



HAL
open science

Modélisation numérique des écoulements et des déformations dans les barrages en terre construits sur des sols mous

Ould Amy Mahfoud

► **To cite this version:**

Ould Amy Mahfoud. Modélisation numérique des écoulements et des déformations dans les barrages en terre construits sur des sols mous. Sciences de la Terre. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1990. Français. NNT: . tel-00529472

HAL Id: tel-00529472

<https://pastel.hal.science/tel-00529472>

Submitted on 25 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

757

NS 14049
X (3)

THESE

présentée à

L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ECOLE NATIONALE
DES PONTS ET CHAUSSEES

par

MAHFOUD OULD AMY

SUJET : Modélisation numérique des écoulements
et des déformations dans les barrages
en terre construits sur des sols mous

Soutenue le 19 Décembre 1990 devant le jury composé de :

MM.	F. SCHLOSSER	Président
	R.M. FAURE	} Rapporteurs
	J.L. FAVRE	
	J.P. MAGNAN	} Examineurs
	P. HUMBERT	
	M. LINO	



1. 1000
2. 1000
3. 1000
4. 1000
5. 1000
6. 1000
7. 1000
8. 1000
9. 1000
10. 1000

11. 1000
12. 1000
13. 1000
14. 1000
15. 1000

16. 1000
17. 1000
18. 1000
19. 1000
20. 1000

21. 1000
22. 1000
23. 1000
24. 1000
25. 1000

26. 1000
27. 1000
28. 1000
29. 1000
30. 1000

31. 1000
32. 1000
33. 1000
34. 1000
35. 1000

Avant-propos

Les travaux qui font l'objet de ce mémoire ont été effectués au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées sous la direction de J. P. Magnan, Directeur Technique et Professeur-adjoint à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. Je tiens à lui exprimer ma vive reconnaissance pour la confiance qu'il avait placée en moi pendant ces trois années de recherche, pour ses conseils précieux qui ont guidé ce travail et pour ses encouragements constants qui témoignent de ses qualités humaines en plus de ses compétences scientifiques.

Je voudrais, pour la même occasion, remercier sincèrement P. Humbert, Chef de la Section des Modèles Numériques, qui m'a accueilli au Service Mécanique du LCPC et a mis à ma disposition les travaux numériques existants et les moyens informatiques nécessaires pour mener à bien cette étude.

La vaste culture physique et mathématique de J. M. Piau, Assistant à la Section des Modèles Numériques, la profondeur de ses idées, sa gentillesse habituelle et sa disponibilité constante m'ont été d'un appui décisif tout au long de mon travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude. Mes sincères remerciements s'adressent également à Ph. Mestat, Assistant à la Division Géotechnique, qui m'a fait profité de son enrichissante expérience du traitement numérique des problèmes élastoplastiques.

J'adresse mes remerciements respectueux à Monsieur F. Schlosser, Directeur Général de la Société TERRASSOL et Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées qui m'a fait l'honneur de présider le jury, à Messieurs les rapporteurs J. L. Favre, Professeur à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures et R. M. Faure, Professeur à l'Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat et à Monsieur M. Lino, Directeur du Bureau d'ingénieurs-conseils I.S.L. qui ont bien voulu juger et examiner ce travail.

Je ne saurais oublier l'aide matérielle que m'ont octroyée la Direction de la Recherche de l'ENPC et la Direction Scientifique du LCPC. Que soient donc particulièrement remerciés Messieurs P. Veltz et A. Bonnet ainsi que Mademoiselle E. Frugier et Madame Tchang.

Je ne pourrais terminer sans exprimer un témoignage d'amitié à mes collègues thésards du LCPC qui, par l'ambiance qu'ils créent, incitent à la recherche et renforcent l'esprit de collaboration. Je me souviendrais peut-être toujours des "fissures" d'Ahmed Elouard, des "clous" de Fadila Chaoui, des "poutres" de Franz-Josef Ulm, des "argiles" de Mohamed Khemissa et sans doute des "pieux" de Toufik Hadjadji. Bonnes chances à tous ceux-là et à tous les autres.

Bon nombre de Techniciens m'ont aidé. Je pense à J. Oczkowski en premier lieu, à A. Dubouchet aussi et à J. C. Romagny enfin.

SOMMAIRE

RESUME	5
INTRODUCTION GENERALE	6
Chapitre 1 - SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LA CONSOLIDATION DES SOLS ET DES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE	
1.1. Comportement des sols mous	12
1.1.0. Introduction	
1.1.1. Généralités	
1.1.2. Consolidation des sols saturés et travaux antérieurs du LCPC	
1.1.3. Effets de la non-saturation	
1.2. Hydraulique des milieux poreux saturés et non saturés indéformables	32
1.2.1. Bases phénoménologiques en hydraulique des sols rigides saturés et non-saturés	
1.2.2. Modélisations usuelles des écoulements en milieux poreux saturés et non-saturés	
1.2.3. Traitement numérique des écoulements saturés et non-saturés	
1.2.4. Travaux antérieurs du LCPC	
1.3. Conclusion et but de l'étude	68
Chapitre 2 - TRAVAUX COMPLEMENTAIRES SUR LES MODULES EXISTANTS	
2.1. Introduction	71
2.2. Reformulation des équations de la consolidation	72

2.2.1. Introduction du potentiel gravitaire	
2.2.2. Formulations variationnelle et matricielle	
2.2.3. Programmation et validation	
2.3. Mise au point d'une option supplémentaire	84
2.3.1. Présentation du problème	
2.3.2. Formulation matricielle	
2.3.3. Algorithme de résolution	
2.3.4. Programmation et validation	
2.4. Problématique de la prise en compte de la non-saturation	94
2.4.1. Présentation du problème	
2.4.2. Cas du régime permanent	
2.4.3. Cas du régime transitoire	
2.5. Conclusion	107
 Chapitre 3 - CONSOLIDATION A SURFACE LIBRE DES SOLS ANISOTROPES	
3.1. Introduction	109
3.2. Hypothèses du modèle	110
3.3. Formulation théorique du problème de consolidation à surface libre	112
3.3.1. Equations relatives aux déformations du squelette	
3.3.2. Equations relatives à l'écoulement du fluide	

3.3.3. Le problème approché	
3.4. Cas particuliers	118
3.5. Résolution du problème approché	120
3.5.1. Formulation variationnelle	
3.5.2. Formulation matricielle	
3.5.3. Algorithme de résolution	
3.5.4. Traitement numérique des conditions aux limites	
3.6. Programmation effectuée	129
3.7. Validation	130
3.7.1. Introduction	
3.7.2. Validation par rapport à CSLI	
3.7.3. Validation par rapport à NSAT	
 Chapitre 4 - CONSOLIDATION A SURFACE LIBRE DES SOLS ELASTOPLASTIQUES ANISOTROPES	
4.0. Introduction	135
4.1. Généralités	136
4.1.1. Rappels du formalisme mathématique de l'élastoplasticité	
4.1.2. Rappels sur les stratégies numériques de résolution des problèmes d'élasto- plasticité	
4.1.3. Elastoplasticité des sols mous	
4.2. Couplage de l'élastoplasticité et des écoulements à surface libre	154
4.2.1. Présentation du problème	
4.2.2. Stratégie et algorithme de résolution	

4.2.3. Programmation effectuée	
4.2.4. Validation de la programmation	
4.3. Conclusion	189
 Chapitre 5 - APPLICATIONS	
5.1. Introduction	192
5.2. Quelques tests d'illustration	193
5.2.1. Influence de la perméabilité du barrage sur l'écoulement dans la fondation molle	
5.2.2. Temps final de la consolidation d'un barrage en terre soumis à un écoulement à surface libre	
5.2.3. Elévation de la nappe suite à la pose instantanée du remblai	
5.3. Calcul de la digue de Maurepas-Courance	210
5.3.1. Présentation de l'ouvrage et des résultats expérimentaux	
5.3.2. Modélisation effectué	
5.3.3. Résultats des calculs et analyse	
5.3.4. Conclusion	
 CONCLUSION GENERALE	 252
 ANNEXES	 256
 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	 266

RESUME

Dans le but de mener à bien le dimensionnement des barrages en terre construits sur sols mous, on développe une approche couplant la consolidation des sols et les écoulements à surface libre. Ce modèle de consolidation à surface libre des sols élastiques ou élastoplastiques isotropes ou anisotropes, écrouissables ou non, prend en compte la variabilité ou la constance des principaux paramètres mécaniques et hydrauliques du sol (indice des vides, écrouissage, perméabilités, compressibilités, teneur en eau).

Le traitement numérique de ce problème, effectué au niveau du code de calculs par éléments finis CESAR du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, conduit à la résolution de systèmes d'équations différentielles non-linéaires, pour lesquels on propose des algorithmes transitoires itératifs et des éléments finis appropriés du type déplacement et diffusion.

L'application du modèle au calcul d'un ouvrage réel, construit et mis en eau par étapes, a permis d'obtenir des résultats encourageants tant du point de vue mécanique que du point de vue hydraulique.

MOTS CLES : Modèle numérique - Eléments finis - Consolidation - Couplage - Surface libre - Ecoulement - Fluide - Compressibilité - Saturé - Non saturé - Porosité - Teneur en eau volumique - Perméabilité relative - Pression interstitielle - Succion - Diffusion - Suintement - Hydraulique - Bidimensionnel - Régime permanent - Régime transitoire - Nappe - Darcy - Indéformable - Déformable - Elasticité - Elastoplasticité - Ecrouissage - Implicite - Explicite - Argile - MELANIE - Anisotrope - Systèmes non linéaires - Itération - Point fixe - Remblai - Fondation - Barrage - Digue - CESAR.

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

La construction d'ouvrages en terre, tels que remblais et barrages, sur des sols mous devient de plus en plus nécessaire. Le développement industriel et l'utilisation étendue des remblais dans divers secteurs de la construction conduisent à la raréfaction de sites constructibles et de bonne qualité géotechnique. Si l'on ajoute à cela le fait que les sols mous regroupent à des degrés variables plusieurs variétés de sols (vases, tourbes et argiles), largement répandues dans le monde et notamment dans les vallées, on comprend l'utilisation fréquente de ce type de sols comme sols de fondations d'ouvrages en terre. Ainsi, dans le cadre des grands aménagements hydrauliques ou hydroélectriques ou de contrôle des crues, on prévoit de construire un nombre croissant de digues et de barrages en terre dans des zones de sols compressibles.

Une telle construction pose des problèmes nombreux et délicats auxquels sont confrontés géotechniciens et mécaniciens des sols.

Ces problèmes sont liés en partie à la faible résistance des sols mous, qui entraîne des difficultés à assurer la stabilité des remblais, soumis en plus, dans le cas de barrage, aux effets du remplissage du réservoir. Les répercussions de l'écoulement dans le corps de digue, sur la stabilité globale de l'ouvrage posent, en particulier, un problème de conception des talus sur sols mous.

Une source essentielle de problèmes est due à la forte compressibilité des sols mous, qui se traduit par des tassements et des déformations importants. Lorsqu'il s'agit de structures hydrauliques, digues et barrages, les tassements de la fondation peuvent atteindre un à plusieurs mètres. Ils doivent donc être pris en compte dans le choix de la hauteur totale de l'ouvrage pour assurer en tout temps une revanche en crête suffisante et garantir la sécurité contre le risque de déversement. Ces tassements interviennent aussi dans la définition de la structure interne de l'ouvrage (épaisseur et plasticité du noyau, épaisseur des filtres, zonage) pour minimiser les risques de fissuration liés au développement des tassements différentiels.

La forte teneur en eau et la faible perméabilité des sols mous posent le problème d'évolution des pressions interstitielles et de prévision des tassements de l'ouvrage au cours du processus de consolidation de la fondation. La faible vitesse des tassements impose parfois des calendriers de construction très étalés dans le temps, des coûts d'entretien et de réparation, ou des techniques d'accélération de la consolidation de la fondation (par confortation ou drainage des sols) en général très coûteuses. Dans le cas des barrages, la dissipation des pressions interstitielles, la vitesse des tassements et leur amplitude sont étroitement liés à l'évolution de l'écoulement à surface libre qui s'établit en général dans le corps de digue. Cet écoulement modifie en effet au cours du temps la distribution des pressions exercées sur la fondation tant du point de vue mécanique (modification du poids du remblai et soulèvement hydrostatique dus aux remontées ou descentes de la surface libre suivant la mise en eau : la vidange du réservoir) que du point de vue hydraulique (évolution des forces d'écoulement). A cet égard, la date de mise en eau du barrage et son influence sur le processus de tassement doivent être soigneusement considérées en vue d'une exploitation optimale de l'ouvrage.

Les effets de la saturation partielle sur le comportement de l'ouvrage et, particulièrement dans le noyau argileux, ne sont pas négligeables. Ils peuvent générer des variations importantes du degré de saturation et des suctions et provoquer ainsi des désordres majeurs (gonflement et fissuration) préjudiciables à la pérennité de l'ouvrage.

Enfin, des problèmes peuvent être posés, notamment dans le cas des digues de grande hauteur, par les déformations que subissent les matériaux constitutifs du remblai. On les choisit en général peu rigides pour assurer une meilleure interaction entre le remblai et sa fondation, d'une part, et entre le remblai et les ouvrages annexes du barrage (galerie de prise d'eau, par exemple), d'autre part.

La prise en compte de l'ensemble de ces facteurs dans le dimensionnement des ouvrages est un problème difficile. Malgré l'expérience acquise avec la construction des remblais sur sols mous, il n'existe pas à l'heure actuelle de méthode de calcul globale de ce type de structure, surtout lorsqu'il s'agit de barrages. Les calculs classiques reposent souvent sur des études découplées du barrage et de sa fondation. On est alors amené dans la plupart des cas à poser des hypothèses peu représentatives du comportement réel de l'ouvrage (barrage + fondation). Par exemple, on suppose que le remblai est complètement étanche (ce qui revient à négliger ses perméabilités devant celles de la fondation et tenir compte éventuellement de ses déformations) ou très rigide (ce qui conduit, au contraire, à négliger ses déformations devant celles de la fondation et tenir compte éventuellement de l'écoulement en son sein) et est édifié sur un sol mou

parfaitement saturé (pour négliger les variations de la nappe d'eau au cours du processus de consolidation).

Il était donc nécessaire d'envisager des situations plus courantes et plus générales et de mettre au point une méthode de calcul globale de l'ouvrage susceptible d'analyser son comportement aux différents stades de sa vie. L'étude que nous avons entreprise vise à apporter une contribution dans ce sens.

Elle se fonde sur une **modélisation du couplage de la consolidation des sols et des écoulements à surface libre**. Dans ce cadre théorique, qui assure la *continuité physique* des transferts mécaniques et hydrauliques entre le remblai et sa fondation molle, il est possible de conserver à l'ouvrage son unité.

Pour étudier ce problème de couplage, on part de deux modules de calcul par éléments finis du code CESAR, l'un se rapportant au traitement numérique des problèmes de consolidation des sols saturés, l'autre relatif au calcul des écoulements en milieu poreux indéformable saturé ou non-saturé avec ou sans surface libre. Le premier module est le résultat de travaux de modélisation numérique d'un vaste programme de recherche engagé au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC) depuis une vingtaine d'années en vue d'appréhender le comportement mécanique des argiles molles saturées utilisées comme sols de fondation de remblais. Le deuxième module, également développé au LCPC, a été mis au point dans l'optique de calculs d'écoulements dans les barrages en terre.

Ainsi, cinq chapitres constituent ce travail.

Le premier chapitre, consacré à une synthèse bibliographique, replace les deux modules de calculs dans le contexte actuel de la modélisation théorique et numérique de la consolidation des sols saturés et des écoulements à surface libre.

Le deuxième chapitre présente les quelques modifications que l'on a été amené à opérer sur ces deux modules afin de les harmoniser et d'étendre leurs possibilités de calculs.

Suite à ces travaux préparatoires, on établit au troisième chapitre un modèle de couplage de la consolidation des sols élastiques et des écoulements à surface libre, modèle théorique de **consolidation à surface libre des sols élastiques anisotropes**. On s'inspire des travaux numériques existants pour mettre au point un algorithme de résolution du problème, que l'on implémente dans un premier module de calcul par éléments finis du code CESAR.

Au quatrième chapitre, on introduit l'élastoplasticité du squelette du sol et on décrit un algorithme de résolution de ce problème doublement non-linéaire affectant à la fois la

mécanique du squelette et l'hydraulique du sol. La programmation de cet algorithme est effectuée dans un deuxième module du code CESAR traitant les problèmes de **couplage de la consolidation des sols élastoplastiques anisotropes et des écoulements à surface libre.**

On applique au cinquième chapitre les modules développés au cours de ce travail à des exemples d'illustration et à un cas de digue réelle pour valider les modèles.

**Chapitre 1 - SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LA CONSOLIDATION
DES SOLS ET DES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE**

1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LA CONSOLIDATION DES SOLS ET LES ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE

1.1. Comportement des sols mous

1.1.0. Introduction

La construction sur sols mous est une préoccupation constante des ingénieurs géotechniciens, appelés de plus en plus fréquemment à édifier des ouvrages de génie civil sur ces sols fortement compressibles.

En effet, on constate une croissance soutenue de l'utilisation des remblais dans divers secteurs de la construction tels que les réseaux routiers, autoroutiers et de chemin de fer, l'aménagement hydraulique et hydroélectrique, les ouvrages d'irrigation et de contrôle des crues, et les installations portuaires et aéroportuaires.

Tous ces ouvrages posent un nombre de problèmes importants, liés à la stabilité et aux tassements évolutifs inhérents au comportement mécanique de leur fondation molle.

1.1.1. Généralités

Qu'est-ce qu'un sol mou ?

Il n'est pas évident de répondre à cette question tant il est délicat, en Mécanique des Sols, de définir des critères quantitatifs précis à partir desquels un sol peut être systématiquement considéré comme mou c'est-à-dire doué d'une faible résistance au cisaillement. Dans certains pays, on a choisi comme seuil de résistance une cohésion non drainée de 50 kPa.

Au concept de mollesse des sols, on substitue très souvent la notion de compressibilité qui traduit un autre aspect du comportement de ces sols. Ainsi, appartiennent à cette catégorie de sols compressibles, les vases, les tourbes et les argiles peu raides.

Cette classe de sols possède en général les propriétés suivantes :

- une nature à dominante argileuse ou organique,
- une forte teneur en eau et un faible poids volumique,

- une très faible perméabilité,
- une faible résistance au cisaillement et une forte compressibilité.

Dans ces sols, la phase liquide joue un rôle capital et est responsable en grande partie du caractère différé des déformations qu'ils subissent sous le poids des ouvrages usuels.

Cette réponse non instantanée aux sollicitations est variable suivant :

- la nature du sol,
- le degré de saturation,
- la vitesse avec laquelle le chargement imposé est appliqué.

La faible valeur de la perméabilité des sols mous (10^{-8} à 10^{-11} m/s) fait que l'application des chargements provoque des surpressions interstitielles qui se dissipent avec une vitesse qui dépend à la fois des paramètres hydrauliques et mécaniques du sol et de la vitesse du chargement imposé (le temps de dissipation des pressions est donc très variable. Il peut être de l'ordre de 3 mois à une vingtaine d'années pour les fondations molles des remblais usuels).

Ce comportement typique des sols fins saturés est appelé phénomène de consolidation.

1.1.2. Consolidation des sols saturés

1.1.2.1. Phénomène de consolidation des sols

Il s'agit d'un écoulement particulier suscité par des gradients hydrauliques créés par les charges imposées dès l'instant de leur application.

Sous l'action de celles-ci, l'eau est évacuée vers les zones drainantes (ou de basses pressions) dans un processus transitoire au cours duquel les pressions interstitielles se dissipent progressivement.

Pendant ce processus, il s'effectue au fur et à mesure de l'écoulement un transfert progressif des charges appliquées, de l'eau vers le squelette du sol.

L'augmentation des contraintes effectives ainsi produite s'accompagne d'un renforcement du sol, qui augmente sa cohésion non drainée : c'est le phénomène de consolidation.

1.1.2.2. Bases théoriques de la consolidation

Les équations régissant la consolidation des sols résultent des équations de conservation de la mécanique des milieux continus appliquée au sol considéré comme un milieu poreux polyphasique.

Moyennant des simplifications sur la nature physique du milieu étudié et la géométrie du problème envisagé, et des hypothèses sur la rhéologie des constituants (squelette, eau et gaz), on est amené très souvent à résoudre des équations aux dérivées partielles assorties de conditions aux limites et initiales.

La modélisation de la consolidation des sols repose sur la théorie de **Biot** (1941) comme généralisation de la théorie pseudo-tridimensionnelle de **Rendulic** (1936), elle-même généralisant la théorie unidimensionnelle de **Terzaghi** (1923), fondateur de l'analyse en contraintes effectives dans les sols saturés.

La théorie de Biot s'appuie sur les hypothèses suivantes :

- le sol est saturé d'eau incompressible,
- les grains solides sont également supposés incompressibles,
- le squelette du sol possède un comportement élastique linéaire et isotrope,
- les paramètres mécaniques et hydrauliques du sol sont supposés constants,
- l'écoulement vérifie la loi de Darcy.

On s'affranchira dans la suite de cette étude des restrictions apportées par certaines de ces hypothèses (chapitres 2, 3 et 4). Mais pour l'instant, nous retenons celles-ci pour simplifier les équations de base de la consolidation des sols.

La loi de comportement du squelette du sol permet de relier le tenseur des déformations et le tenseur des contraintes effectives au moyen de la relation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (1.1)$$

avec :

- E - module d'Young,
- ν - coefficient de Poisson,
- δ_{ij} - symbole de Kronecker.

La loi de Darcy, qui relie la vitesse du fluide au gradient de charge hydraulique, donne :

$$\vec{v} = - k \text{ grad } h, \quad (1.2)$$

où k est la perméabilité hydraulique du sol supposé isotrope.

L'équation de continuité du fluide assure la conservation de la masse d'eau ou le volume d'eau (cette dernière étant supposée incompressible), ce qui donne, sous l'hypothèse des petites déformations, la relation suivante :

$$\text{div } \vec{v} = - \frac{\partial}{\partial t} (\text{tr } \varepsilon). \quad (1.3)$$

Le principe de Terzaghi reliant les contraintes totales et les contraintes effectives à la pression interstitielle s'écrit en adoptant la convention de la mécanique des milieux continus (signe + pour une traction et signe - pour une compression) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}' - p \underline{\underline{I}}. \quad (1.4)$$

L'équation d'équilibre de la mécanique des milieux continus permet d'écrire :

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f} = \vec{0}. \quad (1.5)$$

La combinaison des équations (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5) permet de relier le tenseur des contraintes et le tenseur des pressions, sous la forme d'un système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \underline{\sigma} + \vec{f} = \vec{0} \\ c_v \vec{\nabla}^2 p = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{\text{oct}}}{\partial t} \\ c_v = \frac{kE}{\gamma_w (1-2\nu)} \end{array} \right.$$

avec :

E - module d'Young,

ν - coefficient de Poisson,

γ_w - poids volumique de l'eau,

k - perméabilité,

σ_{oct} - contrainte totale octaédrique ($\operatorname{tr} \sigma / 3$),

$\underline{\sigma}$ - tenseur des contraintes totales,

p - pression interstitielle,

\vec{f} - force volumique.

1.1.2.3. Traitement des problèmes de consolidation

La consolidation des sols a été l'objet d'une vaste littérature de recherche en Géotechnique, motivée par la nécessité de maîtriser la construction sur sols mous.

Des travaux importants de synthèse en la matière, dans lesquels on présente un vaste inventaire des problèmes pratiques posés et un panorama des modèles proposés, ont été effectués par bon nombre de spécialistes des sols compressibles.

Parmi ces ouvrages de base, on peut citer les travaux de MM. **Leroueil**, **Magnan** et **Tavenas** dans "Remblais sur argiles molles" (1985) et l'ouvrage publié sous la direction de M. **Magnan** (1984), "Remblais et fondations sur sols compressibles".

Une part très importante des travaux de recherche concerne le traitement numérique des problèmes de consolidation, de plus en plus indispensable aux mécaniciens des sols.

Si, dans des cas bien précis, il est possible de faire quelques développements analytiques, par exemple pour résoudre le problème d'une couche plane comprimée entre deux parois rigides (**Mandel**, 1953), ou celui d'un échantillon sphérique soumis à une charge uniforme, drainé en surface (**Cryer**, 1963), ou encore celui d'un demi-espace chargé à sa surface (**Schiffman** et al., 1969), le recours aux méthodes numériques est de plus en plus systématique.

Plusieurs méthodes numériques peuvent être appliquées, dont la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis.

Si la méthode des différences finies semble bien adaptée aux cas unidimensionnels, par exemple à la théorie de consolidation de Terzaghi, la méthode des éléments finis est de loin la plus utilisée dans la résolution des problèmes de consolidation des sols.

La première formulation en éléments finis de la consolidation est apparue en 1969 dans les travaux de **Sandhu** et **Wilson**, se basant sur les travaux de **Gurtin** (1964) et **Nickel** et **Sackman** (1968) en thermoélasticité.

Hwang et al. (1971) et **Valliappan** (1974) poursuivirent les travaux de **Sandhu**, **Yokoo** et al. (1971) et établirent un principe variationnel pouvant inclure des discontinuités.

Mais la généralisation de la formulation variationnelle n'a été effectuée qu'en 1976 par **Sandhu**.

La formulation variationnelle du problème de consolidation est le résultat de l'application du principe variationnel obtenu par intégration sur la structure étudiée des équations locales de Biot rappelées au paragraphe précédent.

La minimisation des deux fonctionnelles relatives à l'écoulement du fluide interstitiel et aux déformations du squelette du sol, après discrétisation sur l'espace idéalisé en éléments finis, permet d'obtenir une formulation matricielle du problème.

Ainsi, le problème de consolidation des sols linéaires consiste à trouver le couple (U, H) tel que les équations :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_G \cdot \mathbf{U} - \mathbf{C}_G \cdot \mathbf{H} = \mathbf{F}_G \\ - \mathbf{C}_G^T \cdot \mathbf{U} - \mathbf{K}_G \cdot \mathbf{H} = - \mathbf{Q}_G \end{cases}$$

soient simultanément vérifiées dans le domaine étudié. Dans ce système, les notations suivantes sont utilisées :

- \mathbf{R}_G - matrice de rigidité du squelette du sol,
- \mathbf{C}_G - matrice du couplage,
- \mathbf{C}_G^T - matrice transposée de la matrice de couplage,
- \mathbf{K}_G - matrice des perméabilités,
- \mathbf{F}_G - vecteur représentant le chargement dû aux conditions aux limites mécaniques (contraintes ou déplacement imposés) et à la présence de forces volumiques,
- \mathbf{Q}_G - vecteur représentant le chargement dû aux conditions aux limites hydrauliques (flux ou charge imposés) et à la présence éventuelle de sources volumiques.

La présence dans le système matriciel du terme \dot{U} , dérivée partielle temporelle du champ de déplacement, montre qu'il s'agit d'un problème d'évolution, que l'on traite en général par des algorithmes d'intégration dans le temps pas à pas.

Il existe plusieurs schémas d'intégration tant implicites qu'explicites des systèmes différentiels du premier ordre (Hwang, 1971 ; Schiffman, 1969 ; Gibson et al., 1970 ; Christian, Boehmer et Martin, 1972).

La méthode de Galerkin, reprise et appliquée par Zienkiewicz (1971), qui établit un schéma semi-implicite basé sur une interpolation de type éléments finis dans le temps, semble bien adaptée au problème transitoire de la consolidation.

Jusqu'ici nous n'avons pas introduit la prise en compte des non-linéarités, très fréquentes dans le comportement des sols mous.

Dans les sols saturés, ces non-linéarités peuvent intervenir au niveau de la variabilité des paramètres hydrauliques et mécaniques au cours du temps, ou encore au niveau du comportement du squelette du sol.

Dans ce dernier cas, la formulation du problème de consolidation est obtenue à partir du principe des travaux virtuels et d'une relation incrémentale entre les contraintes et les déformations.

Quel que soit le modèle choisi, l'introduction de non-linéarités implique généralement des procédures itératives supplémentaires.

En analyse non-linéaire, plusieurs approches s'appliquent pour prendre en compte le comportement non-linéaire rhéologique du sol, par exemple la méthode des rigidités variables ou des déformations ou des contraintes initiales.

En ce qui concerne les sols mous, il existe plusieurs modèles élastoplastiques, visco-plastiques et élasto-visco-plastiques. Il n'est pas possible de restituer dans ces pages tous les travaux sur la rhéologie des sols mous. Le lecteur s'intéressant à plus de détails trouvera un récapitulatif important dans "Modélisation numérique du comportement des argiles molles naturelles" (Magnan, 1984).

Nous nous contentons de rappeler ici les travaux antérieurs du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (L.C.P.C), point de départ de nos recherches de modélisation numérique.

1.1.2.4. Travaux antérieurs du LCPC

1.1.2.4.1. Introduction

Les études sur la modélisation numérique des sols mous font partie, dans les Laboratoires des Ponts et Chaussées, d'un vaste programme de recherche sur les remblais sur sols compressibles qui comporte essentiellement trois grandes parties :

- études expérimentales en laboratoire,
- études théoriques et modélisations numériques,
- études expérimentales en vraie grandeur.

La figure 1.1 résume les principaux travaux effectués et montre l'ampleur des efforts engagés.

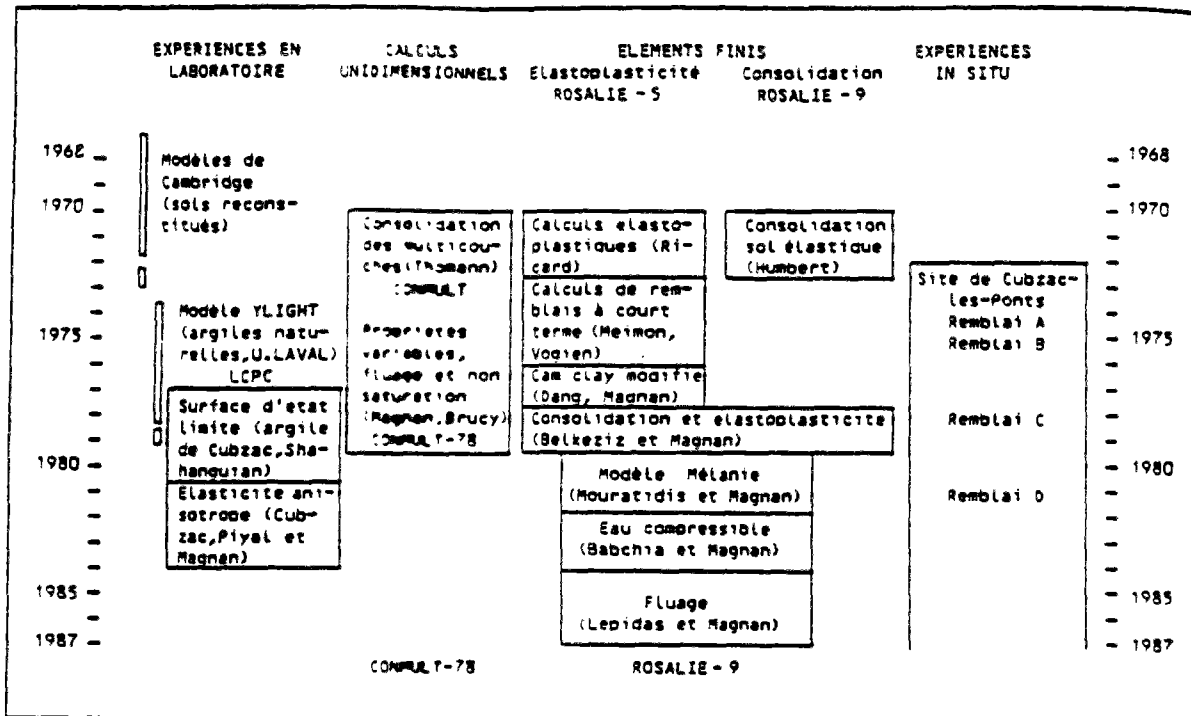


Fig. 1.1 Expériences et analyses numériques effectuées dans les laboratoires des Ponts et Chaussées pour les remblais sur argiles molles (1970-1987). (Magnan et al., 1987-b)

On peut remarquer (fig. 1.1) la part importante réservée au traitement numérique par éléments finis des problèmes de consolidation, effectué dans le cadre du code de calcul ROSALIE-Groupe 9, qui fut développé au LCPC entre les années 1970 et 1987.

1.1.2.4.2. Code ROSALIE du LCPC

Il s'agit d'un code de calcul par éléments finis, commencé au début des années 70, qui s'est développé progressivement sous la direction de MM. **Guellec** et **Humbert**. Il comportait 16 groupes ou sous-ensembles de calculs dont un spécialisé dans les calculs de consolidation : le Groupe 9. Ce groupe est le résultat de la coopération de deux sections du LCPC : la section des modèles numériques et la section des ouvrages en terre.

Ricard (1975) et **Humbert** ont d'abord introduit un algorithme de traitement des problèmes de consolidation tridimensionnelle dans le cas d'un squelette du sol élastique linéaire.

Puis **Dang** et **Magnan** (1977) introduisirent la plasticité avec écrouissage sur la base du modèle Cam-Clay modifié issu des travaux de **Roscoe**, **Schofield** et **Thurairajah** (1963), **Burland** (1965 et 1967), **Schofield** et **Wroth** (1968).

Belkeziz et **Magnan** (1982) concrétisèrent ces travaux par le couplage de la consolidation et de l'élastoplasticité et le calcul des ouvrages expérimentaux du site de Cubzac-les-Ponts.

L'amélioration de ces calculs en déformations planes se poursuit avec les travaux de **Mouratidis** et **Magnan** (1983) par l'introduction d'un Modèle de consolidation Elastoplastique Anisotrope avec Ecrouissage, MELANIE, résultant de l'adaptation des travaux des professeurs **Tavenas** et **Leroueil** (1977) dans le cadre d'un programme de recherche franco-québécoise sur les argiles molles naturelles.

Encouragés par les succès successifs des calculs des remblais sur sols mous, **Babchia** et **Magnan** (1986) introduisirent la compressibilité du fluide interstitiel puis tentèrent de simuler le calcul des barrages en terre construits sur sols mous.

La plus récente étape de développement est la prise en compte du fluage des argiles, mise au point par **Lépidas** et **Magnan** (1987).

En somme, le Groupe 9 de ROSALIE permet de modéliser la consolidation des sols saturés élastiques linéaires ou élasto-

plastiques avec ou sans écoulement, isotropes ou anisotropes avec prise en compte ou non du fluage du squelette, de la compressibilité du fluide interstitiel et de la variabilité au cours de calcul des paramètres hydrauliques (perméabilité, compressibilité).

Au niveau élémentaire, les éléments finis de consolidation utilisés sont issus de la fusion des éléments de type déplacement et des éléments de type diffusion (fig. 1.2).

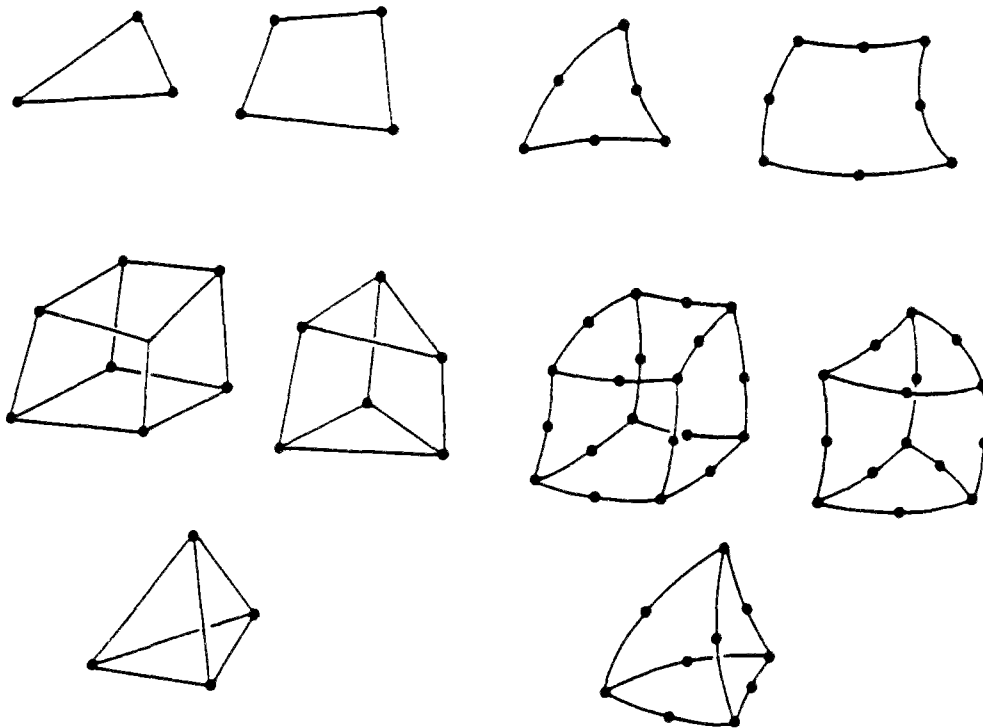


Fig. 1.2 Quelques types d'éléments de consolidation bidimensionnelle (degrés de liberté : u , v et h) et tridimensionnelle (degrés de liberté : u , v , w et h) utilisés dans ROSALIE

La non-linéarité mécanique de la rhéologie du squelette est traitée suivant la méthode des contraintes initiales (ou méthode de force).

Le processus itératif appliqué (fig. 1.3) utilise un algorithme du type Newton-Raphson.

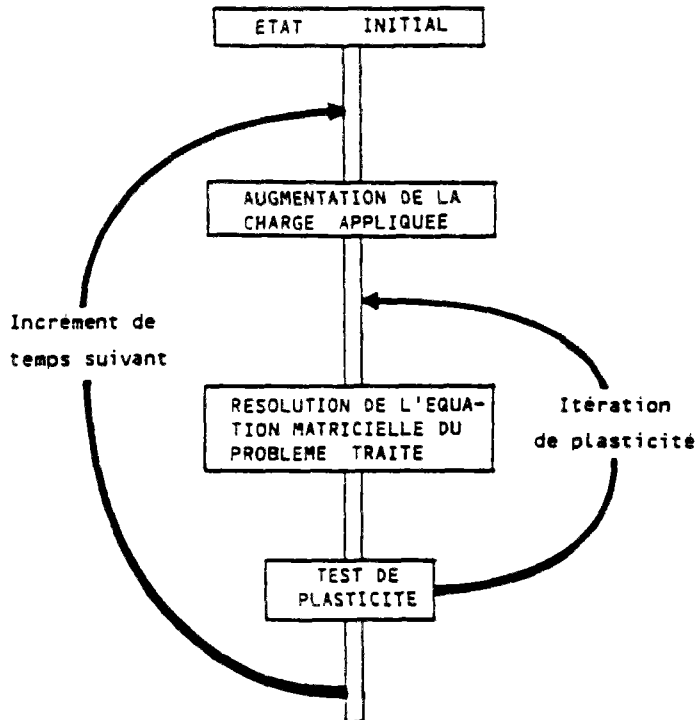


Fig. 1.3 Processus itératif transitoire utilisé dans ROSALIE

Ce programme, a été largement appliqué, à chaque phase de son développement, à des calculs de cas réels. Malgré l'intérêt spécifique de chaque cas étudié, il ne nous est pas possible de reproduire ici tous les détails de ces calculs.

Mais le travail de Babchia et Magnan (1986) sur la simulation numérique du calcul des barrages édifiés sur sols mous, dont le nôtre constitue la suite logique, revêt un intérêt tout particulier.

1.1.2.4.3. Résumé des travaux de Babchia et Magnan

Les travaux de Babchia et Magnan s'inscrivaient dans le cadre d'essais exploratoires portant sur le comportement d'un sol mou pris comme fondation de digue en terre.

Ne disposant pas de procédures numériques de recherche de surface libre pour le calcul des barrages, les auteurs supposaient que celui-ci restait étanche, s'intéressant ainsi exclusivement à l'écoulement dans la fondation molle.

Les remblais utilisés lors de ces calculs sont les remblais A et B du site expérimental de Cubzac-les-Ponts. Les maillages, les conditions aux limites ainsi que la loi de chargement sont ceux des figures 1.4 à 1.6. La fondation est supposée élastoplastique écouvissable (modèle MELANIE) et le remblai élastique anisotrope.

Les calculs effectués testaient l'influence de la date de mise en eau et de l'imperméabilité ou du drainage du substratum et du soubassement de la digue sur l'évolution des pressions interstitielles et les déformations dans la fondation.

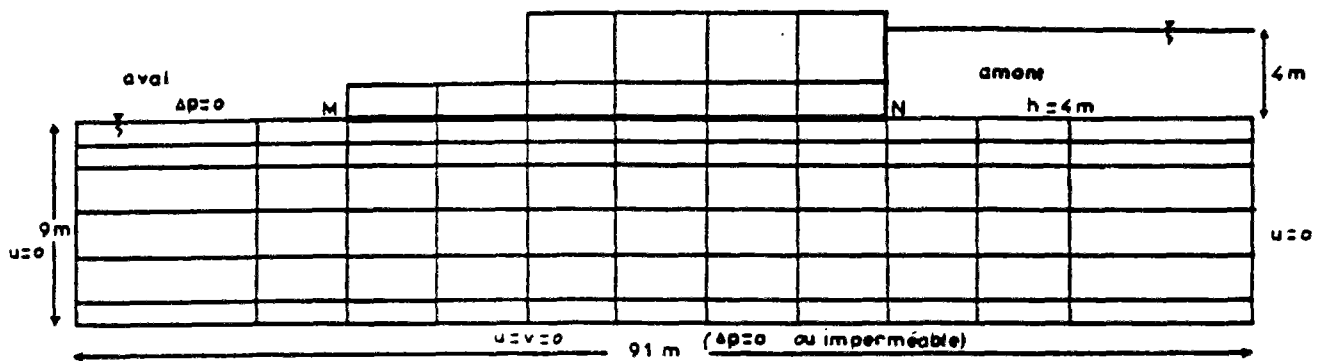


Fig. 1.4 Maillage et conditions aux limites du barrage A (remblai A)

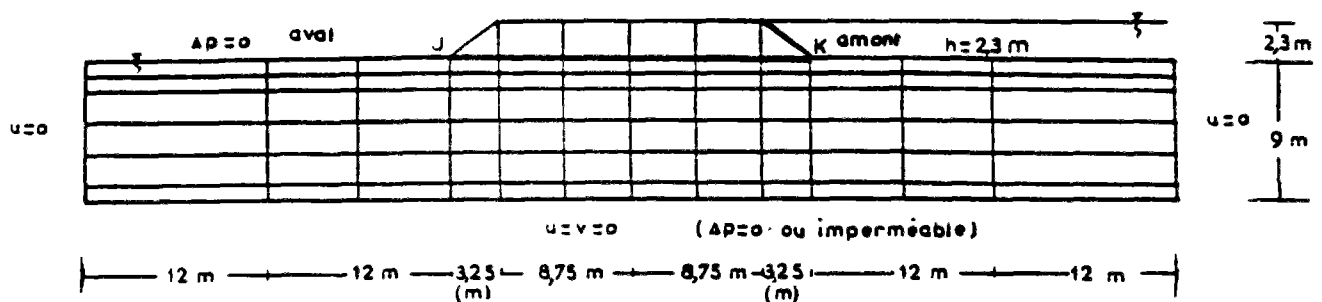


Fig. 1.5 Maillage et conditions aux limites du barrage B (remblai B)

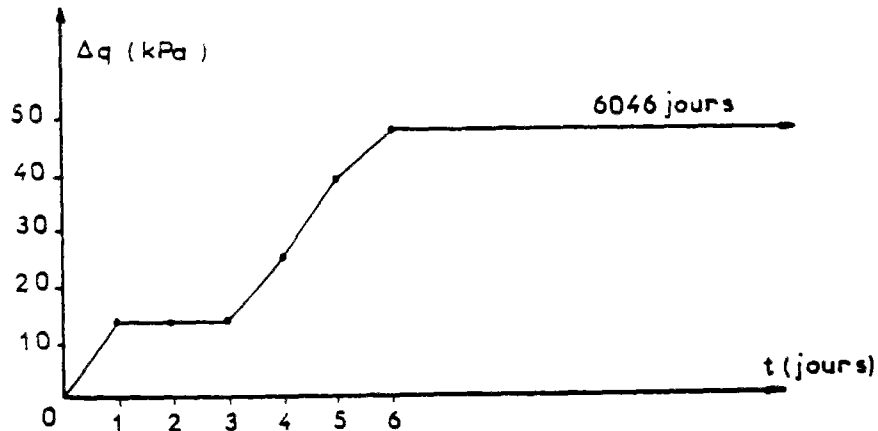


Fig. 1.6 Loi de chargement du barrage A et du barrage B (remblai B)

Une sélection de résultats obtenus est présentée sur les figures 1.7 à 1.11.

L'analyse des résultats semble indiquer, selon les auteurs, que l'écoulement perturbe sensiblement les mouvements horizontaux du sol, que la mise en eau provoque une rotation du barrage et que le comportement de la fondation est presque indifférent au drainage ou à l'imperméabilité à la surface du sol entre la fondation et la digue. Enfin, et c'est probablement le plus important, les pressions interstitielles, quelle que soit la date de mise en eau, tendraient vers la distribution correspondant à l'écoulement en régime permanent.

Néanmoins, l'absence de proposition de méthode globale de calcul de l'ouvrage à tous les stades de sa construction et d'exploitation ainsi que l'hypothèse d'étanchéité du barrage limitent sensiblement la portée pratique de telles modélisations quoiqu'elles soient encourageantes par leurs aspects novateurs.

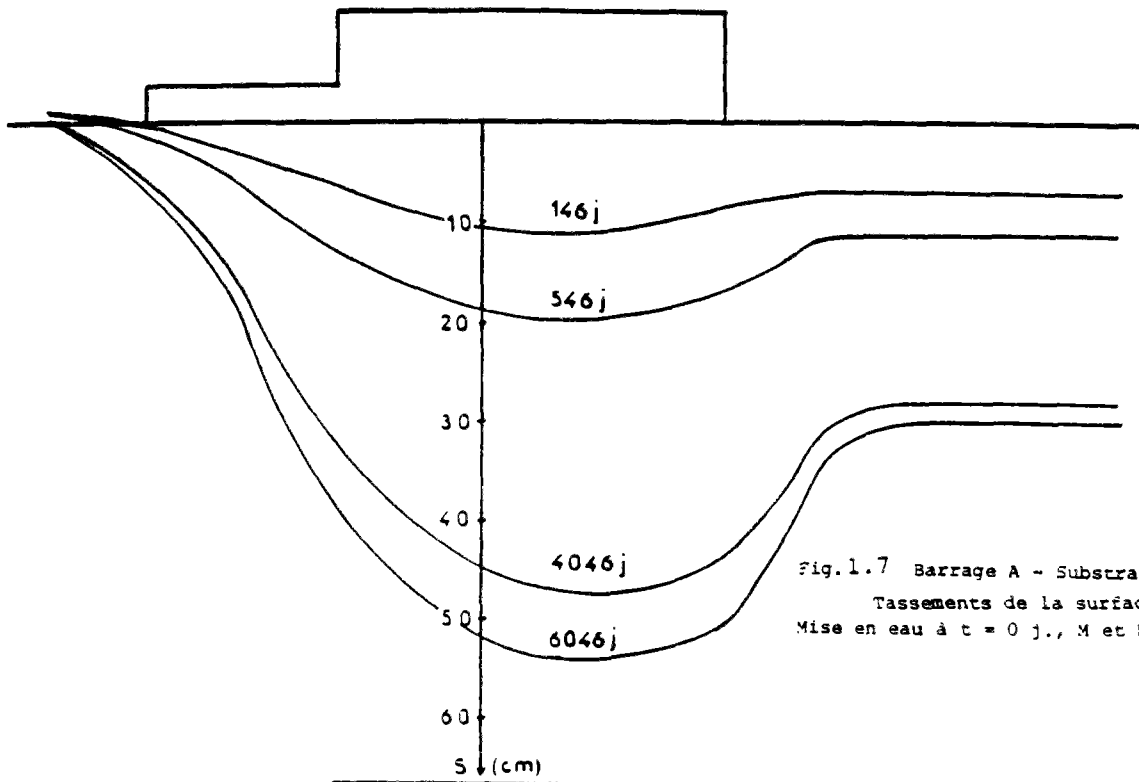


Fig. 1.7 Barrage A - Substratum perméable -
Tassements de la surface du sol -
Mise en eau à $t = 0$ j., M et N imperméables.

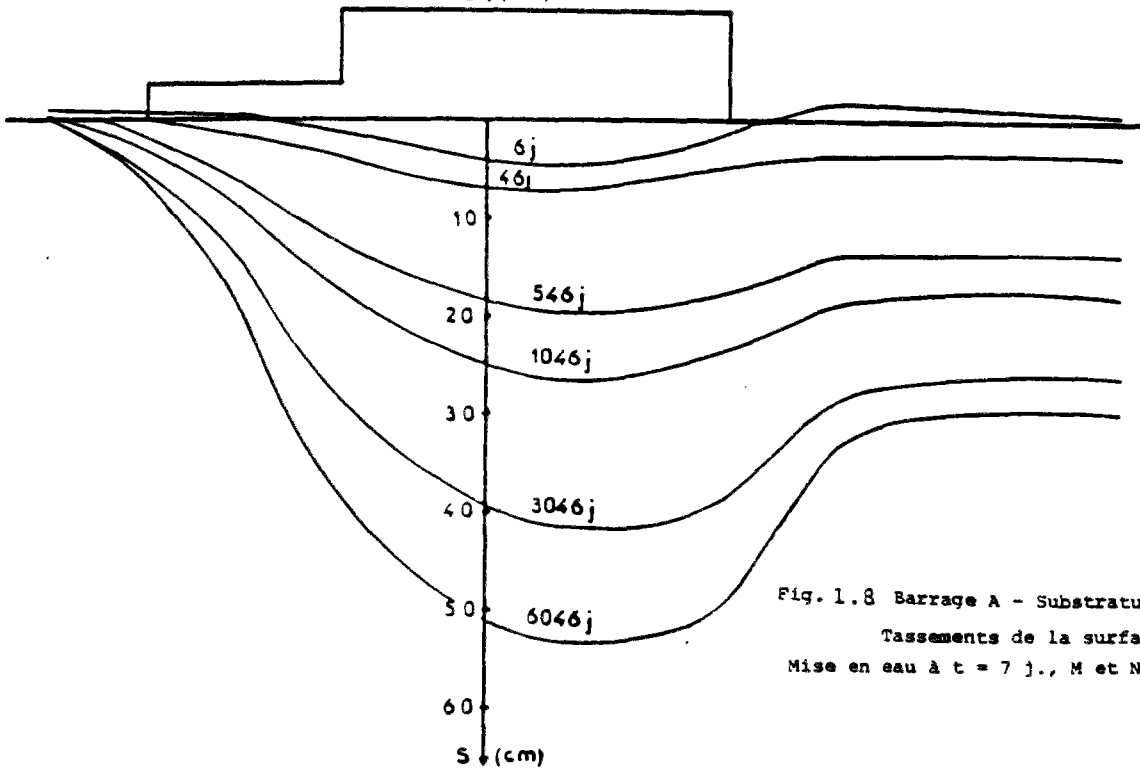
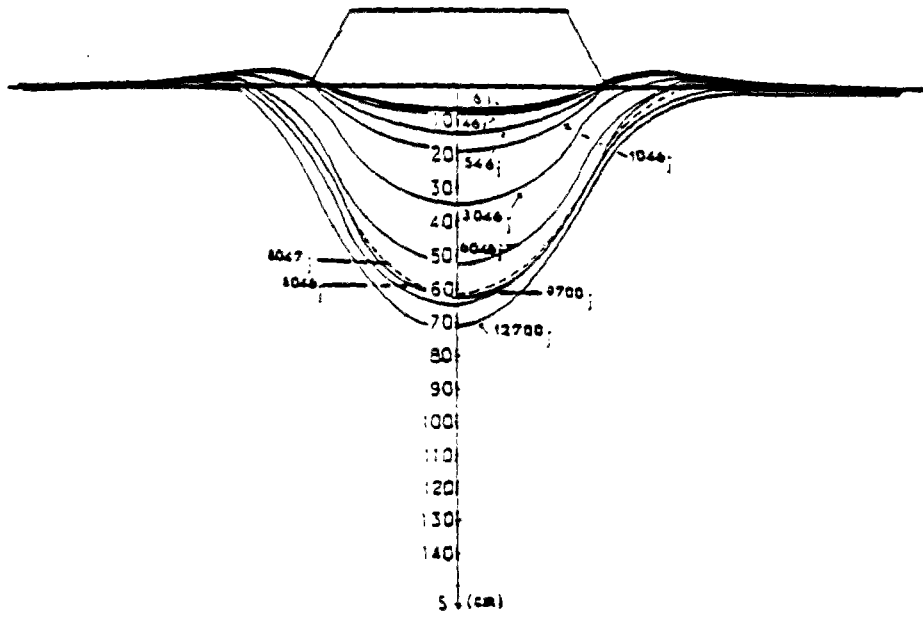
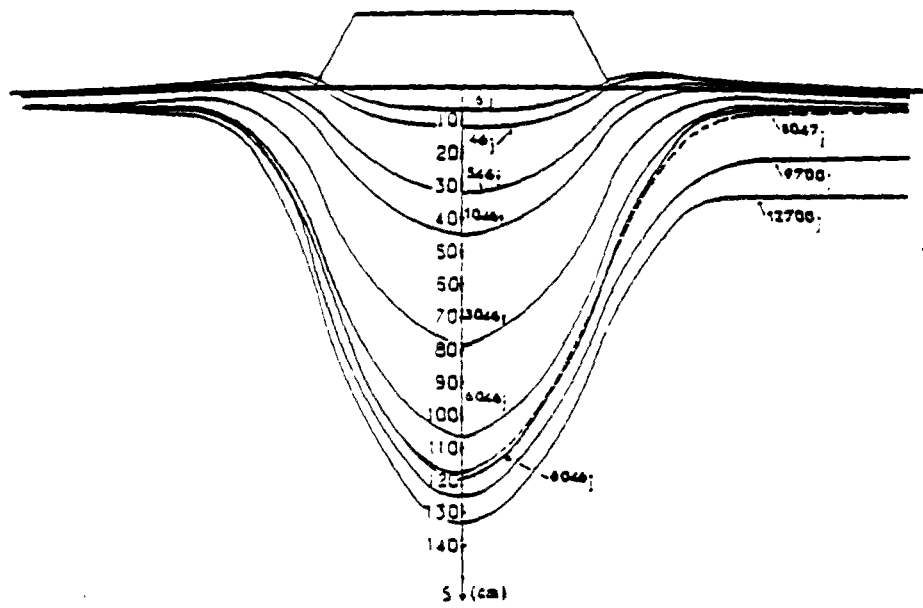


Fig. 1.8 Barrage A - Substratum perméable -
Tassements de la surface du sol -
Mise en eau à $t = 7$ j., M et N perméables.

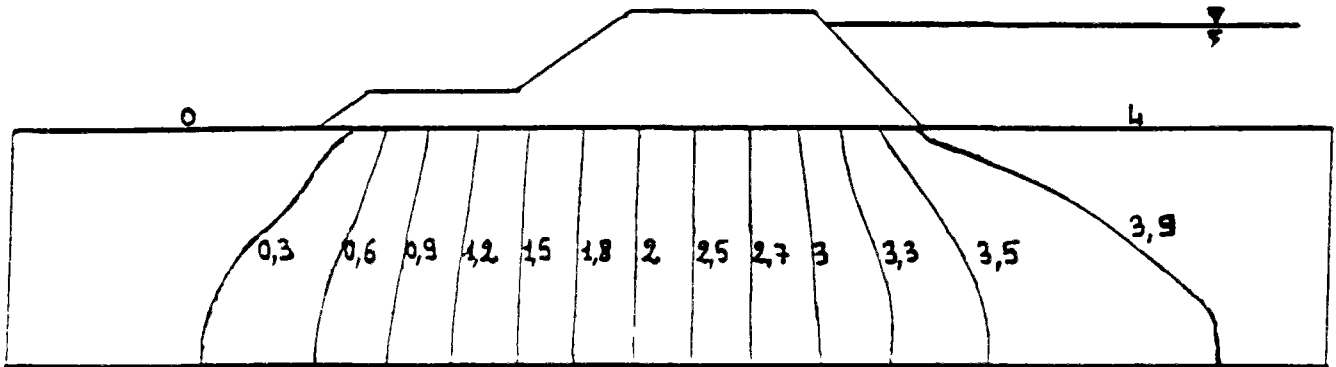


a- Substratum imperméable

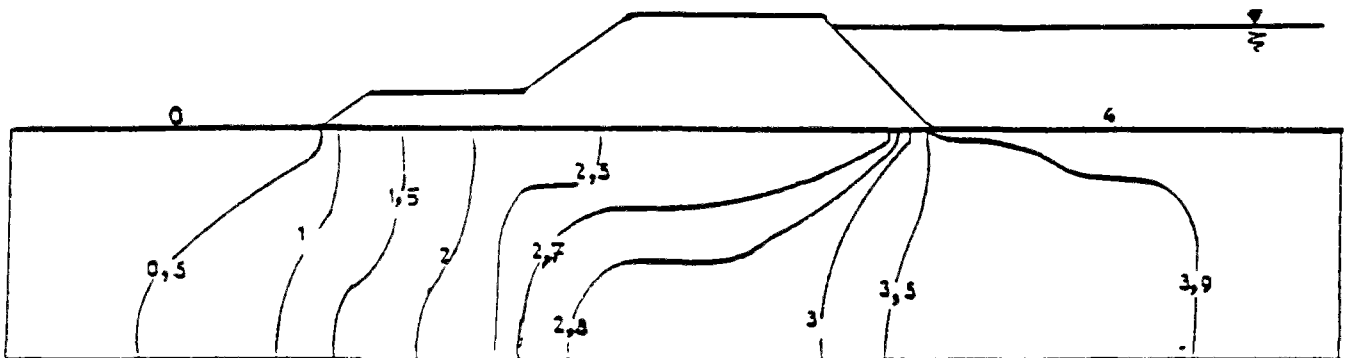


b- Substratum perméable

Fig. 1.9 Evolution des tassements sous une digue avant et après la mise en eau, réalisée à $t=8047$ jours (Babchia et Magnan, 1984)

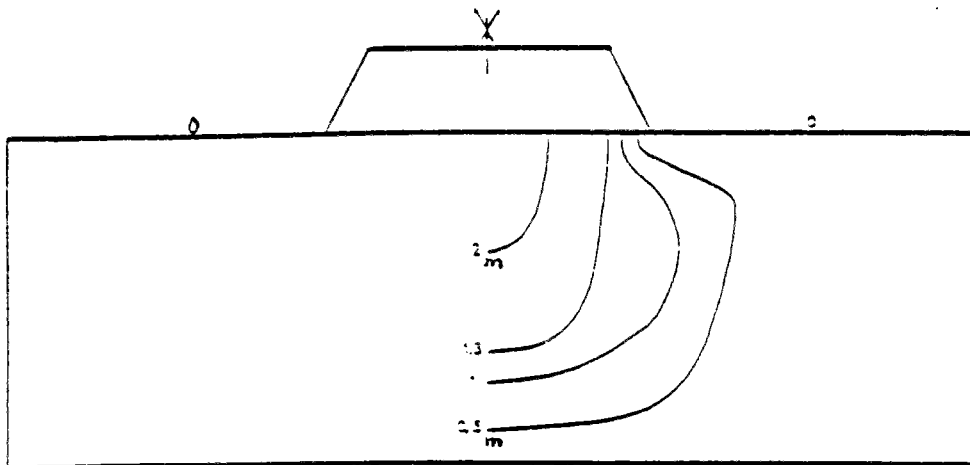


a- Ecoulement permanent (calcul direct)

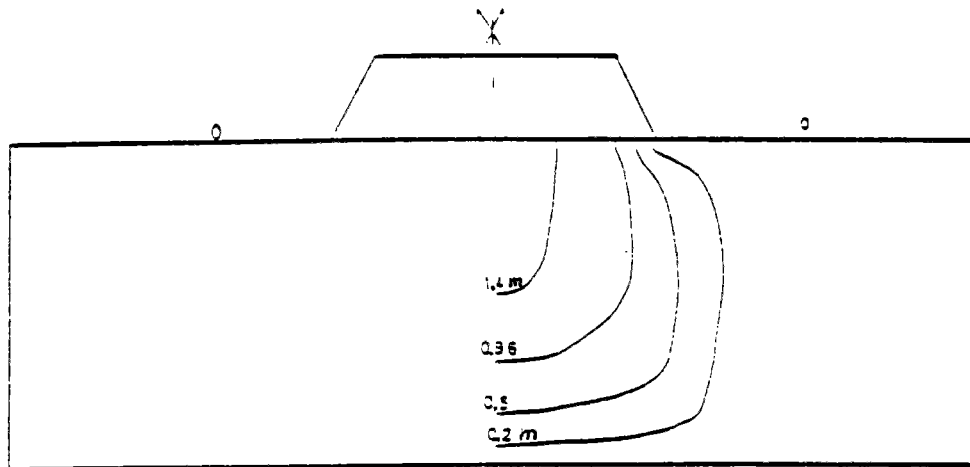


b- Ecoulement transitoire (calcul par Rosalie-
Groupe 9)

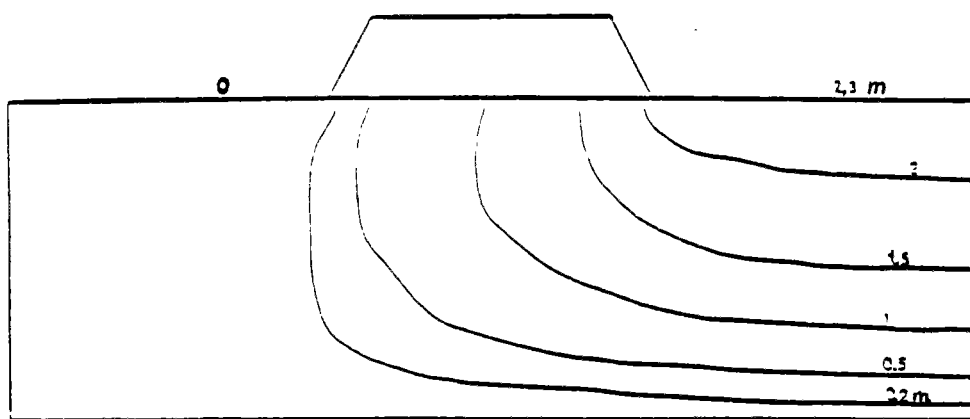
Fig. 1.10 Comparaison des écoulements sous une digue
après la mise en eau (b) et en fin de
consolidation (a) (Babchia et Magnan, 1984)
Le substratum et la base de la digue sont
supposés imperméables



a- $t=6046$ jours



b- $t=8046$ jours



c- $t=12700$ jours

Fig. 1.11 Distribution des charges hydrauliques sous une digue (mise en eau à $t=8047$ j) (Babchia et Magnan, 1984)

1.1.3. Effets de la non-saturation

Jusqu'ici nous n'avons parlé que du comportement des sols mous saturés et de la modélisation numérique de la consolidation en milieu saturé. Il est important d'évoquer à présent les effets de la non-saturation sur le comportement mécanique des sols compressibles car ils peuvent exercer une influence importante sur la pérennité des ouvrages en terre tels que remblais compactés ou barrages, et leur prise en compte constitue un des objectifs de ce travail.

Les effets de la saturation incomplète sur le comportement des sols fins sont encore mal maîtrisés, surtout lorsque ces sols sont supposés déformables. Mais il semble que les variations du degré de saturation et le développement de suctions au sein d'une structure argileuse peuvent être responsables d'un certain nombre de désordres majeurs tels que gonflement ou fissuration.

Les problèmes liés aux écoulements dans les sols non-saturés ont fait l'objet de nombreux travaux de recherches sur lesquels nous reviendrons plus loin. Par contre, la complexité de l'aspect mécanique du problème de consolidation et la faible quantité des résultats expérimentaux existants ne permettent toujours pas une avancée décisive dans ce domaine.

Rappelons simplement quelques tentatives de modélisation du comportement mécanique des milieux poreux non-saturés déformables.

Bishop et Blight (1963) introduisent la contrainte effective dans les sols non-saturés par extension du principe de Terzaghi pour les sols non-saturés : ils estiment la contrainte effective égale à la contrainte totale diminuée de la pression interstitielle pondérée par un coefficient compris entre zéro (sol sec) et l'unité (sol complètement saturé), appelé coefficient de Bishop.

Cette modélisation a été l'objet de quelques critiques, formulées, entre autres, par **Jennings** et **Burland** (1962), **Coleman** (1962), **Matyas** et **Radhakrishna** (1968), **Fredlund** et **Morgenstern** (1977), en particulier pour ce qui concerne la non unicité du coefficient de Bishop pour un sol donné et l'isotropie imposée au tenseur des pressions.

Ces critiques, appuyées sur des expériences sur des sols non-saturés ou compactés soumis à des essais classiques, ont amené les précurseurs du concept des contraintes effectives à modifier sous une forme plus générale, la relation de dépendance entre le tenseur des contraintes totales et le tenseur des pressions interstitielles (**Bishop et Blight**, 1963).

Mais les recherches se dirigent plutôt vers des approches en variables indépendantes abordant le sol non-saturé comme un milieu poreux triphasique.

Des travaux effectués dans cette direction ont en effet apporté quelques éclaircissements sur le couplage mécanique-hydraulique, en particulier une explication des phénomènes d'effondrement et de gonflement des argiles non-saturées (Jennings et Burland, 1962 ; Yoshimi et Osterberg, 1963 ; Matyas et Radhakrishna, 1968 ; Barden et al., 1969 ; Fredlund et Hasan, 1979).

Ces approches théoriques reposent essentiellement sur les considérations suivantes :

- la loi de Darcy pour les transferts d'eau et d'air,
- la loi de Henry pour la dissolution de l'air dans l'eau,
- l'équation de continuité appliquée à l'eau et à l'air.

Mais il reste une divergence sensible entre les auteurs pour ce qui est de la prise en compte des variations de la porosité du sol au cours de la consolidation. Or, il s'agit là de l'un des points essentiels de la modélisation du comportement mécanique des sols non-saturés et déformables. D'autres interrogations subsistent aussi en ce qui concerne, par exemple, la continuité ou non de la phase gazeuse et les variations, pour un sol non-saturé, des perméabilités à l'eau et à l'air.

La plupart des auteurs ayant abordé l'approche triphasique proposent des modèles théoriques en fonction de plages de degrés de saturation du sol et ne traitent très souvent que des problèmes de consolidation unidimensionnelle.

Des modèles plus élaborés sont actuellement à l'étude dans le cadre d'une recherche franco-espagnole sur les sols non-saturés (Alonso et Lloret ; travaux du CERMES-ENPC). L'étude du traitement numérique par éléments finis de la consolidation des sols non-saturés fait partie des travaux en cours au CERMES (Centre de Recherche en Mécanique des Sols de l'E.N.P.C.).

Il ressort de ce bref survol que bien des domaines du comportement des sols fins non-saturés restent en suspens et que le traitement numérique du couplage mécanique-hydraulique est, à l'heure actuelle, assez mal connu .

1.2. Hydraulique des milieux poreux saturés et non-saturés indéformables

1.2.1. Bases phénoménologiques en hydraulique des sols saturés et non-saturés

On admet dans la suite que la phénoménologie des écoulements dans les sols rigides et saturés est correctement décrite par la loi de Darcy usuelle et la continuité de la phase liquide, unique phase à considérer en général dans la description de ces écoulements. On rappelle ici quelques aspects phénoménologiques en hydraulique des sols non-saturés indéformables, nécessaires pour la suite de ce travail.

La dynamique des écoulements dans les sols non-saturés fait intervenir des phénomènes physiques complexes liés à la nature polyphasique de ce milieu poreux. L'eau contenue dans un sol est caractérisée, d'une part, par le volume (**teneur en eau**) qu'elle occupe dans les vides du sol (**porosité**) et, d'autre part, par son état énergétique (**potentiel de l'eau du sol**). L'eau interstitielle peut circuler presque librement dans les pores de grandes dimensions ou au contraire être retenue dans les pores les plus fins où les forces de **tension superficielle** peuvent constituer un facteur déterminant dans l'hydrodynamique du sol.

a) **Tension superficielle, succion et courbe de rétention**

L'équilibre de l'eau dans le sol est sous la dépendance de plusieurs facteurs, dont la porosité qu'on vient d'évoquer, la pesanteur, les sels dissous et la pression de la phase gazeuse. Chacun de ces facteurs contribue à l'énergie potentielle de l'eau interstitielle, somme des potentiels matriciel, gravitaire, osmotique et de pression gazeuse.

Le potentiel de pression gazeuse joue un rôle important dans les changements de phase entre l'eau et l'air. Le potentiel osmotique, pour sa part, concerne principalement le domaine de la pédologie des sols. Par contre, en géotechnique, la connaissance du potentiel matriciel est un point capital dans l'étude des sols non-saturés.

Lorsque le sol est rigide, le potentiel matriciel est constitué par la somme de deux potentiels : **le potentiel capillaire** dû à la tension superficielle et **le potentiel**

d'absorption dû, comme son nom l'indique, à l'absorption par l'eau sur les particules solides. Il semble cependant que ce dernier existe seulement dans le cas des sols fins non-saturés comme les argiles où les propriétés électrochimiques existant entre les liaisons hydrogène et oxygène jouent un rôle important dans les mécanismes d'attraction. Par contre, les sols grenus non-saturés comme les sables sont essentiellement soumis à l'**attraction capillaire**. Celle-ci représente une action mécanique de la phase solide sur la phase liquide par l'intermédiaire de la **tension superficielle**.

On attribue la présence de forces intermoléculaires à l'existence de la tension superficielle dans les liquides. Pour définir la tension superficielle, imaginons que l'on pratique une coupure fictive dans une surface ; les deux bords de cette coupure vont tendre à s'écarter et pour les maintenir en place, il faut exercer une force normale à la coupure. La tension superficielle est la force par unité de longueur, parallèle à la surface, nécessaire à maintenir la cohésion de cette surface.

Ainsi, si la coupure a une longueur dl , la force à exercer normalement à la coupure s'écrit :

$$dF = \sigma dl \text{ où } \sigma \text{ représente la tension superficielle.}$$

Une illustration simple de la tension superficielle est le raccordement d'un ménisque air-eau dans un tube capillaire (fig. 1.12).

