HAL
open science

Mécanique de l'endommagement. Théorie du premier gradient et application au béton

Boumediene Nedjar

To cite this version:

Boumediene Nedjar. Mécanique de l'endommagement. Théorie du premier gradient et application au béton. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1995. Français. NNT : . tel-00529378

HAL Id: tel-00529378

https://pastel.hal.science/tel-00529378

Submitted on 25 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 18465 (4)

THESE de DOCTORAT DE L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité :
STRUCTURE ET MATERIAUX

présentée par

Boumediene NEDJAR

Sujet de la thèse :

MECANIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT. THEORIE DU PREMIER GRADIENT ET APPLICATION AU BETON

soutenue le 15 Février 1995 devant le jury composé de :

MM.	D.	FRANÇOIS	Président
	J.J.	MARIGO	Rapporteur
	G.	PIJAUDIER-CABOT	Rapporteur
	R.	DE BORST	Examinateur
	A.	DRAGON	Examinateur
	M.	FREMOND	Examinateur
	P.	LADEVEZE	Examinateur

Laboratoire des Matériaux et des Structures du Génie Civil
U.M.R 113 - C.N.R.S. / L.C.P.C.
Cité Descartes - 02, allée Kepler - 77420 CHAMPS SUR MARNE

14

E.N.P.C.
INV01199

Remerciements

Ce travail a été effectué au Laboratoire des Matériaux et des Structures du Génie Civil de Champs sur Marnes et je tiens à exprimer à Monsieur M. FRÉMOND, qui est constamment intervenu dans mon travail, ma profonde gratitude pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée. Je lui suis également très reconnaissant pour les enseignements et les conseils qu'il m'a donnés au cours de ce travail.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici à Monsieur D. FRANÇOIS mes sincères remerciements pour avoir accepté la présidence de mon Jury.

Mes vifs remeciements vont également à Messieurs J. J. MARIGO et G. PIJAUDIER-CABOT, rapporteurs, ainsi qu'à Messieurs A. DRAGON, R. DE BORST et P. LADEVEZE pour leur participation au Jury.

Sans les nommer individuellement, je remercie tout les amis du Laboratoire des Matériaux et des Structures du Génie Civil pour les nombreux services qui ont pu me rendre et surtout pour l'ambiance amicale dans laquelle ce travail a été mené.

RESUME

A L'intérieur d'un solide, l'endommagement est provoqué par des mouvements microscopiques. Nous décidons de tenir compte de ces mouvements dans le principe des puissances virtuelles. Les vitesses microscopiques étant reliées à la vitesse d'endommagement, la puissance des efforts intérieurs que nous retenons dépend de cette vitesse et aussi de la vitesse du gradient de l'endommagement pour décrire les intéractions.

L'utilisation de cette approche permet de représenter le comportement non linéaire du béton, qui est en grande partie dû à l'endommagement, par des modèles adoucissants. Les applications aux calculs de structures donnent des résultats objectifs surmontant la difficulté liée à la dépendance du maillage lors de la discrétisation par éléments finis.

La prise en compte du gradient de l'endommagement dans la formulation permet également de rendre compte de l'effet d'échelle de structures.

Le phénomène unilatéral lié à la refermeture des microfissures, qui conduit à la restauration de la raideur lors du passage d'un chargement endommageable en traction à un chargement en compression, est pris en compte par l'utilisation de deux variables scalaires d'endommagement et par une partition du tenseur des déformations dans l'expression de l'énergie libre.

Les modèles que nous présentons sont implantés dans un code de calcul par éléments finis et les résultats obtenus permettent une analyse prévisionnelle des structures.

Mots clés :

Principe des Puissances Virtuelles, Endommagement, Gradient de l'endommagement, Béton, Comportement, Adoucissant, Phénomène Unilatéral, Objectivité, Calculs de structures, Effet d'échelle.

ABSTRACT

Damage in a solid results from microscopic movements. We decide to include the power of these movements in the principle of virtual powers. Because the microscopic velocities are related to the damage rate, the power of the internal forces we choose depends on the damage velocity and also on its gradient to take into account the interactions.

This approach allows to represent the nonlinear behaviour of concrete, which is due to the damage, by strain softening models. The applications for structural computations give objective results and overcomes the mesh sensitivity.

Taking into account the gradient of damage in the formulation leads also to a good description of the structural size effect.

The unilateral phenomenon, linked to the crack closure, which leads to the restoration of stiffness of the material when going from tension to compression, is described through two damage variables and a partition of the strain tensor into two parts in the expression of the free energy.

The models we present are implemented in a finite element code and the results allow a predictive structural analysis.

Keywords :

Principle of Virtual Power, Damage, Gradient of damage, Concrete, Behaviour, Strain softening, Unilateral phenomenon, Objectivity, Structural analysis, Size effect.

SOMMAIRE

SOMMAIRE 1

INTRODUCTION 4

CHAPITRE PREMIER

COMPORTEMENT MECANIQUE DU BETON 7

I.1 Introduction 7

I.2 Comportement en compression uniaxiale 8

I.3 Comportement en traction 9

I.3.1 Essais de tractions indirectes 9

I.3.2 Essais de tractions directes 10

I.4 Comportements en sollicitations multiaxiales 13

I.4.1 Comportement en sollicitations hydrostatiques 13

I.4.2 Comportements en sollicitations non hydrostatiques 14

I.5 Phénomène unilatéral et endommagement du béton 15

I.6 Effet d'échelle dans les structures en béton 16

I.7 Conclusions 18

CHAPITRE II

QUELQUES MODELISATIONS DU COMPORTEMENT DU BETON 20

II.1 Introduction 20

II.2 Utilisation de la mécanique de la rupture 21

II.2.1 Mécanique linéaire de la rupture 21

II.2.2 Mécanique non linéaire de la rupture appliquée au béton 23

II.3 Approches micromécaniques 25

II.3.1 Modèle microplan 25

II.3.2 Modélisation à partir d'une cellule élémentaire 26

II.4 Utilisation de la mécanique de l'endommagement 29

II.4.1 Endommagement isotrope 29

II.4.2 Endommagement anisotrope 33

II.4.3 Effet de fermeture des microfissures : le phénomène unilatéral 36

II.4.4 Commentaires 38
II.5 Etude des problèmes de localisation de l'endommagement 38
II.6 Formulations non-locales en mécanique de l'endommagement 40
II.7 Modèles non-locaux et effet d'échelle 43
II.7.1 Modèle d'endommagement non-local 43
II.7.2 Modèle microplan non-local 44
II.8 Conclusions 46

CHAPITRE III
ENDOMMAGEMENT, GRADIENT DE L'ENDOMMAGEMENT ET PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES 47
III.1 Introduction 47
III.2 Principe des puissances virtuelles et équations du mouvement 48
III.2.1 Puissance des efforts intérieurs 48
III.2.2 Puissance des efforts extérieurs 49
III.2.3 Puissance des quantités d'accélération 50
III.2.4 Equations du mouvement 50
III.3 Principes de la thermodynamique des milieux continus 51
III.3.1 Premier principe 51
III.3.2 Second principe 52
III.4 Lois de comportement 53
III.5 Récapitulation 60
III.6 Conclusions 60

CHAPITRE IV
MODELES D'ENDOMMAGEMENT. DESCRIPTION DU PHENOMENE UNILATERAL 61
IV.1 Introduction 61
IV.2 Modèle d'endommagement appliqué à un composite particulier 62
IV.3 Modèle d'endommagement avec comportement adoucissant. Application au béton 67
IV.4 Modèle à deux variables d'endommagement et phénomène unilatéral. Application au béton 71
IV.5 Un modèle d'endommagement par fatigue 78
IV.6 Commentaires 81
IV.7 Conclusions 81

CHAPITRE V

APPLICATION A L'ENDOMMAGEMENT DE STRUCTURES EN BETON 83

V.1 Introduction 83

V.2 Calculs de structures initiallement non fissurées. Exemple de la flexion 84

V.3 Une méthodologie permettant d'évaluer le facteur d'influence d'endommagement k 87

V.4 Etude de la sensibilité au maillage 90

V.4.1 Premier exemple 90

V.4.2 Deuxième exemple 93

V.5 Exemple d'un essai de fendage 95

V.6 Exemples d'endommagements de structures axisymétriques 96

V.6.1 Premier exemple 96

V.6.2 Deuxième exemple 98

V.7 Application du modèle à deux variables d'endommagement 101

V.8 Commentaires et conclusions 104

CHAPITRE VI

GRADIENT DE L'ENDOMMAGEMENT ET EFFET D'ECHELLE DE STRUCTURES 105

VI.1 Introduction 105

VI.2 Exemple numérique confronté à un résultat expérimental 106

VI.3 Quelques arguments théoriques sur l'effet d'échelle de structures 109

VI.4 Etude numérique de l'effet d'échelle de structures 116

VI.6 Commentaires et conclusions 120

CONCLUSIONS 121

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 123

INTRODUCTION

La nécessité de pouvoir décrire le comportement des matériaux endommageables afin de prévoir l'amorçage et la progression des détériorations dans les structures a suscité de nombreux travaux.

Depuis le travail précurseur de KACHANOV (1958), la mécanique de l'endommagement qui s'inscrit dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles (Lemaître et Chaboche, 1985), a ouvert une nouvelle voie de recherche pour résoudre ce problème.

La mécanique continue de l'endommagement a en effet acquis de plus en plus d'intérêts et est devenue un outil prometteur pour la description de la dégradation des matériaux. L'endommagement y est représenté par des variables d'état internes, scalaires ou tensorielles selon l'objectif à atteindre lors de la modélisation.

Le travail de ce mémoire s'inscrit dans ce cadre. Nous proposons une nouvelle formulation de l'endommagement fondée cette fois-ci à partir du principe des puissance virtuelles. Nous considérons qu'à l'intérieur d'un solide, des mouvements microscopiques provoquent l'endommagement. Nous décidons de tenir compte de la puissance de ces mouvements dans le principe des puissances virtuelles.

La puissance des efforts intérieurs que nous retenons dépend en plus des taux de déformations, aussi de la vitesse de l'endommagement et de son gradient. Ces dernières quantités sont clairement reliées aux mouvements microscopiques. Le gradient de l'endommagement est introduit pour rendre compte de l'influence de l'endommagement en un point matériel sur son voisinage.

Le principe des puissances virtuelles fondé sur ce choix conduit à un nouvel ensemble d'équations décrivant l'état de l'endommagement dans le solide. Les lois de comportement nécessaires sont obtenues à partir des choix, selon le modèle retenu, d'une énergie libre et d'un pseudo-potentiel de dissipation obéissant aux principes de la thermodynamique des milieux continus.

Des modèles issus de cette formulation sont proposés. Ils sont principalement destinés à décrire les comportements endommageables des structures en béton, matériau de construction le plus fréquement utilisé dans le génie civil.

Cette description de l'évolution progressive des dégradations s'avère nécessaire. Citons à titre d'exemple les cas où il s'agit d'ouvrages prototypes tels que les centrales nucléaires afin d'optimiser la protection anti-radiation, les tunnels ou les plateformes off-shore etc.

Les travaux déja nombreux sur le comportement du béton s'accordent à mettre en évidence l'extrême complexité de ce matériau. Parmi ses caractéristiques, un comportement dissymétrique entre la traction et la compression, une apparition du phénomène unilatéral lors d'un retour de chargement en compression après un endommagement en traction.

Enfin soulignons l'important effet d'échelle qu'exhibe ce matériau. En génie civil, la plupart des essais expérimentaux sont réalisés en laboratoire sur des structures à échelles réduites. Il devient donc nécessaire de transmettre les résultats de ces essais aux structures réelles.

L'un des objectifs de ce mémoires est donc de confronter les modélisations à ces divers aspects du comportement du béton.

Ce mémoire s'articule en six chapitres :

- Le premier chapitre parcourt brièvement les principaux résultats d'expériences sur le comportement du béton rencontrés dans la littérature. Nous présentons les réponses obtenues en laboratoire pour des sollicitations telles que la compression et la traction. Quelques résultats d'essais sur l'étude de l'effet d'échelle sont également présentés.

- Le deuxième chapitre fait état de quelques travaux antérieurs et actuels sur la modélisation du comportement des matériaux endommageables en général et du béton en particulier. Nous passons en revue quelques difficultés liées à la numérisation des comportements adoucissants qui conduisent à des problèmes de dépendance du maillage lors de la discrétisation. Enfin nos présentons quelques propositions pour surmonter, totalement ou en partie, ces difficultés. Nous nous intéressons particulièrement au concept de formulation non local.

- Le troisième chapitre expose la formulation de l'endommagement que nous nous proposons d'utiliser dans le cadre de ce mémoire. Elle est fondée sur des considérations nouvelles dans le principe des puissances virtuelles. Nous abordons en conséquence l'étude des principes de la thermodynamique des milieux continus, plus particulièrement l'inégalité de Clausius-Duhem afin de déduire l'expression

générale des lois de comportement nécessaires à la description de l'endommagement dans les solides.

- Le quatrième chapitre propose des applications à des situations réelles des résultats de base de la nouvelle formulation de l'endommagement. Nous montrons les différentes possibilités ainsi que les motivations qui ont conduit aux choix des différents modèles que nous proposons. Le phénomène unilatéral rencontré dans les matériaux tels que le béton est décrit en considérant deux variables d'endommagement.

- Dans le chapitre cinq, nous proposons quelques exemples d'applications pour la modélisation du comportement des structures en béton. Nous mettons en évidence différentes propriétés des modèles issus de la formulation de l'endommagement avec gradient en calcul de structures. Aussi, nous validons quelques résultats quantitatifs par confrontation à des résultats réels d'essais expérimentaux.

- Le chapitre six, qui pourrait être confondu avec le chapitre précédent, est consacré à l'étude de l'effet d'échelle de structures. L'objectif est de mettre en évidence la qualité prévisionnelle de cette propriété par les modèles issus de la formulation décrite dans le troisième chapitre. Ce résultat est souligné par des exemples numériques. Quelques arguments théoriques sont donnés pour confirmer cette prédiction.

CHAPITRE PREMIER

COMPORTEMENT MECANIQUE DU BETON.

I.1 Introduction :

En génie civil, le béton est sans doute le matériau le plus utilisé pour la construction d'ouvrages. Afin de mener à bien le calcul de ces ouvrages, il est nécessaire de connaître la réponse de ce matériau aux diverses sollicitations.

Il serait intéressant de passer en revue quelques résultats tirés de l'abondante littérature qui traite les principaux aspects du comportement mécanique de ce matériau (Mazars et Bazant, 1988; Ramtani, 1990 ; Terrien, 1980 ...).

L'une des caractéristiques du béton est un comportement différent en traction et en compression : il est beaucoup plus résistant en compression. C'est la raison pour laquelle il est souvent considéré comme ayant une résistance nulle en traction lors des calculs réglementaires de structures. Ce comportement, en traction et en compression, est fortement influencé par les mécanismes internes d'altérations qui conduisent à une perte de raideur. Il est certain que tenir compte de ces mécanismes permettrait de décrire l'évolution progressive des dégradations dans ce matériau.

Une autre caractéristique du comportement du béton est son caractère unilatéral : lors du passage d'une sollicitation endommageable en traction à une sollicitation en compression, macroscopiquement on observe une restauration de la raideur du matériau.

L'effet d'échelle est une autre propriété du béton qui est essentielle en génie civil. Celui-ci se manifeste par une dépendance de la contrainte nominale maximale, couramment évaluée à partir de la charge maximale supportée par une structure, vis-à-vis de l'échelle des structures. Les observations expérimentales montrent que cette contrainte diminue avec la taille de la structure (Bazant et Ozbolt, 1990 ; Mazars, Pijaudier-Cabot et Saouridis, 1991 ; Biolzi *et al.*, 1994).

Ces quelques observations témoignent de la complexité du comportement mécanique du béton dont nous nous apprêttons à étudier quelques aspects.

Ce chapitre a pour but de décrire brièvement les principaux résultats significatifs du comportement expérimental du béton rencontrés dans la littérature.

I.2 Comportement en compression uniaxiale :

L'essai de compression uniaxiale du béton est un essai qui a largement été étudié afin de connaitre la résistance maximale en compression σ_c. Cette résistance maximale est en effet la caractéristique fondamentale de ce matériau sur le plan industriel.

Cet essai bénéficie d'une facilité de mise en œuvre expérimentale. L'allure générale des courbes "contrainte-déformation" est similaire à celle présentée par l'exemple de la figure I.1 (Ramtani, 1990).

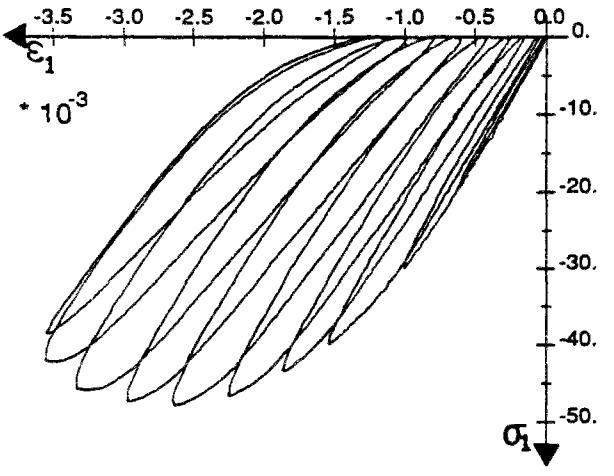


Fig. I.1 - Courbe contrainte-déformation longitudinale (Ramtani, 1990).

On peut constater sur cette courbe le comportement non linéaire du béton au delà d'un certain seuil.

Les essais cycliques de charge-décharge à déplacement imposé, permettent d'obtenir d'autres renseignements pour chaque niveau de sollicitation : la variation de la raideur avec la charge, la variation du coefficient de Poisson ainsi que la mesure des déformations anélastiques permanentes (figure I.2).

Lors de la phase adoucissante du comportement du béton, on observe généralement l'apparition d'un réseau de microfissures sensiblement parallèles à la sollicitation en compression jusqu'à apparition de fissures macroscopiques (Saouridis, 1988; Hordijk, 1992 ...).

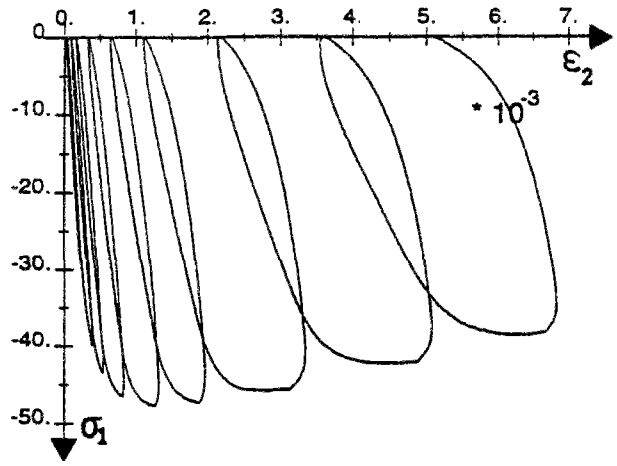


Fig. I.2 - Courbe déformation logitudinale ε_1-déformation transversale ε_2 (Ramtani, 1990).

I.3 Comportement en traction :

Le béton a une très faible résistance en traction. Ceci est d'ailleurs la raison pour laquelle il est considéré comme ayant une résistance nulle en traction lors des calculs réglementaires. Cependant, l'étude de ce comportement est nécessaire afin d'approfondir la connaissance de ce matériau en vue de sa modélisation.

Contrairement à l'essai de compression, la mise en œuvre d'un essai de traction directe est difficile. Le recours à des procédés d'évaluation indirecte de la résistance en traction devient alors nécessaire.

I.3.1 Essais de tractions indirectes :

Les essais permettant de mesurer la résistance en traction de façon indirecte sont le plus souvent l'essai de flexion et l'essai de fendage.

Dans ces deux cas de chargement, des zones de traction créées sont confinées à l'intérieur des éprouvettes. L'hypothèse d'un comportement élastique jusqu'à la charge maximale supportée par une éprouvette permet, à l'aide de la théorie d'élasticité linéaire, d'évaluer la contrainte maximale en traction pouvant être supportée par le matériau.

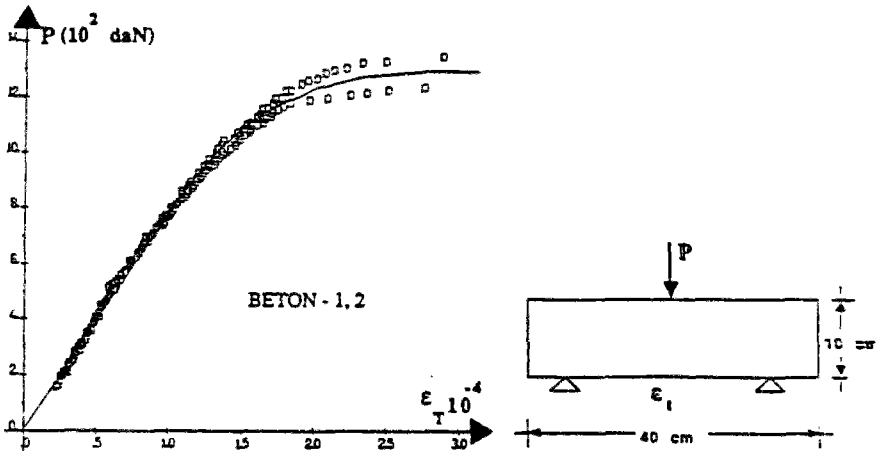


Fig. I.3 - Essai de traction indirecte par flexion (Saouridis, 1988).

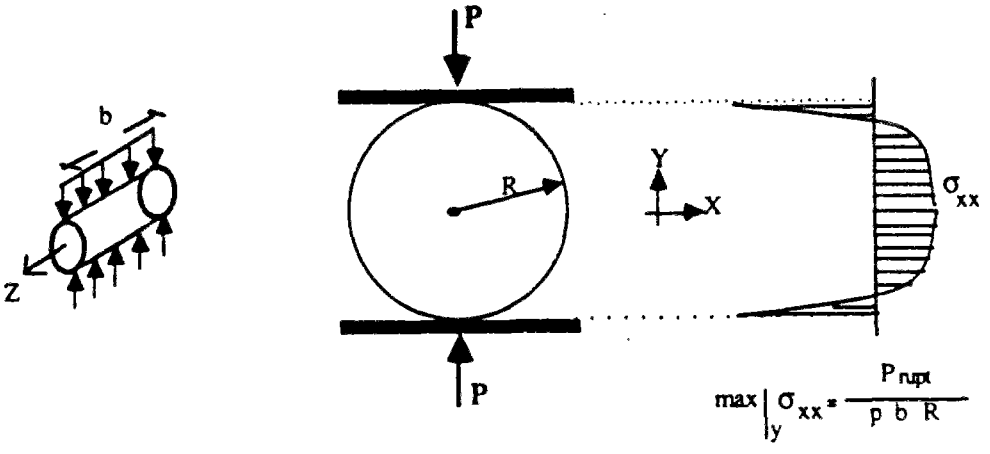


Fig. I.4 - Essai de traction indirecte par fendage (Davenne *et al.*, 1989).

Il est clair que ces deux essais ne permettent pas une description du comportement contrainte-déformation en traction.

I.3.2 Essais de tractions directes :

Ces essais sont difficiles à mettre en œuvre. C'est pour cela qu'il existe peu d'études réalisées sur ce mode de chargement. Toutefois, la réponse est en générale semblable à celle donnée par la figure I.5 (Terrien, 1980).

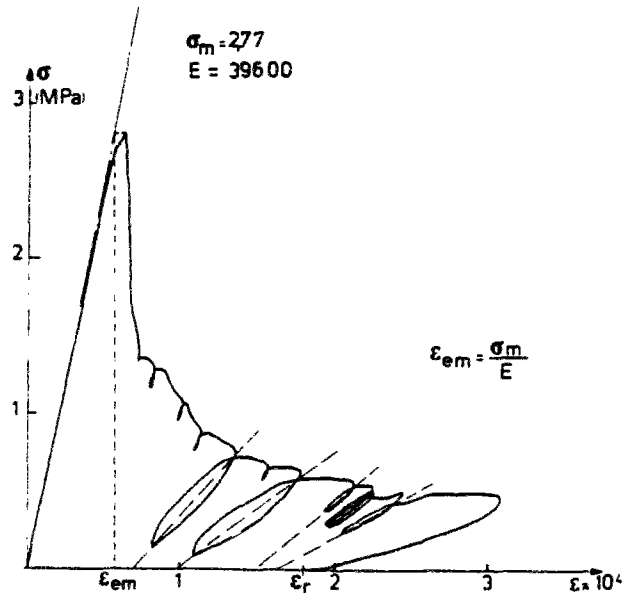


Fig. I.5 - Comportement du béton en traction directe (Terrien, 1980).

Ce résultat nous permet de distinguer deux phases importantes du comportement du béton :

- dans la première phase, le comportement est élastique linéaire avec une légère perte de raideur juste avant d'atteindre la contrainte maximale f_t;

- dans la deuxième phase (phase adoucissante), après atteinte de la contrainte maximale, il est observé une chute presque brutale de la contrainte pouvant être supportée par l'éprouvette. Cette chute se prolonge ensuite d'une façon moins accentuée.

Les cycles de charge-décharge mettent en évidence, à chaque décharge, les déformations anélastiques ainsi que la perte de raideur du matériau.

Le comportement adoucissant du béton en traction peut également être obtenu grâce à un autre type d'essai. Cet essai est appelé "essai P.I.E.D" (Pour Identifier l'Endommagement Diffus). Il est réalisé de façon à maintenir un champ de déformations uniforme dans l'eprouvette. L'idée de base est due à L'HERMITE (1973), améliorée par BAZANT et PIJAUDIER-CABOT (1987). L'effort est transmis au matériau testé en traction par des barettes métalliques collées le long des faces latérales d'une éprouvette prismatique. Les principes de l'essai sont donnés sur la figure I.6. Le comportement obtenu en traction est illustré sur la figure I.7.

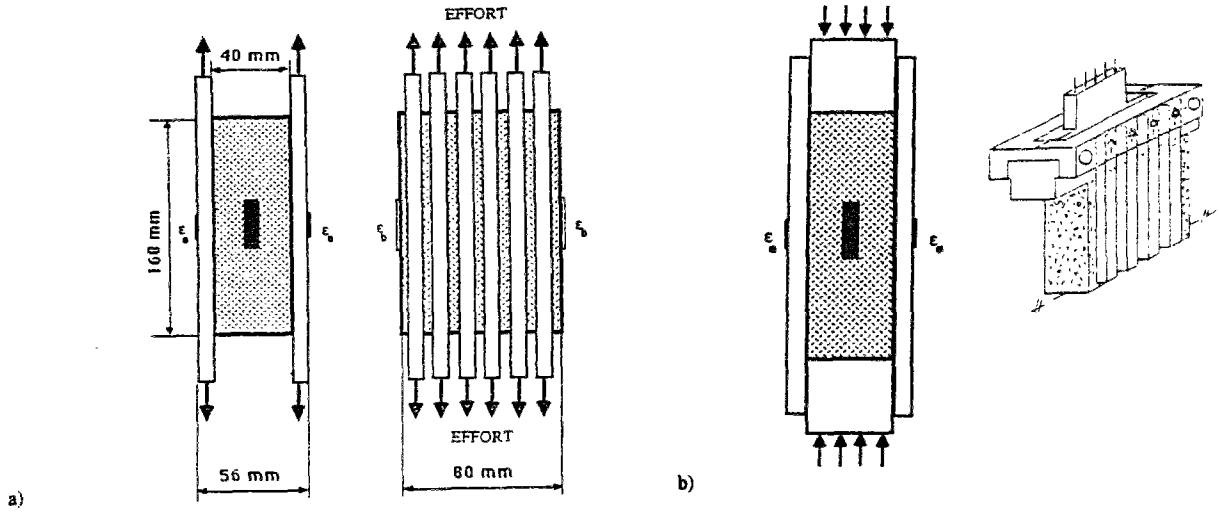


Fig. I.6 - Principe de l'essai P.I.E.D. a) Traction, b) Compression (Ramtani, 1990).

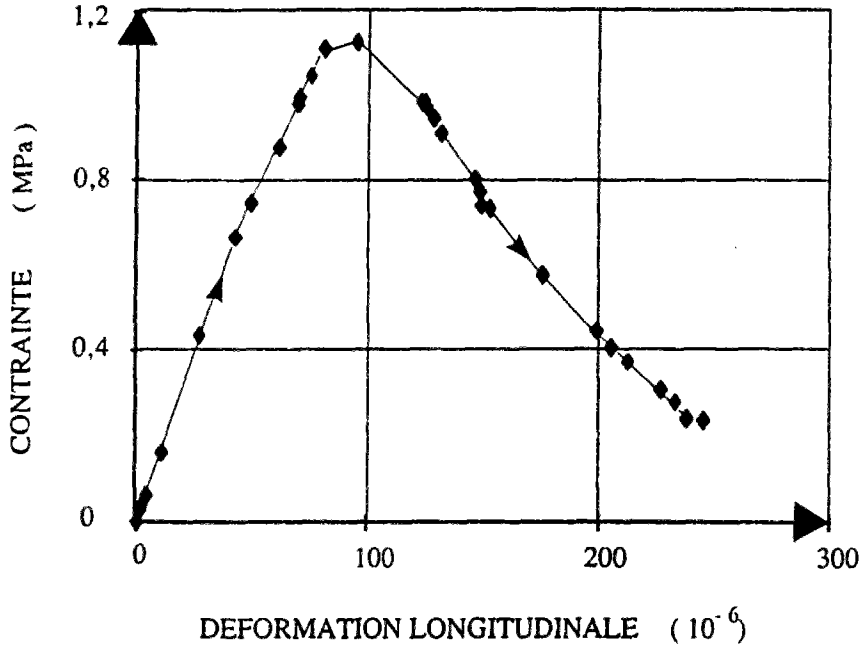


Fig. I.7 - Traction uniaxiale du béton donnée par l'essai P.I.E.D (Ramtani, 1990).

Les mêmes constatations que celle de la figure I.5 quant au comportement mécanique du béton en traction sont à faire pour le cas de l'essai P.I.E.D.

On retrouve en effet les deux phases du comportement : dans la première, le comportement est quasi-linéaire et dans la deuxième, le comportement est adoucissant.

I.4 Comportements en sollicitations multiaxiales :

Pour ces types d'essais, on distingue en général entre les sollicitations hydrostatiques, cas où les contraintes sont identiques dans les trois directions, et les sollicitations non hydrostatiques.

I.4.1 Comportement en sollicitation hydrostatique :

Il existe dans la littérature peu de résultats concernant le comportement du béton sous ce type de sollicitation. Il est toutefois distingué trois phases : une phase élastique linéaire, une phase d'assouplissement correspondant à l'effondrement des pores dans le matériau, la troisième phase correspondant à une consolidation et à l'augmentation des contacts au sein du matériau (Ramtani, 1990). La figure I.8 présente un résultat d'essai de ce type (Bazant et Prat, 1987).

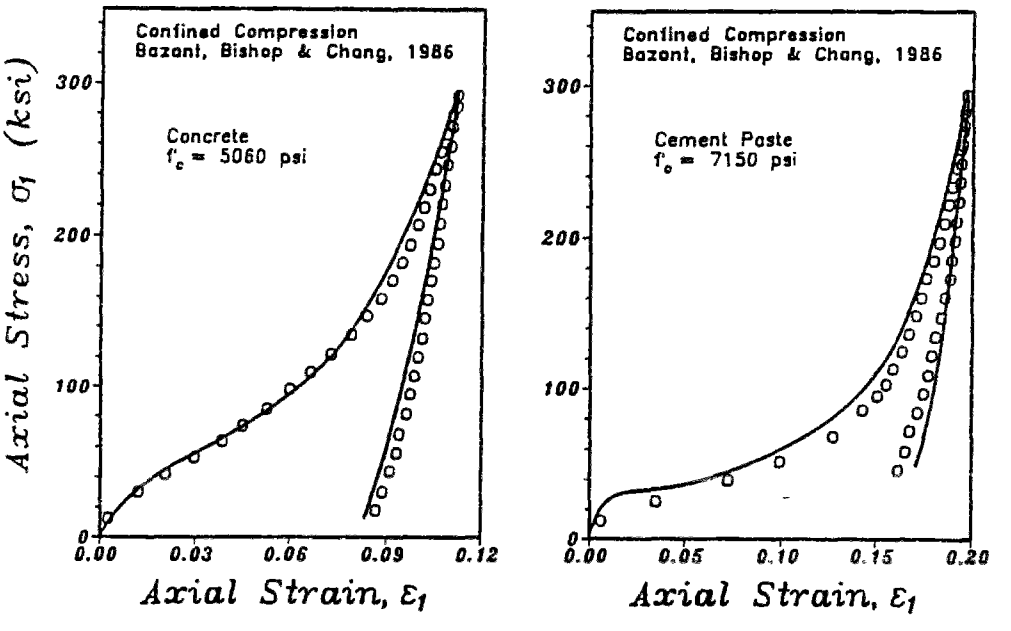


Fig. I.8 - Comportement du béton sous compression hydrostatique (Bazant et Prat, 1987).

I.4.2 Comportements en sollicitations non hydrostatiques :

En ce qui concerne les réponses du béton aux differents états triaxiaux de contraintes non hydrostatiques, un des résultats qui peuvent être mentionnés est l'effet de l'étreinte latérale sur la résistance en compression (Hordijk *et al.*, 1988). Plus les contraintes latérales en compression (σ_2 et σ_3) augmentent, plus la résistance à la compression dans la direction 1 (σ_1) augmente.

La figure I.9 présente un exemple de résultats d'essais triaxiaux. Ces résultats correspondent à trois tests en déformation plane suivant la direction 2 ($\delta_2 = 0$), pour différents rapports de chargement "σ_3/σ_1" suivant les deux autres directions (0., 0.05, 0.1), et à deplacement imposé suivant la direction (σ_1, δ_1). Les courbes "σ_1 - δ_1" et "σ_1 - δ_3" sont représentées dans la partie supérieure de la figure et la relation "σ_2 - δ_1" dans sa partie inférieure. Dans ces tests, la contrainte σ_2 agit comme un confinement passif. Elle croît ou decroît selon les actions dans les deux autres directions de chargement.

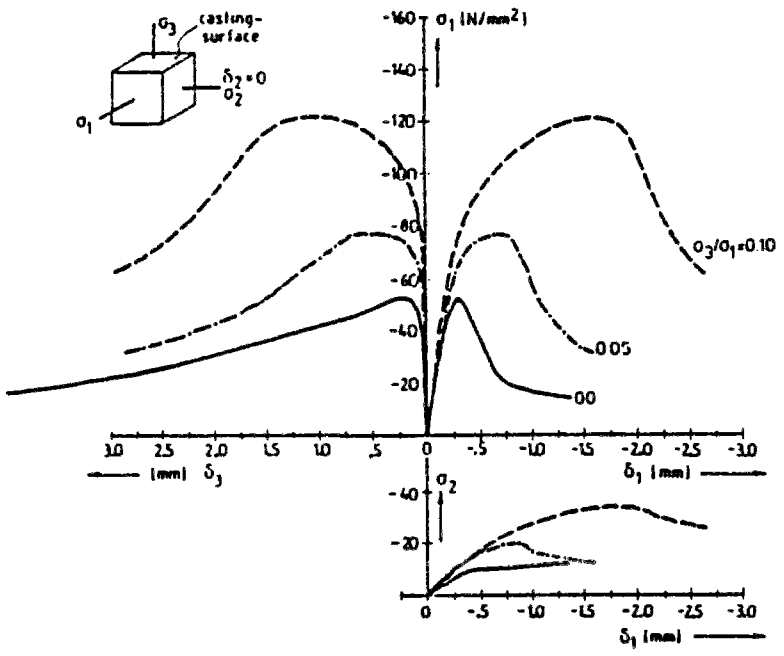


Fig. I.9 - Comportement du béton sous sollicitation multiaxiale (Hordijk *et al.*, 1988).

I.5 Phénomène unilatéral et endommagement du béton :

Le phénomène unilatéral consiste en une restauration de la raideur lors du passage d'un chargement en traction, où apparait de l'endommagement (perte de raideur), à un chargement en compression. Dans le béton endommagé ce caractère est observé macroscopiquement sur les réponses globales des structures (courbes force-déplacement par exemple).

Phénoménologiquement ceci s'explique par une refermeture des microfissures et microcavités créées lors d'une dégradation en traction.

Ce comportement a été mis en evidence dans (Terrien, 1980) pour le cas particulier de ruptures localisées en une seule macrofissure. Il a été par la suite confirmé pour le cas d'une distribution diffuse des microfissures dans (Ramtani, 1990) lors des essais de type P.I.E.D. (decrits dans la section §I.3.2) (figure I.10).

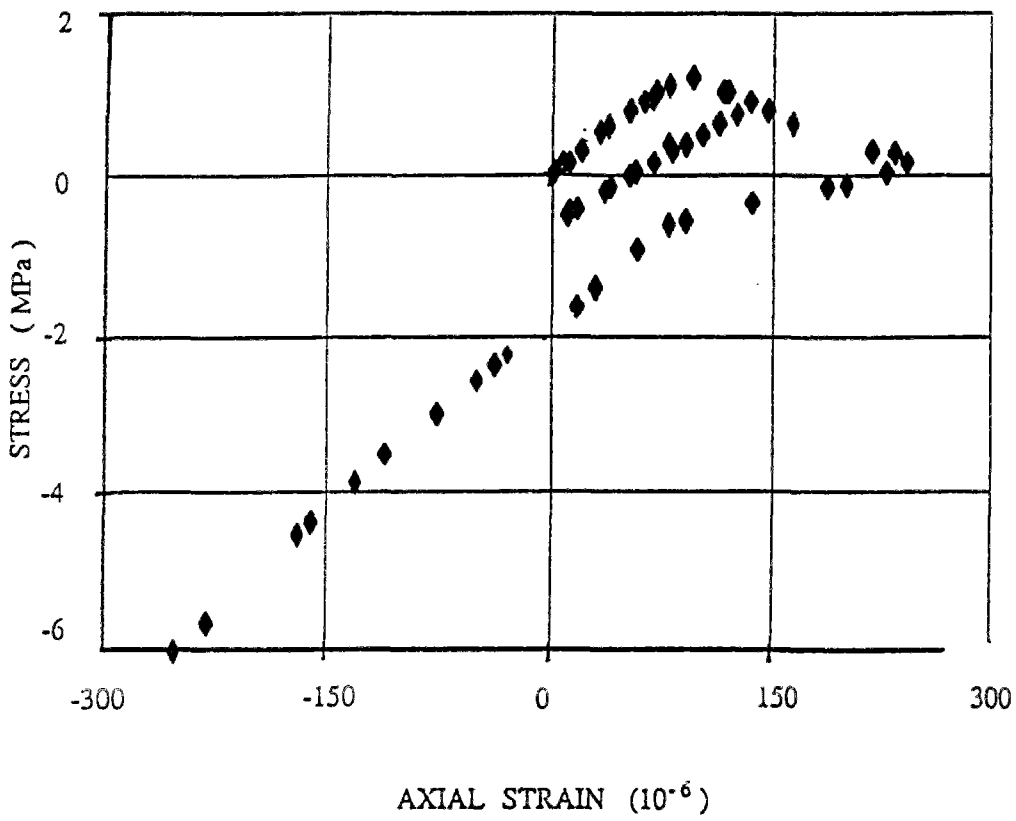


Fig. I.10 - Comportement unilatéral du béton (Ramtani, 1990).

I.6 Effet d'échelle dans les structures en béton :

On pourrait penser que la connaissance des caractéristiques du béton au niveau des essais de laboratoire sur des éprouvettes de tailles relativement faibles par rapport aux tailles réelles, menerait à une bonne évaluation du comportement des ouvrages. Or il se trouve que certaines caractéristiques mécaniques des structures en béton changent quand les tailles de ces structures changent. Ceci est notamment le cas pour la contrainte nominale maximale. C'est "l'effet d'échelle".

La contrainte nominale maximale d'une structure en béton est la contrainte maximale dans cette structure calculée en supposant un comportement élastique linéaire. Elle est évaluée à partir de la charge maximale pouvant être supportée par la structure.

L'effet d'échelle est mis en évidence par divers types de sollicitations sur des éprouvettes et des structures en béton, que ce soit sous sollicitations uniaxiales ou sous sollicitations multiaxiales.

Lors d'essais uniaxiaux sur des éprouvettes en béton, il apparaît que la contrainte maximale supportée diminue quand la taille de l'éprouvette augmente (Vonk, 1993). Ce cas particulier d'effet d'échelle, où les sollicitations sont uniformes dans toutes les éprouvettes, est aussi appelé effet de volume.

A titre d'exemple, la figure I.11 représente des géométries d'éprouvettes prismatiques soumises à des compressions uniaxiales. Les résultats de ces essais sont donnés sur la figure I.12 (Vonk, 1993).

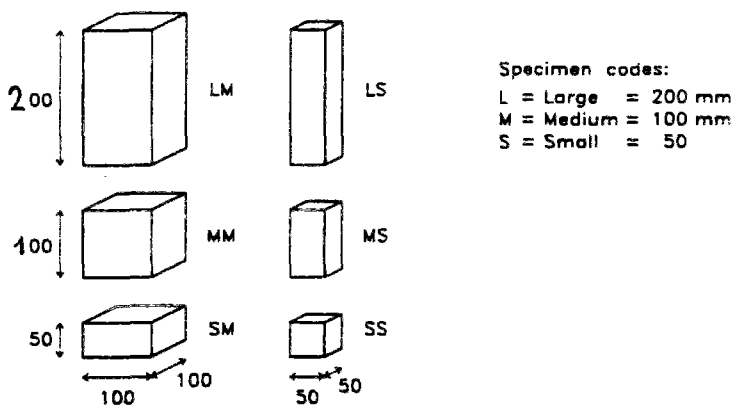


Fig. 1.11 - Géométries des éprouvettes prismatiques.

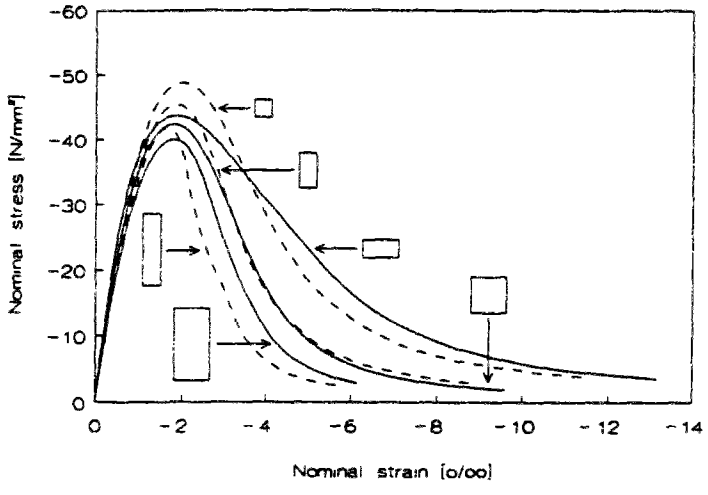


Fig. I.12 - Réponses contrainte-déformation en compression pour les différentes géométries (Vonk, 1993).

Aussi, lors de sollicitations multiaxiales sur des structures de géométries similaires, mais de tailles différentes, les mêmes observations sont notées. La contrainte nominale maximale d'une structure diminue lorsque la taille de celle-ci augmente.

Ce cas particulier d'effet d'échelle, où les sollicitations sont multiaxiales, est aussi appelé effet d'échelle de structures.

Plusieurs auteurs ont mis en évidence ces observations (Bazant et Oh, 1983; Mazars *et al.*, 1991; Planas et Elices, 1988; Biolzi *et al.*, 1994).

