HAL
open science

Comportement multiaxial du béton : aspects expérimentaux et modélisation

Jean-Michel Torrenti

To cite this version:

Jean-Michel Torrenti. Comportement multiaxial du béton : aspects expérimentaux et modélisation. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1987. Français. NNT : . tel-00529740

HAL Id: tel-00529740

https://pastel.hal.science/tel-00529740v1

Submitted on 26 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

76980

NS13802 (3)

THESE

présentée par

JEAN MICHEL TORRENTI

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

specialité: **MECANIQUE ET MATERIAUX**

COMPORTEMENT MULTIAXIAL DU BETON: ASPECTS EXPERIMENTAUX ET MODELISATION.

soutenue le 24 juin 1987

devant le jury composé de :

MM.	F.H. WITTMANN	Président
	F. DARVE	Rapporteurs
	B. HALPHEN	
	P. ACKER	Examinateurs
	J. MAZARS	
	J.C. ROBINET	
	M. GERODOLLE	Invités
	J.C. PARRIAUD	

ECOLE NATIONALE DES PONTS & CHAUSSEES
CENTRE PÉDAGOGIQUE DE DOCUMENTATION
E.N.P.C.
DOC05389

14

" If I knew what we'd find, I wouldn't bother to find it. People think research is like cutting wood and stacking it up. We worked and worked, didn't get anywhere. That's how you know you are doing research "

Harold E. EDGERTON

" Les grandes étapes des réalisations techniques sont marquées par les conquêtes de l'homme sur la matière. L'age de pierre, l'age du bronze, l'age de fer se sont succédés; peut être aurons nous l'age de l'aluminium, l'age de la cellulose; nous n'aurons pas l'age de l'avion. Les qualités de la matière sont les données essentielles du problème et les formes ne sont presque que les résultantes de ces données premières"

Albert CAQUOT

REMERCIEMENTS:

c'est avec grand plaisir que je sacrifie à la coutûme des remerciements. En effet, je sais ce que ce mémoire, bien que fruit de mon travail, doit aux personnes que j'ai cotoyé durant cette période. Ainsi, sans les encouragements du professeur ROBINET ma carrière se serait sans doute orientée très différemment. Pour cela et pour les contacts amicaux que nous avons établis je le remercie.

Sans la volonté de Messieurs PRUNIER tout d'abord, et GERODOLLE maintenant, la recherche n'existerait pas à l'ENTPE. Aujourd'hui, alors qu'elle est reconnue institutionnellement, je crois qu'il faut les en remercier.

Le professeur WITTMANN, dont les nombreux travaux sur le béton font référence et jalonnent ce mémoire, a accepté de présider mon jury. Qu'il soit remercié pour l'intérêt qu'il m'a accordé.

Les professeurs DARVE et HALPHEN ont acceptés la tâche de rapporteur et ce malgré leur importante charge de travail. Qu'ils sachent combien j'ai été sensible à ce geste.

Parmi les noms d'auteurs cités à de nombreuses reprises, vous noterez ceux de messieurs ACKER et MAZARS qui pilotent le projet "Comportement multiaxial du béton " au sein du Greco Géo Matériaux. Les nombreux échanges que nous avons eus ont été très riches et je crois toujours amicaux. Je leur dis encore une fois merci.

Monsieur PARRIAUD a accepté, en dépit de lourdes charges, de participer au jury. Je lui exprime toute ma gratitude pour l'intérêt qu'il m'a manifesté en cette occasion.

Je n'oublierai pas bien sur tous ceux qui ont oeuvré discrètement mais efficacement tout au long de ce travail: le service intérieur, l'imprimerie, le service documentation et le service audiovisuel

de l'ENTPE, mme CULTRU qui m'a aidé dans la frappe du mémoire, l'ensemble du laboratoire Géo Matériaux, notamment messieurs DOANH, J.GUARRACINO et FAU et enfin mon nouveau service au LCPC: la section des bétons, bétons armés et précontraints et plus généralement la division matériaux et structures pour ouvrages d'art dirigée par Y.MALIER, dont fait partie monsieur SANTINI auteur d'une grande partie des dessins du mémoire.

Les lecteurs qui ont le courage d'aller jusqu'au bout des remerciements sont habitués à y lire ceux à l'usage de la famille. Les auteurs ne remercient pas publiquement femme et enfants pour la forme. Sans leur soutien cette thèse n'aurait pu se dérouler dans de bonnes conditions. Ma femme, Françoise, et mes enfants ont accepté mes absences répétées et mon humeur souvent... inégale. Ce travail est autant le produit de leurs efforts que des miens.

RESUME

Resumé:

Modéliser le comportement multiaxial du béton nécessite avant tout de connaître celui-ci. Ceci constitue l'essentiel du chapitre I où sont mis en évidence les phénomènes que le modèle devra reproduire: orthotropie, non linéarité, irréversibilité... Nous montrons aussi dans ce chapitre que le radoucissement, tel qu'il apparaît expérimentalement est un phénomène structural. Nous ne chercherons donc pas à le modéliser. Enfin, par le biais du comportement à long terme du béton, l'accent est mis sur l'influence de la teneur en eau dont il apparaît qu'elle doit également être notable à court terme.

Ensuite, en partant du principe du déterminisme appliqué au niveau incrémental nous développons notre modèle. Suivant les constatations précédentes l'hypothèse d'orthotropie est supposée, les axes d'orthotropie étant confondus avec les axes principaux du tenseur de contrainte.(nous faisons également l'hypothèse des petites déformations). Les travaux de WANG et BOEHLER sur les fonctions tensorielles orthotropes permettent alors, moyennant certaines simplifications, d'aboutir à la formulation suivante:

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{\hat{\sigma}} + \underset{\sim}{B}\,\frac{\underset{\sim}{\hat{\sigma}}^2}{\|\underset{\sim}{\hat{\sigma}}\|}$$

Dans cette relation les tenseurs A et B ne dépendent pas de $\hat{\sigma}$. Leurs déterminations nécessitent par contre de connaître le comportement du béton sur les "chemins triuaxiaux généralisés" (chemins colinéaires à un des axes d'orthotropie). Ceci implique d'avoir à disposition un outil expérimental.

C'est pourquoi nous avons construit, en parallèle à la modélisation, une presse multiaxiale (actuellement biaxiale). Une étude bibliographique préalable nous a permis de passer en revue tous les problèmes pouvant être rencontrés dans ce type d'expérimentation: tout d'abord au niveau des éprouvettes: taille, diamètre maximum des granulats entrant dans la composition du béton, conservation... ensuite de la presse: application mécanique des forces ou par l'intermédiaire d'un fluide, cadres de poussée indépendants ou non... et enfin des conditions aux limites: rigidités des appuis, problème du frettage, appuis à peignes, efficacité... Nos choix ont été les suivants: éprouvette cubique d'arête 10 cm, diamètre maximum des granulats =10 mm, conservation sous un revêtement étanche

jusqu'au moment de l'essai, système mécanique d'application des forces utilisant des appuis à peignes. Pour ces derniers des études complémentaires en photoélasticimétrie et par la méthode des éléments finis ont permis d'apprécier leurs effets bénéfiques.

Pendant la phase de mise au point ont été réalisés des essais uniaxiaux qui ont eu pour but de mettre en évidence les variations des caractéristiques mécaniques du béton (résistance, module d'élasticité) avec sa teneur en eau. Nos essais montrent que ce paramètre a un effet indéniable sur le comportement du matériau mais nous n'avons pu séparer de façon sûre les effets locaux des effets structuraux qui viennent perturber l'interprétation des résultats.

Nos essais, uniaxiaux ou biaxiaux, ont mis en évidence le caractère non linéaire du comportement du béton particulièrement selon les directions non chargées (la fissuration se développe toujours perpendiculairement à ces directions et le rôle des extensions apparaît capital). Nous avons essayé d'analyser les non-linéarités à l'aide de modèles physiques simples. Si dans le cas de la traction l'accord est bon entre modèles et réalité cela n'est plus aussi vrai pour la compression, sans doute parce que les phénomènes mis en jeu sont plus complexes.

En comparant , dans le cas du chargement biaxial, nos résultats avec ceux de différents auteurs nous constatons une concordance des résultats. Un essai, réalisé avec une contrainte intermédiaire élevée, laisse entrevoir l'influence du trajet de chargement sur le comportement du matériau.

Dans le dernier chapitre nous présentons la formulation analytique du comportement du béton sur les chemins triaxiaux généralisés. Celle-ci utilise le concept de déformation uniaxiale équivalente qui présente l'avantage de limiter le nombre de paramètres nécéssaires. Grâce au programme de simulation numérique que nous avons réalisé, nous avons pu ensuite simuler nos essais ainsi que ceux de nombreux auteurs , les chargements étant des compressions uni-, bi- et triaxiales. Compte tenu que la simulation ne demande que trois paramètres (module d'élasticité, coefficient de Poisson et résistance en compression simple) et vu la dispersion naturelle des résultats expérimentaux, l'accord est correct entre ceux-ci et les résultats numériques.

The multiaxial behaviour of concrete: experimental considerations and modelling.

Abstract:

We have modelled the behaviour of concrete under multiaxial loads using a nonlinear incremental law. This law, based on the experimental results we present in the first section and on the principle of determinism, is orthotropic and may be stated in the form:

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{\hat{\sigma}} + \underset{\sim}{B}\,\frac{\hat{\sigma}^2}{\|\underset{\sim}{\hat{\sigma}}\|}$$

The model has been checked against a large number of multiaxial tests, which have borne it out in the domain of compressions.

