



HAL
open science

Réponse d'un massif sous-marin à l'action de la houle

Behrouz Gatmiri

► **To cite this version:**

Behrouz Gatmiri. Réponse d'un massif sous-marin à l'action de la houle. Hydrologie. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1989. Français. NNT: . tel-00529456

HAL Id: tel-00529456

<https://pastel.hal.science/tel-00529456>

Submitted on 25 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT

présentée à

l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

PAR BEHROUZ GATMIRI

REPONSE D'UN MASSIF SOUS-MARIN A L'ACTION DE LA HOULE

Date de soutenance : 17 octobre 1989

Centre d'Enseignement et de Recherche en Mécanique des Sols
(CERMES)

Jury :

M. SCHLOSSER

Président

M. BOULON

M. MAGNAN

}

Rapporteurs

M. BIAREZ

M. DELAGE

M. PANET

}

Examineurs

78358

NS 15186
(2)

REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur le Professeur F. SCHLOSSER, Directeur du CERMES d'avoir accepté la présidence du Jury et Messieurs M. BOULON et J.P. MAGNAN, qui ont bien voulu lire minutieusement et porter un jugement sur ce travail. Je voudrais remercier Monsieur P. DELAGE Directeur-Adjoint du CERMES, pour m'avoir accueilli et assuré les conditions matérielles qui ont rendu ce travail possible et l'attention qu'il a consacrée à la lecture de la thèse. Mes remerciements vont également à Messieurs les Professeurs J. BIAREZ et M. PANET, pour avoir eu la gentillesse d'examiner mon travail. Enfin, j'adresse mes sincères remerciements à tous les Collègues, Chercheurs, Techniciens, Secrétaires et Amis, en particulier, Messieurs O. COUSSY et L. DORMIEUX pour les discussions que j'ai pu avoir avec chacun d'eux.



06

SOMMAIRE

	<i>Pages</i>
INTRODUCTION GENERALE.....	8
CHAPITRE I - MECANIQUE APPROCHEE DE LA HOULE.....	11
I - INTRODUCTION.....	12
II- PROPAGATION DE LA HOULE SUR UN FOND HORIZONTAL.....	13
II-1 - FOND RIGIDE IMPERMEABLE.....	13
II-1-1 - EQUATION DU PROBLEME.....	13
II-1-2 - DESCRIPTION DU MOUVEMENT.....	15
II-2 - PROPAGATION DE LA HOULE SUR UN FOND POREUX.....	18
II-2-1 - ECOULEMENT DANS LE FLUIDE.....	20
II-2-2 - ECOULEMENT DANS LE MILIEU POREUX.....	21
II-2-3 - RESOLUTION.....	22
II-2-4 - VERIFICATION.....	23
II-3 - EFFET DE LA DEFORMABILITE DU FOND SUR LA PROPAGATION DE LA HOULE.....	25
III - PROPAGATION DE LA VAGUE SUR UN FOND INCLINE.....	26
III-1 - POSITION DU PROBLEME.....	26
III-2 - SOLUTIONS ANALYTIQUES PROPOSEES PAR DIFERENTS AUTEURS.....	28
III-2-1 - APPROCHE DE BIESEL.....	30
III-2-2 - APPROCHE ENERGETIQUE.....	32
III-2-3 - HOULE DE STOKES DU PREMIER ORDRE.....	34
IV - PRESSION SUR LE FOND.....	35
V - CONCLUSION.....	38
CHAPITRE 2 - MASSIF SEMI-INFINI HORIZONTAL, SOUMIS A L'ACTION DE LA HOULE, ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.....	40
I - INTRODUCTION.....	41

II-	SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE.....	42
II-1	- DISTRIBUTION DE LA PRESSION INTERSTITIELLE.....	42
II-2	- L'APPROCHE NON COUPLEE.....	45
II-3	- LES APPROCHES COUPLEES.....	46
II-4	- GRADIENT HYDRAULIQUE.....	51
II-5	- ETUDE DE LA STABILITE.....	52
CHAPITRE 3	- DISTRIBUTION DES CONTRAINTES TOTALES ET DE LA PRESSION INTERSTITIELLE DANS UN MASSIF ANGULAIRE SOUS CHARGEMENT QUELCONQUE.....	56
I	- INTRODUCTION.....	57
II-	DISTRIBUTION DES CONTRAINTES DANS UN COIN.....	59
II-1	- EQUATION DU PROBLEME.....	59
II-2	- UTILISATION DE LA TRANSFORMATION DE MELLIN - RAPPEL SUR LES PROPRIETES.....	61
II-3	- RESOLUTION GENERALE.....	63
II-4	- CAS DU CHARGEMENT SINUSOIDAL.....	66
III-	VALIDATION ET APPLICATION.....	73
III-1	- SURFACE HORIZONTALE ; CHARGEMENT REPARTI SUR UNE LARGEUR FINIE.....	73
III-2	- COIN CHARGE PAR DEUX SEMELLES FILANTES SUR DEUX SURFACES.....	76
III-3	- SURFACE HORIZONTALE - CHARGEMENT HARMONIQUE.....	76
III-4	- CHARGEMENTS SINUSOIDAUX SUR DEUX COTES D'UN COIN.....	80
IV	- LA DISTRIBUTION DE LA PRESSION INTERSTITIELLE DANS UN COIN.....	83
IV-1	- EQUATION ET RESOLUTION DU PROBLEME.....	83
IV-2	- CAS DU CHARGEMENT SINUSOIDAL.....	85
CHAPITRE 4	- COMPORTEMENT POROELASTIQUE LINEAIRE, PROBLEMES D'EVOLUTION QUASISTATIQUES.....	88
I	- INTRODUCTION.....	89

II- LE MODÈLE DE BIOT.....	90
II-1 - L'ASPECT MECANIQUE.....	90
II-1-1 - DESCRIPTION CINEMATIQUE DE LA DEFORMATION DU SQUELETTE.....	90
II-1-2 - DESCRIPTION DU MOUVEMENT ET CONSERVATION DE LA MASSE.....	91
II-2 - L'ASPECT THERMODYNAMIQUE.....	92
II-3 - LE COMPORTEMENT POROELASTIQUE LINEAIRE ISOTROPE.....	93
II-3-1 - EQUATION D'ETAT DE LA PORO- ELASTICITE.....	93
II-3-2 - CONTRAINTE EFFECTIVE.....	97
II-4 - FORMULATION D'UN PROBLEME D'EVOLUTION QUASISTATIQUE LINEARISE EN POROELASTICITE.....	99
II-4-1 - EQUATION D'EQUILIBRE.....	99
II-4-2 - EQUATION DE DIFFUSION DU FLUIDE.....	100
II-4-3 - CONDITIONS AUX LIMITES.....	101
II-4-4 - EQUATION DE NAVIER.....	101
III - REMARQUE SUR LA PROPAGATION DES ONDES.....	102
IV - VALIDITÉ DE L'HYPOTHÈSE DE QUASISTATICITÉ POUR UN MILIEU POROÉLASTIQUE SOUS L'ACTION DE LA HOULE.....	103

CHAPITRE 5 - TRAITEMENT NUMERIQUE DES EQUATIONS DE BIOT SIMPLIFIEES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.....	109
I - INTRODUCTION.....	110
II-MODÈLE NUMÉRIQUE DE BIOT SIMPLIFIÉ BIDIMENSIONNEL.....	112
II-1 - CALCUL VARIATIONNEL.....	114
II-2 - DISCRETISATION DU PROBLEME.....	117
II-2-1 - SEMI-DISCRETISATION EN ESPACE.....	117
II-2-1-1 - CALCUL DES INTEGRALES DE LA FONCTIONNELLE.....	118
II-2-1-2 - FORMULATION MATRICIELLE GLOBALE.....	122

II-2-2 - DISCRETISATION DU TEMPS PAR LA METHODE θ	124
III- STABILITÉ ET PRÉCISION.....	127
IV - TECHNIQUE DE LA RÉOLUTION ET PROGRAMMATION.....	129
 CHAPITRE 6 - ANISOTROPIE DANS LE SOL.....	131
I - GENERALITES.....	132
II- ETUDE DE L'ORTHOTROPIE DE RÉVOLUTION.....	134
II-1 - DOMAINE DE VARIATION DES COEFFICIENTS DE POISSON.....	136
II-2 - LES VALEURS PROBABLES DES PARAMETRES DE L'ORTHOTROPIE.....	140
II-2-1 - VALEURS DE E_h/E_v	142
II-2-2 - VALEURS DU MODULE DE CISAILLEMENT VERTICAL (G_v).....	142
III -PRESSION INTERSTITIELLE.....	143
 CHAPITRE 7 - VALIDATION ET APPLICATION DU PROGRAMME. REPONSE D'UN MASSIF SOUS-MARIN A L'ACTION DE LA HOULE.....	149
I - INTRODUCTION.....	150
II- VERIFICATION DU PROGRAMME.....	150
II-1 - THEORIE DE LA CONSOLIDATION UNIDIMENSION- NELLE DE TERZAGHI.....	150
II-1-1 - SOLUTION ANALYTIQUE DE FROHLICH ET TERZAGHI.....	150
II-1-2 - CALCUL NUMERIQUE.....	152
II-2 - DEMI-ESPACE INFINI SOUS L'ACTION D'UNE SEMELLE FILANTE.....	154
II-2-1 - SOLUTION ANALYTIQUE.....	154
II-2-2 - CALCUL NUMERIQUE.....	154
II-3 - COUCHE D'ÉPAISSEUR FINIE SOUS L'ACTION D'UNE SEMELLE FILANTE.....	157
II-4 - FOND MARIN HORIZONTAL SOUMIS A L'ACTION DE LA HOULE.....	160

II-4-1 - RAPPEL DE LA SOLUTION	
ANALYTIQUE.....	160
II-4-2 - CALCUL NUMERIQUE.....	161
III - CAS DU FOND HORIZONTAL.....	166
III-1 - INTRODUCTION.....	166
III-2 - INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR DE LA	
COUCHE DE SOL.....	171
- condition aux limites.....	174
- résultats.....	174
- pression interstitielle.....	174
- contrainte de cisaillement.....	178
- contrainte effective normale	
verticale.....	182
- contrainte effective normale	
horizontale.....	183
III-3 - DEPLACEMENT DU MASSIF ET ÉPAISSEUR	
CRITIQUE.....	183
III-4 - EFFET DE LA PERMEABILITE DU SOL SUR LA	
DISTRIBUTION DES CONTRAINTES EFFECTIVES	
ET DE LA PRESSION INTERSTITIELLE.....	191
III-5 - EFFET DE LA RIGIDITE DU SOL SUR LA	
DISTRIBUTION DES CONTRAINTES EFFECTIVES	
ET DE LA PRESSION INTERSTITIELLE.....	197
IV - TALUS SOUS-MARIN.....	201
V - CAS D'UN FOND SOUS-MARIN MULTICOUCHE.....	210
VI - CAS D'UN MASSIF ANISOTROPE.....	217
VI-1 - INTRODUCTION.....	217
VI-2 - INFLUENCE DE DIFFERENTS PARAMETRES.....	217
VI-2-1 - INFLUENCE DE E_h/E_v ET DES COEF-	
FICIENTS DE POISSON.....	218
I - INFLUENCE SUR LA PRESSION	
INTERSTITIELLE.....	218
II- INFLUENCE SUR LA CONTRAINTE	
DE CISAILLEMENT.....	221

III-INFLUENCE SUR LES CONTRAINTES EFFECTIVES NORMALES VERTICA- LES ET HORIZONTALES.....	221
IV - INFLUENCE SUR LES DEPLACE- MENTS.....	225
VI-2-2 - INFLUENCE DE G_v/E_v	225
VI-3 - APPLICATION SUR UN SOL ANISOTROPE.....	230
CONCLUSION GENERALE.....	236
ANNEXES.....	241
ANNEXE I-A - DEFERLEMENT DE LA HOULE SUR LE FOND INCLINE.....	242
I- EVOLUTION DU RAPPORT $\frac{h_d}{L_o}$ en fonction de γ_o	243
II-ETUDE DU RAPPORT $\frac{H_d}{H_o}$	244
III-ETUDE DU RAPPORT $\frac{H_d}{h_d}$	245
IV-CONCLUSION.....	246
DIFFERENTS TYPES DE DEFERLEMENT.....	247
CLASSIFICATION DES DIFFÉRENTS TYPES DE DÉFERLEMENT D'APRÈS WEGGEL, CALVIN ET GAUGHAN-KOMAR.....	248
ANNEXE I-B - LA HOULE DE STOKES DU 3ÈME ORDRE.....	251
ANNEXE VI-A - MATRICE D'ÉLASTICITÉ POUR LE CAS D'ORTHOTROPIE GÉNÉRAL.....	254
ANNEXE VII-A- RÉSULTATS DÉTAILLÉS DE L'ÉTUDE PARAMÉTRIQUE DE L'ANISOTROPIE.....	256
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	277

*La moitié de ce que nous écrivons est
nuisible, l'autre moitié est inutile.*

H. BECQUE

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Depuis quelques années, les travaux en mer ont connu un grand développement, en particulier en relation avec l'exploitation sur le fond marin. Ainsi la connaissance du comportement des massifs sous-marins est devenue de plus en plus nécessaire, en particulier en termes de distribution de contraintes, de pressions interstitielles, et de déplacements. Il s'agit là d'un problème assez complexe du fait de la nature du chargement induit par la houle, et de la difficulté de bien connaître les propriétés mécaniques du sol sous-marin, à cause en particulier des difficultés de prélèvement d'échantillon. C'est la raison pour laquelle l'Ingénieur doit encore utiliser des hypothèses simplificatrices et des méthodes assez empiriques, et il est donc nécessaire d'avancer davantage dans la connaissance plus fondamentale des problèmes posés par la réponse des massifs sous-marins sous l'action de la houle. C'est ainsi que le calcul des contraintes et pressions permettra d'affiner les études de stabilité, alors qu'une idée des valeurs de déplacements engendrés renseignera sur la pérennité des structures au contact du fond marin, en fonction de leur déformabilité propre.

C'est dans cette perspective que se situe ce travail, qui comprend trois aspects :

- une étude de la houle (chapitre I), destinée à connaître la valeur de la pression cyclique induite sur le fond marin. On s'intéresse plus particulièrement à l'effet de la perméabilité et de la déformabilité du fond marin sur la propagation de la houle ; on

aborde également l'effet d'un fond incliné ;

- une étude analytique (chapitres 2 et 3) des contraintes et pressions engendrées par un chargement quelconque sur un massif angulaire, dont un plan est horizontal et l'autre incliné, destiné à modéliser une tête de talus sous-marins ;

- l'étude de la réponse d'un milieu poreux élastique sous l'action d'une houle sinusoïdale, basée sur la théorie de BIOT (chapitres 4 à 7) ; cette étude est menée par une modélisation numérique par la méthode des éléments finis. Elle comprend en particulier l'étude de l'influence de différents paramètres mécaniques, hydrauliques et géométriques sur la répartition des contraintes et des pressions interstitielles dans le cadre de l'hypothèse élastique linéaire.

*Notre vie, dit une vague, est trop brève
Mais l'autre lui répond : Ma soeur
Sa brièveté fait sa douceur.*

J. RICHPIN

CHAPITRE 1

MECANIQUE APPROCHEE DE LA HOULE

I INTRODUCTION

L'accroissement continu du développement des travaux maritimes rend de plus en plus indispensable une connaissance plus approfondie des différents mécanismes régissant la houle, afin de connaître en particulier la distribution des vitesses et des accélérations pour le calcul des forces exercées par la houle sur une structure.

Les mouvements ondulatoires, engendrés par le vent sur la surface de la mer, qui se propagent généralement de façon uniforme et parallèle, constituent la houle. Evidemment, les écoulements au sein des vagues sont de nature très complexe, mais, pour une meilleure compréhension, on considère cet état de la mer mieux organisé que représente la houle, et pour cela, on adopte des approches simplifiées du phénomène; mais, pour avoir les approximations justifiées dans le cadre qu'on s'impose, on essayera d'en dégager d'abord les facteurs essentiels .

Dans le but de calculer les grandeurs nécessaires pour la conception d'un ouvrage maritime et parmi les différentes théories existantes, notre choix a été guidé par le principe simple qui dit que la théorie devra être aussi complète que possible pour la modélisation de la houle, et simple à utiliser dans le domaine de la technique sous-marine.

Nous allons donc présenter une analyse mécanique approchée d'un écoulement qui présente un aspect périodique double, dans l'espace et dans le temps, et qui peut être considéré comme un phénomène naturel assez typique d'une propagation.

Les phénomènes agissants sont la gravité et la viscosité ; cependant, par rapport à l'échelle de l'écoulement, le rôle de la viscosité peut être considéré comme secondaire. La présence d'une surface libre, interface déformable isobare, du point de vue mécanique, est un aspect caractéristique du problème.

Il est certain que de considérer que l'écoulement puisse

dériver d'un potentiel en simplifierait beaucoup l'étude. Or, étant donné les dimensions, comme on l'a déjà évoqué, la viscosité ne peut jouer un rôle essentiel. On en estimera d'ailleurs l'importance plus loin. D'autre part, les tourbillons apparaissent aux frontières, d'où ils sont transportés par convection, et d'où ils diffusent par viscosité. On verra plus loin que la convection ne pourrait être un vecteur important du tourbillon et le déplacement des particules est très faible. La houle étant un phénomène d'onde, les particules pourront être mises en mouvement, en restant pratiquement sur place, et, comme elles partent du repos, l'écoulement restera irrotationnel.

On adopte de plus les hypothèses de base suivantes : le fluide est homogène, pesant et incompressible ; le problème est plan ; l'origine des coordonnées est prise sur le fond marin ; l'axe des Y positifs est ascendant ; l'amplitude est petite devant la profondeur .

Les principaux paramètres qui définissent la houle sont :

- la longueur d'onde (L), qui est la distance qui sépare deux crêtes successives, et qui peut varier de quelques dizaines à quelques centaines de mètres ;

- la hauteur (H), qui est la dénivellation maximale entre une crête et un creux successifs. Un autre paramètre important est la cambrure de la houle, définie par le rapport H/L , qui est toujours de l'ordre de quelques centièmes ; la cambrure de la houle est limitée théoriquement à 14%, qui est la cambrure maximale avant le point de déferlement de la houle ;

- la période (T), qui est le temps qui sépare le passage de deux crêtes successives en un point fixe. La période varie de 3 s à 20 s selon les dimensions de la mer ;

Afin de comparer les diverses théories basées sur des hypothèses différentes, on rappellera dans un premier temps la théorie linéaire d'Airy .

II- PROPAGATION DE LA HOULE SUR UN FOND HORIZONTAL

II-1- FOND RIGIDE IMPERMEABLE

II-1-1- EQUATION DU PROBLEME

En ajoutant l'hypothèse du fond rigide et imperméable aux hypothèses considérées plus haut, et pour un fluide parfait, l'équation de continuité s'écrit :

$$\text{div}(\underline{v}) = 0 \quad \text{II-1}$$

En considérant que le flux est irrotationnel, il existe un potentiel des vitesses (ψ) tel que : $\underline{v} = \nabla\psi$ II-2

On en déduit l'équation de Laplace : $\nabla^2\psi = 0$ II-3

Les conditions aux limites sont (figure I- 1):

- a) sur la surface libre, définie par $y = \eta(x, t)$, à priori inconnue:
- la condition d'imperméabilité de cette surface s'écrit :

$$\eta, _t + \psi, _x \eta, _x - \psi, _y = 0 \quad \text{II-4}$$

- en considérant l'équation de Bernoulli le long d'une trajectoire et la constance de la pression sur cette surface :

$$\psi, _t + 1/2(\psi, _x^2 + \psi, _y^2) + g \cdot \eta = 0 \quad \text{II-5}$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

- b) sur le fond solide et fixe, la vitesse normale est nulle :

$$\underline{n} \cdot \nabla\psi = 0 \quad \text{II-6}$$

Dans le cas particulier $y = x \tan \alpha$, cette condition s'écrit :

$$\psi, _y + \psi, _x \cdot \tan \alpha = 0 \quad \text{II-7}$$

Pour un fond horizontal défini par $y=0$ on a $\psi, _y = 0$

Nous nous bornerons à l'étude linéaire, donc les termes d'ordre supérieurs à 1 ne seront pas considérés. Par conséquent, les conditions aux limites deviennent :

a : surface libre

$$\eta, _t = \psi, _y \quad \text{II-8}$$

$$\psi, _t + g \cdot \eta = 0 \quad \text{II-9}$$

b: fond solide $y = x \tan \alpha$ $\psi, _y + \psi, _x \tan \alpha = 0$ II-10

Par dérivation de (II-9), on obtient :

$$\psi, , _t + g \eta, _t = 0 \quad \text{II-11}$$

et, en remplaçant (II-8) dans II-11 :

$$\psi, , _t + g \cdot \psi, _y = 0 \quad \text{II-12}$$

Les équations (II-3) et les conditions limites (II-10) et (II-12) forment un ensemble d'équations qui peuvent être résolues pour la détermination de ψ ; on peut déduire η de l'équation (II-9):

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{g} \psi, _t(x, 0, t) \quad \text{II-13}$$

La solution finale sera :

$$\psi = -\frac{ia g}{\omega} \frac{ch(\lambda y)}{ch(\lambda h)} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad \text{II-14}$$

$$\eta = a \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad \text{II-15}$$

avec $a = H/2$, demi-amplitude de la vague.

La relation de dispersion peut être déduite de l'équation (II-12)

$$\omega^2 = g \lambda \operatorname{th}(\lambda h) \quad \text{II-16}$$

II-1-2-DESCRIPTION DU MOUVEMENT

Les composantes de la vitesse sont les suivantes:

$$U = \psi, _x = \frac{ag}{\omega} \frac{\lambda \operatorname{ch}(\lambda y)}{\operatorname{ch}(\lambda h)} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad \text{II-17}$$

$$V = \psi, _y = \frac{-ia g}{\omega} \frac{\lambda \operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{ch}(\lambda h)} \exp[i(\lambda x - \omega t)].$$

En introduisant l'équation de dispersion, on obtient :

$$U = a\omega \frac{\operatorname{ch}(\lambda y)}{\operatorname{sh}(\lambda h)} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad \text{II-18}$$

$$V = -ia\omega \frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{sh}(\lambda h)} \exp[i(\lambda x - \omega t)]$$

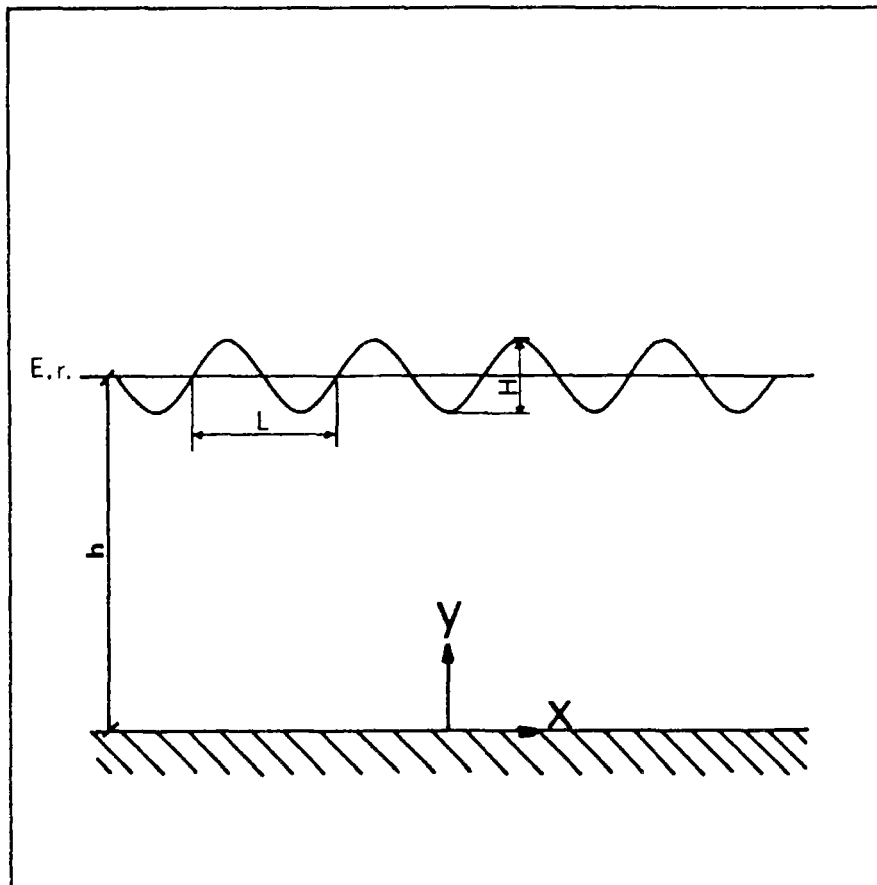


Figure I-1 : Propagation de la houle sur un fond horizontal, rigide, imperméable.

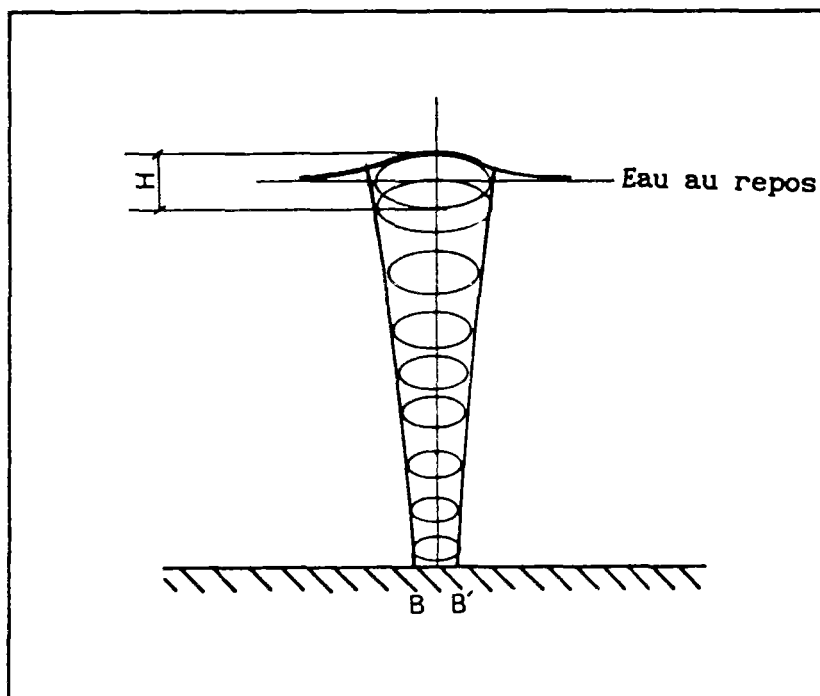


Figure I-2 : Trajectoires elliptiques des particules pour une profondeur finie.

On observe que l'hodographe de la vitesse pour un point donné A (x,y) est une ellipse centrée en A avec:

$$\begin{aligned}
 \text{-le grand axe parallèle à X :} & \quad H\omega \frac{ch(\lambda y)}{sh(\lambda h)} \\
 \text{-le petit axe parallèle à Y :} & \quad H\omega \frac{sh(\lambda y)}{sh(\lambda h)}
 \end{aligned}
 \tag{II-19}$$

Les trajectoires des particules sont obtenues par intégration des expressions des vitesses par rapport au temps :

$$\begin{aligned}
 \zeta = \int U dt &= -ia \frac{ch(\lambda y)}{sh(\lambda h)} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \\
 \epsilon = \int V dt &= a \frac{sh(\lambda y)}{sh(\lambda h)} \exp[i(\lambda x - \omega t)]
 \end{aligned}
 \tag{II-20}$$

A ce stade, au premier ordre, les particules décrivent donc une ellipse homothétique à l'hodographe, avec un retard de phase de $\pi/2$, et la trajectoire est fermée ; A est le centre de l'ellipse avec

$$\begin{aligned}
 \text{-L'axe horizontal :} & \quad H \frac{ch(\lambda y)}{sh(\lambda h)} \\
 \text{-L'axe vertical :} & \quad H \frac{sh(\lambda y)}{sh(\lambda h)}
 \end{aligned}
 \tag{II-21}$$

Sur la surface libre ($y = \eta$), pour les deux axes de l'ellipse, on a :

$$\begin{aligned}
 \zeta &= -iH \cotg(\lambda h) \\
 \epsilon &= H
 \end{aligned}
 \tag{II-22}$$

Sur le fond rigide, l'ellipse est aplatie ; la vitesse tangentielle est maximale et vaut :

$$U = \frac{a\omega}{sh(\lambda h)} \tag{II-23}$$

Le mouvement de la particule est oscillatoire sur le grand axe BB' avec la longueur $\frac{H}{sh(\lambda h)}$ (figure I-2). II-24

Les trajectoires elliptiques des particules sont présentées sur la figure I-2. Si le fond marin se trouve à une profondeur supérieure à la moitié de la longueur de la houle, dite houle du large, on peut écrire :

$$\frac{ch(\lambda y)}{sh(\lambda h)} \cong \frac{sh(\lambda y)}{sh(\lambda h)} \cong \exp[\lambda(y-h)] . \quad \text{II-25}$$

Dans ce cas, les trajectoires des particules sont des cercles de rayon $a \exp[\lambda(y-h)]$ (figure I- 3).

Si la profondeur relative h/L est inférieure à 0,05, soit à faible profondeur, on peut réécrire les trajectoires de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \zeta &= -ia/\lambda h \exp[i(\lambda x - \omega t)] \\ \varepsilon &= ay/h \exp[i(\lambda x - \omega t)] . \end{aligned} \quad \text{II-26}$$

On peut facilement conclure que le déplacement horizontal ainsi que la composante horizontale de la vitesse des particules pour un point donné ne dépendent plus de sa distance verticale par rapport à la surface libre.

Enfin, pour les profondeurs moyennes, telles que $0,05 < h/L < 0,5$, comme les expressions (II-19) et (II-21) montrent l'aplatissement des ellipses des vitesses et des trajectoires des particules dépendent de l'épaisseur de la couche d'eau, moins le fond rigide horizontal est profond, plus les ellipses sont aplaties.

II-2 - PROPAGATION DE LA HOULE SUR UN FOND POREUX

.....

Le problème de l'amortissement de la houle sur un fond poreux semi-infini a été abordé par LIU [1973] et REID et KAJIURA [1957], qui se sont essentiellement intéressés aux écoulements dans le fluide. On propose ici une approche tenant compte d'une épaisseur finie de fond poreux, permettant le calcul du champ de vitesses et de pression dans le fluide, et dans le milieu poreux, pour un fluide légèrement visqueux.

Cette légère viscosité engendre une dissipation d'énergie, d'une part, au sein de la masse liquide et, d'autre part, à proximité des surfaces limites. La dissipation surfacique est proportionnelle à $\nu^{3/2}$ dans la couche limite formée près de la surface libre, et à $\nu^{1/2}$ dans la couche visqueuse près du fond, ν étant la viscosité

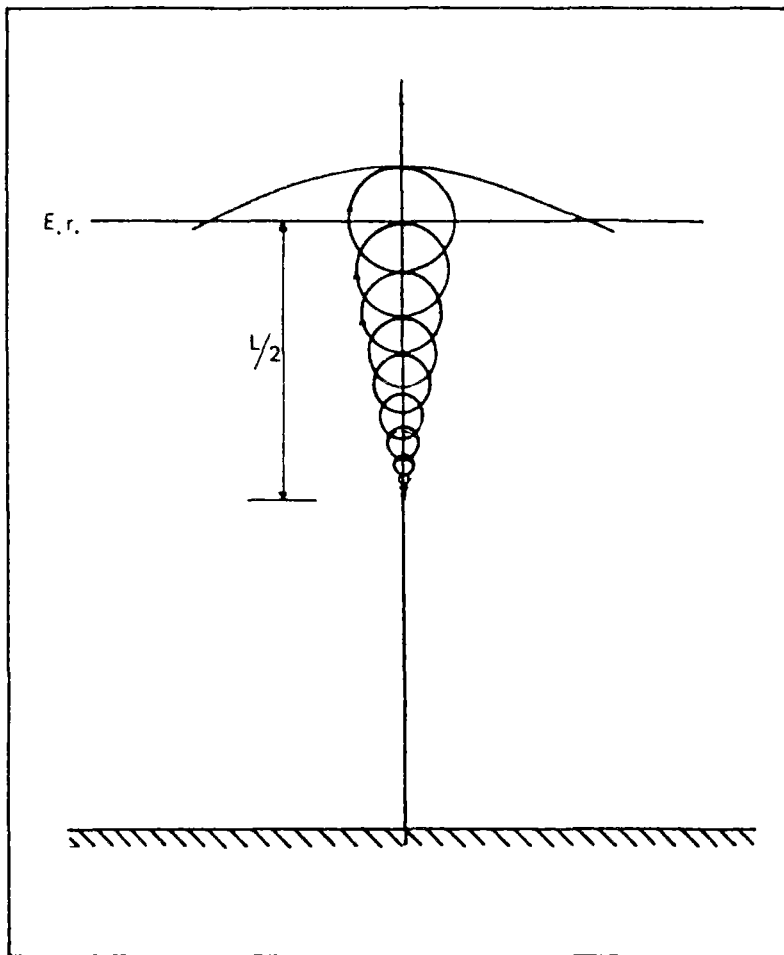


Figure I-3 : Trajectoires circulaires des particules pour la profondeur infinie.

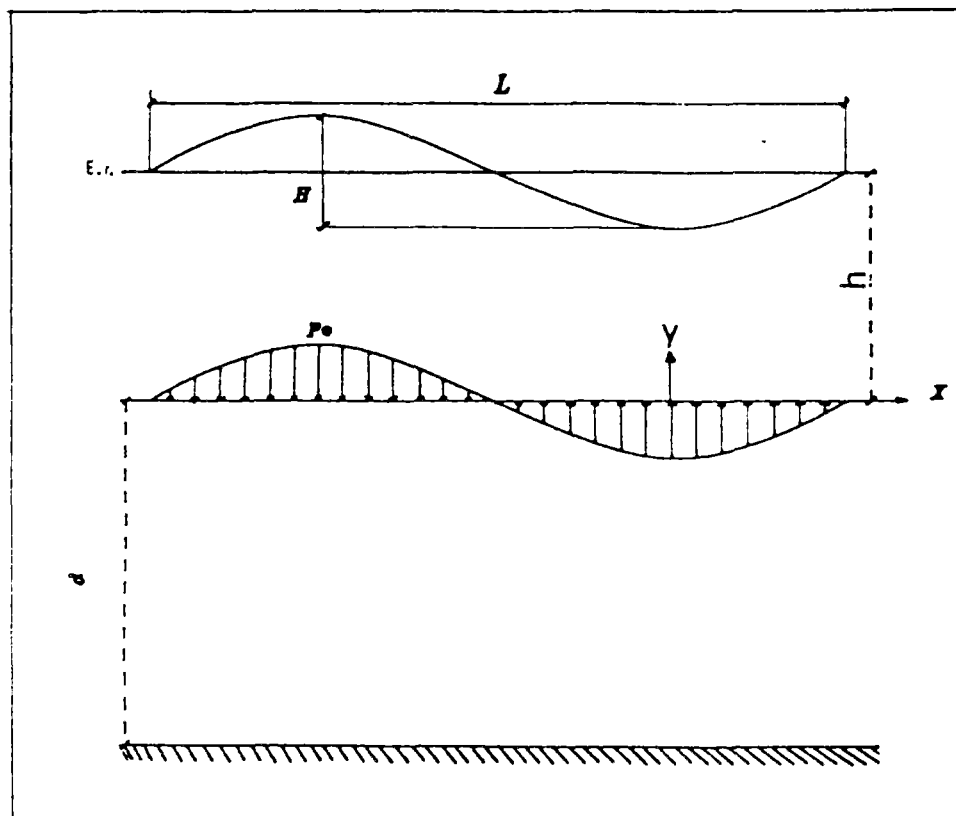


Figure I-4 : Propagation de la houle sur un fond horizontal poreux.

cinématique. Il est possible de négliger la dissipation au niveau de la surface libre, en admettant les contraintes tangentielles nulles à ce niveau. Dans les approches déjà effectuées, PUTNAM [1949], REID et KAJIURA [1957], HUNT [1959], LIU [1977] ont supposé que, pour les houles infinitésimales de fréquence (ω), le mouvement est essentiellement irrotationnel, sauf dans la couche visqueuse très mince d'épaisseur $(2\nu/\omega)^{1/2}$ à proximité des parois solides. On considère donc essentiellement la dissipation des couches limites, en considérant les hypothèses suivantes :

-la surface libre n'est soumise à aucune contrainte tangentielle,

-le mouvement du fluide est irrotationnel en dehors de la couche limite près de l'interface.

Afin de garantir la continuité de la composante horizontale de la vitesse sur l'interface, on considère une composante horizontale de la vitesse rotationnelle U dans la couche limite visqueuse d'épaisseur $(2\nu/\omega)^{1/2}$. Donc, en utilisant la méthode de l'approximation des couches limites, la solution du problème posé sera présentée de la manière suivante.

II-2-1-ÉCOULEMENT DANS LE FLUIDE

Il existe un potentiel des vitesses ψ_1 pour la couche du fluide $0 \leq y \leq h$, et l'équation de Laplace est valable :

$$\nabla^2 \psi_1 = 0 \quad \text{II-27}$$

En considérant l'équation de Bernoulli le long d'une trajectoire et en supposant les vitesses des particules négligeables sur la surface libre ($p = 0$ et $y = \eta$), on obtient des conditions aux limites identiques à celles obtenues précédemment (I-8, I-10) :

$$\begin{aligned} \psi_{1,t} + g \eta &= 0 \\ \psi_{1,,t} + g \psi_{1,y} &= 0 \end{aligned} \quad \text{II-28}$$

L'équation de la surface libre est donnée par :

$$\eta = a \exp[i(Nx - \omega t)] \quad \text{II-29}$$

avec $N = \lambda + iD$

λ est le nombre d'onde, D le coefficient d'amortissement, et a est égale à la moitié de la hauteur d'onde ($H/2$).

II-2-2-ÉCOULEMENT DANS LE MILIEU POREUX

Pour le milieu poreux, on utilise l'équation du mouvement sous la forme connue (REID et KAJIURA [1957]):

$$u_{2,t} = -\frac{m\nu}{k} u_2 - \frac{1}{\rho} P_{2,x} \quad \text{II-30}$$

$$v_{2,t} = -\frac{m\nu}{k} v_2 - \frac{1}{\rho} P_{2,y}$$

k et n sont la perméabilité et la porosité du sol, ν est la viscosité cinématique du fluide, u_2 et v_2 les composantes de vitesse, et P_2 la pression.

L'équation de continuité impose

$$\nabla^2 P_2 = 0 \quad \text{II-31}$$

Les conditions limites sont :

a: pour l'interface

$$y=0$$

$$\begin{cases} P_2 = P_1 \\ \psi_{1,y} = \nu v_2 \end{cases} \quad \text{II-32}$$

b: pour le fond imperméable

$$y=-d$$

$$v_2 = 0 \quad \text{II-33}$$

II-2-3-RESOLUTION

Sachant que la sollicitation dans le milieu poreux est le résultat d'une sollicitation harmonique, on peut écrire:

$$\begin{cases} P_2(x, y, t) = P_2(x, y) \exp(-i\omega t) \\ u_2(x, y, t) = u_2(x, y) \exp(-i\omega t) \\ v_2(x, y, t) = v_2(x, y) \exp(-i\omega t) \end{cases} \quad \text{II-34}$$

En supposant un potentiel des vitesses ψ_2 harmonique pour le milieu poreux, des équations (II-30) on tire :

$$\psi_{2,t} + \frac{m\nu}{k} \psi_2 + \frac{1}{\rho} P_2 = 0 \quad \text{II-35}$$

$$\text{soit} \quad -i\omega\psi_2 + \frac{m\nu}{k} \psi_2 + \frac{1}{\rho} P_2 = 0 \quad \text{II-36}$$

$$\text{soit} \quad \rho(i\omega - \frac{m\nu}{k})\psi_2 = P_2 \quad \text{II-37}$$

Si on considère également la pression hydrostatique, on peut écrire :

$$P_2 = \frac{\rho}{Q} \psi_2 - \rho g(y-h) \quad \text{II-38}$$

$$\text{avec} \quad \frac{1}{Q} = (i\omega - \frac{m\nu}{k})$$

Finalement, à partir de la solution générale des équations différentielles aux dérivées partielles, on trouve pour ψ_1 et ψ_2 les expressions:

$$\psi_1 = f_1(y) \exp[i(Nx - \omega t)] \quad \text{II-39}$$

$$\psi_2 = f_2(y) \exp[i(Nx - \omega t)] \quad \text{II-40}$$

$$\text{avec} \quad f_1(y) = -\frac{iga}{\omega} \frac{A \operatorname{ch}(Ny) - iB \operatorname{sh}(Ny)}{\operatorname{ch}[N(h+d)] + iQ\omega \operatorname{sh}[N(h+d)]} \quad \text{II-41}$$

$$\text{et} \quad f_2(y) = -Qga \frac{C \operatorname{ch}[N(Y+d)]}{\operatorname{ch}[N(h+d)] [\operatorname{ch}(Nh) + i\omega Q \operatorname{sh}(Nh)]} \quad \text{II-42}$$

Les constantes A,B,C sont déterminées à partir des conditions aux limites.

Après remplacement des équations (II-28), (II-32), et (II-33) dans les (II-39) et (II-40) on trouve les expressions générales des deux potentiels des vitesses ψ_1 et ψ_2 .

$$\psi_1 = - \frac{iga}{\omega} \frac{\operatorname{ch}(Ny) + i n \omega Q}{\operatorname{ch}(Nh) + i n \omega Q} \frac{\operatorname{sh}(Ny) \operatorname{th}(Nd)}{\operatorname{sh}(Nh) \operatorname{th}(Nd)} \exp[i(Nx - \omega t)] \quad \text{II-43}$$

$$\psi_2 = \Psi \exp[i(Nx - \omega t)] \quad \text{II-44}$$

avec

$$\Psi = Qga \frac{\operatorname{ch}(y+d)}{\operatorname{ch}(Nd) [\operatorname{ch}(Nh) + i n \omega Q \operatorname{sh}(Nh) \operatorname{th}(Nd)]} \quad \text{II-45}$$

En remplaçant (II-41) dans (II-28), on trouve la relation de dispersion :

$$\omega^2 = Ng \frac{\operatorname{th}(Nh) + i n \omega Q \operatorname{th}(Nd)}{1 + i n \omega Q \operatorname{th}(Nh) \operatorname{th}(Nd)} \quad \text{II-46}$$

Les équations (II-43 à II-46) présentent la solution générale de la propagation de la houle sur un fond rigide perméable où l'épaisseur de la couche de sol est finie.

II-2-4-VERIFICATION

On applique ces résultats plus généraux à différents cas particuliers.

-Premier cas : on considère une couche de sol infinie :

on a $d \rightarrow \infty \Rightarrow \operatorname{th}(Nd) \rightarrow 1$

donc les expressions de ψ_1 et de ψ_2 deviennent:

$$\psi_1 = - \frac{iga}{\omega} \frac{\operatorname{ch}(Ny) + i n \omega Q}{\operatorname{ch}(Nh) + i n \omega Q} \frac{\operatorname{sh}(Ny)}{\operatorname{sh}(Nh)} \exp[i(Nx - \omega t)] \quad \text{II-47}$$

$$\psi_2 = Qga \frac{\exp(Ny)}{\operatorname{ch}(Nh) + i n \omega Q \operatorname{sh}(Nh)} \exp[i(Nx - \omega t)] \quad \text{II-48}$$

$$\omega^2 = Ng \frac{\operatorname{th}(Nh) + i n \omega Q}{1 + i n \omega Q \operatorname{th}(Nh)} \quad \text{II-49}$$

Ce qui correspond aux résultats déjà trouvés (*Reid et Kajiura*).

-Deuxième cas : on considère une couche de sol d'épaisseur finie infiniment perméable et de porosité unité, ce qui revient à assimiler le sol à une couche de fluide équivalente. Ainsi donc, les potentiels des vitesses ψ_1 et ψ_2 sont égaux et ils exprimeront le mouvement de la houle sur le fond horizontal imperméable situé à la profondeur $h + d$:

$$n \rightarrow 1 \text{ et } K \rightarrow \infty \Rightarrow Q \rightarrow -\frac{i}{\omega} \text{ et } D=0 .$$

On vérifie bien que

$$\psi_1 = \psi_2 = -\frac{iga}{\omega} \frac{ch[\lambda(y+d)]}{ch[\lambda(h+d)]} \exp[i(\lambda x - \omega t)] , \quad \text{II-50}$$

ce qui est parfaitement en accord avec la théorie d'Airy avec une profondeur $h+d$.

- Troisième cas : on considère une couche de sol d'épaisseur finie, de porosité et perméabilité nulles :

$$K \rightarrow 0 \Rightarrow Q \rightarrow 0$$

d'où

$$\text{et } \begin{matrix} \psi_2 = 0 \\ \psi_1 = -\frac{iga}{\omega} \frac{ch(\lambda y)}{ch(\lambda h)} \exp[i(\lambda x - \omega t)] , \end{matrix} \quad \text{II-51}$$

Ce qui correspond à la théorie d'Airy avec une profondeur h .

En introduisant $Q = 0$ dans l'équation II-46 on obtient:

$$\omega^2 = g \operatorname{th}(Nd) ,$$

qui est l'équation de dispersion connue.

REMARQUE

A partir des équations (II-43) et (II-44) on peut vérifier que la composante tangentielle de la vitesse est discontinue sur l'interface $y = 0$. Ce résultat est la conséquence logique de la méthode d'approximation des couches limites. En effet, comme il a été déjà expliqué, dans la couche très mince formée près de l'interface l'équation de continuité de la composante horizontale de la vitesse s'écrit :

$$\psi_{1,x} + U_1 = n \psi_{2,x} \quad \text{II-52}$$

La composante tangentielle de la vitesse rotationnelle peut être trouvée par l'équation suivante :

$$U_{1,t} = \nu U_{1,,y} \quad \text{II-53}$$

En supposant que U_1 s'amortit exponentiellement en s'éloignant de l'interface, on peut donner la solution de l'équation différentielle :

$$U_1 = U_0 \exp[-\beta(1-i)y] \exp[i(Nx-wt)] \quad \text{II-54}$$

où $\beta = (\omega/2\nu)^{1/2}$, qui est l'inverse de l'épaisseur de la couche limite visqueuse. U_0 peut être trouvé en considérant l'équation de la condition à l'interface (II-3). On aura donc :

$$U_1 = \frac{Nga}{\omega} (1-inwQ) \frac{\exp[-\beta(1-i)y]}{\text{ch}(Nh) + inwQ \text{sh}(Nh) \text{th}(Nd)} \exp[i(Nx-wt)] \quad \text{II-55}$$

II-3- EFFET DE LA DÉFORMABILITÉ DU FOND SUR LA PROPAGATION DE LA

HOULE

En prenant en compte les principales hypothèses déjà citées, et en considérant le sol imperméable et déformable, *MALLARD et DALRYMPLE [1977]* ont combiné les équations de l'élasticité linéaire en déformation plane avec la théorie linéaire du mouvement de la houle, en tenant compte de l'effet de la déformabilité du fond sur la propagation de la houle. Ils ont proposé, pour le potentiel des vitesses et la relation de dispersion, les expressions suivantes :

$$\psi = -\frac{iga}{\omega} \frac{ch(\lambda y)}{ch(\lambda h)} \left[\frac{G' - th(\lambda y)}{G' - th(\lambda h)} \right] \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad \text{II-56}$$

$$\omega^2 = g\lambda \left[\frac{G' th(\lambda h) - 1}{G' - th(\lambda h)} \right] \quad \text{II-57}$$

avec
$$G' = \frac{G \lambda^2}{\rho \omega^2 (1 - \nu)}$$

où G est le module de cisaillement du sol.

On en déduit la pression dynamique sur le fond :

$$P = \frac{\rho g a}{ch(\lambda h)} \left[\frac{G'}{G' - th(\lambda h)} \right] \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad \text{II-58}$$

En fait, ils ont présenté une solution analytique non couplée pour la distribution des contraintes dans un massif élastique semi-infini, non poreux sous sollicitation harmonique (transversale et longitudinale). On reviendra sur cet étude dans la partie bibliographique du deuxième chapitre.

La figure I- 5 montre la variation de la pression en fonction de G et de la profondeur (extrait de MALLARD et DALRYMPLE [1977]).

III PROPAGATION DE LA VAGUE SUR UN FOND INCLINE

III-1) POSITION DU PROBLÈME

Nous nous proposons d'étudier théoriquement la propagation de la houle sur un fond incliné, la variation de la hauteur de la vague en fonction de la variation de la profondeur d'eau, et la distribution de la pression au sein du fluide et notamment sur le fond.

On suppose que le fond incliné, qui est plan, rigide et imperméable, est raccordé à un fond horizontal à l'extrémité amont.

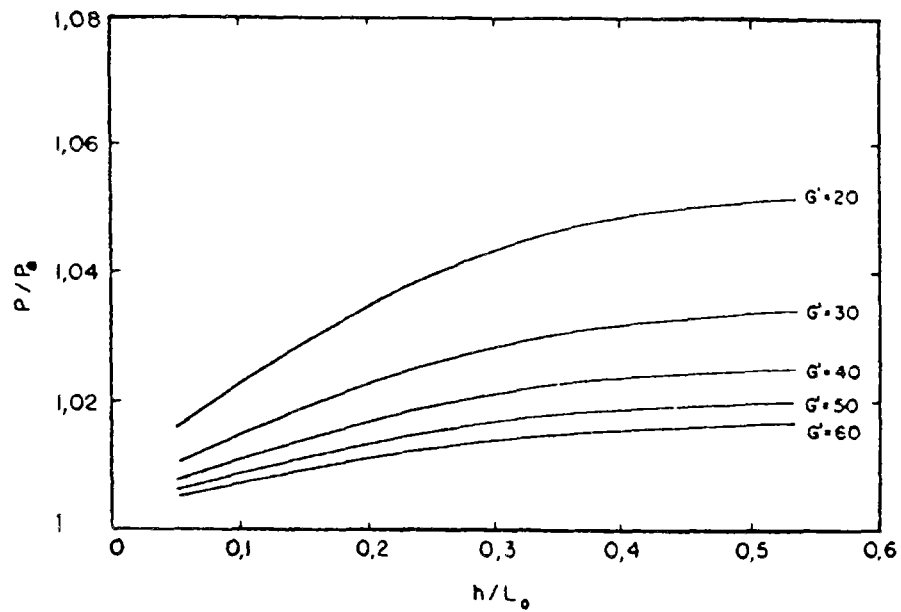


Figure I-5 : Variation de la pression en fonction de la rigidité en profondeur.

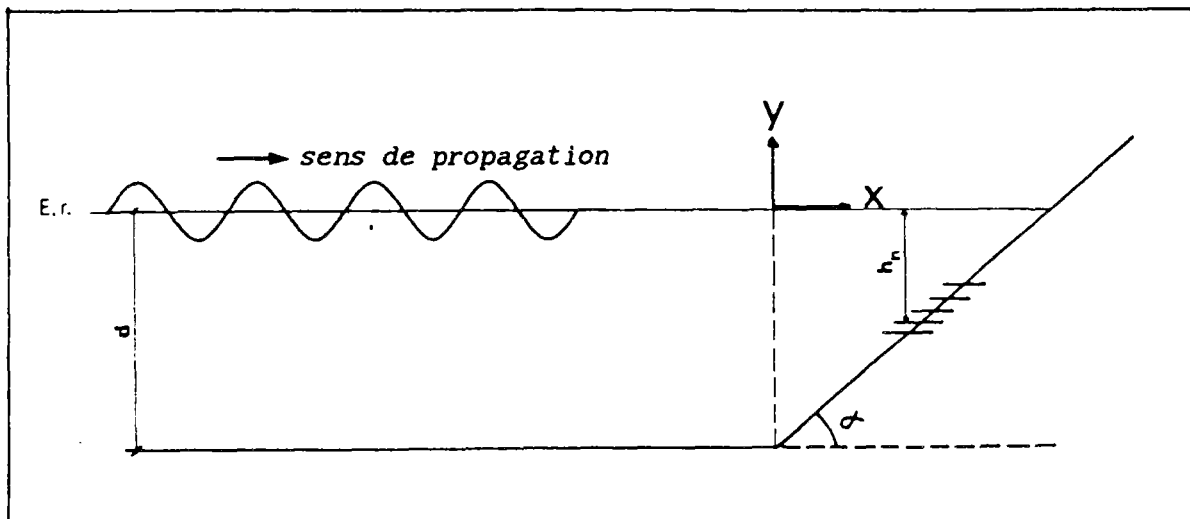


Figure I-6 : Propagation de la houle sur un fond incliné.

L'axe Ox coïncide avec la surface libre (niveau moyen de l'eau au repos); l'axe Oy est vertical ascendant, et l'origine a la même ordonnée que le point de raccordement du fond incliné avec le fond horizontal, mais elle est située sur la surface libre (figure I-6). Les autres hypothèses restent les mêmes. Le problème se ramène au calcul du potentiel des vitesses vérifiant les équations et les conditions aux limites déjà citées (voir II-1).

III-2) SOLUTIONS ANALYTIQUES PROPOSÉES PAR DIFFÉRENTS AUTEURS

Les solutions analytiques existantes supposent que le fond horizontal est rejeté entièrement à l'infini amont. Les systèmes d'axes utilisés dans ces solutions sont soit polaires (r, θ) , avec pour origine l'intersection du fond incliné avec le niveau moyen de l'eau au repos, soit cartésien avec la même origine et, comme axe Ox, le niveau moyen de l'eau au repos (figure I-7).

La périodicité des ondes est introduite par un facteur sinusoïdal $\Psi = \psi \exp(i\omega t)$. III-1

Dans le système polaire, les équations du problème peuvent s'écrire :

1 : équation de continuité:

$$\text{dans la masse liquide} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{III-2}$$

2 : imperméabilité du fond

$$\text{sur le fond} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad \text{III-3}$$

3 : conditions sur la surface libre

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{r\omega^2}{g} \psi = 0 \quad \text{III-4}$$

K.O FRIEDRICHE [1948], E. ISSACSON [1950] et M. ROSEAU [1952] ont trouvé des solutions analytiques sans aucune restriction sur α . *J.J. STOCKER [1947] et MICHE [1944]* ont proposé la solution dans le cas des angles $\alpha = \frac{\pi}{2n}$ (n : entier). *H. LEWY [1946]* a abordé le problème pour les angles $\alpha = \frac{\pi}{2n}$ et $\alpha = p \frac{\pi}{2n}$ (p, n

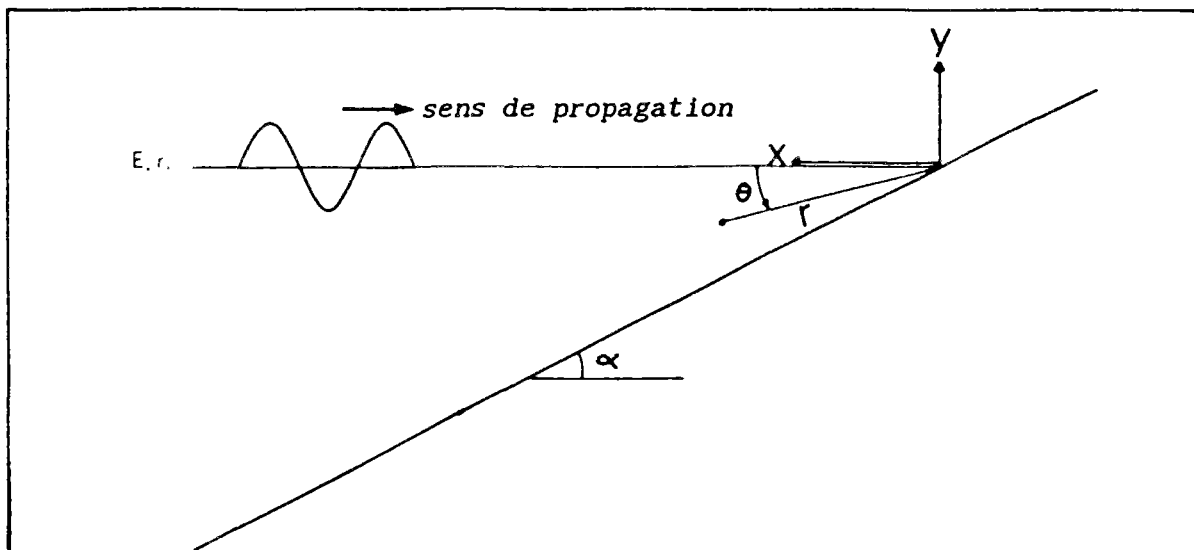


Figure 1-7 : Coordonnées choisies dans les différentes solutions.

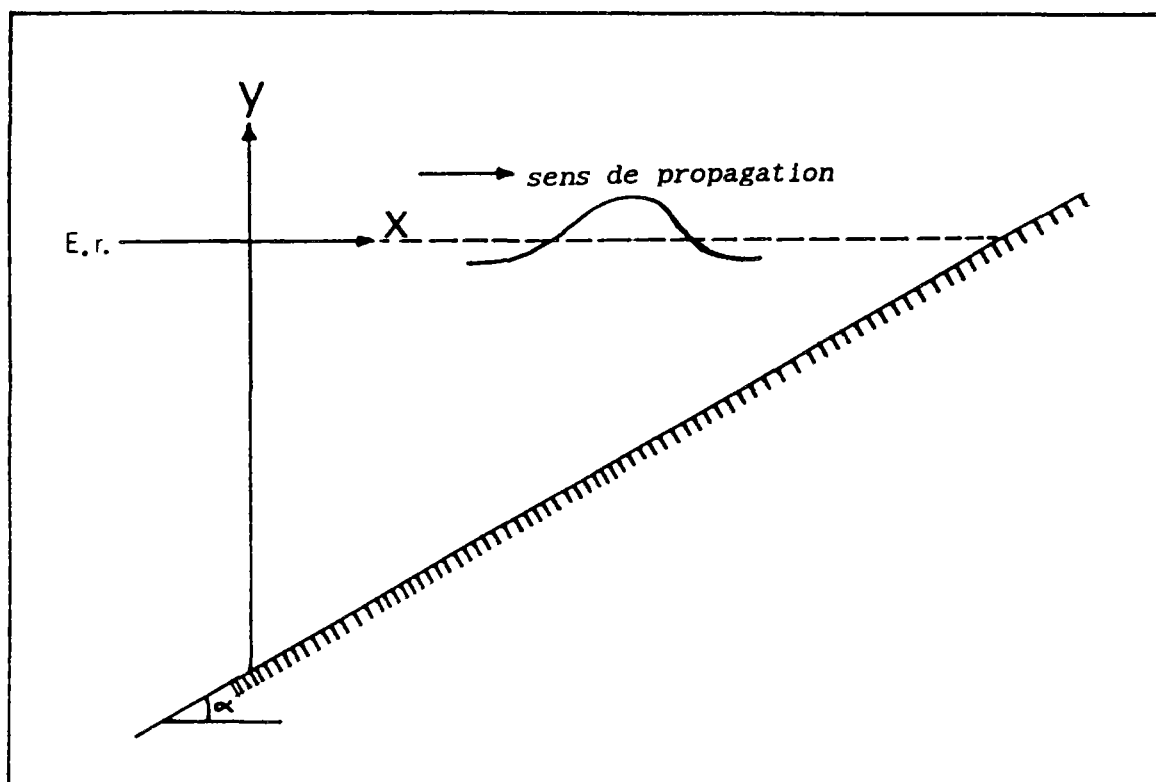


Figure I-8 : Définition des coordonnées dans l'approche de BIESEL.

entier et tels que p est impair et $p > 2n$) et finalement *BEISEL* [1952] a proposé la solution analytique du problème en considérant le système cartésien qu'on va maintenant présenter. Dans la suite, les phénomènes de réflexion et réfraction de la houle sur le fond incliné ne sont pas considérés. Le déferlement de la houle est décrit en annexe I-A.

III-2-1 APPROCHE DE BIESEL

BIESEL [1952] a présenté une approche intéressante du problème dans le cas d'un talus infini où le carré de la pente du fond incliné est négligeable. La théorie est développée au premier ordre d'approximation par rapport à l'amplitude de la houle (figure I-8).

Le potentiel des vitesses est donné par l'expression suivante:

$$\psi(x, y, t) = \frac{a_n g}{\omega \operatorname{ch}(\lambda_n h_n)} \left[\operatorname{ch}[\lambda_n (h_n + y)] \cdot \sin(\lambda_n x - \omega t) + \right.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) \left[\frac{\lambda_n (h_n + y)}{D^2 \operatorname{th}(\lambda_n h_n)} \operatorname{sh}[\lambda_n (h_n + y)] \right. \quad \text{III-5}$$

$$\left. - \lambda_n (h_n + y) \operatorname{ch}[\lambda_n (h_n + y)] + \right.$$

$$\left. \frac{\lambda_n^2 (h_n + y)^2 \operatorname{ch}[\lambda_n (h_n + y)]}{D \operatorname{sh}(\lambda_n h_n) \operatorname{ch}(\lambda_n h_n)} \right] \cos(\lambda_n x - \omega t)$$

$$\text{avec } a_n = \frac{a_0}{[D \operatorname{th}(\lambda_n h_n)]^{1/2}}$$

$$D = 1 + \frac{\lambda_n h_n}{\operatorname{sh}(\lambda_n h_n) \operatorname{ch}(\lambda_n h_n)}$$

Le système des coordonnées eulériennes donne en première approximation des profils symétriques. Le système lagrangien peut supporter des profils assymétriques. BIESEL a introduit le système lagrangien et il a donné les expressions des déplacements des particules de la surface libre. Les trajectoires de ces particules sont des ellipses. Le grand axe est incliné par rapport à l'horizontale. Son inclinaison est égale à :

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{ch}^2(\lambda_n h_n) - D \operatorname{sh}^2(\lambda_n h_n)}{D^2} \quad \text{III-6}$$

Elle devient nulle à $h_n/L_n = 0,2$. La pente du front aval du profil de la houle est :

$$\operatorname{tg} w_{av} = \lambda_n^2 a_0^2 \operatorname{tg}(\alpha) \frac{3\operatorname{th}(\lambda_n h_n) + \lambda_n h_n - 3\lambda_n h_n \operatorname{th}(\lambda_n h_n)}{D^2 \operatorname{sh}^2(\lambda_n h_n) \operatorname{th}^2(\lambda_n h_n)} \quad \text{III-7}$$

Pour $h_n = 0$ $\operatorname{tg} w_{av} \rightarrow \infty$ et, pour le rapport $h/L = 0,27$, $\operatorname{tg} w_{av} = 0$ et ensuite elle change de signe. Le profil de la houle obtenu par cette approche présente un front aval de plus en plus incliné. Il devient vertical et ensuite il prend l'aspect du déferlement plongeant (voir annexe I-A). L'introduction des termes en seconde approximation altère le profil.

L'approche de BIESEL ne tient pas compte de la réflexion. Elle permet de prévoir le déferlement à l'aide des critères empiriques.

III-2-2 APPROCHE ÉNERGÉTIQUE

Avant le point de déferlement et la destruction de la houle, différents auteurs supposent que les modifications des caractéristiques de la houle sur le fond incliné sont suffisamment lentes, de telle sorte que la structure interne de la houle puisse encore être assimilée à celle d'une vague sur un fond horizontal de la même profondeur. Ainsi, le fond peut être remplacé par une succession de petites marches horizontales. Les parois verticales qui devraient exister entre les marches horizontales provoquent alors une réflexion et des perturbations locales ; ces perturbations locales sont faibles et négligeables du fait de la faible hauteur des marches; en négligeant ces effets on peut approcher la propagation de la houle par ce qui est appelé "l'approche énergétique".

L'approche énergétique est basée sur l'hypothèse de la conservation de l'énergie transmise par la crête de la houle (flux moyen de l'énergie de la houle constant).

Examinons de plus près cette hypothèse.

Lorsque la profondeur diminue, la période est la seule caractéristique de la houle qui reste constante. Pour étudier la variation des autres paramètres de la houle, on considère un fond incliné de pente faible, sur lequel la houle se propage dans la direction de la ligne de plus grande pente, et on suppose que les pentes faibles n'induisent pas de houle réfléchie. Pour une profondeur d , on peut exprimer la relation entre la célérité et la longueur d'onde au large et celles d'une profondeur donnée de la façon suivante :

$$L = L_0 \operatorname{th}(\lambda d) \quad , \quad C = C_0 \operatorname{th}(\lambda d) \quad \text{III-8}$$

De ces relations, on conclut que les crêtes de houle sont parallèles aux lignes de niveau. Cette constatation incite à supposer la constance du flux moyen d'énergie de la houle entre deux plans parallèles à la direction de propagation de la houle. Si ce

n'était pas le cas, il y aurait accumulation d'énergie entre deux plans parallèles aux crêtes (*BONNEFILLE [1980]*). Ce flux moyen de l'énergie transmise par la houle par unité de longueur de crête est égal au produit de la force existante sur un plan vertical normal à la direction de la propagation par la vitesse des particules qui traversent ce plan :

$$E_t = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-d}^0 (P + \rho gy) u \, dt \, dy \quad . \quad \text{III-9}$$

On sait que $P + \rho gy = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t}$, III-10

d'où $E_t = -\frac{\rho}{T} \int_0^T \int_{-d}^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} \, dt \, dy \quad . \quad \text{III-11}$

Les équations introduites par la conservation du flux, combinées avec les équations d'une théorie donnée de la houle sur fond horizontal, suffisent pour décrire l'évolution des différentes caractéristiques de la houle sur un fond incliné. Le problème qui se pose à ce stade concerne la théorie à adopter pour la profondeur relative (d/L) moyenne à laquelle nous nous intéressons. La plupart des auteurs adoptent la théorie du premier ordre (*CARRIER [1966]*, *KEULEGAN [1967]*, *MEYER-TYLOR [1972]*, *PEREGRINE [1971]*, *STOKER [1957]*). Afin de prendre en compte des effets non linéaires, certains auteurs (*KOH et LEMEHAUTE [1966]*, *EAGLESON [1956]*) utilisent la théorie de *STOKES*, développée jusqu'au 3ème ordre. Cette approche est décrite en annexe I-B . On va examiner de plus près l'approche énergétique combinée avec cette dernière théorie :

III-2-2-3 LA HOULE DE STOKES AU PREMIER ORDRE

Le potentiel de vitesses pour chaque tronçon horizontal (n) est donné par l'expression (figure I- 6) :

$$\psi_n = \frac{a_n g}{\omega} \frac{ch [\lambda_n (h_n + y_n)]}{ch (\lambda_n h_n)} \cos(\lambda_n x - \omega t) \quad \text{III-12}$$

L'équation de la surface libre est donnée par :

$$\eta_n = a_n \sin(\lambda_n x - \omega t) . \quad \text{III-13}$$

La relation de dispersion d'Airy s'écrit:

$$\omega^2 = \lambda_n g \operatorname{th} (\lambda_n h_n) . \quad \text{III-14}$$

Le flux d'énergie moyen vaut:

$$E_t = \frac{1}{4} \rho g a_n^2 \frac{L_n}{T} \left[1 + \frac{2\lambda_n h_n}{sh (2\lambda_n h_n)} \right] . \quad \text{III-15}$$

On applique le principe cité pour $x' = 0$ et un point sur le tronçon (n) :

$$(E_t)_1 = (E_t)_2 \quad \text{III-16}$$

$$\frac{a_n}{a} = \frac{ch (\lambda_n h_n) [\lambda d + sh (\lambda d) ch (\lambda d)]^{1/2}}{ch (\lambda d) [\lambda_n h_n + sh (\lambda_n h_n) ch (\lambda_n h_n)]^{1/2}} \quad \text{III-17}$$

En appliquant le principe de la période constante, on obtient :

$$\frac{L_n}{L} = \frac{\operatorname{th} (\lambda_n h_n)}{\operatorname{th} (\lambda d)} \quad \text{III-18}$$

où L , a , λ sont les caractéristiques de la houle sur le fond horizontal.

A l'aide de ces deux quantités calculées a_n et L_n , la propagation suivant l'approche énergétique de la houle sur le fond incliné est bien définie. Si l'on considère a_0 , L_0 , λ_0 , caractéristiques de la houle au large, on aura :

$$\frac{1}{4} \rho g a_n^2 \frac{L_n}{T} \left[1 + \frac{2\lambda_n h_n}{sh(2\lambda_n h_n)} \right] = \frac{1}{4} \rho g a_0^2 \frac{L_0}{T} \quad \text{III-19}$$

en mettant $L_n = L_0 th(\lambda_n h_n)$ dans l'équation précédente :

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{ch(\lambda_n h_n)}{[\lambda_n h_n + sh(\lambda_n h_n) \cdot ch(\lambda_n h_n)]^{1/2}} \quad \text{III-20}$$

On constate que cette dernière équation est celle de l'approche de *BIESEL [1952]*.

IV) PRESSION SUR LE FOND

Le but final de l'étude des différents aspects de la propagation de la houle est la détermination de la pression sur le fond marin. Le fond horizontal peut être soit imperméable et rigide (théorie d'Airy), soit perméable et rigide (théorie proposée au paragraphe II-2), soit imperméable et déformable (paragraphe II-3). Les expressions de la distribution de la pression au sein d'un fluide sont respectivement:

1 : fond imperméable rigide

$$P = \gamma_w a \frac{ch(\lambda y)}{ch(\lambda h)} \exp[i(\lambda x - \omega t)] + \gamma_w (h - y) \quad \text{IV-1}$$

$$P = \frac{\gamma_w a}{ch(\lambda h)} \exp[i(\lambda x - \omega t)] + \gamma_w h \quad \text{IV-2}$$

2 : fond perméable, rigide

$$P = \gamma_w a \frac{\operatorname{ch}(Ny) - i n \omega Q}{\operatorname{ch}(Nh) - i n \omega Q} \frac{\operatorname{sh}(Ny) \operatorname{th}(Nd)}{\operatorname{sh}(Nh) \operatorname{th}(Nd)} \exp[i(Nx - \omega t)] + \gamma_w (h - y) \quad \text{IV-3}$$

et pour le fond avec $y=0$

$$P = \gamma_w a \frac{1}{\operatorname{ch}(Nh) - i n \omega Q} \frac{1}{\operatorname{sh}(Nh) \operatorname{th}(Nd)} \exp[i(Nx - \omega t)] + \gamma_w h \quad \text{IV-4}$$

3 : fond imperméable, déformable

$$P = \gamma_w a \frac{\operatorname{ch}(\lambda y)}{\operatorname{ch}(\lambda h)} \left[\frac{G'}{G' - \operatorname{th}(\lambda h)} \right] \exp[i(\lambda x - \omega t)] + \gamma_w (h - y) \quad \text{IV-5}$$

et pour le fond avec $y=0$

$$P = \gamma_w a \frac{1}{\operatorname{ch}(\lambda h)} \left[\frac{G'}{G' - \operatorname{th}(\lambda h)} \right] \exp[i(\lambda x - \omega t)] + \gamma_w h, \quad \text{IV-6}$$

$$\text{avec } G' = \frac{G \lambda^2}{\rho \omega^2 (1 - \nu)}$$

Dans les expressions ci-dessus, le premier terme est la pression dynamique due à l'accélération des particules et le second est la pression hydrostatique normale. Sur la figure I-9, les deux composantes de la première expression (théorie d'Airy) sont montrés.

Les expressions de la pression, dans le cas d'un fond déformable par rapport à un fond rigide, différent d'un coefficient :

$$\frac{G'}{G' - \operatorname{th}(\lambda h)}$$

En considérant que $\operatorname{th}(\lambda h)$, qui est compris entre 0 et 1, est petit devant G' , qui dépend des caractéristiques du sol et de la houle, et est de l'ordre de quelques dizaines, on peut conclure que ce coefficient est égal à un, à quelques centièmes près.

Sur la figure I-9, la comparaison entre la distribution de la pression au sein du fluide avec le fond rigide perméable et rigide

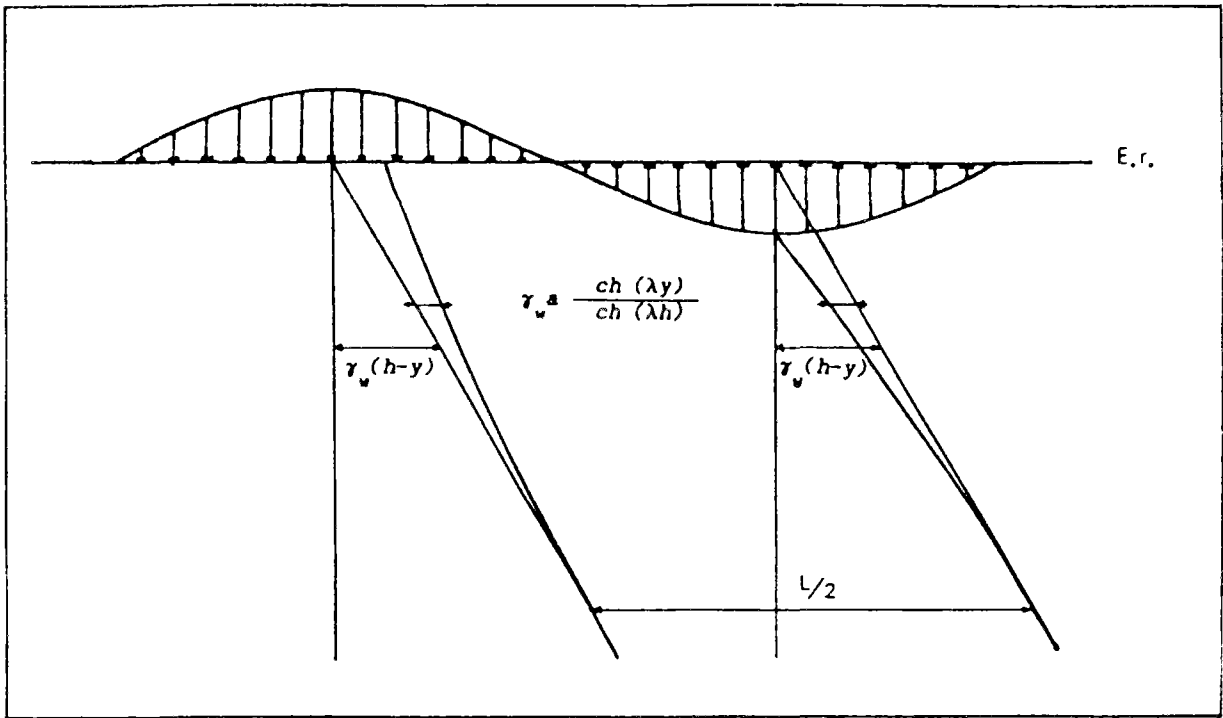


Figure I-9 : Distribution des deux composantes de la pression hydraulique en profondeur.

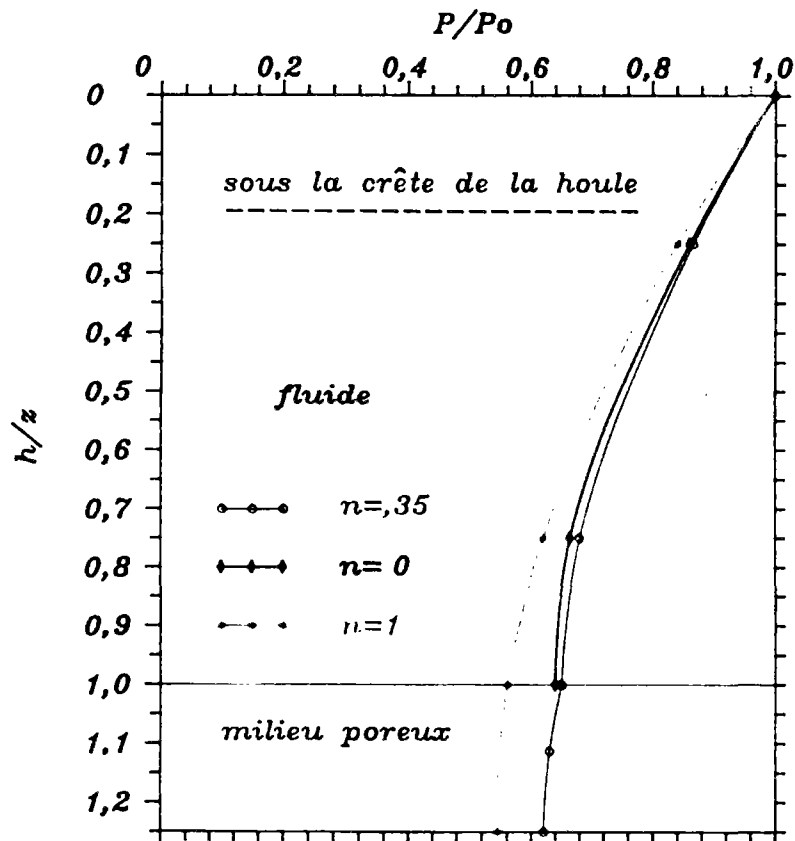


Figure I-10 : Effet de la porosité du sédiment sous-marin sur la distribution verticale de la pression

imperméable dans les trois cas étudiés au paragraphe II-2 est présentée. On observe que la perméabilité du fond marin ne joue pas un rôle important, la différence entre les deux courbes ($n=0$) et ($n=0,35$) n'est pas considérable.

Pour le fond incliné, si l'on considère le potentiel des vitesses proposé par BIESEL et en utilisant l'équation linéarisée de Bernouilli, la pression sur un fond incliné, rigide, imperméable pour un point de la profondeur (h_n) sera :

$$P_n = \gamma_w a_n \frac{1}{ch(\lambda h)} \exp[i(\lambda_n x - \omega t)] + \gamma_w h_n \quad \text{IV-7}$$

a_n est donné par soit l'approche de BIESEL, soit par l'approche énergétique.

En supposant un fond incliné infini avec les caractéristiques de la houle au large (a_0, λ_0, L_0), on peut trouver l'expression suivante, qui est plus simple :

$$P_n = \gamma_w a_0 \left[\lambda_n h_n + \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2\lambda_n h_n) \right]^{-1/2} \exp[i(\lambda_n x - \omega t)] + \gamma_w h_n$$

V) CONCLUSION

En considérant les résultats obtenus par comparaison entre les théories de la propagation de la houle dans lesquelles on a considéré différentes hypothèses concernant la déformabilité et la porosité du milieu soumis à l'action de la houle, on constate que l'écart avec la théorie, très simple à utiliser, d'Airy, n'est pas considérable, notamment en ce qui concerne la pression engendrée par la houle sur le fond marin. Par conséquent, afin de modéliser le chargement de la houle sur un fond marin déformable, perméable, horizontal, on peut utiliser, sans crainte, la théorie d'Airy, qui considère le fond rigide imperméable. L'effet de la viscosité existe dans une couche limite près de l'interface d'épaisseur de $(2\nu/\omega)^{1/2}$, qui est négligeable devant la profondeur de la mer.

Dans le cas d'un fond incliné de faible pente, il est licite de considérer que le flux moyen de l'énergie de la houle est

constant, ce qui permet de connaître l'évolution des caractéristiques de la houle en se propageant sur la pente, et d'obtenir la distribution de la pression sur le fond incliné.

Dans la suite de cette étude, on considérera donc la théorie de la propagation de la houle de STOKES du premier ordre (AIRY), afin de connaître le champ de pression sur le fond marin.

*Oh ! Je me sens l'âme navrée ;
L'océan gonfle, en soupirant,
Sa poitrine désespérée
Comme un ami qui me comprend.
T. GAUTIER*

CHAPITRE 2

MASSIF SEMI-INFINI HORIZONTAL SOUMIS A L'ACTION
DE LA HOULE ; ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I INTRODUCTION

La stabilité du fond marin, qu'il soit horizontal ou incliné, sous l'action de la houle est un problème qui a une énorme importance pour les ingénieurs et chercheurs dans le domaine de la Géotechnique marine. Ce problème intervient dans la conception du "pipeline", des fondations de structure offshore et dans la stabilité des ouvrages de protection des ports contre la houle.

Les difficultés du problème se situent à plusieurs niveaux. La première difficulté est le choix d'une théorie de la propagation de la houle sur le fond marin qui soit simple à utiliser et qui corresponde raisonnablement à la réalité ; les autres difficultés interviennent quand on prend en compte les propriétés mécaniques du sol et du fluide et finalement l'interaction entre le sol et le liquide interstitiel.

Dans le chapitre précédent, on a évoqué différentes théories avec différentes hypothèses, notamment en considérant l'interaction entre la houle et le fond marin. On utilise, à présent, la théorie choisie et détaillée dans la conclusion du chapitre précédent.

Ce chapitre est une synthèse bibliographique assez détaillée des études déjà menées par les différents auteurs concernant ce sujet, notamment les articles de YAMAMOTO [1978], MADSEN [1978] OKUSA [1985] , PUTNAM [1949], DEMARS [1983], FINN, SIDDHARATHAN et MARTIN [1983], MOSHAGEN et TORUM [1975], PREVOST et al. [1975], SLEATH [1970] , KRAFT et HELFRICH [1983], CARSTENS et al. [1976], LIU [1973,1977], MEI et FODA [1981], HENKEL [1970], et DOYLE [1973].

Cette étude bibliographique comporte quatre parties ayant pour sujets :

- la distribution de la pression interstitielle,
- les approches couplées et non couplées,
- les gradients hydrauliques,
- l'étude de stabilité du fond marin.

II SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE

~~~~~

En général, les approches déjà présentées peuvent être classées en deux catégories : la première contient les approches qui négligent les caractéristiques mécaniques du milieu perméable soumis à l'action de la houle, et l'interaction entre le milieu poreux et le fluide interstitiel. Dans ces approches non-couplées, les contraintes totales sont calculées suivant la théorie de l'élasticité isotrope, alors que la pression interstitielle est déterminée par l'équation de Laplace.

Dans la deuxième catégorie, le phénomène est analysé d'une manière couplée, c'est-à-dire qu'on suppose un milieu poreux et un écoulement Darcien dans ce milieu perméable, en considérant la déformabilité du squelette du sol et son influence sur le développement de la pression interstitielle au sein du milieu poreux.

### II-1) DISTRIBUTION DE LA PRESSION INTERSTITIELLE

~~~~~

Le problème est considéré plan (figure II-1).

Les hypothèses communes considérées dans les recherches déjà menées sont :

- un fond marin horizontal et rigide,
- un fluide incompressible,

Pour l'obtention de la pression sur le fond marin, on applique la théorie d'Airy :

$$p = p_0 \cos(\lambda x - \omega t)$$

où

$$p_0 = \gamma_w a \frac{1}{ch(\lambda h)}$$

II-1

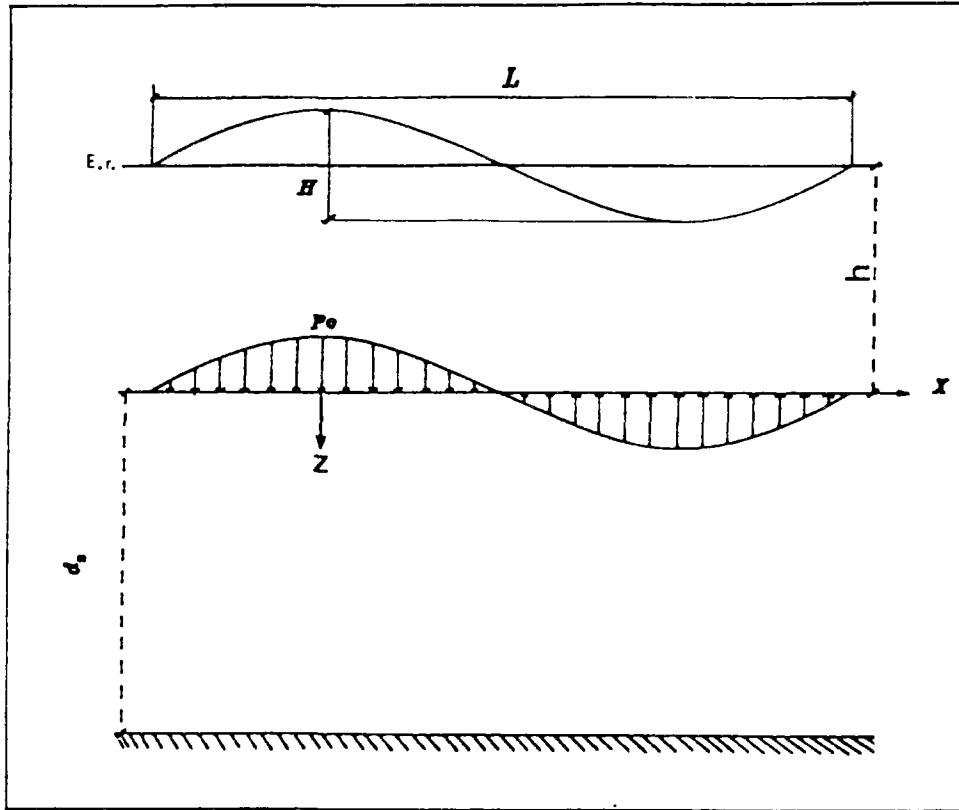


Figure II-1 : Schéma des principes et des notations.

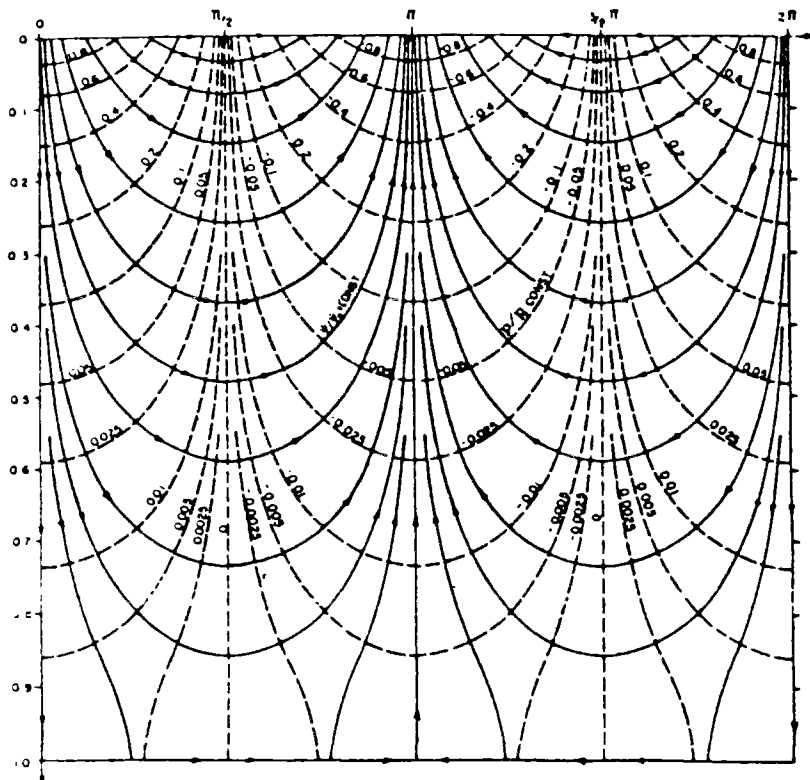


Figure II-2 : Réseau d'écoulement

En émettant l'hypothèse de l'isotropie hydraulique de la couche perméable finie et de l'incompressibilité du fluide et du squelette du sol, et en supposant la validité de la loi de Darcy, *PUTNAM [1949]* a montré que, pour un écoulement bidimensionnel, il existe un potentiel de vitesses régi par l'équation de Laplace.

En utilisant les mêmes hypothèses et en prenant en compte le potentiel des vitesses proposé par *PUTNAM, LIU [1973]* a proposé pour une couche de sol d'épaisseur " d_s " l'expression suivante de la distribution de la pression interstitielle en fonction de la profondeur :

$$p=p_0 \frac{ch[\lambda(d_s - z)]}{ch(\lambda d_s)} \cos(\lambda x - \omega t) . \quad \text{II-2}$$

Appliquée à une couche de sol d'épaisseur infinie, cette expression devient :

$$p=p_0 \exp(-\lambda z) \cos(\lambda x - \omega t) . \quad \text{II-3}$$

SLEATH [1976] a développé l'analyse de *PUTNAM* pour une couche de sol en considérant l'anisotropie hydraulique (les autres hypothèses restent les mêmes). Il a proposé l'expression suivante pour la pression interstitielle :

$$p=p_0 \frac{ch[\lambda(\frac{k_x}{k_y})^{1/2}(d_s - z)]}{ch[\lambda(\frac{k_x}{k_y})^{1/2}d_s]} \cos(\lambda x - \omega t) . \quad \text{II-4}$$

On constate que *PUTNAM [1949]*, *LIU [1973]* et *SLEATH [1970]* ont adopté les hypothèses d'incompressibilité du fluide et du squelette du sol. Ceci signifie que l'interaction entre le squelette du sol et le fluide interstitielle n'est pas considérée. *JACOB [1940]*, en adoptant l'hypothèse de la compressibilité du fluide interstitielle et du squelette du sol, pour un écoulement quasi-permanent, propose l'équation suivante :

$$\nabla^2 p = \frac{\gamma_w}{k} (C_s + n C_1) \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{II-5}$$

On observe que cette solution prend en compte l'effet de la compressibilité du squelette sur le développement de la pression interstitielle.

En partant de l'hypothèse de la compressibilité de l'eau et de l'incompressibilité du squelette du sol, *MOSHAGEN* et *TORUM* [1975] ont conclu que la pression interstitielle est gouvernée par l'équation suivant :

$$\nabla^2 p = \frac{\gamma_w n C_1}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{II-6}$$

Cependant, étant donné qu'elle est basée sur des hypothèses irréalistes, cette théorie n'a donné de bonne corrélation qu'avec des expérimentations sur du sable grossier.

Dans le cadre de la solution de *PUTNAM*, la connaissance analytique de *P* permet de tracer les équipotentielles et les lignes de courant représentées sur la figure (II-2). La famille des lignes d'écoulement est obtenue par la relation de *CAUCHY-RIEMANN* :

$$\psi = \int \frac{\partial p}{\partial x} dz = p_0 \frac{\text{sh}[\lambda(d_s - z)]}{\text{ch}[\lambda d_s]} \sin(\lambda x - \omega t) \quad \text{II-7}$$

On observe, à un instant donné, que les lignes d'écoulement vont bien de la crête au creux. Elles sont horizontales sous le noeud, et verticales sous la crête.

II-2) L'APPROCHE NON COUPLEE

~~~~~

La distribution de la pression interstitielle dans le massif du sol, à instant donné, est connue par l'équation proposé par *PUTNAM* [1979]. Afin de calculer les contraintes totales dans un massif semi-infini, homogène, isotrope et linéairement élastique, sous sollicitations harmoniques, *FUNG* [1965], en utilisant les vecteurs de *GALERKIN* pour les contraintes harmoniques, a obtenu

les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = p_0 (1 - \lambda z) \exp(-\lambda z) \cos(\lambda x) \\ \sigma_{zz} = p_0 (1 + \lambda z) \exp(-\lambda z) \cos(\lambda x) \\ \tau_{xz} = p_0 \lambda z \exp(-\lambda z) \sin(\lambda x) \end{cases} \quad \text{II-8}$$

De même, pour les déplacements, on obtient les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{p_0}{2\lambda G} (2\nu - 1 + \lambda z) \exp(-\lambda z) \sin(\lambda x) \\ v &= -\frac{p_0}{2\lambda G} [2(1 - \nu) + \lambda z] \exp(-\lambda z) \cos(\lambda x) \end{aligned} \quad \text{II-9}$$

Les contraintes effectives cycliques générées par la pression induite sur la surface du massif par la houle, à chaque instant, peuvent être calculées par l'expression :

$$\underline{\underline{\sigma'}} = \underline{\underline{\sigma}} - p \underline{\underline{1}}. \quad \text{II-10}$$

La variation des contraintes totales et de la pression interstitielle normalisées par la pression sur la surface, ainsi que la variation du déplacement horizontal et vertical adimensionnel, en considérant  $\nu = 0,5$ , en fonction de la profondeur relative sont montrées sur la figure II-3.

### II-3) LES APPROCHES COUPLEES

~~~~~

YAMAMOTO [1978], en se basant sur la théorie générale de la consolidation de BIOT, a analysé le problème de la distribution des contraintes au sein d'une couche poreuse ayant une épaisseur donnée. Il considère l'effet de la compressibilité du squelette du sol sur la pression interstitielle induite par le passage de la houle sur un massif perméable. Ce passage de la houle génère un écoulement Darcien dans le milieu poreux homogène et isotrope. Sachant que l'ordre de grandeur de la perméabilité des sols constituant le fond marin n'induit pas d'amortissement de la houle, il considère une houle de Stokes d'ordre un. Il observe classiquement que les mouvements de l'eau interstitielle sont freinés par la petite taille des pores dans

lesquels elle circule, et que ceci correspond à l'application de forces d'écoulement sur le squelette solide. Cela signifie que, pour un milieu poreux non pesant, on peut écrire l'équation d'équilibre en contrainte effectives, en considérant les forces d'écoulement comme des forces volumiques. Il écrit l'équation de continuité pour un massif semi-infini comme :

$$\frac{K}{\gamma_w} \nabla^2 p = \frac{n}{K'} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} . \quad \text{II-11}$$

K' est le module de dilatation volumique apparent de l'eau, qui est lié à module de dilatation volumique de l'eau par la relation proposée par VERRUIJT [1969] :

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{K} + \frac{1-S_r}{p_0} . \quad \text{II-12}$$

S_r est degré de saturation de l'eau. Si l'eau interstitielle ne contient pas d'air, on a donc $K'=K = 2,3 \times 10^6$ kPa .

Il continue son approche en prenant en compte les équations d'équilibre élastique en déformation plane comme :

$$\begin{aligned} G \nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ G \nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad \text{II-13}$$

Connaissant les déplacements, on peut écrire pour les contraintes effectives :

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= 2G \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon \right] \\ \sigma'_z &= 2G \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon \right] \\ \tau_{xz} &= G \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] . \end{aligned} \quad \text{II-14}$$

u, v sont les déplacements horizontal et vertical du sol. Les conditions aux limites pour un fond horizontal ($z = 0$) s'écrivent:

$$\sigma'_z = \tau_{xz} = 0 \quad , \quad p = p_0 \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad \text{II-15}$$

et, pour un substratum rigide, rugueux, imperméable s'écrivent:

$$u = v = 0 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (z = -d) \quad \text{II-16}$$

Puisque les conditions aux limites sont harmoniques, il est raisonnable de considérer que u , v et p sont également périodiques dans le temps et dans l'espace:

$$\begin{aligned} u &= U(z) \exp[i(\lambda x - \omega t)] \\ v &= V(z) \exp[i(\lambda x - \omega t)] \\ p &= P(z) \exp[i(\lambda x - \omega t)] \end{aligned} \quad \text{II-17}$$

La solution harmonique finale proposée par YAMAMOTO [1978] dans le cas de la couche infinie ($d \rightarrow \infty$) et en insistant sur cette hypothèse que, pour la plupart des sols (sauf le sable dense), le rapport $\frac{G}{K} \rightarrow 0$ (G varie entre 10^6 kPa pour le sable dense et 10^3 kPa pour le limon et l'argile), est la suivante :

$$\begin{aligned} u &= -i\lambda z \exp(-\lambda z) \frac{p_0}{2\lambda G} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \\ v &= [\exp(-\lambda z) + \lambda z \exp(-\lambda z)] \frac{p_0}{2\lambda G} \exp[i(\lambda x - \omega t)] \\ p &= p_0 \exp(-\lambda z) \exp[i(\lambda x - \omega t)] \end{aligned} \quad \text{II-18}$$

et les contraintes effectives sont:

$$\sigma'_x = -\sigma'_z = -i\tau_{xz} = p_0 \lambda z \exp(-\lambda z) \exp[i(\lambda x - \omega t)] \quad \text{II-19}$$

La variation des contraintes effectives normales, normalisées par la pression en dessous de la crête de la houle, et la variation de la contrainte de cisaillement, normalisée par la pression en-dessous d'un noeud de la houle, ainsi que les déplacements verticaux et horizontaux adimensionnels sont représentés sur la figure II-4.

Une analyse assez identique a été publiée par MADSEN [1978] en prenant les mêmes hypothèses, en supposant de plus l'anisotropie

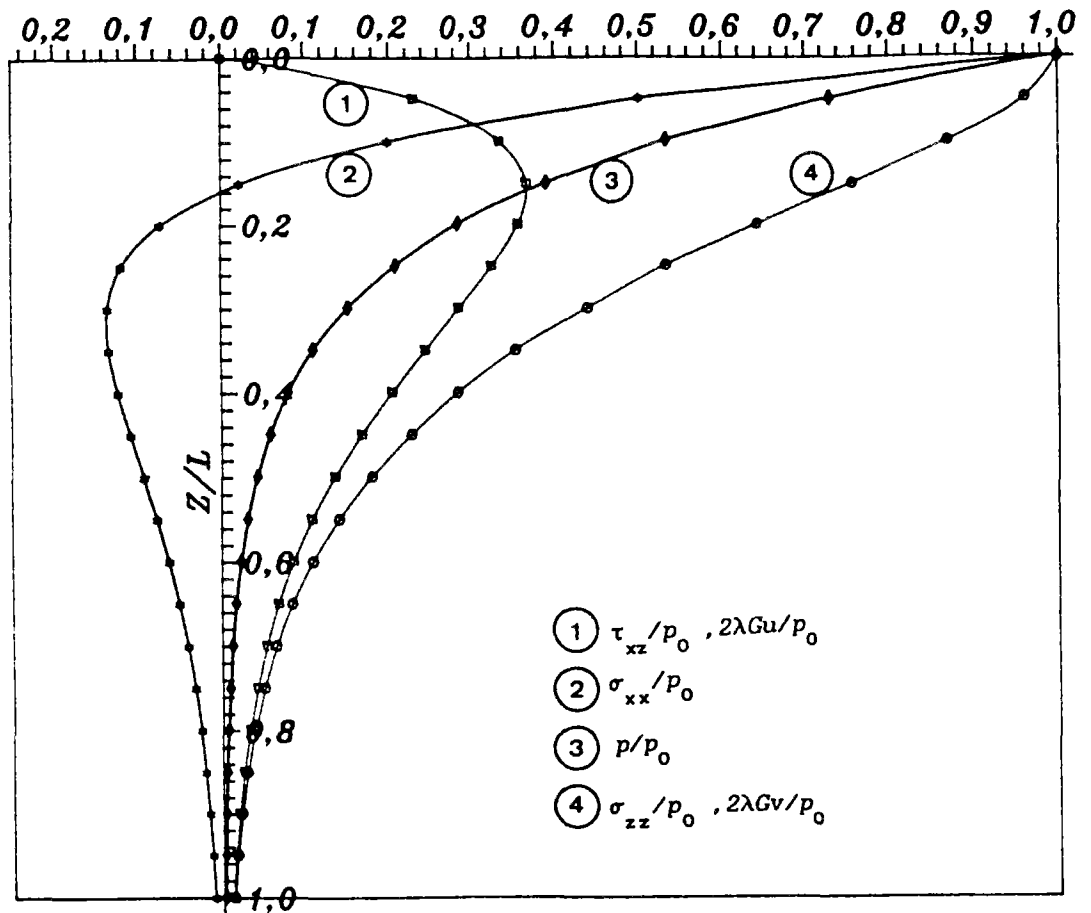


Figure II-3 : Variation des contraintes et des déplacements en profondeur.