La figure I.13 montre la variation de la contrainte nominale maximale avec la taille de structures soumises à des flexions trois points (Mazars *et al.*,1991).

L'effet d'échelle peut être expliqué de la façon suivante. Le béton n'est pas un matériau parfaitement homogène. En effet, à l'échelle des granulats, l'hétérogénéité du matériau se manifeste par la présence de microdéfauts, de microfissures et de microvides d'orientations quelconques. Sous l'effet d'un chargement, les déformations se localisent rapidement dans les

zones où il y a ces défauts. Plus les dimensions d'une structure sont grandes, plus il est probable d'avoir la présence d'une importante proportion de défauts.

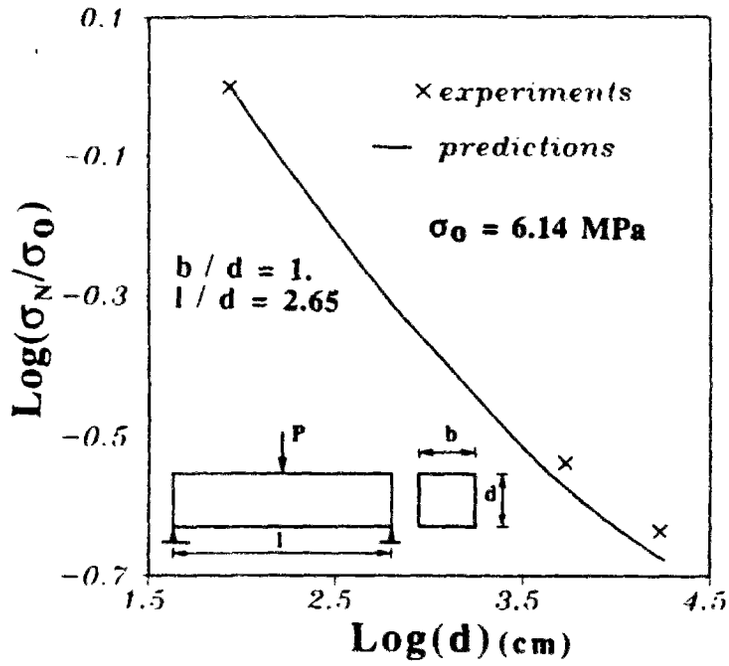


Fig. I.13 - Variation de la contrainte nominale avec les dimensions d'une structure, exemple en flexion trois points (Mazars *et al.*, 1991).

I.7 Conclusions :

A travers ces quelques résultats sur le comportement mécanique du béton, nous avons pu nous rendre compte de la multitude des études expérimentales menées par les différents auteurs afin de pouvoir comprendre de mieux en mieux les différentes propriétés de ce matériau.

Le béton est, comme le témoignent ces études, un matériau qui demeure très complexe, ce qui rend sa modélisation difficile. Le recours à certaines simplifications s'avère donc quelquefois nécessaire.

Les principales caractéristiques du béton qu'on peut retenir sont :

- Un comportement dissymétrique entre traction et compression.
- Un comportement adoucissant en traction et en compression.

- une apparition de déformations anélastiques dès qu'apparaît une perte de raideur du matériau;
- le phénomène unilatéral lors du passage d'un chargement endommageable en traction à un chargement en compression;
- enfin notons une propriété fondamentale pour le génie civil qui est l'effet d'échelle.

Nous allons dans la suite de ce mémoire développer des modèles pouvant décrire le comportement endommageable du béton. Dans le chapitre suivant nous passons brièvement en revue quelques modèles existants dans la littérature.

CHAPITRE II

QUELQUES MODELISATIONS DU COMPORTEMENT DU BETON.

II.1 Introduction :

Dans un solide, l'endommagement se déclenche lorsque, au niveau microscopique, il se produit une apparition de microvides et de microfissures. Ces altérations microscopiques ont une influence sur les caractéristiques thermomécaniques du matériau à l'échelle macroscopique.

Pour les sciences de l'ingénieur, une modélisation macroscopique devient donc nécessaire pour permettre de rendre compte de ces processus de détérioration. Bien entendu, il a été constaté qu'il était difficile de prendre en compte, dans un seul modèle, tous les mécanismes observés. De ce fait, un choix est donc nécessaire pour privilégier la description d'un phénomène au détriment d'un autre pour des besoins de conception.

Parmi les approches existantes, les modèles microscopiques tentent de décrire le comportement du matériau à partir d'observations à une échelle fine (de l'ordre du grain pour le béton). Un passage micro-macro s'avère alors nécessaire afin de transmettre l'influence de ces phénomènes sur le comportement global à l'échelle de la structure. Les approches macroscopiques sont quant à elles issues d'observations globales. Elles permettent de décrire l'influence des phénomènes locaux sur le comportement à l'échelle du volume représentatif du matériau.

La progression de l'endommagement due à une coalescence des microfissures se traduit le plus souvent par un comportement adoucissant. Ceci est le cas pour le béton. L'application de modèles décrivant ce comportement lors de calculs par éléments finis se heurte en général à des difficultés de dépendance du maillage lors de la discrétisation. L'analyse devient de ce fait inobjective.

Un des procédés adoptés afin d'éviter cette difficulté consiste en l'utilisation d'approches dites non-locales. Le concept de non-localité a permis d'ouvrir une nouvelle voie pour le développement de modèles. Ceci souvent à partir des modèles "locaux" existants.

Dans ce chapitre nous proposons un bref tour d'horizon sur quelques modèles appliqués à la description des matériaux endommageables et plus particulièrement du béton.

II.2 Utilisation de la mécanique de la rupture :

Il existe deux branches de la mécanique de la rupture : la mécanique linéaire de la rupture et la mécanique non linéaire de la rupture. La deuxième branche se distingue de la première par l'intervention de comportements non linéaires lors de l'analyse des champs de contraintes et de déformations (comportements plastiques ou viscoplastiques en général). En ce qui concerne l'analyse non linéaire, nous n'aborderons dans cette section qu'un seul exemple de modélisation adapté au cas particulier du béton.

II.2.1 Mécanique linéaire de la rupture :

Elle constitue la modélisation la plus simple en supposant le matériau comme ayant un comportement élastique linéaire. L'analyse d'une fissure isolée permet l'étude de la distribution des contraintes perpendiculaires au plan de cette fissure (seul le mode d'ouverture de fissure, mode I, est considéré dans l'étude). Cette distribution peut être exprimée par l'expression de la forme (Knott, 1973; Leblond, 1991) :

$$\sigma_y = \frac{K}{\sqrt{2\pi x}} + \cdots \qquad \text{(II.1)},$$

où σ_y est la contrainte perpendiculaire au plan de la fissure (fig. II.1) et où les pointillés indiquent des termes négligeables en comparaison avec le premier terme au voisinage de la pointe de fissure (Hillerborg, 1983).

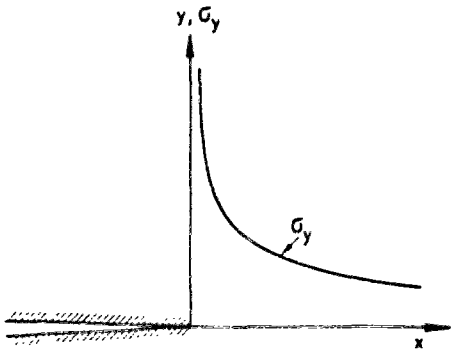


Fig. II.1 - Distribution des contraintes au voisinage de la pointe de fissure donnée par la théorie de l'élasticité.

Le paramètre K désigne le facteur d'intensité de contraintes. Il dépend généralement du mode de chargement, de la longueur de la fissure et de la géométrie de la structure. Sa valeur est donnée par l'expression générale :

$$K = \sigma.\sqrt{a}.f, \qquad (II.2),$$

où σ est la contrainte qui devrait agir si la fissure n'était pas présente, a est la longueur de la fissure ou la demi-longueur de la fissure si celle-ci est interne et f est une fonction qui dépend de la géométrie de la structure, de la géométrie de la fissure et du type de chargement exercé. Elle donne lieu à un coefficient multiplicateur dans l'expression (II.2) généralement compris entre 1.7 et 2.0. Pour les cas de figures simples (géométrie et chargement), la valeur de K peut être calculée analytiquement. On trouvera différentes expressions de la fonction f de l'équation (II.2) dans (Knott, 1973; Labbens, 1980; Lemaître, 1992). Pour des cas de figures complexes, elle doit être calculée à l'aide d'outils numériques.

D'après l'expression (II.1), la contrainte en pointe de fissure tend vers l'infini. Le critère de propagation ne peut donc pas être basé sur une valeur de contrainte.

Au lieu d'un critère de contrainte, il est plus commode d'utiliser un critère basé sur le facteur d'intensité de contraintes K qui a une valeur finie. Le facteur d'intensité de contraintes critique, noté K_c, est la valeur de la quantité K à partir de laquelle la fissure commence à se propager (Lemaître et Chaboche, 1990). K_c est considéré comme une caractéristique du matériau.

Lorsqu'une fissure se propage, ceci est accompagné par une perte d'énergie potentielle. Le taux de restitution d'énergie, noté G (Bui, 1977; Lemaître et Chaboche, 1990), est l'énergie dissipée par unité de surface de propagation de la fissure. Le taux de restitution d'énergie peut être également utilisé pour définir le critère de propagation de la fissure. Le taux de restitution critique, noté G_c, est la valeur de G à partir de laquelle la fissure commence à se propager.

Les quantités K et G sont liées, et donc aussi les quantités K_c et G_c, par les relations suivantes :

$$K = \sqrt{EG}, \text{ en contraintes planes,} \qquad (II.3),$$

$$K = \sqrt{EG\,(1-\nu^2)}, \text{ en déformations planes,} \qquad (II.4),$$

où E est le module d'Young et ν est le coefficient de Poisson.

La mécanique linéaire de la rupture se heurte à des difficultés d'identification lors de son application au cas particulier du béton. Ceci en raison de l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire du matériau. En effet, les expériences montrent l'existence de zones de microfissurations en pointe de fissure qui doivent être prises en considération.

II.2.2 Mécanique non linéaire de la rupture appliquée au béton :

Afin d'adapter la mécanique de la rupture au cas particulier du béton, l'introduction d'un comportement non linéaire s'est avérée nécessaire. Parmi les modèles proposés, le modèle de la fissure fictive "fictitious crack model" (Hillerborg *et al.*, 1976) est le plus utilisé. Ce modèle prend en compte l'énergie dissipée par microfissuration au voisinage de la pointe de fissure. Nous en donnons une brève description dans ce qui suit.

Lors d'un chargement (à déplacement imposé) en traction sur une barre en béton, une fissure apparait lorsque la charge maximale pouvant être supportée par cette barre est atteinte. Si le déplacement croît, un comportement adoucissant apparaît. Dans cette phase du chargement une zone de microfissuration au voisinage de la pointe de fissure apparaît. Dans cette zone, appelée fissure fictive, le modèle considère que les contraintes sont encore actives et dépendent de l'ouverture de cette fissure (figure II.2).

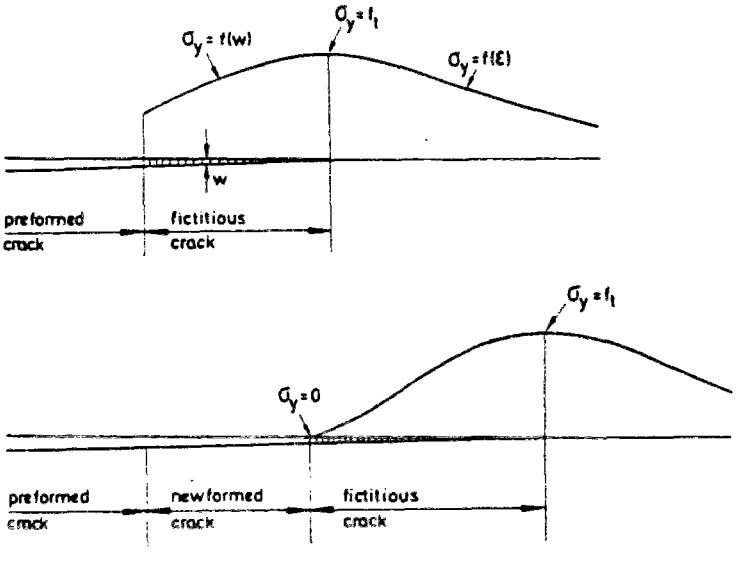


Fig. II.2 - Distribution des contraintes au voisinage d'une fissure visible selon le modèle de la fissure fictive (Hillerborg, 1983).

La prise en compte de ce phénomène s'opère de la façon suivante. Considérons la barre soumise à la traction simple. Lors de la phase du début du chargement, le comportement est presque linéaire jusqu'à la résistance maximale f_t. Dans cette phase, les contraintes et les déformations sont uniformes dans la barre. La relation charge-déplacement peut donc être représentée par une courbe contrainte-déformation. Lors de la phase adoucissante, les déformations se localisent dans une zone où apparaissent les microfissures et dans laquelle se développera la fissure. La relation charge-déplacement peut être représentée par une relation entre la contrainte et l'ouverture de la fissure (Hillerborg, 1983).

Le comportement est donc séparé en deux parties (fig. II.3), relation contrainte-déformation lors de la phase de charge et relation contrainte-ouverture de la fissure lors de la phase adoucissante.

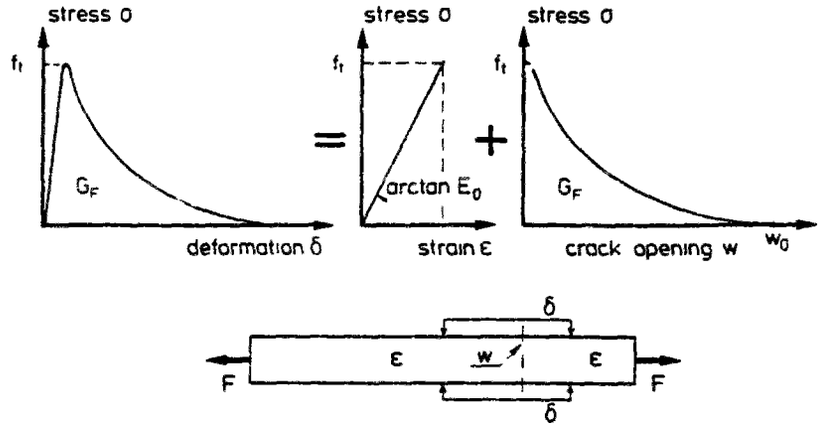


Fig. II.3 - Séparation du comportement du béton en traction en une partie contrainte-déformation et une partie contrainte-ouverture de fissure (Hillerborg, 1983).

Durant l'essai de traction jusqu'à séparation complète, l'énergie absorbée dans la fissure fictive est :

$$A \int_0^{w_1} \sigma \, dw = A \, G_F, \qquad \text{(II.5)},$$

où A est la section de la barre, w_1 est l'ouverture de la fissure qui correspond à la situation de décharge complète ($\sigma = 0$) et G_F est l'aire au dessous de la courbe σ-w (fig. II.3). Cette dernière quantité est donc l'energie de rupture de la barre.

Les propriétés du matériau sont entièrement définies par la connaissance de f_t, la résistance maximale en traction, de E, le module élastique et de G_F, l'énergie de rupture. Ces quantités peuvent être liées par une notion de longueur caractéristique l_{ch} definie par :

$$l_{ch} = \frac{EG_F}{f_t^2}, \qquad \text{(II.6)},$$

qui est donc aussi une caractéristique du matériau, mais sans signification physique directe (Hillerborg, 1983).

La procédure d'identification des caractéristiques du matériau s'opère de la façon suivante : la courbe σ-w (fig. II.3) est déterminée par un essai de traction simple et la valeur de G_F est déterminée par des essais de flexion sur des poutres entaillées (Hillerborg, 1985).

Ce modèle a par ailleurs été utilisé pour modéliser le comportement de fatigue en traction du béton (Hordijk, 1992).

II.3 Approches micromécaniques :

Les approches micromécaniques sont considérées comme étant des approches indirectes. Le comportement est déduit de l'observation des mécanismes au niveau fin de la structure du matériau. Dans cette section, quelques modèles sont brièvement décrits.

II.3.1 Modèle microplan :

Dans le modèle microplan, les propriétés du matériau sont représentées séparément dans des plans de différentes orientations (Bazant et Oh, 1985). Ces plans sont appelés microplans (figure II.4). Chaque plan est défini par sa normale **n**, et sur chacun il existe des composantes de contraintes et de déformations. Les composantes des déformations sont définies comme étant les projections des déformations macroscopiques du milieu sur ces plans.

Les contraintes macroscopiques sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Nous donnons dans ce qui suit une brève déscription de ce passage micro-macro.

Le comportement à l'échelle du microplan est donné par des relations entre contraintes et déformations de la forme : $\sigma_V = F_V(\varepsilon_V)$, $\sigma_D = F_D(\varepsilon_D)$, $\sigma_T = F_T(\varepsilon_T)$ et $\sigma_N = F_N(\varepsilon_N)$, où ε_T est le vecteur des composantes tangentielles, ε_N est la composante normale du microplan, ε_D est le vecteur des composantes déviatoriques et ε_V est la déformation volumique definie par $\varepsilon_V = tr[\varepsilon]/3$, avec ε le tenseur des déformations macroscopiques.

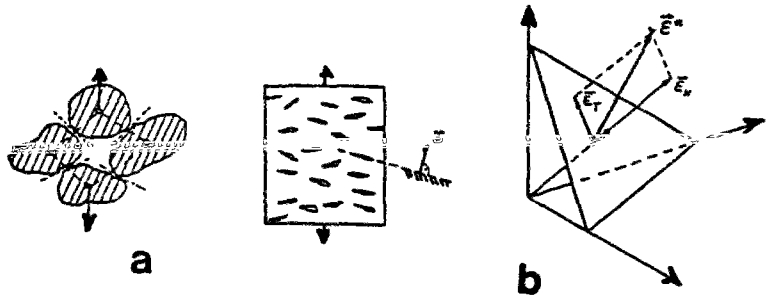


Fig. II.4 - Composantes des déformations sur un microplan.

Le passage à l'échelle de la structure est effectué à partir de l'équilibre des contraintes entre le niveau microscopiques et le niveau macroscopiques (Bazant et Oh, 1985).

Un exemple de réponse obtenue à l'aide du modèle microplan sur du béton sous sollicitation en compression avec retour de chargement est illustré sur la figure II.5.

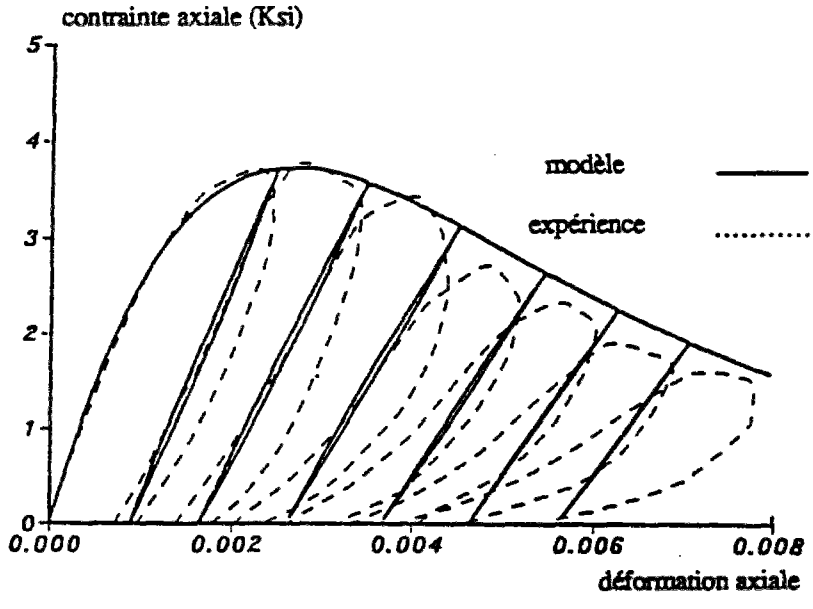


Fig. II.5 - Compression cyclique. Modèle microplan (Bazant et Oh, 1985).

II.3.2 Modélisation à partir d'une cellule élémentaire :

Dans cette approche, le matériau est considéré comme étant une juxtaposition de cellules élémentaires de dimensions identiques. Chacune comprenant une ou plusieurs microfissures ou microvides, d'orientations identiques ou arbitraires et de formes

quelconques (Andrieux, 1981; Marigo, 1985; Nemat-Nasser *et al.*, 1993). La figure II.6 illustre un exemple de cette juxtaposition.

A partir d'observations microscopiques (au niveau de la cellule élémentaire), on utilise des méthodes d'homogénéisation afin de déduire le comportement macroscopique du matériau.

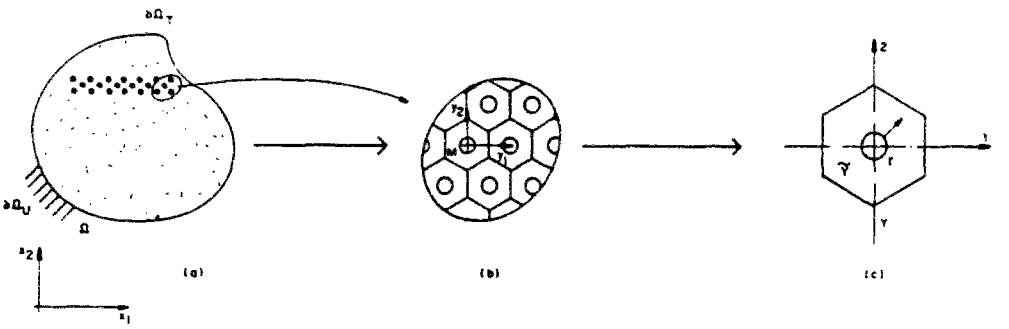


Fig. II.6 - Exemple de juxtaposition de cellules élémentaires (Marigo, 1985); (a) niveau macroscopique; (b) niveau microscopique; (c) cellule élémentaire.

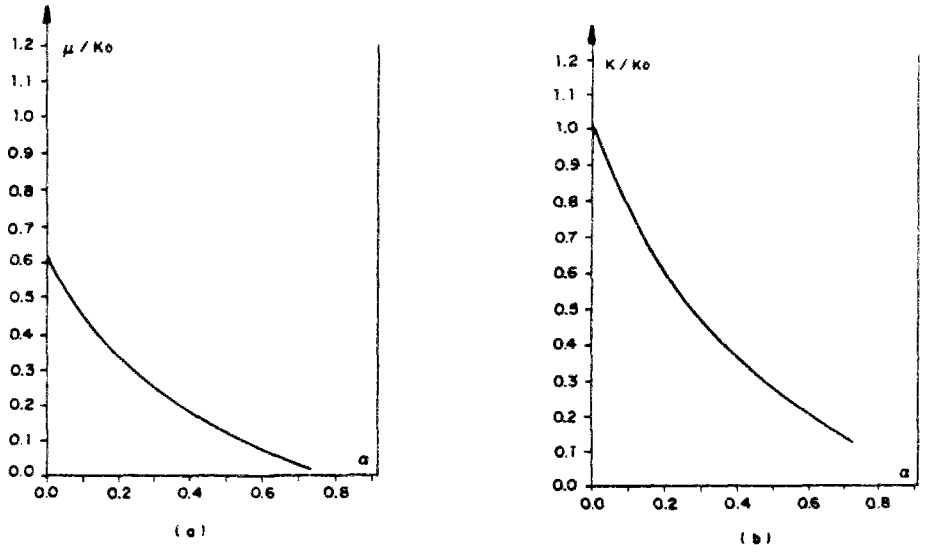
Divers modèles utilisent cette approche, à titre d'exemple, des modèles decrivant la coalescence des microvides (Suquet, 1981; Marigo, 1985) ou des microfissures (Andrieux, 1981 ; Nemat-Nasser *et al.*, 1993). L'étude théorique ainsi que plusieurs applications peuvent être trouvées dans (Suquet, 1982). Les étapes permettant le passage micro-macro dans cette approche peuvent être résumées comme suit (Marigo, 1985) :

(i) définition de la microstructure par la donnée d'une cellule élémentaire ou par le volume élémentaire du matériau,
(ii) définition des quantités macroscopiques par rapport aux quantités microscopiques,
(iii) identification des variables macroscopiques d'état,
(iv) expression des quantités microscopiques en fonction des variables macroscopiques d'état,
(v) relation entre quantités macroscopiques.

Un exemple d'application de cette approche où la cellule élémentaire est celle représentée par la figure II.6 est donné. En choisissant la porosité α comme seul paramètre de dégradation, on obtient un modèle d'endommagement dont quelques résultats sont représentés sur les figures suivantes (Marigo, 1985).

Les figures II.7a et II.7b donnent les variations des modules élastiques macroscopiques K et μ en fonction de la porosité α respectivement (K est le module volumique et μ est le module de cisaillement).

Les figures II.8a et II.8b représentent les parties déviatorique et sphérique, respectivement, de la relation contrainte-déformation du matériau. Elles constituent les réponses de ce matériau soumis à une sollicitation uniaxiale en déformation imposée $\varepsilon = \tau E_0$.



K_0 = module volumique de la matrice (dans la cellule)

Fig. II.7 - Modules élastiques en fonction de la porosité.
(a) module de cisaillement, (b) module volumique, (Marigo, 1985).

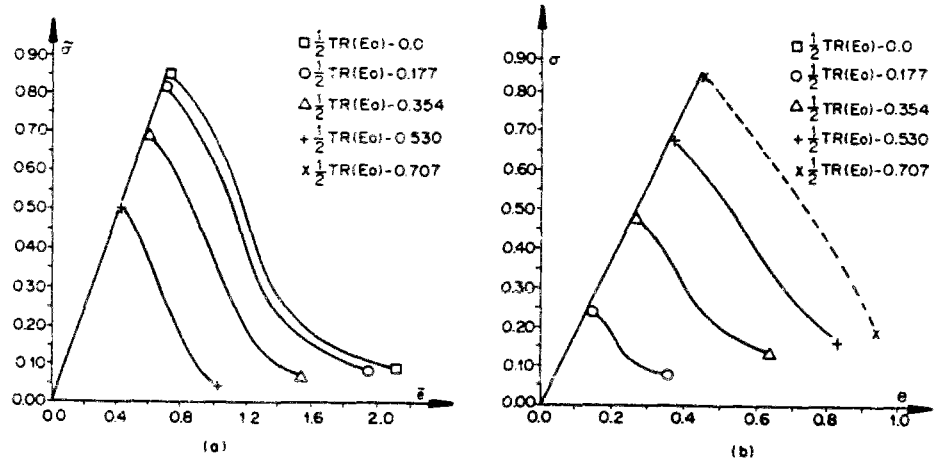


Fig. II.8 - Réponses du matériau sollicité en déformation uniaxiale imposée $\varepsilon = \tau E_0$ pour cinq valeurs de $Tr(E_0)$ avec $E_0.E_0 = 1$.
(a) réponse déviatorique $(\tilde{\sigma},\tilde{e})$, (b) réponse sphérique (σ,e), (Marigo,1985).

II.4 Utilisation de la mécanique de l'endommagement :

Le cadre de la mécanique des milieux continus permet une modélisation des effets des microfissures sur le comportement à l'échelle de la structure. Ces phénomènes sont représentés par un ensemble de variables internes à travers lesquelles l'état du matériau est déterminé à chaque instant. Ces variables agissent sur les caractéristiques thermomécaniques et par conséquent, sur le comportement du matériau à l'échelle macroscopique.

Un des premiers concepts d'endommagement est dû à KACHANOV (1958) qui a décrit la détérioration des matériaux par son effet sur les caractéristiques élastiques en introduisant une variable continue d'endommagement. Cette notion a par la suite été généralisée sur la base de thermodynamique des processus irréversibles (Lemaître et Chaboche, 1990).

L'observation et la modélisation se fait sur un volume représentatif du matériau suffisament grand pour qu'il puisse être considéré comme homogène et suffisament petit pour qu'il puisse être considéré comme un point matériel.

Sur la base de cette théorie, de nombreux modèles ont été développés. Selon l'objectif à atteindre lors de la modélisation et lors de l'établissement des hypothèses, l'endommagement peut être décrit par une variable scalaire (endommagement isotrope), vectorielle ou tensorielle. Nous allons donner quelques exemples en insistant sur l'application au béton.

II.4.1 Endommagement isotrope :

En mécanique de l'endommagement, la façon la plus simple de décrire la dégradation des matériaux est de supposer que l'endommagement est isotrope. On considère alors une variable scalaire d'endommagement.

Du point de vue de la thermodynamique des milieux continus, L'énergie libre permet de définir les efforts thermodynamiques (ou dissipatifs). L'état du matériau est caractérisé par les variables d'état. L'expression la plus simple d'énergie libre couplant élasticité et endommagement est :

$$\Psi = \frac{1}{2}(1-D)\{2\mu tr[\varepsilon.\varepsilon]+\lambda(tr[\varepsilon])^2\} \qquad \text{(II.7)},$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau non endommagé, ε désigne le tenseur d'ordre deux des petites déformations et D est la variable scalaire d'endommagement variant

de D = 0 pour le matériau non endommagé à D = 1 lorsque celui-ci est complètement endommagé.

La loi de comportement donnant la relation contrainte-déformation est donnée par,

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = (1-D)\{2\mu\varepsilon + \lambda(tr[\varepsilon])\mathbf{I_d}\} \qquad \text{(II.8)},$$

où σ est le tenseur d'ordre deux des contraintes et $\mathbf{I_d}$ est la matrice unité (d'ordre 2).

La quantité duale associée à la variable d'état d'endommagement est définie comme étant le taux de restitution d'énergie élastique notée Y. Elle est donnée par,

$$Y = -\frac{\partial \Psi}{\partial D} = \frac{1}{2}\{2\mu tr[\varepsilon.\varepsilon]+\lambda(tr[\varepsilon])^2\} \qquad \text{(II.9)}.$$

En rappelant que le matériau est élastique, le taux de dissipation d'énergie s'écrit :

$$\Phi = Y\,\dot{D} \qquad \text{(II.10)}.$$

La variable thermodynamique Y étant positive, l'inégalité de Clausius-Duhem impose à la vitesse d'endommagement d'être positive ou nulle :

$$\dot{D} \geq 0 \qquad \text{(II.11)}.$$

La donnée d'une fonction seuil d'endommagement de forme générale :

$$f = f(Y,D,\varepsilon,...) \qquad \text{(II.12)},$$

permet de définir une loi d'évolution de l'endommagement qui, dans le cadre des modèles où l'évolution est indépendante du temps, s'écrit sous la forme :

$$\dot{D} = \dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial Y} \qquad \text{(II.13)},$$

où λ est un multiplicateur d'endommagement. Avec les conditions de Kuhn-Tucker,

$$\dot{\lambda} \geq 0,\ f \leq 0 \text{ et } \dot{\lambda} f = 0,$$

la fonction g est le potentiel d'évolution. Dans un modèle associé, on a g identiquement égal à f (g = f).

Un modèle d'endommagement scalaire appliqué au béton est donné dans (Pijaudier-Cabot et Bodé, 1992 ; Pijaudier-Cabot, Huerta et Bodé, 1992). Dans ce modèle la relation contrainte-déformation est celle donnée par l'expression (II.8). L'évolution de l'endommagement est donnée par :

$$\begin{cases} f(Y) = Y - \kappa \\ \text{si } f(Y) = 0 \text{ et } \dot{f} = 0 \quad \text{alors } \dot{D} = \dfrac{\partial F(Y)}{\partial Y}\,\dot{Y}(x) \\ \text{si } f(Y) < 0 \text{ ou } f(Y) = 0 \text{ et } \dot{f} = 0 \quad \text{alors } \dot{D} = 0 \end{cases} \qquad \text{(II.14)},$$

avec F, la loi d'évolution de l'endommagement donnée par l'expression :

$$F(Y) = 1 - \frac{1}{1+b_1(Y-Y_0)+b_2(Y-Y_0)^2}$$

où Y_0 est le seuil d'endommagement, b_1 et b_2 sont des paramètres du matériau. κ est la valeur maximale de la quantité Y jamais atteinte au point considéré pendant toute l'histoire du chargement :

$$\kappa = \max_{-\infty < \tau \leq t} Y$$

Un exemple d'application de ce modèle donne la loi de comportement du béton en traction uniaxiale présentée par la figure II.9.

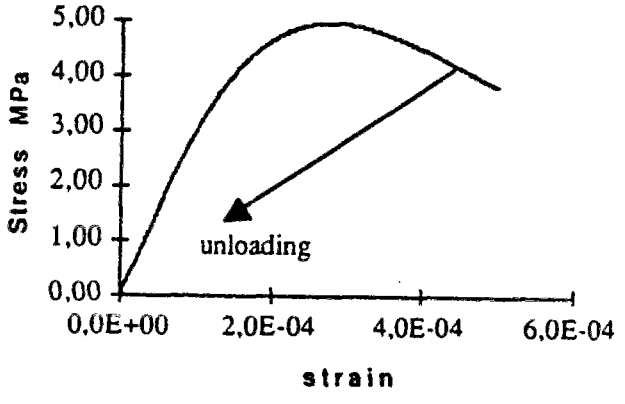


Fig. II.9 - Courbe contrainte-déformation pour le béton en traction uniaxiale, $b_1 = 605$ MPa^{-1}, $b_2 = 5.24\ 10^{-4}$ MPa^{-1}, $Y_0 = 60\ 10^{-6}$ MPa (Pijaudier-Cabot *et al.*, 1994)

Un autre modèle d'endommagement proposé dans (Mazars, 1984) considère que les microfissures sont provoquées par les extensions suivant les directions principales des tenseurs de déformation. Dans ce modèle l'évolution de l'endommagement est pilotée par une déformation équivalente définie par :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle\varepsilon_1\rangle_+^2 + \langle\varepsilon_2\rangle_+^2 + \langle\varepsilon_3\rangle_+^2} \qquad \text{(II.15)},$$

où $\langle\varepsilon_i\rangle_+$ sont les parties positives des composantes des déformations principales. La loi d'évolution de l'endommagement est de forme générale :

$$D = f(\tilde{\varepsilon}) \begin{cases} = 0 \text{ si } \tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon_{D0} \\ \neq 0 \text{ si } \tilde{\varepsilon} > \varepsilon_{D0} \end{cases} \qquad \text{(II.16)},$$

où ε_{D0} est le seuil initial d'endommagement. Ce seuil évolue avec la progression de l'endommagement.

L'endommagement D est exprimé sous forme de partition entre deux quantités : un endommagement de traction D_T et un endommagement de compression D_C. La relation donnant l'endommagement s'écrit sous la forme linéaire :

$$D = \alpha_t D_T + \alpha_c D_C \qquad \text{(II.17)},$$

où α_t et α_c sont des coefficients dépendant de l'état actuel de déformation (Mazars, 1984 ; Saouridis, 1988) tels que :

$$\begin{aligned} &\alpha_t + \alpha_c = 1, \\ &\alpha_t = 1 \text{ en traction pure,} \\ &\text{et } \alpha_c = 1 \text{ en compression pure,} \end{aligned} \qquad \text{(II.18)}.$$

Les lois d'évolution pour les deux quantités d'endommagement D_T et D_C sont définies par :

$$D_i = 1 - \frac{\varepsilon_{D0}(1-A_i)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_i}{\exp[B_i(\tilde{\varepsilon}-\varepsilon_{D0})]} \qquad \text{(II.19)},$$

où A_i et B_i sont des paramètres dépendant du matériau avec l'indice i = t pour la traction et i = c pour la compression.

La figure II.10 présente un exemple d'évolution des deux quantités d'endommagement prises séparément.

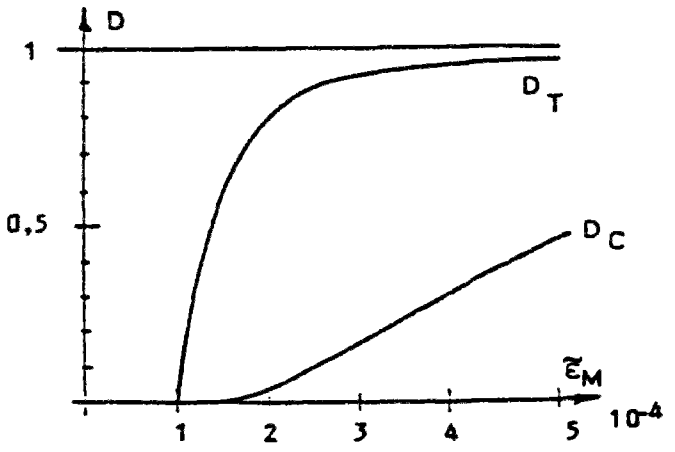


Fig. II.10 - Evolution des deux variables d'endommagement D_T et D_C (Mazars, 1984).

Ce modèle permet une distinction entre les comportements élémentaires de traction et de compression. La figure II.11 illustre ce propos.

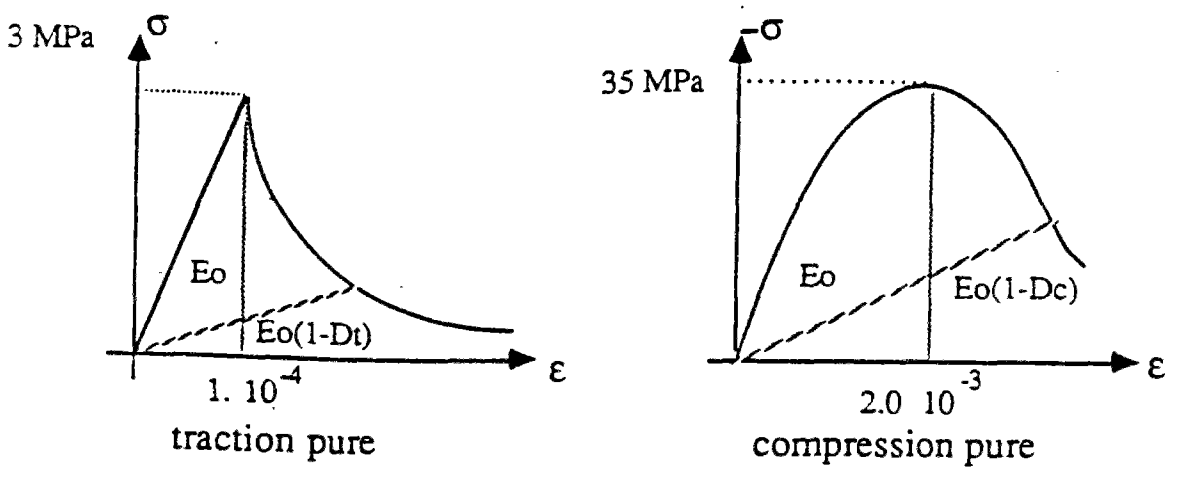


Fig. II.11 - Comportements élémentaires en traction et en compression (Mazars, 1984).

II.4.2 Endommagement anisotrope :

Les modèles d'endommagement anisotropes permettent de décrire avec plus de réalisme l'effet induit par l'endommagement sur l'anisotropie du matériau. Cette anisotropie peut être controlée par la définition de la nature des variables d'endommagement.

Parmi les modèles les plus fréquents dans la littérature, l'endommagement anisotrope est décrit à l'aide de variables tensorielles d'ordres 2. Il existe toutefois des modèles développés, toujours dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus, qui utilisent comme variables internes, soit un endommagement vectoriel $D^{(\alpha)}$ (Krajcinovic et Fonseka, 1981), soit un tenseur d'ordre 4 (Chaboche, 1979).

Dans cette section, nous avons choisi de décrire les modèles d'endommagement anisotropes issus du cadre général de la théorie d'endommagement anisotrope proposée par LADEVÈZE (1983) (voir aussi (Ladevèze, 1993)). Nous nous proposons donc d'abord de rappeler les principales lignes de cette théorie.

Considérons un matériau dont les caractéristiques initiales à l'état non endommagé sont indicées par "0". Le volume élémentaire étudié est soumis à une contrainte uniaxiale σ^* dans une direction **n** quelconque. Les déformations associées à σ^* et **n** sont :

- $\varepsilon_L{}^*(\mathbf{n})$: la déformation longitudinale dans la direction **n**.
- $\varepsilon_L{}^*(\mathbf{n}) + \varepsilon_T{}^*(\mathbf{n}) + \varepsilon_{T'}{}^*(\mathbf{n})$: la déformation volumique où $\varepsilon_T{}^*$ et $\varepsilon_{T'}{}^*$ désignent les deux déformations transversales (T et T' sont deux directions orthogonales).

En supposant que les comportements en traction et en compression sont identiques, l'élasticité est définie par les relations :

$$\varepsilon_L{}^*(\mathbf{n}) = \frac{1}{E(\mathbf{n})}\sigma^* \quad \text{et} \quad \varepsilon_L{}^*(\mathbf{n}) + \varepsilon_T{}^*(\mathbf{n}) + \varepsilon_{T'}{}^*(\mathbf{n}) = \frac{1}{\gamma(\mathbf{n})}\sigma^* \qquad \text{(II.20)},$$

où $E(\mathbf{n})$ désigne le module d'Young dans la direction **n** et $\gamma(\mathbf{n})$ désigne le module volumique toujours suivant la direction **n**.

<u>Remarque</u> : Pour un matériau isotrope non endommagé on a:

$$E(\mathbf{n}) = E_0 \qquad \text{et} \qquad \gamma(\mathbf{n}) = \frac{E_0}{(1+2\nu_0)}$$

où ν_0 désigne le coefficient de Poisson initial.

Le tenseur de souplesse (d'ordre 4) est l'inverse du tenseur de rigidité (tenseur de HOOKE). En notant **K** ce tenseur, les relations entre **K** et les modules E et γ sont :

$$\frac{1}{E(\mathbf{n})} = n_i n_j \, \mathbf{K}_{ijkl} \, n_k n_l = \mathbf{n}.(\mathbf{n}.\mathbf{K}.\mathbf{n}).\mathbf{n}$$

$$\frac{1}{\gamma(\mathbf{n})} = (n_i \, \mathbf{K}_{ijkl} \, n_j)(n_k \, \mathbf{K}_{ijkl} \, n_l) = \mathrm{Tr}(\mathbf{n}.\mathbf{K}.\mathbf{n}), \qquad \text{(II.21)}.$$

Le résultat fondamental de la théorie décrite par LADEVÈZE est le théorème suivant :

Théorème : Les fonctions $\mathbf{n} \longrightarrow E(\mathbf{n})$, $\mathbf{n} \longrightarrow \gamma(\mathbf{n})$ définissent complètement le tenseur de HOOKE du matériau.

Le tenseur de souplesse est obtenu à partir de la formulation variationnelle suivante (Ladevèze, 1993) :

Trouver le tenseur $\mathbf{K}$ tels que, $\forall\ \mathbf{K}^*$

$$\int_S [\mathbf{n}.(\mathbf{n}.\mathbf{K}.\mathbf{n}).\mathbf{n}][\mathbf{n}.(\mathbf{n}.\mathbf{K}^*.\mathbf{n}).\mathbf{n}]\ dS = \int_S \frac{1}{E(\mathbf{n})}[\mathbf{n}.(\mathbf{n}.\mathbf{K}^*.\mathbf{n}).\mathbf{n}]\ dS,$$

$$\text{et} \quad \int_S [Tr(\mathbf{n}.\mathbf{K}.\mathbf{n})][Tr(\mathbf{n}.\mathbf{K}^*.\mathbf{n})]\ dS = \int_S \frac{1}{\gamma(\mathbf{n})}[Tr(\mathbf{n}.\mathbf{K}^*.\mathbf{n})]\ dS, \qquad \text{(II.22)},$$

où S désigne la sphère unité.