Concurrently, we have built a multiaxial press that can be used to determine A and B, and also to learn more about the multiaxial behaviour of concrete. Its main originality lies in its brush bearings platens, which minimize lateral confinement. With bearings of this type, the cracking observed with uni- and biaxial loadings is perpendicular to the unloaded directions, demonstrating the role of extensions. Finally, the influence of water content on concrete behaviour has been confirmed.

SOMMAIRE: page

- Conventions et notations. 1

- Introduction 5

- Chapître I 9

Etude bibliographique du comportement mécanique du béton.

1.1 Comportement mécanique à court terme. 10
1.2 Comportement à long terme du béton. 29
1.3 Influence de la teneur en eau sur le comportement à court terme du béton. 36
1.4 Influence de la température sur le comportement du béton. 46

- Chapitre II 49

Formulation des modèles incrémentaux.

2.1 Grandeurs objectives. 50
2.2 Les principes généraux. 52
2.3 Les lois incrémentales. 55
2.4 Etude bibliographique des modèles incrémentaux pour le béton. 58
2.5 Le modèle ENTPE. 79

- Chapitre III 87

Etude expérimentale

3.1 Présentation du dispositif expérimental. 88
3.2 Les essais uniaxiaux. 141
3.3 Relation entre fissuration et non linéarité. 148

3.4 Influence de la teneur en eau. 165
3.5 Les essais biaxiaux. 180

- Chapitre IV. 199

Simulation expérimentale.

4.1 Formulation analytique. 202
4.2 Prise en compte par la simulation de différents facteurs ayant une influence sur le comportement du béton. 217
4.3 Simulation d'essais. 221

- Conclusions et perspectives. 245

- Bibliographie. 251

- Annexes. 261

Annexe 1: problème de l'excentrement de la charge. 271

Annexe 2: simulation par éléments finis de l'appui; sorties graphiques. 277

Annexe 3: détermination numérique des contraintes à la rupture. 291

Annexe 4: listing du programme de simulation. 303

Annexe 5: essais biaxiaux. 311

CONVENTIONS ET NOTATIONS

a) Conventions

Bien que l'usage en soit contraire en Mécanique des Milieux Continus (M.M.C.), nous choisirons de prendre des valeurs positives pour les compressions, car c'est principalement ce cas de chargement que nous avons utilisé. En conséquence, pour les déformations, les dilatations seront prises négatives.

Dans tout ce travail nous supposerons vérifiée l'hypothèse des petites déformations (h.p.d.), ce qui est raisonnable pour le béton.

Nous appliquerons enfin la convention de sommation des indices répétés.

b) notations:

symbole de Kronecker: δ_{ij}

$\delta_{ij} = 1$ si i=j, $\delta_{ij} = 0$ si i=j

tenseur de contraintes: $\underset{\sim}{\sigma} = (\sigma_{ij})$

contraintes principales: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

invariants: $I_{1\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

$I_{2\sigma} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$

$I_{3\sigma} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$

déviateur de contraintes:

$$\underset{\sim}{s} = (s_{ij}) = (\sigma_{ij}) - \frac{1}{3} I_{1\sigma} (\delta_{ij})$$

invariants:

$$J_{1\sigma} = 0$$

$$J_{2\sigma} = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

tenseur de déformation: $\underset{\sim}{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})$

déformations principales: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

déviateur de déformations:

$$\underset{\sim}{e} = (e_{ij}) = (\varepsilon_{ij}) - \frac{1}{3} I_{1\varepsilon} (\delta_{ij})$$

invariants: même définition que pour les contraintes et notés $I_{i\varepsilon}$ et $J_{i\varepsilon}$.

σ_c : contrainte maximale atteinte lors d'un essai de compression simple.

ε_c: déformation correspondant à σ_c et mesurée dans la direction du chargement.

σ_t : valeur absolue de la contrainte maximale atteinte lors d'un essai de traction simple.

σ_{bc}: contrainte maximale atteinte lors d'un essai de compression biaxiale ($\sigma_k = 0$) avec $\sigma_i = \sigma_j$.

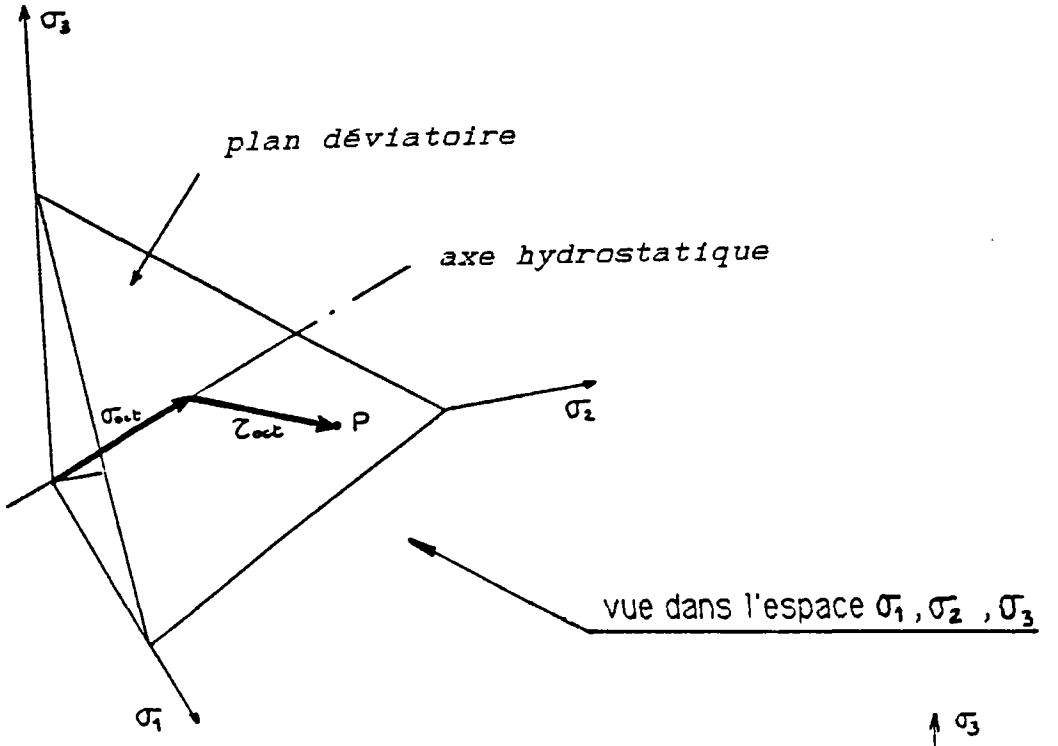
ε^{el}: partie réversible des déformations.

ε^{p}: partie irréversible des déformations.

Contraintes octahédrales:

$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} I_{1\sigma}$ contrainte normale octahédrale.

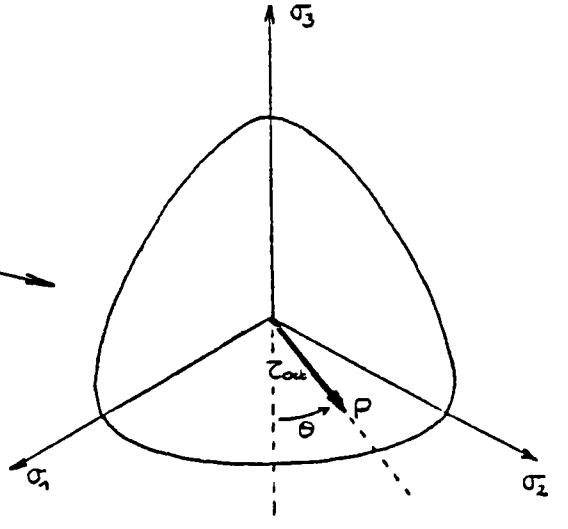
$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_{2\sigma}}$ contrainte tangentielle octahédrale.



vue dans l'espace σ_1, σ_2, σ_3

vue dans le plan déviatoire

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_{3\sigma}}{(J_{2\sigma})^{3/2}}$$



Déformations octahédrales:
définitions analogues à celles des contraintes avec:

$\varepsilon_{oct} = \frac{1}{3} I_{1\varepsilon}$ déformation octahédrale normale.

$\frac{1}{2} \gamma_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_{2\varepsilon}}$ demi distorsion octahédrale.

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Le béton hydraulique est un matériau connu depuis fort longtemps (les Romains inventèrent les premiers mortiers en mélangeant de la chaux avec de l'eau et des pouzzolanes il y a deux mille ans) et très utilisé (comme en France où il demeure, de très loin, le premier produit manufacturé).

Qu'en 1987 le sujet d'une thèse soit le comportement du béton peut donc étonner. Pourtant, sans parler des ouvrages exceptionnels réalisés pour le génie nucléaire ou l'off shore, des désordres importants (fissurations préjudiciables) sont constatés sur les ouvrages d'art courants. Ces désordres ont trois causes principales:

dans l'execution de l'ouvrage
dans son exploitation
dans sa conception.

C'est dans la phase de conception que l'aspect comportement mécanique du béton intervient le plus. Or, dans les ouvrages d'art le béton est toujours sollicité de manière pluriaxiale, que ce soit dans le cas du béton armé où les armatures gênent les déformations et créent ainsi des contraintes ou dans le cas du béton précontraint pour lequel la multiaxialité des charges résulte précisément du principe constructif. La règlementation française , quant à elle , ne tient pas explicitement compte de cet aspect. Il apparaît donc nécessaire, du point de vue d'un rapport sécurité / coût d'ouvrage optimal, de mieux connaître le comportement multiaxial du béton et de savoir le modéliser.

