



**HAL**  
open science

# Étude du comportement dynamique non linéaire des risers pour les grandes profondeurs soumis au courant et à la houle

Vafa Hachemi-Safai

► **To cite this version:**

Vafa Hachemi-Safai. Étude du comportement dynamique non linéaire des risers pour les grandes profondeurs soumis au courant et à la houle. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1981. Français. NNT: . tel-00529458

**HAL Id: tel-00529458**

**<https://pastel.hal.science/tel-00529458>**

Submitted on 25 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée

A L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR-INGÉNIEUR DE GÉNIE CIVIL

OPTION : MÉCANIQUE ET STRUCTURES

par

HACHEMI-SAFAI Vafa



sujet de la thèse :

ÉTUDE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE NON LINÉAIRE  
DES RISERS POUR LES GRANDES PROFONDEURS  
SOU MIS AU COURANT ET A LA HOULE

soutenue le 25 JUIN 1981

devant le jury composé de :

MM. J. SALENÇON		Président
M. GERBAULT		Rapporteur
J. BROZZETTI	}	Examineurs
P. LADEVEZE		
C. SOIZE		
C. SUSBIELLES		



156  
10349(3)

X NS 10349  
(3)

THESE

présentée

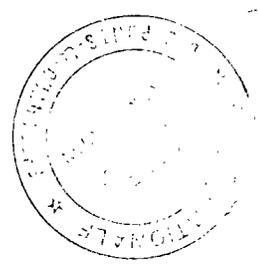
à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

pour obtenir le diplôme de

DOCTEUR-INGENIEUR DE GENIE CIVIL

par

HACHEMI - SAFAÏ Vafa



sujet de la thèse

ETUDE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE NONLINEAIRE DES RISERS POUR  
LES GRANDES PROFONDEURS SOUMIS AU COURANT ET A LA HOULE

~~RS~~  
11



1000

1000

*A ma Femme  
et mes Parents*



*A ma Femme  
et mes Parents*



## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur J. SALENÇON, Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de ce jury de thèse.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur P. LADEVEZE, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Enseignement Technique, Monsieur M. GERBAULT, Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, et Monsieur G. SUSBIELLES, Directeur de recherche à l'Institut Français du Pétrole, d'avoir accepté de participer à ce jury.

J'exprime mes sentiments de profonde reconnaissance à Monsieur C. SOIZE (Docteur ès science), Ingénieur-Chercheur au Département Etudes du Centre Technique Industriel de la Construction Métallique (C.T.I.C.M.) dont l'aide et les conseils précieux m'ont aidé à mener à bien ce travail de recherche.

Cette thèse ayant été effectuée au CTICM dans les meilleures conditions, je tiens à remercier très vivement Monsieur L. WAHL, Directeur Général du CTICM, pour la confiance qu'il m'a témoignée ainsi que Monsieur J. BROZZETTI, Directeur du Département Etudes et Recherches au CTICM, pour sa compréhension à mon égard et pour toutes les facilités d'ordre matériel qu'il n'a pas hésité à m'accorder au sein de son département.

Je tiens à assurer de ma sympathie tout le personnel des départements Etudes et Recherches et Applications du CTICM pour sa collaboration précieuse.



## TABLE DES MATIERES

	PAGES
INTRODUCTION -----	1
CHAPITRE I : MODELISATION DU RISER ET DE L'ENVIRONNEMENT -----	4
I.1 - Modélisation du riser -----	4
I.2 - Modélisation de l'environnement et des forces appliquées -----	6
CHAPITRE II : MISE EN EQUATION DU PROBLEME -----	7
II.1 - Définition des systèmes d'axes -----	7
II.2 - Matrice de passage du repère global au repère local de référence d'un élément -----	9
II.3 - Etablissement des relations forces-déplacements et de la matrice de rigidité tangente spatiale d'une barre en tenant compte des effets du second ordre -----	11
II.4 - Calcul des efforts extérieurs exercés sur le riser dûs à l'environnement et aux poids propres -----	21
II.4.1 - Calcul des forces élémentaires sur un petit tronçon quelconque -----	21
II.4.2 - Calcul des forces équivalentes aux noeuds d'un élément -----	25
II.5 - Calcul de la matrice de masse ajoutée d'un élément quelconque dans le repère global -----	29
II.6 - Conditions aux limites du riser -----	32
CHAPITRE III : MODELES NUMERIQUES DE CALCUL -----	34
III.1 - Equations d'équilibre -----	34
III.2 - Généralités sur les méthodes numériques d'intégration pas-à-pas -----	36



III.3 - Formulation numérique du calcul dynamique -----	38
III.3.1 - Méthode des différences centrées -----	38
III.3.2 - Méthode de $\theta$ -Wilson -----	44
III.4 - Résolution de l'équation d'équilibre statique -----	54
III.5 - Amortissement numérique -----	57
III.6 - Organigrammes -----	59
CHAPITRE IV : APPLICATION NUMERIQUE -----	71
IV.1 - Cas d'un riser de 96 mètres -----	72
IV.2 - Cas d'un riser de 1200 mètres -----	123
IV.3 - Cas d'un tube horizontal de 100 mètres -----	153
CONCLUSION -----	174
BIBLIOGRAPHIE -----	176
ANNEXES -----	178
Annexe 1 : Modélisation de la houle et du courant utilisé dans la présente étude -----	179
Annexe 2 : Développement des relations forces-déplacements ---	183



## I N T R O D U C T I O N

---

Les techniques de recherche et d'exploitation des hydrocarbures en mer profonde, nécessitent l'utilisation de longs tubes flexibles appelés "Risiers". Ces "Risiers" relient généralement un système flottant avec le sol marin. Le présent travail a pour but l'étude du comportement dynamique non-linéaire des risiers pour les grandes profondeurs, sous les effets des courants, de la houle, des déplacements et forces appliquées en tête du riser au niveau de la surface libre de l'eau.

Les non-linéarités du problème considéré sont de deux types :

- les non-linéarités dues aux interactions fluide-structure de par la présence des forces hydrodynamiques de traînée
- les non-linéarités de structure dues aux grands déplacements de cette dernière, en présence d'efforts axiaux importants.

Dans cette étude, la loi du comportement du matériau qui constitue le riser est supposé linéaire.

Le programme de calcul informatique qui a été développé, permet d'étudier le comportement statique et dynamique non-linéaire des risiers de grande ou faible profondeur.

En supposant que la matrice de rigidité tangente du riser, calculé à l'instant initial, reste constante au cours des calculs, ce programme nous permet également d'étudier le comportement des risiers pour les faibles profondeurs, le comportement statique étant alors linéarisé et le comportement dynamique étant linéarisé d'un point de vue structure, mais globalement non-linéaire de par la présence des interactions fluide-structure.

D'autre part, ce programme permet de calculer toute structure constituée d'un milieu continu curviligne ayant toutefois des hypothèses mécaniques semblables aux précédentes, mais des conditions aux limites générales moins restrictives que les conditions aux limites des risiers qui sont imposées par leur technologie.

Ce programme permet aussi par exemple, d'étudier le comportement d'un long tube initialement horizontal au voisinage de la surface libre de l'eau.

La méthode utilisée est celle des déplacements, associée à une modélisation du riser par des éléments finis du type poutre, ce qui conduit à un modèle mécanique ayant un nombre fini de degrés de liberté. Comme nous venons de le dire, par hypothèse, le riser reste toujours au cours de ses déformations, dans le domaine élastique. Par contre, les déplacements peuvent être finis et grands. Les équations du mouvement sont formulées en variable de Lagrange. Ainsi, tant que les déplacements sont finis mais "petits", la configuration de référence est la configuration de référence initiale, mais dès que les déplacements finis ne peuvent plus être considérés comme "petits", nous dirons alors qu'ils sont "grands" et la géométrie est "réactualisée", c'est-à-dire, que la nouvelle configuration de référence est obtenue en prenant l'état de déplacement et de contrainte du système à l'instant où la réactualisation est faite. On peut être ainsi conduit à procéder à plusieurs changements de configuration de référence au cours d'un même calcul, mais cela permet de traiter les déplacements finis grands avec une méthode très fiable d'un point de vue numérique.

Dans le chapitre I, nous posons le problème mécanique lié à la technologie des risers situés dans l'environnement marin, ce qui nous permettra de connaître les conditions aux liaisons (pour les risers) et les forces extérieures appliquées.

Le chapitre II est consacré à la mise en équation du problème qui a été effectué directement dans l'optique numérique. Ainsi, on trouvera dans ce chapitre :

- 1) Les relations de comportement d'une barre en prenant en compte les effets des non-linéarités, provoquées par la présence des déplacements finis et d'effort normal dans la barre (effets du second ordre), ainsi que la matrice de rigidité tangente spatiale de cette même barre, en tenant compte des effets du second ordre.
- 2) Le calcul des forces extérieures qui s'exercent sur chaque élément du riser comme les forces hydrostatiques, hydrodynamiques, tension en tête du riser, .....

3) le traitement des conditions aux limites.

Afin de ne pas alourdir la présentation du chapitre II, nous avons reporté en annexes les développements qui permettent d'aboutir aux relations données dans ce chapitre.

Le chapitre III est consacré à l'étude numérique du problème. Le comportement du système mécanique étant non-linéaire, nous avons utilisé une méthode d'intégration numérique pas-à-pas pour résoudre les équations dynamiques non-linéaires qui régissent les mouvements du riser soumis aux différentes forces extérieures et de liaison. D'autre part, nous avons envisagé aussi le calcul statique non-linéaire du riser soumis à des forces indépendantes du temps, par exemple, poids propre, forces axiales, poussées hydrostatiques forces hydrodynamiques dues à un courant seul et constant dans le temps.

Enfin, le chapitre IV est consacré à des applications numériques qui ont été effectuées à l'aide d'un programme de calcul informatique écrit en Fortran et que nous avons développé pour ce travail.



## C H A P I T R E    I

---

### MODELISATION DU RISER ET DE L'ENVIRONNEMENT

#### I.1 Modélisation du riser

Comme nous l'avons dit précédemment, un riser assure la liaison entre un premier point situé au niveau du fond marin, point appelé pied du riser, et un point d'un système flottant situé au niveau de la surface libre de l'eau, point appelé tête du riser.

Un riser est généralement constitué d'un tube circulaire. Il est équipé d'un joint de flexion situé au pied du riser et assure aussi la liaison avec la tête du puit, et d'un joint d'expansion, situé en tête assurant la liaison avec le système flottant.

Le joint d'expansion est une coulisse qui permet d'éviter la transmission totale des déplacements verticaux du système flottant au riser.

Ainsi, les déplacements verticaux du riser sont généralement libre en tête alors que les rotations et déplacements horizontaux sont imposés en ce même point, et sont fonction du temps. Au pied, les rotations sont libres grâce au joint de flexion.

D'autre part, pour supporter le riser et lui éviter un flambement, on exerce en tête du riser une tension axiale dont le module est noté  $T$ . Cette tension pourrait être fonction du temps.

La modélisation du riser est faite à l'aide d'éléments poutres que nous étudions comme une structure à barres. Donc toutes les hypothèses des calculs des structures à barres sont supposées remplies pour le riser.

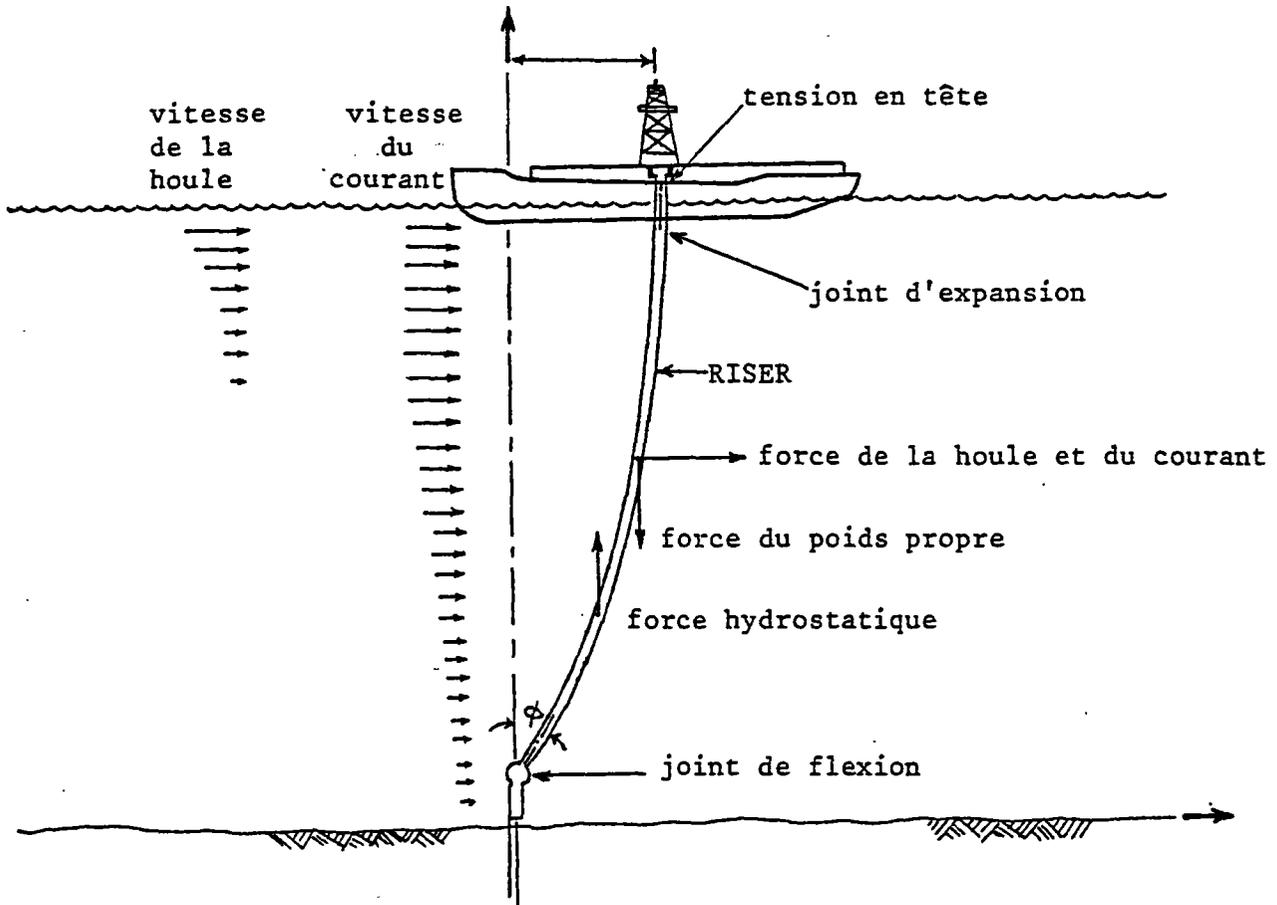


FIGURE I-1 : Configuration type d'un riser

## I.2 Modélisation de l'environnement et des forces appliquées

Les effets de l'environnement sur le riser sont ceux de la houle et du courant. En ce qui concerne la modélisation du courant, nous supposons qu'en un point donné du milieu fluide, sa vitesse est constante. Néanmoins, sa vitesse peut être prise variable en fonction du point de l'espace (cf. annexe 1).

Pour la houle, on peut utiliser les modèles classiques de cinématique de houle ; houles périodiques : Airy, Stokes 5ème ordre, Cnoïdal, fonction de courant, etc .... houle non périodique : onde solitaire, où même des houles aléatoires, (dans ce dernier cas, il faudrait alors générer des trajectoires d'élévation de la surface libre par simulation numérique pour se replacer dans le domaine temporel déterministe).

Dans le programme de calcul informatique que nous avons réalisé, nous n'avons programmé que la houle d'Airy (cf. annexe 1), mais il serait très simple d'introduire les autres modèles de houle.

Les forces exercées sur le riser sont :

- 1 - Les forces hydrodynamiques dues à l'action du courant et de la houle incidente sur le riser.
- 2 - Les forces hydrostatiques.
- 3 - Les forces axiales de tension dans le riser.
- 4 - Les forces dues aux déplacements imposés en tête du riser et qui sont dues aux mouvements du système flottant qui est excité par la houle et le courant.
- 5 - Les forces de poids propres.



## C H A P I T R E    I I

---

### MISE EN EQUATION DU PROBLEME

Supposons que  $H$ ,  $L$  soient respectivement la profondeur de l'eau et la distance verticale de la tête du riser au fond de la mer (figure II-1). Dans sa configuration de référence initiale, le riser est modélisé par  $m$  éléments poutres. La longueur de chaque élément est quelconque. La numérotation des noeuds, liant ces  $m$  éléments, est la suivante :

1, 2, 3, .....  $i$ ,  $i+1$ , .....  $m$ ,  $m+1$

Chaque élément est défini par son noeud origine et son noeud extrémité, l'élément  $i$  a pour noeud origine le noeud  $i$  et pour noeud extrémité le noeud  $i+1$ .

Afin de pouvoir établir les équations et relations nécessaires pour les calculs dynamiques et statiques, en variable de Lagrange, on sera obligé de définir plusieurs systèmes d'axes et les relations qui existent entre eux.

A l'instant initial, la structure est dans sa configuration initiale prise comme première configuration de référence. Par la suite, lors des réactualisations de géométrie, on sera amené à modifier la configuration de référence.

### II.1 Définition des systèmes d'axes

On définit plusieurs systèmes d'axes constitués de repères orthonormés :

- 1) Le premier est le repère global fixe ; c'est un repère cartésien orthonormé OXYZ de vecteur unitaire  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  porté respectivement par les axes OX, OY, OZ l'origine O étant au fond de la mer et l'axe OX étant vertical ascendant (figure II-1). La configuration de référence initiale est donnée dans ce repère.

2) Les autres sont les systèmes d'axes locaux de chaque élément poutre. Pour chaque configuration de référence, chaque élément poutre a un repère local dit de référence qui est un repère cartésien orthonormé  $x'y'z'$ , tel que l'axe  $x'$  se confonde avec la droite qui lie l'origine à l'extrémité de cet élément, se trouvant dans la configuration de référence considérée et tel que l'origine de  $x'y'z'$  soit l'origine de l'élément. On choisit les deux autres axes ( $y'$  et  $z'$ ) arbitrairement.

On note  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$  les vecteurs unitaires des axes  $x'$ ,  $y'$  et  $z'$ .

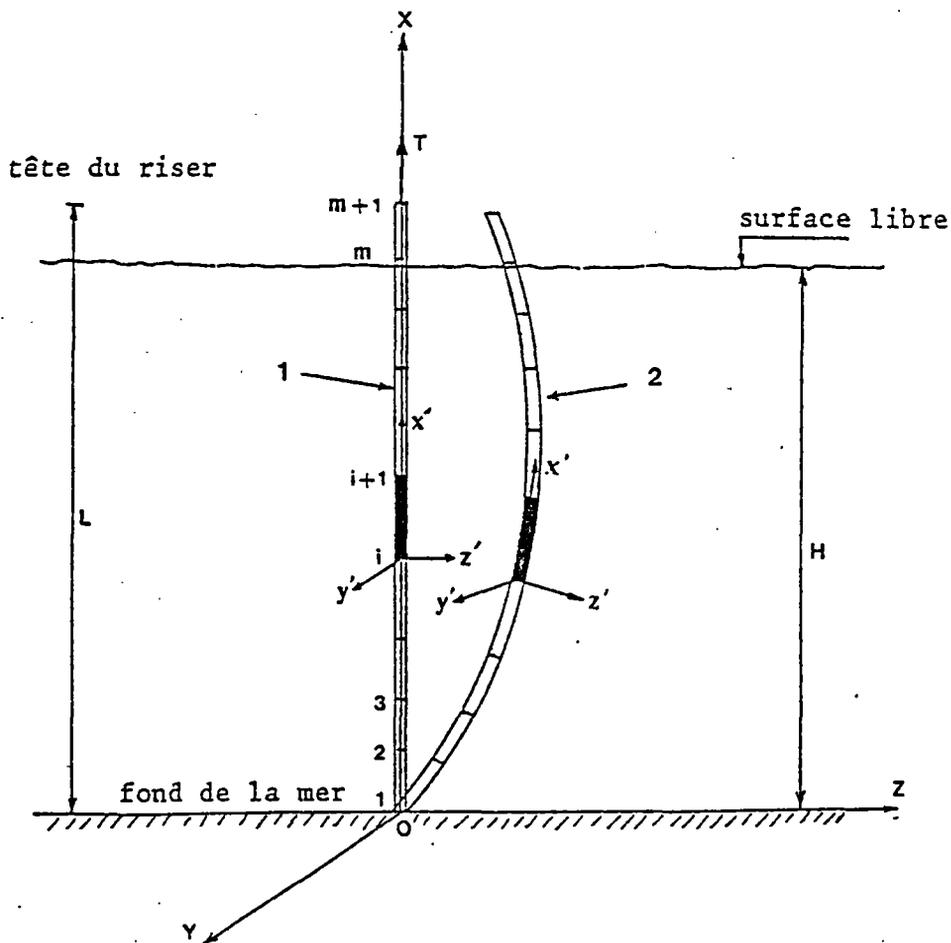


FIGURE II-1

- 1 : configuration de référence initiale = 1ère configuration de référence.
- 2 : configuration à l'instant  $t$  = 2ème configuration de référence

II.2 Matrice de passage du repère global au repère local de référence d'un élément

Soit E l'espace vectoriel euclidien de dimension 3 dont la base est  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . La matrice de passage du repère global au repère local de référence d'un élément est la matrice réelle (3 x 3) D d'un opérateur de rotation.

Soit :  $F^T = [F_1, F_2, F_3]$  et  $f^T = [f_1, f_2, f_3]$

respectivement les matrices colonnes des composantes du vecteur  $\vec{F} \in E$  sur la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et sur la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , on a :

(II-1)  $f = D.F$  ou  $F = D^T . f$

Car la matrice D est orthogonale:  $D^{-1} = D^T$

Soient  $X_i, Y_i, Z_i$  (resp.  $X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1}$ ) les coordonnées du noeud i (resp. i+1) dans le repère global OXYZ et soit :

$$L_i = \|\vec{ii+1}\| = \left( (X_{i+1} - X_i)^2 + (Y_{i+1} - Y_i)^2 + (Z_{i+1} - Z_i)^2 \right)^{1/2}$$

Dans ces conditions les composantes de  $\vec{e}_1 = \frac{\vec{ii+1}}{\|\vec{ii+1}\|}$  sur  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

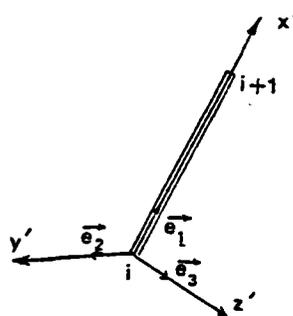
sont  $(X_{i+1} - X_i)/L_i$ ,  $(Y_{i+1} - Y_i)/L_i$  et  $(Z_{i+1} - Z_i)/L_i$

Les composantes sur  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  s'en déduisent sachant que

l'on prendra toujours :

(II-2) 
$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{j}$$

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$$



Enfin, on définit la matrice carrée réelle (12 x 12), A définie par bloc telle que :

$$(II-3) \quad A = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 \\ & D & 0 & 0 \\ & & \begin{matrix} D \\ \text{symétrique} \end{matrix} & 0 \\ & & & D \end{bmatrix}$$

compte tenu de (II-1), on a évidemment  $A^T = A^{-1}$

II.3 Etablissement des relations forces-déplacements et de la matrice de rigidité tangente spatiale d'une barre, en tenant compte des effets du second ordre :

Dans ce paragraphe, on établit la matrice de rigidité tangente spatiale d'une barre (élément poutre) en tenant compte des effets du second ordre dus aux déplacements finis de la barre.

a) Notations et hypothèses

Soit ① un élément de la structure de noeud origine  $i_0$  et de noeud extrémité  $i_0 + 1 = j_0$  et  $x'y'z'$  le repère local de référence, l'élément se trouvant dans une configuration de référence à l'instant  $t_0$ .

A l'instant  $t > t_0$ , l'élément ① s'est déplacé et déformé et les noeuds  $i_0$  et  $j_0$  se sont déplacés en des points notés  $i$  et  $j$  (figure II-2).

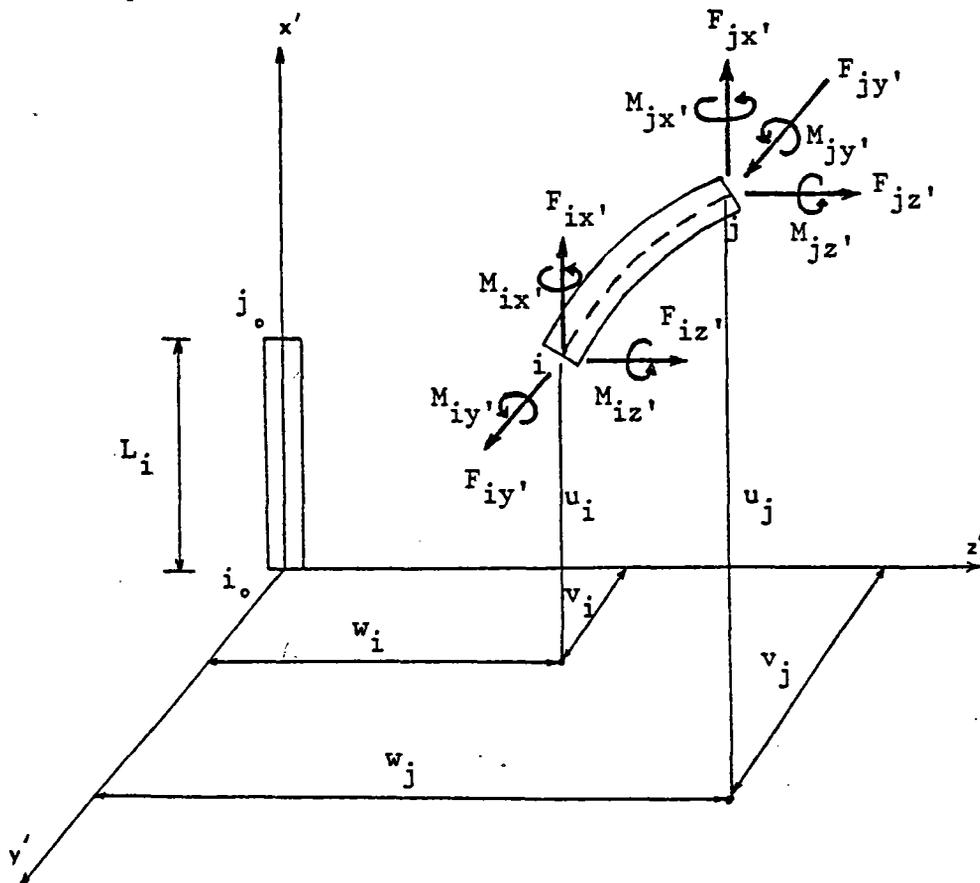


FIGURE II-2 : Géométrie de la barre déformée

Soient  $u_i, v_i, w_i$  (Resp.  $u_j, v_j, w_j$ ) les composantes dans le repère local de référence du vecteur déplacement  $\overrightarrow{i_0 i}$  (Resp.  $\overrightarrow{j_0 j}$ ).

On note  $\omega_{ix'}, \omega_{iy'}, \omega_{iz'}$  (Resp.  $\omega_{jx'}, \omega_{jy'}, \omega_{jz'}$ ) les rotations de la projection de la normale à la section  $i_0$  (Resp.  $j_0$ ) de la barre respectivement dans les plans  $y'z', x'z'$  et  $x'y'$  à l'instant  $t$ .

De même nous noterons  $F_{ix'}, F_{iy'}, F_{iz'}, M_{ix'}, \dots, F_{jx'}, F_{jy'}, \dots$  les sollicitations aux extrémités de l'élément (1) dans son repère local de référence et à l'instant  $t$ .

Enfin on introduit les matrices colonnes  $F$  et  $U$  de dimension  $(12 \times 1)$  telles que :

$$(II-4) \quad F = [F_{ix'}, F_{iy'}, F_{iz'}, M_{ix'}, M_{iy'}, M_{iz'}, F_{jx'}, \dots, M_{jz'}]^T$$

$$(II-5) \quad U = [u_i, v_i, w_i, \omega_{ix'}, \omega_{iy'}, \omega_{iz'}, u_j, \dots, \omega_{jz'}]^T$$

Les hypothèses utilisées sont les suivantes :

- 1- Le matériau est supposé avoir une loi de comportement élastique linéaire.
- 2- Les déplacements sont finis, c'est-à-dire que l'hypothèse des petits déplacements n'est pas retenue, mais on suppose que les rotations globales (paramètres  $\rho_2$  et  $\rho_3$  définis par la suite) des barres sont suffisamment petites et que les déformations restent petites. Lorsque les rotations globales deviennent grandes, la réactualisation de la géométrie permet de résoudre le problème.
- 3- Chaque barre a une section constante.
- 4- On utilise la théorie des poutres droites pour chaque barre, c'est-à-dire que :
  - l'hypothèse de Bernoulli est admise : les sections droites de la barre restent planes et perpendiculaires à la fibre moyenne au cours de la déformation.

- la courbure de la déformée de la barre reste suffisamment petite pour que celle-ci puisse être assimilée à un tronçon court droit.

Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la barre ① sont les suivantes :

- E : module d'élasticité longitudinale
- A : l'aire de la section droite de la barre
- L : la longueur de la barre
- I : moment d'inertie de flexion de la section
- J : moment d'inertie de torsion de la section
- G : module d'élasticité transversale  $G = E/2(1 + \nu)$
- $\nu$  : coefficient de Poisson
- A' : aire réduite caractérisant la rigidité à l'effort tranchant.  
(Pour une section circulaire  $A' = 0,75 A$  et pour une section rectangulaire  $A' = \frac{2}{3} A$ ).

On introduit les notations suivantes :

$$(II-7) \quad \rho_2 = \frac{v_j - v_i}{L}$$

$$(II-8) \quad \rho_3 = \frac{w_j - w_i}{L}$$

Enfin, on définit les grandeurs suivantes :

. Pour une barre comprimée ( $F_{jx} < 0$ ) on pose :

$$(II-9) \quad \left[ \begin{array}{l} k_1 = \frac{EI}{L} \cdot \frac{\alpha L [-(1+\beta)\alpha L \cos\alpha L + \sin\alpha L]}{-(1+\beta)\alpha L \sin\alpha L + 2(1-\cos\alpha L)} \\ k_2 = \frac{EI}{L} \cdot \frac{\alpha L [(1+\beta)\alpha L - \sin\alpha L]}{-(1+\beta)\alpha L \sin\alpha L + 2(1-\cos\alpha L)} \\ k_3 = k_1 + k_2 = \frac{EI}{L} \cdot \frac{\alpha^2 L^2 (1+\beta)(1-\cos\alpha L)}{-(1+\beta)\alpha L \sin\alpha L + 2(1-\cos\alpha L)} \end{array} \right.$$

avec :  $\beta = \frac{F_{jx'}}{GA'}$  et  $\alpha^2 = \frac{|F_{jx'}|}{EI(1+\beta)}$

. Pour une barre tendue ( $F_{jx'} > 0$ ) on pose :

$$(II-10) \quad \left[ \begin{array}{l} k_1 = \frac{EI}{L} \cdot \frac{[\alpha L - (1+\beta)\alpha L \operatorname{ch}\alpha L + \operatorname{sh}\alpha L]}{-(1+\beta)\alpha L \operatorname{sh}\alpha L + 2(-1 + \operatorname{ch}\alpha L)} \\ k_2 = \frac{EI}{L} \cdot \frac{\alpha L [(1+\beta)\alpha L - \operatorname{sh}\alpha L]}{-(1+\beta)\alpha L \operatorname{sh}\alpha L + 2(\operatorname{ch}\alpha L - 1)} \\ k_3 = \frac{EI}{L} \cdot \frac{\alpha^2 L^2 (1+\beta)(1 - \operatorname{ch}\alpha L)}{-(1+\beta)\alpha L \operatorname{sh}\alpha L + 2(\operatorname{ch}\alpha L - 1)} \end{array} \right.$$

. Pour le cas où  $F_{jx'} = 0$  on pose :

$$(II-11) \quad \left[ \begin{array}{l} k_1 = 4 \frac{EI}{L} \cdot \frac{1+3\delta}{1+12\delta} \\ k_2 = 2 \frac{EI}{L} \cdot \frac{1-6\delta}{1+12\delta} \\ k_3 = 6 \frac{EI}{L} \cdot \frac{1}{1+12\delta} \end{array} \right.$$

avec :  $\delta = \frac{1}{L^2} \cdot \frac{EI}{GA'}$

b) Relations Forces-déplacements :

Sous les hypothèses et notations précédentes et en appliquant le principe des travaux virtuels, on déduit les relations suivantes entre les sollicitations d'extrémités et les déplacements d'extrémités de la barre qui tiennent compte des effets du second ordre, car par hypothèse, les déplace-

ments sont finis.

Le calcul est donné à l'annexe 2. Les résultats sont résumés ci-après.

Relation effort normal - déplacement :

$$(II-12) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{ix'} = -\frac{EA}{L} (u_j - u_i) - \frac{EA}{2} (\rho_2^2 + \rho_3^2) \\ F_{jx'} = -F_{ix'} \end{array} \right.$$

Relation moment fléchissant - déplacement :

$$(II-13) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{iy'} = k_3 \cdot \rho_3 + k_1 \cdot \omega_{iy'} + k_2 \cdot \omega_{jy'} \\ M_{jy'} = k_3 \cdot \rho_3 + k_2 \cdot \omega_{iy'} + k_1 \cdot \omega_{jy'} \end{array} \right.$$

$$(II-14) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{iz'} = -k_3 \cdot \rho_2 + k_1 \cdot \omega_{iz'} + k_2 \cdot \omega_{jz'} \\ M_{jz'} = -k_3 \cdot \rho_2 + k_2 \cdot \omega_{iz'} + k_1 \cdot \omega_{jz'} \end{array} \right.$$

Relation effort tranchant - déplacement :

$$(II-15) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{iy'} = -F_{jx'} \cdot \rho_2 - \frac{2k_3}{L} \cdot \rho_2 + \frac{k_3}{L} (\omega_{jz'} + \omega_{iz'}) \\ F_{jy'} = -F_{iy'} \end{array} \right.$$

$$(II-16) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{iz'} = -F_{jx'} \cdot \rho_3 - \frac{2k_3}{L} \cdot \rho_3 - \frac{k_3}{L} (\omega_{jy'} + \omega_{iy'}) \\ F_{jz'} = -F_{iz'} \end{array} \right.$$

Relation moment de torsion - déplacement :

$$(II-17) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{ix'} = -\frac{GJ}{L} (\omega_{jx'} - \omega_{ix'}) \\ M_{jx'} = \frac{GJ}{L} (\omega_{jx'} - \omega_{ix'}) \end{array} \right.$$

c) Matrice de rigidité tangente de la barre :

Sous les hypothèses et notations précédentes, les relations forces-déplacements obtenues en tenant compte des effets du second ordre s'écrivent matriciellement pour la barre ① :

$$(II-18) \quad F = K(U)$$

Soit  $F_g$  la matrice colonne (12 x 1) des actions non-linéaires dues à la non-linéarité géométrique. Les relations (II-12), (II-15) et (II-16) permettent d'écrire :

$$(II-19) \quad F_g^T = [ S_1, S_2, S_3, 0, 0, 0, -S_1, -S_2, -S_3, 0, 0, 0 ]$$

avec :

$$(II-20) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_1 = -\frac{EA}{2} (\rho_2^2 + \rho_3^2) \\ S_2 = -F_{jx'} \cdot \rho_2 \\ S_3 = -F_{jx'} \cdot \rho_3 \end{array} \right.$$

Ainsi, les relations (II-12) à (II-17) s'écrivent matriciellement :

$$(II-21) \quad F = K.U + F_g$$

avec K la matrice de rigidité "linéaire" (12 x 12) dont l'expression est

donnée en (II-31).

En différentiant la relation (II-21) on obtient :

$$(II-22) \quad dF = K \cdot dU + U \cdot dK + dF_g$$

On suppose que pour un petit accroissement  $dF$  de  $F$  le terme  $U \cdot dK$  est négligeable devant le terme  $K \cdot dU + dF_g$ .

Dans ces conditions on obtient :

$$(II-23) \quad dF \approx K \cdot dU + dF_g$$

En différentiant les relations (II-20) on obtient :

$$(II-24) \quad \left. \begin{aligned} dS_1 &= -\frac{EA}{2} d(\rho_2^2 + \rho_3^2) = -EA (\rho_2 d\rho_2 + \rho_3 d\rho_3) \\ &= -\frac{EA}{L} [\rho_2 \cdot (dv_j - dv_i) + \rho_2 \cdot (dv_j - dv_i)] \\ dS_2 &= -d(F_{jx'} \cdot \rho_2) = -[F_{jx'} \cdot d\rho_2 + \rho_2 \cdot dF_{jx'}] \\ &= -\frac{EA}{L} \cdot \rho_2 \cdot (du_j - du_i) - \left(\frac{F_{jx'}}{L} + \frac{EA}{L} \cdot \rho_2^2\right) (dv_j - dv_i) - \\ &\quad \frac{EA}{L} \rho_2 \rho_3 (dv_j - dv_i) \\ dS_3 &= -d(F_{jx'} \cdot \rho_3) = -[F_{jx'} \cdot d\rho_3 + \rho_3 \cdot dF_{jx'}] \\ &= -\frac{EA}{L} \cdot \rho_3 \cdot (du_j - du_i) - \left(\frac{F_{jx'}}{L} + \frac{EA}{L} \rho_3^2\right) (dv_j - dv_i) - \\ &\quad \frac{EA}{L} \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 (dv_j - dv_i) \end{aligned} \right\}$$

Compte tenu du fait que :

$$(II-25) \quad dF_g^T = [dS_1, dS_2, dS_3, 0, 0, 0, -dS_1, -dS_2, -dS_3, 0, 0, 0]$$

On peut écrire :

$$(II-26) \quad dF_g = K_G \cdot dU$$

où  $K_G$  est la matrice de non-linéarité géométrique (12 x 12) dont l'expression est donnée par (II-29) et (II-30).

Nous pouvons alors écrire (II-23) sous la forme :

$$(II-27) \quad dF \approx K \cdot dU + K_G \cdot dU = (K + K_G) \cdot dU$$

On pose :

$$(II-28) \quad K_t = K + K_G$$

$K_t$  est appelée matrice de rigidité tangente de la barre dans son repère local de référence.

$$(II-29) \quad K_G = \begin{bmatrix} k_G & -k_G \\ -k_G & k_G \end{bmatrix}$$

avec :

	0	$\frac{EA}{L} \rho_2$	$\frac{EA}{L} \rho_3$	0	0	0
		$\frac{EA}{L} \rho_2^2 + \frac{F_{jx'}}{L}$	$\frac{EA}{L} \rho_2 \rho_3$	0	0	0
			$\frac{EA}{L} \rho_3^2 + \frac{F_{jx'}}{L}$	0	0	0
				0	0	0
		symétrique			0	0
(II-30) $k_G =$						0

et : (II-31)

K =

$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0
	$2 \frac{k_3}{L^2}$	0	0	0	$\frac{k_3}{L}$	0	$-\frac{2k_3}{L^2}$	0	0	0	$\frac{k_3}{L}$
		$2 \frac{k_3}{L^2}$	0	$-\frac{k_3}{L}$	0	0	0	$-\frac{2k_3}{L^2}$	0	$-\frac{k_3}{L}$	0
			$\frac{GJ}{L}$	0	0	0	0	0	$-\frac{GJ}{L}$	0	0
				$k_1$	0	0	0	$\frac{k_3}{L}$	0	$k_2'$	0
					$k_1$	0	$-\frac{k_3}{L}$	0	0	0	$k_2$
						$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0
							$2 \frac{k_3}{L^2}$	0	0	0	$-\frac{k_3}{L}$
		symétrique						$2 \frac{k_3}{L^2}$	0	$\frac{k_3}{L}$	0
									$\frac{GJ}{L}$	0	0
										$k_1$	0
											$k_1$

Soit  $K_i$  la matrice (12 x 12) de rigidité tangente de l'élément ① exprimée dans le repère global XYZ. Elle s'écrit en notant  $A_i$  la matrice de passage (cf, II-3) du repère global XYZ au repère local de référence x'y'z' de l'élément ① (cf. II-1) :

$$(II-32) \quad K_i = A_i^T \cdot K_t \cdot A_i$$

avec  $K_t$  défini par (II-28) et  $A_i$  par (II-3).

Remarque 1 :

Supposons qu'à l'instant de référence (lié à la configuration de référence actuelle), la barre ① possède des efforts internes dont la composante normale est  $F_{j_0 x'}$ . Dans ce cas là, dans toutes les relations précédentes, le terme  $F_{jx'}$  doit être remplacé par :

$$F_{jx'} + F_{j_0 x'}$$

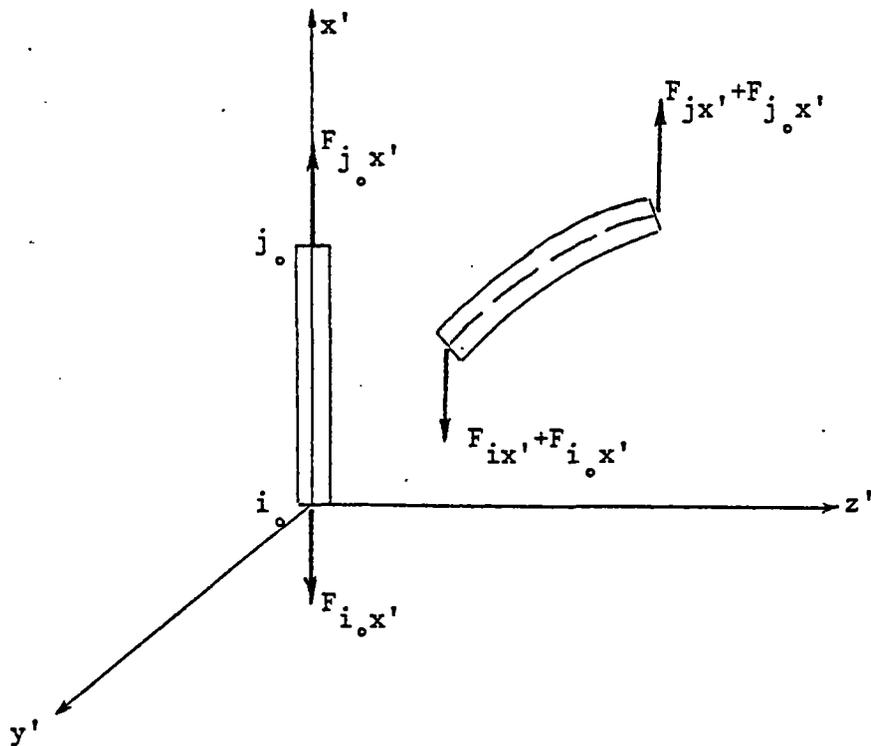


FIGURE II-3

Remarque 2 :

Dans la suite, nous utiliserons la relation non-linéaire exacte  $F = K(u)$  et la relation faisant intervenir la rigidité tangente approchée :  $dF = K_t \cdot dU$ .



II.4 Calcul des efforts extérieurs exercés sur le riser dus à l'environnement et aux poids propres :

Les forces extérieures exercées sur le riser sont :

les efforts hydrodynamiques, hydrostatiques, le poids propre, (la tension en tête du riser est traitée séparément).

Dans un premier temps, nous allons calculer les efforts extérieurs qui s'exercent sur un petit tronçon d'un élément quelconque du riser.

Puis on intègre ces efforts sur l'élément. Compte tenu de la déformation de l'élément provoquée par ces forces réparties, on en déduit les forces équivalentes aux noeuds qui produisent les mêmes déplacements nodaux de la structure.

Tous ces efforts sont calculés à l'instant t, par rapport à la configuration de référence actuelle du riser.

II.4.1 Calcul des forces élémentaires sur un petit tronçon quelconque

a. - Efforts hydrodynamiques exercés sur un petit tronçon quelconque du riser :

Les forces hydrodynamiques sont générées par les formules de Morison. Selon ces formules (réf.14), les forces hydrodynamiques s'exerçant sur petit tronçon cylindrique repéré par un point M (centre du petit tronçon) et dont aucune des extrémités n'est en contact avec l'eau, se décomposent en deux termes :

a-1) Le terme d'inertie :

C'est une force perpendiculaire à l'axe du petit tronçon qui s'écrit :

$$(II-33) \quad \vec{F}_I(M, t) = \rho \cdot S \cdot \Delta l \left[ \vec{e}_{lt} \wedge \vec{a}_h \wedge \vec{e}_{lt} + C_m \cdot \vec{e}_{lt} \wedge (\vec{a}_h - \vec{a}_p) \wedge \vec{e}_{lt} \right]$$

Le premier terme est la force de Froude-Krilov et représente l'inertie de la masse d'eau entraînée, le second terme est dû à l'écoulement autour de l'élément et est appelé force de masse ajoutée.

Les notations utilisées sont les suivantes :

$\rho$  : masse volumique de l'eau

$S$  : section droite du cylindre ( $S = \frac{\pi D^2}{4}$  avec  $D =$  diamètre extérieur)

$\Delta l$  : longueur du petit tronçon cylindrique de section droite  $S$ .

$\vec{e}_{1t}$  : vecteur unitaire colinéaire à l'axe du cylindre.

$C_m$  : coefficient de masse ajoutée.

$\vec{a}_h$  : accélération des particules fluide à l'instant  $t$  et au point  $M$ , due à la houle incidente non perturbée par l'obstacle, dans le repère global.

$\vec{a}_p$  : accélération de l'élément au point  $M$  à l'instant  $t$ , dans le repère global.

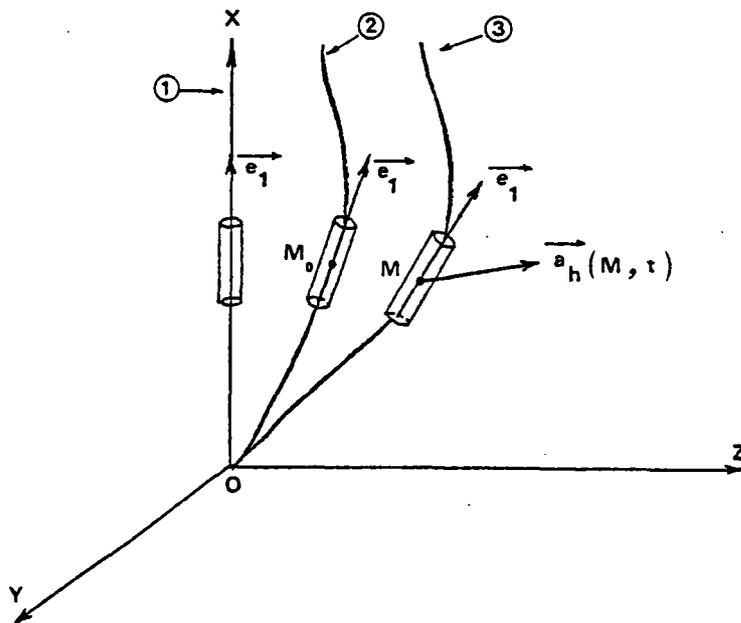


FIGURE II-4

- ① configuration de référence initiale
- ② configuration de référence actuelle
- ③ configuration à l'instant  $t$

a-2) Le terme de traînée visqueuse :

C'est une force perpendiculaire à l'axe du petit tronçon qui s'écrit :

$$(II-35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_D(M, t) = 1/2 \cdot C_D \cdot \rho \cdot D \cdot \Delta l \cdot |\vec{v}| \vec{e}_{1t} \wedge \vec{v} \wedge \vec{e}_{1t} \\ \text{avec } \vec{v} = \vec{v}_h + \vec{v}_c - \vec{v}_p \end{array} \right.$$

Les notations utilisées sont les suivantes :

- $C_D$  : coefficient de traînée
- $D$  : le diamètre extérieur du cylindre
- $\vec{v}_h$  : vitesse des particules fluide à l'instant  $t$  et au point  $M$  due à la houle incidente non perturbée par l'obstacle dans le repère global.
- (II-36)
- $\vec{v}_c$  : vitesse des particules fluide à l'instant  $t$  et au point  $M$  due au courant dans le repère global.
- $\vec{v}_p$  : vitesse de l'élément au point  $M$  et à l'instant  $t$  dans le repère global. ( $\vec{v}_p = \vec{0}$  pour les éléments fixes).

(II-36 bis) Remarques :

Pour calculer les forces  $\vec{F}_I$  et  $\vec{F}_D$  à l'instant  $t$  sur un petit tronçon localisé au point  $M$ , vu l'hypothèse des déplacements finis mais petits par rapport à la configuration de référence actuelle, on fait l'approximation  $\vec{F}_I(M, t) \approx \vec{F}_I(M_0, t)$  ,  $\vec{F}_D(M, t) \approx \vec{F}_D(M_0, t)$

où  $M_0$  est le centre du petit tronçon dans sa configuration de référence actuelle (alors  $\vec{e}_{1t} = \vec{e}_1$  dans les relations (II-33) et (II-35)).

En effet, si les déplacements finis deviennent grands, alors la géométrie est réactualisée.

On note  $\vec{F}_d(t) = \vec{F}_I(M_0, t) + \vec{F}_D(M_0, t)$

b - Calcul des forces hydrostatiques exercées sur un petit tronçon quelconque du riser :

Comme pour les forces hydrodynamiques, les forces hydrostatiques sont calculées pour un petit tronçon dans sa configuration de référence actuelle. La force hydrostatique exercée sur un petit tronçon dans sa configuration de référence actuelle s'écrit :

$$(II-37) \quad \vec{F}_S = - \int_{\Delta S} p \vec{n} ds$$

avec :

$\vec{n}$  : le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface latérale de l'élément (élément se trouve dans sa configuration de référence actuelle).

$p$  : la pression de l'eau au point  $M_0$  (voir figure II-4).

$|\Delta S| = \pi D \cdot \Delta l$  avec  $D$  le diamètre extérieur du petit tronçon

En développant la relation (II-37) pour ce petit tronçon, on obtient la résultante des forces hydrostatiques exercées sur ce petit tronçon qui est une force verticale de module  $\rho \cdot g \cdot S \cdot \Delta l$  dans laquelle  $\rho$  est la masse volumique de l'eau et  $S \cdot \Delta l$  représente le volume de ce petit tronçon,  $S$  et  $\Delta l$  étant définis par (II-34).

Soit  $F_S$  la matrice réelle (3 x 1) des composantes de la force hydrostatique exercée sur un petit tronçon dans le repère global, il s'écrit :

$$(II-38) \quad F_S = \begin{bmatrix} \rho \cdot g \cdot S \cdot \Delta l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi la matrice des composantes de cette même force dans le repère local de référence actuel s'écrit :

$$(II-39) \quad F'_S = D_i \cdot F_S$$

$D_i$  est défini par (II-1)

c - Calcul du poids propre d'un petit tronçon du riser :

Tenant compte du fait que la résultante du poids propre d'un petit tronçon quelconque est verticale descendante, la matrice réelle (3 x 1)  $F_p$  des composantes de cette résultante dans le repère global s'écrit :

$$(II-40) \quad F_p = \begin{bmatrix} -\rho_i g A \Delta l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A étant la section droite du petit tronçon définie en (II-6) et  $\rho_i$  étant la masse volumique équivalente du riser relativement à A :  
 $\rho_i = m_{\Delta l} / A$  avec  $m_{\Delta l}$  la masse du petit tronçon  $\Delta l$  (masse du tube vide + éventuellement masse de la matière dans le tube).

La matrice des composantes de cette résultante dans le repère local de référence actuel s'écrit alors :

$$(II-41) \quad F'_p = D_i \cdot F_p$$

II.4.2 Calcul des forces équivalentes aux noeuds d'un élément

Les forces équivalentes appliquées aux extrémités d'un élément ① du riser provoquant les mêmes déplacements nodaux sont dues :

- 1- aux forces équivalentes dues aux forces hydrodynamiques ;
- 2- aux forces équivalentes dues aux forces hydrostatiques ;
- 3- aux forces équivalentes dues aux poids propres.

L'élément ① est divisé en n tronçons égaux de longueur  $\frac{L_i}{n}$ . Sur chacun de ces tronçons, les forces extérieures sont générées suivant la méthode décrite au paragraphe (II.4.1) précédent.

Le q-ème tronçon d'origine q-1 et d'extrémité q de l'élément ① est repéré par le couple d'indice (i,q) avec  $q \in \{1, n\}$ .

On note  $\vec{F}_{(i,q)}$  la résultante des forces extérieures exercées sur le tronçon (i,q) qui s'écrit :

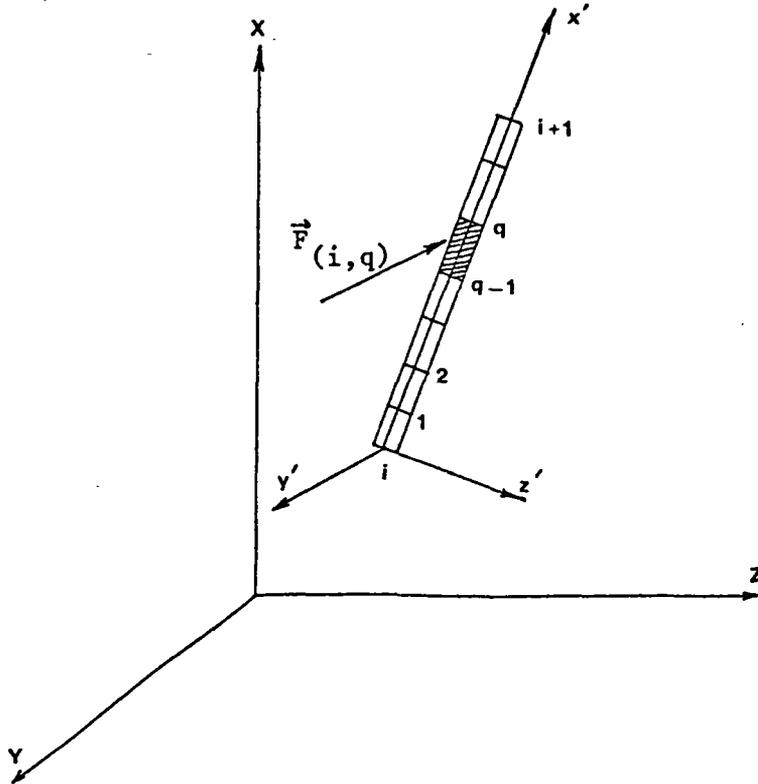


FIGURE II-5

$$(II-42) \quad \vec{F}(i,q) = \vec{F}_d(i,q) + \vec{F}_s(i,q) + \vec{F}_p(i,q)$$

avec  $\vec{F}_d$ ,  $\vec{F}_s$  et  $\vec{F}_p$  déterminés en paragraphe (II.4.1) précédent.

Soit  $\vec{R}_i = (R_{ix'}, R_{iy'}, R_{iz'})$ , (Resp.  $\vec{R}_{i+1}$ ) et  $\vec{M}_i = (M_{ix'}, M_{iy'}, M_{iz'})$

(Resp.  $\vec{M}_{i+1}$ ) la force et le couple équivalents s'exerçant sur le noeud i (Resp. le noeud i+1) dues aux forces  $\left\{ \vec{F}(i,q), q \in \{1,n\} \right\}$  s'exerçant sur l'élément ①. (Figure II-6).

Les composantes de ces forces et moments sont égales en module et de signe contraire aux composantes des réactions aux noeuds i et i+1, l'élément ① étant chargé par  $\left\{ \vec{F}(i,q), q \in \{1,n\} \right\}$ , les noeuds i et i+1 étant parfaitement encastés. Les composantes de  $\vec{F}(i,q)$  dans le repère local de référence actuel de l'élément ① sont notées  $F_{x'}(i,q)$ ,  $F_{y'}(i,q)$ ,  $F_{z'}(i,q)$ .

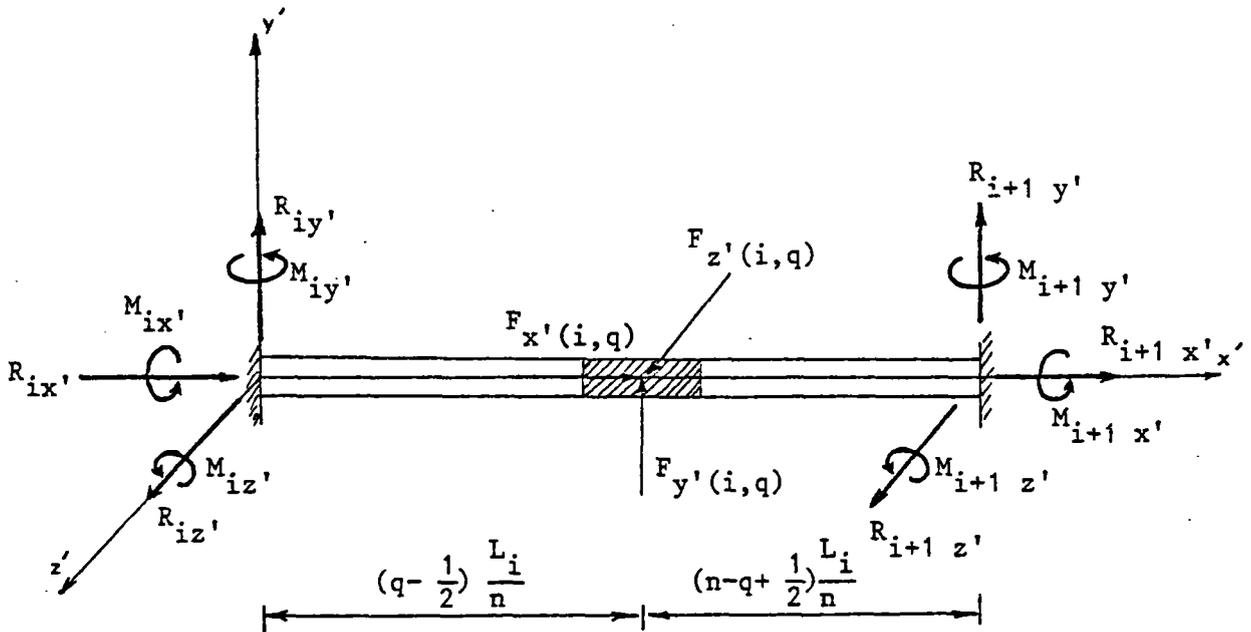


FIGURE II-6

La matrice des composantes des forces et des couples équivalents s'exerçant aux extrémités de l'élément ① dans le repère local de référence actuel s'écrit :

$$(II-43) \quad F_e^{(i)}, = \sum_{q=1}^n Q(i,q) \cdot F'(i,q)$$

avec :

$$(II-44) \quad F_e^{(i)}, = \begin{pmatrix} R'_i \\ M'_i \\ R'_{i+1} \\ M'_{i+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F'(i,q) = \begin{pmatrix} F_{x'}(i,q) \\ F_{y'}(i,q) \\ F_{z'}(i,q) \end{pmatrix}$$

la matrice réelle (12 x 3)  $Q(i,q)$  est définie par :

$$(II-45) \quad Q_{(i,q)} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_1^2 \cdot C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1^2 \cdot C_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_3 \cdot C_1^2 \cdot L_i \\ 0 & C_3 \cdot C_1^2 \cdot L_i & 0 \\ C_3 & 0 & 0 \\ 0 & C_3^2 \cdot C_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_3^2 \cdot C_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \cdot C_3^2 \cdot L_i \\ 0 & -C_1 \cdot C_3^2 \cdot L_i & 0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$(II-46) \quad \begin{cases} C_1 = (n - q + 1/2)/n \\ C_2 = 3 - 2(n - q + 1/2)/n \\ C_3 = (q - 1/2)/n \\ C_4 = 3 - 2(q - 1/2)/n \end{cases}$$

Ainsi, la matrice des composantes des forces et des couples équivalents s'exerçant aux extrémités de l'élément ① dans le repère global s'écrit :

$$(II-47) \quad F_e^{(i)} = A^T \cdot F_e^{(i)},$$

II.5 Calcul de la matrice de masse ajoutée d'un élément ①, dans le repère global

Compte tenu de (II-33) et de la remarque (II-36bis), la force de masse ajoutée s'écrit :

$$(II-48) \quad \vec{F}_{ma} = -\rho \cdot S \cdot \Delta l \cdot C_m \cdot \vec{e}_1 \wedge \vec{a}_p \wedge \vec{e}_1$$

Soient  $\ddot{U}_q = \vec{a}_p = (\ddot{X}_q, \ddot{Y}_q, \ddot{Z}_q)$ ,  $\ddot{U}_i = (\ddot{X}_i, \ddot{Y}_i, \ddot{Z}_i)$  et

$\ddot{U}_{i+1} = (\ddot{X}_{i+1}, \ddot{Y}_{i+1}, \ddot{Z}_{i+1})$  respectivement les accélérations du centre du tronçon (i,q) et des noeuds i, i+1 de l'élément ① à l'instant t, dans le repère global.

En déterminant l'accélération du centre du tronçon (i,q) par interpolation linéaire des accélérations des noeuds extrémités, on obtient matriciellement :

$$(II-49) \quad \ddot{U}_q = S_{(i,q)} \cdot \ddot{U}_{\text{①}}$$

avec :

$$\ddot{U}_{\text{①}} = \begin{bmatrix} \ddot{U}_i \\ \ddot{U}_{i+1} \end{bmatrix} \quad \text{la matrice colonne (6 x 1)}$$

et

$$(II-50) \quad S_{(i,q)} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}$$

Les termes  $C_1$  et  $C_3$  sont déjà définis par (II-46).

Compte tenu de (II-49), la relation (II-48) pour le tronçon (i,q) dans le repère global s'écrit matriciellement :

$$(II-51) \quad F_{ma(i,q)} = -B_i \cdot S_{(i,q)} \cdot \ddot{U}_{\text{①}}$$

avec  $F_{ma(i,q)}$  la matrice réelle (3 x 1) des composantes de  $\vec{F}_{ma}$  dans

le repère global et  $B_i$  la matrice réelle (3 x 3) définie par :

$$(II-52) \quad B_i = \rho \cdot S \cdot \Delta l C_m \begin{bmatrix} e_{1y}^2 + e_{1z}^2 & -e_{1x} \cdot e_{1y} & -e_{1x} \cdot e_{1z} \\ -e_{1y} \cdot e_{1x} & e_{1x}^2 + e_{1z}^2 & -e_{1y} \cdot e_{1z} \\ -e_{1z} \cdot e_{1x} & -e_{1z} \cdot e_{1y} & e_{1x}^2 + e_{1y}^2 \end{bmatrix}$$

$e_{1x}$ ,  $e_{1y}$ ,  $e_{1z}$  sont les composantes du vecteur unitaire  $\vec{e}_1$  de l'axe de l'élément cylindrique ① dans sa configuration de référence actuelle. (Il est à noter que  $B_i$  est la même pour chaque tronçon  $q$  de l'élément ①). Ainsi, la matrice des composantes de la force de masse ajoutée exercée sur le tronçon (i,q) dans le repère local de référence actuelle s'écrit :

$$(II-53) \quad F'_{ma(i,q)} = D_i \cdot F_{ma(i,q)} = -D_i \cdot B_i \cdot S_{(i,q)} \cdot \ddot{U}_{\text{①}}$$

En utilisant la relation (II-43) on pourra calculer les forces et les couples équivalents, s'exerçant aux extrémités de l'élément ① dans le repère local de référence actuel, dues aux forces  $\left\{ F'_{ma(i,q)}, q \in \{1, n\} \right\}$  :

$$(II-54) \quad F_e^{(i)'} = \sum_{q=1}^n Q_{(i,q)} \cdot F'_{ma(i,q)} = -\sum_{q=1}^n Q_{(i,q)} \cdot D_i \cdot B_i \cdot S_{(i,q)} \cdot \ddot{U}_{\text{①}}$$

Ainsi la matrice des composantes de ces forces et couples équivalents dans le repère global s'écrit :

$$(II-55) \quad F_e^{(i)} = A_i^T \cdot F_e^{(i)'} = -A_i^T \sum_{q=1}^n Q_{(i,q)} \cdot D_i \cdot B_i \cdot S_{(i,q)} \cdot \ddot{U}_{\text{①}}$$

La matrice  $A_i$  est définie par (II-3).

On pose :

$$(II-56) \quad M_{ma}^{(i)} = + A_i^T \sum_{q=1}^n Q_{(i,q)} \cdot D_i \cdot B_i \cdot S_{(i,q)}$$

La relation (II-55) s'écrit alors :

$$(II-57) \quad F_e^{(i)} = - M_{ma}^{(i)} \cdot \ddot{U} \quad \textcircled{1}$$

$M_{ma}^{(i)}$  est la matrice (12 x 12) des masses ajoutées de l'élément  $\textcircled{1}$  dans le repère global.