Les fonctions d'endommagement sont définies par :

$$d(\mathbf{n}) = \frac{E_0(\mathbf{n}) - E(\mathbf{n})}{E_0(\mathbf{n})} \qquad \text{et} \qquad \delta(\mathbf{n}) = \frac{\gamma_0(\mathbf{n}) - \gamma(\mathbf{n})}{\gamma_0(\mathbf{n})} \qquad \text{(II.23)}.$$

Remarque : Si ces deux fonctions sont indépendantes de $\mathbf{n}$ et si en plus nous prenons $d = \delta$, nous obtenons la théorie classique d'endommagement isotrope telle qu'elle a été définie en section §II.4.1.

Il s'en suit donc que l'état d'endommagement dépend des deux fonctions suivantes :

$$\mathbf{n} \longrightarrow d(\mathbf{n}) \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \longrightarrow \delta(\mathbf{n}) \qquad \text{(II.24)}.$$

Les forces thermodynamiques associées à ces deux variables d'endommagement sont définies par :

$$Y_d = \frac{\partial \Psi}{\partial d} \qquad \text{et} \qquad Y_\delta = \frac{\partial \Psi}{\partial \delta} \qquad \text{(II.25)},$$

où Ψ est l'énergie libre du matériau qui dépend des deux variables d'endommagement et qui cette fois-ci est donnée en fonction des contraintes, $\Psi = \Psi(\sigma, d, \delta)$.

Cette théorie d'endommagement a servi de base au développement de modèles destinés à être appliqués pour différents matériaux. Citons notamment la modélisation des

matériaux composites céramiques (Ladevèze *et al.*, 1993; Allix *et al.*, 1993) et la modélisation du béton (Mazars et Pijaudier-Cabot, 1989 ; Ramtani, 1990).

II.4.3 Effet de fermeture des microfissures : le phénomène unilatéral :

Les effets de fermeture des microfissures (phénomène unilatéral) sont présents lorsque le matériau (béton) est soumis à des chargements alternés (passage d'une traction à une compression); la figure II.12 illustre une schématisation de ce phénomène. Ce type de comportement ne peut pas être décrit par les modèles précédents.

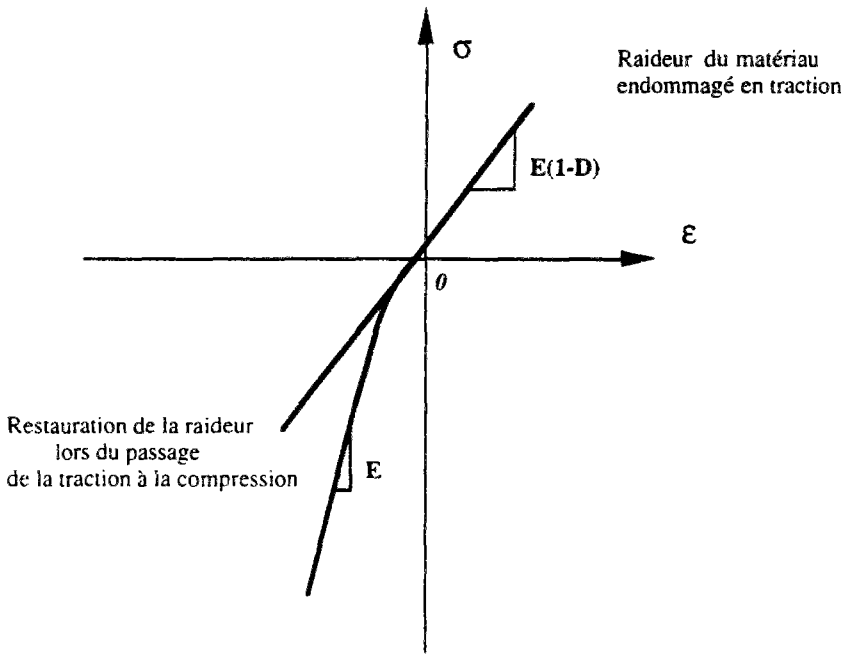


Fig. II.12 - Schématisation du phénomène unilatéral. Sollicitation en compression uniaxiale après endommagement en traction uniaxiale.

Dans le cadre d'une modélisation scalaire de l'endommagement, une solution pour décrire ce phénomène est d'introduire deux variables d'endommagement au lieu d'une seule afin de séparer les effets mécaniques d'ouverture et de fermeture des microfissures.

Dans le modèle développé dans (La Borderie, 1991), l'énergie libre exprimée en fonction des contraintes est donnée par :

$$\Psi = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{E_0(1-D_t)}\langle\sigma\rangle^+_{ij}\langle\sigma\rangle^+_{ij} + \frac{1}{E_0(1-D_c)}\langle\sigma\rangle^-_{ij}\langle\sigma\rangle^-_{ij} + \frac{\nu_0}{E_0}(\sigma_{ij}\sigma_{ij} + \sigma^2_{kk})\right] + \frac{\beta_1 D_t}{E_0(1-D_t)} f(\sigma) + \frac{\beta_2 D_c}{E_0(1-D_c)}\sigma_{kk}, \qquad \text{(II.26).}$$

Une séparation du tenseur des contraintes est introduite où $\langle\sigma\rangle^+$ et $\langle\sigma\rangle^-$ sont les parties positive et négative du tenseur des contraintes. La variable D_t représente l'effet mécanique des microfissures quand le matériau est soumis à une traction et D_c représente l'effet mécanique des microfissures quand le matériau est soumis à une compression. Dans ce modèle, les déformations anélastiques dues à l'endommagement sont également représentées.

La relation contrainte-déformation est alors donnée par :

$$\varepsilon_{ij}= \frac{1}{E_0(1-D_t)}\langle\sigma\rangle^+_{ij} + \frac{1}{E_0(1-D_c)}\langle\sigma\rangle^-_{ij} + \frac{\nu_0}{E_0}(\sigma_{ij}+\sigma_{kk}\delta_{ij}) + \frac{\beta_1 D_t}{E_0(1-D_t)}\frac{f(\sigma)}{\partial\sigma_{ij}} + \frac{\beta_2 D_c}{E_0(1-D_c)}\delta_{ij} \qquad \text{(II.27).}$$

Les équations d'évolution de l'endommagement comprennent deux fonctions seuil. Ces fonctions seuil sont écrites dans le même style que la fonction utilisée pour le modèle avec une seul variable d'endommagement (éqs. (II.14)).

La figure (II.13) montre la réponse de ce modèle pour un chargement uniaxial cyclique avec changement de signe de chargement (Pijaudier-Cabot *et al.*, 1994).

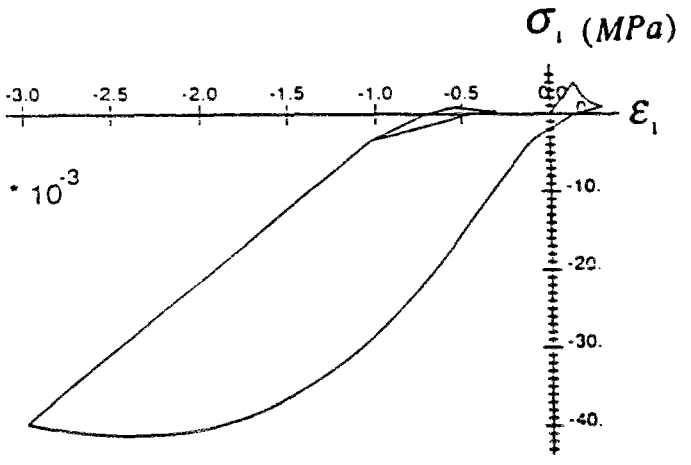


Fig. II.13 - Modèle à deux variables d'endommagement avec fermeture des microfissures - courbe contrainte-déformation uniaxiale.

Citons par ailleurs l'existence d'autres modèles décrivant le phénomène unilatéral. Certains utilisent des variables d'endommagement tensorielles, comme dans (Ramtani,

1990) et d'autres sont conçus en vue de leur application pour la modélisation de certains composites qui, comme le béton, présentent ce caractère unilatéral (Ladevèze, 1983 ; Ladevèze *et al.*, 1993).

II.4.4 Commentaires :

Nous venons de voir, à travers ces brèves descriptions, l'étendue du cadre de la modélisation en mécanique continue de l'endommagement qui offre un large champ d'action et un outil commode pour décrire la dégradation et l'altération des matériaux endommageables (plus particulièrement du béton).

Néanmoins, les modèles d'endommagement sont confrontés à des problèmes de mise en œuvre numérique : forte dépendance en le maillage qui conduit à des résultats difficilement exploitables. Cette dépendance est liée à la localisation et à la bifurcation qui sont dues au comportement adoucissant. Le béton présente un tel comportement.

Dans la section suivante, un bref aperçu des études sur la localisation est entamé. Ceci afin de mieux situer les difficultés de mise en oeuvre des modèles d'endommagement.

II.5 Etude des problèmes de localisation de l'endommagement :

En général, le caractère adoucissant, commun aux matériaux à comportement indépendant du temps, élastoplastique, élastoplastique endommageable et élastique endommageable, favorise les instabilités dues à la localisation des déformations (Rudnicki et Rice, 1975; Rice et Rudnicki, 1980, Lasry et Belytchko, 1988). En effet, théoriquement, les équations aux dérivées partielles gouvernant l'évolution du matériau changent de nature. En statique, le problème d'équilibre est caractérisé par une perte d'ellipticité conduisant à l'existence d'une infinité de solutions (Benallal, Billardon et Geymonat, 1988; Simo, 1988). Tandis qu'en dynamique, le problème décrivant le mouvement passe d'un problème hyperbolique (avant adoucissement) à un problème parabolique ou elliptique (en phase d'adoucissement). Dans tous ces cas de figures, il s'ensuit que le problème décrivant le matériau devient mal posé.

En suivant les études de RICE et RUDNICKI (1980) et plus récemment (Benallal *et al.*, 1988; Billardon, 1989), l'étude de la localisation s'opère de la façon suivante :

Soit un matériau défini par son énergie libre $\Psi = \Psi(\varepsilon,\alpha)$ dépendant de la petite déformation ε et d'un ensemble de variables internes α. Les relations de comportement sont définies par :

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \qquad \text{et} \qquad A = \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \qquad \text{(II.28)},$$

où A est l'ensemble des forces thermodynamiques associées aux variables α. Et soit le domaine de reversibilité tel que $f(A;\alpha) \leq 0$. En général la relation de comportement en vitesse s'écrit sous la forme :

$$\dot{\sigma} = \mathbf{L}(\varepsilon,\alpha) : \dot{\varepsilon} \qquad \text{(II.29)},$$

$$\text{avec} \quad \mathbf{L} = \begin{cases} \mathbf{E} & \text{si } f < 0 \text{ ou } f = 0 \text{ et } \dot{f} < 0 \\ \mathbf{H} = \mathbf{E} - \mathbf{M}(\varepsilon,\alpha) & \text{si } f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0 \end{cases}$$

L'expression du module tangent **L** dépend du comportement à décrire. Il peut être adapté au comportement élastique-endommageable (Billardon, 1989; Desoyer et Cormery, 1994), au comportement élastoplastique-endommageable (Doghri, 1989).

Considérons un élément de volume soumis à un chargement uniforme en force ou en déplacement sur ses frontières. Jusqu'à un certain seuil de chargement, l'élément de volume se déforme de façon homogène. Au delà de ce seuil, il apparaît une bifurcation du champ de vitesse $\dot{\varepsilon}$ à travers une surface de discontinuité (appelée bande de localisation) qui conduit à une localisation des déformations et donc à une localisation de l'endommagement.

En considérant le problème en vitesse précédent, les champs de vitesse de déplacements $\dot{\mathbf{u}}$ et de taux de contraintes $\dot{\sigma}$ sont continus à travers la surface de discontinuité de normale notée **n**. Avec la notation $[x]$ pour désigner la discontinuité (ou saut) d'une quantité x à travers une surface, ceci peut s'écrire :

$$[\dot{\mathbf{u}}] = \mathbf{0} \qquad \text{et} \qquad [\dot{\sigma}.\mathbf{n}] = \mathbf{0}, \qquad \text{(II.30)},$$

tandis que le saut de la vitesse de déformation le long de la surface s'écrit sous la forme :

$$[\dot{\varepsilon}] = \frac{1}{2}(\mathbf{g}\otimes\mathbf{n} + \mathbf{n}\otimes\mathbf{g}) \qquad \text{(II.31)},$$

où g désigne l'amplitude inconnue du saut de la vitesse de déformation (Rice et Rudnicki, 1980). On a $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ lorsqu'il n'existe pas de discontinuité.

En admettant qu'il y a bifurcation continue, c'est à dire qu'il y a en même temps un chargement (endommageable) croissant à l'intérieur et à l'extérieur de la bande de localisation, le module tangent dans la relation de comportement en vitesse (II.29) sera pris

égal à **H**. Ainsi, la condition de localisation s'écrit (en combinant (II.29), $(II.30)_2$ et (II.31)) :

$$(\mathbf{n}.\mathbf{H}.\mathbf{n}).\mathbf{g} = 0, \qquad (II.32),$$

autrement dit, une condition suffisante pour l'existence d'une surface de discontinuité est donnée par la singularité de la matrice (**n**.**H**.**n**) pour une direction **n** en un point de la structure. Cette condition s'écrit donc :

$$\det(\mathbf{n}.\mathbf{H}.\mathbf{n}) = 0, \qquad (II.33).$$

Notons qu'il a été récemment proposé une méthode géométrique afin de résoudre les conditions de localisation pour les solides dont le comportement général en vitesse est donné par la forme (II.29) de manière exacte ainsi que les orientations des plans de localisation (Benallal et Comi, 1993 et 1994).

Cette condition de localisation est toujours présente dans les modèles représentant des matériaux à comportement adoucissant et indépendant du temps. Elle est en outre atteinte lorsque pendant l'évolution, le module tangent cesse d'être positif (passage en phase adoucissante).

Citons que la condition de localisation (II.33) a été adoptée comme critère de rupture locale dans (Doghri, 1989; Billardon et Doghri, 1989), où il a été montré aussi que ce critère coïncide avec la perte d'ellipticité des équations d'équilibre du problème en vitesse. Un élément fini spécial permettant de tenir compte de la discontinuité a été proposé.

II.6 Formulations non-locales en mécanique de l'endommagement :

Afin de surmonter les difficultés liées au comportement adoucissant, des recherches ont mené à un enrichissement des relations de comportement. Cet enrichissement a été effectué soit en introduisant une longueur interne (ou longueur caractéristique), soit en introduisant les gradients des déformations plastiques dans le cas des modèles plastiques (Lasry et Belytchko, 1988; Shreyer, 1990; Sluys, De Borst et Mühlhaus, 1993). Citons aussi les modèles visqueux (Dragon et Mroz, 1979; Dragon, 1980; Needleman, 1988; Point, 1988-1989; Sluys et De Borst, 1992; Dragon *et al.*, 1994) qui, tel qu'il a été démontré dans (Simo, 1988), correspondent à une forme de régularisation non-locale de la fonction de dissipation.

En mécanique de l'endommagement, nous nous proposons de décrire la formulation de la théorie non-locale de l'endommagement introduite par PIJAUDIER-CABOT ET BAZANT (1987) et appliquée par la suite à d'autres modèles déjà existants.

Une approche non-locale consiste à considérer que, dans les relations de comportement, les quantités gouvernant le mouvement et l'évolution dans un solide dépendent de la moyenne de leurs quantités duales sur un certain volume représentatif du matériau centré au point matériel considéré. Ainsi, dans la théorie non-locale de l'endommagement, l'idée est d'utiliser le concept non-local uniquement pour les variables qui contrôlent l'endommagement et non pour les contraintes et les déformations dans les relations de comportement.

Cette formulation non-locale a par ailleurs été adaptée au modèle de MAZARS décrit dans la section §II.4.1 dans (Saouridis, 1988).

Dans la formulation non-locale adoptée (Saouridis, 1988; Saouridis et Mazars, 1988), la fonction d'évolution de l'endommagement (II.16) a été remplacée par :

$$D = f(\tilde{\varepsilon}) \neq 0 \quad \text{si } \tilde{\varepsilon} > \varepsilon_{D0}, \qquad \text{(II.34)},$$

où la fonction f est identique à celle définissant l'endommagement dans l'équation (II.19). La quantité $\tilde{\varepsilon}$ qui est une déformation équivalente moyenne est définie par :

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\int_\Omega g\tilde{\varepsilon}\, d\Omega}{\int_\Omega g\, d\Omega}, \qquad \text{(II.35)},$$

où g est une fonction de Gauss définie par :

$$g(x) = \exp\left[\left(\frac{-2x}{l_D}\right)^2\right] \quad \text{si } x \leq 2l_D,$$
$$g(x) = 0 \quad \text{si } x > 2l_D, \qquad \text{(II.36)}.$$

L'échelle du volume représentatif est limitée par $2l_D$, où l_D est la longueur caractéristique qui est approximée à $3d_a$, où d_a est le diamètre maximum de l'agrégat dans le béton.

Le comportement de ce modèle face à la sensibilité au maillage est illustré par l'exemple de la figure II.14. Cet exemple traite la simulation d'un essai d'ouverture d'une entaille sur une plaque en béton de type CT. La discrétisation a été effectuée à l'aide de trois maillages différents. Les zones d'endommagement données par les deux calculs des deux maillages les plus fins sont présentées. Celles-ci correspondent à une même situation de chargement.

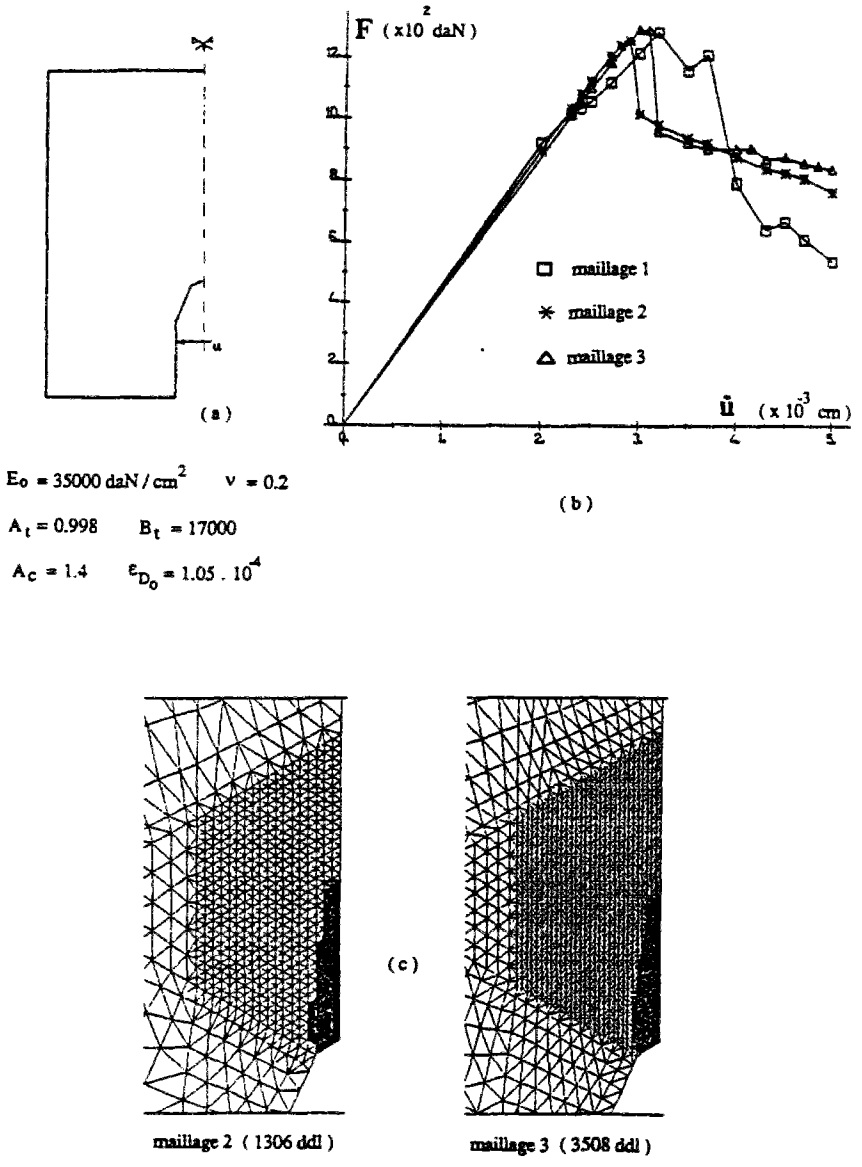


Fig. II.14 - Calculs de la plaque C.T par l'approche non-locale.
Géométrie, maillages et résultats des calculs (Saouridis, 1988).

Nous pouvons constater que, pour les maillages fins, les zones endommagées sont insensibles au maillage.

Toujours dans le cadre de la modélisation du comportement du béton, le modèle microplan (décrit dans la section §II.3) a aussi été adapté en formulation non-locale. Cette formulation a été introduite dans (Bazant et Ozbolt, 1990) où le concept microplan a été couplé au concept non-local. Comme dans (Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987), seules les variables gouvernant le comportement adoucissant ont été reformulées en écriture non-locale.

D'autres modèles utilisant une formulation non-locale ont été développés de façon similaire que le modèle précédent. Citons par exemple les travaux illustrés dans (Saanouni, Chaboche et Lesne, 1988) et (Murakami, Kendall et Valanis, 1993).

Enfin, signalons que les modèles non-locaux adaptés à la modélisation du béton, ont un intérêt d'autant plus grand qu'en génie civil, ils contribuent à une bonne description de l'effet d'échelle de structures. Ceci fera l'objet de la section suivante.

II.7 Modèles non-locaux et effet d'échelle :

Une des caractéristiques fondamentales des modèles non-locaux est que leur application au béton permet de rendre compte de la notion bien connue en Génie Civil d'effet d'échelle de structures.

Cette propriété a en effet été qualitativement et, dans une moindre mesure, quantitativement décrite par les modèles non-locaux (Saouridis, 1988 ; Mazars, Pijaudier-Cabot et Saouridis, 1991 ; Bazant et Ozbolt, 1990).

Pour ces modèles, il a été montré que lors de simulations d'essais sur des éprouvettes en béton (notament en flexion) de géométries similaires avec différents rapports d'homothéties géométriques, la contrainte nominale décroît lorsque la taille de l'éprouvette augmente. Ceci en accord avec les resultats expérimentaux.

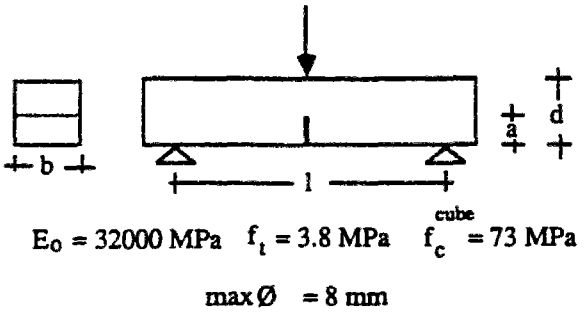
Ci-dessous, nous présentons deux exemples d'applications vis-à-vis de l'effet d'échelle avec confrontation aux resultats des essais correspondants.

II.7.1 Modèle d'endommagement non-local (Saouridis, 1988) :

L'exemple de simulation consiste en une flexion trois points sur trois poutres entaillées de dimensions différentes. Les caractéristiques géométriques de ces poutres sont présentées sur la figure II.15.

Les calculs ont été effectués en déformation plane. Un seul jeu de données concernant les caractéristiques du matériau vis-à-vis du modèle a été utilisé lors des trois calculs.

Sur la figure II.16 est présentée la variation de la contrainte nominale en fonction d'une dimension caractéristique des poutres (la profondeur de l'entaille). Notons que la contrainte nominale est définie dans cet exemple à partir de la charge maximale supportée par une poutre (pic de la courbe charge-déplacement) sans tenir compte de l'entaille et en supposant que le comportement est élastique linéaire.



	l	b	d
P	80	10	10
M	113	10	20
G	138	10	30

a / d = 0.5

Fig. II.15 - Géométries des éprouvettes et caractéristiques mécaniques du béton lors des expériences (Saouridis et Mazars, 1988).

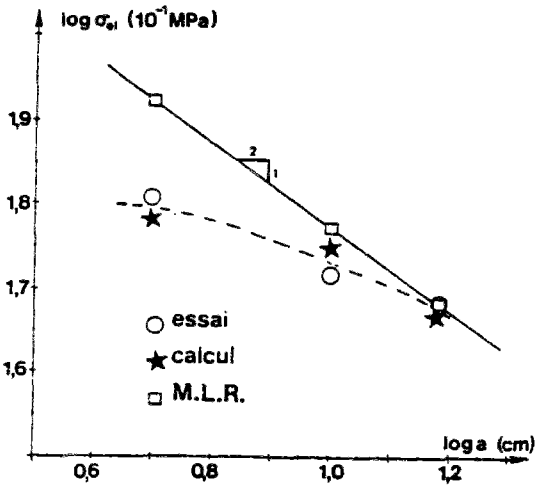


Fig. II.16 - Evolution de la contrainte nominale avec la taille de l'éprouvette (Saouridis, 1988).

On observe qu'il y a la même tendance que celle résultant des essais expérimentaux.

II.7.2 Modèle microplan non-local (Bazant et Ozbolt, 1990) :

L'exemple mettant en évidence l'effet d'echelle en utilisant ce modèle que nous présentons est de même nature que le précédent. Trois poutres avec entailles sont soumises à une flexion trois points. Ces poutres sont de géométries similaires de rapports d'homothétie 1, 2 et 4. Les dimensions ainsi que la loi de comportement utilisées pour les calculs sont présentées sur la figure (II.17).

La profondeur de l'entaille était dans les trois cas égale au sixième de l'épaisseur de la poutre. Pour la plus petite poutre cette épaisseur est d = 7.62 cm (fig. II.17).

Dans cet exemple, la contrainte nominale est définie à chaque fois par $\sigma_N = P/(bd\delta)^2$ (avec b = 3.81 cm, la profondeur de la plus petite poutre et δ est le rapport d'homothétie géométrique qui prend les valeurs 1, 2 et 4), P étant la charge maximale supportée par chaque poutre (les résultats des courbes charge-déplacement ne sont pas fournies).

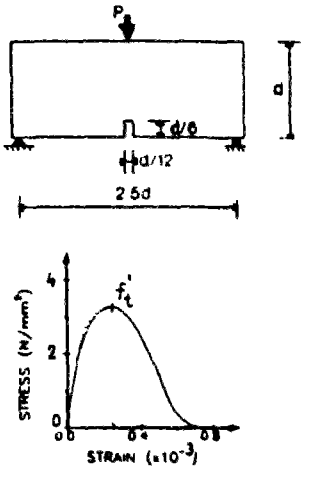


Fig. II.17 - Flexion trois points Géométries
et loi de comportement du matériau (Bazant et Ozbolt, 1990).

Les résultats numériques de la variation de la contrainte nominale avec la taille de la poutre sont présentés sur la figure II.18. Ils sont superposés aux résultats expérimentaux.

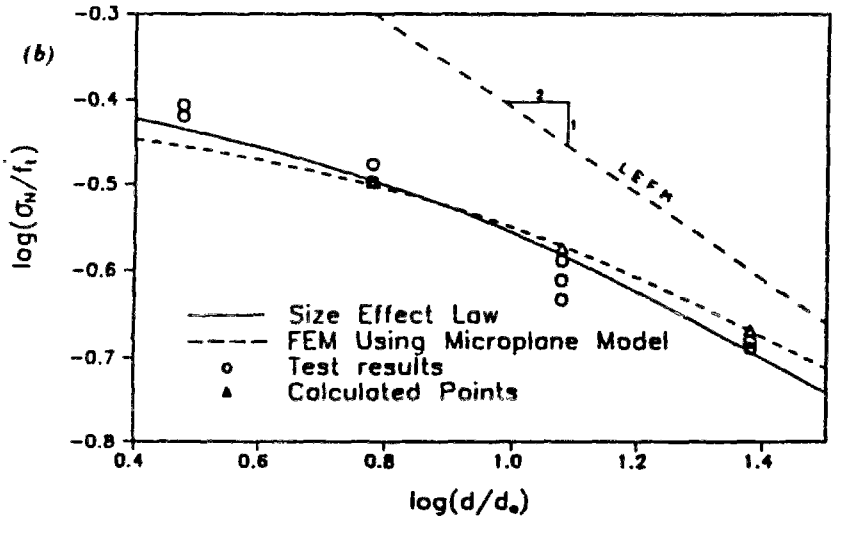


Fig. II.18 - Variation de la contrainte nominale avec la taille de l'éprouvette.
Superposition avec les résultats expérimentaux (Bazant et Ozbolt, 1990).

II.8 Conclusions :

Nous nous sommes efforcé tout au long de ce chapitre de résumer les principaux résultats concernant la modélisation de l'endommagement, plus particulièrement adaptés au béton, ceci avec un souci de brièveté et de clarté. Nous nous sommes plus spécialement intéressés au cadre de la mécanique de l'endommagement qui sera le cadre principal de ce mémoire.

Nous avons vu comment les difficultés liées au comportement adoucissant pouvaient être surmontées en utilisant le concept non-local de l'endommagement. Vis-à-vis de l'effet d'échelle, les applications numériques montrent que la contrainte nominale décroît lorsque les dimensions d'une structure augmentent.

Dans le chapitre suivant, nous allons développer un cadre nouveau de formulation mécanique de l'endommagement. De cette formulation, nous pourrons développer des modèles et nous nous efforcerons de mettre en évidence leurs différentes caractéristiques à travers des études théoriques et numériques.

CHAPITRE III

ENDOMMAGEMENT, GRADIENT DE L'ENDOMMAGEMENT ET PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES.

III.1 Introduction :

Dans le contexte de la mécanique de l'endommagement, nous allons décrire un cadre théorique nouveau dans lequel nous pourrons formuler une théorie du premier gradient en endommagement.

L'idée de base est due à FREMOND (1987) qui a introduit la puissance des mouvements microscopiques sur les frontières de solides en contact dans le principe des puissances virtuelles afin de modéliser le contact avec adhérences des solides. Nous trouvons des applications de cette modélisation dans (Point, 1988-1989 ; Truong Dinh Tien, 1990). Ce même concept est dans le présent mémoire adapté au cadre de la modélisation de l'endommagement des solides (Frémond et Nedjar, 1993a-1994a,b et c).

L'endommagement est décrit par un champ scalaire, cette fois noté $\beta(x,t)$, dépendant de l'espace et du temps. Cette variable est mesurée comme étant le rapport entre le module d'élasticité du matériau endommagé et le module d'Young initial. Elle décroît de $\beta = 1$ pour le matériau sain à $\beta = 0$ pour le matériau complètement endommagé. Comme pour les modèles avec endommagement scalaire (noté D) décrits au chapitre II, elle traduit macroscopiquement la perte de raideur du matériau. La relation entre β et D peut être donnée par $\beta = 1 - D$.

A l'intérieur d'un solide existent des mouvements microscopiques qui provoquent l'endommagement. L'idée est que la puissance de ces mouvements doit être prise en compte dans une théorie de l'endommagement. Ainsi, comme dans (Frémond, 1987), nous décidons de modifier l'expression de la puissance des efforts intérieurs P_i . Nous considérons que cette puissance dépend aussi de la vitesse d'endommagement et de son gradient qui sont clairement reliés aux mouvements microscopiques. Le gradient permet de rendre compte de l'influence de l'endommagement en un point matériel sur son voisinage.

Le principe des puissances virtuelles fondé sur ce choix conduit à un nouvel ensemble d'équations du mouvement.

La thermodynamique des milieux continus (Germain, 1983 ; Lemaitre et Chaboche, 1990) donne des lois de comportement nécessaires à partir des choix convenables d'une énergie libre Ψ et d'un pseudo-potentiel de dissipation Φ.

Dans ce chapitre, nous allons détailler les idées et les conséquences de ces choix pour fonder le cadre théorique au premier gradient de l'endommagement.

III.2 Principe des puissances virtuelles et équations du mouvement :

Considérons un solide occupant un domaine Ω et étudions son endommagement. Nous voulons décrire au niveau macroscopique les effets des microfissures et microvides qui entraînent une baisse de la raideur du matériau. Soit $\beta(\mathbf{x},t)$ le champ scalaire mesurant macroscopiquement l'endommagement et dépendant de l'espace et du temps. Cette quantité décroît de $\beta = 1$ pour le matériau sain à $\beta = 0$ pour le matériau complètement endommagé.

L'idée de base de la théorie est de modifier la puissance des efforts intérieurs (Frémond et Nedjar, 1993a). A l'intérieur du solide, il existe des mouvements microscopiques qui provoquent l'endommagement. Nous pensons que la puissance de ces mouvements doit être prise en compte dans la puissances des efforts intérieurs. Par ailleurs, nous voulons rester à une échelle d'étude macroscopique, celle de l'ingénieur.

Ainsi, nous choisissons une expression de la puissance des efforts intérieurs dépendant de la vitesse d'endommagement $\frac{d\beta}{dt}$ ainsi que du gradient de la vitesse d'endommagement $\mathbf{grad}\frac{d\beta}{dt}$, en plus du taux de déformation $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u}$ est le vecteur vitesse macroscopique). Les deux premières quantités son clairement reliées aux mouvements microscopiques. Le gradient de l'endommagement est introduit pour rendre compte de l'influence de l'endommagement en un point matériel sur son voisinage.

Le principe des puissances virtuelles donne lieu à un nouvel ensemble d'équations qui décrivent l'évolution de la quantité d'endommagement β.

III.2.1 Puissance des efforts intérieurs :

Nous choisissons la puissance des efforts intérieurs P_i qui prend en compte les mouvements microscopiques dans un domaine $\mathcal{D}$ intérieur au solide Ω comme suit :

$$P_i(\mathcal{D},\mathbf{u},\frac{d\beta}{dt}) = -\int_{\mathcal{D}} \sigma:\mathbf{D}(\mathbf{u})\, d\mathcal{D} - \int_{\mathcal{D}} (B\frac{d\beta}{dt} + \mathbf{H}.\mathbf{grad}\frac{d\beta}{dt})\, d\mathcal{D}, \qquad \text{(III.1)},$$

où σ désigne le tenseur des contraintes. $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ est le tenseur du taux de déformation ayant pour composantes $D_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$, $i,j \in \{1,2,3\}$, $\mathbf{u}$ étant le vecteur vitesse macroscopique.

Deux termes nouveaux apparaissent, B, le travail d'endommagement interne, et $\mathbf{H}$, le vecteur flux de travail d'endommagement interne.

L'axiome des puissances virtuelles (Germain, 1982) :

"La puissance des efforts intérieurs associée à tout mouvement rigidifiant est nulle",

est vérifié. En effet, pour tout mouvement rigidifiant, il n'existe pas de mouvements microscopiques, puisque la distance relative des points matériels reste constante ($\frac{d\beta}{dt}$ est alors nul). Ainsi $P_i = 0$ pour un tel mouvement.

III.2.2 Puissance des efforts extérieurs :

Avec le choix fait pour la puissance des efforts intérieurs, nous choisissons une forme générale de la puissance des efforts extérieurs P_e comme suit :

$$P_e(\mathcal{D}, \mathbf{u}, \frac{d\beta}{dt}) = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{f}.\mathbf{u}\, d\mathcal{D} + \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{F}.\mathbf{u}\, d\Gamma + \int_{\mathcal{D}} A\frac{d\beta}{dt}\, d\mathcal{D} + \int_{\partial\mathcal{D}} b\frac{d\beta}{dt}\, d\Gamma, \quad \text{(III.2)},$$

où $\mathbf{f}$ est le vecteur des densités volumiques de forces extérieures, $\mathbf{F}$ est le vecteur des densités surfaciques de forces extérieures sur la frontière $\partial\mathcal{D}$. Les deux quantités non classiques A et b sont respectivement des sources extérieures de travail d'endommagement volumique et surfacique qui ne sont pas dues aux effets mécaniques.

Une source extérieure de travail d'endommagement A ou b est des actions chimiques (ou dans certains cas électriques) qui rompent les liens intérieurs du matériau sans déformations macroscopiques. On peut penser, pour le cas particulier du béton, aux alcali-réactions qui endommagent ce matériau. La quantité A peut être aussi interprétée comme une quantité de travail fourni depuis le début de la vie de la structure sans déformation : par exemple des actions chimiques.

En ce qui concerne l'étude de l'endommagement tout au long de ce mémoire, ces deux termes (A et b) seront toujours nuls. L'expression de la puissance des efforts extérieurs P_e prendra donc sa forme usuelle (Germain, 1983; Lemaitre et Chaboche,1990).

III.2.3 Puissance des quantités d'accélération :

La puissance des quantités d'accélération P_a peut comprendre un terme en accélération de l'endommagement, ainsi dans un cadre général, nous pouvons prendre cette puissance comme ayant la forme suivante :

$$P_a(\mathcal{D},\mathbf{u},\frac{d\beta}{dt}) = \int_{\mathcal{D}} \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}.\mathbf{u}\, d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \underline{\rho}\frac{d^2\beta}{dt^2}\frac{d\beta}{dt}\, d\mathcal{D}, \qquad \text{(III.3)},$$

où $\mathbf{u}$ est la vitesse macroscopique, ρ la masse volumique. La quantité $\underline{\rho}\frac{d^2\underline{\beta}}{dt^2}$ correspond aux forces d'accélérations des liaisons microscopiques, $\underline{\rho}$ est proportionnel à leur masse.

Nous négligeons le deuxième terme à droite de l'équation (III.3) car nous avons en vue des évolutions lentes. Nous retrouvons donc l'expression usuelle de la puissance des quantités d'accélération (Germain, 1983; Lemaitre et Chaboche,1990).

Dans la description de l'endommagement des matériaux qui va suivre, nous ne nous intéresserons qu'aux évolutions quasi-statiques. Ainsi, la puissance des quantités d'accélérations sera nulle.

III.2.4 Equations du mouvement :

Le Principe des Puissances Virtuelles (Germain, 1983; Lemaitre et Chaboche,1990) indique que pour tout milieu matériel dans un référentiel absolu, à chaque instant et pour tout mouvement virtuel, on a égalité entre la puissance des quantités d'accélération P_a et la somme des puissances des efforts intérieurs P_i et des efforts extérieurs P_e.

En évolution quasi statique, le principe des puissances virtuelles s'écrit donc :

$$\forall \mathcal{D} \subset \Omega,\ \forall\ \mathbf{v},\ \forall\ \gamma, \qquad P_i(\mathcal{D},\mathbf{v},\gamma) + P_e(\mathcal{D},\mathbf{v},\gamma) = 0, \qquad \text{(III.4)},$$

où $\mathbf{v}$ et γ sont des vitesses virtuelles.

Avec les choix faits pour les puissances dans (III.1) et (III.2), en écriture locale, le principe des puissances virtuelles conduit à deux systèmes d'équations :

$$\text{div}\,\sigma + \mathbf{f} = 0, \qquad \text{dans } \mathcal{D}, \qquad \sigma.\mathbf{n} = \mathbf{F}, \qquad \text{sur } \partial\mathcal{D}, \qquad \text{(III.5)},$$

$$\text{div}\,\mathbf{H} - B + A = 0, \qquad \text{dans } \mathcal{D}, \qquad \mathbf{H}.\mathbf{n} = b, \qquad \text{sur } \partial\mathcal{D}, \qquad \text{(III.6)},$$

où **n** est la normale extérieure à la frontière $\partial\mathcal{D}$.

Le système (III.6) est nouveau et non classique. Il décrit l'évolution de l'endommagement.

III.3 Principes de la Thermodynamique des milieux continus :

Suite au choix fait dans le principe des puissances virtuelles, nous abordons les principes de la thermodynamique des milieux continus afin d'établir des lois de comportements qui vérifient ces principes.

III.3.1 Premier principe :

Il concerne la conservation de l'énergie. Considérons un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ intérieur à un milieu matériel . Le premier principe de la thermodynamique des milieux continus s'exprime par :

$$\frac{d}{dt}(E + K) = P_e + Q, \qquad \forall\Omega, \qquad \text{(III.7)},$$

où $\frac{d}{dt}$ désigne la dérivée particulaire.

Dans cette expression, les différents termes sont définis comme suit :

- E est l'énergie interne avec $E = \int_\Omega \rho e \, d\Omega$, où e est l'énergie interne spécifique,
- K est l'énergie cinétique avec $K = \frac{1}{2} \int_\Omega \rho \; \mathbf{v}.\mathbf{v} \; d\Omega$,
- Q est le taux de chaleur reçue par le domaine Ω avec $Q = \int_\Omega r \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q}.\mathbf{n} \, d\Omega$,

où r est une densité volumique de production interne de chaleur à distance et **q** est le vecteur courant de chaleur.

En écrivant que $P_e = P_a - P_i$ et en remarquant que $P_a = \frac{dK}{dt}$, l'équation (III.7) peut s'écrire :

$$\frac{dE}{dt} = -P_i + Q, \qquad \forall\Omega, \qquad \text{(III.8).}$$

En remplaçant les différents termes par leurs expressions dans (III.8), et en utilisant la formule de la divergence, l'écriture locale en hypothèse des petites perturbations du premier principe est :

$$\rho\frac{de}{dt} = \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} + B\frac{d\beta}{dt} + \mathbf{H} \,.\, \mathbf{grad}\,\frac{d\beta}{dt} + r - \mathrm{div}\mathbf{q}, \qquad \text{(III.9).}$$

III.3.2 <u>Second principe</u> :

Il postule que le taux de production d'entropie est toujours supérieur ou égal au taux de chaleur reçue divisé par la température (Lemaitre et Chaboche, 1990) :

$$\int_\Omega \left(\rho\frac{ds}{dt} + \mathrm{div}\,\frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{r}{T} \right) d\Omega \geq 0, \quad \forall\Omega, \qquad \text{(III.10),}$$

où s est la densité d'entropie spécifique, T est la température.

L'inégalité fondamentale résultant du second et du premier principe s'obtient en remplaçant la densité volumique de production de chaleur r par son expression déduite du premier principe (éq. (III.9)). Cette inégalité s'exprime dans la forme locale comme suit :

$$\sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} + B\frac{d\beta}{dt} + \mathbf{H} \,.\, \mathbf{grad}\,\frac{d\beta}{dt} - \rho\left(\frac{de}{dt} - T\frac{ds}{dt}\right) - \mathbf{q}\cdot\frac{\mathbf{grad}T}{T} \geq 0, \qquad \text{(III.11).}$$

L'inégalité de Clausius-Duhem s'obtient en introduisant l'énergie libre Ψ volumique définie par :

$$\Psi = \rho(e - Ts), \qquad \text{(III.12).}$$

En remplaçant cette énergie dans l'inégalité fondamentale (III.11), le second principe sous la forme de cette inégalité de Clausius-Duhem est, dans les processus isothermes que nous considérons dans notre étude :

$$\frac{d\Psi}{dt} \leq \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} + B\frac{d\beta}{dt} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{grad}\frac{d\beta}{dt} , \qquad \text{(III.13).}$$

III.4 Lois de comportement :

La valeur de la quantité d'endommagement β est comprise entre 0 et 1 :

$$0 \leq \beta \leq 1, \qquad \text{(III.14).}$$

Nous pensons que la liaison interne (III.14) sur la quantité d'endommagement doit être prise en compte par une fonction qui décrit les propriétés physiques du matériau. Etant une propriété physique d'une variable d'état, elle devrait être prise en compte par des fonctions qui decrivent toutes les propriétés physiques, aussi bien dans l'énergie Ψ ou dans l'expression de la dissipation qui peut être définie par un pseudo-potentiel de dissipation Φ. Nous choisissons l'énergie libre car celle-ci décrit les propriétés relatives à l'état du matériau alors que la dissipation décrit les propriétés relatives aux vitesses.