Dans ce but, à l'ENTPE, ont été développés en parallèle un modèle (incrémental non linéaire) et un outil expérimental (presse multiaxiale). C'est la démarche suivie pour leur élaboration que nous allons présenter.

Construire un modèle nécessite, c'est l'évidence, l'observation préalable des phénomènes physiques qu'il est appelé à simuler. La première partie de notre travail présente donc ceux-ci au travers des résultats disponibles dans la bibliographie.

Puis, la construction du modèle implique certains principes et suppose des hypothèses. Ceci fait l'objet du second chapitre, où figure également une étude bibliographique des autres modèles incrémentaux connus.

Enfin, le modèle étant élaboré, apparaît un impératif: mieux connaître le comportement du béton sous sollicitations multiaxiales et donc développer un outil expérimental permettant d'explorer ce domaine. C'est pourquoi au chapitre III nous présentons toute la réflexion suscitée par la construction de notre presse multiaxiale (notamment en vue d'obtenir des essais véritablement représentatifs du matériau et non pas de la structure en béton que constitue l'éprouvette). Sont ensuite présentés les premiers résultats d'essais réalisés à l'aide de cet appareil en chargement uniaxial et biaxial. Dans le cadre des essais uniaxiaux l'influence de la teneur en eau du béton a été spécialement étudiée car l'analyse bibliographique a montré son importance. De même, le béton présentant un comportement non linéaire, une analyse des causes de cette non linéarité a été tentée à partir de modèles simples déja existants.

Enfin dans le dernier chapitre nous avons testé notre modèle de comportement en le comparant aux résultats expérimentaux obtenus dans les cas de chargements les plus variés de son domaine d'application.

CHAPITRE I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

DU COMPORTEMENT MECANIQUE DU BETON

CHAPITRE I: ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DU BETON.

Remarques liminaires :

1°) Nous laisserons provisoirement sous silence les problèmes expérimentaux rencontrés. Nous y reviendrons en effet au chapitre III.

2°) Pour étudier le comportement mécanique du béton nous allons séparer en deux classes les types de sollicitations auxquelles on peut le soumettre. Ces deux classes concernent le comportement à court terme (sollicitations quasi instantanées mais sans effet dynamique) et le comportement à long terme. Une réelle séparation n'existe pas, le temps de chargement influant toujours sur le comportement même à court terme. En toute rigueur il faudrait déduire des résultats expérimentaux la part due au comportement "visqueux" du béton, mais dans l'état actuel de nos connaissances cette correction serait faible par rapport aux autres sources d'erreurs.

3°) Nous nous limiterons volontairement au cas où les phénomènes cycliques et les sollicitations impliquant une rotation des axes principaux de contraintes n'entrent pas en jeu. Le lecteur intéressé par ces points particuliers consultera les études bibliographiques de AOYAMA [13] et de l'A.C.I. [1].

I-1 - COMPORTEMENT MECANIQUE A COURT TERME :

I-1.a - Compression simple :

C'est le cas qui a été le plus étudié car le plus simple à mettre en oeuvre.

Afin de bien comprendre les phénomènes mis en jeu dans ce matériau hétérogène qu'est le béton nous allons commencer par décrire le comportement d'un modèle idealisé constitué d'une inclusion circulaire entourée de pate de ciment, les deux éléments ayant des rigidités différentes. Cette structure reproduit schématiquement celle que l'on rencontre si l'on fait une coupe dans une éprouvette de béton : (elle n'a donc qu'un caractere bidimensionnel)

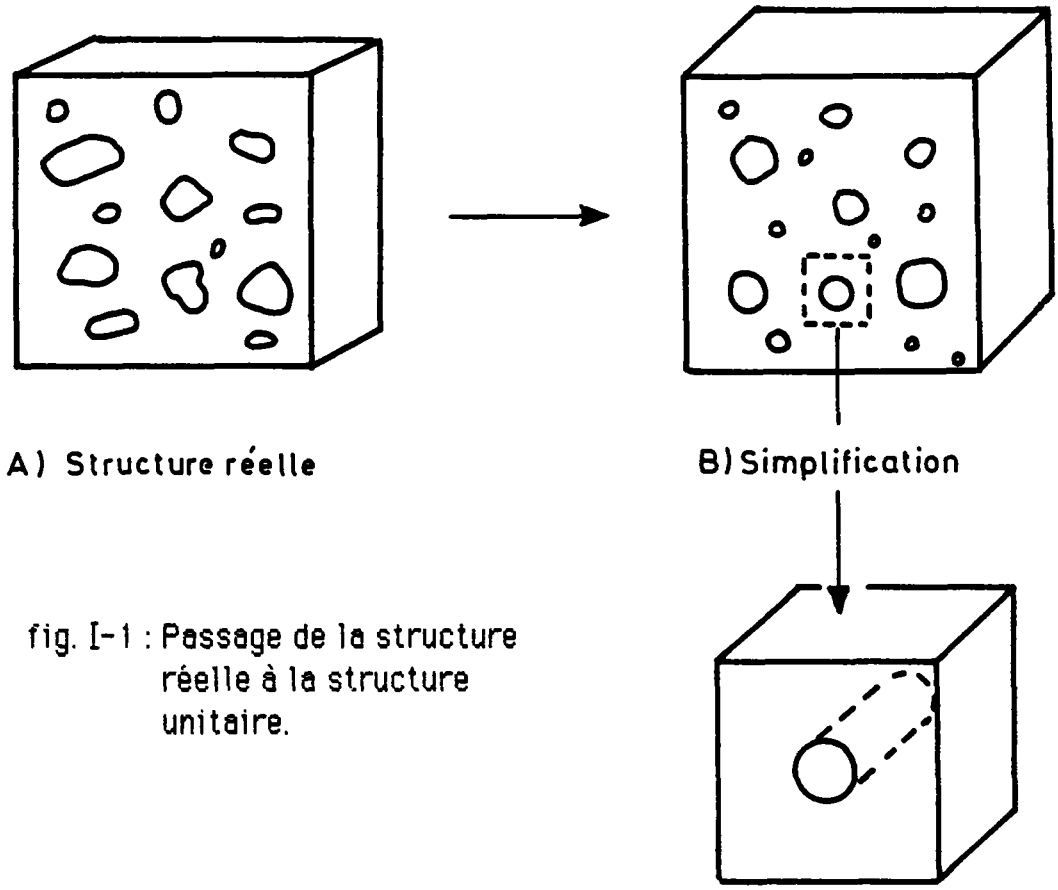


fig. I-1 : Passage de la structure réelle à la structure unitaire.

De nombreux auteurs ont utilisé ce modèle ou un dérivé contenant plusieurs inclusions. Citons BUYUKOZTURK [3] et SHAH [4]. A l'E.N.T.P.E. a également été entreprise une étude à caractère pédagogique sur la fissuration du béton [5]. Les principaux résultats découlant de ces études sont les suivants :

- à cause des différences de caractéristiques mécaniques entre les constituants, les champs de <u>contrainte et déformation</u> sont très <u>hétérogènes</u> (cf fig. I-2 a), le niveau d'hétérogénéité dépendant notamment de la taille du granulat. Ce fait se retrouve bien sûr au niveau du béton lui-même (cf l' étude de DANTU [2] et fig. I-3).

- l'intéraction des constituants provoque une micro-fissuration et par là un <u>comportement non linéaire</u>. (mais la non-linéarité n'est pas expliquée totalement par la micro-fissuration).

- la micro-fissuration s'amorce à <u>l'interface mortier granulat</u> qui constitue le <u>point faible</u> (voir fig. I-2 b). Elle se propage ensuite de facon préférentielle parallèlement à la direction du chargement c'est-à-dire en fait <u>suivant la direction d'extension</u>

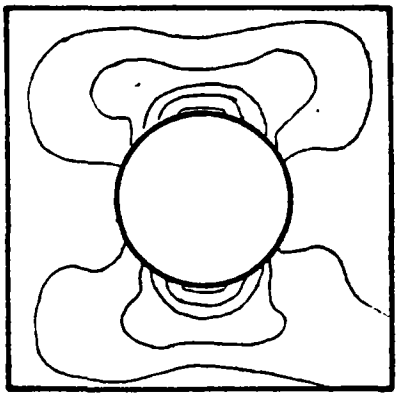
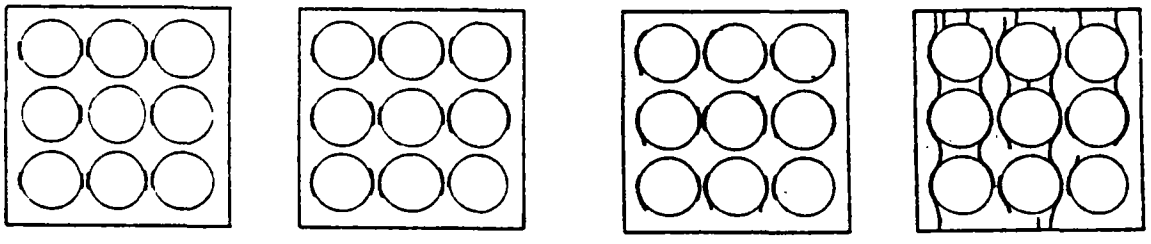


fig I-2 a : Etude photoélasticimétrique de la structure unitaire; observation des isochromatiques [5]



$\sigma = 0{,}45\,\sigma_c$ $\quad 0{,}65\,\sigma_c$ $\quad 0{,}82\,\sigma_c$ $\quad \sigma_c$

fig I-2 b : évolution de la fissuration dans le modèle de BUYUKOZTURCK [3]

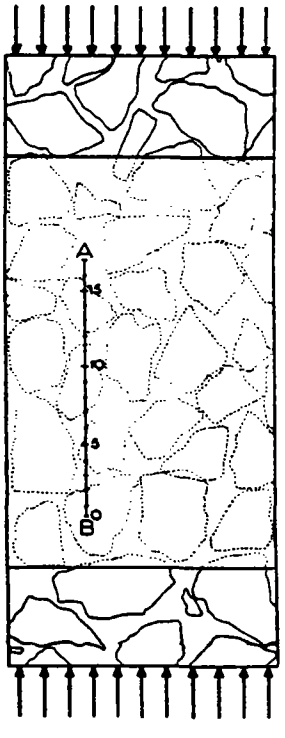


fig. I.3a : ligne AB sur laquelle sont faites les mesures.