## II.6 Conditions aux limites du riser

Généralement, le riser est articulé au point de sa connection au fond de la mer (noeud 1). La tête du riser (noeud  $m+1$ ) est en contact avec le système flottant par intermédiaire d'un joint d'expansion. Donc, tous les déplacements du système flottant s'appliquent directement au noeud  $m+1$ .

Pour les risers en grande profondeur, les effets directs de la houle sur le riser peuvent être des phénomènes d'importance mineure devant l'action indirecte de la houle qui provoque des mouvements du système flottant et donc impose des mouvements parfois important en tête du riser. Ces mouvements du système flottant sont :

- mouvements angulaires de roulis, tangage et lacet.
- déplacement dit orbital qui se compose de :
  1. pilonnement selon la verticale,
  2. débattement dans le plan horizontal.

Néanmoins, nous envisageons ici pour le noeud 1 et le noeud  $m+1$ , des conditions aux limites plus générales. En spatial, chacun de ces 2 noeuds a 6 degrés de liberté. Soit  $i$  le  $i$ -ème,  $i \in \{1,6\}$ .

### . Conditions aux limites pour le noeud 1 ou le noeud $m+1$

Pour chaque degré de liberté,  $i \in \{1,6\}$  :

- 1) le déplacement (translation ou rotation) du D.L.  $i$  est inconnu (ceci correspond au fait que le D.L.  $i$  est complètement relâché). Pour ce degré de liberté  $i$  la composante de la force ou du moment correspondante est connue. Cette composante peut être constante ou fonction du temps.
- 2) Le déplacement (translation ou rotation) du D.L.  $i$  est connu. Il est constant ou fonction du temps.

Exemple classique pour un riser vertical

. Noeud 1

- i = 1 translation x bloqué
- i = 2 translation y bloqué
- i = 3 translation z bloqué
- i = 4 rotation x libre (moment x nul)
- i = 5 rotation y libre (moment y nul)
- i = 6 rotation z libre (moment z nul)

. Noeud m+1

Il faut noter que le déplacement vertical du noeud m+1 est toujours inconnu. Ceci correspond au fait que en tête du riser la tension verticale T est toujours connue.

- i = 1 translation x libre (tension suivant x imposé : constant ou fonction du temps).
- i = 2 translation y bloqué ou déplacement imposé (constant ou fonction du temps).
- i = 3 translation z bloqué ou déplacement imposé (constant ou fonction du temps).
- i = 4 rotation x bloqué ou rotation imposée (constante ou fonction du temps).
- i = 5 rotation y bloqué ou rotation imposée (constante ou fonction du temps).
- i = 6 rotation z bloqué ou rotation imposée (constante ou fonction du temps).



C H A P I T R E    I I I

---

MODELES NUMERIQUES DE CALCUL

III.1 Equations d'équilibre

A l'instant  $t$ , l'équation d'équilibre dynamique du système mécanique par rapport à la configuration de référence initiale, s'écrit matriciellement dans le repère global :

$$(III-1) \quad M_t \cdot \ddot{U}_t + C_t \cdot \dot{U}_t + K(U_t) = R(U_t, \dot{U}_t, t) \quad ; \quad t \geq t_0 = 0$$

associée aux conditions initiales : (III-1bis)  $U_{t=0} = U_{t_0}, \dot{U}_{t=0} = \dot{U}_{t_0}$

$U_{t_0}$  et  $\dot{U}_{t_0}$  sont donnés par rapport à la configuration de référence initiale, avec :

$$(III-2) \quad M_t = M_p + M_{ma}$$

$$(III-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_p \quad : \text{matrice globale de masse structure} \\ M_{ma} \quad : \text{matrice globale de masse ajoutée} \\ C_t \quad : \text{matrice d'amortissement à l'instant } t \\ K(U_t) \quad : \text{matrice globale représentant les forces nodales} \\ \quad \quad \quad \text{internes dues aux déplacements des noeuds} \end{array} \right.$$

$$\text{et } (III-4) \quad R(U_t, \dot{U}_t, t) = \sum_i F_e^{(i)} = R_1(U_t, \dot{U}_t, t) + R_2(t) + R_3$$

$R_1(U_t, \dot{U}_t, t)$  : matrice globale des forces hydrodynamiques de Froude-Krilov et de trainée et hydrostatiques équivalentes exercées aux noeuds à l'instant  $t$ .

$R_2(t)$  : matrice globale des forces équivalentes exercées au noeud (m+1) dues à la tension en tête à l'instant t.

$R_3$  : matrice globale des forces de poids propre équivalentes exercées aux noeuds.

$U_t$  est la matrice colonne du vecteur déplacement des noeuds à l'instant t par rapport à la configuration de référence initiale (configuration de référence actuelle) dans le repère global.

$\dot{U}_t$ ,  $\ddot{U}_t$  sont les dérivées première et seconde de  $U_t$  par rapport à t et sont respectivement le vecteur vitesse et le vecteur accélération. L'équation (III-1) étant non-linéaire due aux termes  $K(U_t)$  et  $R(U_t, \dot{U}_t, t)$ , elle sera résolue par une méthode de calcul pas-à-pas. Des problèmes relatifs à la réactualisation de la géométrie seront traités séparément.

### III.2 Généralités sur les méthodes numériques d'intégration pas-à-pas

Dans les méthodes de calcul pas-à-pas, connaissant le vecteur déplacement et le vecteur vitesse à l'instant initial  $t = 0$ , on calcule successivement ces mêmes vecteurs aux instants  $t_1 = \Delta t$ ,  $t_2 = 2\Delta t$ ,  $t_3 = 3\Delta t$ , ... ,  $t_n = n\Delta t$ , où  $\Delta t$  est le pas d'intégration numérique. On peut distinguer deux types d'algorithme :

- 1- Pour le premier type (différence finie) le vecteur accélération à un instant donné est exprimé en fonction du vecteur déplacement à différents instants (méthode des différences centrées - Houbolt's méthode).
- 2- Pour le second type (intégration numérique), on suppose que la variation du vecteur accélération entre les deux pas successifs est connue (constante, variation linéaire ou non-linéaire). A partir de là les vecteurs vitesse et déplacement sont obtenues par intégration du vecteur accélération. (Euler - Gauss méthode, Newmark's méthode, Milne's méthode,  $\theta$ -Wilson méthode, Runge-Kutta méthode).

Un des critères importants dans le choix de la méthode de calcul pas-à-pas, consiste à obtenir la meilleure précision pour un certain coût informatique. Pour le système mécanique que nous traitons, la méthode des différences centrées et la méthode  $\theta$ -Wilson nous ont paru les plus efficaces.

Il est à noter que l'utilisation de ces deux méthodes pour le problème ici traité ne peut être faite brutalement, car les forces  $R(U_t, \dot{U}_t, t)$  apparaissant dans le membre de droite de l'équation (III-1) sont fonction non linéaires du vecteur vitesse  $\dot{U}_t$ . Il est donc nécessaire d'introduire des itérations "internes" complémentaires aux algorithmes classiques qui sont normalement utilisés lorsque le membre de droite de l'équation (III-1) n'est fonction que de  $t$ . Normalement si  $R$  n'était fonction que du temps  $t$ , la méthode des différences centrées est un algorithme explicite et ne donne pas lieu à des itérations à l'intérieur d'un pas  $\Delta t$ .

Dans le cas présent,  $R$  étant fonction de  $\dot{U}_t$ , on aura des itérations dites "internes" à l'intérieur d'un pas  $\Delta t$ .

Par contre, si  $R$  n'était fonction que de  $t$ , la méthode de  $\theta$ -Wilson est un algorithme implicite qui nécessite des itérations à l'intérieur d'un pas  $\Delta t$ . Comme  $R$  est fonction de  $U_t$ , il est nécessaire comme pour les différences centrées de faire des itérations "internes" supplémentaires qui viennent s'ajouter aux itérations de base de méthode  $\theta$ -Wilson.

Il ressort donc globalement que le nombre d'itérations total à l'intérieur d'un pas  $\Delta t$  est plus grand pour la méthode  $\theta$ -Wilson que pour la méthode des différences centrées. Néanmoins, la méthode  $\theta$ -Wilson permet de prendre un pas  $\Delta t$  plus grand que les différences centrées, car la première est inconditionnellement stable tandis que la seconde est conditionnellement stable. Il faut donc établir un bilan global pour voir dans chaque cas quelle méthode est la plus avantageuse.

Les paramètres intervenant dans la décision sont principalement :

- 1- le nombre de degré de liberté ;
- 2- les valeurs des fréquences propres de vibration du système linéarisé par rapport aux fréquences des excitations (pour des modes propres de déformation compatible avec la nature des déformations imposées par les forces excitatrices) ;
- 3- le temps total de l'intégration ;
- 4- la valeur de l'amortissement.

Pour les problèmes que nous avons traité, nous avons constaté que la méthode  $\theta$ -Wilson, bien que conduisant à plus d'itération pour chaque pas, était plus avantageuse que la méthode des différences centrées, car cette dernière nécessite souvent de prendre un pas  $\Delta t$  trop petit pour obtenir la stabilité.

Dans les paragraphes suivants, nous avons développé les formulations numériques correspondant à ces deux méthodes, ce qui nous a permis d'étudier la méthode la mieux adaptée pour résoudre l'équation dynamique du riser.

### III.3 Formulation numérique du calcul dynamique

#### III.3.1 Méthode des différences centrées

La méthode des différences centrées consiste à exprimer les vecteurs accélération et vitesse à l'instant  $t$  en fonction des vecteurs déplacement aux instants  $t-\Delta t$ ,  $t$ ,  $t+\Delta t$ .

$$(III-6) \quad \ddot{U}_t = \frac{1}{(\Delta t)^2} (U_{t+\Delta t} - 2U_t + U_{t-\Delta t})$$

$$(III-7) \quad \dot{U}_t = \frac{1}{2\Delta t} (U_{t+\Delta t} - U_{t-\Delta t})$$

En éliminant  $U_{t-\Delta t}$  entre ces deux relations, on obtient :

$$(III-8) \quad U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta t \cdot \dot{U}_t + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot \ddot{U}_t$$

#### 1) Méthode de résolution avant toute réactualisation de géométrie

La configuration de référence actuelle est donc la configuration de référence initiale. L'instant noté  $t_r$  correspondant à cette configuration de référence actuelle est donc  $t_r = t_0 = 0$  et le champ de déplacement  $U_{t_r}$  correspondant est nul par définition. Ici, bien que  $t_r$  soit égal à  $t_0$ , nous distinguons  $U_{t_r}$  de  $U_{t_0}$ , car  $U_{t_0}$  étant la donnée initiale du champ déplacement à l'instant initial  $t_0$ , champ donné par rapport à la configuration de référence initiale,  $U_{t_0}$  peut ne pas être nul, alors que  $U_{t_r}$  est toujours nul tant qu'il n'y a pas de réactualisation de géométrie.

L'équation dynamique du mouvement du riser en instant  $t$  est donnée par (III-1). Les trois relations (III-1), (III-6) et (III-7) nous donnent, compte tenu de (III-4) :

$$(III-9) \quad \hat{M}_t \cdot U_{t+\Delta t} = \hat{R}(U_{t-\Delta t}, U_t, \dot{U}_t, t)$$

avec :

$$(III-10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{M}_t = \frac{M_t}{(\Delta t)^2} + \frac{C_t}{2\Delta t} \\ \hat{R}(U_{t-\Delta t}, U_t, \dot{U}_t, t) = R_1(U_t, \dot{U}_t, t) + R_2(t) + R_3 + \\ \quad + 2 \frac{M_t}{(\Delta t)^2} \cdot U_t + \left( \frac{C_t}{2\Delta t} - \frac{M_t}{(\Delta t)^2} \right) \cdot U_{t-\Delta t} \\ \quad - K(U_t) \end{array} \right.$$

La dépendance fonctionnelle de  $R_1$  en  $\dot{U}_t$  est due aux termes de trainées hydrodynamiques. La dépendance en  $U_t$  est due au fait que les forces hydrodynamiques dues aux effets de la houle et des mouvements du riser sont fonction de la localisation de ce dernier à l'instant  $t$ . Or, vu les hypothèses qui nous ont permis d'utiliser les approximations décrites à la remarque (II-36bis) et au § II.4.1-b,  $R_1$  à l'instant  $t$  est fonction de  $U_{t_r}$  ou bien de  $U_t$ , avec  $t_r \ll t$ . Par conséquent, on a l'approximation  $R_1(U_t, \dot{U}_t, t) \simeq R_1(U_{t_r}, \dot{U}_t, t)$  et donc  $\hat{R}$  apparaît comme une fonction de  $U_{t_r}, U_{t-\Delta t}, U_t, \dot{U}_t, t$ . On a donc :

$$(III-10bis) \quad \hat{R}(U_{t-\Delta t}, U_t, U_{t_r}, \dot{U}_t, t) = R_1(U_{t_r}, \dot{U}_t, t) + R_2(t) + R_3 + \frac{2M_t}{(\Delta t)^2} \cdot U_t + \left( \frac{C_t}{2\Delta t} - \frac{M_t}{(\Delta t)^2} \right) \cdot U_{t-\Delta t} - K(U_t)$$

avec  $t \gg t_r$

Pour le moment  $U_{t_r}$  est identiquement nul, mais lorsqu'il y aura réactualisation de géométrie à un instant  $t_r > 0$ , alors  $U_{t_r}$  ne sera pas identiquement nul.

La résolution de l'équation (III-9) nécessite la réparation des D.L. libres et des D.L non libres. L'équation (III-9) après cette réparation s'écrit :

$$(III-11) \quad \left[ \begin{array}{c|c} \hat{M}_{\alpha\alpha} & \hat{M}_{\alpha\beta} \\ \hline \hat{M}_{\beta\alpha} & \hat{M}_{\beta\beta} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} U_\alpha(t+\Delta t) \\ U_\beta(t+\Delta t) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \hat{R}_\alpha(U_{t-\Delta t}, U_t, U_{t_r}, \dot{U}_t, t) \\ \hat{R}_\beta(U_{t-\Delta t}, U_t, U_{t_r}, \dot{U}_t, t) \end{array} \right] ; t \gg t_r$$



$$C_t = \left[ \begin{array}{c|c} C_{\alpha\alpha} & C_{\alpha\beta} \\ \hline C_{\beta\alpha} & C_{\beta\beta} \end{array} \right]$$

$M_{\alpha\alpha}$  et  $M_{\alpha\beta}$  correspondent également à la décomposition par bloc de  $M_t$ .

$$M_t = \left[ \begin{array}{c|c} M_{\alpha\alpha} & M_{\alpha\beta} \\ \hline M_{\beta\alpha} & M_{\beta\beta} \end{array} \right]$$

Pour la résolution de l'équation (III-14) nous distinguons les cas suivants :

A)  $R_{1\alpha}(U_{t_r}, \dot{U}_t, t)$  n'est pas fonction de  $\dot{U}_t$  (cela correspond au cas où la trainée hydrodynamique est globalement nulle. Dans ce cas là,  $\hat{R}_\alpha(U_{t-\Delta t}, U_t, U_{t_r}, \dot{U}_t, t)$  n'étant pas fonction de  $\dot{U}_t$ , il ne dépend pas de  $U_{t+\Delta t}$ . L'équation (III-14) est donc une équation explicite en  $U_{t+\Delta t}$  dont la solution est triviale.

B)  $R_{1\alpha}(U_{t_r}, \dot{U}_t, t)$  est fonction de  $\dot{U}_t$ . Donc  $\hat{R}_\alpha(U_{t-\Delta t}, U_t, U_{t_r}, \dot{U}_t, t)$  étant fonction de  $\dot{U}_t$ , elle est fonction de  $U_{t+\Delta t}$ . Alors l'équation (III-14) est une équation implicite en  $U_{t+\Delta t}$  dont la solution est obtenue par itérations ; c'est ce que nous avons appelé au § III.2 les itérations internes.

L'algorithme d'obtention de  $U_{t+\Delta t}$  est le suivant :

1- Calcul de  $\ddot{U}_{t_0}$  à l'instant initial  $t_0 = 0$ . La configuration initiale est la première configuration de référence. Les données initiales  $U_{t_0}$  et  $\dot{U}_{t_0}$  sont données par rapport à cette configuration de référence. On calcule  $\ddot{U}_{t_0}$  par l'équation (III-1).

$$M_{t_0} \cdot \ddot{U}_{t_0} = R(U_{t_r}, \dot{U}_{t_0}, t_0) - C_{t_0} \cdot \dot{U}_{t_0} - K(U_{t_0})$$

2- On calcule  $U_1$  (déplacement à l'instant  $t_1 = t_0 + \Delta t$ ) par (III-8)

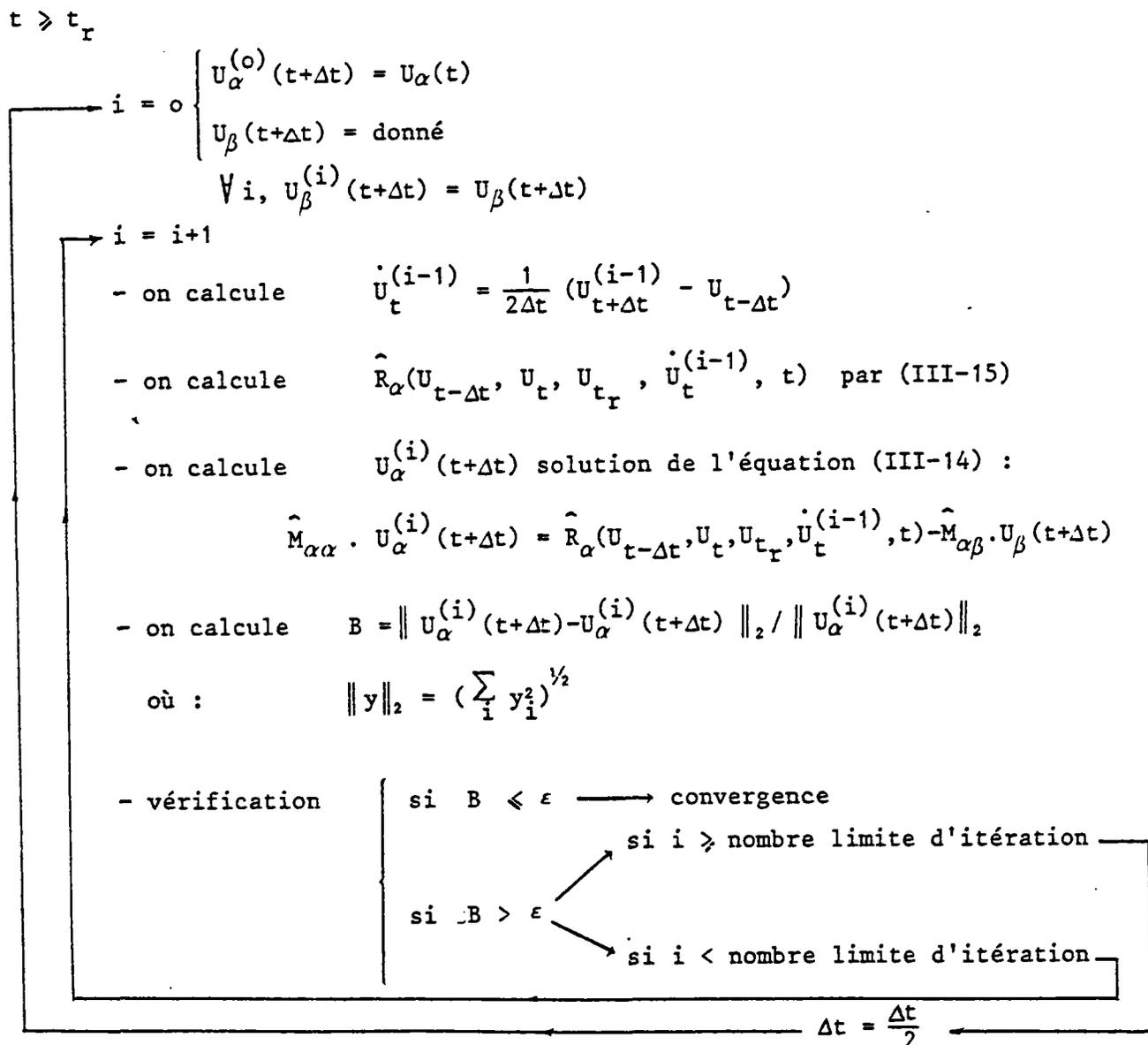
$$U_{t_0+\Delta t} = U_{t_0} + \Delta t \cdot \dot{U}_{t_0} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot \ddot{U}_{t_0}$$

3- Maintenant on peut trouver  $U_\alpha(t_0+2\Delta t)$  solution de l'équation (III-14) par itération interne et par conséquent  $\dot{U}_{t_0+\Delta t}$  et  $\ddot{U}_{t_0+\Delta t}$  seront calculés par (III-6) et (III-7).

De la même façon, en ayant  $U_\alpha(t)$  on pourra calculer  $U_\alpha(t+\Delta t)$  et par conséquent  $\dot{U}_t$  et  $\ddot{U}_t$ .

Il est à noter que dans cette méthode, seule la relation non-linéaire  $F = K(U)$  est utilisée, la relation tangente  $d_F \simeq K_t \cdot dU$  n'étant pas utilisée.

L'organigramme des itérations internes de l'algorithme est donné ci-après.



Cette méthode est stable à condition que  $\Delta t$  soit suffisamment petit.

2) Cas de la réactualisation de géométrie

Supposons qu'à l'instant  $t_r > 0$ , le vecteur déplacement  $U_{t_r}$  soit tel qu'il provoque des rotations importantes des barres par rapport à sa configuration de référence actuelle. Dans ce cas, on doit réactualiser la géométrie de la structure.

Soient  $R_r = R(U_{t_r}, \dot{U}_{t_r}, t_r)$ ,  $U_r = U_{t_r}$ ,  $\dot{U}_r = \dot{U}_{t_r}$  et  $\ddot{U}_r = \ddot{U}_{t_r}$

respectivement les vecteurs force extérieure, déplacement, vitesse et accélération à l'instant  $t_r$  qui est l'instant de la réactualisation. L'équation d'équilibre dynamique à l'instant  $t \geq t_r$  dans le repère global et par rapport à cette nouvelle configuration de référence s'écrit :

$$(III-16) \quad (M_t \ddot{U}_t - M_r \ddot{U}_r) + (C_t \dot{U}_t - C_r \dot{U}_r) + K(U_t - U_r) = R(U_t, \dot{U}_t, t) - R_r$$

ou comme précédemment, on a écrit  $R(U_t, \dot{U}_t, t) \simeq R(U_{t_r}, \dot{U}_{t_r}, t)$  on a :

$$(M_t \ddot{U}_t - M_r \ddot{U}_r) + (C_t \dot{U}_t - C_r \dot{U}_r) + K(U_t - U_r) = R(U_{t_r}, \dot{U}_{t_r}, t) - R_r$$

$M_r$  et  $C_r$  sont respectivement les matrices globales de masse et d'amortissement à l'instant  $t_r$ .

Dans ce cas, l'équation (III-14) s'écrit :

$$(III-17) \quad \hat{M}_{\alpha\alpha} \cdot U_\alpha(t+\Delta t) = \hat{R}_\alpha(U_{t-\Delta t}, U_t, U_{t_r}, \dot{U}_t, t) - R_{r\alpha} - \hat{M}_{\alpha\beta} \cdot U_\beta(t+\Delta t) \\ + (M_{ra\alpha} \cdot \ddot{U}_{r\alpha} + M_{r\alpha\beta} \cdot \ddot{U}_{r\beta} + C_{ra\alpha} \cdot \dot{U}_{r\alpha} + C_{r\alpha\beta} \cdot \dot{U}_{r\beta})$$

avec :  $\hat{R}_\alpha(U_{t-\Delta t}, U_t, U_{t_r}, \dot{U}_t, t)$  définie par (III-15)

$M_{ra\alpha}$  et  $M_{r\alpha\beta}$  correspondent à la décomposition par bloc de  $M_r$ ,

$$M_r = \left[ \begin{array}{c|c} M_{ra\alpha} & M_{r\alpha\beta} \\ \hline M_{r\beta\alpha} & M_{r\beta\beta} \end{array} \right]$$

et  $C_{r\alpha\alpha}$ ,  $C_{r\alpha\beta}$  correspondent à la décomposition par bloc de  $C_r$ .

$$C_r = \left[ \begin{array}{c|c} C_{r\alpha\alpha} & C_{r\alpha\beta} \\ \hline C_{r\beta\alpha} & C_{r\beta\beta} \end{array} \right]$$

$(\ddot{U}_{r\alpha}, \ddot{U}_{r\beta})$  et  $(\dot{U}_{r\alpha}, \dot{U}_{r\beta})$  correspondent respectivement à la décomposition de  $\ddot{U}_r$  et  $\dot{U}_r$ .

### III.3.2 Méthode de $\theta$ -Wilson

La méthode de  $\theta$ -Wilson est une modification de la méthode de Newmark pour rendre cette dernière inconditionnellement stable.

Dans la méthode de  $\theta$ -Wilson on suppose que l'accélération entre l'instant  $t$  et  $t+\tau$ , avec  $\tau = \theta\Delta t$  où  $\theta$  est un paramètre  $\geq 1$ , varie linéairement. Avec cette hypothèse, les relations de base obtenues pour cette méthode sont les suivantes :

$$(III-18) \quad \begin{cases} \dot{U}_{t+\tau} = \dot{U}_t + (1-\lambda) \theta\Delta t \cdot \ddot{U}_t + \lambda\theta\Delta t \cdot \ddot{U}_{t+\tau} \\ U_{t+\tau} = U_t + \theta\Delta t \cdot \dot{U}_t + (1/2 - \beta) (\theta\Delta t)^2 \cdot \ddot{U}_t + \beta (\theta\Delta t)^2 \cdot \ddot{U}_{t+\tau} \end{cases}$$

avec  $\lambda, \beta, \theta$  trois paramètres.

En posant  $\theta = 1$ , on obtient les relations de base de la méthode de Newmark. Pour que la méthode de  $\theta$ -Wilson soit inconditionnellement stable, il faut :

$$\theta \geq 1.40 \quad \lambda = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{6}$$

Cette méthode numérique est constituée des deux étapes suivantes :

Dans un premier temps, connaissant les vecteurs déplacement, vitesse et accélération à l'instant  $t$ , on les calcule à l'instant  $t+\tau$ .

Une fois que ces vecteurs sont connus à l'instant  $t+\tau$ , on les calcule à l'instant  $t+\Delta t$ , en supposant que l'accélération varie linéairement entre  $t$  et  $t+\tau$ .

$$(III-19) \quad \ddot{U}_{t+\Delta t} = \ddot{U}_t + \frac{1}{\theta} (\ddot{U}_{t+\tau} - \ddot{U}_t)$$

De (III-18), on déduit les relations suivantes :

$$(III-20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_{t+\tau} = \frac{\lambda}{\beta\theta\Delta t} \cdot \underline{U} - A_t \\ \ddot{U}_{t+\tau} = \frac{1}{\beta(\theta\Delta t)^2} \cdot \underline{U} - B_t \end{array} \right.$$

avec :

$$(III-21) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_t = \left(\frac{\lambda}{\beta} - 1\right) \cdot \dot{U}_t + \theta\Delta t \left(\frac{\lambda}{2\beta} - 1\right) \cdot \ddot{U}_t \\ B_t = \frac{1}{\beta\theta\Delta t} \cdot \dot{U}_t + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \cdot \ddot{U}_t \end{array} \right.$$

$$\text{et (III-22)} \quad \underline{U} = U_{t+\tau} - U_t$$

1) Méthode de résolution avant toute réactualisation de géométrie

Comme pour la méthode des différences centrées, la configuration de référence actuelle est la configuration de référence initiale. On notera toujours  $t_r$  l'instant de la configuration de référence actuelle qui est ici l'instant initial et pour lequel le champ de déplacement  $U_{t_r}$  est identiquement nul. Le champ de déplacement initial  $U_{t_0}$  donné dans la configuration de référence initial peut lui, ne pas être identiquement nul. D'autre part, nous utiliserons toujours l'approximation

$$R(t, U_t, \dot{U}_t) \approx R(t, U_{t_r}, \dot{U}_{t_r}) \text{ pour les mêmes raisons que celles données précédemment.}$$

A l'instant  $t+\tau$  l'équation dynamique de mouvement s'écrit :

$$(III-23) \quad M_{t+\tau} \cdot \ddot{U}_{t+\tau} + C_{t+\tau} \cdot \dot{U}_{t+\tau} + K(U_{t+\tau}) = R(t+\tau, U_{t+\tau}, \dot{U}_{t+\tau})$$

Soit compte tenu de l'approximation pour le calcul des forces hydrodynamiques :

$$(III-23bis) \quad M_{t+\tau} \cdot \ddot{U}_{t+\tau} + C_{t+\tau} \cdot \dot{U}_{t+\tau} + K(U_{t+\tau}) \approx R(t+\tau, U_{t_r}, \dot{U}_{t+\tau})$$

Pour résoudre l'équation (III-23bis) on construit une équation approchée sur laquelle on effectue des itérations.

Développons au premier ordre la fonction  $U \longrightarrow K(U)$  au voisinage de  $U_t$ . On a :

$$(III-24) \quad K(U) \simeq K(U_t) + K'(U_t) \cdot (U - U_t)$$

Or nous avons vu au chapitre II.3 que si  $F = K(U)$  on a  $dF \simeq K_T \cdot dU$  avec  $K_T$  la matrice de rigidité tangente globale au point  $U$ . En notant encore  $K_T$  la rigidité tangente au point  $U_t$ , et en faisant  $U = U_{t+\tau}$  dans (III-24), on obtient :

$$(III-25) \quad K(U_{t+\tau}) \simeq K(U_t) + K_T \cdot (U_{t+\tau} - U_t)$$

L'équation approchée associée à (III-23bis) s'écrit :

$$(III-26) \quad M_{t+\tau} \cdot \ddot{U}_{t+\tau} + C_{t+\tau} \cdot \dot{U}_{t+\tau} + K_T \cdot U = R(t+\tau, U_{t+\tau}, \dot{U}_{t+\tau}) - K(U_t)$$

Il est à noter que l'équation (III-26) ne correspond pas à une équation d'équilibre à l'instant  $t+\tau$ . Mais en itérant sur cette équation, on peut trouver  $U_{t+\tau}$  qui vérifie l'équation d'équilibre (III-23bis).

Posons :

$$(III-27) \quad \left[ \begin{array}{ll} a_1 = \frac{\lambda}{\beta\theta\Delta t} & a_8 = -\frac{1}{\beta\theta^2\Delta t} \\ a_2 = (1 - \frac{\lambda}{\beta}) & a_9 = (1 - \frac{1}{2\theta\beta}) \\ a_3 = \theta\Delta t(1 - \frac{\lambda}{2\beta}) & a_{10} = (1 - \lambda)\Delta t \\ a_4 = \frac{1}{\beta(\theta\Delta)^2} & a_{11} = \lambda\Delta t \\ a_5 = -\frac{1}{\beta\theta\Delta t} & a_{12} = \Delta t \\ a_6 = (1 - \frac{1}{2\beta}) & a_{13} = (\Delta t)^2(\frac{1}{2} - \beta) \\ a_7 = \frac{1}{\beta\theta^3\Delta t^2} & a_{14} = \beta(\Delta t)^2 \end{array} \right.$$

De (III-20) et (III-26) on déduit, compte tenu de (III-4) :

$$(III-28) \quad \hat{K} \cdot U = \hat{R}(t+\tau, U_{t+\tau}, \dot{U}_{t+\tau}, U_t, \dot{U}_t, \ddot{U}_t)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \widehat{K} &= K_T + a_4 \cdot M_{t+\tau} + a_1 \cdot C_{t+\tau} \\
 \widehat{R}(t+\tau, U_{t+\tau}, \dot{U}_{t+\tau}, U_t, \dot{U}_t, \ddot{U}_t) &= R_1(t+\tau, U_{t+\tau}, \dot{U}_{t+\tau}) \\
 &+ R_2(t+\tau) + R_3 - M_{t+\tau}(a_5 \dot{U}_t + a_6 \ddot{U}_t) - C_{t+\tau} \\
 &\cdot (a_2 \dot{U}_t + a_3 \ddot{U}_t) - K(U_t)
 \end{aligned}
 \tag{III-29}$$

Pour résoudre l'équation (III-28), on distingue les deux cas suivants comme nous l'avons fait pour les différences-centrées.

A)  $\widehat{R}(t+\tau, U_{t+\tau}, \dot{U}_{t+\tau})$  est connue, car indépendant de  $\dot{U}_{t+\tau}$  (cela correspond au cas où la traînée hydrodynamique est globalement nulle). Dans ces conditions, on obtient  $\underline{U}$  et donc  $U_{t+\tau}$  vérifiant l'équation d'équilibre (III-23bis), en itérant sur l'équation approchée (III-26). Ces itérations sont appelées itérations de base.

Description des itérations de base

Soit  $U_{t+\tau}^{(1)} = U_t + \underline{U}^{(1)}$  la solution de (III-26) :  $\widehat{K} \cdot \underline{U}^{(1)} = \widehat{R}$

Mais (III-26) étant une équation approchée, on constate que le système n'est pas en équilibre.

Soit  $\widehat{R}^{(1)}$  le système de forces équilibrant le système pour le champ de déplacement  $U_{t+\tau}^{(1)}$ . La différence  $\widehat{R} - \widehat{R}^{(1)}$  constitue une force résiduelle qui doit être appliquée au système au cours d'une seconde itération. Pour cette seconde itération, on utilise la même  $\widehat{K}$  définie à l'instant t. On trouve que la force résiduelle produit un déplacement supplémentaire

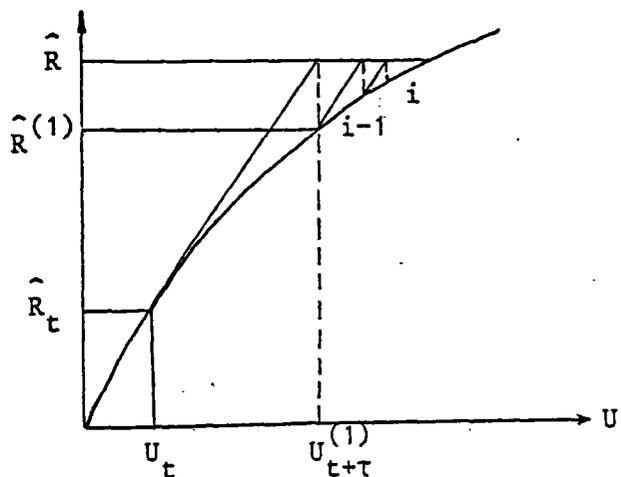


FIGURE III-1

$$U_{t+\tau}^{(2)} - U_{t+\tau}^{(1)} \text{ solution de l'équation } \hat{K} \cdot (U_{t+\tau}^{(2)} - U_{t+\tau}^{(1)}) = \hat{R} - \hat{R}^{(1)}$$

On recommence les itérations jusqu'à ce que les corrections de déplacements au cours de deux itérations successives deviennent négligeables.

La relation approchée (III-28) n'est pas sous une forme appropriée pour effectuer ces itérations. Nous allons donc établir une nouvelle relation approchée qui facilite celles-ci.

Pour ce faire, on développe les relations (III-20) sous la forme suivante :

$$(III-30) \quad \begin{cases} \dot{U}_{t+\tau}^{(i)} = a_1 \cdot (U_{t+\tau}^{(i)} - U_{t+\tau}^{(i-1)}) + a_1 \cdot (U_{t+\tau}^{(i-1)} - U_t) + a_2 \cdot \dot{U}_t + a_3 \cdot \ddot{U}_t \\ \ddot{U}_{t+\tau}^{(i)} = a_4 \cdot (U_{t+\tau}^{(i)} - U_{t+\tau}^{(i-1)}) + a_4 \cdot (U_{t+\tau}^{(i-1)} - U_t) + a_5 \cdot \dot{U}_t + a_6 \cdot \ddot{U}_t \end{cases}$$

$$\text{Posons : } \Delta U^{(i)} = U_{t+\tau}^{(i)} - U_{t+\tau}^{(i-1)}$$

En remplaçant  $\ddot{U}_{t+\tau}^{(i)}$ ,  $\dot{U}_{t+\tau}^{(i)}$  par les relations (III-30) dans l'équation (III-26) on aura :

$$\begin{aligned} M_{t+\tau} \cdot \left\{ a_4 \cdot \Delta U^{(i)} + a_4 \cdot (U_{t+\tau}^{(i-1)} - U_t) + a_5 \cdot \dot{U}_t + a_6 \cdot \ddot{U}_t \right\} + \\ C_{t+\tau} \cdot \left\{ a_1 \cdot \Delta U^{(i)} + a_1 \cdot (U_{t+\tau}^{(i-1)} - U_t) + a_2 \cdot \dot{U}_t + a_3 \cdot \ddot{U}_t \right\} = R(t+\tau, U_{t+\tau}, \dot{U}_{t+\tau}) - K(U_{t+\tau}^{(i)}) \end{aligned}$$

Remplaçons  $K(U_{t+\tau}^{(i)})$  par :

$$K(U_{t+\tau}^{(i)}) = K(U_{t+\tau}^{(i-1)}) + \Delta U^{(i)} \cdot K'(U_{t+\tau}^{(i-1)})$$

Dans l'équation précédente, on trouve :

(III-31)

$$\hat{K} \cdot \Delta U^{(i)} = \hat{R}$$

avec :

$$(III-32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{K} = K_T + a_1 \cdot C_{t+\tau} + a_4 \cdot M_{t+\tau} \\ \hat{R} = R_1(t+\tau, U_{t+\tau}, \dot{U}_{t+\tau}^{(i-1)}) - K(U_{t+\tau}^{(i-1)}) - C_{t+\tau} \left[ a_1 \cdot (U_{t+\tau}^{(i-1)} - U_t) \right. \\ \quad \left. + a_2 \cdot \dot{U}_t + a_3 \cdot \ddot{U}_t \right] - M_{t+\tau} \left[ a_4 \cdot (U_{t+\tau}^{(i-1)} - U_t) + a_5 \cdot \dot{U}_t + a_6 \cdot \ddot{U}_t \right] \\ \quad + R_2(t+\tau) + R_3 \end{array} \right.$$

L'équation (III-31) est la nouvelle équation approchée sur laquelle on effectue les itérations.

Comme précédemment, on sépare les D.L. libres et les D.L. non-libres.

L'équation (III-31) après cette séparation s'écrit :

$$(III-33) \quad \left[ \begin{array}{c|c} \hat{K}_{\alpha\alpha} & \hat{K}_{\alpha\beta} \\ \hline \hat{K}_{\beta\alpha} & \hat{K}_{\beta\beta} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} \Delta U_{\alpha}^{(i)} \\ \Delta U_{\beta}^{(i)} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \hat{R}_{\alpha} \\ \hat{R}_{\beta} \end{array} \right]$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{R}_{\alpha} : \text{forces correspondant aux D.L. libres (connues)} \\ \hat{R}_{\beta} : \text{forces correspondant aux D.L. non-libres (inconnues)} \end{array} \right.$$

Comme les déplacements des D.L. non-libres sont connus et au cours des itérations ne varient pas, on a donc toujours  $\Delta U_{\beta}^{(i)} = 0$

L'équation (III-33) s'écrit donc :

$$(III-34) \quad \hat{K}_{\alpha\alpha} \cdot \Delta U_{\alpha}^{(i)} = \hat{R}_{\alpha}$$

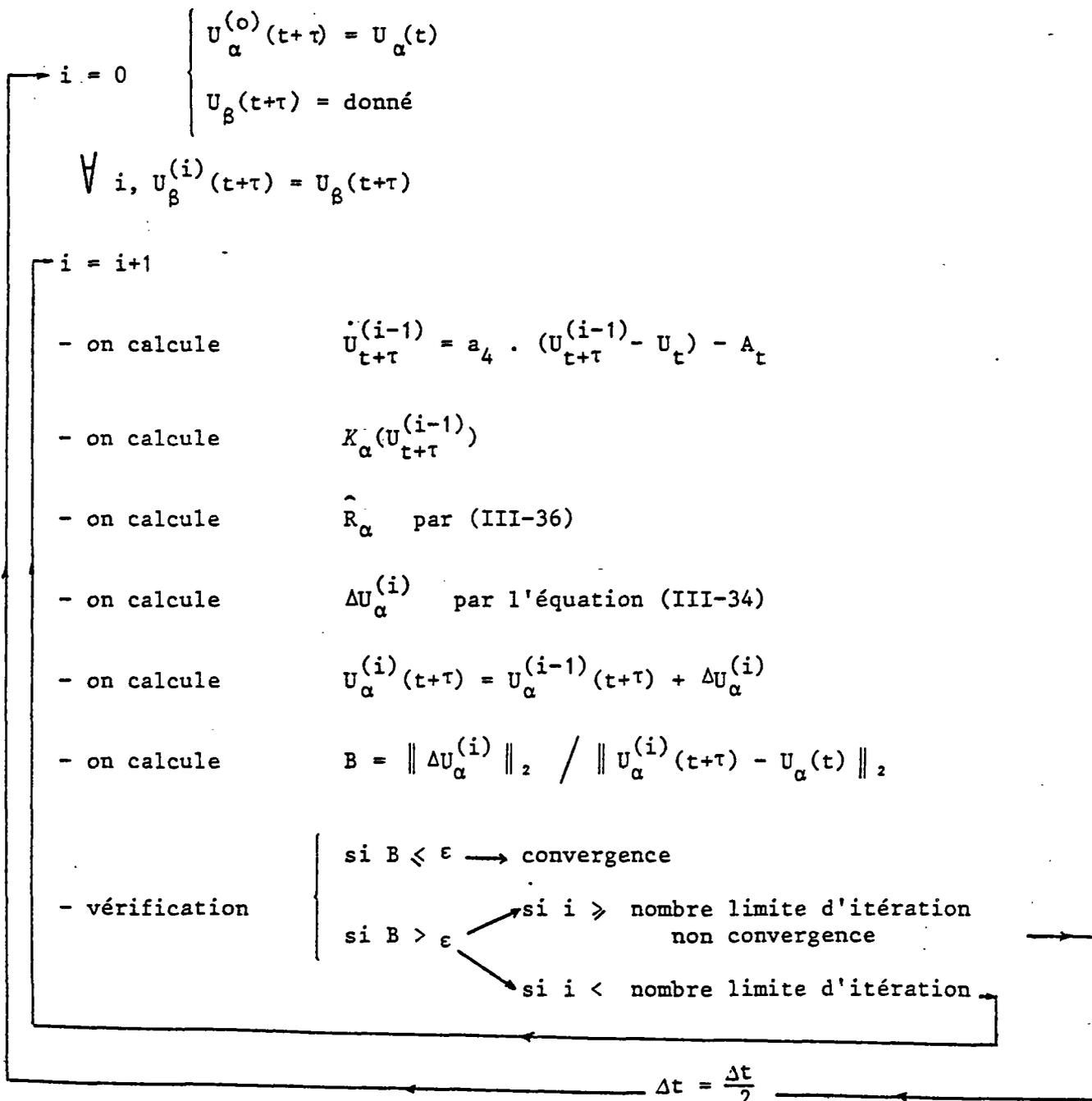
$$(III-35) \quad \hat{K}_{\beta\alpha} \cdot \Delta U_{\alpha}^{(i)} = \hat{R}_{\beta}$$

avec :

$$(III-36) \left\{ \begin{aligned} \hat{R}_\alpha &= R_{1\alpha}(t+\tau, U_{t\tau}, \dot{U}_{t+\tau}^{(i-1)}) + R_{2\alpha}(t+\tau) + R_{3\alpha} - K_\alpha(U_{t+\tau}^{(i-1)}) \\ &- C_{\alpha\alpha}(t+\tau) \cdot \left[ a_1 \cdot (U_\alpha^{(i-1)}(t+\tau) - U_\alpha(t)) + a_2 \cdot \dot{U}_\alpha(t) + a_3 \cdot \ddot{U}_\alpha(t) \right] \\ &- C_{\alpha\beta}(t+\tau) \cdot \left[ a_1 \cdot (U_\beta^{(i-1)}(t+\tau) - U_\beta(t)) + a_2 \cdot \dot{U}_\beta(t) + a_3 \cdot \ddot{U}_\beta(t) \right] \\ &- M_{\alpha\alpha}(t+\tau) \cdot \left[ a_4 \cdot (U_\alpha^{(i-1)}(t+\tau) - U_\alpha(t)) + a_5 \cdot \dot{U}_\alpha(t) + a_6 \cdot \ddot{U}_\alpha(t) \right] \\ &- M_{\alpha\beta}(t+\tau) \cdot \left[ a_4 \cdot (U_\beta^{(i-1)}(t+\tau) - U_\beta(t)) + a_5 \cdot \dot{U}_\beta(t) + a_6 \cdot \ddot{U}_\beta(t) \right] \end{aligned} \right.$$

De l'équation (III-34) on trouve  $U_\alpha(t+\tau)$  par itérations.

L'organigramme des itérations de base est donné ci-après.



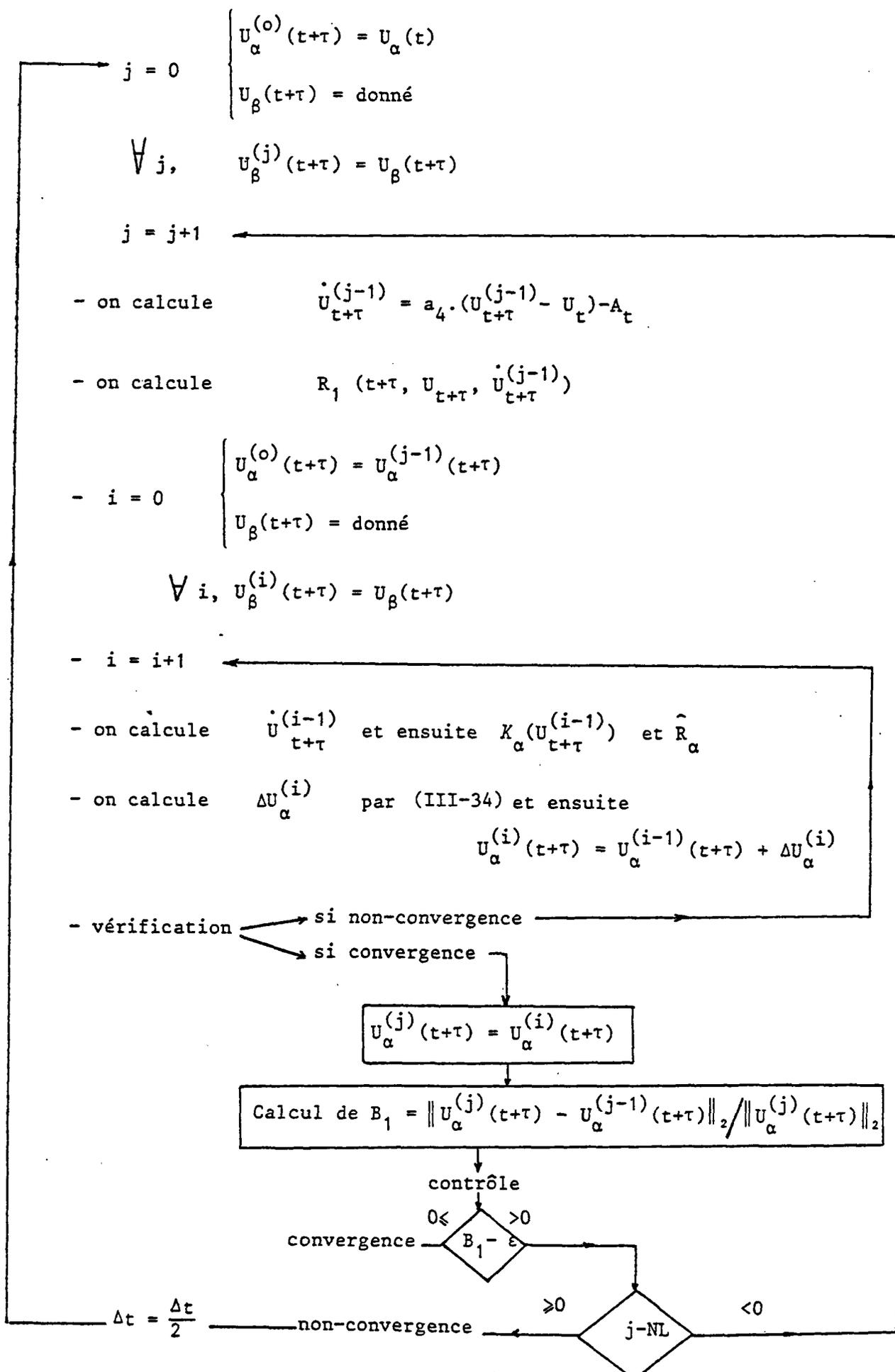
Les réactions correspondant aux D.L. non-libres seront obtenues de l'équation (III-35) en posant  $\Delta U_{\alpha}^{(i)} = 0$ .

B) Dans le cas A précédent, on a supposé que  $\hat{R}(t+\tau, U_{t_r}, \dot{U}_{t+\tau})$

était indépendante de  $\dot{U}_{t+\tau}$ . Ici nous envisageons le cas où  $\hat{R}$  dépend explicitement de  $\dot{U}_{t+\tau}$ . Donc au moment de la résolution de l'équation (III-31),  $\hat{R}$  devient une fonction inconnue, car fonction de  $\Delta U$  par l'intermédiaire de  $\dot{U}_{t+\tau}$ . Donc pour chaque itération de base, la solution  $\Delta U^{(i)}$  de (III-31) est obtenue par des itérations internes complémentaires comme pour les différences-centrées, les itérations de base étant celles décrites au paragraphe A précédent.

L'organigramme des itérations de base et des itérations internes est résumé ci-après.

NL = nombre limite d'itération



C) Calcul de  $U_{t+\Delta t}$ ,  $\dot{U}_{t+\Delta t}$ ,  $\ddot{U}_{t+\Delta t}$

En fonction du cas A ou B, on peut calculer  $U_{t+\tau}$ ,  $\dot{U}_{t+\tau}$ ,  $\ddot{U}_{t+\tau}$ .

les relations suivantes permettent de calculer  $U_{t+\Delta t}$ ,  $\dot{U}_{t+\Delta t}$ ,  $\ddot{U}_{t+\Delta t}$  :

$$(III-37) \quad \begin{cases} \ddot{U}_{t+\Delta t} = a_7 \cdot \underline{U} + a_8 \cdot \dot{U}_t + a_9 \cdot \ddot{U}_t \\ \dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + a_{10} \cdot \ddot{U}_t + a_{11} \cdot \ddot{U}_{t+\Delta t} \\ U_{t+\Delta t} = U_t + a_{12} \cdot \dot{U}_t + a_{13} \cdot \ddot{U}_t + a_{14} \cdot \ddot{U}_{t+\Delta t} \end{cases}$$

U est défini par (III-22).

## 2) Cas de la réactualisation de géométrie

Le raisonnement est identique à celui que nous avons fait pour les différences-centrées.

Supposons qu'à l'instant  $t_r$  le vecteur déplacement  $U_{t_r}$  soit tel qu'il provoque des rotations importantes des barres, par rapport à sa configuration de référence actuelle. Dans ce cas, on doit réactualiser la géométrie de la structure.

Soient  $R_r = R(U_{t_r}, \dot{U}_{t_r}, t_r)$ ,  $U_r = U_{t_r}$ ,  $\dot{U}_r = \dot{U}_{t_r}$  et  $\ddot{U}_r = \ddot{U}_{t_r}$

respectivement les vecteurs force extérieure, déplacement, vitesse et accélération à l'instant  $t_r$  qui est l'instant de la réactualisation.

L'équation d'équilibre dynamique à l'instant  $t+\tau > t_r$  dans le repère global et par rapport à cette nouvelle configuration de référence s'écrit :

$$(M_{t+\tau} \cdot \ddot{U}_{t+\tau} - M_r \cdot \ddot{U}_r) + (C_{t+\tau} \cdot \dot{U}_{t+\tau} - C_r \cdot \dot{U}_r) + K(U_{t+\tau} - U_r) = R(t+\tau, U_{t_r}, \dot{U}_{t_r}) - R_r$$

Dans ce cas l'équation (III-34) s'écrit :

$$(III-38) \quad \hat{K}_{\alpha\alpha} \cdot \Delta U_{\alpha}^{(i)} = \hat{R}_{\alpha} - R_{r\alpha} + (M_{r\alpha\alpha} \cdot \ddot{U}_{r\alpha} + M_{r\alpha\beta} \cdot \ddot{U}_{r\beta}) + (C_{r\alpha\alpha} \cdot \dot{U}_{r\alpha} + C_{r\alpha\beta} \cdot \dot{U}_{r\beta})$$

avec :  $\hat{R}_\alpha$  défini par (III-36).

$M_r$  et  $C_r$  sont respectivement les matrices globales de masse et d'amortissement à l'instant  $t_r$ .

$M_{r\alpha\alpha}$  et  $M_{r\alpha\beta}$  correspondent à la décomposition par bloc de  $M_r$  et

$C_{r\alpha\alpha}$ ,  $C_{r\alpha\beta}$  correspondent à la décomposition par bloc de  $C_r$ .

$(\ddot{U}_{r\alpha}, \ddot{U}_{r\beta})$  et  $(\dot{U}_{r\alpha}, \dot{U}_{r\beta})$  correspondent respectivement à la décomposition de  $\ddot{U}_r$  et  $\dot{U}_r$ .

### III.4 Résolution de l'équation d'équilibre statique

Le problème est le suivant :

On suppose que le système se trouve en équilibre statique dans une configuration de référence actuelle définie par le champ de déplacement  $U_r$  donné par rapport à la configuration de référence initiale, et sous le système de forces extérieures  $R_r$ . On cherche le nouvel équilibre statique du système lorsqu'il est

soumis statiquement à un système de forces extérieures  $R$ . Soit  $U$  le champ de déplacement par rapport à la configuration de référence initiale donnant l'équilibre statique du système mécanique assujetti à  $R$ .

L'équation d'équilibre est donc :

$$(III-39) \quad K(U - U_r) = R - R_r$$

La résolution de l'équation (III-39) nécessite un certain nombre d'itérations de base. Pour l'obtention de la relation nécessaire correspondant à ces itérations, il suffit de supprimer les termes correspondant aux forces d'inertie et d'amortissement de la structure dans l'équation (III-38), ce qui nous donne :

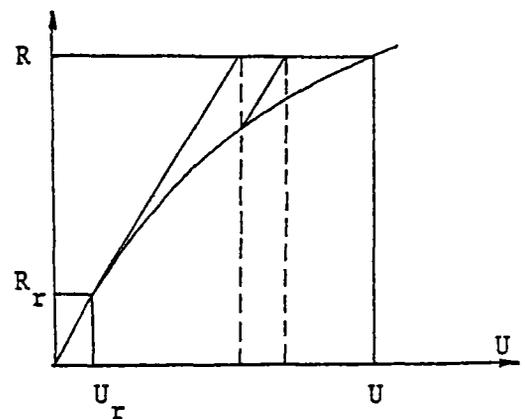


FIGURE III-2

$$(III-40) \quad \hat{K}_{\alpha\alpha} \cdot \Delta U_{\alpha}^{(i)} = \hat{R}_{\alpha} - R_{r\alpha}$$

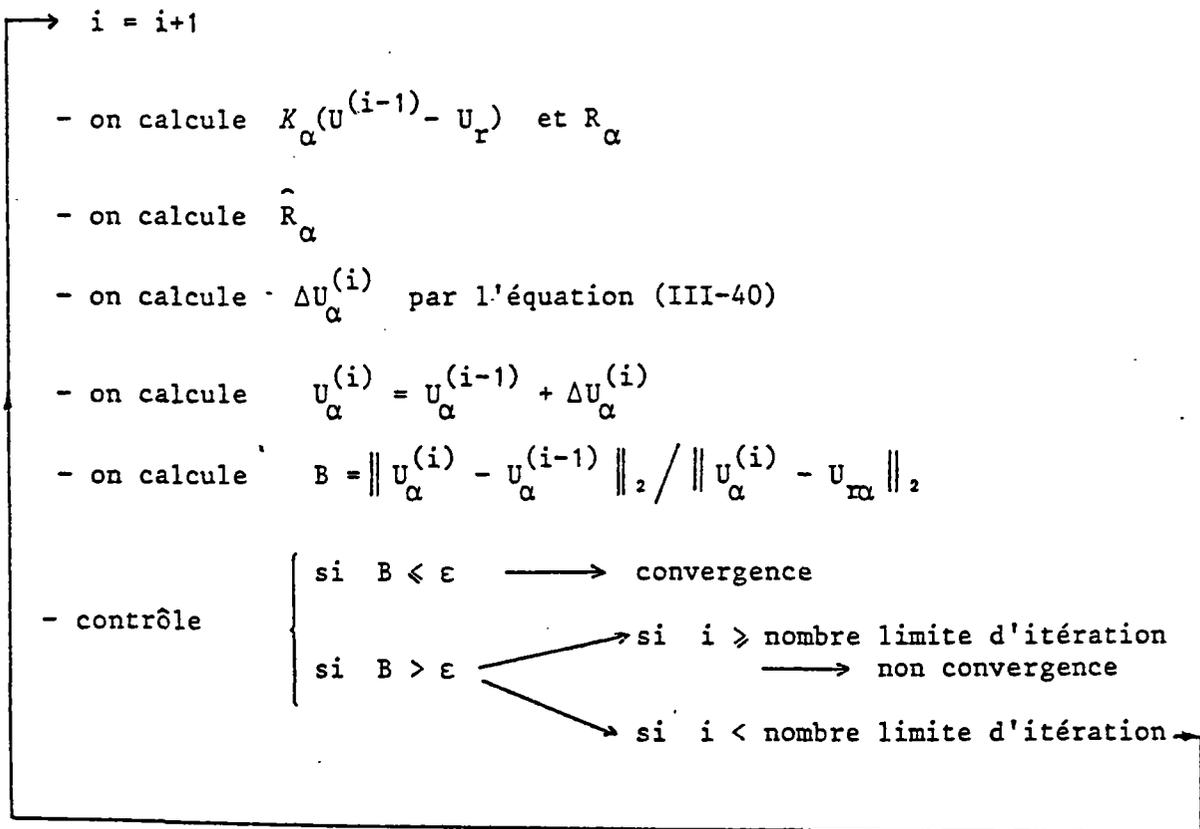
avec :

$$(III-41) \quad \hat{R}_{\alpha} = R_{\alpha} - K(U^{(i-1)} - U_r)$$

L'organigramme des itérations de base de l'algorithme est le suivant :

$$i = 0 \quad \begin{cases} U_{\alpha}^{(0)} = U_r \\ U_{\beta} = \text{donné} \end{cases}$$

$$\forall i, U_{\beta}^{(i)} = U_{\beta}$$



Après avoir trouvé  $U_{\alpha}$ , les réactions correspondant aux D.L. non-libres seront obtenues en résolvant l'équation (III-39) :

$$(III-42) \quad R_{\beta} = R_{r\beta} + K_{\beta}(U - U_r)$$

Remarque 1 :

Au cours des itérations internes, on a les deux possibilités suivantes :

- 1- Utiliser la même matrice de rigidité tangente qui a été construite pour la configuration de référence actuelle. (Figure III-3).
- 2- Former la nouvelle matrice de rigidité tangente pour chaque itération (figure III-4).

L'avantage de la première méthode est évident. Elle permet de ne construire qu'une fois la matrice de rigidité tangente. Néanmoins, en utilisant cette méthode, l'algorithme peut converger difficilement tandis qu'avec la 2ème méthode, la convergence peut être obtenue après peu d'itérations.

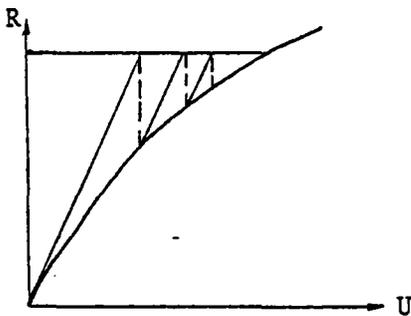


FIGURE III-3

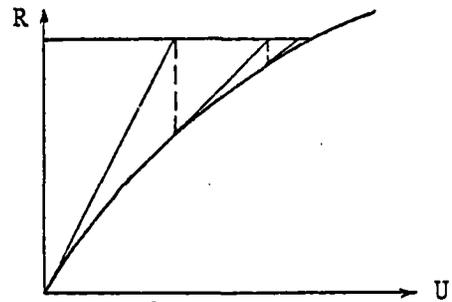


FIGURE III-4

Remarque 2 :

En séparant les déplacements connus et les déplacements inconnus, l'équation (III-39) s'écrit :

$$(III-43) \quad K(U_{\alpha} - U_{r\alpha}, U_{\beta} - U_{r\beta}) = R - R_r$$

A partir du développement  $f(x,y) = f(x_1,y) + (x-x_1) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1,y)$

dans lequel y est considéré comme constant, on peut écrire :

$$K(U_{\alpha} - U_{r\alpha}, U_{\beta} - U_{r\beta}) = K(U_{r\alpha} - U_{r\alpha}, U_{\beta} - U_{r\beta}) + (U_{\alpha} - U_{r\alpha}) \cdot K'(U_{r\alpha} - U_{r\alpha}, U_{\beta} - U_{r\beta})$$

Cette relation montre que la matrice de rigidité tangente devra être construite pour le point  $(U_{r\alpha}, U_{r\beta})$  et non pas pour le point  $(U_{\alpha}, U_{\beta})$ .

### III. 5 Amortissement numérique

La méthode numérique d'intégration pas-à-pas des équations dynamiques non-linéaires des mouvements du système mécanique considéré, utilise nécessairement des conditions initiales qui induisent dans la réponse un régime transitoire qui s'amortit avec le temps.

Deux situations sont à considérer :

La première correspond au fait que l'on cherche la réponse sous conditions initiales. Dans ce cas, le régime transitoire fait partie intégrante de la réponse.

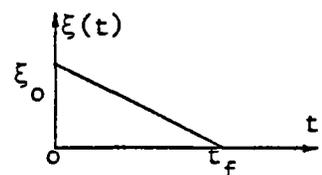
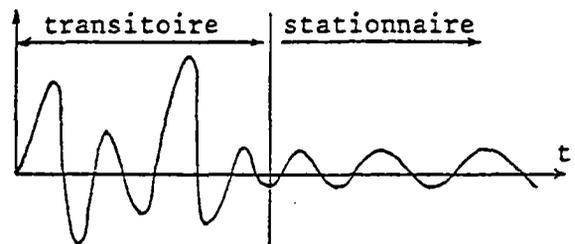
Pour la seconde, on cherche uniquement le régime stationnaire de la réponse pour une excitation stationnaire. Dans ce cas, seule la partie forcée de la réponse nous intéresse et le régime transitoire généré par l'effet des conditions initiales ne doit pas être pris en compte. Il est alors nécessaire d'intégrer sur un temps suffisamment long pour que ce régime transitoire, qui s'amortit, devienne négligeable devant la partie forcée de la réponse. Dans certains cas, (amortissement faible) ceci conduit à une augmentation notable du volume des calculs.

Dans cette situation pour tuer plus rapidement le régime transitoire, on introduit un amortissement numérique au début de l'intégration.

Pour ce faire, nous appliquons un amortissement numérique de type visqueux pour  $t \in \{0, t_f\}$ . par construction, cet amortissement décroît linéairement de 0 à  $t_f$  et s'annule pour  $t \gg t_f$ . Pour  $0 < \xi_0 < 1$  on définit la fonction

$t \longmapsto \xi(t)$  telle que :

$$\xi(t) = \xi_0 \left(1 - \frac{t}{t_f}\right)$$



L'on définit une matrice diagonale  $C(t)$  d'amortissement numérique de la façon suivante :

$$(III-44) \quad \begin{cases} C_{ij}(t) = 2 \sqrt{M_{ii} K_{ii}} \xi(t) \\ C_{ij}(t) = 0 \quad \forall i \neq j \end{cases}$$

avec :

$M_{ii}$  et  $K_{ii}$  respectivement les éléments diagonaux des matrices de masse et rigidité tangente globales du riser.