Pour des raisons de simplicité nous faisons l'hypothèse des petites perturbations et notons ε les petites déformations. Nous choisissons :

$$\Psi(\varepsilon,\beta,\mathbf{grad}\beta) = \Psi_1(\varepsilon,\beta,\mathbf{grad}\beta) + I(\beta), \qquad \text{(III.15),}$$

où Ψ_1 est une fonction dérivable et I est la fonction indicatrice de l'intervalle [0, 1] (Moreau, 1966), ($I(\gamma) = 0$, si $0 \leq \gamma \leq 1$ et $I(\gamma) = +\infty$, si $\gamma \notin [0,1]$).

Ainsi, l'energie libre Ψ a une valeur physique pour toute valeur réelle de la quantité d'endommagement β. L'énergie libre est égale à $+\infty$ pour toute valeur de β qui est physiquement impossible.

En raison de l'expression de la puissance des efforts intérieurs (III.1), il est naturel de supposer que l'énergie libre dépend du gradient de la variable d'état β (Frémond et Nedjar, 1993a-1994a). Ce choix basé sur l'expression de la puissance des efforts intérieurs a aussi été fait pour décrire l'adhérence des solides en contact (Frémond, 1987). D'autre part, la prise en compte de gradients de quantités internes a aussi été utilisé dans d'autres études (Maugin, 1990; Schreyer, 1990 ; Costa Mattos, Frémond and Namiya, 1992).

La dérivation de l'énergie libre dans une situation actuelle, c'est-à-dire, dans une évolution telle que $0 \leq \beta(\mathbf{x},t) \leq 1$ pour tout point $\mathbf{x}$ du milieu à tout instant t, nous conduit à définir les forces réversibles (ou non dissipatives) reliées à ε, β et $\mathbf{grad}\beta$:

$$\sigma^r(\mathbf{x},t) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x},t), \quad B^r(\mathbf{x},t) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial \beta}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{H}^r(\mathbf{x},t) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial(\mathbf{grad}\beta)}(\mathbf{x},t) \ , \qquad \text{(III.16).}$$

La liaison interne (III.14) est prise en compte en introduisant une réaction B^{reac} qui est définie en considérant qu'il existe une fonction $B^{reac}(\mathbf{x},t)$ telle que :

$$B^{reac}(\mathbf{x},t) \in \partial I(\beta(\mathbf{x},t)), \qquad \text{(III.17),}$$

où ∂I est le sous-différentiel de la fonction indicatrice I de l'intervalle [0, 1] :

$$\begin{array}{lll} \partial I(\beta) = \{0\} & \text{si} & 0 < \beta < 1, \\ \partial I(0) = \mathbf{R}^- & \text{et} & \partial I(1) = \mathbf{R}^+, \\ \partial I(\beta) = \varnothing & \text{si} & \beta \notin [0,1], \end{array} \qquad \text{(III.18).}$$

La notion de sous-différentiabilité est une notion mathématique utile. Un exemple détaillé concernant la sous-différentiabilité locale est traité dans (Frémond, 1987) et, pour plus de détails, on pourra consulter (Moreau, 1966).

Notons que la relation (III.17) implique que le sous-différentiel $\partial I(\beta)$ est non vide, donc que la contrainte interne (III.14) est satisfaite. On peut aussi dire que la relation (III.17) a deux significations, d'une part, la liaison interne est satisfaite et d'autre part, il existe une réaction pour cette liaison interne, qui est nulle quand $0 < \beta < 1$, positive pour $\beta = 1$ et négative pour $\beta = 0$.

Notons aussi que la somme de la réaction B^{reac} et de la partie réversible B^r dans (III.16), est égal à la dérivée généralisée de l'énergie libre Ψ par rapport à β ; B^r est la partie dérivable et B^{reac} est la partie non dérivable. Si la la fonction indicatrice est approximée par une fonction dérivable, comme dans (Brauner, Nicolaenko and Frémond, 1986), B^{reac} devient approximée par une dérivée classique et il n'y a plus de difference entre la partie dérivable et la partie non dérivable.

Dans notre écriture de l'énergie libre Ψ (éq. (III.15)), la force non dissipative associée à β est :

$$B^r(\mathbf{x},t) + B^{reac}(\mathbf{x},t) \in \partial\Psi(\varepsilon(\mathbf{x},t),\beta(\mathbf{x},t),\mathbf{grad}\beta(\mathbf{x},t)), \qquad \text{(III.19)}.$$

Pour des raisons de simplicité, nous considérons qu'il n'y a pas de dissipation sur les petites déformations ε (le matériau est élastique) et sur le gradient de l'endommagement. Ainsi, nous considérons que les phénomènes dissipatifs ne portent que sur la quantité d'endommagement β .

Pour définir une dissipation associée à l'endommagement β, nous supposons qu'il existe une fonction B^i telle que :

$$\forall \mathbf{x},t,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{S},\ \forall \beta \in \mathbf{R},\ \forall\ \mathbf{grad}\beta \in \mathbf{R}^3,\ \forall \frac{d\varepsilon}{dt} \in \mathbb{S},\ \forall\ b \in \mathbf{R},\ \forall\ \mathbf{grad}\frac{d\beta}{dt} \in \mathbf{R}^3,$$

$$B^i(\mathbf{x},t,\varepsilon,\beta,\mathbf{grad}\beta,\frac{d\varepsilon}{dt},b,\ \mathbf{grad}\frac{d\beta}{dt})\ b \geq 0, \qquad \text{(III.20)},$$

où $\mathbb{S}$ est l'ensemble des matrices 3x3 symétriques.

Les lois de comportement que nous choisissons sont (Frémond et Nedjar, 1994a-b) :

$$\sigma = \sigma^r, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}^r, \qquad B = B^r + B^{reac} + B^i, \qquad \text{(III.21)},$$

où la dernière relation peut être écrite explicitée sous la forme,

$$B(\mathbf{x},t) = B^r(\mathbf{x},t) + B^{reac}(\mathbf{x},t) + B^i(\mathbf{x},t,E(\mathbf{x},t),\frac{d\varepsilon}{dt}(\mathbf{x},t),\frac{d\beta}{dt}(\mathbf{x},t),\ \mathbf{grad}\frac{d\beta}{dt}(\mathbf{x},t))$$

où nous avons introduit la notation $E = (\varepsilon,\beta,\mathbf{grad}\beta)$ qui sera adoptée pour toute la suite.

Les équations décrivant l'évolution d'un milieu sont donc : (III.5), (III.6) et (III.21) convenablement complétées par des conditions initiales et aux limites.

Avant de continuer, prouvons que notre choix est cohérent d'un point de vue mécanique. La seule chose que nous devons prouver, est que les lois de comportements (III.21) vérifient l'inégalité de Clausius-Duhem .

Avec le choix fait pour l'énergie libre (III.15) et en rappelant que, pour simplifier, seuls les processus isothermes sont considérés, l'inégalité de Clausius-Duhem peut s'écrire :

$$\frac{d\Psi_1}{dt} \leq \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} + B\frac{d\beta}{dt} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{grad}\,\frac{d\beta}{dt} , \qquad \text{(III.22)},$$

pour toute évolution actuelle, c'est à dire pour toutes vitesses $\frac{d\varepsilon}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$ et $\mathbf{grad}\,\frac{d\beta}{dt}$ telles que la liaison interne (III.14) est satisfaite.

Remarquons que nous devons bien définir la dérivée par rapport au temps $\frac{d\beta}{dt}$. En raison des inégalités (III.14), la dérivée par rapport au temps de β peut ne pas être continue ; ainsi nous devons choisir entre la dérivée à droite,

$$\lim_{\Delta t \to 0 \quad (\Delta t > 0)} \frac{\beta(t+\Delta t) - \beta(t)}{\Delta t} = \frac{d^d\beta}{dt}$$

qui dépend de la future évolution du matériau, et la dérivée à gauche,

$$\lim_{\Delta t \to 0 \quad (\Delta t > 0)} \frac{\beta(t) - \beta(t-\Delta t)}{\Delta t} = \frac{d^g\beta}{dt}$$

qui dépend de l'évolution antérieure du matériau.

Nous savons que les lois de comportements sont des relations causales. Elles prennent en compte les informations données par l'histoire du matériau, c'est à dire l'évolution antérieure. Il en résulte que les dérivées en temps sont dans les lois de comportements des dérivées à gauche (Frémond, 1990). Nous décidons donc que toutes les dérivées en temps sont des dérivées à gauche :

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{d^g\pi}{dt} \quad \text{pour toutes quantités } \pi.$$

Afin de vérifier l'inégalité de Clausius-Duhem, nous allons énoncer le théorème suivant :

Théorème Supposons que la fonction $\Psi_1(\varepsilon,\beta,\mathbf{grad}\beta)$ est différentiable. Alors l'inégalité de de Clausius-Duhem est satisfaite par le lois de comportements (III.21).

Preuve : Avant de prouver ce théorème, prouvons d'abord la proposition suivante,

Proposition (Frémond, 1990) Dans une évolution réelle, telle que $0 \leq \beta(\mathbf{x},t) \leq 1$, on a:

$$\forall(\mathbf{x},t), \qquad \forall A \in \partial I(\beta(\mathbf{x},t)), \qquad A\frac{d\beta}{dt}(\mathbf{x},t) \geq 0, \qquad \text{(III.23).}$$

Preuve de la proposition : Soit $\Delta t > 0$, un incrément de temps. Du fait que $0 \leq \beta(\mathbf{x},t) \leq 1$, la fonction indicatrice I est sous-différentiable au point $\beta(\mathbf{x},t)$ (Moreau, 1966) et

$$\forall A \in \partial I(\beta(\mathbf{x},t)), \quad I(\beta(\mathbf{x},t-\Delta t)) \geq I(\beta(\mathbf{x},t)) + A(\beta(\mathbf{x},t-\Delta t) - \beta(\mathbf{x},t)),$$

ou encore du fait que $0 \leq \beta(\mathbf{x},t-\Delta t)) \leq 1$,

$$\forall A \in \partial I(\beta(\mathbf{x},t)), \quad 0 \geq A(\beta(\mathbf{x},t-\Delta t) - \beta(\mathbf{x},t)).$$

En divisant cette relation par $\Delta t > 0$, on obtient,

$$\forall A \in \partial I(\beta(\mathbf{x},t)), \quad A\frac{(\beta(\mathbf{x},t) - \beta(\mathbf{x},t-\Delta t))}{\Delta t} \geq 0.$$

La relation (III.23) est déduite en faisant tendre Δt vers zero.

Preuve du théorème : Du fait que la fonction $\Psi_1(\varepsilon,\beta,\mathbf{grad}\beta)$ est différentiable, on a,

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = \frac{\partial\Psi_1}{\partial\varepsilon} : \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial\Psi_1}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial\Psi_1}{\partial\mathbf{grad}\beta} \cdot \frac{d\mathbf{grad}\beta}{dt} = \sigma^r : \frac{d\varepsilon}{dt} + B^r\frac{d\beta}{dt} + \mathbf{H}^r \cdot \frac{d\mathbf{grad}\beta}{dt}.$$

Avec la proposition précédente, on a

$$0 \leq B^{reac}(\mathbf{x},t)\frac{d\beta}{dt}(\mathbf{x},t).$$

La relation (III.20) nous donne,

$$0 \leq B^{i}(\mathbf{x},t,E(\mathbf{x},t),\frac{d\varepsilon}{dt}(\mathbf{x},t),\frac{d\beta}{dt}(\mathbf{x},t),\mathbf{grad}\frac{d\beta}{dt}(\mathbf{x},t))\frac{d\beta}{dt}(\mathbf{x},t).$$

En ajoutant membre à membre les trois dernières expressions, on obtient :

$$\frac{d\Psi_1}{dt} \leq \sigma^{r} : \frac{d\varepsilon}{dt}(\mathbf{x},t) + (B^{r}+B^{reac}+B^{i})\frac{d\beta}{dt}(\mathbf{x},t) + \mathbf{H}^{r}.\mathbf{grad}\frac{d\beta}{dt}(\mathbf{x},t),$$

et en utilisant les lois de comportement (III.21), on obtient l'inégalité de Clausius-Duhem (III.22). Ceci achève la preuve du théorème.

Une façon élégante de définir les forces dissipatives est de postuler l'existence d'un pseudo-potentiel de dissipation, comme cela a été introduit par MOREAU (1970) (voir aussi (Germain, Nguyen et Suquet, 1983)).

Un pseudo-potentiel de dissipation est une fonction positive, convexe et sous-différentiable pour la variable b, $\Phi(\mathbf{x},t,E(\mathbf{x},t),\frac{d\varepsilon}{dt}(\mathbf{x},t),b,\mathbf{grad}\frac{d\beta}{dt}(\mathbf{x},t))$ à valeur nulle à l'origine b = 0 :

$$\Phi(\mathbf{x},t,E(\mathbf{x},t),\frac{d\varepsilon}{dt}(\mathbf{x},t),0,\mathbf{grad}\frac{d\beta}{dt}(\mathbf{x},t)) = 0, \qquad \text{(III.24).}$$

Rappelons, que dans notre étude, nous considérons que la dissipation ne porte que sur l'endommagement. Cette fonction Φ définit la force dissipative B^{i} satisfaisant l'inégalité (III.20) :

$$B^{i}(\mathbf{x},t,E,\frac{d\varepsilon}{dt},\frac{d\beta}{dt},\frac{d\mathbf{grad}\beta}{dt}) \in \partial\Phi(\mathbf{x},t,E,\frac{d\varepsilon}{dt},\frac{d\beta}{dt},\frac{d\mathbf{grad}\beta}{dt}), \qquad \text{(III.25),}$$

où $\partial\Phi(\mathbf{x},t,E,\frac{d\varepsilon}{dt},b,\frac{d\mathbf{grad}\beta}{dt})$ est le sous-différentiel de Φ par rapport à la variable b.

Dans les modèles que nous proposerons à partir du chapitre suivant, nous choisirons le pseudo-potentiel de dissipation tel que,

$$\Phi(\mathbf{x},t,E(\mathbf{x},t),\frac{d\varepsilon}{dt},\frac{d\beta}{dt},\frac{d\mathbf{grad}\beta}{dt}) = \Phi(\frac{d\beta}{dt}\,;\varepsilon), \qquad \text{(III.26)},$$

où la petite déformation ε intervient comme paramètre.

Cette fonction aura une forme générale analogue à celle donnée par l'équation (III.15). Elle sera décomposée de la façon suivante :

$$\Phi(\frac{d\beta}{dt}(\mathbf{x},t)\,;\varepsilon(\mathbf{x},t)) = \Phi_1(\frac{d\beta}{dt}(\mathbf{x},t)\,;\varepsilon(\mathbf{x},t)) + I_-(\frac{d\beta}{dt}(\mathbf{x},t)), \qquad \text{(III.27)},$$

où Φ_1 est une fonction convexe, dérivable et nulle à l'origine, I_- est la fonction indicatrice de l'intervalle $]-\infty, 0]$, ($I_-(x) = 0$, si $x \leq 0$ et $I_-(x) = +\infty$ si $x \notin]-\infty, 0]$). Cette dernière est en effet nulle à l'origine, convexe et sous-différentiable. Cette décomposition du pseudo-potentiel de dissipation vérifie bien la condition (III.24).

La fonction Φ prend ainsi une valeur infinie pour toute évolution physiquement impossible. C'est à dire que la vitesse d'endommagement ne peut être que négative (la quantité β ne pouvant que décroître de 1 à 0).

On aura donc pour force de dissipation B^i donnée par (III.25) :

$$B^i \in \partial\Phi(\frac{d\beta}{dt}(\mathbf{x},t)\,;\varepsilon(\mathbf{x},t)), \qquad \text{(III.28)},$$

avec $\partial\Phi(\frac{d\beta}{dt}\,;\varepsilon) = \frac{d\Phi_1}{d(\frac{d\beta}{dt})}(\frac{d\beta}{dt}\,;\varepsilon) + \partial I_-(\frac{d\beta}{dt})$, où ∂I_- est le sous-différentiel de la fonction indicatrice de l'intervalle $]-\infty, 0]$. C'est à dire :

$$\begin{aligned} &\partial I_-(\gamma) = \{0\} && \text{si } \gamma \in]-\infty, 0[, \\ &\partial I_-(0) = [0,+\infty[, && \\ \text{et}\quad &\partial I_-(\gamma) = \varnothing && \text{si } \gamma \notin]-\infty, 0], \end{aligned} \qquad \text{(III.29)}.$$

Avec ce choix du pseudo-potentiel de dissipation l'inégalité (III.20) décrivant la dissipation est satisfaite.

III.5 Récapitulation :

Un choix convenable de l'énergie libre Ψ et du pseudo-potentiel de dissipation Φ permet d'obtenir les lois de comportement données par (III.21) et (III.28) pour le matériau. Ces lois de comportements décrivent avec (III.5) et (III.6), convenablement complétées par des conditions aux limites et une condition initiale sur la variable d'endommagement, l'évolution d'une structure.

III.6 Conclusions :

Nous avons défini une théorie du premier gradient en endommagement. Nous avons décidé de tenir compte de la puissance des mouvements microscopiques qui provoquent l'endommagement dans la formulation. Pour cela, nous avons modifié l'expression de la puissance des efforts intérieurs en introduisant de nouveaux termes traduisant la puissance de ces mouvements. Parmi les termes introduits, un terme en gradient d'endommagement permet de rendre compte de l'influence de l'endommagement en un point matériel sur son voisinage, ce qui est un concept phyique acceptable.

Avec ce choix, le principe des puissances virtuelles conduit à une nouvelle équation du mouvement liée à la description de l'endommagement dans le milieu matériel, parallèlement à l'équation du mouvement classique. Un choix convenable d'une énergie libre et d'un pseudo-potentiel de dissipation permet de définir des lois de comportements vérifiant les principes de la thermodynamique des milieux continus. Ces lois de comportement, placées dans les deux équations déduites du principe des puissances virtuelles, permettent de décrire l'évolution d'une structure.

Dans les chapitres suivants, nous allons donner des modèles d'endommagement avec des choix convenables de Ψ et Φ. Ces modèles seront confrontés à des tests réels rencontrés dans la littérature. Nous aborderons la confrontation des modèles vis-à-vis de l'effet d'echelle de structure ; en effet nous montrerons certaines caractéristiques auxquelles obéissent les modèles du fait de la prise en compte du gradient de l'endommagement. Nous aborderons également la description du phénomène unilatéral observé dans les matériaux endommageables tel que le béton.

CHAPITRE IV

MODELES D'ENDOMMAGEMENT.
DESCRIPTION DU PHENOMENE UNILATERAL.

IV.1 Introduction :

Les résultats de base de la formulation de l'endommagement décrite lors du chapitre précédent sont, tout au long de ce chapitre, appliqués à des situations réelles : l'endommagement du béton ainsi que l'endommagement d'un composite particulier. Les différents modèles que nous proposons sont définis par des choix différents de l'énergie libres et du pseudo-potentiel de dissipations et aussi en choisissant, suivant les cas, une ou deux variables d'endommagement.

Les choix de l'énergie libre Ψ et du pseudo-potentiel Φ se font à partir des lois de comportement expérimentales. De ces fonctions, nous déduisons les lois de comportement du modèle qui permettent de résoudre les équations du mouvement.

Nous commençons l'exposé par la description d'un exemple de modélisation du comportement macroscopique d'un composite particulier : composite à matrice céramique de type "SiC-SiC" (Gasser et Nedjar, 1991 ; Gerard et Baste, 1991). Ce matériau est choisi en raison de son comportement typiquement élastique-endommageable.

Nous développons ensuite un modèle d'endommagement appliqué au comportement adoucissant du béton. Une étude paramétrique est effectuée et quelques propriétés sont commentées. Ce modèle sera en effet retenu pour les calculs des structures en béton que nous aborderons dans les chapitres suivants.

Aussi, une modélisation du phénomène unilatéral observé sur le béton est proposée. Elle fait intervenir deux quantités d'endommagement. Enfin, nous présentons une première approche qui permet de décrire de façon qualitative le mode d'endommagement par fatigue.

Tout au long de ce chapitre, nous illustrons des exemples de lois de comportement relatives aux différents modèles. L'application aux calculs de structures sera abordée à partir du chapitre suivant.

IV.2 Modèle d'endommagement appliqué à un composite particulier :

Il est souvent observé que l'endommagement est principalement provoqué par des extensions au sein du matériau lorsqu'un certain seuil est atteint.

Dans cette section, nous proposons de développer un modèle d'endommagement en vue de la description du comportement macroscopique d'un composite particulier : composite tissé avec matrice et fibres en Carbure de Silicium, de type "SiC-SiC" (Nedjar et Gasser, 1991 ; Gerard et Baste, 1991).

Ce matériau a été choisi en raison de son comportement typiquement élastique-endommageable avec toutefois une apparition de petites déformations anélastiques qui sont mises en évidence lors des déchargements. La figure IV.1 illustre un tel comportement. Les caractéristiques mécaniques initiales du matériau obtenues lors des expériences sont : Le module d'Young E = 220 GPa et le coefficient de Poisson $\nu = 0.16$.

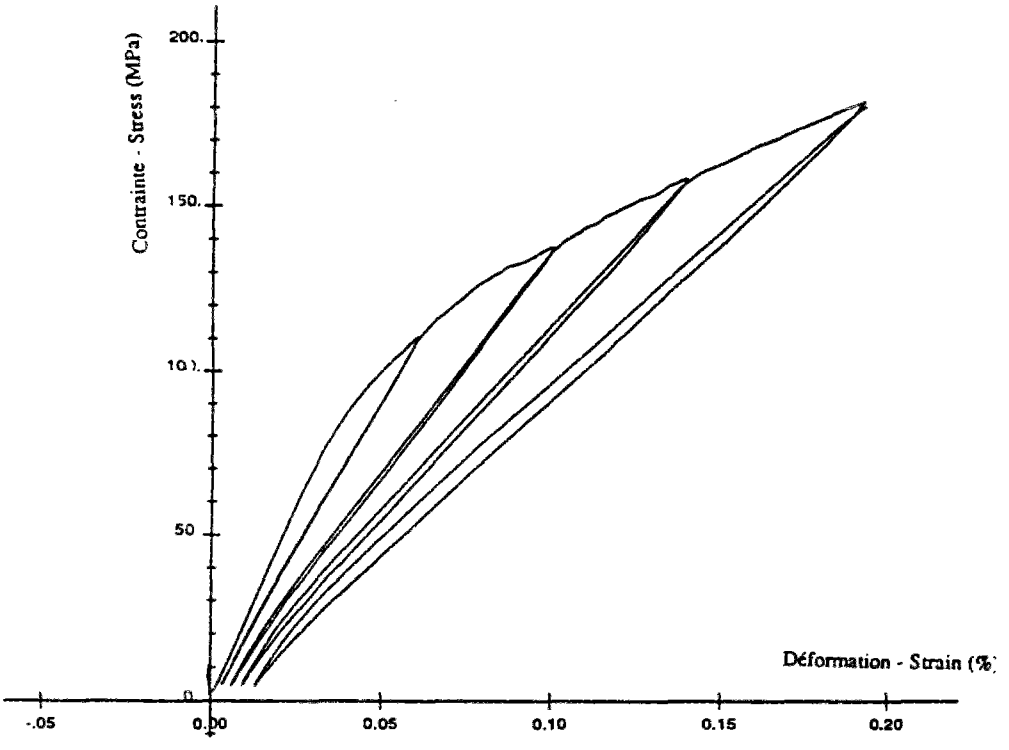


Fig. IV.1 - Courbe expérimentale de cycles charge-décharge d'un composite à matrice céramique (Gasser et Nedjar, 1991).

Dans le cadre de la formulation décrite au chapitre III, l'énergie libre relative au couplage élasticité-endommagement doit être telle que pour $\beta = 1$, on doit retrouver l'énergie de déformation élastique du milieu non endommagé. Nous choisissons cette énergie libre ainsi que le pseudo-potentiel de dissipation comme suit :

$$\Psi_1 = \frac{1}{2}\beta\{2\mu tr[\varepsilon.\varepsilon]+\lambda(tr[\varepsilon])^2\} + W(1-\beta) - M\{Log(|\beta|) + \frac{1}{\beta} - 1\} + \frac{k}{2}(\mathbf{grad}\beta)^2, \quad (IV.1),$$

$$\Phi = \frac{1}{2}c\dot{\beta}^2 - \frac{1}{2}\dot{\beta}\{2\mu tr[\varepsilon^-.\varepsilon^-] + \lambda(\langle tr[\varepsilon]\rangle^-)^2\} + I_-(\dot{\beta}), \quad (IV.2).$$

avec la notation $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}$, et où λ et μ sont les coefficients de Lamé.

Le premier terme dans l'expression de Ψ_1 est une fonction quadratique par rapport au tenseur de déformations et une fonction linéaire par rapport à la variable d'endommagement. Il constitue le modèle le plus simple où l'endommagement n'affecte que la raideur du matériau.

- La quantité W définie le seuil initial d'endommagement. Elle a la dimension d'une densité volumique d'énergie.
- La quantité M est le facteur qui contrôle le déplacement de ce seuil lorsque l'endommagement évolue. Il a aussi la dimension d'une densité volumique d'énergie.

Tel que nous le verrons dans les équations du mouvement, ces deux quantités décrivent l'évolution du domaine élastique non endommageable avec l'évolution de l'endommagement.

- La quantité k mesure l'influence de l'endommagement en un point matérial sur son voisinage. En effet, il est couplé à la fonction quadratique du au gradient de l'endommagement.
- La quantité c est le paramètre de viscosité de l'endommagement.

L'expression du pseudo-potentiel de dissipation dans (IV.2) est choisie de façon à ce que l'endommagement ne résulte que des déformations positives (extensions), comme cela sera montré dans ce qui suit.

La fonction I_- dans (IV.2) est, comme mentionné dans (III.27), la fonction indicatrice de l'intervalle $]-\infty, 0]$ ($I_-(\gamma) = 0$, si $\gamma \leq 0$ et $I_-(\gamma) = +\infty$, si $\gamma \notin]-\infty, 0]$). L'effet de cette fonction indicatrice est de forcer la vitesse d'endommagement $\dot{\beta}$ à être négative.

Les notations $\langle . \rangle^+$ et $\langle . \rangle^-$ sont respectivement la partie positive et la partie négative de la quantité scalaire $\langle . \rangle$:

$$\langle . \rangle^+ = \mathrm{Sup}\{0, \langle . \rangle\} \qquad \text{et} \qquad \langle . \rangle^- = \mathrm{Sup}\{0, -\langle . \rangle\}, \qquad \text{(IV.3).}$$

La partie positive et la partie négative du tenseur de déformations sont obtenues après diagonalisation. On a les propriétés utiles suivantes (Ladevèze, 1983) :

$$\langle \mathrm{tr}[\varepsilon] \rangle = \langle \mathrm{tr}[\varepsilon] \rangle^+ - \langle \mathrm{tr}[\varepsilon] \rangle^- \qquad \text{et} \qquad \langle \mathrm{tr}[\varepsilon] \rangle^+ \langle \mathrm{tr}[\varepsilon] \rangle^- = 0,$$

$$\varepsilon = \varepsilon^+ - \varepsilon^- \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}[\varepsilon^+ . \varepsilon^-] = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial\, \mathrm{tr}[\varepsilon^+ . \varepsilon^+]}{\partial \varepsilon} = \varepsilon^+, \qquad \frac{1}{2} \frac{\partial\, (\langle \mathrm{tr}[\varepsilon] \rangle^+)^2}{\partial \varepsilon} = \langle \mathrm{tr}[\varepsilon] \rangle^+ \mathbf{I}_d, \qquad \text{(IV.4),}$$

où $\mathbf{I}_d$ est le tenseur unité du second ordre.

Avec ce choix, les relations de comportements (III.21) donnent :

$$\sigma = \beta\{2\mu\varepsilon + \lambda(\mathrm{tr}[\varepsilon])\mathbf{I}_d\}, \quad \mathbf{H} = k\, \mathbf{grad}\beta\,, \quad B = \frac{\partial \Psi_1}{\partial \beta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\beta}} + B^{reac}, \qquad \text{(IV.5),}$$

où la dérivée de Ψ_1 et la dérivée généralisée de Φ (Moreau, 1966; Frémond, 1987, 1990) sont :

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \beta} = \frac{1}{2} \left\{ 2\mu \mathrm{tr}[\varepsilon . \varepsilon] + \lambda (\mathrm{tr}[\varepsilon])^2 \right\} - W - M\left(\frac{1-\beta}{\beta^2}\right),$$

$$\text{et} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\beta}} \in c\dot{\beta} - \frac{1}{2} \{2\mu \mathrm{tr}[\varepsilon^- . \varepsilon^-] + \lambda(\langle \mathrm{tr}[\varepsilon] \rangle^-)^2\} + \partial I_(\dot{\beta}),$$

avec $\partial I_(x) = \{0\}$, si $x < 0$ et $\partial I_(0) = [0, +\infty[$.

On peut remarquer que la première relation dans (IV.5) entre contrainte et déformation est la relation la plus simple où intervient le couplage entre l'endommagement et le comportement élastique linéaire.

Soit le domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ et de normale extérieur $\mathbf{n}$, soumis à une densité de forces volumiques $\mathbf{f}$ et à une densité de forces surfaciques $\mathbf{F}$ sur $\partial\Omega$. Les équations du mouvement sont obtenues en remplaçant (IV.1), (IV.2) et (IV.5) dans les équations (III.5) et (III.6). Nous rappelons que les termes de sources externes d'endommagement sont negligés ($A = 0$ et $b = 0$). Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\beta\{2\mu\varepsilon + \lambda(\operatorname{tr}[\varepsilon])\mathbf{I}_d\}) + \mathbf{f} &= 0, && \text{dans } \Omega, \\ \sigma.\mathbf{n} &= \mathbf{F}, && \text{sur } \partial\Omega, \qquad \text{(IV.6)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial I(\beta) + \partial I_(\dot{\beta}) \ni -\tfrac{1}{2}\{2\mu\operatorname{tr}[\varepsilon^+.\varepsilon^+] + \lambda(\langle\operatorname{tr}[\varepsilon]\rangle^+)^2\} + W + M(\frac{1-\beta}{\beta^2}), &\quad \text{dans } \Omega, \\ k\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{n}} = 0, &\quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \beta(\mathbf{x},0) = \beta_0(\mathbf{x}), &\quad \text{dans } \Omega, \qquad \text{(IV.7)}, \end{aligned}$$

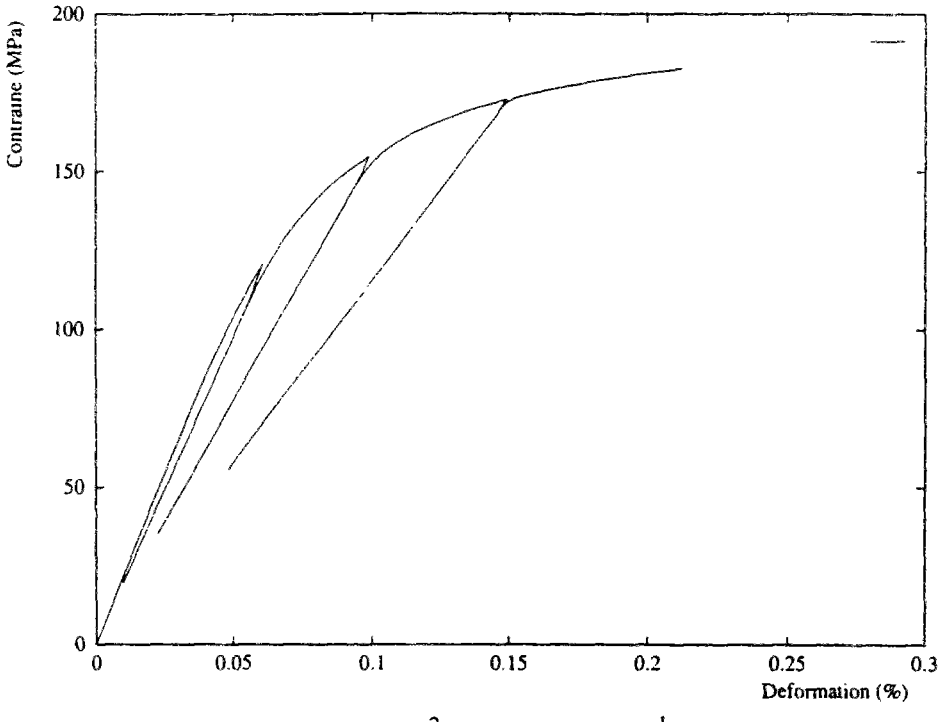
où $\Delta\beta$ est le Laplacien de β. La fonction $\beta_0(\mathbf{x})$ est l'endommagement initial dans la structure Ω, avec $\beta_0(\mathbf{x}) = 1$ quand la structure est initialement non endommagée.

Les équations (IV.7) sont les équations d'évolution de l'endommagement. Les éléments $\partial I(\beta)$ et $\partial I_(\dot{\beta})$ (sous-differentiels des fonctions indicatrices I et I_ respectivement) sont des ensembles de réactions qui forcent β à être entre 0 et 1 et la vitesse $\dot{\beta}$ à être négative.

Dans l'équation $(IV.7)_1$, la source d'endommagement dans le membre de droite est une énergie de déformation produite par les parties positives des déformations. Ceci est en accord avec les observations expérimentales mentionnées plus haut. Cette équation montre aussi que l'endommagement n'évolue que si les déformations positives ε^+ et les augmentations de volume $\langle\operatorname{tr}[\varepsilon]\rangle^+$ dépassent un certain seuil. Plus précisément : quand le matériau est non endommagé, le seuil en énergie est W, tandis que quand l'endommagement évolue, ce seuil devient $W + M(\frac{1-\beta}{\beta^2})$, mettant en évidence le rôle du facteur de déplacement du seuil M.

La figure IV.2 nous donne le résultat de l'application de ce modèle au comportement macroscopique d'un composite à matrice céramique (fig. IV.1).

Les caractéristiques utilisées pour la détermination de ce comportement sont : les caractéristiques mécaniques initiales du matériau sain (données par l'expérience) : le module d'Young E = 220 GPa et le coefficient de Poisson $\nu = 0.16$, et concernant les caractéristiques du modèle : $W = 1.\ 10^{-2}$ MPa, $M = 1.15\ 10^{-1}$ MPa et $c = 0.75$ MPa.s.



E = 220 GPa, $\nu = 0.16$, $W = 1.\ 10^{-2}$ MPa, $M = 1.15\ 10^{-1}$ MPa et $c = 0.75$ MPa.s

Fig. IV.2 - Courbe de cycles charge-décharge en traction simple d'un composite à matrice de type "sic-sic". Résultat numérique.

La courbe contrainte-déformation qui résulte de l'application du modèle se compare favorablement avec celle donnée par l'expérience (fig. IV.1).

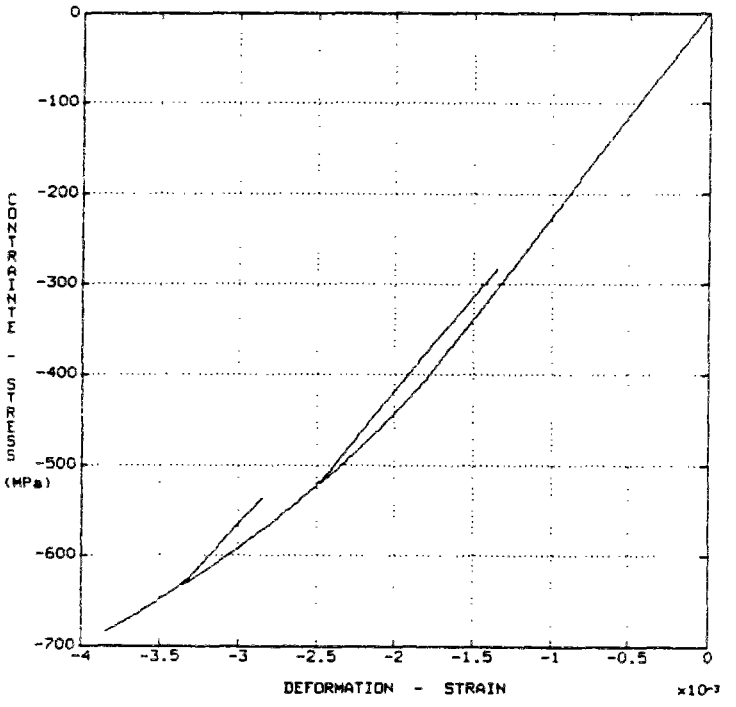
Remarque :

Il est important de noter que l'équation d'évolution de l'endommagement $(IV.7)_1$ entraîne des comportements différents en traction et en compression. Ceci est dû au fait que l'endommagement est provoqué par les parties positives des déformations. Ainsi, en raison de l'effet du coefficient de Poisson, le seuil d'endommagement en contrainte est plus grand en compression qu'en traction.

Afin d'illustrer cette propriété du modèle, nous nous proposons de déterminer le comportement en compression simple du composite à matrice céramique donné par le modèle.

Les mêmes paramètres utilisés pour déterminer le comportement en traction (fig. IV.2) sont utilisés pour l'essai en compression simple. Le résultat du calcul sous forme de courbe contrainte-déformation est donné sur la figure IV.3.

On peut observer une nette différence de comportement entre traction (fig. IV.2) et compression (fig. IV.3). Le seuil d'endommagement en contrainte, c'est-à-dire la contrainte à partir de laquelle un début de perte de raideur commence ($\beta < 1$), est plus grand en compression qu'en traction. En d'autres termes, $\beta = 1$ jusqu'à la contrainte $\sigma = -450$ MPa alors qu'en traction, $\beta = 1$ jusqu'à la contrainte $\sigma = 95$ MPa (fig. IV.2).



E = 220 GPa, $\nu = 0.16$, W = 1. 10^{-2} MPa, M = 1.15 10^{-1} MPa et c = 0.75 MPa.s

Fig. IV.3 - Courbe de cycles charge-décharge en compression simple d'un composite à matrice de type "sic-sic". Résultat numérique.

IV.3 Modèle d'endommagement avec comportement adoucissant. Application au béton :

Les essais expérimentaux sur le béton en sollicitations uniaxiales, de traction ou de compression, montrent que ce matériau est caractérisé par un comportement adoucissant lorsqu'un certain seuil est atteint (voir par exemple les résultats expérimentaux, figs. I.1, I.5 et I.7). Nous proposons dans cette section une variante du modèle précédent permettant de décrire ce comportement.

La différence par rapport au modèle précédent se situe dans la façon avec laquelle le seuil d'endommagement se déplace en fonction de l'évolution de l'endommagement.

Nous choisissons l'énergie libre et le pseudo-potentiel de dissipation comme suit :

$$\Psi_1 = \frac{1}{2}\beta\{2\mu tr[\varepsilon.\varepsilon]+\lambda(tr[\varepsilon])^2\} + W(1-\beta) + \frac{k}{2}(\mathbf{grad}\beta)^2, \qquad \text{(IV.8)},$$

$$\Phi = \frac{1}{2}c\dot{\beta}^2 - \frac{1}{2}\dot{\beta}\Big\{2\mu tr[\varepsilon^-.\varepsilon^-] + \lambda(\langle tr[\varepsilon]\rangle^-)^2 + \left(\frac{1-\beta}{1-M\beta}\right)\left[2\mu tr[\varepsilon^+.\varepsilon^+] + \lambda(\langle tr[\varepsilon]\rangle^+)^2\right]\Big\} + I_-(\dot{\beta}), \qquad \text{(IV.9)}.$$

Les définitions des caractéristiques de ce modèle sont identiques à celles des caractéristiques du modèle précédent : "c" est le paramètre de viscosité de l'endommagement, "k" mesure l'influence de l'endommagement en un point matériel sur son voisinage, W est seuil initial d'endommagement, toujours exprimé en termes de densité d'énergie et M, le facteur de déplacement de ce seuil d'endommagement. Par contre, il est important de noter que dans ce modèle, M est une quantité sans dimension et que sa valeur doit être strictement inférieure à 1 pour éviter que "1-Mβ" ne change de signe :

$$M < 1, \qquad \text{(IV.10)}.$$

Avec ce choix, les relations de comportements (III.21) donnent :

$$\sigma = \beta\{2\mu\varepsilon + \lambda(tr[\varepsilon])\mathbf{I}_d\}, \quad \mathbf{H} = k\,\mathbf{grad}\beta, \quad B = \frac{\partial\Psi_1}{\partial\beta} + \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\beta}} + B^{reac}, \qquad \text{(IV.11)},$$

où la dérivée de Ψ_1 et la dérivée généralisée de Φ (Moreau, 1966; Frémond, 1990) sont :

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial\beta} = \frac{1}{2}\left\{2\mu tr[\varepsilon.\varepsilon]+\lambda(tr[\varepsilon])^2\right\} - W,$$

et

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\beta}} \in c\dot{\beta} - \frac{1}{2}\Big\{2\mu tr[\varepsilon^-.\varepsilon^-] + \lambda(\langle tr[\varepsilon]\rangle^-)^2 + \left(\frac{1-\beta}{1-M\beta}\right)\left[2\mu tr[\varepsilon^+.\varepsilon^+] + \lambda(\langle tr[\varepsilon]\rangle^+)^2\right]\Big\} + \partial I_-(\dot{\beta}),$$

avec $\partial I_-(\gamma) = \{0\}$, si $\gamma < 0$ et $\partial I_-(0) = [0,+\infty[$.

On peut remarquer que la différence par rapport au lois de comportement du modèle précédent (éqs. (IV.5)) réside dans l'expression du travail interne d'endommagement B.

Avec ce choix, les équations du mouvement, obtenues en remplaçant (IV.8), (IV.9) et (IV.11) dans les équations (III.5) et (III.6), sont :

$$\mathrm{div}(\beta\{2\mu\varepsilon + \lambda(\mathrm{tr}[\varepsilon])\mathbf{I}_d\}) + \mathbf{f} = 0, \qquad \text{dans } \Omega,$$

$$\sigma.\mathbf{n} = \mathbf{F}, \qquad \text{sur } \partial\Omega, \qquad \text{(IV.12)},$$

$$c\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial I(\beta) + \partial I_(\dot{\beta}) \ni -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1-\beta}{1-M\beta}\right)\{2\mu\mathrm{tr}[\varepsilon^+.\varepsilon^+] + \lambda(\langle\mathrm{tr}[\varepsilon]\rangle^+)^2\} + W, \quad \text{dans } \Omega,$$

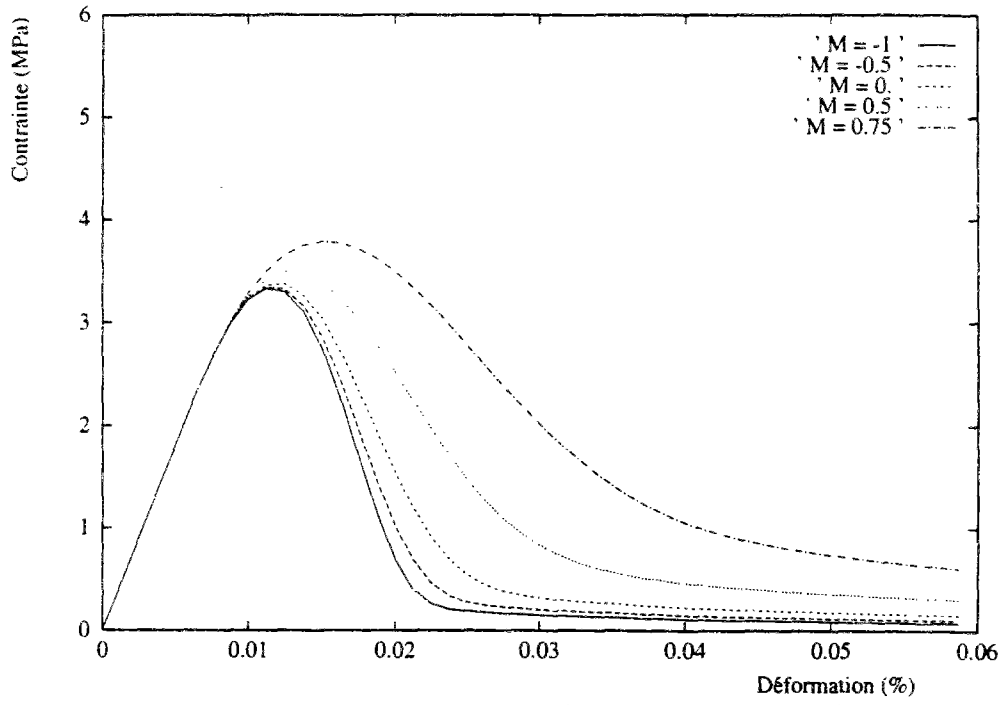
$$k\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{n}} = 0, \qquad \text{sur } \partial\Omega,$$

$$\beta(\mathbf{x},0) = \beta_0(\mathbf{x}), \qquad \text{dans } \Omega, \qquad \text{(IV.13)}.$$

Notons la différence entre la source d'endommagement dans le second membre de $(IV.13)_1$ et la source d'endommagement dans le second membre de $(IV.7)_1$.

