



HAL
open science

**Étude par la méthode des éléments finis du
comportement élastoplastique de sols dilatants.
Application aux pieux sous charge axiale**

Shahram Tadjbakhsh

► **To cite this version:**

Shahram Tadjbakhsh. Étude par la méthode des éléments finis du comportement élastoplastique de sols dilatants. Application aux pieux sous charge axiale. Géologie appliquée. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1984. Français. NNT: . tel-00529483

HAL Id: tel-00529483

<https://pastel.hal.science/tel-00529483>

Submitted on 25 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée

A L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

pour obtenir le titre de

DOCTEUR-INGÉNIEUR EN GÉNIE CIVIL

par

Monsieur Shahram TADJBAKHS

SUJET DE LA THÈSE

ÉTUDE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS
DU COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DE SOLS DILATANTS.
APPLICATION AUX PIEUX SOUS CHARGE AXIALE

soutenue le 29 mars 1984

devant le Jury composé de :

MM. F. SCHLOSSER	<i>Président</i>
J.-C. ROBINET	<i>Rapporteur</i>
F. BAGUELIN	} <i>Examineurs</i>
R. FRANK	
J. HURTADO	



A la mémoire de ma mère,

A mon père,

Le 1er Mars 1984

70

REMERCIEMENTS

Que toutes les personnes qui m'ont apporté leur aide et leur soutien pour mener à bien ce travail, trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens à remercier en particulier :

L'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées qui m'a accueilli comme élève-chercheur, et notamment Monsieur B. HALPHEN, responsable de formation.

Le Laboratoire central des Ponts et Chaussées et son Directeur, Monsieur J.-C. PARRIAUD, qui m'ont donné tous les moyens nécessaires au bon déroulement de cette recherche.

Monsieur F. SCHLOSSER, Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, qui a bien voulu examiner ce travail et présider le jury. Les discussions que j'ai eues avec lui m'ont été particulièrement fructueuses pour clarifier les résultats obtenus.

Monsieur J.-C. ROBINET, Professeur à l'Université de Lille 1, qui a bien voulu examiner ce travail et a accepté la charge de rapporteur.

Monsieur F. BAGUELIN, Directeur Technique du L.C.P.C., qui a bien voulu examiner ce travail et participer au jury.

Monsieur R. FRANK, Chef de la Section des Fondations, mon Directeur de thèse, qui a montré tant d'intérêt à mon travail. Ses conseils permanents et sa confiance m'ont rendu la tâche agréable. De nos rapports de travail a su naître l'amitié.

Monsieur J. HURTADO, qui a bien voulu examiner ce travail et participer au jury.

Monsieur G. PILOT, Chef de la Division de Géotechnique - Mécanique des Sols 1 - du L.C.P.C., mon tuteur de thèse, et Monsieur S. AMAR, son adjoint, qui m'ont accueilli dans leur division et qui ont suivi avec intérêt cette recherche.

Monsieur P. HUMBERT, Chef de la Section de Modèles Numériques, et tous les membres de sa section, qui m'ont grandement aidé pour tous les problèmes d'analyse numérique.

Mademoiselle P. TARDIVON, Chargée Administrative à l'E.N.P.C., pour l'aide qu'elle m'a apportée tout au long de ce travail.

Tous les membres de la Section des Fondations, en particulier Monsieur J.-C. ROMAGNY, qui m'a beaucoup aidé pour la réalisation des figures et les passages fastidieux de calculs des pieux, et Madame GUILLEMIN pour toute l'aide qu'elle m'a apportée, notamment pour la frappe.

Mademoiselle QUINTIN, qui a assuré avec soin la dactylographie et la mise en pages de la majeure partie de ce texte.

Monsieur R. NAHRA, pour l'aide qu'il m'a apportée au cours de la rédaction, sans oublier les autres amis thésards qui ont rendu mon passage au L.C.P.C. très agréable.

Ma famille, pour son soutien tout au long de mes études en France.

Ma femme, Pardis, pour ses sacrifices et pour l'aide morale qu'elle m'a apportée durant la préparation de cette thèse.

SOMMAIRE

	Pages
Résumé	
Introduction générale	1
CHAPITRE I. ELASTOPLASTICITE	3
I.1. Généralités	3
I.2. Déformations réversibles et irréversibles	3
I.3. Surface de charge	3
I.4. Cas de charge ou de décharge	4
I.5. Potentiel plastique, règles d'écoulement	5
I.6. Multiplicateur de plasticité λ ; module d'écrouissage H	6
I.6.1. Les cas particuliers de λ	6
I.6.2. Point d'intersection de plusieurs surfaces de charge	7
I.7. Ecrouissage	8
I.7.1. Ecrouissage isotrope	8
I.7.2. Ecrouissage cinématique	9
I.7.3. Ecrouissage de translation et dilatation	9
I.8. Déformations totales ; matrice de rigidité élastoplastique	9
CHAPITRE II. APERCU SUR LE COMPORTEMENT DES SABLES	11
II.1. Concepts de base	11
II.1.1. Concept de l'état critique (Schofield et Wroth, 1968)	11
II.1.2. Concept de l'état caractéristique	12
II.1.3. Théorie de contrainte-dilatance de Rowe (1962-1971)	12
II.1.4. Notion de surface de charge	13
II.1.5. Instabilité du matériau	16
II.2. Quelques caractéristiques des modèles élastoplastiques pour les sables	17
II.3. Choix du modèle (Barbas et Frank, 1982)	19
CHAPITRE III. MODELE DE NOVA ET AL.	21
III.1. Historique	21
III.2. Hypothèses du modèle (Nova et Hueckel, 1982)	21
III.3. Déformations élastiques	22
III.4. Equations de la surface de charge	22
III.5. Potentiel plastique	22
III.6. Rupture	24
III.7. Paramètres du modèle	26
III.8. Remarques sur le modèle de Nova et al.	26

CHAPITRE IV.	MODELE DE VERMEER	30
	IV.1. Historique	30
	IV.2. Hypothèses du modèle (Vermeer, 1980, Vermeer, 1982)	31
	IV.3. Déformations élastiques	31
	IV.4. Rupture	32
	IV.5. Equations des surfaces de charge	32
	IV.5.1. Surface de charge de cisaillement	32
	IV.5.2. Surface de charge de consolidation	34
	IV.6. Potentiels plastiques	34
	IV.6.1. Potentiel plastique correspondant à la surface de charge de cisaillement ; dilatance	34
	IV.6.2. Potentiel plastique simplifié	36
	IV.6.3. Deuxième potentiel plastique	36
	IV.7. Déformation plane	36
	IV.7.1. Surfaces de charge	37
	IV.7.2. Potentiels plastiques ; dilatance	37
	IV.7.3. Rupture	37
	IV.8. Paramètres du modèle	37
	IV.9. Remarques sur le modèle de Vermeer	38
CHAPITRE V.	INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	40
	V.1. Introduction	40
	V.2. Principe des travaux virtuels	40
	V.3. Méthode des éléments finis (Dhatt et Touzot, 1981)	41
	V.3.1. Définition	41
	V.3.2. Discrétisation spatiale	41
CHAPITRE VI.	RESOLUTION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS DES PROBLEMES D'ELASTOPLASTICITE	43
	VI.1. Introduction	43
	VI.2. Schémas d'intégration numérique	43
	VI.2.1. Schéma du module tangent	43
	VI.2.2. Schéma de retour du module tangent	46
	VI.2.3. Schéma de retour du module tangent modifié	47
	VI.2.4. Schéma du module tangent simplifié	48
	VI.2.5. Choix du schéma	50
	VI.3. Convergence pour un modèle avec deux surfaces de charge	50
	VI.4. Méthode de force ; méthode de rigidité. Comparaison des deux méthodes	52
	VI.5. Méthode utilisée dans "ROSALIE"	53
CHAPITRE VII.	PROGRAMMATION DES MODELES CHOISIS	54
	VII.1. Introduction au programme ROSALIE	54
	VII.2. Structure du Groupe 5 ; modélisation des problèmes de frottement et décollement dans le programme ROSALIE	54
	VII.2.1. Lois de comportement de la discontinuité	55
	VII.2.2. Eléments de contact et ressorts	57
	VII.2.3. Critères et lois de contact	58
	VII.3. Problèmes de déformation plane et de symétrie de révolution	59
	VII.3.1. Symétrie de révolution	59
	VII.3.2. Déformation plane	59

VII.4.	Calcul des paramètres nécessaires	62
VII.4.1.	Modèle de Nova et al.	63
VII.4.1.1.	Expressions des dérivées de la surface de charge	63
VII.4.1.2.	Expressions des dérivées du potentiel plastique	64
VII.4.1.3.	Expression du module d'écroutissage ; variation du paramètre d'écroutissage	64
VII.4.2.	Modèle de Vermeer	66
VII.4.2.1.	Cas tridimensionnel	66
VII.4.2.1.1.	Expressions des dérivées des surfaces de charge	66
VII.4.2.1.2.	Expressions des dérivées des potentiels plastiques	67
VII.4.2.1.3.	Expressions des modules d'écroutissage ; variation des paramètres d'écroutissage	68
VII.4.2.2.	Cas bidimensionnel	68
VII.4.2.2.1.	Expressions des dérivées des surfaces de charge	68
VII.4.2.2.2.	Expressions des dérivées des potentiels plastiques	69
VII.4.2.2.3.	Expressions des modules d'écroutissage ; variation des paramètres d'écroutissage	69
VII.5.	Sous-programmes modifiés et créés dans ROSALIE	69
VII.5.1.	Sous-programmes modifiés	69
VII.5.2.	Sous-programmes créés	70
VII.5.2.1.	Indicateurs principaux ; nouveaux tableaux	70
VII.5.2.2.	Calcul des déformations	72
VII.5.2.2.1.	Déformations totales	72
VII.5.2.2.2.	Déformations élastiques	73
VII.5.2.2.3.	Déformations plastiques	73
VII.5.2.3.	Définition des paramètres d'écroutissage pour la surface de charge initiale et évolution des paramètres d'écroutissage	74
VII.5.2.4.	Critère de convergence dans les modèles elastoplastiques	74
VII.5.2.5.	Cas des modèles de Nova et al. et de Vermeer	76
VII.6	Programmation pour le cas d'un champ de contraintes imposé uniforme	76
VII.6.1.	Programme d'intégration numérique directe pour le cas d'un essai triaxial (méthode analytique)	76
VII.6.2.	Programme avec itérations de contraintes initiales (méthode de forces pour un point)	83
VII.7	Réponse "triaxiale" des modèles. Tests numériques	83
VII.7.1.	Tests sur les déformations calculées	83
VII.7.1.1.	Déformations plastiques	83
VII.7.1.2.	Déformations élastiques	86
VII.7.1.3.	Comparaison aux résultats expérimentaux	88
VII.7.2.	Tests des résultats du programme ROSALIE	88

VII.7.3.	Influence des paramètres intervenant dans le calcul	89
VII.7.3.1.	Influence des paramètres d'élasticité sur les déformations plastiques	89
VII.7.3.2.	Influence de la taille de l'incrément	90
VII.7.3.3.	Influence des itérations internes	92
VII.7.3.4.	Influence de certains paramètres particuliers du modèle de Nova et al.	94
VII.8.	Comparaison de la dilataance pour les modèles de Nova et al. et de Vermeer	96
CHAPITRE VIII.	APPLICATION AU COMPORTEMENT DES PIEUX SOUS CHARGE AXIALE	99
VIII.1.	Introduction	99
VIII.2.	Résultats antérieurs (Frank, 1984)	99
VIII.2.1.	Milieu élastique ; milieu linéaire dilatant (Frank, 1974)	99
VIII.2.2.	Milieu élastique - parfaitement plastique (Barbas et Frank, 1982)	101
VIII.3.	Maillage utilisé	102
VIII.4.	Calculs effectués	102
VIII.5.	Résultats obtenus	104
VIII.5.1.	Résultats globaux	104
VIII.5.1.1.	Charge en fonction de l'enfoncement	104
VIII.5.1.2.	Maillage déformé	104
VIII.5.1.3.	Zones plastiques	108
VIII.5.1.4.	Courbes des isovaleurs de q/P	108
VIII.5.2.	Comportement à l'interface pieu-sol	108
VIII.5.2.1.	Déformations volumiques	108
VIII.5.2.2.	Contrainte radiale (σ_r)	112
VIII.5.3.	Comportement du sol à mi-profondeur du pieu	114
VIII.5.3.1.	Cisaillement τ_{rz} en fonction de la distorsion γ_{rz}	114
VIII.5.3.2.	Déplacements verticaux	115
VIII.5.3.3.	Déformations volumiques	115
VIII.5.3.4.	Contraintes en $r = r_0$	118
VIII.5.3.5.	Distribution des contraintes en fonction de la distance au pieu	118
VIII.5.3.6.	Cercles de Mohr	120
VIII.6.	Conclusion	120
	Conclusion générale	124
	Annexe - Notations et définitions	125
	Références bibliographiques	127

S. TADJBAKSH :

"Etude par la méthode des éléments finis du comportement élastoplastique de sols dilatants. Application aux pieux sous charge axiale"

RÉSUMÉ DE LA THÈSE

Des modèles élastoplastiques écrouissables incorporant des lois de dilatance réalistes ont récemment été mis au point pour décrire le comportement des sables.

La capacité portante en frottement des fondations sous charge axiale dépend largement de la valeur des contraintes normales au fût après mise en place et chargement ; ces contraintes peuvent, a priori, varier fortement avec la dilatance.

Les études théoriques dans ce domaine se sont limitées jusqu'à présent aux cas de milieux élastiques et de milieux dilatants modélisés d'une manière relativement simple : milieu linéaire dilatant ou milieu élastique-parfaitement plastique.

Ces comportements ne correspondent qu'imparfaitement au comportement réel des sols dilatants. Dans le travail présenté ici, on a étudié les modèles élastoplastiques écrouissables de Nova et al. à une seule surface de charge et de Vermeer à deux surfaces de charge. Ces modèles sont capables de représenter les principales caractéristiques des matériaux granulaires dilatants, au moins quand ils sont soumis aux trajets de chargement monotones des essais classiques de laboratoire.

Ces deux modèles ont été programmés dans le code d'éléments finis ROSALIE et leurs réponses dans le cas d'un essai triaxial de compression ont été examinées. Ils ont ensuite été appliqués aux problèmes des pieux sous charge axiale.

Les résultats des calculs effectués ont mis en évidence l'importance de la prise en compte du glissement avec frottement à l'interface sol-pieu pour tous les modèles de sols utilisés. Le comportement du sol, qui est identique pour les modèles élastique et élastique-parfaitement plastique, est différent pour les modèles élastoplastiques écrouissables, les déplacements axiaux étant plus élevés dans ces derniers cas. Une certaine augmentation de volume élastique a, par ailleurs, été relevée au voisinage du pieu pour tous les calculs.

La dilatance plastique existe dans tous les calculs élastoplastiques mais elle se manifeste généralement assez tard, a peu près en même temps que le glissement relatif sol-pieu. L'effet conjugué de la dilatance plastique et des augmentations de volumes élastiques induit en moyenne une certaine diminution de la contrainte radiale σ_r sur le fût par rapport au calcul élastique.

Au vu de ces résultats, et pour les modèles utilisés, il semble donc que la dilatance des sols granulaires n'accroisse pas la capacité portante en frottement, tout du moins par augmentation de la contrainte radiale.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Pour suivre le comportement du sol tout le long de sa déformation, on dispose de modèles de plus en plus complexes qui simulent son comportement réel mieux que les modèles élastiques ou plastiques classiquement utilisés en mécanique des sols.

Ces modèles se développent grâce aux possibilités offertes par les méthodes numériques, telle que la méthode des éléments finis, ainsi qu'au développement des ordinateurs de grande capacité.

En ce qui concerne les fondations, sous charge axiale, leur capacité portante en frottement dépend largement de la valeur des contraintes normales au fût après mise en place et chargement. En milieu dilatant (sables principalement), ces contraintes peuvent, a priori, fortement varier par rapport à l'état initial, sous l'effet des variations de volume apportées par le chargement.

Les études théoriques entreprises dans ce domaine se sont limitées, jusqu'à présent, aux cas de milieux élastiques et de milieux dilatants modélisés d'une manière relativement simpliste.

Des modèles élastoplastiques, incorporant des lois de dilatance plus réalistes, ont récemment été mis au point.

Les buts essentiels de cette étude sont, d'une part, d'étudier ces modèles, d'autre part, de mettre au point un algorithme de résolution par la méthode numérique des éléments finis, et d'étudier l'influence de la dilatance sur le comportement des fondations profondes sous charge axiale.

Après un court rappel de la théorie de l'élastoplasticité (Chap. I), on étudie brièvement le comportement des sables et des modèles élastoplastiques en général (Chap. II). Ensuite, les deux modèles élastoplastiques avec écrouissage sont étudiés en détail : modèle de Nova et al. (Chap. III) et modèle de Vermeer (Chap. IV).

En ce qui concerne la méthode des éléments finis (brièvement décrite au chapitre V), on étudie différents algorithmes de résolution des lois de comportement non linéaires (modèles élastoplastiques avec écrouissage) (Chap. VI).

La programmation, dans le code d'éléments finis ROSALIE, des modèles de Nova et al. et de Vermeer, ainsi que les tests de programmation sont présentés au chapitre VII. Dans ce chapitre, on décrit également les éléments spéciaux de contact de ROSALIE permettant de simuler le glissement avec frottement ainsi que le décollement pour les problèmes d'interaction sol-structure.

Enfin, les deux modèles retenus sont appliqués à l'étude du comportement d'un pieu sous charge axiale avec prise en compte du glissement avec frottement à l'interface sol-

pieu (Chap. VIII). On compare les résultats obtenus aux résultats en milieu élastique et en milieu élastique parfaitement plastique.

Chapitre I

ÉLASTOPLASTICITÉ

I.1 - Généralité

Pour pouvoir étudier les modèles élastoplastiques et les programmer par la méthode des éléments finis, nous présenterons brièvement dans les paragraphes suivants des généralités sur l'élastoplasticité.

Seuls sont soulignés les éléments qui nous serviront dans les chapitres suivants.

Des études plus rigoureuses et plus détaillées sont présentées dans Mandel (1966), Salençon et Halphen (1980), Salençon (1974), et Katchanov (1975), par exemple.

I.2 - Déformations réversibles et irréversibles

Considérons une sollicitation uniaxiale sur un corps ayant un comportement élastoplastique écrouissable (Fig. I.1). L'effet du temps est supposé négligeable.

Le comportement du matériau jusqu'au point A est élastique linéaire. En déchargeant, on revient au point de départ 0; toutes les déformations sont réversibles. En continuant le chargement jusqu'au point B et en déchargeant des déformations irréversibles (dites déformations plastiques ϵ^P) apparaissent. Dans ce cas la déformation totale est

la somme des déformations élastique ϵ^e et plastique ϵ^P ($\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^P$).

Le point A (le point au-delà duquel on a des déformations plastiques) est appelé le seuil de plasticité initial. Le point B est appelé le seuil de plasticité actuel.

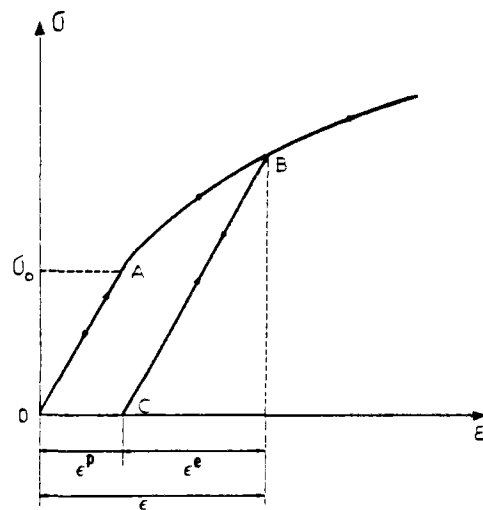


Fig. 1.1 - Déformations réversible et irréversible.

I.3 - Surface de charge

Dans le cas de la sollicitation multiaxiale, le seuil de plasticité est remplacé par une fonction scalaire F . D'une façon générale on peut l'écrire sous la forme :

$$F(\underline{\sigma}, R) = 0 \quad (I.1)$$

avec :

$\underline{\sigma}$: tenseur des contraintes,

R : l'ensemble des paramètres "cachés" ou "d'écrouissage".

Les paramètres d'écrouissage sont fonction des déformations plastiques.

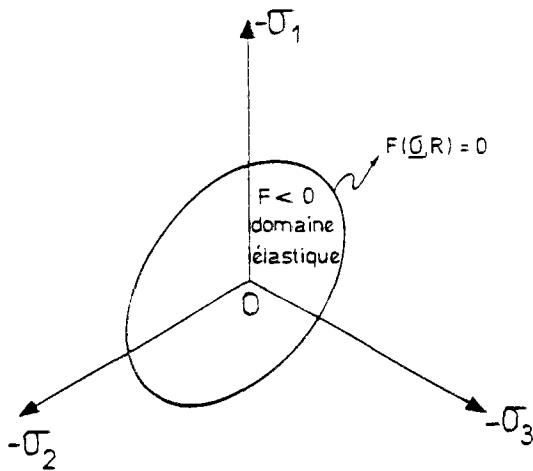


Fig. 1.2 - Surface de charge.

La fonction $F = 0$ est représentée, dans l'espace des contraintes, par une surface dite surface de charge. F est appelée fonction de charge ou encore fonction d'écoulement.

Pour $F < 0$ on est dans le domaine d'élasticité et les déformations sont uniquement élastiques.

Pour $F = 0$, les déformations élastiques peuvent être éventuellement accompagnées de déformations plastiques.

$F > 0$ est un état de contraintes physiquement impossible.

Quand l'expression de la surface de charge ne contient pas de paramètres d'écrouissage, la plasticité est dite parfaite.

I.4 - Cas de charge ou de décharge

Pour un état de contrainte $\underline{\sigma}$ tel que $F(\underline{\sigma}, R) = 0$ on peut avoir deux cas possibles.

1er cas :

$$\begin{cases} F(\underline{\sigma}, R) = 0 & (I.2.a) \\ \text{et} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{F}_R = \frac{\partial F(\underline{\sigma}, R)}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \dot{\underline{\sigma}} < 0 & (I.2.b) \end{cases}$$

Ceci est le cas de la décharge, c'est-à-dire que $\dot{\underline{\sigma}}$ est dirigé vers l'intérieur du domaine d'élasticité actuel (Fig. I.3). Alors :

$$\dot{\underline{\varepsilon}} = \dot{\underline{\varepsilon}}^e$$

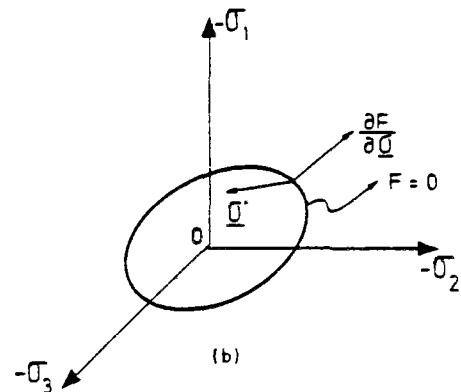
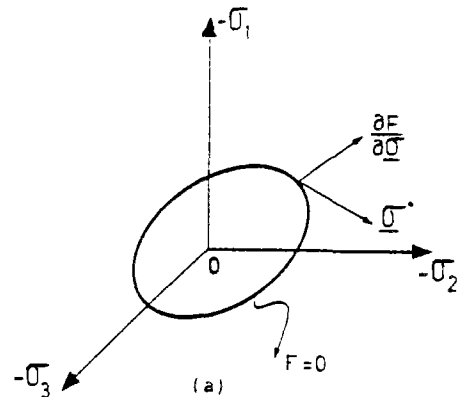


Fig. 1.3 - a) cas de charge, b) cas de décharge.

2ème cas :

$$\begin{cases} F(\underline{\sigma}, R) = 0 & (I.3.a) \\ \dot{F}(\underline{\sigma}, R) = 0 : \text{condition de} & (I.3.b) \\ \text{consistance ou équation de} & \\ \text{comptabilité} & \\ \dot{F}_R = \frac{\partial F}{\partial C} \dot{C} \geq 0 & (I.3.c) \end{cases}$$

Dans ce cas l'incrément de contrainte $\dot{\underline{\sigma}}$ est dirigé vers l'extérieur du domaine d'élasticité actuel, et il y a apparition de déformations plastiques. Pour un modèle écrouissable le domaine d'élasticité se déplace.

La vitesse des déformations est due d'une part à la vitesse des déformations élastiques et d'autre part à la vitesse des déformations plastiques.

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \dot{\underline{\epsilon}}^e + \dot{\underline{\epsilon}}^p \quad (I.4)$$

On remarque que le signe de F_R détermine le cas de charge ou de décharge et par conséquent l'existence de déformation plastique.

Quand $\frac{\partial F}{\partial C} \dot{C} = 0$, $\dot{\underline{\sigma}}$ se trouve dans le plan tangent à la surface de charge.

I.5 - Potentiel plastique, règle d'écoulement

Soit $\dot{\underline{\epsilon}}^p$ la vitesse de déformation plastique correspondant à un état de contrainte $\underline{\sigma}$; de façon générale, l'équation d'écoulement plastique ou "règle d'écoulement" peut être écrite sous la forme :

$$\dot{\underline{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G(\underline{\sigma}, R)}{\partial \underline{\sigma}}, \quad (I.5)$$

où

G est le potentiel plastique,

$\dot{\lambda} \geq 0$ est le multiplicateur de plasticité qui est un certain facteur scalaire.

$\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}$ définit les directions de déformations plastiques, celles-ci étant normales à la surface $G(\underline{\sigma}, R) = \text{cte}$. La figure (I.4) montre un exemple de la construction de la surface G à partir des directions des déformations plastiques (Palmer, 1966).

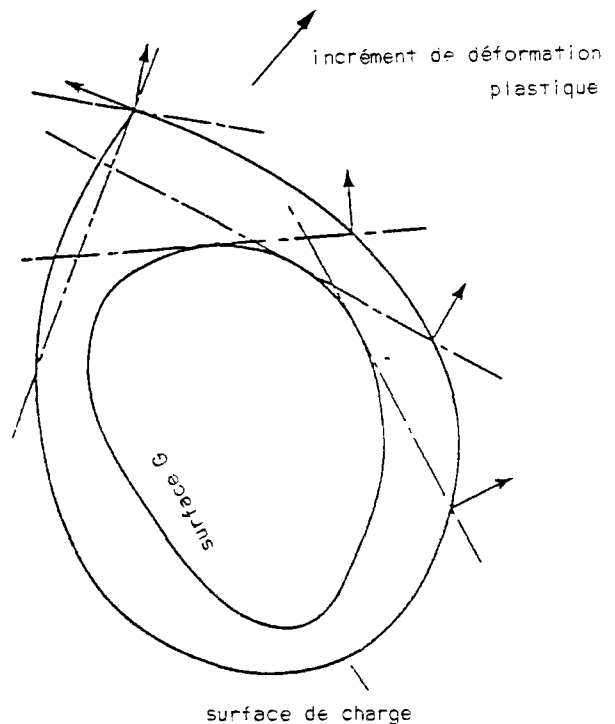


Fig. I.4 - Construction de la surface G (Palmer, 1966).

Le potentiel plastique est dit associé quand la surface de charge et le potentiel plastique sont définis par la même équation ($F = G$). On dit alors que le matériau satisfait la condition de normalité. Pour un matériau qui obéit au principe du travail maximal (Hill, 1950), la surface de charge est convexe, et les déformations plastiques sont dirigées suivant la normale extérieure à la surface de charge :

$$\dot{\underline{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}.$$

Pour les matériaux non standards, l'équation du potentiel plastique est différente de celle de la surface de charge et le potentiel plastique est dit non associé.

I.6 - Multiplicateur de plasticité $\dot{\lambda}$;
Module d'écroutissage H

L'équation de compatibilité (I.3.b) peut être détaillée de la manière suivante :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T \dot{\underline{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial R} \dot{R} = 0 \quad (I.6)$$

d'où :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T \dot{\underline{\sigma}} = - \frac{\partial F}{\partial R} \dot{R} \quad (I.7)$$

en posant :

$$\frac{\partial F}{\partial R} \dot{R} = - \dot{\lambda} H(\underline{\sigma}, R) \quad (I.8)$$

on obtient :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T \dot{\underline{\sigma}} \quad (I.9)$$

H est appelé le module d'écroutissage. $\dot{\lambda} > 0$ est le multiplicateur de plasticité.

$\dot{\lambda} = 0$ si $\dot{\underline{\sigma}}$ est contenu dans le plan tangent à la surface de charge (chargements neutres). Cette condition est nécessaire pour assurer le passage continu des déformations plastiques aux déformations élastiques.

En utilisant les équations (I.5) et (I.8), l'écoulement est défini de la manière suivante :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^P = \frac{1}{H} \frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T \dot{\underline{\sigma}} \quad (I.10)$$

Prenons $R = R(K)$ avec $K = K(\underline{\varepsilon}^P)$; l'équation (I.8) s'écrit :

$$\dot{\lambda} H = - \frac{\partial F}{\partial R} \dot{R} = - \frac{\partial F}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial K} \left(\frac{\partial K}{\partial \underline{\varepsilon}^P}\right)^T \dot{\underline{\varepsilon}}^P \quad (I.11)$$

et en tenant compte de l'équation (I.5) :

$$H = - \frac{\partial F}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial K} \left(\frac{\partial K}{\partial \underline{\varepsilon}^P}\right)^T \frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} \quad (I.12)$$

Dans le cas de la plasticité parfaite, F est seulement fonction de $\underline{\sigma}$; $\frac{\partial F}{\partial R} = H = 0$.

En tenant compte de l'équation (I.12) et de la définition du tenseur d'élasticité D :

$$\dot{\underline{\sigma}} = D \dot{\underline{\varepsilon}}^e, \quad (I.13)$$

on peut obtenir une autre équation pour $\dot{\lambda}$ car l'équation (I.4) s'écrit :

$$\dot{\underline{\sigma}} = D \dot{\underline{\varepsilon}} - D \dot{\underline{\varepsilon}}^P \quad (I.14)$$

ou encore, en tenant compte de l'équation (I.7) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T \dot{\underline{\sigma}} &= \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T D \dot{\underline{\varepsilon}} - \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T D \dot{\underline{\varepsilon}}^P = \\ &- \frac{\partial F}{\partial R} \dot{R} \end{aligned} \quad (I.15)$$

En combinant les équations (I.15), (I.8), (I.5) on obtient :

$$\dot{\lambda} = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T D \dot{\underline{\varepsilon}}}{H + \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T D \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right)} \quad (I.16)$$

I.6.1 Les cas particuliers de $\dot{\lambda}$

A) En utilisant les paramètres p contrainte moyenne, q contrainte déviatorique, ε_v déformation volumique, ε_d déformation déviatorique (voir annexe), $\dot{\lambda}$ (Eq. I.9) s'écrit :

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q}}{H} \quad (I.17)$$

avec :

$$F = F(p, q, R) .$$

Le module d'érouissage (Eq. I.12) s'écrit alors :

$$H = - \frac{\partial F}{\partial R} \left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_v} \frac{\partial G}{\partial p} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_d} \frac{\partial G}{\partial q} \right) \quad (I.18)$$

Le taux des déformations plastiques s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_v^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial p} \\ \dot{\varepsilon}_d^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial q} \end{aligned} \quad (I.19)$$

B) Pour écrire H sous une forme qui ne dépend pas de $\frac{\partial G}{\partial \sigma}$, on définit (Vermeer, 1980) :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{K} \Psi \quad (I.20)$$

avec :

Ψ fonction dépendant de l'état de contraintes

$K = K(\varepsilon^p)$ paramètre d'érouissage tel que :

$$\dot{K} = \frac{\partial K}{\partial \varepsilon^p} \dot{\varepsilon}^p = \text{scalaire} > 0 .$$

Avec cette définition l'équation (I.8) s'écrit :

$$\frac{\partial F}{\partial R} \dot{R} = - H \dot{K} \quad (I.21)$$

En procédant comme précédemment, on trouve :

$$K = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D \underline{\varepsilon}}{H + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D \Psi} \quad (I.22)$$

avec le module d'érouissage :

$$H = - \frac{\partial F}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial K} \quad (I.23)$$

I.6.2 Point d'intersection de plusieurs surfaces de charge

Quand il y a plusieurs surfaces de charge, l'écriture des relations en vitesse devient plus compliquée.

Dans le cas de deux surfaces de charge $F_1(\underline{\sigma}, R_1) = 0$ et $F_2(\underline{\sigma}, R_2) = 0$, on admet que l'écoulement au point A (Fig. I.5), quand les deux surfaces sont actives, est une combinaison linéaire des écoulements à gauche et à droite du sommet :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial G_1}{\partial \underline{\sigma}} + \dot{\lambda}_2 \frac{\partial G_2}{\partial \underline{\sigma}} \quad (I.24)$$

$G_1 = \text{cte}$ et $G_2 = \text{cte}$ étant les équations des potentiels plastiques de part et d'autre du sommet.

$\dot{\lambda}_1 > 0$ et $\dot{\lambda}_2 > 0$ sont des scalaires non négatifs déterminés de manière identique à celle qui a été exposée précédemment.

La vitesse de déformation totale s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^{p1} + \dot{\varepsilon}^{p2} \quad (I.25)$$

avec :

$$\dot{\varepsilon}^e = D^{-1} \dot{\underline{\sigma}}$$

$$\dot{\varepsilon}^{p1} = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial G_1}{\partial \underline{\sigma}}$$

$$\dot{\varepsilon}^{p2} = \dot{\lambda}_2 \frac{\partial G_2}{\partial \underline{\sigma}}$$

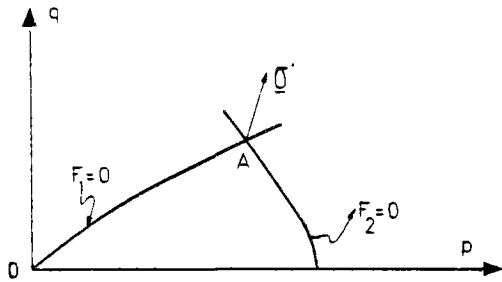


Fig. 1.5 - Ecoulement au point d'intersection de deux surfaces de charge.

I.7 - Ecrouisseage

Soit $\underline{\sigma}$ situé sur la surface de charge, $F(\underline{\sigma}, R) = 0$ (point A, Fig. I.6). L'accroissement infiniment petit des contraintes tel que $\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \dot{\underline{\sigma}} > 0$; provoque des déformations plastiques.

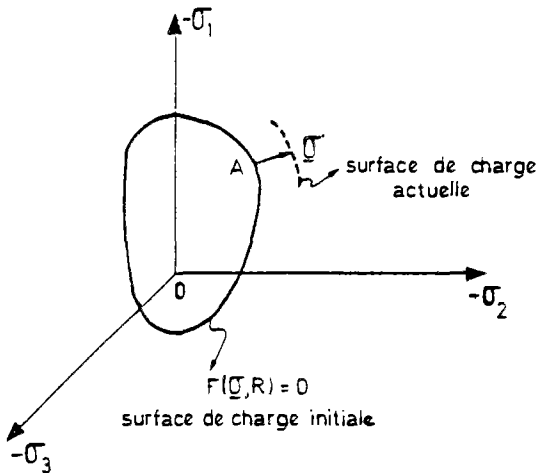


Fig. 1.6 - Ecrouissage.

L'évolution des déformations plastiques dans le cas des matériaux écrouissables conduit à un changement de limite élastique (dit écrouissage). La surface de charge se dilate et se déplace au fur et à mesure que se développe l'écrouissage.

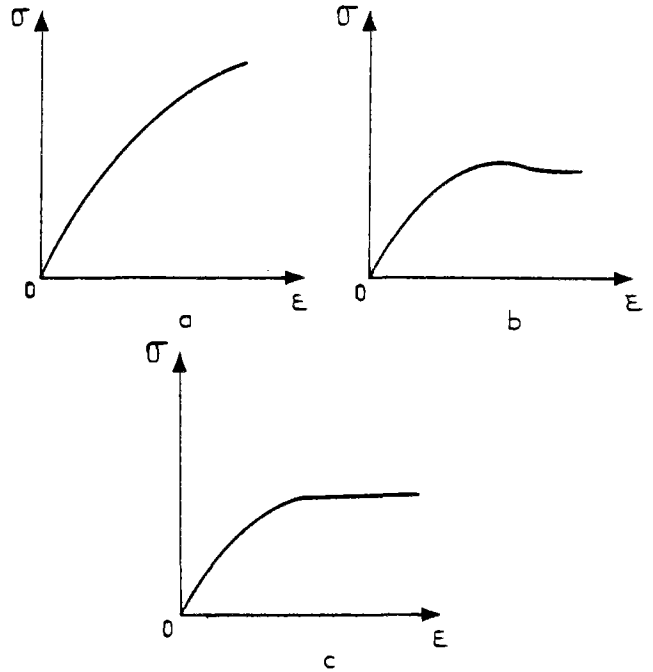


Fig. 1.7 - a) Ecrouissage positif, b) Ecrouissage négatif, c) Matériau parfaitement plastique.

Lorsque l'écrouissage est positif, la courbe des contraintes-déformations ne présente pas de pic (Fig. I.7.a) ($H > 0$).

L'écrouissage est dit négatif quand, sous un certain chemin de sollicitation, le matériau présente un ramollissement au delà d'un certain pic (Fig. I.7.b) ($H < 0$). Alors $\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \dot{\underline{\sigma}} < 0$ en charge comme en décharge, et dans ce cas le signe de $\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \dot{\underline{\sigma}}$ ne suffit plus pour déterminer si l'on est en charge ou en décharge.

Quand $H = 0$ le matériau est parfaitement plastique (Fig. I.7.c).

I.7.1 - Ecrouissage isotrope

Si la surface de charge pendant l'écrouissage se dilate d'une manière identique dans toutes les directions en restant homothétique à elle-même, on dit que l'écrouissage est isotrope (Fig. I.8). Dans ce cas, l'effet de Bauschinger est négligé.

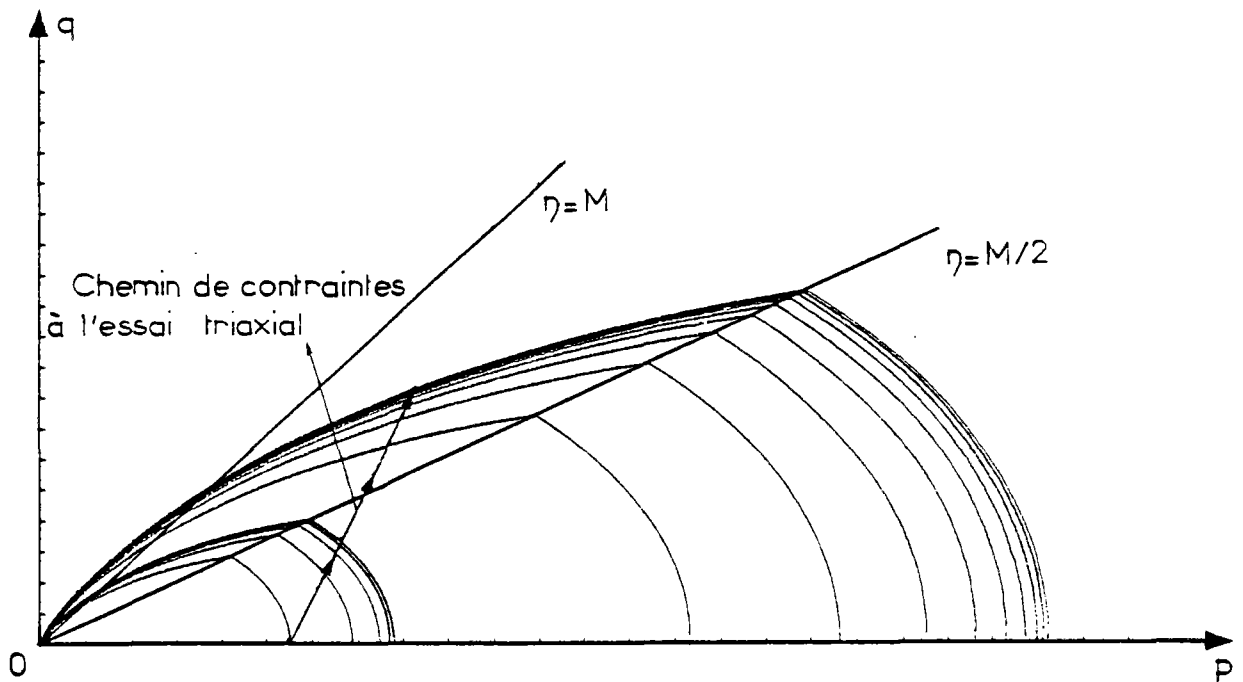


Fig. 1.8 - Ecouissage isotrope (modèle de Nova et al., voir plus loin).

1.7.2 - Ecouissage cinématique

Si la surface de charge lors de la déformation plastique se translate dans l'espace des contraintes, l'écouissage est dit cinématique (ou écouissage de translation). Dans ce cas, la limite élastique augmente dans le sens du chemin de contrainte (OM), mais elle diminue dans le sens inverse (OM') ; (voir Fig. I.9).

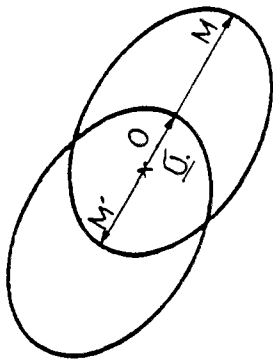


Fig. 1.9 - Ecouissage cinématique.

1.7.3 - Ecouissage de translation et dilatation

La combinaison de ces deux cas précédents conduit à un schéma plus complet. La surface de charge se translate et se dilate uniformément dans toutes les directions.

1.8 - Déformations totales ;

Matrice de rigidité élastoplastique

L'équation d'écoulement peut être écrite sous la forme :

$$\dot{\underline{\epsilon}}^p = \alpha \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} \quad (\text{I.26})$$

$$\alpha = 1 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} F = 0, \\ \dot{F} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \dot{\underline{\sigma}} > 0 \end{cases} \quad (\text{I.26.a})$$

$$\alpha = 0 \quad \text{sinon .}$$

L'équation (I.14), en tenant compte des équations (I.16) et (I.26), s'écrit alors :

$$\dot{\underline{\underline{c}}} = D \dot{\underline{\underline{e}}} - \alpha \frac{D \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{c}}} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{c}}} \right)^T D}{H + \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{c}}} \right)^T D \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{c}}}} \dot{\underline{\underline{e}}} . \quad (\text{I.27})$$

En posant :

$$D^P = \frac{D \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{c}}} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{c}}} \right)^T D}{H + \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{c}}} \right)^T D \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{c}}}} \quad (\text{I.28})$$

$$\left(\text{où : } D^P \dot{\underline{\underline{e}}} = \lambda D \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{c}}} \right), \quad (\text{I.28.a})$$

on trouve :

$$\dot{\underline{\underline{c}}} = D^{ep} \dot{\underline{\underline{e}}}, \quad (\text{I.29})$$

D^{ep} étant la matrice de rigidité élastoplastique :

$$D^{ep} = D - \alpha D^P \quad (\text{I.30})$$

L'équation (I.29) est équivalente à :

$$\dot{\underline{\underline{e}}} = (D^{ep})^{-1} \dot{\underline{\underline{c}}} \quad (\text{I.31})$$

avec :

$$(D^{ep})^{-1} = D^{-1} + \frac{\alpha}{H} \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{c}}} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{c}}} \right)^T . \quad (\text{I.32})$$

Chapitre II

APERÇU SUR LE COMPORTEMENT DES SABLES

II.1 - Concepts de base

Des courbes contrainte-déformation typiques pour un essai triaxial de compression ($-\sigma_1 \geq -\sigma_2 = -\sigma_3$) sont présentées sur la figure (II.1). Lorsque $q = |\sigma_1 - \sigma_3|$ augmente, la vitesse de déformation volumique $\dot{\epsilon}_v$ pour les sables lâches tend à s'annuler (le matériau est toujours contractant). Pour les sables denses, $\dot{\epsilon}_v$ change de signe et le matériau devient dilatant (Bishop et Henkel, 1957 ; Luong, 1982). L'écroutissage des sables denses, positif au début, devient ensuite négatif.

On peut citer trois approches pour décrire le comportement du sable :

- 1 - le concept d'état critique,
- 2 - le concept d'état caractéristique,
- 3- la loi de contrainte-dilatance de Rowe.

II.1.1 - Concept d'état critique

(Schofield et Wroth, 1968)

Ce concept repose sur la définition d'un état idéal asymptotique ("état criti-

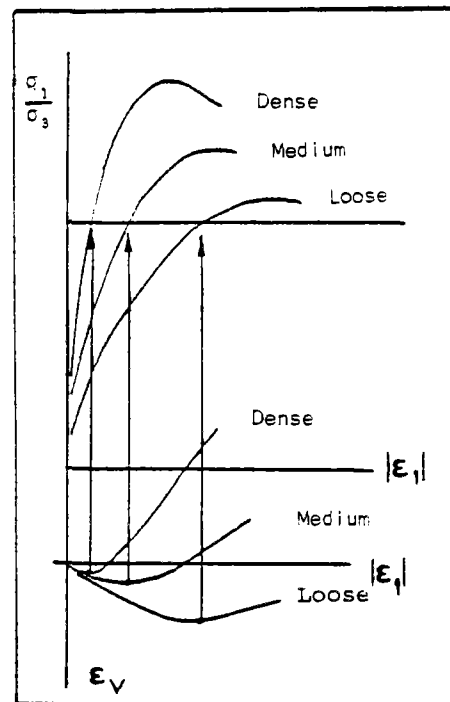


Fig. II.1 - Essais triaxiaux sur les matériaux pulvérulents (Kirkpatrick, 1961).

que") que le matériau doit atteindre sous cisaillement monotone.

A l'état critique :

- la vitesse de déformation volumique plastique est nulle, $\dot{\epsilon}_v^P = 0$,

- l'indice des vides du matériau dépend uniquement de la contrainte moyenne (indépendant des autres facteurs),
- le paramètre $M = \frac{q}{p}$ d'obliquité des contraintes appliquées est un paramètre intrinsèque.

II.1.2 - Concept d'état caractéristique

Dans cet état, défini par Kirkpatrick (1961) et repris par Luong (par exemple 1982):

- le matériau, initialement contractant, devient dilatatant ;
- la vitesse de déformation volumique totale est nulle ($\dot{\epsilon}_v = 0$) ;

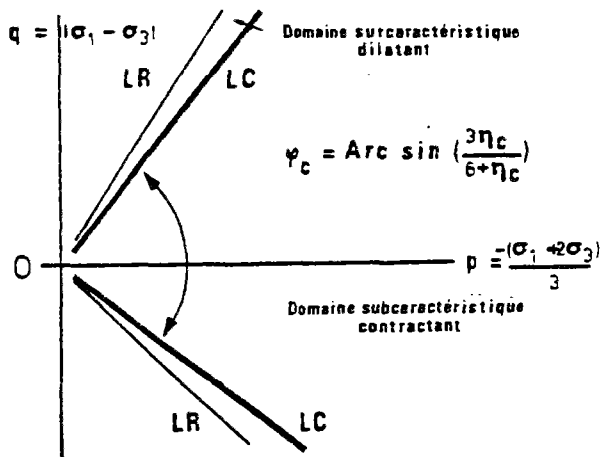


Fig. II.2 - Critère caractéristique délimitant le domaine contractant d'un matériau granulaire (Luong, 1982).

- le niveau de contrainte atteint par le matériau $\eta_c = \left(\frac{q}{p} \right)_c$ est défini par un angle de frottement caractéristique (Fig. II.2)

$$\varphi_c = \text{Arc sin} \frac{3\eta_c}{6 + \eta_c} ,$$

qui caractérise la capacité d'enchevêtrement du matériau.

Sidaner (1981) définit l'état caractéristique des matériaux pulvérulents par le niveau de contraintes correspondant à une vitesse de déformation volumique plastique nulle, soit : $\dot{\epsilon}_v^p = 0$ à $\eta = \eta_c$ (voir aussi paragraphe VII.8).

Il faut noter que le comportement dilatatant du sable disparaît à partir d'une pression moyenne supérieure à P_B (Fig. II.3) (comportement identique aux sables lâches).

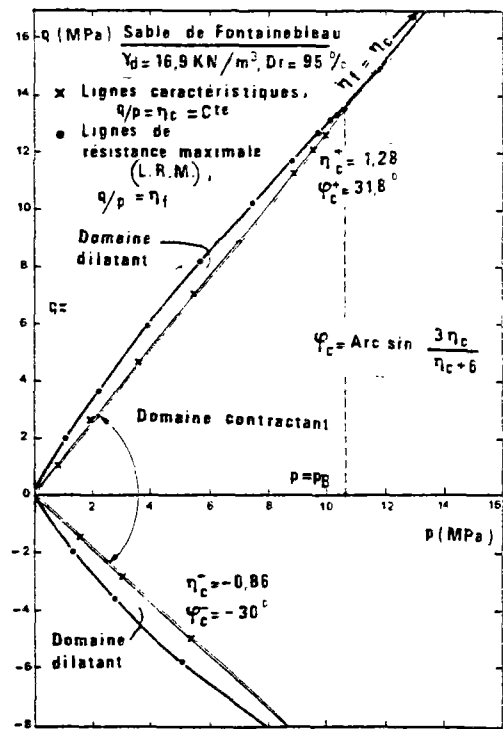


Fig. II.3 - Allure du domaine des contraintes admissibles (Touati, 1982).

II.1.3 - Théorie de contrainte-dilatance de Rowe (1962, 1971)

Posons $T = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}$. L'équation de contrainte-dilatance s'exprime de la manière suivante :

$$T = KD$$

où D, le facteur de dilataance s'écrit :

$$D = -c \frac{\dot{\varepsilon}_3^P}{\dot{\varepsilon}_1^P}$$

avec :

$c = 2$ pour un essai triaxial de compression,

$c = \frac{1}{2}$ pour un essai triaxial d'extension ($|\sigma_1| = |\sigma_2| > |\sigma_3|$ et $\varepsilon_2^P = \varepsilon_1^P$),

$c = 1$ pour un essai de déformation plane.

K est un rapport d'énergie :

$$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{\mu}}{2} \right) < K = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_f}{2} \right) < \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{cv}}{2} \right)$$

ϕ_{cv} est l'angle de frottement à volume constant (à l'indice des vides critique),

ϕ_{μ} est l'angle de frottement intergranulaire,

ϕ_f est un angle de frottement intermédiaire (correspondant uniquement à l'énergie de frottement grain à grain et à l'énergie de réarrangement).

Les cas limites sont les suivants (Rowe, 1971) :

Dans un essai triaxial de compression ou extension :

- pour les sables denses avant le pic,

$$\phi_f = \phi_{\mu} ;$$

- pour les sables denses en grandes déformations,

$$\phi_f = \phi_{cv} ;$$

- pour les sables lâches à toutes déformations,

$$\phi_f = \phi_{cv} .$$

Dans un essai de déformation plane :

$$\phi_f = \phi_{cv}$$

La figure (II.4) montre la localisation de ces angles sur la courbe contrainte-déformation.

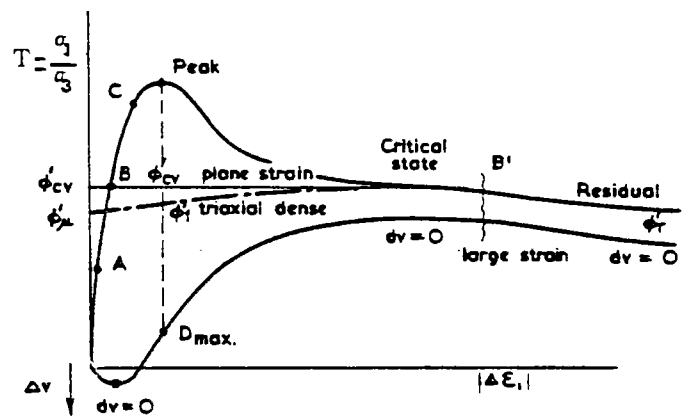


Fig. II.4 - Localisations des angles de frottement sur une courbe effort-déformation typique (Rowe, 1971).

Rowe (1971) propose une relation simple reliant ϕ_{μ} et ϕ_{cv} pour les particules rondes de quartz :

$$\phi_{cv} \approx \phi_{\mu} + 7^{\circ} .$$

Beaucoup de chercheurs ont cherché à vérifier la loi de contrainte-dilatance de Rowe. Stroud (1971), par exemple, compare plusieurs formulations avec des résultats réels et il en conclut que la loi de contrainte-dilatance de Rowe est une bonne approximation de la loi d'écoulement. Cependant, il propose une relation un peu différente qui est utilisée par Nova et al. (voir Chap. III).

II.1.4 - Notion de surface de charge

L'existence de déformations irréversibles associées à des surfaces de charge

écrouissables est un phénomène connu pour les sables. Ainsi, la figure (II.5) présente dans le plan (P, q) des surfaces de charge typiques pour des sables lâches, d'après Tatsuoka et Ishihara (1974-1975).

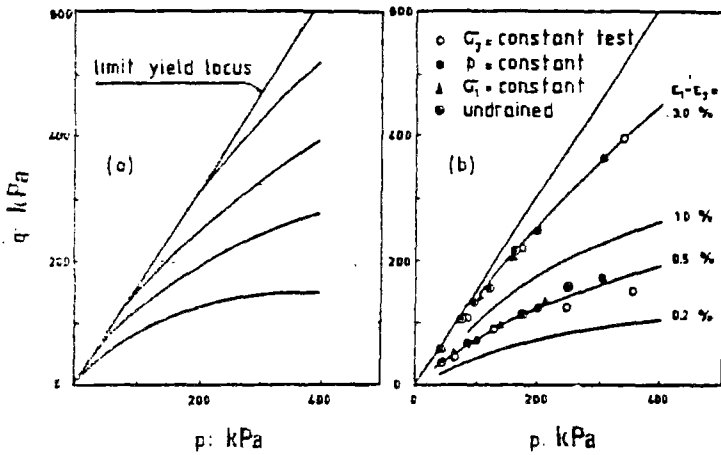


Fig. II.5 - Données pour les sables lâches, d'après Tatsuoka et Ishihara (Vermeer, 1980).
a) Surfaces de charge.
b) Courbes d'isovaleurs de déformations.

La détermination des surfaces de charge n'est pas une chose aisée. Poorooshasb et al. (1982) proposent une méthode pour construire la surface de charge dans le plan déviatorique associé à un niveau de contraintes préalablement atteint (fig. II-6).

Une autre méthode consiste à définir la surface de charge à partir de la surface de rupture (par exemple Lade et Duncan, 1975; Vermeer, 1980), celle-ci étant mieux connue. Matsuoka et Nakai (1982) comparent quelques surfaces de rupture proposées pour les sables et définissent une nouvelle surface de rupture (SMP) (Fig. II.7).

La figure (II.8) montre la concordance de résultats expérimentaux avec le critère proposé (SMP) (ce critère est celui utilisé par Vermeer, 1980). On constate que le critère de Coulomb coïncide avec les résultats des essais triaxiaux de compression ($\theta = 0$) et d'extension ($\theta = 60^\circ$), mais qu'il ne coïnci-

de pas pour les autres chemins de contraintes principales.

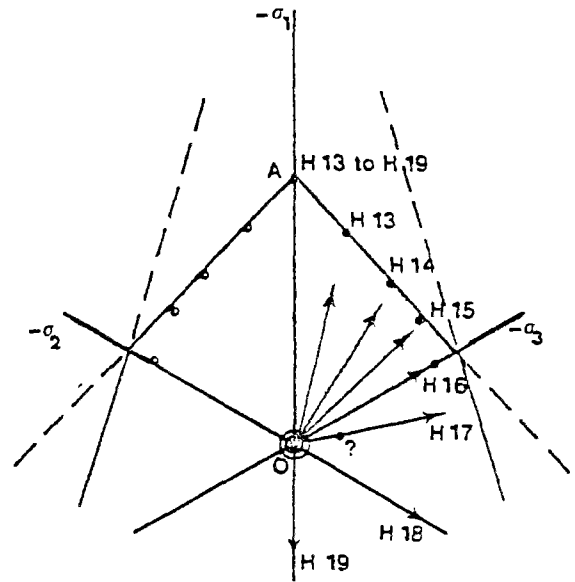


Fig. II.6 - Surface de charge dans le plan déviatorique pour un essai triaxial de compression (chargement préalable jusqu'au point A).

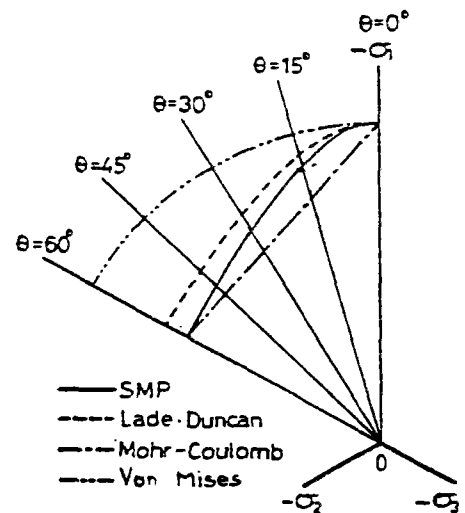


Fig. II.7 - Quatre critères de rupture dans le plan déviatorique (Matsuoka et Nakai, 1982).

Quand la surface de charge est définie à partir d'une surface de rupture, elle a la même forme que celle-ci. Cette surface de charge s'écrouit isotropiquement au cours du chargement pour arriver à la surface de rupture (Fig. II.9).

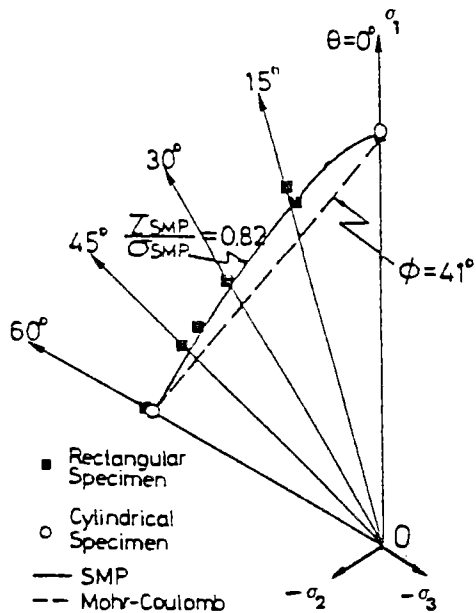


Fig. 11.8 - Comparaison du critère de rupture (SMP) et du critère de Coulomb avec les résultats des essais (Matsuoka et Nakai, 1982).

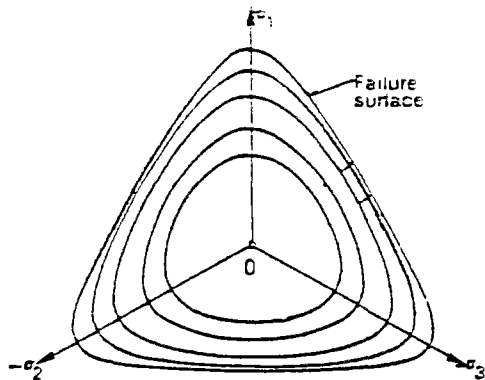


Fig. 11.9 - Surface de charge et critère de rupture dans le plan déviatorique (Vermeer, 1982).

Les surfaces de charge qui sont définies à partir des surfaces de rupture ont souvent une forme conique ouverte dans l'espace σ_1 , σ_2 , σ_3 (Fig. II.10). Elles ne prédisent pas de déformations volumiques plastiques pour des pressions isotropes (ou même pour les faibles rapports de contrainte $\eta = \frac{\sigma}{p}$). Les essais par contre montrent l'existence de telles déformations volumiques irréversibles (Fig. II.11).

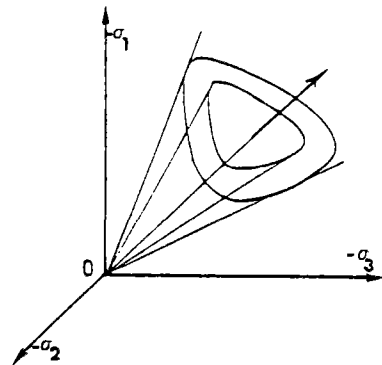


Fig. 11.10 - Surface de charge de cisaillement au modèle de Lade et Duncan (1975).

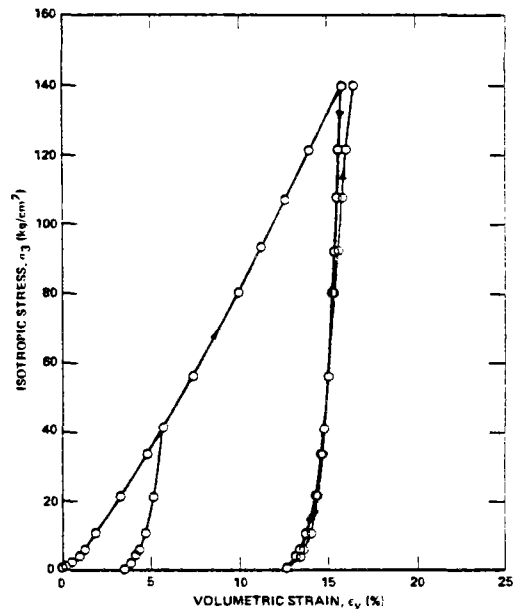


Fig. 11.11 - Déformations volumiques irréversibles dans l'essai de compression isotrope sur le sable lâche de Sacramento (Lade, 1977).

Les modèles sont alors souvent complétés par une surface de charge ("cap") pour la compression isotrope (ou consolidation), qui ferme le domaine élastique (voir II.2).

Desai et al. (1981) étudient le cas d'une semelle, avec quelques modèles élastoplastiques. Les résultats réels sont mieux simulés

par les modèles à surface de charge fermée que par les modèles à surface de charge ouverte.