La force d'amortissement numérique s'écrit alors :

$$F_n(t) = - C(t) \cdot \dot{U}(t)$$



III.6 - ORGANIGRAMMES

III.6.1 - Organigramme du calcul statique

III.6.2 - Organigramme du calcul dynamique ( $\theta$ -Wilson méthode)

III.6.3 - Organigramme du calcul dynamique (différences centrées)

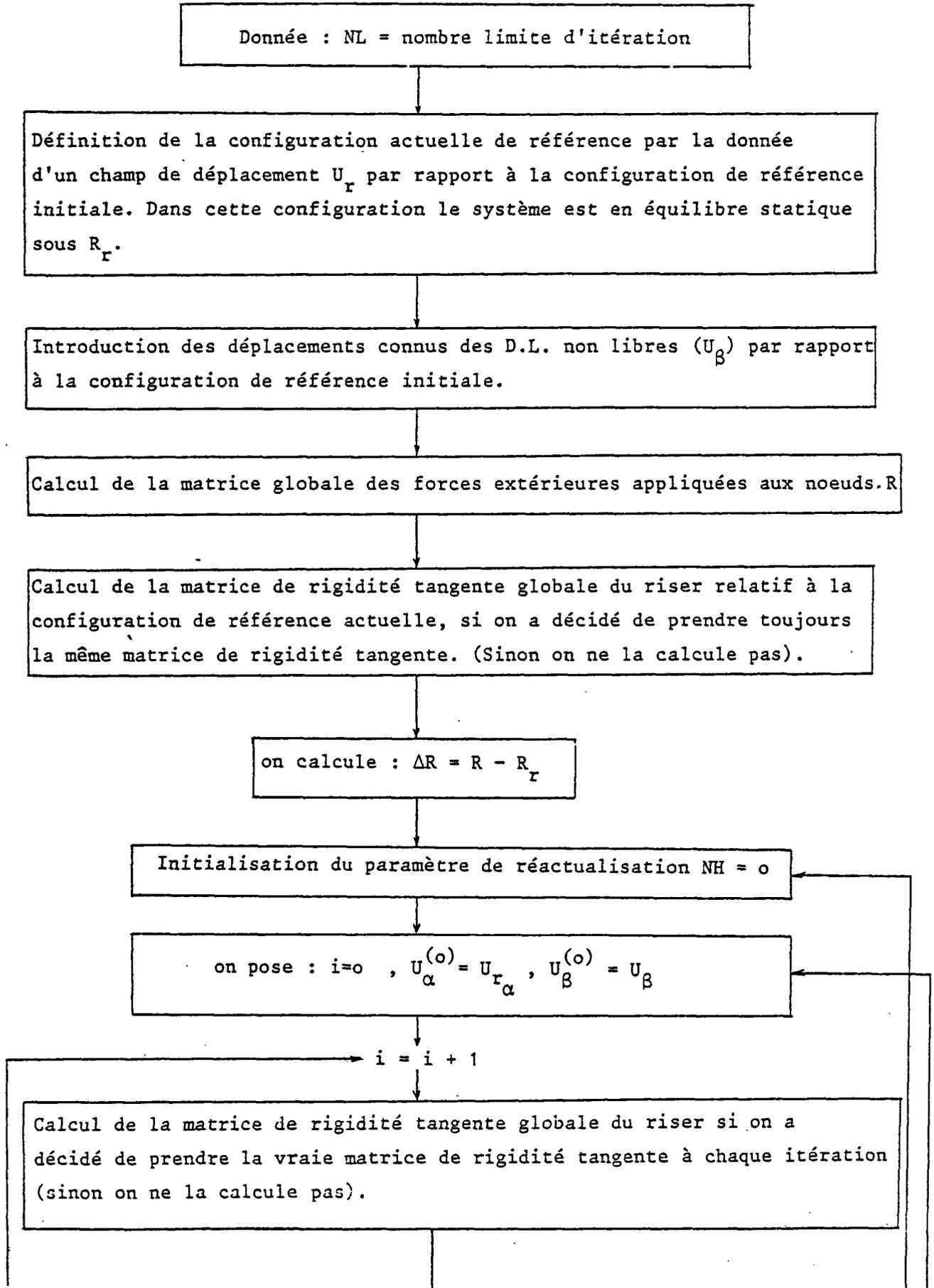
III.6.4 - Organigramme du calcul de la matrice globale des forces extérieures.

III.6.5 - Organigramme du calcul de la matrice de rigidité tangente globale.

III.6.6 - Organigramme du calcul de la matrice globale des forces nodales dues aux déplacements de ces noeuds.



III.6.1 - Organigramme du calcul statique



Calcul de  $K_{\alpha} (U^{(i)} - U_r)$

Calcul de  $\Delta U_{\alpha}^{(i)}$  par :  $\hat{K}_{\alpha\alpha} \cdot \Delta u_{\alpha}^{(i)} = \Delta R_{\alpha} - K_{\alpha} (U^{(i-1)} - U_r)$

Calcul de  $U_{\alpha}^{(i)}$  :  $U_{\alpha}^{(i)} = U_{\alpha}^{(i-1)} + \Delta U_{\alpha}^{(i)}$

Calcul de B :  $B = \|\Delta U_{\alpha}^{(i)}\|_2 / \|U_{\alpha}^{(i)} - U_{r\alpha}\|_2$

teste  $B - \epsilon$   
 $\leq 0$        $> 0$

test de petite ou grande déformation  
grande déf.      petite déf.

$\Delta R = \Delta R / 2$

$NH = NH + 1$

STOP      = 0

Réactualisation de la géométrie  
 $U_r = U$   
 $R_r = R_r + \Delta R$   
 $\Delta R = R - R_r$

$i - NL$   
 $< 0$   
 $\geq 0$   
non-convergence

III.6.2 - Organigramme du calcul dynamique : ( $\theta$ -WILSON méthode)

Données :  $\Delta t$  , JKD = nombre limite d'itérations, LIM = nombre limite de modification du pas  $\Delta t$  ,  $\theta$  ,  $\beta$  ,  $\lambda$  , T.

Définition de la configuration actuelle de référence par la donnée d'un champ de déplacement  $U_r$  par rapport à la configuration de référence initiale. Dans cette configuration le système est en équilibre statique sous  $R_r$ .

Données initiales à l'instant  $t = 0$   $U_0$  et  $\dot{U}_0$ .

Calcul de  $\ddot{U}_0$  par :  $M_0 \cdot \ddot{U}_0 = R(0, U_r, \dot{U}_0) - (U_0 - U_r) - C_0 \cdot \dot{U}_0 - R_r$

initialisation :  $\Delta t' = \Delta t$     LIM = 0    LRE = 0

jj = 0

jj = jj + 1

(jj : numéro du pas)

on calcule :  $\tau = \theta \Delta t$  ,  $a_1$  ,  $a_2$  , ...  $a_{14}$  ,  $t = t + \tau$

Introduction des déplacements connus des D.L. nonlibres  $U_\beta(t+\tau)$  par rapport à la configuration de référence initiale.

Calcul de la matrice globale de masse  $M_{t+\tau}$  et de la matrice de rigidité tangente globale  $K_T$  du riser, pour la configuration de référence actuelle.

formation de  $\hat{K}$  :  $\hat{K} = K_T + a_1 \cdot C_{t+\tau} + a_4 \cdot M_{t+\tau}$

on commence la première boucle d'itérations (de base)

On pose :  $j=0$  ,  $U_{\alpha}^{(0)}(t+\tau) = U_{\alpha}(t)$  ,  $U_{\beta}^{(0)}(t+\tau) = \text{donné}$

$j = j + 1$

on calcule :  
$$\ddot{U}_{t+\tau}^{(j-1)} = a_4 (U_{t+\tau}^{(j-1)} - U_t) + a_2 \dot{U}_t + a_3 \ddot{U}_t$$

Calcul de la matrice globale des forces extérieures appliquées aux noeuds à l'instant  $t+\tau$ .  $R(t+\tau, U_{t_r}, \dot{U}_{t+\tau}^{(j-1)})$

deuxième boucle d'itérations (internes)

on pose :  $i=0$  ,  $U_{\alpha}^{(0)}(t+\tau) = U_{\alpha}^{(j-1)}(t+\tau)$  ,  $U_{\beta}^{(0)}(t+\tau) = \text{donné}$

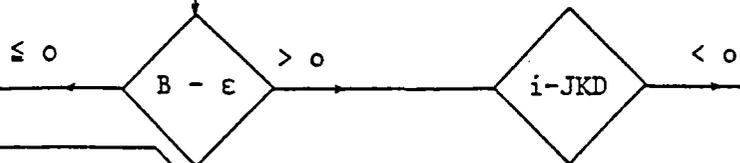
$i = i + 1$

calcul de  $\dot{U}_{t+\tau}^{(i-1)}$  et de  $K_{\alpha}(U_{t+\tau}^{(i-1)} - U_r)$

Calcul de  $\hat{R}_{\alpha}$  par (III-35)

Calcul de  $\Delta U_{\alpha}^{(i)}$  par (III-33) et ensuite :  $U_{\alpha}^{(i)}(t+\tau) = U_{\alpha}^{(i-1)}(t+\tau) + \Delta U_{\alpha}^{(i)}$

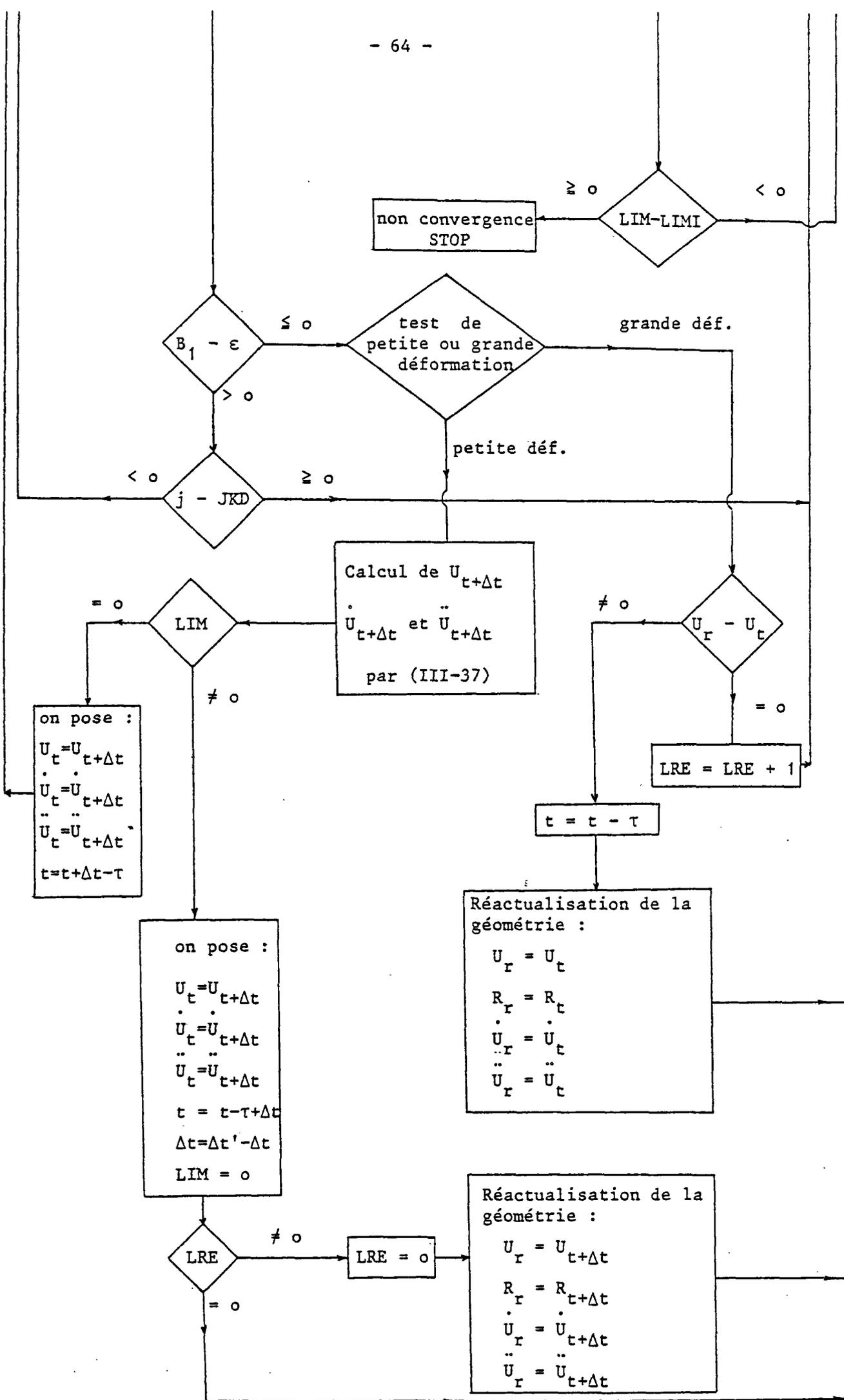
Calcul de B :  $B = \|\Delta U_{\alpha}^{(i)}\|_2 / \|U_{\alpha}^{(i)}(t+\tau) - U_{\alpha}(t)\|_2$



on pose :  $U_{\alpha}^{(j)}(t+\tau) = U_{\alpha}^{(i)}(t+\tau)$

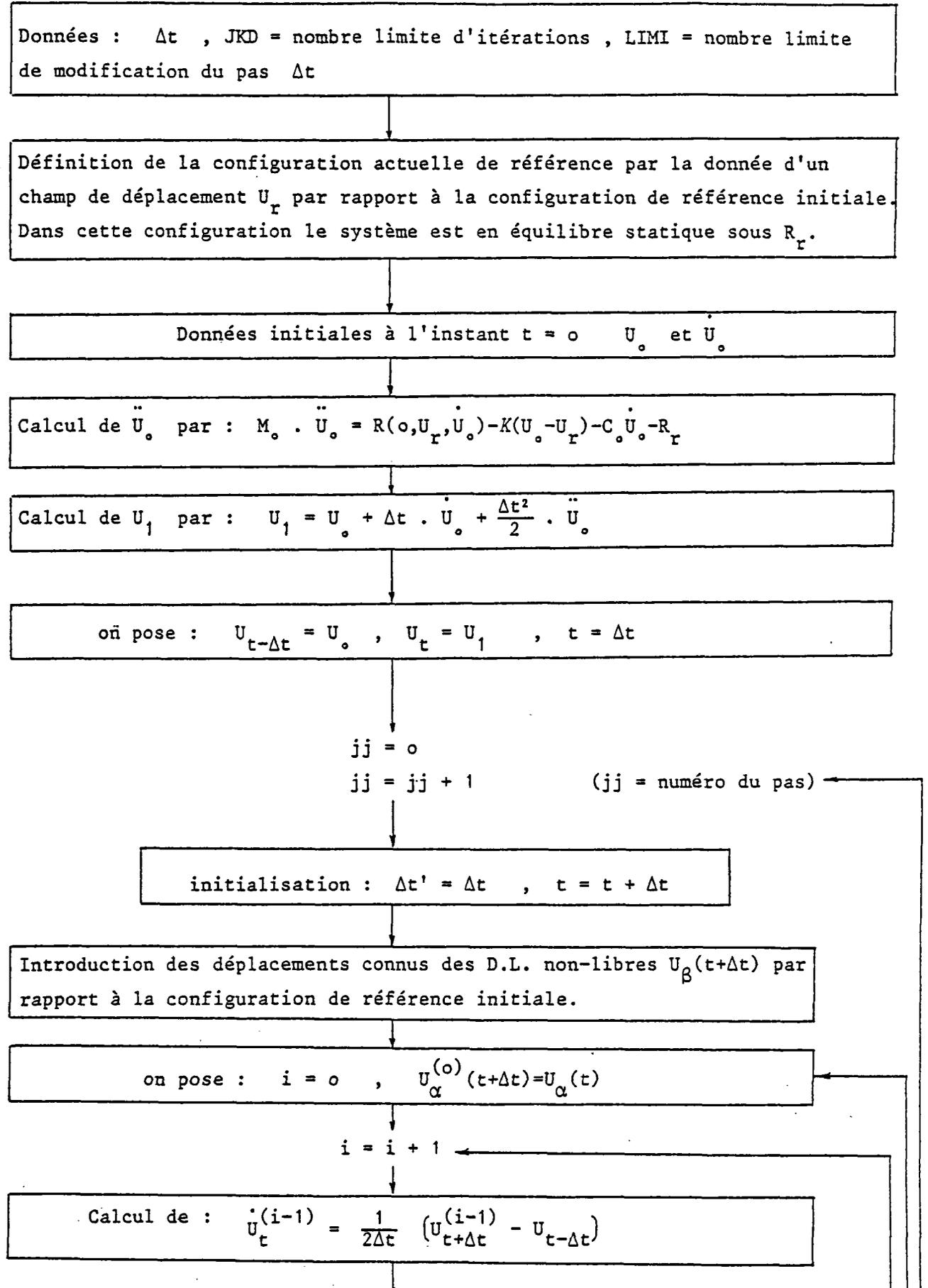
Calcul de  $B_1$  :  
$$B_1 = \|U_{\alpha}^{(j)}(t+\tau) - U_{\alpha}^{(j-1)}(t+\tau)\|_2 / \|U_{\alpha}^{(j)}(t+\tau)\|_2$$

$\Delta t = \Delta t / 2$   
 $\tau = \tau - \Delta t$   
 $LIM = LIM + 1$





III.6.3 - Organigramme du calcul dynamique (différences centrées)



Calcul de la matrice globale des forces extérieures appliquées aux nœuds ( $R_t$ ) et la matrice globale de masse  $M_t$  à l'instant  $t$ .

Calcul de  $\hat{M}_t = \frac{M_t}{(\Delta t)^2} + \frac{C_t}{2\Delta t}$  et de  $K_\alpha(U_t - U_r)$

Calcul de  $\hat{R}_\alpha$  par (III.15)

Calcul de  $U_\alpha^{(i)}(t+\Delta t)$  par (III.17)

Calcul de B :  $B = \|U_\alpha^{(i)}(t+\Delta t) - U_\alpha^{(i-1)}(t+\Delta t)\|_2 / \|U_\alpha^{(i)}(t+\Delta t)\|_2$

$B - \epsilon > 0$   
 $\leq 0$

$i - JKD \geq 0$   
 $< 0$

grande déf.  
 petite ou grande déformation  
 petite déf.

$U_t - U_r \neq 0$   
 $= 0$

on pose :  
 $\Delta t = \Delta t / 2$   
 $t = t - \Delta t$   
 $LIM = LIM + 1$

LIM - LIM1  
 $< 0$   
 $\geq 0$   
 STOP

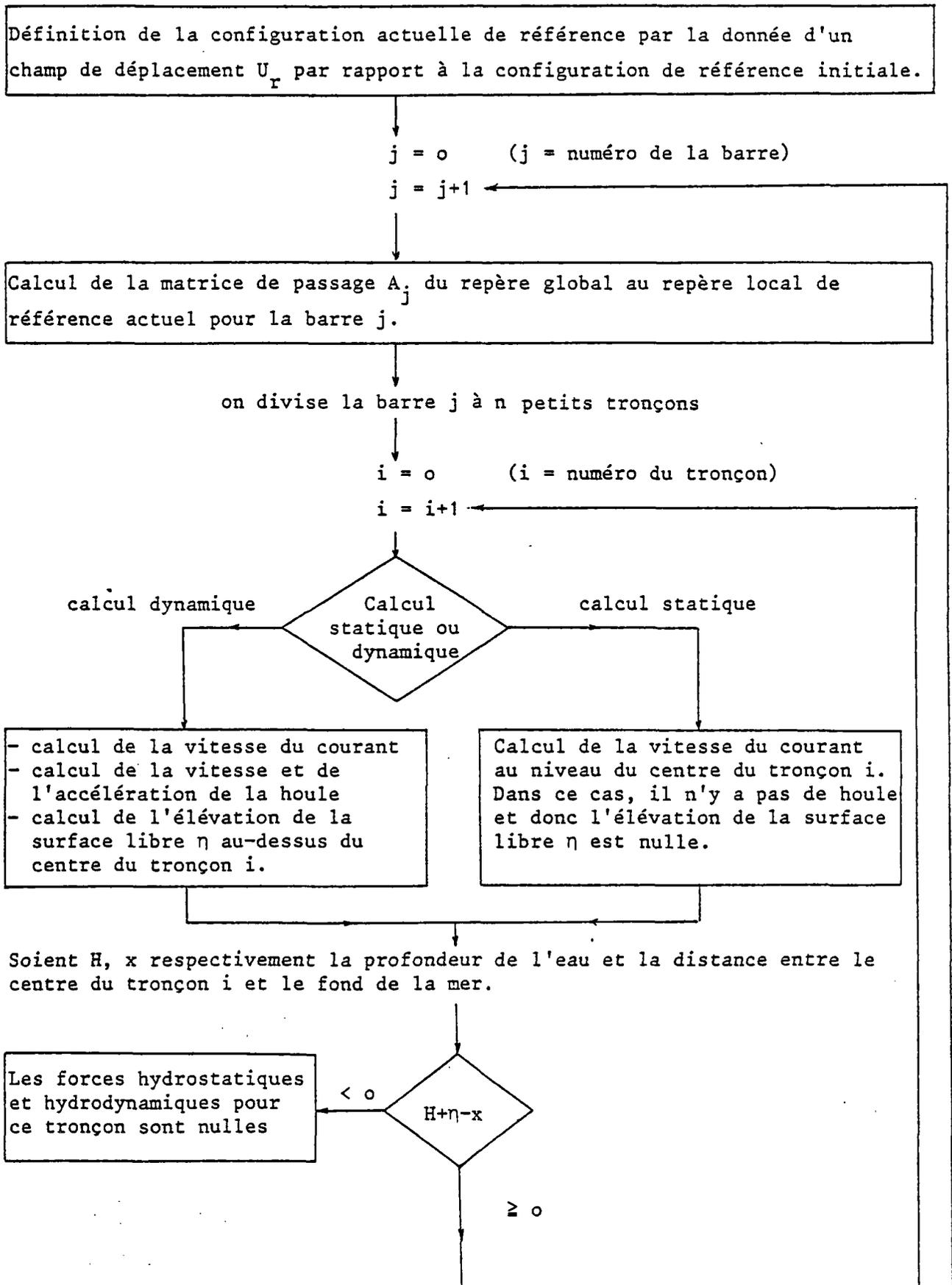
$\Delta t - \Delta t' = 0$   
 $\neq 0$

un pas de calcul est fini. on pose :  
 $U_{t-\Delta t} = U_t$   
 $U_t = U_{t+\Delta t}$

Réactualisation de la géométrie :  
 $U_r = U_t$   
 $R_r = R_t$

Réactualisation de la géométrie :  
 $U_{t-\Delta t} = U_t$   
 $U_t = U_{t+\Delta t}$   
 $U_r = U_{t+\Delta t}$   
 $R_r = R_{t+\Delta t}$   
 $\Delta t = \Delta t' - \Delta t$   
 $\Delta t' = \Delta t$

III.6.4 - Organigramme du calcul de la matrice globale des forces extérieures à l'instant t

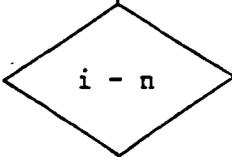


Calcul des forces hydrodynamiques  $F'_d(j,i)$ , hydrostatiques  $F'_s(j,i)$  et poids propre  $F'_p(j,i)$  exercées sur le tronçon  $i$  dans son repère local de référence actuel.

on superpose toutes les forces extérieures exercées sur le tronçon  $i$  dans le repère local de référence actuel.  $F'_{(j,i)} = F'_d(j,i) + F'_s(j,i) + F'_p(j,i)$

Calcul des forces équivalentes exercées aux extrémités de l'élément  $j$  dues aux forces  $F'_{(j,i)}$  exercées sur le tronçon  $i$  dans le repère local de référence actuel  $F_e^{(i)}$

Calcul des forces équivalentes dans le repère global.  $F_e^{(i)} = A_j^T \cdot F_e^{(i)}$  et ensuite on superpose  $F_e^{(i)}$  pour  $i=1, \dots, n$   $F_e^{(j)} = \sum_i F_e^{(i)}$



$\leq 0$

$> 0$

on transporte la matrice  $F_e^{(i)}$  dans la matrice globale.  
 $R_t = \sum_j F_e^{(j)}$

III.6.5 - Organigramme du calcul de la matrice de rigidité tangente globale à l'instant t

Définition de la configuration actuelle de référence et de la configuration du système à l'instant t, par les champs de déplacement  $U_r$  et  $U_t$  donnés par rapport à la configuration de référence initiale.

$j = 0$  (j = numéro de la barre)

$j = j+1$

Calcul de la matrice de passage  $A_j$  du repère global au repère local de référence actuel pour la barre j.

Calcul de l'effort normal aux extrémités de l'élément j à l'instant t dans le repère local de référence actuel.

Calcul de la matrice de rigidité tangente de l'élément j dans son repère local de référence actuel.  $K_t = K + K_G$

Calcul de la matrice de rigidité tangente de l'élément j dans le repère global.

$$K_j = A_j^T \cdot K_t \cdot A_j$$

on transporte la matrice  $K_j$  dans la matrice globale de rigidité.

$$K_T = \sum_j K_j$$

III.6.6 - Organigramme du calcul de la matrice globale des forces nodales dues aux déplacements de ces noeuds à l'instant t.  $K(u)$  :

Définition de la configuration actuelle de référence et de la configuration du système à l'instant t, par les champs de déplacements  $U_r$  et  $U_t$  donnés par rapport à la configuration de référence initiale.

$j = 0$  (j = numéro de la barre)

$j = j+1$

Calcul de la matrice de passage  $A_j$  du repère global au repère local de référence actuel pour la barre j.

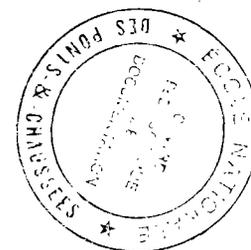
Calcul des déplacements aux extrémités de la barre j entre l'instant de référence actuel et l'instant t dans le repère global.  $U_e = U_r - U_t$

Transformation de  $U_e$  dans le repère local de référence actuel.  $U = A_j \cdot U_e$

En ayant U on peut calculer les forces nodales internes dues aux déplacements dans le repère local de référence actuel  $K'_j(U)$

Transformation de  $K'_j(U)$  dans le repère global  $K_j(U) = A_j^T \cdot K'_j(U)$

Assemblage de la matrice globale :  $K(U) = \sum_j K_j(U)$



## C H A P I T R E   I V

### APPLICATION NUMERIQUE

Nous avons développé un programme de calcul informatique en Fortran, basé sur les développements des chapitres précédents, qui permet d'étudier le comportement statique et dynamique des risers en faible ou grande profondeur, le comportement étant alors linéaire ou non-linéaire d'un point de vue structure mais globalement non-linéaire de par les interactions fluide-structure. A l'aide de ce programme, on peut traiter les problèmes suivants :

1 - Etude du comportement statique linéaire ou non-linéaire du riser sous les effets :

du poids propre, de la tension en tête, des forces hydrostatiques, des forces hydrodynamiques (courant) et des déplacements imposés statiquement en tête du riser.

2 - Etude du comportement dynamique linéaire ou non-linéaire du riser sous les effets :

du poids propre, de la tension fonction du temps en tête, des forces hydrostatiques, des forces hydrodynamiques (houle + courant) et des déplacements imposés fonction du temps en tête.

A l'aide de ce programme, nous avons étudié une série d'exemples relatifs à :

- 1) un Riser vertical de faible profondeur (96 m).
- 2) un Riser vertical de grande profondeur (1200 m).
- 3) un tube horizontal de 100 mètres de long près de la surface libre de l'eau.

#### IV.1 CAS D'UN RISER DE 96 METRES

##### - Modélisation du riser

Le riser considéré a une longueur de 96 m. La modélisation est constituée de 12 éléments poutres qui ont des caractéristiques mécaniques identiques. Les 13 noeuds de la modélisation sont numérotés de 1 à 13.

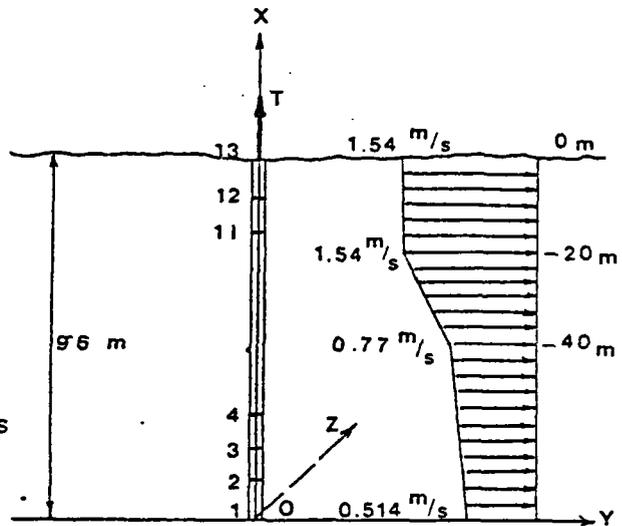


FIGURE (IV-1)

Le noeud 1 est à la base, le noeud 13 au sommet. Le riser est repéré dans un système d'axe orthonormé Oxyz. L'origine 0 est située au pied du riser (noeud 1), l'axe Ox est vertical.

##### - Caractéristiques mécaniques des éléments

. Diamètre extérieur du tube	$D1 = 300 \text{ mm}$
. Diamètre intérieur du tube	$D2 = 270 \text{ mm}$
. L'aire de la section du tube	$S = 134 \text{ cm}^2$
. Moment d'inertie de flexion	$I = 13700 \text{ cm}^4$
. Moment d'inertie de torsion	$J = 27400 \text{ cm}^4$
. Module d'élasticité transversale	$G = 0.84 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
. Module d'élasticité longitudinale.	$E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
. Masse volumique du riser.	$\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

Les différents exemples traités pour ce riser sont les suivants.

#### IV.1.1 CAS 1

##### 1- Type de calcul :

Calcul statique non-linéaire, plan (Oxy) sans réactualisation de géométrie.

Le nombre de D.L. libres = 35

Le nombre de D.L. bloqués = 4

##### 2- Configuration de référence :

Le riser est supposé vertical dans sa configuration de référence et a un état de contrainte nul.

##### 3- Conditions aux limites de déplacements aux noeuds 13 (tête) et 1 (pied) :

###### a- en tête (noeud 13) :

{ D.L. libres = 2 (translation Ox et rotation Oz)  
D.L. bloqué = 1 (translation Oy)

###### b- au pied (noeud 1) :

{ D.L. libre = 0  
D.L. bloqués = 3

##### 4- Les forces appliquées

###### a- au noeud 13 (tête):

En tête, il n'y a qu'une tension appliquée suivant Ox :  
 $T_{top} = 600\ 000\ N.$

###### b- aux autres noeuds :

{ . poids propre  
  . forces hydrostatiques  
  . Courant dans le plan Oxy dont le profil est donné à la figure IV-1.

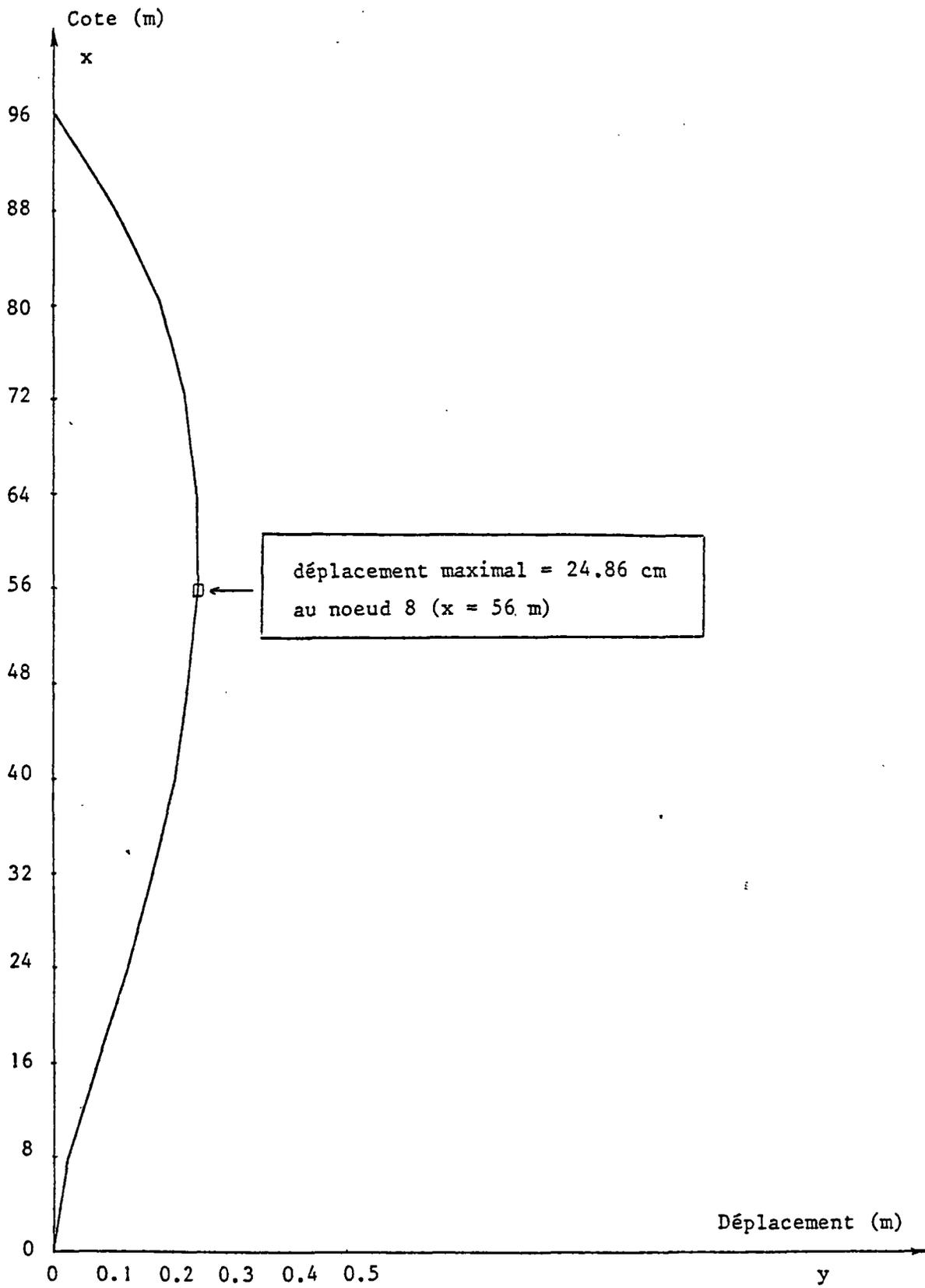
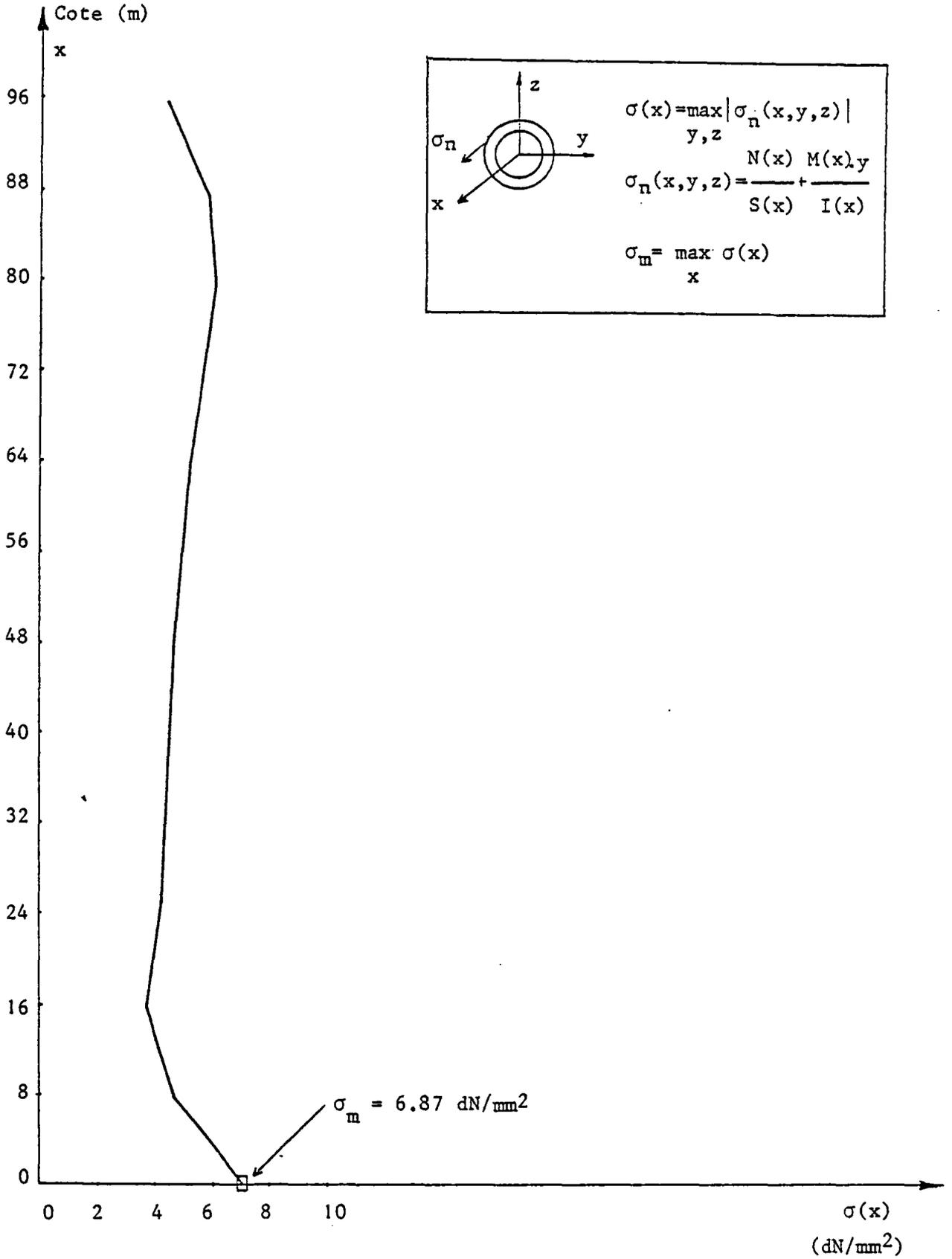


FIGURE IV-2 - Déplacements horizontaux à l'équilibre, cas 1.



**FIGURE IV-3** - Contrainte normale maximale dans chaque section du riser en fonction de la cote de la section pour la position d'équilibre, cas 1.

#### IV.1.2 CAS 2

##### 1- Type de calcul :

Calcul dynamique nonlinéaire plan (xOy) sans réactualisation de géométrie.

Le nombre de D.L. libres = 35

Le nombre de D.L. bloqués = 4

##### 2- Configuration de référence :

La configuration d'équilibre statique du riser obtenu au cas 1 est prise comme la configuration de référence du cas 2. L'état de contrainte n'est pas nul. Il y a un effort normal initial dans chaque barre qui est l'effort normal obtenu à l'équilibre du cas 1.

##### 3- Conditions aux limites de déplacements aux noeuds 13 (tête) et 1 (pied) :

a- en tête (noeud 13) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{D.L. libres} = 2 \text{ (translation } ox \text{ et rotation } oz) \\ \text{Déplacement imposé suivant } oy : y(t) = 1.50 \sin\left(\frac{2\pi t}{6}\right) \end{array} \right.$$

b- au pied (noeud 1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{D.L. libre} = 0 \\ \text{D.L. bloqués} = 3 \end{array} \right.$$

##### 4- Les forces appliquées

a- en tête (noeud 13) :

On applique une tension suivant ox :  $T(t) = T_{\text{top}} \left(1 + 0.025 \sin \frac{2\pi t}{6}\right)$   
avec  $T_{\text{top}} = 600\,000 \text{ N}$

b- aux autres noeuds :

Même chose que pour le cas 1.

5- Précision sur le calcul :

Le pas d'intégration est pris égal à 0.1 sec.

Pour supprimer rapidement la contribution du régime transitoire nous avons appliqué un amortissement numérique pour  $t \in [0, 6.s]$ , de taux 0.8 à  $t=0$  et décroissant linéairement jusqu'à 0. pour  $t=6$  sec.

Le régime stationnaire est atteint à  $t = 3T = 18$  sec.

Le nombre de pas de calcul pour ce cas a donc été 180 pas.

Remarque :

On a traité le même exemple linéairement du point de vue structure, en supposant que la matrice de rigidité tangente du riser obtenue sous l'effet du poids propre, tension en tête et poussée hydrostatique, reste constante au cours de ces calculs.

Les résultats obtenus dans ce cas, sont à peu près les mêmes que ceux obtenus par le calcul non-linéaire.

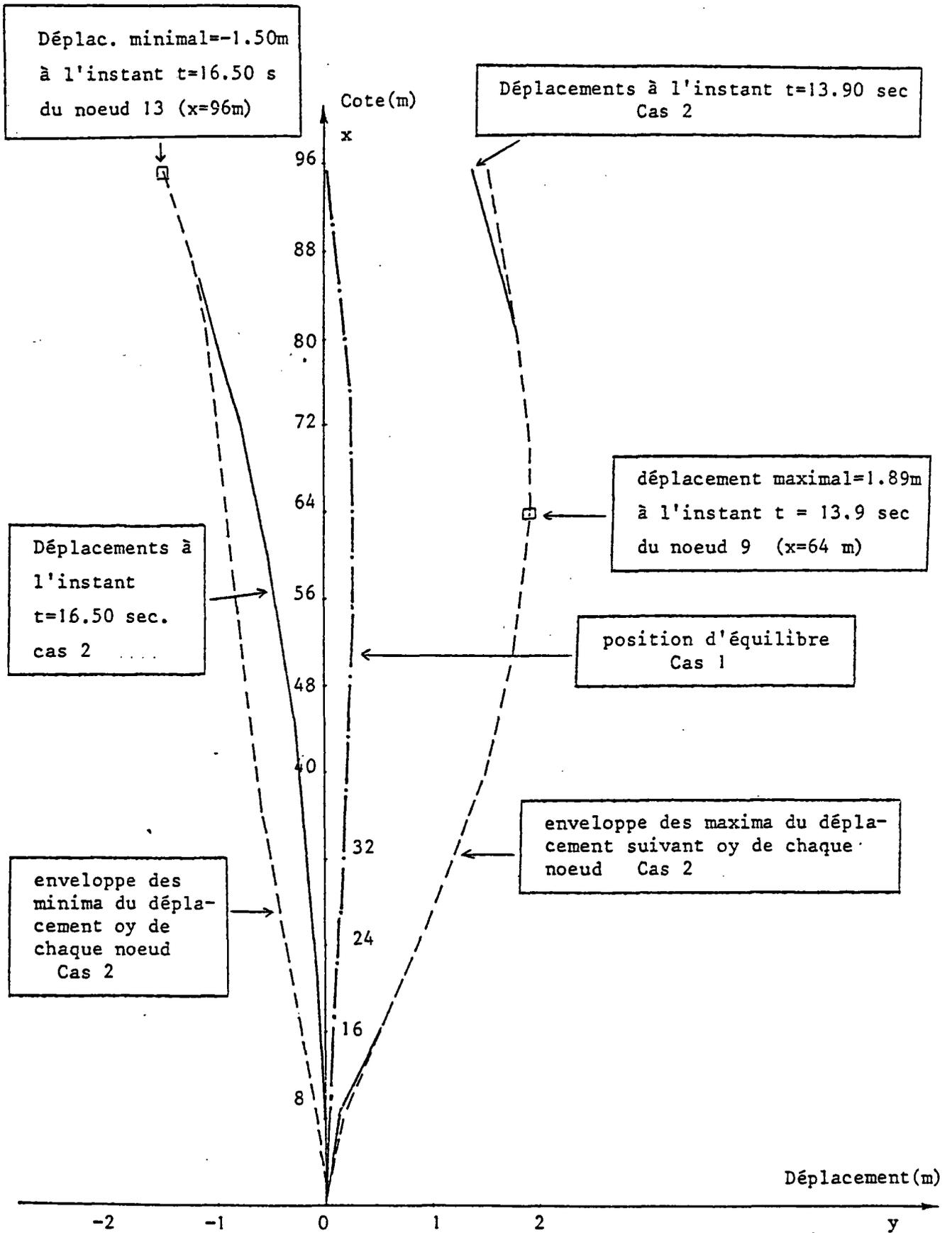


FIGURE IV-4 - Déplacements suivant oy des noeuds du riser à différents instants cas 2, et enveloppe des maxima et des minima.

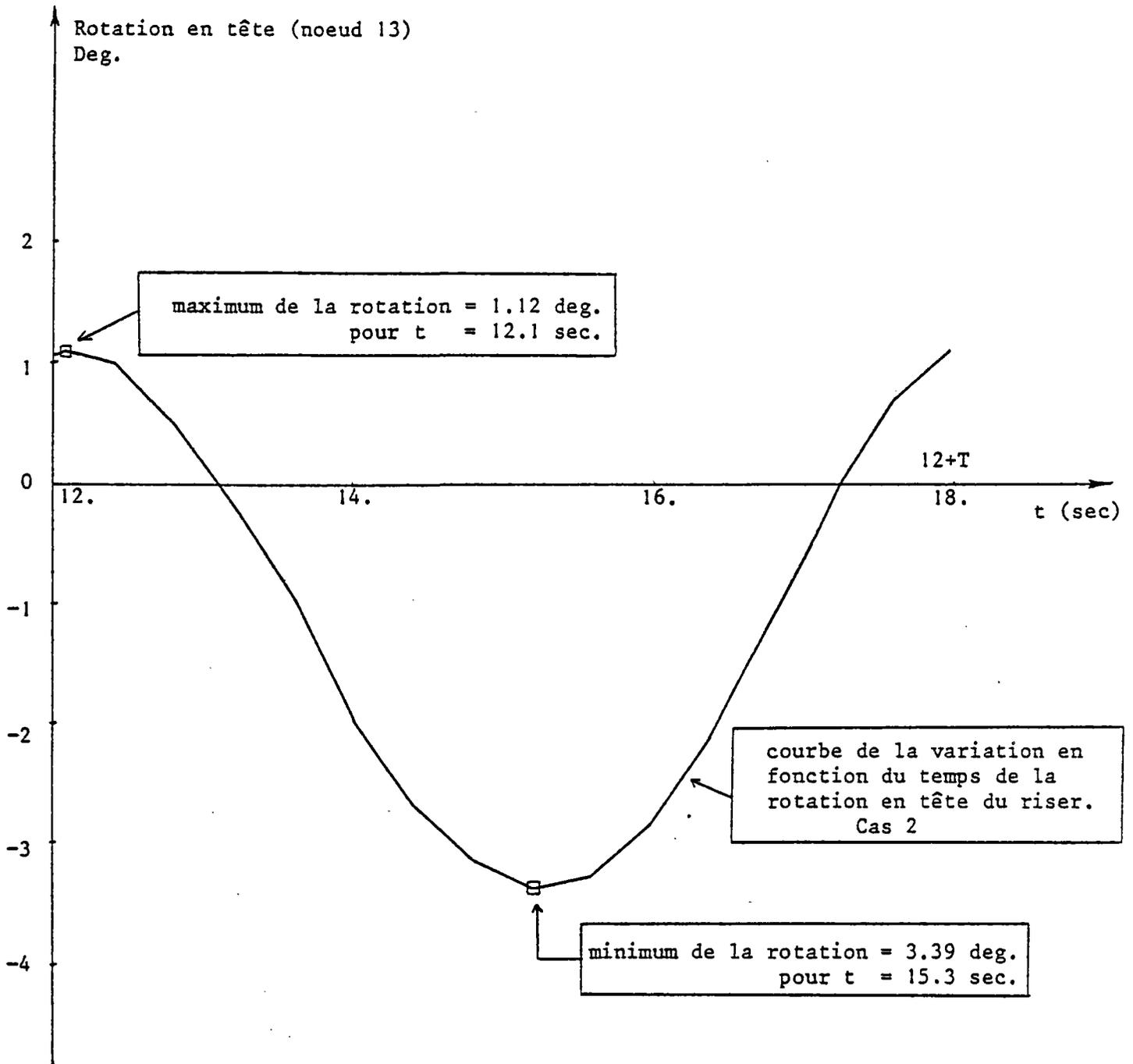


FIGURE IV-5 - Rotation en tête (noeud 13) en fonction du temps, Cas 2  
Les déplacements du riser pour les instants  $t=12.1$  et  $t=15.3$  correspondant au max et au min sont donnés à la figure IV-7.

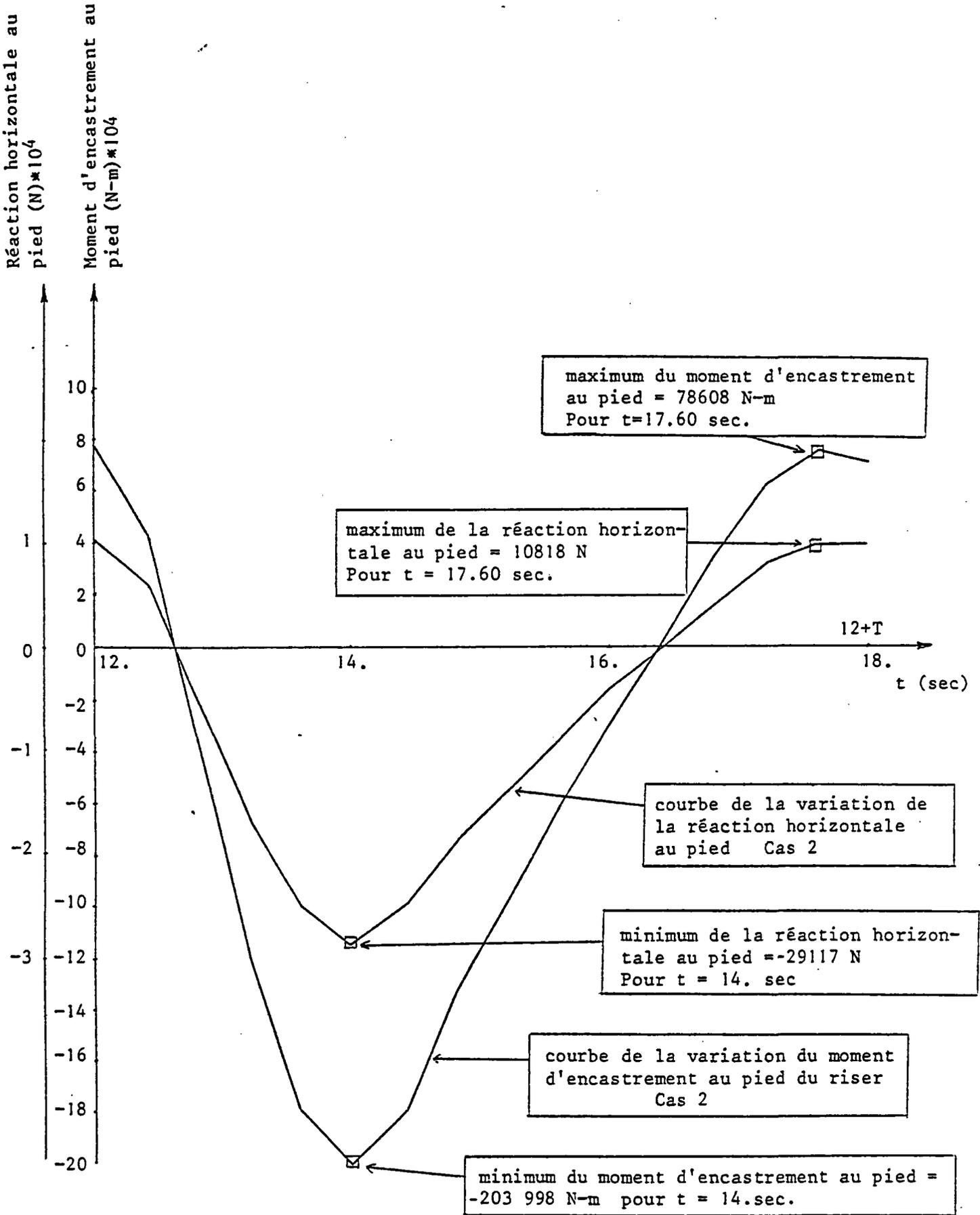


FIGURE IV-6 - Variation en fonction du temps de la réaction suivant  $o_y$  et du moment d'encastrement suivant  $o_z$  au pied (noeud 1), Cas 2. Les déplacements du riser pour les instants  $t=14$  et  $t=17.6$  sont donnés à la figure IV-7.

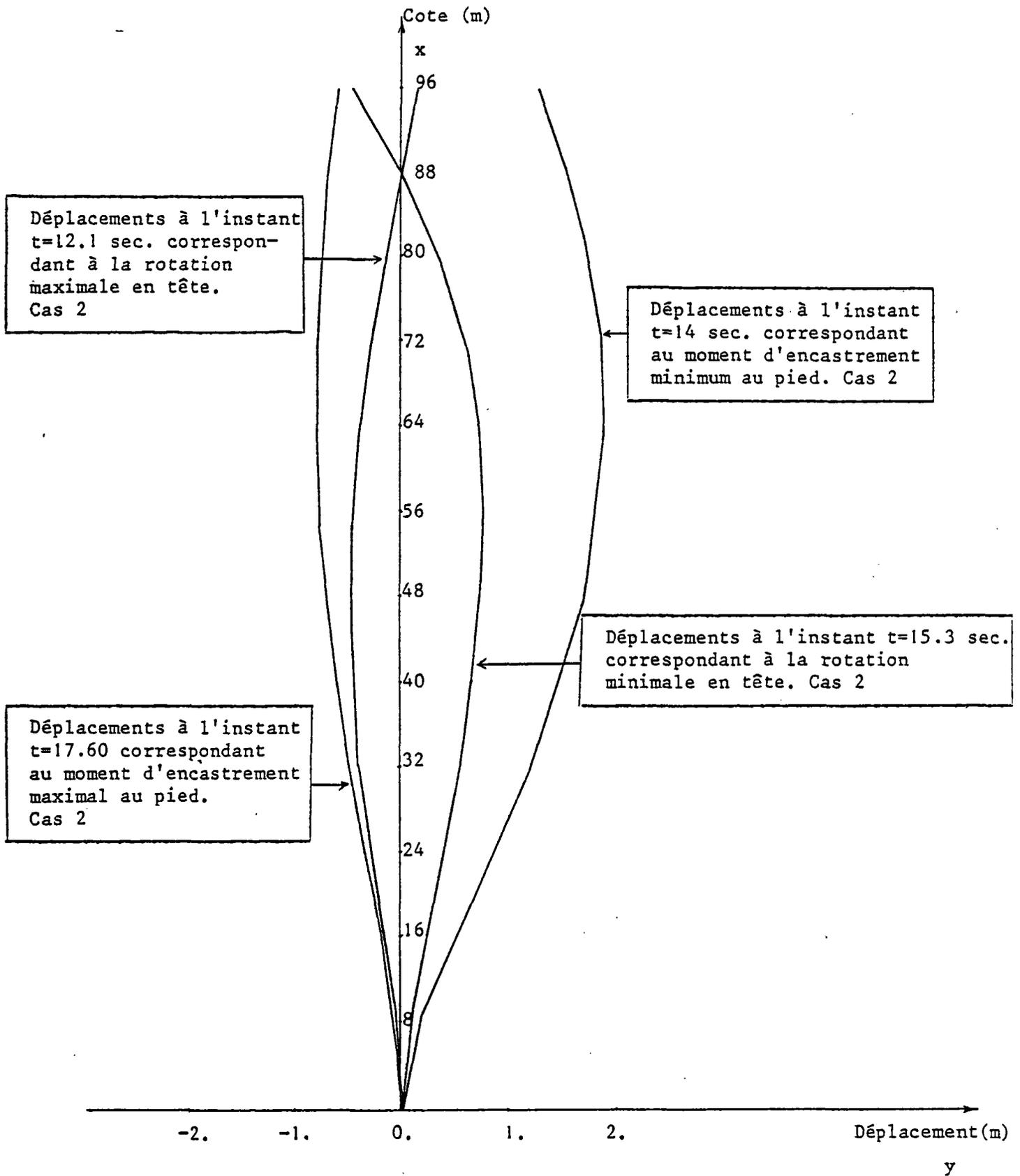
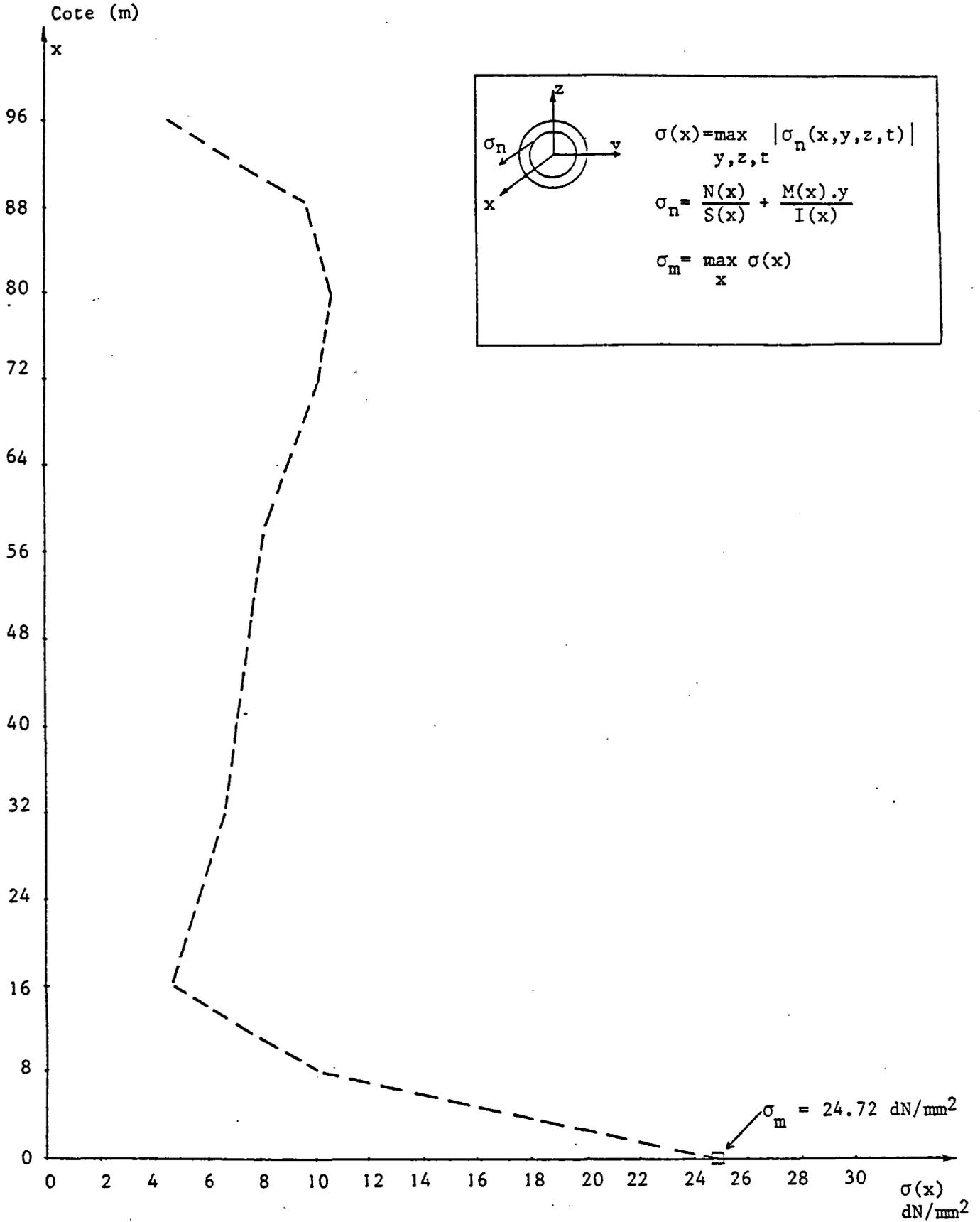


FIGURE IV-7 - Déplacements suivant oy des noeuds du riser à différents instants correspondant aux rotations max et min en tête et aux moments d'encastrement max et min au pied. Cas 2



FIGUREIV-8 - Enveloppe de la contrainte normale maximale dans chaque section du riser en fonction de la cote de la section  
Cas 2

### IV.1.3 CAS 3

#### 1- Type de calcul :

Calcul dynamique nonlinéaire plan (xoy) sans réactualisation de géométrie.

Le nombre de D.L. libres = 35

Le nombre de D.L. bloqués = 4

#### 2- Configuration de référence :

La configuration d'équilibre statique du riser obtenu au cas 1 est prise comme la configuration de référence du cas 3. L'état de contrainte dans la configuration de référence n'est donc pas nul.

#### 3- Conditions aux limites de déplacements aux noeuds 13 (tête) et 1 (pied) :

##### a- En tête (noeud 13)

$$\begin{cases} \text{D.L. libres} = 2 & (\text{translation } ox, \text{ rotation } oz) \\ \text{D.L. bloqué} = 1 & (\text{translation } oy) \end{cases}$$

##### b- Au pied (noeud 1)

$$\begin{cases} \text{D.L. libre} = 0 \\ \text{D.L. bloqués} = 3 \end{cases}$$

#### 4- Les forces appliquées :

##### a- en tête (noeud 13):

On applique une tension en tête suivant ox :

$$T(t) = T_{\text{top}} \left( 1 + 0.025 \sin \frac{2\pi}{6} t \right) \quad , \quad T_{\text{top}} = 600\,000 \text{ N}$$

b- aux autres noeuds :

- poids propre
- forces hydrostatiques
- courant dans le plan oxy dont le profil est donné à la figure IV-1.
- Houle d'Airy (profondeur infinie) ayant une amplitude de 3 m (crête à creux = 6 m), une période de 6 sec., et se propageant suivant oy positif.

5- Précision sur le calcul

Le pas d'intégration pour le calcul est pris égal à 0.20 sec. L'amortissement numérique choisi est identique à celui utilisé dans le cas 2.

Le régime stationnaire est atteint à  $t = 4T = 24$  secondes. Le nombre de pas de calcul est donc 120.