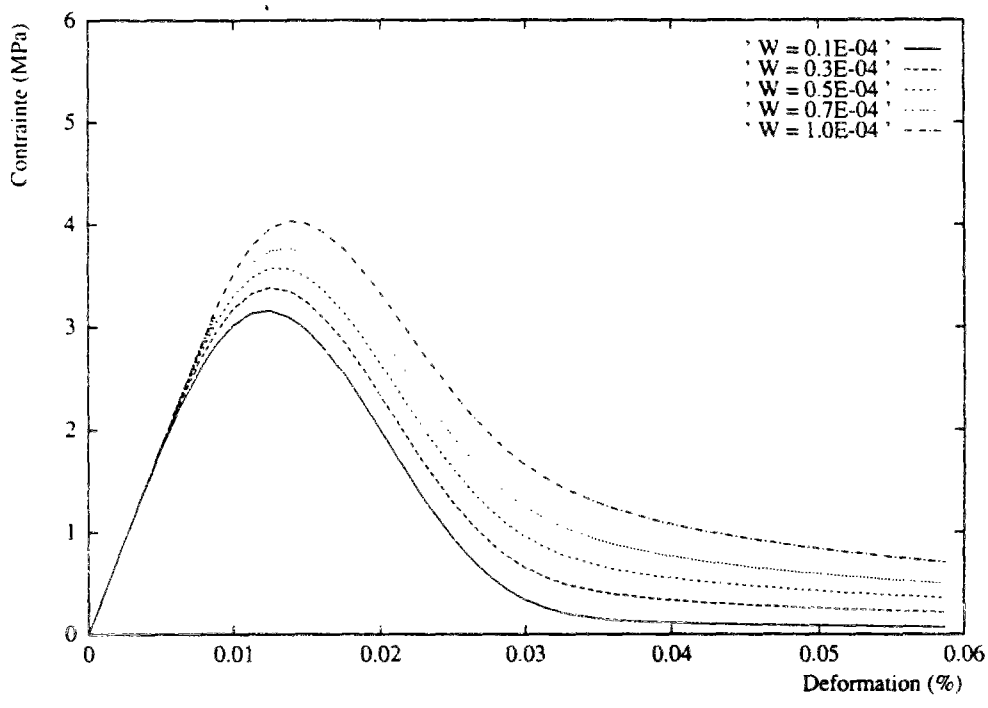
La figure IV.4 présente des exemples de comportements en tractions uniaxiales destinés à modéliser le comportement du béton. Ces courbes sont obtenues pour différentes valeurs du paramètre M (avec $M < 1$). Les caractéristiques mécaniques utilisées sont celles généralement obtenues (en moyenne) lors d'essais expérimentaux: $E = 35000$ MPa et $\nu = 0.2$. Les autres caractéristiques sont : $W = 0.42\ 10^{-4}$ MPa et $c = 0.2\ 10^{-2}$ MPa.s.

De même, nous nous proposons d'appréhender l'influence des deux autres paramètres du modèle W et c sur le comportement en traction uniaxiale. La figure IV.5 présente l'influence du seuil initial d'endommagement W, dans ce cas la valeur de M est fixée à $M = 0.5$ et la valeur de c est fixée à $c = 0.2\ 10^{-2}$ MPa.s. La figure IV.6 présente l'influence de la viscosité d'endommagement c, pour ce cas la valeur de M est fixée à $M = 0.5$ et la valeur de W est fixée à $W = 0.42\ 10^{-4}$ MPa. Dans ces deux exemples, les caractéristiques mécaniques utilisées sont : $E = 35000$ MPa et $\nu = 0.2$.



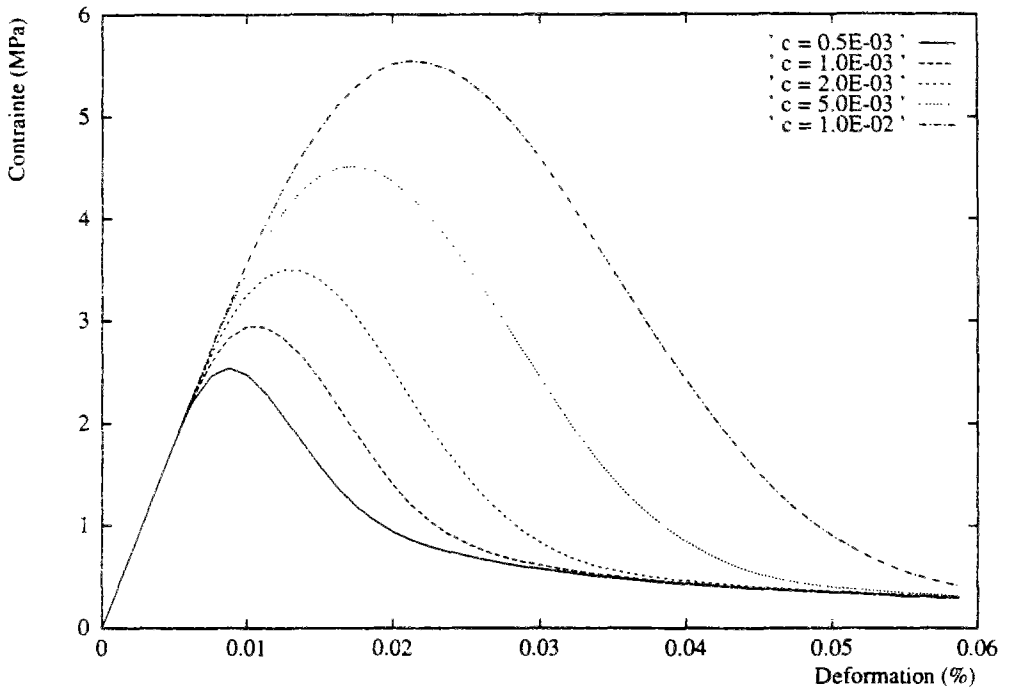
E = 35000 MPa, ν = 0.2, c = 0.2 10^{-2} MPa.s et W = 0.42 10^{-4} MPa.

Fig. IV.4 - Courbes "contrainte-déformation" du béton en traction uniaxiale. Résultats obtenus pour différentes valeurs de M.



E = 35000 MPa, ν = 0.2, c = 0.2 10^{-2} MPa.s et M = 0.5.

Fig. IV.5 - Influence du paramètre W sur la réponse du béton en traction uniaxiale.



E = 35000 MPa, ν = 0.2, W = 0.42 10^{-4} MPa et M = 0.5.

Fig. IV.6 - Influence du paramètre c sur la réponse du béton en traction uniaxiale.

Remarques :

Tout comme pour le modèle de la section §IV.2, ce modèle entraîne des comportements différents en traction et en compression. Ceci est également dû aux effets combinés, du coefficient de Poisson et du fait que dans l'équation d'évolution $(IV.13)_1$, la source d'endommagement est gouvernée par les déformations positives.

Dans ce cas aussi le béton est plus résistant en compression qu'en traction. Ceci est en accord avec les résultats expérimentaux.

Ce modèle permet donc de décrire l'endommagement de structures en béton soumises à des sollicitations multiaxiales (charge-décharge sans changement du signe des sollicitations).

Lorsque les sollicitations changent de signe, le phénomène unilatéral apparaît. Il n'est pas pris en compte par ce modèle, il l'est par le suivant.

IV.4 Modèle à deux variables d'endommagement et phénomène unilatéral. Application au béton :

Le phénomène unilatéral n'est pas décrit par les modèles précédents (§IV.2 et §IV.3). Pour le prendre en compte, nous introduisons cette fois-ci deux variables d'endommagement au lieu d'une seule. Ces variables sont : β_t pour l'extension et β_c pour la contraction.

A partir de ce choix, le principe des puissances virtuelles décrit au chapitre III est alors reformulé en tenant compte de ces deux quantités d'endommagement.

Nous choisissons la puissance des efforts intérieurs $P_i = P_i(\mathcal{D},\mathbf{u}, \dot{\beta}_t,\dot{\beta}_c)$ qui prend en compte les mouvements microscopiques dans un domaine $\mathcal{D}$ intérieur au solide Ω comme suit :

$$P_i = -\int_{\mathcal{D}} \sigma:\mathbf{D}(\mathbf{u})\, d\mathcal{D} - \int_{\mathcal{D}} (B_t\dot{\beta}_t + \mathbf{H}_t.\mathbf{grad}\dot{\beta}_t + B_c\dot{\beta}_c + \mathbf{H}_c.\mathbf{grad}\dot{\beta}_c)\, d\mathcal{D}, \quad \text{(IV.14)},$$

Quatre termes apparaissent, B_t, le travail d'endommagement interne en extension, B_c, le travail d'endommagement interne en contraction, $\mathbf{H}_t$, le vecteur flux de travail d'endommagement interne en extension et $\mathbf{H}_c$, le vecteur flux de travail d'endommagement interne en contraction.

La puissance des efforts extérieurs est l'expression (III.2) où les sources extérieurs d'endommagement sont nulles :

$$P_e(\mathcal{D},\mathbf{u}, \dot{\beta}_t,\dot{\beta}_c) = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{f}.\mathbf{u}\, d\mathcal{D} + \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{F}.\mathbf{u}\, d\Gamma, \qquad \text{(IV.15)}.$$

En évolution quasi-statique, le principe des puissances virtuelles,

$$\forall \mathcal{D} \subset \Omega,\ \forall\ \mathbf{v},\ \forall\ \gamma,\ \forall\ \zeta, \qquad P_i(\mathcal{D},\mathbf{v},\gamma,\zeta) + P_e(\mathcal{D},\mathbf{v},\gamma,\zeta) = 0,$$

où $\mathbf{v}$, γ et ζ sont des vitesses virtuelles, conduit à trois systèmes d'équations :

$$\text{div}\ \sigma + \mathbf{f} = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}, \quad \sigma.\mathbf{n} = \mathbf{F}, \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}, \qquad \text{(IV.16)},$$

$$\text{div}\ \mathbf{H}_t - B_t = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}, \quad \mathbf{H}_t.\mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}, \qquad \text{(IV.17)},$$

$$\text{div}\ \mathbf{H}_c - B_c = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}, \quad \mathbf{H}_c.\mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}, \qquad \text{(IV.18)},$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à la frontière $\partial\mathcal{D}$.

Les systèmes (IV.17) et (IV.18) décrivent les évolutions des variables d'endommagement β_t et β_c respectivement.

Nous choisissons de remplacer la liaison interne sur les variables d'endommagement (III.14) par la liaison suivante :

$$(\beta_t,\beta_c) \in C = \{(x,y),\ x\in [0,1];\ y\in [0,1],\ x \leq y\},\qquad \text{(IV.19).}$$

Elle impose à (β_t,β_c) d'appartenir au triangle C. Cela traduit que des déformations négatives produisent des pertes de raideur en traction et en compression alors que des déformations positives produisent une perte de raideur uniquement en traction. Cette liaison entraîne l'existence de deux réactions B_t^{reac} et B_c^{reac} qui sont définies par :

$$(B_t^{reac}(\mathbf{x},t),B_c^{reac}(\mathbf{x},t)) \in \partial I_C(\beta_t(\mathbf{x},t),\beta_c(\mathbf{x},t)),\qquad \text{(IV.20).}$$

où ∂I_C est le sous-différentiel, ou ensemble des dérivées généralisées, de la fonction indicatrice I_C du triangle C (voir figure IV.7). On a le résultat suivant :

$B_t^{reac} = 0$ et $B_c^{reac} = 0$,	si (β_t, β_c) est à l'intérieur de C.
$B_t^{reac} \in\ ]-\infty, 0]$ et $B_c^{reac} = 0$,	si $\beta_t = 0$ et $\beta_c \in\ ]0,1[$.
$B_t^{reac} = 0$ et $B_c^{reac} \in [0, +\infty[$,	si $\beta_t \in\ ]0,1[$ et $\beta_c = 1$,
$B_t^{reac} = -B_c^{reac} \in [0, +\infty[$,	si $\beta_t = \beta_c$ et $\beta_t \in\ ]0,1[$,
$(B_t^{reac}, B_c^{reac}) \in$ {cône normal à C au point (0,0)},	pour $(\beta_t,\beta_c) = (0,0)$,
$(B_t^{reac}, B_c^{reac}) \in$ {cône normal à C au point (0,1)},	pour $(\beta_t,\beta_c) = (0,1)$,
$(B_t^{reac}, B_c^{reac}) \in$ {cône normal à C au point (1,1)},	pour $(\beta_t,\beta_c) = (1,1)$.

Avec le choix d'une énergie libre Ψ_1 et d'un pseudo-potentiel de dissipation Φ, les lois de comportement, analogues à celles données au chapitre III (éqs. (III.21) et (III.28)), sont :

$$\sigma(\mathbf{x},t) = \frac{\partial\Psi_1}{\partial\varepsilon}(\mathbf{x},t),\quad \mathbf{H}_t(\mathbf{x},t) = \frac{\partial\Psi_1}{\partial(\mathbf{grad}\beta_t)}(\mathbf{x},t)\ ,\quad \mathbf{H}_c(\mathbf{x},t) = \frac{\partial\Psi_1}{\partial(\mathbf{grad}\beta_c)}(\mathbf{x},t)\ ,$$

$$B_t(\mathbf{x},t) = \frac{\partial\Psi_1}{\partial\beta_t}(\mathbf{x},t) + \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\beta}_t}(\mathbf{x},t) + B_t^{reac}(\mathbf{x},t),$$

$$B_c(\mathbf{x},t) = \frac{\partial\Psi_1}{\partial\beta_c}(\mathbf{x},t) + \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\beta}_c}(\mathbf{x},t) + B_c^{reac}(\mathbf{x},t),\qquad \text{(IV.21).}$$

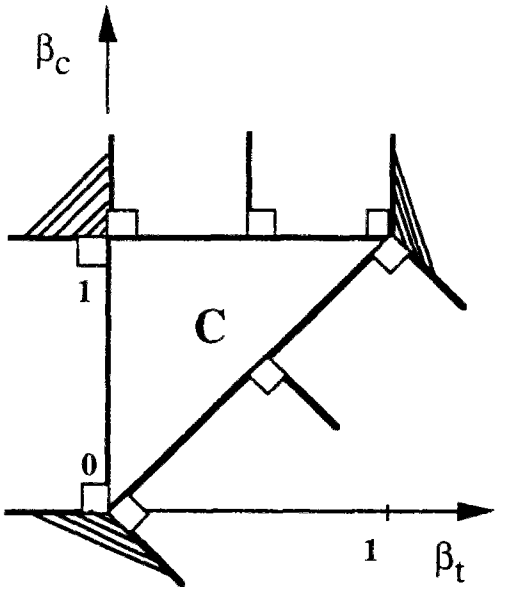


Fig. IV.7 - Sous-différentiel de la fonction indicatrice I_C du triangle C.

L'énergie libre et le pseudo-potentiel de dissipation que nous choisissons sont :

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \Psi_1(\varepsilon,\beta_t,\beta_c,\mathbf{grad}\beta_t,\mathbf{grad}\beta_c)\\ &= \frac{1}{2}\{\beta_t[2\mu tr[\varepsilon^+.\varepsilon^+] + \lambda(\langle tr[\varepsilon]\rangle^+)^2]+\beta_c[2\mu tr[\varepsilon^-.\varepsilon^-] + \lambda(\langle tr[\varepsilon]\rangle^-)^2]\}\\ &\quad + W_t(1-\beta_t) + W_c(1-\beta_c) + \frac{k}{2}[(\mathbf{grad}\beta_t)^2 + (\mathbf{grad}\beta_c)^2], \qquad \text{(IV.22)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi = \Phi(\dot\beta_t,\dot\beta_c;\varepsilon) &= \frac{1}{2}\{c_t\dot\beta_t^2+c_c\dot\beta_c^2\} - \frac{1}{2}\dot\beta_t\left(\frac{1-\beta_t}{1-M_t\beta_t}\right)\left[2\mu tr[\varepsilon^+.\varepsilon^+] + \lambda(\langle tr[\varepsilon]\rangle^+)^2\right]\\ &\quad - \frac{1}{2}\dot\beta_c\left(\frac{1-\beta_c}{1-M_c\beta_c}\right)\left[2\mu tr[\varepsilon^-.\varepsilon^-] + \lambda(\langle tr[\varepsilon]\rangle^-)^2\right] + I_-(\dot\beta_t,\dot\beta_c), \qquad \text{(IV.23)},\end{aligned}$$

où cette fois-ci $I_-(x,y)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $]-\infty, 0]\times]-\infty, 0]$.

Les définitions des caractéristiques du modèle sont identiques à celles du modèle précédent (§IV.3) appliqué au béton. Ces caractéristiques sont indicées par t pour l'endommagement dû aux extensions et par c pour l'endommagement dû aux contractions. Nous rappelons que les paramètres controlant les déplacements des seuils d'endommagement

sont des quantités sans dimension et, comme pour le modèle précédent (condition (IV.10)), elles doivent être strictement inférieures à 1 :

$$M_t < 1 \qquad \text{et} \qquad M_c < 1, \qquad \text{(IV.24).}$$

Dans l'expression de l'énergie libre Ψ_1, il apparaît que les contributions des parties positives et négatives des déformations sont différentes. La fonction quadratique par rapport aux déformations positives ε^+ est couplée avec la quantité d'endommagement β_t et la fonction quadratique par rapport aux déformations négative ε^- est couplée avec la quantité d'endommagement β_c.

En utilisant les propriétés (IV.4), la première relation de comportement dans (IV.21), reliant les contraintes et les déformations nous donne :

$$\sigma = \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varepsilon} = \beta_t \left\{ 2\mu\varepsilon^+ + \lambda\langle tr[\varepsilon]\rangle^+ \mathbf{I}_d \right\} - \beta_c \left\{ 2\mu\varepsilon^- + \lambda\langle tr[\varepsilon]\rangle^- \mathbf{I}_d \right\}, \qquad \text{(IV.25).}$$

Notons que si le matériau est non endommagé ($\beta_t = \beta_c = 1$) la relation (IV.25) donne un comportement élastique linéaire.

Les équations du mouvement, obtenues en remplaçant (IV.22), (IV.23) et (IV.21) dans les équations (III.16)-(III.18), sont :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\sigma + \mathbf{f} &= 0, && \text{dans } \Omega, \\ \sigma.\mathbf{n} &= \mathbf{F}, && \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \qquad \text{(IV.26),}$$

$$c_t\dot{\beta}_t - k\Delta\beta_t + B_t^{reac} + \partial I_-(\dot{\beta}_t) \ni -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1-\beta_t}{1-M_t\beta_t}\right)\left\{ 2\mu tr[\varepsilon^+.\varepsilon^+] + \lambda(\langle tr[\varepsilon]\rangle^+)^2 \right\} + W_t, \text{ dans } \Omega,$$

$$k\frac{\partial \beta_t}{\partial \mathbf{n}} = 0, \text{ in } \partial\Omega, \qquad \beta_t(x,0) = \beta_{t0}(x), \qquad \text{dans } \Omega,$$

$$c_c\dot{\beta}_c - k\Delta\beta_c + B_c^{reac} + \partial I_-(\dot{\beta}_c) \ni -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1-\beta_c}{1-M_c\beta_c}\right)\left\{ 2\mu tr[\varepsilon^-.\varepsilon^-] + \lambda(\langle tr[\varepsilon]\rangle^-)^2 \right\} + W_c, \text{ dans } \Omega,$$

$$k\frac{\partial \beta_c}{\partial \mathbf{n}} = 0, \text{ in } \partial\Omega, \qquad \beta_c(x,0) = \beta_{c0}(x), \qquad \text{dans } \Omega, \qquad \text{(IV.27),}$$

où le vecteur $(B_t^{reac}(\mathbf{x},t), B_c^{reac}(\mathbf{x},t)) \in \partial I_C(\beta_t(\mathbf{x},t), \beta_c(\mathbf{x},t))$ est normal au triangle C au point (β_t, β_c) (fig. IV.7). On peut vérifier que ces équations donnent une seule vitesse $(\dot{\beta}_t, \dot{\beta}_c)$ fonction de ε et de (β_t, β_c) telles que $\dot{\beta}_t \leq 0$, $\dot{\beta}_c \leq 0$ et (β_t, β_c) est à l'intérieur du triangle.

Afin de montrer les caractéristiques de ce modèle, nous commençons par présenter un exemple qualitatif. Sur la figure IV.8 est représentée une histoire de chargement d'un essais de traction-compression. La réponse à ce chargement est illustrée sur la figure IV.9.

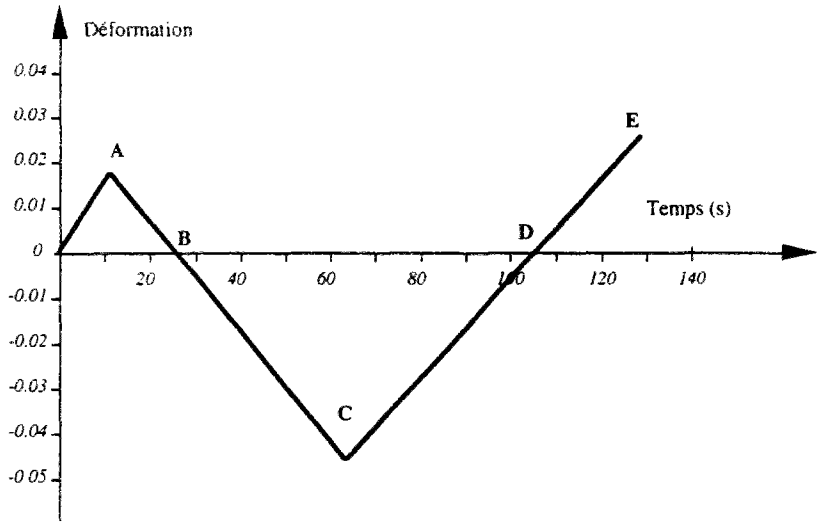


Fig. IV.8 - Histoire de chargement. Exemple qualitatif.

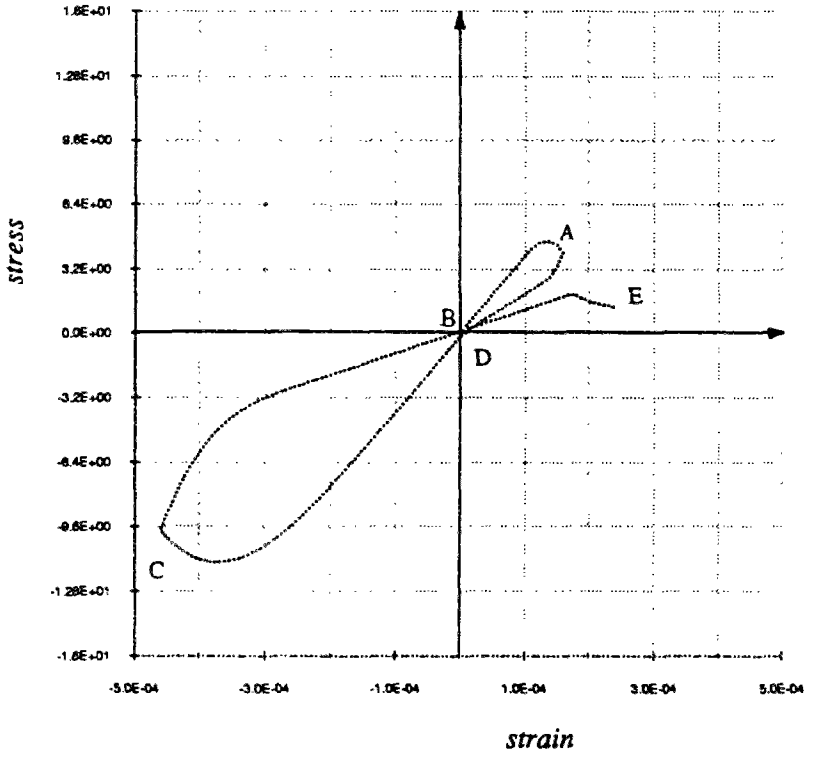


Fig. IV.9 - Comportement en traction-compression.
Le phénomène unilatéral.

Sur cette réponse, après un endommagement provoqué par la traction (partie OA), on peut noter la réstauration de la raideur lors du passage de la traction à la compression (parties AB et BC) : c'est le phénomène unilatéral. On peut noter aussi que l'endommagement en compression est définitif : en d'autres termes, quand le matériau est largement endommagé en compression (au point C sur la courbe), sa raideur ne peut pas être restaurée lors du passage du chargement en compression au chargement en traction (parties CD et DE). Le matériau est en partie, ou totalement, détruit. Cette propriété est une conséquence du choix fait pour la liaison interne (IV.19) sur les variables d'endommagement.

Pour l'exemple pratique du béton, nous utilisons les caractéristiques mécaniques de ce matériau choisies à partir de résultats expérimentaux (Mazars et Bazant, 1988). On peut voir sur la figure IV.10, cette fois-ci quantitativement, la restauration de la raideur lors du passage de la traction à la compression. Les caractéristiques du matériau utilisées pour le modèle sont : $E = 37000$ MPa, $\nu = 0.2$, $c_t = 0.002$ MPa.s, $c_c = 0.5$ MPa.s, $W_t = 1.\ 10^{-4}$ MPa, $W_c = 0.7\ 10^{-2}$ MPa, $M_t = -1$ et $M_c = 0.8$.

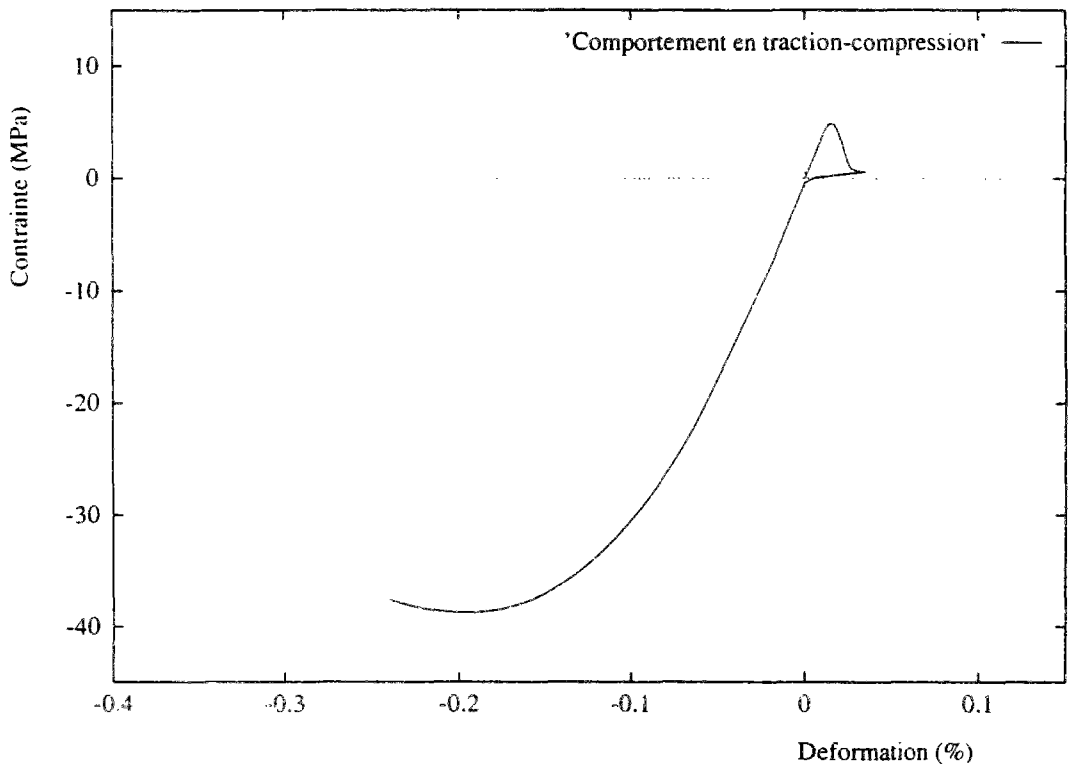


Fig. IV.10 - Comportement en traction-compression du béton.

On peut remarquer la différence de résistances maximales entre la traction (de l'ordre de 3 MPa) et la compression (de l'ordre de 25 MPa). Ceci est en accord avec les valeurs moyennes obtenues expérimentalement.

IV.5 Un modèle d'endommagement par fatigue :

Deux types de mécanismes d'endommagement sont généralement distingués : l'endommagement fragile et l'endommagement par fatigue. Les modèles développés dans les sections précédentes sont des modèles d'endommagements fragiles.

L'endommagement par fatigue apparaît lorsqu'un matériau est soumis à des contraintes cycliques. Pour des amplitudes qui peuvent être inférieures à la limite d'élasticité, une rupture par accumulation d'endommagement survient au bout d'un certain nombre de cycles (Marigo, 1985 ; Lemaitre et Chaboche, 1992 ; François, Pineau et Zaoui, 1993).

Dans cette section, nous proposons une extension du modèle avec une seule variable d'endommagement décrit dans la section § IV.3 (appliqué au béton) afin de modéliser l'endommagement par fatigue.

L'idée est de considérer que le seuil d'endommagement décroît avec le nombre de cycles N. Le seuil initial d'endommagement W est donc tel que $W = W(N)$. Dans ce cas, le nombre N est un entier naturel ($N \in \mathbf{N}$) qui constitue une variable d'état définie globalement sur le domaine Ω.

Bien entendu, dans ce modèle simple, nous ne faisons pas intervenir les quantités caractéristiques du cycle de chargement telles que, l'amplitude de contrainte, la contrainte maximale, la contrainte minimale, la contrainte moyenne et le rapport entre la contrainte maximale et la contrainte minimale. Celles-ci pourraient par exemple intervenir dans l'expression de la fonction seuil d'endommagement $W = W(N, ...)$.

L'énergie libre Ψ_1 dépendra donc, en plus des quantités usuelles, aussi de N :

$$\Psi_1 = \Psi_1(\varepsilon,\beta,\mathbf{grad}\beta,N), \qquad \text{avec } N \in \mathbf{N}, \qquad \text{(IV.28).}$$

La quantité N étant un entier naturel, la dérivée de l'énergie libre par rapport à cette variable est remplacée par une différence désignée par la notation [.] telle que :

$$[\Psi_1] = \Psi_1(\varepsilon,\beta,\mathbf{grad}\beta,N+1) - \Psi_1(\varepsilon,\beta,\mathbf{grad}\beta,N) \qquad \text{(IV.29).}$$

Ainsi, dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus, on effectue une légère extension où la dérivée par rapport au temps $\frac{dN}{dt}$ est remplacée par la différence $[N] = 1$. L'inégalité de Clausius-Duhem est satisfaite si, en plus de la condition (III.22), la condition suivante est également satisfaite :

$$[\Psi_1] \leq 0, \qquad \text{(IV.30).}$$

Les relations de comportement (III.21) sont toujours valables.

La condition (IV.30) est en accord avec la propriété mentionnée ci-dessus : le seuil décroît avec le nombre de cycles.

Une telle condition est satisfaite par l'expression générale de l'énergie libre suivante :

$$\Psi_1 = \frac{1}{2}\beta\left\{2\mu \mathrm{tr}[\varepsilon.\varepsilon]+\lambda(\mathrm{tr}[\varepsilon])^2\right\} + W(N)\,(1-\beta) + \frac{k}{2}(\mathbf{grad}\beta)^2, \qquad \text{(IV.31),}$$

où $[W(N)] \leq 0$ avec $[W(N)] = W(N+1) - W(N)$.

Le pseudo-potentiel de dissipation est celui donné par l'expression (IV.9) et les relations de comportement sont celles données par (IV.11).

La fonction $W(N)$ doit être telle que $W(0) = W_0$, le seuil initial, et $W(\infty) = 0$. Un choix simple de cette fonction peut être donné par :

$$W(N) = W_0\left(1 - \frac{N}{N_R}\right) \quad \text{si} \quad N \leq N_R,$$

$$W(N) = 0 \quad \text{si} \quad N > N_R, \qquad \text{(IV.32).}$$

N_R peut être interprété comme le nombre de cycles pour atteindre un endommagement complet. Notons que si N_R tend vers $+\infty$, nous retrouvons le modèle d'endommagement fragile décrit dans la section §IV.3.

Un exemple qualitatif de comportement endommageable par fatigue utilisant la fonction de seuil (IV.31) est présenté sur la figure IV.12. La valeur de N_R choisie est prise égale à 20. Ce comportement est la réponse à l'histoire de chargement représentée sur la figure IV.11 où le chargement est à déformation imposée.

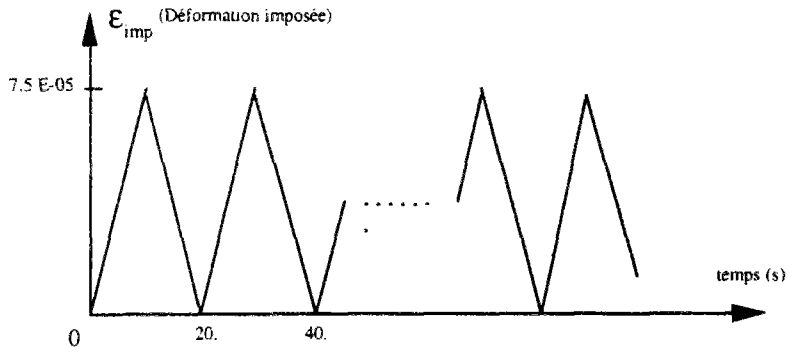
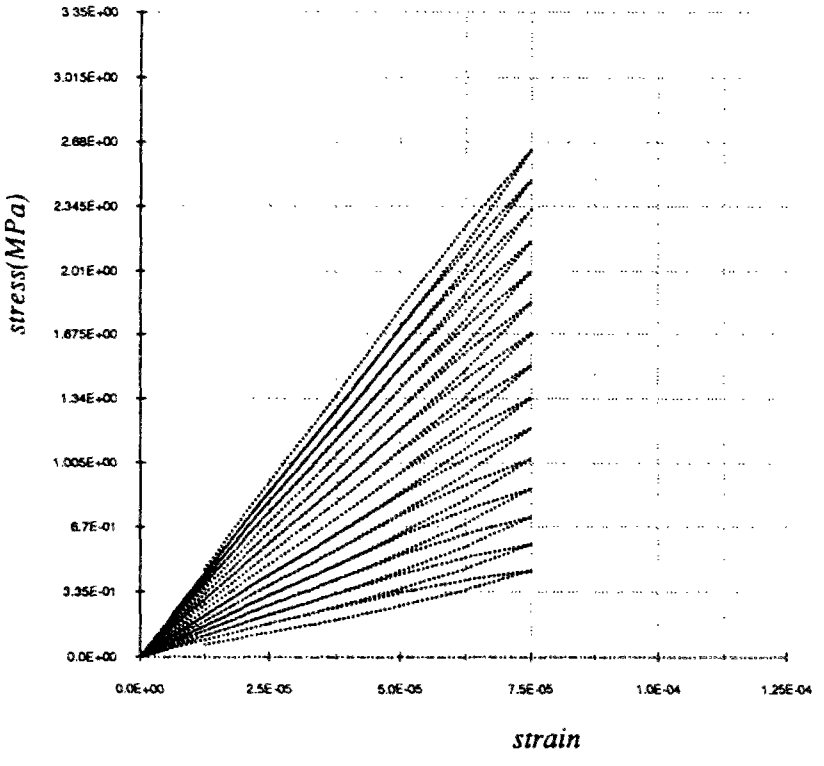


Fig. IV.11 - Histoire du chargement.



E = 35 GPa, ν= 0.18, c = 0.002 MPa.s, W = 0.42 10^{-4} MPa, M = -1 et N_R = 20.

Fig. IV.12 - Comportement endommageable en fatigue.
Exemple qualitatif.

IV.6 Commentaires :

Tout au long de ce chapitre, les exemples de comportements donnés par les differents modèles sous forme de courbes contrainte-déformation sont obtenus à partir de calculs par éléments finis. Ces calculs sont effectués sur des éprouvettes prismatiques, analysées en deux dimensions, soumises à des sollicitations uniformes en traction et/ou en compression (figure IV.13)

On peut remarquer que pour tous ces exemples de comportements, nous n'avons pas mentionné le facteur d'influence de l'endommagement k. En effet, les chargements étant uniformes, le gradient de l'endommagement est donc nul.

Ce facteur k intervient, comme on le verra dans les chapitres suivants, lors des calculs de structures où des sollicitations non uniformes apparaissent. Dans le chapitre suivant nous suggèrerons à cet égard une méthodologie permettant d'évaluer ce facteur.

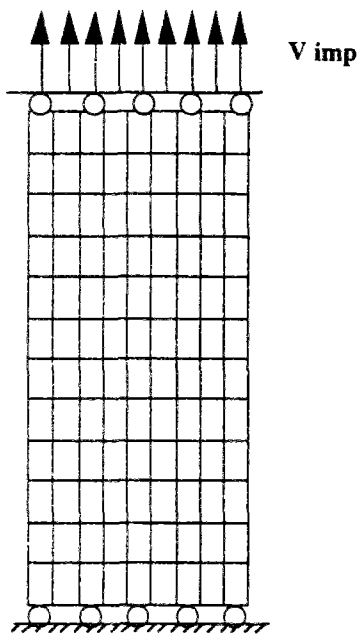


Fig. IV.13 - Exemple de discrétisation avec conditions aux limites utilisées pour la détermination des courbes contrainte-déformation.

IV.7 Conclusions :

Plusieurs modèles issus de la formulation de l'endommagement avec gradient développée dans le chapitre III sont proposés.

Nous pouvons décrire différents aspects de comportements endommageables avec ou sans adoucissement. Les modèles avec une seule variable d'endommagement décrivent des comportements différents en traction et en compression. Ceci permet donc de les appliquer lors de calculs de structures sous sollicitations multiaxiales.

Le phénomène unilatéral est décrit en utilisant deux variables d'endommagement de façon telle, qu'un endommagement en compression influence l'endommagement en traction sans que la réciproque soit vraie.

Enfin un modèle simple d'endommagement par fatigue est proposé. Ce modèle est une extension du modèle d'endommagement fragile proposé dans la section §IV.3. L'idée de base est de considérer que le seuil d'endommagement, en termes d'énergie volumique, diminue avec le nombre de cycles de chargement.

Dans le chapitre suivant, nous aborderons l'application à des calculs de structures où apparaissent des conditions de chargements multiaxiales. Nous mettrons en évidence le rôle joué par l'intervention du gradient de l'endommagement dans la modélisation.

CHAPITRE V

APPLICATIONS A L'ENDOMMAGEMENT DE STRUCTURES EN BETON.

V.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous proposons quelques applications de la modélisation du comportement endommageable de structures en béton.

L'objectif de cette étude est double. D'une part, elle propose de mettre en évidence les propriétés des modèles fondés sur la formulation avec prise en compte du gradient de l'endommagement : montrer la qualité prévisionnelle de ces modèles ainsi que le comportement des résultats face à la sensibilité au maillage. D'autre part, cette étude a pour but de valider les résultats de calculs quantitatifs par confrontation aux résultats des essais expérimentaux correspondants.

Les structures que nons considérons étant constituées de béton, les modèles que nous retenons sont ceux proposés dans les sections §IV.3 et §IV.4. Ces modèles sont en effet adaptés au comportement adoucissant de ce matériau.

Dans les cas de sollicitations monotones, ou cycliques sans inversion du signe de chargement, nous utilisons le modèle simple de la section §IV.3 avec une seule variable d'endommagement. Ceci est le cas dans la plupart des exemples de ce chapitre. Dans le cas où il y a inversion du signe du chargement, nous utilisons le modèle adapté à la description du phénomène unilatéral (section §IV.4). Ceci est le cas pour un exemple présenté en fin de chapitre.

Tout d'abord, nous présentons des résultats permettant de mettre en évidence la qualité prévisionnelle de l'initiation et de la progression de l'endommagement dans des structures initialement non fissurées. Des exemples de flexions illustrent notre propos et par la même occasion, nous suggerons une méthodologie permettant d'évaluer le facteur d'influence d'endommagement k.

Nous nous engageons ensuite dans l'étude de la sensibilité au maillage lors de la discrétisation par éléménts finis. Deux exemples sont présentés où, pour chacun, plusieurs maillages sont considérés dans les calculs.

Enfin, une série de calculs de structures en béton est donnée. Nous retrouvons des résultats d'essais de fendage et des résultats de calculs de structures axisymétriques.

Tout au long de ce chapitre, les résultats d'exemples quantitatifs sont, à chaque fois que cela se présente, confrontés aux résultats expérimentaux correspondants.

V.2 Calculs de structures initialement non fissurées. Exemple de la flexion :

Dans le béton, le processus de microfissuration commence dans la plupart des cas à partir d'une surface initialement non fissurée et évolue sur toute l'épaisseur de la structure jusqu'à la rupture complète (Hillerborg, 1983). Ainsi, la mécanique de l'endommagement, quand elle est appliquée au béton, doit être capable de prédire l'initiation et la formation de l'endommagement dans des structures initialement non fissurées. L'exemple ci-dessous illustre notre propos.

Deux tests qualitatifs de flexions sur deux poutres identiques sans entaille sont présentés. Le premier en flexion trois points et le second en flexion quatre points. Le modèle utilisé est celui développé dans la section §IV.3, où une seule variable d'endommagement est considérée. L'analyse est effectuée en calculs bidimensionnels et en déformations planes.

La figure V.1 présente la géométrie des poutres avec les conditions de sollicitations utilisées pour les deux calculs (les chargements se font à déplacements imposés).

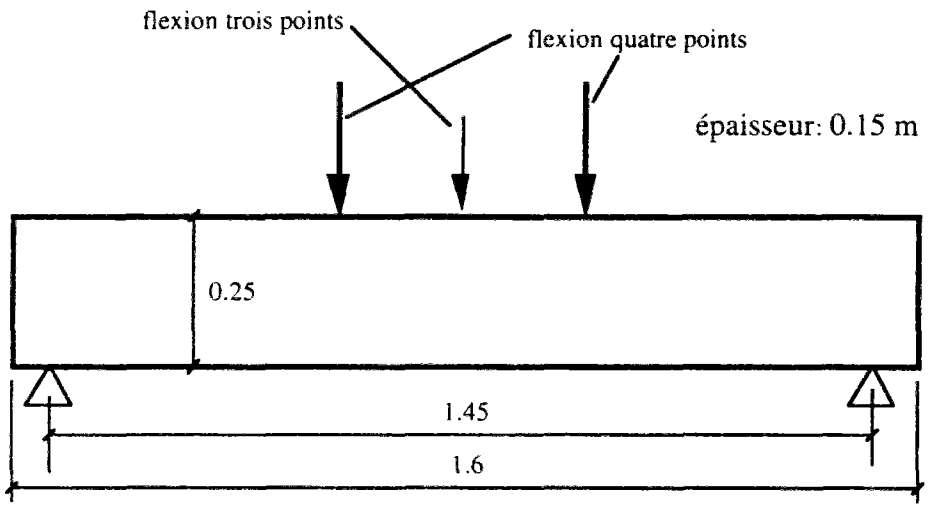


Fig. V.1 - Géométrie et sollicitations en flexion trois points et en flexion quatre points.

