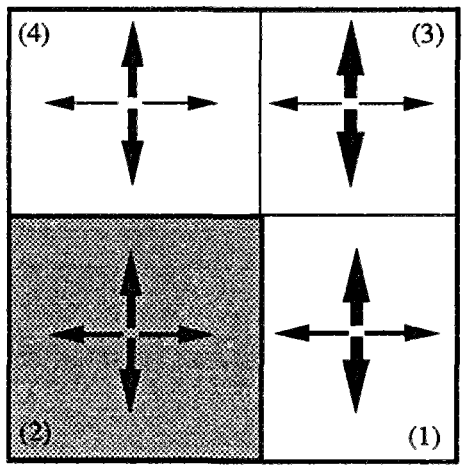


Figure 47 .

Si $\underline{\underline{\sigma}}^{(i)}$ désigne le champ de contrainte dans la zone (i) , on a :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} = (1-\lambda)(\sigma_0 - \sigma_r)\ \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + (\sigma_0 + (1-\lambda)(\sigma_0 - \sigma_r))\ \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(2)} = -\lambda(\sigma_0 - \sigma_r)\ \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + (\sigma_0 + (1-\lambda)(\sigma_0 - \sigma_r))\ \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(3)} = -\lambda(\sigma_0 - \sigma_r)\ \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + (\sigma_r + (1-\lambda)(\sigma_0 - \sigma_r))\ \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(4)} = (1-\lambda)(\sigma_0 - \sigma_r)\ \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + (\sigma_r + (1-\lambda)(\sigma_0 - \sigma_r))\ \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$$

On peut facilement vérifier qu'un tel champ est statiquement admissible et satisfait les conditions de résistance, en vertu de l'hypothèse faite sur σ_r .

Ceci implique que le tenseur macroscopique :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \Sigma_0^s\ \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$$

où

$$\Sigma_0^s = 2(1-\lambda)\sigma_0 + (2\lambda - 1)\sigma_r \qquad (5.\ 18)$$

appartient à G^{hom} .

Compte-tenu de la forme *(5. 16)* du critère de résistance macroscopique (i. e. son indépendance par rapport à la contrainte moyenne), on en déduit que :

$$\Sigma_0^s \leq \Sigma_0 \qquad (5.\ 19)$$

Pour compléter la construction de G^{hom}, nous utilisons le champ de vitesse :

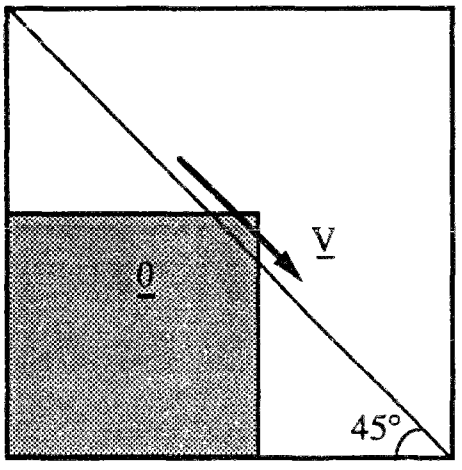


Figure 48 .

Ce champ conduit à la relation :

$$\Sigma \in G^{hom} \quad \Rightarrow \quad | \Sigma_1 - \Sigma_2 | \leq \Sigma_0^c = \Sigma_0^s$$

Donc,

$$\Sigma_0 \leq \Sigma_0^s \qquad (5.\ 20)$$

Les relations *(5. 19)* et *(5. 20)* montrent l'identité entre Σ_0 et Σ_0^s .

Conclusion :

Le critére de résistance macroscopique est défini par : $\| \Sigma_1 - \Sigma_2 \| \leq \Sigma_0 = 2(1 - \lambda) \sigma_0 + (2\lambda - 1) \sigma_r$

(5. 21)

Sous les conditions portant sur λ et σ_r, l'inclusion joue donc bien un rôle renforçant. Ce dernier peut être quantifié par le rapport :

$$\frac{\Sigma_0 - \sigma_0}{\sigma_0} = (2\lambda - 1) \left(\frac{\sigma_r}{\sigma_0} - 1 \right) \leq 2(2\lambda - 1) \qquad (5.\ 22)$$

B. $\sigma_r > 3\,\sigma_0$

Dans ce cas de figure, on n'a pas pu déterminer exactement G^{hom} et l'écart entre les estimations statique et cinématique peut s'avérer, selon les valeurs de λ et σ_r, très grand.
Il faut donc recourir au numérique, afin d'obtenir une meilleure estimation du convexe de résistance macroscopique.
Nous donnons ci-après, les résultats analytiques obtenus :

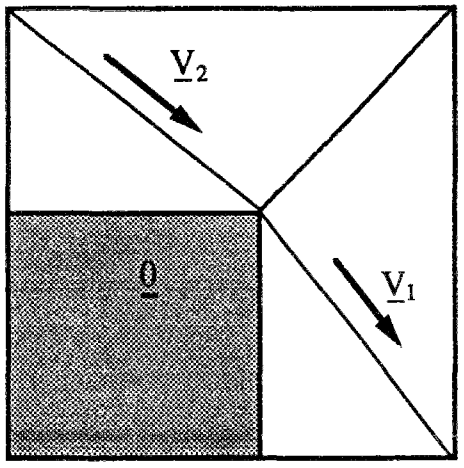
$$\Sigma_0^s \leq \Sigma_0 \leq \Sigma_0^c \qquad (5.\ 23)$$

- La borne statique, valant $\Sigma_0^s = (4\lambda - 1) \sigma_0$, résulte du champ de contrainte à quatre zones de *la figure 47*, en remplaçant les termes σ_r par $3\sigma_0$ afin d'assurer les conditions de résistance dans la zone (2) .

- Son homologue cinématique est :

$$\Sigma_0^c = \min \left\{ 2(1-\lambda)\,\sigma_0 + (2\lambda - 1)\,\sigma_r \,,\ \frac{\lambda}{1-\lambda}\,\sigma_0 \right\}$$

Le premier terme provient de l'approche de *la figure 48* et le second, indépendant de σ_r, découle du champ de vitesse à trois blocs ci-dessous :



$$\underline{v}_1 = U\left(\underline{e}_1 - \frac{\lambda}{1-\lambda}\,\underline{e}_2 \right)$$

$$\underline{v}_2 = U\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\,\underline{e}_1 - \underline{e}_2 \right)$$

Figure 49 .

En posant $\lambda_0 = 1 - \dfrac{\sigma_0}{\sigma_r - \sigma_0}$, on a :

$$\Sigma_0^c = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{1-\lambda}\,\sigma_0 & \text{si } \frac{1}{2} < \lambda \le \lambda_0 \\ 2(1-\lambda)\,\sigma_0 + (2\lambda - 1)\,\sigma_r & \text{si } \lambda_0 \le \lambda \le 1 \end{cases} \qquad (5.\ 24)$$

Remarque :

Pour illustrer l'approche de G^{hom}, nous traçons, pour différentes valeurs du rapport $\dfrac{\sigma_r}{\sigma_0} > 3$, les variations du rapport $P_r = \dfrac{\Sigma_0^c - \Sigma_0^s}{\Sigma_0^s}$ en fonction de $\lambda \in \left[\frac{1}{2} , 1 \right]$. Ce rapport traduit la précision de l'estimation donnée . (Bien-entendu, P_r est nul lorsque $\lambda \le \frac{1}{2}$).

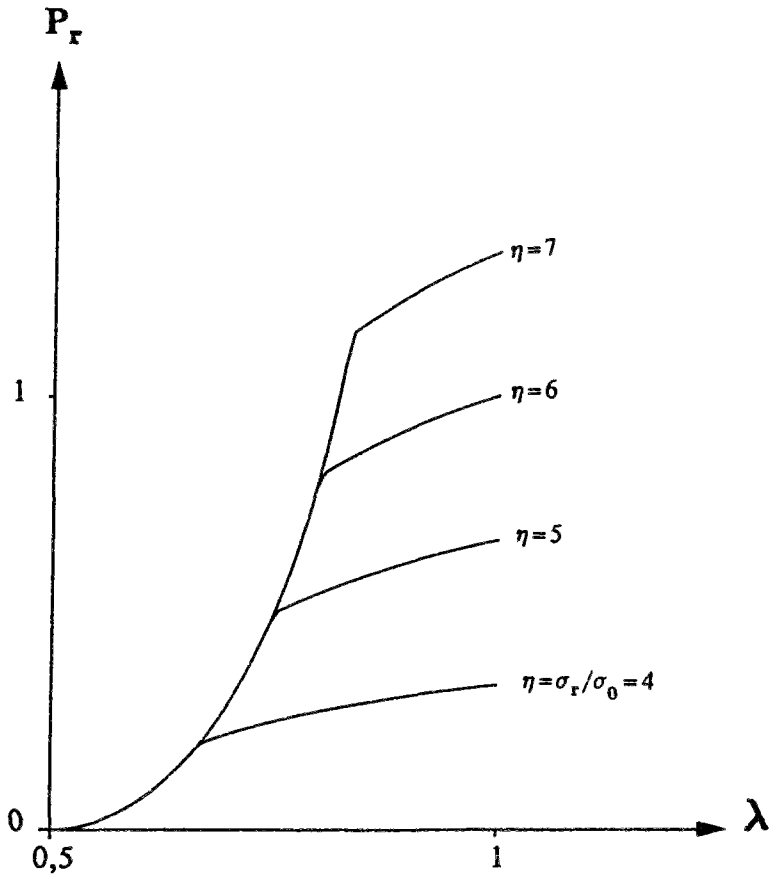


Figure 50 : Variations de P_r en fonction de λ .

On constate que P_r croît rapidement avec $\frac{\sigma_r}{\sigma_0}$ et atteint des valeurs supérieures à 100 % .

CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques résultats relatifs à la détermination du convexe de résistance macroscopique G^{hom}. Nous nous sommes limités à des géométries simples et à des chargements respectant les propriétés de symétrie de celles-ci.
La procédure suivie a été :

- L'exploitation des propriétés de symétrie, compte tenu de la géométrie des cellules et de la nature du chargement considéré.
- La mise en oeuvre directe des méthodes statique et cinématique de calcul à la rupture.

Ainsi, des résultats ont été obtenus dans les cas de la contrainte plane et de la déformation plane.

Au delà de l'intérêt proprede ces résultats, il faut y voir avant tout, une illustration de calculs analytiques menés parfois jusqu'au bout, en utilisant les méthodes de calcul à la rupture.

Il est évident que ces développements restent limités par la complexité de la géométrie ou du chargement : *même dans les cas simples que nous avons considérés, beaucoup de résultats restent incomplets.*

Il faut donc recourir à des méthodes analytiques ou numériques plus sophistiquées. Mais on peut d'ores et déjà avancer que le champ d'investigation des approches analytiques est très restreint. Ce dernier point nous amène bien entendu à l'objet du chapitre suivant, qui est la mise au point d'une méthode numérique pour la résolution du problème de calcul à la rupture posé sur la cellule de base.

CHAPITRE II

MISE AU POINT D'UNE MÉTHODE NUMÉRIQUE FONDÉE SUR L'APPROCHE CINÉMATIQUE

PRÉAMBULE

Les développements analytiques menés au chapitre précédent ont été facilités en grande partie par la coïncidence des directions principales du tenseur des contraintes macroscopiques avec les axes de symétrie de la cellule de base. Dans le cas contraire, ces développements deviennent nettement plus complexes nonobstant la simplicité de la géométrie.

En fait, hormis de rares exceptions, tel le matériau multicouche (de Buhan, 1986), le recours à des méthodes numériques plus sophistiquées s'avère indispensable pour déterminer le convexe de résistance macroscopique, en particulier si l'on veut appréhender l'anisotropie du matériau homogénéisé. L'objet du présent chapitre est de proposer une méthode numérique adaptée au problème en question.

Divers auteurs, s'appuyant sur la méthode des éléments finis, se sont attelés à la tache :

- Certains, par résolutions d'un problème d'évolution élastoplastique à l'aide d'un algorithme de plasticité (Debordes et Weill, 1983 ; Michel, 1984 ; Marigo et coll., 1987) (*). Le milieu périodique est supposé respecter en chacun de ses points une loi de comportement élastique parfaitement plastique standard.
- D'autres tel Guennouni (1987) (*), grâce à une formulation cinématique utilisant une technique de régularisation viscoplastique par l'introduction du matériau de Norton-Hoff *(Faisant tendre la viscosité vers zéro pour retrouver le matériau de Von Mises)* .
- Enfin, nous citons Pastor et Turgeman (1983 et 1987) qui utilisent des formulations statique et cinématique dont le principe repose sur une linéarisation par morceaux du critère de résistance du matériau constitutif. La résolution du problème est effectuée grâce à une technique de programmation linéaire.

Le recours aux méthodes de résolutions élastoplastiques est indispensable lorsque le but requis est la construction d'un modèle de comportement macroscopique pour le milieu périodique (Suquet, 1985). En revanche, elles sont disproportionnées en regard de notre objectif qu'est la détermination du seul convexe G^{hom}, considéré simplement comme une limitation sur les contraintes subies par le matériau à l'échelle macroscopique.

Notre but est d'élaborer un outil numérique simple à la fois dans son principe et dans son maniement, et efficace, c'est à dire conduisant à une évaluation suffisamment précise de G^{hom}

(*) Ces auteurs ont étudié le cas du matériau poreux

dans de nombreuses configurations de milieux périodiques.

Le présent chapitre comporte trois parties :

1/ Nous montrons comment, en se restreignant à des sous-espaces de champs de vitesse périodiques sur la cellule de base de dimension finie, la détermination du convexe G^{hom} par voie cinématique se ramène à un problème de minimisation par rapport à un nombre fini de variables scalaires. Dans le cas où le critère de résistance est borné, cette minimisation est sans contraintes.

2/ Se plaçant dans ce dernier cas de figure, nous construisons ces sous-espaces en décomposant les champs de vitesse en séries de Fourier à des ordres finis. Nous illustrons ce choix sur un exemple unidimensionnel, et nous montrons ses limites sur un cas où le seul champs de vitesse optimal est un champ discontinu. Nous suggérons ensuite une explication de l'inefficacité de ce choix.

3/ La dernière partie consiste en l'utilisation de sous-espaces de champs vitesse périodiques, construits en s'inspirant de la méthode des éléments finis. Nous validons et illustrons ensuite ce choix sur des cas où nous disposons de résultats analytiques.

1. UNE MÉTHODE NUMÉRIQUE D'ÉVALUATION DE G^{hom}

Rappelons ici, qu'étant donné une cellule de base a , l'espace **C** des champs de vitesse cinématiquement admissibles est défini par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{H} \oplus \mathbf{U}$$

où

H désigne l'espace des champs de vitesse affines sur la cellule (la déformation associée étant alors homogène) .

et

U l'espace des champs de vitesse différentiables par morceaux et <u>périodiques</u> sur a .

Le signe $\oplus$ étant l'opérateur somme directe d'espaces vectoriels.

1.1. Principe de la méthode

Reconsidérons la formulation générale statique de G^{hom} (définition *(1. 5)* du **chap. I**). Il apparait clairement que la mise au point d'une méthode numérique fondée sur cette formulation serait complexe et coûteuse : elle revient, si on procède par trajets de chargements radiaux, à un *problème de maximisation* sur l'espace des champs de contrainte définis sur a , périodiques, vérifiant les équations d'équilibre et astreints à vérifier $< \underline{\underline{\sigma}} > = \underline{\underline{\Sigma}}$.

Notre méthode reposera en fait, sur la caractérisation cinématique de G^{hom} (définition *(1. 6)* du **chap. I**) qui semble plus adaptée , comme nous le verrons plus loin, à un traitement numérique.

Donnons nous une "direction" de déformation macroscopique $\underline{\underline{D}}$ dans R^6. Nous avons vu au chapitre I, que l'approche cinématique de G^{hom} se traduit par un processus de minimisation d'une fonctionnelle sur l'espace **U**. Le dit processus consiste à " se déplacer " dans l'espace des contraintes macroscopiques identifié à R^6, par hyperplans normaux à $\underline{\underline{D}}$ et ce, jusqu'à devenir tangent au convexe G^{hom} *(figure 1)*.

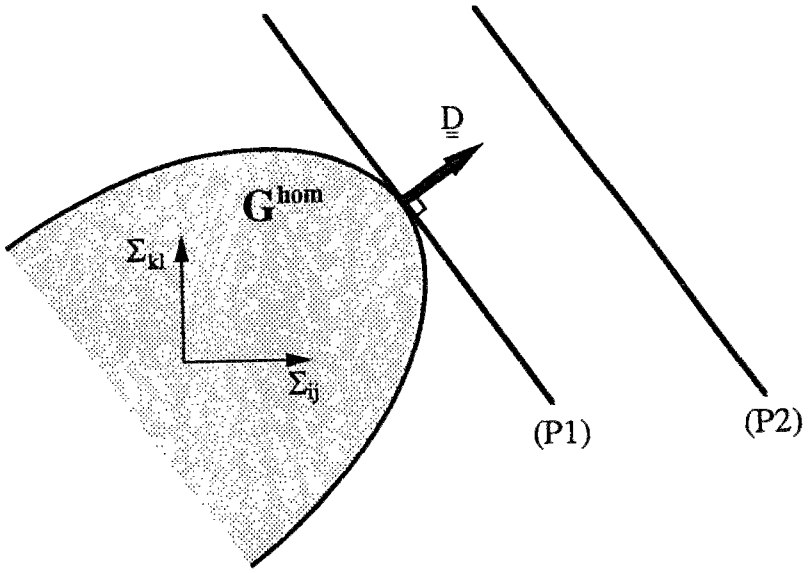


Figure 1 : Approche cinématique de G^{hom}.

(P1) : Hyperplan courant d'équation $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = < \pi (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\delta}}) >$.

(P2) : Hyperplan tangent à G^{hom}, d'équation $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = \pi^{hom} (\underline{\underline{D}}) = \inf_{\underline{u} \in U} < \pi (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\delta}}) >$.

L'idée générale de l'approche est la suivante :

Au lieu d'opérer la minimisation sur **U** dont la dimension est infinie, on se restreint à une suite $\{ \mathbf{U}_p \; ; \; p \geq 1 \}$ de sous-espaces vectoriels de **U** de dimension finie, s'emboitant les uns dans les autres (i.e. $\mathbf{U}_p \subset \mathbf{U}_{p+1}$), la dimension de $\mathbf{U}_p$ étant une fonction croissante de l'entier p. Si bien que l'estimation par excès de G^{hom} sera d'autant meilleure que p, et donc la dimension du sous-espace, est grand.

Empruntant les notations utilisées par (de Buhan , 1986), nous posons, pour p donné :

$$\pi^p (\underline{\underline{D}}) = \inf_{\underline{u} \in \mathbf{U}_p} < \pi (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\delta}}) > \qquad \forall \; \underline{\underline{D}} \in R^6 \qquad (1.\ 1)$$

π^p constitue donc, la fonction d'appui d'un convexe G^p, approximation par excès de G^{hom}. On dira que G^p constitue une approximation " à l'ordre p " du convexe macroscopique *(figure 2)*.

Si bien que pour tout p et q tels que $p \leq q$, on a d'après *(1. 1)* :

$$\mathbf{U}_p \subset \mathbf{U}_q \quad \Rightarrow \quad \pi^p (\underline{\underline{D}}) \geq \pi^q (\underline{\underline{D}}) \qquad \forall \; \underline{\underline{D}} \in R^6 \qquad (1.\ 2)$$

$$\Rightarrow \quad G^p \supseteq G^q \qquad (1.\ 3)$$

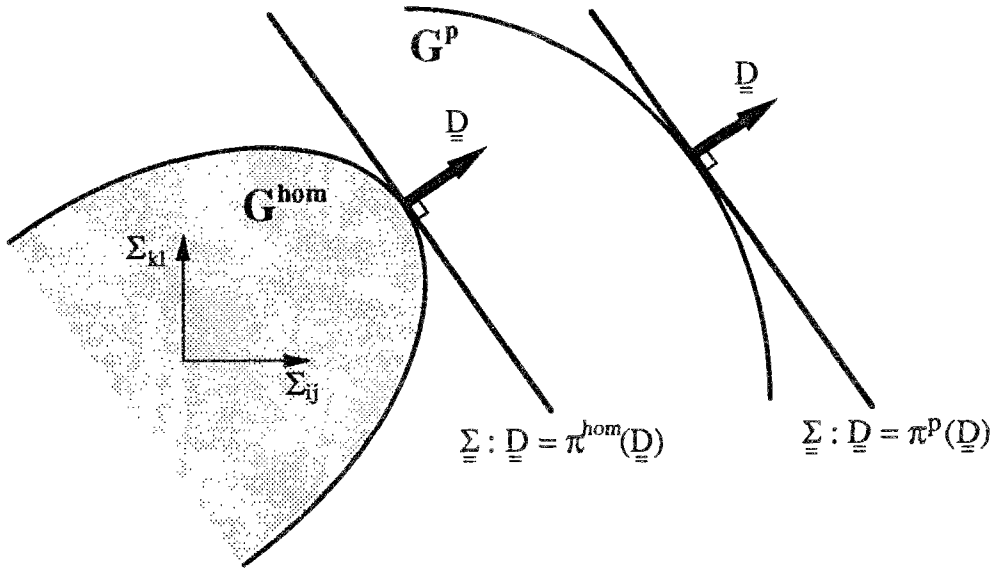


Figure 2 : Approximation G^p de G^{hom}.

Soit n_p la dimension de U_p et $(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{n_p})$ une base de cet espace. Tout élément $\underline{u}$ de ce dernier, s'écrit :

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^{n_p} u_i \, \underline{b}_i \qquad (1.4)$$

En notant $\underline{\tilde{u}}$, le vecteur des composantes de $\underline{u}$ dans la base de U_p, on définit une fonction :

$$F_p : \quad R^6 \times R^{n_p} \rightarrow R^+$$

telle que :

$$F_p(\underline{\underline{D}} ; \underline{\tilde{u}}) = F_p (\underline{\underline{D}} ; u_1, \ldots, u_{n_p}) = < \pi (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\delta}}) > \qquad (1.5)$$

La base de U_p étant fixée, le tenseur vitesse de déformation $\underline{\underline{\delta}}$ associé à $\underline{u}$, ne dépend bien sûr que des composantes (u_i).

Et on a la relation :

$$\boxed{\pi^p (\underline{\underline{D}}) = \min_{\underline{\tilde{u}} \in R^{n_p}} F_p (\underline{\underline{D}} ; \underline{\tilde{u}}) \qquad \forall \, \underline{\underline{D}} \in R^6} \qquad (1.6)$$

Conclusion : La détermination de G^p passe donc, pour chaque $\underline{\underline{D}}$, par la minimisation sans contraintes d'une fonction F_p de n_p paramètres scalaires.

1.2. Propriétés de F_p

- F_p est une fonction convexe par rapport à la variable $\underline{\tilde{u}}$

Soient $\underline{\tilde{u}}_1$ et $\underline{\tilde{u}}_2$ deux éléments quelconques de R^{n_p} et $\lambda \in [\,0\,,\,1\,]$.
Pour tout $\underline{\underline{D}}$ de R^6, on a :

$$F_p\,(\,\underline{\underline{D}}\,;\,\lambda\,\underline{\tilde{u}}_1 + (1-\lambda)\,\underline{\tilde{u}}_2\,) \;=\; <\pi\,(\,\underline{\underline{D}} + \lambda\,\underline{\underline{\delta}}_1 + (1-\lambda)\,\underline{\underline{\delta}}_2\,)>$$

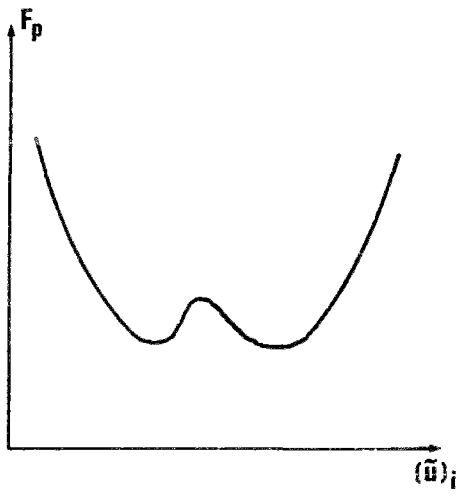
$$=\; <\pi\,(\,\lambda\,(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\delta}}_1) + (1-\lambda)\,(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\delta}}_2)\,)>$$

En vertu de la convexité de la fonction $\underline{\underline{d}} \rightarrow \pi\,(\,\underline{\underline{d}}\,)$, il vient :

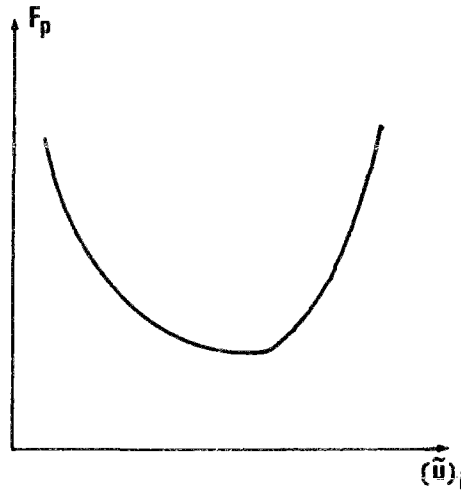
$$F_p\,(\,\underline{\underline{D}}\,;\,\lambda\,\underline{\tilde{u}}_1 + (1-\lambda)\,\underline{\tilde{u}}_2\,) \;\leq\; \lambda <\pi\,(\,\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\delta}}_1\,)> \;+\; (1-\lambda) <\pi\,(\,\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\delta}}_2\,)>$$

$$\leq\; \lambda\,F_p\,(\,\underline{\underline{D}}\,;\,\underline{\tilde{u}}_1\,) + (1-\lambda)\,F_p\,(\,\underline{\underline{D}}\,;\,\underline{\tilde{u}}_2\,)$$

Cette propriété est très importante pour les calculs numériques car, elle exclut l'existence de minima locaux :



Situation exclue



O.K. !

•• F_p n'est pas différentiable partout :

La fonction $\underline{\underline{d}} \rightarrow \pi(\underline{\underline{d}})$ n'est pas différentiable au point $\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{0}}$, et par conséquent F_p ne l'est pas aux points tels que $\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\delta}} = \underline{\underline{0}}$.
Notons que :

$$F_p(\underline{\underline{D}} ; \underline{\underline{0}}) = < \pi(\underline{\underline{D}}) > \qquad (1.7)$$

ne dépend pas de la valeur de p et correspond à une déformation homogène dans la cellule de base. Elle constitue une première estimation permettant le démarrage du processus de minimisation de F_p.

••• F_p peut prendre des valeurs infinies. Ce qui n'est pas le cas lorsque les critères de résistance sont " bornés " (critères de Tresca et Von Mises en contrainte plane) .

Conclusion :

La détermination de G^p passe par un processus de minimisation sans contraintes d'une fonction convexe par rapport à un nombre fini de variables scalaires.

1.3. Choix d'une méthode de minimisation de F_p

De part son fondement même, il apparaît clairement que l'étape de minimisation est essentielle dans notre approche. Il convenait alors, d'attacher une grande importance au choix de la méthode d'optimisation, tenant compte de la spécificité de la fonction F_p. Il est évident que les imperfections de la méthode choisie, influeront directement sur la qualité des résultats et leur interprétation.

Après une analyse approfondie, s'appuyant sur des applications notamment dans le cas unidimensionnel, il apparaît que les méthodes suivantes ne sont pas adaptées aux types de fonctionnelles F_p ici traîtées :

• Les méthodes dites " de gradient ". D'une part, parce que F_p n'est pas différentiable partout et d'autre part, parce que l'expression du gradient de F_p n'étant pas explicite, son évaluation (lorsqu'il existe !) nécessite une approximation numérique équivalente, en nombre d'opérations, à n_p calculs de F_p. D'ailleurs l'application d'un certain nombre de ces méthodes à des

cas dont on possédait la solution exacte, a montré leur limites.

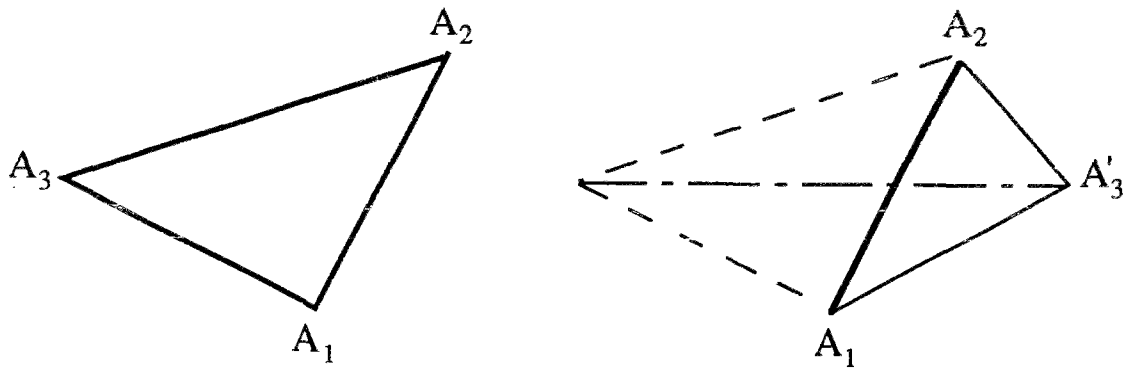
• Les méthodes de sous-gradient (pour une documentation assez complète sur ces méthodes et les algorithmes correspondant, se reporter à (Minoux, 1983)) . En effet, si on peut évaluer numériquement un sous-gradient de F_p en tout point, la classe d'algorithmes existant à l'heure actuelle exige la connaissance *a priori* de renseignements assez précis sur la fonction à minimiser. Faute de quoi, et c'est notre cas, elles ne sont plus utilisables.

Ceci étant, la méthode requise devra donc, conduire à la détermination du minimum, uniquement par comparaisons des valeurs prises par F_p en un certain nombre de points. Parmi ces méthodes dites " ad hoc " (Fletcher, 1980) , celle qui nous est apparue la mieux adaptée à notre problème, est **la méthode du polytope**. Cette dénomination est due à Gill et coll. (1981).

Sous le nom de méthode du simplexe, l'idée est due à l'origine à Spendley et coll. (1962) et fut développée, par la suite, par divers auteurs tels Nelder et Mead (1965) . Elle ne doit pas être confondue avec la méthode utilisée en programmation linéaire, quoique utilisant le même concept géométrique : le polyèdre à $n_p + 1$ sommets dans l'espace R^{n_p}. Une description détaillée de la méthode, avec un exemple d'application, est donnée en **Annexe III** .

Nous illustrons son principe de façon schématique pour $n_p = 2$:

Dans ce cas, le polyèdre est un triangle. On calcule la valeur de F_p aux points A_1, A_2 et A_3 . Si par exemple, elle est maximale en A_3, alors on garde les points A_1 et A_2 mais on écarte A_3 en le remplaçant par un point A_3' de " la médiane " du triangle issue de A_3, tel que $F_p(A_3') \leq F_p(A_3)$.



On répète l'opération sur les 3 points actuels et ainsi de suite, jusqu'à obtention de l'optimum.

La version de la méthode du polytope que nous avons retenue et utilisée pour nos calculs numériques, est celle qui figure dans le livre **Numerical recipes** (Press et coll. , 1986).
Cet algorithme s'est révelé très performant lors des cas traîtés, avec des temps de calcul raisonnables même lorsque le nombre de variables de minimisation est important *(jusqu'à quelques centaines !)* .

2. UTILISATION DE LA DÉCOMPOSITION DES CHAMPS CINÉMATIQUES EN SÉRIES DE FOURIER

Ayant établi le cadre général de l'approche numérique, nous en venons donc à la construction des espaces U_p. Il serait judicieux d'exploiter la spécificité de U : tout élément $\underline{u}$ de ce dernier étant périodique sur la cellule de base, est donc décomposable en série de Fourier.

Supposons, pour fixer les idées, que la cellule a soit un parallélépipède rectangle de cotés a_1, a_2 et a_3 , tout élément $\underline{u}$ de U s'écrit alors :

$$\forall\ \underline{x} \in a \qquad \underline{u}(\underline{x}) = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{r_1,r_2,r_3 \in Z} \underline{A}_{r_1,r_2,r_3}\, e^{2\pi i\left(r_1 \frac{x_1}{a_1} + r_2 \frac{x_2}{a_2} + r_3 \frac{x_3}{a_3}\right)} \right\} \quad (2.\ 1)$$

Re : partie réelle de . .

$\underline{A}_{r_1,r_2,r_3}$ est un vecteur dont les trois composantes sont des nombres complexes.

Cette approche fondée sur l'utilisation des séries de Fourier a été mise en oeuvre, pour la première fois par Dumontet (1983), dans le but de déterminer le comportement macroscopique des milieux périodiques élastiques. Elle fut ensuite esquissée par de Buhan (1986) comme méthode numérique en calcul à la rupture.

L'idée consiste, pour construire les sous-espaces U_p, à ne considérer que les premiers termes (dont le nombre reste à définir) de la décomposition en séries de Fourier dess éléments de U. Reprenons l'exemple de la cellule précédente. Nous définissons U_p en remplaçant la formule *(2. 1)* par :

$$\underline{u} \in U_p$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\ \underline{x} \in a \qquad \underline{u}(\underline{x}) = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{|r_1|+|r_2|+|r_3| \le p} \underline{A}_{r_1,r_2,r_3}\, e^{2\pi i\left(r_1 \frac{x_1}{a_1} + r_2 \frac{x_2}{a_2} + r_3 \frac{x_3}{a_3}\right)} \right\} \quad (2.\ 2)$$

l'entier p caractérisant U_p est <u>l'ordre de la décomposition</u> .

Nous remarquons que la suite $(U_p)_{p \in N}$ est bien croissante au sens de la relation d'inclusion (i.e. $U_p \subseteq U_{p+1}$) et que la dimension de l'espace U_p est donnée dans le cas général

par :

$$\frac{2}{3}(n_p + 3) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{p-3i} (j+1)(j+2) + 3 \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=0}^{p-i} (j+1)(j+2) \qquad (2.3)$$

La constante additive définissant $\underline{u}$ *est prise égale* $\underline{0}$.

Il apparaît de façon évidente, que les conditions de périodicité sont *de facto* respectées, ce qui confère à ce choix de sous-espaces un avantage indéniable. La détermination du convexe G^p passera donc par l'optimisation sans contrainte de F_p par rapport aux scalaires Re ($\underline{A}_{r_1,r_2,r_3}$) et Im ($\underline{A}_{r_1,r_2,r_3}$) , parties réelles et imaginaires des coefficients de la décomposition de $\underline{u}$ dans la base trigonométrique de U_p.

A titre d'exemple , pour la cellule précédente et pour p = 1

$$\underline{u} \in U_1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ \underline{x} \in a \qquad \underline{u}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{3} \left[\underline{v}_k \cos 2\pi \frac{x_k}{a_k} + \underline{w}_k \sin 2\pi \frac{x_k}{a_k} \right] \qquad (2.4)$$

$\underline{v}_k$ et $\underline{w}_k$ sont des vecteurs constants de R^3.
La dimension de U_1 vaut 18 , nombre des composantes des six vecteurs $\underline{v}_k$ et $\underline{w}_k$. F_1 est donc à minimiser, par rapport à 18 variables scalaires indépendantes.

Remarque :

Afin d'améliorer l'estimation de G^p du convexe G^{hom}, nous serons amenés à poursuivre les développements à des ordres supérieurs. Or, on se rend compte que la dimension de U_p devient vite importante au fur et à mesure que p croît. Il convient donc, de bien exploiter toutes les propriétés de symétrie de la cellule de base, afin de réduire le nombre de paramètres de minimisation.

Nous allons maintenant, illustrer l'approche décrite précédemment à travers deux exemples.

2.1. Exemple unidimensionnel : Le fil hétérogène périodique (de Buhan, 1986)

Nous considérons un fil, modélisé comme un milieu continu, constitué d'une succession périodique de maillons homogènes *(figure 3)* dont la résistance en traction prend alternativement les valeurs T_1 et T_2. On supposera que $T_1 \leq T_2$.

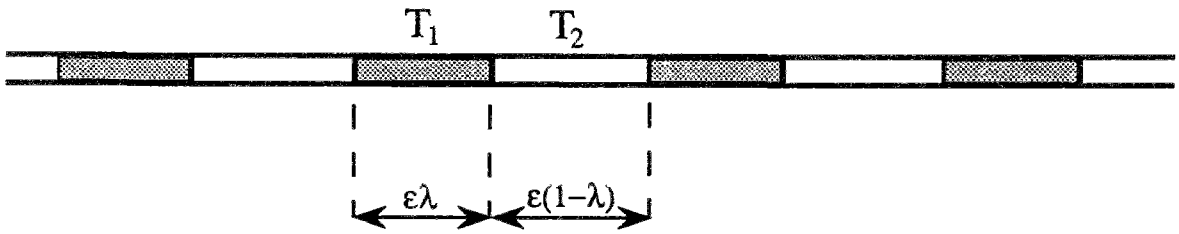


Figure 3 : Fil hétérogène périodique.

La cellule de base est l'intervalle [0 , 1] *(figure 4)*.

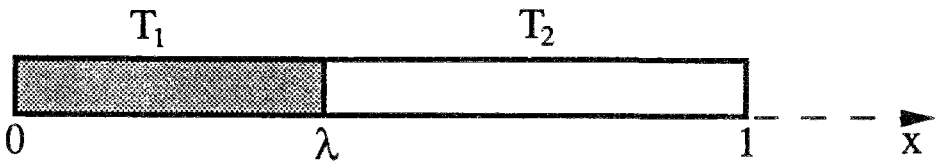


Figure 4 : Cellule de base correspondante.

Les maillons n'ayant pas de résistance en compression, il est facile de montrer que la limite en traction macroscopique est donnée par :

$$\boxed{T^{hom} = \inf (T_1 , T_2) = T_1} \qquad (2.5)$$

Ce qui revient à dire : $G^{hom} = [0 , T_1]$ *(à noter son indépendance vis à vis de λ)* .
La fonction d'appui de ce dernier s'écrit, d'après *la définition (1. 6) - chap. I* :

$$\forall\ D \in R \qquad \pi^{hom} (D) = \inf_{u \in U} \int_0^1 T(x) \ \sup (0 , D + u'(x)) \ dx \qquad (2.6)$$

où $T(x)$ désigne la limite en traction au point courant x de [0 , 1] .

L'espace U correspond ici à l'ensemble des fonctions définies et dérivables par morceaux sur $[0, 1]$, telles que $u(0) = u(1)$.

Pour tout $p \geq 1$, U_p est l'ensemble des champs scalaires tels que :

$$u(x) = \sum_{k=1}^{p} (a_k \cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx) \qquad \forall\ x \in [0, 1] \tag{2.7}$$

où les coefficients a_k et b_k sont réels. Ainsi $\dim U_p = 2p$.

Le convexe G^p est défini par : $\Sigma \in G^p \Leftrightarrow$

$$\forall\ D \in R \qquad \Sigma D \leq \min_{a_k, b_k} \int_0^1 T(x) \sup (0 , D + u'(x)) \, dx \tag{2.8}$$

Il est clair que si $D < 0$, le terme à droite de l'inégalité précédente est nul *(Il suffirait de prendre tous les coefficients a_k et b_k nuls)*, et on peut écrire que G^p est de la forme :

$$G^p = [0 , T^p(\lambda)] \tag{2.9}$$

et se restreindre aux $D > O$.

D'ailleurs, la borne $T^p(\lambda)$ étant indépendante d'un tel choix de D *(Division par $D > 0$ des deux membres de l'inégalité ci-dessus)*, nous pouvons nous limiter à $D = 1$.
Compte-tenu de *(2. 8)*, on a :

$$T^p(\lambda) = \min_{a_k, b_k} F_p (a_1 , \ldots , a_p , b_1 , \ldots , b_p) \tag{2.10}$$

où

$$F_p (a_1 , \ldots , a_p , b_1 , \ldots , b_p) = \int_0^1 T(x) \sup (0 , 1 + u'(x)) \, dx \tag{2.11}$$

Nous avons effectué plusieurs calculs numériques, correspondant à différentes valeurs de λ et du rapport T_1/T_2, afin de déterminer l'estimation par excès $T^p(\lambda)$ de T^{hom}.

L'intégrale définissant F_p est évaluée numériquement par la méthode de Simpson avec minimisation du résidu, afin d'en obtenir une estimation très précise.
Au bout de quelques ordres p, nous avons obtenu quasiment la valeur de T^{hom}. A titre d'exemple, nous reportons sur le tableau suivant les résultats obtenus, pour un rapport $T_1/T_2 = 2$.

λ	p	$T^p(\lambda)/T^{hom}$
0,9	1	1,001 (*)
0,8	2	1,000
0,7	2	1,002
0,6	3	1,001
0,5	4	1,001
0,4	5	1,002
0,3	8	1,003
0,2	10	1,007
0,1	20	1,009

Nous remarquons, que ces résultats confirment bien l'indépendance de T^{hom} vis à vis de λ

Il est intéressant d'examiner de près le champ de vitesse optimal et la déformation associée le long de la cellule de base. Nous donnons ci-dessous *(figure 5)*, pour $\lambda = 0,3$ $T_1/T_2 = 2$ et $p = 8$, la distribution du champ $v = Dx + u$ *(D étant égal à l'unité)* et de la déformation associée $d = D + u'$.

(*) Nous nous sommes volontairement limités au 3 ème chiffre significatif après la virgule.

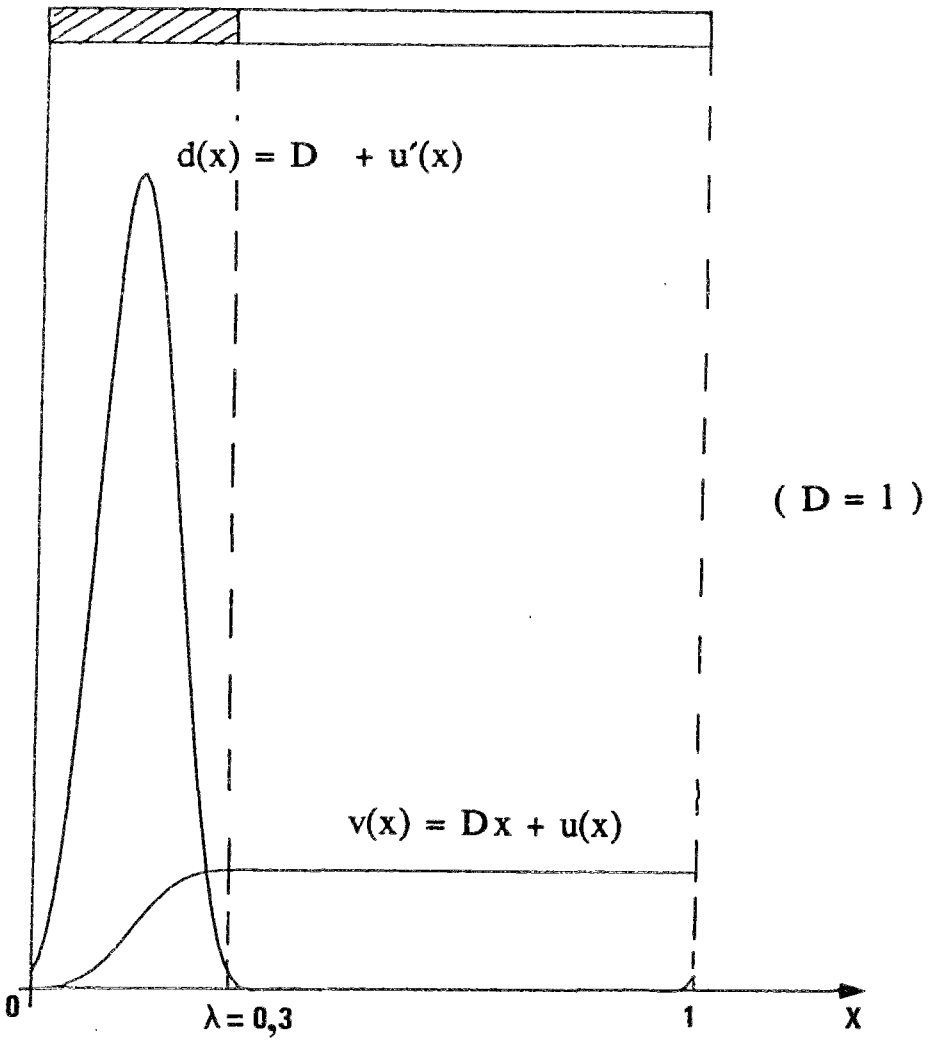


Figure 5 : Distribution du champ v et de la déformation associée sur a .

La visualisation des champs de déformation dans la cellule de base montre bien, comment le simple processus de minimisation conduit automatiquement à une **localisation** de la déformation dans " le maillon faible " ($0 \leq x \leq \lambda$) , retrouvant ainsi une particularité des champs de vitesse utilisés pour la détermination analytique de G^{hom} .

Cette localisation est d'autant plus " difficile " à obtenir que λ est petit. On comprend alors *(voir tableau précédent)*, que pour des valeurs comparables de T^p, p croît lorsque λ décroît. Afin d'illustrer ce phénomène de localisation et pour les valeurs de p correspondant au tableau précédent, nous donnons sur *la figure 6* , les distributions de la déformation le long de la cellule de base pour différentes valeurs de λ.