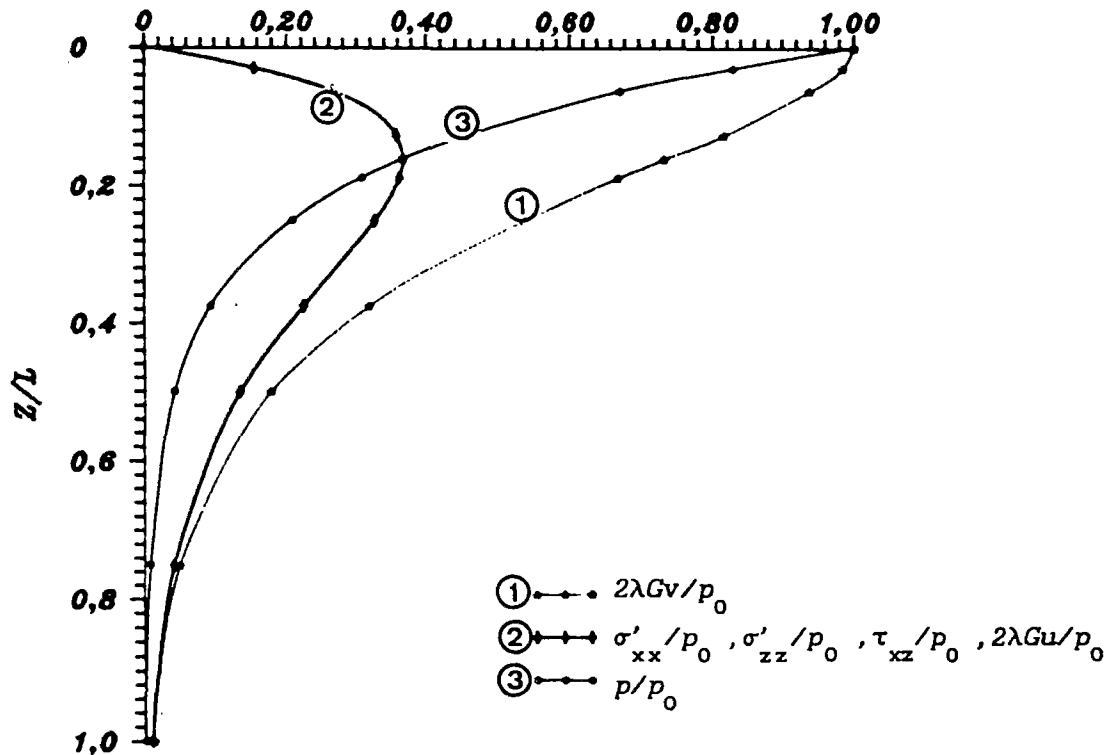


Figure II-4 : Distribution des contraintes effectives et variation des déplacements en profondeur.

hydraulique, et en utilisant la théorie de la consolidation basée sur l'élasticité isotrope. Cette solution a été critiqué par *YAMAMOTO* en faisant remarquer que l'anisotropie hydraulique est incompatible physiquement avec l'hypothèse d'élasticité isotrope ; il semble cependant que ces deux hypothèses ne soient pas mécaniquement incompatible et que le problème posé par *MADSEN* soit rigoureux, mais, au niveau de la microstructure, l'anisotropie hydraulique peut être accompagnée par une anisotropie mécanique.

DORMIEUX et *DELAGE* [1988] ont présenté une étude sur la distribution de la pression interstitielle et des contraintes effective pour un massif élastique, homogène et isotrope limité par une surface plane sous l'action d'un chargement quelconque.

OKUSA [1985], pour un massif semi-infini de sédiment sous-marin non saturé, a déterminé la distribution des contraintes et la pression interstitielle en fonction de degré de saturation.

Il est important de noter que, pour un milieu poreux semi-infini à surface horizontale sous sollicitation sinusoïdale, les approches couplées donnent les mêmes résultats que les approches non couplées.

Comme on peut l'observer sur la figure II-3, toutes les trois contraintes effectives sont nulles en surface et croissent jusqu'à la valeur maximale de $0,37 P_0$ à la profondeur $0,16 L$ pour diminuer par la suite. La contrainte effective normale horizontale, qui est nulle sur la surface pour le cas infini, isotrope, homogène en considérant le fluide interstitiel incompressible, n'est pas nécessairement nulle dans les autres cas. Par exemple, dans les résultats présentés par *MADSEN* [1978], lorsqu'on tient compte de l'anisotropie hydraulique ou de l'incompressibilité du fluide interstitiel, même pour épaisseur infinie de la couche de sol, la contrainte effective normale horizontale sur la surface du sol n'est pas nulle. L'épaisseur de la couche du sol influence beaucoup cette

contrainte sur la surface ainsi que les déplacements horizontaux et verticaux. Ces points seront mis en évidence par plusieurs exemples dans le chapitre sept de ce rapport.

II-4) GRADIENT HYDRAULIQUE

~~~~~

En restant dans le cadre de la solution proposée par YAMAMOTO et MADSEN pour un massif semi-infini, les composantes du gradient hydraulique sont :

$$\underline{i} = - \text{grad } p = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial p}{\partial x} \\ - \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -i\lambda p_0 \exp(-\lambda z) \exp[i(\lambda x - \omega t)] \\ \lambda p_0 \exp(-\lambda z) \exp[i(\lambda x - \omega t)] \end{array} \right\} \quad \text{II-20}$$

Le gradient a donc, à un niveau donné, un module constant,  $\lambda p_0 \exp(-\lambda z)$ , et il tourne en phase avec la houle. La valeur maximale de la composante verticale du gradient hydraulique correspond au gradient hydraulique d'un point situé sur le fond marin et sous le creux de la houle ( $\lambda p_0$ ). Cependant, l'expression de la pression interstitielle utilisée pour le calcul précédent est seulement valable pour des cas restreints. CARSTENS et al. [1976], en utilisant la solution de JACOB [1940] et en définissant une longueur de diffusion comme :

$$l = \sqrt{\frac{2k}{S\omega}} \quad , \quad \text{II-21}$$

où  $k$  est la perméabilité et  $S = \gamma_w (C_s + n C_1)$  est le coefficient d'emmagasinement, proposent, pour l'amplitude du gradient hydraulique vertical sur le fond marin, l'expression suivante:

$$i_0^* = \frac{nC_1 \sqrt{2}}{C_s + nC_1} \frac{\sqrt{\sin^2(2Kd) + \text{sh}^2(2Kd)}}{\cos(2Kd) + \text{ch}(2Kd)} \quad , \quad \text{II-22}$$

où  $K = \mathcal{L}^{-1}$  et  $d$  est l'épaisseur de la couche de sol. On constate que le gradient hydraulique augmente lorsque la profondeur augmente et, pour un massif semi-fini, on trouve :

$$i_0 \text{ max} = \frac{n C_1 \sqrt{2}}{C_s + n C_1} \times \frac{K p_0}{\gamma_w} \approx n C_1 \sqrt{\frac{\gamma_w \omega}{C_s k}} p_0, \quad \text{II-23}$$

ce qui montre que le maximum du gradient hydraulique vertical pour un point situé sur la surface dépend des caractéristiques du sol et du fluide interstitiel. Pour les sols grossiers,  $\mathcal{L}$  est grand et le gradient hydraulique est petit; en revanche, dans les sols fins, ce gradient hydraulique est grand et c'est la raison pour laquelle le phénomène de liquéfaction dans les sables fins est plus facilement observé.

## II-5) ETUDE DE STABILITE

~~~~~

HENKEL [1970] a fait une étude sur la stabilité d'un fond sous-marin sous-consolidé mou. Il conclut que les changements de pression sur les fonds des mers, qui sont associés au passage d'une vague, sont capables de provoquer une rupture par cisaillement dans les sédiments mous. Il considère une surface de rupture circulaire, et, en mettant en équilibre le moment moteur engendré par la houle sinusoïdale sur la surface de rupture, et le moment résistant mobilisé sur cette surface, il trouve la condition de la stabilité du fond de la mer.

YAMAMOTO [1978], après avoir analysé la distribution des contraintes pour un chargement de la houle sinusoïdale, présente une analyse de la stabilité, pour un milieu pulvérulent, de façon suivante : les contraintes normales verticales et horizontales dues à la pesanteur dans l'état d'équilibre initial peuvent s'écrire :

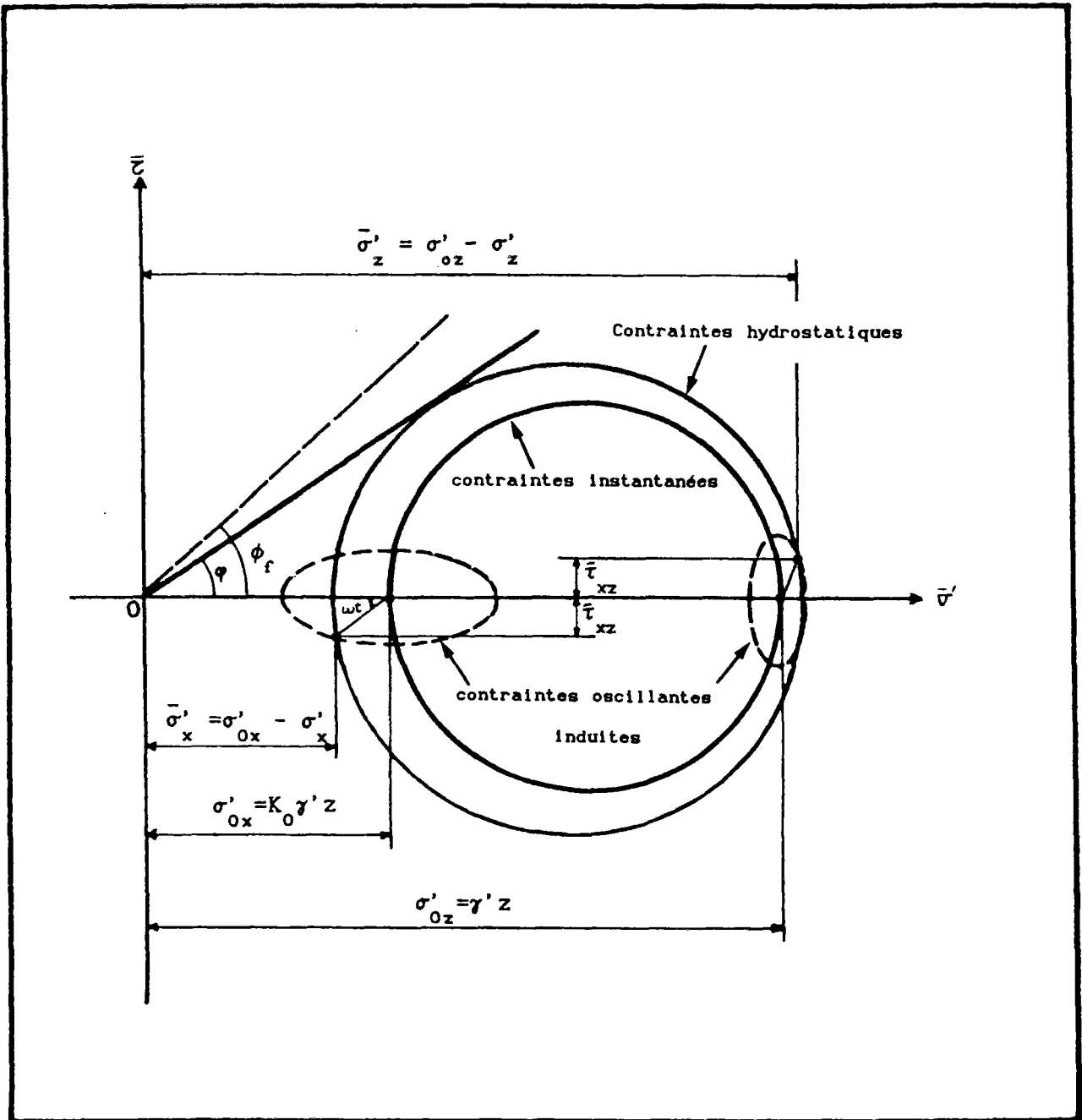


Figure II-5 : Diagramme des contraintes effectives induites par la houle.

$$\begin{aligned}\sigma'_{0z} &= \gamma' z \\ \sigma'_{0x} &= K_0 \gamma' z\end{aligned}\quad \text{II-24}$$

où γ' est le poids volumique déjaugé, égal à $\gamma - \gamma_w$, et K_0 le coefficient de pression des terres au repos (YAMAMOTO utilise la définition $K_0 = \frac{\nu}{1-\nu}$ qui est généralement compris entre 0,4 et 1).

Sachant que la contrainte de cisaillement à l'état d'équilibre initiale sur les plans horizontaux et verticaux est nulle, les contraintes effectives normales et la contrainte de cisaillement en un point donné, à instant donné, sont égales à :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}'_z &= \sigma'_{0z} - \sigma'_z \\ \bar{\sigma}'_x &= \sigma'_{0x} - \sigma'_x \\ \bar{\tau}_{xz} &= -\tau_{xz}\end{aligned}\quad \text{II-25}$$

Les contraintes σ'_z , σ'_x et τ_{xz} pour le cas particulier, de l'épaisseur infinie, sont données par les expressions (II-19). Ces contraintes oscillantes induites par la houle dans le plan de Mohr (σ', τ) peuvent être représentées par des cercles, pour ce cas particulier, et par des ellipses dans le cas général. Le cercle de Mohr représentant l'état instantané des contraintes d'un point donné est montré sur la figure 5. Si l'on définit φ comme "l'angle de contrainte" donné par :

$$\sin[\varphi(x, z, t)] = \frac{[(\bar{\sigma}'_z - \bar{\sigma}'_x)^2 + 4\tau_{xz}^2]^{1/2}}{\bar{\sigma}'_z + \bar{\sigma}'_x}\quad \text{II-26}$$

on peut dire qu'un élément de sol à un instant donné n'est pas stable, si :

$$\varphi(x, z, t) \geq \varphi_f, \quad \text{II-27}$$

φ_f étant l'angle de frottement interne du sol.

On peut utiliser la même démarche pour un sol cohérent. Dans

ce cas, l'angle de contrainte φ sera lié aux contraintes sur les plans verticaux et horizontaux par la relation suivante :

$$(\bar{\sigma}'_z + \bar{\sigma}'_x) \sin \varphi + 2c \cos \varphi = [(\bar{\sigma}'_z - \bar{\sigma}'_x)^2 + 4\bar{\tau}_{xz}^2]^{1/2} \quad \text{II-28}$$

c est la cohésion de sol.

MADSEN [1978], en utilisant la même procédure pour une couche de sol d'épaisseur infinie, trouve le critère de rupture suivant, pour la zone près de la surface du sol pulvérulent :

$$\sin \varphi \leq (1-2\nu) + \frac{(1-\nu)\lambda H}{ch\lambda d} .$$

Dans ce cas, bien évidemment, les ellipses des contraintes de cisaillement induites par la houle sont des cercles.

On observe que le raisonnement de *YAMAMOTO* ou *MADSEN* ne leur fournit qu'un limite d'élasticité, ce qui ne permet pas, à priori, de tirer de conclusion sur la stabilité.

DORMIEUX [1988, 1989] propose une étude de la stabilité de massif sous-marin basée sur la théorie du calcul à la rupture. Pour le sol cohérent, il distingue le cas d'une cohésion homogène C , et celui d'une cohésion proportionnelle à la profondeur $C = \gamma_c |z|$. Dans le premier cas, l'amplitude extrême p^+ , est encadrée par $3C$ et $3,16C$. Pour le deuxième cas, elle vaut exactement γ_c / λ . L'étude consacrée au sol pulvérulent nécessite un calcul préalable des surpression interstitielles d'origine non élastique dues à la contractance des sables.

*(...)dans la vie, il n'y a pas de solutions.
Il y a des forces en marche : il faut les
créer, et les solutions suivent.*

A. DE SAINT-EXUPERY

CHAPITRE 3

DISTRIBUTION DES CONTRAINTES TOTALES ET DE LA PRESSION INTERSTITIELLE DANS UN MASSIF ANGULAIRE SOUS CHARGEMENT QUELCONQUE

I-INTRODUCTION

Toutes les approches présentées dans l'étude bibliographique considèrent un fond sous-marin horizontal soumis à l'action de la houle. Le présent chapitre sera consacré à l'étude de la distribution des contraintes et de la pression interstitielle dans un massif de sol semi-infini en forme de coin, soumis à l'action de chargements harmoniques sur les deux surfaces inclinée et horizontale, et à des forces volumiques de pesanteur. On présente dans ce chapitre la solution élastique du problème. *FILLANGER [1912]* a donné, pour les contraintes dues à la pesanteur, les expressions suivantes (figure II-1):

$$\sigma_r = r\gamma_w [(a+\cos\theta) \cos\theta + (b+\sin\theta) \sin\theta - c \cos 3\theta - d \sin 3\theta]$$

$$\sigma_\theta = r\gamma_w [(3a+\cos\theta) \cos\theta + (3b+\sin\theta) \sin\theta + c \cos 3\theta + d \sin 3\theta]$$

$$\tau_{r\theta} = r\gamma_w (a \sin\theta - b \cos\theta + \sin 3\theta - d \cos 3\theta)$$

où

$$a = \frac{\cos\theta \sin 3\theta}{2 (\sin\theta + \sin 3\theta)}$$

$$b = \frac{\sin\theta \cos 3\theta}{2 (\cos\theta - \cos 3\theta)}$$

$$c = \frac{\cos\theta}{8\cos^2\alpha}$$

$$d = \frac{\sin\theta}{8\sin^2\alpha}$$

Dans le paragraphe II, on étudie la réponse du massif du sol à un chargement quelconque et on étudiera à partir des expressions obtenues le cas d'un chargement sinusoïdal statique en coordonnées polaires. On vérifie la solution présentée en comparant avec les diverses solutions existantes pour des cas particuliers, dans le paragraphe III.

Le paragraphe IV sera consacré à l'étude de la distribution de la pression interstitielle dans le coin considéré, soumis à l'action du chargement sinusoïdal, en utilisant le même procédé de calcul.

Dans ce chapitre on utilise la transformation de *MELLIN*, qui est apparue pour la première fois dans le mémoire de Riemann sur la théorie des nombres. La raison en est la suivante : si l'on considère la série de Dirichlet

$$\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

et si l'on introduit la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-nx) ,$$

alors

$$\psi(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx ,$$

ce qui fait apparaître la transformée de Mellin de f , définie par

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx ,$$

s étant un variable complexe. En associant à f la fonction sur \mathbb{R} :

$$F(t) = f(e^t) ,$$

on peut écrire

$$\bar{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ts) F(t) dt .$$

La transformée bilatérale de Laplace de f est définie par

$$\mathcal{L}F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-tp) F(t) dt .$$

On constate que

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}F(-p)$$

Ce lien avec la transformation de Laplace donne la propriété principale de la transformée de MELLIN du point de vue des application aux équations aux dérivées partielles.

La formule d'inversion de MELLIN peut être déduite de la formule d'inversion de Laplace par un changement de variable $\exp(t) \rightarrow x$, en considérant le lien entre les deux transformation.

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(pt) \mathcal{L}F(p) dp$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \bar{f}(s) ds$$

pour c réel convenable.

II- DISTRIBUTION DES CONTRAINTES DANS UN COIN

~~~~~

On considère le coin défini par la figure 1 , soumis sur chacun des côtés à des contraintes fonction du rayon, de forme générale:

$$\begin{array}{llll} \sigma_{\theta} = f_1(r) & , \tau_{r\theta} = j_1(r) & \text{pour } \theta = \alpha & \text{III-1} \\ \sigma_{\theta} = f_2(r) & , \tau_{r\theta} = j_2(r) & \text{pour } \theta = -\alpha & \end{array}$$

L'angle d'ouverture du coin est  $2\alpha$  .

### II-1- Equation du probleme

Dans l'hypothèse élastique linéaire isotrope, la résolution du problème passe par l'utilisation de la fonction d'Airy, qui est reliée aux contraintes, en coordonnées polaires, de la façon suivante:

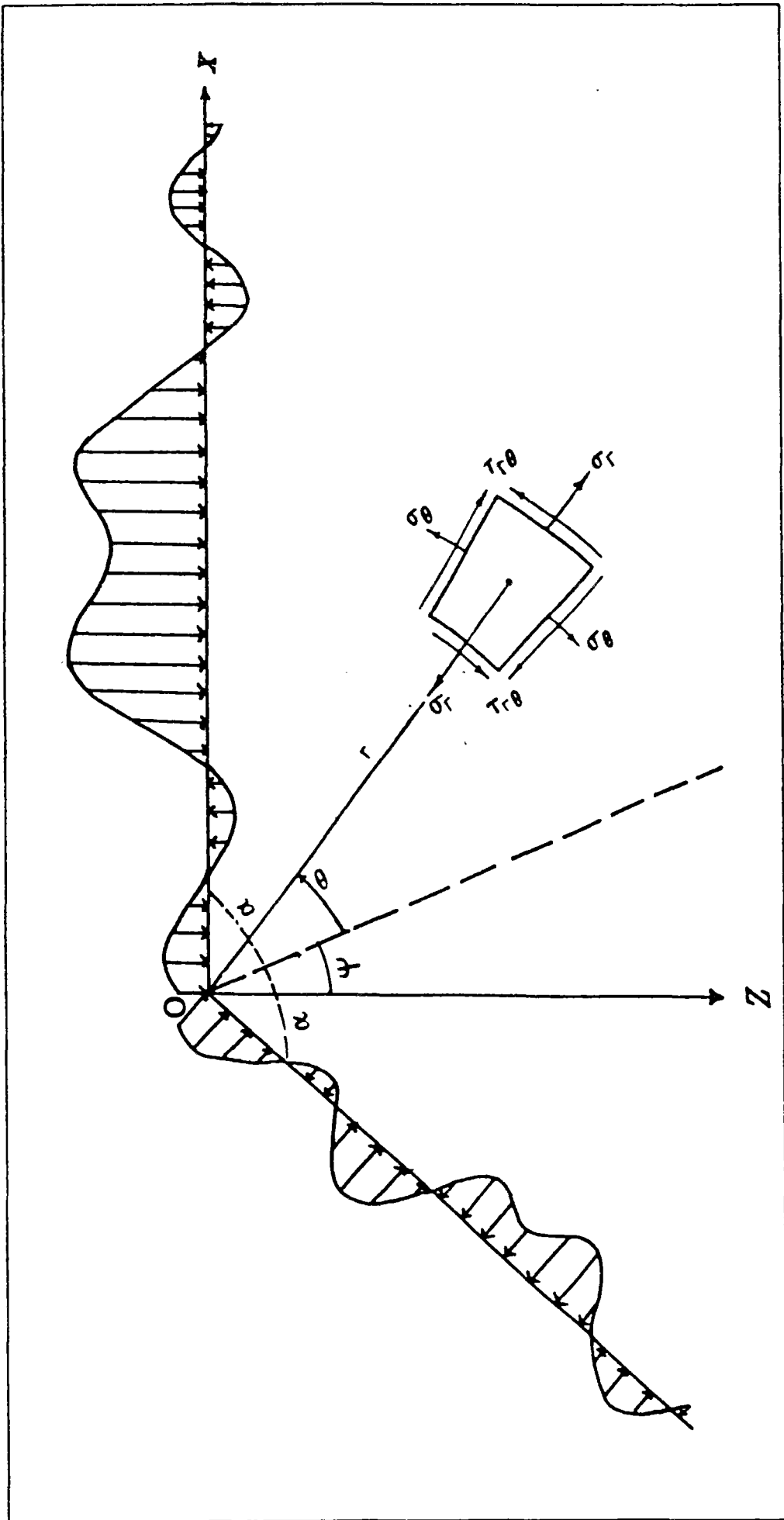


Figure III-1 : Coin soumis à l'action de forces surfaciques quelconques

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad , \\
\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad , \\
\tau_{r\theta} &= - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad .
\end{aligned}
\tag{III-2}$$

L'équation du problème a la forme :

$$\nabla^4 \phi = 0 \quad , \tag{III-3}$$

qui s'écrit en coordonnées polaires :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \phi = 0 \quad 0 < r \leq \infty \quad -\alpha \leq \theta \leq \alpha \tag{III-4}$$

## II-2 UTILISATION DE LA TRANSFORMATION DE MELLIN

### - RAPPEL SUR LES PROPRIETES

Comme on l'a vu précédemment, la transformation de MELLIN est une forme particulière de la transformation de Laplace bilatérale, définie par la relation suivante, où  $\bar{\phi}(s, \theta)$  est la transformée de  $\phi(r, \theta)$ .

$$\bar{\phi}(s, \theta) = \int_0^{\infty} \phi(r, \theta) r^{s-1} dr \tag{III-5}$$

où  $s$  est une variable complexe

On peut montrer que la fonction  $\bar{\phi}(s, \theta)$  est la transformée de la fonction  $\phi(r, \theta)$  si et seulement si (DITKINE, PROUDNIKOV [1978]) :

- $\phi(r, \theta)$  est continue par morceau,
- $\phi(r, \theta)$  a une variation bornée sur chaque segment de demi-axe  $r > 0$ ,
- il existe deux constantes  $C_1$  et  $C_2$ ,  $C_1 < C_2$  telles que les intégrales

$$\int_1^{\infty} |\phi(r)| r^{C_1-1} dr \text{ et } \int_1^{\infty} |\phi(r)| r^{C_2-1} dr \text{ convergent absolument.}$$

Supposons que la fonction  $\phi$  soit telle que :

$$\begin{aligned}
& r^{s+n} \frac{\partial^n \phi}{\partial r^n} \quad (n=0, 1, 2, 3) , \\
& r^s \frac{\partial^n \phi}{\partial \theta^n} \quad (n=1, 2) , \\
& r^{s+1} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r \partial \theta^2} .
\end{aligned}
\tag{III-6}$$

tendent vers zéro lorsque (r) tend vers l'infini (PATRON, PERLINE [1984]).

On montre les égalités suivantes :

-dérivations par rapport à r :

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty r \frac{\partial \phi}{\partial r} r^{s-1} dr = -s \bar{\phi} \\
& \int_0^\infty r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} r^{s-1} dr = s(s+1) \bar{\phi} \\
& \int_0^\infty r^3 \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} r^{s-1} dr = -s(s+1)(s+2) \bar{\phi} \\
& \int_0^\infty r^4 \frac{\partial^4 \phi}{\partial r^4} r^{s-1} dr = s(s+1)(s+2)(s+3) \bar{\phi}
\end{aligned}
\tag{III-7}$$

-dérivations par rapport à r et  $\theta$  :

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty r \frac{\partial^{n+1} \phi}{\partial r \partial \theta^n} r^{s-1} dr = -s \frac{d^n \bar{\phi}}{d\theta^n} \quad (n=0, 1, 2) \\
& \int_0^\infty r^2 \frac{\partial^{n+2} \phi}{\partial r^2 \partial \theta^n} r^{s-1} dr = s(s+1) \frac{d^n \bar{\phi}}{d\theta^n} \quad (n=0, 2)
\end{aligned}
\tag{III-8}$$

On observe que les dérivées d'ordre quelconque de  $\phi$  par rapport à r correspondent à des expressions linéaires en  $\bar{\phi}$ , multipliées par des variables s, s+1, etc. Ces expressions sont

appelées "images de la dérivée" par la transformation de MELLIN.

### II-3 RESOLUTION GENERALE DU PROBLEME

En multipliant l'équation (III-3) par  $r^{s+3}$ , l'intégration entre 0 et  $\infty$  en utilisant les formules (III-7) et (III-8) nous amène à une équation différentielle ordinaire qui ne dépend plus que de  $\theta$ :

$$\frac{d^4 \bar{\phi}}{d\theta^4} + [(s+2)^2 + s^2] \frac{d^2 \bar{\phi}}{d\theta^2} + s^2 (s+2)^2 \bar{\phi} = 0$$

$$\left[ \frac{d^2}{d\theta^2} + s^2 \right] \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} + (s+2)^2 \right] \bar{\phi} = 0 \quad \text{III-9}$$

Les équations (III-2) permettent d'obtenir les transformées des contraintes en considérant l'expression  $r^2 \sigma_\theta$ .

On a en effet  $r^2 \sigma_\theta = r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$ ,

d'où  $\overline{(r^2 \sigma_\theta)} = \int_0^\infty (r^2 \sigma_\theta) r^{s-1} dr = \int_0^\infty r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = s(s+1) \bar{\phi}$ . III-10

On obtient ainsi les relations :

$$\overline{(r^2 \sigma_\theta)} = s(s+1) \bar{\phi}(s, \theta) ,$$

$$\overline{(r^2 \sigma_r)} = \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} - s \right] \bar{\phi}(s, \theta) , \quad \text{III-11}$$

$$\overline{(r^2 \tau_{r\theta})} = (s+1) \frac{d\bar{\phi}(s, \theta)}{d\theta} .$$

De la même façon, on obtient les transformées des conditions aux limites (III-1) :

$$F_n(s, \theta) = \int_0^{\infty} r^{s+1} f_n(r) dr = s(s+1)\bar{\phi} \quad (n=1,2) \quad \text{III-12}$$

$$J_n(s, \theta) = \int_0^{\infty} r^{s+1} j_n(r) dr = (s+1) \frac{d\bar{\phi}}{d\theta} \quad (n=1,2)$$

La solution générale d'une équation différentielle du second ordre du type (III-9) est de la forme :

$$\bar{\phi} = A \sin(s\theta) + B \cos(s\theta) + C \sin(s+2)\theta + D \cos(s+2)\theta \quad \text{III-13}$$

Les coefficients A, B, C et D, qui sont les fonctions de  $s$  et de  $\alpha$ , sont calculés à partir des équations des conditions aux limites (III-12) .

On obtient :

$$2s(s+1) G(s, \alpha) A = \left[ J_1(s) + J_2(s) \right] s \sin[(s+2)\alpha] - \left[ F_1(s) - F_2(s) \right] (s+2) \cos[(s+2)\alpha]$$

$$2s(s+1) H(s, \alpha) B = \left[ J_1(s) - J_2(s) \right] s \cos[(s+2)\alpha] + \left[ F_1(s) + F_2(s) \right] (s+2) \sin[(s+2)\alpha]$$

$$-2(s+1) G(s, \alpha) C = \left[ J_1(s) + J_2(s) \right] \sin(s\alpha) - \left[ F_1(s) - F_2(s) \right] \cos(s\alpha) \quad \text{III-14}$$

$$-2(s+1) H(s, \alpha) D = \left[ J_1(s) - J_2(s) \right] \cos(s\alpha) + \left[ F_1(s) + F_2(s) \right] \sin(s\alpha)$$

où G, H sont :

$$G(s, \alpha) = (s+1) \sin 2\alpha - \sin[2(s+1)\alpha] \quad \text{III-15}$$

$$H(s, \alpha) = (s+1) \sin 2\alpha + \sin[2(s+1)\alpha]$$

Il est nécessaire à présent d'utiliser la formule d'inversion de MELLIN, définie par :

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{\phi}(s, \theta) r^{-s} ds \quad \text{III-16}$$



Pour que cette formule puisse être appliquée, il suffit que:

-  $\bar{\phi}(s)$  soit analytique dans  $\{s \in \mathbb{C} ; \text{Re } s \in ]C_1, C_2[ \}$ ,

-  $\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\phi}(c+ib)db < +\infty$  pour tout  $c$  dans  $]C_1, C_2[$ ,

-  $\lim_{|b| \rightarrow \infty} \bar{\phi}(c+ib) = 0$  uniformément dans

$\{s \in \mathbb{C} ; \text{Re } s \in [C_1 + \delta, C_2 + \delta]\} \forall \delta$  tel que  $\delta > 0$ ,

- La droite d'intégration doit appartenir à cette bande.

Parfois, on combine ce type de conditions et les conditions nécessaires pour l'existence de l'intégrale de transformation de MELLIN et on déduit, par exemple,  $C_1$  de la condition de convergence de la première intégrale et on prend pour  $C_2$  l'abscisse du point singulier de la fonction  $\bar{\phi}(s)$  le plus proche de la droite  $C = C_1$  et appartenant au demi-plan de droite  $\text{Re}(s) > 0$ .

En appliquant l'inversion de MELLIN aux transformées des contraintes, nous obtenons :

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s(s+1)\bar{\phi}(s, \theta) r^{-s-2} ds$$

$$\sigma_r = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left( \frac{d^2 \bar{\phi}}{d\theta^2} - s\bar{\phi} \right) r^{-s-2} ds$$

III-17

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (s+1) \frac{d\bar{\phi}}{d\theta} r^{-s-2} ds$$

Ces expressions de  $\sigma_r, \sigma_{\theta}, \tau_{r\theta}$  constituent la solution du problème élastique correspondant à la figure 1, avec des conditions aux limites de forme générale.

Le calcul de ces intégrales complexes se fait par la théorie des résidus (LAVRENTIEV, CHABAT [1972]) qui les transforment en intégrales à bornes réelles  $-\infty$  et  $+\infty$ , dont le calcul numérique

est possible.

#### II-4 CAS DU CHARGEMENT SINUSOIDAL

Afin de résoudre le problème dans le cas de la houle de STOKES d'ordre un, nous nous limiterons par la suite au cas de chargements sinusoïdaux sur les deux côtés du coin. On considère donc un chargement de la forme  $p = p_0 \cos(\lambda r)$  sur le côté OA, sur  $n$  longueurs d'ondes. De même, on a sur OB  $p = p_2 \cos(\lambda' r)$ , sur  $n$  longueurs d'ondes (figure III-2). Dans ce cas, les équations de (III-12) deviennent :

$$\begin{cases} F_1 = - \int_0^{nL} r^{s+1} p_0 \cos(\lambda r) dr \\ J_1 = 0 \end{cases} \quad \text{III-18}$$

$$\begin{cases} F_2 = - \int_0^{nL'} r^{s+1} p_2 \cos(\lambda' r) dr \\ J_2 = 0 \end{cases} \quad \text{III-19}$$

Afin de résoudre les intégrales dans (III-18) et (III-19), on développe en série :

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{2m!} \quad \text{III-20}$$

On aboutit à :

$$\begin{aligned} F_1(s) &= p_0 \sum (-1)^{m+1} \frac{(2n\pi)^{2m}}{2m!(2m+s+2)} (nL)^{s+2} \\ F_2(s) &= p_2 \sum (-1)^{m+1} \frac{(2n\pi)^{2m}}{2m!(2m+s+2)} (nL')^{s+2} \\ J_1(s) &= 0 \\ J_2(s) &= 0 \end{aligned} \quad \text{III-21}$$

En remplaçant les équations (III-21) dans les équations (III-14), on obtient les fonctions des A(s), B(s), C(s), D(s).

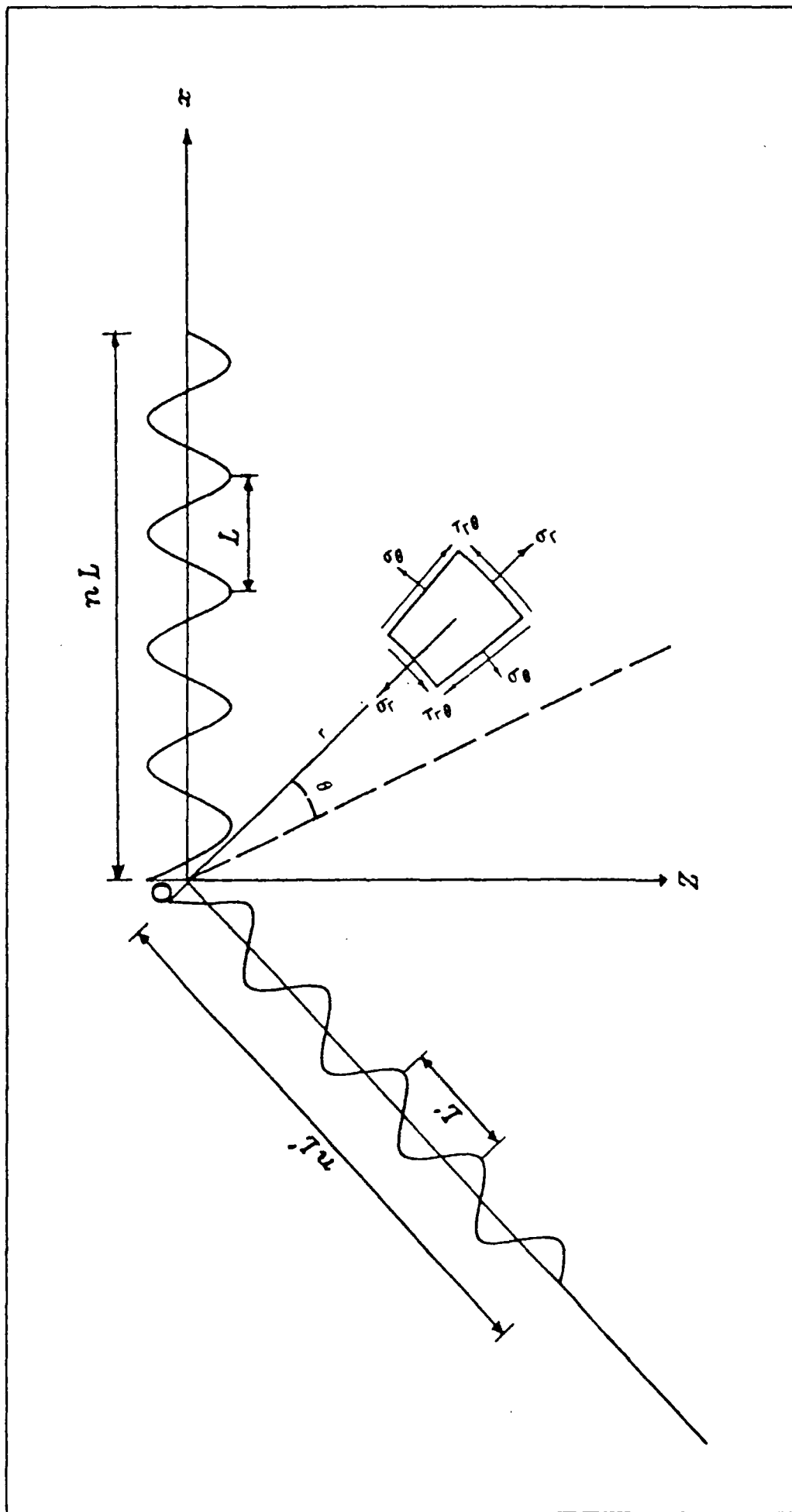


Figure III-2 : Massif du sol soumis à l'action du chargement harmonique.

Après avoir calculé  $\bar{\phi}$  en reportant les expressions de A,B,C,D dans la solution générale (III-13), on peut calculer les contraintes normales et tangentielles à partir des équations (III-17). Finalement, on obtient :

$$\sigma_{\theta} - \sigma_r = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \begin{aligned} & \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(2n\pi)^{2m}(s+2)}{2m!(2m+s+2)} \left[ p_2 \left( \frac{nL'}{r} \right)^{s+2} - p_0 \left( \frac{nL}{r} \right)^{s+2} \right] \\ & \cdot \left[ \cos[(s+2)\alpha] \sin(s\theta) - \cos(s\alpha) \sin[(s+2)\theta] \right] \frac{ds}{G(s, \alpha)} \\ & + \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(2n\pi)^{2m}(s+2)}{2m!(2m+s+2)} \left[ p_2 \left( \frac{nL'}{r} \right)^{s+2} + p_0 \left( \frac{nL}{r} \right)^{s+2} \right] \\ & \cdot \left[ \sin[(s+2)\alpha] \cos(s\theta) - \sin(s\alpha) \cos[(s+2)\theta] \right] \frac{ds}{H(s, \alpha)} \end{aligned} \right\} \quad \text{III-22}$$

$$\sigma_{\theta} + \sigma_r = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \begin{aligned} & \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(2n\pi)^{2m}}{2m!(2m+s+2)} \left[ p_2 \left( \frac{nL'}{r} \right)^{s+2} + p_0 \left( \frac{nL}{r} \right)^{s+2} \right] \\ & \cdot \left[ 2\cos[(s+2)\theta] \sin(s\alpha) \right] \frac{ds}{H(s, \alpha)} \\ & + \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(2n\pi)^{2m}}{2m!(2m+s+2)} \left[ p_2 \left( \frac{nL'}{r} \right)^{s+2} - p_0 \left( \frac{nL}{r} \right)^{s+2} \right] \\ & \cdot \left[ 2\sin[(s+2)\theta] \cos(s\alpha) \right] \frac{ds}{G(s, \alpha)} \end{aligned} \right\} \quad \text{III-23}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{4\pi i} \left\{ \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(2n\pi)^{2m}(s+2)}{2m!(2m+s+2)} \left[ p_2 \left( \frac{nL'}{r} \right)^{s+2} - p_0 \left( \frac{nL}{r} \right)^{s+2} \right] \cdot \left[ \cos[(s+2)\alpha] \cos(s\theta) - \cos(s\alpha) \cos[(s+2)\theta] \right] \frac{ds}{G(s, \alpha)} \right. \\ \left. - \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(2n\pi)^{2m}(s+2)}{2m!(2m+s+2)} \left[ p_2 \left( \frac{nL'}{r} \right)^{s+2} + p_0 \left( \frac{nL}{r} \right)^{s+2} \right] \cdot \left[ \sin[(s+2)\alpha] \sin(s\theta) - \sin(s\alpha) \sin[(s+2)\theta] \right] \frac{ds}{H(s, \alpha)} \right\}$$

La constante C, comme il a déjà été expliqué, se déduit de la condition d'existence des intégrales. Il est logique de poser  $C = -1$ , puisque de (III-14) découlera la régularité de l'expression sous l'intégrale sur la droite  $(c-i\infty, c+i\infty)$ . Donc, le contour fermé d'intégration sera formé de la droite  $C = -1$ , complétée à droite par un arc. Pour pouvoir appliquer la théorie des résidus au calcul des intégrales, il faut calculer les pôles des fonctions analytiques considérées, c'est à dire qu'il faut étudier les zéros des fonctions  $H(\alpha, s)$  et  $G(\alpha, s)$  au voisinage et à droite de la droite  $C=-1$ . En appliquant cette théorie, les intégrales ci-dessus seront remplacées par des intégrales avec les bornes 0 et  $\infty$ . On obtient ainsi, en passant sur les détails d'un calcul long et fastidieux, les formules finales des contraintes dans le massif élastique en forme de coin.

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} = \frac{1}{2\pi r} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(2m\pi)^{2m}}{2m!} & \left\{ p_2 nL' \left[ \int_0^{\infty} [T(\epsilon) - R(\epsilon)] \cos\left[\epsilon \operatorname{Log}\left(\frac{nL'}{r}\right)\right] d\epsilon \right. \right. \\
& - \int_0^{\infty} \frac{2m(2m+1)}{(2m+1)^2 + \epsilon^2} [T(\epsilon) - R(\epsilon)] \cos\left[\epsilon \operatorname{Log}\left(\frac{nL'}{r}\right)\right] d\epsilon \\
& \left. \left. - \int_0^{\infty} \frac{2m\epsilon}{(2m+1)^2 + \epsilon^2} [T(\epsilon) - R(\epsilon)] \sin\left[\epsilon \operatorname{Log}\left(\frac{nL'}{r}\right)\right] d\epsilon \right] \right. \\
& - p_0 nL \left[ \int_0^{\infty} [T(\epsilon) + R(\epsilon)] \cos\left[\epsilon \operatorname{Log}\left(\frac{nL}{r}\right)\right] d\epsilon \right. \\
& - \int_0^{\infty} \frac{2m(2m+1)}{(2m+1)^2 + \epsilon^2} [T(\epsilon) + R(\epsilon)] \cos\left[\epsilon \operatorname{Log}\left(\frac{nL}{r}\right)\right] d\epsilon \\
& \left. \left. - \int_0^{\infty} \frac{2m\epsilon}{(2m+1)^2 + \epsilon^2} [T(\epsilon) + R(\epsilon)] \sin\left[\epsilon \operatorname{Log}\left(\frac{nL}{r}\right)\right] d\epsilon \right] \right. \\
& \left. - \left[ \frac{\pi}{2m+2} \right] \left[ p_2 \frac{(nL')^2}{r} - p_0 \frac{(nL)^2}{r} \right] \left[ \frac{\cos(2\alpha) - \sin(2\theta)}{\sin(2\alpha) - 2\alpha \cos(2\alpha)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta} - \sigma_r = & \frac{n}{\pi r} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(2m)^{2m}}{2m!} \left\{ +p_2 L' \left[ \int_0^{\infty} [P(\epsilon) + M(\epsilon)] \sin\left[\epsilon \operatorname{Log}\left(\frac{nL'}{r}\right)\right] d\epsilon \right. \right. \\
& - \int_0^{\infty} \frac{2m(2m+1)}{(2m+1)^2 + \epsilon^2} [M(\epsilon) + P(\epsilon)] \sin\left[\epsilon \operatorname{Log}\left(\frac{nL'}{r}\right)\right] d\epsilon \\
& \left. \left. + \int_0^{\infty} \frac{2m\epsilon}{(2m+1)^2 + \epsilon^2} [P(\epsilon) + M(\epsilon)] \cos\left[\epsilon \operatorname{Log}\left(\frac{nL'}{r}\right)\right] d\epsilon \right] \right. \\
& - p_0 L \left[ - \int_0^{\infty} [P(\epsilon) - M(\epsilon)] \sin\left[\epsilon \operatorname{Log}\left(\frac{nL}{r}\right)\right] d\epsilon \right. \\
& + \int_0^{\infty} \frac{2m(2m+1)}{(2m+1)^2 + \epsilon^2} [P(\epsilon) - M(\epsilon)] \sin\left[\epsilon \operatorname{Log}\left(\frac{nL}{r}\right)\right] d\epsilon \\
& \left. \left. - \int_0^{\infty} \frac{2m\epsilon}{(2m+1)^2 + \epsilon^2} [P(\epsilon) - M(\epsilon)] \cos\left[\epsilon \operatorname{Log}\left(\frac{nL}{r}\right)\right] d\epsilon \right] \right. \\
& + \left[ \frac{\pi \cos \alpha \sin \theta}{\sin(2\alpha) - 2\alpha} \frac{p_2 L' - p_0 L}{2m+1} - \frac{\pi \sin \alpha \cos \theta}{\sin(2\alpha) + 2\alpha} \frac{p_2 L' + p_0 L}{2m+1} \right] \\
& \left. + \left( \frac{\pi}{2m+2} \right) \left[ p_2 \frac{nL'^2}{r} - p_0 \frac{nL^2}{r} \right] \left( \frac{\sin(2\theta)}{\sin(2\alpha) - 2\alpha \cos(2\alpha)} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta} + \sigma_r = \frac{n}{\pi r} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(2m)^{2m}}{2m!} & \left\{ +p_2 L' \left[ \int_0^{\infty} \frac{(2m+1)}{(2m+1)^2 + \epsilon^2} [Q(\epsilon) + O(\epsilon)] \cos[\epsilon \text{Log}(\frac{nL'}{r})] d\epsilon \right. \right. \\
& + \int_0^{\infty} \frac{\epsilon}{(2m+1)^2 + \epsilon^2} [Q(\epsilon) + O(\epsilon)] \sin[\epsilon \text{Log}(\frac{nL'}{r})] d\epsilon \\
& + \int_0^{\infty} \frac{\epsilon}{(2m+1)^2 + \epsilon^2} [P(\epsilon) + M(\epsilon)] \cos[\epsilon \text{Log}(\frac{nL'}{r})] d\epsilon \\
& \left. - \int_0^{\infty} \frac{2m+1}{(2m+1)^2 + \epsilon^2} [P(\epsilon) + M(\epsilon)] \sin[\epsilon \text{Log}(\frac{nL'}{r})] d\epsilon \right] \\
& + p_0 L \left[ \int_0^{\infty} \frac{(2m+1)}{(2m+1)^2 + \epsilon^2} [Q(\epsilon) - O(\epsilon)] \cos[\epsilon \text{Log}(\frac{nL}{r})] d\epsilon \right. \\
& + \int_0^{\infty} \frac{\epsilon}{(2m+1)^2 + \epsilon^2} [Q(\epsilon) - O(\epsilon)] \sin[\epsilon \text{Log}(\frac{nL}{r})] d\epsilon \\
& + \int_0^{\infty} \frac{\epsilon}{(2m+1)^2 + \epsilon^2} [P(\epsilon) - M(\epsilon)] \cos[\epsilon \text{Log}(\frac{nL}{r})] d\epsilon \\
& \left. - \int_0^{\infty} \frac{2m+1}{(2m+1)^2 + \epsilon^2} [P(\epsilon) - M(\epsilon)] \sin[\epsilon \text{Log}(\frac{nL}{r})] d\epsilon \right] \\
& - \left[ \frac{\pi \cos \alpha \sin \theta}{\sin(2\alpha) - 2\alpha} \frac{p_2 L' - p_0 L}{2m+1} - \frac{\pi \sin \alpha \cos \theta}{\sin(2\alpha) + 2\alpha} \frac{p_2 L' + p_0 L}{2m+1} \right] \\
& \left. - \left[ \frac{\pi}{2m+2} \right] \left[ p_2 \frac{nL'^2}{r} - p_0 \frac{nL^2}{r} \right] \left[ \frac{\sin(2\theta)}{\sin(2\alpha) - 2\alpha \cos(2\alpha)} \right] \right\}
\end{aligned}$$



*Log (x)* signifie logarithme népérien de *x* et dans les équations ci-dessus les fonctions *M, P, O, Q, T* et *R* seront :

III-28

$$\begin{aligned}
 [\varepsilon \sin(2\alpha) - \operatorname{sh}(2\alpha\varepsilon)] \quad M(\varepsilon) &= \operatorname{ch}[(\alpha+\theta)\varepsilon] \sin(\alpha-\theta) - \sin(\alpha+\theta) \operatorname{ch}[(\alpha-\theta)\varepsilon] \\
 [\varepsilon \sin(2\alpha) + \operatorname{sh}(2\alpha\varepsilon)] \quad P(\varepsilon) &= \operatorname{ch}[(\alpha+\theta)\varepsilon] \sin(\alpha-\theta) + \sin(\alpha+\theta) \operatorname{ch}[(\alpha-\theta)\varepsilon] \\
 [\varepsilon \sin(2\alpha) - \operatorname{sh}(2\alpha\varepsilon)] \quad O(\varepsilon) &= \operatorname{sh}[(\alpha+\theta)\varepsilon] \cos(\alpha-\theta) - \cos(\alpha+\theta) \operatorname{sh}[(\alpha-\theta)\varepsilon] \\
 [\varepsilon \sin(2\alpha) + \operatorname{sh}(2\alpha\varepsilon)] \quad Q(\varepsilon) &= \operatorname{sh}[(\alpha+\theta)\varepsilon] \cos(\alpha-\theta) + \cos(\alpha+\theta) \operatorname{sh}[(\alpha-\theta)\varepsilon] \\
 [\varepsilon \sin(2\alpha) - \operatorname{sh}(2\alpha\varepsilon)] \quad T(\varepsilon) &= -\operatorname{sh}[(\alpha+\theta)\varepsilon] \sin(\alpha-\theta) - \sin(\alpha+\theta) \operatorname{sh}[(\alpha-\theta)\varepsilon] \\
 [\varepsilon \sin(2\alpha) + \operatorname{sh}(2\alpha\varepsilon)] \quad R(\varepsilon) &= \operatorname{sh}[(\alpha+\theta)\varepsilon] \sin(\alpha-\theta) - \sin(\alpha+\theta) \operatorname{sh}[(\alpha-\theta)\varepsilon]
 \end{aligned}$$

Le calcul de ces intégrales par la méthode de *GAUSS* a fait l'objet d'un programme numérique. La validation de la résolution précédente, et de son application numérique est menée par comparaison avec des solutions existant pour des cas particuliers.

### III-VALIDATION ET APPLICATION

~~~~~

III-1-SURFACE HORIZONTALE ; CHARGEMENT REPARTI SUR UNE

~~~~~

#### LARGEUR FINIE

~~~~~

La distribution des contraintes dans un massif semi-infini élastique avec une bande de chargement répartie sur la surface horizontale (figure III-3) a été étudiée par *LOVE* en 1929 en utilisant une théorie complètement différente de celle qu'on a utilisée. En utilisant la théorie présentée dans le paragraphe précédent et en choisissant $\alpha = \pi/2$, $m = 0$ et $n = 1$, c'est-à-dire en considérant le premier terme de la série des cosinus et le chargement réparti sur une largeur de $2L$ de la surface horizontale, on obtient le problème de *LOVE* [1929].

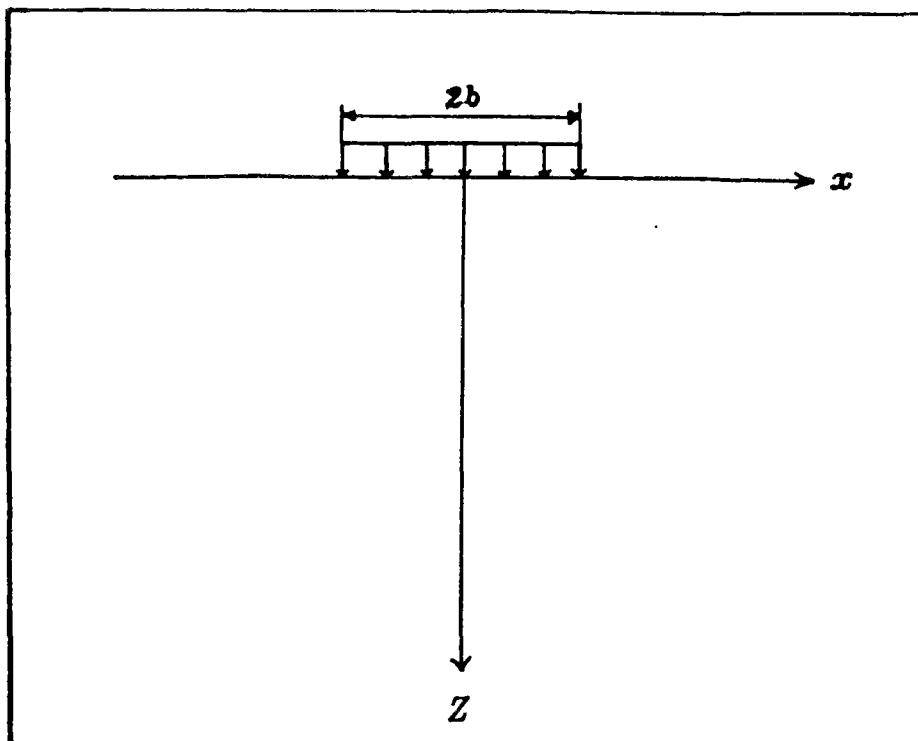


Figure III-3 : Surface horizontale et chargement réparti sur une largeur $2b$.

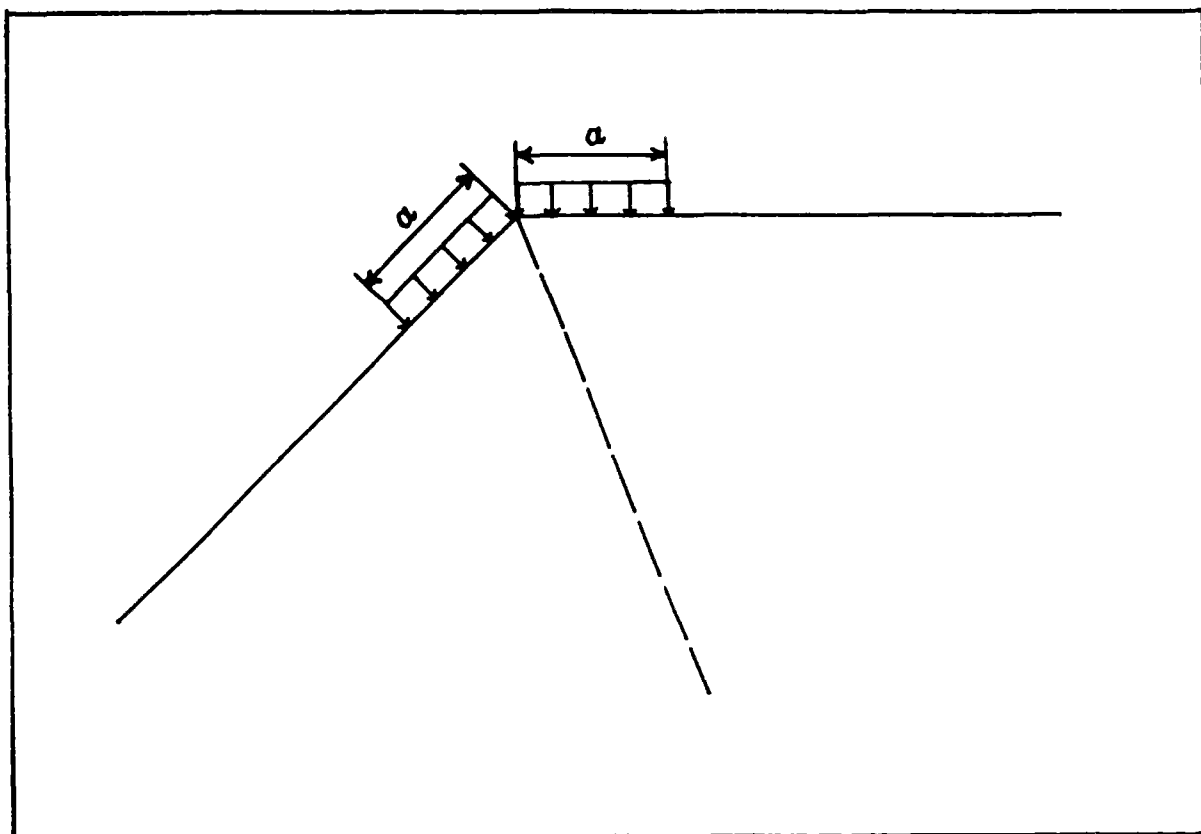


Figure III-4 : Massif angulaire sous l'action de semelles filantes.

Sachant que :

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{ch}(Ax)}{\text{sh}(\pi x/2)} \sin(Bx) = \frac{\text{sh}(2B)}{\cos(2A) + \text{ch}(2B)} \quad , \quad \text{III-29}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sh}(Ax)}{\text{sh}(\pi x/2)} \cos(Bx) = \frac{\sin(2A)}{\cos(2A) + \text{ch}(2B)} \quad 4A^2 \leq \pi^2$$

remplaçons les valeurs de ces expressions dans les équations (III-25 à III-27). Nous obtenons :

$$\tau_{r\theta} = \frac{2br\cos\theta}{\pi} \left[\frac{b^2 \sin(2\theta)}{r^4 + 2b^2 r^2 \cos(2\theta) + b^4} \right] \quad \text{III-30}$$

$$\sigma_{\theta} - \sigma_r = \frac{4br\cos\theta}{\pi} \left[\frac{r^2 + b^2 \cos(2\theta)}{r^4 + 2b^2 r^2 \cos(2\theta) + b^4} \right]$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} + \sigma_r &= -\frac{2}{\pi} \text{Arctg} \left[\frac{2br\cos\theta}{b^2 - r^2} \right] && r > b \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\pi - \text{Arctg} \left[\frac{2br\cos\theta}{b^2 - r^2} \right] \right] && r < b \end{aligned}$$

qui sont identiques aux formules présentées par LOVE. Pour la vérification générale du programme que nous avons conçu, les valeurs des contraintes pour les différents points du massif ont été calculées et comparées avec les valeurs calculées par JURGENSON en 1934 : l'accord est parfait (tableau III-1).

Tableau III-1

x/b	z/b	JURGENSON			CETTE SOLUTION		
		σ_z/p_0	σ_x/p_0	τ_{xz}/p_0	σ_z/p_0	σ_x/p_0	τ_{xz}/p_0
0	0,5	0,9594	0,4498	0	0,9595	0,4502	0
	1	0,8185	0,1817	0	0,8185	0,1817	0
	1,5	0,6678	0,0803	0	0,6681	0,0805	0
1	0,25	0,4996	0,4208	0,3134	0,4996	0,4212	0,3134
	0,5	0,4969	0,3472	0,2996	0,4969	0,3471	0,2998
	1	0,4797	0,2250	0,2546	0,4797	0,2251	0,2546

III-2 COIN CHARGÉ PAR DEUX SEMELLES FILANTES SUR DEUX SURFACES

En introduisant ($m=0, p_0=p_2=1, n=1, L=a$) dans les expressions finales des contraintes (III-25 à III-27), on trouve la solution concernant le cas d'un coin semi-infini sous l'action d'un chargement réparti sur chaque surface (figure III-4), traité par *TRANTER* [1947] :

$$\tau_{r\theta} = \frac{2a}{\pi r} \int_0^{\infty} [R(\varepsilon)] \cos\left[\varepsilon \log\left(\frac{a}{r}\right)\right] d\varepsilon$$

$$\sigma_{\theta} + \sigma_r = \frac{2a}{\pi r} \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{1+\varepsilon^2} [P(\varepsilon) - \varepsilon Q(\varepsilon)] \sin\left[\varepsilon \log\left(\frac{a}{r}\right)\right] d\varepsilon - \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\varepsilon^2} [Q(\varepsilon) + \varepsilon P(\varepsilon)] \cos\left[\varepsilon \log\left(\frac{a}{r}\right)\right] d\varepsilon - \frac{\pi \sin \alpha \cos \theta}{\sin(2\alpha) + 2\alpha} \right]$$

$$\sigma_{\theta} - \sigma_r = \frac{2a}{\pi r} \left[- \int_0^{\infty} [P(\varepsilon)] \sin\left[\varepsilon \log\left(\frac{a}{r}\right)\right] d\varepsilon + \frac{\pi \sin \alpha \cos \theta}{\sin(2\alpha) + 2\alpha} \right]$$

Ces expressions sont identiques à celles données par *TRANTER* [1947].

III-3- SURFACE HORIZONTALE - CHARGEMENT HARMONIQUE

Dans cette partie, on considère le cas présenté sur la figure III-5, en introduisant $\alpha = \pi/2$ (surface horizontale) et en choisissant pour m une valeur assez grande pour avoir une bonne approximation pour la série des cosinus. Les contraintes normales et tangentiels sont calculées pour les différentes valeurs de n .

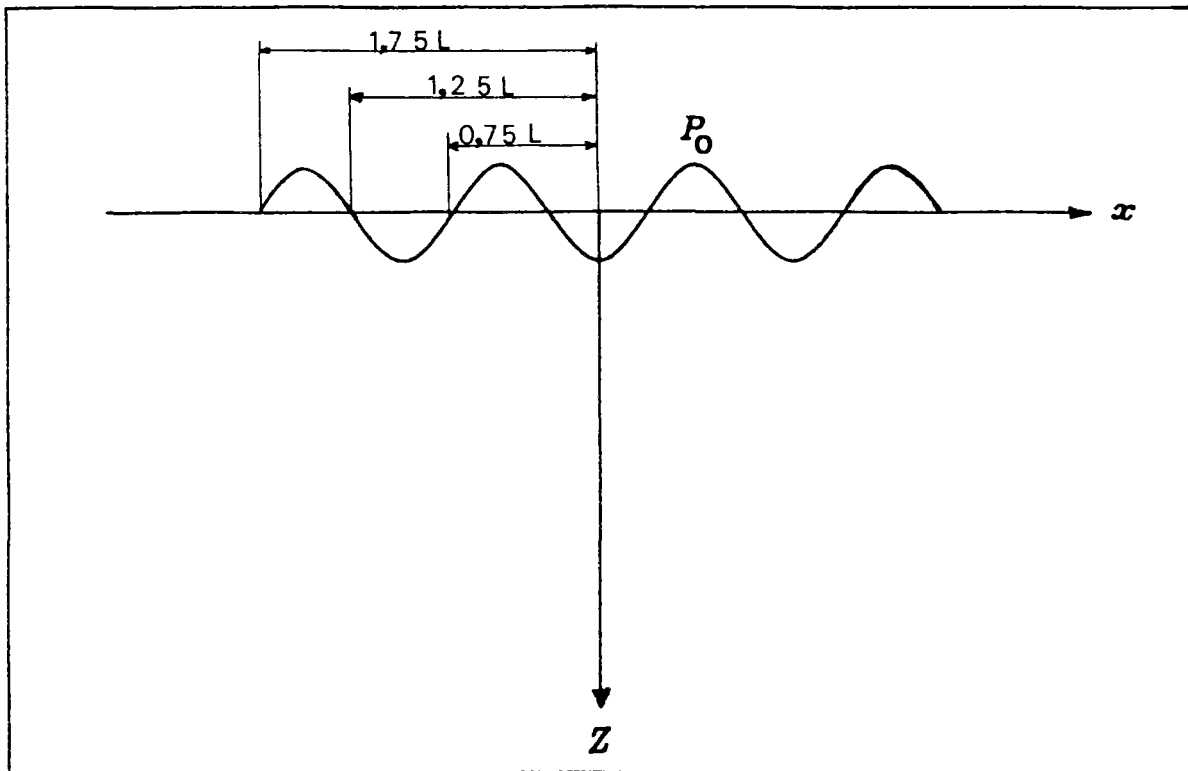


Figure III-5 : Surface horizontale et différentes largeurs considérées du chargement harmonique.

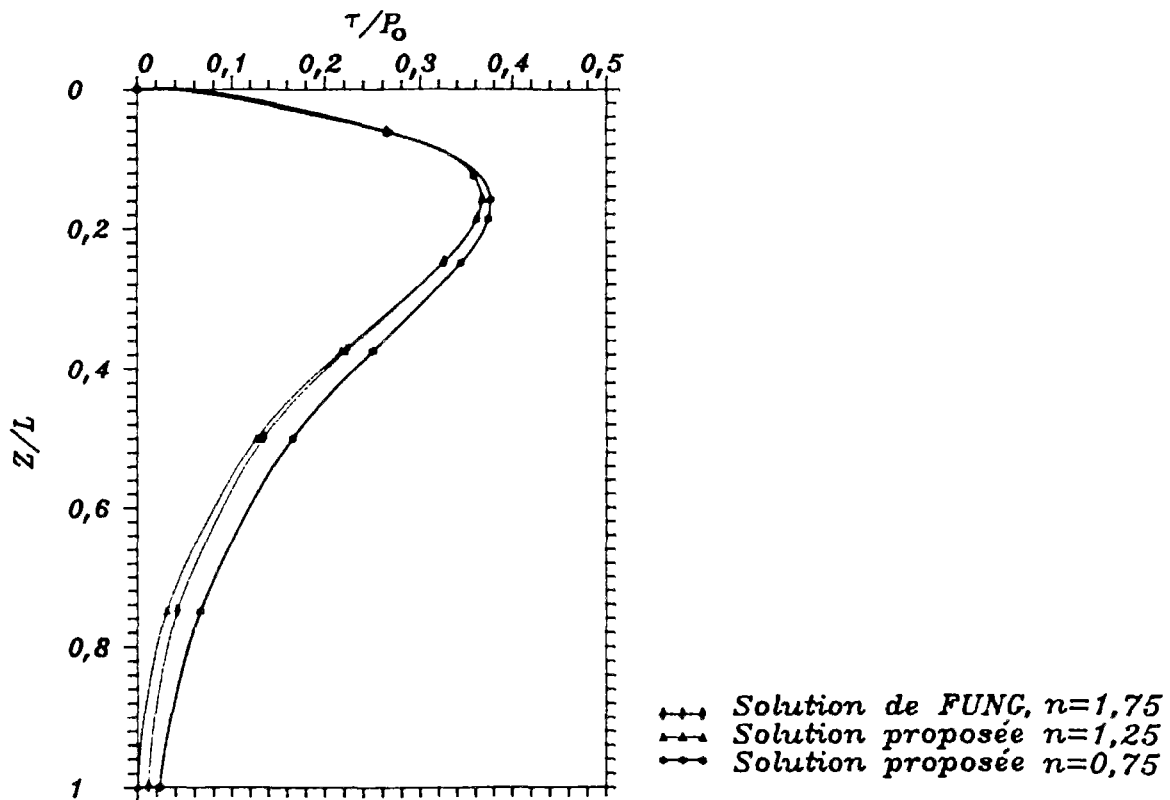


Figure III-6 : Variation de la contrainte de cisaillement en profondeur.

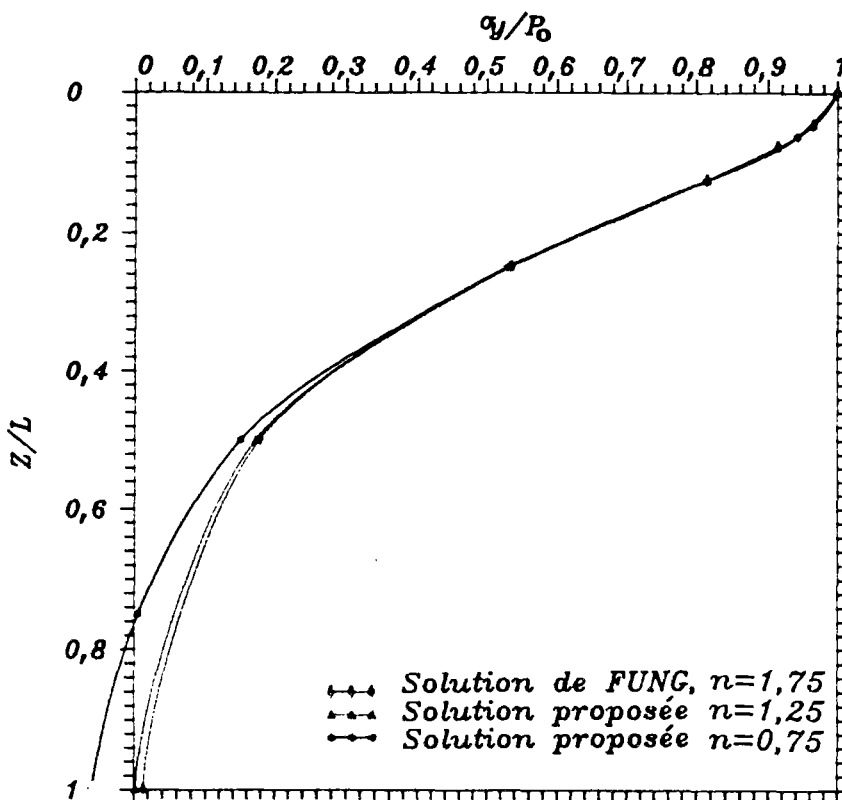


Figure III-7 : Variation de la contrainte verticale en profondeur.

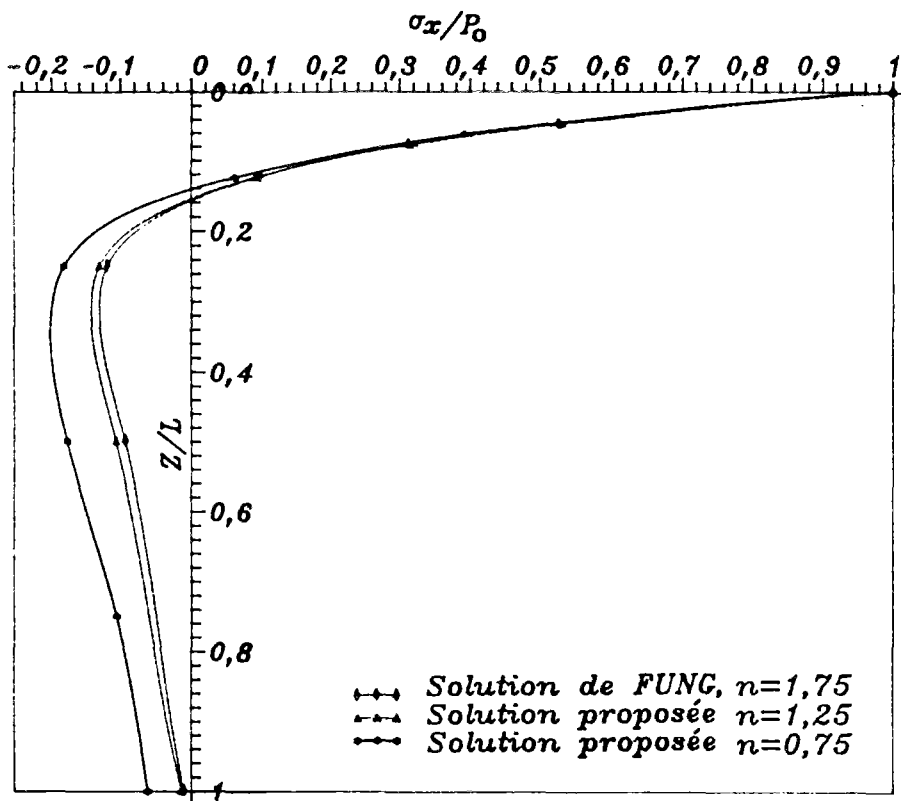


Figure III-8 : Variation de la contrainte horizontale en profondeur.

Sur les figures III-6, III-7 et III-8, la variation des contraintes normalisées en fonction de la profondeur relative est comparée avec les résultats calculés suivant une théorie tout à fait différente par *FUNG* [1965]. On rappelle que la solution de *FUNG* considère le chargement harmonique infini sur la surface, tandis que la solution proposée peut considérer différentes largeurs de chargement. La comparaison a été effectuée pour les différentes valeurs de n . Les écarts constatés entre les deux théories, notamment en profondeur, pour $n=0,75$, sont logiques. On observe que, pour $n=1,25$, on est assez proche de la solution de *FUNG* et, pour $n=1,75$, les courbes sont les mêmes. Comme on le constate logiquement, dans une zone proche de la surface (profondeur inférieure à $0,16L$), pour les différentes valeurs de n , les contraintes obtenues par cette solution sont égales à celles obtenues par *FUNG*.

En général, à propos de l'effet de la largeur de la bande de chargement, notamment en profondeur, on peut dire que, quand l'abscisse du point considéré à l'intérieur du domaine chargé est à une distance horizontale de $3L/2$ de la limite de la zone chargée, les résultats coïncident avec ceux de la solution de *FUNG* et que, si ce point se déplace lorsque cette distance est supérieure à $3L/4$, l'écart entre ces deux solutions n'est pas considérable.