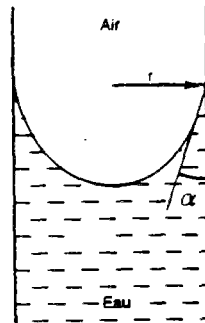


Fig. 1.12 Ménisque dans un tube capillaire

La surface du fluide se déforme au contact de la paroi, tendant à la "mouiller". Une pellicule d'eau se raccorde tangentielllement, pour une mouillabilité parfaite, à la paroi

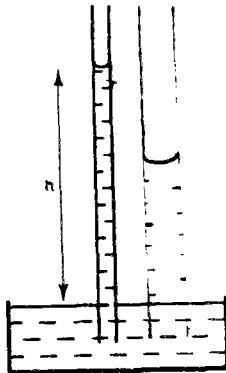
du verre et le ménisque prend une forme concave. Dans le cas d'un capillaire cylindrique de rayon r , la différence des pressions (**saut de pression**) de l'eau et de l'air est donnée par la loi de **Laplace** :

$$u_a - u_w = 2\sigma \cos \alpha / r, \quad (1.6)$$

avec :

- u_a - pression de l'air,
- u_w - pression de l'eau,
- σ - tension superficielle,
- α - angle de raccordement,
- r - rayon du tube capillaire.

Une conséquence directe de l'existence de la tension superficielle est la remontée capillaire : si l'on plonge plusieurs tubes capillaires dans une nappe d'eau à surface libre, il se produit une ascension spontanée de l'eau dans chaque tube (fig. 1.13) dont l'importance est variable suivant le rayon du capillaire. La hauteur assurant l'équilibre hydrostatique de la colonne d'eau dans un capillaire cylindrique est donnée par la loi de **Jurin**.



$$h = 2\sigma / r\gamma_w \quad (1.7)$$

avec :

- h - hauteur de la colonne,
- σ - tension superficielle,
- r - rayon du tube,
- γ_w - poids volumique de l'eau.

Fig. 1.13 Remontée capillaire. Loi de Jurin

Ce sont ces lois physiques qui gouvernent aussi l'interaction entre les phases aqueuse et gazeuse dans un milieu poreux, comme le sol, où les phénomènes physiques

précédemment évoqués s'étendent aux structures intra-granulaires (fig. 1.14). A la différence du capillaire où la teneur en eau ne peut prendre que des valeurs discrètes (0 ou 1), dans un sol non-saturé (infinité de ménisques capillaires) la teneur en eau peut varier de façon continue entre la valeur à saturation (inférieure à la porosité) et zéro (sol totalement desséché). On notera que, comme le volume d'eau aspiré par l'attraction capillaire dépend du rayon du tube capillaire, la dimension du pore (rayon caractéristique) sera importante dans l'interaction de la phase solide sur la phase liquide.

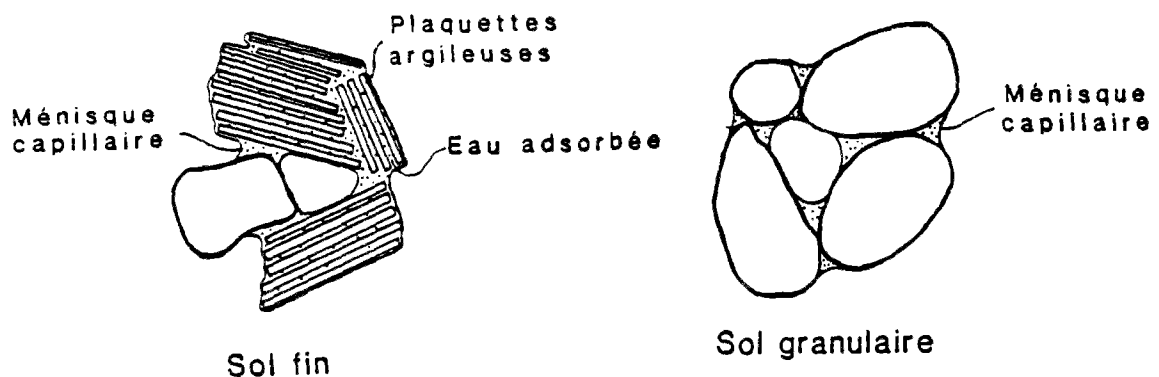


Fig. 1.14 Ménisque capillaire dans les sols.
(P. Delage, Cours du DEA-MAC, CERMES-ENPC)

On peut remarquer, à partir de la relation (1.6), que la pression de l'eau est inférieure à la pression de l'air. Autrement dit, si l'on prend cette dernière comme origine des pressions, la pression de l'eau est alors négative et est appelée **en valeur absolue "suction"**.

Dans les sols non-saturés la variation du degré de saturation entraîne une variation de la suction. On appelle courbe de rétention la courbe suction-teneur en eau. D'une façon générale, la suction augmente lorsque la teneur en eau

diminue. La courbe de rétention dépend du sol étudié et plus particulièrement de sa texture. On l'appelle parfois **caractéristique hydrique du sol**. Ainsi, la figure 1.15 montre, pour divers sols, que les variations de succion sont plus importantes pour une argile que pour un limon ou un sable (Kassif et al., 1979), ce qui est prévisible physiquement, eu égard à la dimension des pores (rayon de courbure faible du ménisque eau-air) et du mécanisme d'absorption que possède l'argile. On notera en particulier que les succions dans l'argile peuvent dépasser la valeur de la pression atmosphérique (100 kPa) (ces valeurs peuvent être obtenues par des dispositifs appropriés où l'on impose des pressions d'air suffisamment fortes).

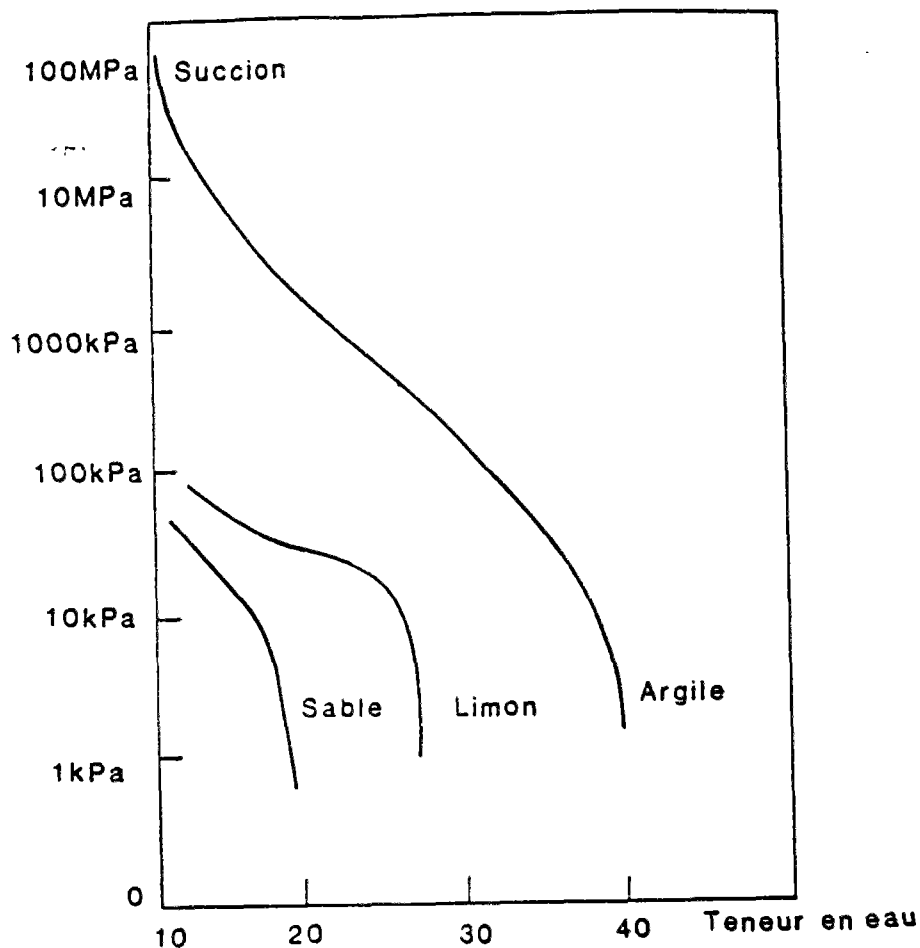


Fig. 1.15 Courbes de rétention d'eau de divers types de sols (Kassif et al., 1979)

On peut rappeler, à ce niveau, que le compactage des sols a une influence sur la caractéristique hydrique (Luc, 1978) puisqu'il modifie justement les dimensions des pores. La rétention capillaire peut être plus forte dans ce cas (fig. 1.16).

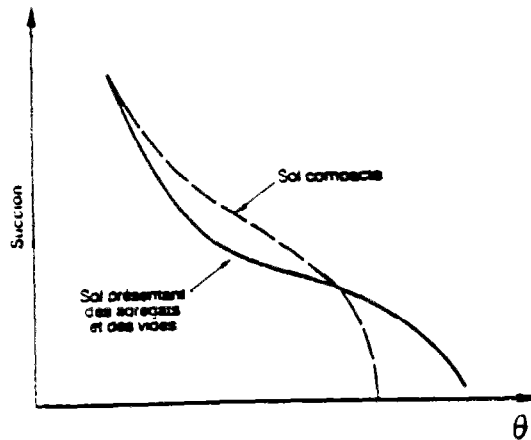


Fig. 1.16 Influence du compactage sur la courbe de rétention

Lorsque la courbe de rétention varie de manière monotone en fonction de la teneur en eau, on peut déterminer la capacité capillaire du sol, définie comme la dérivée droite de la teneur en eau par rapport à la suction. Sur le plan physique, la capacité capillaire rend compte de l'aptitude du milieu poreux à libérer ou emmagasiner de l'eau sous l'effet d'une variation de suction. On peut aussi définir un tenseur de diffusivité capillaire du sol, produit de la dérivée droite de la suction par rapport à la teneur en eau et du tenseur des perméabilités.

On comprend donc que la connaissance des courbes de rétention est un problème capital en hydraulique des sols. Leur détermination n'est pas toujours facile et se heurte particulièrement, sur le plan expérimental, à la difficulté de la mesure de suction. Aussi procède-t-on très souvent en imposant la valeur de cette dernière et en mesurant la teneur en eau qui en résulte. Une des expériences usuelles consiste, par exemple, à imposer une suction ($u_a - u_w$) connue à un échantillon en lui appliquant une pression d'air u_a positive et en gardant la pression d'eau égale à la pression atmosphérique ($u_w = 0$). Lorsque l'équilibre sous cette pression imposée est atteint, on pèse l'échantillon pour déterminer la teneur en eau. L'appareil adapté à cette expérience est l'appareil de **Richards** (fig 1.17).

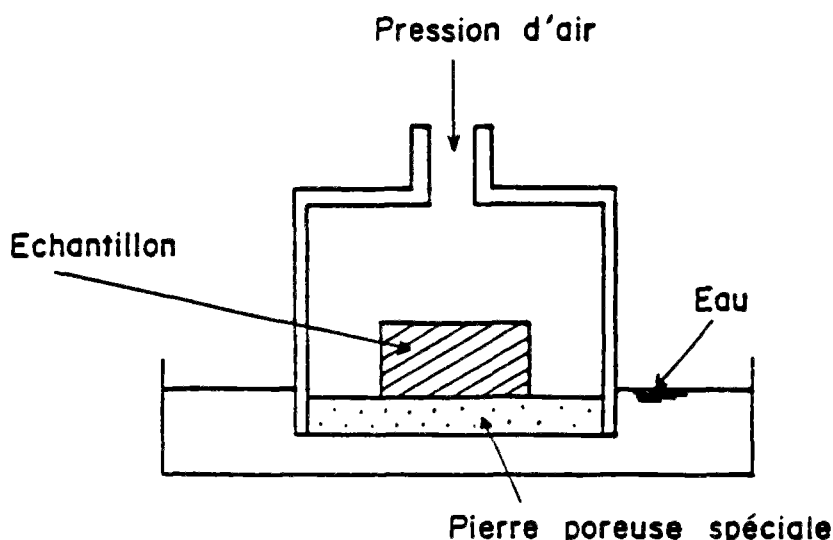


Fig. 1.17 Appareil de Richards. Détermination expérimentale des courbes de rétention

Certains dispositifs expérimentaux permettent cependant la mesure de la succion. On peut utiliser pour cela la tensiométrie basée sur la relation (1.6) ou la psychrométrie basée, quant à elle, sur la **relation de Kelvin** liant la tension de vapeur d'eau de la phase gazeuse P au voisinage de l'interface eau-air et la succion (P. Delage, Cours du DEA-MAC, CERMES-ENPC) :

$$u_a - u_w = RT/gM \ln P/P_0. \quad (1.8)$$

avec :

- P_0 - tension de vapeur d'eau pure à l'air libre,
- M - masse molaire de l'eau,
- R - constante des gaz parfaits,
- T - température absolue.

Mais l'expérience, en hydrodynamique des sols non-saturés, met en évidence une limite à la notion de caractéristique hydrique (courbe de rétention). En effet, la succion ne varie pas, en général, de manière univoque en fonction de la teneur en eau, ce qui pose un problème de non-unicité, pour un même sol, de la courbe de rétention, lié à la présence d'un **phénomène hystérétique**. Ce comportement hystérétique complexe des sols non-saturés fait que la **caractéristique hydrique**, pour un même sol donné, ne se reproduit pas exactement lors

des humidifications et dessèchements successifs. C'est pourquoi on parle de "caractéristiques hydriques", enveloppes de toutes les humidifications et dessiccations partielles (fig. 1.18).

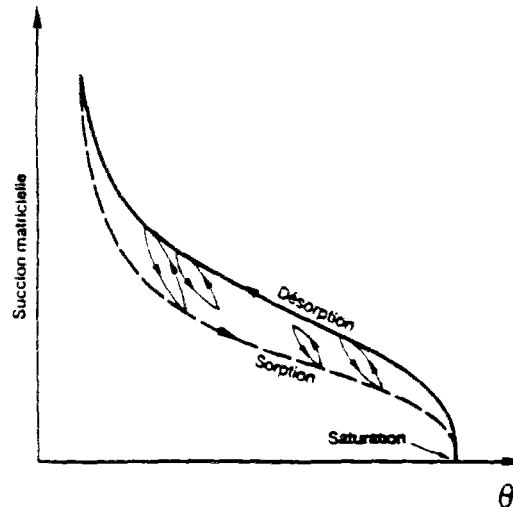


Fig. 1.18 Hystérésis dans les sols non-saturés

L'enveloppe de dessiccation se trouve au-dessus de l'enveloppe d'humidification. Le sol est ainsi plus humide à la dessiccation qu'à l'humidification pour une même valeur de la succion. Il en résulte que **le sol présente un comportement hydraulique dépendant du chemin de teneur en eau parcouru.** Ce comportement non-univoque, qui fait intervenir à priori toute l'histoire "hydrique" subie par le sol, complique singulièrement la description des écoulements non-saturés.

Les causes du phénomène d'hystérésis sont encore mal élucidées. On cite fréquemment les deux suivantes :

- l'hétérogénéité du diamètre des pores d'un même sol. Celle-ci fait qu'au remplissage l'avancée de l'eau est temporairement bloquée au niveau des diamètres les plus grands par une succion insuffisante. A la vidange, l'écoulement est aussi temporairement bloqué au niveau des étranglements où la force de succion est plus forte. Ce phénomène est appelé parfois "effet goulot" (fig 1.19) ;

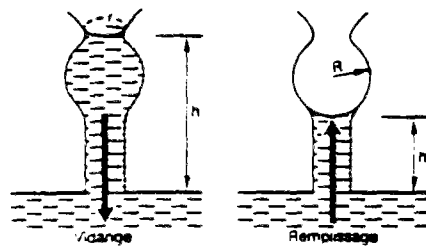


Fig. 1.19 "Effet goulot". Remplissage et vidange des pores

- la variation de l'angle de raccordement des ménisques dans les capillaires. A l'absorption, les capillaires n'étant pas humidifiés, l'angle de raccordement du ménisque n'est pas nul. La force de succion pour un capillaire est donc plus grande à la vidange qu'à l'absorption, puisque à la vidange l'angle du raccordement est nul et son cosinus est maximal [relation (1.6)]. Dans la suite de ce travail, on négligera ces phénomènes d'hystérésis pour ne pas introduire des difficultés supplémentaires.

On a vu, jusqu' à présent, les principaux phénomènes que l'on rencontre dans l'action de la phase solide sur la phase liquide du milieu poreux non-saturé. Voyons maintenant quelles lois gouvernent l'infiltration de l'écoulement non-saturé.

b) Loi de Darcy généralisée

On vérifie expérimentalement que les écoulements à petits nombres de Reynolds (ce qui restera toujours notre cas) s'établissant dans les sols non-saturés obéissent à la loi de Darcy généralisée. Celle-ci relie la vitesse de filtration \vec{v} au gradient de charge hydraulique par l'intermédiaire du tenseur des perméabilités, fonction de la teneur en eau, sous la forme :

$$\vec{v} = -\underline{k}(\theta) \overline{\text{grad } h} \quad (1.9)$$

L'expérience montre que le tenseur des perméabilités non-saturées et celui des perméabilités à saturation restent homothétiques. Le rapport d'homothétie, $k_r(\theta)$, s'appelle perméabilité relative et est compris entre 0 et 1.

Il découle de ce qui précède la relation :

$$\underline{k}(\theta) = k_r(\theta) \underline{k}_{\text{sat}} \quad (1.10)$$

La perméabilité relative k_r dépend, là encore, du type de sol et particulièrement de sa texture. On présente la perméabilité de manière classique en fonction de la teneur en eau ou en fonction de la succion (fig 1.20). Néanmoins, on notera que sa variation en fonction de la teneur en eau présente en général peu d'hystérésis, alors que sa représentation en fonction de la succion fait réapparaître l'hystérésis déjà évoquée entre la teneur en eau et la succion.

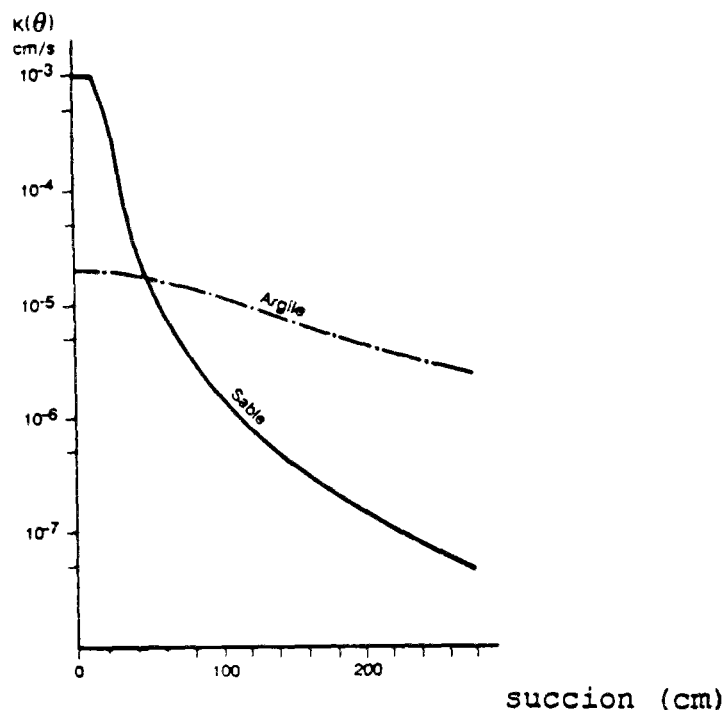


Fig. 1.20 Perméabilité dans les sols non-saturés

On voit (fig. 1.20) que la perméabilité d'un sable, comparée à celle d'une argile, est plus forte aux faibles suctions et bien moins élevée aux fortes suctions.

La connaissance de cette seconde courbe, perméabilité relative-teneur en eau, est un point important dans la description des écoulements en milieu poreux non-saturé. Plusieurs méthodes expérimentales permettent sa détermination. On peut citer, par exemple, celle qui utilise l'appareil de Richards, consistant à calculer au cours du temps les variations des quantités d'eau sortant de cet appareil lors

d'une augmentation de la pression d'air (Gardner, 1956), ou encore celle du profil instantané, qui consiste à imposer un drainage ou un remouillage à l'une des extrémités d'une colonne verticale de sol en mesurant par tensiométrie ou psychrométrie les variations de la succion et de la teneur en eau en fonction du temps en plusieurs points de la colonne (Vachaud et al., 1974).

Pour une description phénoménologique plus complète des transferts de fluides dans les milieux poreux non-saturés, on peut évoquer le comportement de la phase gazeuse. Celle-ci pose en effet un problème dont l'importance est variable suivant le cas considéré : la continuité de la phase gazeuse. Pour des problèmes où le sol est partiellement saturé, l'existence d'air occlus dans l'eau peut rendre celle-ci sensiblement compressible. Lorsque le sol est en forte désaturation, la perméabilité à l'air peut avoir une importance dans les transferts d'eau. L'air continu, mais sous pression, peut s'opposer aux mouvements d'eau. La figure 1.21 présente une comparaison des perméabilités à l'eau et à l'air pour un même sol. Il est à rappeler cependant que l'extension de la loi de Darcy à l'écoulement de la phase gazeuse reste physiquement hypothétique.

En fait, la phase gazeuse, du moins pour les applications pratiques, est souvent considérée comme une phase continue soumise à la pression atmosphérique, donc d'influence négligeable sur l'écoulement de l'eau.

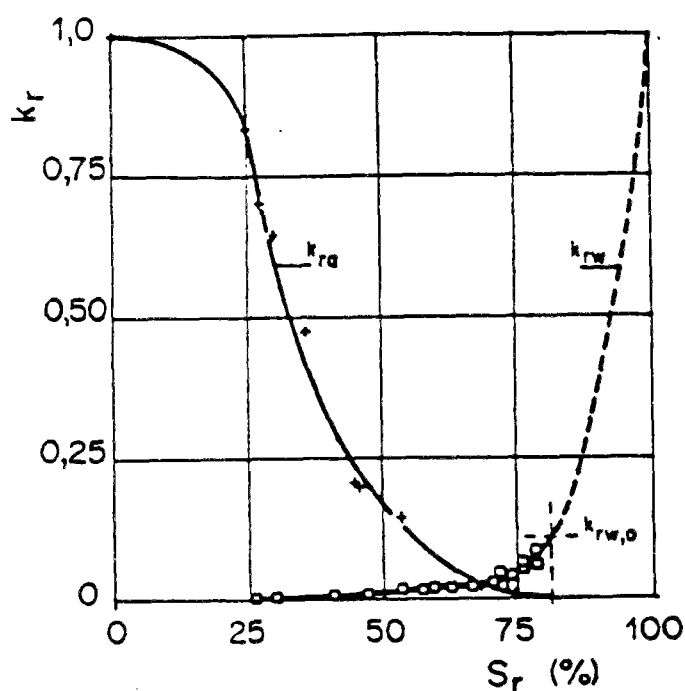


Fig. 1.21 Perméabilités relatives d'un sol non-saturé

1.2.2. Modélisations usuelles des écoulements en milieu poreux saturés et non-saturés

Dans la description des écoulements en milieux poreux, on peut distinguer trois catégories d'écoulements :

- les écoulements en milieu poreux saturé,
- les écoulements en milieu poreux non-saturé,
- les écoulements en milieu poreux saturé et non-saturé.

Ce dernier cas d'écoulements comportant à la fois une zone saturée et une autre non-saturée est le type d'écoulements qui intéresse principalement les applications géotechniques qu'on envisage dans cette étude. Nous l'appellerons dans la suite écoulements non-saturés en présence de surface libre ou plus simplement, écoulements à surface libre. Avant de revenir plus largement sur ce problème de surface libre, on présente les bases théoriques sur lesquelles reposent essentiellement les deux premiers cas d'écoulements.

1.2.2.1. Ecoulements en milieu poreux saturé

La description usuelle des écoulements en milieu poreux saturé repose essentiellement sur l'équation de conservation de la masse d'eau (équation de continuité pour un fluide incompressible).

La conservation de la masse permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho n) + \text{div} (\rho \vec{v}) = q, \quad (1.11)$$

avec :

- ρ - masse volumique du fluide,
- n - porosité du milieu,
- \vec{v} - vitesse de filtration du fluide,
- q - source volumique.

La loi de Darcy relie la vitesse de filtration du fluide au gradient de charge hydraulique et au tenseur de perméabilité à saturation sous la forme :

$$\vec{v} = - k_{sat} \vec{\text{grad}} h. \quad (1.12)$$

En l'absence de source volumique et en dehors de toute hypothèse de compressibilité du fluide et des grains solides (hypothèses d'usage en génie civil), l'écoulement en milieu poreux saturé est conservatif et vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\text{div} (k_{sat} \vec{\text{grad}} h) = 0, \quad (1.13)$$

où k_{sat} est le tenseur des perméabilités à saturation et h la charge hydraulique.

La résolution de cette équation elliptique nécessite la donnée des conditions aux limites usuelles : flux ou charge imposés. Elle se simplifie pour un milieu isotrope et devient une équation de Laplace. Par conséquent, ces **écoulements** ne posent pas de problèmes particuliers et sont **linéaires** pour l'essentiel. Rappelons, pour terminer, que la présence de sources volumiques transforme l'équation précédente en une équation de Poisson et que l'introduction de la compressibilité du fluide la transforme en une équation de la chaleur en régime transitoire (dans ce cas, on ajoute une condition initiale en charge, en plus des conditions aux limites).

1.2.2.2. Ecoulement en milieu poreux non-saturé

Il existe différentes descriptions des écoulements en milieux poreux non-saturés. La modélisation de ces derniers se fonde généralement sur des approches polyphasique ou monophasique.

a) Approche polyphasique

Plusieurs modèles d'écoulement en milieu poreux non-saturé, basés sur des approches polyphasiques, existent à l'heure actuelle. On peut citer essentiellement ceux qui considèrent, en plus de la phase solide, le milieu poreux triphasique (air, vapeur d'eau et eau liquide) ou biphasique (air et eau). L'approche biphasique suppose en général une évolution isotherme des constituants (**Morel et Seytoux, 1973 ; Touma et Vauclin, 1986**) alors que l'approche triphasique traite, par exemple, du changement de phase entre la vapeur d'eau et l'eau liquide (**Fremont et Nicolas, 1987-1990**).

Les modèles triphasiques reposent très souvent sur la thermomécanique des milieux continus. On peut mentionner à ce propos les travaux de **Fremond et Nicolas** (1990) basés sur une description macroscopique de **l'évolution de la température et des teneurs en air, vapeur d'eau et eau liquide**.

L'idée principale consiste à décrire l'action du milieu poreux sur la phase liquide par une **énergie libre dépendant de la teneur en eau** et par une **dissipation portant sur la vitesse de changement de phase liquide-vapeur**. On suppose, en plus, que l'eau est incompressible et que l'air et la vapeur sont des gaz parfaits. On écrit d'abord :

- la conservation de la masse d'air,
- la conservation de la masse d'eau,
- la conservation d'énergie.

Ensuite, le choix des énergies libres et une hypothèse de dissipation liée à la vitesse de changement de phase, permet, grâce au second principe de la thermodynamique, d'obtenir les lois de comportement des constituants (il en ressort notamment une possibilité d'interprétation simple de la succion et de l'hystérésis affectant le milieu poreux).

Enfin, le modèle retient les lois de comportement suivantes :

- loi de Fourier en ce qui concerne l'évolution de la température (supposée identique pour toutes les phases),
- loi de Darcy pour les phases liquide et gazeuse,
- loi de Fick pour l'écoulement de l'air et de la vapeur dans la phase gazeuse.

L'ensemble des lois de comportement et des lois de conservation permet d'établir **un système de 4 équations aux dérivées partielles décrivant l'évolution d'un milieu poreux humide à travers 4 inconnues : la température, les teneurs en air, en vapeur d'eau et en eau liquide**.

Cependant, les approches polyphasiques, outre les hypothèses simplificatrices qu'elles exigent telles que, par exemple, la loi de Darcy pour les gaz, semblent plus appropriées aux écoulements en milieu poreux en forte

désaturation ou très sec et où les problèmes thermiques sont loin d'être négligeables (séchage ou humidification évolutifs liés à une source thermique par exemple). Les effets dynamiques entre l'air et l'eau (changement de phase) se rencontrent dans des matériaux poreux tels que le béton ou le ciment en cours de séchage.

Mais il semble que ces approches, quoique générales, ne connaissent pas de développements considérables en hydraulique des sols. Aussi ne s'en sert-on pas en général pour décrire l'évolution du front de saturation dans les applications géotechniques tels que barrages et remblais, sujet de notre étude. L'approche monophasique permet de ramener, moyennant des hypothèses usuelles, la description hydrodynamique du milieu poreux à l'évolution d'une seule inconnue : la charge hydraulique ou la teneur en eau.

b) Approche monophasique - L'équation de Richards

L'approche monophasique est une représentation très directe de la description phénoménologique des écoulements dans les sols non-saturés (§ 1.2.1). Elle utilise les résultats expérimentaux tels qu'on les établit en hydraulique des sols, comme les courbes de succion et de perméabilité relative en fonction de la teneur en eau [relations (1.9) et (1.10)].

On considère que le milieu poreux est partiellement saturé d'eau supposée généralement incompressible. Les vides de la matrice poreuse sont occupés par deux phases, l'eau et l'air. Si l'on admet que l'air forme une phase continue avec l'atmosphère et se trouve de ce fait dans un état de pression uniforme, on est ramené à étudier l'écoulement d'un seul fluide (l'eau) dans un milieu polyphasique à teneur en eau variable. C'est cette approche que l'on appellera par la suite approche monophasique.

L'approche monophasique repose essentiellement sur deux équations :

- l'équation de conservation de la masse du fluide interstitiel,
- la loi de Darcy généralisée [relations (1.9) et (1.10)].

La première équation permet d'écrire (en l'absence de source volumique) en introduisant la teneur en eau volumique θ dans l'équation (1.11) au lieu de la porosité n :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\theta) + \text{div} (\rho v) = 0. \quad (1.14)$$

Le fluide étant supposé incompressible et le squelette rigide, la combinaison des relations (1.9), (1.10) et (1.14) permet, par substitution, d'obtenir l'équation suivante :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \text{div} \left[\underline{k}_{sat} k_r(p) \overrightarrow{\text{grad}} h \right]. \quad (1.15)$$

Si l'on suppose que le milieu poreux possède des courbes de succion et de perméabilité univoques en fonction de la teneur en eau (absence d'hystérésis) on obtient, en introduisant la capacité capillaire (§ 1.2.1), **l'équation de Richards** (1931) :

$$c(p) \frac{\partial h}{\partial t} = \text{div} \left[k_r(p) \underline{k}_{sat} \overrightarrow{\text{grad}} h \right]. \quad (1.16.a)$$

avec :

- $c(p)$ - capacité capillaire, (L-1)
- $k_r(p)$ - perméabilité relative, (LT-1)
- \underline{k}_{sat} - tenseur des perméabilités à saturation, (LT-1)
- h - charge hydraulique, (L)
- p - pression capillaire ou succion. (L)

La description de l'écoulement en milieu poreux non-saturé se trouve ainsi ramenée à une équation de diffusion non-linéaire de la charge hydraulique.

Il convient de rappeler l'existence d'autres formes d'écriture de l'équation de Richards dont celle en teneur en eau qui repose sur la diffusivité capillaire $D(\theta)$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div} [\underline{D}(\theta) \overrightarrow{\text{grad}} \theta] + \underline{k}_{\text{sat}} \overrightarrow{\text{grad}} k_r \overrightarrow{\text{grad}} z, \quad (1.16 \text{ b})$$

ou encore celle utilisant la variable de Kirchhoff basée sur une définition de potentiel d'écoulement.

1.2.2.3 Ecoulements en milieu poreux non-saturé en présence de surface libre

On appelle *écoulement à surface libre* tout écoulement au sein duquel peut s'établir une surface libre définie comme le lieu des points soumis à la pression atmosphérique.

Lorsque cette surface libre est mobile dans le temps, par suite de la variation brutale ou continue d'une ou de plusieurs conditions régnant sur les limites géométriques du milieu (en l'absence de sources volumiques variables dans le temps), l'écoulement est dit *transitoire*. Dans le cas contraire, l'écoulement est alors *permanent*.

A travers ces définitions, une surface libre peut donc se présenter dans un écoulement non-saturé comme elle peut se présenter dans un écoulement idéalisant ce dernier.

Dans les écoulements non-saturés en présence de surface libre, on tient compte en général des transferts physiques entre les zones saturée et non-saturée ; les grandeurs physiques (perméabilité, teneur en eau, etc.) varient de manière continue ; la surface libre est, par convention, la limite de séparation des zones saturée et non-saturée. Dans ce cas, on lui donne parfois le nom de **surface de saturation**, surface à partir de laquelle les **phénomènes de capillarité** deviennent prépondérants dans la dynamique de l'écoulement non-saturé. Lorsque l'écoulement non-saturé est idéalisé, par exemple par une variation discontinue des grandeurs physiques (perméabilité, teneur en eau, etc.), la surface libre prend alors la signification mathématique d'une **limite géométrique du domaine de l'écoulement**, limite à partir de laquelle on considère qu'il n'existe plus d'écoulement. Ce type de problèmes, comportant une limite géométrique **inconnue**, est classiquement connu des mathématiciens sous le nom de **problèmes à frontière libre ou à surface libre**.

Les écoulements à surface libre sont d'une importance capitale puisqu'ils concernent la quasi-totalité des sciences et techniques de l'eau :

- le génie civil pour les écoulements dans les digues et barrages en terre,
- l'hydrogéologie pour l'estimation et la gestion des ressources en eau des zones aquifères,
- l'hydrologie pour le couplage entre les eaux de surface et les eaux souterraines,
- l'agronomie pour les interactions entre l'eau, la plante et le sol, l'irrigation des terres cultivées et le drainage des sols inondés.

Les écoulements en milieu poreux non-saturé en présence de surface libre ont été et font l'objet de nombreux travaux de recherche en hydraulique des sols. La particularité de ces écoulements est l'évolution du front de saturation entre zones saturée et non-saturée. La prise en compte de l'interaction entre les deux zones de l'écoulement est le point principal de leur modélisation. Différentes approches de ce problème existent à l'heure actuelle. On peut citer à ce sujet principalement deux approches : celle basée sur le **formalisme de Richards**, approche monophasique que l'on a déjà vue pour les écoulements non-saturés et celle fondée sur une idéalisation de la transition entre zones saturée et non-saturée, que l'on appellera dans la suite de ce travail **approche mathématique**.

a) Application de l'équation de Richards à l'écoulement à surface libre

On a déjà vu l'équation régissant les écoulements en milieu poreux saturés [équation (1.13)] et celles décrivant les écoulements non-saturés reposant sur une approche monophasique [équations (1.16. a) et (1.16. b)].

Si on considère le formalisme de Richards avec la **variable "charge hydraulique"**, on constate que l'écoulement en milieu poreux saturé et non-saturé peut être décrit par une unique équation valable dans tout le domaine de l'écoulement aussi bien dans sa zone saturée et dans sa zone non-saturée. En effet, lorsque le milieu étudié comporte une zone saturée, la capacité capillaire est nulle puisque la teneur en eau, dans cette zone, est constante. On retrouve dans ce cas, l'équation régissant les écoulements en milieu poreux saturé [équation (1.13)]. Au-dessus de la surface libre, la zone est non-saturée et l'écoulement de Darcy y est également valable.

Il résulte de ce qui précède que l'équation (1.16. a) permet de représenter l'évolution d'un front de saturation avec un changement de nature mathématique au passage de la surface libre : elliptique dans la zone saturée et parabolique dans la zone non-saturée. On remarque que cette approche tient compte de la continuité des transferts d'eau entre zones saturée et non-saturée, la surface libre étant tout simplement l'équipression nulle. La figure 1.22 présente un écoulement à surface libre décrit à partir de l'équation de Richards. C'est le cas du drainage d'une nappe à surface libre dans un écoulement bidimensionnel où l'eau est supposée incompressible et le milieu poreux homogène et isotrope (Vauclin et al., 1976).

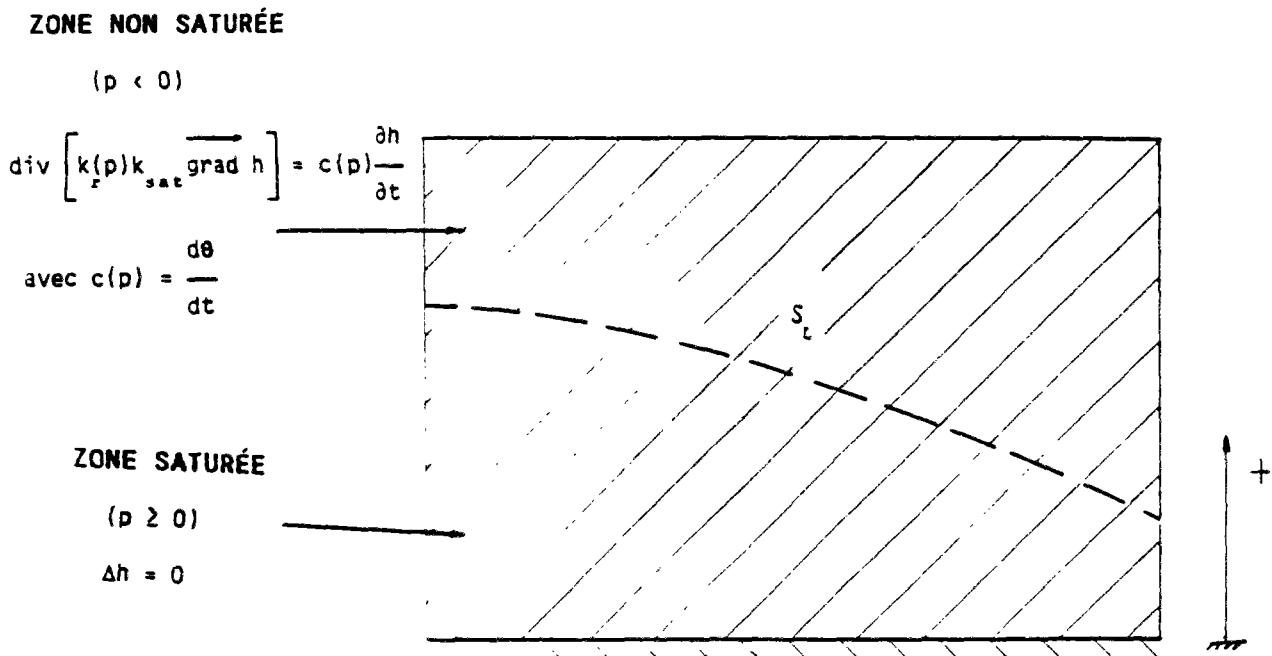


Fig. 1.22 Application de l'équation de Richards à l'écoulement non-saturé en présence de surface libre

Il convient d'observer que le formalisme de Richards, basé sur une écriture en variable "teneur en eau", c'est-à-dire l'équation (1.16. b), ne permet pas de décrire le front de saturation. En effet, au voisinage de ce dernier et dans la zone saturée, la diffusivité capillaire n'est pas définie. C'est pourquoi on retiendra la formulation en variable "charge hydraulique" dans toute la suite de ce mémoire, ce qui permettra, en plus, de traiter d'éventuelles hétérogénéités dans les milieux poreux avec une variable continue, contrairement à une variable comme la teneur en eau.

Il est à préciser que l'équation de Richards est **fortement non-linéaire** compte tenu des variations importantes que subissent la perméabilité et la succion en fonction de la teneur en eau en hydraulique des sols non-saturés (fig. 1.15 et 1.20). Pour cette raison, à part des cas bien précis, unidimensionnels très souvent et à conditions aux limites draconiennes (**Philip, 1957 ; Young, 1960**), rares ont été les solutions analytiques pour des problèmes à surface libre.

D'autres origines de non-linéarités proviennent non pas de la variabilité des paramètres caractéristiques du milieu poreux non-saturé (perméabilité, teneur en eau, compressibilité), mais aussi de la nature des **conditions aux limites inconnues** (surface de suintement) du problème de l'écoulement à surface libre.

Toutes ces non-linéarités, ajoutées à la difficulté parfois d'obtenir des données expérimentales fiables pour la perméabilité relative et la courbe de rétention du sol non-saturé, ont motivé un certain nombre de simplifications débouchant sur une approche mathématique du problème de surface libre.

b) Approche mathématique

Alors que l'approche basée sur l'équation de Richards permet de décrire le front de saturation ou surface libre, à travers la continuité des transferts hydrauliques entre zones saturée et non-saturée, l'approche mathématique limite la description de l'écoulement à la zone saturée en supposant une variation discontinue de certaines grandeurs physiques (**Todd, 1957 ; Bouwer, 1963 ; Dicker et Servian, 1965**).

On suppose que la perméabilité chute brutalement dès que l'on dépasse le front de saturation. On **assimile mathématiquement la perméabilité relative à une fonction d'Heaviside (échelon)**.

Ce faisant, on néglige physiquement l'écoulement dans la **frange capillaire**, ce qui semble se présenter lorsque la **perméabilité relative du sol considéré varie rapidement en fonction de la succion comparativement à l'unité** (perméabilité relative à la saturation).

Il découle de cette approximation que la surface libre est non seulement l'isobare où règne la pression atmosphérique, mais aussi **la limite supérieure du domaine de l'écoulement**. Cette idéalisation de l'écoulement non-saturé comportant une zone saturée est connue des mathématiciens sous le nom de "problème à surface libre" ou "problème à frontière libre".

*** Cas du régime transitoire**

L'approche mathématique de l'écoulement à surface libre transitoire revient à écrire trois équations : une équation régissant l'évolution de la charge hydraulique dans le domaine saturé, une équation définissant la surface libre et une équation décrivant la cinématique du mouvement de la surface libre.

Dans le domaine saturé, l'équation de continuité et la loi de Darcy permettent d'écrire [ce qui revient aussi à particulariser les deux paramètres $c(p) = 0$ et $k_r(p) = 1$ dans l'équation de Richards] :

$$\operatorname{div} (k_{\text{sat}} \overrightarrow{\operatorname{grad} h}) = 0, \text{ soit l'équation (1.13).}$$

Cette équation ne suffit pas pour déterminer la charge hydraulique dans tout le domaine saturé, puisque l'une des frontières du problème à surface libre est une limite inconnue du domaine de l'écoulement. Deux équations supplémentaires sont par conséquent nécessaires. Celles-ci sont données par les propriétés de la surface libre.

Soit $z_L(t)$ la cote de la surface libre. Pour tout point M de la surface libre, on a la relation (la surface libre étant une surface isobarique) :

$$z_M = z_L[x_M(t), y_M(t), t] \quad (1.17)$$

Comme la surface libre est une surface matérielle, on peut alors introduire la dérivée particulaire et écrire :

$$\frac{dz_M}{dt} = \frac{\partial z_L}{\partial t} + \frac{dx_M}{dt} \frac{\partial z_L}{\partial x} + \frac{dy_M}{dt} \frac{\partial z_L}{\partial y} \quad (1.18)$$

Or, dans l'hypothèse d'incompressibilité de l'eau et de rigidité du squelette, la vitesse du fluide est liée à la vitesse cinématique du point courant M de la surface libre par les relations (sans restreindre la généralité, on suppose dans la suite que le milieu poreux est isotrope) :

$$\begin{cases} v_x = -k_{sat} \frac{\partial h}{\partial x} = n \frac{dx_M}{dt} \\ v_y = -k_{sat} \frac{\partial h}{\partial y} = n \frac{dy_M}{dt} \\ v_z = -k_{sat} \frac{\partial h}{\partial z} = n \frac{dz_M}{dt} \end{cases} \quad (1.19)$$

où n est la porosité ou la teneur en eau volumique à saturation et k_{sat} la perméabilité à saturation.

Les équations (1.17), (1.18) et (1.19) permettent d'écrire l'équation dite "équation du mouvement de la surface libre" :

$$n \frac{\partial z_L}{\partial t} = k_{sat} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial z_L}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial z_L}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z} \right]. \quad (1.20)$$

Il convient de rappeler qu'il existe une autre façon d'établir la relation (1.20), basée sur le calcul des volumes d'eau écoulés entre les temps t et $t+dt$, à travers la variation de la cote de la surface libre entre ces deux instants.

L'approche mathématique du problème de surface libre transitoire consiste à résoudre les équations (1.13) et (1.20) complétées par les conditions initiales et aux limites sur les autres frontières fixes du domaine de l'écoulement. On peut remarquer que, dans cette approche, la donnée des deux paramètres : la porosité et le tenseur des perméabilités à saturation, suffit pour décrire complètement l'écoulement à surface libre instationnaire.

La figure 1.23 présente cette description mathématique du problème de surface libre dans un cas classique : écoulement bidimensionnel d'une nappe phréatique à surface libre (l'eau est supposée incompressible et le milieu poreux homogène et isotrope).

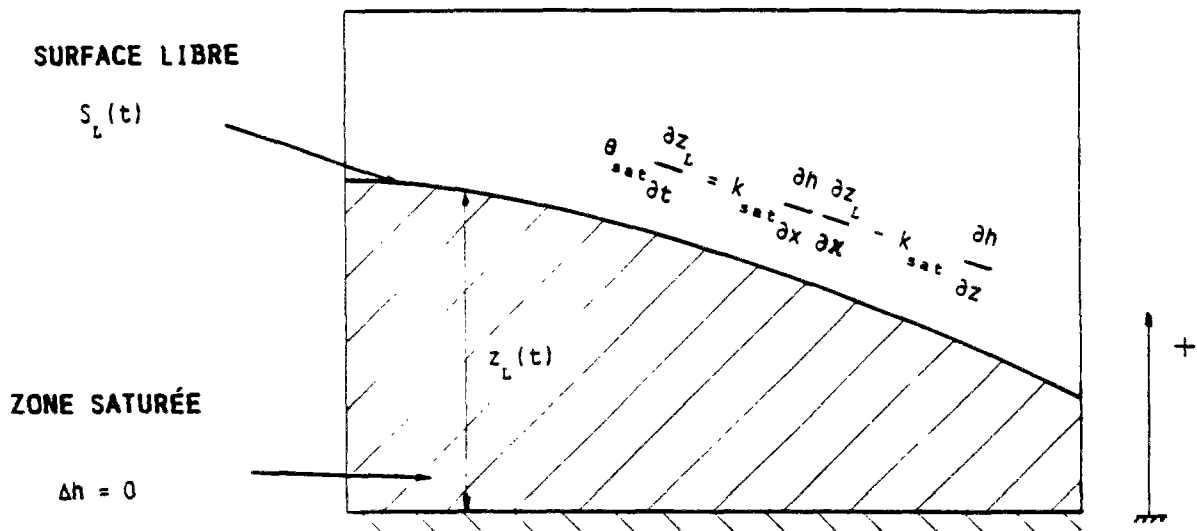


Fig. 1.23 Application de l'approche mathématique à l'écoulement à surface libre

Il est cependant relativement difficile de résoudre par cette approche les problèmes pratiques aussi bien du point de vue analytique que du point de vue numérique : la charge hydraulique dépend des variations de la cote de la surface libre et la cote de celle-ci dépend des gradients de la charge en cette surface.

La recherche de solutions analytiques se heurte à ce couplage de la charge hydraulique et de la cote de la surface libre. Des développements fondés sur la théorie des petites perturbations ont néanmoins rendu possible des solutions analytiques pour des cas précis (Dagan, 1960).

Mais le formalisme mathématique du problème à surface libre [relations (1.13) et (1.20)] a surtout servi de base aux modèles analogiques où l'on peut établir des similitudes entre l'écoulement à surface libre et, par exemple, des modèles rhéoélectriques (cuve rhéoélectrique et papier conducteur) ou l'écoulement visqueux entre deux plaques rapprochées (analogie visqueuse du type Hele-Shaw). Ces similitudes ont été largement appliquées à des cas pratiques de calculs de barrages en terre (Schneebeli, 1987).

Cependant, il est possible, sous certaines hypothèses, de ramener la résolution des équations (1.13) et (1.20) à celle d'une unique équation aux dérivées partielles.

Hypothèse de Dupuit-Forchheimer

On utilise très souvent en hydraulique des sols, et particulièrement en hydrogéologie, l'hypothèse de Dupuit-Forchheimer. Celle-ci suppose **que le long de la verticale, la charge hydraulique est constante** et égale par conséquent à la cote de la surface libre. Cela revient à considérer que l'écoulement est horizontal, donc à négliger la courbure de la surface libre. Cette situation se présente fréquemment dans les écoulements de nappes phréatiques peu profondes ayant un substratum imperméable et sensiblement horizontal.

Il découle de cette hypothèse que la relation $[h(x, y, z, t) = z_L(x, y, t)]$ qui, normalement, n'est valable que sur la surface libre, garde sa validité en tout point de l'écoulement. Il en résulte que la charge hydraulique dans tout le domaine saturé se trouve complètement déterminée par la connaissance à tout instant de la cote de la surface libre. En effet, intégrons entre une position de référence (nulle par exemple) et la cote actuelle de la surface libre z_L , l'équation (1.13). Il vient dans ce cas :

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \int_0^{z_L} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dz = - \int_0^{z_L} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] dz = - z_L \left[\frac{\partial^2 z_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_L}{\partial y^2} \right]. \quad (1.21)$$

Cette équation permet, par substitution dans l'équation (1.20), d'obtenir :

$$n \frac{\partial z_L}{\partial t} = k_{sat} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(z_L \frac{\partial z_L}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(z_L \frac{\partial z_L}{\partial y} \right) \right]. \quad (1.22)$$

L'équation (1.22) n'est plus seulement l'équation du mouvement de la surface libre, mais bien l'équation aux dérivées partielles décrivant la totalité de l'écoulement.

Lorsque l'écoulement est permanent, l'équation (1.22) est appelée "équation du Dupuit". Il est cependant à remarquer que l'équation (1.22), tout comme celle de Dupuit, est non-linéaire. Aussi, pour permettre quelques développements analytiques, on est souvent amené à opérer une linéarisation conduisant à l'équation de **Boussinesq**.

Equation de Boussinesq

Celle-ci provient de la linéarisation de l'équation (1.22) en supposant que les variations spatiales de la cote de la surface libre sont faibles par rapport à une valeur moyenne \bar{z}_L . Dans ce cas, on écrit :

$$z_L = z_1 + \bar{z}_L \quad (1.23)$$

Dans l'exemple de la nappe phréatique évoqué ci-dessus, \bar{z}_L peut représenter l'épaisseur de la nappe.

Les équations (1.23) et (1.22) permettent d'obtenir l'équation dite "de la chaleur" :

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = \zeta \Delta z_1 \quad \text{où} \quad \zeta = k_{sat} \bar{z}_L / n. \quad (1.24)$$

L'équation (1.24) réduite à l'étude des écoulements unidimensionnels en régime transitoire, est connue sous le nom "d'équation de Boussinesq". Celle-ci permet, moyennant des conditions aux limites et initiales écrites par rapport à la surface libre, d'étendre les travaux effectués sur l'équation de la chaleur aux problèmes de surface libre. Mais les développements théoriques les plus importants semblent concerner plus particulièrement l'écoulement à surface libre en régime permanent.

*** Cas du régime permanent**

Lorsque la cote de la surface libre ne varie pas dans le temps, le mouvement de celle-ci est stationnaire et l'écoulement est permanent. Ce problème de surface libre stationnaire est sans doute le plus étudié dans les aspects théoriques d'existence et d'unicité de la solution.

Dans ce cas, la frontière correspondant à l'équipression nulle (surface libre) est encore une frontière à flux nul. Cela veut dire, du fait de la permanence de cette condition, que c'est **une ligne de courant**. Cette double condition de la charge et du flux sur une même frontière ne constitue pas une surdétermination mathématique puisque cette frontière est une inconnue du problème.

Ce problème mathématique fut et demeure l'objet de développements théoriques importants.

Les approches les plus classiques concernent l'utilisation du potentiel complexe et la théorie des transformations conformes, qui s'appliquent aux écoulements plans stationnaires et isotopes. Elle suppose en général une idéalisation de la géométrie (carré, rectangle, trapèze, etc.) au sein de laquelle on écrit l'équation de Laplace. Ces approches ont été appliquées aux écoulements dans les barrages en terre à géométrie simple, où des fonctions complexes ont été mises au point pour approximer la forme et la localisation de la surface libre dans diverses situations (substratum perméable ou non, présence de drain ou non, etc.) (**Muskat**, 1935 ; **Casa-grande**, 1937 ; **Mallet** et **Pacquant**, 1951 ; **Schneebeli**, 1955 ; **Guevel**, 1960 ; **Browzin**, 1964). Le lecteur désireux de plus de détails sur les applications de cette théorie pourra consulter un des ouvrages de base, par exemple "Hydraulique souterraine" (**Schneebeli**, 1987).

D'autres approches mathématiques du problème de surface libre existent à l'heure actuelle. On peut citer dans ce domaine les travaux de **Baiocchi**, qui tracent un cadre mathématique précis où l'on démontre au préalable l'unicité et l'existence de la solution, la recherche de celle-ci pouvant déboucher sur la résolution d'inéquations variationnelles où l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles s'applique.

Mais ces études concernent en général des cas idéaux où la géométrie est souvent carrée, rectangulaire ou trapézoïdale. Dans la plupart des cas, l'écoulement est supposé bidimensionnel, le milieu poreux est isotrope et homogène et la surface libre est une fonction continue et régulière. C'est pourquoi le traitement des écoulements en milieu poreux pour les problèmes réels est resté essentiellement numérique.

1.2.3 Traitement numérique des écoulements saturés et non-saturés

1.2.3.1. Généralités

Si l'on exclut les approches triphasiques très peu utilisées pour les applications géotechniques courantes (remblais et barrages en terre), on peut dire que la description des écoulements en milieu poreux revient à écrire en général **une équation de diffusion linéaire pour un milieu saturé et non-linéaire pour un milieu non-saturé**. La présence de surface libre dans l'écoulement non-saturé implique un traitement numérique d'interface entre zones saturée et non-saturée. Très souvent, la surface libre génère une non-linéarité des conditions aux limites, surface de suintement par exemple.

La caractéristique générale des écoulements à surface libre est donc leur *non-linéarité*. Il en résulte que leur traitement numérique utilise principalement des *algorithmes non-linéaires fondés en général sur des processus itératifs*. Ce processus est *transitoire* lorsque l'écoulement l'est. Dans ce cas, le traitement est effectué très souvent par pas de temps.

Les schémas numériques utilisent pour la plupart l'équation de Richards pour le traitement des écoulements à surface libre. En effet, l'équation de Richards écrite en variable "charge hydraulique" permet de traiter non seulement les écoulements non-saturés mais aussi les écoulements saturés. D'autre part, il est rare de trouver des schémas numériques appliqués à l'approche mathématique du problème de surface libre transitoire décrit par les équations (1.13) et (1.20). La mobilité de cette frontière rend en effet délicate, sur le plan numérique, la prise en compte des volumes d'eau écoulés au cours du temps pendant les remontées et les descentes de la cote de la surface libre. On pose donc très souvent des hypothèses complémentaires pour coupler ces deux équations en une équation unique. Dans la plupart des cas, comme on l'a déjà vu avec les hypothèses de Dupuit-Forchheimer ou de Boussinesq, on est ramené, là encore, à résoudre une équation de diffusion.

Diverses méthodes numériques s'appliquent pour la résolution de l'équation de diffusion.

La méthode des différences finies est sans doute la plus classiquement utilisée. Une synthèse bibliographique rassemblant plus de quarante schémas différents a été effectuée par MM. **Vauclin, Haverkamp et Vachaud** (1979). Ces schémas, essentiellement itératifs et transitoires, traitent le problème de surface libre instationnaire en se basant sur l'approche monophasique décrite par l'équation de Richards [relation (1.16.a) et fig. 1.22].

La description complète de ces schémas exige la donnée, entre les pas de temps, de courbes de succion et de perméabilité relative en fonction de la teneur en eau pour le sol étudié. L'allure de ces courbes est donnée par les figures 1.15 et 1.20. Très souvent, **les fortes variations de ces paramètres en fonction de la teneur en eau entraînent une "forte non-linéarité" des processus itératifs, posant un double problème numérique de convergence et de précision des résultats.** Ce dernier point se trouve accentué par le remplacement de mesures expérimentales discrètes par des opérateurs continus $c(p)$ et $k_r(p)$ sous forme de fonctions. L'hétérogénéité des mesures habituellement constatée semble introduire une forte dose d'empirisme en hydraulique des sols non-saturés, dans la détermination de ces courbes.

La simulation numérique du front de saturation est prise en compte à travers la donnée des courbes précédentes, l'équation de Richards étant formellement valable pour les zones saturée et non-saturée. **Elle change seulement de nature mathématique au passage de la surface libre, elliptique dans la zone saturée et parabolique dans la zone non-saturée.**

Bon nombre d'auteurs, abordant des problèmes de surface libre, ont proposé des corrélations générales pour déterminer les courbes $c(p)$ et $k_r(p)$ adaptées pour chaque cas de sol étudié à travers un multiparamétrage spécifique. On peut citer, dans ce cadre, les travaux de **Vauclin** et al. (1976) sur le drainage et la recharge des nappes à surface libre. Ils proposent une forme générale de variation de la teneur en eau et de la perméabilité relative en fonction de la succion sous forme de fonctions "puissance" (fig. 1.24).

La méthode des différences finies semble, à l'heure actuelle, de moins en moins utilisée pour le traitement des écoulements à surface libre. D'autres méthodes numériques s'appliquent de plus en plus fréquemment dans ce domaine. On peut citer la méthode des équations intégrales, étendue par **Jeng** et **Wexler** (1977) aux écoulements tridimensionnels des nappes à surface libre.

Mais nous nous sommes surtout limités à l'application de la méthode des éléments finis du fait de l'émergence de celle-ci dans presque toutes les sciences de l'ingénieur.

L'application à ce type de problèmes a commencé avec les travaux de **Rubin** (1968) et de **Freeze** (1971). Sa mise en oeuvre a été effectuée par l'un de ses précurseurs dans le domaine de l'hydraulique : **Neuman** (1973-1974). Son application a connu depuis un développement considérable. Le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC) n'a pas été en reste de cette évolution importante de la modélisation numérique en hydraulique des sols.

1.2.4. Travaux antérieurs du L.C.P.C.

1.2.4.1. Introduction

Pour des études de projets d'ouvrages en terre (digues et barrages), des modélisations numériques sur les écoulements en milieux poreux non-saturés ont été entreprises au LCPC.

En effet, à partir des années 80, l'utilisation par les collectivités locales d'ouvrages de retenue pour les travaux hydrauliques de stockage d'eaux de pluie ou d'écrêtement des crues, pour la création des réserves d'eau, ou encore dans le cadre d'aménagement de plans d'eau d'agrément, a connu un certain essor. Pour répondre à cette demande, les Laboratoires des Ponts et Chaussées (L.P.C.) ont profité des moyens numériques pour les substituer aux moyens de calculs traditionnels tels que les analogies électriques (méthode du papier conducteur, déjà évoquée).

La section des modèles numériques a été au centre de cette activité : **Humbert** (1984) étend l'application de la méthode des éléments finis aux problèmes des écoulements en introduisant un algorithme général transitoire et itératif dans deux programmes de calcul par éléments finis : FLOT et NSAT.

Le programme FLOT traitait principalement les écoulements à surface libre permanents tandis que le programme NSAT traitait les écoulements en milieu poreux non-saturé en régime transitoire, en présence ou non d'une surface libre.

Cet effort de modélisation numérique par éléments finis s'est progressivement consolidé par la mise au point de nouvelles méthodes de traitement des problèmes à surface libre en régime stationnaire aboutissant à l'introduction d'un module, SURF (**Piau** et **Humbert**, CESAR, version 2.0, septembre 1986) dans le code de calculs par éléments finis CESAR (code modulaire s'inspirant de la présentation de la méthode des éléments finis faite par Dhatt et Touzot). D'autre part, ont été entrepris des travaux importants d'amélioration de la convergence et de la précision des calculs du programme NSAT introduit également dans CESAR (**Piau**, 1986-1988).

Nous présentons succinctement ces deux modules NSAT et SURF afin de voir comment, dans CESAR, sont traités numériquement les écoulements en milieu poreux en présence d'une surface libre.

1.2.4.2. Module NSAT de CESAR

Le module NSAT est basé sur une description monophasique de l'écoulement en milieu poreux non-saturé conduisant à l'équation de Richards [relation (1.16.a)].

Le principe variationnel appliqué à l'équation de Richards conduit à la minimisation de la fonctionnelle associée à l'écoulement :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} k^{ij}(p) \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} c(p) \frac{\partial h}{\partial t} h d\Omega - \int_S \phi(h) dS - \int_{\Omega} q h d\Omega, \quad (1.25)$$

La prise en compte des conditions aux limites et la discrétisation spatiale donnent, après assemblage, le système non-linéaire différentiel du premier ordre suivant :

$$\mathbf{K}(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} + \mathbf{C}(\mathbf{H}) \cdot \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{Q}(\mathbf{H}), \quad (1.26)$$

avec :

- \mathbf{H} : vecteur des charges nodales inconnues,
- $\dot{\mathbf{H}}$: dérivée de \mathbf{H} par rapport au temps,
- \mathbf{Q} : vecteur des chargements et conditions aux limites,
- $\mathbf{C}(\mathbf{H})$: matrice d'emmagasinement,
- $\mathbf{K}(\mathbf{H})$: matrice des perméabilités.

La non-linéarité intervient donc au niveau de l'emmagasinement par le biais de la variation de la capacité capillaire en fonction de la succion et au niveau de la matrice de perméabilité par la variation de la perméabilité relative par rapport à la succion également. Elle peut aussi agir au niveau des conditions aux limites : surface de suintement, par exemple.

Lorsque l'écoulement est à surface libre, le modèle tient compte de l'interaction entre zone saturée et non-saturée. Dans ce cas, la surface libre est, par définition, l'équipression nulle. Les courbes phénoménologiques $k(p)$ et $c(p)$ tiennent compte, en terme de distributions, des propriétés mathématiques de l'équation de Richards : (parabolique dans la zone non-saturée et elliptique dans la zone saturée) (fig. 1.24).

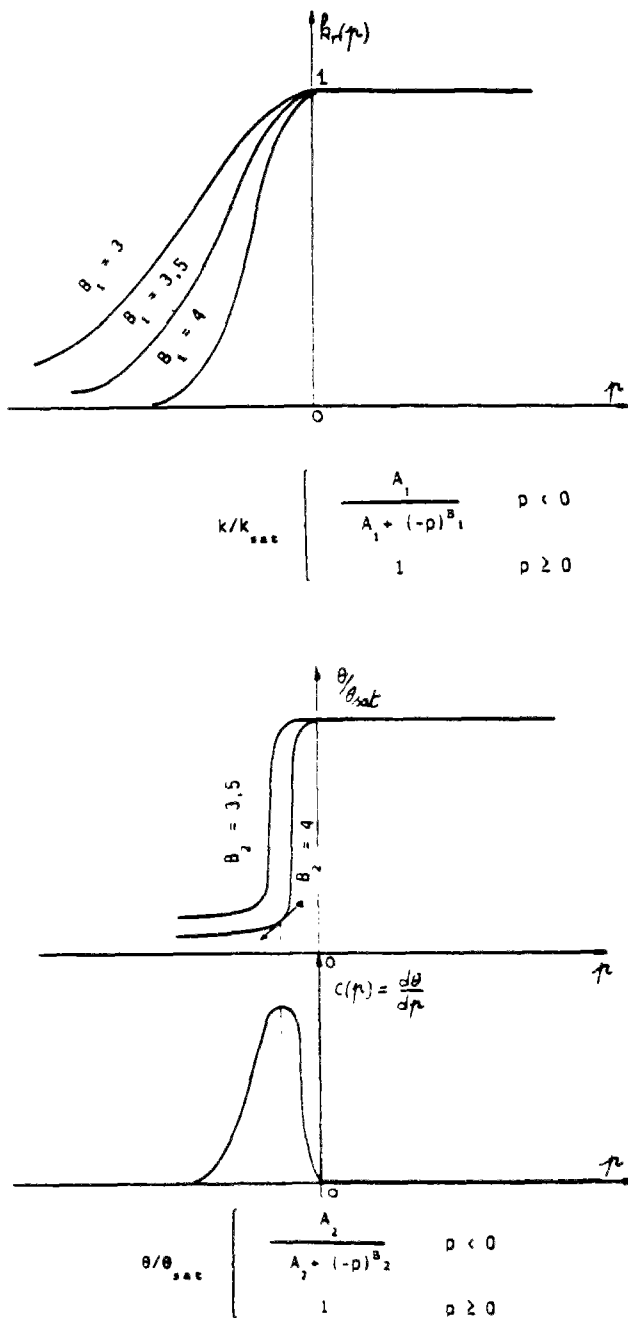


Fig. 1.24 Variation de la perméabilité, de la teneur en eau et de la capacité capillaire en fonction de la pression. Courbes retenues pour NSAT, issues des travaux de Vauclin et al. (1979)

Il faut, dans cette méthode de calcul, avoir des éléments finis appropriés pour intégrer des traitements différents suivant que l'on est au dessus ou en dessous de la surface libre. Dans NSAT, cette mise au point est beaucoup plus simple que dans SURF, comme on le verra, car elle s'effectue au niveau interne de l'élément fini, c'est-à-dire au niveau de ses points d'intégration (le signe de la pression est jugé par la valeur de celle-ci à chaque point de Gauss).

Ainsi, sont adaptés à cette méthode de calcul tous les éléments finis de type diffusion (fig. 1.25).

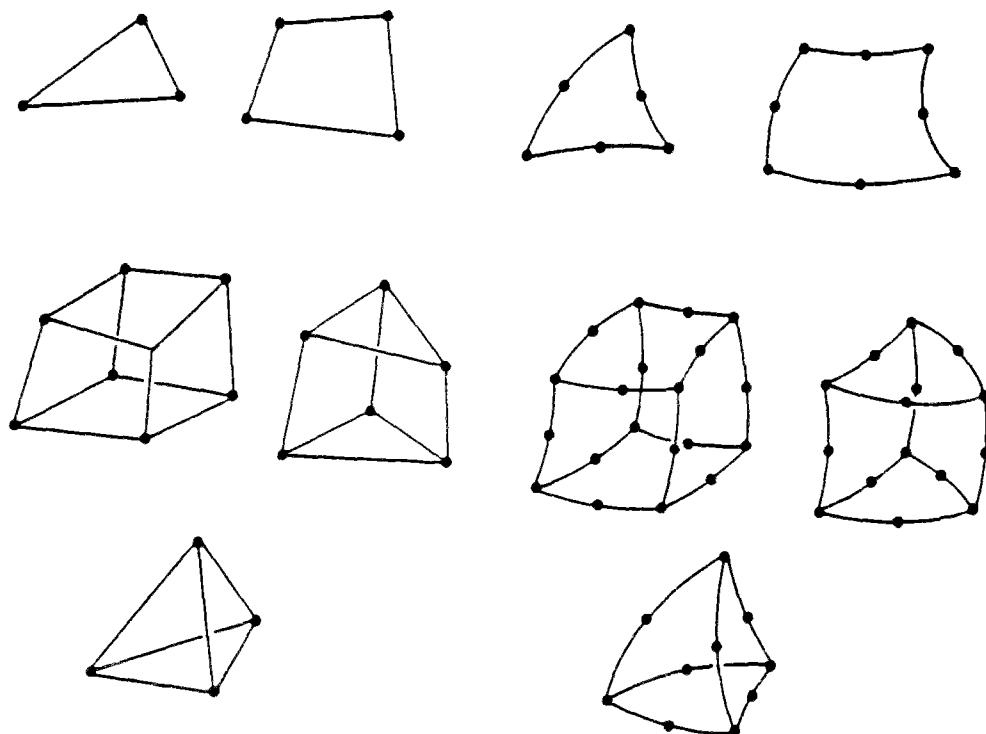


Fig. 1.25 Quelques types d'éléments utilisés par le module NSAT

La discrétisation dans le temps du système différentiel était initialement effectuée selon un schéma semi-implicite du type Galerkin.

Mais, pour des raisons de simplicité de l'algorithme et pour préparer le module à de nouveaux développements (algorithme de type "Newton"), il a été choisi d'introduire un schéma d'intégration dans le temps totalement implicite.

La non-linéarité hydraulique est traitée par la **méthode du point fixe**, selon un algorithme pas à pas itératif à l'intérieur de chaque pas de temps. Le processus itératif converge lorsque, à chaque pas de temps, pour tout noeud du maillage, la différence maximale entre deux solutions successives atteint une tolérance fixée préalablement par l'utilisateur. Il y a divergence et donc arrêt du programme lorsque l'on atteint un nombre donné d'itérations sans converger.

Des réaménagements algorithmiques récents ont été entrepris (Piau, 1989): introduction de la variable de Kirchoff et d'un couplage d'algorithmes Newton-Point fixe.

Le module NSAT a été largement appliqué à des cas pratiques. Un exemple de calcul est présenté sur la figure 1.26.

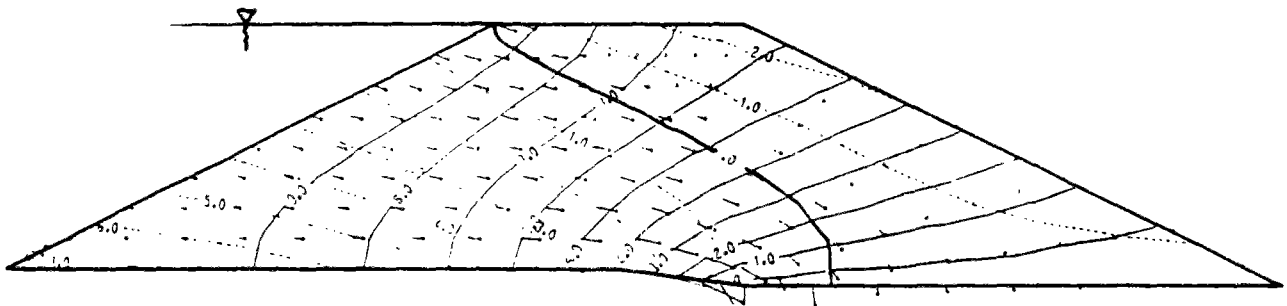


Fig. 1.26 Barrage avec drain horizontal calculé à l'aide du module NSAT

1.2.4.3. Module SURF de CESAR

SURF est le nom du module de CESAR qui traite les écoulements à surface libre, plans et stationnaires. Ce module a progressivement remplacé le programme FLOT précédemment évoqué. L'idée algorithmique principale utilisée dans FLOT consistait à se fixer au départ de façon arbitraire la position de la surface libre, à lui imposer la condition de flux nul et ajuster sa position au cours du processus itératif par la condition sur la charge hydraulique ($h = z$). Cette idée, qui a pour conséquence de changer la "rigidité" du maillage par suppression ou déformation d'un ensemble d'éléments au cours des itérations, se heurtait à une double difficulté : celle due à une éventuelle forte hétérogénéité des perméabilités et celle due à l'obligation de respecter la géométrie des interfaces imposées dans des problèmes particuliers (interfaces à ne pas déformer). Ces limitations ont motivé la recherche d'une nouvelle méthode de calculs d'écoulements à surface libre respectant la géométrie initiale du problème (maillage fixe). Le module SURF a été développé dans cet esprit.