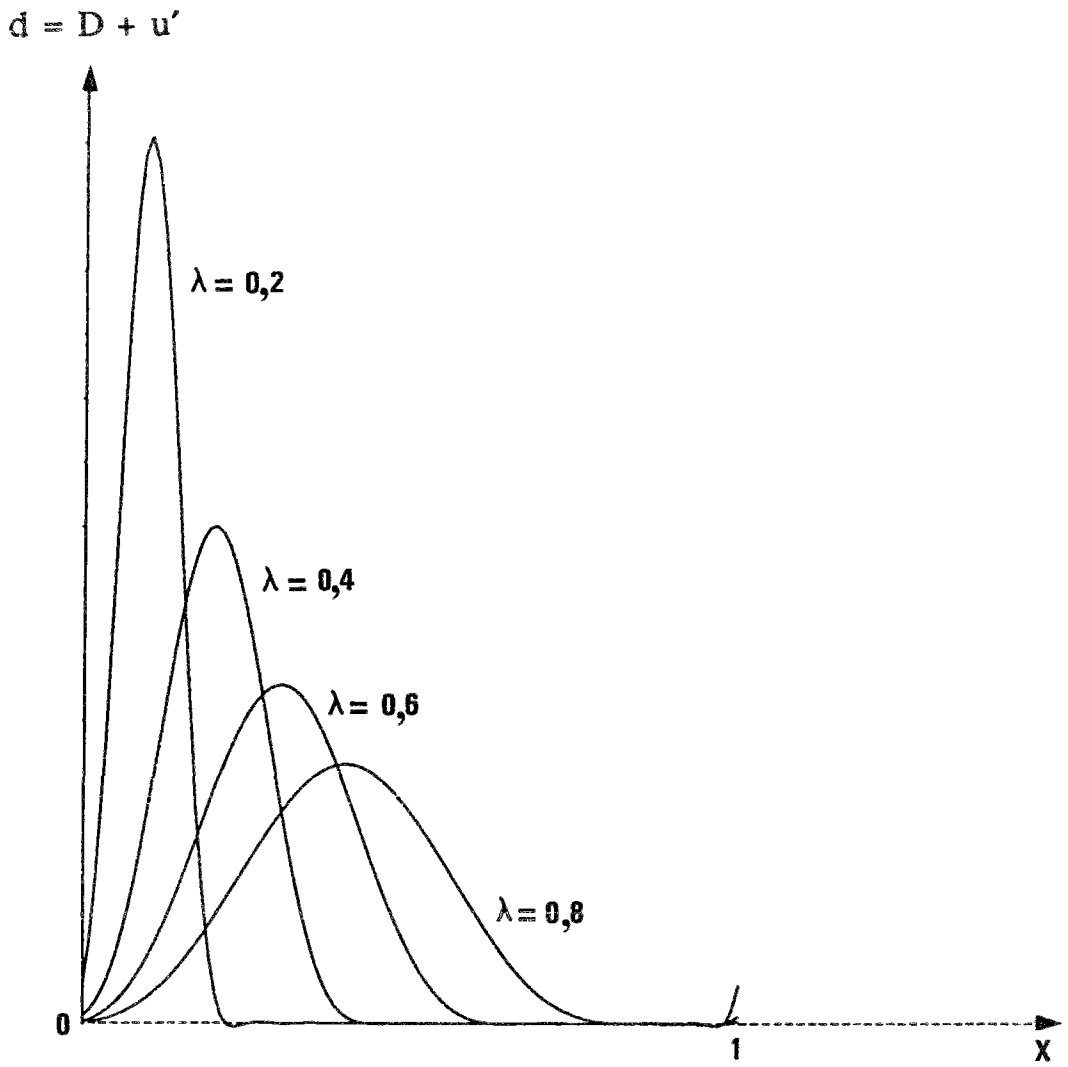


Figure 6 : Localisation de la déformation dans a .

Remarque :

Le champ de vitesse conduisant à la valeur exacte de T^{hom} n'est pas unique, il en existe même **une infinité**. Nous en exhibons ci-après, pour λ donné, toute une classe :

$$\forall\ m \geq 1 \quad u_m(x) = \begin{cases} \dfrac{m-\lambda}{\lambda}\, x & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{\lambda}{m} \\ 1 - x & \text{si } \dfrac{\lambda}{m} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad (2.\ 12)$$

On pourra facilement, vérifier que pour tout $m \geq 1$, l'approche cinématique à l'aide de u_m conduit à la relation $\Sigma \leq T_1 = T^{hom}$.

2.1. Exemple 2 D : Plaque perforée

Reprenons la structure en milieu poreux, dont le matériau constituf obéit au critère de Von Mises en contrainte plane , étudiée en **4.1.2 - chap. I** .
Rappelons que la cellule de base est un carré de côté l'unité, percée d'un trou également carré de côté λ .

En abscence de toute hypothèse sur le chargement macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$, et de toute exploitation des symétries, le sous-espace $\mathbf{U}_p$ est défini de façon la plus générale par :

$$\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 \in \mathbf{U}_p$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\ \underline{x} \in a\ ;\ \forall\ i \in \{1, 2\}\ ;\ \forall\ m,n \mid m + n \leq p$$

$$u_i(\underline{x}) = \sum_{m,n} \left(A^i_{m,n} \sin 2\pi m x_1 \cos 2\pi n x_2 + B^i_{m,n} \sin 2\pi m x_1 \sin 2\pi n x_2 \right) + \sum_{m,n} \left(C^i_{m,n} \cos 2\pi m x_1 \cos 2\pi n x_2 + D^i_{m,n} \cos 2\pi m x_1 \sin 2\pi n x_2 \right) \qquad (2.13)$$

Eliminant les termes constants, on montre que la dimension de $\mathbf{U}_p$ est :

$$n_p = 4p(p+1)$$

La détermination de G^p nécessiterait donc, des processus de minimisations par rapport à autant de variables scalaires *(pour p = 7, on dépasse déjà les 200 !)*.

Nous allons montrer maintenant, que ce nombre peut être largement réduit, moyennant quelques hypothèses de symétrie matérielle. Plaçons nous dans le cas où les directions principales de $\underline{\underline{\Sigma}}$ coincident avec les axes de symétrie de la cellule Ox_1 et Ox_2 :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \qquad \text{dans le repère } (\underline{e}_1, \underline{e}_2)$$

On a établit dans ce cas, que l'on pouvait se restreindre *(Propriété C du 2.2.3 - chap. I)* à l'exploration des champs de vitesse $\underline{v} = \underline{\underline{D}}\ \underline{x} + \underline{u}$ symétriques . Ce qui implique que les directions principales du tenseur $\underline{\underline{D}}$ coincident avec celles de $\underline{\underline{\Sigma}}$:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \qquad \text{dans le repère } (\underline{e}_1 , \underline{e}_2)$$

et que :

$$\begin{cases} u_1 (x_1 , x_2) = u_1 (x_1 , -x_2) = -u_1 (-x_1 , x_2) \\ u_2 (x_1 , x_2) = -u_2 (x_1 , -x_2) = u_2 (-x_1 , x_2) \end{cases} \qquad (2.\ 14)$$

Compte-tenu de ce qui vient d'être mentionnné, la définition *(2. 13)* des espaces $\mathbf{U}_p$ se réduit à :

$$\forall\ \underline{x} \in a\ ;\ \forall\ i,j \in \{ 1 , 2 \}\ i \neq j\ ;\ \forall\ m,n \mid m + n \leq p$$

$$\boxed{u_i(\underline{x}) = \sum_{m,n} A^i_{m,n} \sin 2\pi m x_i \cos 2\pi n x_j} \qquad (2.\ 15)$$

Et les calculs peuvent être effectués en se limitant au quart de la cellule :

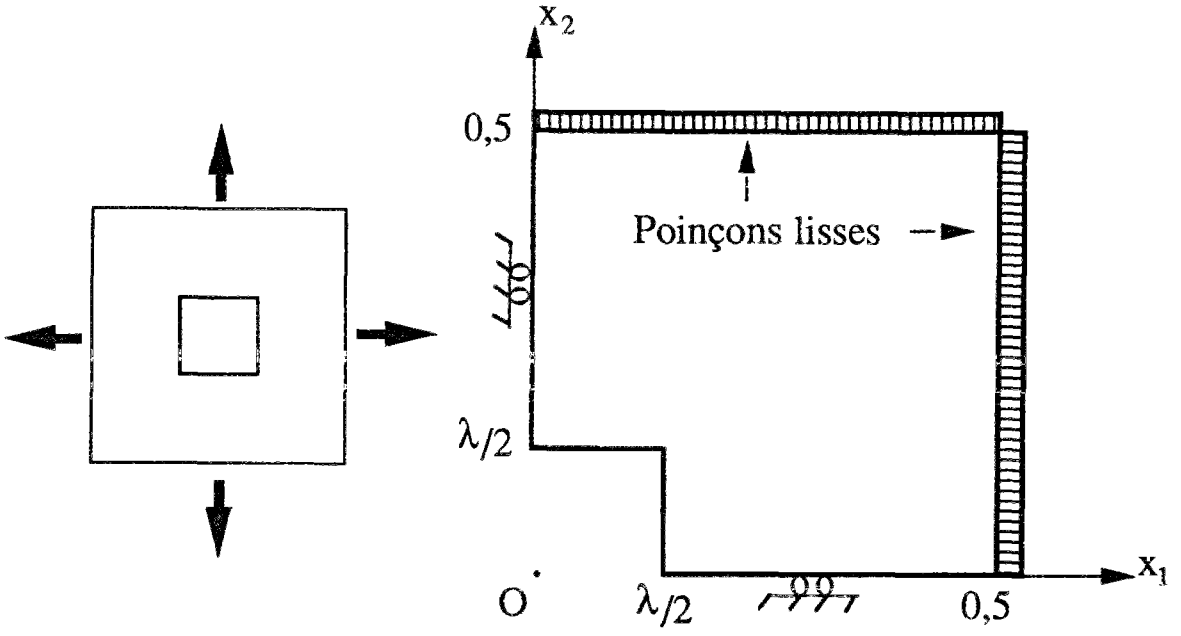


Figure 7 : Cellule de base.

La dimension de $\mathbf{U}_p$ est ainsi divisée par 4 : $n_p = p(p + 1)$

Remarquons que les conditions aux limites sur les bords de a sont automatiquement vérifiées (i.e. $u_i = 0$ sur $x_i = 0$ et $x_i = 1/2$).

On pose alors :

$$\forall \underline{\underline{D}} \qquad F_p(\underline{\underline{D}} ; \underline{\tilde{u}}) = \langle \pi(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\delta}}) \rangle$$

en notant $\underline{\tilde{u}}$, le vecteur de R^{n_p} dont les composantes sont les coefficients $A^i_{m,n}$ de la décomposition de $\underline{u}$ dans la base trigonométrique de U_p .

En outre, comme conséquence de la *propiété A du 2.2.1 - chapit I* , le convexe G^{hom}, et donc G^p, est complétement déterminé à partir de la donnée de sa restriction G^{hom}_{res} *(respectivement* G^p_{res} *)* dans le quart de plan défini par :

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 \geq 0 \quad , \quad \Sigma_1 + \Sigma_2 \geq 0 \qquad (2.16)$$

Ceci nous amène à n'explorer que les tenseurs $\underline{\underline{D}}$ tels que :

$$D_2/D_1 \in [-1 , 1]$$

On appellera " **direction de déformation** " , l'angle θ de $[-\pi/4 , \pi/4]$ tel que :

$$\mathrm{tg}\theta = D_2/D_1 \qquad (2.17)$$

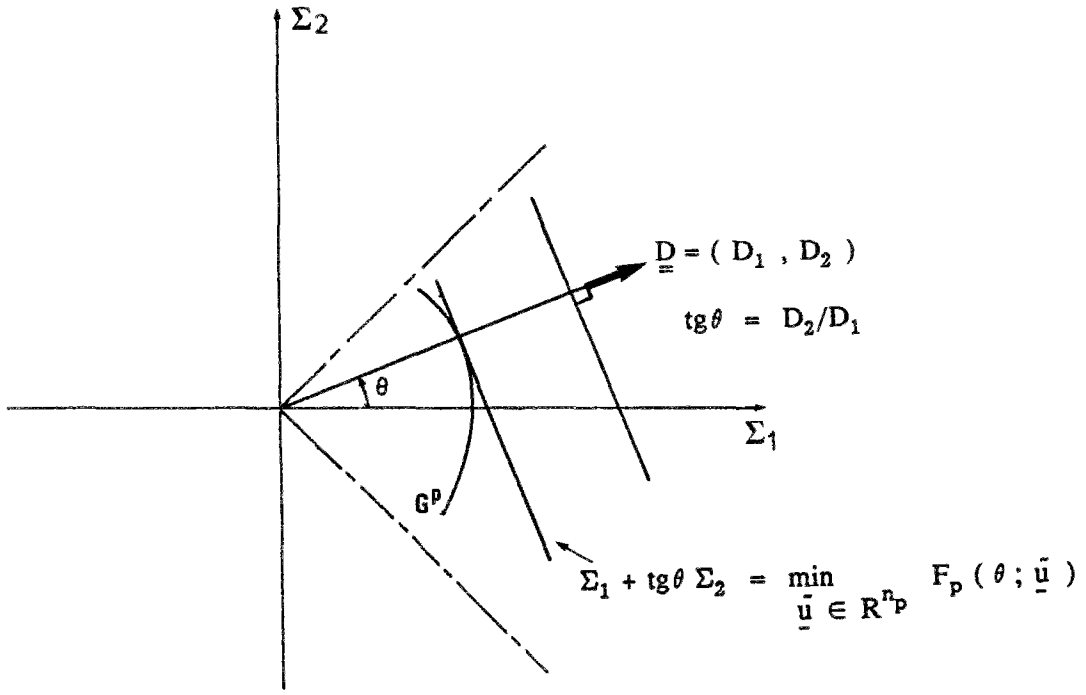
et on pourra écrire :

$$\forall \theta \in [-\pi/4 , \pi/4] \qquad F_p(\theta ; \underline{\tilde{u}}) = \langle \pi(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\delta}}) \rangle \qquad (2.18)$$

Pour θ donné, la droite d'équation *(D_1 pris égal à l'unité)* :

$$\Sigma_1 + \mathrm{tg}\theta\, \Sigma_2 = \min_{\underline{\tilde{u}} \in R^{n_p}} F_p(\theta ; \underline{\tilde{u}}) \qquad (2.19)$$

est tangente à G^p_{res}.



En d'autres termes, la frontière de G^p_{res} n'est autre que l'enveloppe de ces droites paramétrées par θ .

Numériquement, l'évaluation de F_p en tout point (intégration de la fonction π sur a) se fait par la méthode de Simpson 2D , compte-tenu de la nature trigonométrique des fonctions intervenant dans l'expression de F_p .

RÉSULTATS

A titre d'illustration et pour $\lambda = 0,5$, nous donnons sur les *figures 8 et 9* , les frontières de G^p obtenues par notre approche numérique , correspondant respectivement à des ordres de décomposition $p = 3$ et $p = 8$. Le plan étant rapporté à (Σ_1/σ_0 , Σ_2/σ_0) où σ_0 est la limite en traction simple du matériau sain, on reconnaîtra sur ces graphiques, successivement : l'approche analytique de G^{hom} (cf. § **4.1.2. chap. I**) , le convexe G^p et l'ellipse de Von Mises du matériau sain .

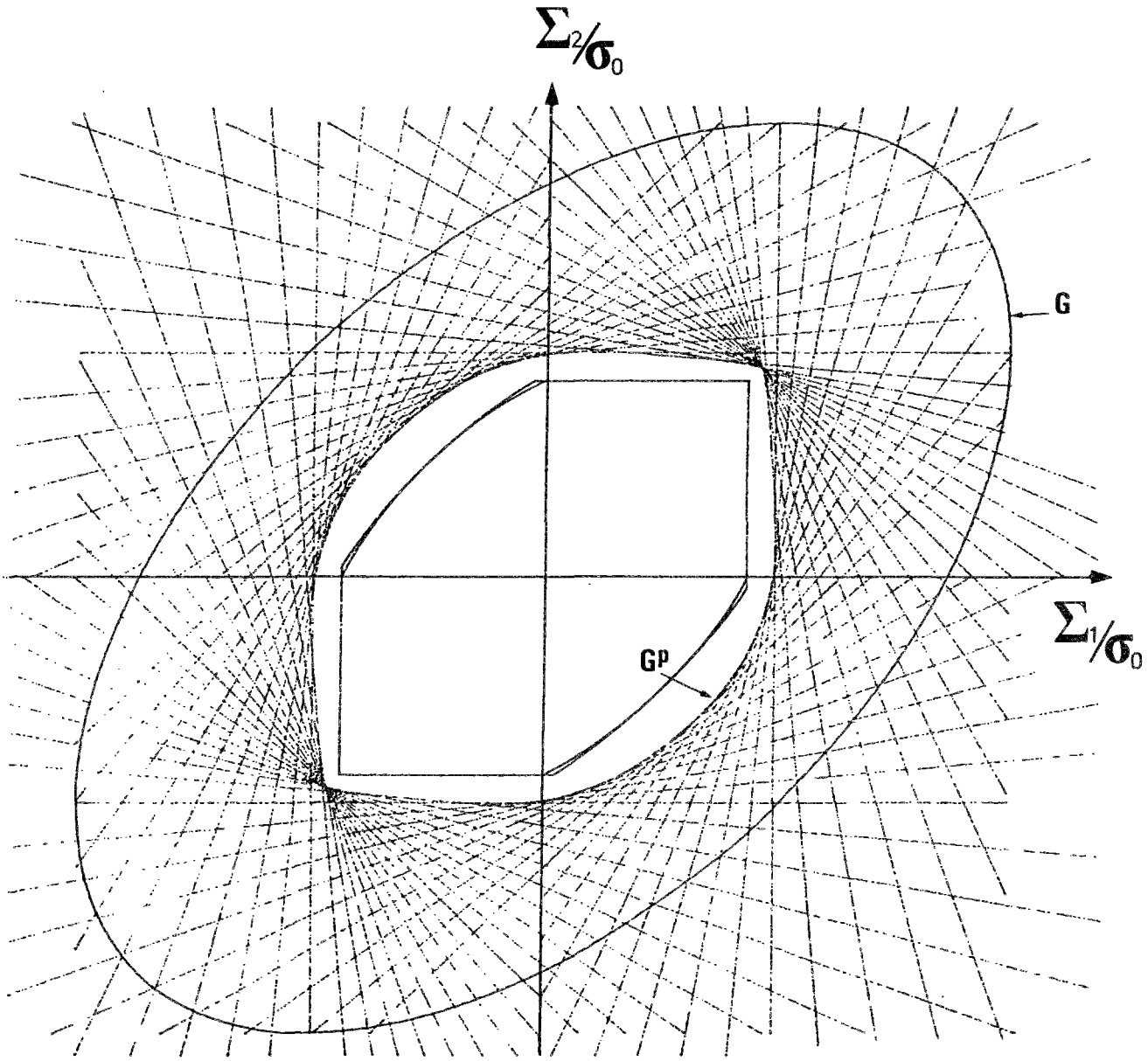


Figure 8 : Approche numérique $\lambda = 0{,}5$ et $p = 3$.

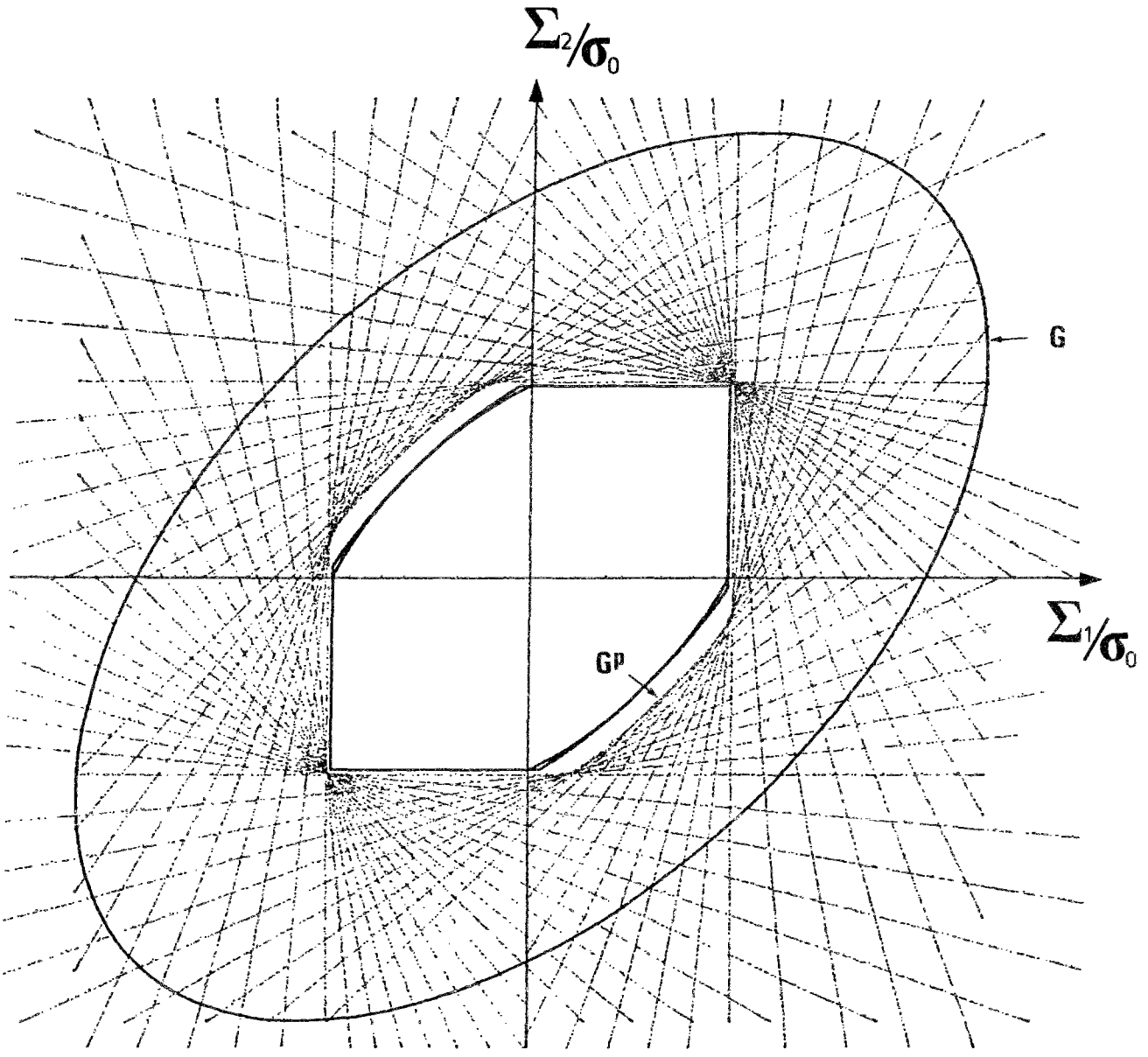


Figure 9 : Approche numérique $\lambda = 0{,}5$ et $p = 8$.

Pour toutes les directions de déformation macroscopique décrites, le point de départ du processus de minimisation est : $\underline{u}^{\cdot} = \underline{0}$ *(champ de vitesse de déformation homogène).*
Etant entendu, qu'à ce champ *(déformation homogène dans* a) correspond le convexe (p = 0) :

$$G^0 = (1 - \lambda^2)\, G \qquad (2.\ 20)$$

Au vu des résultats des premiers développements en p, l'approche semble prometteuse. par exemple, pour p = 3 *(figure 8)*, G^3 améliore G^0 de près de 35 % dans la région du plan où $\Sigma_1\ \Sigma_2 \geq 0$ et d'environ 20 % ailleurs. Si bien que plus de la moitié du " trajet " séparant G^0 de G^{hom} est déjà réalisée avec l'approximation G^3 *(même si le caractère non quadratique de G^{hom} dans la zone $\Sigma_1\ \Sigma_2 \geq 0$ n'est pas encore observé).*

Toutefois, au fur et à mesure que p croît, l'amélioration de l'approche cinématique de G^{hom} est plus faible et l'efficacité de cette approche trouve ses limites :

Si dans la zone où $\Sigma_1\ \Sigma_2 \geq 0$, G^{hom} est quasiment confondu avec G^8 *(figure 9)* , il n'en est pas de même das la région $\Sigma_1\ \Sigma_2 \leq 0$ où, en dépit de l'augmentation de p, G^p reste assez loin de G^{hom} *(plus de 10 % d'écart pour p = 8)* .

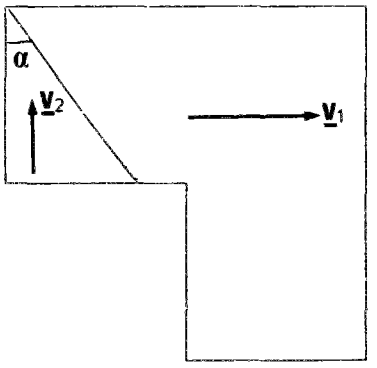
Afin d'illustrer et tenter de donner une explication à ce qui vient d'être observé, examinons de près deux directions de déformation macroscopique significatives :
$\theta = 0°$ et $\theta = -45°$.

A. Direction de déformation à 0° ($D_2 = 0$)

L'étude analytique menée au premier chapitre montre que dans ce cas, la droite tangente à G^{hom} à pour équation :

$$\Sigma_1 = l^{hom} = (1 - \lambda)\, \sigma_0 = 0{,}5\, \sigma_0 \qquad (2.\ 21)$$

Rappelons que ce résultat fut acquis à l'aide du champ de vitesse " par blocs " suivant :



$\underline{v}_1 = V\,\underline{e}_1 \qquad \underline{v}_2 = V\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\underline{e}_2$

$\alpha = \mathrm{arctg}\,1/\sqrt{2} \simeq 35°$

Figure 10 .

$\Sigma_1 = l^p$ désignant l'équation de la droite tangente à G^p, le graphique ci-après donne l'évolution de l^p/σ_0 en fonction de p *(figure 11)* .

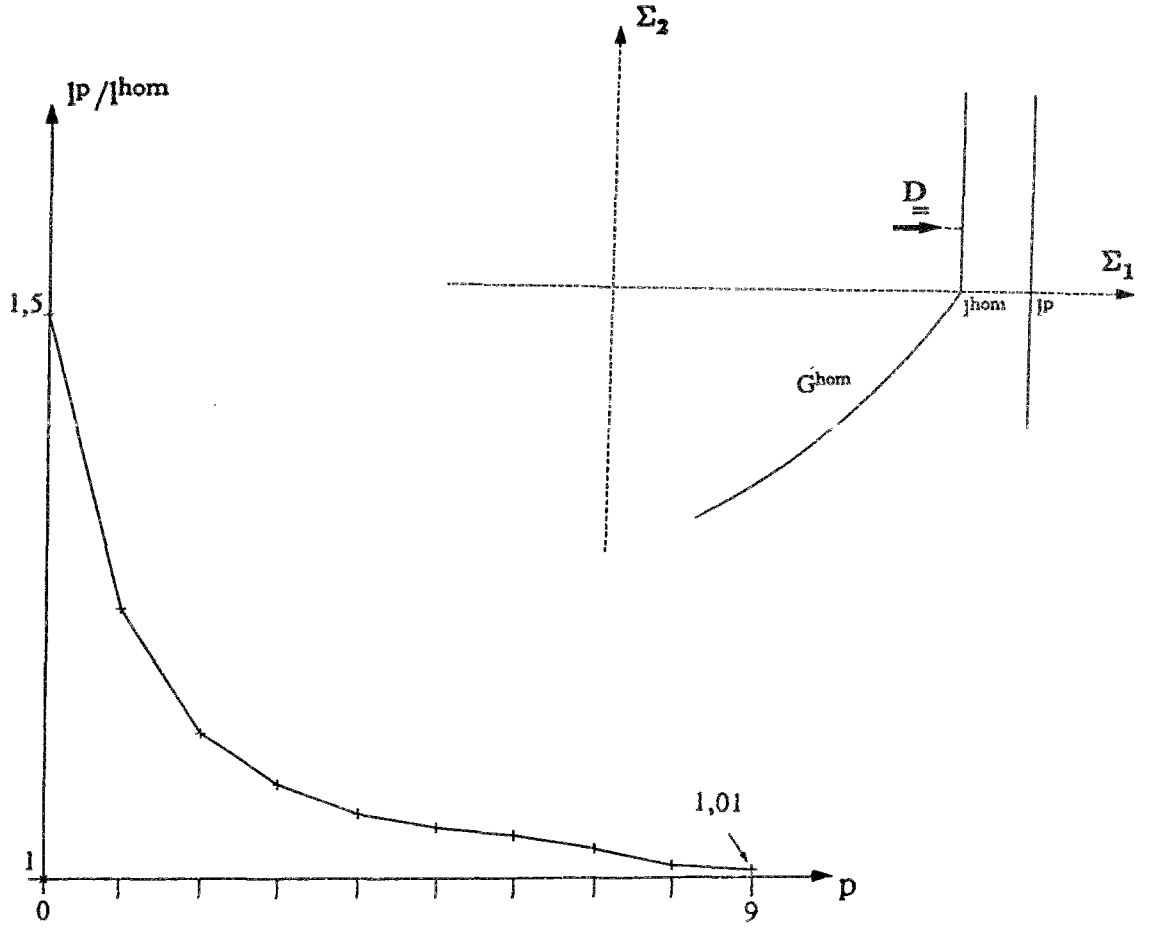


Figure 11 : Evolution de l^p en fonction de p . $\theta = 0°$.

Si on note l^0 , la valeur de l^p correspondant au champ homogène dans la cellule, on constate bien " la convergence " de l^p vers l^{hom} :

$$l^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_0 \simeq 0{,}866\ \sigma_0 \quad ; \quad l^8 = 0{,}508\ \sigma_0 \quad ; \quad l^9 = 0{,}505\ \sigma_0$$

On peut raisonnablement estimer qu'à partir de p = 8 , le résultat escompté est atteint .
Sur *la figure 12*, nous illustrons le champ de vitesse $\underline{v}$ optimal correspondant à p = 8 .

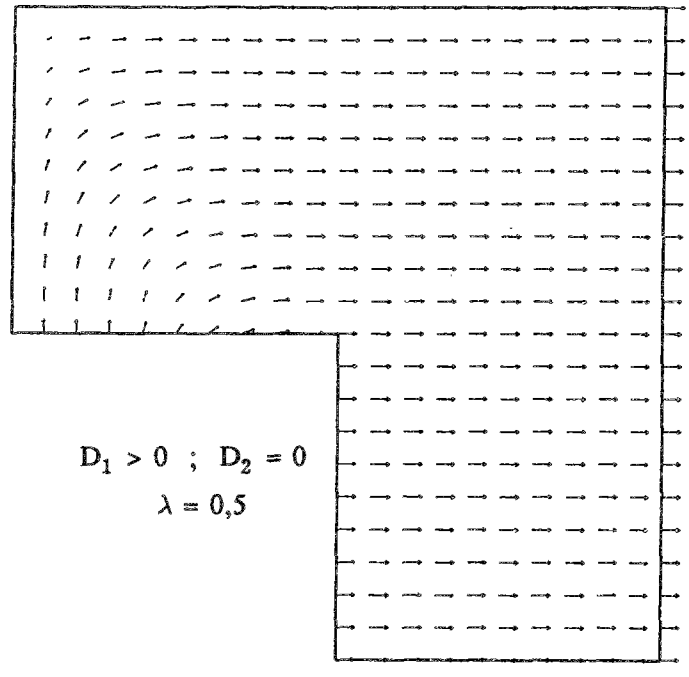


Figure 12 : Distribution du champ de vitesse optimal sur a pour p = 8 .

On remarque la similitude évidente d'un tel champ avec celui, discontinu, de *la figure 10* donnant analytiquement la solution exacte. Toutefois, malgré une certaine localisation des déformations dans la partie supérieure gauche de la cellule, cette localisation reste assez diffuse, comme le montre *la figure 13* , où on a représenté les isovaleurs de la fonction π ($\underline{\underline{d}}$) sur la cellule. Notons que π ($\underline{\underline{d}}$) constitue une norme, permettant de mesurer l'amplitude des déformations dans a .

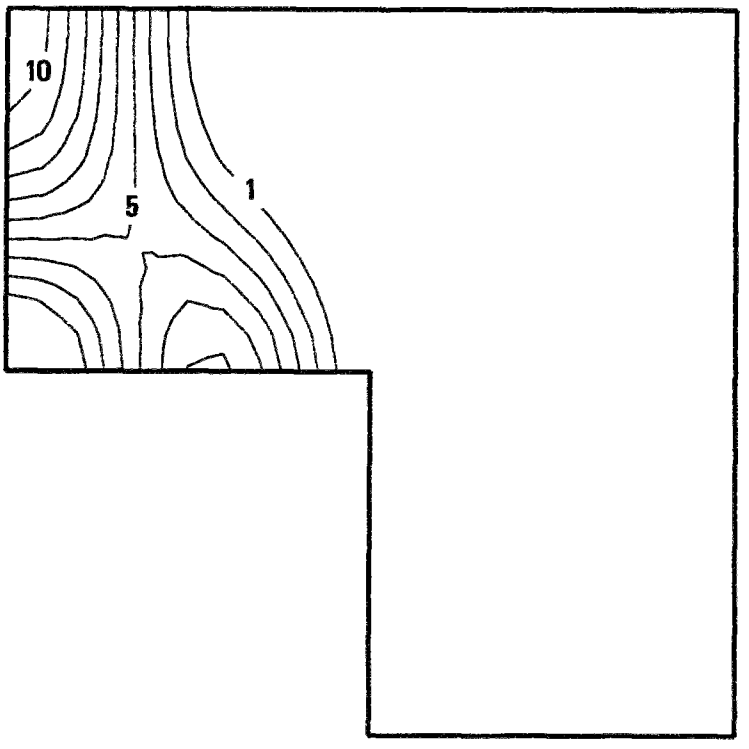


Figure 13 : Isovaleurs de π ($\underline{\underline{d}}$) pour p = 8 .

Sauf dans la partie supérieure gauche de la cellule, la valeur de cette norme de déformation est quasiment nulle dans le reste de la cellule.

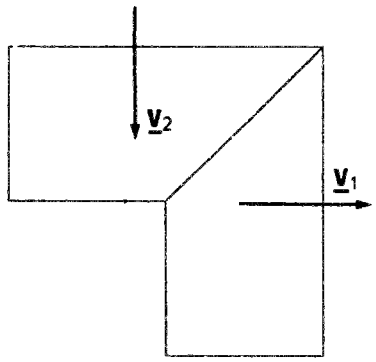
Les graphiques précédents montrent que le champ de vitesse optimal n'est pas unique : on obtient la valeur de l^{hom} à 1 % près (avec p = 9) grâce à un champ continu.

B. Direction de déformation à -45° ($D_2 = -D_1$)

Dans ce cas, l'équation de la droite tangente à G^{hom} est :

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 = l^{hom} = (1 - \lambda) \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} = \sigma_0/\sqrt{3} \simeq 0{,}577\, \sigma_0 \qquad (2.\ 22)$$

Rappelons que ce résultat fut acquis à l'aide du champ de vitesse " par blocs " suivant :



$\underline{v}_1 = V\,\underline{e}_1 \qquad \underline{v}_2 = -V\,\underline{e}_2$

Figure 14 .

Comme en A. , $\Sigma_1 - \Sigma_2 = l^p$ désignant l'équation de la droite tangente à G^p, le graphique ci-après donne l'évolution de l^p/σ_0 en fonction de p *(figure 15)* .

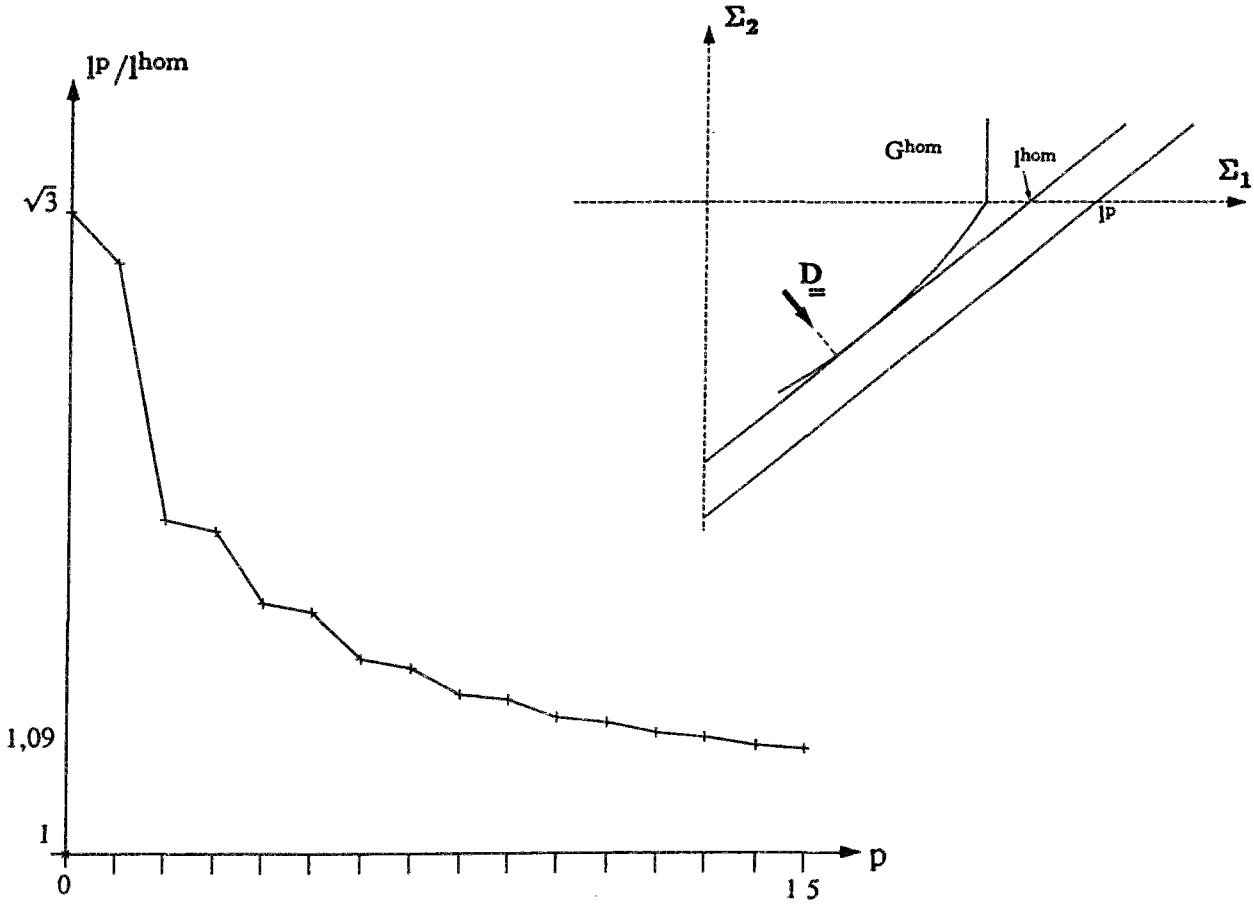


Figure 15 : Evolution de l^p en fonction de p . $\theta = -45°$.

Afin de bien se rendre compte de cette évolution, nous donnons certaines valeurs de l^p :

$$l^0 = 1{,}5\ l^{hom}\ ;\ l^2 \simeq 1{,}25\ l^{hom}\ ;\ l^8 \simeq 1{,}12\ l^{hom}\ ;\ l^{12} \simeq 1{,}1\ l^{hom}\ ;\ l^{15} \simeq 1{,}09\ l^{hom}$$

Si pour les premiers ordres de développement, l^p décroît de façon significative, il n'en est pas de même pour les ordres suivants. Au moins jusqu'à l'ordre 15, l^p ne semble pas converger vers l^{hom} , mais au contraire " stagne " à une valeur dont l'écart avec l^{hom} est à peine inférieur à 9 % . Encore faut-il regarder d'un oeil critique les résultats correspondant à des p grands, tant des problèmes de précision de calcul se posent , notamment ceux de l'évaluation numérique de l'intégrale définissant F_p.

Poursuivre les développements à des ordres supérieurs est peu réaliste :

- car lourds à mettre en oeuvre, la dimension de U_p devenant vite très grande : pour p = 15 , le nombre de variables de minimisation est déjà de 240 ! .
- de plus, l'évaluation de F^p par intégration numérique nécessite une discrétisation de plus en plus fine de la cellule de base, afin d'obtenir une précision suffisante : l'expression de la fonction à intégrer comporte des termes à variations très rapides .

Le cas étudié ($\theta = -45°$) permet de se rendre compte des limites de l'approche . Avant d'essayer d'en fournir une explication, examinons le champ de vitesse optimal et la distribution de π ($\underline{\underline{d}}$) dans la cellule, obtenus pour p = 8 .

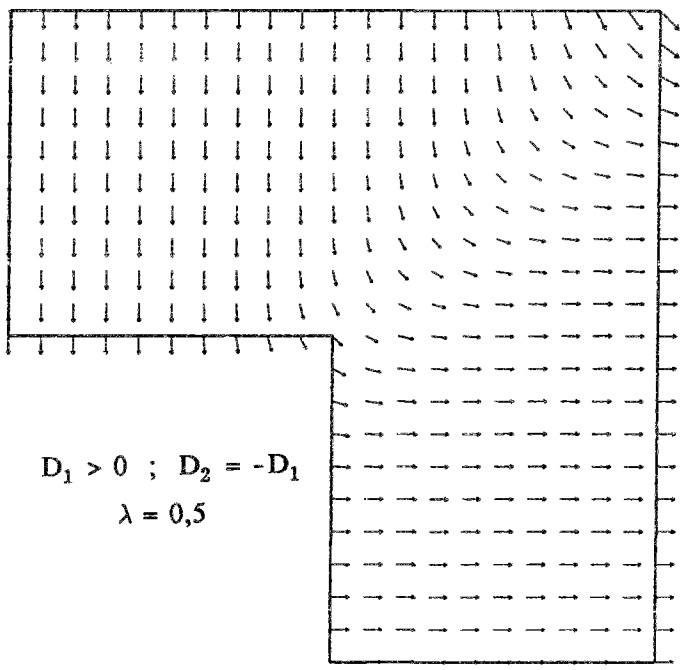


Figure 16 : champ de vitesse $\underline{v}$ pour $p = 8$. $\theta = -45°$.

Notons que les champs $\underline{v}$ ont une forme similaire pour des valeurs supérieures de p. On se rend compte de la similitude frappante avec le champ discontinu de *la figure 14* , conduisant à la solution exacte. On peut donc raisonnablement avancer que l'approche numérique tend à se "rapprocher" de cette discontinuité. Ce dernier point est encore plus marquant, quand on visualise π ($\underline{\underline{d}}$) sous forme d'isovaleurs *(figure 17)* ou sous forme de variations sur la cellule *(figure 18)* : la déformation est quasiment nulle en dehors d'une bande entourant la diagonale $x_1 = x_2$.

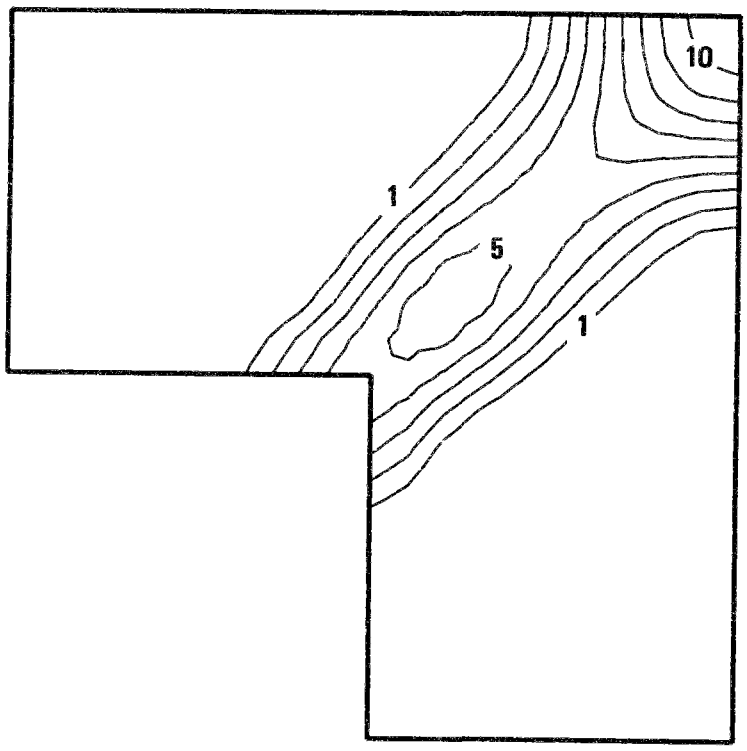


Figure 17 : Isovaleurs de π ($\underline{\underline{d}}$) pour p = 8 . θ = -45°

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
CENTRE PÉDAGOGIQUE DE DOCUMENTATION ET DE COMMUNICATION

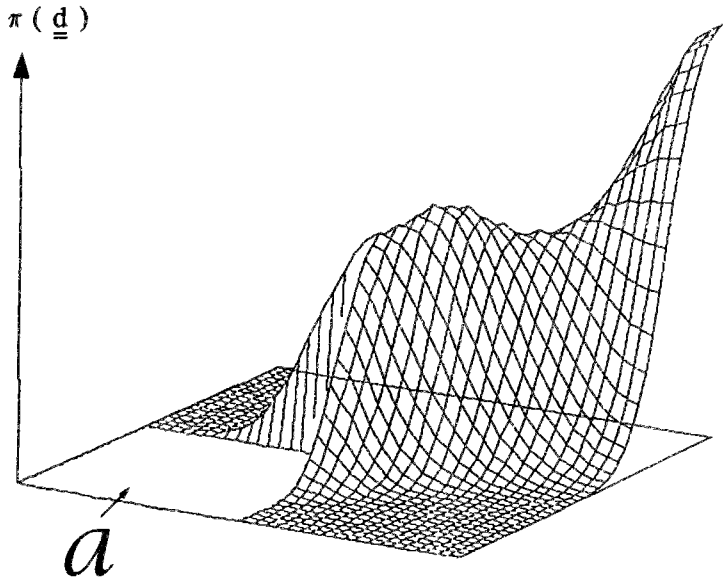


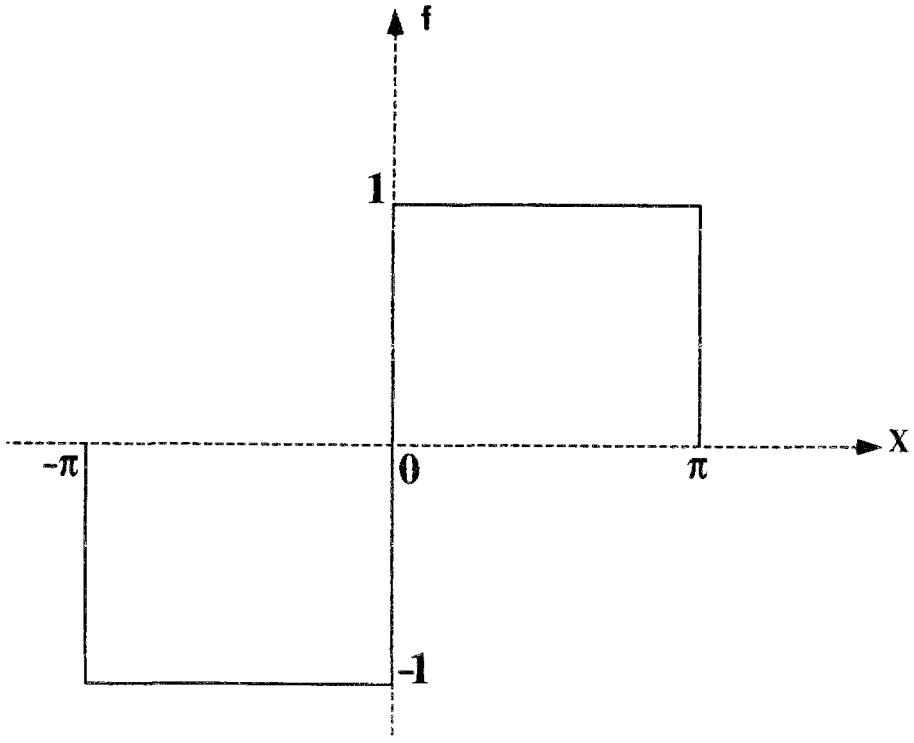
Figure 18 : variations de π ($\underline{\underline{d}}$) pour p = 8 . θ = -45° .