Sur la figure V.2 nous présentons la discrétisation de la poutre entière par éléments finis. En raison de la symétrie des problèmes, les calculs se font sur une demi-poutre.

Les caractéristiques du modèle utilisées pour les deux calculs sont : le module d'Young E = 27000 MPa et le coefficient de Poisson ν = 0.2, et concernant les caractéristiques du modèle : W = 0.5 10^{-4} MPa, M = -1, c = 0.1 10^{-2} MPa.s et le facteur d'influence d'endommagement, dont une méthodologie d'évaluation sera suggérée dans la section suivante, k = 0.2 MPa.mm^2.

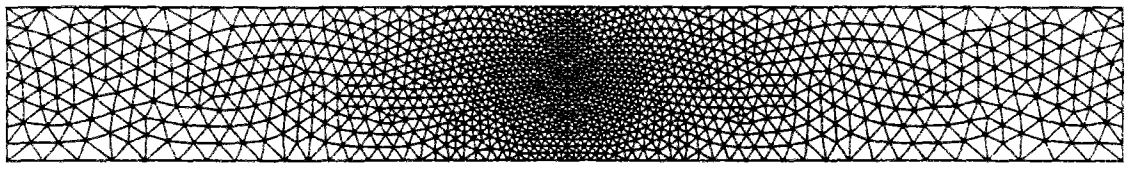


Fig. V.2 - Maillage utilisé pour des deux calculs de flexions.

Les réponses globales des deux tests sous forme de courbes "force-déplacement" sont superposées et présentées sur la figure V.3. Il est important de noter que ces courbes ne présentent pas d'instabilités de type "snap-back" (sauts) lors des phases adoucissantes pour les deux cas de sollicitations.

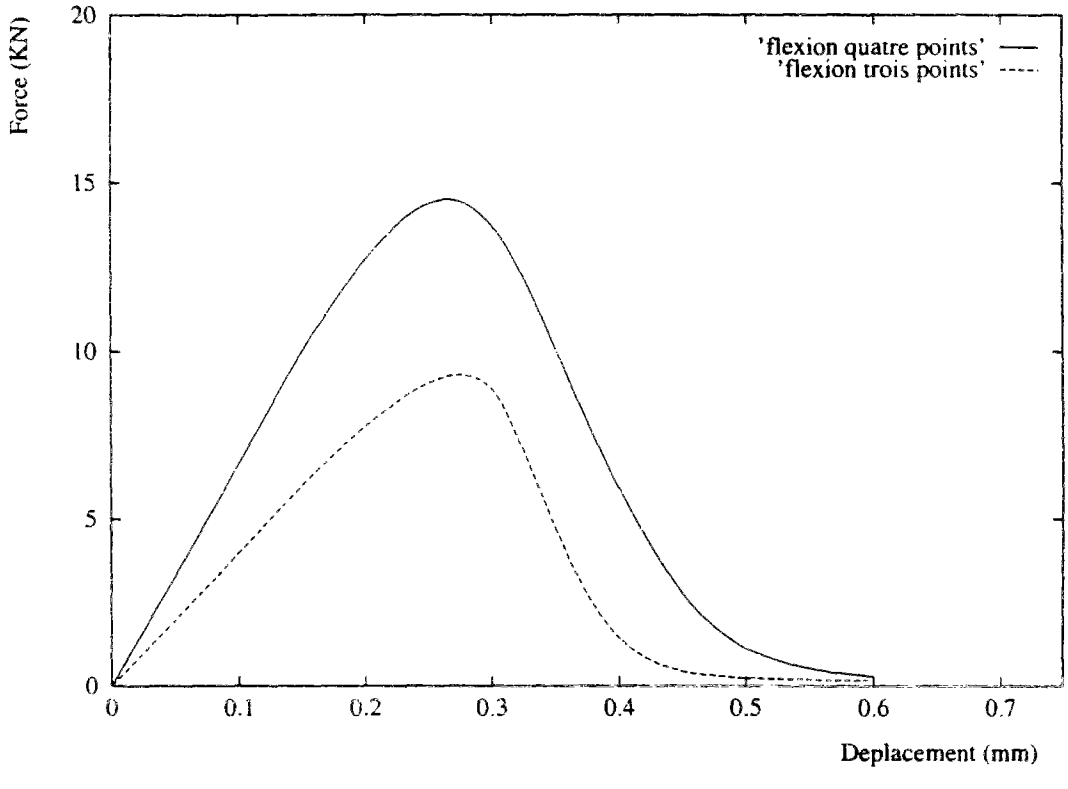


Fig. V.3 - Réponses globales "force-déplacement" pour les deux essais de flexion.

L'analyse des réponses locales de ces deux tests est intéressante sous deux aspects. D'une part pour montrer la prévision par le modèle de l'initiation de l'endommagement sur des structures sans fissure dans l'état initial. D'autre part pour comparer les évolutions de l'endommagement lorsque la nature de la sollicitation change.

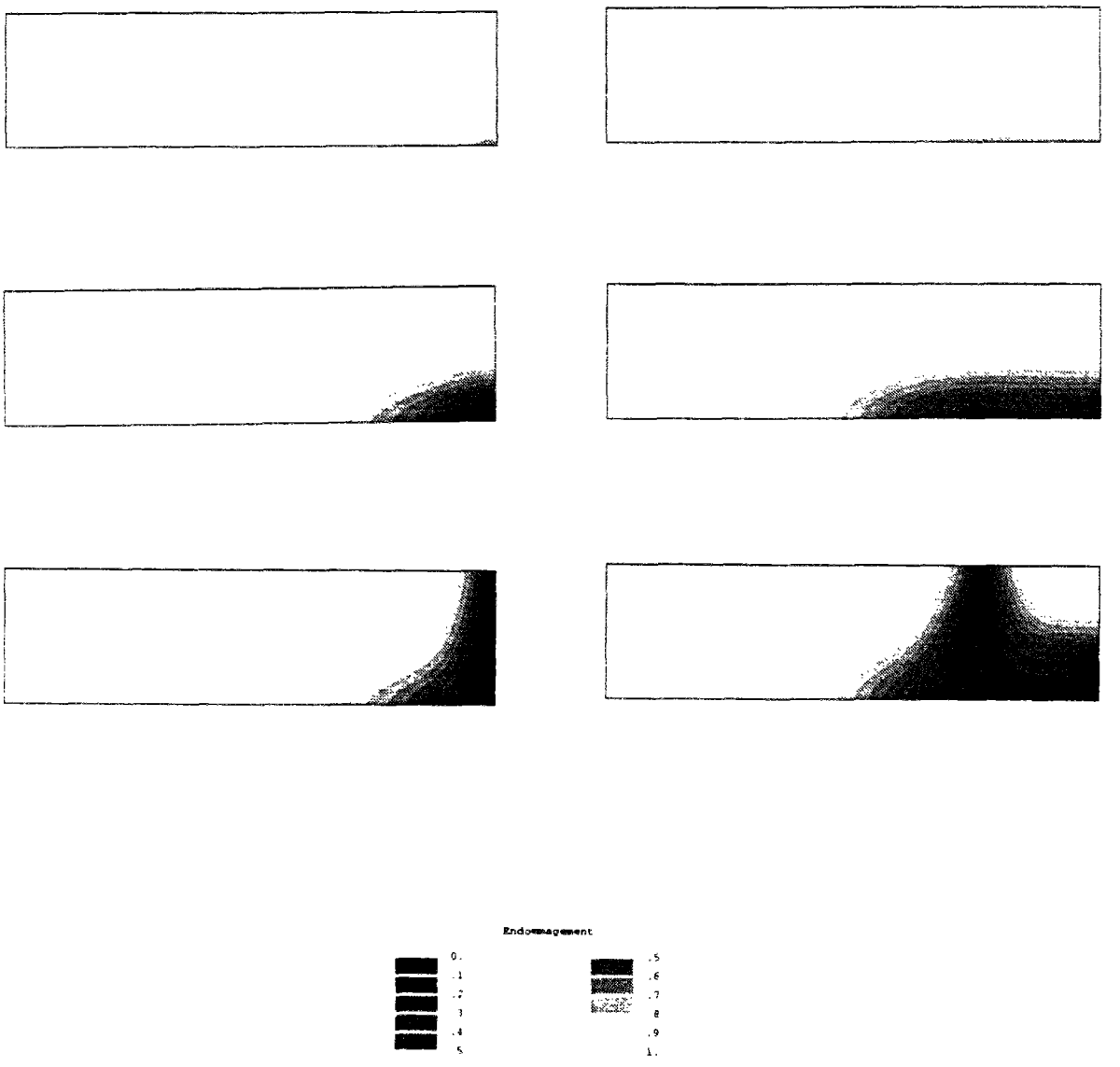


Fig. V.4 - Champs d'endommagement aux déplacements : 0.2 mm (a), 0.3 mm (b) et 0.6 mm (c) pour les deux flexions.

Afin d'illustrer ces propos, la figure V.4 présente une juxtaposition des champs d'endommagement obtenus, dans les deux tests, pour trois états de chargement. Le premier correspond à la phase d'initiation et la formation de l'endommagement (fig. V.4-a), le second correspond à des phases aux voisinages des résistances maximales des deux poutres (fig. V.4-b) et le troisième correspond aux situations au-delà du pic de chargement (post-pic) juste avant que les poutres soient entièrement endommagées sur leurs largeurs (fig. V4-c).

V.3 Une méthodologie permettant d'évaluer le facteur d'influence d'endommagement k :

Du fait que le facteur d'influence d'endommagement k est relié à la quantité gradient de l'endommagement **grad**β, celui-ci ne peut être évalué à partir de tests de sollicitations uniformes de tractions simples ou de compressions simples. En effet, tel que cela a déjà été mentionné dans les commentaires de la section §IV.6, la nature de ces sollicitations fait que le gradient de l'endommagement est nul en tout point du solide.

Afin de pouvoir évaluer le facteur k, on doit donc avoir recours à des sollicitations non uniformes mettant en évidence son influence sur l'évolution de l'endommagement.

Il s'agit ici de suggérer une méthodologie permettant d'évaluer ce facteur. La méthodologie que nous proposons est essentiellement basée sur l'observation. Elle consiste en à évaluer la dimension des zones endommagées prévues par le calcul par rapport à la dimension de la structure étudiée.

La nature même de la quantité **grad**β, à laquelle est relié k, permet de donner des éléments de réponses quant à la prévision de ces observations. Ainsi, dans un solide, la transmission de l'information sur l'endommagement, d'un point matériel à un autre point matériel, est d'autant plus grande que le facteur k est plus grand. Pour une plus grande valeur du facteur k, nous prévoyons donc une plus grande zone endommagée.

Afin d'illustrer notre propos, considérons l'exemple de calcul en flexion trois points sur la poutre étudiée dans la section précédente. Nous proposons d'analyser les réponses globales et surtout locales de cette poutre (étude des faciès des zones endommagées) en utilisant différentes valeurs du facteur d'influence d'endommagement k.

Les autres caractéristiques du matériau demeurent identiques pour tout les calculs. Elles prennent les valeurs utilisées dans la section précédente : E = 27000 MPa, $\nu = 0.2$, $c = 0.1\ 10^{-2}$ MPa.s, $W = 0.5\ 10^{-4}$ MPa et M = -1.

Les valeurs (en MPa.mm^2) du facteur k utilisées sont : 0.1, 0.2, 1.0, 2.0 et 5.0.

Les réponses globales "force-déplacement u" correspondants sont superposées et presentées par la figure V.5. Notons que plus la valeur du facteur k augmente, plus la résistance maximale de la poutre augmente.

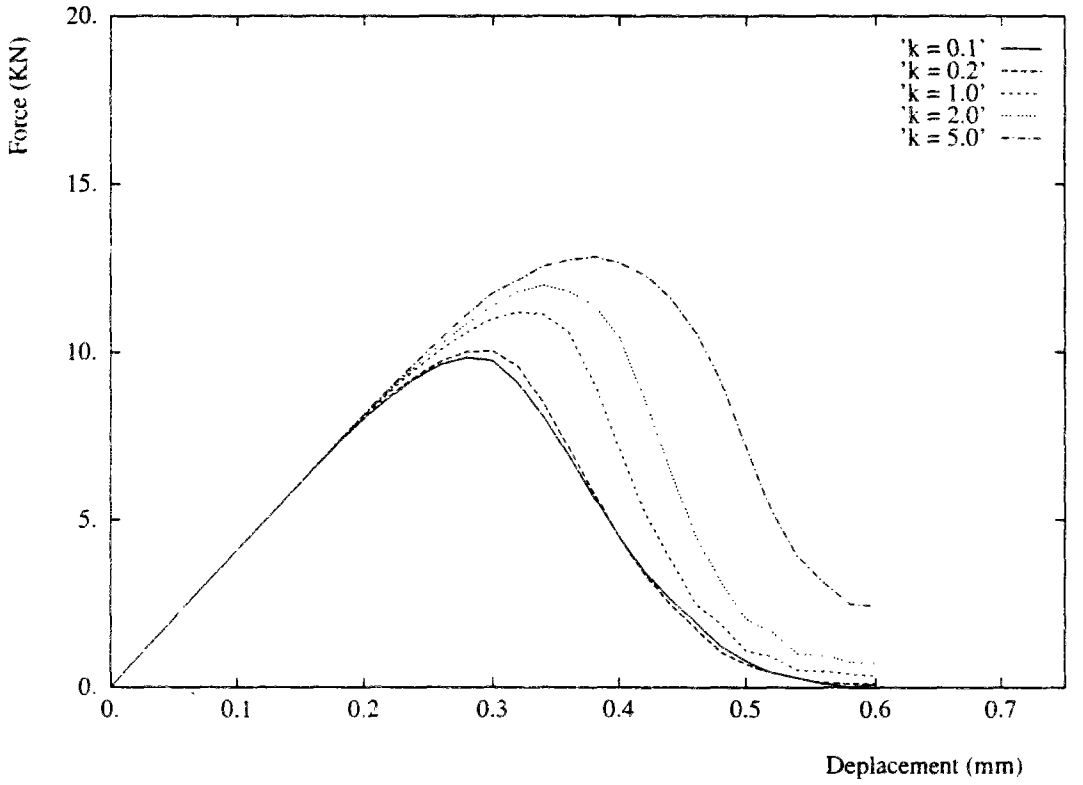


Fig. V.5 - Réponses globales des essai de flexions trois points pour différentes valeur du facteur k (en MPa.mm^2).

L'étude des réponses locales permettant l'analyse des faciès des zones endommagées en fonction du facteur k est abordée dans ce qui suit. Sur la figure V.6, nous présentons une juxtaposition des champs d'endommagement obtenus par les différents calculs pour un même déplacement imposé u = 0.6 mm.

Ces résultats confirment les prédictions théoriques relatives au gradient de l'endommagement citées plus haut. Pour des valeurs du facteur k plus grandes, de plus

grandes zones endommagées sont obtenues. On observe que les zones d'endommagement obtenues pour de grandes valeurs de k (1 ou 2) correspondent moins à l'observation expérimentale sur le béton que nous voulons décrire.

C'est pourquoi, les valeurs de k que nous utiliserons pour décrire le comportement des structures en béton seront voisins de 0.1 et 0.2 MPa.mm^2.

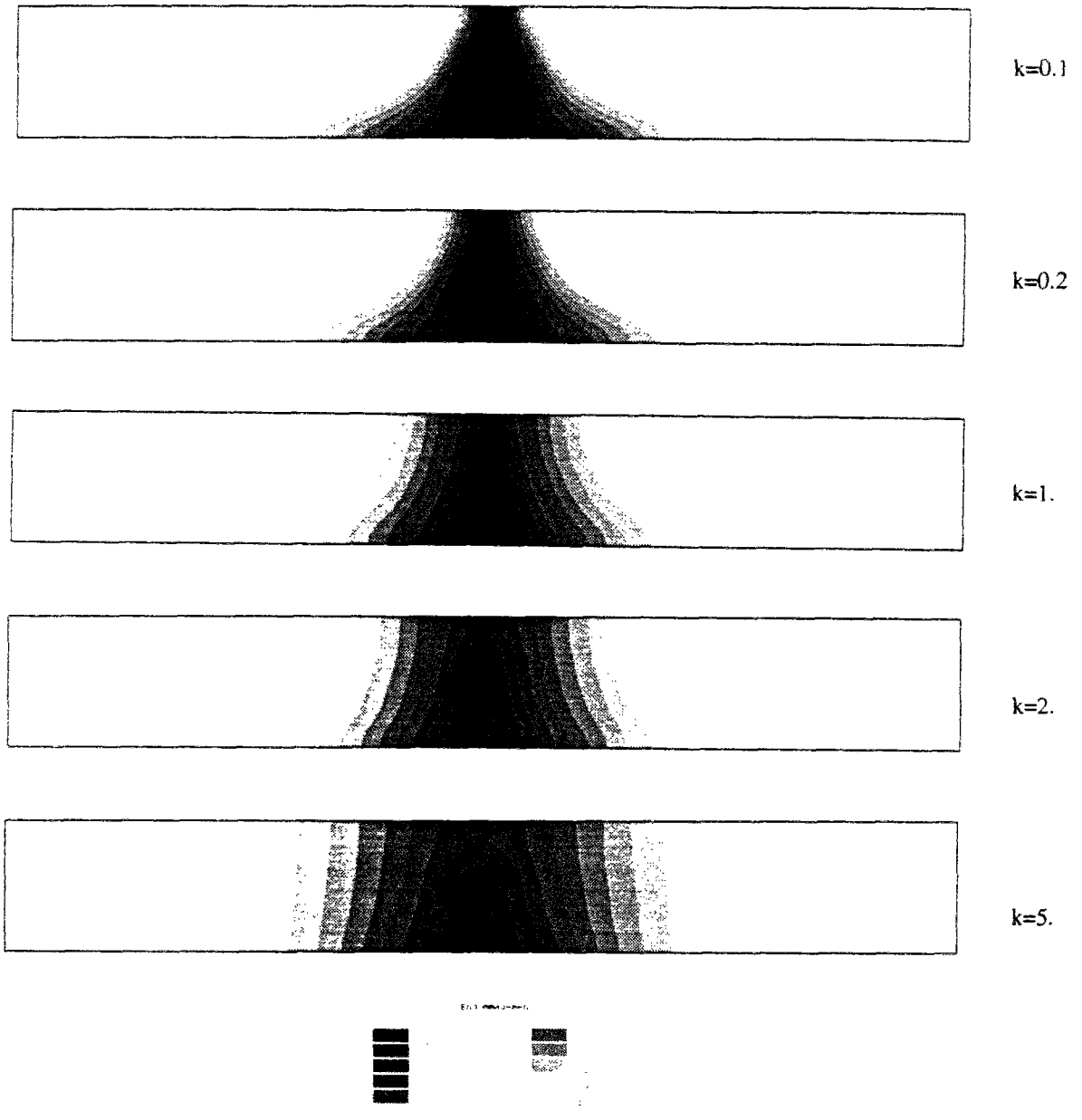


Fig. V.5 - Champs d'endommagements au déplacement imposé u = 0.6 mm pour différentes valeur du facteur k.

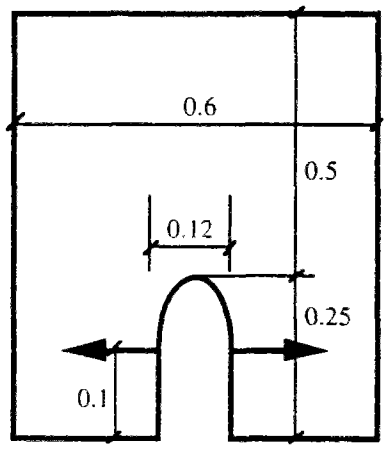
V.4 Etude de la sensibilité au maillage :

Cette section est consacrée à l'étude de l'influence du maillage, lors de la discrétisation par la méthode des éléments finis, sur les réponses du modèle d'endommagement. Nous choisissons de présenter deux exemples basés sur l'utilisation du modèle présenté dans la section §IV.3. Les chargements sont monotones.

Pour chaque exemple, le même problème physique est résolu avec differents maillages afin de voir si les solutions convergent ou non.

V.4.1 Premier exemple :

Cet exemple vise à modéliser un essai d'ouverture de fissure sur une plaque en béton avec entaille (de type CT). L'essai expérimental a été réalisé dans (Mazars et Walter, 1980). La figure V.7 présente la forme de la plaque ainsi que les sollicitations. Ces dernières se font à déplacement imposé.



épaisseur : 0.12 m

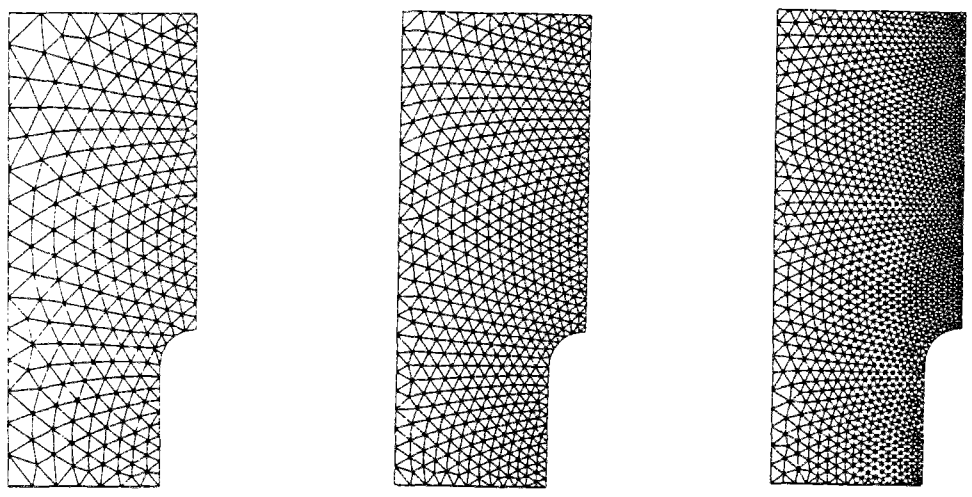
Fig. V.7 - Géométrie de la plaque entaillée en béton et conditions aux limites (Mazars et Walter, 1980).

La figure V.8 présente trois maillages utilisés pour les calculs. Seule la moitié de la structure est discrétisée pour ces calculs en raison de la symétrie du problème. Les discrétisations utilisent des éléments triangulaires. La première avec 485 éléments, la seconde avec 1170 éléments et la troisième avec 2950 éléments. L'analyse est faite en contraintes planes.

Les caractéristiques du béton utilisées sont : le module d'Young initial $E = 33000$ MPa, le coefficient de Poisson $\nu = 0.2$, et pour les autres paramètres propres au modèle, $W = 0.75\ 10^{-4}$ MPa, $M = -1$, $c = 0.5\ 10^{-2}$ MPa.s et le facteur d'influence de l'endommagement $k = 0.2$ MPa.mm^2.

Les trois réponses globales "force d'ouverture F-ouverture de l'entaille a" pour les trois maillages sont superposées avec en plus les résultats expérimentaux (Mazars et Walter, 1980). Elles sont présentées par la figure V.9. On peut noter l'objectivité de ces résultats. Il n'y a pas d'influence du maillage sur la réponse globale de la structure. On peut aussi noter la bonne prédiction de la résistance maximale de la plaque.

Afin d'illustrer la non dépendance au maillage de la réponse locale, nous choisissons de comparer les résultats données par le modèle pour une même situation de chargement. La figure V.10 présente les champs d'endommagement pour les trois maillages à la valeur de l'ouverture de l'entaille a = 0.28 mm.



maillage 1 maillage 2 maillage 3

Fig. V.8 - Trois maillages utilisés pour les calculs de la plaque CT.

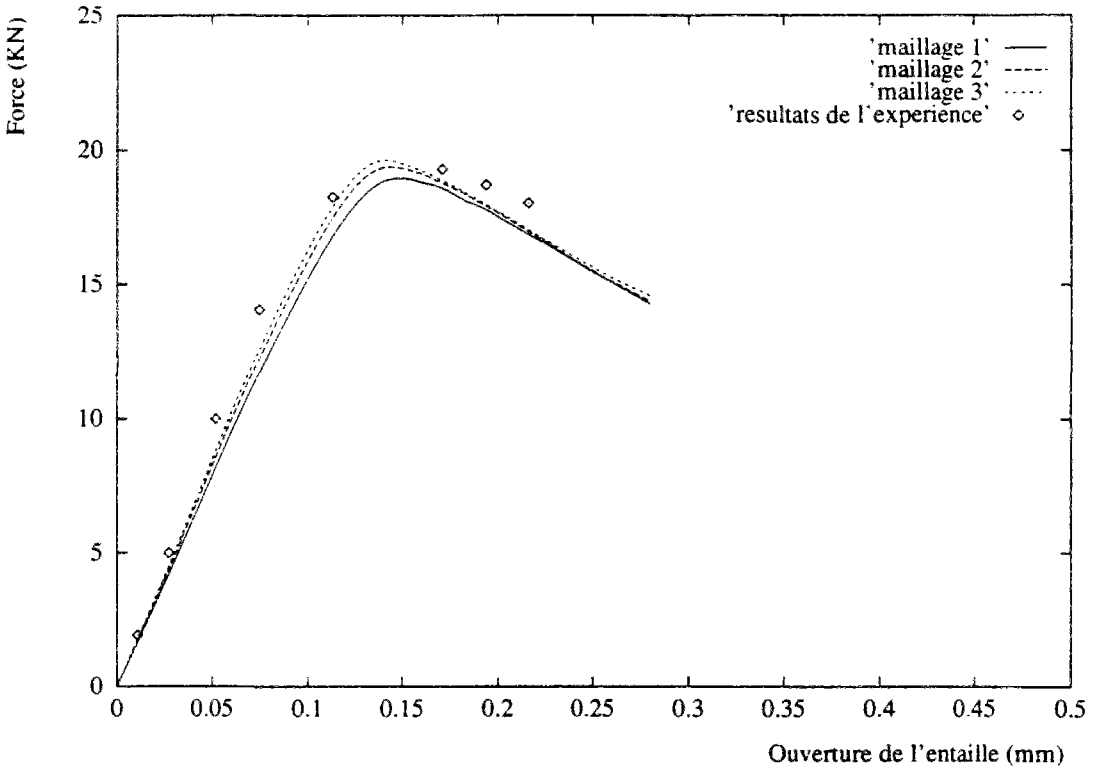


Fig. V.9 - Réponses globales de la plaque pour les trois maillages.
Superposition avec les résultats expérimentaux.

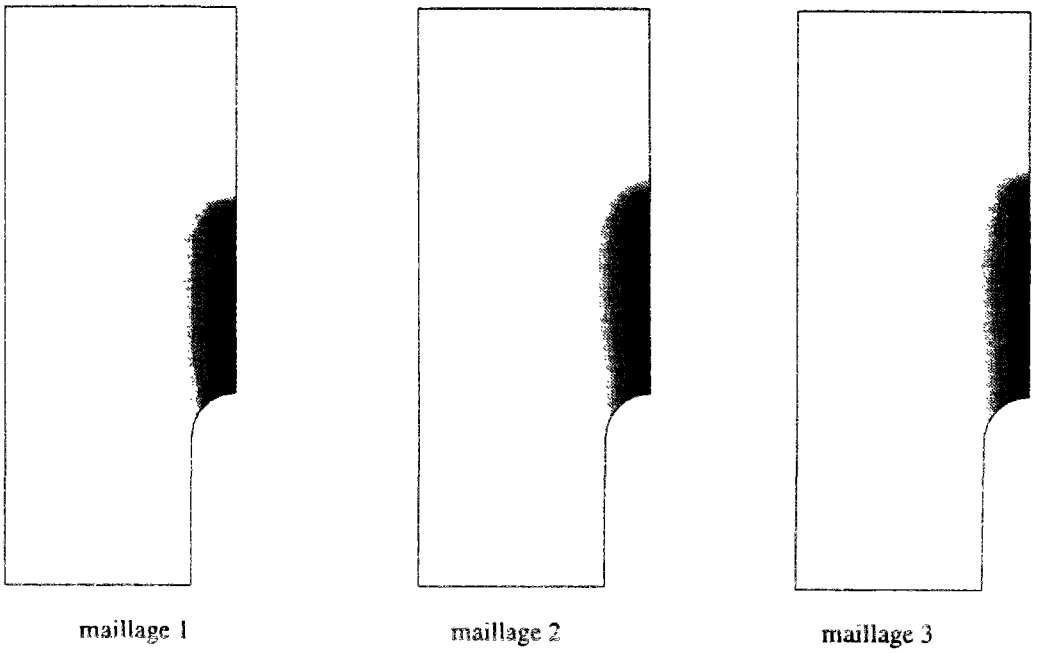


Fig. V.10 - Champs d'endommagements pour le trois maillages
à l'ouverture de l'entaille a = 0.28mm.

Là aussi, on peut noter que la réponse locale est indépendante du maillage.

V.4.2 Deuxième exemple :

Dans cet exemple, nous traitons la modélisation d'un essai de flexion trois points sur une poutre avec entaille. Dans la figure V.11, nous présentons la forme de cette poutre. La dimension caractéristique d est prise égale à 3.05 10^{-1} m. L'épaisseur de cette poutre est prise égale à 15.25 10^{-2} m.

Trois maillages sont utilisés pour les calculs (figure V.12). Dans ce cas aussi, nous ne traitons qu'une moitié de la structure en raison de la symétrie du probème. Les discrétisations utilisent des éléments triangulaires. La première avec 811 éléments, la seconde avec 1321 éléments et la troisième avec 2053 éléments. L'analyse est faite en déformations planes.

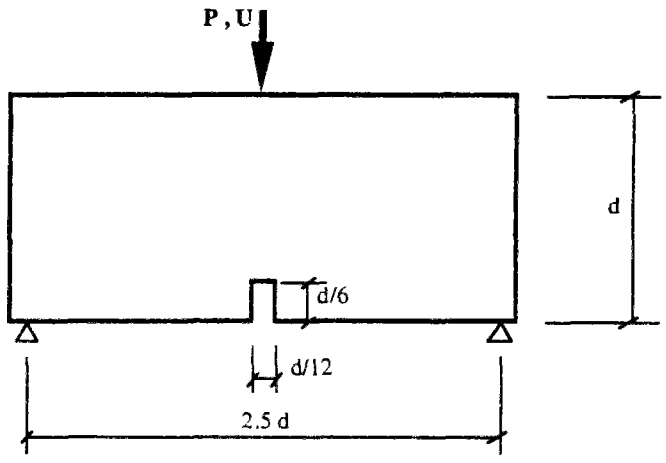
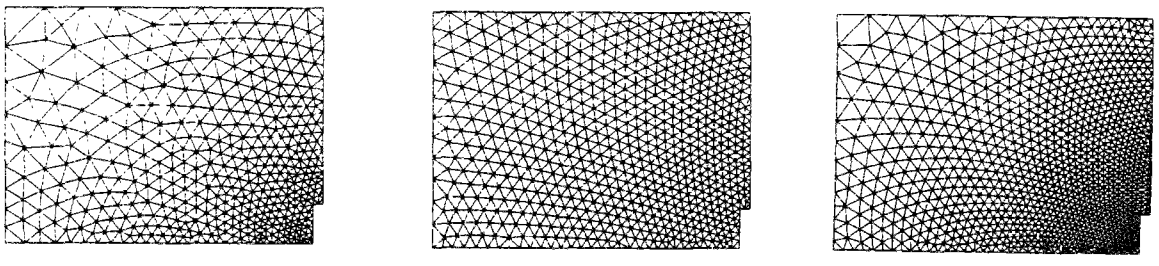


Fig. V.11 - Géométrie de la poutre avec entaille en flexion trois points.



maillage 1 maillage 2 maillage 3

Fig. V.12 - Trois maillages pour le calcul de flexion trois point.

Les caractéristiques du matériau (béton) utilisées sont : E = 27000 MPa, ν = 0.2, W = 0.3 10^{-4} MPa, M = 0.5, c = 0.2 10^{-2} MPa.s et k = 0.1 MPa.mm^2.

Les trois réponses globales "force-déplacement" sont superposées et présentées sur la figure V.13. On peut noter dans ce cas aussi l'objectivité de ces résultats. Il n'y a pas de dépendance du maillage sur la réponse globale.

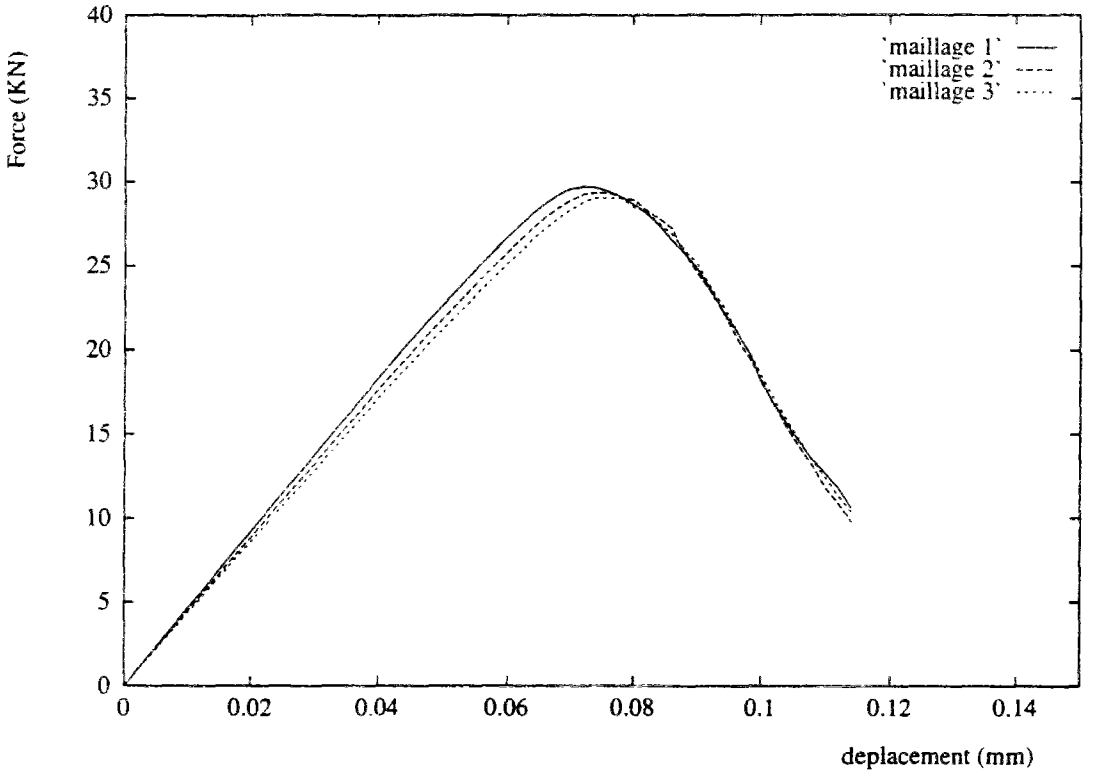
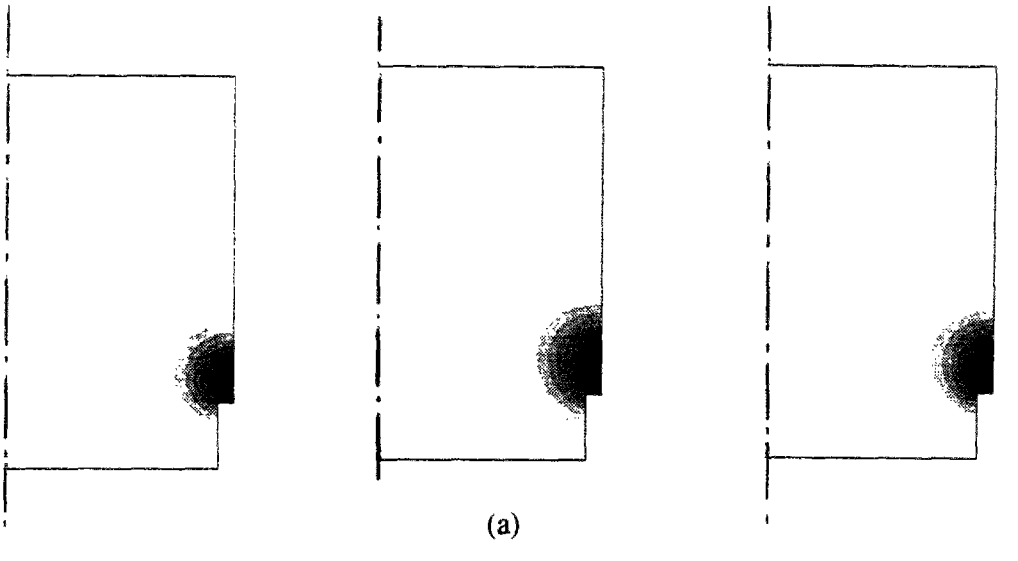
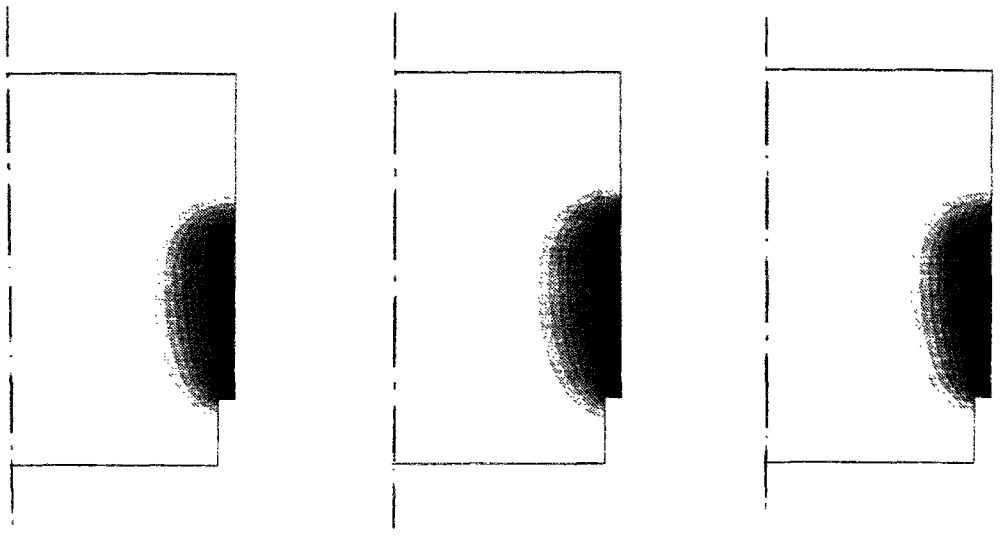


Fig. V.13 - Réponses globales pour les trois maillages.

Afin d'illustrer la non dépendance au maillage de la réponse locale, la figure V.14 présente les champs d'endommagement, prédits par le modèle pour les trois maillages, aux valeurs du déplacement : 8. 10^{-2} mm et 1.1 10^{-1} mm (voir fig. V.13).





maillage 1 maillage 2 maillage 3

(b)

Fig. V.14 - Champs d'endommagement pour les trois maillages aux déplacements : 8. 10^{-2} mm (a) et 1.1 10^{-1} mm (b).

V.5 Exemple d'un essai de fendage :

Dans cette section, nous présentons un résultat d'essai de fendage sur un cylindre entaillé en béton. Cet exemple permet de modéliser les essais expérimentaux de ce type établis dans (Rossi *et al.*, 1991). La géométrie de l'éprouvette est montrée sur la figure V.15. Le calcul se fait en déformations planes avec chargement en déplacement imposé.

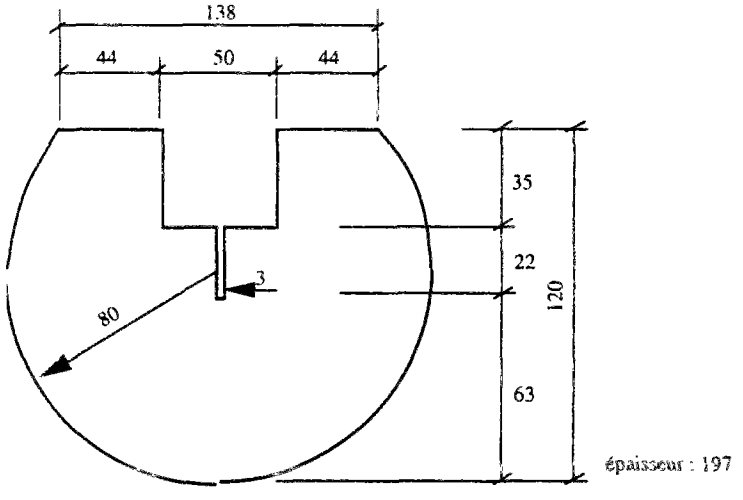


Fig. V.15 - Géométrie de l'éprouvette utilisée pour l'essai de fendage (Rossi *et al.*, 1991).

Les caractéristiques mécaniques utilisées sont celles données par les tests exprérimentaux : E = 36000 MPa, ν = 0.2. Les autres caractéristiques propres au modèle que nous utilisons sont : W = 0.37 10^{-4} MPa, M = -1, c = 0.2 10^{-2} MPa.s et k = 0.2 MPa.mm^2.

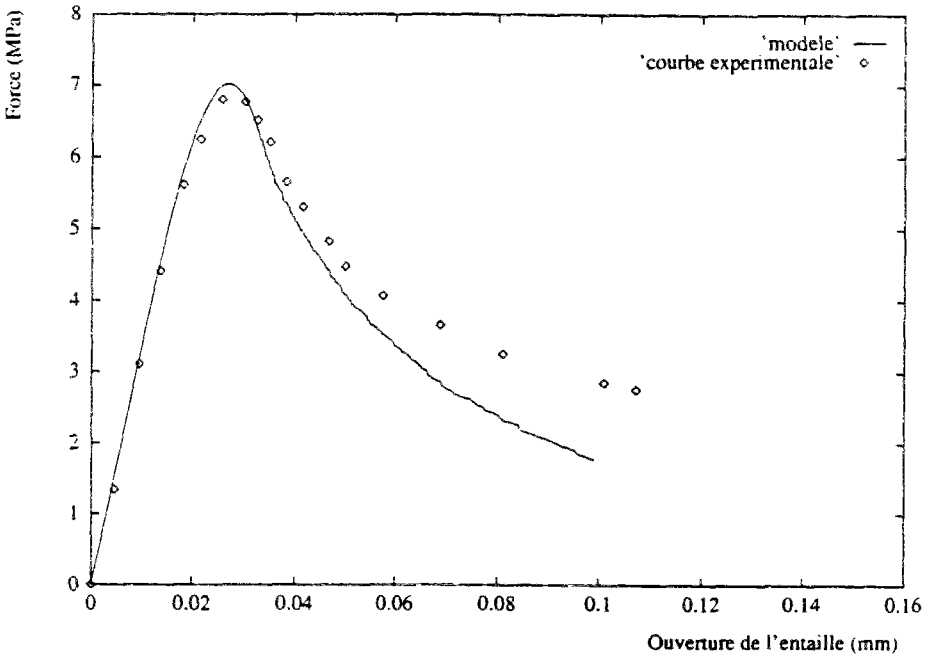


Fig. V.16 - Courbes "force-ouverture de l'entaille". Résultats numérique et expérimental.

La courbe "force-ouverture de l'entaille" obtenue est présentée sur la figure V.16. Elle est superposée à la courbe expérimentale. On peut observer une bonne prédiction de la résistance maximale de l'éprouvette.

V.6 Exemples d'endommagements de structures axisymétriques :

Dans un souci de validation en calculs axisymétriques, nous présentons deux exemples. L'un qualitatif et l'autre quantitatif.