SURF traite le problème mathématique typique de l'écoulement à frontière libre déjà présenté (approche mathématique : cas du régime permanent).

Considérons un matériau poreux, siège d'un écoulement plan stationnaire obéissant à la loi de Darcy, et dont la courbe de perméabilité décroît rapidement en fonction de la succion (fig. 1.27).

Le modèle mathématique consiste à assimiler la perméabilité relative du milieu poreux à une distribution d'Heaviside (fig. 1.27).

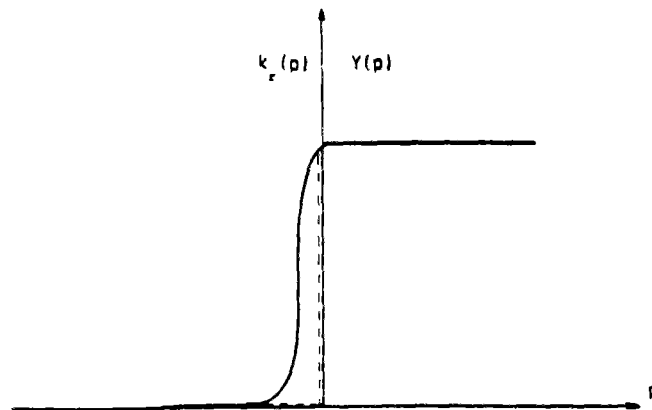


Fig. 1.27 ——— Courbe de perméabilité relative du matériau
 ----- Modèle mathématique

Il découle de l'approximation précédente que la frontière correspondant à l'équipression nulle est encore une frontière à flux nul, donc une ligne de courant. C'est le problème classique de *frontière libre* illustré, pour une géométrie trapézoïdale, par la figure 1.28.

C'est précisément ce type de problèmes que résout le module SURF.

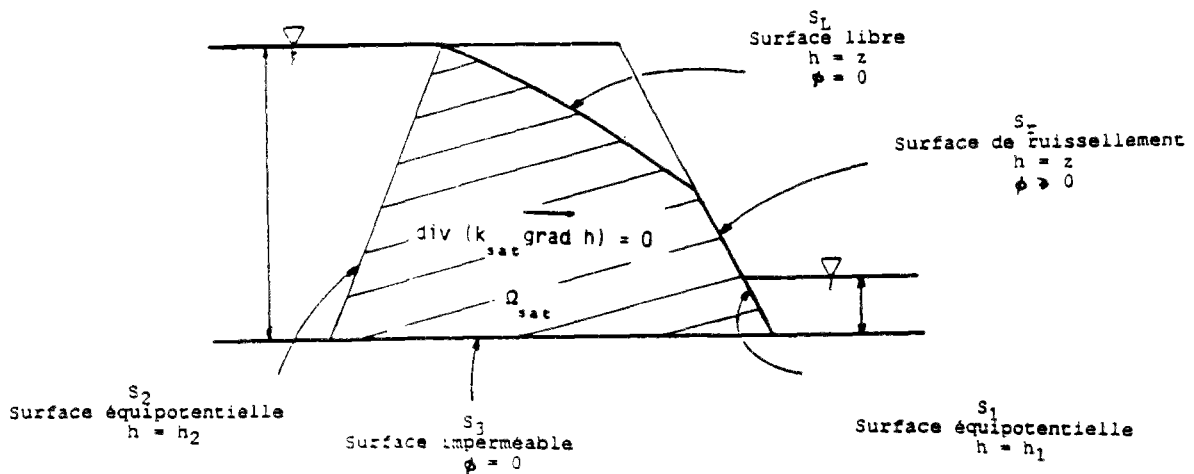


Fig. 1.28 Problème type de surface libre. Module SURF

Pour ce faire, le module SURF utilise des éléments finis spéciaux susceptibles d'être traversés par la surface libre, c'est à dire des éléments discontinus capables de se couper en deux zones de perméabilités distinctes. On en distingue deux types : les triangles à 3 noeuds et 6 noeuds (fig. 1.29). La rigidité au-dessus de la surface libre est négligée, l'écoulement étant supposé limité à la saturation. La rigidité de ces éléments est calculée analytiquement dans la zone saturée.

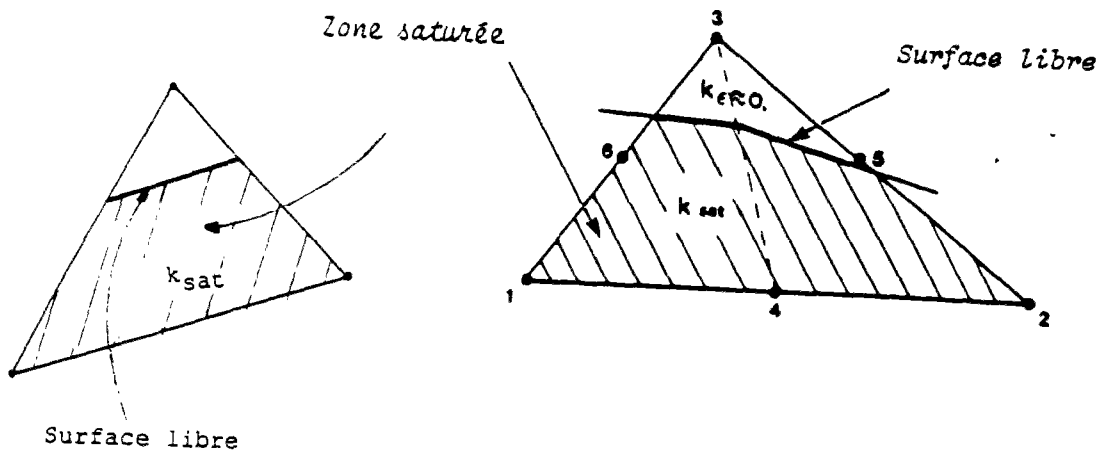


Fig. 1.29 Types d'éléments (SBT3 et SBT6) de surface libre utilisés par le module SURF

Le système matriciel à résoudre a la forme:

$$K(H) \cdot H = Q(H).$$

L'algorithme itératif est celui du point fixe. Le processus itératif s'interrompt lorsque, pour tout noeud du maillage, la différence de la charge entre deux itérations successives n'a pas dépassé une tolérance fixée au préalable par l'utilisateur. Un exemple type de calcul de SURF est présenté sur la figure 1.30.

Lorsque l'écoulement devient transitoire, la surface libre ne se comporte plus comme une ligne de courant et sa cote varie dans le temps. La prise en compte de ce flux inconnu sur une frontière elle-même inconnue est un problème que SURF ne traite pas à l'état actuel. En effet, le traitement numérique du mouvement de la surface libre instationnaire (approche mathématique, § 1.2.1) sur des éléments discontinus (fig. 1.28) n'est pas un problème simple.

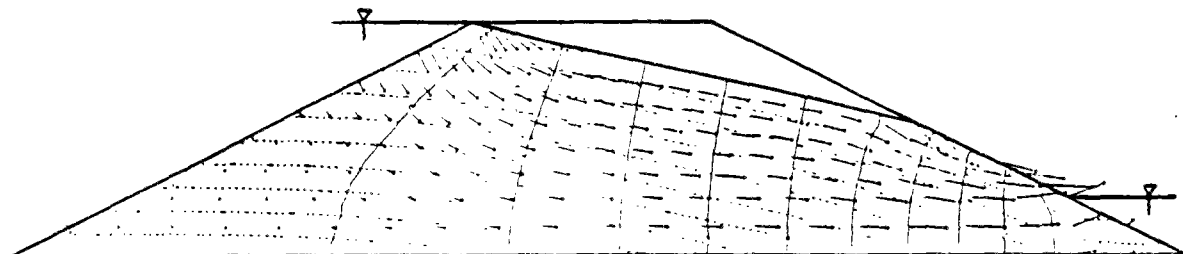


Fig. 1.30 Exemple de calcul du module SURF

1.3. Conclusion et but de l'étude

Au terme de cette synthèse bibliographique, nous disposons de deux outils de calcul tout à fait représentatifs dans leur domaine respectif : la consolidation des sols saturés et les écoulements en milieu poreux non-saturé et indéformable.

Cependant, le module NSAT, dans sa forme actuelle, ne traite ni la compressibilité du fluide ni la déformabilité du squelette, hypothèse fondamentale du comportement des sols mous. La compressibilité du fluide peut avoir une certaine importance à cause du compactage que subissent couramment les barrages en remblais. Cette opération peut introduire une occlusion d'air, rendant possible une compressibilité du fluide interstitiel. La compressibilité de la matrice poreuse introduit, elle, une déformabilité du squelette du sol qui pose le problème de la prédiction des tassements du remblai et de sa fondation molle aussi bien pendant la construction que pendant l'exploitation de l'ouvrage.

En ce qui concerne la consolidation des sols, le module de calculs ne traite actuellement le milieu poreux que sous l'hypothèse d'une saturation quasi-complète, ce qui ne se présente pratiquement pas dans l'étude des barrages en terre.

Il résulte de ce qui précède que ni l'un ni l'autre des deux outils ne pouvaient séparément calculer réellement les barrages en terre construits sur sols mous, but de notre travail :

1. La fondation molle peut ne pas être complètement saturée, avant et/ou pendant la construction des remblais, ou avant même la mise en eau du barrage, la nappe pouvant être à ce stade, à un niveau quelconque.

2. Le remblai n'est pas toujours sec ou complètement imperméable. Il n'est pas d'ailleurs prouvé que les remblais même compactés soient moins perméables que leur fondation molle. Il faut donc tenir compte de l'écoulement au sein du remblai.

3. On ne peut empêcher certains éléments du remblai de se déformer. Cette déformation ne peut être traitée sous une hypothèse de saturation complète ni pendant la construction, ni même après la mise en eau.

4. A supposer que l'on puisse traiter la digue perméable comme suffisamment rigide par rapport à la fondation molle, que faut-il imposer, dans ce cas, comme déplacement ou chargement au niveau de la surface du sol ? De telles hétérogénéités sont-elles des situations favorables au comportement mécanique de la fondation ?

5. A supposer aussi que l'on puisse traiter le remblai comme un matériau sec, que faut-il précisément imposer au niveau de la surface du sol, lors de la mise en eau du barrage, comme conditions aux limites hydrauliques : drainage ou imperméabilité ?

Comment éviter tous ces inconvénients ? Il faut étudier l'ouvrage global à l'aide d'un outil global.

Cela exige de coupler déformation non-linéaire et non-saturation : ce couplage est caractéristique de la réalité complexe du comportement doublement non-linéaire des ouvrages en terre construits sur sols mous.

Coupler la consolidation élastoplastique et les écoulements à surface libre est, par conséquent, le but de cette étude.

**Chapitre 2 - TRAVAUX COMPLEMENTAIRES SUR
LES MODULES EXISTANTS**

TRAVAUX COMPLEMENTAIRES SUR LES MODULES EXISTANTS

2.1. Introduction

Ce chapitre constitue un premier contact avec les modules CSOL et NSAT du code de calcul par éléments finis CESAR du LCPC. CSOL et NSAT désignent respectivement les modules qui traitent les problèmes de consolidation des sols élastiques saturés et les problèmes d'écoulements en milieu poreux saturés et non-saturés indéformables.

Chacun de ces deux modules, comme nous l'avons déjà évoqué, s'est développé dans un contexte qui lui est propre. Cela entraîne parfois des nuances dans les raisonnements et des différences dans les définitions.

Par exemple, dans les problèmes de consolidation on s'intéresse au calcul des accroissements de pressions interstitielles (ou surpressions) qui se développent au sein des structures dès l'instant (pris comme origine) de l'application des chargements imposés. Par contre, on s'intéresse davantage au calcul de la pression interstitielle dans les problèmes d'écoulements à surface libre. En effet, dans ces problèmes, la valeur algébrique de cette grandeur influe directement sur la nature des phénomènes physiques mis en jeu.

En vue de préparer les étapes ultérieures, on a opéré sur ces modules quelques modifications visant en même temps à harmoniser les outils et à étendre leurs possibilités de calculs.

Dans CSOL, on a introduit le potentiel gravitaire dans la définition de la charge hydraulique, dont dérivent le soulèvement hydrostatique (l'équivalent en statique des fluides de la poussée d'Archimède) et les forces de pesanteur.

En outre, la mise au point d'une option supplémentaire dans ce même module a permis d'intégrer certains éléments incompressibles dans un problème de consolidation. Ce cas où les pressions interstitielles se dissipent sur des échelles de temps sensiblement différentes peut concerner les calculs de sols multicouches assez bien stratifiés en sols grenus et sols fins ou des calculs de géotextiles.

Enfin, à partir du module NSAT et sur la base de modèles analytiques simples en régime permanent et en régime transitoire, nous discutons des différentes approches de prise en compte de la non-saturation dans le problème à surface libre afin d'adopter un choix justifié par la suite.

2.2. Reformulation des équations de la consolidation

2.2.1 Introduction du potentiel gravitaire dans CSOL

Considérons, sous l'hypothèse des petites déformations, un sol élastique homogène saturé par un fluide compressible obéissant à la loi de Darcy. Exprimons brièvement les équations de la consolidation servant de base pour le module CSOL (Mestat, 1987).

La loi de comportement du squelette du sol permet de relier les tenseurs des contraintes effectives $\underline{\underline{\sigma}}$ et des déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$ par la relation linéaire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\epsilon}} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = E_{ij}^{kl} \epsilon_{kl} \quad (2.1)$$

L'hypothèse des petites déformations se traduit par la relation suivante entre les déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$ et le déplacement \vec{u}

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{grad}}} \vec{u} + \underline{\underline{\text{grad}}}^T \vec{u}) \quad \text{ou} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.2)$$

L'équation de l'équilibre du milieu poreux s'écrit :

$$\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (2.3)$$

Les équations (2.1), (2.2), et (2.3) sont appelées classiquement les équations relatives à la mécanique du squelette du sol.

La loi de Darcy relie le tenseur des perméabilités $\underline{\underline{k}}$ et la charge hydraulique h à la vitesse de filtration \vec{v} par la relation :

$$\vec{v} = - \underline{\underline{k}} \underline{\underline{\text{grad}}} h \quad \text{ou} \quad v_{i,j} = - k_{ij} h_{,j} \quad (2.4)$$

La conservation de la masse du fluide interstitiel compressible (relation linéaire entre les variables d'état v et p) s'écrit, si l'on néglige les variations dans l'espace de la masse volumique :

$$\operatorname{div} \vec{v} + n a_w \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{tr} \varepsilon) = 0$$

ou

(2.5)

$$v_{i,i} + n a_w \frac{\partial p}{\partial t} + \delta_{i,j} \frac{\partial \varepsilon^{i,j}}{\partial t} = 0.$$

Les équations (2.4) et (2.5) sont appelées classiquement les équations relatives à l'écoulement du fluide.

Outre l'équation (2.5) qui introduit le couplage mécanique-hydraulique, il reste deux équations complémentaires, l'une relative au principe de Terzaghi et l'autre liant la charge hydraulique à la pression interstitielle.

Tenant compte de la convention de signes en mécanique des milieux continus (m.m.c.), le principe de Terzaghi s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}' - p \underline{I} \quad \text{ou} \quad \sigma_{i,j} = \sigma'_{i,j} - p \delta_{i,j} \quad (2.6)$$

Jusqu'à présent les équations de la consolidation dans CESAR, comme dans ROSALIE, sont écrites par rapport à un état initial pris comme origine, à partir duquel on calcule les accroissements des charges hydrauliques. Sous cette condition, la pression interstitielle est alors reliée à la charge hydraulique par la relation :

$$h = \frac{p}{\gamma_w} \quad (2.7)$$

Dans le but de calculer la charge hydraulique (nécessaire par la suite) et non sa variation, et afin de ne pas restreindre la généralité de la modélisation, nous avons jugé utile de tenir compte d'un état initial quelconque.

Cet état initial doit satisfaire l'équation d'équilibre. Par conséquent, toute initialisation (non nulle) de la charge hydraulique (et donc de la pression interstitielle) exige la prise en compte d'un état de contraintes initiales vérifiant l'état d'équilibre.

Ces considérations nous ont amené à substituer l'équation (2.7) par l'équation :

$$h = \frac{p}{\gamma_w} + z, \quad (2.8)$$

et à tenir compte, dans l'équation (2.1), d'un champ de contraintes initiales correspondant à un état d'équilibre et vérifiant la loi de comportement :

$$\underline{\sigma}' = \underline{E} \underline{\varepsilon} + \underline{\sigma}'_0 \quad \text{ou} \quad \sigma'_{ij} = E^{kl} \varepsilon_{kl} + \sigma'_{0ij} \quad (2.9)$$

2.2.2. Formulations variationnelle et matricielle

Les modifications apportées ne concernent que la fonctionnelle associée aux déformations du squelette du sol (celle relative à l'écoulement sera modifiée ultérieurement dans ce chapitre).

Tenant compte des conditions aux limites et du chargement (fig. 2.1), la fonctionnelle relative aux déformations du squelette du sol permet d'écrire pour tout champ de déplacement virtuellement admissible ($\delta \underline{u} = 0$ sur S_u) :

$$\int_{\Omega} \varepsilon^T E \delta \varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} \gamma_w h \delta \theta d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_w z \delta \theta d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_0^T \delta \varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} f^T \delta u d\Omega - \int_{S_{\sigma}} T^T \delta u dS = 0 \quad (2.10)$$

(1) (2)

avec pour notations :

- \underline{E} - tenseur d'élasticité,
- $\underline{\varepsilon}$ - tenseur des déformations,
- $\delta \underline{u}$ - vecteur de déplacement virtuel,
- $\delta \underline{\varepsilon}$ - tenseur des déformations virtuelles associé à $\delta \underline{u}$,
- p - pression interstitielle,
- \vec{f} - forces volumiques s'exerçant dans le domaine Ω considéré,
- \vec{T} - vecteur des contraintes imposées sur S_{σ} ,
- $\delta \theta$ - déformation volumique virtuelle,
- $\underline{\sigma}'_0$ - champ de contraintes initiales donné,
- γ_w - poids volumique de l'eau,
- $\gamma_w z$ - potentiel gravitaire.

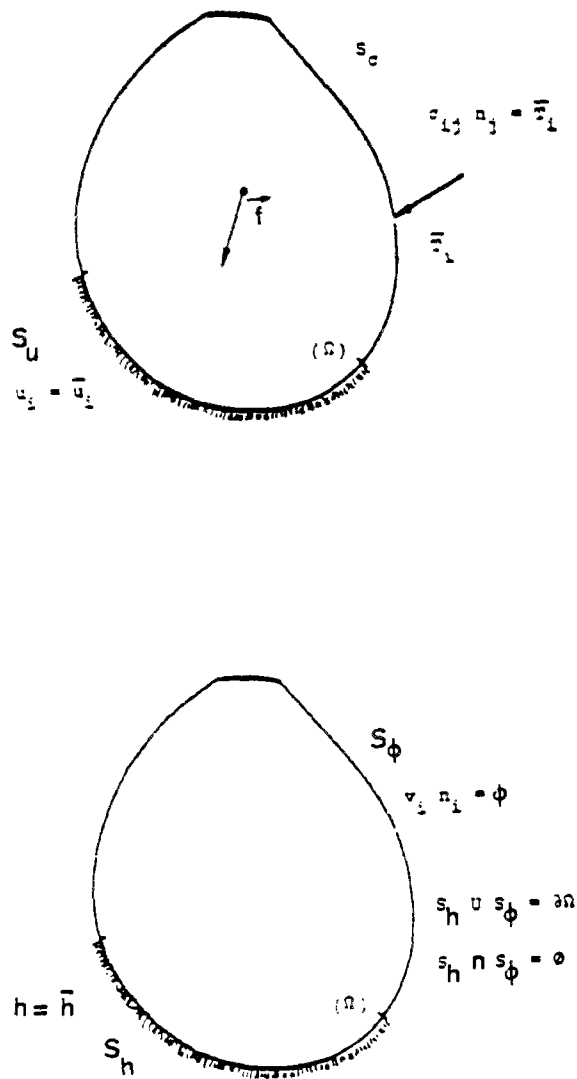


Fig. 2.1 Conditions aux limites mécanique et hydraulique du problème de consolidation

Les termes (1) et (2) de l'équation (2.10) sont nouveaux par rapport à la formulation antérieure. Le terme (2) est un chargement de contraintes initiales directement transposable au second membre. Le terme (1), qui mérite un traitement spécial, correspond au soulèvement hydrostatique déjà évoqué. Un examen rapide montre que c'est en fait un chargement de "couplage", constant en cas de saturation parfaite.

En effet, la discrétisation dans l'espace de ce terme donne pour chaque élément de la structure :

$$- F_{zE}^T \delta U_E(t) \quad (2.11)$$

où :

$$F_{zE}^T = z_E^T C_E^T \quad \text{avec} \quad C_E = \int_E \gamma_w N^T BAN^* dE. \quad (2.12)$$

car

$$\theta = B\varepsilon = BAN^* U_E(t) \quad \text{et} \quad z = z_E^T N^T,$$

avec :

N - matrice des fonctions de base (interpolation),

N^* - matrice formée à partir de la matrice N :

$$\begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$$

B - vecteur uniligne $[1 \ 1 \ 0]$,

A - opérateur différentiel défini par la matrice :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

On voit clairement la nature de ce chargement mécanique, qui dépend à la fois de la position de l'élément (à travers les cotes de ses noeuds) et de sa matrice de couplage définie dans l'équation (2.12).

Si l'on note R_G et C_G respectivement les matrices de rigidité du squelette et du couplage, la relation (2.11) permet d'écrire après assemblage l'équation matricielle relative à la mécanique du squelette :

$$R_G U - C_G H = F_Z + F_G, \quad (2.13)$$

où F_Z représente le chargement de couplage précédemment défini, qui s'ajoute au vecteur global F_G représentant les forces volumiques et les conditions aux limites mécaniques.

Respectant les mêmes notations et schéma d'intégration dans le temps que ceux de Belkeziz et Magnan (1982), on obtient en intégrant l'équation (2.13) selon la méthode semi-implicite de Galerkin :

$$R_G U(t+\Delta t) - C_G H(t+\Delta t) = F(t+\Delta t) + \frac{1}{2} F(t) + \frac{1}{2} C_G H(t) - \frac{1}{2} R_G U(t) + \frac{3}{2} F_Z \quad (2.14)$$

Après simplification et passage à une écriture incrémentale de la charge et du déplacement (Mestat, 1987), l'équation (2.14) s'écrit [en posant $U(t+\Delta t) = U(t) + \Delta U$ et $H(t+\Delta t) = H(t) + \Delta H$]:

$$R_G \Delta U - C_G \Delta H = -\frac{3}{2} R_G U(t) + \frac{3}{2} C_G H(t) + \frac{1}{2} F(t) + F(t + \Delta t) + \frac{3}{2} F_Z \quad (2.15)$$

Si, de plus, on ajoute à l'équation (2.15) l'équation relative à l'écoulement, le système matriciel à résoudre s'écrit (tel qu'il est programmé en variables Fortran) :

$$K_N * VDUM = K_M * VUM(t) + A * VFM(t) + B * VFM(t+\Delta t) + C * VF_Z \quad (2.16)$$

avec :

$$K_N = \begin{bmatrix} R_G & -\alpha C_G \\ -\alpha C_G^T & -\alpha^2 (E_G + \frac{2}{3} \Delta t K_G) \end{bmatrix},$$

$$K_M = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} R_G & \frac{3}{2} C_G \\ 0 & -\alpha \Delta t K_G \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} I & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{3} \Delta t I \end{bmatrix}.$$

$$B = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \alpha \Delta t I \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & & \\ -I & & 0 \\ 2 & & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix},$$

$$VUM = \begin{bmatrix} U(t) \\ H(t) \end{bmatrix},$$

$$VDUM = \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta H \\ \alpha \end{bmatrix},$$

$$VFM = \begin{bmatrix} F(t) \\ Q(t) \end{bmatrix},$$

$$V_{Fz} = \begin{bmatrix} F_z \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- R_G - matrice de rigidité du squelette,
- C_G - matrice de couplage,
- K_G - matrice des perméabilités,
- E_G - matrice de compressibilité du fluide,
- α - coefficient de conditionnement de la matrice K_N ,
- I - matrice de l'identité.

C'est cette formulation matricielle qui a été retenue pour la nouvelle version du module CSOL.

2.2.3. Programmation et validation

La programmation a consisté dans un premier temps à introduire dans le module CSOL trois types de chargements :

- le chargement de type "soulèvement hydrostatique",
- le chargement de type "contraintes initiales",
- le chargement de type "poids volumique".

Il en découle une extension des possibilités élémentaires des éléments finis de la consolidation (famille 41 de CESAR). Au niveau global (assemblage), on prévoit des appels appropriés (sous-programmes) pour tenir compte des types de chargements nouveaux.

Enfin, pour des raisons de commodité et de souplesse, nous avons laissé le choix à l'utilisateur, par l'introduction d'options adéquates, de revenir en cas de besoin à la formulation initiale.

Le test de validation que nous proposons vise justement à s'assurer de la bonne programmation de la nouvelle version, eu égard à la version antérieure.

Considérons une colonne de hauteur H (fig. 2.2), de sol élastique isotrope saturé par un fluide incompressible, soumise instantanément à une compression uniformément répartie. Appelons "problème (I)" le calcul par l'ancienne approche (on notera dans ce cas la charge hydraulique h_1) et "problème (II)" le nouveau calcul (on notera dans ce cas la charge hydraulique h_2). Dans le premier cas, on calcule les pressions interstitielles par rapport à l'état hydrostatique, ou surpressions produites par l'application de la pression mécanique, l'état initial pouvant être ajouté aux résultats par ailleurs. Dans le second, l'état hydrostatique est directement pris en compte dans les calculs. C'est un état d'équilibre initial : la pression hydrostatique et la contrainte effective initiale équilibrent le poids volumique total. Il existe une autre manière d'assurer l'équilibre, consistant à tenir compte d'un chargement de type "poids volumique" déjaugé et d'un chargement de type pression hydrostatique, simulant ainsi le chargement de type "contraintes initiales". Mais, le but étant, entre autres, de tester la bonne introduction de ce dernier, on l'a déclaré comme chargement effectif.

Les conditions aux limites mécaniques étant identiques pour les deux problèmes, exprimons les équations que doit vérifier la charge hydraulique dans les deux cas.

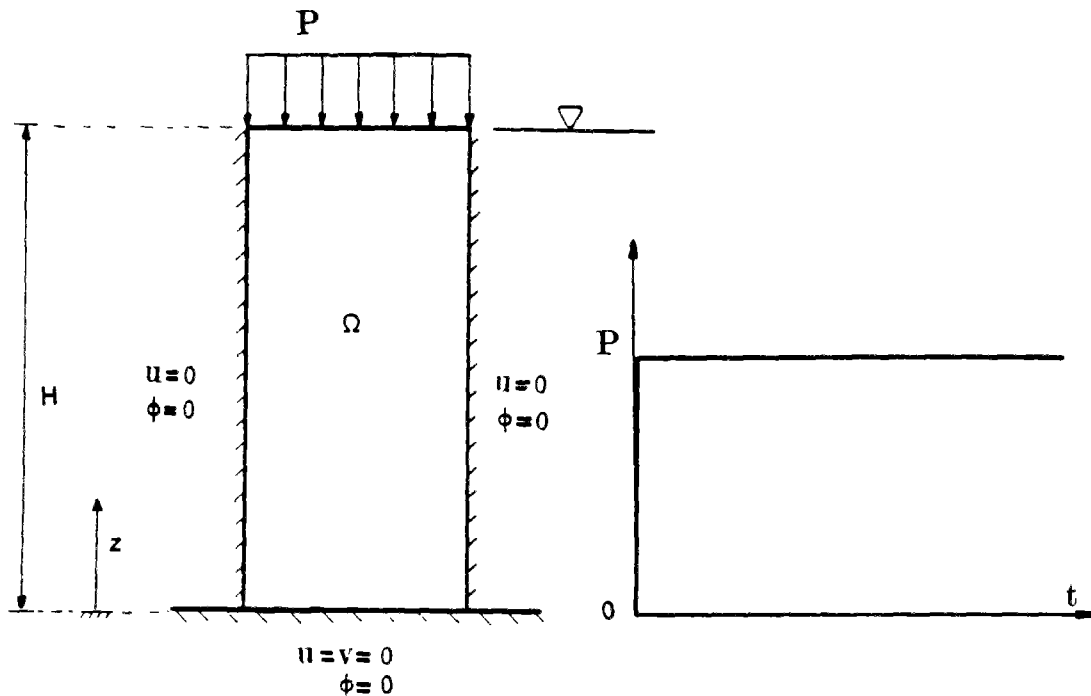


Fig. 2.2 Colonne soumise instantanément à une compression uniforme P

Mise en équations

Dans les deux cas, on est dans les conditions classiques de l'essai oedométrique et la théorie unidimensionnelle de la consolidation de Terzaghi s'applique.

Dans le domaine Ω , on a pour les deux cas, en notant c_v coefficient de la consolidation, l'équation de diffusion suivante :

$$c_v \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{avec } i \in \{1,2\}.$$

Les conditions d'imperméabilité de la base de la colonne sont également identiques :

$$\frac{\partial h}{\partial z} (0,t) = 0 \quad \text{avec } i \in \{1,2\}.$$

La condition de drainage à la face supérieure de la colonne où la nappe d'eau affleure s'écrit :

- pour le problème (I) $h_1(H, t) = 0,$
- pour le problème (II) $h_2(H, t) = H.$

La condition initiale sur la charge hydraulique est :

- pour le problème (I) $h_1(z, 0^+) = P/\gamma_w,$
- pour le problème (II) $h_2(z, 0^+) = H + P/\gamma_w.$

Une comparaison entre ces équations montre que les solutions des deux problèmes sont liées par la relation immédiate :

$$h_2 = h_1 + H,$$

où H est la hauteur de la colonne.

Test numérique

Le tableau 2.1 résume les données mécaniques et hydrauliques et le tableau 2.2 celui des caractéristiques numériques du maillage. Ce dernier est représenté par la figure 2.3.

Dans le premier calcul, seule la pression mécanique (10^3 kPa) est à considérer. Dans le second, on tient compte, en plus, de la pression mécanique, des trois chargements qu'on a rappelés précédemment et que met en jeu l'équilibre hydrostatique.

Tableau 2.1 Données mécaniques et hydrauliques introduites dans le calcul

γ (kN/m ³)	E (kPa)	ν	γ_w (kN/m ³)	n	a_w (kPa ⁻¹)	k_x (m/j)	k_y (m/j)	k_{xy} (m/j)
20	100	0,25	10	0,2	0	1	1	0

Tableau 2.2 Caractéristiques numériques du maillage

Nombre de noeuds	23
Nombre d'éléments	4
Type d'éléments	quadrilatère à 8 noeuds

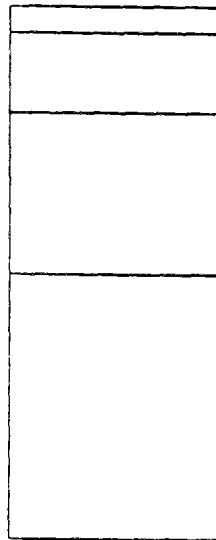


Fig. 2.3 Maillage utilisé pour le calcul

On obtient bien entre les deux solutions numériques (fig. 2.4 a et b) la différence que l'on attendait, c'est-à-dire :

$$h_2 = h_1 + H.$$

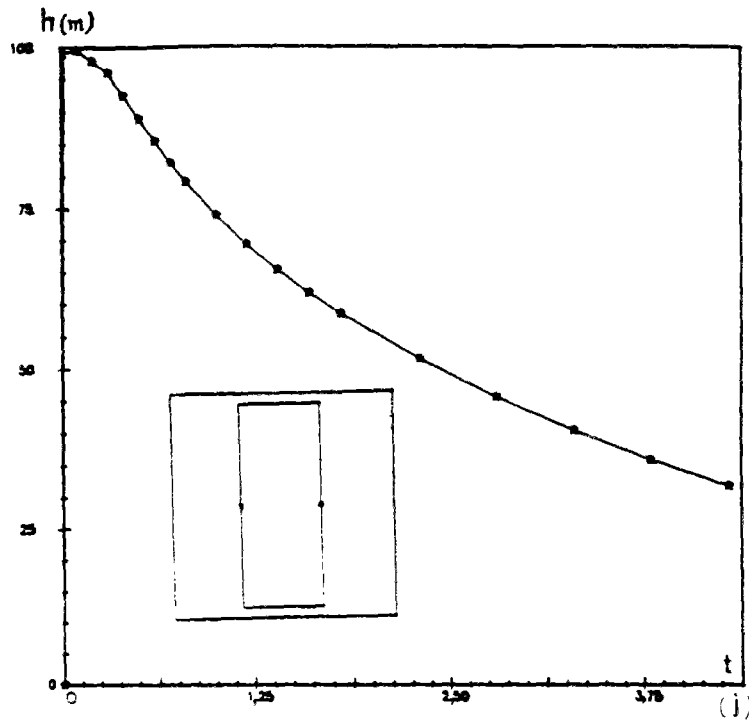


Fig. 2.4.a Variation de la charge hydraulique en fonction du temps au milieu de la colonne. Problème I

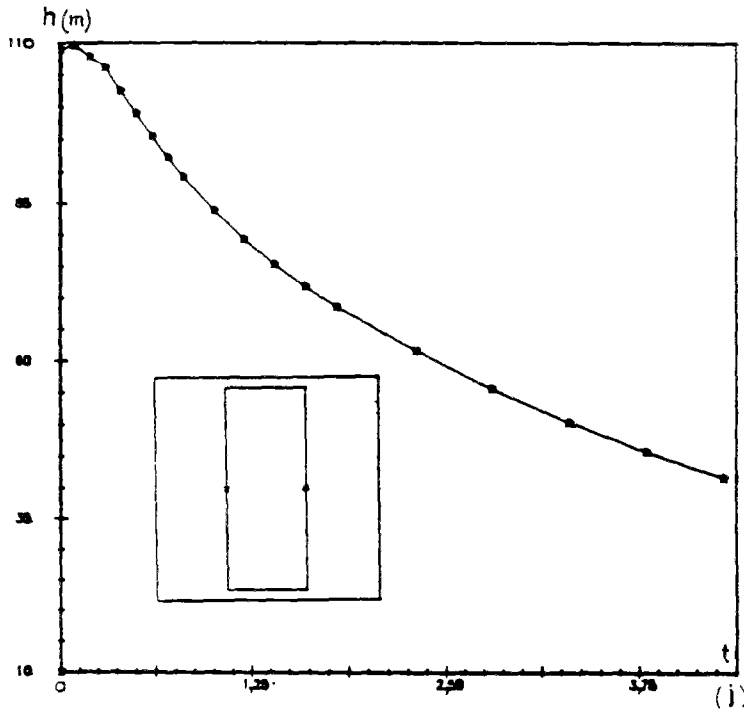


Fig. 2.4.b Variation de la charge hydraulique en fonction du temps au milieu de la colonne. Problème II

2.3. Mise au point d'une option supplémentaire

2.3.1. Présentation du problème

Cette option introduite dans le module CSOL est principalement d'ordre théorique. Mais elle peut répondre à des situations concrètes. Considérons le cas d'un sol multicouche parfaitement stratifié (fig. 2.5) en sols grenus (sable) et en sols fins (argile). Dans ce type de sol, la dissipation des pressions interstitielles peut s'effectuer sur des échelles de temps sensiblement différentes. La perméabilité élevée du sable, comparativement à celle de l'argile, fait que ses déformations se produisent en général sur une échelle de temps très courte par rapport à celles des déformations des sols fins sous les mêmes conditions de chargements appliqués.

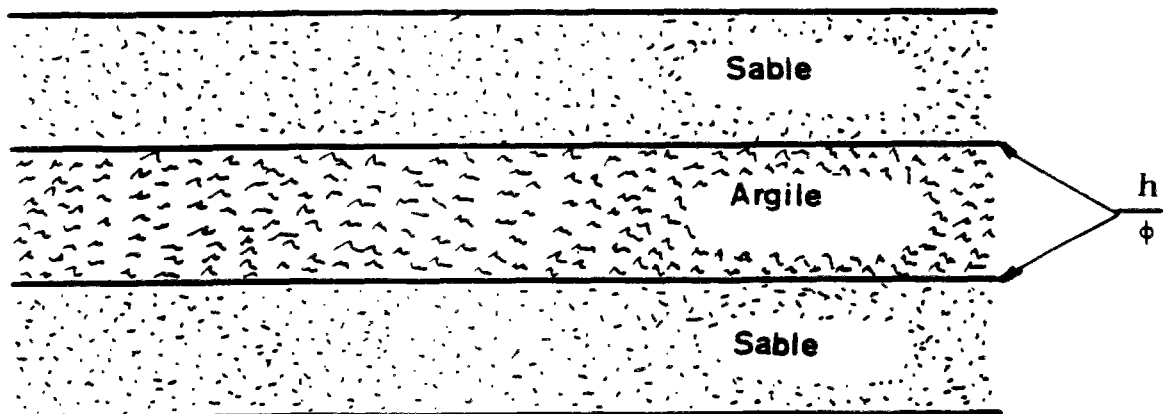


Fig. 2.5 Sol multicouche

Pour avoir une idée de la différence entre ces deux échelles, on peut évaluer un ordre de grandeur du rapport des deux temps caractéristiques de la consolidation dans les deux couches.

Dans une couche de sable et pour un fluide incompressible, l'équation (2.5) s'écrit si l'on note \underline{k}_s le tenseur des perméabilités dans le sable :

$$\operatorname{div} (\underline{k}_s \operatorname{grad} h_s) = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{tr} \underline{\varepsilon}_s) \quad (2.17a)$$

tandis que pour une couche d'argile, l'équation de continuité du fluide s'écrit si l'on note \underline{k}_a le tenseur des perméabilités dans l'argile :

$$\operatorname{div} (\underline{k}_a \operatorname{grad} h_a) = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{tr} \underline{\varepsilon}_a) \quad (2.18)$$

Soient δ_s et δ_a deux profondeurs de pénétration du phénomène de la consolidation correspondant respectivement aux temps t_s et t_a de dissipation (ou de diffusion) dans les couches de sable et d'argile.

Les équations (2.17a) et (2.18) permettent d'écrire respectivement :

$$\delta_s^2 = c_{vs} t_s \quad \text{et} \quad \delta_a^2 = c_{va} t_a,$$

où c_{vs} et c_{va} représentent respectivement les coefficients de consolidation du sable et de l'argile.

Il en résulte que, pour une même épaisseur de 1 m, par exemple, le rapport entre les deux temps est donné par la relation :

$$t_s/t_a = c_{va}/c_{vs},$$

ce qui implique, pour les sables et les argiles usuels, un ordre de grandeur de 10^{-6} .

Cela conduit à négliger le terme temporel dans la couche du sable en attribuant au coefficient de consolidation dans cette couche une valeur infinie. Sous cette condition l'équation (2.17a) devient :

$$\operatorname{div} (\underline{k}_s \operatorname{grad} h_s) = 0 \quad (2.17b)$$

Il convient de remarquer que la charge hydraulique dans le sable dépend malgré tout du temps du fait des conditions aux limites à l'interface.

Nous nous proposons de résoudre ce problème finalement typique d'un traitement d'interface à partir de laquelle on aura soit l'équation (2.17b), soit l'équation (2.18), en devant assurer à tout instant la continuité de la charge hydraulique et du flux.

2.3.2. Formulation matricielle

La modification envisagée concerne uniquement l'équation de continuité du fluide et agit en conséquence sur la fonctionnelle relative à l'écoulement de ce dernier. Lorsqu'il s'agit d'un groupe d'éléments compressibles, le système à résoudre reste tel qu'il est décrit par l'équation (2.16). Dans le cas contraire, le système a la forme:

$$K_{N1} * VDUM = K_M * VUM(t) + A * VFM(t) + B * VFM(t+\Delta t) + C * VF_z \quad (2.19)$$

avec :

$$K_{N1} = \begin{bmatrix} R_c & -\alpha C_g \\ 0 & -\frac{2}{3} \alpha^2 \Delta t K_g \end{bmatrix}$$

La dissymétrie de ce système matriciel, provoquée par le fait que l'on a négligé l'effet explicite du temps sur l'écoulement dans les éléments du sable, mérite un réarrangement de l'algorithme principal.

2.3.3. Algorithme de résolution

Il résulte du pseudo-découplage mécanique-hydraulique dans le groupe d'éléments du sable, une possibilité de symétrisation du système matriciel (2.19). Le développement de ce système montre, comme c'était prévisible, la linéarité à tout instant de la charge hydraulique. Tenant compte de cette remarque, le système (2.19) devient :

$$K_{Ns} * VDUM = K_M * VUM(t) + A * VFM(t) + B * VFM(t+\Delta t) + C * VF_z + V_{FH} \quad (2.20)$$

avec :

$$K_{Ns} = \begin{bmatrix} R_G & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \alpha^2 \Delta t K_G \end{bmatrix},$$

$$V_{FH} = \begin{bmatrix} C_G \Delta H \\ 0 \end{bmatrix} \text{ inconnu à ce stade.}$$

Mais une première résolution du système sans ce terme du second membre permet de le reconstituer, d'où l'algorithme de la figure 2.6. L'algorithme de base est essentiellement l'algorithme initial. Seule une procédure supplémentaire lui est intégrée, visant à traiter numériquement le problème du pseudo-découplage précédemment présenté.

Procédure de résolution

Après avoir assemblé la matrice K_N du système global, matrice symétrique pour les groupes d'argile, symétrisée pour les groupes de sable, une première résolution permet de déterminer les charges hydrauliques. On se sert de ce résultat pour créer le chargement V_{FH} relatif aux éléments du sable. La matrice K_N étant déjà assemblée et triangularisée, on calcule avec le nouveau terme du second membre le supplément de déplacement que l'on ajoute au résultat de la première résolution.

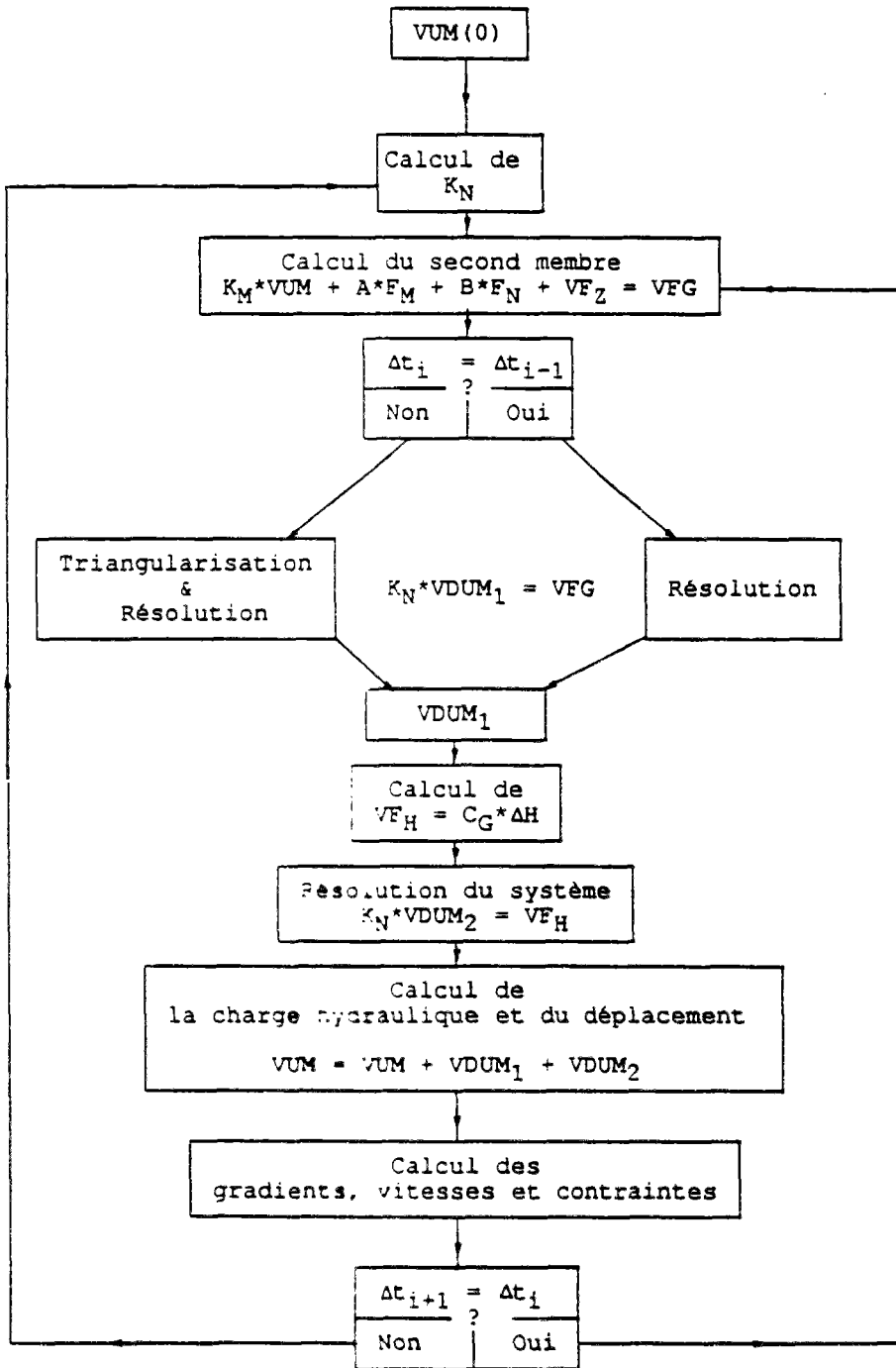


Fig. 2.6 Algorithme de résolution

2.3.4. Programmation et validation

La programmation a consisté à créer un nouveau modèle matériel d'éléments incompressibles fonctionnant par groupe. Ce groupe d'éléments pourra s'associer avec d'autres groupes où le phénomène de consolidation serait prépondérant. Au niveau élémentaire, comme au niveau global, il suffit de tester à chaque fois l'indicateur du modèle matériel du groupe pour lui assigner son traitement spécifique.

Afin de tester l'algorithme et la programmation, nous nous sommes efforcés de mettre au point un modèle unidimensionnel simple. La méthodologie adoptée pour valider des nouveaux développements dans CESAR consiste généralement à rechercher des solutions analytiques. En effet celles-ci, quand elles existent, permettent d'estimer les performances numériques.

Considérons la colonne de sol bicouche représentée sur la figure 2.7, saturée par un fluide incompressible et soumise instantanément à une compression uniformément répartie. On néglige la consolidation au sein de la couche sableuse (couche n°1), d'épaisseur z_0 . La couche argileuse (couche n°2) est supposée infiniment épaisse par rapport à la couche de sable.

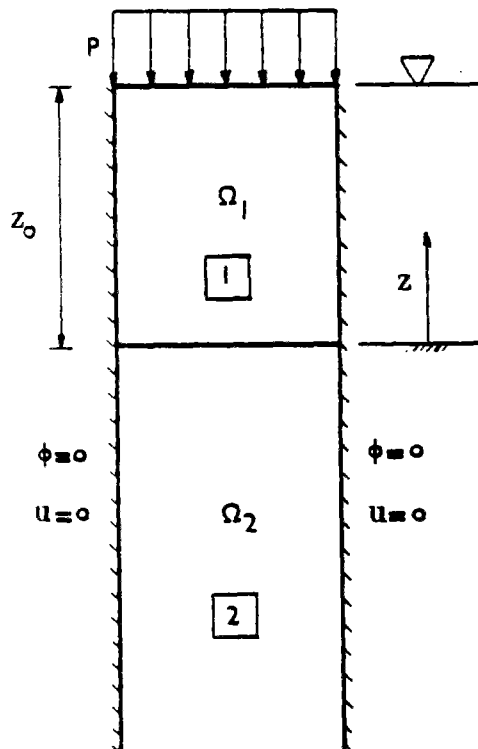


Fig. 2.7 Colonne bicouche. Modèle analytique

Mise en équations du problème

Dans le domaine Ω_1 la charge hydraulique présente à tout instant un profil linéaire et on peut alors écrire :

$$h_1(z,t) = a(t) \cdot (z-z_0) + z_0. \quad (2.21)$$

Dans le domaine Ω_2 la charge hydraulique vérifie les équations :

$$c_v \frac{\partial^2 h_2}{\partial z^2} = \frac{\partial h_2}{\partial t}, \quad (2.22)$$

$$h_2(z,0^+) = \frac{p}{\gamma_w} + z_0, \quad (2.23)$$

$$\left| h_2(z,t) \right| < M, \text{ la charge hydraulique restant finie.} \quad (2.24)$$

Il reste à exprimer la continuité du flux et de la charge à l'interface $z = 0$:

$$h_2(0,t) = h_1(0,t), \quad (2.25)$$

$$k_2 \frac{\partial h_2}{\partial z} = k_1 \frac{\partial h_1}{\partial z}. \quad (2.26)$$

Introduisons le changement de variables :

$$u_1(z,t) = h_1(z,t) - z_0, \quad (2.27)$$

$$u_2(z,t) = h_2(z,t) - z_0. \quad (2.28)$$

Compte tenu des équations (2.21) à (2.28), le problème se résume ainsi : trouver la fonction $u_2(z,t)$ vérifiant :

$$c_v \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = \frac{\partial u_2}{\partial t}, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z}(0,t) = -T_0 u_2(0,t) \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{k_1}{k_2 z_0}, \quad (2.30)$$

$$u_2(z, 0^+) = \frac{P}{\gamma_w} \quad (2.31)$$

$$\left| u_2(z, t) \right| < M. \quad (2.32).$$

L'introduction de la transformée de Laplace dans ces équations permet de trouver u_2 (annexe 2.1) :

$$\frac{-2P}{\pi \gamma_w} \alpha \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2 t} \left(u \cos \frac{zu}{\sqrt{c_v}} + \alpha \sin \frac{zu}{\sqrt{c_v}} \right)}{u (u^2 + \alpha^2)} du, \quad (2.33)$$

avec :

$$\alpha = -T_0 \sqrt{c_v}.$$

En particulier, la pression à l'interface est donnée par l'intégrale :

$$\frac{-2P}{\pi \gamma_w} \alpha \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2 t}}{u^2 + \alpha^2} du. \quad (2.34)$$

Les étapes des transformations aboutissant à ces résultats ainsi que les calculs de ces intégrales sont détaillés dans l'annexe 2.1.

Test numérique

Le tableau 2.3 résume les données mécaniques et hydrauliques introduites dans le calcul et le tableau 2.4 donne les caractéristiques numériques du maillage. Ce dernier est représenté par la figure 2.8. On l'a raffiné au niveau de l'interface argile-sable. Les conditions aux limites sont celles de la figure 2.7. Le chargement imposé est une pression mécanique uniformément répartie sur la face supérieure de la colonne. Cette charge a été maintenue pendant 9 jours.

Tableau 2.3 Données mécaniques et hydrauliques introduites dans les calculs

γ (kN/m ³)	E (kPa)	ν	γ_w (kN/m ³)	n	a_w (kPa ⁻¹)	k_x (m/j)	k_y (m/j)	k_{xy} (m/j)
0	9	0,2	10	0,2	0	1	1	0

Tableau 2.4 Caractéristiques numériques du maillage

Nombre de noeuds	73
Nombre d'éléments	14
Type d'éléments	quadrilatère à 8 noeuds

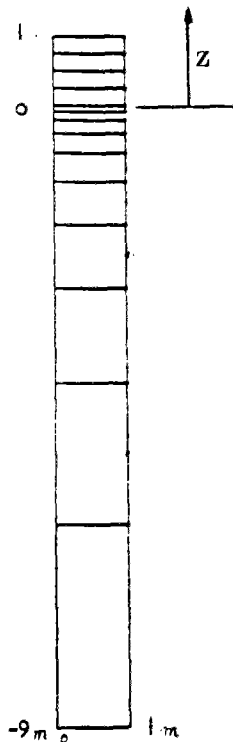


Fig. 2.8 Maillage utilisé pour le calcul

Nous nous sommes intéressés à l'évolution de la charge à l'interface en fonction du temps et à sa variation en fonction de la profondeur pour un temps donné.

Comparaison des résultats numériques et analytiques

Les figures 2.9 a et b montrent qu'à part des oscillations au début du calcul en éléments finis, il y a concordance satisfaisante entre les résultats analytiques et numériques (éléments finis).

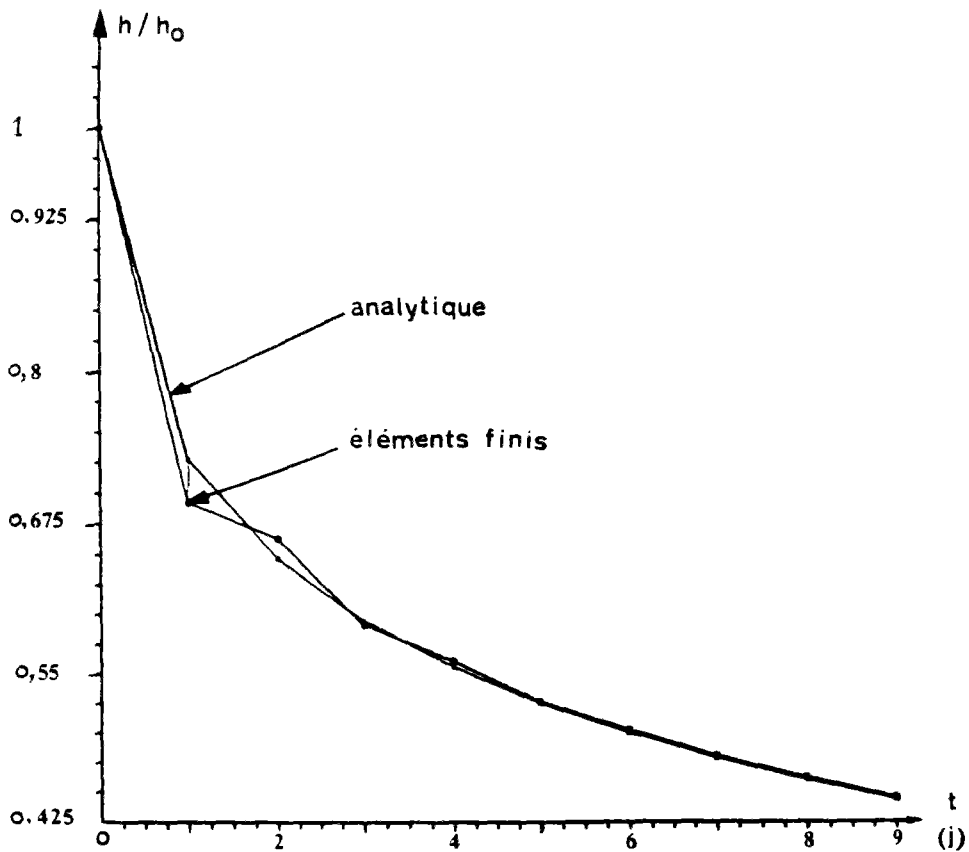


Fig. 2.9.a Evolution de la charge hydraulique à l'interface ($z = 0$) en fonction du temps. Résultats analytiques et numériques

• analytique
• numérique

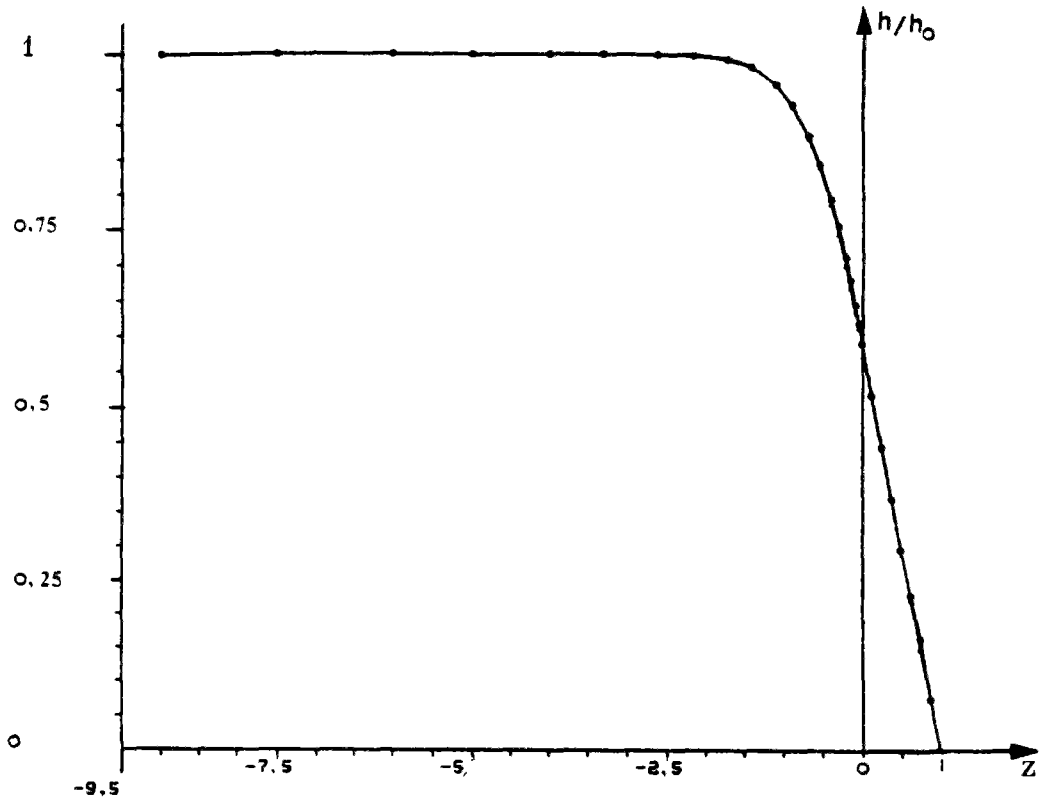


Fig. 2.9.b Evolution de la charge hydraulique en fonction de la profondeur z au temps $t = 3$ jours. Résultats analytiques et numériques (éléments finis)

2.4. Problématique de la prise en compte de la non-saturation

2.4.1. Présentation du problème

La prise en compte de la non-saturation, lorsque l'écoulement comporte une surface libre, est un problème délicat. Au chapitre précédent, on a rappelé différentes approches de modélisation de ce problème, notamment celle basée sur le formalisme de Richards et celle idéalisant la non-saturation ou approche mathématique. On a vu aussi que l'approche par l'équation de Richards tenait compte de la continuité des transferts physiques entre zones saturée et non-saturée de l'écoulement. Dans cette description, on a besoin de la donnée des courbes de rétention capillaire et de perméabilité relative en fonction de la teneur en eau dans la zone non-saturée de l'écoulement. Par contre, l'approche mathématique, limitant l'écoulement à la zone saturée, négligeait la frange capillaire de l'écoulement non-saturé. Dans ce cas, les volumes d'eau stockés ou libérés par le sol, lors des remontées ou des descentes de la surface libre,

s'écoulaient instantanément. Dans cette description, on a besoin seulement de la donnée de la porosité du milieu et de ses perméabilités à saturation.

Il ressort de ce bref rappel que chacune de ces deux approches possède des avantages et des inconvénients.

Sur le plan physique, l'approche fondée sur l'équation de Richards semble mieux représenter la réalité. En effet, s'il semble admis que, dès l'apparition des phénomènes de succion, il y a en général décroissance rapide de la perméabilité, il n'est pas en revanche prouvé que la surface libre est la limite supérieure du domaine de l'écoulement. Celle-ci serait plutôt la frange capillaire au sein de laquelle le fluide reste soumis aux tensions superficielles. Il en résulte que l'approche mathématique peut conduire à une sous-estimation du temps de transfert des volumes d'eau écoulés lié à la variation temporelle de la cote de la surface libre.

Cependant, cette bonne représentativité de l'approche tenant compte de l'écoulement au-dessus de la surface libre peut être hypothéquée par le choix des courbes $k_r(p)$ et $\theta(p)$. Les mesures expérimentales de ces grandeurs restent en effet un sujet de recherche très ouvert tant les mises au point expérimentales sont difficiles dès que la saturation devient incomplète. Ces mesures sont généralement assez dispersées et posent le problème de substitution d'opérateurs discrets par des opérateurs continus. La détermination de ces derniers relève pratiquement du domaine de l'empirisme.

Sur le plan numérique, l'approche par l'équation de Richards offre l'avantage important de ramener le problème de surface libre à un domaine fixe par l'introduction dans les calculs de distributions $k_r(p)$ et $c(p)$ pour les zones saturée et non-saturée. Il en découle une facilité du traitement numérique de la non-linéarité par rapport à la difficulté de traitement de la frontière mobile. Mais l'approche mathématique, moyennant des hypothèses complémentaires, est susceptible de linéarisation ramenant le problème à frontière libre à une équation de diffusion linéaire écrite par rapport à la cote de la surface libre. Cela peut avoir une importance pour une classe de problèmes où, par exemple, l'hypothèse de Boussinesq s'applique.

Compte tenu des quelques éléments de comparaisons entre les deux approches, on s'est posé une question simple à laquelle il semble qu'il n'y a toujours pas de réponse définitive : les deux approches, malgré les nuances dans le formalisme, donnent-elles des résultats très différents ? Ou encore, quelle est l'influence réelle de l'écoulement dans la frange capillaire sur les volumes d'eau échangés à travers le mouvement de la surface libre dans les deux approches sur des cas pratiques ?

Pour apporter une réponse satisfaisante à cette interrogation, il peut être nécessaire d'étudier la question dans différents aspects théorique, expérimental et numérique.

Une formulation théorique de ce problème pourrait être, par exemple, celle-ci : quelles distributions $c(p)$ et $k_r(p)$ faut-il introduire dans le formalisme de Richards pour que la solution par l'approche tenant compte de l'écoulement au-dessus de la surface libre [équation (1.16a)] converge vers la solution par l'approche limitant l'écoulement à la saturation [équations (1.13) et (1.20)] ? Ce cadre théorique peut être l'objet de travaux de mathématiciens.

L'aspect expérimental a été abordé par certains auteurs. On peut citer à ce propos les travaux de Vauclin (1975) dans l'étude du drainage des nappes à surface libre sur modèle réduit en laboratoire où il comparait les résultats expérimentaux avec les résultats obtenus par la résolution numérique de l'équation de Richards, d'une part, et avec les résultats du modèle analogique (écoulement visqueux entre plaques planes rapprochées, analogie évoquée au chapitre 1, § 1.2.2.3) correspondant à l'approche limitant l'écoulement à la saturation, d'autre part.

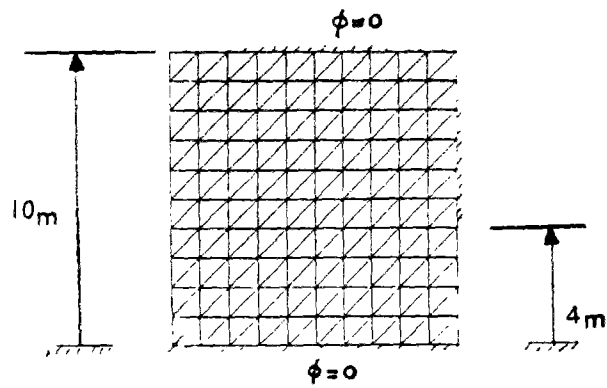
En ce qui nous concerne, on a tenté d'apporter une contribution si modeste soit-elle, portant sur l'aspect numérique de la question. On a cherché à analyser les résultats du calcul du module NSAT (basé sur le formalisme de Richards, § 1.2.3.2) sur des cas analytiques simples et des cas concrets de barrages calculés par l'approche limitant l'écoulement à la saturation. On étudiera successivement les cas stationnaire et transitoire.

2.4.2. Cas du régime permanent

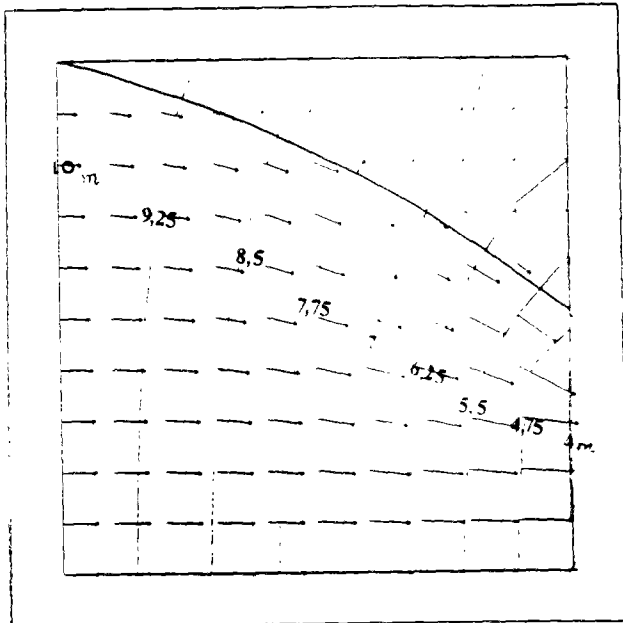
Lorsque l'écoulement est permanent, seuls les paramètres A_1 et B_1 (paramètres de détermination de la courbe de perméabilité relative, fig. 1.24) interviennent, en plus des perméabilités à saturation, dans les calculs du module NSAT. L'expérience acquise à partir des modules SURF (méthode ne tenant compte de l'écoulement que dans la zone saturée) et NSAT montre que le traitement numérique des écoulements stationnaires à surface libre par l'un ou l'autre des deux modules conduit pratiquement aux mêmes résultats. On peut choisir à titre d'exemple un cas analytique pour lequel existe une solution analytique et un cas type de barrage :

1. Carré homogène soumis à une différence de potentiel.
2. Barrage homogène.

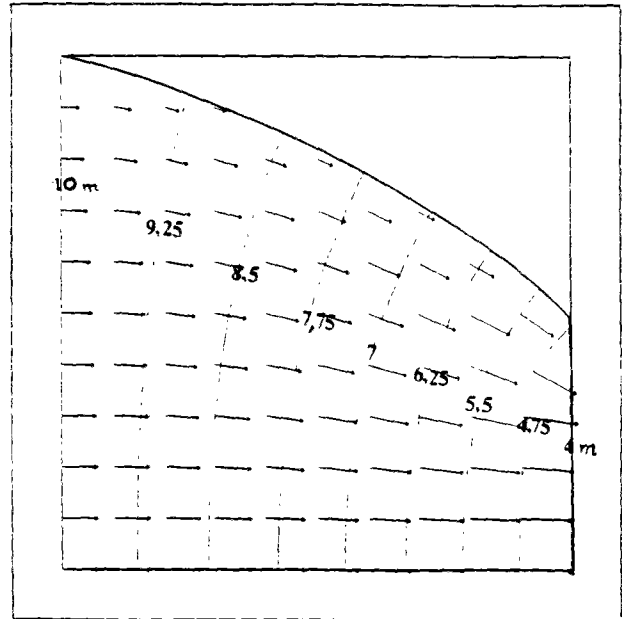
Une étude paramétrique a montré que, pour une bonne plage du paramètre B_1 (terme auquel le modèle est le plus sensible puisqu'il traduit la rapidité de décroissance de la perméabilité en fonction de la succion), on obtient pratiquement le même écoulement. Les résultats numériques sont portés sur les figures 2.10 et 2.11.



a- Maillage et conditions aux limites

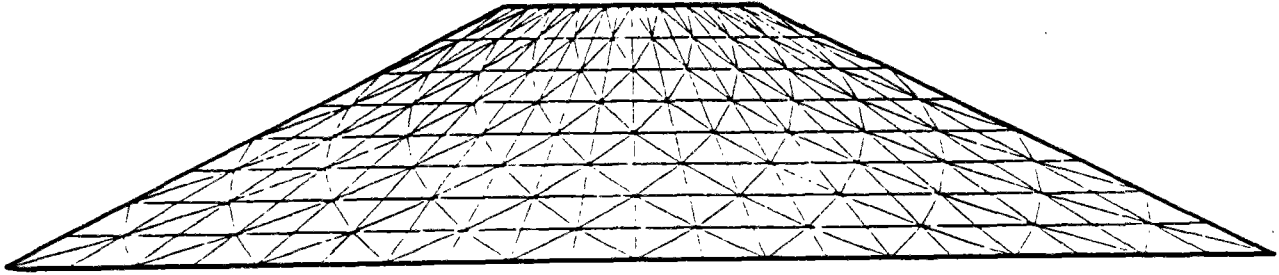


b- Calcul à l'aide de NSAT
 $A_1 = 0,1$ et $B_1 = 3$

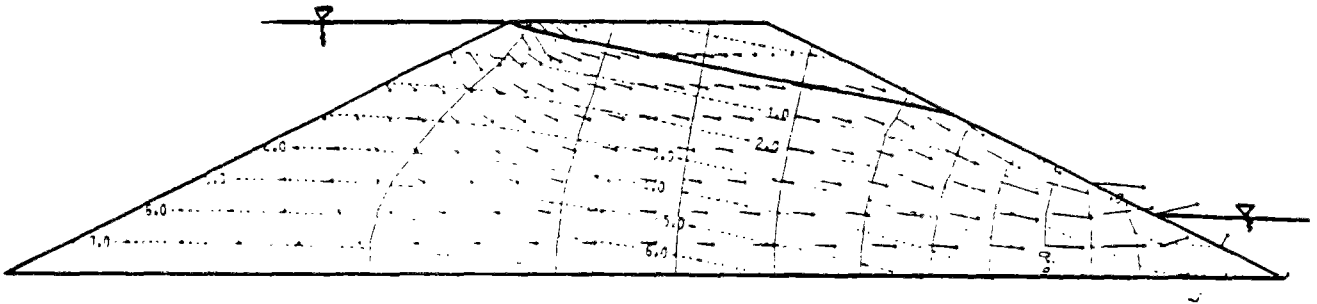


c- Calcul à l'aide de SURF

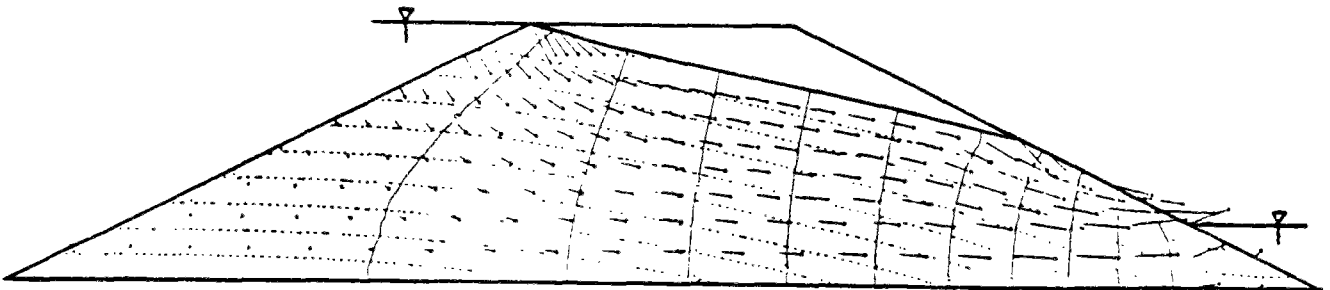
Fig. 2.10 Ecoulement permanent à travers un carré homogène. Equipotentielles et vitesses



a- Maillage



b- Calcul à l'aide de NSAT
 $A_1 = 3.10^6$ et $B_1 = 4,5$



c- Calcul à l'aide de SURF

Fig. 2.11 Ecoulement permanent à travers un barrage homogène. Equipotentiellles, équipressions et vitesses

2.4.3. Cas du régime transitoire

Lorsqu'il s'agit du régime transitoire, aucune comparaison entre les modules n'est possible. SURF en effet ne traite que les problèmes stationnaires. Dans le but de tester la capacité du module NSAT à calculer les écoulements à surface libre transitoire, on a mis au point un modèle analytique monodimensionnel simple.