TENTATIVE D'EXPLICATION DES LIMITES DE L'APPROCHE

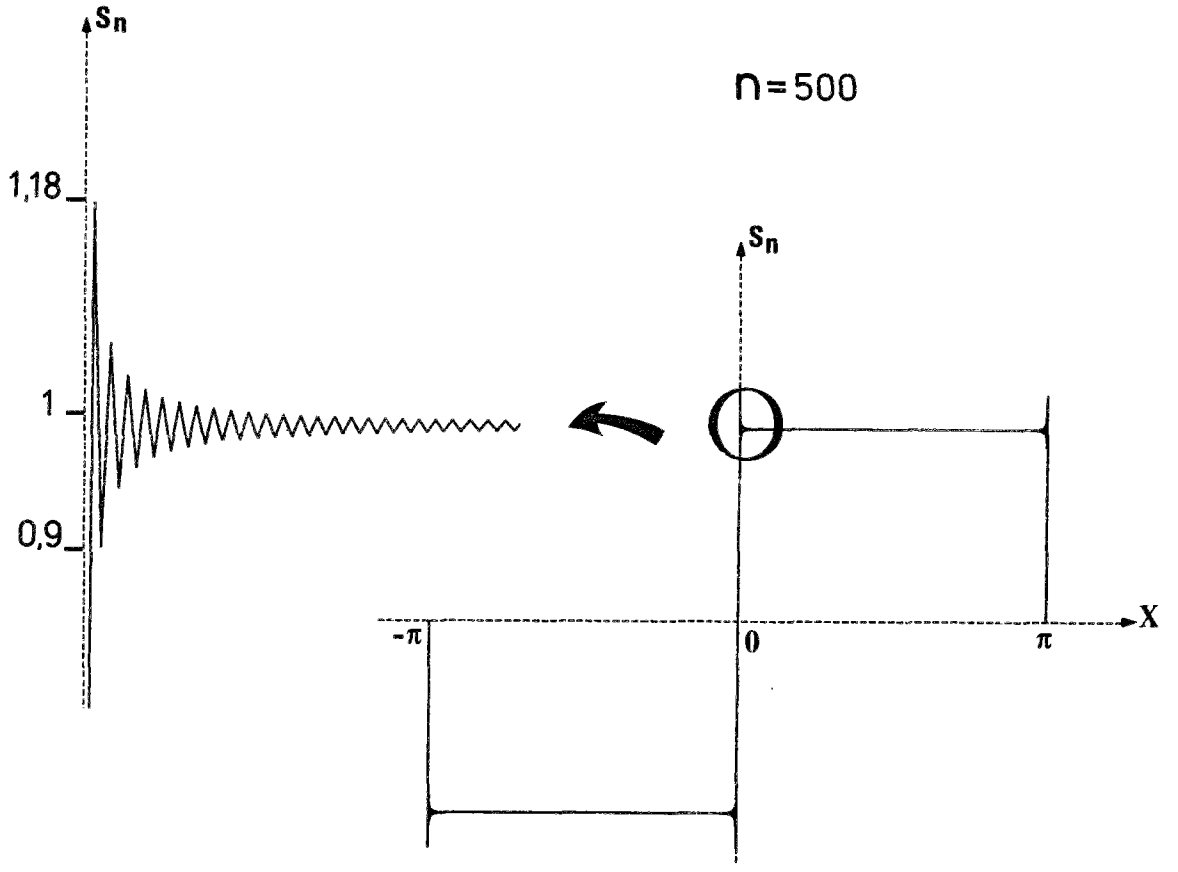
Plus p croît, plus le "rétrécissement" de la bande de localisation de la déformation est accentué, et plus le champ optimal résultant de la minimisation tend à se "rapprocher" du champ discontinu de *la figure 14* . Ceci incite à penser que le seul champ de vitesse solution du problème est précisément le champ discontinu . Autrement dit, il n'existerait pas de champ de vitesse continu permettant d'obtenir la solution exacte.
Auquel cas, l'inefficacité de l'approche par décomposition en séries de Fourier se trouve expliquée par le phénomène connu en mathématiques sous le nom : **Phénomène de Gibbs** .

Les détails concernant ce dernier point figurent en **annexe IV** , mais de façon sommaire, il peut être résumé par :

Etant donné la fonction f périodique , de période 2π et dont le graphe est :



Alors la série de Fourier correspondante ne converge pas vers f, mais vers la fonction dont le graphe est le suivant :



Ceci explique donc, pourquoi l'approche numérique par décomposition en séries de Fourier ne conduit pas à la solution.

Conclusion :

L'approche utilisée paraissait séduisante au départ, de par la nature du problème à traiter (périodicité). Elle est *a priori* efficace dans les cas où, parmi les champs de vitesse solution du problème, il en existe au moins un qui soit continu en tout point de la cellule (cas du fil et de la plaque trouée pour $\theta = 0°$).
A défaut de cette condition, sa performance est limitée et ne peut fournir une approximation satisfaisante du convexe G^{hom} (plaque trouée pour $\theta = -45°$). D'autant plus, qu'elle exigerait des développements à des ordres élevés, ce qui, numériquement, nous confronterait à de sérieux problèmes de précision et à des calculs dont l'ampleur est dissuasive .

Nous abandonnerons donc cette approche au profit d'un nouveau choix des sous-espaces U_p .

3. APPROCHE NUMÉRIQUE PAR DISCRÉTISATION

3.1. Principe

Dans la mesure où elle est fondée sur une subdivision spatiale de la cellule de base en sous-domaines élémentaires, cette approche peut s'apparenter aux méthodes des éléments finis. Toutefois, et pour éviter toute confusion, nous éviterons cette dernière terminologie. L'approche envisagée de G^{hom} nécessitant, pour une déformation macroscopique $\underline{\underline{D}}$ donnée, la minimisation d'une fonctionnelle sur des espaces de champs de vitesse dont la dimension est finie, il paraît assez naturel d'utiliser cette méthode, qui permet d'explorer toute une classe de champs (Delbecq et coll., 1977).

En transposant les conditions de périodicité portant sur les éléments de **U**, directement sur les champs de vitesse cinématiquement admissibles $\underline{v} = \underline{\underline{D}}\,\underline{x} + \underline{u}$ comme indiqué en 3.3 - chap. I , il est équivalent et plus commode de raisonner sur ces derniers *(au lieu des éléments de U)* .

On conservera les mêmes définitions, à savoir G^p , π^p et F_p , mais en substituant aux sous-espaces $\mathbf{U}_p$ leurs homologues $\mathbf{C}_p$. Rappelons que :

$$\pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) = \inf_{\underline{v} \in \mathbf{C}} \langle \pi(\underline{d}) \rangle \quad ; \quad \pi^p(\underline{\underline{D}}) = \inf_{\underline{v} \in \mathbf{C}_p} \langle \pi(\underline{d}) \rangle \qquad (3.1)$$

Pour un maillage donné, la construction des sous-espaces $\mathbf{C}_p$ se fait de la façon suivante (*):

- <u>discrétisation de type (1)</u>

$\underline{v}$ est affine par morceaux, c'est à dire que $\mathbf{C}_p$ est engendré par les champs élémentaires valant l'unité, selon l'une des deux directions du plan, <u>en un noeud donné</u> et nul ailleurs (fonctions " chapeaux " : *figure 19*). Dans ce cas, p désignera le nombre de noeuds du maillage.

(*) En faisant abstraction, pour l'instant, des conditions de périodicité .

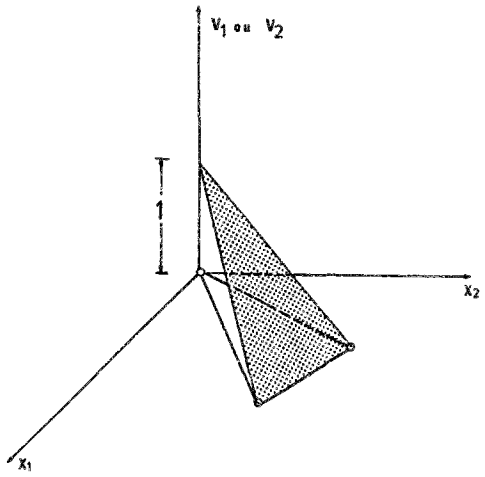


Figure 19 : champ élémentaire . discrétisation (1) .

•• discrétisation de type (2)

$\underline{v}$ est constant par morceaux, c'est à dire que C_p est engendré par les champs élémentaires valant l'unité, selon l'une des deux directions du plan, en un élément donné et nul ailleurs. p désignera alors le nombre d'éléments du maillage.

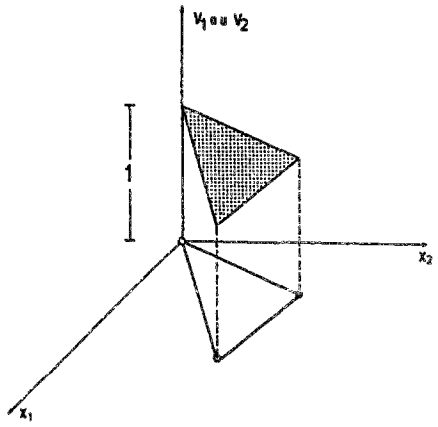


Figure 20 : champ élémentaire . discrétisation (2) .

La dicrétisation de type (1) (respectivement de type (2)) conduit à une approche par l'extérieur de G^{hom} au moyen de champs de vitesse continus (resp. discontinus) sur a .

3.2. Mise en oeuvre

Elle comporte deux volets :

α) La discrétisation du problème .

β) Le processus de minimisation numérique .

Le maillage de la cellule est constitué d'éléments choisis très simplement. Ce choix est justifié *a posteriori* par les résultats eux-mêmes. On utilisera des éléments triangulaires :

- Pour la discrétisation de type (1) , $\underline{v}$ est continu et affine par morceaux. Il est complétement déterminé par la donnée de ses valeurs aux noeuds (sommets) des éléments .

- Dans la discrétisation de type (2) , $\underline{v}$ est constant par morceaux engendrant des discontinuités entre éléments adjacents.

Nous précisons que ces deux approches ne sont pas combinées, mais effectuées par des calculs séparés .

Donc :

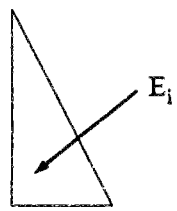
$$\forall\ \underline{x} \in a \quad \underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_p) \qquad (3.2)$$

où $\underline{v}_i$ est la vitesse au noeud (resp. élément) i pour la discrétisation (1) (resp. discrétisation (2)).

Expression discrétisée de $< \pi(\underline{\underline{d}}) >$

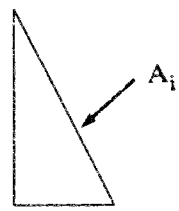
- Discr. (1) : Sur chaque élément E_i , $\underline{\underline{d}}$ et donc $\pi(\underline{\underline{d}})$ sont constants . Notons π_{E_i} la valeur de cette dernière sur l'élément E_i de surface S_{E_i} :

$$< \pi(\underline{\underline{d}}) > = \sum_i S_{E_i}\ \pi_{E_i} \qquad (3.3)$$



- Discr. (2) : Sur chaque élément E_i , $\underline{\underline{d}}$ est nul et $< \pi(\underline{\underline{d}}) >$ se réduit aux termes de discontinuité. Soit π_{A_i} la valeur constante de $\pi(\underline{n}, [\underline{v}])$ le long de l'arrête A_i de longueur L_{A_i} , séparant deux éléments adjacents :

$$< \pi(\underline{\underline{d}}) > = \sum_i L_{A_i}\ \pi_{A_i} \qquad (3.4)$$



On constate, de par le choix des sous-espaces C_p, que $< \pi(\underline{\underline{d}}) >$ se calcule directement, par simple sommation sur les éléments (discrétisation de type (1)) ou sur les segments séparant deux éléments adjacents (discrétisation de type (2)) , sans recourir à une intégration numérique . Cette particularité évite les problèmes de précision liés à cette dernière opération, problèmes qui se sont révélés préjudiciables dans de l'approche par séries de Fourier .

Variables de minimisation

Pour $\underline{\underline{D}}$ donné, $< \pi(\underline{\underline{d}}) >$ dépend de 2p variables qui sont :

- les composantes de $\underline{v}$ aux p noeuds du maillage pour la discrétisation (1) .
- les composantes de $\underline{v}$ aux p éléments du maillage pour la discrétisation (2) .

Ces 2p variables ne sont pas toutes indépendantes. On exprime les conditions résultant de la périodicité sur les vitesses $\underline{v}$ aux noeuds (ou éléments) du bord de a . Ces conditions étant linéaires, elles permettent d'exprimer facilement $< \pi(\underline{\underline{d}}) >$ uniquement en fonction d'un certain nombre de ces variables, mais qui sont toutes indépendantes, soit n_p ce nombre. n_p est la dimension de C_p :

n_p = 2p - (nombre de relations linéaires exprimant la périodicité)

Soit $\underline{\tilde{v}}$ le vecteur de R^{n_p} dont les composantes sont justement ces variables indépendantes, alors :

$$\forall\ \underline{v} \in C_p \qquad F_p\ (\underline{\underline{D}}\ ;\ \underline{\tilde{v}}\ ) = < \pi\ (\underline{\underline{d}}(\underline{\tilde{v}}\ )\ ) > \tag{3. 5}$$

et la fonction d'appui du convexe G^p est définie par :

$$\boxed{\pi^p\ (\underline{\underline{D}}\ ) = \min_{\underline{\tilde{v}}\ \in R^{n_p}} F_p\ (\underline{\underline{D}}\ ;\ \underline{\tilde{v}}\ )} \tag{3. 6}$$

L'étape de minimisation termine la résolution numérique du problème traité.

3.2 Dispositions pratiques

Dans certains cas, tels ceux où le champ optimal correspond à une déformation localisée dans une région de a , l'estimation précise de G^{hom} nécessite des maillages très fins et donc, des espaces C_p de dimension importante. Afin d'y remédier, tout en assurant une bonne précision et des temps de calcul raisonnables, les dispositions suivantes *(incluses dans le code numérique)* ont été adoptées.

Soit $\underline{\underline{D}}$ donné. On effectue un premier calcul sur un maillage initial assez grossier, débouchant sur la détermination d'un champ optimal $\underline{v}_0$.

Suivent ensuite, une série (en fait, un ou deux) de " petits " calculs selon l'un des procédés suivants :

A. Remaillage manuel

Employé seulement pour des calculs ponctuels, car nécessitant l'intervention de l'utilisateur entre deux calculs successifs. En visualisant par exemple, la distribution d'une norme de $\underline{\underline{d}}$ *(associée à* $\underline{v}_0$ *)* dans la cellule, on procède à un remaillage plus fin dans les régions où celà est nécessaire. Le calcul est ensuite effectué sur le nouveau maillage en " n'activant " (c'est à dire en ne considérant comme variables de minimisation), que les valeurs de vitesse aux noeuds dans certaines régions (par exemple, là où il y a localisation de la déformation), les autres demeurant fixes égales à celles de $\underline{v}_0$. Après minimisation, le champ optimal ainsi obtenu jouera le rôle de $\underline{v}_0$, et on répète ainsi l'opération autant de fois que nécessaire.
Cette disposition permet de ne mailler "fin" et de ne faire varier les vitesses que là où c'est nécessaire.

Exemple :

Illustrons cette opération sur la structure perforée traitée en § 2.1. du présent chapitre, pour la direction de déformation macroscopique $\theta = -45°$. On a vu que la méthode de décomposition en séries de Fourier devenait inopérante dans ce cas. Signalons tout d'abord, qu'on obtient immédiatement le résultat avec un calcul utilisant la discrétisation de type (2) , puisque le champ optimal est un champ discontinu *(figure 14)*.

Nous avons mis en oeuvre la discrétisation de type (1) sur un premier maillage *(figure 21)*, comportant p = 42 noeuds, 64 éléments et correspondant à $n_p = 66$ variables indépendantes de minimisation :

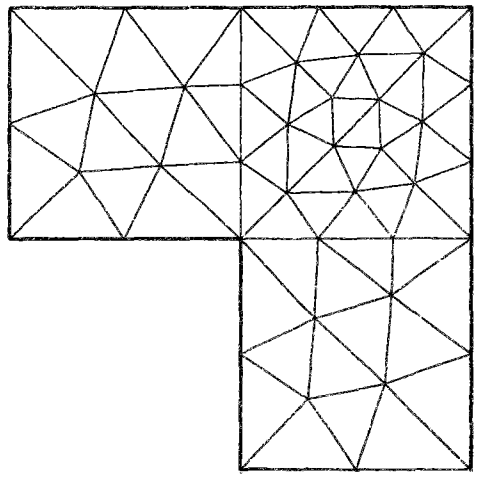


Figure 21 : maillage 1 de a .

Le premier calcul, effectué sur ce maillage, fournit un champ optimal $\underline{v}_0$ (figure 22) et l'estimation :

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 = 0{,}66\ \sigma_0 \simeq 1{,}15\ l^{hom}$$

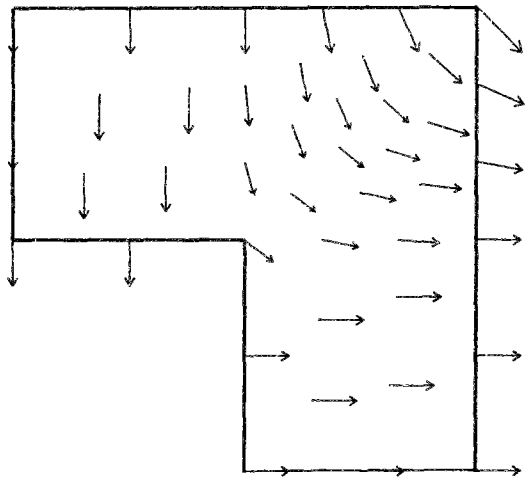


Figure 22: champ $\underline{v}_0$.

Constatant que la déformation a tendance à se localiser autour de la diagonale $x_1 = x_2$, On remaille plus finement a autour de celle-ci. D'où le second maillage *(figure 23)* , qui comporte p = 113 noeuds et 200 éléments. Toutefois, Durant ce second calcul, seuls les noeuds inclus dans la bande définie par $| x_1 - x_2 | \leq 0{,}05$ sont activés, les autres noeuds gardant une vitesse fixe égale à la valeur donnée par $\underline{v}_0$. Ainsi, le nombre de variables de minimisation n'augmente que peu : $n_p = 118$.

On obtient alors, l'estimation :

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 = 0{,}59\ \sigma_0 \simeq 1{,}03\ l^{hom}$$

correspondant au champ de vitesse optimal donné sur *la figure 24* .

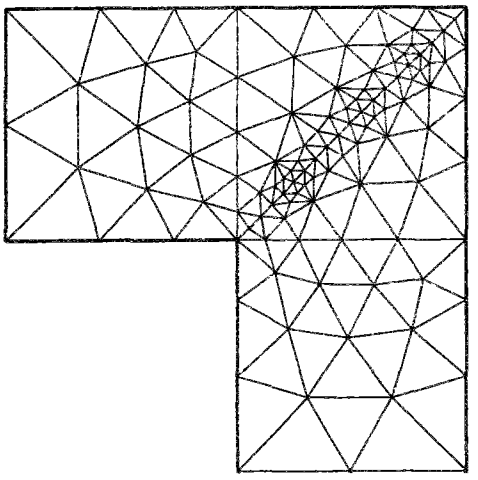


Figure 23 : second maillage de a .

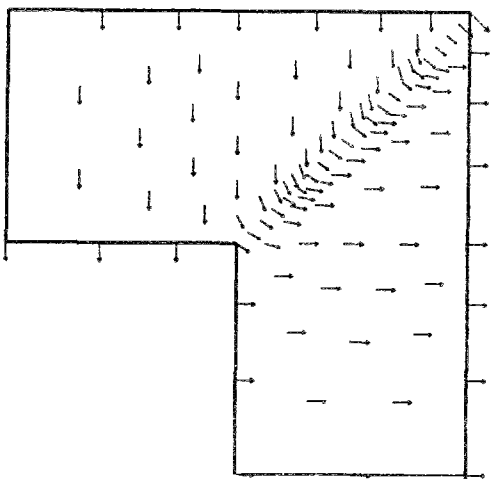


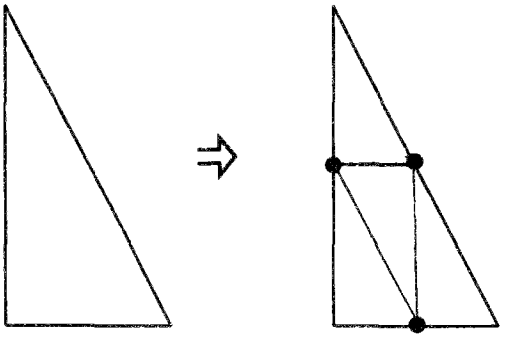
Figure 24 : champ de vitesse optimal .

B. Remaillage automatique

Cette opération est plus lourde que la précédente, mais beaucoup plus adaptée pour les calculs systématiques (calculs effectués en série correspondant à tous les $\underline{\underline{D}}$ nécessaires à l'estimation de G^{hom}), sans intervention de l'utilisateur entre deux calculs.

Pour l'instant, cette option n'a été implantée que pour l'approche numérique par la discrétisation de type (1) :

Le maillage est affiné en ajoutant automatiquement des noeuds aux milieux des segments joignant les noeuds de l'étape précédente :



Toutefois, si le nombre de noeuds augmente sensiblement, celui des variables de minimisation n'augmente pas dans les mêmes proportions (dans certains cas, il varie très peu) , car on n'active que les valeurs des vitesses aux noeuds qui ont significativement varié entre deux calculs successifs . Les autres gardant les valeurs du champ $\underline{v}$ du calcul précédent. Et on répétera l'opération autant de fois que nécessaire .

Remarque :

Le code disponible actuellement, permet de traîter dans le cas de la contrainte plane, tous les problèmes correspondant à une cellule de base rectangulaire et comportant des inclusions en nombre quelconque et de formes quelconques, sans restriction sur leur disposition géométrique dans la cellule .

3.2 Validation de la méthode : cas du matériau multicouche

Signalons au préalable que la mise en oeuvre de cette méthode, dans le cas du fil donne des résultats immédiats. Le matériau multicouche est l'exemple type de milieu hétérogène dont les capacités de résistance présentent une périodicité suivant une direction de l'espace (direction normale à la surface de séparation des deux constituants).

Se plaçant dans le formalisme du milieu continu bidimensionnel repéré dans les axes Ox_1x_2, de Buhan (1986) a formulé la définition générale du convexe de résistance macroscopique G^{hom} d'un tel milieu. Nous y renvoyons pour le raisonnement qui a conduit à cette construction.

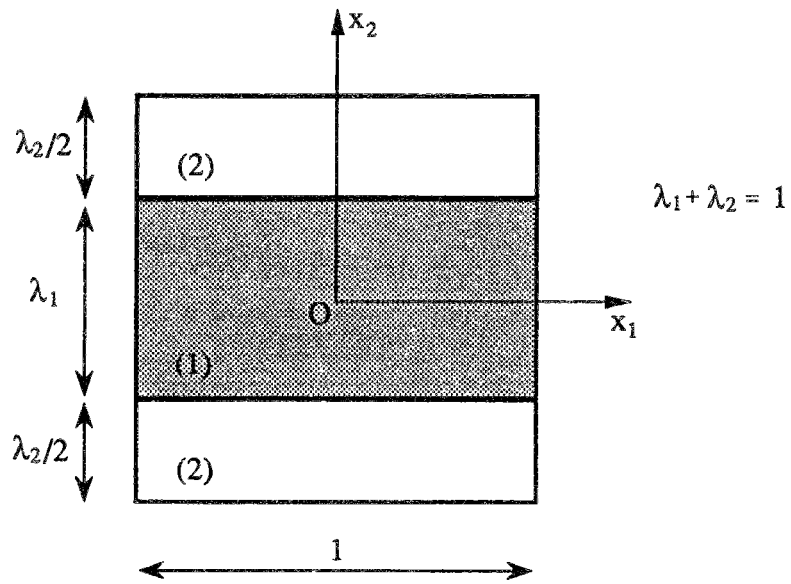


Figure 25 : cellule de base du matériau multicouche .

λ_1 (respectivement λ_2) est la proportion du constituant (1) (resp. (2)) dans le composite ainsi défini.

Nous nous plaçons dans le cas où :

- chacun des matériaux (i), i = 1 , 2 , obéit au critère de Von mises en contrainte plane, caractérisé par le convexe G_i de R^3 . La limite en traction simple est notée σ_{0i} , avec $\sigma_{01} \leq \sigma_{02}$
- l'adhérence est parfaite entre les deux constituants.

En notant Σ_{11}, Σ_{22} et Σ_{12} les composantes de $\underline{\underline{\Sigma}}$ dans le plan Ox_1x_2 , la définition de G^{hom} obtenue par un calcul analytique est :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Leftrightarrow \begin{cases} (\Sigma_{22} , \sqrt{2}\, \Sigma_{12}) \in G_1^{proj} \\ \Sigma^+ \leq \Sigma_{11} \leq \Sigma^- \end{cases} \qquad (3.7)$$

où :

- G_1^{proj} est la projection du domaine G_1 sur le plan (Σ_{22} , $\sqrt{2}\, \Sigma_{12}$) .
- $\Sigma^+ = \lambda_1 \sigma_1^+ + \lambda_2 \sigma_2^+$ et $\Sigma^- = \lambda_1 \sigma_1^- + \lambda_2 \sigma_2^-$ avec :

$$\sigma_i^+ = \sup \{ \sigma_{11} \mid (\sigma_{11} , \Sigma_{22} , \sqrt{2}\, \Sigma_{12}) \in G_i \}$$
$$\sigma_i^- = \inf \{ \sigma_{11} \mid (\sigma_{11} , \Sigma_{22} , \sqrt{2}\, \Sigma_{12}) \in G_i \}$$

Cette définition équivaut dans notre cas à :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma_{pr}^2 = 3\Sigma_{22}^2 + 12\Sigma_{12}^2 \leq 4\sigma_{01}^2 \\ | 2\Sigma_{11} - \Sigma_{22} | \leq \lambda_1 \sqrt{4\sigma_{01}^2 - \Sigma_{pr}^2} + \lambda_2 \sqrt{4\sigma_{02}^2 - \Sigma_{pr}^2} \end{cases} \qquad (3.8)$$

Application numérique :

Nous allons illustrer la mise en oeuvre de l'approche numérique présentée ci-dessus en prenant :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}5 \quad ; \quad \sigma_{02}/\sigma_{01} = 2$$

et

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}$$

C'est à dire que les directions principales du chargement macroscopique coincident avec les axes $0x_1$ et $0x_2$.

Indépendamment du cas particulier traité, on peut se restreindre à la moitiée de la cellule définie par : $x_1 \geq 0$ (même si dans notre cas de chargement, le quart de la cellule suffirait), en exprimant que les champs de vitesse sont symétriques par rapport à l'origine, prise au centre de la cellule.

Pour les calculs numériques, les deux types de discrétisations on été mises en oeuvre :

- *La figure 26* représente le maillage, assez grossier (64 éléments, 45 noeuds), utilisé pour la discrétisation de type (1). Compte tenu des symétries et de la périodicité, le nombre de variables indépendantes de minimisation est $n_p = 61$. Nous avons gardé le même maillage tout au long des calculs.
- Le maillage utilisé pour le calcul par discrétisation de type (2) est représenté sur *la figure 27* (32 éléments), et le nombre correspondant de variables vaut $n_p = 58$. Ce maillage est conservé tout au long des calculs.

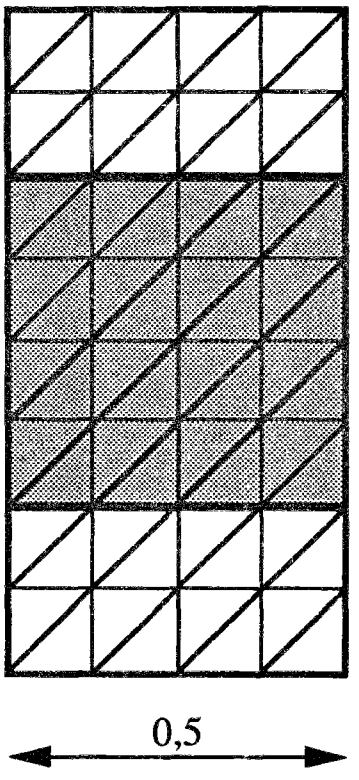


Figure 26 : maillage discr. (1) .

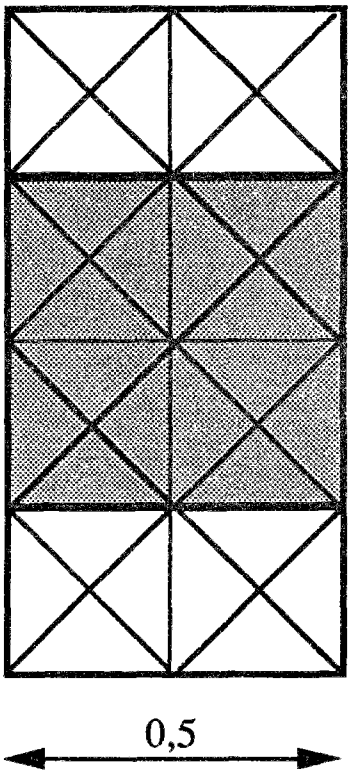


Figure 27 : maillage discr. (2) .

Discrétisation de type (1)

L'approximation numérique *(par l'extérieur)* du convexe G^{hom} coincide remarquablement avec ce dernier (moins de 1 % d'écart) . Rappelons que G^{hom} est donné par :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom} \Leftrightarrow \begin{cases} | \Sigma_{22} | \leq 2\sigma_{01}/\sqrt{3} \\ | 2\Sigma_{11} - \Sigma_{22} | \leq \lambda_1 \sqrt{4\sigma_{01}^2 - 3\Sigma_{22}^2} + \lambda_2 \sqrt{4\sigma_{02}^2 - 3\Sigma_{22}^2} \end{cases} \qquad (3.\ 9)$$

Sur *la figure 28*, nous reportons les convexes G_1 , G_2 , G^{hom} donné par *(3. 9)* et l'enveloppe de G^p obtenu numériquement ($p = 45$ et $n_p = 61$). A cause du faible écart le séparant de G^p , on ne peut distinguer les deux convexes (sur cette figure G^p " masque " G^{hom}).

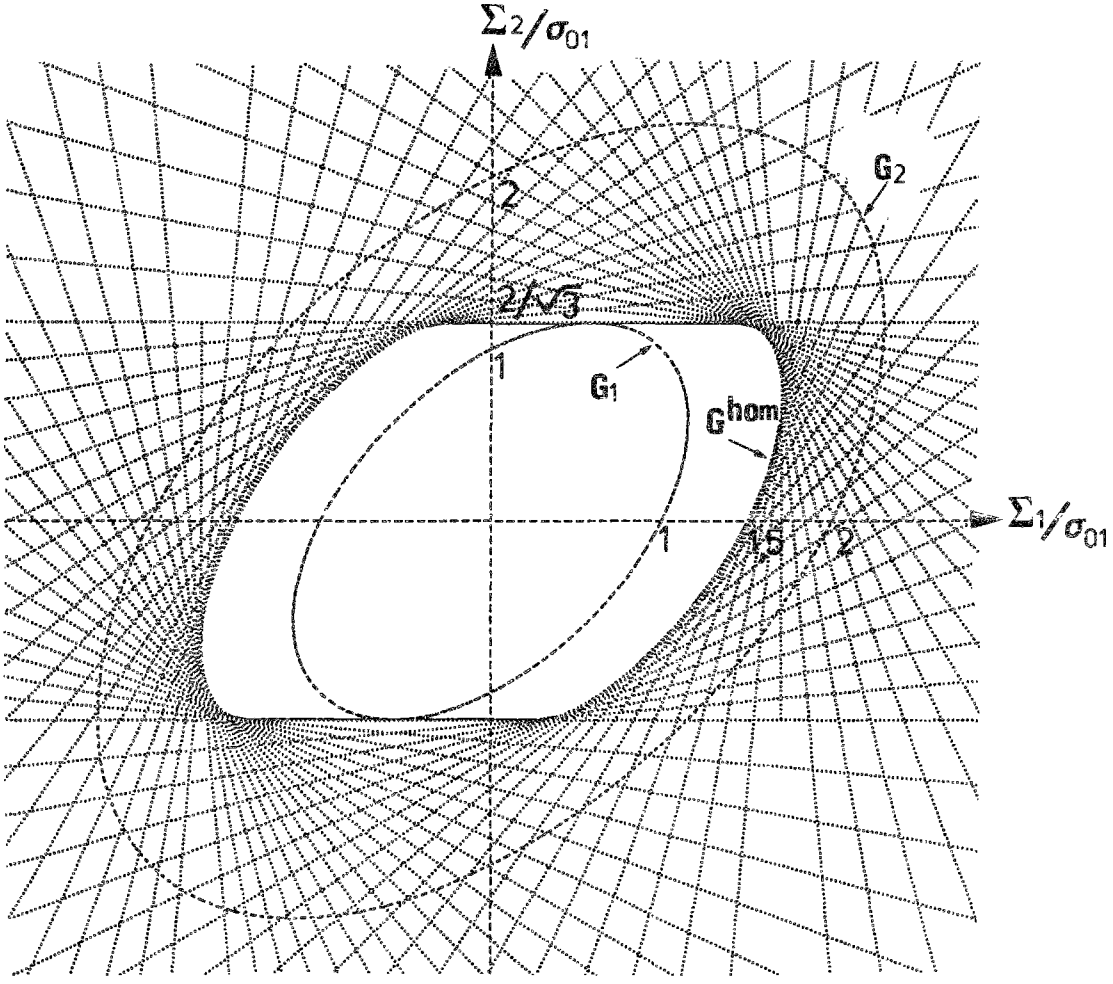


Figure 28 : Approche numérique de G^{hom} par discr. (1) .

D'une façon générale, nous constatons que les champs optimaux menant à la précédente construction de G_p, correspondent à des déformations homogènes dans chacun des deux constituants : $\underline{v}$ est de la forme $\underline{v} = \underline{\underline{d}}^i . \underline{x}$ dans le constituant (i) . Ceci confirme la défintion cinématique de G^{hom} donnée par de Buhan (1986) :

$$\pi^{hom}(\underline{\underline{D}}) = \begin{cases} \inf\limits_{(\underline{\underline{d}}^1, \underline{\underline{d}}^2)} \{ \lambda_1 \pi^1(\underline{\underline{d}}^1) + \lambda_2 \pi^2(\underline{\underline{d}}^2) \} \\ \text{avec} \quad \lambda_1 \underline{\underline{d}}^1 + \lambda_2 \underline{\underline{d}}^2 = \underline{\underline{D}} \qquad \text{et} \qquad d^1_{11} = d^2_{11} \end{cases}$$

où π^i est la fonction d'appui du constituant (i) et $\underline{\underline{d}}^i = (d^i_{kl})$ dans les axes Ox_1 et Ox_2 .

Discrétisation de type (2)

Quoique moins bonne que celle obtenue par champs affines par morceaux, l'approximation G^p ($p = 32$ et $n_p = 58$) de G^{hom} par champs discontinus est assez satisfaisante. L'écart maximal entre ces deux convexes est de l'ordre de 8 % , et peut s'expliquer par le fait que le maillage ne soit pas adapté pour certaines directions de déformation macroscopique (voisines de la direction 45°) .

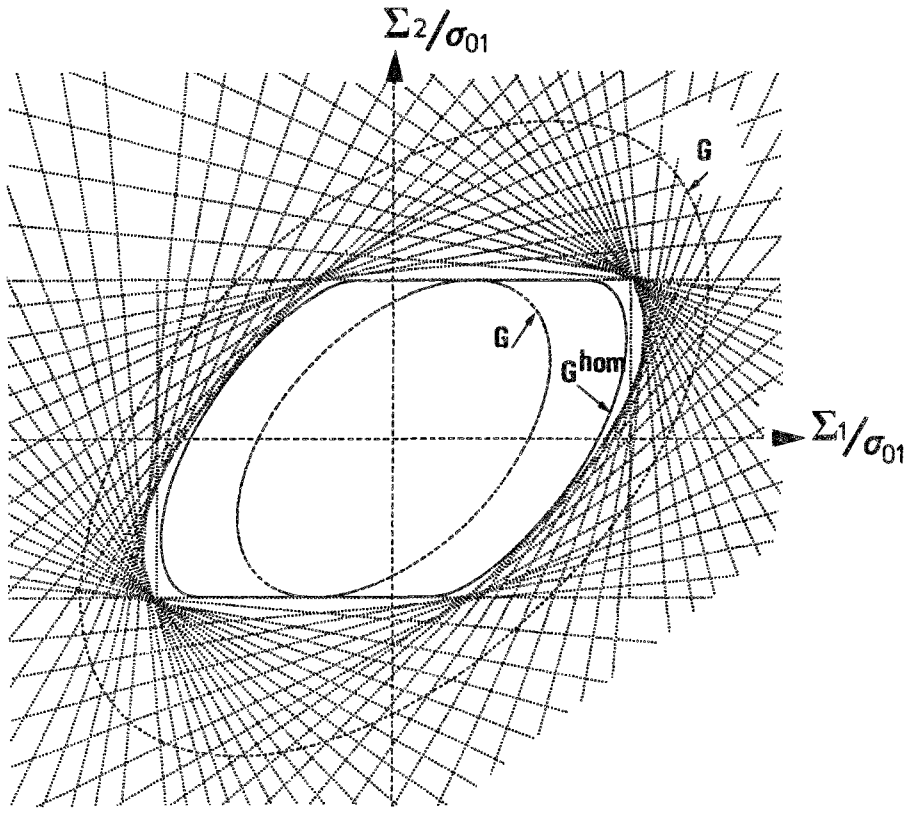


Figure 29 : Approche numérique de G^{hom} par discr. (2) .

Nous allons maintenant nous intéresser aux champs de vitesse optimaux dans certains cas particuliers. Nous précisons que dans les cas examinés, $\underline{\underline{d}}^1$ et $\underline{\underline{d}}^2$ admettent les axes Ox_1 et Ox_2 comme directions principales. Nous noterons θ^i la direction de déformation " microscopique " dans le constituant (i) .

Traction longitudinale ($\Sigma_2 = 0$)

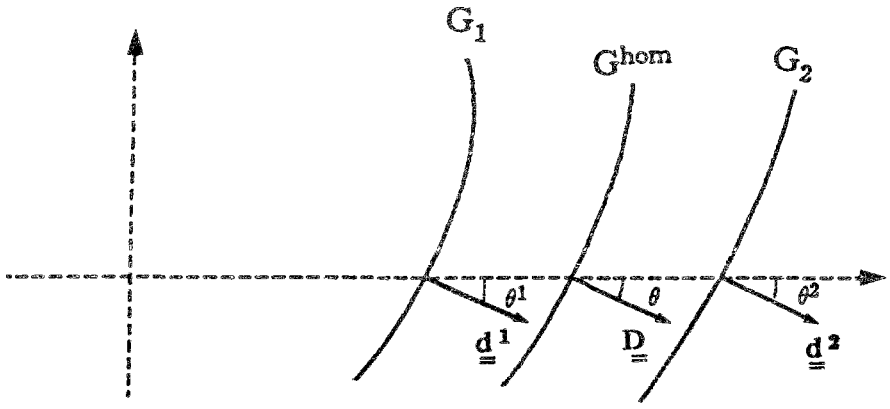
La limite en traction longitudinale est :

$$\Sigma_1^{hom} = \lambda_1 \sigma_{01} + \lambda_2 \sigma_{02} = 1{,}5 \sigma_{01} \qquad (3.\ 10)$$

1/ Concernant la discrétisation de type (1), La cellule se déforme, comme annoncé auparavant, de façon homogène et *la figure 30 (b)* représentant les isovaleurs de $||\underline{\underline{d}}|| = \sqrt{\mathrm{tr}\,\underline{\underline{d}}^2}$ montre que $\underline{\underline{d}}^1 = \underline{\underline{d}}^2$. La borne obtenue vaut :

$$\Sigma_1^{(1)} \simeq 1{,}501 \sigma_{01}$$

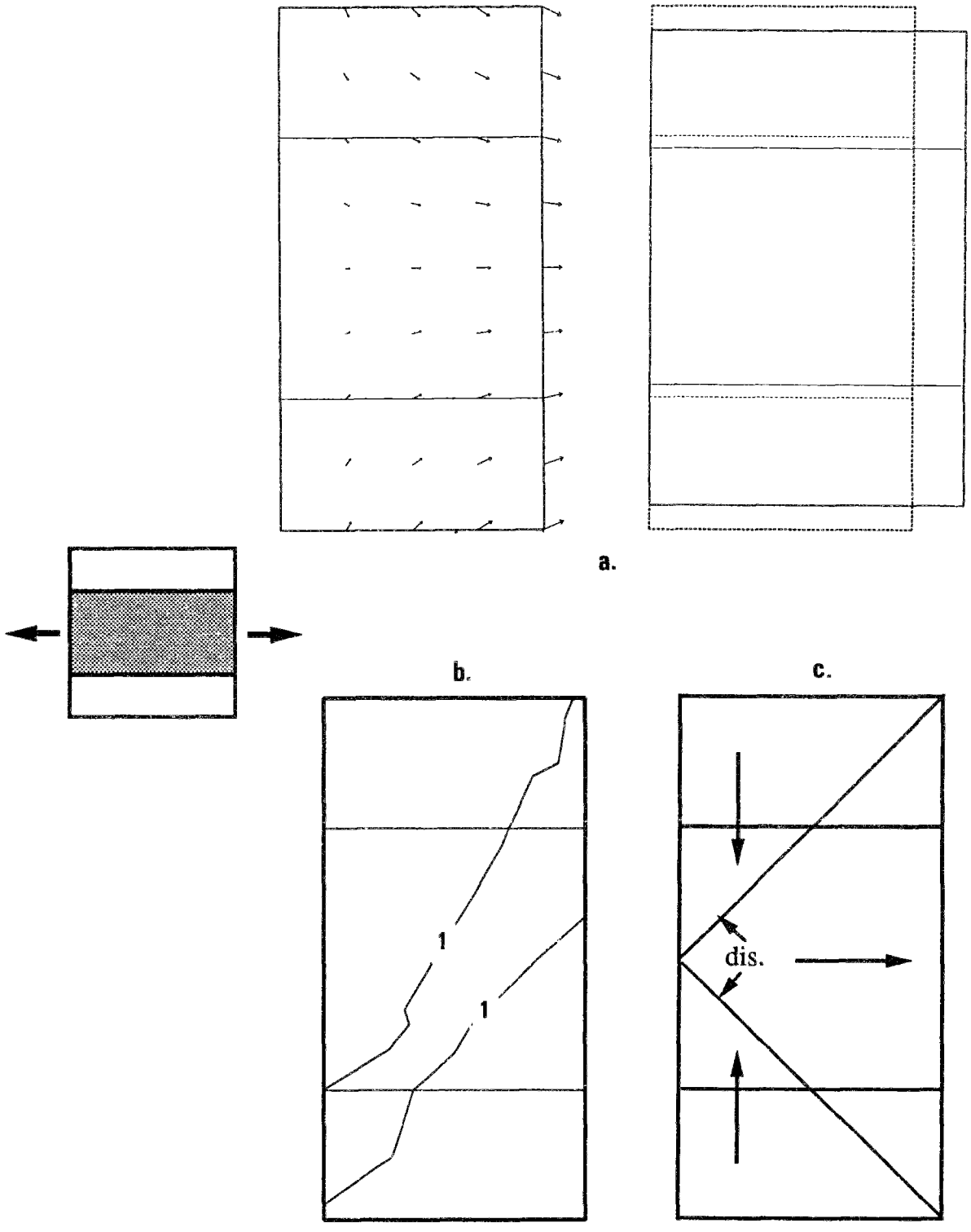
et correspond à une direction de déformation macroscopique $\theta = -25°$, avec $\theta^1 = \theta^2 = \theta$.