II.1.5 - Instabilité du matériau

D'après Mandel (1964), pour une loi non associée, le matériau est stable quand :

$$\dot{\underline{\sigma}}^T \dot{\underline{\varepsilon}} > 0, \quad (\text{II.1})$$

ce qui s'écrit, compte tenu de l'équation (I.31) :

$$\dot{\underline{\sigma}}^T \dot{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\sigma}}^T (D - \alpha D^P)^{-1} \dot{\underline{\sigma}} > 0 \quad (\text{II.2})$$

avec :

D^P défini en (I.28).

Mandel précise que le matériau n'est pas nécessairement instable quand il existe des zones où

$$\dot{\underline{\sigma}}^T \dot{\underline{\varepsilon}} < 0 \quad (\text{II.3})$$

car la stabilité du matériau peut être assurée par les autres zones qui sont stables, et par les conditions aux limites.

Utilisant l'équation (I.32), l'équation (II.2) s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}^T D^{-1} \dot{\underline{\sigma}} + \frac{\alpha}{H} \underline{\underline{\sigma}}^T \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)^T \dot{\underline{\sigma}} > 0 \quad (\text{II.4})$$

d'où :

$$H > - \alpha \frac{\underline{\underline{\sigma}}^T \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)^T \dot{\underline{\sigma}}}{\underline{\underline{\sigma}}^T D^{-1} \dot{\underline{\sigma}}} \quad (\text{II.5})$$

H étant le module d'érouissage.

En cherchant le maximum du second membre de cette inégalité (Vermeer, 1980 ;

Loret, 1981), on trouve :

$$2H > \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)^T D \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)^T D \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}} - \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)^T D \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (\text{II.6})$$

Cette équation montre la limite du module d'érouissage avant laquelle la stabilité du matériau est assurée (pour un potentiel associé, l'équation (II.6) se réduit à $H > 0$). Cette inégalité peut être transformée pour les modèles élastoplastiques sous la forme $\eta < \eta_{\text{critique}}$. Au delà $\eta > \eta_{\text{critique}}$ la stabilité du matériau n'est plus assurée (Fig. II.12). Quand $\eta < \eta_{\text{critique}}$, la solution du problème est unique (Vermeer, 1980).

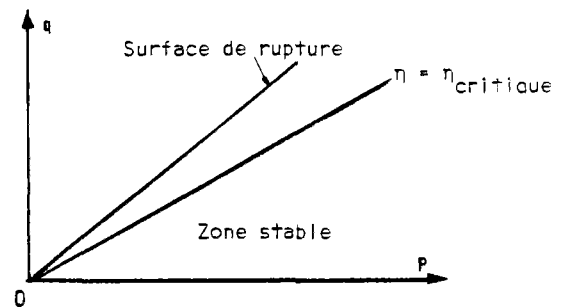


Fig. II.12

Ecrivons l'équation (II.1) sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}^T \dot{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\sigma}}^T \dot{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\sigma}}^T \dot{\underline{\varepsilon}}^p. \quad (\text{II.7})$$

Comme :

$$\underline{\underline{\sigma}}^T \dot{\underline{\varepsilon}}^e > 0,$$

$\underline{\underline{\sigma}}^T \dot{\underline{\varepsilon}} < 0$ si et seulement si :

$$\underline{\underline{\sigma}}^T \dot{\underline{\varepsilon}}^p < 0 \text{ et } |\underline{\underline{\sigma}}^T \dot{\underline{\varepsilon}}^p| > |\underline{\underline{\sigma}}^T \dot{\underline{\varepsilon}}^e|.$$

$\underline{\underline{\sigma}}^T \dot{\underline{\varepsilon}}^p$ ne peut être négatif que pour les matériaux à potentiel non associé.

Pour ces matériaux, et pour certains chemins de chargement, nous pouvons donc atteindre la rupture par instabilité, avant d'arriver sur la surface de rupture (cela est constaté par exemple par Vardoulakis, 1977).

II.2 - Quelques caractéristiques des modèles élastoplastiques pour les sables

Plusieurs auteurs ont proposé différentes classifications des modèles :

Gudehus (1979), Robinet (1980) et Di Benedetto (1981) ont choisi le "nombre de domaines d'expression" pour distinguer les groupes de modèles.

Monnet (1983) classe les modèles élastoplastiques suivant que le domaine d'élasticité est fermé ou ouvert.

Mullenger et Davis (1981) regroupent les modèles élasto-plastiques en fonction de la projection de la surface de charge dans le plan déviatorique (surface de charge avec ou sans points singuliers).

Drücker, Gibson et Henkel (1957) sont les premiers auteurs à avoir proposé pour les sols un modèle élastoplastique avec un domaine d'élasticité fermé. Dans leur modèle, la déformation volumique plastique en cisaillement est toujours négative (dilatance) (par exemple au point A, Fig. II.13.a).

De nombreux autres modèles pour décrire le comportement des sables ont suivi. La plupart de ces modèles sont des modèles avec écrouissage isotrope, suivant en cela les modèles Cam-Clay développés pour les argiles (Cam-Clay original, Schofield et Wroth, 1968 ; Cam-Clay modifié par Roscoe et Burland, 1968)

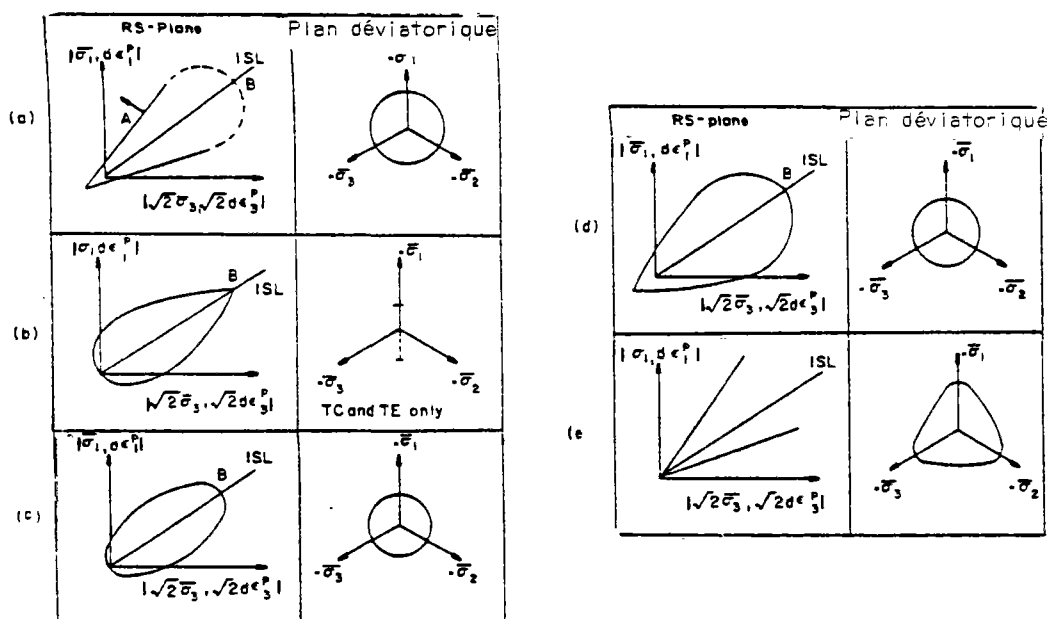


Fig. II.13 - Surfaces du potentiel plastique (Hardin, 1978),

- a) Drücker et al (1957),
- b) Cam-Clay original,
- c) Cam-Clay modifié,

- d) Di Maggio et Sandler,
- e) Lade et Duncan.

(voir respectivement les figures II.13.b et II.13.c). Citons le modèle Granta Gravel (Schofield et Wroth, 1968), les modèles de Di Maggio et Sandler (1971), (Fig. II.13.d); Lade et Duncan (1975), (Fig. II.13.e); Wilde (1977), Lade (1977), Nova et al. (1977-1982), Vermeer (1978-1982), Loret (1981), Monnet (1983).

On trouvera des synthèses bibliographiques sur certains de ces modèles dans les travaux de Barbas et Frank (1982) et Monnet (1983). Nous nous contentons de rappeler ici quelques points importants de ces modèles.

En ce qui concerne les modèles à potentiel plastique unique (une seule déformation plastique), la plupart (Di Maggio et Sandler, Wilde, Nova et al.) utilisent un domaine élastique fermé tandis que d'autres (Lade et Duncan; Monnet) considèrent une région élastique non fermée en compression isotrope.

Pour prendre en compte l'histoire du matériau, élément nécessaire pour calculer l'écrouissage, la plupart des modèles utilisent comme paramètre une fonction de la déformation plastique déjà provoquée par les chargements précédents. Ainsi, Wilde propose le premier invariant du tenseur des déformations plastiques en le complétant, dans une version plus élaborée de son modèle, par la racine carré du deuxième invariant du tenseur déviatorique des déformations plastiques.

Le paramètre d'écrouissage dans le modèle de Nova et al. est une fonction de la déformation volumique plastique et de la déformation de cisaillement plastique. Lade et Duncan utilisent, eux, une certaine fonction du travail plastique.

Le potentiel plastique est associé dans les modèles de Di Maggio et Sandler et de Wilde; il est non associé dans les modèles de Lade et Duncan et de Monnet et, enfin il est associé pour la consolidation dans le modèle de Nova et al. (ce modèle est présenté en détail au chapitre III). Il semble que la loi de normalité conduise en général à une dila-

tance excessive en cisaillement.

Les modèles élastoplastiques avec deux potentiels plastiques de Lade (1977), de Vermeer (1978-1982) et de Loret (1981), qui ont un domaine élastique fermé, sont assez semblables. La déformation plastique totale dans ces modèles est la somme des déformations plastiques associées à la surface de charge de distorsion et à la surface de charge de consolidation; le potentiel plastique de distorsion est non associé.

Le modèle de Lade avec 14 paramètres a les caractéristiques suivants:

- la surface de charge de distorsion est définie à partir d'une surface de rupture;
- le potentiel plastique de distorsion aboutit toujours à des déformations plastiques dilatantes;
- le travail plastique (ou le travail dissipé) est le paramètre d'écrouissage;

Le modèle de Loret avec 8 paramètres a les caractéristiques suivantes:

- l'équation du potentiel plastique de distorsion G_1 est analogue à celle de Nova et al. (voir Chap. III); elle dérive de l'équation suivante:

$$d = - \frac{d\epsilon}{p} = \mu (\eta_c - \eta)$$

η_c étant la droite caractéristique qui correspond à la variation de volume nulle,

μ étant un réel positif (paramètre du modèle).

- La surface de charge de distorsion a la forme suivante:

$$F_1(\underline{\sigma}, R_1) = F_d(\underline{\sigma}) - R_1$$

$$F_d(\underline{\sigma}) = \phi_1(\eta) \phi_2(p)$$

R_1 , le paramètre d'écroûissage est le travail plastique normalisé.

$\phi_1(\eta)$, $\phi_2(P)$ sont des fonctions déterminées expérimentalement ; Loret (1981) propose les fonctions suivantes :

$$\phi_1(\eta) = \frac{a\eta_f^2 \eta^2}{\eta_f^2 - \eta^2}$$

$$\phi_2(P) = \left(\frac{P}{P_a}\right)^n$$

P_a est la pression atmosphérique,

a , η_f , n , sont des paramètres du modèle.

- Pour les déformations de consolidation, le potentiel plastique est associé.

$$F_2 = G_2 = \psi(P^2 + rq^2) - R_2$$

R_2 , deuxième paramètre d'écroûissage, est le travail plastique de consolidation et ψ est une fonction de $(P^2 + rq^2)$, r étant un autre paramètre du modèle.

Le modèle de Vermeer est présenté au chapitre IV. Disons ici que les paramètres d'écroûissage ne dépendent que des déformations plastiques. Parmi les modèles élastoplastiques cités, seul ce modèle incorpore directement l'équation de contrainte-dilatance de Rowe comme loi d'écoulement.

Les modèles dont nous avons parlé sont fondés sur les concepts classiques de l'élastoplasticité et ils admettent tous un écroûissage isotrope.

Parmi les modèles avec écroûissage anisotrope, on peut citer le modèle de Mroz et al. (1978, 1979) et le modèle de Prévost (1977-1978). Ces modèles cherchent à mieux approcher le comportement réel du sol en introduisant la notion d'écroûissage cinématique ; les auteurs cherchent notamment à répondre

dans ces modèles au problème des chargements cycliques.

Les lois incrémentales de Darve (1974-1978) et de Robinet (1980) sont des formulations qui simulent le comportement du sol sans utiliser la théorie de l'élastoplasticité.

II.3 - Choix du modèle (Barbas et Frank, 1982)

Si la rigueur et la cohérence de la conception théorique d'un modèle sont des éléments très importants pour sa valorisation, le nombre des constantes du matériau qu'il nécessite ainsi que leur méthode de détermination sont aussi des facteurs très importants, étant donné les difficultés que pose ce problème pour un matériau comme le sol. Or, le fait de rechercher un modèle bien fondé théoriquement nécessite l'utilisation de plusieurs paramètres du sol qui sont parfois difficiles à déterminer.

Une bonne concordance entre la simplicité et l'efficacité doit donc être le but de la modélisation.

Du point de vue de l'utilisation pratique de ces modèles et de leur application à des ouvrages réels grâce à un programme d'éléments finis, plusieurs problèmes se posent. En effet, soit le modèle a été mis au point à partir d'essais de laboratoire classiques en mécanique des sols (essais triaxiaux, etc.) et il présente alors des difficultés de généralisation aux problèmes tridimensionnels et même aux problèmes de déformation plane ou à symétrie de révolution, soit le modèle est présenté en fonction d'invariants des tenseurs dans l'espace à trois dimensions, mais alors se pose le problème des paramètres de sol qui sont la plupart du temps déterminés dans des conditions moins générales. On notera d'autre part que les applications pratiques à des ouvrages réels, lorsqu'elles ont été possibles, sont en général très peu nombreuses et

en tout état de cause, ne permettent pas de se faire une idée précise, à l'heure actuelle, de la validité de ces modèles ou de leurs domaines d'applications. Mentionnons enfin que, pour beaucoup de ces modèles, il est très difficile, voire impossible, de dégager, uniquement au vu de leurs formulations, le comportement du sol soumis à une sollicitation classique simple (essai de compression triaxiale, cisaillement direct, etc.).

Les modèles de Vermeer et de Nova et al.

nous ont paru cependant les plus intéressants du fait qu'ils recouvrent d'une manière relativement simple à peu près tous les aspects du comportement des sols pulvérulents (domaine élastique fermé, prise en compte de lois explicites de dilatance, potentiel non associé en cisaillement).

Nous avons donc choisi ces deux modèles pour les implanter dans le programme ROSALIE, et les appliquer au problème des pieux sous charge axiale.

Chapitre III

MODÈLE DE NOVA ET AL

III.1 - Historique

Le modèle de Nova et al. a été développé initialement à l'université de Cambridge (Nova, 1977 ; Nova et Wood, 1979) pour les sables à partir de résultats d'essais triaxiaux (Pocrooshab, 1971 ; Tatsuoka et Ishihara, 1974) puis pour les argiles (Nova, 1979). Le comportement du sol est considéré comme élastoplastique avec écrouissage isotrope. Le modèle est inspiré du modèle Cam-Clay mais le potentiel plastique est supposé non associé à partir d'un certain niveau de cisaillement et aucune hypothèse n'est faite sur l'existence de l'état critique.

Hueckel et Nova (1979) généralisent le modèle dans l'espace des contraintes principales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) et proposent un modèle applicable au cas des chargements cycliques (prise en compte des effets d'hystérésis) avec dix paramètres géotechniques. Le phénomène de liquéfaction (Nova et Hueckel, 1981), le nombre de cycles (Nova et Hueckel, 1980) ainsi que le comportement viscoplastique (Nova, 1982b) sont introduits dans le modèle.

Aucun calcul par la méthode des éléments finis n'a été fait par Nova, mais le modèle a été testé sous différents chemins de sollicitations (Nova et Wood, 1979 ; Nova et

Hueckel, 1982 ; Nova, 1982a) avec une bonne concordance entre les résultats théoriques et les résultats des essais triaxiaux (drainés et non drainés).

Dans la suite nous allons présenter brièvement le modèle généralisé (Nova et Hueckel, 1982) pour les sables soumis à un chargement monotone.

III.2 - Hypothèses du modèle (Nova et Hueckel, 1982)

Les hypothèses prises en compte par le modèle sont les suivantes :

- a) le sol est un matériau isotrope,
- b) les effets visqueux sont négligés,
- c) le principe de contrainte effective s'applique,
- d) le modèle est applicable aux sables et argiles remaniées,
- e) le comportement du sol est considéré comme élastoplastique ($\dot{\underline{\epsilon}} = \dot{\underline{\epsilon}}^e + \dot{\underline{\epsilon}}^p$),
- f) l'écrouissage est isotrope et il peut être négatif ou positif,

g) la coaxialité entre les contraintes et les vitesses de déformations plastiques est admise,

h) le potentiel plastique est non associé et il n'y a pas de points d'arête.

Dans ce qui va suivre, les notations ne sont pas exactement celles adoptées par les auteurs, afin d'utiliser une notation unique dans ce rapport pour tous les modèles considérés (voir en annexe les notations utilisées dans ce rapport).

III.3 - Déformations élastiques

Le comportement élastique dans le modèle de Nova est non linéaire.

La vitesse de déformation volumique élastique s'écrit :

$$\dot{\epsilon}_v^e = B_0 \dot{p} \quad (\text{III.1})$$

et la vitesse de déformation déviatorique s'écrit :

$$\dot{\epsilon}_d^e = \frac{2}{3} L_0 \dot{\eta} \quad (\text{III.2})$$

(où $\eta = q/p$)

B_0 et L_0 sont des paramètres géotechniques du modèle (voir plus loin).

III.4 - Equations de la surface de charge

Le modèle de Nova a une seule surface de charge qui est composée de deux parties, de part et d'autre de la droite :

$$\eta_{tr} = \frac{q_{tr}}{p_{tr}} = \frac{M}{2} \quad (\text{Fig. III.1}).$$

Les équations de la surface de charge dans l'espace (p, q) s'écrivent

• pour $\eta < M/2$

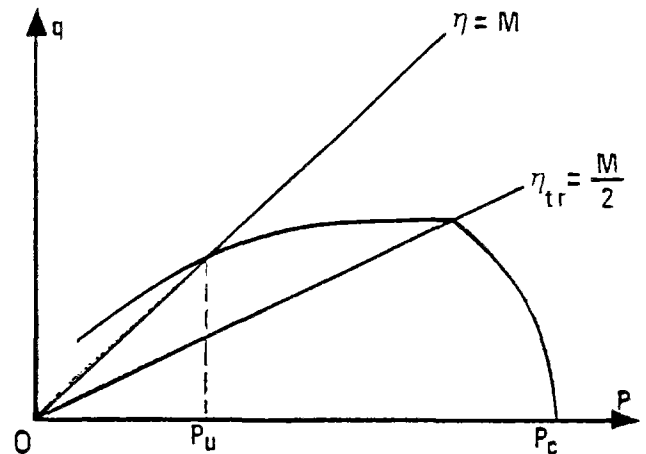


Fig. III.1 - Surface de charge représentée dans l'espace (q, p) , (Nova et Hueckel, 1980).

$$F_1 = \frac{4\mu}{M^2} \eta^2 + 1 - \left(\frac{P_c}{P}\right)^2 = 0 \quad (\text{III.3})$$

μ et M sont des paramètres du modèle.

P_c est le paramètre d'écroûissage.

C est l'abscisse du point d'intersection de la droite $\eta = 0$ (Fig. III.1) et de la surface de charge (voir plus loin).

• pour $\eta \geq M/2$

$$F_2 = \eta - M + m \ln \frac{P}{P_u} = 0 \quad (\text{III.4})$$

avec P_u l'abscisse de l'intersection de la droite $\eta = M$ et de la surface de charge :

$$P_u = \frac{P_c}{\sqrt{1+\mu}} e^{\frac{M}{2m}}.$$

m est un autre paramètre du modèle.

III.5 - Potentiel plastique

Le potentiel plastique est aussi composé de deux parties : pour $\eta \leq M/2$ il est associé et pour $\eta > M/2$ il est non associé.

Ses équations s'écrivent :

• pour $\eta \leq M/2$

$$G_1 = F_1 = \frac{4\mu}{M^2} \eta^2 + 1 - \left(\frac{P_c}{P}\right)^2 = 0 \quad (\text{III.5})$$

• pour $\eta > M/2$

$$G_2 = \eta - \frac{M}{1-\mu} \left[1 - \mu \left(\frac{P}{P_{cg}}\right)^{\frac{1-\mu}{\mu}} \right] = 0 \quad (\text{III.6})$$

avec :

$$P_{cg} = \frac{P_c}{\sqrt{1+\mu}} \left(\frac{2\mu}{1+\mu}\right)^{\frac{\mu}{1-\mu}}, \quad (\text{III.6.a})$$

P_{cg} étant l'abscisse du point d'intersection de $\eta = M$ avec $G_2 = 0$ (Fig. III.2). On le calcule en fonction de P_c à partir des deux équations (III.6) et (III.5). Les deux courbes $G_1 = 0$ et $G_2 = 0$ ont la même tangente au point $p = P_{tr}$ et $q = q_{tr}$ ($\eta_{tr} = \frac{M}{2}$).

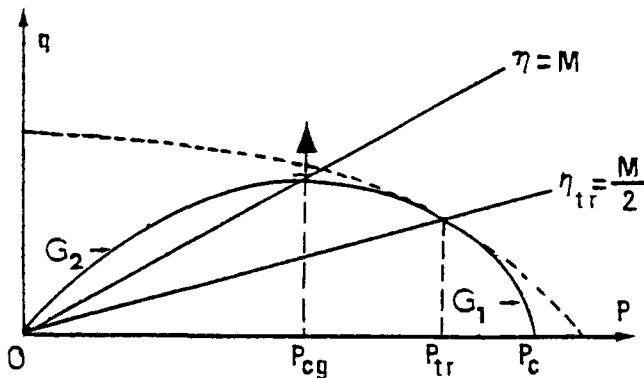


Fig. III.2 - Potentiel plastique dans l'espace (p, q) , (Nova et Hueckel, 1980).

L'équation (III.6) devient celle du modèle Cam-Clay quand $\mu = 1$.

Dilatance

La dilatance est prise en compte dans ce modèle par le paramètre :

$$d = \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_d^p} \quad (\text{III.7})$$

$$= \frac{\text{taux de déformation volumique plastique}}{\text{taux de déformation déviatorique plastique}}$$

Le paramètre "d" à la rupture, est égal sensiblement au rapport de la vitesse de déformation volumique totale à la vitesse de déformation déviatorique totale.

Sur la base des travaux de Stroud (1971) pour les sables, Nova suppose que la dilatance pour les valeurs de $\eta > M/2$ dépend uniquement de l'état de contrainte totale et non de la vitesse de contrainte :

$$\eta = M - \mu d \quad (\text{III.8})$$

En utilisant :

$$\frac{dq}{dp} = - \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_d^p} \quad (\text{III.9})$$

(normalité de vecteur de la vitesse de déformation par rapport au potentiel plastique)

d'où :

$$\frac{dq}{dp} = \frac{q}{\mu p} - \frac{M}{\mu}, \quad (\text{III.10})$$

on aboutit à l'expression du potentiel plastique (Eq. III.6).

Pour les faibles valeurs de η , les auteurs utilisent l'équation de Namy (1970) pour les argiles limoneuses :

$$\eta \cdot d = a$$

$$\text{avec :} \quad (\text{III.11})$$

$$a = \frac{M^2}{4\mu}$$

Avec le même raisonnement, on trouve l'équation du potentiel plastique (Eq. III.5) pour $\eta \leq M/2$.

Les déformations plastiques sont définies à partir des équations (I.5 ou I.19).

Pour un essai triaxial, les vitesses de déformations plastiques sont (Nova et Hueckel, 1982) :

• pour $\eta \leq M/2$

$$\dot{\epsilon}_d^P = (\lambda - B_0) \frac{(\eta+d) \frac{\dot{P}}{P} + \dot{\eta}}{(\eta+d)(\bar{d}+D)} \quad (\text{III.12})$$

avec :

$$\bar{d} = \frac{M^2}{4\mu\eta}$$

λ et D étant d'autres paramètres du modèle ;

• pour $\eta > M/2$

$$\dot{\epsilon}_d^P = (\lambda - B_0) \frac{m \frac{\dot{P}}{P} + \dot{\eta}}{m(\bar{d}+D)} \quad (\text{III.13})$$

avec :

$$\bar{d} = \frac{M-\eta}{\mu}$$

dans les deux cas :

$$\dot{\epsilon}_v^P = d \dot{\epsilon}_d^P \quad (\text{III.14})$$

On note que les auteurs utilisent l'équation du potentiel plastique (respectivement $G_1 = 0$ et $G_2 = 0$) pour le calcul du dénominateur des équations (III.12) et (III.13).

Paramètre d'écroutissage

La vitesse de déformation volumique dans des essais de compression isotrope ($\dot{\epsilon}_d = 0$) s'écrit (par exemple Nova et Wood, 1979) :

$$\dot{\epsilon}_v \Big|_{\eta=0} = \lambda \frac{\dot{P}}{P} \frac{C}{C} \quad (\text{III.15})$$

Prenant en compte l'équation (III.1) on a :

$$\dot{\epsilon}_v^P \Big|_{\eta=0} = (\lambda - B_0) \frac{\dot{P}}{P} \frac{C}{C} \quad (\text{III.16})$$

Pour l'état de contrainte $\eta = M$ le taux de déformation volumique plastique est nul (Fig. III.2) et Nova (1982a par exemple) suppose que la vitesse de déformation déviatorique plastique s'écrit :

$$\dot{\epsilon}_d^P \Big|_{\eta=M} = \frac{\lambda - B_0}{D} \frac{\dot{P}}{P} \frac{U}{U} \quad (\text{III.17})$$

A partir des équations (III.16) et (III.17), on trouve :

$$P_C = P_{CO} \exp \left(\frac{\epsilon_v^P + D \epsilon_d^P}{\lambda - B_0} \right) \quad (\text{III.18})$$

P_C étant le paramètre d'écroutissage, P_{CO} une pression isotrope de référence en dessous de laquelle le sol est rigide (Nova et Hueckel, 1982).

III.6 - Rupture

Nova et Hueckel (1982) définissent la condition de rupture pour le module d'écroutissage nul. Pour un essai triaxial, en tenant compte des équations (I.18, III.4, III.6), on trouve pour $\eta > M/2$:

$$H = \frac{m}{(\lambda - B_0) P} (d+D) ,$$

avec :

$$d = \frac{M-\eta}{\mu}$$

d'où :

$$m(d+D) = 0$$

ou encore :

$$\eta = \eta_f = M + \mu D \quad (\text{III.19})$$

Cette droite est l'asymptote de la courbe contrainte déformation (Fig. III.3) ; le comportement devient alors parfaitement plastique.

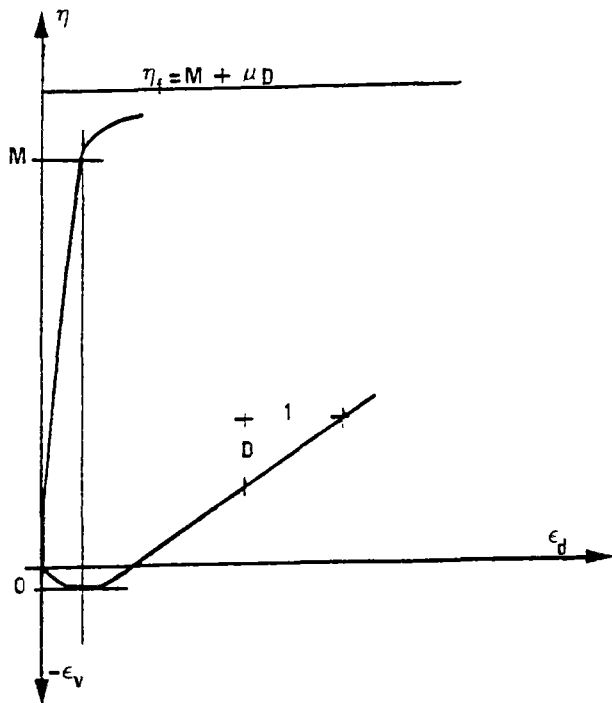


Fig. III.3 - Courbe "effort-déformation" dans un essai triaxial à pression (P) constante (Nova et Hueckel, 1982).

On montre que, pour l'essai triaxial de compression :

$$\eta_f = \frac{6 \sin \phi_p}{3 - \sin \phi_p} \quad (\text{III.20})$$

avec ϕ_p angle de frottement interne au pic.

Sur le plan déviatorique ($P = \text{cte}$), la condition de rupture est une série de droites (Fig. III.4). La condition de rupture

considérée par les auteurs ne coïncide pas avec le critère de Coulomb.

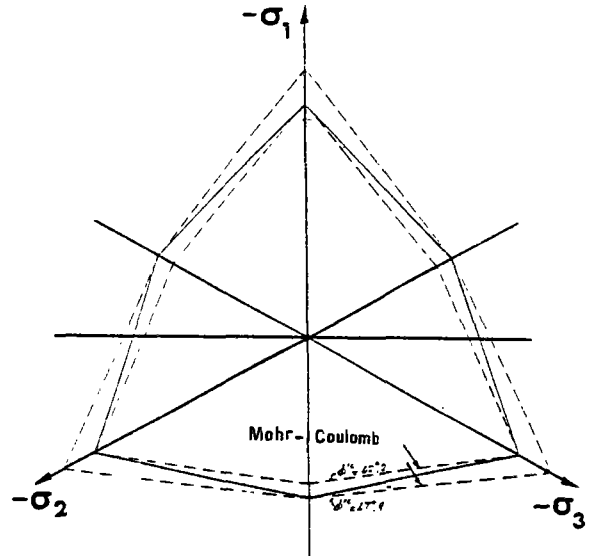


Fig. III.4 - Surface de rupture dans le plan déviatorique.

Nova et Hueckel (1982) notent que, dans le cas d'un essai à volume constant, η est limité par la valeur (Fig. III.5) :

$$\eta = \eta_u = M + \mu \frac{B_0}{\ell} D \quad (\text{III.21})$$

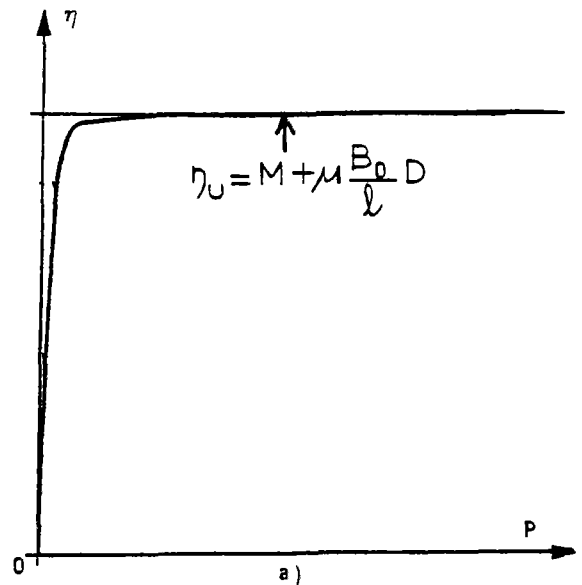


Fig. III.5 a) Asymptote dans un essai à volume constant (Nova et Hueckel, 1982).

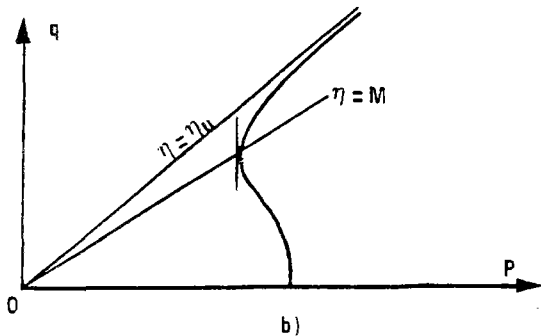


Fig. III.5 b) Chemin de contrainte dans un essai à volume constant.

III.7 - Paramètres du modèle

Les paramètres du modèle, qui sont au nombre de sept (B_c , L_c , M , λ , D , m et μ), sont définis à partir de l'essai triaxial.

" B_c " est la pente initiale de déchargement de la courbe semi-logarithmique contrainte-déformation dans un essai de compression isotrope.

" L_c " est déterminé à partir de la pente initiale de la courbe "contrainte-déformation" dans un essai triaxial de cisaillement avec pression isotrope (P) constante (Fig. III.3).

Le paramètre " M " est défini pour l'état de contrainte auquel les déformations volumiques plastiques s'annulent (Fig. III.2 et III.3). Pour les sables, dans des conditions triaxiales de compression :

$$M = \frac{6 \sin \phi_{cv}}{3 - \sin \phi_{cv}} \quad (III.22)$$

avec " ϕ_{cv} " l'angle de frottement à volume constant.

Pour les argiles, " M " est le rapport des contraintes à la rupture :

$$\eta_f = M = \frac{6 \sin \phi_p}{3 - \sin \phi_p} \quad (III.23)$$

Le paramètre " λ " est déterminé à partir d'un essai de compression isotrope, et il est lié à la compressibilité totale du sol :

$$\dot{\epsilon}_v = \lambda \frac{\dot{P}_c}{P_c}$$

Quand il n'y a plus de déformations élastiques, on montre que (Fig. III.3) :

$$D = - d_f$$

d_f étant la dilatance à la rupture (éq. III.7).

" D " est positif pour les sables, nul pour les argiles. Il est lié à la densité du sable et on peut le considérer comme nul pour les sables lâches. " D " devient aussi nul quand on passe de l'état d'écroutissage positif à l'état d'écroutissage négatif.

" m " intervient dans l'équation de la surface de charge pour $\eta \geq \frac{M}{2}$. On peut le déterminer à partir d'essais triaxiaux de compression ($\sigma_2 = \sigma_3$, $\dot{\sigma}_2 = \dot{\sigma}_3 = 0$) pour différents degrés de surconsolidation artificielle (Fig. III.6).

η_f , M et D étant connus, on détermine " μ " à partir de l'équation (III.19).

Nova et Hueckel (1982) donnent des valeurs typiques de ces différents paramètres (Tableau III.1)

III.8 - Remarques sur le modèle de Nova et al.

A) Comme nous l'avons signalé précédemment, le modèle de Nova et al. a été établi pour les conditions triaxiales ($\sigma_2 = \sigma_3$) puis généralisé dans l'espace ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$).

TABLEAU III.1

(Nova et Hueckel, 1982)

SOIL TYPE	M	λ	B_0	L_0	ν	m	D	COMMENTS
Fuji River med. dense sand (Tatsuoka, 1972)	1.34	0.01275	0.00544	0.00715	0.7	0.55	0.561	Various triaxial tests see Nova and Wood (1979) drained tests should be corrected
Ram River loose sand (Castro, 1969)	1.2	0.00807	0.00151	0.00818	1.0	0.35	0.0	Only one undrained triaxial test
Grenoble Workshop medium dense sand	1.35	0.00406	0.00168	0.00248	0.73	0.45	0.522	Wide range of tests
Ticino dense sand (Baldi, Nova, 1981)	1.2	0.0042	0.0021	0.0032	1.0	1.2	1.1	Various triaxial tests
Remoulded Kaolin (Walker, 1969)	0.9	0.113	0.022	0.0397	0.51	0.53	0.0	Only drained triaxial tests
Remoulded Kaolin (Wroth, Loudon, 1967)	0.96	0.113	0.022	0.0397	0.67	0.7	0.0	Only effective stress path in undr. triax. compression λ , B_0 , L_0 taken equal to above kaolin for lack of data
Remoulded Flumicino clay (Burghignoli, 1982)	1.1	0.136	0.023	0.036	0.36	1.0	0.0	Only drained tests
Remoulded Kaolin (Grenoble Workshop)	0.9	0.130	0.0253	0.0210	0.371	0.3	0.0	Wide range of tests. Data somewhat in contrast with other published data in similar tests
Newfield silty clay (Sangrey, 1967)	1.0	0.0292	0.00875	0.0116	1.0	1.0	0.733	Only one undrained triaxial test
N.C. Porto Tolle (Jamolkowski et al.)	1.1	0.0769	0.0092	0.0042	0.33	0.98	0.0	Parameters determined from in situ tests to reproduce pressuremeter curve

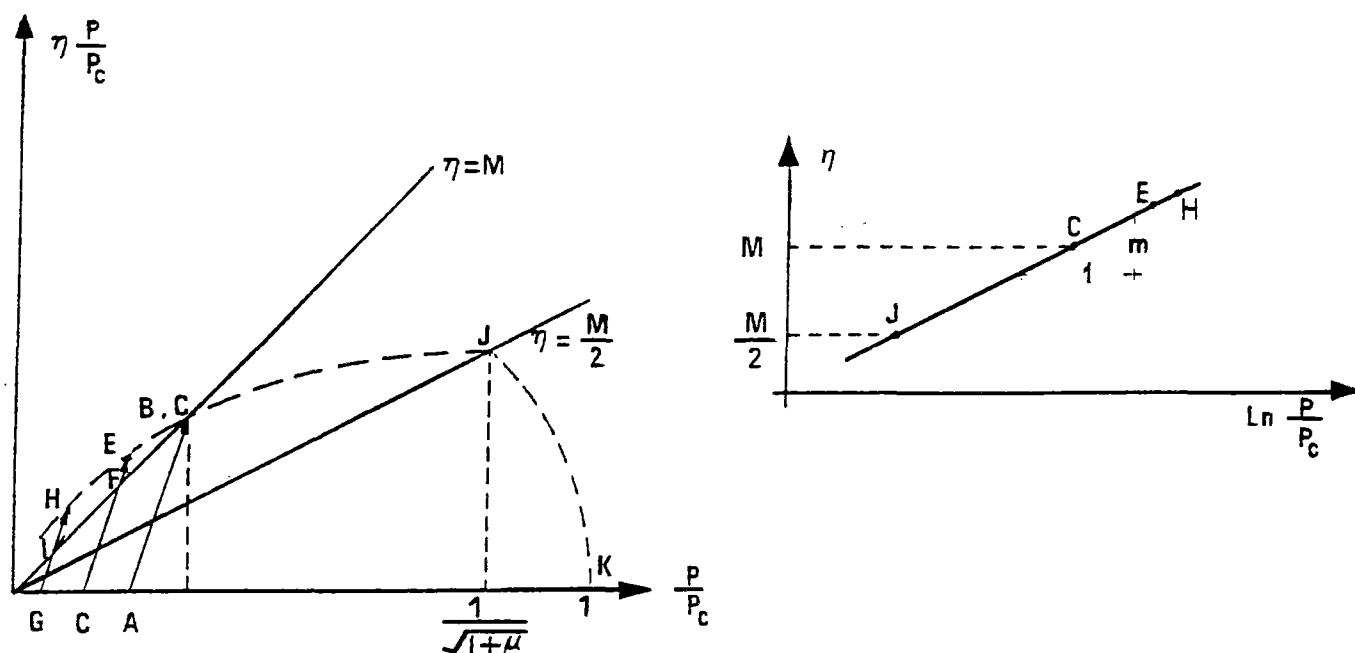


Fig. III.6 - Détermination du paramètre m.
(Nova et Hueckel, 1982).

Dans la première version généralisée (Nova et Hueckel, 1980), la surface de charge projetée dans le plan déviatorique est un cercle, ce qui est en contradiction avec les résultats expérimentaux (voir Chap. II).

Nova et Hueckel (1982), proposent de prendre "M" fonction de l'état de contraintes (Fig. III.7), ce qui complique l'équation de la surface de charge. Dans les équations du potentiel plastique, le paramètre "M" reste constant. Cette version du modèle est présentée par les auteurs comme encore provisoire.

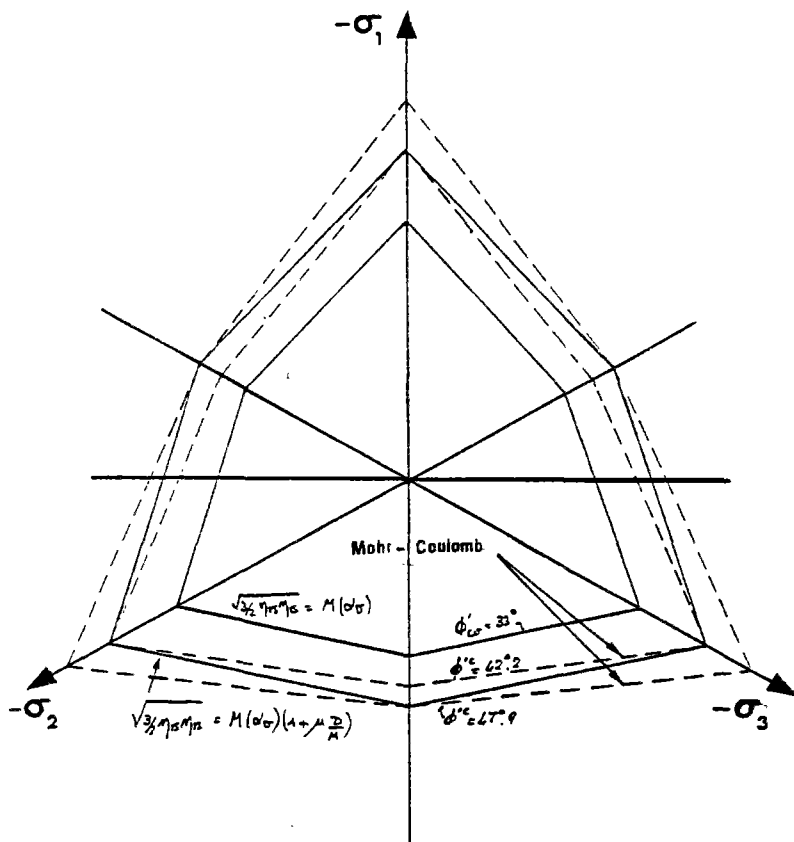


Fig. III.7 - Surface de charge et surface de rupture dans le plan déviatorique, (Nova et Hueckel, 1982).

B) Les auteurs écrivent l'équation du potentiel plastique (Eq. III.6) sous la forme :

$$G_2(P, q, P_C) = 0 \quad (\text{III.24})$$

Pour les mêmes paramètres p, q, P_C , l'équation de la fonction de charge (Eq. III.4) s'écrit :

$$F_2(P, q, P_C) = 0 \quad (\text{III.25})$$

Ces deux équations ne peuvent jamais être satisfaites simultanément car elles donnent deux valeurs différentes de q pour un état donné de (P, P_C) .

D'autre part, si on remplace l'équation III.24 par $G_2(p, q, P_C) = c$ (c étant une constante), tout en gardant l'équation III.25 satisfaite, on obtient une déformation volumique plastique en plus de la déformation déviatorique plastique pour l'état $\eta = M$ (voir Fig. III.2). Cela montre une contradiction dans les hypothèses des auteurs.

Pour ce qui est de la programmation et du vecteur des dérivées du potentiel, nous avons retenu :

$$G_2(P, q, P_C) = c \quad (\text{III.26})$$

Le rapport des contraintes η pour lequel on n'obtient alors que des déformations déviatoriques plastiques ($\dot{\epsilon}_V^P = 0$) est η_C avec :

$$\eta_C < M$$

et pour le cas traité ($M = 1,35$) nous avons trouvé $\eta_C = 1,114$ (voir paragraphe VII.8).

C) Le passage de l'écroutissage positif à l'écroutissage négatif quand η atteint la valeur η_u (Eq. III.21) correspond à l'annulation de D dans l'équation III.13 (Nova et Wood, 1979). Ce passage n'est défini que pour le cas de l'essai triaxial. Il nous semble que cet état est artificiel et ne correspond pas à la réalité. Pour la programmation, nous considérons uniquement

l'écroutissement positif et ce jusqu'à $n = n_f$ tel que le proposent Nova et Hueckel (1982).

D) Dans les différents articles présentés par Nova et al., la définition de P_{CO} varie. Les auteurs précisent que ce paramètre n'a pas de sens physique (Nova et Hueckel, 1982). Nous avons étudié ce paramètre particulier (voir paragraphe VII.7) et il nous semble que P_{CO} , non seulement définit la surface de charge initiale, mais joue aussi un rôle prédominant dans la modélisation.

E) Les paramètres (ϕ_{cv} et ϕ_f) sont définis (par Nova et Hueckel, 1981) différemment selon que le sol est cisailé en compression ou en extension.

Pour la programmation, nous supposons que ces paramètres ne varient pas (on prend les paramètres déterminés à partir de l'essai triaxial de compression) afin de comparer les résultats du modèle avec ceux des autres modèles établis en compression.

Chapitre IV

MODÈLE DE VERMEER

IV.1 - Historique

La première version du modèle de Vermeer (1977) a été établie à partir d'essais triaxiaux. Le modèle est surtout destiné à décrire le comportement des sols pulvérulents sous chargement initial, déchargement et rechargement.

Le modèle a deux surfaces de charge, une surface de charge de distorsion (cisaillement) et une surface de charge de consolidation.

La déformation totale s'écrit :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^{P1} + \underline{\varepsilon}^{P2} \quad (\text{IV.1})$$

avec :

$\underline{\varepsilon}^e$: déformation élastique,

$\underline{\varepsilon}^{P1}$: déformation plastique liée à la surface de charge de cisaillement,

$\underline{\varepsilon}^{P2}$: déformation plastique liée à la surface de charge de consolidation.

ε^{P1} est la partie la plus importante des déformations plastiques et le potentiel plastique est non associé.

Vermeer (1978) généralise ensuite le modèle dans l'espace tridimensionnel (σ_1 , σ_2 , σ_3) en utilisant le critère de rupture défini par Matsuoka et Nakai (1977).

Kenter et Vermeer (1978) présentent le modèle pour le cas de la déformation plane. En utilisant ce modèle, ils étudient certains ouvrages réels par la méthode des éléments finis.

En 1980-1981, Vermeer présente une nouvelle version du modèle dans l'espace (σ_1 , σ_2 , σ_3), avec cinq paramètres alors que l'ancienne version en comportait sept.

La surface de charge de cisaillement et le potentiel plastique dans la dernière version du modèle de Vermeer (1982) sont définis différemment.

Bien que la programmation pour cette version soit plus difficile, nous l'avons retenue, car il nous semble que la loi contrainte-dilatance de Rowe (1971) y est mieux adoptée.

Dans les paragraphes suivants, les points importants du nouveau modèle généralisé dans l'espace (σ_1 , σ_2 , σ_3) ainsi que le modèle défini en déformation plane sont présentés.

IV.2 - Hypothèses du modèle (Vermeer, 1980 ; Vermeer, 1982)

- a) Le sol est un matériau isotrope.
- b) Les effets visqueux sont négligeables.
- c) Le comportement du sol est considéré comme élastoplastique.
- d) L'écroutissement est isotrope.
- e) La déformation totale est déterminée à partir de :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^{P1} + \underline{\varepsilon}^{P2} \quad (IV.1)$$

- f) La surface de charge de distorsion ou de cisaillement s'écrit :

$$F_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, R_1) = 0 \quad (IV.2)$$

R_1 étant le premier paramètre d'écroutissement,

$$R_1 = \int_0^t \dot{R}_1 dt \quad (IV.3)$$

$$\dot{R}_1 = \dot{\gamma}^P = \left(\frac{3}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^P \dot{\varepsilon}_{ij}^P \right)^{1/2}$$

$\dot{\varepsilon}_{ij}^P$: déviateur de déformation plastique (voir annexe).

Cette surface s'écroute pour arriver à une surface de rupture du type Mohr-Coulomb.

- g) Le potentiel plastique correspondant à la surface de charge de cisaillement est non associé.

- h) La surface de charge de consolidation s'écrit :

$$F_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, R_2) = 0 \quad (IV.4)$$

avec :

$$R_2 = - \left(\varepsilon_1^{P2} + \varepsilon_2^{P2} + \varepsilon_3^{P2} \right) \quad (IV.4.a)$$

Le domaine d'élasticité est donc défini par :

$$F_1(\underline{\sigma}, R_1) \leq 0$$

$$F_2(\underline{\sigma}, R_2) \leq 0.$$

- i) Le domaine de validité du modèle est limité aux petites rotations des axes principaux des contraintes.

IV.3 - Déformations élastiques

Le comportement élastique du sol est supposé non linéaire. Vermeer adopte les relations incrémentales de Hooke avec G_s (module de cisaillement sécant) et $\nu = 0$:

$$\underline{\varepsilon}^e = \frac{\underline{\sigma}}{2G_s} \quad (IV.5)$$

avec :

$$G_s = G_0 \left(\frac{\sigma_n}{P_0} \right)^{1-\beta} = \frac{3P_0}{2\varepsilon_0^e} \left(\frac{\sigma_n}{P_0} \right)^{1-\beta} \quad (IV.6)$$

P_0 est une pression initiale isotrope de référence pour laquelle la déformation volumique est ε_0^e ,

β est un paramètre du modèle,

et

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{3} \sigma_i \sigma_i} \quad (IV.7)$$

Ces déformations élastiques sont, en fait, les dérivées d'une énergie de déformation complémentaire telle que :

$$\underline{\varepsilon}^e = \frac{\partial W}{\partial \underline{\sigma}} \quad (IV.8)$$

avec :

$$W = W_0 c_n^{1+\beta} \quad (IV.9)$$

$$W_0 = \frac{3}{1+\beta} \frac{P_0^{1-\beta}}{2G_0} = \frac{\epsilon_0}{1+\beta} \frac{1}{P_0^\beta} \quad (IV.10)$$

alors :

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{\partial W}{\partial c_i} \dot{\sigma}_j = \quad (IV.11)$$

$$\frac{1}{2G_s} \left(\delta_{ij} - \frac{1-\beta}{c_k c_k} c_i c_j \right) \dot{c}_j$$

δ_{ij} symbole de Krone ker.

Pour une pression isotrope ($c_1=c_2=c_3$) l'équation (IV.6) s'écrit ($P = c_n$) :

$$G_s = G_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{1-\beta} \quad (IV.12)$$

IV.4 - Rupture

Vermeer (1982) définit la surface de charge de cisaillement (voir IV.5) à partir de la surface de rupture proposée par Matsuoka et Nakai (1977) :

$$F_P = -3PII_C + A_P III_C = 0 \quad (IV.13)$$

$$P = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} : \text{contrainte moyenne.}$$

$$II_C = -\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1 \quad (IV.14)$$

$$III_C = -\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

Par convention, les contraintes négatives correspondent à une compression.

A_P est une fonction de l'angle de frottement au pic ϕ_P déterminé à partir de l'essai triaxial :

$$A_P = \frac{9 - \sin^2 \phi_P}{1 - \sin^2 \phi_P} \quad (IV.15)$$

avec :

$$\sin \phi_P = \frac{|c_1 - c_3|}{|c_1 + c_3|} \quad (IV.16)$$

La surface de rupture est une courbe lisse qui ressemble à la surface de rupture du modèle de Coulomb. La figure (IV.1) montre l'intersection de cette surface avec le plan déviatorique ($P = cte$)

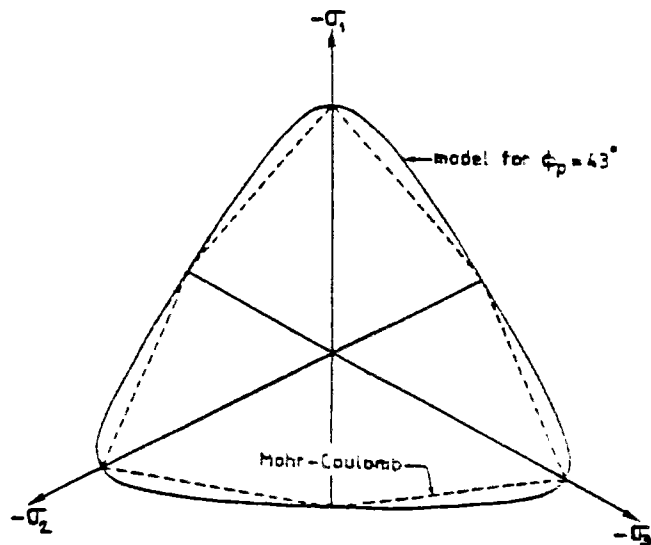


Fig. IV.1 - Surface de rupture dans le plan déviatorique (Vermeer, 1982).

En utilisant les invariants p et q (voir annexe), la surface de rupture s'écrit:

$$F_P = -(A_P - 9)P^3 + \frac{1}{3}(A_P - 3)Pq^2 + \frac{1}{3}J_{3s} = 0 \quad (IV.17)$$

$$J_{3s} = s_1^3 + s_2^3 + s_3^3$$

s_i étant le déviateur de contrainte

$$s_{ij} = c_{ij} - \frac{1}{3} c_{kk} \delta_{ij}$$

IV.5 - Equations des surfaces de charge

IV.5.1 - Surface de charge de cisaillement

La surface de charge de distorsion est déterminée à partir de l'équation hyperbolique définie par Kondner et Zelasko (1963), pour l'essai triaxial avec pression constante :

$$\gamma = B \frac{c\eta}{c-\eta} \quad (IV.18)$$

avec :

$$\gamma = |\varepsilon_1 - \varepsilon_3| \quad \text{distorsion totale (élastique plus plastique)}$$

$$q = |\sigma_1 - \sigma_3|$$

$$\eta = \frac{q}{c}$$

$$c = \max \eta = \frac{6 \sin \phi_p}{3 - \sin \phi_p} \quad (IV.19)$$

D'autre part, en tenant compte de l'expression de B proposée par Hansen (1965) :

$$B = \frac{1}{3} \varepsilon_0^e \left(\frac{p}{p_0} \right)^\beta \quad (IV.20)$$

avec :

$$\varepsilon_0^e = \frac{3p_0}{2G_0}$$

Vermeer obtient :

$$\gamma^P = \gamma - \gamma^e = \frac{p_0}{2G_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\beta \frac{\eta^2}{c-\eta} \quad (IV.21)$$

avec :

$$\gamma^e = \frac{p_0}{2G_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\beta \eta \quad (IV.22)$$

Il écrit ensuite l'équation (IV.21) sous la forme d'une surface de charge de cisaillement (Fig. IV.2). Pour les essais triaxiaux ($\sigma_2 = \sigma_3$) :

$$F_1 = \eta - h(\chi) = 0 \quad (IV.23)$$

avec :

$$\chi = \gamma^P \frac{2G_0}{p_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^\beta \quad (IV.24)$$

$$h(\chi) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \chi \right)^2 + c\chi} - \frac{1}{2} \chi \quad (IV.25)$$

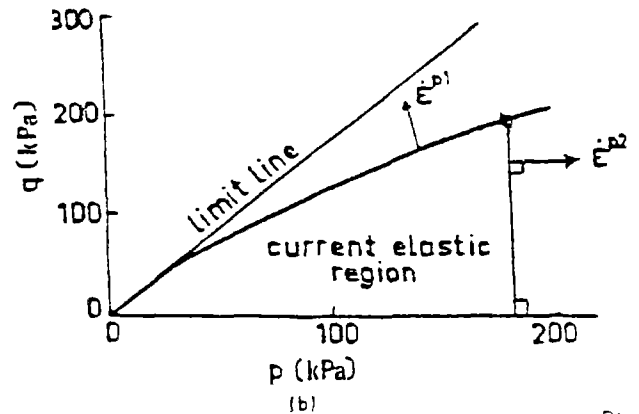
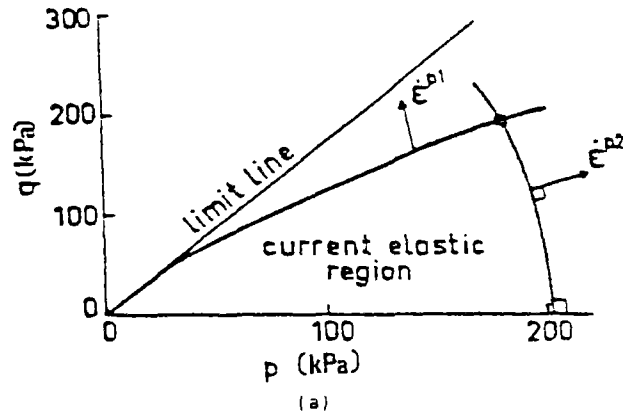


Fig. IV.2 - Surface de charge de cisaillement (ε^{P1}) et surface de charge de consolidation (ε^{P2}) (Vermeer, 1980) ;

- a) forme générale,
- b) forme simplifiée.

$2G_0$ est la pente initiale de la courbe (γ , q) pour un essai avec pression de confinement constante. Pour $\beta = 0$, cette surface de charge est une droite dans le plan (p , q). La surface de rupture correspond à $\gamma^P \rightarrow \infty$ (Fig. IV.2).

La surface de charge de cisaillement définie dans l'espace (σ_1 , σ_2 , σ_3) s'écrit à l'aide de la surface de rupture d'équation (IV.13) (Fig. VII.3).

$$F_1 = -3P II_{\sigma} + A(\lambda) III_{\sigma} = 0 \quad (IV.26)$$

avec :

$$A(\lambda) = \frac{27}{2h(\lambda)+3} \frac{3+h(\lambda)}{3-h(\lambda)} \quad (IV.27)$$

λ et h étant déterminés respectivement à partir des équations (IV.24) et (IV.25).

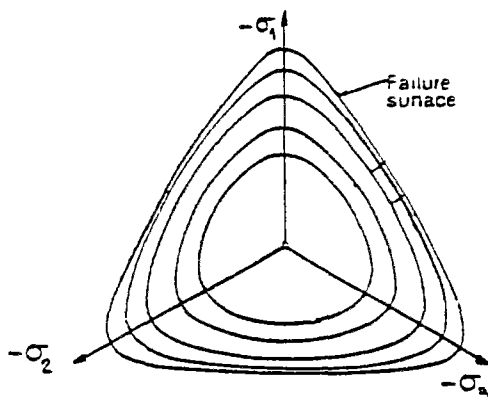


Fig. IV.3 - Surface de charge de cisaillement dans le plan déviatorique (Vermeer, 1982).

Pour l'état des contraintes de l'essai triaxial ($\sigma_2 = \sigma_3$), les équations (IV.26) et (IV.23) sont équivalentes.

Quand $\gamma^P \rightarrow \infty$ on trouve :

$$h(\infty) = c \quad (IV.28)$$

Nous avons alors :

$$A(\infty) \frac{27}{2c+3} \frac{3+c}{3-c} = \frac{9-\sin^2 \phi_p}{1-\sin^2 \phi_p} = A_p \quad (IV.29)$$

Cela montre que la surface de rupture (Eq. IV.13) correspond à $\gamma^P \rightarrow \infty$.

IV.5.2 - Surface de charge de consolidation

Nous avons vu dans le chapitre II que, pour un chargement de compression isotrope, il existe des déformations plastiques volumi-

ques et que la surface de charge doit être fermée.

Vermeer définit alors une surface de charge de consolidation 'Yield Cap', (Fig. IV.2.a) :

$$F_2 = \varepsilon_0^C \left(\frac{C_n}{P_0} \right)^\beta - \varepsilon_V^{P_2} = 0 \quad (IV.30)$$

$\varepsilon_V^{P_2}$, deuxième paramètre d'écrouissage, représente la déformation plastique volumique, C_n étant définie dans l'équation (IV.7).

ε_0^C est une constante du modèle déterminée à partir de l'essai triaxial de compression isotrope.

Cette surface est une sphère centrée sur l'origine dans l'espace des trois contraintes principales.

Une forme simplifiée de cette surface s'écrit :

$$F_2 = \varepsilon_0^C \left(\frac{P}{P_0} \right)^\beta - \varepsilon_V^{P_2} = 0 \quad (IV.31)$$

Cette équation représente une droite dans l'espace (P, q) (Fig. IV.2.b).

IV.6 - Potentiels plastiques

Le modèle de Vermeer a deux potentiels plastiques (double écrouissage). Le premier potentiel, qui est non associé, correspond à la surface de charge de cisaillement ; le deuxième correspond à la surface de charge de consolidation et est associé.

IV.6.1 - Potentiels plastiques correspondant à la surface de charge de cisaillement ; dilatance

Vermeer (1982) propose une fonction similaire à F_1 pour le potentiel plastique (Fig. IV.4)

$$G_1 = -3P^* II_{\sigma}^* + A^* III_{\sigma}^* = 0 \quad (IV.32)$$

avec :

$$\frac{\sigma_1^*}{\sigma_3^*} = \text{tg}^2(45^\circ + \frac{1}{2} \psi_m). \quad (IV.35)$$

P^* , II_{σ}^* , III_{σ}^* définis de la même manière que P , II_{σ} , III_{σ} en utilisant :

$$\sigma_1^* = \sigma_1 - a \quad (IV.33)$$

à la place de σ_1 ;

et :

$$A^* = \frac{9 - \sin^2 \psi_m}{1 - \sin^2 \psi_m} \quad (IV.34)$$

ψ_m étant l'angle de dilatance.

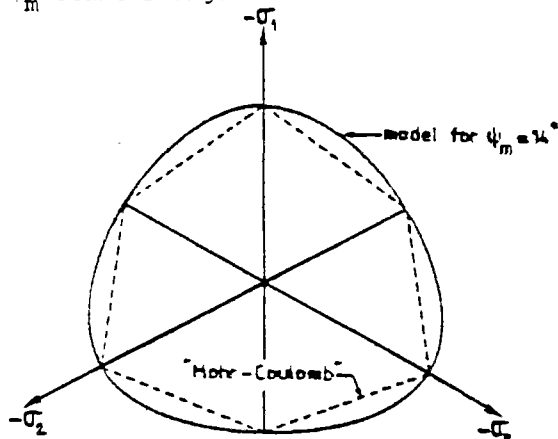


Fig. IV.4 - Potentiel plastique $G_1 = 0$ à la rupture dans le plan déviatorique (Vermeer, 1982).

Le potentiel plastique devient associé quand :

$$\psi_m = \phi_m \quad \text{et} \quad a = 0,$$

ϕ_m étant l'angle de frottement mobilisé.

Semi-constante "a"

Dans le modèle, "a" est déterminé pour chaque état de contraintes à partir de l'équation $G_1 = 0$.