2.4.3.1. Modèle analytique de surface libre transitoire

Considérons une colonne de sol où la cote de la nappe est initialement au niveau $z_L(0)$, et qui est brusquement soumise à une charge hydraulique $H(t)$ ($t > 0$) appliquée à sa base inférieure (fig. 2.12). On se propose de calculer à tout instant le niveau de la nappe $z_L(t)$.

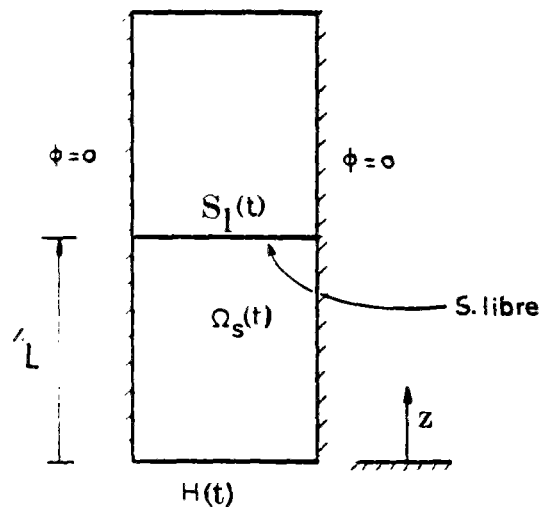


Fig. 2.12 Modèle de surface libre transitoire
Conditions aux limites du test

Mise en équations du problème.

Dans le domaine $\Omega_s(t)$ défini par $[0 \leq z \leq z_L(t)]$, on a :

$$\Delta h = 0, \quad (2.35)$$

$$z = 0, \quad h(0,t) = H(t). \quad (2.36)$$

Sur la frontière $S_L(t)$, la surface libre est une ligne isobarique :

$$z = z_L, \quad h[z_L(t), t] = z_L(t) = z. \quad (2.37)$$

D'autre part, la cinématique de la surface libre vérifie sur $S_L(t)$:

$$n \dot{z}_L(t) = -k_{sat} \frac{\partial h}{\partial z} [z_L(t), t]. \quad (2.38)$$

avec :

n - porosité,

k_{sat} - perméabilité à saturation.

Cette dernière équation traduit la conservation du volume d'eau écoulé entre les instants t et $t+dt$.

Les équations (2.35), (2.36) et (2.37) permettent d'obtenir la charge hydraulique en fonction de l'inconnue $z_L(t)$:

$$h(z,t) = \frac{z}{z_L(t)} [z_L(t) - H(t)] + H(t). \quad (2.39)$$

Les équations (2.38) et (2.39) donnent le système différentiel que doit vérifier à tout instant la cote de la surface libre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{z_L dz_L}{H(t) - z_L(t)} = \frac{k_{sat}}{n} dt \\ z_L(0) \text{ donnée (état initial de la cote)} \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Cas où la charge imposée est constante

Supposons maintenant que la charge imposée à la base de la colonne est constante : $H(t) = H_0$. Si de plus $z_L(0) = 0$, alors l'intégration du système différentiel donne implicitement $z_L(t)$ sous la forme :

$$H_0 \ln \frac{H_0}{H_0 - z_L(t)} - z_L(t) = \frac{k_{sat}}{n} t. \quad (2.41)$$

L'application d'un procédé itératif, du type point fixe par exemple, suffit pour résoudre cette équation pour un instant t donné.

En posant $x = z_L/H_0$, on doit résoudre :

$$x = 1 - \exp \left[- \left(x + \frac{k_{sat}}{H_0 n} t \right) \right] \quad (2.42)$$

d'où l'algorithme $x_{n+1} = F(x_n)$ avec $F(x) = 1 - \exp [-(x + T)]$ où $T = k_{sat}t / nH_0$, donnée du problème. Cet algorithme converge bien puisque $F(x)$ vérifie, pour tout x , $|F'(x)| < 1$.

Jeu de données du test numérique

Les données hydrauliques du jeu de données NSAT servant de test sont résumées par le tableau 2.5. Le maillage est représenté sur la figure 2.13 et ses caractéristiques numériques sont consignées dans le tableau 2.6. La finesse du maillage doit être adaptée au problème étudié, pour assurer la précision des calculs. Choisisssant la charge hydraulique imposée égale à la hauteur de la colonne (1 m), la dimension d'un élément doit être comparable à la valeur caractéristique de la succion (en m). Les conditions aux limites sont représentées sur la figure 2.12.

Tableau 2.5 Données hydrauliques introduites dans le calcul par éléments finis (NSAT)

k_x (m/j)	k_y (m/j)	k_{xy} (m/j)	θ_{sat}	A_1	B_1	A_2	B_2	E
1	1	0	1	10^{-3}	2	10^{-3}	2	0



Fig. 2.13 Maillage utilisé pour le test de surface libre transitoire

Tableau 2.6 Caractéristiques numériques du maillage

Nombre de noeuds	102
Nombre d'éléments	50
Type d'éléments	quadrilatère à 4 noeuds

Comparaison des résultats analytiques et numériques

Une étude paramétrique a été effectuée pour essayer de dégager une méthode systématique d'obtention d'écoulements à surface libre transitoire à travers les courbes $k_p(p)$ et $c(p)$.

On a d'abord tracé la courbe d'évolution de la cote de la surface libre en fonction du temps à partir du calcul analytique. On voit clairement, comme c'était prévisible, que le niveau de la nappe croît pour prendre la valeur finale (régime permanent correspondant à la saturation complète de la colonne) de la charge imposée H_0 (fig. 2.14).

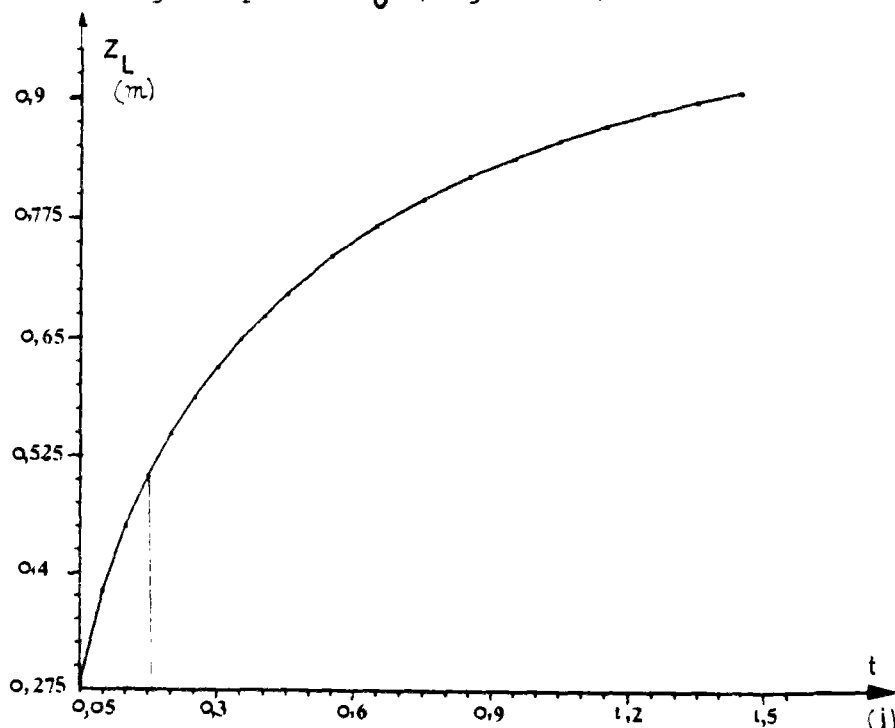


Fig. 2.14 Evolution de la cote de la surface libre en fonction du temps. Résultats du calcul analytique

L'équation (2.39) permet alors de déterminer, dans les limites de sa validité (la cote de la surface libre doit au moins dépasser la cote du point envisagé), la charge hydraulique analytique pour tout point et à chaque instant. Deux points correspondant à $z = 0,2$ m et $z = 0,5$ m sont étudiés. Pour préciser le domaine de validité de la charge en ces deux points, on détermine le temps à partir duquel $z_L(t)$ aura dépassé 0,2 m et 0,5 m, temps donnés par la variation du niveau de la nappe en fonction du temps. Il correspond respectivement pour $z = 0,2$ m et $z = 0,5$ m à $t = 0,05$ j et 0,15 j (fig. 2.14). A partir de ces deux instants, l'évolution temporelle de la charge hydraulique acquiert un sens (fig. 2.15 a).

On effectue ensuite l'étude paramétrique à la lumière des résultats analytiques. Pour cela, on augmente de 2 à 5 les valeurs des paramètres B_1 et B_2 (fig. 1.24) pour simuler une décroissance rapide de la teneur en eau et de la perméabilité, théoriquement favorable. D'autre part, les deux autres paramètres A_1 et A_2 (fig. 1.24) sont calculés de la façon suivante : pour B_1 et B_2 donnés et pour une succion égale à la dimension caractéristique de l'élément fini, on se fixe une certaine proportion de la teneur en eau (θ/θ_{sat}) et de la perméabilité (k_r).

L'étude paramétrique en éléments finis a montré qu'une bonne convergence n'a été possible que pour des valeurs relativement faibles des paramètres et que, lorsque les calculs convergent, il y a parfaite concordance qualitative et une estimation proche des valeurs obtenues par le calcul analytique du niveau de la nappe et de la charge hydraulique (fig 2.15 a et b). On constate cependant l'effet des capillarités dans les résultats du calcul par le module NSAT, qui semble "freiner" la saturation, conduisant à des valeurs de la charge hydraulique légèrement inférieures à celles calculées analytiquement.

Afin d'améliorer les résultats numériques et la convergence des calculs, on a modifié un peu l'allure de la courbe $c(p)$. En effet, sa variation par rapport à p , telle qu'elle était dans NSAT, semble, sur un plan quantitatif (fig. 2.15 b), amplifier l'influence de la zone non-saturée et, sur un plan qualitatif, occasionner des oscillations numériques importantes, provoquant parfois la divergence du processus itératif.

Modification de la courbe $c(p)$ et comparaison des résultats

Des études expérimentales, que l'on a déjà évoquées (chapitre 1, § 1.2.3), ont montré que les distributions telles que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{A}{A + (-x)^B} & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{array} \right.$$

sont bien adaptées aux variations de la perméabilité relative et de la teneur en eau (θ / θ_{sat}) en fonction de la succion qui s'établit dans les écoulements non-saturés en présence ou non de surface libre. Il semble même qu'on peut étendre ces courbes à des problèmes plus généraux de changement de phase tels que le gel des sols, la thermique, etc.

Cependant, la teneur en eau n'intervient formellement dans l'équation de Richards que par l'intermédiaire de sa dérivée, définie comme la capacité capillaire $c(p)$. Or, ces courbes possèdent un point d'inflexion qui fait que le maximum de la capacité capillaire se trouve relativement loin de la surface libre ($p=0$). Il en résulte une nette différence avec l'approche limitant l'écoulement à la saturation qui, elle, fait que l'emmagasinement est essentiellement localisé sur la surface libre (en effet, si l'on suppose que la teneur en eau chute brutalement pour $p < 0$, alors $c(p)$ est théoriquement la distribution de Dirac).

Pour limiter, en conséquence, les écarts entre les résultats analytiques et numériques et améliorer éventuellement la convergence des calculs, on a légèrement modifié la courbe $c(p)$. Ce choix est guidé par une double condition que doit satisfaire la fonction cherchée :

1. $c(p)$ doit décroître rapidement en fonction de p .
2. En plus, elle doit vérifier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c(p) dp = \theta_{sat} \quad (2.43)$$

On a pensé, sans prétendre à l'unicité du choix, qu'une loi exponentielle pourrait convenir :

$$c(p) = \theta_{sat} \exp(-p^2/\beta^2) / \beta \sqrt{\pi} \quad (2.44)$$

avec β paramètre du modèle.

L'étude paramétrique effectuée a montré que, non seulement la convergence était améliorée, mais aussi que l'on pouvait obtenir une meilleure estimation des résultats analytiques (fig. 2.15 c).

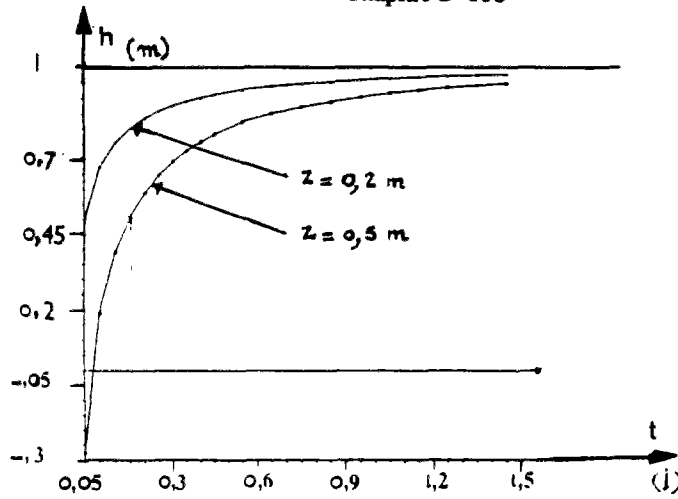


Fig. 2.15.a Evolution de la charge hydraulique en fonction du temps à $z = 0,2$ m et $z = 0,5$ m (résultats du calcul analytique)

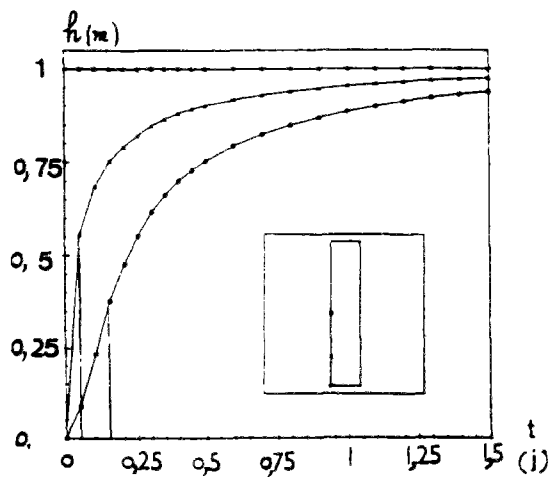


Fig. 2.15.b Evolution de la charge hydraulique en fonction du temps à $z = 0,2$ m et $z = 0,5$ m [Calcul numérique avec $c(p)$ de la figure 1.24]

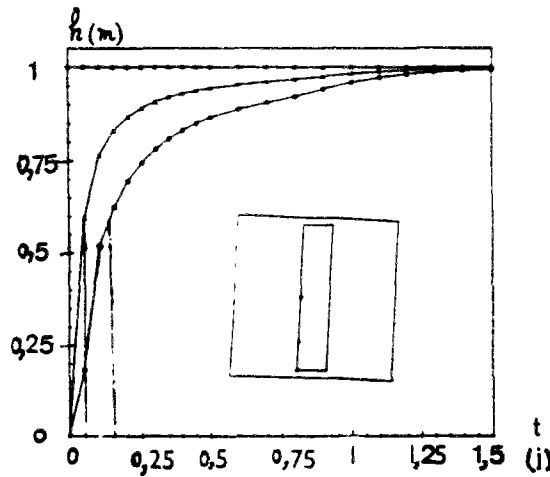


Fig. 2.15.c Evolution de la charge hydraulique en fonction du temps à $z = 0,2$ m et $z = 0,5$ m [Calcul numérique avec $c(p) = \theta_{sub_e} \frac{e^{-r^2/r^2}}{\rho \sqrt{\pi t}}$]

Fig. 2.15 Comparaison entre solutions analytique et numériques

2.5. Conclusion

Ces travaux complémentaires nous ont permis d'abord de nous familiariser avec les modules SURF, NSAT et CSOL du code de calculs par éléments finis CESAR.

De plus, l'introduction du potentiel gravitaire dans les équations classiques de la consolidation nous a permis de tenir compte, dans le module CSOL, d'un état d'équilibre initial quelconque. Cet état sera nécessaire pour l'étude envisagée de l'élastoplasticité des sols mous. D'autre part, la prise en compte du soulèvement hydrostatique, chargement de "couplage" constant dans le cas des sols saturés, variable dans le cas contraire, laisse présager une meilleure évaluation de l'état réel des contraintes et des pressions dans les barrages en terre où s'établit en général l'écoulement à surface libre.

Ensuite, l'introduction d'une éventuelle incompressibilité (déformation volumique constante ou nulle) de certains éléments dans un calcul de consolidation peut constituer une extension des possibilités de modélisation du même module. On peut espérer de cette option du programme une plus grande compréhension du comportement hydraulique des sols multicouches (sols où il y a, suivant la couche, prépondérance ou non du phénomène de consolidation) et de certains géotextiles (où les déformations se produisent instantanément).

Ces perfectionnements sont effectués dans une version développée du module CSOL devenu CSLI (consolidation linéaire) dans la nouvelle version officielle de CESAR. Cette version du programme est déjà mise en exploitation.

Enfin, nous avons testé NSAT et vu sa grande capacité à modéliser les écoulements non-saturés en présence de surface libre. A l'aide de ce module et sur la base de modèles analytiques de surface libre et de cas types de barrages, on a effectué une étude numérique qui montre que l'approche limitant l'écoulement à la saturation peut être considérée comme une particularisation de celle qui tient compte de l'écoulement dans la frange capillaire au-dessus de la surface libre.

Ces éléments de départ nous seront fort utiles pour la formulation d'un modèle d'écoulement à surface libre pour les milieux poreux déformables, objet du prochain chapitre.

**Chapitre 3 - CONSOLIDATION A SURFACE LIBRE
DES SOLS ANISOTROPES**

CONSOLIDATION A SURFACE LIBRE DES SOLS ELASTIQUES HOMOGENES ANISOTROPES

3.1. Introduction

Ce chapitre traite du couplage de la consolidation des sols et des écoulements à surface libre. De la modélisation de ce couplage naît le concept de **consolidation à surface libre**. Par ce concept, nous associons principalement le **phénomène de consolidation**, bien qu'il est plus complexe, à l'**écoulement** qui lui est étroitement lié.

Pour ne pas interférer avec des travaux de recherche engagés en même temps que le nôtre, sur la consolidation des sols non-saturés, nous envisageons principalement, dans cette étude, les écoulements au sein desquels peut s'établir **une surface libre**.

Le traitement des écoulements à surface libre transitoire couplés avec l'hypothèse fondamentale de déformabilité du sol est jusqu'à présent mal maîtrisé sur les plans théorique et numérique. La complexité théorique résulte de la difficulté de modéliser la transition du couplage mécanique-hydraulique dans un problème de surface libre où se développent (chapitres 1 et 2) une zone saturée et une zone non-saturée au sein d'un même écoulement. Sur le plan numérique, la difficulté réside dans la *non-linéarité* du problème et la *stratégie de résolution numérique adaptée* à son traitement.

Pour résoudre ce problème, nous proposons un modèle mathématique visant à mettre au point **des procédures itératives de recherche de surface libre transitoire en milieu poreux déformable**. La cinématique de la surface libre y est décrite à travers **un système d'équations unique** valable aussi bien dans le domaine saturé que dans le domaine non-saturé.

Après une formulation théorique prenant en compte les trois principales formes d'emmagasinement hydraulique dans le milieu poreux (aptitude qu'a le milieu pour stocker ou libérer son eau interstitielle), on définit *un problème approché* conduisant à résoudre un système matriciel différentiel non-linéaire.

La résolution de ce système matriciel fait appel à la mise au point d'**un algorithme itératif transitoire**, algorithme que l'on valide par des tests numériques appropriés.

3.2. Hypothèses du modèle

Les hypothèses du modèle sont les suivantes :

- sol élastique homogène anisotrope, (H.1)
- petites déformations, (H.2)
- incompressibilité des grains solides, (H.3)
- écoulement de Darcy, (H.4)
- découplage mécanique-hydraulique au-delà de $S_L(t)$ (fig. 3.1). (H.5)

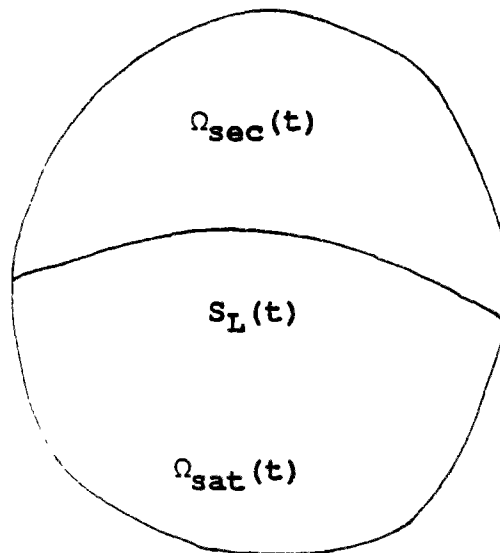


Fig. 3.1 Partition du domaine en un domaine saturé Ω_{sat} et un domaine sec Ω_{sec} , séparés par la surface libre S_L .

De toutes ces hypothèses, la dernière est sans doute la plus restrictive puisqu'elle suppose implicitement que la surface libre est la limite supérieure du domaine de l'écoulement. On sait en effet (chapitre 2) que ce n'est pas l'unique approche de modélisation envisageable du problème de surface libre. On a déjà vu les limites des différentes approches de prise en compte de la non-saturation. Mais, dans le cas présent, s'ajoute une difficulté supplémentaire qui est la déformabilité du squelette du sol. Celle-ci pose le délicat problème de la contrainte effective dans la zone non-saturée ou plus exactement le problème du couplage mécanique-hydraulique au-delà de la surface libre.

Pour éviter les controverses sur le principe de la contrainte effective du modèle de **Bishop** (1963), que l'on a déjà évoquées (chapitre 1), nous avons, à travers l'hypothèse (H.5), idéalisé la prise en compte de la non-saturation en limitant l'écoulement à la zone saturée.

Trois considérations pourraient justifier ce choix :

1. Si l'on veut tenir compte d'un écoulement monophasique au-dessus de la surface libre dans le domaine non-saturé, il faut dans ce cas, par souci de cohérence, introduire la contrainte de **Bishop** ou toute autre relation de dépendance entre les tenseurs des contraintes et des pressions interstitielles. C'est, à notre sens, l'esprit même de cette modélisation de l'écoulement monophasique. Or, cette "loi du comportement" du couplage mécanique-hydraulique a été largement critiqué sur bien des aspects auxquels nous ne reviendrons pas (chapitre 1, § 1.3). Une démarche possible consisterait à tenir compte de l'écoulement de l'air dès qu'on dépasse la surface libre. Cette modélisation de l'écoulement biphasique donnerait, peut-être, l'avantage de traiter les tenseurs des contraintes totales et des pressions interstitielles en variables indépendantes. Cependant, cette démarche ne manquerait pas de soulever certaines questions qui restent encore posées dans la modélisation de la consolidation des sols non-saturés (chapitre 1, § 1.3). D'autre part, il est rare de trouver des modèles de consolidation des sols non-saturés prenant en compte la présence d'une surface libre et l'évolution de la zone saturée. Enfin, on a déjà vu (chapitre 1, § 1.2.2) que les approches polyphasiques sont généralement peu utilisés dans des applications géotechniques usuelles telles que remblais et barrages.

2. Il semble prouvé expérimentalement pour plusieurs variétés de sols que la perméabilité décroît rapidement en fonction du degré de saturation. Ajoutons à cela que les pressions capillaires (tensions superficielles) effectivement non négligeables du point de vue hydraulique, n'agiraient que sur une "zone mouillée" de la structure et ne produiraient pas, du point de vue mécanique, le même effet différé de déformations dans la zone au-dessus de la surface libre qu'auraient produit les pressions "neutres" (pressions volumiques) dans la zone saturée. On peut donc concevoir physiquement, en première approximation, qu'au-delà de la surface libre le comportement mécanique du squelette se rapprocherait sensiblement d'un comportement de massif sec beaucoup plus que de celui d'un massif saturé.

3. Les modules de consolidation des sols saturés dans CESAR sont actuellement fondés sur une analyse en contraintes effectives. L'approche de prise en compte de la non-saturation proposée constitue une étape logique d'un développement progressif des modules existants.

3.3. Formulation théorique du problème de consolidation à surface libre

3.3.1. Equations relatives aux déformations du squelette

Compte tenu de l'hypothèse (H.5) et prenant la pression atmosphérique comme origine des pressions, le principe de Terzaghi s'écrit:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma'}} - p \underline{\underline{I}} \quad \text{si } p \geq 0, \quad (3.1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma'}} \quad \text{si } p < 0, \quad (3.2)$$

avec $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\sigma'}}$ respectivement tenseur des contraintes totales et tenseur des contraintes effectives et p pression interstitielle.

La loi de comportement du squelette permet de relier les tenseurs des contraintes effectives et des déformations par la relation suivante [hypothèse (H.1)] :

$$\underline{\underline{\sigma'}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\sigma}}_0 \quad (3.3)$$

L'hypothèse des petites déformations (H.2) se traduit par la relation linéaire suivante entre le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et le déplacement \vec{u} :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{grad}}} \vec{u} + \underline{\underline{\text{grad}}}^T \vec{u}). \quad (3.4)$$

L'équation de l'équilibre de la mécanique des milieux continus a la forme :

$$\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f} = \vec{0} \quad (3.5)$$

Si l'on introduit la **distribution d'Heaviside** $Y(p)$, les équations (3.1), (3.2), (3.3) et (3.5) permettent d'écrire dans le **domaine fixe** :

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}}' - [Y(p)\overrightarrow{\text{grad } p}] + \vec{f} = 0, \quad (3.6)$$

ou encore :

$$\sigma'_{i,j,j} - [Y(p)p]_{,j} \delta_{ij} + f_i = 0. \quad (3.6a)$$

avec :

$$\sigma'_{ij} = E_{ij}^{kl} \varepsilon_{kl} + \sigma'_{0ij}. \quad (3.7)$$

Dans la suite, nous appelons les équations (3.6) et (3.7) "équations relatives aux déformations du squelette".

3.3.2. Equations relatives à l'écoulement du fluide interstitiel

Les équations relatives à l'écoulement du fluide interstitiel, du fait de l'hypothèse (H.5), n'ont un sens que dans le domaine saturé, domaine défini par la relation :

$$\Omega_{\text{sat}}(t) = \left(\overline{\Omega}_{\text{sec}}(t) \right)_{\Omega} \quad [\text{fig. 3.1}].$$

Si l'on oriente la verticale vers le haut et si l'on néglige le terme dynamique de la pression $v^2/2g$, l'écoulement étant à petit nombre de Reynolds [hypothèse (H.4)], la charge hydraulique s'écrit par définition :

$$h = \frac{p}{\gamma_w} + z, \quad (3.8)$$

La loi de Darcy [hypothèse (H.4)] permet de relier la vitesse v à la charge hydraulique suivant la relation :

$$\vec{v} = - k_{\text{sat}} \overrightarrow{\text{grad } h} \quad (3.9)$$

Enfin, l'équation de conservation de la masse du fluide interstitiel permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho n) + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0. \quad (3.10)$$

Si l'on néglige les variations spatiales de la masse volumique du fluide par rapport à ses variations dans le temps [$\vec{u} \cdot \vec{\text{grad}} \rho$ devant $\partial \rho / \partial t$], alors la combinaison des équations (3.9) et (3.10) permet d'écrire :

$$\text{div} \left[k_{\text{sat}} \vec{\text{grad}} h \right] = - \frac{n}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial t},$$

ou encore :

$$\text{div} \left[k_{\text{sat}} \vec{\text{grad}} h \right] = n \alpha_w \gamma_w \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\text{tr } \epsilon). \quad (3.13)$$

(1) (2)

Le terme (1) représente la **compressibilité du fluide** tandis que terme (2) représente la **compressibilité du squelette**.

Il reste à écrire les équations relatives à la frontière $S_L(t)$.

Par définition, la surface libre est une surface isobarique. Celle-ci vérifie l'équation :

$$h[x, z_L(t), t] = z_L(x, t) = z. \quad (3.11)$$

D'autre part, la surface libre est une surface matérielle qui se déforme dans le temps. Il en résulte l'équation suivante :

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad \text{où} \quad F = h[x, z_L(t), t] - z_L(x, t). \quad (3.12)$$

Moyennant une hypothèse portant sur la cinématique de la surface libre (chapitre 1, § 1.2.2.3) ou -ce qui revient au même- sur le volume d'eau écoulé pendant les remontées ou les

descentes de la surface libre, on peut établir l'équation du mouvement de la surface libre. Mais, on a vu, sur le plan numérique (chapitre 1, § 1.2.3), les limites de ce formalisme. En effet, la prise en compte d'un flux d'eau sur une frontière mobile et inconnue a priori, est un problème numériquement délicat. L'idée est donc de tenir compte de l'hypothèse (H.5) directement dans l'équation de continuité par l'intermédiaire de distributions mathématiques appropriées.

Exprimons l'équation (3.13) dans le domaine fixe . Pour cela, on introduit la **distribution de Dirac** et on écrit :

$$\operatorname{div} \left[\gamma(p) k_{\text{sat}} \overrightarrow{\operatorname{grad} h} \right] = \gamma(p) \left[n a_w \gamma_w \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{tr} \varepsilon) \right] + \gamma_w \theta_{\text{sat}} \delta(p) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.14)$$

(I) (II)

Il convient de remarquer que cette dernière équation est valable dans le domaine $\Omega_{\text{sat}}(t)$ où elle n'est autre que l'équation (3.13), équation générale régissant les écoulements dans les milieux poreux déformables. Elle perd toute signification physique dans le domaine $\Omega_{\text{sec}}(t)$ où elle reste néanmoins identiquement vérifiée. Elle offre, en outre, l'avantage de représenter la dynamique de la surface libre, dynamique qui se traduit par un emmagasinement localisé sur $S_L(t)$ du fait de la chute brutale assignée à la teneur en eau au passage de cette surface (**terme II**). Dans le terme (II), devrait naturellement apparaître la porosité. Mais il semble que les volumes d'eau échangés s'effectuent avec une teneur en eau à saturation légèrement inférieure à la porosité.

En remplaçant les équations (3.9), (3.11), (3.12) et (3.13) par la seule équation (3.14), on obtient un système unique valable dans le domaine fixe Ω , contournant le problème délicat des frontières mobiles $\Omega_{\text{sat}}(t)$, $\Omega_{\text{sec}}(t)$ et $S_L(t)$. Ce faisant, on répartit dans le volume le débit sortant de la surface libre, celle-ci étant alors traitée tout simplement comme une ligne isobarique où règne la pression atmosphérique, prise en général comme origine des pressions.

Ainsi le problème de consolidation à surface libre des sols élastiques anisotropes consiste à résoudre dans le domaine Ω , le problème (P) :

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma'}} - \left[Y(p) \overrightarrow{\text{grad } p} \right] + \vec{f} = \vec{0}$$

$$\underline{\underline{\sigma'}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\sigma'}}_0$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\text{grad } u} + \overrightarrow{\text{grad } u}^T \right) \quad (3.15)$$

$$\text{div} \left[Y(p) \underline{\underline{k}}_{\text{sat}} \overrightarrow{\text{grad } h} \right] = Y(p) \left[n a_w \gamma_w \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \right] + \gamma_w \theta_{\text{sat}} \delta(p) \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$h = \frac{p}{\gamma_w} + z$$

- $\underline{\underline{\sigma'}}$ - tenseur des contraintes effectives,
- $\underline{\underline{\varepsilon}}$ - tenseur des déformations,
- $\underline{\underline{I}}$ - tenseur unité,
- $\underline{\underline{k}}_{\text{sat}}$ - tenseur des perméabilités,
- $\underline{\underline{E}}$ - tenseur d'élasticité,
- $\underline{\underline{\sigma'}}_0$ - champ de contraintes effectives initial donné,
- \vec{f} - forces volumiques,
- h - charge hydraulique,
- γ_w - poids volumique du fluide,
- z - cote du point courant,
- n - porosité,
- a_w - compressibilité du fluide,
- θ_{sat} - teneur en eau volumique à saturation,
- $Y(p)$ - distribution d'Heaviside,
- $\delta(p)$ - distribution de Dirac.

On appelle problème approché (\bar{P}), le problème suivant :

$$\begin{aligned}
 \text{div } \underline{\underline{\sigma'}} - \left[\bar{\gamma}(p) \overrightarrow{\text{grad } p} \right] + \vec{f} &= \vec{0} \\
 \underline{\underline{\sigma'}} &= E \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\sigma'}}_0 \\
 \underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\text{grad } u} + \overrightarrow{\text{grad } u}^T \right) \\
 \text{div} \left[\bar{\gamma}(p) k_{\text{sat}} \overrightarrow{\text{grad } h} \right] &= \gamma_w \left[a_w^* \bar{\gamma}(p) + \bar{c}(p) \right] \frac{\partial h}{\partial t} + \bar{\gamma}(p) \frac{\partial}{\partial t} (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \\
 h &= \frac{p}{\gamma_w} + z \\
 a_w^* &= n a_w \\
 \bar{c}(p) &= \theta_{\text{sat}} \bar{\delta}(p)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

auquel on ajoute les conditions aux limites illustrées par la figure 3.2 et les conditions initiales portant sur la charge hydraulique et le déplacement.

3.4. Cas particuliers

Le modèle qu'on vient de décrire réalise la synthèse des modèles d'écoulements qui sont à la base des modules NSAT et CSLI de CESAR. Ces derniers se présentent comme des cas particuliers du nouveau modèle.

3.4.1. Milieux indéformables

Lorsque le milieu poreux est indéformable, on a en particulier :

$$\delta_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = 0.$$

Dans ce cas, l'équation (3.16) devient :

$$\operatorname{div} \left[\bar{Y}(p) k_{\text{sat}} \overrightarrow{\operatorname{grad} h} \right] = \gamma_w \left[a_w' \bar{Y}(p) + \bar{c}(p) \right] \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.17)$$

On voit que l'équation précédente est l'équation générale régissant les écoulements en milieux poreux non-saturés, dans laquelle $\bar{Y}(p)$ s'identifie théoriquement à la perméabilité relative $k_r(p)$ et $\bar{c}(p)$ à la capacité capillaire $c(p)$. De plus, si l'on choisit les mêmes courbes de variations pour $\bar{Y}(p)$ et $k_r(p)$ d'une part et, $\bar{c}(p)$ et $c(p)$ d'autre part, on résout un **problème du type NSAT généralisé** (on tient compte, en plus des hypothèses classiques du module NSAT, de la compressibilité du fluide interstitiel).

L'équation (3.17) trouve de nombreuses applications en génie civil (barrages rigides), en hydrogéologie (estimation des ressources en eau des zones aquifères, calcul des nappes phréatiques peu profondes), en hydrologie (couplage entre les eaux de surface et les eaux souterraines) et en agronomie (besoins en eau des plantes et irrigation des terres).

3.4.2. Milieux déformables saturés

Lorsqu'il y a saturation complète on a :

$$\bar{Y}(p) = 1 \quad \text{et} \quad \bar{c}(p) = 0.$$

Il en résulte que l'équation (3.16) s'identifie parfaitement à l'équation (3.13) dans tout le domaine fixe. Dans ce cas, il s'agit de résoudre un **problème du type CSLI** (nouvelle version du module de calcul de consolidation des sols élastiques saturés CSOL de CESAR). Ce type de problèmes trouve, pour sa part, diverses applications en mécanique des sols (consolidation), ou encore en mécanique des roches (couplage mécanique-hydraulique) et en hydrogéologie également (calcul des nappes artésiennes profondes).

3.5. Résolution du problème approché

3.5.1. Formulation variationnelle

3.5.1.1. Déformations du squelette du sol

Pour tout champ de déplacement virtuel admissible $\delta \bar{\mathbf{u}}$ (c'est-à-dire vérifiant $\delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ sur S_u) et par intégration des équations (3.5) et (3.15) dans le domaine Ω et sur la surface S_σ , il vient grâce au principe des travaux virtuels :

$$\int_{\Omega} \left\{ -\sigma'_{1,j,j} + \left[\bar{\gamma}(\rho) p \delta_{1,j} \right]_{,j} - f_1 \right\} \delta u_1 d\Omega + \int_{S_\sigma} (\sigma'_{1,j} n_j - \bar{T}_1) \delta u_1 dS = 0.$$

Compte tenu de l'équation (3.15), on a aussi :

$$\int_{\Omega} \left\{ -\sigma'_{1,j,j} + \left[\bar{\gamma}(\rho) p \delta_{1,j} \right]_{,j} - f_1 \right\} \delta u_1 d\Omega + \int_{S_\sigma} (\sigma'_{1,j} n_j - \bar{T}_1) \delta u_1 dS - \int_{S_\sigma} \bar{\gamma}(\rho) p \delta_{1,j} n_j \delta u_1 dS = 0,$$

ou encore en intégrant par partie :

$$\int_{\Omega} \sigma'_{1,j} \delta u_{1,j} d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\gamma}(\rho) p \delta_{1,j} \delta u_{1,j} d\Omega - \int_{S_\sigma} \bar{T}_1 \delta u_1 dS - \int_{\Omega} f_1 \delta u_1 d\Omega = 0. \quad (3.18)$$

Les équations (3.3), (3.4), (3.7), (3.8) et (3.18) permettent d'obtenir la variation de la fonctionnelle relative aux déformations du squelette du sol :

$$\int_{\Omega} \varepsilon^T \bar{E} \varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} \gamma_w \bar{\gamma}(\rho) h \delta \theta d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_w \bar{\gamma}(\rho) z \delta \theta d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_0^T \delta \varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} f^T \delta u d\Omega - \int_{S_\sigma} \bar{T}^T \delta u dS = 0, \quad (3.19)$$

avec les notations matricielles usuelles (chapitre 2).

3.5.1.2. Ecoulement du fluide interstitiel

En multipliant l'équation (3.16) par δh , champ de charge hydraulique virtuellement admissible (c'est-à-dire vérifiant : $\delta h = 0$ sur S_h), et en intégrant par parties dans le domaine Ω et sur la frontière S_ϕ , il vient :

$$\int_{\Omega} \left[\bar{\gamma}(\rho) k_{sat}^{ij} h_{,j} \right]_{,i} \delta h d\Omega = \int_{\Omega} \gamma_w \left[a_w \bar{\gamma}(\rho) + \bar{c}(\rho) \right] \frac{\partial h}{\partial t} \delta h d\Omega +$$

$$\int_{\Omega} \bar{\gamma}(\rho) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \delta_{ij} \delta h d\Omega + \int_{S_\phi} \left[\bar{\gamma}(\rho) k_{sat}^{ij} h_{,j} n_i + \phi \right] \delta h dS = 0.$$

Or, on a :

$$\int_{\Omega} \left[\bar{\gamma}(\rho) k_{sat}^{ij} h_{,j} \right]_{,i} \delta h d\Omega - \int_{S_\phi} \left[\bar{\gamma}(\rho) k_{sat}^{ij} h_{,j} n_i \right] \delta h dS = \int_{\Omega} \left[\bar{\gamma}(\rho) k_{sat}^{ij} h_{,j} \right]_{,i} \delta h_{,i} d\Omega.$$

Après réarrangement, on obtient alors la variation de la fonctionnelle relative à l'écoulement du fluide interstitiel :

$$- \int_{\Omega} \bar{\gamma}(\rho) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \delta_{ij} \delta h d\Omega + \int_{\Omega} \left[\bar{\gamma}(\rho) k_{sat}^{ij} h_{,j} \right]_{,i} \delta h_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} \gamma_w \left[a_w \bar{\gamma}(\rho) + \bar{c}(\rho) \right] \frac{\partial h}{\partial t} \delta h d\Omega -$$

$$\int_{S_\phi} \phi \delta h dS = 0. \tag{3.20}$$

3.5.2. Formulation matricielle du problème approché

3.5.2.1. Déformations du squelette du sol

Après discrétisation de l'espace à partir de l'équation (3.19), on obtient pour chaque élément la formulation matricielle suivante :

$$\mathbf{U}_E \mathbf{R}_E^T \delta \mathbf{U}_E(t) - \mathbf{H}_E^T \mathbf{C}_E^T(\mathbf{h}) \delta \mathbf{U}_E(t) - \mathbf{F}_E^T(\mathbf{h}) \delta \mathbf{U}_E(t) = 0, \tag{3.21}$$

avec pour notations :

$$R_E = \int_E N^{*T} A^T E A N^* dE,$$

$$C_E^T(h) = \int_E \gamma_w \bar{\gamma}(p) N^T B A N^* dE,$$

$$F_E^T(h) = \int_E f^T N dE - \int_E \sigma_0^T A N dE - \int_E \gamma_w \bar{\gamma}(p) Z_E^T N^T B A N^* dE + \int_{S_E} \bar{T}^T N dS_E,$$

E - matrice d'élasticité,

N - matrice des fonctions de base,

N* - matrice formée à partir de la matrice N :

$$\begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix},$$

B - vecteur uniligne [1 1 0],

A - opérateur différentiel défini par la matrice :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

3.5.2.2. Ecoulement du fluide interstitiel

La discrétisation de l'espace en partant de l'équation (3.20), après multiplication par γ_w , donne pour chaque élément de la structure l'équation suivante :

$$\dot{U}_E(t) C_E(h) \delta H_E(t) - H_E^T E_E^T(h) \delta H_E(t) - H_E^T K_E^T(h) \delta H_E(t) + Q_E^T(h) \delta H_E(t) = 0 \quad (3.22)$$

avec pour notations :

$$K_E^T(h) = \int_E \gamma_w \bar{\gamma}(p) N^T K_{sat} N dE,$$

$$E_E^T(h) = \int_E \gamma_w^2 [a_w^* \bar{\gamma}(p) + \bar{c}(p)] N^T N dE,$$

$$Q_E^T(h) = \int_{S_E} \gamma_w \phi(p) N dS_E.$$

3.5.2.3. Système matriciel différentiel

Les équations (3.21) et (3.22) permettent d'écrire, après assemblage des éléments, le système différentiel symétrique non-linéaire que doivent vérifier simultanément le champ de déplacement U et la charge hydraulique H :

$$\begin{cases} R_G U - C_G(H)H = F_G(H) & (3.23) \\ - C_G^T(H)U - K_G(H)H - E_G(H)\dot{H} = - Q_G(H) & (3.24) \end{cases}$$

Sur la base de ce système, on voit clairement que la non-linéarité est d'origine hydraulique. Cette non-linéarité intervient au niveau de la matrice de couplage hydraulique-mécanique, de la matrice des perméabilités et de celle de la compressibilité du fluide. Elle peut agir aussi bien au niveau du chargement, soulèvement hydrostatique par exemple, qu'au niveau des conditions aux limites, surface de suintement en particulier.

Pour résoudre ce système différentiel, une intégration sur le temps s'impose.

3.5.2.4. Intégration dans le temps

Dans la modélisation numérique des problèmes transitoires, l'intégration dans le temps joue un rôle capital puisqu'elle agit directement sur les performances générales des algorithmes (précision des résultats numériques, stabilité des solutions, mode de convergence des processus itératifs, etc.).

Nous avons respecté, dans un premier temps, la tradition de CESAR dans l'adoption du schéma semi-implicite du type Galerkin, réputé adapté aux problèmes linéaires transitoires. Mais la mise en oeuvre sur des jeux de données particuliers de cet algorithme, dans lequel nous avons introduit tout naturellement la non-linéarité hydraulique, a mis en évidence certaines instabilités numériques dans le processus itératif. En particulier, on ne pouvait pas obtenir les écoulements stationnaires à surface libre à partir des écoulements transitoires par particularisation des paramètres dans les jeux de données, ce qui peut se révéler comme une limitation inutile des possibilités des programmes.

Nous avons alors, pour ne pas restreindre la généralité des programmes envisagés, adopté un **schéma d'intégration dans le temps totalement implicite**. On peut montrer en effet (annexe 2) que, contrairement au schéma totalement implicite, la récurrence du schéma semi-implicite de Galerkin introduit une instabilité numérique pour les régimes permanents à surface libre.

Tenant compte de cette dernière remarque, les équations (3.23) et (3.24) deviennent respectivement :

$$R_G U(t+\Delta t) - C_G(H)H(t+\Delta t) = F_G(t+\Delta t)$$

et

$$-C_G^T(H) \frac{\Delta U}{\Delta t} - K_G(H)H(t+\Delta t) - E_G(H) \frac{\Delta H}{\Delta t} = -Q(t+\Delta t).$$

Si l'on multiplie la dernière équation par le produit $\alpha \Delta t$ et si l'on tient compte, en plus, du fait que l'on a :

$$\begin{cases} U(t+\Delta t) = U(t) + \Delta U \\ H(t+\Delta t) = H(t) + \Delta H \end{cases}$$

alors le système à résoudre s'écrit :

$$\begin{bmatrix} R_G & -\alpha C_G(H) \\ -\alpha C_G^T(H) & -\alpha^2 [E_G(H) + \Delta t K_G(H)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ \frac{\Delta H}{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_G & C_G(H) \\ 0 & -\alpha \Delta t K_G(H) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(t) \\ H(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(t+\Delta t) \\ -\alpha \Delta t Q(t+\Delta t) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

La résolution de ce système matriciel non-linéaire nécessite la mise au point d'un algorithme non-linéaire.

3.5.3. Algorithme de résolution

C'est la nature de la non-linéarité qui détermine en principe, l'algorithme à choisir pour son traitement.

Dans le cas présent, il s'agit d'une non-linéarité hydraulique qui n'est en général traitée que par la méthode des rigidités variables, contrairement aux non-linéarités rhéologiques du squelette qui permettent un plus grand choix de résolution (matrice de rigidité tangente, contraintes initiales et déformations initiales).

Classiquement il existe deux méthodes capables de traiter les systèmes d'équations non-linéaires : la méthode du point fixe et la méthode de Newton. L'application de la méthode de Newton au système symétrique précédent provoque la dissymétrie de ce système (la linéarisation par rapport aux inconnues fait apparaître des tenseurs de troisième ordre). Or, la résolution d'un système dissymétrique peut se révéler très chère du point de vue numérique. Chaque itération en effet nécessite l'assemblage, la pénalisation et la triangularisation d'une matrice non symétrique et la résolution du système lui-même.

Pour cette raison et pour d'autres dont, la difficulté de mise en oeuvre, la méthode de Newton ne constitue pas la tradition du traitement des non-linéarités hydrauliques dans le code de calcul par éléments finis CESAR-LCPC.

Pour éviter les inconvénients déjà évoqués et surtout pour conserver la symétrie du problème, on a choisi la méthode du point fixe. Celle-ci, appliquée au système matriciel précédemment décrit, donne le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} R_G & -\alpha C_G(H_1^j) \\ -\alpha C_G^T(H_1^j) & -\alpha^2 [E_G(H_1^j) + \Delta t K_G(H_1^j)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_1^{j+1} \\ \frac{\Delta H_1^{j+1}}{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_G & C_G(H_1^j) \\ 0 & -\alpha \Delta t K_G(H_1^j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1-1} \\ H_{1-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1^j \\ -\alpha \Delta t Q_1^j \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

dans lequel j désigne l'indice de l'itération et i l'indice du pas de temps.

Le système précédent peut aussi s'écrire, tel qu'il est programmé (en variables de Fortran utilisées), sous la forme (condensée comme au chapitre 2) :

$$K_N(VUM_i^J) * VDUM_i^{J+1} = K_M(VUM_i^J) * VUM_{i-1} + VF_i^J, \quad (3.27)$$

où :

$$K_N(VUM_i^J) = \begin{bmatrix} R_G & -\alpha C_G(H_i^J) \\ -\alpha C_G^T(H_i^J) & -\alpha^2 [E_G(H_i^J) + \Delta t K_G(H_i^J)] \end{bmatrix},$$

$$K_M(VUM_i^J) = \begin{bmatrix} -R_G & C_G(H_i^J) \\ 0 & -\alpha \Delta t K_G(H_i^J) \end{bmatrix},$$

$$VDUM_i^{J+1} = \begin{bmatrix} \Delta U_i^{J+1} \\ \frac{\Delta H_i^{J+1}}{\alpha} \end{bmatrix},$$

$$VUM_{i-1} = \begin{bmatrix} U_{i-1} \\ H_{i-1} \end{bmatrix},$$

$$VF_i^J = \begin{bmatrix} F_i^J \\ -\alpha \Delta t Q_i^J \end{bmatrix},$$

La figure 3.4 décrit l'algorithme pas à pas itératif à l'intérieur de chaque pas de temps qui en résulte.

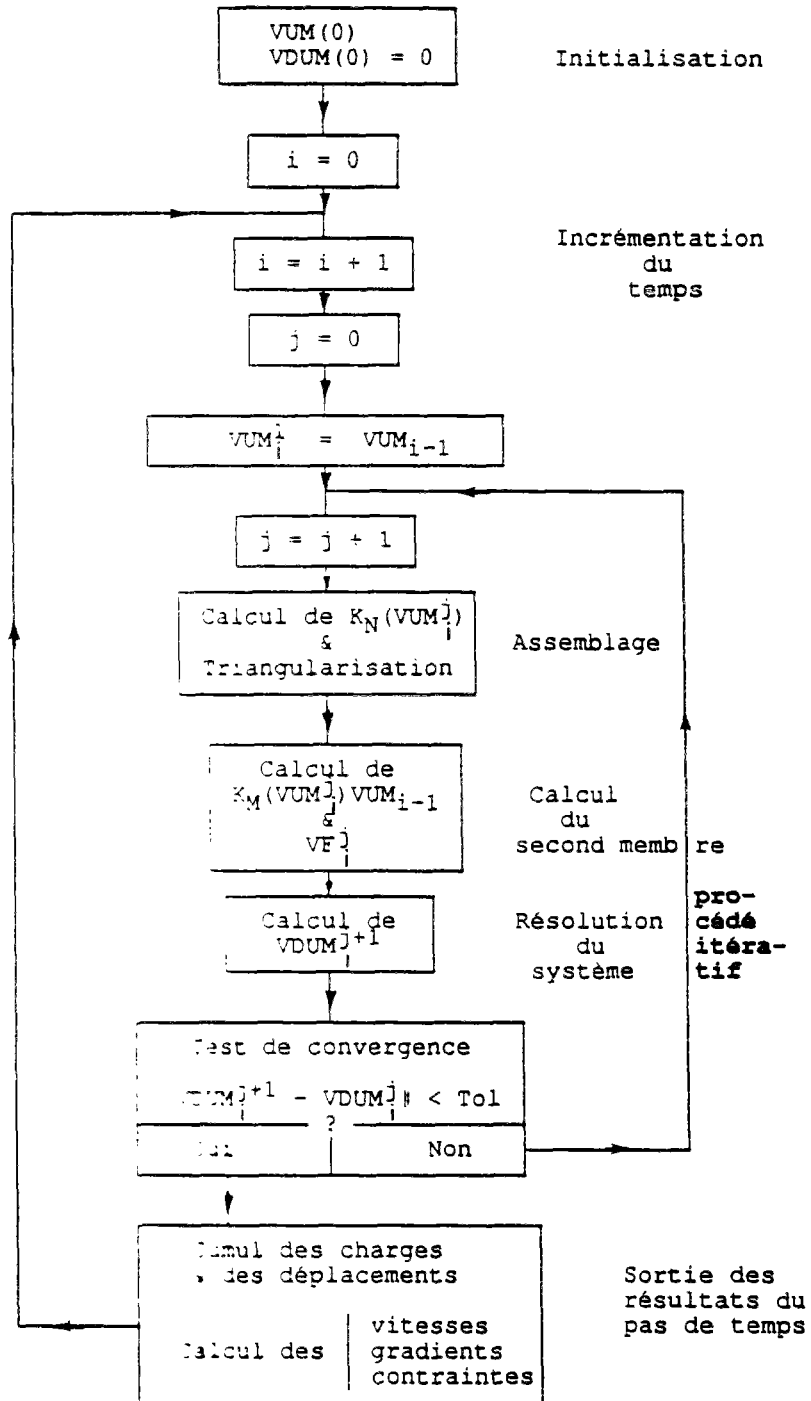


Fig. 3.4 Algorithme de résolution du système matriciel

3.5.4. Traitement numérique des conditions aux limites

Le traitement des conditions aux limites est une question essentielle puisqu'il concerne les applications du modèle aux cas réels et concrets.

Il y a les conditions aux limites classiques comme par exemple, les conditions aux limites du type déplacement ou contraintes imposées, qui ne nécessitent pas de traitements particuliers. Par contre, les conditions aux limites hydrauliques peuvent demander une plus grande attention.

Parmi les conditions hydrauliques, il y a évidemment des conditions aux limites usuelles telles que :

- les **surfaces imperméables**. Ce sont des assises de terrains effectivement imperméables ou des parois étanches (la vitesse reste tangentielle à la paroi) où la condition de flux nul doit être constamment vérifiée. Cela se traduit par une condition de Neumann :

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = v_n = - k \overrightarrow{\text{grad}} h \cdot \vec{n} = 0 ;$$

- les **surfaces drainantes** ou filtrantes. Ce sont des surfaces où les pertes de charges sont négligeables. Ces surfaces équipotentiels vérifient une condition de Dirichlet :

$$h = \text{cste.}$$

Ces types de conditions aux limites usuelles ne font pas appel à des traitements spéciaux.

Il existe cependant des **surfaces** dites **de suintement** [définies comme des zones ruisselantes potentielles permettant, dans un problème classique de surface libre, le raccordement géométrique de la surface libre (inconnue du problème) aux surfaces équipotentiels], dont le traitement exige une méthode numérique adaptée. En effet, le long d'une surface de suintement, les conditions aux limites changent de nature au passage du point de ruissellement, intersection de la surface et de l'équipression correspondant à la pression nulle. Au-dessus du point de ruissellement, on a une condition de flux nul, en dessous, une condition de pression nulle.

Nous avons traité numériquement ce type de conditions aux limites en nous inspirant largement de la méthode déjà introduite dans CESAR au niveau du module NSAT, basée sur un algorithme du type point fixe. Cela veut dire que, lors des itérations permettant l'actualisation des perméabilités, de la compressibilité du fluide et du couplage, les conditions aux limites sont modifiées de la façon qui suit.

première itération

On impose la condition de **flux nul** sur **tous les points** de la surface de suintement.

passage de l'itération j à l'itération j + 1

* Cas des points à condition de **flux nul** à l'itération j :

- si $h > z$, on impose $h = z$;
- si $h \leq z$, on maintient la condition de **flux nul**.

* Cas des points à condition $h = z$ à l'itération j :

- si le **flux** est **rentrant**, on impose la condition de **flux nul** ;
- si le **flux** est **sortant**, on maintient la condition $h = z$.

3.6. Programmation effectuée

La programmation a consisté en la création dans le code de calculs par éléments finis CESAR d'un module à part. Cela veut dire d'une part, **la mise au point d'une nouvelle famille d'éléments finis adaptés au calcul de diffusion non-linéaire du type NSAT** [en l'occurrence tous les éléments finis de consolidation bidimensionnelle (fig 1.2)] et, d'autre part, **la création d'un "bloc" de calcul correspondant au traitement algorithmique.**

La nouvelle famille d'éléments finis créée dans CESAR respecte une méthode numérique relativement simple : la surface libre est une inconnue interne de l'élément fini, c'est à dire qu'à chaque itération on calcule la pression interstitielle aux points de Gauss, puis on teste la valeur algébrique de la pression pour appliquer le traitement assigné aux différents paramètres (perméabilité, teneur en eau, compressibilité du fluide et couplage) et par intégration numérique sur l'ensemble des points de Gauss de l'élément, on calcule les matrices des rigidités élémentaires C_E , K_E , E_E , etc.

La précision de cette méthode, comme on peut le constater, dépend du nombre de points de Gauss que possède l'élément fini, nombre que l'on peut augmenter en cas de besoin.

Il faut, à ce niveau, préciser que la fonction $\bar{Y}(p)$, nécessaire aux calculs des perméabilités, de la compressibilité du fluide et du couplage, a été choisie identique, dans son allure, à la courbe introduite dans le module NSAT, pour décrire la perméabilité relative ou la teneur en eau (fig. 1.19). Mais, pour plus de souplesse et surtout pour mesurer la sensibilité du modèle aux diverses non-linéarités en présence, un paramétrage dans le jeu de données permet de créer systématiquement, pour chacune de ces non-linéarités, une courbe $Y(p)$ particulière ($Y_{a,b}$, $Y_{c,d}$, etc.). Quant à la courbe $c(p)$, identifiable à la capacité capillaire, elle a été prise égale à la courbe $c(p)$ déjà obtenue lors de l'étude de l'exemple analytique (chapitre 2, équation 44).

En ce qui concerne la partie algorithmique, on peut dire que, d'une façon générale, **les entrées** (jeux de données) et **les sorties** (résultats numériques) du **nouveau module** sont la **réunion respective des entrées et des sorties des deux modules CSLI et NSAT de CESAR** (chapitres 1 et 2).

De même, le test de convergence du nouveau module est aussi le test classique de convergence du code CESAR pour le traitement des problèmes transitoires non-linéaires par algorithmes pas à pas, itératifs à l'intérieur de chaque pas. *Il y a convergence du processus itératif pour un pas de temps donné, lorsque, pour tout noeud du maillage, la différence maximale entre deux solutions successives atteint une tolérance fixée par l'utilisateur. On considère qu'il y a au contraire, divergence et donc arrêt du programme lorsqu'on dépasse, sans converger, un nombre d'itérations donné, là encore, par l'utilisateur.*

Enfin, la programmation du module prévoit la prise en compte des conditions aux limites les plus complexes, **les surfaces de suintement** notamment ou des **conditions aux limites s'établissant au cours des calculs** (enchaînement de phases ou calcul avec reprise).

3.7. Validation

3.7.1. Introduction

Faute de pouvoir mettre au point un modèle analytique d'écoulement à surface libre transitoire dans un milieu poreux déformable - la complexité mathématique de tels problèmes nous en dissuade - la validation effectuée a surtout consisté en des tests par rapport à des calculs de modules existant. En effet, les remarques faites au paragraphe 3.4 montrent la possibilité de retrouver par particularisation des paramètres à introduire dans les jeux de données, les calculs du module NSAT et ceux du module CSLI.

3.7.2. Validation par rapport à CSLI

Considérons une colonne soumise à une compression uniforme, saturée par un fluide incompressible, drainée par le haut et imperméable à sa base (fig. 2.1).

Il s'agit là d'un problème complètement linéaire car la surface libre fait partie des conditions aux limites données. Le milieu restant saturé, le processus itératif s'arrête au bout de deux itérations. On résout alors un **problème de consolidation linéaire à double itération par pas de temps**.

Les données numériques introduites dans le modèle sont celles du tableau 3.1. Les résultats sont portés sur la figure 3.5.

Le maillage est pris similaire au maillage de la figure 2.15. La pression uniforme (100 kN) est appliquée pendant 160 jours et divisés en 30 pas de temps (10x1j + 10x5j + 10x10j).

On constate une parfaite concordance entre ce calcul et le calcul du module CSLI fait sur le jeu de données équivalent. La charge hydraulique passe de la valeur $(P/\gamma_w + H)$ prise immédiatement après l'application de la charge mécanique P , à la valeur de l'état hydrostatique initial (H) à la fin du phénomène de consolidation (fig. 3.5).

Fig. tableau 3.1 Données numériques introduites dans le calcul

γ (kN/m ³)	E (kPa)		γ_w (kN/m ³)	n	a_w (kPa ⁻¹)	k_x (m/j)	k_y (m/j)	k_{xy} (m/j)	θ_{sat}
20	10	0	10	0,2	0	1	1	0	0

Remarque

Les paramètres (A_1 et B_1) de définition de la courbe de perméabilité relative, les paramètres de celles du couplage et de la compressibilité du fluide (A_2 et B_2) ainsi que ceux de la capacité capillaire (C, D et E) peuvent être indifféremment pris, le milieu étant supposé saturé dans ce test.

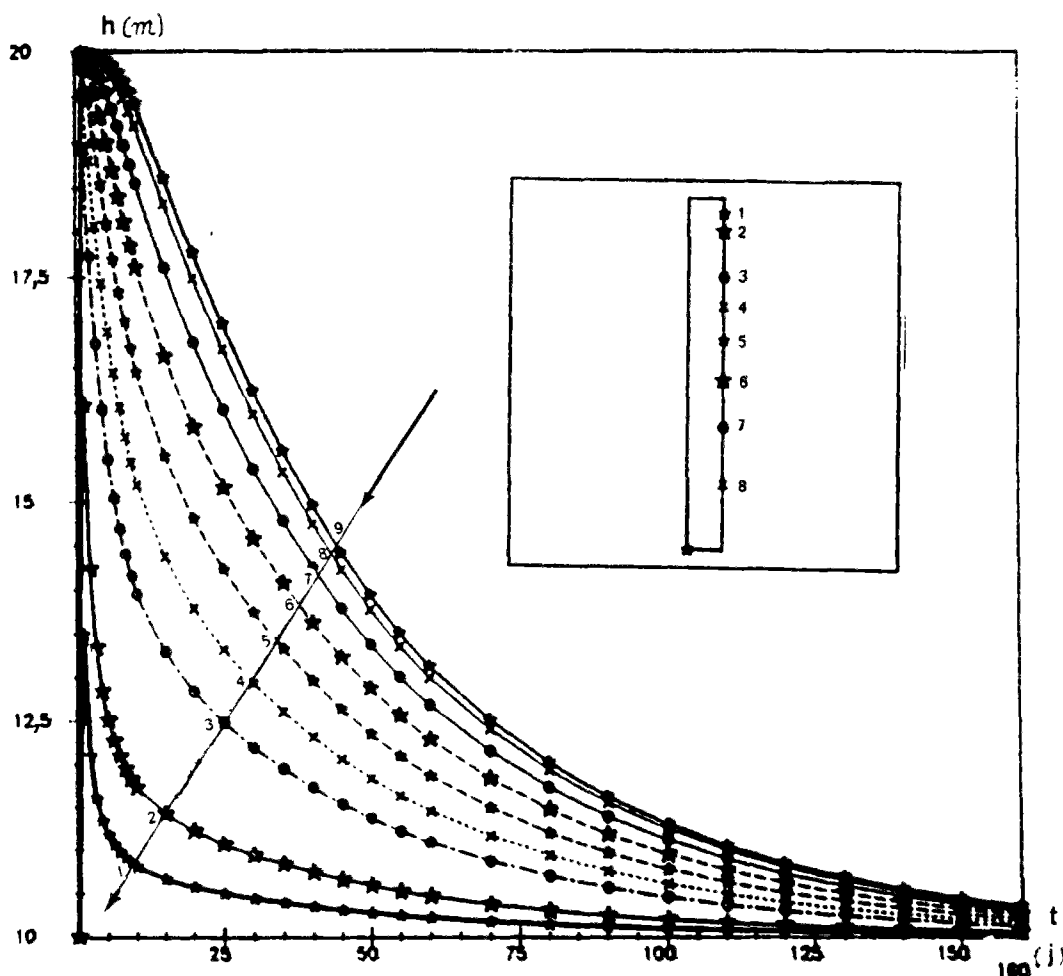


Fig. 3.5 Evolution de la charge hydraulique en fonction du temps en divers points de la colonne

3.7.3. Validation par rapport à NSAT

Le cas sans doute le plus classique est l'écoulement stationnaire à travers un carré homogène isotrope, test que l'on a déjà vu (chapitre 2). Ce test considère un carré de côté 10 m, soumis à deux équipotentielles 10 et 4 m (fig. 2.12.a).

Le jeu de données numériques est relativement simple, puisque l'écoulement ne dépend que des conditions aux limites et deux paramètres (A_1 et B_1) décrivant la perméabilité relative du milieu poreux. Les résultats sont portés sur la figure 3.6.

Ce test simple nous renseigne sur les principales performances numériques de l'algorithme : convergence, stabilité de la solution et précision du calcul.

Du point de vue de la convergence, on constate le même mode de convergence obtenu lors de l'exécution du module SURF et NSAT pour les jeux de données correspondants : même nombre d'itérations (8) pour la même tolérance demandée (10^{-2}).

La stabilité de la solution est assurée puisqu'on retrouve, à partir du premier pas de temps, la même solution aux pas de temps suivants au bout de deux itérations seulement, le régime étant stationnaire.

Enfin, la précision du calcul est notable car on retrouve pratiquement le même écoulement que celui calculé par le module NSAT ou le module SURF.

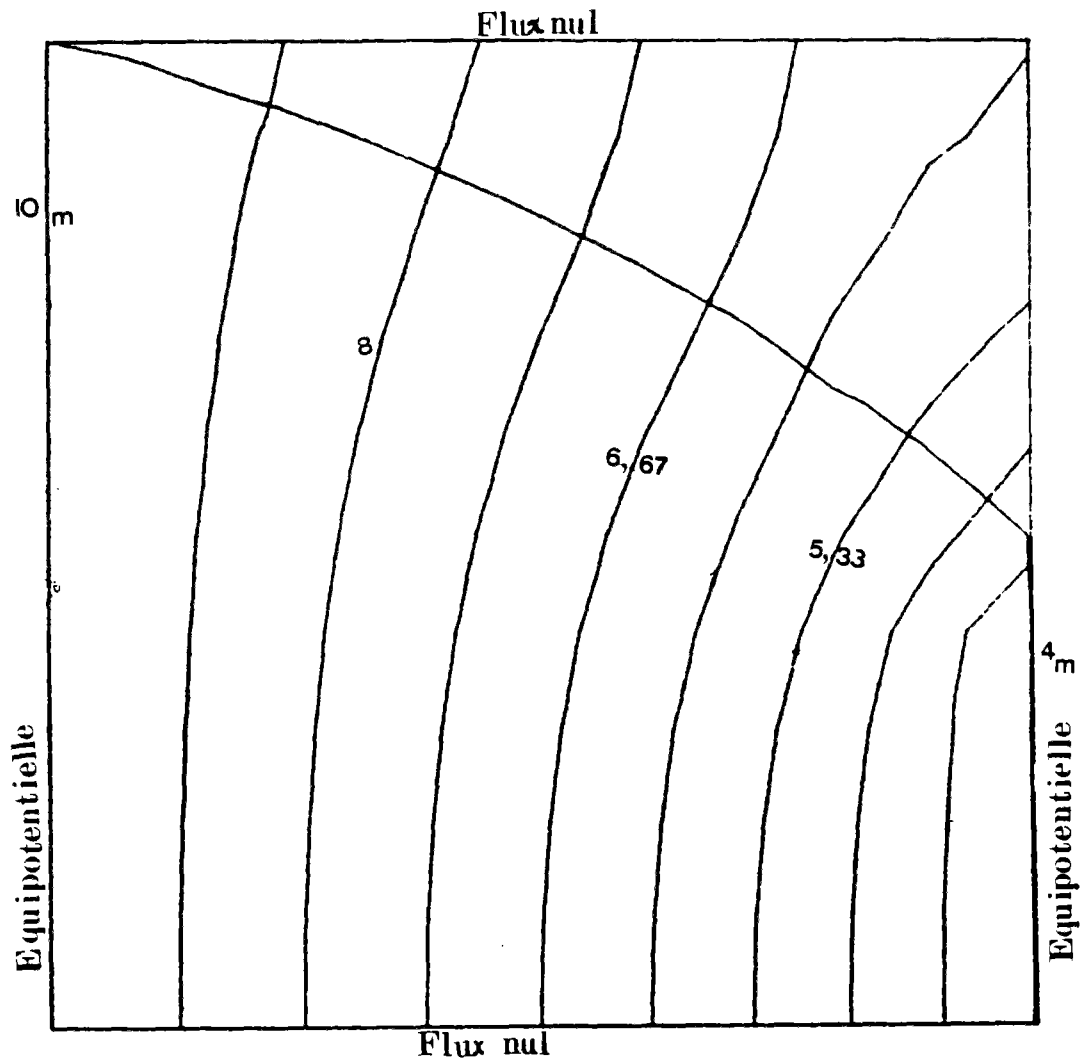


Fig. 3.6 Ecoulement permanent à travers un carré homogène.
Tracé des équipotentiels

**Chapitre 4 - CONSOLIDATION A SURFACE LIBRE DES SOLS
ELASTOPLASTIQUES ANISOTROPES**

**CONSOLIDATION A SURFACE LIBRE DES SOLS ELASTOPLASTIQUES
HOMOGENES ANISOTROPES**

4.0. Introduction

Au chapitre précédent, nous avons traité la non-linéarité hydraulique et étudié les principales difficultés théoriques et numériques rencontrées lorsqu'on couple cette non-linéarité à une hypothèse de déformation élastique.

Dans le présent chapitre, on complique le problème davantage en introduisant l'hypothèse d'une **déformation anélastique**, plus représentative du comportement réel des sols mous. On se propose de modéliser alors le problème du couplage des écoulements à surface libre et l'élastoplasticité, **problème doublement non-linéaire affectant à la fois l'hydraulique du sol et le comportement mécanique du squelette**.

On rappelle d'abord le formalisme mathématique de l'élastoplasticité puis les principaux modèles élastoplastiques représentatifs de la rhéologie des sols mous.

On décrit ensuite une **stratégie de résolution** du problème du couplage, conduisant à la mise au point d'un algorithme général que l'on valide par des exemples analytiques développés au cours de ce travail.

Un soin particulier a été enfin apporté à l'introduction du **modèle MELANIE** (élastoplasticité anisotrope avec écrouissage) dans un **nouveau module** de calculs par éléments finis du code CESAR-LCPC, traitant le couplage élastoplasticité - écoulement à surface libre.

4.1. Généralités

4.1.1. Rappels du formalisme mathématique de l'élastoplasticité

Le formalisme mathématique de la représentation du comportement des milieux élastoplastiques écrouissables est à l'heure actuelle bien établi. Il repose essentiellement sur quelques notions de base :

- la fonction scalaire f de l'état des contraintes, appelée indifféremment fonction de charge, critère d'écoulement plastique ou critère de plasticité ;
- la formulation incrémentale des relations entre les contraintes et les déformations et la décomposition du tenseur des déformations en une partie réversible due à l'élasticité et une partie irréversible due à la plasticité ;
- la loi d'écoulement plastique.

Le critère de plasticité est une fonction scalaire qui détermine le domaine dans lequel se trouve l'état actuel des contraintes dues à un chargement donné et à son histoire. Il en résulte que la fonction de charge f dépend du tenseur des contraintes σ_{ij} et d'éventuels paramètres d'écrouissage, eux-mêmes fonction des déformations plastiques subies par le matériau.