2/ Quand à l'approche par champs discontinus, la borne obtenue est :

$$\Sigma_1^{(2)} \simeq 1{,}551 \sigma_{01}$$

qui diffère de près de 3,5 % de la solution exacte donnée par *(3. 10)*. Le champ de vitesse correspondant (avec $\theta = -30°$) est représenté sur *la figure 30 (c)*.



Figures 30 : (a) champ de vitesse et déformée. disc. (1) .
(b) isovaleurs de $\|\underline{\underline{d}}\|$. disc. (1) .
(c) champ de vitesse discontinu. disc. (2) .

Traction transversale ($\Sigma_1 = 0$)

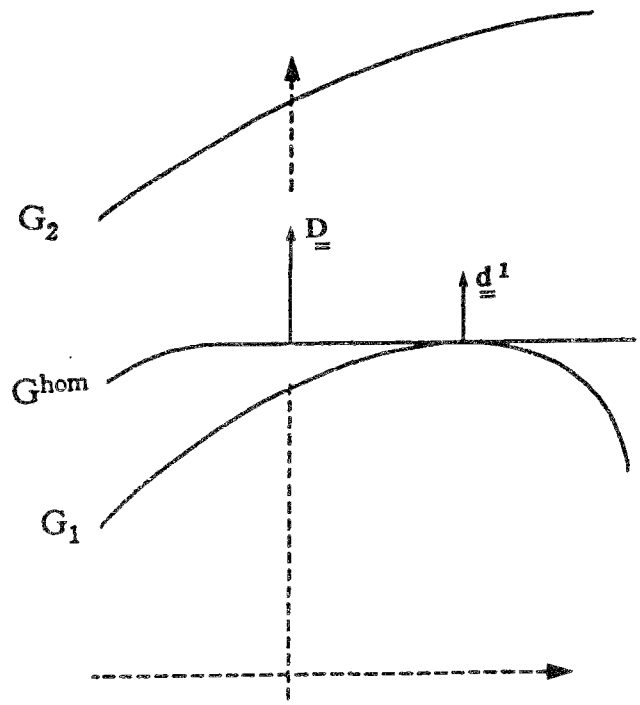
La limite en traction transversale est :

$$\Sigma_t^{hom} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{01} \simeq 1{,}155 \sigma_{01} \qquad (3.\ 11)$$

1/ Pour l'approche par champs continus, seule le constituant (1) se déforme, de façon homogène : $\underline{\underline{d}}^1 \neq 0$ et $\underline{\underline{d}}^2 = 0$ *(figures 31 (a) et (b))*. La borne correspondante vaut :

$$\Sigma_t^{(1)} \simeq 1{,}158 \sigma_{01}$$

et la direction de déformation associée est $\theta = 90°$, avec $\theta^1 = \theta$ (θ^2 est indéfinie) .

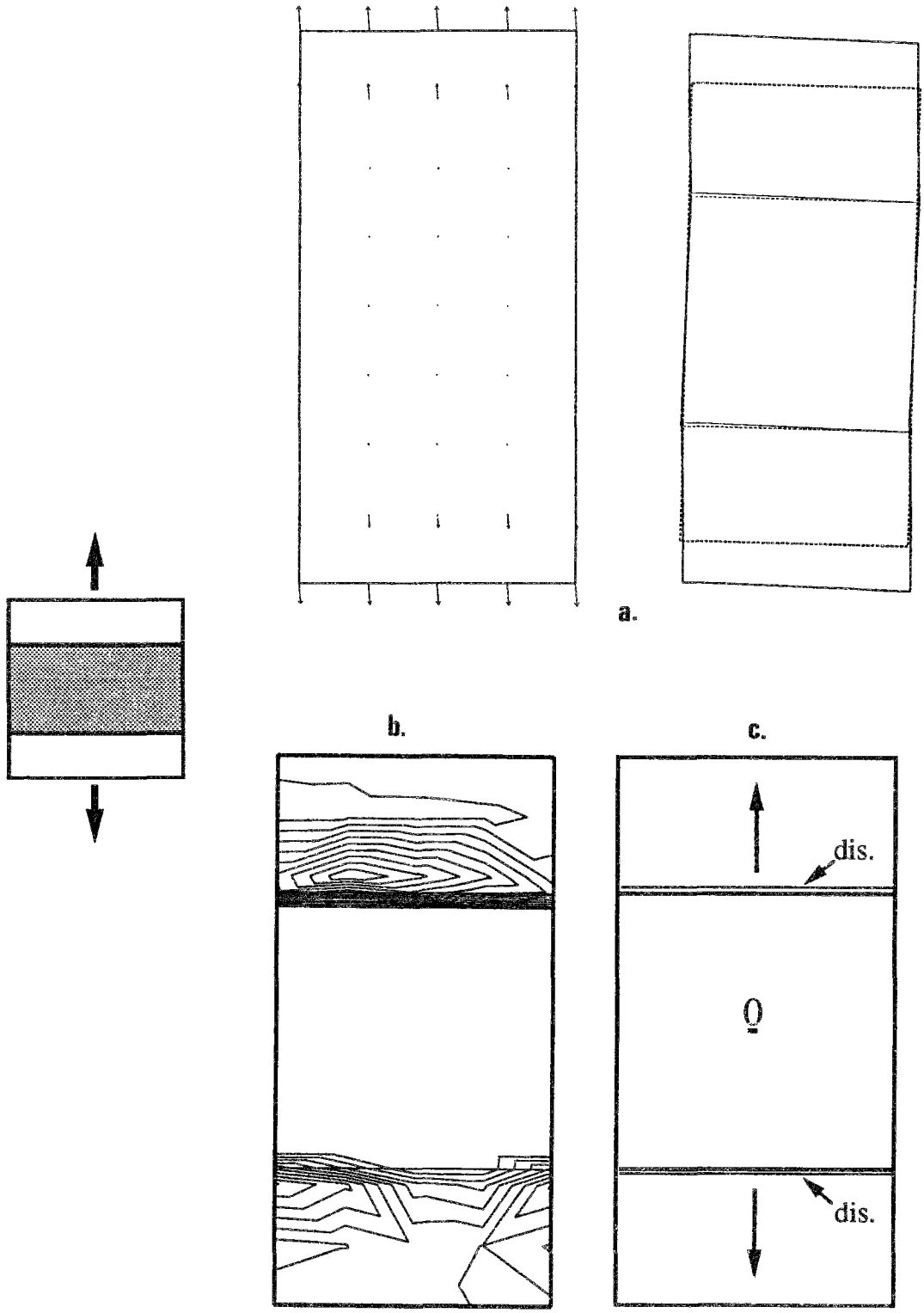


2/ On obtient par contre la borne exacte par un champ discontinu *(figure 31 (c))* :

$$\Sigma_t^{(2)} = \Sigma_t^{hom}$$

Remarque :

Ceci reste entièrement valable pour le cas de la traction isotrope ($\Sigma_1 = \Sigma_2$).



Figures 31 : (a) champ de vitesse et déformée. disc. (1) .
(b) isovaleurs de $||\underline{\underline{d}}||$. disc. (1) .
(c) champ de vitesse discontinu. disc. (2) .

Cission simple ($\Sigma_1 = -\Sigma_2$)

L'expression de la limite en cission simple K^{hom} , tirée des équations *(3. 9)*, étant assez complexe dans le cas général, nous la donnons directement pour le cas qui nous intéresse ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}5$; $\sigma_{02}/\sigma_{01} = 2$) :

$$K^{hom} = 0{,}5\sqrt{5+\sqrt{13}}\,k_1 \simeq 1{,}466\,k_1 \qquad (3.\ 12)$$

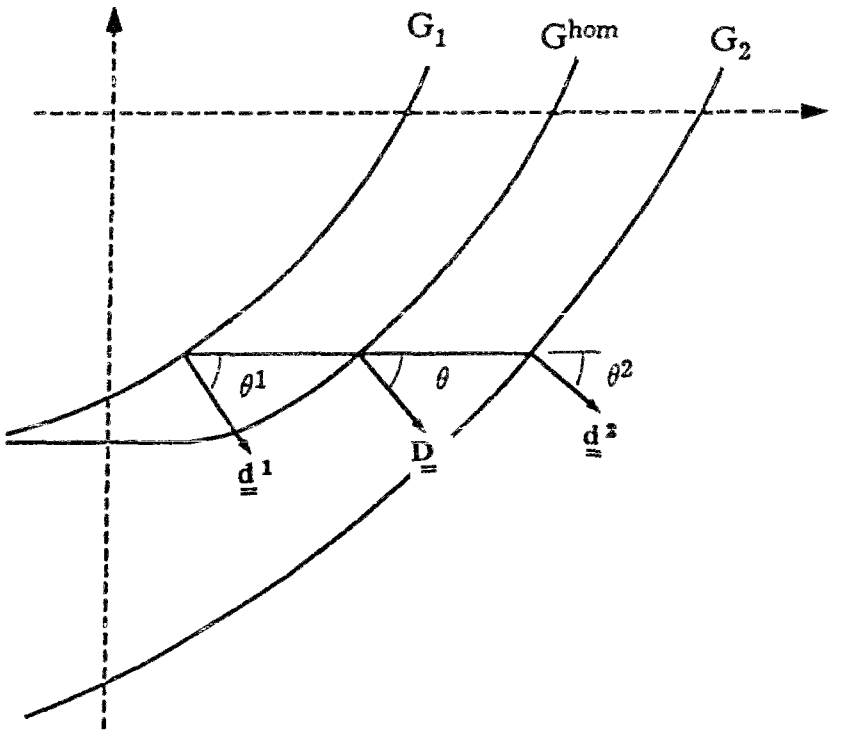
k_1 étant la limite en cission simple du constituant (1).

1/ Pour la discrétisation de type (1), chacun des deux constituants se déforme de manière homogène avec *(figure 32 (b))* : $\|\underline{\underline{d}}^1\| > \|\underline{\underline{d}}^2\|$.

Le champ optimal *(figure 32 (a))* fournit la borne :

$$K^{(1)} \simeq 1{,}467\,k_1$$

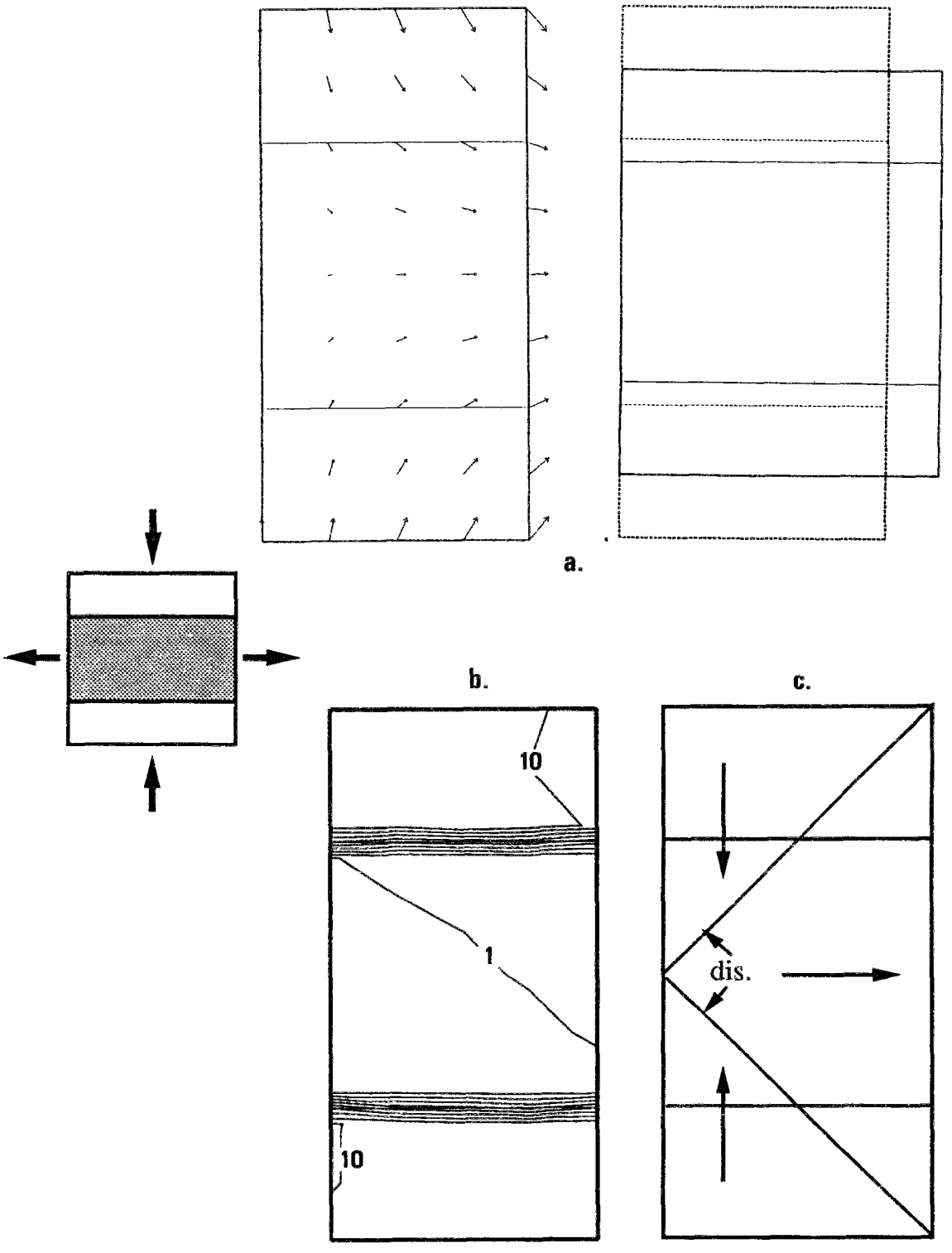
avec une direction de déformation $\theta = -50°$, avec $\theta^1 \simeq -57°$ et $\theta^2 \simeq -41°$.



2/ Quand au champ discontinu optimal *(figure 32 (c))*, la borne obtenue est :

$$K^{(2)} \simeq 1{,}490\,k_1$$

et le θ correspondant est de $-45°$



Figures 32 : (a) champ de vitesse et déformée. disc. (1) .
(b) isovaleurs de $||\underline{\underline{d}}||$. disc. (1) .
(c) champ de vitesse discontinu. disc. (2) .

CHAPITRE III

APPLICATION AU CALCUL DE LA RESISTANCE DES PLAQUES MINCES PERFOREES OU RENFORCEES

Préambule

Nous venons, au chapitre précédent, de préciser le principe et les lignes générales de l'approche numérique adoptée, qui permet d'évaluer le convexe de résistance macroscopique. Avant d'aborder sa mise en oeuvre sur quelques exemples, il est essentiel d'apporter des précisions quant au cadre général de notre approche.

Il peut paraître sans grand intérêt pratique de se restreindre à des problèmes formulés sous l'hypothèse de la contrainte plane. Mais le but profond requis est tout autre. Si on sait déterminer de façon rigoureuse les capacités de résistance des composites multicouches (de Buhan, 1986) et des composites à fibres dont la proportion volumique η tend vers zéro (de Buhan-Taliercio, 1988 et 1991), il n'en est pas de même concernant les autres types de composites, notamment ceux dont la proportion volumique n'est pas petite (η de l'ordre de 30 % à 50 % pour les composites courants). Dans ces derniers cas, il faut recourir à des méthodes numériques pour résoudre le problème.

On l'aura compris, l'objet de ce travail est la mise au point d'une approche numérique permettant de déterminer le convexe G^{hom} . Sachant que l'on dispose d'une définition cinématique de celui-ci, la méthode reposera sur cette approche. Notre travail constitue une première contribution à cet " édifice ".

La mise en oeuvre sur des problèmes de contrainte plane ne constitue donc qu'une illustration et validation de la méthode. Notons que cela a permis de cerner beaucoup d'aspects concernant sa mise au point : choix d'une méthode adéquate de minimisation, choix des espaces de champs de vitesse à explorer (et notamment la mise à l'écart de l'approche par décomposition en série de Fourier, etc ...).

Des idées, concernant son extension à des problèmes en déformation plane et au composites à fibres, sont actuellement à l'étude.

Signalons que la première application (plaque perforée), nous a permis de confronter les résultats de notre méthode numérique à des résultats expérimentaux ainsi qu'à d'autres méthodes numériques.

1. EXPLOITATION DES SYMÉTRIES DU PROBLÈME

Avant de procéder à la mise en oeuvre proprement dite, nous allons examiner les simplifications apportées par les symétries matérielles de la cellule de base $\mathcal{a}$ à la résolution du problème de calcul à la rupture.

Nous supposerons pour cela, que :

- La cellule de base est symétrique par rapport à son origine, prise au centre de $\mathcal{a}$:

$$\forall\ \underline{x} \in \mathcal{a} \Rightarrow -\underline{x} \in \mathcal{a}\ .$$

- En tout point de $\mathcal{a}$, le convexe de résistance est également " symétrique " par rapport à l'origine :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in G(\underline{x}) \Rightarrow -\underline{\underline{\sigma}} \in G(-\underline{x})\ .$$

Plaçons nous dans le cas plan, et considérons une telle cellule rectangulaire *(figure 1(a))* munie d'un repère (O , x_1 , x_2) . Le chargement macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ étant tel que sa direction principale majeure fasse un angle α avec la direction Ox_1 *(figure 1(b))*.

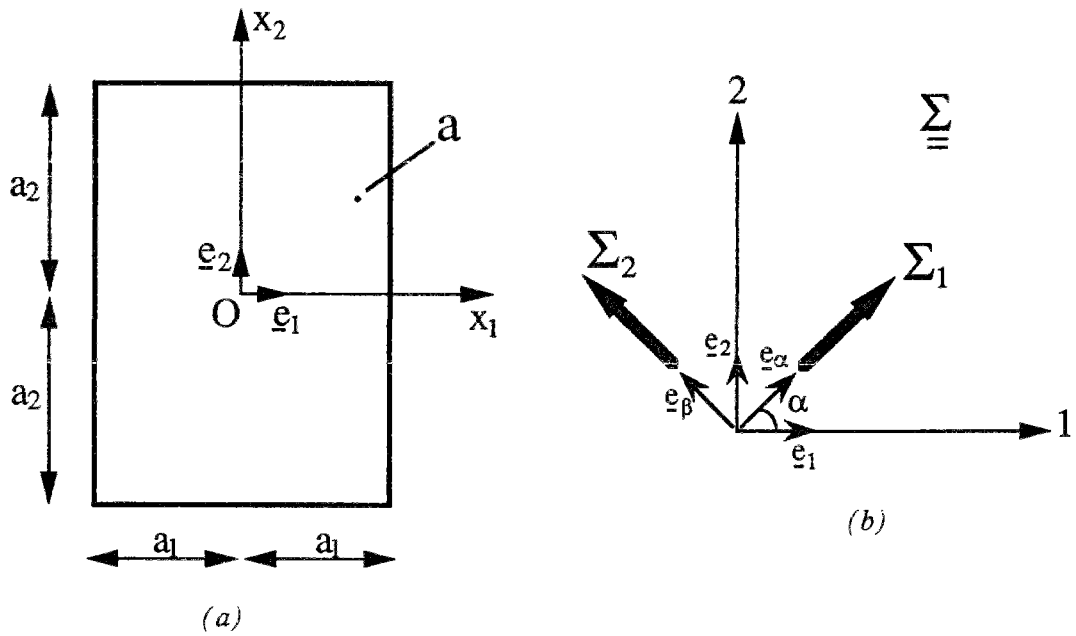


Figure 1 .

Notant Σ_1 et Σ_2 les valeurs principales de $\underline{\underline{\Sigma}}$, l'expression de ce dernier dans la base ($\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$) est :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \cos^2\alpha + \Sigma_2 \sin^2\alpha & (\Sigma_1 - \Sigma_2) \sin\alpha \cos\alpha \\ (\Sigma_1 - \Sigma_2) \sin\alpha \cos\alpha & \Sigma_1 \sin^2\alpha + \Sigma_2 \cos^2\alpha \end{bmatrix} \qquad (1.1)$$

Le chargement envisagé ici est complexe. Il résulte de la combinaison de sollicitations de traction dans les axes Ox_1 et Ox_2 de la cellule, et d'une cission. Pour chacun de ces chargements, pris séparément, il est possible d'utiliser les symétries éventuelles par rapport aux axes précédents pour ramener les conditions de périodicité à des conditions aux limites classiques, mais de nature différentes pour le cisaillement et la traction : Pour $\alpha = 0°$ (Directions principales de $\underline{\underline{\Sigma}}$ coïncidant avec les axes de symétrie de la cellule) , cette remarque a été exploitée par Winnicki et coll. (1977) ainsi que par O'Donnel et coll. (1977) . Cela est impossible dans notre cas, en vertu de la non linéarité du problème traité, et on ne peut donc ici s'affranchir des conditions de périodicité.

Néanmoins, l'exploitation de la symétrie matérielle par rapport à l'origine permet de restreindre le problème à l'étude de la moitié de la cellule. Notons tout de suite qu'ici seules les conditions aux limites en vitesse nous intéressent compte tenu de l'approche cinématique utilisée.

Ainsi, on peut montrer que la combinaison de cette symétrie et de la périodicité permet de se ramener à l'étude de la demi cellule (que l'on continuera à noter a) définie par :

$$0 \leq x_1 \leq a_1 \quad \text{et} \quad -a_2 \leq x_2 \leq a_2 \quad \textit{(figure 2)}$$

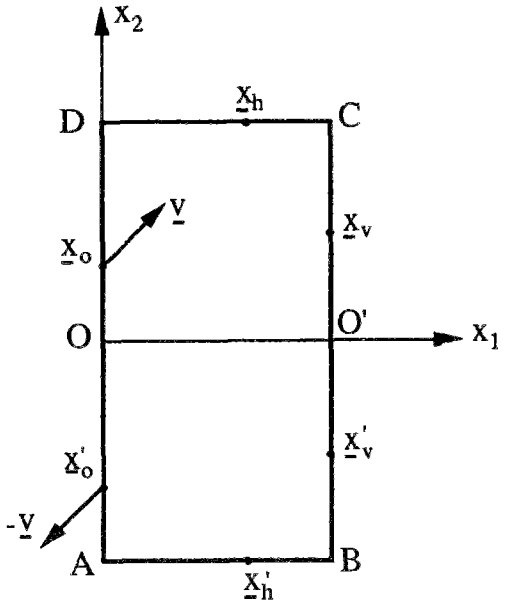


Figure 2 .

Avec les notations de la figure précédente, les conditions aux limites cinématiques deviennent :

- **Sur AD ($x_1 = 0$, $|x_2| \leq a_2$)**

$$\underline{v}(\underline{x}_o) = -\underline{v}(-\underline{x}_o) \qquad (1.2)$$

- **Sur DC ($x_2 = a_2$, $0 \leq x_1 \leq a_1$) et AB ($x_2 = -a_2$, $0 \leq x_1 \leq a_1$)**

$$\underline{v}(\underline{x}_h) - \underline{v}(\underline{x}_h') = 2a_2 \underline{\underline{D}} \cdot \underline{e}_2 \qquad (1.3)$$

- **Sur BO' ($x_1 = a_1$, $0 \leq x_2 \leq a_2$) et O'C ($x_1 = a_1$, $-a_2 \leq x_2 \leq 0$)**

$$\underline{v}(\underline{x}_v) + \underline{v}(\underline{x}_v') = 2a_1 \underline{\underline{D}} \cdot \underline{e}_1 \qquad (1.4)$$

où :

$\underline{x}_h$ et $\underline{x}_h'$ sont symétriques par rapport à l'axe Ox_1 .

$\underline{x}_v$ et $\underline{x}_v'$ sont symétriques par rapport O' .

et $\underline{\underline{D}}$ est le tenseur vitesse de déformation macroscopique associé au champ de vitesse virtuel $\underline{v}$.

Remarque :

Pour $\underline{\underline{D}}$ donné dans R^3 , les conditions précédentes fixent les valeurs de la vitesse aux points O, O', A, B, C, D :

$$\underline{v}(O) = \underline{0} \qquad \underline{v}(O') = 4a_1 \underline{\underline{D}} \cdot \underline{e}_1$$
$$\underline{v}(A) = -a_2 \underline{\underline{D}} \cdot \underline{e}_2 \qquad \underline{v}(B) = \underline{\underline{D}} \cdot (a_1 \underline{e}_1 - a_2 \underline{e}_2)$$
$$\underline{v}(C) = \underline{\underline{D}} \cdot (a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2) \qquad \underline{v}(D) = a_2 \underline{\underline{D}} \cdot \underline{e}_2$$

Construction numérique de G^p

Étant donné un tenseur $\underline{\underline{D}}$ dans R^3 et une discrétisation (i.e. maillage) de la demi cellule a , caractérisée par l'entier p qui désigne le nombre de noeuds ou d'éléments selon le type de discrétisation adoptée (cf. chap. II , 1.3), l'équation du plan normal à $\underline{\underline{D}}$ et tangent à G^p,

approximation par excès de G^{hom} dans l'espace R^3, est de la forme :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = \pi^P (\underline{\underline{D}})$$

soit encore :

$$D_{\alpha\alpha} \Sigma_1 + D_{\beta\beta} \Sigma_2 = \pi^P (\underline{\underline{D}}) \qquad (1.5)$$

où

$$\begin{cases} D_{\alpha\alpha} = D_{11} \cos^2\alpha + D_{12} \sin 2\alpha + D_{22} \sin^2\alpha \\ D_{\beta\beta} = D_{11} \sin^2\alpha - D_{12} \sin 2\alpha + D_{22} \cos^2\alpha \end{cases}$$

désignent les composantes de $\underline{\underline{D}}$ dans les axes principaux ($\underline{e}_\alpha$, $\underline{e}_\beta$) de $\underline{\underline{\Sigma}}$ *(figure 1).*

En divisant les membres de la relation *(1. 5)* par $\sqrt{D_{\alpha\alpha}{}^2 + D_{\beta\beta}{}^2}$ *(avec bien-entendu, $D_{\alpha\alpha}$ ou $D_{\beta\beta} \neq 0$ pour que l'approche soit non triviale)* , on obtient :

$$\cos\theta \, \Sigma_1 + \sin\theta \, \Sigma_2 = C^P(\theta) \qquad (1.6)$$

où l'on a posé

$$\cos\theta = \frac{D_{\alpha\alpha}}{\sqrt{D_{\alpha\alpha}{}^2 + D_{\beta\beta}{}^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{D_{\beta\beta}}{\sqrt{D_{\alpha\alpha}{}^2 + D_{\beta\beta}{}^2}}$$

Se plaçant désormais dans le plan des contraintes principales (Σ_1 , Σ_2) , *(1. 6)* n'est autre que l'équation d'une droite, notée $D^P(\theta)$, de normale orientée à θ par rapport à l'axe des Σ_1 et tangente au domaine $G^P(\alpha)$ défini par :

$$G^P(\alpha) = \{ (\Sigma_1 , \Sigma_2) , \quad \Sigma_1 \, \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha + \Sigma_2 \, \underline{e}_\beta \otimes \underline{e}_\beta \in G^P \}$$

On conviendra d'appeler $\theta = \mathrm{Arctg}(D_{\alpha\alpha}/D_{\beta\beta})$ la " direction de déformation macroscopique " , c'est à dire l'orientation du du vecteur ($D_{\alpha\alpha}$, $D_{\beta\beta}$) dans le plan (Σ_1 , Σ_2) *(figure 3).*

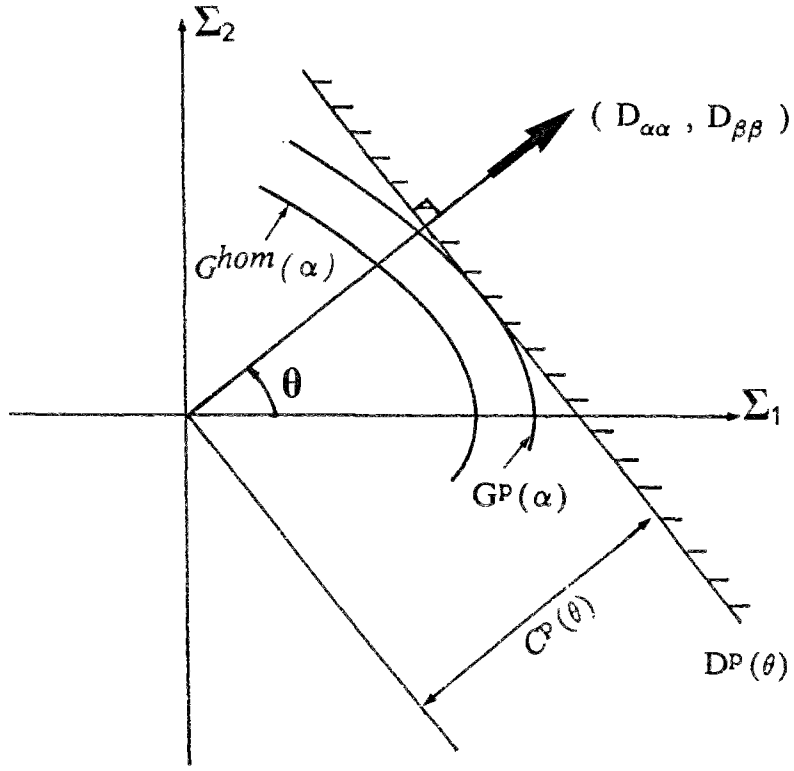


Figure 3 .

La frontière du domaine $G^P(\alpha)$ est obtenue comme l'enveloppe convexe de la famille des droites $D^P(\theta)$ paramétrées en $\theta \in [0, 2\pi]$.

Compte tenu de la symétrie matérielle par rapport à l'origine, $G^P(\alpha)$ est complètement déterminé dans le plan des contraintes principales (Σ_1 , Σ_2) en ne faisant varier θ que dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. En pratique, partant de $\theta = -90°$ on fait varier ce paramétre de 5° en 5° jusqu'à atteindre 85° : $G^P(\alpha)$ est alors déterminé par 36 calculs de minimisation successifs.
Notons pour fixer les idées, qu'un tel calcul de minimisation (où le nombre de variables de minimisation est de l'ordre de la centaine pour les cas étudiés) ne nécessite au plus que quelques minutes de temps CPU sur ALLIANT FX40 .

2. APPLICATION N° 1 : CAS D'UNE PLAQUE MINCE PERFORÉE

Nous allons maintenant, mettre en oeuvre la méthode numérique décrite au chapitre précédent sur un cas pour lequel nous disposons déjà de résultats à la fois expérimentaux et numériques. Ceux-ci ne nous servirons pas de test de validation à proprement parler, mais nous permettront d'une part de situer nos résultats par rapport à des données expérimentales, d'autre part de confronter notre approche à une autre approche numérique de nature complétement différente afin d'en comparer les avantages respectifs.

2.1. Description du problème posé

On considère une plaque mince perforée par un réseau périodique de trous, dont la cellule de base et le chargement macroscopique auquel elle est soumise sont donnés sur la figure suivante :

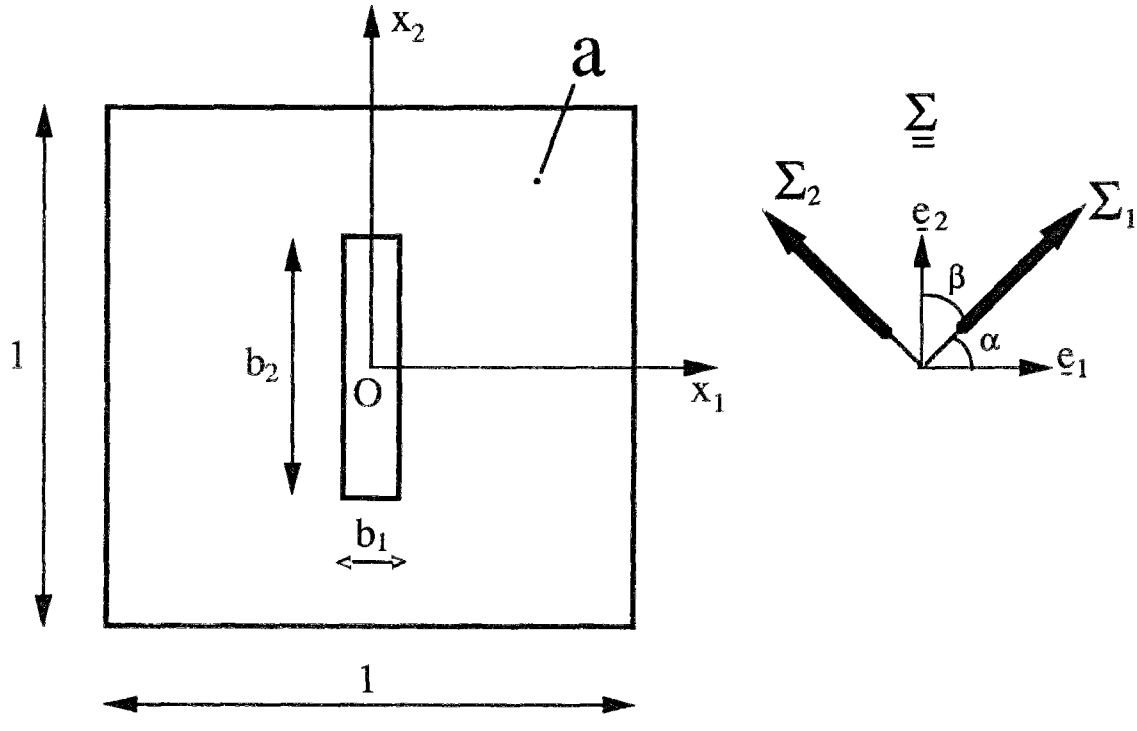


Figure 4 : Cellule de base et chargement macroscopique .

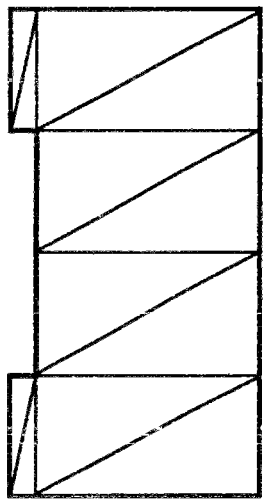
Le matériau sain est supposé obéir au **critère de Von Mises en contrainte plane, caractérisé par sa limite en traction simple σ_0** .

Les dimensions du trou considérés sont :

$$b_1 = 0{,}1$$
$$0 \leq b_2 \leq 1$$

Comme on l'a précisé plus haut, le choix d'une telle géométrie n'est nullement fortuit.
Pour les calculs, seule la moitié de la cellule est maillée (symétrie / O). On utilise pour la discrétisation de type (1) (i.e. champs continus, affines par morceaux) , le processus de remaillage automatique, c'est à dire :

• Pour chaque direction de déformation macroscopique θ, un premier calcul est effectué avec le maillage grossier (M_1) suivant :



nombre de noeuds p = 14
nombre de variables de minimisation n_p = 13

le champ de vitesse de départ étant le champ de déformation homogène $\underset{\sim}{v} = \underset{\approx}{D} \cdot \underset{\sim}{x}$.

•• On effectue ensuite un second calcul sur un maillage (M_2) , obtenu en ajoutant aux noeuds de (M_1) les milieux des segments joignant ces noeuds : p = 39 et n_p de l'ordre de 50 . Pour le second calcul, on repart du champ optimal découlant du premier calcul de minimisation en " n'activant " que les noeuds dont les vitesses ont significativement varié par rapport à celles correspondant au champ à déformation homogène.

••• Un troisième et dernier calcul est effectué selon le même procédé : p = 125 et n_p n'excédant généralement pas la centaine.

Ces trois calculs (En pratique, on constate qu'il n'est pas nécessaire d'en effectuer plus) se font automatiquement avec des temps de calculs d'au plus quelques minutes sur stations de travail.

De même, les calculs ont été menés selon le même principe avec la discrétisation de type (2) (i.e. champs discontinus, constants par morceaux). Pour chaque θ, on retient le meilleur résultat, c'est à dire la valeur minimale de $C^P(\theta)$. Dans le cas d'espèce, l'approche par champs continus s'est le plus souvent révélée meilleure.

2.2. Limites en traction uniaxiale

Nous donnons les résultats concernant les limites en traction du matériau homogénéisé selon les directions Ox_1 et Ox_2 , en fonction de la longueur b_2 de la cavité.

A. Traction suivant l'axe Ox_1

Sur *la figure 5*, nous reportons les variations de Σ_1/σ_0 en fonction de la dimension b_2 (rappelons que la valeur de b_1 est fixée à 0,1).

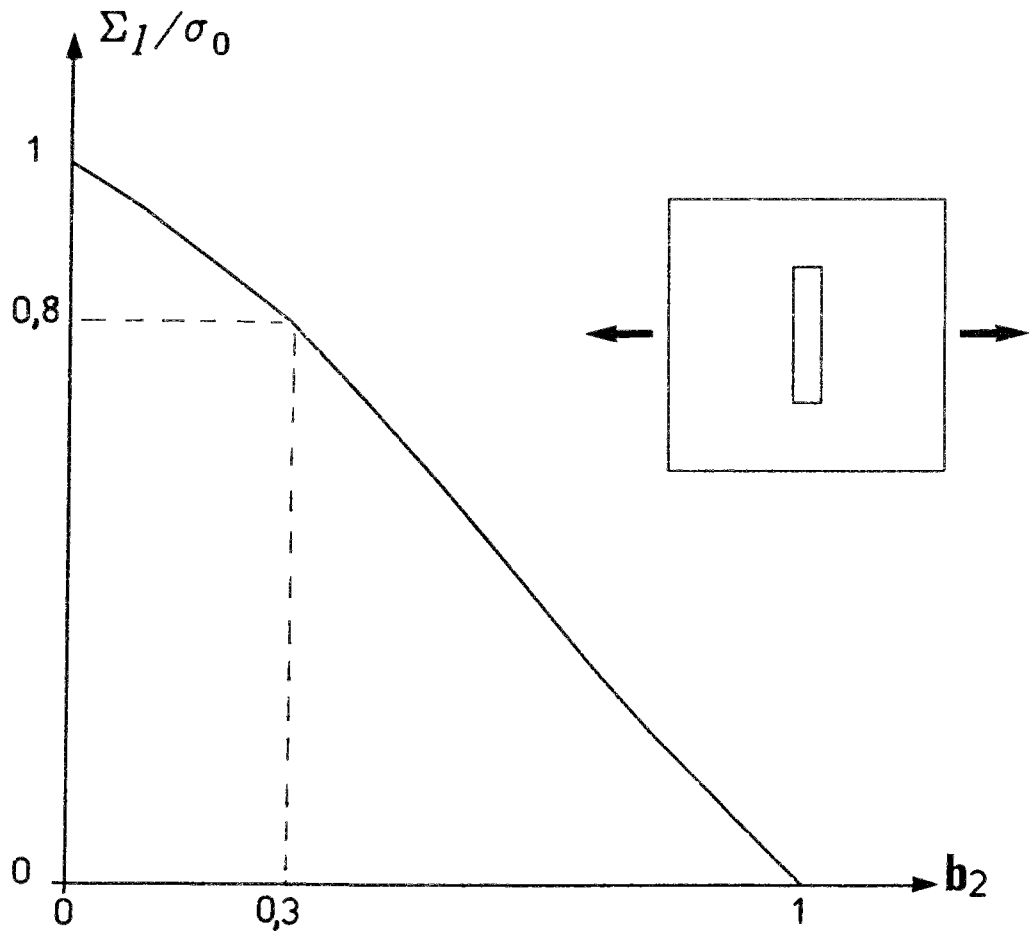


Figure 5 : variations de Σ_1/σ_0 en fonction b_2.

La courbe précédente peut, en première approximation, être décrite à l'aide de deux segments de droite correspondant aux intervalles $b_2 \leq 0,3$ et $b_2 \geq 0,3$, de pentes respectives -0,66 et -1,15 environ.

B. Traction suivant l'axe Ox_2

Comme précédemment, *la figure 6* représente les variations de la limite en traction Σ_2 suivant l'axe Ox_2, en fonction du paramètre b_2 .

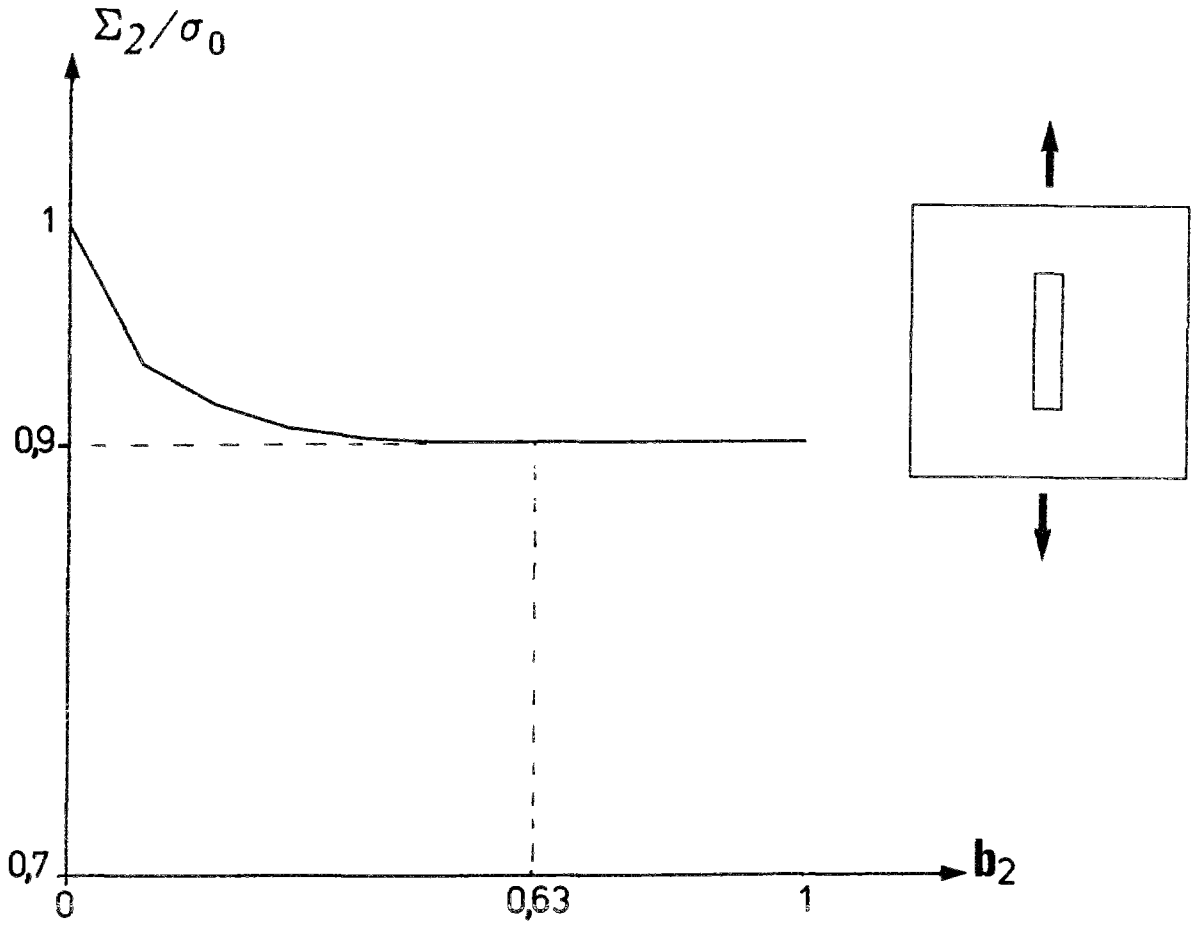
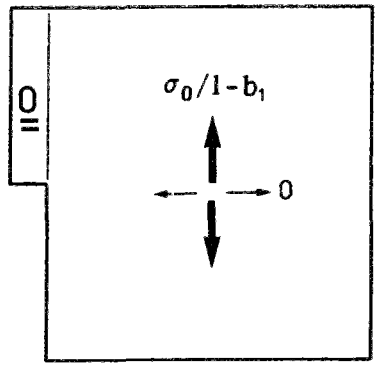


Figure 6 : variations de Σ_2/σ_0 en fonction b_2.

On constate que la limite en traction Σ_2 décroît au début en fonction de b_2 pour atteindre rapidement une valeur constante égale à 0,9 σ_0 , dès que b_2 est supérieure à environ 0,3 .

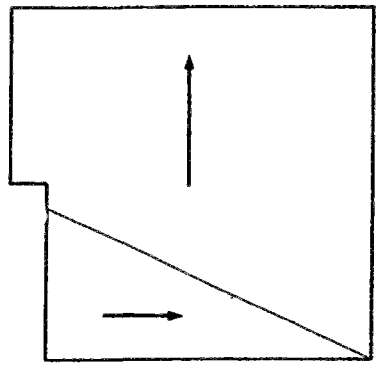
On peut expliquer ce résultat de façon analytique, en considérant le champ de contrainte à deux zones suivant (approche statique) :



(quart de cellule)

qui montre que $\Sigma_2 \geq 0{,}9\,\sigma_0 \quad \forall\ b_2$ *(2. 2)*

Et le champ de vitesse (approche cinématique) :



qui montre que :

$$\Sigma_2 \leq 0{,}9\,\sigma_0 \quad \text{dès que} \quad b_2 \geq 0{,}9/\sqrt{2} \simeq 0{,}63 \qquad (2.\ 3)$$

Compte tenu de *(2. 2)* et *(2. 3)* , on a donc,

$$\Sigma_2 = 0{,}9\,\sigma_0 \quad \text{pour} \quad b_2 \geq 0{,}9/\sqrt{2} \simeq 0{,}63 \qquad (2.\ 4)$$

2.3. Résultats concernant le convexe macroscopique G^{hom}

Pour tout α , nous avons déterminé numériquement le convexe approchant par l'extérieur $G^{hom}(\alpha)$.

Le convexe de résistance du matériau sain est désigné par G, nous représentons *(figures 7, 8)* celui-ci ainsi que les domaines obtenus pour différentes valeurs de α, dans le plan des contraintes principales (Σ_1 , Σ_2) . Ces résultats correspondent à $\mathbf{b_2 = 0{,}5}$.