La résolution de cette équation est simple dans le cas de l'essai triaxial

Dans le cas général, il est plus facile de déterminer "a" à partir de l'équation du potentiel plastique définie dans l'espace (P, q) :

$$G_1 = -(A^* - 9)(a+P)^2 + \frac{1}{3}(A^* - 3)q^2(a+P) + \frac{1}{3}A^*J_{3S} = 0. \quad (IV.36)$$

L'équation $G_1 = 0$ pour $\sigma_2 = \sigma_3$ (conditions de l'essai triaxial) donne :

$$-\frac{\dot{\epsilon}_1^{P1}}{2\dot{\epsilon}_3^{P1}} = \frac{\sigma_3^*}{\sigma_1^*} = \frac{1}{\text{tg}^2(45^\circ + \frac{1}{2} \psi_m)}. \quad (IV.37)$$

Cette équation est équivalente à celle définie par Rowe (1971), si l'on définit (Vermeer, 1982) :

$$\text{tg}^2(45^\circ + \frac{1}{2} \psi_m) = \frac{\text{tg}^2(45^\circ + \frac{1}{2} \phi_m)}{\text{tg}^2(45^\circ + \frac{1}{2} \phi_{cv})} \quad (IV.38)$$

ou

$$\sin \psi_m = \frac{\sin \phi_m - \sin \phi_{cv}}{1 - \sin \phi_{cv} \sin \phi_m}. \quad (IV.39)$$

Vermeer (1982) utilise cette équation pour le cas tridimensionnel

avec :

$$\sin \phi_m = \sqrt{\frac{9 - A(\chi)}{1 - A(\chi)}} \quad (IV.40)$$

et :

ϕ_{cv} angle de frottement à l'état critique ($\dot{\epsilon}_v = 0$).

Rowe utilise, en fait, un angle ϕ_f compris entre ϕ_{CV} et ϕ_μ (voir Chap. II) à la place de ϕ_{CV} , ϕ_μ étant l'angle de frottement intergranulaire.

L'angle de dilatance ψ_m est défini dans le cas de l'essai triaxial (Eq. IV.37) par :

$$-\frac{4\sin\psi_m}{3-\sin\psi_m} = \frac{\dot{\epsilon}_v^{P1}}{\dot{\gamma}^{P1}} = \frac{-(\dot{\epsilon}_1^{P1} + 2\dot{\epsilon}_3^{P1})}{-\dot{\epsilon}_1^{P1} + \dot{\epsilon}_3^{P1}} \quad (IV.41)$$

taux de déformation volumique plastique
taux de déformation déviatorique plastique

IV.6.2 - Potentiel plastique simplifié

Pour déterminer "a" à partir de l'équation (IV.36), il est nécessaire de résoudre pour chaque état de contrainte une équation du troisième degré, ce qui augmente le temps de calcul. Vermeer (1982) propose de négliger le troisième terme dans l'équation (IV.36) ; le potentiel plastique G_1 s'écrit alors :

$$G_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} q - \frac{4\sin\psi_m}{\sqrt{6+2\sin^2\psi_m}} P \quad (IV.42)$$

On notera que "a" disparaît (voir paragraphe IV.9).

IV.6.3 - Deuxième potentiel plastique

Le potentiel plastique correspondant à la surface de charge de consolidation est associé, d'où :

$$G_2 = F_2 \quad (IV.43)$$

F_2 étant défini par l'équation (IV.30) ou (IV.31).

IV.7 - Déformation plane

Vermeer (1980) définit son modèle en déformation plane (voir aussi § VII.3.2). Les hypothèses adoptées sont :

$$(H1) - \epsilon_z^P = \epsilon_z = 0, \quad (IV.44)$$

ce qui entraîne :

$$\epsilon_z^e = 0 \quad (IV.45)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

et :

$$\dot{\underline{\epsilon}} = D^{DP} \cdot \dot{\underline{\epsilon}}^e \quad (IV.46)$$

D^{DP} étant la matrice d'élasticité de déformation plane (Eq. VII.10). Dans cet espace bidimensionnel, les invariants de contraintes s'écrivent :

$$r = -\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = -\left\{ \left(\frac{1}{2} \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y \right)^2 + \sigma_{xy}^2 \right\}^{1/2} \quad (IV.47)$$

contrainte déviatorique

$$t = -\frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) = -\frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y)$$

contrainte moyenne

(H2) - Les déformations plastiques volumiques correspondant à la surface de charge de distorsion sont négligeables par rapport aux déformations de cisaillement

$$|\dot{\epsilon}_v^{P1}| = |\dot{\epsilon}_1^{P1} + \dot{\epsilon}_3^{P1}| \ll |\dot{\epsilon}_1^{P1} - \dot{\epsilon}_3^{P1}| \quad (IV.48)$$

Le paramètre d'érouissage de la surface de charge de distorsion dans le cas de la déformation plane s'écrit alors :

$$R_1 = K = \int_0^t \dot{K}_1 dt \quad (IV.49)$$

$$\dot{K}_1 = |\dot{\epsilon}_1^{P1} - \dot{\epsilon}_3^{P1}| \quad (IV.50)$$

IV.7.1 - Surfaces de charge

Dans le cas de la déformation plane, la surface de charge de cisaillement s'écrit :

$$F_1 = r - t f \left(K \frac{t_0^{\frac{\beta}{\beta_0}}}{t^{\frac{\beta}{\beta_0}}} \right) = 0 \quad (\text{IV.51})$$

t_0 et β étant des constantes du modèle (t_0 est équivalent à P_0 pour le cas de la déformation plane)

La fonction f est déterminée d'une manière expérimentale à partir des essais en déformation plane.

Pour la programmation, nous avons choisi la fonction définie par Vermeer (1980) pour le sable de Neeltje :

$$\bar{f}(\chi) = \sin \phi_p \sqrt{1 - \left(\frac{\chi - 0,015}{0,015} \right)^2} \quad (\text{IV.52})$$

pour $\chi < 0,015$

$$\bar{f}(\chi) = \sin \phi_p \quad \text{pour } \chi \geq 0,015 \quad (\text{IV.53})$$

ϕ_p étant l'angle de frottement au pic.

$$\chi = K \frac{t_0^{\frac{\beta}{\beta_0}}}{t^{\frac{\beta}{\beta_0}}}$$

Comme pour le cas tridimensionnel, la surface de charge de consolidation est complètement indépendante de la surface de charge de distorsion et son équation s'écrit :

$$F_2 = \epsilon_0^C \frac{t^{\beta}}{t_0^{\beta}} - \epsilon_V^{P2} = 0 \quad (\text{IV.54})$$

IV.7.2 - Potentiels plastiques; dilatance

Dans le cas de la déformation plane, le premier potentiel plastique s'écrit :

$$G_1 = r - t \sin \psi_m \quad (\text{IV.55})$$

avec ψ_m angle de dilatance.

ψ_m est défini pour le cas de déformation plane par :

$$\sin \psi_m = \frac{(\epsilon_1^{P1} + \epsilon_3^{P2})}{(-\epsilon_2^P + \epsilon_3^P)} \quad (\text{IV.56})$$

d'où :

$$\sin \psi_m = \frac{r-t \sin \phi_f}{t-r \sin \phi_f} \quad (\text{IV.57})$$

On note que, dans ce cas, on a :

$$\dot{\lambda} = \dot{k} \quad (\text{IV.58})$$

L'équation d'écoulement s'écrit alors (voir paragraphe I.6.1.B) :

$$\dot{\epsilon}^{P1} = \dot{k} \frac{\partial G_1}{\partial \underline{\sigma}}$$

Le deuxième potentiel est associé et par suite $G_2 = F_2$.

IV.7.3 - Rupture

La surface de charge de distorsion F_1 coïncide à la limite avec la surface de rupture de Coulomb :

$$F_p = r - t \sin \phi_p \quad (\text{IV.60})$$

IV.8 - Paramètres du modèle

Les cinq paramètres indépendants du modèle (G_0 , ϕ_{CV} , ϕ_p , β , ϵ_0^C) sont déterminés à partir d'essais triaxiaux.

$2G_0$ est la pente initiale de la courbe (γ , q) pour un essai avec pression isotrope p_0 constante. Après avoir choisi la pression de référence P_0 , ϵ_0^e est directement déterminé à partir de l'équation :

$$\varepsilon_c^e = \frac{3P_0}{2G_c} \quad (IV.61)$$

La valeur de ϕ_{cv} varie entre 30° et 35° pour un sable de quartz ; ϕ_p l'angle de frottement au pic est déterminé à partir de l'essai triaxial de compression (Eq. IV.16).

Les valeurs de P_0 et ε_0^e étant connues, on trace les courbes $(\eta, \gamma (\frac{P_0}{P})^\beta)$ pour différentes valeurs de σ_3 , et on détermine β par calage graphique (Fig. IV.5). Pour déterminer ε_0^c on utilise les résultats de l'essai de compression isotrope (Eq. IV.31 et IV.5), (Fig. IV.6) où la déformation totale volumique s'écrit :

$$\varepsilon_V = (\varepsilon_0^e + \varepsilon_0^c) \left(\frac{P}{P_0}\right)^\beta$$

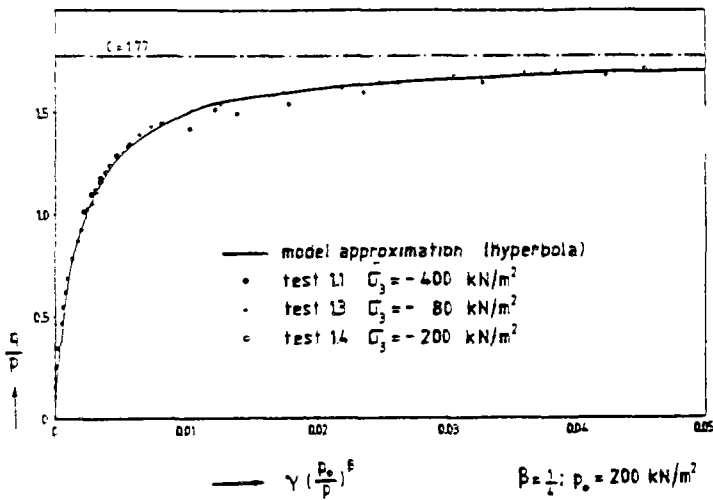


Fig. IV.5 - Coïncidence des déformations de cisaillement pour des essais triaxiaux de compression (Vermeer, 1982).

Vermeer (1978-1982) a comparé les résultats prédits par le modèle avec ceux obtenus à partir des essais : une bonne concordance.

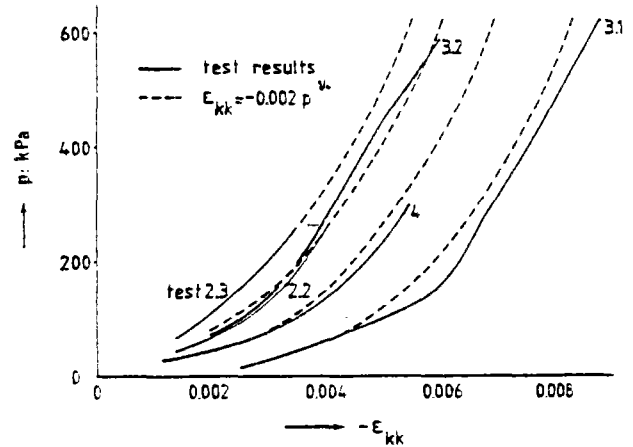


Fig. IV.6 - Valeurs des déformations volumiques mesurées et déterminées à partir du modèle de Vermeer pour des essais de compression isotrope (Vermeer, 1982).

IV.9 - Remarques sur le modèle de Vermeer

A) Le potentiel plastique simplifié est défini à partir de l'équation (IV.36) en annulant le troisième terme, d'où :

$$G_3 = -(A^* - 9)(a+P)^2 + \frac{1}{3}(A^* - 3)q^2 = 0 \quad (IV.62)$$

alors :

$$-(A^* - 9)(a+P)^2 + \frac{1}{2}(A^* - 3)\frac{2}{3}q^2 = 0 \quad (IV.63)$$

ou encore :

$$\frac{(a+P)^2}{\frac{2}{3}q^2} = \frac{\frac{1}{2}(A^* - 3)}{(A^* - 9)} \quad (IV.64)$$

En tenant compte des équations (IV.64) et (IV.34), on trouve :

$$\sqrt{\frac{2}{3}} q - P \frac{4 \sin \psi_m}{\sqrt{6+2 \sin^2 \psi_m}} = a \frac{4 \sin \psi_m}{\sqrt{6+2 \sin^2 \psi_m}} \quad (IV.65)$$

La première partie de cette équation est utilisée par l'auteur pour définir le potentiel plastique simplifié (IV.42).

$$G_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma - 4P \frac{\sin \psi_m}{\sqrt{6+2\sin^2 \psi_m}} \quad (\text{IV.66})$$

Dans un premier temps, nous avons calculé le paramètre "a" en nous servant de l'équation (IV.65). Pour les dérivées du potentiel plastique (Eq. IV.62), une telle définition de "a" conduit à des déformations volumiques plastiques presque nulles.

En ce qui concerne la programmation définitive, nous avons choisi l'expression du potentiel plastique définie en (IV.42), au lieu de (IV.36), ce qui évite d'avoir à calculer le paramètre "a" et il s'est avéré que les résultats théoriques ainsi trouvés dans le cas d'essais triaxiaux coïncidaient avec les résultats expérimentaux.

B) Le programme d'éléments finis mis au point par Kenter et Vermeer (1978) et Vermeer (1980) traite uniquement des problèmes en déformation plane. L'algorithme de calcul en plasticité créé par les auteurs est simplifié, car une fois que la surface de charge de consolidation est atteinte elle ne peut que s'écrouir (on ne peut plus se trouver dans le domaine élastique).

C) En tenant compte des équations (I.19) et (IV.42), le taux de déformation volumique plastique (pour la surface de charge de distorsion) s'écrit :

$$\dot{\epsilon}_V^{P1} = \dot{\lambda} \frac{-4\sin \psi_m}{\sqrt{6+2\sin^2 \psi_m}} \quad (\text{IV.67})$$

On constate que ce taux de déformation volumique et l'angle de dilatance ψ_m sont de signe opposé. L'angle ψ_m dépend de l'état de contrainte η . Pour des valeurs de η supérieures à η_c , ψ_m devient positif et le taux de déformation volumique devient négatif (dilatance positive).

D) Le paramètre de dilatance :

$$d = \frac{\text{taux de déformation plastique volumique}}{\text{taux de déformation plastique déviatorique}}$$

s'écrit, dans le cas tridimensionnel, en utilisant les équations (I.19, IV.42) pour le potentiel simplifié :

$$d = \frac{\dot{\epsilon}_V^{P1}}{\dot{\epsilon}_d^{P1}} = \frac{-4\sin \psi_m}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{6+2\sin^2 \psi_m}} \quad (\text{IV.68})$$

Dans le cas de l'essai triaxial on a (pour les notations, voir annexe) :

$$d = \frac{-(\dot{\epsilon}_1^{P1} + 2\dot{\epsilon}_3^{P1})}{\frac{2}{3}(-\dot{\epsilon}_1^{P1} + \dot{\epsilon}_3^{P1})} \quad (\text{IV.69})$$

Pour le cas de $\psi_m = 14^\circ$ (correspondant à une forte dilatance) on trouve :

- par les équations (IV.41) et (IV.69)

$$d = -0,53 ,$$

- par l'équation (IV.68)

$$d = -0,48 .$$

Ces deux valeurs sont du même ordre de grandeur.

E) Le modèle de Vermeer prend bien en compte l'influence de la nature du chargement sur les surfaces de charges actuelles. En effet quand l'état de contrainte est situé au point A (Fig. IV.7) les deux surfaces de charge s'écrouissent indépendamment.

Le chemin AD écrouit uniquement la surface de charge de distorsion, le chemin AB écrouit la surface de charge de consolidation et le chemin AC écrouit les deux surfaces en même temps.

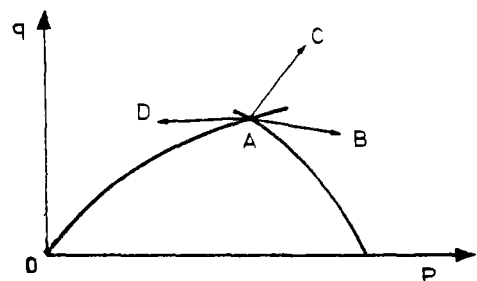


Fig. IV.7

Chapitre V

INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

V.1 - Introduction

Ce chapitre a pour objet de donner un court rappel sur la méthode des éléments finis. Cette méthode est maintenant classique et largement détaillée dans maints ouvrages (voir par exemple Zienkiewicz, 1971 ; Imbert, 1979 ; Dhatt et Touzot, 1981).

V.2 - Principe des travaux virtuels

Soit un corps solide S (Fig. V.1) déformable de volume V et de surface extérieure ∂S soumis à l'action de forces de volume f_i et de forces extérieures \bar{F}_i sur la surface ∂S_F et auquel on impose des déplacements \bar{U}_i sur la surface ∂S_U avec $\partial S = \partial S_U + \partial S_F$.

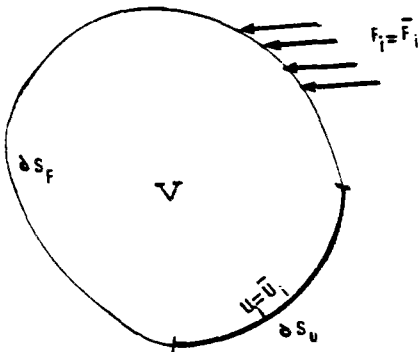


Fig. V.1

Définition :

Un champ de déplacement U_i est cinématiquement admissible pour un problème donné s'il est continu dans $S + \partial S$, continûment dérivable par morceaux dans S et vérifie les conditions aux limites : $U_i = \bar{U}_i$ sur ∂S_U .

Le principe des travaux virtuels consiste à écrire que, pour tous les champs cinématiquement admissibles, le travail virtuel des actions extérieures est égal au travail virtuel des actions intérieures, ce qui s'écrit :

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_V f_i U_i dV + \int_{\partial S} \bar{F}_i U_i dS \quad \forall U_i \quad (V.2)$$

avec σ_{ij} : tenseur des contraintes.

Si nous prenons U_i ($\bar{U}_i = 0$ sur ∂S_U) nous pouvons écrire :

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_V f_i U_i dV + \int_{\partial S_F} \bar{F}_i U_i dS \quad \forall U_i, \quad (V.3)$$

ce qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \int_V \underline{U}^T \underline{f} dV + \int_{\partial S_F} \underline{U}^T \underline{F} dS \quad \forall U_i. \quad (V.4)$$

V.3 - Méthode des éléments finis

(d'après Dhatt et Touzot, 1981)

V.3.1 - Définition

La méthode des éléments finis est une méthode qui permet de ramener un système continu à un système discret.

Un système est dit discret quand il possède un nombre fini de degrés de liberté (nombre de degrés de liberté est le nombre de paramètres nécessaires pour définir les variables à un instant donné.)

Un système est dit continu quand il possède un nombre infini de degrés de liberté.

Le principe de base de la méthode des éléments finis consiste à subdiviser le continuum en sous-domaines de formes relativement simples appelés éléments finis ; il est alors évident que la méthode des éléments finis calcule une approximation de la solution du problème.

V.3.2 - Discrétisation spatiale

On approxime les déplacements à l'intérieur d'un élément à l'aide des déplacements aux noeuds par des fonctions d'interpolation N

$$U_E = N U_G \quad (V.5)$$

est la matrice globale des déplacements nodaux. N est une matrice dont tous les termes sont nuls, excepté ceux qui permettent d'écrire aux noeuds de l'élément n°j l'égalité des composantes de U_E^j et U_G .

D'autre part, en petites déformations, on a :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right) ; \quad (V.6)$$

ce qui s'écrit :

$$\underline{\epsilon} = L U_E \quad (V.7)$$

avec :

L matrice de dérivation,

d'où, en tenant compte de l'équation (V.5) :

$$\underline{\epsilon} = B U_G$$

avec :

$$B = L N. \quad (V.9)$$

En introduisant l'équation V.7 dans l'équation des travaux virtuels (V.3), on trouve :

$$\int_V U_E^T L^T \underline{\sigma} dV = \int_V U_E^T f dV + \int_{\partial S_F} U_E^T \bar{F} dS. \quad (V.10)$$

En se servant de : $U_E = N U_G$ (V.5) et $B = L N$ (V.9), on obtient :

$$U_G^T \left[\int_V B^T \underline{\sigma} dV - F_G \right] = 0 \quad (V.11)$$

avec :

$$F_G = \int_{\partial S_F} N^T \bar{F} dS + \int_V N^T f dV. \quad (V.12)$$

Dans le cas de l'élasticité, on a :

$$\underline{\sigma} = D \underline{\epsilon} = D B U_G \quad (V.13)$$

et l'équation (V.11) s'écrit :

$$\underline{R}_G = R_G U_G \quad (V.14)$$

où :

$$R_G = \int_V B^T D B dV \quad (V.15)$$

est la matrice de rigidité de comportement élastique généralisée,

U_G est le vecteur de déplacements nodaux,

F_G est le vecteur des forces nodales.

L'inversion de l'équation matricielle (V.14) permet d'obtenir les déplacements U_G à partir des forces F_G . En utilisant (V.13) on obtient également les contraintes. La résolution de l'équation (V.14) est la base de la

méthode des éléments finis. Dans le cas d'un problème non linéaire (géométriquement ou mécaniquement), cette équation doit être résolue plusieurs fois pour un incrément de chargement donné, en jouant soit sur R_G et sur F_G (méthode de rigidité), soit sur F_G tout seul (méthode de force) (voir chapitre VI.4). Ces matrices prennent alors, bien évidemment, une signification différente du cas présenté ici, à savoir le cas des petites déformations élastiques.

Chapitre VI

RÉSOLUTION PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS DES PROBLÈMES D'ÉLASTOPLASTICITÉ

VI.1 - Introduction

L'équation du comportement élastoplastique s'écrit (Eq. I.29) :

$$\Delta \underline{\sigma} = [D - \alpha D^P] \Delta \underline{\epsilon} . \quad (\text{VI-1})$$

D est la matrice d'élasticité et D^P est la matrice définie par (I.28) ; α est défini dans l'équation (I.26.a).

Cette équation montre que l'incrément $\Delta \underline{\sigma}$ dépend de l'incrément des déformations $\Delta \underline{\epsilon}$, de l'allure du chemin des déformations et de l'état de contraintes. Pour résoudre cette équation, différents schémas d'intégration numérique peuvent être utilisés.

Dans les paragraphes qui suivent, nous présentons brièvement quelques schémas d'intégration numérique des problèmes d'élasto-plasticité (Vermeer, 1980 ; Besseling, 1975 ; Owen et Hinton, 1980) . Ensuite, nous développerons le schéma utilisé pour introduire le modèle de Nova et le modèle de Vermeer dans le programme d'éléments finis ROSALIE du L.C.P.C. (chapitre VII).

VI.2 - Schémas d'intégration numérique

VI.2.1 - Schéma du module tangent

Prenons l'état de contrainte initial $\underline{\sigma}_0$ dans le domaine élastique (alors $F(\underline{\sigma}_0) < 0$) et appliquons l'incrément de charge ΔF (ou $\Delta \underline{\sigma}$). Si l'état des contraintes $\underline{\sigma}_1^e$, tel que :

$$\underline{\sigma}_1^e = \underline{\sigma}_0 + \Delta \underline{\sigma} \quad (\text{VI.2})$$

avec :

$$\Delta \underline{\sigma} = D \Delta \underline{\epsilon}$$

est dans le domaine élastique :

$F(\underline{\sigma}_1^e) = F(\underline{\sigma}_0 + \Delta \underline{\sigma}) \leq 0$ et toutes les déformations sont élastiques ($\Delta \underline{\epsilon} = \Delta \underline{\epsilon}^e$). Sinon $F(\underline{\sigma}_1^e) > 0$, il existe un état de contraintes $\underline{\sigma}_c$ sur le segment $(\underline{\sigma}_0, \underline{\sigma}_1^e)$ (Fig. VI.1) tel que $F(\underline{\sigma}_c) = 0$. Cet état de contraintes s'appelle "l'état transitoire" (Owen et Hinton, 1980 ; Vermeer, 1980 ; Nayak et Zienkiewicz, 1972) ($\underline{\sigma}_c$ est le point d'intersection du vecteur $(\underline{\sigma}_0, \underline{\sigma}_1^e)$ et de la surface de charge initiale).

L'incrément de déformation $\Delta \underline{\epsilon}_c$ nécessaire pour arriver à l'état transitoire $\underline{\sigma}_c$ s'écrit (Eq. I.13) :

$$\Delta \underline{\epsilon}_c = D^{-1} (\underline{\sigma}_c - \underline{\sigma}_0) \quad (\text{VI.3})$$

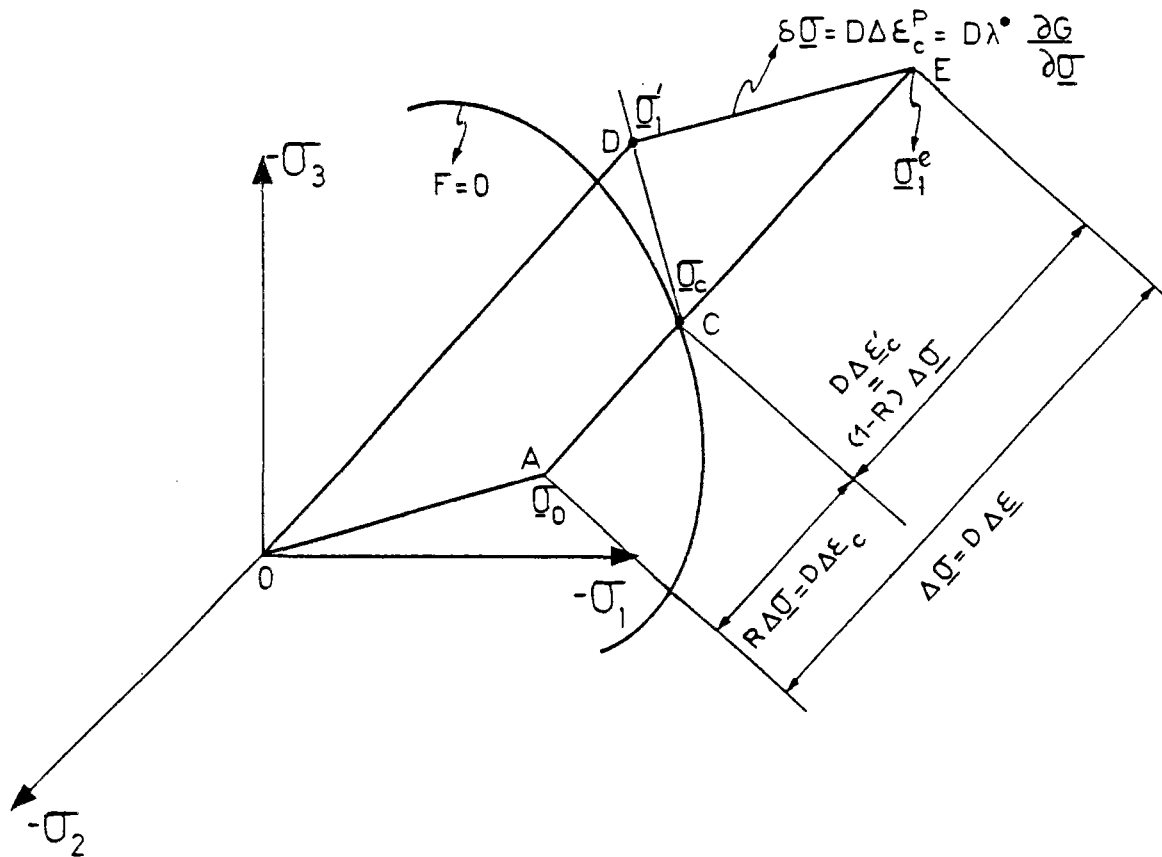


Fig. VI.1 - Schéma du module tangent (d'après Owen et Hinton, 1980).

avec :

$$\underline{\sigma}_c = \underline{\sigma}_0 + R \Delta \underline{\sigma} \quad ; \quad R = \frac{AC}{AE} \quad (VI.4)$$

Il existe des méthodes approximatives pour calculer le coefficient R (Owen et Hinton, 1980 ; etc.). Siriwardane et Desai (1983) proposent une formulation exacte dans le cas du modèle de Drucker-Prager et du modèle de Cam-Clay modifié :

$$AR^2 + 2BR + C = 0 \quad (VI.5)$$

L'équation (VI.5) est obtenue à partir de l'équation $F(\underline{\sigma}_0 + R \Delta \underline{\sigma}) = 0$. A, B et C dépendent des paramètres du modèle, de l'état de contrainte et de l'incrément de contrainte.

L'état final de contrainte ($\underline{\sigma}'_1$) dans le schéma du module tangent simplifié s'écrit :

$$\underline{\sigma}'_1 = \underline{\sigma}_c + [D - \alpha D^P] [\Delta \underline{\epsilon} - \alpha \Delta \underline{\epsilon}_c] \quad (VI.6)$$

La matrice D^P est calculée à partir de l'équation (I.28) pour $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_c$; $\alpha = 1$ pour $F > 0$, sinon $\alpha = 0$.

Posons (Fig. VI.1) :

$$\Delta \underline{\epsilon}'_c = \Delta \underline{\epsilon} - \alpha \Delta \underline{\epsilon}_c \quad (VI.7)$$

alors :

$$\underline{\sigma}'_1 = \underline{\sigma}_c + [D - \alpha D^P] [\Delta \underline{\epsilon}'_c] \quad (VI.8)$$

ce qui s'écrit, en tenant compte de l'équation (VI.3) :

$$\underline{\sigma}'_1 = \underline{\sigma}_0 + D\Delta\underline{\varepsilon}_c + D\Delta\underline{\varepsilon}'_c - \alpha D^P \Delta\underline{\varepsilon}'_c \quad (\text{VI.9})$$

ou encore, en utilisant l'équation (I.28.a) :

$$D^P \Delta\underline{\varepsilon}'_c = \lambda D \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} \right)_c \quad (\text{VI.10})$$

$\left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} \right)_c$ étant déterminé au point c,

et l'équation (VI.7), on obtient :

$$\underline{\sigma}'_1 = \underline{\sigma}_0 + D\Delta\underline{\varepsilon} - \alpha \lambda D \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} \right)_c \quad (\text{VI.11})$$

En posant :

$$\delta\underline{\sigma}'_1 = -\alpha \lambda D \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} \right)_c = -\alpha D \Delta\underline{\varepsilon}_c^P \quad (\text{VI.12})$$

on trouve :

$$\underline{\sigma}'_1 = \underline{\sigma}_1^e + \delta\underline{\sigma}'_1 \quad (\text{VI.13})$$

Les déformations plastiques dans ce schéma s'écrivent :

$$\Delta\underline{\varepsilon}_c^P = \Delta\underline{\varepsilon}'_c - \Delta\underline{\varepsilon}_c^e, \quad (\text{VI.14})$$

avec $\Delta\underline{\varepsilon}_c^e$: déformations élastiques entre le point c et le point D. On a alors

$$\Delta\underline{\varepsilon}_c^e = D^{-1} (\underline{\sigma}'_1 - \underline{\sigma}_c) \quad (\text{VI.15})$$

d'où, en tenant compte de l'équation (VI.6) :

$$\begin{aligned} \Delta\underline{\varepsilon}_c^P &= \Delta\underline{\varepsilon}'_c - D^{-1} (D - \alpha D^P) (\Delta\underline{\varepsilon}_c - \alpha \Delta\underline{\varepsilon}_c^P) \\ &= \Delta\underline{\varepsilon}'_c - D^{-1} (D - \alpha D^P) \Delta\underline{\varepsilon}'_c \\ &= \alpha \left[D^{-1} D^P \right]_c \Delta\underline{\varepsilon}'_c \end{aligned} \quad (\text{VI.16})$$

En général, cette valeur est plus petite que la valeur réelle de la déformation

plastique, car l'état $\underline{\sigma}'_1$ n'est pas sur la surface de charge.

$([])_c$ signifie que la matrice est calculée au point c)

On peut montrer que, pour des matériaux parfaitement plastiques, avec un potentiel associé, le vecteur $(\underline{\sigma}'_1 - \underline{\sigma}_c)$ est tangent au point c à la surface de charge.

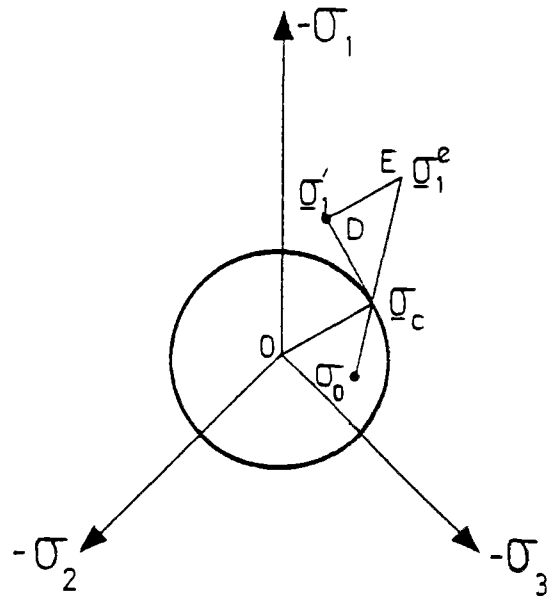


Fig. VI.2 - Schéma du module tangent pour une loi de comportement associée (Tresca).

La taille de l'incrément pour ce type de schéma doit être suffisamment petite pour que l'écart entre $\underline{\sigma}'_1$ et la surface de charge soit minimal, surtout lorsqu'il y a rotation des axes principaux de contraintes, ou lorsqu'il y a une forte courbure au point c (Vermeer, 1980).

Pour diminuer cet écart on peut par exemple appliquer l'incrément de contrainte en plusieurs "sous-incréments" ou étapes (Owen et Hinton, 1980). La figure (VI.3) montre cette méthode pour le cas où l'incrément est décomposé en trois étapes. L'état final des

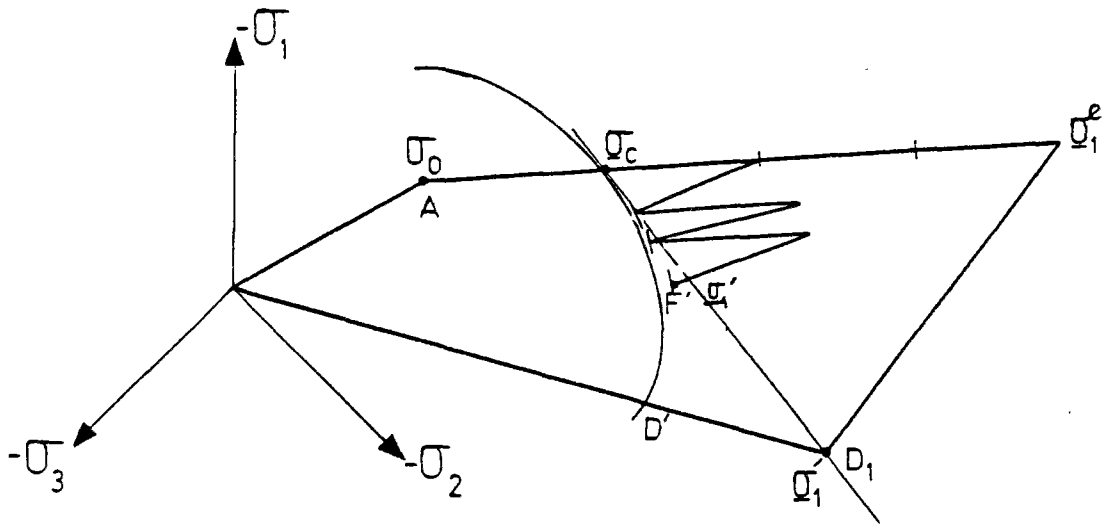


Fig. VI.3 - Schéma du module tangent appliqué en plusieurs étapes. (Owen et Hinton, 1980).

contraintes se trouve au point F' (à la place de D_1 pour la fin de la troisième étape).

VI.2.2 - Schéma de retour du module tangent

Ce schéma a pour but de ramener l'état $\underline{\sigma}'_1$ sur la surface de charge. Pour cela, on ajoute une correction de contrainte à $\underline{\sigma}'_1$ définie précédemment. L'état final s'écrit alors :

$$\underline{\sigma}^1 = \underline{\sigma}'_1 + \delta \underline{\sigma}^2 \quad (\text{VI.17})$$

avec :

$$\delta \underline{\sigma}^2 = - \lambda \left(\frac{\delta F}{\delta \underline{\sigma}} \right)_{\underline{\sigma}'_1} \quad (\text{VI.18})$$

et :

$$\underline{\sigma}'_1 = \underline{\sigma}_c + [D - \alpha D^P] [\Delta \underline{\epsilon}'_c], \quad (\text{VI.19})$$

λ étant déterminé par l'équation $f(\underline{\sigma}^1) = 0$.

Ce schéma suppose que la correction $\delta \underline{\sigma}^2$ est normale à la surface de charge $\underline{f} = 0$.

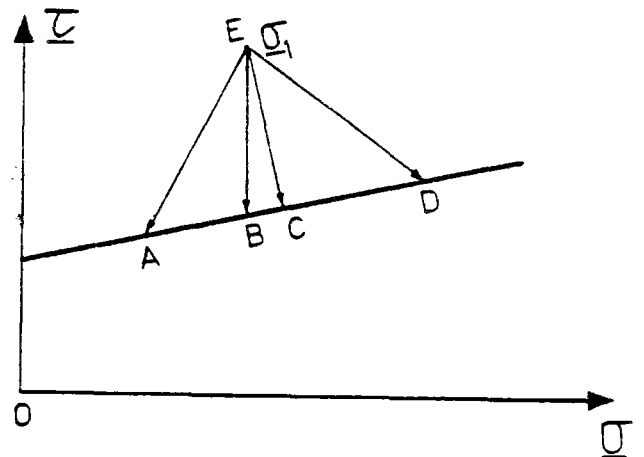


Fig. VI.4 - Schémas de retour du module tangent pour le critère de Coulomb, d'après Christian et al. (1977).

Christian et al. (1977) analysent différents chemins de retour pour le critère de Coulomb (Fig. VI.4). Ils constatent que les résultats obtenus sont sensibles à la manière dont on ramène l'état de contrainte $\underline{\sigma}'_1$ sur la surface de charge. Nous insistons sur ce phénomène dans le cas des modèles écrouissables (paragraphe VII.7).

VI.2.3 - Schéma de retour du module tangent modifié (Vermeer, 1980)

Dans les schémas présentés auparavant, les directions des déformations plastiques étaient déterminées au point $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_c$ ou $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}'_1$. En général, les directions des déformations plastiques au début et à la fin du pas de chargement (respectivement $\left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right)_c$ et $\left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right)_1$) ne coïncident pas. Evidemment, la variation des directions des déformations plastiques influence la position finale des contraintes $\underline{\sigma}'_1$ (voir aussi le schéma suivant).

Vermeer (1980) propose une méthode qui consiste à assurer que la variation de déformation plastique ait la forme :

$$\Delta \underline{\varepsilon}^P = \dot{\lambda}^c \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right)_c + \dot{\lambda}^1 \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right)_1 \quad (VI.20)$$

avec :

$$\dot{\lambda}^c > 0 \quad , \quad \dot{\lambda}^1 \geq 0 .$$

Si on considère que le vecteur de retour $\underline{\sigma}'_1 - \underline{\sigma}'_c$ provoque une diminution de déformation élastique égale à l'augmentation de

déformation plastique (fig. VI.5), ce qui s'écrit :

$$- D^{-1} (\underline{\sigma}'_1 - \underline{\sigma}'_c) = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}$$

alors on obtient :

$$\underline{\sigma}'_1 = \underline{\sigma}'_c - \dot{\lambda} D \frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}$$

$\dot{\lambda}$ sera obtenu à partir de l'équation :

$$F(\underline{\sigma}'_1) = F(\underline{\sigma}'_c - \dot{\lambda} D \frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}) = 0$$

(voir le schéma suivant) .

Ici, la direction $\left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right)$ peut être déterminée pour $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}'_1$ ou $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}'_c$, mais pour les modèles du type Coulomb, l'utilisation du point $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}'_c$ peut amener à des divergences (Vermeer, 1980).

En prenant en compte l'équation (VI.16), la variation des déformations plastiques s'écrit :

$$\Delta \underline{\varepsilon}^P = \left[D^{-1} D^P \right]_c \Delta \underline{\varepsilon}'_c + \dot{\lambda}^1 \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right)_1 \quad (VI-21)$$

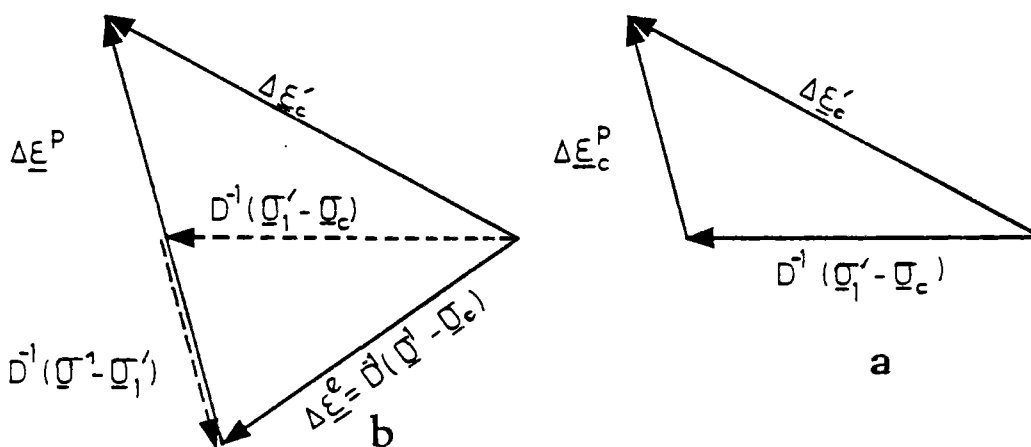


Fig. VI.5 - Division de l'incrément de déformation élastique et plastique (Vermeer, 1980)

- a) pour arriver à $\underline{\sigma}'_1$,
- b) état final.

Dans le cas où les directions des déformations plastiques $\left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right)$ pour $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^1$ et pour $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_c$ coïncident, l'équation s'écrit :

$$\Delta \underline{\varepsilon}^P = \dot{\lambda}^c \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right)_c + \dot{\lambda} \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right)_1.$$

Cette équation montre que la direction des déformations plastiques est entre les deux extrêmes $\left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right)_c$ et $\left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right)_1$.

Ce type de corrections ne peut pas être utilisé quand $\underline{\sigma}_1$ se trouve au delà de la pointe du cône d'un critère du type Coulomb, car cela fait aboutir à des points $\underline{\sigma}^1$ en dehors du cône alors que l'état final correct de $\underline{\sigma}^1$ doit être situé sur la pointe du cône.

VI.2.4 - Schéma de retour du module tangent simplifié

La différence entre le schéma du module tangent simplifié et le schéma précédent est l'absence de la correction plastique $[D^{-1}D^P]_c \Delta \underline{\varepsilon}'_c$. Nous n'avons pas besoin de déterminer le point d'intersection du vecteur $(\underline{\sigma}_0, \underline{\sigma}_1^e)$ et de la surface de charge (Fig. VI.6). L'état de contrainte après une correction plastique s'écrit :

$$\underline{\sigma}^1 = \underline{\sigma}_1^e + \delta \underline{\sigma} \quad (VI.22)$$

$$\underline{\sigma}_1^e = \underline{\sigma}_c + \Delta \underline{\sigma}$$

avec :

$$\delta \underline{\sigma} = - \dot{\lambda} D \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right). \quad (VI.22.a)$$

Pour un matériau écrouissable, le multiplicateur $\dot{\lambda}$ est calculé à partir de l'équation :

$$F(\underline{\sigma}^1, R) = 0 \quad (VI.23)$$

avec :

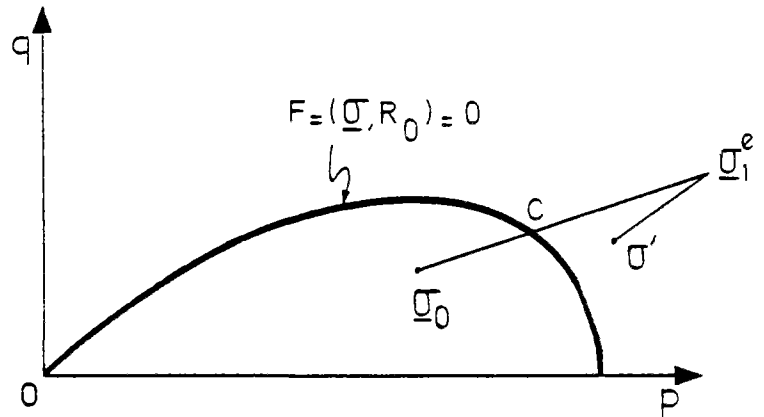


Fig. VI.6 - Schéma de retour du module tangent simplifié.

$R_1 = R_0 + \Delta R$: paramètre d'écrouissage,

d'où :

$$F(\underline{\sigma}_1^e + \delta \underline{\sigma}, R_0 + \Delta R) = 0 \quad (VI.24)$$

Un développement de Taylor de F au voisinage de $(\underline{\sigma}_1^e, R)$ donne :

$$F(\underline{\sigma}_1^e + \delta \underline{\sigma}, R_0 + \Delta R) = F(\underline{\sigma}_1^e, R_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T \delta \underline{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial R} \Delta R + O^2(\underline{\sigma}, R) = 0 \quad (VI.25)$$

En tenant compte des équations (I.8) et (VI.22.a), on obtient :

$$F(\underline{\sigma}_1^e, R_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T D \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right) \dot{\lambda} + \dot{\lambda} H \quad (VI.26)$$

d'où :

$$\dot{\lambda} = \frac{F(\underline{\sigma}_1^e, R_0)}{H + \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T D \frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}} \quad (VI.27)$$

Dans les schémas présentés auparavant, la direction $\left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right)$ peut être déterminée pour $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_c$ ou $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_1^e$ alors qu'ici on est obligé d'utiliser $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_1^e$.

En ce qui concerne le paramètre d'é-crouissage, dans l'équation (VI.27) on est obligé d'utiliser R_0 (paramètre d'é-crouissage au début du pas de charge) car R est inconnu a priori. Par contre, on considère la valeur de F au point $\underline{\sigma}_1^e$ car, si on la considèrait au point $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_0$, on aurait $F(\underline{\sigma}_0, R_0) \leq 0 + \lambda \leq 0$.

L'équation (VI.27) s'écrit alors :

$$\dot{\lambda} = \frac{F(\underline{\sigma}_1^e, R_0)}{H + \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T_{\underline{\sigma}=\underline{\sigma}_1^e} \bar{D} \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right)_{\underline{\sigma}=\underline{\sigma}_1^e}} \quad (VI.28)$$

Nous verrons que le calcul de $\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}$ en utilisant $(\underline{\sigma}_1^e, R_0)$, quand l'incrément de charge est très grand, n'est pas bien justifié (voir paragr. VII.7). En fait, cette direction n'est ni normale à la surface de charge initiale ni à la surface de charge actuelle.

L'influence des autres paramètres de l'équation (VI.28) sera aussi étudiée.

$\dot{\lambda}$ pour le cas de la plasticité parfaite

Pour le cas de la plasticité parfaite ($H = 0$), l'équation (VI.28) s'écrit :

$$\dot{\lambda} = \frac{F(\underline{\sigma}_1^e)}{\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T D \frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}} \quad (VI.29)$$

avec :

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} \text{ obtenu pour } \underline{\sigma} = \underline{\sigma}_1^e$$

ou encore pour le potentiel associé :

$$\dot{\lambda} = \frac{F(\underline{\sigma}_1^e)}{\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T D \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}} \quad (VI.30)$$

(F et $\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}$ sont calculés pour $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_1^e$).

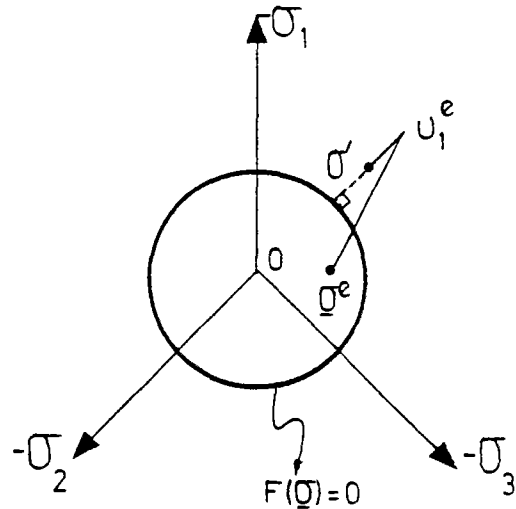


Fig. VI.7 - Schéma de retour du module tangent pour un potentiel associé (Tresca).

Quand l'incrément de charge est suffisamment petit, la direction des déformations plastiques obtenue, par ce schéma, ne diffère pas beaucoup de celle obtenue théoriquement (Fig. VI-7).

En résumé, le schéma est illustré dans la figure (VI.8).

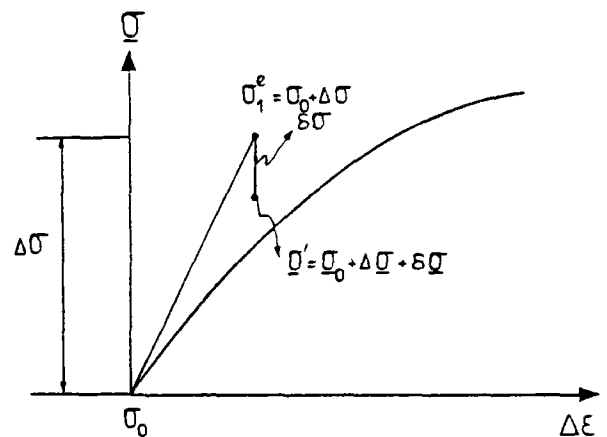


Fig. VI.8 - Schéma de retour du module tangent simplifié.

Comme nous l'avons indiqué plus haut, les déformations plastiques obtenues dans ce schéma sont sous-estimées et l'état $\underline{\sigma}'$ n'est pas sur la surface de charge.

Guellec (1976-1977) propose une méthode qui consiste à calculer λ pour l'itération i par une suite d'itérations internes j de telle manière que :

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_1^e + \sum_{j=1}^m \dot{\epsilon}_i^j \underline{\sigma} \quad (\text{VI.31})$$

satisfasse $F(\underline{\sigma}, R) = 0$

m étant le nombre d'itérations internes.

L'algorithme de ce schéma avec itérations internes pour un matériau écrouissable est le suivant :

$$\dot{\lambda}_i^j = \frac{F(\underline{\sigma}_i^{j-1}, R_i^{j-1})}{R_i^{j-1} + \frac{\partial F(\underline{\sigma}_i^{j-1}, R_i^{j-1})}{\partial \underline{\sigma}} D \frac{\partial G(\underline{\sigma}_i^{j-1}, R_i^{j-1})}{\partial \underline{\sigma}}}$$

$$\dot{\epsilon}_i^j = \dot{\epsilon}_i^{j-1} + \dot{\lambda}_i^j \frac{\partial G(\underline{\sigma}_i^{j-1}, R_i^{j-1})}{\partial \underline{\sigma}}$$

$$j = 1, m \quad R_i^j = R_i^{j-1} + \Delta_i^j R$$

$$\dot{\epsilon}_i^j \underline{\sigma} = \dot{\lambda}_i^j D \frac{\partial G(\underline{\sigma}_i^{j-1}, R_i^{j-1})}{\partial \underline{\sigma}}$$

$$\underline{\sigma}_i^j = \underline{\sigma}_i^{j-1} + \dot{\epsilon}_i^j \underline{\sigma}$$

j est le rang de l'itération interne.

Les déformations plastiques totales et l'état de contraintes $\underline{\sigma}$ à la fin des m itérations internes ou à la fin de l'itération i s'écrivent :

$$\dot{\epsilon}_i^P = \dot{\epsilon}_{i-1}^P + \sum_{j=1}^m \dot{\lambda}_i^j \frac{\partial G(\underline{\sigma}_i^{j-1}, R_i^{j-1})}{\partial \underline{\sigma}} \quad (\text{VI.32})$$

$$\underline{\sigma}_i = \underline{\sigma}_{i-1} + D \sum_{j=1}^m \dot{\lambda}_i^j \frac{\partial G(\underline{\sigma}_i^{j-1}, R_i^{j-1})}{\partial \underline{\sigma}} + \Delta \dot{\epsilon}_i^P \quad (\text{VI.33})$$

Nous avons analysé aussi le rôle des itérations internes et nous avons pu constater que l'utilisation de cette méthode peut aboutir, dans certains cas, à des résultats bien différents des résultats obtenus analytiquement.

VI.2.5 - Choix du schéma

Dans les premiers schémas présentés (paragraphe VI.2.1 à VI.2.3), il faut calculer la matrice D^P , ainsi que le point d'intersection $\underline{\sigma}_c$. Cela n'est pas toujours aisé et peut augmenter le temps de calcul.

Dans le dernier schéma le problème ne se pose pas. Par contre, la convergence est plus lente, même en utilisant des itérations internes. Le choix du schéma doit être fait suivant l'importance et le type du problème, car une mauvaise convergence, donc une mauvaise estimation des déformations, peut avoir des conséquences appréciables sur l'analyse du problème (la déformation volumique quand il s'agit d'un sol dilatant ou d'un sol avec de l'eau interstitielle, par exemple).

A notre avis le dernier schéma doit être utilisé avec prudence. En effet, pour obtenir des déformations plastiques proches de la réalité, le nombre d'itérations doit être petit afin d'obtenir des directions de déformation plastique quasiment normales au potentiel plastique actuel.

VI.3 - Convergence pour un modèle avec deux surfaces de charge

Pour un modèle avec deux surfaces de charge et quand les deux surfaces de charge $F = 0$ et $V = 0$ sont "actives", l'équation d'écoulement (I.24) s'écrit :

$$\dot{\epsilon}^P = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial G_1}{\partial \underline{\sigma}} + \dot{\lambda}_2 \frac{\partial G_2}{\partial \underline{\sigma}} \quad (\text{VI.34})$$

avec $\dot{\lambda}_1 \geq 0$ et $\dot{\lambda}_2 \geq 0$.

Pour obtenir la convergence dans ce cas, nous avons étudié les trois procédés suivants, la méthode utilisée étant la méthode de force avec schéma du module tangent simplifié (voir paragraphe VI.2.4).

1) Les corrections de contrainte relatives aux deux surfaces de charge sont déterminées à partir du même état des contraintes $\underline{\sigma}_1^e$ [$F(\underline{\sigma} + \delta\underline{\sigma}_1) = 0$ et $V(\underline{\sigma} + \delta\underline{\sigma}_2) = 0$]; la correction de contrainte totale après la première itération s'écrit (Fig. VI.9) :

$$\delta\underline{\sigma} = \delta\underline{\sigma}_1 + \delta\underline{\sigma}_2 \quad (\text{VI.35})$$

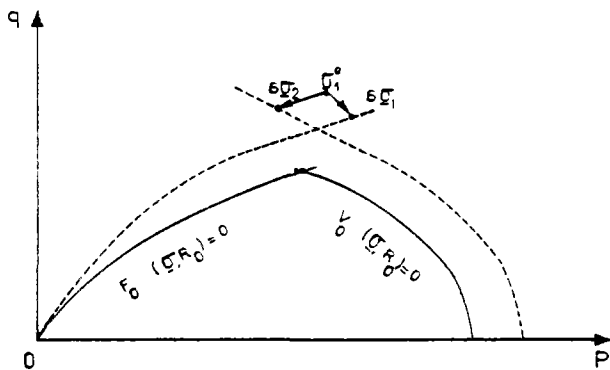


Fig. VI. 9 - Correction de contrainte à partir du même point $\underline{\sigma}_1^e$.

et les déformations plastiques s'écrivent :

$$\Delta\underline{\varepsilon}^P = \Delta\underline{\varepsilon}_1^P + \Delta\underline{\varepsilon}_2^P.$$

Dans cette méthode, l'état des contraintes $\underline{\sigma}_1^e + \delta\underline{\sigma}_1$ se situe sur la première surface de charge et l'état $\underline{\sigma}_1^e + \delta\underline{\sigma}_2$ se situe sur la deuxième surface de charge ; mais, $\underline{\sigma}' = \underline{\sigma}_1^e + \delta\underline{\sigma}_1 + \delta\underline{\sigma}_2$ n'est situé généralement sur aucune de ces deux surfaces.

2) Dans la deuxième méthode, on considère d'abord l'une des deux surfaces de charge et on fait toutes les itérations nécessai-

res pour ramener l'état de contraintes $\underline{\sigma}_1^e$ sur cette surface ($\underline{\sigma}'$), tel que le principe des travaux virtuels soit satisfait ; les corrections sont ensuite calculées d'une manière identique pour ramener $\underline{\sigma}'$ sur la deuxième surface de charge ($\underline{\sigma}''$) (Fig. VI.10 a).

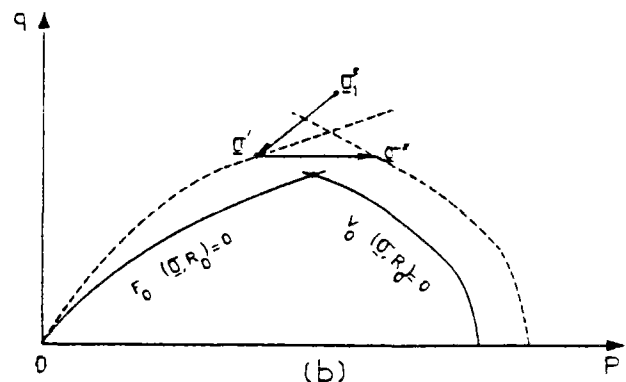
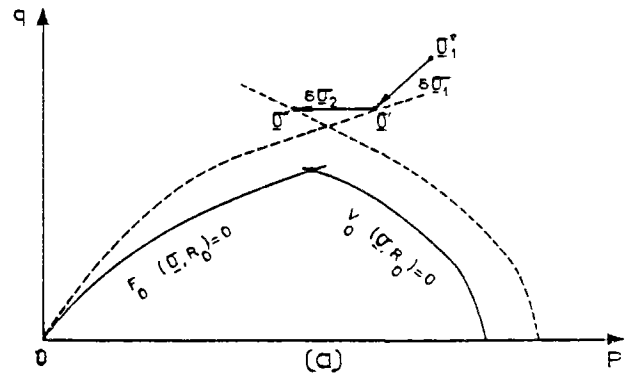


Fig. VI.10.

Le temps de calcul nécessaire pour cette méthode est très grand, car une fois $\underline{\sigma}'$ déterminé, il faut reprendre le procédé. Un risque se présente aussi, c'est que l'état de contrainte $\underline{\sigma}'$ ou $\underline{\sigma}''$ se trouve dans le domaine élastique de l'autre surface de charge. (Fig. VI.10.b); dans ce cas, le calcul s'arrête sans que le critère pour cette surface soit nul.

3) La troisième méthode consiste à calculer les corrections de contraintes simultanément (pendant l'itération) pour les deux surfaces de charge, c'est-à-dire qu'on calcule d'abord $\delta\underline{\sigma}_1$ en utilisant $\underline{\sigma}_1^e$ ($F(\underline{\sigma}_1^e + \delta\underline{\sigma}_1) = 0$),

ensuite on calcule $\delta\sigma_2$ avec $\underline{\sigma}' = \underline{\sigma}_1^e + \delta\sigma_1$,
 $(V(\underline{\sigma}'_1 + \delta\sigma_1 + \delta\sigma_2) = 0)$.

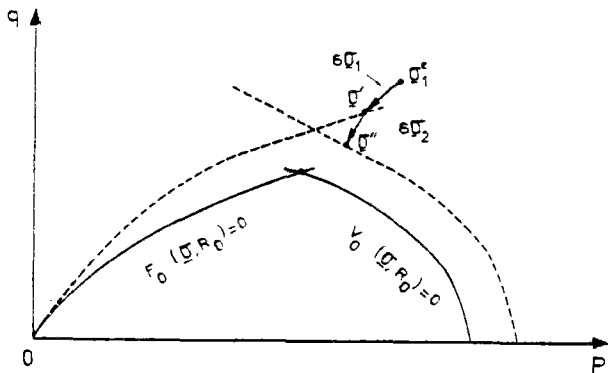


Fig. VI.11 - Corrections sont faites pendant une itération interne.

La correction de contrainte totale à appliquer est alors :

$$\delta\sigma = \delta\sigma_1 - \delta\sigma_2$$

l'état $\underline{\sigma}''$ se trouve sur la deuxième surface de charge, et il n'est pas très loin de la première surface de charge car, en général, $\delta\sigma_1$ est plus grand que $\delta\sigma_2$.

En ce qui concerne le modèle de Vermeer nous avons choisi cette méthode car elle nécessite moins de temps de calcul, tout en étant aussi simple à programmer.

VI.4 - Méthode de force ; méthode de rigidité

Comparaison des deux méthodes

L'équation (I.29) n'est pas linéaire car la matrice D^P dépend de l'état actuel des contraintes. Pour résoudre le système d'équations qui en découle, plusieurs techniques itératives existent. La méthode de Newton-Raphson (méthode de rigidité) et la méthode de Newton-Raphson modifiée (méthode de force) sont les deux méthodes les plus utilisées pour le traitement du problème par les éléments finis.

Dans la méthode de Newton-Raphson, la matrice de rigidité est déterminée et inversée à chaque itération (Fig. VI.12.a) (Zienkiewicz, 1971 ; Dhatt et Touzot, 1981 ; Yuritzinn, 1981). Cette matrice est calculée et inversée une seule fois (Fig.VI.12.b) dans la méthode de Newton-Raphson modifiée. La méthode de force ainsi que la méthode de rigidité peuvent être utilisées pour tous les schémas qui ont été présentés.