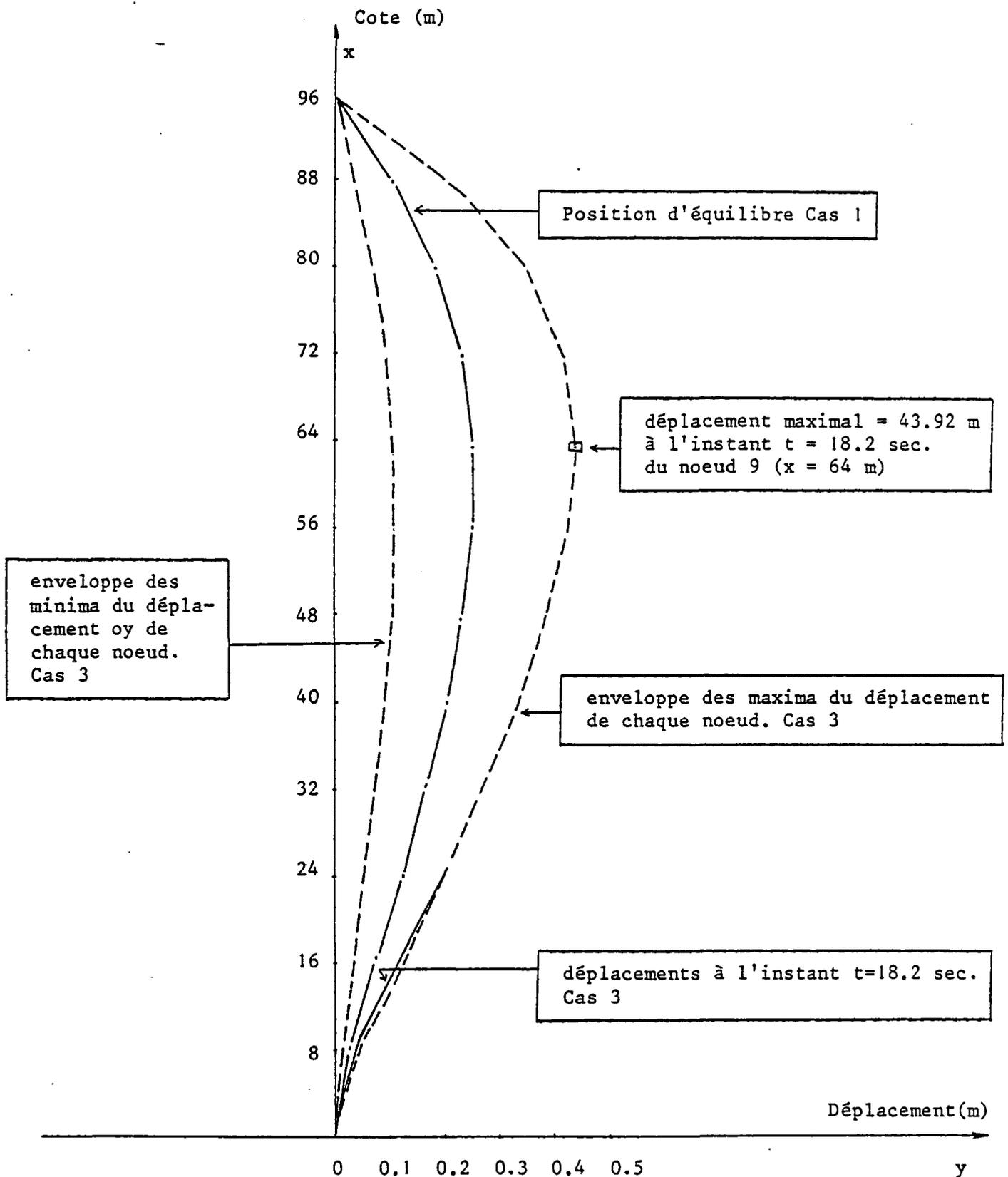


FIGURE IV-9 - Déplacements suivant oy des noeuds du riser à l'instant  $t = 18.2$  et enveloppe des maxima et minima. Cas 3

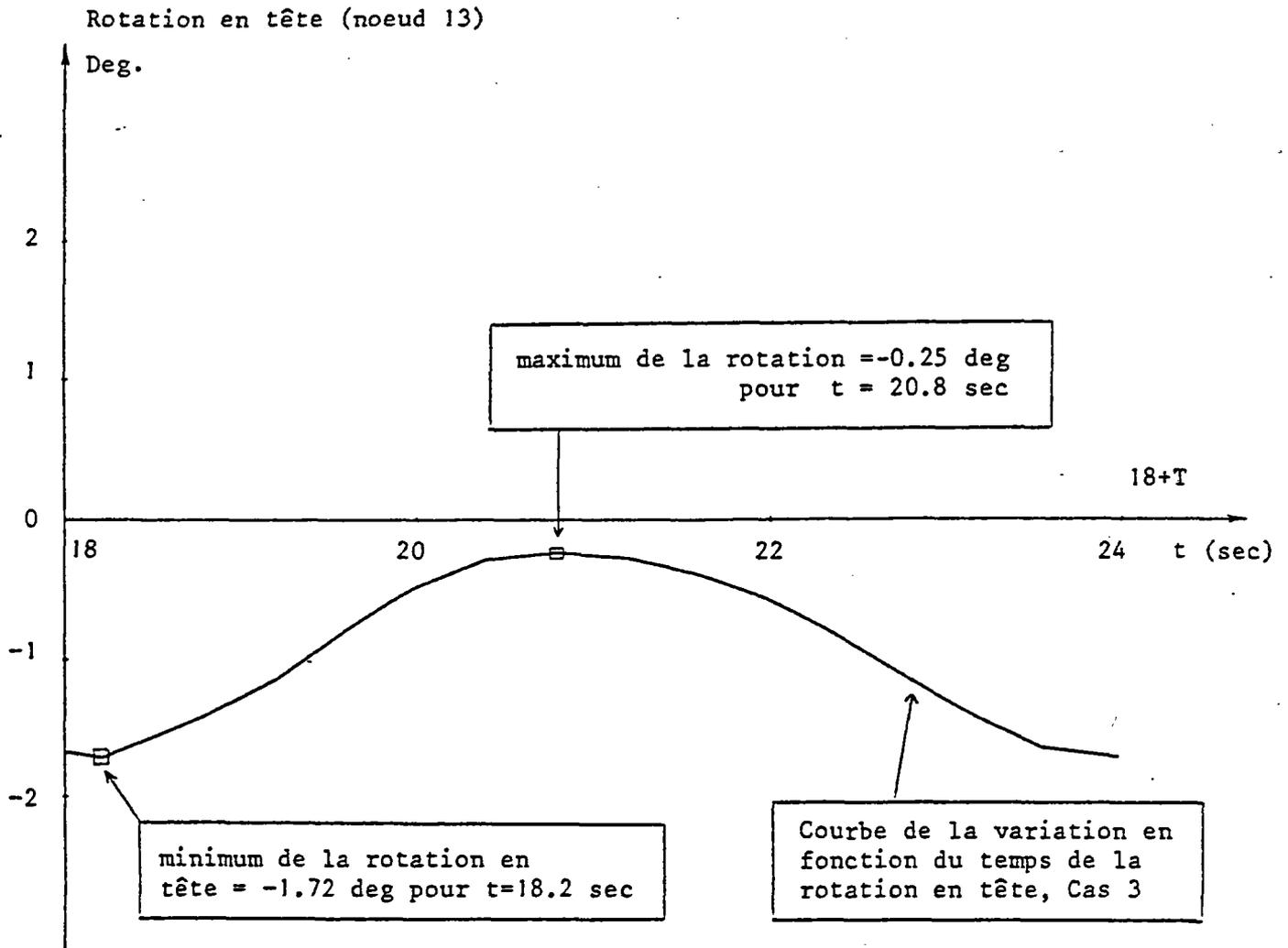


FIGURE IV-10 - Rotation en tête (noeud 13) en fonction du temps. Cas 3  
Les déplacements du riser pour les instants  $t = 18.2$   
et  $t = 20.8$  qui correspondent au min et au max sont  
donnés à la figure IV-12.

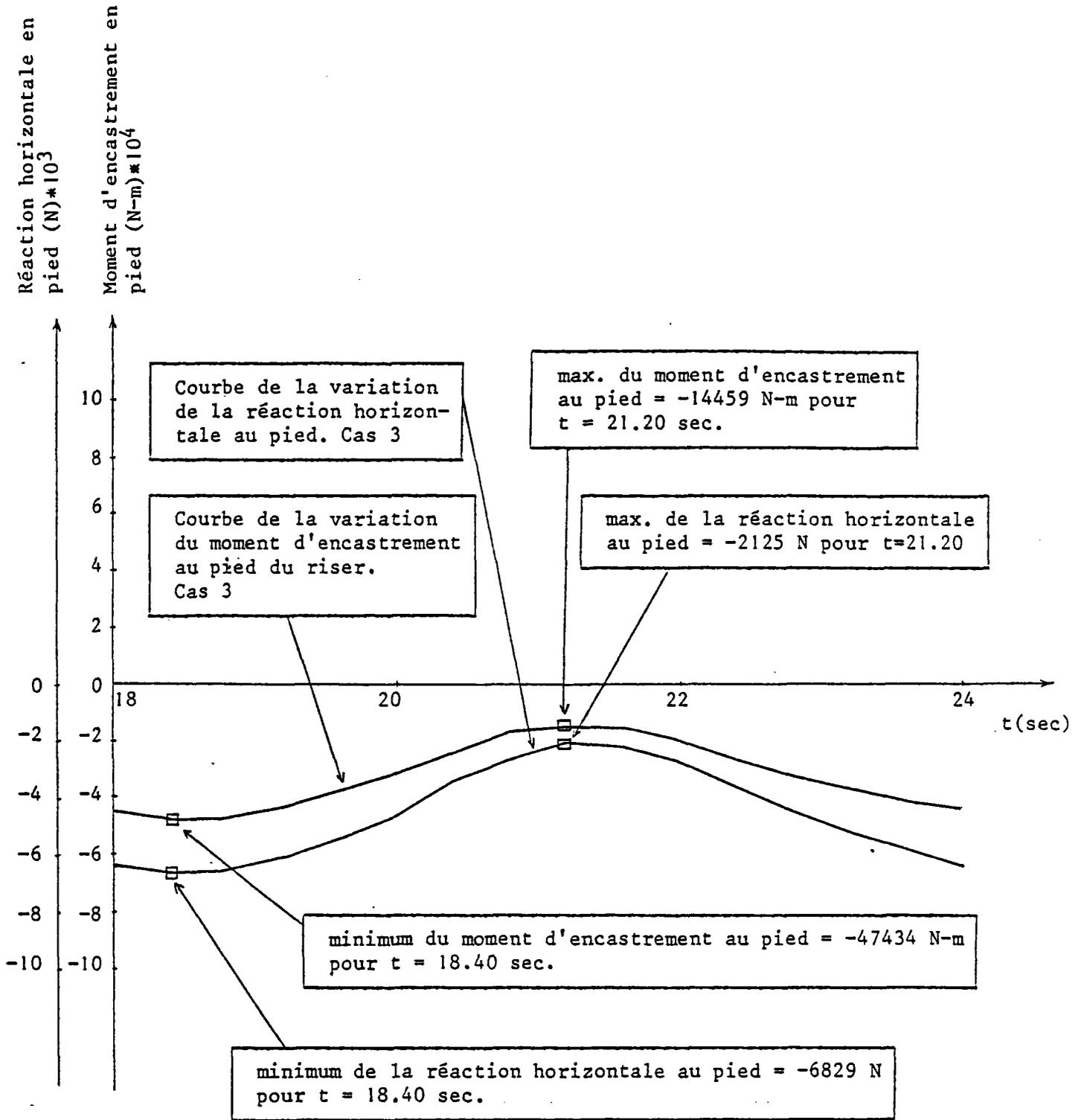


FIGURE IV-11 : Variation en fonction du temps de la réaction suivant  $o_y$  et du moment d'encastrement suivant  $o_z$  au pied (noeud 1), Cas 3. Les déplacements du riser pour les instants  $t = 18.40$  et  $t = 21.20$  sont donnés à la figure IV-12.

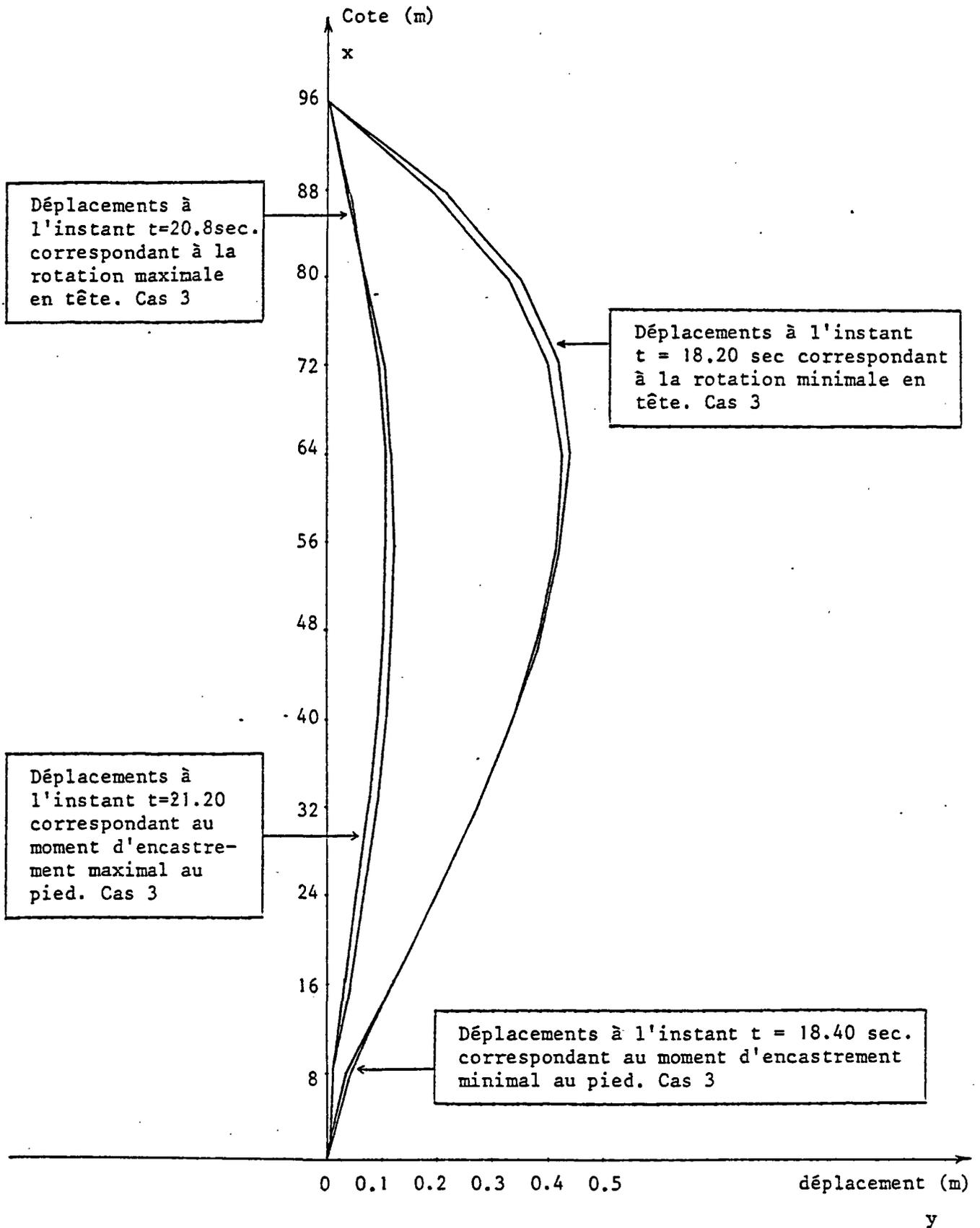
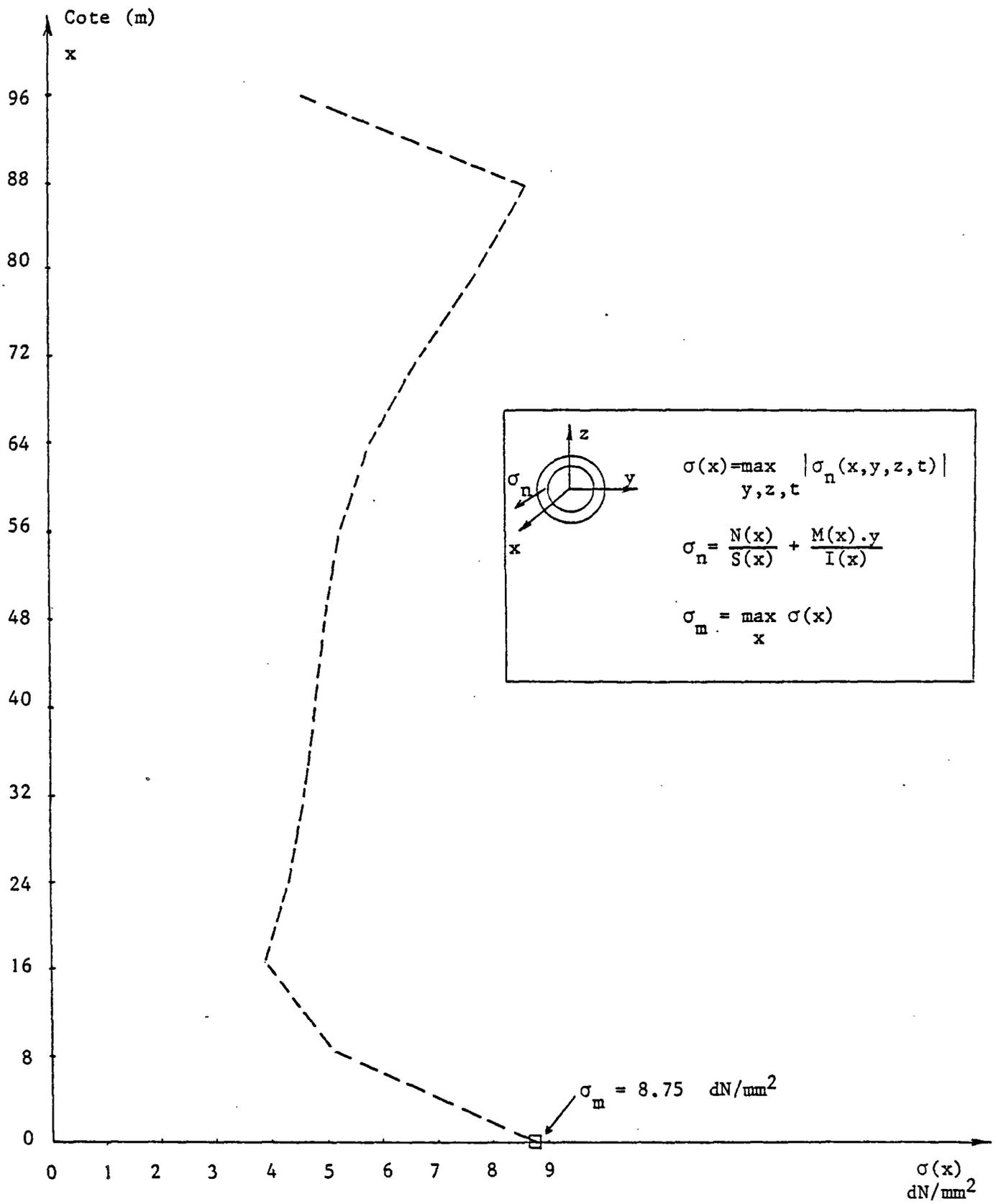


FIGURE IV-12 - Déplacements suivant oy des noeuds du riser à différents instants correspondant aux rotations max et min en tête et aux moments d'encastrement max et min au pied: Cas 3



**FIGURE IV-13** : Enveloppe de la contrainte normale maximale dans chaque section du riser en fonction de la cote de la section. Cas 3.

#### IV.1.4 CAS 4

##### 1- Type de calcul :

Calcul dynamique nonlinéaire plan (xoy) sans réactualisation de géométrie.

Le nombre de D.L. libres = 35

Le nombre de D.L. bloqués = 4

##### 2- Configuration de référence :

La configuration d'équilibre statique du riser obtenu au Cas 1 est prise comme la configuration de référence du cas 4. L'état de contrainte dans la configuration de référence n'est donc pas nul.

##### 3- Conditions aux limites de déplacements aux noeuds 13 (tête) et 1 (pied) :

###### a- en tête (noeud 13) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{D.L. libres} = 2 \text{ (translation } ox \text{ ; rotation } oz) \\ \text{Déplacement imposé suivant } oy : y(t) = 1.50 \sin \left( \frac{2\pi}{6} t \right) \end{array} \right.$$

###### b- au pied (noeud 1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{D.L. libre} = 0 \\ \text{D.L. bloqués} = 3 \end{array} \right.$$

##### 4- Les forces appliquées :

###### a- en tête (noeud 13) :

On applique une tension en tête suivant  $ox$  :

$$T(t) = T_{\text{top}} \left( 1 + 0.025 \sin \frac{2\pi}{6} t \right) , T_{\text{top}} = 600\,000 \text{ N}$$

###### b- aux autres noeuds :

Même chose que pour Cas 3.

5- Précision sur le calcul :

Le pas d'intégration pour le calcul est pris égal à 0.10 sec.

L'amortissement numérique choisi est identique à celui utilisé dans le cas 2.

Le régime stationnaire est atteint à  $t = 3T = 18$  secondes. Le nombre de pas de calcul est donc 180.

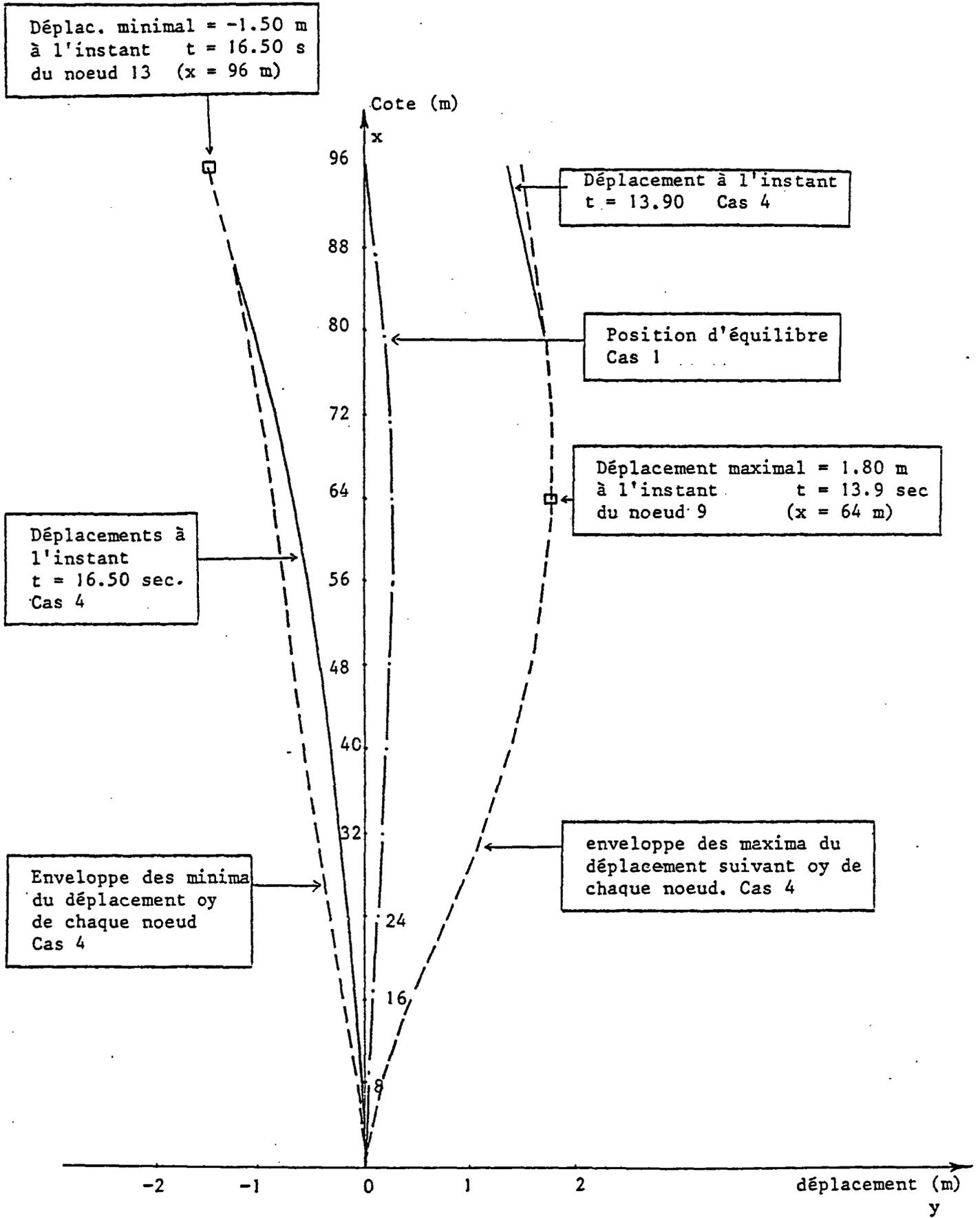
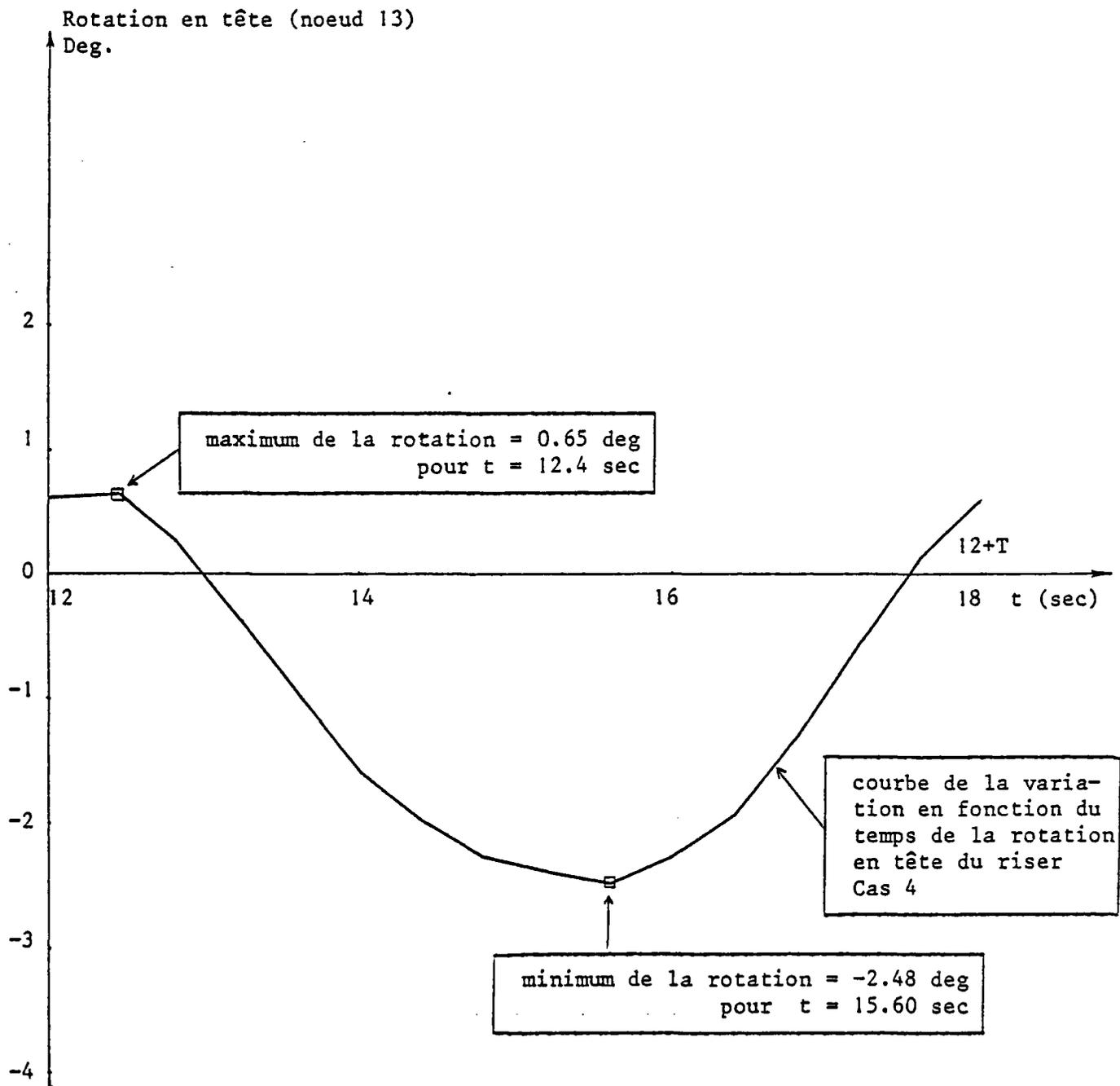
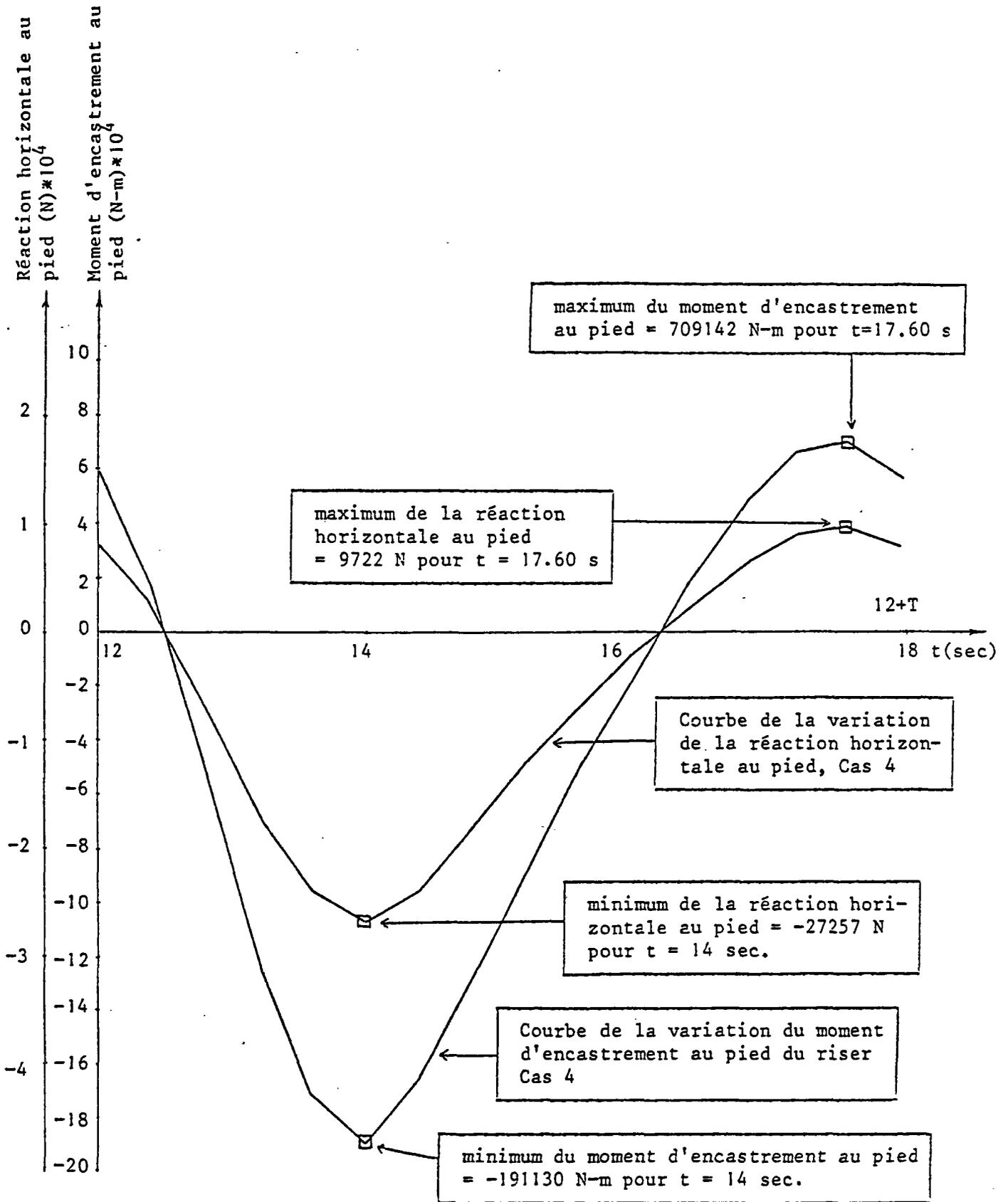


FIGURE IV-14 : Déplacements suivant  $oy$  des noeuds du riser à différents instants, Cas 4, et enveloppe des maxima et des minima.



**FIGURE IV-15** : Rotation en tête (noeud 13) en fonction du temps, Cas 4. Les déplacements du riser pour les instants  $t = 12.4$  et  $t = 15.60$  correspondant au max et au min sont donnés à la figure IV-17.



**FIGURE IV-16** : Variation en fonction du temps de la réaction suivant  $o_y$  et du moment d'encastrement suivant  $o_z$  au pied (noeud 1), Cas 4. Les déplacements du riser pour les instants  $t = 14$  et  $t = 17.60$  sont donnés à la figure IV-17.

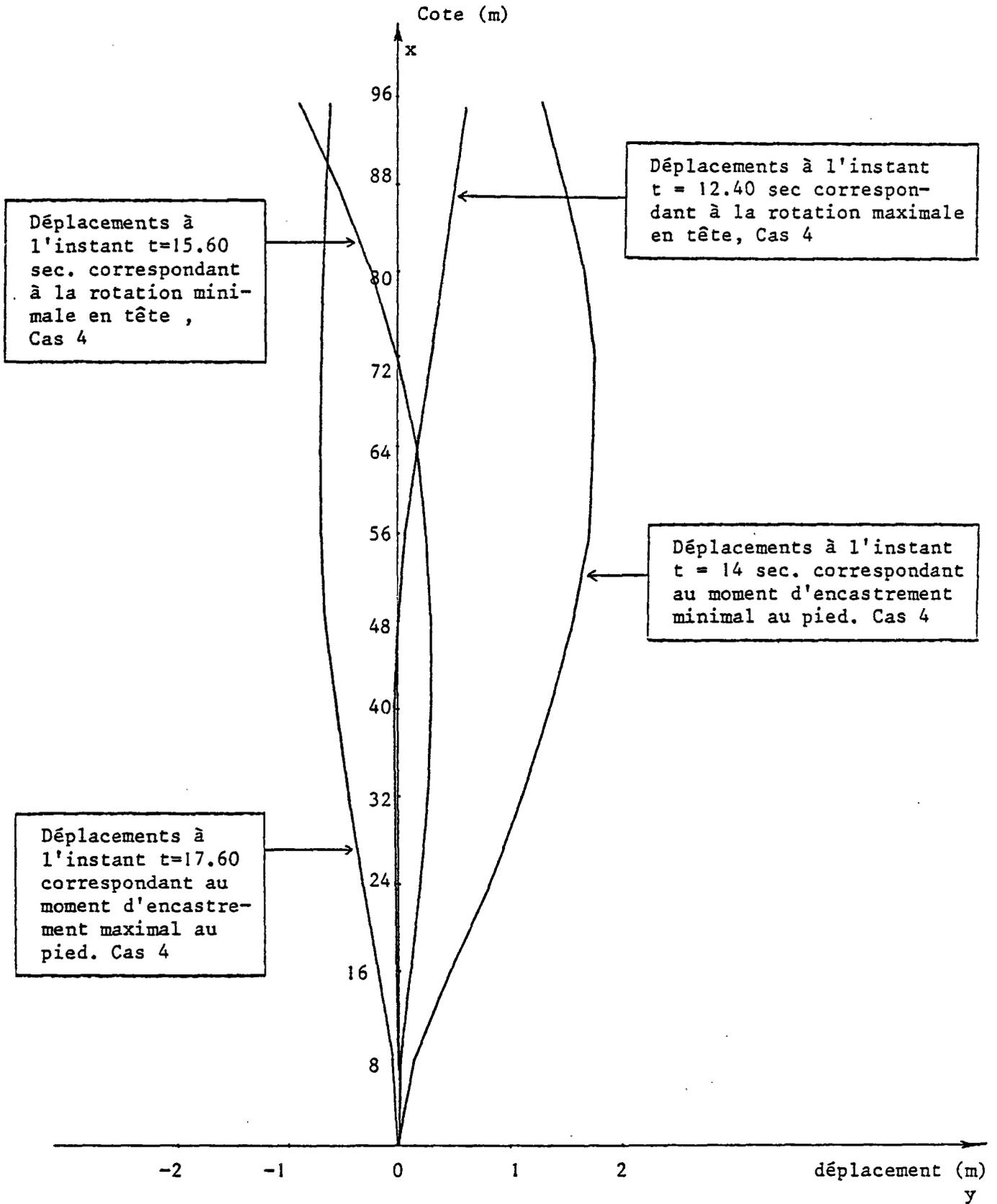


FIGURE IV-17 : Déplacements suivant oy des noeuds du riser à différents instants correspondant aux rotations max et min en tête et aux moments d'encastrement max et min au pied, Cas 4.

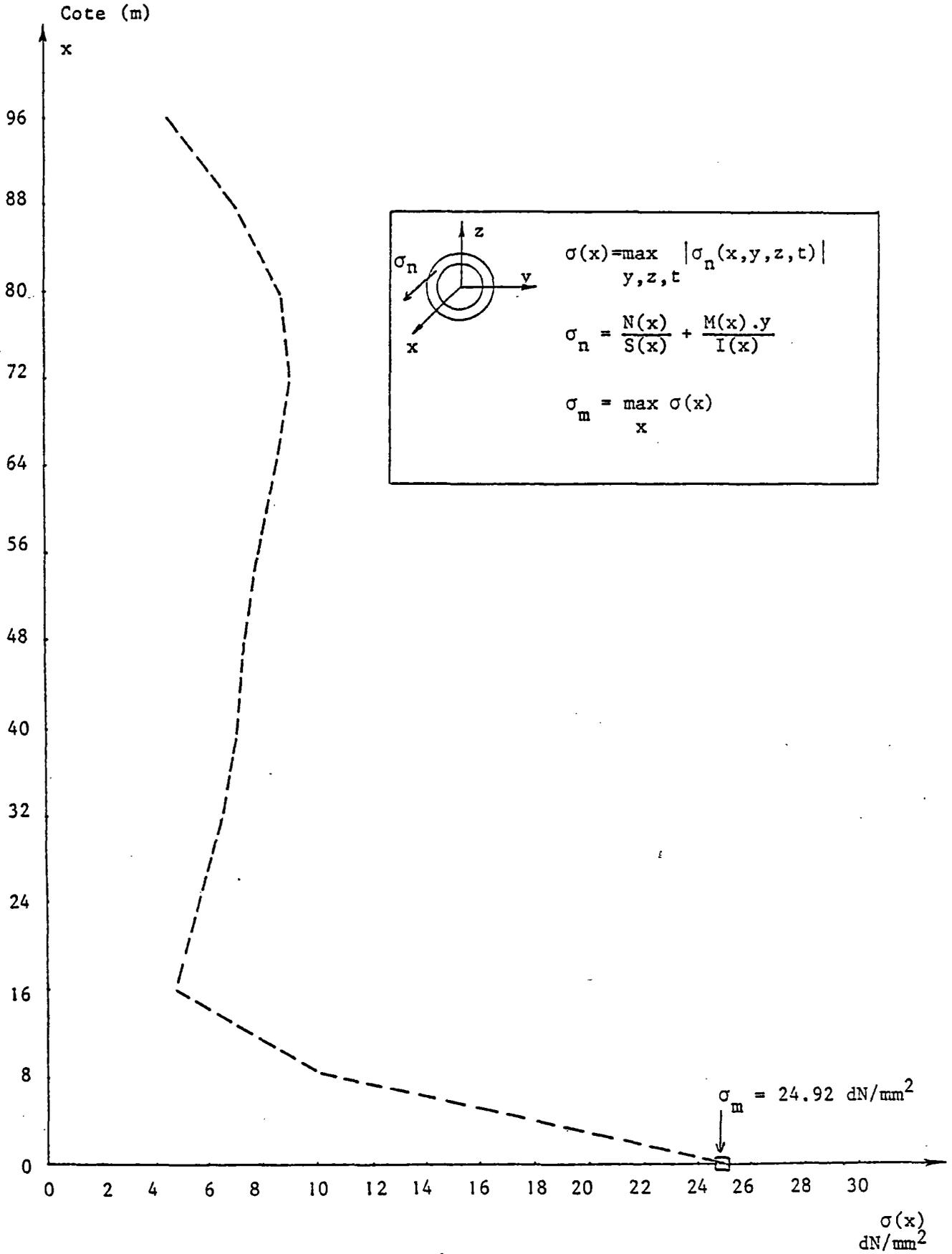


FIGURE IV-18 : Enveloppe de la contrainte normale maximale dans chaque section du riser en fonction de la cote de la section. Cas 4.

#### IV.1.5 CAS 5

##### 1- Type de calcul :

Calcul dynamique nonlinéaire plan (xoy) sans réactualisation de géométrie.

Le nombre de D.L. libres = 35

Le nombre de D.L. bloqués = 4

##### 2- Configuration de référence :

La configuration d'équilibre statique du riser obtenu au cas 1 est prise comme la configuration de référence du cas 5. L'état de contrainte dans la configuration de référence n'est donc pas nul.

##### 3- Conditions aux limites de déplacements aux noeuds 13 (tête) et 1 (pied) :

###### a- en tête (noeud 13) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{D.L. libres} = 2 \quad (\text{translation } ox, \text{ rotation } oz) \\ \text{Déplacement imposé suivant } oy : y(t) = 3.0 \sin\left(\frac{2\pi}{12} t\right) \end{array} \right.$$

###### b- au pied (noeud 1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{D.L. libre} = 0 \\ \text{D.L. bloqués} = 3 \end{array} \right.$$

##### 4- Les forces appliquées :

###### a- en tête (noeud 13) :

On applique une tension en tête suivant  $ox$  :

$$T(t) = T_{\text{top}} \left(1 + 0.025 \sin\left(\frac{2\pi}{12} t\right)\right) , T_{\text{top}} = 600\,000 \text{ N}$$

###### b- aux autres noeuds :

Même chose que pour Cas 1

5- Précision sur le calcul :

Le pas d'intégration pour ce cas est pris égal à 0.15 sec.

L'amortissement numérique choisi est identique à celui utilisé dans le cas 2.

Le régime stationnaire est atteint à  $t = 4T = 48$  secondes. Le nombre de pas de calcul est donc 320.

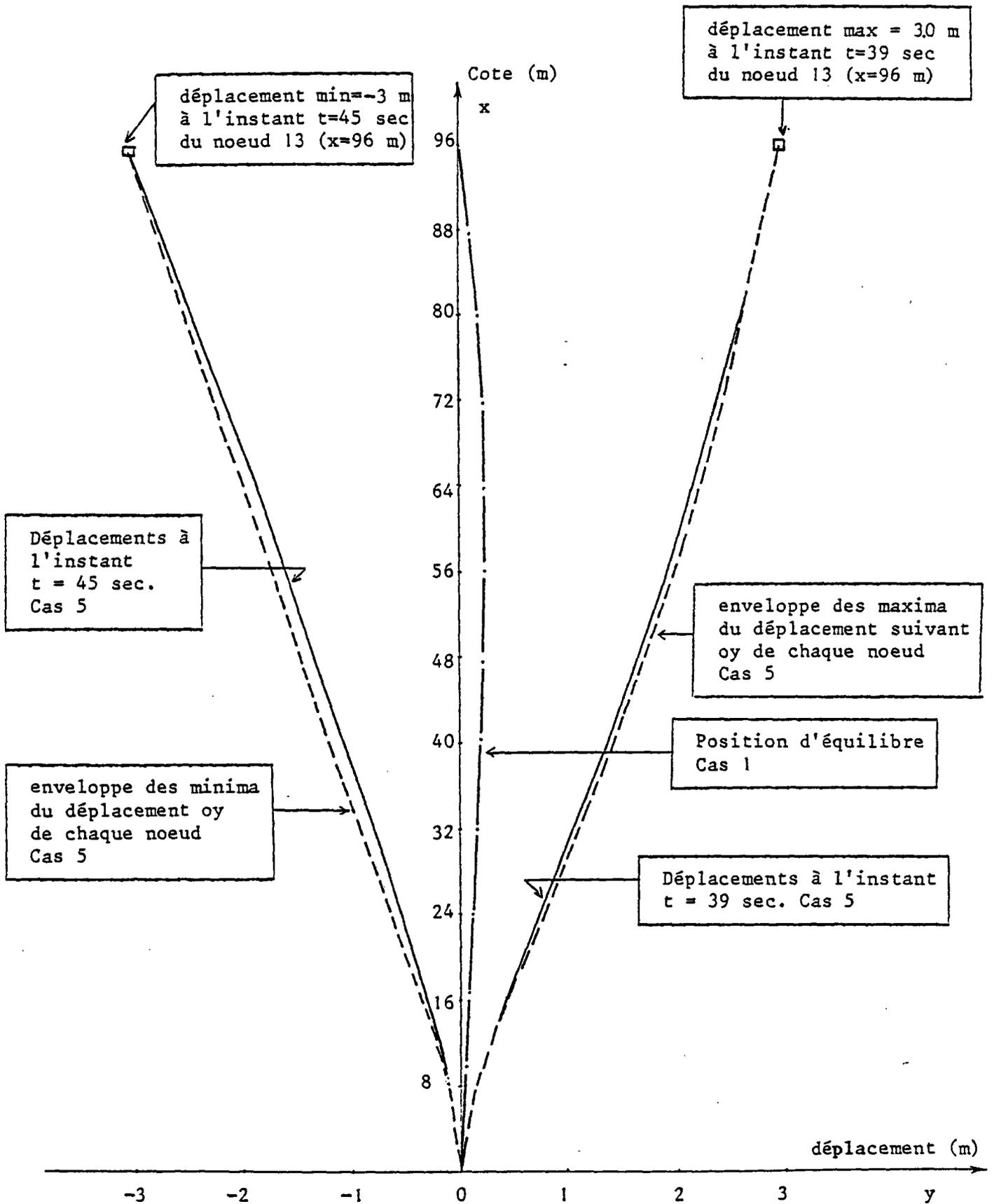


FIGURE IV-19 : Déplacements suivant oy des noeuds du riser à différents instants, Cas 5, et enveloppe des maxima et des minima.

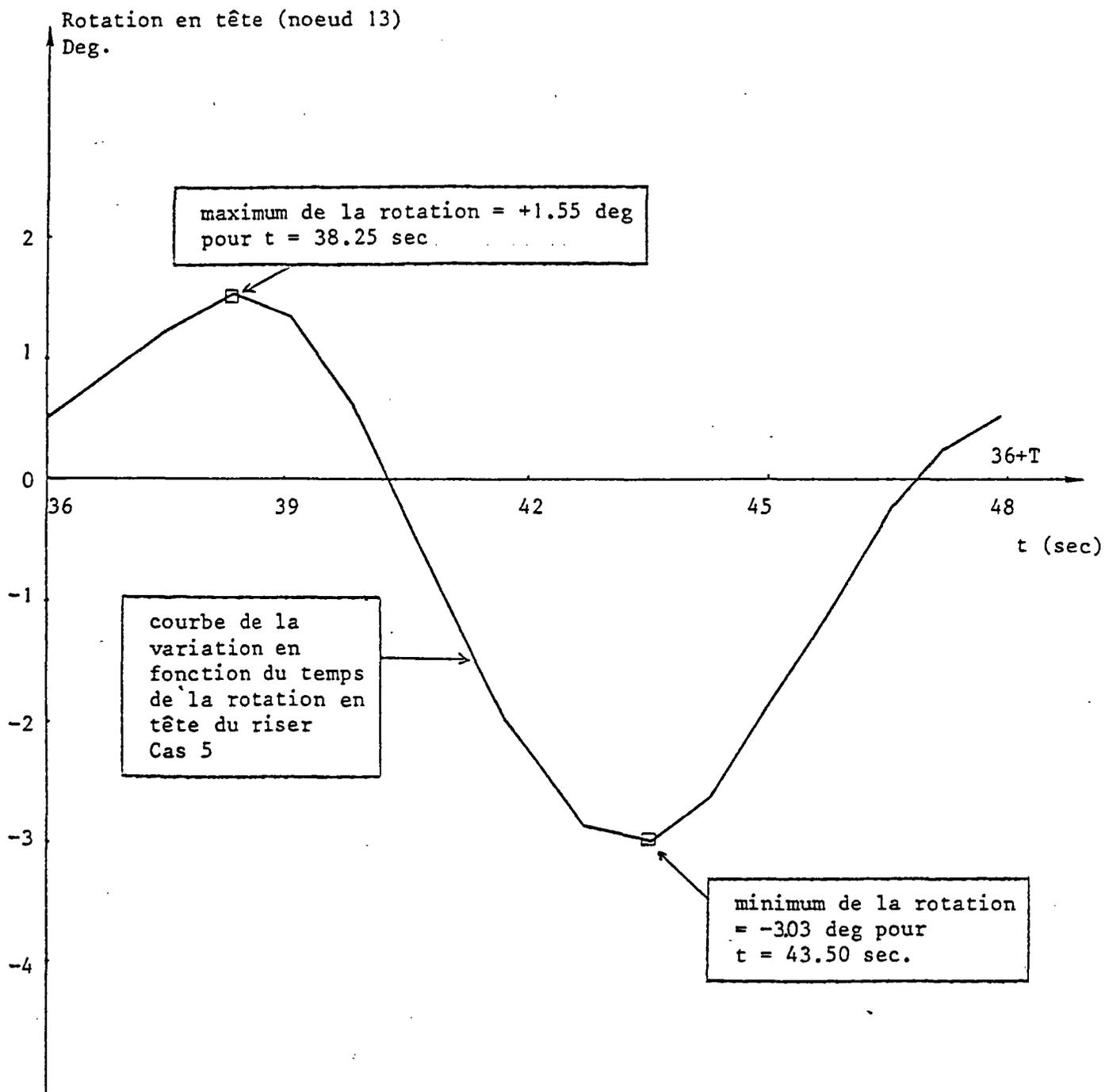


FIGURE IV-20 : Rotation en tête (noeud 13) en fonction du temps, Cas 5. Les déplacements du riser pour les instants  $t = 38.25$  et  $t = 43.50$  correspondant au max et au min sont donnés à la figure IV-22.

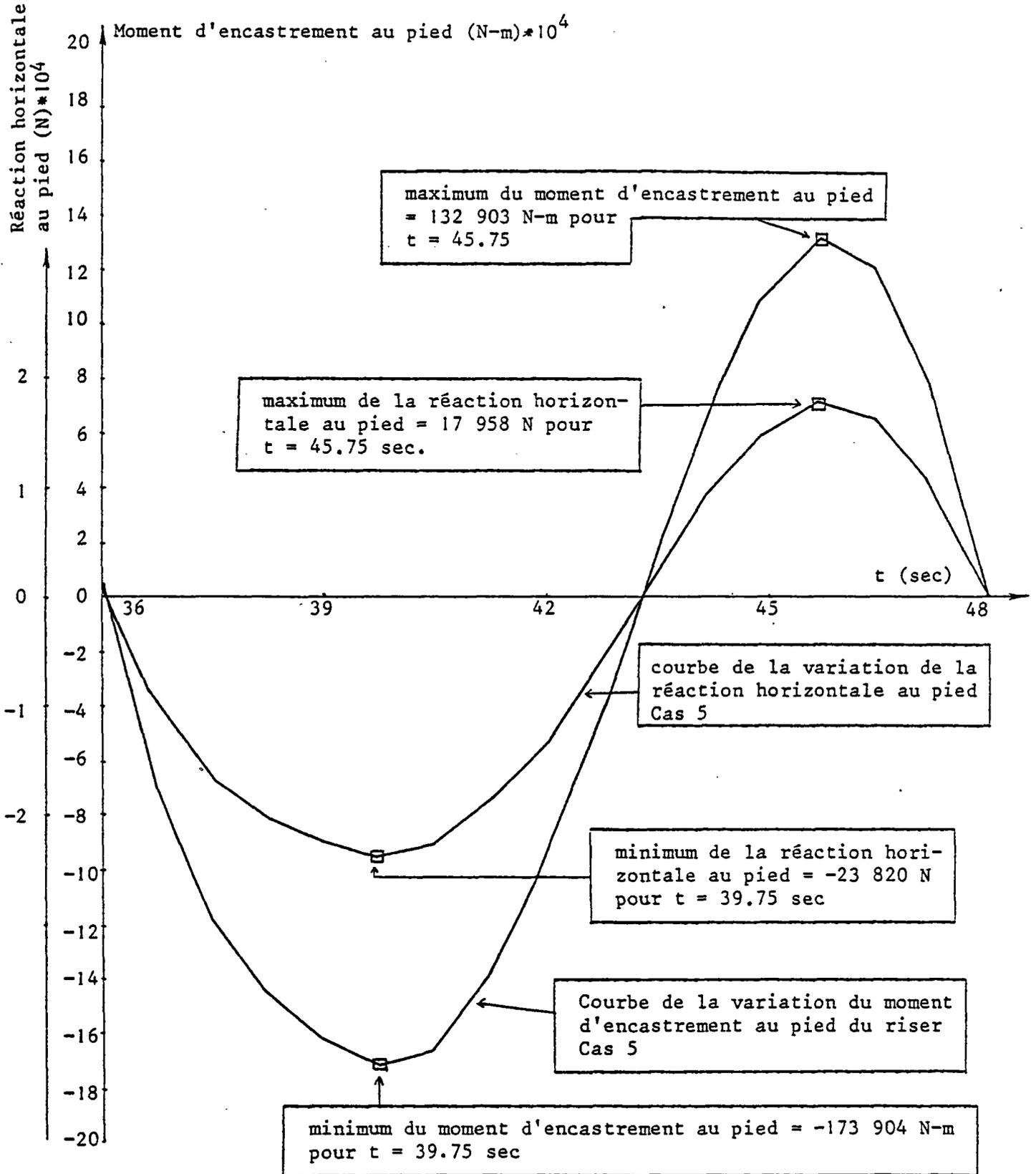


FIGURE IV-21 : Variation en fonction du temps de la réaction suivant  $oy$  et du moment d'encastrement suivant  $oz$  au pied (noeud 1), Cas 5. Les déplacements du riser pour les instants  $t = 39.75$  et  $t = 45.75$  sont donnés à la figure IV-22.

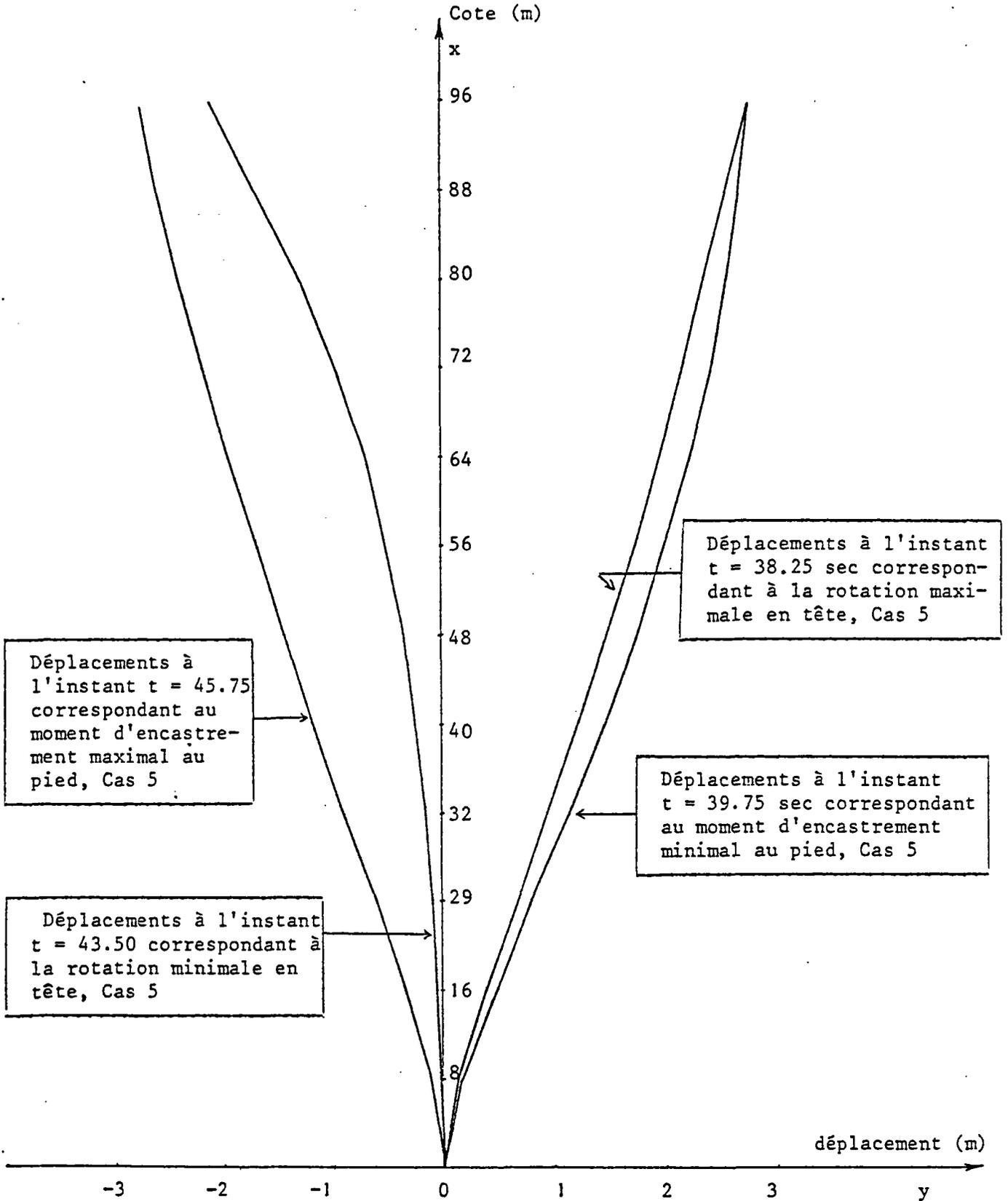
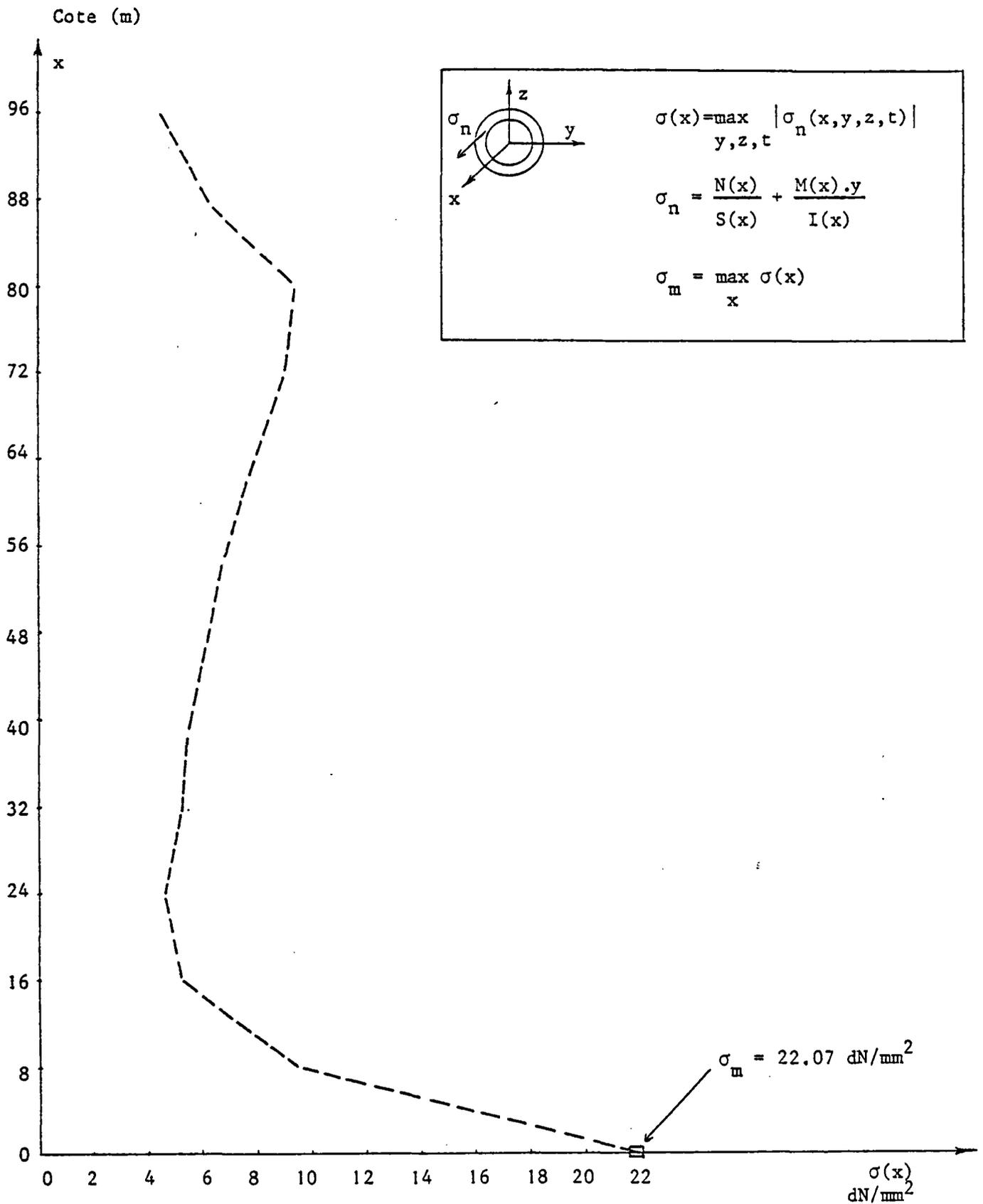


FIGURE IV-22 : Déplacements suivant oy des noeuds du riser à différents instants correspondant aux rotations max et min en tête et aux moments d'encastrement max et min au pied. Cas 5



**FIGURE IV-23** : Enveloppe de la contrainte normale maximale dans chaque section du riser en fonction de la cote de la section, Cas 5

#### IV.1.6 CAS 6

##### 1- Type de calcul :

Calcul statique nonlinéaire spatial (oxyz) sans réactualisation de géométrie.

Le nombre de D.L. libres = 70

Le nombre de D.L. bloqués = 8

##### 2- Configuration de référence :

Le riser est supposé vertical dans sa configuration de référence et a un état de contrainte nul.

##### 3- Conditions aux limites de déplacements aux noeuds 13 (tête) et 1 (pied) :

###### a- en tête (noeud 13) :

{ D.L. libres = 4 (translation ox, rotations ox,oy,oz)  
D.L. Bloqués = 2 (translations oy, oz)

###### b- au pied (noeud 1) :

{ D.L. libre = 0  
D.L. bloqués = 6

##### 4- Les forces appliquées

###### a- en tête (noeud 13) :

En tête, il n'y a qu'une tension appliquée suivant ox :

$$T_{\text{top}} = 600\ 000\ \text{N}$$

###### b- aux autres noeuds :

{ -poids propre  
-forces hydrostatiques  
-courant dans le plan xoz dont le profil est donné à la figure IV-1.

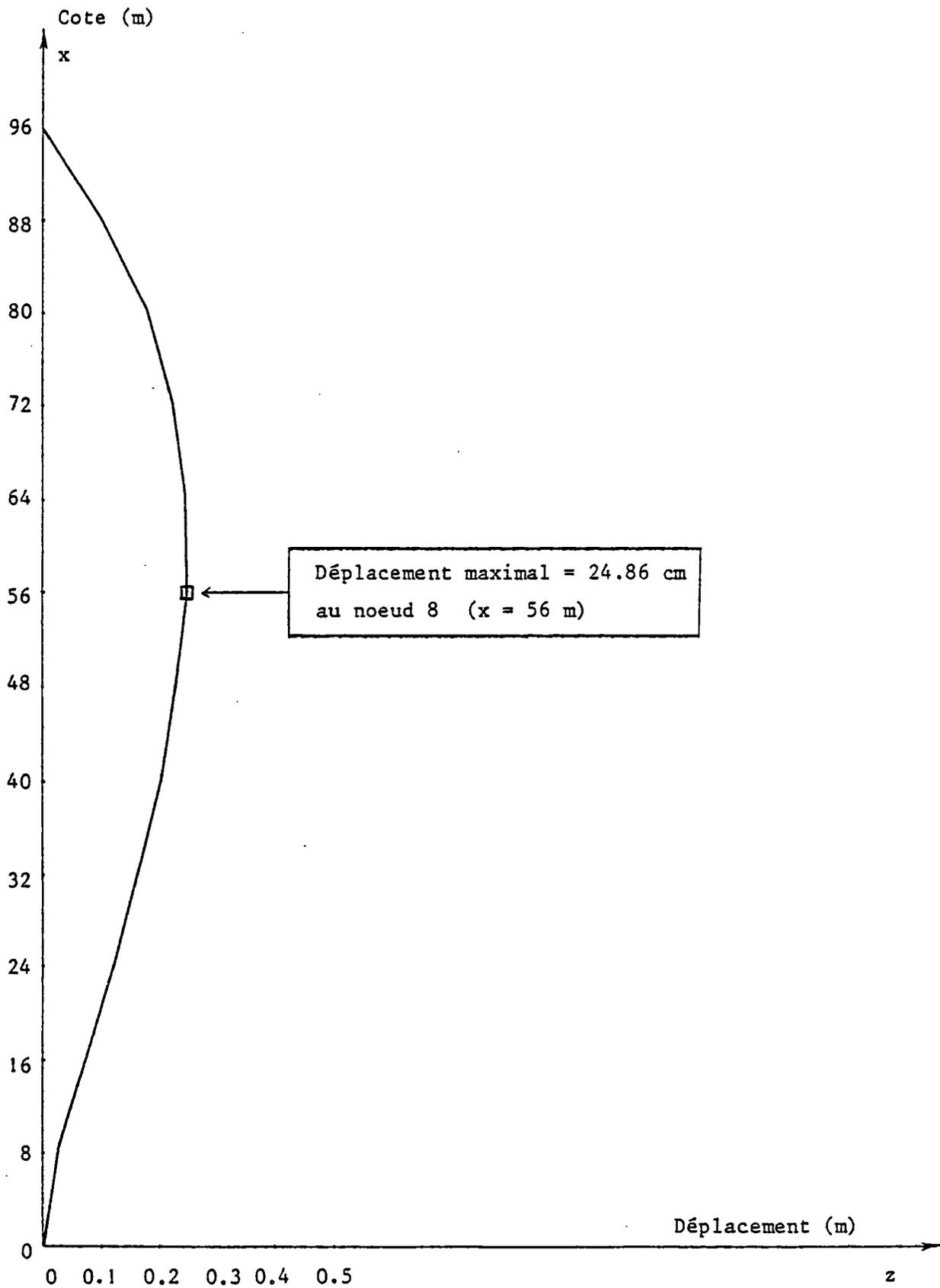


FIGURE IV-24 : Déplacements horizontaux à l'équilibre, Cas 6

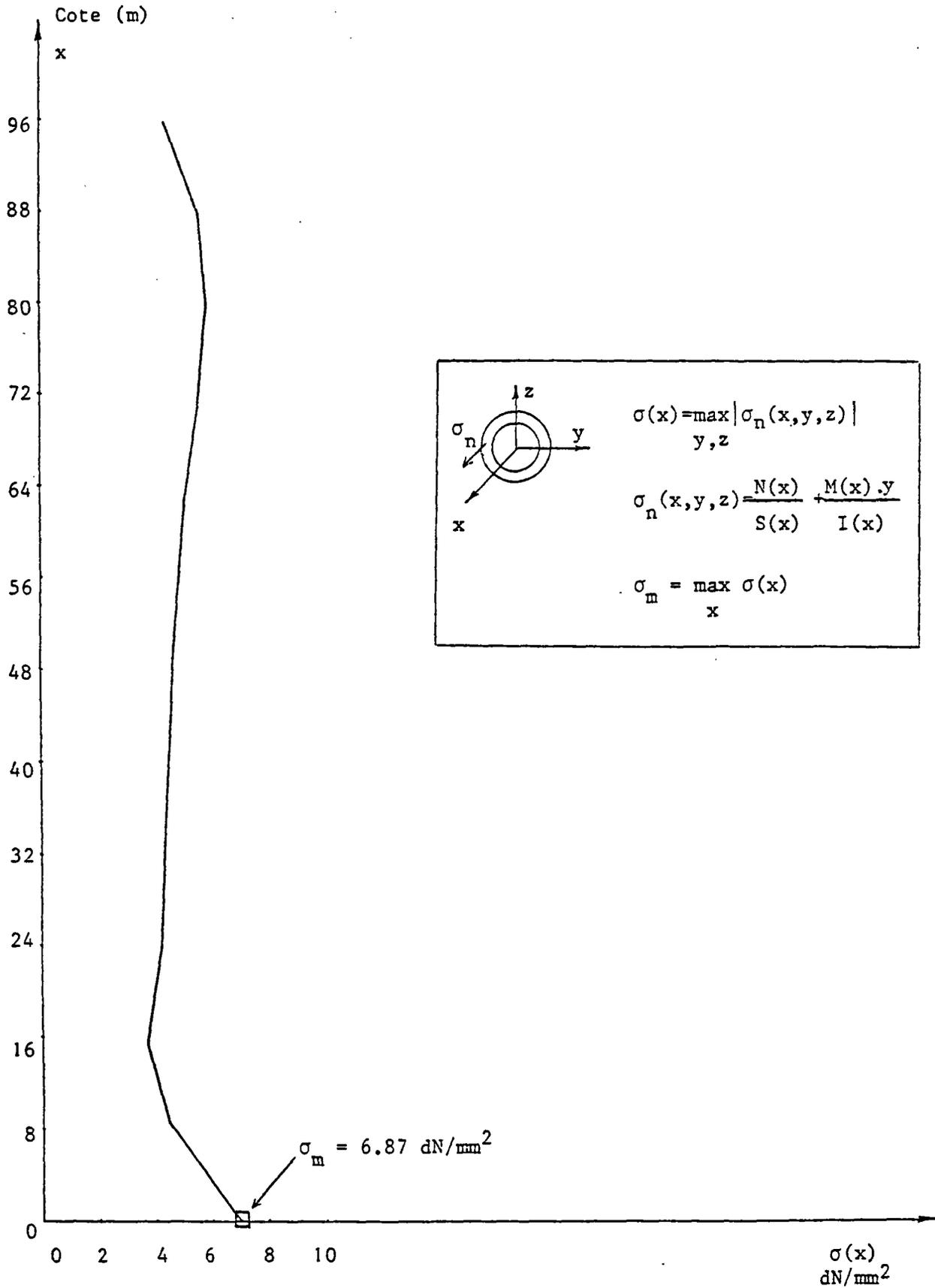


FIGURE IV-25 : Contrainte normale maximale dans chaque section du riser en fonction de la cote de la section pour la position d'équilibre, Cas 6.