III - 4 CHARGEMENTS SINUSOIDAUX SUR DEUX COTES D'UN COIN

~~~~~

On considère le cas défini sur la figure III-9. Le chargement est symétrique et, pour demi-angle d'ouverture du coin, on se donne  $\alpha = \pi/3$  à titre d'exemple d'application de cette solution. La variation des contraintes totales sur une surface circulaire de rayon  $R=32$  m, pour  $n=1,75$ , est montrée sur la figure III-9. Pour ce cas symétrique, la distribution des contraintes radiale et tangentielle est symétrique par rapport à la bisectrice. Par contre, la distribution de la contrainte de cisaillement est antisymétrique.



Les différentes valeurs de  $n$  (0,75 - 1,25 - 1,75) sont considérées. Pour une section circulaire donnée, les résultats obtenus, comme précédemment, ne sont pas influencés par la largeur du chargement lorsque la distance entre la section considérée et la limite de la zone chargée est supérieure à  $3L/4$ .

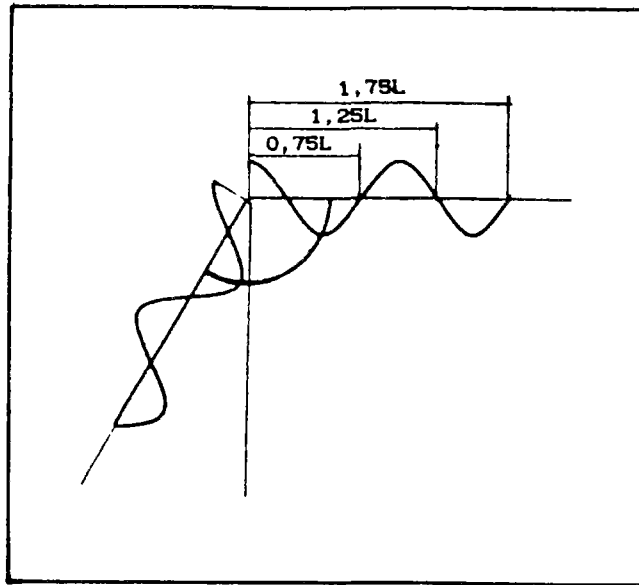


Figure III-9 : Section circulaire considérée et différentes largeurs du chargement symétrique.

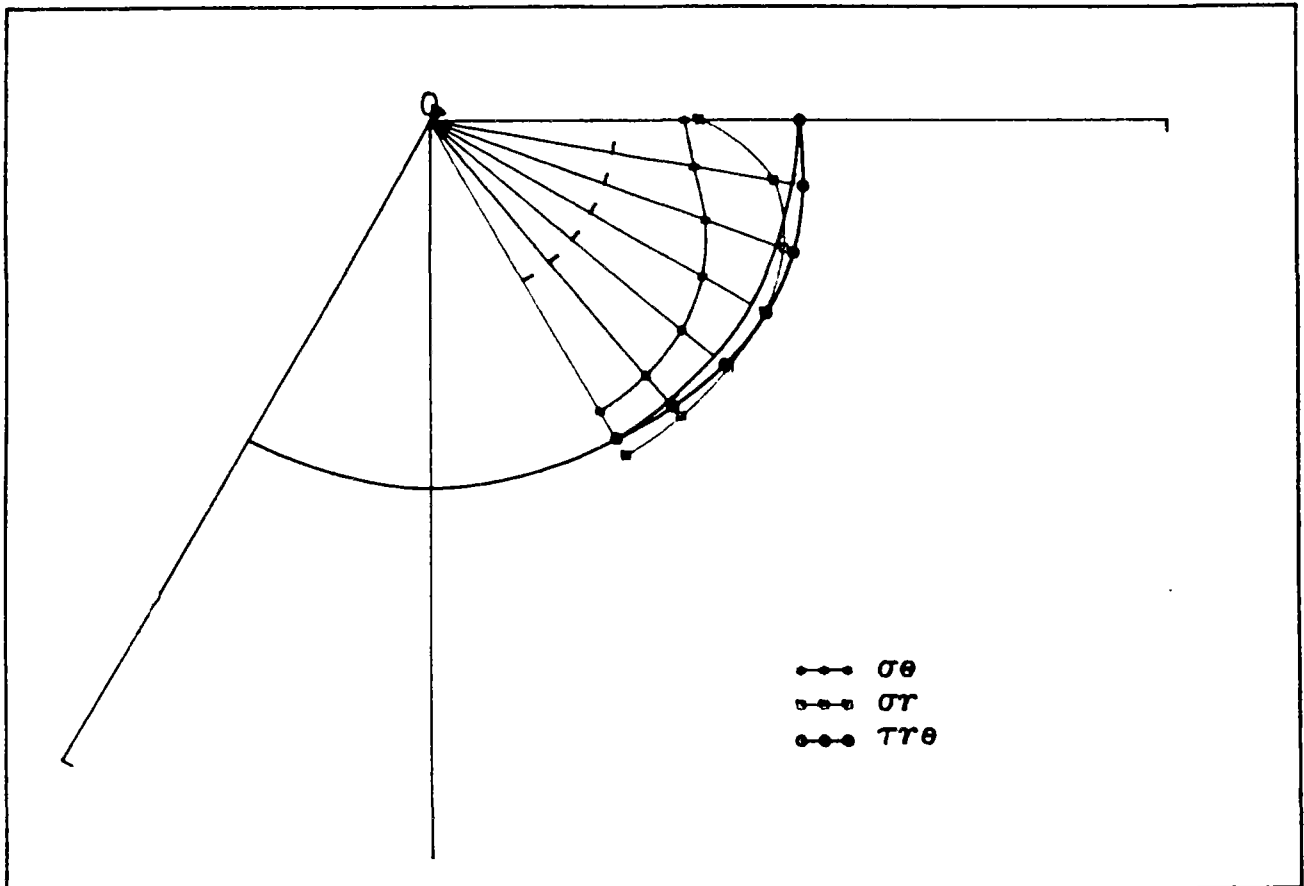


Figure III-10 : Distribution des contraintes sur une surface circulaire dans un massif angulaire.

## IV- DISTRIBUTION DE LA PRESSION INTERSTITIELLE DANS UN COIN

### IV-1 EQUATION ET RESOLUTION DU PROBLEME

Dans un milieu poreux incompressible avec un fluide incompressible, la pression interstitielle P vérifie l'équation de Laplace

$$\nabla^2 P = 0 . \quad \text{III-31}$$

En coordonnées polaires, on cherche la fonction  $P(r, \theta)$  vérifiant l'équation de Laplace avec les conditions aux limites suivantes : (figure II-1)

$$\begin{cases} p = g_1(r) & r < a \\ p = 0 & r > a \end{cases} \quad \theta = \alpha$$

III-32

$$\begin{cases} p = g_2(r) & r < a \\ p = 0 & r > a \end{cases} \quad \theta = -\alpha$$

L'équation (III-31) s'écrit en coordonnées polaires :

$$r^2 \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = 0 . \quad \text{III-33}$$

Considérons la transformation de Mellin (5)

$$\bar{p}(s, \theta) = \int_0^{\infty} p(r, \theta) r^{s-1} dr . \quad \text{III-34}$$

D'après la propriété de "l'image de la dérivée" de la transformation de Mellin [(III-7) et (III-8)], on obtient l'équation

différentielle ordinaire suivante:

$$\frac{d^2 \bar{p}}{d\theta^2} + s^2 \bar{p} = 0 \quad , \quad \text{III-35}$$

dont la solution générale est de la forme

$$\bar{p} = E \sin(s\theta) + F \cos(s\theta) \quad . \quad \text{III-35}$$

E, F sont des fonctions des paramètres  $(s, \alpha)$  déterminées à partir des conditions aux limites. Les transformées correspondant aux équations des conditions aux limites (III-32) considérées sont :

$$\bar{g}_n(s) = \int_0^\infty g_n(r) r^{s-1} dr \quad (n=1, 2) \quad . \quad \text{III-37}$$

En appliquant les conditions aux limites dans la solution générale (III-36), on trouve les expressions de E et de F :

$$2E \sin(s\alpha) = \bar{g}_1(s) - \bar{g}_2(s) \quad \text{III-38}$$

$$2F \cos(s\alpha) = \bar{g}_1(s) + \bar{g}_2(s) \quad .$$

En remplaçant les formules (III-38) dans l'équation (III-36), on obtient :

$$\bar{p}(s, \theta) = \frac{\bar{g}_1(s) - \bar{g}_2(s)}{2\sin(s\alpha)} \sin(s\theta) + \frac{\bar{g}_1(s) + \bar{g}_2(s)}{2\cos(s\alpha)} \cos(s\theta) \quad \text{III-39}$$

En appliquant la formule d'inversion de Mellin :

$$p(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{p}(s, \theta) r^{-s} ds \quad , \quad \text{III-40}$$

on obtient la forme générale de la pression interstitielle.

#### IV-2 CAS DU CHARGEMENT SINUSOIDAL

Dans le cas particulier du chargement harmonique, on calcule les transformées correspondant aux conditions aux limites (III-38). Pour un chargement de la forme  $p = p_0 \cos(\lambda r)$ , on trouve :

$$\begin{cases} \bar{g}_1 = - \int_0^{nL} r^{s-1} p_0 \cos(\lambda r) dr \\ \bar{g}_2 = - \int_0^{nL'} r^{s-1} p_2 \cos(\lambda' r) dr \end{cases} \quad \text{III-41}$$

En prenant:  $\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{2m!}$  ,

On obtient:  $\bar{g}_1(s) = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2n\pi)^{2m}}{2m!(2m+s)} (nL)^s$

III-42

$$\bar{g}_2(s) = p_2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2n\pi)^{2m}}{2m!(2m+s)} (nL')^s .$$

Les notations utilisées pour les paramètres utilisés sont les mêmes que celles du paragraphe précédent.

En utilisant l'inversion de Mellin (III-40), pour  $p(r, \theta)$ , on aura donc :

III-43

$$p = \frac{1}{4\pi i} \left\{ \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2n\pi)^{2m}}{2m!(2m+s)} \left[ p_0 \left(\frac{nL}{r}\right)^s - p_2 \left(\frac{nL'}{r}\right)^s \right] \frac{\sin(s\theta)}{\sin(s\alpha)} ds \right.$$

$$\left. + \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2n\pi)^{2m}}{2m!(2m+s)} \left[ p_0 \left(\frac{nL}{r}\right)^s + p_2 \left(\frac{nL'}{r}\right)^s \right] \frac{\cos(s\theta)}{\cos(s\alpha)} ds \right\}$$

En considérant les conditions d'application de la formule d'inversion de Mellin présentées précédemment, et en utilisant la théorie des résidus, on obtient, après calculs, l'expression finale de la pression interstitielle :

III-44

$$\begin{aligned}
 p(r, \theta) = & \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m)^{2m}}{2m!} \left\{ p_0 \left[ \int_0^{\infty} \left[ \frac{2m}{4m^2 + \varepsilon^2} \cos[\varepsilon \text{Log}(\frac{nL}{r})] + \frac{\varepsilon}{4m^2 + \varepsilon^2} \sin[\varepsilon \text{Log}(\frac{nL}{r})] \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot \left( \frac{\text{sh}(\varepsilon\theta)}{\text{sh}(\varepsilon\alpha)} + \frac{\text{ch}(\varepsilon\theta)}{\text{ch}(\varepsilon\alpha)} \right) d\varepsilon \right] \right. \\
 & \left. + p_2 \left[ \int_0^{\infty} \left[ \frac{2m}{4m^2 + \varepsilon^2} \cos[\varepsilon \text{Log}(\frac{nL'}{r})] + \frac{\varepsilon}{4m^2 + \varepsilon^2} \sin[\varepsilon \text{Log}(\frac{nL'}{r})] \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot \left( \frac{\text{ch}(\varepsilon\theta)}{\text{ch}(\varepsilon\alpha)} - \frac{\text{sh}(\varepsilon\theta)}{\text{sh}(\varepsilon\alpha)} \right) d\varepsilon \right] \right\} \\
 & + \frac{p_0 + p_2}{4} + \frac{(p_0 - p_2)\theta}{4\alpha} + \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m)^{2m}}{2m!} \frac{(p_0 - p_2)\theta}{2m\alpha} .
 \end{aligned}$$

On présente sur la figure III-11 la variation de la pression interstitielle en fonction de la profondeur, pour un fond horizontal, dans des conditions analogues à celle de la figure II-5.

L'intérêt de l'approche ainsi présentée pour le champ des contraintes totales et la pression interstitielle dans un massif angulaire réside, d'une part, dans le caractère analytique de cette méthode, qui enrichit la littérature dans le cadre des solutions élastiques pour les sols et les roches, et, d'autre part, dans son application pratique aux problèmes correspondants.

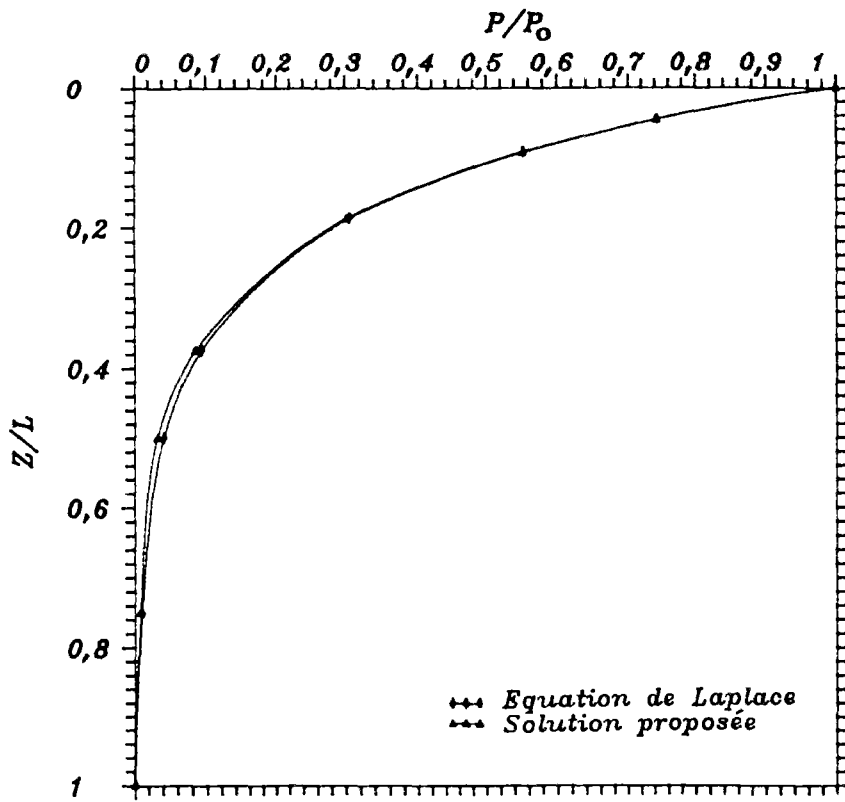


Figure III-11 : Variation de la pression interstitielle avec la profondeur.

*Toute théorie n'est bonne qu'à condition  
de s'en servir pour passer outre.*

*A. GIDE*

## CHAPITRE 4

### COMPORTEMENT POROELASTIQUE LINEAIRE - PROBLEMES D'EVOLUTION QUASISTATIQUES



## I - INTRODUCTION

Dans le cadre de l'approche couplée, on s'intéresse à l'interaction eau-squelette du sol pour un milieu poreux saturé en eau. Afin d'analyser ce problème d'une façon générale, parmi les différentes approches possibles, on présente la théorie de BIOT. Cette approche ignore délibérément le niveau microscopique et suppose que les concepts et principes de la mécanique des milieux continus sont applicables aux grandeurs macroscopiques mesurables.

L'objet essentiel de ce chapitre est d'aborder très brièvement la mécanique des milieux poreux constitué d'un squelette déformable et d'un fluide saturant l'espace connecté, ceci dans un cadre élastique linéaire.

Cette présentation repose sur l'hypothèse de continuité qui se traduit par la superposition de deux milieux continus, l'un étant le squelette, l'autre le fluide saturant l'espace poreux connecté, en interaction mécanique. Dans cette description continue du milieu poreux, la déformation du squelette sera privilégiée .

La difficulté dans une modélisation d'un milieu poreux saturé réside essentiellement dans la prise en compte de ce fait que le milieu poreux, ayant un caractère ouvert du point de vue thermodynamique, peut échanger de la masse fluide avec l'extérieur au cours des transformations.

Une première partie est consacré aux aspects mécanique et thermodynamique des milieux poreux saturés. De l'aspect mécanique, on donne une description de la cinématique du squelette ainsi que du mouvement, en définissant un vecteur courant relatif de la masse fluide dont l'existence a été postulée. La conservation de la masse a été discutée en raison de son intervention dans la partie de diffusion hydraulique.

Après avoir décrit l'aspect thermodynamique des milieux poreux saturés, les équations d'état introduisant le comportement poroélastique linéaire isotrope sont données. La définition de ce comportement nécessite la connaissance de quatre

caractéristiques poroélastiques macroscopiques. On y indique les expériences nécessaires à leur détermination. Sous certaines hypothèses, les relations qui relient les caractéristiques macroscopiques à celles des constituants microscopiques sont données. Ces relations permettent de réduire le nombre des expériences conduisant à la détermination des caractéristiques macroscopiques.

La quatrième partie est consacrée à la formulation et la méthode de résolution du problème d'évolution quasistatique en poroélasticité.

En fin de chapitre, la validité de l'hypothèse de quasistaticité pour les applications pratiques aux problèmes de séisme et de la houle en génie civil sera clarifiée.

## II-LE MODELE DE BIOT

Ce modèle est décrit dans les articles publiés par *BIOT* [1956, 1962, 1972, 1973, 1977]. Ce paragraphe est également inspiré des travaux de *COUSSY* [1989 a, b, c, d ].

### II-1 - L'ASPECT MÉCANIQUE

#### II-1-1 Description cinématique de la déformation du squelette

Le milieu à décrire est un milieu poreux déformable au travers duquel s'écoule un fluide, qui le sature. Ce milieu peut donc être considéré comme la superposition de deux milieux continus en interaction, l'un représentant la phase fluide, l'autre le squelette. Il est logique de privilégier la cinématique du squelette et de décrire le mouvement du fluide par rapport à celle-ci, parce que la déformation observable est essentiellement celle du squelette. Il est nécessaire de noter que, dans un milieu poreux naturel, il y a deux types de porosité, occluse et connectée, et dans la suite on considère que le fluide qui sature l'espace poreux occlus fait partie intégrante du squelette. Le fluide saturant

l'espace interstitiel connecté sera présenté comme l'un des deux milieux continus dans cette description. La Mécanique des Milieux Continus monophasiques pourra être utilisé comme un outil adapté pour la description de la déformation du squelette sous l'action des forces extérieures, surfaciques ou volumiques, et de gradient de pression interstitielle.

On considère un cube élémentaire (ou un volume élémentaire) du solide dans la configuration de référence du squelette ( $S_0$ ), avec une grande taille par rapport à la taille des pores et une petite taille par rapport à l'échelle du problème. Chaque point matériel, à l'instant donné, dans cette configuration a été repéré par son vecteur de position  $\underline{X}$ . Cette hypothèse de la taille de volume élémentaire assure une description continue du milieu poreux considéré, c'est-à-dire que les variations des propriétés physiques sont continues. L'échelle du problème est une notion liée à l'application et non pas intrinsèque. Après la transformation, chaque point matériel du squelette dans la nouvelle configuration, dite configuration actuelle ( $S$ ), a des nouvelles coordonnées. Chaque point matériel est repéré par le nouveau vecteur de position  $\underline{x}$ . La déformation, localement, peut être décrite par le gradient de la transformation. Dans une description Lagrangienne, la cinématique de la déformation peut être donnée par simple dérivation partielle par le temps, donc la donnée nécessaire pour décrire la cinématique de la déformation, comme cela se fait pour un milieu continu monophasique classique, est le vecteur de la vitesse des points matériels du squelette  $\underline{V}(x,t)$  dans la configuration actuelle à chaque instant, qui sera lié au vecteur de position dans la configuration initiale.

#### II-1-2-Description du mouvement et conservation de la masse

Afin de donner une description du mouvement pour un milieu poreux, on définit une autre quantité qui est liée au mouvement des particules fluides. On définit le vecteur courant de masse fluide

par rapport au squelette  $W(x,t)$ , qui représente la quantité de fluide qui traverse une surface élémentaire infinitésimale perpendiculaire à l'axe  $x_1$  dans la configuration actuelle à l'instant  $t$  par unité du temps. On peut relier cette quantité à la vitesse relative  $V_1(x,t)$  du fluide par rapport au squelette par :

$$W(x,t) = n\rho_1 V_1(x,t) , \quad (IV-1)$$

où  $\rho_1$  et  $n$  sont la masse volumique du fluide et la porosité dans la configuration actuelle. Le vecteur  $W(x,t)$  est écrit en variable d'Euler. Si l'on introduit le vecteur analogue Lagrangien  $M(X,t)$  comme :

$$Mn_0 da_0 = Wnda , \quad (IV-2)$$

où  $n_0$  est la normale extérieure à la surface infinitésimale  $da_0$  dans la configuration initiale, en utilisant des règles élémentaires de la mécanique, pour la transformation effectuée, on peut écrire :

$${}^t p n da = J n_0 da_0 \quad (IV-3)$$

où  $p$  est le gradient de la transformation et  $J$  est son Jacobien. On a donc :

$$JW = P.M \quad (IV-4)$$

Si l'on considère la masse contenue ( $m_0 dD_0$ ) dans le volume élémentaire ( $dD_0$ ) dans la configuration initiale, après la transformation, ce volume ( $dD$ ) contient  $(m_0 + m)dD$  ; la conservation de la masse totale dans une description lagrangienne s'écrit alors :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \int_{D_0} (m_0 + m)dD_0 = - \int_{\partial D} W.nda . \quad (IV-5)$$

En reportant (IV-4) dans (IV-5), l'équation de continuité en

variable de Lagrange s'écrit :

$$\frac{dm}{dt} = \text{Div}M \quad (IV-6)$$

la majuscule dans l'opérateur *Div* signifie que l'opérateur est relatif à la configuration de référence.

## II-2 - L'ASPECT THERMODYNAMIQUE

Le cube élémentaire de milieu poreux ou le système élémentaire déjà défini dans le paragraphe précédent, dont on repère la cinématique de la déformation par celle de son squelette, peut alors être considéré d'un point de vue thermodynamique comme un système ouvert, c'est à dire échangeant de la masse fluide avec l'extérieur au cours des transformations qu'il subit. Il convient alors d'identifier les variables d'état caractérisant ses niveaux d'énergie.

En se limitant au cas des transformations isothermes, sous l'action de variations de contraintes, et de pression interstitielle, le système élémentaire se déforme et son volume initial ( $d\mathcal{D}_0$ ) passe au volume déformé ( $d\mathcal{D}$ ). Cette déformation par rapport à la configuration de référence peut être décrite dans le cas des transformations infinitésimales, par les composantes du tenseur des déformations linéarisées  $\epsilon$ . En raison de son caractère ouvert, il a pu échanger de la masse fluide avec l'extérieur. Si la masse de ce système avant toute transformation est  $m_0 d\mathcal{D}_0$ ,  $m_0$  étant la masse volumique, après transformation la masse vaudra alors :

$$m d\mathcal{D} = (m_0 + m) d\mathcal{D}_0 \quad (IV-7)$$

l'indice 0 indique les paramètres dans la configuration de référence, la quantité  $m d\mathcal{D}_0$  représente ainsi l'apport fluide consécutif à la transformation.

Le comportement poroélastique est tel que le tenseur des déformation  $\epsilon$  et l'apport de masse fluide  $m$  suffisent à caractériser le nouvel état du système par rapport à son état de référence. Ce

sont les variables d'état recherchées. Les propriétés thermodynamiques sont décrites par la donnée de l'énergie libre de l'unité de volume dans la configuration de référence, qu'on note W :

$$W=W(\varepsilon_{ij}, m, T_0)$$

## II-3 - LE COMPORTEMENT POROÉLASTIQUE LINÉAIRE ISOTROPE

### II-3-1- Equation d'état de la poroélasticité

On considère les hypothèses suivantes :

1 - Transformation infinitésimale pour la phase solide.

L'hypothèse des transformations infinitésimales implique des déformations infinitésimales et, dans le cadre de cette hypothèse pour la phase solide, en termes de composantes du tenseur de déformation macroscopique, on peut écrire au second ordre près :

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (IV-8)$$

u étant le vecteur déplacement. L'hypothèse de la transformation infinitésimale s'applique seulement à la phase solide et non pas à la phase liquide.

2 - Petits apports de masse fluide m.

3 - Milieu poreux statistiquement isotrope.

En l'absence de dissipation intrinsèque, la loi de comportement poroélastique devient les équations d'état. Donc, en utilisant l'énergie libre W, le comportement poroélastique linéaire isotrope s'écrit sous la forme explicite suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0 = \lambda_f \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{1}} + 2 G \underline{\underline{\varepsilon}} - b M m/\rho_0 \quad (IV-9)$$

$$p - p_0 = M (-b \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}} + m/\rho_0) \quad (IV-10)$$

$\lambda$  et  $G$  sont les coefficients de Lamé, les  $o$  et  $f$  se réfèrent au système ouvert ou fermé,  $M$  étant le module de BIOT, et  $b$  le coefficient de BIOT.

Pour établir ces équations définissant le comportement poroélastique du milieu, l'équation d'état du fluide saturant a été implicitement utilisée. Le comportement du fluide est régi par l'équation d'état suivante:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_1^0} [1 + C_1(p - p_0)] \quad (IV-11)$$

La signification de  $M$  et de  $b$  est la suivante:

-  $M$  représente la variation de pression interstitielle à exercer sur le fluide à déformation microscopique isovolumique ( $\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}} = 0$ ) pour introduire dans le système élémentaire la masse  $m d\mathcal{D}_0$  par unité de masse volumique initiale  $\rho_1^0$  de fluide ;

-  $b$  représente le rapport de la masse du fluide  $m$ , normalisée par la densité volumique initiale de fluide  $\rho_1^0$ , et de la variation de volume relatif  $\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}$ , pour un système ouvert ( $p = p_0$ ).

En posant  $\lambda_f = \lambda_0 + b^2 M$  (IV-12) et  $\lambda_0 = K_0 - 2G/3$  (IV-13) dans l'équation (IV-9) et en combinant (IV-9) et (IV-10), on peut réécrire :

$$\underline{\underline{\sigma}} + b p \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + b p_0 \underline{\underline{1}} + (K_0 - 2/3 G) \text{tr } \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{1}} + 2 G \underline{\underline{\epsilon}} \quad (IV-14)$$

$$\bar{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\sigma}} + b p \underline{\underline{1}} \quad (IV-15)$$

$\bar{\underline{\underline{\sigma}}}$  peut s'interpréter comme contrainte effective, celle qui est responsable de déformation du squelette.

Les équations (IV-9) et (IV-10) permettent d'écrire :

$$p - p_0 = \frac{K_0 M}{K_f} \frac{m}{\rho_1^0} - \frac{b M}{K_f} \frac{\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0)}{3} \quad (IV-16)$$

Dans un essai non drainé, le rapport de la variation de la pression moyenne  $-\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0)/3$  et de la variation de la pression interstitielle  $p - p_0$  peut être défini comme le coefficient de Skempton  $B_s$  :

$$B_s = bM/K_f \quad (IV-17)$$

Cette définition nous permet de déterminer ce coefficient

dans un essai non drainé au lieu de mesurer le module  $M$  ou le coefficient  $b$ , qui sont des caractéristiques difficiles à déterminer de manière directe.

Dans un essai non drainé on a la relation :

$$p-p_0 = - B_s \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0)/3 . \quad (IV-18)$$

La quantité de  $B_s$  pourra être fourni par la mesure de la pente de la droite donnant la variation de la pression interstitielle  $p-p_0$  en fonction du changement de la pression moyenne  $-\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0)/3$ .

Pour que le comportement poroélastique isotrope linéaire présenté par les équations précédentes soit totalement défini, la connaissance de 4 paramètres indépendants est indispensable. Trois constantes poroélastiques  $G$ ,  $K_f$ ,  $K_o$  et l'une des deux caractéristiques  $M$  ou  $b$ .  $K_f$  et  $K_o$  pourront être mesurés dans les expériences de compression-traction isotrope non drainée et drainée et  $G$  pourra être également mesuré par un essai triaxial sous chargement purement déviatorique. A partir de la mesure directe du coefficient de Skempton  $B_s$ , comme on vient de l'expliquer, une des deux constantes  $b$  ou  $M$  sont déterminées par les relations suivantes:

$$M = B_s^2 \frac{K_f^2}{K_f - K_o} , \quad b = \frac{1}{B_s} \left(1 - \frac{K_o}{K_f}\right) . \quad (IV-19)$$

Dans le cadre d'un certain nombre d'hypothèses, on peut lier les caractéristiques poroélastique à celles des constituants, c'est-à-dire des grains de solide qu'on l'appelle matrice. Ces relations permettent de réduire le nombre d'expériences nécessaires pour détermination des quatre paramètres poroélastiques. En faisant l'hypothèse de l'isotropie et de l'homogénéité pour une matrice ayant un comportement élastique linéaire, connaissant la porosité initiale  $n_0$  et les compressibilités de la matrice et du fluide,  $C_s$  et  $C_1$ , on peut montrer que :

$$M = 1 / [n_0 C_1 + (1-n_0)C_s - C_s^2 K_o] \quad (IV-20)$$

$$b = 1 - K_o C_s \quad (IV-21)$$

où  $K_o$  est le module hydrostatique de la loi en contrainte effective



$$\text{(système ouvert)} \quad K_0 = \lambda_0 + 2/3 G \quad (IV-22)$$

Sous ces hypothèses, la mesure de deux constantes poroélastiques indépendantes isothermes comme, par exemple,  $K_0$  et  $G$  ou  $K_f$  et  $G$  est nécessaire et suffisante pour caractériser le comportement poroélastique linéaire isotrope. Sous les hypothèses déjà évoquées, il est possible de donner les bornes inférieures de  $K_0$  et  $G$  ; ces bornes, dites de Hashin-Shtrikman, sont :

$$0 \leq K_0 \leq (1-n_0) \frac{4 G_s}{4 C_s G_s + 3 n_0} \quad (IV-23)$$

$$0 \leq G \leq (1-n_0) G_s \frac{8 G_s + 9/C_s}{8 G_s + 9/C_s + 6 n_0 (2 G_s + 1/C_s)}$$

Les valeurs de  $K_0$  et  $G$  sont d'autant plus proches des bornes supérieures des inégalités de (IV-23) que la porosité  $n$  est faible.

En considérant l'équation (IV-21) et les inégalités (IV-23), on peut déduire la borne inférieure de  $b$  :

$$\frac{n(4G_s + 3/C_s)}{4G_s + \frac{3n}{C_s}} \leq b \leq 1 . \quad (IV-24)$$

### II-3-2-Contrainte effective

Reprenons les équations (IV-14) et (IV-15)

$$\underline{\underline{\sigma}} + b p \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + b p_0 \underline{\underline{1}} + (K_0 - 2/3 G) \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} + 2 G \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (IV-14)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}} + b p \underline{\underline{1}} \quad (IV-15)$$

On peut les écrire sous la forme suivante:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + (K_0 - 2/3 G) \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} + 2 G \underline{\underline{\varepsilon}} . \quad (IV-25)$$

Cette équation représente une loi de comportement reliant le tenseur des contraintes effectives et le tenseur des déformations infinitésimales dans le cadre de la poroélasticité isotrope. Ce tenseur des contraintes effectives, comme il est déjà évoqué, peut s'interpréter comme responsable des déformations du squelette. La

définition du tenseur des contraintes effectives donnée par l'identification (IV-15) n'a pas de caractère général ; elle dépend du comportement envisagé parce que la notion de contrainte effective est une notion rhéologique. Si l'on considère un autre type de comportement, par exemple, comme le cas d'un milieu poroélastique linéaire anisotrope, l'identification (IV-15) doit être réadaptée. Considérant  $\underline{\underline{C}}_0$  comme le tenseur des modules d'élasticité isotherme d'un système ouvert et  $\underline{\underline{B}}$  étant un tenseur, on peut écrire:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{C}}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{B}} (p - p_0) . \quad (IV-26)$$

En définissant 
$$\underline{\underline{\sigma}}^{eff} = \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{B}} p , \quad (IV-27)$$

on peut réécrire :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{eff} = \underline{\underline{\sigma}}_0^{eff} + \underline{\underline{C}}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}} . \quad (IV-28)$$

Il faut insister sur le fait que, comme l'on a constaté dans cette démonstration le tenseur des contraintes effectives n'est pas totalement défini par le tenseur des contraintes totales et la pression interstitielle tant qu'il y a pas d'information complémentaire sur le comportement.

Si l'on compare la contrainte effective présentée par l'équation (IV-15) à la contrainte effective introduite par Terzaghi comme :

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{1}} , \quad (IV-29)$$

il est clair que l'hypothèse de Terzaghi est un cas particulier de (IV-15) avec  $b = 1$  . Il y a deux points importants à noter :

- l'hypothèse de Terzaghi est d'autant mieux vérifiée que, soit le milieu est très poreux (porosité forte), soit le  $C_s$  est moins élevé ;

- cette hypothèse est totalement indépendante de  $C_1$ , la compressibilité du liquide.

## II-4 - FORMULATION D'UN PROBLÈME D'ÉVOLUTION QUASISTATIQUE LINÉARISÉ EN POROÉLASTICITÉ

Dans cette partie, afin d'étudier la formulation et la résolution d'un problème d'évolution, dans le cadre de l'hypothèse de quasistaticité, d'un milieu ayant un comportement poroélastique linéaire, on récapitule l'ensemble des hypothèses nécessaires, même déjà évoquées. Cet ensemble des hypothèses nommé le cadre d'hypothèses petites perturbations quasistatiques correspond aux hypothèses suivantes :

- transformations infinitésimales,
- petits apports de masse fluide,
- petits gradients de pression interstitielle (cette hypothèse implique de petites variations de densité volumique du fluide.),
- transformation quasi-statique consistant à négliger tous les efforts d'inertie,
- petits déplacements des particules du squelette. Les composantes du déplacement doivent être infiniment petites par rapport à une longueur caractéristique liée au problème considéré.

On remarque bien que ce cadre d'hypothèses n'impose pas de petits déplacements de la phase du fluide, il est donc possible de traiter le problème d'écoulement du fluide à travers un milieu poreux.

Dans la suite, afin de simplifier la présentation, on considère un milieu homogène isotrope, et supposant que l'état de référence est un état d'équilibre et que le fluide est au repos, on présente les équations du problème posé de la manière suivante :

### II-4-1 - Equation d'équilibre

L'hypothèse des petites perturbations nous autorise à confondre géométriquement le domaine initial ( $\mathcal{D}_0$ ) et le domaine actuel ( $\mathcal{D}$ ) en considérant le mouvement de son squelette. L'équilibre dans la configuration initiale sous l'action des forces surfaciques

$F_0$  agissantes sur la frontière  $\partial\mathcal{D}_0$  du domaine considéré et les efforts massiques  $f$  exige :

$$\operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}}_0 + m_0 f = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}_0, \quad \underline{\underline{\sigma}}_0 \cdot \mathbf{n} = F_0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}_0 \quad (IV-30)$$

$\mathbf{n}$  est la normale extérieure au domaine considéré.

Si l'on modifie les efforts surfaciques de  $F_0$  à  $F$ , le domaine se déforme. Dans la configuration actuelle, l'équilibre mécanique implique que :

$$\operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}} + (m_0 + m)f = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}, \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = F \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}. \quad (IV-31)$$

La différence des équations des deux champs donne :

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) + mf = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D} \quad \text{et} \quad (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) \cdot \mathbf{n} = F - F_0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D} \quad (IV-32)$$

Les efforts massiques sont dus à la pesanteur. En l'absence de forces massiques, on pourra écrire :

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) = 0. \quad (IV-33)$$

#### II-4-2 - Equation de diffusion du fluide

Dans la partie II-1-2, on a montré que la conservation de la masse fluide implique :

$$\dot{m} + \operatorname{div}M = 0. \quad (IV-34)$$

La loi de Darcy pour les deux configurations de référence et actuelle, dans le cadre des hypothèses de petites perturbations quasistatiques et d'isotropie de milieu, s'écrit :

$$M_0/\rho_1^0 = -K \left[ \operatorname{grad}p + \rho_1^0 f \right], \quad (IV-35)$$

$$M_0/\rho_1 = -K \left[ \operatorname{grad}p + \rho_1 f \right]. \quad (IV-36)$$

En appliquant l'opérateur divergence aux équations (IV-35) et (IV-36) en rappelant que l'état de référence est supposé être un état d'équilibre et l'hypothèse des petites variations de densité volumique, on peut écrire, en utilisant l'équation (IV-34) :

$$\dot{m} = K \left[ \Delta(p - p_0) + \text{div}(\rho_1^0 - \rho_1) \mathbf{f} \right] \quad (IV-37)$$

où  $\Delta$  est Laplacien.

#### II-4-3-Conditions aux limites

Avec les équations de champs données par (IV-32) et (IV-37), les conditions aux limites doivent être précisées. Les conditions aux limites sont les suivantes :

-les conditions aux limites mécaniques, quant à elles, sont constituées des conditions imposées sur deux parties séparées de la frontière  $\partial \mathcal{D}$ . Sur un sous-domaine ( $\partial_u d\mathcal{D}$ ), les composantes du déplacement sont imposées et, sur une autre partie ( $\partial_F d\mathcal{D}$ ), les forces surfaciques sont imposées. Ces conditions aux limites sont alors :

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{sur } \partial_u d\mathcal{D} \quad , \quad \sigma_{ij} \cdot n_j = \bar{F}_i \quad \text{sur } \partial_F d\mathcal{D} \quad ; \quad (IV-38)$$

-les conditions aux limites hydrauliques, d'une manière générale, sont constituées des conditions imposées sur deux sous-domaines séparés de la frontière ( $\partial \mathcal{D}$ ) ; sur ( $\partial_m d\mathcal{D}$ ) les composantes du vecteur courant de masse fluide ( $M_1$ ) sont imposées et, sur l'autre partie ( $\partial_p d\mathcal{D}$ ), la pression interstitielle est imposée. Avec la loi de Darcy, on aura donc :

$$-K \text{grad} p = M_1 \quad \text{sur } \partial_m d\mathcal{D} \quad , \quad p = \bar{p} \quad \text{sur } \partial_p d\mathcal{D} \quad (IV-39)$$

#### II-4-4- Equations de Navier

Après avoir décrit les conditions aux limites, un système d'équations constitué par les équations de champs (IV-32) et (IV-37), les conditions aux limites (IV-38) et (IV-39), et les équations de comportement (IV-9 et IV-10), est un système complet de la formulation d'un problème d'évolution quasistatique d'un milieu

poroélastique. Si l'on choisit la pression interstitielle et les déplacements comme inconnues principales, on peut écrire l'équation dite de Navier en reportant l'équation (IV-15) dans l'équation d'équilibre, sous les hypothèses de la transformation infinitésimale et de l'homogénéité du milieu, comme :

$$(K_0 + G/3) \text{grad div} \underline{u} + G \text{div grad} \underline{u} - b \text{grad} p = 0 \quad (\text{IV-40})$$

### III- REMARQUE SUR LA PROPAGATION DES ONDES

De façon générale, dans un milieu poreux saturé, trois types d'ondes planes peuvent apparaître, deux ondes longitudinales (de compression) dites de première et deuxième espèce, et une onde transversale (de cisaillement). Pour qu'on puisse observer les trois types d'ondes précitées, la continuité des deux phases liquide et solide est nécessaire. En raison de couplage entre les deux phases solide et liquide dans un milieu poreux, il serait faux d'imaginer que l'une des ondes de compression se propage dans le solide et l'autre dans le liquide ; l'image la plus exacte consiste à considérer que l'échantillon est "un ensemble de deux ressorts dont les vibrations propres consistent en une vibration en phase et une vibration en opposition de phase" : les ondes de première espèce correspondent au mouvement en phase, avec une vitesse nettement supérieure à la vitesse des ondes lentes ou des ondes de seconde espèce, qui correspondent au mouvement en opposition de phase.

Si l'on introduit une fréquence limite  $f_t$ , fonction de la géométrie des pores, définie comme :

$$f_t = \frac{\pi \nu}{4d^2} \quad (\text{IV-41})$$

$d$  étant la diamètre des pores et  $\nu$  est la viscosité cinématique, on aura les résultats limites suivantes :

- si la fréquence est faible ( $f \ll f_t$ )

$$\begin{aligned}
 v_s^2 &= \frac{G}{\rho} \\
 v_{p_1} &= v_c \\
 v_{p_2} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{IV-42}$$

où  $v_c = \left(\frac{\lambda + 2G}{\rho}\right)^{1/2}$  est la vitesse de référence

$v_s$  : la vitesse des ondes de cisaillement

$v_{p_1}$  : la vitesse des ondes compressives de première espèce,

$v_{p_2}$  : la vitesse des ondes compressives de deuxième espèce.

Dans ce cas, le matériau se comporte, vis-à-vis de la propagation des ondes, comme un milieu continu simple, de masse volumique  $\rho = (1-n)\rho_s + n\rho_l$  et de module de compressibilité  $K = K_0 + b^2 M$ . Les forces de dissipation sont prépondérantes et tout se passe comme s'il n'y avait pas d'accélération supplémentaire du fluide par rapport au solide ;

- si la fréquence est élevée ( $f \gg f_t$ )

La célérité des ondes de cisaillement diminue à cause de l'effet de couplage entre le liquide et le solide. Ce résultat a été vérifié expérimentalement NAUROY (1975) et les vitesses de propagation tendent vers celles du milieu en l'absence de dissipation.

Pour avoir une idée sur l'ordre de grandeur de  $f_t$ , dans le cas de l'eau à 15° on a :

$$f_t = 100 \text{ cps} \approx 10 \text{ Hz pour } d = 10^{-2} \text{ cm}$$

$$f_t = 10^4 \text{ cps} \approx 1000 \text{ Hz pour } d = 10^{-3} \text{ cm}$$

En comparant la fréquence  $f_t$  pour un milieu saturé par l'eau aux fréquences des ondes dans un séisme, qui sont inférieures à 10 Hz, on peut conclure, que pour les applications dans le cadre du génie civil, les termes d'inertie dus au mouvement du fluide par rapport au solide sont négligeables.

#### IV - VALIDITE DE L'HYPOTHESE DE QUASISTATICITE POUR UN MILIEU POROELASTIQUE SOUS L'ACTION DE LA HOULE

ZIENKIEWICZ *et* BETTESS [1982], en partant de la formulation complète d'un problème d'évolution du milieu poroélastique linéaire isotrope, afin de simplifier ce problème, ont introduit quelques approximations. La formulation complète contient les termes d'accélération dus au mouvement du fluide, tandis que, dans un problème d'évolution quasistatique, les efforts d'inertie ont été négligés.

Le système complet d'équations, en termes de composantes du tenseur de déplacement du squelette  $u_i$  et du tenseur de déplacement relatif moyen du fluide vis-à-vis au squelette  $w_i$ , est le suivant:

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij,j} + \rho g_i = \rho \ddot{u}_i + \rho_1 \ddot{w}_i \\ -p_{,i} + \rho_1 g_i = K_{ij}^{-1} \dot{w}_j + \rho_1 \dot{u}_i + \rho_1 \ddot{w}_i/n \\ \bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \beta_{ij} p \\ \sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - \delta_{ij} p \\ -w_{i,i} = \delta_{ij} \varepsilon_{ij} - \beta_{ij} \bar{\sigma}_{ij} + C_a p \end{array} \right. \quad (IV-43)$$

On rappelle que  $C_a = (1-n)C_s + nC_1$  et que, dans le cas d'isotropie où  $\beta_{ij} = \delta_{ij} \beta$ , et  $3\beta = C_s$ , on peut considérer que  $C_s = 0$  dans les problèmes de Mécanique des sols. Par conséquent les termes avec  $\beta_{ij}$  peuvent être éliminés et  $C_a$  peut être réduit à  $nC_1$ . On rappelle, de plus, les relations entre  $C_a$  et  $\beta$  d'une part, et le module de Biot  $M$  et le coefficient de Biot  $b$ , d'autre part :

$$1/M = C_a + C_s^2 K_0 \quad b = 1 - \beta(3\lambda_0 + 2G) \quad (IV-44)$$

Nous allons simplifier le système précédent suivant la nature du milieu et la vitesse de filtration ( $\dot{w}_i$ ). La présentation



des équations en fonction des variables principales ( $u_1, p$ ) au lieu de ( $u_1, w_1$ ) sera préférable en considérant les phénomènes avec la vitesse moyenne on peut supposer que :

$$\ddot{w}_1 / \dot{u}_1 \rightarrow 0 \quad (IV-45)$$

Si l'on résout le système pour  $\dot{w}_1$ , on aura alors :

$$\dot{w}_1 = -K_{1j} p_{,1} - K_{1j} \rho_1 \dot{u}_1 + K_{1j} \rho_1 g_1 \quad (IV-46)$$

et, en éliminant  $\dot{w}_1$  et en écrivant les équations du système (IV-43) sous la forme différentielle, on a :

$$(Z) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{1j,j} + \rho g_1 = \rho \dot{u}_1 \\ (K_{1j} p_{,j})_{,1} - (K_{1j} \rho_1 g_1)_{,1} - \delta_{1j} \dot{\epsilon}_{1j} = -(K_{1j} \rho \dot{u}_j)_{,1} - \beta_{1j} \dot{\sigma}_{1j} + C_a \dot{p} \\ d\bar{\sigma}_{1j} = C_{1jkl} d\epsilon_{kl} \\ d\bar{\epsilon}_{1j} = d\epsilon_{1j} + \beta_{1j} dp \\ \sigma_{1j} = \bar{\sigma}_{1j} - \delta_{1j} p \end{array} \right. \quad (IV-47)$$

Si l'on se limite au cas des phénomènes très lents comme la consolidation, on peut éliminer toutes les quantités d'accélération  $\ddot{w} \rightarrow 0, \ddot{u} \rightarrow 0$ .

Les équations du système (IV-47) deviennent :

$$(C) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{1j,j} + \rho g_1 = 0 \\ (K_{1j} p_{,j})_{,1} - (K_{1j} \rho_1 g_1)_{,1} - \delta_{1j} \dot{\epsilon}_{1j} = C_a \dot{p} - \beta_{1j} \dot{\sigma}_{1j} \\ d\bar{\sigma}_{1j} = C_{1jkl} d\epsilon_{kl} \\ d\bar{\epsilon}_{1j} = d\epsilon_{1j} + \beta_{1j} dp \\ \sigma_{1j} = \bar{\sigma}_{1j} - \delta_{1j} p \end{array} \right. \quad (IV-48)$$

On remarque bien que ce système d'équations, compte tenu des

relations (IV-44), est équivalent au système d'équations d'un problème d'évolution quasistatique, déjà donné dans la partie précédente.

Si l'on considère que la perméabilité est très petite ou que la vitesse est telle que  $w_1$ ,  $\dot{w}_1$ , et  $\ddot{w}_1$  sont négligeables, on obtient le cas de phénomènes rapides (comportement non drainé). En introduisant  $K_{1j} = 0$  dans le système précédent, on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{1j,j} + \rho g_1 = \rho \ddot{u}_1 \\ \delta_{1j} \varepsilon_{1j} = \beta_{1j} \dot{\sigma}_{1j} - C_a \dot{p} \\ d\bar{\sigma}_{1j} = C_{1jkl} d\varepsilon_{kl} \\ d\varepsilon_{1j} = d\varepsilon_{1j} + \beta_{1j} dp \\ \sigma_{1j} = \bar{\sigma}_{1j} - \delta_{1j} p \end{array} \right. \quad (IV-49)$$

Enfin, on va présenter le cas du comportement du milieu drainé, qui est un système parfaitement non couplé. Dans ce cas on peut supposer que  $\dot{u}_1 = 0$ ,  $\ddot{u}_1 = 0$ ,  $\dot{w}_1 = 0$ ,  $\ddot{w}_1 = 0$ . On peut alors écrire :

$$(K_{1j} p, 1), j = (K_{1j} \rho_1 g_1), j \quad (IV-50)$$

et l'on peut trouver la pression  $p$  indépendamment. Connaissant  $p$ , le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{1j,j} - p, 1 + \rho g_1 = 0 \\ d\bar{\sigma}_{1j} = C_{1jkl} d\varepsilon_{kl} \\ d\varepsilon_{1j} = (du_{1,j} + du_{j,1})/2 \end{array} \right. \quad (IV-51)$$

Il reste à savoir la validité des différentes approximations et le domaine d'application de ces approximations. ZIENKIEWICZ et BETTESS [1982] en considérant une couche du sol soumise à l'action d'une charge périodique (figure IV-1) et en introduisant deux

paramètres sans dimension  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  ont déterminé le domaine de validité de chacune des approximations présentées ci-dessus (figure IV-2). Les paramètres  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  sont :

$$\Pi_1 = \frac{2\rho \cdot k}{\rho_1 \pi \cdot g} \cdot \frac{T}{\hat{T}^2} \quad (IV-52)$$

$$\Pi_2 = \pi^2 \left[ \frac{T}{\hat{T}} \right]^2$$

où  $\hat{T} = \frac{2D}{V_c}$  et  $V_c^2 = (K + \frac{1}{nc_1})/\rho$ ,

K étant le module de compressibilité isotrope du squelette du sol. Les paramètres secondaire comme la porosité  $n$  et le rapport  $\frac{\rho_1}{\rho}$  sont moins importants et on peut les considérer comme constants. En supposant que  $n = 0,33$  et  $\frac{\rho_1}{\rho} = 0,33$ , pour une couche de sol de profondeur 10 m, qui est une profondeur raisonnable dans les problèmes sous-marins, et en considérant des houles de période comprise entre 3 et 20 secondes, on obtient les limites suivantes pour  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  pour une perméabilité  $k$  de l'ordre de  $10^{-4}$  m/s :

$$30 k < \Pi_1 < 200 k ,$$

$$10^{-5} < \Pi_2 < 4.4 \times 10^{-4} .$$

Comme l'on observe sur la figure IV-2 ,avec le paramètre  $\Pi_2 < 10^{-4}$  on se trouve dans le zone 1, qui correspond à la zone de validité de la formulation pour les phénomènes lents. On conclut donc que, pour un sol sous-marin soumis à l'action de la houle, les effets dynamiques sont parfaitement négligeables, comme on l'avait déjà conclu dans la discussion à propos de la propagation des ondes avec les fréquences basses dans un milieu poreux.

Dans le chapitre suivant, on aborde l'analyse numérique du problème de la propagation de la houle sur un fond marin, en négligeant les efforts d'inertie dus au mouvement du fluide par rapport au squelette, problème qui peut être formulé en termes de déplacements du squelette et de pression interstitielle.

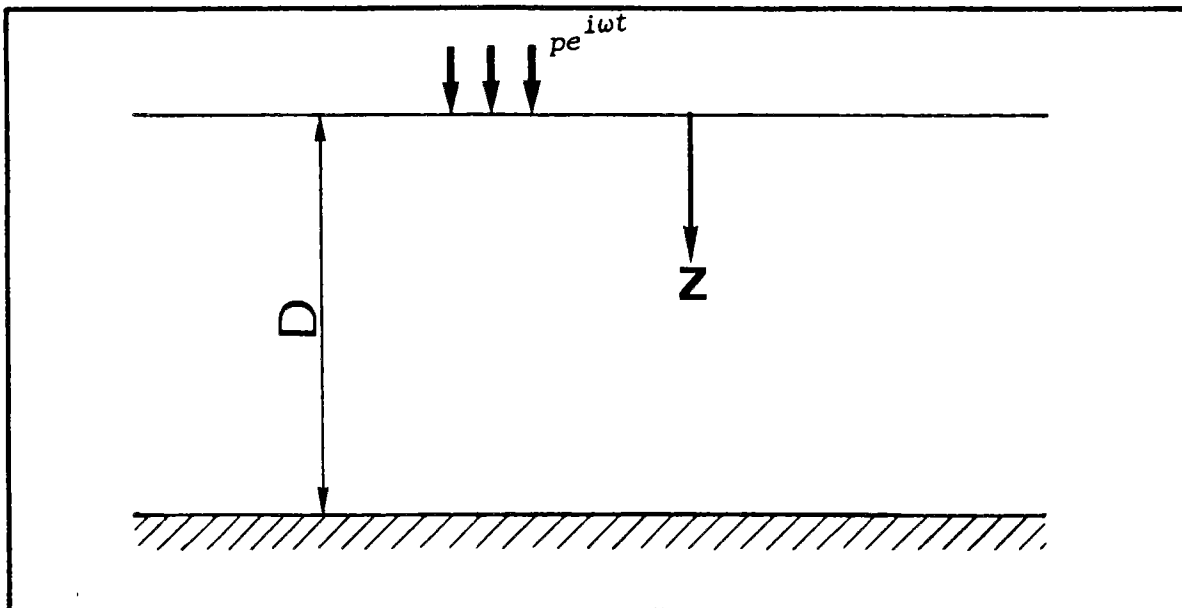


Figure IV-1 : Couche du sol soumise à l'action de la houle

- Zone I  $B=Z=C$  Phénomène lent ( $\ddot{w}$  et  $\ddot{u}$  sont négligeables)
- Zone II  $B=Z \neq C$  Vitesse moyenne ( $\ddot{w}$  est négligeable)
- Zone III  $B \neq Z \neq C$  Domaine de validité du système complet de BIOT

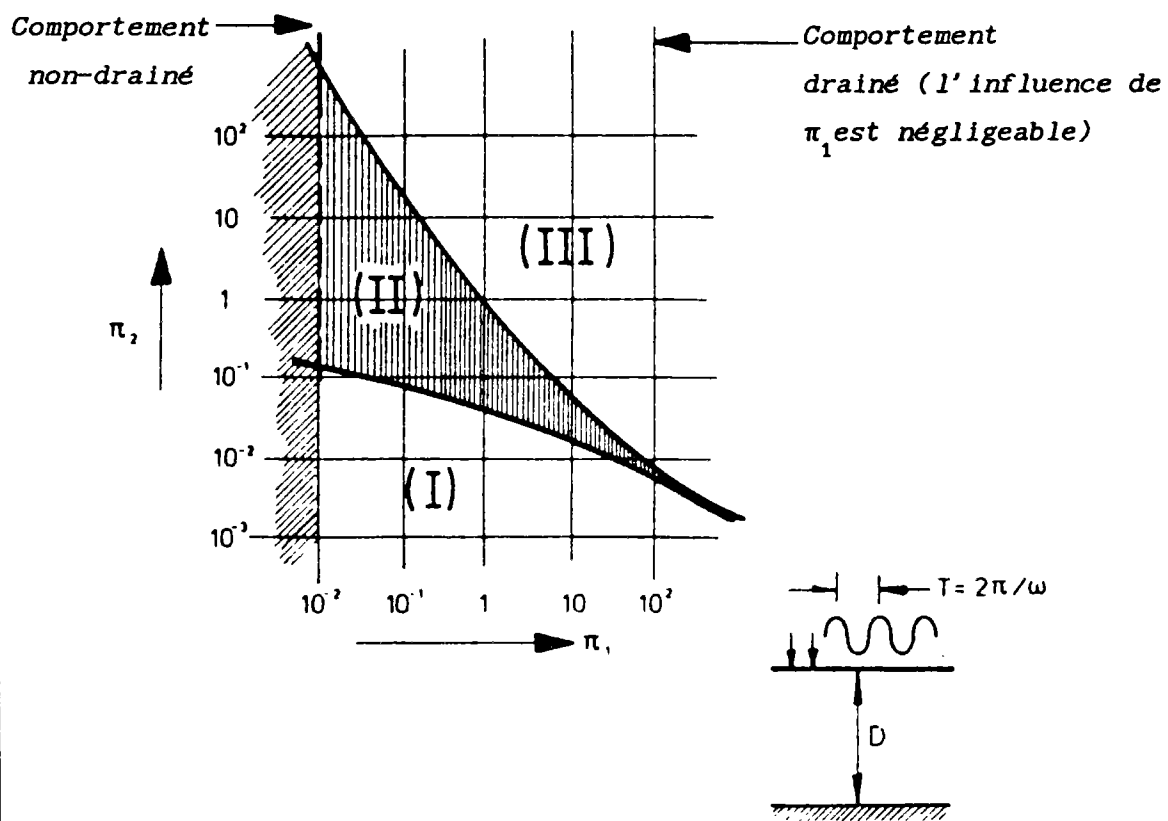


Figure IV-2 : Zones d'application des différentes solutions  
(d'après ZIENKIEWICZ et BETTESS (1982))



*Une bonne méthode est un télescope  
avec lequel on voit ce qui échappe  
à l'oeil nu.*

*CONDILLAC*

## CHAPITRE 5

TRAITEMENT NUMERIQUE DES EQUATIONS DE BIOT SIMPLIFIEES  
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

## I- INTRODUCTION

Les méthodes de calcul développées afin de résoudre les problèmes de consolidation des milieux poreux peuvent être regroupées en deux catégories :

- les extensions de la théorie de la consolidation de *Terzaghi*, comme la théorie de *RENDULIC [1936]*. Dans ces méthodes de calcul, on suppose que l'état des contraintes totales ne varie pas pendant la consolidation. Puisque la théorie de *Terzaghi* est unidimensionnelle, les extensions de cette méthode aux problèmes bi-ou tridimensionnels n'est pas parfaitement rigoureuse, parce que la dissipation de la pression interstitielle est supposée bi-ou tridimensionnelle tandis que les déformations restent unidimensionnelles. Ces méthodes sont développées en raison de leur avantage de fournir des solutions analytiques simple ;

- les méthodes basées sur la théorie générale de la consolidation de *BIOT [1941]*, développée dans le chapitre précédent. Comme l'on a constaté, la combinaison des différentes équations de la mécanique des milieux continus y est tout-à-fait rigoureuse.

La modélisation numérique des phénomènes de consolidation des milieux poreux saturés a été traitée par divers auteurs ; deux catégories générales de traitement des équations de consolidation par élément finis existent dans la littérature. La première est due à *SANDHU et WILSON [1969]*, qui utilisent le principe variationnel en fonction des déplacements et de la pression interstitielle ; ils proposent un modèle par élément finis dans l'espace et dans le temps qui a été repris et développé par d'autres auteurs comme *HWANG et al.[1971, 1972]* et *YOKOO et al.[1971]*. *HWANG et al.[1971, 1972]* se basent sur le même principe variationnel, en considérant les mêmes

interpolations pour l'espace ; ils utilisent, au lieu de l'interpolation linéaire dans le temps, une interpolation logarithmique. Le modèle de *HWANG et al.*[1972] a montré de très bons accords avec les résultats de *SCHIFFMAN, CHEN et JORDAN* [1969]; *YOKOO et al.*[1971] ont présenté la fonctionnelle associée aux équations de consolidation en la généralisant au cas de conditions aux limites discontinues. La seconde catégorie, proposée par *CHRISTIAN et BOEHMER* [1970], est une modélisation par éléments finis non basée sur le principe variationnel. On ne rentrera pas dans les travaux de *CHRISTIAN et al* [1970]. On remarquera seulement que le procédé utilisé par *CHRISTIAN et al.*[1970] ne traite pas simultanément les équations finales de la consolidation ; pourtant, leurs résultats montrent de très bons accords avec ceux de *SCHIFFMAN et al.* [1969]. Les deux modèles cités ont été traités avec les hypothèses supplémentaires.

Depuis 1975, sous la direction de *J.P. MAGNAN*, un certain nombre de chercheurs ont participé à l'élargissement des méthodes de calcul de consolidation (*BELKEZIZ et MAGNAN* [1982], *MOURATIDIS et MAGNAN* [1983], *BABCHIA et MAGNAN* [1986], et *MAGNAN* [1986]).

Dans ce chapitre, nous présenterons un modèle numérique adapté aux équations de *BIOT* simplifiées, pour les phénomènes lents bidimensionnels, sans hypothèse restrictive à propos de l'incompressibilité du fluide interstitiel, ou des grains du solide.



## II - MODÈLE NUMÉRIQUE DE BIOT SIMPLIFIÉ BIDIMENSIONNEL

Suivant la conclusion du chapitre précédent, en se limitant aux phénomènes lents (consolidation), on obtient le système (IV-48) du chapitre 4, qui s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad \mathcal{D} \times [0, \infty) \quad V-1$$

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \delta_{ij} p \quad \mathcal{D} \times [0, \infty) \quad V-2$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon'_{kl} - \delta_{ij} p \quad \mathcal{D} \times [0, \infty) \quad V-3$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \beta_{ij} p \quad \mathcal{D} \times [0, \infty) \quad V-4$$

$$\sigma_{ij,j} + \rho g_i = 0 \quad \mathcal{D} \times [0, \infty) \quad V-5$$

$$-p_{,i} + \rho_1 g_i = \Lambda_{ij} \dot{w}_i \quad \mathcal{D} \times (0, \infty) \quad V-6$$

$$-\dot{w}_{i,i} = \delta_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \beta_{ij} \dot{\sigma}_{ij} + C_a \dot{p} \quad \mathcal{D} \times (0, \infty) \quad V-7$$

Les notations sont les mêmes que celles du chapitre précédent. On reste toujours dans le cadre de l'élasticité linéaire en petites déformations. La notion courante de contrainte effective a été utilisée. Dans l'équation V-4 de ce système, on constate qu'une partie de la déformation est la déformation due au changement de pression interstitielle ( $\beta_{ij} p$ ) ; on peut réécrire l'équation V-3 en utilisant l'équation V-4 du système :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \delta_{ij} p = D_{ijkl} (\varepsilon_{kl} + \beta_{ij} p) - \delta_{ij} p \quad V-8$$

En écrivant

$$D_{ijkl} \beta_{ij} p - \delta_{ij} p = -\alpha \delta_{ij} p \quad V-9$$

on définit des coefficients  $\alpha$  égal à :

$$\alpha = 1 - \beta_{ij} D_{ijkl} \delta_{kl} \quad V-10$$

Ces coefficients sont identiques aux composantes du tenseur  $\underline{\underline{B}}$  donné par l'identification (IV-27) du chapitre précédent, pour le cas isotrope  $\alpha=b$  où  $b$  est le coefficient de BIOT.

L'équation V-8 peut être écrite sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \sigma''_{ij} - \alpha \delta_{ij} p \quad V-11$$

$\sigma''_{ij}$  est la contrainte effective, qui devient identique à la notion de contrainte effective de Terzaghi lorsque  $\alpha = 1$ . Des équations V-6 et V-7 du système, en utilisant le coefficient  $\alpha$ , on déduit :

$$-\dot{w}_{1,1} = (1 - \beta_{ij} D_{ijkl} \delta_{kl}) \dot{\epsilon}_{11} + [nC_1 + (1-n)C_s - \beta_{ij}^2 D_{ijkl} \delta_{kl}] \dot{p} \quad V-12$$

$$\text{en posant } C_{aa} = (nC_1 + (1-n)C_s - \beta_{ij}^2 D_{ijkl} \delta_{kl}) \quad V-13$$

$$\text{on aura pour un cas isotrope : } C_{aa} = nC_1 + (1-n)C_s - C_s^2 K_0 \quad V-14$$

avec  $K_0$  module hydrostatique de la loi en contrainte effective (système ouvert). On constate que  $C_{aa} = 1/M$  où  $M$  est le module de BIOT.

L'équation V-12 devient

$$-\dot{w}_{1,1} = \alpha \dot{\epsilon}_{11} + C_{aa} \dot{p} \quad V-15$$

Comme interprétation physique des équations V-12 à V-15, on peut dire que le changement de volume du fluide interstitiel dans une unité de volume total est la somme de la déformation volumique du squelette  $\epsilon_{11}$  (les grains sont considérés comme incompressibles), de la déformation de compression du fluide interstitiel ( $nC_1 \dot{p}$ ), de la déformation de compression des grains du solide du fait du changement de la pression interstitielle ( $(1-n)C_s \dot{p}$ ) et troisièmement le changement de la compression du solide due à la contrainte effective qu' a été présenté dans l'équation 12 par deux termes avec le coefficient  $\beta_{ij} D_{ijkl} \delta_{kl}$ . Finalement, pour l'écoulement du fluide interstitiel, en admettant la loi de DARCY sur le domaine  $\mathcal{D}$ , on aura l'équation :

$$K_{ij} (-p_{,i} + \rho_1 g_{1,i})_{,i} + \alpha \dot{\epsilon}_{11} + C_{aa} \dot{p} = 0 \quad V-16$$

Le système final des équations du modèle de BIOT pour les phénomènes lents devient :

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad \mathcal{D} \times [0, \infty) \quad \text{V-17}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma''_{ij} - \alpha \delta_{ij} p \quad \mathcal{D} \times [0, \infty) \quad \text{V-18}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \beta_{ij} p \quad \mathcal{D} \times [0, \infty) \quad \text{V-19}$$

$$\sigma_{ij,j} + \rho g_i = 0 \quad \mathcal{D} \times [0, \infty) \quad \text{V-20}$$

$$K_{ij}(-p_{,i} + \rho_1 g_{i,j}) + \alpha \dot{\varepsilon}_{ij} + C_{aa} \dot{p} = 0 \quad \mathcal{D} \times (0, \infty) \quad \text{V-21}$$

$$C_{aa} = nC_1 + (\alpha - n)C_s \quad \text{V-22}$$

$$\alpha = 1 - \beta_{ij} D_{ijkl} \delta_{kl} \quad \text{V-23}$$

On sait que le tenseur d'élasticité du solide  $D_{ijkl}$  et le tenseur de perméabilité sont symétriques :

$$D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{klij} \quad K_{ij} = K_{ji} \quad \text{V-24}$$

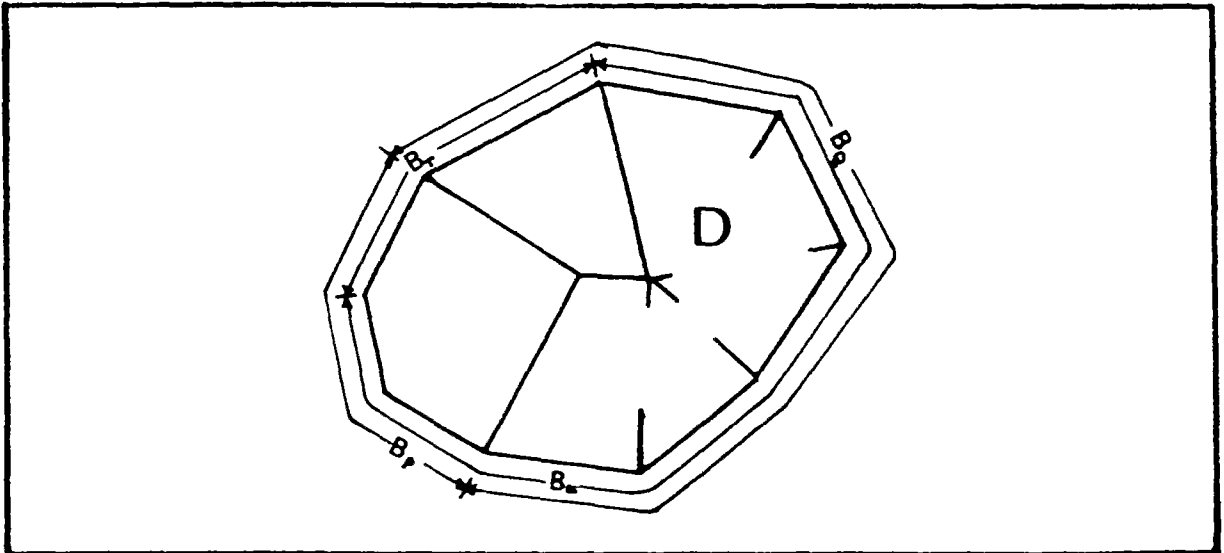


Figure V-1 : Domaine considéré avec les différentes conditions aux limites.

## I-1 CALCUL VARIATIONNEL

On considère le domaine  $\mathcal{D}$  défini sur la figure V-1, dont les limites sont les surfaces  $\mathcal{B}_T$  et  $\mathcal{B}_u$  sur lesquelles respectivement, des contraintes et des déplacements sont imposées au squelette solide, et les surfaces  $\mathcal{B}_p$  et  $\mathcal{B}_Q$  correspondant respectivement aux conditions de *Dirichlet* et de *Neumann* relatives à l'écoulement du fluide. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\bar{T}_i = n_j (\sigma''_{ij} - \alpha p \delta_{ij}) \quad \text{sur } \mathcal{B}_T \times [0, \infty) \quad \text{V-25}$$

$$\bar{u}_i = u_i \quad \text{sur } \mathcal{B}_u \times [0, \infty) \quad \text{V-26}$$

$$\bar{p} = p \quad \text{sur } \mathcal{B}_p \times (0, \infty) \quad \text{V-27}$$

$$\bar{Q} = n_i \bar{V}_i = - n_i K_{ij} (p_{,j} - \rho_1 g_j) \quad \text{sur } \mathcal{B}_Q \times (0, \infty) \quad \text{V-28}$$

Si l'on considère que le domaine  $\mathcal{D}$  est constitué de nombreux éléments, des conditions interélémentaires c'est-à-dire sur la surface commune entre deux éléments adjacents ( $\mathcal{B}_I$ ) doivent être vérifiées. Autrement dit, premièrement, la continuité des composantes normales des vitesses relatives de l'écoulement de l'eau par rapport au squelette du sol nécessite :

$$(n_i V_i)_n + (n_i V_i)_{n+1} = 0 \quad \mathcal{B}_I \times [0, \infty) \quad \text{V-29}$$

$$[n_i K_{ij} (p_{,j} - \rho_1 g_j)]_n + [n_i K_{ij} (p_{,j} - \rho_1 g_j)]_{n+1} = 0 \quad \mathcal{B}_I \times [0, \infty) \quad \text{V-30}$$

Deuxièmement, l'équilibre des contraintes sur les surfaces interélémentaires nécessite :

$$[n_i (\sigma''_{ij} - \alpha p \delta_{ij})]_n + [n_i (\sigma''_{ij} - \alpha p \delta_{ij})]_{n+1} = 0 \quad \mathcal{B}_I \times [0, \infty) \quad \text{V-31}$$

En reportant l'égalité (V-18) dans l'équation d'équilibre (V-20) et en multipliant celle-ci et la première condition aux limites (V-25) par  $\delta u_i$  (déplacement virtuel admissible vérifiant  $\delta u_i = 0$  sur  $\mathcal{B}_u$ ), et en intégrant sur le domaine  $\mathcal{D}$  et sur la frontière  $\mathcal{B}$ , on aura la première variation de la fonctionnelle associée aux

équations d'élasticité . En suivant la même démarche pour les équations hydrauliques, c'est-à-dire en multipliant l'équation ( V-21) et la dernière condition aux limites (V-28) par  $\delta p$  (pression admissible vérifiant  $\delta p = 0$  ), sur  $\mathfrak{B}_p$  et en intégrant sur  $\mathcal{D}$  et sur la frontière  $\mathfrak{B}$  , on obtient la première variation de la fonctionnelle associée aux équations relatives à l'écoulement du liquide. La somme de ces deux termes est la première variation de la fonctionnelle associée aux équations du système ci-dessus :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}} [(\sigma''_{1j,j} - \alpha \delta_{1j} p_{,j} + \rho g_1) \delta u_1] d\mathcal{D} - \int_{\mathfrak{B}_T} [\bar{T}_1 - n_j (\sigma''_{1j} - \alpha \delta_{1j} p) \delta u_1] d\mathfrak{B} \\ & + \int_{\mathcal{D}} [K_{1j} (-p_{,1} + \rho_1 g_1)_{,1} - \alpha \dot{\epsilon}_{11} - C_{aa} \dot{p}] \delta p d\mathcal{D} - \int_{\mathfrak{B}_Q} [\bar{Q} - n_j K_{1j} (p_{,j} - \rho_1 g_1)] \delta p = 0 \end{aligned} \quad \text{V-32}$$

En tenant compte des formules d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \sigma''_{1j,j} \delta u_1 &= \int_{\mathcal{D}} \sigma''_{1j} \delta u_{1,j} - \int_{\mathfrak{B}_T} \sigma''_{1j} n_j \delta u_1 \\ \int_{\mathcal{D}} \alpha \delta_{1j} p_{,j} \delta u_1 &= \int_{\mathcal{D}} \alpha \delta_{1j} p \delta u_{1,j} - \int_{\mathfrak{B}_T} \alpha \delta_{1j} p n_j \delta u_1 \\ \int_{\mathcal{D}} [K_{1j} (-p_{,1} + \rho_1 g_1)_{,1}] \delta p &= \int_{\mathcal{D}} K_{1j} (-p_{,1} + \rho_1 g_1) \delta p_{,1} - \int_{\mathfrak{B}_Q} K_{1j} (-p_{,1} + \rho_1 g_1) n_j \delta p , \end{aligned} \quad \text{V-33}$$

la première variation de la fonctionnelle associée aux équations du modèle de BIOT sera :

$$\begin{aligned} \delta \pi &= \int_{\mathcal{D}} [(\sigma''_{1j} - \alpha p \delta_{1j}) \delta u_{1,j} + \rho g_1 \delta u_1] d\mathcal{D} - \int_{\mathfrak{B}_T} \bar{T}_1 \delta u_1 d\mathfrak{B} \\ &+ \int_{\mathcal{D}} [K_{1j} (-p_{,1} + \rho_1 g_1) \delta p_{,1} - \alpha \delta_{1j} \dot{\epsilon}_{11} \delta p - C_{aa} \dot{p} \delta p] d\mathcal{D} + \int_{\mathfrak{B}_Q} \bar{Q} \delta p d\mathfrak{B} = 0 . \end{aligned} \quad \text{V-34}$$

Réciproquement, on peut montrer que, quels que soient  $\delta u_1$  et  $\delta p$  admissibles, si la fonctionnelle associée est vérifiée, et compte tenu des mêmes hypothèses de départ, on aura :

$$\sigma''_{1j,j} - \alpha \delta_{1j} p_{,j} + \rho g_1 = 0 \quad \text{sur } \mathcal{D} \times [0, \infty)$$

$$\bar{T}_1 = n_j (\sigma''_{1j} - \alpha p_{,j} \delta_{1j}) \quad \text{sur } \mathcal{B}_T \times [0, \infty)$$

$$-K_{1j} (-p_{,1} + \rho_1 g_1)_{,1} = \alpha \dot{\epsilon}_{11} + C_{aa} \dot{p} \quad \text{sur } \mathcal{D} \times (0, \infty)$$

$$\bar{Q} = -n_1 K_{1j} (p_{,j} - \rho_1 g_j) \quad \text{sur } \mathcal{B}_Q \times (0, \infty)$$

V-35

Or, la résolution des problèmes bidimensionnels du modèle de BIOT consiste à chercher les inconnues  $(u, v, h)$  à tout instant, telles que  $\delta\pi$  soit nulle pour  $\delta p$  et  $\delta u_1$  admissibles.

## II-2-DISCRETISATION DU PROBLEME

### II-2-1 Semi-discrétisation en espace

Le principe de la méthode des éléments finis consiste à considérer le domaine étudié comme un ensemble d'éléments disjoints de forme géométrique simple. On écrit les équations du problème pour chaque élément en faisant des hypothèses sur la variation des inconnues dans chaque élément. On considère ensuite les conditions de continuité interélémentaire et on assemble tous les éléments, et pour obtenir finalement les équations du problème posé sur tout le domaine idéalisé. Dans le cas présent, en déformation plane, on a choisi les éléments triangulaires à 3 noeuds avec une fonction d'interpolation linéaire identique pour les trois variables  $(u, v, h)$  dans un élément défini par les matrices  $[N], [N]$ . On peut donc écrire:

$$\begin{cases} \{U(x,t)\} = [N]\{U_{\circ}(t)\} \\ \{p(x,t)\} = [N]\{p_{\circ}(t)\} \end{cases} \quad \text{V-36}$$

$$\text{où } \{U(x,t)\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \{U_{\circ}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}, \quad \{p_{\circ}\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$

La géométrie de l'élément est définie par les coordonnées de ses noeuds, correspondant à un vecteur  $X_{\circ}$ , et par les fonctions de forme  $[F]$ , qui sont les fonctions d'interpolation des coordonnées. Si  $\xi, \zeta, \eta$  sont des coordonnées locales (ici barycentriques), qui sont reliées par la relation  $\xi + \zeta + \eta = 1$ , dans le cas plan on a :

$$(X) = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [F(\xi, \zeta, \eta)] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad \text{V-37}$$

Pour les éléments isoparamétriques,  $F$ ,  $N$ , et  $N$  sont de même nature, donc :

$$[N] = [\xi, \eta, \zeta], \quad [N] = [F] = \begin{bmatrix} [N] & [0] \\ [0] & [N] \end{bmatrix} \quad \text{V-38}$$

Si  $[\bar{N}_L]$  et  $[\bar{N}_G]$  sont les dérivées des fonctions d'interpolation  $[N]$  par rapport aux coordonnées locales et globales, on a :

$$[\bar{N}_L] = [J][\bar{N}_G] \quad \text{V-39}$$

$$[\bar{N}_L] = \begin{bmatrix} N, \xi \\ N, \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot$$

La matrice jacobienne  $[J]$  est définie par :

$$[J] = \begin{bmatrix} F, \xi \\ F, \eta \\ F, \zeta \end{bmatrix} \quad X_e = \begin{bmatrix} X_{IK} & Y_{IK} \\ X_{JK} & Y_{JK} \end{bmatrix} \quad \text{V-40}$$

avec  $X_{IK} = X_I - X_K$  .

L'élément de volume  $d\mathcal{D}$  s'écrit alors :

$$d\mathcal{D} = \det (J) d\xi d\eta$$



### II-2-1-1 Calcul des intégrales de la fonctionnelle

On adopte les notations suivantes pour les déformations et les contraintes :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad \sigma'' = \begin{Bmatrix} \sigma''_{xx} \\ \sigma''_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{V-41}$$

Pour le tenseur de déformation, on a :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u, x \\ v, y \\ u, y + v, x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u, x \\ u, y \\ v, x \\ v, y \end{Bmatrix} \quad \text{V-42}$$

En posant

$$[j] = [J]^{-1}, \quad [D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

et en écrivant la matrice  $\begin{Bmatrix} u, x \\ u, y \\ v, x \\ v, y \end{Bmatrix}$  sur l'élément de référence on a :

$$\begin{Bmatrix} u, x \\ u, y \\ v, x \\ v, y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [j] & [0] \\ [0] & [j] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{N}_L] & [0] \\ [0] & [\bar{N}_L] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [J][\bar{N}]\{U_e\} \quad \text{V-43}$$

$$\int_{\mathcal{D}} \varepsilon^t D d\varepsilon d\mathcal{D} = \{U_e\}^t \int_{\mathcal{D}_e} [\bar{N}]^t [J]^t [D]^t [C] [D] [J] [\bar{N}] \det(J) d\xi d\eta \delta\{U_e\} \quad \text{V-44}$$

En posant  $[R_e] = \int_{\mathcal{D}_e} [\bar{N}]^t [J]^t [D]^t [D] [D] [J] [\bar{N}] \det(J) d\xi d\eta$ ,

on a :

$$\int_{\mathcal{D}_e} \{\varepsilon\}^t [C] \delta\{\varepsilon\} d\mathcal{D} = \{U_e\} [R_e] \delta\{U_e\} . \quad \text{V-45}$$

On calcule de la même façon les autres termes de la fonctionnelle  $\delta\pi$  en fonction des matrices élémentaire. On obtient :

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \{U_e\}^t [R_e] \delta\{U_e\} + \{p_e\}^t [C_e] \delta\{U_e\} - \{F_e\}^t \delta\{U_e\} - \{T_e\}^t \delta\{U_e\} \quad \text{V-46} \\ & + \{\dot{U}_e\}^t [C_e] \delta\{p_e\} - \{\dot{p}_e\}^t [S_e] \delta\{p_e\} - \{p_e\}^t [K_e] \delta\{p_e\} + \{M_e\}^t \delta\{p_e\} , \end{aligned}$$

avec les notations suivantes :

$$[C_e]^t = - \int_{\mathcal{D}_e} \alpha [\bar{N}_L]^t [m] [D] [J] [\bar{N}_L] \det(J) d\xi d\eta$$

$$\text{avec } \delta_{ij} = [m] = [1 \ 1 \ 0]$$

$$\{F_e\}^t = - \int_{\mathcal{D}_e} \{F_e\}^t [\bar{N}_L] \det(J) d\xi d\eta$$

$$\text{avec } \{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}$$

$$\{T_e\} = \int_{L_T} \{T_e\} [\bar{N}_L] dl$$

$$\text{avec } \{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix}$$

$l_T$  est l'un des côtés de l'élément par exemple pour le triangle :

$$\zeta=0 \quad \text{et} \quad \xi+\eta=1$$

$$dl = [\det(J1)^2 + \det(J2)^2 + \det(J3)^2]$$

$$[K_e] = \int_{\mathcal{D}_e} [\bar{N}_L]^t [j]^t [K_e] [j] [\bar{N}_L] \det(J) d\xi d\eta$$

$$\{M_e\}^t = \int_{\mathcal{B}_0} -\{\bar{Q}_e\} [\bar{N}_L] dl + \int_{\mathcal{D}_e} \{F_e\}^t [\bar{N}_L] \det(J) d\xi d\eta$$

$$[S_e] = \int_{\mathcal{D}_e} C_{aa} [\bar{N}_L]^t [\bar{N}_L] \det(J) d\xi d\eta .$$

#### II-2-1-2 Formulation matricielle globale

L'assemblage des éléments se fait suivant trois conditions : les déplacements, leurs dérivées par rapport au temps et la pression interstitielle doivent être continus sur tout le solide. Si l'on définit les déplacements nodaux et la charge hydraulique nodale  $\{U_e^i\}$  et  $\{p_e^i\}$  de l'élément numéro  $i$  à partir des vecteurs  $U_G$  et  $p_G$  des déplacements et charge hydraulique relatives à l'ensemble des éléments par des relations de la forme :

$$\{U_e^i\} = [A^i] \{U_G\} \quad \{p_e^i\} = [A^i] \{p_G\} \quad \text{V-47}$$

où  $A^i$  représente une matrice "d'extraction" formée de 0 et de 1, de la même manière on peut écrire:

$$\{\dot{U}_e^i\} = [A^i] \{\dot{U}_G\} . \quad \text{V-48}$$

D'après l'expression de la première variation de la fonctionnelle associée :

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \sum_1 \{U_e^1\}^t [R_e^1] \delta(U_e^1) + \sum_1 \{p_e^1\}^t [C_e^1] \delta(U_e^1) - \sum_1 \{F_e^1\}^t \delta(U_e^1) - \sum_1 \{T_e^1\}^t \delta(U_e^1) \\ & + \sum_1 \{\dot{U}_e^1\}^t [C_e^1] \delta(p_e^1) - \sum_1 \{\dot{p}_e^1\}^t [S_e^1] \delta(p_e^1) - \sum_1 \{p_e^1\}^t [K_e^1] \delta(p_e^1) + \sum_1 \{M_e^1\}^t \delta(p_e^1) \end{aligned}$$

on a donc :

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \left[ \{U_G\}^t [R_G] + \{p_G\}^t [C_G]^t - \{T\}^t - \{F_G\}^t \right] \delta(U_G) \\ & + \left[ \{\dot{U}_G\}^t [C_G] + \{\dot{p}_G\}^t [S_G]^t - \{p_G\}^t [K_G]^t + \{M_G\}^t \right] \delta(p_G) \end{aligned}$$

En écrivant que  $\delta\pi$  est nulle pour tous  $\delta U_G$  et  $\delta p_G$  admissibles, on peut écrire le système suivant :

$$\begin{cases} [R_G] \{U_G\} + [C_G] \{p_G\} = \{T\} - \{F_G\} \\ [C_G]^t \{\dot{U}_G\} + [S_G] \{\dot{p}_G\} - [K_G] \{p_G\} = -\{M_G\} \end{cases}$$

avec pour notations :

$$[R_G] = \sum_1 [A^1]^t [R_e^1] [A^1]$$

$$[C_G] = \sum_1 [A^1]^t [C_e^1] [A^1]$$

$$[K_G] = \sum_1 [A^1]^t [K_e^1] [A^1]$$

$$[S_G] = \sum_1 [A^1]^t [S_e^1] [A^1]$$

Dans le système (V-50) et l'équation (V-51) :

$[R_G]$  : matrice de rigidité .

$[C_G]$  : matrice de couplage.

$[K_G]$  : matrice de perméabilité.

$[S_G]$  : matrice de compressibilité

$\{F_G\}, \{T_G\}$  : vecteurs "forces de volume" et "forces de surface" relatifs à la déformation du squelette respectivement.

$\{M_G\}$  : somme des vecteurs des "forces surfaciques" et des "forces volumiques" relatives à l'écoulement du liquide.

## II-2-2 Discrétisation du temps par la méthode $\theta$

La semi-discrétisation en espace de notre problème nous a conduit au système des équations V-51. Pour l'intégration dans le temps, il existe de nombreuses méthodes, tant explicites qu'implicites, qui supposent une variation linéaire de  $\{U\}$  et  $\{p\}$  dans l'intervalle du temps  $(t_{i+1} - t_i)$ . Les valeurs des vecteurs  $\{U\}$  et  $\{p\}$ , à un instant donné  $t$  dans cette intervalle, peuvent être exprimées, de façon implicite, par :

$$\begin{cases} \{U(t)\} = \{U(t_i)\} + \frac{t - t_i}{t_{i+1} + t_i} \left[ \{U(t_{i+1})\} - \{U(t_i)\} \right] \\ \{p(t)\} = \{p(t_i)\} + \frac{t - t_i}{t_{i+1} + t_i} \left[ \{p(t_{i+1})\} - \{p(t_i)\} \right] \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{V-52} \\ t_i \leq t \leq t_{i+1} \end{array}$$

et l'on peut poser  $\theta = \frac{t - t_i}{t_{i+1} + t_i} \in [0, 1]$  .

Pour les valeurs interpolées des vecteurs  $U(t)$  et  $p(t)$ , on peut écrire :

$$\begin{cases} \{U(t)\} = (1-\theta)\{U(t_i)\} + \theta\{U(t_{i+1})\} \\ \{p(t)\} = (1-\theta)\{p(t_i)\} + \theta\{p(t_{i+1})\} \end{cases} \quad \text{V-53}$$

Posons :

$$\{U(t_{i+1})\} = \{U_{i+1}\} \quad \{U(t_i)\} = \{U_i\} \quad \text{V-54}$$

$\dot{U}(t)$  étant calculé à partir de (V-52), soit

$$\dot{U}_e = (\{U_{i+1}\} - \{U_i\}) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\{U_{i+1}\} - \{U_i\}}{\Delta t}$$

De la même manière, si l'on suppose que  $\{T\}, \{F\}, \{M\}$  varient de la même façon dans l'intervalle  $(t_i, t_{i+1})$ , en appliquant l'intégration définie par :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} U(t) dt = [(1-\theta)U_i + \theta U_{i+1}] \Delta t_i \quad \text{V-55}$$

aux équations du système (V-51) sur l'intervalle déjà cité, on aura:

$$\begin{aligned} [R_G](\theta\{U_{i+1}\} + (1-\theta)\{U_i\}) + [C_G](\theta\{p_{i+1}\} + (1-\theta)\{p_i\}) = & \quad \text{V-56} \\ & \theta(\{F_{i+1}\} + \{T_{i+1}\}) + (1-\theta)(\{F_i\} + \{T_i\}) \\ [C_G]^t(\{U_{i+1}\} - \{U_i\}) - [S_G]^t(\{p_{i+1}\} - \{p_i\}) - \Delta t_i [K_G](\theta\{p_{i+1}\} + (1-\theta)\{p_i\}) = & \\ & -(1-\theta)\{M_i\} - \theta\{M_{i+1}\} \end{aligned}$$

qui donne :

$$[R_G]\{U_{i+1}\} + [C_G]\{p_{i+1}\} = \quad \text{V-57}$$

$$\frac{1-\theta}{\theta} \left[ \{F_{i+1}\} + \{T_{i+1}\} - [R_G]\{U_i\} - [C_G]\{p_i\} + \frac{\theta}{1-\theta} (\{T_i\} + \{F_i\}) \right]$$

$$[C_G]^t\{U_{i+1}\} - [S_G]^t\{p_{i+1}\} - \Delta t_i \theta [K_G]\{p_{i+1}\} =$$

$$[C_G]^t\{U_i\} - [S_G]^t\{p_i\} + \Delta t_i (1-\theta) [K_G]\{p_i\} - \theta\{M_{i+1}\} - (1-\theta)\{M_i\}$$

La première relation nous donne :

$$\theta \left[ [R_G]\{U_{i+1}\} + [C_G]\{p_{i+1}\} - \{T_{i+1}\} - \{F_{i+1}\} \right] \\ + (1-\theta) \left[ [R_G]\{U_i\} + [C_G]\{p_i\} - \{T_i\} - \{F_i\} \right] = 0 . \quad \text{V-58}$$

En raison de l'équilibre initial, on suppose :

$$[R_G]\{U_0\} + [C_G]\{p_0\} - \{T_0\} = 0 , \quad \text{V-59}$$

en sachant que les dérivées par rapport au temps n'interviennent pas dans la relation, qui se ramène à l'équilibre au pas  $i+1$  ; la solution finale du problème discrétisé, à chaque pas de temps, se ramène à la résolution du système linéaire :

$$\begin{bmatrix} [R_G] & [C_G] \\ [C_G]^t & -[S_G] - \theta \Delta t [K_G] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_{i+1}\} \\ \{p_{i+1}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{T_{i+1}\} + \{F_{i+1}\} \\ \Delta t \left[ (1-\theta)\{M_i\} + \theta\{M_{i+1}\} \right] + \Delta t (1-\theta) [K_G]\{p_i\} - [S_G]\{p_i\} + [C_G]^t\{U_i\} \end{Bmatrix} \quad \text{V-60}$$

Donc, si l'on connaît les déplacements et la charge hydraulique à l'instant  $t_i$ , on peut facilement calculer les déplacements et la charge hydraulique à l'instant  $t_{i+1}$  par un processus pas à pas.

Dans les cas où  $\Delta t = 0$ , qui donne la solution initiale, et où  $K$  très faible, qui correspond à un milieu très peu perméable et à la solution du problème non drainé, la matrice globale devient singulière, quand on utilise les éléments isoparamétriques. On peut résoudre cette difficulté par différentes manières comme, par exemple, la recherche de pivot, mais cette méthode est très onéreuse, vu la dimension importante de la matrice. Par contre, en choisissant  $\Delta t$  très petit (non nul) on n'aura pas de matrice singulière, mais des difficultés numériques à cause de la grande différence entre les ordres de grandeur des différentes matrices

composant la matrice globale. Il est évident qu'en général les éléments de la matrice  $[R_G]$  sont beaucoup plus grands que les éléments de la matrice  $[K_G]$ ; pour mieux arranger cette matrice mal conditionnée, on introduit (REED [1984]) un coefficient  $s$  dans les sous-matrices multipliant la pression interstitielle  $p$  et on remplace la pression interstitielle par  $(p/s)$ ; la valeur de ce coefficient sera telle que  $s^2([S_G] + \theta \Delta t [K_G])$  soit du même ordre de grandeur que la matrice  $[R_G]$ .

L'équation devient :

$$\begin{bmatrix} [R_G] & s [C_G] \\ s [C_G]^t & -s^2([S_G] + \theta \Delta t [K_G]) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_{1+1}\} \\ \frac{1}{s} \{p_{1+1}\} \end{Bmatrix} = \quad \text{V-61}$$

$$\begin{Bmatrix} \{T_{1+1}\} + \{F_{1+1}\} \\ s \Delta t [(1-\theta)\{M_1\} + \theta\{M_{1+1}\}] + s \Delta t (1-\theta)[K_G]\{p_1\} - s [S_G]\{p_1\} + s [C_G]^t \{U_1\} \end{Bmatrix}$$

Il est possible de résoudre directement ce système linéaire, mais il est préférable, du point de vue des calculs, de regrouper les déplacements et la pression interstitielle d'un même noeud dans la matrice globale, ce qui réduit considérablement sa taille.

### III- STABILITÉ ET PRÉCISION

Dans le système linéaire final, le paramètre  $\theta$  peut être considéré comme le "degré d'implicité" qui correspond au type d'approximation choisie pour l'intégration dans le temps. En prenant  $\theta = 0$ , on adopte la présentation explicite (méthode d'EULER progressive), qui n'est pas satisfaisante pour les équations différentielles mal conditionnées. En choisissant  $\theta = 1$ , la résolution sera implicite (méthode d'EULER rétrograde) et avec  $\theta = 1/2$ , on obtient l'algorithme très utilisé de CRANK-NICHOLSON. Ainsi, le choix de  $\theta$  influence la stabilité et la précision de



l'algorithme numérique ; en choisissant  $\theta \geq 1/2$ , le processus est universellement stable et, pour  $\theta < 1/2$ , il est conditionnellement stable (BOOKER and SMALL [1975]).

En général, les erreurs rencontrées dans la résolution de notre problème sont de deux catégories :

-les erreurs de discrétisation, soit spatiales, soit temporelles. Afin de réduire ce genre d'erreurs, pour un cas unidimensionnel traité par la méthode des éléments finis avec un maillage uniforme avec une maille de longueur ( $\Delta l$ ), VERMEER et VERRUIJT [1981] ont montré que la condition suivante est nécessaire:

$$\Delta t \geq \frac{\Delta l^2}{60C_v} \quad \text{V-62}$$

$C_v$  étant le coefficient de consolidation.

Pour le cas bidimensionnel, ce critère n'est pas tout-à-fait adapté, mais il donne une approximation de la valeur minimale du pas du temps. En dessous de cette valeur, on trouve une oscillation assez violente dans la distribution de la pression interstitielle. D'autre part, pendant l'utilisation du programme, on a trouvé qu'il était nécessaire de choisir des valeurs croissantes des pas de temps pendant les itérations. En choisissant un maillage plus raffiné près des limites perméables, on peut réduire les erreurs dues à la discrétisation.

Une investigation sur les erreurs dues à la discrétisation dans l'espace et dans le temps a été faite par SANDHU et al. [1977], qui ont mis en évidence l'effet de différents éléments et de différents maillages du temps sur la distribution des erreurs en pression interstitielle a été mis en évidence.

Une autre catégorie d'erreurs est celle des erreurs d'oscillation associées avec la variation parabolique de la pression interstitielle, qui ne disparaissent même pas en utilisant des intégration d'ordre plus élevées. Elles nécessitent un processus de raffinement des points de gauss (REED). Enfin, le choix de  $\theta = 2/3$

semble le meilleur choix, notamment quand il y a de grandes différences entre les tailles des éléments adjacents [REED, 1981], [SANDHU, 1977].

On a choisi dans ce travail une valeur  $\theta = 2/3$  pour garantir une stabilité inconditionnelle ; on a fixé d'autre part la valeur minimale du pas de temps conformément à l'expression V-62, ce qui a permis d'éviter l'oscillation dans les résultats obtenus dans la zone stable. Quant au maillage du temps, on a pris des valeurs de  $\Delta t$  toujours croissantes. Près des limites perméables, les éléments sont plus petits et, en général, le rapport entre la taille des éléments utilisés pour discrétiser un espace ne dépasse pas quatre, ainsi que le rapport entre la taille des différents côtés d'un élément triangulaire à trois noeuds.

#### IV- TECHNIQUE DE RÉOLUTION ET PROGRAMMATION

Si l'on représente l'expression [V-61] sous la forme :

$$[K] \{u_{i+1}\} = [K_1] \{u_i\} + \{F\} \quad , \quad \text{V-63}$$

on constate que la matrice globale  $[K]$ , ainsi que le second membre, dépendent de  $\Delta t$ . Pour chaque  $\Delta t$ , à chaque itération, il faut calculer ou au moins réassembler la matrice globale  $[K]$  et le second membre.

Les principes et l'algorithme général du programme conçu pour un modèle linéaire sont décrits sur la figure (V-2).

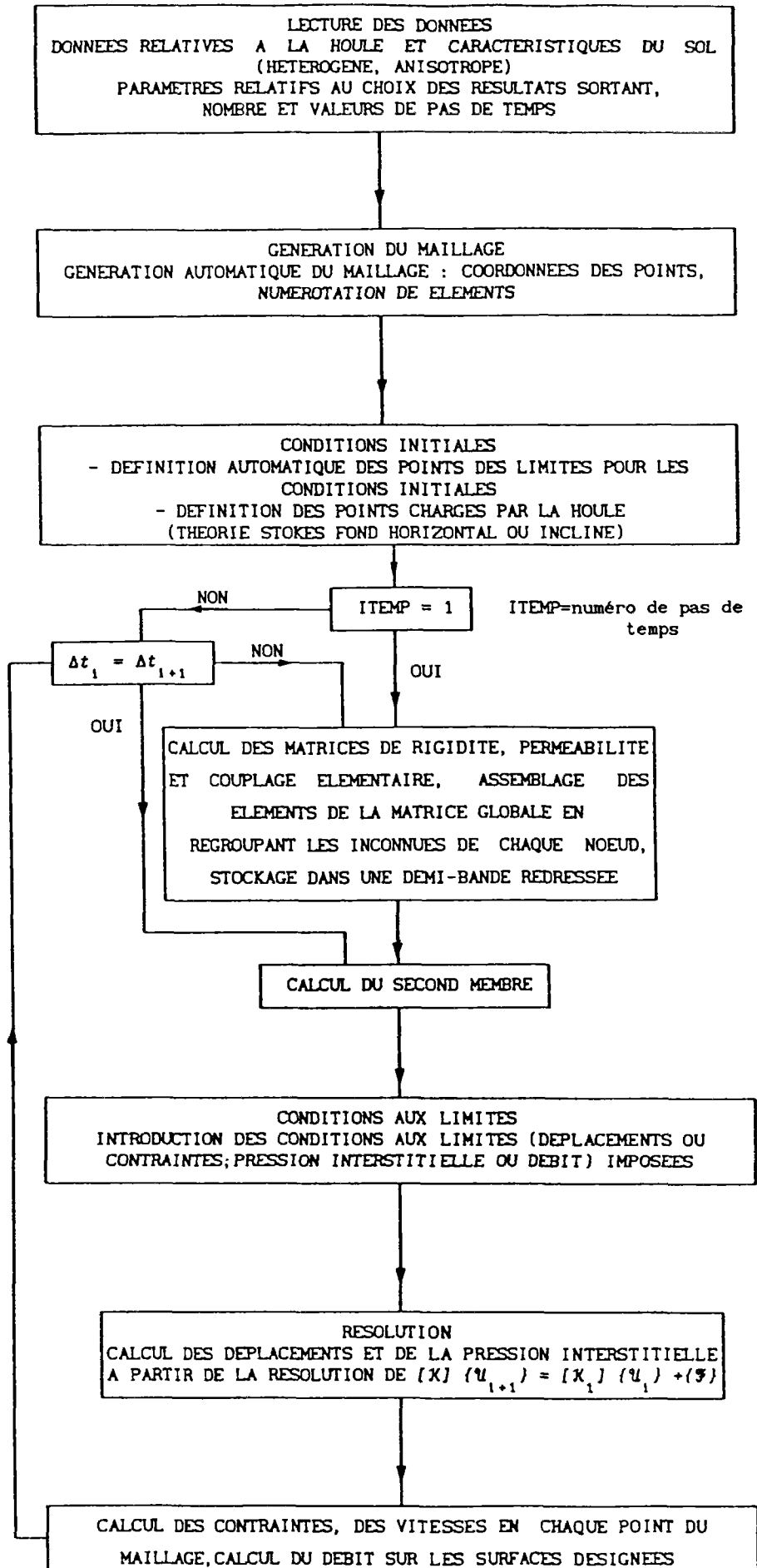


Figure V-2

THESE DE DOCTORAT

*présentée à*

*l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*

PAR BEHROUZ GATMIRI

REPONSE D'UN MASSIF SOUS-MARIN A L'ACTION DE LA HOULE

*Date de soutenance : 17 octobre 1989*

Centre d'Enseignement et de Recherche en Mécanique des Sols  
(CERMES)

**Jury :**

M. SCHLOSSER *Président*

M. BOULON  
M. MAGNAN } *Rapporteurs*

M. BIAREZ  
M. DELAGE  
M. PANET } *Examineurs*



*Les meilleurs lois naissent des usages.*

*J. JOUBERT*

## CHAPITRE 6

### ANISOTROPIE DANS LE SOL

## I - GENERALITES

La loi de comportement la plus simple pour un matériau est l'élasticité, qui est caractérisée par une relation bijective entre déformations et contraintes. Cette relation est une loi ponctuelle, qui ne dépend pas du chemin parcouru ; les déformations dues à un chargement sont parfaitement récupérables au déchargement.

La loi de comportement est la suivante :

$$\sigma'_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{VI-1}$$

$C_{ijkl}$  est un tenseur contenant 21 variables indépendantes, sachant que la loi est intrinsèquement symétrique, c'est-à-dire que si l'on fait subir une symétrie par rapport à un plan au tenseur de déformation, le tenseur de contrainte est transmué de la même symétrie. Dans le cas de la symétrie par rapport aux plans xy, yz, zx, la loi est dite orthotrope, et les variables indépendantes se réduisent à neuf. En émettant l'hypothèse de la symétrie par rapport à un axe appelé axe de révolution, les tenseurs des déformations et des contraintes sont transmises par la même rotation. L'anisotropie est dite orthotropie de révolution et le nombre des variables est réduit à cinq. Si, enfin la loi est orthotrope de révolution autour de trois axes, x, y, z, elle est isotrope et le tenseur  $C_{ijkl}$  contient deux paramètres indépendants. La relation déformation-contrainte est linéaire lorsque ces paramètres sont constants. Dans ce cas, la matrice d'élasticité, avec les notations courantes, a la forme suivante :

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{VI-2}$$

La loi d'élasticité linéaire-isotrope est largement utilisée en mécanique des sols, du fait de sa simplicité. Il est bien évident que les sols ne sont pas ce massif idéal isotrope, et l'hypothèse de l'élasticité linéaire isotrope n'est pas toujours acceptable. En considérant que les sols naturels se sont déposés et puis consolidés sous l'action de la pesanteur, il est logique de penser que les propriétés mécaniques et physiques soient différentes suivant les directions horizontales ou verticales .

L'anisotropie dans le sol se manifeste sous deux formes générales (*PIYAL et MAGNAN [1984]*).

- anisotropie de structure.
- anisotropie de contrainte.

Concernant l'anisotropie de structure, il est bien connu que les particules ou un groupement des particules sous l'action d'un déviateur, au niveau macroscopique prennent une orientation privilégiée. Pour l'anisotropie de contrainte, sans rentrer dans les détails, on peut dire qu'elle est une conséquence directe de la non-linéarité de la courbe contraintes-déformations. En effet, un matériau, bien qu'il soit de structure isotrope, son état de contrainte se trouvant à différents points de la courbe contrainte-déformation non linéaire, réagirait différemment suivant ces directions à un état de contrainte isotrope (*PIYAL et MAGNAN [1984]*).

L'aélotropie (l'orthotropie de révolution) est une loi assez satisfaisante pour prendre en compte la différence des propriétés mécaniques et physiques suivant les directions verticale et



horizontale. Beaucoup de chercheurs ont déjà travaillé sur cette anisotropie : WIENDIECK [1968], WOLF [1945], BARDEN [1963], PICKERING [1970], TAN JONG KIE [1961], LEKHNITSKI [1963], GARNIER [1973], BELKEZIZ et MAGNAN [1982].

## II - ETUDE DE L'ORTHOTROPIE DE REVOLUTION

Pour un sol orthotrope de révolution, les relations déformations-contraintes s'écrivent de la manière suivante :

$$\{\varepsilon\} = [C]^{-1}\{\sigma\} \quad \text{VI-3}$$

soit:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} \frac{1}{E_h} & -\frac{\nu_{hh}}{E_h} & -\frac{\nu_{vh}}{E_v} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{hh}}{E_h} & \frac{1}{E_h} & -\frac{\nu_{vh}}{E_v} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{hv}}{E_h} & -\frac{\nu_{hv}}{E_h} & \frac{1}{E_v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_h} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} \quad \text{VI-4}$$

Les variables de déformation sont :

$E_v$  : module d'Young dans la direction verticale.

$E_h$  : module d'Young dans la direction horizontale.

$G_v$  : module de cisaillement dans un plan vertical.

$G_h$  : module de cisaillement dans un plan horizontal.

$\nu_{hh}$ ,  $\nu_{hv}$  et  $\nu_{vh}$  sont les coefficients de Poisson; le premier indice est relatif à la contrainte et le second à la déformation. ainsi  $\nu_{hv}$  est le coefficient de Poisson sous une contrainte horizontale dans la direction verticale.

La matrice d'élasticité ci-dessus contient sept paramètres et le théorème de réciprocité de Gauss implique :

$$\frac{\nu_{vh}}{E_v} = \frac{\nu_{hv}}{E_h} \quad , \quad \text{soit} \quad \frac{E_h}{E_v} = \frac{\nu_{hv}}{\nu_{vh}} \quad . \quad \text{VI-6}$$

D'autre part on a :

$$G_h = \frac{E_h}{2(1+\nu_{hh})} \quad . \quad \text{VI-7}$$

En raison de l'isotropie dans le plan horizontal, on aura donc cinq paramètres indépendants. La relation inverse s'écrit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{VI-8}$$

La matrice  $C_{ijkl}$  est l'inverse de la matrice précédente :  
HEARMON [1961].

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}$$

où

$$C_{11} = E_h (1 - \nu_{hv} \nu_{vh}) / \Delta$$

$$C_{12} = E_h (1 - \nu_{hh}^2) / \Delta$$

$$C_{13} = E_h (1 + \nu_{hh}) \nu_{vh} / \Delta$$

$$C_{33} = E_v (1 - \nu_{hh}^2) / \Delta$$

$$\Delta = (1 + \nu_{hh}) (1 - \nu_{hh} - 2\nu_{vh} \nu_{hv})$$

$$C_{44} = G_v$$

Le cas isotrope est un cas particulier de l'orthotropie de révolution, avec :

$$E_v = E_h = E \quad \text{VI-10}$$

$$\nu_{vh} = \nu_{hv} = \nu_{hh} = \nu$$

Dans le cas particulier des déformations planes, on aura :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{13} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad \text{VI-11}$$

Remarque : la matrice d'élasticité anisotrope dans le cas où l'axe ne coïncide pas avec l'un des axes de référence dans un repère orthonormé est donnée dans annexe VI-A.

## II-1 DOMAINE DE VARIATION DU COEFFICIENT DE POISSON

Dans les travaux de *BARDEN* [1963], *KONING* [1957] et *TAN-JONG-KIE* [1961], on rencontre les conditions suivantes :

$$\nu_{hh} + \nu_{hv} \leq 1 \quad \nu_{vh} \leq 1/2 \quad , \quad \text{VI-12}$$

qui sont la conséquence directe de l'hypothèse qui veut que la dilatation soit de même signe que la contrainte appliquée. *BARDEN* [1963] observe que cette hypothèse n'est pas nécessairement vraie pour le sol et *GARNIER* [1973] conclut, dans sa synthèse bibliographique, qu'elle est inexacte car un sable dense ou une argile fortement surconsolidée sous compression simple peuvent se dilater. Après avoir analysé les travaux de différents auteurs, il semble que, comme l'ont fait remarqué *HEARMON* [1961] et *PICKERING* [1970] et comme l'ont mentionné *GARNIER* [1973] et *MAGNAN et al.* [1982, 1984], la condition la plus justifiée soit que l'énergie potentielle de déformation soit positive. Ainsi, en considérant l'énergie de déformation par unité de volume,  $W = 1/2(\sigma_{ij} \varepsilon_{ij})$ , *PICKERING* [1970] écrit que, pour que  $w \geq 0$ , il faut et il suffit que tous les coefficients des différentes formes linéaires indépendantes (les déterminants mineurs principaux de la matrice d'élasticité (VI-4)) soient positifs.

Ceci implique que:

$$\begin{aligned} E_h, E_v, G_v & \text{ doivent être positifs.} \\ \nu_{hh} & \text{ doit être supérieur à } -1. \\ 1 - \nu_{hh} - 2\nu_{hv}^2 (E_h/E_v)^{-1} & \text{ doit être positif.} \end{aligned}$$

A partir de la troisième condition, on conclut que  $\nu_{hh} < 1$ . On ne connaît pas, d'autre part, de matériau avec  $\nu$  négatif, donc  $1 > \nu > 0$ .

PICKERING, sur la figure (VII-1), représente un volume limité par les plans  $\nu_{hv} = 0$  et  $\nu_{hh} = 0$  et par le parabolôïde d'équation :

$$2\nu_{hv}^2 - (1 - \nu_{hh}) E_h/E_v = 0$$

Ce volume constitue le domaine de variation des paramètres dans l'espace  $(\nu_{hh}, \nu_{hv}, E_h/E_v)$ .

Si l'on considère un élément de sol sous pression isotrope (P), la déformation volumique s'écrit

VI-13

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{P}{E_h} \left( 2 - 2\nu_{hh} - 4\nu_{hv} + \frac{E_h}{E_v} \right)$$

En écrivant  $2 - 2\nu_{hh} - 4\nu_{hv} + \frac{E_h}{E_v} = 0$ , la déformation volumique est nulle, ce qui correspond à la condition d'incompressibilité sous pression isotrope. Cette équation définit un plan tangent au parabolôïde, le long d'une droite dont l'équation est :

VI-14

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_{hh} = 1 - \frac{E_h}{2E_v} \\ \nu_{hv} = \frac{E_h}{2E_v} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu_{hh} + \nu_{hv} = 1 \\ \frac{E_h}{E_v} = 2\nu_{hv} \end{array} \right.$$

Sur les figures VII-2 a, b, c et d, on présente les intersections de la surface limite du domaine d'énergie positive par les différents plans de  $E_h/E_v$ , ainsi que les droites tangentes au parabolôïde.

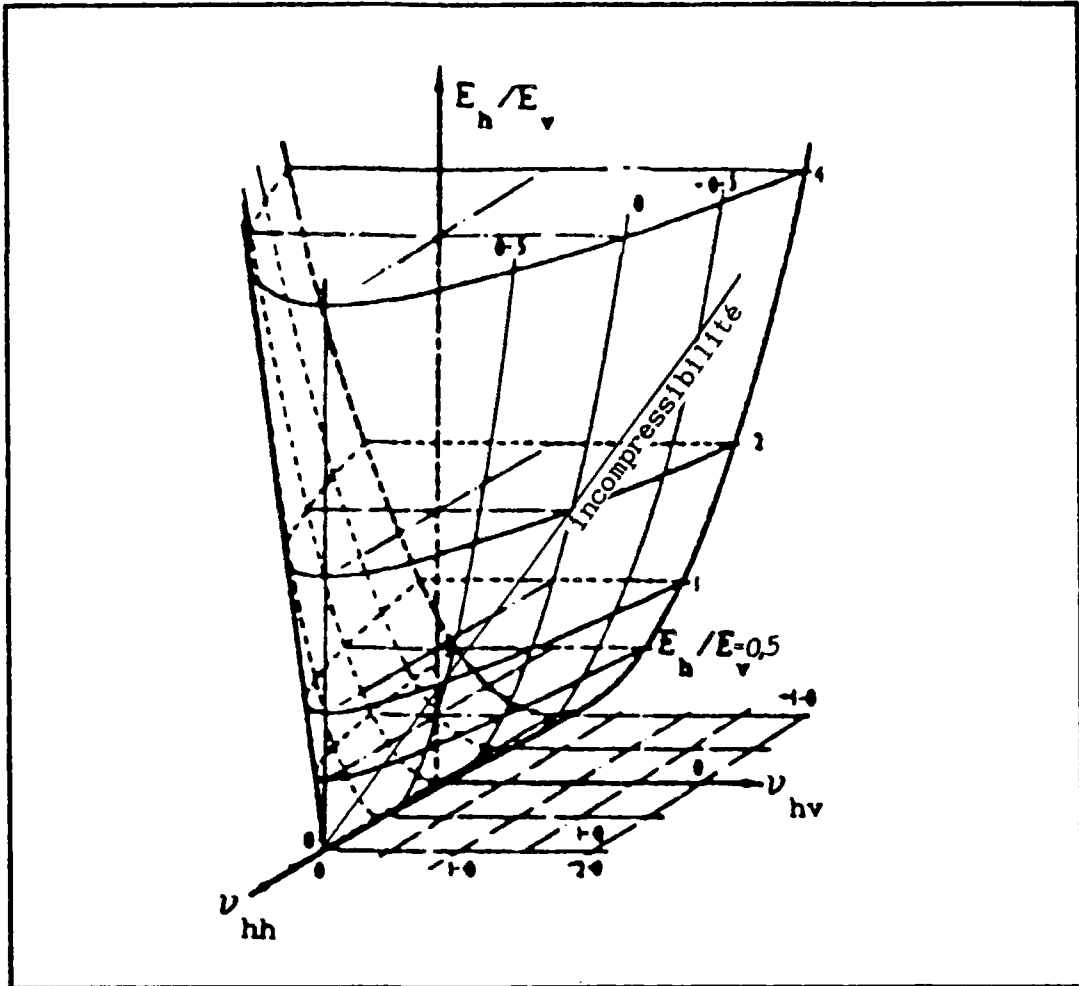


Figure VI-1 : Espace accessible aux paramètres élastiques  
(d'après PICKERING)

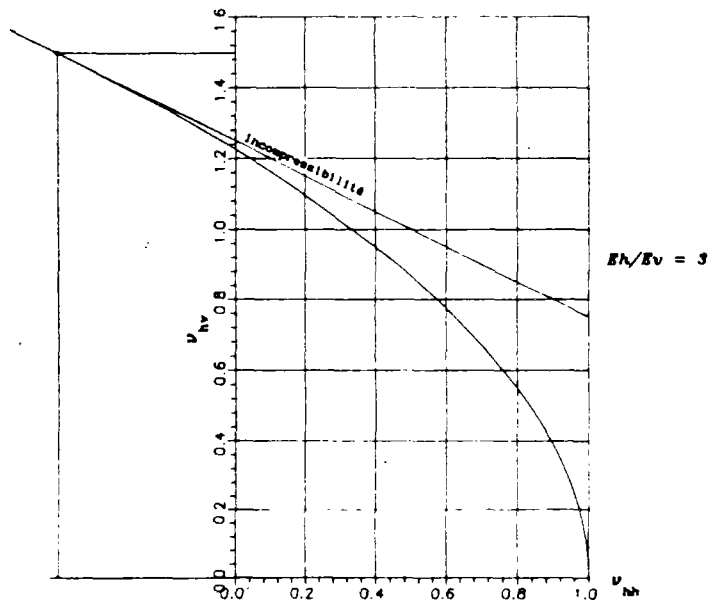
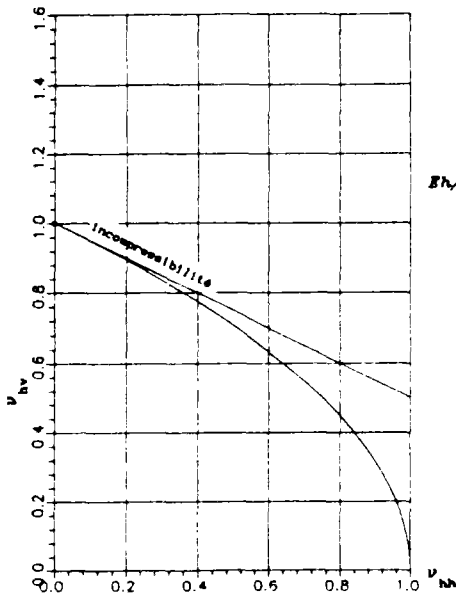
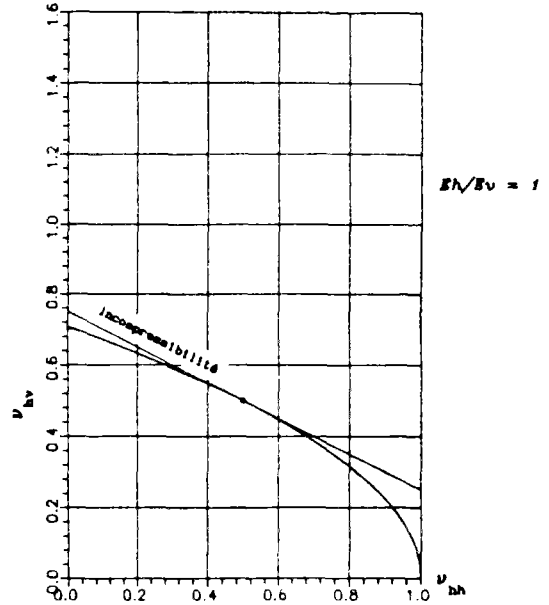
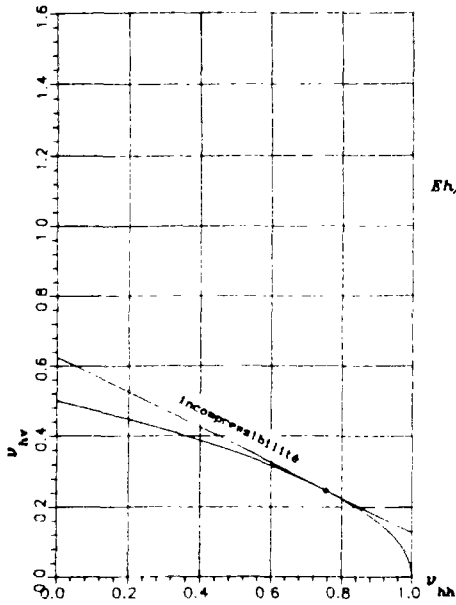


Figure VI-2 : Intersection avec les différents plan  $\frac{E_h}{E_v}$ .

On constate qu'un corps orthotrope de révolution ne peut être incompressible sous pression isotrope que si  $E_h/E_v < 2$ .

TAN-TJONG-KIE [1961], SUKLJE [1963], WIENDIEK [1968] et CAQUOT [1966] ont proposé différentes relations entre les coefficients de Poisson  $\nu_{hv}, \nu_{hh}, \nu_{vh}$  :

$$\begin{aligned} \text{TAN-TJONG-KIE :} & \quad \nu_{hh} = \nu_{vh} \left( \frac{E_h}{E_v} \right)^{1/2} \\ \text{WIENDIEK :} & \quad \nu_{hh} = \nu_{hv} \\ \text{SUKLJE :} & \quad \nu_{hh} = 1/2 (\nu_{hv} + \nu_{vh}) \\ \text{CAQUOT :} & \quad \frac{\nu_{hv}}{\nu_{vh}} = \left( \frac{E_h}{E_v} \right)^2 \end{aligned}$$

Cette dernière expression est en contradiction avec le théorème de réciprocité de Gauss (VI-6). Pour le rapport  $\frac{E_h}{E_v} = 1$ , toutes les relations proposées donnent  $\nu_{hh} = \nu_{vh}$  et, pour  $\frac{E_h}{E_v} = 0,5$ , les relations entre les coefficients de Poisson proposées par différents auteurs ont été présentées sur la figure VII-4.

Les modèles proposés par ces auteurs ne sont pas valables pour un massif anisotrope incompressible; nous avons pour notre part préféré, comme GARNIER, laisser  $\nu_{hh}$  et  $\nu_{vh}$  indépendants, à cause de la difficulté et de la rareté de leur mesure. Il s'est avéré d'ailleurs que  $\nu_{hh}$  et  $\nu_{vh}$  n'ont guère plus d'influence sur les contraintes et tassements que  $\nu$  en condition isotrope (GARNIER).

## ||-2 VALEURS PROBABLES DES PARAMÈTRES DE L'ORTHOTROPIE

L'introduction de l'orthotropie de révolution est effectuée afin d'améliorer la qualité des calculs, pour être plus proche de la réalité et en dessous des écarts constatés entre l'expérience et les résultats de l'élasticité isotrope. Les cinq paramètres de l'élasticité orthotrope de révolution ( $E_h, E_v, \nu_{hh}, \nu_{hv}, \nu_{vh}$ ) doivent

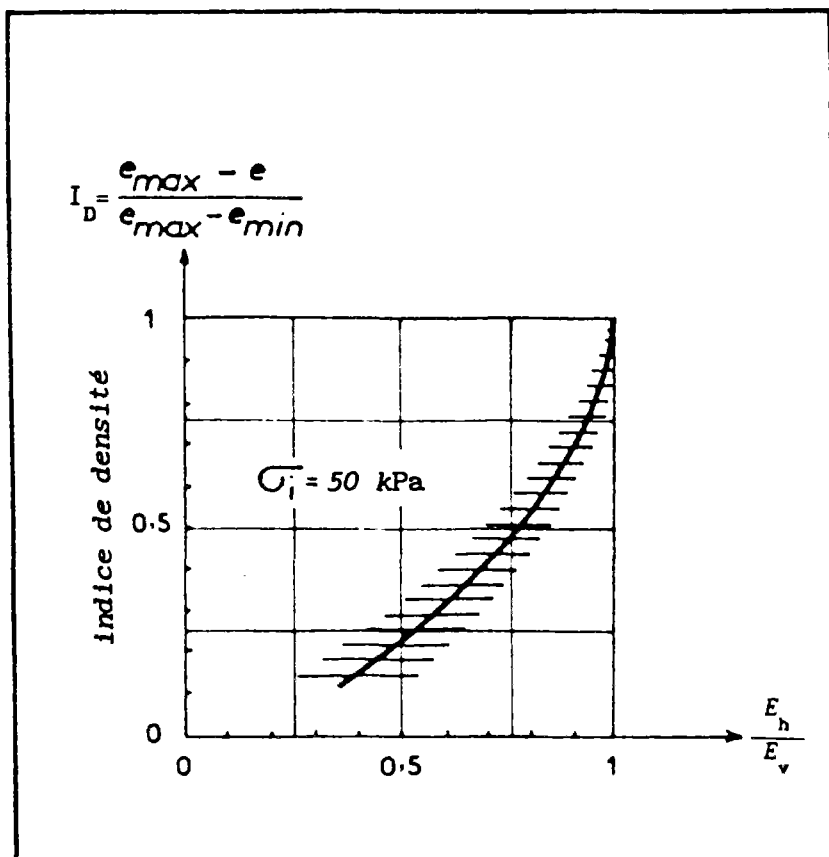


Figure VI-3 : Variation de rapport  $\frac{E_h}{E_v}$  en fonction de l'indice de densité pour un sable.

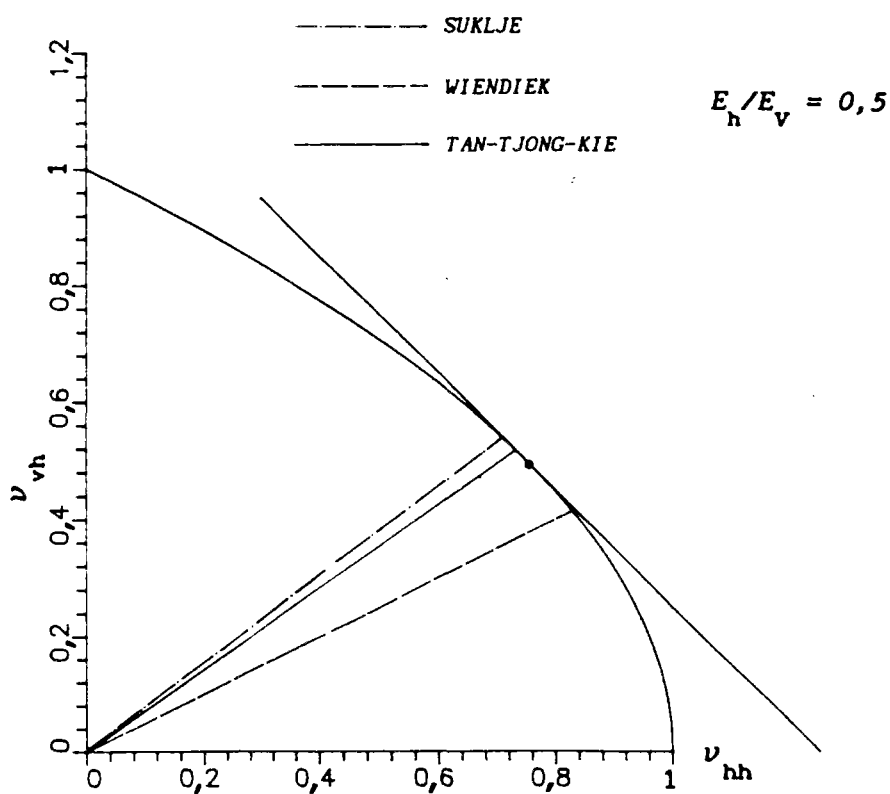


Figure VI-4 : Relation entre les coefficients de Poisson pour  $\frac{E_h}{E_v} = 0,5$



être déterminés expérimentalement et ils doivent être choisis et introduits dans les calculs en fonction des modifications souhaitées, en considérant le comportement qualitatif dans chaque cas précis. En l'absence de données expérimentales, on peut utiliser des données publiées dans la littérature. Afin de mettre en évidence l'effet des variations de chaque paramètre dans son domaine de variation possible, on a effectué une étude paramétrique dans le sixième chapitre.

### II-2-1 Valeurs de $E_h/E_v$

Pour le sable, *WIENDIECK [1968]* a effectué des essais de compression isotrope et a proposé l'intervalle entre 0,4 et 1. La relation empirique qu'il a proposée est reproduite sur la figure VI-3.

*GARNIER [1973]*, dans une synthèse des travaux de différents auteurs, a proposé le tableau ci-dessous pour les valeurs usuelles de  $E_h/E_v$  dans les sols naturels.

|                                 |                     |
|---------------------------------|---------------------|
| Sable                           | $0.4 < E_h/E_v < 1$ |
| Argiles normalement consolidées | $E_h/E_v$ autour 1  |
| Argiles surconsolidées          | $1 < E_h/E_v < 3$   |

### II-2-2 Valeurs du module de cisaillement vertical

L'expression du module de cisaillement vertical  $G_v$  en fonction des autres paramètres a été donnée par différents auteurs. Les valeurs proposées peuvent être assez éloignées, surtout pour des valeurs de  $E_h/E_v$  supérieures à 1. Des valeurs différentes de  $G_v$  peuvent produire d'importants écarts entre les résultats obtenus.

*GARNIER [1973]* a analysé les différents modules proposés par *BARDEN [1963]*, *TAN-TJONG-KIE [1967]*, *WIENDIECK [1968]*, *GUTMAN [1966]*

et WOLF [1945], et a lui-même proposé une autre relation entre  $G_v$  et les autres paramètres. ultérieurement, BELKEZIZ et MAGNAN [1982] ont présenté les expressions proposées par différents auteurs, données dans le tableau VI-1 :

Tableau VI-1 :  $G_v$  proposé par les différents auteurs

| Auteurs       | formules proposées de $G_v$               |
|---------------|-------------------------------------------|
| GARNIER       | $\frac{E_h}{X1+2\nu_{hv}}$                |
| WOLF          | $\frac{E_h}{1+E_h/E_v+2\nu_{hv}}$         |
| CHRISTIAN     | $\frac{E_h}{1+E_h/E_v+2\nu_{hv}}$         |
| WIENDIECK     | $\frac{E_h}{1+(E_h/E_v+2\nu_{hv})^{1/2}}$ |
| BARDEN        | $\frac{E_h}{1+E_h/E_v+2\nu_{hv}}$         |
| TAN TJONG KIE | $1/2\{[AC]^{1/2}-D\}$                     |

$$\text{avec } X1 = \{8[1+(E_h/E_v)^2]\}^{1/2} - (1+E_h/E_v)$$

$$A = E_h \frac{1-(E_h/E_v)v_{vh}^2}{(1+v_{hh})[1-v_{hh}-2(E_h/E_v)v_{vh}^2]}$$

$$C = E_v \frac{1-v_{hh}}{[1-v_{hh}-2(E_h/E_v)v_{vh}^2]}$$

$$D = E_h \frac{v_{vh}}{[1-v_{hh}-2(E_h/E_v)v_{vh}^2]}$$

### III - PRESSION INTERSTITIELLE

Dans un essai classique à l'appareil triaxial, en supposant le sol élastique, SKEMPTON a donné, dans le cas non drainé, pour la surpression interstitielle :

$$\Delta u = B [\Delta\sigma_3 + A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)] \quad \text{VI-15}$$

Le squelette étant isotrope,  $A$  vaut  $1/3$  et est indépendant de la direction des contraintes appliquées ;  $B = 1$  pour les sols saturés par un liquide incompressible.

GARNIER [1975], en collaboration avec CORDARY, a effectué le calcul de  $\Delta u$  pour un échantillon orthotrope de révolution lorsque l'axe d'application des contraintes fait un angle  $\theta$  avec l'axe de révolution. Ils ont proposé la formule suivante :

$$\Delta u = B [\Delta\sigma_3 + A_\theta(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)] \quad \text{VI-16}$$

avec

$$B = \frac{1}{1 + \frac{n C_1 E_h}{2(1-\nu_{hh} + 2\nu_{hv}) + \frac{E_h}{E_v}}}$$

$$A_\theta = \frac{\sin^2(\theta)[1-\nu_{hh} - \nu_{hv}] + \cos^2(\theta)[1-2\nu_{vh}] \frac{E_h}{E_v}}{\frac{E_h}{E_v} (1-4\nu_{vh}) + 2(1-\nu_{hh})}$$

où  $C_1$  est la compressibilité du liquide.

Si l'on admet que le liquide est incompressible ( $C_1 = 0$ ), le coefficient  $B$  vaut 1 et l'on constate que  $B$  ne dépend pas de  $\theta$ . En prenant  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi/2$ , les coefficients de pression interstitielle pour un échantillon horizontal et pour un échantillon vertical respectivement  $A_0$  et  $A_{90}$  sont :

$$A_0 = \frac{\frac{E_h}{E_v} (1-2\nu_{vh})}{\frac{E_h}{E_v} (1-4\nu_{vh}) + 2(1-\nu_{hh})}$$

$$A_{90} = \frac{1-\nu_{vh} \frac{E_h}{E_v} - \nu_{hh}}{\frac{E_h}{E_v} (1-4\nu_{vh}) + 2(1-\nu_{hh})}$$

On remarque que

$$A_0 + 2A_{90} = 1$$

VI-18

$$A_\theta = A_0 \cos^2(\theta) + A_{90} \sin^2(\theta)$$

URIEL [1971] et PICKERING [1970] avaient déjà trouvé ces résultats.

Si l'on considère un échantillon cubique vertical soumis à l'action de la contrainte verticale ( $\sigma_v$ ) ou à l'action de la contrainte horizontale ( $\sigma_h$ ), la variation de volume dans les deux cas s'écrit respectivement :

VI-19

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma_v}{E_v} (1-2\nu_{vh})$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma_h}{E_h} \left(1 - \nu_{hh} - \frac{E_h}{E_v} \nu_{vh}\right) = \frac{\sigma_h}{E_h} (1 - \nu_{hh} - \nu_{hv})$$

Une augmentation de volume dans les deux cas se traduit par :

VI-20

$$\begin{aligned} 1-2\nu_{hv} > 0 &\quad \rightarrow \quad \nu_{vh} < 1/2 \\ 1-\nu_{hh} - \nu_{hv} > 0 &\quad \rightarrow \quad \nu_{hh} + \nu_{hv} < 1 \end{aligned}$$

une diminution de volume est bien évidemment dans le cas contraire. Pour que la variation de volume devienne nulle il suffit pour les deux cas déjà cités :

$$\nu_{vh} = 1/2$$

$$\nu_{hh} + \nu_{hv} = 1$$

VI-21

En introduisant ces valeurs dans l'équation (VI-17), on en déduit que la première équation de (VI-21) correspond à  $A_0 = 0$  et la seconde à  $A_0 = 1$ .

On peut présenter les valeurs possibles de  $A_0$  pour le sol, sur les plans d'intersection des différents  $\frac{E_h}{E_v}$  (figures VI-5 a, b, c, d). Sur les figures VI-5, on peut distinguer trois parties différentes en fonction des coefficients de Poisson, séparées par les droites  $A_0$  (elles sont hachurées différemment). Dans ces plans, les courbes  $A_0 = \text{cte}$  sont des droites passant par le point d'incompressibilité.

Pour la valeur  $A_0 < 0$ , on a une augmentation de volume sous compression verticale et une diminution de volume pour le sol sous compression horizontale. Pour les valeurs  $A_0 > 1$ , le sol se comprime sous  $\sigma_v$  et se dilate sous  $\sigma_h$  et, finalement, entre les valeurs  $A_0 = 0$  et  $A_0 = 1$ , dans un essai de compression isotrope, le squelette du sol se comprime quelle que soit la direction de contrainte. De plus, on observe que, dans le domaine accessible aux coefficients de Poisson, pour les valeurs  $\frac{E_h}{E_v}$  comprises entre 0,5 et 2, les valeurs possibles de  $A_0$  restent entre -1 et 1.

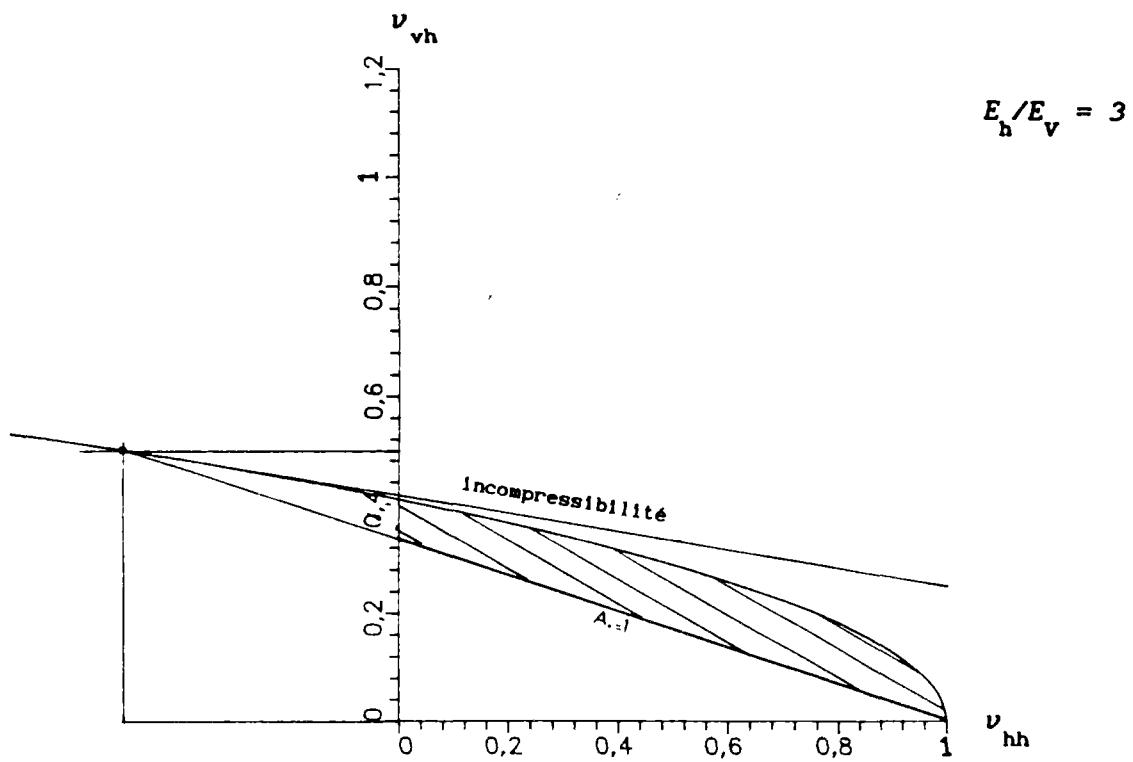
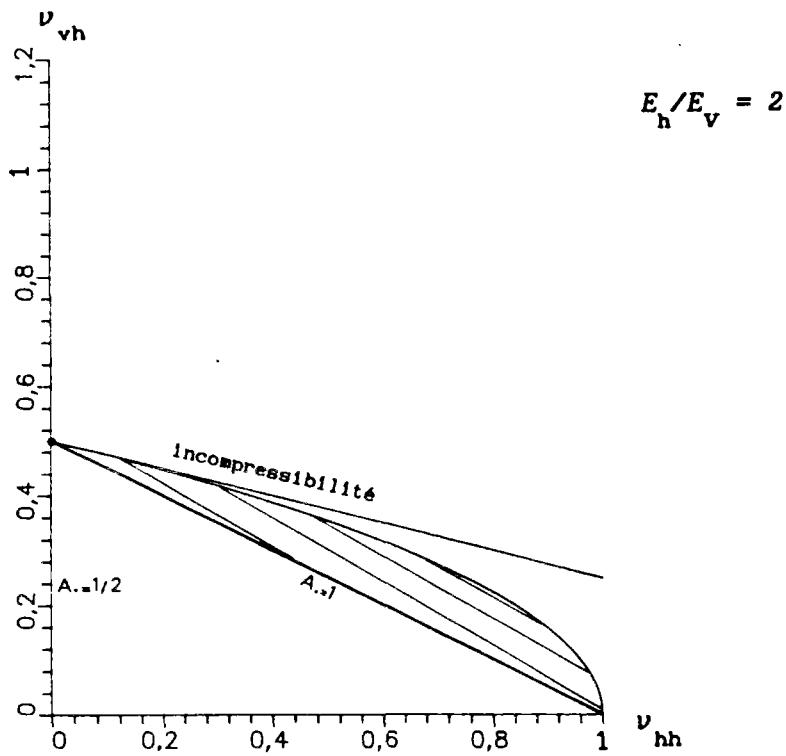


Figure VI-5 : Les différentes parties du plan  $(\nu_{hh}, \nu_{vh})$  et les valeurs possibles de  $A_o$ .

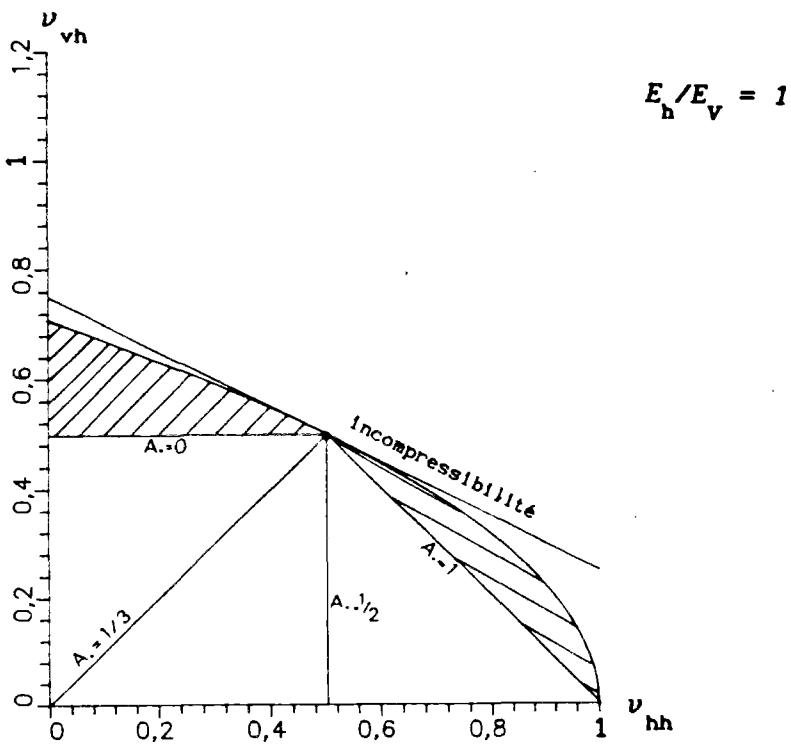
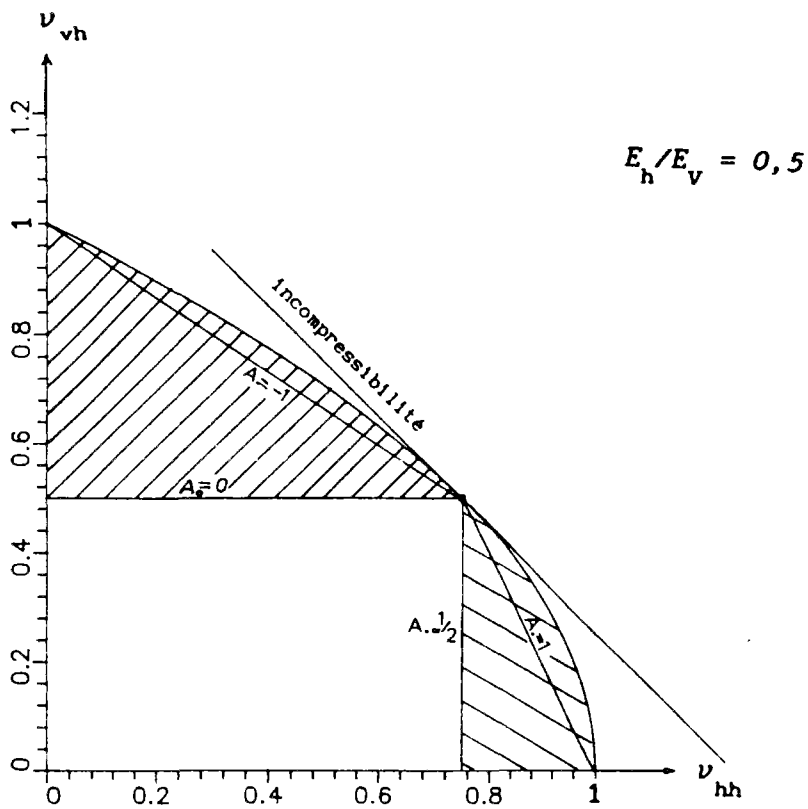


Figure VI-5 : Les différentes parties du plan  $(\nu_{hh}, \nu_{vh})$  et les valeurs possibles de  $A_0$ .

*Soyons contents du nécessaire,  
Sans jamais souhaiter de trésors superflus;  
Il faut les redouter autant que la misère:  
Comme elle, ils chassent les vertus.*

*FLORIAN*

## CHAPITRE 7

VALIDATION ET APPLICATION DU PROGRAMME : REPONSE D'UN  
MASSIF SOUS-MARIN A L'ACTION DE LA HOULE



## I INTRODUCTION