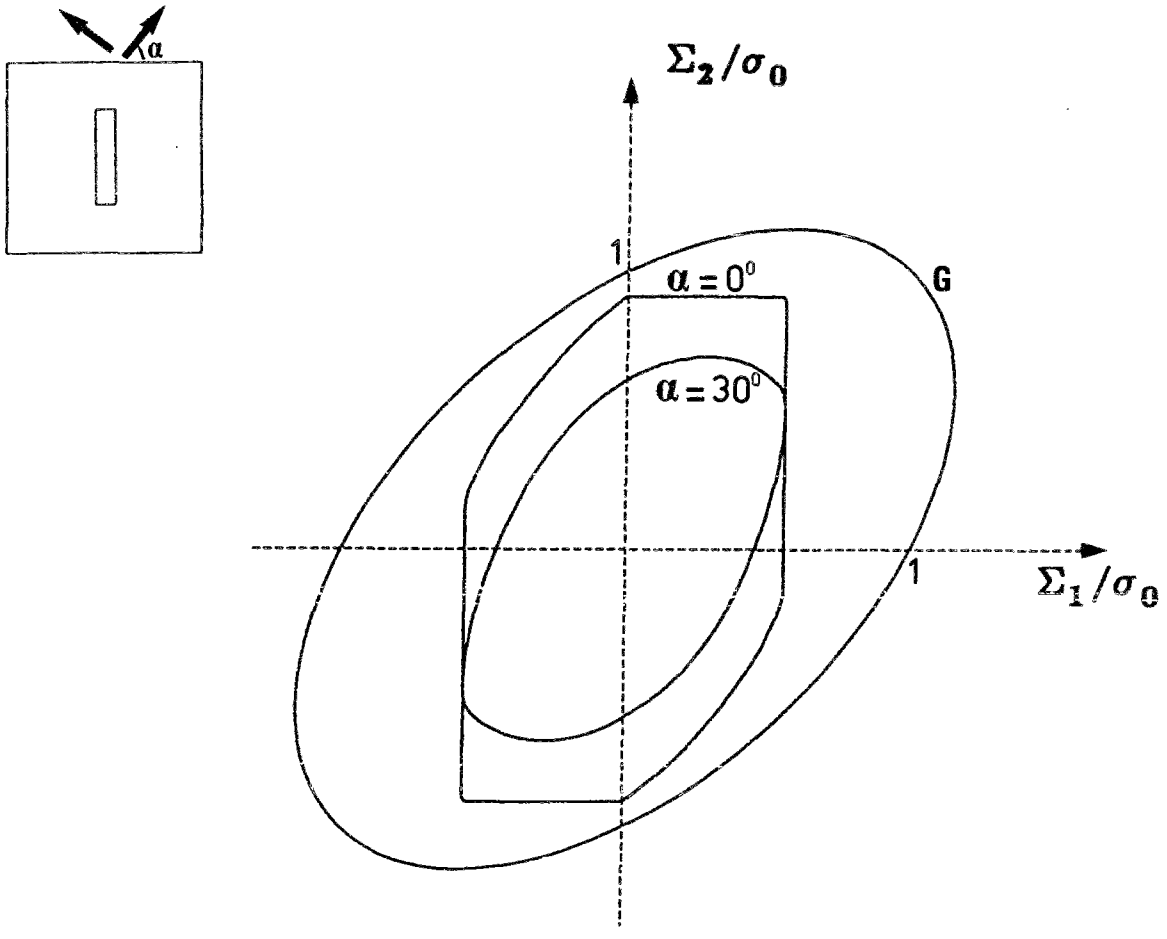


Figure 7 : Approches de $G^{hom}(\alpha)$, $b_2 = 0{,}5$

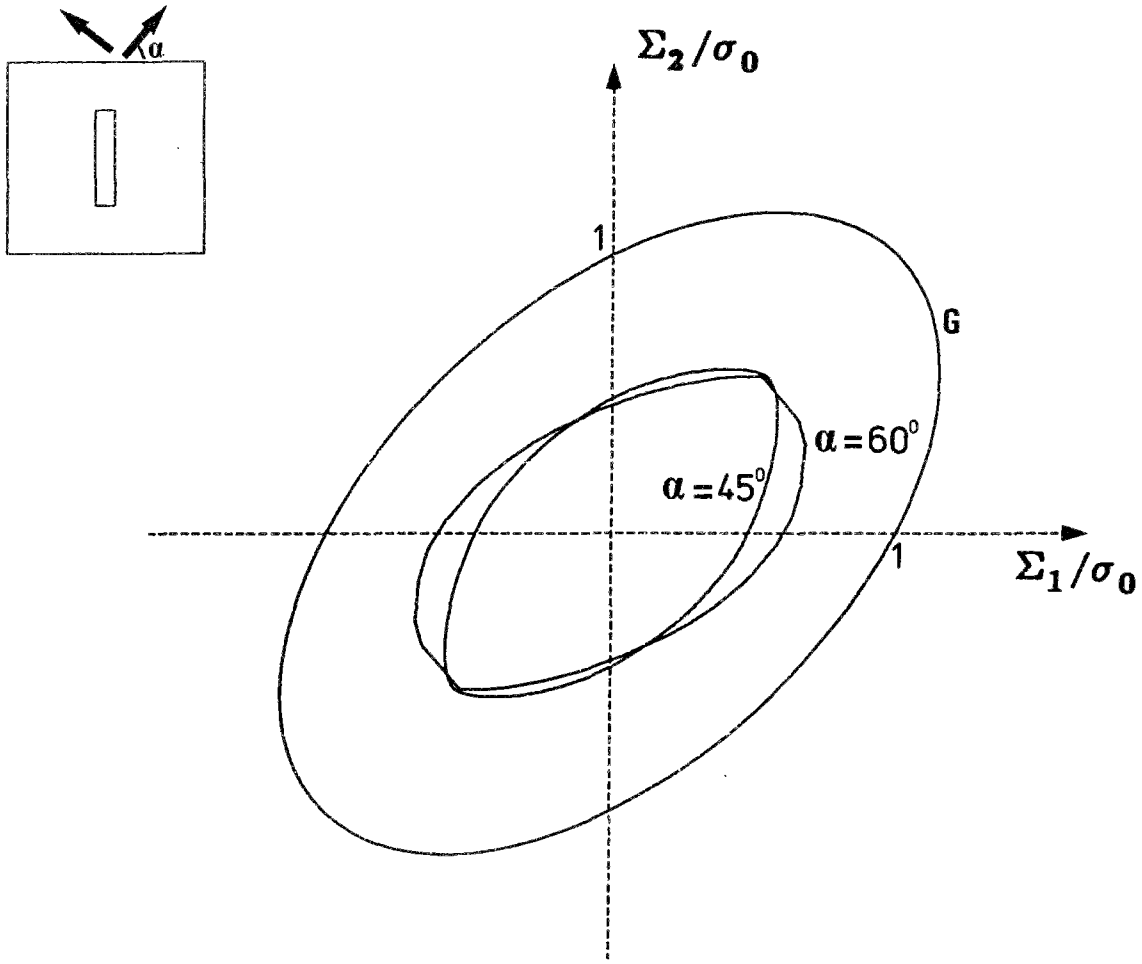


Figure 8 : Approches de $G^{hom}(\alpha)$, $b_2 = 0,5$. Suite .

Nous notons tout d'abord, qu'au fur et à mesure que α augmente, à partir de zéro, dans le sens trigonométrique, $G^{hom}(\alpha)$ " tourne " autour de l'origine du plan dans le sens contraire. Pour certaines valeurs de α (notamment $\alpha = 0°$), on note le caractère non quadratique du critère de résistance macroscopique . Ceci a déjà été observé lors de l'approche analytique du Chapitre I. L'approche numérique effectuée par Guennouni (1987) ne rend pas compte de cette caractéristique.

Le caractère anisotrope des capacités de résistance d'un tel milieu est clairement mis en évidence sur les figures (notamment lorsque l'on compare les limites en traction simple suivant

2.4. Rôle des conditions aux limites

La définition rigoureuse du critère de résistance macroscopique pour un matériau hétérogène à structure périodique suppose que les conditions de périodicité sur la cellule de base soient être impérativement remplies. Néanmoins certains auteurs ont parfois tendance à utiliser indifféremment des conditions aux limites en contrainte ou déformation homogène.

Nous allons illustrer dans cette section, les différences entre les résultats obtenus en adoptant telles ou telles conditions aux limites. Différences qui sont prévisibles par une étude théorique, mais quantifiées ici à travers un exemple.

Le problème considéré est l'étude de la limite en traction simple suivant une direction formant un angle α avec l'axe Ox_1 :

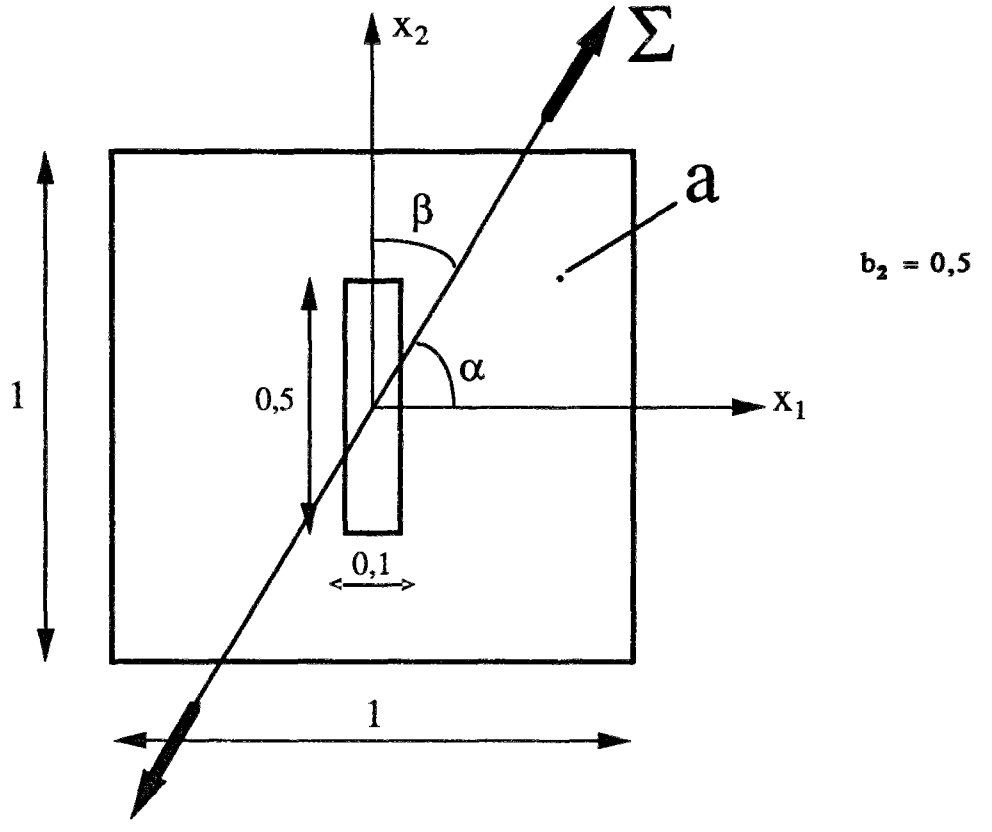


Figure 9 : Etude de la limite en traction suivant α avec Ox_1.

Rappelons que les conditions en

- contrainte homogène (C.H.) se traduisent par l'égalité $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}$ sur le bord de la cellule ∂a ($\underline{n}$ normale unitaire extérieure). Cinématiquement, elle reviennent à n'imposer aucune condition aux limites en vitesse sur ∂a .
- déformation homogène (D.H.) reviennent à imposer une déformation homogène sur le bords ∂a , soit $\underline{v} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{x}$ et donc $\underline{u} = \underline{v} - \underline{\underline{D}} \cdot \underline{x} = \underline{0}$.

Nous pouvons résumer ces conditions par :

$$\text{Sur } \partial a \qquad \underline{v} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{x} + \begin{cases} \underline{0} & \rightarrow \text{D.H.} \\ \underline{u} \ \underline{\text{périodique}} & \rightarrow \text{Hom.} \\ \underline{u} \ \underline{\text{quelconque}} & \rightarrow \text{C.H.} \end{cases} \qquad (2.5)$$

Désignant respectivement par $\mathbf{U}_{\text{D.H.}}$, $\mathbf{U}_{\text{Hom.}}$ (= $\mathbf{U}$) et $\mathbf{U}_{\text{C.H.}}$ les espaces de champs de vitesse $\underline{u}$ correspondant aux différentes conditions aux limites décrites ci-dessus, on a immédiatement :

$$\mathbf{U}_{\text{D.H.}} \subset \mathbf{U}_{\text{Hom.}} \subset \mathbf{U}_{\text{C.H.}}$$

et par suite compte tenu des définitions cinématiques des convexes de résistance associés :

$$G_{\text{C.H.}} \subseteq G^{\text{hom}} \subseteq G_{\text{D.H.}}$$

Ce dernier encadrement se réduisant à une égalité dans le cas d'un matériau homogène.

Sur *la figure 10*, nous avons représenté différentes évaluations de la limite en traction Σ^+ en fonction de l'angle $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, obtenue numériquement en adoptant successivement les trois types de conditions aux limites décrites par *(2. 5)* .

Comparaison Hom. / D.H.

L'approche D.H. surestime considérablement la limite en traction : écart supérieur à 50 % avec l'approche homogénéisation périodique (Hom.) pour $\beta = 60°$. D'autre part, si l'anisotropie de résistance à la traction obtenue par cette dernière approche est de l'ordre de 100 % entre les points de résistance maximale ($\beta = 0°$) et minimale ($\beta = 60°$), elle est nettement moins marquée pour l'approche D.H. (inférieure à 45 %), et le minimum de résistance est atteint pour $\beta = 90°$.

Comparaison Hom. / C.H.

L'approche C.H. semble mieux s'accorder, au moins dans le cas particulier traité, avec l'approche Hom. (écart inférieur à 8 %) , et l'anisotropie est bien rendue. On s'attendait à un écart plus grand, mais la nature particulière du problème étudié peut expliquer que ces deux approches mènent à des résultats peu différents : lorsque l'on visualise les champs de vitesse optimaux *(figure 11)*, on se rend compte que le champs optimal pour l'approche Hom. est peu différent de celui obtenu par l'approche C.H. *(ce qui n'est pas le cas pour celui de l'approche D.H., dont la déformation associée n'est pas localisée dans la cellule, mais largement diffuse).*

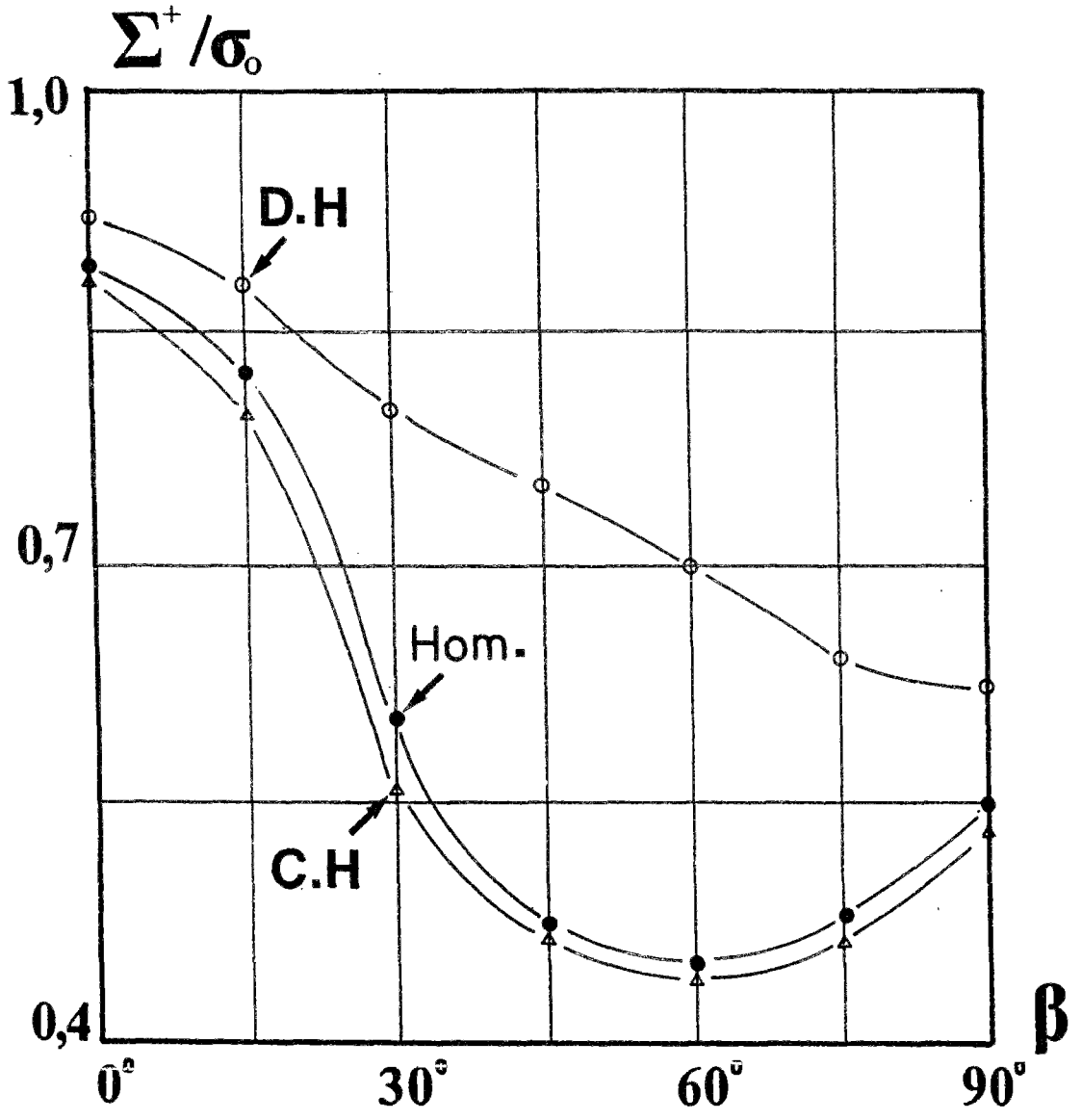


Figure 10 : Limite en traction en fonction de β pour les trois types de C.L. b_2 = 0,5 .

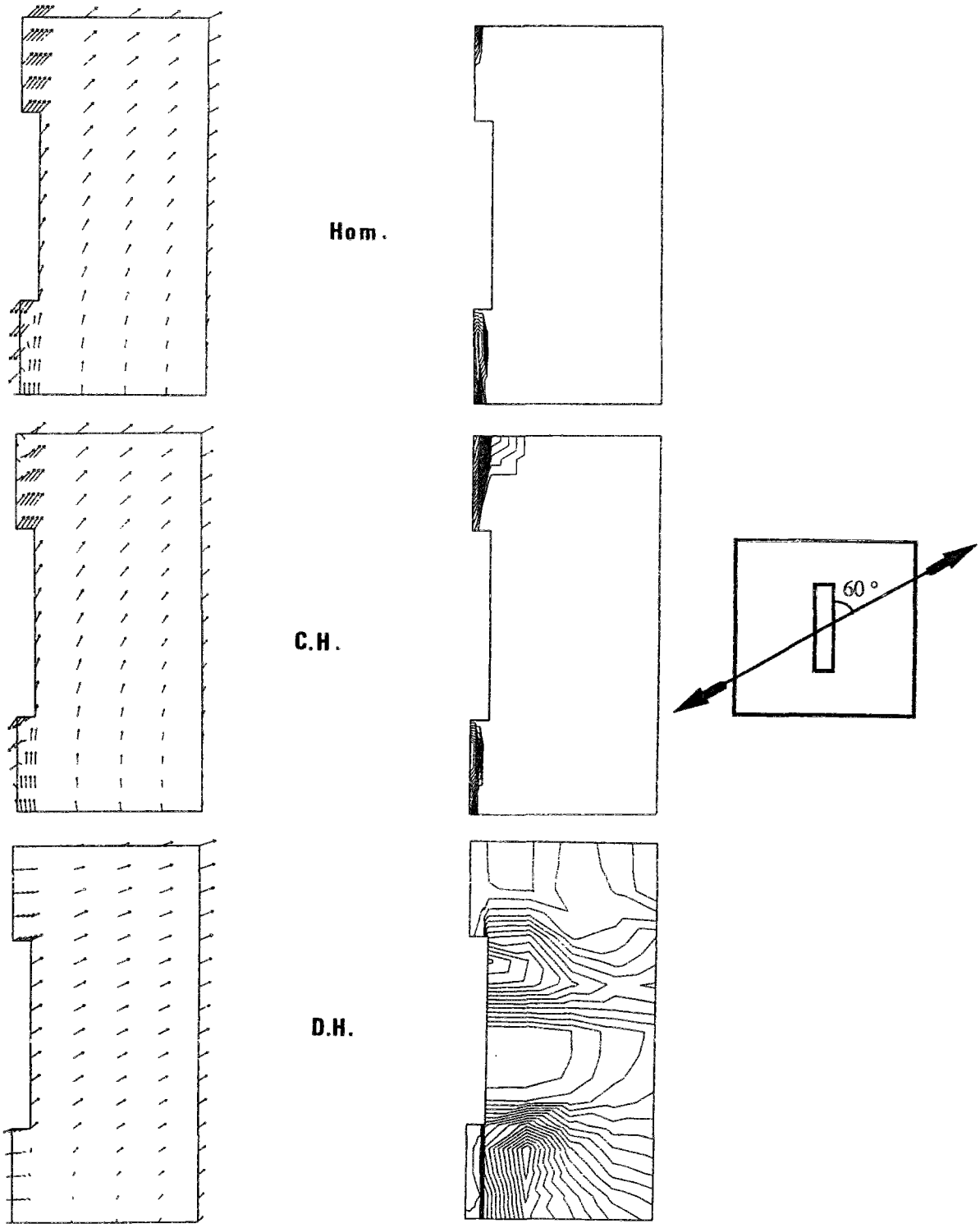


Figure 11 : Champs de vitesse optimaux et isovaleurs d'une mesure de la déformation associée pour les trois types de C.L. , β = 60° , b_2 = 0,5 .

2.5. Description d'une autre approche numérique par calculs élastoplastiques (Marigo et coll. , 1987)

Ce même problème de limite en traction de la plaque perforée a été traité de façon numérique par les auteurs pré-cités, par le biais de calculs élastoplastiques. S'appuyant sur les propriétés mécaniques du matériau constituant les éprouvettes ayant servi aux expériences décrites plus loin en **2.6.**, ces auteurs ont effectué des calculs sur un matériau modèle élastique parfaitement plastique standard, obéissant au critère de Von Mises en contrainte plane

Le convexe limite macroscopique G^{hom} est construit en suivant des trajets de chargement radiaux dans l'espace des contraintes *(figure 12(a))*. Sur chacun de ces trajets de contraintes de "direction" fixe $\underline{\underline{\Sigma}}^0$, le problème revient donc à déterminer la valeur maximale du paramètre multiplicatif λ, notée λ^+, telle que $\lambda^+ \underline{\underline{\Sigma}}^0$ appartienne au bord de ce domaine. Cette détermination se fait en résolvant un problème d'évolution élastoplastique, posé sur la cellule de base.

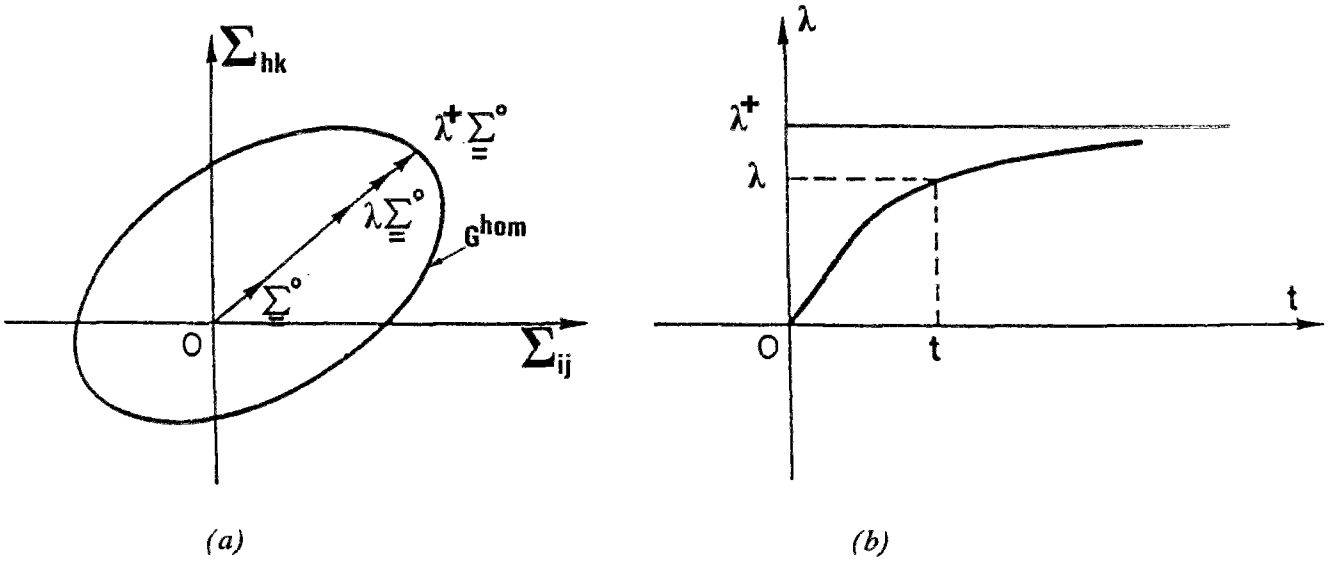


Figure 12 : Trajet radial en contrainte macroscopique .

Le calcul numérique est " piloté " en déformation, c'est à dire en incrémentant progressivement le paramètre $t = \underline{\underline{\Sigma}}^0 : \underline{\underline{E}}$, où $\underline{\underline{E}}$ désigne la déformation macroscpique calculée sur la cellule. La courbe $\lambda(t)$ croît continûment avec une asymptote horizontale dont l'équation n'est autre que $\lambda = \lambda^+$ *(figure 12(b))*. On est ainsi assuré d'approcher λ^+ sans jamais le dépasser, ce qui ne serait pas le cas si le calcul était contrôlé en λ .

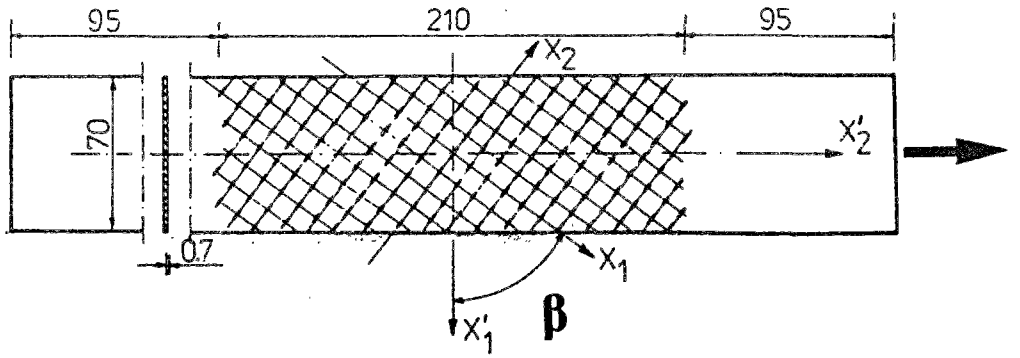
De par le principe de la méthode et les précautions prises (choix de t comme paramètre de chargement), nous sommes enclins à penser que **cette approche conduit a priori à une approximation par l'intérieur des capacités de résistance de la plaque perforée.**

2.6. Les expériences de Litewka et coll. (1984)

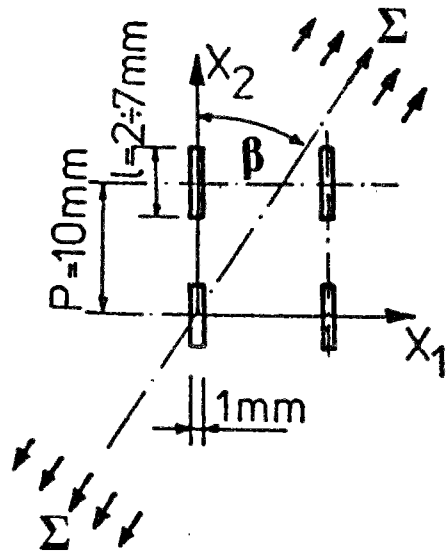
Les résultats numériques obtenus selon les deux approches précédentes, peuvent être directement comparés à une série de données expérimentales obtenues par les auteurs cités ci-dessus pour le même problème.

Les éprouvettes servant aux expériences ont été découpées dans une tôle d'aluminium, dans laquelle ont été préalablement usinées des cavités fortement orientées, réparties selon un réseau périodique à maille carrée *(figure 13(a))*. Ces éprouvettes sont soumises à un essai de traction simple, dans une direction formant un angle β avec la direction principale des perforations *(figure 13(b))*.

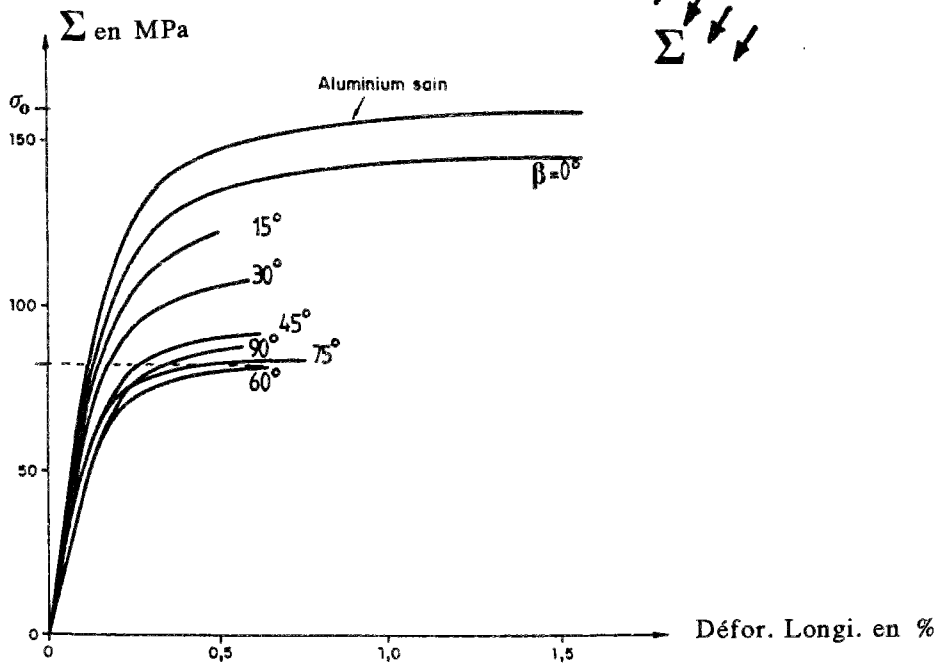
Les résultats d'essais mettent bien en évidence l'anisotropie de résistance de la tôle perforée : *la figure 13(c)* présente les courbes de traction obtenues pour différentes valeurs de l'inclinaison β. La contrainte longitudinale (direction OX_2') est en ordonnée, la déformation longitudinale correspondante est en abscisse. La limite en traction, ainsi que les modes de ruptures expérimentaux ont été relevés et nous les rappellerons lors de la comparaison avec nos calculs numériques.



(a)



(b)



(c)

Figures 13 (d'après Litewka et coll. (1984))
(a) et (b) : Essai de traction sur plaques perforées.
(c) : Courbes contrainte-déformation en fonction de l'inclinaison β.

2.7. Comparaison des deux approches numériques

Pour des raisons de commodité, nous désignerons par :

- **Num1.** , notre approche numérique .
- **Num2.** , l'approche numérique mise en oeuvre par Marigo et coll. (1987) .
- **Exp.** , l'approche expérimentale de Litewka et coll. (1984) .

Rappelons que nous nous intéressons ici aux limites en traction, obtenues selon les deux approches numériques, pour le problème suivant :

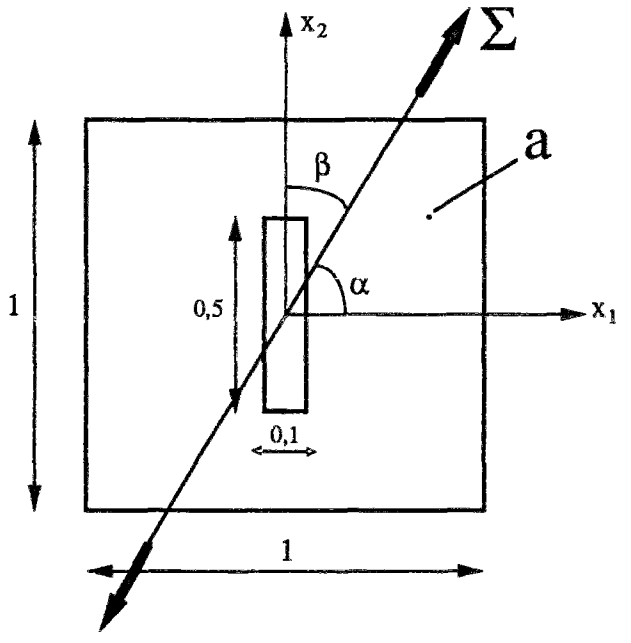


Figure 14 .

Modes de rupture.

Avant d'en venir à la comparaison proprement dite des différentes estimations de la grandeur macroscopique qu'est la limite en traction, nous commençons par comparer les modes de rupture observés expérimentalement à ceux prévus par **Num1.** et **Num2.** .

A β donné, les modes de rupture mis en évidence numériquement sont illustrés de la manière suivante :

• Pour **Num1.** , on visualise sur la cellule de base les isovaleurs de la norme $\sqrt{\mathrm{tr}\,\underline{\underline{d}}^2}$, qui mesure en tout point l'ampleur de la déformation associée au champ de vitesse optimal.

• Le principe de visualisation pour **Num2.** consiste à hachurer les zones ayant subi une déformation plastique équivalente supérieure à une valeur de référence $p_r = 10^{-3}$.

Pour $\beta = 45°$ et $90°$, les modes de rupture prévus par **Num1.** et **Num2.** sont similaires à ceux observés expérimentalement *(figures 15 et 16)*. Pour $\beta = 0°$, les deux approches numériques ne prévoient pas un mode similaire à celui observé expérimentalement qui est légérement dissymétrique. En considérant (comme le font les auteurs de **Num2.**) que la traction ne se produit pas exactement à $\beta = 0°$ mais à $\beta = 15°$, on constate que l'introduction de cette légère inclinaison permet de retrouver le mode expérimental *(figure 17)*.

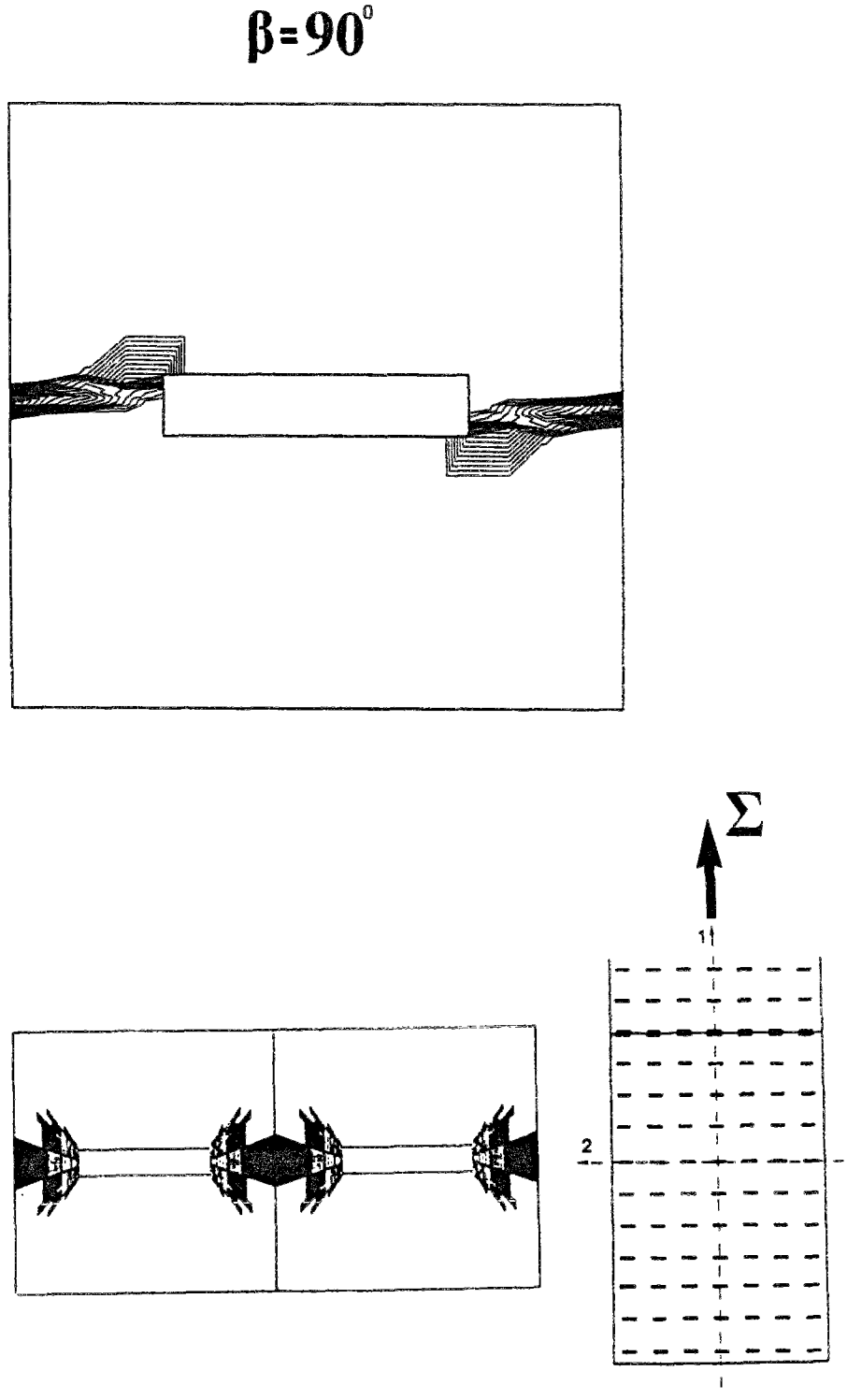


Figure 15 : Mode de rupture pour β = 90° .

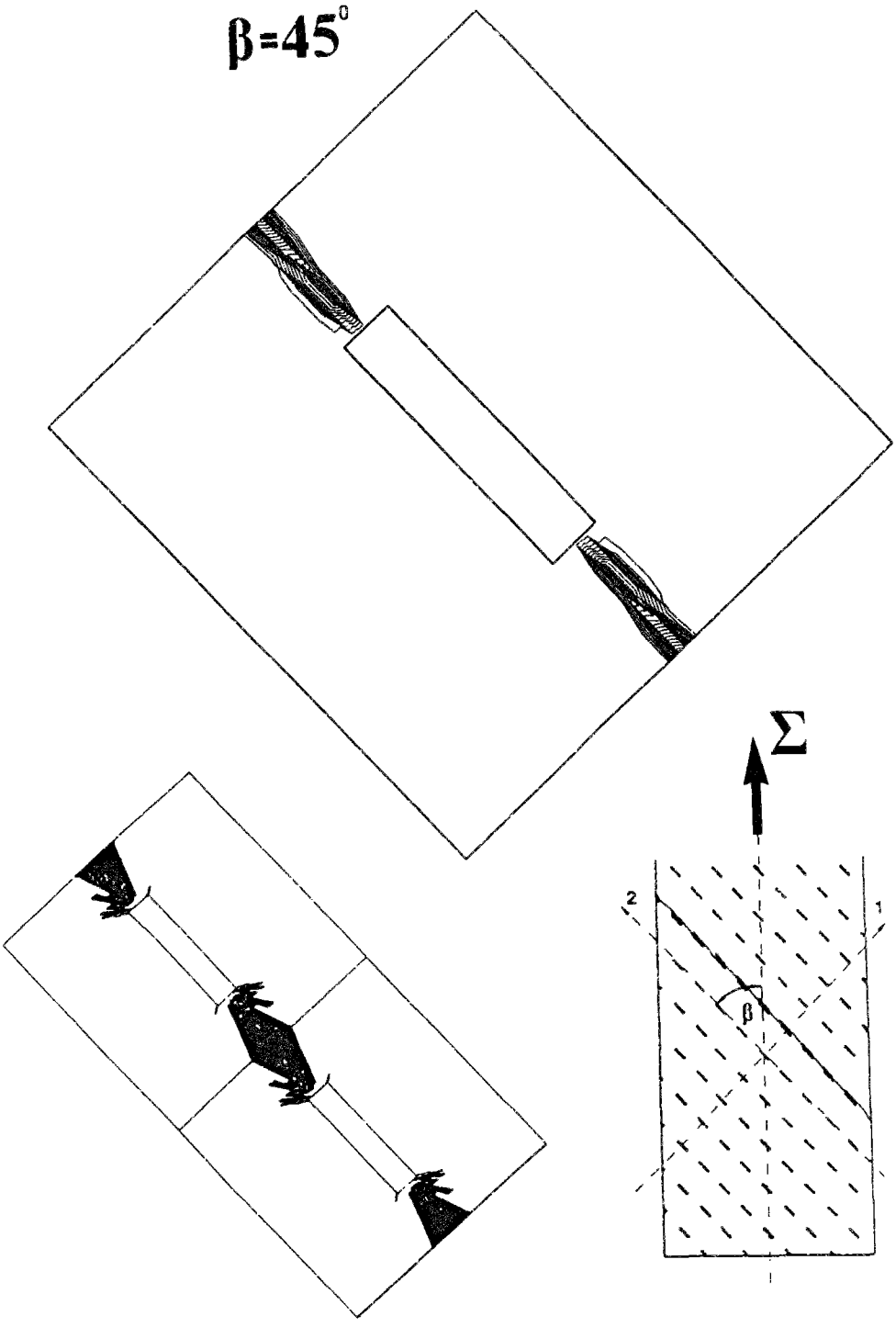


Figure 16 : Mode de rupture pour β = 45° .

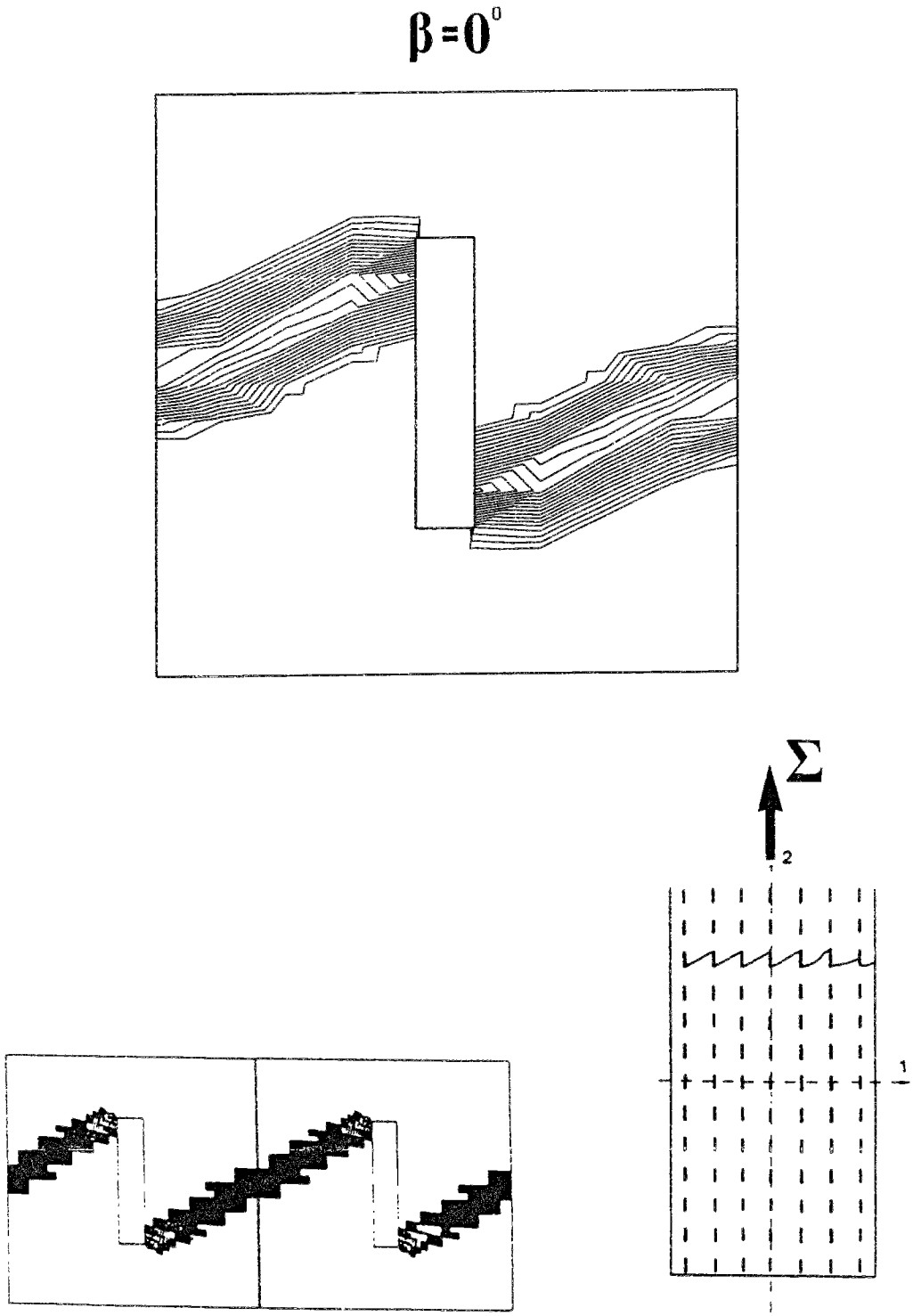


Figure 17 : Mode de rupture pour $\beta \simeq 0°$.