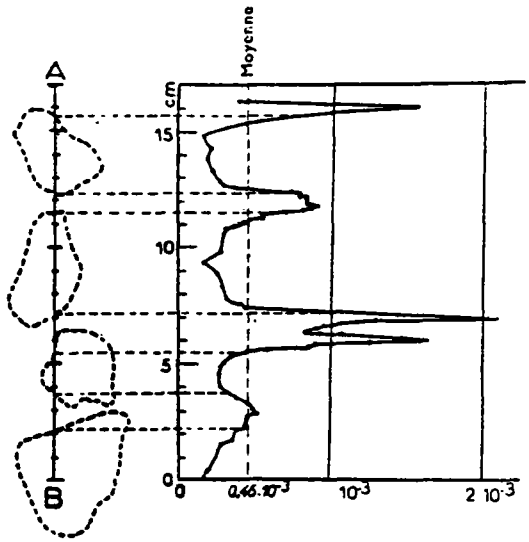


fig. I.3b :déformations le long de AB

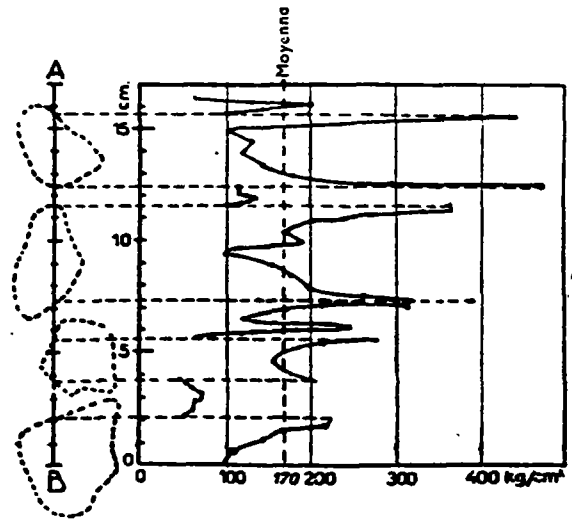


fig. I.3c:contraintes déduites du I-3 b

fig. I-3 : Mesures photoélasticimétriques (DANTU [2])

Etudions maintenant au niveau macroscopique le comportement du béton en compression simple. De la multitude d'études efffectuées sur ce sujet nous retiendrons les résultats suivants (cf les excellentes synthèses de MAZARS [6, 7] et WASTIELS [8] sur ce sujet) :

on peut distinguer plusieurs phases dans le comportement (cf fig I-4).

phase 0 : jusqu'à 10 % de σ_c
phase de serrage = raidissement dû aux fermetures des microfissures préexistantes.
(cette phase n'existe pas toujours)

phase 1 : jusqu'à 30 à 50 % de σ_c
le comportement est quasi linéaire.
des microfissures apparaissent aux interfaces mortier granulat mais le frottement permet de supporter la charge.

phase 2 : jusqu'à 70 à 90 % de σ_c
la non-linéarité et l'irréversibilité apparaissent
il y a propagation des microfissures aux interfaces.

phase 3 : jusqu'à σ_c
forte non linéarité
les fissures se propagent dans la matrice parallèlement à la direction de chargement. Le coefficient de Poisson apparent devient très grand et il y a même augmentation du volume apparent. On a également une forte variation anisotrope des caractéristiques mécaniques.

phase 4 : Au delà de σ_c
Les auteurs relatent un comportement radoucissant avec création de macrofissures. Nous reviendrons sur cette phase plus loin.

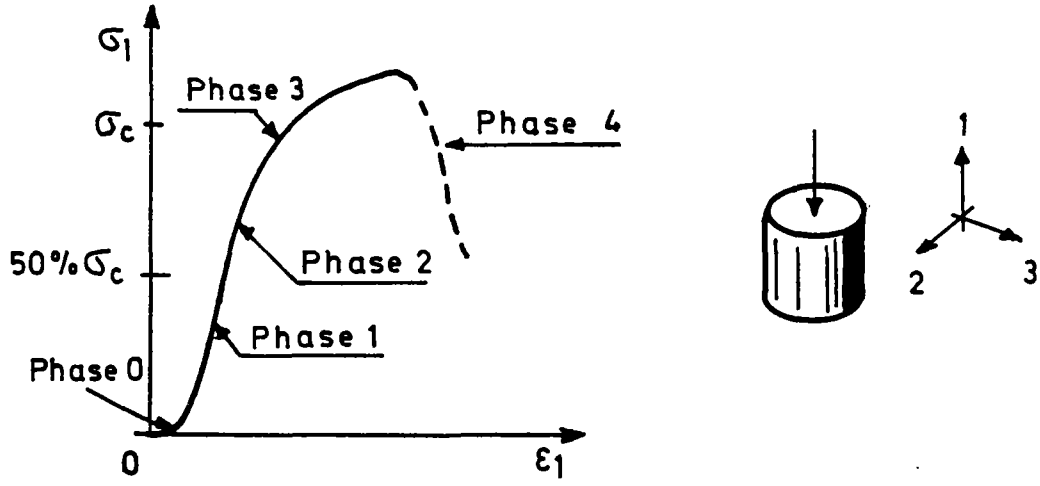


fig. I-4 : allure générale de la courbe contrainte déformation en compression simple.

I-1. b Compression biaxiale :

En règle générale pour un tel essai on constate :

- une rupture parallèle au plan de chargement (c'est-à-dire suivant la direction d'extension maximale).

- une courbe contrainte déformation analogue à celle obtenue en monoaxial avec des valeurs maximales de contraintes et déformations plus importantes.

- une anisotropie du matériau : ν_{12} reste constant alors que ν_{13} et ν_{23} augmentent, ce qui correspond bien à la fissuration constatée.
(rappellons que pour un matériau élastique anisotrope la loi de comportement s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \quad)$$

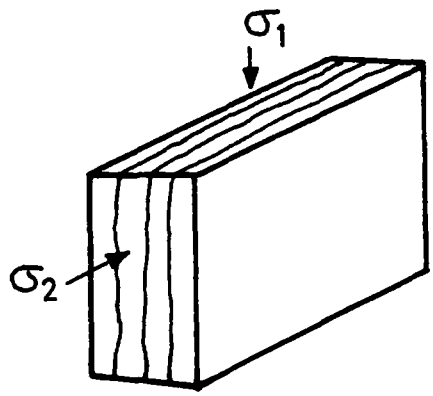


Fig. I.5: schéma de fissuration lors d'un essai biaxial.

I-1.c <u>Compression triaxiale</u> :

Nous distinguerons ici deux cas : celui où l'on est proche de l'isotropie et celui où l'on s'éloigne de celle-ci.

1°) compression isotrope :

Le mode de rupture dans ce cas correspond à un effondrement de la structure microporeuse du béton. Le comportement obtenu est alors le suivant : (cf [9] et [19])

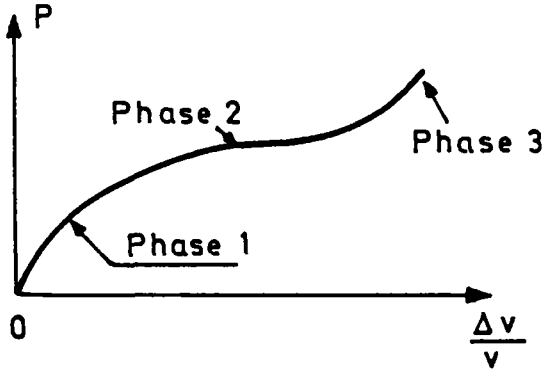


Fig. I-6 : relation pression hydrostatique - variation de volume dans le cas d'une compression hydrostatique.

Phase 1 : comportement quasi élastique.

Phase 2 : effondrement progressif de la structure.

Phase 3 : raidissement dû au fait que les vides ont disparu.
Une décharge à ce niveau là nous rendrait un matériau sous forme de poudre.

2°) compression triaxiale déviatoire.

La rupture, dans ce cas, apparaît dans un plan perpendiculaire à la plus faible contrainte (cas $\sigma_1 \ll \sigma_2 < \sigma_3$) ou parallèle à la plus grande (cas $\sigma_1 < \sigma_2 \ll \sigma_3$). Remarquons que si l'on raisonne en terme déviatoire, dans les deux cas les plans de rupture sont perpendiculaires aux directions où la contrainte déviatoire correspond à une traction. (En fait le plan de rupture est parallèle à la direction d'extension déviatoire maximale).