~~~~~

Le présent chapitre est consacré à la vérification, puis aux applications du code de calcul aux éléments finis réalisé au cours de ce travail, et qui découle de l'analyse numérique du problème considéré, décrite au chapitre cinq.

Dans une première partie, des vérifications sont effectuées par comparaison avec diverses solutions analytiques. Les trois parties suivantes constituent une étude de l'effet de différents paramètres mécaniques, hydrauliques et géométriques sur les réponses du massif en pression interstitielle, contraintes effectives normales, contrainte de cisaillement et profils de déplacement vertical et horizontal. La cinquième partie concerne l'étude de la réponse du massif dans le cas d'une pente, avec prise en compte de l'effet de cette pente sur la houle. Dans les deux dernières parties, on considère le cas horizontal multicouche, et enfin le cas horizontal anisotrope.

II VERIFICATION DU PROGRAMME

~~~~~

### II-1 THEORIE DE LA CONSOLIDATION UNIDIMENSIONNELLE DE TERZAGHI

#### II-1-1 SOLUTION ANALYTIQUE DE FROHLICH ET TERZAGHI

L'équation différentielle

$$C_v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

régit le phénomène de consolidation dans le modèle de *Terzaghi*, basé sur les hypothèses suivantes :

- le sol est homogène,
- les vides sont complètement remplis par l'eau,
- les particules du sol et le fluide sont incompressibles,
- la loi de *DARCY* est applicable,
- la variation de volume est petite devant le volume initial,
- l'accroissement des contraintes ( $\Delta\sigma$ ) est appliqué instantanément ( $p_1$  est indépendant du temps),
- le coefficient de perméabilité  $k$  et le coefficient de compressibilité  $a_v$  sont constants au cours de la consolidation ; cette hypothèse implique que le rapport  $\frac{\partial e}{\partial \sigma}$ , soit constant, ce qui revient à estimer que le squelette du sol se comporte comme un ressort élastique. Cependant, au fur et à mesure de la consolidation,  $k$ ,  $e$  et  $a_v$  décroissent avec le temps, mais la valeur de  $\zeta_v = \frac{k(1+e)}{a_v \gamma_w}$  peut rester approximativement constante. La solution de l'équation différentielle a été donnée par *Terzaghi* et *Fröhlich* [1936] pour une large gamme de conditions aux limites et de conditions initiales.

Pour les conditions aux limites et conditions initiales simples suivantes :

$$p_1 = p_0 \quad 0 \leq z \leq 2H \quad \text{pour } t=0$$

$$\begin{array}{ll} z=0 & p=0 \\ z=2H & p=0 \end{array} \quad \text{pour toutes les valeurs de } t \neq 0$$

la solution générale s'écrit :

$$p = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{1}{H} \int_0^{2H} u_1 \sin \frac{mz}{2H} dz \right) \sin \frac{mz}{2H} \exp \left( -\frac{c_v t n^2 \pi^2}{4H^2} \right)$$

en posant

$$M = \frac{(2m+1)\pi}{2}, \quad m=0, 1, 2, 3, \dots \text{ et}$$

$$T_v = \frac{C_v t}{H^2}$$

on aura

$$p = p_0 \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{H} \exp(-M^2 T_v)$$

Le degré de consolidation  $U_z$  s'écrit :

$$U_z = 1 - \frac{p}{p_0}$$

## II-1-2 CALCUL NUMERIQUE

### Maillage et conditions aux limites

Le calcul a été effectué sur une colonne de sol maillé par 48 éléments triangulaires à 3 noeuds et 39 points (fig. VII-1).

La charge appliquée sur la surface de la colonne est distribuée uniformément et reste constante au cours du temps.

Les conditions limites sont les suivantes :

### Déplacements

1- déplacements verticaux et horizontaux nuls sur la limite inférieure, et libres sur la limite supérieure ;

2 - déplacements horizontaux nuls sur les limites droite et gauche.

### Pression interstitielle

- nulle sur les limites supérieure et inférieure:

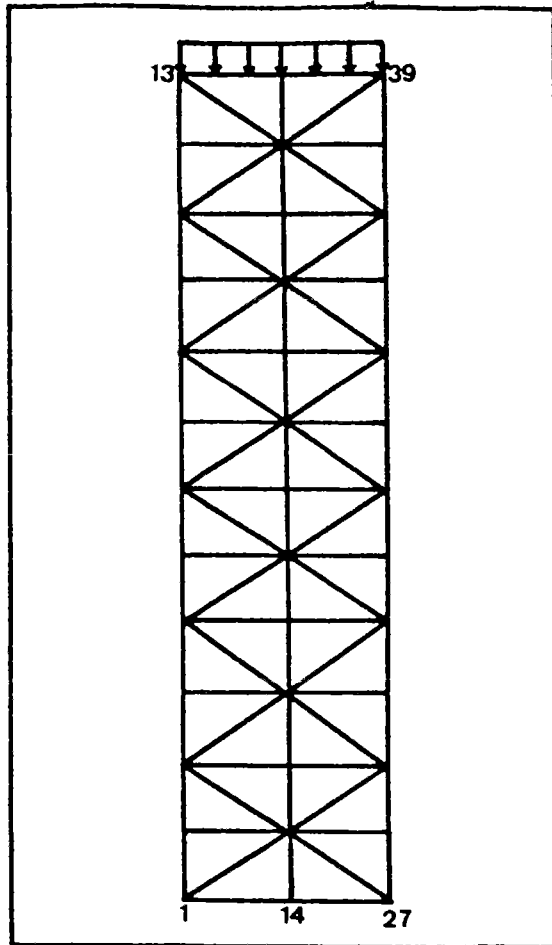


Figure VII-1 : Maillage utilisé.

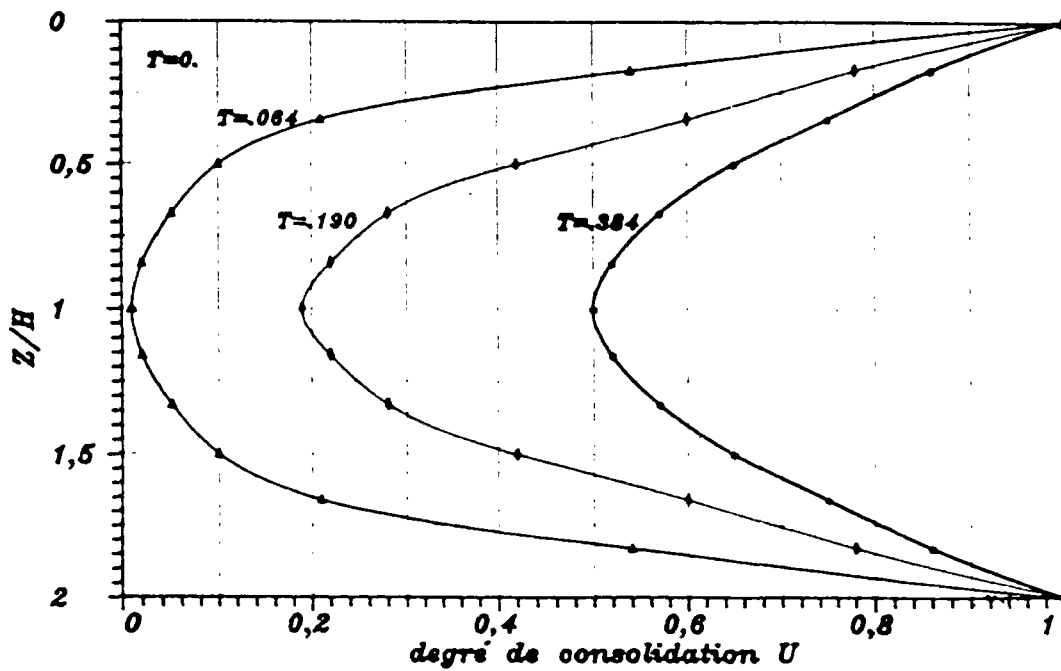


Figure VII-2 : Isochrones de surpression interstitielle.

Les isochrones de surpression interstitielle pour les différentes valeurs facteur du temps  $T_v$  trouvées par le calcul aux éléments finis sont comparées sur la figure VII-2 à la solution

## II-2 DEMI-ESPACE INFINI SOUS L'ACTION D'UNE SEMELLE FILANTE

### II-2-1 SOLUTION ANALYTIQUE

La théorie de la consolidation en déformation plane a été dérivée de la théorie générale de la consolidation de *BIOT [1941]* par *MCNAMEE et GIBSON [1960]*. Dans cette théorie, le sol homogène est saturé par un fluide Newtonien incompressible, et il se comporte comme un milieu élastique linéaire et isotrope.

*SCHIFFMAN et al. [1969]* ont présenté à partir de cette théorie la distribution verticale et latérale de la surpression interstitielle, due à un chargement réparti sur une bande de largeur  $2a$  en surface, pour un demi-espace infini (figure VII-3).

Le profil vertical de surpression interstitielle représenté sur la figure VII-5 est calculé en  $x=0$ , en considérant qu'il y a drainage à la surface du sol ; la valeur du coefficient de Poisson  $\nu$  est prise égale à zéro. Le profil est calculé à un temps  $t$ , correspondant à une valeur du facteur temps corrigé :

$$\tau=0,1=(2G+\lambda)\frac{K}{\gamma_w}\frac{t}{a^2}$$

La distribution latérale de surpression interstitielle de la figure VII-6 est calculée avec les mêmes valeurs de  $\nu$  et de  $t$ , à une profondeur  $z/a = 0,5$ .

### II-2-2 CALCUL NUMERIQUE

Le calcul a été effectué sur un maillage de 176 points et de 300 éléments triangulaires à 3 noeuds, sur une profondeur de  $10a$  et une largeur de  $8a$ , supposées correspondre à un demi-espace infini.

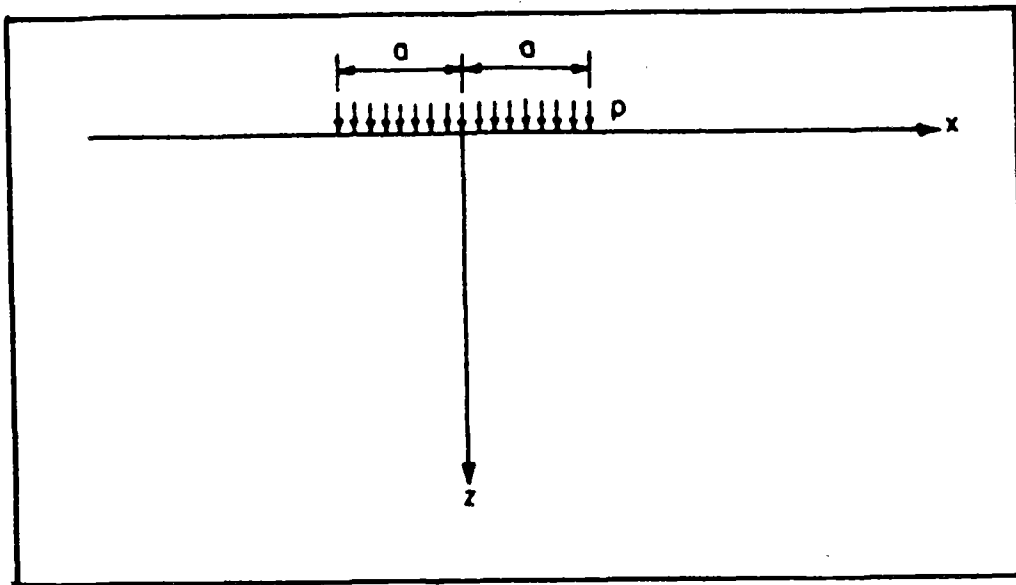


Figure VII-3 : Demi-espace chargé par une semelle filante.

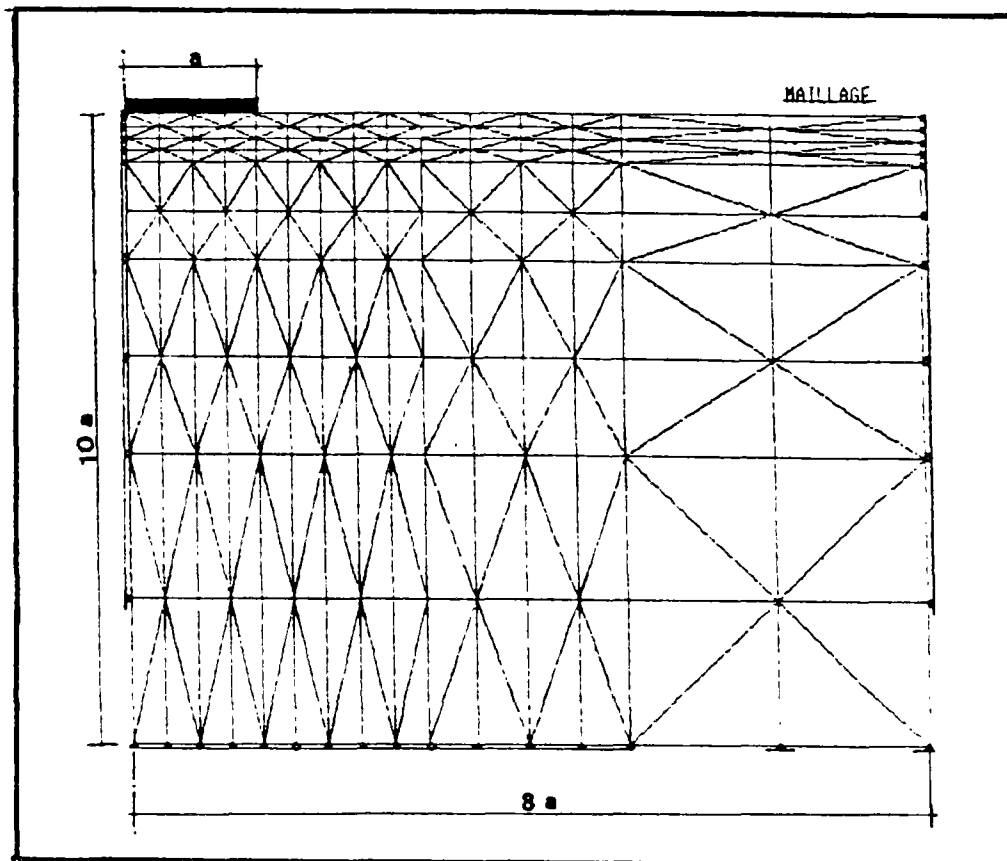


Figure VII-4 : Maillage et conditions aux limites.

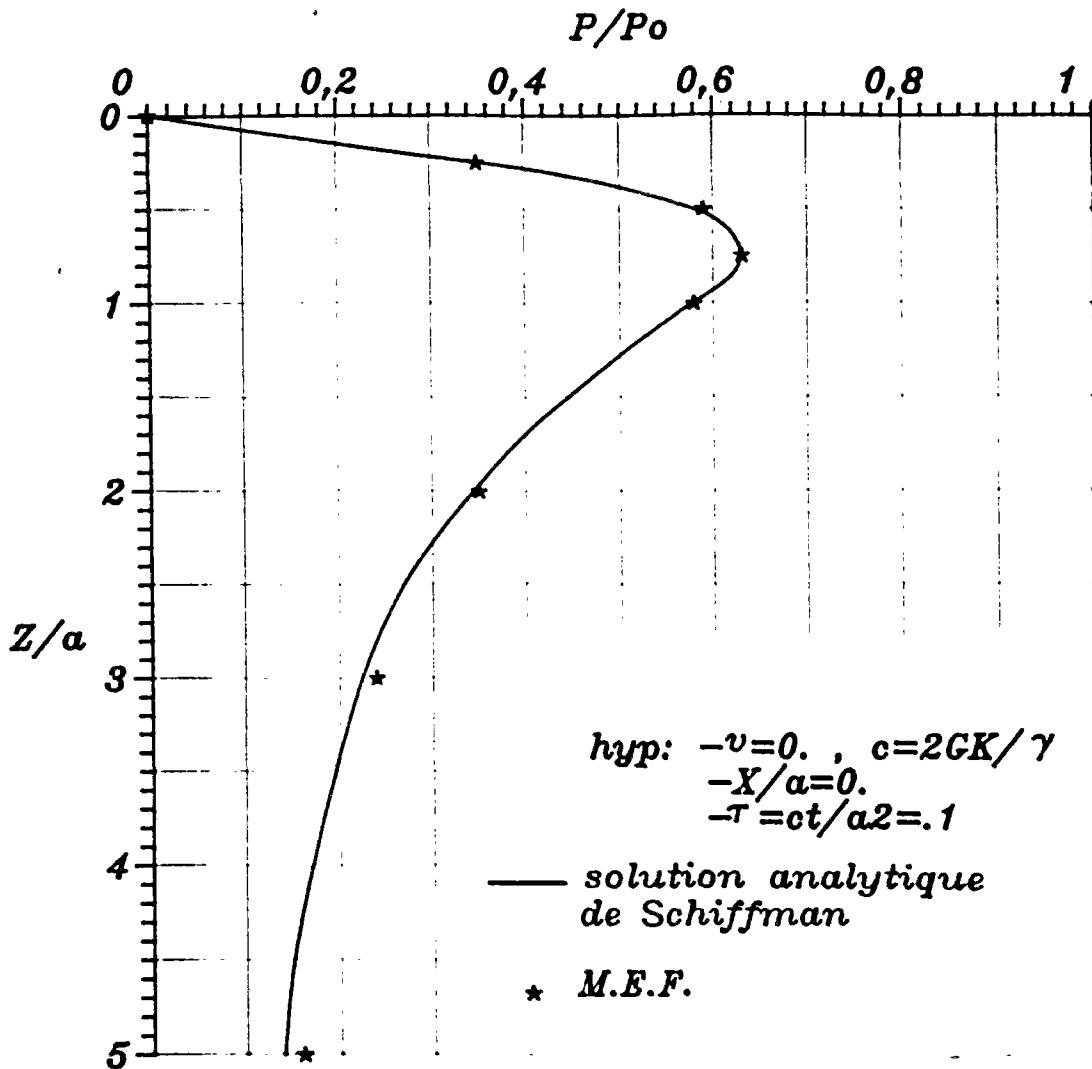


Figure VII-5 : Distribution verticale de la surpression interstitielle.

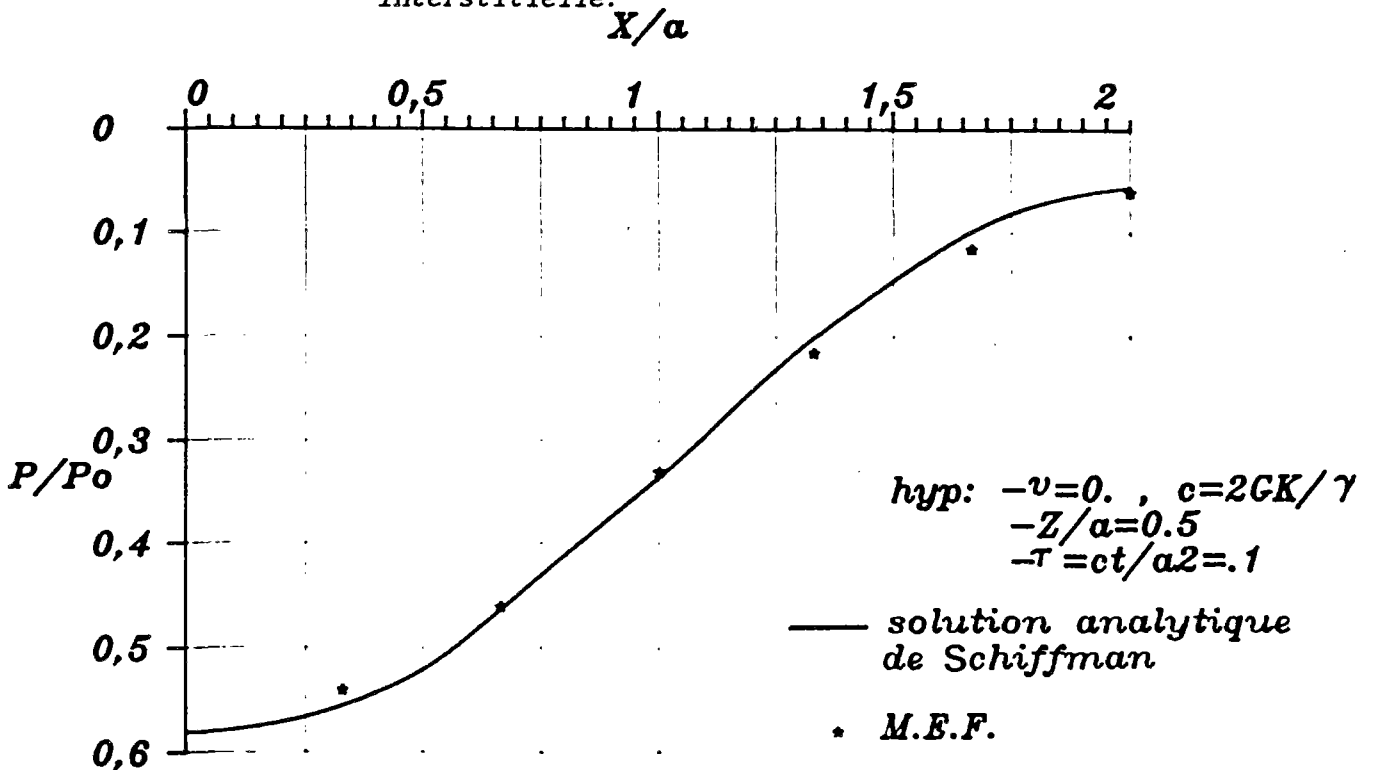


Figure VII-6 : Distribution latérale de la surpression interstitielle.

Les conditions aux limites sont les suivantes (figure VII-4):

### Déplacements

- le déplacement horizontal est nul sur les limites latérales et libre sur les bornes supérieures et inférieures ;
- le déplacement vertical est nul sur la limite inférieure.

### Pression interstitielle

La surface du sol est drainée donc, pour les noeuds situés sur la surface, on a  $p=0$  à tout instant.

Les résultats du calcul numérique sont comparés avec les résultats analytiques présentés par *SCHIFFMAN et al.* [1969] sur les figures (VII-5 et VII-6).

On constate que la correspondance est satisfaisante. La légère différence observée en profondeur sur le profil de pression est attribuée au fait que le maillage est limité à 10 a, alors que le calcul analytique correspond à une profondeur infinie. Un tel écart a également été observé par *GHABOUSSI et WILSON* [1973]

## II-3 COUCHE D'ÉPAISSEUR FINIE SOUS L'ACTION D'UNE SEMELLE FILANTE.

Une troisième comparaison a été faite avec les résultats obtenus analytiquement par *BOOKER* [1974] pour une couche de sol isotrope, homogène et élastique, d'épaisseur  $h=a$ , reposant sur un substratum rugueux et soumise à un chargement réparti sur une surface de largeur  $2a$ .

Le maillage utilisé correspond à la profondeur de la couche et à une largeur de  $8a$ . *BOOKER et SMALL* [1975] ont montré qu'une



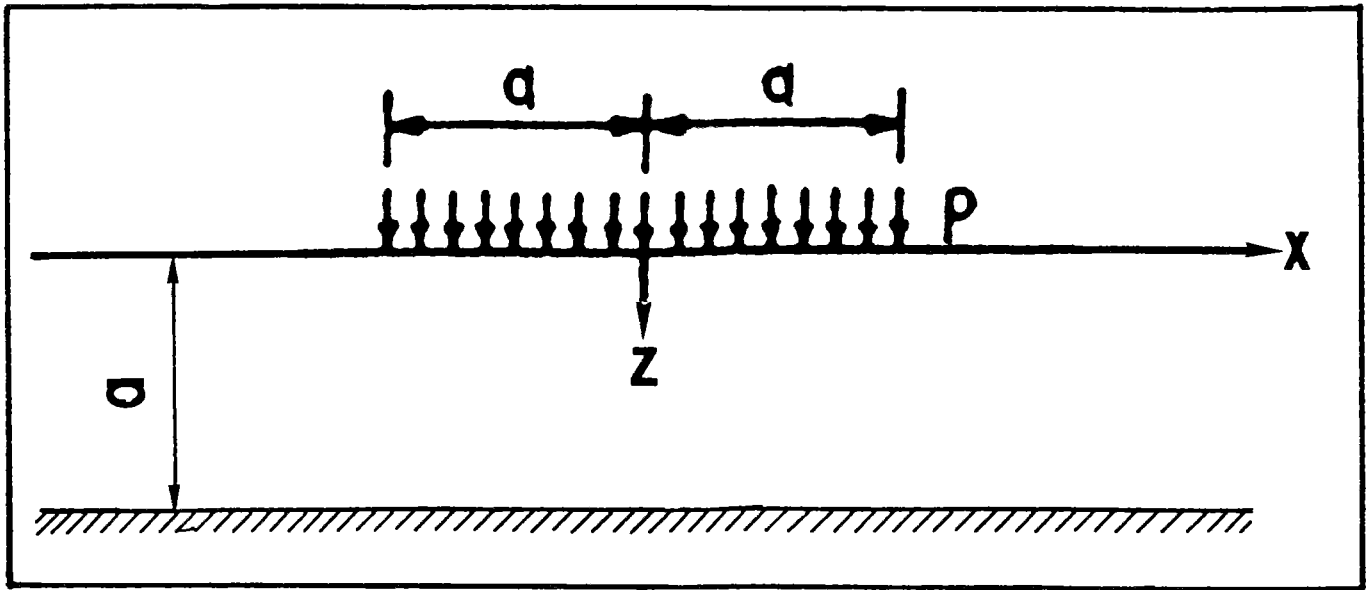


Figure VII-7 : Couche d'épaisseur finie sous l'action d'une semelle filante.

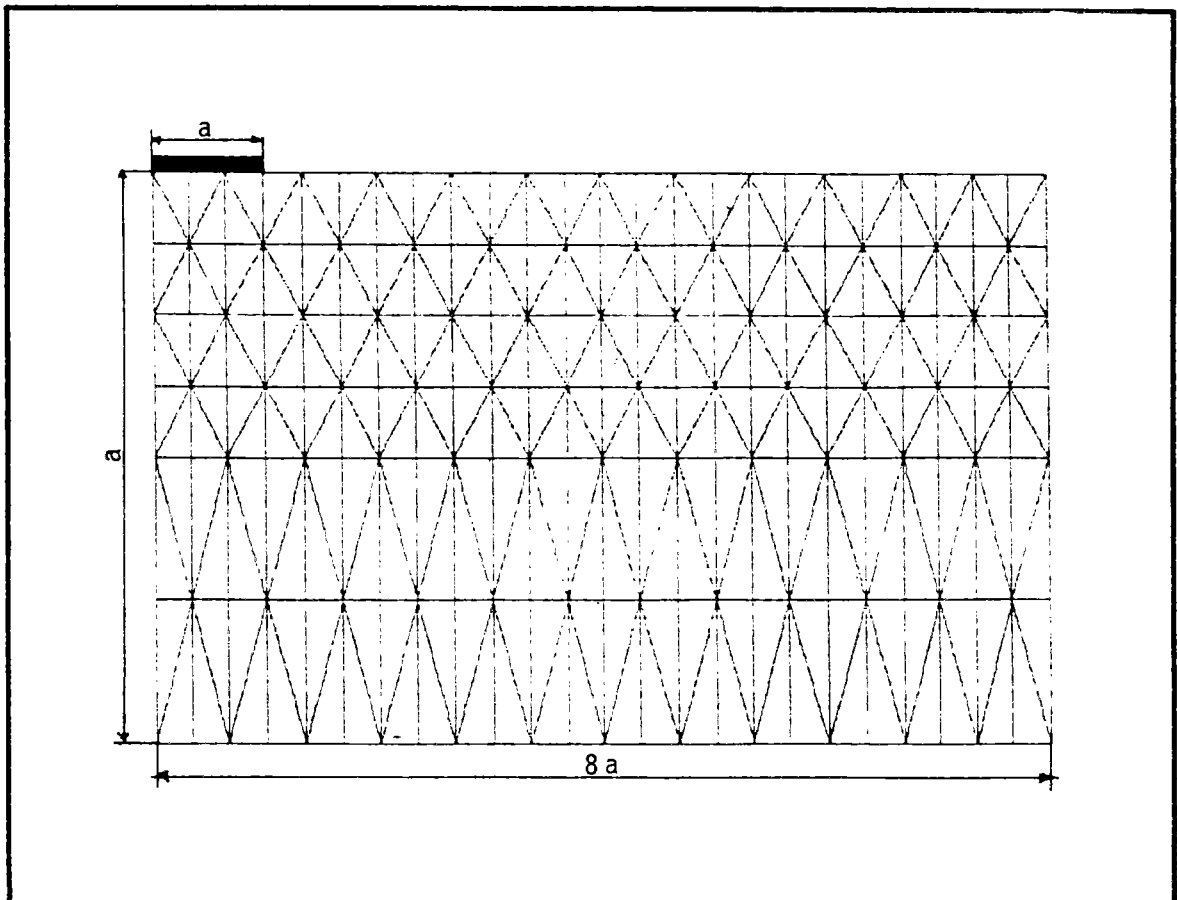


Figure VII-8 : Maillage utilisé (échelle verticale exagérée).

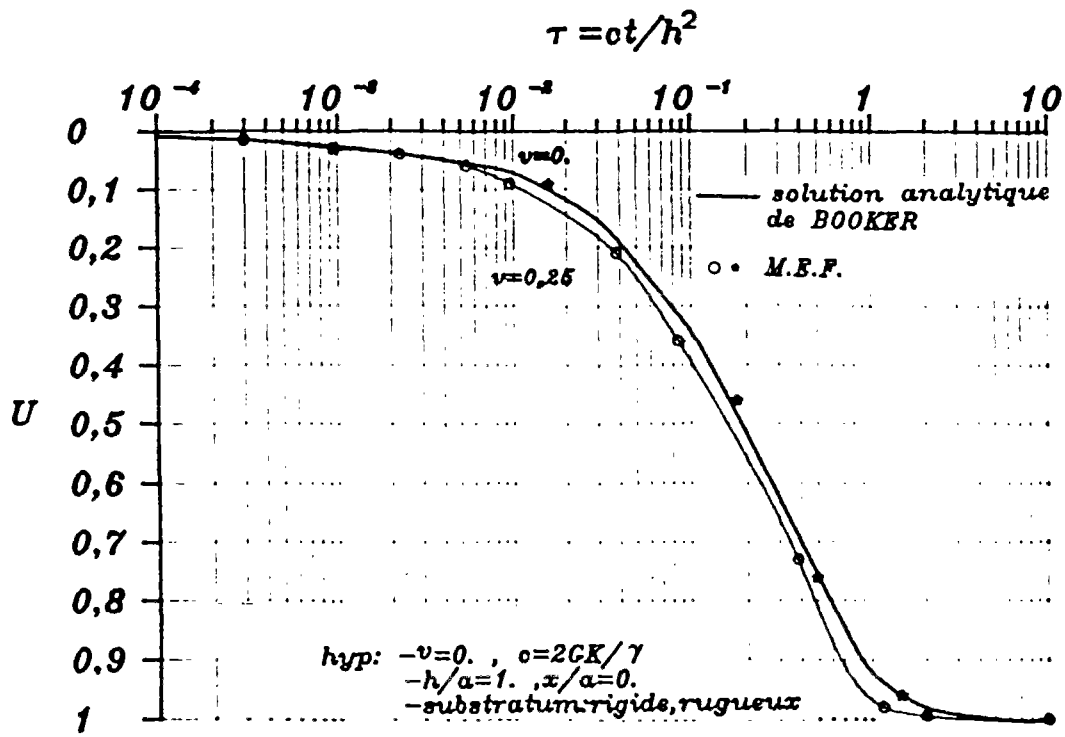


Figure VII-9 : Variation de degré du tassement en fonction du temps

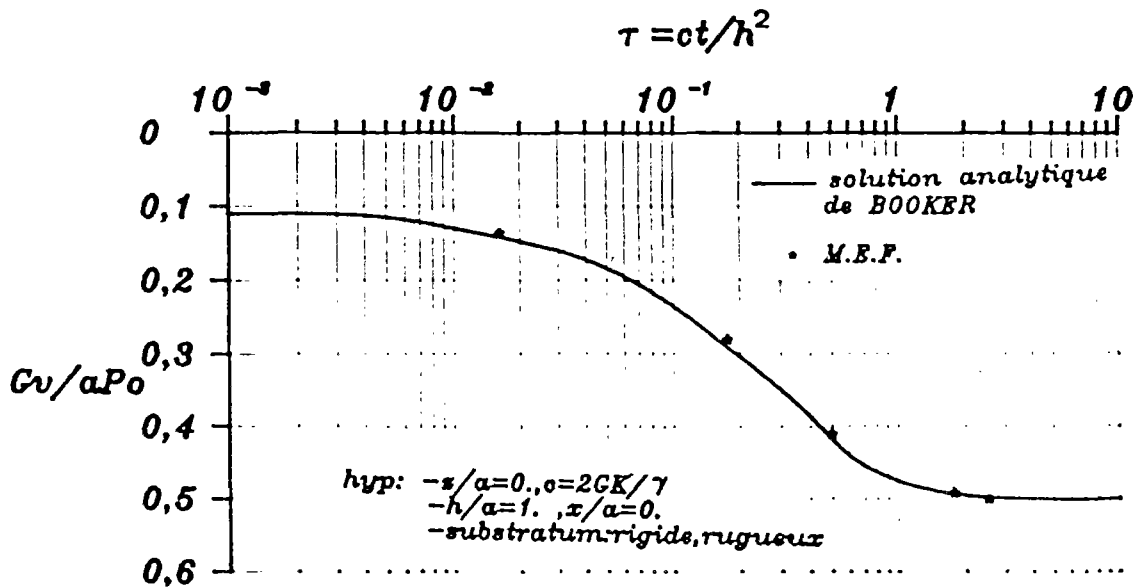


Figure VII-10 : Variation du tassement adimensionnel au cours du temps

telle largeur correspondait à une largeur infinie. Il est constitué de 175 points et de 288 éléments (figure VII-8).

Les conditions aux limites considérées sont :

- sur le substratum imperméable  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$  et les déplacements horizontaux et verticaux sont nuls ( $u=0, v=0$ ) ;
- la surface du sol est perméable ( $p=0$ ).

On présente sur la figure VII-9 les variations du degré de tassement

$$U = \frac{v_t - v_1}{v_f - v_1}$$

en fonction du facteur temps corrigé

$$\tau = (\lambda + 2G) \frac{K}{\gamma_w} \frac{t}{h^2}$$

pour deux valeurs de  $\nu$  (0 et 0,25). La correspondance entre les résultats numériques et analytiques est bonne, et on ne retrouve pas en particulier les dérivées du calcul précédent, qui étaient donc bien dues à l'approximation de profondeur infinie faite pour le calcul.

#### II-4 FOND MARIN HORIZONTAL SOUMIS A L'ACTION DE LA HOULE

##### II-4-1 Rappel de la solution analytique

La distribution des contraintes effectives et de la pression interstitielle dans un massif semi-infini du sol à la surface horizontale et soumis à l'action d'une houle sinusoïdale a été présenté d'une façon complète dans le chapitre 2. Les expressions deviennent très simple pour les sols dont le rapport  $G/K'$  tend vers zéro.  $K'$  est le module de dilatation cubique apparent. La relation suivante pour  $K'$  a été proposée par VERRUIJT [1969].

$$1/K' = 1/K + (1 - S_r)/p_0 .$$

$S_r$  est le degré de saturation du fluide interstitiel. Pour l'eau interstitielle sans l'air,  $K'$  sera égal au module de dilatation cubique de l'eau c'est-à-dire environ  $2,3 \cdot 10^6$  kPa. Le rapport de rigidité,  $G/K'$ , est pratiquement nul pour la plupart des sols, sauf le sable très dense. Dans le cas de  $G/K' \rightarrow 0$ , les expressions analytiques sont les suivantes :

$$u = -i\lambda z \exp(-\lambda z) \frac{P_0}{2G\lambda} \exp[i(\lambda x - \omega t)]$$

$$v = \{ \exp(-\lambda z) + \lambda z \exp(-\lambda z) \} \frac{P_0}{2G\lambda} \exp[i(\lambda x - \omega t)]$$

$$p = p_0 \exp(-\lambda z) \exp[i(\lambda x - \omega t)]$$

$$\sigma'_x = -\sigma'_z = -i\tau_{xz} = p_0 \lambda z \exp(-\lambda z) \exp[i(\lambda x - \omega t)]$$

Les variations de ces valeurs en fonction de la profondeur sont présentées sur la figure II-4.

#### II-4-2 Calcul numérique

On considère une couche de sol homogène, isotrope, sous l'action d'une houle sinusoïdale. En raison de la périodicité dans le temps et dans l'espace, on peut se contenter de considérer une longueur de sol correspondant à une longueur d'onde. Pour modéliser un demi-espace infini, il est possible, comme le montre la figure II-4, de considérer uniquement une profondeur égale à la longueur d'onde. On observe en effet qu'à partir de  $Z/L = 1$ , les différentes grandeurs sont proches de zéro.

On considère les caractéristiques suivantes, représentatives d'un sable lâche isotrope :

$$G = 5000 \text{ k Pa} , \quad k_x = k_y = 10^{-6} \text{ m/s} .$$

On a  $G/K' \ll 1$  .

Le maillage choisi est constitué de 225 points et de 384 éléments triangulaires à 3 noeuds (figure VII-11).

Les conditions aux limites sont :

-Sur la surface : le chargement de la houle est considéré comme une pression répartie sur un côté d'un élément donné, et égale

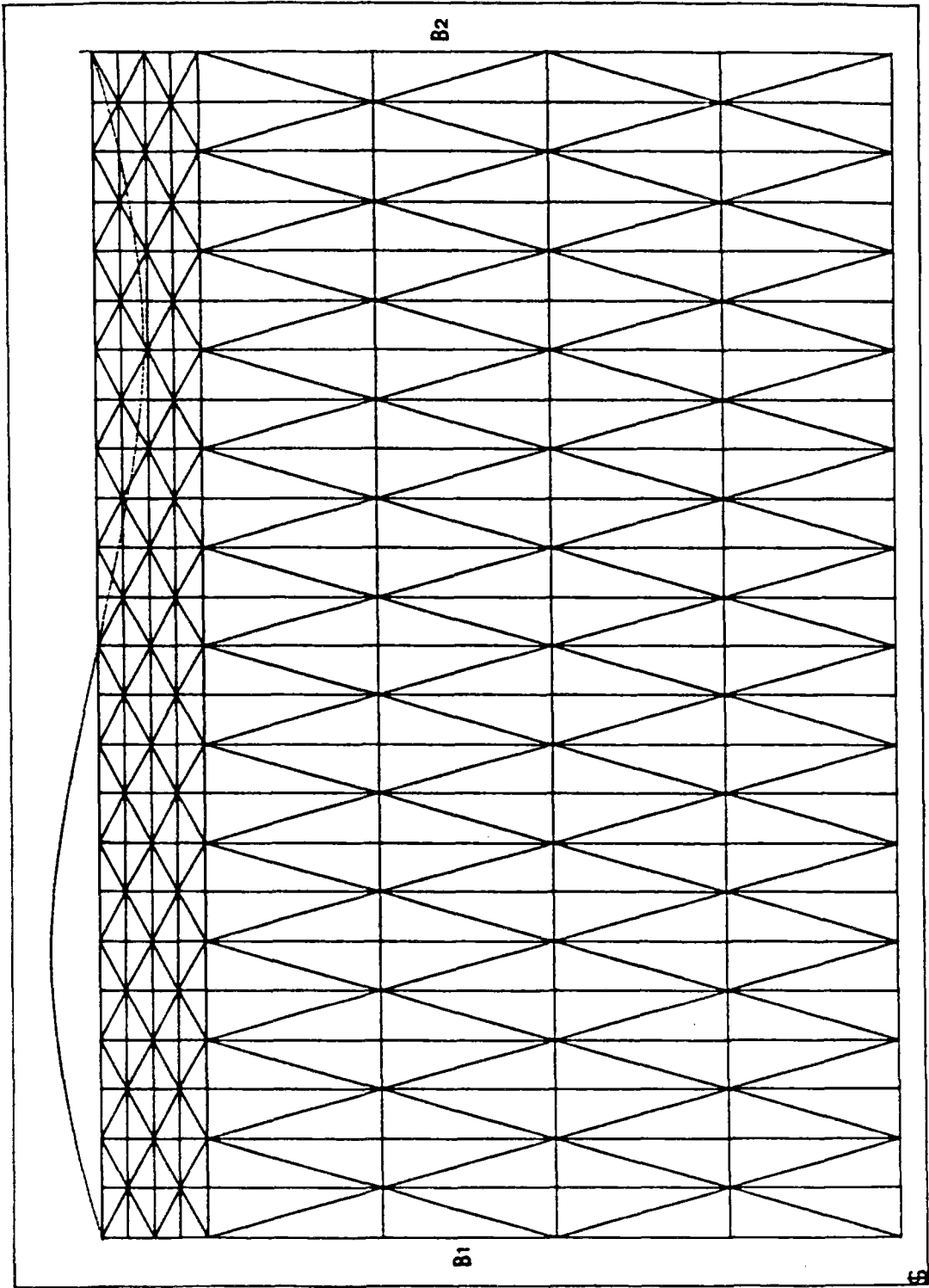


Figure VII-11 : Maillage considéré pour une longueur d'onde.

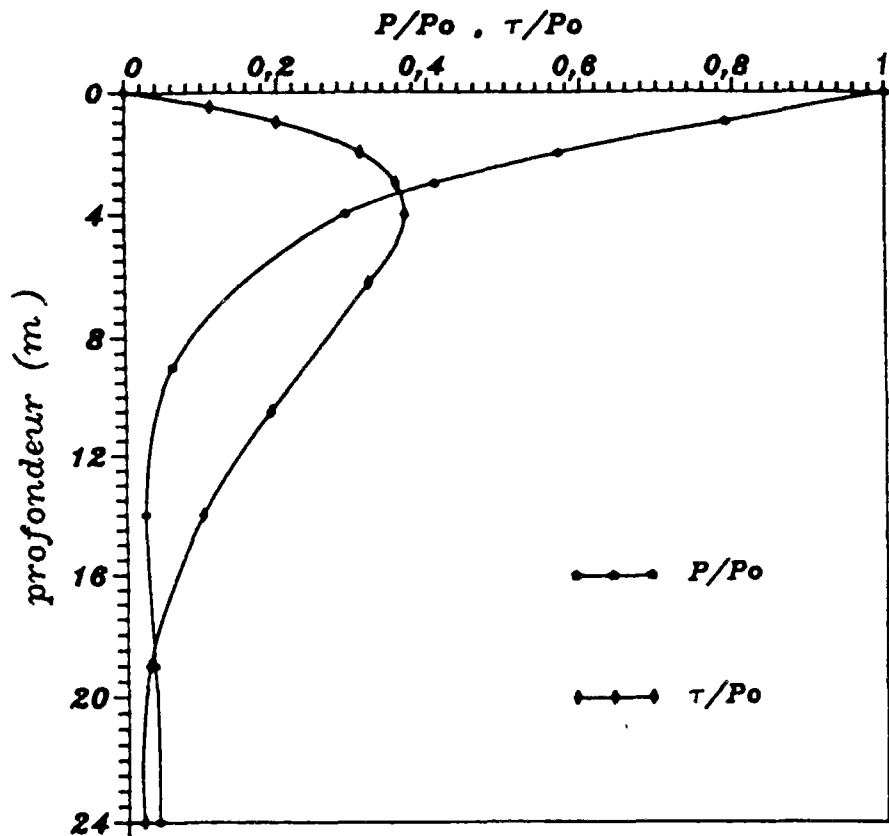


Figure VII-12 : Variation en profondeur de la pression interstitielle et de la contrainte de cisaillement normalisées.

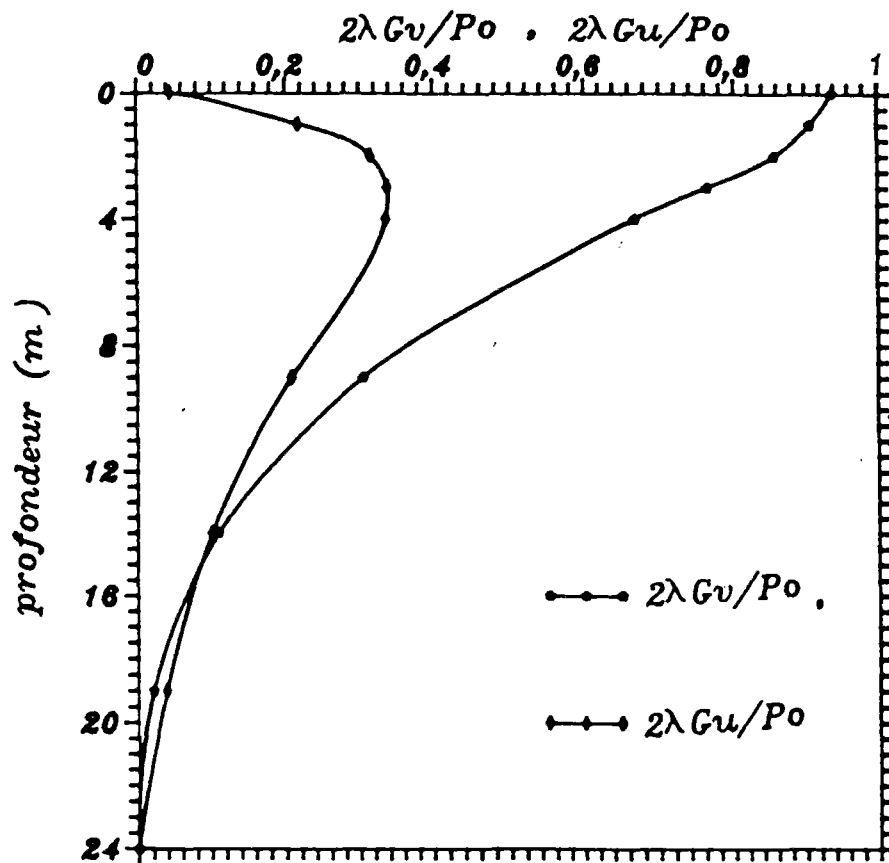


Figure VII-13 : Variation des déplacements adimensionnels en profondeur.

à la valeur moyenne des pressions au niveau de chacun des noeuds (figure VII-11). La pression hydraulique sur la surface est égale à la pression de la houle sur chaque noeud situé sur la surface.

-Le substratum est rigide rugueux et imperméable :  $u=v=0$  ,  
 $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$  .

-Sur les côtés B1 et B2 : le déplacement vertical est nul, ainsi que la pression interstitielle ( $v=0$  et  $p=0$ )

Les résultats obtenus à partir du calcul numérique sont présentés sur les figures (VII-12 et VII-13).

Comme on le constate sur la figure VII-13, le déplacement horizontal à la surface du sol n'est pas nul, contrairement au cas de la solution analytique. Le paramètre  $\frac{2\lambda Gv}{P_0}$  n'est pas non plus égal à un. Dans les deux cas, ce petit écart avec la solution analytique est dû à l'hypothèse faite sur l'épaisseur de la couche du sol ( $z=L$ ), considérée comme infinie. En réalisant le calcul pour des épaisseurs de  $3L/2$  et  $2L$ , on constate qu'on approche davantage la valeur analytique (tableau VII-1).

Tableau VII-1 : Influence de l'épaisseur de la couche sur le calcul des déplacements horizontal et vertical en surface

| D    | $\frac{D}{L}$ | $\frac{2\lambda Gv}{P_0}$ | $\frac{2\lambda Gu}{P_0}$ |
|------|---------------|---------------------------|---------------------------|
| 12 m | 0,5           | 0,667                     | 0,068                     |
| 24 m | 1,0           | 0,938                     | 0,045                     |
| 36 m | 1,5           | 0,9673                    | 0,038                     |
| 48 m | 2,0           | 0,981                     | 0,009                     |

Une autre conséquence de cette hypothèse correspond à une petite augmentation de la pression interstitielle et de la contrainte de cisaillement, à proximité du substratum (figure VII-12). En augmentant l'épaisseur de couche, cette augmentation décroît et on s'approche de la solution analytique.

La solution analytique proposée par YAMAMOTO [1978], MADSEN [1978] et OKUSA [1985] considère au niveau des équations le cas général et se limite à des conditions aux limites assez particulières c'est-à-dire l'épaisseur infinie (un demi-espace) avec une surface horizontale et  $G/K' \rightarrow 0$ . Par conséquent, les expressions montrées au début de cette partie ne peuvent résoudre que des cas restreints, mais, par contre, avec le programme de calcul en éléments finis, nous pouvons étudier tous les cas, ainsi que l'effet des différents paramètres qui sont importants.



### III CAS DU FOND HORIZONTAL

~~~~~

III-1 INTRODUCTION

Comme indiqué précédemment, les résultats analytiques obtenus par *YAMAMOTO* et *MADSEN* concernent un massif élastique, isotrope et homogène de profondeur infinie. Il est donc intéressant de prolonger cette approche par l'étude de l'influence d'un certain nombre de paramètres, rendue possible par le calcul numérique. On examinera donc l'effet des paramètres suivants:

- épaisseur de la couche de sol sous-marin,
- effet de couches distinctes,
- effet de la perméabilité et de l'anisotropie hydraulique,
- anisotropie mécanique.

A titre d'exemple, on présente ici la réponse du massif sous-marin dans le cas d'une profondeur finie égale à la demi-longueur d'onde, pour une houle de 24 m de longueur d'onde, de 2,975 m de hauteur et de période 3 secondes, agissant sur une profondeur d'eau de 3,63 m. Cette houle a été choisie pour obtenir une pression de crête de 10 kPa sur le fond. La couche repose sur un substratum imperméable, rigide et rugueux.

L'épaisseur de la couche du sol est $L/2 = 12m$. Le calcul a été effectué avec un rapport des perméabilités horizontale et verticale égal à 1, 2 et 5. Les résultats obtenus pour les différents rapports de perméabilité sont pratiquement différents contraire de cas d'un massif semi-infinie. Une gamme assez large de sables allant du sable lâche au sable dense, à l'anisotropie hydraulique est étudiée. On présente, dans cette partie, les courbes de variation des différentes grandeurs pour le sable dense et fin (HF), dans le cas de l'anisotropie hydraulique (1,2,5)et, dans la partie suivante, l'effet de la variation de perméabilité isotrope sera mise en évidence.

Le sol est caractérisé par les valeurs suivantes :

$$G=5.10^5 \text{ kPa} \quad \text{et} \quad \nu=0,33 .$$

Les variations de la pression interstitielle et de la contrainte de cisaillement en fonction de la profondeur sont présentées sur les figures VII-14 et VII-15. Il est important de noter que, à proximité du substratum imperméable, la pression interstitielle et la contrainte de cisaillement augmentent. La valeur maximale de cette contrainte se trouve à la profondeur $z=3,5m$ ($z/L=0,15$). Cette valeur est proche de celle obtenue par la solution analytique pour le demi-espace ($z/L=0,16$). Par contre, la valeur maximale de la contrainte de cisaillement normalisée selon la solution analytique est $\frac{\tau}{P_o}=0,37$, alors qu'on a ici $\frac{\tau}{P_o}=0,29$. On observe que l'anisotropie hydraulique influe sur la distribution de la pression interstitielle. Par contre, la contrainte de cisaillement n'est pas influencée par l'anisotropie hydraulique.

Les variations des déplacements horizontaux et verticaux sont représentés sous forme adimensionnelle par les paramètres $\frac{2\lambda Gv}{P_o}$ et $\frac{2\lambda Gu}{P_o}$ en fonction de la profondeur, sur les figures VII-18 et VII-19. Comme précédemment, le paramètre $\frac{2\lambda Gv}{P_o}$ vaut entre 0,64 et 0,67, au lieu de 1 dans le cas infini, et $\frac{2\lambda Gu}{P_o}$ vaut entre 0,068 et 0,085 au lieu de 0. La distribution des contraintes effectives verticales et horizontales en fonction de la profondeur est représentée sur les figures VII-16 et VII-17. Ces contraintes ne sont pas nulles sur le substratum, et leurs maxima sont supérieurs à ceux du cas infini. La contrainte effective horizontale n'est pas nulle sur la surface, et cette contrainte pour le rapport hydraulique 5 est inférieure aux autres cas. Par contre, dans le cas d'anisotropie le plus grand (5), on observe que les valeurs des contraintes effectives verticales sont supérieures à leurs valeurs dans les cas de l'isotropie hydraulique ou quand l'anisotropie est plus faible (2). Cette différence est observée de la même manière

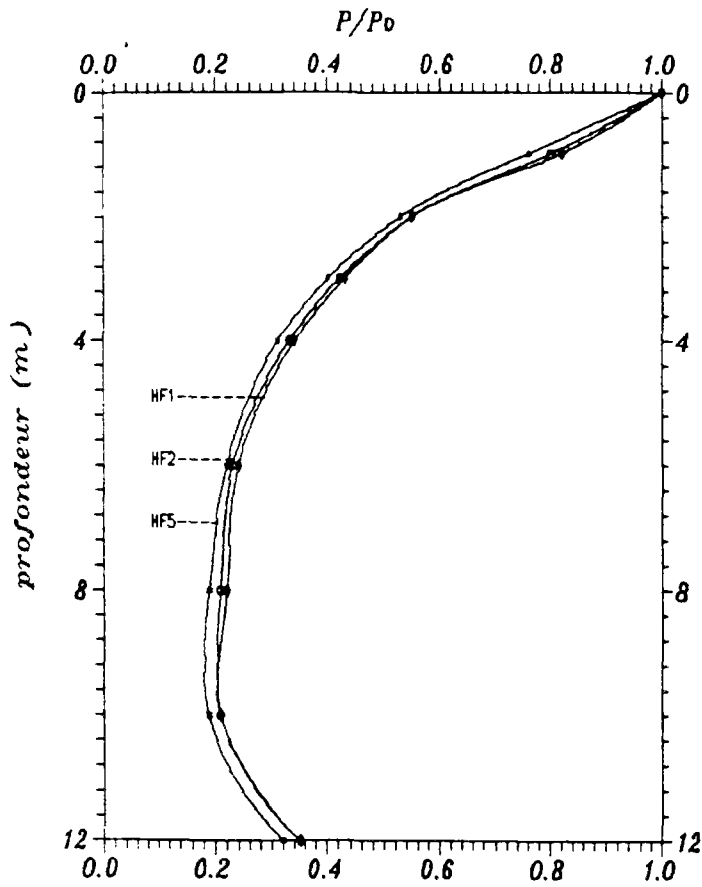


Figure VII-14 : Dissipation de la pression interstitielle en profondeur pour différents rapports d'anisotropie hydraulique.

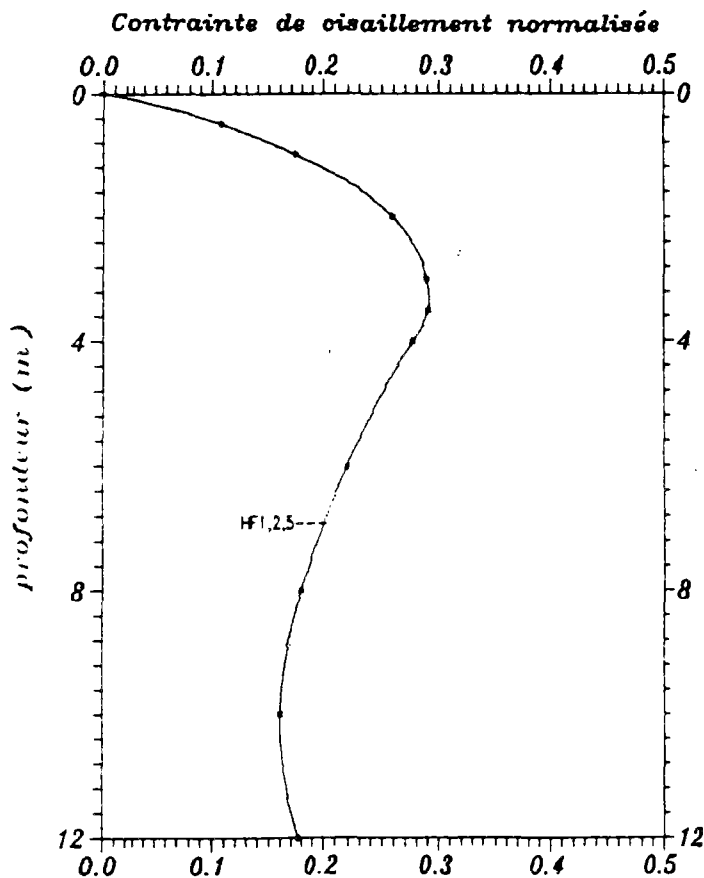


Figure VII-15 : Variation de la contrainte de cisaillement en profondeur pour les différentes valeurs de l'anisotropie hydraulique.

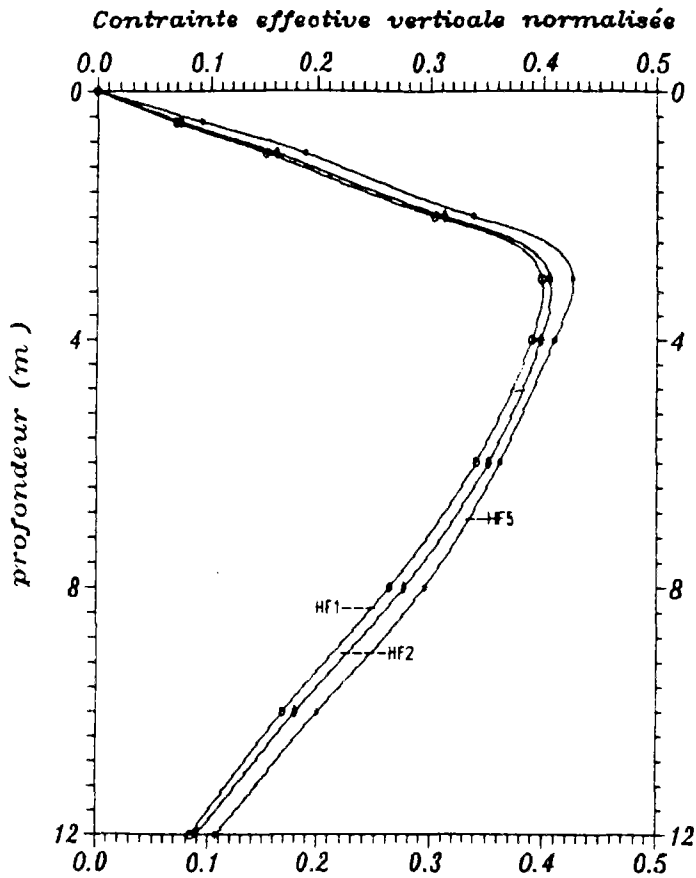


Figure VII-16 : Distribution verticale de la contrainte effective normale verticale.

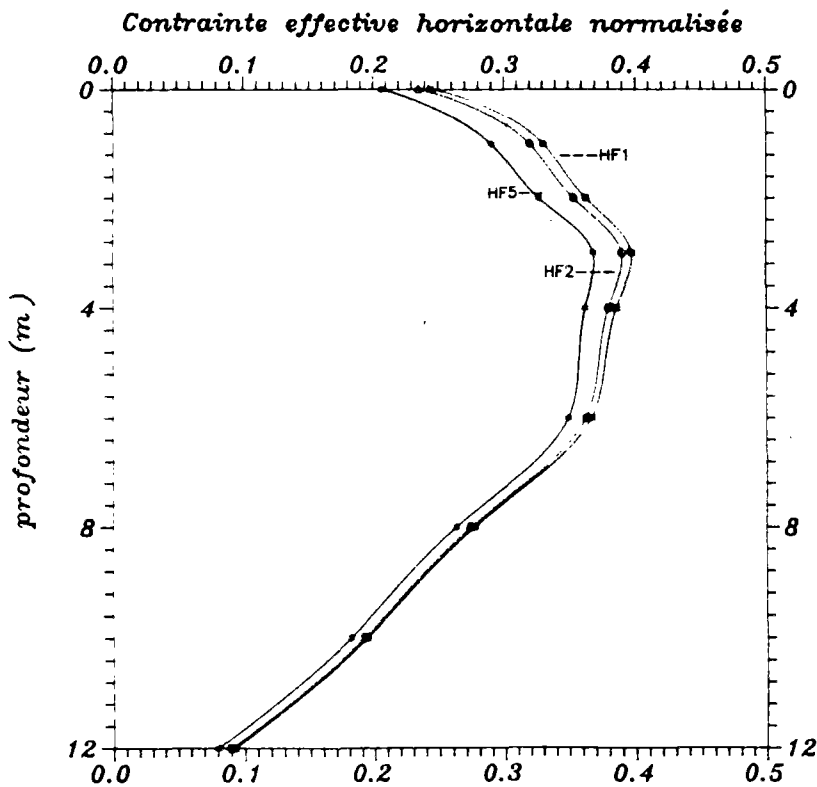


Figure VII-17 : Variation de la contrainte effective normale horizontale en fonction de la profondeur pour un sable hydrauliquement anisotrope.

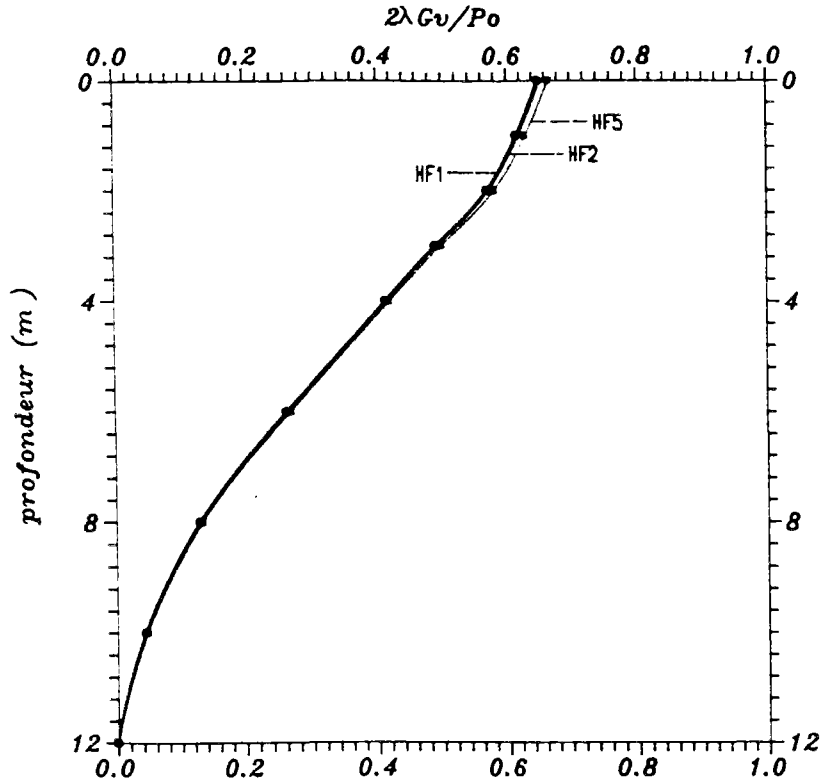


Figure VII-18 : Déplacements verticaux adimensionnels en profondeur.

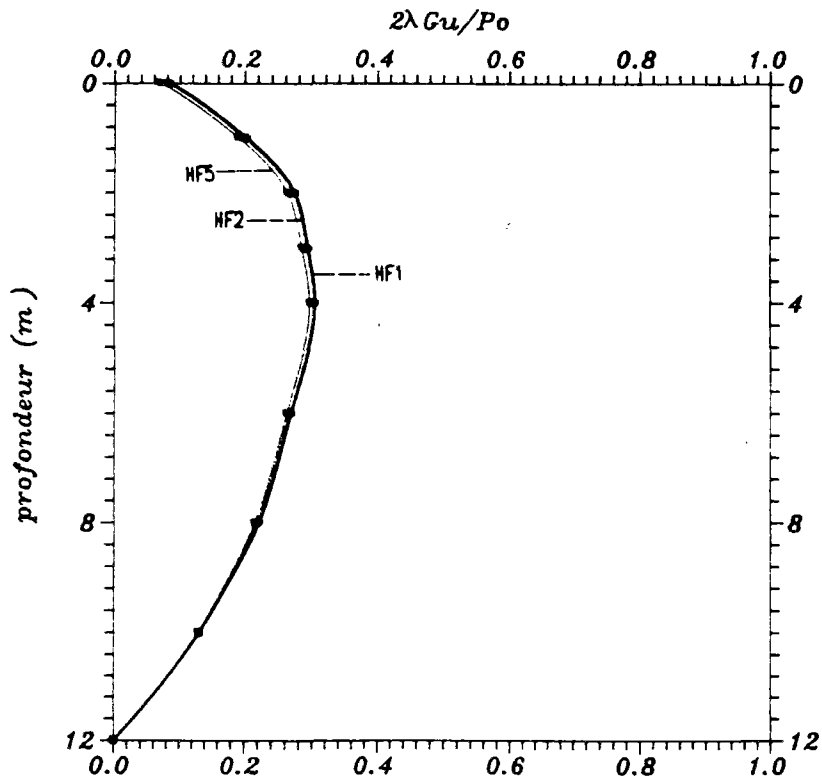


Figure VII-19 : Déplacements horizontaux adimensionnels pour les différents rapports d'anisotropie hydraulique.

pour les déplacements horizontaux et verticaux. Cette exemple montre l'effet combiné de l'anisotropie hydraulique et l'épaisseur de la couche du sol. On constate donc que l'épaisseur de la couche de sol joue un rôle important. Il est manifeste que des paramètres tels que G (rigidité du sol) et K (perméabilité isotrope du sol) ont également un effet marqué. L'étude de l'influence de ces paramètres fait l'objet du prochain paragraphe.

III-2 INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR DE LA COUCHE DE SOL

Suivant les caractéristiques de la houle choisie, on a étudié les différentes épaisseurs entre $L/10$ et L . Pour optimiser le calcul numérique, pour chaque épaisseur un maillage approprié a été choisi. Les différents maillages utilisés sont présentés sur les figures VII-11 et VII-20.

Le premier maillage est constitué de 9 noeuds sur une colonne et correspond à 225 points et 384 éléments triangulaires à 3 noeuds (fig VII-11). Il est utilisé pour les faibles épaisseurs. Pour les plus fortes épaisseurs, le deuxième maillage utilisé a 15 noeuds sur une colonne (fig VII-20), il est constitué de 390 points et de 672 éléments triangulaires à 3 noeuds.

La première houle choisie est caractérisée par $L=40$ m, $H=2,75$ m et $T=7$ s. Cette houle correspond à la houle choisie par *FINN, SIDDHARTHAN et MARTIN [1983]*. La surface horizontale du sol homogène et isotrope se situe à 4m de profondeur d'eau, ce qui donne une amplitude de la pression de 11,42 kPa.

Les épaisseurs considérées D , et les épaisseurs relatives correspondantes sont données dans le tableau VII-2.

Tableau VII-2 : Différentes épaisseurs étudiées

D(m)	4	8	16	20	30	40
D/L	0,10	0,20	0,40	0,50	0,75	1,0

Les caractéristiques du sol sont :

$$G = 10^4 \text{ kPa} \quad \text{et} \quad \nu = 0,333 \quad \text{et} \quad K = 5.10^{-4} \text{ m/s} .$$

Afin d'avoir une conclusion générale et pratique, on a effectué le calcul pour un autre exemple.

En choisissant une autre houle de projet avec les caractéristiques suivants $L=324 \text{ m}$, $H = 24 \text{ m}$ et $T = 15 \text{ m}$ dans une profondeur de 70 m d'eau, on aura $P_o = 57,92 \text{ kPa}$ sur la surface du sol comme amplitude de la pression cyclique. Cette houle correspond à la houle de projet en mer du Nord, introduite par MOSHAGEN et TORUM [1975].

Les épaisseurs étudiées dans cet exemple et les épaisseurs relatives correspondantes (D/L) sont données dans le tableau VII-3.

Tableau VII-3 : Epaisseurs étudiées dans le deuxième exemple

D(m)	25	50	65	75	100	125	150	200	250	324
D/L	0,077	0,154	0,2	0,23	0,31	0,386	0,463	0,617	0,772	1

Le maillage présenté sur la fig. VII-20 a été utilisé dans cet exemple. Les caractéristiques du sol sont identiques.

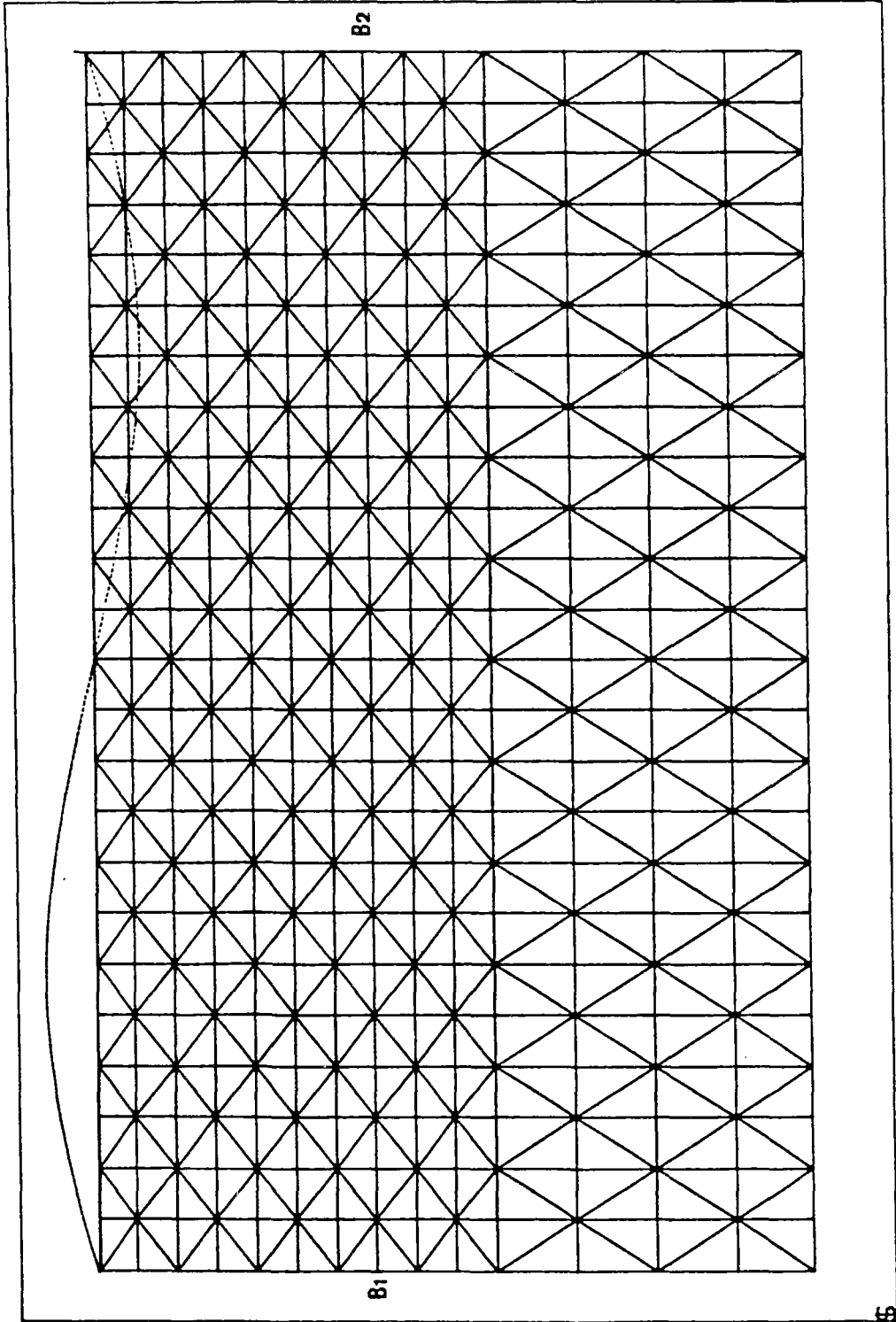


Figure VII-20 : Maillage utilisé pour les grandes épaisseurs.

Conditions aux limites

Pour ces deux exemples, le calcul a été fait avec les conditions aux limites suivantes.

- Pour le substratum, les déplacements horizontaux et verticaux sont nuls ($u=v=0$). Quant à la condition hydraulique, elle correspond à une base imperméable ($\frac{\partial p}{\partial z} = 0$).

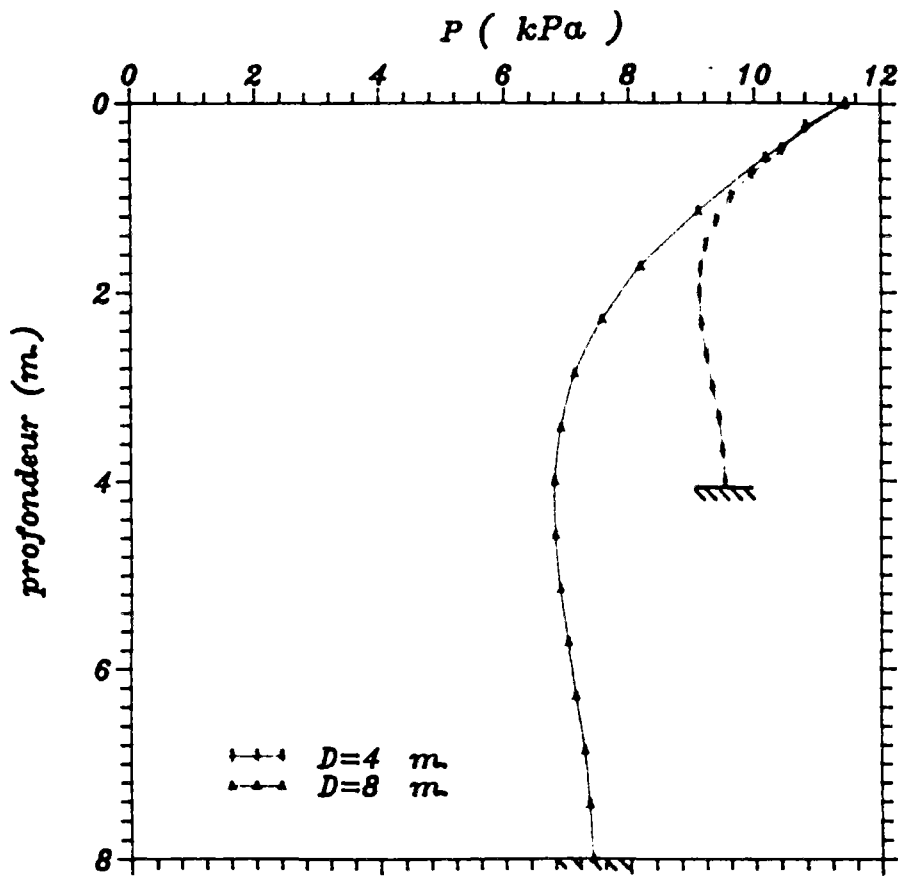
- La surface supérieure est chargée par la houle, chaque élément étant soumis à une pression constante égale à la moyenne des pressions sur les deux noeuds contigus. Les déplacements horizontaux et verticaux sont libres et la pression interstitielle sur la surface est égale à la pression de la houle.

- Sur les limites latérales, correspondant aux noeuds de la houle, la pression interstitielle et le déplacement vertical sont nuls, et le déplacement horizontal libre .

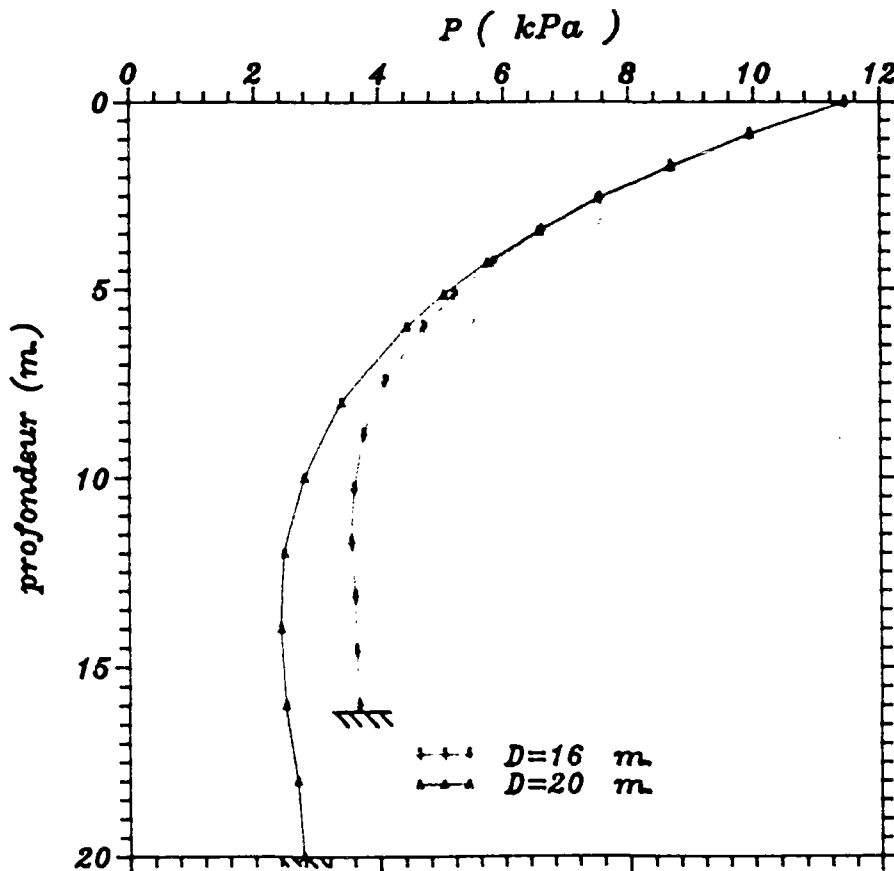
RESULTATS

Pression interstitielle

Les variations de la pression interstitielle sous la crête de la houle en fonction de la profondeur pour chaque épaisseur sont présentées sur les figures VII-21, a, b et c pour le premier exemple, et sur les figures VII-22 a, b et c pour le deuxième exemple. On peut constater que la dissipation verticale de la pression interstitielle est largement influencée par l'épaisseur de la couche de sol. Pour les couches assez minces par rapport à la longueur de la houle, la pression interstitielle ne diminue pas rapidement, et un phénomène d'augmentation de la pression interstitielle à proximité du substratum imperméable se manifeste. Pour des épaisseurs supérieur à $3/4 L$, on note qu'on s'approche raisonnablement de la solution analytique et la pression interstitielle est assez faible.



(a)



(b)

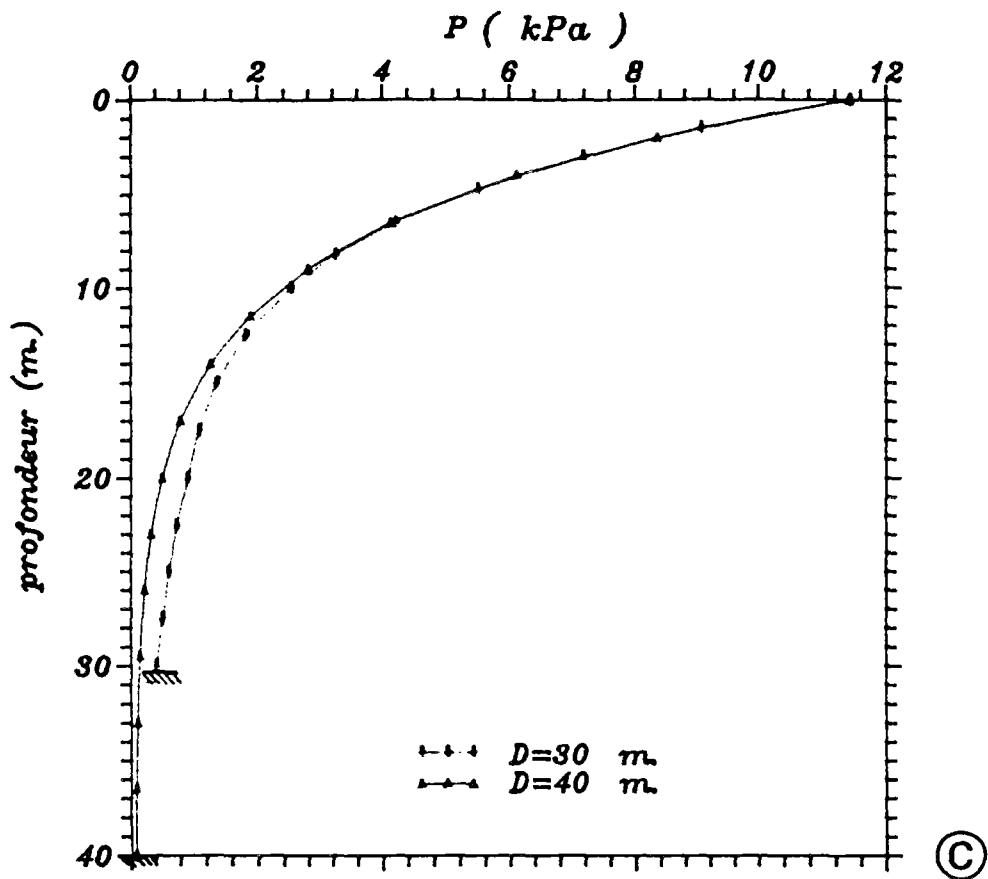
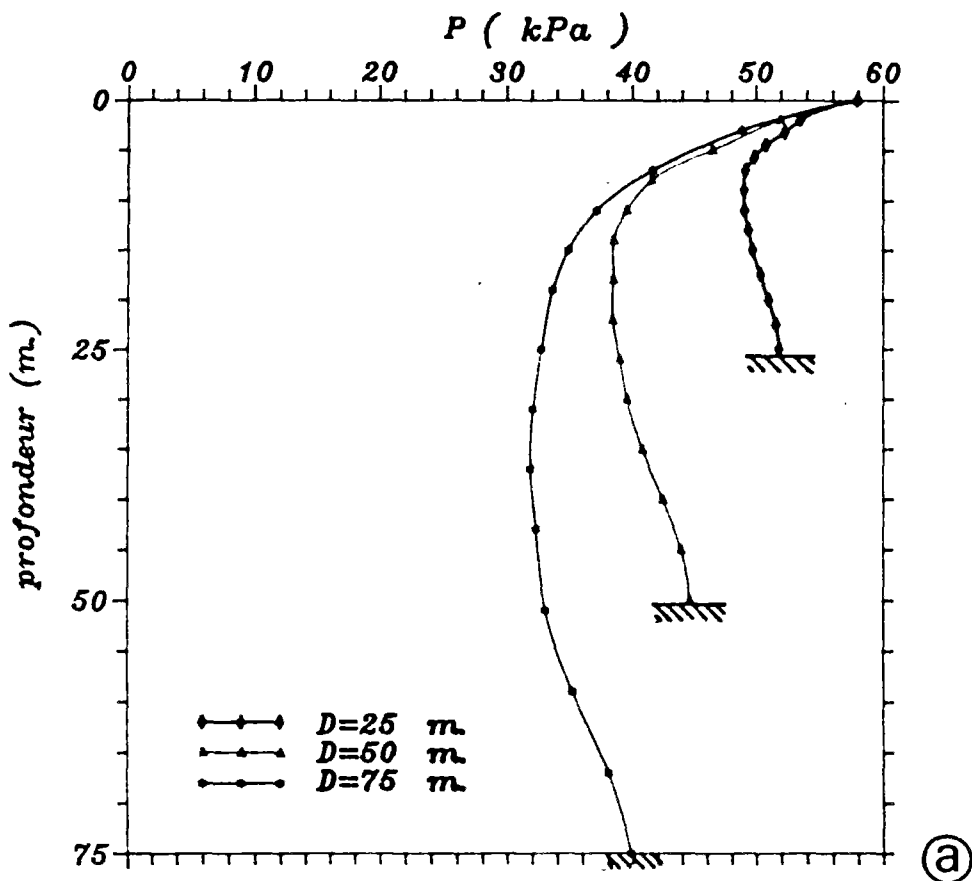


Figure VII-21 : Dissipation de la pression interstitielle en profondeur pour les différentes épaisseurs (a, b, c) pour la houle de 40 m.