Résistance en traction.

Sur *la figure 18* , nous avons reporté en fonction de l'inclinaison β, la limite en traction Σ (normée par σ_0) obtenue par les deux approches numériques.

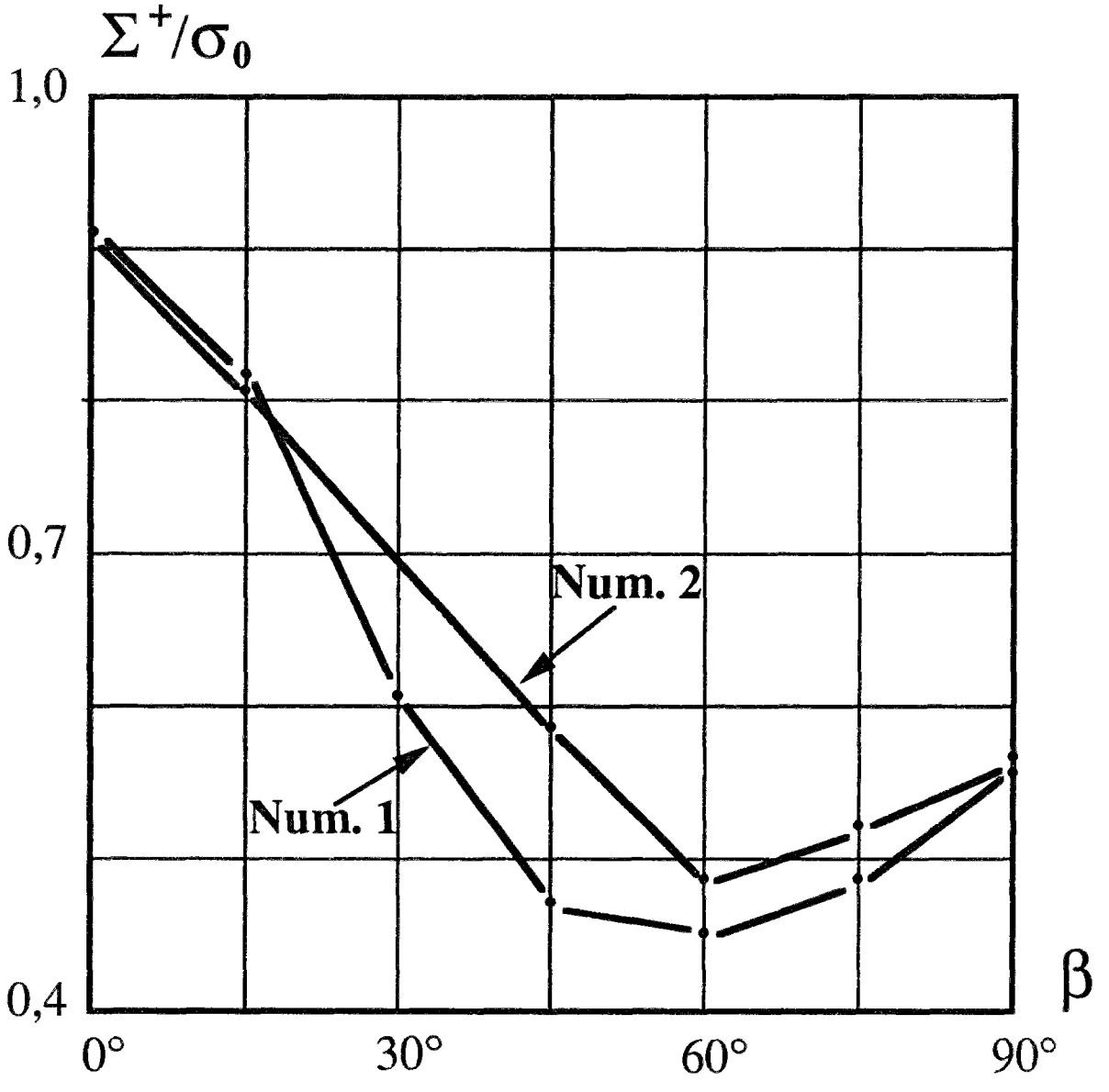


Figure 18 : Limite en traction en fonction de l'inclinaison .

On constate sur la figure précédente que les deux approches numériques rendent bien compte de l'anisotropie de résistance à la traction, observée expérimentalement, due à l'existence d'une orientation preférentielle du réseau de perforation.

Cependant, si ces deux approches conduisent à des résultats très voisins pour $\beta = 0°$ et 90° , elles divergent sensiblement (jusqu'à 20 %) pour des orientations de la sollicitation proches de 45° . Un tel écart, qu'il n'est manifestement pas possible de mettre sur le compte d'une éventuelle imprécision numérique, est d'autant plus paradoxal que les valeurs fournies par **Num1.** (approche cinématique, donc par l'extérieur) sont inférieures à celles données par l'approche **Num2.** qui est sensée donner des évaluations par défaut !. Il convient donc d'examiner ce point de manière plus approfondie.

- **Comparaison Num1. / Num2.**

Sachant que les deux approches numériques sont mises en oeuvre dans le cadre de la même modélisation du problème (calcul bidimensionnel en contrainte plane), comment situer les résultats obtenus par rapport à la valeur théorique exacte de la résistance en traction uniaxiale de la plaque perforée relative à cette même modélisation ?.

L'approche **Num1.** conduit sans conteste possible à une évaluation par excès de cette valeur théorique. Pour mieux s'en convaincre, il suffit de considérer le champ de vitesse à deux blocs en translation représenté sur *la figure 19* .

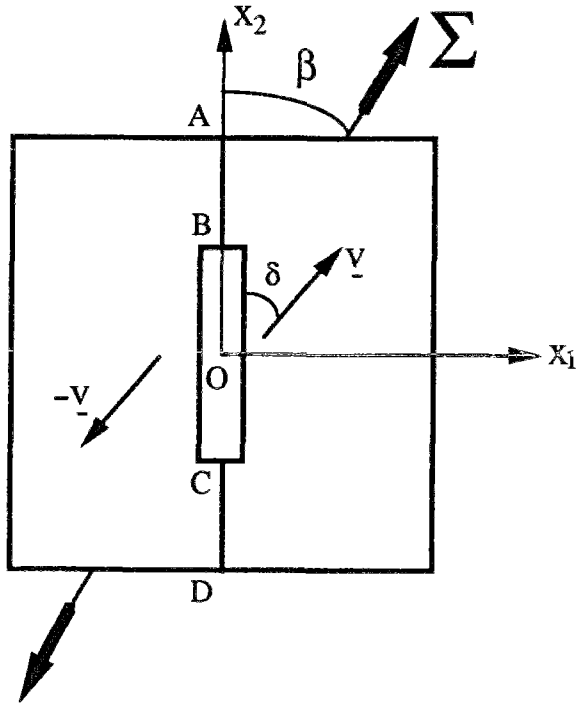


Figure 19 : Approche cinématique à l'aide d'un mécanisme par blocs .

Ce champ comprend une discontinuité de vitesse le long des " ligaments " AB et CD joignant la cavité au bord de la cellule.

La puissance des forces extérieures (i.e. de la sollicitation uniaxiale Σ inclinée d'un angle β par rapport à l'axe Ox_2) dans un tel champ de vitesse vaut alors :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = 2\,\Sigma\,|\underline{v}|\,\sin\beta\,\cos(\beta-\delta)$$

où δ désigne l'inclinaison de la vitesse $\underline{v}$ (ou $-\underline{v}$) par rapport à l'axe Ox_2.

De même le calcul de la puissance résistante maximale développée dans un tel mécanisme donne :

$$< \pi(\underline{\underline{d}}) > = 2\,AB\,\pi(\underline{n}\,,[\underline{v}])$$

avec

$$\pi(\underline{n}\,,[\underline{v}]) = \frac{2\,\sigma_0}{\sqrt{3}}\sqrt{W_n{}^2 + W_t{}^2/4}$$

$$\underline{n} = \underline{e}_1 \quad , \quad W_n = |[\underline{v}]\,.\,\underline{n}\,| = 2\,|\underline{v}|\,\sin\delta \quad , \quad W_t = |[\underline{v}]\,.\,\underline{t}\,| = 2\,|\underline{v}|\,\cos\delta$$

Soit :

$$\pi(\underline{n}\,,[\underline{v}]) = \frac{2\,\sigma_0}{\sqrt{3}}\,|\underline{v}|\,\sqrt{\sin^2\delta + \cos^2\beta/4}$$

D'où l'obtention d'un majorant de Σ^+/σ_0 :

$$\Sigma^+/\sigma_0 \leq \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1/3 + \sin^2\delta}}{\sin\beta\,\cos(\beta-\delta)}$$

dont le minimum est obtenu pour : $\mathrm{tg}\delta = \mathrm{tg}\beta/4$

$$\boxed{\Sigma^+/\sigma_0 \leq \frac{1}{\sin\beta\,\sqrt{3+9\cos^2\beta}}} \qquad (2.\,6)$$

<u>En particulier pour $\beta = 45°$</u>

$$\Sigma^+/\sigma_0 \leq \frac{2}{\sqrt{15}} \simeq 0{,}516 \qquad (2.\,7)$$

Cette dernière valeur est à comparer avec celle fournie

- par l'approche **Num1.** (qui est bien évidemment meilleure !) :

$$\Sigma^+/\sigma_0 \simeq 0{,}47 \qquad (2.8)$$

et dont le champ de vitesse optimal correspondant est :

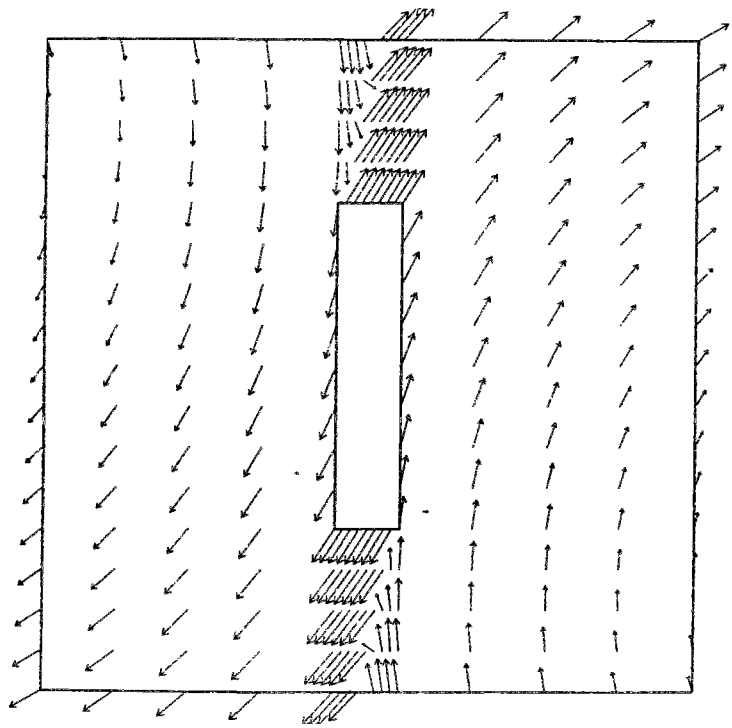


Figure 20 : Champ de vitesse optimal. Approche ***Num1.*** *, $\beta = 45°$.*

- • ainsi que par l'approche **Num2.** :

$$\Sigma^+/\sigma_0 \simeq 0{,}58 \qquad (2.9)$$

qui surestime donc sensiblement la valeur théorique au plus égale à 0,47 .

Il convient donc de s'interroger sur la signification précise des résultats obtenus par le biais d'un calcul élastoplastique de type **Num2.**

2.7.bis Nouveaux résultats communiqués par Michel et Suquet (Fév. 1991) (*)

Suite à une discussion avec les auteurs précités, ceux-ci nous ont fait parvenir de nouveaux résultats effectués début Février 1991 à l'aide d'un nouveau code numérique. Nous les en remercions et nous en faisons état ici.

Ces nouveaux résultats tendent à confirmer tous les commentaires et conclusions que nous avons faits à propos des résultats de **Num2.**

Nous les reproduisons sur le tableau ci-dessous :

β	Σ^+/σ_0		
	Num2. Marigo et col., 1987	Michel et Suquet Fév. 1991	**Num1.**
0°	0,908	0,900	0,910
15°	0,802	0,792	0,816
45°	0,586	0,489	0,470
60°	0,487	0,468	0,451
75°	0,520	0,504	0,488
90°	0,561	0,559	0,557

Ce tableau montre effectivement un écart significatif pour $\beta = 45°$, 60° et 75° entre les nouveaux résultats et ceux de **Num2.**, l'écart à 45° étant de l'ordre de 20 % .

Les derniers résultats sont alors beaucoup plus proches des nôtres : *en particulier pour $\beta = 45°$, la nouvelle valeur de Σ^+/σ_0 (0,489) n'est plus supérieure que de 4 % à celle donnée par* **Num1.** *(0,47).*

(*) Communication privée.

2.8. Commentaire concernant les approches numériques

Si l'approche que nous utilisons assure que les résultats obtenus, constituent une évaluation par excès des capacités de résistance du système considéré, il n'en va pas de même à y regarder de plus près pour ceux issus de l'approche **Num2.** .

• En effet, celle-ci met en oeuvre une méthode du type éléments finis en déplacements, ce qui implique que pour le couple ($\underline{u}$, $\underline{\underline{\sigma}}$) solution numérique du problème d'évolution élastoplastique :

→ Par construction le champ de déplacement $\underline{u}$ **est bien cinématiquement admissible** avec les données du problème.

→ Par contre, le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ **n'est pas statiquement admissible** : car la continuité du vecteur contrainte $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$, à l'interface entre deux éléments finis adjacents, n'est pas assurée.
Ce caractère de " non admissibilité " statique du champ de contrainte est d'autant plus accentué que les éléments finis utilisés par Marigo et coll. (1987) étaient triangulaires à 3 noeuds. Il s'ensuit que l'on ne se situe plus dans le cadre de l'application rigoureuse de l'approche statique du calcul à la rupture, et que les valeurs correspondantes du chargement λ ne peuvent plus être considérées avec certitude comme des évaluations par défaut de la valeur extrême λ^+ .

Compte tenu de ce qui vient d'être mentionné, il semble donc raisonnable de rester prudent vis à vis des résultats concernant les charges limites, calculées par une méthode de type élastoplastique.

• D'une façon générale, lorsque l'objectif poursuivi est de déterminer les capacités de résistance, il apparaît que ces méthodes sont d'un maniement lourd par rapport à des méthodes directes, fondées sur la mise en oeuvre des approches statique et cinématique du calcul à la rupture.

Il est par contre indispensable d'y recourir si l'on souhaite disposer d'informations sur les déformations et les contraintes dans la cellule à chaque étape du trajet de chargement, informations que, par nature, la théorie du calcul à la rupture ne peut fournir.

2.9. Confrontation avec les données expérimentales

On a reporté sur *la figure 21* les points expérimentaux obtenus par Litewka et coll. (1984).

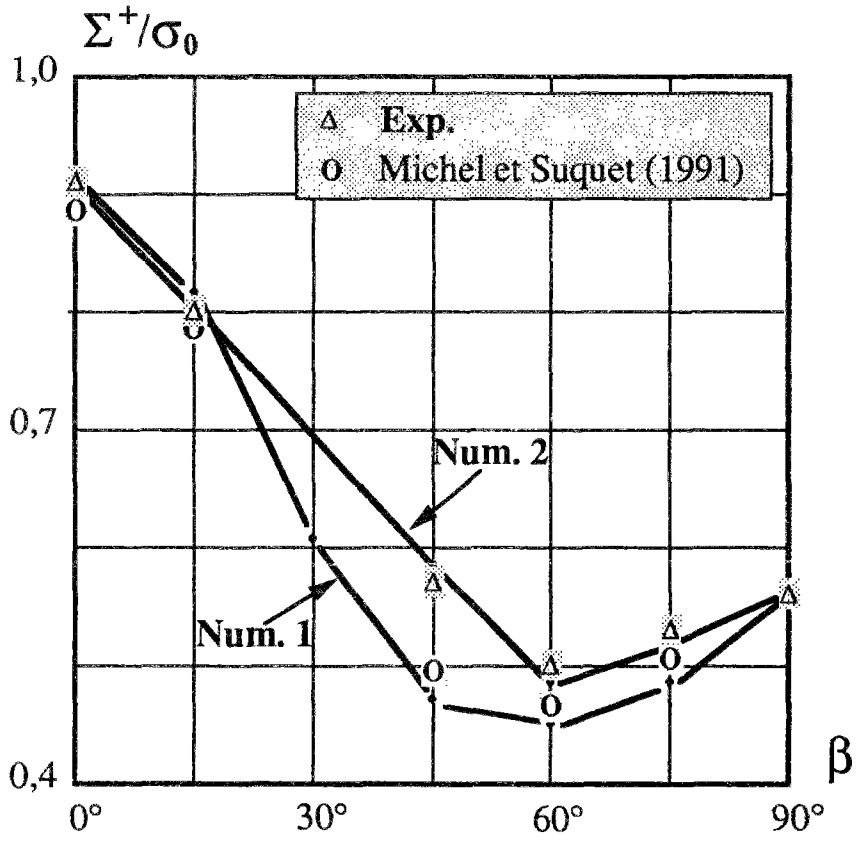


Figure 21 : Limite en traction en fonction de β.

On remarque que les valeurs obtenues expérimentalement sont supérieures à celles données par **Num1.** qui sont pourtant supposées constituer des évaluations par excès. Cet écart peut s'expliquer de la manière suivante :

Comme nous avons déjà eu l'occasion de le rappeler, l'approche **Num1.** (tout comme l'approche **Num2.**) se rapporte à une modélisation bidimensionnelle en contrainte plane d'un problème qui est *a priori* de nature tridimensionnelle.

On peut par exemple noter, en se reportant à *la figure 12*, que l'épaisseur de la tôle utilisée (0,7 mm) est du même ordre de grandeur que la largeur des perforations (1 mm). Or l'on sait (cf. Salençon (1983), Chap. V : Problèmes plans de calcul à la rupture) que le domaine des chargements supportables par la structure modélisée en contrainte plane constitue une approche par l'intérieur du domaine des chargements supportables par la structure homologue tridimensionnelle. Là réside vraisemblablement la principale raison pouvant expliquer pourquoi les résultats des calculs en contrainte plane sous-estiment les valeurs obtenues expérimentalement.
Seul un calcul sur la cellule de base tridimensionnelle (i.e. en tenant compte d'un épaisseur) permettrait d'examiner ce point plus en détail.

3. APPLICATION N° 2 : AUTRES FORMES DE CAVITÉS

Nous nous limitons ici, à donner quelques résultats numériques, correspondant au cas d'une plaque mince comportant des cavités de forme carrée ou circulaire.

3.1. Cas de la cavité carrée

La structure étudiée, ainsi que le chargement macroscopique sont représentés sur la figure suivante :

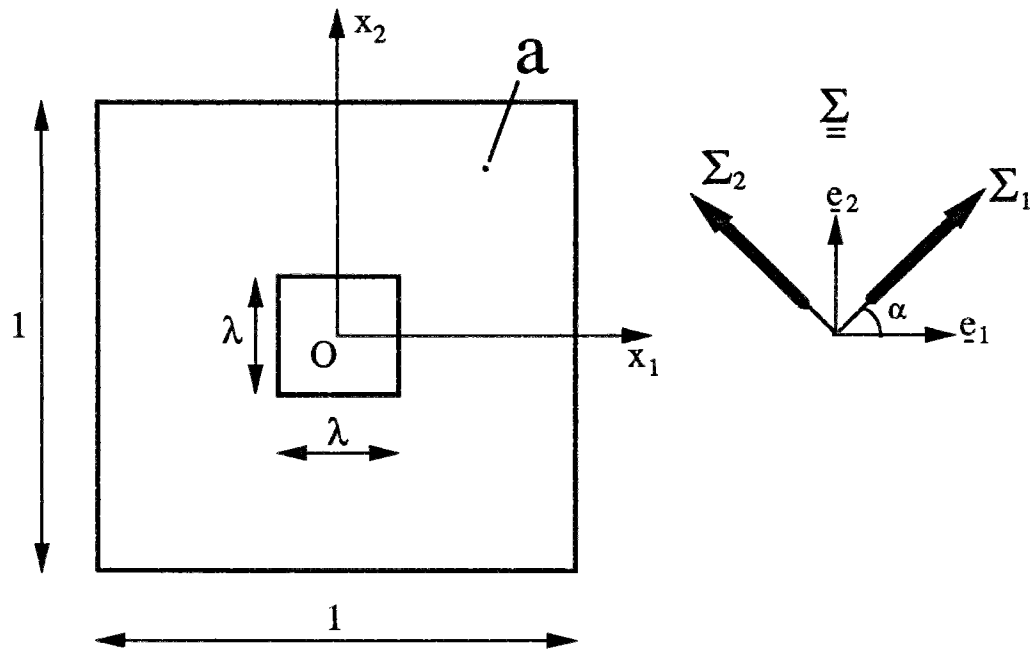


Figure 22 .

Le matériau sain est supposé obéir au critère de Von Mises en contrainte plane, la limite en traction simple est notée σ_0 .

A. Chargement dans les axes ($\alpha = 0°$)

Ce cas a été traité explicitement de façon analytique en **4.1.2. chap. I** , et $G^{hom}(\alpha=0°)$

a été déterminé partiellement à l'aide des approches statique et cinématique. Nous signalons tout de suite que tous ces résultats ont été retrouvés grâce à la combinaison des discrétisations de type (1) et (2) , et améliorés dans certains cas.
Nous allons caractériser ici, les résultats obtenus numériquement de la manière suivante :

- On écrit le chargement macroscopique comme suit :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + r \, \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) \qquad (3.\ 1)$$

- Pour chaque valeur fixée de r *(ce qui revient à fixer la "direction" de la contrainte macroscopique dans le plan* (Σ_1, Σ_2) *)*, nous allons donner la valeur limite de l'amplitude Σ^+ de Σ . Il est évident que cette dernière, dépend de r et de la valeur de **la porosité** $\mathbf{p = \lambda^2}$.

Or les capacités de résistance macroscopiques sont complétement déterminées dans ce cas, par leur donnée dans la région du plan définie par $\Sigma_1 \geq |\Sigma_2|$ *(symétrie de* G^{hom} *par rapport à la première et la seconde bissectrice)*, ce qui implique que l'on peut se restreindre à $-1 \leq r \leq 1$. Rappelons finalement, qu'il a été établi que :

$$r = -1 \quad \Rightarrow \quad \Sigma^+ = (1 - \sqrt{p} \,) \, \sigma_0 / \sqrt{3} \qquad (3.\ 2)$$

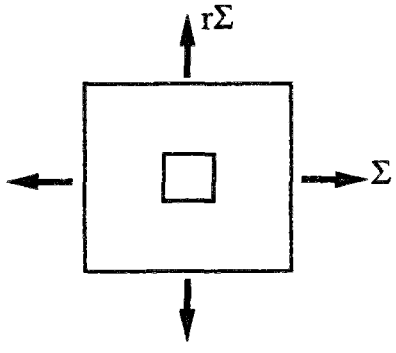
et

$$r \in [\, 0 \, , \, 1 \,] \quad \text{et} \quad p \leq 3 - 2\sqrt{2} \simeq 0{,}171 \quad \Rightarrow \quad \Sigma^+ = (1 - \sqrt{p} \,) \, \sigma_0 \qquad (3.\ 3)$$

Nous avons représenté sur *les figures 23 et 24*, et pour diverses valeurs de r, les variations de Σ^+ en fonction du paramètre porosité p .

Remarque :

Ces courbes peuvent servir à l'établissement d'expressions analytiques pour le critère de résistance macroscopique.



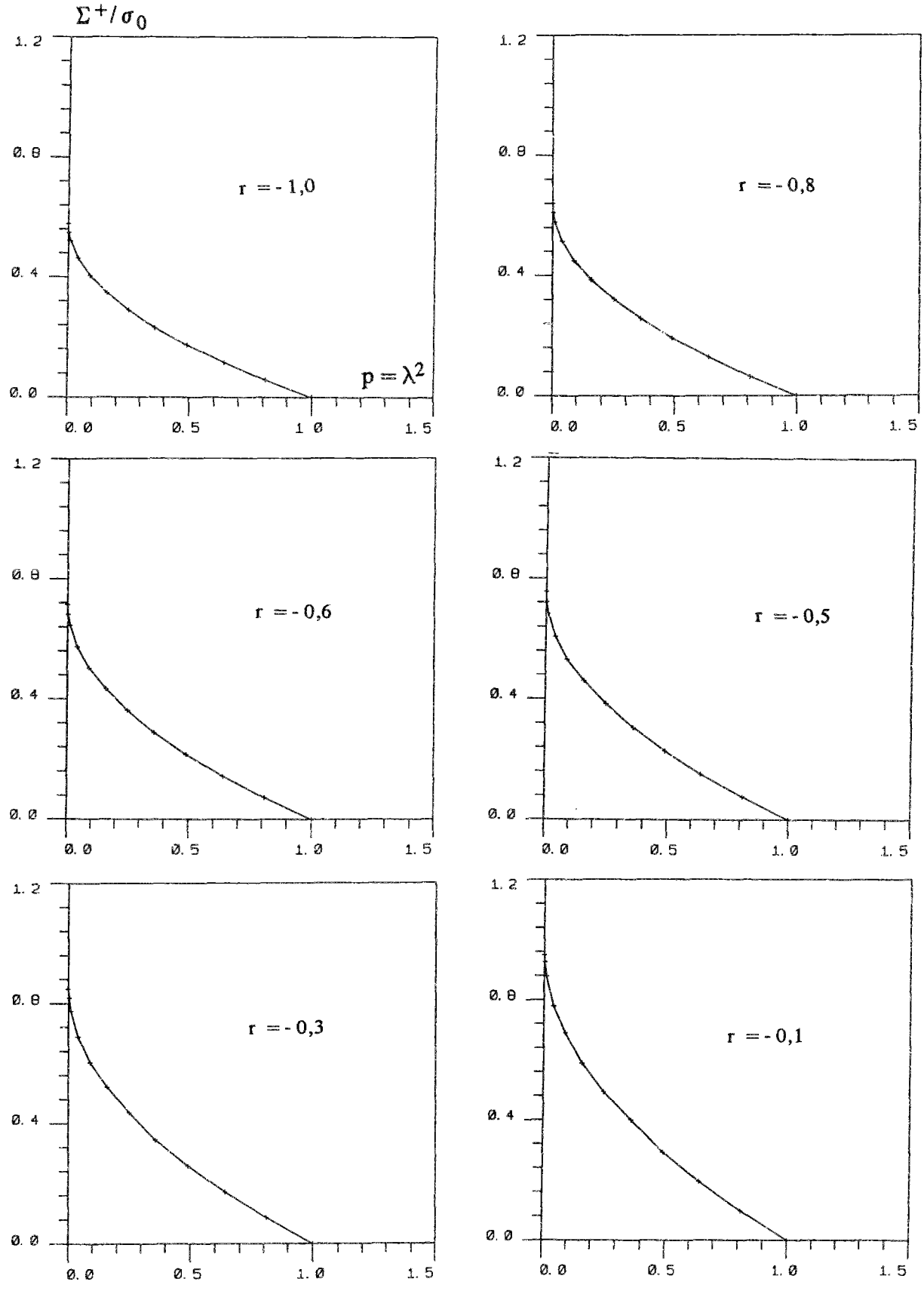


Figure 23 : variations de Σ^+ en fonction de la porosité p . $-1 \leq r \leq 0$.

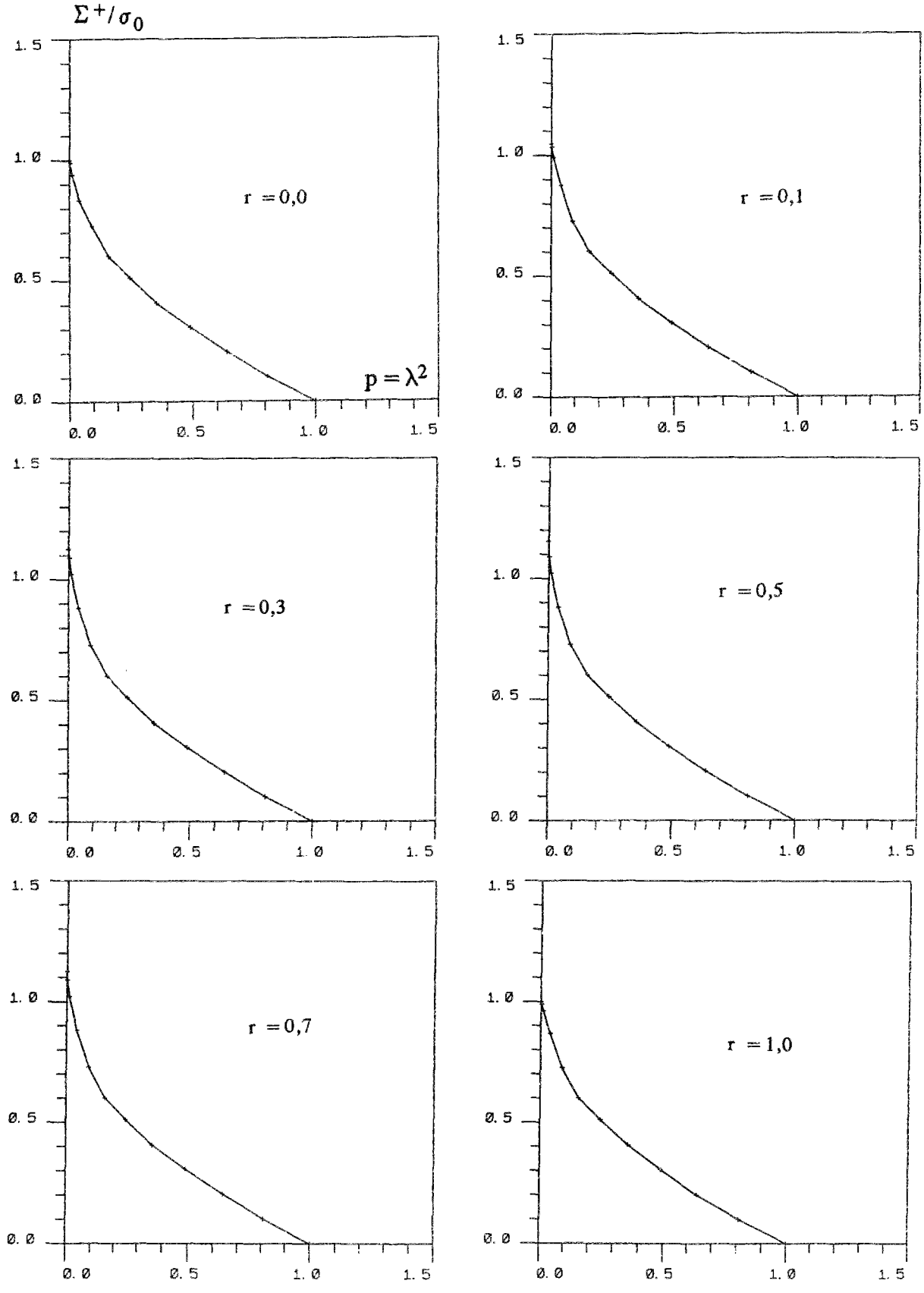


Figure 24 : variations de Σ^+ en fonction de la porosité p . $0 \leq r \leq 1$.

B. Anisotropie de résistance

Dans cette section, nous nous proposons de caractériser l'anisotropie de résistance du matériau homogénéisé, en nous intéressant à un cas particulier de chargement macroscopique : traction suivant une direction formant un angle α avec la direction Ox_1 .

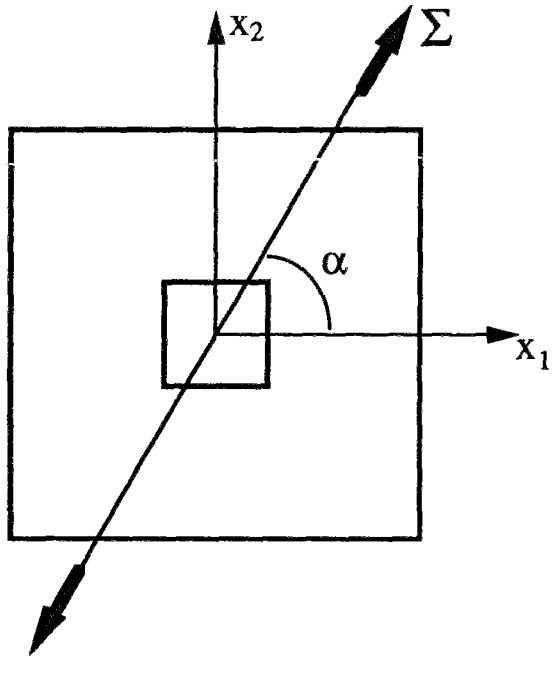


Figure 25 : Cellule sous traction uniaxiale inclinée .

Le calcul a été effectué en considérant les trois types de conditions aux limites sur le bord ∂a :

1/ Contrainte homogène (C.H.)
2/ Conditions périodiques (Hom.)
3/ Déformation homogène (D.H.)

Nous illustrons sur *la figure 26* les résultats obtenus pour la limite en traction suivant la valeur de l'inclinaison α, pour les trois types de conditions aux limites. Evidemment, la courbe est symétrique par rapport à $\alpha = 45°$ Comme prévu, l'approche D.H. surestime la valeur de cette limite : l'écart avec les résultats issus de l'approche Hom. atteint pour certaines inclinaisons, des valeurs supérieures à 25 % .

En outre, le calcul avec déformation homogène sur le bord de la cellule rend mal compte de l'anisotropie de résistance : moins de 8 % d'écart entre sa valeur maximale ($\alpha = 0°$) et minimale ($\alpha = 45°$). Par contre, si l'approche C.H. met bien en évidence cette anisotropie, elle sousestime la résistance en traction : pour $\alpha = 45°$ par exemple, elle conduit à une valeur inférieure d'environ 12 % à celle résultant de l'approche Hom. Encore une fois, le rôle crucial de la nature des conditions aux limites est bien mis en évidence.

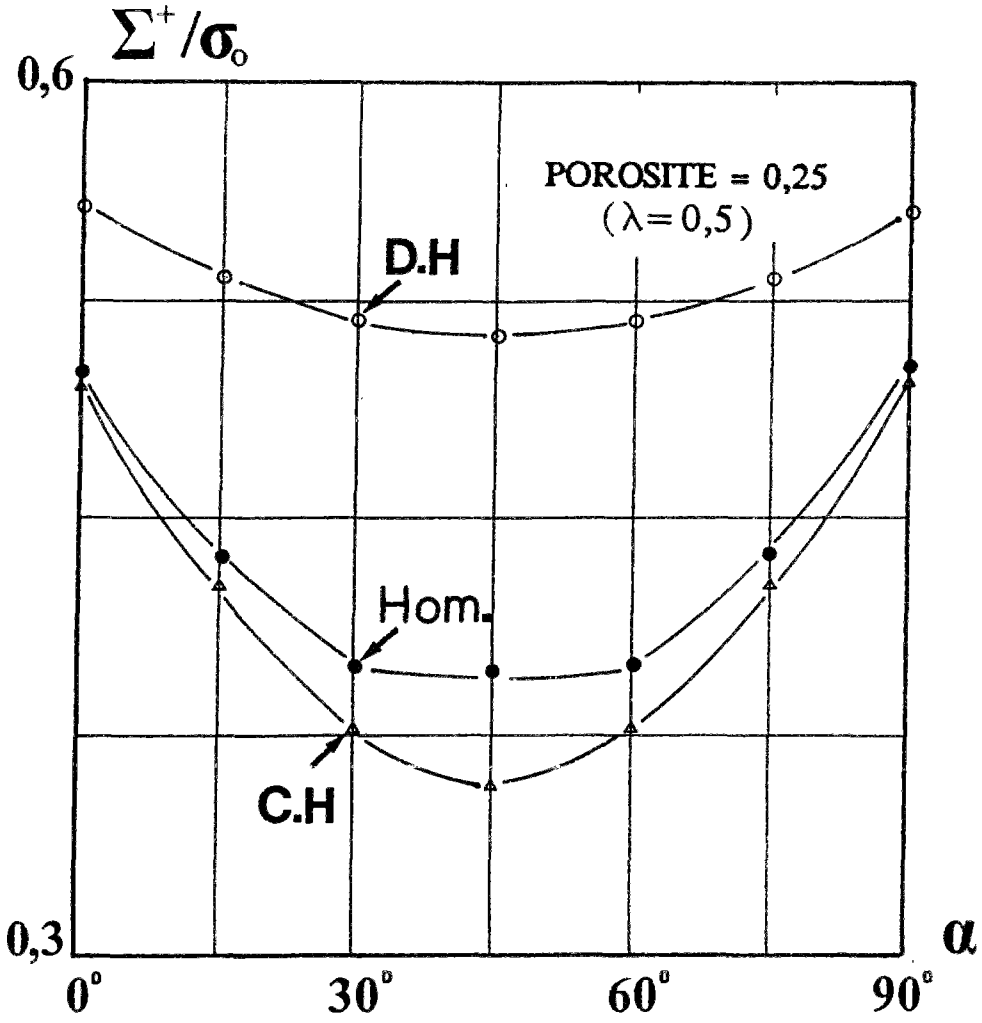


Figure 26 : Anisotropie de résistance à la traction. porosité p = 0,25 .

3.2. Cas de la cavité circulaire

Nous nous limitons dans cette section à donner les résultats obtenus dans le cas où le chargement macroscopique se réduit à une traction simple :

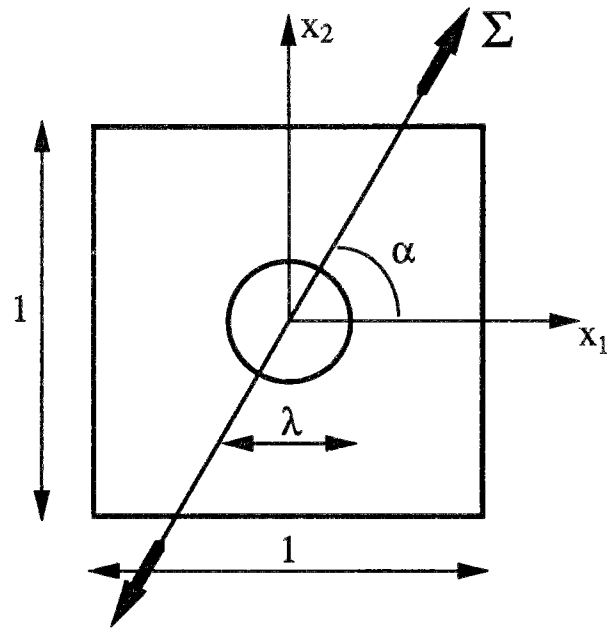


Figure 27 .

A. Limite en traction pour $\alpha = 0°$

Pour diverses valeurs du diamètre λ de la perforation (porosité $p = \pi\lambda^2/4$) , on détermine la limite en traction simple du matériau homogénéisé. Rappelons que ce problème a été étudié en **4.1.3. chap. I.**. Nous y avons fourni des estimations statique et cinématique de la limite en traction, et l'écart maximal entre ces deux estimations était d'environ 15 % .

Les résultats numériques obtenus sont très proches de ceux obtenus analytiquement en utilisant l'approche cinématique. Ceci incite à penser que cette dernière donne des résultats très proches des valeurs exactes, et que c'est l'approche statique qui doit être améliorée. Nous avons reporté sur *la figure 28*, les variations de la limite en traction en fonction du diamètre λ, ainsi que les résultats obtenus par Debordes et coll. (1985) *(calculs élastoplastiques)* et Guennouni (1987) *(régularisation viscoplastique).*

Les trois approches numériques conduisent à des résultats qui concordent parfaitement pour le problème traité.

Sur *la figure 29* sont représentés les champs de vitesse optimaux, pour quelques valeurs de λ.

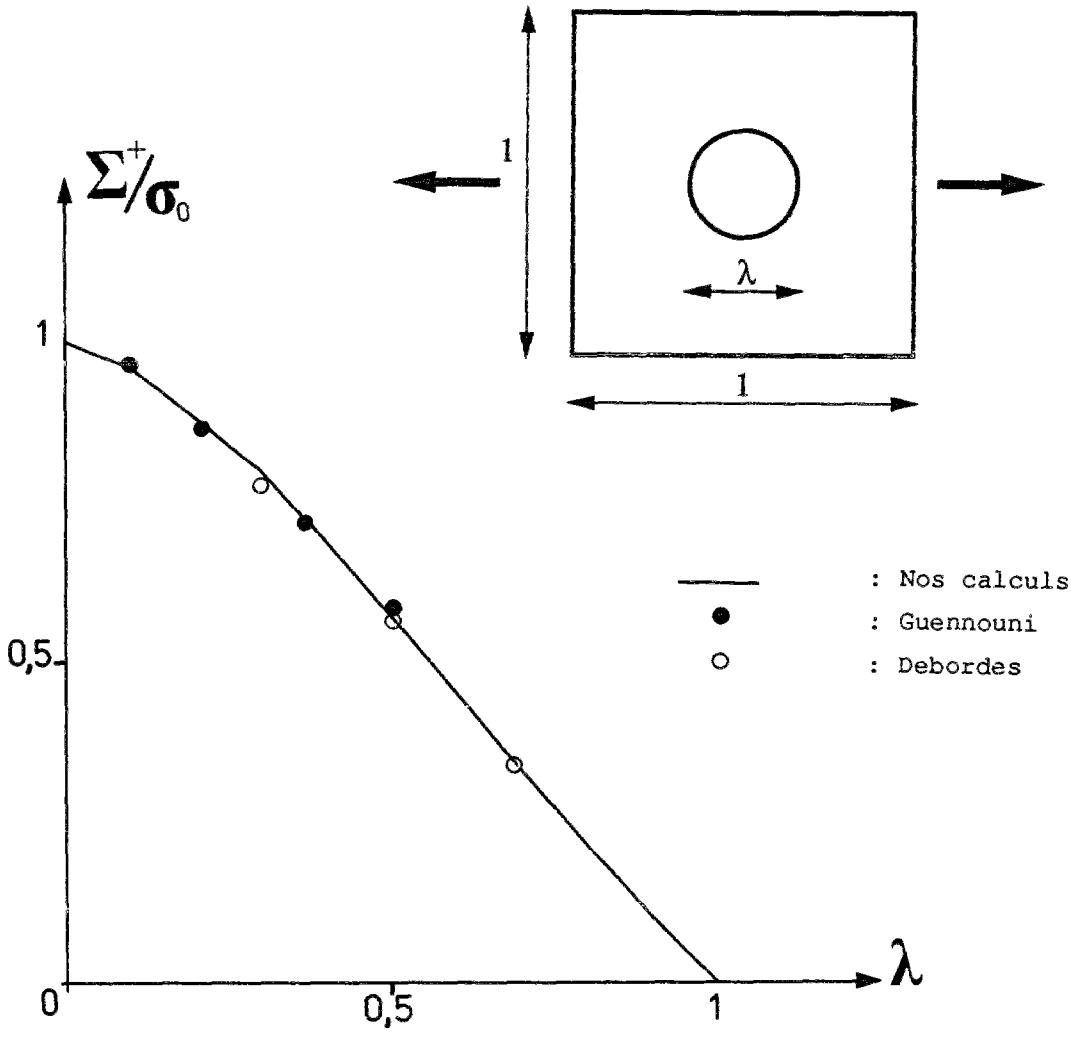


Figure 28 : Limite en traction pour $\alpha = 0°$.

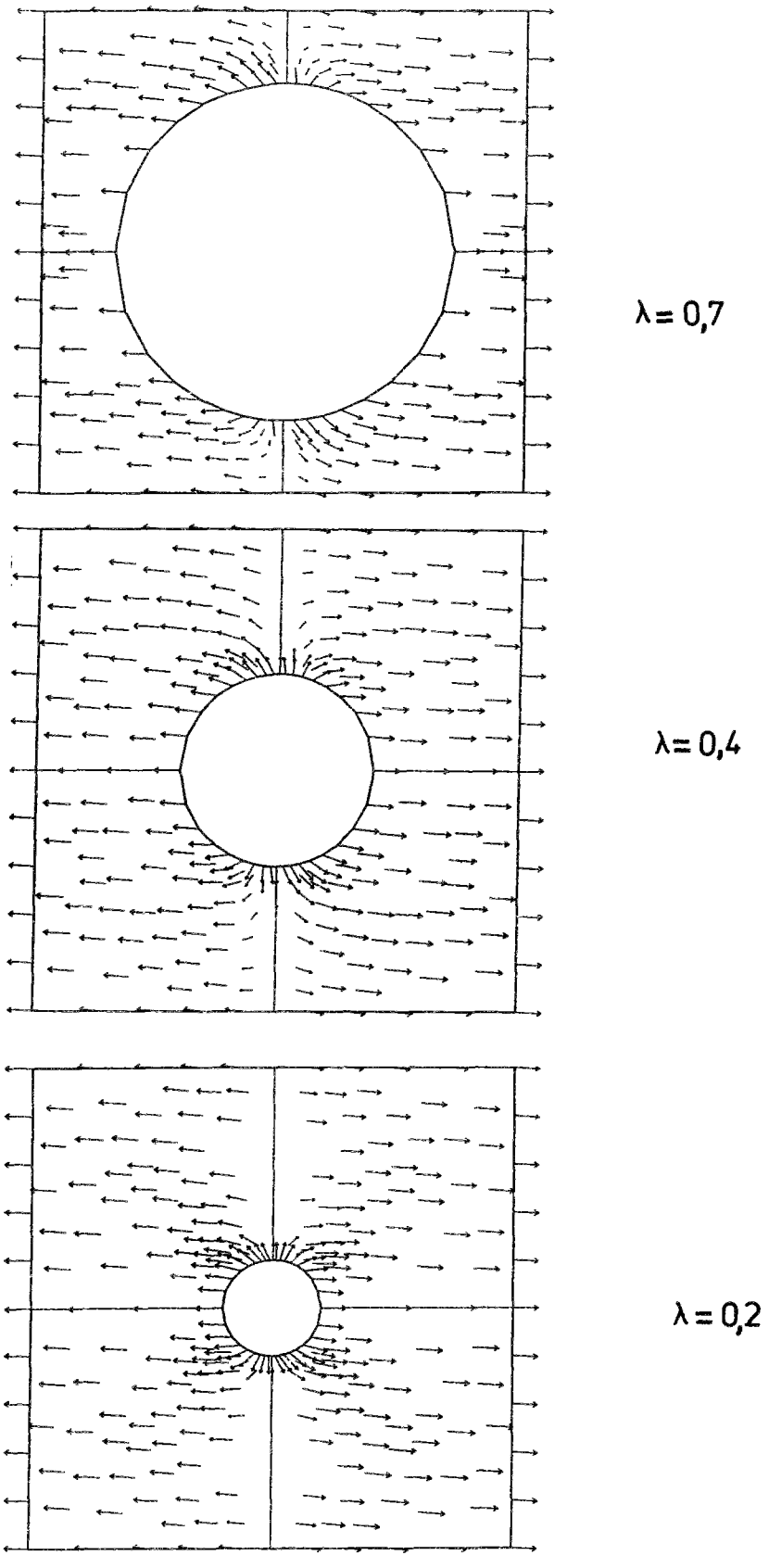


Figure 29 : Champs de vitesse optimaux en traction à $\alpha = 0°$.