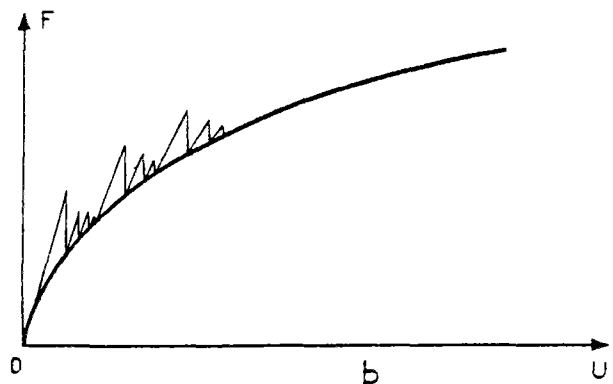
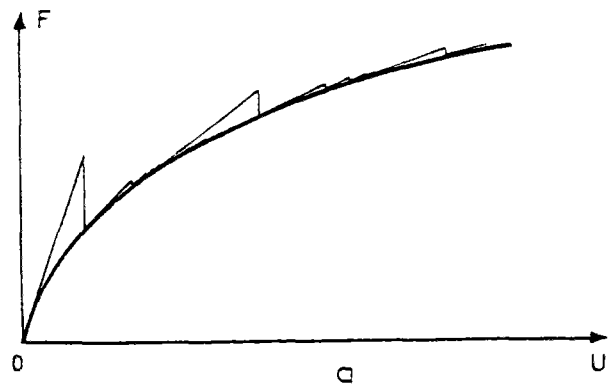


Fig. VI.12 - a) Méthode de rigidité,
 b) Méthode de force.

Dans les deux méthodes, on admet à la première itération que l'état de contrainte se trouve à l'intérieur du domaine d'élasticité ; dans les itérations suivantes on vérifie si le critère est violé, auquel cas on calcule les corrections de contraintes $\delta\sigma$ suivant le schéma choisi. On applique alors $\delta\sigma$ sous forme de forces initiales. Il en ré-

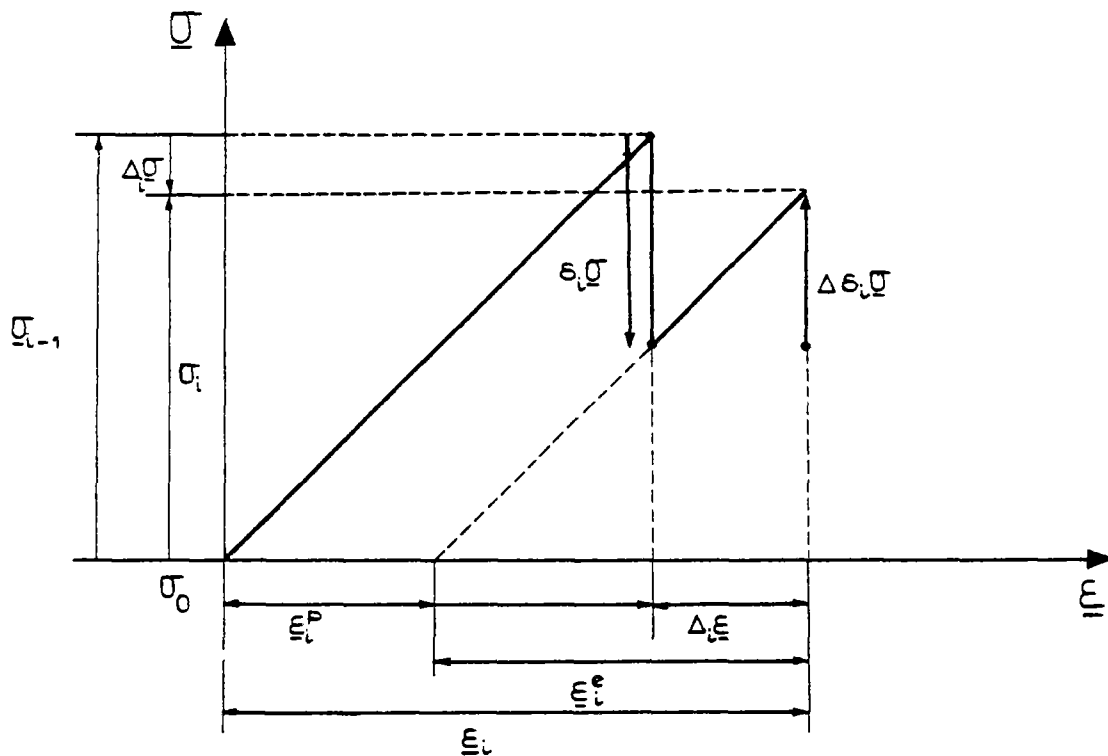


Fig. VI.13

suite un incrément de déformation $\Delta \underline{\varepsilon}$ et de contrainte $\Delta \delta \underline{\sigma}$. La nouvelle position d'équilibre après l'itération numéro i s'écrit alors (Fig. VI.13) :

$$\underline{\sigma}_i = \underline{\sigma}_{i-1} + \delta_i \underline{\sigma} + \Delta \delta_i \underline{\sigma} \quad (\text{VI.36})$$

$$\underline{\varepsilon}_i = \underline{\varepsilon}_{i-1} + \Delta_i \underline{\varepsilon} \quad (\text{VI.37})$$

Comparaison des deux méthodes

Vermeer (1980) a comparé les deux méthodes en utilisant le schéma de retour du module tangent.

Dans les deux cas, le temps de calcul est du même ordre de grandeur. Dans la méthode de force (Newton-Raphson modifiée) le nombre d'itérations est compris entre 10 et 25, pour $\Delta U_0 = 0$, ΔU_0 étant la première approximation de ΔU . Il est de l'ordre de 8 quand $\Delta U_0 \neq 0$. Pour la méthode de rigidité (Newton-Raphson), on a de deux à quatre itérations.

La méthode de force nécessite donc un plus grand nombre d'itérations, mais il est parfois plus économique de conserver la même matrice de rigidité pendant le calcul.

En général, on peut dire que la méthode de rigidité est avantageuse pour l'élasticité non linéaire et que la méthode de force est avantageuse en élastoplasticité, quand on s'approche de la charge limite (la méthode de rigidité devient alors singulière).

VI.5 - Méthode utilisée dans ROSALIE

La méthode implantée dans ROSALIE (voir Chap. VII) pour la résolution des problèmes d'élastoplasticité est la méthode de force avec le schéma de retour du module tangent simplifié (Guellec, 1976-1977).

Pour introduire les modèles de Nova et de Vermeer, nous avons utilisé la même méthode (voir les tests de convergence au paragraphe VII.7).

Chapitre VII

PROGRAMMATION DES MODÈLES CHOISIS

VII.1 - Introduction au programme ROSALIE

Le programme (ou système) ROSALIE est un ensemble de programmes de calcul par la méthode des éléments finis. Réalisé au sein du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées par une équipe d'ingénieurs spécialisés (Guellec, Humbert et Ricard ; 1976), il comprend aujourd'hui :

- 14 sous-ensembles appelés "Groupes" dont chacun couvre un certain domaine de problèmes (massifs, poutres, coques, etc.) ;
- 3 modules de maillage ;
- un système de vérification du maillage et des données du calcul, appelé Test, composé de 14 modules correspondant aux 14 groupes ;
- un programme d'impression des résultats sous forme graphique, Trace, composé également de 14 modules.

Le schéma de la figure (VII.1) représente la structure d'ensemble des différentes parties du programme. Pour plus de détails, voir Guellec et Ricard (1974) ; Guellec (1976) et Guellec, Humbert et Ricard (1976).

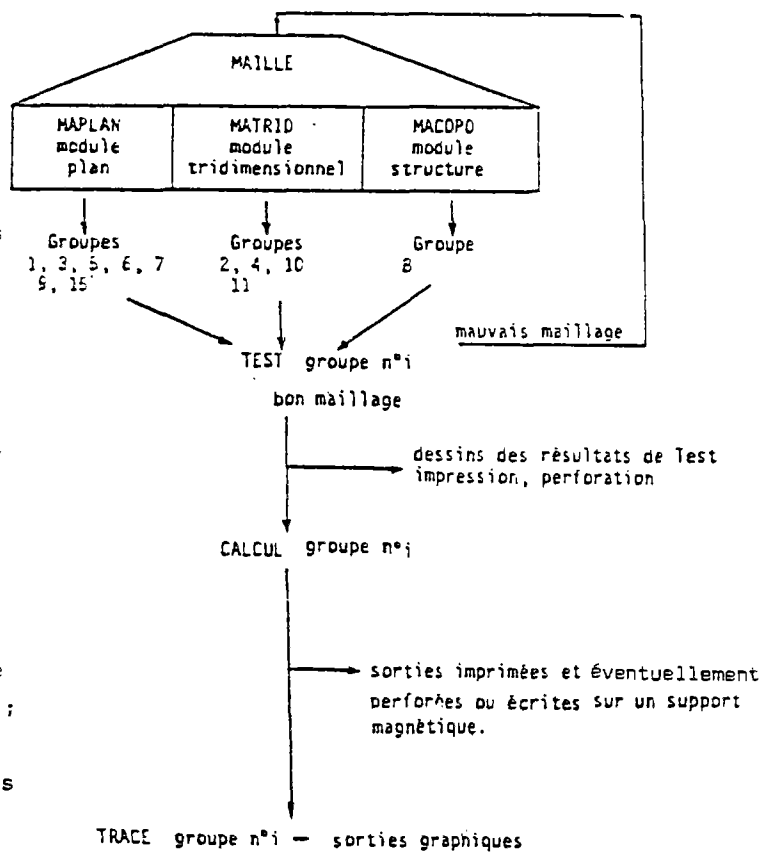


Fig. VII.1 - Structure du programme ROSALIE.
(Guellec, 1976) .

VII.2 - Structure du Groupe 5 - Modélisation des problèmes de frottement et décollement dans le programme ROSALIE

Le sous-ensemble "Groupe 5" du programme ROSALIE traite des problèmes d'élastoplasticité, de visco-élasticité, de contact (décollement-frottement), de dilatance et des problèmes dynamiques, pour les massifs plans ou à symétrie de révolution.

Il est composé des modules suivants :

- MAPLAN, qui est destiné à préparer le maillage ;
- TEST5, qui vérifie le maillage et les données en général ;
- GROUP5, qui comprend les sous-programmes qui concernent la gestion du calcul comme l'organisation des données, calcul et stockage de la matrice de rigidité globale, ainsi que certains sous-programmes secondaires ;
- PLAN5 ou AXIS5, qui regroupent les sous-programmes qui sont influencés par le fait que le problème traité est plan ou à symétrie de révolution ;
- CALCUL5, qui regroupe le reste des sous-programmes nécessaires à la résolution numérique ;
- TRACE5, qui exécute les sorties graphiques.

L'organigramme de la figure (VII.2) schématise le déroulement du calcul quand on traite un problème d'élastoplasticité ou de contacts.

Les éléments utilisés par GROUP5 pour le massif sont des triangles à 6 noeuds (T6) ou des quadrilatères à 8 noeuds (Q8). Ce sont des éléments isoparamétriques avec interpolation quadratique pour les déplacements. GROUP5 utilise aussi des éléments de continuité à deux noeuds CT1 et des éléments raidisseurs à 3 noeuds.

En ce qui concerne les problèmes de contact, l'algorithme initial (FROTTA-FROTTI), créé en 1977 (Frank, Guénot et Humbert, 1980) ne traitait que des corps élastiques. Cet algorithme a été modifié et couplé avec l'algorithme traitant du comportement élastoplastique des massifs par Barbas et Frank (1982).

Nous nous limitons ici à rappeler certains points essentiels relatifs au problème de frottement-décollement (Barbas et Frank, 1982).

VII.2.1 - Lois de comportement de la discontinuité

Ces lois de comportement sont définies dans le cadre de la plasticité, d'une part par les critères de contact, d'autre part par les lois d'écoulement.

L'état de glissement est donné par le critère de frottement de Coulomb :

$$|\tau| = c + \sigma \tan \phi = 0$$

où c est la cohésion et ϕ l'angle de frottement de la discontinuité,

avec $|\tau|$ contrainte tangentielle à la discontinuité,

et σ contrainte normale à la discontinuité (positive en traction).

Pour les points en état collé ou de glissement on doit vérifier :

$$\sigma - r_t \leq 0$$

où r_t est la résistance à la traction de la discontinuité.

L'état de décollement apparaît dès que :

$$\sigma = r_t$$

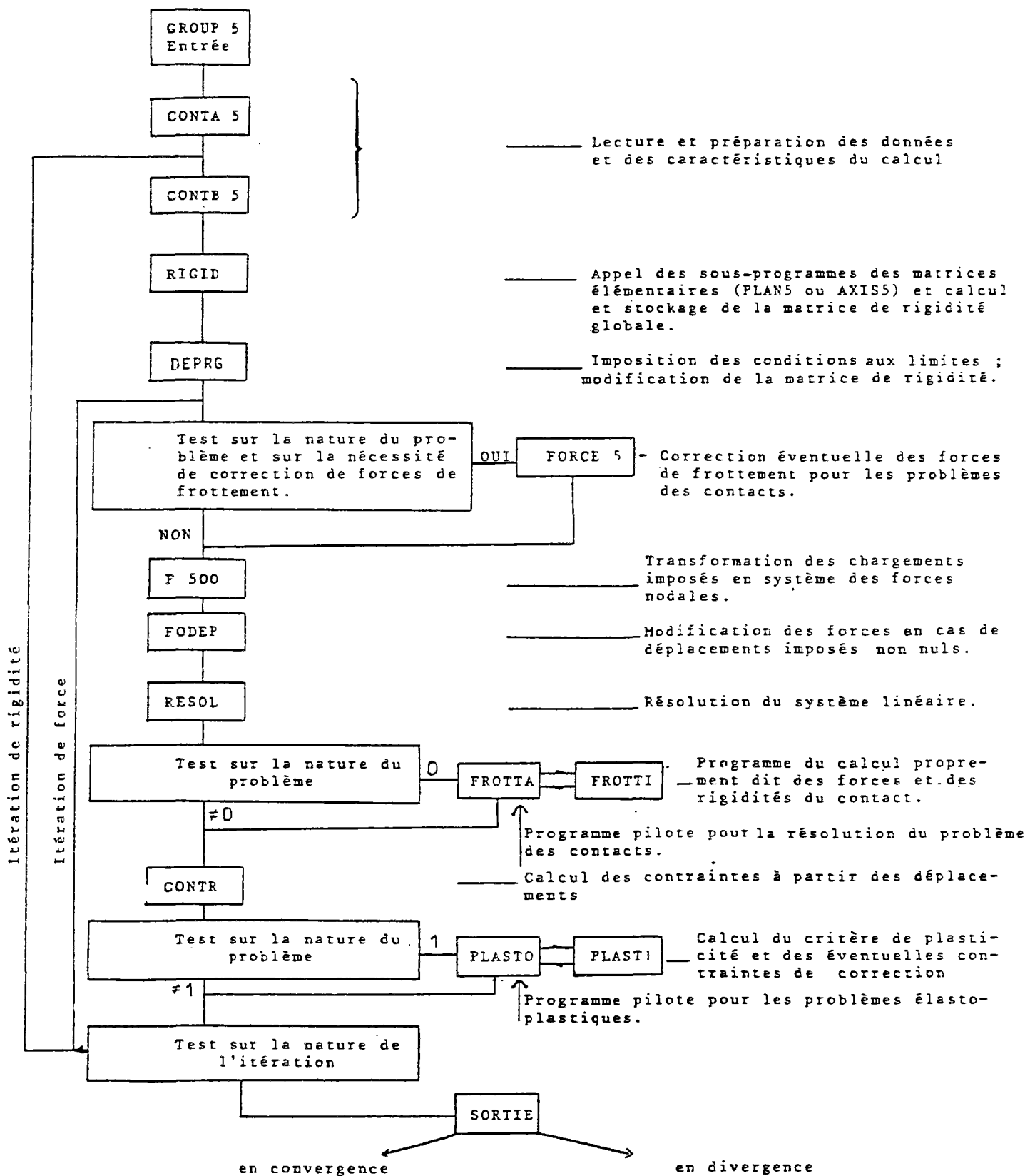


Fig. VII.2 - Organigramme sommaire du GROUP5 pour les problèmes d'élastoplasticité et de frottement décollement. (Barbas et Frank, 1982).

et l'on doit imposer alors $\sigma = \tau = 0$.

Si le critère de Coulomb est atteint, on n'autorise que des déplacements relatifs tangentiels Δu et les déplacements relatifs normaux Δv sont nuls (hypothèse de non dilata-
 tance de la discontinuité). Si le critère de résistance à la traction est atteint, il y a décollement et le déplacement relatif Δu est quelconque alors que le déplacement relatif Δv a un signe imposé, indiquant que les domaines s'"éloignent" l'un par rapport à l'autre. L'interpénétration est en effet interdite. Le contact est dit "unilatéral" (voir Frémond, 1980). Les lois d'écoulement sont donc non associées par rapport aux critères de plasticité. Le potentiel plastique est celui de l'interface lisse avec décollement (voir Salençon, 1978). La figure VII.3 représente ces deux critères ainsi que les directions de déplacements Δu et Δv .

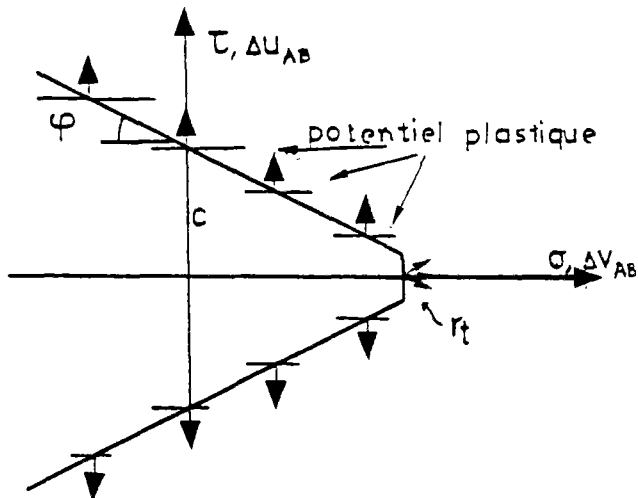
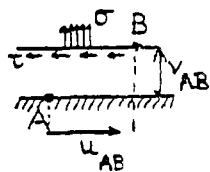


Fig. VII.3 - Critère de frottement de Coulomb avec résistance à la traction le long d'une discontinuité (Barbas et Frank, 1982).

VII.2.2 - Éléments de contact et ressorts

Pour modéliser une discontinuité dans un massif par la méthode des éléments finis R. Frank et al. (1980) proposent le dédoublement des noeuds du massif le long de la discontinuité et l'association de chaque noeud du milieu M_1 avec "son double" du milieu M_2 pour former un élément de contact (Fig. VII.4). Ainsi, on schématise la surface de discontinuité par l'ensemble des couples de noeuds dédoublés.

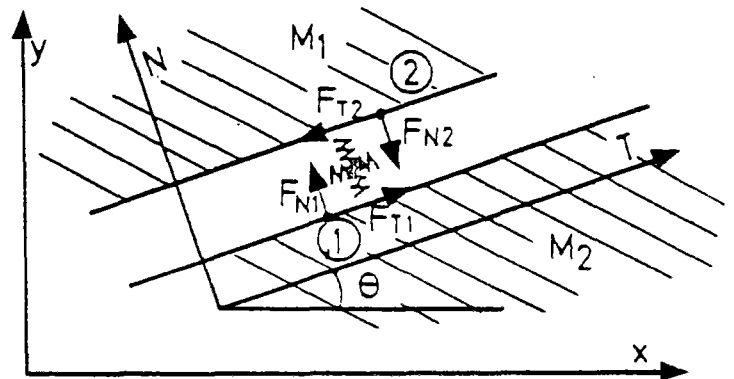


Fig. VII.4 - Élément de contact et forces de contact (Barbas et Frank, 1982).

Suivant l'état de contact de l'élément considéré, on impose deux, une ou aucune continuité des déplacements. Ainsi, pour les éléments de contact qu'on considère comme liés, on impose la continuité des déplacements suivant les axes locaux T et N ; pour les éléments considérés en état de décollement, on n'impose aucune continuité des déplacements et, enfin, pour les éléments qui glissent, on impose seulement la continuité des déplacements suivant l'axe N.

Pour imposer la continuité des déplacements souhaitée dans une direction, on introduit entre les deux points qui forment l'élément un ressort de grande rigidité k . La direction d'action du (des) ressort (s) coïncide avec la (les) direction (s) suivant

laquelle (lesquelles) on veut imposer une continuité des déplacements.

VII.2.3 - Critères et lois de contact

Les différents critères qui permettent, en fonction des caractéristiques des éléments de contact et du chargement, de déterminer l'état final sont écrits en fonction des forces (ou des déplacements) et non des contraintes. Ce choix est justifié par le fait que dans un modèle d'éléments finis "déplacement" comme c'est le cas pour ROSALIE, les contraintes sont dérivées à partir des déplacements et en conséquence la continuité des contraintes normale et tangentielle au contact n'est pas assez précise pour le traitement du problème délicat que l'on se pose. Les forces de contact sont par contre évidemment continues.

Ainsi, on peut écrire :

1- Critère de résistance à la traction :

$F_N = F_{N2} \geq -r_t S$ où S est l'aire de la surface d'influence de l'élément, dépendant du type d'éléments de massif utilisé.

r_t est la résistance unitaire à la traction.

2- Critère de frottement de Coulomb

$|F_{T2}| \leq |cS + F_N \operatorname{tg} \phi|$ où ϕ est l'angle de frottement, et c la cohésion.

3- Le caractère unilatéral du contact impose que, pour les joints décollés, on ait :

$V_1 - V_2 < e$ où e est l'ouverture initiale du contact ($e = 0$ pour des joints initialement en contact et qui se sont décollés).

Ces critères en termes de forces et de déplacements sont représentés sur les figures VII.5 et VII.6.

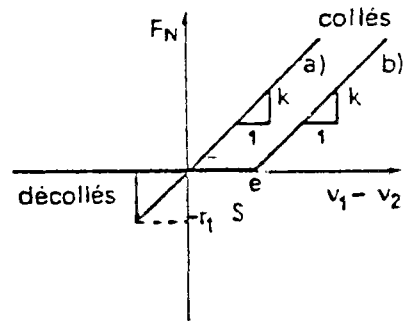


Fig. VII.5 - Comportement dans la direction normale (résistance en traction r_t).

a) Joint à ouverture initiale nulle,
b) Joint à ouverture initiale e
(déplacements relatifs verticaux en fonction des forces normales) (Frank, Guénot et Humbert ; 1980).

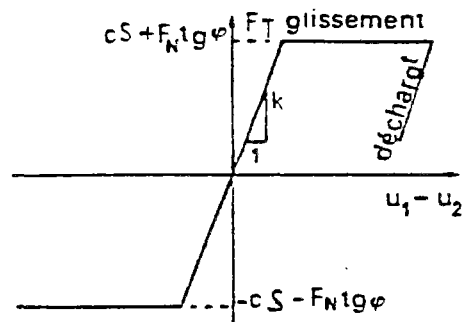


Fig. VII.6 - Comportement dans la direction tangente (déplacements relatifs horizontaux en fonction des forces tangentielles) (Frank, Guénot et Humbert ; 1980).

4- A part ces critères il faut définir la loi de glissement (avec frottement) qui s'applique uniquement aux points qui glissent l'un par rapport à l'autre. Elle impose la force de contact tangentielle égale à la force de frottement limite de Coulomb.

$$F_T = F_{T2} = cS + F_N \operatorname{tg} \phi$$

Le frottement empêche les points de glisser parfaitement, il tend à ramener un point vers l'autre. Les forces de frottement sont donc des forces de rappel et

F_{T2} est de même signe que $U_1 - U_2 - U_p$, U_p étant égal à $(U_1 - U_2)_p$, glissement relatif plastique à la fin de l'incrément précédent. On peut noter ici que, contrairement aux critères énoncés plus haut, la loi de glissement ne provoque pas un changement de rigidité. Son application n'apporte que des corrections de forces dans un état donné (de glissement). Notons de plus que, si $U_1 - U_2 - U_p$ change de signe par rapport à F_{T2} , il y a l'arrêt de glissement (cas de déchargement, par exemple).

VII.3 - Problèmes de déformation plane et de symétrie de révolution

Le programme ROSALIE - GROUP5 traite des problèmes de déformation plane et de symétrie de révolution. Après avoir rappelé brièvement certains aspects de ces deux types de problèmes, nous présenterons un nouvel algorithme pour le traitement des problèmes de déformation plane.

VII.3.1 - Symétrie de révolution

Pour un solide de révolution, dans le système d'axes de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , si le chargement et les conditions de déplacement sont à symétrie de révolution, le champ de déplacement est uniquement fonction de r et z . Alors, pour le cas de petites déformations :

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_S = (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{rz})^T \quad (\text{VII.1.a})$$

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_S &= (\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, 2\varepsilon_{rz})^T \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{u}{r}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^T \end{aligned} \quad (\text{VII.1.b})$$

et, dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope :

$$\underline{\sigma}_S = D_S \underline{\varepsilon}_S \quad (\text{VII.2.a})$$

avec :

$$D_S = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (\text{VII.2.b})$$

$$\text{et} \quad (D_S)^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{VII.2.c})$$

avec λ et μ coefficients d'élasticité de Lamé,

et E et ν , module d'Young et coefficient de Poisson.

VII.3.2 - Déformation plane

Par définition, on dit que le champ de déformation est plan si le déplacement w dans la direction z est nul et si les déplacements u et v (dans le plan xOy) sont indépendants de la direction z .

On en déduit :

$$\dot{\varepsilon}_{xz} = \dot{\varepsilon}_{yz} = \dot{\varepsilon}_z = 0. \quad (\text{VII.3})$$

Pour un corps élastique isotrope, on obtient de plus :

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \sigma_{yz} &= 0 \\ \dot{\sigma}_z &= \nu(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y). \end{aligned} \quad (\text{VII.4})$$

Pour un matériau isotrope au sens général (isotrope initialement avec écrouissage isotrope), le potentiel plastique G s'exprimera au moyen des invariants de contraintes I_1, I_2 et I_3 , alors :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{xz} &= \frac{\dot{\sigma}_{xz}}{2\mu} + \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial I_2} (-\sigma_{xz}) + \\ &\dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial I_3} (\sigma_{xy}\sigma_{yz} - \sigma_y\sigma_{xz}) = 0 \\ &\text{(VII.5)} \\ \dot{\varepsilon}_{yz} &= \frac{\dot{\sigma}_{yz}}{2\mu} + \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial I_2} (-\sigma_{yz}) + \\ &\dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial I_3} (\sigma_{xy}\sigma_{xz} - \sigma_x\sigma_{yz}) = 0 \end{aligned}$$

$\dot{\lambda}$ étant un scalaire positif ou nul. Au moment de la plastification, σ_{xz} et σ_{yz} sont nuls, d'après le raisonnement en élasticité, donc $\dot{\sigma}_{xz} = \dot{\sigma}_{yz} = 0$, d'où à tout instant (Loret, 1981) :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad \text{(VII.6)}$$

La contrainte σ_z est définie à partir de l'équation :

$$\dot{\varepsilon}_z = \dot{\varepsilon}_z^e + \dot{\varepsilon}_z^p = 0 \quad \text{(VII.7)}$$

ou encore

$$\frac{1}{E} \left(\dot{\sigma}_z - \nu(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y) \right) + \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_z} = 0$$

L'équation $\dot{\sigma}_z = \nu(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y)$ se trouve également vérifiée dans les modèles élastoplastiques dont le potentiel plastique ne dépend pas de la contrainte σ_z ($\dot{\varepsilon}_z^p$ est alors nul) et cela implique que $\dot{\varepsilon}_z^e$ est aussi nul.

Dans le programme ROSALIE, le traitement des problèmes en déformation plane est simplifié en supposant, quel que soit le potentiel plastique, que :

$$\dot{\varepsilon}_z = \dot{\varepsilon}_z^e = \dot{\varepsilon}_z^p = 0 \quad \text{(VII.8.a)}$$

d'où :

$$\dot{\sigma}_z = \nu(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y) \quad \text{(VII.8.b)}$$

Les tenseurs de contrainte et de déformation sont définis par :

$$\underline{\sigma}^{DP} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})^T \quad \text{(VII.9.a)}$$

$$\underline{\varepsilon}^{DP} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, 2\varepsilon_{xy})^T \quad \text{(VII.9.b)}$$

La matrice d'élasticité s'écrit :

$$D^{DP} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \text{(VII.10.a)}$$

et :

$$(D^{DP})^{-1} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(VII.10.b)}$$

Pour utiliser, dans le cas des déformations planes, les modèles définis à trois dimensions, nous avons plutôt choisi de déterminer σ_z à partir de l'équation $\dot{\varepsilon}_z^e + \dot{\varepsilon}_z^p = 0$, suivant Yuritzinn (1981), ce qui est manifestement plus correct. La variation des déformations s'écrit :

$$\Delta \underline{\varepsilon} = \Delta \underline{\varepsilon}^e + \Delta \underline{\varepsilon}^p \quad \text{(VII.11)}$$

d'où :

$$\Delta \underline{\varepsilon} = D_s^{-1} \Delta \underline{\sigma} + \dot{\lambda} \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} \right) \quad \text{(VII.12.a)}$$

avec $\dot{\lambda}$ le multiplicateur de plasticité

$$\Delta \underline{\varepsilon} = (\Delta \varepsilon_x, \Delta \varepsilon_y, \Delta \varepsilon_z, 2\Delta \varepsilon_{xy})^T \quad \text{(VII.12.b)}$$

$$\Delta \underline{\sigma} = (\Delta \sigma_x, \Delta \sigma_y, \Delta \sigma_z, \Delta \sigma_{xy})^T \quad \text{(VII.12.c)}$$

D_s définie par l'équation (VII.2.b) et :

$$\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} = \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial G}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial G}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial G}{\partial \sigma_{xy}} \right)^T \quad \text{(VII.13)}$$

La condition $\Delta \varepsilon_z = 0$ fournit :

$$\Delta \sigma_z = -E \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_z} + \nu (\Delta \sigma_x + \Delta \sigma_y). \quad (\text{VII.14})$$

La matrice D_s n'est pas utilisée dans ROSALIE.

Pour les déformations planes on utilise D^{DP} .

Nous proposons un algorithme de résolution par la méthode de contraintes initiales (ou méthode de force) avec le schéma de retour du module tangent simplifié, pour le traitement des modèles définis à trois dimensions et avec l'hypothèse $\Delta \varepsilon_z = \Delta \varepsilon_z^e + \Delta \varepsilon_z^p = 0$, en nous servant des matrices de rigidité (R^{DP}) du module de déformation plane de ROSALIE (PLAN5).

La condition (VII.14) permet d'écrire (VII.12) d'une manière "réduite" (Yuritzinn, 1981) :

$$\begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ 2\Delta \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{VII.15.a})$$

$$+ \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_x^p + \nu \Delta \varepsilon_z^p \\ \Delta \varepsilon_y^p + \nu \Delta \varepsilon_z^p \\ 2\Delta \varepsilon_{xy}^p \end{bmatrix}$$

ou :

$$\Delta \underline{\varepsilon}^{DP} = (D^{DP})^{-1} \Delta \underline{\sigma}^{DP} + \Delta \underline{\varepsilon}^{P*}. \quad (\text{VII.15.b})$$

"DP" indique pour $\underline{\varepsilon}$ ou $\underline{\sigma}$ que l'on ne retient que les composantes dans le plan xOy (Eq. VII.9). "DP" pour la matrice d'élasticité est la matrice de déformation plane (Eq. VII.10).

L'algorithme pour l'itération numéro "i" de la programmation se résume de la manière suivante (Fig. VI.13) :

1) Calculer les corrections de contraintes $\delta_i \underline{\sigma} = (\delta_i \sigma_x, \delta_i \sigma_y, \delta_i \sigma_z, \delta_i \sigma_{xy})^T$ à partir du critère de plasticité et du potentiel plastique ($\delta_i \underline{\sigma} = -\dot{\lambda}_i D_s \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} \right)_i$ avec D_s et $\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}$ définies par les équations (VII.2.b) et (VII.13)) et tenir compte uniquement de :

$$\begin{aligned} \delta_i \underline{\sigma}^{DP} &= (\delta_i \sigma_x, \delta_i \sigma_y, \delta_i \sigma_{xy})^T \\ &= -\dot{\lambda}_i \left(D_s \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} \right)_i \right)^{DP} \end{aligned} \quad (\text{VII.16})$$

pour le calcul des forces initiales $\Delta_i F$ appliquées (voir paragraphe VI.4). L'incrément des déplacements $\Delta_i U$ (et des déformations $\Delta_i \underline{\varepsilon}^{DP}$) est obtenu par :

$$\Delta_i U = (R^{DP})^{-1} \Delta_i F. \quad (\text{VII.17})$$

2) $\Delta_i \underline{\varepsilon}^{DP}$ provoque un incrément de contrainte (itération élastique avec R^{DP}) :

$$\Delta \delta_i \underline{\sigma}^{DP} = D^{DP} \Delta_i \underline{\varepsilon}^{DP}. \quad (\text{VII.18})$$

3) Les contraintes $\underline{\sigma}_i^{DP}$ sont alors, à la fin de l'itération "i" (Fig. VI.13) :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_i^{DP} &= \underline{\sigma}_{i-1}^{DP} + \delta_i \underline{\sigma}^{DP} + \Delta \delta_i \underline{\sigma}^{DP} \\ &= \underline{\sigma}_{i-1}^{DP} + \Delta_i \underline{\sigma}^{DP} \end{aligned} \quad (\text{VII.19})$$

et :

$$\begin{aligned} \sigma_{i,z} &= \sigma_{i-1,z} + \delta_i \sigma_z \\ &\quad + \nu (\Delta \delta_i \sigma_x + \Delta \delta_i \sigma_y). \end{aligned} \quad (\text{VII.20})$$

4) Les déformations totales (Fig. VI.13) valent :

$$\underline{\varepsilon}_i^{DP} = \underline{\varepsilon}_{i-1}^{DP} + \Delta_i \underline{\varepsilon}^{DP} \quad (\text{VII.21})$$

et :

$$\varepsilon_{i,z} = 0.$$

5) On détermine ensuite les parties élastique et plastique des déformations :

$$\underline{\varepsilon}_i^e = (D_s)^{-1} \underline{c}_i \quad (\text{VII.22})$$

et :

$$\underline{\varepsilon}_i^p = \underline{\varepsilon}_i - \underline{\varepsilon}_i^e \quad (\text{VII.23})$$

puis on retourne à 1) (itération suivante).

Justification :

Il faut tout d'abord vérifier que les équations (VII.18) et (VII.19) reviennent à l'équation (VII.15).

Portons :

$$\Delta \underline{\varepsilon}_i^{DP} = \underline{\Delta}_i \underline{c}^{DP} - \underline{\varepsilon}_i^{DP} \quad (\text{VII.24})$$

dans l'équation (VII.18); on obtient :

$$\underline{\Delta}_i \underline{\varepsilon}^{DP} = (D^{DP})^{-1} \left(\underline{\Delta}_i \underline{c}^{DP} - \underline{\varepsilon}_i^{DP} \right) \quad (\text{VII.25})$$

Il faut donc montrer, pour satisfaire à l'équation (VII.15), que :

$$-(D^{DP})^{-1} \underline{\varepsilon}_i^{DP} = \underline{\Delta}_i \underline{\varepsilon}^{P*} \quad (\text{VII.26})$$

ou encore (en tenant compte de l'équation VII.16) :

$$\dot{\lambda}_i (D^{DP})^{-1} \left(D_s \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} \right)_i \right)^{DP} = \underline{\Delta}_i \underline{\varepsilon}^{P*},$$

ce qui conduit, après quelques calculs matriciels, à :

$$\dot{\lambda}_i \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_x} \right)_i & + \nu \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_z} \right)_i \\ \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_y} \right)_i & + \nu \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_z} \right)_i \\ \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{xy}} \right)_i & \end{bmatrix} = \underline{\Delta}_i \underline{\varepsilon}^{P*}.$$

Ceci est manifestement vrai, puisque, d'une manière générale et à toutes les itérations :

$$\underline{\Delta}_i \underline{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}_i \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} \right)_i \quad (\text{VII.27})$$

D'autre part, on peut vérifier que la relation (VII.20), compte tenu de (VII.16) et (VII.19), conduit à :

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_i \underline{c}_z &= \sigma_{i,z} - \sigma_{i-1,z} \\ &= -E \dot{\lambda}_i \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_z} \right)_i + \nu (\underline{\Delta}_i \underline{c}_x + \underline{\Delta}_i \underline{c}_y) \end{aligned}$$

Ceci montre que la relation (VII.14) est également vérifiée à chaque itération.

VII.4 - Calcul des paramètres nécessaires

La méthode qui a été choisie dans ROSALIE pour résoudre les problèmes en milieu élastoplastique, on l'a vu, est la méthode des forces avec le schéma de retour du module tangent simplifié (paragraphes VI.2.4 et VI.4).

Pour déterminer les différents termes qui interviennent dans l'expression des corrections $\delta \underline{c}$ (Eq. VI.22.a), il faut déterminer, entre autres, les paramètres suivants à chaque itération :

$\frac{\partial F}{\partial \underline{c}}$: direction normale à la surface de charge,

$\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}$: direction des déformations plastiques,

\dot{R} : variation des paramètres d'érouissage

H : module d'érouissage.

Dans les paragraphes suivants nous allons déterminer, pour les cas de la déformation plane et de la symétrie de révolution, les paramètres pour le modèle de Nova et al.

(Chap. III) et le modèle de Vermeer (Chap. IV) généralisé à trois dimensions, ainsi que pour le modèle de Vermeer bidimensionnel défini directement en déformation plane dans le plan xOy. Les dérivées et les paramètres sont trouvés pour le cas de la déformation plane avec l'hypothèse $\epsilon_z^e + \epsilon_z^p = 0$. Pour les obtenir en cas de symétrie de révolution, on utilise à la place de $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy})$ et $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \epsilon_{xy})$ respectivement $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{rz})$ et $(\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \epsilon_{rz})$.

VII.4.1 - Modèle de Nova et al.

VII.4.1.1 - Expressions des dérivées de la surface de charge

Pour calculer les composantes de $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$, il faut écrire l'expression de $F(\underline{\sigma}, R)$ en fonction de $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}$ et non plus en fonction de P et q .

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial F}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma_i} \quad (\text{VII.28.a})$$

pour :

$$i = x, y, z$$

et :

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{xy}} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma_{xy}} \quad (\text{VII.28.b})$$

avec :

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma_i} = \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_i + P}{q} \right) \quad (\text{VII.29.a})$$

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma_i} = - \frac{1}{3} \quad (\text{VII.29.b})$$

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma_{xy}} = \frac{3\sigma_{xy}}{q} \quad (\text{VII.29.c})$$

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma_{xy}} = 0 \quad (\text{VII.29.d})$$

Un exemple de surface de charge dans l'espace (P, q) telle qu'elle a été programmée est représentée sur la figure (VII.7).

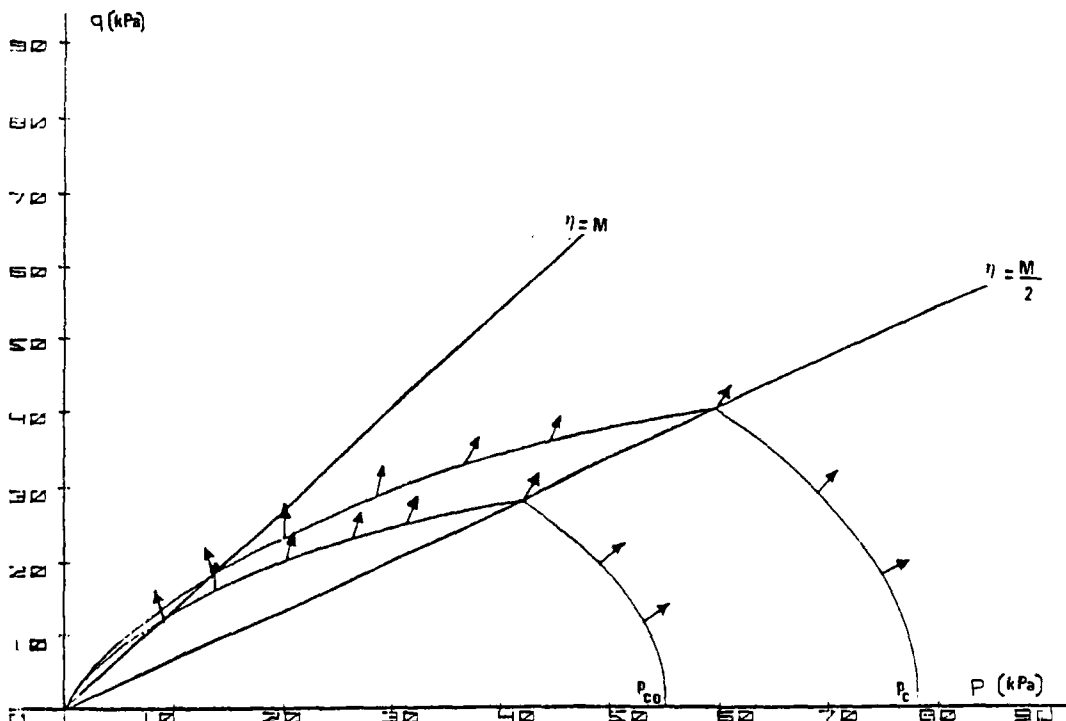


Fig. VII.7 - Surface de charge et directions des déformations plastiques.

A) pour $\eta \leq \frac{M}{2}$

En tenant compte des équations (III.3), (VII.28), (VII.29), on a :

$$\frac{\partial F_1}{\partial \underline{\sigma}} = \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_x} = \frac{2(aq^2 - P_c^2)}{3P^3} + \frac{3a(\sigma_x + P)}{P^2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_y} = \frac{2(aq^2 - P_c^2)}{3P^3} + \frac{3a(\sigma_y + P)}{P^2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_z} = \frac{2(aq^2 - P_c^2)}{3P^3} + \frac{3a(\sigma_z + P)}{P^2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_{xy}} = \frac{2a\sigma_{xy}}{P^2} \end{cases} \quad (VII.30)$$

avec :

$$a = \frac{4L}{M^2}$$

B) pour $\eta > \frac{M}{2}$

De même en tenant compte des équations (III.4), (VII.28), (VII.29), on obtient :

$$\frac{\partial F_2}{\partial \underline{\sigma}} = \begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_x} = \frac{3(\sigma_x + P)}{2Pq} + \frac{q}{3P^2} - \frac{m}{3P} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_y} = \frac{3(\sigma_y + P)}{2Pq} + \frac{q}{3P^2} - \frac{m}{3P} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_z} = \frac{3(\sigma_z + P)}{2Pq} + \frac{q}{3P^2} - \frac{m}{3P} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_{xy}} = \frac{3\sigma_{xy}}{Pq} \end{cases} \quad (VII.31)$$

VII.4.1.2 - Expressions des dérivées du potentiel plastique

En procédant d'une manière analogue à celle exposée pour la surface de charge on trouve :

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial G}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma_i} \quad (VII.32.a)$$

pour $i = x, y, z$

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma_{xy}} = \frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma_{xy}} \quad (VII.32.b)$$

A) pour $\eta \leq \frac{M}{2}$

Dans ce cas le potentiel est associé et on a :

$$\frac{\partial G_1}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial F_1}{\partial \underline{\sigma}} \quad (VII.33)$$

$\frac{\partial F_1}{\partial \underline{\sigma}}$ étant défini par les équations (VII.30).

B) pour $\eta > \frac{M}{2}$

En combinant les équations (III.6), (VII.32), (VII.29), on trouve :

$$\frac{\partial G_2}{\partial \underline{\sigma}} = \begin{cases} \frac{\partial G_2}{\partial \sigma_x} = \frac{q}{3P^2} - \frac{1}{3} \frac{M}{P} \left(\frac{P}{P_{cg}} \right)^{\frac{1-\mu}{\mu}} + \frac{3(\sigma_x + P)}{2Pq} \\ \frac{\partial G_2}{\partial \sigma_y} = \frac{q}{3P^2} - \frac{1}{3} \frac{M}{P} \left(\frac{P}{P_{cg}} \right)^{\frac{1-\mu}{\mu}} + \frac{3(\sigma_y + P)}{2Pq} \\ \frac{\partial G_2}{\partial \sigma_z} = \frac{q}{3P^2} - \frac{1}{3} \frac{M}{P} \left(\frac{P}{P_{cg}} \right)^{\frac{1-\mu}{\mu}} + \frac{3(\sigma_z + P)}{2Pq} \\ \frac{\partial G_2}{\partial \sigma_{xy}} = \frac{3\sigma_{xy}}{Pq} \end{cases} \quad (VII.34)$$

Les directions de $\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}$ sont reportées sur la figure (VII.7).

VII.4.1.3 - Expression du module d'écroutissage ; variation du paramètre d'écroutissage

Le paramètre d'écroutissage est défini pour ce modèle (Eq. III.18) par :

$$R = P_c = P_{c0} \left(\exp \frac{K(\varepsilon^P)}{\lambda - B_0} \right) \quad (\text{VII.35})$$

avec :

$K = \varepsilon_v^P + D\varepsilon_d^P$, ε_v^P et ε_d^P étant défini en annexe.

$$\frac{\partial R}{\partial K} = \frac{P_c}{\lambda - B_0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial K}{\partial \varepsilon^P} = \frac{\partial \varepsilon_v^P}{\partial \varepsilon^P} + D \frac{\partial \varepsilon_d^P}{\partial \varepsilon^P} \quad (\text{VII.36})$$

avec :

$$\frac{\partial \varepsilon_v^P}{\partial \varepsilon^P} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varepsilon_v^P}{\partial \varepsilon_x^P} = -1 \\ \frac{\partial \varepsilon_v^P}{\partial \varepsilon_y^P} = -1 \\ \frac{\partial \varepsilon_v^P}{\partial \varepsilon_z^P} = -1 \\ \frac{\partial \varepsilon_v^P}{\partial \varepsilon_{xy}^P} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{VII.37})$$

$$\frac{\partial \varepsilon_d^P}{\partial \varepsilon^P} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varepsilon_d^P}{\partial \varepsilon_x^P} = \frac{2}{9} \frac{3\varepsilon_x^P + \varepsilon_v^P}{\varepsilon_d^P} \\ \frac{\partial \varepsilon_d^P}{\partial \varepsilon_y^P} = \frac{2}{9} \frac{3\varepsilon_x^P + \varepsilon_v^P}{\varepsilon_d^P} \\ \frac{\partial \varepsilon_d^P}{\partial \varepsilon_z^P} = \frac{2}{9} \frac{3\varepsilon_x^P + \varepsilon_v^P}{\varepsilon_d^P} \\ \frac{\partial \varepsilon_d^P}{\partial \varepsilon_{xy}^P} = \frac{4}{3} \frac{\varepsilon_{xy}^P}{\varepsilon_d^P} \end{array} \right. \quad (\text{VII.38})$$

A) pour $\eta \leq \frac{M}{2}$

L'équation (III.3) donne :

$$\frac{\partial F_i}{\partial R} = - \frac{2P_c}{P^2} \quad (\text{VII.39})$$

et, en utilisant les équations (I.12) et (VII.36), on trouve :

$$H = \frac{2}{\lambda - B_0} \left(\frac{P_c}{P} \right)^2 \left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon^P} \right)^T \frac{\partial G_1}{\partial \underline{\sigma}} \quad (\text{VII.40})$$

$\frac{\partial G_1}{\partial \underline{\sigma}}$ étant défini en (VII.33)

La variation du paramètre d'écroutissement s'écrit :

$$\dot{P}_c = P_{c0} \left(\exp \frac{\varepsilon_v^P + D\varepsilon_d^P}{\lambda - B_0} \right)^{\bullet} = \frac{P_c}{\lambda - B_0} \dot{K} \quad (\text{VII.41})$$

avec :

$$\dot{K} = \left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon^P} \right)^T \dot{\varepsilon}^P$$

d'où :

$$\dot{P}_c = \lambda \frac{H}{2} \frac{P^2}{P_c} \quad (\text{VII.42})$$

B) pour $\eta > \frac{M}{2}$

L'équation (III.4) donne :

$$\frac{\partial F_2}{\partial R} = - \frac{m}{P_c} \quad (\text{VII.43})$$

d'où :

$$H = \frac{m}{\lambda - B_0} \left(\frac{K}{\partial \varepsilon^P} \right)^T \frac{\partial G_2}{\partial \underline{\sigma}} \quad (\text{VII.44})$$

et :

$$\dot{P}_c = \lambda \frac{HP_c}{m} \quad (\text{VII.45})$$

VII.4.2 - Modèle de Vermeer

VII.4.2.1 - Cas tridimensionnel (déformation plane avec $\epsilon_z^e + \epsilon_z^p = 0$ ou symétrie de révolution)

VII.4.2.1.1 - Expressions des dérivées des surfaces de charge

Un exemple des surfaces de charge dans l'espace (P, q) telles qu'elles ont été programmées sont représentées sur la figure (VII.8).

A) Surface de charge de cisaillement

L'équation (IV.26) donne :

$$\frac{\partial F_1}{\partial \underline{\sigma}} = - 3P \frac{\partial II_{\sigma}}{\partial \underline{\sigma}} - 3II_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial A(\chi)}{\partial \underline{\sigma}} III_{\sigma} + \frac{\partial III_{\sigma}}{\partial \underline{\sigma}} A(\chi) \quad (VII.46)$$

avec :

$$II_{\sigma} = - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \sigma_{xy}^2$$

$$III_{\sigma} = - \sigma_x \sigma_y \sigma_z + \sigma_{xy} \sigma_z$$

$$\frac{\partial A(\chi)}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial A}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \underline{\sigma}}$$

$\frac{\partial P}{\partial \underline{\sigma}}$, χ , h , sont définis respectivement à partir des équations (VII.29), (IV.24), (IV.25)

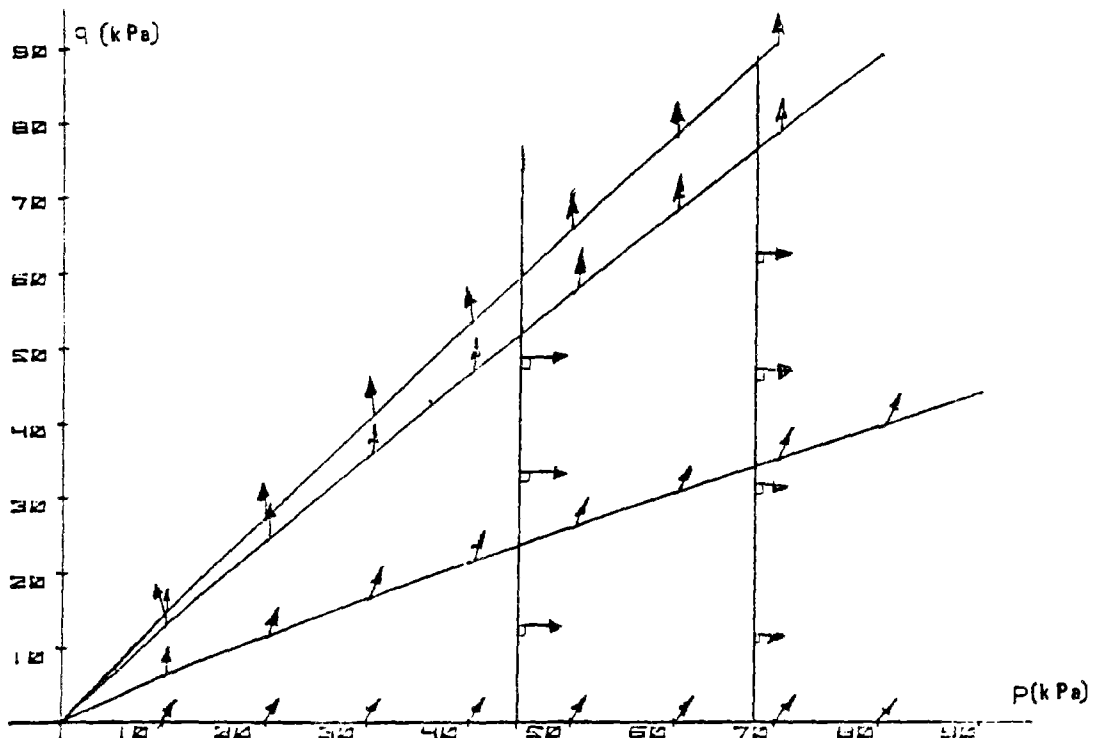


Fig. VII.8 - Modèle de Vermeer.

$$\frac{\partial \gamma}{\partial P} = \frac{-3\beta \gamma^P}{e_0} P^{\beta} P^{-\beta-1} = -\frac{\beta}{P} \gamma$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda} = \frac{\frac{1}{2} \lambda + c}{2\sqrt{(\frac{1}{2} \lambda)^2 + c\lambda}} - \frac{1}{2}$$

Pour simplifier ces équations, on définit :

$$A(\lambda) = \frac{U}{D} = \frac{27(3+h)}{(3+2h)(3-h)} \quad (\text{VII.47})$$

d'où :

$$\frac{\partial A}{\partial h} = \frac{27D - (3-4h)U}{D^2} \quad (\text{VII.48})$$

et :

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma} = \frac{27D - (3-4h)U}{D^2} \left(\frac{\frac{1}{2} \lambda + c}{2\sqrt{(\frac{1}{2} \lambda)^2 + c\lambda}} - \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{\beta}{P} \lambda \right) \frac{\partial P}{\partial \sigma} \quad (\text{VII.49})$$

alors :

$$\frac{\partial F_1}{\partial \sigma} = \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_x} = 3P(\sigma_y + \sigma_z) + II_{\sigma} + \frac{\partial A}{\partial \sigma_x} III_{\sigma} - \sigma_y \sigma_z A(\lambda) \\ \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_y} = 3P(\sigma_x + \sigma_z) + II_{\sigma} + \frac{\partial A}{\partial \sigma_y} III_{\sigma} - \sigma_x \sigma_z A(\lambda) \\ \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_z} = 3P(\sigma_y + \sigma_x) + II_{\sigma} + \frac{\partial A}{\partial \sigma_z} III_{\sigma} - (\sigma_x \sigma_y - \sigma_{xy}^2) A(\lambda) \\ \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_{xy}} = 6P(\sigma_{xy}) - 2\sigma_{xy} \sigma_z A(\lambda) \end{cases} \quad (\text{VII.50})$$

B) Surface de charge de consolidation

En procédant d'une manière analogue, on obtient :

$$\frac{\partial F_2}{\partial \sigma} = \begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_x} = -\frac{\epsilon_0^c \beta}{3} \frac{P^{\beta-1}}{P^{\beta}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_y} = \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_z} = \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_{xy}} = 0 \end{cases} \quad (\text{VII.51})$$

VII.4.2.1.2 - Expressions des dérivées des potentiels plastiques

A) Potentiel plastique correspondant à la surface de charge de cisaillement

Pour le calcul des dérivées du potentiel plastique, on suppose que l'angle de dilatance ψ_m ne dépend pas de l'état de contrainte (Vermeer, 1980). Alors :

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial \sigma} = 0$$

A partir des équations (IV.42) (équation du potentiel plastique simplifié) et (VII.32), on obtient :

$$\frac{\partial G_1}{\partial \sigma} = \begin{cases} \frac{\partial G_1}{\partial \sigma_x} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_x + P}{q} + \frac{4}{3} \frac{\sin \psi_m}{\sqrt{6+2\sin^2 \psi_m}} \\ \frac{\partial G_1}{\partial \sigma_y} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_y + P}{q} + \frac{4}{3} \frac{\sin \psi_m}{\sqrt{6+2\sin^2 \psi_m}} \\ \frac{\partial G_1}{\partial \sigma_z} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_z + P}{q} + \frac{4}{3} \frac{\sin \psi_m}{\sqrt{6+2\sin^2 \psi_m}} \\ \frac{\partial G_1}{\partial \sigma_{xy}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{3\sigma_{xy}}{q} \end{cases} \quad (\text{VII.52})$$

B) Potentiel plastique correspondant à la surface de charge de consolidation

Dans ce cas, le potentiel est associé et on a :

$$\frac{\partial G_2}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial F_2}{\partial \underline{\sigma}} \quad (\text{VII.53})$$

$\frac{\partial F_2}{\partial \underline{\sigma}}$ étant défini par l'équation (VII.51).

VII.4.2.1.3 - *Expressions des modules d'écroutissage ; variation des paramètres d'écroutissage*

A) Surface de charge de cisaillement

Les équations (I.12), (IV.26) et (VII.48) donnent :

$$H = -III_{\sigma} \left(\frac{27D - (3-4h)U}{D^2} \right) \left(\frac{\frac{1}{2} \chi + c}{2\sqrt{(\frac{1}{2}\lambda)^2 + c\lambda}} - \frac{1}{2} \right) \frac{3}{\varepsilon_c^e} \frac{P_0^B}{P^B} \frac{\dot{\gamma}^P}{\dot{\lambda}} \quad (\text{VII.54})$$

Le paramètre d'écroutissage s'écrit :

$$R_1 = \dot{\gamma}^P$$

d'où :

$$\dot{R}_1 = \dot{\gamma}^P = \dot{\lambda} \left[\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial G_1}{\partial \sigma_x} - \frac{\partial G_1}{\partial \sigma_y} \right)^2 + \left(\frac{\partial G_1}{\partial \sigma_y} - \frac{\partial G_1}{\partial \sigma_z} \right)^2 + \left(\frac{\partial G_1}{\partial \sigma_z} - \frac{\partial G_1}{\partial \sigma_x} \right)^2 + 6 \left(\frac{\partial G_1}{\partial \sigma_{xy}} \right)^2 \right]^{1/2} \right] \quad (\text{VII.55})$$

B) surface de charge de consolidation

De même, les équations (I.12), (IV.31) donnent :

$$H_2 = -3 \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_x} \quad (\text{VII.56})$$

et :

$$\dot{R}_2 = + \dot{\varepsilon}_{kk}^P = + 3\dot{\lambda} \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_x} = -\dot{\lambda} H \quad (\text{VII.57})$$

$\frac{\partial F_2}{\partial \sigma_x}$ étant défini dans l'équation (VII.51).

VII.4.2.2 - Cas bidimensionnel

Rappelons que Vermeer a défini son modèle dans le cas de la déformation plane avec notamment l'hypothèse $\varepsilon_z^P = \varepsilon_z^e = 0$ et que ses équations constitutives sont écrites uniquement en fonction des contraintes et des déformations dans le plan (x, y) (Vermeer, 1980) (voir paragraphe IV.7).

VII.4.2.2.1 - *Expressions des dérivées des surfaces de charges*

A) Surface de charge de cisaillement

L'équation (IV.51) donne :

$$\frac{\partial F_1}{\partial \underline{\sigma}} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{4r} + \frac{1}{2} \sin \phi, \frac{\sigma_y - \sigma_x}{4r} + \frac{1}{2} \sin \phi, \frac{\sigma_{xy}}{r} \right)^T \quad (\text{VII.58})$$

avec :

$$\sin \phi = \hat{f}(\chi) - \beta \chi \hat{f}'(\chi)$$

$$\chi = K \frac{t_c^{\beta}}{t^{\beta}}$$

r étant défini dans l'équation (IV.47).

B) Surface de charge de consolidation

L'équation (IV.54) donne :

$$\frac{\partial F_2}{\partial \underline{\sigma}} = \left(-\frac{\varepsilon_0^C \beta}{2} \frac{t^{\beta-1}}{t_0^{\beta}}, -\frac{\varepsilon_0^C \beta}{2} \frac{t^{\beta-1}}{t_0^{\beta}}, 0 \right)^T \quad (\text{VII.59})$$

VII.4.2.2.2 - Expressions des dérivées des potentiels plastiques

A) Potentiel plastique correspondant à la surface de charge de cisaillement

L'équation (IV.55) donne :

$$\frac{\partial G_1}{\partial \underline{\sigma}} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{4r} + \frac{1}{2} \sin \psi_m, \frac{\sigma_y - \sigma_x}{4r} + \frac{1}{2} \sin \psi_m, \frac{\sigma_{xy}}{r} \right)^T \quad (VII.60)$$

ψ_m étant l'angle de dilatance.

B) Deuxième potentiel plastique

Le deuxième potentiel plastique est associé et alors :

$$\frac{\partial G_2}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial F_2}{\partial \underline{\sigma}} \quad (VII.61)$$

VII.4.2.2.3 - Expressions des modules d'écroutissage ; variation des paramètres d'écroutissage

A) Surface de charge de cisaillement

Les équations (I.12), (VII.60) et (IV.51) donnent :

$$H = - \frac{\partial F_1}{\partial K} = t \left(\frac{t_0}{t} \right)^\beta \bar{f}'(\chi) \quad (VII.62)$$

$\bar{f}(\chi)$ étant définie en (IV.52) et (IV.53) et les équations (IV.50) et (VII.60) donnent :

$$\dot{K} = \dot{\lambda}$$

B) Surface de charge de consolidation

De même, les équations (I.12) et (IV.54) donnent :

$$H = - 2 \frac{\partial F_2}{\partial \underline{\sigma}_x} \quad (VII.64)$$

et l'équation (IV.54.a) donne :

$$\dot{R}_2 = + \dot{\varepsilon}_{kk}^P = + 2 \dot{\lambda} \frac{\partial F_2}{\partial \underline{\sigma}_x} = - \dot{\lambda} H \quad (VII.65)$$

VII.5 - Sous-programmes modifiés et créés dans ROSALIE

Afin d'introduire ces deux modèles élastoplastiques, il a fallu modifier ou créer certains sous-programmes du module "GROUPE 5".