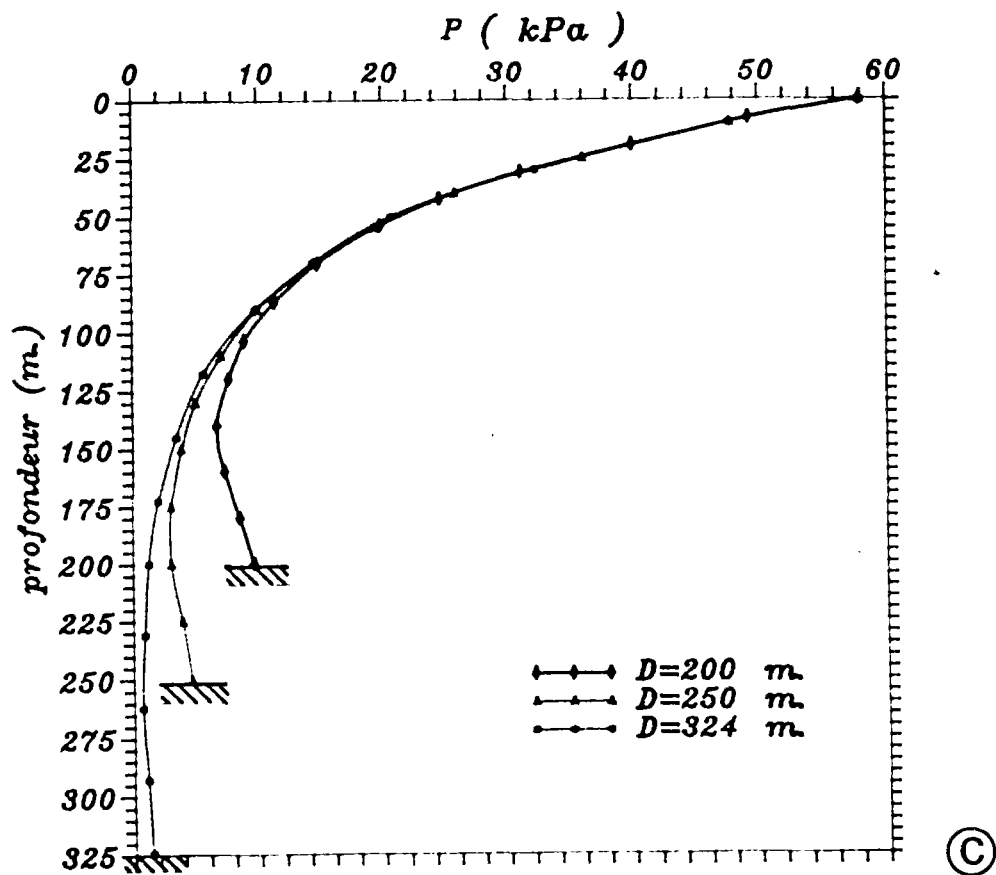
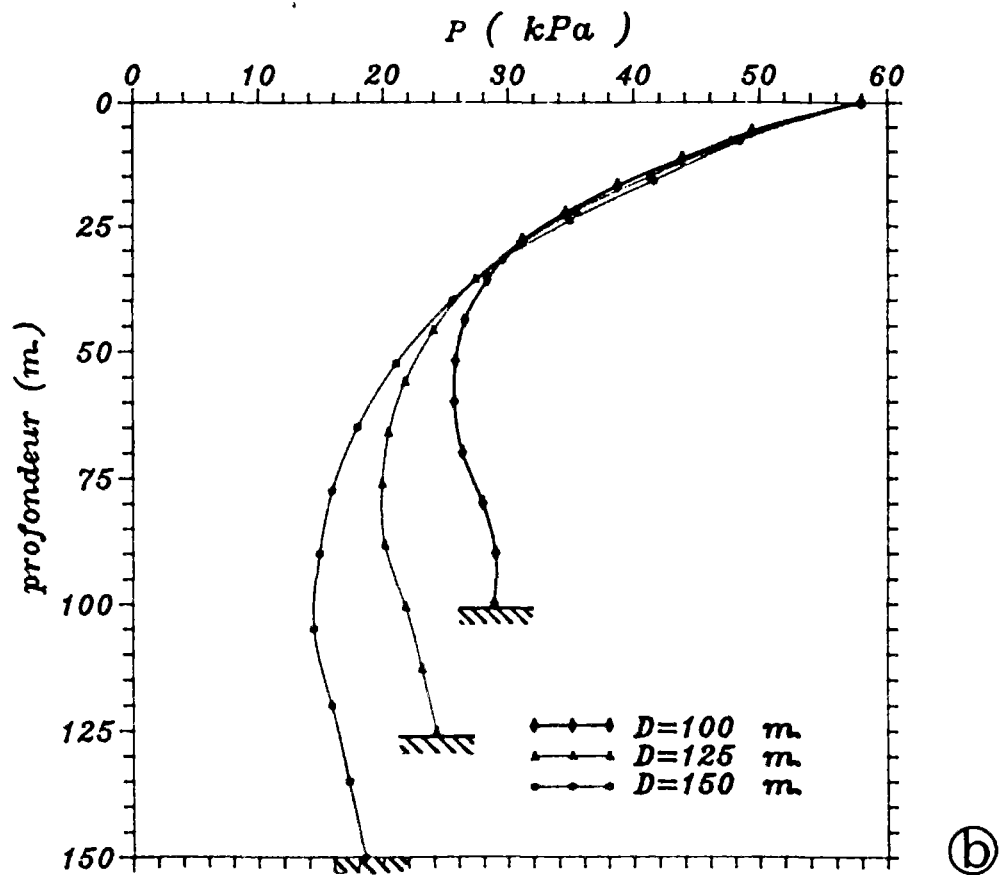


Figure VII-22 : Dissipation de la pression interstitielle en profondeur pour les différentes épaisseurs (a, b, c) pour la houle de 324 m.

Contraintes de cisaillement

L'évolution de la distribution de la contrainte de cisaillement en profondeur en fonction de l'épaisseur de la couche de sol, sous le noeud de la vague, pour lequel le cisaillement est maximum, est présentée sur les figures VII-23, a et b. Les figures VII-24 a, b et c montrent la même variation pour le deuxième exemple.

On observe que, jusqu'à l'épaisseur de $0,4 L$, la valeur maximale de la contrainte de cisaillement se situe, dans les deux cas, à l'interface du substratum rigide et rugueux et de la couche de sol ; cette valeur dépend de l'épaisseur de la couche. Pour les couches très minces, la variation en fonction de la profondeur est linéaire. La valeur maximale est obtenue à une profondeur $D=8 \text{ m}$ ($0,2L$) dans le premier exemple, et $D = 50 \text{ m}$ ($0,154L$) dans le second. Les valeurs correspondantes de la contrainte de cisaillement normalisée par la pression p_0 sont comparables, et valent respectivement $\tau/p_0=0,42$ et $\tau/p_0=0,40$. Dans le deuxième exemple, le cas de l'épaisseur $D = 65 \text{ m}$ ($0,2L$) donne à peu près la même valeur de contrainte de cisaillement $\tau/p_0=0,394$. Quand l'épaisseur de la couche du sol augmente, l'allure linéaire des courbes s'estompe, et une incurvation progressive apparaît. On observe que, pour des épaisseurs supérieures à $0,4L$, le maximum n'est plus situé à l'interface, mais au sein de la couche de sol, à une profondeur proche de celle du maximum analytique obtenu pour une épaisseur infinie, pour un rapport $Z/L=0,16$.

Avec l'augmentation de l'épaisseur, la forme de la courbe se rapproche de plus en plus de la courbe analytique, avec décroissance de la valeur à l'interface et, pour les épaisseurs supérieures à $3/4 L$, le maximum est voisin de celui de la solution analytique ($0,37 p_0$). Cependant, ce maximum est inférieur à la contrainte de cisaillement de l'interface obtenue pour l'épaisseur de $0,2 L$, où l'allure est approximativement linéaire.

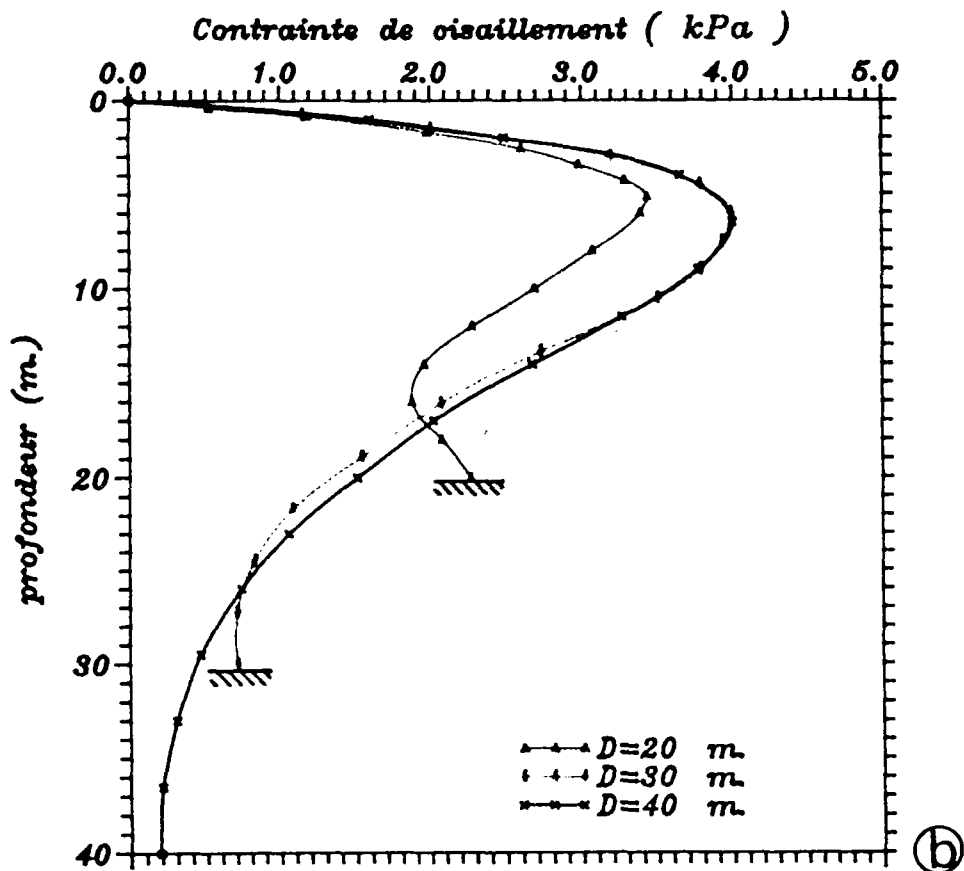
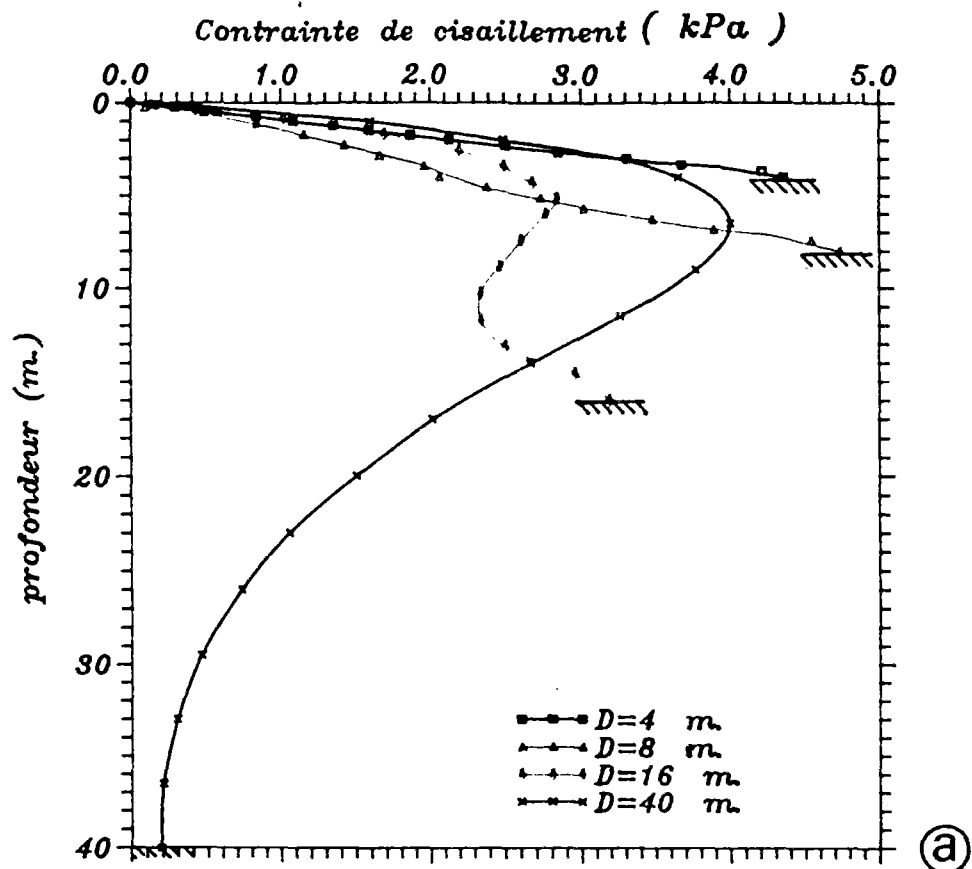
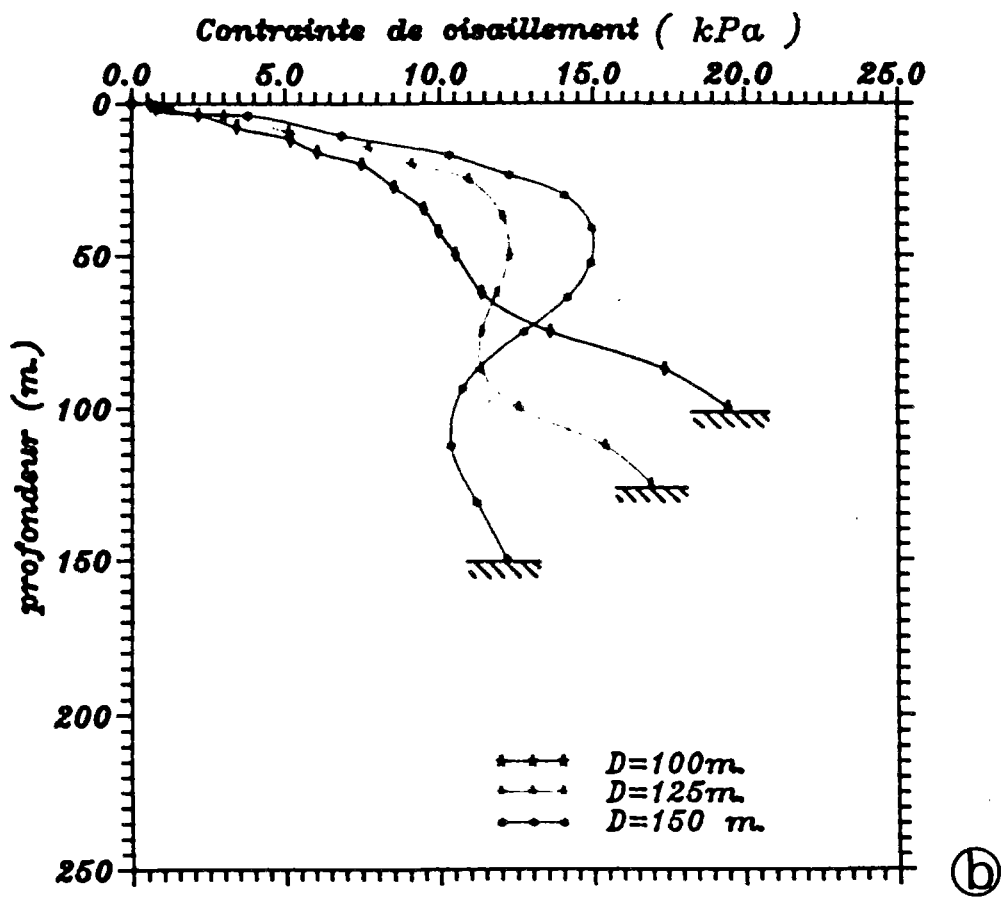
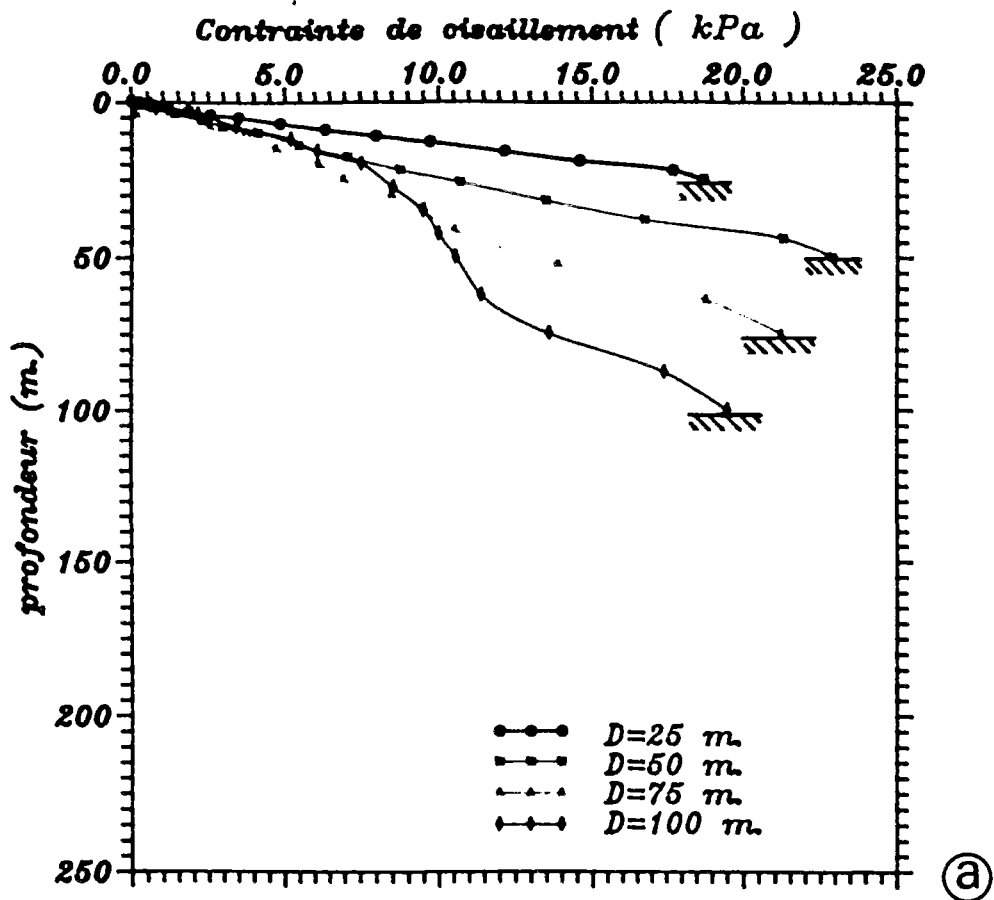


Figure VII-23 : Distribution de la contrainte de cisaillement en profondeur pour les différentes épaisseurs (a, b) pour la houle de 40 m.



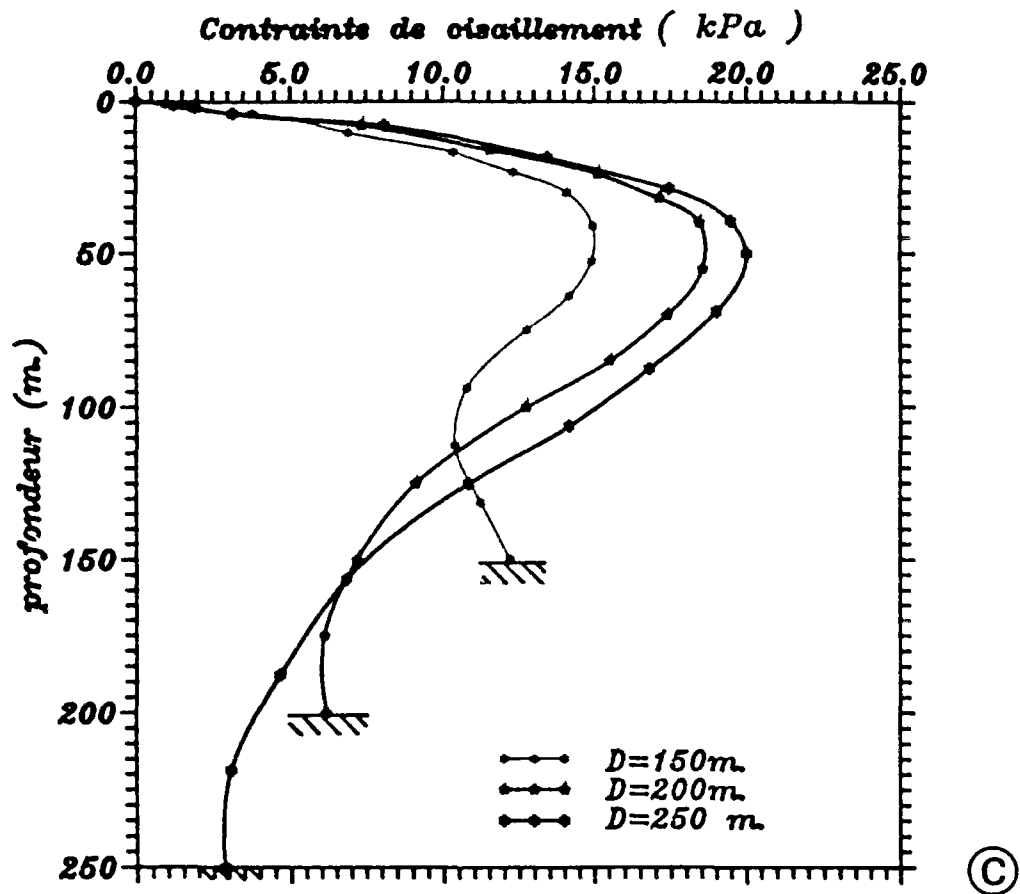


Figure VII-24 : Distribution de la contrainte de cisaillement en profondeur pour les différentes épaisseurs (a, b, c) pour la houle de 324 m.

Dans les cas où $D > 0,4 L$, l'évolution des courbes en dessous du maximum est caractérisée par un changement de signe de la courbure et un point d'inflexion ; à proximité du substratum, la contrainte recommence à croître. Ce phénomène est plus marqué pour le cisaillement que pour la pression interstitielle, et il s'atténue quand l'épaisseur augmente. Au dessus de $D = L$, le phénomène disparaît et on retrouve la solution analytique.

La localisation, pour de faibles épaisseurs, du maximum de cisaillement à l'interface avec le substratum rigide et rugueux est attribuée à l'accrochage des grains de sol à ce niveau. En d'autres termes, le substratum exerce sur le sol des contraintes de cisaillement de réaction par rapport à celles induites par la houle, afin de maintenir l'interface stable. Plus le substratum s'éloigne de la surface, moins cet effet d'accrochage influe sur la répartition des contraintes de cisaillement. La réaugmentation observée à sa proximité par $0,4 L < D < L$ montre cependant, même pour de plus grandes épaisseurs, l'effet local de cet accrochage.

Contrainte effective normale verticale

Les calculs ont été menés, pour les contraintes normales verticales et horizontales, pour les deux types de houle considérés précédemment. Comme dans le cas du cisaillement, les résultats sont analogues, et on présentera ici ceux obtenus pour une longueur d'onde de 40 m.

Le profil de contrainte effective verticale sous la crête est donné sur la figure (VII-25 a, b). Cette contrainte sous la crête est de type compression.

Si, pour 40 m, le profil est analogue à celui de l'épaisseur infinie, on observe, entre 30 et 16 m, une valeur maximale de la

contrainte verticale supérieure à celle du cas infini, et située au même niveau dans la couche ($0,16 L$). Pour des épaisseurs inférieure ou égale à 10 m, la valeur maximum devient inférieure au cas infini. On observe également une variation similaire de la contrainte au niveau du substratum, faible pour 40 m, croissante jusqu'à un maximum pour 16 m, et décroissante pour de plus faibles épaisseurs.

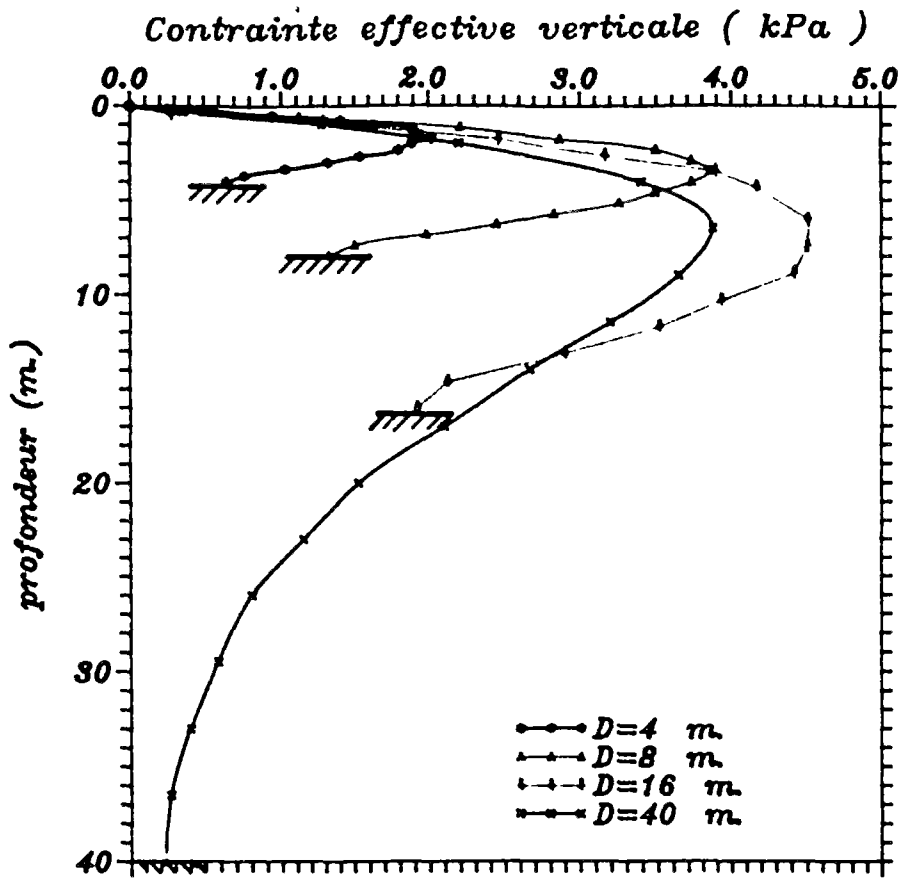
Contrainte effective normale horizontale

Les profils des valeurs absolues de la contrainte effective normale horizontale, pour les différentes couches, sont présentés sur la figure VII-26. Cette contrainte sous la crête est de type traction. On observe que, pour la couche d'épaisseur 40 m, le profil est analogue à celui de l'épaisseur infinie. Dans le cas de 16 m, le maximum au sein du sol est plus grand que le cas de 40 m. Pour les couches minces, 8 m et 4 m, le maximum de la contrainte effective normale horizontale se situe à la surface du sol et l'allure de sa courbe de variation est linéaire et décroissante. La plus grande valeur correspond à une couche d'épaisseur $0,2 L = 8$ m.

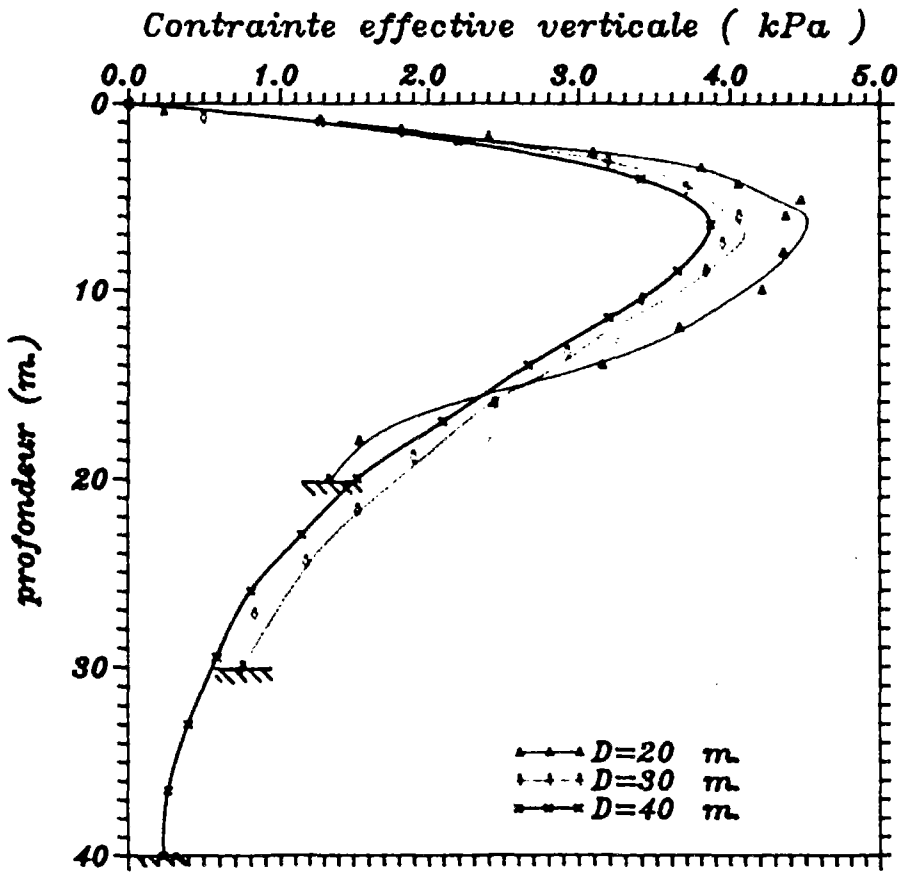
III-3 DÉPLACEMENTS DU MASSIF ET ÉPAISSEUR CRITIQUE

On sait que la connaissance des déplacements engendrés par la houle sur le massif sous-marin est fondamentale pour les structures : en surface pour les pipelines, émissaires ou câbles de communication, et en profondeur pour les systèmes de fondations d'ouvrages offshore. C'est dans cette perspective qu'on commente ici les déplacements obtenus dans le cas élastique.

On présente sur les figures VII-27 a et b, les profils de déplacements horizontaux obtenus pour les deux houles considérées, en fonction des différentes épaisseurs sous le noeud de la vague. On observe, comme précédemment, que l'épaisseur d'une longueur d'onde (40 et 324 m) donne une solution proche de l'épaisseur infinie, avec



(a)



(b)

Figure VII-25 : Variation de la contrainte effective normale verticale en profondeur pour les différentes épaisseurs (a, b).

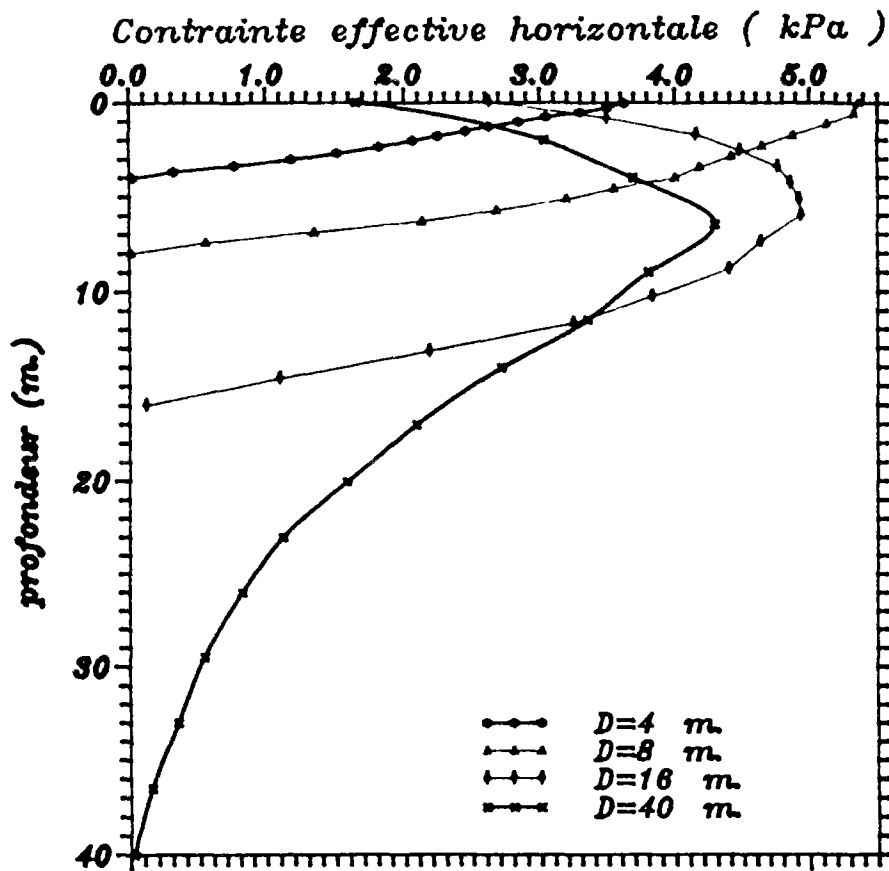


Figure VII-26 : Distribution de la contrainte effective normale horizontale en profondeur pour les différentes épaisseurs.

cependant un léger déplacement en surface. Pour une épaisseur de $L/2$ (20 et 162 m), on note un fort gradient de déplacement à proximité du substratum, et l'existence d'un maximum supérieur au cas infini, à une profondeur comparable ($0,16 L$). Pour respectivement 16 m et 125 m, le maximum du déplacement atteint, en fonction de la profondeur, sa plus grande valeur. Pour de plus faibles épaisseurs, le maximum a ensuite tendance à décroître en se rapprochant de la surface, alors que le déplacement en surface augmente de façon sensible, pour atteindre une valeur maximale pour des épaisseurs de 8 m et 65 m ($0,2 L$). Pour des épaisseurs inférieures, cette valeur décroît.

Les figures VII-28 a et b montrent, pour les deux houles, la variation des déplacements horizontaux d'un point situé en surface de sol (fond marin) sous le noeud de la houle, en fonction de l'épaisseur de couche. On observe bien l'existence d'une épaisseur critique égale à $0,2 L$, pour laquelle le déplacement horizontal du fond marin est maximum. Si l'ordre de grandeur semble acceptable pour la houle de $L = 40$ m ($0,12$ cm), il devient plus important pour la houle de projet de Mer du Nord ($L = 324$ m), avec des valeurs de 9 cm. Il est probable que de tels mouvements soient de nature à menacer la stabilité des ouvrages sous-marins posés sur le fond.

Les figures VII-29 a et b présentent l'évolution du tassement d'un point de surface situé sous la crête de la houle en fonction de l'épaisseur. On note une croissance du tassement pour des couches comprises entre 0 et $\frac{L}{2}$, suivie d'une stabilisation, qui correspond à une dissipation de l'effet du chargement de surface, pour des profondeurs suffisamment importantes.

Finalement, la figure VII-30 montre la variation de la valeur maximale du déplacement vertical (sous la crête, sur le fond) et du déplacement horizontal (sous le noeud, au sein du massif) en fonction de l'épaisseur de la couche.

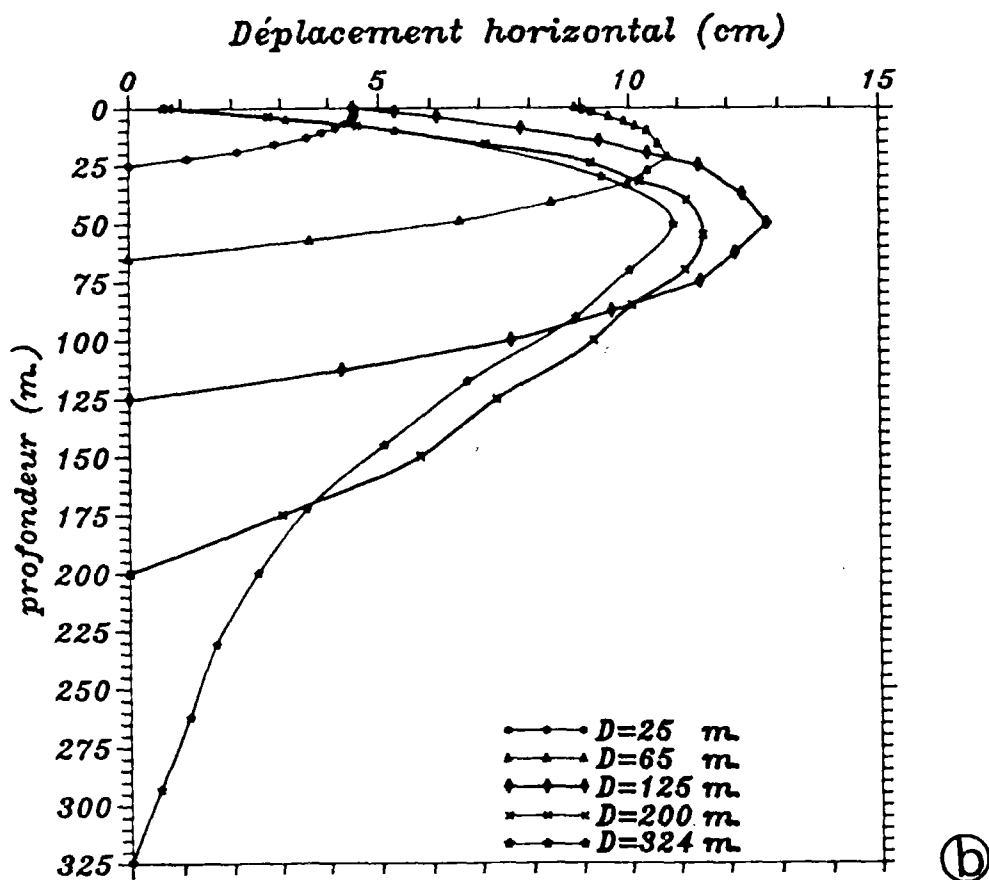
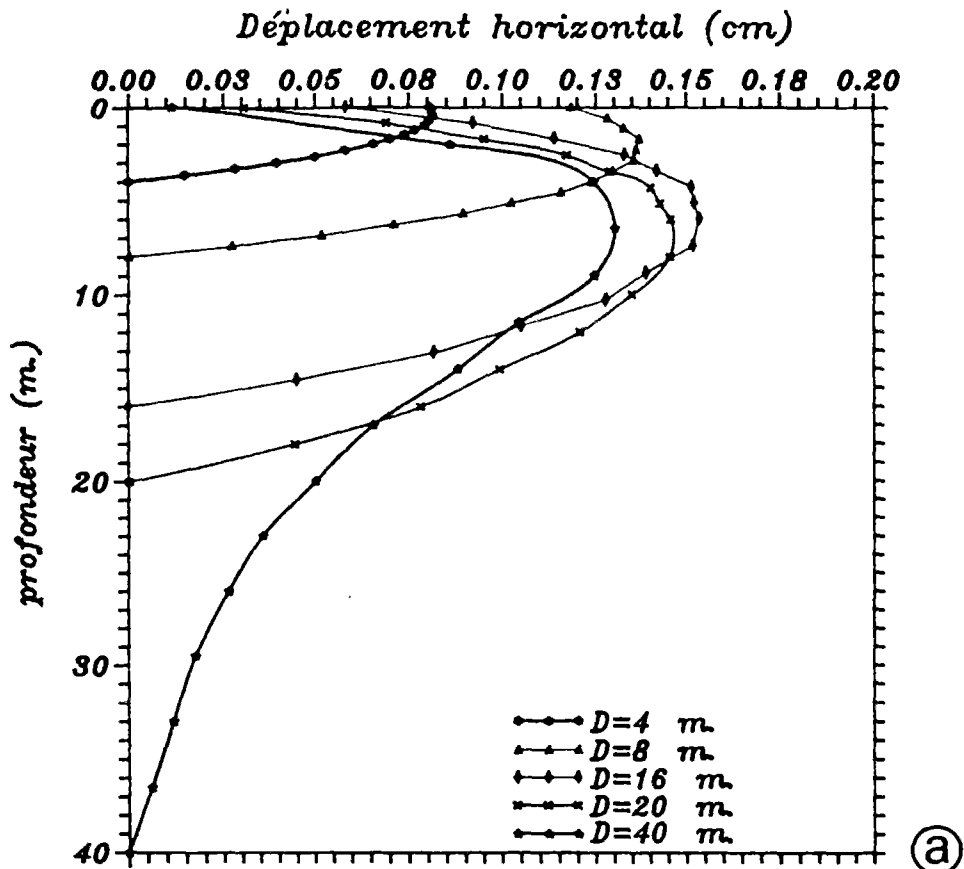


Figure VII-27 : Variation des déplacements horizontaux en profondeur pour les différentes épaisseurs et les houles choisies (a, b).

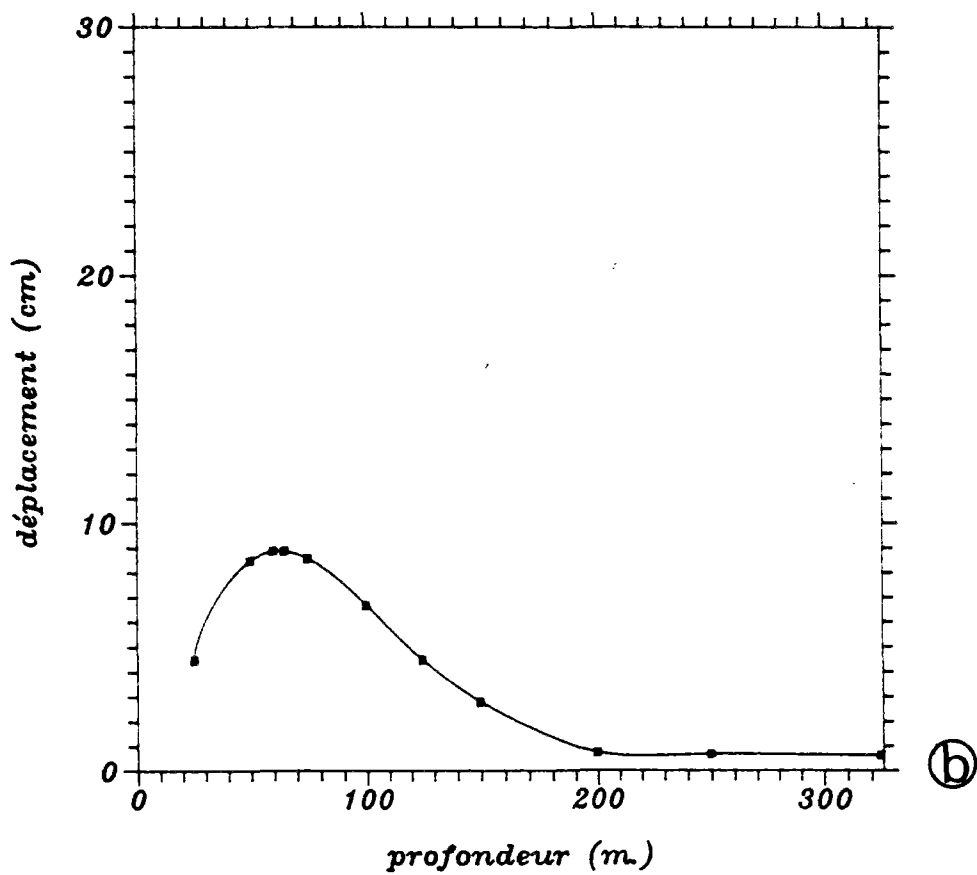
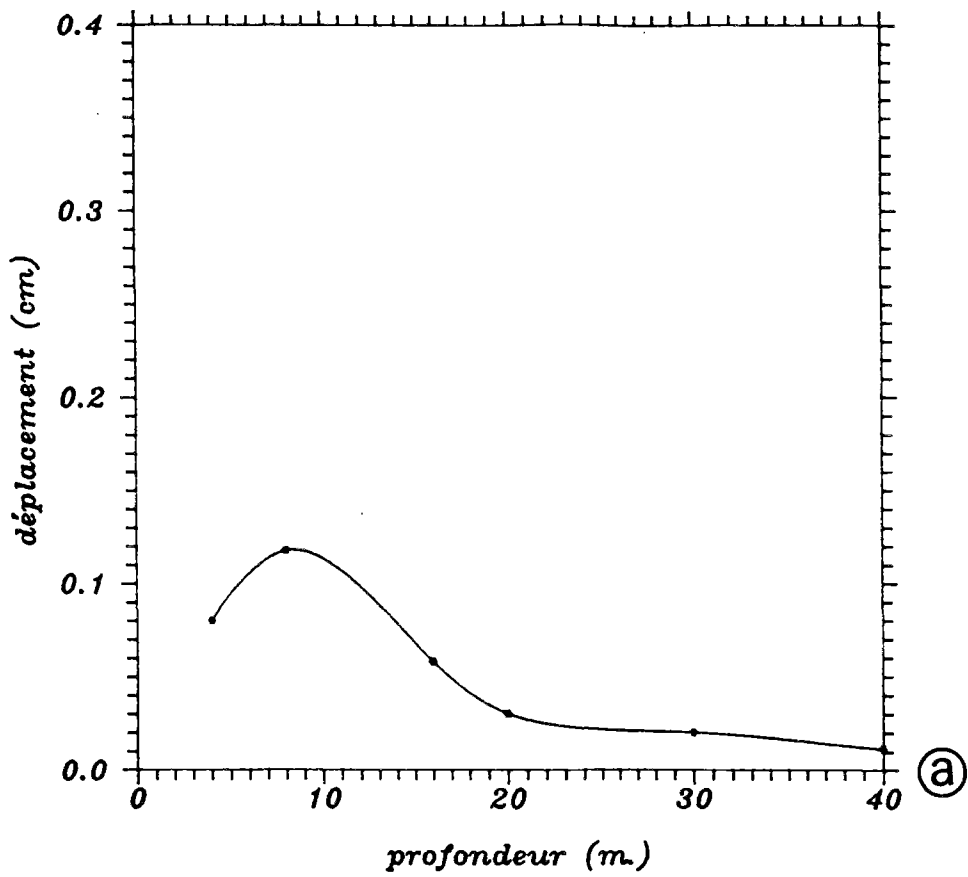


Figure VII-28 : Evolution du déplacement horizontal d'un point du fond marin en fonction de l'épaisseur de la couche de sol pour les deux houles (a, b).

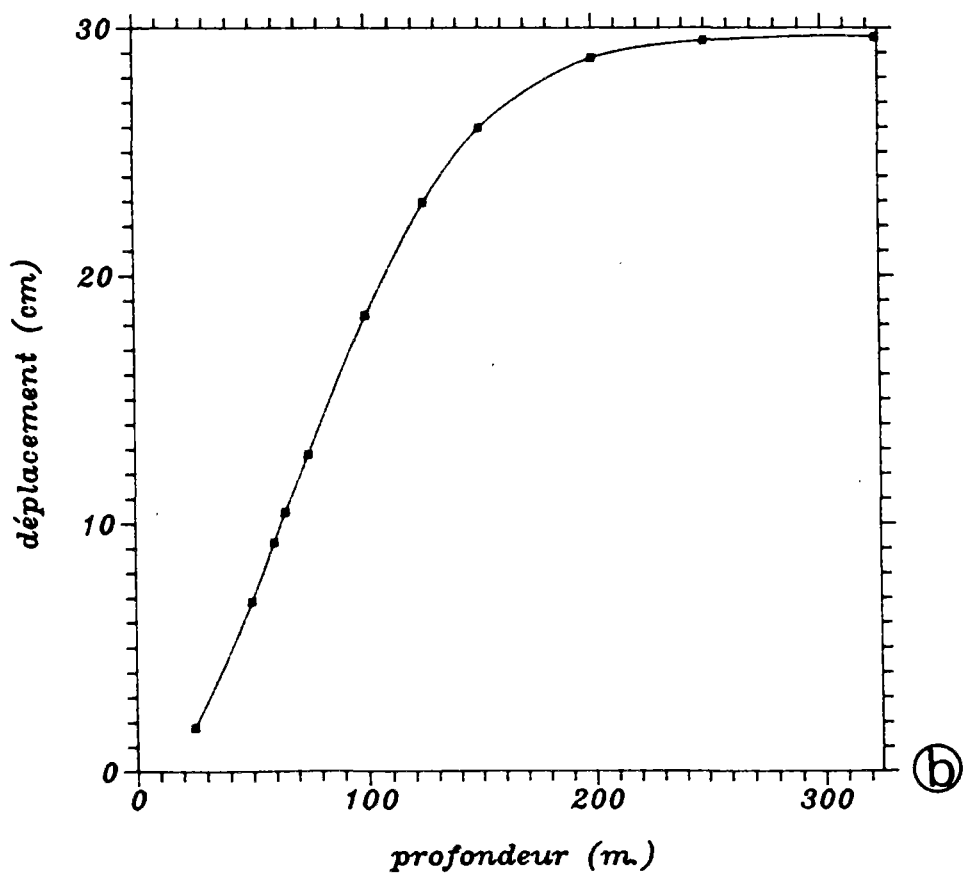
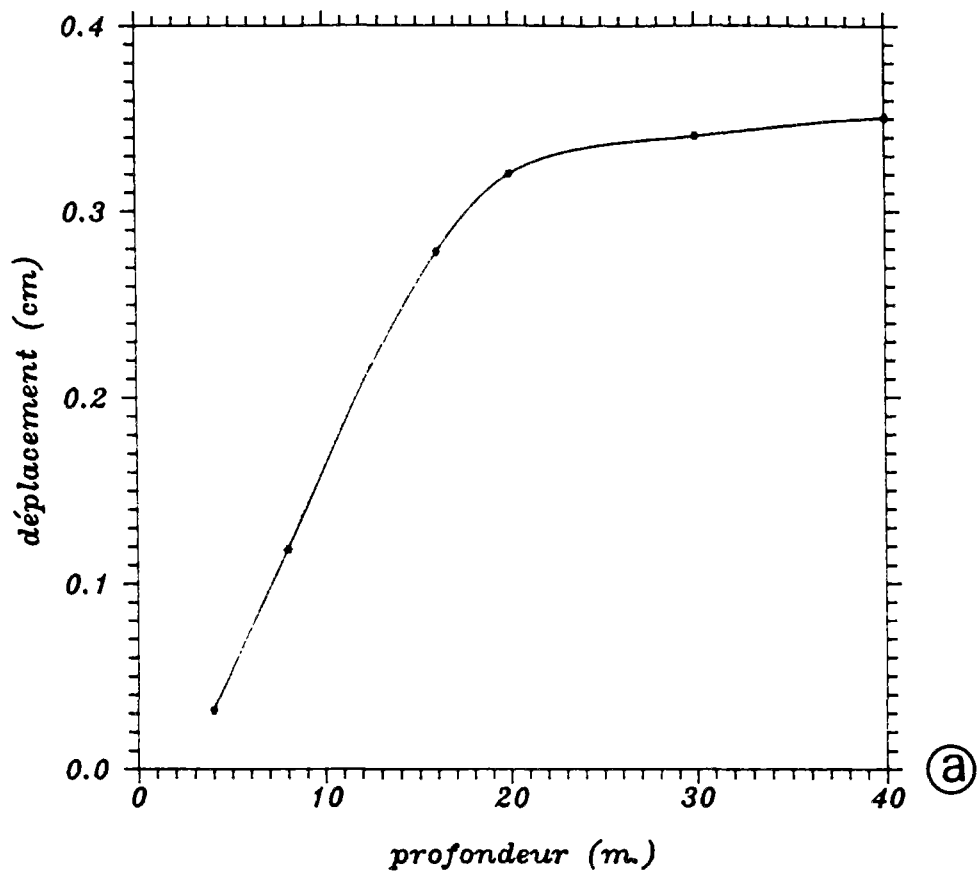


Figure VII-29 : Evolution du déplacement vertical d'un point du fond marin en fonction de l'épaisseur de la couche de sol pour les deux houles (a, b).

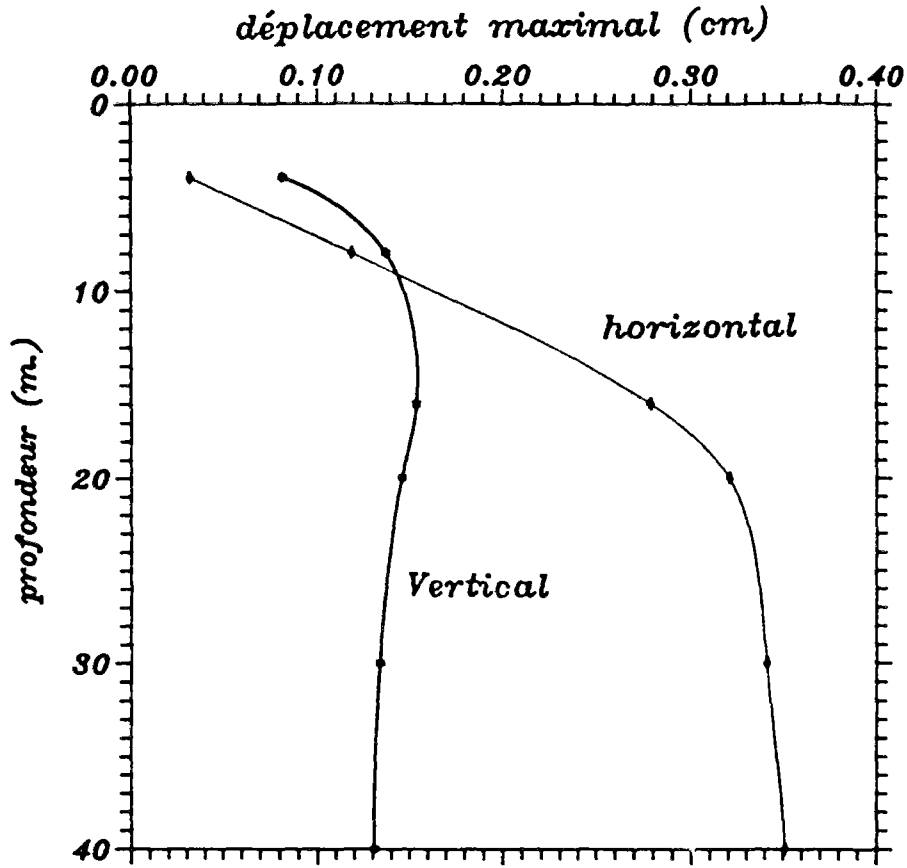


Figure VII-30 : Evolution des déplacements verticaux et horizontaux maximaux en fonction de l'épaisseur de la couche de sol.

III-4 L'EFFET DE LA PERMÉABILITÉ DU SOL SUR LA DISTRIBUTION DES CONTRAINTES EFFECTIVES ET LA PRESSION INTERSTITIELLE

La solution proposée par YAMAMOTO [1978] et MADSEN [1978] pour la distribution des contraintes effectives et la pression interstitielle dans un massif semi-infini d'un sol hydraulique isotrope est indépendante de la perméabilité du sol. Dans le cas de couches de sol d'épaisseur finie, il semble intéressant d'étudier l'influence de la perméabilité. Dans les exemples suivants, on se propose d'étudier deux couches de sol élastique, isotrope, homogène, d'épaisseurs différentes. Dans le premier cas, on a $D = 8$ m, qui correspond à l'épaisseur critique de $0,2 L$ mise en évidence précédemment. Dans le second cas, on prend $D = 20$ m, soit $L/2$. La rigidité du sol est $G = 10^4$ kPa et ν reste constant et égal à $0,333$. Les différentes valeurs de perméabilité isotrope introduite dans le programme sont les suivantes :

$$k = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$$

$$k = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$k = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$k = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} .$$

La première valeur correspond à un sable très fin et la dernière à un sable grossier.

La dissipation de la pression interstitielle et la variation de la contrainte de cisaillement et des contraintes effectives normales, en fonction de la perméabilité, sont présentées, respectivement, sur les figures VII-31 à VII-34, pour le cas d'épaisseur 8 m, et sur les figures VII-35 à VII-34, pour l'épaisseur de 20 m. On observe que la courbe de dissipation de la pression interstitielle, pour les sols très fins ($k = 5 \cdot 10^{-6}$ m/s)

se distingue nettement des autres courbes (fig. VII-31 et VII-35). Lorsque la perméabilité est très petite pour un sable, le gradient hydraulique à proximité de la surface du sol est plus fort. Ceci indique que le risque de phénomène de liquéfaction pour les sables fins est plus grand que pour les sables grossiers. Sur les mêmes courbes on constate, à cause de la faible perméabilité, l'existence d'un accroissement de la pression interstitielle à proximité du substratum imperméable, qui n'est pas observé pour les plus fortes perméabilités. Dans ce cas, l'allure de la courbe de variation de la pression interstitielle devient monotone et la dissipation en fonction de la perméabilité devient plus grande.

En comparant les courbes de dissipation de pressions interstitielles pour 8 m et 20 m, on observe que, pour l'épaisseur la plus grande, l'effet de la perméabilité diminue et le gradient hydraulique près de la surface du sable est moins fort.

Les profils de contrainte de cisaillement obtenus pour les quatre valeurs de la perméabilité ne sont pas très différents. Néanmoins, on peut dire que les valeurs obtenues pour les sols les plus fins sont plus grandes près du substratum, et plus petites au sein du massif. Cependant, près du fond marin, les valeurs de la contrainte de cisaillement sont identiques quelle que soit la perméabilité (fig. VII-32 et VII-36). Les profils de contrainte effective normale verticale ont, dans les deux cas (fig. VII-33 et VII-37), des allures compatibles avec celles des pressions interstitielles. Ainsi, pour $D = 8$ m, une valeur de pression plus forte pour le sable fin à proximité du substratum correspond à une contrainte plus faible ; de même, la zone de plus faible pression du sable fin (moitié supérieure de la couche) correspond à celle de plus fortes contraintes normales. Le même effet est observé sur les profils de contrainte normale horizontale.

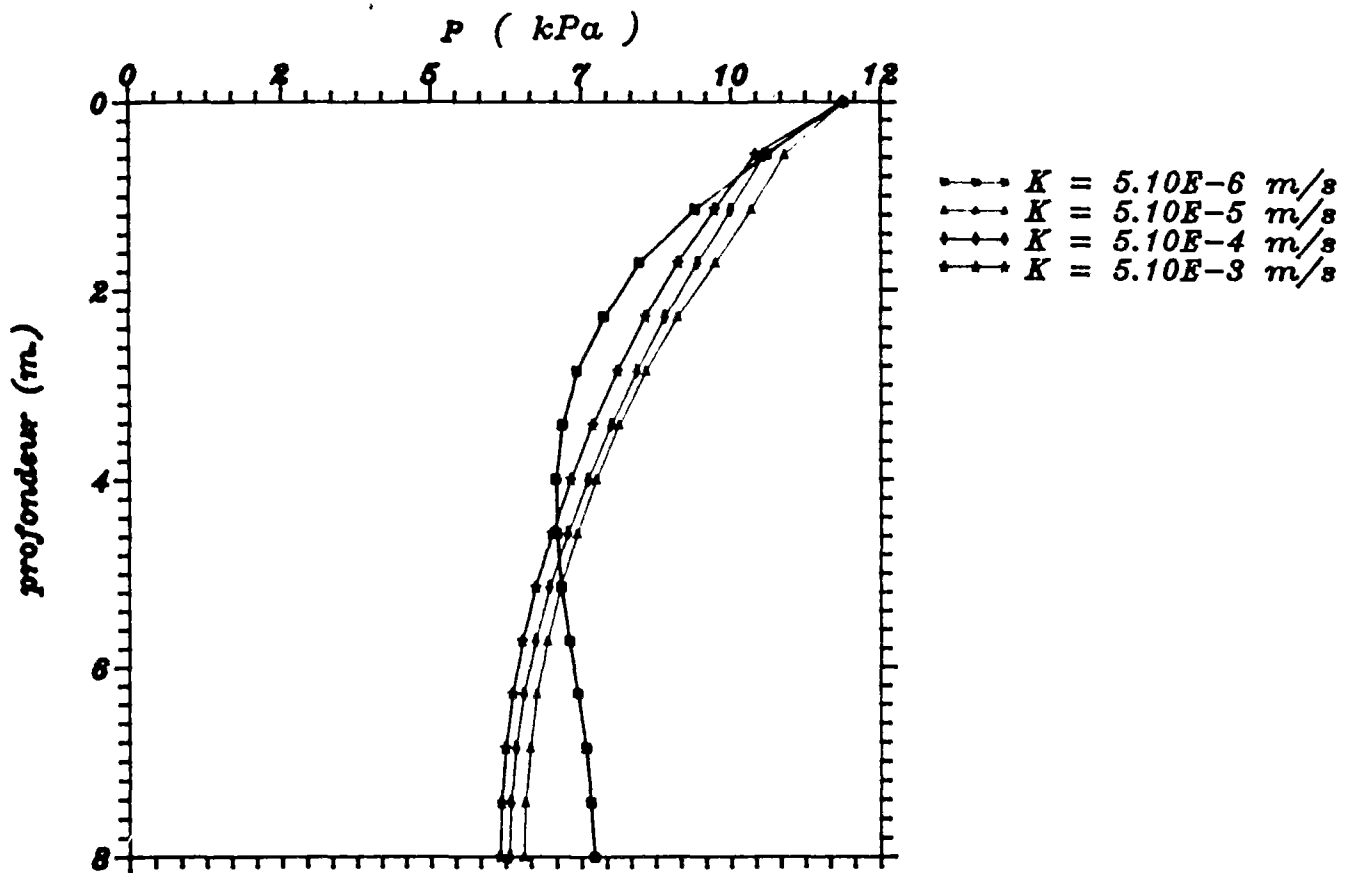


Figure VII-31 : Effet de la perméabilité sur la dissipation de la pression interstitielle pour une couche d'épaisseur critique.

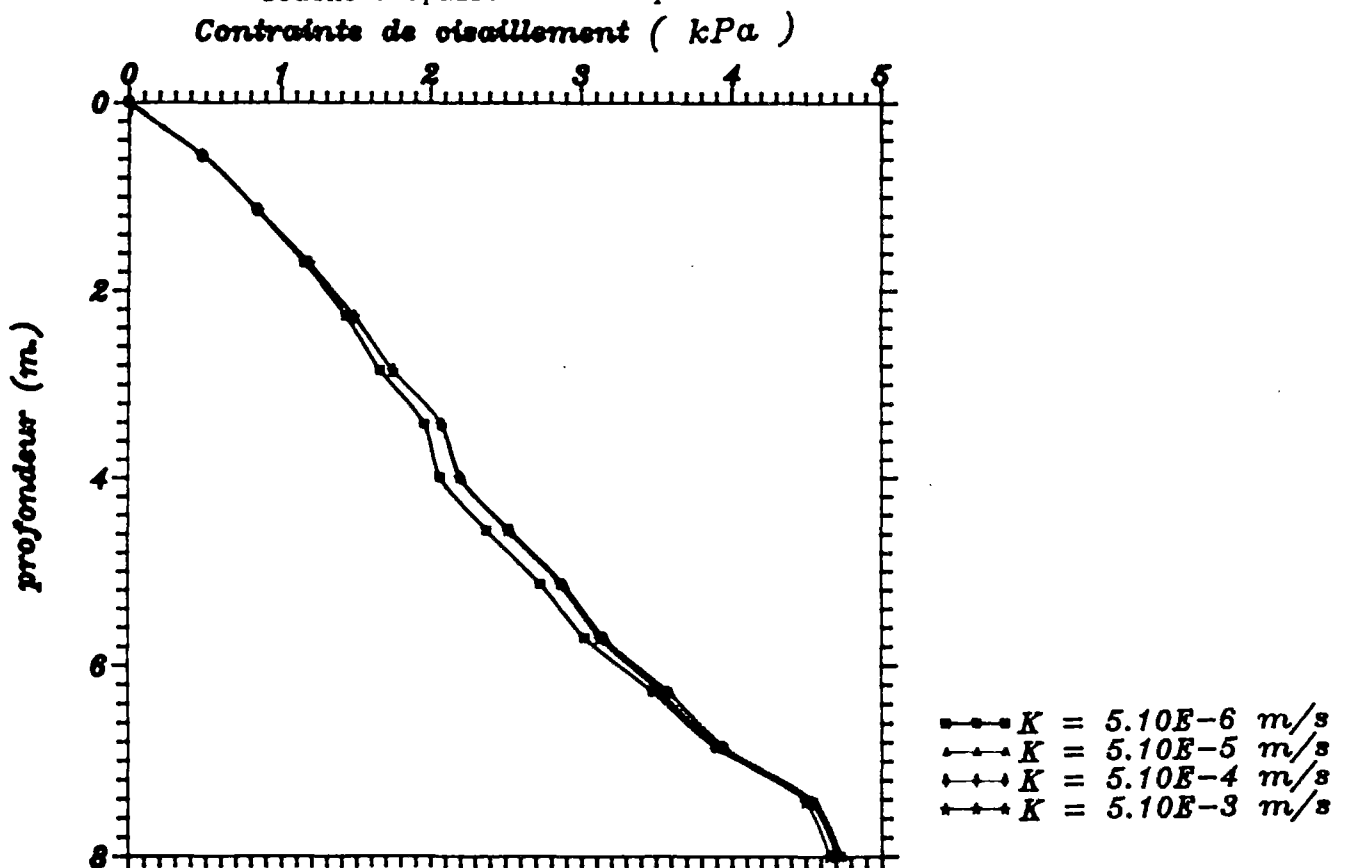


Figure VII-32 : Effet de la perméabilité sur la contrainte de cisaillement.

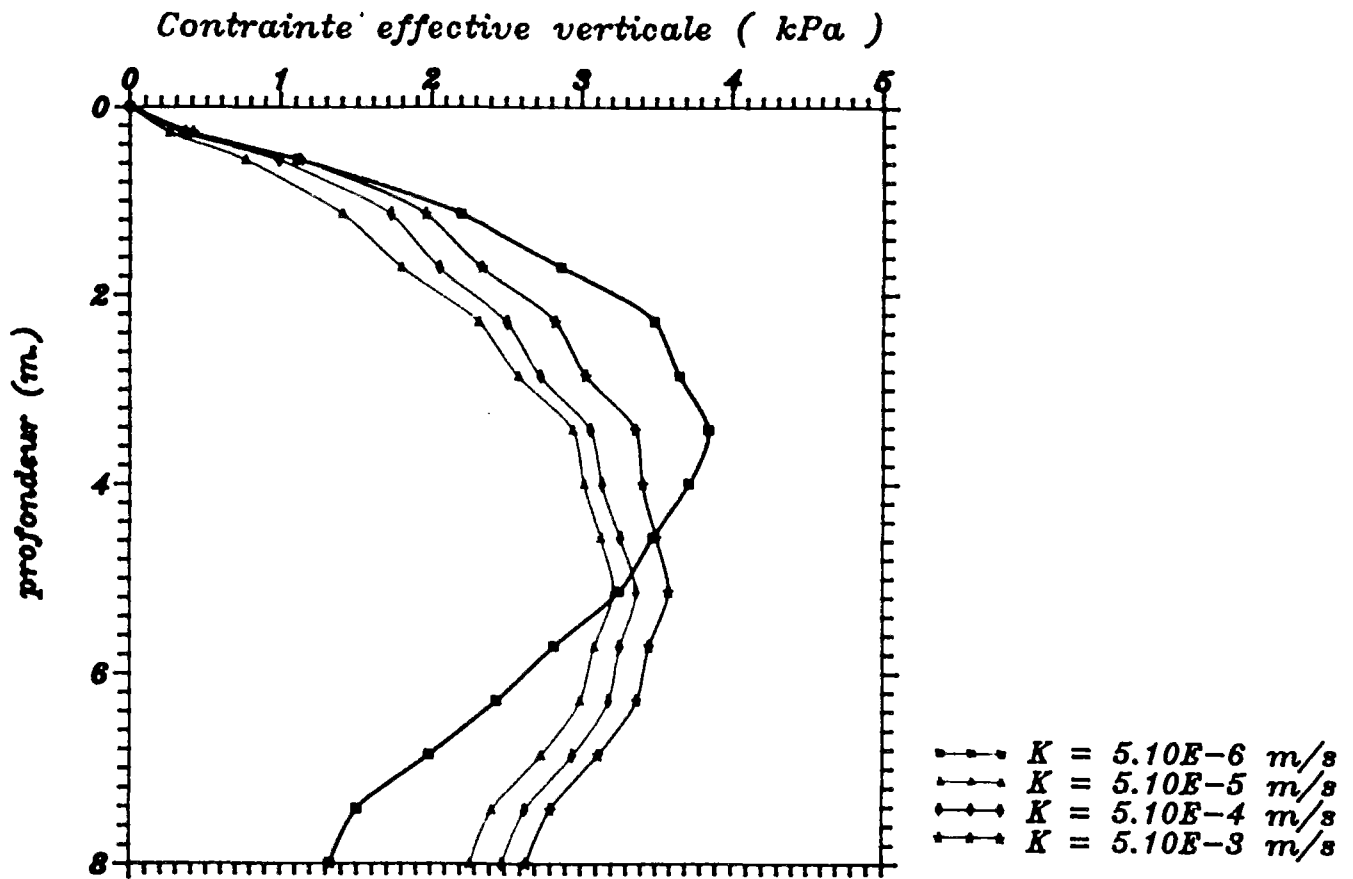


Figure VII-33 : Distribution de la contrainte effective verticale en profondeur, paramétrée par la perméabilité.

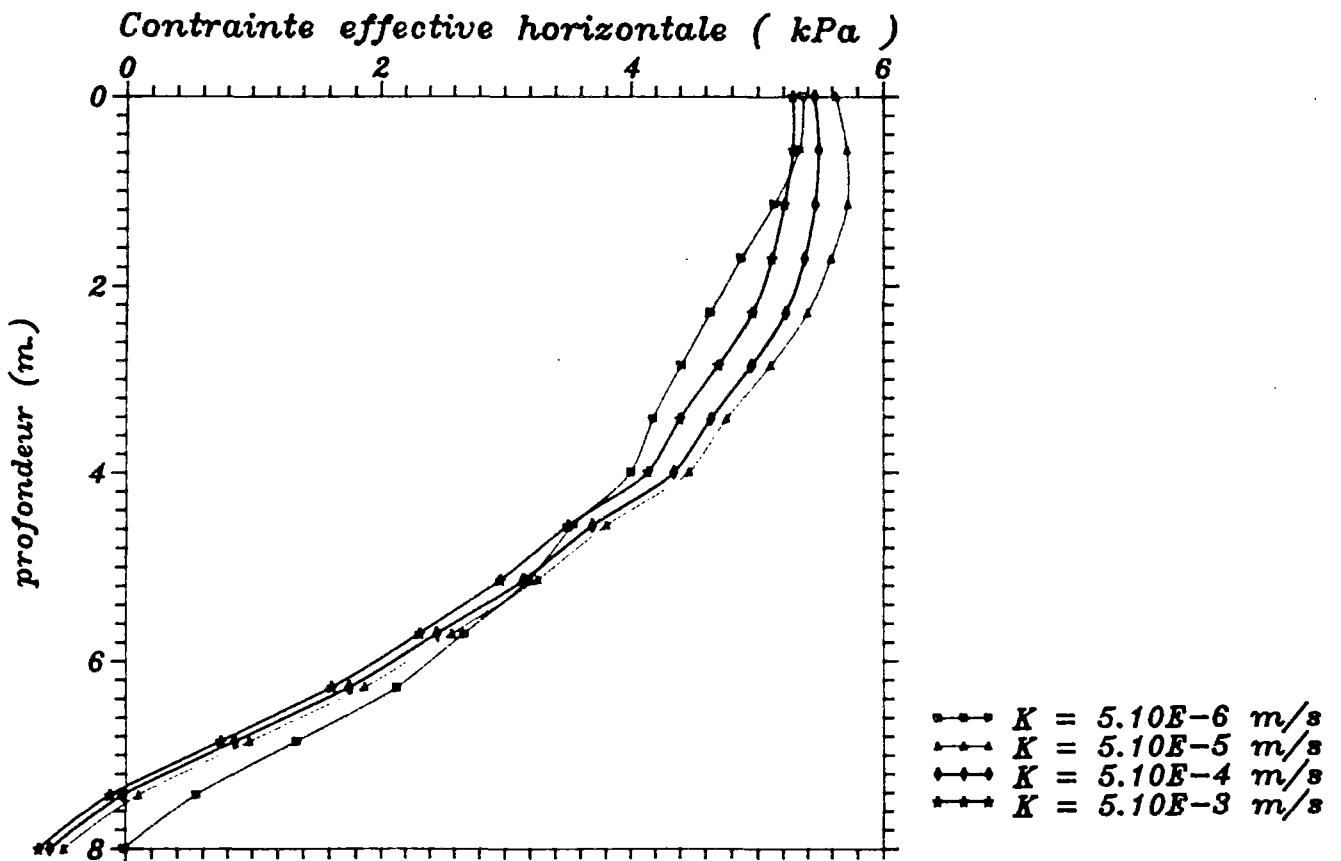


Figure VII-34 : Variation de la contrainte effective horizontale en profondeur pour différentes valeurs de la perméabilité.

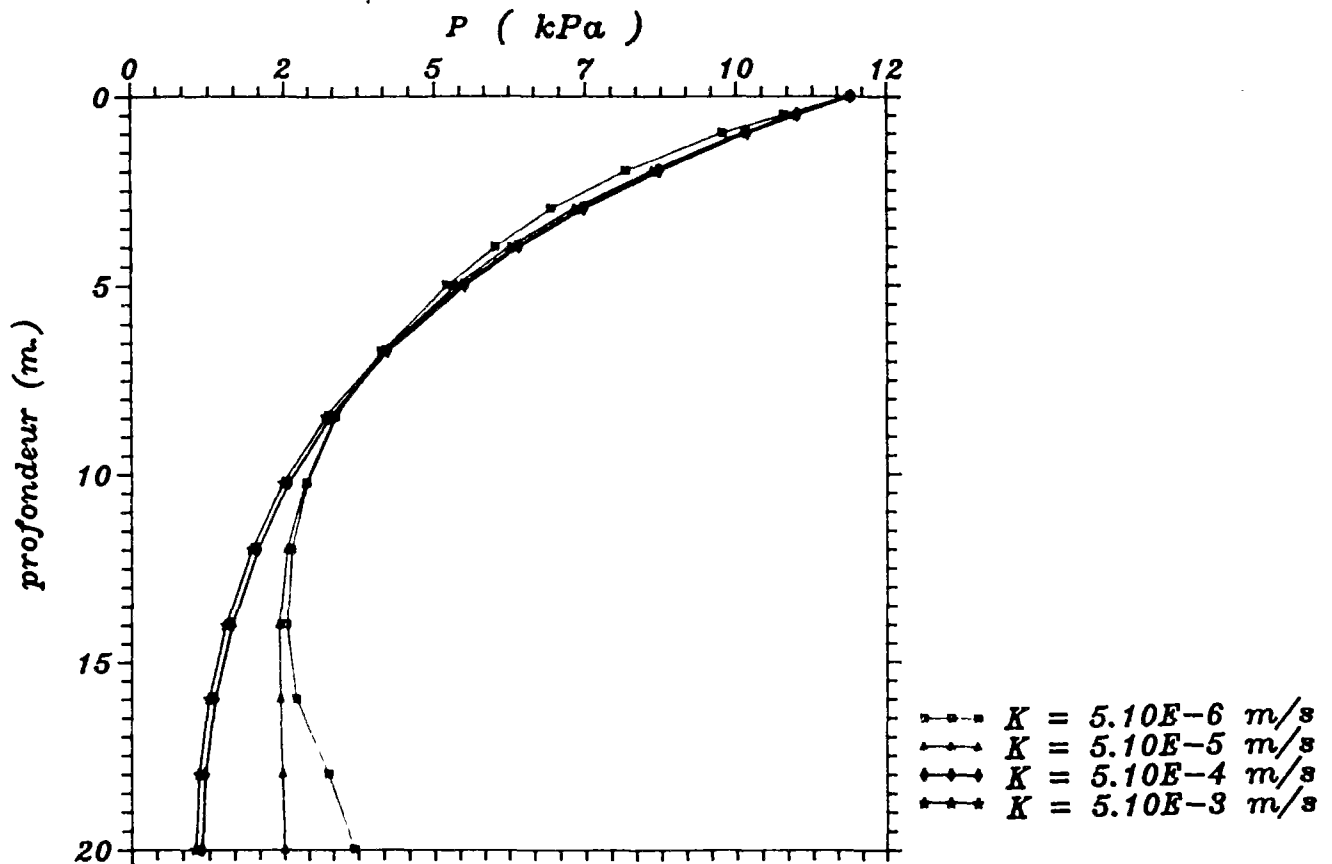


Figure VII-35 : Variation de la pression interstitielle en profondeur en fonction des différentes valeurs de la perméabilité, pour une couche de 20 m.

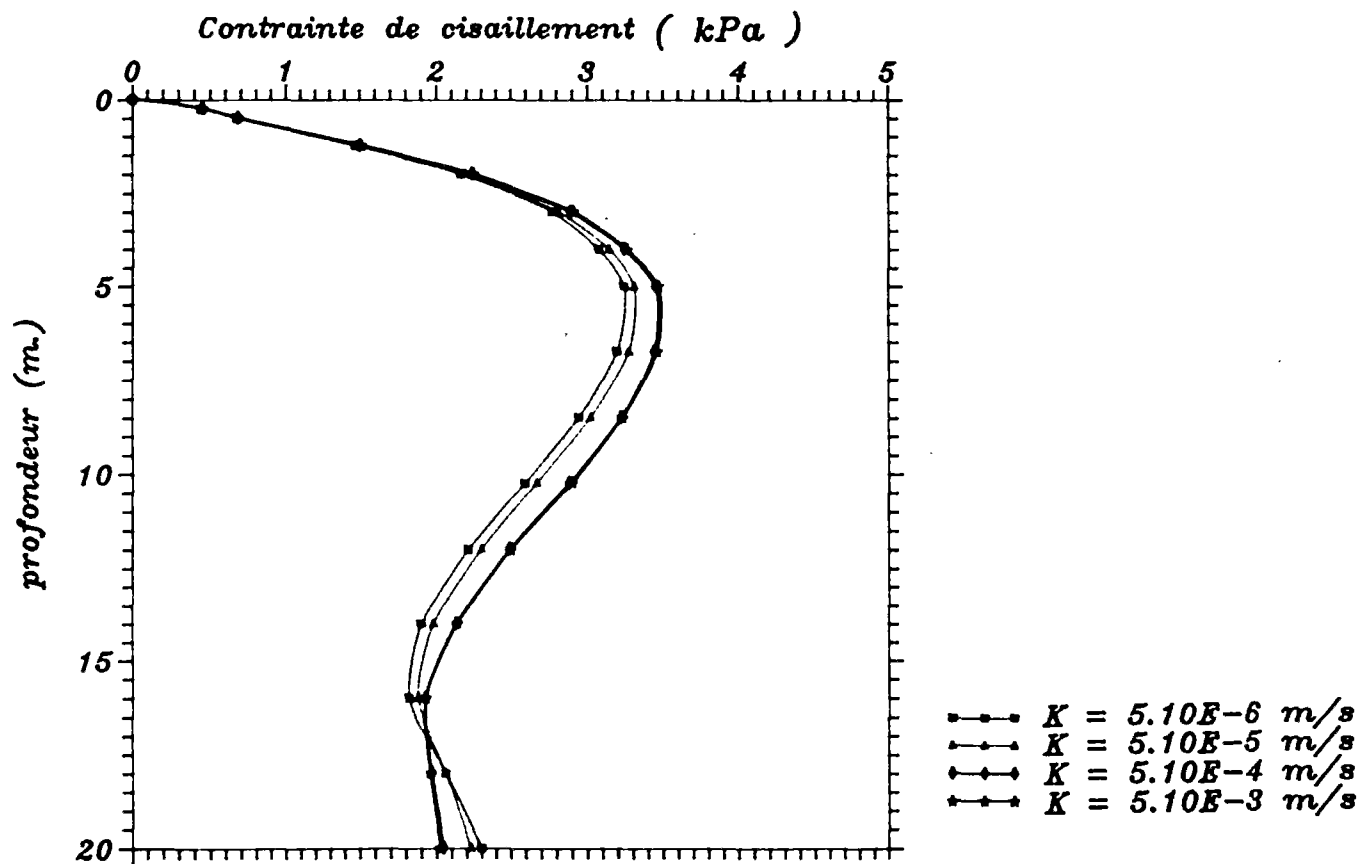


Figure VII-36 : Variation de la contrainte de cisaillement pour les différentes perméabilités.

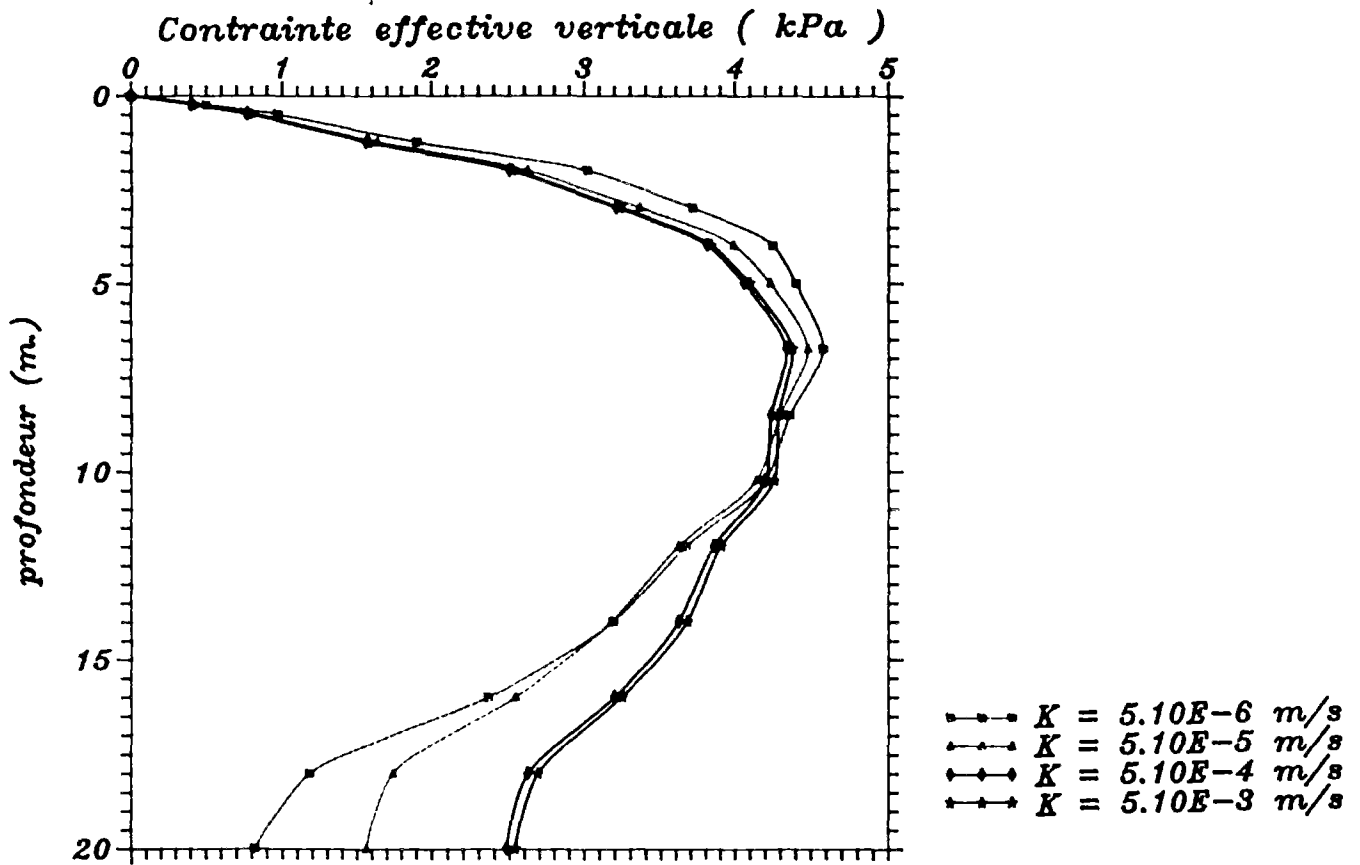


Figure VII-37 : Profils des contraintes effectives normales verticales pour les différentes perméabilités

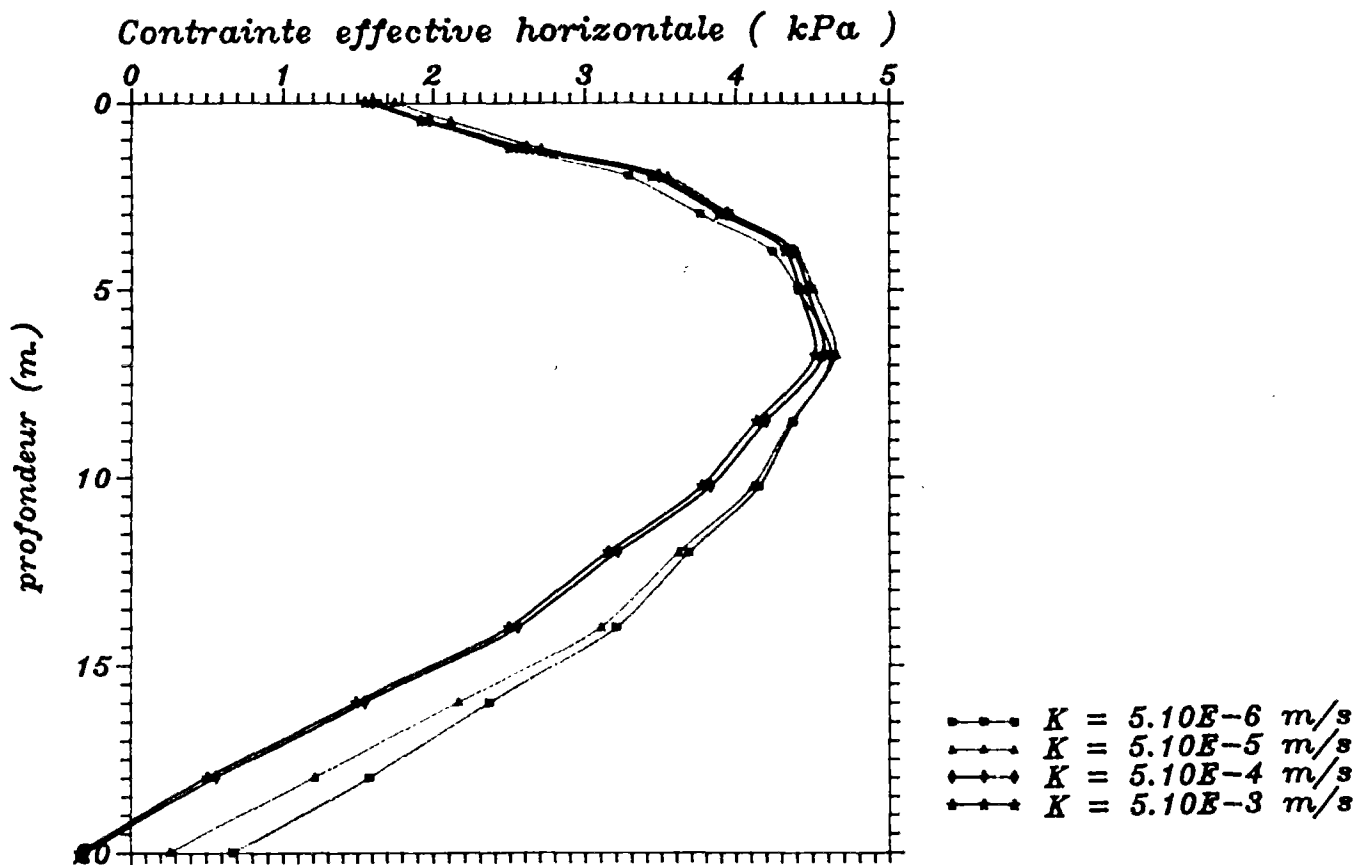


Figure VII-38 : Profils des contraintes effectives normales horizontales pour les différentes perméabilités.

III-5 L'EFFET DE LA RIGIDITE DU SOL SUR LA DISTRIBUTION DES CONTRAINTES EFFECTIVES ET LA PRESSION INTERSTITIELLE .

On a vu précédemment que le mouvement le plus important du fond marin, et le maximum de la contrainte de cisaillement pour une houle donnée, apparaissent dans un massif du sol pour une épaisseur de $0,2L$. D'autre part, la solution analytique pour l'épaisseur infinie montre que, à l'exception des sables très denses, la distribution des contraintes et la dissipation de la pression interstitielle ne dépendent pas de la rigidité du sol.

On considère ici, comme précédemment, les cas $D = 8$ m et $D = 20$ m, avec un sol homogène, isotrope, sous l'action d'une houle de longueur de 40 m, et on étudie l'effet des variations du module d'Young E , à ν constant et égal à 0,333, en se limitant dans le cas du sable à :

$$10^4 \text{ kPa} < G < 10^7 \text{ kPa} \quad \text{avec} \quad k_x = k_y = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s.}$$

Les calculs n'ont pas montré d'influence notable de ces rigidités dans le cas $D=20$ m. Pour $D = 8$ m, correspondant à l'épaisseur critique $0,2L$, les variations de la pression interstitielle en profondeur en fonction de la rigidité du sol ont été comparées sur la figure VII-39. Sur les figures VII-40, VII-41 et VII-42, sont présentés les résultats concernant la contrainte de cisaillement et les contraintes effectives normales horizontales et verticales, en profondeur, en fonction des valeurs de G .

Sur la courbe de dissipation de la pression interstitielle, on observe que, pour les sols plus mous, la dissipation près de la surface du sol est plus rapide ; après être passé par un minimum (dans cet exemple, à la profondeur de 3 m), la pression interstitielle augmente avec la profondeur. Pour les sols plus rigides, l'atténuation de la pression interstitielle prend une allure monotone. Dans ce cas, les résultats obtenus s'approchent de ceux donnés par la théorie présentée par *NOSHAGEN et TORUM [1975]*,

qui est basée sur l'équation de conduction de la chaleur.

Comme précédemment, le même type d'influence peut être remarqué sur la distribution des contraintes effectives normales. Pour les sols mous, en raison de la facilité de dissipation de la pression interstitielle dans la zone proche de la surface par rapport aux zones plus profondes, l'augmentation de la contrainte effective verticale dans la partie supérieure ainsi que sa diminution dans la partie inférieure près du substratum imperméable sont plus fortes que pour les sols rigides.

L'effet de la rigidité du sol sur la distribution de la contrainte de cisaillement, dans cet exemple, n'est pas très important.

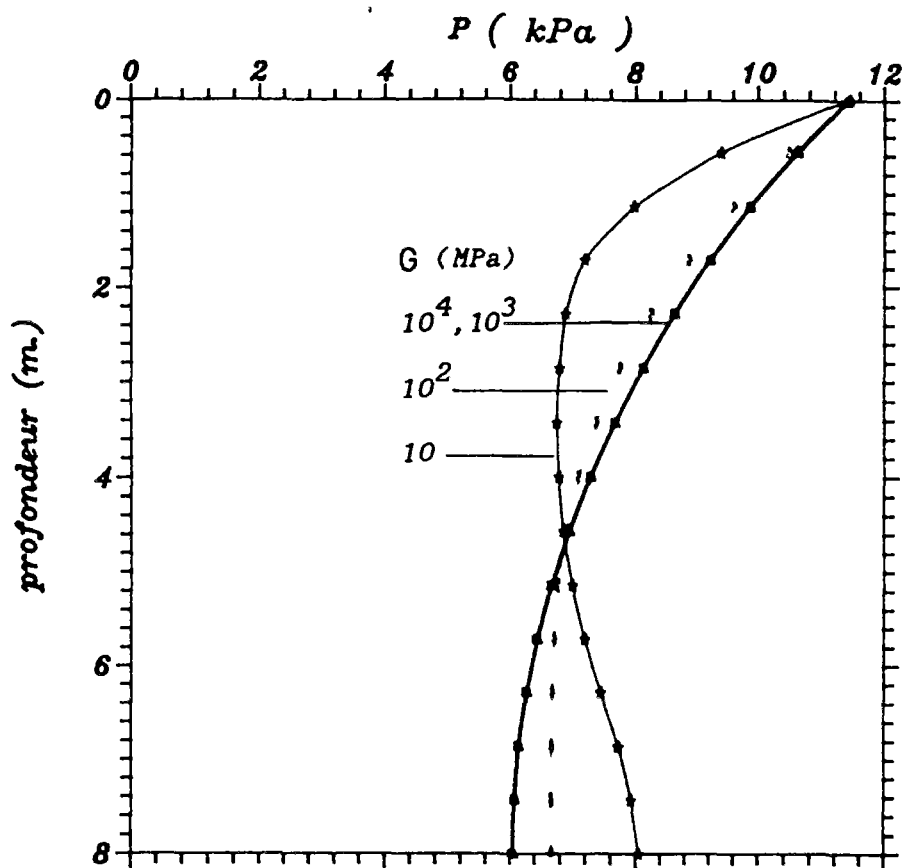


Figure VII-39 : Effet de la rigidité sur la dissipation de la pression interstitielle.

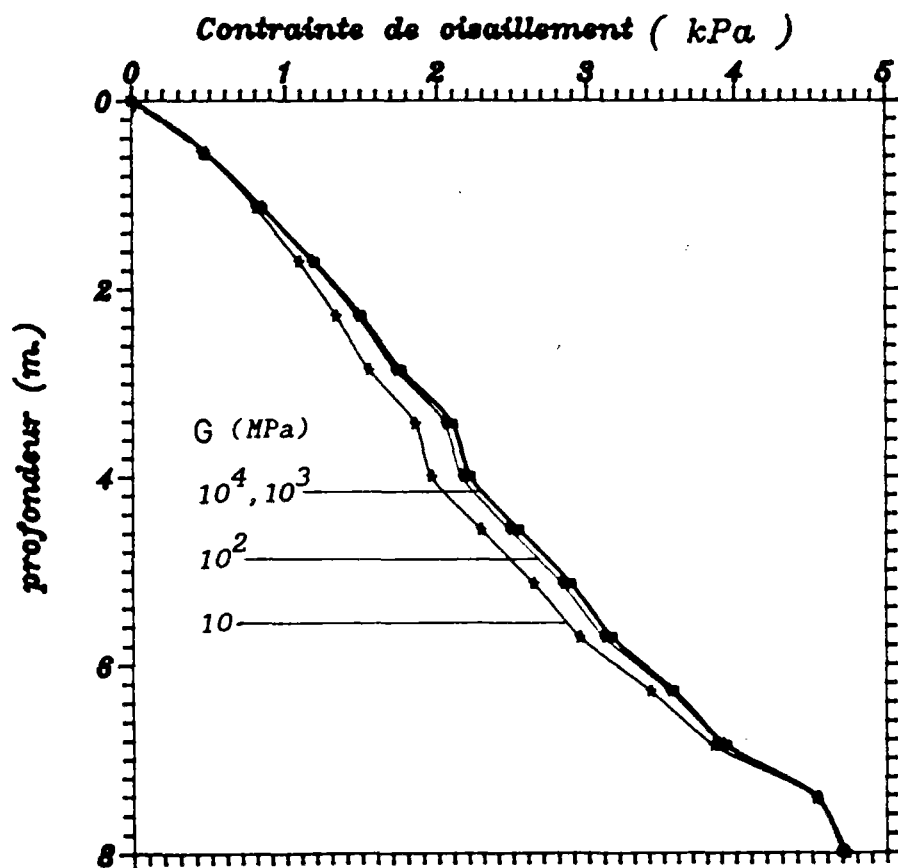


Figure VII-40 : Effet de la rigidité sur la distribution de la contrainte de cisaillement.

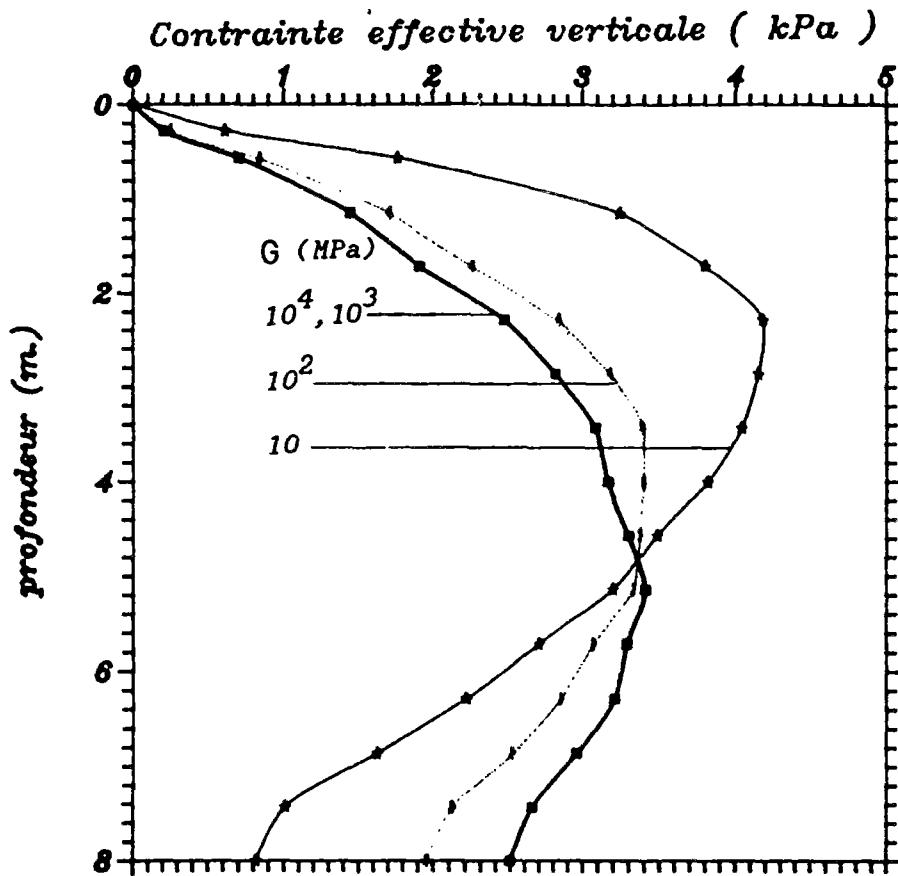


Figure VII-41 : Variation de la contrainte effective verticale en fonction de la rigidité.