#### IV.1.7 CAS 7

##### 1- Type de calcul :

Calcul dynamique nonlinéaire spatial (oxyz) sans réactualisation de géométrie.

Le nombre de D.L. libres = 70

Le nombre de D.L. bloqués = 8

##### 2- Configuration de référence :

La configuration d'équilibre statique du riser obtenu au cas 6 est prise comme la configuration de référence de cas 7. L'état de contrainte dans la configuration de référence n'est donc pas nul.

##### 3- Conditions aux limites de déplacements aux noeuds 13 (tête) et 1 (pied) :

###### a- en tête (noeud 13) :

$$\begin{cases} \text{D.L. libres} = 4 & (\text{translation } ox, \text{ rotations } ox, oy, oz) \\ \text{D.L. bloqué} = 1 & (\text{translation } oz) \\ \text{Déplacement imposé suivant } oy : & y(t) = 1.50 \sin\left(\frac{2\pi}{6} t\right) \end{cases}$$

###### b- au pied (noeud 1) :

$$\begin{cases} \text{D.L. libre} = 0 \\ \text{D.L. bloqués} = 6 \end{cases}$$

##### 4- Les forces appliquées :

###### a- en tête (noeud 13)

On applique une tension en tête suivant ox :

$$T(t) = T_{\text{top}} \left(1 + 0.025 \sin \frac{2\pi}{6} t\right) , T_{\text{top}} = 600\,000 \text{ N}$$

###### b- aux autres noeuds

Même chose que pour cas 6.

5- Précision sur le calcul :

Le pas d'intégration choisi pour ce cas est égal à 0.1 sec.

L'amortissement numérique choisi est identique à celui utilisé dans le cas 2.

Le régime stationnaire est atteint à  $t = 3T = 18$  secondes. Le nombre de pas de calcul est donc 180.

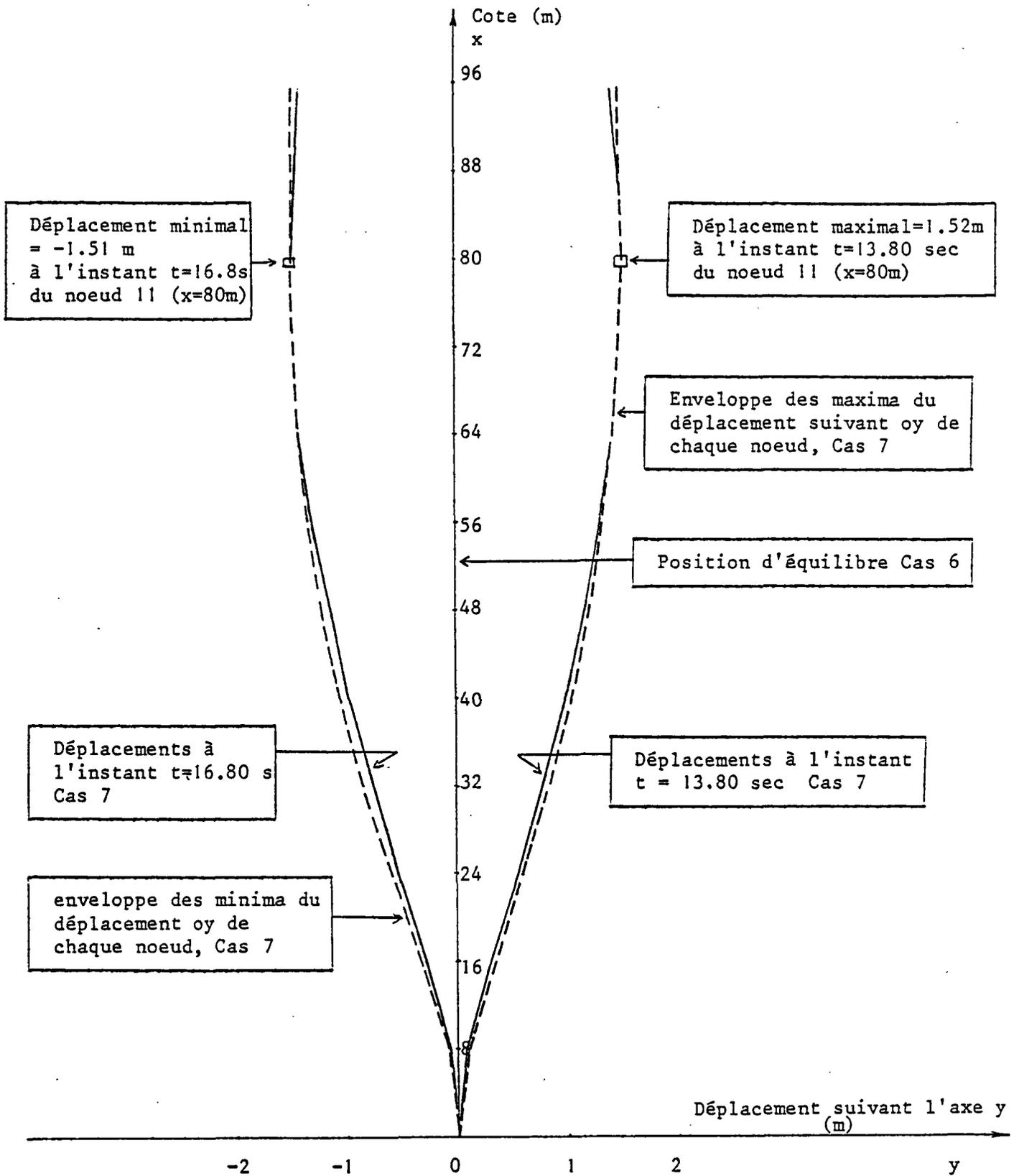


FIGURE IV- 26 : Déplacements suivant oy des noeuds du riser à différents instants, Cas 7, et enveloppe des maxima et des minima.

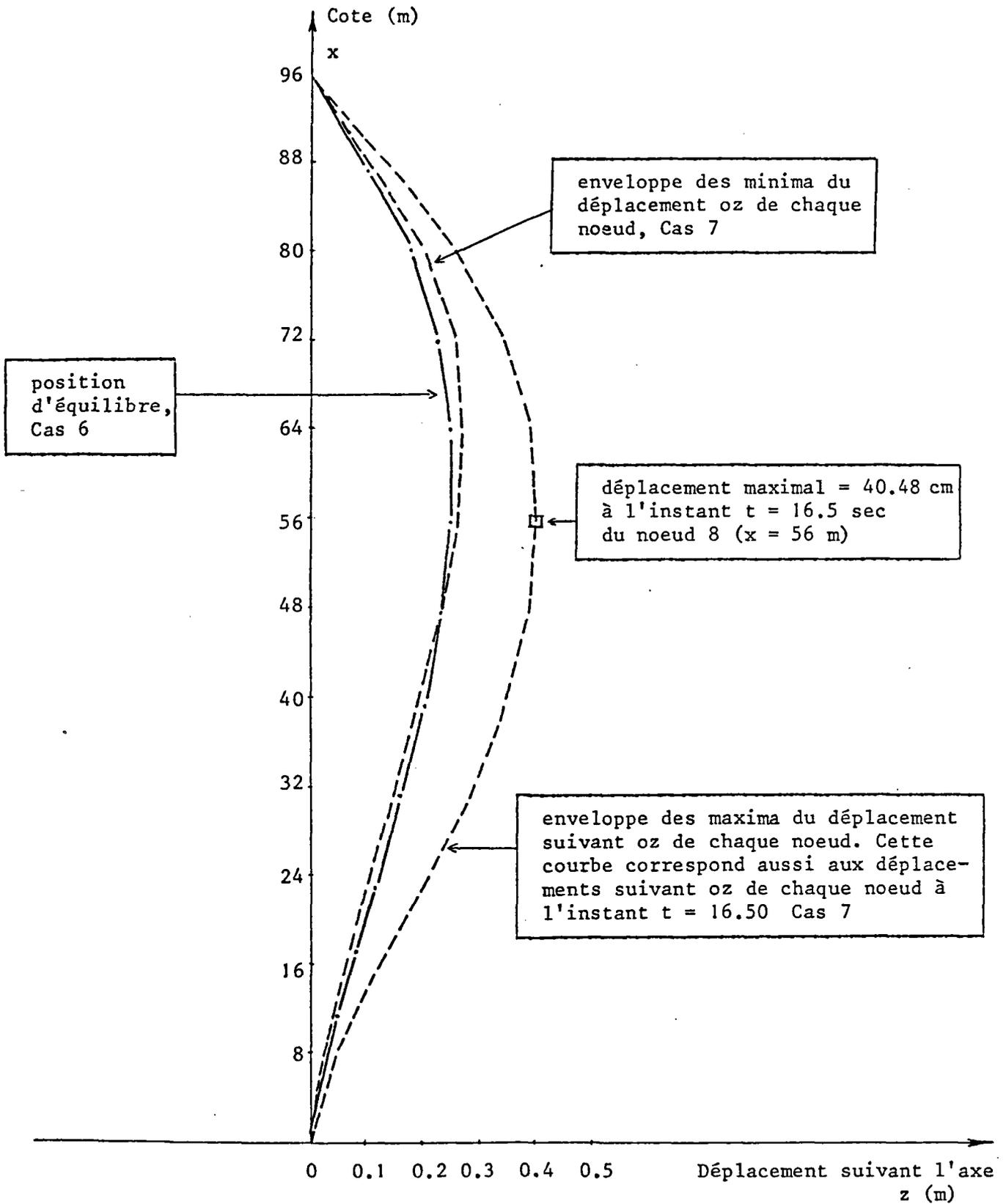


FIGURE IV-27 : Déplacements suivant oz des noeuds du riser à l'instant  $t = 16.50$ , Cas 7, et enveloppe des maxima et des minima.

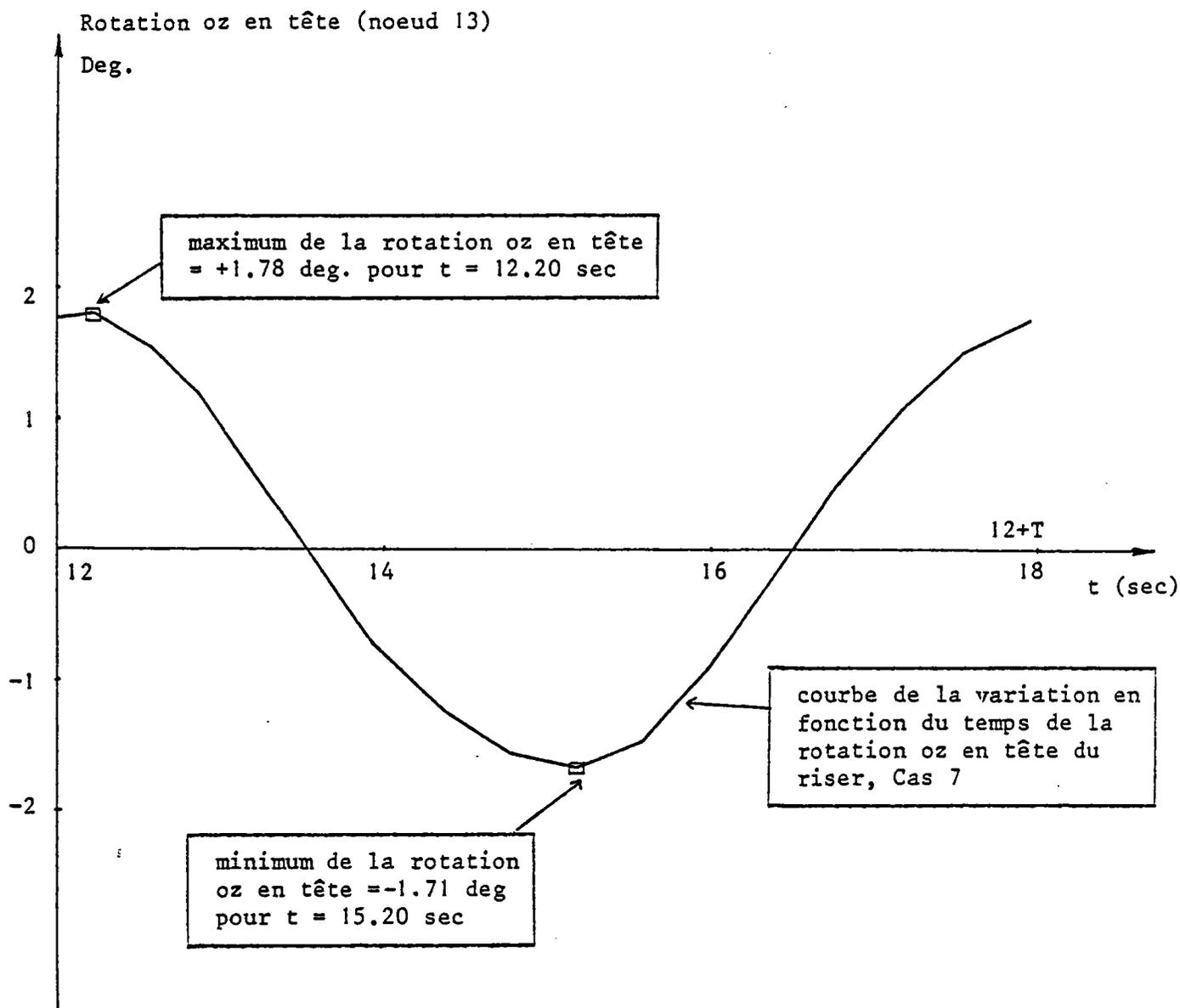
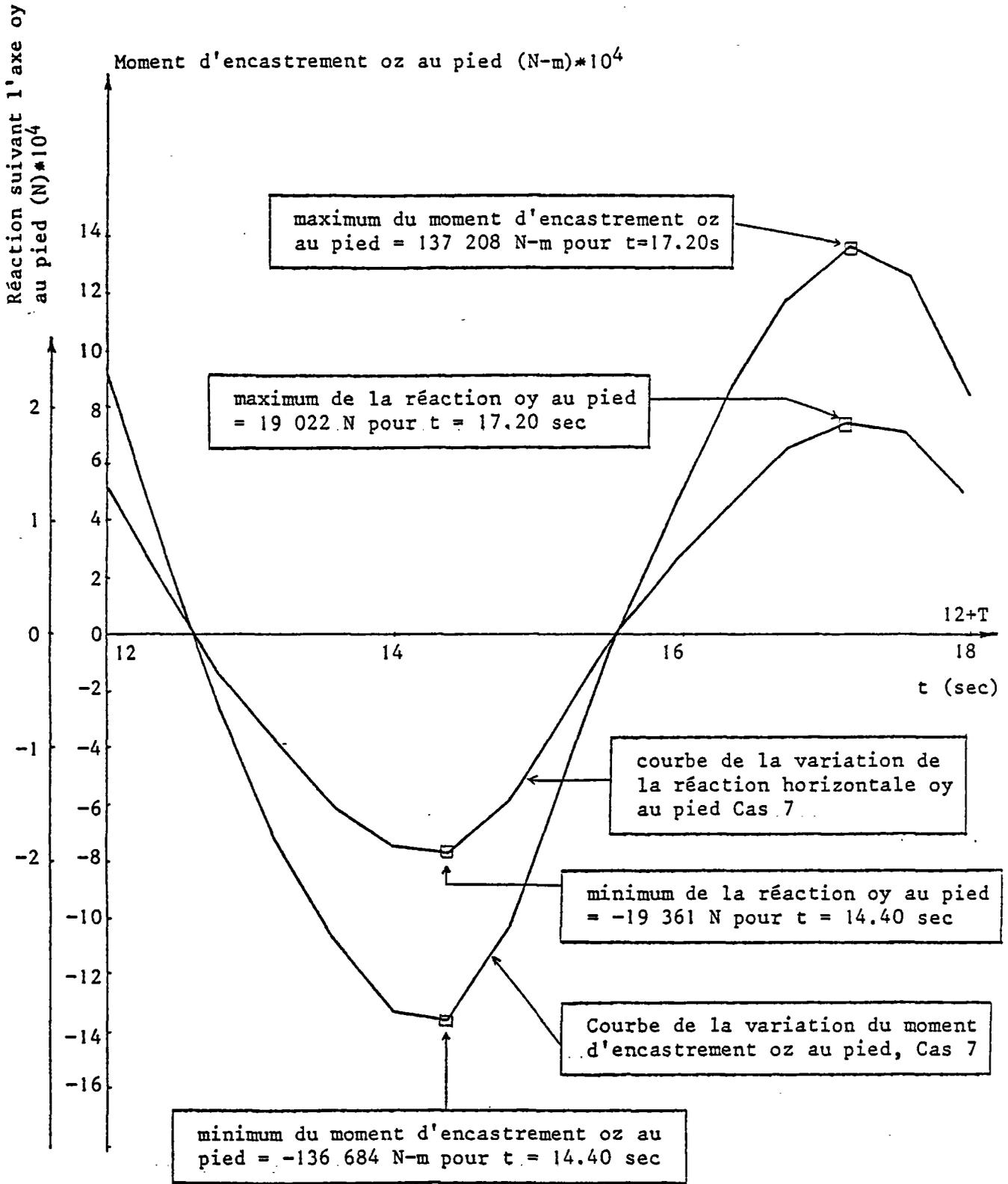


FIGURE IV-28 : Rotation oz en tête (noeud 13) en fonction du temps, Cas 7 . Les déplacements du riser pour les instants  $t = 12.20$  et  $t = 15.20$  correspondant au max et au min sont donnés à la figure IV-30 .



**FIGURE IV-29** : Variation en fonction du temps de la réaction suivant oy et du moment d'encastrement suivant oz au pied (noeud 1), Cas 7. Les déplacements du riser pour les instants t = 14.4 et t = 17.20 sont donnés à la figure IV-30.

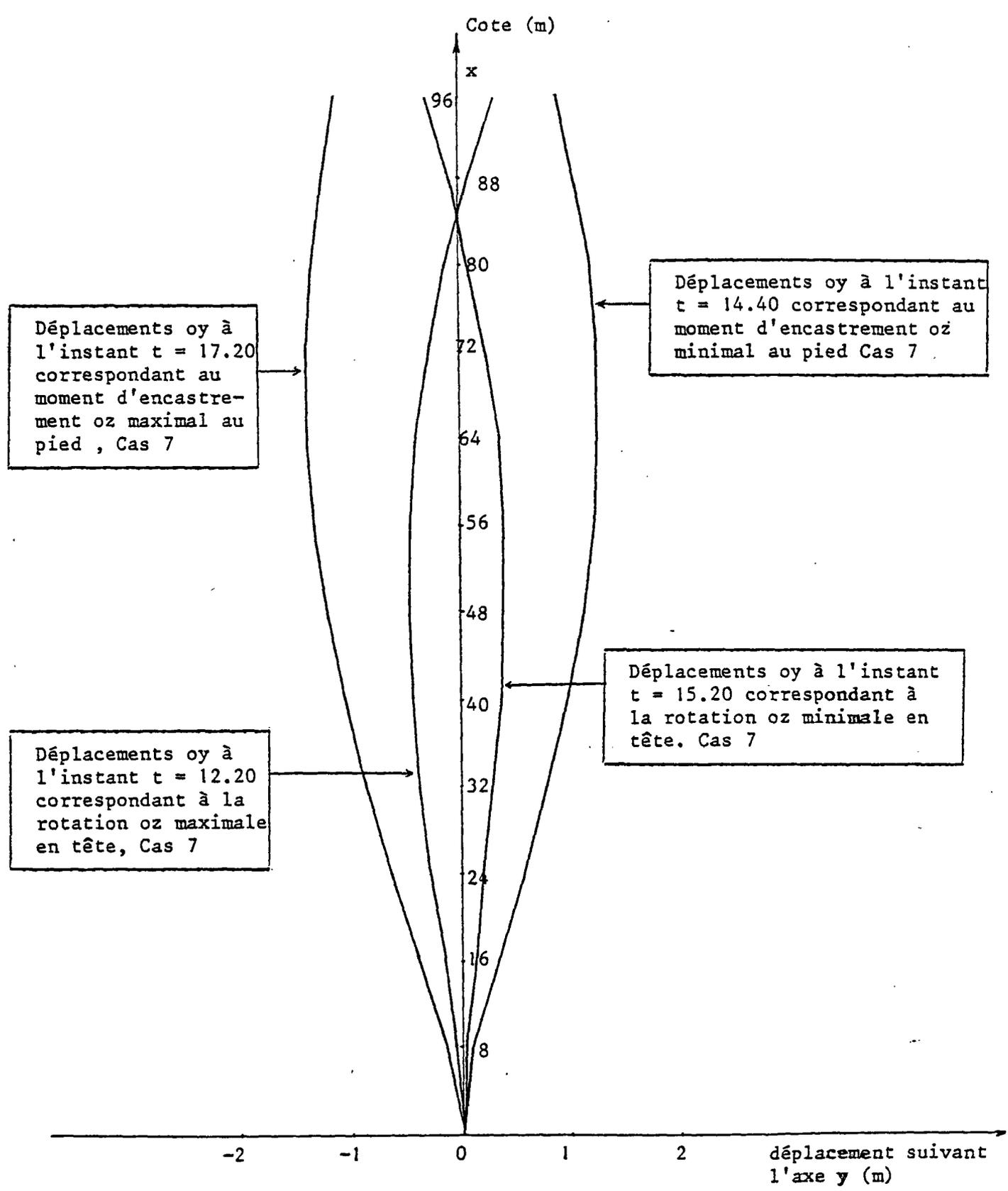
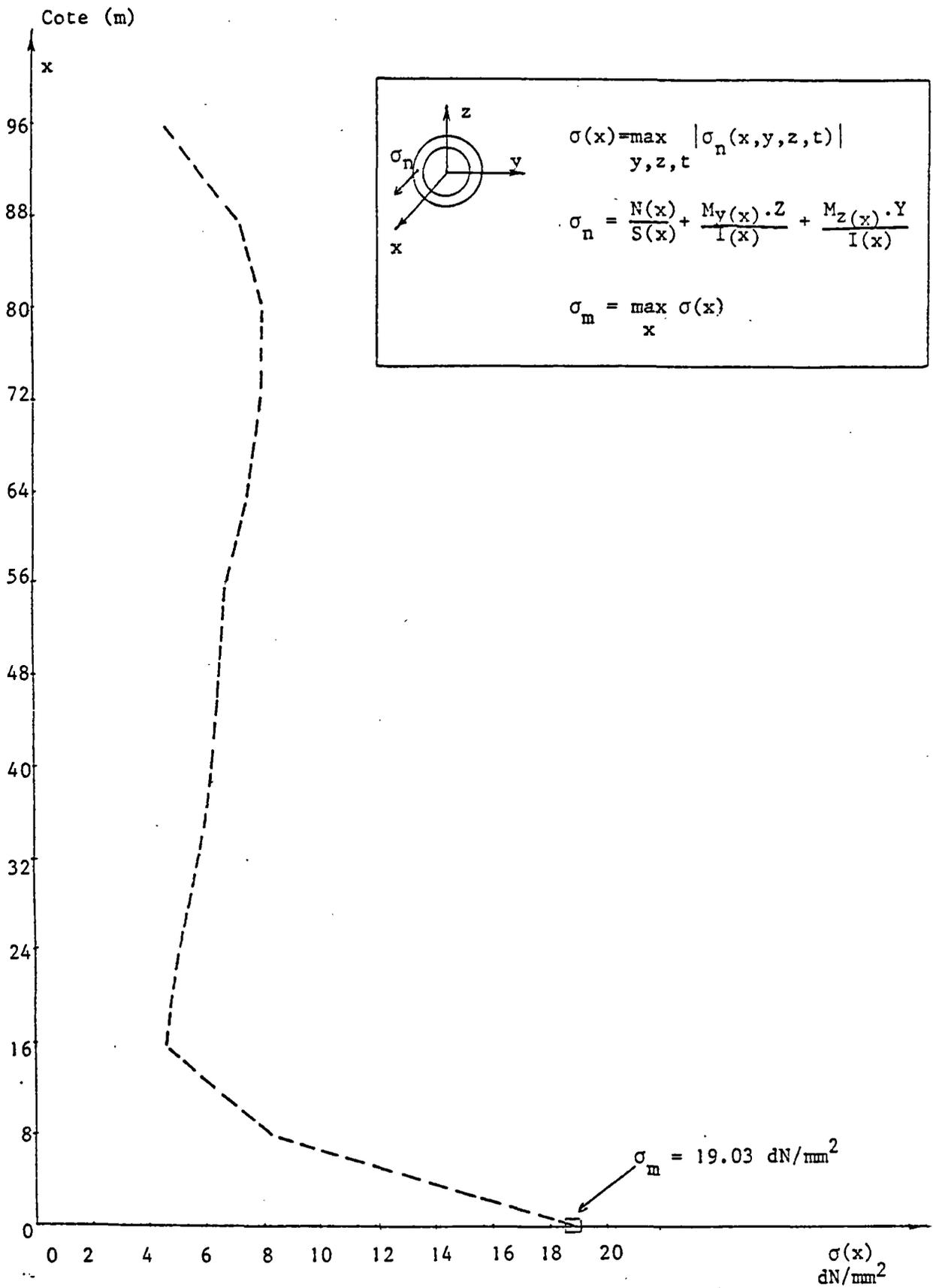


FIGURE IV- 30 : Déplacements suivant oy des noeuds du riser à différents instants correspondant aux rotations oz max et min en tête et aux moments d'encastrement max et min suivant oz au pied, Cas 7.



**FIGURE IV-31** : Enveloppe de la contrainte normale maximale dans chaque section du riser en fonction de la cote de la section, Cas 7.

#### IV.1.8 CAS 8

##### 1- Type de calcul :

Calcul dynamique nonlinéaire spatial (oxyz) sans réactualisation de géométrie.

Le nombre de D.L. libres = 70

Le nombre de D.L. bloqués = 8

##### 2- Configuration de référence :

La configuration d'équilibre statique du riser obtenu au Cas 6 est prise comme la configuration de référence de Cas 8. L'état de contrainte dans la configuration de référence n'est donc pas nul.

##### 3- Conditions aux limites de déplacements aux noeuds 13 (tête) et 1 (pied) :

###### a- en tête (noeud 13)

{ D.L. libres = 4 (translation ox, rotations ox, oy, oz)  
D.L. bloqué = 1 (translation oz)  
Déplacement imposé suivant oy :  $y(t) = 3.0 \sin\left(\frac{2\pi}{12} t\right)$

###### b- au pied (noeud 1)

{ D.L. Libre = 0  
D.L. bloqués = 6

##### 4- Les forces appliquées :

###### a- en tête (noeud 13)

On applique une tension en tête suivant ox :

$$T(t) = T_{\text{top}} \left(1 + 0.025 \sin\left(\frac{2\pi}{12} t\right)\right), T_{\text{top}} = 600\,000 \text{ N}$$

###### b- aux autres noeuds

Même chose que pour Cas 6.

5- Précision sur le calcul :

Le pas d'intégration pour ce cas est pris égal à 0.15 sec.

L'amortissement numérique choisi est identique à celui utilisé dans le cas 2.

Le régime stationnaire est atteint à  $t = 3T = 36$  secondes.

Le nombre de pas de calcul est donc 240.

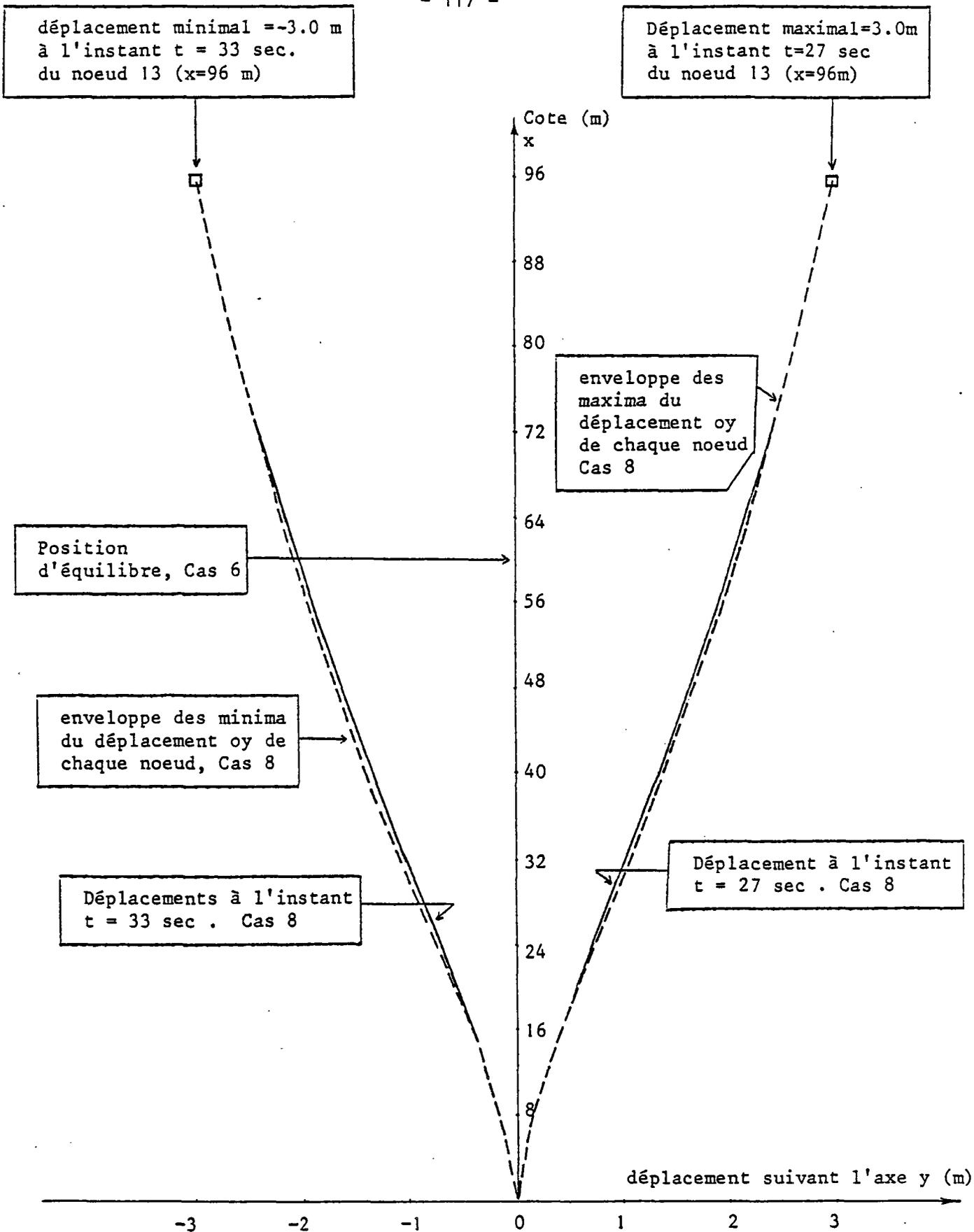


FIGURE IV-32 : Déplacements suivant oy des noeuds du riser à différents instants, Cas 8, et enveloppe des maxima et des minima.

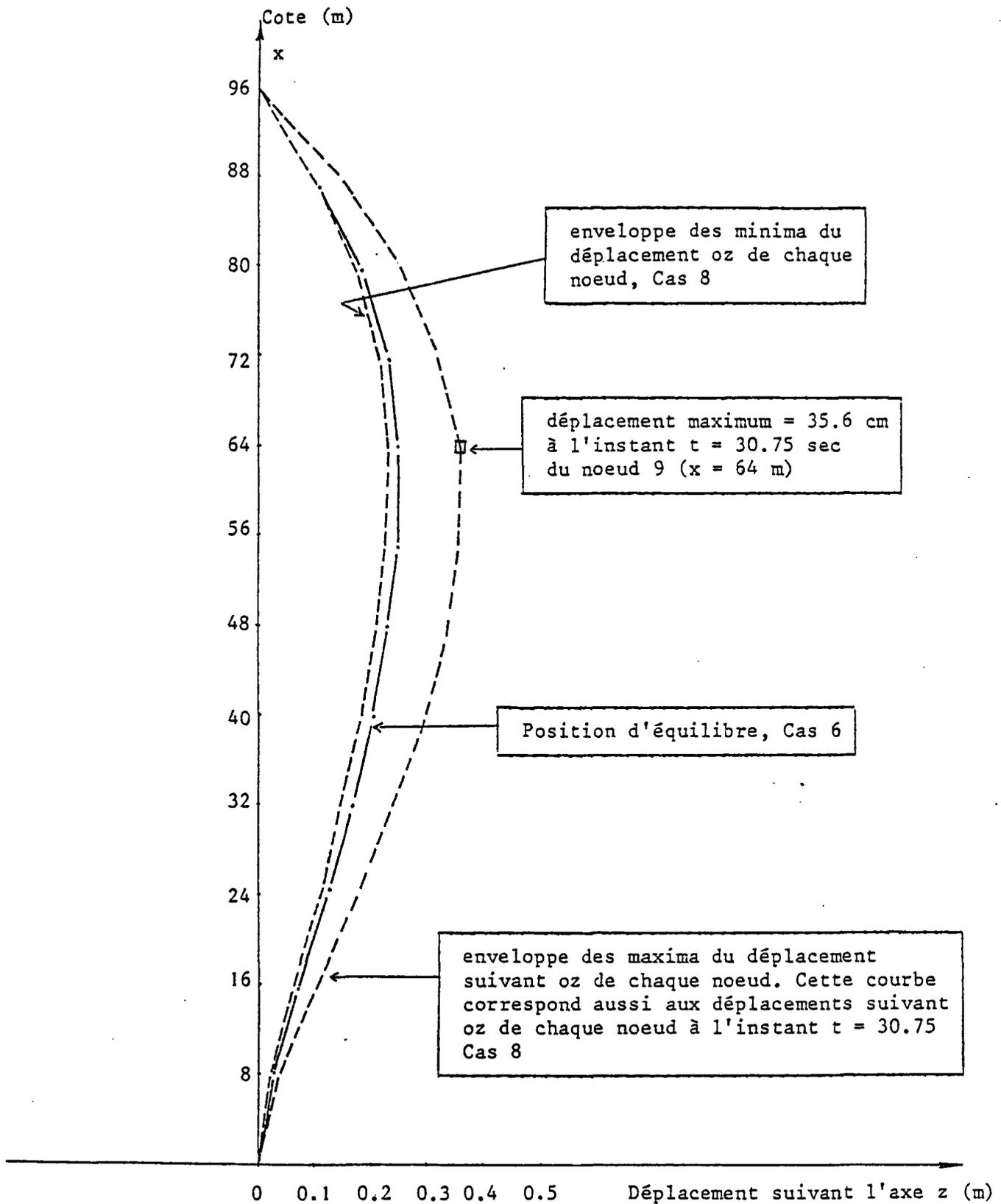


FIGURE IV-33 : Déplacements suivant oz des noeuds du riser à l'instant  $t = 30.75$  sec., Cas 8, et enveloppe des maxima et des minima.

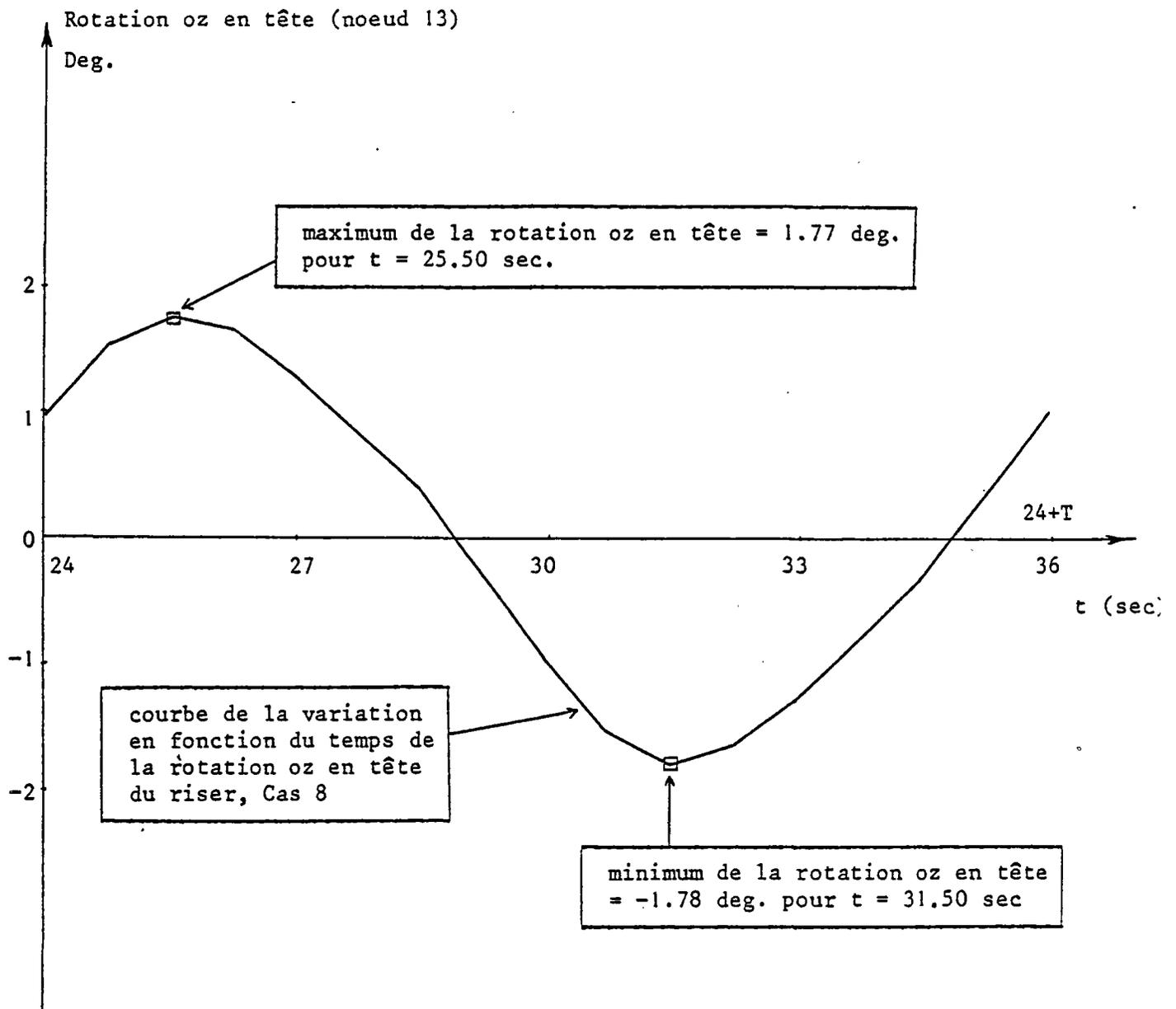


FIGURE IV-34 : Rotation oz en tête (noeud 13) en fonction du temps, Cas 8. Les déplacements du riser pour les instants  $t = 25.50$  et  $t = 31.50$  correspondant aux max et au min sont donnés à la figure IV-36.

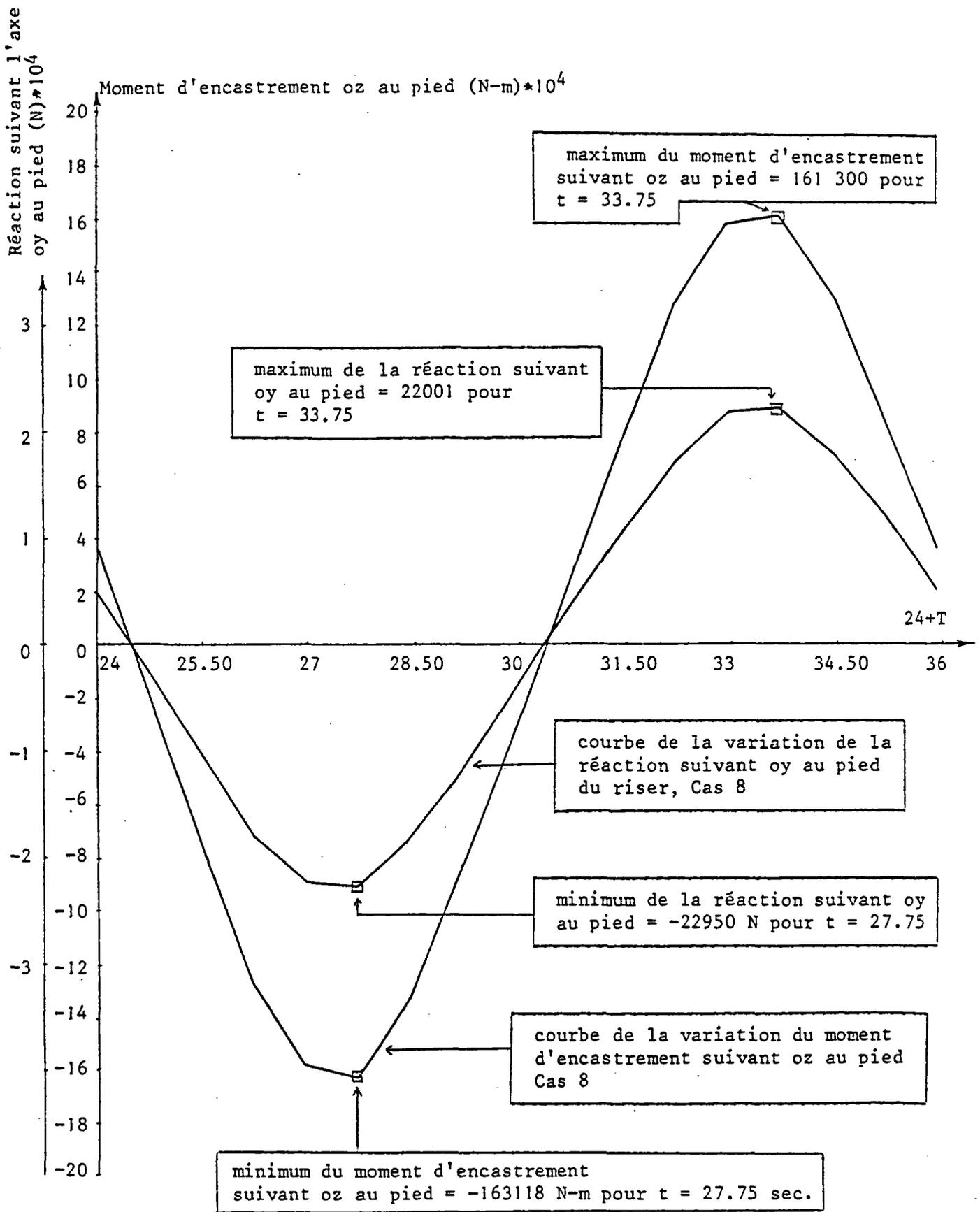
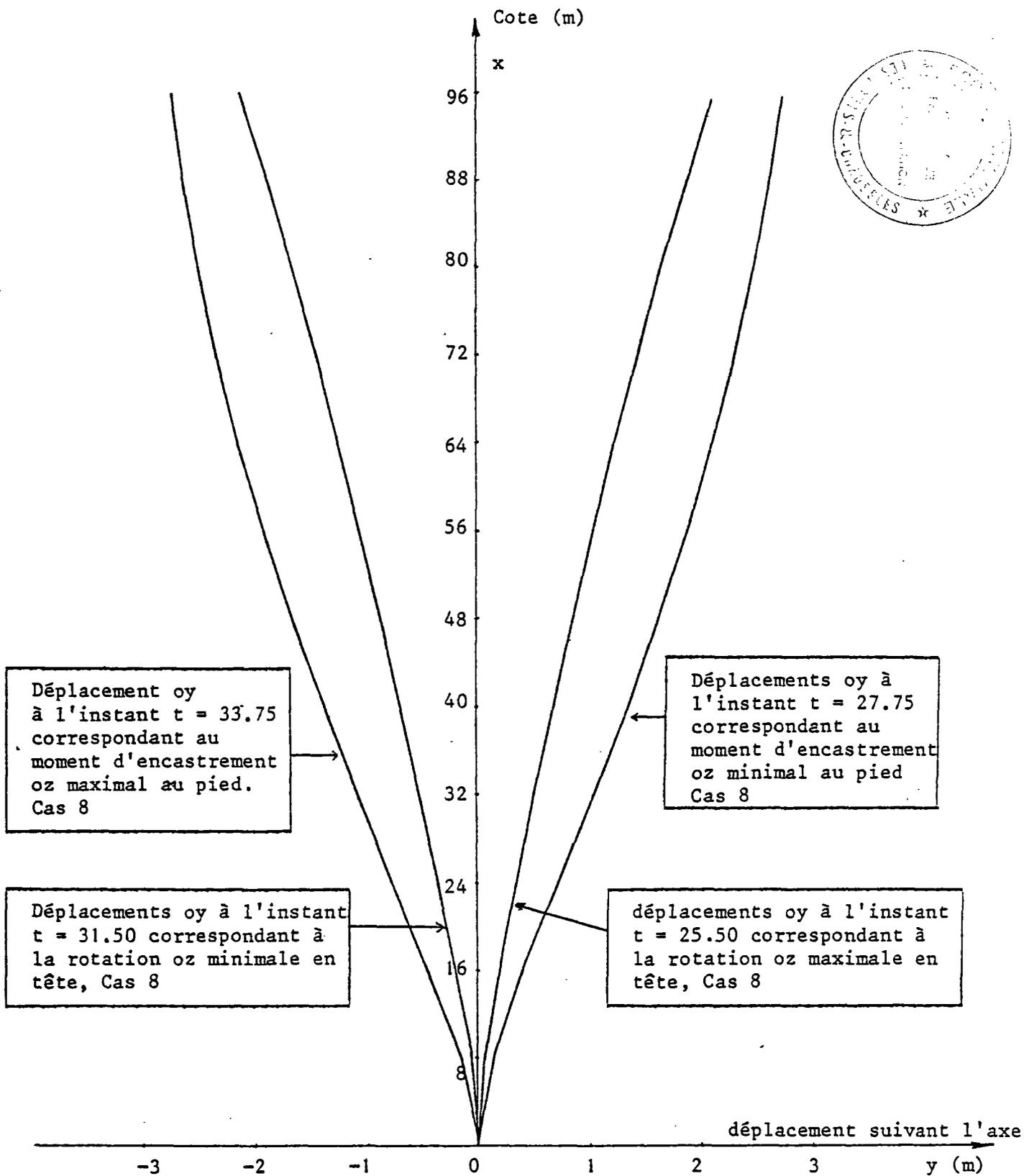
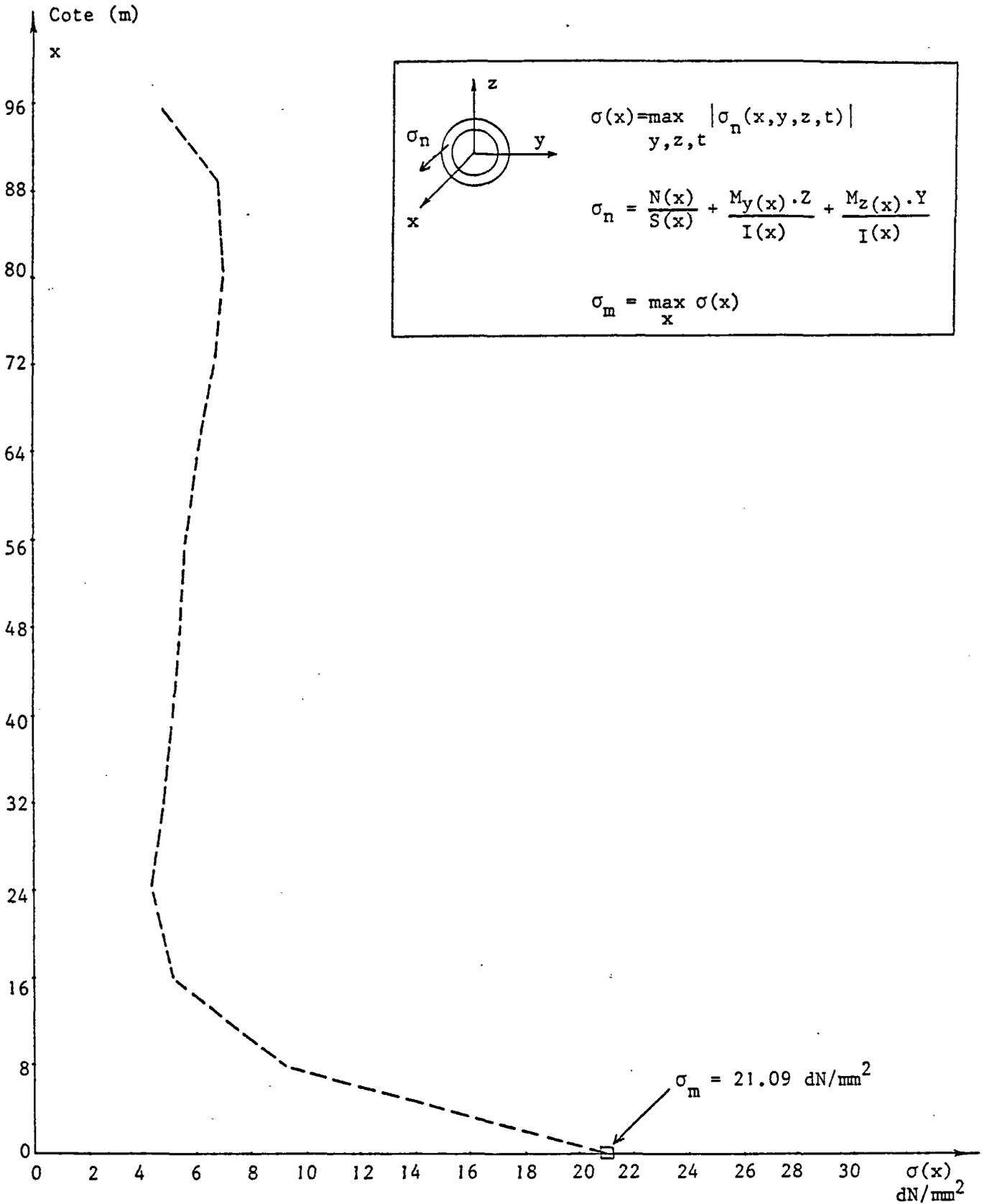


FIGURE IV-35 : Variation en fonction du temps de la réaction suivant oy et du moment d'encastrement suivant oz au pied (noeud 1), Cas 8. Les déplacements du riser pour les instants t = 27.75 et t = 33.75 sont donnés à la figure IV-36.



**FIGURE IV-36** : Déplacements suivant  $o_y$  des noeuds du riser à différents instants correspondant aux rotations  $o_z$  max et min en tête et aux moments d'encastrement max et min suivant  $o_z$  au pied, Cas 8.



**FIGURE W-37** : Enveloppe de la contrainte normale maximale dans chaque section du riser en fonction de la cote de la section Cas 8.

#### IV.2 CAS D'UN RISER DE 1200 METRES

##### - Modélisation du riser

Le riser considéré a une longueur de 1200 m. La modélisation est constituée de 40 éléments poutres qui ont des caractéristiques mécaniques identiques. Les 41 noeuds de la modélisation sont numérotés de 1 à 41.

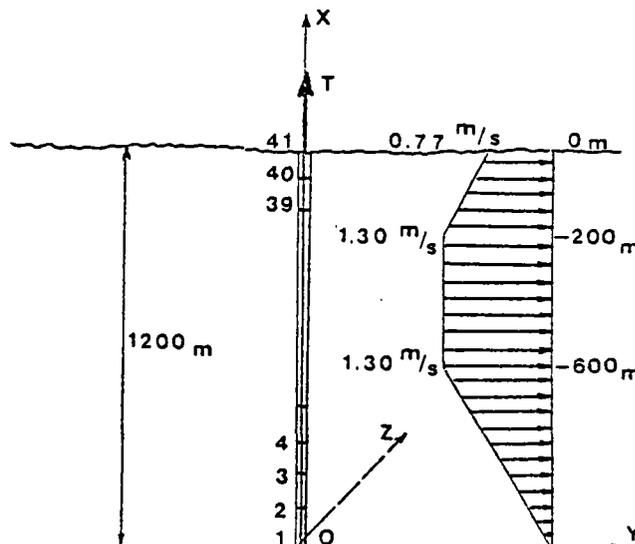


FIGURE IV-38

Le noeud 1 est à la base, le noeud 41 au sommet. Le riser est repéré dans un système d'axe orthonormé oxyz. L'origine o est située au pied du riser (noeud 1), l'axe ox est vertical.

##### - Caractéristiques mécaniques des éléments

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| . Diamètre extérieur du tube        | $D1 = 400 \text{ mm}$                   |
| . Diamètre intérieur du tube        | $D2 = 360 \text{ mm}$                   |
| . L'aire de la section du tube      | $S = 239 \text{ cm}^2$                  |
| . Moment d'inertie de flexion       | $I = 43\,200 \text{ cm}^4$              |
| . Moment d'inertie de torsion       | $J = 86\,400 \text{ cm}^4$              |
| . Module d'élasticité transversale  | $G = 0.84 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ |
| . Module d'élasticité longitudinale | $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  |
| . Masse volumique du riser          | $\rho = 8000 \text{ Kg/m}^3$            |

Les différents exemples traités pour ce riser sont les suivants.

#### IV.2.1 CAS 9

##### 1- Type de calcul :

Calcul statique nonlinéaire plan (oxy) sans réactualisation de géométrie.

Le nombre de D.L. libres = 119

Le nombre de D.L. bloqués = 4

##### 2- Configuration de référence :

Le riser est supposé vertical dans sa configuration de référence et a un état de contrainte nul.

##### 3- Conditions aux limites de déplacements aux noeuds 41 (tête) et 1 (pied) :

###### a- en tête (noeud 41) :

{ D.L. libres = 2      (translation ox et rotation oz)  
  D.L. bloqué = 1      (translation oy)

###### b- au pied (noeud 1) :

{ D.L. libre = 0  
  D.L. bloqués = 3

##### 4- Les forces appliquées

###### a- au noeud 41 (tête):

En tête, il n'y a qu'une tension appliquée suivant ox :

$$T_{\text{top}} = 4\,000\,000 \text{ N}$$

###### b- aux autres noeuds :

{ . poids propre  
  . forces hydrostatiques  
  . courant dans le plan xoy dont le profil est donné à la figure IV-38.

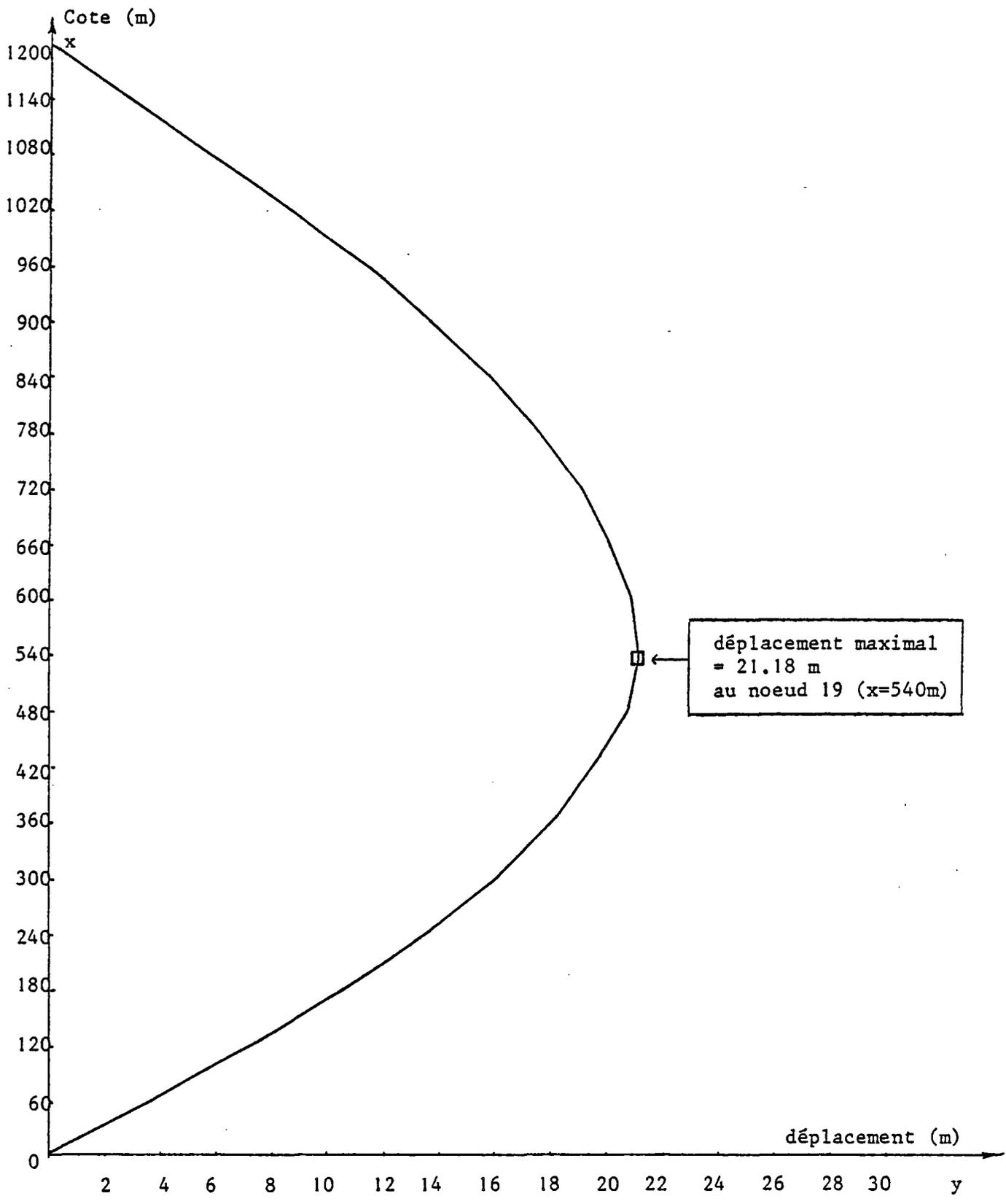


FIGURE IV-39 : Déplacements horizontaux à l'équilibre, Cas 9.

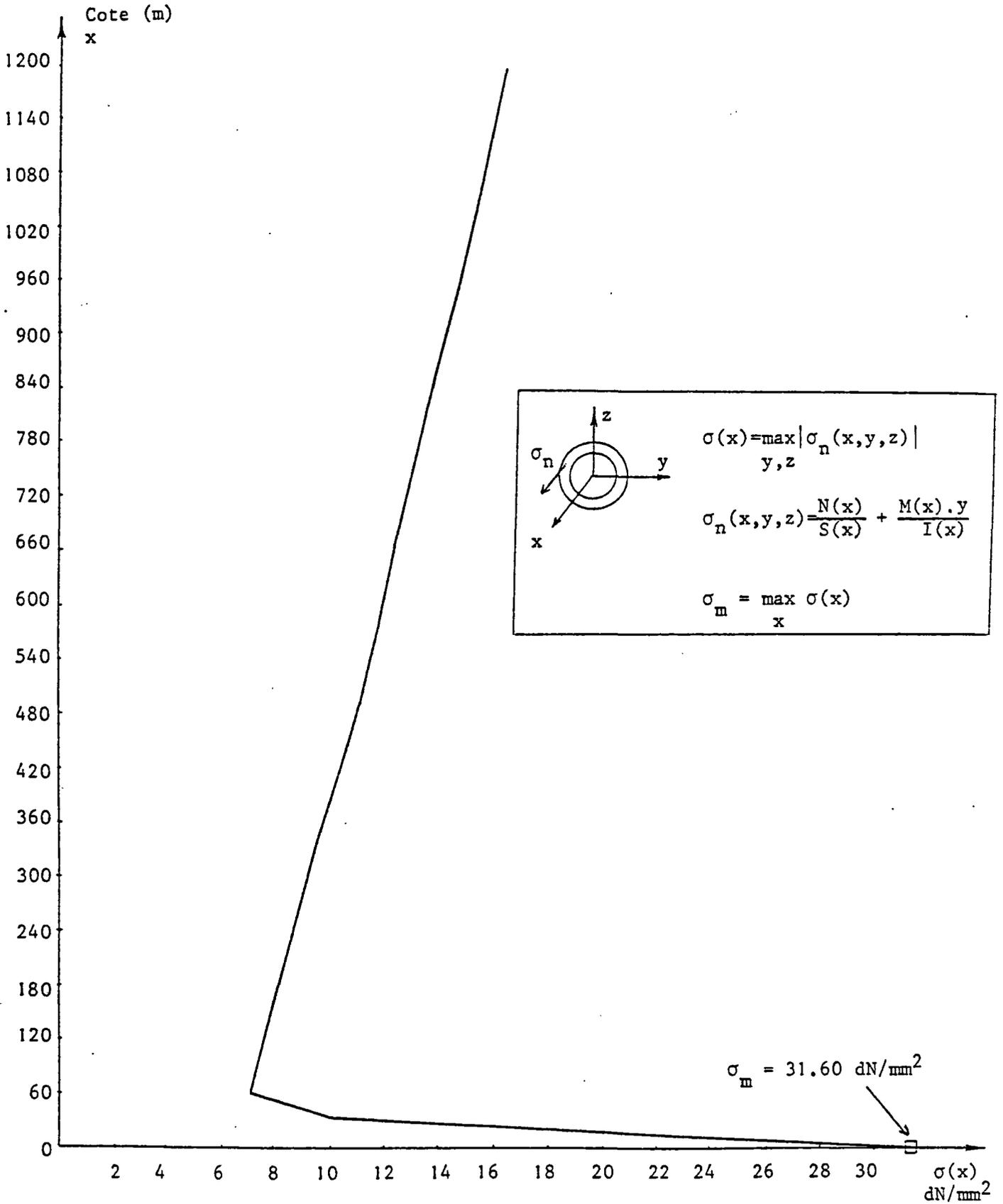


FIGURE IV-40 : Contrainte normale maximale dans chaque section du riser en fonction de la cote de la section pour la position d'équilibre, Cas 9.