VII.5.1 - Sous-programmes modifiés

Les sous-programmes modifiés sont les suivants :

CALCTE - Lecture du type de modèle et des paramètres correspondants par zone (M, B₀, l, D, m, μ et p_{CO} pour le modèle de Nova et al. ; ε₀^e, φ_p, φ_{CV}, β, ε₀^c et P₀ pour le modèle de Vermeer).

CONTA5 - Initialisation des tableaux (de déformations, de contraintes, etc.).

CONTB5 - Détermination des paramètres d'élasticité et de plasticité par élément (appel à CALCTE). Stockage par point des paramètres de plasticité des modèles dans le tableau CONST.

GROUP5 - Sous-programme, en fait programme principal du module "GROUPE5", qui gère les autres sous-programmes, et transmet les paramètres de calcul (dont les paramètres d'incrément, d'itérations, de convergence, etc.).

CONTR - Calcul des contraintes à l'aide de deux sous-programmes : COQ8 (quadrilatères à 8 noeuds) et COT6 (triangle à 6 noeuds).

VII.5.2 - Sous-programmes créés

La partie créée est illustrée par la figure (VII.9).

Les principaux sous-programmes créés sont :

PLASTI - Calcul des paramètres d'érouissage initiaux (appel à CRITIN), appel à PLASI1 ou 2, gestion des corrections de contrainte, des critères de convergence, et stockage des points plastiques. Ce sous-programme ressemble à PLASTO (Barbas et Frank, 1982), nous avons laissé la possibilité de choisir PLASTO (IECRO = 0) (Fig. VII.9)

CRITVE - Calcul des surfaces de charge du modèle de Vermeer.

CRITNW - Calcul de la surface de charge du modèle de Nova et al.

COREVE - Calcul des corrections de contrainte "plastiques", des déformations plastiques, de la variation des paramètres d'érouissage, etc., pour le modèle de Vermeer.

CORENW - Idem à COREVE, mais pour le modèle de Nova et al.

PLASI 1 ou 2 :

PLASI1 - dans le cas de la déformation plane: modèles tridimensionnels de Nova et de Vermeer et al. (avec $\epsilon_z^e + \epsilon_z^p = 0$) et modèle bidimensionnel de Vermeer;

PLASI2 - dans le cas de la symétrie de révolution : modèles tridimensionnels de Nova et al et de Vermeer.

Calcul des surfaces de charge (appel à CRITNW, CRITVE, etc.), calcul des corrections de contrainte (appel à CORENW, COREVE, etc.).

CRITIN - Calcul des paramètres d'érouissage initiaux.

PCALDE - Appelé par CONTR, préparation des données pour le calcul des déformations (appel à CALDEF).

CALDEF - Calcul des déformations.

VII.5.2.1 - Indicateurs principaux ; nouveaux tableaux

Avant de détailler les différents sous-programmes que nous avons créés, il semble utile de donner, ici, les indicateurs principaux et les nouveaux tableaux introduits qui interviennent dans les ordigrammes.

Les indicateurs les plus importants sont les suivants :

IECRO = 0 Mise en oeuvre de l'ancienne version de ROSALIE. Le programme n'appelle pas le nouveau sous-programme PLASTI et ne calcule pas de paramètres d'érouissage.

= 1 Calcul des modèles ayant une seule surface de charge avec un seul paramètre d'érouissage (modèle de Nova) ; les déformations sont calculées.

= 2 Calcul pour des modèles ayant deux surfaces de charge avec deux paramètres d'érouissage (modèle de Vermeer) ; pas de calcul des déformations.

= 3 Identique à IECRO = 2 avec calcul des déformations.

IDPTO = 0 Déformation plane avec $\epsilon_z = \epsilon_z^e + \epsilon_z^p = 0$ ou symétrie de révolution.

= 1 Déformation plane avec $\epsilon_z^e = \epsilon_z^p = 0$ (Vermeer, uniquement).

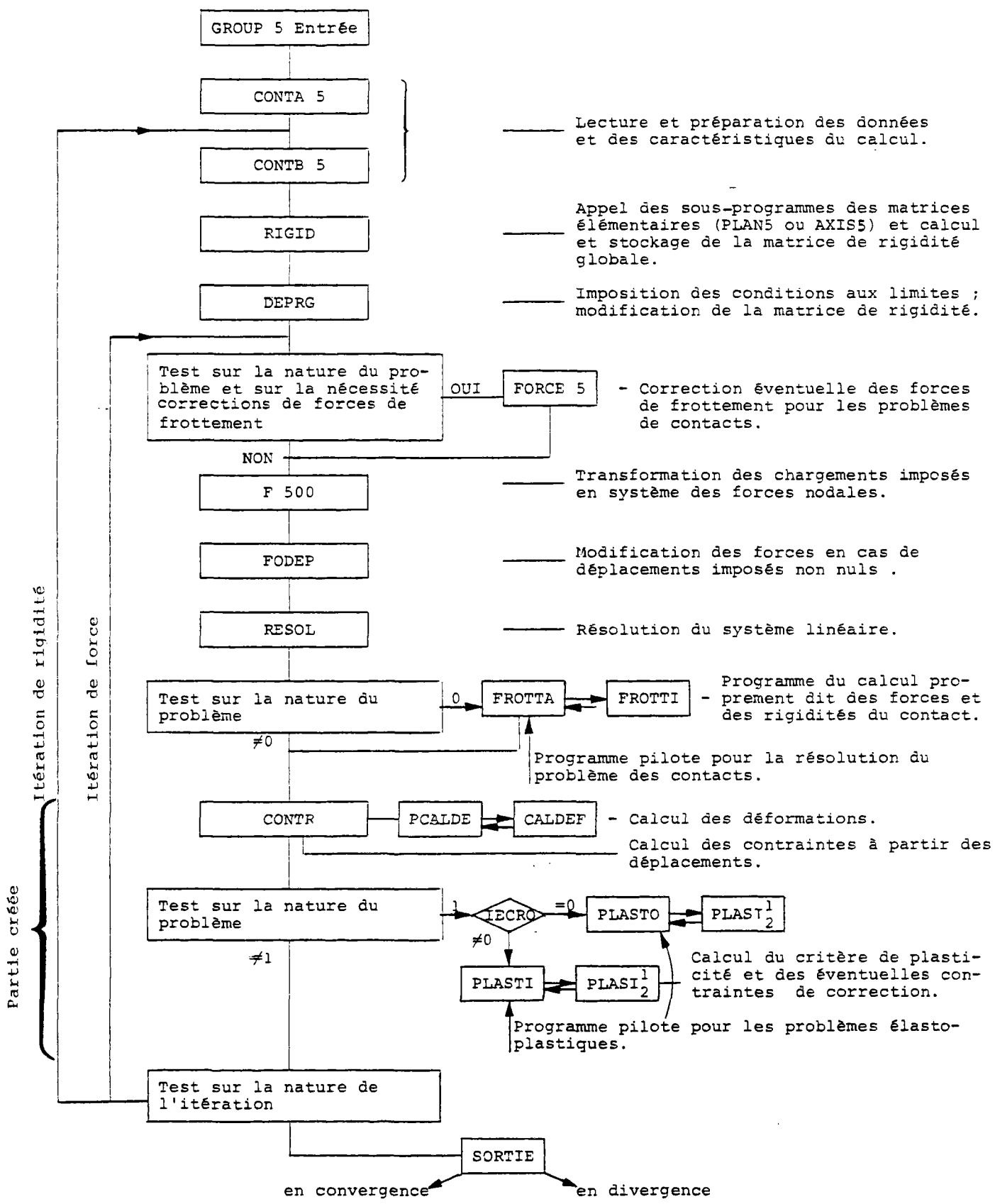


Fig. VII.9 - Nouvel organigramme sommaire du GROUP 5 pour les problèmes d'élastoplasticité et de frottement décollement.

ICRIT = 7 Modèle de Vermeer.
 = 8 Modèle de Nova et al.

Soit N1 le nombre total de points et
 ND un indicateur tel que :

ND = 3 pour le cas de la déformation plane,
 ND = 4 pour le cas de la symétrie de révo-
 lution.

Les tableaux introduits sont les
 suivants :

DEFEL (ND, N1) - Incréments de déformation
 totale calculés en CONTR.

DETOT (ND, N1) - Déformations totales initia-
 lisées dans CONTA5 et calculées dans
 CONTR avec $DETOT = DETOT + DEFEL \cdot C$;
 $C = \frac{1}{n}$; n étant le nombre d'éléments
 ayant pour noeud le point considéré.

DEELA (ND, N1) - Déformations élastiques to-
 tales $\underline{\varepsilon}_i^e = D^{-1}(\underline{\sigma}_i - \underline{\sigma}_0)$
 $(\underline{\varepsilon}_i^e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underline{\varepsilon}_i^e)$
 calculées dans CALDEF.

DEPLB (4, N1) - Déformations plastiques,
 calculées dans CALDEF,
 DEPLB = DETOT - DEELA .

DEPLA (4, N1) - Déformations plastiques, ini-
 tialisées dans CONTA5 et calculées dans
 CORENW et COREVE $\underline{\varepsilon}_i^P = \underline{\varepsilon}_{i-1}^P + \Delta \underline{\varepsilon}_i^P$ avec
 $\Delta \underline{\varepsilon}_i^P = \sum_{j=1}^m \lambda_j^i \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}} \right)_i^j$
 i : numéro de l'itération,
 j : numéro de l'itération interne.

V (N1) - Valeur du deuxième critère (F_2 cas
 de Vermeer, ICRIT = 7) calculée dans
 CRITVE.

VZ (N1) - Première valeur positive de F_2 cal-
 culée dans PLASTI.

VK1 (N1) - Premier paramètre d'érouissage
 (R_1).

VK2 (N1) - Deuxième paramètre d'érouissage
 (pour ICRIT = 7) (R_2).

CONST ((1 à 13), N1) - Paramètres du modèle.

CONST (14, N1) - $\delta \sigma_z$ pour le cas des déforma-
 tions planes avec IDPTO = 0 ; calculée
 dans CORENW ou COREVE, initialisé à zé-
 ro dans PLASTI.

CONST (15, N1) - σ_z , si IDPTO = 0 , initia-
 lisé dans PLASTI.

VII.5.2.2 - Calcul des déformations

Etant donné que le module GROUPE 5 cal-
 cule uniquement les déplacements et directe-
 ment les contraintes à partir des dérivées de
 l'incrément de déplacement ΔU_i de l'itération,
 nous avons ajouté deux sous-programmes qui
 calculent les déformations :

- le sous-programme PCALDE (Fig. VII.10) qui
 prépare les paramètres nécessaires (il est
 appelé par le sous-programme CONTR (Fig.
 VII.11)),

- le sous programme CALDEF qui effectue les
 calculs des déformations élastiques et plas-
 tiques.

Les algorithmes de ces calculs seront
 présentés brièvement.

VII.5.2.2.1 - Déformations totales

Les déformations totales sont calculées
 dans le sous-paragraphe CONTR (Fig. VII.11)
 à partir de $\Delta \delta_i \underline{\sigma} = \Delta_i \underline{\sigma} - \delta_i \underline{\sigma}$ (Fig. VI.13)

$$\underline{\varepsilon}_i = \sum_{i=1}^n \Delta_i \underline{\varepsilon}$$

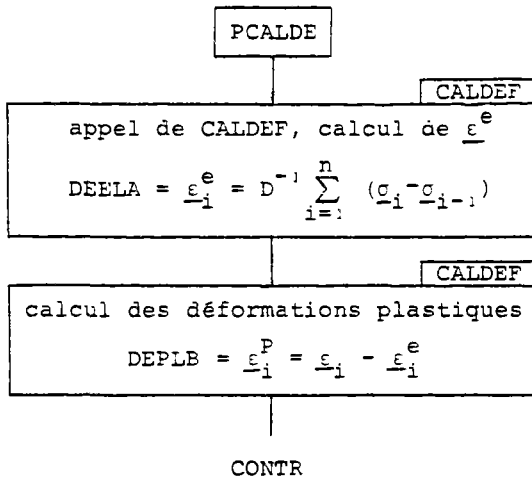


Fig. VII.10 - Sous-programme PCALDE.

avec :

$$\Delta_i \underline{\varepsilon} = D^{-1} \Delta \delta_i \underline{\sigma}$$

n étant le nombre total d'itérations,

$\Delta \delta_i \underline{\sigma}$ étant la variation "élastique" des contraintes au cours de l'itération i ,

$D = D_s$ (Eq. VII.2.b) pour la symétrie de révolution,

$D = D^{DP}$ (Eq. VII.10.a) pour la déformation plane.

VII.5.2.2.2 - Déformations élastiques

Les déformations élastiques sont calculées dans le sous-programme CALDEF (Fig. VII.10). Nous avons supposé que les déformations élastiques sont linéaires, l'influence de cette hypothèse sur le calcul étant détaillée en (VII.7). Le calcul des déformations est effectué de la manière suivante :

$$\underline{\varepsilon}_i^e = \sum_{i=1}^n \Delta_i \underline{\varepsilon}^e$$

avec :

$$\Delta_i \underline{\varepsilon}^e = D^{-1} \Delta_i \underline{\sigma} = D^{-1} (\delta_i \underline{\sigma} + \Delta \delta_i \underline{\sigma})$$

$D = D_s$ pour la symétrie de révolution,

$D = D^{DP}$ pour la déformation plane avec l'hypothèse $\varepsilon_z^P = \varepsilon_z^e = 0$,

$D = D_s$ pour la déformation plane avec l'hypothèse $\varepsilon_z^e + \varepsilon_z^P = 0$.

Le choix de la matrice correspond à l'option choisie par l'utilisateur.

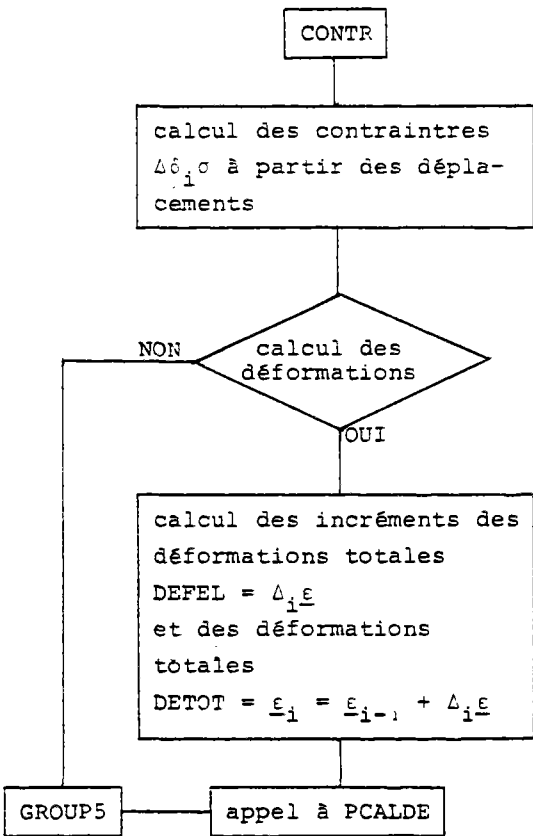


Fig. VII.11 - Sous-programme CONTR.

VII.5.2.2.3 - Déformations plastiques

On peut calculer les déformations plastiques de deux manières :

$$1) \underline{\varepsilon}^P = \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^e$$

$$2) \underline{\varepsilon}^P = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \Delta_{i,j}^P \right)$$

avec :

$$\Delta_{j,i}^P = ; j \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\varepsilon}} \right)_i^{j-1}$$

l'incrément de déformation plastique pour l'itération interne numéro j et l'itération numéro i ;

m : nombre d'itérations internes (voir schéma de retour du module tangent simplifié VI.2.4),

n : nombre d'itérations dans un incrément,

La première formulation est adoptée dans le sous-programme CALDEF (Fig. VII.10) et la seconde dans le sous-programme CORENW ou COREVE (voir paragraphe suivant). Ces deux méthodes aboutissent à des résultats identiques.

VII.5.2.3 - Définition des paramètres d'érouissage pour la surface de charge initiale et évolution des paramètres d'érouissage

Nous considérons que l'état du sol au repos est élastique à la limite de plasticité (état normalement consolidé). Dès l'application de la charge, il y aura des déformations plastiques accompagnées de déformations élastiques.

Les sous-programmes INITVE (pour le modèle de Vermeer) ou INITNW (pour le modèle de Nova et al), qui sont appelés par le sous-programme CRITIN (qui est appelé par le sous-programme PLASTI, figure VII.12), initialisent

R à partir des équations des surfaces de charge :

$$F_1(\underline{\sigma}_0, R_1^0) = 0$$

$$F_2(\underline{\sigma}_0, R_2^0) = 0$$

avec $\underline{\sigma}_0$ l'état de contrainte du sol au repos.

Quand il s'agit d'un sol surconsolidé, on a la possibilité de lire les paramètres d'érouissage initiaux dans le sous-programme CALCTE (on lit zéro s'il s'agit d'un sol normalement consolidé et la valeur des paramètres d'érouissage s'il s'agit d'un sol surconsolidé).

Evolution des paramètres d'érouissage

Les variations des paramètres d'érouissage $\Delta_i R$ sont déterminées dans les sous-programmes CORENW pour le modèle de Nova et al., et COREVE pour le modèle de Vermeer (voir le paragraphe suivant), ensuite les paramètres totaux d'érouissage (R_1 et R_2) sont calculés dans le sous-programme PLASTI

$$R_i = R_{i-1} + \sum_{j=1}^m \Delta_{i,j}^P R$$

avec :

m : nombre d'itérations internes,

i : numéro de l'itération.

VII.5.2.4 - Critère de convergence dans les modèles élastoplastiques

Dans le programme ROSALIE, GROUPE 5 les itérations de plasticité en un point s'arrêtent lorsque l'on satisfait :

$$\frac{F_1}{F_1^0} < \varepsilon$$

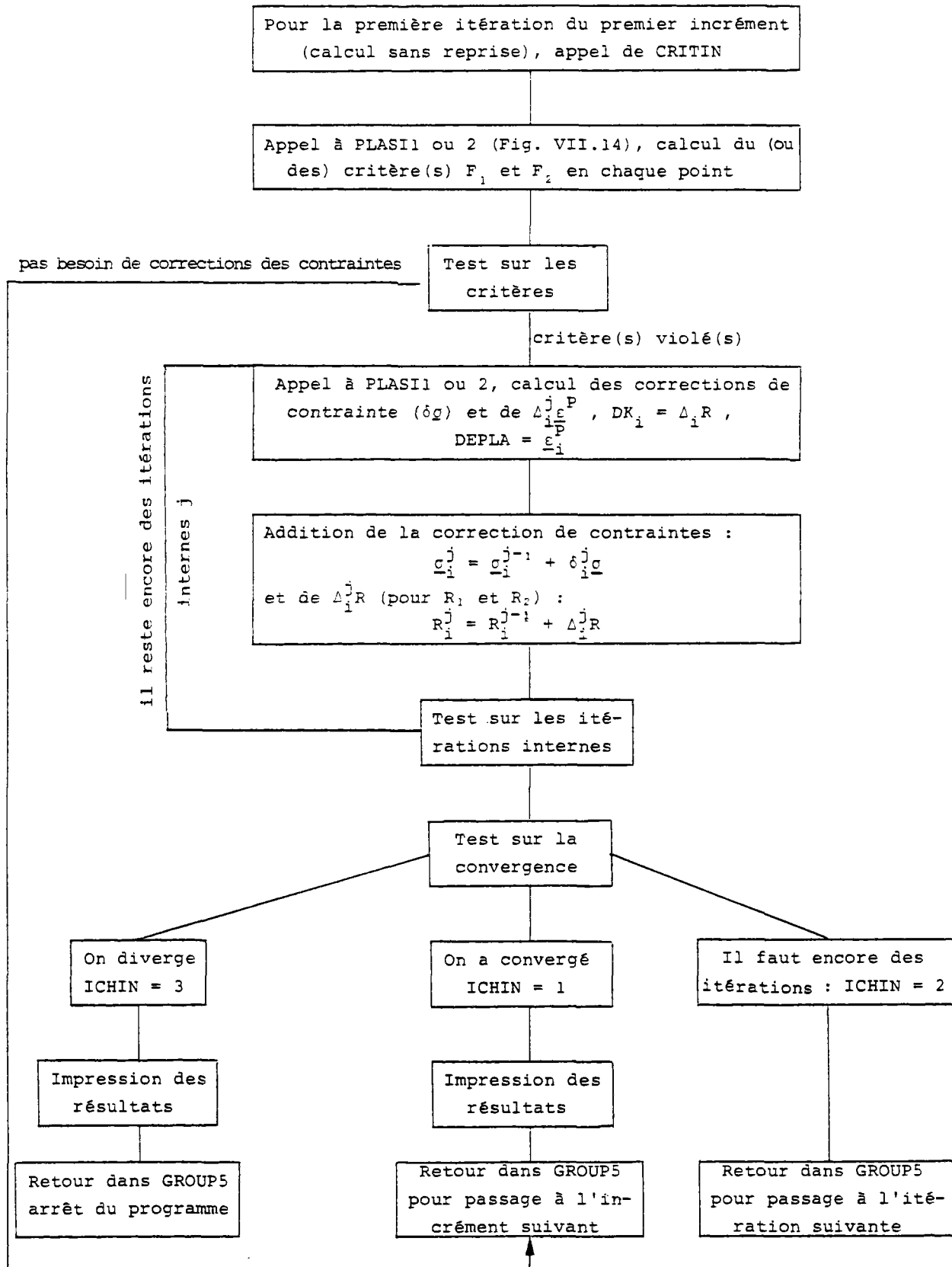


Fig. VII.12 - Sous-programme PLAST1.

F_1 est la valeur de la fonction de charge (positive en plasticité) après la dernière itération et F_1^0 la première valeur positive rencontrée sur l'incrément (la convergence est testée dans le sous-programme PLASTI).

Quand il s'agit d'un modèle avec deux surfaces de charge, le critère de convergence doit être satisfait pour les deux surfaces. Le schéma de la figure (VII.13) montre l'ordinogramme suivi pour le cas des modèles avec deux surfaces de charge implantés dans PLASTI ($F_2(\underline{\sigma}, R_2) = 0$ étant l'équation de la deuxième surface de charge et F_2^0 la valeur du deuxième critère quand il devient positif pour la première fois).

VII.5.2.5 - Cas des modèles de Nova et al. et de Vermeer

On a vu que les sous-programmes CRITNW, CORENW, CRITVE, CORENW sont appelés par le sous-programme PLAS11 ou 2, (Fig. VII.14): le sous-programme CRITNW (Fig. VII.15) calcule la valeur de la fonction de charge et le sous-programme CORENW (Fig. VII.16) calcule les corrections de contrainte et les déformations plastiques (DEPLA), pour le modèle de Nova et al. et pour chaque point du maillage.

En ce qui concerne le modèle de Vermeer, qui définit deux surfaces de charge, nous avons choisi le troisième schéma présenté dans le paragraphe (VI.3) pour déterminer les corrections de contrainte. Le sous-programme CRITVE (Fig. VII.17) calcule les surfaces de charge et le sous-programme COREVE (Fig. VII.18) calcule les corrections de contrainte et les déformations plastiques, etc.

VII.6 - Programmation pour le cas d'un champ de contraintes imposé uniforme

Quand un état de contrainte homogène est imposé (cas de l'essai triaxial, par

exemple), on peut résoudre les équations de comportement (Eq. I.29) sans avoir recours à une discrétisation par éléments finis, mais par une méthode d'intégration directe (numérique ou parfois même analytique).

En effet, l'hypothèse d'homogénéité des contraintes imposées ramène le comportement de l'échantillon triaxial au comportement d'un "point" unique ayant les caractéristiques mécaniques de l'échantillon. Nous avons mis au point un programme d'intégration numérique directe, ainsi qu'un programme avec itérations de correction de contraintes plastiques par la méthode de force (comme dans la méthode des éléments finis), qui permettent de traiter ce type de problème à un seul point. Ces deux outils nous ont permis de vérifier les nouveaux sous-programmes de ROSALIE GROUPE 5 et d'étudier aussi certains caractères du comportement élastoplastique (paragraphe VII.7).

VII.6.1 - Programme d'intégration numérique directe pour le cas d'un essai triaxial (méthode analytique)

Dans le cas de l'essai triaxial ($\sigma_2 = \sigma_3$, $\epsilon_2 = \epsilon_3$) l'équation (I.9) s'écrit :

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \dot{\sigma}_1 + 2 \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} \dot{\sigma}_2}{H} \quad (\text{VII.66})$$

H et $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$ ayant été définis précédemment pour chaque modèle dans le chapitre VII, paragraphe 4.

En tenant compte des équations (I.5) et (VII.66), on trouve les systèmes suivants :

pour des modèles avec une surface de charge :

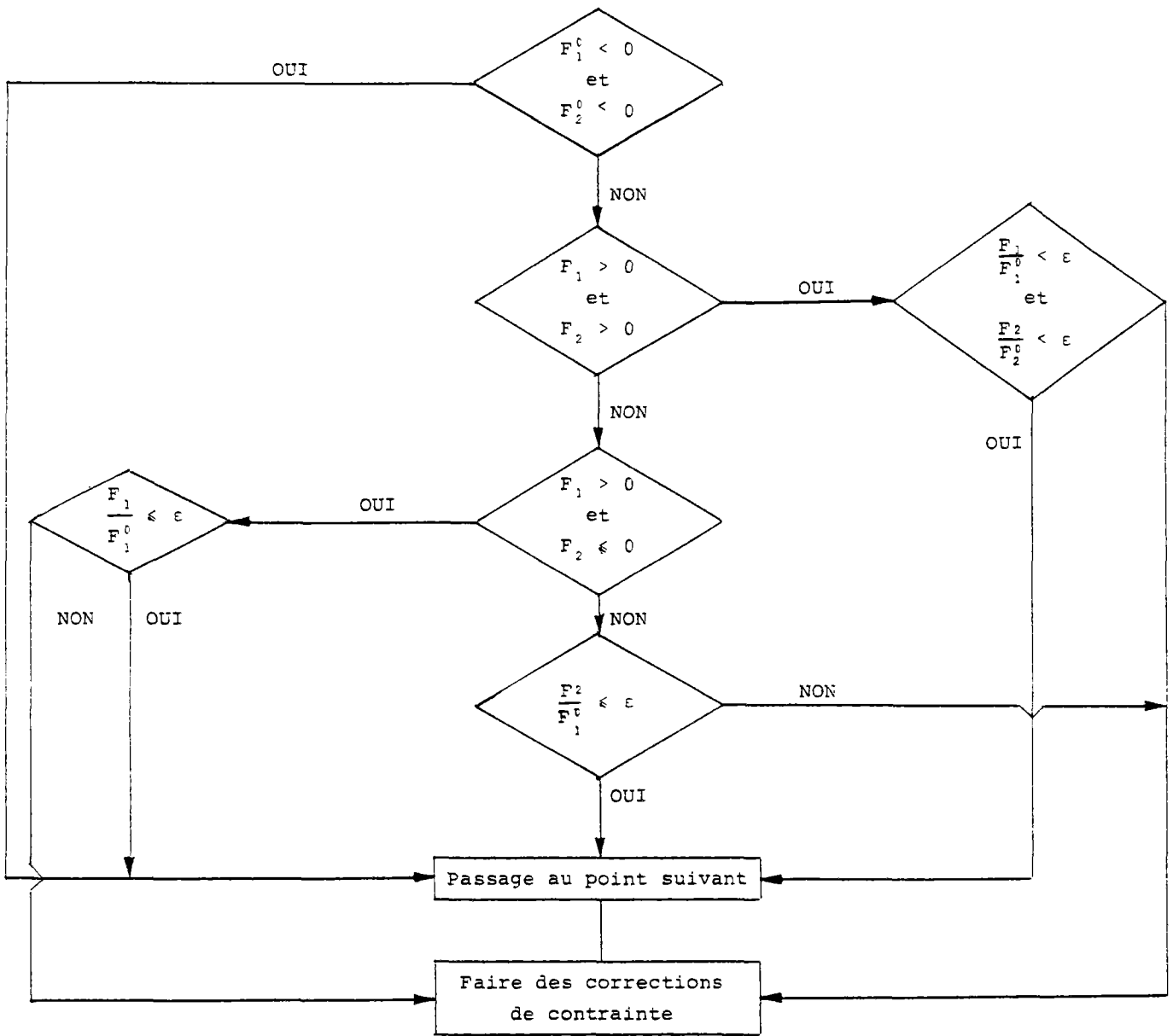


Fig. VII.13 - Critère de convergence dans le cas de deux surfaces de charge.

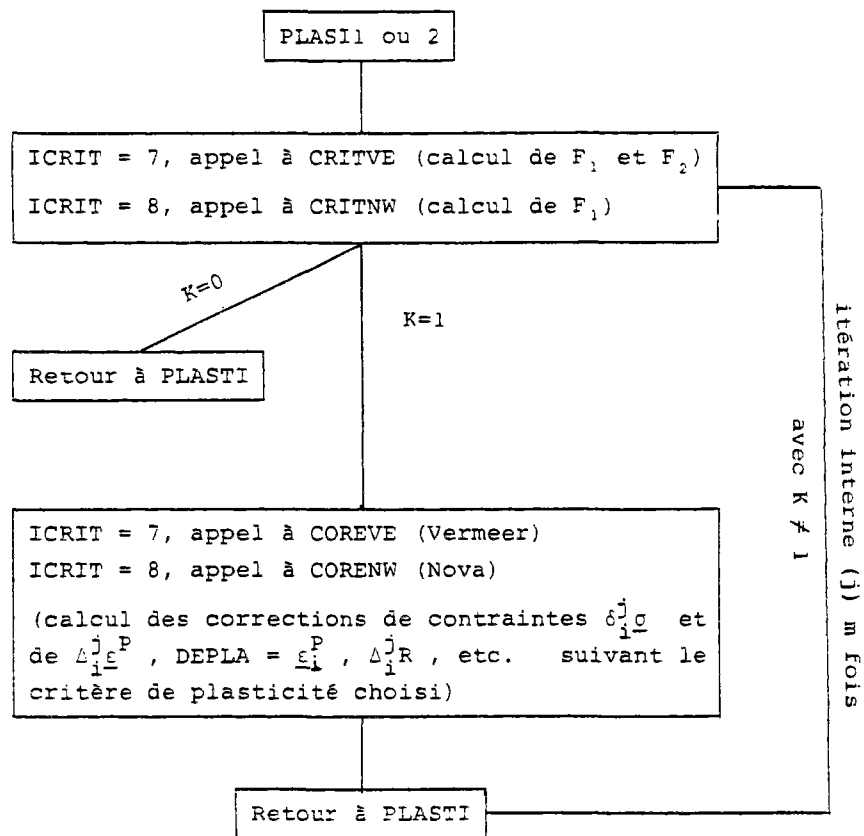


Fig. VII.14 - Sous-programme PLASTI.

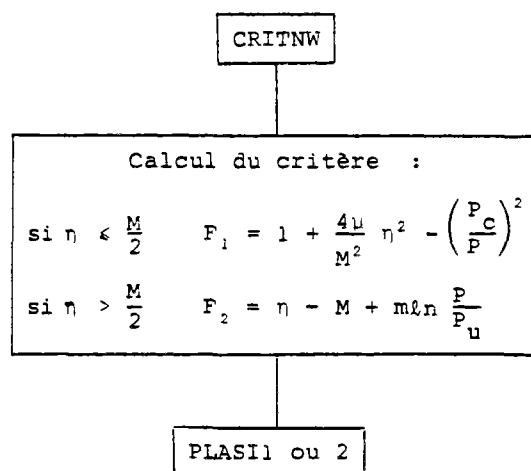


Fig. VII.15 - Sous-programme CRITNW.

CORENW

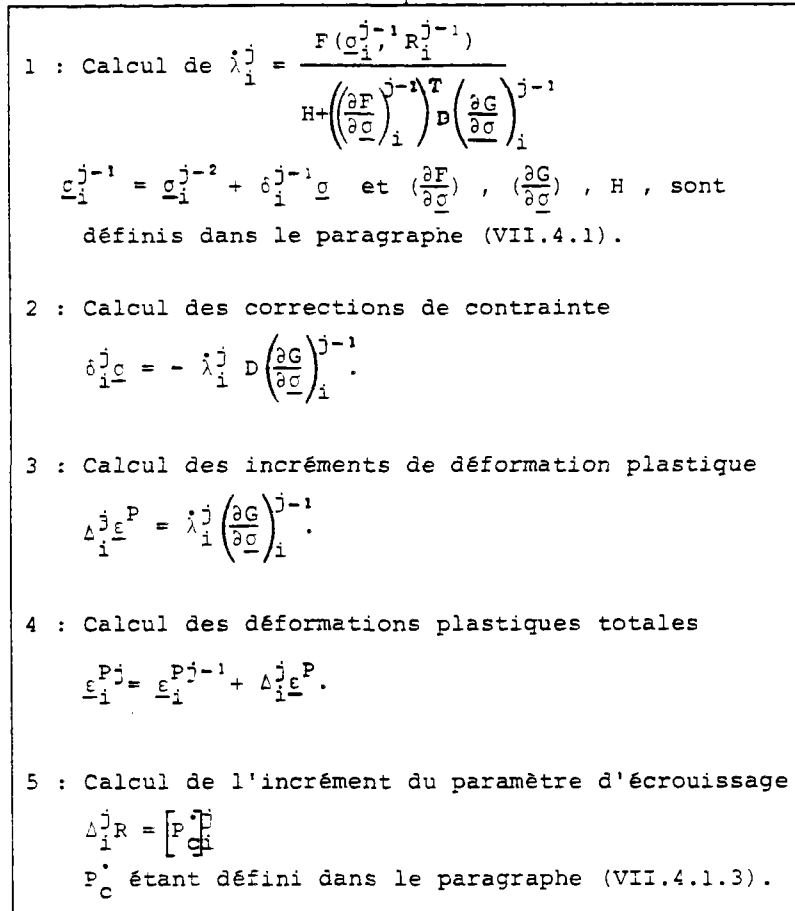


Fig. VII.16 - Sous-programme CORENW.

CRITVE

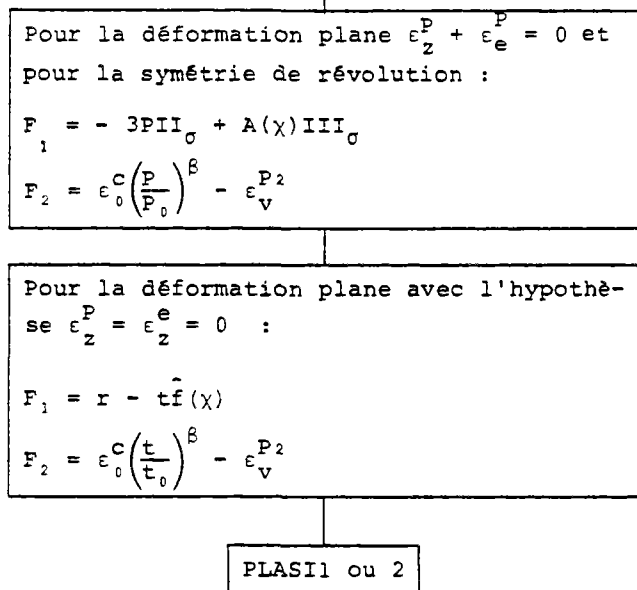


Fig. VII.17 - Sous-programme CRITVE pour le calcul des critères F_1 et F_2 .

COREVE

Si IDPTO = 0 ($\epsilon_z^e + \epsilon_z^p = 0$), ou en cas de symétrie axiale $D = D_s$;
calcul de $(\delta_i^j \sigma_x, \delta_i^j \sigma_y, \delta_i^j \sigma_z, \delta_i^j \sigma_{xy})$.

Si IDPTO = 1 ($\epsilon_z^e = \epsilon_z^p = 0$), $D = D^{DP}$; calcul de $(\delta_i^j \sigma_x, \delta_i^j \sigma_y, \delta_i^j \sigma_{xy})$.

1 : Calcul de $\lambda_i^j = \frac{F(\underline{\sigma}_i^{j-1}, R_i^{j-1})}{H + \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)_i^{j-1} D \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right)_i^{j-1}}$

$\underline{\sigma}_i^{j-1} = \underline{\sigma}_i^{j-2} + \delta_i^{j-1} \underline{\sigma}$ et $\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)_i$, $\left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right)_i$ et H sont définis en (VII.4.2).

2 : Calcul des corrections de contrainte

$\delta_i^j \underline{\sigma} = - \lambda_i^j D \text{ ou } \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right)_i^{j-1}$

3 : Calcul des incréments de déformation plastique

$\Delta_i^j \underline{\epsilon}^P = \lambda_i^j \left(\frac{\partial G}{\partial \underline{\sigma}}\right)_i^{j-1}$

4 : Calcul des déformations plastiques totales

$\underline{\epsilon}_i^{P,j} = \underline{\epsilon}_i^{P,j-1} + \Delta_i^j \underline{\epsilon}^P$

5 : Calcul de l'incrément du paramètre d'écroutissage $\Delta_i^j R$
 ΔR étant défini dans les paragraphes (VII.4.2.1.3) et (VII.4.2.2.3).

6 : Calcul de $F_2(\underline{\sigma}_i^j, R_2^j)$.

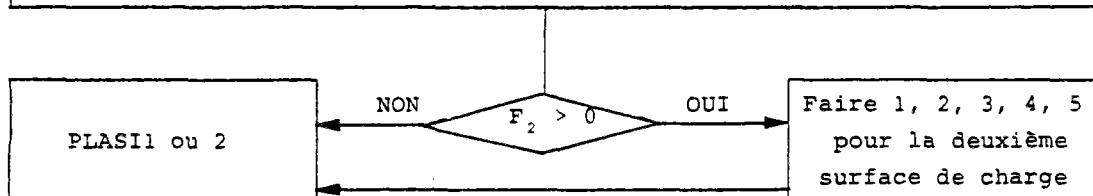


Fig. VII.18 - Sous-programme COREVE.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \frac{d\varepsilon_1^P}{d\sigma_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} + 2 \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} \frac{d\sigma_2}{d\sigma_1}}{H} \frac{\partial G}{\partial \sigma_1} \\ \frac{dy_2}{dx} &= \frac{d\varepsilon_2^P}{d\sigma_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} + 2 \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} \frac{d\sigma_2}{d\sigma_1}}{H} \frac{\partial G}{\partial \sigma_2} \\ \frac{dy_3}{dx} &= \frac{d\sigma_2}{d\sigma_1} \end{aligned} \right. \quad (\text{VII.67})$$

$\frac{\partial G}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$, H sont définis pour le modèle de Nova et al. dans le paragraphe (VII.4.1).

. pour des modèles avec deux surfaces de charge, les deux étant actives, et en se servant de l'équation (I.24) :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \frac{d\varepsilon_1^P}{d\sigma_1} = \frac{\frac{\partial F_1}{\partial \sigma_1} + 2 \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_2} \frac{d\sigma_2}{d\sigma_1}}{H_1} \frac{\partial G_1}{\partial \sigma_1} + \frac{\frac{\partial F_2}{\partial \sigma_1} + 2 \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_2} \frac{d\sigma_2}{d\sigma_1}}{H_2} \frac{\partial G_2}{\partial \sigma_1} \\ \frac{dy_2}{dx} &= \frac{d\varepsilon_2^P}{d\sigma_1} = \frac{\frac{\partial F_1}{\partial \sigma_1} + 2 \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_2} \frac{d\sigma_2}{d\sigma_1}}{H_1} \frac{\partial G_1}{\partial \sigma_2} + \frac{\frac{\partial F_2}{\partial \sigma_1} + 2 \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_2} \frac{d\sigma_2}{d\sigma_1}}{H_2} \frac{\partial G_2}{\partial \sigma_2} \\ \frac{dy_3}{dx} &= \frac{d\sigma_2}{d\sigma_1} \end{aligned} \right. \quad (\text{VII.68})$$

$\frac{\partial G_1}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial G_2}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial F_2}{\partial \sigma}$, H_1 , H_2 sont définis pour le modèle de Vermeer dans le paragraphe (VII.4.2).

Pour résoudre ces systèmes d'équations différentielles, nous avons utilisé la méthode de RUNGE-KUTTA (méthode analytique).

Trois détails sont à préciser :

- 1) le rapport $\frac{d\sigma_2}{d\sigma_1}$ est donné pour chaque type d'essais,
- 2) les déformations élastiques sont calculées à partir de l'équation :

$$\underline{\varepsilon}^e = D^{-1} \Delta \underline{\sigma} = D^{-1} (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^0) ,$$

3) les déformations plastiques ε_1^P et ε_2^P sont déterminées à la fin du calcul.

Les paragraphes suivants concernent, dans un but explicatif, uniquement l'essai triaxial de compression ($-\sigma_1 \geq -\sigma_2 = -\sigma_3$, $d\sigma_2 = d\sigma_3 = 0$), mais la méthode est aisément adaptable à tout autre type d'essai triaxial.

Cas de l'essai triaxial de compression

Dans ce cas :

$$d\sigma_2 = d\sigma_3 = 0 \quad (\text{VII.69})$$

$$d\varepsilon_1^e = \frac{1}{E} d\sigma_1$$

$$\text{et, en intégrant, } \varepsilon_1^e = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \sigma_1^0).$$

Le système d'équations (VII.67) s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy_1}{d\sigma_1} &= \frac{d\varepsilon_1^P}{d\sigma_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_1}}{H} \frac{\partial G}{\partial \sigma_1} \\ \frac{dy_2}{d\sigma_1} &= \frac{d\varepsilon_2^P}{d\sigma_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_1}}{H} \frac{\partial G}{\partial \sigma_2} \\ \frac{dy_3}{d\sigma_1} &= \frac{d\sigma_2}{d\sigma_1} = 0. \end{aligned} \right. \quad (\text{VII.70})$$

Cela est vrai si $F > 0$ (numériquement), sinon :

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx} = 0 .$$

La figure (VII.19) montre l'ordinogramme pour l'essai triaxial de compression.

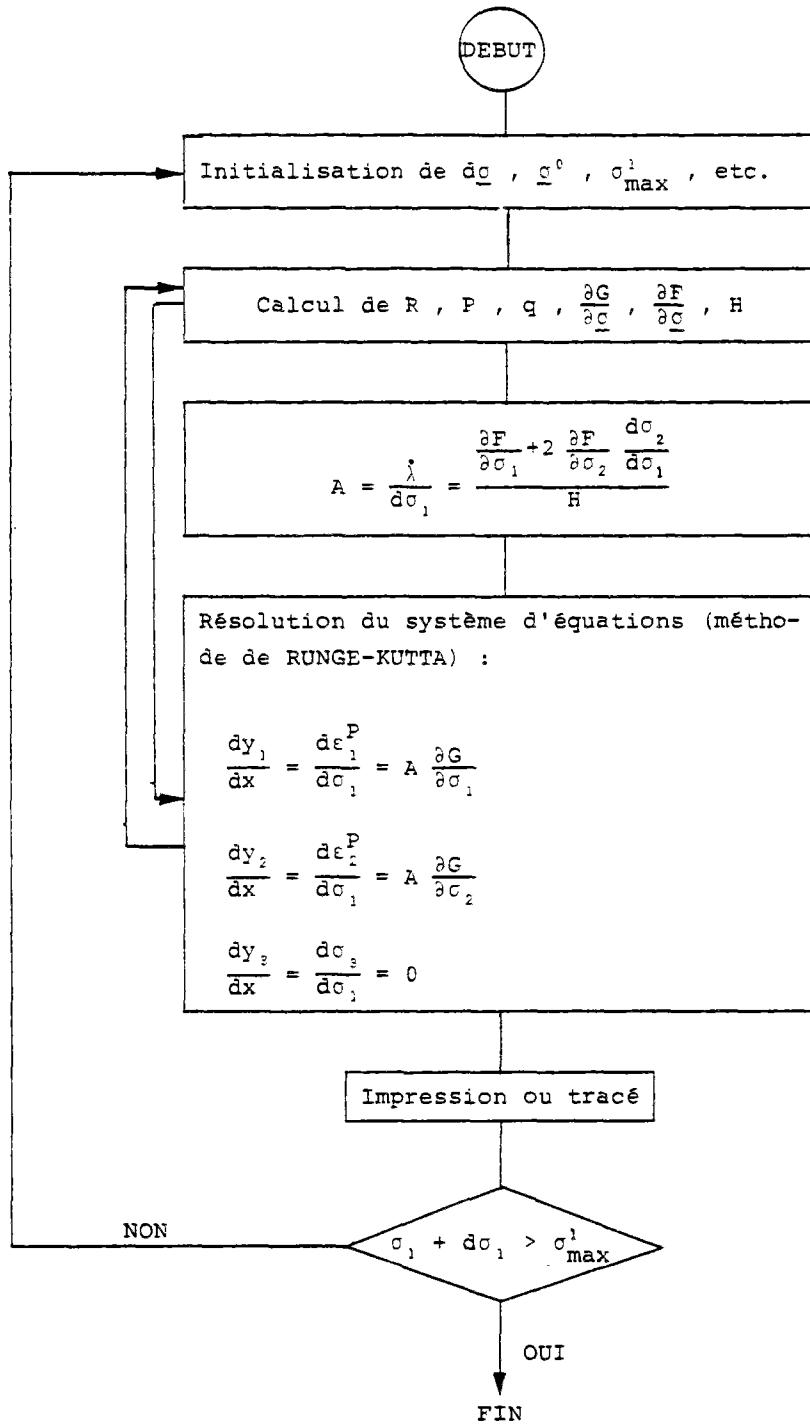


Fig. VII.19 - Ordinogramme pour la méthode d'intégration numérique directe pour l'essai triaxial de compression.

VII.6.2 - Programme avec itérations de contraintes initiales (méthode de forces pour un point)

La méthode des corrections de contraintes "plastiques" utilisée dans ce programme est identique à celle du Programme ROSALIE GROUPE 5. Ce programme simule l'échantillon à un point, ayant les caractéristiques géotechniques du matériau (méthode de forces pour un point).

L'ordinogramme de cette méthode pour le cas de l'essai triaxial de compression est présenté sur la figure (VII.20).

VII.7 - Réponse "triaxiale" des modèles.
Tests numériques

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'illustrer la réponse des modèles pour une sollicitation triaxiale de compression, d'étudier et de vérifier la méthode numérique par force "initiale" de correction.

Les calculs seront pour la plupart effectués en utilisant les deux programmes présentés dans le paragraphe précédent :

- programme avec itérations de correction de contrainte plastique qui utilise la méthode de force avec le schéma de retour du module tangent simplifié (dénommée ci-après "méthode de force à un point"),
- programme par intégration numérique directe qui procède par la "méthode analytique".

Le sol que nous choisissons a les caractéristiques suivantes :

- A - Les paramètres nécessaires pour calculer les déformations plastiques sont :

- Pour le modèle de Nova et al. (Nova et Hueckel, 1982)

M	μ	B_0	λ	D	m
1,35	0,73	0,00168	0,00406	0,522	0,45

et $p_{co} = 55$ kPa.

- Pour le modèle de Vermeer (Vermeer, 1982)

ϕ_p	ϕ_{cv}	ϵ_0^c	β	P_0	ϵ_0^e
43°	32°	0,0035	0,25	200 kPa	0,004

Ces données correspondent au sable de l'Atelier de Grenoble ; l'angle de frottement au pic ϕ_p et l'angle de frottement à l'état critique ϕ_{cv} pour les deux modèles sont très proches ($\phi_{cv} = 33^\circ$ et $\phi_p = 43^\circ$ pour le modèle de Nova et al.); on les calcule à partir des équations (III.22) et (III.20).

Le rapport des contraintes à la rupture (Eq. III.19 et Eq. IV.19) pour les deux modèles correspond à :

$$\eta_f = 1,77 .$$

- B - Les paramètres d'élasticité choisis sont:

$$E = 150 \text{ Mpa} \quad \text{et} \quad \nu = 0,3$$

E étant le module de Young et ν étant le coefficient de Poisson.

VII.7.1 - Tests sur les déformations calculées

VII.7.1.1 - Déformations plastiques

Les figures (VII.21.a) et (VII.21.b) montrent les déformations axiales et volumiques obtenues (en fonction des contraintes appliquées) à partir de la "méthode de force à un point" et à partir de la méthode analy-

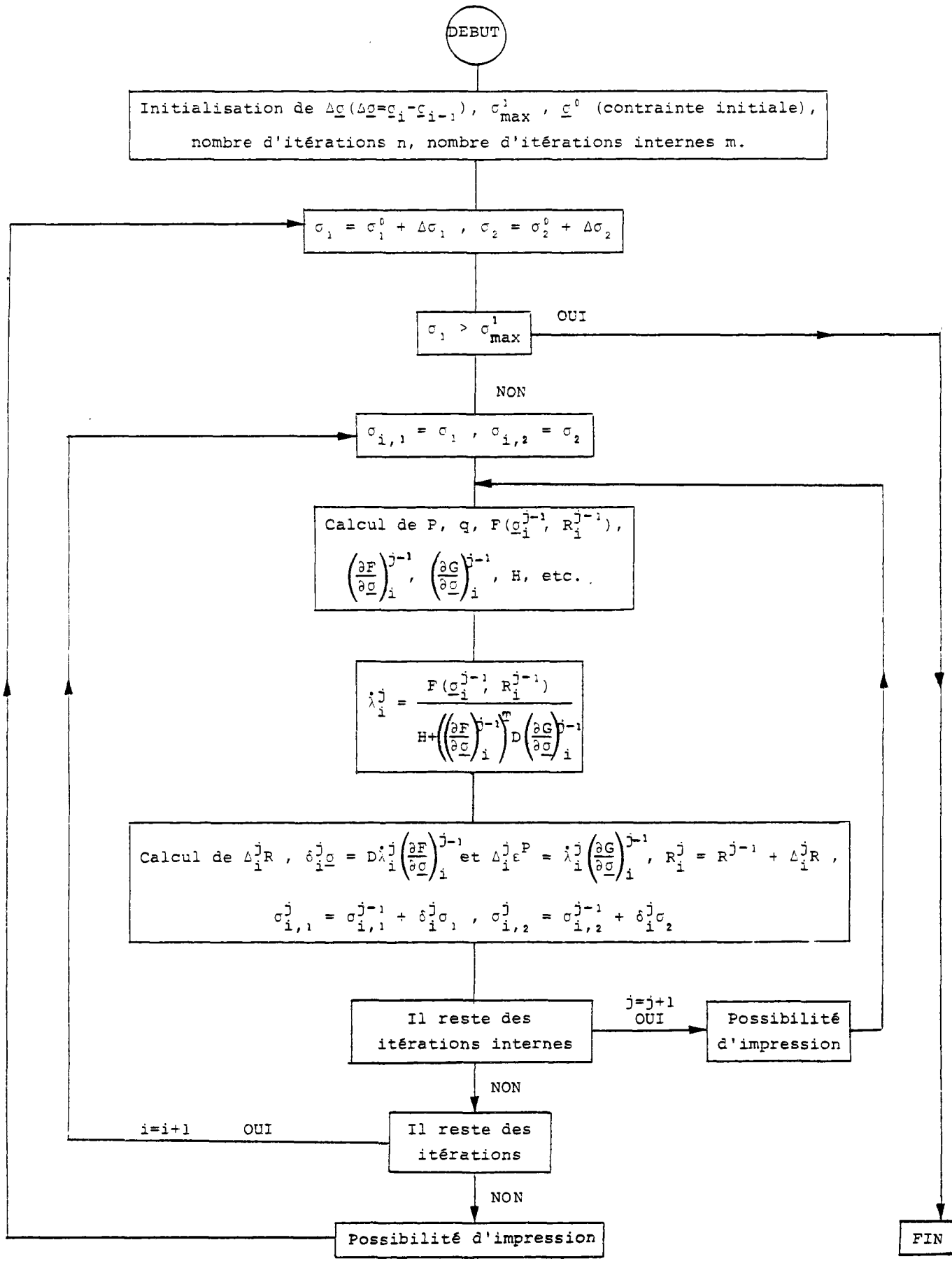


Fig. VII.20 - Programme avec itérations de corrections plastiques par contraintes initiales pour l'essai triaxial de compression (et les autres types d'essai triaxial).

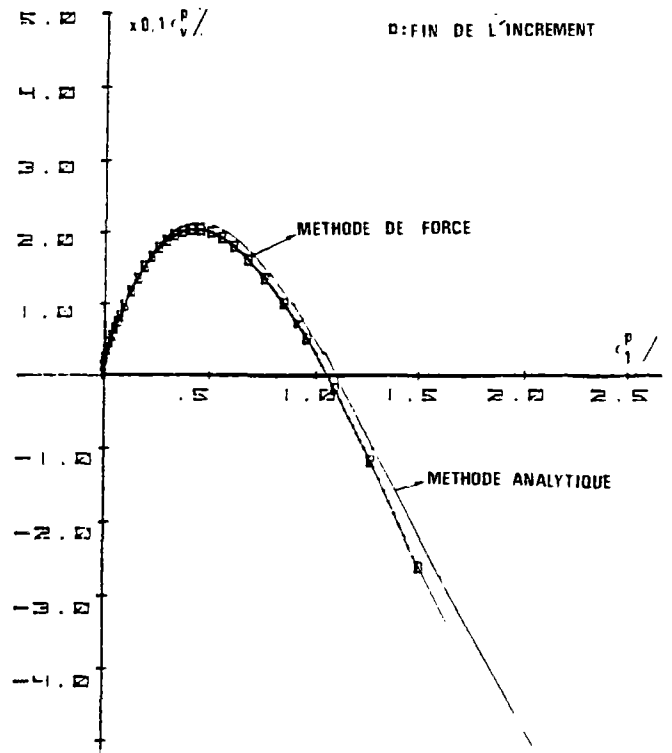
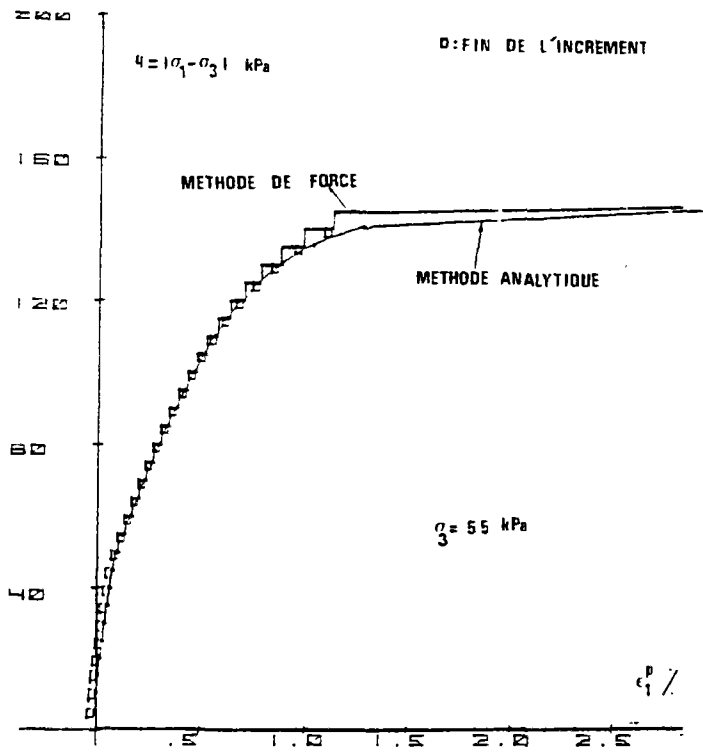


Fig. VII.21.a - Déformations plastiques obtenues pour le modèle de Nova et al.

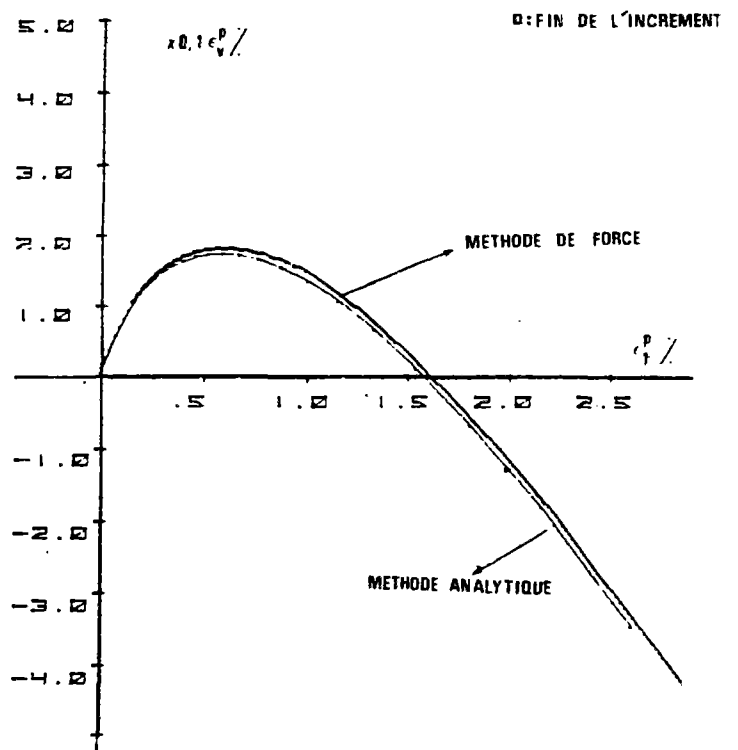
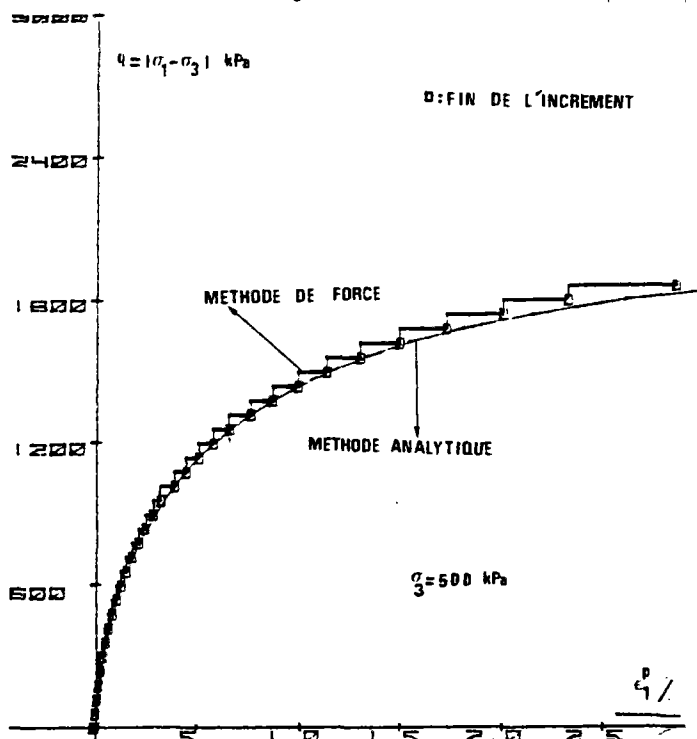


Fig. VII.21.b - Déformations plastiques obtenues pour le modèle de Vermeer.

tique respectivement par le modèle de Nova et al. et celui de Vermeer. On constate une bonne concordance entre les résultats obtenus à partir de ces deux méthodes.

L'algorithme utilisé pour obtenir la convergence sur les deux surfaces de charge pour le modèle de Vermeer est donné dans le paragraphe (VI.3.3). Les figures (VII.22.a) et (VII.22.b) illustrent les déformations plastiques dues respectivement à la surface de charge de cisaillement et à la surface de charge de consolidation. On constate que la plus grande part des déformations plastiques provient du cisaillement.

VII.7.1.2 - Déformations élastiques

Les déformations élastiques dans les deux modèles sont non linéaires (Eq. III.1, III.2 et IV.5). Cependant, nous les avons considérées comme linéaires pour les applications par la méthode des éléments finis, afin

de ne pas alourdir la programmation dans ROSALIE. Les figures (VII.23.a) et (VII.23.b) illustrent respectivement, pour les modèles de Nova et al. et de Vermeer, le cas linéaire et le cas non linéaire. Les paramètres d'élasticité non linéaires sont les suivants :

. pour le modèle de Nova et al (Nova et Hueckel, 1982)

$$B_0 = 0,00168 ,$$

$$L_0 = 0,00248 ;$$

. pour le modèle de Vermeer

$$G_0 = \frac{E}{2} = 75\ 000 \text{ kPa} ,$$

$$\nu = 0 , \quad \beta = 0,25 .$$

On peut conclure que la linéarisation des déformations élastiques influence peu les déformations totales, car la comparaison des figures (VII.21) et (VII.23) montre que la différence entre l'élasticité linéaire

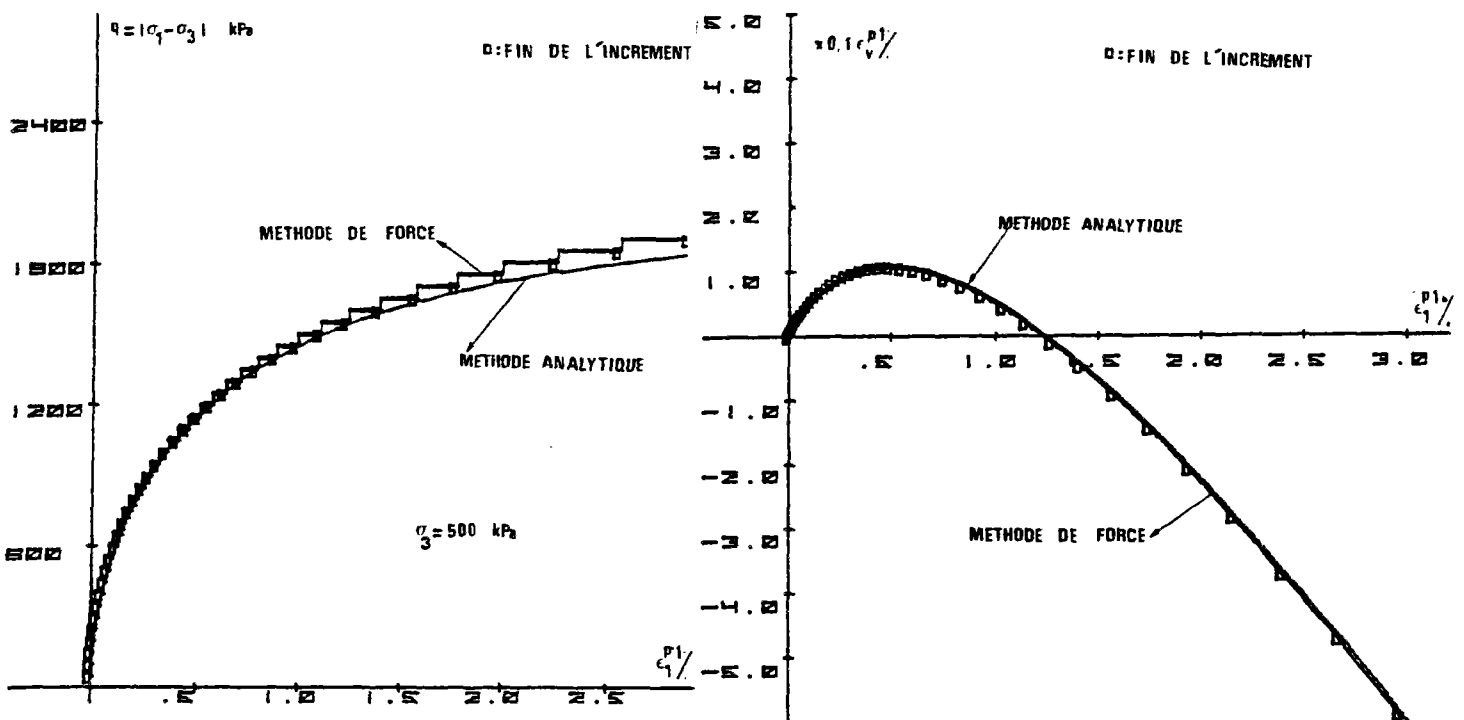


Fig. VII.22. a) Surface de charge de cisaillement.