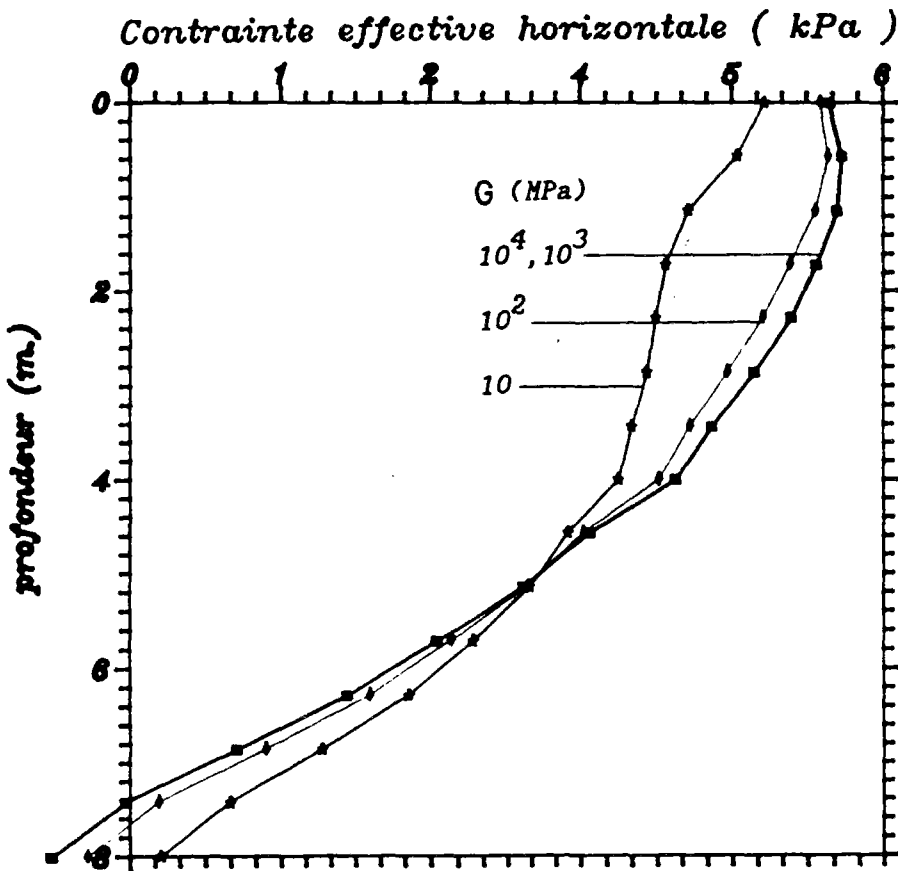


Figure VII-42 : Variation de la contrainte effective horizontale en fonction de la rigidité.

IV - TALUS SOUS MARIN

Dans le cas d'un talus sous-marin, la symétrie du problème rencontré dans le cas horizontal n'existe plus, et les caractéristiques de la houle varient quand elle se propage au dessus de la pente. Le problème est donc beaucoup plus complexe et semble difficile à résoudre analytiquement.

On présente donc ici les résultats d'un calcul des contraintes et pressions interstitielles induites par une houle sur un fond incliné à un instant donné.

Dans le premier chapitre, on a étudié la propagation de la houle sur un fond incliné dans une région de "profondeur moyenne" ($0,05L < d < 0,5L$). En considérant la théorie de la houle de STOKES en première approximation (ch.1 - III-2-2-3), la variation de la hauteur et de la longueur de la houle quand elle se propage du large vers la plage sur un fond incliné a été représentée par les expressions suivantes :

$$H_n = \frac{H \operatorname{ch}(\lambda_n h_n)}{\operatorname{ch}(\lambda d)} \left[\frac{\lambda d + 1/2 \operatorname{sh}(2\lambda d)}{\lambda_n h_n + 1/2 \operatorname{sh}(2\lambda_n h_n)} \right]^{1/2}$$

$$L_n = L \frac{\operatorname{th}(\lambda_n h_n)}{\operatorname{th}(\lambda d)}$$

$$\eta = \frac{H_n}{2} \sin(\lambda_n x - \omega t)$$

(pour les notations, voir le figure I-6, ch.1).

Dans l'approche effectuée pour obtenir les résultats ci-dessus, les hypothèses de la "période constante" et de la conservation d'énergie transmise par la crête de la houle, autrement dit la constance du flux moyen de l'énergie de la houle, ont été adoptées. Ces hypothèses sont valables pour de faibles pentes.

De telles hypothèses semblent acceptables pour traiter le problème des efforts induits par la houle sur la pente, vu que la complexité des problèmes géotechniques impose des hypothèses simplificatrices et des approximations qui sont en général beaucoup plus fortes.

De plus, il est important de noter que tous les auteurs impliqués dans la géotechnique sous-marine ont considéré une houle simple, sans prendre en compte la réflexion et la réfraction de la houle avant le point de déferlement.

Afin de montrer la distribution des contraintes effectives et des pressions interstitielles dans un massif du sol à surface inclinée sous l'action d'une houle régie par la théorie citée et de les comparer avec celles d'un massif de sol borné par une surface horizontale, on a choisi une couche de sol isotrope homogène ayant la forme donnée sur la figure VII-43. La longueur inclinée de la pente est de 40 m et l'inclinaison de 16,5 %. Les caractéristiques de la houle au large sont $L = 40$ m, $H = 2,75$ m et $T = 7$ s. La profondeur d'eau avant que la vague atteigne la pente est de 15 m.

L'épaisseur de la couche du sol reste constante et égale à 20 m.

La figure VII-43 montre l'allure de l'évolution de la houle au dessus du profil considéré. On observe que le passage au dessus de la pente correspond à une diminution de la longueur d'onde et à une augmentation de l'amplitude, entraînant une houle finale plus creuse et serrée, qui exerce de plus fortes variations de pression sur le fond marin.

Conditions aux limites

Dans le cas d'un fond marin incliné, la symétrie dans

l'espace et dans le temps n'existe plus, et on ne peut pas, comme précédemment dans le cas horizontal, de se limiter à une longueur finie correspondant à des conditions aux limites connues symétriques (une longueur d'onde) ou anti-symétriques (une demi-longueur d'onde). En fait, dans le cas présent, les conditions aux limites à un instant donné ne sont pas connues. On a donc décidé d'adopter, à une certaine distance de la pente, des conditions aux limites approximatives correspondant à la solution analytique dans le cas de l'épaisseur infinie. Il a alors été nécessaire de déterminer la longueur minimale de fond horizontal à considérer de part et d'autre. On a donc effectué un certain nombre de calculs pour différentes longueurs, qui ont permis de conclure qu'au dessus de $1,5 L$ les résultats obtenus sous la pente n'étaient plus sensibles à la longueur horizontale considérée.

On considère donc dans la suite le domaine représenté sur la figure VII-44, avec une longueur de 60 m à gauche ($1,5 L$) et 60 m à droite ($2 L$), et une épaisseur constante $d = 20 \text{ m}$. On observe sur la figure VII-44 le maillage et les différentes coupes pour lesquelles les résultats seront présentés.

Il est nécessaire de dire que, puisque la longueur de la houle change au fur et à mesure qu'elle se propage sur la pente, les noeuds, les crêtes et les creux de la houle ne se situent pas exactement sur les noeuds du maillage. Sur les figures suivantes, les valeurs absolues maximales des différentes grandeurs sont présentées.

La figure VII-45 présente, pour les coupes A, B, D et E, correspondant aux noeuds les plus proches des crêtes et des creux, les variations de pressions interstitielles avec la profondeur. Comme dans le cas horizontal, on observe que la pression n'est pas nulle au contact du substratum imperméable. On note de plus que l'atténuation avec la profondeur est d'autant plus forte que la

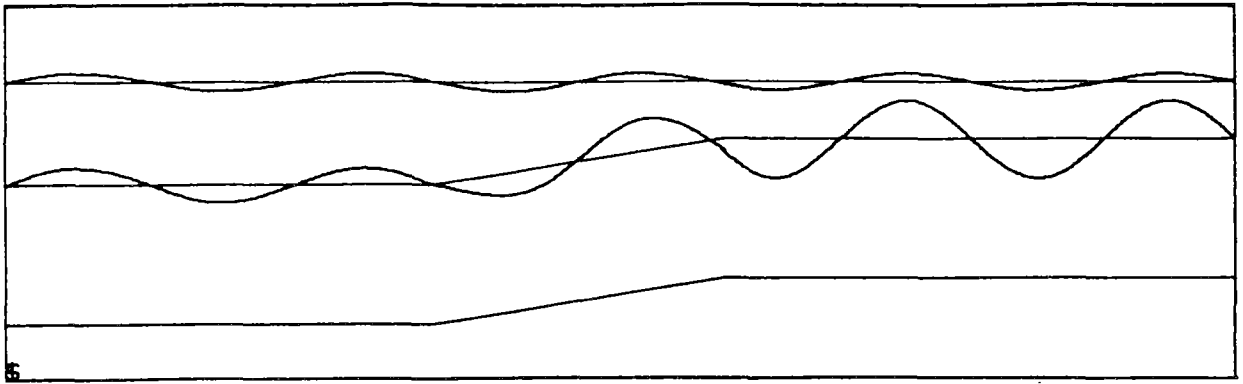


Figure VII-43 : Evolution de la houle au dessus d'une pente.

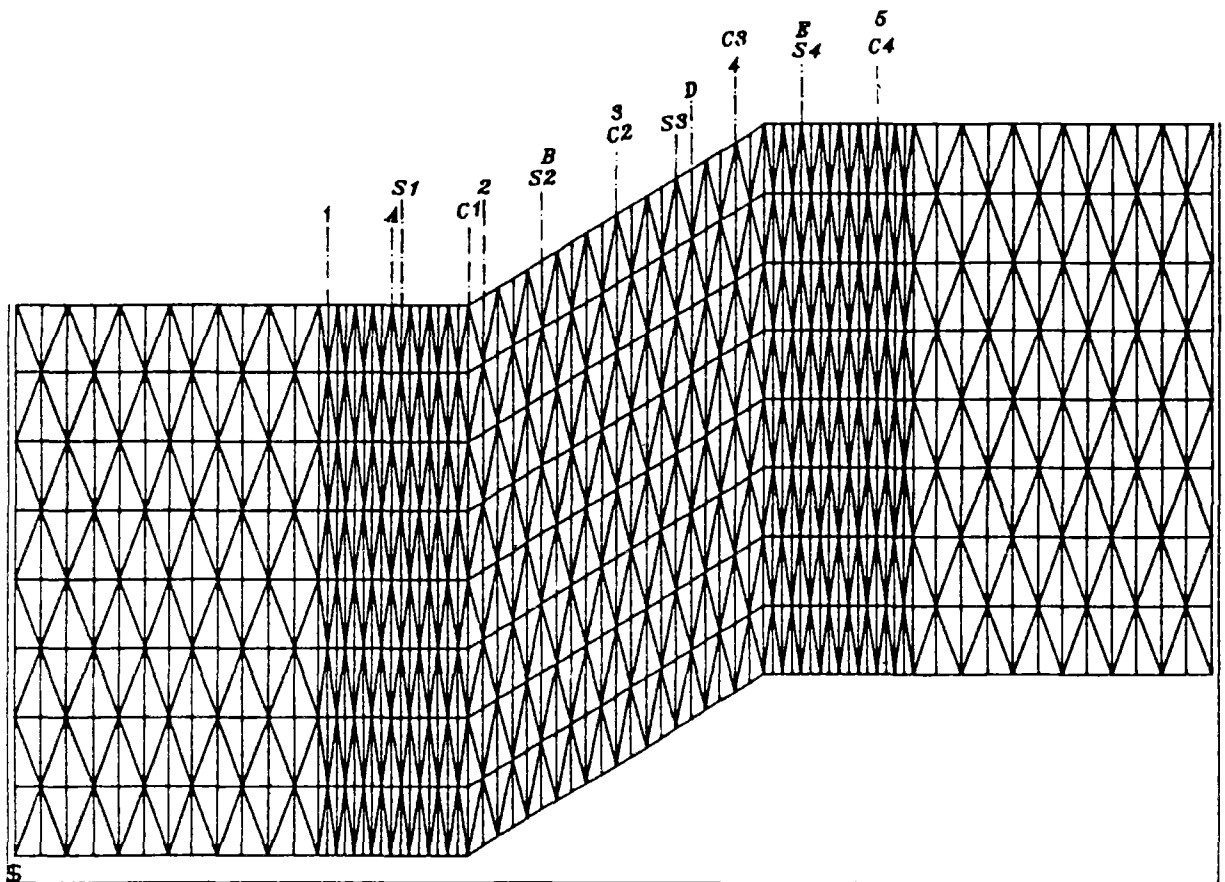


Figure VII-44 : Maillage et coupes considérées.

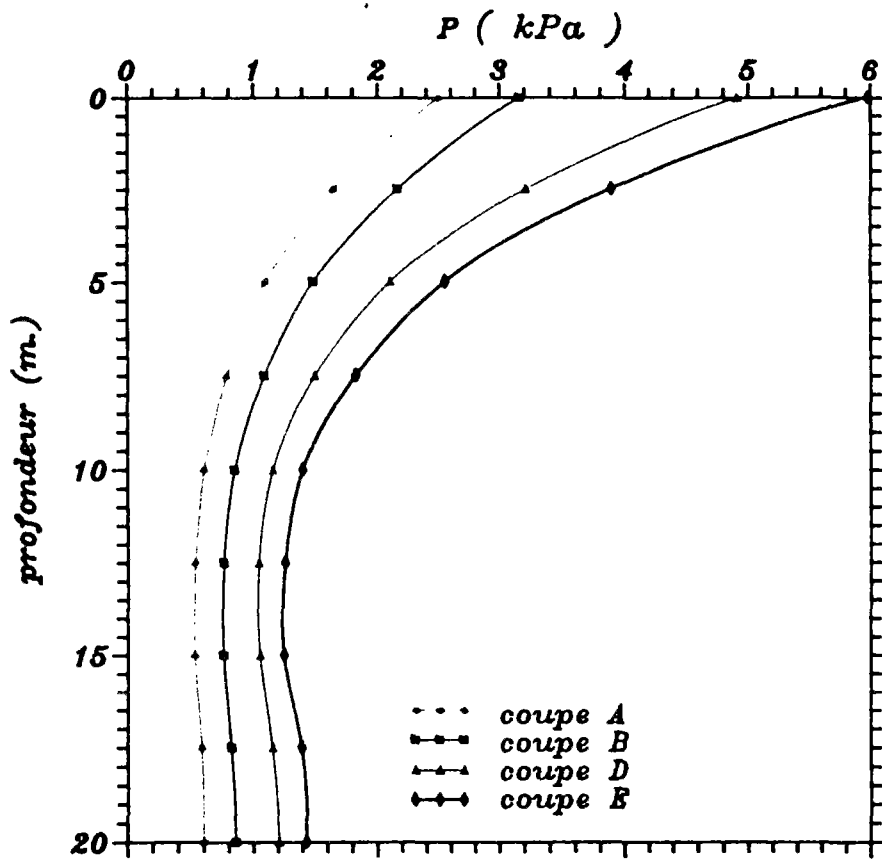


Figure VII-45 : Dissipation de la pression interstitielle en profondeur pour les différentes coupes.

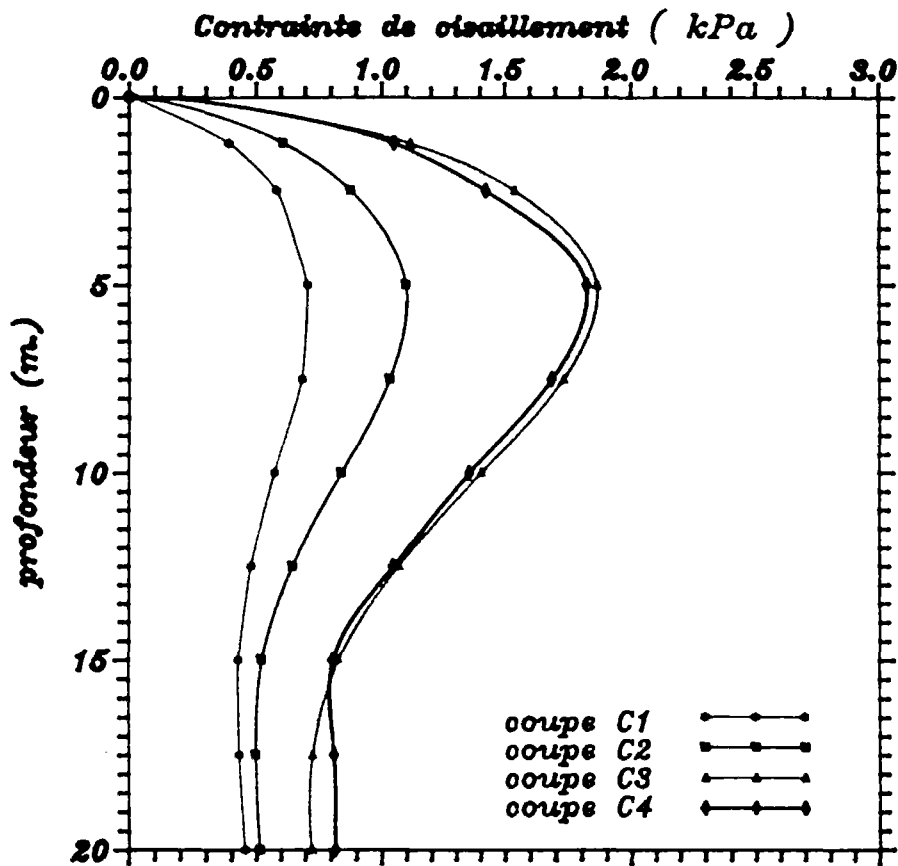


Figure VII-46 : Profils des contraintes de cisaillement.

hauteur d'eau diminue. Ceci est attribué à l'accroissement du rapport $\frac{d}{L}$ dû à la diminution de L avec la pente, dont l'influence a été décrite précédemment dans le cas horizontal.

Les résultats du calcul ont montré que, comme dans le cas horizontal, les extrema de contraintes effectives normales, verticales et horizontales sont situés sous les crêtes et creux de la houle, correspondant aux points les plus proches des coupes S_1 , S_2 , S_3 et S_4 (figures VII-47 et VII-48).

L'allure générale des profils est classique. L'augmentation régulière observée de S_1 à S_4 est attribuée à l'augmentation, avec la pente, de l'amplitude de la houle, et à la diminution de la longueur d'onde, qui entraînent une augmentation de la charge appliquée sur le fond.

Les profils de cisaillement maximum ont été observés sous les noeuds de la houle, et sont reportés sur la figure VII-46. Le plus grand cisaillement est observé sur la coupe C_3 , située peu avant le sommet de la pente, alors qu'en ce point l'amplitude du chargement est inférieure à celle en C_4 . Les valeurs en C_3 sont cependant proches de celles en C_4 .

Les déplacements horizontaux maximaux sont en général observés sous les noeuds, comme les contraintes de cisaillement maximales (points C_1 , C_2 , C_3 , C_4). Comme pour le cisaillement, le profil des déplacements maximaux est observé au point C_3 , et il est plus nettement supérieur à celui de C_4 . Pour un profil donné, le maximum de déplacement se situe, comme dans le cas horizontal, au sein du massif, à un niveau voisin du quart supérieur (figure VII-50).

Les déplacements verticaux extrêmes sont situés sous les creux et crêtes, et sont représentés sur la figure VII-49. Leur

allure est classique, avec un maximum à la surface.

En conclusion, on montre qu'il est possible de calculer, à un instant donné, les efforts et pressions induits par la houle dans le fond incliné. La symétrie n'existant plus dans ce cas, l'étude de la propagation de la houle peut se faire en considérant les résultats obtenus pour des temps variables et par l'observation de l'évolution des grandeurs induites en fonction de la position de la vague par rapport à la pente.

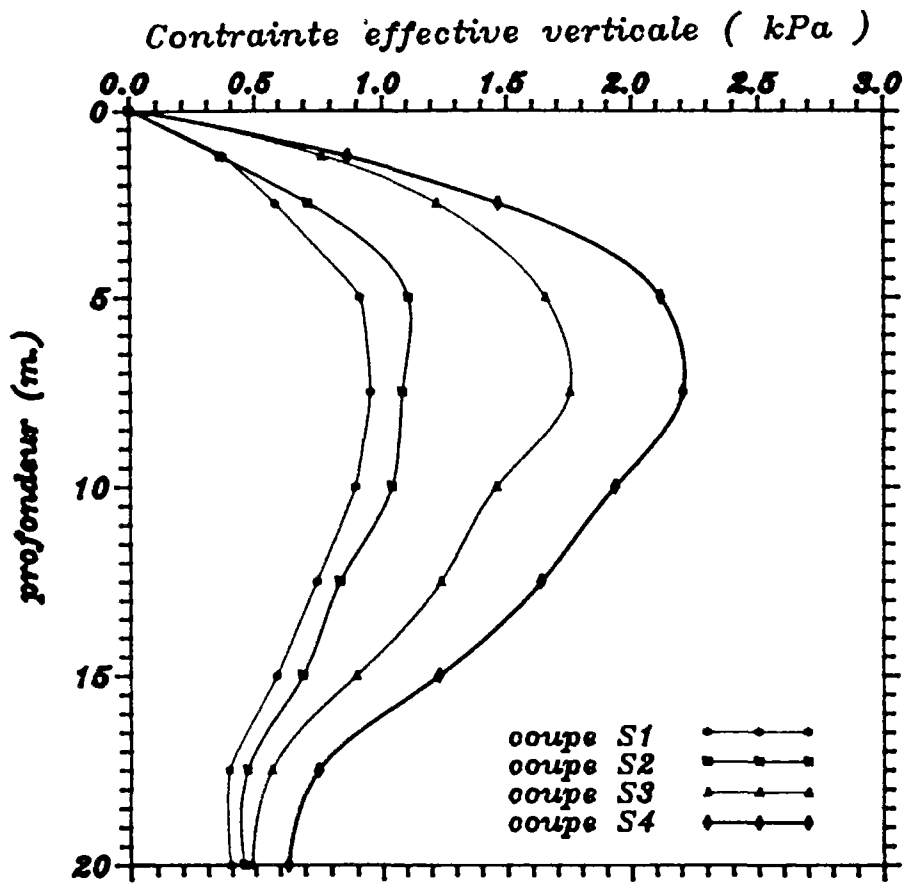


Figure VII-47 : Profils des contraintes effectives normales verticales.

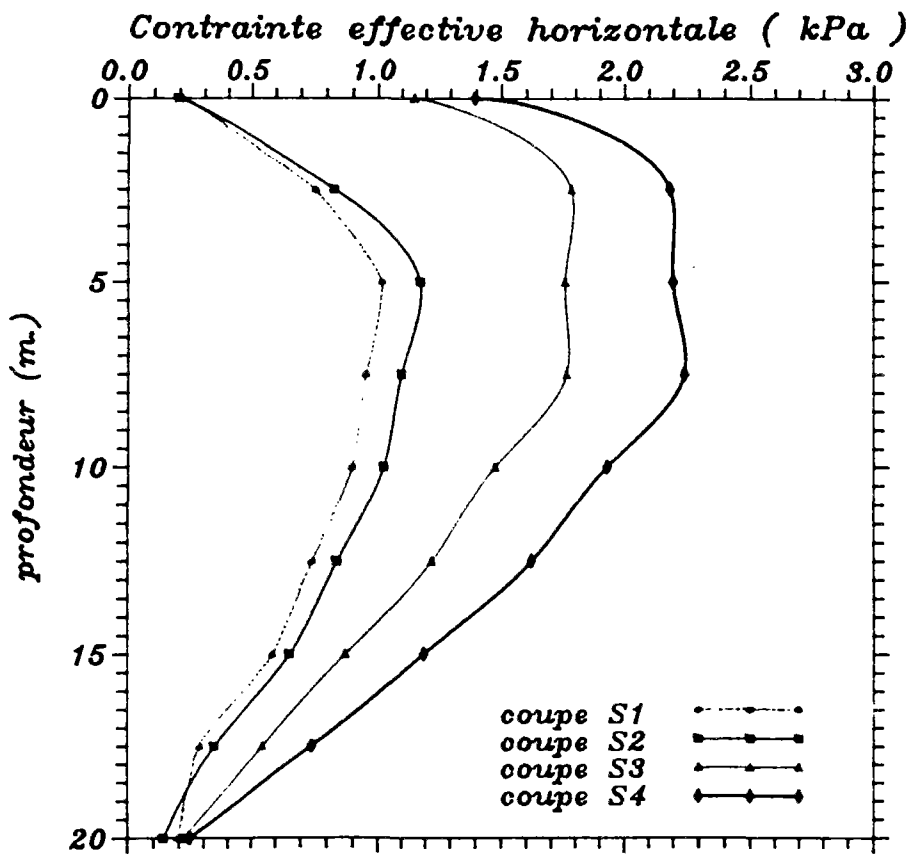


Figure VII-48 : Profils des contraintes effectives normales horizontales.

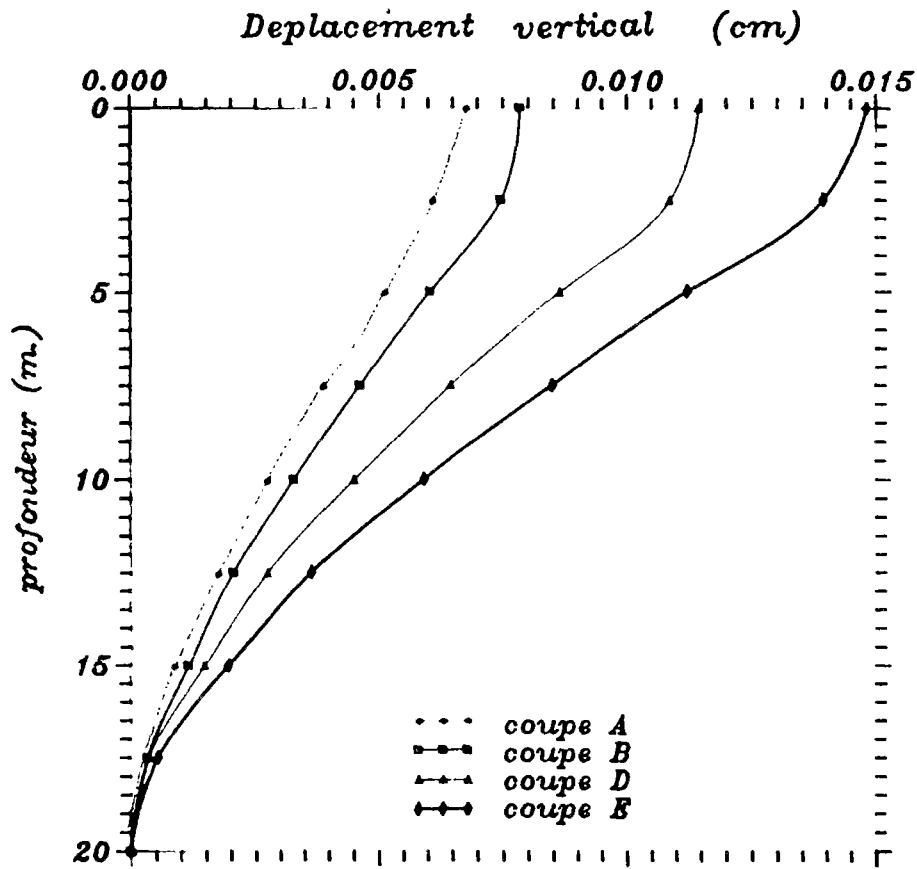


Figure VII-49 : Profils des déplacements verticaux.

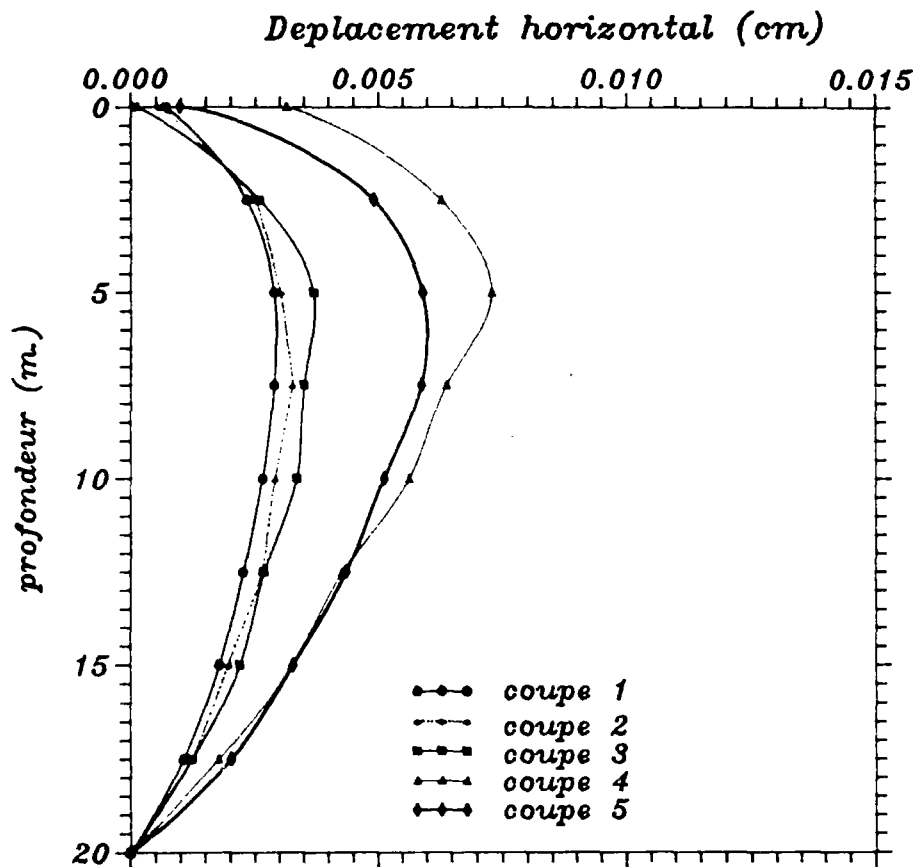


Figure VII-50 : Profils des déplacements horizontaux.

V CAS D'UN FOND SOUS-MARIN MULTICOUCHE

Afin de mettre en évidence la distribution des contraintes effectives et de la pression interstitielle dans un massif hétérogène, on a choisi une couche du sol d'épaisseur 40 m divisée en quatre couches distinctes dont les caractéristiques géotechniques et les épaisseurs sont données dans le tableau (VII-4).

Tableau VII-4 : Caractéristiques géotechniques et hydrauliques des différentes couches.

	G (kPa)	ν	k_x (m/s)	k_y (m/s)	d (m)
1	$3 \cdot 10^3$	0,45	$0,5 \cdot 10^{-5}$	$0,5 \cdot 10^{-5}$	4
2	$8 \cdot 10^3$	0,45	$0,5 \cdot 10^{-5}$	$0,5 \cdot 10^{-5}$	10
3	$2 \cdot 10^4$	0,45	$0,5 \cdot 10^{-5}$	$0,5 \cdot 10^{-5}$	12
4	$8 \cdot 10^4$	0,45	$0,5 \cdot 10^{-5}$	$0,5 \cdot 10^{-5}$	14

Les caractéristiques de la houle sont :

$$L=40 \text{ m} \qquad H=2,75 \text{ m} \qquad T=7 \text{ s.}$$

Cette houle engendre une pression maximale de $p_0 = 11,42 \text{ kpa}$ sur la surface du sol, situé à 4 m de profondeur dans l'eau.

Chaque couche de sol est supposée isotrope, et l'ensemble repose sur un substratum rigide, imperméable et rugueux.

Le maillage utilisé pour une longueur d'onde est constitué de 390 noeuds et 672 éléments triangulaires (figure VII-51).

Les conditions aux limites pour les surfaces supérieures et inférieure ainsi que sur les limites droite et gauche sont les mêmes que dans le cas d'un sol homogène.

Sur la courbe de dissipation de la pression interstitielle (figure VII-52), on observe une allure continue des variations, du fait de la constance de la perméabilité. La diminution de la pression avec la profondeur est plus forte que dans le cas homogène, puisqu'on observe son annulation à 20 m ($L/2$). Dans le cas homogène, cette annulation est observée pour L . Une rigidité croissante avec la profondeur a donc une influence marquée sur la distribution des pressions.

La distribution des contraintes de cisaillement est présentée sur la figure (VII-53). Par rapport à l'allure classique dans une couche homogène, le maximum de cisaillement est plus proche de la surface, dans la couche la plus molle, à 2 m de profondeur au lieu de $0,16 L = 6,40$ m. De même, le maximum est ici plus grand : 5,4 kPa au lieu de $0,37 P_o = 4,10$ kPa.

Les contraintes effectives verticales présentent un maximum plus faible que dans le cas infini (2,8 kPa au lieu de $0,37 P_o = 4,1$ kPa), avec une allure classique. La profondeur du maximum est analogue (figure VII-54). L'allure du profil de contrainte effective horizontale est en revanche assez différente du cas homogène, en particulier sur la surface, et au point maximum. Contrairement au cas homogène, pour une telle profondeur où l'on observait de la traction sur tout le profil, la valeur en surface n'est pas nulle mais positive et représente une compression. On revient dans le domaine des tractions à 1,50 m, pour atteindre le maximum à la

première intercouche, à 4 m. L'allure non monotone du profil dans les couches suivantes illustre une forte influence de l'hétérogénéité sur la contrainte effective horizontale (figure VII-55).

Cette allure particulière est également observée dans le profil des déplacements horizontaux (figure VII-57), avec compression de la couche de surface et extension en dessous de 1,50 m. Le maximum d'extension est localisé dans la deuxième couche, avec une valeur à peu près constante. L'allure du déplacement vertical est classique, avec cependant un effet marqué de la rigidité plus faible de la première couche, qui se traduit par une faible diminution du tassement avec la profondeur dans cette couche (figure VII-56).

En conclusion, on observe que l'effet de l'hétérogénéité des couches sur les contraintes et déplacements induits, sur lesquels n'existent actuellement que très peu d'informations, est notable, et qu'il est important de le prendre en compte, sachant que c'est une hypothèse beaucoup plus proche de la réalité que le cas homogène.

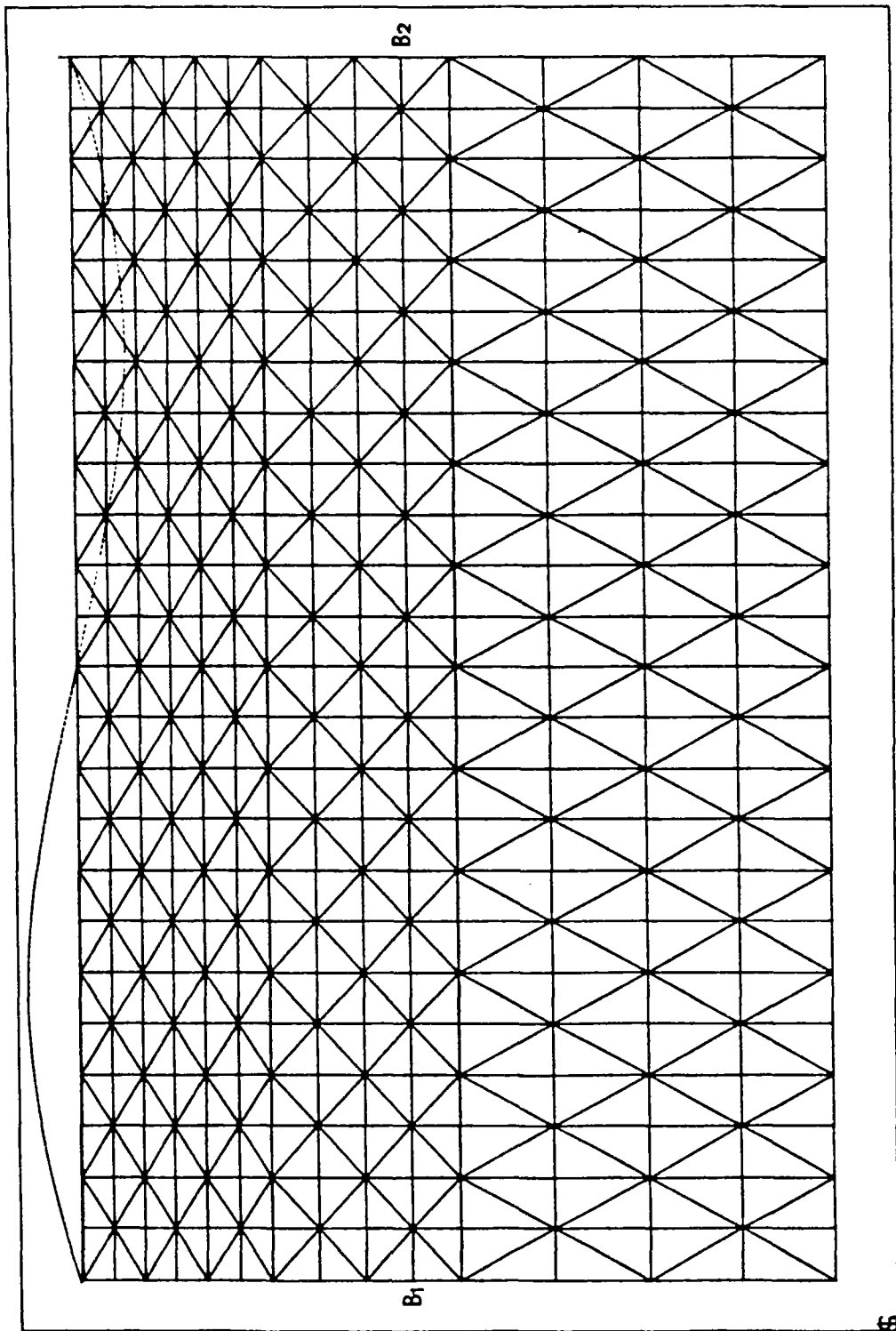


Figure VII-51 : Maillage utilisé pour une longueur d'onde.

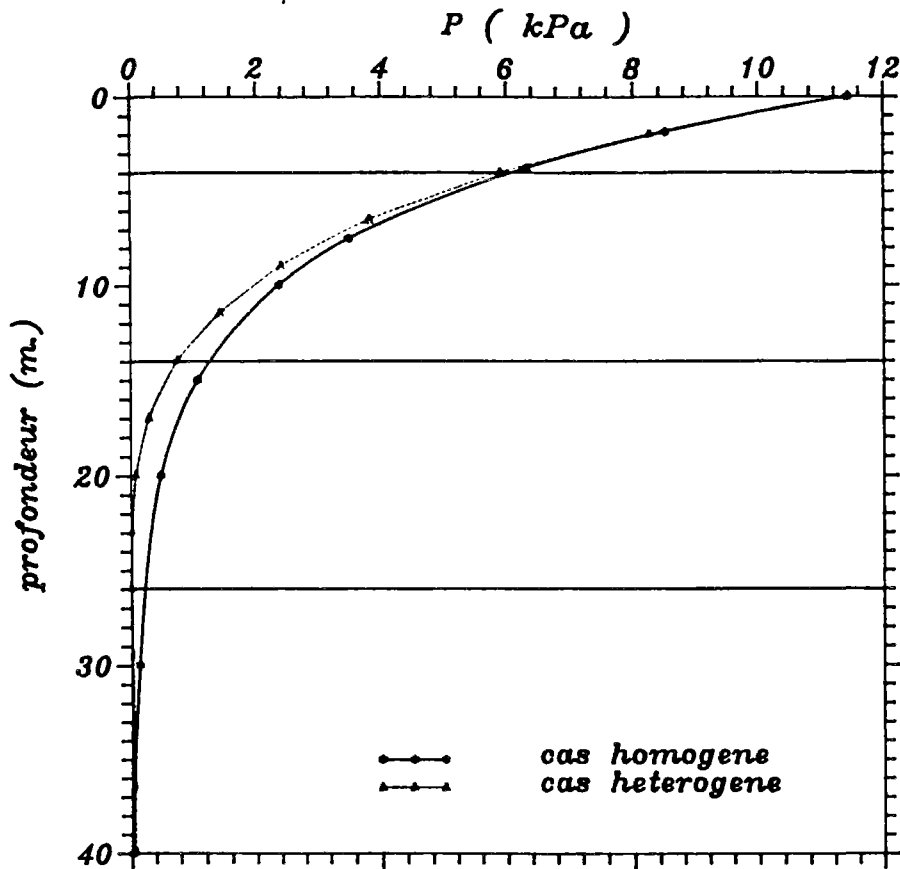


Figure VII-52 : Comparaison entre des courbes de dissipation de la pression interstitielle.

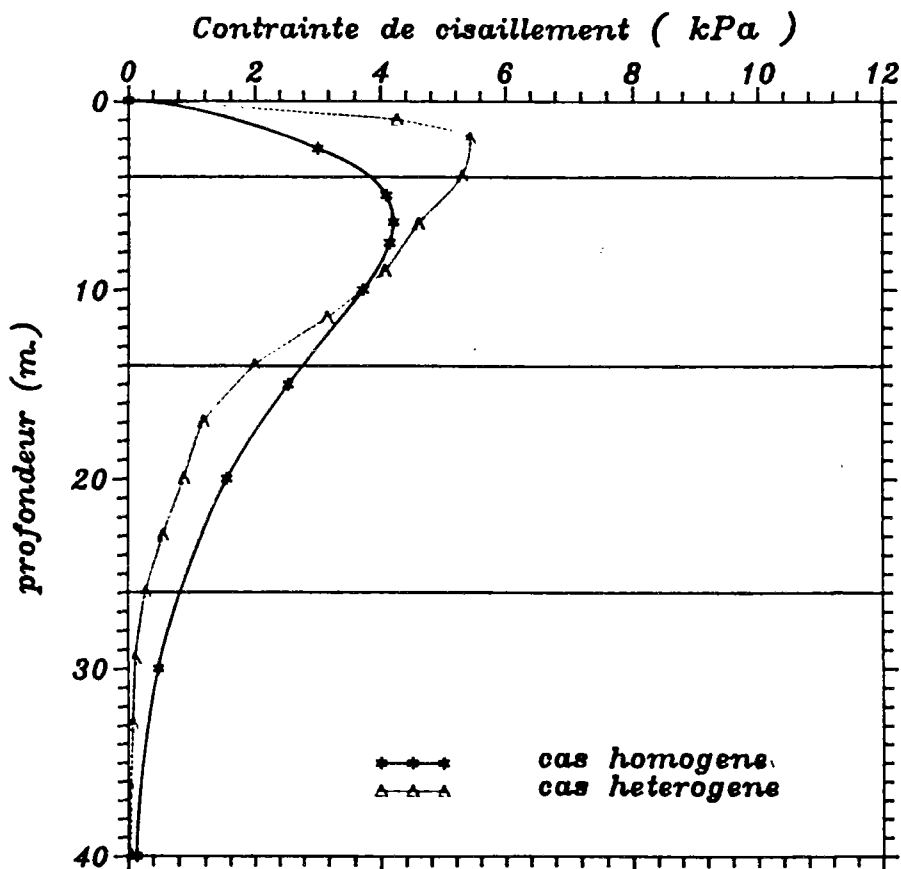


Figure VII-53 : Effet de l'hétérogénéité sur la variation verticale de la contrainte de cisaillement.

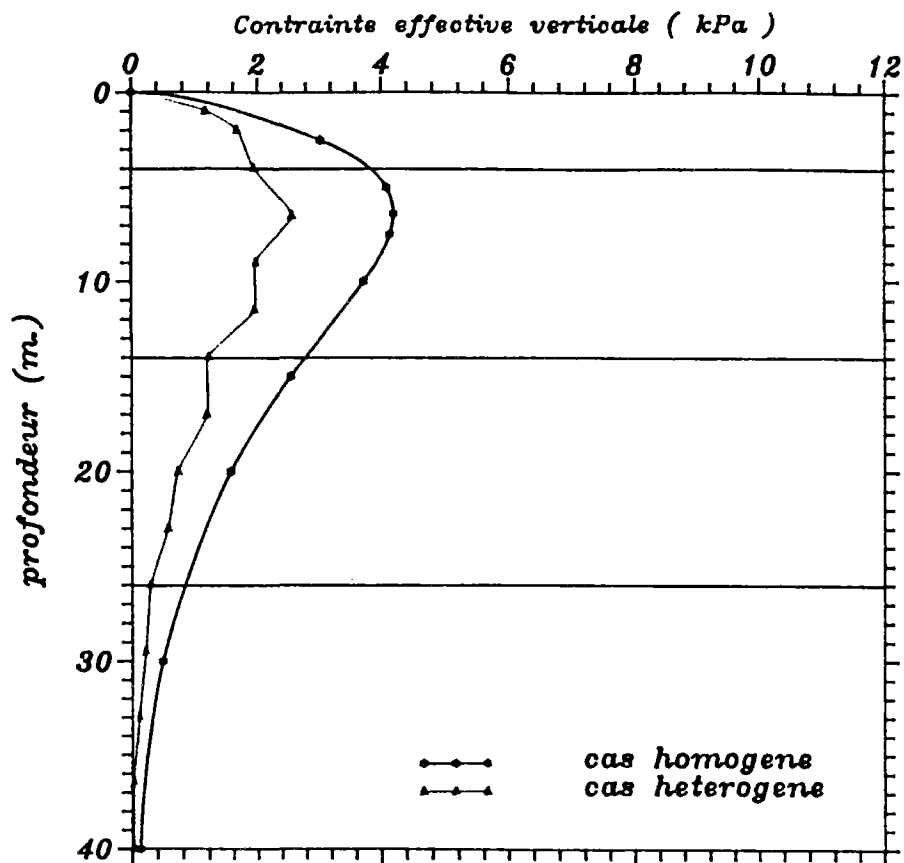


Figure VII-54 : Variation des contraintes effectives normales verticales en profondeur.

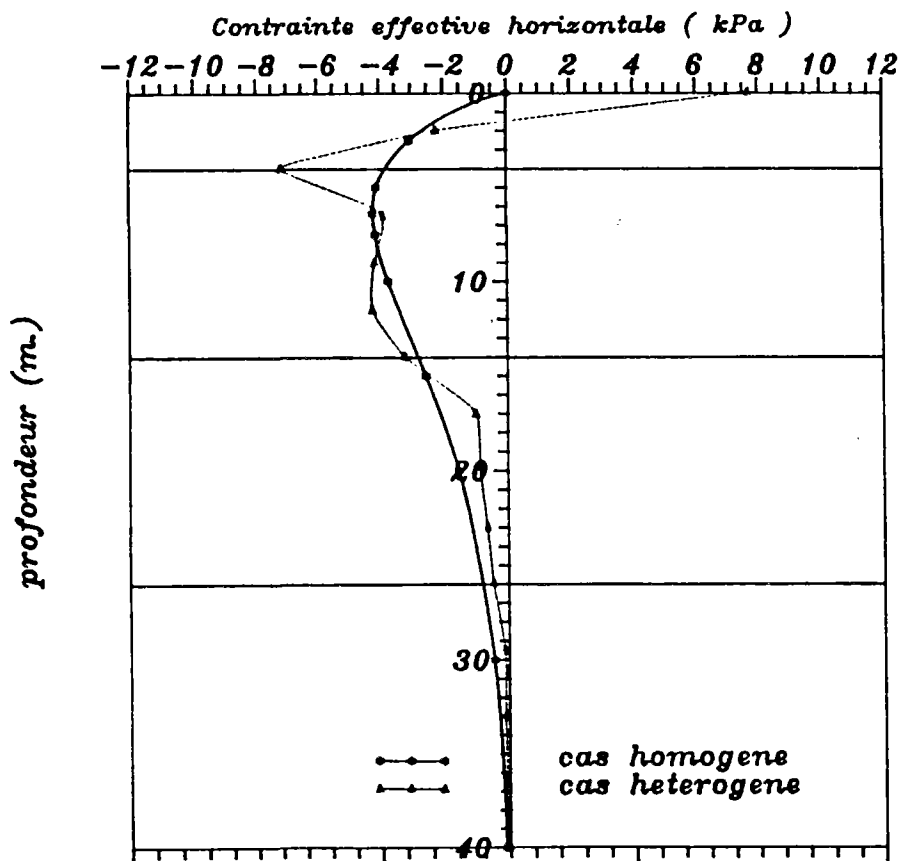


Figure VII-55 : Variation des contraintes effectives normales horizontales en profondeur,

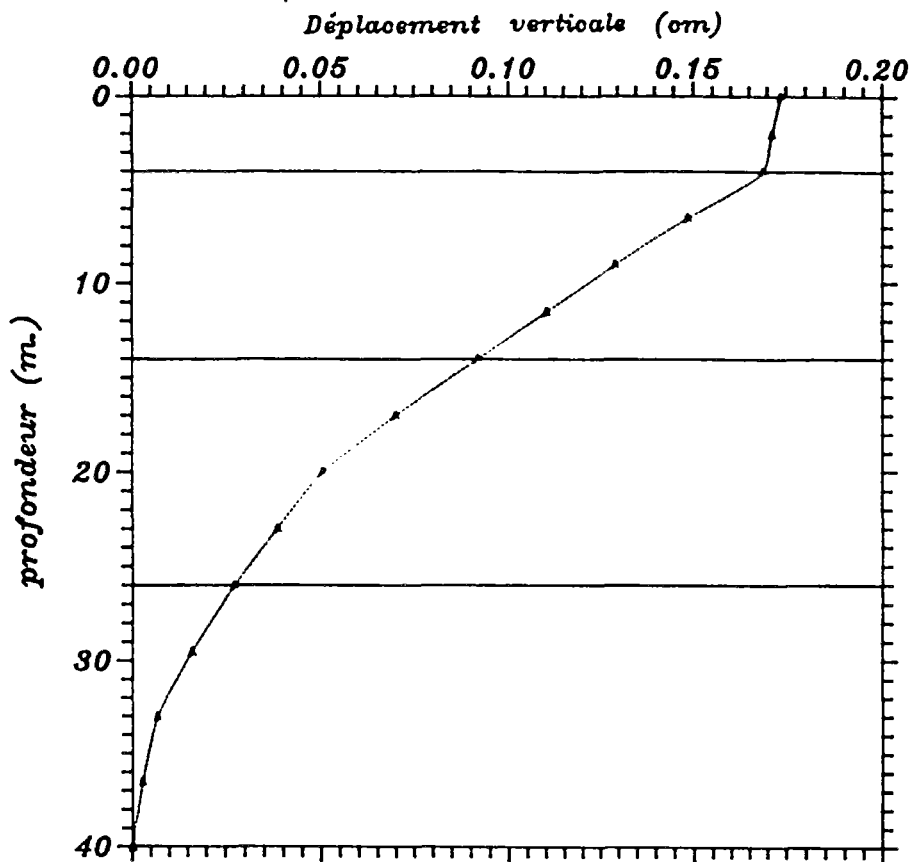


Figure VII-56 : Variation du déplacement vertical en profondeur pour un cas hétérogène.

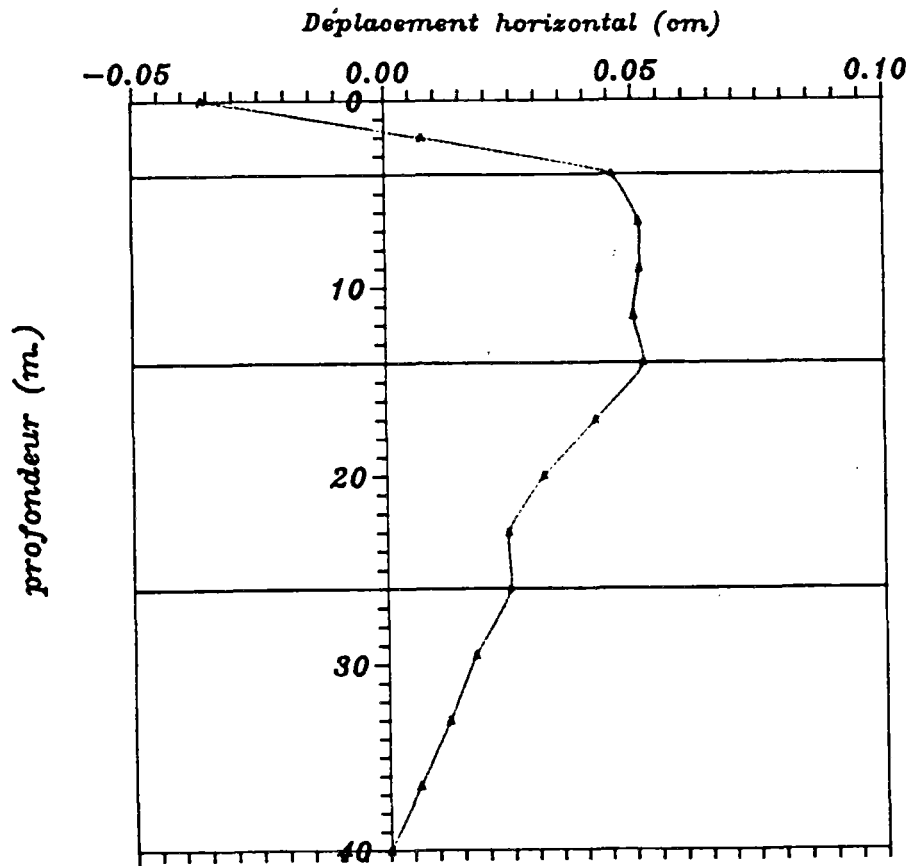


Figure VII-57 : Profil du déplacement horizontal pour un cas hétérogène.

VI CAS D'UN MASSIF ANISOTROPE

VI-1-INTRODUCTION

Comme l'étude du chapitre 6 le montre, l'utilisation d'un modèle élastique anisotrope permet d'améliorer le degré d'adaptation du modèle introduit à ce qui se passe en réalité dans le sol. Cependant, le choix des 5 paramètres de l'orthotropie de révolution est délicat dans la mesure où certains d'entre eux semblent peu connus, comme ν_{vh} et ν_{hh} en particulier. Il est donc important d'analyser leur influence sur les résultats du calcul, dans une perspective ultérieure de validation.

On présentera ensuite un cas donné d'anisotropie qui sera comparé au cas isotrope.

VI-2 INFLUENCE DE DIFFERENTS PARAMETRES

Pour mieux connaître l'effet de chaque paramètre de l'orthotropie de révolution sur l'évolution de la pression interstitielle et les contraintes effectives, afin de choisir des paramètres convenables pour une meilleure adaptation aux cas réels, on a effectué une étude paramétrique pour un sable fin, c'est-à-dire pour $0,4 \leq \frac{E_h}{E_v} \leq 1$, $k_x = 5k_y = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$, en faisant varier les valeurs des coefficients de Poisson.

Modèle étudié

Le modèle choisi correspond à une couche de sol d'épaisseur 9m, soumis à l'action d'une houle de caractéristiques suivantes :

$$L = 24 \text{ m} \qquad H = 2,97 \text{ m} \qquad T = 3 \text{ s} ,$$

qui engendre un chargement cyclique d'amplitude 10 kPa sur la surface du sol située à 3,63 m de profondeur .

Le maillage choisi est présenté sur la figure VII-11, et il est constitué de 225 noeuds avec 384 éléments triangulaires. Les conditions aux limites sont analogues à celles des autres cas étudiés.

VI-2-1 INFLUENCE DE $\frac{E_h}{E_v}$ ET DES COEFFICIENTS DE POISSON

On prend deux valeurs de $\frac{E_h}{E_v}$ égales à 1 et 0,5, en gardant les rapports $G_v/E_v = 0,5$ et $k_x/k_y = 5$ constants. On étudie la variation de la pression interstitielle, des contraintes effectives et des déplacements horizontaux et verticaux pour les points indiqués sur les figures VII-58 et VII-59. Chaque point représente un couple de valeurs ν_{vh} et ν_{hh} dans le domaine de variation possible des paramètres, dans le plan $(\frac{E_h}{E_v}, \nu_{vh}, \nu_{hh})$ (d'après Pickering, figure VII-1).

Dans le cas où $\frac{E_h}{E_v} = 0,5$, le calcul est effectué pour les dix-neuf points représenté sur la figure VII-58. Pour $\frac{E_h}{E_v} = 1$, les vingt et un points de la figure VII-59 ont été étudiés.

I - INFLUENCE SUR LA PRESSION INTERSTITIELLE

Les variations de la pression interstitielle normalisée par l'intensité du chargement (P/P_0) pour $\frac{E_h}{E_v} = 0,5$ et $\frac{E_h}{E_v} = 1$ sont présentées respectivement sur les figures VII-60 a et b. Tous les résultats seront présentés de la manière suivante : chaque courbe représente la variation de la grandeur considérée en fonction de ν_{vh} , pour une valeur donnée de ν_{hh} .

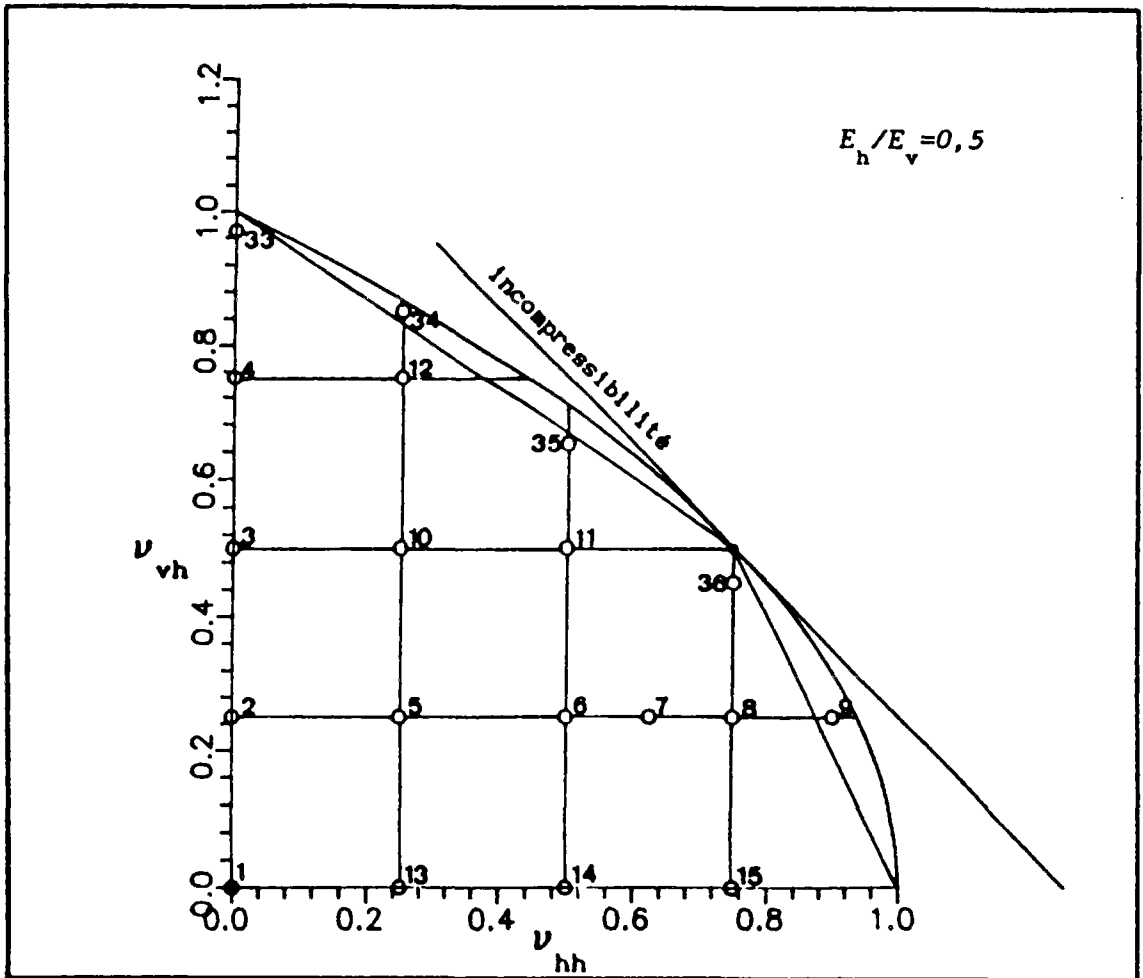


Figure VII-58 : Points étudiés pour le rapport $E_h/E_v = 0,5$.

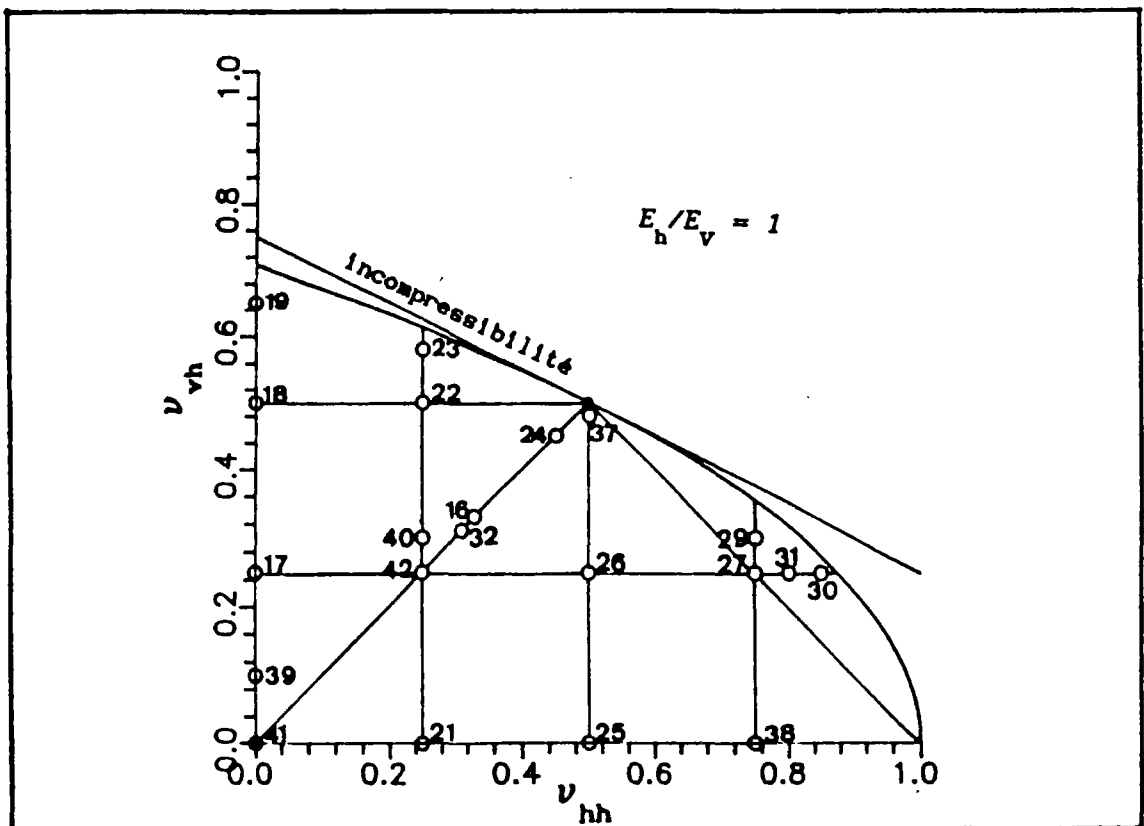


Figure VII-59 : Points étudiés pour le rapport $E_h/E_v = 1$.

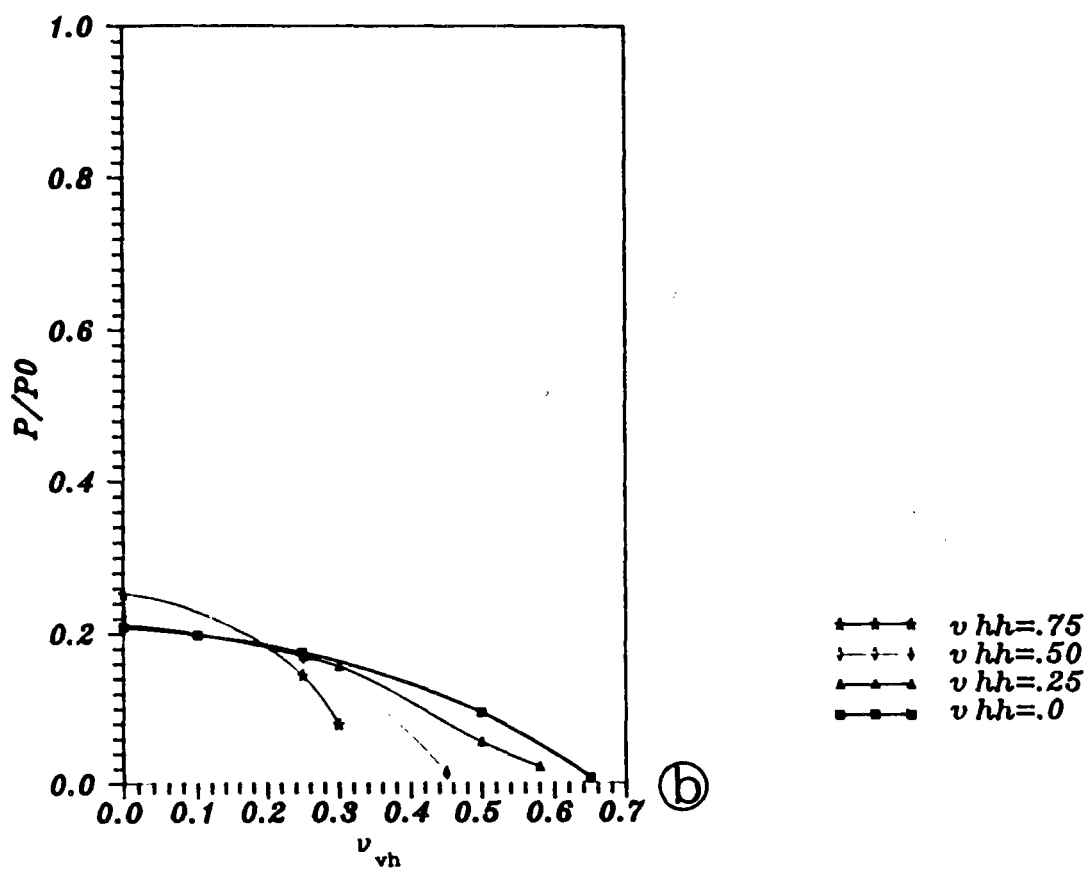
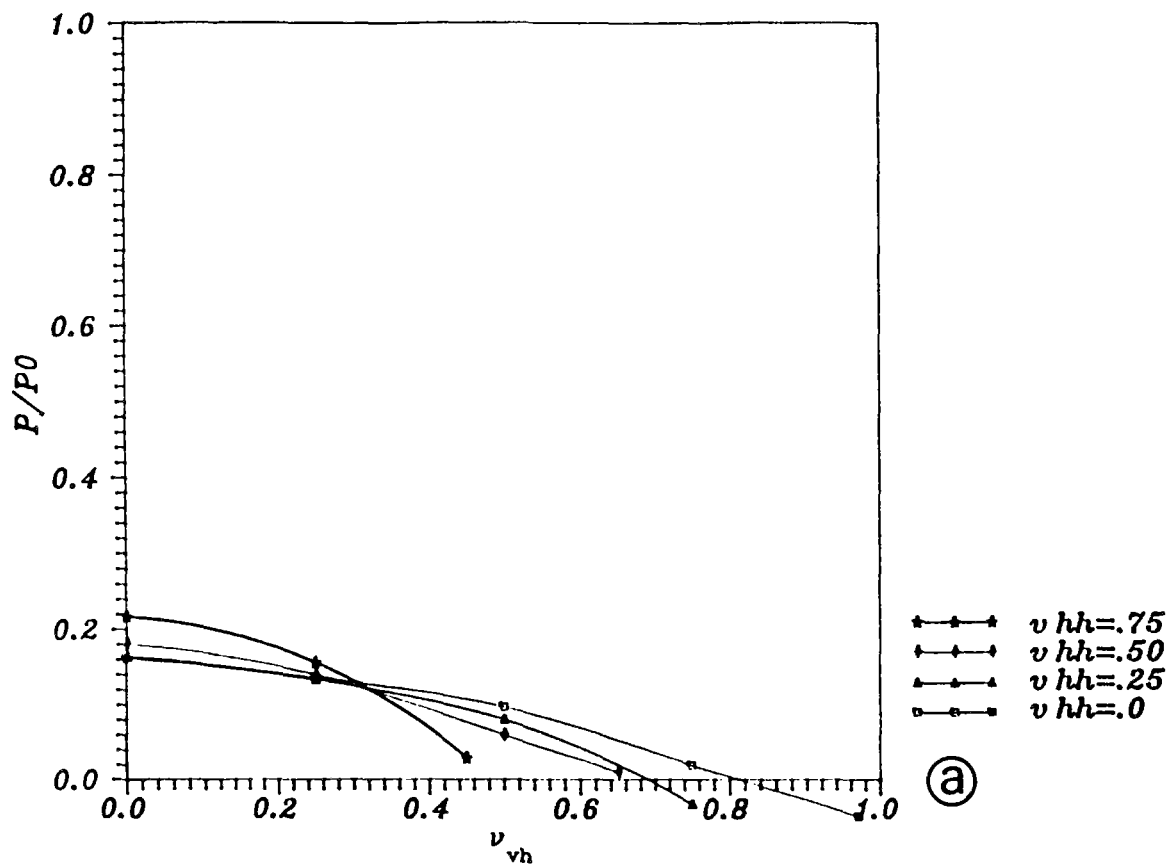


Figure VII-60 : Effet des coefficients de Poisson sur la dissipation de la pression interstitielle
 a) $E_h/E_v = 0,5$; b) $E_h/E_v = 1$

Ces courbes montrent la variation de la pression interstitielle en un point situé sur l'interface entre le sol et le substratum rigide et imperméable, qui correspond généralement à la valeur minimale de la pression interstitielle en fonction de la profondeur.

On constate que, quand ν_{vh} augmente, la dissipation de la pression interstitielle en profondeur est plus marquée avec une valeur plus faible à l'interface.

II - INFLUENCE SUR LA CONTRAINTE DE CISAILLEMENT

La variation de la contrainte de cisaillement maximale normalisée par l'intensité du chargement (τ/p_0) est montrée sur la figure VII-61 a, pour $\frac{E_h}{E_v} = 0,5$, et sur la figure VII-61 b, pour $\frac{E_h}{E_v} = 1$.

On observe que, pour $\frac{E_h}{E_v} = 1$, les valeurs des contraintes de cisaillement sont plus petites que pour $\frac{E_h}{E_v} = 0,5$, et que l'allure de chaque courbe est quasiment linéaire. Quand ν_{hh} augmente pour les valeurs petites de ν_{vh} , on observe une diminution de la contrainte de cisaillement. Pour les valeurs de ν_{vh} supérieures à 0,3, on constate que le sens de variation est inversé.

III - INFLUENCE SUR LES CONTRAINTES EFFECTIVES VERTICALES ET HORIZONTALES

Sur les figures VII-62 a et b sont présentées les variations des valeurs maximales de la contrainte effective verticale normalisée par P_0 , pour $\frac{E_h}{E_v} = 0,5$ et $\frac{E_h}{E_v} = 1$, respectivement. Comme l'on a constaté dans les cas précédents, les valeurs maximales de la

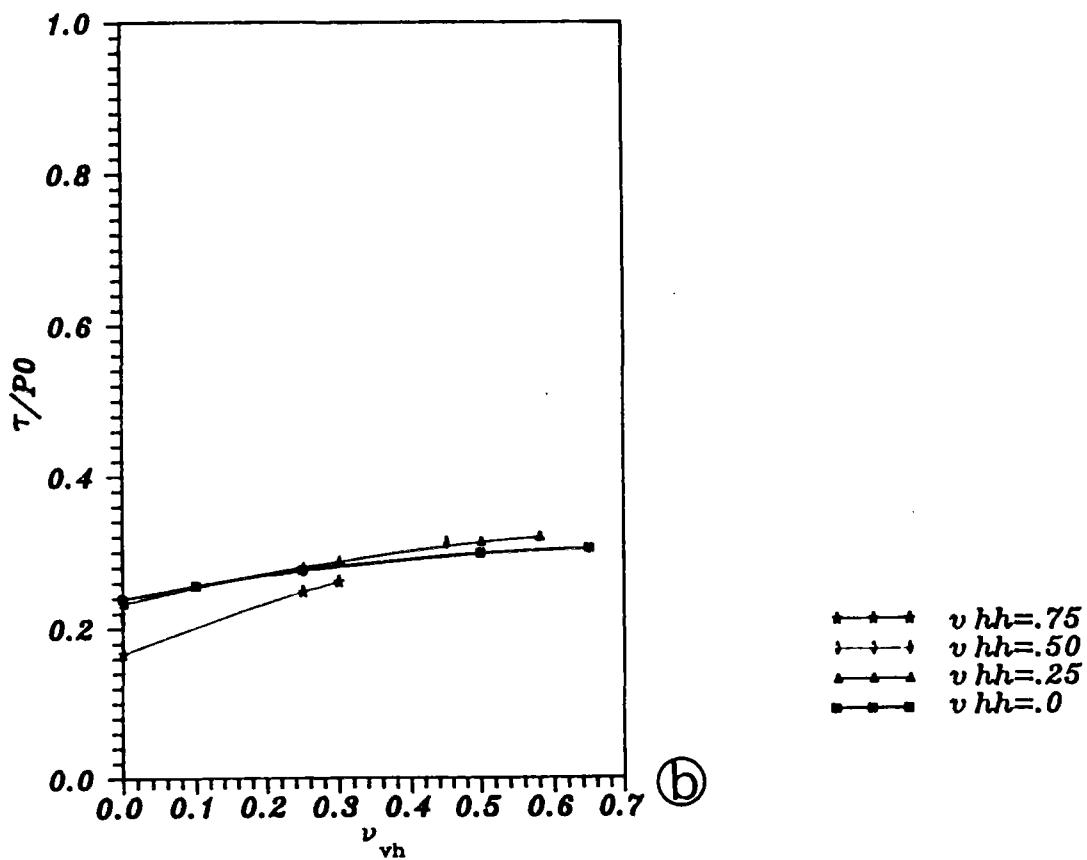
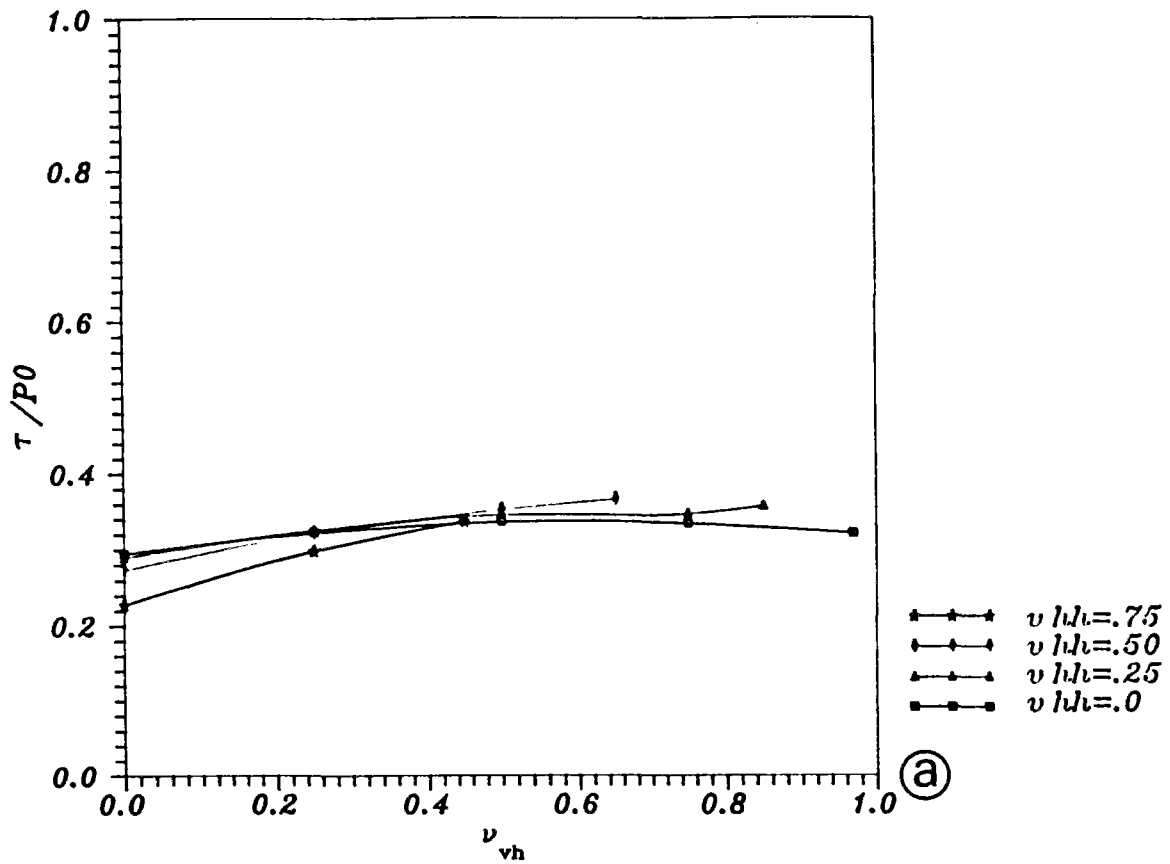


Figure VII-61 : Variation des valeurs maximales des contraintes de cisaillement
 a) $E_h/E_v = 0,5$; b) $E_h/E_v = 1$

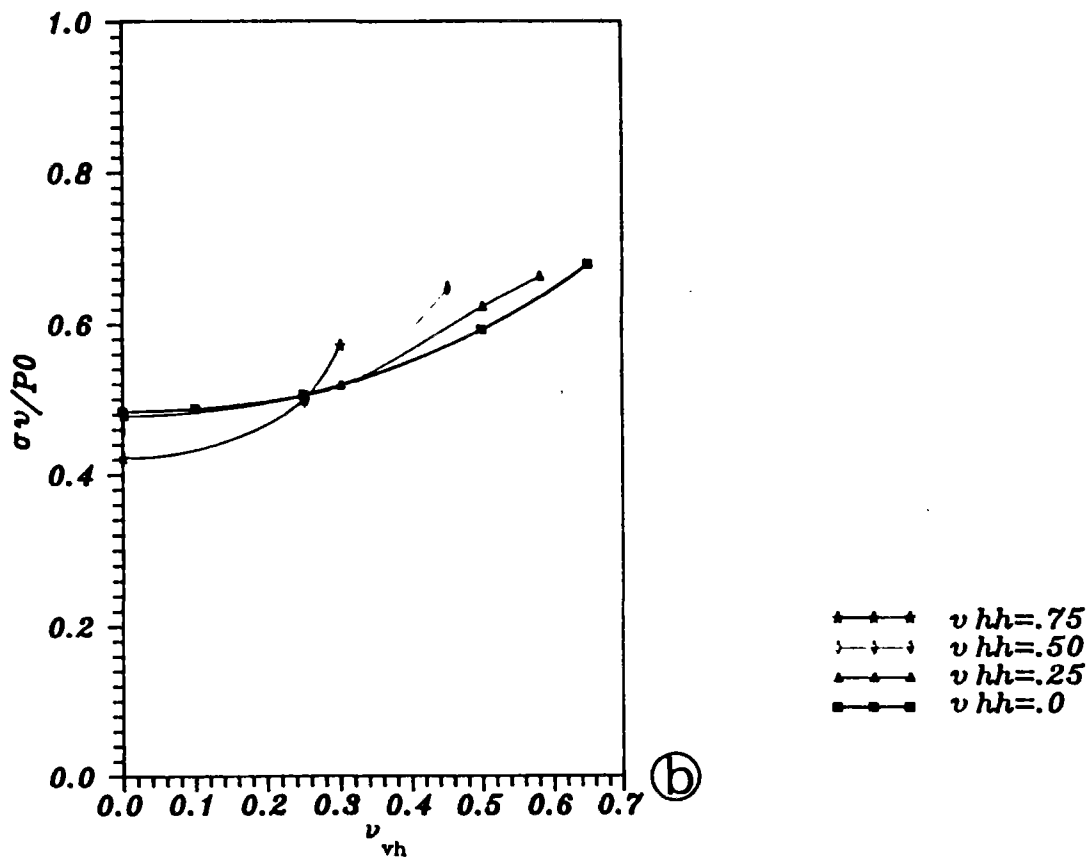
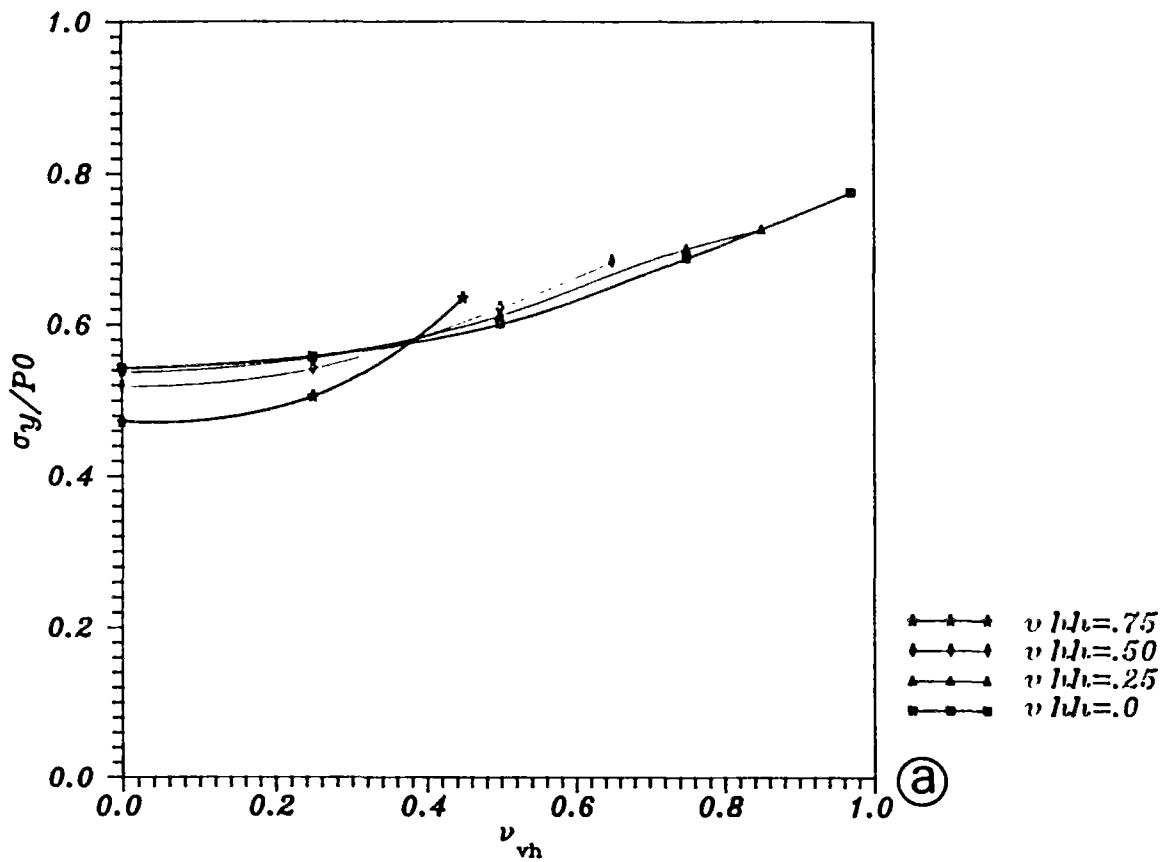


Figure VII-62 : Influence des différents paramètres d'anisotropie sur la contrainte effective normale verticale a) $E_h/E_v = 0,5$; b) $E_h/E_v = 1$

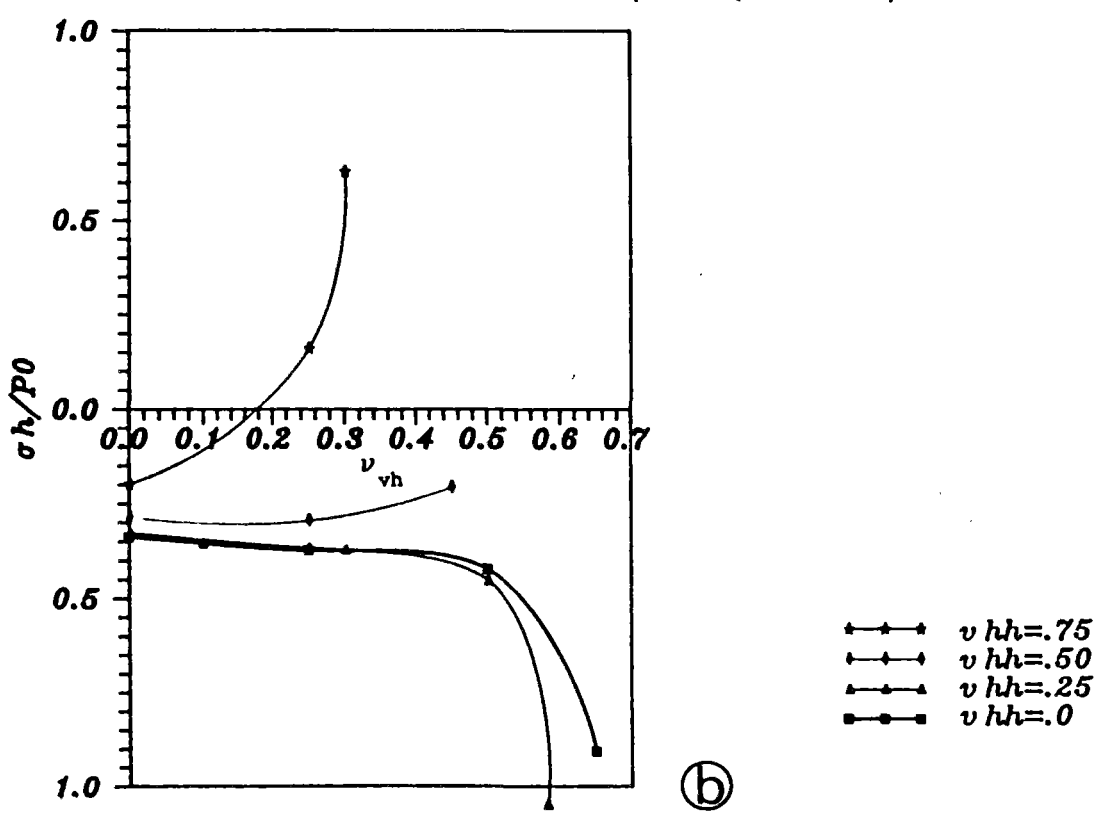
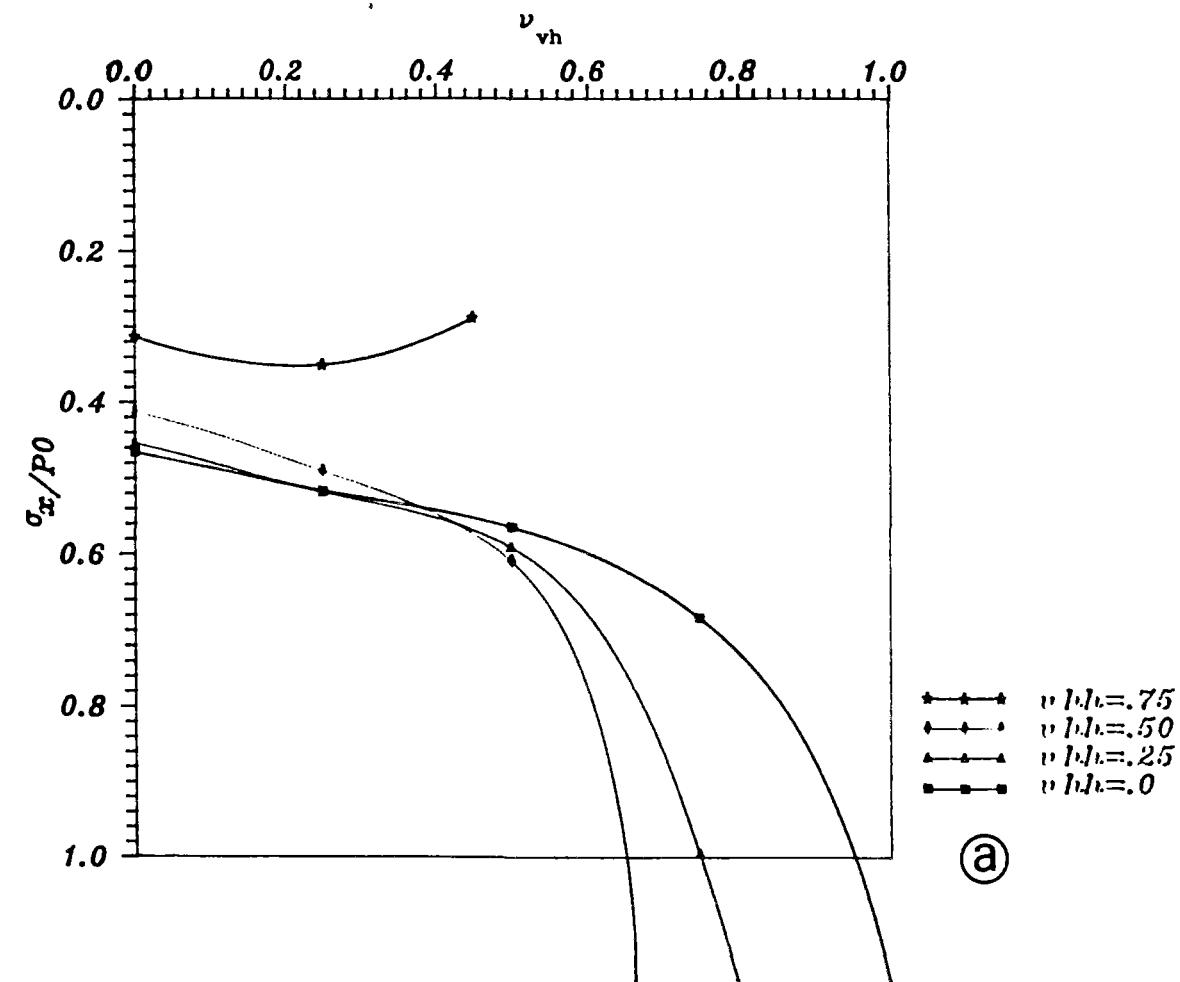


Figure VII-63 : Effet des différents paramètres d'anisotropie sur la contrainte effective normale horizontale a) $E_h/E_v=0,5$; b) $E_h/E_v=1$

contrainte effective verticale sont inférieures dans le cas $\frac{E_h}{E_v} = 1$ au cas où $\frac{E_h}{E_v} = 0,5$. D'autre part, il est clair sur les figures que, pour des valeurs plus élevées de ν_{vh} , on a une contrainte effective verticale plus grande.

Les figures VII-63 a et b montrent les valeurs maximales des contraintes effectives horizontales en fonction de $\frac{E_h}{E_v}$, ν_{vh} et ν_{hh} . En s'approchant de la courbe limite des valeurs possibles des ν_{vh} et ν_{hh} (figures VII-58 et VII-59), on observe de grandes variations de la contrainte effective horizontale, dont le sens s'inverse pour $\nu_{hh} = 0,75$. L'effet de $\frac{E_h}{E_v}$ sur l'allure de ces courbes est plus important que dans les cas précédents.

IV - INFLUENCE SUR LES DEPLACEMENTS

On a étudié l'effet des trois paramètres $\frac{E_h}{E_v}$, ν_{hh} , ν_{vh} sur le déplacement vertical maximal, localisé à la surface, sur le déplacement horizontal maximal situé au sein de la couche, et le déplacement horizontal du fond marin, c'est à dire à la surface de la couche de sol. Les variations du déplacement vertical de la surface sont présentées sur les figures VII-64 a et b. Les courbes sont assez proches les unes des autres, avec une valeur maximale pour $0,35 < \nu_{vh} < 0,45$.

Les figures VII-65 a et b montrent la variation du déplacement horizontal en surface, et les figures VII-66 a et b présentent la variation du déplacement horizontal maximal. Pour de faibles valeurs de ν_{vh} , le déplacement horizontal décroît quand ν_{hh} croît. La tendance est inversée pour $\nu_{vh} = 0,35$ dans le cas $E_h/E_v = 1$, et $\nu_{vh} = 0,45$ pour $E_h/E_v = 0,5$. Ces valeurs correspondent au maximum des déplacements verticaux observés précédemment.