V.6.1 Premier exemple :

Cet exemple qualitatif modélise le comportement d'un tube cylindrique épais en béton. Ce tube est sollicité par une pression, d'intensité croissante, à l'intérieur. Nous choisissons de représenter cette sollicitation à l'aide d'un déplacement imposé et uniforme δ.

Le maillage, relativement grossier (20 éléments), qui est utilisé pour le calcul est présenté sur la figure V.17. Le tube est d'épaisseur e = 50 mm, de rayon intérieur R_{int} = 100 mm et de rayon extérieur R_{ext} = 500 mm.

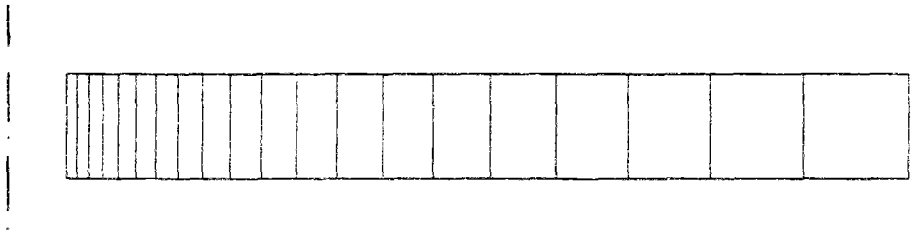


Fig. V.17 - Tube epais en béton. Maillage utilisé.

Les caractéristiques utilisées sont : E = 35000 MPa, ν = 0.2, W = 0.45 10^{-4} MPa, M = -1, c = 0.2 10^{-2} MPa.s et k = 0.1 MPa.mm^2.

Nous présentons sur la figure V.18 deux états du champ d'endommagement. Le premier correspond à la phase d'initiation, au déplacement δ = 0.03mm et le second correspond à une phase avancée de l'endommagement du tube, au déplacement δ = 0.15 mm.

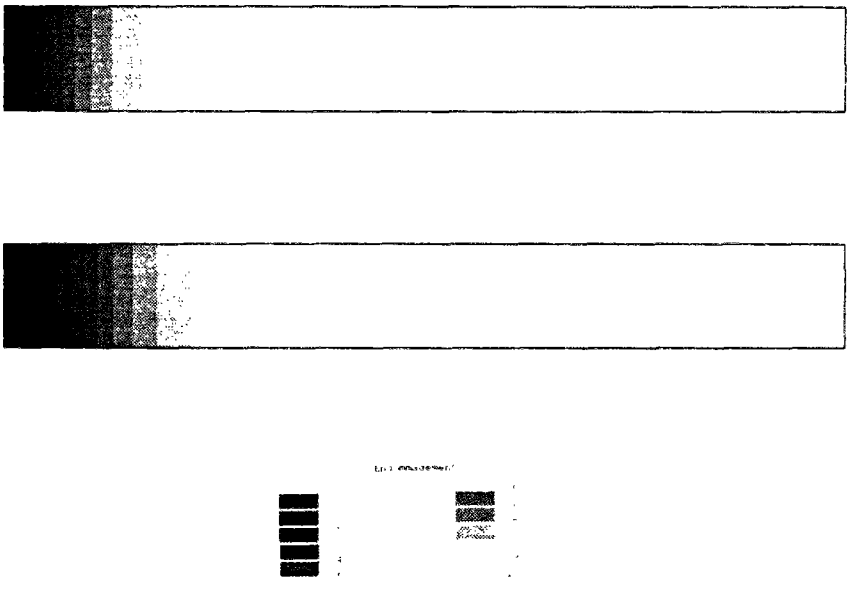


Fig. V.18 - Champ d'endommagement dans le tube épais :
à δ = 0.03 mm (a) et δ = 0.15 mm (b).

V.6.2 Deuxième exemple :

Cet exemple consiste à modéliser un essai de traction directe sur une éprouvette cylindrique particulière proposée dans (Luong, 1992).

La figure V.19 présente la géométrie de cette éprouvette avec les conditions de sollicitation.

Le résultat expérimental d'un tel essai est présenté sur la figure V.20. Les déformations sont données à partir de jauges implantées sur l'éprouvette.

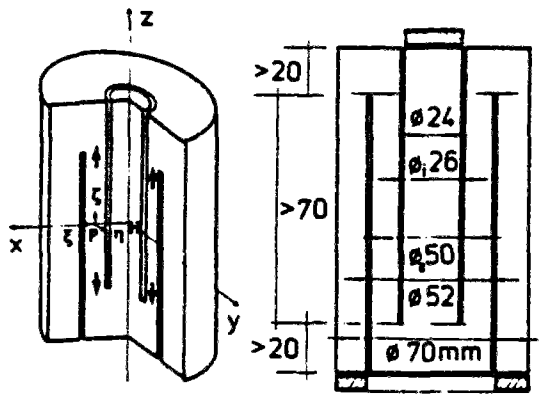


Fig. V.19 - Géométrie de l'éprouvette de traction directe (Luong, 1992).

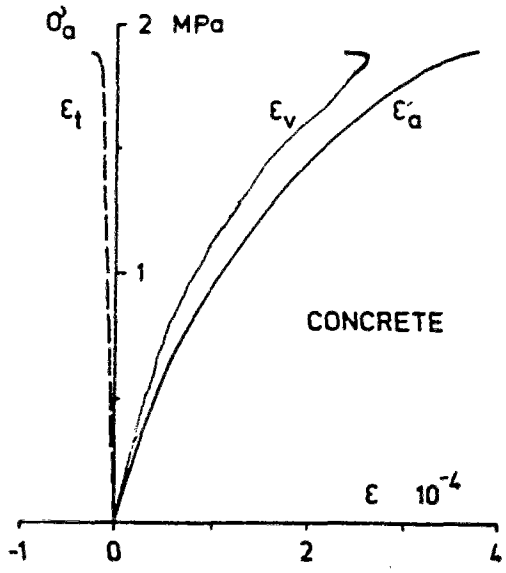


Fig. V.20 - Courbe containte-déformations expérimentales.
ε_a déformation axiale, ε_t déformation transversale, ε_V déformation volumique.

Le maillage utilisé pour le calcul est donné sur la figure V.21. Seule une moitié de l'éprouvette est considérée en raison de la symétrie du chargement. Le maillage utilise 1246 éléments triangulaires.

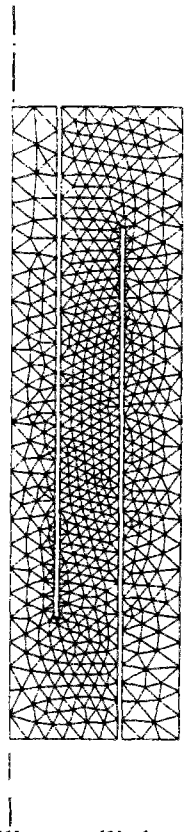


Fig. V.21 - Maillage utilisé pour le calcul de l'essai de traction directe.

Les caractéristiques utilisées pour le béton sont : E = 30000 MPa, ν = 0.2, W = 0.4 10^{-4} MPa, M = -1, c = 0.2 10^{-2} MPa.s et k = 0.1 MPa.mm^2.

La figure V.22 présente la courbe "contrainte moyenne - déplacement imposé". La contrainte moyenne est définie égale au rapport entre la charge appliquée et la section la plus sollicitée en traction dans l'éprouvette. Le chargement étant effectué à déplacement imposé lors du calcul, cette charge correspond donc à la réaction de l'éprouette sur la surface de sollicitation.

Il serait à présent intéressant d'analyser la réponse locale afin de détecter les zones fortement endommagées prédites par le modèle et voir si celles-ci correspondent à celles attendues par ce type d'essai.

La figure V.23 présente le champ d'endommagement, au début du mécanisme d'endommagement au déplacement imposé δ = 0.05 mm, (a), et à la rupture totale de l'éprouvette au déplacement δ = 0.0725 mm, (b). Nous constatons que les zones endommagées se localisent juste au milieu l'endroit le plus sollicité en traction uniaxiale. Ceci est en accord avec le but fixé pour le choix de cet essai (Luong, 1992).

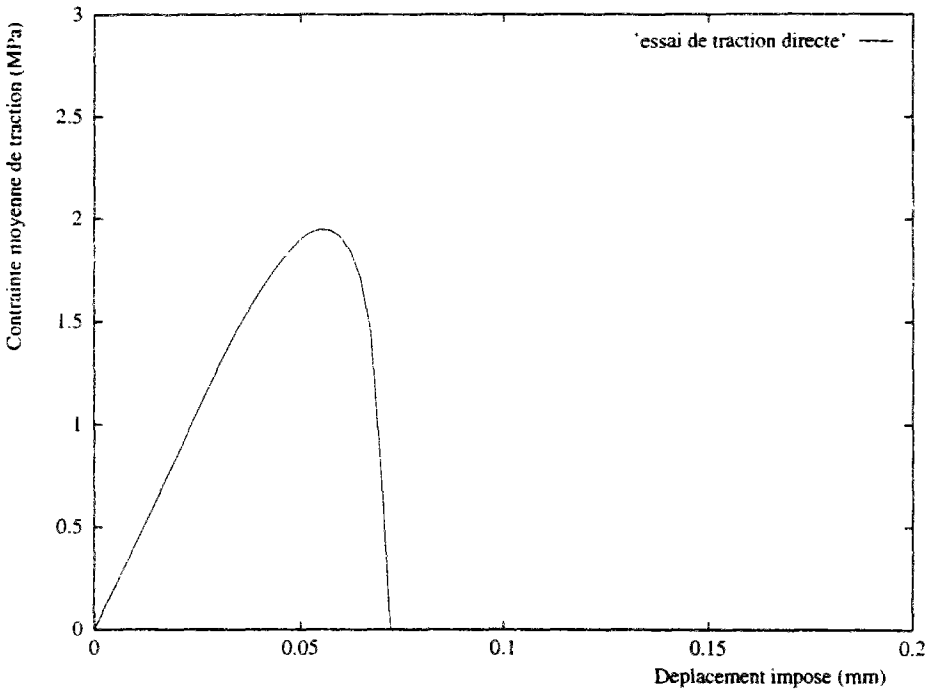


Fig. V.22 - Courbe contrainte moyenne - déplacement imposé.

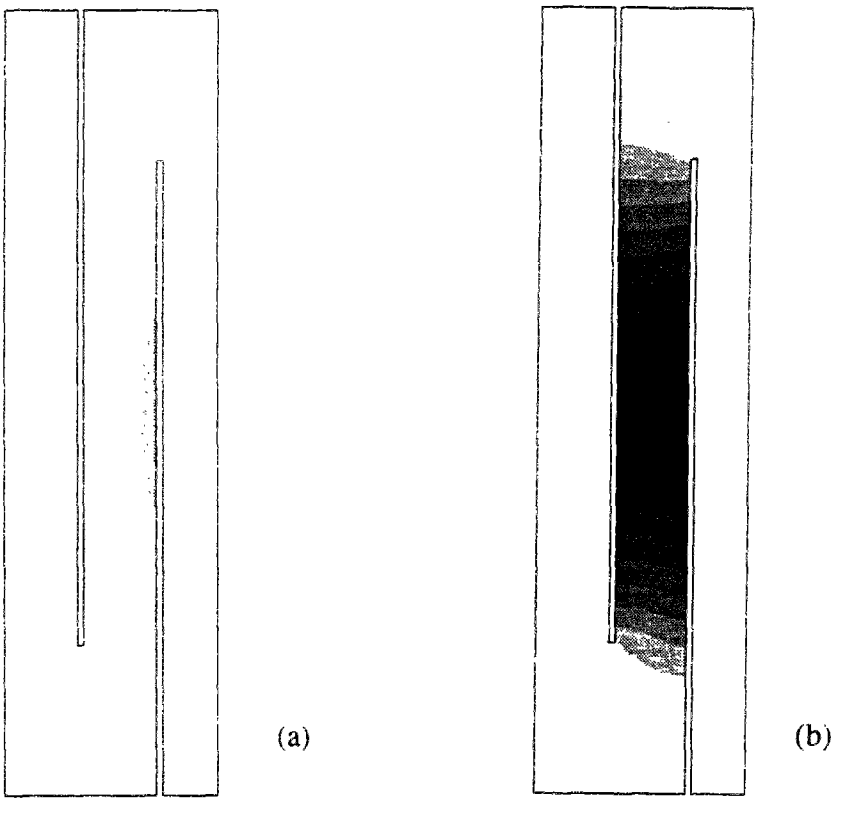


Fig. V.23 - Champ d'endommagement pour l'essai de traction directe : au déplacement $\delta = 0.05$ mm (a) et au déplacement $\delta = 0.0725$ mm (b).

La figure V.24 présente le maillage déformé obtenu par le calcul à la situation de rupture totale de l'éprouvette. Cette situation correspond au champ d'endommagement présenté sur la figure V.23(b).

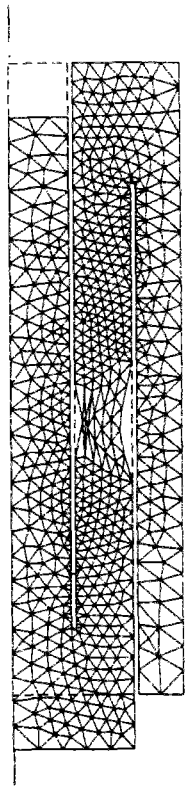


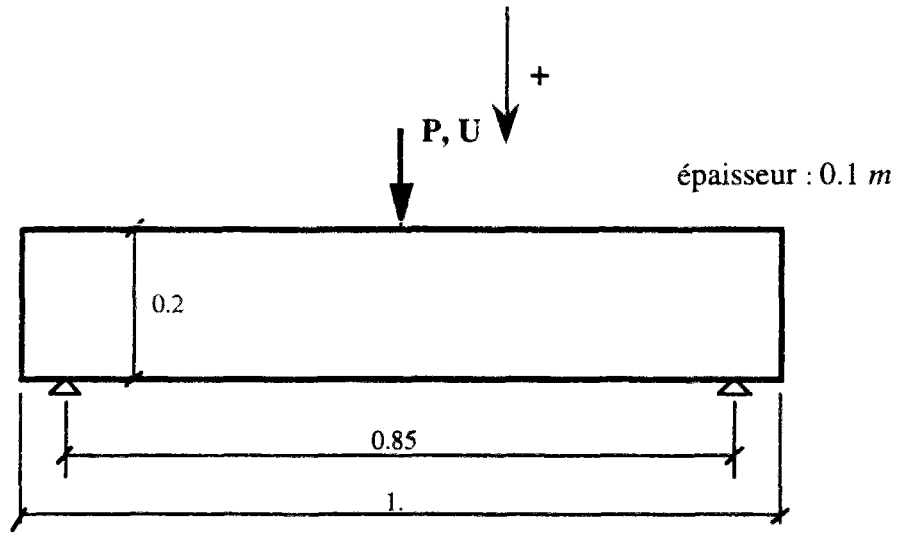
Fig. V.24 - Déformée du maillage juste avant rupture totale de l'éprouvette.
Au déplacement $\delta = 0.15$ mm

V.7 Application du modèle à deux variables d'endommagement :

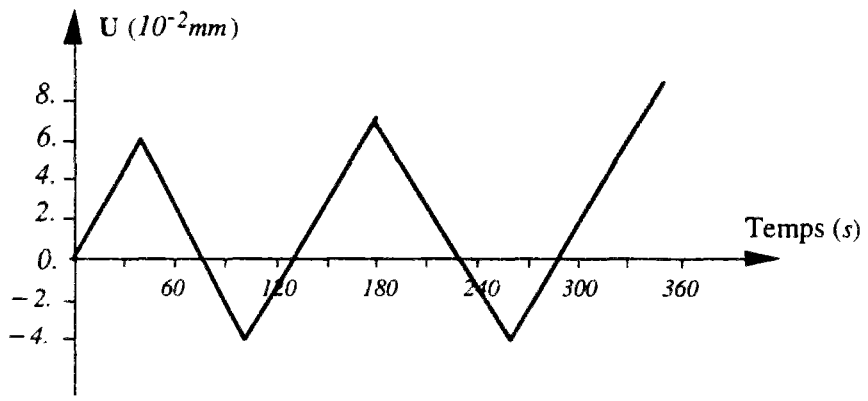
Dans cette section, nous proposons une application utilisant le modèle mettant en évidence la description du phénomène unilatéral développé dans la section §IV.4.

L'exemple traite la simulation d'un essai de flexion trois points sous sollicitations alternées avec inversion du signe du chargement.

La figure V.25 présente la forme de la poutre ainsi que l'histoire du chargement (à déplacement imposé) auquel elle est soumise.



(a)



(b)

Fig. V.25 - Flexion trois points alternée.
(a) géométrie de la poutre, (b) histoire du chargement.

La figure V.26 présente le maillage utilisé pour la simulation. La discrétisation utilise 986 éléments triangulaires. L'analyse se fait en déformation plane.

Les caractéristiques du béton utilisées sont : E = 30000 MPa, ν = 0.2, c_t = 0.002 MPa.s, c_c = 0.01 MPa.s, W_t = 0.1 10^{-5} MPa, W_c = 0.7 10^{-1} MPa, M_t = 0.6, M_c = 0.8 et k = 0.05 MPa.mm^2.

La réponse globale "force-déplacement" est présentée par la figure V.27. On peut noter une restauration de la rigidité de la poutre lors d'un changement du signe du chargement, d'un déplacement positif à un déplacement négatif suivant la convention de signe adoptée sur la figure V.25.

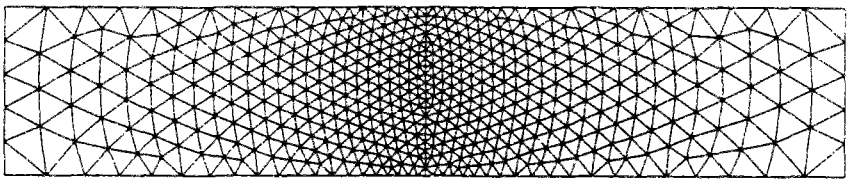


Fig. V.26 - Maillage utilisé pour la simulation de la flexion trois points alternée (986 éléments).

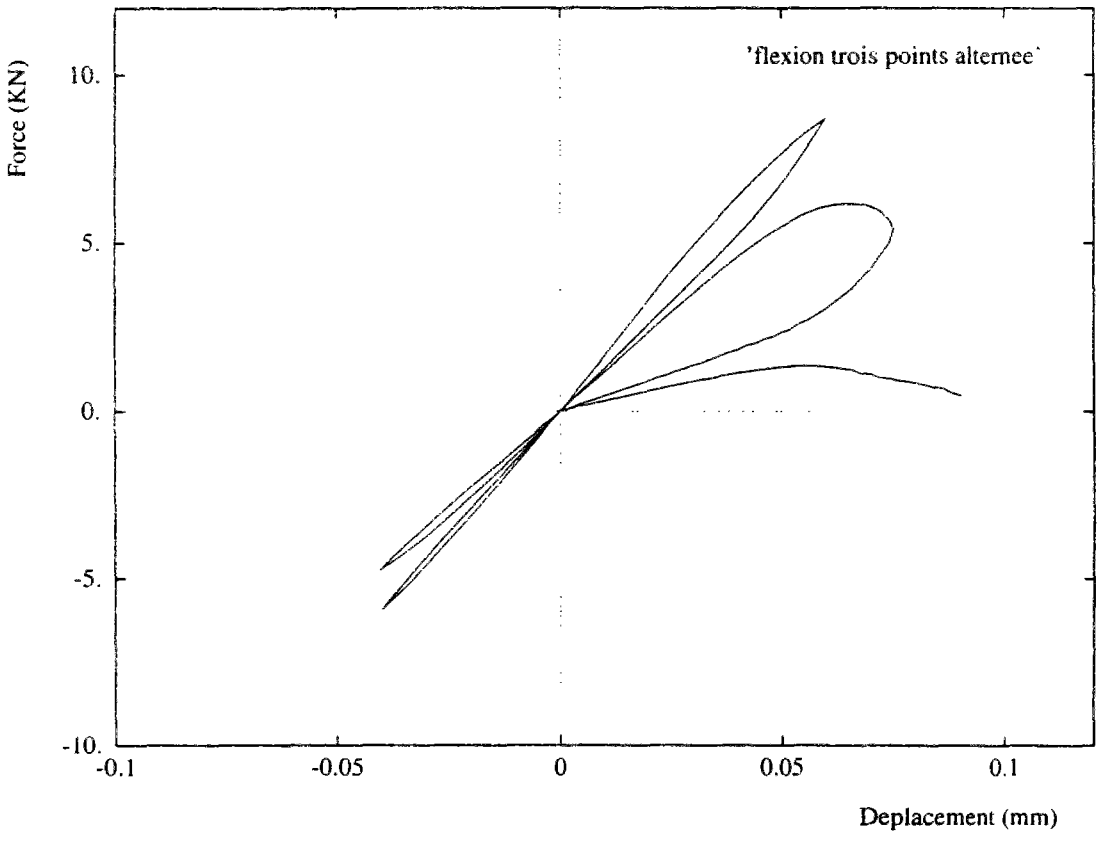


Fig. V.27 - Réponse globale "force-déplacement" de la poutre en flexion trois points alternée.

V.8 Commentaires et conclusions :

Les quelques exemples d'applications choisis lors de ce chapitre illustrent les possibilités de la modélisation issue de la formulation décrite dans le chapitre III. Nous avons montré sa bonne cohérence du point de vue de la mécanique.

Le modèle décrivant le comportement adoucissant proposé dans la section §IV.3 montre qu'il n'est pas affecté par une dépendance au maillage. Nous avons aussi montré que ce modèle, ne faisant intervenir qu'une seule variable d'endommagement, est capable de décrire l'endommagement de structures soumises à des sollicitations multiaxiales.

Par ailleurs, le modèle adapté à la description du phénomène unilatéral (section §IV.4) a montré son efficacité dans les cas de sollicitations cycliques avec inversion du signe du chargement.

Enfin, l'effet d'échelle de structures n'est pas abordé dans ce chapitre. Nous consacrons le chapitre suivant à l'étude de cette propriété importante des structures en béton.

CHAPITRE VI

GRADIENT DE L'ENDOMMAGEMENT ET EFFET D'ECHELLE DE STRUCTURES.

VI.1 Introduction :

L'effet d'échelle est une caractéristique importante du béton. Tel qu'il a été montré à travers quelques résultats expérimentaux dans le premier chapitre, on observe que la contrainte nominale maximale, déterminée à partir de la résistance maximale d'une structure, décroît lorsque les dimensions de cette structure augmentent (Bazant et Ozbolt, 1990 ; Mazars *et al.*, 1991 ; Biolzi *et al.*, 1994...). Cette propriété est particulièrement importante et doit être prise en compte par les modèles d'endommagement en calcul de structures.

La dimension relative entre les zones de microfissuration et la taille de la structure peut certainement expliquer cette propriété.

Plusieurs modèles proposés dans la littérature permettent de décrire l'effet d'échelle dans les structures en béton. Ces modèles sont en général regroupés en trois catégories d'approches : les approches probabilistes, par exemple dans (Rossi et Piau, 1988), les approches déterministes, et les approches mixtes faisant intervenir les deux approches précédentes, comme par exemple dans (Mazars, Pijaudier-Cabot et Saouridis, 1991).

Parmi les approches déterministes, nous trouvons les modèles non-locaux (section §II.7) et, en mécanique non linéaire de la rupture, le modèle de la fissure fictive (ficticious crack model, voir section II.2) tel que cela a récemment été étudié dans (Li et Bazant, 1994).

L'objectif de ce chapitre est de mettre en évidence la prédiction de l'effet d'échelle de structure par les modèles issus de la formulation de l'endommagement décrite dans le chapitre III. Le modèle utilisé tout au long de ce chapitre est celui proposé dans la section IV.3 pour la description du comportement adoucissant du béton.

L'analyse est faite sur des structures semblables soumises à des efforts extérieurs proportionnels. Nous montrons que l'effet d'échelle de structures peut être décrit. Ce résultat est d'abord souligné par un exemple numérique.

Nous tentons ensuite de donner des arguments théoriques permettant d'expliquer la prédiction par le modèle de l'effet d'échelle. Enfin, nous poursuivons l'exposé par des discussions sur les résultats issus de cette étude théorique en s'appuyant sur des calculs numériques utilisant la méthode des éléments finis.

VI.2 Exemple numérique confronté à un résultat expérimental :

L'exemple numérique que nous choisissons correspond à des essais de flexion trois points sur trois poutres entaillées de géometries semblables avec trois rapports d'homothétie géométrique différente : 1, 2 et 4. Ces exemples correspondent aux résultats expérimentaux donnés dans (Bazant et Ozbolt, 1990) et également présentés dans le chapitre II, section §II.7.2.

La figure VI.1 présente la plus petite poutre que nous considérons comme structure de référence, avec un rapport d'homothétie géométrique égal à 1. La largeur de cette poutre est d = 7,62 10^{-2} m et son épaisseur b = 3,81 10^{-2} m. Les deux autres poutres sont semblables avec des rapports d'homothétie 2 et 4 (toutes les dimensions, y compris l'épaisseur b, sont multipliées par ces rapports d'homothétie).

La profondeur de l'entaille est, pour chaque poutre, égale au sixième de la largeur de poutre.

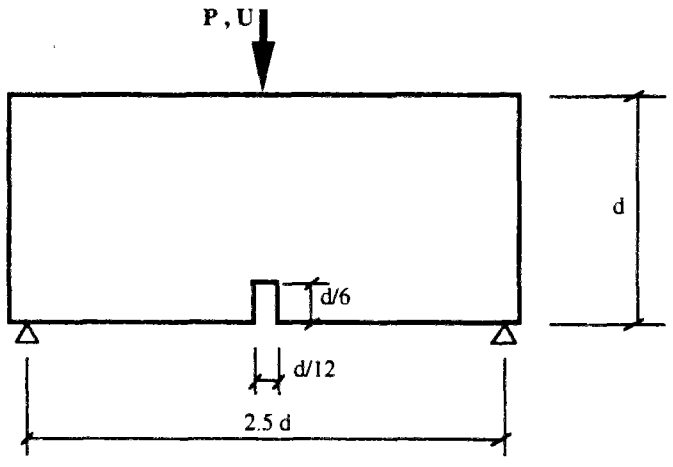


Fig. VI.1 - Géométrie de la plus petite poutre en flexion trois points (Bazant et Ozbolt, 1990).

Les caractéristiques du matériau utilisées pour l'application du modèle (§IV.3) sont : les caractéristiques mécaniques expérimentales (Bazant et Ozbolt, 1990), E = 35000 MPa et ν = 0.18, et les caractéristiques propres au modèle, c = 0.2 10^{-2} MPa.s, W = 0.42 10^{-4} MPa et M = -1. Pour les calculs de structure, la valeur du facteur d'influence de l'endommagement choisie est k = 0.1 MPa.mm^2.

Avec ces caractéristiques, la contrainte maximale en traction pouvant être supportée par le béton est f_t = 3.27 MPa tel que le montre la courbe de comportement sur la figure VI.2. Cette valeur de f_t est en accord avec celle obtenue expérimentalement.

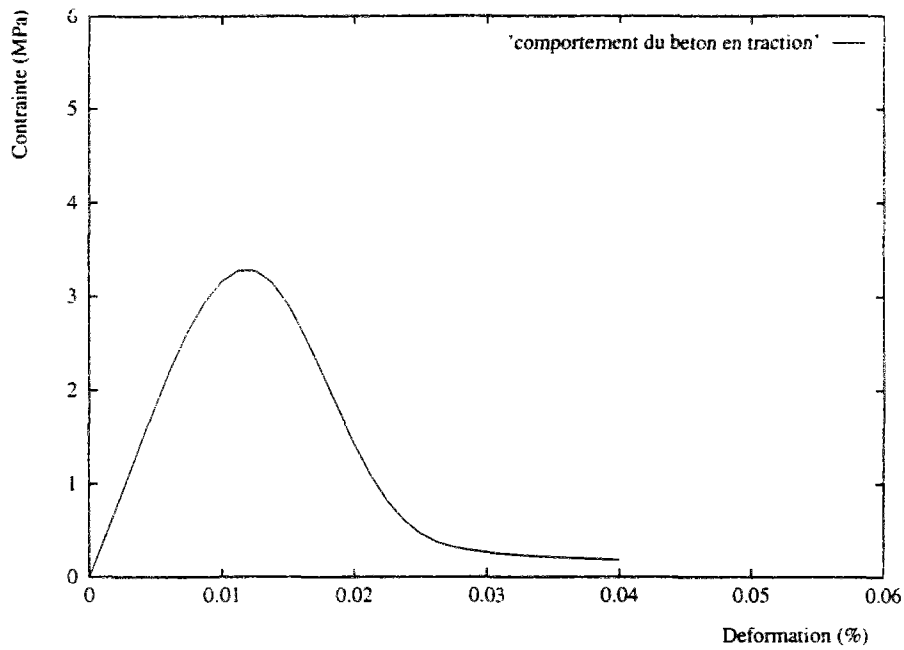


Fig. VI.2 - Comportement du béton en traction.

En raison de la symétrie du problème, seule une moitié de la structure est considérée pour les calculs. La figure VI.3 présente le maillage d'une moitié de la plus petite poutre. Les maillages des deux autres poutres sont semblables avec des rapports d'homothétie 2 et 4. Tous les calculs se font en bidimensionnel avec l'hypothèse des déformations planes.

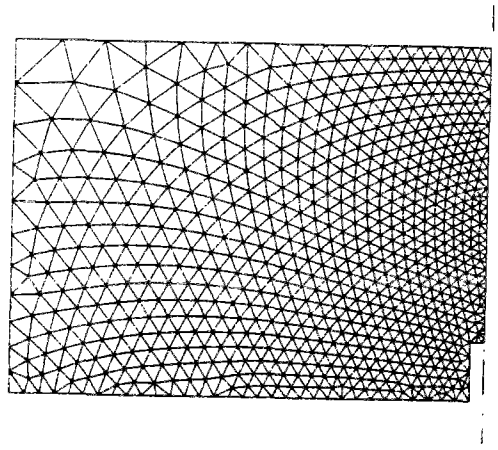


Fig. VI.3 - Maillage utilisé pour le calcul de la plus petite poutre.

Les réponses globales "force-déplacement" correspondant aux trois poutres en flexion sont présentées sur la figure VI.4. Nous ne pouvons pas les comparer avec les courbes expérimentales. En effet, elle ne sont pas fournies dans la référence décrivant les expériences que nous utilisons.

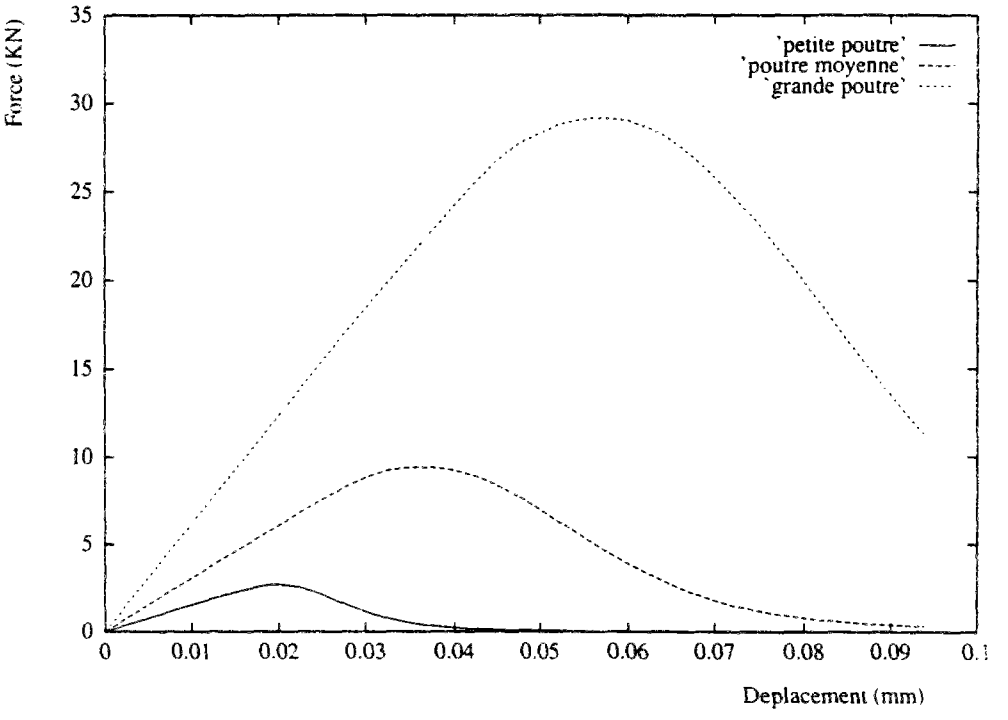


Fig. VI.4 - Flexion trois points. Réponses globales "force-déplacement".

Les charges maximales sont évaluées à partir de chaque calcul et la valeur de la contrainte nominale maximale est définie comme dans (Bazant et Ozbolt, 1990), par l'expression :

$$\sigma_N = \frac{P_\delta}{bd\delta^2}, \qquad \text{(VI.1)},$$

où P_δ est la charge maximale supportée par la poutre de rapport d'homothétie δ.

Les contraintes nominales maximales, expérimentales et calculées, sont présentées et superposées sur la figure VI.5. Une bonne corrélation avec l'expérience est observée. La contrainte nominale calculée décroît lorsque la taille de la poutre croît.

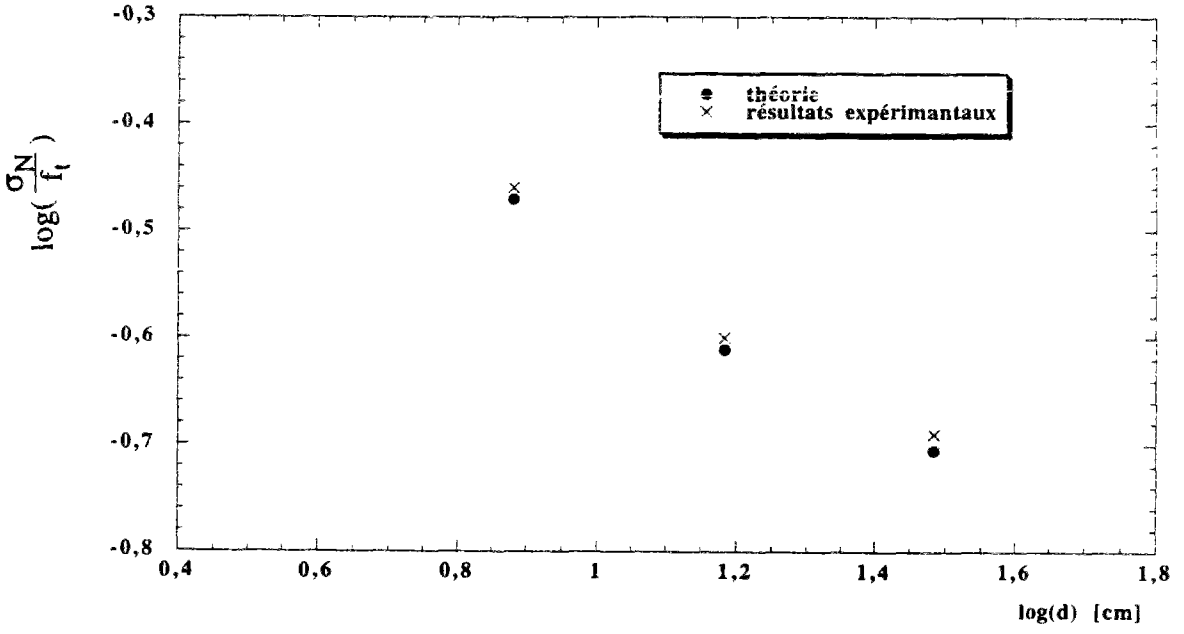


Fig. VI.5 - Contrainte nominale maximale σ_N en fonction de la largeur d pour les trois poutres.

VI.3 Quelques arguments théoriques sur l'effet d'échelle de structures :

Dans cette section, nous tentons d'apporter quelques arguments, à travers l'analyse théorique des équations du mouvement, pour expliquer l'effet d'échelle de structures avec le modèle d'endommagement utilisé dans la section précédente.

Dans la présente analyse, les comportements de deux structures, géométriquement semblables et de tailles différentes sont comparés. Le but est de démontrer que leurs contraintes nominales maximales ne peuvent être que différentes.

Dans tout ce qui suit, nous considérons que les évolutions sont quasi-statiques avec de faibles vitesses de chargement. En effet, pour l'analyse de l'effet d'échelle, l'intérêt est essentiellement porté sur les charges maximales supportées par les structures.

Soit Ω_X un domaine occupé par une structure dans un système de coordonnées X, nous considérons une deuxième structure géométriquement semblable, avec δ pour rapport d'homothétie géométrique, occupant un domaine Ω_Y dans un système de coordonnées Y (fig. VI.6).

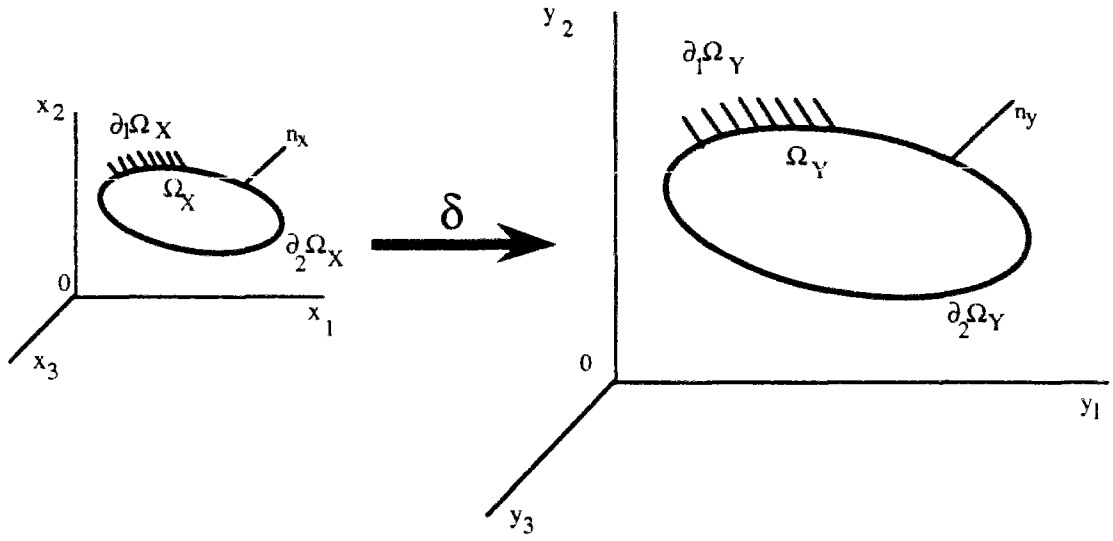


Fig. VI. 6 - Deux structures géométriquement semblables.

La transformation du système Y au système X est alors donnée par la fonction linéaire :

$$Y = \delta.X, \qquad \text{(VI.2).}$$

Nous considérons que les caractéristiques des matériaux "E, ν, W, M et c" sont identiques dans les deux structures excepté pour le facteur d'influence de l'endommagement qui est k_x dans la structure de référence Ω_X et k_y dans la plus grande structure Ω_Y.

Les équations du mouvement dans les deux structures sont (éqs. (IV.12) et (IV.13)) :

$$\operatorname{div}\left\{ \beta_x(2\mu\varepsilon_x + \lambda(\operatorname{tr}[\varepsilon_x])\mathbf{I}_d) \right\} + \mathbf{f}_x = 0, \quad \text{dans } \Omega_X,$$

$$\mathbf{U}_x = \mathbf{U}_{dx}, \quad \text{sur } \partial_1\Omega_X, \qquad \sigma_x.\mathbf{n}_x = \mathbf{F}_x, \quad \text{sur } \partial_2\Omega_X, \qquad \text{(VI.3),}$$

$$c\dot{\beta}_x - k_x\Delta_X\beta_x + \partial I(\beta_x) + \partial I_-(\dot{\beta}_x) \ni -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1-\beta_x}{1-M\beta_x}\right)\left\{ 2\mu\operatorname{tr}[\varepsilon_x^+.\varepsilon_x^+] + \lambda(\langle\operatorname{tr}[\varepsilon_x]\rangle^+)^2 \right\} + W, \text{ dans } \Omega_X,$$

$$k_x\frac{\partial\beta_x}{\partial\mathbf{n}_X} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega_X, \qquad \beta_x(\mathbf{x},0) = \beta_{0x}(\mathbf{x}), \quad \text{dans } \Omega_X, \qquad \text{(VI.4),}$$

$$\mathrm{div}\left\{ \beta_y(2\mu\varepsilon_y + \lambda(\mathrm{tr}[\varepsilon_y])\mathbf{I}_d) \right\} + \mathbf{f}_y = 0, \quad \text{dans } \Omega_Y,$$

$$\mathbf{U}_y = \mathbf{U}_{dy}, \quad \text{sur } \partial_1\Omega_Y, \qquad \sigma_y.\mathbf{n}_y = \mathbf{F}_y, \quad \text{sur } \partial_2\Omega_Y, \qquad \text{(VI.5)},$$

$$c\dot{\beta}_y - k_y\Delta_Y\beta_y + \partial I(\beta_y) + \partial I_-(\dot{\beta}_y) \ni -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1-\beta_y}{1-M\beta_y}\right)\left\{ 2\mu\mathrm{tr}[\varepsilon_y^+.\varepsilon_y^+] + \lambda(\langle \mathrm{tr}\varepsilon_y\rangle^+)^2 \right\} + w, \text{ dans } \Omega_Y,$$

$$k_y\frac{\partial\beta_y}{\partial\mathbf{n}_Y} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega_Y, \qquad \beta_y(\mathbf{y},0) = \beta_{0_y}(\mathbf{y}), \quad \text{dans } \Omega_Y, \qquad \text{(VI.6)},$$

où Δ_X et Δ_Y sont les Laplaciens dans les systèmes de coordonnées X et Y respectivement.

Les déplacements $\mathbf{U}_{dx}$ et $\mathbf{U}_{dy}$ sont donnés sur les frontières $\partial_1\Omega_X$ et $\partial_1\Omega_Y$ respectivement.

Les frontières sont telles que $\partial\Omega_{1X} \cup \partial_2\Omega_X = \partial\Omega_X$ avec $\partial\Omega_{1X} \cap \partial\Omega_{2X} = \varnothing$ et $\partial\Omega_{1Y} \cup \partial\Omega_{2Y} = \partial\Omega_Y$ avec $\partial\Omega_{1Y} \cap \partial\Omega_{2Y} = \varnothing$.

Dans un but de simplicité, nous négligeons les densités de forces volumiques ($\mathbf{f}_x = 0$ et $\mathbf{f}_y = 0$). Les sollicitations externes dans les deux structures sont dues aux actions surfaciques et aux conditions cinématiques variables.

Le problème que nous nous proposons de résoudre est le suivant : nous cherchons pour quelle valeur de k_y et dans quelles conditions nous pouvons obtenir les mêmes contraintes nominales maximales dans les deux structures.

Avant d'avancer dans le raisonnement, nous donnons une définition utile pour ce qui va suivre.

Soient Ω_X et Ω_Y deux structures, telles que définies plus haut. La relation (VI.2) est en effet une bijection : pour tout point $\mathbf{x} \in \Omega_X$, il existe un et seulement un point $\mathbf{y} \in \Omega_Y$ tel que $\mathbf{y} = \delta\,\mathbf{x}$, et la réciproque est vraie.

<u>Définition</u> : Deux fonctions f_x et f_y definies dans deux structures Ω_X et Ω_Y respectivement sont similaires si et seulement si, pour tout point $\mathbf{x} \in \Omega_X$ et son point correspondant $\delta\mathbf{x} = \mathbf{y} \in \Omega_Y$, on a $f_x(\mathbf{x}) = f_y(\mathbf{y})$.