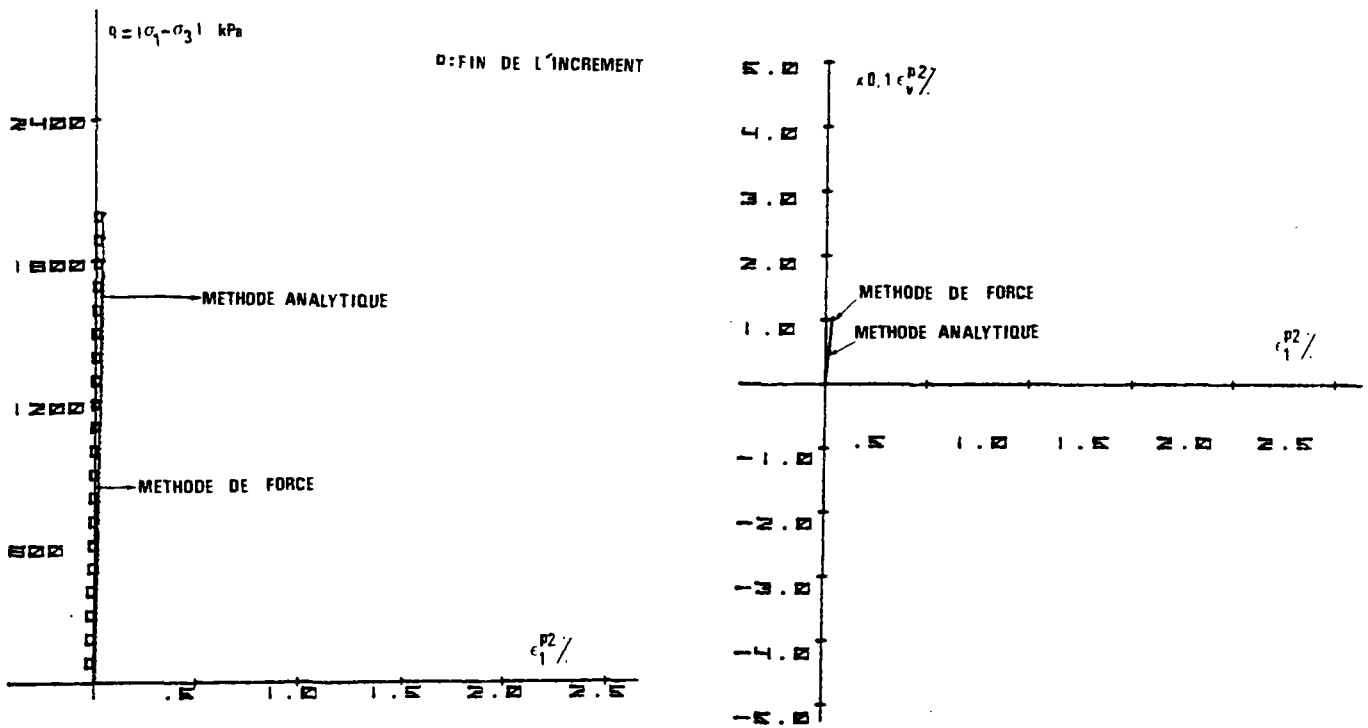
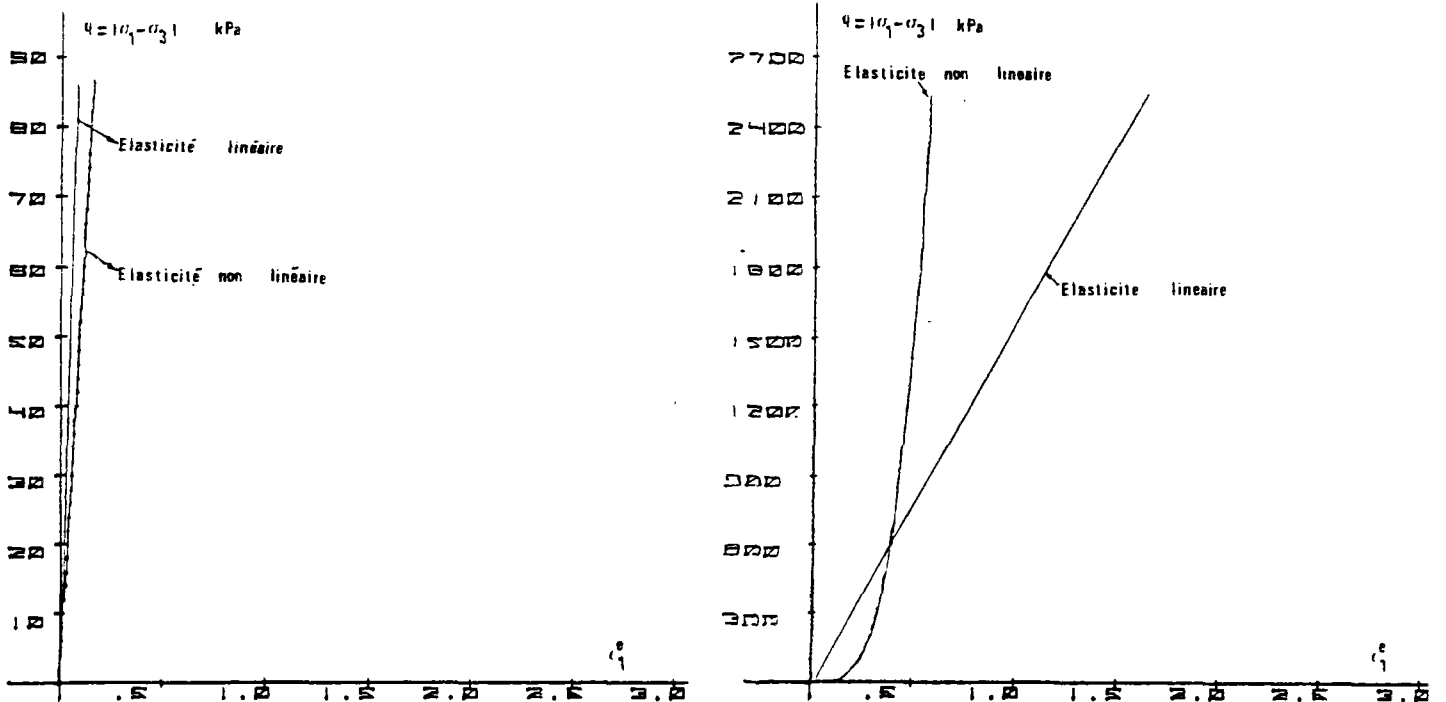


Fig. VII.22. b) Surface de charge de consolidation.

Fig. VII.22 - Déformations plastiques dans le cas du modèle de Vermeer.



a) Modèle de Nova et al.

b) Modèle de Vermeer.

Fig. VII.23 - Déformations élastiques axiales.

et non linéaire est négligeable par rapport aux déformations plastiques.

VII.7.1.3 - Comparaison avec les résultats expérimentaux

Les déformations totales obtenues à partir de la "méthode de force à un point" sont présentées avec les résultats des essais triaxiaux de l'atelier de Grenoble (1982) sur la figure (VII.24). On constate une bonne concordance pour les deux modèles (On note que le modèle de Nova et al. prédit des valeurs plus grandes pour les déformations plastiques que le modèle de Vermeer.)

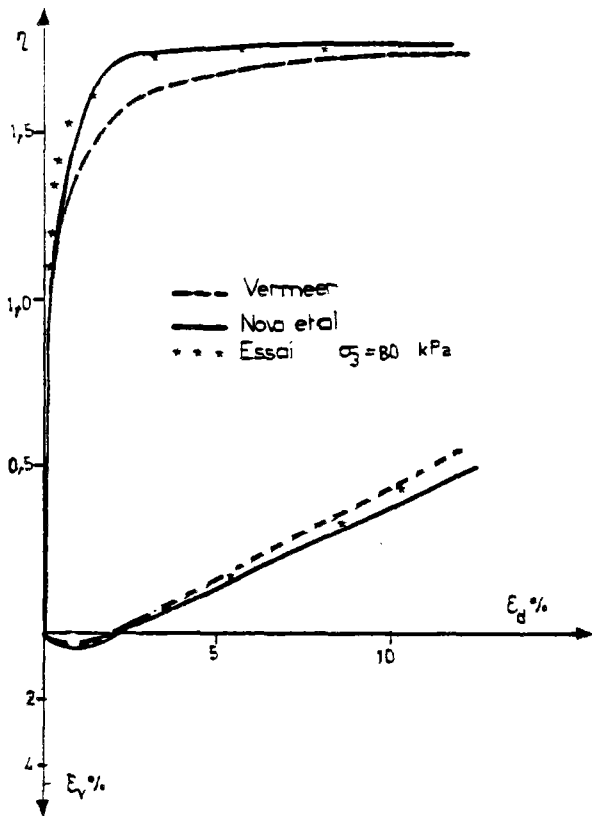


Fig. VII.24 - Comparaison des résultats de l'essai triaxial et des résultats calculés.

VII.7.2 - Tests des résultats du programme

ROSALIE

La figure (VII.25) montre le maillage de l'échantillon de l'essai triaxial considéré dans ce paragraphe ; le quart de l'échantillon y est représenté.

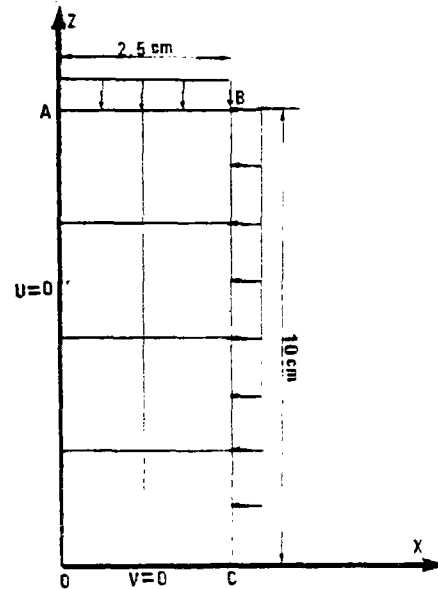


Fig. VII.25 - Maillage considéré pour l'essai triaxial.

Les conditions aux limites sont les suivantes :

- les déplacements verticaux sur OC et les déplacements horizontaux sur OA sont nuls,
- une pression uniforme est appliquée sur chaque bord AB et BC.

Les résultats obtenus à partir du programme ROSALIE GROUPE 5 (utilisant le maillage de la figure VII.25) sous les sollicitations triaxiales de compression ($|\sigma_1| > |\sigma_2| = |\sigma_3|$) et les résultats obtenus à partir de la "méthode de force à un point" sont trouvés rigoureusement identiques. On en conclut que la programmation sur ROSALIE est correcte.

VII.7.3 - Influence des paramètres intervenant dans le calcul

L'influence de différents paramètres intervenant dans le calcul des déformations plastiques est l'objet de ce paragraphe. L'étude paramétrique est effectuée sur le modèle de Nova et al. (une telle étude donne les mêmes résultats pour le modèle de Vermeer). L'essai considéré est l'essai triaxial de compression, avec une pression de préconsolidation $P_{CO} = 55$ kPa.

VII.7.3.1 - Influence des paramètres d'élasticité sur les déformations plastiques

L'équation de $\dot{\lambda}$ (Eq. I-9) montre que, quand l'état de contrainte est homogène, les paramètres d'élasticité (E, ν) n'influencent pas les déformations plastiques. Nous allons vérifier la validité de ce résultat dans le calcul par la méthode de force à un point. La valeur de $\dot{\lambda}$ est la suivante :

$$\dot{\lambda} = \frac{F(\sigma, R)}{H + \left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)^T D \frac{\partial G}{\partial C}} \quad (VII.71)$$

avec D la matrice d'élasticité.

Pour cela, nous avons considéré les cas suivants, pour le modèle de Nova et al. :

A : $E' = \frac{1}{10} E$

B : $E' = 10 E$

C : $E' = \frac{1}{100} E$

D : $E' = 100 E$

E étant le module de Young utilisé dans la méthode "analytique". Le coefficient de Poisson est pris identique.

Pour les cas A (Fig. VII.26) et B, on obtient des résultats satisfaisants. Quand on passe aux cas C et D, on s'éloigne des résultats analytiques, car le dénominateur de l'équation (VII.71) change beaucoup. Pour mieux comparer les résultats, nous avons choisi une seule itération (Fig. VII.27).

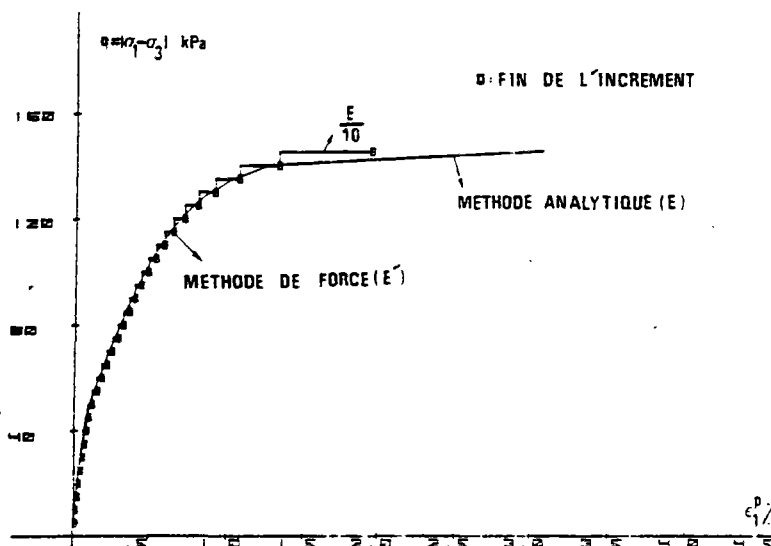


Fig. VII.26 - ($E' = \frac{E}{10}$).

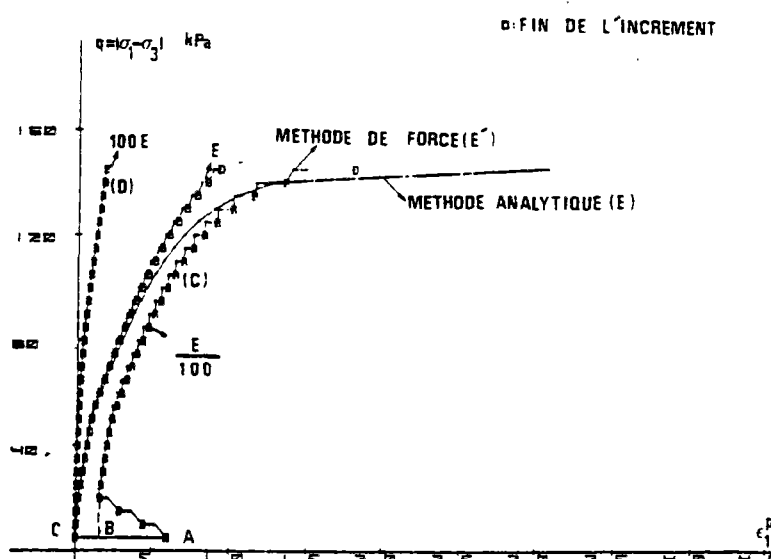


Fig. VII.27 - Influence du module de Young (une seule itération).

Pour le cas D le nombre d'itérations n'a qu'une faible influence. Par contre, si nous augmentons le nombre d'itérations pour le cas C, la charge limite ainsi obtenue devient plus faible que celle donnée par la courbe analytique.

VII.7.3.2 - Influence de la taille de l'incrément

Nous considérons toujours le modèle de Nova et al. pour le chemin de sollicitation de l'essai triaxial avec la pression de confinement (Point A, Fig. VII.28) :

$$P_0 = P_{C_0} = 55 \text{ kPa}$$

Appliquons l'incrément de charge $\Delta\sigma_1 = -33 \text{ kPa}$. L'état final des contraintes est alors (Point B, Fig. VII.26) :

$$B \begin{cases} \sigma_1 = -88 \text{ kPa} \\ \sigma_3 = -55 \text{ kPa} \end{cases} \quad \begin{cases} P = 66 \text{ kPa} \\ q = 33 \text{ kPa} \end{cases}$$

La direction des déformations plastiques évolue de ϵ_A^P à ϵ_B^P . Les résultats obtenus par la méthode analytique (Point B) et la méthode de force à un point (Point B'), sont présentés sur la figure (VII.29) ; nous avons pris pour B' dix itérations et une itération interne (pour les résultats avec plus d'itérations internes, voir plus loin.)

On constate qu'en augmentant la taille de l'incrément les résultats trouvés à partir de la méthode de force s'éloignent des résultats trouvés par l'intégration numérique directe. Cela est dû d'une part au développement de Taylor (Eq. VI.25) dans l'expression de $\dot{\lambda}$ et d'autre part aux directions des déformations plastiques obtenues dans le programme par la méthode de force (voir paragraphe suivant.)

On constate aussi qu'à partir de la troisième itération, l'état de contrainte ne varie plus, même dans le cas d'un seul incrément de 33 kPa (Fig. VII.29.d).

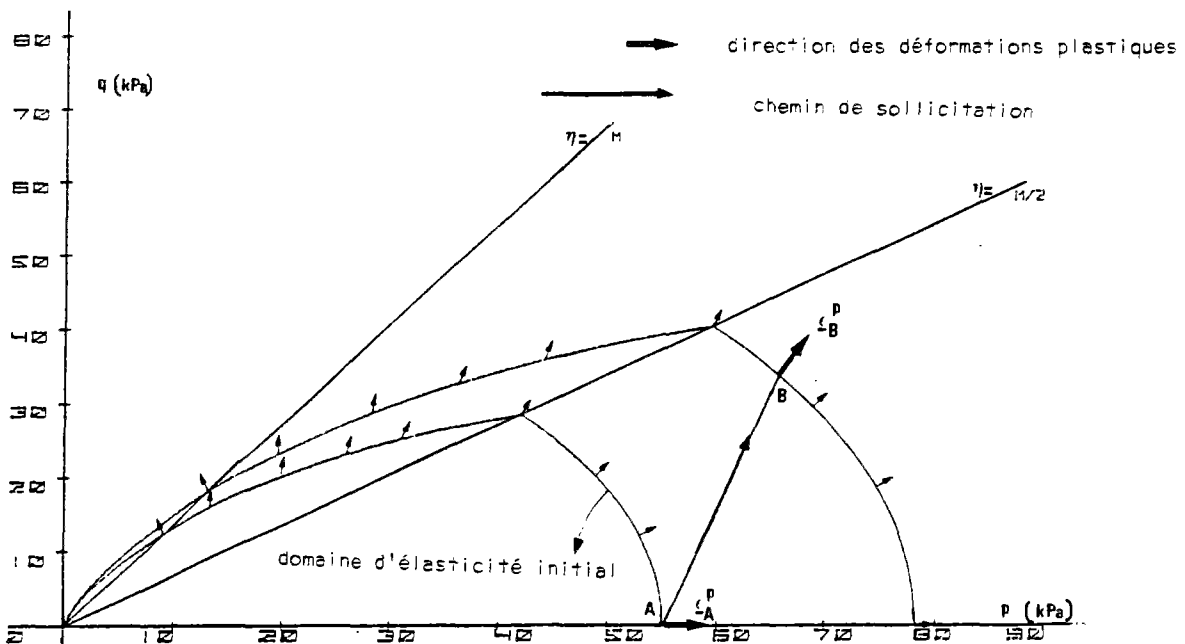


Fig. VII.28 - Evolution des taux de déformation plastique.

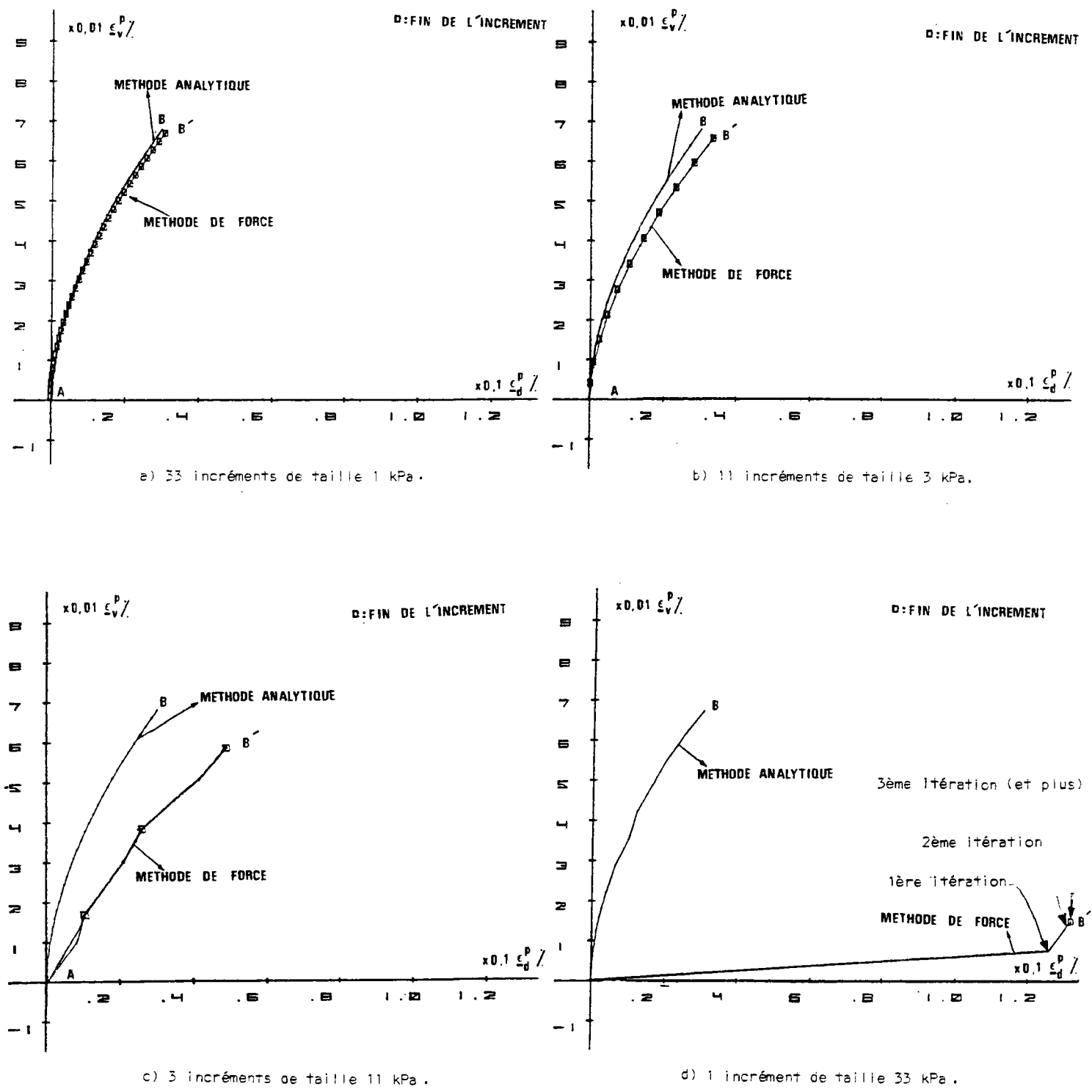


Fig. VII.29 - Influence de la taille de l'incrément.

Quand on s'approche de la rupture, il faut augmenter suffisamment le nombre d'itérations pour obtenir la convergence ; en même temps, la taille de l'incrément doit diminuer (Fig. VII.30.a). La figure (VII.30.b) montre un cas contraire où l'on a appliqué un nouvel incrément de charge avant d'obtenir une convergence suffisante à l'incrément précédent.

VII.7.3.3 - Influence des itérations internes

Dans les résultats obtenus jusqu'ici, nous avons utilisé une seule itération interne. Pour étudier l'influence de ces itérations, nous prenons un incrément de 33 kPa (Fig. VII.28). Les résultats obtenus sont présentés à la figure (VII.31) ; les points B', C, D, correspondent à la fin de la deuxième itération.

On constate que les itérations internes n'aident pas à ramener la courbe des déformations plastiques ($\epsilon_d^P, \epsilon_v^P$) obtenue à partir de la méthode de force sur la courbe obtenue analytiquement, au contraire.

Cela est dû au décalage entre le paramètre d'érouissage et l'état de contrainte.

En fait, l'état de contrainte après l'application du pas de charge se trouve en B (Fig. VII.32), (σ_B^e). La direction des déformations plastiques calculées dans le programme par la méthode de force ($\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_B$, $R = R_0 = P_{C_0}$) est $\underline{\epsilon}_B^P$, et $\underline{\epsilon}_B^P$ correspond à la direction normale. L'état de contrainte après la première correction de contrainte plastique, se trouve au point C :

$$\underline{\sigma}_C^e = \underline{\sigma}_B^e + \delta \underline{\sigma}_1^P$$

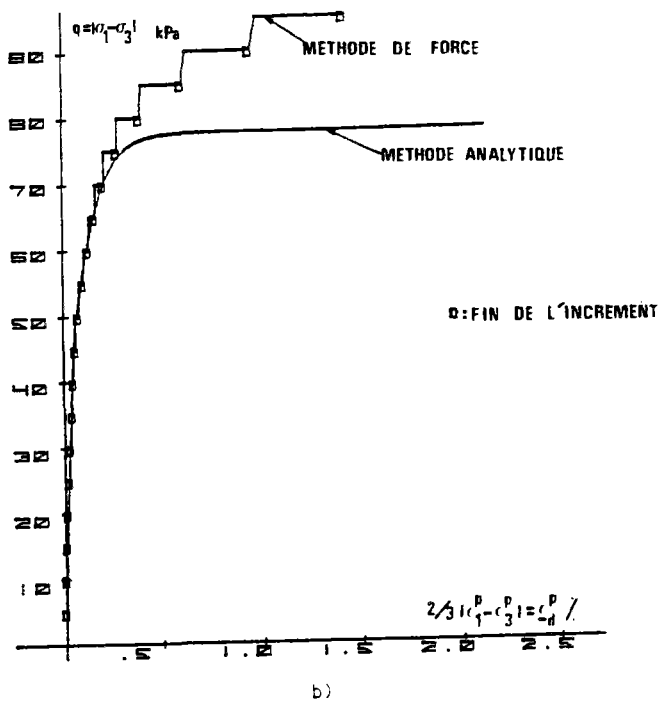
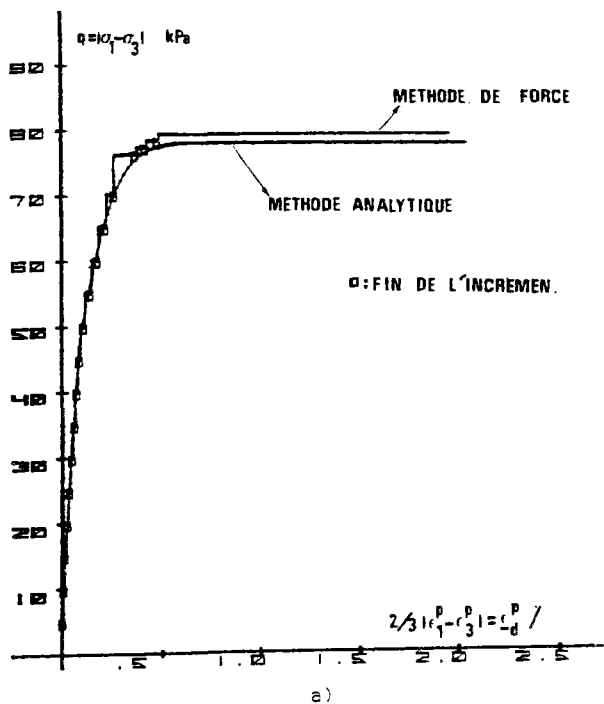


Fig. VII.30 - Influence de la taille de l'incrément à la rupture.

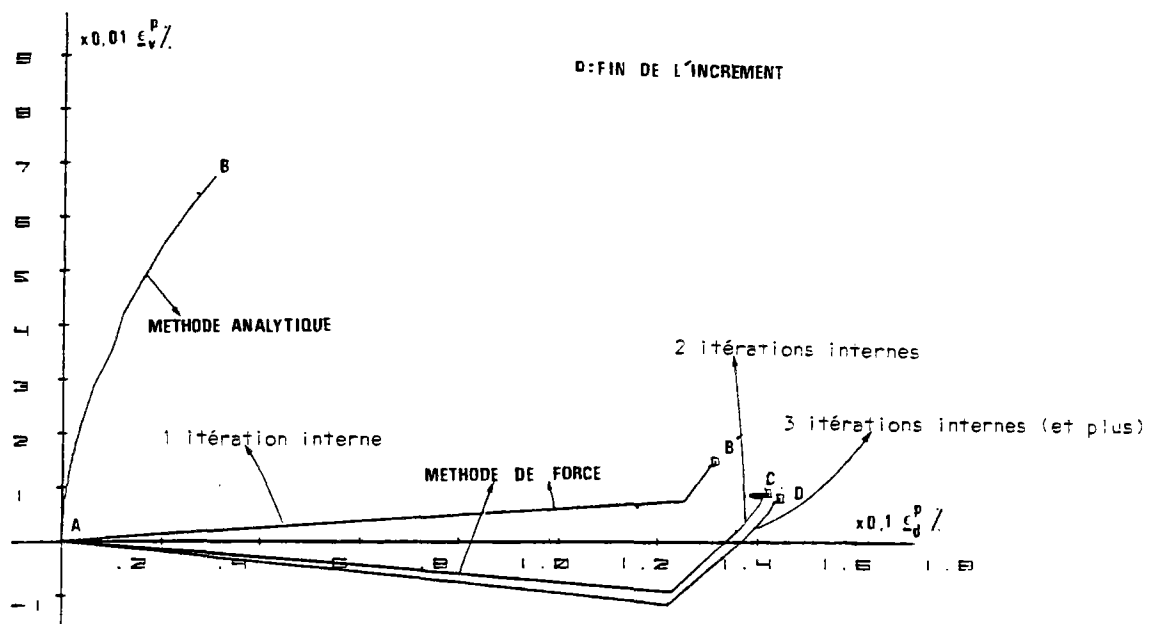


Fig. VII.31 - Influence des itérations internes.

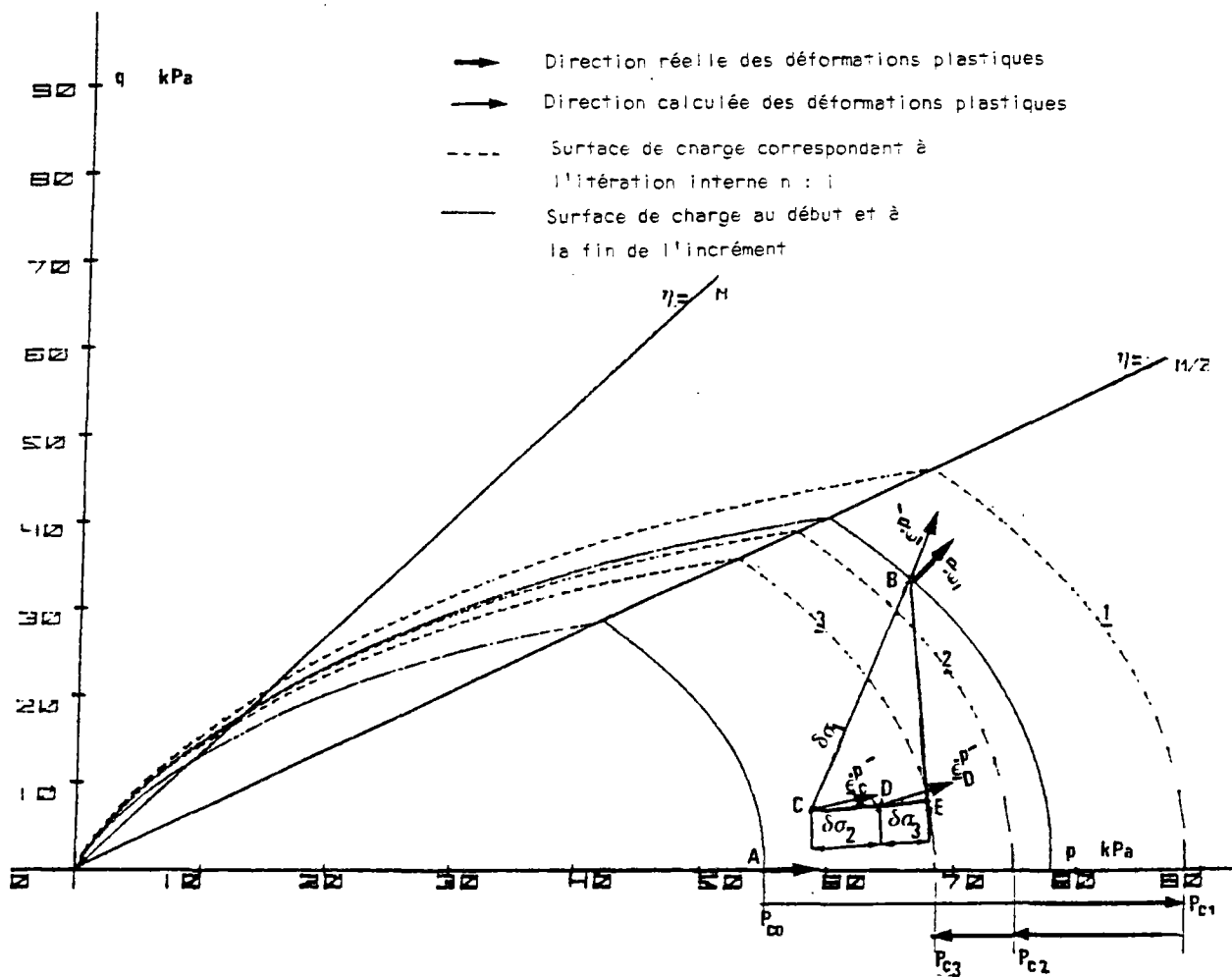


Fig. VII.32 - Influence des itérations internes sur les directions des déformations plastiques.

La surface de charge à la fin de la première itération interne est la surface numéro un, et le paramètre d'écroutissage est :

$$P_{C_1} = P_{C_0} + \Delta P_{C_1} .$$

À la deuxième itération interne ($\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_C^e$, $R = P_{C_1}$) la direction des déformations plastiques est $\underline{\varepsilon}_C^{P'}$, et, à la fin de cette itération interne, l'état de contrainte se trouve au point D (Fig. VII.32) avec :

$$\underline{\sigma}_D^e = \underline{\sigma}_C^e + \delta \underline{\sigma}_1^2 .$$

Nous aboutissons à la surface de charge numéro deux et le paramètre d'écroutissage s'écrit :

$$P_{C_2} = P_{C_1} + \Delta P_{C_2} .$$

À la fin de la troisième itération interne, l'état de contrainte est le suivant :

$$\underline{\sigma}_E^e = \underline{\sigma}_D^e + \delta \underline{\sigma}_1^3 .$$

La direction des déformations plastiques à cette itération interne est $\underline{\varepsilon}_D^{P'}$.

Il est évident (d'après la figure VII.32) qu'un nombre supérieur d'itérations internes ne sert à rien car $\underline{\sigma}_E^e$ se trouve sur la surface de charge numéro 3 $F(\underline{\sigma}_E^e, P_{C_3}) = 0$.

Le vecteur BE à la fin de la première itération étant considéré comme la contrainte ou la force de correction à appliquer pour l'itération, l'état de contrainte au début de la deuxième itération se situe donc au point B (Fig. VII.32), (Champ homogène imposé); B est stationnaire pour toutes les fins d'itérations :

$$\underline{\sigma}_i = \underline{\sigma}_{i-1} + \Delta \delta \underline{\sigma}_i + \delta \underline{\sigma}_i = \underline{\sigma}_B$$

Nous avons choisi de mettre deux itérations internes dans le programme ROSALIE

pour les deux raisons suivantes :

- les itérations internes n'aident pas la convergence ;
- à la fin de la première itération interne, le point B se trouve à l'intérieur du domaine d'élasticité ; la deuxième itération interne ramène ce point à l'extérieur du domaine.

VII.7.2.4 - Influence de certains paramètres particuliers du modèle de Nova et al.

1) Parmi les différents paramètres du modèle de Nova et al., P_{CO} (pression de préconsolidation) nous a semblé particulièrement important par le calcul numérique. On note que Nova et al. ne donnent pas beaucoup d'importance à P_{CO} et qu'ils supposent souvent que $P_{CO} = 1$. La figure (VII.33) montre différentes courbes obtenues pour différentes valeurs de P_{CO} (le décalage d'origine pour $P_{CO} = 1$ est dû au dénominateur de l'équation (VII.71) où H est petit.)

La première valeur de P_{CO} doit donc être proche de sa valeur réelle.

2) Les paramètres ϕ_{CV} (angle de frottement à volume constant) et D influent sur le chemin de contrainte-déformation avant la rupture.

Le rapport des contraintes à la rupture (Eq. III.19) est :

$$\eta_f = M + \mu D$$

où M correspond à l'angle de frottement critique ϕ_{CV} et le paramètre μ varie peu pour les divers sables (il est de l'ordre de 0,7).

La figure (VII.34) montre les différentes courbes de contrainte-déformation obtenues pour l'essai triaxial de compression avec

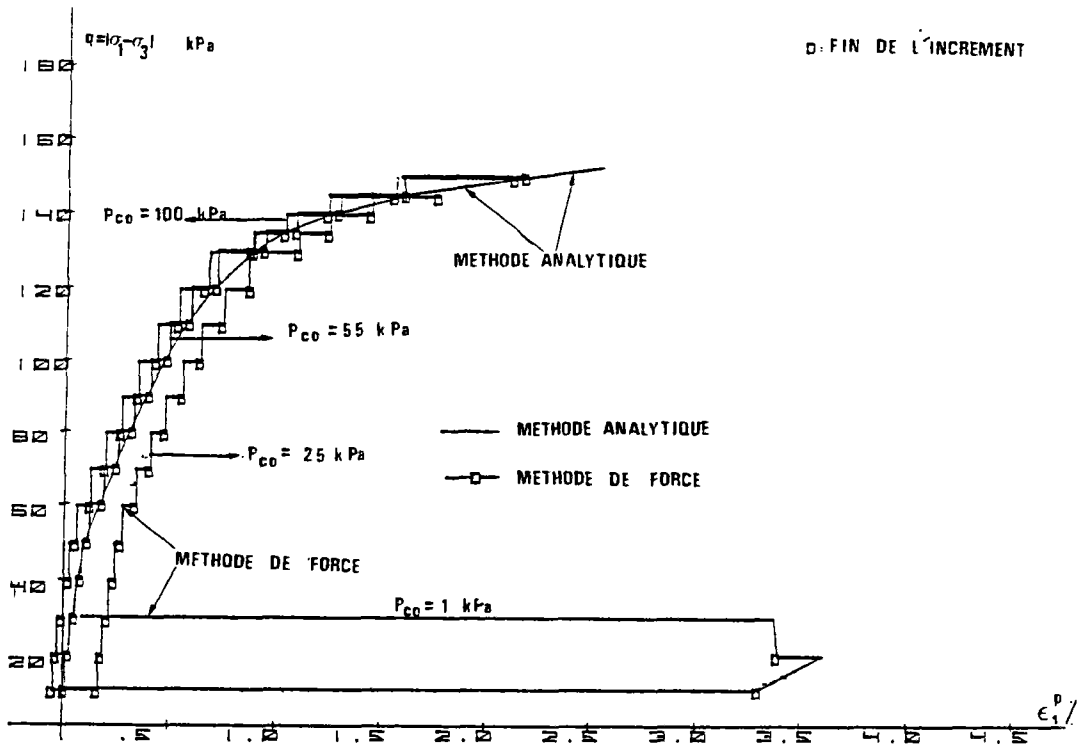


Fig. VII.33 - Influence du paramètre P_{co} .

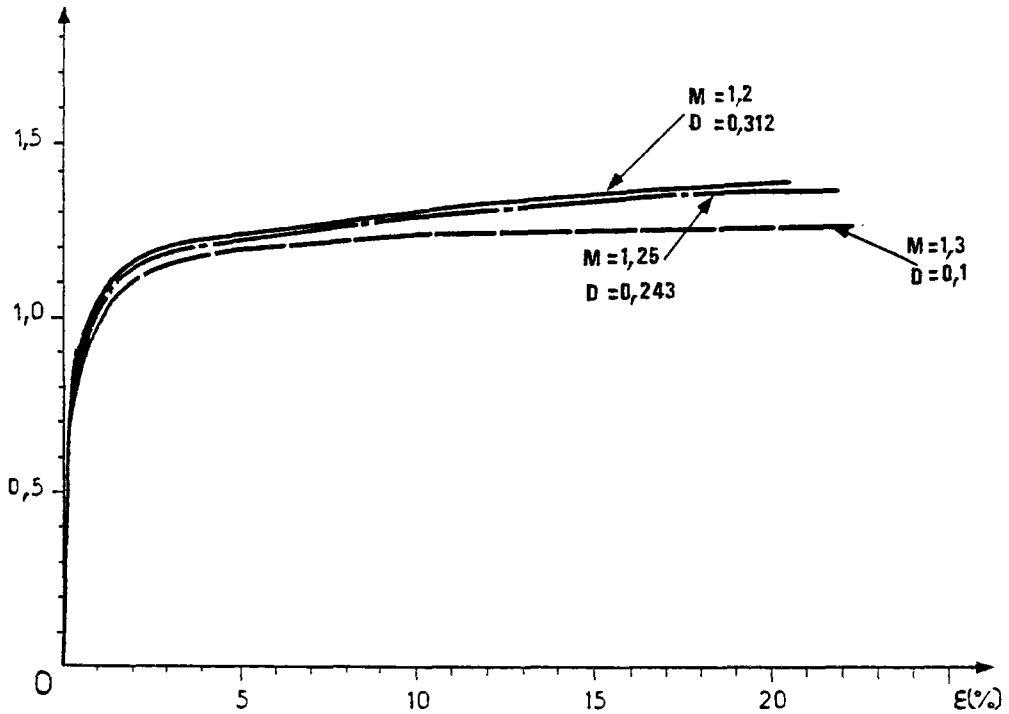


Fig. VII.34 - Courbes contrainte-déformation pour différentes valeurs de M et D .

$\eta_f = 1,42$ ($\phi_p = 35^\circ$), $\nu = 0,7$ et en faisant varier ϕ_{cv} et D. On constate d'après cette figure que, pour le même état de rupture (η_f), les chemins suivis par les contraintes et les déformations ne sont pas les mêmes.

VII.8 - Comparaison de la dilatance pour les modèles de Nova et al. et de Vermeer

Nous commençons d'abord par déterminer la limite entre les zones de dilatance positive et négative (contractance) pour chaque modèle en cherchant le rapport de contrainte η qui donne une déformation volumique plastique nulle.

A) Modèle de Nova et al.

Le rapport des contraintes pour lequel le taux des déformations plastiques volumiques s'annule se calcule à partir des équations (I.19) et (III.6) pour $\eta \geq \frac{M}{2}$ (voir § II.1.2).

$$\frac{\partial G}{\partial P} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial P} = \frac{1}{P} \left[M \left(\frac{P}{P_{cg}} \right)^{\frac{1-\nu}{\nu}} - \eta_c \right] = 0 \quad (\text{VII.72})$$

avec :

$$P_{cg} = \frac{P_c}{\sqrt{1+\nu}} \left(\frac{2L}{1+\nu} \right)^{\frac{\nu}{1+\nu}}$$

D'autre part l'équation de la surface de charge (F_1) (Eq. III.6) donne :

$$\frac{P}{P_u} = \exp\left(\frac{M-\eta}{m}\right) \quad (\text{VII.73})$$

avec :

$$P_u = \frac{P_c}{\sqrt{1+\nu}} e^{\frac{-M}{2m}}$$

Les équations (VII.72) et (VII.73) pour les données considérées dans le paragraphe (VII.7) s'écrivent :

$$0,918 \exp \frac{1,35-\eta_c}{1,216} - \eta_c = 0 \quad (\text{VII.74})$$

Après quelques calculs numériques on trouve :

$$\eta_c = 1,115$$

η_c est représenté sur la figure (VII.35).

B) Modèle de Vermeer

En tenant compte des équations (I.19) et (IV.42), on trouve :

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{4 \sin \psi_m}{\sqrt{6+2 \sin^2 \psi_m}} = 0 \quad (\text{VII.75})$$

d'où :

$$\sin \psi_m = 0$$

D'autre part, l'équation (IV.39) s'écrit :

$$\sin \psi_m = \frac{\sin \phi_m - \sin \phi_{cv}}{1 - \sin \phi_m \sin \phi_{cv}}$$

ce qui donne :

$$\sin \phi_m = \sin \phi_{cv}$$

ce qui entraîne (pour $\phi_{cv} = 32^\circ$) :

$$\eta_c = \frac{6 \sin \phi_{cv}}{3 - \sin \phi_{cv}} = 1,287$$

Cet état de contraintes est illustré à la figure (VII.36).

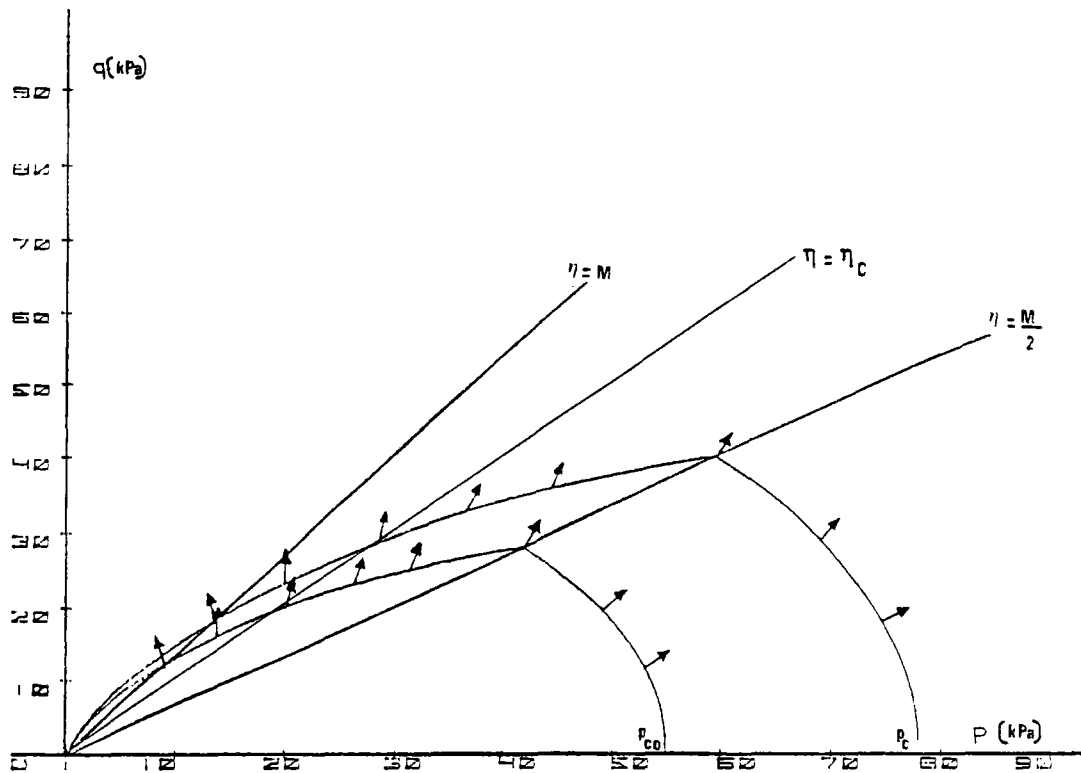


Fig. VII.35 - Modèle de Nova et al.

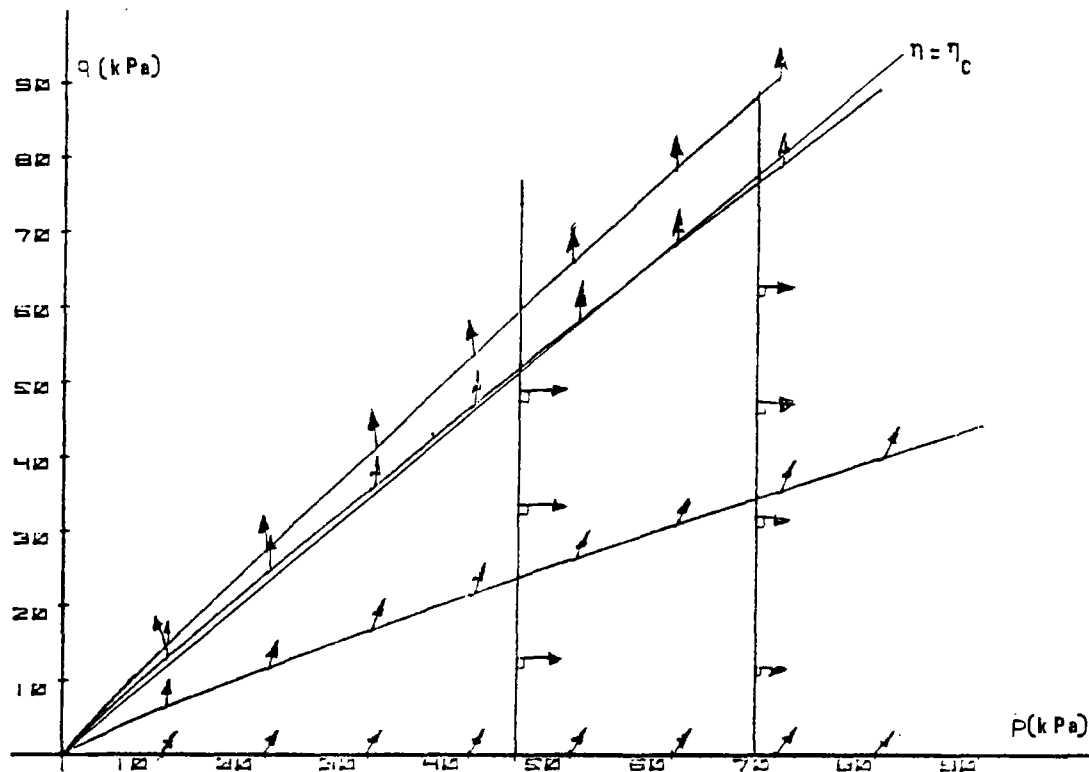


Fig. VII.36 - Modèle de Vermeer.

Comparaison des angles de dilatance

Pour un essai triaxial de compression, nous avons comparé dans le tableau (VII.1) les valeurs de l'angle de dilatance ψ_m avec la définition suivante (Eq. IV.41 et IV.69) :

$$\sin \psi_m = \frac{3d}{-6+d} \quad (\text{VII.76})$$

avec :

$$d = \frac{\dot{\epsilon}_v \cdot P}{\dot{\epsilon}_d \cdot P} = \frac{-(\dot{\epsilon}_1 \cdot P + 2\dot{\epsilon}_2 \cdot P)}{2(-\dot{\epsilon}_1 \cdot P + \dot{\epsilon}_2 \cdot P)}$$

- Pour le modèle de Nova et al., on détermine d par l'équation (III.8) :

$$d = \frac{M-\eta}{\mu}$$

- Dans le cas du modèle de Vermeer, l'utilisation de l'équation de contrainte-dilatance donne (Eq. IV.39) :

$$\sin \psi_m = \frac{\sin \phi_m - \sin \phi_{cv}}{1 - \sin \phi_m \sin \phi_{cv}}$$

avec :

$$\sin \phi_m = \frac{3\eta}{6+\eta}$$

($\sin \phi_m = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{|\sigma_1 + \sigma_3|}$ dans le cas de l'essai triaxial).

TABLEAU VII.1

η	$\phi_m =$ $\text{arc sin} \left(\frac{3\eta}{6+\eta} \right)$	VERMEER $\psi_m =$ $\text{arc sin} \frac{\sin \phi_m - \sin \phi_{cv}}{1 - \sin \phi_m \sin \phi_{cv}}$	NOVA $\psi_m =$ $\text{arc sin} \frac{3d}{-6+d}$ avec $d = \frac{M-\eta}{\mu}$
0	0	- 32.0	
0.2	5.55	- 27.2	$\eta < \frac{M}{2}$
0.4	10.8	- 22.35	
0.6	15.8	- 17.5	
0.8	20.7	- 12.6	- 26.8
1.0	25.4	- 7.53	- 15.83
1.2	30	- 2.33	- 6.38
1.4	34.6	+ 3.0	+ 2.02
1.6	39	+ 8.8	+ 9.7
1.8	43.8	+ 14.8	+ 16.9

Chapitre VIII

APPLICATION AU COMPORTEMENT DES PIEUX SOUS CHARGE AXIALE

VIII.1 - Introduction

Depuis une dizaine d'années, des études théoriques de pieux ont été entreprises au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées. Frank (1974) a mis en oeuvre le programme ROSALIE pour étudier les pieux sous charge axiale dans des milieux élastiques et linéaires. Barbas et Frank (1982) ont utilisé des éléments de glissement avec frottement pour étudier le même problème dans un massif élastique parfaitement plastique.

Le comportement des massifs considérés jusqu'ici correspond peu au comportement réel des sols dilatants. Suite à l'introduction des modèles de Nova et al et de Vermeer dans le programme ROSALIE - GROUPE 5, nous avons entrepris cette même étude en utilisant les deux nouveaux modèles qui simulent mieux le comportement du sol.

Avant de présenter les calculs que nous avons effectués, nous décrivons brièvement les résultats obtenus auparavant.

VIII.2 - Résultats antérieurs (Frank, 1984)

VIII.2.1 - Milieu élastique ; milieu linéaire dilatant (Frank, 1974)

A) Milieu élastique

Les résultats énoncés concernent la plus grande partie du fût du pieu, entre certaines perturbations relevées en tête et en pointe.

On note la prédominance très grande sur cette partie des enfoncements w sur les déplacements horizontaux u . Les déformations $\delta w / \delta z (= \epsilon_z)$ et $\delta u / \delta z$ sont négligeables au voisinage du pieu. Les tranches de sol se déforment donc en gardant leurs faces "parallèles" (déformation plane) et ne sont sollicitées qu'en distorsion verticale $\delta w / \delta r$ près du fût.

On n'obtient pratiquement pas d'augmentation des contraintes normales σ_r , σ_θ et σ_z par comparaison au cisaillement vertical τ_{rz} . La figure (VIII.1), qui représente au bord du pieu et à différentes profondeurs le cercle de Mohr dans le plan (r, z) , illustre le mécanisme de cisaillement simple et pur au voisinage du pieu apporté par le chargement.

Le cisaillement vertical $\tau (\tau_{rz})$ décroît dans la masse de sol et est inversement proportionnel au rayon r , au moins jusqu'à $r=5r_0$ (r_0 étant le rayon du pieu) :

$$\tau = \frac{\tau_{0r_0}}{r} \quad (\text{VIII.1})$$

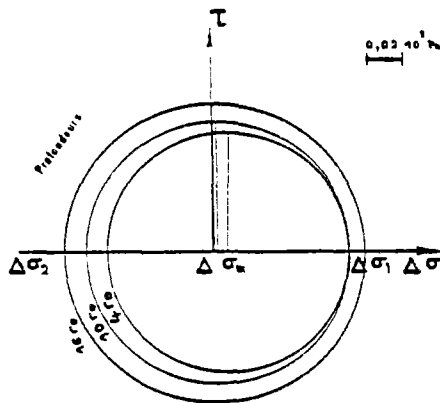


Fig. VIII.1 - Cercles de Mohr dans le plan (r, z) au bord du pieu (Frank, 1974).

τ_0 étant le frottement sur le fût (ce résultat est cohérent avec l'équilibre dans la direction verticale z et $\delta\sigma_z/\delta z$ négligeable dans cette région).

Le paramètre $B = \tau_0/w_0$ (w_0 , déplacement vertical), paramètre de mobilisation à un niveau donné, est pratiquement indépendant de la profondeur et de la compressibilité du pieu.

Il apparaît au vu des résultats que, tant pour les contraintes que pour les déplacements, on a affaire à un mécanisme de "cisaillement pur d'anneaux concentriques" indépendant de la profondeur en tant que telle, dont l'étude peut donc être ramenée au niveau d'une tranche de sol.

Etude au niveau d'une tranche de sol

Le fait que la distorsion verticale soit dominante dans le mode de déformation au voisinage du pieu ($\gamma_{rz} = -\delta w/\delta r$) et que le cisaillement vertical τ décroisse en $1/r$ dans cette région (Eq. VIII.1), permet d'écrire :

$$w(r) = w_0 - \frac{\tau_0 r_0}{G_0} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \quad \text{(VIII.2)}$$

(τ_0 et w_0 positif, G_0 = module de cisaillement du sol).

B) Milieu linéaire dilatant

Frank (1974) introduit par rapport à l'élasticité une variation de volume supplémentaire due à une contrainte de cisaillement T (plusieurs définitions de T sont possibles).

Pour les différents cas traités, on remarque que ni l'enfoncement du pieu ni le frottement latéral ne sont sensiblement modifiés, par rapport à l'élasticité linéaire isotrope.

La dilatance ne perturbe pas non plus les champs de τ_{rz} et w dans les anneaux de sol voisins du pieu (loi de variation en $1/r$, équation (VIII.1) et en $\ln r$, équation (VIII.2) respectivement).

Dans cette région, la prédominance de la distorsion verticale $\gamma_{rz} = -\delta w/\delta r$ reste donc valable.

En ce qui concerne les contraintes normales σ_r , σ_z et σ_θ , la première constatation est que la contrainte σ_r sur le fût même du pieu ne croît pratiquement pas, contrairement à ce qu'on aurait pu attendre, par rapport à l'élasticité (voir l'exemple de la figure (VIII.2)). On note toutefois un certain accroissement aux alentours de 1 rayon de distance. Les contraintes σ_z et σ_θ croissent plus sensiblement sur le fût, tout en restant bien plus faibles que le frottement latéral (Fig. VIII.2). On peut conclure, au vu des différents résultats, que le mécanisme de cisaillement pur d'anneaux concentriques près du fût reste valable en milieu linéaire dilatant.

Ceci dit, l'introduction de la dilatance dans ces calculs de pieux en éléments finis est critiquable. On peut penser que les résultats, d'une part sont conditionnés par la forme même de la prise en compte de la dilatance dans le modèle de comportement et, d'autre part, qu'ils dépendent des valeurs numériques des caractéristiques mécaniques

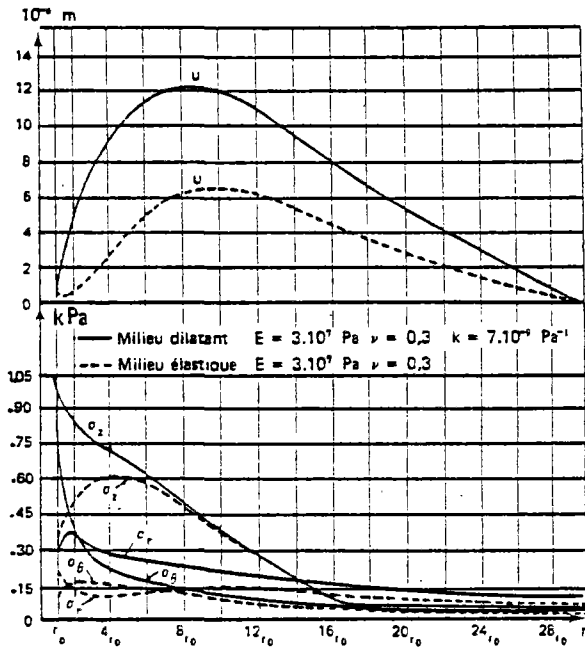


Fig. VIII.2 - Distributions radiales à mi-profondeur ou pieu ($\tau_0 = 7,5 \text{ kPa}$, $w_0 = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$).

du milieu, qui ont été choisies arbitrairement et qui sont constantes avec la déformation. Le coefficient de dilatance varie, en fait, fortement au fur et à mesure du cisaillement d'un sable et l'ordre de grandeur des valeurs retenues ici ne représente certes pas la dilatance maximale que l'on peut obtenir pour un sable très dense.