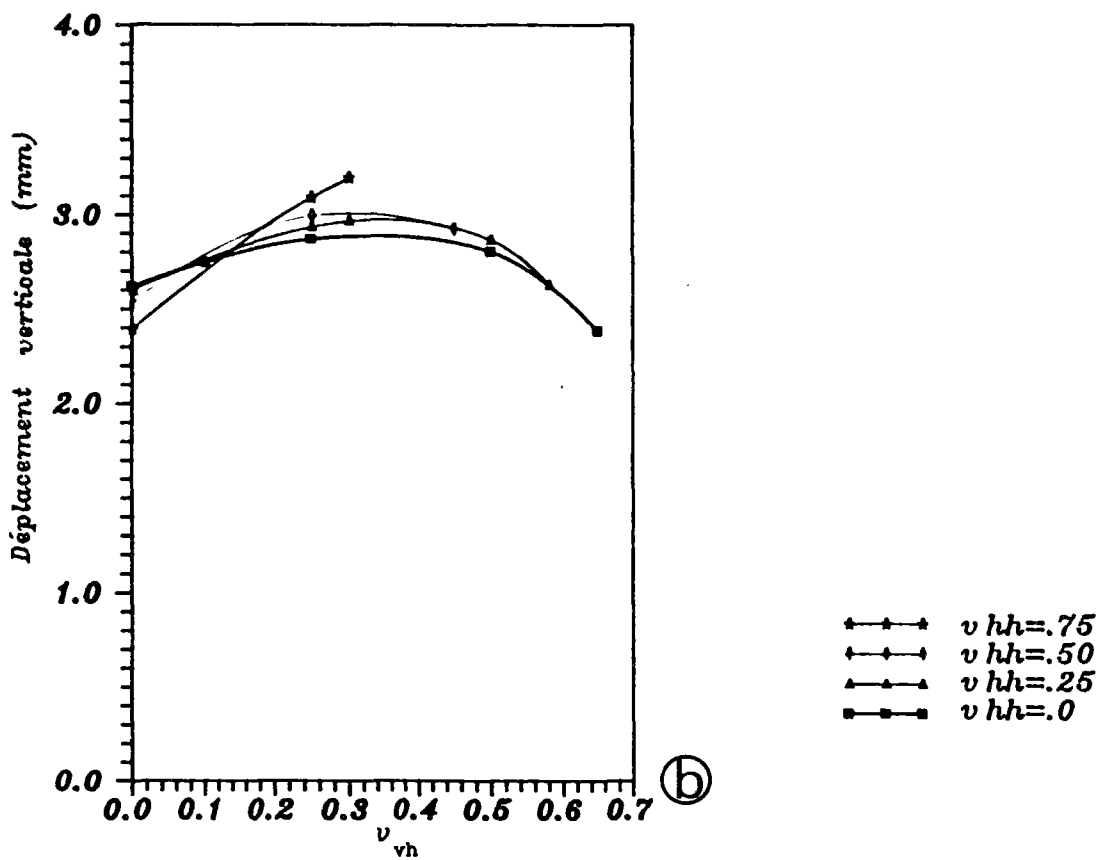
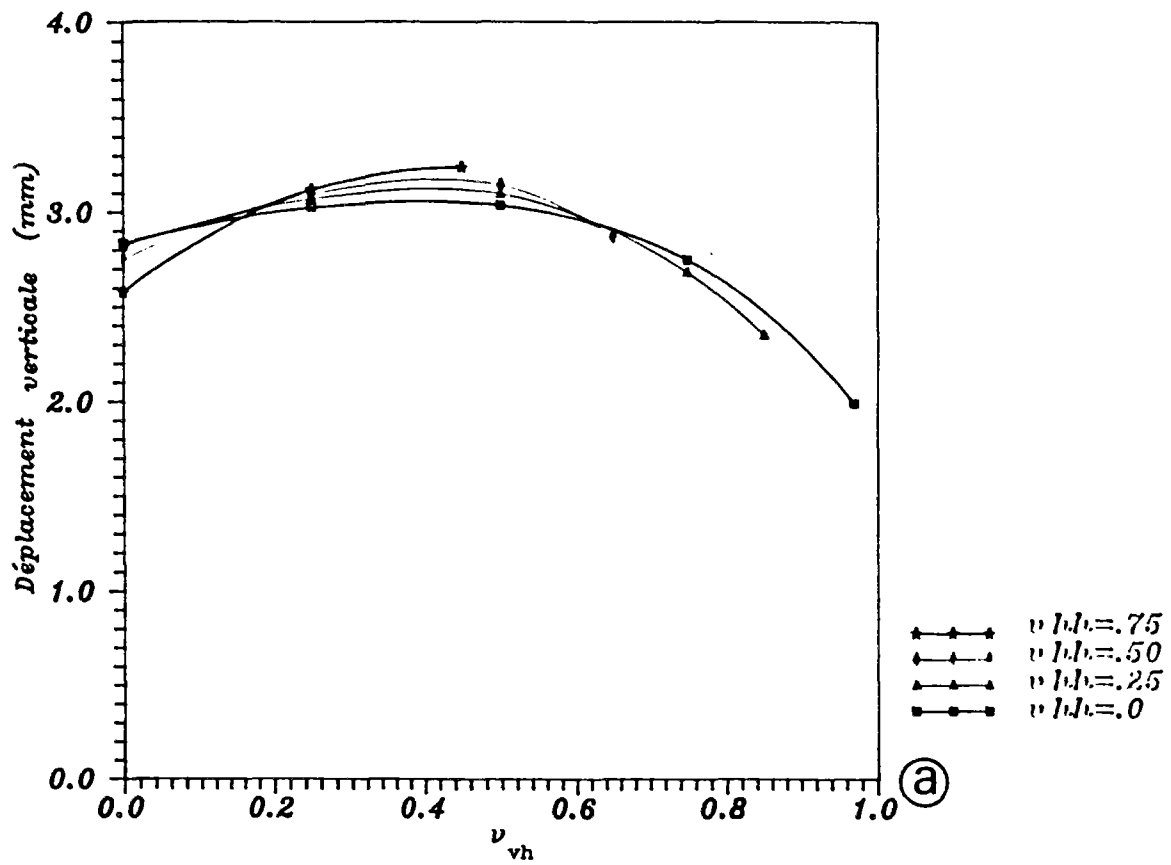


Figure VII-64 : Evolution des déplacements verticaux d'un point du fond marin (sous la crête) sous l'effet d'anisotropie
 a) $E_h/E_v = 0,5$; b) $E_h/E_v = 1$

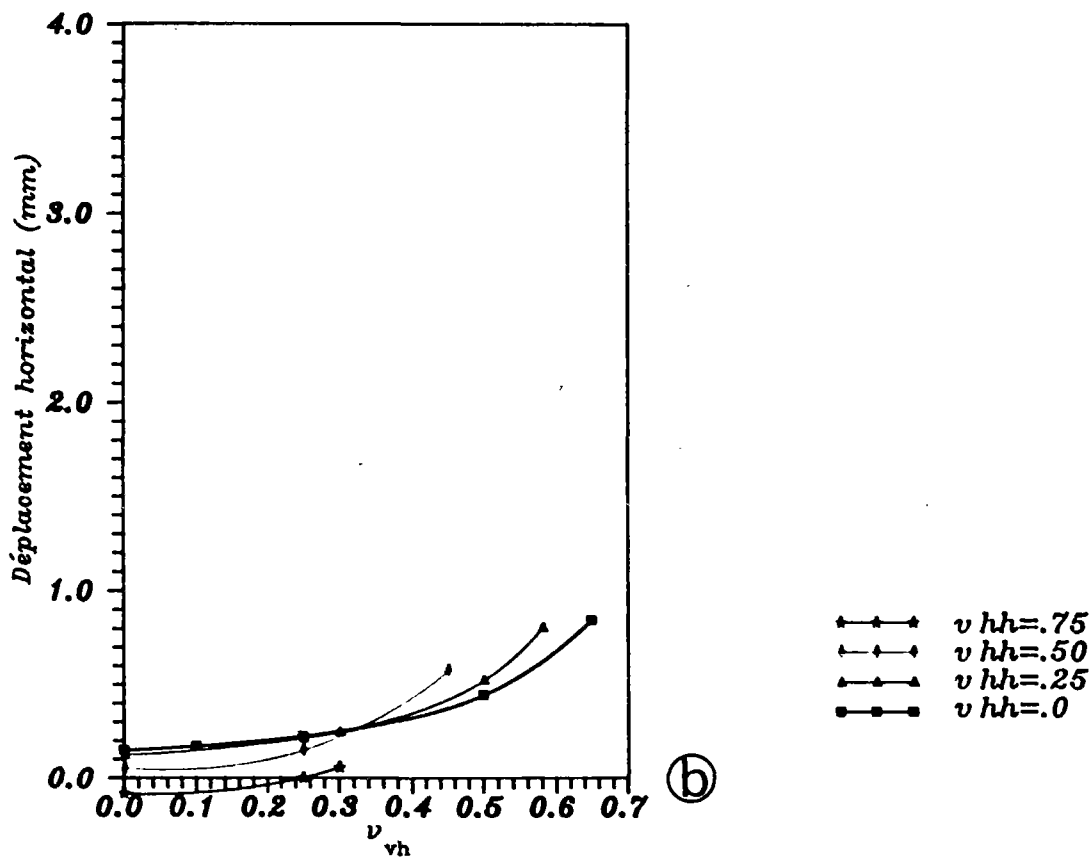
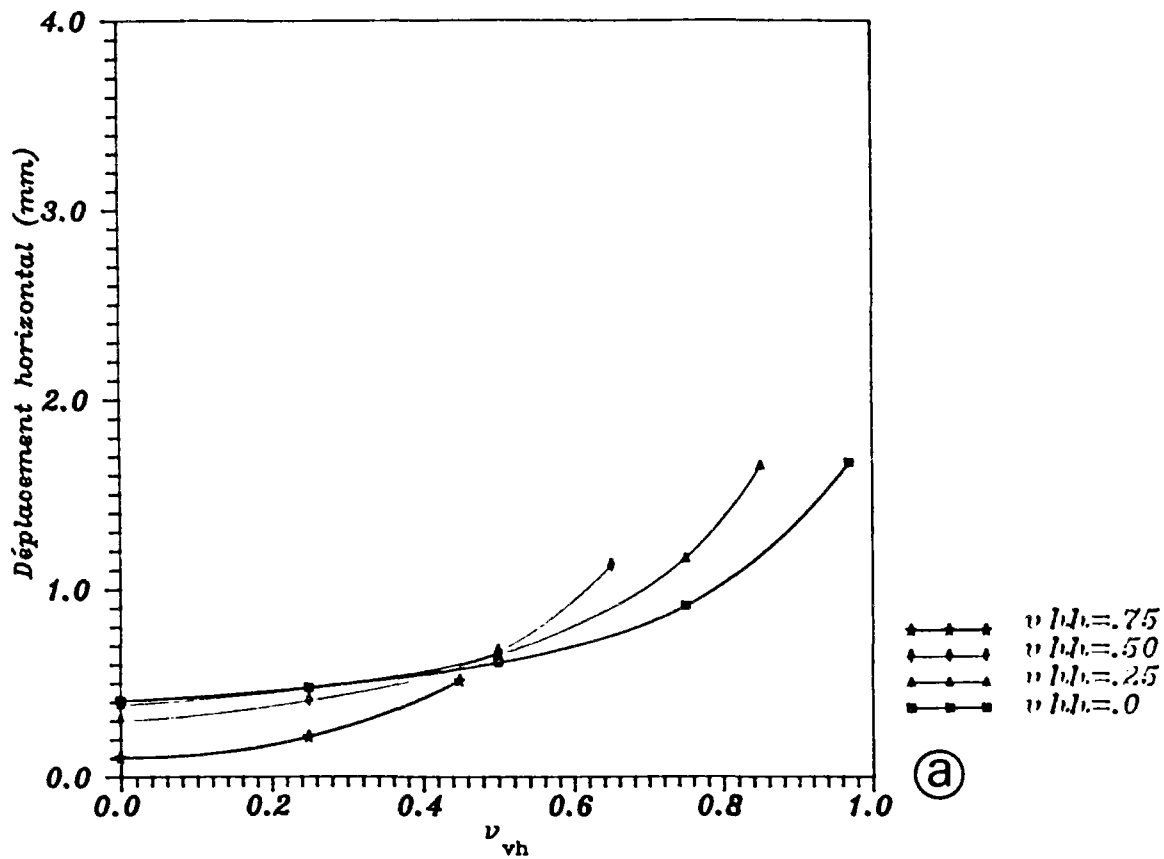


Figure VII-65 : Evolution des déplacements horizontaux d'un point du fond marin (sous le noeud) sous l'effet d'anisotropie a) $E_h/E_v = 0,5$; b) $E_h/E_v = 1$

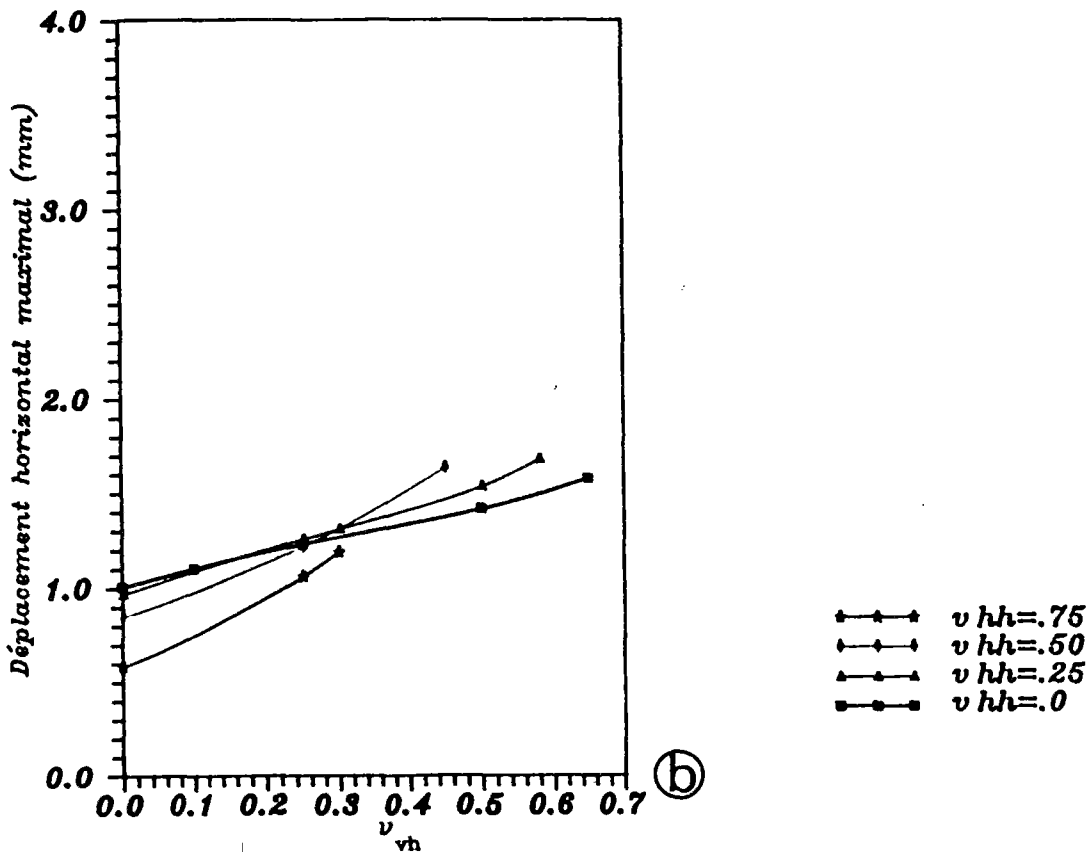
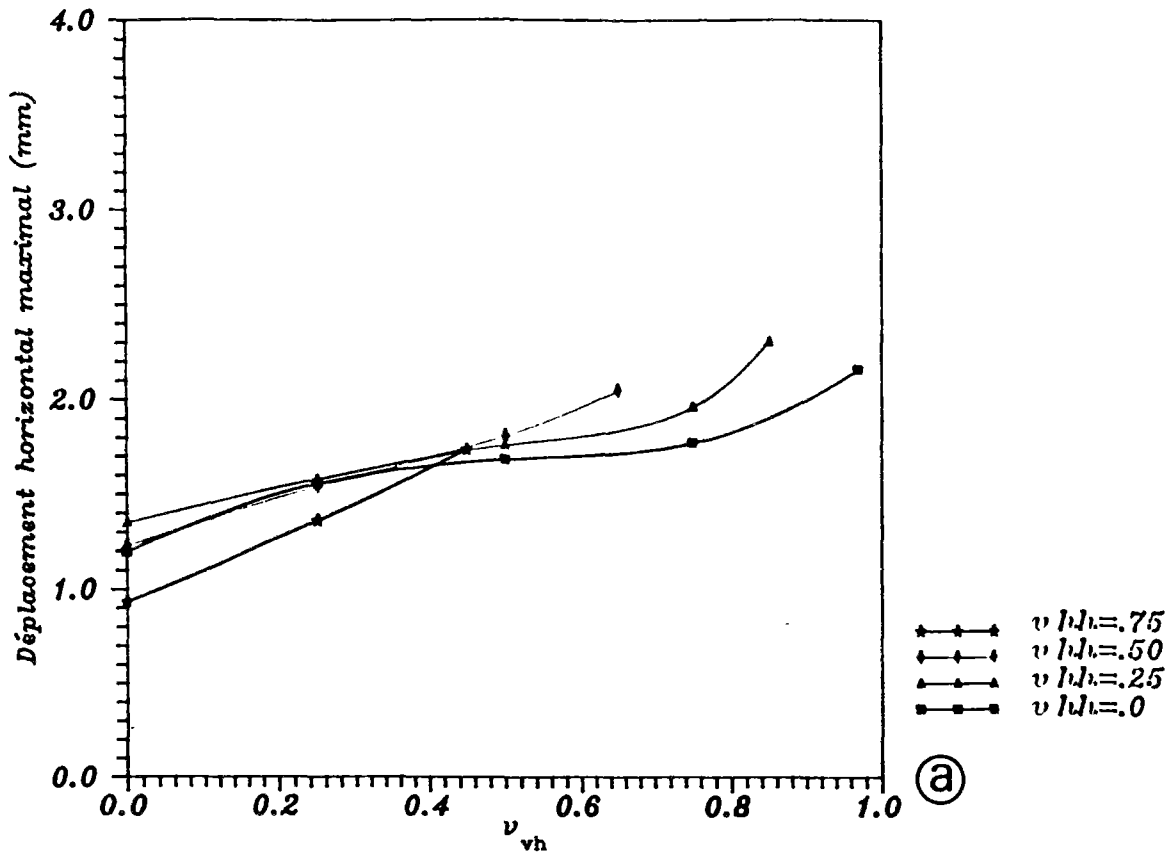


Figure VII-66 : Effet des paramètres d'anisotropie sur les déplacements horizontaux maximaux au sein du massif a) $E_h/E_v = 0,5$; b) $E_h/E_v = 1$

Pour les 40 cas étudiés, on présente en annexe les profils des pressions, contraintes effectives normales et de cisaillement, ainsi que les tableaux correspondant aux valeurs des figures précédentes.

VI 2-2 INFLUENCE DE G_v/E_v

Pour mettre en évidence l'influence du module de cisaillement vertical, on a étudié cinq valeurs différentes de G_v , les autres paramètres restant constants. Les valeurs choisies sont :

$$\frac{E_h}{E_v} = 1; \nu_{hh} = 0,5; \nu_{vh} = 0,25$$

$$\frac{G_v}{E_v} = 0,5; 0,75; 1; 1,25; 1,33$$

On présente sur la figure VII-67 les variations des valeurs normalisées de la pression interstitielle, de la contrainte de cisaillement et des contraintes effectives normales en fonction de $\frac{G_v}{E_v}$.

L'effet est moindre sur la contrainte normale verticale et sur la pression interstitielle. L'effet le plus marqué est, logiquement, observé sur la contrainte de cisaillement, et moins fortement sur la contrainte normale horizontale.

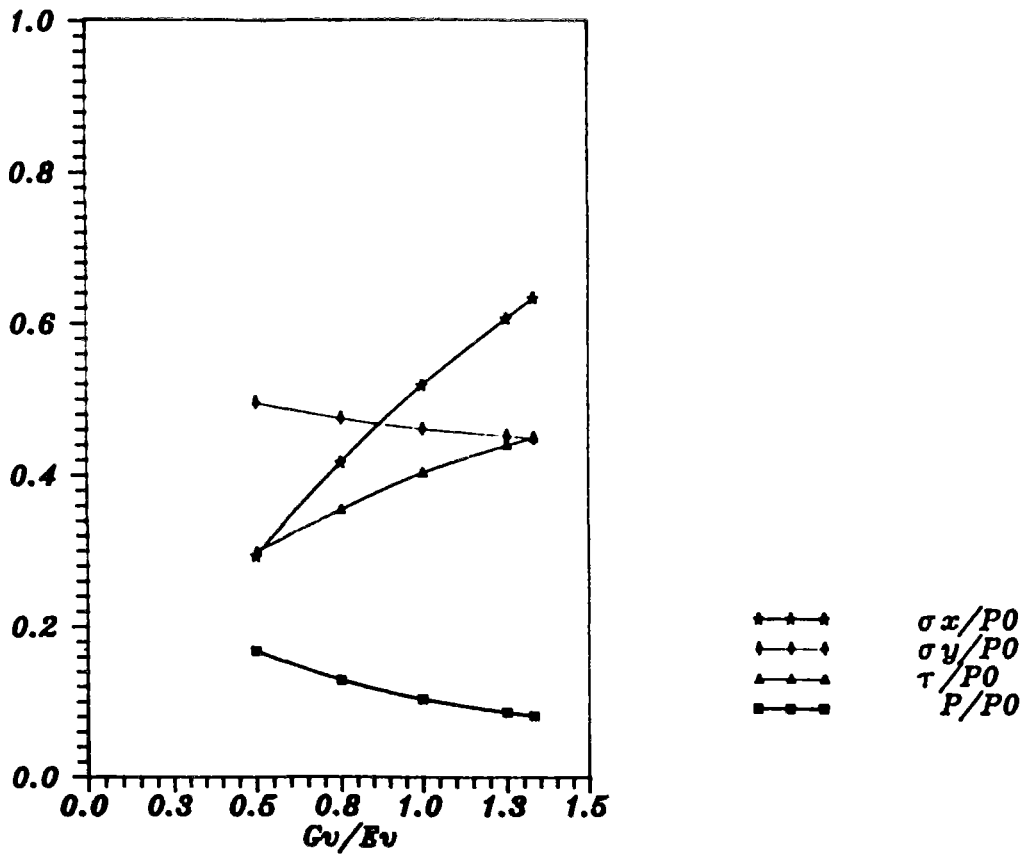


Figure VII-67 : Effet de $\frac{G_v}{E_v}$ sur les différentes grandeurs considérées.

VI-3 APPLICATION AU CAS D'UN SOL ANISOTROPE

On considère ici, à titre d'exemple, un sol élastique anisotrope (orthotrope de révolution) défini par cinq paramètres choisis dans le domaine des valeurs possibles. Les résultats obtenus seront comparés au modèle élastique isotrope. Les paramètres choisis sont :

$$\begin{aligned} \text{sol anisotrope: } E_h &= 5,2 \cdot 10^3 \text{ kPa} \\ E_v &= 1,3 \cdot 10^4 \text{ kPa} & k_x = 5 \ k_y = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m/s} \\ \nu_{hh} &= 0,8 \\ \nu_{vh} &= 0,2 \\ G_v &= 6,5 \cdot 10^3 \text{ kPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sol isotrope: } E_h &= E_v = 1,3 \cdot 10^4 \text{ kPa} \\ \nu &= 0,3 \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)} = 5 \cdot 10^3 \text{ kPa} \\ k_x &= k_y = 10^{-6} \text{ m/s} \end{aligned}$$

La houle choisie a les caractéristiques suivantes :

$$L = 24 \text{ m} \quad H = 2,97 \text{ m} \quad T = 3 \text{ s} ,$$

ce qui donne une pression cyclique d'amplitude 10 kPa sur le fond marin situé à 3,63m de profondeur.

L'épaisseur du sol est de 9m.

Le maillage et les conditions aux limites choisis pour le calcul sont identiques au cas précédent.

Le profil de pression interstitielle (figure VII-68) montre

un effet important de l'anisotropie, se traduisant par une atténuation plus forte avec la profondeur, et en particulier une pression plus faible à l'interface avec le substratum, probablement reliée à une perméabilité horizontale plus forte.

Le profil de contrainte de cisaillement (figure VII-69) montre des valeurs plus fortes avec l'anisotropie. La même tendance est observée pour la contrainte normale verticale (figure VII-71) et elle est inverse pour la contrainte normale horizontale (figure VII-71). Il en va de même pour les valeurs des déplacements verticaux (figure VII-72), plus forts, et horizontaux (figure VII-73), plus faibles.

En conclusion, on observe un effet marqué de l'anisotropie, confirmant l'importance des conséquences du choix de l'hypothèse isotrope. Néanmoins, il est nécessaire d'avoir une connaissance des cinq paramètres d'orthotropie, dont on a vu l'influence importante. Ceci concerne en particulier les paramètres ν_{vh} , ν_{hh} , généralement peu connus.

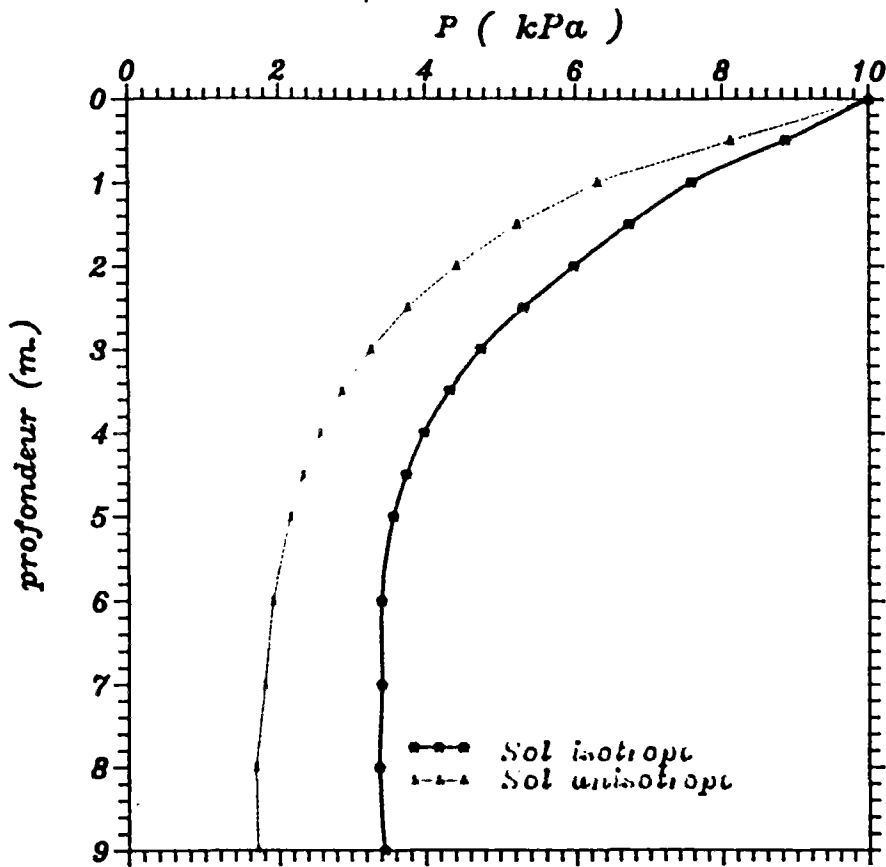


Figure VII-68 : Variation de la pression interstitielle en profondeur pour des sols isotrope et anisotrope.

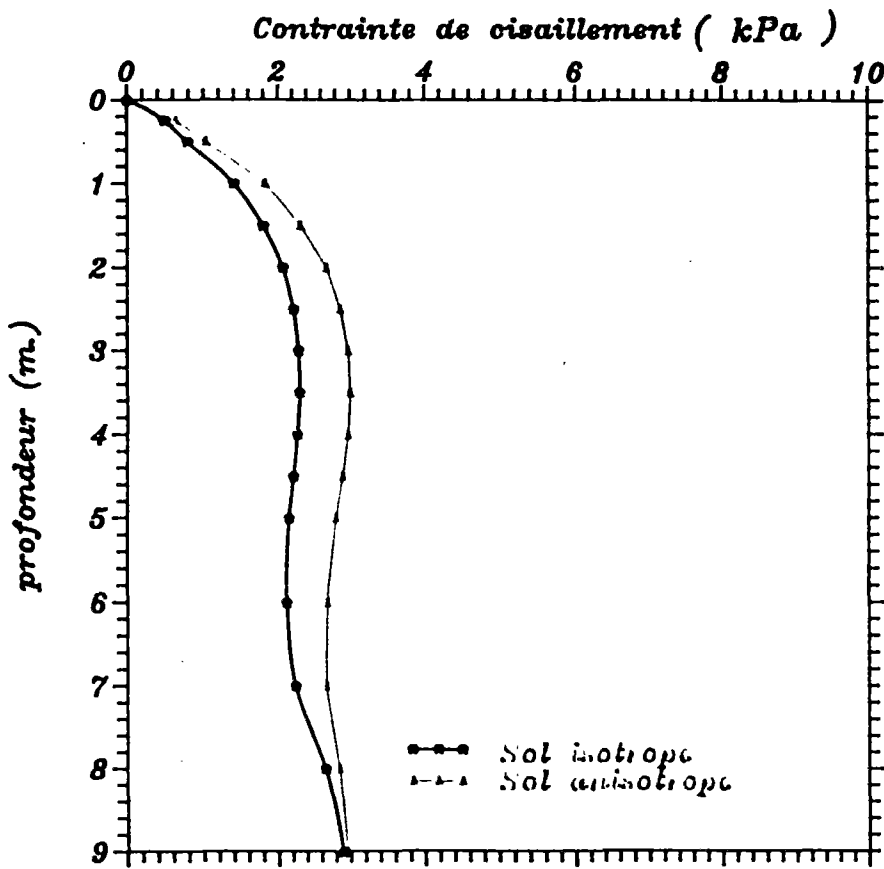


Figure VII-69 : Distribution de la contrainte de cisaillement dans les cas isotrope et anisotrope.

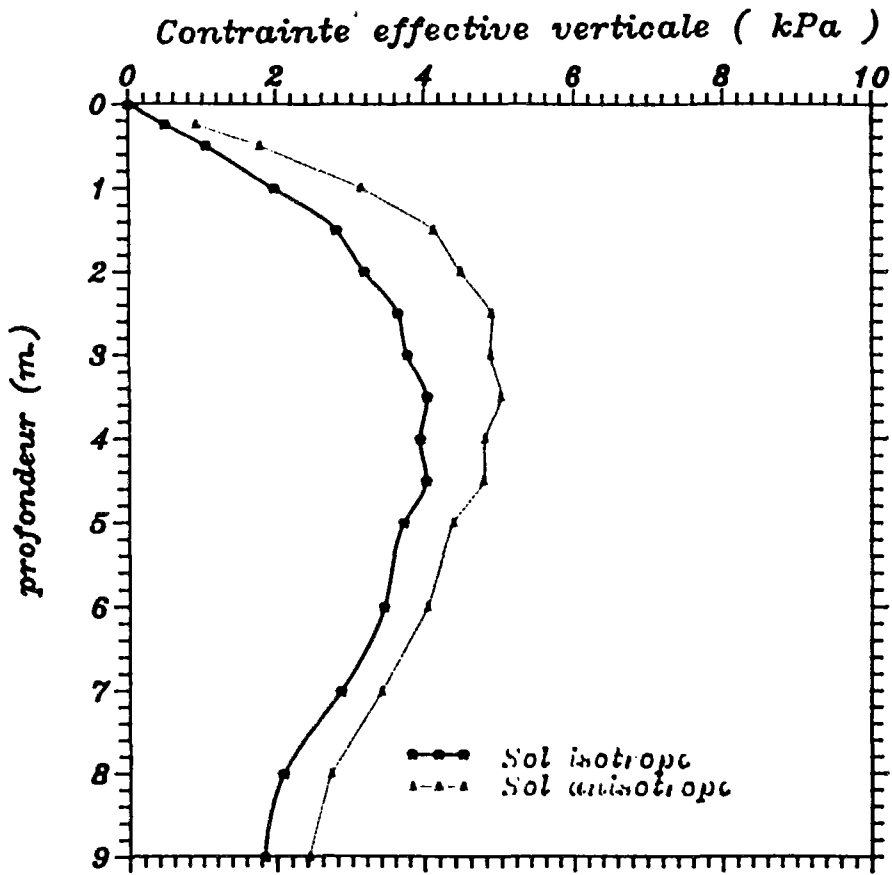


Figure VII-70 : Distribution de la contrainte effective normale verticale.

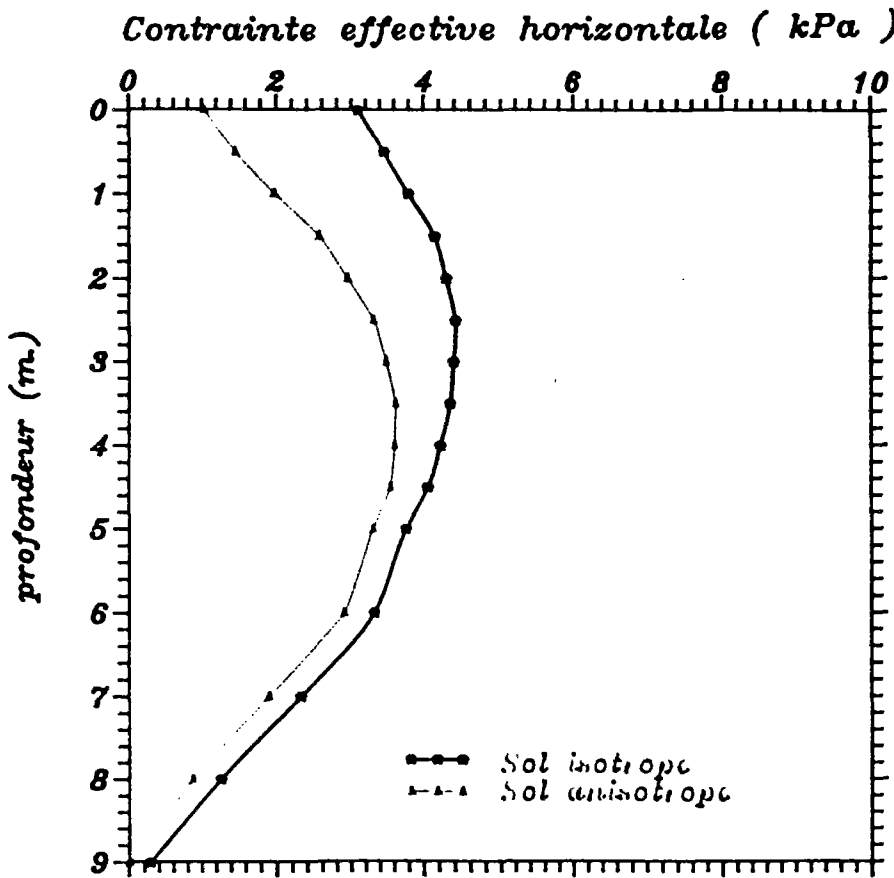


Figure VII-71 : Distribution de la contrainte effective normale horizontale.

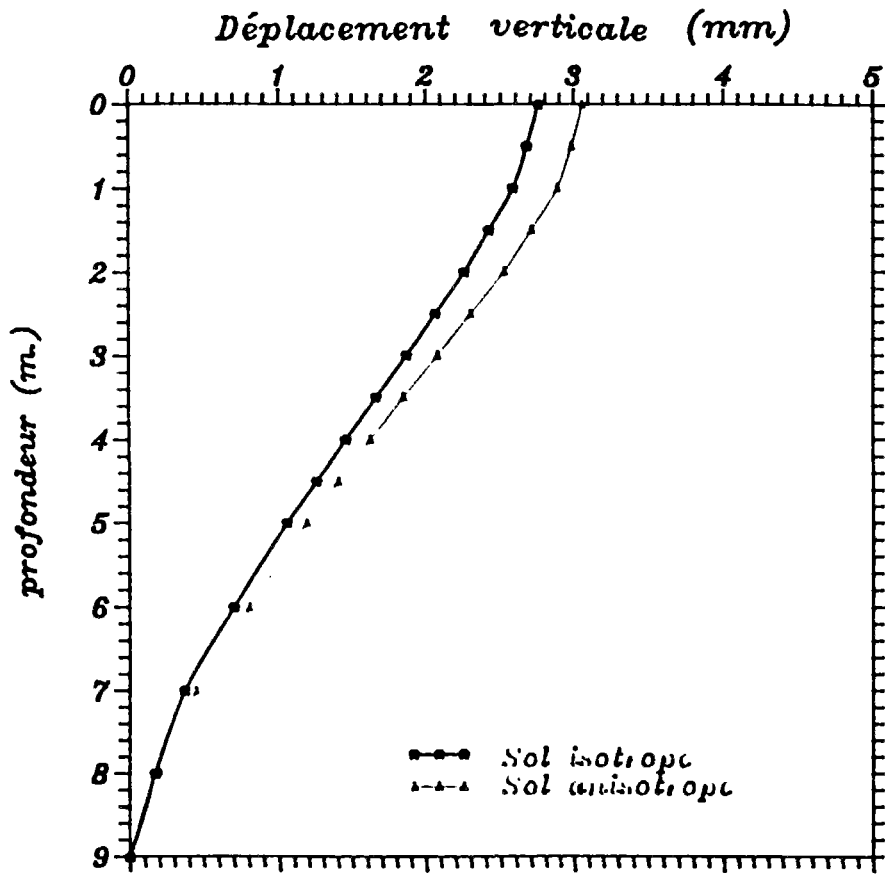


Figure VII-72 : Effet de l'anisotropie sur les déplacements verticaux.

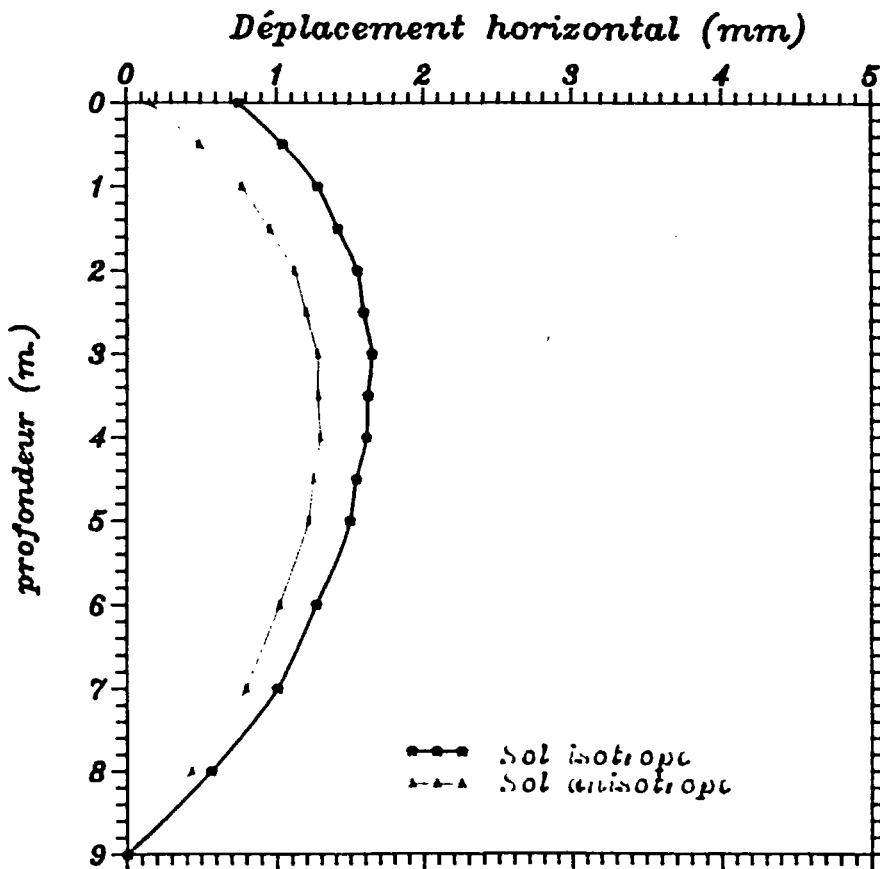


Figure VII-73 : Evolution des déplacements horizontaux sous l'effet de l'anisotropie.

*Penser, ce n'est pas unifier, rendre familier
l'apparence sous le visage d'un grand principe.
Penser c'est réapprendre à voir, diriger sa
conscience, faire de chaque image un lieu
privilegié.*

A. CAMUS

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Au terme de cette étude sur la réponse d'un massif sous-marin à l'action de la houle, on est en mesure de tirer un certain nombre de conclusions.

Il a tout d'abord été nécessaire d'étudier la validité de la théorie de la houle de STOKES, dans le cadre du problème considéré. On a montré que les conditions de déformabilité et de perméabilité du fond marin ne modifient pas significativement la propagation de la houle. On a donc retenu, comme sollicitation exercée par la houle sur le fond, l'expression de la pression dynamique donnée par la théorie de STOKES du premier ordre. L'influence de l'inclinaison du fond sur la houle a été abordée par une méthode énergétique, qui a permis de proposer une approximation simple et réaliste, avant le point de déferlement, de la pression sur le fond.

Afin de modéliser la tête d'un talus sous-marin, on a considéré la répartition des contraintes et des pressions interstitielles dans un coin, et on a proposé une solution analytique basée sur l'hypothèse élastique, et la transformation de Mellin. Une telle résolution ne semble pas avoir déjà été proposée dans le cas d'une sollicitation aussi complexe que celle engendrée par la houle ; les calculs se sont révélés assez longs et complexes, mais ont permis d'aboutir à une expression analytique exacte de la solution, qui pourra en particulier être utilisée pour des calculs

de stabilité de ces têtes de talus.

Afin de pouvoir envisager des géométries et des hypothèses mécaniques plus variées, on a eu recours à une approche numérique basée sur la théorie d'évolution quasistatique du milieu poroélastique de BIOT, et sur la méthode des éléments finis ; on a conçu pour cela un programme spécifique au problème considéré. Cette approche a permis de compléter les résultats analytiques existants, correspondant à l'hypothèse homogène élastique isotrope, et à un massif semi-infini.

L'influence de l'épaisseur de la couche de sol reposant sur un substratum rigide, rugueux et imperméable a été étudiée ; on a montré que les conditions d'adhérence du sol au substratum, et d'imperméabilité à la base de la couche, avaient, par leur effet sur la répartition des contraintes de cisaillement et sur le champ de gradient hydraulique, une importance considérable. C'est ainsi qu'on met en évidence l'existence d'une épaisseur critique pour laquelle le déplacement horizontal cyclique à la surface du fond marin est maximal, alors que la contrainte de cisaillement à l'interface sol-substratum est importante. Cette étude montre d'autre part que la solution analytique est correcte pour une épaisseur de couche supérieure ou égale à la longueur d'onde de la houle considérée.

Dans le cas de sables fins à grossiers, les variations de perméabilité entre $5 \cdot 10^{-5}$ et $5 \cdot 10^{-3}$ m/s n'ont pas un effet très marqué sur les profils de pression interstitielle et de contraintes, en particulier de cisaillement. Le cas des sables fins ($k = 5 \cdot 10^{-6}$ m/s) se distingue des précédents, avec un effet plus sensible.

L'effet de la rigidité du sol, inexistant dans la solution analytique semi-infinie, s'est révélé sensible pour l'épaisseur critique mentionnée précédemment, sur les profils de pression interstitielle et de contraintes normales.

Un exemple d'application de calcul des contraintes et pressions est donné dans le cas d'un talus incliné. On observe que la valeur de ces grandeurs est largement dépendante de leur position par rapport à la pente ; la zone la plus critique semble être localisée en tête de talus, avec de plus fortes valeurs des contraintes de cisaillement et des déplacements.

En considérant un multicouche horizontal, on peut étudier l'effet d'un module élastique croissant avec la profondeur. Alors que le profil de pression interstitielle est légèrement différent du cas homogène, on observe une influence plus marquée sur les contraintes ; la contrainte de cisaillement se trouve en particulier augmentée dans la couche de surface plus molle, ce qui ne va pas dans le sens de la stabilité en surface.

On envisage enfin, afin d'être plus proche de la réalité du comportement du sol, le cas orthotrope avec perméabilité anisotrope. Une étude paramétrique montre en particulier l'influence importante des coefficients de Poisson, dont l'ordre de grandeur est peu connu pour les sols. La comparaison avec un sol isotrope montre des différences sensibles, tout en pression interstitielle qu'en contraintes et déplacements. On observe en particulier que l'hypothèse isotrope minimise les contraintes normales et les déplacements verticaux, et surestime ces contraintes et déplacements horizontaux.

L'étude de la réponse d'un sol sous-marin sous l'action de la houle présentée ici a visé à aller plus loin dans la compréhension de la sollicitation complexe engendrée dans un massif de sol sous-marin par un signal de pression cyclique. S'il a été possible de proposer une solution analytique pour une géométrie donnée, la nécessité d'aborder différentes géométries et hypothèses mécaniques

a conduit à développer un programme de calcul spécifique. Par rapport à la solution analytique valable pour un massif homogène horizontal semi-infini, les calculs effectués ont montré un effet important des conditions géométriques (couche d'épaisseur finie, multicouche, inclinaison), hydraulique (anisotropie) et mécanique (orthotropie).

Un tel programme devrait maintenant être confronté à des cas pratiques, dans deux perspectives :

- la détermination d'un champ de contraintes et de pressions statiquement admissible, permettant d'affiner les calculs de stabilité par le calcul à la rupture.

- l'obtention d'un ordre de grandeur des déplacements cycliques horizontaux et verticaux, à confronter à la déformabilité des structures reposant sur le fond sous-marin.

Enfin, il est manifeste que l'hypothèse élastique étant approchée pour les sols, il sera nécessaire d'aborder les aspects irréversibles du comportement. Pour le problème considéré, une attention particulière devrait être apportée à la génération et à l'accumulation des surpressions interstitielles liées aux déformations irréversibles, dont l'incidence sur la stabilité est grande.

ANNEXES

ANNEXE I-A :

DEFERLEMENT DE LA HOULE SUR LE FOND INCLINE

Nous appelons amplitude au déferlement H_d la valeur maximale que l'amplitude de la houle présente au cours de sa propagation sur la plage. L'abscisse à laquelle l'amplitude prend cette valeur est appelée abscisse du déferlement X_d et la profondeur correspondante h_d .

A partir d'une abscisse que nous appelons X_{zi} la houle commence à être instable. Cette instabilité se manifeste dans le déplacement en avant de la crête de la houle plus rapide que le reste du corps de l'onde. A cause de ce déplacement du sommet, la houle présente une dissymétrie horizontale grandissante. Le front aval devient de plus en plus incliné par rapport à l'horizontale. Entre X_{zi} et X_d l'amplitude transmise de la houle augmente rapidement. L'amplitude H arrive à une valeur maximale H_d et diminue ensuite encore plus rapidement. La diminution est due à la destruction de la houle soit par écroulement du sommet de la houle sur son front aval, soit par destruction de sa base. L'écroulement du sommet se voit surtout aux fortes cambrures γ_o et aux faibles valeurs de l'angle α .

L'abscisse X_d de l'amplitude maximale marque un changement très rapide du profil de la houle. Quelques centimètres après X_d l'onde a disparu (fin du déferlement). C'est pour cette raison que nous appelons l'abscisse X_d abscisse du déferlement.

D'une façon générale, nous pouvons dire que X_d et H_d sont très étroitement liées à l'angle α et à la cambrure γ_o .

Pour l'abscisse de déferlement, GREENSPAN [1958] propose le

critère suivant :

$$\frac{x_d}{x_o} = 2 \left[1 - \left(\frac{2tg\alpha}{1+2tg\alpha} \right)^{2/3} \right] - \left[1 - \left(\frac{2tg\alpha}{1+2tg\alpha} \right)^{2/3} \right]^2$$

Cette expression montre que $\frac{x_d}{x_o}$ est indépendante de $\frac{h_o}{L_o}$ et γ_o .

Elle dépend exclusivement de l'angle α .

I - Evolution du rapport $\frac{h_d}{L_o}$ en fonction de γ_o .

C.C.MEI [1966], en utilisant la théorie de l'eau peu profonde, est arrivé à un critère pour le déferlement :

$$\frac{h_d}{H_o} \cong (32.\pi)^{1/3} \gamma_o^{1/3} (tg \alpha)^{-4/3}$$

Avec une petite transformation, nous pouvons écrire :

$$\frac{h_d}{L_o} \cong (32.\pi)^{1/3} \gamma_o^{4/3} (tg \alpha)^{-4/3}$$

Dans ce critère, $\frac{h_d}{L_o}$ dépend de γ_o et α ; il donne des résultats trop loin de la réalité. Pour $\alpha = 8^\circ$ avec $\gamma_o = 1\%$, on a $\frac{h_d}{L_o} = 0,137$ et avec $\gamma_o = 3\%$ on obtient $\frac{h_d}{L_o} = 0,593$. Pour $\alpha = 15^\circ$ avec $\gamma_o = 1\%$, ce même critère donne $\frac{h_d}{L_o} = 0,0579$ et avec $\gamma_o = 3\%$ il conduit à $\frac{h_d}{L_o} = 0,251$.

L'auteur a d'ailleurs reconnu que son expression conduit à situer le déferlement très loin de la côte.

II - Etude du rapport $\frac{H_d}{H_o}$

W.H. MUNK [1949] a proposé une expression pour le rapport $\frac{H_d}{H_o}$ d'après la théorie de l'onde solitaire (indépendance d'une crête par rapport aux autres). Cette expression est la suivante :

$$\frac{H_d}{H_o} = \frac{1}{3,3 \cdot \gamma_o^{1/3}}$$

Elle néglige la pente et la profondeur relative.

J.R. WEGGEL [1972] a essayé d'améliorer l'expression de MUNK, de façon que la pente soit prise en compte. Il a proposé :

$$\frac{H_d}{H_o} = \frac{F(\text{tg}\alpha)}{\gamma_o^{1/3}} + G(\text{tg}\alpha)$$

avec : $F(\text{tg}\alpha) = (0.01 + 0.5 \cdot \text{tg}\alpha)^{1/3} [1 + \text{tg}\alpha - G(\text{tg}\alpha)]$

$$G(\text{tg}\alpha) = \frac{D_1(1 + \text{tg}\alpha) - D_2 [1,75 - 0,185 \text{EXP}(28 \text{tg}\alpha)]}{D_1 - D_2}$$

Elle tient compte de α et γ_o mais elle néglige $\frac{h_o}{L_o}$.

D'après l'auteur, il n'est pas certain que ce résultat soit valable pour $\alpha > 5,71^\circ$ et $\gamma > 6\%$, parce qu'il suppose "l'indépendance des crêtes" (onde solitaire).

KOH et LEMEHAUTE - [1966] ont étudié les résultats des expériences des différents auteurs pour une gamme d'angles $1,14^\circ \leq \alpha \leq 11,31^\circ$ et $0,2\% \leq \gamma_o \leq 9\%$.

Ils ont proposé l'expression suivante :

$$\frac{H_d}{H_o} = 0,76 (\operatorname{tg}\alpha)^{1/7} \gamma_o^{-1/4}$$

La profondeur relative $\frac{h_o}{L_o}$ n'est pas toujours prise en compte.

III - Etude du rapport $\frac{H_d}{h_d}$

A. MICHE [1944] a proposé un critère pour la cambrure au déferlement sur un fond horizontal :

$$\gamma_d = 0,14 \operatorname{th} \left[\frac{2 \pi h_d}{L_d} \right]$$

Pour un déferlement qui s'effectue dans des profondeurs relatives telles que $\frac{2 \pi h_d}{L_d} \approx \operatorname{th} \frac{2 \pi h_d}{L_d}$, son critère peut se transformer en :

$$\frac{H_d}{h_d} = 0,87$$

Ce critère est valable pour des valeurs $\frac{h_d}{L_d} \leq 0,08$. Il néglige α , $\frac{h_o}{L_o}$ et γ_o .

J.WEGGEL [1972], après avoir étudié les résultats expérimentaux de plusieurs auteurs, propose le critère suivant :

$$\frac{H_d}{h_d} = A (\operatorname{tg}\alpha) - B (\operatorname{tg}\alpha) \frac{H_d}{T^2}$$

avec :

$$A (tg\alpha) = 1,36 \left[1 - \exp(-19 tg\alpha) \right]$$

$$B (tg\alpha) = 1,064 \left[1 + \exp(-19,5 tg\alpha) \right]$$

Ce critère peut s'appliquer pour $1,14^\circ \leq \alpha \leq 11,30^\circ$ et $0,31 \leq T \leq 4$ sec. Dans le cas de $\alpha = 0$, le rapport prend la valeur $\frac{H_d}{h_d} = 0,781$, qui est en accord avec les critères de GALVIN, et MICHE.

Un problème qui se pose à propos de ce critère est celui de l'existence de H_d dans le deuxième membre. Il faut disposer d'une deuxième équation. Nous prenons l'autre critère de WEGGEL et nous arrivons à l'expression :

$$\frac{H_d}{h_o} = B (tg\alpha) - A (tg\alpha) \gamma_o \frac{9}{2\pi} th\left(\frac{2\pi h_o}{L_o}\right) \left[\frac{F(tg\alpha)}{\gamma_o^{1/3}} + G (Tg\alpha) \right]$$

L'application de ce critère est limitée aux conditions suivantes :

$$1,14^\circ \leq \alpha \leq 5,71^\circ, \gamma_o < 6\%, 0,31 \text{ sec} \leq T \leq 4 \text{ sec}$$

Il est intéressant de voir qu'il prend en compte α , γ_o , $\frac{h_o}{L_o}$.

IV CONCLUSION

L'amplitude de la houle au déferlement H_d est fonction de la pente α , de la profondeur relative initiale $\frac{h_o}{L_o}$, de la cambrure initiale γ_o .

Elle augmente quand γ_o et $\frac{h_o}{L_o}$ diminuent et H_o augmente.

L'amplitude relative de la houle au déferlement $\frac{H_d}{h_d}$ est fonction de :

- l'angle α
- La profondeur relative initiale $\frac{h_o}{L_o}$
- L'amplitude relative initiale $\frac{H_o}{h_o}$
- La cambrure initiale γ_o

Plus analytiquement :

- Pour $\alpha < 8^\circ$, $\frac{H_d}{h_d}$ augmente quand γ_o diminue ou que $\frac{h_o}{L_o}$ augmente,
- Pour $\alpha > 10^\circ$, $\frac{H_d}{h_d}$ augmente quand γ_o augmente
- Pour $8^\circ \leq \alpha \leq 10^\circ$, $\frac{H_d}{h_d}$ reste pratiquement constante,
- Pour tous les angles $\frac{H_d}{h_d}$ augmente quand $\frac{H_o}{h_o}$ augmente

DIFFÉRENTS TYPES DE DÉFERLEMENT

Le déferlement se situe généralement sur le front aval de la houle. L'inclinaison ω_{av} de ce front par rapport à l'horizontale à l'abscisse du déferlement et l'endroit sur le front aval où le déferlement prend naissance dépendent de l'angle α , de la cambrure initiale γ_o , de la profondeur relative initiale $\frac{h_o}{L_o}$ et caractérisent le type du déferlement.

La vitesse du déplacement du sommet, par rapport au corps de l'onde, conduit à une distinction en différents types de déferlement

- Une vitesse faible est responsable du fait que la houle déferle avant que le front aval devienne très incliné,
- Une vitesse élevée fait que le front aval devient très

incliné avant le déferlement,

- Une vitesse très élevée a pour résultat un front aval très incliné et une projection du sommet en avant .

CLASSIFICATION DES DIFFÉRENTS TYPES DE DÉFERLEMENT D'APRÈS WEGGEL, CALVIN, GAUGHAN-KOMAR

Ces auteurs ont classé les différents types de déferlement. Cette classification tient compte de l'inclinaison du front aval du profil de la houle au déferlement.

Le premier type est le déferlement gonflant (surging) avec une $\omega_{av} \Big|_{x=x_d} < \frac{\pi}{2}$ et une destruction de la base sans bulles d'air. Le sommet reste plus ou moins intact.

Le deuxième type est le déferlement déversant (spilling). Il se caractérise par un $\omega_{av} \Big|_{x=x_d} < \frac{\pi}{2}$ et une chute du sommet de la houle avec des bulles d'air sur le front aval.

Le troisième type est le déferlement plongeant (plunging) avec $\omega_{av} \Big|_{x=x_d} \cong \frac{\pi}{2}$ et une projection du sommet de la houle vers l'aval.

J.R.WEGGEL [1972] a étudié les données expérimentales sur les caractéristiques de la houle au déferlement. Il a conclu que :

- pour des $\gamma_0 < 0,01 [1-\exp(-28t\alpha)]$, le déferlement est du type "surging" ;
- pour $\gamma_0 > 0,01 + 0,50 t\alpha$, il est du type "spilling" ;
- pour γ_0 intermédiaire, le déferlement sera du type "plunging".

C.R.GALVIN [1968] a fait la même distinction entre les différents types de déferlement, mais il a proposé des critères

différents. Il a introduit le paramètre $\gamma_0 \frac{1}{tg^2 \alpha}$:

- pour une valeur du paramètre inférieure à 0,09, le déferlement est du type "surging" ;

- pour une valeur du paramètre supérieure à 4,8, il est du type "spilling" ;

- pour une valeur du paramètre entre ces deux valeurs, le déferlement est du type "plunging".

GALVIN [1968] a introduit un quatrième type : "collapsing", qui se situe entre les "plunging" et "surging". Il correspond à un front vertical seulement à la base de la houle. Il a aussi distingué 5 autres types de déferlement, qui se situent aux limites des quatre types principaux.

Les critères de ces deux auteurs sont présentés sur la figure I-A-1. Ils sont assez proches l'un de l'autre.

M. K. GAUGHAN et *P.D. KOMAR [1975]* ont adopté la théorie de *BIESEL [1952]* et ont essayé de vérifier si cette théorie peut prévoir le type de déferlement. Ils ont tracé le profil de l'onde au déferlement suivant la théorie de *BIESEL*, pour différentes valeurs de α et γ_0 et ensuite ils les ont classés en déferlement, du type "spilling", "plunging" ou intermédiaires, d'après des critères empiriques. Les auteurs ont présenté deux courbes comme résultats de ce travail : une courbe qui sépare les régions des déferlements du type "spilling" et du type intermédiaire, et une courbe qui sépare les régions des déferlements du type intermédiaire et du type "plunging". Cette dernière courbe est présentée dans la figure I-A-1. Elle est proche des courbes de *GALVIN* et *WEGGEL*, fait qui indique que la théorie de *BIESEL* arrive à prévoir assez bien les valeurs de α et γ_0 , pour lesquelles le déferlement de la houle présente les caractéristiques d'un déferlement du type "plunging".

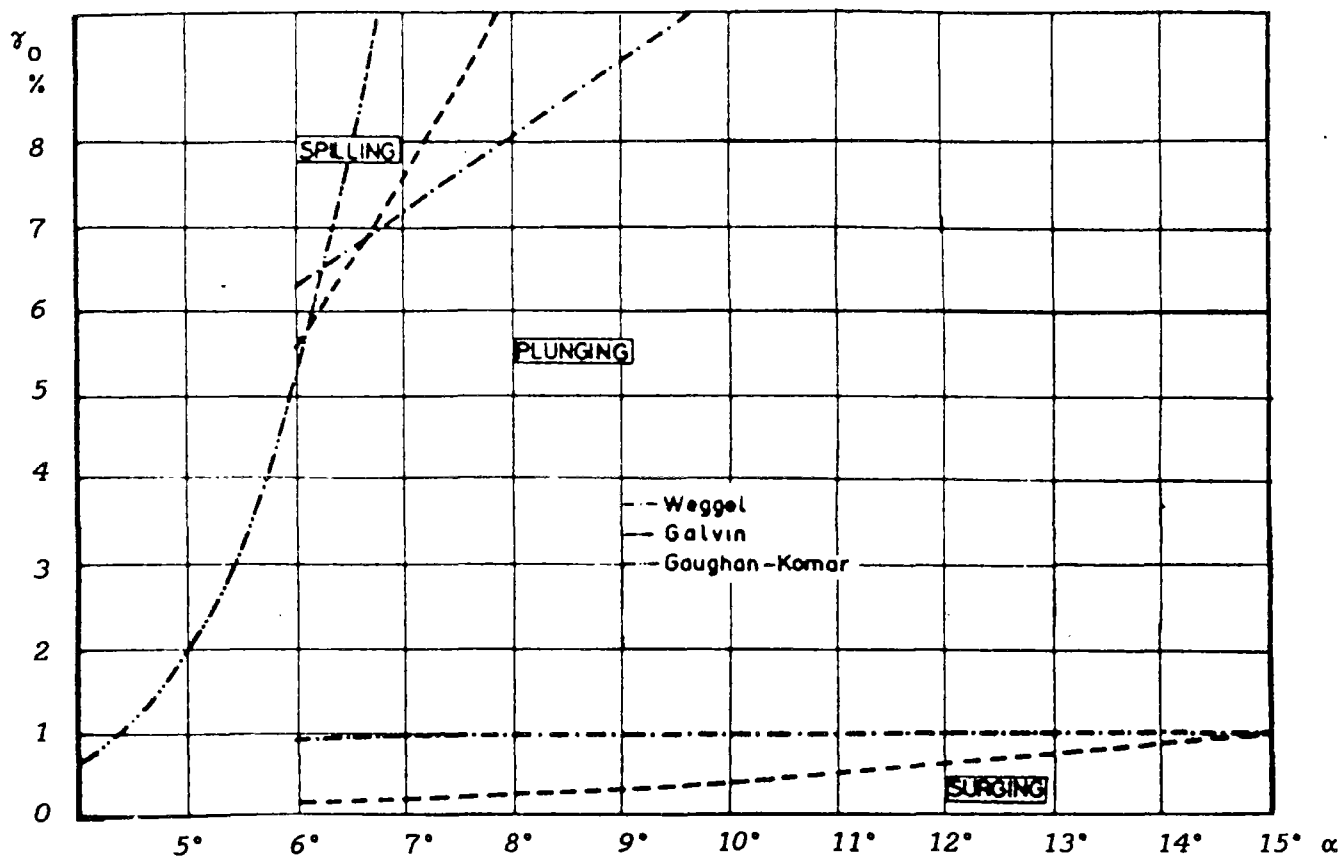


Figure I-A-1 : Classement des différents types de déferlement

ANNEXE I-B :

LA HOULE DES STOKES AU 3ÈME ORDRE

LEMEHAUTE et WEBB [1964] ont donné le potentiel des vitesses et l'équation de la surface libre de la houle de STOKES en 3ème approximation :

$$\phi_n = \frac{L_n^2}{2\pi} \left\{ (\Lambda_n A11_n + \Lambda_n^3 A33_n) \operatorname{ch}[\lambda_n (y + h_n)] \cos(\lambda_n x - \omega t) \right. \\ \left. + \Lambda_n^2 A22_n \operatorname{ch}[2\lambda_n (y + h_n)] \cos 2(\lambda_n x - \omega t) + \Lambda_n^3 A33_n \right. \\ \left. \operatorname{ch}[3\lambda_n (y + h_n)] \cos 3(\lambda_n x - \omega t) \right\}$$

$$\eta_n = \frac{L_n}{2\pi} \left[\Lambda_n \sin(\lambda_n x - \omega t) + \Lambda_n^2 B22_n \sin 2(\lambda_n x - \omega t) \right. \\ \left. + \Lambda_n^3 B33_n \sin 3(\lambda_n x - \omega t) \right]$$

Avec :

$$A11_n = \frac{1}{\operatorname{sh}(\lambda_n h_n)}, \quad A22_n = \frac{3}{8 \operatorname{sh}^4(\lambda_n h_n)}, \quad A33_n = \frac{13 - 4 \operatorname{ch}^2(\lambda_n h_n)}{64 \operatorname{sh}^7(\lambda_n h_n)}$$

$$B22_n = \frac{\operatorname{ch}(\lambda_n h_n) (2 \operatorname{ch}^2(\lambda_n h_n) + 1)}{4 \operatorname{sh}^3(\lambda_n h_n)}$$

$$B33_n = \frac{3 (8 \operatorname{ch}^6(\lambda_n h_n) + 1)}{64 \operatorname{sh}^6(\lambda_n h_n)}$$

Le Λ_n est donné par la racine réelle de l'équation :

$$\Lambda_n^3 B_{33} + \Lambda_n = \frac{\pi H_n}{L_n}$$

L'amplitude est donnée par l'expression suivante :

$$H_n = \frac{2L_n}{\pi} \left[\frac{24 \operatorname{ch}^6(\lambda_n h_n) + 3}{64 \operatorname{sh}^6(\lambda_n h_n)} \Lambda_n^3 + \Lambda_n \right]$$

Appliquons le principe de la conservation du flux de l'énergie moyenne entre $x = 0$ et un x sur le tronçon n ; on obtient un système à deux équations qui fournissent L_n et Λ_n :

$$L_n^4 \frac{\Lambda_n^2}{\operatorname{sh}^2(\lambda_n h_n)} \left[E_n + \Lambda_n^2 E_n' \right] = L_o^4 \frac{\Lambda_o^2}{\operatorname{sh}^2(\lambda_o h_o)} \left[E_o + \Lambda_o^2 E_o' \right]$$

$$L_n = g \frac{T^2}{2\pi} \operatorname{th}(\lambda_n h_n) \left[1 + \frac{8 \operatorname{ch}^4(\lambda_n h_n) - 8 \operatorname{ch}^2(\lambda_n h_n) + 9}{8 \operatorname{sh}^4(\lambda_n h_n)} \Lambda_n^2 \right]$$

avec :

$$E_n = 4 \left[\operatorname{sh}(\lambda_n h_n) \operatorname{ch}(\lambda_n h_n) + \lambda_n h_n \right]$$

$$E_n = \frac{\text{sh}(\lambda_{n n} h) \text{ch}(\lambda_{n n} h) + \lambda_{n n} h}{2\text{sh}^2(\lambda_{n n} h)} (-20\text{ch}^6(\lambda_{n n} h) + 16\text{ch}^4(\lambda_{n n} h) + 4\text{ch}^2(\lambda_{n n} h) + 9) + \frac{\text{sh}(\lambda_{n n} h) \text{ch}(\lambda_{n n} h)}{2\text{sh}^4(\lambda_{n n} h)} (16\text{ch}^4(\lambda_{n n} h) + 2\text{ch}^2(\lambda_{n n} h) + 9)$$

ANNEXE VI-A :

MATRICE D'ÉLASTICITÉ POUR UN CAS GÉNÉRAL D'ORTHOTROPIE

Pour le cas dans lequel l'axe d'orthotropie ne coïncide pas avec l'un des axes de référence, comme le repère présenté sur la figure A-1, la matrice [C] représentant la déformation en fonction des contraintes est

$$\{\varepsilon\} = [C] \{\sigma\}$$

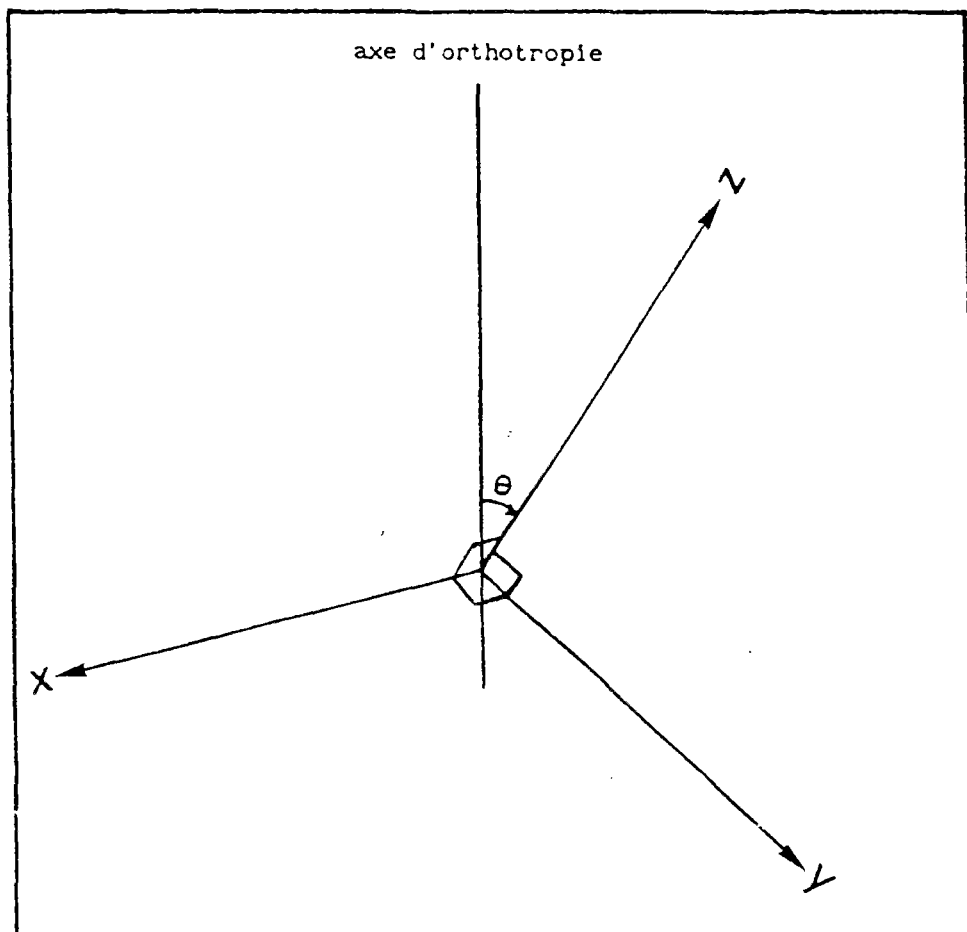


Figure A-1

$\frac{1}{E_h}$	$-\frac{\nu_{hh}}{E_h} \cos^2 \theta - \frac{\nu_{vh}}{E_v} \sin^2 \theta$	$-\frac{\nu_{hh}}{E_h} \sin^2 \theta - \frac{\nu_{vh}}{E_v} \cos^2 \theta$	$2 \left(\frac{\nu_{vh}}{E_v} - \frac{\nu_{hh}}{E_h} \right) \sin \theta \cos \theta$	0	0
$-\frac{\nu_{hh}}{E_h} \cos^2 \theta - \frac{\nu_{vh}}{E_v} \sin^2 \theta$	$\frac{1}{E_h} \cos^4 \theta + \frac{1}{E_v} \sin^4 \theta$ $-\frac{\nu_{vh}}{E_v} \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 2$ $+\frac{1}{4} \cos^2 \theta \sin^2 \theta$	$-\frac{\nu_{vh}}{E_v} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$ $+\left(\frac{1}{E_h} + \frac{1}{E_v} - \frac{1}{4} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta$	$2 \left(\frac{\nu_{vh}}{E_h} + \frac{\nu_{vh}}{E_v} \right) \cos^3 \theta \sin \theta$ $-2 \left(\frac{1+\nu_{vh}}{E_v} \right) \cos \theta \sin^3 \theta$ $-\frac{1}{4} \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$	0	0
$-\frac{\nu_{hh}}{E_h} \sin^2 \theta - \frac{\nu_{vh}}{E_v} \cos^2 \theta$	$-\frac{\nu_{vh}}{E_v} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$ $+\left(\frac{1}{E_h} + \frac{1}{E_v} - \frac{1}{4} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta$	$\frac{1}{E_h} \sin^4 \theta + \frac{1}{E_v} \cos^4 \theta$ $-2 \frac{\nu_{vh}}{E_v} \cos^2 \theta \sin^2 \theta$ $+\frac{1}{4} \sin^2 \theta \cos^2 \theta$	$2 \left(\frac{\nu_{vh}}{E_h} + \frac{\nu_{vh}}{E_v} \right) \cos \theta \sin^3 \theta$ $-2 \left(\frac{1+\nu_{vh}}{E_v} \right) \cos^3 \theta \sin \theta$ $+\frac{1}{4} \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$	0	0
$\left(\frac{\nu_{vh}}{E_v} - \frac{\nu_{hh}}{E_h} \right) \cos \theta \sin \theta$	$\left(\frac{1}{E_h} + \frac{\nu_{vh}}{E_v} \right) \cos^3 \theta \sin \theta$ $-\frac{1+\nu_{vh}}{E_v} \cos \theta \sin^3 \theta$ $-\frac{1}{24} \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$	$\left(\frac{1}{E_h} + \frac{\nu_{vh}}{E_v} \right) \cos \theta \sin^3 \theta$ $-\frac{1+\nu_{vh}}{E_v} \cos^3 \theta \sin \theta$ $+\frac{1}{24} \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$	0	0	0
0	0	0	$\frac{1}{24} \cos^2 \theta + \frac{1+\nu_{hh}}{E_h} \sin^2 \theta$	$\frac{1+\nu_{hh}}{E_h} \cos \theta \sin \theta$	$\frac{1+\nu_{hh}}{E_h} \cos^2 \theta - \frac{1}{24} \sin^2 \theta$
0	0	0	0	$-\frac{1}{24} \cos \theta \sin \theta$	$-\frac{1}{24} \cos \theta \sin \theta$

ANNEXE VII-A :

RÉSULTATS DÉTAILLÉS DE L'ÉTUDE PARAMÉTRIQUE DE L'ANISOTROPIE

Dans cette partie, les résultats détaillés de chaque point indiqué dans les figures VII-58 et VII-59 sont présentés de la manière suivante :

Chaque fichier graphique se compose de quatre parties; chaque partie montre la variation de la grandeur indiquée en bas, en fonction de la profondeur. Le numéro de chaque fichier graphique correspond au numéro du point (figures VII-58 et VII-59). Les courbes de variation présentées sur les fichiers graphiques sont liées aux points qui se situent en dessous du noeud de la houle pour la contrainte de cisaillement et le déplacement horizontal, et en dessous de la crête de la houle pour la pression interstitielle, les contraintes effectives normales et le déplacement vertical.

La pression interstitielle et les contraintes sont normalisées par l'amplitude de la pression sur le fond marin (P_0) et les déplacements sont normalisés par la valeur maximale du déplacement vertical du fond marin.

Les tableaux VII-A-1 a, b, c, d, e, et VII-A-2, a, b, c, d, e, présentent les valeurs précises de chaque grandeur utilisée dans les figures VII-60 à VII-67 pour les points étudiés. Les tableaux VII-A-1, a, b, c, d, e, correspondent aux points de la figure VII-58 ($\frac{E_h}{E_v} = 0,5$), et les tableaux VII-A-2, a, b, c, d, e, aux points de la figure VII-59 ($\frac{E_h}{E_v} = 1,0$).

Le tableau VII-A-3, montre les valeurs liées à l'étude de l'influence de G_v/E_v . Les différentes valeurs de G_v/E_v étudiées sont 0,5 - 0,75 - 1,0 - 1,25 et 1,33.

	1	2	3	4	33
P	- 0,1597	- 0,1360	- 0,0971	- 0,0199	+ 0,0489
τ	- 0,2943	- 0,3215	- 0,3359	- 0,3328	- 0,3200
σ_v	0,5428	0,5580	0,6003	0,6873	0,7742
σ_h	0,4659	0,5172	0,5657	0,6854	- 3,3444
v	2,8346	3,0245	0,30363	2,7462	1,9890
u_s	0,4053	0,4476	0,6129	0,9092	1,6644
u_m	1,1930	1,5557	1,6841	1,7687	2,1544

Tableau VII-A-1-a

	13	5	10	12	34
P	- 0,1643	- 0,1337	- 0,08080	+ 0,0317	+ 0,018
τ	- 0,2896	- 0,3253	- 0,3456	- 0,3464	- 0,3574
σ_y	0,5373	0,5562	0,6119	0,7030	0,7252
σ_x	0,4545	0,5202	0,5932	0,9983	- 5,5788
v	2,8149	3,0675	3,0944	2,6710	2,3457
u_s	0,38146	0,4724	0,6558	1,1581	1,6498
u_m	1,3445	1,577	1,7574	1,9538	2,3003

Tableau VII-A-1-b

	14	6	11	35
P	- 0,1801	- 0,1394	- 0,05918	+ 0,01014
τ	- 0,2726	- 0,3211	- 0,3517	- 0,3697
σ_y	0,5181	0,5416	0,6218	0,6822
σ_x	0,4137	0,4921	0,6110	- 1,3083
v	2,7454	3,0959	3,1419	2,8651
u_s	0,2978	0,4077	0,6734	1,1212
u_m	1,2272	1,5377	1,8078	2,0432

Tableau VII-A-1-c

	15	8	36
P	- 0,2167	- 0,1559	- 0,0290
τ	- 0,2269	- 0,2972	- 0,3361
σ_y	0,4720	0,5052	0,6350
σ_x	0,3129	0,3511	0,2894
v	2,5774	3,12	3,2402
u_s	0,1043	0,2144	0,5175
u_m	0,93330	1,3605	1,7362

Tableau VII-A-1-d

	17	42	26	27	31	30
P	- 0,1745	- 0,1692	- 0,1677	+ 0,1435	+ 0,1158	- 0,0534
τ	- 0,2762	- 0,2815	- 0,2760	- 0,2485	- 2,376	0,2196
σ_y	0,5050	0,5045	- 0,4953	0,4995	0,5184	0,5594
σ_x	0,3737	- 0,3654	- 0,2939	0,1610	0,5914	2,8063
v	2,8702	2,9374	2,9664	3,0932	3,1385	3,2050
u_s	0,2245	0,2170	0,1516	0,006	- 0,02579	- 0,0426
u_m	1,2310	1,2614	1,2213	1,0651	1,0212	0,9945

Tableau VII-A-1-e

	41	39	17	18	19
P	- 0,2081	- 0,1978	- 0,1745	- 0,0941	- 0,0073
τ	- 2,386	- 2,2558	- 0,2762	- 0,2976	- 0,3039
σ_y	0,4831	0,4867	0,5050	0,5924	0,6791
σ_x	- 0,3376	- 0,3548	- 0,3737	- 0,4226	- 0,9062
v	2,6180	2,747	2,8702	2,8015	2,3886
u_s	0,1496	0,1706	0,2245	0,4433	0,8438
u_m	1,0058	1,1028	1,2310	1,416	1,5759

Tableau VII-A-2-a

	21	42	40	22	23
P	- 0,2123	- 0,1692	- 0,1551	- 0,0547	- 0,02146
τ	- 0,2330	- 0,2815	- 0,2889	- 0,3129	- 0,3195
σ_y	0,4777	0,5045	- 0,5182	0,6238	0,6635
σ_x	- 0,3256	- 0,3654	- 0,3706	- 0,4525	- 1,0496
v	2,5983	2,937	2,969	2,866	2,6276
u_s	0,1274	0,2170	0,2499	0,5263	0,8087
u_m	0,9705	1,2614	1,3140	1,5376	1,685

Tableau VII-A-2-b

	25	26	37
P	- 0,2261	- 0,1677	- 0,0134
τ	- 0,2131	- 0,2760	- 0,3115
σ_y	0,4597	0,4953	0,6473
σ_x	- 0,2850	- 0,29391	- 0,2055
v	2,532	2,9969	2,9238
u_s	0,0553	0,1516	0,5745
u_m	0,8505	1,2213	1,6359

Tableau VII-A-2-c

	38	27	29
P	- 0,2522	- 0,1435	- 0,0779
τ	- 0,1660	- 0,2985	- 0,2620
σ_y	- 0,4223	0,4995	0,5712
σ_x	- 0,1972	0,1610	0,6289
v	2,3925	3,0932	3,1986
u_s	- 0,079	0,0060	0,0626
u_m	0,5870	1,0651	1,194

Tableau VII-A-2-d

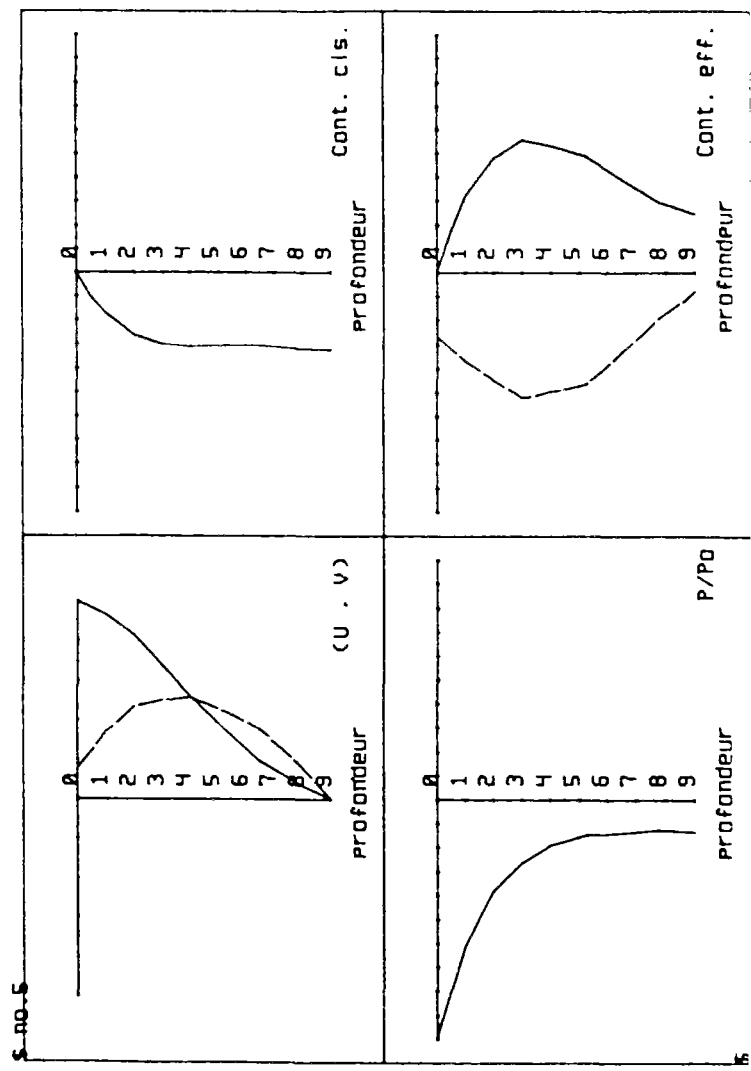
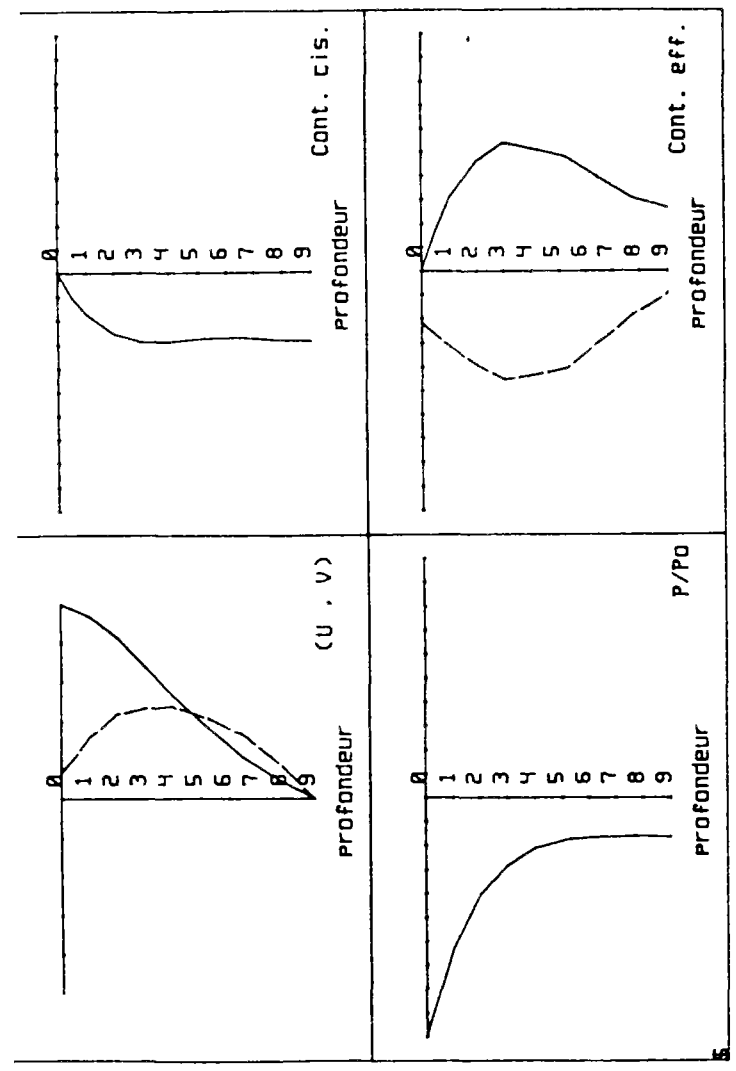
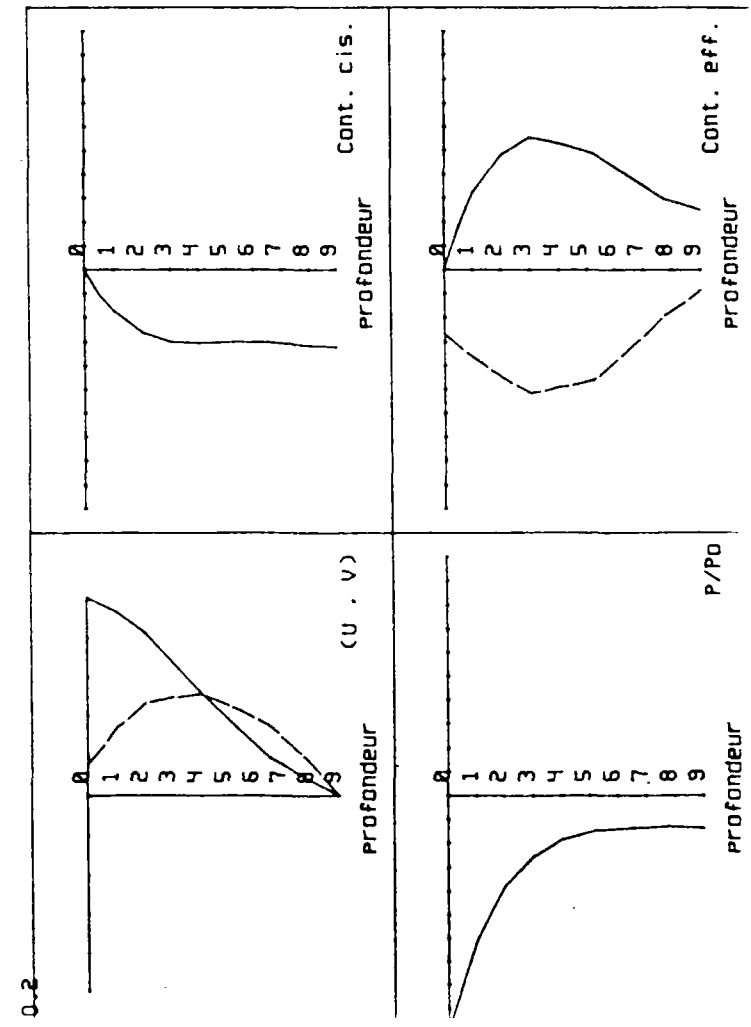
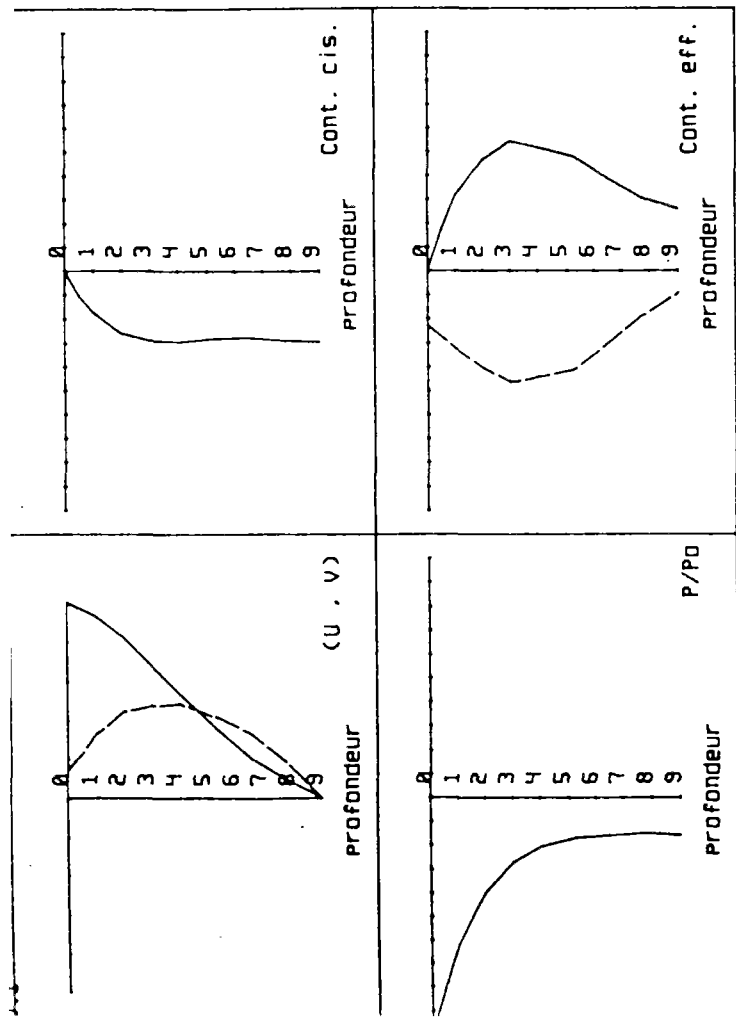
En supposant la perméabilité isotrope, on trouve les résultats indiqués dans le tableau VII-A-2-e pour le cas isotrope. Les points 20 et 28 correspondent aux points 41 et 42, mais avec $K_x=K_y$:

	20	28	32	24
P	- 0,2339	- 0,2366	- 0,2315	- 0,2040
τ	- 0,2656	- 0,2691	- 0,2697	- 0,2666
σ_y	0,3649	0,3763	0,3865	- 0,4212
σ_x	- 0,4371	- 0,4489	- 0,45098	- 0,4552
v	2,0482	2,66	2,88	3,1728
u_s	0,7001	0,7585	0,7612	0,7691
u_m	1,276	1,549	1,6348	1,7812

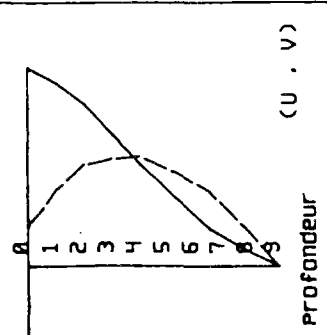
Tableau VII-A-2-e

	26	G_1	G_2	G_3	G_4
P	- 0,1677	- 0,1288	- 0,1034	- 0,08567	- 0,0809
τ	- 0,2760	- 0,3404	- 0,3884	- 0,4257	- 0,4363
σ_y	0,4953	0,4743	- 0,46035	0,4505	0,4478
σ_x	- 0,2939	- 0,4174	- 0,5184	- 0,6060	- 0,6329
v	2,9964	2,6315	2,373	2,1799	2,126
u	1,2213	1,0845	0,9775	0,8932	0,7573
τ_{\max}	- 0,30	- 0,3560	- 0,4042	0,4398	- 0,4497

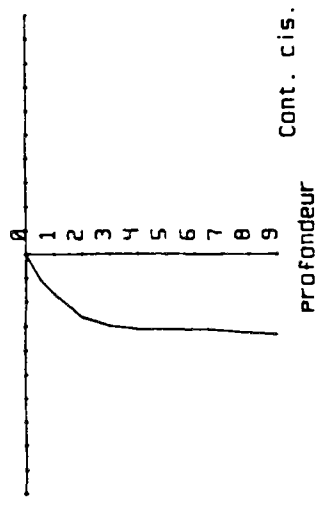
Tableau VII-A-3



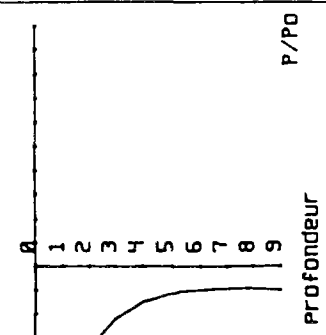
S. NO. 3



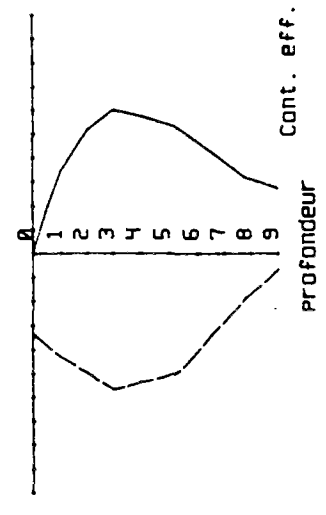
PROFONDEUR



PROFONDEUR

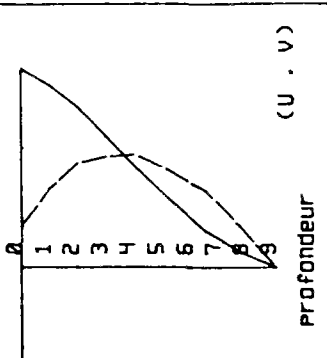


PROFONDEUR

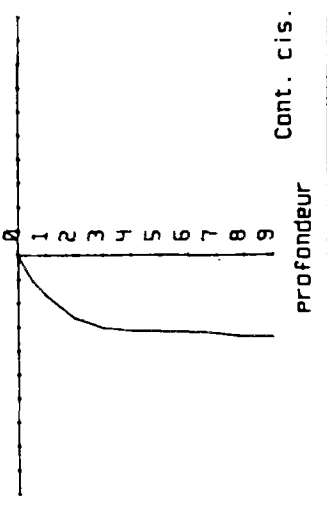


PROFONDEUR

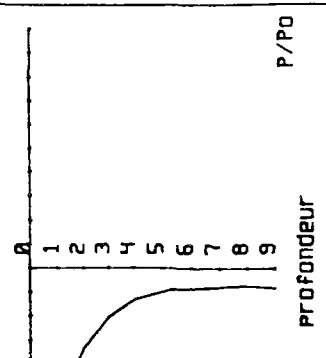
S. NO. 10



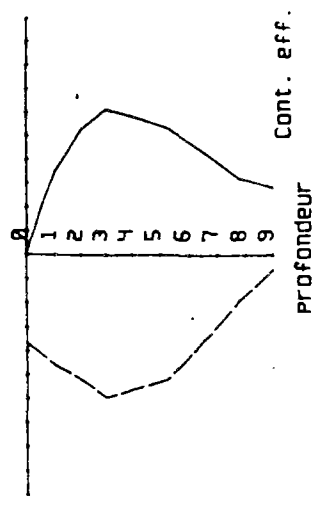
PROFONDEUR



PROFONDEUR

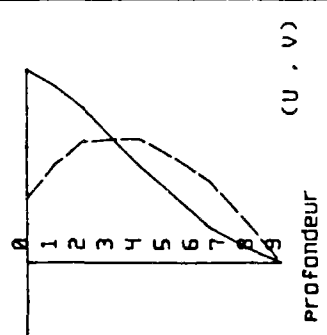


PROFONDEUR

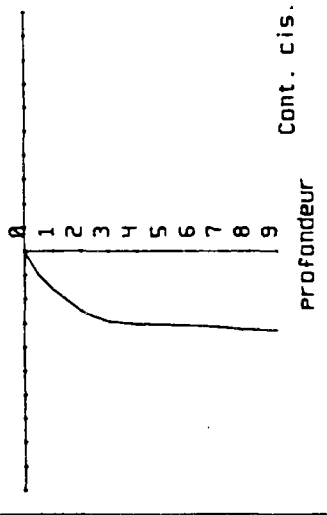


PROFONDEUR

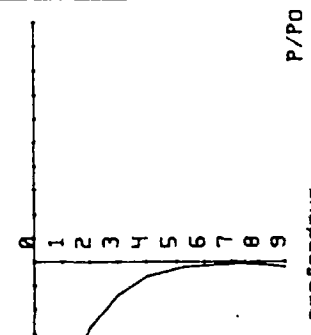
S. NO. 4



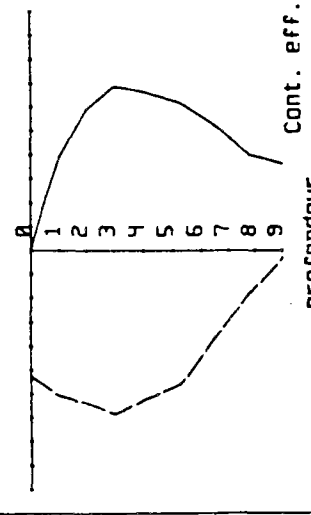
PROFONDEUR



PROFONDEUR

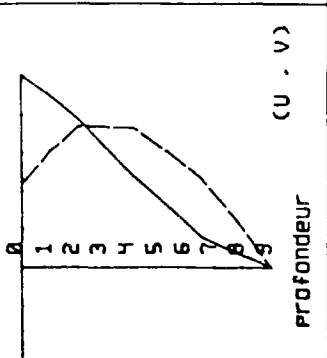


PROFONDEUR

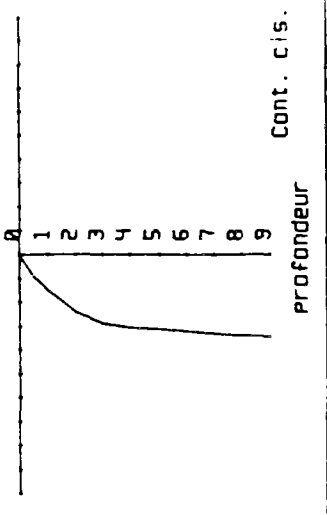


PROFONDEUR

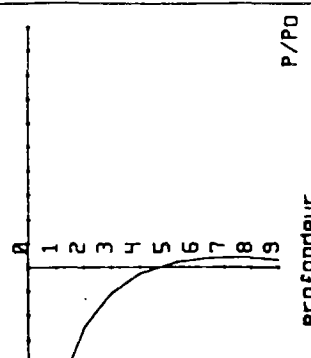
S. NO. 12



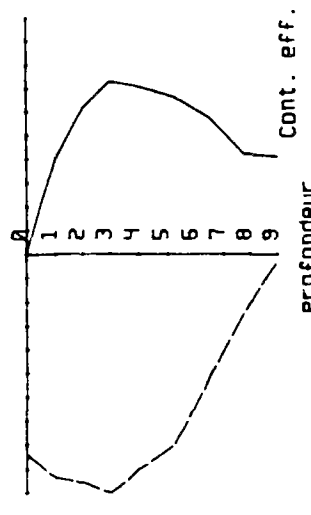
PROFONDEUR



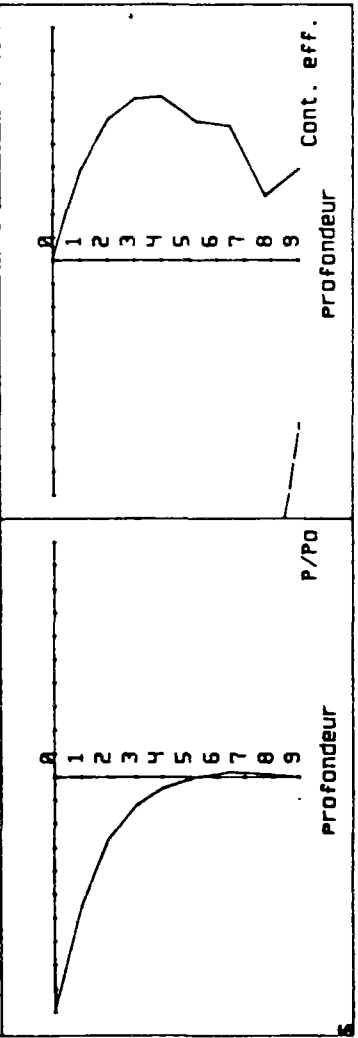
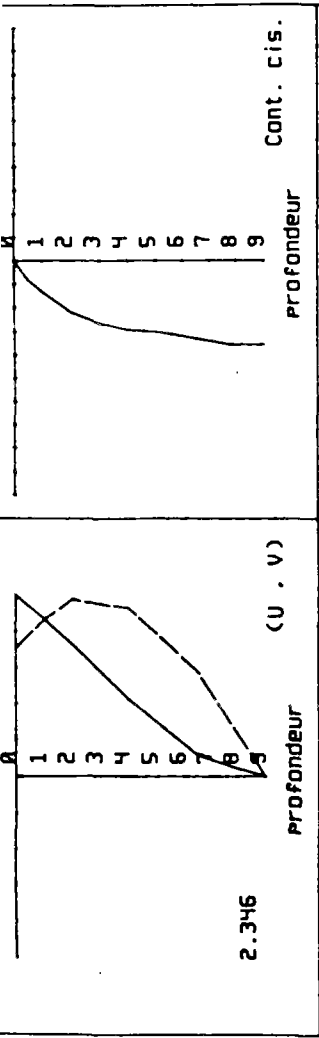
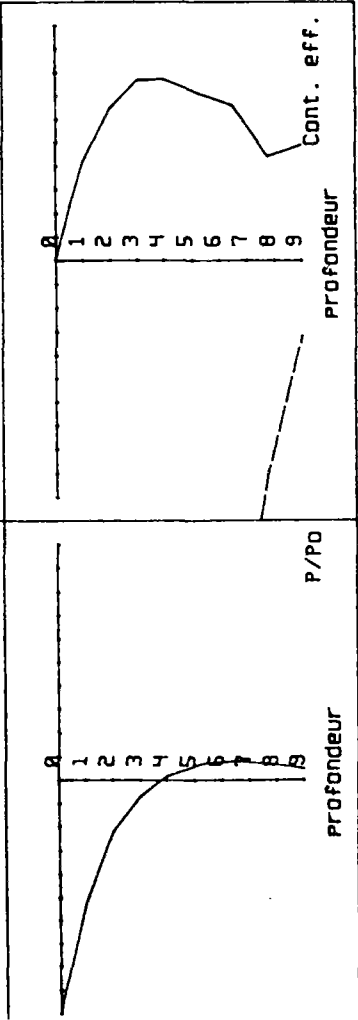
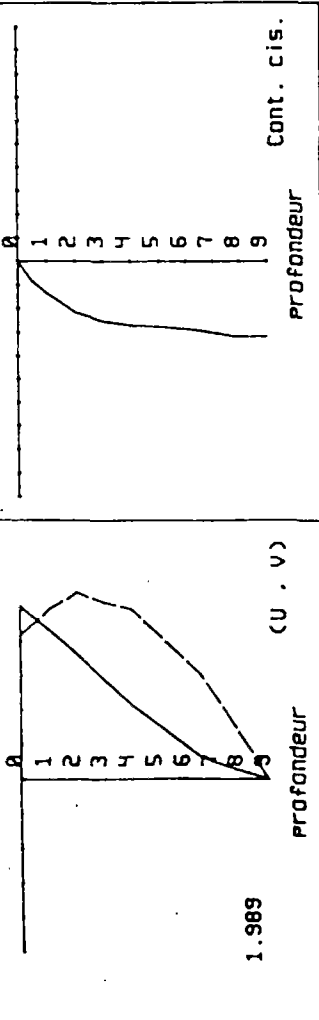
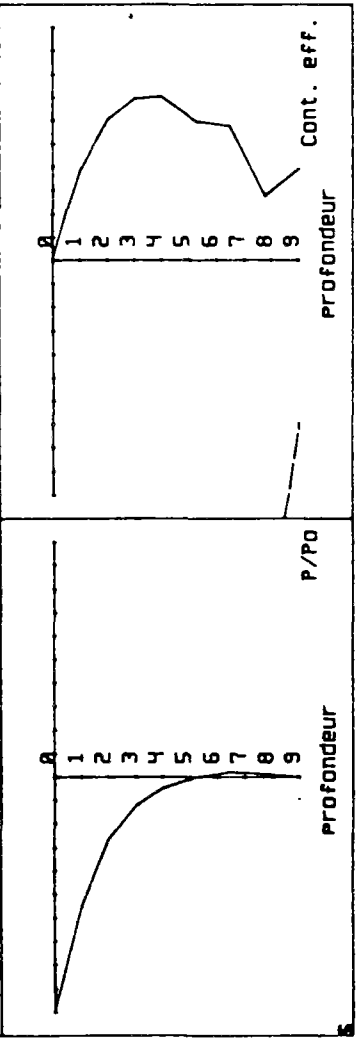
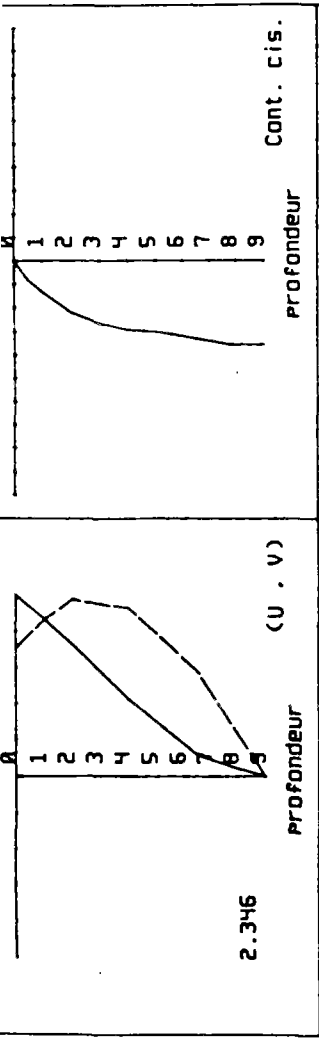
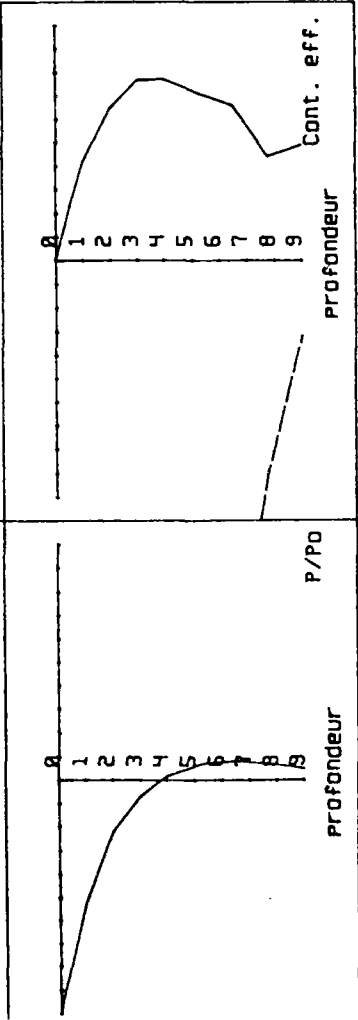
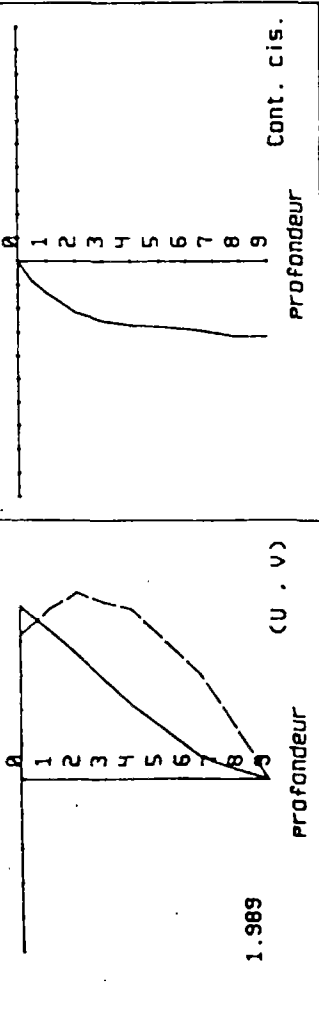
PROFONDEUR



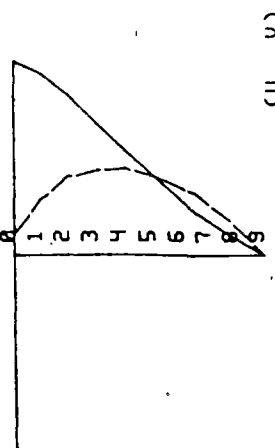
PROFONDEUR



PROFONDEUR



S. NO. 14



(U . V)

Profondeur

P/Po

Profondeur

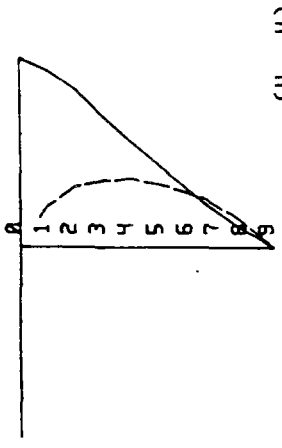
Cont. cis.