Etudions maintenant l'exemple du triaxial de révolution :
(c'est le cas où $\sigma_2 = \sigma_3$)

Nous obtenons le comportement suivant (fig. I-7)

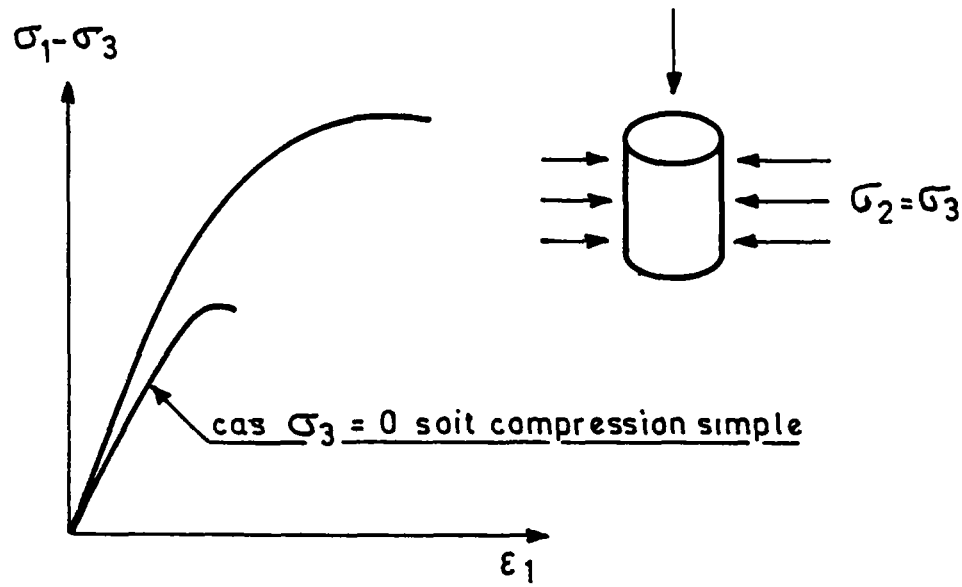


Fig. I.7 : relation contrainte deformation dans le cas du triaxial de révolution

Que constatons-nous sur cette courbe :

que le comportement tout en étant plus "ductile" est du meme type qu'en compression simple, avec une résistance plus élevée. Ceci est dû au fait que le confinement provoque un frottement des lèvres de fissure ,ainsi qu'une propagation plus stable de celles ci. Macroscopiquement le comportement peut etre apparenté à de la plasticité. Il faut toutefois garder à l'esprit le fait que, physiquement, au niveau local, les mécanismes mis en jeu correspondent à de la microfissuration sous confinement. Sachant celà, nous emploierons librement les termes de plasticité, déformations plastiques , etc ...

Les constations expérimentales faites au cours d'un essai triaxial indiquent que le chargement rend le matériau orthotrope et montre l'influence du déviateur de contraintes (voir MAZARS [7], POSTACIOGLU [10]) celui-ci intervient au niveau du mode de rupture bien sûr mais aussi au niveau des déformations subies par le matériau (ce qui est logique puisqu'un mécanisme plastique existe).

L'influence de la pression moyenne est également évidente, vu là aussi le mécanisme mis en jeu pour les déformations plastiques. Au niveau expérimental par exemple on constate que la pente à l'origine de la courbe ($\sigma_1-\sigma_3$, $\varepsilon_1-\varepsilon_3$) dépend de la pression moyenne.

Moins bien cernée est la question de l'effet de la contrainte

intermédiaire. Certains auteurs concluent que celle-ci a une influence [12] , d'autres qu'elle n'en a aucune [11]. On peut toutefois penser que la contrainte intermédiaire joue un rôle non totalement négligeable. Prenons l'exemple suivant :

Si nous avons $\sigma_1 \gg \sigma_2 \sim \sigma_3$ (cas n°1).

Le béton etant un materiau heterogene, la rupture surviendra dans le plan le plus faible incluant la direction 1.

Alors que si nous avons $\sigma_1 \sim \sigma_2 \gg \sigma_3$ (cas n° 2) les plans de rupture sont orientés perpendiculairement à la direction 3. Le cas n° 2 est donc plus restrictif que le cas n°1. Statistiquement la rupture sera donc amorçée plus rapidement dans le premier cas.

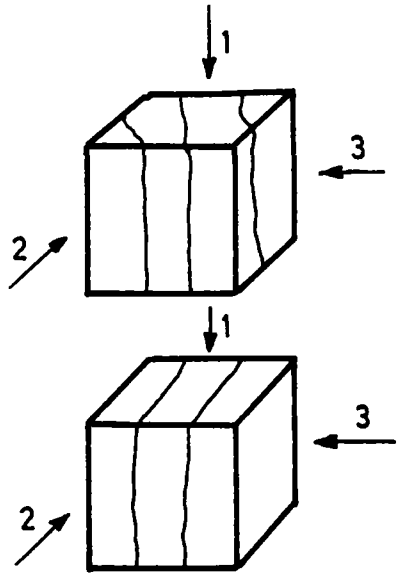


Fig. I.8: Orientation des plans de rupture sous l'effet de la contrainte intermédiaire.

I-1.d Traction simple :

L'essai de traction simple reste un essai moins courant que celui de compression simple parce qu'il est plus difficile à réaliser mais aussi du fait de la règlementation béton armé qui ne prévoyait pas de faire travailler le béton sous une telle sollicitation. Le règlement français du béton précontraint (BPEL) autorise l'utilisation du béton en traction par exemple en phase constructive. De nombreuses études justificatives ont été menées sur ce sujet. Voici les principaux points que l'on peut en tirer :

- la résistance en traction simple du béton σ_t est beaucoup plus faible en valeur absolue que celle de la compression simple:

$$\sigma_t \sim \sigma_c / 10$$

WASTIELS [8] cite une relation empirique entre ces résistances :

$$\sigma_t = 0{,}3 * \sigma_c^{2/3} \text{ N/mm}^2$$

La règlementation française propose quant à elle :

$$\sigma_t = 0{,}6 + 0{,}06\, \sigma_c \text{ MPa}$$

- la relation contrainte -déformation a l'allure suivante :

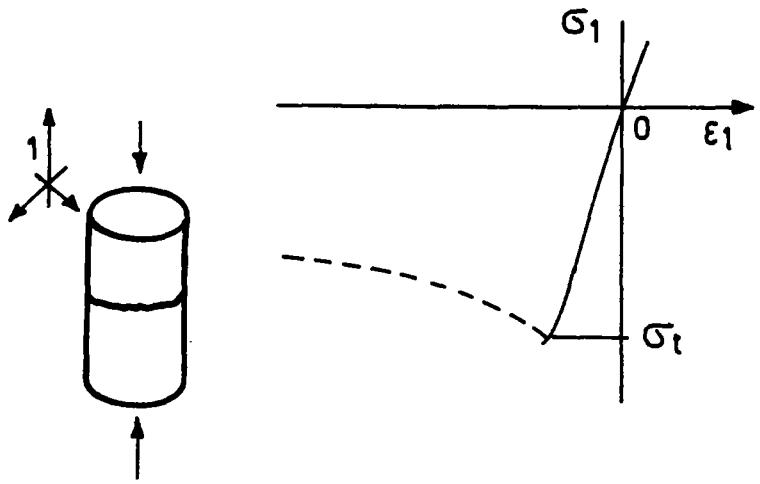


Fig. I.9: Relation contrainte déformation en traction uniaxiale.

Le comportement est quasi-linéaire jusqu'à la rupture (ce qui correspond à un comportement fragile). La pente à l'origine (module d'Young) est la même en traction et en compression (idem pour les coefficients de Poisson).

- la microfissuration se développe perpendiculairement au chargement et aboutit a une surface de rupture unique.

- lorsqu'on pilote l'essai en déformation on peut obtenir une courbe radoucissante dont l'interprétation n'est pas évidente ; nous y reviendrons.

I-1.e Tractions pluriaxiales :

Parce que les cas où le béton est sollicité en traction pluriaxiale sont très rares, les résultats disponibles sur ce sujet le sont aussi. Citons toutefois l'étude de STEGBAUER et LINSE [14]. Globalement, le

comportement est analogue à celui de la traction simple. Ceci s'explique par le fait qu'aucun mécanisme plastique ne peut être mis en jeu. On a donc:

- un plan de rupture perpendiculaire à la direction de traction maximale.

- une rupture fragile.

- une résistance à la rupture quasiment constante et égale à celle de la traction simple.

I-1.f Combinaisons traction-compression :

Là aussi les résultats sont rares. L'étude citée précédemment [14] aborde également ce cas. Les auteurs ont constaté que lorsque la contrainte de traction dépasse une faible fraction (7,5 %) de la contrainte de compression la rupture est du type traction simple, c'est-à-dire fragile avec plan de rupture orthogonal à la traction maximale. Et, bien entendu, dans tous les cas les contraintes à la rupture sont inférieures aux résistances en compression et traction simple.

Ceci provient du fait que les fissures qui sont dans la direction de compression sont également orthogonales à la direction de traction. Leur propagation est donc facilitée, d'où une résistance plus faible.