Ainsi $f(\sigma_{ij}, k) < 0$ correspond au comportement élastique réversible et $f(\sigma_{ij}, k) = 0$ correspond à l'apparition de déformations irréversibles.

Cette fonction décrit dans l'espace des contraintes une **surface d'état limite**. Sa représentation dans le plan (s', t) (respectivement contrainte moyenne et contrainte déviatorique) donne une **courbe d'état limite**.

Ces surfaces d'état limite ont fait l'objet d'importants développements théoriques. Une de leurs propriétés essentielles est d'être **convexe** lorsque le matériau élastoplastique étudié répond au **principe du travail maximal de Hill**, dont résulte aussi la **loi de normalité d'écoulement plastique** :

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.1)$$

avec les notations suivantes :

- ε_{ij}^p - tenseur des déformations plastiques,
- λ - multiplicateur de plasticité strictement positif,
- f - fonction de charge,
- σ_{ij} - tenseur des contraintes,
- d - symbole de dérivation différentielle,
- ∂ - symbole de dérivation partielle (à prendre éventuellement au sens large de "sous-différentiel" lorsque la fonction n'est pas dérivable au point où l'on se trouve).

Dans la relation (4.1), le multiplicateur de plasticité est inconnu. Pour le déterminer, on écrit la loi incrémentale contraintes-déformations, après décomposition du tenseur des déformations en partie élastique et en partie plastique :

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p, \quad (4.2)$$

$$d\sigma_{ij} = E_{ij}^{kl} d\varepsilon_{kl}^e. \quad (4.3)$$

D'autre part, il y a plasticité lorsque en particulier, on a à la fois :

$$\left\{ \begin{array}{l} f = 0 \\ df = 0 \end{array} \right. \quad (4.4)$$

$$(df = 0 \quad \text{(relation de consistance)}) \quad (4.5)$$

Posons les paramètres sous leur forme matricielle :

$$f(\sigma_{ij}, k) = F(\sigma, k),$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right] = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right] = F_{\sigma},$$

$$\begin{aligned} (dk_1) &= dk, \\ \begin{bmatrix} E^{k1} \\ \vdots \\ E_{1j} \end{bmatrix} &= E, \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial k_1} \end{bmatrix} &= \frac{\partial F}{\partial k} = F_k, \end{aligned}$$

$$(d\sigma_{1j}) = d\sigma,$$

$$(d\varepsilon_{1j}) = d\varepsilon,$$

$$(d\varepsilon_{1j}^p) = d\varepsilon^p,$$

$$(d\varepsilon_{1j}^e) = d\varepsilon^e.$$

A partir de la relation (4.5), on peut écrire par différentiation :

$$F_{\sigma}^T d\sigma + F_k^T dk = 0 \quad (4.6)$$

Les équations (4.2) et (4.3) permettent d'écrire :

$$d\sigma = E d\varepsilon - E d\varepsilon^p. \quad (4.7)$$

On déduit de (4.6), (4.7) et (4.1) la relation :

$$F_{\sigma}^T E d\varepsilon - F_{\sigma}^T E d\varepsilon^p = - F_k^T dk. \quad (4.8)$$

Si l'on pose le module d'écrouissage β sous la forme :

$$\beta d\lambda = - F_k^T dk$$

on obtient finalement l'expression du multiplicateur de plasticité :

$$d\lambda = \frac{F_{\sigma}^T E d\varepsilon}{\beta + F_{\sigma}^T E F_{\sigma}} \quad (4.9)$$

La combinaison des équations (3.9) et (3.7) donne la relation fondamentale entre les incréments de déformations et des contraintes :

$$d\sigma = \left[E - \gamma \frac{E F_{\sigma} F_{\sigma}^T E}{\beta + F_{\sigma}^T E F_{\sigma}} \right] d\varepsilon, \quad (4.10)$$

avec :

$$\begin{aligned} \gamma = 0 & \quad \text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\sigma, k) < 0 \\ F(\sigma, k) = 0 \\ F_{\sigma}^T d\sigma \leq 0 \end{array} \right. \\ \gamma = 1 & \quad \text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\sigma, k) = 0 \\ F_{\sigma}^T d\sigma > 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Lorsque la loi d'écoulement est non associée, c'est à dire que la règle de normalité du tenseur de l'écoulement plastique n'est pas vérifiée, on substitue à l'équation (4.1) la relation :

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (4.11)$$

où g représente le potentiel plastique. Dans ce cas, l'équation (4.10) devient, en revenant aux notations matricielles :

$$d\sigma = \left[E - \gamma \frac{EG_{\sigma} F_{\sigma}^T E}{\beta + F_{\sigma}^T EG_{\sigma}} \right] d\varepsilon. \quad (4.12)$$

4.1.2. Rappels des stratégies numériques de résolution des problèmes élastoplastiques

Les stratégies numériques de résolution des problèmes élastoplastiques sont variées et diffèrent suivant la façon d'exploiter la loi de comportement incrémental (4.12).

On distingue principalement trois méthodes de prise en compte de l'élastoplasticité dans les calculs numériques :

- la méthode des rigidités variables,
- la méthode des contraintes initiales,
- la méthode des déformations initiales.

L'esprit des deux dernières méthodes étant pratiquement le même, nous ne rappelons ici que les bases des deux premières.

La méthode des rigidités variables

Cette méthode utilise directement la relation (4.12). Si l'on pose en effet :

$$E^P = \gamma \frac{EG_{\sigma} F_{\sigma}^T E}{\beta + F_{\sigma}^T EG_{\sigma}},$$

et

$$R^P = E - E^P$$

on peut alors écrire de façon locale au point matériel:

$$d\sigma = R^P d\varepsilon. \quad (4.13)$$

Cela suppose une réactualisation de la matrice des rigidités à chaque itération pendant le processus itératif, dont résulte l'expression de "rigidités variables".

La relation (4.13) conduit à résoudre un système non-linéaire global qui se présente sous la forme générale suivante :

$$\Psi(u, \alpha) = R(u) - \alpha(t)P = 0, \quad (4.14)$$

avec :

- u** - champ nodal inconnu ;
- R(u)** - Vecteur des forces nodales correspondant aux efforts internes dus aux contraintes à l'instant t ;
- $\alpha(t)$** - facteur incrémentant, à l'instant t, le chargement extérieur **P**.

La résolution de ce système non-linéaire fait appel en général à des algorithmes du type **Newton-Raphson**, étant donnée la nature "différentielle" de la relation contraintes-déformations.

La méthode classique de Newton-Raphson consiste à linéariser au premier ordre par rapport à l'inconnue. Si l'on note **i** l'indice de l'itération actuelle, le procédé permet d'écrire à l'itération suivante :

$$\Psi(u_i + \delta u_i) = \Psi(u_i) + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial u} \right]_{u_i} \delta u_i. \quad (4.15)$$

Si l'on introduit dans l'équation (4.15) la matrice **B_i** telle que :

$$B_i = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial u} \right]_{u_p} \quad p \leq i,$$

on définit une forme de linéarisation permettant une réactualisation particulière de la matrice à inverser dans le système précédent [système (4.14)].

Ainsi lorsque :

- **p = i**, la méthode est dite de "**Newton-Raphson**" ;
- **p < i**, la méthode porte le nom de "**Newton-Raphson modifiée**".

La méthode de Newton-Raphson ($p = i$) n'est pas d'un emploi simple. Elle nécessite le calcul des dérivées partielles du résidu. La rigueur et la précision de ce calcul ne sont pas assurées. L'approximation usuelle consiste à construire la matrice tangente B_i à partir de la matrice élastoplastique R^p de la relation (4.13). Mais cela ne résout pas le problème des coûts des calculs exorbitants associés à l'utilisation de cette méthode lorsque les maillages demandés sont relativement fins. L'assemblage et la triangularisation de la matrice B_i , à chaque itération, sont en effet numériquement chers en général.

La méthode de Newton-Raphson modifiée, mise au point essentiellement pour réduire le temps de calcul, est, quant à elle, assujettie à bon nombre d'hypothèses complémentaires dont l'applicabilité reste à prouver. Ces hypothèses se rapportent principalement aux **méthodes d'actualisation** de la matrice B_i .

Il ne nous est pas possible d'explicitier ici tous les fondements théoriques des méthodes d'actualisation telles la méthode de **Broyden**, celle de **Davidon-Fletcher-Powell (D-F-P)** ou de **Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (B-F-G-S)**. Disons tout simplement que ces méthodes d'actualisation s'appliquent en général pour la **plasticité standard** (loi associée) pour laquelle la symétrie du système matriciel se conserve. Cela peut constituer une limitation non négligeable du traitement de l'élastoplasticité par cette méthode. Pour pallier à ces inconvénients, la prise en compte du comportement élastoplastique par la méthode des contraintes initiales peut présenter un plus grand avantage.

Méthode des contraintes initiales

Plusieurs présentations de cette méthode sont possibles. On peut, par exemple, noter qu'à partir de la relation (4.15) (linéarisation de Newton) la **méthode des contraintes initiales** est une **particularisation** consistant à poser $p = 0$ dans la définition de la matrice B_i vue précédemment. Cette définition posée, on montre alors que, sous certaines conditions, cette linéarisation peut théoriquement constituer une bonne approximation du problème formulé par la relation (4.14).

En fait, la présentation la plus classique se fonde sur l'interprétation de ce qu'induisent, comme efforts internes, les déformations plastiques. Se basant sur la relation (4.13), on peut écrire :

$$d\sigma = E d\varepsilon - E d\varepsilon^p = E d\varepsilon + \Delta\sigma_0 \quad (4.16)$$

Cette dernière relation s'apparente à une loi de comportement du type élastique avec "contraintes initiales" (d'où le nom de "méthode des contraintes initiales", attribué à cette méthode) qui constituent alors un *chargement* directement transposable au second membre. Ce chargement est *licite* lorsqu'il s'accompagne de procédures itératives ramenant l'état des contraintes à la frontière de la surface de charge ($f = 0$). Ainsi procède-t-on à des **corrections des contraintes**, corrections introduites dans le calcul sous forme de **forces de rééquilibrage appliquées aux noeuds des éléments** (d'où le nom de "méthode des forces" utilisé parfois pour désigner la méthode des contraintes initiales)

Comment alors, dans ce cas, calculer les corrections des contraintes ?

La combinaison des équations (4.9) et (4.16) permet d'écrire :

$$\Delta\sigma_0 = - d\lambda EF_\sigma. \quad (4.17)$$

Si l'on développe, au premier ordre, le critère, il vient :

$$F(\sigma+d\sigma, k+dk) = F(\sigma, k) + F_\sigma^T d\sigma + F_k^T dk = 0. \quad (4.18)$$

La valeur du multiplicateur assurant le retour à la surface de charge, par cette méthode, c'est à dire à partir des équations (4.17) et (4.18), est donnée par l'expression suivante :

$$d\lambda = \frac{F(\sigma, k)}{\beta + F_\sigma^T EF_\sigma} \quad (4.19)$$

$$\Delta\sigma_0 = - \frac{F(\sigma, k)}{\beta + F_\sigma^T EF_\sigma} EF_\sigma. \quad (4.20)$$

Lorsque la loi n'est pas associée, la relation (4.20) devient :

$$\Delta\sigma_0 = - \frac{F(\sigma, k)}{\beta + F_{\sigma}^T E G_{\sigma}} E G_{\sigma} \quad (4.21)$$

On vient de voir les fondements de la méthode des contraintes initiales. Voyons alors la stratégie numérique qu'elle implique.

Il est important, à ce niveau, de rappeler que la base fondamentale sur laquelle repose cette méthode est le développement limité au premier ordre du critère, ce qui exige une *incrémentatation appropriée du chargement extérieur appliqué*. De cette incrémentatation dépendra la précision du calcul du multiplicateur de plasticité et, par voie de conséquence, celle de correction des contraintes. Il en découle que le processus d'incrémentatation du chargement a une influence directe à la fois sur la précision et sur le mode de convergence des calculs.

Toutefois, la méthode des contraintes initiales, ne faisant intervenir la loi de comportement rhéologique qu'au second membre, est, sur le plan algorithmique, d'une grande souplesse. D'autre part, son grand avantage numérique réside dans la *conservation, pour tout le processus itératif* (en dehors du problème de non-linéarité hydraulique), *d'une seule matrice assemblée et triangularisée* (matrice d'élasticité de Hooke), diminuant ainsi sensiblement le coût des calculs.

4.1.3. Elastoplasticité des sols mous

4.1.3.1 Introduction

L'élastoplasticité des sols mous a été et demeure l'objet de vastes études de recherches théoriques, numériques et expérimentales. Le souci de reproduire aussi fidèlement que possible le comportement rhéologique des sols fins, a amené bon nombre de chercheurs à mettre au point des modèles plus ou moins complexes. Tous ces modèles sont élaborés à partir des concepts théoriques de surface d'état limite, d'état stable, de la notion d'état critique et du principe du travail maximal, déjà évoqués dans les rappels du formalisme mathématique de l'élastoplasticité.

Il ne nous est pas possible, du fait de la grande étendue de cette activité géotechnique, de détailler ici tous les modèles élastoplastiques des sols mous. Le lecteur désireux d'approfondir ce point pourra consulter avec profit les synthèses bibliographiques faites par **Dang** et **Magnan** (1977), **Mouratidis** et **Magnan** (1983) et **Magnan** (1986).

En ce qui nous concerne, nous nous sommes limités aux modèles élastoplastiques des sols fins, déjà introduits dans les codes de calculs par éléments finis ROSALIE et CESAR.

4.1.3.2. Elastoplasticité des sols mous dans ROSALIE

L'analyse numérique des problèmes de comportement élastoplastique des sols mous s'effectue essentiellement dans ROSALIE et CESAR, au moyen de deux modèles :

- le modèle **Cam-clay modifié**, assez représentatif du comportement élastoplastique écrouissable des argiles isotropes,
- le modèle **MELANIE**, adapté au comportement élastoplastique anisotrope écrouissable des argiles molles naturelles.

Le modèle Cam-clay modifié

Le modèle Cam-clay modifié fait partie de la famille des modèles de **Cambridge** pour l'étude des argiles (Cam-clay, Cam-clay modifié et Cam-clay modifié révisé). Ceux-ci constituent la base d'une grande partie des modèles rhéologiques développés au cours des dix dernières années.

Le modèle Cam-clay modifié a été introduit dans le code ROSALIE sous sa forme bidimensionnelle en déformation plane : les états de contrainte sont caractérisés par la contrainte moyenne $s' = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ et la contrainte déviatorique $t = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$. Toutes les équations ont été, par conséquent, formulées en paramètres s' et t , la variable de volume étant l'indice des vides e (cette variable joue le rôle, en mécanique des sols, de paramètre d'écrouissage dans la théorie de l'élastoplasticité que l'on vient de présenter).

Conformément à ce qui a été montré par ROSCOE (1958), le lieu des états normalement consolidés d'une argile donnée est représenté par une surface unique dans l'espace (s' , t , e) appelée surface d'état limite (fig. 4.1). Dans l'espace (s' , t , e), le chemin d'état d'une argile normalement consolidée soumise à des essais de cisaillement triaxial drainé ou non drainé reste situé sur la surface d'état limite et s'accompagne de déformations irréversibles (plastiques). Les états situés à l'extérieur de la surface d'état limite ne peuvent être atteints. A l'intérieur de l'espace délimité par la surface d'état limite, le squelette du sol a un comportement élastique, les déformations sont réversibles, l'argile est surconsolidée et son comportement peut être déterminé par la connaissance de la courbe de gonflement-rechargement (ou courbe de déformation réversible) de pente C_s dans l'espace $e - \ln \sigma'_v$ [ou dans l'espace $e - \ln s'$ ($\lambda = C_s / \ln 10$)] et par un module de cisaillement (fig. 4.2). Les courbes de déformation réversible schématisent le chemin dans le plan (e , s') suivi lors d'un cycle de déchargement-rechargement et sont décrits au moyen de l'équation $e = e^p - \lambda \ln s'/s'_1$, où s'_1 est une contrainte moyenne de référence, prise égale à 1.

L'intersection de la surface d'état limite avec le plan (e , s') constitue la courbe vierge isotrope, qui représente le chemin du plan (e , s') suivi lors d'un essai drainé de compression isotrope. Dans l'espace $e - \ln \sigma'_v$ la courbe vierge isotrope est une droite de pente C_c et, dans l'espace $e - \ln s'$, une droite de pente $\lambda = C_c / \ln 10$ (fig. 4.2), dont l'équation est :

$$e = e_{\lambda 0} - \lambda \ln s'/s'_1.$$

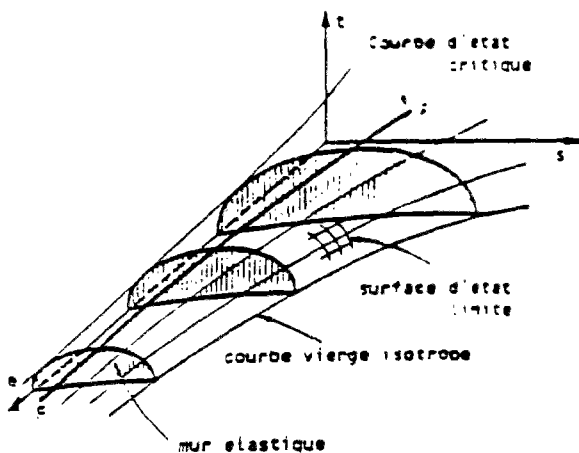


Fig. 4.1 Surface d'état limite du modèle Cam-clay modifié

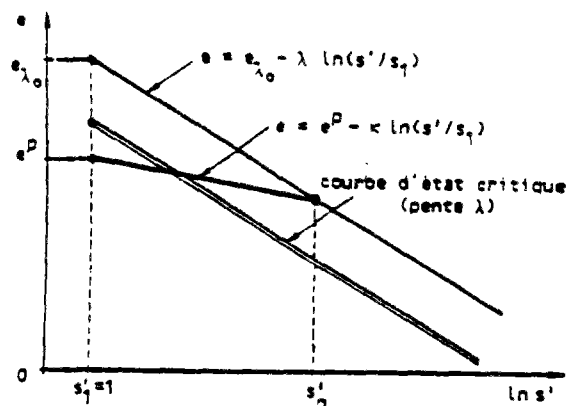


Fig. 4.2 Courbes réversible et vierge isotrope dans l'espace $e - \ln s'$

Le modèle Cam-clay est basé sur le concept d'état critique introduit par Schofield et Wroth (1968) : "Si un sol est continuellement cisailé jusqu'à ce qu'il s'écoule comme un fluide, il atteindra un état critique bien défini et déterminé par deux équations :

$$\begin{cases} q = Mp \\ \Gamma = e + \lambda \ln p/p_1 \end{cases} \quad (4.22)$$

où M , Γ et λ sont des constantes caractéristiques des propriétés du squelette du sol, q représente le déviateur à l'essai triaxial ($q = \sigma'_1 - \sigma'_3$), p la contrainte moyenne actuelle [$p = (\sigma'_1 + 2\sigma'_3)/3$] et p_1 une pression de référence.

Les états critiques sont situés sur la courbe d'état critique de la surface d'état limite [courbe FF' (fig. 4.1)], qui se projette sur le plan (s' , t) suivant une droite passant par l'origine des axes (fig. 4.2), de pente :

$$M' = M/\sqrt{3} = 6 \sin \varphi' / [3(3 - \sin \varphi')], \quad (4.22a)$$

en notant φ' l'angle de frottement interne du sol.

Les surfaces cylindriques à génératrice parallèle à l'axe des contraintes déviatoriques et appuyées sur les courbes réversibles sont appelées murs élastiques ; les intersections des murs élastiques avec la surface d'état limite sont des courbes dont les projections sur le plan (s' , t) sont des ellipses passant par l'origine des axes (fig. 4.3). Ces ellipses délimitent le domaine élastique du sol et matérialisent l'écroutissage du modèle Cam-clay modifié.

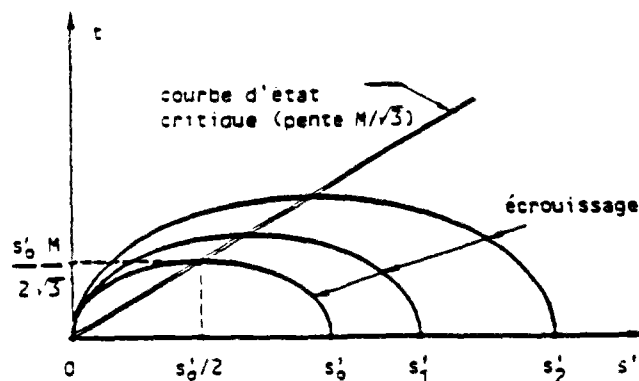


Fig. 4.3 Courbes d'état Limite du modèle Cam-clay modifié dans le plan (s' , t)

Si l'on désigne par s_1 la valeur de la contrainte moyenne correspondant à l'intersection d'une ellipse avec l'axe $0s'$ (dans ce cas, s_0 est la pression moyenne de préconsolidation si l'ellipse 0 correspond à l'état initial de l'argile), ces deux demi-axes ont pour valeur :

$$\begin{cases} s_0'/2 \\ s_0'M/2\sqrt{3} \end{cases}$$

et l'équation de l'ellipse dans le plan (s', t) est :

$$(s' - s_0'/2)^2 + 3t^2/M^2 = s_0'^2/4. \quad (4.23)$$

Le modèle est enfin complété par les hypothèses suivantes :

- la surface d'état limite peut servir de potentiel plastique et la loi de normalité est supposée vérifiée ;
- le sol a un comportement élastique isotrope à l'intérieur des courbes d'état limite ;
- l'isotropie se conserve pendant l'évolution de l'écroutissage.

Cependant, si le modèle Cam-clay modifié a pu être appliqué avec succès dans la modélisation du comportement des argiles remaniées isotropes, l'extension de son application aux argiles molles anisotropes naturelles posait quelques problèmes :

- la surface d'état limite du modèle Cam-clay semble ne pas convenir aux sols anisotropes ;
- la loi de normalité adoptée dans ce modèle comme loi d'écoulement plastique ne serait pas valable pour les argiles naturelles.

Ces dernières considérations ont motivé la mise au point d'un modèle plus approprié au traitement de l'élasto-plasticité des sols mous : le modèle **MELANIE**.

Le modèle MELANIE

Il s'agit d'un modèle de sol élastoplastique anisotrope écrouissable dont la conception a subi des influences de trois origines différentes : celle des modèles de l'Université de Cambridge, celle des travaux réalisés à l'Université Laval de Québec sous la direction des professeurs **F. Tavenas** et **S. Leroueil** et celle des travaux antérieurs du LCPC sur le comportement unidimensionnel des argiles molles naturelles. L'élaboration de ce modèle en vue de la modélisation numérique a été effectuée par **Mouratidis** et **Magnan** (1983) et complétée par **Lépidas** et **Magnan** (1987).

L'analyse des résultats expérimentaux servant de base à la conception du modèle a conduit à admettre les points suivants:

- les courbes d'état limite ont une forme elliptique dans l'espace (s', t) ; elles passent par l'origine des coordonnées et par le point de l'axe $0s'$, d'abscisse :

$$s'_p = 0,3(1 + K_0)\sigma'_p \quad [\text{Tavenas et Leroueil (1979)}]$$

et leur grand axe est confondu avec l'axe K_0 (fig. 4.4) ;

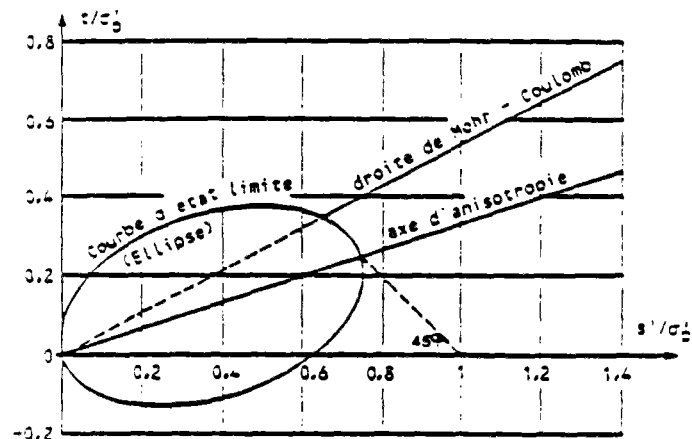


Fig. 4.4 Représentation schématique des courbes d'état limite des argiles molles naturelles

- les courbes d'état limite correspondant à des états de préconsolidation différents sont homothétiques (par rapport à l'origine) dans le rapport des contraintes de préconsolidation ;

- les déformations du sol sur la surface d'état limite ne vérifient pas la loi de normalité que l'on utilise généralement pour les calculs élastoplastiques. Il semble que les vecteurs de déformations D_i soient systématiquement compris entre la normale au point i et le rayon Oi [Fauveau et Bruzy (1977) ; Tavenas (1981) ; Mouratidis et Magnan (1983)]. On admet qu'ils correspondent à la bissectrice D_i de ces deux directions (fig. 4.5)

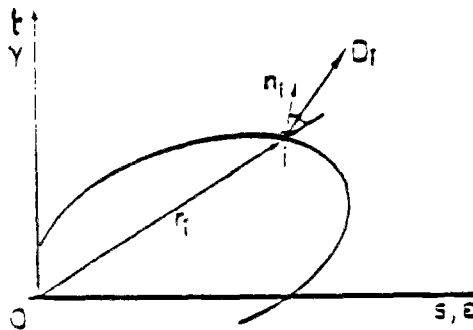


Fig. 4.5 Déformations du sol sur la courbe d'état limite

- l'ensemble des courbes d'état limite définies pour des valeurs différentes de la pression de préconsolidation constitue dans l'espace (s', t, e) une surface d'état limite qui sépare le domaine des états possibles du sol (situé à l'intérieur de la surface) du domaine de l'espace des états (s', t, e) où le point représentatif du sol ne peut se trouver (fig. 4.6).

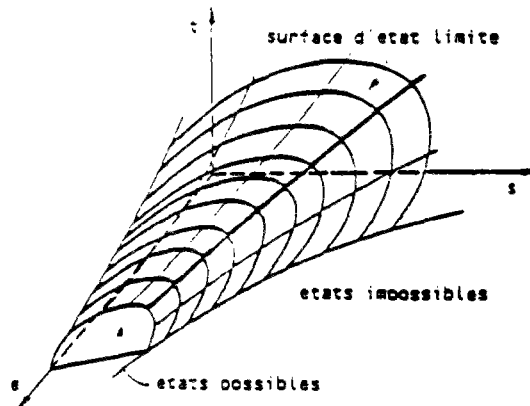


Fig. 4.6 Surface d'état limite des argiles naturelles

La détermination de l'équation de la surface d'état limite s'effectue en tenant compte du fait que les courbes d'état limite sont les projections sur le plan (s', t) de l'intersection de la surface d'état limite avec les plans (plans de déformation élastique) inclinés par rapport à la verticale et s'appuyant sur les courbes de compressibilité réversible du plan (e, s') ; l'inclinaison de ce plan résulte du caractère anisotrope du comportement du sol (fig. 4.7).

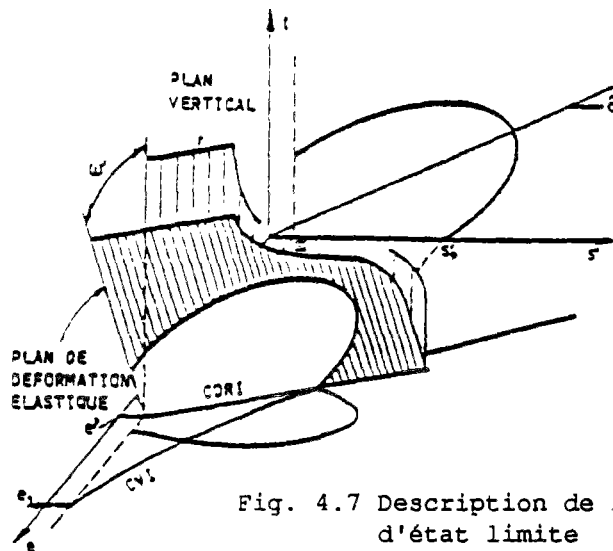


Fig. 4.7 Description de la surface d'état limite

Les bases expérimentales précédentes permettent de préciser les équations du modèle MELANIE.

L'équation de la surface d'état limite s'obtient de façon analogue à celle des modèles Cam-clay :

- l'intersection de la surface d'état limite avec le plan (s', e) est une courbe d'équation :

$$e = e_{\lambda_0} - \lambda \ln s'/s'_1$$

que l'on appelle courbe vierge isotrope (CVI) ;

- dans le même plan (s', e) on peut définir un réseau de droites idéalisées représentant les déformations du sol lors des cycles de déchargement - rechargement sous contraintes isotropes que l'on peut imposer au sol à partir des états situés sur la courbe vierge isotrope.

Leur équation est :

$$e = e^p - \alpha(s' - s'_1)$$

en désignant par (s', e) les coordonnées du point initial de chaque droite sur la courbe vierge isotrope. Ces droites sont appelées courbes de *déformation réversible isotrope (CDRI)* ;

- la projection sur le plan (s', t) de l'intersection de la surface d'état limite et du plan incliné correspondant à une courbe de déformation réversible isotrope donnée, est une ellipse d'équation :

$$A^2(s' \cos \theta + t \sin \theta - s'_p/AC)^2 + B^2(t \cos \theta - s' \sin \theta)^2 - s'_p{}^2/C^2 = 0, \quad (4.24)$$

avec :

$$A = 2(\sin \theta + \cos \theta) ; \quad (4.25a)$$

$$B = \frac{A \cos \theta}{C \sin \theta} \left(- \frac{2}{A} - C \cos \theta \right) ; \quad (4.25b)$$

$$C = 0,6 ; \quad (4.25c)$$

et les notations suivantes :

θ - angle entre l'axe os' et l'axe principal de l'ellipse [tg $\theta = (1-K_0)/(1+K_0)$, K_0 désignant le coefficient de pression des terres] ;

e, s', t - indice des vides, contrainte moyenne et déviatorique, respectivement ;

e, λ_0, α - constantes du sol ;

s'_1 - contrainte de référence (1 kPa pour les applications) ;

s'_p - pression de préconsolidation (contrainte moyenne dans un essai oedométrique).

L'élasticité associée au modèle est **l'élasticité orthotrope linéaire de révolution**. La relation reliant les contraintes aux déformations à l'intérieur de la surface d'état limite est donnée, sous l'hypothèse des déformations planes, par l'équation :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_h \\ \sigma'_v \\ \tau'_{vh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E'_h (1-\nu_{vh}^2)}{(1+\nu'_{hh})(1-\nu_{hh}'-2n\nu_{vh}^2)} & \frac{E'_h \nu'_{vh}}{1-\nu_{hh}'-2n\nu_{vh}^2} & 0 \\ \frac{E'_h \nu'_{vh}}{1-\nu_{hh}'-2n\nu_{vh}^2} & \frac{E'_h (1-\nu_{hh}')}{1-\nu_{hh}'-2n\nu_{vh}^2} & 0 \\ 0 & 0 & G'_{vh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_h \\ \epsilon_v \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Dans l'équation précédente les notations suivantes ont été utilisées :

$$n = E'_h/E'_v,$$

E'_v, E'_h - modules d'élasticité verticale et horizontale, respectivement,

ν'_{vh} - coefficient de Poisson dans la direction verticale sous une contrainte verticale,

ν'_{hh} - coefficient de Poisson dans la direction horizontale sous une contrainte horizontale,

G'_{vh} - module de cisaillement dans le plan vertical.

L'écoulement plastique suit une **loi d'écoulement non associée** du type :

$$G_\sigma = \frac{F_\sigma}{\|F_\sigma\|} + \eta \frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|} \quad \text{avec } \vec{r} = \overrightarrow{OM}, \text{ M étant le point courant. } (4.27)$$

Compte tenu de l'importance du modèle MELANIE dans cette étude, on explicitera les dérivées partielles intervenant dans la relation (4.27) et on précisera la méthode pratique pour déterminer l'ensemble des paramètres de ce modèle lorsqu'on calculera les divers termes du second membre, notamment celui des forces de rééquilibrage dû au couplage élastoplastique.

4.2. Couplage de l'élastoplasticité et des écoulements à surface libre

4.2.1. Présentation du problème

Le traitement des problèmes de surface libre dans un sol élastoplastique est un problème délicat. Il s'agit de résoudre un problème **doublement non-linéaire** affectant à la fois **l'hydraulique du sol** (écoulement à surface libre transitoire) et **la mécanique non-linéaire du squelette** (élastoplasticité).

A l'intérieur de chacune de ces deux non-linéarités existent plusieurs autres non-linéarités et leur présence simultanée en provoque d'autres.

Ainsi, par exemple, la non-linéarité hydraulique, comme on l'a déjà vu, entraîne, à elle seule, la non-linéarité des perméabilités du milieu poreux, celle de la compressibilité du fluide, celle du degré de saturation et celle des conditions aux limites (surface de suintement).

La non-linéarité mécanique, quant à elle, implique, la non-linéarité des rigidités des structures et de certains paramètres mécaniques tels que l'indice des vides ou l'écrouissage, par exemple.

Leur présence simultanée déclenche, en plus des non-linéarités précitées, celle du couplage hydraulique-mécanique, indispensable au calcul des rigidités et celle affectant le chargement (soulèvement hydrostatique, poids volumique), nécessaire au calcul des sollicitations exercées sur la structure.

Quelle stratégie faut-il adopter pour résoudre en même temps toutes ces non-linéarités étroitement couplées ?

Si la stratégie numérique de résolution de la non-linéarité hydraulique impose nécessairement la méthode des rigidités variables, il n'en est pas toujours de même pour l'élastoplasticité des massifs. Celle-ci, dans CESAR, concerne principalement les massifs élastoplastiques secs ou saturés. Pour cette raison (absence de non-linéarité hydraulique), leur traitement fait appel, en général, à des algorithmes itératifs incrémentaux du type Newton-Raphson, contrairement au

traitement des problèmes hydrauliques non-linéaires où les algorithmes du type "point fixe" sont d'une plus grande commodité.

Or on ne peut pas traiter ces deux processus itératifs séparément à cause du couplage : tout changement de position de la surface libre se répercute sur l'équilibre et la loi du comportement et inversement, toute modification de l'équilibre et de la loi de comportement perturbe le mouvement de la surface libre.

La stratégie numérique que nous proposons ici contribue à résoudre ce problème.

4.2.2. Stratégie de résolution

4.2.2.0 Introduction

Nous avons discuté au chapitre précédent les principales raisons qui nous ont amené à traiter les problèmes hydrauliques non-linéaires par la méthode du point fixe, respectant d'ailleurs, en la matière, la tradition dans CESAR.

Dans le cas présent, ces raisons se trouvent plutôt renforcées. En effet, l'utilisation de la matrice tangente qu'exige la méthode de Newton ne présente pas un intérêt évident. Non seulement celle-ci demande le calcul de plusieurs tenseurs du troisième ordre (perméabilité tangente, compressibilité tangente, couplage tangent, etc.) mais aussi et surtout elle provoque la dissymétrie du système matriciel à résoudre, occasionnant ainsi un coût de calculs élevé.

Cette dissymétrie provient d'une double origine hydraulique et mécanique :

- la différentiation par rapport à la charge hydraulique ;
- le caractère non-associé de la loi élastoplastique utilisée (modèle MELANIE).

Le souci de contourner ces difficultés nous a conduit, d'une part, à garder l'incrémentatation seulement par rapport au temps et, d'autre part, à transférer l'élastoplasticité au second membre (méthode des contraintes initiales) dans le but de résoudre l'ensemble des non-linéarités par la méthode du point fixe, jusqu'ici réservée, dans CESAR, au traitement des problèmes hydrauliques non-linéaires.

Traduisons ces considérations dans les équations du problème.

4.2.2.1. Equations du modèle

L'élastoplasticité du sol n'affectant que la rhéologie du squelette, seule la loi de comportement est modifiée par la relation incrémentale (4.10), que l'on peut écrire à l'aide de l'incrément de contrainte effective sous la forme :

$$d\sigma'_{ij} = (E_{ij}^{kl} - \alpha E_{ij}^{pk1}) d\epsilon_{kl}$$

$$\alpha = 0 \quad \text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\sigma', k) < 0 \\ F(\sigma', k) = 0 \\ F_{\sigma'}^T d\sigma' \leq 0 \end{array} \right. \quad (4.28)$$

$$\alpha = 1 \quad \text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\sigma', k) = 0 \\ F_{\sigma'}^T d\sigma' > 0 \end{array} \right.$$

Il en résulte une modification qui concerne exclusivement la fonctionnelle relative à la déformation du squelette :

$$\int_{\Omega} \sigma'_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} \bar{Y}(p) \rho \delta_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega - \int_{S_{\sigma}} \bar{T}_i \delta u_i dS - \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega = \delta F = 0.$$

En incrémentant par rapport au temps, il vient :

$$\sigma'_{ij}(t+\Delta t) = \sigma'_{ij}(t) + \Delta \sigma'_{ij} \quad (4.29)$$

La combinaison des deux équations précédentes permet d'écrire :

$$\int_{\Omega} \Delta \sigma'_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} \bar{Y}(p) \rho \delta_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega - \int_{S_{\sigma}} \bar{T}_i \delta u_i dS + \int_{\Omega} \sigma'_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega = 0. \quad (4.30)$$

(terme 1)

Or, la loi de comportement, écrite à partir des relations (4.16) et (4.17), permet d'explicitier le **terme (1)** :

$$\int_{\Omega} \Delta \sigma'_{i,j} \delta u_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} E^{k,l}_{i,j} \Delta \epsilon_{k,l} \delta u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} \Delta \sigma_{0i,j} \delta u_{i,j} d\Omega, \quad (4.31)$$

avec :

$$\Delta \sigma_{0i,j} = \int_t^{t+\Delta t} E^{k,l}_{i,j} \frac{\partial g}{\partial \sigma} d\lambda. \quad (4.32)$$

En écrivant la charge hydraulique en fonction du temps sous la forme :

$$h(t+\Delta t) = h(t) + \Delta h,$$

on obtient à partir des équations (4.30), (4.31) et (4.32) la variation de la fonctionnelle relative aux déformations du squelette élastoplastique :

$$\int_{\Omega} \Delta \sigma'_{i,j} \delta u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\gamma}(p) \Delta h \delta_{i,j} \delta u_{i,j} d\Omega - \int_{S_{\sigma}} \bar{\gamma}_1 \delta u_1 dS + \int_{\Omega} \sigma'_{i,j} \delta u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\gamma}(p) h \delta_{i,j} \delta u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega = 0 \quad (4.33)$$

La discrétisation de l'espace en éléments finis suivant le procédé décrit au chapitre précédent, donne, à partir de l'équation (4.33), l'équation matricielle suivante :

$$R_c \Delta U - C_c(H) \Delta H = F(t+\Delta t) + F_{\Delta \sigma_0} - F_{\sigma}(t) + C_c(H) H(t). \quad (4.34)$$

avec :

- $F(t+\Delta t)$ - chargement et conditions aux limites à l'instant $t+\Delta t$;
- $F_{\Delta \sigma_0}$ - vecteur des efforts internes dû exclusivement aux déformations plastiques ;
- $\Delta \sigma_0$ - incrément des corrections des contraintes ;
- $F_{\sigma}(t)$ - vecteur des efforts internes à l'instant t ;

Cette dernière équation déduite de la mécanique du squelette, ajoutée à celle déjà déduite de l'écoulement, permet de constituer le système matriciel à résoudre.

4.2.2.2. Système matriciel et algorithme de résolution

L'équation (4.34) et l'équation matricielle associée à l'écoulement (chapitre 3, paragraphe 3.5.2.4) donnent le système matriciel à résoudre :

$$\begin{bmatrix} R_G & -\alpha C_G(H) \\ -\alpha C_G^T(H) & -\alpha^2 [E_G(H) + \Delta t K_G(H)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta H \\ \alpha \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & C_G(H) \\ 0 & -\alpha \Delta t K_G(H) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(t) \\ H(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(t+\Delta t) + F_{\Delta \sigma_0} - F_{\sigma_0}(t) \\ -\alpha \Delta t Q(t+\Delta t) \end{bmatrix}$$

On remarque qu'on a, à l'intérieur de la courbe d'état limite :

$$\begin{cases} F_{\Delta \sigma_0} = 0 \\ F_{\sigma_0}(t) = R_G U(t) \end{cases}$$

On retrouve dans ce cas le système matriciel rencontré lors de l'étude du problème élastique (chapitre 3).

L'application de la méthode du point fixe à ce système permet d'obtenir le système itératif suivant :

$$\begin{bmatrix} R_G & -\alpha C_G(H_1^j) \\ -\alpha C_G^T(H_1^j) & -\alpha^2 [E_G(H_1^j) + \Delta t K_G(H_1^j)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_1^{j+1} \\ \frac{\Delta H_1^{j+1}}{\alpha} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & C_G(H_1^j) \\ 0 & -\alpha \Delta t K_G(H_1^j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1-1} \\ H_{1-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{M_1}^j \\ -\alpha \Delta t Q_1^j \end{bmatrix}$$

dans lequel j désigne l'indice de l'itération et i l'indice du pas de temps.

Le système précédent peut aussi s'écrire (tel qu'il est programmé en variables Fortran) sous la forme (condensée, comme au chapitre 3) :

$$K_N(VUM_1^j) * VDUM_1^{j+1} = K_H(VUM_1^j) * VUM_{1-1} + VF_1^j,$$

où :

$$K_N(VUM_1^j) = \begin{bmatrix} R_G & -\alpha C_G(H_1^j) \\ -\alpha C_G^T(H_1^j) & -\alpha^2 [E_G(H_1^j) + \Delta t K_G(H_1^j)] \end{bmatrix},$$

$$K_H(VUM_1^J) = \begin{bmatrix} 0 & C_G(H_1^J) \\ 0 & -\alpha \Delta t K_G(H_1^J) \end{bmatrix},$$

$$VDUM_1^{J+1} = \begin{bmatrix} \Delta U_1^{J+1} \\ \Delta H_1^{J+1} \\ \alpha \end{bmatrix},$$

$$VUM_{1-1} = \begin{bmatrix} U_{1-1} \\ H_{1-1} \end{bmatrix},$$

$$VF_1^J = \begin{bmatrix} F_{M1}^J \\ -\alpha \Delta t Q_1^J \end{bmatrix},$$

$$F_{M1}^J = F_1^J + F_{\Delta \sigma_0}^J - F_{\sigma'}_{1-1}.$$

Il en résulte l'algorithme pas à pas itératif à l'intérieur de chaque pas de temps décrit par la figure 4.8. On peut remarquer que cet algorithme diffère des algorithmes classiques qui traitent l'élastoplasticité par la technique du calcul du résidu. A chaque itération, en effet, on réactualise la matrice des rigidités K_N (pour le problème hydraulique) et on calcule simultanément les contraintes qui agissent comme chargement non-linéaire (pour l'élastoplasticité) se rajoutant aux autres termes du second membre. Lorsqu'il y a convergence (vérification à la fois de la loi de comportement, de l'équilibre et d'une tolérance sur la solution), le nouvel état d'équilibre permet de reconstituer le second membre pour le pas de temps suivant et ainsi de suite (fig. 4.8)...

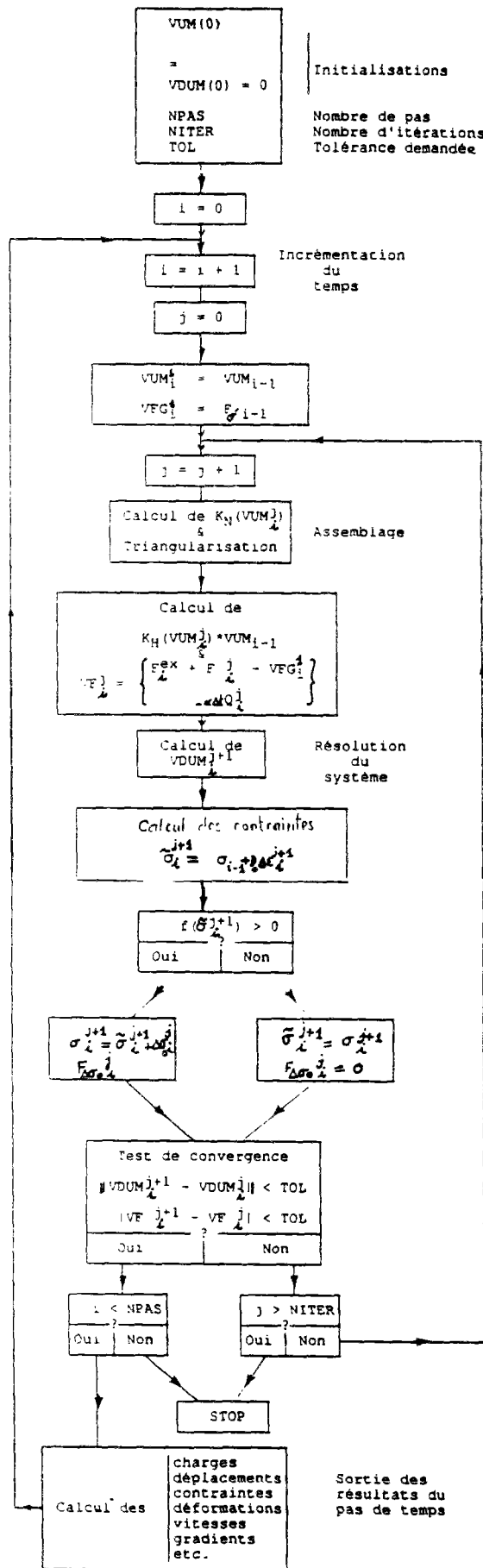


Fig. 4.8 Algorithme de résolution

Il peut être important, eu égard à la complexité des modèles élastoplastiques envisagés, d'apporter une attention particulière au calcul des efforts internes liés à la méthode des contraintes initiales.

4.2.2.3 Calcul des efforts internes. Cas du modèle MELANIE

On entend ici par efforts internes le terme du second membre dû aux forces de rééquilibrage $F_{\Delta\sigma}$, provoquées exclusivement par l'apparition des déformations plastiques. Le calcul de ces efforts n'est pas toujours aisé lorsque le modèle élastoplastique est compliqué.

Or, la complexité du modèle MELANIE réside non seulement dans l'anisotropie et le caractère non-associé de la loi d'écoulement plastique, mais aussi dans la complexité du critère (surface de charge elliptique) et surtout dans le calcul de l'écrouissage fortement non-linéaire.

Compte tenu de l'importance centrale qu'il occupe dans cette étude, nous explicitons dans ce paragraphe les principales étapes du calcul des forces de rééquilibrage que ce modèle induit.

Calculons d'abord les différents termes de la relation (4.27).

$$\bullet F_{\sigma'_h} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_h} = \frac{\partial f}{\partial s'} \frac{\partial s'}{\partial \sigma'_h} + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \sigma'_h} \quad (4.38)$$

Or, on a les relations (4.39), (4.40), (4.41) et (4.42) respectivement :

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial f}{\partial s'} &= 2 A^2 \cos\theta \left(s' \cos\theta + c \sin\theta - \frac{k}{A C} \right) - \\ &\quad - 2 B^2 \sin\theta (c \cos\theta - s' \sin\theta), \\ \bullet \frac{\partial f}{\partial c} &= 2 A^2 \sin\theta \left(s' \cos\theta + c \sin\theta - \frac{k}{A C} \right) - \\ &\quad + 2 B^2 \cos\theta (c \cos\theta - s' \sin\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial s'}{\partial \sigma'_h} &= \frac{1}{2}, \\ \bullet \frac{\partial \tau}{\partial \sigma'_h} &= \frac{\sigma'_h - \sigma'_v}{4\tau}. \end{aligned}$$

$$\bullet F_{\sigma'_v} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_v} = \frac{\partial f}{\partial s'} \frac{\partial s'}{\partial \sigma'_v} - \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma'_v} \quad (4.43)$$

On a de la même manière les relations (4.44) et (4.45) :

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial s'}{\partial \sigma'_v} &= \frac{1}{2}, \\ \bullet \frac{\partial \tau}{\partial \sigma'_v} &= -\frac{\sigma'_h - \sigma'_v}{4\tau}. \end{aligned}$$

$$\bullet F_{\tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \tau}, \text{ avec } \frac{\partial \tau}{\partial \tau} = \frac{\tau}{\tau}. \quad (4.46)$$

Si l'on note η un indicateur tel que :

$\eta = 0$ (loi non-associée)

$\eta = 1$ (loi associée ou plasticité standard),

on peut écrire l'expression de vecteur d'écoulement plastique sous la forme :

$$\begin{aligned} \bullet G_{\sigma'_h} &= \frac{F_{\sigma'_h}}{\|F_{\sigma}\|} - \eta \frac{\sigma'_h}{\|\sigma'_1\|} = \frac{F_{\sigma'_h}}{\sqrt{F_{\sigma'_h}^2 + F_{\sigma'_v}^2 + F_{\tau}^2}} - \frac{\eta \sigma'_h}{\sqrt{\sigma_h'^2 + \sigma_v'^2 + \tau^2}} \\ \bullet G_{\sigma'_v} &= \frac{F_{\sigma'_v}}{\|F_{\sigma}\|} - \eta \frac{\sigma'_v}{\|\sigma'_1\|} = \frac{F_{\sigma'_v}}{\sqrt{F_{\sigma'_h}^2 + F_{\sigma'_v}^2 + F_{\tau}^2}} + \frac{\eta \sigma'_v}{\sqrt{\sigma_h'^2 + \sigma_v'^2 + \tau^2}} \\ \bullet G_{\tau} &= \frac{F_{\tau}}{\|F_{\sigma}\|} + \eta \frac{\tau}{\|\sigma'_1\|} = \frac{F_{\tau}}{\sqrt{F_{\sigma'_h}^2 + F_{\sigma'_v}^2 + F_{\tau}^2}} + \frac{\eta \tau}{\sqrt{\sigma_h'^2 + \sigma_v'^2 + \tau^2}} \end{aligned}$$

Car on a :

$$\frac{F_{\sigma}}{\|F_{\sigma}\|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}}\right)^2}} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\vec{OP}}{\|\vec{OP}\|} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \tau_{xy}^2}} \times \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

Pour déterminer $\Delta\sigma_0$ à partir de la relation (4.21), il faut calculer le terme d'écouissage :

$$-\beta = \frac{\partial f}{\partial s'_p} \frac{ds'_p}{d\lambda}, \text{ avec } s'_p = k \text{ [relation (4.24)].} \quad (4.50)$$

Par dérivation composée, il vient :

$$\frac{ds'_p}{d\lambda} = \frac{ds'_p}{d\varepsilon^p_{vol}} \frac{d\varepsilon^p_{vol}}{d\lambda} = \frac{ds'_p}{de^p} \frac{de^p}{d\varepsilon^p_{vol}} \frac{d\varepsilon^p_{vol}}{d\lambda} \quad (4.51)$$

Or la variation de la déformation volumique plastique est liée à la variation plastique de l'indice des vides par la relation :

$$de^p = d\varepsilon^p_{vol} (1 + e_0), \quad (4.52)$$

où e_0 représente l'indice des vides initial du sol.

La relation (4.11) permet d'écrire :

$$d\epsilon_{vol}^P = d\epsilon_h^P + d\epsilon_v^P = d\lambda \cdot \text{tr} \frac{\partial G}{\partial \sigma'} \quad (4.53)$$

En tenant compte maintenant des équations de la courbe vierge isotrope et des droites de déformation réversible isotropes, on a (fig. 4.9) :

$$e^P = e_{\lambda_0} - \lambda \ln s'_p + \alpha(s'_p - s'_1) \quad (4.54)$$

On en déduit :

$$\frac{de^P}{ds'_p} = \alpha - \frac{\lambda}{s'_p}, \quad \frac{ds'_p}{de^P} = \frac{s'_p}{\alpha s'_p - \lambda} \quad (4.55)$$

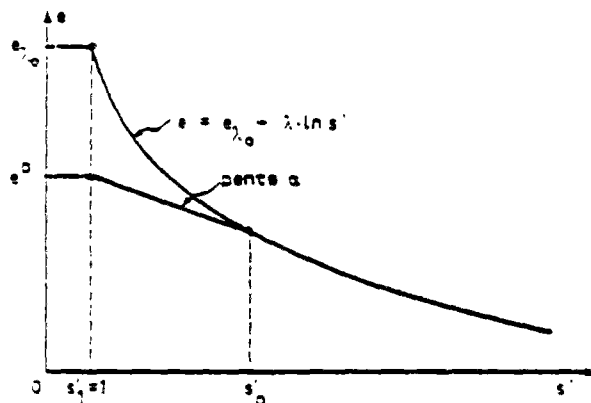


Fig. 4.9 Définition de $e^P(s'_p)$

Les relations (4.52), (4.53) et (4.55) permettent d'obtenir finalement l'expression du paramètre β :

$$\beta = \frac{2A}{C} (s' \cos \theta + t \sin \theta) (1 + e_0) \text{tr} \frac{\partial G}{\partial \sigma'} \cdot \frac{s'_p}{\alpha s'_p - \lambda} \quad (4.56)$$

Il est important de remarquer que la valeur du paramètre d'écroûissage actuel dépend non-linéairement de la valeur de l'indice des vides actuel et que la relation (4.56) nécessite le calcul de s'_p . Ce dernier peut être effectué de la façon suivante.

La valeur de s'_p correspond au point d'intersection (dans l'espace $e-s'$) des courbes :

$$e = e^p - \alpha(s' - 1) \quad \text{et} \quad e = e_{\lambda_0} - \lambda \ln |s'|.$$

Cela donne une équation non-linéaire, à résoudre par un procédé itératif du type Newton par exemple, pour trouver la valeur du paramètre d'écroûissage :

$$e^p - \alpha(s'_p - 1) = e_{\lambda_0} - \lambda \ln |s'_p|. \quad (4.57)$$

Moyennant le calcul de la valeur actuelle du paramètre d'écroûissage, on peut calculer la valeur du critère et les autres termes qui en dépendent. Il reste cependant à déterminer les paramètres mécaniques du modèle.

Détermination des paramètres mécaniques du modèle MELANIE

Il existe plusieurs paramètres indispensables au fonctionnement du modèle **MELANIE** :

- l'état initial de l'argile est défini à partir de la donnée de la contrainte verticale effective σ'_{v0} , de l'indice des vides initial e_0 et du coefficient de pression des terres au repos dans le domaine surconsolidé K_0^{nc} ;

- l'ellipse correspondant à l'état initial du sol est déterminée par, d'une part la donnée de la pression de préconsolidation σ'_p , réduite d'un essai oedométrique et, d'autre part la donnée du coefficient de pression des terres au repos du domaine normalement consolidé K_0^{nc} , qui définit l'angle entre le grand axe de l'ellipse et l'axe Os' . Ce coefficient peut être soit mesuré en place ou en laboratoire, soit calculé par une formule telle que :

$$K_0^{nc} = 1 - \sin \varphi', \quad (4.58)$$

où φ' représente l'angle de frottement interne de l'argile. Quant au paramètre de l'écroûissage initial de l'ellipse, il vérifie une loi empirique simple :

$$s'_p = 0,6 \sigma'_p ; \quad (4.59)$$

- le comportement orthotrope de révolution du squelette de l'argile à l'intérieur de la courbe limite dépend de cinq paramètres indépendants E'_v , E'_h , ν'_{hh} , ν'_{vh} et G'_{vh} . Si l'on admet qu'il existe, pour des applications pratiques en mécanique des sols, des relations simples entre certains de ces paramètres, par exemple :

$$E'_h/E'_v = n = \text{cste}, G'_{vh}/E'_v = m = \text{cste}, \nu'_{hh} = \nu'_{vh} = \text{cste}.$$

il suffit alors de déterminer un module, par exemple le module oedométrique dans le domaine surconsolidé E'_{Oed} , afin d'obtenir les paramètres précédents. La valeur du module E'_v se déduit de la courbe oedométrique (fig 4.10) au moyen de la relation :

$$E'_v = \frac{(1+e_0)(\sigma'_p - \sigma'_{v0})}{C_s \ln(\sigma'_p/\sigma'_{v0})} \left[1 - 2n \frac{u_{vh}^2}{1 - u_{vh}} \right]. \quad (4.60)$$

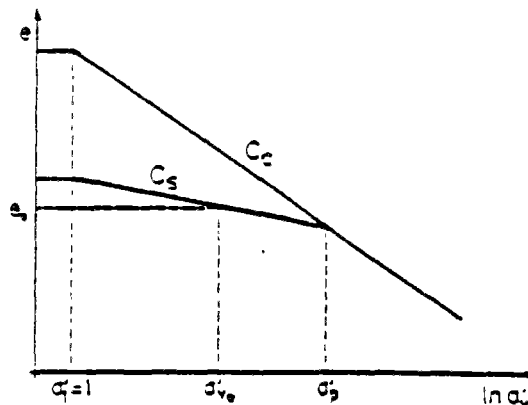


Fig. 4.10 Courbe oedométrique

- la pente λ de la courbe vierge isotrope est donnée par l'indice de compression C_c [déterminé par l'essai oedométrique (fig. 4.10)] au moyen de la relation :

$$\lambda = C_c / \ln 10 ; \quad (4.61)$$

- la pente α des courbes de déformations réversibles isotropes est calculée en fonction des caractéristiques du sol. En effet, lors d'un chargement isotrope, on peut écrire la relation (4.62) suivante :

$$\Delta \varepsilon_{vol} = \Delta \varepsilon_h + \Delta \varepsilon_v = (F_{11} + 2F_{12} + F_{22}) \Delta \sigma' \quad (\text{élasticité } \varepsilon = F\sigma')$$

Comme, par ailleurs :

$$\Delta s' = (\Delta \sigma'_v + \Delta \sigma'_h) / 2 = \Delta \sigma', \quad (4.63)$$

et

$$\Delta e = \Delta \varepsilon_{vol} (1 + e_0) = \alpha \Delta s', \quad (4.64)$$

on obtient l'expression suivante pour la pente :

$$\alpha = (1 + e_0) (F_{11} + 2F_{12} + F_{22}) ; \quad (4.65)$$

- la valeur de l'indice des vides limites $e_{\lambda 0}$, fonction de la pente α calculée précédemment, de la contrainte verticale initiale s'_{v0} , de la pression de préconsolidation isotrope s'_p , et de l'indice des vides initial e_0 (fig. 4.11), est calculée au moyen de la relation :

$$e_{\lambda 0} = e_0 - \alpha (s'_p - s'_{v0}) + \lambda \ln s'_p ; \quad (4.66)$$

- la valeur initiale de l'indice des vides e_0^p , correspondant à la courbe de déformation réversible actuelle et à une contrainte moyenne de référence $s'_1 = 1$ est déterminée par la relation (fig. 4.11) :

$$e_0^p = e_0 - \alpha (s'_{v0} - 1). \quad (4.67)$$

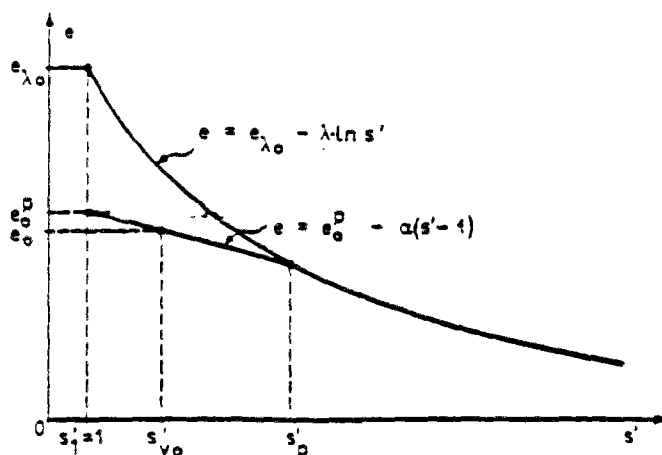


Fig. 4.11 Détermination des indices des vides $e_{\lambda 0}$ et e_0^p

Au terme de ce paragraphe, nous avons précisé l'ensemble des paramètres mécaniques intervenant au niveau de la loi élastoplastique que nous avons adoptée pour la rhéologie des sols mous. Il est intéressant de préciser à présent comment nous avons intégré numériquement cette loi.

4.2.2.4 Intégration numérique des lois élastoplastiques. Cas du modèle **MELANIE**

La complexité mathématique des modèles élastoplastiques fait que le recours à l'intégration numérique des lois élastoplastiques est de plus en plus systématique.

Il existe en ce domaine plusieurs schémas numériques, tant implicites qu'explicites. La méthode choisie dans le code de calculs par éléments finis CESAR utilise un schéma d'intégration explicite dont les fondements théoriques ont été déjà exposés à travers les relations (4.18) et (4.19) : on développe le critère au premier ordre et la valeur de celui-ci à l'état actuel des contraintes permet d'évaluer le multiplicateur de plasticité.

Cette méthode, basée sur un schéma d'intégration explicite, peut, dans certains cas, cumuler des erreurs irréversibles lorsque les incréments de déformations sont importants ou lorsque le modèle élastoplastique considéré présente un mode d'écroutissement complexe (Ph. Mestat, Manuel théorique de CESAR, Module PLAS, Janvier 1988).

Or il n'est pas impossible que l'un de ces inconvénients puisse se présenter dans la stratégie de résolution du couplage que nous avons proposée.

En effet, d'une part, à cause de la non-linéarité hydraulique, nous sommes conduits, pour chaque itération, à remettre tout le second membre (méthode du point fixe) et non le résidu (méthode de Newton appliquée à l'élastoplasticité des massifs secs ou saturés), ce qui pourrait induire, entre deux itérations successives, des déformations importantes et, d'autre part, à cause de la forte non-linéarité de l'écroutissement du modèle MELANIE, des erreurs irréversibles peuvent être envisageables (on discutera cette question sur un exemple dans le cadre de la validation de la programmation).

Afin d'éviter de telles erreurs éventuelles, nous avons, à titre exploratoire, et spécialement pour le modèle MELANIE, introduit dans le schéma classique d'intégration de CESAR, une sous-incrémentation automatique dont le principe est exposé ci-après.

On divise d'abord l'intervalle d'intégration $[t_i, t_{i+1}]$ en N sous-intervalles de longueur égale ; en posant $\bar{\sigma}_1 = \sigma'_1$ et $\Delta \bar{\epsilon}_1 = (\epsilon'_{i+1} - \epsilon'_i)/N$, on incrémente ensuite les contraintes de j à N tel que :

$$\Delta \lambda_j = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma'} \right]_{\bar{\sigma}'_j}^T E \Delta \bar{\epsilon} / \left\{ \beta_j + \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma'} \right]_{\bar{\sigma}'_j}^T E \left[\frac{\partial G}{\partial \sigma'} \right]_{\bar{\sigma}'_j} \right\} \quad (4.68)$$

Si $\Delta \lambda_j < 0$, on pose alors $\Delta \lambda_j = 0$ (pour l'incrément j , il n'y a pas de plasticité). Sinon (pour cet incrément il y a donc plasticité), on calcule successivement les déformations plastiques, les contraintes et la valeur de l'érouissage :

$$\Delta \epsilon_{j+1}^P = \Delta \epsilon_j^P + \Delta \lambda_j \left[\frac{\partial G}{\partial \sigma'} \right]_{\bar{\sigma}'_j} \quad (4.69)$$

$$\bar{\sigma}'_{j+1} = \bar{\sigma}'_j + E(\epsilon'_{j+1} - \epsilon'_j)/N - \Delta \lambda_j E \left[\frac{\partial G}{\partial \sigma'} \right]_{\bar{\sigma}'_j} \quad (4.70)$$

$$\bar{k}_{j+1} = k_j (\Delta \epsilon_{j+1}^P).$$

A la fin du cumul des N sous-incréments, on obtient l'état de contraintes :

$$\sigma'_{i+1} = \bar{\sigma}'_{N+1}.$$

Le choix d'un nombre précis de sous-incréments est cependant problématique, mais il semble que 5 à 10 suffisent en général (Ph. Mestat, Manuel théorique de CESAR, Module PLAS, Janvier 1988).

4.2.3. Programmation effectuée

La programmation a consisté à étendre les possibilités de la famille d'éléments finis dont les propriétés élémentaires ont été décrites au chapitre précédent. Ces nouvelles fonctions élémentaires sont celles qui permettent à la famille d'éléments, en l'occurrence la famille d'éléments de consolidation bidimensionnelle, de traiter les problèmes élastoplastiques.

Ainsi, nous avons introduit le calcul des contraintes aux points d'intégration des éléments, le calcul des contraintes aux noeuds à partir des points d'intégration et inversement, le calcul élémentaire du vecteur des forces nodales dues aux corrections des contraintes, le calcul du vecteur des efforts internes par intégration des contraintes vérifiant l'équilibre, le calcul des valeurs de l'érouissage au niveau des points de Gauss de l'élément, etc.

Après avoir adapté cette famille d'éléments aux divers calculs d'élastoplasticité, on passe ensuite à la création, dans le code CESAR d'un nouveau "bloc" de calcul qui est, par définition, l'écriture programmée de la stratégie de résolution détaillée au paragraphe précédent. Cela donne un **nouveau module de calculs par éléments finis traitant l'élastoplasticité couplée aux écoulements à surface libre.**

La mise au point de la programmation du processus itératif basé sur la méthode du point fixe a conduit à **créer ou modifier** pratiquement tous les **sous-programmes traitant l'élastoplasticité**. La programmation de celle-ci dans CESAR, a été en effet exclusivement élaborée dans la perspective des algorithmes du type Newton-Raphson.

Un effort particulier a été réservé aussi bien à la généralité de la programmation qu'à sa souplesse.

Plusieurs paramètres mécaniques et hydrauliques peuvent varier au cours du processus itératif, comme les coefficients de perméabilité, la compressibilité du fluide, l'indice des vides, etc.

L'isotropie du sol ou son anisotropie mécanique et hydraulique sont envisagées. Sont envisagées également diverses hypothèses sur la nature des problèmes à traiter : déformations planes, contraintes planes et axisymétrie.

Sont aussi prévus par le module les modèles élastoplastiques les plus classiques disponibles dans CESAR : critère de **Mohr-coulomb**, critère de **Von-Mises** avec ou sans écrouissage, critère de **Drucker** avec ou sans écrouissage, critère de **Nova**, de **Vermeer**, de **Prevost-Hoeg**, de **Cam-clay** modifié, de **MELANIE**, etc. Plusieurs modèles peuvent ou non, suivant le problème étudié, se présenter en même temps grâce à un traitement approprié par groupe : les données matérielles de chaque groupe sont consignées dans un tableau dont on extrait automatiquement les données mécaniques (un aiguillage permet de traiter le modèle choisi pour le groupe) pour les calculs élastoplastiques et les données hydrauliques pour les calculs de diffusion.

Le nouveau module de consolidation des sols élastoplastiques à surface libre ainsi constitué réalise la synthèse d'un problème de diffusion non-linéaire et d'un problème élastoplastique. Ses **entrées** (jeu de données) et Ses **sorties** (résultats des calculs) sont issues de la la **fusion** des **entrées** et des **sorties** du module **NSAT** de CESAR et du module traitant l'élastoplasticité des massifs (**MCNL**).

Les chargements, comme les conditions aux limites, peuvent provenir de diverses origines et s'appliquer progressivement dans le temps (enchaînement de phases ou calcul avec reprise).

Enfin, l'utilisateur fixe le choix des paramètres du processus de convergence. Il en existe principalement deux : le nombre d'itérations qu'il désire ne pas dépasser et la tolérance sur la solution qu'il souhaite obtenir. Dans tous les cas, le critère de convergence doit satisfaire une double exigence sur la vérification de l'équilibre et la loi de comportement, d'une part, et sur la tolérance de la solution, d'autre part.

Ainsi, il y a convergence lorsque, pour le pas de temps considéré et pour tout noeud du maillage les différences maximales entre deux itérations successives du terme non-linéaire du second membre et de la solution (déplacements et charge hydraulique) atteignent une tolérance fixée préalablement par l'utilisateur. On considère qu'il y a, au contraire, divergence du processus itératif et donc arrêt du programme, lorsqu'on dépasse sans converger un nombre d'itérations fixé également par l'utilisateur.

L'utilisateur désireux de plus de détails sur la mise en oeuvre du module et de sa programmation peut consulter le mode d'emploi et le manuel de programmation que nous avons rédigés dans ce sens (publications sur CESAR-LCPC de la section des modèles numériques du LCPC).

4.2.4. Validation de la programmation

4.2.4.0. Introduction

Le développement progressif du code de calculs par éléments finis CESAR s'accompagne tout naturellement d'un effort soutenu de recherche de validation. Celle-ci traduit, à l'heure de la multiplicité des programmes de calculs, une exigence de qualité et de fiabilité des modélisations numériques.

La méthodologie adoptée pour la validation de CESAR consiste en général à rechercher des solutions analytiques ou "expérimentales" bien établies.

En ce qui concerne la plasticité où la complexité mathématique est de règle, on choisit généralement, pour valider les algorithmes, des modèles élastoplastiques simples sur une géométrie simple.

On propose dans ce qui suit, à titre de validation, une comparaison des résultats numériques avec des résultats analytiques donnés par la littérature ou développés au cours de cette étude.

Trois tests en déformation plane sont présentés. Le premier concerne l'élastoplasticité isotrope avec écrouissage affine des massifs secs, pour lequel existe une solution. Le deuxième étudie le cas transitoire des sols élastoplastiques saturés, pour lequel on a mis au point une solution analytique. Le troisième test intéresse directement le modèle MELANIE et dont on compare les résultats avec une solution analytique également.

4.2.4.1 Colonne sèche de sol élastoplastique à écrouissage affine soumise à une compression uniforme

Objectifs du test

Ce test permet de valider un algorithme basé sur l'utilisation de l'algorithme du point fixe comme méthode de résolution des problèmes de l'élastoplasticité. Il peut aussi nous renseigner sur la stabilité de la solution. La comparaison avec la solution analytique donne, de plus, une évaluation intéressante de la précision du calcul.

Problème à résoudre

On se propose de calculer les déformations subies par une colonne sèche de sol élastoplastique isotrope, soumise à une compression uniforme P (fig. 4.11).

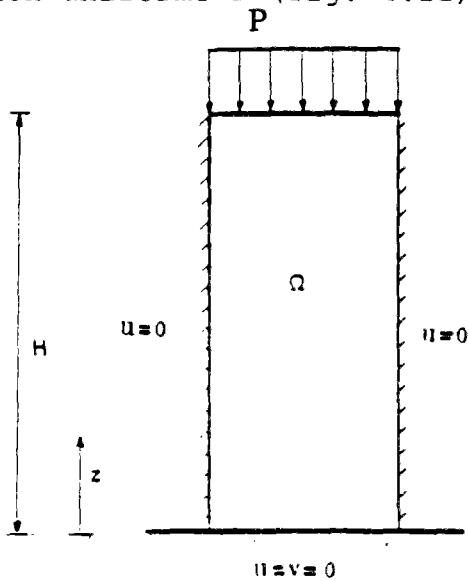


Fig. 4.11 Chargement et conditions aux limites imposés

Le modèle élastoplastique choisi est isotrope et à écrouissage affine; le critère est celui de Tresca ; l'élasticité associée est celle de Hooke, caractérisée par les modules E et ν . Ce modèle est assez souvent utilisé dans la validation des problèmes de mécanique non-linéaire en déformation plane, car il permet un certain nombre de développements analytiques (**Mestat**, recueil de solutions analytiques en plasticité, Publications internes sur CESAR-LCPC, Section des modèles numériques, LCPC, 1988).