#### IV.2.2 CAS 10

##### 1- Type de calcul :

Calcul dynamique nonlinéaire plan (xoy) avec réactualisation de géométrie.

Le nombre de D.L. libres = 119

Le nombre de D.L. bloqués = 4

##### 2- Configuration de référence :

La configuration d'équilibre statique du riser obtenu au cas 9 est prise comme la configuration de référence du cas 10. L'état de contrainte dans la configuration de référence n'est donc pas nul. Il y a un effort normal initial dans chaque barre qui est l'effort normal obtenu à l'équilibre du cas 9.

##### 3- Conditions aux limites de déplacements aux noeuds 41 (tête) et 1 (pied) :

###### a- en tête (noeud 41) :

$$\begin{cases} \text{D.L. libres} = 2 & (\text{translation } ox \text{ et rotation } oz) \\ \text{Déplacement imposé suivant } oy : y(t) = 10. \sin\left(\frac{2\pi}{18} t\right) \end{cases}$$

###### b- au pied (noeud 1) :

$$\begin{cases} \text{D.L. libre} = 0 \\ \text{D.L. bloqués} = 3 \end{cases}$$

##### 4- Les forces appliquées

###### a- au noeud 41 (tête) :

On applique une tension en tête suivant  $ox$  :

$$T(t) = T_{\text{top}} \left(1 + 0.025 \sin \frac{2\pi}{18} t\right) , \quad T_{\text{top}} = 4\,000\,000 \text{ N}$$

###### b- aux autres noeuds :

Même chose que pour Cas 9.

5- Précision sur le calcul :

Le pas d'intégration pour le calcul est pris égal à 0.3 sec.

L'amortissement numérique choisi est identique à celui utilisé dans le cas 2.

La réactualisation de la géométrie a eu lieu pour deux fois dans les pas numéro 5 et 25.

Le régime stationnaire est atteint à  $t = 6T = 108$  secondes. Le nombre de pas de calcul est donc 360.

Remarque : (cas 10bis)

On a traité le même exemple linéairement du point de vue structure, en supposant que la matrice de rigidité tangente du riser obtenue à l'instant initial (sous l'effet du poids propre, tension en tête et poussée hydrostatique), reste constante au cours de ces calculs.

Les résultats obtenus dans ce cas, nous montre que le calcul pour ce riser de grande profondeur, conduit à des résultats légèrement différents.

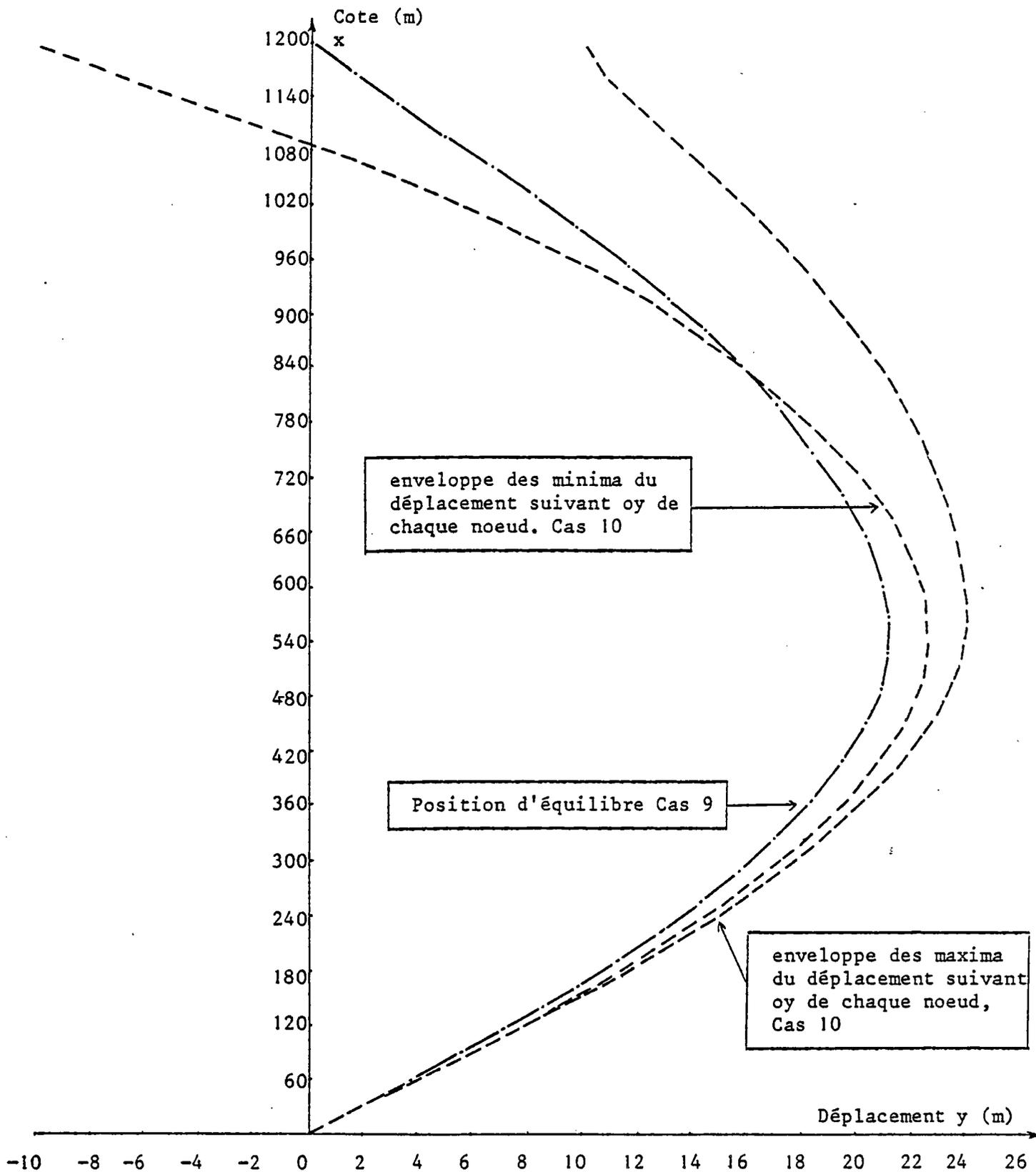


FIGURE IV-41 : Enveloppe des maxima et des minima du déplacement suivant oy, Cas 10.

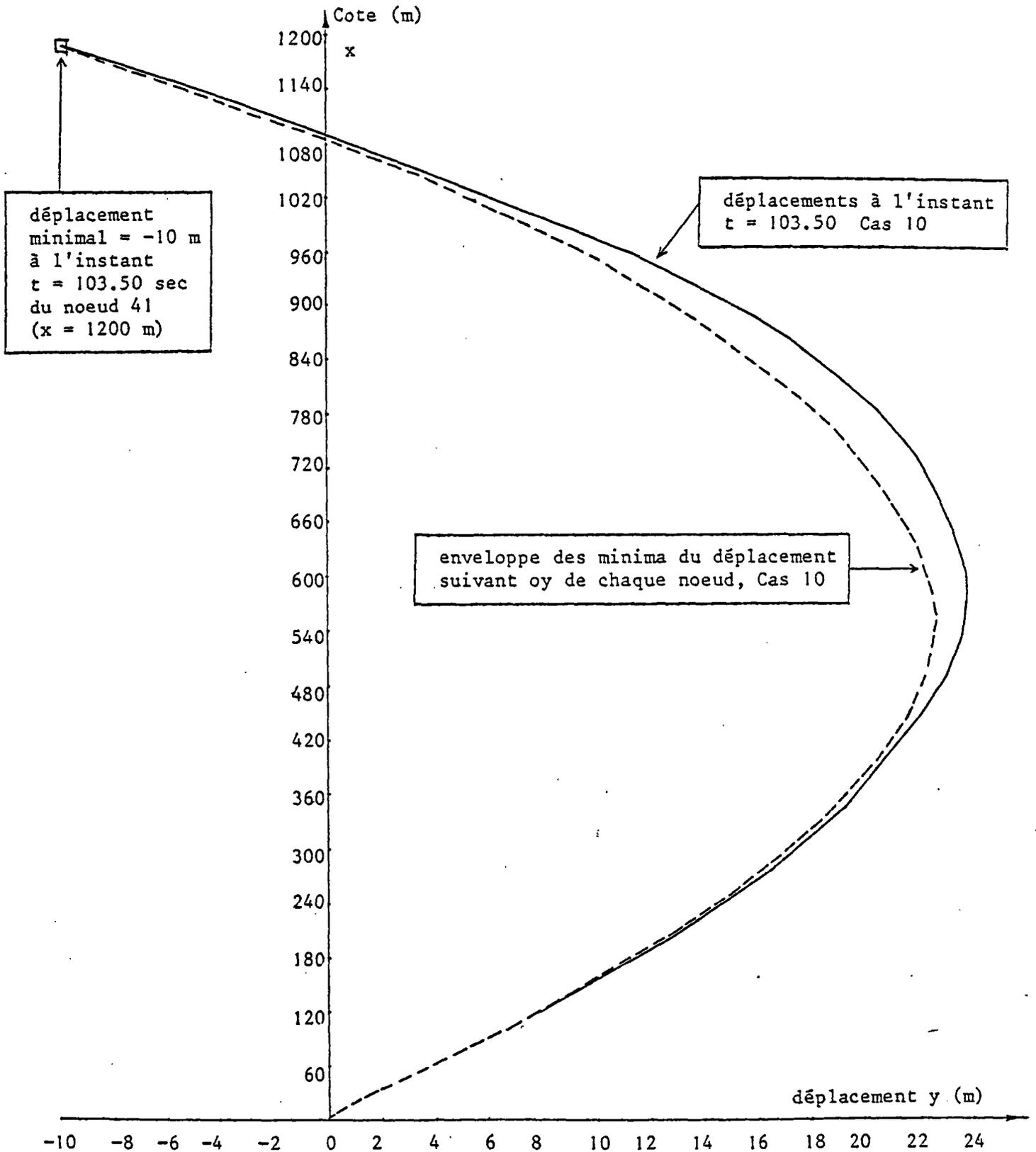
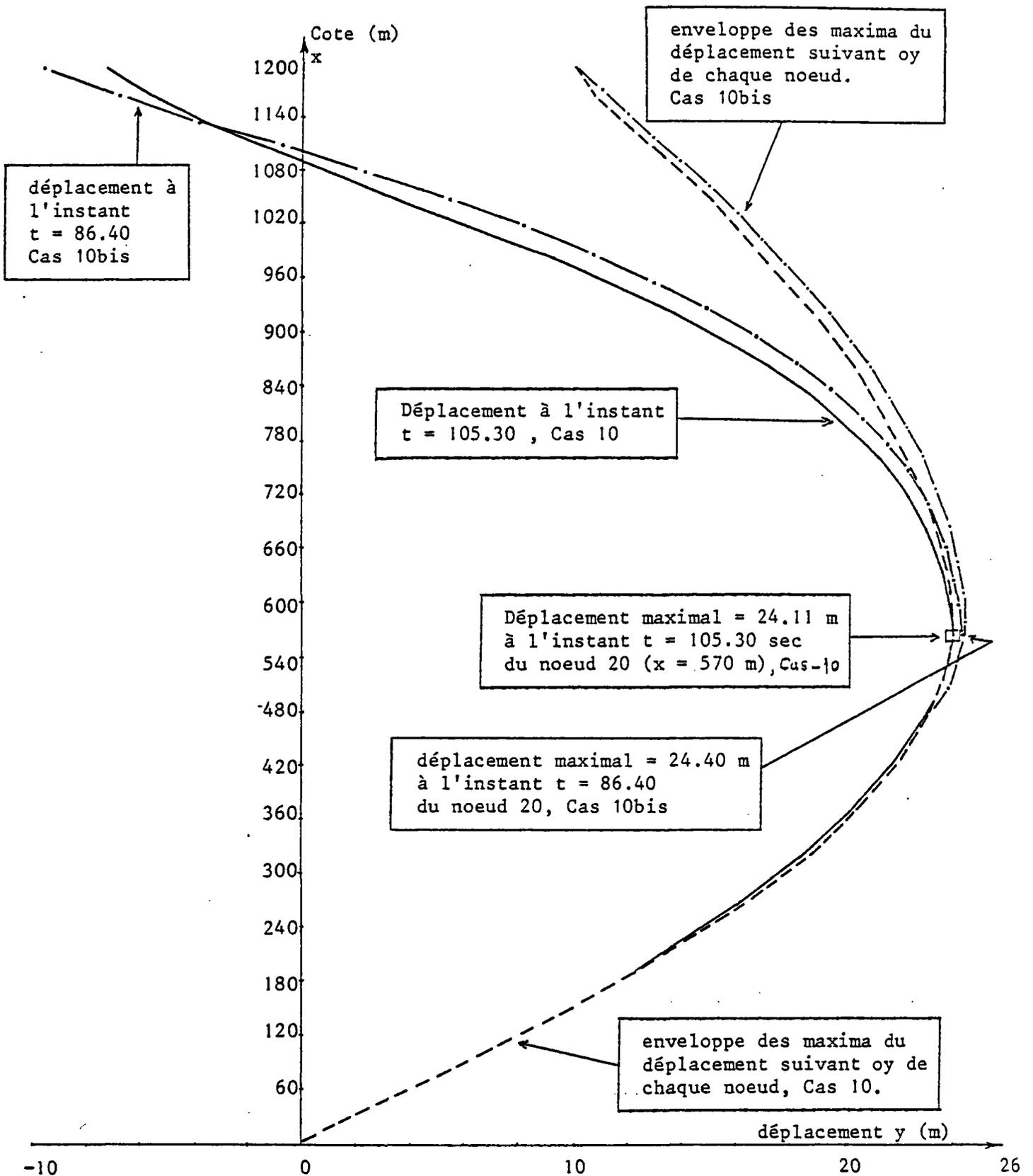


FIGURE IV-42 : Déplacements suivant oy des noeuds du riser à l'instant  $t = 103.50$  et enveloppe des minima, Cas 10.



**FIGURE IV-43** : Déplacements suivant oy des noeuds du riser à l'instant  $t = 105.30$  et enveloppe des maxima, Cas 10, Cas 10bis.

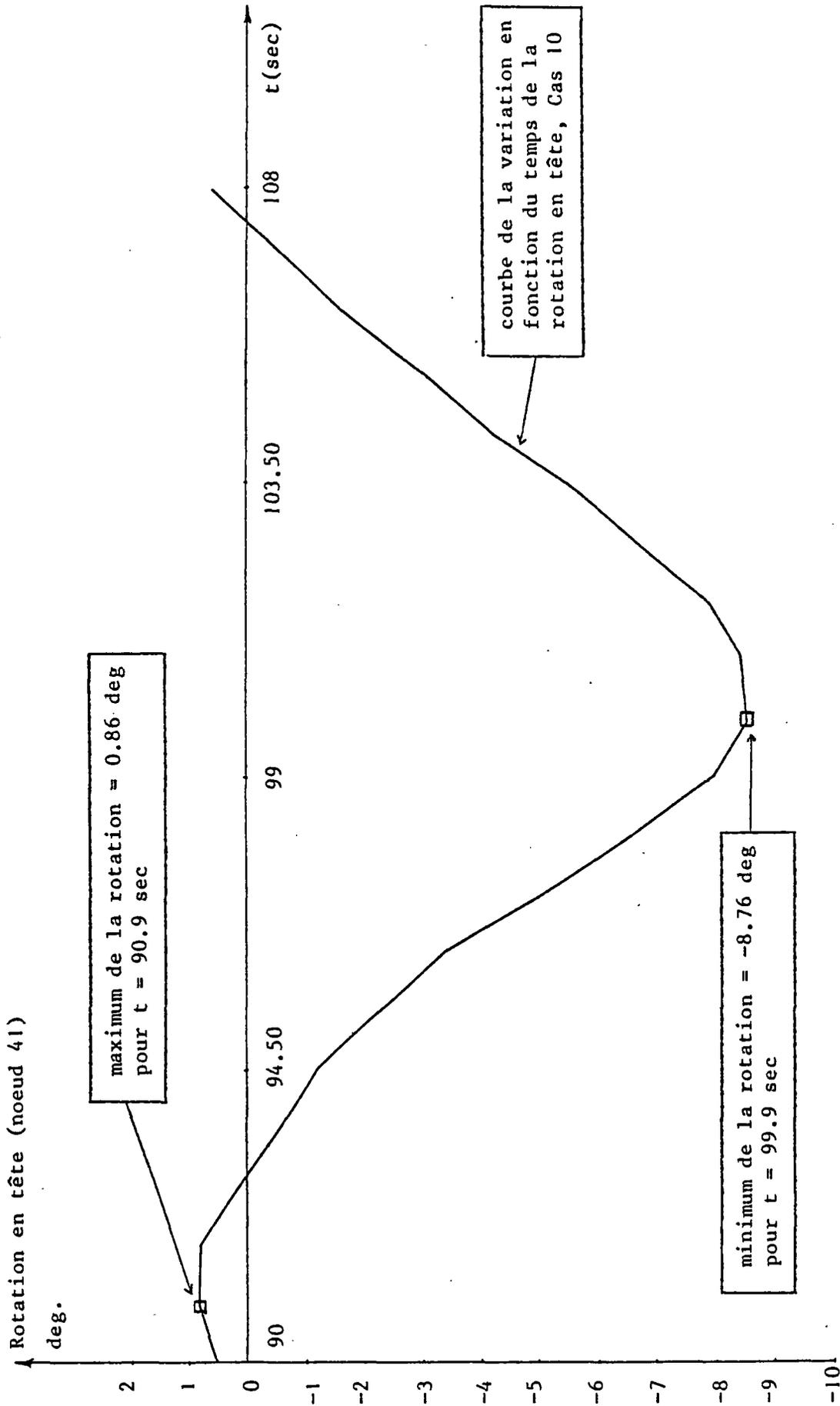
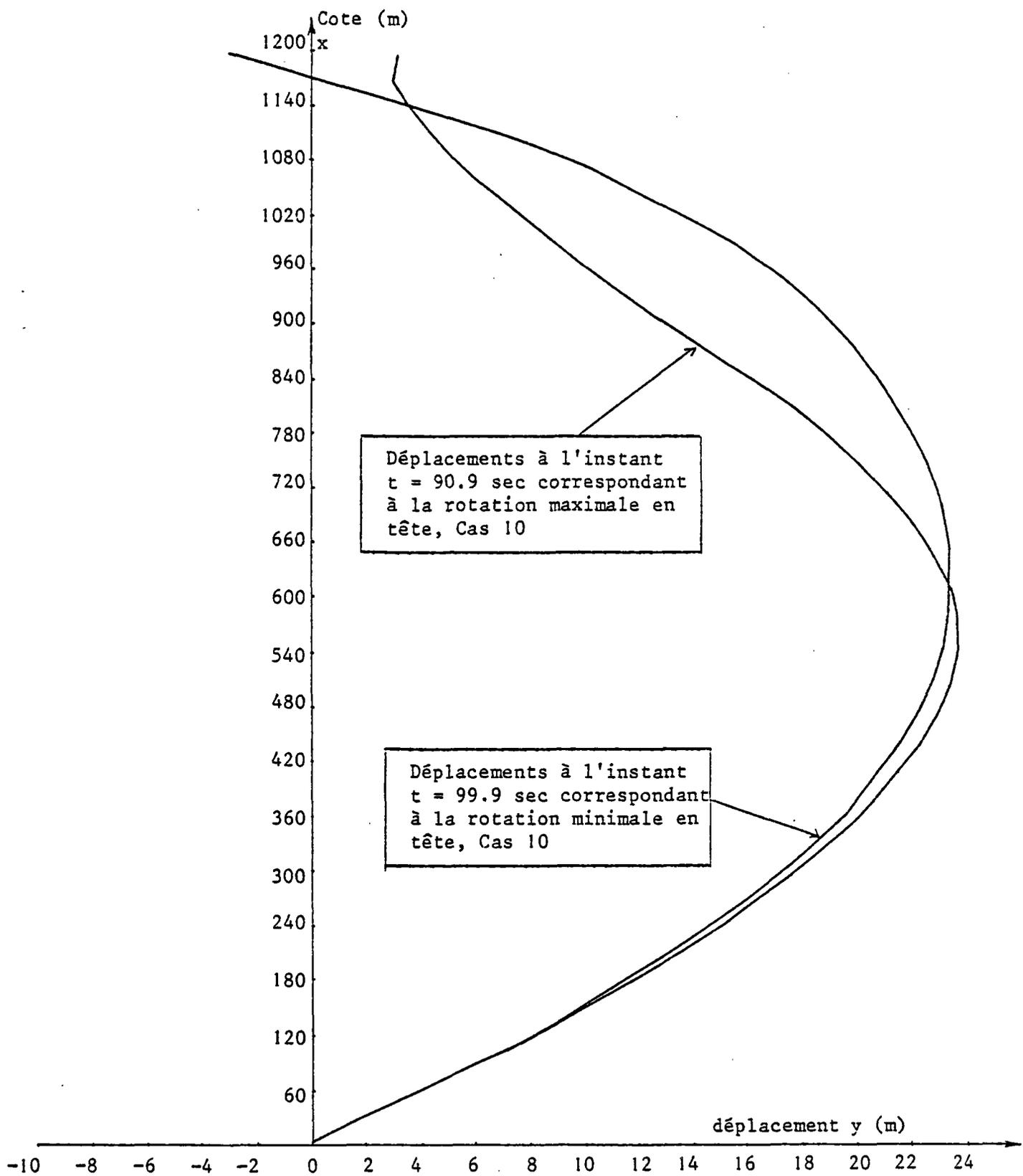
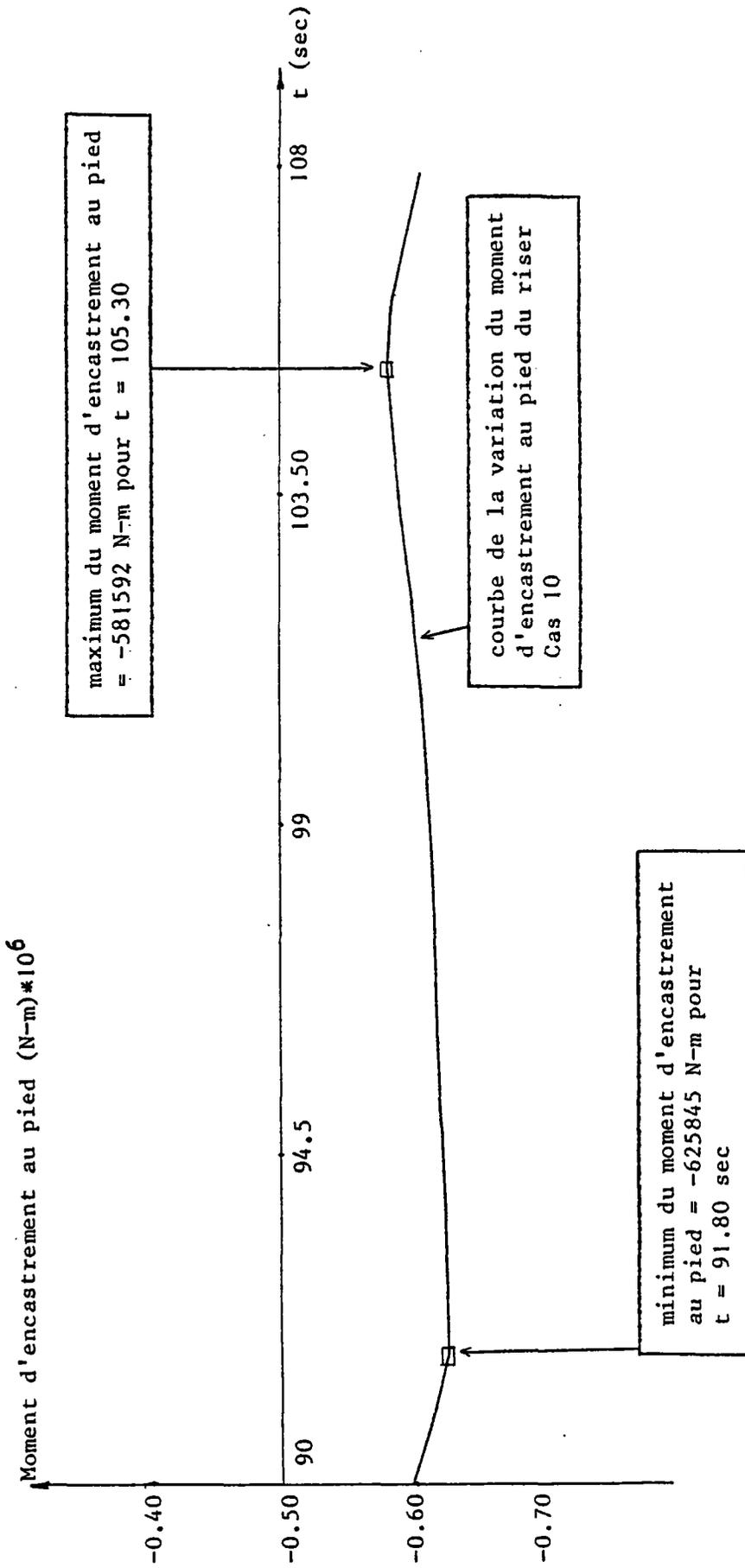


FIGURE IV-44 : Rotation en tête (noeud 41) en fonction du temps, Cas 10. Les déplacements du riser pour les instants  $t = 90.9$  et  $t = 99.9$  correspondant aux max et au min sont donnés à la figure IV-45.



**FIGURE IV-45** : Déplacements suivant oy des noeuds du riser à différents instants correspondant aux rotations max et min en tête du riser. Cas 10.



**FIGURE N-46** : Variation en fonction du temps du moment d'encastrement suivant oz au pied (noeud 1), Cas 10. Les déplacements du riser pour les instants t = 91.80 et t = 105.30 sont donnés à la figure N-47.

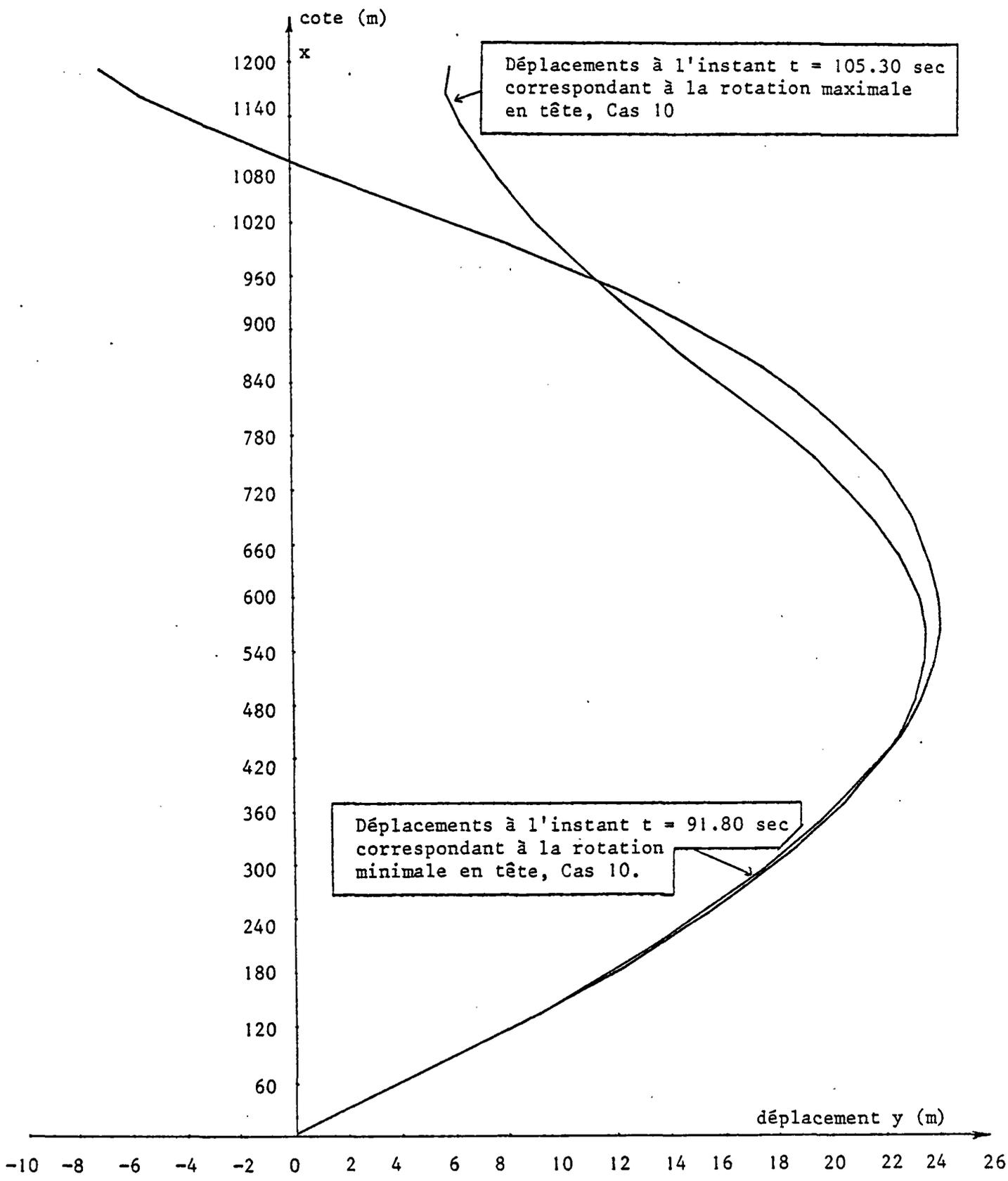
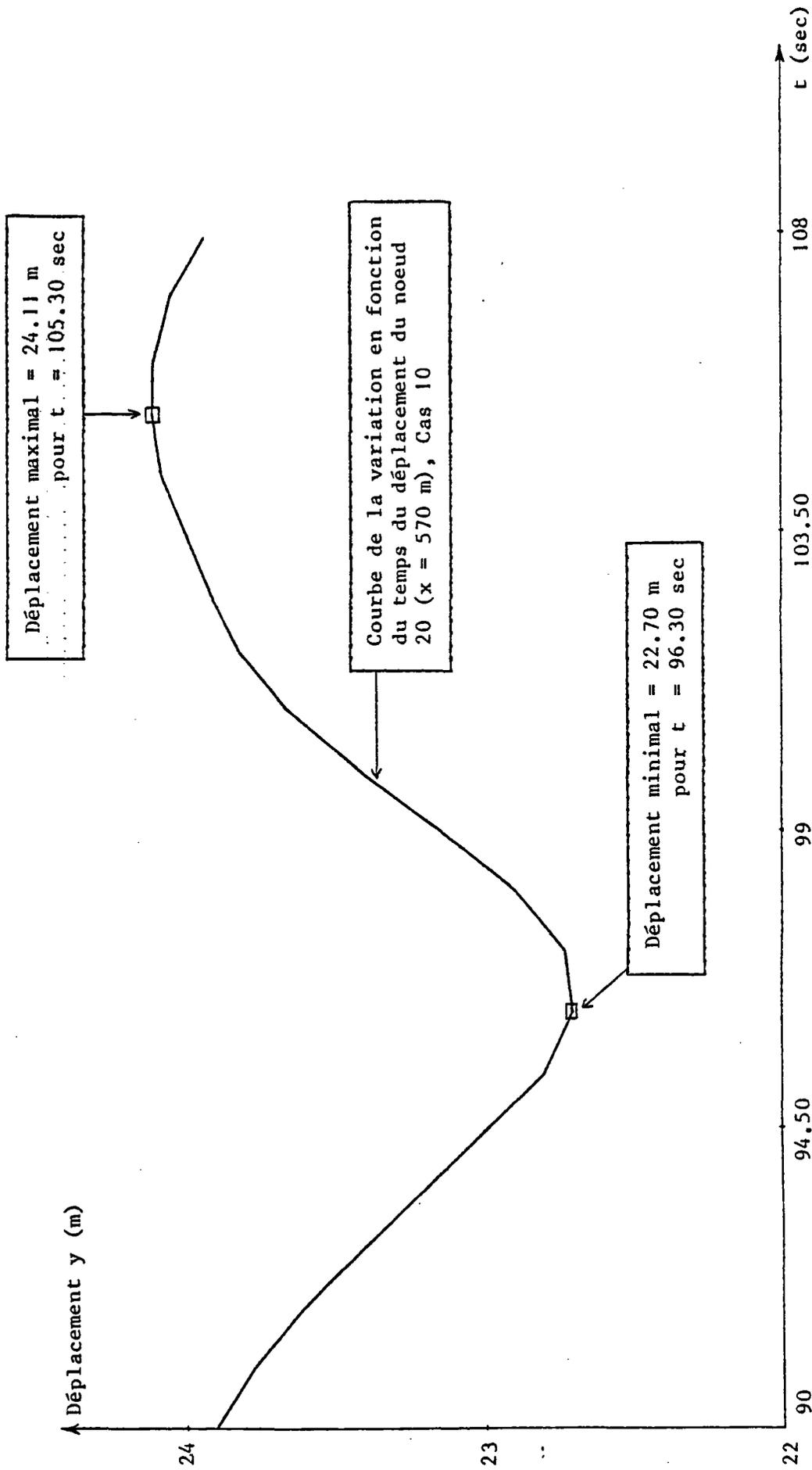


FIGURE IV-47 : Déplacements suivant oy des noeuds du riser à différents instants correspondant aux rotations max et min en tête, Cas 10.



**FIGURE IV-48 :** Variation en fonction du temps du déplacement du noeud 20 (x = 570 m), Cas 10.

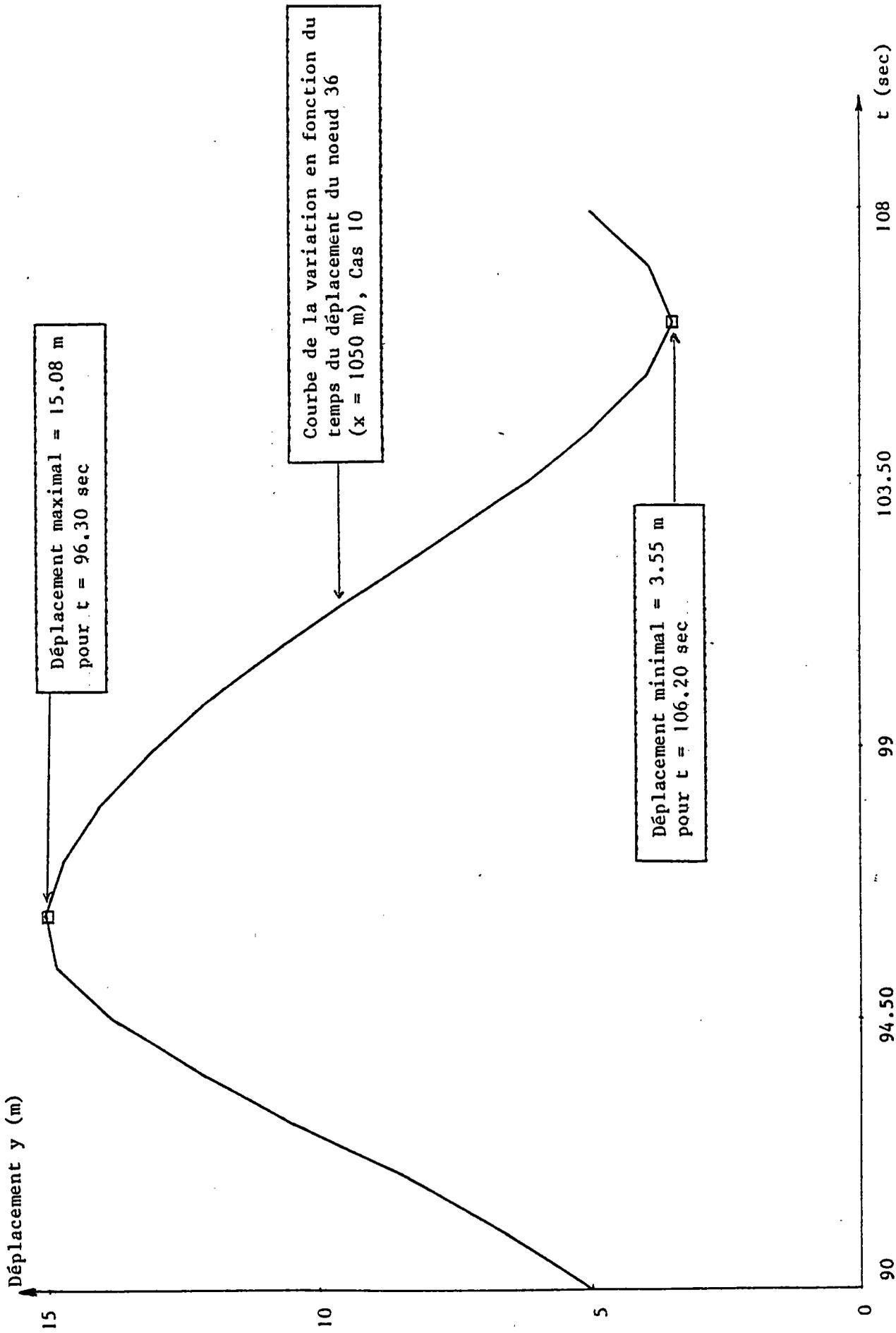
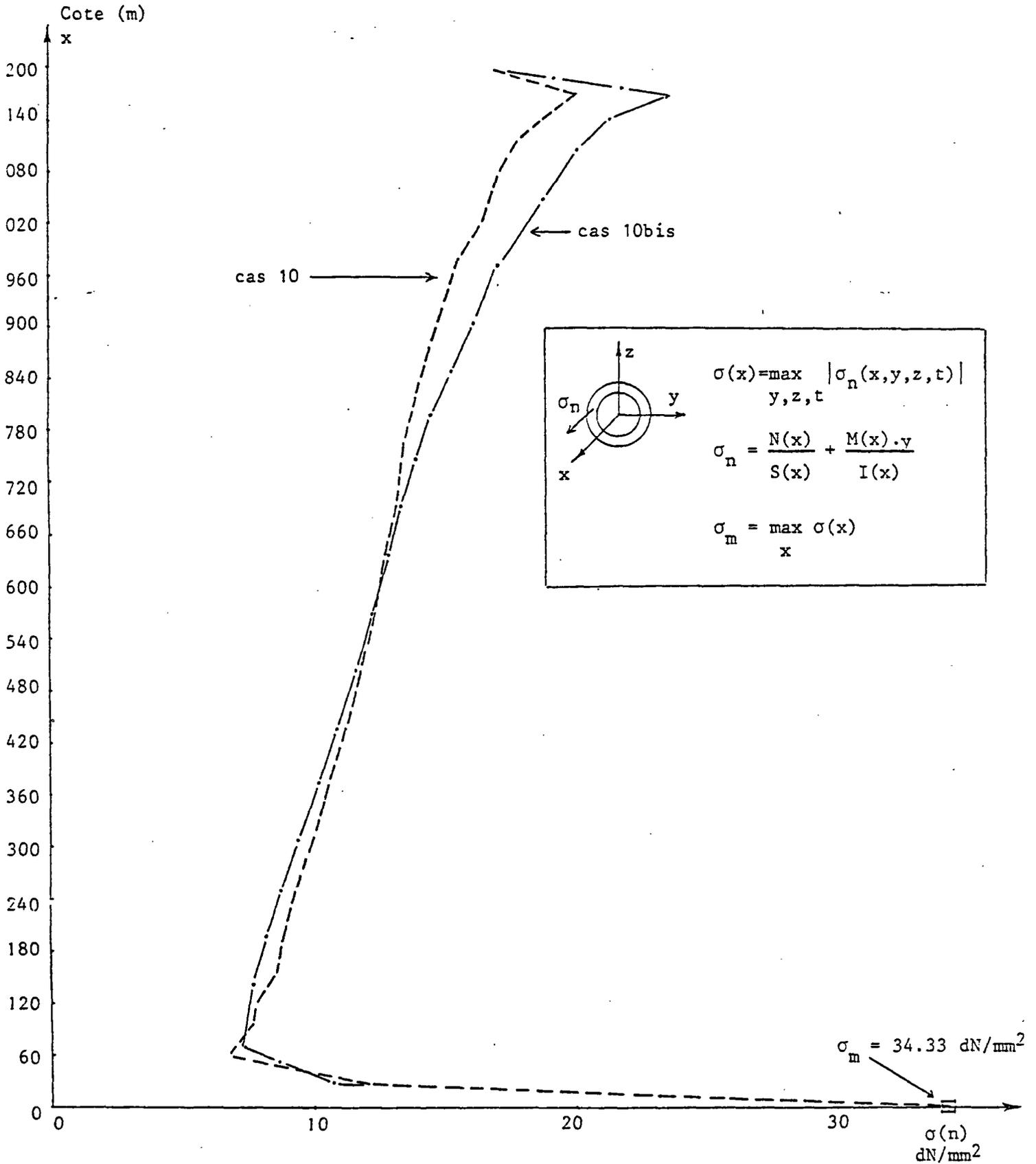


FIGURE IV-49 : Variation en fonction du temps du déplacement du noeud 36 ( x = 1050 m )  
Cas 10.



**FIGURE IV-50** : Enveloppe de la contrainte normale maximale dans chaque section du riser en fonction de la cote de la section, Cas 10, Cas 10bis.

#### IV.2.3 CAS 11

##### 1- Type de calcul :

Calcul statique nonlinéaire spatial (xoyz) sans réactualisation de géométrie.

Le nombre de D.L. libres = 238

Le nombre de D.L. bloqués = 8

##### 2- Configuration de référence :

Le riser est supposé vertical dans sa configuration de référence et a un état de contrainte nul.

##### 3- Conditions aux limites de déplacements aux noeuds 41 (tête) et 1 (pied) :

###### a- en tête (noeud 41) :

{ D.L. libres = 4 (translation ox, rotations ox, oy, oz)  
{ D.L. bloqués = 2 (translations oy, oz)

###### b- au pied (noeud 1) :

{ D.L. libre = 0  
{ D.L. bloqués = 6

##### 4- Les forces appliquées

###### a- au noeud 41 (tête) :

En tête, il n'y a qu'une tension appliquée suivant ox :

$$T_{\text{top}} = 4\ 000\ 000\ \text{N}$$

###### b- aux autres noeuds :

{ . poids propre  
{ . Forces hydrostatiques  
{ . courant dans le plan xoz dont le profil est donné à la figure IV-38.

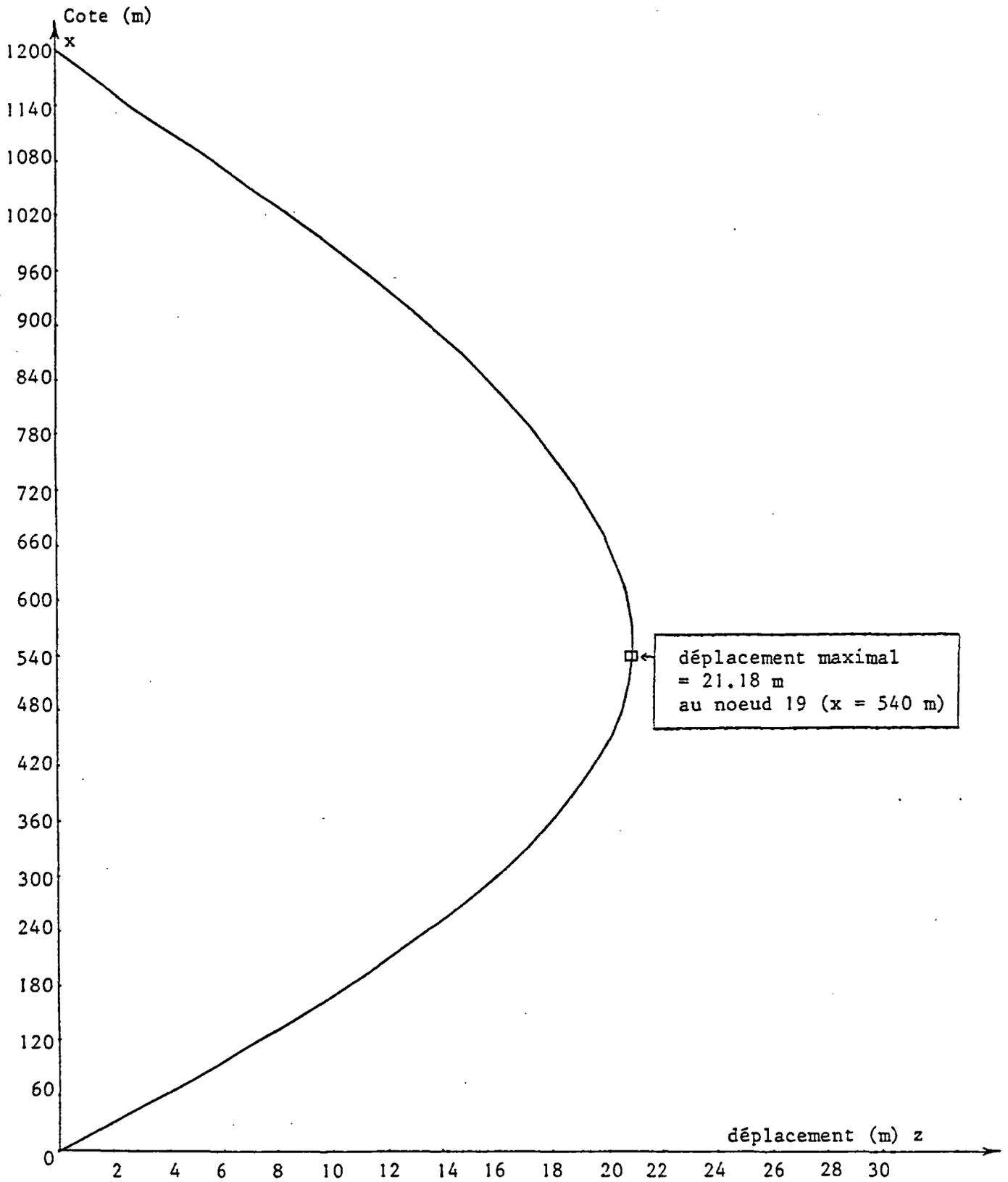
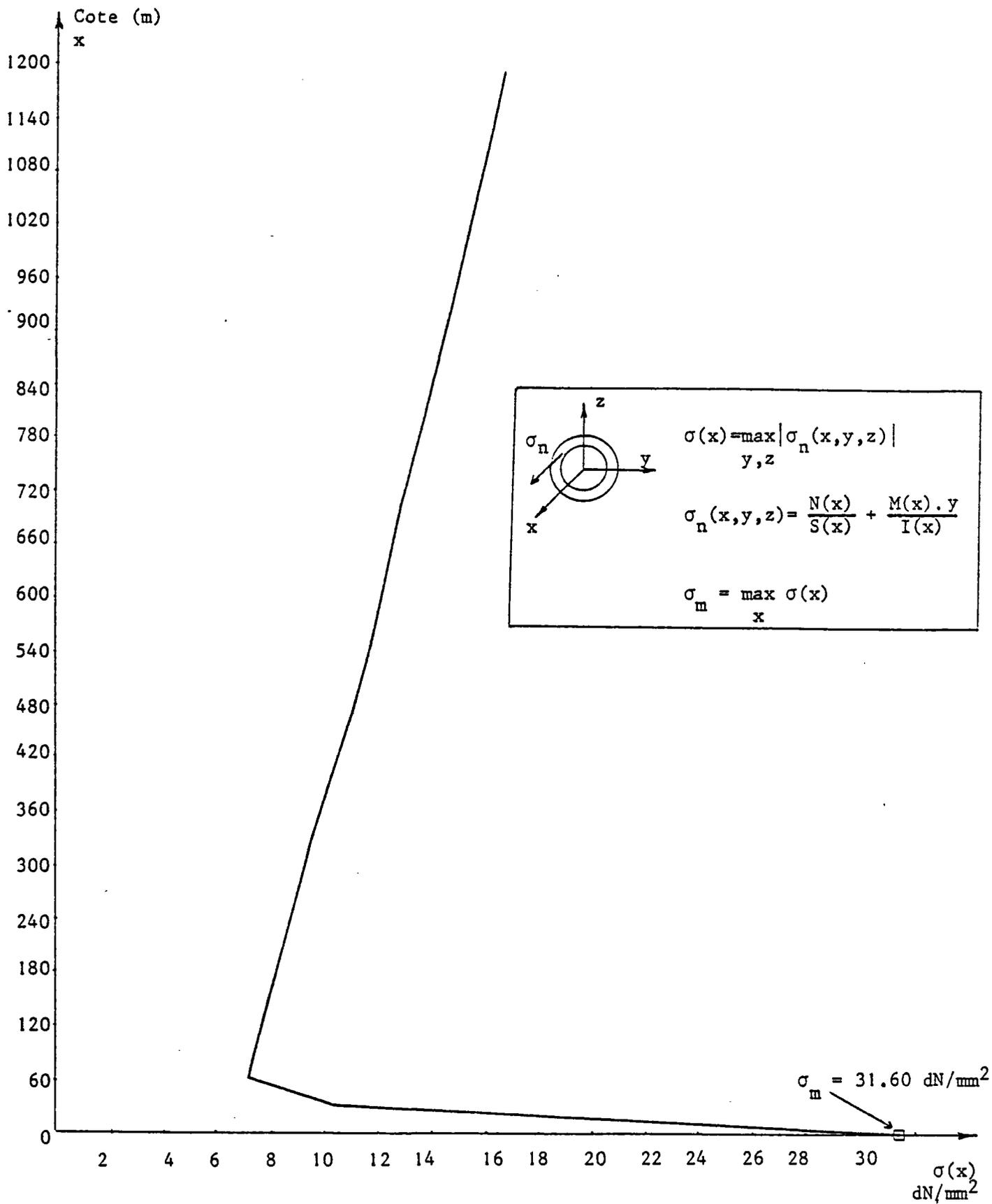


FIGURE N-51 : Déplacements horizontaux à l'équilibre, Cas 11.



**FIGURE IV-52** : Contrainte normale maximale dans chaque section du riser en fonction de la cote de la section pour la position d'équilibre, Cas 11.

#### IV.2.4 CAS 12

##### 1- Type de calcul :

Calcul dynamique nonlinéaire spatial (oxyz) avec réactualisation de géométrie.

Le nombre de D.L. libres = 238

Le nombre de D.L. bloqués = 8

##### 2- Configuration de référence :

La configuration d'équilibre statique du riser obtenu au Cas 11 est prise comme la configuration de référence du Cas 12. L'état de contrainte dans la configuration de référence n'est donc pas nul.

##### 3- Conditions aux limites de déplacements aux noeuds 41 (tête) et 1 (pied) :

###### a- en tête (noeud 41) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{D.L. libres} = 4 \quad (\text{translation ox, rotations ox,oy,oz}). \\ \text{D.L. bloqués} = 1 \quad (\text{translation oz}) \\ \text{Déplacement imposé suivant oy : } y(t) = 10. \sin\left(\frac{2\pi}{18} t\right) \end{array} \right.$$

###### b- au pied (noeud 1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{D.L. libre} = 0 \\ \text{D.L. bloqués} = 6 \end{array} \right.$$

##### 4- Les forces appliquées :

###### a- au noeud 41 (tête) :

On applique une tension en tête suivant ox :

$$T(t) = T_{\text{top}} \left(1 + 0.025 \sin\left(\frac{2\pi}{18} t\right)\right), \quad T_{\text{top}} = 4\,000\,000 \text{ N}$$

###### b- aux autres noeuds :

Même chose que pour Cas 11.

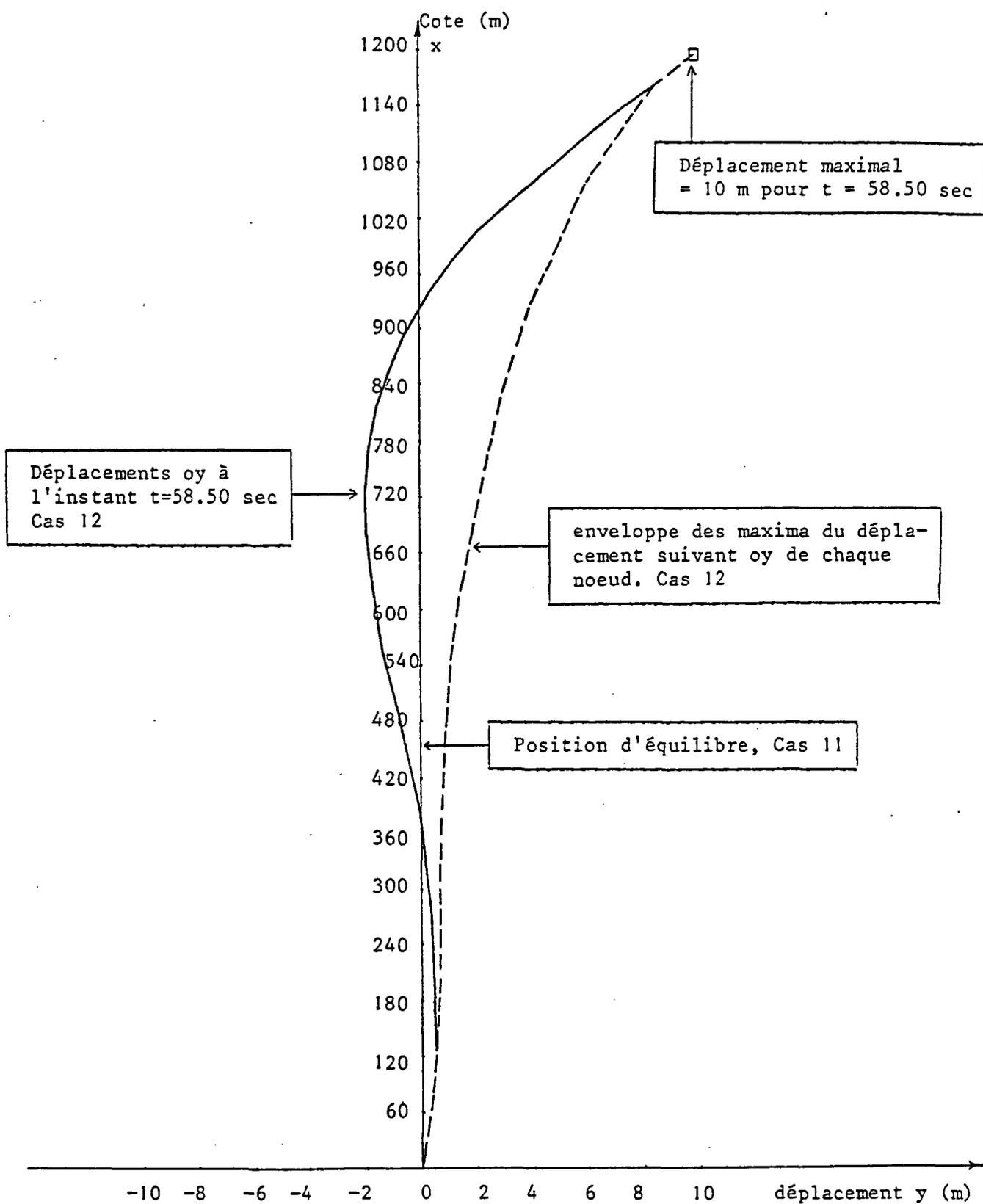
## 5- Précision sur le calcul

Le pas d'intégration pour ce cas est pris égal à 0.3 sec.

L'amortissement numérique choisi est identique à celui utilisé dans le cas 2.

La réactualisation de la géométrie a eu lieu aux pas 5 et 25.

Le régime stationnaire est atteint à  $t = 4T = 72$  secondes. Le nombre de pas de calcul est donc 240.



**FIGURE IV-53** : Déplacements suivant  $oy$  des noeuds du riser à l'instant  $t = 58.50$  sec, Cas 12, et enveloppe des maxima.

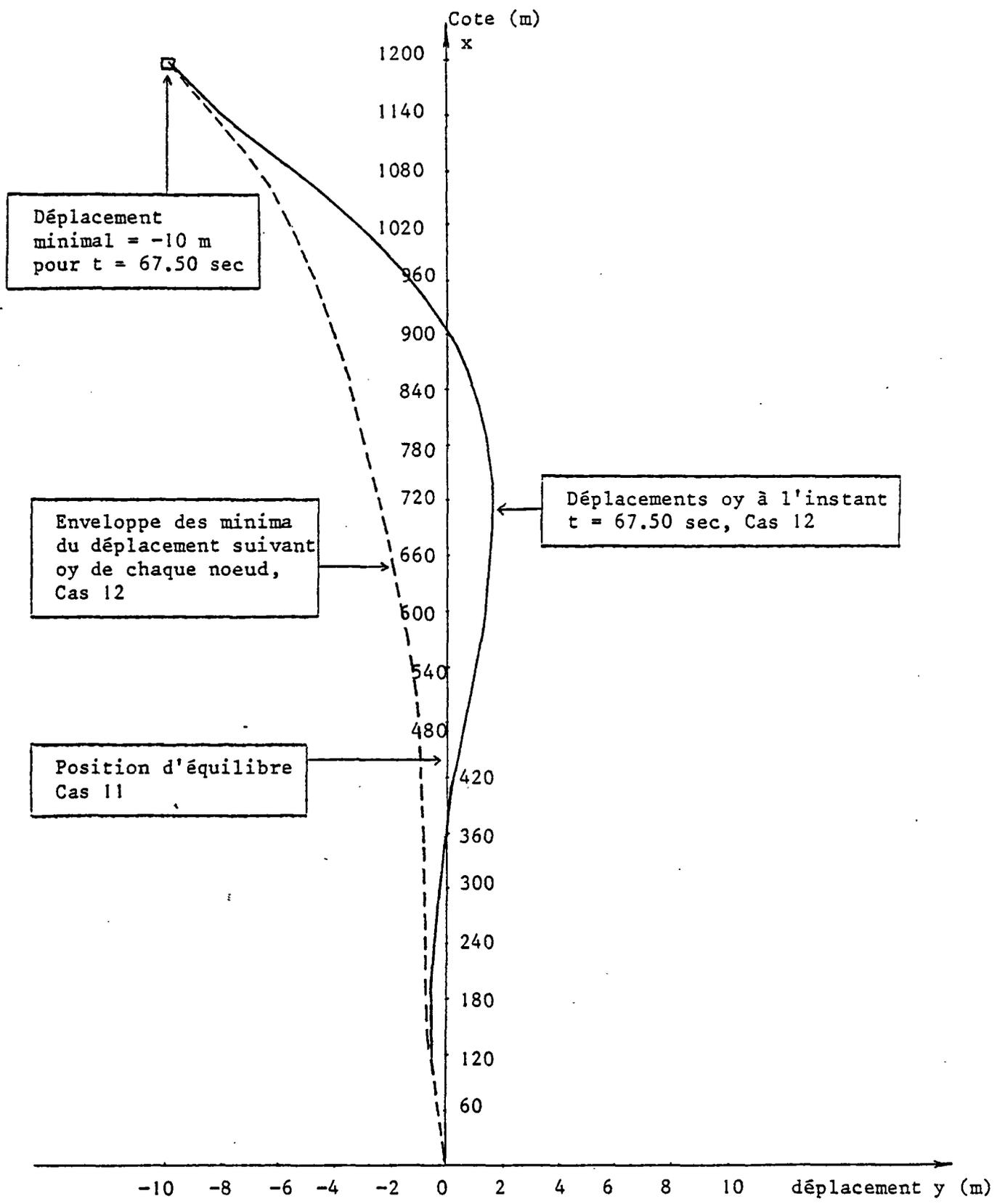


FIGURE IV-54 : Déplacements suivant oy des noeuds du riser à l'instant t = 67.50 sec, Cas 12, et enveloppe des minima.