I-1.g Problème de l'inversion du sens de chargement :

Nous nous intéressons ici simplement à la pente de la courbe contrainte-déformation au point d'inversion. Prenons le cas de la compression triaxiale de révolution (fig.I.10): si la non-linéarité du comportement en charge du béton est due à un "mécanisme plastique", la pente à la décharge est égale à la pente à l'origine de la courbe de chargement (c'est la courbe 2 sur la figure I.10). Si l'on admet au contraire que la non linéarité est due uniquement à la fissuration, le comportement en décharge sera réversible (fermeture des fissures) : c'est la courbe 1. Or nous avons vu que pour le béton les deux phénomènes coexistent. Nous aurons donc une pente réelle comprise entre celles des droites 1 et 2. Notons que pour les forts confinements l'effet de plasticité sera plus

marqué, du fait de frottements plus importants. La pente en décharge dépendra donc de la pression moyenne.

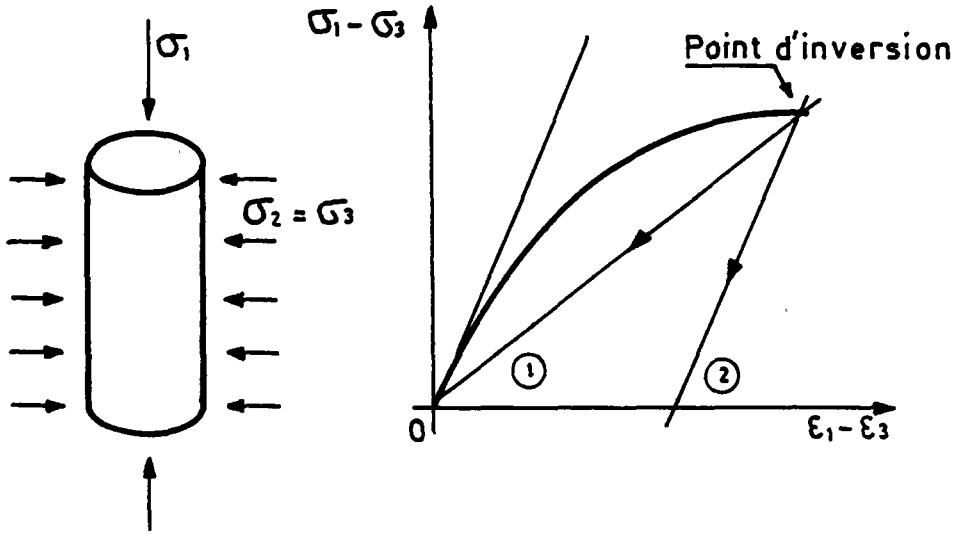
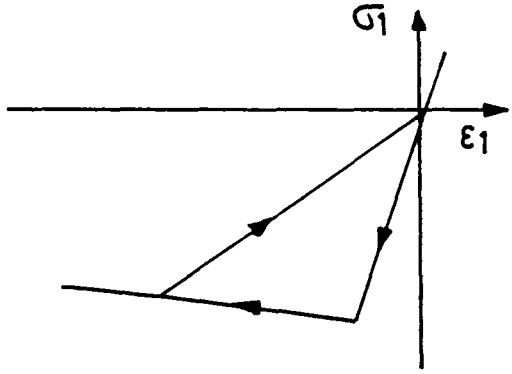


Fig. I.10 : Inversion du sens de chargement dans un essai de compression triaxiale.

Des travaux recents, [113], de la section des bétons, bétons armé et précontraint (BBAP) du LCPC ont mis en évidence un autre phénomène lors de l'inversion du sens de sollicitation. Comme nous le verrons plus loin dans ce chapitre, dans une éprouvette de béton existent des contraintes initiales hors charge extérieure. Lorsque la fissuration se développe ces contraintes sont libérées, le matériau se déforme au niveau local, et ce de façon non forcement symétrique. Lorsque l'on décharge, à cause de cette dissymétrie la fermeture des fissures ne sera pas toujours possible immédiatement. Ceci expliquerait en grande partie la très forte pente initiale à la décharge (fig. I.10). Dans le cas de la traction simple ou le frottement entre lèvres de fissures n'existe pas il n'y a pas d'effet plastique. La courbe en décharge correspondra donc à la fermeture des fissures (voir fig. I.11), toujours à l'effet des contraintes initiales près.



ÉCOLE NATIONALE DES PONTS & CHAUSSÉES
CENTRE PÉDAGOGIQUE DE DOCUMENTATION

Fig I.11 : Inversion du sens de chargement dans un essai de traction.

I-1.h Problème du radoucissement :

Quand on effectue un essai de compression ou traction simple à vitesse de déplacement imposé, la courbe effort - déplacement passe par un maximum (pic) puis est décroissante. Certains auteurs indiquent alors que le comportement post pic de contrainte du béton est radoucissant (cf courbe type en figure I.12).

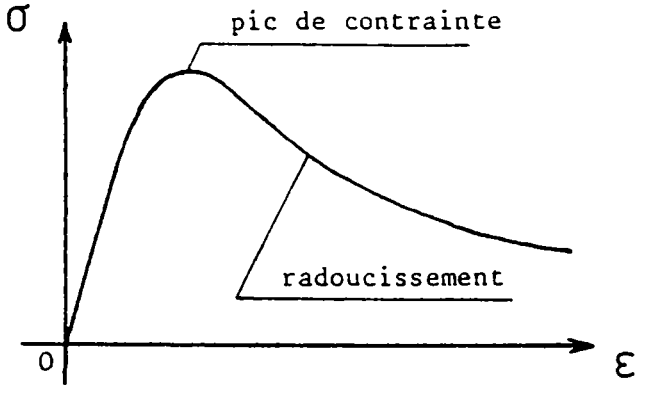


Fig. I.12 : courbe type contrainte déformation avec branche radoucissante.

Or nous allons voir sur des expériences très simples que cette interprétation est sujette à caution.

1er exemple : essais de compression simples sur des éprouvettes d'élancement variable :

Afin de tester l'influence de l'élancement sur les résultats obtenus, VAN MIER [15] a effectué des essais de compression simple sur des éprouvettes prismatiques de section 100 cm2 et de hauteurs respectives 5, 10 et 20 cm (soit un élancement variant de 1/2 à 2).

Si on analyse les résultats obtenus en contraintes - déformations on note une grande différence dans les comportements post pic (figure I.13).

comme les déformations reproduites sur la figure I-13 sont calculées à partir des déplacements des plateaux d'appui Van Mier a également pu tracer les courbes contraintes-déplacements. Or, ainsi qu'on peut le voir sur la figure I.14, ces courbes sont pratiquement confondues !

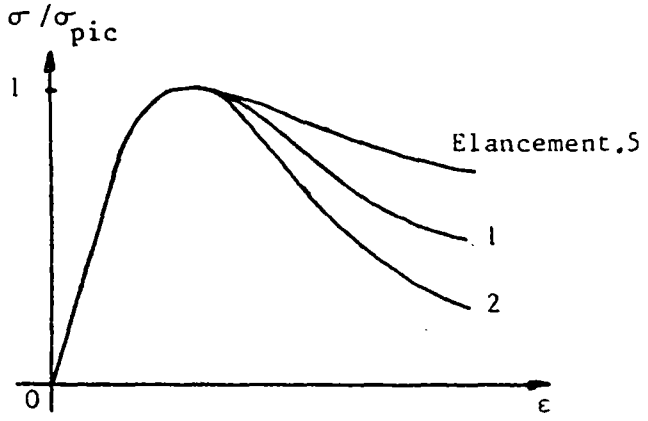


Fig. I.13 : Influence de l'élancement sur les courbes contraintes déformations en compression simple.

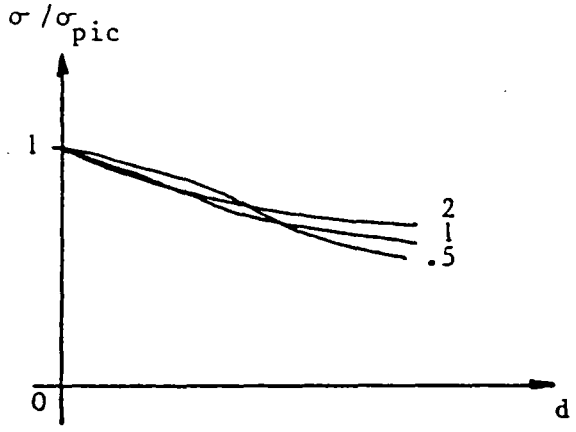
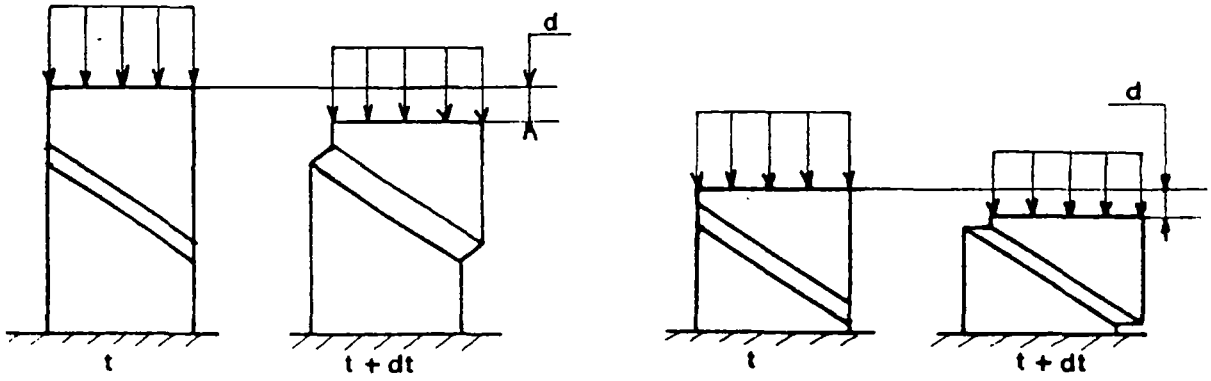


Fig. I.14 : Parties post pic des courbes de la figure 2 exprimées en contrainte déplacement.