B. Anisotropie de résistance

Pour un tel milieu, il était intéressant d'essayer d'appréhender son éventuelle anisotropie de résistance. Pour ce faire, on a étudié l'évolution de la limite en traction Σ^+ en fonction de l'inclinaison α.

Sur *la figure 30*, sont représentés les résultats obtenus pour une valeur du diamètre de la cavité de 0,5 , soit une porosité d'environ 0,2. Là encore on observe une anisotrope de résistance très marquée : l'écart est d'environ 18 % entre sa valeur minimale (α = 45°) et maximale (α = 0°).

Ce résultat montre que la forme de la cavité ne préviligiant aucune direction dans le plan, le caractère anisotrope est entièrement dû à la forme de la cellule de base. Sachant que l'on peut toujours se ramener à une cellule de base en forme de parallélogramme (avec donc des directions prévilégiées), on peut alors avancer que **quelque soit la forme de la cavité, les capacités de résistance macroscopiques seront toujours anisotropes** (Sauf dans le cas trivial d'une cellule homogène !).

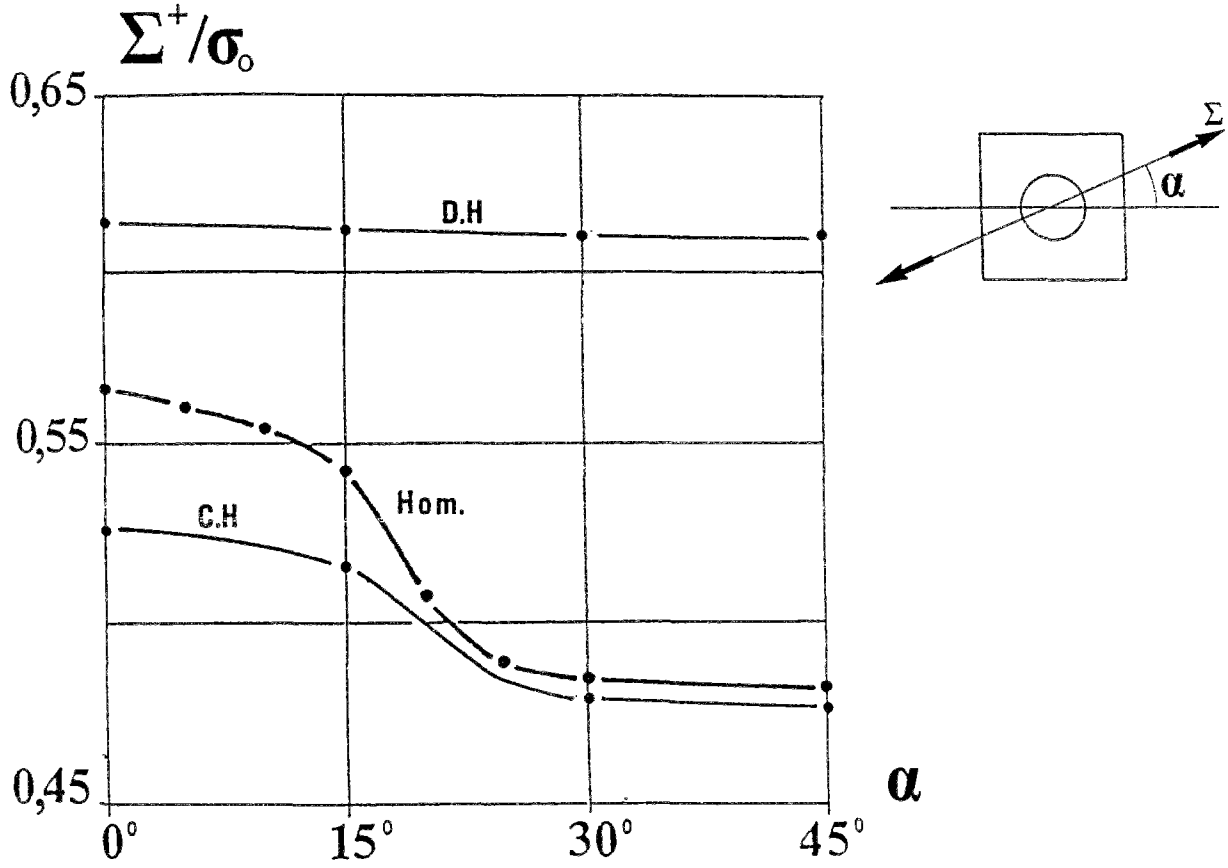


Figure 30 : Anisotropie de résistance à la traction.

A titre d'illustration, nous donnons sur la figure suivante la distribution du champ de vitesse optimal correspondant à $\alpha = 30°$, ainsi que les isovaleurs d'une norme de la déformation associée. On constate que celle-ci est localisée dans une partie la cellule.

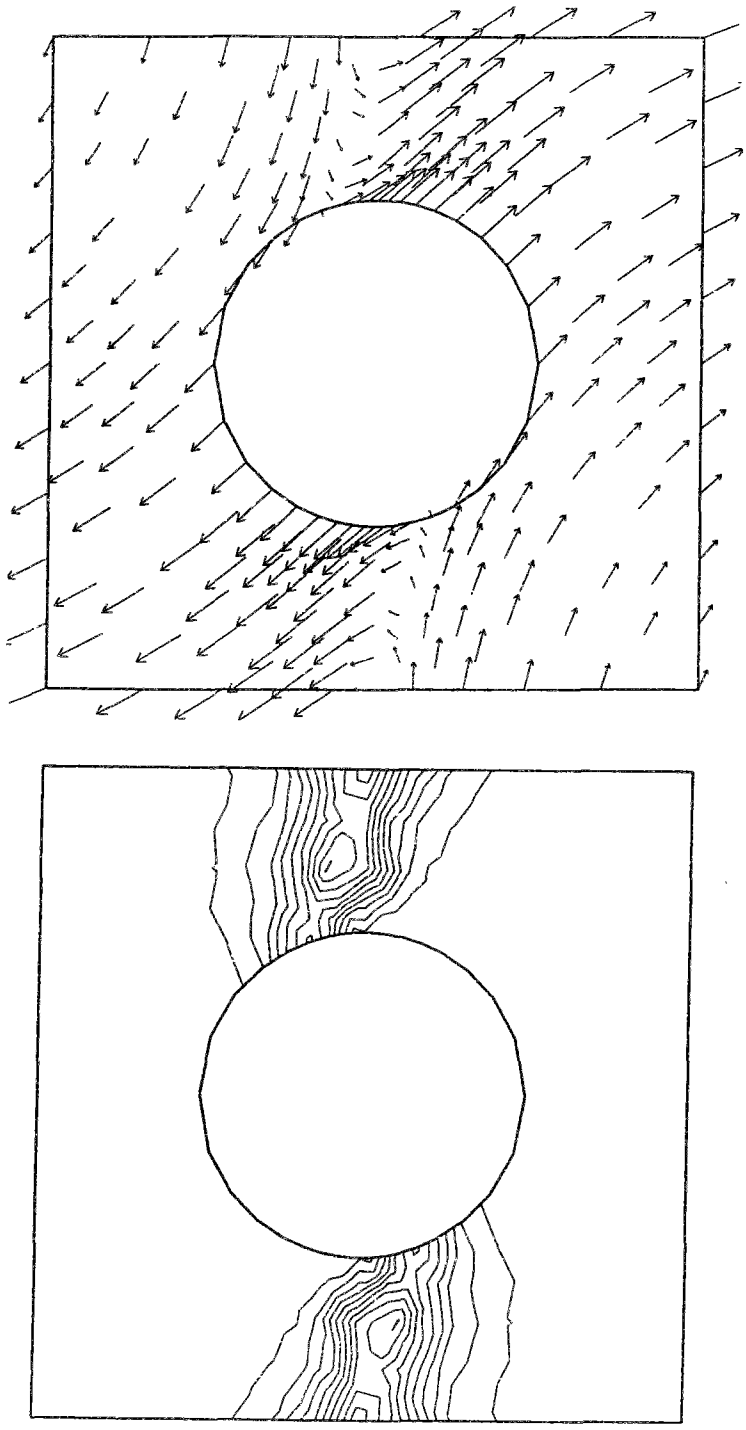


Figure 31 : Champ optimal et une norme de la déformation associée. $\alpha = 30°$.

3. APPLICATION N° 3 : PLAQUE RENFORCÉE PAR INCLUSIONS

Nous nous proposons de traiter le cas d'un milieu homogène, comportant une distribution périodique d'inclusions. Plus précisement, ce milieu est tel que la cellule de base soit un carré de côté l'unité, au centre duquel est placée une inclusion également carrée, de côté égal à λ :

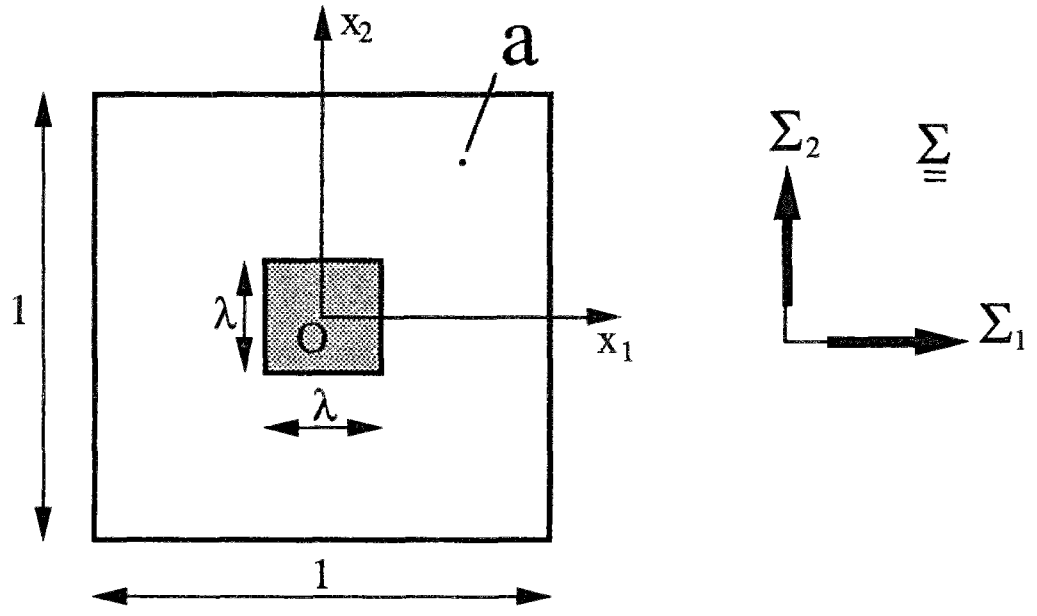


Figure 32 : Cellule de base et chargement macroscopique.

Hypothèses de calcul :

Les matériaux constitutifs sont supposés obéir à des critères de Von Mises, caractérisés par :

- un convexe de résistance G_0 et une résistance en traction simple σ_0, pour le matériau "matrice".
- un convexe de résistance noté G_r et une résistance en traction simple σ_r, pour le matériau "renfort".

Le terme de "renforcement" est à prendre au sens large du terme : Il s'agit d'un affaiblissement *(respectivement d'un renforcement effectif)* des capacités de résistance du milieu lorsque le rapport

σ_r/σ_0 est inférieur *(resp. supérieur)* à 1.
En outre, nous nous limitons au cas de figure correspondant à un contact matrice-inclusion de type adhérence parfaite. Le paramètre $\eta = \lambda^2$ représente la proportion surfacique du matériau "renfort". Il correspond tout simplement à la porosité, dans le cas où $\sigma_r/\sigma_0 = 0$.

On peut remarquer que :

$$\sigma_r/\sigma_0 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad G_r \subseteq G^{hom} \subseteq G_0 \qquad (4.1)$$
$$\sigma_r/\sigma_0 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad G_0 \subseteq G^{hom} \subseteq G_r \qquad (4.2)$$

Cas particulier $\eta \leq 0{,}25$ ($\lambda \leq 0{,}5$) :

Les hypothèses de calculs étant faites, nous allons décrire brièvement l'influence du rapport σ_r/σ_0 sur les capacités de résistance du matériau homogénéisé, lorsque $\eta \leq 0{,}25$.

(a) Si ce rapport est inférieur à 1, alors le caractère affaiblissant du renforcement est très significatif : à titre exemple, lorsque $\sigma_r/\sigma_0 = 0$ (i.e. milieu perforé), les capacités de résistance du matériau composite sont réduites d'environ ($1 - \sqrt{\eta}$) % , par rapport à celle du matériau " matrice " (voir étude analytique du **4.1.2. chap. I**).

(b) À l'inverse, si le rapport σ_r/σ_0 est supérieur à 1, le renforcement est très peu efficace (i.e. $G^{hom} \simeq G_0$). Ceci peut être montré en considérant l'approche cinématique de G^{hom}, mettant en oeuvre les mécanismes très simples suivants :

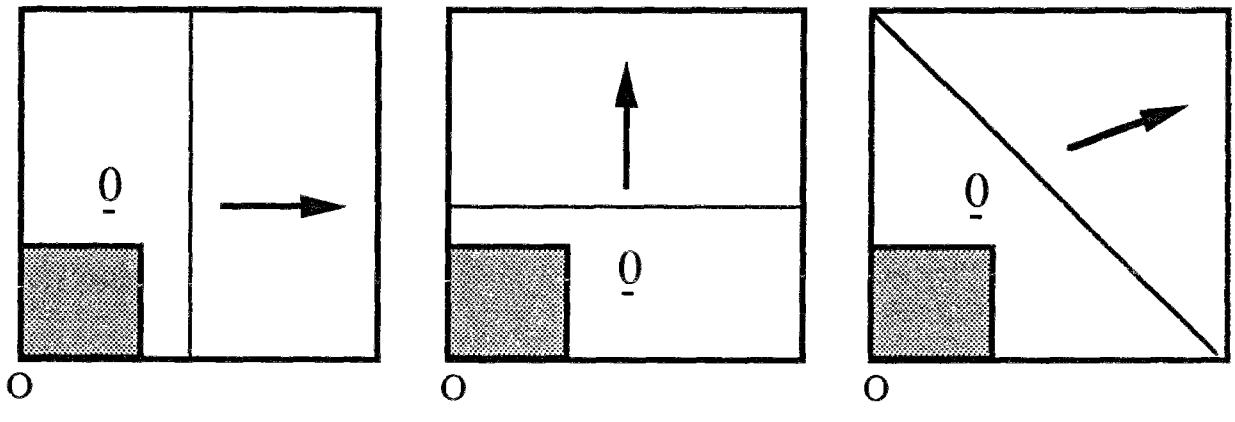


Figure 33 : Approche cinématique de G^{hom}. Mécanismes par blocs.($\eta \leq 0{,}25$ et $\sigma_r/\sigma_0 \geq 1$).

Les trois champs de vitesse précédents fournissent une évaluation par l'extérieur de G^{hom}, G^c définie par :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^c \Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 - \frac{6}{5}\Sigma_1\Sigma_2 \leq \frac{16}{15}\sigma_0^2 \\ |\Sigma_i| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0 \qquad i = 1, 2 \end{cases} \tag{4. 3}$$

Comme on le constate sur *la figure 33*, G^c est très peu différent de G^{hom} *(noter que $G_0 \subseteq G^{hom} \subseteq G^c$).* Ce résultat signifie que l'accroissement des capacités de résistance du composite du à l'introduction du matériau de renforcement est peu significatif, même si σ_r/σ_0 est infiniment grand.

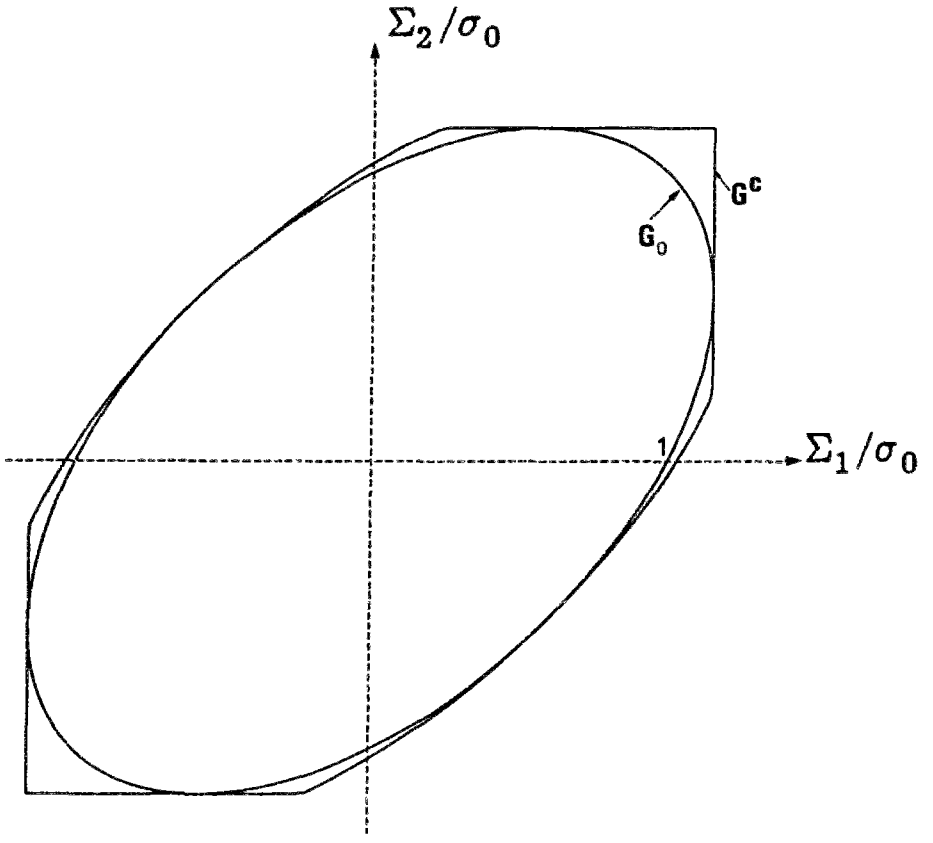


Figure 34 : Approche cinématique de G^{hom}. $G_0 \subseteq G^{hom} \subseteq G^c$. ($\eta \leq 0{,}25$).

Nous allons donner maintenant, dans le cas où $\eta > 0{,}25$, les résultats obtenus numériquement, en nous intéressant notamment à l'évolution du convexe macroscopique lorsqu'on fait varier le rapport σ_r/σ_0 de la valeur 0 jusqu'à des valeurs supérieures à 1.

A. Convexe macroscopique

Les directions principales du chargement macroscopique examiné ici, coincident avec les axes Ox_1 et Ox_2. En utilisant les symétries du problème, on peut se restreindre (voir **3.4. chap.I**) au quart de la cellule défini par $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$, avec des conditions aux limites classiques sur le bord. On a également montré que pour les champs de vitesse explorés, les tenseurs vitesse de déformation macroscopique associés admettent les mêmes directions principales que $\underline{\underline{\Sigma}}$:

$$\underline{\underline{D}} = D_1 \, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + D_2 \, \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$$

En outre, G^{hom} est complétement décrit en se limitant aux directions de déformation macroscopique θ ($tg\theta = D_2/D_1$) comprises entre -45° et +45° . On complète alors la détermination de G^{hom}, en exploitant les symétries par rapport à la première et la seconde bissectrice dans le plan des contraintes macroscopiques.

Pour diverses valeurs de $\eta > 0{,}25$ et du rapport σ_r/σ_0, les calculs numériques ont été effectués à l'aide des discrétisations de type (1) et (2). Au vu des résultats, deux cas sont à distinguer :

A.1. $\sigma_r/\sigma_0 \leq 1$

Le matériau " matrice " est affaibli et on vérifie bien, que le convexe macroscopique est compris entre G_r et G_0 *(figure 35)*. Au fur et à mesure que σ_r/σ_0 croît de 0 à 1, G^{hom} évolue de manière continue et " quasi-proportionnelle " à ce rapport, en tendant vers G_0. Et les points anguleux de la frontière s'estompent progressivement *(figure 36)*.

En ce qui concerne les champs de vitesse optimaux :

Pour $\sigma_r/\sigma_0 = 0$, la discrétisation de type (2) par champs discontinus est plus performante pour θ compris entre -45° et une direction à environ -25° . Au fur et à mesure que ce rapport s'approche de 1, cet intervalle se rétrécit *(autour de -45°)* et c'est l'approche par champs continus (de type (1)) qui donne la meilleure approche de G^{hom}. À partir de $\sigma_r/\sigma_0 = 1$, la discrétisation par champs discontinus perd toute sa pertinence comme approche du convexe macroscopique.

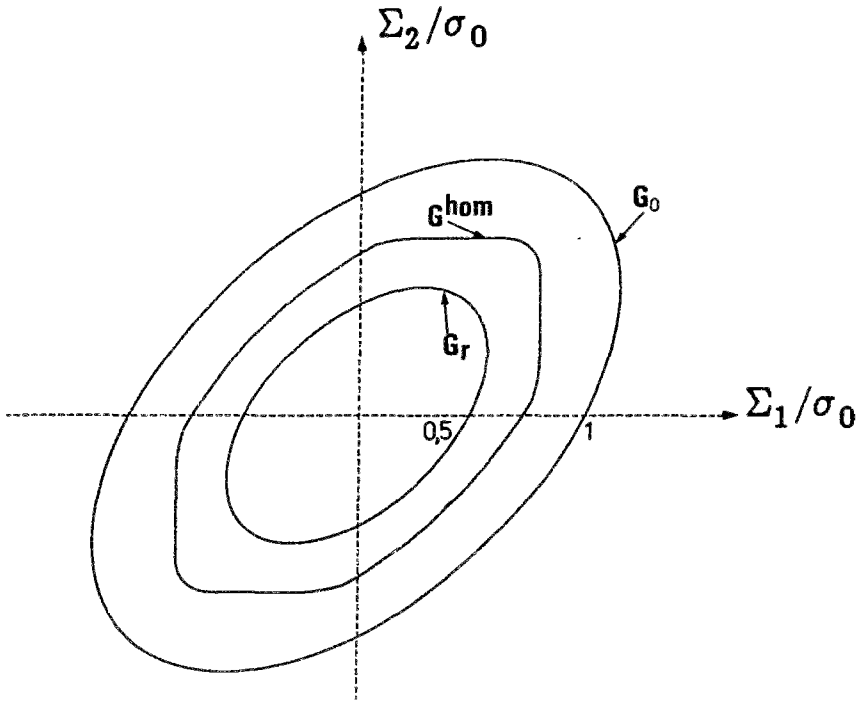


Figure 35 : G_0, G_r et G^{hom} pour σ_r/σ_0 = 0,5 et η = 0,36 .

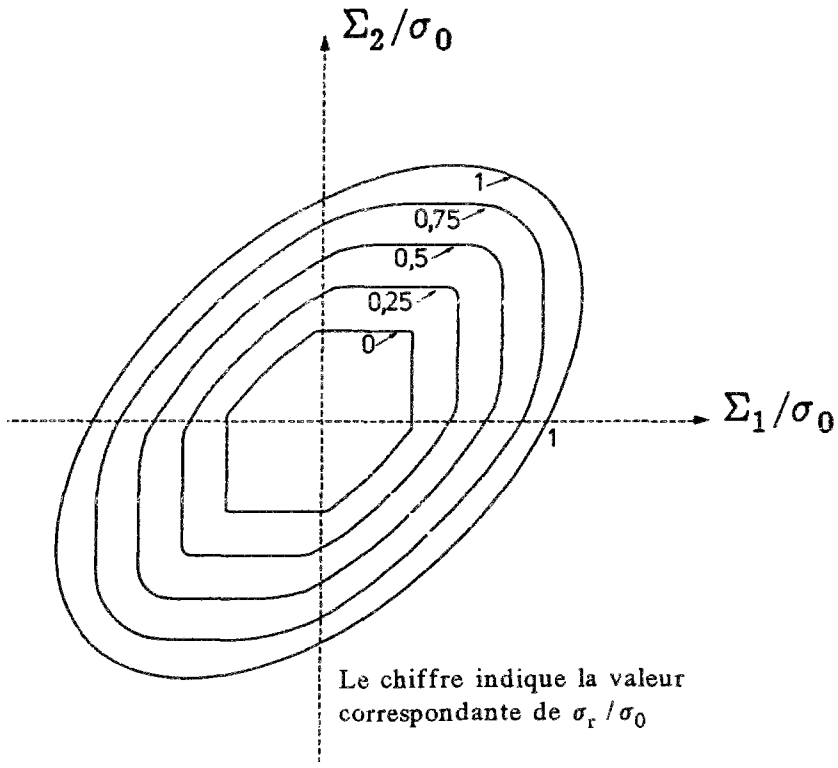


Figure 36 : Convexes macroscopiques pour η = 0,36 .

A.2. $\sigma_r/\sigma_0 \geq 1$

On a précisé auparavant que pour $\eta \leq 0{,}25$, le renforcement dû aux inclusions est négligeable. On se rend compte qu'en fait, même pour $\eta > 0{,}25$, l'accroissement des capacités de résistance reste limité *(figures 37 et 38)* :

• Dans les zones définies par $\Sigma_1 \; \Sigma_2 \geq 0$, G^{hom} est de forme semblable à celle du domaine G_c, dont les équations sont données par *(4. 3)*. Ce domaine coincide avec G_0 au point $\underline{\underline{\Sigma}} = (\Sigma_1 \; , \; \Sigma_2) = (\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \; , \; \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0)$, ainsi qu'aux points symétriques de celui-ci par rapport à la 1ère et la 2nde bissectrice.

• Dans les zones définies par $\Sigma_1 \; \Sigma_2 \leq 0$ et contrairement au cas $\eta \leq 0{,}25$, on constate en revanche un renforcement assez notable du matériau " matrice " . Cet apport en terme de résistance peut être caractérisé par le rapport K/k_0 , où k_0 est la limite en cission simple du matériau " matrice " et K l'estimation numérique de la limite en scission k^{hom} du composite *(points correspondant à l'intersection des différentes frontières des domaines avec la 2nde bissectrice)*.

	K/k_0		
σ_r/σ_0	$\eta \leq 0{,}25$	$\eta = 0{,}36$	$\eta = 0{,}64$
1,00	1,00	1,00	1,00
1,25	1,00	1,05	1,15
1,50	1,00	1,07	1,30
2,00	1,00	1,11	1,51
3,00	1,00	1,15	1,59
5,00	1,00	1,20	1,59

Remarque :

En ce qui concerne les champs de vitesse optimaux, notons que c'est la discrétisation de type (1) par champs continus qui donne la meilleure approche du convexe macroscopique , et ce pour toute direction de déformation macroscopique θ.

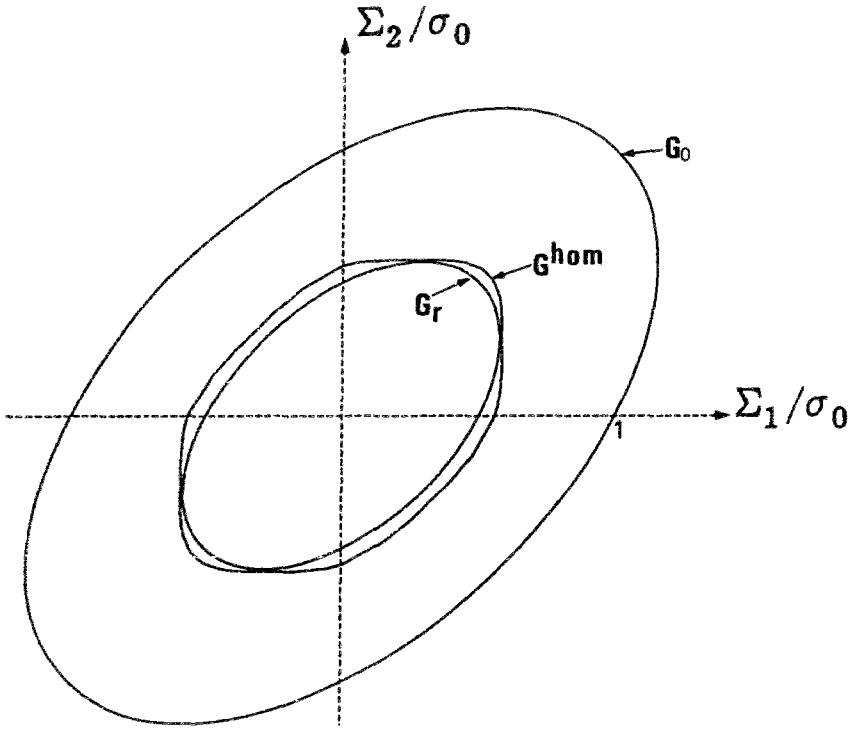


Figure 37 : G_0, G_r et G^{hom} pour σ_r/σ_0 = 2,0 et η = 0,36 .

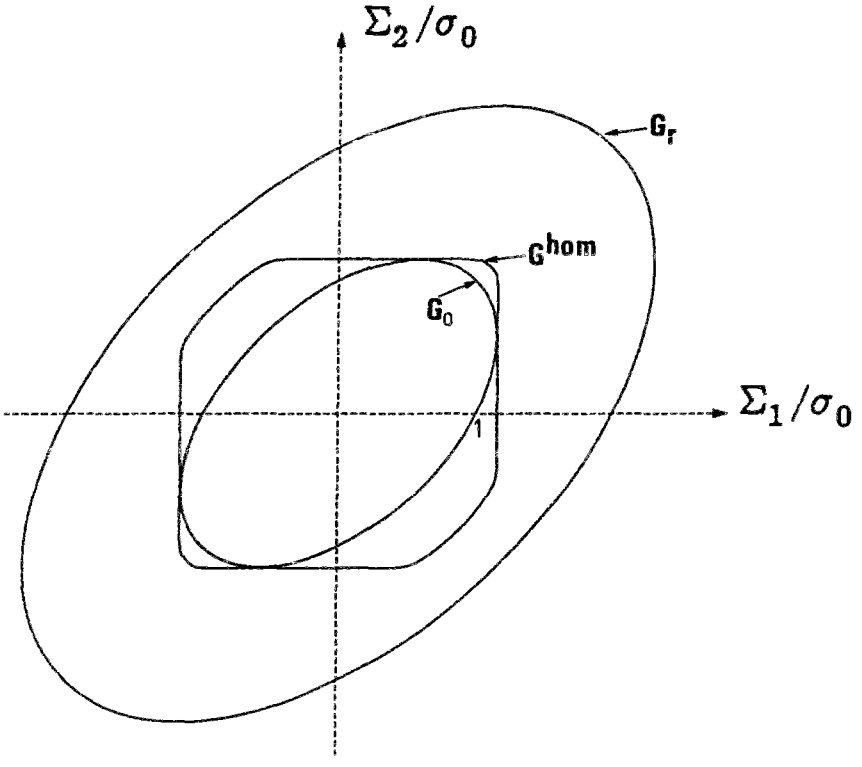


Figure 38 : G_0, G_r et G^{hom} pour σ_r/σ_0 = 2,0 et η = 0,64 .

On peut remarquer que quelles que soient les valeurs de η et σ_r/σ_0 , G^{hom} reste inclus dans le carré défini par :

$$|\Sigma_i| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0 \qquad i = 1 , 2 \qquad (4.4)$$

Ce résultat découle immédiatement de la mise en oeuvre de l'approche cinématique utilisant les champs de vitesse par blocs suivants :

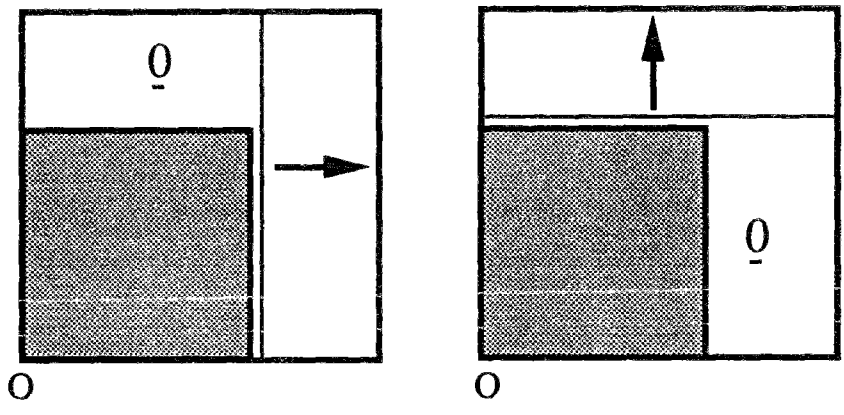


Figure 39 .

B. Limite en traction simple

Nous donnons brièvement quelques résultats concernant les limites en traction simple, parrallèlement aux axes Ox_1 ou Ox_2, du composite étudié.

Sur *la figure 40* sont représentées les variations de Σ^+ en fonction du rapport σ_r/σ_0 , pour η valant 0,36 et 0,64 (λ = 0,6 ; 0,8).

- En notant C_1 et C_2 ces deux courbes, on vérifie bien évidemment que si C_1 est au dessus de C_2 pour $\sigma_r/\sigma_0 < 1$, ce phénomène s'inverse lorsque ce rapport devient supérieur à 1.
- La limite Σ^+ augmente de manière quasi linéaire lorsque σ_r/σ_0 croît de 0 à 1. Au-delà, Σ^+ tend vers une asymptote horizontale. Cette dernière restant bornée par :

$$\Sigma = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0 \qquad (4.5)$$

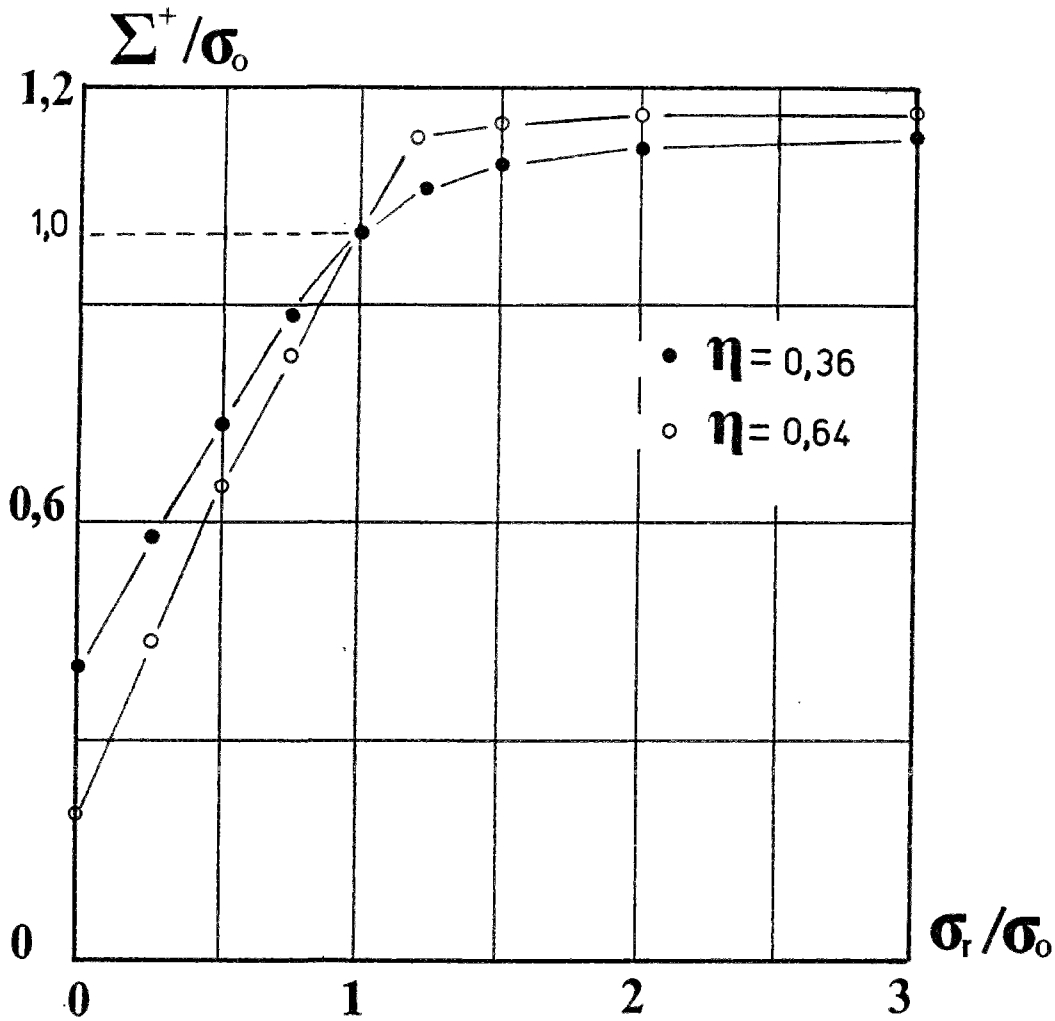


Figure 40 : Limite en traction simple du matériau renforcé.

Il est intéressant de voir comment évoluent les champs de vitesse optimaux correspondants *(figure 41)* ; d'un champ à déformation localisée dans la matrice ($\sigma_r/\sigma_0 = 0$) à un champ dont la déformation est homogène dans toute la cellule ($\sigma_r/\sigma_0 = 1$) , puis finalement vers un champ dont la déformation est quasiment localisée dans la seule matrice ($\sigma_r/\sigma_0 > 1$) .

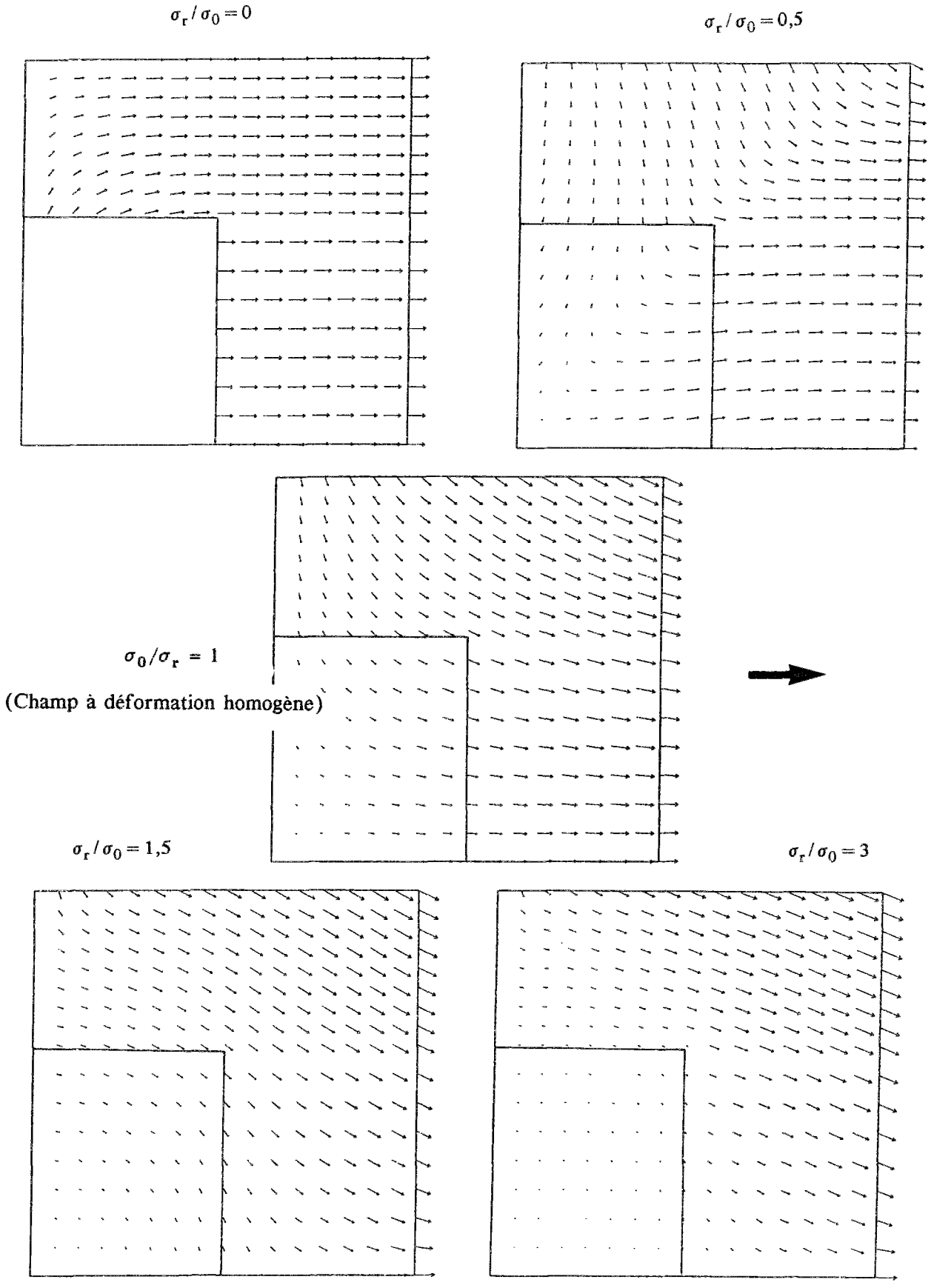


Figure 41 : Quelques champs de vitesse optimaux pour la traction simple.

C. Anisotropie de résistance

Lorsque le rapport σ_r/σ_0 est différent de 1, le critère de résistance de la plaque composite est anisotrope. Comme prévu, cette anisotropie est d'autant plus marquée que $| \sigma_r/\sigma_0 - 1 |$ est grand.

Nous illustrons ce phénomène en étudiant l'évolution de la limite en traction en fonction de l'inclinaison d'une sollicitation uniaxiale *(figure 42)* :

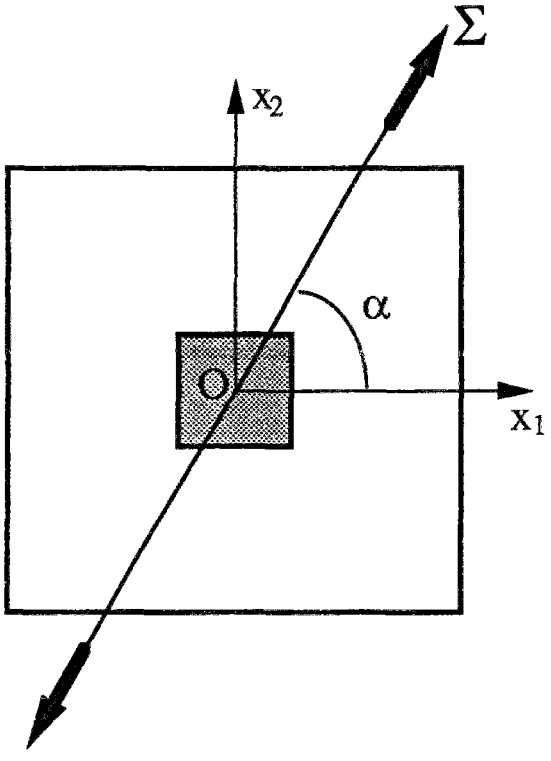


Figure 42 : Etude de la traction inclinée.

Le degré d'anisotropie d_{anis} peut être caractérisée par l'écart relatif entre la valeur de la limite en traction minimale (obtenue ici pour α voisin de 45°) et maximale ($\alpha = 0°$) , cette dérnière étant prise comme valeur de référence.

Comme on le constate sur *la figure 43*, ce degré est une fonction décroissante de la variable σ_r/σ_0 sur l'intervalle [0,1] , puis croît ensuite lorsque ce rapport devient supérieur à 1 .