Profondeur

Cont. eff.

Profondeur

S. NO. 15



(U . V)

Profondeur

P/Po

Profondeur

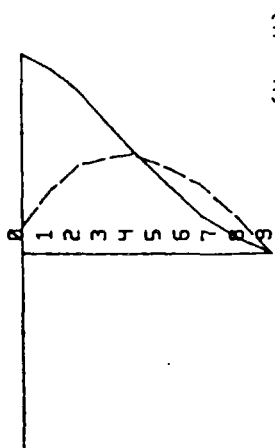
Cont. cis.

Profondeur

Cont. eff.

Profondeur

S. NO. 5



(U . V)

Profondeur

P/Po

Profondeur

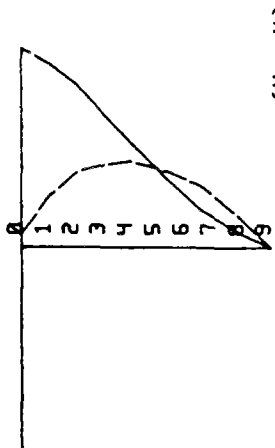
Cont. cis.

Profondeur

Cont. eff.

Profondeur

S. NO. 8



(U . V)

Profondeur

P/Po

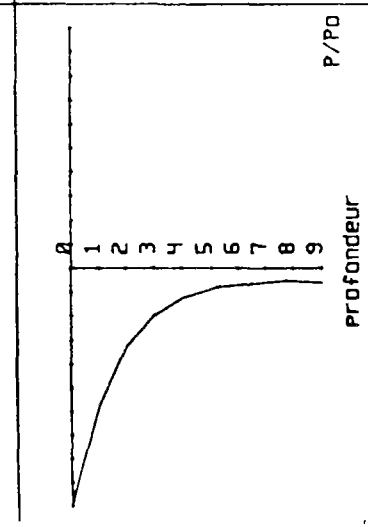
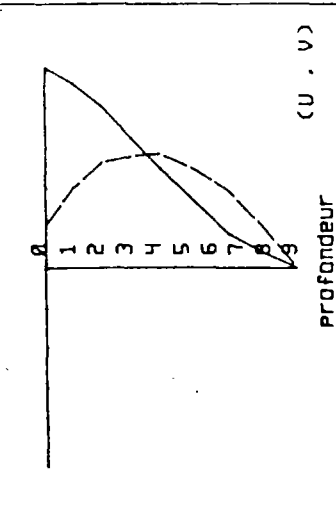
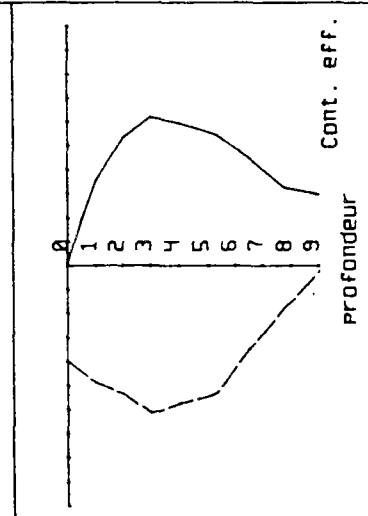
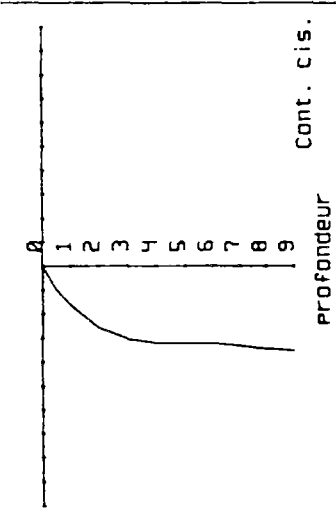
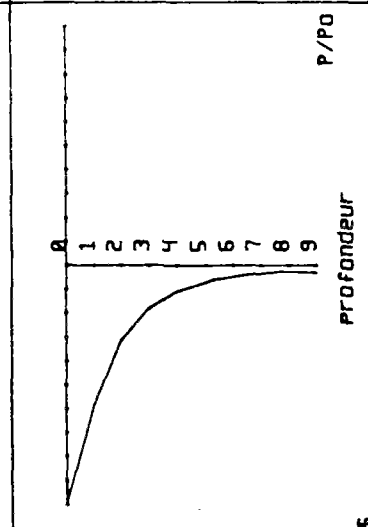
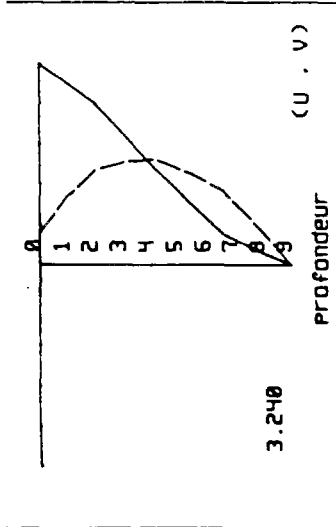
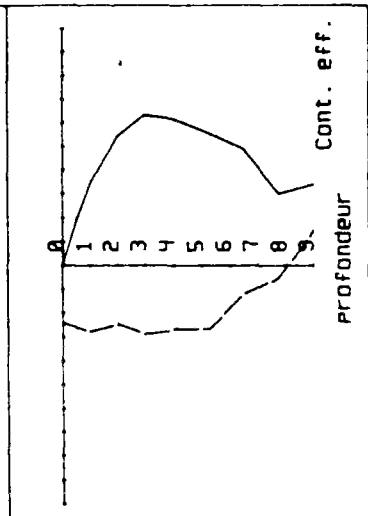
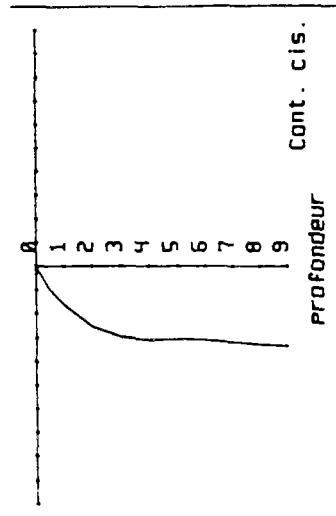
Profondeur

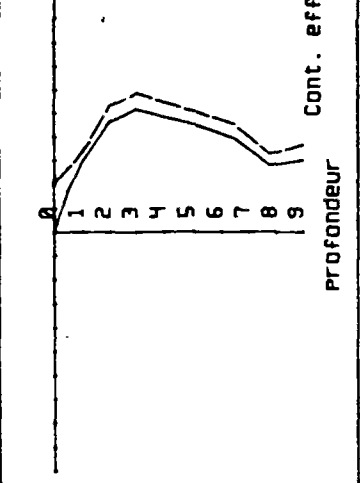
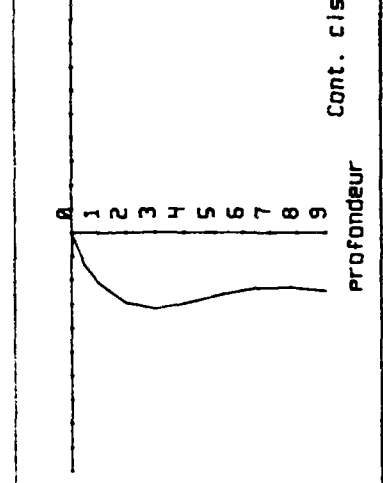
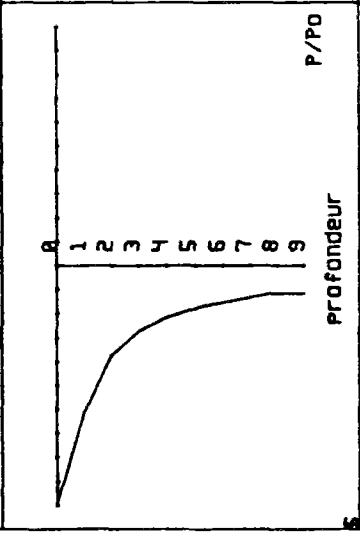
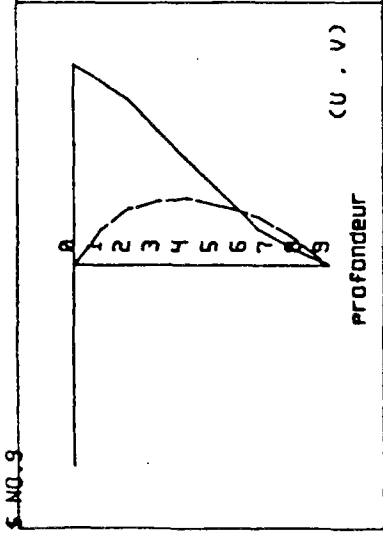
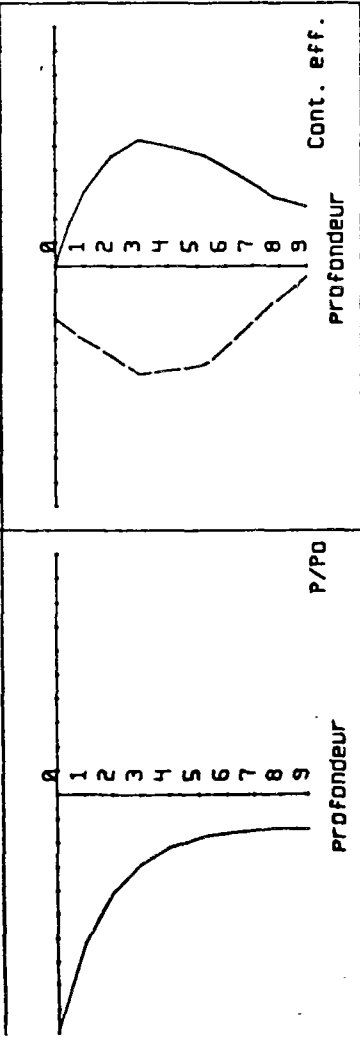
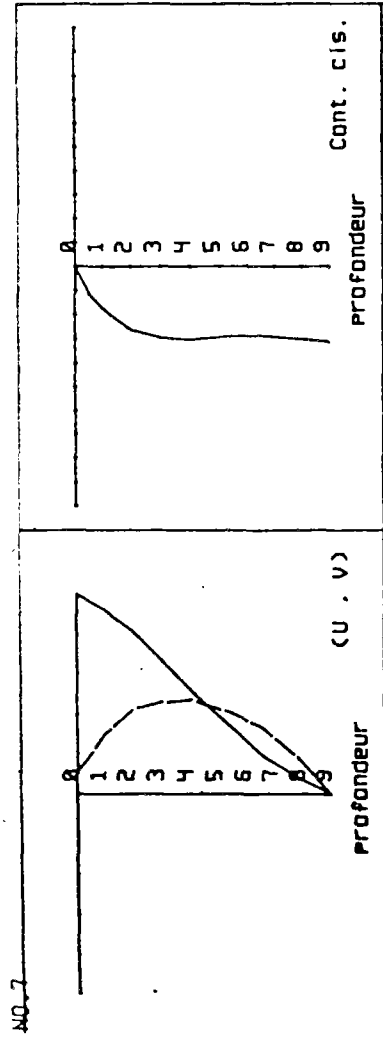
Cont. cis.

Profondeur

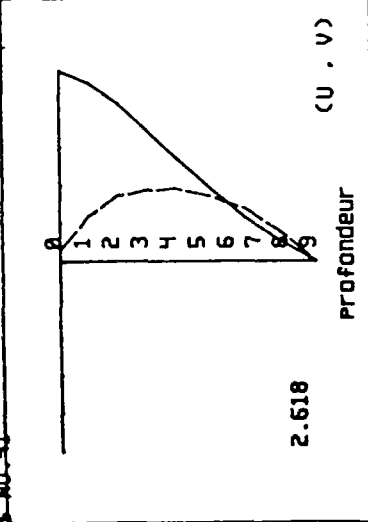
Cont. eff.

Profondeur





S. NO. 41



2.618

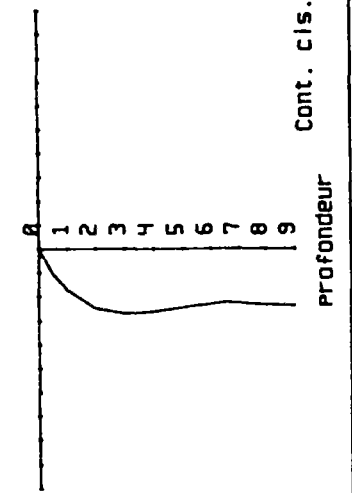
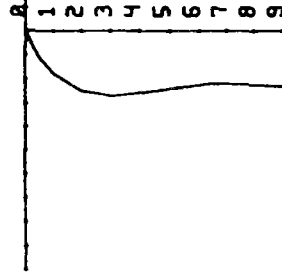
(U . V)

Profondeur

(U . V)

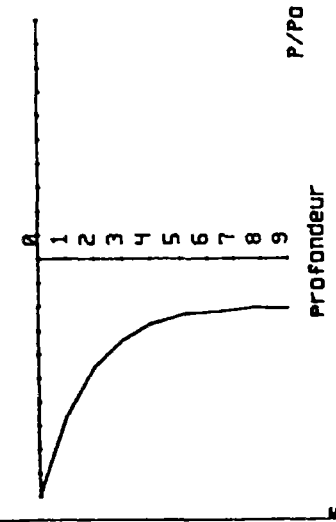
Profondeur

Cont. cis



Profondeur

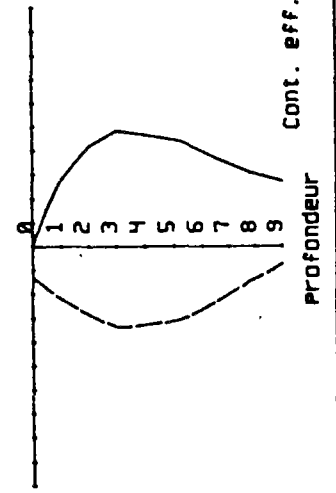
Cont. cis.



Profondeur

P/PO

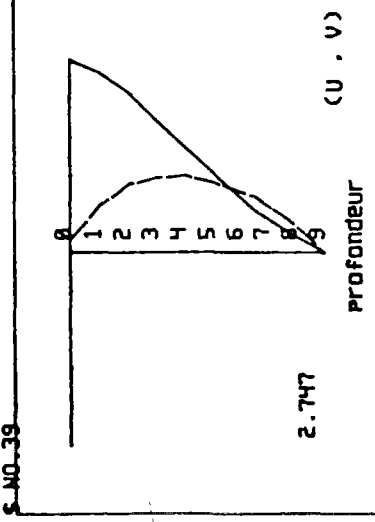
Cont. eff.



Profondeur

Cont. eff.

S. NO. 39



2.747

(U . V)

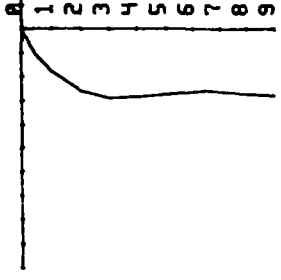
Cont. cis.

Profondeur

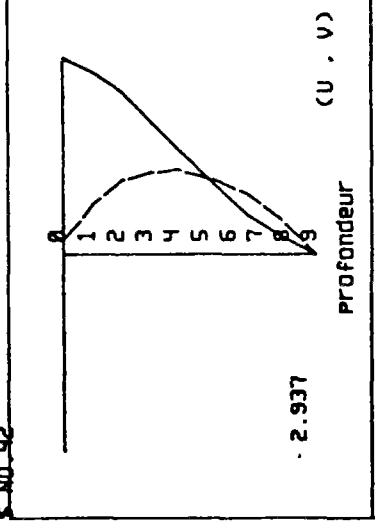
(U . V)

Profondeur

Cont. cis



S. NO. 42



2.937

(U . V)

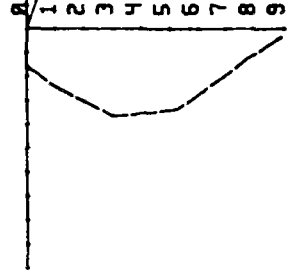
Cont. cis.

Profondeur

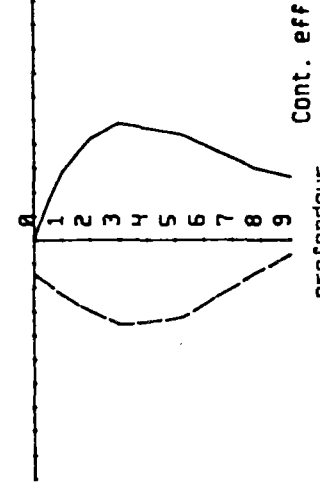
(U . V)

Profondeur

Cont. eff

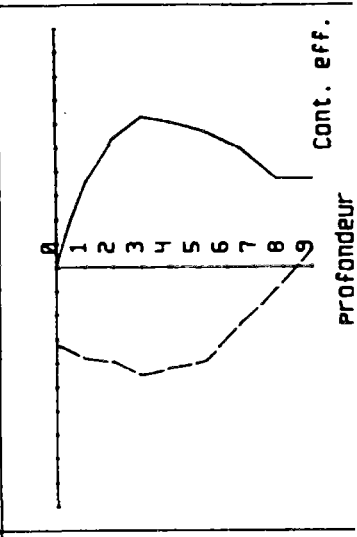
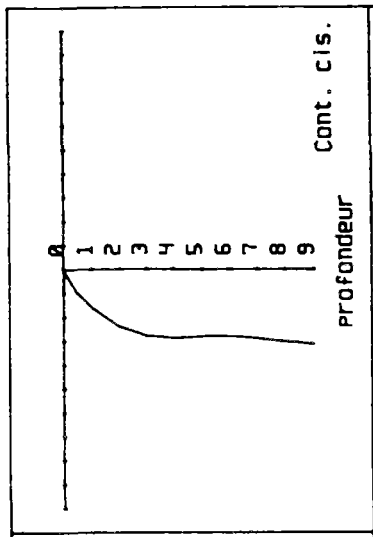
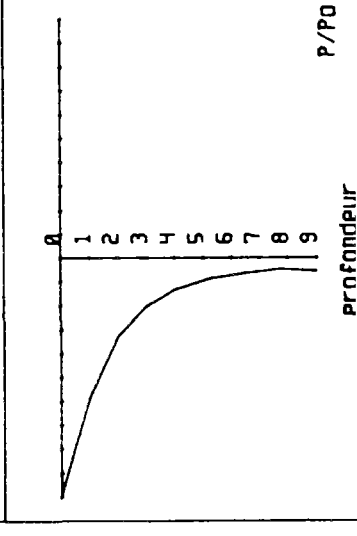
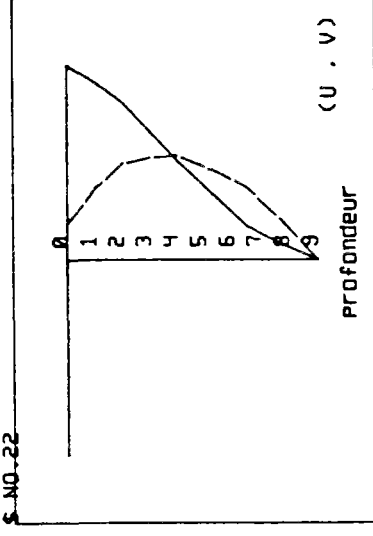
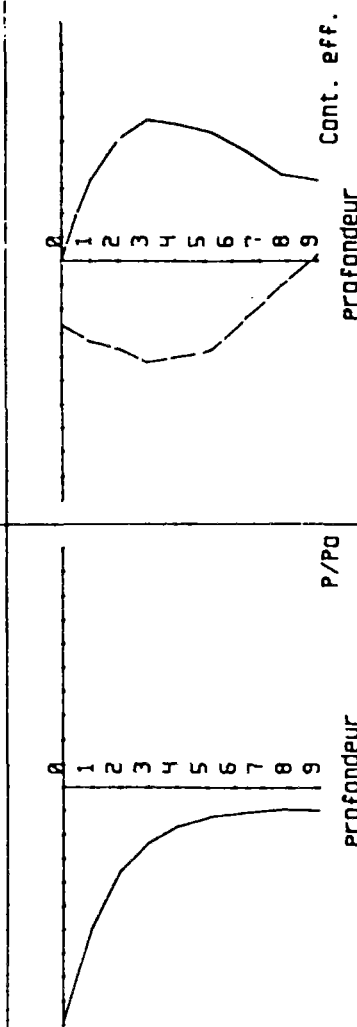
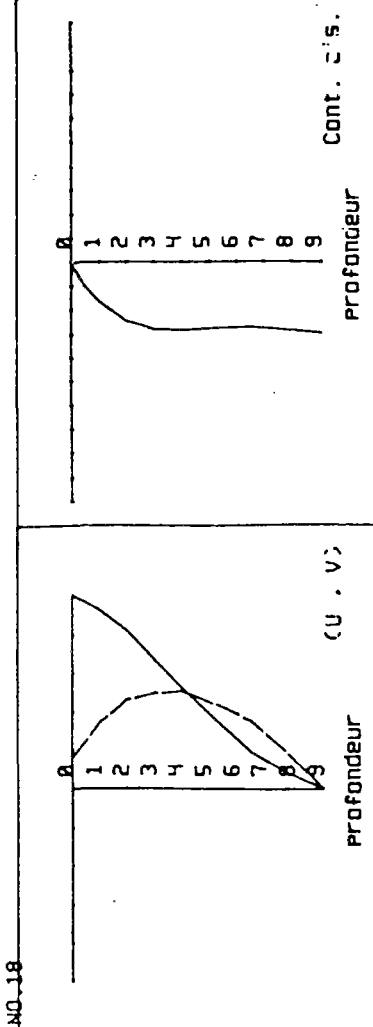
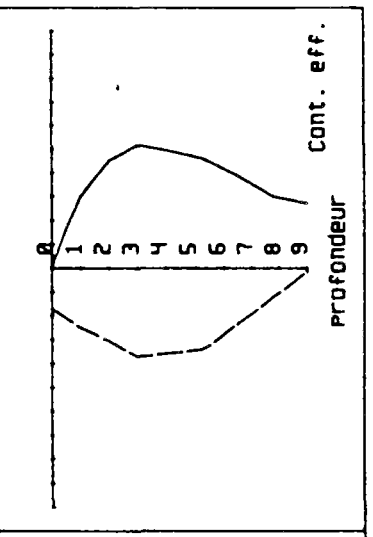
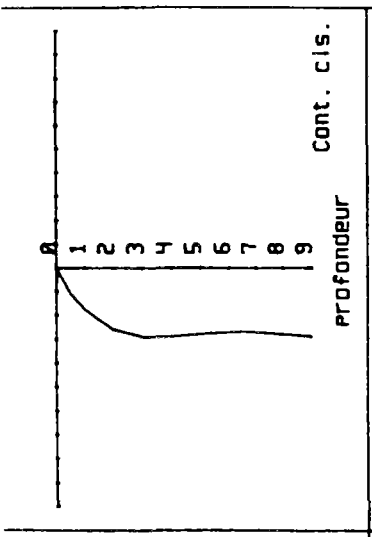
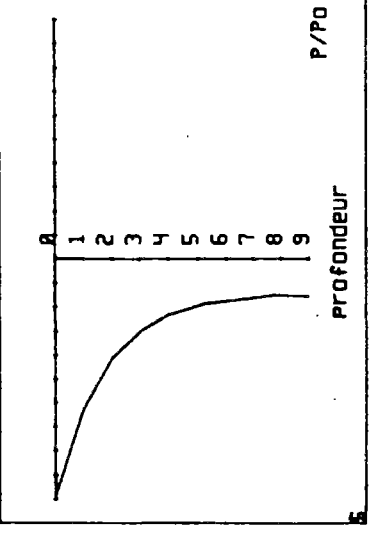
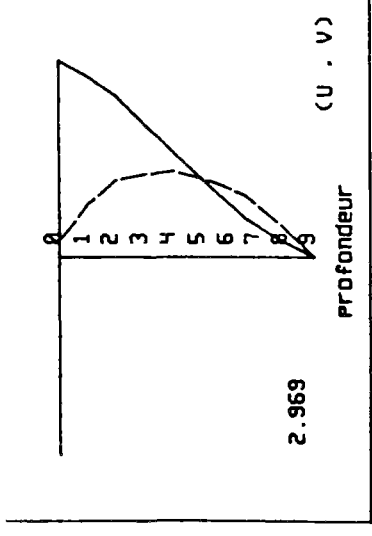
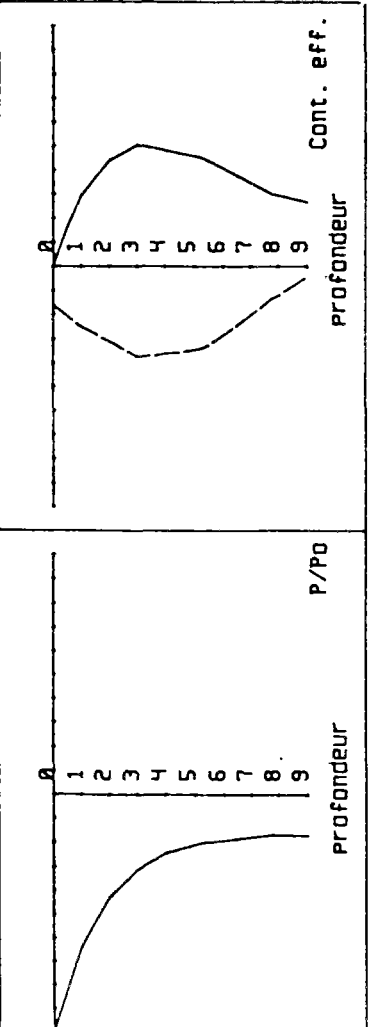
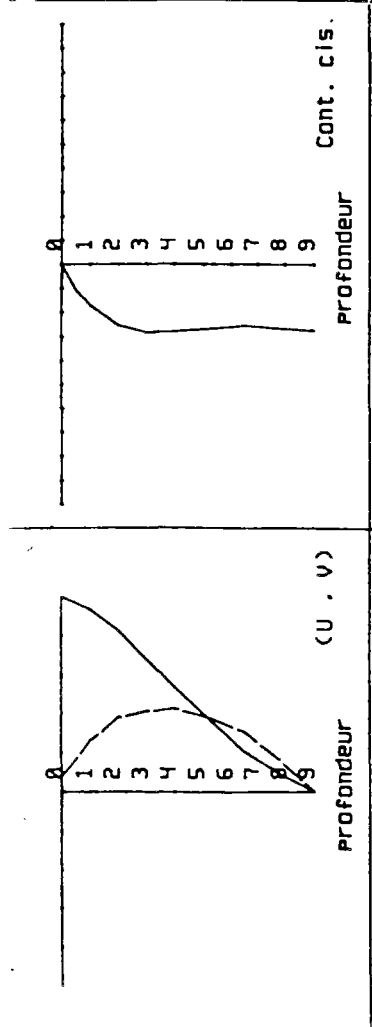


Cont. eff.



P/PO

Cont. eff.

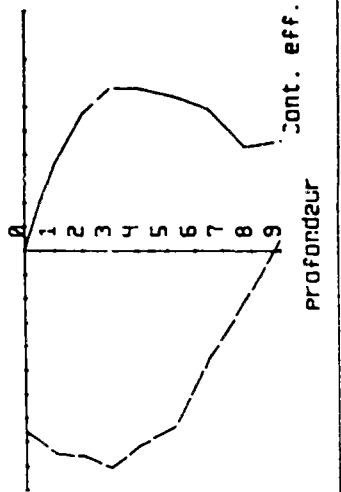
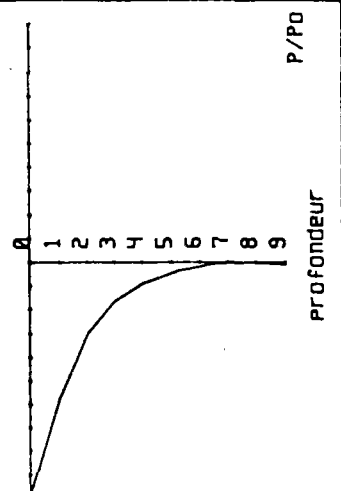
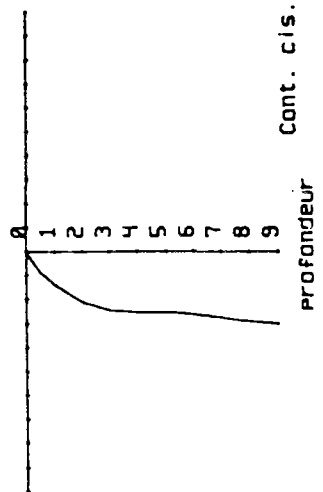
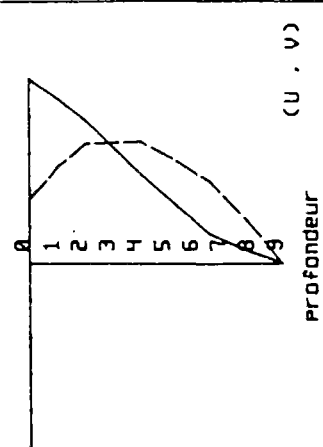


2.969

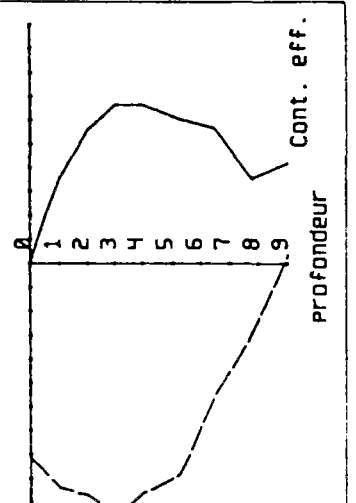
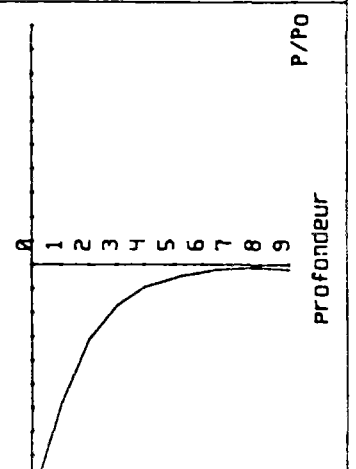
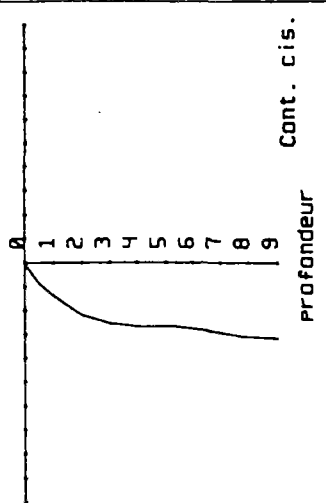
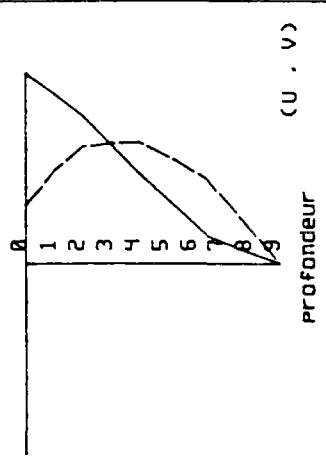
NO-22

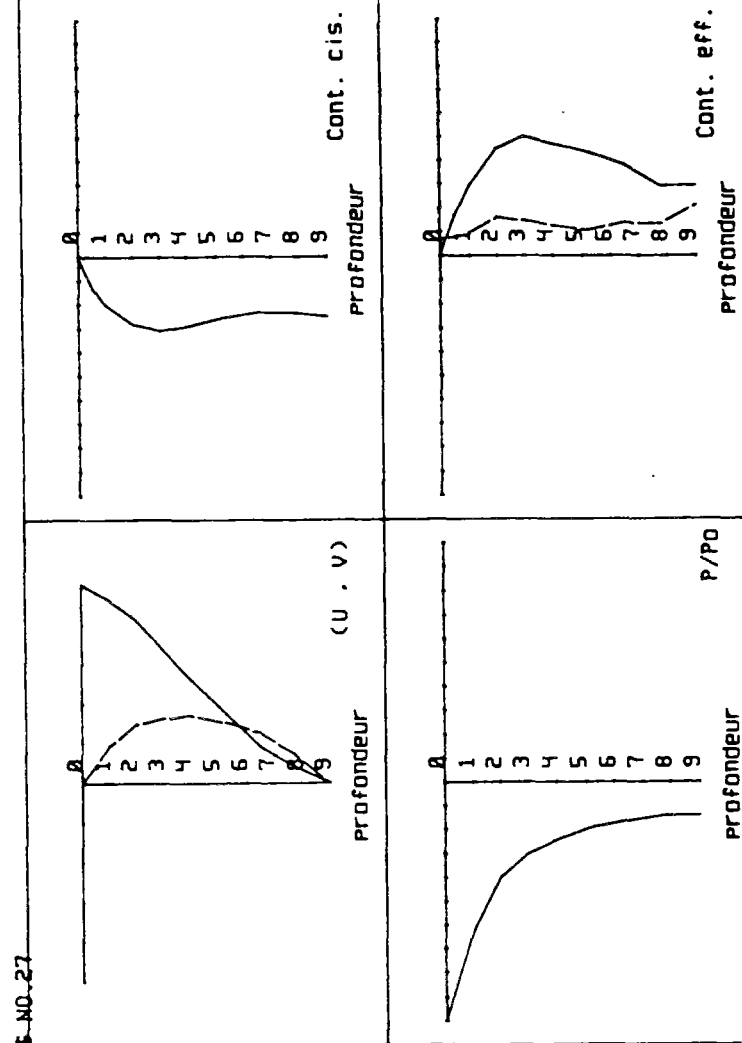
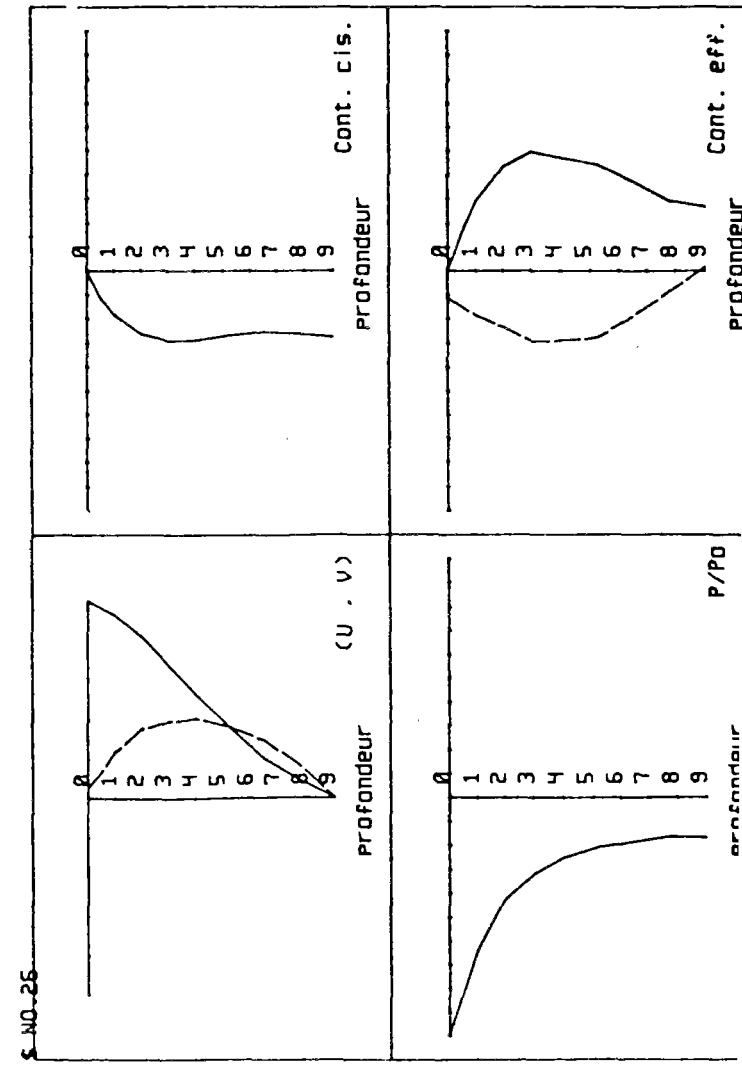
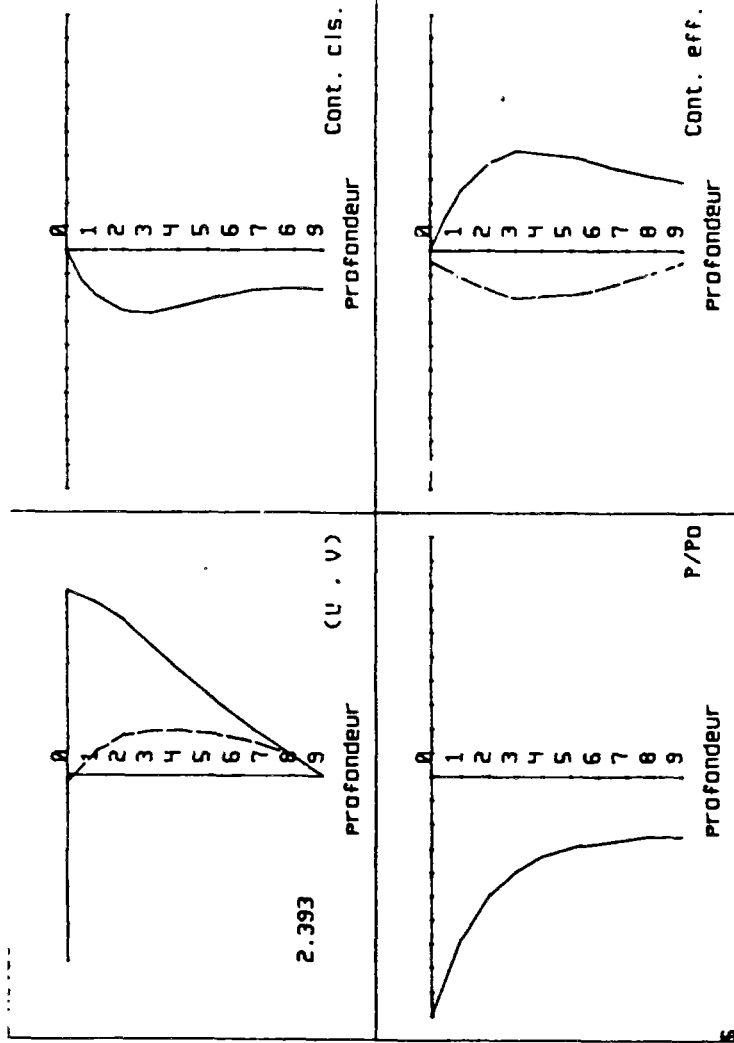
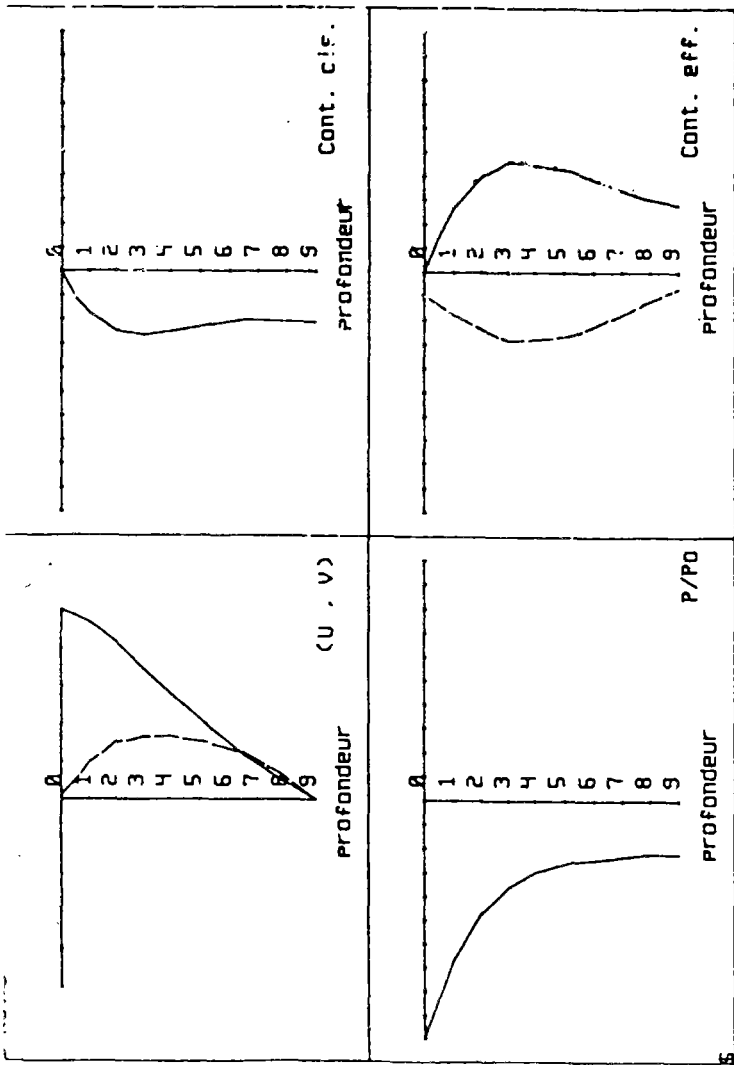
NO-18

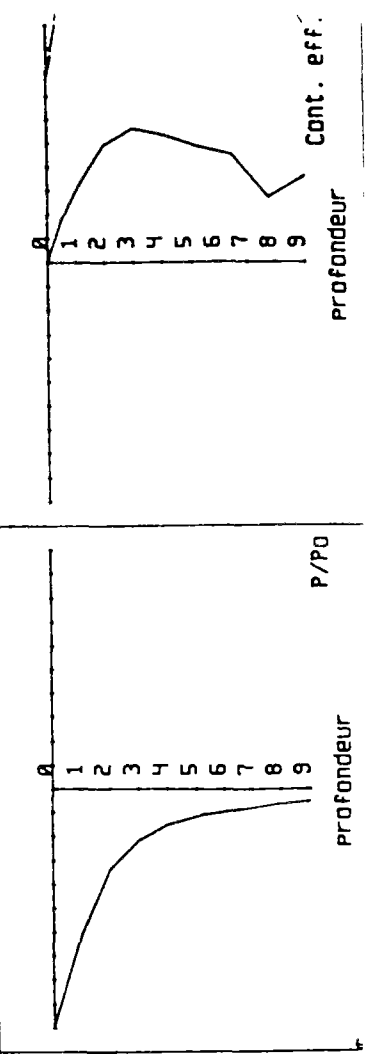
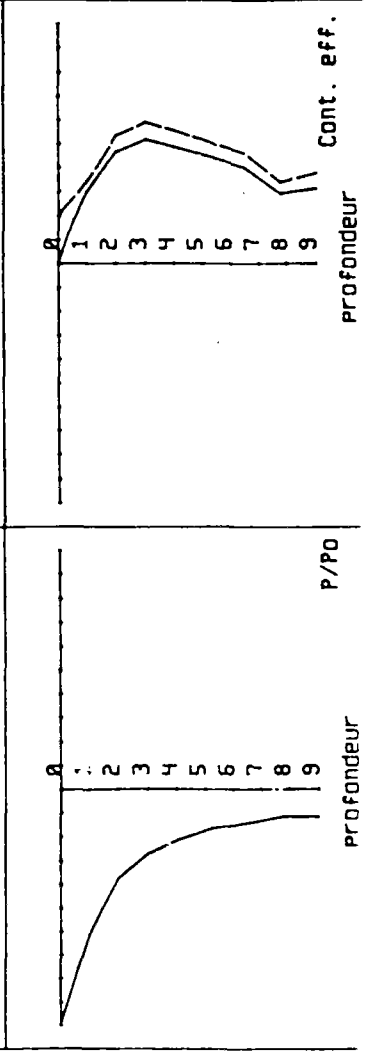
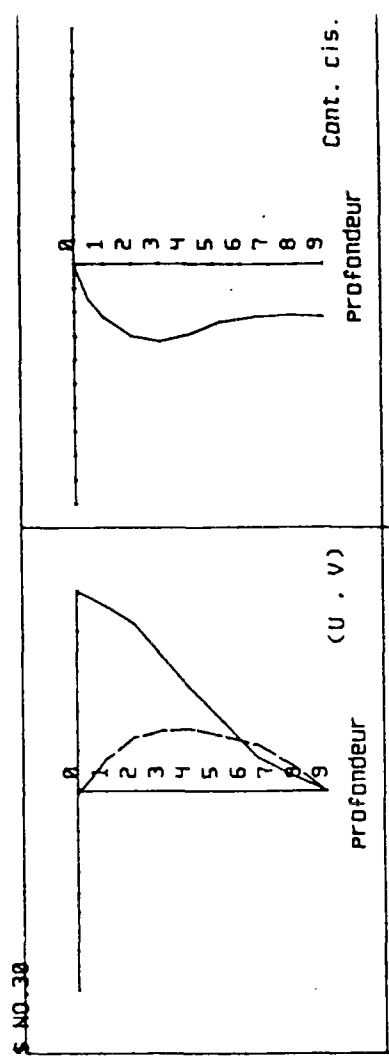
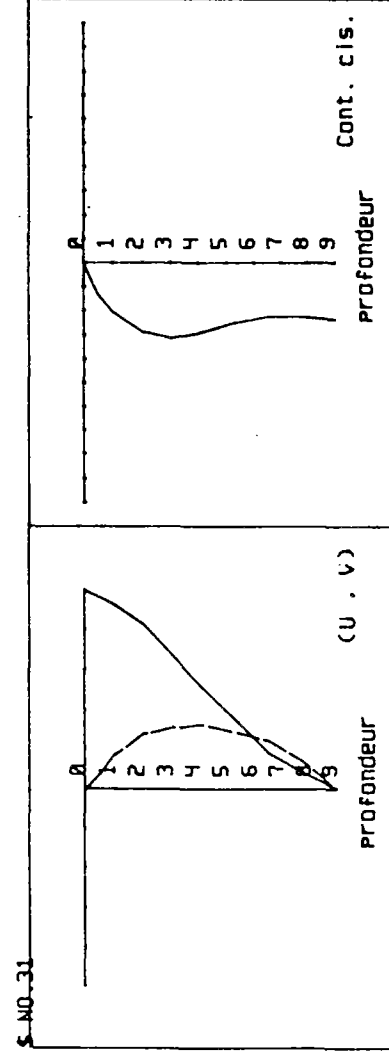
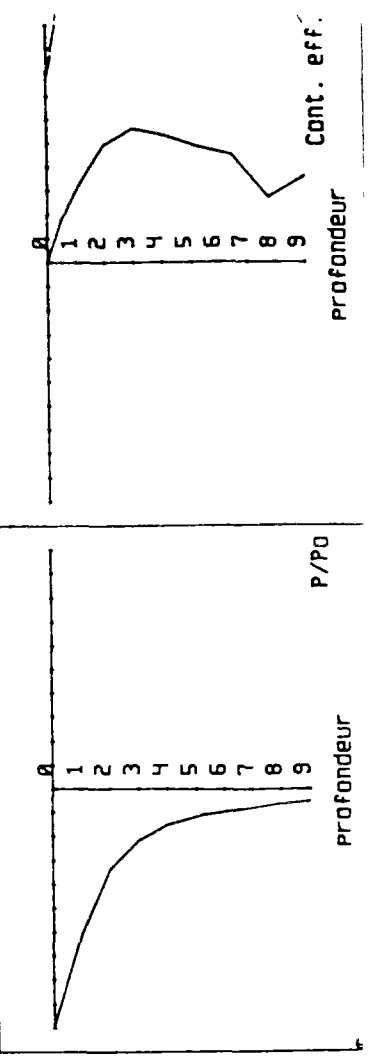
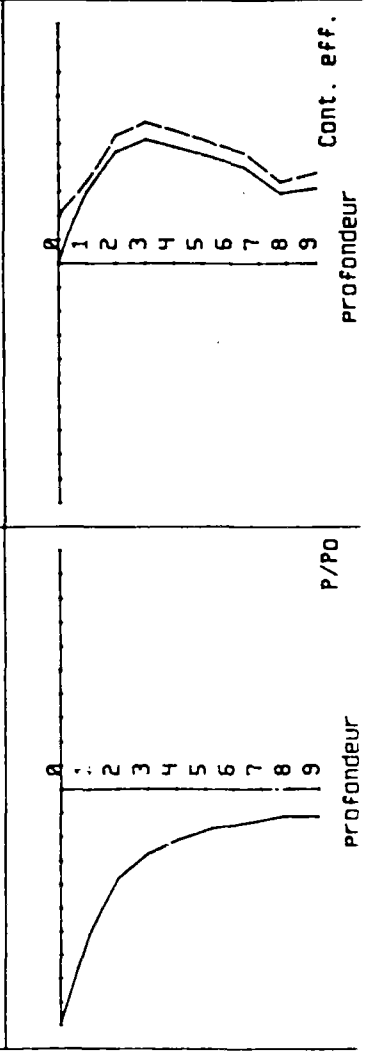
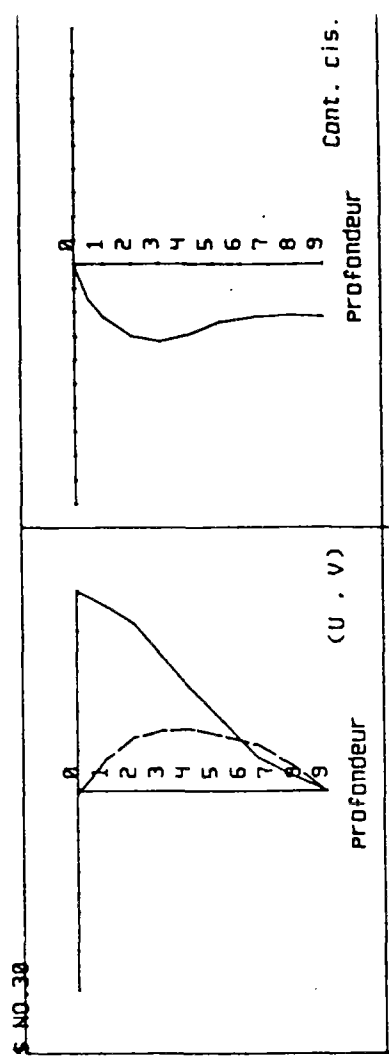
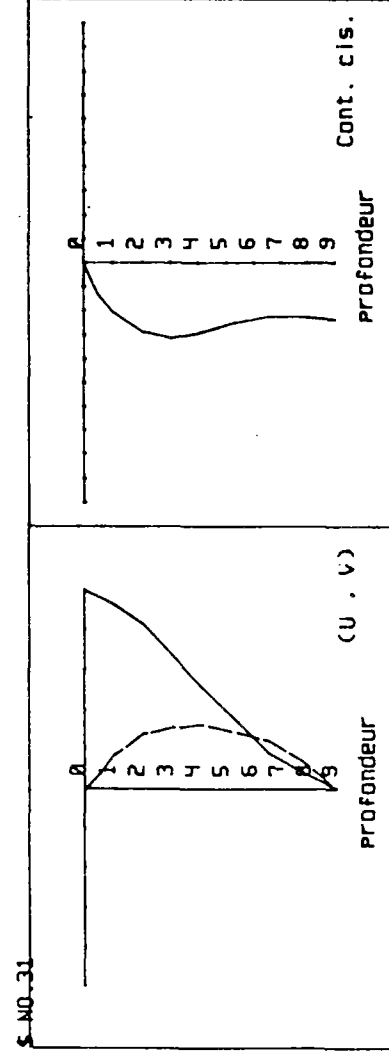
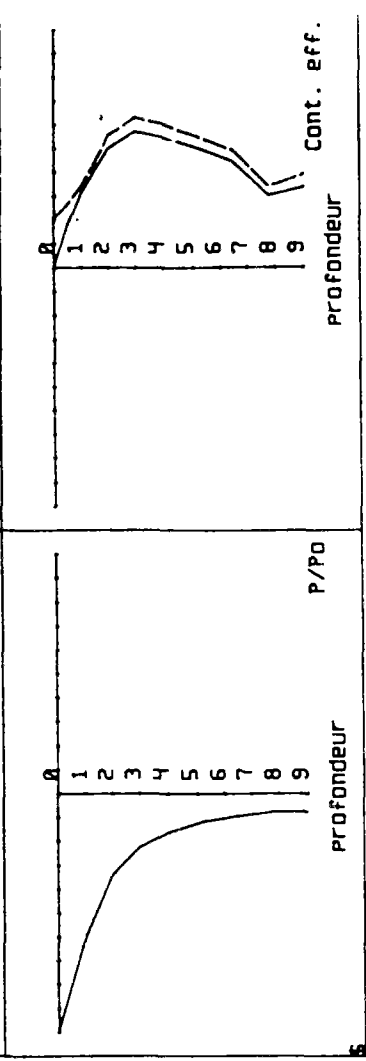
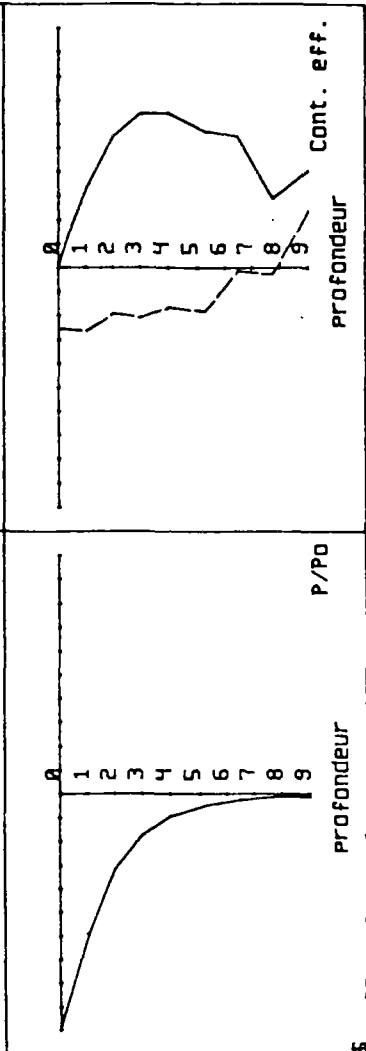
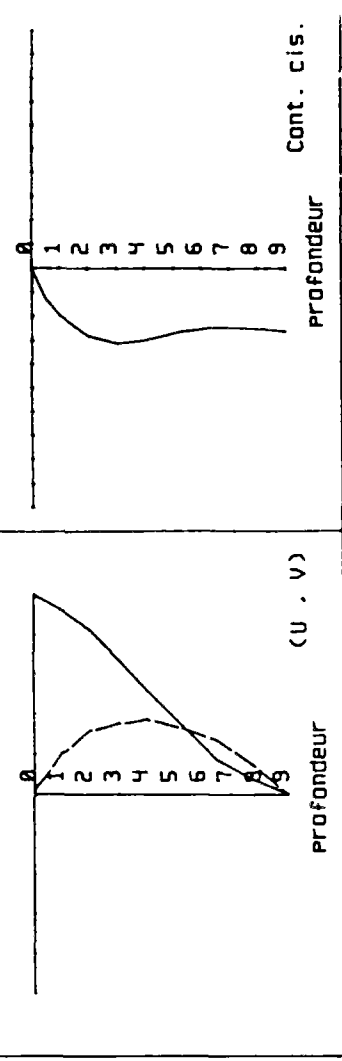
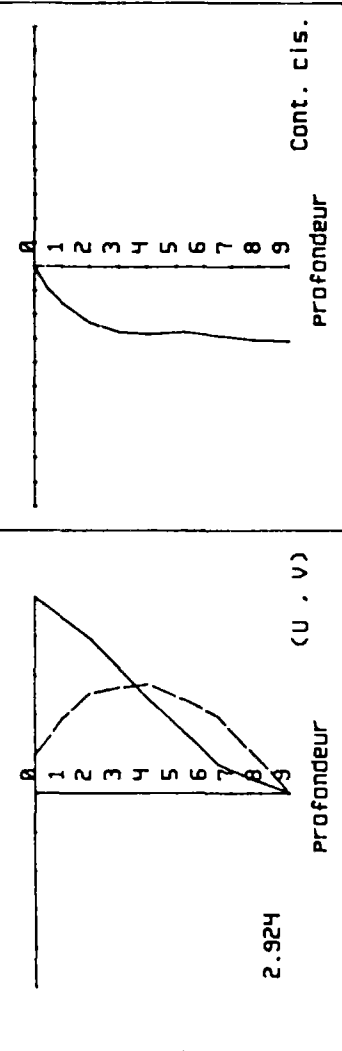
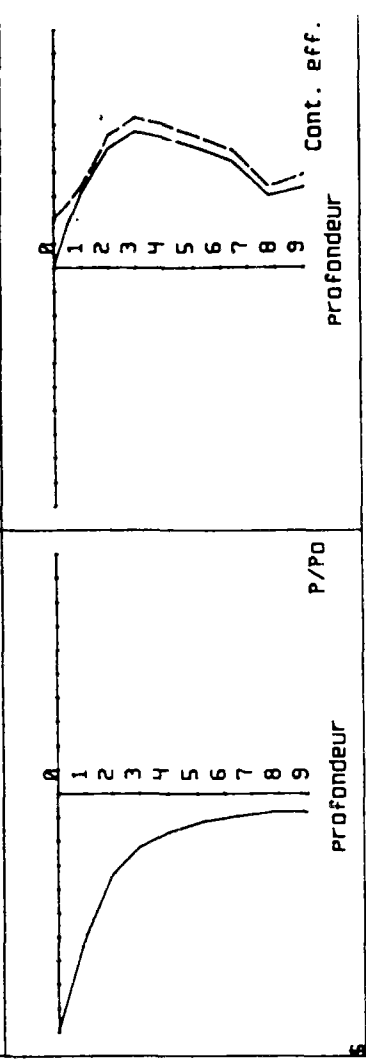
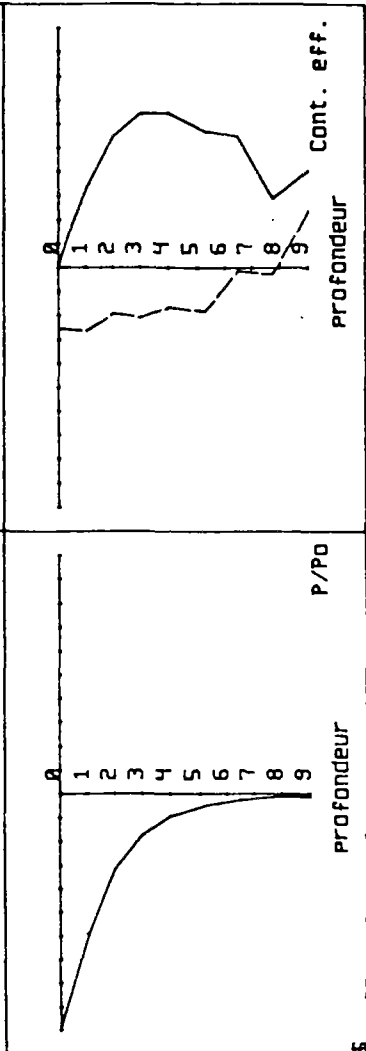
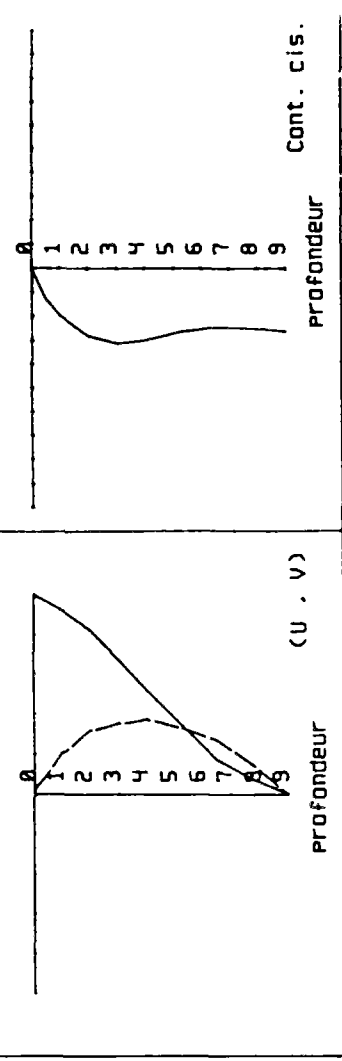
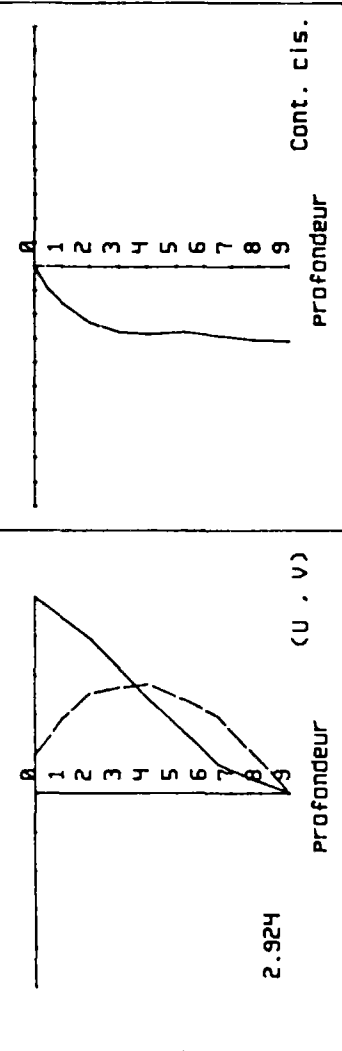
10-19



5-110-23

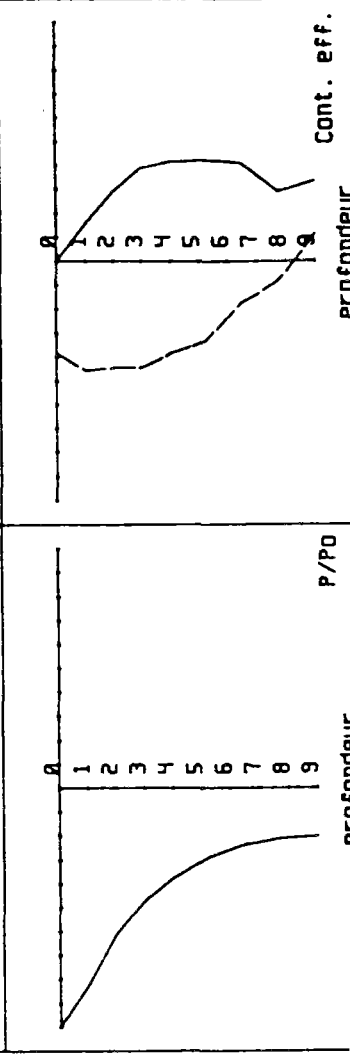
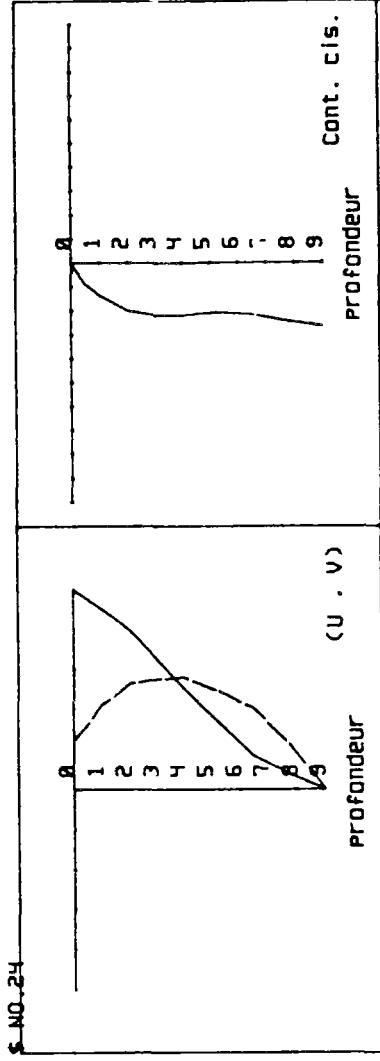
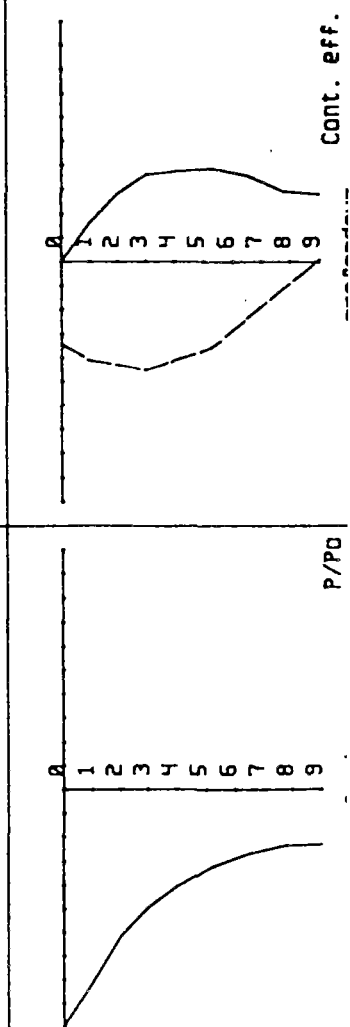
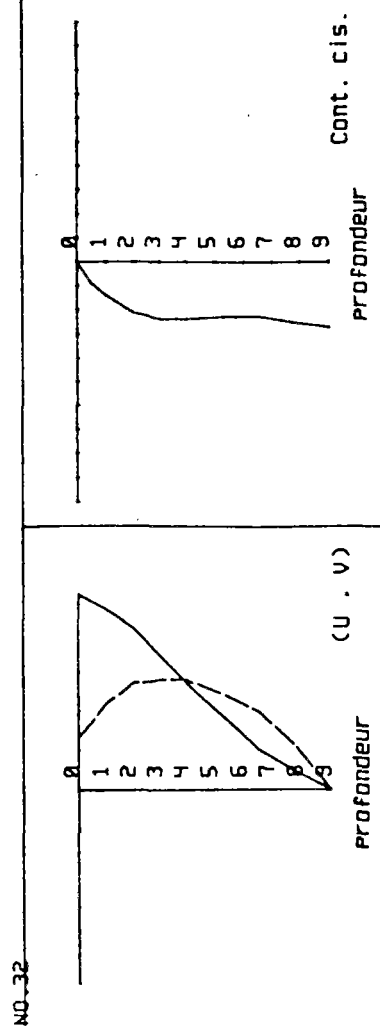
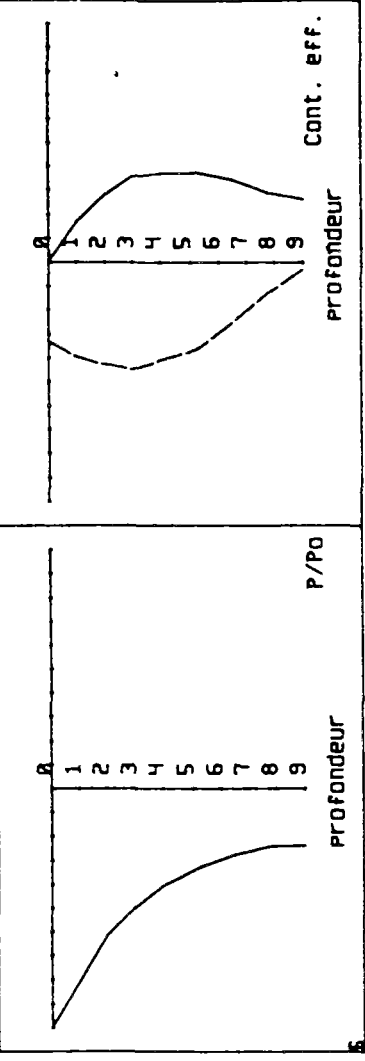
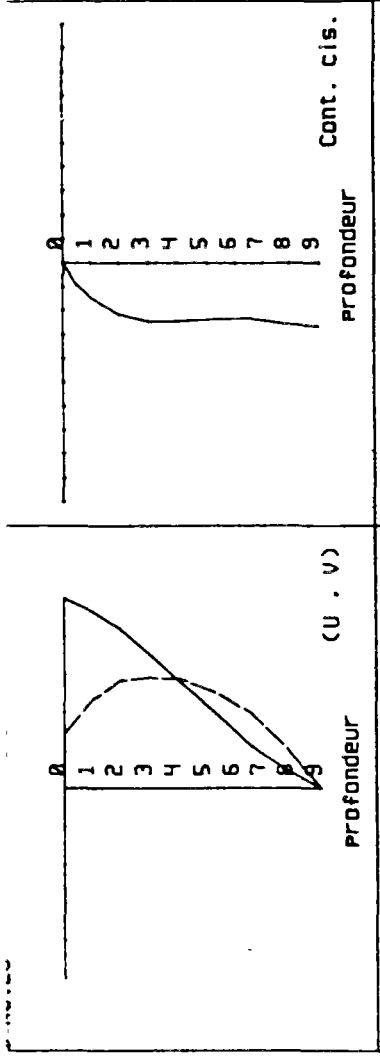
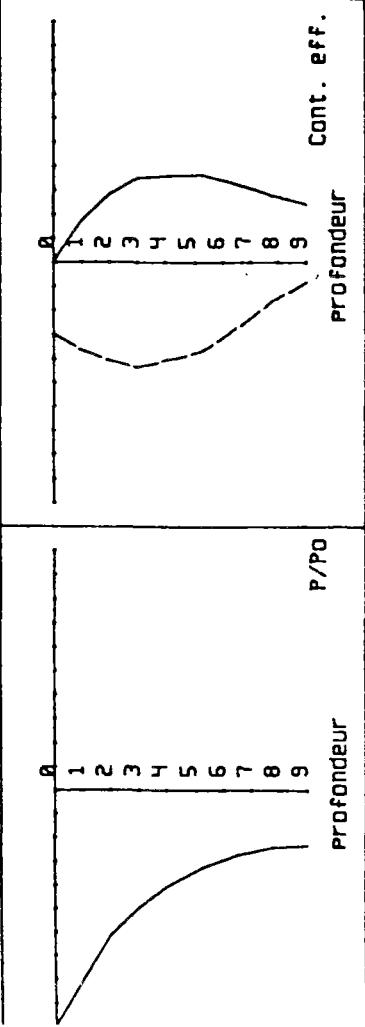
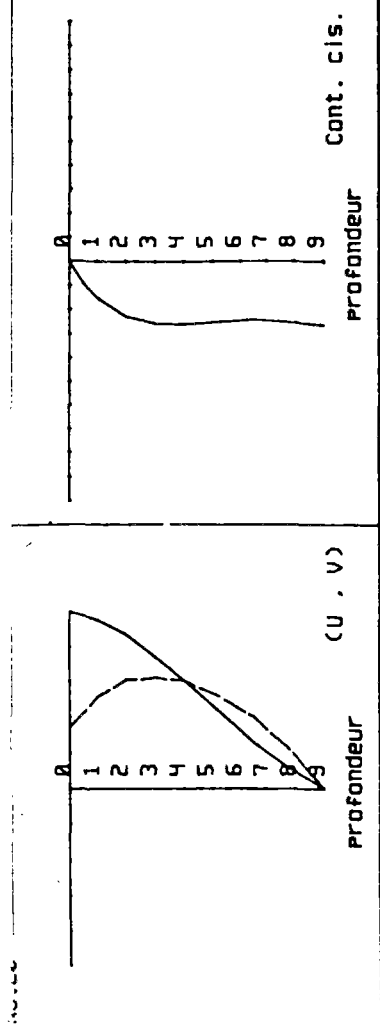


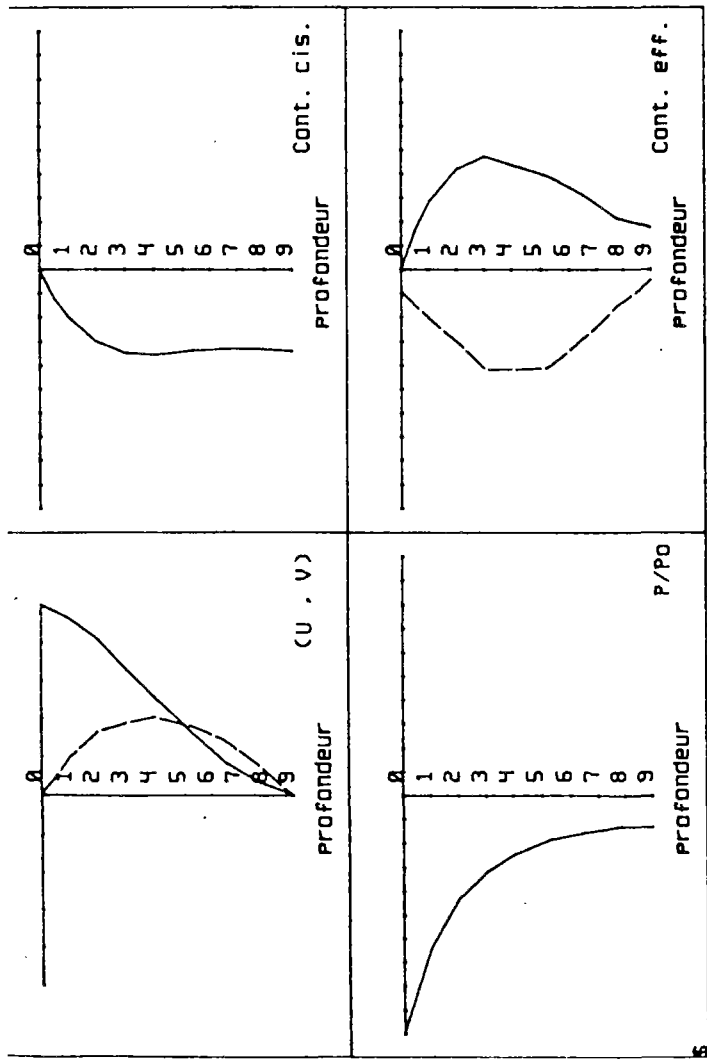




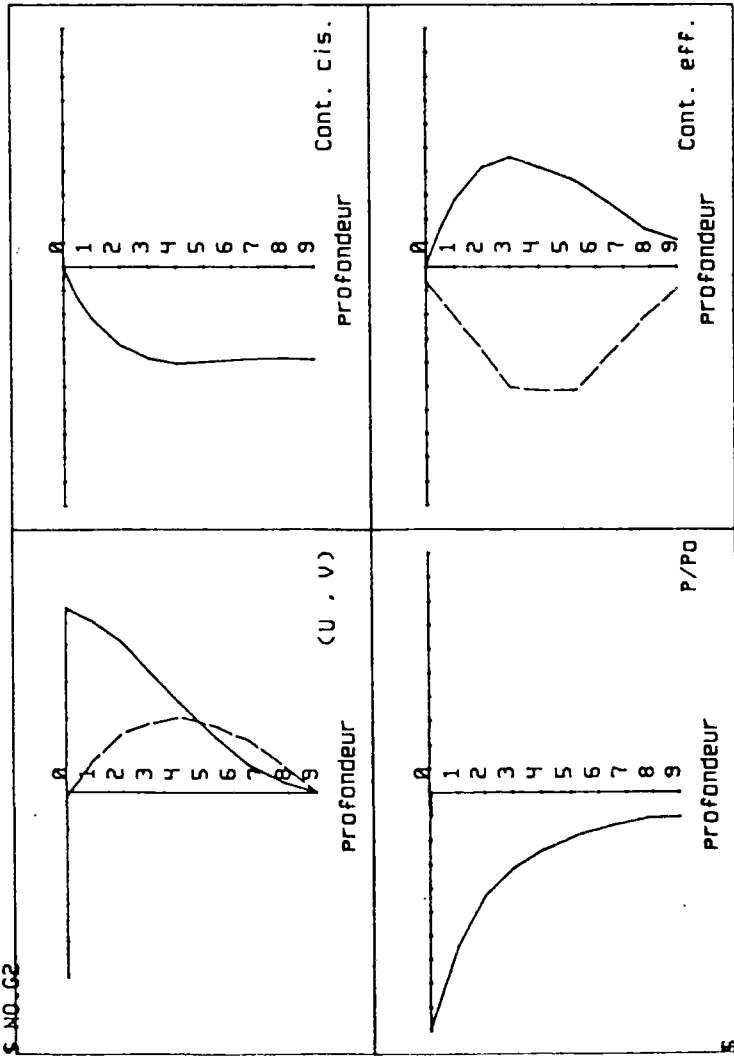
2.924

2.924

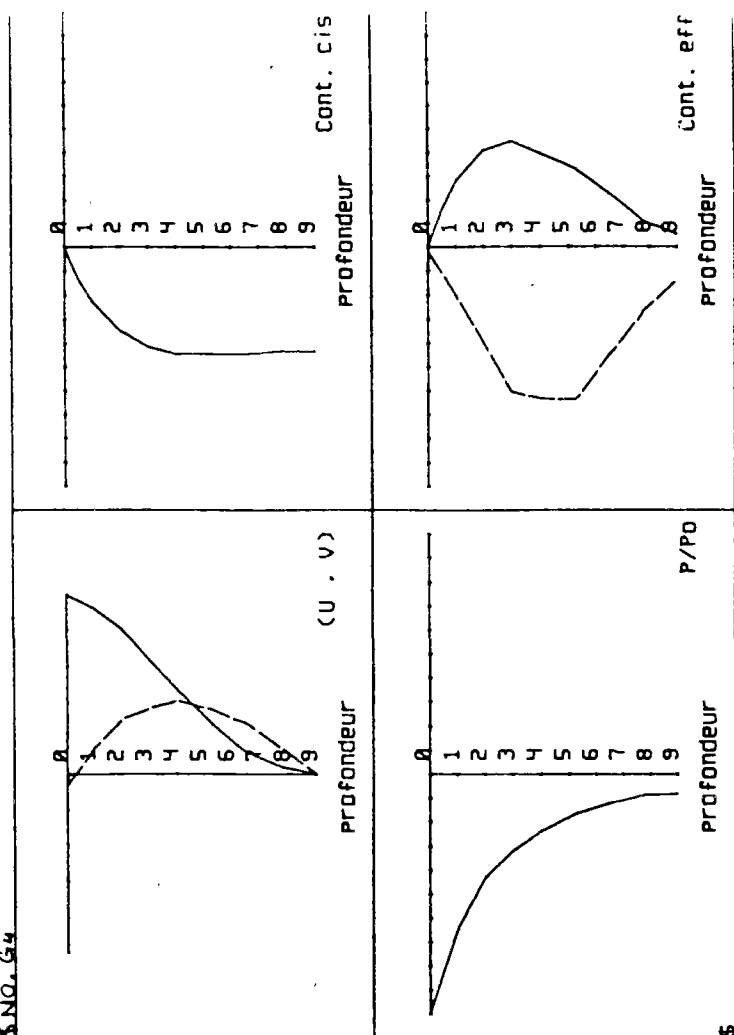
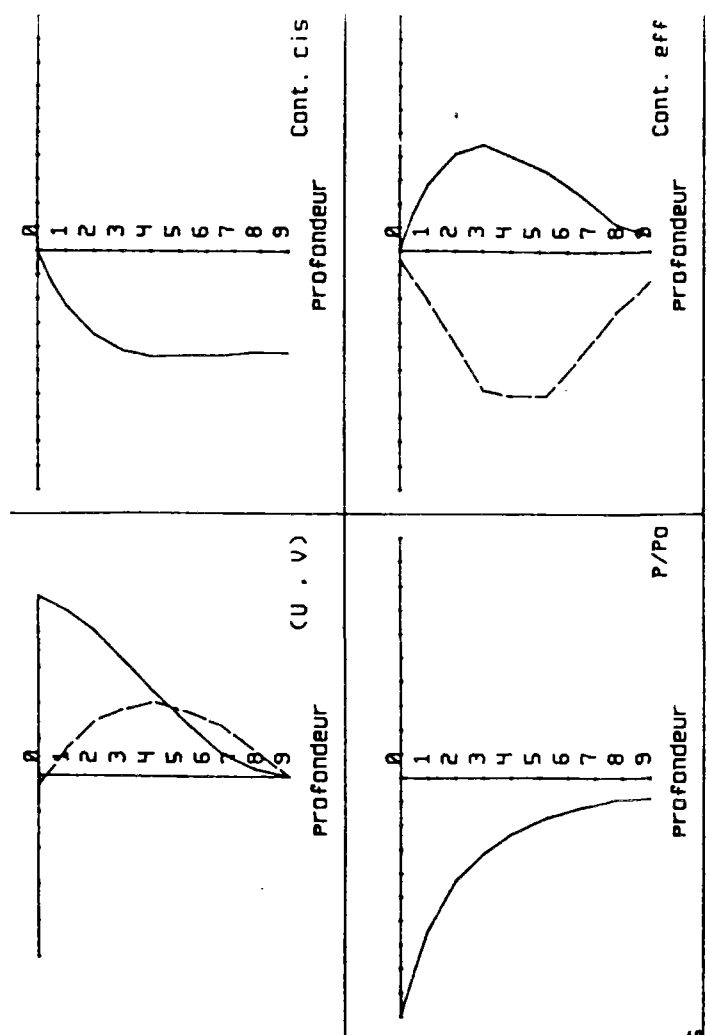




S.NO_G2



S.NO_G4



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BABCHIA M.Z. et MAGNAN J.P. (1986). Analyse numérique du comportement des massifs de sols argileux. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris. Rapport de Recherche LPC, n°140.
- BARDEN L. (1963). Stresses and displacements in a cross-anisotropic soil, *Géotechnique* 13, n°3, pp. 198-210.
- BATHE K.J. and WILSON E.L. (1976). Numerical methods in finite element analysis, Prentice Hall.
- BELKEZIZ A. et MAGNAN J.P. (1982). Analyse numérique de la consolidation bidimensionnelle des sols élastoplastiques. Traitement par la méthode des éléments finis et application au remblai expérimental B de Cubzac-les-Ponts. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris, Rapport de Recherche LPC n° 115.
- BIESEL F. (1952). Study of wave propagation in water in gradually varying depth. Gravity waves : circ. 521. National bureau of standards.
- BIOT M.A. (1941). General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, 12, pp. 155-169.
- BIOT M.A. (1956). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, *J. Acoustic Soc. of America* 28, pp. 168-191.

- BIOT M.A. (1962). Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of Applied Physics*, 33, pp. 1482-1498.
- BIOT M.A. (1972). Theory of finite deformation of porous solid. *Indiana University Mathematics Journal*, 21, n°7, pp. 597-620.
- BIOT M.A. (1973). Non linear and semi-linear rheology of porous solids. *Journal of Geophysical Research*, 78, n° 23, pp. 4924-4937.
- BIOT M.A. (1977). Variational Lagrangian - thermodynamics of non isothermal finite strain. Mechanics of porous solid and thermomolecular diffusion. *International Journal of Solids and Structures*, 13, pp. 579-597.
- BONNEFILLE R. (1980). Cours d'hydraulique maritime. 12ème édition. Masson, Paris.
- BOOKER D.R. and SMALL J.C. (1975). An investigation of the stability of numerical solution of Biot's equations of consolidation. *International Journal of Solids and Structures*, 11, n° 7/8, pp. 907-1919.
- BOOKER J.R. and SMALL J.C. (1977). Finite element analysis of primary and secondary consolidation. *International Journal of Solids and Structures*, 13, n°2, pp. 137-149.
- BOURBIE T., COUSSY O. et ZINSZNER B. (1986). Acoustique des milieux poreux. Edition Technip, Paris.
- CAQUOT A. et KERISEL J. (1966). *Traité de Mécanique des Sols*. Edit. Gauthier - Villars, Paris.
- CARRIER G.F. (1966). Gravity waves on water of variable depth. *Journal of Fluid Mechanics*, 24 part 4. t 4.

- CARSTENS T., BREBNER A. and KAMPHUIS J.W. (1976). Seabed mobility under vertical pressure gradients. Proceeding of behaviour of offshore structures (Boss'76), pp. 423-438.
- CARTER J.P., SMALL J.C. and BOOKER J.R. (1977). A theory of finite elastic consolidation. *International Journal of Solids and Structures*, 13, n°5, pp. 467-478.
- CHRISTIAN J.T. and BOEHMER J. N. (1970). Plane strain consolidation by finite elements. *Journal of Soil Mechanics and Foundation Engineering Division, ASCE*, 96, pp. 1435-1457.
- CORDARY D. (1973). Contribution à l'étude du tassement des fondations superficielles. Thèse, Grenoble.
- COUSSY O. (1989-a). Thermomechanics of saturated porous solids in finite deformation. *European Journal of Mechanics, A/ Solids*, 8, n°1, pp. 1-14.
- COUSSY O. (1989-b). A general theory of thermoporoelastoplasticity for saturated porous materials, *Transport in porous media*, 4, pp. 281-293.
- COUSSY O. (1989-c). Comportement des milieux poreux saturés, Lecture spéciale, International Symposium rock at Great Depth, Pau, à paraître chez Balkema.
- COUSSY O. (1989-d). Mécanique des milieux poreux, à paraître, Technip.
- DEMARS K.R. (1983). Transient stresses induced in sandbeds by wave loading. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 109, n°4, pp. 591-602.
- DHATT G. et TOUZOT G. (1981). Une présentation de la méthode des éléments finis. Maloine S.A. Editeur, Paris.

- DIKTINE V. et PROUDNIKOV A. (1978). Transformations intégrales et calcul opérationnel. Editions MIR, Moscou.
- DORMIEUX L. (1988). Stability of a purely cohesive seabed soil under wave loading. *Géotechnique* 38, n°1, pp. 121-123.
- DORMIEUX L. (1989). Influence de la houle sur la stabilité d'un massif sous-marin. Thèse de Doctorat, ENPC, Paris.
- DORMIEUX L. and DELAGE P. (1988). Effective stress response of a plane seabed under wave loading. *Géotechnique* 38, n°3, pp. 445-450.
- DOYLE E.H. (1973). Soil-wave tank studies of marine soil instability, Proceeding 5th Offshore Technology Conference, Houston, 2, pp.753-766.
- EAGLESON P.S. (1956). Properties of shoaling waves by theory and experiments. *Transactions of American Geophysical Union*, 37 (5).
- FILLUNGER P. (1912). Drei wichtige ebene Spannungszusände des keilformigen Körpers. *Z. Math Physik*, 60, pp. 275-285.
- FINN W.D.L., SIDDHARTHAN R. and MARTIN G.R. (1983). Response of seafloor to ocean waves. *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, 109, n°4, pp. 556-572.
- FRIEDRICHS K.O. (1948). Water waves on a shallow sloping beach. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1, n° 2.
- FUNG Y.C. (1965). *Foundation of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood, cliffs, pp. 195-197.
- GALVIN C.J. Jr (1968). Breaker type classification on three laboratory beaches. *Journal of Geophysical Research*, 73, n° 12, June 15.
- GARNIER J. (1973). Tassements et contraintes : influence de la rigidité de la fondation et de l'anisotropie du massif. Thèse de

Docteur-Ingénieur, Université de Grenoble.

GAUGHAN M.K. and KOMAR P.D. (1975). The theory of wave propagation in water of gradually varying depth and the prediction of breaker type and height. *Journal of Geophysical Research*, July 20.

GHABOUSSI J. and WILSON E.L. (1973). Flow of compressible Fluid in porous elastic media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 5, n°3, pp. 419-443.

GREENSPAN H.P. (1958). On the breaking of water waves of finite amplitude on a sloping beach. *Journal of fluid Mechanics*, 4, n°3.

GUTMAN S.G. (1966). Solution of a plane problem of the theory of elasticity for a particular case of orthotropy on an isotropic model. 1er Congrès Mécanique des Roches, T.1, Lisbonne, pp. 713-716.

HEARMON R.F. (1961). An introduction to applied anisotropic elasticity. Clarendon Press, Oxford.

HENKEL D.J. (1970). The role of waves in causing submarine landslides. *Géotechnique* 20, 1, pp. 75-80.

HUNT J.N. (1959). On the damping of gravity waves propagated over a permeable surface. *Journal of Geophysical Research*, 64, n°4, pp. 437-442.

HWANG C.T., MORGENSTERN N.R. and MURRAY D.W. (1971). On solutions of plane strain consolidation problems by finite element method. *Can. Geotech. J.*, 8, pp. 109-117.

HWANG C.T., MORGENSTERN N.R. and MURRAY D.W. (1972). Application of the finite element method to consolidation problems. First Int. Conf. Num. Meth. Geomech., Vicksburg, pp. 739-760.

- ISAACSON E. (1950). Water waves over a sloping bottom. Communication on Pure and Applied Mathematics, III, n° 1.
- JACOB C.E. (1940). On the flow of water in anelastic artesian aquifer. Trans. Amer. Geophys. Union, 2, pp. 574-586.
- JURGENSON L. (1934). The application of theories of elasticity and plasticity to foundation problems. Contribution to Soil Mechanics. Boston Society of Civil Engineers, pp. 1925-1940.
- KEULEGAN G.H. (1967). Wave motion in Engineering Hydraulics. Ed. by H. Rouse, Edition J. Wiley.
- KOH R.C.H. and LEMEHAUTE B. (1966). Wave shoaling. Journal of Geophysical Research, 71, n° 8, April 15.
- KONING H. (1957). Stress distribution in a homogeneous anisotropic elastic semi infinite solid. Fourth Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., London, 1, pp. 335-338.
- KRAFT M. and HELFRICH S. (1983). Stresses due to wave induced bottom pressures. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 109, pp. 986-994.
- KRAUSE G. (1978). Finite element schemes for porous elastic media. Journal of the Engineering Mechanical Division, ASCE, 104, pp. 605-620
- LAVRENTIEV M. et CHABAT B. (1972). Méthodes de la Théorie des Fonctions d'une variable complexe. Editions MIR, Moscou.
- LEKHNITSKII S.G. (1963). Theory of elasticity of an anisotropic elastic body, Holden Day Inc. San Francisco. Series in Mathematical Physics.

- LEMEHAUTE B. and WEBB L. (1964). Periodic gravity waves over a gentle slope at a third order of approximation. Proceedings of IX Conference on Coastal Engineering, Lisbon.
- LEROUEIL S., MAGNAN J.P. et TAVENAS F. (1985). Remblais sur argiles molles. Lavoisier, Paris.
- LEWY H. (1946). Water waves on sloping beaches. Bulletin of the American Mathematical Society, 52, n° 9.
- LIU P.F. (1973). Damping of water waves over porous bed. Journal of Hydraulics Division, ASCE, 99, n°HY12, pp. 2263-2271.
- LIU P.F. (1977). On gravity waves propagated over a layered permeable bed. Journal of Coastal Engineering, 1, pp. 135-148.
- LOVE A.E.M. (1929). Phil. Trans. Roy Soc., London, serie A, vol.228, pp. 389.
- MCNAMEE J. and GIBSON R.E. (1960). Plane strain and axially symmetric problems of consolidation of a semi-infinite clay stratum. Quart. Jour. Mech. Appl. Math., 13, pp. 210-227.
- MADSEN A.S. (1978). Wave induced pore pressures and effective stresses in porous bed. Géotechnique, 28, pp. 377-393.
- MAGNAN J.P. (1986). Modélisation numérique du comportement des argiles molles naturelles. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris. Rapport de Recherche LPC, n° 141.
- MALLARD W. and DARLYMPLE R.A. (1977). Water waves propagating over a deformable bottom. Proceeding Ninth Annual Off-shore Technology Conference, Houston, Texas, pp. 141-146.
- MEI C.C. (1966). On the propagation of periodic water waves over beaches of small slope. Technical Note n° 12, Hydrodynamics

Laboratory, M. I. T.

- MEI C.C. and FODA M.A. (1980). Boundary layer theory of waves in a poro-elastic seabed. In Int. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading (Pande G.N. and Zienkiewicz O.C. Eds), 2, pp. 609-618, Rotterdam, Balkema.
- MEYER E.R. and TAYLOR (1972). Run-up on beaches in waves on beaches. Ed. by R.E. Meyer, Academic Press.
- MICHE R. (1944). Mouvements ondulatoires de la mer en profondeur constante ou décroissante. Annales des Ponts et Chaussées.
- MOSHAGEN N.H. and TØRUM A. (1975). Wave induced pressures in permeable seabeds. *Journal of Waterways and Harbor and Coastal Engineering*, ASCE, 101, N° WW1, pp. 49-58.
- MOURATIDIS A. et MAGNAN J.P. (1983). Modèle élastoplastique anisotrope avec écrouissage pour le calcul des ouvrages sur sols compressibles. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris, Rapport de Recherche LPC, n° 121.
- MUNK W.H. (1949). The solitary wave theory and its application to surf problems. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 5, 13.
- MURRY J.D. (1965). Viscous damping of gravity waves over a permeable bed. *Journal of Geophysical Research*, 70, n°10, pp. 2325-2331.
- NAUROY (1975). Etude de la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans les sédiments argilo-sableux à différents stades de leur compaction. Thèse de Docteur-Ingénieur, Paris VI.
- OKUSA S. (1985). Wave-induced stresses in unsaturated submarine sediments. *Géotechnique* 35, n°4, pp. 517-532.

- PATRON V. et PERLINE P. (1984). Méthodes de la théorie mathématique de l'élasticité. Vol. 1 et 2. Editions MIR.
- PEREGRINE D.H. (1972). Equations for water-waves and the approximation behind them in waves on beaches. Ed. by R.E. Meyer, Academic Press.
- PICKERING D.J. (1970). Anisotropic elastic parameters for soil. *Géotechnique* 20, 3, pp. 271-276.
- PIYAL M. et MAGNAN J.P. (1984). Paramètres d'élasticité anisotrope de l'argile molle organique de Cubzac-les-Ponts à l'état surconsolidé. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris. Rapport de Recherche LPC, n°131.
- PUTNAM J.A. (1949). Loss of wave energy due to percolation in a permeable sea bottom. *American Geophysical Union*, 30, n°3, pp.349-356.
- PUTNAM J.A. and JOHNSON J.W. (1949). The dissipation of wave energy by bottom friction, *Transaction, American Geophysical Union*, 30, pp.67-74.
- PREVOST S.H. and al. (1975). Wave induced pressures in permeable seabeds. *Journal of the Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division, ASCE*, 101, n° WW4, pp. 464-465.
- REED R.O. and KAJIURA K. (1957). On the damping of gravity waves over a permeable seabed. *Transactions, American Geophysical Union*, 38, n°5, pp. 662-666.
- REED S.M.B. (1984). An investigation of numerical errors in the analysis of consolidation by finite elements. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 8, pp.

243-257.

- RENDULIC L. (1936). Porenziffer und Porenwasserdruck in Tonen, Der Bauingenieur, 17, pp. 559-564.
- ROSEAU M. (1952). Contribution à la théorie des ondes liquides de gravité en profondeur variable. Public. Scient. et Techniques du Ministère de l'Air, n° 275, Paris.
- SANDHU R.S. and WILSON E.L. (1969). Finite element analysis of seepage in elastic media. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 95, pp. 641-652.
- SANDHU R.S., LIU H. and SINGH K.J. (1977). Numerical performance of some finite schemes for analysis of seepage in porous elastic media. International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1, n°2, pp. 177-195.
- SCHIFFMAN R.L., CHEN A.T.F. and JORDAN J.C. (1969). An analysis of consolidation theories, J. of Soil Mechanics and Foundations Division, Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 95, n° SM1, pp. 285-311.
- SLEATH S.F.A. (1970). Wave induced pressures in bed of sand. Journal of Hydraulics Division, ASCE, 96, n°HY2, pp. 367-378.
- STOKER J.J. (1947). Surface waves in water of variable depth. Quarterly of Applied Mathematics, V.
- STOKER J.J. (1957). Water waves. Publ. Interscience Publishers Inc., New York.
- SUKLJE L. (1963). The equivalent elastic constants of saturated soils exhibiting anisotropy and creep effects. Géotechnique 13, pp. 291-309.

- TAN TJONG-KIE (1961). Consolidation and secondary time effect of homogeneous anisotropic saturated clay strata. Fifth Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Paris, 1, pp. 367-373.
- TERZAGHI K. (1943). Theoretical soils mechanics. John Wiley and Sons, New York.
- TIMOSHENKO S. et GOODIER S.N. (1961). Théorie de l'élasticité. Editions Branger, Paris.
- TRANter C.S. (1947). Quart. Jour. Mech. and Applied Math., 1, p. 125.
- URIEL A.O. et CANIZO L. (1971). On the elastic anisotropy of soil. Geotechnique 21, 3, pp. 262-267.
- VERMEER P.A. and VERRUIJT A. (1981). An accuracy condition for consolidation by finite elements. International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 5, n°1, pp. 1-14.
- VERRUIJT A. (1982). Approximations of cyclic pore pressures caused by sea waves in a poro-elastic half-plane. Chapter 3 of Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads. Edited by G.N. Pande and O.C. Zienkiewicz.
- VERRUIJT A. (1969). Elastic storage of aquifers. Chap. 8 of flow through porous media. R.J.M. Dewiest, Editor, Academic Press Publishers, New York.
- WEGGEL J.R. (1972). Maximum breaker height. Proc. of ASCE, Jour. of Wat. Harb. and Coas. Eng. Div., 98, n° WW4.
- WIENDIECK K. (1968). L'anisotropie des milieux pulvérulents et son influence sur les tassements. Publications Scientifiques du Ministère de l'Air, Paris, n° 441.

- WOLF K. (1945). Distribution of stress in a half plane and a half space of anisotropic material. *Zeitschrift für Angewandte. Math. und Mech.*, 15, pp. 249-254.
- YAMAMOTO T. (1978). Seabed instability from waves. Proc. of 10th Annual Offshore Technology Conferences Paper, n° 3262, 1, Houston, Texas, pp. 1819-1824.
- YAMAMOTO T. and TAKAHASHI S. (1985). Wave damping by soil motion. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 111, pp. 62-77.
- YOKOO Y., YAMAGATA K. and NAGAOKA H. (1971). Variational principles for consolidation. *Soils and Foundations*, 11, n°4, pp. 25-35.
- YOKOO Y., YAMAGATA K. and NAGAOKA H. (1971). Finite element method applied to Biot's consolidation theory. *Soils and Foundations*, 11, n°1, pp. 29-46.
- ZIENKIEWICZ O.C. (1971). *The finite element method in engineering science*, Mac Craw Hill, London.
- ZIENKIEWICZ O.C. and BETTESS P. (1982). Soils and other saturated media under transient, dynamic conditions: General formulation and the validity of various simplifying assumptions. First chapter of *Soil Mechanics - Transient and Cyclic Loads*. Edited by G.N. Pande and O.C. Zienkiewicz.
- ZIENKIEWICZ O.C. and SHIOMI T. (1984). Dynamic Behaviour of saturated porous media ; the generalized Biot formulation and its numerical solution. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 8, pp. 71-96.