Ainsi que l'a montré HABIB [16] ceci peut s'expliquer en tenant compte de l'apparition de plans de rupture résultant de la localisation des déformations en bandes de cisaillement (fig. I.15). Grâce à cette interprétation nous comprenons pourquoi le déplacement d est le même pour les deux éprouvettes. Lorsqu'ensuite on calcule les déformations post pic, on a :

$$\varepsilon(a) = d/(2*l) \qquad \varepsilon(b) = d/l$$

On retrouve ainsi les différences observées à la figure I-11.



a) Elancement 2 b) Elancement 1

Fig. I.15: Interprétation des essais de compression simple grâce aux plans de rupture.

Cette explication n'est toutefois pas completement satisfaisante pour le béton car on n'observe pas vraiment ce type de localisation. Nous proposons donc une interprétation plus adaptée à ce matériau. Imaginons un essai de compression simple et plaçons nous à l'instant où apparaissent les premières macrofissures. L'éprouvette est alors formée d'un ensemble de "colonnettes" qui supportant une charge élevée vont flamber:

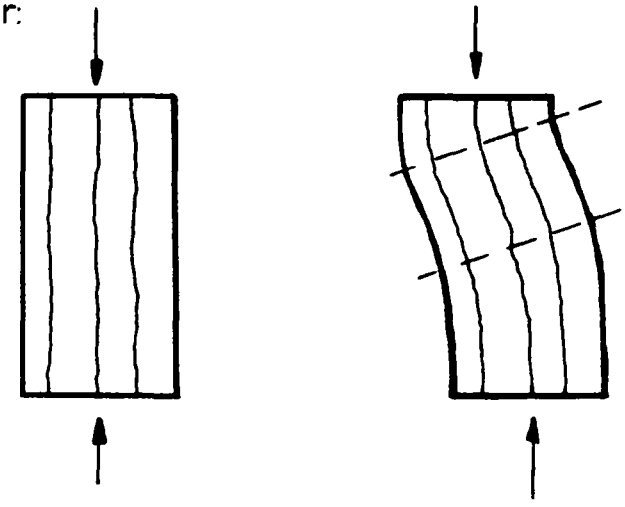


Fig.I.16: interprétation du radoucissement par flambement de colonnettes.

On a ainsi une hypothèse, qui demande à être vérifiée, mais qui respecte le mode de fissuration du béton et les constatations expérimentales de VAN MIER.

2ème exemple : <u>essai de traction simple</u> :

La localisation des déformations se rencontre aussi en traction. HEILMAN et Al [17] ont, à cet égard, effectué une expérience très significative : ils ont soumis une éprouvette de béton à de la traction simple en disposant des jauges de déformation sur la hauteur de l'éprouvette. Ils constatent alors que lorsqu'on atteint le pic de contraintes, les déformations se localisent dans la zone de rupture finale et que dans les autres parties de l'éprouvette il y a réversibilité des déformations. Ce comportement est schématisé sur la figure I.17.

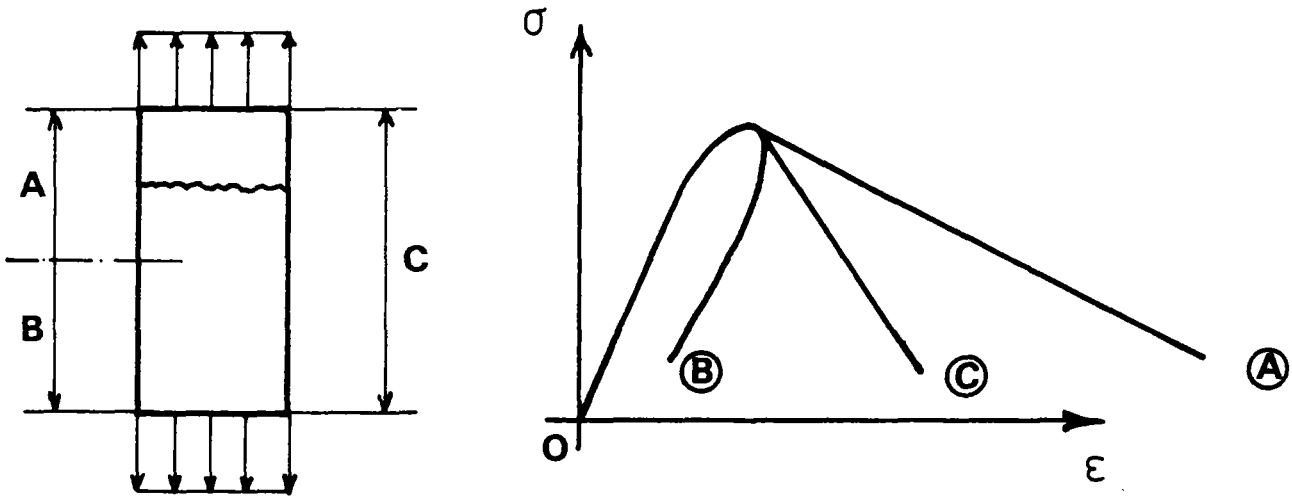


Fig. I.17 : Essai de traction simple. Réponses en fonction de la base de mesure.

Cette expérience met clairement en évidence la localisation des déformations et montre qu'après le pic le champ de déformation n'est plus du tout homogène. Il semble donc qu'il existe une instabilité dans le comportement du matériau. Celle-ci peut s'expliquer, ainsi que l'a fait HABIB [18], en ne considérant plus ce matériau comme homogène. En effet, imaginons les plans de rupture potentiels du matériau et leur loi de comportement respective.

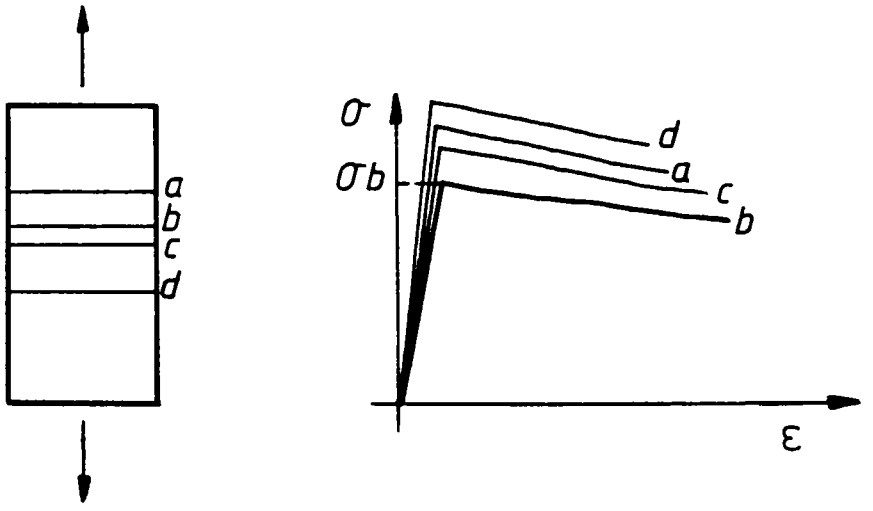


Fig. I.18 : Plans de rupture et comportement associés.

Si nous raisonnons en contrainte imposée tant que cette contrainte reste inférieure à la contrainte la plus faible (ici σ_b), le matériau résiste. Lorsque σ atteint σ_b , il y a rupture selon le plan b et localisation des déformations dans ce plan, alors que les autres parties de l'éprouvette, qui n'ont pas atteint leur pic, ont un allongement décroissant. Il y a alors bifurcation dans le champ de déformation.

Ce raisonnement n'est toutefois valable que si le béton est bien radoucissant. On aboutit donc à ce résultat : le béton est sans doute intrinséquement radoucissant mais en général, du fait de la localisation des déformations post pic, on ne peut pas observer directement ce phénomène. Il faudrait pour cela retarder la localisation, sans doute en diminuant l'élancement des éprouvettes mais alors on augmente terriblement l'influence des conditions aux limites ; notons toutefois que dans le cas du retrait de dessiccation on peut observer le radoucissement (nous y reviendrons).

Signalons pour être complet le très interessant modèle dit de "fictitious crack" et du à HILLERBORG [129]. Dans ce modèle le comportement post pic en traction n'est plus défini par une relation contrainte-déformation mais par une relation liant contrainte et ouverture de fissure. La difficulté réside alors dans la détermination de cette dernière. Ce modèle, sur lequel nous ne nous arrêterons pas davantage, a donné lieu à de nombreux développements (voir par exemple le compte rendu de l'International Conference on Fracture Mechanics of Concrete qui s'est tenue à Lausanne en 1985).

I-1 i <u>Problème de l'influence du chemin de chargement</u> :

Faisons subir à un béton à partir du même état de contrainte des incréments de contrainte de même norme mais de directions différentes : (fig. I.19).