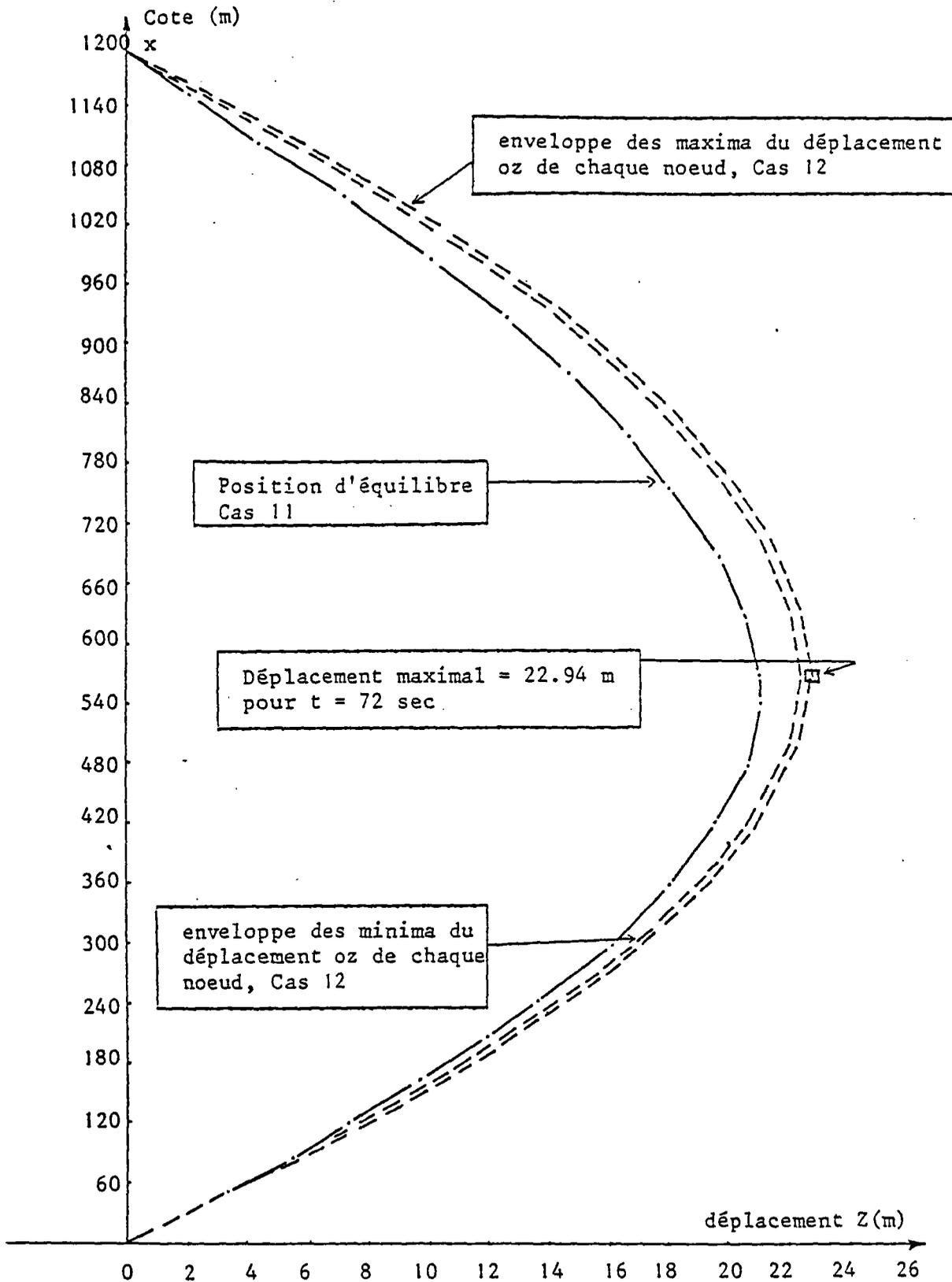
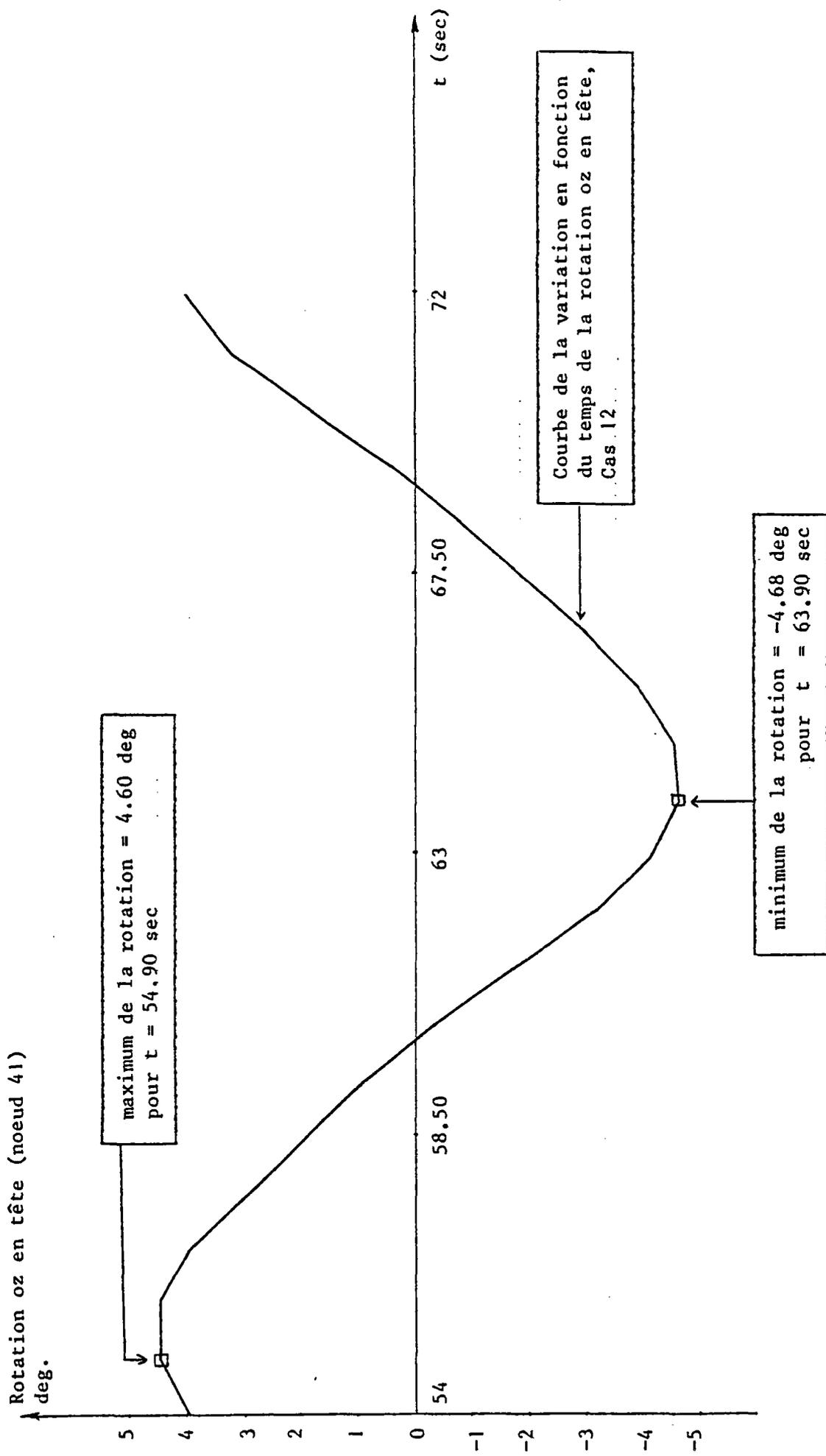
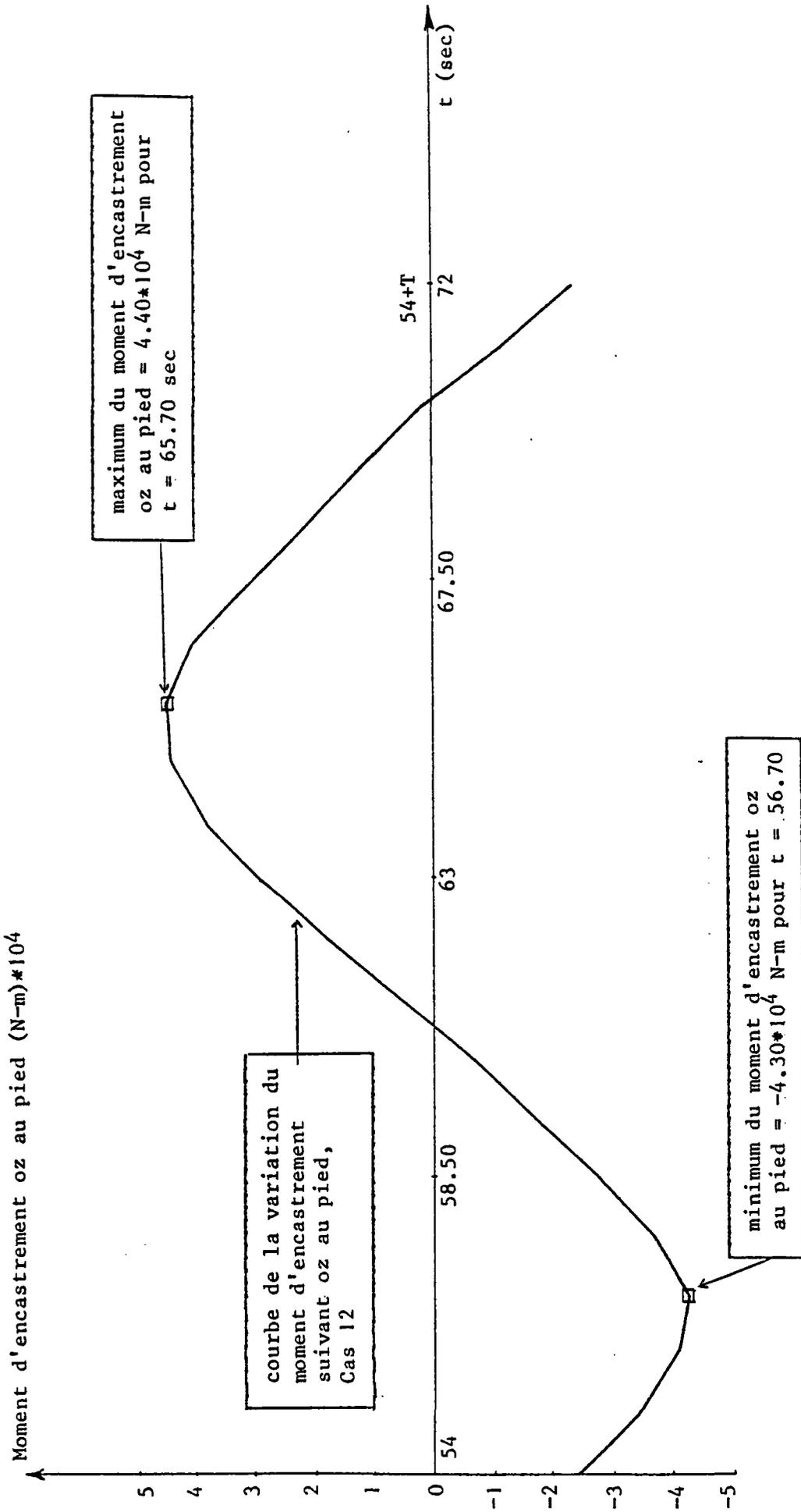


FIGURE IV-55 : Enveloppe des maxima et des minima du déplacement suivant l'axe oz, Cas 12.



**FIGURE IV-56 :** Rotation oz en tête (noeud 41) en fonction du temps, Cas 12. Les déplacements oy du riser pour les instants  $t = 54,90$  et  $t = 63,90$  correspondant au max et au min sont donnés aux figures IV-59 et IV-60.



**FIGURE IV-57** : Variation en fonction du temps du moment d'encastrement suivant oz au pied (noeud 1), Cas 12. Les déplacements du riser pour les instants t = 56.70 et t = 65.70 sont donnés aux figures IV-59 et IV-60.

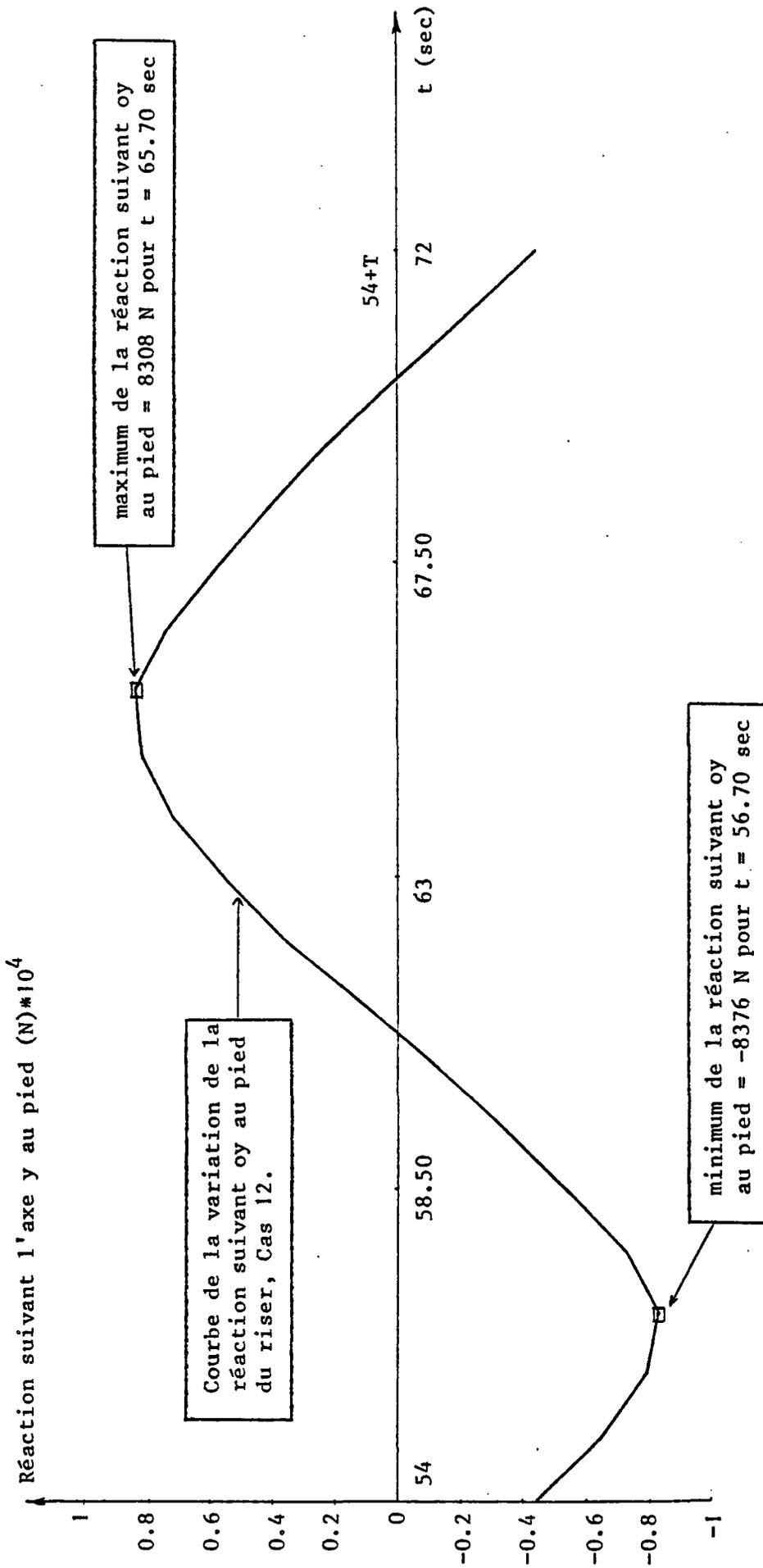


FIGURE IV-58 : Variation en fonction du temps de la réaction suivant l'axe oy au pied (noeud 1), Cas 12.

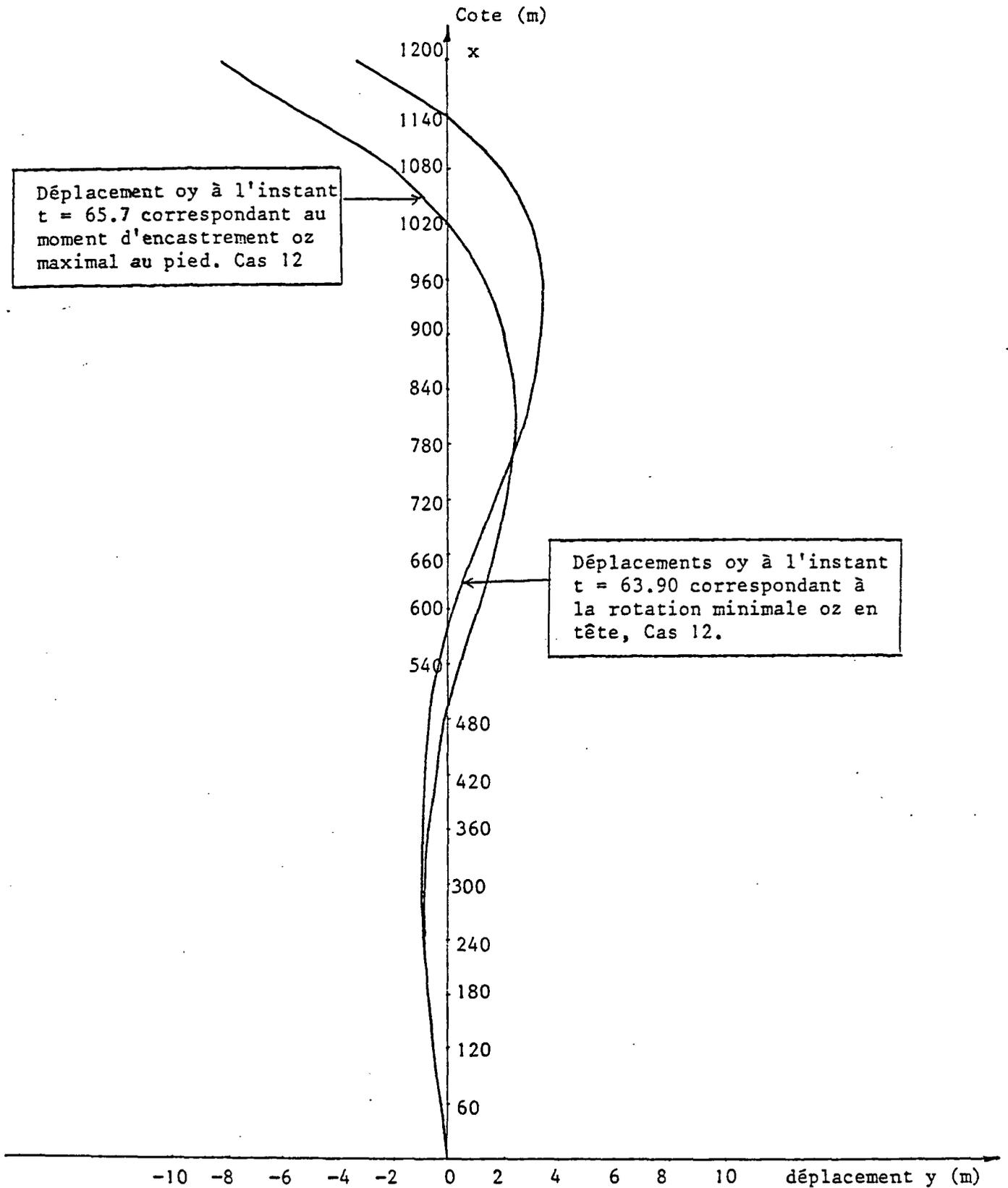
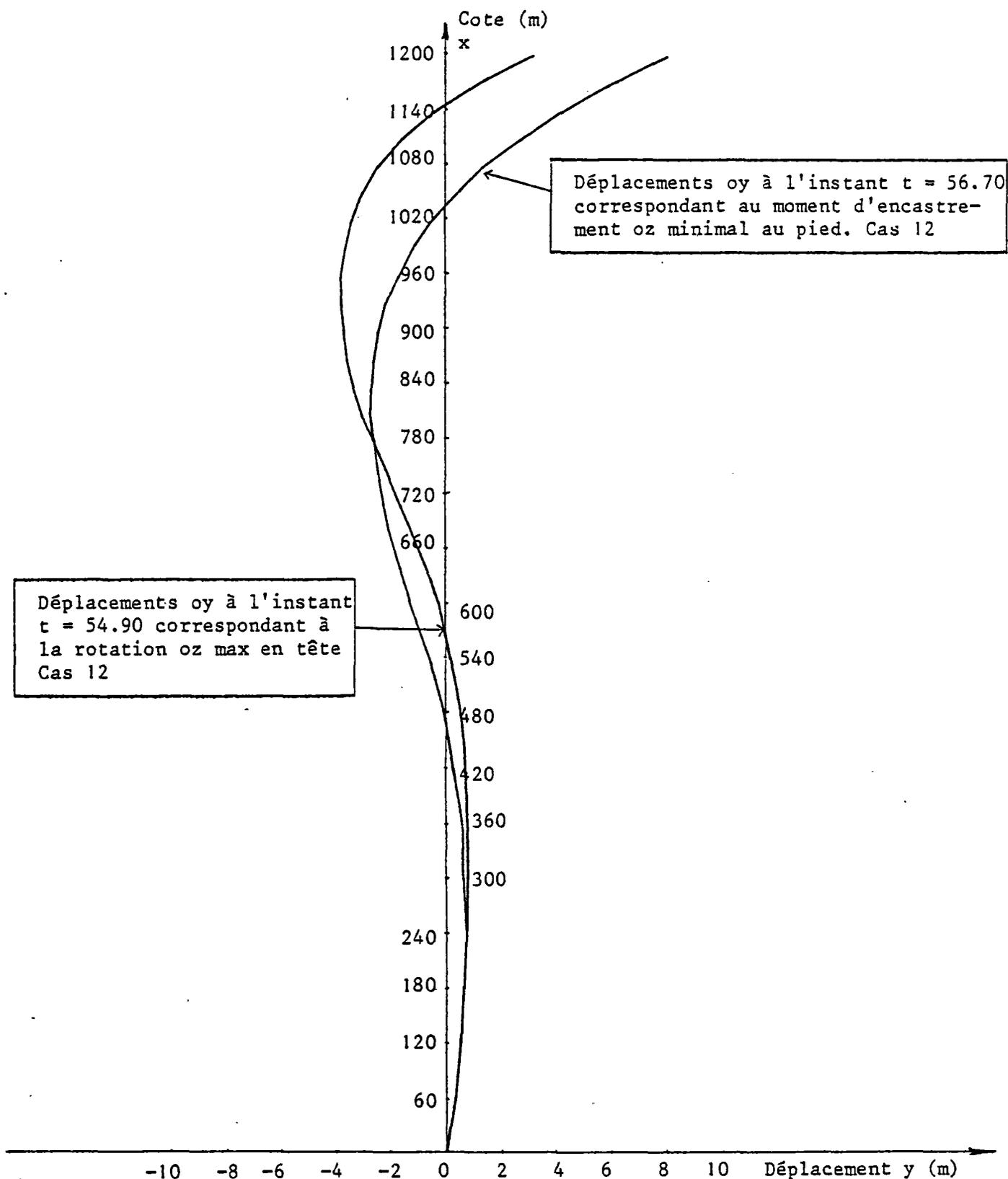


FIGURE IV-59 : Déplacements suivant oy des noeuds du riser à différents instants correspondant à la rotation minimale oz en tête et au moment d'encastrement maximal oz au pied. Cas 12.



**FIGURE IV-60** : Déplacements suivant oy des noeuds du riser à différents instants correspondant à la rotation oz maximale en tête et au moment d'encastrement minimal oz au pied. Cas 12.

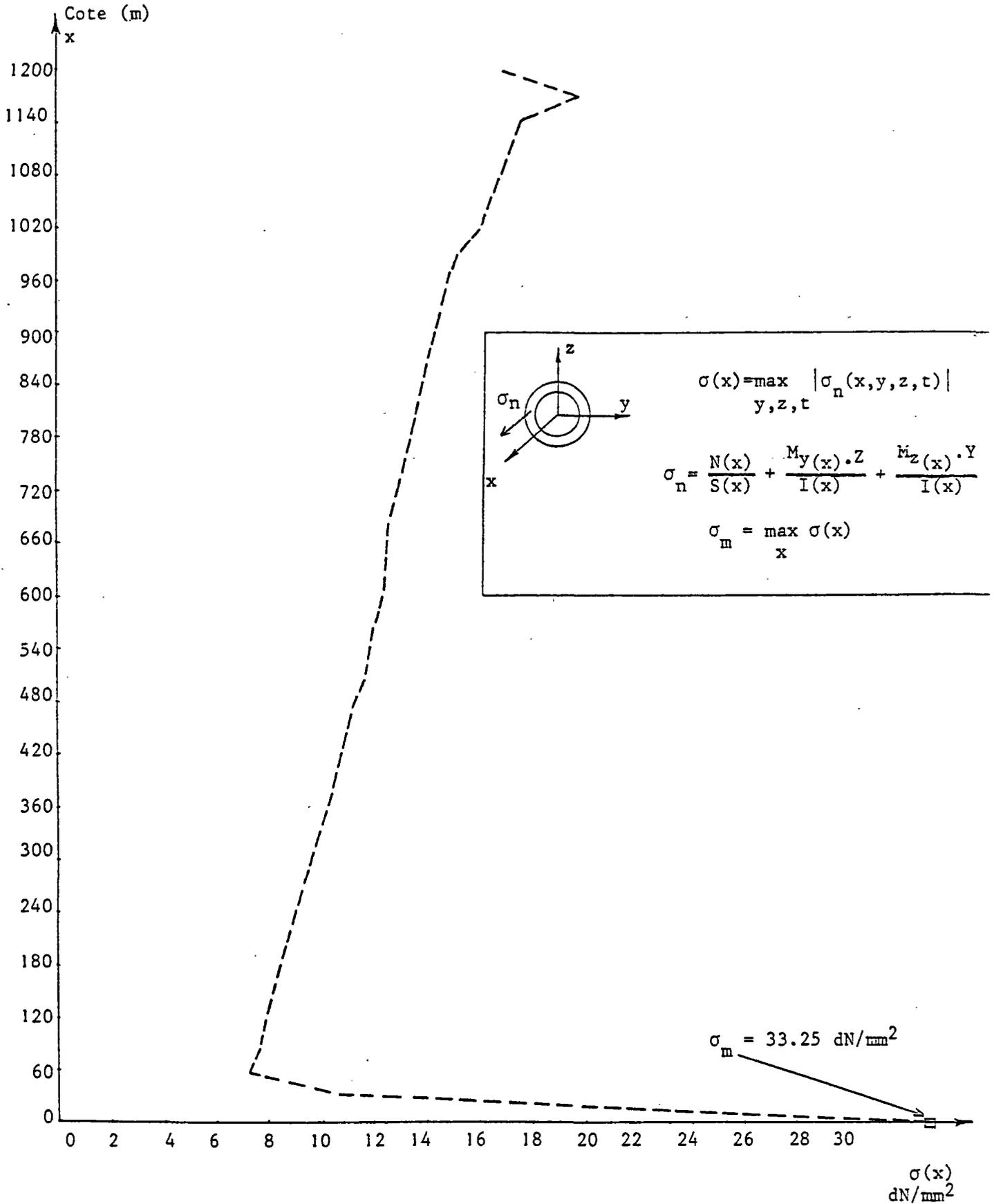


FIGURE IV-61 : Enveloppe de la contrainte normale maximale dans chaque section du riser en fonction de la cote de la section. Cas 12.

### IV.3 CAS D'UN TUBE HORIZONTAL DE 100 METRES

#### - Modélisation du tube

Le tube considéré a une longueur de 100 m. Il est situé horizontalement à 3 mètres au-dessous de la surface libre de l'eau. La modélisation est constituée de 10 éléments poutres qui ont des caractéristiques mécaniques identiques. Les 11 noeuds de la modélisation sont numérotés de 1 à 11. Le tube est repéré dans un système d'axe orthonormé oxyz. L'origine o est située au noeud 1 et l'axe y se confond avec l'axe du tube. L'axe x est vertical.

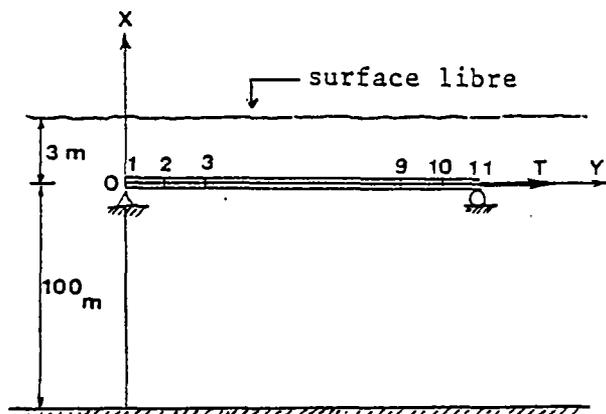


FIGURE IV-62

#### - Caractéristiques mécaniques des éléments :

. Diamètre extérieur du tube	$D1 = 406 \text{ mm}$
. Diamètre intérieur du tube	$D2 = 386 \text{ mm}$
. L'aire de la section du tube	$S = 125 \text{ cm}^2$
. Moment d'inertie de flexion	$I = 24400 \text{ cm}^4$
. Moment d'inertie de torsion	$J = 48800 \text{ cm}^4$
. Module d'élasticité transversale	$G = 0.84 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
. Module d'élasticité longitudinale	$E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
. Masse volumique du tube	$\rho = 8000 \text{ Kg/m}^3$

Les différents exemples traités pour ce tube sont les suivants.

#### IV.3.1 CAS 1

##### 1- Type de calcul :

Calcul statique nonlinéaire plan (oxy) sans réactualisation de géométrie.

Le nombre de D.L. libres = 30

Le nombre de D.L. bloqués = 3

##### 2- Configuration de référence :

Le tube est supposé horizontal dans sa configuration de référence et a un état de contrainte nul.

##### 3- Conditions aux limites de déplacements aux noeuds 1 et 11

###### a- au noeud 1 :

{ D.L. libre = 1 (Rotation oz)  
D.L. bloqués = 2 (translations ox, oy)

###### b- au noeud 11 :

{ D.L. libres = 2 (translation oy, Rotation oz)  
D.L. bloqué = 1 (translation ox)

##### 4- Les forces appliquées :

###### a- au noeud 11 :

On applique une tension suivant oy :  $T = 500\ 000\ N$

###### b- aux autres noeuds :

{ . poids propre  
. forces hydrostatiques .

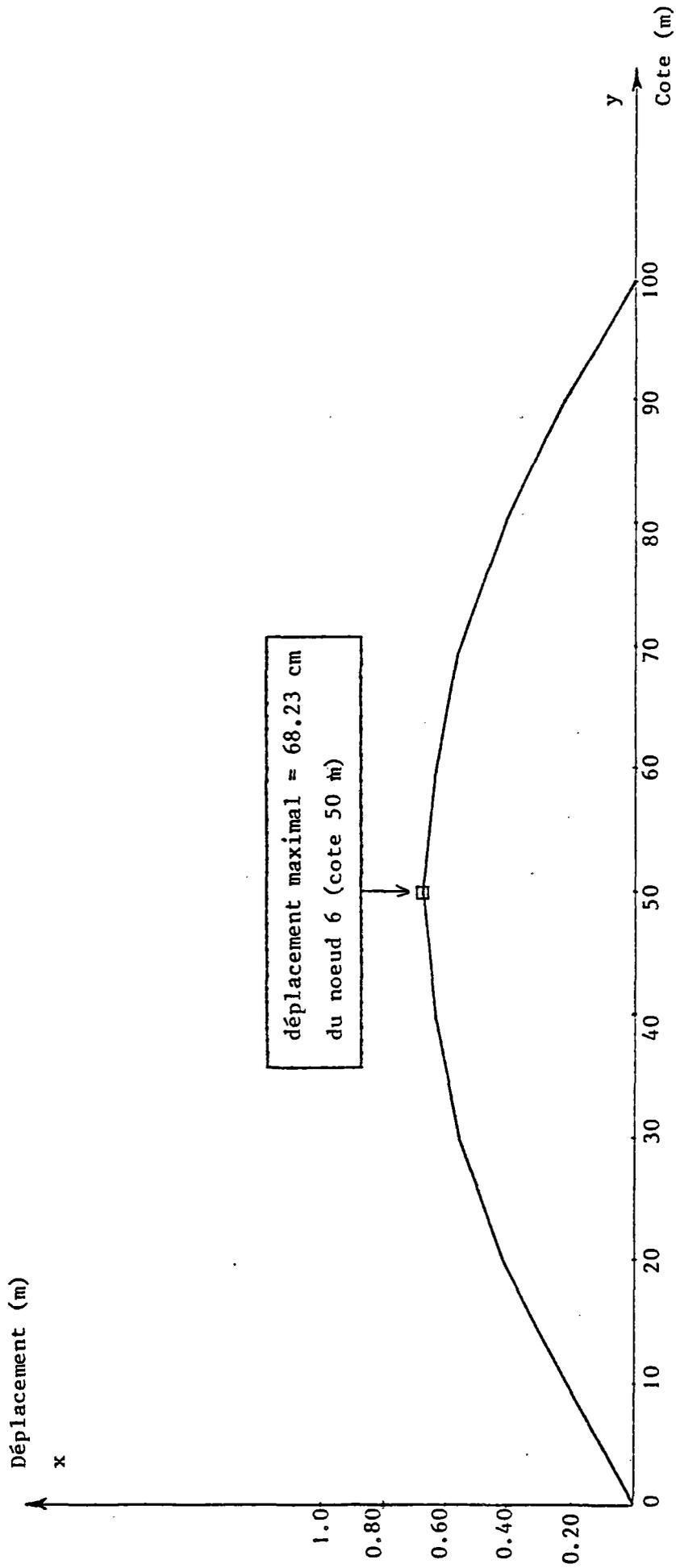


FIGURE IV-63 : Déplacements suivant ox des noeuds à l'équilibre, Cas 1.

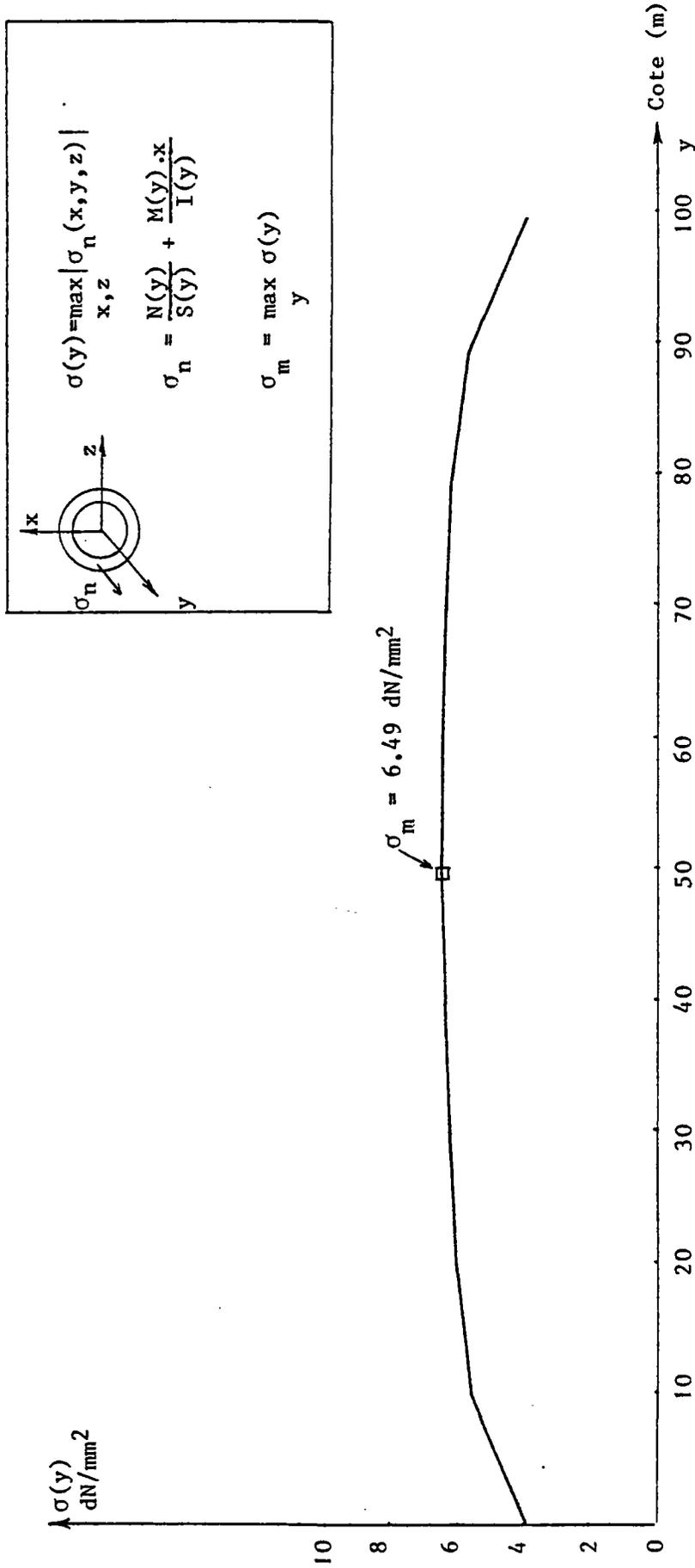


FIGURE IV-64 : Contrainte normale maximale dans chaque section du tube en fonction de la cote de la section pour la position d'équilibre, Cas 1.

### IV.3.2 CAS 2

#### 1- Type de calcul :

Calcul dynamique nonlinéaire plan (oxy) sans réactualisation de géométrie.

Le nombre de D.L. libres = 30

Le nombre de D.L. bloqués = 3

#### 2- Configuration de référence :

La configuration d'équilibre statique du tube obtenu au Cas 1 est prise comme la configuration de référence de Cas 2. L'état de contrainte n'est pas nul. Il y a un effort normal initial dans chaque barre qui est l'effort normal obtenu à l'équilibre du Cas 1.

#### 3- Conditions aux limites de déplacements aux noeuds 1 et 11

##### a- au noeud 1 :

{ D.L. libre = 1 (Rotation oz)  
D.L. bloqués = 2 (translations ox, oy)

##### b- au noeud 11 :

{ D.L. libres = 2 (translation oy, rotation oz)  
D.L. bloqué = 1 (translation ox)

#### 4- Les forces appliquées :

##### a- au noeud 11 :

Même chose que pour cas 1.

##### b- aux autres noeuds :

{ . poids propre  
. forces hydrostatiques

. houle d'Airy (profondeur infinie) ayant une amplitude de 2 m,  
une période de 6 secondes, et se propageant suivant  $\theta$  positif.

5- Précision sur le calcul :

Le pas d'intégration pour le calcul est pris égal à 0.1 seconde.  
Le régime stationnaire est atteint à  $t = 4T = 24$  secondes. Le  
nombre de pas de calcul est donc 240.

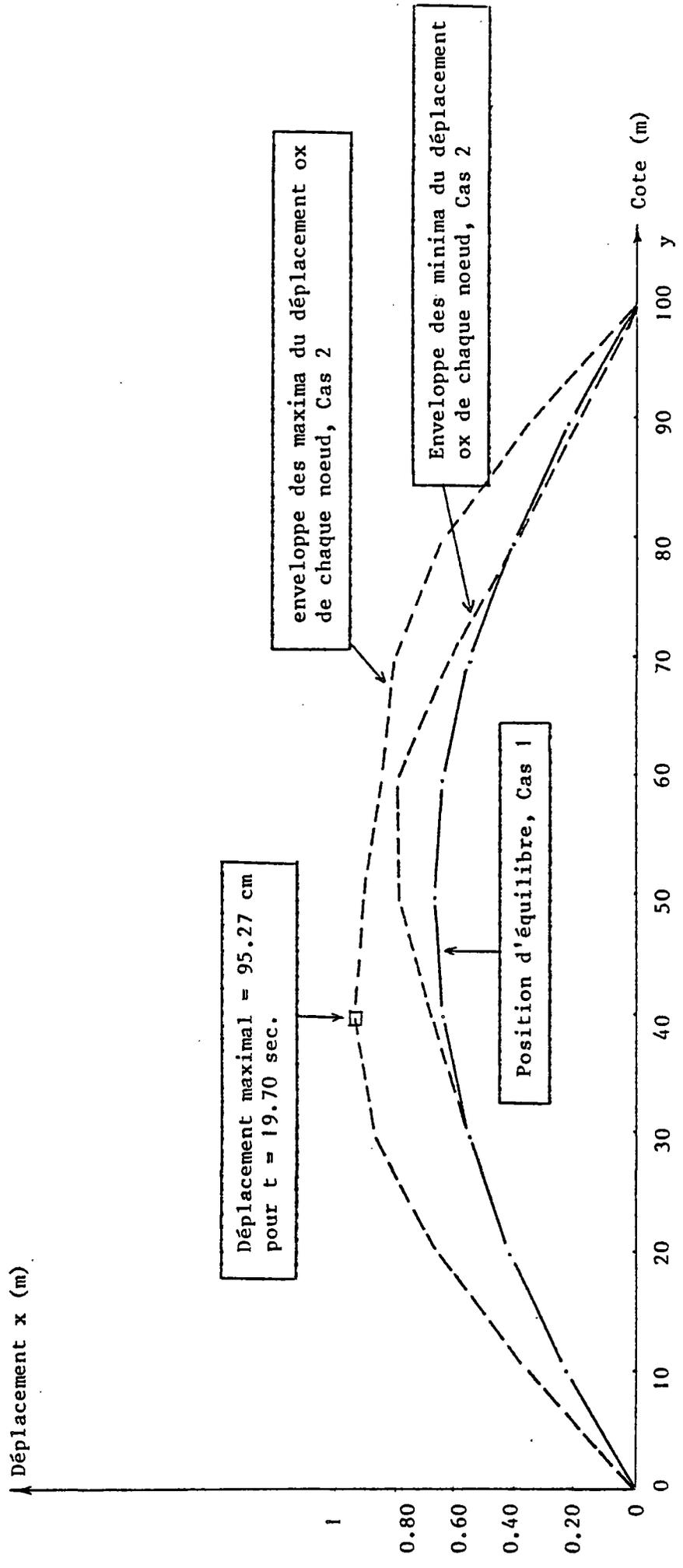


FIGURE IV-65 : Enveloppe des maxima et des minima du déplacement suivant ox des noeuds du tube, Cas 2. Les déplacements à l'instant t = 19.70 sont donnés à la figure IV-66.

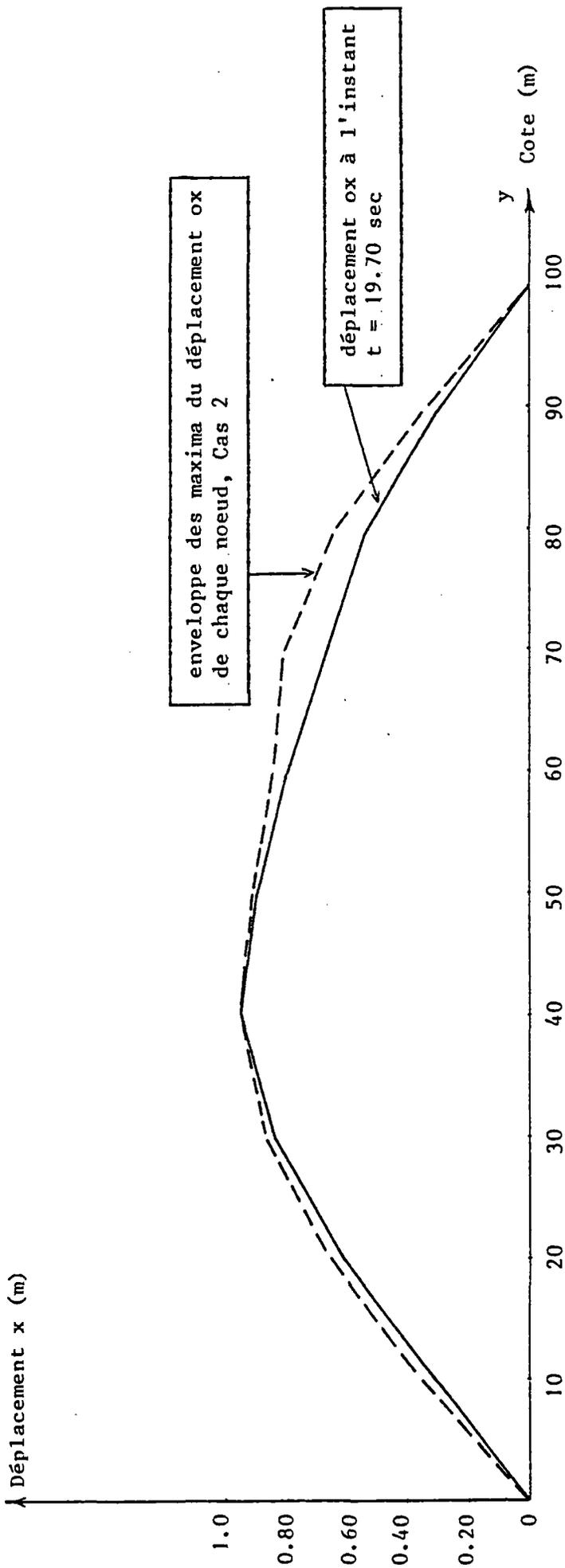


FIGURE IV-66 : Déplacements suivant ox des noeuds du tube à l'instant  $t = 19.70$  sec et enveloppe des maxima, Cas 2.

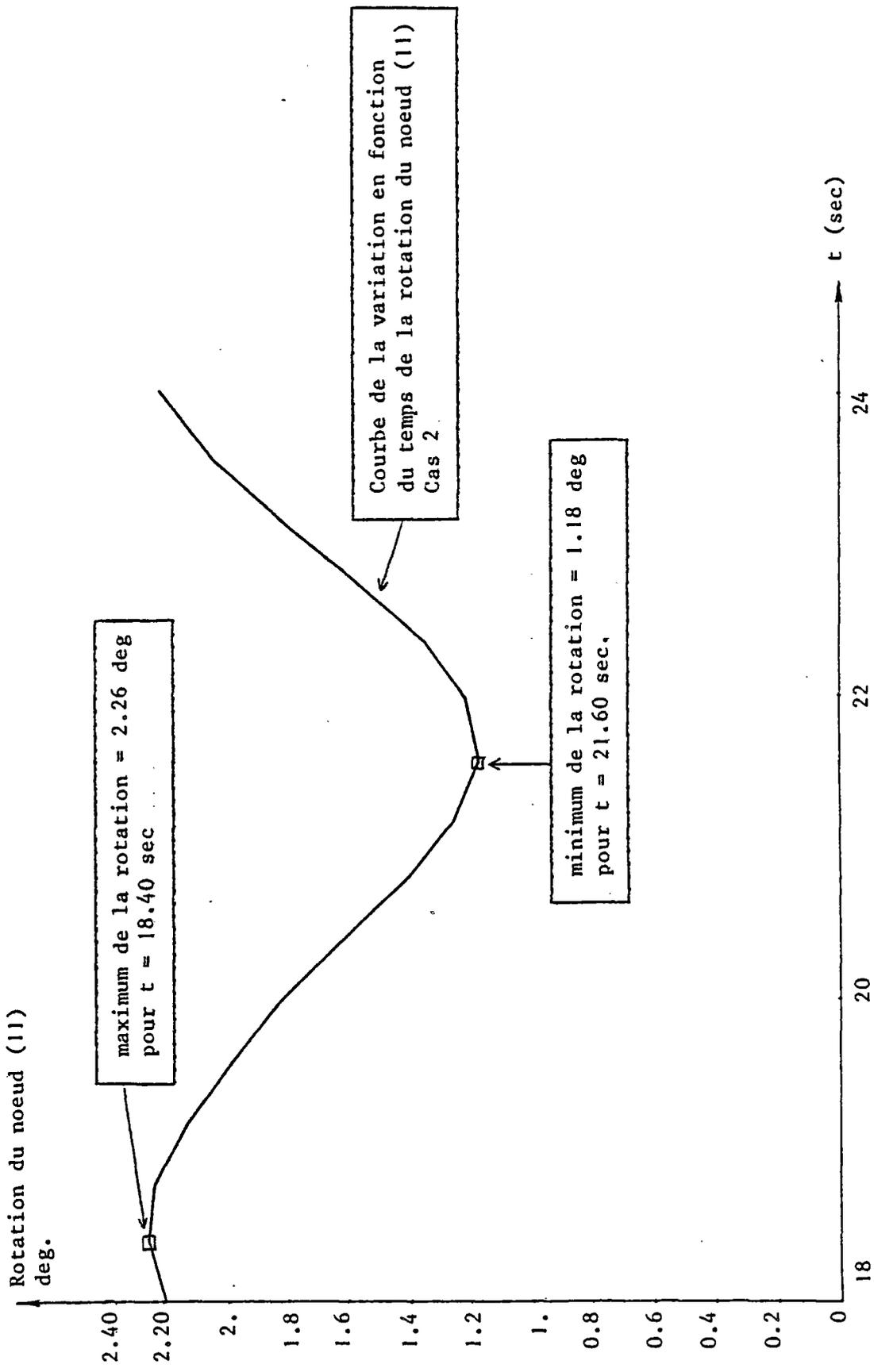


FIGURE W-67 : Rotation du noeud (11) en fonction du temps, Cas 2. Les déplacements du tube pour les instants  $t = 18.40$  et  $t = 21.60$  sont donnés à la figure W-68.

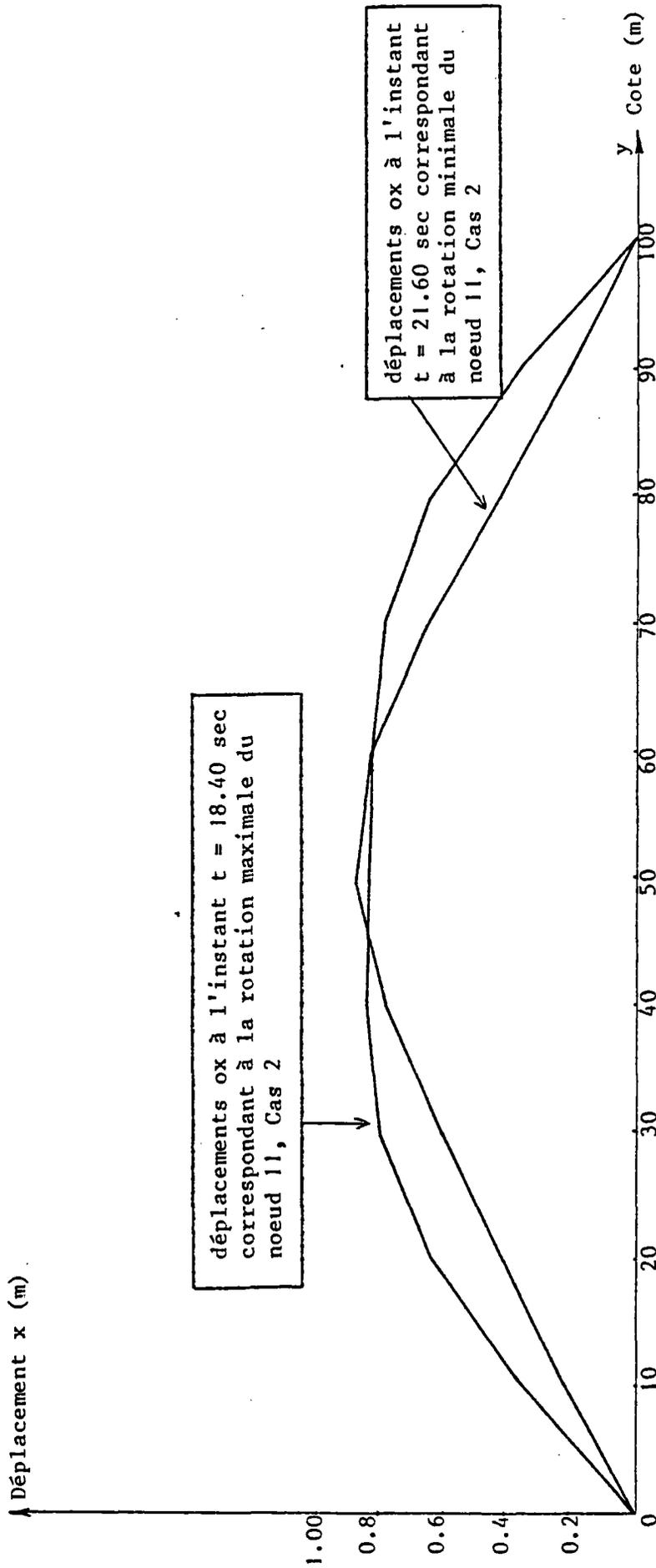


FIGURE IV-68 : Déplacements suivant  $ox$  des noeuds du tube à différents instants correspondant aux rotations max et min du noeud (11), Cas 2.

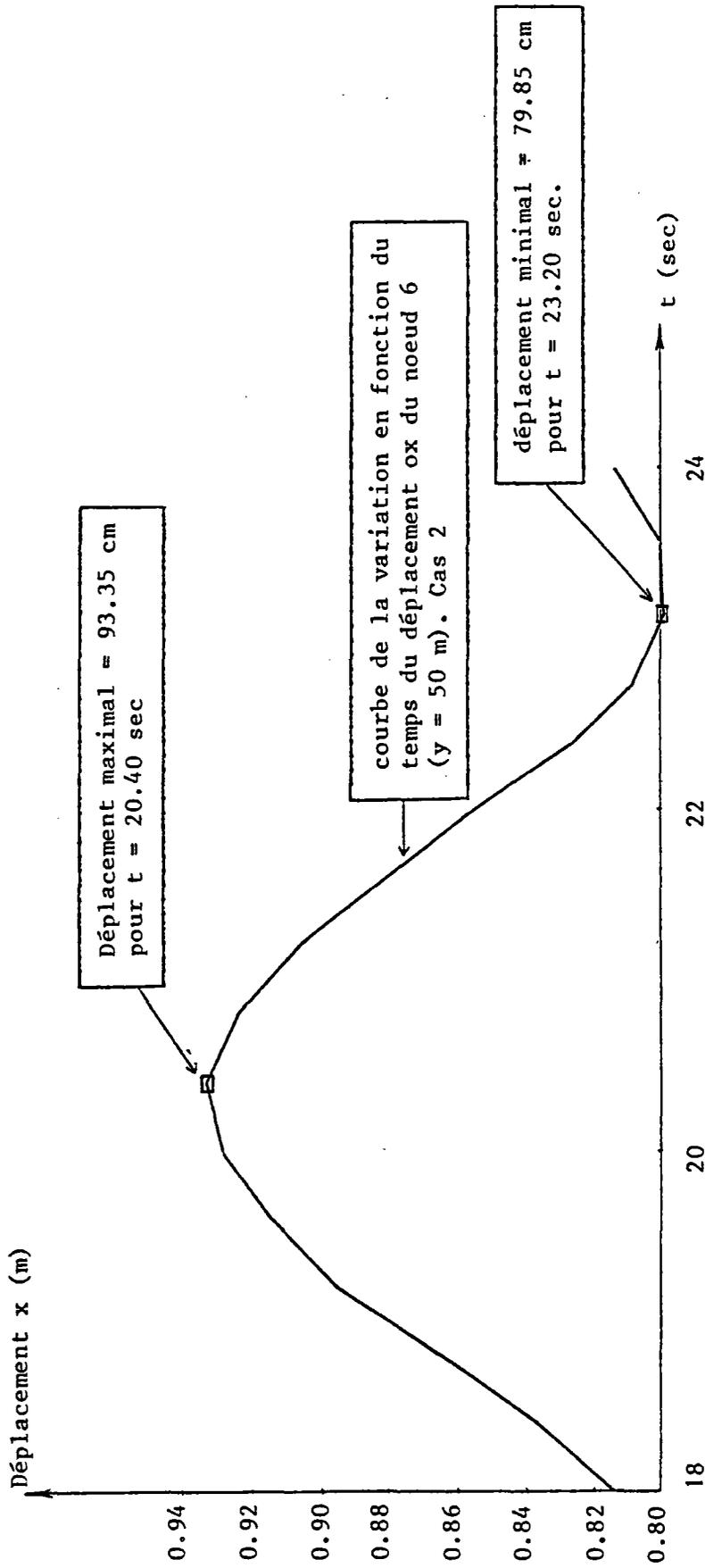


FIGURE IV-69 : Variation en fonction du temps du déplacement  $ox$  du noeud 6 ( $y = 50$  m). Cas 2. Les déplacements aux instants  $t = 20.40$  et  $t = 23.20$  sont donnés à la figure IV-70.

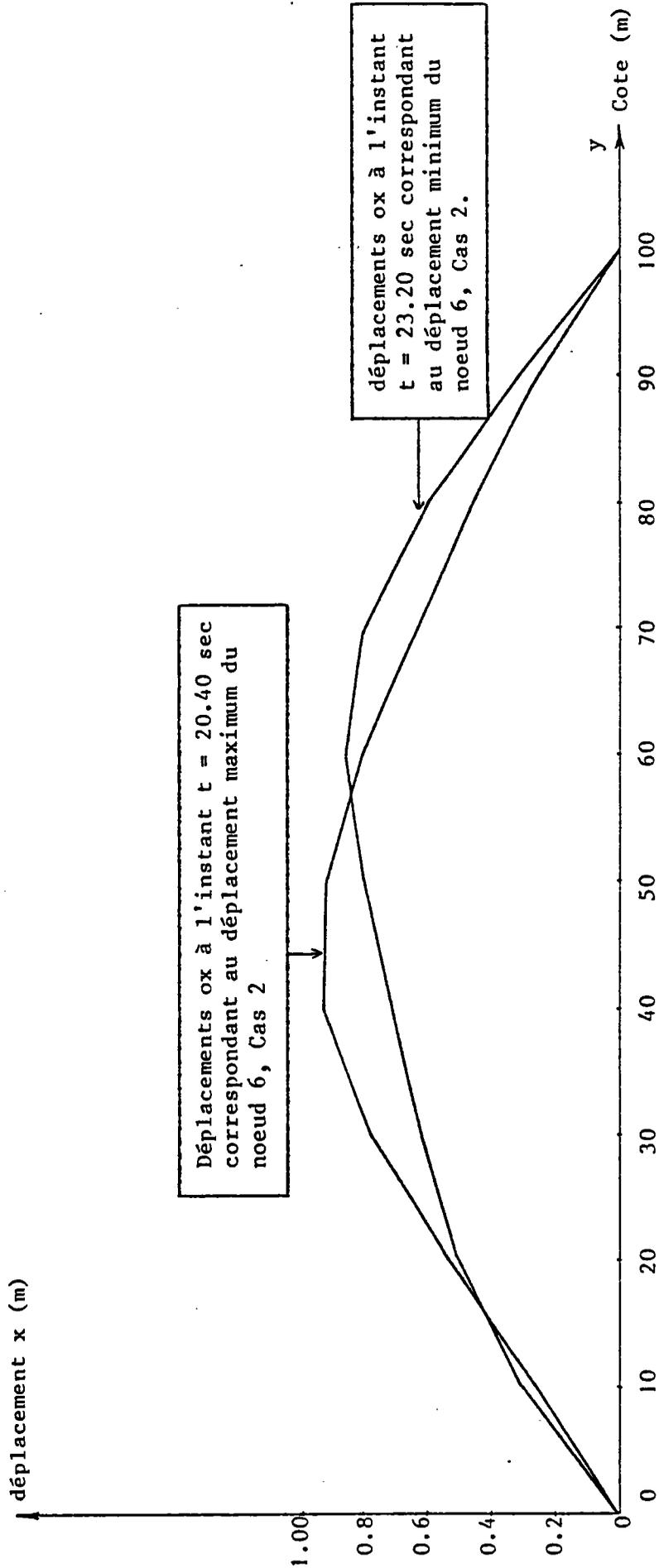


FIGURE IV-70 : Déplacements suivant ox des noeuds du tube à différents instants correspondant aux déplacements maximum et minimum du noeud 6, Cas 2.

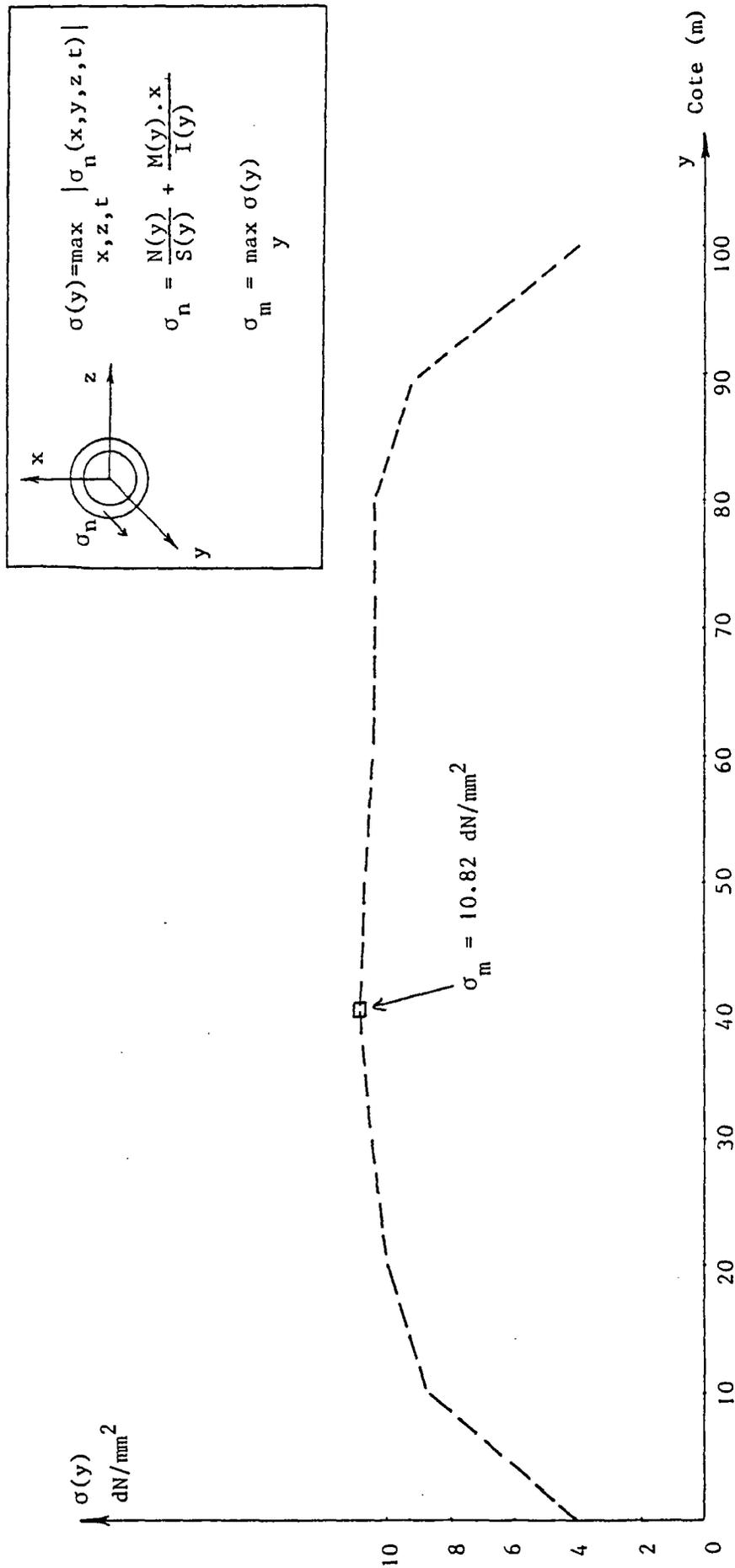


FIGURE IV-71 : Enveloppe de la contrainte normale dans chaque section du tube en fonction de la cote de la section, Cas 2.

### IV.3.3 CAS 3

Dans cet exemple, on suppose que le tube est situé à 1 m au-dessous de la surface libre.

#### 1- Type de calcul

Calcul dynamique nonlinéaire plan (oxy) sans réactualisation de géométrie.

Le nombre de D.L. libres = 30

Le nombre de D.L. bloqués = 3

#### 2- Configuration de référence

La configuration d'équilibre statique du tube obtenu au cas 1, est prise comme la configuration de référence de cas 3. L'état de contrainte dans la configuration de référence n'est donc pas nul.

#### 3- Conditions aux limites de déplacements aux noeuds 11 et 1

##### a- au noeud 1

{ D.L. libre = 1 (Rotation oz)  
D.L. bloqués = 2 (translations ox, oy)

##### b- au noeud 11

{ D.L. libres = 2 (translation oy, rotation oz)  
D.L. bloqué = 1 (translation ox)

#### 4- Les forces appliquées

##### a- au noeud 11

Même chose que pour cas 1.

b- aux autres noeuds

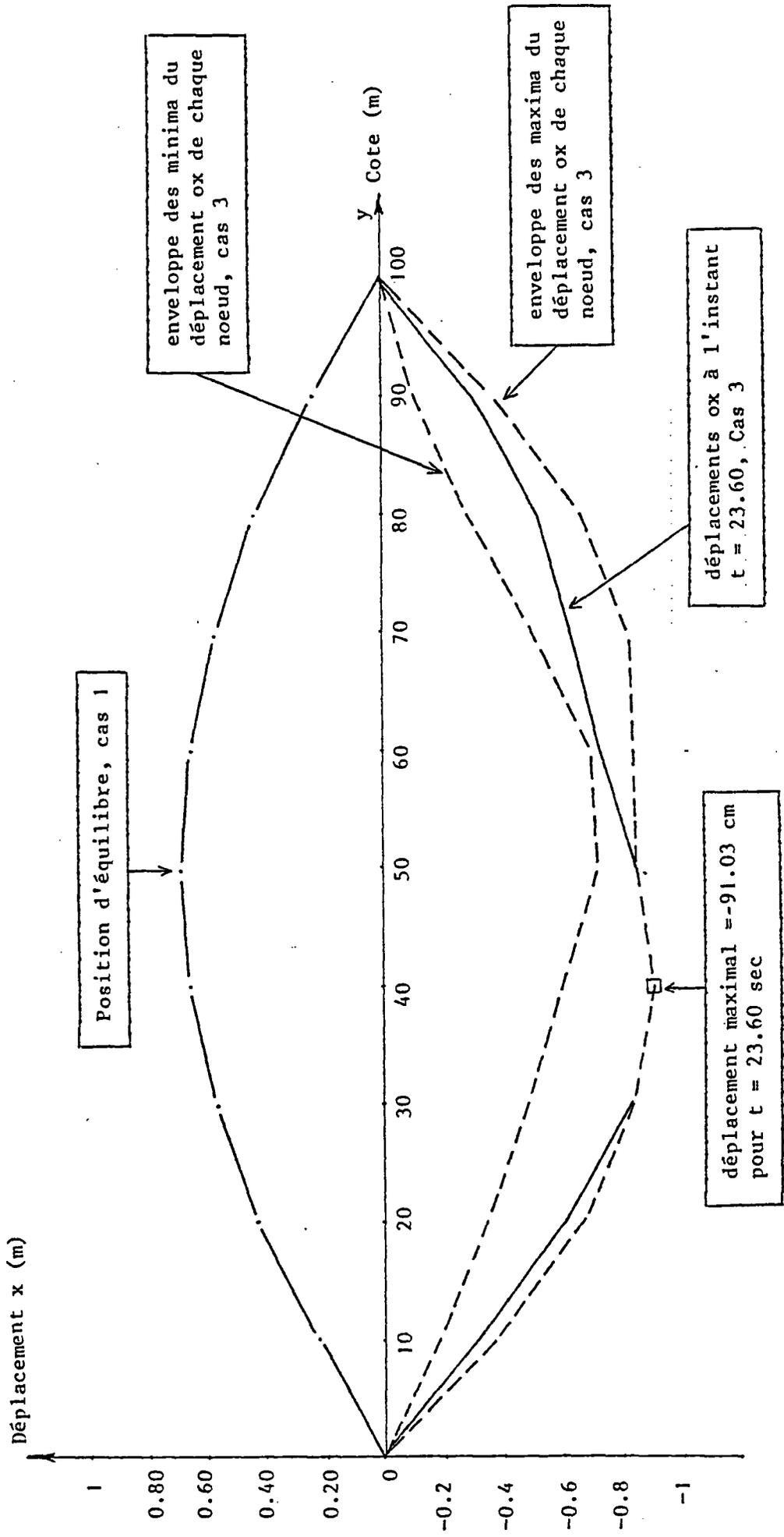
- . poids propre
- . forces hydrostatiques
- . houle d'AIRY (profondeur infinie) ayant une amplitude de 2 m, une période de 6 secondes, et se propageant suivant  $\alpha y$  positif.

5- Précision sur le calcul

Le pas d'intégration pour le calcul est pris égal à 0.1 sec.

Le régime stationnaire est atteint à  $t = 4T = 24$  secondes.

Le nombre de pas de calcul est donc 240.



**FIGURE IV-72 :** Déplacements suivant ox des noeuds du tube à l'instant  $t = 17.60$  sec, Cas 3 et enveloppe des maxima et des minima.