VIII.2.2 - Milieu élastique parfaitement plastique (Barbas et Frank, 1982)

Quatre calculs comparatifs ont été effectués :

- deux calculs en massif élastique linéaire isotrope ($E = 30 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$) avec modélisation du contact sol-pieu par les éléments décrits plus haut ($r_t = 0$, $c_c = 0$, $\phi_{c0} = 25^\circ$ et 35° , respectivement),
- deux calculs correspondant, pour le contact, aux cas précédents mais avec prise en compte

de la plastification dans le massif (critère de Coulomb avec potentiel associé, $c = 0$, $\phi_p = 35^\circ$).

Pour tous les calculs, un état de contraintes initiales : $\sigma_z^0 = \gamma z$ et $\sigma_r^0 = \sigma_\theta^0 = 0,43 \gamma z$ avec $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $\tau_{rz}^0 = 0$, a été pris en compte.

Les figures (VIII.3) et (VIII.4) montrent clairement pour tous les cas étudiés la saturation du frottement latéral total et le début de l'accroissement correspondant de la charge de pointe après une phase initiale linéaire. Elles permettent également de voir que la prise en compte de la plasticité dans le milieu n'influence pratiquement pas les courbes obtenues et que, notamment, le frottement latéral total est très sensiblement le même en milieu élasto-plastique qu'en milieu élastique (150 kN et 250 kN, respectivement). On en conclut que la dilatance apportée par la plastification (le potentiel est associé, ce qui revient à prendre pour angle de dilatance l'angle de frottement ϕ_p) n'a pratiquement pas d'effet sur les contraintes normales au pieu σ_r , par rapport au cas élastique.

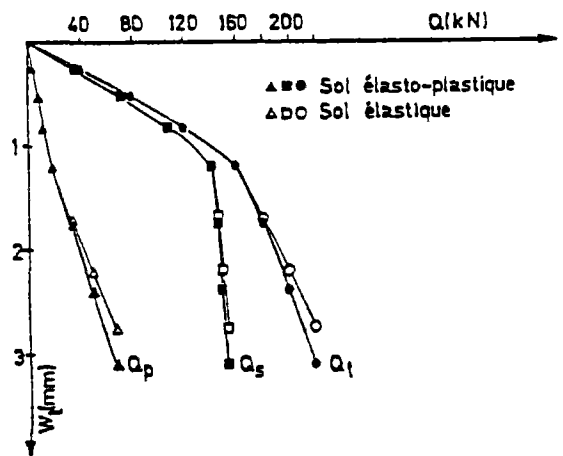


Fig. VIII.3 - Courbes de charge en tête Q_t , de frottement latéral Q_s et de charge en pointe Q_p en fonction des déplacements en tête w_t pour $\phi_{c0} = 25^\circ$ et pour un sol élastique et un sol élastoplastique ($\phi_p = 35^\circ$) (Barbas et Frank, 1982).

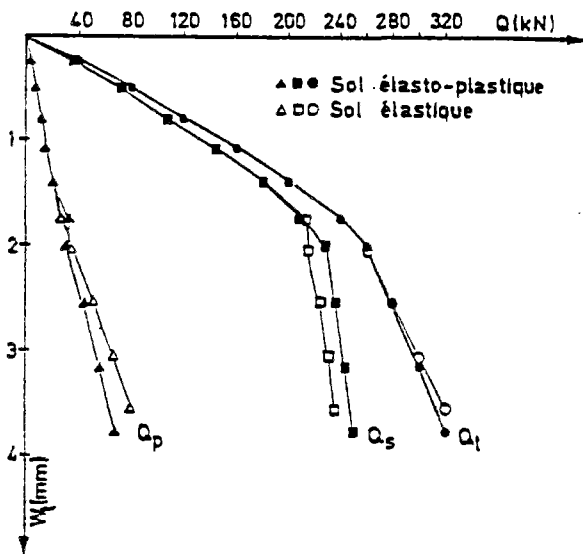


Fig. VIII.4 - Courbes de charge en tête Q_t , de frottement latéral Q_s et de charge en pointe Q_p en fonction des déplacements en tête w_t pour $\phi_{co} = 35^\circ$ et pour un sol élastique et un sol élastoplastique ($\phi_p = 35^\circ$) (Barbas et Frank, 1982).

VIII.3 - Maillage utilisé

Le maillage que nous avons utilisé, comprenant le sol et le pieu (de rayon $r_0 = 0,3 \text{ m}$, de longueur $l = 6 \text{ m}$, d'élanement $l/2r_0 = 10$) est représenté à la figure (VIII.5). Il comprend 1 109 points, 336 éléments de massif dont 12 de type T6 de ROSALIE (triangles à 6 noeuds), 324 de type Q8 (quadrilatères à 8 noeuds) et enfin 38 éléments de contacts entre le pieu et le sol de type CT1 (linéaires à 2 noeuds).

Les conditions aux limites sont les suivantes :

- les déplacements horizontaux sur le bord BC sont nuls,
- les déplacements verticaux sur le bord OC sont nuls.

VIII.4 - Calculs effectués

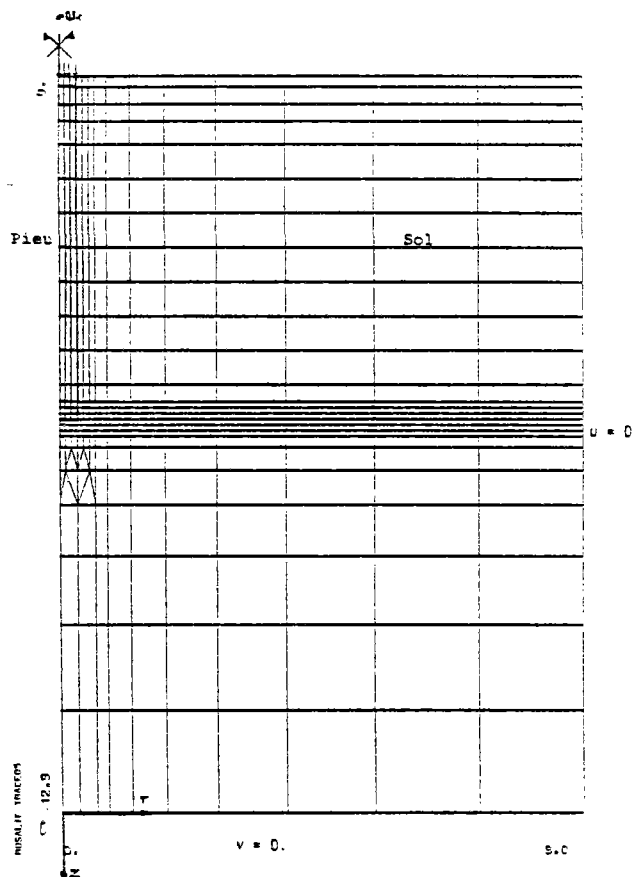


Fig. VIII.5 - Maillage d'éléments finis.

8 calculs comparatifs ont été effectués (tableaux VIII.1). Les paramètres des modèles pris pour les caractéristiques du matériau du pieu sont les suivantes :

$E = 30\,000 \text{ MPa}$ et

$\nu = 0,3$

De plus pour tous les calculs, $E = 150 \text{ MPa}$ et $\nu = 0,3$ dans le sol.

L'état de contrainte initial est le suivant :

$\sigma_z^0 = -\gamma z$

$\sigma_r^0 = \sigma_\theta^0 = -0,428\gamma z$

avec :

TABLEAU VIII.1

NUMERO DU CALCUL	COMPORTEMENT DU MASSIF	CRITERE DE CONTACT ENTRE LE PIEU ET LE SOL (ϕ_{CO} EST L'ANGLE DE FROTTEMENT AU CONTACT)
1	élastique	possibilité de glissement avec frottement et décollement, $\phi_{CO} = 35^\circ$
2	élastique-parfaitement plastique, critère de Coulomb avec potentiel associé ($c_p = 43^\circ$, $c = 0$)	possibilité de frottement et de décollement, $\phi_{CO} = 35^\circ$
3	élastoplastique modèle de Nova et al.	possibilité de frottement et de décollement, $\phi_{CO} = 35^\circ$
4	élastoplastique modèle de Vermeer	possibilité de frottement et de décollement, $\phi_{CO} = 35^\circ$
5	élastique-parfaitement plastique - critère de Coulomb avec potentiel plastique associé ($c_p = 43^\circ$)	contact parfait
6	élastique-parfaitement plastique - critère de Coulomb avec potentiel plastique non associé ($\psi = 0$, $c_p = 43^\circ$, $c = 0$)	contact parfait
7	élastoplastique modèle de Nova et al.	contact parfait
8	élastoplastique modèle de Vermeer	contact parfait

$$\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$$

$$\tau_{rz}^c = 0.$$

Cet état de contrainte dans le cas des modèles de Vermeer et de Nova et al. se situe sur la surface de charge (il n'y a pas de surconsolidation).

Les calculs ont été menés jusqu'à une charge totale en tête supérieure au glissement complet de tous les éléments de frottement au contact, soit $Q_t = 360 \text{ kN}$ (par deux incréments de 20 kN suivis de cinq incréments de 40 kN et de six incréments de 20 kN).

Les éléments de contact entre le pieu et le sol ont été décrits dans le paragraphe (VII.2). Pour un angle de rupture du sol, pour les calculs élastoplastiques $\phi_p = 43^\circ$, nous avons pris un angle de frottement de contact de 35° ($\phi_{co} / \phi_p = 0,81$).

VIII.5 - Résultats obtenus

Nous comparons ici les résultats obtenus dans un milieu élastique aux résultats obtenus dans un milieu élastique parfaitement plastique (critère de Coulomb) et dans des milieux élastoplastiques écrouissables (modèles de Vermeer et de Nova et al.).

Nous insisterons sur l'influence de la dilatance sur la contrainte radiale σ_r .

Les calculs que nous considérons sont ceux qui offrent la possibilité de frottement et de décollement, car il s'est avéré que les résultats y sont plus réalistes (vu les résultats obtenus par Barbas et Frank et nous-mêmes). Cependant nous citerons certains points importants que donnent les calculs avec contact parfait.

VIII.5.1 - Résultats globaux

VIII.5.1.1 - Charge en fonction de l'enfoncement

Les courbes donnant la charge en fonction de l'enfoncement sont présentées sur la figure (VIII.6). On constate que, pour les calculs élastiques et élastiques parfaitement plastiques, si on augmente la charge totale après glissement de tous les éléments, la plus grande part de l'incrément de charge est reprise par la pointe.

La faible augmentation du frottement latéral est essentiellement due à la variation de la contrainte radiale près de la pointe :

$$\Delta Q_s = 2\pi r_0 \text{tg}\phi_{co} \int_0^z \Delta \sigma_r dz.$$

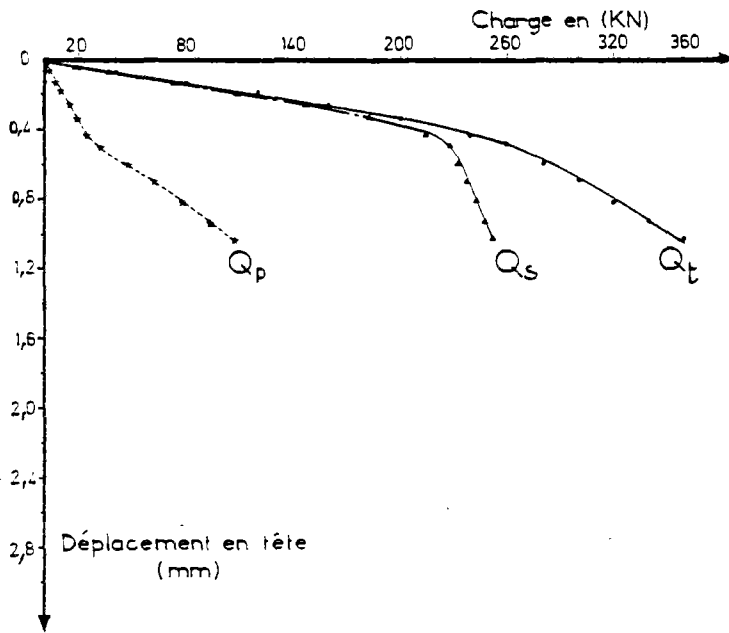
Pour les modèles de Vermeer et de Nova et al., on peut estimer que l'on a déjà atteint la saturation du frottement latéral. Cette charge limite de frottement est trouvée inférieure à celle des calculs précédents, contrairement à ce que l'on aurait pu attendre.

L'explication de ce phénomène sera l'objet des paragraphes suivants.

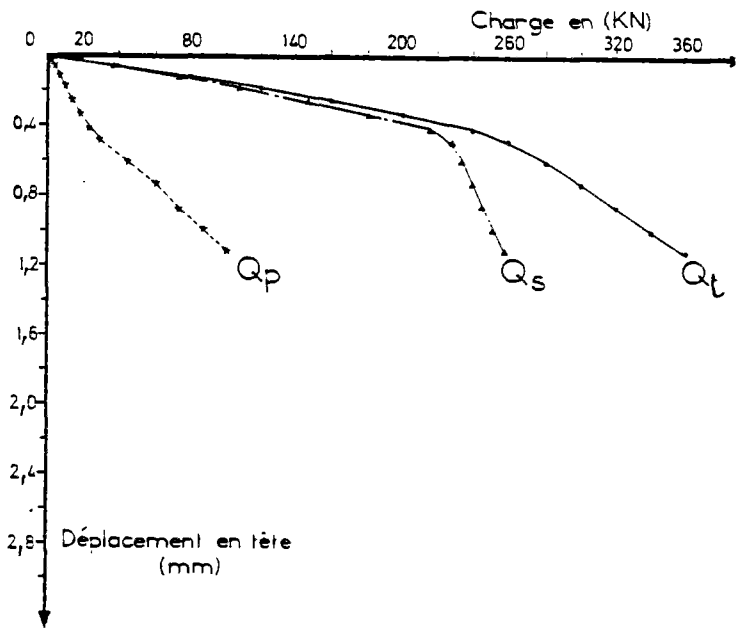
VIII.5.1.2 - Maillage déformé

Les enfoncements du pieu dans les milieux élastiques (Fig. VIII.7.a) et élastiques-parfaitement plastiques (Fig. VIII.7.b) sont du même ordre ; la valeur de ces enfoncements est plus grande dans les sols élastoplastiques écrouissables car la majeure partie du sol au voisinage du pieu est plastifiée (voir plus loin). L'enfoncement le plus grand est prédit par le modèle de Vermeer (Fig. VIII.7.d).

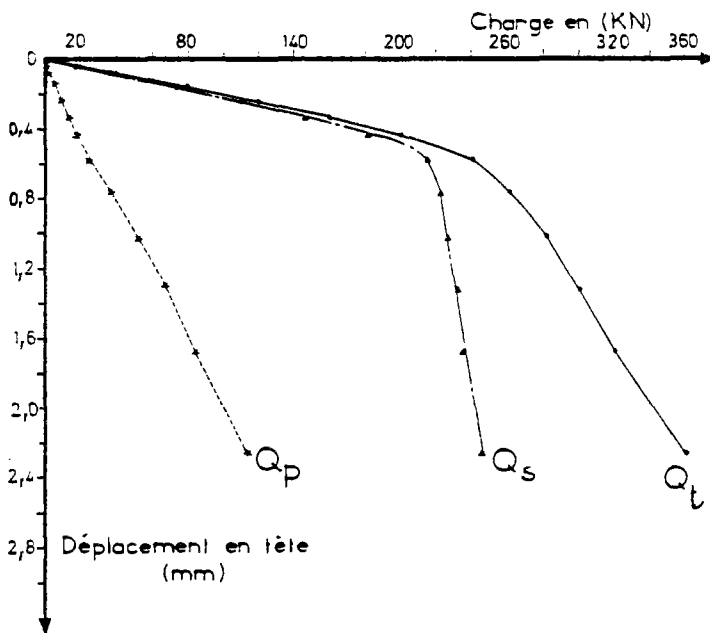
Dans les calculs avec un contact parfait, (Fig. VIII.8), l'hypothèse même du



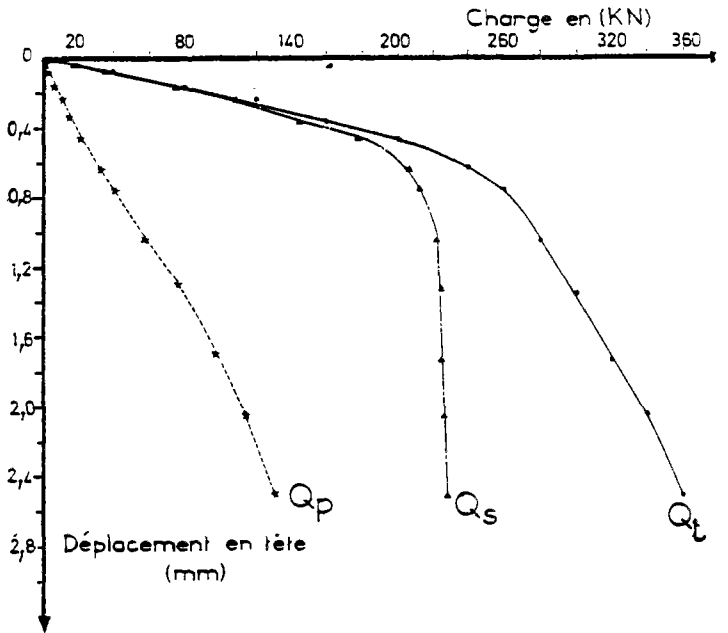
a) sol élastique.



b) sol élastique parfaitement plastique (critère de Coulomb).

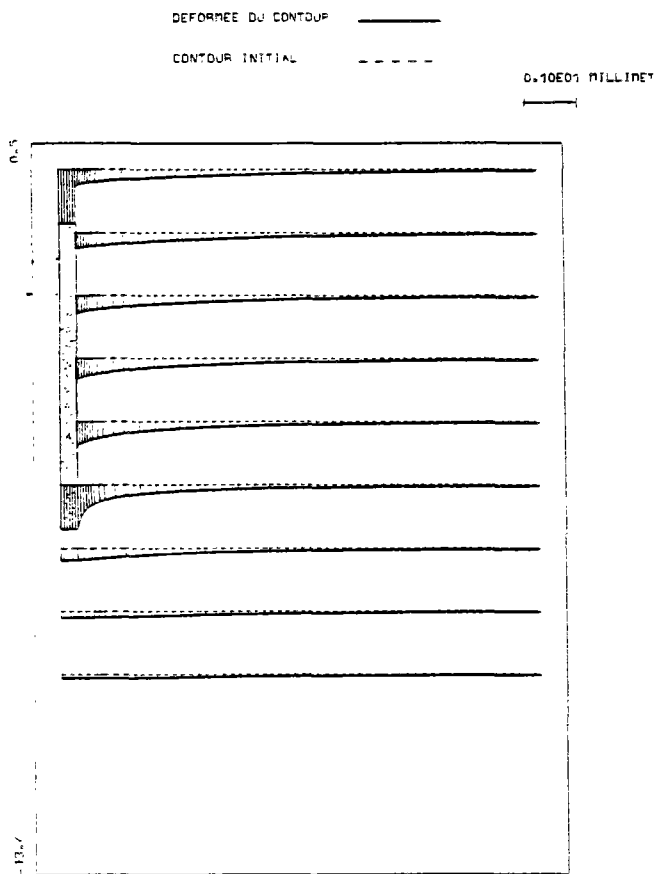


c) sol élastoplastique, modèle de Nova et al.

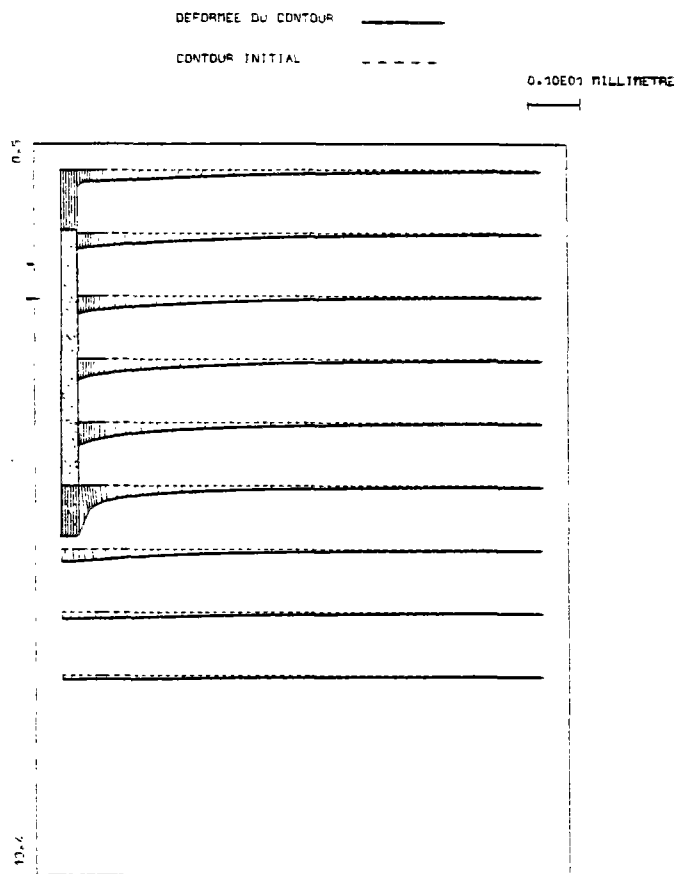


d) sol élastoplastique, modèle de Vermeer.

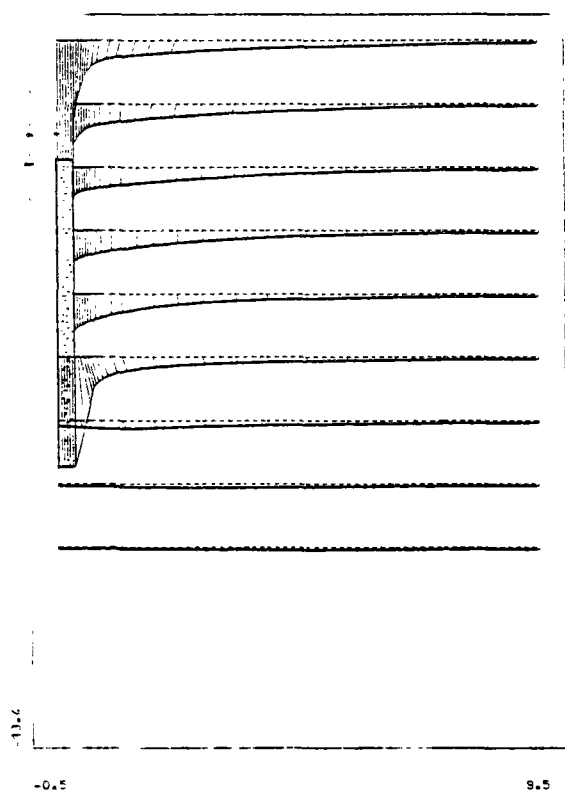
VIII.6 - Courbes de charge en tête Q_t , de frottement latéral Q_s et de charge en pointe Q_p en fonction de déplacement en tête w_t .



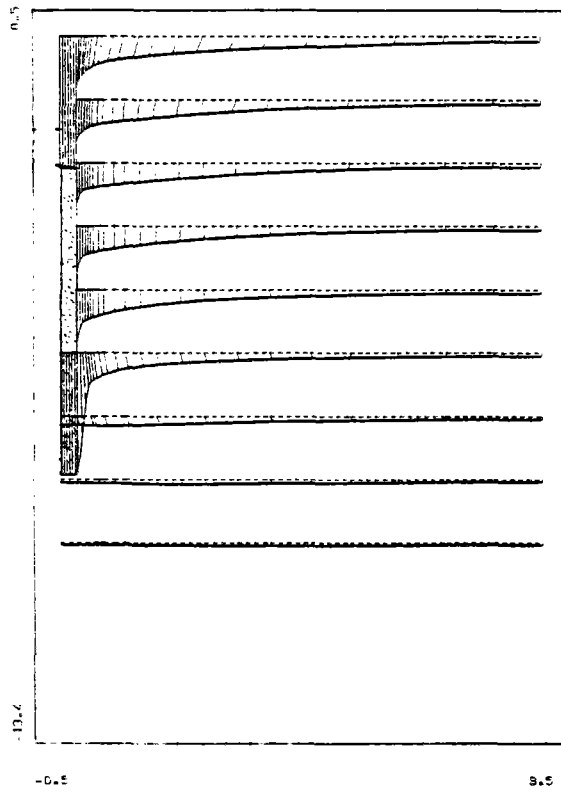
a) calcul élastique.



b) calcul élastique parfaitement plastique (critère de Coulomb).

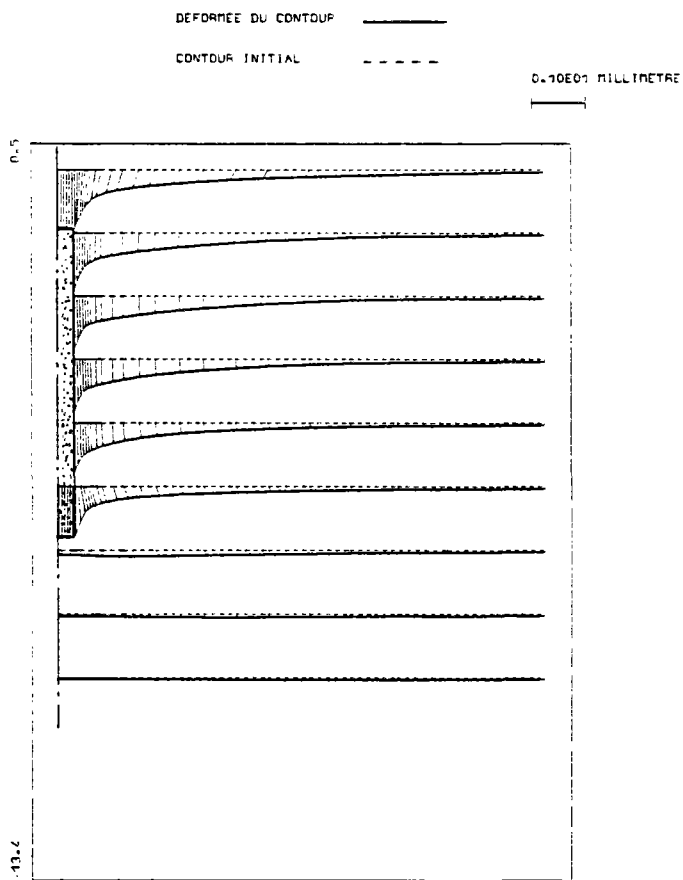


c) calcul élastoplastique, modèle de Nova et al.

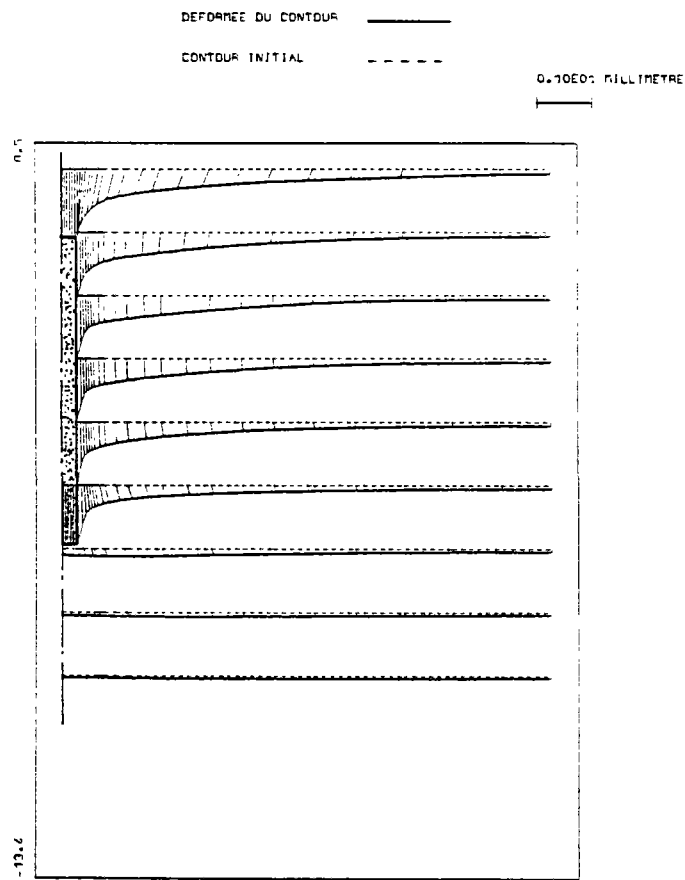


d) calcul élastoplastique, modèle de Vermeer.

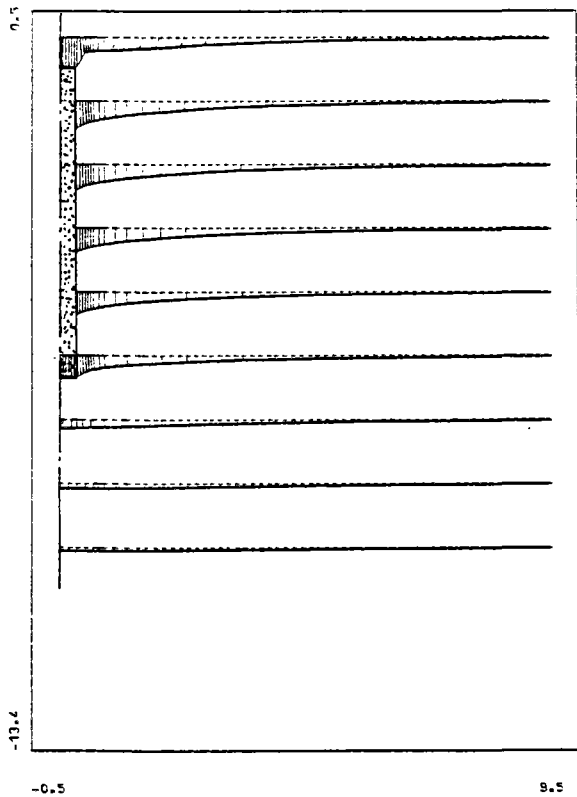
Fig. VIII.7 - Maillage déformé dans les calculs avec le frottement et glissement ($Q_+ = 360$ kN).



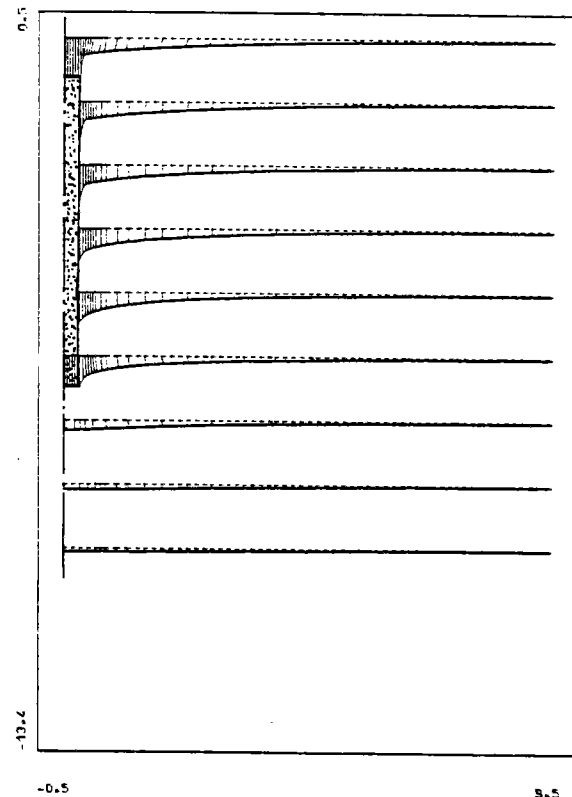
a) modèle de Nova et al.



b) modèle de Vermeer.



c) critère de Coulomb associé.



d) critère de Coulomb non associé.

Fig. VIII.8 - Maillage déformé pour les calculs sans frottement et glissement ($Q_+ = 360$ kN).

contact parfait conduit à des enfoncements moins prononcés.

En ce qui concerne les déplacements, on peut négliger sur la majeure partie du fût les déplacements radiaux par rapport aux déplacements verticaux (comme dans un massif élastique).

VIII.5.1.3 - Zones plastiques

La figure (VIII.9.a) montre pour le modèle de Nova et al. les zones plastifiées après le premier incrément de charge de 20 kN. Les zones plastiques pour le modèle de Vermeer sous le même chargement sont identiques à celles de Nova et al. On constate que la majeure partie du sol est plastifiée tout en étant loin de la rupture.

Les zones plastiques prédites par le modèle de Vermeer et par le critère de Coulomb pour la charge de 360 kN sont présentées sur les figures (VIII.9.b. et c).

On constate que les zones plastiques pour le critère de Coulomb restent limitées à la pointe et au sommet du pieu ; en effet, le pieu glisse avant même que le sol ne soit plastifié. On constate aussi dans ce dernier cas que le sol reste élastique sous l'axe du pieu, parce que l'augmentation de la seule pression moyenne, contrairement aux modèles élastoplastiques fermés, n'aboutit pas à la plastification (on rappelle qu'en élasticité-plasticité parfaite le critère de Coulomb est un critère de rupture).

Cela explique les résultats du paragraphe précédant où nous avons noté que l'enfoncement du pieu était moindre dans le cas du critère de Coulomb.

VIII.5.1.4 - Courbes des isovaleurs de q/P

La rupture et la dilatance positive (et même l'instabilité du matériau) sont définies à partir d'un rapport de contrainte $\eta = \frac{q}{P}$ (on verra que η reste constante à partir d'un certain niveau de charge en tête). La figure (VIII.10) montre les courbes des isovaleurs de η quand le pieu est soumis à la charge de 360 kN. Pour tous les calculs η est maximal à environ un rayon sous la pointe du pieu et il est constant avec la profondeur, au voisinage du fût.

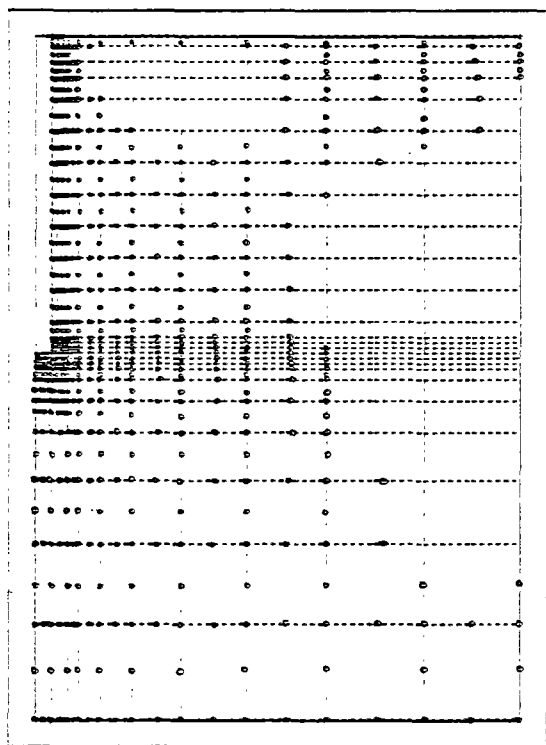
VIII.5.2 - Comportement à l'interface pieu-sol

VIII.5.2.1 - Déformations volumiques

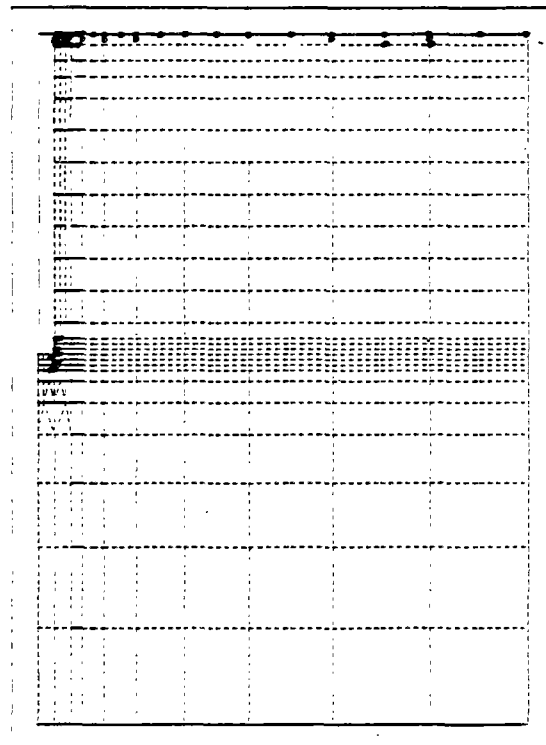
La figure (VIII.11) montre les déformations volumiques dans le sol au voisinage du pieu pour différents niveaux de charge ; on note que tous les points sur le fût glissent avant la charge de 280 kN.

Dans le calcul élastique (Fig. VIII.11.a) nous constatons une augmentation de volume élastique due à la déformation ϵ_2 positive après le glissement du pieu, cette augmentation de volume est évidemment due à une diminution de la contrainte moyenne. Le comportement du sol en haut du pieu est différent, le volume du sol diminue et la pression moyenne augmente.

Dans le calcul avec le critère de Coulomb (Fig. VIII.11.b), la majeure partie du sol reste élastique (Fig. VIII.9.b.). Le comportement du sol est presque identique à celui du calcul élastique. Le gonflement élastique continue à exister ; cependant les zones devenues plastiques entraînent aussi une augmentation de volume ou "dilatance plastique" qui est due au potentiel associé.

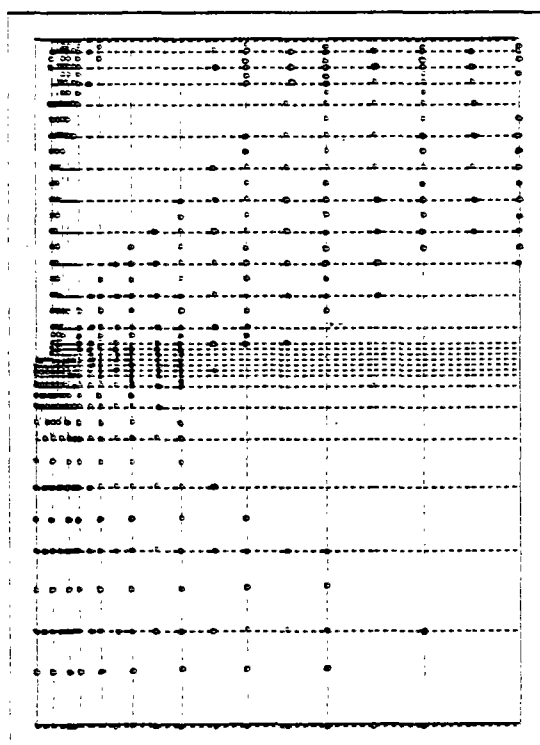


a) sol élastoplastique, modèle de Nova et al.,
($Q_T = 20 \text{ kN}$).

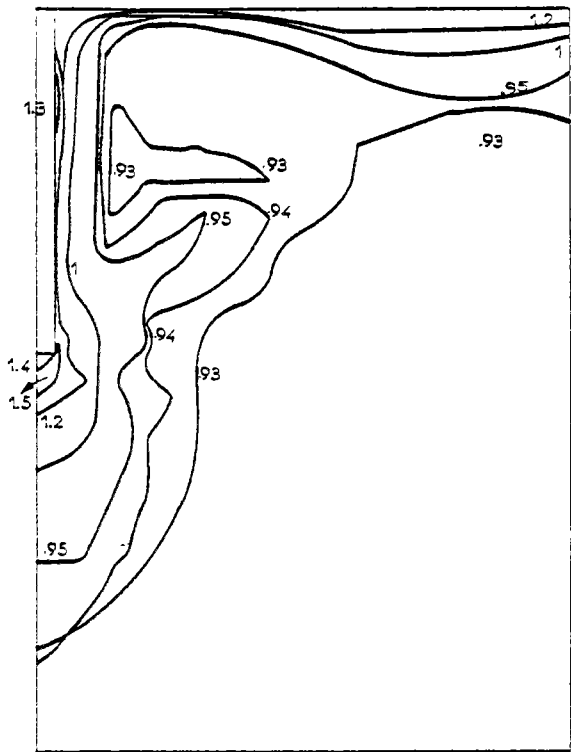


b) critère de Coulomb, avec frottement et glissement,
($Q_T = 360 \text{ kN}$).

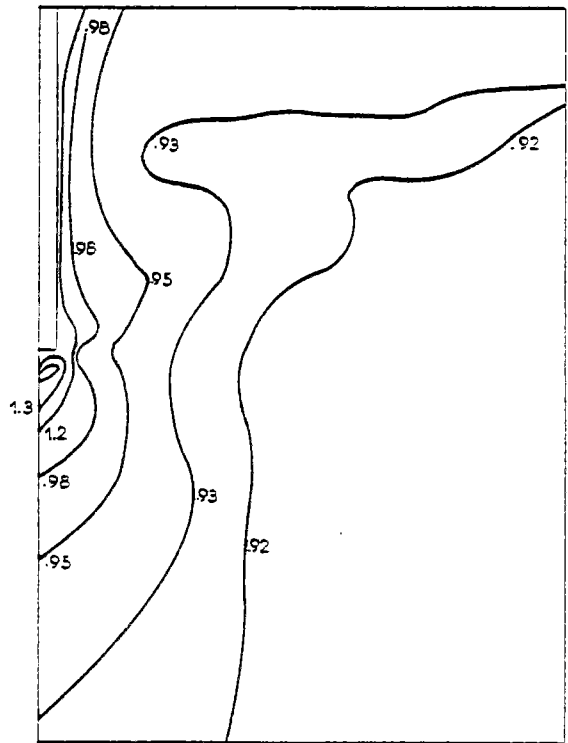
Fig. VIII.9 - Zones plastiques.



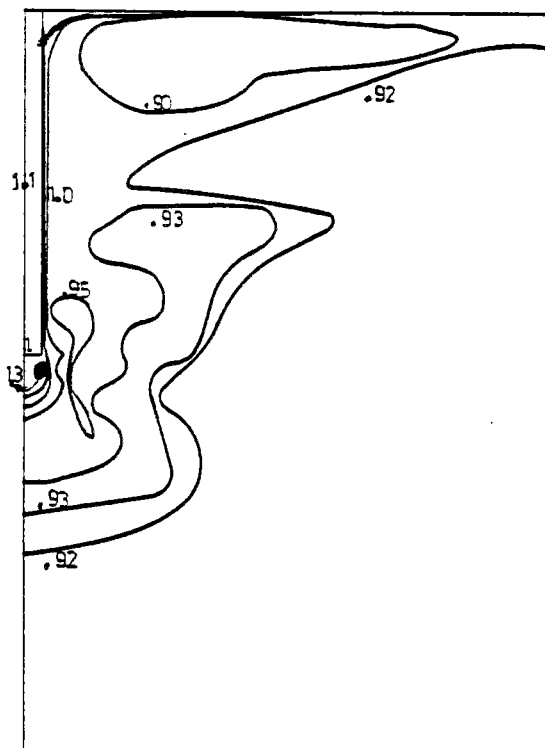
c) sol élastoplastique, modèle de Vermeer, avec frottement et glissement ($Q_T = 360 \text{ kN}$).



a) sol élastique.

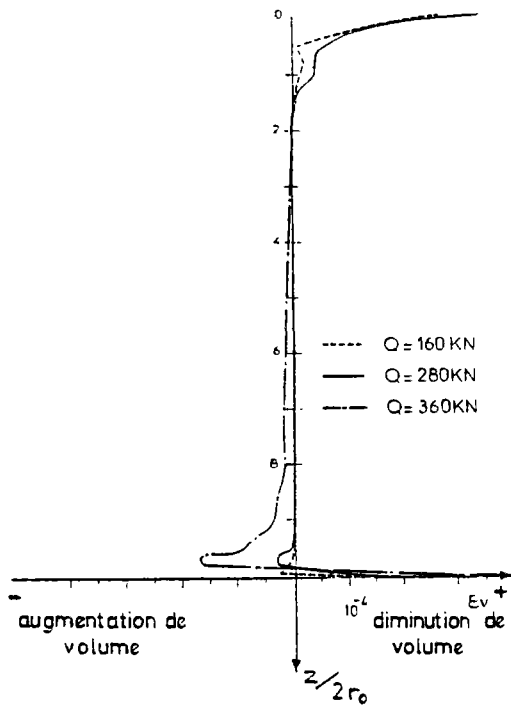


b) sol élastique parfaitement plastique
(critère de Coulomb).

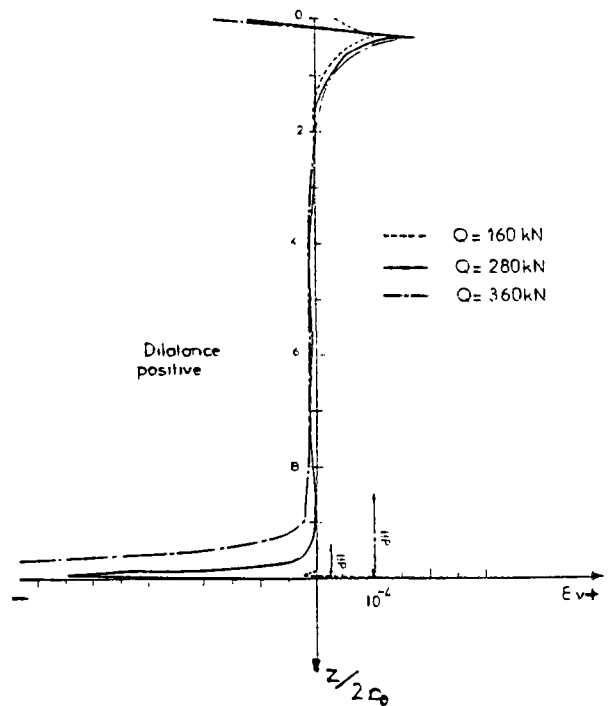


c) sol élastoplastique, modèle de Vermeer.

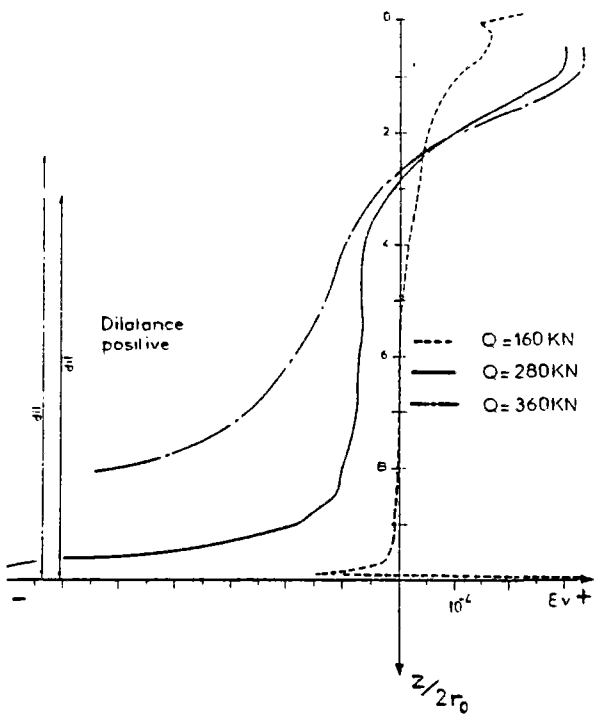
Fig. VIII.10 - Courbes des iso-
valeurs de η .



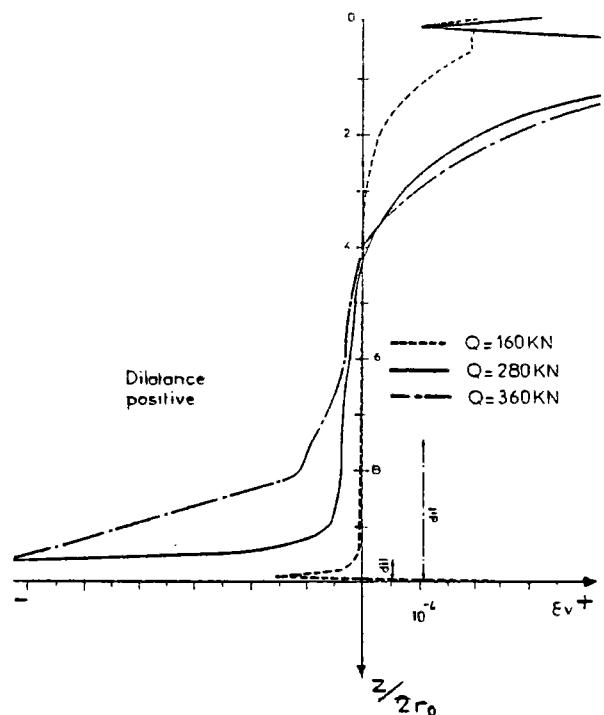
a) sol élastique, z.



b) sol élastique parfaitement plastique (critère de Coulomb).



c) sol élastoplastique, modèle de Nova et al.



d) sol élastoplastique, modèle de Vermeer.

Fig. VIII.11 - Déformations volumiques dans le sol au voisinage du fût (dil. = dilatance plastique).

Ces deux types de dilatance sont simultanés mais leur nature est différente. La dilatance élastique est aussi due ici uniquement à ϵ_2 (elle est supérieure au cas précédent), tandis que la dilatance plastique est due à toutes les déformations.

Le comportement du sol avec les modèles élastoplastiques de Nova et al. et de Vermeer (Fig. VIII.11.c et VIII.11.d) est différent. Les déformations volumiques (positives ou négatives) y sont plus grandes que dans le sol élastique ou dans le sol élastique-parfaitement plastique (critère de Coulomb). Les zones où apparaît la dilatance plastique sont plus importantes que dans le cas du critère de Coulomb, car le rapport de contrainte au-delà duquel la dilatance plastique a lieu (η_c) est plus grand dans ce dernier cas que dans les modèles élastoplastiques écrouissables.

Les déformations volumiques élastiques dans les modèles élastoplastiques écrouissables sont supérieures aux déformations volumiques plastiques (comme le cas du critère de Coulomb).

D'autre part, ces déformations élastiques, pour les modèles de Nova et al. et de Vermeer sont supérieures à celles du sol élastique-parfaitement plastique ; la pression moyenne y diminue donc plus.

Le rapport η_c pour le modèle de Nova et al., on l'a vu dans le paragraphe (VII.8), est plus petit que celui du modèle de Vermeer. Cependant dans le calcul avec ce dernier modèle, les zones avec la dilatance plastique sont plus étendues. Ceci est dû au comportement différent du sable prédit par les deux modèles considérés.

VIII.5.2.2 - Contrainte radiale (σ_r)

La figure (VIII.12) montre σ_r sur le

fût avec comme définition :

$$\sigma_r = \frac{F_N}{S}$$

F_N est la force normale sur les éléments du contact,

S la surface de l'influence.

Remarquons ici que la contrainte radiale σ_r (donnée directement par le programme lui-même) est discontinue à l'interface sol-béton, par suite des approximations numériques, et ceci d'autant plus que σ_r varie beaucoup par rapport à l'état initial ou l'état élastique (grand nombre d'itérations de plasticité). C'est pour cela que nous avons préféré nous baser sur les forces de contact plus fiables.

La figure (VIII.12.a) pour le calcul élastique montre, en fonction de la charge appliquée, une augmentation de σ_r sur le fût dans les zones avec augmentation de volume élastique. En haut du pieu, la variation de σ_r est plus faible.

La charge maximale reprise par le frottement latéral est obtenue de la manière suivante :

$$Q_{sl} = 2\pi r_0 \operatorname{tg} \phi \int_0^l \sigma_r dz$$

On obtient pour σ_r correspondant au sol au repos ($\sigma = \sigma_r^0 = K_0 \gamma z$):

$$Q_{sl}^0 = 2\pi r_0 \operatorname{tg} \phi \operatorname{co} K_0 \gamma \frac{l^2}{2} = 204 \text{ kN}$$

Sous la charge totale de 360 kN, la charge prise par le frottement latéral dans le calcul élastique vaut 258 kN (elle est supérieure de 26 % à celle du sol au repos).

La plus grande valeur de σ_r se trouve près de la pointe, et elle vaut $2\sigma_r^0$.

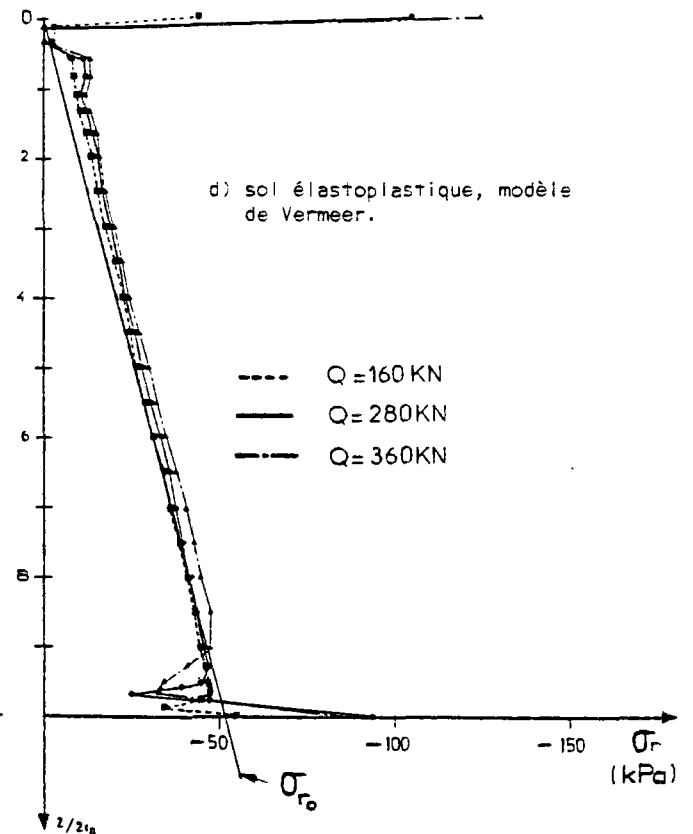
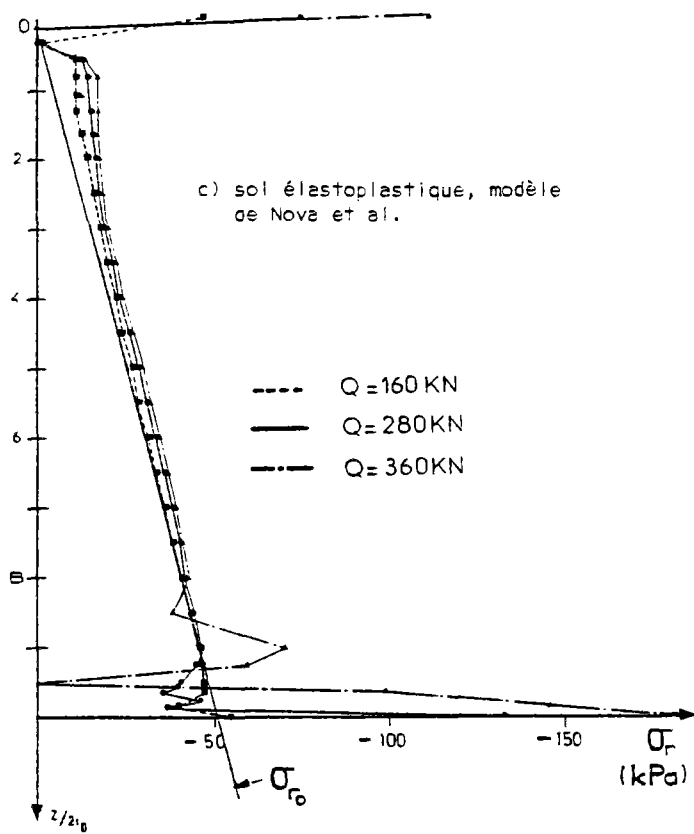
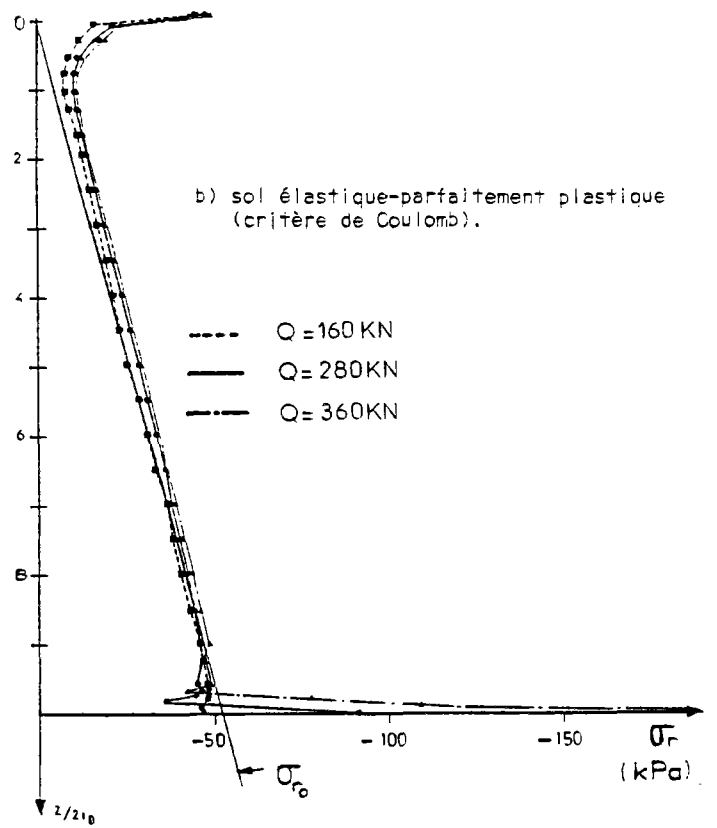
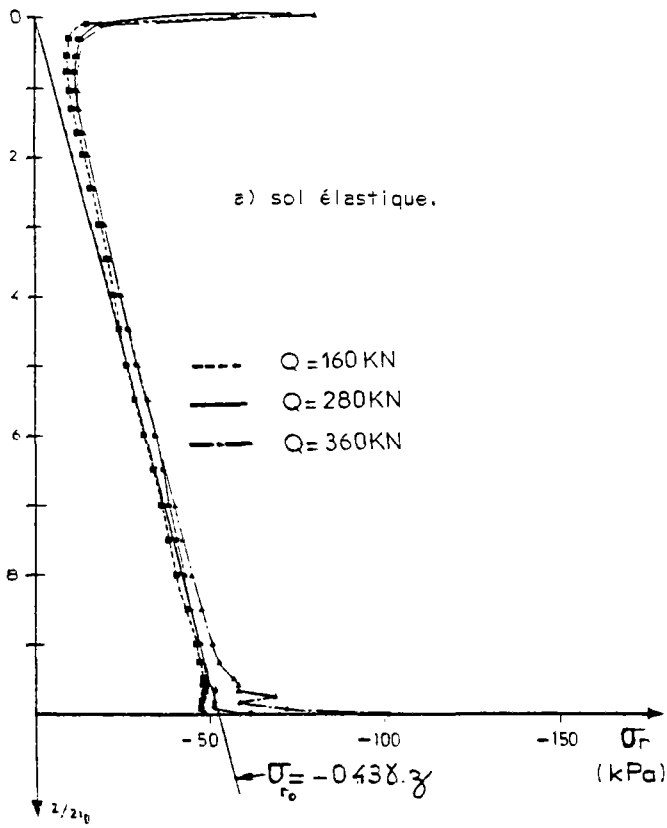


Fig. VIII.12 - Contraintes radiales σ_r sur le fût.

Dans le cas du sol élastique-parfaitement plastique, la figure (VIII.12.b) montre clairement que pour les zones proches de la pointe, qui viennent d'être plastifiées pour une charge en tête voisine de 280 kN, σ_r diminue.

Au-delà de la charge de 280 kN, la dilatance plastique, dans les zones qui étaient déjà plastiques, augmente. La contrainte radiale σ_r augmente aussi et elle atteint en pointe $5\sigma_{r0}$.

En même temps les zones qui sont élastiques le long du fût voient leur contrainte σ_r très légèrement diminuer, par rapport au cas élastique.

Finalement la charge totale reprise par le frottement latéral sous la charge de 360 kN augmente de 23 % (soit $Q_s = 250$ kN) par rapport à Q_s correspondant à σ_r du sol au repos (Q_{s1}^0). Elle est légèrement inférieure à celle du sol élastique ; on peut dire que ceci est dû à l'apparition de la dilatance plastique (au voisinage de la pointe), qui cause au départ une légère diminution de σ_r . En d'autres termes la forte augmentation de σ_r en pointe arrive trop tard.

Examinons maintenant le cas des sols élastoplastiques écrouissables. Pour le modèle de Nova et al. (Fig. VIII.12.c.), le même genre de phénomène se manifeste. Dans les zones du sol où la dilatance plastique vient d'apparaître, σ_r diminue. Mais une plus grande partie du sol est dilatée plastiquement relativement au critère de Coulomb, et la charge reprise par le frottement latéral vaut 245 kN, soit 20 % de plus que Q_{s1}^0 ; cette valeur est inférieure à celle du sol de Coulomb.

Pour le modèle de Vermeer (Fig. VIII.12.d), la zone où apparaît la dilatance plastique est la plus étendue de tous les modèles. On note aussi que les déformations volumiques sont plus importantes et que leur composante élastique est prédominante.

L'augmentation de σ_r (moyenne sur le fût) dans ce calcul est la plus petite de tous les calculs. Q_s sous 360 kN en tête vaut 229 kN, soit 12 % supérieure à Q_{s1}^0 .

On peut conclure que, pour l'angle de frottement de contact retenu ici $\phi_{co} = 35^\circ$, la phase d'apparition de la dilatance plastique freine l'augmentation de σ_r moyenne sur le fût par rapport au cas élastique. Si on augmente l'angle de contact, la dilatance plastique aura duré plus longtemps au moment de l'apparition du glissement. On peut penser que σ_r , notamment près de la pointe, pourrait atteindre des valeurs plus élevées.

VIII.5.3 - Comportement du sol à mi-hauteur du pieu

VIII.5.3.1 - Cisaillement τ_{rz} en fonction de la distorsion γ_{rz}

Pour le calcul élastique et le calcul avec le critère de Coulomb, le sol reste élastique à mi-profondeur du pieu et le cisaillement τ_{rz} est linéaire en fonction de γ_{rz} (Fig. VIII.13).