Rappels de quelques résultats analytiques

* Champ de déplacement

Compte tenu des conditions aux limites et du chargement imposé (fig. 4.11), le déplacement est unidimensionnel. Le champ de déplacement est donc de la forme :

$$\begin{cases} u(x, y) = 0 \\ v(x, y) = v(y) \\ v(x, 0) = 0 \end{cases}$$

* Champ des contraintes

L'équation de l'équilibre de la mécanique des milieux continus, en plus des conditions aux limites et du chargement imposé, permet d'envisager un champ des contraintes de la forme :

$$\sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = -p \quad \text{et les autres composantes non nulles.}$$

* Critère de plasticité et écrouissage

Le critère de plasticité est celui de Tresca. Ce dernier s'écrit sous la forme :

$$F(\sigma, \varepsilon^p) = |\sigma_1 - \sigma_2| - k(\varepsilon^p).$$

avec σ_1 et σ_2 les deux premières contraintes principales du tenseur des contraintes, définies par les relations :

$$\sigma_1 = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2 + 1/2 [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2]^{1/2}$$

$$\sigma_2 = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2 - 1/2 [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2]^{1/2}$$

Mais compte tenu du champ de contraintes choisi dans le cas présent, le critère se simplifie et prend l'expression suivante :

$$F(\sigma, \varepsilon^p) = |\sigma_{xx} - \sigma_{yy}| - k(\varepsilon^p),$$

ce qui s'écrit encore, si l'on introduit le réel α (1 ou -1) :

$$F(\sigma, \varepsilon^p) = \alpha(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) - k(\varepsilon^p),$$

On a déjà vu que le paramètre d'écrouissage est une fonction du tenseur des déformations plastiques. Ce dernier peut être relié, à travers son déviateur, au multiplicateur de plasticité. Il peut donc exister une relation entre le paramètre d'écrouissage et le multiplicateur de plasticité pour une classe de modèles. Dans le cas présent, on considère que l'écrouissage est affine :

$$k(\lambda) = a\lambda + b \quad a \geq 0.$$

* Relations contraintes-déformations

Si l'on explicite les relations (4.1), (4.2) et (4.3) pour le cas qui nous intéresse, on obtient en tenant compte de ce qui précède les équations suivantes :

$$\begin{cases} d\varepsilon_{xx} = 1/E [(1+\nu)d\sigma_{xx} - \nu(d\sigma_{xx} + d\sigma_{yy} + d\sigma_{zz})] + \kappa d\lambda \\ d\varepsilon_{yy} = 1/E [(1+\nu)d\sigma_{yy} - \nu(d\sigma_{xx} + d\sigma_{yy} + d\sigma_{zz})] - \kappa d\lambda \\ d\varepsilon_{zz} = 1/E [(1+\nu)d\sigma_{zz} - \nu(d\sigma_{xx} + d\sigma_{yy} + d\sigma_{zz})] \end{cases}$$

L'hypothèse des déformations planes, la forme considérée du champ de déplacement et celle prise pour le paramètre d'écroutissage permettent, après intégration et réarrangements de termes, d'obtenir les relations suivantes :

$$d\lambda = - \frac{(1+\nu)}{E} \kappa \left[d\sigma_{xx} - \nu(d\sigma_{xx} + d\sigma_{yy}) \right]$$

$$k(\lambda) = \kappa(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})$$

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} (\sigma_{xx} + d\sigma_{yy})$$

Si l'on néglige le domaine élastique initial ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$ dans la relation entre le paramètre d'écroutissage et la multiplicateur), on obtient les relations suivantes :

$$\sigma_{xx} = \frac{2E + \nu(1+\nu)}{E + \nu(1-\nu^2)} \sigma_{yy} \quad (4.71)$$

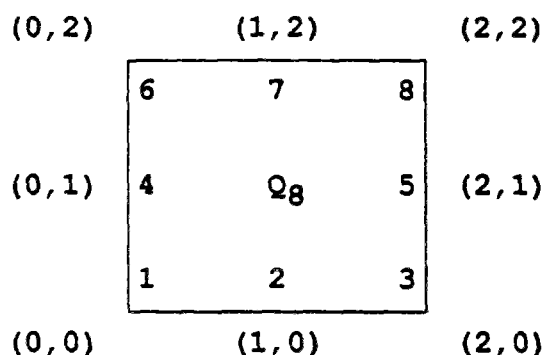
$$\varepsilon_{yy} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \left[\frac{2E + \nu(1+\nu)}{E + \nu(1-\nu^2)} \right] \sigma_{yy} \quad (4.72)$$

Jeu de données numériques

Puisque la colonne est sèche, seuls les paramètres mécaniques sont à considérer. Prenons :

$E = 10^3$ kPa (module d'Young), $\nu = 0$ (coefficient de Poisson), $a = 10$ kPa, $b = 0$ (a et b paramètres de l'écoulement).

Afin de voir si le nombre de points de Gauss choisi pour l'élément fini (8 au lieu des 4 habituels pour l'élément quadrilatère à 8 noeuds), on a choisi pour ce test un maillage élémentaire : un quadrilatère à 8 noeuds :



La pression, de valeur **-2 kPa**, est appliquée pendant **3 pas** de temps (l'intérêt de faire intervenir explicitement le temps est de s'assurer de la stabilité de la solution, eu égard au processus itératif et schéma d'intégration dans le temps).

Résultats et analyse

Les relations rappelées précédemment fournissent les résultats analytiques rassemblés dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1 Résultats analytiques

σ_{xx} (kPa)	σ_{yy} (kPa)	ϵ_{yy} 10^3
-1,9802	-2	-3,98019

Les résultats numériques sont consignés dans le tableau 4.2. Le calcul est effectué pour une tolérance de 10^{-3} .

Tableau 4.2 Résultats numériques

t (s)	Nombre d' itérations	ϵ_{yy} (10^3)	σ_{xx} (kPa)	σ_{yy} (kPa)
50	12	-3,9793	-1,980	-2
150	1	-3,9797	-1,980	-2
400	1	-3,9800	-1,980	-2

La comparaison des résultats analytiques et numériques montre que la coïncidence entre les deux résultats est parfaite, que la stabilité de la solution est notable, puisque le régime permanent s'obtient dès le premier pas de temps (pas à partir duquel le processus converge au bout d'une seule itération).

Enfin, la convergence est bonne pour la tolérance demandée (12 itérations). On peut, avec la précision obtenue, penser que le test de convergence que nous avons défini pour le second membre est suffisant. Une tolérance de 10^{-3} sur ce dernier entraîne en effet, pour ce test, une tolérance sur la solution de l'ordre du carré de la tolérance demandée.

4.2.4.2. Colonne de sol élastoplastique isotrope saturé d'eau, et soumise à une compression uniforme

Objectifs du test

Toujours dans le but de valider l'algorithme basé sur la méthode du point fixe, nous traitons cette fois-ci un problème transitoire. Le calcul analytique effectué nous permettra, là encore, de tester les performances numériques obtenues.

Problème à résoudre

On reprend la colonne du test précédent. Les conditions aux limites mécaniques, la loi de comportement du squelette et le chargement sont inchangés. Mais on suppose cette fois que la colonne est saturée d'eau incompressible. Les conditions aux limites hydrauliques considérées sont les suivantes :

- imperméabilité des surfaces latérales et de la base de la colonne ;
- drainage à la face supérieure de la colonne (la surface libre est donnée).

Calcul analytique de la charge hydraulique

Les relations obtenues précédemment restent valables à condition de remplacer les contraintes totales par les contraintes effectives. Pour éviter toute confusion, nous écrivons ces relations sous la forme :

$$\sigma'_{xx} = \frac{2E' + au'(1+u')}{E' + a(1-u'^2)} \sigma'_{yy} \quad (4.71)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{(1+u')(1-2u')}{E'} \left[\frac{2E' + a(1+u')}{E' + a(1-u'^2)} \right] \sigma'_{yy} \quad (4.72)$$

De plus, on a :

$$\vec{v} = - \frac{k}{\mu} \text{grad } h \quad (\text{loi de Darcy}), \quad (4.76)$$

$$\text{div } \vec{v} = - \frac{\partial}{\partial t} (\text{tr } \varepsilon) \quad (\text{équation de continuité du fluide}), \quad (4.77)$$

$$\sigma_{yy}(y, t) = \sigma'_{yy}(y, t) - p(y, t) \quad (\text{relation de Terzaghi}), \quad (4.78)$$

$$\sigma_{yy}(y, t) = -p - \gamma_w(H-y) \quad (\text{équation de l'équilibre}), \quad (4.79)$$

$$p(y, t) = \gamma_w(h-y) \quad (\text{définition de la charge}). \quad (4.80)$$

Les équations (4.79), (4.78) puis (4.76), (4.77) et (4.80) permettent d'écrire, en fonction de la charge hydraulique, le système **(T)** suivant :

$$\left. \begin{aligned}
 c_v^P \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \frac{\partial h}{\partial t} \\
 c_v^P &= \frac{kE^P}{\gamma_w} \\
 E^P &= \frac{E' [E' + a(1-u'^2)]}{[2E' + a(1+u')] (1+u')(1-2u')}
 \end{aligned} \right\}$$

On peut remarquer, à ce niveau du calcul, que, par exemple pour $\nu' = 0$, l'élastoplasticité considérée freine la dissipation des pressions interstitielles, jouant ainsi un rôle d'emmagasinement. En effet, le rapport de la diffusivité élastique correspondant sur la diffusivité "élastoplastique" définie précédemment est :

$$\frac{c_v^P}{c_v} = 1 + \frac{E'}{E' + a}$$

Le changement de variable $u = h - H$ (colonne non pesante) permet d'écrire le système (T)' :

$$\left. \begin{aligned}
 c_v^P \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial u}{\partial t} \\
 c_v^P &= \frac{kE^P}{\gamma_w} \\
 E^P &= \frac{E' [E' + a(1-u'^2)]}{[2E' + a(1+u')] (1+u')(1-2u')} \\
 u(y, t) \Big|_{y=h} &= 0 \\
 \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] \Big|_{y=0} &= 0 \\
 u(y, 0^+) &= P/\gamma_w
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{conditions aux limites} \\ \text{condition initiale} \end{array}$$

La solution analytique de ce problème aux dérivées partielles et à conditions aux limites et initiale classiques est connue (séparation des variables puis décomposition en séries) :

$$u(y, t) = \frac{-4P}{\pi\gamma_w} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \exp [-(2n-1)^2 \pi^2 c_v^p t / H] \cos [(2n-1)\pi y / 2H]$$

Jeu de données numériques

Les données mécaniques sont inchangées. Les données hydrauliques sont les suivantes :

$k_x = k_y = 10^{-2} \text{ m/j}$, $k_{xy} = 0$ (valeurs des perméabilités) ;
 $\gamma_w = 1 \text{ kN/m}^3$ (poids volumique du fluide).

La colonne est prise non pesante. La pression uniforme exercée sur la face supérieure de la colonne ($y = H = 10 \text{ m}$) vaut $- 20 \text{ (kPa)}$ pendant 170 jours divisés en 20 pas de temps.

Le maillage (fig. 4.12) a pour caractéristiques :

- 4 éléments quadrilatères à 8 noeuds ;
- 23 noeuds.

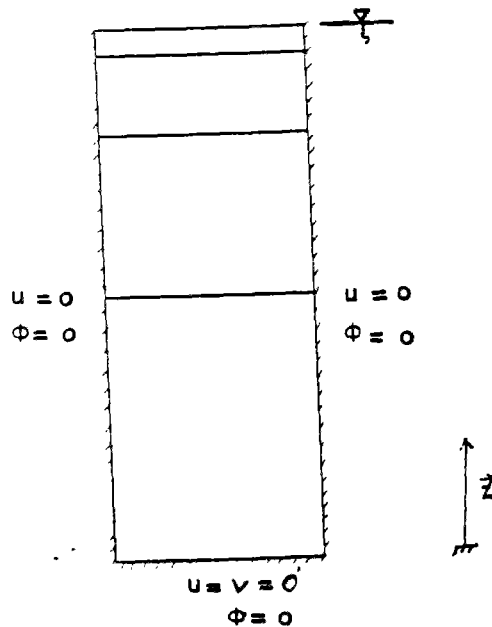


Fig. 4.12 Maillage et conditions aux limites

Résultats et analyse

On trace (fig. 4.13.a) sur une même figure les résultats numériques et analytiques pour la charge hydraulique en fonction du temps là où elle est maximale, c'est à dire à la base de la colonne ($z = 0$). On fait de même pour le déplacement (fig. 4.13.b) là où il est maximal ($z = H$), que l'on compare à la valeur théorique asymptotique qu'il doit prendre.

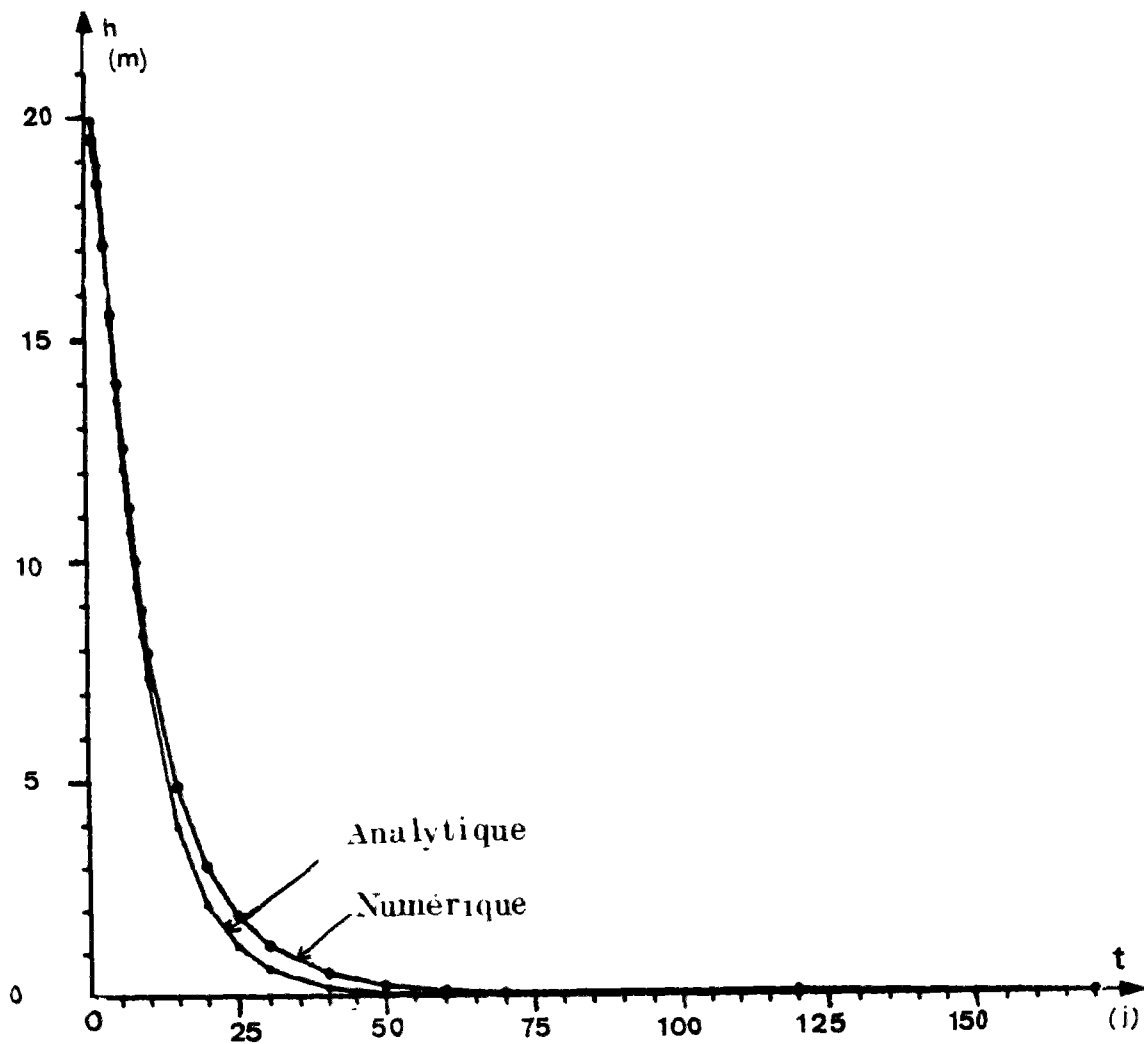


Fig. 4.13.a Charge hydraulique à la base de la colonne. Comparaison entre résultats numériques et analytiques

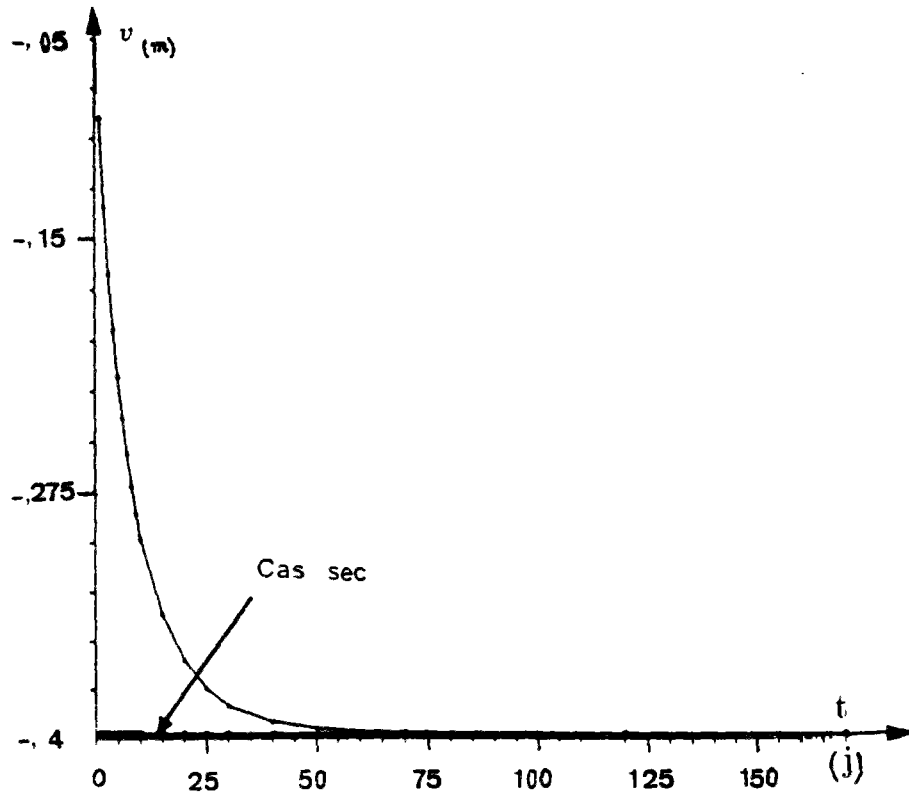


Fig. 4.13.b Déplacement en haut de la colonne

On retrouve le phénomène classique de consolidation : la charge hydraulique prend la valeur de la charge mécanique imposée (en mètres d'eau P/γ_w) au début du processus diffusif pour reprendre, à la fin de celui-ci, sa valeur initiale nulle.

On remarque que les résultats numériques et analytiques sont très voisins. Cependant, ils mettent en évidence l'importance du pas de temps. Lorsqu'on choisit des pas de temps assez grands, on renforce l'écart entre la solution numérique et la solution analytique.

En ce qui concerne le déplacement, on retrouve, là encore, la physique du phénomène puisque le tassement augmente progressivement jusqu'à la valeur asymptotique correspondant au régime permanent (c'est la valeur obtenue dans le cas de la colonne sèche, déjà étudié).

Sur le plan de la convergence, on peut noter que l'introduction de la **phase liquide semble jouer un rôle "stabilisateur" du processus itératif** (par rapport au test de la colonne sèche). Le nombre d'itérations, pour la même tolérance (10^{-3}), est de l'ordre de 4 à 7 (12 dans le cas où la colonne est sèche) pour chaque pas de temps. Ce nombre d'itérations est nettement dégressif jusqu'à la fin de la consolidation (**2 itérations**), ce qui permet d'indiquer que le régime permanent est atteint.

4.2.4.3. Colonne de sol élastoplastique anisotrope. Cas du modèle **MELANIE**

Objectifs du test

L'objectif principal de ce test est de valider l'implantation du modèle MELANIE dans le module de calculs par éléments finis que nous avons introduit dans CESAR. Il vise en même temps à valider l'algorithme dans la cas d'un sol élastoplastique **anisotrope**. Cette validation pose un certain nombre de problèmes, dus notamment à l'absence d'une solution analytique simple capable de reproduire avec précision les déformations dans le sol.

Cette étape nous semble être nécessaire avant d'aborder les "gros" calculs. Elle pourra se révéler instructive à plus d'un titre...

Problème à résoudre

On reprend le même test du début (premier test) : même géométrie, mêmes conditions aux limites, même chargement, déformation plane et la colonne est aussi supposée sèche. Par contre, le sol est anisotrope et obéit au modèle **MELANIE**.

Calcul analytique des déformations

* Champ de déplacement

Le champ de déplacement est inchangé et est de la forme :

$$\begin{cases} u(x, y) = 0 \\ v(x, y) = v(y) \\ v(x, 0) = 0 \end{cases}$$

* Champ des contraintes

L'équation de l'équilibre de la mécanique des milieux continus, en plus des conditions aux limites et du chargement imposé, permet d'envisager un champ des contraintes de la forme :

$\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{yy} = -P$ et les autres composantes du tenseur des contraintes sont a priori non nulles.

* Critère de plasticité et écrouissage

L'équation relative à la surface de charge [d'après (4.24), (4.25), (4.26) ou fonction critère du modèle MELANIE, s'écrit :

$$F(\sigma', \varepsilon^p) = A^2(s' \cos\theta + t \sin\theta - s'_p / AC)^2 + B^2(t \cos\theta - s' \sin\theta)^2 - s'_p{}^2 / C^2,$$

avec :

$$s' = (\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy}) / 2 \quad t = - [(\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy})^2 + 4\tau^2]^{1/2}.$$

Les équations relatives au paramètre d'écrouissage en l'occurrence s'_p , s'obtiennent en reliant d'une part, l'indice des vides aux déformations plastiques et, d'autre part, le paramètre d'écrouissage à l'indice des vides plastique. Il apparaît donc clair que l'indice des vides est un paramètre d'écrouissage dans le modèle MELANIE.

D'après les relations (4.52), (4.53) et (4.55), on peut écrire successivement les relations suivantes :

$$de^p = (1 - e_p) d\varepsilon^p_{vol},$$

$$d\varepsilon^p_{vol} = d\varepsilon^p_{xx} + d\varepsilon^p_{yy} = d\mu (G_{\sigma'_{xx}} + G_{\sigma'_{yy}}),$$

(on note μ le multiplicateur pour éviter la confusion avec la notation de la pente de la courbe vierge λ).

$$de^p = (\alpha - \lambda / s'_p) ds'_p.$$

* Relations contraintes-déformations

Si l'on explicite les relations (4.1), (4.2) et (4.3), on obtient, en appelant F_{ij} les composantes de la matrice d'élasticité orthotrope de révolution en déformation plane ($\underline{\underline{\epsilon}} = E\underline{\underline{\sigma}}$), les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\epsilon_{xx} = F_{11} d\sigma'_{xx} + F_{12} d\sigma'_{yy} + d\mu \frac{\partial G}{\partial \sigma'_{xx}} \\ d\epsilon_{yy} = F_{12} d\sigma'_{xx} + F_{22} d\sigma'_{yy} + d\mu \frac{\partial G}{\partial \sigma'_{yy}} \\ \\ d\epsilon_{xy} = \frac{1}{G_y} d\tau + d\mu \frac{\partial G}{\partial \tau} \end{array} \right.$$

Traitement des équations

Compte tenu des hypothèses sur le déplacement et le chargement, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\epsilon_{xx} = 0 \\ d\epsilon_{xy} = 0 \\ G_{\tau} = \tau = 0 \end{array} \right.$$

Le triplet $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \epsilon_{yy})$ cherché doit donc vérifier le système (M) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = F_{11} d\sigma'_{xx} + F_{12} d\sigma'_{yy} + d\mu \frac{\partial G}{\partial \sigma'_{xx}} \\ \\ d\epsilon_{yy} = F_{12} d\sigma'_{xx} + F_{22} d\sigma'_{yy} + d\mu \frac{\partial G}{\partial \sigma'_{yy}} \end{array} \right.$$

Compte tenu de la complexité de la surface de charge, il semble à priori nécessaire, en vue d'intégrer le système (M), de simplifier le critère, par exemple par particularisation de certains paramètres.

Choisissons la valeur θ égale à $\pi/4$. On en déduit que K_0 est nul. Si, de plus, on prend pour nulles les valeurs v'_{hh} et v'_{vh} , il vient :

$$F_{12} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial \sigma'_{xx}} = 0$$

En effet, on a :

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma'_{xx}} = \frac{\partial G}{\partial s'} \frac{\partial s'}{\partial \sigma'_{xx}} + \frac{\partial G}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \sigma'_{xx}},$$

et, du fait de la particularisation, nous avons :

$$\frac{\partial G}{\partial s'} = \frac{\partial G}{\partial t} ; \quad \frac{\partial s'}{\partial \sigma'_{xx}} = - \frac{\partial t}{\partial \sigma'_{xx}}$$

Dans les conditions précédentes, le critère devient :

$$F(\sigma', \varepsilon^p) = 4\sigma'_{yy} (\sigma'_{yy} - s'_p/C).$$

On constate que, du fait de la particularisation précédente, la plasticité se déclenche lorsque la pression P dépasse s'_p/C .

Ces simplifications étant opérées, la solution du système (M) permettant de calculer les déformations devient triviale :

$$\varepsilon_{yy}(t) - \varepsilon_{yy}(t_0) = F_{22} [-P - \sigma'_{yy}(t_0)] + \frac{\alpha}{1 + e_0} [s'_p(t) - s'_p(t_0)] - \frac{\lambda}{1 + e_0} \ln \frac{s'_p(t)}{s'_p(t_0)}$$

$$s'_p = C.P$$

$$C = 0,6.$$

Jeu de données et résultats

- Données mécaniques

$$E'_v = E'_h = 10^3 \text{ (kPa)} ; \quad u'_{vh} = u'_{hh} = 0 ; \quad G = 10^3 \text{ (kPa)}$$

$$e_0 = 1 ; \quad s'_p = 10 \text{ (kPa)} ; \quad \sigma'_{v0} = 5 \text{ (kPa)} ; \quad \lambda = 0,2 ;$$

$$K_0^{nc} = K_0^{oc} = 0 ; \quad \eta = 0 \text{ (indicateur de normalité)} ;$$

Tolc = 0 (tolérance sur la surface de charge).

- Chargement appliqué

$$P = -20 \text{ (kPa)}.$$

- Maillage considéré

Maillage identique à celui du premier test.

Les résultats numériques et analytiques sont consignés dans le tableau suivant :

Tableau 4.3 Résultats analytiques et numériques du test se rapportant au modèle MELANIE

	Calcul analytique	Calculs numériques		
		Nombre de sous-incréments		
		1	10	20
σ_y	-20 (kPa)	-20 (kPa)	-20 (kPa)	-20 (kPa)
ϵ_y	-0,077314	-0,03169	-0,07602	-0,0790
e^P	0,8913	0,99312	0,9280	0,8890

Analyse des résultats

Ce test sévère (toute la structure se plastifie immédiatement pour une pression dépassant s_p/C), effectué sur un élément, semble montrer l'importance de la sous-incrémentation que nous avons introduite dans l'intégration numérique de la loi élastoplastique du modèle MELANIE.

Sans sous-incrémentation, les déformations calculées numériquement sont très mauvaises. Ce résultat est lié à l'utilisation du schéma explicite classique d'intégration de la loi élastoplastique qui, comme on l'a déjà vu (paragraphe 4.2.2.4), cumule des erreurs irréversibles lorsque le mode d'écroutissage est complexe ou lorsque les variations de déformations plastiques sont importantes.

Par contre, la prise en compte d'une sous-incrémentation ($N = 10$ ou $N = 20$) dans le schéma d'intégration de la loi élastoplastique du modèle MELANIE semble nettement résorber l'écart constaté entre les résultats analytiques et numériques (2 à 4 % d'erreur sur les déformations).

On constate, dans tous les cas, que l'équilibre est néanmoins bien vérifié.

Enfin, on n'a pas constaté sur ce test un effet évident de la sous-incrémentation introduite au niveau de l'intégration de la loi élastoplastique sur la rapidité de convergence du processus itératif.

4.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté **un modèle numérique traitant du couplage de la consolidation des sols élastoplastiques homogènes et anisotropes et des écoulements à surface libre**. On y décrit une stratégie de résolution combinant la méthode des contraintes initiales (plasticité) et la méthode des rigidités variables (hydraulique non-linéaire).

Dans cet algorithme, nous avons défini un critère de convergence et une méthode d'intégration numérique de la loi élastoplastique.

La programmation de l'algorithme a été implémentée dans l'optique de calcul d'ouvrages réels dans un nouveau module du code de calculs par éléments finis CESAR.

L'implantation du modèle MELANIE, en plus des principaux modèles élastoplastiques isotropes, dans le nouveau module, laisse présager une analyse correcte du comportement des fondations molles.

Les tests effectués avec succès, nous permettent d'envisager le passage au calcul d'ouvrages réels, tels que remblais et barrages en terre construits sur sols mous.

Chapitre 5 - APPLICATIONS

5. APPLICATIONS

5.1. Introduction

Ce chapitre présente des applications à des exemples illustrant des problèmes liés à la consolidation à surface libre et un cas réel de digue. On y présente la mise en oeuvre des modules développés au cours du travail et implantés dans le code CESAR.

Quelques tests montrent l'évolution de la modélisation effectuée par rapport à des modélisations antérieures (Babchia et Magnan, 1986). Enfin, le calcul de la digue de Maurepas-Courance de Saint-Quentin-en-Yvelines, projet complexe, met en évidence les nouvelles possibilités de traitement des problèmes de couplage de la consolidation et des écoulements à surface libre. On s'efforcera d'exposer à travers ce cas réel la logique qui sous-tend l'étude couplée du barrage et de sa fondation dans cette nouvelle approche.

5.2. Tests d'illustration

5.2.1. Influence de la perméabilité du barrage sur l'écoulement dans la fondation molle : comparaison avec les travaux de Babchia et Magnan (1986)

Présentation du test

Ce test vise à présenter un aspect de l'évolution de la modélisation du couplage barrage-fondation à travers deux calculs :

- calcul où le barrage est supposé étanche,
- calcul d'un ouvrage homogène (mêmes perméabilités pour le barrage et sa fondation).

Le premier calcul suppose une imperméabilité du barrage, hypothèse sous laquelle Babchia et Magnan (1986) analysaient l'incidence de la mise en eau du barrage sur le comportement de la fondation molle saturée. Les procédures numériques d'écoulements à surface libre couplés avec l'écoulement dans la fondation n'étaient alors pas au point. Il résultait donc de cette hypothèse un découplage hydraulique entre la fondation et le barrage, ce qui pose un problème de singularité du comportement de la surface du sol entre la fondation et le remblai (fig. 5.1). Cette interface AB se comporte-t-elle comme une surface drainante (du fait de son appartenance à la fondation) ou une surface imperméable (du fait de son appartenance au remblai) ?

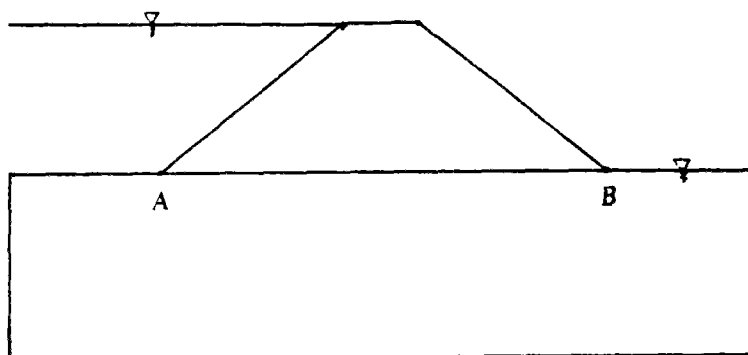


Fig. 5.1 Interface AB de singularité

On a tenté, dans le cadre de la continuité de la charge hydraulique et du déplacement sur cette interface et donc du couplage nouvellement introduit, de mettre en évidence l'influence de la perméabilité du barrage sur le comportement du soubassement, notamment sur l'évolution des pressions interstitielles à cet endroit.

Maillage

Il s'agit d'une géométrie type de digue de faible altitude (6 m) reposant sur une fondation argileuse (épaisseur 9 m). Le maillage considéré pour les deux calculs est présenté sur la figure 5.2 et possède les caractéristiques numériques résumées dans le tableau 5.1. Pour différencier entre le remblai et sa fondation, on a prévu dans le maillage deux groupes d'éléments dont un correspond au barrage, l'autre à la fondation.

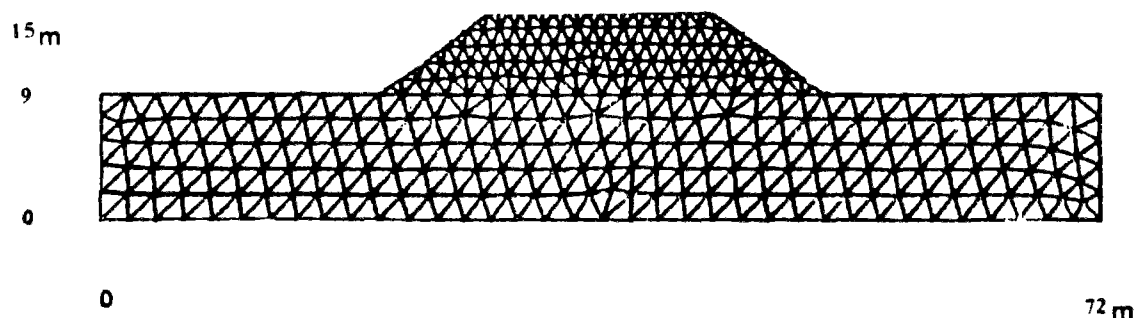


Fig. 5.2 Maillage servant aux tests

Tableau 5.1 Caractéristiques numériques du maillage

Nombre de noeuds	354
Nombre d'éléments	600
Type d'éléments	Triangle à 3 noeuds

Jeu de données

Le module exécuté correspond au **calcul** élastique. On suppose une isotropie mécanique et hydraulique. Pour ce modèle de couplage, 16 données matérielles sont nécessaires :

- paramètres mécaniques : module d'Young, coefficient de Poisson et poids volumique ;
- paramètres hydrauliques : poids volumique du fluide, porosité, compressibilité du fluide, 3 coefficients du tenseur de perméabilités à saturation, teneur en eau volumique à saturation, 2 paramètres A_1 et B_1 définissant la courbe de variation du couplage $Y_1(p)$, 2 paramètres A_2 et B_2 définissant la courbe de variation de la perméabilité relative et 2 paramètres C et D définissant la courbe de variation $c(p)$ de la capacité capillaire. Les paramètres définissant la variation de la compressibilité du fluide sont pris identiques à ceux du couplage, en vue de limiter le nombre de données.

Les tableaux 5.2 et 5.3 représentent l'ensemble des données matérielles introduites dans le deuxième calcul. Le premier calcul est effectué en annulant les rigidités hydrauliques dans le barrage (perméabilité, compressibilité, teneur en eau à saturation), ce dernier étant supposé étanche y compris l'interface barrage-fondation.

Tableau 5.2.a Données mécaniques et hydrauliques de la fondation

γ (kN/m ³)	E (kPa)	ν	γ_w (kN/m ³)	n	a_w (kPa ⁻¹)	k_x (m/j)	k_y (m/j)	k_{xy} (m/j)
20	$3 \cdot 10^4$	0,35	10	0,4	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}	0

Tableau 5.2.b Paramètres intervenant dans les courbes de variation

θ_{sat}	A ₁	B ₁	A ₂	B ₂	C	D	E
0	10^{-3}	4	10^{-3}	4	0	10	0

Tableau 5.3.a Données mécaniques et hydrauliques du barrage

γ (kN/m ³)	E (kPa)	ν	γ_w (kN/m ³)	n	a_w (kPa ⁻¹)	k_x (m/j)	k_y (m/j)	k_{xy} (m/j)
20	$3 \cdot 10^4$	0,35	10	0,2	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}	0

Tableau 5.3.b Paramètres intervenant dans les courbes de variation pour le barrage

θ_{sat}	A ₁	B ₁	A ₂	B ₂	C	D	E
0,1	10^{-3}	4	10^{-3}	4	0	$2 \cdot 10^2$	0

Conditions aux limites

- Conditions aux limites hydrauliques

On suppose pour les deux calculs que la mise en eau est effectuée instantanément, ce qui porte la charge hydraulique de la valeur 9 m à 15 m à l'amont. A l'aval, la nappe demeure maintenue à 9 m, c'est-à-dire au niveau initial correspondant à l'état hydrostatique. Partout ailleurs, est imposée une condition de flux nul.

- Conditions aux limites mécaniques

Le déplacement horizontal est bloqué sur les côtés latéraux de la fondation. Le substratum est, pour sa part, maintenu encastré.

L'ensemble des conditions aux limites est illustré par la figure 5.3.

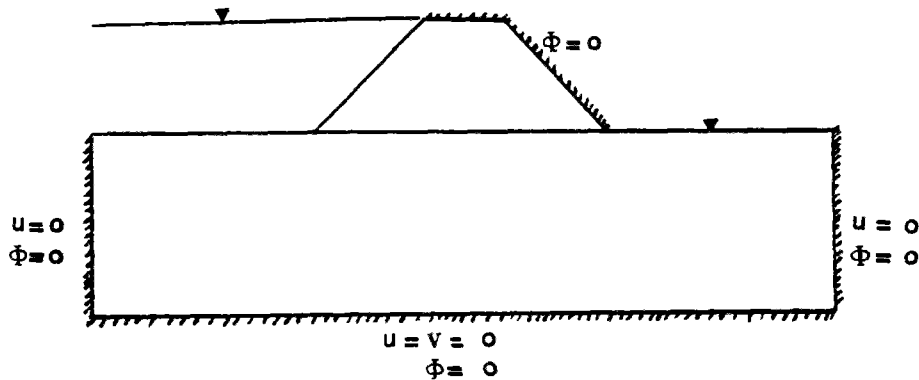


Fig. 5.3. Conditions aux limites mécaniques et hydrauliques

Etat initial

L'état initial correspond à l'état hydrostatique dans la fondation. L'origine de l'axe ascendant est constitué par le substratum.

Chargement

Le seul chargement considéré est uniquement le poids volumique du remblai. Ce dernier est supposé construit en une seule phase, comme pour les digues de faible hauteur, le but à ce stade étant de comparer les deux calculs entre eux.

Résultats

On étudie l'évolution de la charge hydraulique à l'interface dans les deux cas (barrage perméable et barrage imperméable y compris l'interface). En vue de comparer les deux résultats, on trace sur une même figure, à différents temps représentatifs de la vie de l'ouvrage ($t = 1$ mois, $t = 6$ mois, $t = 5$ ans et $t = 10$ ans), les charges obtenues dans les deux calculs. Les figures 5.4 et 5.5 représentent l'évolution de la charge hydraulique suivant la coupe de l'interface barrage-fondation.

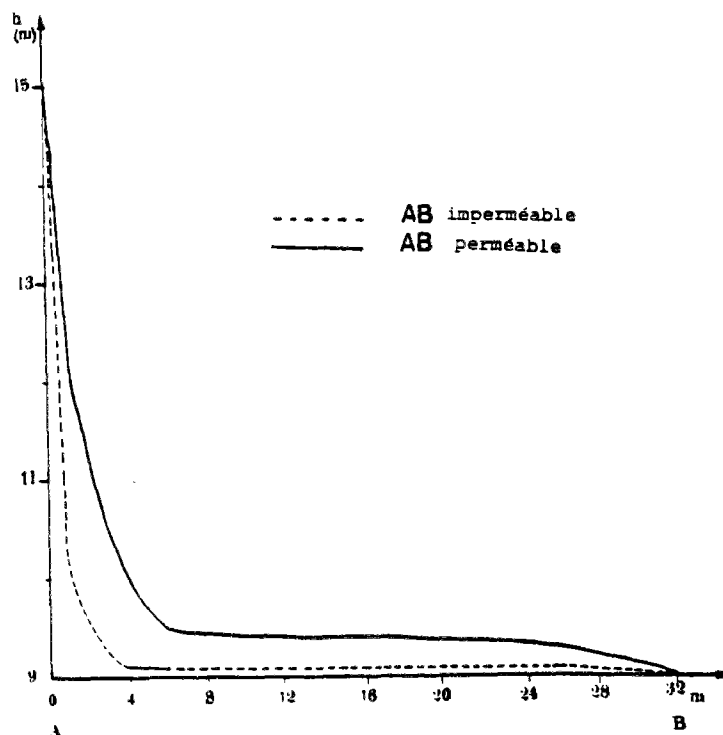


Fig. 5.4.a Evolution de la charge hydraulique à l'interface AB à $t = 1$ MOIS

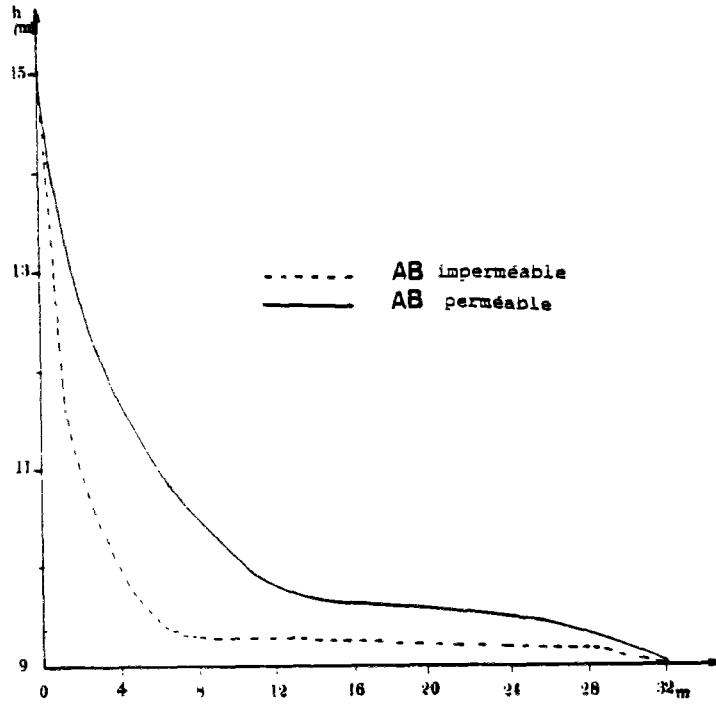


Fig. 5.4.b Evolution de la charge hydraulique à l'interface AB à $t = 6$ mois

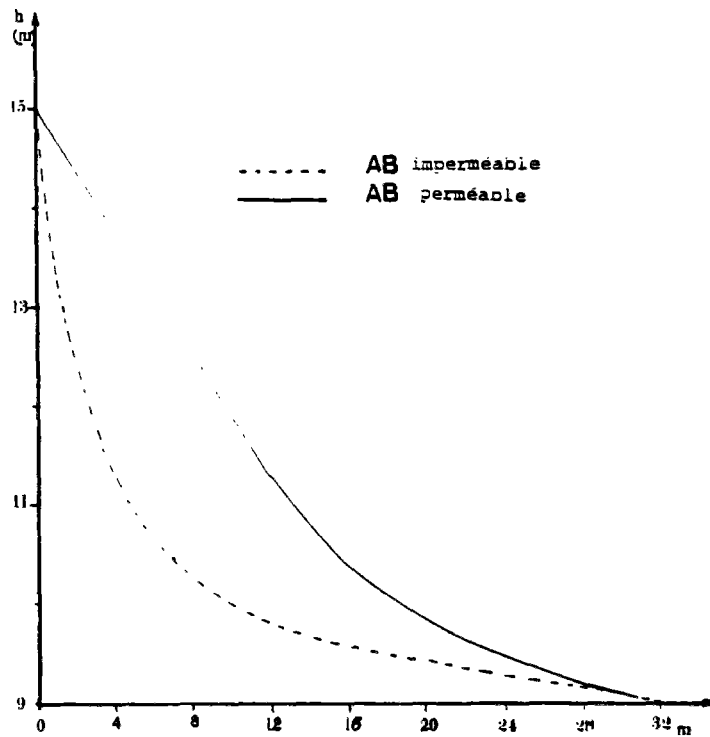


Fig. 5.4.c Evolution de la charge hydraulique à l'interface AB à $t = 1$ an

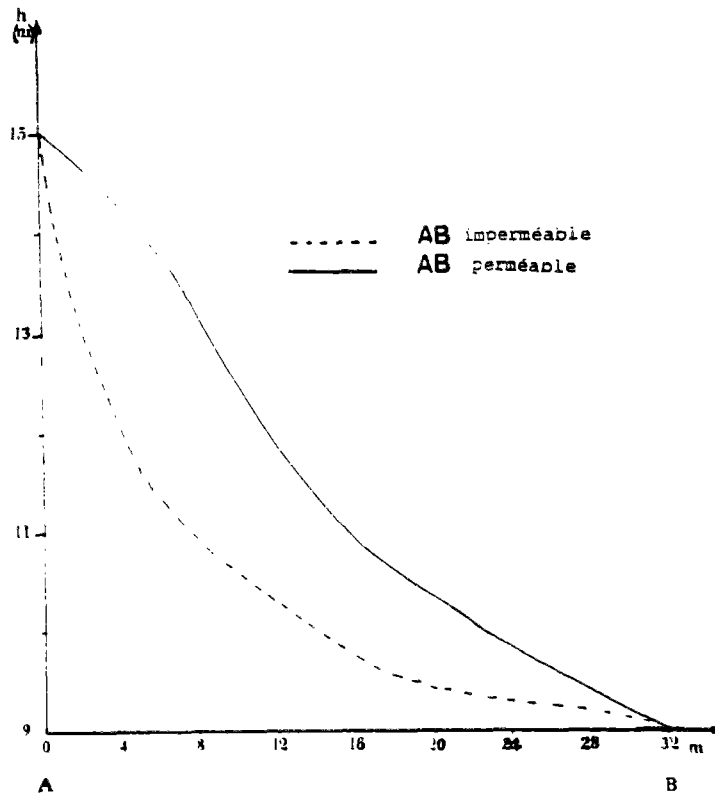


Fig. 5.4.d Evolution de la charge hydraulique à l'interface AB à $t = 10$ ans

Analyse des résultats

Ce test numériquement assez sévère (mise en eau instantanée) a relativement bien convergé. Lorsque le barrage est imperméable, la convergence est assurée en deux itérations, la fondation étant complètement saturée. La perméabilité du barrage et les conditions aux limites entraînent automatiquement l'établissement progressif d'un écoulement transitoire à surface libre. On peut dire (fig. 5.4. a, b, c et d) que, dans les deux cas, étanchéité du barrage ou non, la charge hydraulique à l'interface augmente au fur et à mesure de l'écoulement vers l'aval. Aux premiers instants, les résultats des deux calculs sont assez comparables, l'avancement du front de saturation juste après la mise en eau n'ayant pas encore produit un effet évident. En revanche, 6 mois après la mise en eau, l'écart entre les charges hydrauliques s'accélère sensiblement, surtout à l'amont de l'interface. Les noeuds les plus à l'amont accusent un retard de plus de 2 m dans le cas d'imperméabilité du barrage. Ce retard se confirme pour presque l'ensemble des noeuds de l'interface vers la fin de la consolidation du premier calcul, à $t = 10$ ans. La perméabilité du barrage joue finalement un rôle accélérateur de la diffusion vers l'aval. Par contre, son étanchéité freine l'infiltration de l'eau à l'intérieur du barrage et produit une perte de charge à l'interface.

5.2.2. Evaluation du temps de la consolidation d'un barrage en terre soumis à un écoulement à surface libre

Présentation du test

Toujours dans le but de situer ce travail par rapport à la modélisation effectuée par Babchia et Magnan, on a cherché à estimer le temps de consolidation d'un barrage en terre, siège d'un écoulement à surface libre. Selon les conclusions de Babchia, le temps final de la consolidation de la fondation saturée correspond au temps où la distribution des pressions interstitielles dans la fondation coïncide avec celle du régime permanent (sans couplage mécanique-hydraulique).

On a voulu, par le présent test, savoir si l'on peut étendre cette conclusion non pas seulement aux écoulements saturés mais aussi aux écoulements à surface libre. Sur le plan pratique, une telle conclusion peut avoir une grande importance dans l'exploitation optimale de l'ouvrage car elle peut, par exemple, orienter la date de mise en eau du barrage. D'autre part, elle peut servir de moyen de surveillance du processus du tassement de la fondation par référence au régime permanent.

Le test qu'on présente ici consiste à comparer les résultats obtenus du calcul du barrage perméable homogène précédent (écoulement transitoire à surface libre) avec ceux de l'écoulement stationnaire à surface libre (sans couplage mécanique-hydraulique) pour les mêmes caractéristiques hydrauliques, la même géométrie et les mêmes conditions aux limites. Les résultats de ces deux écoulements sont alors comparés pour divers instants.

Maillage et jeux de données

On reprend le maillage du barrage précédent, avec des conditions aux limites identiques et des données matérielles similaires. Seulement, on occulte le couplage mécanique-hydraulique en "annulant" le poids volumique du fluide et la teneur en eau volumique à saturation ainsi que la compressibilité du fluide, par une option du programme spécialisée dans les calculs de régime stationnaire. Le module exécuté est le module élastique isotrope.

Résultats

On trace d'abord les équipressions de l'écoulement stationnaire (fig. 5.5). Ensuite, on trace celles du régime transitoire correspondant aux temps suivants : $t = 1$ an, $t = 5$ ans, $t = 10$ ans et $t = 32$ ans (fig. 5.6.a, b, c et d). On compare alors ces distributions avec celle du régime permanent.

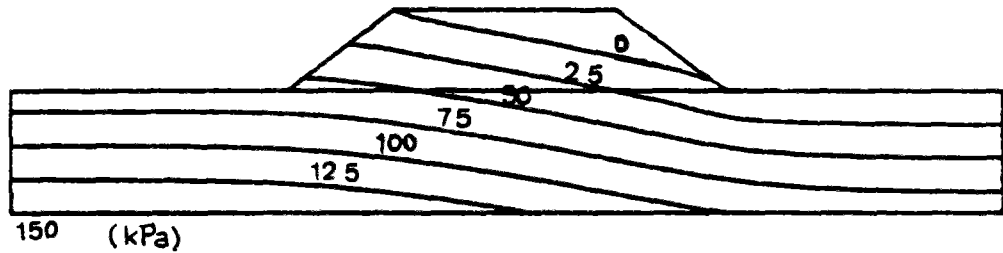


Fig. 5.5 Courbes d'équipressions de l'écoulement stationnaire

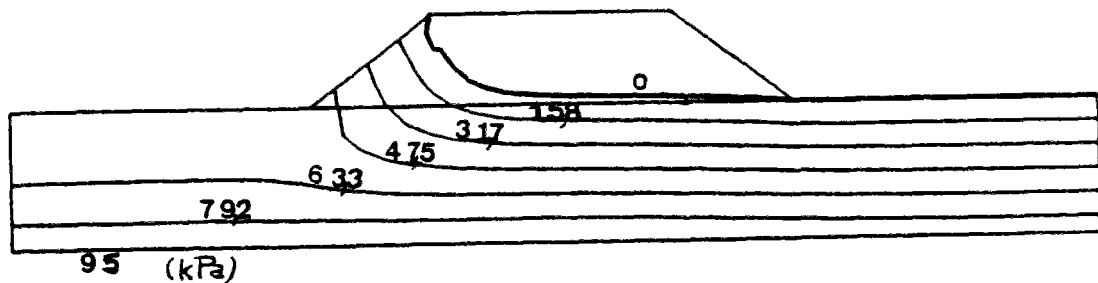


Fig. 5.6a Courbes d'équipressions de l'écoulement transitoire à $t = 1$ an

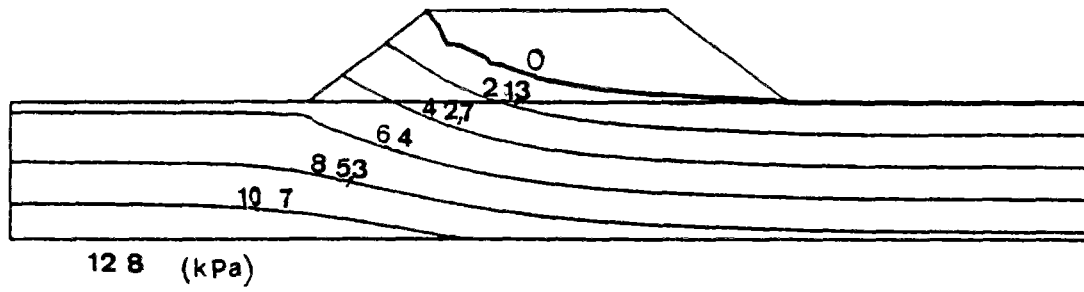


Fig. 5.6.b Courbes d'équipressions à $t = 5$ ans

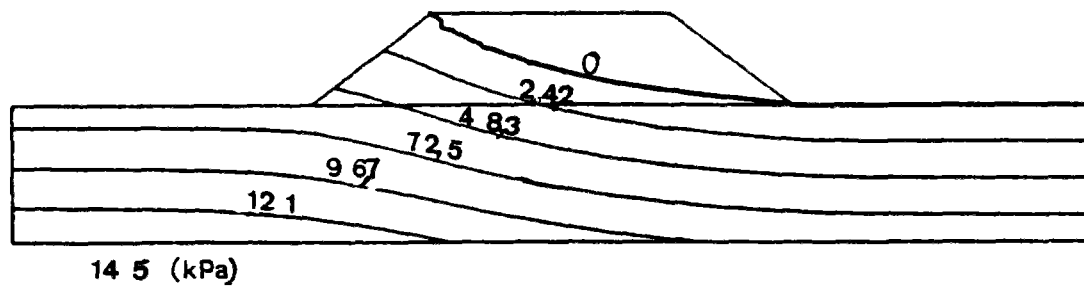
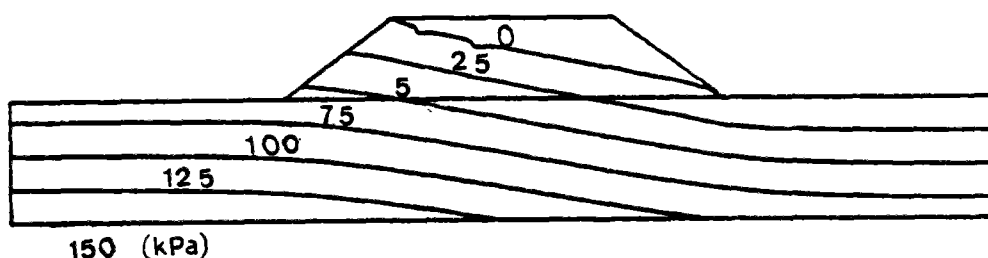


Fig. 5.6.c Courbes d'équipressions à $t = 10$ ans

Fig. 5.6.d Courbes d'équipressions à $t = 32$ ans

Analyse des résultats

A mesure que la zone saturée se développe dans le barrage, de l'amont vers l'aval, les équipressions tendent vers la distribution du régime permanent. Cette tendance devient nette à partir du temps $t = 10$ ans. Il y a coïncidence parfaite au temps $t = 32$ ans. Ce résultat permet de dire que l'état final de la consolidation correspond bien au régime permanent, ce qui étend les conclusions de Babchia et Magnan au cas des écoulements à surface libre. Sur le plan pratique, cette conclusion peut permettre de dégager une méthode de contrôle du tassement. Par exemple, dans le cas précis étudié ici, on pourra dire que la fondation a pratiquement cessé de tasser au temps $t = 10$ ans. En effet, le peu de différence entre les pressions interstitielles à partir de cet instant aura une incidence négligeable sur le processus du tassement. On peut donc se limiter à la première dizaine d'années en ce qui concerne la surveillance du tassement de l'ouvrage dans ce cas précis.

5.2.3. Élévation de la nappe par suite de la pose instantanée du remblai et influence de l'emmagasinement hydraulique

Présentation du test

La pose des remblais perméables sur les fondations molles saturées s'accompagne en général d'une élévation de la nappe. Cette remontée est très souvent mal calculée, bien qu'elle soit prévue par les praticiens. Ces derniers mettent parfois un tapis drainant entre le remblai et sa fondation pour éviter cette filtration. Le test, que nous présentons ici, permet d'évaluer cette élévation et de montrer l'influence de l'emmagasinement hydraulique (compressibilité du fluide, porosité, teneur en eau volumique) sur son importance. Il consiste à faire varier un de ces paramètres et estimer son influence sur le comportement de la nappe ou surface libre. La pose du remblai sera supposée instantanée.

Maillage

On reprend le même maillage servant aux tests précédents et possédant les mêmes caractéristiques numériques (figure 5.2. et tableau 5.1).

Jeu de données matérielles

On introduit dans les calculs 3 jeux de données correspondant à trois compressibilités différentes du fluide. Dans le dernier jeu de données, on augmente la teneur en eau volumique à saturation du barrage. Le modèle matériel choisi est encore le modèle élastique isotrope. Les tableaux 5.4. a, 5.4. b et 5.4. c présentent les données matérielles des 3 calculs.

Tableau 5.4.a Données mécaniques et hydrauliques communes de la fondation et du barrage

	γ (kN/m ³)	E (kPa)	ν	γ_w (kN/m ³)	k_x (m/j)	k_y (m/j)	k_{xy} (m/j)
fondation	20	$3 \cdot 10^4$	0,35	10	10^{-4}	10^{-4}	0
barrage	20	$3 \cdot 10^4$	0,35	10	10^{-4}	10^{-4}	0

Tableau 5.4.b Paramètres intervenant dans les courbes de variation

	A ₁	B ₁	A ₂	B ₂	C	D	E
fondation	10^{-3}	4	10^{-3}	4	0	10	0
barrage	10^{-3}	4	10^{-3}	4	0	10	0

Tableau 5.4.c Paramètres d'emmagasinement introduits dans les 3 calculs

	calcul n°	n	a_w (kPa ⁻¹)	θ_{sat} m ³ /m ³
barrage	1	0,2	10^{-5}	0,1
fondation		0,4	10^{-5}	0
barrage	2	0,2	10^{-3}	0,1
fondation		0,4	10^{-3}	0
barrage	3	0,2	10^{-4}	0,2
fondation		0,4	10^{-4}	0

Chargement

Le seul chargement considéré est le poids volumique du remblai. Ce dernier est posé instantanément sur la fondation saturée.

Conditions aux limites

A l'aval comme à l'amont du remblai, le niveau de la nappe reste fixée à la cote 9 m c'est-à-dire l'état initial. Partout ailleurs, une condition de flux nul est imposée. Les conditions aux limites mécaniques sont celles déjà vues :

- encastrement au niveau du substratum ;
- blocage des déplacements horizontaux au niveau des côtés latéraux de la fondation.

L'ensemble de ces conditions aux limites est donné sur la figure 5.8.

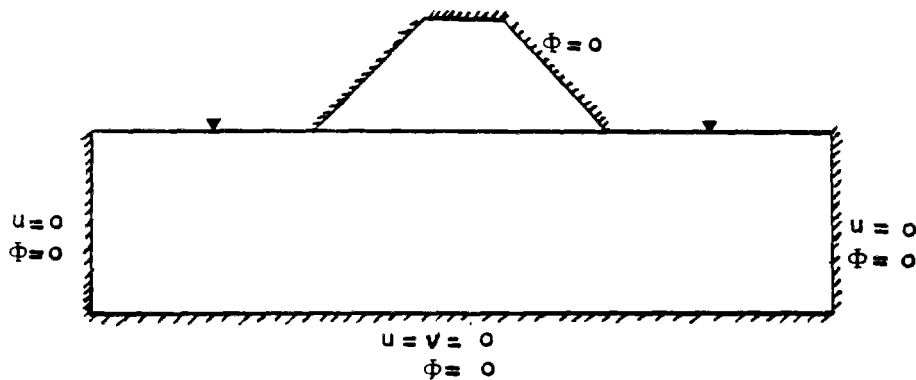


Fig. 5.7 Ensemble des conditions aux limites du test relatif à la remontée de la nappe

Résultats

On s'intéresse exclusivement dans ce test à la remontée de la nappe provoquée par la pose du remblai. On trace alors l'équipression zéro ou surface libre immédiatement après la construction du remblai. Trois profils sont dessinés (figures 5.8 a, b, et c) correspondant aux trois jeux de données présentés ci-dessus.

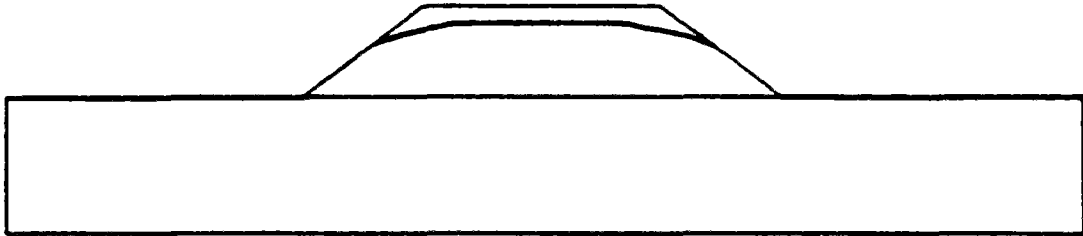


Fig. 5.8.a Surface libre. Calcul n°1

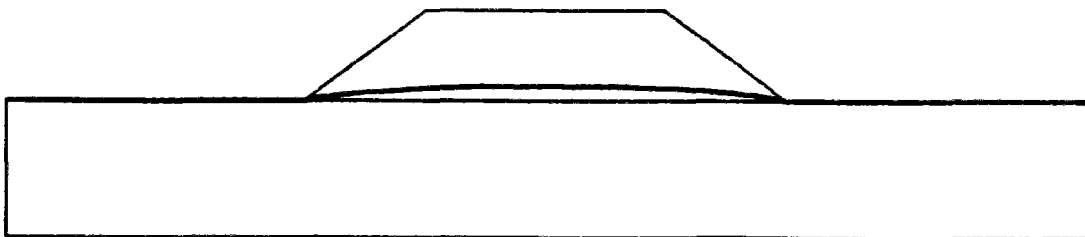


Fig. 5.8.b Surface libre. Calcul n°2

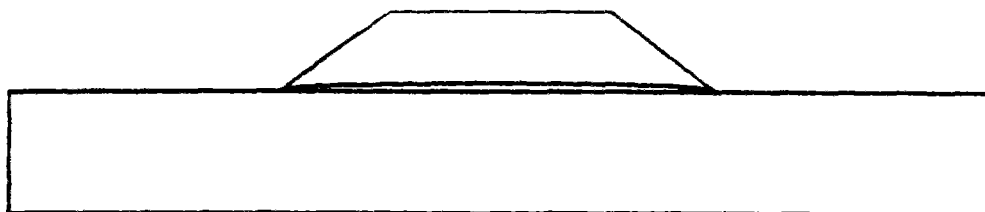


Fig. 5.9.c Surface libre. Calcul n°3

Fig. 5.9 Remontée de nappe à $t = 1$ jour. Influence de l'emmagasinement hydraulique

Analyse des résultats

Puisque les paramètres mécaniques et les perméabilités ont été maintenus fixes, l'influence de l'emmagasinement hydraulique sur l'importance de la remontée de la nappe semble évidente. Si la compressibilité du fluide et/ou la teneur volumique à saturation est importante, l'élévation de la surface libre reste modeste voire négligeable. Par contre, si l'emmagasinement hydraulique est assez faible, l'élévation de la nappe que peut provoquer la pose du remblai est forte, voire spectaculaire. On notera que le calcul montre particulièrement l'influence de la teneur en eau à saturation. Cela est tout à fait conforme avec la physique du phénomène. En effet, la compressibilité du fluide ainsi que la teneur en eau à saturation s'opposent à l'évacuation instantanée du fluide sous la pression du remblai et font que le fluide, malgré la compressibilité du squelette, ne reprend pas toute la charge mécanique. En dehors de tout emmagasinement hydraulique, on sait que la charge mécanique se transmet totalement au fluide selon le principe de Terzaghi. On constate par ailleurs que la surface libre s'élève immédiatement après la pose du remblai [$t = 1$ jour (premier pas de temps)], puis s'abaisse continûment jusqu'à l'acquisition de sa cote initiale correspondant au régime permanent (dans ce cas précis, l'état hydrostatique initial). Ce comportement hydraulique du sol mou peut être rapproché du "comportement" de l'éponge saturée soumise à une pression mécanique constante.

5.3. Calcul de la digue de Maurepas-Courance

5.3.1. Présentation de l'ouvrage et des résultats expérimentaux

La retenue de Maurepas-Courance s'inscrit dans un programme d'aménagement de la ville nouvelle de Saint-Quentin-en-Yvelines. Il s'agit d'une digue en terre de 15 m de hauteur maximale, délimitant un réservoir ayant une capacité de stockage de 390 000 m³. Ce réservoir joue à la fois le rôle de bassin permanent et celui de bassin tampon écrêteur de crues du ru de la vallée de la Courance. Il n'est en effet rempli, en période normale, qu'à environ la moitié de sa capacité, une moitié étant réservée au fort ruissellement induit par l'urbanisation de la ville nouvelle de Saint-Quentin-en-Yvelines.

Cette digue a fait l'objet de plusieurs études, essentiellement expérimentales, effectuées en grande partie par le Laboratoire Régional de l'Ouest Parisien (LROP). La mission confiée à ce dernier s'orientait plus spécialement vers le suivi du comportement du corps de digue durant la phase de construction et ensuite après la mise en service. Des travaux théoriques complémentaires, notamment par analogie électrique et méthode des éléments finis, s'intéressant au régime permanent de l'écoulement dans la digue suite à la mise en eau, ont été réalisés au LCPC. Nous présentons brièvement ici l'ouvrage et les résultats expérimentaux, ces travaux pouvant être consultés dans les articles de Delfaut et al. (1984) et Josseaume et al. (1984).

Site géologique

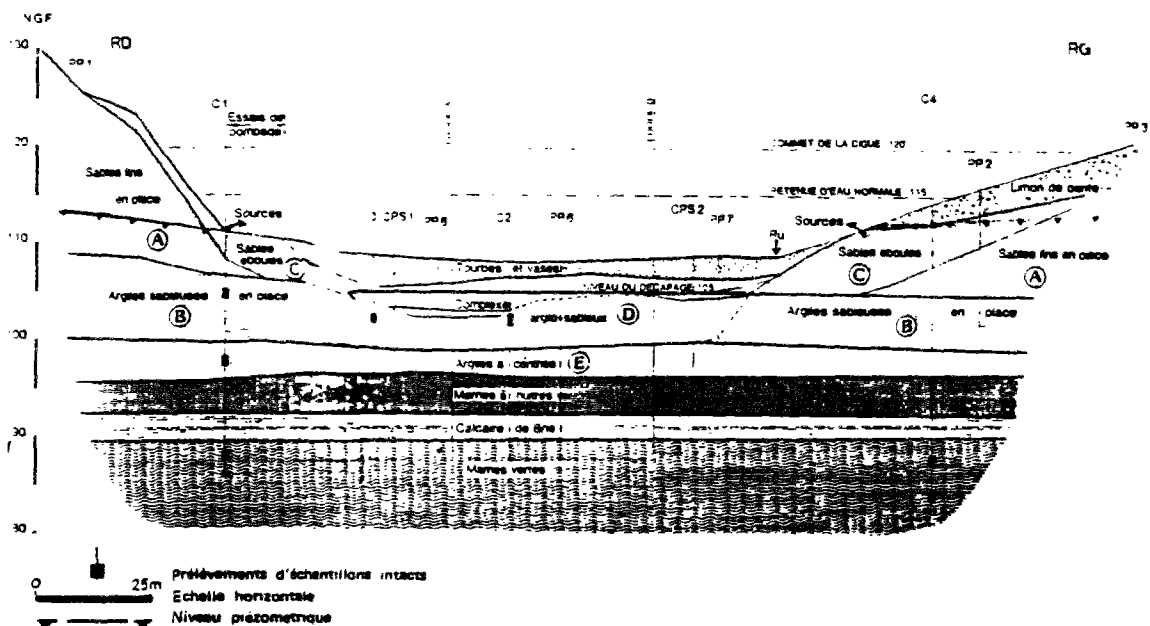


Fig. 5.10 Profil géologique suivant l'axe longitudinal de la digue

La figure 5.10 donne les détails de la stratigraphie du site de l'ouvrage. On distingue globalement en partant du haut vers le bas :

- une couche de tourbes et de vases au fond du ru ;
- un complexe argilo-sableux alluvionnaire relativement épais et hétérogène ;
- un dépôt d'argiles à cérithes ;
- une couche de marnes à huitres ;
- une couche de calcaire de Brie ;
- un support épais de marnes vertes.

Sur le plan hydrogéologique, le ru de la Courance sert d'exutoire, dans la partie du projet, à une ligne de sources qui apparaît à la cote 111 NGF sur le versant droit, et à la cote 113 NGF sur le versant gauche (fig. 5.10). Cet écart de niveau semble provenir de la pente différente des versants, mais aussi de la présence d'horizons argileux au sein des sables de Fontainebleau, servant localement de guide support à la nappe aquifère. Les gradients hydrauliques caractérisant le rabattement dans le fond du Thalweg sont de l'ordre de 80/1000 sur les deux versants. La principale alimentation du ru vient du rabattement de la nappe de sable de Fontainebleau, des eaux du drainage du plateau, des eaux de ruissellement le long des pentes et celles de l'artésianisme de la nappe des calcaires de Brie.

La caractérisation hydraulique des différentes couches du site a été réalisée par des essais en place au pressio-perméamètre Ménard et par pompage. Les profils de perméabilités sont présentés sur la figure 5.11 et le tableau 5.5 donne un récapitulatif des valeurs obtenues au pressio-perméamètre.