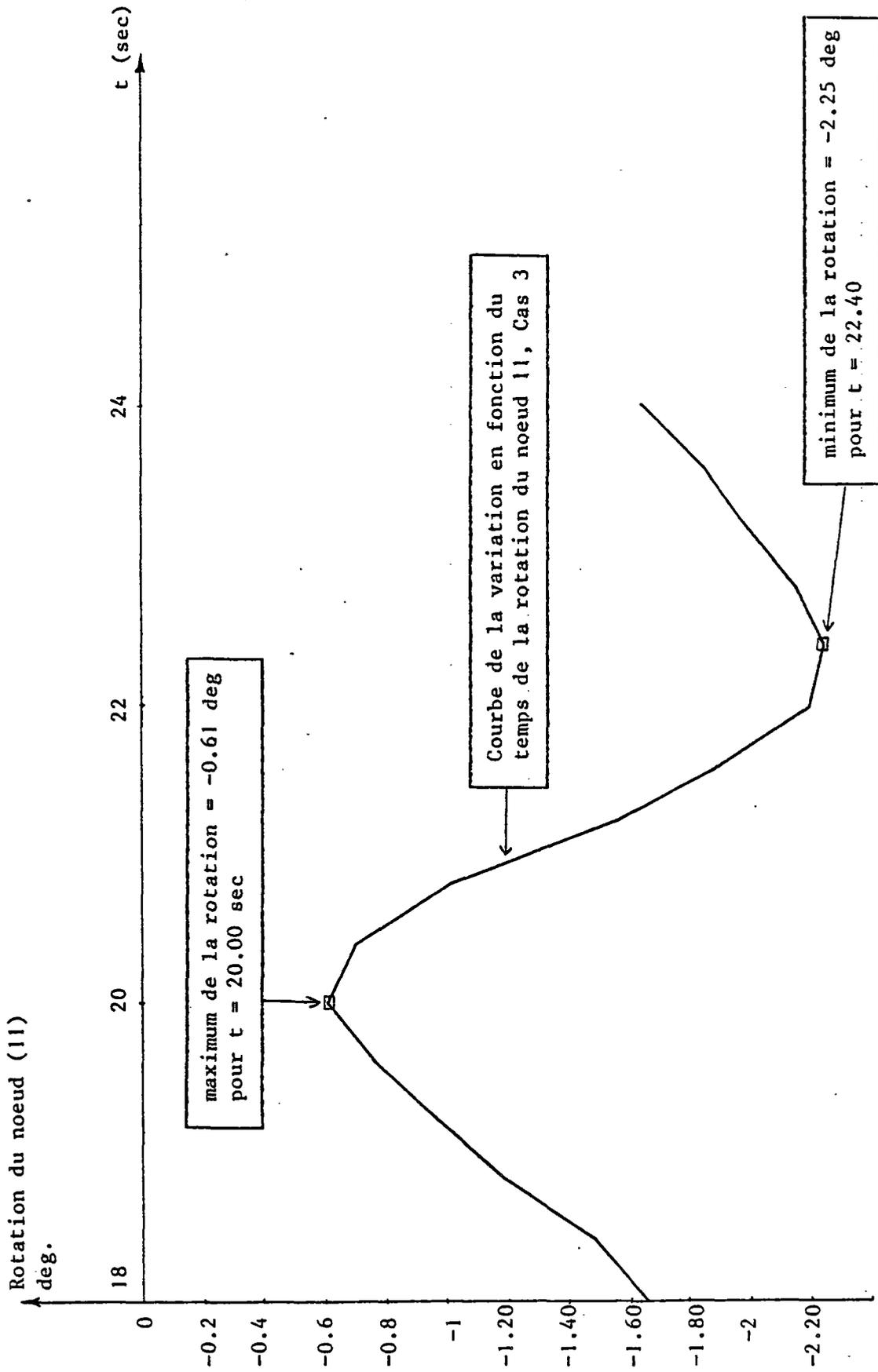
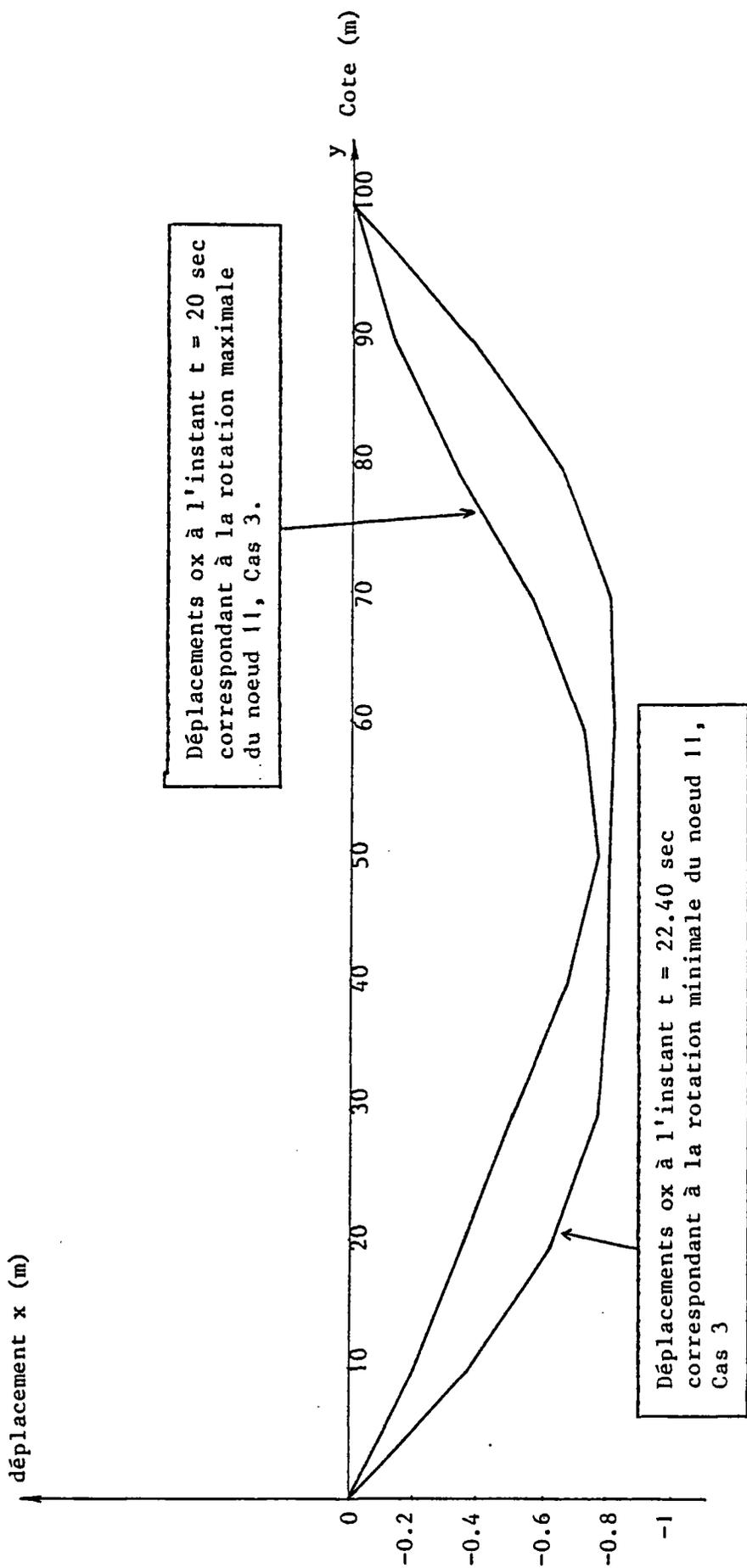


FIGURE IV-73 : Rotation du noeud (11) en fonction du temps, Cas 3.  
Les déplacements du tube pour les instants  $t = 20.00$  et  $t = 22.40$  sont donnés à la figure IV-74.



Déplacements  $ox$  à l'instant  $t = 20$  sec correspondant à la rotation maximale du noeud 11, Cas 3.

Déplacements  $ox$  à l'instant  $t = 22.40$  sec correspondant à la rotation minimale du noeud 11, Cas 3

FIGURE IV-74 : Déplacements suivant  $ox$  des noeuds du tube à différents instants correspondant aux rotations max et min du noeud (11), Cas 3.

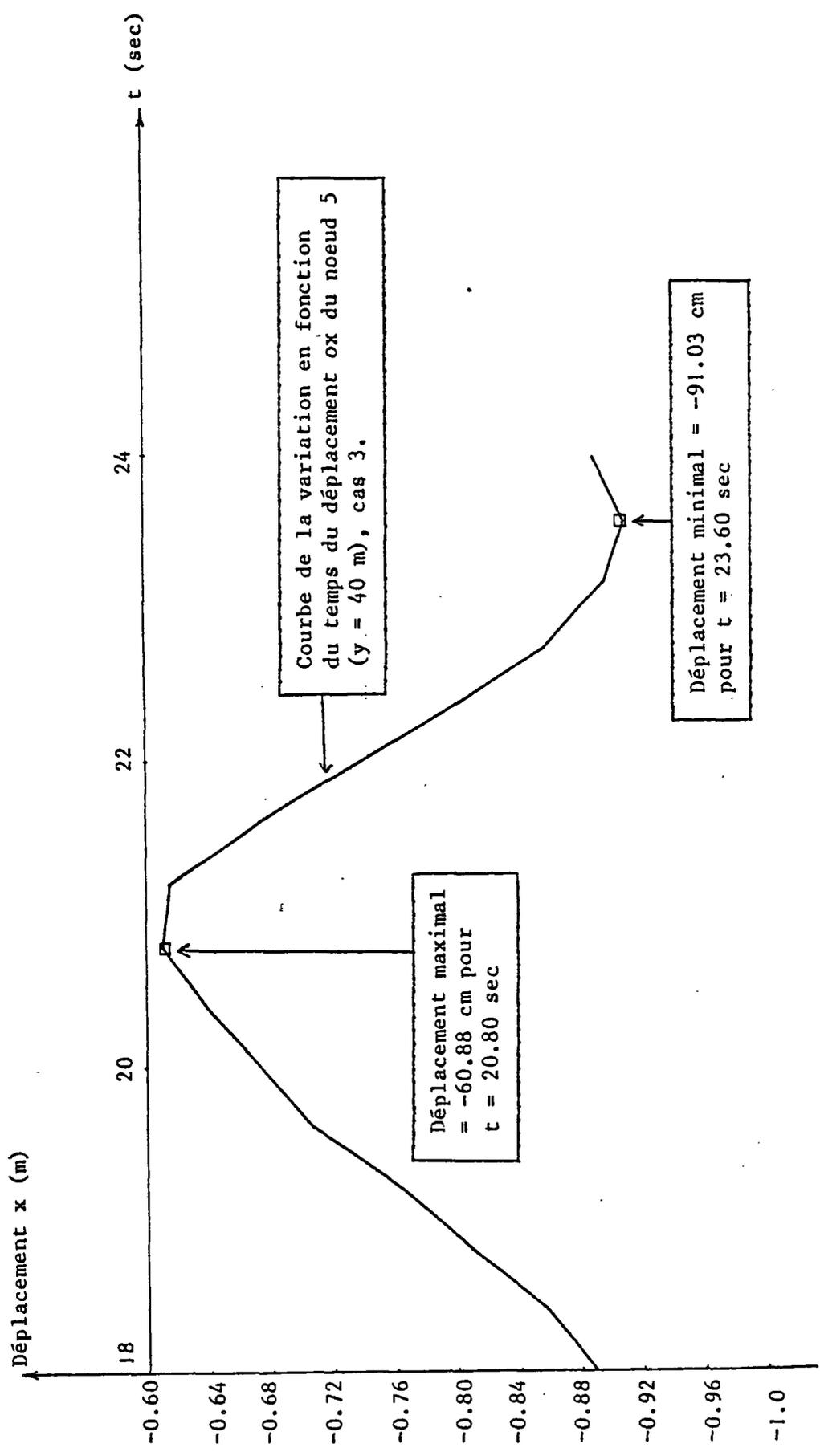


FIGURE IV-75 : Variation en fonction du temps du déplacement ox du noeud 5 (y = 40 m), Cas 3. Les déplacements aux instants t = 20.80; t = 23.60 sont donnés à la figure IV-76.

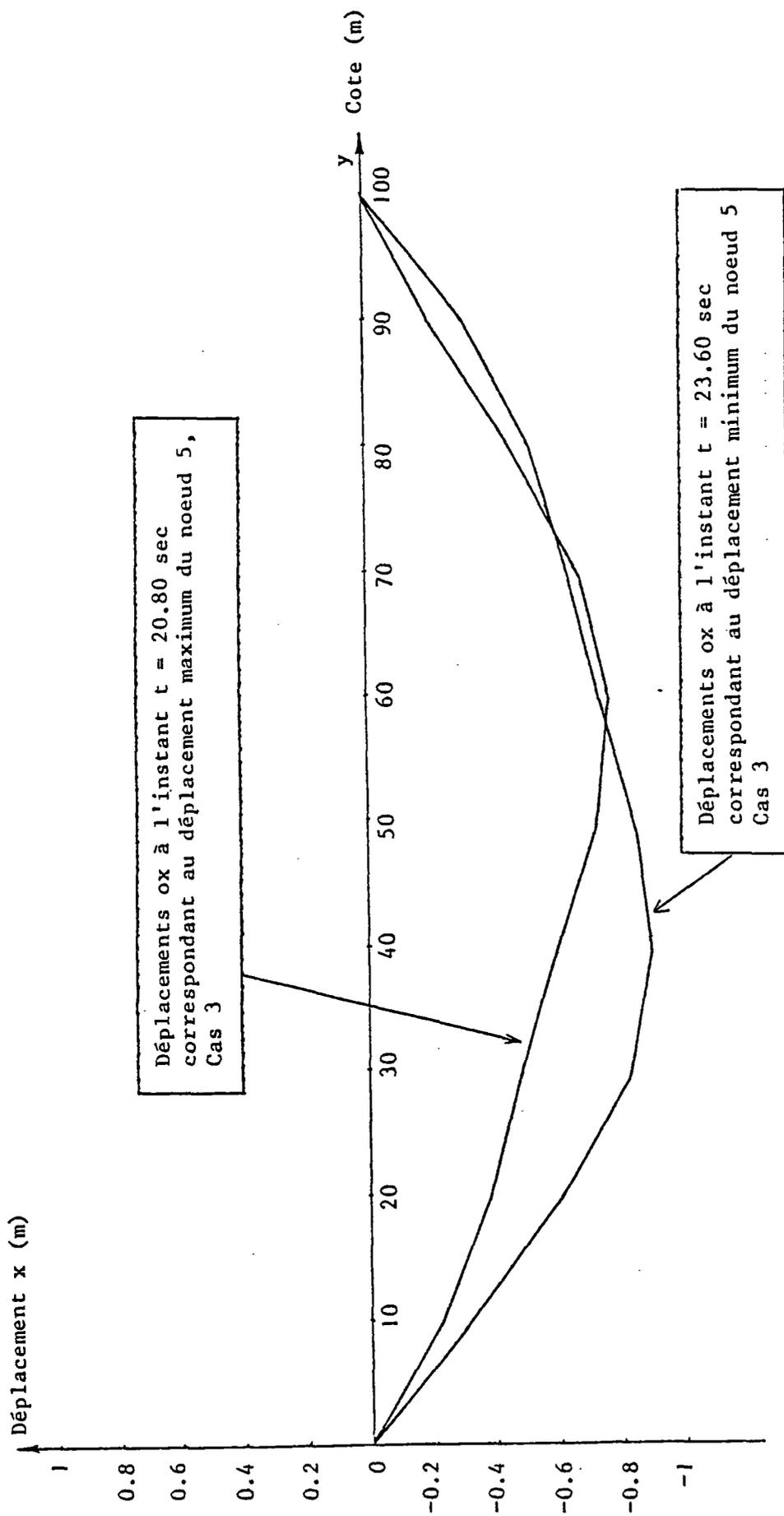
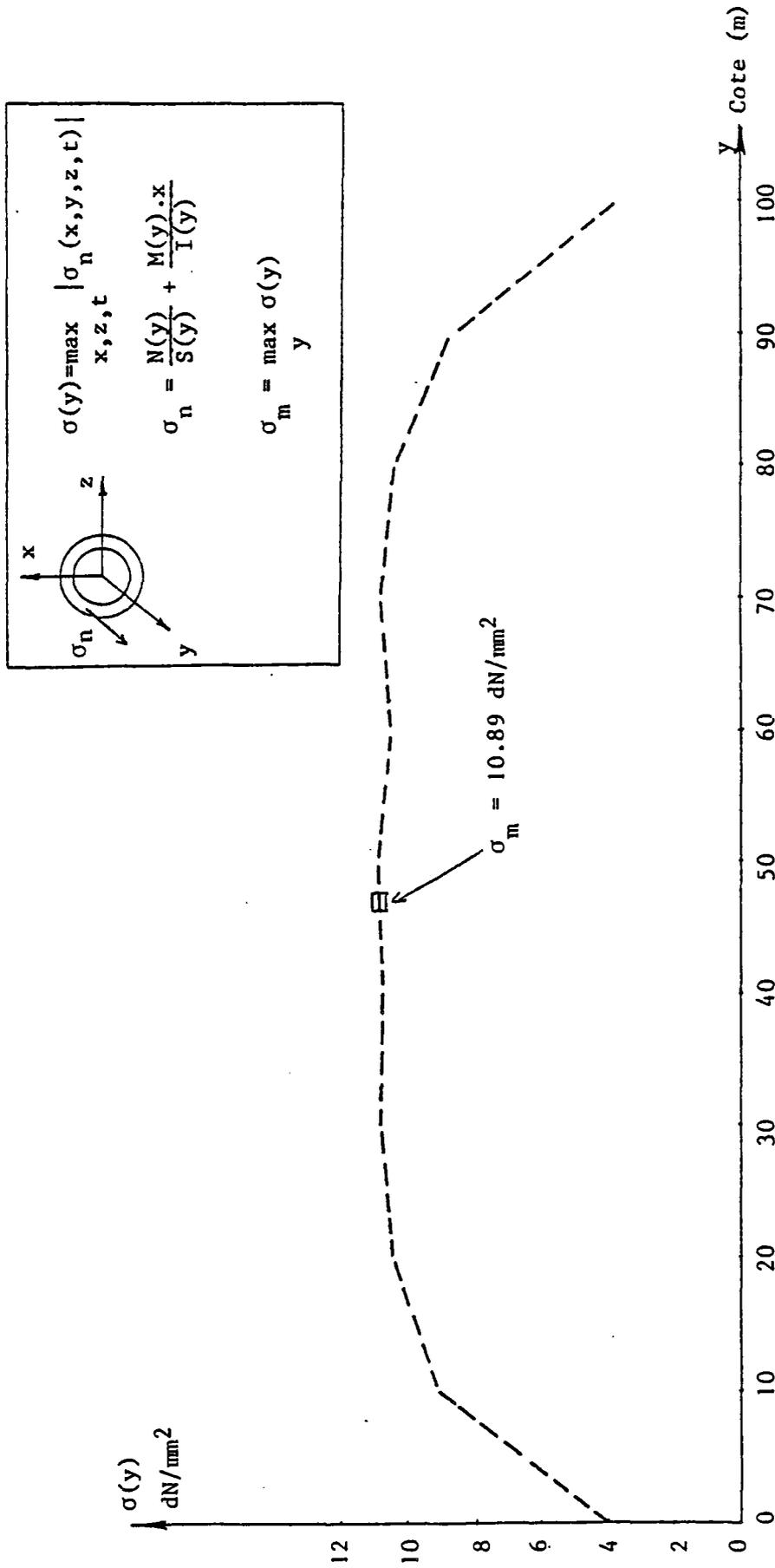


FIGURE IV-76 : Déplacements suivant  $ox$  des noeuds du tube à différents instants correspondant aux déplacements maximum et minimum du noeud 5, Cas 3.



**FIGURE IV-77** : Enveloppe de la contrainte normale dans chaque section du tube en fonction de la cote de la section, Cas 3.



## CONCLUSION

Les modèles numériques que nous avons développés dans cette étude, nous permettent de calculer les déplacements et les contraintes qui se produisent dans une section quelconque du riser dûs aux forces hydrostatiques, hydrodynamiques, déplacements statiques ou dynamiques imposés en tête du riser, pour les risers de petites ou grandes profondeurs.

Pour la résolution de l'équation non-linéaire d'équilibre dynamique, ce sont les deux méthodes de calcul pas-à-pas : différences-centrées et  $\theta$ -Wilson, qui ont été utilisées. On a également introduit la méthode itérative de Newton-Raphson pour la résolution de l'équation statique non-linéaire.

Les résultats numériques nous permettent de conclure que :

- Entre les deux méthodes numériques utilisées, c'est la méthode de  $\theta$ -Wilson qui est la plus rapide pour la résolution de l'équation d'équilibre dynamique du riser, car le pas d'intégration exigé par la méthode des différences-centrées (qui est conditionnellement stable) doit être pris généralement assez petit.
- Pour le riser de faible profondeur qui a été traité, le calcul linéarisé du problème du point de vue structure (le problème global restant non linéaire de par les interactions fluide-structure), conduit à des résultats assez voisins de ceux obtenus par le calcul non-linéaire. Cela permet de réduire d'une manière considérable le temps de calculs effectués sur ordinateur.
- Pour le riser de grande profondeur qui a été traité, le calcul linéarisé du problème du point de vue structure, aboutit à des résultats légèrement différents de ceux obtenus par le calcul non-linéaire. L'analyse des contraintes le long du riser montre que le calcul linéarisé, d'un point de vue structure, ne conduit pas à un calcul conservatif dans toutes les sections.

- Compte tenu des temps de calcul sur ordinateur qui étaient alloués pour ce travail, nous n'avons pas pu pousser plus en détail l'étude paramétrique qui aurait sans doute permis de confirmer la conclusion faite en ce qui concerne les risers de faible profondeur. En ce qui concerne les risers de grande profondeur, la conclusion obtenue pour le cas traité peut très bien se trouver en défaut pour d'autres cas.

BIBLIOGRAPHIE

---

- |1| Dr. D. BYNUM, Jr and RAMESH K. MAINI  
*"Considerations for marine Risers"*  
7th chapter of *"The technology of offshore drilling, completion and production"* compiled by ETA offshore seminars, Inc.  
The petroleum publishing company, Tulsa, 1976.
- |2| CHESTER B. FALKNER and NEAL S. FRANKS  
*"Production techniques from tension leg platforms"*  
Offshore technology conference, Houston - Texas - Paper number 3289  
May 8 - 11, 1978
- |3| A.E. LOKEN, O.P. TORSET, Det Norske Veritas, S. MATHIASSEN and  
T. ARNESEN, Kongsberg Vapenfabrikk.  
*"Aspects of hydrodynamic loading in design of production risers"*  
Offshore technology conference, Houston - Texas - Paper number 3538  
April 30 - May 3, 1979.
- |4| T.N. GARDNER and M.A. KOTCH  
*"Dynamic analysis of Risers and Caissons by the element method"*  
Offshore technology conference, Houston - Texas - Paper number 2651  
May 3 - 6, 1976.
- |5| B.E. BENNETT and G.P. WILHELM  
*"Analysis of production Riser systems"*  
Offshore technology conference, Houston - Texas - Paper number 3536  
April 30 - May 3, 1979.
- |6| BEN G. BURKE  
*"An analysis of Marine Risers for deep water"*  
Offshore technology conference, Houston - Texas - Paper number 1771  
April 29 - May 2, 1973.
- |7| BRUCE E. BENNETT and MICHAEL F. METCALF  
*"Nonlinear dynamic analysis of coupled axial and lateral motions of marine risers"*  
Offshore technology conference, Houston - Texas - Paper number 2776  
May 2 - 5, 1977.
- |8| JOHN E. KEY  
*"Computer program for solution of large, sparse, unsymmetric systems of linear equations"*  
International journal for numerical methods in engineering  
Vol. 6, 497-509 (1973).
- |9| S.K. GUPTA and K.K. TANJI  
*"Computer program for solution of large, sparse, unsymmetric systems of linear equations"*  
International journal for numerical methods in engineering  
Vol. 11, 1251-1259 (1977)

- [10] JAMES A. STRICKLIN, WALTER E. HAISLER, and WALTER A. VON RIESEMANN  
*"Geometrically nonlinear structural analysis by direct stiffness method"*  
Journal of the structural division - Vol. 97, N° ST9 -  
Pages 2299-2314 - September 1971.
- [11] H. GACHON et Y. GALEA  
*"Modèle d'analyse non-linéaire des structures à barres"*  
Revue de la Construction Métallique - C.T.I.C.M. (Centre Technique  
Industriel de la Construction Métallique) - N° 2 - Juin 1978.
- [12] E.L. WILSON  
*"Numerical methods for dynamic analysis"*  
International symposium on numerical methods offshore engineering  
SWANSEA - January 11th - 15th, 1977.
- [13] KLAUS-JURGEN BATHE  
*"A finite element programme for automatic dynamic incremental nonlinear  
analysis (ADINA)"*  
Report 82 448-1 , Acoustics and vibration Laboratory, MIT,  
Department of mechanical Engineering - September 1975, rev. Dec. 1978.
- [14] P. RENARD  
Cours de *"Eléments d'hydrodynamique"*  
C.H.E.C. offshore 1978-1979.
- [15] RAY W. CLOUGH, JOSEPH PENZIEN  
*"Dynamic of structures"*  
Mc Graw-Hill Inc. 1975.
- [16] O.C. ZIENKIEWICZ  
*"The finite element method"* 3ème édition - Chapitre 19  
Mc Graw-Hill, 1977.
- [17] TIMOSHENKO - GOODIER  
*"Théorie de l'élasticité"*  
Librairie polytechnique CH. Béranger  
Traduit d'après la 2ème édition de *"Theory of elasticity"*  
1951 - Mc Graw-Hill Book Company, Inc. par F. CAMPUS.
- [18] P. GERMAIN  
*"Cours de mécanique des milieux continus"*  
Tome 1 - Théorie générale.  
Masson et Cie - Paris - 1973.
- [19] JEAN COURBON  
*"Résistance des matériaux"* Tome 1 - 2ème édition  
Dunod - 1954.
- [20] JOHN M. BIGGS  
*"Introduction to structural dynamics"*  
Mc Graw-Hill Book Company - 1964.
- [21] LAWRENCE P. KROLIKOWSKI and TOM A. GAY  
*"An improved linearization technique for frequency domain riser analysis"*  
Offshore technology conference, Houston - Texas - Paper number 3777  
May 5 - 8, 1980.

A N N E X E S

---

- 1 - Modélisation de la houle et du courant utilisée dans la présente étude.
  
- 2 - Etablissement des relations forces-déplacements et de la matrice de rigidité tangente spatiale d'une barre, en tenant compte des effets de second ordre.



A N N E X E 1

---

MODELISATION DE LA HOULE ET DU COURANT UTILISEE DANS LA PRESENTE ETUDE

1 - Rappels de la houle d'Airy

Les hypothèses de construction de la houle d'Airy sont les suivantes :

- le fluide est parfait, incompressible.
- l'écoulement est irrotationnel.

On suppose que le fluide s'étend dans un milieu infini, le fond étant plan à une distance constante H de la surface libre du fluide (eau). On considère un repère fixe orthornormé OXYZ, l'origine O se trouvant sur la surface libre au repos, OY étant vertical ascendant.

La houle d'Airy est une houle linéaire infinitésimale périodique. On note T sa période ( $\omega = \frac{2\pi}{T}$  sa pulsation) et h/2 son amplitude. La houle d'Airy est une onde progressive plane.

Soit  $\eta$  l'élévation de la surface libre dont l'équation s'écrit :

$$(A1-1) \quad \eta(x, z, t) - y = 0$$

et soit  $\vec{v}$  la vitesse du fluide. Vu les hypothèses, l'écoulement dérive d'un potentiel  $\phi$ .

On a :

$$(A1-2) \quad \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$$

Le potentiel  $\phi$  associé à la houle d'Airy est solution du problème suivant, où g désigne l'accélération de la pesanteur.

$$\left. \begin{array}{l} (A1-3) \\ (A1-4) \\ (A1-5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta\phi = 0 \quad \text{dans le fluide} \\ g \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \quad , y = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad , y = -H \end{array}$$

L'élévation de la surface libre s'écrit alors :

$$(A1-6) \quad \eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad , \quad y = 0$$

L'équation (A1-3) résulte de l'équation de continuité qui s'écrit  $\text{div } \vec{v} = 0$  car le fluide est incompressible. Vu (A1-2) on obtient (A1-3).

L'équation (A1-4) résulte de la linéarisation de la condition cinématique de la surface libre qui donne :

$$(A1-7) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad , \quad y = 0$$

et de la linéarisation de la condition de pression sur la surface libre (Bernoulli).

$$(A1-8) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -g \eta \quad , \quad y = 0$$

Les équations (A1-7) et (A1-8) donnent (A1-4).

La condition (A1-5) résulte de la condition de glissement du fluide sur le fond, c'est-à-dire  $v_y = 0$  pour  $y = -H$ .

Enfin l'équation (A1-6) n'est autre que l'équation (A1-8).

On s'intéresse ici à la solution élémentaire périodique de pulsation  $\omega$ , l'onde se propageant suivant  $ox$  positif. Elle s'écrit donc :

$$(A1-9) \quad \eta = \frac{h}{2} \cos (kx - \omega t)$$

où  $k$  est le nombre d'onde lié à  $\omega$  par la relation de dispersion :

$$(A1-10) \quad \omega^2 = g k \text{ th } (k H)$$

le potentiel  $\phi$  s'écrit :

$$(A1-11) \quad \phi(x, y, z, t) = \frac{g h}{2 \omega \text{ ch } k H} \text{ ch } (k(y+H)) \sin(kx - \omega t)$$

Remarque :

En profondeur infinie, les relations (A1-10) et (A1-11) deviennent :

$$(A1-10bis) \quad \omega^2 = g k$$

$$(A1-11bis) \quad \phi(x,y,z,t) = \frac{g h}{2 \omega} e^{ky} \sin(kx - \omega t)$$

On peut alors calculer la vitesse du fluide  $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$  et l'accélération

$$\vec{A} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})(\vec{v})$$

En notant u, v, w (resp. ax, ay, az) les composantes de  $\vec{v}$  (resp. de  $\vec{A}$ ) dans oxyz, on obtient :

. pour profondeur infinie

$$(A1-12) \quad \begin{cases} u = \frac{gkh}{2\omega} e^{ky} \cos(kx - \omega t) \\ v = \frac{gkh}{2\omega} e^{ky} \sin(kx - \omega t) \\ w = 0 \end{cases}$$

$$(A1-13) \quad \begin{cases} a_x = \frac{gkh}{2} e^{ky} \sin(kx - \omega t) \\ a_y = -\frac{gkh}{2} e^{ky} \cos(kx - \omega t) + k \left( \frac{gkh}{2\omega} \right)^2 e^{2ky} \\ a_z = 0 \end{cases}$$

. pour profondeur finie

$$(A1-14) \quad \begin{cases} u = \frac{g k h}{2 \omega \text{ ch } k H} \text{ ch } [k(y+H)] \cos(kx - \omega t) \\ v = \frac{g k h}{2 \omega \text{ ch } k H} \text{ sh } [k(y+H)] \sin(kx - \omega t) \\ w = 0 \end{cases}$$



A N N E X E 2

. DEVELOPPEMENT DES RELATIONS FORCES-DEPLACEMENTS

Dans ce qui suit, nous rappelons les relations de base de la théorie de l'élasticité concernant une poutre droite. Ensuite, à l'aide du principe des travaux virtuels, on obtient les équations de la déformée de la poutre et les relations forces-déplacements.

Les hypothèses et notations sont celles du chapitre (II.3). La figure (A2-1), (Resp. A2-2) définit la géométrie de la barre déformée et l'état des sollicitations dans une section droite  $D_2$  dans le plan  $x'y'$  (Resp,  $D_3$  dans le plan  $x'z'$ ) image d'une section quelconque  $D_0$  de la barre dans la transformation.

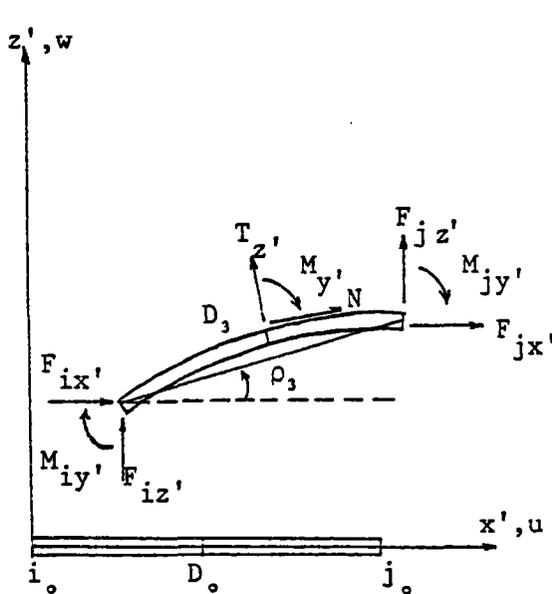


FIGURE A2-2

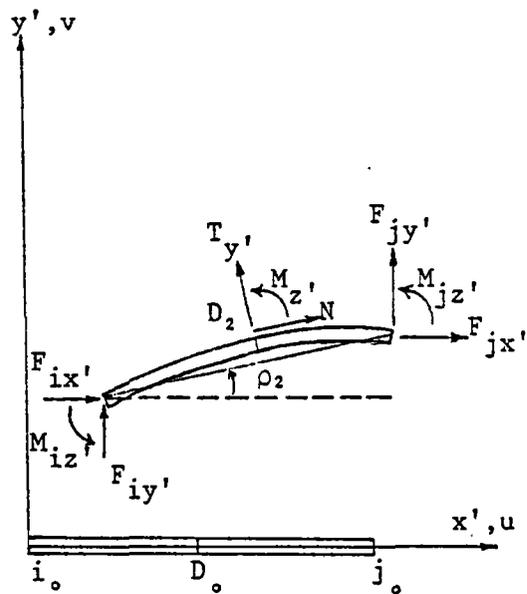


FIGURE A2-1

Projections de la barre déformée dans les plans  
 $x'z'$  et  $x'y'$

. Convention de signe :

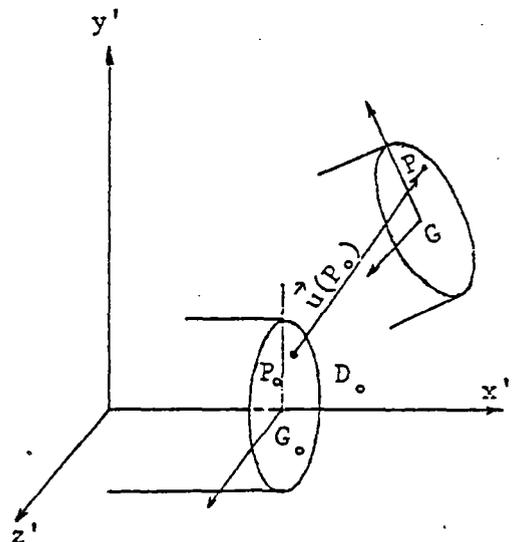
Nous adopterons les conventions suivantes :

- 1 - Les forces agissant sur la barre  $i, j_0$  et les déplacements seront comptés positivement dans le sens positif des axes.
- 2 - Pour les moments et rotations, les sens positifs sont ceux du repère  $x'y'z'$ .

. Composantes des taux de déformations

Soit  $P_0$  un point quelconque d'une section quelconque  $D_0$  de la barre pris dans sa configuration de référence. On note  $G_0$  le centre d'inertie de la section  $D_0$ . Les points  $P_0$  et  $G_0$  après une transformation géométrique appliquée à cette barre se déplacent en  $P$  et  $G$ .

On note  $u(P_0)$ ,  $v(P_0)$ ,  $w(P_0)$  les composantes du champ de déplacement de  $P_0$  et  $u(G_0)$ ,  $v(G_0)$ ,  $w(G_0)$  les composantes du champ de déplacement de  $G_0$ . Pour une poutre droite, les composantes non nulles du tenseur déformation en  $P_0$  sont :



$$(A2-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{x'x'}(P_0) = \frac{\partial u(P_0)}{\partial x'} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v(P_0)}{\partial x'} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w(P_0)}{\partial x'} \right)^2 \\ \epsilon_{x'y'}(P_0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(P_0)}{\partial y'} + \frac{\partial v(P_0)}{\partial x'} \right) \\ \epsilon_{x'z'}(P_0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(P_0)}{\partial z'} + \frac{\partial w(P_0)}{\partial x'} \right) \end{array} \right.$$

où l'on néglige  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(P_0)}{\partial x'} \right)^2$  devant  $\frac{\partial u(P_0)}{\partial x'}$ ,  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(P_0)}{\partial x'} \cdot \frac{\partial u(P_0)}{\partial y'} \right)$

devant  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(P_0)}{\partial y'} + \frac{\partial v(P_0)}{\partial x'} \right)$  et enfin  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(P_0)}{\partial x'} \cdot \frac{\partial u(P_0)}{\partial z'} \right)$  devant

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(P_0)}{\partial z'} + \frac{\partial w(P_0)}{\partial x'} \right) .$$

Soient  $x'(P_0)$ ,  $y'(P_0)$  et  $z'(P_0)$  les coordonnées du point  $P_0$ , on a :

$$(A2-2) \quad \begin{cases} u(P_0) = u(G_0) - \omega_z(G_0) \cdot y'(P_0) + \omega_y(G_0) \cdot z'(P_0) \\ v(P_0) = v(G_0) - \omega_x(G_0) \cdot z'(P_0) \\ w(P_0) = w(G_0) + \omega_x(G_0) \cdot y'(P_0) \end{cases}$$

avec  $\omega_x(G_0)$ ,  $\omega_y(G_0)$  et  $\omega_z(G_0)$  respectivement les rotations de la projection de la normale à la section  $D_0$  dans les plans  $y'z'$ ,  $z'x'$  et  $x'y'$ .

Compte tenu de (A2-1) et (A2-2) on trouve :

$$(A2-3) \quad \begin{cases} \epsilon_{x'x'}(P_0) = \epsilon_{x'x'}(G_0) - \frac{\partial \omega_z(G_0)}{\partial x'} y'(P_0) + \frac{\partial \omega_y(G_0)}{\partial x'} z'(P_0) \\ \epsilon_{x'y'}(P_0) = \epsilon_{x'y'}(G_0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \omega_x(G_0)}{\partial x'} \cdot z'(P_0) \\ \epsilon_{x'z'}(P_0) = \epsilon_{x'z'}(G_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \omega_x(G_0)}{\partial x'} \cdot y'(P_0) \end{cases}$$

Les relations (A2-3) nous permettent d'introduire en chaque point  $G_0$  de la ligne moyenne de la barre, les déformations suivantes :

$$(A2-3 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \epsilon_{x'x'}(G_0) = \frac{\partial u(G_0)}{\partial x'} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v(G_0)}{\partial x'} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w(G_0)}{\partial x'} \right)^2 & \text{déformation axiale} \\ \gamma_{x'y'}(G_0) = 2 \epsilon_{x'y'}(G_0) = \frac{\partial v(G_0)}{\partial x'} - \omega_z(G_0) & \text{déformation de cisaillement dans le plan } x'y' \\ \gamma_{x'z'}(G_0) = 2 \epsilon_{x'z'}(G_0) = \frac{\partial w(G_0)}{\partial x'} + \omega_y(G_0) & \text{déformation de cisaillement dans le plan } x'z' \\ k_{x'z'}(G_0) = \frac{\partial \omega_z(G_0)}{\partial x'} & \text{déformation de flexion dans le plan } x'y' \\ k_{x'y'}(G_0) = \frac{\partial \omega_y(G_0)}{\partial x'} & \text{déformation de flexion dans le plan } x'z' \end{cases}$$

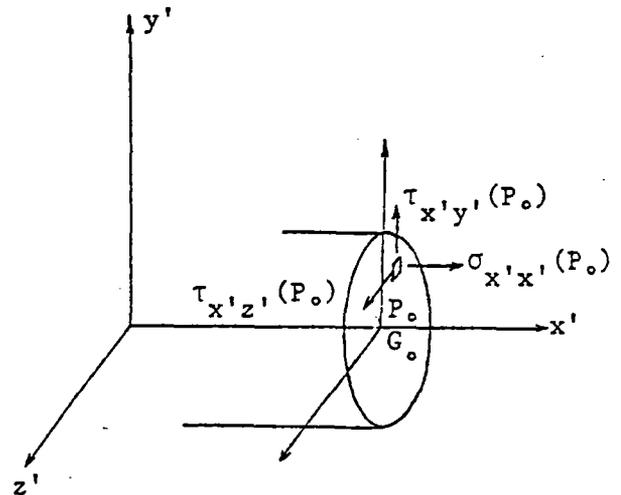
. Composantes de la contrainte

Les composantes de la contrainte en  $P_0$  sont données par le tenseur des contraintes-déformations de Piola-Kirchhof. Soient  $\sigma_{x'x'}(P_0)$ ,  $\tau_{x'y'}(P_0)$  et  $\tau_{x'z'}(P_0)$  respectivement la contrainte normale et les contraintes de cisaillement suivant les axes  $y'$  et  $z'$ , on a :

$$(A2-4) \quad \begin{cases} \sigma_{x'x'}(P_0) = E \varepsilon_{x'x'}(P_0) \\ \tau_{x'y'}(P_0) = 2G \varepsilon_{x'y'}(P_0) \\ \tau_{x'z'}(P_0) = 2G \varepsilon_{x'z'}(P_0) \end{cases}$$

$E, G$  sont définis par (II-6).

Compte tenu de (A2-3) et (A2-4), les expressions des sollicitations en section s'écrivent :



$$(A2-5) \quad \begin{cases} N(G_0) = \int_A \sigma_{x'x'}(P_0) dA = E A \varepsilon_{x'x'}(G_0) \\ T_{y'}(G_0) = \int_A \tau_{x'y'}(P_0) dA = G A' \gamma_{x'y'}(G_0) \\ T_{z'}(G_0) = \int_A \tau_{x'z'}(P_0) dA = G A' \gamma_{x'z'}(G_0) \\ M_{x'}(G_0) = \int_A (\tau_{x'z'}(P_0) \cdot y'(P_0) - \tau_{x'y'}(P_0) \cdot z'(P_0)) dA \\ \quad = G J \frac{\partial \omega_{x'}(G_0)}{\partial x'} \\ M_{y'}(G_0) = \int_A \sigma_{x'x'}(P_0) \cdot z'(P_0) dA = E I k_{x'z'}(G_0) \\ M_{z'}(G_0) = - \int_A \sigma_{x'x'}(P_0) \cdot y'(P_0) dA = E I k_{x'y'}(G_0) \end{cases}$$

$A, A', I, J$  sont définis par (II-6).

. Ecriture des équations d'équilibre de la poutre par l'application des travaux virtuels

1) On applique aux extrémités de la poutre un champ de déplacement virtuel  $\delta U$  avec :

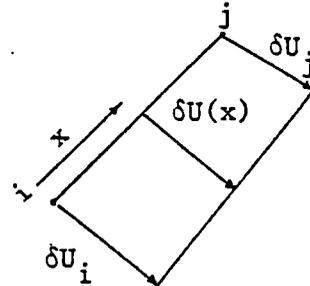
$$\delta U = \begin{pmatrix} \delta U_i \\ \delta U_j \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$(A2-6) \quad \begin{cases} \delta U_i = (\delta u_i, \delta v_i, \delta w_i, \delta \omega_{ix'}, \delta \omega_{iy'}, \delta \omega_{iz'})^T \\ \delta U_j = (\delta u_j, \delta v_j, \delta w_j, \delta \omega_{jx'}, \delta \omega_{jy'}, \delta \omega_{jz'})^T \end{cases}$$

2) On applique à la poutre le champ de déplacement virtuel  $\delta U(x)$  tel que :

- il soit indépendant du champ  $\delta U$  dans l'intervalle  $x \in ]0, L[$
- il soit égal au champ de déplacement virtuel appliqué aux extrémités :

$$\begin{cases} \delta U(0) = \delta U_i \\ \delta U(L) = \delta U_L \end{cases}$$



et que  $x \longmapsto \delta U(x)$  soit continu sur  $[0, L]$ .

3) Le travail virtuel des forces externes est simplement dû au travail des forces nodales qui s'écrivent :

$$(A2-7) \quad \delta W_e = F^T \cdot \delta U$$

F est défini par (II-4).

4) Le champ de déplacement virtuel  $\delta U(x)$  produit la variation suivante des composantes du tenseur de déformation :

$$(A2-8) \left\{ \begin{aligned} \delta \varepsilon_{x'x'}(P_0) &= \delta \varepsilon_{x'x'}(G_0) - \delta \left( \frac{\partial \omega_{z'}(G_0)}{\partial x'} \right) \cdot y'(P_0) + \delta \left( \frac{\partial \omega_{y'}(G_0)}{\partial x'} \right) \cdot z'(P_0) \\ \delta \varepsilon_{x'y'}(P_0) &= \delta \varepsilon_{x'y'}(G_0) - \frac{1}{2} \delta \left( \frac{\partial \omega_{x'}(G_0)}{\partial x'} \right) \cdot z'(P_0) \\ \delta \varepsilon_{x'z'}(P_0) &= \delta \varepsilon_{x'z'}(G_0) + \frac{1}{2} \delta \left( \frac{\partial \omega_{x'}(G_0)}{\partial x'} \right) \cdot y'(P_0) \end{aligned} \right.$$

Le travail des forces internes s'écrit donc :  $\delta W_I = \int_{\text{vol}} \sigma^T \cdot \delta \varepsilon \, d(\text{vol})$

avec :

$$\left\{ \begin{aligned} \delta \varepsilon &= (\delta \varepsilon_{x'x'}(P_0), 2\delta \varepsilon_{x'y'}(P_0), 2\delta \varepsilon_{x'z'}(P_0))^T \\ \sigma &= (\sigma_{x'x'}(P_0), \tau_{x'y'}(P_0), \tau_{x'z'}(P_0))^T \end{aligned} \right.$$

Compte tenu de (A2-4), (A2-5) et (A2-8), le travail interne s'écrit :

$$\delta W_I = \int_0^L (N \cdot \delta \varepsilon_{x'x'} + M_{z'} \cdot \delta k_{x'y'} + M_{y'} \cdot \delta k_{x'z'} + M_{x'} \cdot \delta \left( \frac{\partial \omega_{x'}}{\partial x'} \right) + T_{y'} \cdot \delta \gamma_{x'y'} + T_{z'} \cdot \delta \gamma_{x'z'}) dx'$$

Dans la suite, pour ne pas alourdir les notations, nous éliminerons la lettre  $G_0$  dans les formulations. Par exemple  $\sigma_{x'x'}(P_0)$  définit la contrainte au point  $P_0$  tandis que  $\sigma_{x'x'}$  définit la contrainte au point  $G_0$  etc...

Après une intégration par partie de l'intégrale égale à  $\delta W_I$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \delta W_I &= - \int_0^L \frac{\partial N}{\partial x'} \cdot \delta u \cdot dx' - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x'} (N \frac{\partial v}{\partial x'}) \cdot \delta v \cdot dx' - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x'} (N \frac{\partial w}{\partial x'}) \delta w \cdot dx' \\ &+ \int_0^L \frac{\partial^2 M_{z'}}{\partial x'^2} \cdot \delta v \cdot dx' + \int_0^L (T_{y'} + \frac{\partial M_{z'}}{\partial x'}) \delta \gamma_{x'y'} \cdot dx' - \int_0^L \frac{\partial^2 M_{y'}}{\partial x'^2} \delta w \cdot dx' \\ &- \int_0^L \frac{\partial^2 M_{x'}}{\partial x'^2} \cdot \delta \omega_{x'} \cdot dx' + \int_0^L (T_{z'} - \frac{\partial M_{y'}}{\partial x'}) \cdot \delta \gamma_{x'z'} \cdot dx' + \left( (N \frac{\partial v}{\partial x'})_{x'=L} \delta v_j - (N \frac{\partial v}{\partial x'})_{x'=0} \delta v_i \right) \\ &+ \left( (N)_{x'=L} \delta u_j - (N)_{x'=0} \delta u_i \right) + \left( (M_{z'})_{x'=L} \cdot \delta \omega_{jz'} - (M_{z'})_{x'=0} \delta \omega_{iz'} \right) \\ &+ \left( (N \frac{\partial w}{\partial x'})_{x'=L} \cdot \delta w_j - (N \frac{\partial w}{\partial x'})_{x'=0} \delta w_i \right) - \left( (\frac{\partial M_{z'}}{\partial x'})_{x'=L} \cdot \delta v_j - (\frac{\partial M_{z'}}{\partial x'})_{x'=0} \delta v_i \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ((My')_{x'=L} \cdot \delta\omega_{jy'} - (My')_{x'=0} \cdot \delta\omega_{iy'}) + \left( \left( \frac{\partial My'}{\partial x'} \right)_{x'=L} \delta w_j - \left( \frac{\partial My'}{\partial x'} \right)_{x'=0} \right. \\ & \left. \delta w_i \right) + \left( (M_{x'})_{x'=L} \cdot \delta\omega_{jx'} - (M_{x'})_{x'=0} \delta\omega_{ix'} \right) \end{aligned}$$

5) Le principe des travaux virtuels peut s'écrire pour  $\forall \delta U, \forall \delta U(x)$  :

$$\delta W_e = \delta W_I$$

En identifiant terme à terme on trouve :

Pour  $x'=0$   
(en i.)

$$F_{ix'} = -N \quad (A2-9)$$

$$F_{iy'} = -N \frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial Mz'}{\partial x'} \quad (A2-10)$$

$$F_{iz'} = -N \frac{\partial w}{\partial x'} - \frac{\partial My'}{\partial x'} \quad (A2-11)$$

$$M_{ix'} = M_{x'} \quad (A2-12)$$

$$M_{iy'} = -M_{y'} \quad (A2-13)$$

$$M_{iz'} = -M_{z'} \quad (A2-14)$$

Pour  $x'=L$   
(en j.)

$$F_{jx'} = N \quad (A2-15)$$

$$F_{jy'} = N \frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial Mz'}{\partial x'} \quad (A2-16)$$

$$F_{jz'} = N \frac{\partial w}{\partial x'} + \frac{\partial My'}{\partial x'} \quad (A2-17)$$

$$M_{jx'} = M_{x'} \quad (A2-18)$$

$$M_{jy'} = M_{y'} \quad (A2-19)$$

$$M_{jz'} = M_{z'} \quad (A2-20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N}{\partial x'} = 0 \quad (A2-21) \\ \frac{\partial^2 M_z'}{\partial x'^2} - \frac{\partial}{\partial x'} \left( N \frac{\partial v}{\partial x'} \right) = 0 \quad (A2-22) \\ \frac{\partial^2 M_y'}{\partial x'^2} + \frac{\partial}{\partial x'} \left( N \frac{\partial w}{\partial x'} \right) = 0 \quad (A2-23) \\ \frac{\partial M_x'}{\partial x'} = 0 \quad (A2-24) \\ T_{y'} = - \frac{\partial M_z'}{\partial x'} \quad (A2-25) \\ T_{z'} = \frac{\partial M_y'}{\partial x'} \quad (A2-26) \end{array} \right.$$

La relation (A2-21) nous montre que N est indépendant de x' :

$$N = \text{cte}$$

Des relations (A2-9) et (A2-15) on obtient :

$$(A2-27) \quad F_{jx'} = - F_{ix'} = N = \text{cte}$$

. Ecriture des sollicitations en section en fonction des efforts nodaux

En écrivant l'équilibre statique des moments de flexion dans une section D<sub>0</sub> et compte tenu de (A2-25), (A2-26) et (A2-27) on obtient :

$$(A2-28) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{z'} = -M_{iz'} \left(1 - \frac{x'}{L}\right) + M_{jz'} \cdot \frac{x'}{L} + F_{ix'} \cdot \frac{x'}{L} v_j + \left(1 - \frac{x'}{L}\right) v_i \cdot F_{ix'} - F_{ix'} \cdot v \\ T_{y'} = - \frac{\partial M_z'}{\partial x'} = - \frac{1}{L} (M_{iz'} + M_{jz'}) - F_{ix'} \cdot \rho_2 - F_{ix'} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x'}\right) \\ N = - F_{ix'} = F_{jx'} \end{array} \right.$$



$$(A2-36) \quad w = B_1 \sin \lambda x' + B_2 \cos \lambda x' + B_3 x' + B_4$$

$C_1, C_2, C_3, C_4, B_1, B_2, B_3$  et  $B_4$  sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites suivantes :

$$(A2-37) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\omega_{z'})_{x'=0} = \omega_{iz'} \\ (\omega_{z'})_{x'=L} = \omega_{jz'} \\ (v)_{x'=0} = v_i \\ (v)_{x'=L} = v_j \end{array} \right. \quad (A2-38) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\omega_{y'})_{x'=0} = \omega_{iy'} \\ (\omega_{y'})_{x'=L} = \omega_{jy'} \\ (w)_{x'=0} = w_i \\ (w)_{x'=L} = w_j \end{array} \right.$$

de (A2-2) on obtient :

$$(A2-39) \quad \omega_{z'} = \frac{\partial v}{\partial x'} - \gamma_{x'y'} = C_1 \cdot \lambda \cos \lambda x' - C_2 \cdot \lambda \sin \lambda x' + C_3 - \frac{T_{y'}}{GA'}$$

$$(A2-40) \quad \omega_{y'} = -\frac{\partial w}{\partial x'} + \gamma_{x'y'} = -B_1 \cdot \lambda \cos \lambda x' + B_2 \cdot \lambda \sin \lambda x' - B_3 + \frac{T_{z'}}{GA'}$$

D'autre part, compte tenu de (A2-30), (A2-31), (A2-35) et (A2-36) on a :

$$(A2-41) \quad T_{y'} = -\frac{\partial Mz'}{\partial x'} = -EI(1+\beta) \frac{\partial^3 v}{\partial x'^3} = EI(1+\beta) (C_1 \cdot \lambda^3 \cos \lambda x' - C_2 \cdot \lambda^3 \sin \lambda x')$$

$$(A2-42) \quad T_{z'} = \frac{\partial My'}{\partial x'} = -EI(1+\beta) \frac{\partial^3 w}{\partial x'^3} = EI(1+\beta) (B_1 \cdot \lambda^3 \cos \lambda x' - B_2 \cdot \lambda^3 \sin \lambda x')$$

Les relations (A2-39) et (A2-40) s'écrivent donc :

$$(A2-43) \quad \omega_{z'} = (1+\beta) (C_1 \cdot \lambda \cos \lambda x' - C_2 \cdot \lambda \sin \lambda x') + C_3$$

$$(A2-44) \quad \omega_{y'} = -(1+\beta) (B_1 \cdot \lambda \cos \lambda x' - B_2 \cdot \lambda \sin \lambda x') - B_3$$

. Calcul des constantes  $C_1, C_2, C_3, C_4, B_1, B_2, B_3, B_4$

Compte tenu des conditions aux limites (A2-37) et (A2-38) et en posant  $\phi = \lambda L$  on trouve :

$$(A2-45) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_2 + C_4 = v_i \\ C_1 \sin\phi + C_2 \cos\phi + C_3 \cdot L + C_4 = v_j \\ (1+\beta) C_1 \cdot \lambda + C_3 = \omega_{iz'} \\ (1+\beta) (C_1 \cdot \lambda \cos\phi - C_2 \cdot \lambda \sin\phi) + C_3 = \omega_{jz'} \end{array} \right.$$

et :

$$(A2-46) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_2 + B_4 = w_i \\ B_1 \sin\phi + B_2 \cos\phi + B_3 \cdot L + B_4 = w_j \\ (1+\beta) B_1 \cdot \lambda + B_3 = -\omega_{iy'} \\ (1+\beta) (B_1 \cdot \lambda \cos\phi - B_2 \cdot \lambda \sin\phi) + B_3 = -\omega_{jy'} \end{array} \right.$$

De (A2-45) on obtient :

$$(A2-47) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = -D \left( -\frac{\phi^2}{\lambda^2 \cdot L} \sin\phi \cdot \rho_2 + \frac{\phi(1-\cos\phi)}{\lambda^2 \cdot L(1+\beta)} \omega_{jz'} + \frac{\phi}{\lambda^2 \cdot L(1+\beta)} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. (\cos\phi + \phi(1+\beta)\sin\phi - 1)\omega_{iz'} \right) \\ C_2 = -D \left( \frac{\phi^2(1-\cos\phi)}{\lambda^2 \cdot L} \cdot \rho_2 + \frac{\phi}{\lambda^2 \cdot L} \left( \frac{\sin\phi}{(1+\beta)} - \phi \right) \omega_{jz'} + \frac{\phi}{\lambda^2 \cdot L(1+\beta)} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. (\phi(1+\beta) \cos\phi - \sin\phi)\omega_{iz'} \right) \\ C_3 = D \left( -\phi(1+\beta) \sin\phi \cdot \rho_2 + (1-\cos\phi)\omega_{jz'} + (1-\cos\phi)\omega_{iz'} \right) \\ C_4 = D \left( (1-\cos\phi)v_j + (1-\cos\phi - \phi(1+\beta)\sin\phi)v_i + \frac{L}{\phi} \left( \frac{\sin\phi}{1+\beta} - \phi \right) \omega_{jz'} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{L}{\phi} \cdot \frac{1}{1+\beta} (\phi(1+\beta)\cos\phi - \sin\phi)\omega_{iz'} \right) \end{array} \right.$$

avec :

$$(A2-48) \quad D = \frac{1}{2(1-\cos\phi) - \phi(1+\beta) \sin\phi}$$

De (A2-46) on obtient également :

$$\begin{aligned}
 (A2-49) \quad B_1 &= -D \left( -\frac{\phi^2}{\lambda^2 \cdot L} \sin\phi \cdot \rho_3 - \frac{\phi(1-\cos\phi)}{\lambda^2 \cdot L(1+\beta)} \omega_{jy'} - \frac{\phi}{\lambda^2 \cdot L(1+\beta)} \right. \\
 &\quad \left. (\cos\phi + \phi(1+\beta)\sin\phi - 1) \omega_{iy'} \right) \\
 B_2 &= -D \left( \frac{\phi^2(1-\cos\phi)}{\lambda^2 \cdot L} \cdot \rho_3 - \frac{\phi}{\lambda^2 \cdot L} \left( \frac{\sin\phi}{1+\beta} - \phi \right) \omega_{jy'} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\phi}{\lambda^2 \cdot L(1+\beta)} (\phi(1+\beta)\cos\phi - \sin\phi) \omega_{iy'} \right) \\
 B_3 &= D \left( -\phi(1+\beta)\sin\phi \cdot \rho_3 - (1-\cos\phi)\omega_{jy'} - (1-\cos\phi)\omega_{iy'} \right) \\
 B_4 &= D \left( (1-\cos\phi)\omega_{jy'} + (1-\cos\phi - \phi(1+\beta)\sin\phi)\omega_{iy'} - \frac{L}{\phi} \left( \frac{\sin\phi}{1+\beta} - \phi \right) \omega_{jy'} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{L}{\phi} \cdot \frac{1}{1+\beta} (\phi(1+\beta)\cos\phi - \sin\phi) \omega_{iy'} \right)
 \end{aligned}$$

. Relation forces-déplacements

Nous allons maintenant développer les relations liant les sollicitations d'extrémités et les déplacements de ces mêmes extrémités.

Relation effort normal-déplacement :

En remplaçant  $\epsilon_{x'x'}$  par (A2-1), dans la relation  $N = EA \epsilon_{x'x'}$ , on obtient :

$$(A2-50) \quad N = EA \epsilon_{x'x'} = EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x'} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x'} \right)^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
 (A2-50) \text{ nous donne : } \int_0^{x'} du &= \int_0^{x'} \frac{N}{EA} dx' - \frac{1}{2} \int_0^{x'} \left( \frac{\partial v}{\partial x'} \right)^2 dx' - \frac{1}{2} \int_0^{x'} \\
 &\quad \left( \frac{\partial w}{\partial x'} \right)^2 dx'
 \end{aligned}$$

d'où :

$$(A2-51) \quad u_j - u_i = F_{jx'} \int_0^L \frac{dx'}{EA} - \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial v}{\partial x'} \right)^2 dx' - \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x'} \right)^2 dx'$$

on pose :

$$(A2-52) \quad \begin{cases} \delta_2 = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x'}\right)^2 dx' \\ \delta_3 = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x'}\right)^2 dx' \end{cases}$$

Utilisons maintenant l'hypothèse que le changement de souplesse de la barre est négligeable au cours d'un petit accroissement dF, on peut écrire :

$$(A2-53) \quad \frac{\partial v}{\partial x'} = \rho_2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial x'} = -\rho_3$$

donc :

$$\delta_2 = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x'}\right)^2 dx' = \frac{1}{L} \int_0^L \rho_2^2 dx' = \frac{1}{L} \rho_2^2 \int_0^L dx'$$

et finalement on trouve :

$$(A2-54) \quad \begin{cases} \delta_2 = \rho_2^2 \\ \delta_3 = \rho_3^2 \end{cases}$$

En se rappelant les relations (A2-9) et (A2-15) nous pouvons obtenir les relations (II-12), liant les sollicitations d'effort normal aux extrémités et les déplacements de ces mêmes extrémités.

Relation moment fléchissant-déplacements :

Compte tenu de (A2-14), (A2-20) et (A2-30) on peut écrire :

$$(A2-55) \quad \begin{cases} M_{iz'} = (-M_{z'})_{x'=0} = -EI(1+\beta) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2}\right)_{x'=0} = -k_3 \cdot \rho_2 + k_1 \cdot \omega_{iz'} + k_2 \cdot \omega_{jz'} \\ M_{jz'} = (+M_{z'})_{x'=L} = EI(1+\beta) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2}\right)_{x'=L} = -k_3 \cdot \rho_2 + k_2 \cdot \omega_{iz'} + k_1 \cdot \omega_{jz'} \end{cases}$$

$k_1, k_2$  et  $k_3$  sont définis par (II-9).

De (A2-13), (A2-19) et (A2-31) on obtient également :

$$(A2-56) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{iy'} = (-M_{y'})_{x'=0} = EI(1+\beta) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} \right)_{x'=0} = k_3 \cdot \rho_3 + k_1 \cdot \omega_{iy'} + k_2 \cdot \omega_{jz'} \\ M_{jy'} = (M_{y'})_{x'=L} = -EI(1+\beta) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} \right)_{x'=L} = k_3 \cdot \rho_3 + k_2 \cdot \omega_{iy'} + k_1 \cdot \omega_{jz'} \end{array} \right.$$

Relation effort tranchant-déplacements :

Les relations (A2-7), (A2-13) et (A2-33) nous donnent :

$$(A2-57) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{iy'} = \left( -N \frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial M_{z'}}{\partial x'} \right)_{x'=0} = \left( -N \frac{\partial v}{\partial x'} + EI(1+\beta) \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} \right)_{x'=0} \\ F_{jy'} = \left( N \frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial M_{z'}}{\partial x'} \right)_{x'=L} = \left( N \frac{\partial v}{\partial x'} - EI(1+\beta) \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} \right)_{x'=L} \end{array} \right.$$

Compte tenu de (A2-35), (A2-47) et (A2-57) on obtient les relations données à (II-15).

De la même manière et compte tenu de (A2-11), (A2-17) et (A2-31) on a :

$$(A2-58) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{iz'} = \left( -N \frac{\partial w}{\partial x'} - \frac{\partial M_{y'}}{\partial x'} \right)_{x'=0} = \left( -N \frac{\partial w}{\partial x'} + EI(1+\beta) \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} \right)_{x'=0} \\ F_{jz'} = \left( N \frac{\partial w}{\partial x'} + \frac{\partial M_{y'}}{\partial x'} \right)_{x'=L} = \left( N \frac{\partial w}{\partial x'} - EI(1+\beta) \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} \right)_{x'=L} \end{array} \right.$$

(A2-36), (A2-49) et (A2-58) nous donnent les relations (II-16).

Relation moment de torsion-déplacements :

De la relation (A2-24) on obtient :  $M_{x'} = \text{cte}$

Compte tenu de (A2-5), (A2-12) et (A2-18) on trouve :

$$(A2-59) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{ix'} = (-M_{x'})_{x'=0} = -\frac{GJ}{L} (\omega_{jx'} - \omega_{ix'}) \\ M_{jx'} = (M_{x'})_{x'=L} = \frac{GJ}{L} (\omega_{jx'} - \omega_{ix'}) \end{array} \right.$$

2) Cas où  $F_{jx'} > 0$  (tension) :

Toutes les relations que nous avons trouvées sont valables uniquement pour le cas où  $F_{jx'} < 0$  (compression).

Dans le cas où  $F_{jx'} > 0$  (tension), il suffit de remplacer  $\sin \alpha L$  par  $\text{sh } \alpha L$  et  $\cos \alpha L$  par  $\text{ch } \alpha L$  dans les relations précédentes.