Prouvons le résultat suivant :

Théorème 1 : Soient les deux structures Ω_X et Ω_Y précédemment définies telles que les conditions suivantes sont vérifiées :

- les frontières des deux structures sont telles que,

$$\partial_1\Omega_Y = \delta\partial_1\Omega_X \text{ et } \partial_2\Omega_Y = \delta\partial_2\Omega_X, \qquad \text{(VI.7)},$$

- les sollicitations externes sont telles que,

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}_y(\mathbf{y}) = \mathbf{F}_x(\mathbf{x}), && \forall\, \mathbf{x} \in \partial_2\Omega_X, \forall\, \mathbf{y} \in \partial_2\Omega_Y \text{ avec } \mathbf{y} = \delta\,\mathbf{x}, \\ &\mathbf{U}_{dy}(\mathbf{y}) = \delta\,\mathbf{U}_{dx}(\mathbf{x}), && \forall\, \mathbf{x} \in \partial_1\Omega_X, \forall\, \mathbf{y} \in \partial_1\Omega_Y \text{ avec } \mathbf{y} = \delta\,\mathbf{x}, \end{aligned} \qquad \text{(VI.8)}.$$

Alors pour avoir les mêmes contraintes nominales maximales dans ces deux structures (notées $\sigma_N{}^X$ pour Ω_X et $\sigma_N{}^Y$ pour Ω_Y), il suffit que les champs d'endommagements soient similaires pendant le chargement.

Preuve du théorème :

Si les champs d'endommagements sont similaires dans les deux structures, les conditions (VI.7) et (VI.8) concernant les parties mécaniques des équations du mouvement (VI.3) et (VI.5) sont alors des conditions suffisantes pour avoir des champs de déformations similaires dans ces deux structures en raison du comportement élastique dans celles-ci.

Si à présent, pour chaque $\mathbf{x} \in \Omega_X$ et $\mathbf{y} \in \Omega_Y$ tels que $\mathbf{y} = \delta\,\mathbf{x}$, nous avons les égalités :

$$\varepsilon_x(\mathbf{x}) = \varepsilon_y(\mathbf{y}) \text{ et } \qquad \beta_x(\mathbf{x}) = \beta_y(\mathbf{y}),$$

alors des caractéristiques mécaniques identiques (E et ν) avec la relation de comportement $(\text{IV.11})_1$ donnent des contraintes identiques en ces deux points. Les champs de contraintes dans Ω_X et Ω_Y satisfont alors :

$$(\forall\, \mathbf{x} \in \Omega_X, \forall\, \mathbf{y} \in \Omega_Y \text{ avec } \mathbf{y} = \delta\,\mathbf{x},\ \sigma_x(\mathbf{x}) = \sigma_y(\mathbf{y})),$$

qui signifie que ces champs sont similaires.

Les résultantes des forces appliquées sur ces deux structures sont respectivement :

$$P_X.\mathbf{n}_X = \int_{\partial\Omega_X} \sigma_x(\mathbf{x}).\mathbf{n}_X \, d\Gamma_X \quad \text{et} \quad P_Y.\mathbf{n}_Y = \int_{\partial\Omega_Y} \sigma_y(\mathbf{y}).\mathbf{n}_Y \, d\Gamma_Y$$

Les structures étant tridimensionnelles, avec l'hypothèse (VI.7) on a $d\Gamma_Y = \delta^2 d\Gamma_X$. Ce qui donne, compte tenu de la similitude des champs de contraintes, la relation suivante entre les résultantes des forces appliquées :

$$P_Y = \delta^2 P_X.$$

La contrainte nominale est définie comme le rapport entre la résultante des forces appliquées et une section caractéristique de la structure.

Notons cette section caractéristique S_X pour le cas de la structure Ω_X et S_Y pour le cas de la structure Ω_Y. Les contraintes nominales sont donc :

$$\sigma_N{}^X = \frac{P_X}{S_X} \text{ pour } \Omega_X \quad \text{et} \quad \sigma_N{}^Y = \frac{P_Y}{S_Y} \text{ pour } \Omega_Y.$$

Et comme $S_Y = \delta^2 S_X$, on aura donc :

$$\sigma_N{}^Y = \frac{P_Y}{S_Y} = \frac{\delta^2 P_X}{\delta^2 S_X} = \frac{P_X}{S_X} = \sigma_N{}^X,$$

soit les mêmes contraintes nominales dans les deux structures.

A titre d'exemple, pour le cas particulier de la section §VI.2 précédente où les structures sont des poutres, on a d'après la formule (VI.1) :

$$\sigma_N{}^Y = \frac{P_Y}{b_Y d_Y} = \frac{\delta^2 P_X}{\delta^2 b_X d_X} = \frac{P_X}{b_X d_X} = \sigma_N{}^X,$$

avec $d_Y = \delta d_X$ et $b_Y = \delta b_X$ les largeurs et les épaisseurs des deux poutres respectivement.

Ceci termine la preuve du théorème.

Prenons à présent l'hypothèse que les champs de déformations sont similaires dans les deux structures. Nous nous intéressons aux parties des équations du mouvement qui décrivent l'évolution de l'endommagement (VI.4) et (VI.6).

Les termes dans les membres de droite des équations $(VI.4)_1$ et $(VI.6)_1$, qui constituent les sources d'endommagement dépendant des champs de déformations, sont donc identiques.

Dans le système de coordonnées X, en utlilisant la relation de transformation (VI.2), l'équation $(VI.6)_1$ devient :

$$c\dot{\beta}_y - \frac{k_y}{\delta^2}\Delta_X\beta_y + \partial I(\beta_y) + \partial I_-(\dot{\beta}_y) \ni -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-\beta_y}{1-M\beta_y}\right)\left\{2\mu tr[\varepsilon_y{}^+.\varepsilon_y{}^+] + \lambda\langle tr[\varepsilon_y]\rangle^{+2}\right\} + w, \quad (VI.9),$$

avec $\varepsilon_y(\mathbf{y}) = \varepsilon_x(\mathbf{x})$ pour $\mathbf{y} = \delta\,\mathbf{x}$.

Pour avoir des champs d'endommagement similaires dans les deux structures, il suffit donc d'avoir les mêmes équations qui décrivent l'évolution de l'endommagement. Cette condition est satisfaite si les trois conditions suivantes sont réunies :

- les équations $(VI.4)_1$ et (VI.19) sont les mêmes. Ceci est le cas si k_y est tel que :

$$k_y = \delta^2\, k_x \qquad (VI.10).$$

- les conditions aux limites $(VI.4)_2$ et $(VI.6)_2$ sont similaires et les conditions initiales $(VI.4)_3$ et $(VI.6)_3$ sont similaires :

$$k_x \frac{\partial\beta_x}{\partial \mathbf{n}_X}(\mathbf{x}) = k_y \frac{\partial\beta_y}{\partial \mathbf{n}_Y}(\mathbf{y}), \quad \forall\, \mathbf{x} \in \partial\Omega_X,\ \forall\, \mathbf{y} \in \partial\Omega_Y \text{ avec } \mathbf{y} = \delta\,\mathbf{x},$$

$$(\forall\, \mathbf{x} \in \Omega_X,\ \forall\, \mathbf{y} \in \Omega_Y \text{ avec } \mathbf{y} = \delta\mathbf{x} \text{ et } \beta_{0_x}(\mathbf{x}) = \beta_{0_y}(\mathbf{y})), \qquad (VI.11).$$

Ce résultat avec celui du théorème 1, nous mènent à l'annonce du théorème suivant :

<u>Théorème 2</u> : Soient Ω_X et Ω_Y les structures précédemment définies. On suppose que le problème donné par les équations du mouvement (VI.3) et (VI.4) a une solution unique. Si les conditions (VI.7), (VI.8), (VI.10) et (VI.11) réunies sont satisfaites, alors les champs d'endommagements sont similaires.

Preuve du théorème : Soit $(\mathbf{U}_x(\mathbf{x},t),\beta_x(\mathbf{x},t))$ la solution du problème (VI.3)-(VI.4) dans le référentiel X et soit $(\mathbf{U}_y(\mathbf{y},t),\beta_y(\mathbf{y},t))$ la solution du problème (VI.5)-(VI.6) dans le référentiel Y.

Cette dernière solution peut être écrite dans le référentiel X sous la forme :

$$(\frac{1}{\delta}\mathbf{U}_y(\delta\mathbf{x},t),\beta_y(\delta\mathbf{x},t))$$

Avec l'hypothèse sur l'unicité de la solution du problème (VI.3)-(VI.4), les conditions (VI.7), (VI.8), (VI.10) et (VI.11) nous donnent :

$$\mathbf{U}_x(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\delta}\mathbf{U}_y(\delta\mathbf{x},t) \text{ et } \beta_x(\mathbf{x},t) = \beta_y(\delta\mathbf{x},t).$$

Alors, les champs de déformations sont similaires et les champs d'endommagements sont similaires dans les deux structures. Ceci termine la preuve du théorème.

En conclusion, si on suppose que le problème (VI.3)-(VI.4) donne une solution unique $(\mathbf{U},\beta)$, les conditions (VI.7), (VI.8), (VI.10) et (VI.11) sont suffisantes pour obtenir les mêmes contraintes nominales pour les deux structures.

Mais en réalité, le facteur d'influence de l'endommagement k est une caractéristique du matériau et doit être indépendant de la structure et de sa taille (voir éq. (IV.10)). Ceci est une raison pour laquelle les contraintes nominales de deux structures, de tailles différentes et constituées par le même matériau, ne peuvent pas être égales.

A ce niveau de l'étude théorique sur l'effet d'échelle de structures, une question naturelle s'impose : comment varie la contrainte nominale avec la taille des structures ? Cette contrainte nominale croît-elle où décroît-elle lorsque la taille de la structure croît ?

La réponse à cette question peut être donnée à travers des résultats numériques. Ceci a été observé à travers l'exemple de la section précédente où on a obtenu que la contrainte nominale décroît lorsque la taille de la structure croît.

VI.4 Etude numérique de l'effet d'échelle de structures :

Dans cette section, nous proposons de continuer l'interprétation des résultats théoriques de la section précédente en utilisant l'outil numérique de calcul par éléments finis. L'exemple de calculs de structures que nous considérons est celui de la section §VI.2.

Considérons la plus petite poutre présentée par la figure VI.1. Nous nous proposons d'analyser les réponses globales de cette poutre sollicitée en flexion trois points en utilisant différentes valeurs du facteur d'influence de l'endommagement, noté k_x.

Les autres caractéristiques demeurent identiques pour tous les calculs. Elles prennent les valeurs utilisées dans l'exemple de la section §VI.2 : E = 35000 MPa, ν = 0.18, c = $0.2\ 10^{-2}$ MPa.s, W = $0.42\ 10^{-4}$ MPa et M = -1.

Le propos est de déterminer la variation de la contrainte nominale maximale σ_N (évaluée pour chaque calcul à partir de la réponse globale) en fonction du facteur d'influence de l'endommagement.

La courbe de variation obtenue est présentée par la figure VI.7. On observe que la contrainte σ_N croît lorsque la valeur du facteur k_x croît.

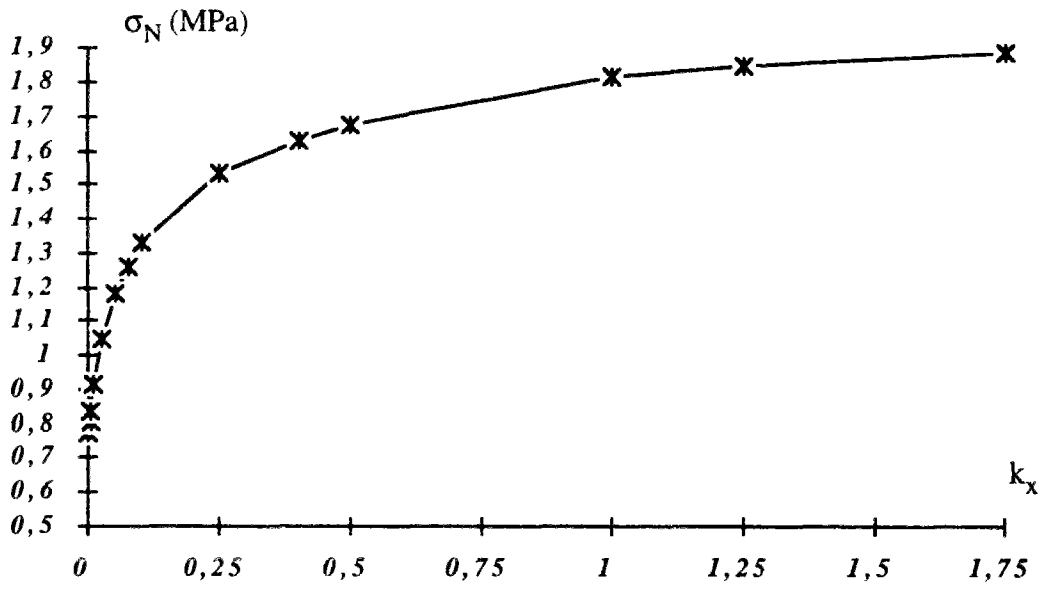


Fig. VI. 7 - Variation de la contrainte nominale maximale σ_N avec le facteur d'influence de l'endommagement k_x.

Toutefois cette variation n'est pas linéaire. Pour des valeurs importantes du facteur k_x, la variation de la contrainte nominale maximale n'est pas aussi importante que pour des valeur plus faibles de ce facteur.

Dans toute la suite, nous considérons la petite poutre précédente comme poutre de référence, ayant un rapport d'homothétie géométrique $\delta = 1$.

En utlilisant les résultats de la section précédente, on peut déduire à partir de cette courbe la contrainte nominale maximale d'une poutre sollicitée en flexion trois points telle que :

- la géométrie de cette poutre est semblable à celle de la poutre de référence avec un rapport d'homothétie géométrique δ ($\delta \neq 1$).
- le matériau (béton) constituant cette poutre est le même que celui de la poutre de référence : les caractéristiques E, ν, W, c, M ainsi que le facteur d'influence de l'endommagement k sont identiques.
- Les chargements vérifient les conditions (VI.7), (VI.8) et (VI.11) de la section précédente.

Nous utiliserons la représentation schématique de la figure VI.8 comme élément de démonstration.

Pour ces deux poutres, seule la condition (VI.10) ne peut être satisfaite (le matériau est le même dans les deux poutres).

D'après cette dernière condition (VI.10), la contrainte nominale maximale de la poutre de rapport d'homothétie δ est celle de la poutre de référence qui a un facteur d'influence de l'endommagement k_x tel que (voir figure VI.8) :

$$k_x = \frac{k}{\delta^2} \qquad \text{(VI.12).}$$

Cette contrainte, notée $\sigma_{N\delta}$, peut être lue sur l'axe des ordonnées de la figure VI.7. Elle correspond à la valeur "k/δ^2" sur l'axe des abscisses.

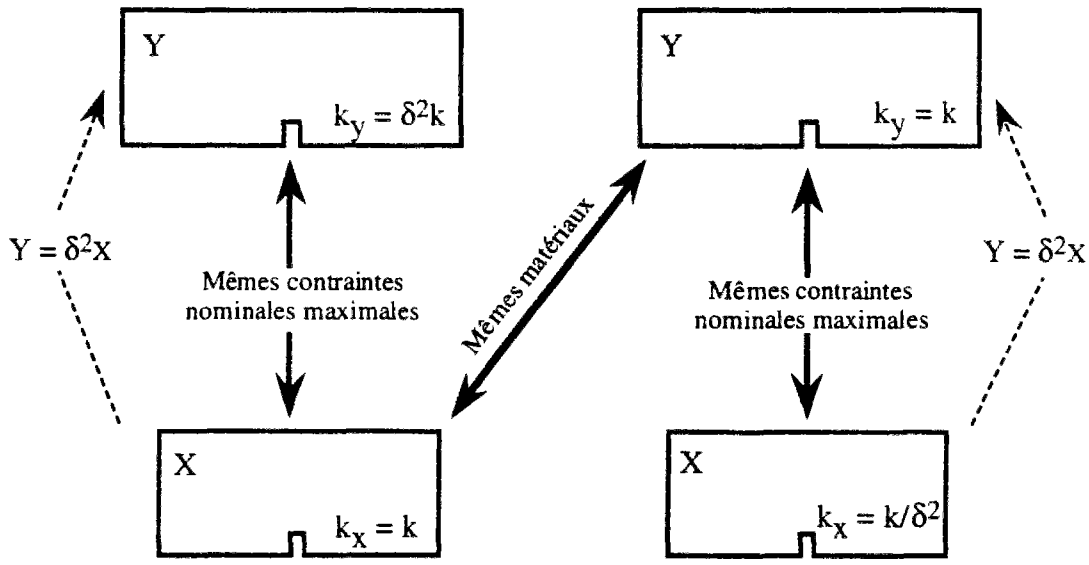


Fig. VI.8 - Représentation schématique des contraintes nominales sur deux poutres semblables en fonction des facteur d'influence de l'endommagement.

Ainsi, si la poutre est plus grande que la poutre de référence ($\delta > 1$), la valeur de la contrainte nominale maximale est plus faible. Inversement, si la poutre est plus petite que la poutre de référence ($\delta < 1$), cette valeur est plus grande :

$$\begin{array}{lll} \text{si } \delta > 1 & \text{on a} & \sigma_{N\delta} < \sigma_{N\delta=1} \\ \text{si } \delta < 1 & \text{on a} & \sigma_{N\delta} > \sigma_{N\delta=1} \end{array} \qquad \text{(VI.13).}$$

Avec ce résultat, en utilisant la relation (VI.10) (ou (VI.12)), on peut déduire de la courbe de la figure VI.7, la variation donnée par le modèle de la contrainte nominale maximale en fonction du rapport d'homothétie géométrique δ.

La courbe obtenue est présentée sur la figure VI.9 où sont aussi représentées les trois valeurs des contraintes nominales maximales déduites des résultats expérimentaux pour $\delta = 1$, $\delta = 2$ et $\delta = 4$ (Bazant et Ozbolt, 1990).

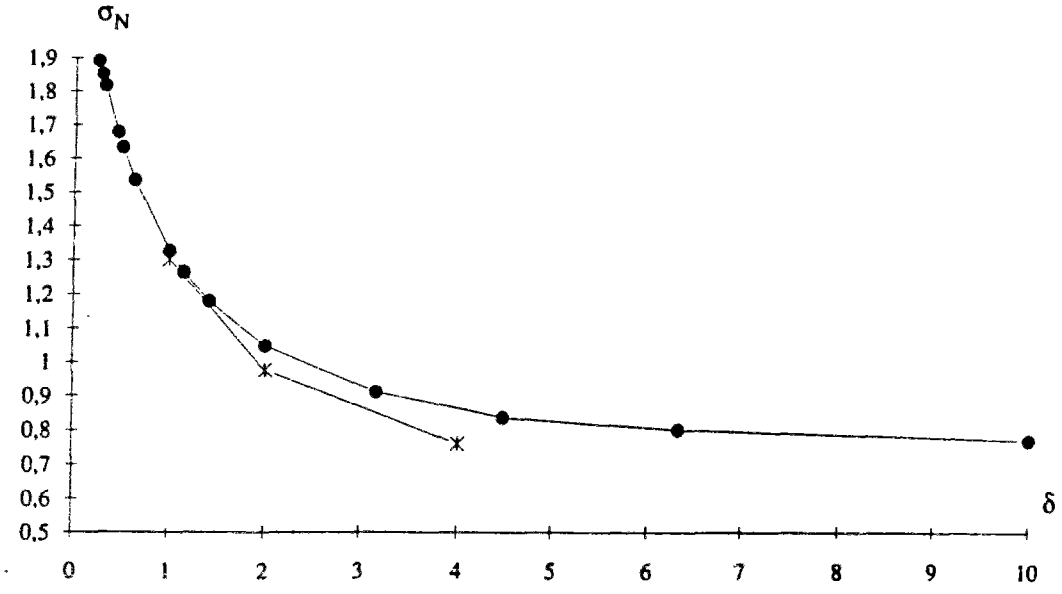


Fig. VI. 9 - Variation théorique de la contrainte nominale σ_N avec le rapport d'homothétie δ. Superposition avec trois resultats expérimentaux.

En analysant les deux dernières courbes (figs. VI.7 et VI.9), nous pouvons donner quelques remarques intéressantes.

Lorsque la taille de la structure croît, la contrainte nominale décroît (fig. VI.9). Ceci est en accord avec les observations expérimentales (Mazars *et al.*, 1991; Saouridis et Mazars, 1988).

On note également que pour de grandes structures ($\delta >> 1$), la variation de la contrainte nominale avec le rapport d'homothétie n'est pas aussi important que pour les structures relativement plus petites (ici pour des valeurs $\delta \approx 1$). La contrainte nominale tend vers une valeur limite lorsque δ tend vers l'infini. Cet aspect a en effet été mis en évidence et montré avec des résultats expérimentaux dans (Biolzi *et al.*, 1994). Ceci est aussi en accord avec une remarque faite dans (Hillerborg, 1983), où il est suggéré d'utiliser des poutres entaillées de grandes dimensions pour évaluer le facteur d'intensité de contrainte critique lors de l'utilisation de la mécanique de la rupture.

Lorsque la structure est petite, la contrainte nominale est plus grande. Ceci peut être observé, directement sur la figure VI.9 pour les faibles valeurs de δ, ou indirectement sur la figure VI.7 avec la relation (VI.10).

Notons que sur la courbe VI.7, la valeur de σ_N pour $k = 0$ correspond à la valeur de la contrainte nominale obtenue avec un modèle local d'endommagement. Nous pouvons donc conclure que pour une structure de très grandes dimensions ($\delta \rightarrow \infty$) la contrainte nominale ne peut pas tendre vers zéro. Cela veut aussi dire que pour de grandes structures on a, d'après la définition donnée par l'équation (VI.1) :

$$P_\delta = \sigma_N \, bd\delta^2 \equiv K\delta^2$$

qui signifie que la force maximale supportable croît comme δ^2 (K est constant).

VI.5 Commentaires et conclusions :

Nous avons montré dans ce chapitre l'intérêt de la prise en compte du gradient de l'endommagement pour décrire l'effet d'échelle de structures.

Les applications numériques du modèle utilisé dans ce chapitre montrent un accord favorable avec les observations expérimentales. En effet, on trouve que la contrainte nominale maximale décroît lorsque la taille de la structure croît.

L'étude de la structure des équations donne des arguments théoriques à partir desquels il est montré que les contraintes nominales maximales de deux structures de tailles différentes ne peuvent être égales. Des moyens numériques sont donnés pour prévoir la dépendance de la contrainte nominale maximale en fonction de la taille.

CONCLUSIONS

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, une nouvelle formulation de l'endommagement a été proposée. Le fait nouveau est qu'il prend en compte le gradient de l'endommagement qui, physiquement rend compte de manière cohérente de l'influence de l'endommagement en un point matériel sur celui de son voisinage.

Cette formulation est basée sur une adaptation du principe des puissances virtuelles.

A l'intérieur d'un solide, il existe des mouvements microscopiques qui provoquent l'endommagement. L'idée de base est que la puissance de ces mouvements microscopiques doit être prise en compte. Nous décidons donc de modifier l'expression de la puissance des efforts intérieurs. Nous considérons alors que cette puissance dépend de la vitesse de l'endommagement ainsi que de son gradient.

Le principe des puissances virtuelles fondé sur ce choix conduit à un nouvel ensemble d'équations qui décrivant l'évolution de l'endommagement.

La thermodyamique des milieux continus conduit à des lois de comportement obtenues à partir de choix convenables d'une énergie libre, dépendant de la variable d'état d'endommagement ainsi que de son gradient, et d'un pseudo-potentiel de dissipation. Ces choix vérifient l'inégalité de Clausius-Duhem.

La description du comportement adoucissant à l'aide d'un modèle issu de cette formulation et son application à la modélisation de structures en béton permet d'énoncer les résultats suivants :

- la prise en compte en compte du gradient de l'endommagement a permis de mettre en évidence la cohérence de la formulation des points de vue mécanique, numérique et mathématique. En effet, l'objectivité des résultats numériques montre qu'il n'y a pas d'influence du maillage sur les réponses globales et locales des structures discrétisées par éléments finis;

- la capacité du modèle de prédire l'initiation et la progression de l'endommagement même dans des structures initiallement non fissurées;

- la possibilité de décrire le comportement de structures en béton soumis à des sollicitations multiaxiales avec un modèle ne comportant qu'une seule variable d'endommagement. En effet, nous avons montré qu'on obtenait des comportement différents entre traction et compression prises séparément.

Par ailleurs, d'autres applications sur des structures en béton ont montré l'intérêt de la prise en compte du gradient de l'endommagement dans la modélisation vis-à-vis de l'effet d'échelle de structures. Les résultats numériques montrent un accord favorable avec les observations expérimentales. La contrainte nominale décroît lorsque la taille de la structure croît.

Une étude théorique sur les structures des équations du mouvement a permis de montrer que les contraintes nominales de structures géométriquement similaires avec des tailles différentes ne peuvent pas être égales. Ce résultat est pour l'instant confirmé par les résultats numériques.

D'autre part, concernant le phénomène unilatéral rencontré dans les matériaux tels que le béton, nous avons proposé un modèle qui cette fois-ci comprend deux variables d'endommagement. L'une décrivant l'endommagement provoqué par les extensions (déformations positives), et l'autre décrivant l'endommagement provoqué par les contractions (déformations négatives).

Ces deux variables d'état sont d'autre part reliées par une liaison interne qui permet d'aboutir, en plus de la description du phénomène unilatéral, à une propriété macroscopique dont la signification physique s'interprète de la façon suivante :

- un endommagement en compression entreine un endommagement en traction sans que la réciproque soit vraie.

Ceci montre qu'un endommagement en compression est définitif. En d'autres termes, lorsque le matériau est fortement endommagé en compression, sa raideur ne peut pas être restaurée lors du passage du chargement en compression à un chargement en traction.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Allix, O., Cluzel, C., Gasser, A. et Ladevèze, P. (1993). Modélisation des composites céramique-céramique à différentes échelles, éds. J. L. Chermant et G. Fantozzi. Revue des composites et des matériaux avancés, vol. **3**, num. hors série, p. 277-297.

Andrieux, S.(1981). Un modèle de matériau microfissuré avec frottement. C. R. Acad. Sci. Paris **293**, p. 329-332.

Bazant, Z. P. et Oh, P. H. (1983). Crack band theory for fracture of concrete, Materials and structures, RILEM, vol. **16**, n° 93, p. 155-177.

Bazant, Z. P. et Oh, P. H. (1985). Microplane model for progressive of concrete and rock, J. Eng. Mech. ASCE, vol. **111**, p. 559-582.

Bazant, Z. P. et Prat, P. C. (1987). Microplane model for brittle-plastic material, Report n° 87-7/498, Center for concrete and geomaterials, Northwestern university, Evanston.

Bazant, Z. P. et Ozbolt, J. (1990). Non local microplane model for fracture, damage and size effect in structures, J. of Engrg. Mech. ASCE, **116**, p. 2485-2505.

Bazant, Z.P. et Xi, Y. (1991). Statistical size effect in quasi-brittle structures: II. Nonlocal Theory, J. of Engrg. Mech. ASCE, **117**, n° 11, p. 2623-2640.

Benallal, A., Billardon, R. et Geymonat, G. (1988). Some mathematical aspects of the damage softening rate problem. cracking and damage, éds. J. Mazars et Z. P. Bazant, " Cracking and damage, strain localization and size effect", Elsevier Pubs., p. 247-258.

Benallal, A. et Comi, C. (1994). Closed form solutions to localization conditions for rate-independent materials, C. R. Acad. Sci. Paris, serie II, t.**318**, p. 7-14.

Billardon, R. (1989). Etude de la rupture par la mécanique de l'endommagement, Thèse de doctorat d'état ès Science Mécanique, Paris 6.

Billardon, R. et Doghri, I. (1989). Prévision de l'amorçage d'une macro-fissure par localisation de l'endommagement, C. R. Acad. Sci., serie II, t. **308**, p. 347-352.

Biolzi, L., Gambarova, P. G., Rosati, G. P.et Schuum, C. (1994). On fracture and size effect in concrete beams, Comp.modelling of concrete struc., éds. H. Mang, N. Bicanic et R. De Borst, Proc. of Euro-C 1994, Int. conf. Austria, vol. **1**, p. 53.62.

De Borst, R., Huerta, A. et Pijaudier-Cabot, G. (1991). Localization limiters: Properties, Implementation and Solution Control, internal report n° 114, LMT/ENSCachan, France.

Brauner, C. M., Nicolaenco, B. et Frémond, M. (1989). Homographic approximations of free boundary problems characterized by variational inequalities, Science and Computer, Advances in Mathematics Supplementary studies, vol.**10**, p. 119-151.

Bui, H. D. (1977). Mécanique de la rupture fragile. Edition Masson, Paris.

Carpinteri, A. et Valente, S. (1989). Size-scale transition from ductile to brittle failure: A dimensional analysis approach, cracking and damage, éds. J. Mazars et Z. P. Bazant, " Cracking and damage, strain localization and size effect", Elsevier Pubs., p. 477-490.

Chaboche, J. L. (1979). Le concept de contrainte effective appliquée à l'élasticité et à la viscoplasticité en présence d'un endommagement anisotrope, Colloque Euromech 115, Grenoble.

Costa Mattos, H., Frémond, M. et Namiya, E.N. (1992). A simple model of the mechanical behaviour of ceramic like materials, Int. J. Solids Structures, Vol. **29** n°24, p. 3185-3200.

Davenne, L., Saouridis, C. et Piau, J. -M. (1989). Un code de calcul pour la prévision du comportement de structures endommageables en béton, en béton armé ou en béton de fibres, Annales de l'I.T.B.T.P., n° **478**, série : Béton 267, p. 138-155.

Dragon, A. et Mroz, Z. (1979). A model for plastic creep of rock-like materials accounting for the kinetics fracture, Int. Jrn. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. vol. **16**, p. 253-259.

Dragon, A. (1980). Dilatational creep in rock-like solids, 3rd IUTAM Symposium, Leicester, UK. éds. A. R. S. Ponter et D. R. Hayhrust, "Creep in Structures". Springer-Verlag Berlin, 1981, p. 352-361.

Dragon, A., Cormery, F., Désoyer, T. et Halm, D. (1994). Localised filure analysis using damage models. "Localization and bifurcation theory for soils and rocks, éds. Chambon, Desrues et Valdoulakis. Balkema, Rotterdam, p. 127-140.

Doghri, I. (1989). Etude de la localisation de l'endommagement, Thèse de doctorat d'université, Paris 6.

Elices, M. et Planas, J. (1988). Material models, Chap. 3 in State of Art Report on Fracture of Concrete, RILEM TC-90, éd. L. Elfgren.

François, D., Pineau, A. et Zaoui, A. (1993). Comportement mécanique des matériaux, viscoplasticité, endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact. Editions Hermès, Paris.

Frémond, M. (1987). Adhérence des solides, Journal de Mécanique Théorique Appliquée, vol. **6**, n°3, pp. 383-407.

Frémond, M. (1990). Sur l'inégalité de Clausius-Duhem, C. R. Acad. Sci. Paris t.**311**, serie II, p. 757- 762.

Frémond, M. et Nedjar, B. (1993a). Endommagement et principe des puissances virtuelles, C. R. Acad. Sci. Paris, serie II, t.**317**, n° 7, p. 857-864.

Frémond, M. et Nedjar, B. (1993b). Damage and gradient of damage. The unilateral phenomenon, SMiRT12 (12th Structural Mechanics in Reactor Technology), éd. F. Kussmaul, North-holland, vol. **H**, p. 375-380.

Frémond, M. et Nedjar, B. (1994a). Damage, Gradient of Damage and Principle of Virtual Power. Accepté pour publication à Int. J. Solids Structures.

Frémond, M. et Nedjar, B. (1994b). L'endommagement et son gradient. Le phénomène unilatéral. Actes du 7ème Colloque annuel MECMAT, Poitiers (14-17 mars).

Frémond, M. et Nedjar, B. (1994c). Damage of concrete, the unilateral phenomenon. Accepté pour publication à Int. J. of Nucl. Engrg. and Design.

Frémond, M. et Nedjar, B. (1994d). Damage modelling of concrete. XXIII Convegno nazionale A.I.A.S., Rende, Italie.

Gasser, A. et Nedjar, B. (1991). Une première méso-modélisation d'un composite à matrice céramique Sic-Sic, Mémoire de D.E.A (L.M.T / ENSCachan/ PARIS 6).

Gérard, A. et Baste, S. (1991). Comportement non linéaire des composites à matrice céramique en cycle charge-décharge, C. R. Acad. Sci. Paris t.**313**, serie II, p. 1361-1366.

Germain, P. (1982). Mécanique des milieux continus, Editions Ellipses.

Germain, P., Nguyen, Q. S. et Suquet, P. (1983). Continuum Thermodynamics, Jrn. of Applied Mechanics, ASME, vol. **50**, p. 1010-1021.

Halphen, B., Nguyen, Q. S. (1975). Sur les matériaux Standartds Généralisés, Journal de Mécanique, vol. **14**, p. 39-63.

Hermann, G., Kestin, J. (1988). On the thermodynamic Fundation of damage theory in elastic solids. Eds. J. Mazars et Z. P. Bazant, " Cracking and damage, strain localization and size effect", Elsevier Pubs., p. 228-232.

L'Hermite, R. (1973). Influence de la dimension absolue sur la résistance à la flexion, annales ITBTP, n° 309-310, p. 39-41.

Hillerborg, A., Modéer, M. et Petersson, P. -E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. Cement and concrete research, vol. **6**, p. 773-782.

Hillerborg, A. (1983). Analysis of a single crack, Fracture Mechanics of concrete, éd. F. H. Wittman, Elsevier Pubs, p. 223-249.

Hillerborg, A. (1985). Results of three comparative test series for determining the fracture energy G_F of concrete, Materials and structures, RILEM, vol. **18**, n° 107, p. 407-413.

Hordijk, D.A.,Van Mier, J.G.M. et Reinhardt, H.W. (1988). Material properties, Chap. 4 in State of Art Report on Fracture of Concrete, RILEM TC-90, éd. L. Elfgren.

Hordijk, D. A. (1992). Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete: Experiments, modelling and analyses, HERON, Delft Univ. of Tech., The netherland, **37**, n° 1.

Kachanov, L. M. (1958). Time of the rupture process under creep conditions, Izv Akad Nauk SSR Otd Tech Nauk. vol. **8**, p. 26-31.

Krajcinovic, D. et Fonseka, G. U. (1981). The continuous damage theory of brittle materials, Journal of applied Mechanics, vol. **48**, p. 809-824.

Knott , J. F. (1973). Fundamentals of Fracture Mechanics. Eds. Butterworth Group, Londre.

Labbens, R. (1980). Introduction à la mécanique de la rupture. Editions. Pluralis.

La Borderie, C. (1991). Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : modélisation et application a l'analyse des structures en béton, thèse de Doctorat de l'Université de Paris 6.

Ladevèze, P. (1983). Sur une théorie de l'endommagement anisotrope, Rapport interne n°34, LMT, E.N.S Cachan, France.

Ladevèze, P. (1989). Modélisation et calcul des structures : de nouveaux défis, Rapport interne n° 98, LMT-ENS Cachan.

Ladevèze, P. (1993). On an anisotropic damage theory. Failure criteria of structured media, éd. J. P. Boehler, A. A. Balkema, Rotterdam, The Neetherland, p. 355-363.

Ladevèze, P., Gasser, A. et Allix, O. (1993). Damage mechanics modelling for ceramic composites, ASME winter meeting, décembre.

Lasry, D. et Belytschko, T. (1988). Localization limiters in transcient problems, Int. Journ. Solids Struct., **24**, p. 581-597.

Leblond, J. B. (1991). Mécanique de la rupture. Cours de l'école polytechnique, département de mécanique.

Lemaitre, J. (1992). A Course on Damage Mechanics, Springer-Verlag.

Lemaitre, J. et Chaboche, J. L. (1990). Mécanique des matériaux solides, Dunod (2ème éd.).

Li, Y. N. et Bazant, Z. P. (1994). Eingenvalue analysis of size effect for cohesive crack model, Int. Jrn. of Fracture, **66**, p. 213-226.

Luong, M. P. (1992). Fracture testing of concrete and rock materials, J. of Nuclear Eng. and Design, **133**, p. 83-95.

Marigo, J. J. (1985). Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids, Eng. Fract. Mech., Vol. **21**, n°4, p. 861-874.

Marigo, J. J. et Miallon, P. (1988). Justification of some brittle damage laws by Illiushin's postulate and study of their singular character, éds. J. Mazars et Z. P. Bazant, " Cracking and damage, strain localization and size effect", Elsevier Pubs., p. 391-403.

Maugin, G. A. (1990). Internal variables and dissipative structures, J. of Non-equilibrium Thermodynamic, vol. **15**, n°2, p. 173-192.

Mazars, J. et Walter, D. (1980). Endommagement mécanique du béton, rapport D.G.R.S.T, n° 78.7.2697 et 78.7.2698.

Mazars, J. (1984). Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure, Thèse de doctorat ès Science, Université de Paris 6.

Mazars, J. et Bazant, Z. P. (1988). Eds., Cracking and damage, Strain localization and Size effect, Elsevier Pubs.

Mazars, J. et Pijaudier-Cabot, G. (1989). Continuum damage theory - Application to concrete, J. Engrg. Mech. ASCE, vol. **115**, p. 345-365.

Mazars, J., Pijaudier-Cabot, G. et Saouridis, C. (1991). Size effect and continuous damage in cementitious materials, Int. Jour. of Fracture, **51**, p. 159-173.

Moreau, J. J. (1966). Fonctionnelles convexes, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, Paris.

Moreau, J. J. (1970). Sur les lois de Frottement, de Viscosité et de Plasticité, C. R. Acad. Sc., Paris, vol. **271**, p. 608-611.

Murakami, H., Kendall, D. M. et Valanis, K. C. (1993). A non-local elastic damage theory: mesh-insensitivity under strain softening, Comput. & Struct., **48** (3), p. 415-422.

Nedjar, B. (1993a). A first gradient theory for damage. Actes du "first forum of young european researchers", Liège, Belgique, p. 199-204.

Nedjar, B. (1993b). Modélisation de l'endommagement des matériaux. L'effet unilatéral, actes du 11ème Congrès Français de Mécanique, vol. **4**, p. 281-284.

Needleman, A. (1988). Material rate dependance and mesh sensitivity in localization problems, Comput. Meth. Apll. Mech. Engng. **67**, p. 64-85.

Nemat-Nasser, S., Yu, N. et Hori, M. (1993). Solids with periodically distributed cracks, Int. J. Solids Structures, vol. **30**, n° 15, p. 2071-2095.

Pijaudier-Cabot, G. et Bazant, Z. P. (1987). Non-local damage theory, Jrn. of Eng. Mech. vol. **113**, n° 10, p. 1512-1533.

Pijaudier-Cabot, G. et Bodé, L. (1992). Localization of damage in non-local continuum, Mech. Resear. Commu., vol. **19**(2), p. 145-153.

Pijaudier-Cabot, G., Huerta, A. et Bodé, L. (1992). Nonlocal continuum damage and adapted solution strategies in computational failure mechanics. Proc. of the European Conf. on new advances in computational structural mechanics, éds. P. Ladevèze et O. C. Zienkiewicz. Elsevier Science Pubs., p. 81-95.

Pijaudier-Cabot, G. et Benallal, A. (1993). Strain localization and bifurcation in a non-local continuum, Int. J. Solids Structures, vol. **30**, n° 13, p. 1761-1775.

Pijaudier-Cabot, G., La Borderie, C. et Fichant, S. (1994). Damage mechanics for concrete modelling: application and comparison with plasticity and fracture mechanics. éds. H. Mang, N. Bicanic et R. De Borst, "Computer modelling of concrete structures". Actes du Euro-C 1994, Int. conf., Austria, vol. **1**, p. 17-36.

Planas, J. et Elices, M. (1989). Size-effect in concrete structures: Mathematical approximations and experimental validation, éds. J. Mazars et Z. P. Bazant, " Cracking and damage, strain localization and size effect", Elsevies Pubs., p. 462-476.

Point, N. (1988). Unilateral contact with adherence, Int. J. of Mathematical Methods in Applied Sciences, vol. **X**, p. 367-381.

Point, N. (1989). Approches mathématiques de problèmes à frontieres libres. Application à des exemples physiques, thèse de l'Université de Paris Nord.

Ramtani, S. (1990). Contribution a la modélisation du comportement multiaxial du béton avec description du caractère unilatéral, thèse de Doctorat de l'Université de Paris 6.

Rice, J. R. et Rudnicki, J. W. (1980). A note on some features of the theory of localization of deformation, Int. J. of Solids Structures, vol. **16**, p. 597-605.

Rossi, P., Bruhwiler, E., Chhuy, S., Jeng, Y. S. et Shah, S.P. (1991). Fracture properties of concrete as determined by means of wedge splitting tets and tapered double cantilevar beam tests, Fractures Mechanics, Tests Methods for concrete, éds. S.P. Shah and A. Carpinteri, RILEM, p. 87-129.

Rossi, P. et Piau, J. M. (1988). The usefulness of statistical models to describe damage and fracture in concrete, éds. J. Mazars et Z. P. Bazant, " Cracking and damage, strain localization and size effect", Elsevier Pubs., p. 91-103

Rudnicki, J. W. et Rice, J. R. (1980). Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatant materials. J. Mech. Phys. Solids **32**, p. 371-394.

Saanouni, K., Chaboche, J. L. et Lesne, P. M. (1988). Creep crack-growth prediction by a non-local damage formulation, éds. J. Mazars et Z. P. Bazant, " Cracking and damage, strain localization and size effect", Elsevies Pubs., p. 404-414.

Saouridis, C., Mazars, J. (1988). A multiscale approach to distributed damage and its usefullness for capturing structural size effect, éds. J. Mazars et Z. P. Bazant, " Cracking and damage, strain localization and size effect", Elsevier Pubs., p. 391-403.

Saouridis, C. (1988). Identification et numérisation objective des comportements adoucissants : une approche multiéchelle de l'endommagement du béton, thèse de Doctorat de l'Université de Paris 6.

Shreyer, H.L. (1990). Analytical solution for nonlinear strain-gradient softening and localization. J. of Appl. Mech. ASME, **57**, p. 522-528.

Simo, J. C. (1988). Strain softening and dissipation: A unification of approaches, éds. J. Mazars et Z. P. Bazant, " Cracking and damage, strain localization and size effect", Elsevier Pubs., p. 440-461.

Sluys, L. J. et De Borst, R. (1992). Wave propagation and localization in a rate dependent crack medium - model formulation and one-dimensional examples. Int. J. Solids Structures, **29**, p. 2945-2958.

Sluys, L. J., De Borst, R. et Mühlhaus, H.-B. (1993). Wave propagation, localization and dispersion in a gradient-dependent medium. Int. J. Solids Structures, **30**, n° 9, p. 1153-1171.

Suquet, P. (1981). Approche par homogénéisation d'une forme d'endommagement. C. R. Acad. Sci. Paris **292**, p. 809-812.

Suquet, P. (1982). Plasticité et homogénéisation. Thèse de doctorat d'état de l'Université de Paris 6.

Terrien, M. (1980). Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction, Bull. de liaison Lab. des Ponts et Chaussées, **105**, réf. 2398.

Truong Dinh Tien, J. M. (1990). Contact avec adhérence, thèse de doctorat de l'Université de Paris 6.

Vonk, R. A. (1993). A micromechanical investigation of softening of concrete loaded in compression, Heron Publication, Delft University of Technology, The netherland, vol.**38**, n° 3.