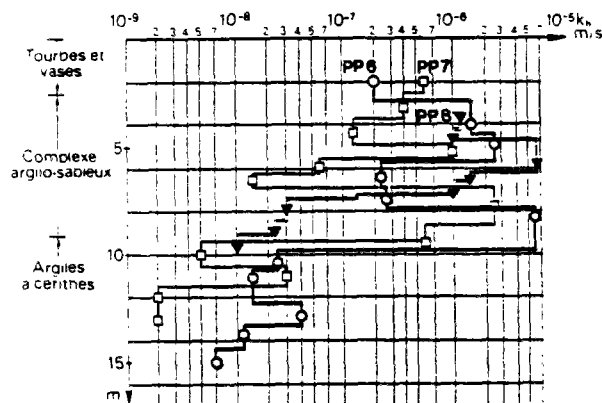


Fig. 5.11 Profils des perméabilités du sol de fondation

Tableau 5.5 Perméabilités horizontales (pressio-perméamètre)

Nature du sol		Nombre d'essais	$k_{h \text{ min}}$ (m/s)	$k_{h \text{ max}}$ (m/s)	$k_{h \text{ moyen}}$ (m/s)	$\frac{k_{h \text{ max}}}{k_{h \text{ min}}}$
Sable fin en place	A	25	6×10^{-7}	$1,8 \times 10^{-5}$	$4,5 \times 10^{-6}$	30
Argiles sableuses en place	B	28	$2,8 \times 10^{-7}$	10^{-5}	$2,1 \times 10^{-6}$	35
Sables fins éboulés	C	12	9×10^{-7}	2×10^{-5}	$6,1 \times 10^{-6}$	22
Complexe sablo-argileux	D	36	7×10^{-9}	$3,5 \times 10^{-5}$	$1,8 \times 10^{-6}$	5000
Argiles à cérites	E	21	2×10^{-9}	5×10^{-8}	$2,4 \times 10^{-8}$	25

On remarque sur la base de ces données :

- un contraste de perméabilités voisin de 100 entre les sables du complexe argilo-sableux et les argiles à cérites ,

- une grande dispersion des coefficients de perméabilités du complexe argilo-sableux servant de fondation à la digue, assez significative de l'hétérogénéité du milieu.

Conception de la digue

Transversalement, la digue est de type homogène, avec tapis drainant aval et drain cheminée :

- à l'amont, au contact du plan d'eau, et à la base du corps de digue, de façon à recouvrir les sols de fondation et les matériaux filtrants, un limon (1) dont l'indice de plasticité est supérieur à 15 ($I_p > 15$) ;

- au centre et à l'amont de la cheminée drainante, un limon (2) de plasticité légèrement inférieure au précédent ($8 < I_p < 15$) ;

- à l'aval de la cheminée drainante, un sable limoneux (3) de faible plasticité ($I_p < 8$).

En fait, les deux premières catégories de limons ont été très difficiles à distinguer et l'on peut considérer qu'il s'agit pratiquement du même sol. Le corps de digue se caractérise en outre par une tranchée parafouille en pied de digue amont et par un drain aval en matériaux filtrants. Le filtre se retourne à l'intérieur des limons pour former une cheminée drainante inclinée de 1/1. D'autre part, les pentes générales ont été fixées à 3,23/1 à l'amont et 2,32/1 à l'aval. La figure 5.12 présente la structure du corps de digue.

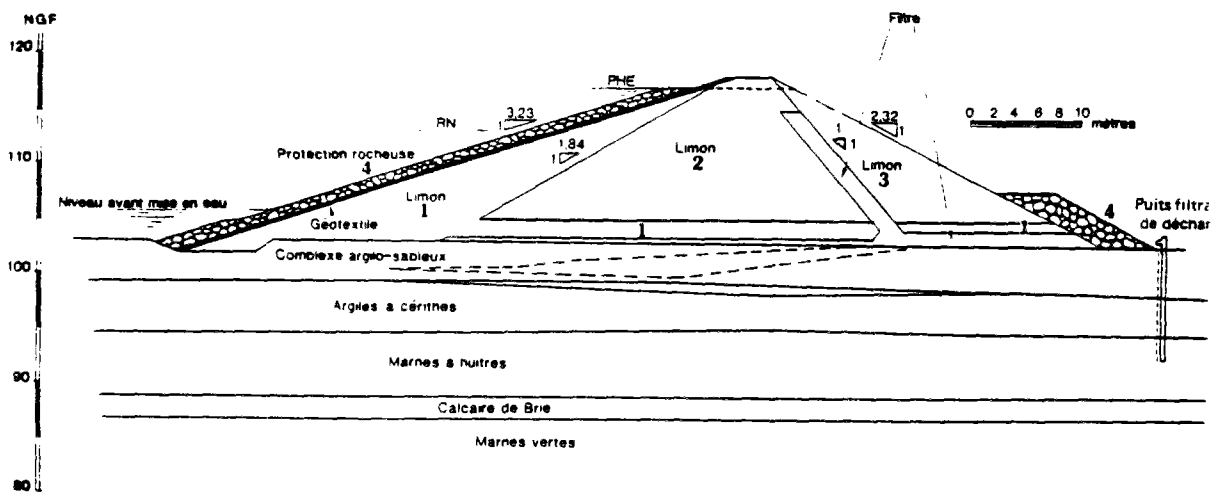


Fig. 5.12 Structure du corps de digue

Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental réalisé sur la digue de Maurepas-Courance permettait une surveillance accrue du comportement mécanique et hydraulique de la digue, notamment dans ses zones sensibles. Il comprenait :

- des tubes piézométriques disposés dans la partie aval de l'ouvrage ;
- des capteurs de pression interstitielle (temps de réponse rapide mais fonctionnant seulement en milieu parfaitement saturé) ;
- des tassomètres LPC disposés dans la zone centrale de la digue, là où la hauteur du remblai est maximale.

La figure 5.13 précise l'emplacement du dispositif d'auscultation.

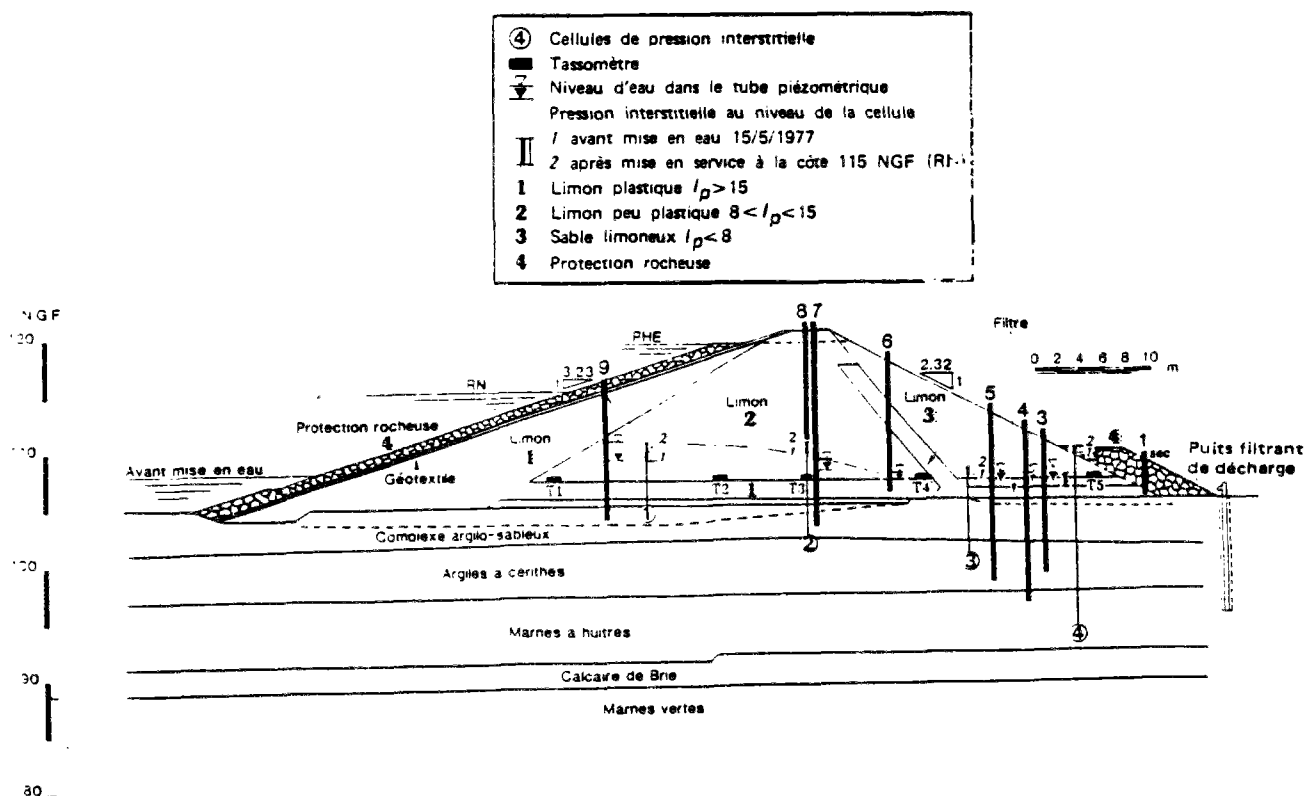


Fig. 5.13 Profils en travers du corps de digue.
Implantation des cellules et tubes piézométriques.

Résultats expérimentaux

Les résultats expérimentaux ont consisté à tracer l'évolution des tassements, des surpressions interstitielles et des charges hydrauliques en fonction du temps. Les figures 5.14, 5.15 et 5.16 présentent leur variation dans l'ordre. On remarquera que les tassomètres ont été mis en place après la construction des premières couches du remblai et que la mise en eau fut effectuée vers début juillet 1977.

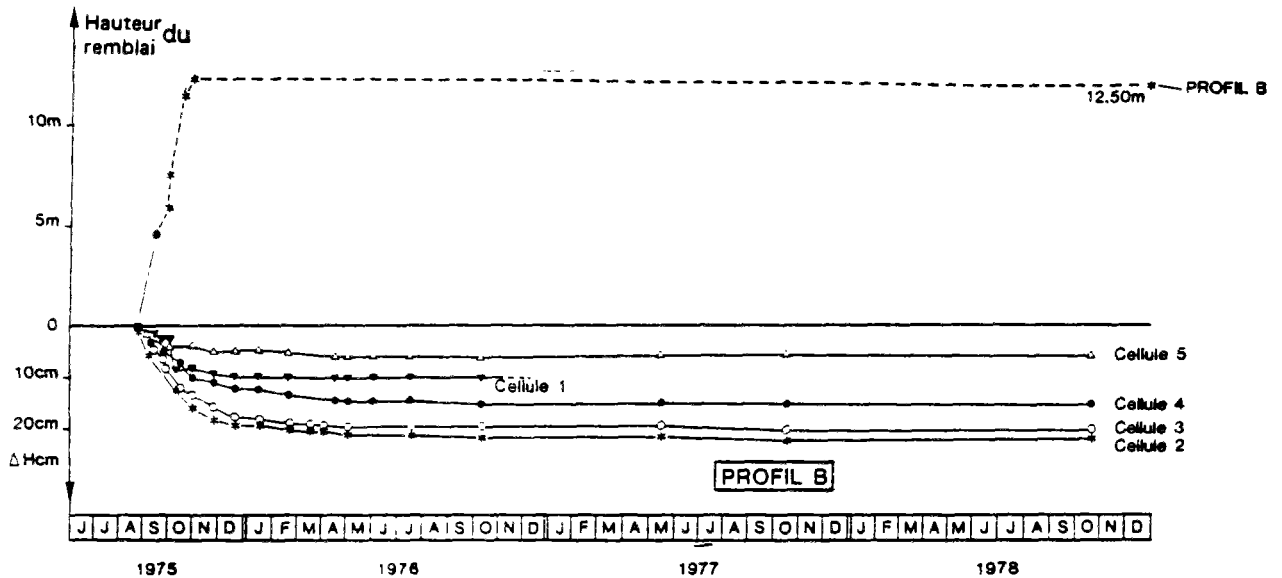


Fig. 5.14 Evolution des tassements mesurés

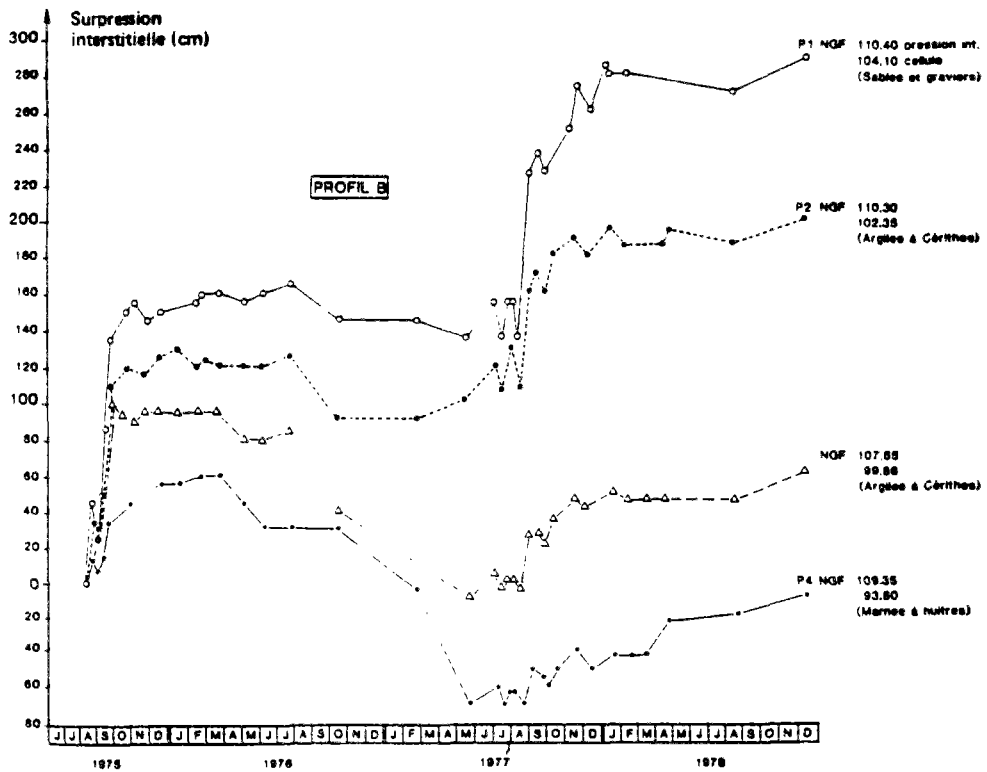


Fig. 5.15 Evolution des surpressions interstitielles

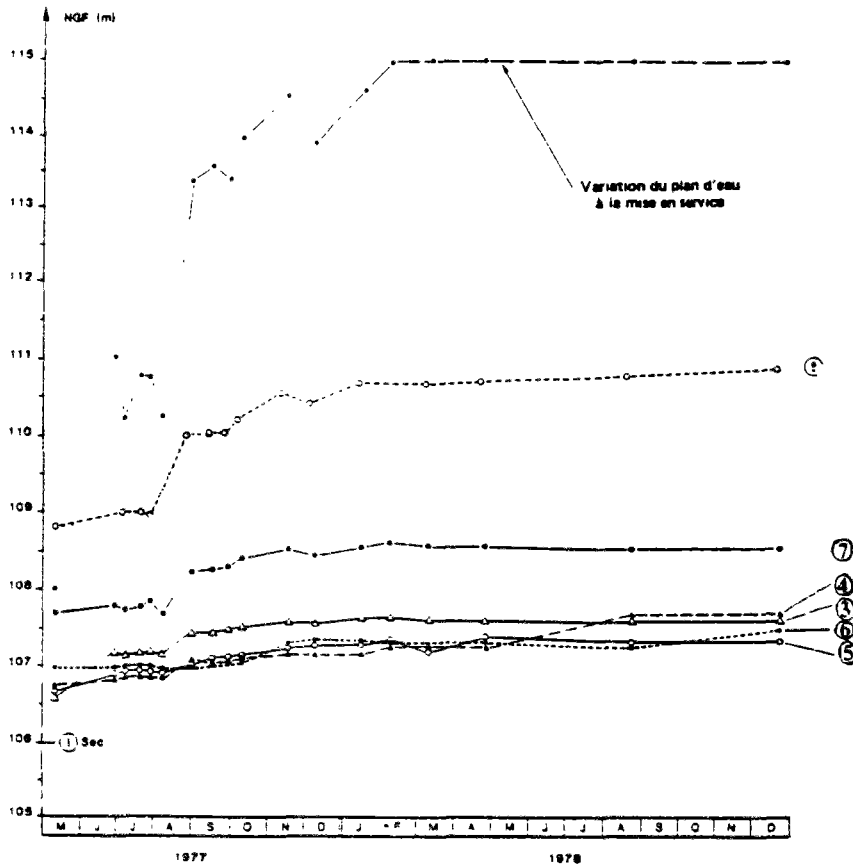


Fig. 5.16 Evolution des charges hydrauliques dans les piézomètres

Analyse des résultats expérimentaux

Tassements

L'analyse des courbes expérimentales des tassements en fonction du temps montre que l'amplitude du tassement du sol est restée modeste vis-à-vis de la surcharge exercée par le remblai (300 kPa). Cela est dû, en grande partie, à la faible compressibilité des couches sous-jacentes, dont la plupart se trouve en état de surconsolidation (comme le confirment par ailleurs des essais oedométriques effectuées dans les différentes couches de la fondation), à part la couche d'alluvions du complexe sablo-argileux. La faible épaisseur de celle-ci semble limiter l'importance du caractère différé des déformations. En outre, on constate sur ces courbes expérimentales une vitesse de tassement très rapide au cours de la construction de l'ouvrage et que les tassements secondaires sont presque négligeables. Cela s'explique par l'important coefficient de consolidation c_v du complexe sablo-argileux, de l'ordre de 10^{-3} m²/s ($k = 10^{-6}$ m/s et $E = 10^4$ kPa).

On peut remarquer, comme c'était prévisible, que les cellules implantées dans l'axe du remblai enregistrent les tassements maximaux (sauf la cellule 4 qui semble faire exception à cette tendance). La valeur maximale à la fin de la construction est environ 20 cm.

Enfin, on peut dire que la mise en eau en juillet 1977 n'a presque pas modifié le tassement. Le déjaugeage progressif de la digue par remontée de la nappe semble pratiquement arrêter l'évolution des déformations dans le corps de digue.

Surpressions interstitielles

Les capteurs de pressions interstitielles ont obéi à trois types de sollicitations :

- les fluctuations des nappes aquifères (Fontainebleau et calcaire de Brie),
- la consolidation des couches (notamment la couche alluvionnaire),
- la variation du plan d'eau à l'amont.

Il est difficile de quantifier la part de chacun de ces paramètres. Sur le plan qualitatif, on peut dire que les sondes situées dans les alluvions fines réagissent mieux à la variation du plan d'eau et au phénomène de consolidation, tandis que celles profondes réagissent principalement à l'artésianisme de la nappe de Brie. On ne peut pas attribuer l'élévation des surpressions interstitielles à la consolidation de la couche sablo-argileuse. En fait, Delfaut et al. (1984) signalent que l'excavation des couches tourbeuses et vaseuses du fond du bassin et les eaux venant des versants voisins ont installé à l'amont une retenue variant entre 105 et 108 m pendant la construction du remblai. Cela explique la variation plus ou moins brutale des sondes les plus à l'amont avant la mise en eau. Mais à part la cellule 4 (qui semble accuser une surpression négative), en dépit de l'importance des surpressions interstitielles enregistrées, toutes les cellules varient dans le même sens et semblent tendre vers leur état initial, sans doute hydrostatique.

Charges hydrauliques piézométriques

La mise en eau du bassin en juillet 1977, à sa cote de retenue normale à 115 m, a fortement agi sur les piézomètres les plus à l'amont de la cheminée; les plus proches du plan d'eau sont les plus sensibles. Le piézomètre P_9 a suivi sans retard la montée du plan d'eau et voit sa charge augmenter d'environ 6 m à l'état final (régime permanent). En revanche, à l'arrière de la cheminée, sans doute à cause de l'influence du filtre drainant, les réactions enregistrées par les piézomètres restent relativement faibles (P_4 et P_3).

Au terme de cette rapide analyse des résultats expérimentaux, la digue de Maurepas-Courance présente un avantage considérable dû à l'important dispositif d'auscultation mis en place. Il est donc possible de comparer sur ce cas réel des résultats mécaniques et hydrauliques issus de l'expérience et des résultats numériques issus d'un calcul par éléments finis, basé sur un modèle de couplage. Il est cependant clair qu'il ne s'agit pas d'un ouvrage construit sur sols mous, bien que la fondation comporte une couche argilo-sableuse relativement compressible, et dont peut dépendre la stabilité globale de l'ouvrage (la DDA des Yvelines avait confié son étude au LROP). Mais si le modèle se révèle sensible aux problèmes faiblement couplés, il le sera à fortiori pour les problèmes fortement couplés. De là résulte l'intérêt de ce test.

5.3.2. Modélisation effectuée

5.3.2.1. Modélisation géométrique

La géométrie de l'ouvrage, sa conception et l'interprétation des résultats expérimentaux laissent supposer pour la digue de Maurepas-Courance une hypothèse de comportement bidimensionnel en déformation plane.

Afin de se rapprocher le plus possible de la réalité de l'ouvrage, on a gardé à ce dernier quasiment toute sa géométrie. Les éléments de la structure du corps de digue ont été intégralement conservés. Quelques simplifications minimales ont néanmoins été apportées :

- la fine couche de géotextile, à peine perceptible (fig. 5.12), séparant l'enrochement du parement amont et le limon (1), a été négligée.

- la tranchée parafouille en pied de digue amont, dont le rôle est d'intercepter une partie des eaux pour les rabattre vers le filtre, a été également négligée vue sa faible épaisseur.

- Enfin, dans l'impossibilité de connaître avec exactitude la stratification du complexe argilo-sableux, nous avons "moyenné" et homogénéisé cette couche en la supposant quasiment horizontale et en adoptant à ses éléments les mêmes propriétés.

On a tenu compte des enrochements. Ces derniers sont en principe négligeables dans un calcul classique hydraulique pur puisqu'ils ne résistent pratiquement pas dans ce cas à l'écoulement. Par contre, dans un calcul de couplage, les structures rocheuses interviennent largement dans le calcul du tassement car elles représentent en général les éléments les plus lourds du remblai.

Le maillage mis au point tient compte de 4 considérations importantes :

- l'hétérogénéité de la structure constitutive de la digue et de sa fondation ; il faut en effet prévoir autant de groupes d'éléments que de structures différentes ;

- le phasage de la construction. Car la construction de digue se fait suivant un calendrier de travaux précis. Il faut donc activer certains éléments à des temps bien déterminés en vue de prendre en compte leur rigidité et leur poids propre ;

- la nature des conditions aux limites envisagées (drainage, flux nul, encastrement, surface libre, suintement, etc.). Cela permet de raffiner certaines zones par exemple plus que d'autres et est souvent favorable à la précision et la convergence des résultats numériques. Cela permet en outre de réaliser certaines économies en ce qui concerne les coûts des calculs.

Ces différentes considérations nous ont amené à créer 19 groupes d'éléments constituant 4 sous-structures distinctes :

- une sous-structure pour la fondation, comprenant 4 groupes correspondant de bas en haut au calcaire de Brie, aux marnes à huitres, aux argiles à cérîtes et au complexe sablo-argileux (fig. 5.17) ;

- une sous-structure correspondant à la première phase de construction du remblai, comprenant 5 groupes représentatifs de presque toute la structure du corps de digue. En partant de gauche à droite, on distingue : enrochement amont, limon(1), cheminée, enrochement aval et limon (3) (fig. 5.18.a) ;

- une sous-structure correspondant à la deuxième phase de construction du remblai mis en place juste après l'emplacement des tassomètres en septembre 1975. Elle comprend six groupes : enrochement amont, limon(1), limon(2), cheminée, limon (3) et enrochement aval (fig. 5.18.b) ;

- une sous-structure correspondant à la construction, en octobre 1975, de la phase finale du remblai, constituée par 4 groupes : enrochement amont, limon (1), limon (2) et limon (3) (fig. 5.18.c).

L'assemblage des trois sous-structures du remblai donne le maillage de la digue (fig. 5.18) et l'assemblage de cette dernière structure avec celle de la fondation donne le maillage global de l'ouvrage étudié (fig. 5.19).

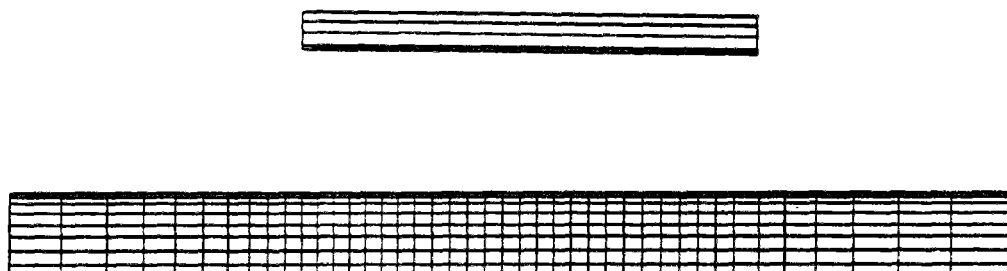
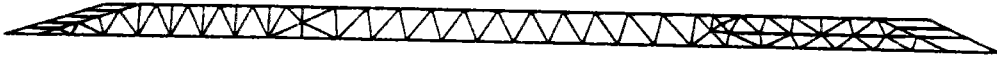
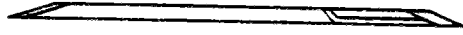


Fig. 5.17 Structure de la fondation et maillage



5.18.a Première étape de remblaiement

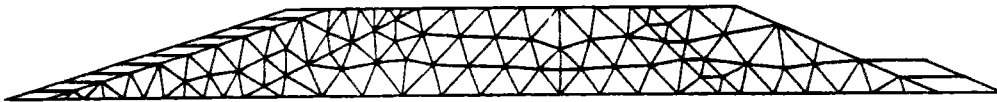


Fig. 5.18.b Deuxième étape de remblaiement

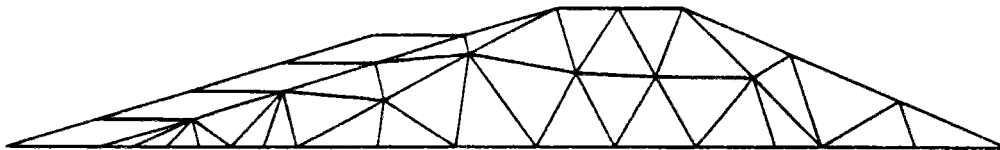


Fig. 5.18.c Etape finale de remblaiement

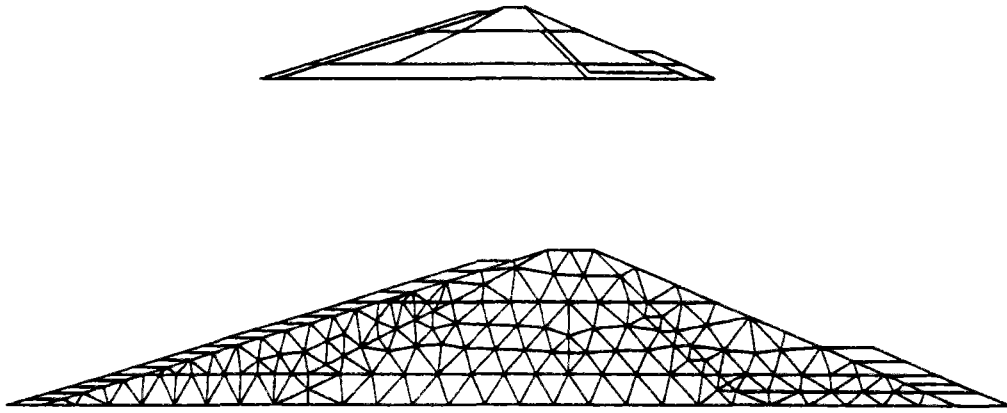


Fig. 5.18 Maillage de la digue

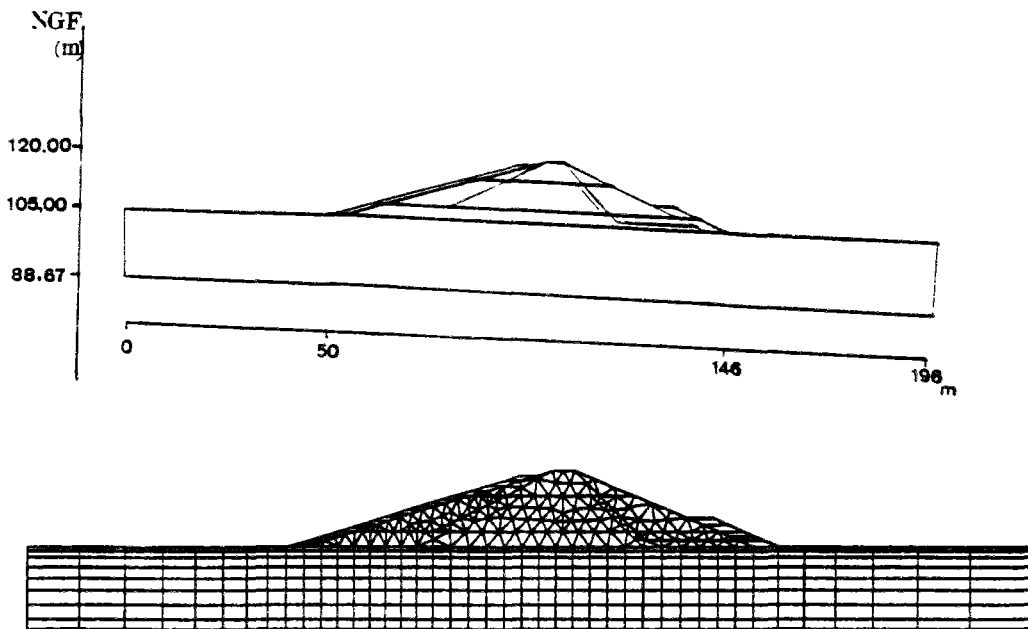


Fig. 5.19 Maillage de l'ouvrage servant à l'étude

On remarquera que le maillage est composé de quadrilatères à 8 noeuds essentiellement dans la fondation et dans les enrochements et que la digue est maillée en triangles à 6 noeuds (le tableau 5.6 donne l'ensemble des caractéristiques numériques du maillage). Le choix de ce mixage vise à tester les problèmes d'écoulements à surface libre couplés avec la consolidation sur ces deux types d'éléments; les autres éléments finis, quadrilatère à 4 noeuds et triangle à 3 noeuds, ont été déjà testés (chapitres 2, 3 et 5). Ainsi, on aura fait au cours de ce travail le tour de l'ensemble des éléments finis de consolidation bidimensionnelle existants. On remarquera d'autre part que la finesse du maillage a été relativement renforcée là où il y a à prévoir une condition aux limites de drainage, ce qui concerne principalement la surface du sol, l'enrochement amont et la cheminée drainante.

Tableau 5.6 Caractéristiques numériques du maillage

Nombre de noeuds	1702
Nombre d'éléments	617
Types d'éléments	360 quadrilatères à 8 noeuds 257 triangles à 6 noeuds

5.3.2.2 Modèle numérique et paramètres mécaniques et hydrauliques

On a déjà supposé l'hypothèse vraisemblable de comportement bidimensionnel en déformation plane concernant le comportement mécanique de la digue de Maurepas-Courance. De plus, l'analyse des résultats des tassomètres et des capteurs de pressions interstitielles semble indiquer un comportement quasi-isotrope de la digue, tant du point de vue mécanique que du point de vue hydraulique. En revanche, il est clair qu'il existe une forte hétérogénéité des deux points de vue. Il reste à présent à s'interroger sur le modèle numérique de couplage le plus convenable pour calculer cet ouvrage : élasticité ou élastoplasticité de comportement ? A priori, les modèles élastoplastiques sont en général plus proches de la réalité. Mais au stade de l'analyse en éléments finis de tout projet d'étude, il y a lieu d'apporter des simplifications utiles visant, par exemple, à :

- aller de la modélisation la plus simple à la modélisation la plus compliquée ;

- utiliser uniquement les données disponibles du problème, le recours à plusieurs données supplémentaires ne pouvant qu'augmenter les incertitudes sur les résultats et partant diminuer la fiabilité de la modélisation elle-même.

C'est pourquoi on a pensé à appliquer dans un premier temps le modèle de consolidation à surface libre des sols élastiques isotropes pour le calcul de la digue, des modélisations plus sophistiquées pouvant se faire ultérieurement au cas où cela se révélerait nécessaire. L'état de surconsolidation des couches constitutives de la fondation renforce plus ou moins cette hypothèse d'élasticité de comportement.

Les résultats des essais expérimentaux donnent avec précision les perméabilités de la digue et de sa fondation (Delfaut et al. , Josseaume et al. ; 1984). Les essais de compressibilité, bien qu'ils soient limités au complexe sablo-argileux, à l'argile à cérites et aux marnes vertes, donnent un bon ordre de grandeur du module d'Young vertical et du poids volumique de chacune de ces couches. Par contre, pour ce qui est du corps de digue, seules les données du poids volumique et des perméabilités des divers limons ont été précisées. Les modules d'Young de ces derniers sont supposés correspondre à ceux des limons usuels.

Les paramètres mécaniques et hydrauliques de la cheminée et des enrochements ont été tirés de la littérature sur les barrages en terre (La méthode des éléments finis dans les projets de géotechnique, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées sous la direction de J.P. Magnan). En ce qui concerne la compressibilité du fluide, sa valeur initiale pour la fondation a été approximée suivant la formule établie par Magnan et Babchia avec un degré de saturation proche 0,97. L'ensemble des données hydrauliques et mécaniques introduites dans les calculs sont présentées par le tableau 5.7.

Tableau 5.7 Données mécaniques et hydrauliques

	γ kN/m ³	E kPa	ν	γ_w kN/m ³	n	a_w kPa ⁻¹	k_x m/j	k_y m/j	k_{xy} m/j	θ_{sat} m ³ /m ³
Calcaire de Brie 88,67m-90,67m	19	10^6	0,3	10	0,3	10^{-4}	6.10^{-3}	0	0	0
Marnes à huitres 90,67m-96,34m	19	5.10^4	0,3	10	0,3	10^{-4}	4.10^{-2}	0	0	0
Argile à cérîtes 96,34m-101m	19	5.10^4	0,3	10	0,3	10^{-4}	2.10^{-3}	0	0	0
Complexe arg-sab. 101m-105m	19	10^4	0,3	10	0,3	10^{-4}	1,55	0	0	0
Limon (1) et (2)	19	8.10^3	0,3	10	0,3	10^{-4}	0,2	0	0	0,2
Limon (3)	21	10^4	0,3	10	0,3	10^{-4}	0,2	0	0	0,2
Cheminée	20	5.10^4	0,4	10	0,4	0	86.10^2	0	0	0
Enrochement	23	5.10^4	0,4	10	0,4	0	86.10^3	0	0	0

Pour compléter les données numériques du modèle, on introduit, en plus, les paramètres de définition des courbes de variation des perméabilités, de la compressibilité du fluide, du couplage mécanique-hydraulique et de la teneur en eau (chapitres 1, 2 et 3 et tests précédents). La variation de ces paramètres en fonction de la succion a été choisie identique pour les groupes du corps de digue de façon que tous ces paramètres chutent sensiblement pour une succion (en m) égale à la taille caractéristique minimale de l'élément fini. Le tableau 5.8 donne les valeurs des différents paramètres.

Tableau 5.8 Paramètres de définition des courbes

A ₁	B ₁	A ₂	B ₂	C	D	E
10^{-3}	2	10^{-3}	2	0	10	0

5.3.2.3. Chargements considérés

Avant la mise en eau

Avant la mise en eau de la digue, les chargements mis en jeu avant, pendant et après la construction du remblai sont relativement simples. Pour la clarté de l'exposé, on peut distinguer entre le remblai et sa fondation. La fondation ne tasse que sous le poids du remblai. Elle est soumise au départ à :

- un chargement de type "poids volumique" total,
- une pression hydrostatique que l'on a appelée soulèvement hydrostatique aux chapitres précédents pour traduire son effet mécanique,
- un chargement de type "contraintes initiales" servant à l'initialisation des contraintes effectives et à assurer l'équilibre hydrostatique de la fondation.

Pour ce qui du remblai, les chargements sont de deux natures :

- le chargement de type "poids volumique" des différents éléments du remblai. Rappelons à ce niveau que nous n'avons pas considéré de différence importante entre le poids volumique humide et le poids volumique total,
- le chargement de type "pression hydrostatique", chargement interne automatiquement commandé par l'évolution de la surface libre : constant en dessous de celle-ci, presque négligeable au-dessus (chapitre 3). On peut prévoir en effet, avant même la mise en eau, que la charge du remblai puisse provoquer une remontée de la nappe conduisant à une saturation des couches inférieures du remblai.

Il reste à préciser la loi du chargement du remblai : le phasage de la construction. La figure 5.14 donne l'évolution en fonction du temps de la hauteur du remblai. Il en ressort une incertitude relative au calendrier de construction des premières couches soit environ 3m. Visiblement les tassomètres ont été posés après que les premières couches du remblai eurent été montées. Mais à partir de septembre 1975, date de la pose des tassomètres, les élévations successives du remblai sont nettes. Elles montrent un calendrier des travaux s'échelonnant sur une durée totale d'environ 2 mois (septembre et octobre 1975), sans interruption notable de chantier.

La modélisation de cette loi a consisté à faire 3 enchaînements de calculs (calculs avec reprise) :

- le poids de la première sous-structure (fig. 5.18.a) correspondant à 3 mètres de remblai (105m-108m). Nous l'avons mis instantanément le 31 Août 1975 (1^{ère} phase) ;

- le poids de la deuxième sous-structure (fig. 5.18.b) correspondant à 7 mètres supplémentaires de remblai (108m-115m), mise en place pendant le mois de septembre 1975 (2^{ème} phase). A l'intérieur de cette phase, 4 pas de temps égaux sont considérés, pour une élévation graduelle d'un quart de hauteur environ par semaine ;

- le poids de la troisième sous-structure (fig. 5.18.c) correspondant à 5 mètres de remblai en plus (115m-120m), construits au mois d'octobre 1975 (3^{ème} phase et étape finale), date d'achèvement des travaux de construction.

La figure présente la loi de chargement adoptée pour le calcul de la digue.

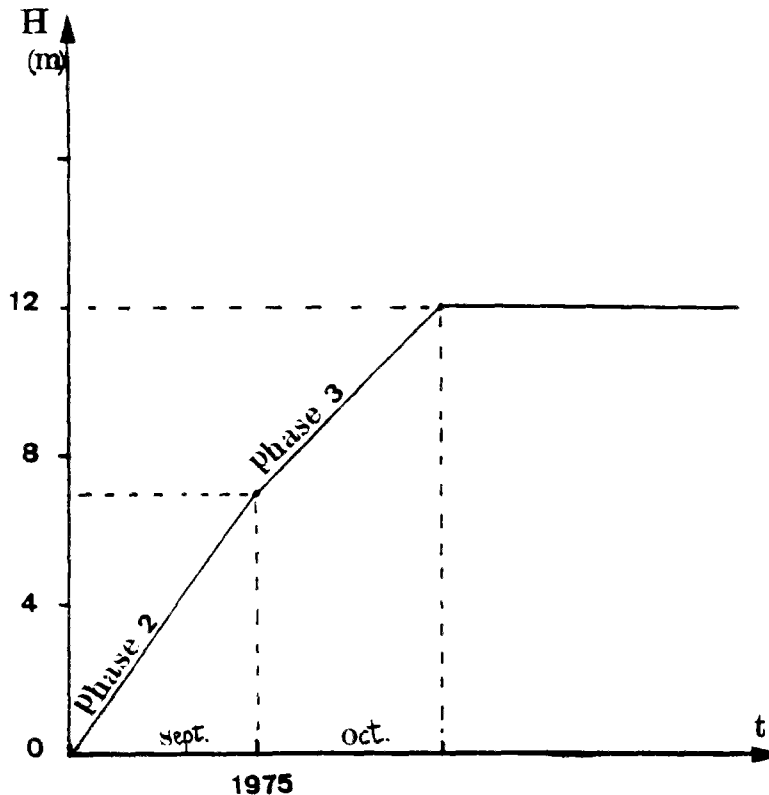


Fig. 5.20 Elévation de la hauteur du remblai en fonction du temps.
Modélisation de la loi de chargement

Pendant et après la mise en eau

En plus des chargements précités, la mise en eau a un effet mécanique dans un modèle de couplage écoulement-déformation. On verra dans le paragraphe suivant les conditions aux limites mécaniques et hydrauliques à imposer, mais pour l'instant, précisons les chargements supplémentaires que met en jeu la mise en eau :

- le poids de l'eau à l'aval de la fondation agit sur la surface du sol, ce qu'on simulera par une pression uniformément répartie équivalente à $\gamma_w H(t)$ où $H(t)$ représente la différence de la hauteur en mètres du niveau du plan d'eau à l'instant t avec le niveau initial de la nappe (105m).

- la pression mécanique isotrope linéaire correspondant au poids de l'eau sur le talus aval.

5.3.2.4. Conditions aux limites

Avant la mise en eau

Avant la mise en eau, les conditions aux limites ont été maintenues inchangées. Celles-ci méritent d'être placées dans le contexte du modèle de couplage réalisé. En effet, dans cette approche, il n'est pas nécessaire de simuler le rôle drainant de la cheminée ou des filtres par le jeu des conditions aux limites à imposer aux différents éléments du dispositif de drainage. Il faut simplement considérer le drain et la cheminée comme des éléments physiques ayant des perméabilités et des caractéristiques mécaniques (un poids volumique, un module d'Young, un coefficient de Poisson, etc.) propres. Il convient cependant de rappeler que, puisque nous avons négligé sur le plan de la modélisation géométrique la tranchée parafouille en pied de digue, étant donnée sa faible épaisseur, on a tenu compte de son rôle intercepteur des eaux en décidant que sous la cheminée, au contact de celle-ci avec le sol de fondation, la nappe reste maintenue à sa cote initiale 105m. La figure 5.21 donne l'ensemble des conditions aux limites avant la mise en eau : imperméabilité et encastrement du substratum, imperméabilité et blocage des déplacements horizontaux des faces latérales de la fondation et nappe maintenue sous la cheminée et à l'aval comme à l'amont du remblai, à sa cote initiale 105 m. Un récapitulatif de ces conditions aux limites est donné plus loin dans le tableau général des calculs effectués.

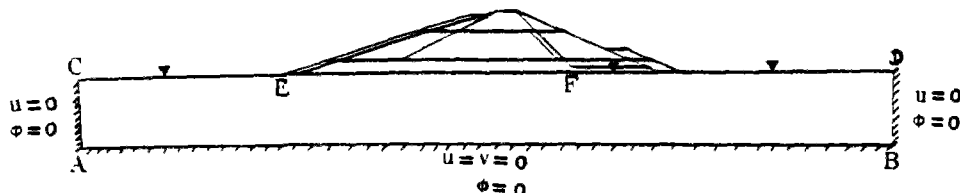


Fig. 5.21 Conditions aux limites avant la mise en eau

Simulation numérique de la mise en eau

La simulation numérique de la mise en eau est un problème délicat. Il s'agit essentiellement d'une condition aux limites de drainage variable dans le temps. En l'état actuel du programme, deux façons peuvent être utilisées pour modéliser l'élévation progressive du plan d'eau. Chacune d'elles a ses avantages et ses inconvénients.

Une de ces méthodes consiste à imposer à l'intérieur du jeu de données une fonction d'incrément de la condition aux limites en question. L'esprit de cette incrément est d'imposer une certaine proportion de la charge hydraulique en des temps précis. On met ainsi graduellement la valeur finale. Pour illustrer cette méthode, choisissons un exemple. Supposons que le plan d'eau évolue de façon régulière sur le talus AB pendant un mois de la cote 105m à la cote 110m en passant, par exemple, par le point C au milieu du mois (fig. 5.22). Pour simuler le passage du plan d'eau au point C à $t = 15$ j, il faut, par cette méthode, imposer une proportion de la charge qui ramène sa valeur préalablement fixée à 110m à la valeur désirée 108 m, soit 98% comme incrément de charge à appliquer au pas de temps correspondant à $t = 15$ j.

Cette méthode peut présenter un avantage numérique double :

- imposer graduellement plusieurs groupes de conditions aux limites de natures différentes et partant, ne pas recourir à plusieurs calculs,
- l'application graduelle de certaines conditions aux limites peut être favorable à une convergence plus rapide des systèmes itératifs.

En revanche, cette méthode présente au moins un inconvénient sur le plan physique. En effet, imposer une proportion de charge hydraulique de 98% revient à imposer 108m à tout le segment AB. Or, physiquement le plan d'eau n'a pas à ce stade ($t=15j$) dépassé le point C. Il peut en résulter des réactions sur le segment CB difficilement interprétables (fig. 5.22).

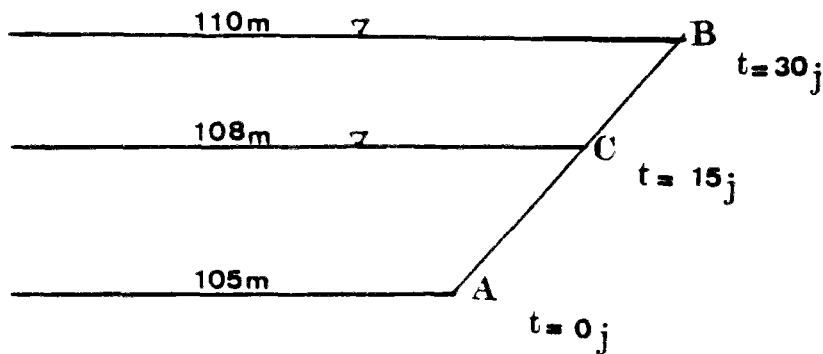


Fig. 5.22 Simulation numérique de la mise en eau

Pour la raison précédente et puisque les aspects mécaniques et hydrauliques sont liés (la première méthode peut s'appliquer sans problèmes en hydraulique des sols indéformables ou pour des problèmes de faible couplage mécanique-hydraulique) dans les modèles de couplage, on a préféré utiliser une deuxième méthode, dont l'esprit est le suivant : on suppose que le plan d'eau évolue par couches d'eau successives - ce qui n'est pas non plus la réalité - qu'on délimite après examen de sa courbe réelle de variation

et on met en oeuvre un enchaînement de calculs avec reprise pour appliquer successivement les charges hydrauliques correspondantes aux instants importants de la montée du plan d'eau. Ainsi, pour l'exemple précédent (fig. 5.22), on peut prévoir deux couches d'eau : la première à 108m au temps $t = 15j$, puis une seconde à 110m au temps $t = 30j$, soient 2 calculs.

Examinons maintenant, sur la base de ces précisions, la courbe d'évolution du plan d'eau de la digue de Maurepas-Courance (fig. 5.16). On a déjà négligé la variation du plan d'eau pendant la construction du remblai, bien qu'il semble qu'une eau, venue de diverses origines, ait conduit à la mise en place progressive de 3m environ avant la mise en eau véritable. On ne voit d'ailleurs pas très clairement sur la figure l'histoire de ce drainage. Cette période mise à part, les variations du plan d'eau sont nettes. Son évolution, sensiblement perturbée, est très marquée dès le début de juillet 1977 (cote 110,5m environ), puis un léger fléchissement et une reprise de montée en août jusqu'à la cote d'exploitation 115m quelques mois après.

Pour ne pas alourdir inutilement les calculs, on a prévu, pour modéliser la mise en eau de la digue étudiée, deux calculs avec reprise :

- élévation du plan d'eau de la cote 105m à 111 m dès le début de Juillet, puis cote stationnaire pendant presque tout ce mois (1^{ère} étape),
- élévation jusqu'à la cote d'exploitation au mois d'août jusqu'au régime permanent environ (ce qui a correspondu à environ 1 mois) (2^{ème} étape).

La figure 5.23 présente l'évolution adoptée pour les calculs.

En définitive, 6 calculs (5 + 1 initialisation) ont été réalisés pour l'étude de la digue. Le tableau 5.9 donne un récapitulatif de ces calculs.

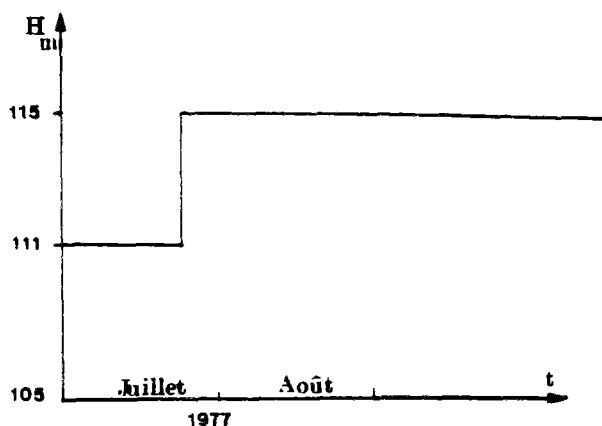








Fig. 5.23 Evolution modélisée de la hauteur du plan d'eau

Tableau 5.9 Résumé des calculs effectués

Structure	Phase	Durée (jours)	Chargements mécaniques	Conditions aux limites
	0	0 ⁺	<ul style="list-style-type: none"> - pression hydrostatique - contraintes initiales - poids volumique 	<ul style="list-style-type: none"> - AB encastrée imperméable - AC et BD u = 0 imperméables = 0 - CD drainage h = 105m
	1	1	<ul style="list-style-type: none"> - reprise des chargements* (phase 0) - pression hydrostatique - poids de 3m de remblai 	<ul style="list-style-type: none"> - AB, AC et BD mêmes conditions aux limites - CE et FD h = 105m
	2	30	<ul style="list-style-type: none"> - reprise des chargements* (phase 1) - pression hydrostatique - poids de 7m de remblai 	<ul style="list-style-type: none"> mêmes conditions aux limites que la phase 1
	3	630 (dont 30 pour travaux)	<ul style="list-style-type: none"> - reprise des chargements* (phase 2) - pression hydrostatique - poids de 5m de remblai 	<ul style="list-style-type: none"> mêmes conditions aux limites que la phase 1 ou 2
	4	21	<ul style="list-style-type: none"> - reprise des chargements* (phase 3) - pression hydrostatique - pression uniformément répartie de 60 kPa sur CE - pression linéairement répartie sur EG (60 kPa en E et 0 en G) 	<ul style="list-style-type: none"> - AB, AC, BD et FD mêmes conditions aux limites que la phase 3 - CE et EG drainage h = 111 m
	5	30	<ul style="list-style-type: none"> - reprise des chargements* (phase 3) - pression hydrostatique - pression uniformément répartie de 100 kPa sur CE - pression linéairement répartie sur EH (100 kPa en E et 0 en H) 	<ul style="list-style-type: none"> - AB, AC, BD et FD mêmes conditions aux limites que la phase 3 - CE et EH drainage h = 115 m

*exception faite de la pression hydrostatique

5.3.3. Résultats des calculs et analyse

5.3.3.1. Résultats avant la mise en eau

Déplacements

Dans ce paragraphe, on présente les résultats numériques obtenus avant la mise en eau de la digue, ce qui correspond à une période de 660 jours s'étalant du 1^{er} septembre 1975 jusqu'à fin juin 1977. La construction s'est achevée à la fin du mois d'octobre 1975. On a pris comme origine des temps l'instant de la pose des tassomètres (1^{er} septembre 1975) pour exploiter les résultats des calculs, instant qui correspond au début de la 2^{ème} phase de calcul (voir le tableau 5.9 des calculs effectués).

D'abord, on a tracé l'évolution en fonction du temps des tassements issus des résultats expérimentaux et ceux issus des résultats du calcul par éléments finis. La figure 5.24 donne leur variation comparée à partir des résultats des tassomètres 3, 4 et 5 (fig. 5.13) pour la période précédant la mise en eau de la digue. Cette présentation est complétée par la figure 5.25 donnant la variation spatiale des tassement directement suivant la coupe des tassomètres pour les pas de temps étudiés pendant la construction de la digue. D'autre part, on s'est aussi intéressé au tassement de la surface du sol (ou soubassement de la digue) c'est à dire au comportement mécanique du complexe sablo-argileux. La figure 5.26 donne son évolution suivant la coupe. Enfin, pour avoir une idée d'ensemble, on a tracé à la fin des deux dernières phases et, juste avant la mise en eau, les isovaleurs des tassements et des déplacements horizontaux dans tout le modèle (figures 5.27 à 5.32).

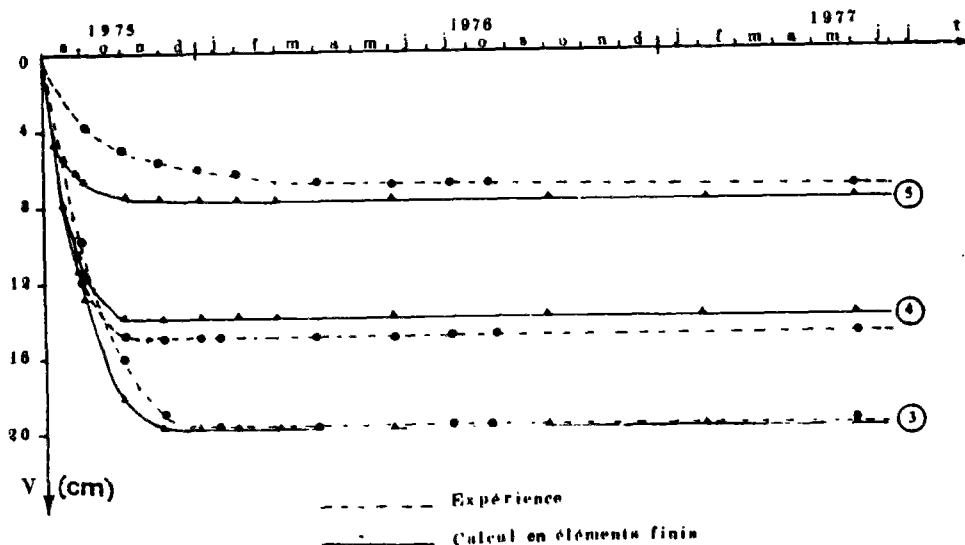


Fig. 5.24 Comparaison des tassements en fonction du temps

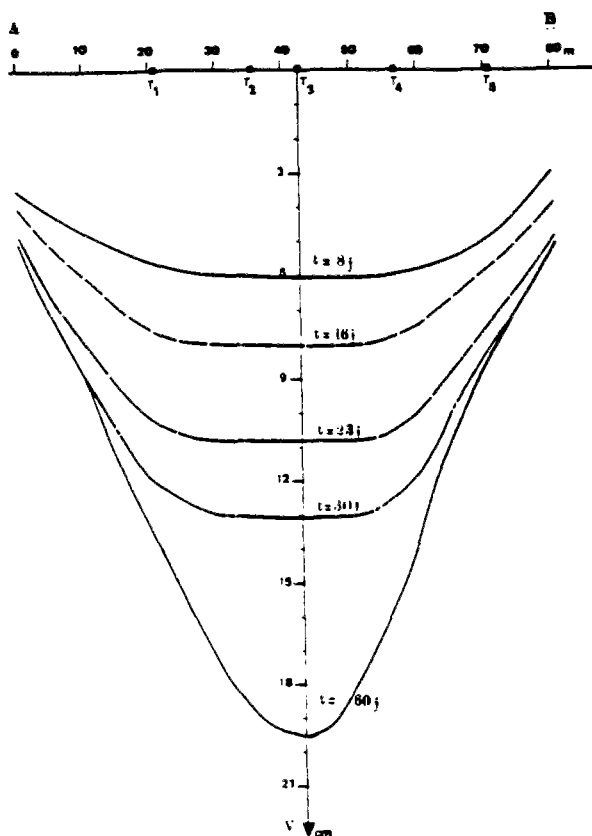


Fig. 5.25 Evolution des tassements suivant la coupe AB des tassomètres pendant la construction de la digue

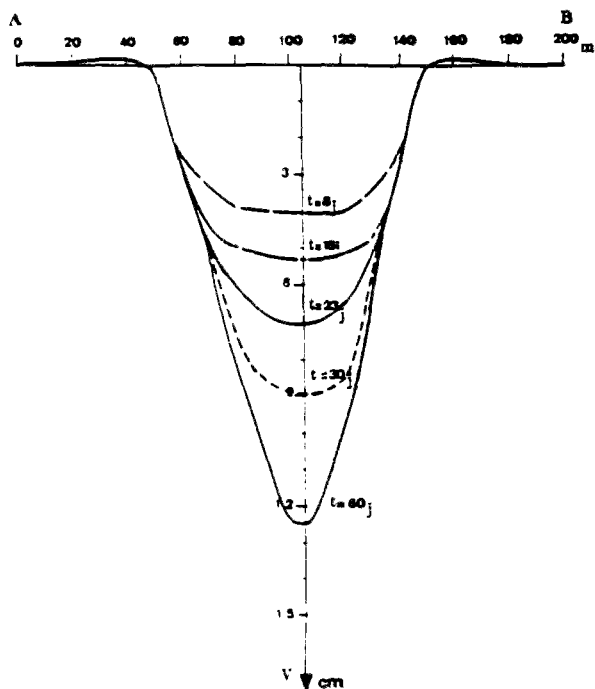


Fig. 5.26 Evolution des tassements suivant la coupe AB de la surface du sol pendant la construction de la digue

1 : -0.179e+00	(m)	6 : -0.790e-01
2 : -0.159e+00		7 : -0.589e-01
3 : -0.139e+00		8 : -0.389e-01
4 : -0.119e+00		9 : -0.188e-01
5 : -0.991e-01		10 : 0.132e-02

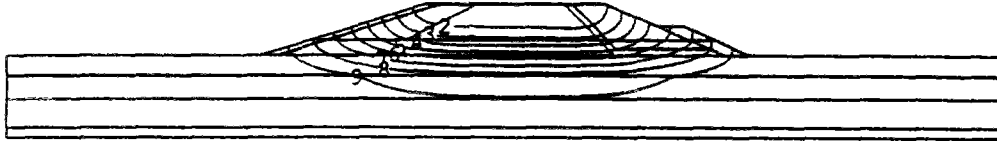


Fig. 5.27 Courbes d'isovaleurs de tassements à t = 30j

1 : -0.318e+00	(m)	6 : -0.140e+00
2 : -0.282e+00		7 : -0.105e+00
3 : -0.247e+00		8 : -0.696e-01
4 : -0.211e+00		9 : -0.342e-01
5 : -0.176e+00		10 : 0.121e-02

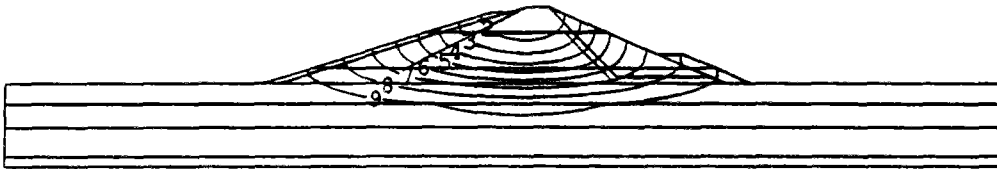


Fig. 5.28 Courbes d'isovaleurs de tassements à t = 60j

1 : -0.318e+00	(m)	6 : -0.141e+00
2 : -0.283e+00		7 : -0.105e+00
3 : -0.247e+00		8 : -0.699e-01
4 : -0.212e+00		9 : -0.345e-01
5 : -0.176e+00		10 : 0.101e-02



Fig. 5.29 Courbes d'isovaleurs de tassements à t = 660j

1 : -0.217e-01		6 : 0.155e-02
2 : -0.171e-01		7 : 0.621e-02
3 : -0.124e-01	(m)	8 : 0.109e-01
4 : -0.777e-02		9 : 0.155e-01
5 : -0.311e-02		10 : 0.202e-01

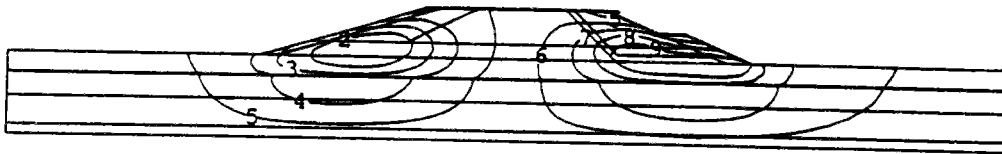


Fig. 5.30 Courbes d'isovaleurs de déplacements horizontaux à $t = 30j$

1 : -0.330e-01		6 : 0.354e-02
2 : -0.257e-01		7 : 0.108e-01
3 : -0.184e-01	(m)	8 : 0.182e-01
4 : -0.111e-01		9 : 0.255e-01
5 : -0.377e-02		10 : 0.328e-01



Fig. 5.31 Courbes d'isovaleurs de déplacements horizontaux à $t = 60j$

1 : -0.329e-01		6 : 0.351e-02
2 : -0.256e-01		7 : 0.108e-01
3 : -0.183e-01	(m)	8 : 0.181e-01
4 : -0.111e-01		9 : 0.253e-01
5 : -0.377e-02		10 : 0.326e-01

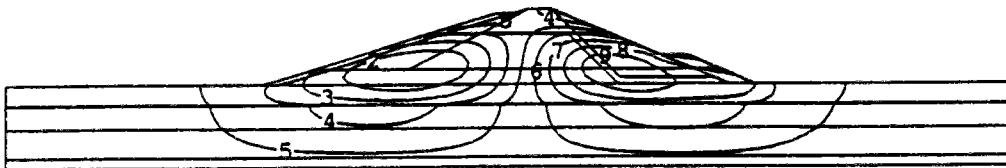


Fig. 5.32 Courbes d'isovaleurs de déplacements horizontaux à $t = 660j$

L'examen des résultats à ce stade de l'étude montre que les résultats numériques obtenus sont dans leur ensemble conformes à la réalité. La comparaison des valeurs théoriques et expérimentales des tassements confirme cette bonne concordance. On peut cependant constater la difficulté d'obtenir le début de l'évolution des tassements réels. Sans doute, pour le reproduire avec fidélité, plusieurs calculs supplémentaires avec reprises auraient été nécessaires. On remarque néanmoins que la différence entre les résultats numériques et expérimentaux après un mois de construction ne dépasse guère le centimètre. Le tassement dans l'axe, où il est maximal, est particulièrement proche de sa valeur expérimentale de 20 cm à la fin de la construction.

En ce qui concerne le tassement à la surface du sol, au niveau du soubassement de la digue, il est resté modeste. Sa valeur finale ne dépasse pas les 13 cm. Par ailleurs, le tracé des isovaleurs de tassements montre que la charge du remblai n'est ressentie que jusqu'au tiers central de l'argile à cérites. En dehors donc du complexe argilo-sableux, les autres couches de la fondation n'ont pratiquement pas été sollicitées par la charge du remblai. Les valeurs des isovaleurs des tassements et les formes de leur courbe traduisent de façon claire :

- la nature géométrique du chargement de chaque phase,
- l'hétérogénéité mécanique sensible entre l'argile à cérites et le complexe argilo-sableux (isovaleur n°9),
- une légère dissymétrie par rapport à l'axe de la digue, liée à la fois à la différence entre les pentes principales de la digue et à la différence des poids volumiques entre les limons (1) et (2) et le troisième limon, d'une part, et les limons et les enrochements, d'autre part.

Enfin, on peut noter la très grande vitesse de tassements de la digue. Le tassement final a pratiquement coïncidé avec celui produit à la fin des travaux. A partir de cette date, il ne se produit presque rien. Au temps $t = 660j$, juste avant la mise en eau (juillet 1977), l'augmentation de tassement est de l'ordre de 3 mm, et seulement à l'intérieur du complexe argilo-sableux (isovaleurs 8 et 9).

Pour ce qui est des déplacements horizontaux, ils sont restés réduits et ne dépassent guère en valeur absolue 3,5cm. Leur variation spatiale et temporelle sont conformes à la physique : ils sont négatifs à l'amont du remblai, positifs à l'aval et tendent à diminuer en fonction du temps, contrairement aux tassements. Mais cette tendance est restée très limitée (de l'ordre du mm) entre la construction du remblai et la date de mise en eau.

Régime hydraulique avant la mise en eau

En dehors de la première phase de construction, mise instantanément et dans laquelle, la nappe s'est élevée d'environ 20 à 30 cm dans le remblai, le régime hydraulique est resté quasi permanent (régime initial hydrostatique). Ce résultat semble indiquer que les surpressions expérimentales enregistrées avant la mise en eau ne sont pas dues à l'effet de consolidation des couches sous-jacentes mais bien liées, comme le notent Delfaut et al. (1984), à la condition de drainage qui s'est progressivement mise en place entre la cote 105m et 108m, avant que l'on ait décidé la mise en eau véritable. N'ayant pas pris en compte cette mise en eau "naturelle" pendant la construction, on n'a obtenu que l'effet de la consolidation du complexe sablo-argileux. Or cet effet semble justement négligeable pour 3 raisons :

1. la forte perméabilité du complexe argilo-sableux lui-même (1,5 m/j) ne tend pas à créer de surpressions importantes en fonction du temps;

2. l'emmagasinement hydraulique, pris en compte dans la compressibilité du fluide, ne favorise pas non plus une élévation rapide de la charge hydraulique;

3. le phasage de la construction adopté est sans doute le processus de chargement le moins favorable aux variations brutales des pressions interstitielles de la fondation.

La quasi-absence d'évolution de la charge hydraulique entre la date de d'achèvement des travaux et la date de mise en eau est en grande partie responsable de la non-évolution du tassement constatée entre ces deux dates.

5.3.3.2 Résultats de la mise en eau de la digue

Effets mécaniques de la mise en eau

La mise en eau a été effectuée en deux phases (voir tableau des calculs). Chaque phase a été conduite jusqu'au terme de son régime permanent, ce qui correspond à peu près à un mois pour chacune d'elles. Ce phasage en nombre limité réduit la durée totale de la mise en eau réelle mais néanmoins donne les grandes tendances des effets de l'écoulement dans le corps de digue sur le comportement mécanique de l'ouvrage. Pour mettre en évidence les effets couplés de la mise en eau, on a tracé, suivant la coupe des tassomètres, l'évolution des tassements à $t = 660j$ (fin juin 1977 et jour qui précède la date de mise en eau) puis à $t = 667j$ (une semaine après la mise en eau) et $t = 681j$ (correspondant au régime permanent de la première phase de mise en eau à la cote 111m). On fait également pareil en ce qui concerne la deuxième phase à $t =$

697j (une semaine après l'installation du plan d'eau à la cote d'exploitation 115 m) puis à $t = 709j$ (un mois de mise en service après). La figure 5.33 donne ces évolutions sur un même graphique. On s'est également intéressé aux répercussions de l'écoulement sur les tassements à la surface du sol. La figure 5.34 donne leur variation suivant la coupe à différents instants de la seconde mise en eau. Enfin, pour avoir une idée d'ensemble des effets de la mise en eau, on a tracé les courbes d'isovaleurs des déplacements horizontaux dans tout le modèle particulièrement concernés par la poussée de l'eau.