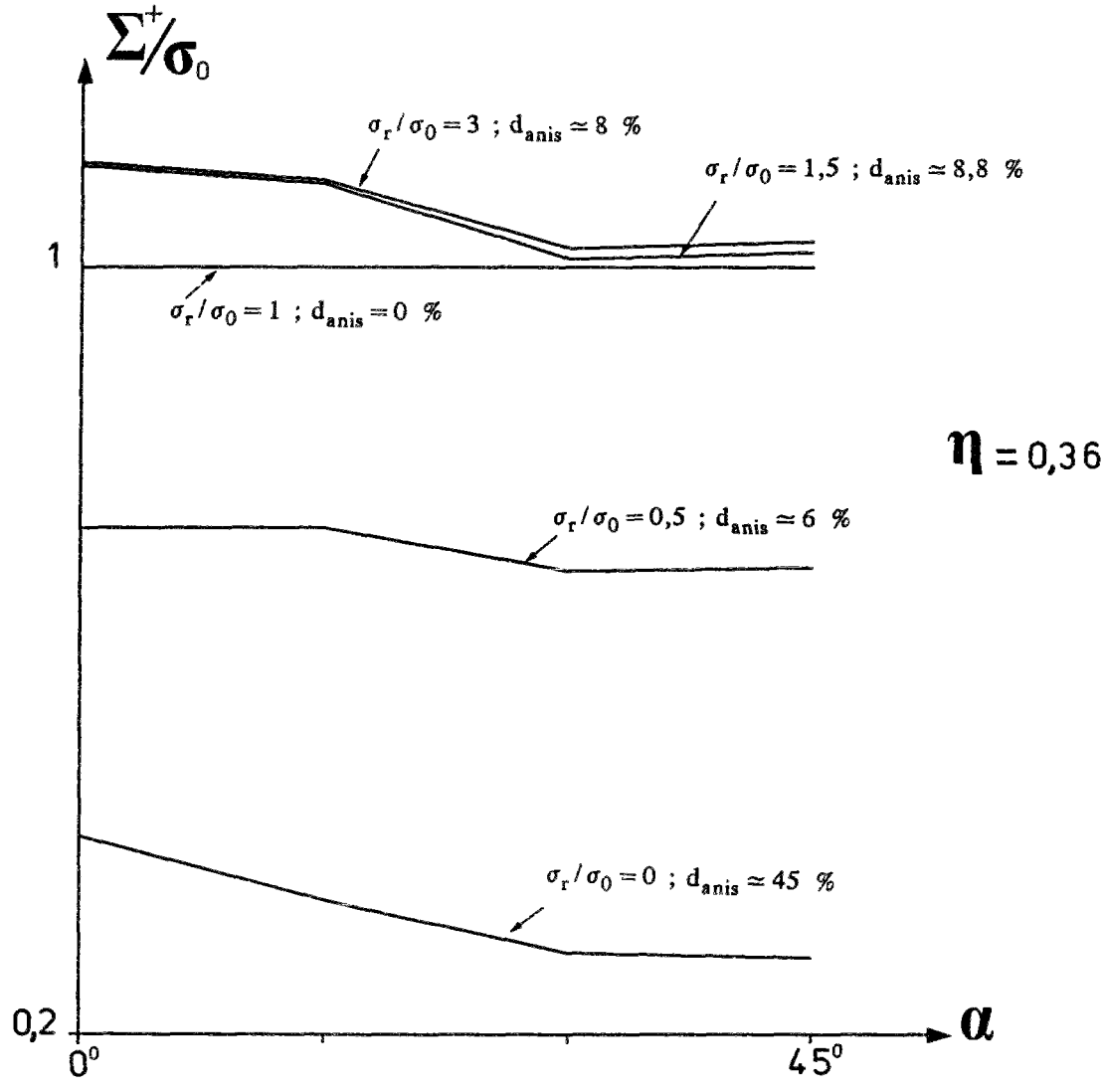


Figure 43 : Anisotropie de résistance à la traction de la plaque composite .

CONCLUSION

Arrivé au terme de ce travail, il convient de faire brièvement le point sur les résultats obtenus et d'envisager des développements ultérieurs.

Le premier résultat acquis réside bien évidemment dans la mise au point d'une méthode numérique fondée sur un raisonnement exclusivement de *calcul à la rupture*, en mesure d'estimer les capacités de résistance de structures, sans aucune ambiguité quant à l'interprétation des résultats fournis.

Parmi les applications étudiées, l'étude des plaques perforées a permis de mettre en evidence l'efficacité de la méthode. En particulier, l'anisotropie de résistance de telles structures a été clairement identifiée. Ce travail a fourni également l'opportunité de valider la méthode développée à l'aide des mesures expérimentales disponibles. Par ailleurs, il a été possible, sur cet exemple, de confronter nos résultats à ceux d'une approche numérique de nature différente *(calculs élastoplastiques)*. Cette comparaison a montré que le calcul à la rupture constitue un cadre mécanique approprié pour le problème de la détermination des charges extrêmes, tant pour la fiabilité d'interprétation des résultats que pour la facilité de mise en oeuvre de l'approche même.
Enfin, cette étude était l'occasion de quantifier précisément le rôle crucial du type de conditions aux limites adopté *(approche homogénéisation périodique, approche en contrainte ou déformation homogène sur le bord de la cellule)*.

Certes nous nous sommes limités, *pour le moment*, à des problèmes en contrainte plane, dont l'intérêt pratique peut sembler restreint. Cependant, l'efficacité de la méthode invite à envisager de l'étendre à d'autres problèmes de calcul à la rupture. Parmi les voies à explorer, son extension à des problèmes en <u>déformation plane</u> : les applications potentielles d'un tel outil seraient nombreuses et variées. Il permettrait par exemple :

- L'évaluation des capacités de résistance des composites à fibres longues, les résultats disponibles étant limités aux cas où la proportion volumique des fibres est faible (de Buhan et Taliercio , 1988). L'approche numérique permettrait alors, d'examiner les cas où cette proportion volumique prend des valeurs correspondant aux composites à fibres courants (30 % ou plus).

- L'exploration d'un vaste éventail de problèmes de stabilité en mécanique des sols, classiquement posés en déformation plane : capacité portante des fondations superficielles, stabilité d'excavations, ouvrages de soutènements ...

ANNEXES

ANNEXE I

Démonstration de la propriété C

du 2.2.3 chap. I

Notons par G^s le domaine de résistance obtenu en ne considérant que les champs de contraintes de $\tilde{S}$, et par G^c celui obtenu en ne considérant que les champs de vitesses de $\tilde{C}$.
Tout d'abord, il est clair, d'après les définitions générales *(1. 5)* et *(1. 6)* du chapitre I que :

$$G^s \subseteq G^{hom} \subseteq G^c \qquad (1)$$

Pour établir la proposition ci-haut, nous choisirons un repère orthonormé (O, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$) tel que (O, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$) soit un repère de (P) et $\underline{e}_3$ soit normal à ce dernier.

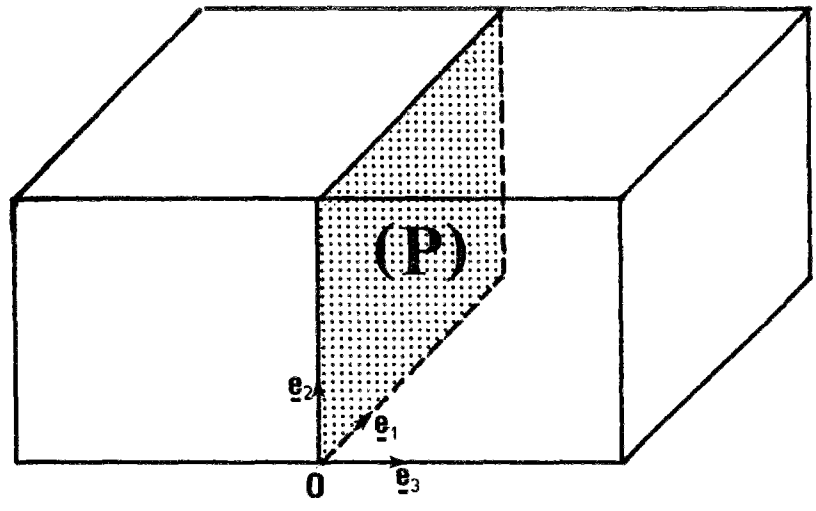


Figure 1 : Cellule de base munie d'un repère orthonormé

La matrice des composantes de $\underline{\underline{P}}$ dans ce repère s'écrit :

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{(Symétrie par rapport au plan } x_3 = 0 \text{)}$$

La condition $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot {}^t\underline{\underline{P}}$ s'écrit : $\Sigma_{13} = \Sigma_{23} = 0$, ce qui traduit que Ox_3 est une direction de contrainte principale pour $\underline{\underline{\Sigma}}$.

Nous allons démontrer la proposition en deux étapes.

$$\boxed{\text{Etape 1} \quad : \quad G^{hom} \subseteq G^s}$$

Soit $\underline{\underline{\Sigma}}$ un élément de G^{hom} , alors il existe $\underline{\underline{\sigma}} \in S$ tel que $< \underline{\underline{\sigma}} > = \underline{\underline{\Sigma}}$ et :

$$\forall \ \underline{x} \in a \qquad \underline{\underline{\sigma}} (\underline{x}) \in G (\underline{x})$$

Posons, pour tout $\underline{x}$ de a :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} (\underline{x}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} (\underline{x}) + \underline{\underline{\sigma}}' (\underline{x}))$$

où :

$$\underline{\underline{\sigma}}' (\underline{x}) = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} (\underline{x}') \cdot {}^t\underline{\underline{P}} \qquad \text{avec} \qquad \underline{x}' = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{x}$$

(a) Montrons que : $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} \in \tilde{S}$

(a.1) Pour tout $\underline{x}$:

$$\mathrm{div}\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} (\underline{x}) = \frac{1}{2} (\mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}} (\underline{x}) + \underline{\underline{P}} \cdot \mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}} (\underline{x}')) = \underline{0}$$

(a.2) Il est facile de vérifier que $\underline{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{n}$ est antipériodique. Il s'ensuit que $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} \cdot \underline{n}$ est antipériodique.

(a.3) Finalement, il est facile de voir que :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} (\underline{x}) = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} (\underline{x}') \cdot {}^t\underline{\underline{P}} \qquad \forall \ \underline{x} \in a$$

En vertu de la définition de $\tilde{S}$ et Compte tenu de *(a.1)*, *(a.2)* et *(a.3)* , on a :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} \in \tilde{S} \qquad (2)$$

(b) Calcul de $< \underline{\underline{\sigma}}^{\sim} >$

On a :

$$< \underline{\underline{\sigma}}^{\sim} > = \frac{1}{2} (< \underline{\underline{\sigma}} > + < \underline{\underline{\sigma}}' >)$$

Or :

$$< \sigma'_{ij} > = \begin{cases} < \sigma_{ij} > & \text{si } (i, j) \neq (1, 3) \text{ et } (2, 3) \\ - < \sigma_{ij} > = 0 & \text{si } (i, j) = (1, 3) \text{ ou } (2, 3) \end{cases}$$

car $\Sigma_{i3} = 0$ pour i = 1, 2. Donc :

$$< \underline{\underline{\sigma}}' > = < \underline{\underline{\sigma}} >$$

d'où :

$$< \underline{\underline{\sigma}}^{\sim} > = < \underline{\underline{\sigma}} > = \underline{\underline{\Sigma}} \qquad (3)$$

(c) Montrons que, pour tout $\underline{x}$: $\underline{\underline{\sigma}}^{\sim} (\underline{x}) \in G (\underline{x})$

Pour tout $\underline{x}$ de a :

$$\underline{\underline{\sigma}} (\underline{x}) \in G (\underline{x})$$

et :

$$\underline{\underline{\sigma}}' (\underline{x}) = \underline{\underline{P}} . \underline{\underline{\sigma}} (\underline{x}') . {}^{t}\underline{\underline{P}} \in \underline{\underline{P}} . G (\underline{x}') . {}^{t}\underline{\underline{P}} = G (\underline{x})$$

$\underline{\underline{\sigma}}^{\sim}$ étant la demi-somme de deux tenseurs appartenant à G ($\underline{x}$), il appartient donc lui-même à G($\underline{x}$) en raison de la convexité de ce dernier.

Soit :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\sim} (\underline{x}) \in G (\underline{x}) \qquad \forall \ \underline{x} \in \mathsf{a} \qquad (4)$$

Conclusion 1 : En regroupant les résultats *(2)* , *(3)* et *(4)* , on constate que :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{s} \qquad \forall \ \underline{\underline{\Sigma}} \in G^{hom}$$

ce qui traduit que :

$$G^{hom} \subseteq G^{s}$$

$$\boxed{\text{Etape 2} \quad : \quad G^c \subseteq G^{hom}}$$

Soit $\underline{\underline{\Sigma}} \notin G^{hom}$, en vertu de la définition générale *(1. 6)* du chapitre **I**, il existe $\underline{v} \in \mathbf{C}$ tel que :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}}(\underline{v}) > < \pi(\underline{\underline{d}}(\underline{v})) > \qquad (5)$$

$\underline{\underline{d}}(\underline{v})$ et $\underline{\underline{D}}(\underline{v})$ étant respectivement le champ de vitesse de déformation associé à $\underline{v}$ et sa moyenne volumique sur la cellule.

Posons, pour tout $\underline{x}$ de $\mathbf{a}$:

$$\underline{v}^{\sim}(\underline{x}) = \frac{1}{2}\left(\underline{v}(\underline{x}) + \underline{v}'(\underline{x}) \right)$$

où :

$$\underline{v}'(\underline{x}) = \underline{\underline{P}} \,.\, \underline{v}(\underline{x}') \qquad \text{avec} \qquad \underline{x}' = \underline{\underline{P}} \,.\, \underline{x}$$

(a) Calcul de : $\underline{\underline{D}}(\underline{v}^{\sim}) = < \underline{\underline{d}}(\underline{v}^{\sim}) >$

On a :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{v}^{\sim}) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{d}}(\underline{v}) + \underline{\underline{d}}(\underline{v}') \right)$$

Soit :

$$\underline{\underline{D}}(\underline{v}^{\sim}) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{D}}(\underline{v}) + < \underline{\underline{d}}(\underline{v}') > \right)$$

Or :

$$< d_{ij}(\underline{v}') > = \begin{cases} < d_{ij}(\underline{v}) > & \text{si } (i, j) \neq (1, 3) \text{ et } (2, 3) \\ - < d_{ij}(\underline{v}) > & \text{si } (i, j) = (1, 3) \text{ ou } (2, 3) \end{cases}$$

(Grâce au changement de variable $\underline{x}' = \underline{\underline{P}} \,.\, \underline{x}$ dans l'intégrale de volume définissant $\underline{\underline{D}}(\underline{v}')$) .

Ce qui peut s'écrire :

$$\underline{\underline{D}}(\underline{v}') = \underline{\underline{P}} \,.\, \underline{\underline{D}}(\underline{v}) \,.\, {}^t\underline{\underline{P}} \qquad (6)$$

D'où :

$$\underline{\underline{D}}(\underline{v}^{\sim}) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{D}}(\underline{v}) + \underline{\underline{P}} \,.\, \underline{\underline{D}}(\underline{v}) \,.\, {}^t\underline{\underline{P}} \right)$$

Soit :

$$D_{ij}(\tilde{\underline{v}}) = \begin{cases} D_{ij}(\underline{v}) & \text{si } (i, j) \neq (1, 3) \text{ et } (2, 3) \\ 0 & \text{si } (i, j) = (1, 3) \text{ ou } (2, 3) \end{cases} \qquad (7)$$

D'où, puisque $\Sigma_{13} = \Sigma_{23} = 0$:

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}}(\tilde{\underline{v}}) = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}}(\underline{v}) \qquad (8)$$

(b) Montrons que : $\tilde{\underline{v}} \in \tilde{C}$

•) Commençons par montrer que le champ $\tilde{\underline{u}}$ associé à $\tilde{\underline{v}}$ est périodique.
Compte-tenu de l'expression de ce dernier, il suffirait de montrer la périodicité du champs $\underline{u}'$ associé à $\underline{v}'$.
Soient $\underline{x}_1$ et $\underline{x}_2$ deux points de ∂a associés par périodicité. Leur symétriques respectifs $\underline{x}_1'$ et $\underline{x}_2'$, par $\underline{\underline{P}}$, sont aussi associés par périodicité.
Par hypothèse on a :

$$\underline{u}(\underline{x}_1') = \underline{u}(\underline{x}_2')$$

Soit :

$$\underline{v}(\underline{x}_1') - \underline{\underline{D}}(\underline{v}) \cdot \underline{x}_1' = \underline{v}(\underline{x}_2') - \underline{\underline{D}}(\underline{v}) \cdot \underline{x}_2'$$

En composant à gauche par $\underline{\underline{P}}$ les deux membres de l'égalité précédente :

$$\underline{\underline{P}} \cdot \underline{v}(\underline{x}_1') - \underline{\underline{P}} \cdot (\underline{\underline{D}}(\underline{v}) \cdot \underline{x}_1') = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{v}(\underline{x}_2') - \underline{\underline{P}} \cdot (\underline{\underline{D}}(\underline{v}) \cdot \underline{x}_2')$$

Et comme ${}^t\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}}$, on a :

$$\underline{\underline{P}} \cdot \underline{v}(\underline{x}_1') - (\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{D}}(\underline{v}) \cdot {}^t\underline{\underline{P}}) \cdot (\underline{\underline{P}} \cdot \underline{x}_1') = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{v}(\underline{x}_2') - (\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{D}}(\underline{v}) \cdot {}^t\underline{\underline{P}}) \cdot (\underline{\underline{P}} \cdot \underline{x}_2')$$

Considérant la formule *(6)* donnant $\underline{\underline{D}}(\underline{v}')$ et l'expression du champs $\underline{v}'$, la relation précédente s'écrit :

$$\underline{v}'(\underline{x}_1) - \underline{\underline{D}}(\underline{v}') \cdot \underline{x}_1 = \underline{v}'(\underline{x}_2) - \underline{\underline{D}}(\underline{v}') \cdot \underline{x}_2$$

Ceci traduit que :

$$\underline{u}'(\underline{x}_1) = \underline{u}'(\underline{x}_2)$$

Le champs $\underline{u}'$, et par conséquent $\underline{\tilde{u}}$, est périodique.

•) Il est facile de constater que :

$$\underline{\tilde{v}}(\underline{x}) = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\tilde{v}}(\underline{x}) \qquad \forall\ \underline{x} \in a$$

Ce qui termine de montrer que :

$$\underline{\tilde{v}} \in \tilde{C} \tag{9}$$

(c) Calcul de : $< \pi(\underline{\underline{d}}(\underline{\tilde{v}})) >$

De la relation :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{\tilde{v}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{d}}(\underline{v}) + \underline{\underline{d}}(\underline{v}'))$$

On déduit que :

$$\pi(\underline{\underline{d}}(\underline{\tilde{v}}))(\underline{x}) = \frac{1}{2} \sup \{ \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{v})(\underline{x}) + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{v}')(\underline{x}) \quad , \forall\ \underline{\underline{\sigma}} \in G(\underline{x}) \}$$
$$\forall\ \underline{x} \in a$$

Donc :

$$\pi(\underline{\underline{d}}(\underline{\tilde{v}}))(\underline{x}) \leq \frac{1}{2} (\pi(\underline{\underline{d}}(\underline{v}))(\underline{x}) + \pi(\underline{\underline{d}}(\underline{v}'))(\underline{x}))$$

Or :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{v}')(\underline{x}) = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{d}}(\underline{v})(\underline{x}') \cdot {}^t\underline{\underline{P}} \qquad \text{avec} \quad \underline{x}' = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{x}$$

Et donc :

$$\pi(\underline{\underline{d}}(\underline{v}'))(\underline{x}) = \pi(\underline{\underline{d}}(\underline{v}))(\underline{x}')$$

Tenant compte de la symétrie et après intégrations sur le volume de la cellule on constate que :

$$< \pi(\underline{\underline{d}}(\underline{v}')) > = < \pi(\underline{\underline{d}}(\underline{v})) >$$

D'où :

$$< \pi(\underline{\underline{d}}(\underline{\tilde{v}})) > \leq < \pi(\underline{\underline{d}}(\underline{v})) > \tag{10}$$

En regroupant *(5)*, *(8)* et *(10)*, on obtient la relation :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}}(\underline{\tilde{v}}) = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}}(\underline{v}) > < \pi(\underline{\underline{d}}(\underline{v})) > \geq < \pi(\underline{\underline{d}}(\underline{\tilde{v}})) >$$

(11)

Conclusion 2 : En regroupant les résultats *(9)* , *(11)* , on constate que :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \notin G^c \qquad \forall\ \underline{\underline{\Sigma}} \notin G^{hom}$$

En d'autrs termes :

$$G^c \subseteq G^{hom}$$

<u>**Conclusion finale**</u> :

Les résultats des étapes 1 et 2 combinés avec la relation *(1)* assurent que :

$$\boxed{G^s = G^c = G^{hom}}$$

Ce qui démontre la proposition annoncée.

ANNEXE II

1. Expression du champ $\underline{\underline{\sigma}}^{(8)}$ *(cf. § 4.1.2.B chap. I)*

Nous donnons ci-suit l'expression du champ de contrainte à huit zones $\underline{\underline{\sigma}}^{(8)}$, servant à l'approche statique de G^{hom} *(structure perforée de Von Mises , contrainte plane)* :

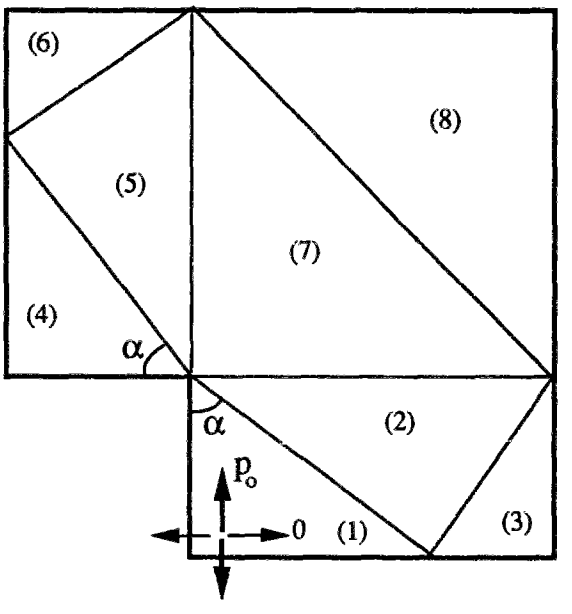


Figure 1 : Champ de contrainte à huit zones.

On pose :

$$t = \operatorname{tg}\alpha \ , \ \underline{\underline{\Sigma}}' = \frac{1}{1-\lambda}\,\underline{\underline{\Sigma}} \ , \ \Delta\underline{\underline{\Sigma}}' = \Sigma_1 - \Sigma_2$$

En écrivant que $\underline{\underline{\sigma}}^{(8)} \in S$ et que $< \underline{\underline{\sigma}}^{(8)} > = \underline{\underline{\Sigma}}$, on a :

zone (1) :

$$\sigma_{11} = 0 \quad , \quad \sigma_{22} = p_0 \quad , \quad \sigma_{12} = 0$$

zone (2) :

$$\sigma_{11} = (\Sigma_2' - p_0) t^2 \quad , \quad \sigma_{22} = \Sigma_2' \quad , \quad \sigma_{12} = - (\Sigma_2' - p_0) t$$

zone (3) :

$$\sigma_{11} = (\Sigma_2' - p_0) \frac{t (1 - \lambda)}{\lambda} \quad , \quad \sigma_{22} = ((1 - \lambda) \Sigma_2' - p_0 \lambda t) \frac{1}{1 - \lambda (1 + t)}$$

$$\sigma_{12} = 0$$

zone (4) :

$$\sigma_{11} = p_0 - \Delta\Sigma' \quad , \quad \sigma_{22} = 0 \quad , \quad \sigma_{12} = 0$$

zone (5) :

$$\sigma_{11} = \Sigma_1' \quad , \quad \sigma_{22} = (\Sigma_2' - p_0) t^2 \quad , \quad \sigma_{12} = - (\Sigma_2' - p_0) t$$

zone (6) :

$$\sigma_{11} = ((1 - \lambda) \Sigma_2' - p_0 \lambda t) \frac{1}{1 - \lambda (1 + t)} - \Delta\Sigma'$$

$$\sigma_{22} = (\Sigma_2' - p_0) \frac{t (1 - \lambda)}{\lambda} \quad , \quad \sigma_{12} = 0$$

zone (7) :

$$\sigma_{11} = \Sigma_1' \quad , \quad \sigma_{22} = \Sigma_2' \quad , \quad \sigma_{12} = - (\Sigma_2' - p_0) t$$

zone (8) :

$$\sigma_{11} = \Sigma_1' - (\Sigma_2' - p_0) t \quad , \quad \sigma_{22} = \Sigma_2' - (\Sigma_2' - p_0) t \quad , \quad \sigma_{12} = 0$$

2. Méthode d'optimisation de la borne statique

Comme on se limite à la région du plan (Σ_1 , Σ_2) définie par $\Sigma_1 \; \Sigma_2 \geq 0$, et en raison des symétries du convexe macroscopique par rapport à la première et la seconde bissectrice , il suffit d'explorer le sous-domaine défini par $\Sigma_2 \geq \Sigma_1 \geq 0$.

$\underline{\underline{\sigma}}^{(8)}$ ne dépend que de deux paramétres : p_0 et $t = tg\alpha$. Le principe d'optimisation est le suivant : partant de Σ_1 donné , en faisant varier p_0 et t dans des intervalles qu'on précisera, on détérmine la plus grande valeur de Σ_2 telle que le critère de résistance soit respecté dans chacune des huit zones.

description détaillée :

Sachant que le critère doit être respecté dans la zone (1), on obtient la condition :

$-1 \leq p_0 \leq 1$ *(σ_0 est pris égal à 1, ce qui revient à normer par rapport σ_0).*

On pose :

$$I_p = [-1 , 1]$$

Par des considérations géométriques, t varie dans $I_t = \left[0 , \frac{1 - \lambda}{\lambda} \right]$

Soit $\Sigma_1 \geq 0$ et (p_0, t) élément de $I_p \times I_t$. En écrivant que le champ $\underline{\underline{\sigma}}^{(8)}$ vérifie le critère de résistance dans la zone (k), k = 2, 8 , on aboutit à une condition *nécessaire* :

$$\Sigma_2 \leq f_k (\Sigma_1, p_0, t)$$

(l'expression de f_k est analytique, puisqu'on dispose de l'expression explicite de $\underline{\underline{\sigma}}^{(8)}$ dans chacune des huit zones).

Pour que le critère soit respecté dans a , il faudrait choisir Σ_2 égal au minimum, par rapport à k, des f_k.

Ainsi la valeur de Σ_2 optimale est :

$$\Sigma_2 = F (\Sigma_1) = \max_{(p, t)} \min_k f_k (\Sigma_1, p_0, t)$$

Numériquement, On déscrétise le pavé $I_p \times I_t$ selon un certain " pas " assez fin. Un élément de ce pavé sera noté $e_{ij} = (p_0^i, t^j)$.
La résolution du problème de maximisation devient :

" Σ_1 fixé . Détérminer :

$$\Sigma_2 = F (\Sigma_1) = \max_{e_{ij}} \min_k f_k (\Sigma_1, e_{ij}) \qquad k = 2, 8 \text{ "}$$

La courbe $\Sigma_2 = F (\Sigma_1)$ est décrite en partant de $\Sigma_1 = 0$ et en augmentant progressivement sa valeur *jusqu'à ce que que* $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

ANNEXE III

Méthode du polytope (Press et coll. , 1986)

Soit $F : R^n \rightarrow R$ une fonction dont on cherche le minimum sans contrainte sur R^n. On considére, dans l'espace R^n, un polyèdre à $n + 1$ sommets et qui ne soit pas nécessairement régulier (i.e. côtés de longueur égale). On note $\underline{x}_0 , \underline{x}_1 , \ldots , \underline{x}_n$ ses sommets et, $y_0 , y_1 , \ldots , y_n$ les $n+1$ valeurs prises par F en ces points *(figure 1)*.

On suppose (à l'aide d'une renumérotation, le cas échéant) que $y_0 \leq y_1 \leq \ldots \leq y_{n-1} \leq y_n$. Et on définit :

$$\underline{x}_G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i$$ centre de gravité de la facette opposée au sommet $\underline{x}_n$.

$$\underline{s}_1 = 2\, \underline{x}_n - \underline{x}_G$$ le symétrique de $\underline{x}_n$ par rapport à $\underline{x}_G$.

$$\underline{s}_2 = 2\, \underline{x}_G - \underline{s}_1$$ le symétrique de $\underline{x}_G$ par rapport à $\underline{s}_1$.

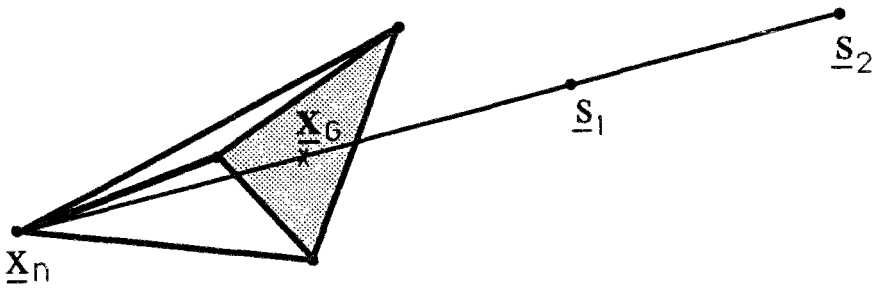


Figure 1 : Polyèdre courant.

Afin d'aboutir au minimumum de F, examinons comment construire un nouveau polyèdre à partir de l'actuel.

Cas (a) : $F(\underline{s}_1) < y_0$

Dans ce cas, deux éventualités peuvent se présenter :

(a.1) $F(\underline{s}_2) < y_0$ et alors le nouveau polyèdre s'obtient en remplaçant $\underline{x}_n$ par $\underline{s}_2$ *(figure 2.1)* .

ou

(a.2) $F(\underline{s}_2) \geq y_0$ et alors le nouveau polyèdre s'obtient en remplaçant $\underline{x}_n$ par $\underline{s}_1$ *(figure 2.2)* .

Cas (b) : $y_0 \leq F(\underline{s}_1) \leq y_{n-1}$

$\underline{s}_1$ est un point intérmèdiaire , et on procède comme en *(a.2)*.

Cas (c) : $F(\underline{s}_1) > y_{n-1}$

On commence d'abord par remplaçer $\underline{x}_n$ par $\underline{s}_1$ dans le cas où $F(\underline{s}_1) < y_n$ (dans ce cas et pour la suite, x_n et y_n désigneront en fait $\underline{s}_1$ et $F(\underline{s}_1)$).

Posons $\underline{m} = \frac{1}{2}(\underline{x}_n + \underline{x}_G)$

ou

(c.1) $F(\underline{m}) < y_n$ et le nouveau polyèdre est obtenu en remplaçant $\underline{x}_n$ par $\underline{m}$ *(figure 2.3)*.

ou

(c.2) $F(\underline{m}) \geq y_n$ et on construit le nouveau polyèdre en " contractant " tous les sommets autour de $\underline{x}_0$ *(figure 2.4)* :

$\forall\ i \neq 0$ $\underline{x}_i$ est remplaçé par $\frac{1}{2}(\underline{x}_i + \underline{x}_0)$

On recommence alors, l'opération sur le nouvel polyèdre ainsi construit et ainsi de suite jusqu'à obtention du minimum. Le critére d'arrêt peut porter par exemple, sur $|y_n - y_0|$.

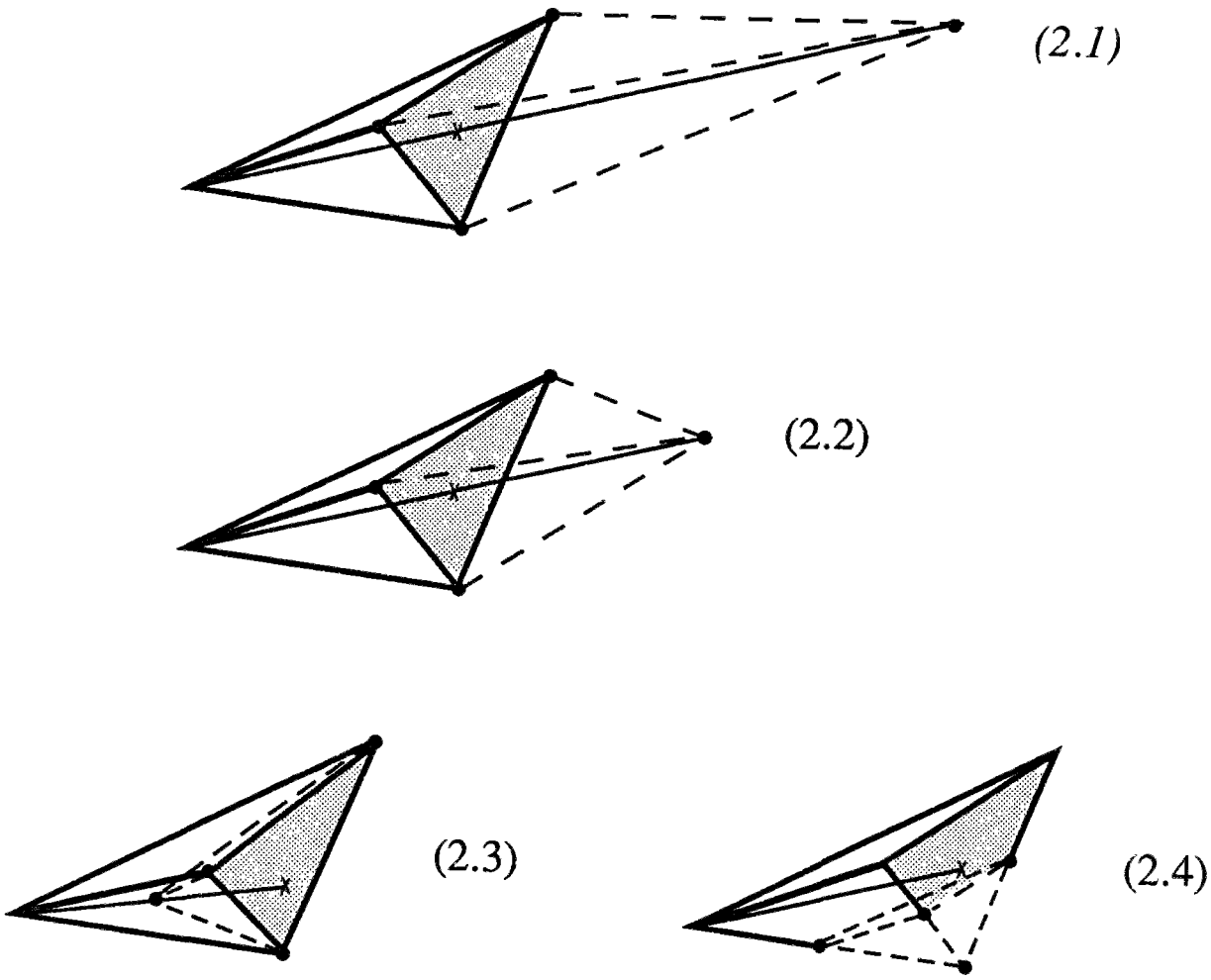


Figure 2 : Les différents cas correspondant à une itération de la méthode du polytope.

Polyèdre initial :

L'algorithme décrit précédemment, nécessite la donnée d'un polyèdre initial, et la rapidité de sa convergence en dépend.

Le plus simple consiste à se donner un point $\underline{P}_0$ et de construire le polyèdre autour de ce point, en posant :

$$\underline{P}_i = \underline{P}_0 + \lambda_i \underline{e}_i \qquad \forall\ i = 1, n$$

où $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ est la base canonique de R^n.

Les λ_i, généralement entre 0 et 1, sont des réels définissant la taille du polyèdre.

Exemple D'application :

On met en oeuvre l'algorithme sur la fonction test de Rosenbrock (1960) dont les lignes de niveau sont des vallées en forme de " bananes ".

$$F(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \qquad (n = 2)$$

Signalons que :

- F n'est pas convexe.
- Cette fonction " met à mal " beaucoup d'autres méthodes basées sur le gradient.

Notons enfin, que F est diférentiable partout alors que, l'avantage de cette méthode est justement d'être utilisable lorsque cette condition n'est pas réalisable.

On a appliqué cette méthode, en partant du triangle initial de sommets :

$$\underline{P}_0 = \begin{bmatrix} -1,2 \\ 0,7 \end{bmatrix} \quad \underline{P}_1 = \underline{P}_0 + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{P}_2 = \underline{P}_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

Au bout d'une quarantaine d'itérations *(quelques secondes cpu sur Apollo DN 3000)*, on obtient exactement le minimum $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Sur *la figure 3*, nous visualisons le trajet du " meilleur " point du triangle durant le processus de minimisation.

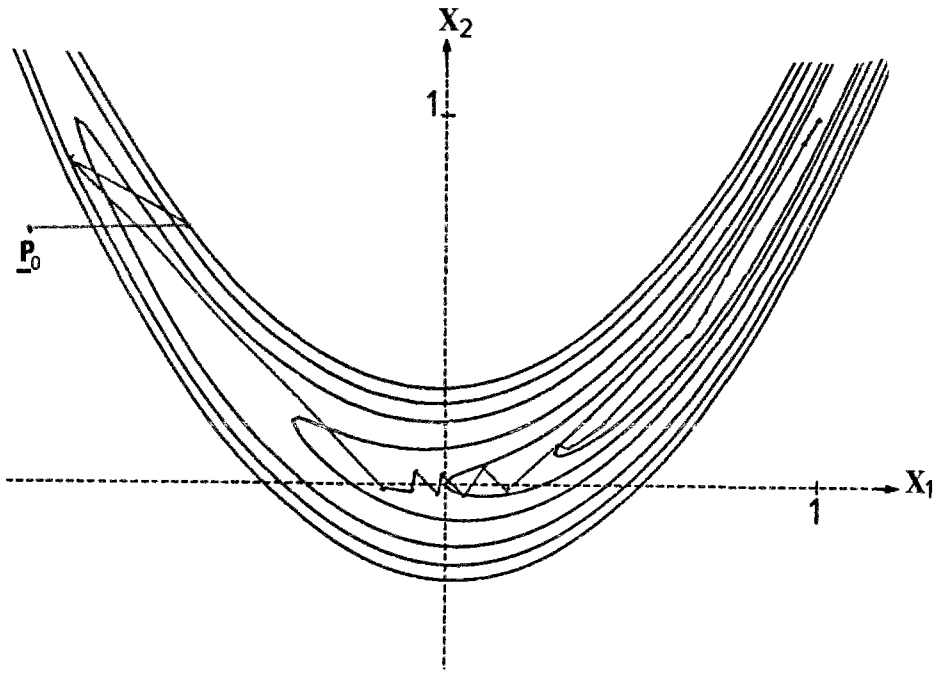


Figure 3 : Lignes de niveau de F et cheminement du meilleur point vers le minimum.

ANNEXE IV

Phénomène de Gibbs (Sansone , 1959)

Soit F une fonction périodique , de période 2π , définie de la façon suivante :

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

et

$$F(-\pi) = F(0) = F(\pi) = 0$$

F admet le dévelopement en série de Fourier :

$$F(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

Considérons la somme des n premiers termes de la série précédente :

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

S_n peut s'exprimer de manière différente en écrivant :

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^x \cos(2k+1)t \; dt \right)$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k+1)t \right) dt$$

Or ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k+1)t = \frac{1}{2} \frac{\sin 2nt}{\sin t}$$

Si bien que :

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt$$

Nous nous proposons d'étudier les variations de $S_n(x)$. Comme celle-ci est impaire, nous nous limitons aux $x > 0$.

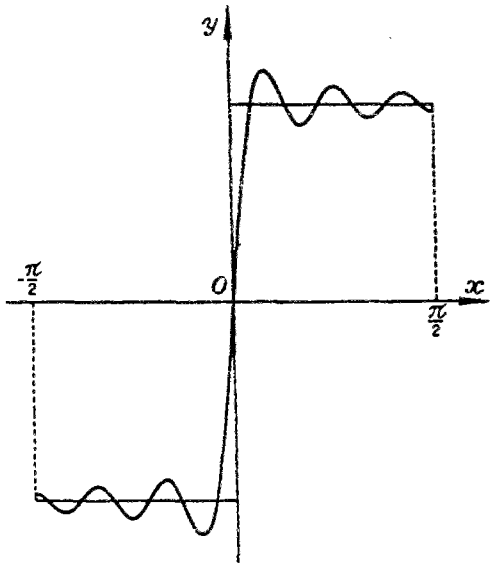
Etude des variations de S_n

Sa dérivée est :

$$S_n'(x) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin 2nx}{\sin x}$$

Donc,

S_n admet des maximas locaux en $\alpha_k = \frac{2k+1}{2n}\pi$, et des minimas locaux en $\beta_k = \frac{k+1}{n}\pi$ $(k = 0, n-1)$.



Le maximum *(respectivement minimum)* absolu est $\alpha_0 = \frac{\pi}{2n}$ $\left[\textit{resp. } \beta_0 = \frac{\pi}{n}\right]$.

En effectuant le changement de variable $u = 2nt$, on a :

$$S_n(\alpha_0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,\frac{u/2n}{\sin u/2n}\,du$$

et

$$S_n(\beta_0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin u}{u}\,\frac{u/2n}{\sin u/2n}\,du$$

Limites de S_n en α_0 et β_0

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_0 = \lim_{n\to+\infty} \beta_0 = 0$$

par contre :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(\alpha_0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,du \simeq 1{,}18$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(\beta_0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin u}{u}\,du \simeq 0{,}9$$

Conclusion :

Pour $x > 0$, la courbe $y = S_n(x)$ subit des oscillations autour de la droite $y = 1$ dont l'amplitude maximale tend, lorsque n tend vers l'infini, vers :

$$\frac{-2}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin u}{u}\,du \simeq 0{,}28$$

le phénomène de Gibbs peut être résumé par :

Lorsque n tend vers l'infini,

La projection de la courbe $y = S_n(x)$ sur l'axe des ordonnées yy', ne tend pas vers le segment $[-1, 1]$ mais vers le segment dont les extrémités sont :

$$\pm\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,du$$

BIBLIOGRAPHIE

DE BUHAN P. (1986) *Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés.* Thèse d'état, Paris VI

DE BUHAN P. , TALIERCIO A. (1988) *Critère de résistance macroscopique pour les matériaux composites à fibres.* C.R.A.S. Paris, t.307, Série II, p.227-232

DE BUHAN P. , TALIERCIO A. (1991) *A homogenization approach to the yield strength of fiber composite materials.* Eur. Jour. Mec. A/ Solids, 10, n° 2, p.129-154

DEBORDES O. , WEILL F. (1983) *Homogénéisation en plasticité : un exemple de calcul.* Rapport Greco G.D.E. n° 107

DEBORDES O. , LICHT C. , MARIGO J.J. , MICHEL J.C. , SUQUET P. (1985) *Calcul des charges limites de structures fortement hétérogènes.* Actes du 3e coll. Tend. Actu. en Calc. de Struc. Bastia

DELBECQ J.M. , FREMOND M. , PECKER A. , SALENÇON J. (1977) *Eléments finis en plasticité et viscoplasticité.* Jour. de Méc. App., vol.1, n° 3, p.267-304

DHATT G. , TOUZOT G. (1981) *Une présentation de la méthode des éléments finis.* Maloine S.A. éditeur. Paris

DUMONTET H. (1983) *Homogénéisation par développement en séries de Fourier.* C.R.A.S. Paris, t.296, Série II, p.1625-1628

FLETCHER R. (1980) *Practical methods of optimisation.* Vol. 1, John Willey and Son.

GAYDON E.A. , McCRUM A.W. (1954) *A theorical investigation of the yield point loading of a square plate with a central circular hole.* Jour. Mec. and Phys. of Solids, vol.2, p.156-169

GAYDON E.A. (1954) *On the yield point of a square plate with concentric circular hole.* Jour. Mec. and Phys. of Solids, vol.2, p.170-176

GILL E.P. , MURRAY W. , WRIGHT M.H. (1981) *Practical optimization.* Academic press

GUENNOUNI T. (1987) *Frontière d'écoulement des matériaux hétérogènes à constituants rigides parfaitement plastiques. Cas des matériaux poreux ou fissurés.* Jour. de Méc. Théo. et App., vol.6, n° 4, p.571-615

GURSON A. (1977) *Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. Part I : Yield criteria and flow rules for porous ductil media.* Jour. Eng. Mat. Tech., 99, p.1-15

HASHIN Z. (1983) *Analysis of composite materials : a survey.* Jour. App. Mec. , 50, p.481-505

LITEWKA A. , SAWCZUK A. , STANISLAWSKA J. (1984) *Simulation of oriented continuous damage evolution.* Jour. de Méc. Théo. et App., vol.3, n° 5, p.675-688

MARIGO J.J. , MIALON P. , MICHEL J.C. , SUQUET P. (1987) *Plasticité et homogénéisation : un exemple de prévision des charges limites d'une structure hétérogène périodique.* Jour. de Méc. Théo. et App., vol.6, n° 1, p.47-75

MASSONET C. , SAVE M. (1963) *Calcul plastique des constructions.* Vol.II : structures spéciales. Ed. A.S.B.L., Bruxelles

MICHEL J.C. (1984) *Homogénéisation des matériaux élastoplastiques avec cavités.* Thèse 3e cycle. Paris VI

MINOUX M. (1983) *Programmation mathématique. Théorie et algorithmes.* Dunod

NELDER J.A. , MEAD R. (1965) *A simplex method for function minimization.* Computer Journal, vol.7, p.308-313

PASTOR J. , TURGEMAN S. (1983) *Approches numériques des charges limites pour un matériau orthotrope de révolution en déformation plane.* Jour. de Méc. Théo. et App., vol.2, n° 3, p.393-416

PRAGER W. HODGE J.R. (1968) *Theory of perfectly plastic solids.* Ed. Dover, New York

PRESS H.W. , FLANNERY B.P. , TEUKOLSKY S.A. , WETTERLING W.T. (1986) *Numerical recipes.* Cambridge Univer. press

SACCHI G. (1986) *Calcul à la rupture des assemblages.* Cours de calcul des structures

anélastiques, E.N.P.C., Paris

SALENÇON J. (1983) *Calcul à la rupture et analyse limite.* Presses de l'E.N.P.C. Paris

SANSONE G. (1959) *Orthogonal functions.* Intersciences Publishers, Inc., New York

SPENDLEY W. , HEXT G.R. , HIMSWORTH F.R. (1962) *Sequential application of simplex design in optimization and evolutionary operation.* Technometrics, vol.4, p.441-461

SUQUET P. (1982) *Plasticité et homogénéisation.* Thèse d'état. Paris VI

SUQUET P. (1983) *Analyse limite et homogénéisation.* C.R.A.S. Paris, t.296, Série II, p.1355-1358

SANCHEZ-PALENCIA E. (1985) *Boundary layers and edge effects in composites.* C.I.S.M., homogenization techniques for composite media, Udine

TURGEMAN S. , PASTOR J. (1987) *Comparaison des charges limitesd'une structure hétérogène et homogénéisée.* Jour. de Méc. Théo. et App., vol.6, n° 1, p.121-143