Pour les modèles de Nova et al. et de Vermeer, la courbe de τ_{rz} en fonction de γ_{rz} (Fig. VIII.13), admet une asymptote et on constate que le comportement prédit par le modèle de Nova et al. est plus raide que celui de Vermeer. Dans tout les cas, τ_{rz} est limité par la valeur $\sigma_{r0} \cdot \text{tg} \phi_{co}$.

La pente initiale de toutes ces courbes est :

$$G_e = \frac{E}{2(1+\nu)} = 57\,700 \text{ kN}$$

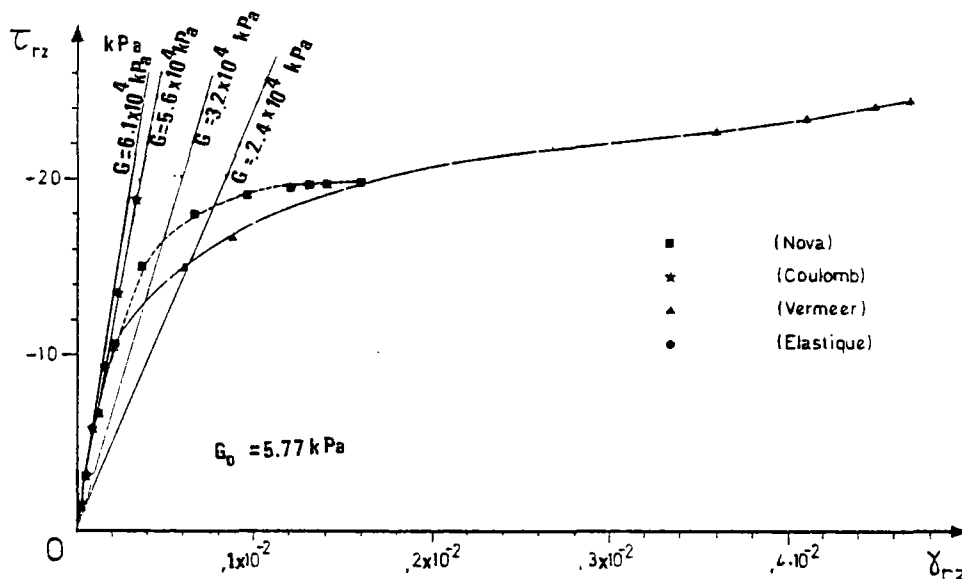


Fig. VIII.13 - Courbe de cisaillement vertical (τ_{rz} , γ_{rz}) à mi-profondeur du pieu en $r = r_0$.

VIII.5.3.2 - Déplacements verticaux

Les déplacements verticaux du sol pour le cas élastique (Fig. VIII.14.a) et le cas élastique-parfaitement plastique (Fig. VIII.14.b), à mi-profondeur du pieu, sont à la charge de 360 kN du même ordre de grandeur.

Ces déplacements sont plus grands pour le modèle de Vermeer que pour le modèle de Nova et al., parce que le comportement du sol prédit par Vermeer est plus souple que celui prédit par Nova et al.

Examinons maintenant la loi logarithmique proposée par Frank (1974) (Eq. VIII.2) : on constate que cette loi est vérifiée pour le calcul élastique avec le glissement-frottement d'interface.

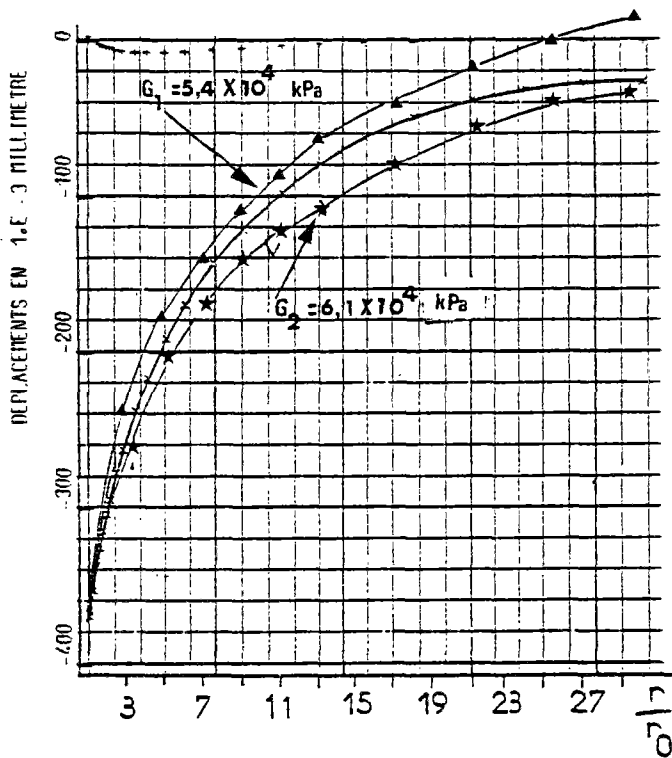
Pour les modèles élastoplastiques avec écoulement, les déplacements calculés sont inférieurs à ceux qui sont prévus par l'équation (VIII.2) en utilisant le module de cisaillement G_0 .

Ceci est tout-à-fait logique puisque G_0 représente pour ces modèles le module tangent initial. Le module à prendre en compte pour chaque anneau du sol est en fait un module sécant inférieur à G_0 , fonction de la déformation au point considéré.

La figure (VIII.14) montre des fourchettes des valeurs des déplacements verticaux calculées à partir de la loi logarithmique avec deux valeurs de G (G_1 et $G_2 < G_0$). Pour chaque modèle ces modules sécants "moyens" sont reportés sur les courbes (τ_{rz} , γ_{rz}) (Fig. VIII.13).

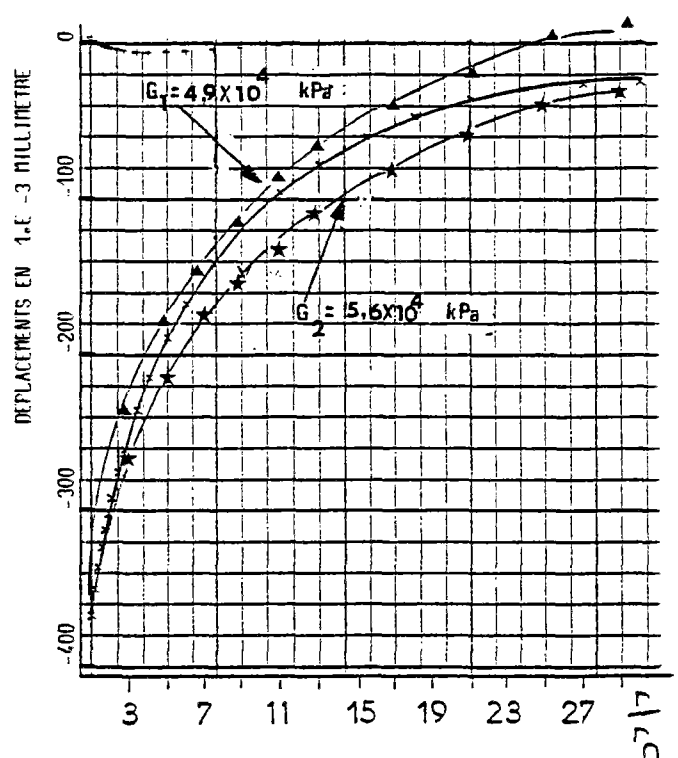
VIII.5.3.3 - Déformations volumiques

La déformation volumique ϵ_v , le rapport de contrainte η et le cisaillement, sous différentes charges totales, à l'interface sol-pieu ($r = r_0$) et à mi-profondeur sont présentés sur la figure (VIII.15).



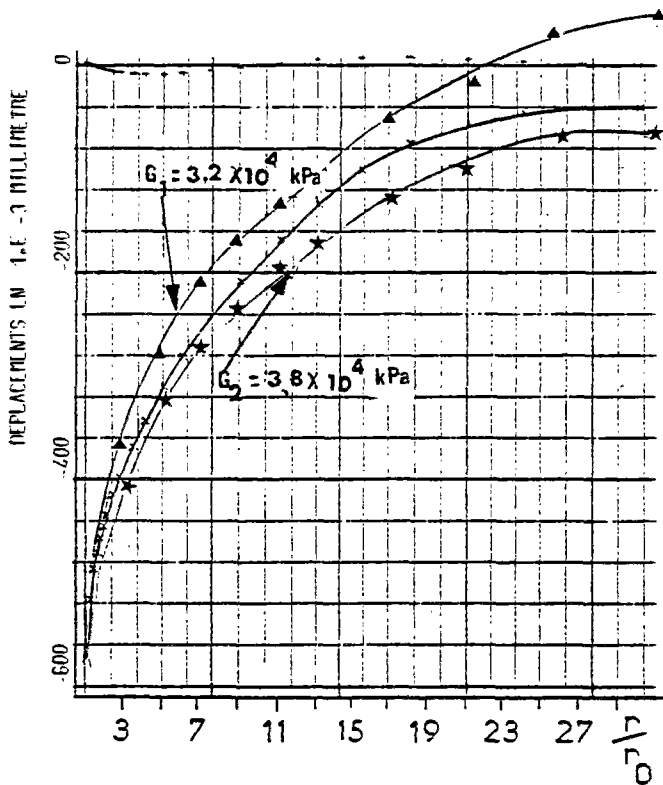
a) sol élastique,

($\tau_0 = 20,4 \text{ kPa}$; $w_0 = 0,36493 \times 10^{-3} \text{ m}$).



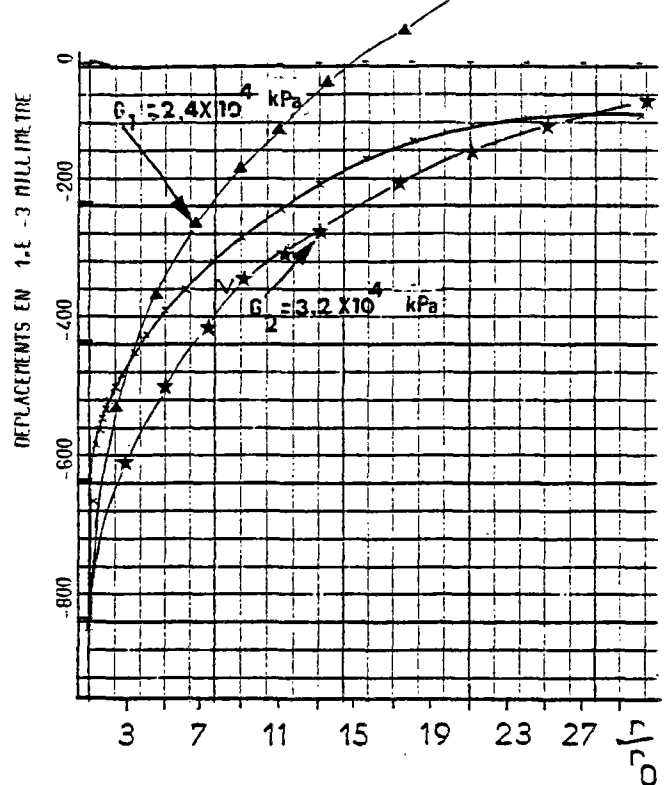
b) sol élastique parfaitement plastique (critère de Coulomb),

($\tau_0 = 18,5 \text{ kPa}$; $w_0 = 0,36853 \times 10^{-3} \text{ m}$).



c) sol élastoplastique, modèle de Nova et al.,

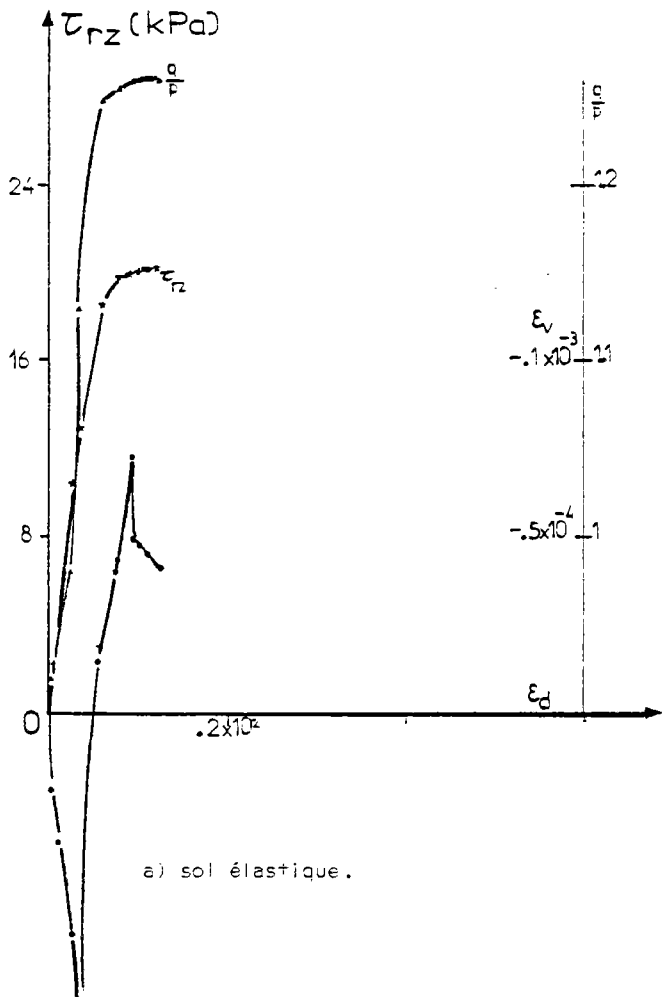
($\tau_0 = 19,9 \text{ kPa}$; $w_0 = 0,5731 \times 10^{-3} \text{ m}$).



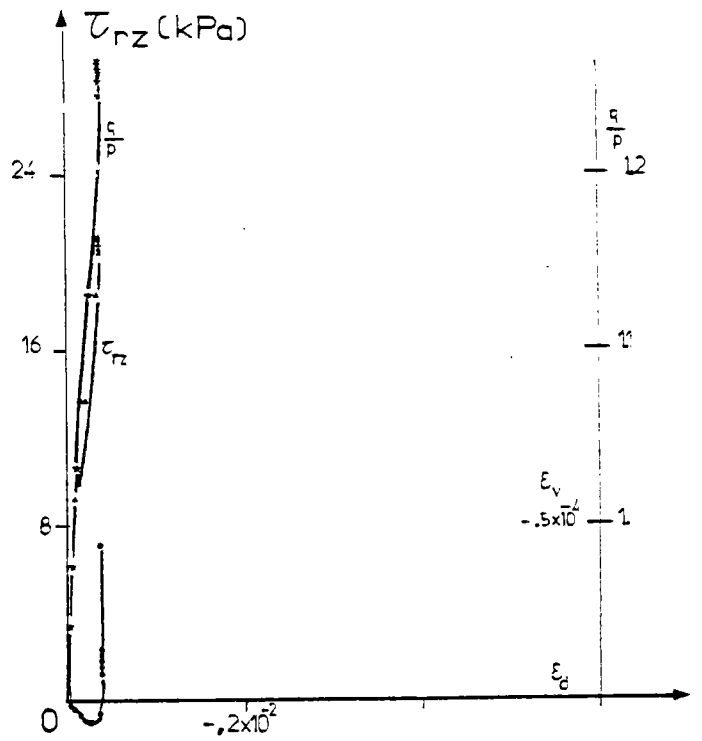
d) sol élastoplastique, modèle de Vermeer,

($\tau_0 = 24,4 \text{ kPa}$; $w_0 = 0,8134 \times 10^{-3} \text{ m}$).

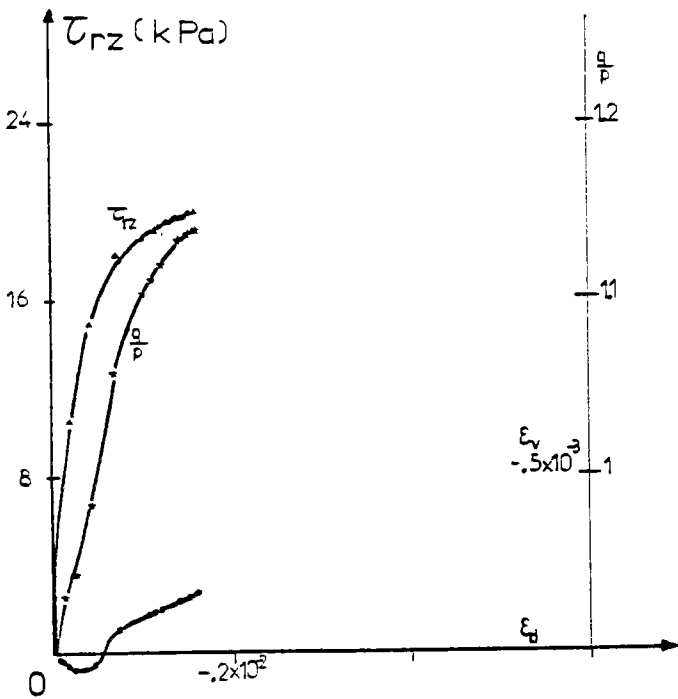
Fig. VIII.14 - Les déplacements verticaux.



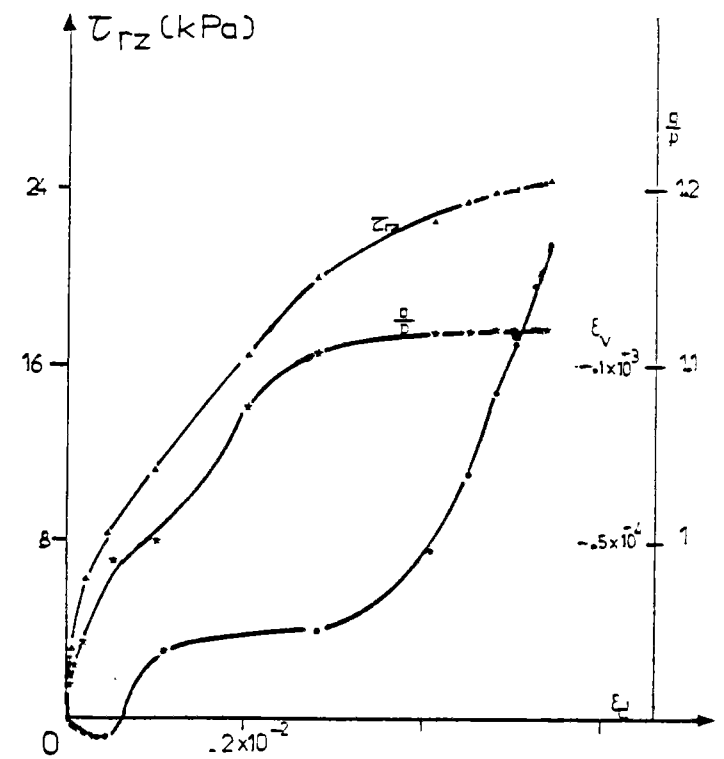
a) sol élastique.



b) sol élastique parfaitement plastique (critère de Coulomb).



c) sol élastoplastique, modèle de Nova et al.



d) sol élastoplastique, modèle de Vermeer.

Fig. VIII.15 - La déformation volumique, τ_{rz} , η à mi-profondeur du pieu ($r = r_0$).

On constate une augmentation de volume dans tous les calculs, à partir d'un certain niveau de charge. La valeur de η demeure constante quand la charge dépasse une valeur donnée et la valeur de τ_{rz} tend vers une asymptote.

pieu (Fig. VIII.17) cette contrainte diminue légèrement, à partir d'une certaine charge, pour le calcul élastique et le calcul élastique-parfaitement plastique. Elle augmente par contre pour le modèle de Nova et al et le modèle de Vermeer, l'augmentation étant plus prononcée pour ce dernier modèle.

VIII.5.3.4 - Contraintes en $r = r_c$

La figure (VIII.16) montre que la contrainte σ_r dans le sol, au contact du pieu à mi-profondeur, augmente (en valeur absolue) dans tous les calculs. L'augmentation la plus grande est obtenue dans le cas du modèle de Vermeer. Notons que c'est le seul calcul qui prédit une dilatance plastique à ce niveau, et de plus avec une augmentation de volume élastique faible. Par contre, comme on l'a vu précédemment, la valeur moyenne de σ_r sur l'ensemble du fût est plus faible pour ce calcul que pour tous les autres calculs.

La contrainte σ_z (Fig. VIII.18) pour le calcul élastique et élastique-parfaitement plastique diminue également après une légère augmentation. La diminution finale pour le modèle de Nova et al. est plus grande que pour le modèle de Vermeer, pour lequel σ_z augmente légèrement à la fin. Dans tous les calculs σ_z tend vers une asymptote.

VIII.5.3.5 - Distribution des contraintes en fonction de la distance au pieu

Les contraintes dans le sol à mi-profondeur du pieu sont présentées sur la figure

En ce qui concerne σ_c au contact du

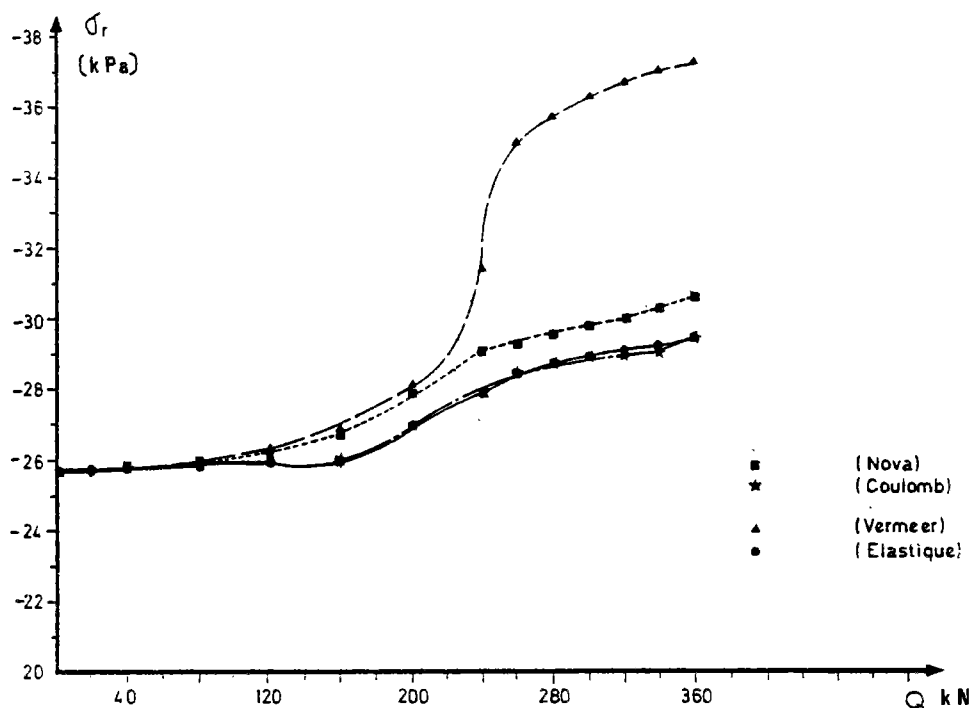


Fig. VIII.16 - σ_r en fonction de charge à mi-profondeur du pieu ($r = r_0$).

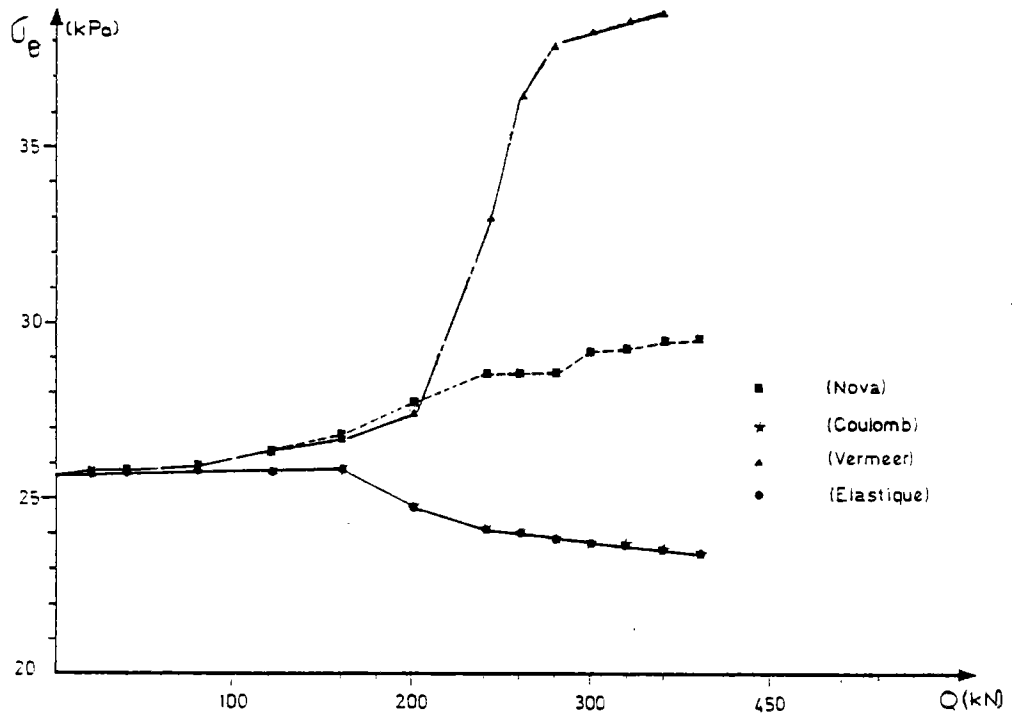


Fig. VIII.17 - σ_e en fonction de charge à mi-profondeur du pieu ($r = r_0$).

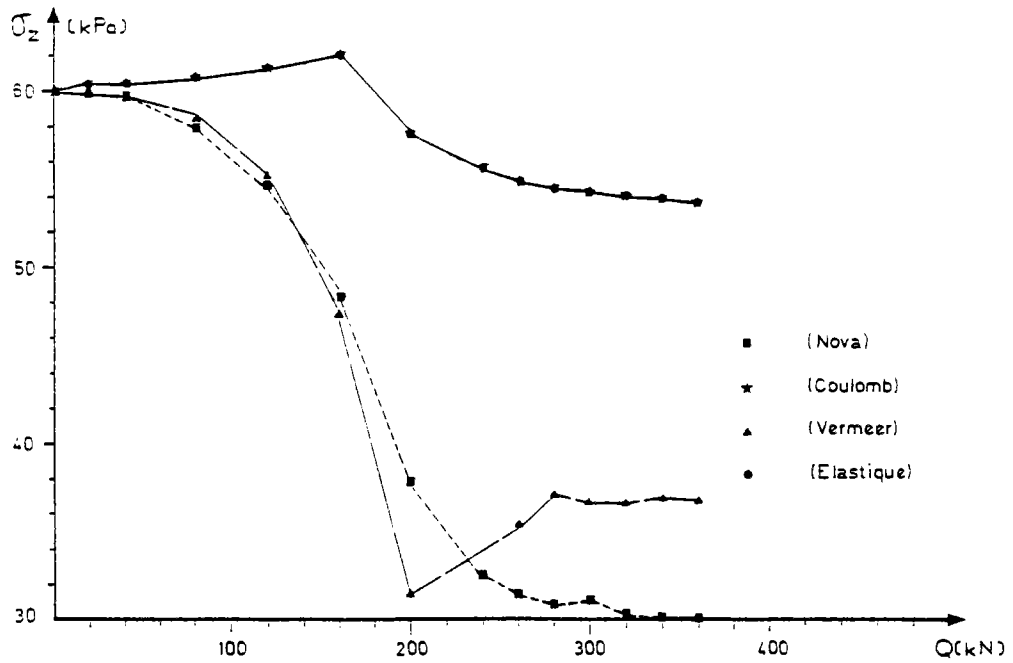


Fig. VIII.18 - σ_z en fonction de charge à mi-profondeur du pieu ($r = r_0$).

(VIII.19), la charge totale appliquée au pieu étant 360 kN. σ_e sur le pieu pour les modèles élastoplastiques écouissables est plus grande en valeur absolue que pour les autres modèles et elle a plus augmenté pour le modèle de Vermeer que pour le modèle de Nova et al. Lorsque l'on s'éloigne du pieu, $|\sigma_e|$ diminue pour atteindre un minimum à la distance r_0 du pieu, ensuite elle augmente légèrement et atteint $|\sigma_e^0|$ à la distance $7r_0$. Dans les calculs élastiques et élastiques-parfaitement plastiques jusqu'à la distance de $5r_0$, σ_e a diminué par rapport à l'état initial (σ_e^0).

Pour tous les modèles de sol, $|\sigma_r|$ a augmenté légèrement au voisinage du pieu (à mi-profondeur) ; lorsque l'on s'éloigne du pieu, σ_r atteint la valeur de σ_r^0 à la distance $5r_0$ du pieu.

$|\sigma_z|$ a diminué au voisinage du pieu pour tous les calculs. Lorsque l'on s'éloigne du pieu, σ_z atteint σ_z^0 à $7r_0$ pour les modèles élastoplastiques écouissables et à $5r_0$ pour les autres modèles. La variation de σ_z dans les calculs élastoplastiques écouissables est importante (tout comme la variation de τ_{rz} pour tous les calculs).

En ce qui concerne la contrainte de cisaillement vertical τ_{rz} , elle a bien évidemment augmenté pour tous les calculs.

Pour ce qui est de la loi d'augmentation en fonction de r on a reporté sur la figure (VIII.19) la loi en $\frac{1}{r}$ proposée par Frank (1974) (Eq. VIII.1)

$$\tau_{rz} = \frac{\tau_0 r_0}{r}$$

(τ_0 valeur de τ_{rz} en $r = r_0$)

On constate que pour tous les calculs cette loi fournit une bonne approximation (tout au moins à mi-profondeur du pieu).

VIII.5.3.6 - Cercles de Mohr

Les cercles de Mohr correspondant aux contraintes totales et aux variations des contraintes pour les charges de 240 kN et 360 kN, pour $r = r_0$, sont tracés à la figure (VIII.20). Le sol élastique et le sol élastique-parfaitement plastique donnent des cercles presque identiques. On peut dire que, pendant le chargement, les contraintes principales ne varient pratiquement plus à partir du moment où le cercle devient tangent à la droite correspondant à $\phi_{CO} = 35^\circ$.

Pour les modèles élastoplastiques écouissables, les cercles dépassent légèrement cette droite (mais restent en deçà de la droite $\phi_p = 43^\circ$).

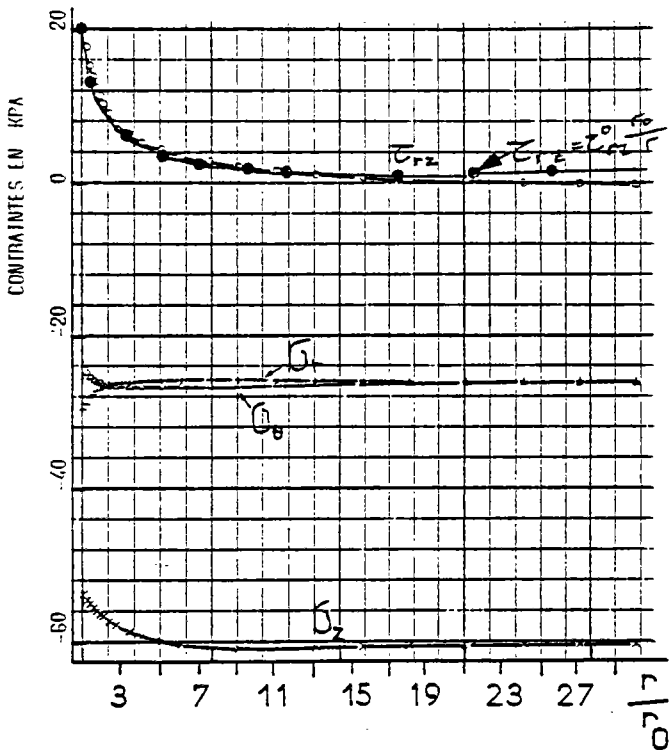
VIII.6 - Conclusion

Les calculs présentés dans ce chapitre font apparaître que le comportement général du sol élastique et du sol élastique-parfaitement plastique sont identiques. Pour les deux modèles élastoplastiques écouissables, les déplacements axiaux sont plus élevés.

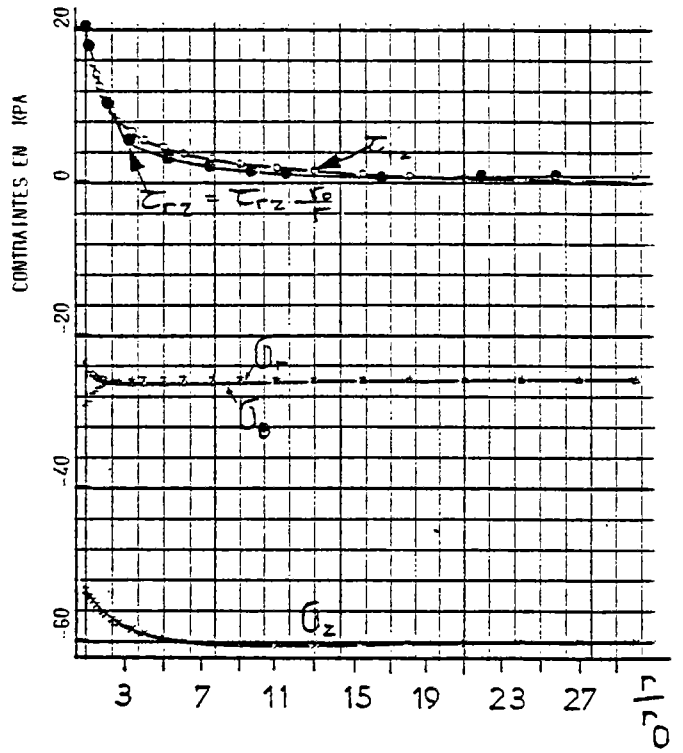
En comparant, entre eux, ces deux modèles élastoplastiques, on constate que, pour le même sable, le modèle de Nova et al. prédit un comportement autour du pieu plus raide que celui de Vermeer.

Cependant, il faut rappeler que nous avons rencontré des difficultés pour interpréter et programmer le modèle de Nova et al (voir paragraphe III.8).

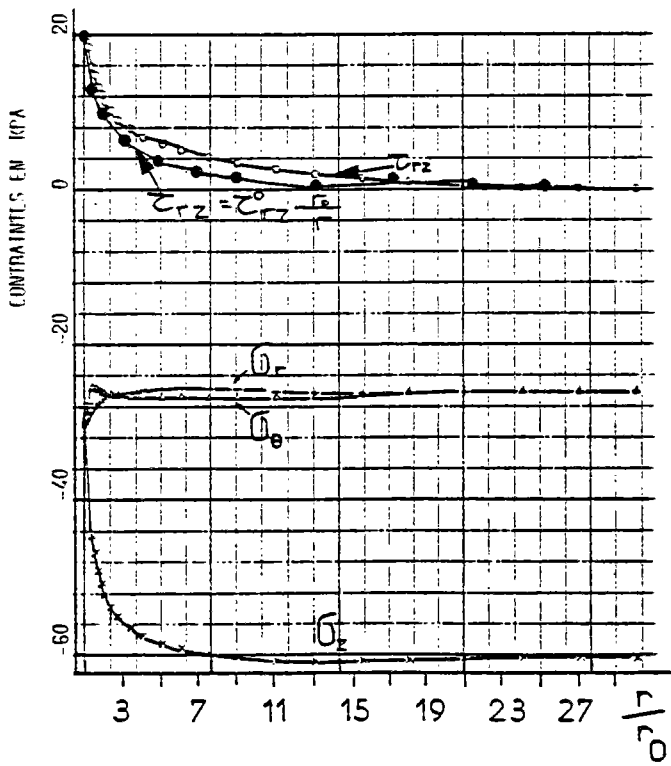
En ce qui concerne les déformations volumiques, on constate une certaine augmentation élastique. Pour le modèle de Coulomb et le modèle de Nova et al la dilatance plastique n'existe que près de la pointe du pieu.



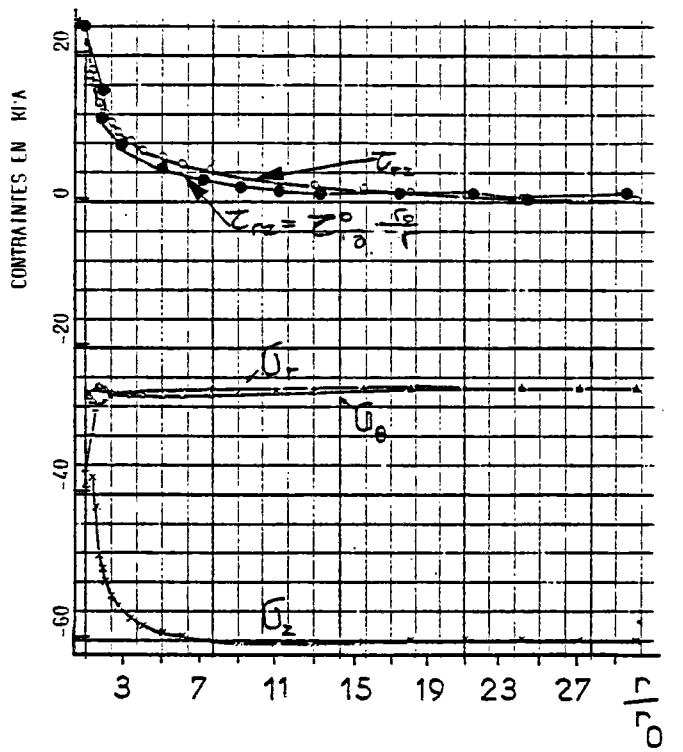
a) sol élastique.



b) sol élastique parfaitement plastique (critère de Coulomb).

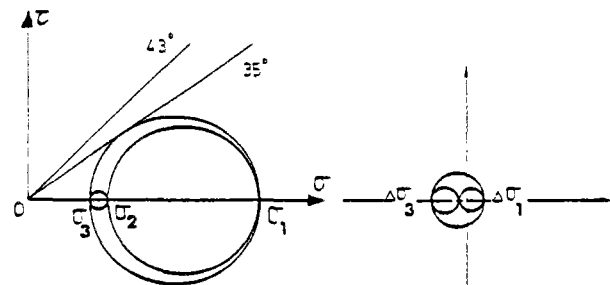
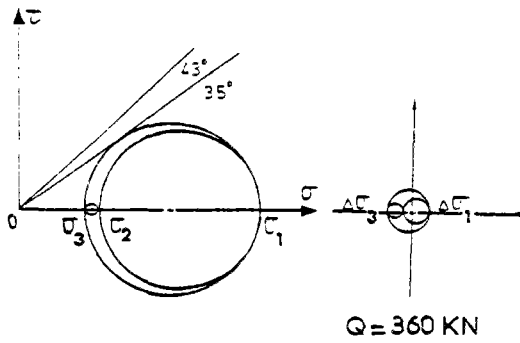
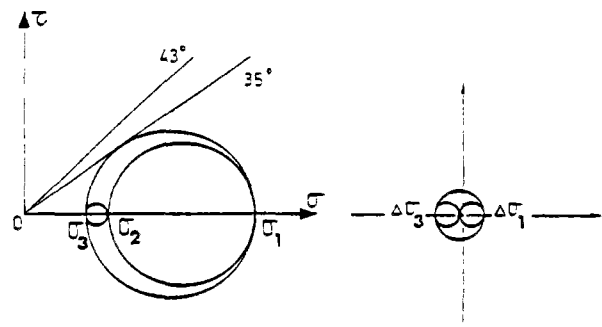
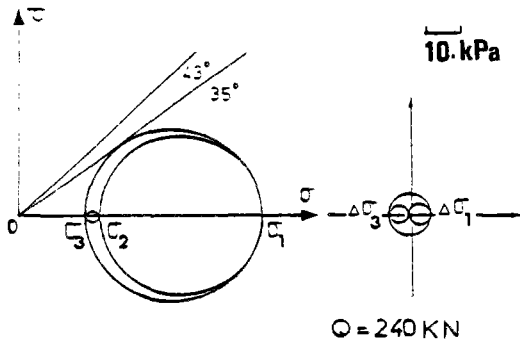


c) sol élastoplastique, modèle de Nova et al.



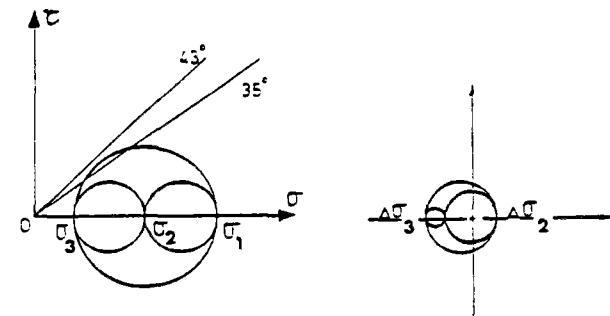
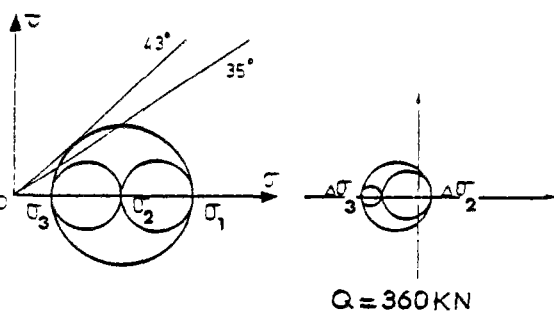
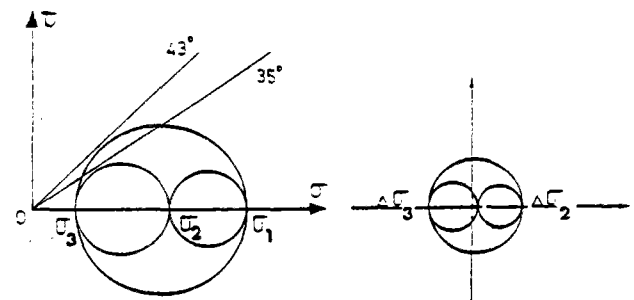
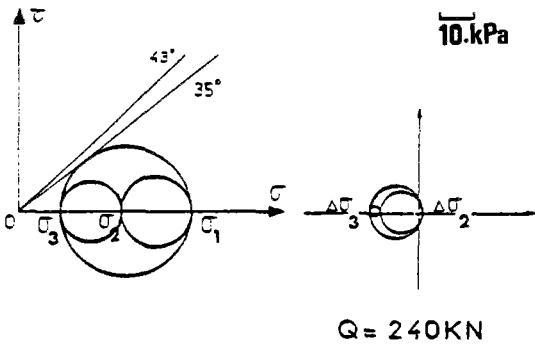
d) sol élastoplastique, modèle de Vermeer.

Fig. VIII.19 - Distribution des contraintes en fonction de la distance du pieu ($Q = 360 \text{ kN}$).



a) sol élastique.

b) sol élastique parfaitement plastique (critère de Coulomb).



c) sol élastoplastique, modèle de Nova et al.

d) sol élastoplastique, modèle de Vermeer.

Fig. VIII.20 - Les cercles de Mohr.

Par contre, la zone dilatée plastiquement est plus étendue pour le modèle de Vermeer.

En général, dans tous les modèles, la dilatance apparaît après glissement au niveau considéré (correspondant à $\frac{\tau_{rz}}{\sigma_r} = \text{tg}35^\circ$ dans nos calculs).

Les effets conjugués de la dilatance plastique et des augmentations de volume élastique induisent une diminution de la contrainte radiale σ_r sur le fût donc une diminution de charge reprise par frottement latéral (par rapport au calcul élastique).

Les calculs que nous avons effectués sont certainement basés sur des hypothèses simplificatrices. En effet, nous n'avons pas considéré le remaniement du sol au voisinage du pieu ou la rotation des contraintes principales dus à la mise en place du pieu.

En ce qui concerne les lois proposées par Frank (1974) nous pensons qu'elles restent valables, au moins à mi-profondeur du pieu.

CONCLUSION GENERALE

Ce travail de recherche a permis, tout d'abord, d'examiner les modèles élastoplastiques écouissables de Nova et al. et de Vermeer et de les traiter par la méthode des éléments finis. Les enseignements que l'on peut tirer de cette étude sont les suivants.

Les modèles de Nova et al. et de Vermeer sont des modèles capables de représenter les principales caractéristiques des matériaux granulaires, au moins quand ils sont soumis aux trajets de chargement monotone des essais classiques de laboratoire. En ce qui concerne la dilatance dans ces deux modèles, elle apparaît à partir d'un certain rapport de contrainte (n_c).

La programmation de ces deux modèles dans le code d'éléments finis ROSALIE n'a pas posé de problèmes particuliers ; cette programmation a été conçue de manière à rendre aisée l'introduction future de tout nouveau modèle élastoplastique avec écouissage.

La convergence, dans ce programme qui utilise la méthode de force avec le schéma de retour de module tangent simplifié, est lente et les itérations internes ne l'accélérent pas.

Les modèles de Nova et al. et de Vermeer ont ensuite été appliqués aux problèmes des pieux sous charge axiale.

Les résultats des calculs effectués ont mis en évidence l'importance de la prise en compte du glissement avec frottement à l'interface sol-pieu pour tous les modèles de sols utilisés. Le comportement du sol, qui est identique pour le modèle élastique et élastique-parfaitement plastique, est différent pour les modèles élastoplastiques écouissables, les déplacements axiaux étant plus élevés dans ces derniers cas. Une certaine augmentation de volume élastique a, par ailleurs, été relevée au voisinage du pieu pour tous les calculs.

La dilatance plastique existe dans tous les calculs élastoplastiques mais elle se manifeste généralement assez tard, à peu près en même temps que le glissement relatif sol-pieu. L'effet conjugué de la dilatance plastique et des augmentations de volumes élastiques induit en moyenne une certaine diminution de la contrainte radiale σ_r sur le fût par rapport au calcul élastique.

Au vu de ces résultats, et pour les modèles utilisés, il semble donc que la dilatance des sols granulaires n'accroisse pas la capacité portante en frottement, tout du moins par augmentation de la contrainte radiale.

A N N E X E

NOTATIONS ET DEFINITIONS

Dans ce rapport, on utilise la convention de signe de la mécanique des milieux continus (contraintes et déformations positives en traction). Cependant, on a adopté la convention de signe de la mécanique des sols pour la contrainte moyenne et la déformation volumique (positive en compression).

Les principales notations adoptées dans ce rapport sont les suivantes :

A) Contraintes :

. Dans l'espace $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

$$q = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2},$$

contrainte déviatorique,

avec s_{ij} , déviateur de contrainte ;

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij},$$

δ_{ij} , symbole de Kronecker ;

$$p = - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3},$$

contrainte moyenne,

$$\text{et } \eta = \frac{p}{q}.$$

. Pour l'essai triaxial on obtient :

$$q = |\sigma_1 - \sigma_3|$$

$$p = - \frac{\sigma_2 + 2\sigma_3}{3}$$

B) Déformations (indice "e" pour les déformations élastiques et indice "P" pour les déformations plastiques)

. Dans l'espace $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

$$\varepsilon_d = \left(\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij} \right)^{1/2} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right]^{1/2},$$

avec :

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij},$$

et :

$$\varepsilon_v = - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$

déformation volumique.

La relation entre la déformation déviatorique et la contrainte déviatorique s'écrit, dans le cas de l'élasticité linéaire :

$$q = 3G \varepsilon_d^e$$

L'incrément de travail par unité de volume s'écrit :

$$\dot{w} = p\dot{\epsilon}_v + q\dot{\epsilon}_d .$$

. Pour l'essai triaxial, on obtient :

$$\epsilon_d = \frac{2}{3} |\epsilon_1 - \epsilon_3| ,$$

$$\epsilon_v = - (\epsilon_1 + 2\epsilon_2) .$$

ϵ_d et ϵ_v sont utilisés dans le modèle de Nova et al.

Vermeer utilise :

$$\epsilon_v \text{ et } \dot{\gamma} = \int_0^t \dot{\gamma} dt$$

avec :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \left(\frac{3}{2} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)^2 + (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3)^2 + (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1)^2 \right]^{1/2} , \end{aligned}$$

ce qui donne à l'essai triaxial :

$$\dot{\gamma} = |\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3| .$$

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Barbas A. et Frank R. (1982) *Utilisation de la méthode des éléments finis en mécanique des sols dans le domaine de l'élastoplasticité*, Rapport de Recherche LPC N° 116, septembre.
- Besseling J.F. (1975) *Non linear analysis*, Proc. World Congress on Finite Element Meth. in Struct. Mech., Bournemouth.
- Bishop A.W. et Henkel D.J. (1957) *The measurement of soil properties in the triaxial test*, Edward Arnold, London.
- Christian J.T., Hagmann A.J. et Warr W.A. (1977) *Incremental plasticity analysis of frictional soils*, Int. Jnl Num. Anal. Methods Geomech., Vol. 1, pp. 343-375.
- Darve F. (1974) *Contribution à la détermination de la loi rhéologique incrémentale des sols*, Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Grenoble.
- Darve F. (1978) *Une formulation incrémentale des lois rhéologiques. Application aux sols*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Grenoble.
- Desai C.S., Phan H.V. et Sture S. (1981) *Procedure selection and application of plasticity models for a soil*, Int. Jnl Num. Anal. Methods Geomech., Vol. 5, pp. 295-311.
- Dhatt G. et Touzot G. (1981) *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Les Presses de l'Université Laval, Québec, et Maloine, Paris.
- Di Benedetto H. (1981) *Etude du comportement cyclique des sables en cinématique rotationnelle*, Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Grenoble.
- DiMaggio F.L. et Sandler I.S. (1971) *Material model for granular soil*, Jnl Engng Mech. Div. Proc. ASCE, Vol. 97, N° EM3, pp. 935-950.
- Drücker D.C., Gibson R.E. et Henkel D.J. (1957) *Soil mechanics and work-hardening theories of plasticity*, Transactions ASCE, Vol. 122, pp. 338-346.
- Frank R. (1974) *Etude théorique du comportement des pieux sous charge verticale, Introduction de la dilatance*, Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Paris VI.
- Frank R. (1984) *Etudes théoriques de fondations profondes et d'essais en place par autoforage dans les L.P.C. et résultats pratiques (1972-1983)*, Rapport de Recherche LPC N° 128, juin.
- Frank R., Guénot A. et Humbert P. (1980) *Etude par éléments finis de quelques critères de plasticité orientés*, Méthodes Numériques dans les Sciences de l'Ingénieur (G.A.M.N.I. 2), Dunod, Paris, Vol. 2, pp. 765-775.
- Frémond M. (1980) *Méthodes variationnelles en calcul des structures*, Cours de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

- Gudehus G. (1979) *A comparison of some constitutive laws for soils under radially symmetric loading and unloading*, Proc. 3rd Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Aix-la-Chapelle, Vol. 4, pp. 1309-1323.
- Guellec P. (1976) *ROSALIE - Système de calcul des massifs et des structures*, Rapport du Département de Géotechnique. F.A.E.R. 1.09.14.6, Laboratoire central des Ponts et Chaussées.
- Guellec P. (1977) *Etude de la plastification autour de cavités souterraines sous l'effet d'accroissement de température*, Rapport du Département de Géotechnique n° 337001, Laboratoire central des Ponts et Chaussées.
- Guellec P., Humbert P. et Ricard A. (1976) *La méthode des éléments finis et le système ROSALIE*, Bull. Liaison Labo. P. et Ch., N° 81, Réf. 1801, pp. 152-162.
- Guellec P. et Ricard A. (1974) *Calcul de massifs en élastoplasticité. Applications à la mécanique des roches et des sols*, Bull. Liaison Labo. P. et Ch., N° 69, Réf. 1397, pp. 115-123.
- Hansen J.B. (1965) *Some stress-strain relationships for soils*, Proc. 6th Int. Conf. Soil Mech. Fdn Engng, Montréal, Vol. 1, pp. 231-234.
- Hardin B.O. (1978) *The nature of stress-strain behaviour of soils*, Proc. of the Conference on Earthquake Engineering and Soil Dynamics, Pasadena, ASCE, Rub. 1, pp. 3-90.
- Hill R. (1950) *The mathematical theory of plasticity*, Oxford Engineering Science series, University Press.
- Hueckel T. et Nova R. (1979) *Some hysteresis effects of the behaviour of geologic media*, Int. Jnl of Solids and Structures, Vol. 15, N° 8, pp. 625-642.
- Imbert J.F. (1979) *Analyse des structures par éléments finis*, Cepadues Editions, Toulouse.
- Ishihara K., Tatsuoka F. et Yasuda S. (1975) *Undrained deformation and liquefaction of sand under cyclic stresses*, Soils and Foundations, 15, N° 1, pp. 29-44.
- Katchanov L. (1975) *Éléments de la théorie de la plasticité*, Editions Mir, Moscou.
- Kenter C.J. et Vermeer P.A. (1978) *Computation by finite elements*, Symposium on foundation aspects of coastal structures. University of Technology, Delft, III.2, pp. 1-20.
- Kirpatrick W.M. (1961) *Discussion on soil properties and their measurement*, Proc. 5th Int. Conf. Soil Mech. Fdn Engng, Vol. 3, Paris, pp. 131-133.
- Kondner R.L. et Zelasko J.S. (1963) *A hyperbolic stress-strain formulation for sands*, Proc. 2nd Pan-American Conf. Mech. Fdn Engng, Brasil, Vol. 1, pp. 289-324.
- Lade P.V. (1977) *Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces*, Int. Jnl Solids Structures, Vol. 13, pp. 1019-1035.
- Lade P.V. et Duncan J.M. (1975) *Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil*, Jnl Geot. Engng Div., Proc. ASCE, Vol. 101, GT10, pp. 1037-1053.
- Loret B. (1981) *Formulation d'une loi de comportement élastoplastique des milieux granulaires*, Thèse de Docteur-Ingénieur, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Luong M.P. (1982) *Sols sous sollicitations sismiques*, Session de formation continue E.N.P.C. sur la dynamique des sols appliquée aux séismes, Paris.
- Mandel J. (1964) *Conditions de stabilité et postulat de Drucker*, I.U.T.A.M. Symposium on Rheology and Soil Mech., Grenoble, Springer-Verlag, Berlin, 1966, pp. 58-68.
- Mandel J. (1966) *Mécanique des milieux continus*, Editions Gauthier-Villars, Paris.
- Matsuoka H. et Nakai T. (1977) *Stress-strain relationship of soil based on the "SMP"*, Proc. specialty session 9, 9th Int. Conf. Soil Mech. Fdn Engng, Tokyo, pp. 153-162.
- Matsuoka H. et Nakai T. (1982) *A new failure criterion for soils in three-dimensional stresses*, I.U.T.A.M. Conference on Deformation and Failure of Granular Materials, Delft, pp. 253-263.

- Monnet J. (1983) *Détermination d'une loi de comportement des sols en écoulement et en plasticité parfaite et utilisation par la méthode des éléments finis*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Claude Bernard, Lyon.
- Mróz Z., Norris V.A. et Zienkiewicz O.C. (1978) *An anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading*, Int. Jnl for Num. and Anal. Methods in Geomech., Vol. 2, pp. 203-221.
- Mróz Z., Norris V.A. et Zienkiewicz O.C. (1979) *Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elasto-plastic deformation of soils*, Géotechnique 29, N° 1, pp. 1-34.
- Mullenger G. et Davis R.O. (1981) *A unified yield criterion for cohesionless granular materials*, Int. Jnl for Num. and Anal. Methods in Geomech., Vol. 5, pp. 285-294.
- Namy E. (1970) *An investigation of certain aspects of stress-strain deformation for clay soils*, Ph. D. thesis, Cornell University.
- Nayak G.C. et Zienkiewicz O.C. (1972) *Elasto-plastic stress analysis. A generalization for various Constitutive relations including strain softening*, Int. Jnl Num. Meth. Engng, Vol. 5, pp. 113-135.
- Nova R. (1977) *On the hardening of soils*, Archiwum mechaniki stosowanej, 29, N° 3, pp. 445-458.
- Nova R. (1979) *Un modello costitutivo per l'argilla*, Rivista Italiana di Geotecnica 13, N° 1, pp. 37-54.
- Nova R. (1982 a) *A constitutive model for soil under monotonic and cyclic loading*, Chapter 13, Soil Mechanics - Transient and cyclic loads, John Wiley and Sons, pp. 343-373.
- Nova R. (1982 b) *A viscoplastic constitutive model for normally consolidated clay*, IUTAM conference on Deformation and Failure of Granular Materials, Delft, pp. 287-295.
- Nova R. et Hueckel T. (1980) *A "geotechnical" stress variables approach to cyclic behaviour of soils*, Int. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading, Swansea, 1, pp. 301-314.
- Nova R. et Hueckel T. (1981) *A unified approach to the modelling of liquefaction and cyclic mobility of sands*, Soils and Foundations, 21, N° 4, pp. 13-28.
- Nova R. et Hueckel T. (1982) *A model of soil behaviour in plastic and hysteretic ranges*, International Workshop on constitutive behaviour of soils, Grenoble, Comptes rendus préliminaires, Vol. 1, pp. 141-223.
- Nova R. et Wood D.M. (1978) *An experimental programme to define the yield function for sand*, Soils and Foundations, 18, N° 4, pp. 77-86.
- Nova R. et Wood D.M. (1979) *A constitutive model for sand in triaxial compression*, Int. Jnl for Num. and Anal. Methods in Geomech., Vol. 3, N° 3, pp. 255-278.
- Owen D.R.J. et Hinton E. (1980) *Finite elements in plasticity : theory and practice*, Pineridge Press, Swansea.
- Palmer A.C. (1966) *A limit theorem for materials with non-associated flow laws*, Journal de mécanique, Vol. 5, N° 2, pp. 217-222.
- Poorooshasb H.B. (1971) *Deformation of sand in triaxial compression*, 4th Asian Reg. Conf. on Soil Mech., Bangkok, Vol. 1, pp. 63-67.
- Poorooshasb H.B., Yong R.N. et Lelievre B. (1982) *Anisotropic hardening yield loci for sand*, IUTAM Conference on Deformation and Failure of Granular Materials, Delft, pp. 307-312.
- Prévost J.H. (1977) *Mathematical modelling of monotonic and cyclic undrained clay behaviour*, Int. Jnl for Num. and Anal. Methods in Geomech., Vol. 1, N° 2, pp. 195-216.
- Prévost J.H. (1978) *Anisotropic undrained stress-strain behaviour of clays*, Jnl Geot. Engng Div., ASCE, Vol. 104, GT 8, pp. 1075-1090.
- Robinet J.C. (1980) *Loi rhéologique en écriture incrémentale. Application aux sols et au béton*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Grenoble.

- Roscoe K.H. et Burland J.B. (1968) *On the generalized stress-strain behaviour of 'wet' clay*, Engineering plasticity, Cambridge University Press, pp. 535-609.
- Rowe P.W. (1962) *The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact*, Proc. of the Royal Society, A. 269, pp. 500-527.
- Rowe P.W. (1971) *Theoretical meaning and observed values of deformation parameters for soil*. Stress-strain behaviour of soils, Proc. Roscoe Mem. Symp., Cambridge, Foulis, Henley-on-Thames, pp. 143-194.
- Salençon J. (1974) *Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols*, Eyrolles, Paris.
- Salençon J. (1978) *Calcul à la rupture et analyse limite*, Cours de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Salençon J. et Halphen B. (1980) *Cours de calcul des structures anélastiques. Elastoplasticité 1*, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- Schofield A. et Wroth P. (1968) *Critical state soil mechanics*, Mc Graw-Hill, Londres.
- Sidaner J.F. (1981) *Comportement cyclique et transitoire des milieux pulvérulents*, Thèse de Docteur-Ingénieur, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Siriwardane H.J. et Desai C.S. (1983) *Computational procedures for non linear three dimensional analysis with some advance constitutive laws*, Int. Jnl for Num. and Anal. Methods in Geomech., Vol. 7, N° 2, pp. 143-171.
- Stroud M.A. (1971) *The behaviour of sand at low stress levels in the simple shear apparatus*, Ph. D. Thesis, University of Cambridge.
- Tatsuoka F. et Ishihara K. (1974) *Yielding of sand in triaxial compression*, Soils and Foundations, Vol. 14, N° 2, pp. 63-76.
- Touati A. (1982) *Comportement mécanique des sols pulvérulents sous fortes contraintes*, Thèse de Docteur-Ingénieur, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Vardoulakis I. (1977) *Scherfugenbildung in Sandkörpern als Verzweigungsproblem*, Veröffentlichungen des Instituts für Bodenmechanik und Felsmechanik, Heft 70, Karlsruhe.
- Vermeer P.A. (1977) *A double hardening model for sand*, Delft Progress Report, 2, pp. 303-320.
- Vermeer P.A. (1978) *A double hardening model for sand*, Géotechnique 28, N° 4, pp. 413-433.
- Vermeer P.A. (1979) *A modified initial strain method for plasticity problems*, Third Int. Conf. on Num. Methods in Geomech., Aachen, pp. 377-387.
- Vermeer P.A. (1980) *Formulation and analysis of sand deformation problems*, Report 195, Geotechnical Laboratory, University of Technology, Delft.
- Vermeer P.A. (1981) *Formulation and prediction of sand behaviour*, Proc. 10th Int. Conf. Soil Mech. Fdn Engng, Stockholm, Vol. 1, pp. 259-262.
- Vermeer P.A. (1982) *A five-constant model unifying well established concepts*, International workshop on constitutive behaviour of soils, Grenoble, Comptes rendus préliminaires, Vol. 2, pp. 134-166.
- Wilde P. (1977 a) *Simple model of granular material in finite element solutions*, Archiwum Hydrotechniki, tom XXIV, Zeszyt 2, pp. 175-187.
- Wilde P. (1977 b) *Two invariants-dependent models of granular media*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 29, N° 6, pp. 799-809.
- Yuritzinn T. (1981) *Comportement des roches après la rupture. Application à la stabilité des ouvrages souterrains par la méthode des éléments finis*, Thèse de 3ème Cycle, Université P. et M. Curie (Paris VI) et Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Zienkiewicz O.C. (1971) *The finite element method in engineering science*, Mc Graw-Hill, Londres.