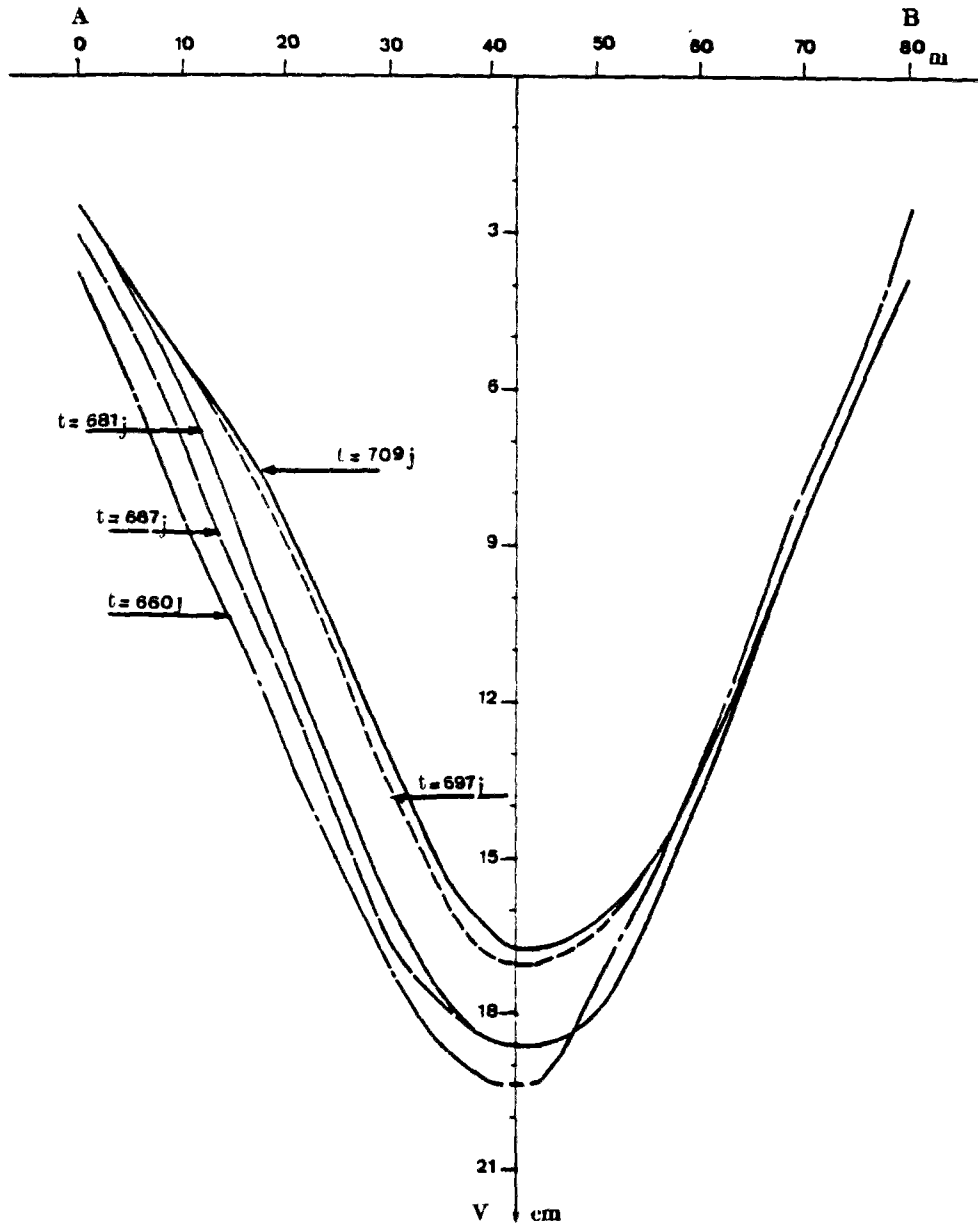


Fig. 5.33 Effets de la mise en eau sur les tassements suivant la coupe AB des tassomètres

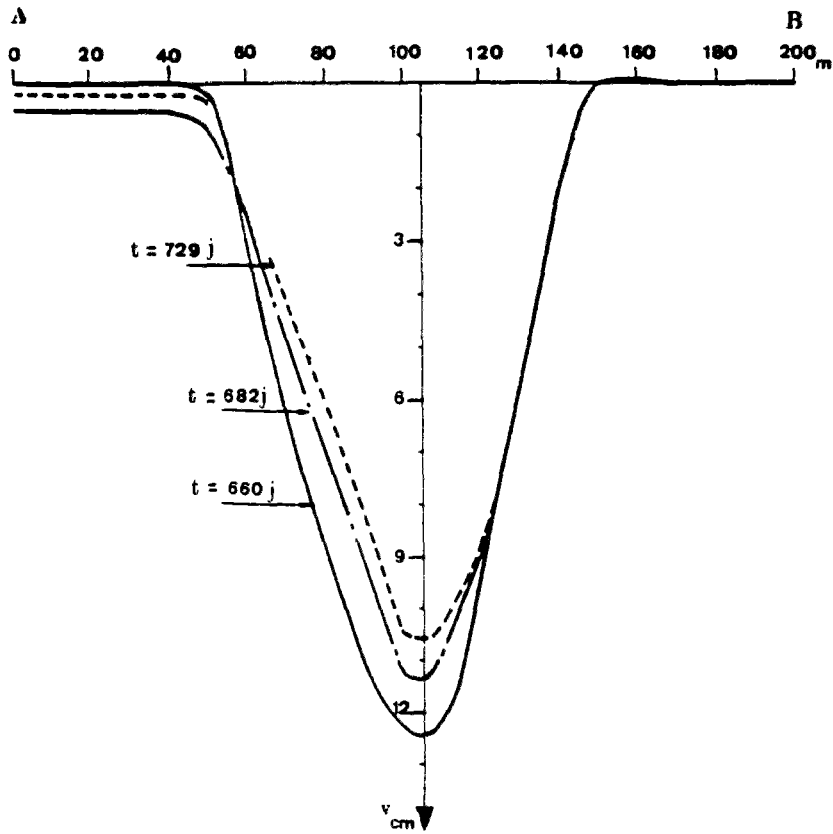


Fig. 5.34 Effets de la mise en eau sur les tassements de la surface du sol

1 :	-0.221e-01		6 :	0.276e-01
2 :	-0.121e-01		7 :	0.376e-01
3 :	-0.220e-02	(m)		
4 :	0.774e-02			
5 :	0.177e-01			

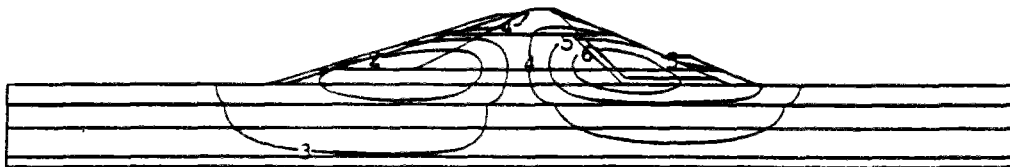


Fig. 5.35 Courbes d'isovaleurs de déplacements horizontaux au temps $t = 681j$ (fin de la lère phase de mise en eau)

1 :	-0.526e-02		6 :	0.382e-01
2 :	0.343e-02		7 :	0.469e-01
3 :	0.121e-01	(m)		
4 :	0.208e-01			
5 :	0.295e-01			

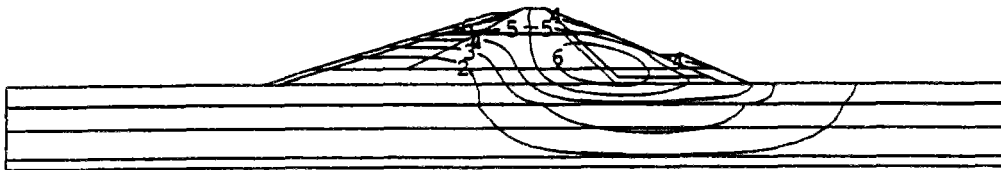


Fig. 5.36 Courbes d'isovaleurs de déplacements horizontaux au temps $t = 697j$ (15j après la mise en service)

1 :	-0.534e-02		6 :	0.386e-01
2 :	0.344e-02		7 :	0.474e-01
3 :	0.122e-01	(m)		
4 :	0.210e-01			
5 :	0.298e-01			



Fig. 5.37 Courbes d'isovaleurs de déplacements horizontaux au temps $t = 709j$ (1 mois environ de mise en service)

L'effet de la mise en eau sur le processus du tassement est évident dans la partie amont de l'ouvrage surtout avant la cheminée. On constate aussi bien sur la coupe des tassomètres que sur la coupe de la surface de sol, que la mise en eau non seulement arrête définitivement le processus de tassement mais inverse la tendance de façon significative à l'amont de la digue. Ce phénomène contraste avec les résultats expérimentaux (fig. 5.14) qui semblent indiquer tout de même une légère augmentation (0,5cm) après la mise en eau. On obtient au contraire un soulèvement qui atteint parfois dans la zone aval du corps de digue la valeur de 2,5cm. En revanche, à l'aval de l'ouvrage et surtout après la cheminée, l'écoulement dans le corps de digue n'a pratiquement aucun effet : le tassement reste asymptotiquement celui d'avant la mise en eau. Ce résultat s'explique par le fait qu'au fur et à mesure de la diffusion du front de saturation dans la digue (notable à l'amont), la pression hydrostatique réduit progressivement la charge du remblai et produit un déjaugage progressif du massif, le "soulageant" ainsi dans sa partie aval. Cet effet de diminution de charge se traduit logiquement par une diminution de tassements. L'état d'équilibre dans le massif correspond au régime permanent à environ $t = 709j$.

Les courbes d'isovaleurs des déplacements horizontaux montrent l'effet net de la mise en eau. Dès la seconde mise en eau, les déplacements horizontaux deviennent tous positifs. Le corps de digue s'est légèrement déplacé dans le sens de l'écoulement d'environ 2 à 3 cm. La poussée de l'eau vers l'aval a donc produit son effet physique prévisible. L'effet combiné du déplacement horizontal du corps de digue et du soulèvement déjà constaté du tassement entraîne une rotation de l'ouvrage dans le sens des aiguilles d'une montre, ce qui est normal pour ce cas précis.

Effets hydrauliques de la mise en eau

La mise en eau provoque l'établissement dans le corps de digue d'un écoulement non-linéaire transitoire à surface libre. Au fur et à mesure du développement de la zone saturée, la surface libre évolue progressivement de l'amont vers l'aval. En même temps, un écoulement vertical traverse l'amont de la fondation, alimentant les couches sous-jacentes de celle-ci et évacuant à travers elles l'eau vers les zones drainantes notamment sous la cheminée et vers l'aval de la surface du sol.

Avant de revenir sur certains points essentiels de l'écoulement tels que l'évolution des charges hydrauliques dans les piézomètres, le réseau des équipotentielles et celui des équipressions, formulons quelques remarques sur l'évolution de la surface libre.

Surface libre

On a tracé le profil de la surface libre pour les temps suivants : $t = 661j$, $t = 667j$ et $t = 681j$, qui correspondent respectivement à 1 jour, 1 semaine et 3 semaines après la date de la première phase de mise en eau. On a fait de même pour la seconde phase à $t = 682j$, $t = 689j$ et $t = 709j$ (fig. 5.38).

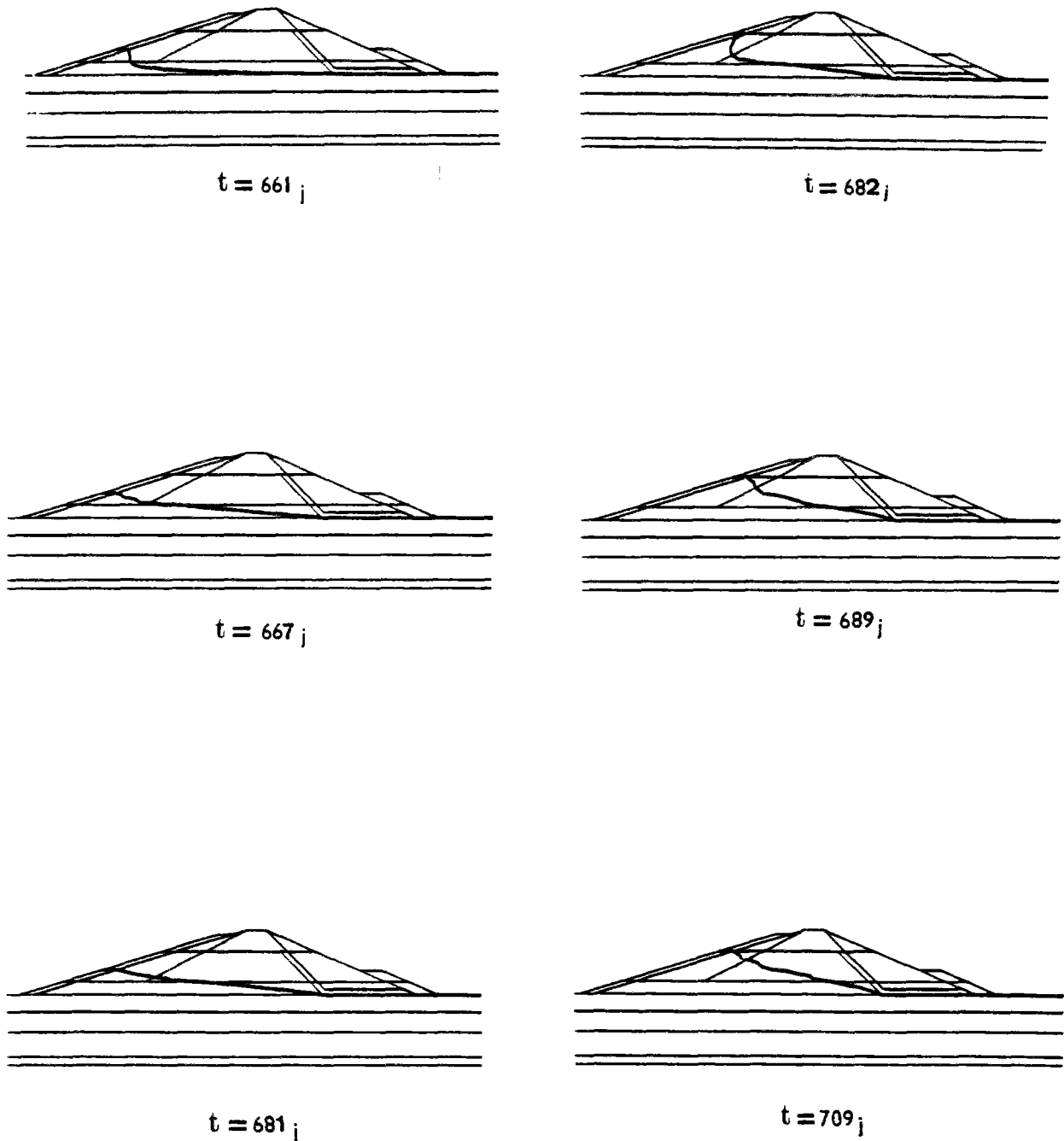


Fig. 5.38 Evolution de la surface libre dans le corps de digue

L'examen de ces courbes permet de faire les remarques suivantes :

1. dans les premiers instants ($t = 661j$ et $t = 682j$), la surface libre, après avoir dépassé instantanément les enrochements, chute brutalement dans le premier limon. Ce départ presque tangentiel à la face interne du talus est plus net dans la deuxième phase de mise en eau ($t = 682j$). Il s'explique par le contraste considérable entre les perméabilités de la structure rocheuse ($0,2m/s$) et le limon du corps de digue ($0,2m/j$). Comme le milieu poreux résiste à l'écoulement par sa porosité, l'eau met du temps à saturer les couches de sols avoisinantes et la surface libre se brise pour retrouver sa position initiale. Lorsque la zone saturée a acquis des dimensions suffisantes, l'isotropie de l'écoulement aidant, la surface libre reprend une forme plus régulière ($t = 681j$ et $t = 709j$) ;

2. pendant la première phase de mise en eau, seule la couche inférieure du limon (1) s'est saturée alors que, dans la deuxième phase de mise en eau, le tiers amont du limon central a été atteint par le front de saturation ;

3. Il n'y a pas eu de suintement au niveau de la cheminée dans le corps de digue. Le rôle de celle-ci n'apparaît donc pas très clair à la cote d'exploitation normale (115m). Peut-être le sera-t-il davantage à la cote maximale (120m) puisque le bassin est à la fois permanent et écrêteur de crues.

Charges hydrauliques dans les piézomètres

Afin de comparer les résultats des charges hydrauliques enregistrées par les piézomètres et celles calculées par éléments finis, on a tracé les charges hydrauliques en fonction du temps à divers noeuds correspondant approximativement à l'emplacement des 3 piézomètres (P_9), (P_7) et (P_6) situés à l'amont de la cheminée (fig. 5.13). La figure 5.39 présente les résultats du calcul par éléments finis.

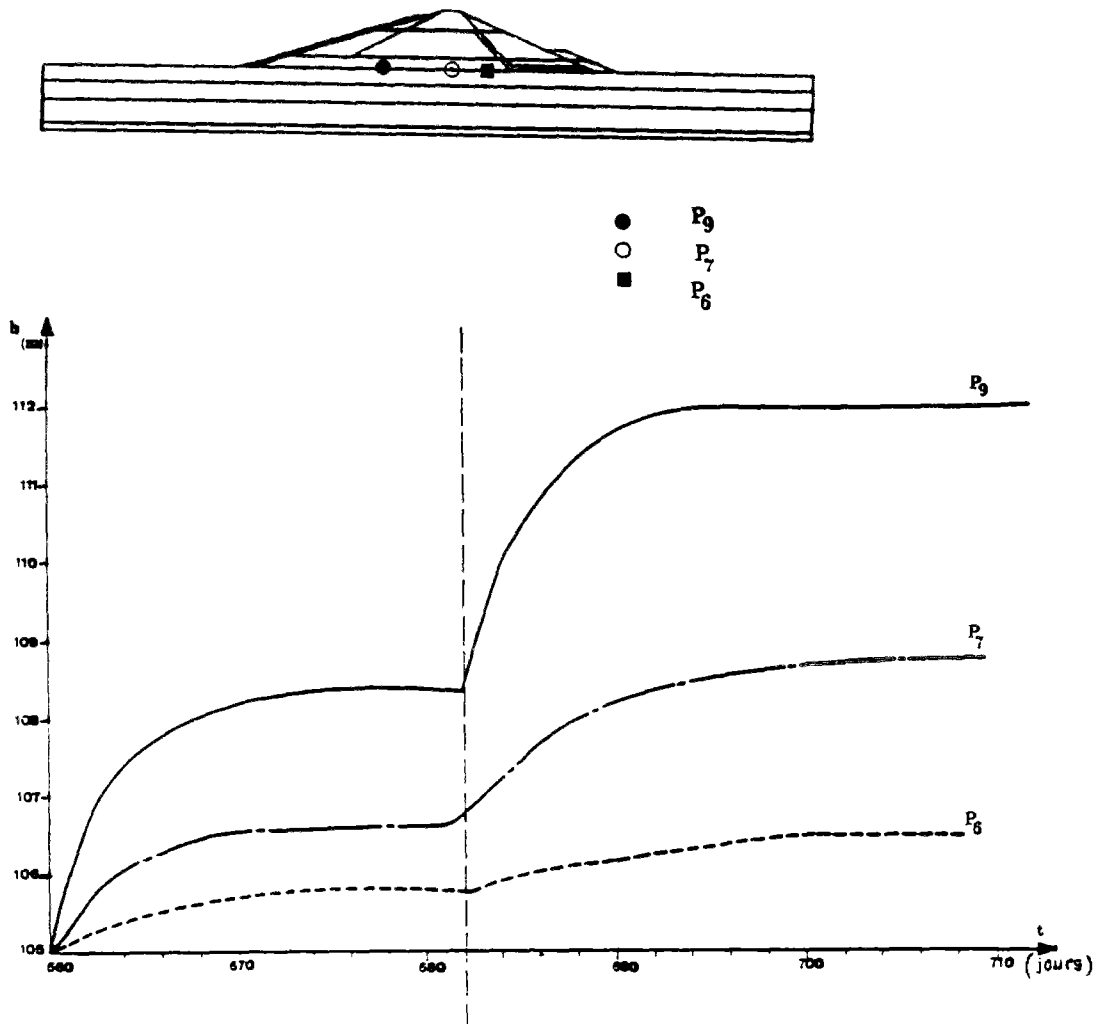


Fig. 5.39 Evolution des charges hydrauliques dans les piézomètres. Résultats du calcul par éléments finis

Sur la base de ces résultats, on peut faire les remarques suivantes :

1. d'une façon générale, on retrouve, tant du point de vue qualitatif que quantitatif, les tendances des résultats expérimentaux (fig. 5.13). Les différences entre les valeurs finales des résultats numériques et expérimentaux montrent une surestimation de la charge (1,5m) pour le piézomètre 9, une parfaite concordance pour le piézomètre 7 et sous-estimation (1m) pour le piézomètre 6. Mais les pourcentages d'erreurs n'excèdent pas, dans les 3 cas, les 40% ;

2. l'effet du phasage de la mise en eau est net sur la figure. Au temps $t = 682j$, date de la seconde mise en eau, les noeuds ressentent sans déphasage la montée brutale du plan d'eau ;

3. les paliers que l'on constate pour les charges hydrauliques, après seulement 2 semaines de rapide croissance pour les deux phases, traduisent l'acquisition par ces noeuds du régime permanent.

Equipotentiellles et équipressions

Pour avoir une idée d'ensemble sur l'écoulement hydraulique, on a tracé le réseau des équipotentiellles et des équipressions à différents instants : à $t = 681j$ pour la première phase de mise en eau, puis à $t = 689j$, $t = 697j$ et $t = 709j$ pour la seconde phase. Les figures 5.40 à 5.43 présentent ces résultats.

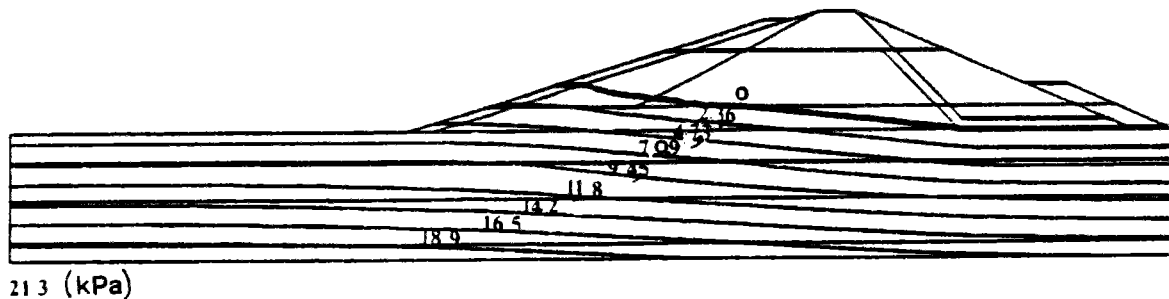


Fig. 5.40.a Réseau des équipressions à $t = 681j$

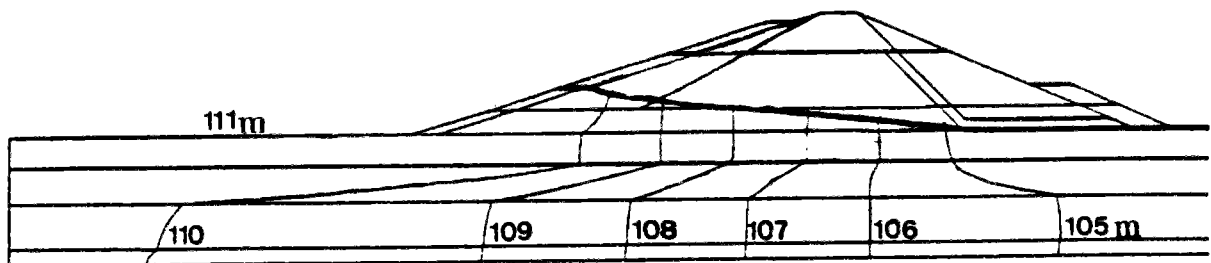


Fig. 5.40.b Réseau des équipotentiellles à $t = 681j$

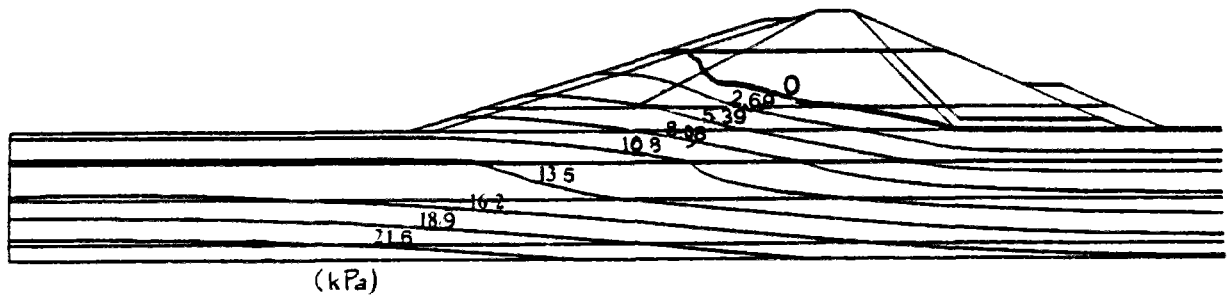


Fig. 5.41.a Réseau des équipressions à $t = 689j$

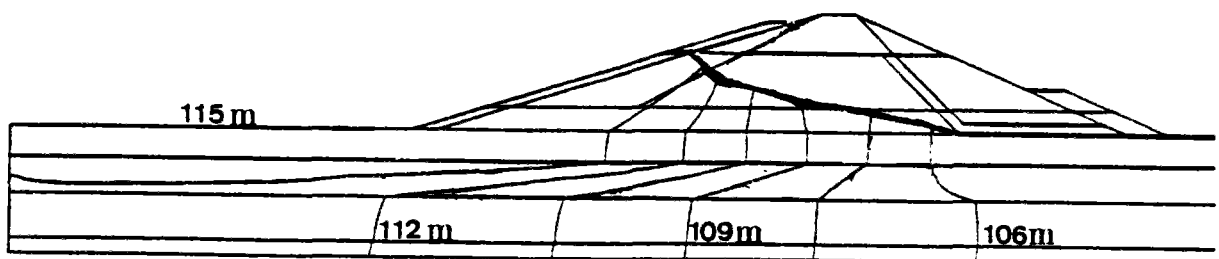


Fig. 5.41 b Réseau des équipotentiellles à $t = 689j$

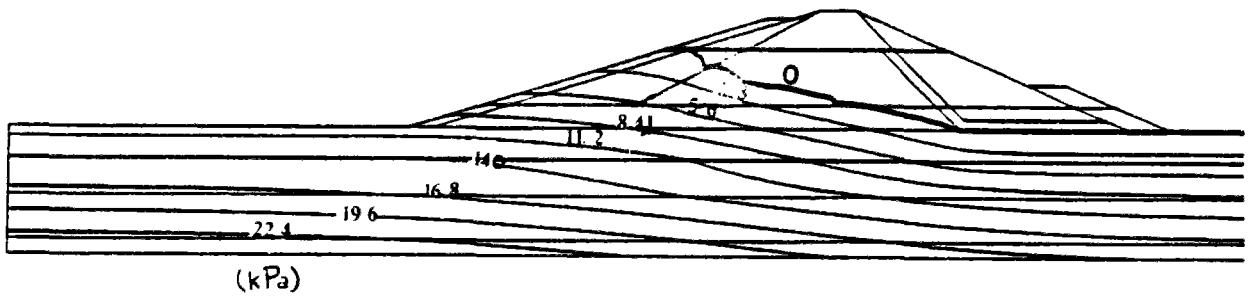


Fig. 5.42.a Réseau des équipressions à $t = 697j$

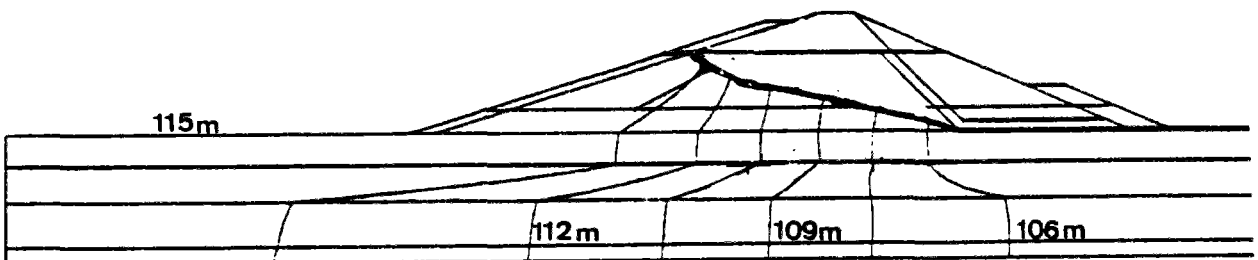


Fig. 5.42.b Réseau des équipotentiellles à $t = 697j$

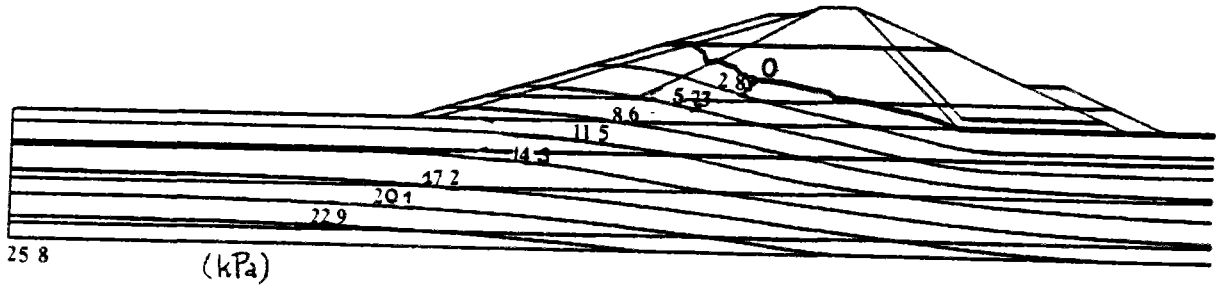


Fig. 5.43.a Réseau des équipressions à $t = 709j$

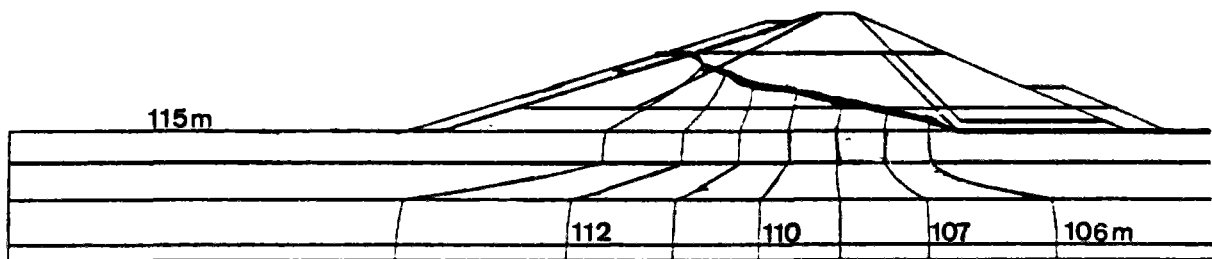


Fig. 5.43.b Réseau des équipotentiellles à $t = 709j$

L'analyse des réseaux des équipressions et des équipotentiellles permet de noter quelques remarques générales au sujet de l'écoulement :

1. les valeurs des pressions interstitielles sont plus importantes à l'aval de la fondation et croissent avec la profondeur, traduisant ainsi l'effet combiné de la pression hydrostatique, de la pression de l'écoulement vertical et de la présence du plan d'eau. Sous le remblai, les réseaux des équipressions aux divers instants illustrent significativement l'état de non-saturation complète du corps de digue par une baisse sensible. La valeur de la pression maximale calculée est de 21,3 (mètres d'eau) soit 213 kPa pour la première phase et de 25,8 (m d'eau) soit 258 kPa pour la seconde. Cet état hydraulique représente sensiblement l'état du régime permanent. En effet, ce dernier aura en principe été atteint lorsque la transmission intégrale des pressions imposées à la surface du sol vers les couches les plus profondes de la fondation aura été complète. On peut d'ailleurs obtenir l'ordre de grandeur de la pression maximale en calculant la somme de :

- la pression hydrostatique initiale au substratum, soit 163,30 kPa,
- la poussée du plan d'eau à la surface du sol, qui correspond respectivement pour la première et la seconde phases de mise en eau à 58 kPa et 100 kPa,

ce qui donne pour les deux phases, respectivement, 22,13 et 26,33 (en m d'eau), ce qui est voisin des valeurs obtenues à la fin de chaque phase ;

2. le réseau des équipotentiellles montre l'hétérogénéité hydraulique sensible de la structure de l'ouvrage : l'imperméabilité relative de l'argile à cérîtes par rapport au complexe argilo-sableux, puis la forte perméabilité de ce dernier par rapport aux différents limons du corps de digue. On peut remarquer, là encore, que les équipotentiellles les plus fortes se trouvent dans les zones les plus proches du plan d'eau, point que l'on a déjà remarqué en suivant l'évolution en fonction du temps de la charge hydraulique aux noeuds.

5.3.4. Conclusion

Le calcul de la digue de Maurepas-Courance par un modèle élastique de consolidation à surface libre et sa confrontation avec les résultats expérimentaux ont montré qu'à partir d'une approche de couplage écoulement-déformations on peut obtenir des résultats satisfaisants tant du point de vue mécanique que du point de vue hydraulique.

La mise en oeuvre de la programmation, effectuée au niveau du code de calculs par éléments finis CESAR, montre également que l'on peut calculer sans difficultés notables un ouvrage réel en tenant compte aussi bien du phasage de sa construction que du phasage de sa mise en eau. On peut ainsi suivre, grâce aux outils numériques, le comportement des ouvrages à tous les stades de leur vie.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Dans le but de modéliser le comportement mécanique et hydraulique des barrages en terre construits sur sols mous, nous avons défini un cadre général dans lequel peut s'inscrire le calcul de ce type de structures : le couplage de la consolidation des sols et des écoulements à surface libre.

Conscients de la difficulté à la fois théorique et numérique que posent les problèmes de couplages écoulement-déformations en général et en particulier dans les barrages en terre, nous avons adopté au cours de ce travail une démarche par étapes.

Nous sommes partis de deux outils numériques du code de calculs par éléments finis CESAR portant sur deux aspects différents du sujet étudié, à savoir :

- les écoulements en milieux poreux **indéformables** saturés ou non-saturés en présence ou non de surface libre,
- la consolidation des sols **saturés**.

Dans une première étape, nous avons replacé ces deux modules de calculs dans le contexte actuel de la modélisation théorique et numérique de la consolidation des sols saturés et des écoulements à surface libre. Nous avons, dans une deuxième étape, procédé à une harmonisation entre les outils existants et à une extension de leurs possibilités de calculs, notamment par l'introduction et l'adaptation de chargements mécaniques tels que poids volumique, contraintes initiales et soulèvement hydrostatique.

Ces travaux préparatoires testés et validés, nous avons formulé dans une troisième étape un modèle de consolidation à surface libre des sols élastiques anisotropes. Ce modèle, qui se présente comme une synthèse des travaux antérieurs, a ramené, grâce à l'introduction de distributions mathématiques appropriées, le problème délicat de surface libre transitoire au traitement de frontières fixes dans lesquelles on écrit les équations du problème. L'application du principe des travaux virtuels et de la méthode des éléments finis à ce problème a conduit à la résolution d'un système différentiel non-linéaire, symétrique, du premier ordre. L'adaptation dans le code CESAR de l'ensemble des éléments finis de consolidation bidimensionnelle des sols saturés aux calculs hydrauliques de diffusion non-linéaire, l'adaptation inversement des éléments bidimensionnels de diffusion non-linéaire aux calculs

mécaniques d'élasticité linéaire, la mise au point d'un algorithme transitoire et itératif, l'application de la méthode du point fixe comme base de résolution du système non-linéaire et sa programmation dans un nouveau module du code de calculs par éléments finis CESAR constituent alors les points marquants de cette étape.

Nous avons introduit dans une quatrième étape l'élastoplasticité du squelette du sol, rajoutant à la non-linéarité hydraulique une non-linéarité mécanique. Pour résoudre ce problème, on a d'abord étendu les propriétés numériques des éléments finis précédemment mis au point aux calculs mécaniques d'élastoplasticité et décrit ensuite un algorithme de résolution combinant la méthode des rigidités variables pour le traitement de la non-linéarité hydraulique (surface libre) et la méthode des contraintes initiales pour le traitement de la non-linéarité mécanique (élastoplasticité). La validation de cet algorithme, programmé dans un deuxième module de CESAR qui tient compte des principaux modèles élastoplastiques des sols, et notamment ceux des sols mous comme le modèle MELANIE, par exemple, a été effectuée sur la base de 3 solutions analytiques concernant des problèmes différents.

Nous avons confronté dans une dernière étape cette modélisation et de sa programmation avec un cas réel d'ouvrage en terre. Nous avons montré notamment que l'on peut conduire de bout en bout le calcul des barrages réels et obtenir des résultats encourageants tant du point de vue hydraulique que du point de vue mécanique.

Plusieurs perfectionnements restent cependant nécessaires à ces travaux.

Sur le plan théorique, il faut davantage raffiner la modélisation de la transition entre zone saturée et zone non-saturée. Celle-ci a été idéalisée du point de vue mécanique, où l'on a négligé l'effet différé des déformations dans la zone non-saturée. La nature, la forme et le mécanisme du couplage entre écoulement et comportement du squelette, en présence de succion, constituent à l'heure actuelle l'un des enjeux majeurs de la recherche sur les sols non-saturés. Les modèles en variables indépendantes (contrainte totale, succion), s'ils se précisent, pourraient permettre une avancée décisive dans ce domaine. On peut penser que, moyennant quelques adaptations minimales, ces modèles peuvent utiliser presque intégralement les algorithmes mis au point dans CESAR.

Sur le plan numérique, les non-linéarités des sols mous rencontrées au cours de ce travail ne semblent pas poser de difficultés importantes quant à la convergence des systèmes non-linéaires itératifs qu'elles impliquent, comparativement à

celles rencontrées lors de la résolution des problèmes de mécanique des massifs secs élastoplastiques (sous la même nature de chargements et de conditions aux limites) ou d'hydraulique des sols indéformables. Ce bon comportement des algorithmes semble provenir du fait que la compressibilité du sol mou joue un rôle d'emménagement hydraulique qui régularise la non-linéarité de l'écoulement. Nous avons en effet constaté que les tests dans lesquels les problèmes hydrauliques et mécaniques sont faiblement couplés sont numériquement les plus sévères. Il faut cependant tester davantage les modules sur des ouvrages réels pour s'en faire une idée plus précise. Dans le cas où l'on constate des divergences fréquentes dans la mise en oeuvre des programmes, un procédé itératif de couplage de la méthode du point fixe et de la méthode de Newton (plus lourde mais d'ordre de convergence supérieur à la méthode du point fixe) pourrait être envisagé. Ce procédé est déjà utilisé avec succès dans CESAR pour le module NSAT. Si, au contraire, la remarque précédente se confirme, on peut envisager d'étendre la modélisation actuelle au problème de surface libre tridimensionnel. Les bases numériques de ce problème existent déjà dans CESAR.

Nous souhaitons, en dotant le code de calculs par éléments finis CESAR d'outils numériques de traitement des problèmes de consolidation à surface libre des sols élastiques ou élastoplastiques isotropes ou anisotropes tenant compte de la variabilité ou non de leurs différents paramètres mécaniques et hydrauliques (indice des vides, écoulement, perméabilités, compressibilités, etc.), avoir contribué à augmenter la capacité d'analyse numérique du comportement des ouvrages en terre tels que remblais et barrages construits sur sols mous.

De plus, grâce à une programmation qui prend en compte le phasage de la construction du remblai ainsi que celui de la mise en eau, on peut espérer l'amorce d'un dimensionnement plus précis et réaliste des barrages en terre, fondé sur une approche de couplage des problèmes mécaniques et hydrauliques que met en jeu le calcul de ces structures.

ANNEXES

ANNEXE 1

Application de la transformée de Laplace et de la formule d'inversion à la résolution d'une équation aux dérivées partielles

Cet annexe donne les détails du calcul de la solution analytique présentée au chapitre 2 (§ 2.3.4).

Rappelons les équations que doit vérifier la fonction u_2 en tout point et en tout instant :

$$c_v \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \quad (1) \quad z \leq 0$$

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = - T_0 \cdot u_2(0,t) \quad (2) \quad \text{Condition à la limite (à l'interface)}$$

$$|u_2(z,t)| \Big|_{z \leq 0} < M \quad (3) \quad \text{la charge hydraulique devant rester finie (M=cte)}$$

$$u_2(z,0^+) = \frac{P}{\gamma_w} \quad (4) \quad \text{Condition initiale}$$

$$T_0 = \frac{k_1}{k_2 \cdot z_0}$$

Posons :

$$\tilde{u}_2(z,p) = \int_0^{-\infty} e^{-pt} \cdot u_2(z,t) dt.$$

Dans ce cas, les équations (1) et (4) donnent :

$$\frac{d^2 \tilde{u}_2}{dz^2} - \frac{p}{c_v} \cdot \tilde{u}_2 = \frac{-P/\gamma_w}{c_v} = -\frac{u_0}{c_v} \quad (5) \quad \text{avec : } u_0 = \frac{P}{\gamma_w}.$$

Les équations (2) et (3) permettent d'écrire :

$$\frac{d\tilde{u}_2}{dz} = -T_0 \cdot \tilde{u}_2(0,p) \quad (6)$$

$$|\tilde{u}_2(z,p)| < M \quad (7)$$

L'équation (5) permet alors d'obtenir u_2 sous la forme :

$$\tilde{u}_2(z,p) = C_1(p) \cdot e^{z\sqrt{p/c_v}} + C_2(p) \cdot e^{-z\sqrt{p/c_v}} + \frac{u_0}{p} \quad (8)$$

D'après l'équation (7), on a :

$$C_2(p) = 0 \quad \text{et} \quad \hat{u}_2(z,p) = C_1(p) \cdot e^{z\sqrt{p/c_v}} + \frac{u_0}{p} \quad (9)$$

et l'équation (6) permet de déterminer $C_1(p)$:

$$C_1(p) = -\frac{T_0}{p} \cdot \frac{u_0}{(T_0 + \sqrt{p/c_v})} \quad (10)$$

Il en résulte pour la transformée suivante :

$$\tilde{u}_2(z,p) = \frac{-T_0 \cdot u_0}{p \cdot (T_0 + \sqrt{p/c_v})} \cdot e^{z\sqrt{p/c_v}} + \frac{u_0}{p}$$

En posant $\alpha = -T_0 \cdot \sqrt{c_v}$, on obtient :

$$u_2(z,t) = u_0 + u_0 \cdot \alpha \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{z\sqrt{p/c_v}}}{p(\sqrt{p} - \alpha)} \right\} \quad (10)'$$

CALCUL DE LA TRANSFORMEE INVERSE : $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{z\sqrt{p/c_v}}}{p(\sqrt{p-\alpha})} \right\}$

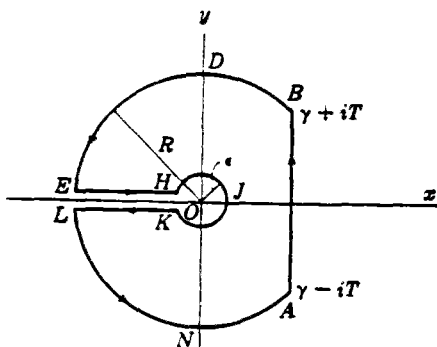
Pour calculer la transformée inverse de Laplace, on utilise la formule d'inversion dite de "réciprocité complexe".

La formule intégrale de Bromwich permet d'écrire :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{z\sqrt{p/c_v}}}{p(\sqrt{p-\alpha})} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} \left\{ \frac{e^{z\sqrt{p/c_v}}}{p(\sqrt{p-\alpha})} \right\} dp \quad (11)$$

Puisque la fonction $p \longrightarrow \frac{e^{z\sqrt{p/c_v}}}{p(\sqrt{p-\alpha})}$

possède un point de branchement à l'origine ($p = 0$), on modifie le contour de Bromwich et on utilise le théorème des résidus.



Contour C d'intégration

D'après le théorème des résidus, on a :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \underbrace{\frac{e^{pt+z\sqrt{p/c_v}}}{p(\sqrt{p-\alpha})}}_{f(p)} dp = - \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left\{ \int_{EH} f(p) dp + \int_{HJK} f(p) dp + \int_{KL} f(p) dp \right\}$$

En effet,

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_C f(p) dp = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{AB} f(p) dp + \int_{BDE} f(p) dp + \int_{EH} f(p) dp + \int_{HJK} f(p) dp + \int_{KL} f(p) dp + \int_{LNA} f(p) dp \right\} \quad (12)$$

La singularité $p = 0$ se trouve en dehors du contour C, le théorème de Cauchy assure :

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_C f(p) dp = 0 \quad (13)$$

De plus, on a :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{LNA} e^{Pt} f(p) dp = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{BDE} e^{Pt} f(p) dp = 0 \quad (14)$$

(on peut en effet trouver M et k tels que $|f(p)| < \frac{M}{R^k}$

Les relations (12), (13) et (14) permettent donc d'écrire :

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{AB} e^{Pt} f(p) dp = - \lim_{\substack{R \rightarrow -\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left\{ \int_{EH} f(p) dp + \int_{HJK} f(p) dp + \int_{KL} f(p) dp \right\} \quad (15)$$

- Sur EH

$$p = u \cdot e^{\pi i} \quad \sqrt{p} = \sqrt{u} \cdot e^{i\pi/2} = i \cdot \sqrt{u}$$

$$\int_{EH} f(p) dp = \int_R^\varepsilon \frac{e^{-ut+i\sqrt{u/c} \cdot z}}{u(i\sqrt{u} - \alpha)} du \quad (16)$$

- Sur KL

$$p = u \cdot e^{-\pi i} \quad \sqrt{p} = -i\sqrt{u}$$

$$\int_{KL} f(p) dp = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-ut - i\sqrt{u/c_v} \cdot z}}{u(-i\sqrt{u} - \alpha)} du \quad (17)$$

- Sur HJK

$$p = \varepsilon \cdot e^{i\theta}$$

$$\int_{HJK} f(p) dp = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{\varepsilon e^{i\theta} t + \sqrt{\varepsilon e^{i\theta}/c_v} \cdot z}}{(\sqrt{\varepsilon} \cdot e^{i\theta/2} - \alpha)} \cdot i d\theta = \frac{2i\pi}{\alpha} \quad (18)$$

Les équations (16), (17) et (18) donnent :

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{pt + \sqrt{p/c_v} \cdot z}}{p(\sqrt{p} - \alpha)} dp =$$

$$-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ut}}{u} \cdot \left[\frac{\sqrt{u} \cdot \cos z \sqrt{u/c_v} + \alpha \cdot \sin z \sqrt{u/c_v}}{u + \alpha^2} \right] du$$

soit encore :

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{e^{z\sqrt{p/c_v}}}{p(\sqrt{p} - \alpha)} \right\} = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2 t} \cdot \left[u \cdot \cos z \frac{u}{\sqrt{c_v}} + \alpha \cdot \sin z \frac{u}{\sqrt{c_v}} \right]}{u(u^2 + \alpha^2)} du \quad (19)$$

Par substitution de l'équation (19) dans l'équation (10)', on obtient l'expression de $u_2(z,t)$:

$$u_2(z,t) = \frac{2u_0}{\pi} \cdot \alpha \cdot \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2 t} \cdot \left(u \cdot \cos z \frac{u}{\sqrt{c_v}} + \alpha \cdot \sin z \frac{u}{\sqrt{c_v}} \right)}{u(u^2 + \alpha^2)} du$$

Un logiciel développé à part permet l'intégration numérique de cette intégrale en tout point et à tout instant.

ANNEXE 2

Comparaison de schémas numériques implicite et explicite pour la résolution de problèmes à surface libre.

Cas de l'écoulement stationnaire

Cet annexe a pour but de montrer une **instabilité numérique liée au choix d'intégration dans le temps** sur un exemple précis : le calcul d'un régime permanent à partir d'un algorithme transitoire. Le calcul du régime stationnaire d'un algorithme transitoire est souvent utile pour comparer. Au-delà du cas précis étudié, il montre un aspect de l'incidence possible du procédé d'intégration dans le temps sur le processus de convergence des algorithmes pas à pas.

I. Algorithme selon l'intégration semi-explicite du type Galerkin

On a déjà vu que l'intégration du type Galerkin appliqués aux équations de la consolidations des sols saturés permettait d'écrire :

$$\begin{bmatrix} R_G & -\alpha C_G \\ -\alpha C_G^T & -\alpha \Delta t \frac{2}{3} K_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta H / \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} R_G & \frac{3}{2} C_G \\ 0 & \alpha \Delta t K_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ H(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(t+\Delta t) + \frac{1}{2} F(t) \\ -\frac{2}{3} \alpha \Delta t [Q(t+\Delta t) + \frac{1}{2} Q(t)] \end{bmatrix}$$

On a vu aussi que si l'on introduisait la non-linéarité hydraulique sur la base de la méthode du point fixe au système précédent, on obtenait :

$$\begin{cases} R_G \cdot \Delta u_{(t_i)}^{j+1} - C_G(h_{(t_i)}^j) \cdot \Delta h_{(t_i)}^{j+1} = -\frac{3}{2} \cdot R_G \cdot u_{(t_{i-1})}^j + \frac{3}{2} \cdot C_G(h_{(t_i)}^j) \cdot h_{(t_{i-1})}^j + \\ \frac{1}{2} \cdot F(t_{i-1}) + F(t_i) & (1) \\ -\alpha \cdot C_G^T(h_{(t_i)}^j) \cdot \Delta u_{(t_i)}^{j+1} - \alpha^2 \cdot \frac{2}{3} \Delta t \cdot K_G(h_{(t_i)}^j) \frac{\Delta h^{j+1}}{\alpha} t_i = \alpha^2 \cdot \Delta t \cdot K_G(h_{(t_i)}^j) \frac{h_{(t_{i-1})}^j}{\alpha} - \\ - \frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot [Q(t_i) + \frac{1}{2} \cdot Q(t_{i-1})] & (2) \end{cases}$$

Lorsque l'on s'intéresse particulièrement au régime permanent, on peut, pour obtenir la charge hydraulique, considérer uniquement l'équation (2). Il y a en effet dans ce cas découplage mécanique-hydraulique :

$$-\frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot K_G(h_{(t_i)}^j) \cdot \Delta h_{(t_i)}^{j+1} = \alpha \cdot \Delta t \cdot K_G(h_{(t_i)}^j) \cdot h_{(t_{i-1})}^j - \frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot [Q(t_i) + \frac{1}{2} \cdot Q(t_{i-1})]$$

Pour s'assurer de la stabilité de l'algorithme aux pas de temps suivants (le régime étant stationnaire, la solution doit rester identique), on suppose qu'il y a convergence au pas actuel et examinons s'il y a possibilité ou non d'évolution de la charge.

S'il y a convergence, on aura :

$$-\frac{2}{3} \cdot \Delta t \cdot K_G(h_{(t_i)}) \cdot \Delta h_{(t_i)} = K_G(t_i) \cdot h_{(t_{i-1})} - \frac{1}{3} \cdot Q(t_{i-1}) - \frac{2}{3} \cdot Q(t_i) \quad (3)$$

Or, on a :

$$\Delta h_{(t_i)} = h_{(t_i)} - h_{(t_{i-1})} \quad (4)$$

Les équations (3) et (4) conduisent à la relation :

$$-\frac{2}{3} \cdot K_G(t_i) \cdot h_{(t_i)} = \frac{1}{3} \cdot [K_G(t_i) \cdot h_{(t_{i-1})} - Q(t_{i-1})] - \frac{2}{3} \cdot Q(t_i) \quad (5)$$

On constate qu'il y a possibilité d'évolution du système puisque :

$$Q(t_{i-1}) \equiv K_G(t_i) \cdot h_{(t_{i-1})}$$

d'où instabilité numérique, que l'on avait par ailleurs vérifiée sur des jeux de données types.

II. Algorithme basé sur un schéma totalement implicite

Lorsque le schéma d'intégration dans le temps est totalement implicite, les équations de la consolidation des sols s'écrivent sous la forme du système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} R_G & -\alpha \cdot C_G \\ -\alpha \cdot C_G^T & -\alpha^2 \cdot K_G \cdot \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \frac{\Delta H}{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_G & C_G \\ 0 & \alpha \cdot \Delta t \cdot K_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{(t-1)} \\ H_{(t-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(t+\Delta t) \\ -\alpha \cdot \Delta t \cdot Q(t+\Delta t) \end{bmatrix}$$

Si l'on introduit la non-linéarité hydraulique du problème à surface libre, sur la base de la méthode du point fixe, le système précédent devient :

$$\begin{cases} R_G \cdot \Delta u_{(t_i)}^{j+1} - C_G(h_{(t_i)}^j) \cdot \Delta h_{(t_i)}^{j+1} = -R_G \cdot u_{(t_{i-1})} + C_G(h_{(t_{i-1})}^j) + F(t_i) & (6) \\ \alpha \cdot C_G^T(h_{(t_i)}^j) \cdot \Delta u_{(t_i)}^{j+1} + \Delta t \cdot \alpha^2 \cdot K_G(h_{(t_i)}^j) \cdot \frac{\Delta h_{(t_i)}^{j+1}}{\alpha} = -\alpha \cdot \Delta t \cdot K_G(h_{(t_i)}^j) \cdot h_{t_{i-1}} + \Delta t \cdot Q(t_i) \cdot \alpha & (7) \end{cases}$$

Lorsque le régime est stationnaire, l'équation (7) donne l'évolution de la charge hydraulique :

$$K_G(h_{(t_i)}^j) \cdot \Delta h_{(t_i)}^{j+1} = -K_G(h_{(t_i)}^j) \cdot h_{(t_{i-1})} + Q_{(t_i)} \quad (8)$$

Si l'on suppose la convergence au pas du temps actuel, on obtient d'après (8) :

$$K_G(h_{(t_i)}) \cdot \Delta h_{(t_i)} = -K_G(h_{(t_{i-1})}) \cdot h_{(t_{i-1})} + Q_{(t_i)} \quad (9)$$

Comme $\Delta h_{(t_i)} = h_{(t_i)} - h_{(t_{i-1})}$, l'équation (9) s'écrit :

$$K_G(h_{(t_i)}) \cdot h_{(t_i)} - K_G(h_{(t_{i-1})}) \cdot h_{(t_{i-1})} = -K_G(h_{(t_i)}) \cdot h_{(t_{i-1})} + Q_{(t_i)} \quad (10)$$

D'après l'équation (10), il y a parfaite égalité entre les deux membres et toute évolution est figée en conséquence, une fois la convergence assurée.

En conclusion, on peut donc obtenir le régime stationnaire à surface libre (ou non-linéaire) à partir d'un algorithme transitoire dont le schéma d'intégration dans le temps est totalement implicite contrairement au cas semi-implicite du type Galerkin.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Consolidation des sols saturés

ABELEV, M. YU. (1973) Construction d'ouvrages sur les sols mous saturés. Traduit du russe par J. P. Magnan. Editions Technique et Documentation, Paris, 1977, 372p.

BABCHIA, M.Z. (1984) Analyse numérique du comportement des massifs de sols argileux. Thèse de docteur-ingénieur. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 118p.

BABCHIA, M.Z., MAGNAN, J.P. (1986) Analyse numérique du comportement des massifs de sols argileux partiellement saturés. Laboratoire central des Ponts et Chaussées, Paris, Rapport de recherche LPC n°140.

BELKEZIZ, A., MAGNAN, J.P. (1982) Analyse numérique de la consolidation des sols élastoplastiques. Traitement par la méthode des éléments finis et application au remblai expérimental B de Cubzac-les-Ponts. Laboratoire central des Ponts et Chaussées, Paris, Rapport de recherche LPC n°115, 155p.

BELKEZIZ, A. (1980) Etude par la méthode des éléments finis des problèmes de consolidation des sols fins. Application au remblai expérimental B de Cubzac-les-Ponts. Thèse de docteur-ingénieur. Université Pierre et Marie Curie, Paris VI.

BIOT, M.A. (1941) General theory of three dimensional consolidation, J. of Applied phys., vol. 12, pp. 155-164 et 426-430.

BJERRUM, L. (1972) Embankments on soft ground-General Report. Proc. ASCE Specialty Conference on earth-supported structures, Purdue University, Lafayette, Indiana, USA, vol. 2, pp. 1-52.

BOUCHARD, R., TAVENAS, F., LEROUÉIL, S. (1982) Méthode de calcul du tassement des remblais sur fondation argileuse. Université Laval, Québec, Faculté des sciences et de Génie, Rapport GCS 82.05, avril 1982, 133p.

BOURGES, F. (1970) Remblais sur sols compressibles. Synthèse

des recherches effectuées dans les Laboratoires des Ponts et Chaussées. Laboratoire central des Ponts et Chaussées, Paris, Rapport de recherche LPC n°10.

BOURGES, F., MIEUSSENS, C. (1979) Déplacements latéraux à proximité des remblais sur sols compressibles. Méthode de prévision, Bulletin de liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, 101, pp. 73-100.

BURLAND, J.B. (1967) Deformation of soft clay, Ph. D. Thesis Cambridge University.

BURLAND, J.B. (1972) A Method of estimating the pore pressures and displacements beneath embankments on soft natural clay deposits, Proc. Roscoe Memorial Symposium, FOULIS, Henley-on-Thames, Oxfordshire, R.U., pp. 506-536.

CHRISTIAN, J.T. (1968) Undrained stress distribution by numerical methods, Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., S.M.F.D., SM6, pp. 1333-1345.

CHRISTIAN, J.T., BOEHMER, J.W. (1970) Plane strain consolidation by finite elements. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., S.M.F.D., SM4, pp. 1436-1457.

CHRISTIAN, J.T., BOEHMER, J.W., MARTIN, P.P (1972) Consolidation of a layer under a strip load, Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., S.M.F.D., SM7, pp. 693-707.

CRYER, C.W. (1963) A comparison of three dimensional theories of Biot and Terzaghi, Quart. J. Mech. and Applied Math., vol. 16, pp. 401-412.

DANG, M.T., MAGNAN, J.P. (1977) Application des modèles élastoplastiques de l'Université de Cambridge au calcul d'un remblai expérimental sur sols mous. Laboratoire central des Ponts et Chaussées, Paris, Rapport de recherche LPC n°74.

GIBSON, R.E., SCHIFFMAN, R.L., PU, S.L. (1970) Plane strain and axially symmetric consolidation of a clay layer on a smooth impervious base. J. Mech. Appl. Maths., 23.

GUELLEC, P. (1976) ROSALIE, Système de calcul des massifs et des structures. Notice de présentation et d'utilisation en géomécanique et en mécanique des structures, LCPC, Paris, Rapport du Dpt de Géotechnique.

GURTIN, M.E. (1964) Variational principles for linear elastodynamics. Archives for Rational Mech. and Analysis, vol. 16, pp. 234-250.

HUMBERT, P. (1979) Traitement des phénomènes de diffusion transitoire et de consolidation par la méthode des éléments finis. Notes internes du LCPC, 8 pages.

HUMBERT, P., MAGNAN, J.P., BELKEZIZ, A., MOURATIDIS, A. (1982) Finite element analysis of soil consolidation, with special reference to the case of strain hardening elastoplastic stress-strain models. Proc., 4th International Conference on Numerical Models in Geomechanics, Edmonton, vol. 1, pp. 327-336.

HUMBERT, P., MAGNAN, J.P., MOURATIDIS, A. (1982) Finite element analysis of soil deformations with time under an experimental embankment at failure. Proc. International symposium on Numerical Models in Geomechanics, Zürich, pp. 601-609.

HWANG, C.T., MORGENSTERN, N.R., MURRAY D.W. (1971) On solutions of plane strain consolidation problems by finite element method. Can. Geotech. J., vol. 8, pp. 109-117.

HWANG, C.T., MORGENSTERN, N.R., MURRAY D.W. (1972) Application of the finite element method to consolidation problems. First Int. Conf. Num. Meth. Geomec., Vicksburg, pp. 739-760.

LEPIDAS, I. (1987) Fluage et consolidation des sols argileux. Modélisation numérique. Thèse de doctorat de l' Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

MAGNAN, J.P., DANG, M.T. (1977) Etude théorique et expérimentale de la compressibilité du fluide interstitiel dans un sol argileux presque saturé. Bulletin de liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, Paris, n° Spécial VI F, pp. 71-74.

MAGNAN, J.P., LEROUEIL, S., TAVENAS, F. (1985) Remblais sur argiles molles. Technique et Documentation (Lavoisier), Paris, 342p.

MAGNAN, J.P. (1984) Modélisation numérique du comportement des argiles molles naturelles. Thèse de Doctorat d'Etat es Sciences Physiques. Université Pierre et Marie Curie, Paris.

MAGNAN, J.P. (1986) Modélisation numérique du comportement des argiles molles naturelles. Laboratoire central des Ponts et

Chaussées, Paris, Rapport de recherche LPC n°141, 255p.

MAGNAN, J.P. (1984) Remblais sur sols compressibles. Presses de l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 253p.

MAGNAN, J.P., BRU, J.P., PILOT, G. (1987-a) Remblais d'essai pour un tracé routier sur sol mou. C.R., 9^e Congrès Européen de Mécanique des sols et des travaux des fondations, Dublin, vol. 1, pp. 71-74.

MAGNAN, J.P., MIEUSSENS C., QUEYROI, D. (1987-b) Ten years of observation and numerical analyses of Cubzac-les-Ponts test fill B. Proc., Int. Symp. on Geotechnical Engineering of Soft Soils, Mexico, vol. 1, pp. 257-264.

MANDEL, J. (1953) Consolidation des sols. Etude mathématique. Géotechnique, vol. 3, pp. 287-299.

MESTAT, PH. (1987) Consolidation des sols élastiques linéaires, Module CSOL de CESAR, Rapport interne, Div. GMS1, Laboratoire central des Ponts et Chaussées, Paris.

MOURATIDIS, A. (1982) Modèle élastoplastique anisotrope avec écrouissage pour le calcul des ouvrages sur sols compressibles. Thèse de docteur-ingénieur. Université Pierre et Marie Curie, Paris.

MOURATIDIS, A., MAGNAN, J.P. (1983) Un modèle élastoplastique anisotrope avec écrouissage pour le calcul des ouvrages sur sols compressibles. Laboratoire central des Ponts et Chaussées, Paris, Rapport de recherche LPC n°121, 124p.

NICKEL, R.E., SACKMAN J.L. (1968) Variational principles for linear coupled thermoelasticity, Quart. App. Math., vol. 26, pp. 11-26.

RENDULIC, I.L. (1936) Relation between void ratio and effective principal stresses for a remoulded silty clay. Proc. 1st Intern. Conf. on Soil Mech., Cambridge, Mass., USA, vol. 1, pp. 186-191.

ROSCOE, K.H. (1970) The influence of strains in soil mechanics. 6th Rankine Lecture, Géotechnique, vol. 20, n°2, pp.129-170.

ROSCOE, K.H., SCHOFIELD, A.N., THURAIRAJAH, A. (1963) Yielding of clays in states than critical, Géotechnique, vol. 13, n°3, pp. 22-53.

SANDHU, R.S., WILSON, E.L. (1969) Finite element analysis of seepage in elastic media, J. Eng. Mech. Div., Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., E.M. 3, pp. 641-652.

SANDHU, R.S. (1976) Variational principles for finite element analysis of consolidation. Second Int. Conf. Num. Meth. Geomech., Blacksburg, pp. 20-41.

SCHIFFMAN, R.L., CHEN, A.T.F., JORDAN, J.C. (1969) An analysis of consolidation theories. J. S.M.F.D., Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., vol. 95, n° SMI, pp. 285-311.

TAVENAS, F., LEROUEIL, S. (1979) Les concepts d'état limite et d'état critique et leurs applications pratiques à l'étude des argiles. Revue française de Géotechnique, n°6, pp. 27-49.

TAVENAS, F., LEROUEIL, S. (1980) The behaviour of Embankments on clay foundations. Canadian Geotechnical journal, vol. 17, n°2, pp. 236-260.

YOKOO, Y., YAMAGATA, K., NAGAOKA, H. (1971) Finite element method applied to Biot's consolidation theory. Soils and Foundations. JAP. Soc. S.M. F. Eng., vol. 11, n°1, pp. 29-45.

ZIENKIEWICZ, O.C., NAYLOR, D.J. (1971) Discussion on the adaptation of critical state soil mechanics theory for use in finite elements. Proc., ROSCOE Mem. Symp., FOULSI, pp.537-547.

2. Consolidation des sols non-saturés

BARDEN, L. (1965) Consolidation of compacted and unsaturated clays, Géotechnique, 15(3), pp. 267-286.

BISHOP, A.W., BLIGHT, G.E. (1963) Some aspects of effective stress in saturated and unsaturated soils, Géotechnique, n°3, pp. 177-197.

COLEMAN, J.D. (1962) Stress strain relations for partly saturated soil. Correspondence, Géotechnique, vol. 12, n°4, pp. 348-350.

DELAGE, P. Aspects du comportement des sols non-saturés. Cours du DEA MAC, CERMES-ENPC.

ESCARIO, V., SAEZ, J. (1986) The shear strength of partly saturated soils, *Géotechnique* 36(3), pp. 453-456.

FREDLUND, D.G., MORGENSTERN, N.R. (1977) Stress state variables for unsaturated soils. *J. of Soil Mech. and Foundation Eng.*, ASCE, GT5, pp. 447-466.

FREDLUND, D.G., MORGENSTERN, N.R., WIDGER, A. (1978) Shear strength of unsaturated soils, *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 15, n°3, pp. 313-321.

FREDLUND, D.G., HASAN, J.V. (1979) One dimensional consolidation theory : unsaturated soils, *Canadian Geotechnical Journal*, vol.16, pp. 521-531.

JENNINGS, J.E.B., BURLAND, J.B. (1962) Limitations to the use of effective stresses in partly saturated soils, *Géotechnique*, vol. 12, n°2, pp. 125-144.

LLORET, A., ALONSO, E.E. (1980) Consolidation of unsaturated soils including swelling and collapse behaviour, *Géotechnique*, vol. 30, n°4, pp.449-477.

MATYAS, E.L., RADHAKRISHNA, H.S. (1968) Volume change characteristics of partially saturated soils, *Géotechnique*, vol. 18, n°4, pp. 432-448.

YOSHIMI, Y., OSTERBERG, J.O. (1963) Compression of partially saturated cohesive soils, *J. Soil Mech. Fdns. Div. Am. Soc. Civ. Eng.* 89, n°SM4, pp. 1-24.

3. Ecoulements à surface libre en milieu poreux non-saturé

BAIOCCHI, C., COMINCIOLI, V., MAGNENES, E., POZZI, G.A. (1972) Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media. Existence and Uniqueness theorems. *Ann. Mat. Pura. Appl.*, (IV), vol XCVII, pp. 1-82.

BAIOCCHI C., COMINCIOLI V., GUERRI L., VOLPI G. (1973) Free

boundary problems in the theory of fluid flow through porous media. A numerical approach, *Calcolo*, vol. X, fasc. 1.

BROWZIN, B.S. (1964) Nouvelle méthode d'application de quelques fonctions de la variable complexe aux calculs des sous-pressions agissant sous les ouvrages de retenue. *La Houille Blanche*, vol. 7, pp. 803-814.

CASAGRANDE, A. (1961) Control of seepage through foundations and abutments of dams. *Géotechnique*.

DAGAN, G. (1967) Linearized solutions of free surface groundwater flow with uniform recharge, *J. Geophys. Res.*, 72, pp. 1183-1193.

DELFAUT, A., JARDIN, J., BALDIT, R., (1984) Constatations sur la digue de Maurepas-Courance. *Bulletin de liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, Paris, n°131, Mai-Juin, pp. 7-22.

DICKER, D., SERVIAN, W.A. (1965) Transient flow through porous medium. *Journal of Geophysical Research*, 70, pp. 5043-5054.

FREEZE, R.A. (1967) The continuity between groundwater flow systems and flow in the unsaturated zone. *Soil Moisture Proceedings of Hydrology Symposium n°6*, Saskatchewan, pp. 205-232.

FREEZE, R.A. (1969) The mechanism of natural groundwater recharge and discharge. *Water Resources Research*, vol. 5, pp. 153-171.

FREEZE, R.A. (1971) Influence of the unsaturated flow domain on seepage through the earth dams. *Water Resources Research*, vol. 7, n°4, pp. 929-941.

FREMOND, M., NICOLAS, P. (1990) Macroscopic thermodynamics of porous media. *Continuum Mech. Thermodyn.* 2(1990), pp. 119-139.

GARDNER R. (1956) Calculation of capillary conductivity from pressure plate out flow data. *Proceedings of the Soil Science Society of America*, 20, pp. 317-320.

GUEVEL, P. (1960) A propos des infiltrations au travers des digues en terre. *C. R. Acad. Sc.*, pp. 1714-1716.

HAVERKAMP, R., VAUCLIN, M., VACHAUD, G. (1979) Résolution numérique d'une équation de diffusion non-linéaire. Presses universitaires de Grenoble, 183p.

HUMBERT, P. (1984) Application de la méthode des éléments finis aux écoulements en milieu poreux. Bulletin de liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, Paris, n°132, 17p.

JENG, G., WEXLER, A. (1977) Isoparametric, finite element, variational solution of integral equations for three-dimensional fields. Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 11, pp. 1455-1471.

JOSSEAUME, H., MAHDAVI, C., JARDIN, R. (1984) Interprétation des mesures de pression interstitielle dans la digue de Maurepas-Courance. Bulletin de liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, Paris, n°131, Mai-Juin, pp. 23-28.

KASSIF, J.E.B., LIVENEH, M., WISEMAN, G. (1970) Pavements on expansive clays, Jerusalem Academic Press, 218p.

KHANJI, D., VAUCLIN, M., VACHAUD, G. (1974) Infiltration non permanente et bidimensionnelle dans une tranche de sol non-saturée. Analyse numérique et résultats expérimentaux. Compte rendu à l'Académie des Sciences, Paris, t. 278, pp. 381-384.

KHANJI, D. (1975) Etude de la recharge de nappes à surface libre par infiltration. Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Grenoble, 252p.

LUC, J.P. (1978) Caractérisation hydrique des sols. Utilisation des mesures d'humidité et de charge in situ. Comparaison avec les méthodes de Laboratoire. Thèse, Université de Montpellier.

MALLET, C., PACQUANT, J. (1951) Les barrages en terre. Editions Eyrolles, Paris.

MUSKAT, M. (1946) The flow of homogeneous fluids through porous media. J.W. Edwards, Ann. Arbor. Michigan.

NEUMAN, S.P. (1973) Saturated-unsaturated seepage by finite elements. J. Hydraul. Div. Amer. Soc. Civil Eng., 99(HY12), pp. 2233-2250.

PHILIP, J.R. (1957) The theory of infiltration I. Soil Sci., vol. 83, pp.345-357.

PIAU, J.M (1989) Rapport interne sur NSAT. Laboratoire central des Ponts et Chaussées, Paris.

RICHARDS, L.A. (1931) Capillary conduction of liquids through porous medium. Physics 1, pp. 318-333.

RUBIN, J. (1968) Theoretical analysis of two-dimensional, transient flow of water in unsaturated and partly unsaturated soils. Soil Sci. Soc. Am. Proc. Vol. 32, n°5, pp. 607-615.

SCHNEEBELI, G. (1987) Hydraulique souterraine. Editions Eyrolles, Paris, 362p.

TODD, D.K. (1957) Groundwater hydrology. John Wiley and Sons, New-York.

TOUMA, J., VAUCLIN, M. (1986) Experimental and numerical analysis of two-phase infiltration in a partially saturated soil, Transport in porous media, 1, pp. 27-55.

VACHAUD, G. (1968) Contribution à l'étude des problèmes d'écoulement en milieu poreux non-saturé. Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques. Université de Grenoble, 159p.

VACHAUD, G., VAUCLIN, M., KHANJI, D. (1976) Etude expérimentale et numérique du drainage et de la recharge des nappes à surface libre, avec prise en compte de la zone non-saturée. Journal de Mécanique, vol. 15, n°2, pp. 307-347.

VAUCLIN, M. (1975) Etude expérimentale et numérique du drainage de nappes à surface libre. Influence de la zone non-saturée. Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques. Université de Grenoble, 196p.

YOUNGS, E.G. (1960) The drainage of liquids from porous materials. Journal of Geophys. Research 5, pp. 4025-4030.

RESUME

Dans le cadre des grands aménagements hydrauliques ou hydroélectriques, d'irrigation ou de contrôle de crues, on prévoit de construire un nombre croissant de digues et de barrages en terre dans des zones de sols compressibles.

Afin d'estimer au mieux les tassements et la stabilité de ces ouvrages, on décrit un modèle théorique de consolidation à surface libre des sols anisotropes tenant compte des trois principales formes d'emmagasinement hydraulique :

- la compressibilité du squelette du sol,
- la compressibilité du fluide,
- la variation de la cote de la surface libre.

Dans un premier temps, le sol est supposé élastique et la non-linéarité est essentiellement hydraulique. L'application du principe des travaux virtuels et de la méthode des éléments finis à ce problème le ramène à la résolution d'un système non-linéaire symétrique différentiel du premier ordre. Le traitement numérique de ce système conduit, d'une part, à l'adaptation des éléments finis de consolidation bidimensionnelle des sols saturés, existants dans le code de calculs par éléments finis CESAR du LCPC, aux calculs hydrauliques de diffusion non-linéaire et, d'autre part, à la mise au point d'un algorithme transitoire itératif. La programmation de cet algorithme basé sur l'utilisation de la méthode du point fixe est alors effectuée dans un premier module de calcul par éléments finis du code précédent.

Dans un deuxième temps, le sol est supposé élastoplastique et la non-linéarité, par conséquent, devient à la fois hydraulique et mécanique. La résolution de ce problème a nécessité d'abord l'extension des propriétés numériques des éléments finis, précédemment mis au point, aux calculs mécaniques d'élastoplasticité puis ensuite la description d'un algorithme transitoire itératif combinant la méthode des rigidités variables pour le traitement de la non-linéarité hydraulique (surface libre) et la méthode des contraintes initiales pour le traitement de la non-linéarité mécanique (élastoplasticité). L'implémentation de cet algorithme dans un deuxième module de calcul par éléments finis du code CESAR prévoit les principaux modèles élastoplastiques des sols et particulièrement ceux des sols mous.

La modélisation effectuée et sa programmation, qui tient compte, entre autres, du phasage de la construction du remblai, du phasage de la mise en eau du barrage et des conditions aux limites de diverses natures telle que le suintement, par exemple, sont testées sur un ouvrage réel. La confrontation des résultats numériques et expérimentaux sur cet ouvrage a montré qu'à partir de cette approche de couplage écoulement-déformations, on obtient des résultats encourageants tant du point de vue mécanique que du point de vue hydraulique.