L'expérience montre alors que <u>la réponse incrémentale est non linéaire</u> avec notamment $\delta\varepsilon(-\delta\sigma) = -\delta\varepsilon(\delta\sigma)$. La réponse en déformation dépend donc non linéairement de la direction de $\delta\underset{\sim}{\sigma}$

OA: isotrope $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

OB: triaxial de révolution
$\sigma_1 = \sigma_3$

1: $\delta\sigma_1 = 0 \quad \delta\sigma_2 > 0$
2: $\delta\sigma_1 = 0 \quad \delta\sigma_2 < 0$
3: $\delta\sigma_2 + 2.\,\delta\sigma_1 = 0$
$\delta\sigma_2 > 0$
4: $\delta\sigma_2 + 2.\,\delta\sigma_1 = 0$
$\delta\sigma_2 < 0$

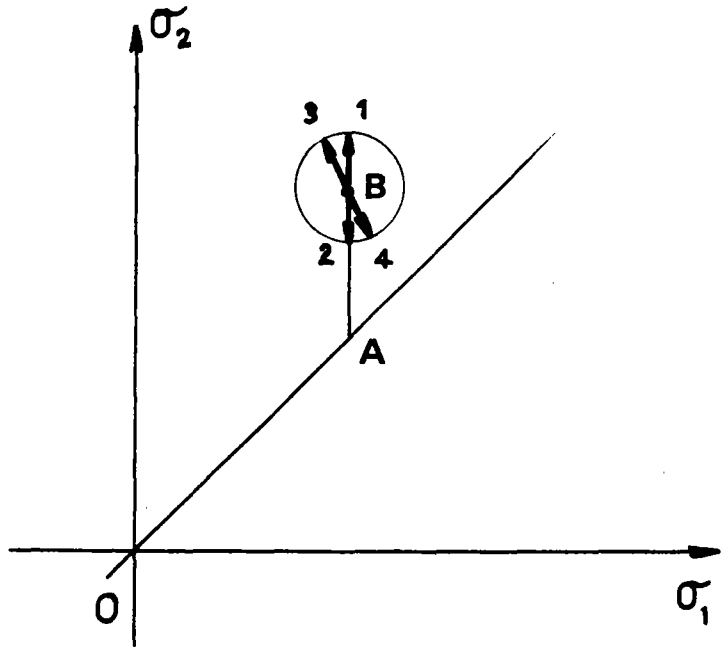
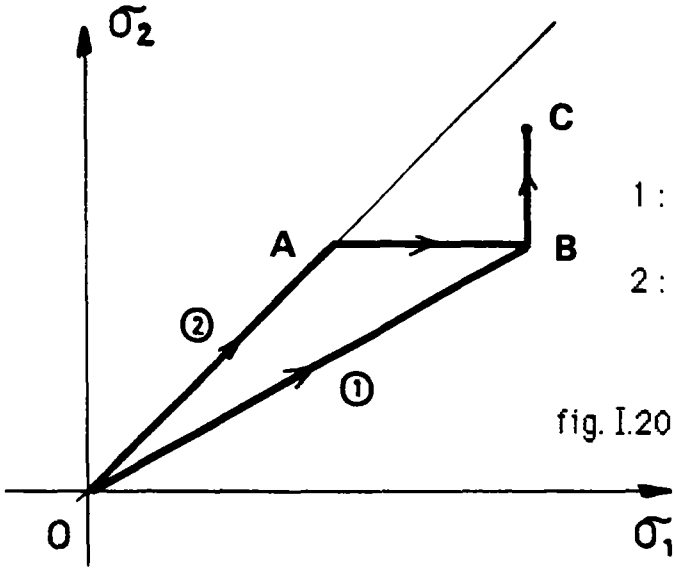


Fig. I.19 : Influence de la direction du chargement sollicitations à $\|\delta\underset{\sim}{\sigma}\|$ = constante

Faisons maintenant l'expérience suivante : testons un même béton suivant les chemins OBC ou OABC (cf fig. I.20).



1 : OB chargement proportionnel

2 : OAB chargement séquentiel

fig. I.20 : Influence du chemin de chargement.

Comme nous l'avons vu précédemment, il est clair que les déformations en B seront différentes suivant le chemin 1 ou le 2. Mais, de plus les déformations entre B et C seront également dépendantes du chemin suivi pour aller en B. Ceci peut s'exprimer en disant que le matériau a "en mémoire" l'histoire des sollicitations auxquelles il a été soumis.

Un paramètre de mémoire sera donc nécessaire pour modéliser cet aspect du comportement du béton. Cette remarque s'applique également aux critères de rupture. En effet l'expérience montre (fig. I.21) que si la rupture est atteinte en B selon le chemin 1 elle sera survenue avant ce point par le trajet 2. (voir les essais du BAM [20])

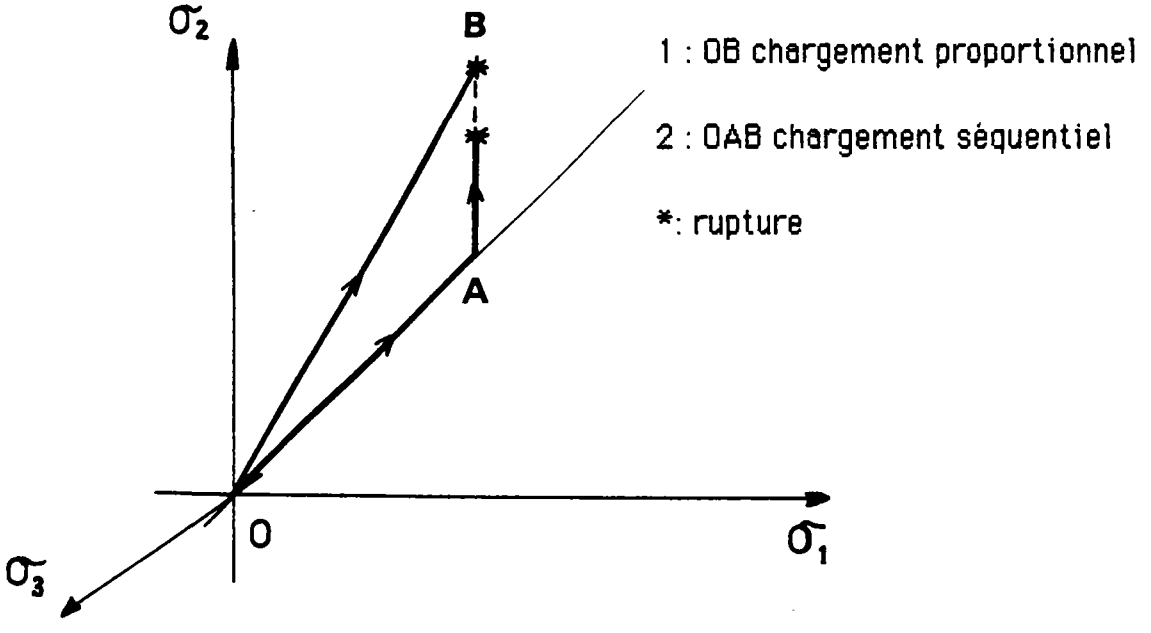


Fig. I.21 : Influence du chemin de sollicitation sur la contrainte à la rupture.

I-1.j Conclusions :

En conclusion de cette partie nous retiendrons les points suivants :

- le béton a un comportement non linéaire et en partie irréversible.

- lorsqu'on le sollicite se développe une microfissuration suivant des directions privilégiées (extension déviatoire), ce qui rend le matériau orthotrope.

- l'irréversibilité du comportement, explicable par les frottements entre lèvres de fissures et par la non symétrie de celles ci, implique de prendre en compte le déviateur de contraintes et la pression moyenne.

- sous compression pluriaxiale le béton supporte des charges plus élevées qu'en compression simple ; son comportement est également plus "ductile".

- sous traction pluriaxiale, comme dans les cas de traction-compression le comportement reste très proche de celui de la traction simple.

- il faut rester prudent vis-à-vis du radoucissement et notamment ne pas interpréter comme tel ce qui, souvent, n'est qu'une instabilité de comportement.

- le comportement du béton est fortement lié à l'histoire des sollicitations auxquelles il a été soumis.

I-2 - COMPORTEMENT A LONG TERME DU BETON :

Nous n'étudierons pas dans cette partie le phénomène appelé vieillissement du béton et qui correspond au fait que son comportement change avec son âge. En effet, notre but n'est pas de modéliser le comportement à long terme, et nous admettrons que le vieillissement est pris en compte de façon implicite par le choix des paramètres de comportement à court terme (par exemple la résistance en compression simple dont il est bien connu qu'elle varie avec l'âge du béton).

Nous aborderons le problème du fluage, là aussi sans étudier sa modélisation. Le lecteur intéressé par ce point particulier se reportera aux travaux de synthèse de HUET, ACKER et BARON [21] et à ceux de BAZANT, WITTMANN [22].

I-2.a Le fluage - Première partie :

Parce que certains ouvrages en béton précontraint subirent et subissent encore des désordres importants, on connaît le phénomène appelé fluage. On sait notamment que sous une contrainte constante le

béton subit des déformations différées. Vu l'importance du problème de nombreuses et forcément longues recherches ont été entreprises à ce sujet, mais tout est loin d'être réglé, y compris dans la manière d'étudier le phénomène. (cf le titre de l'article d'ACKER en 1983 : "De la controverse sur les lois de fluage du béton et des moyens d'en sortir" [23]). Un des points cruciaux de l'étude réside dans l'influence capitale du paramètre teneur en eau .(voir ACKER [23,24], BAZANT [25,26]).(nous définirons plus loin ce qu'est exactement la teneur en eau du béton).

En effet, toutes choses étant égales par ailleurs, si l'on effectue des essais de fluage sur des éprouvettes homogènes vis-à-vis de leur teneur en eau h on constate (fig.I-22) que la déformation différée est une fonction croissante de h (un béton pratiquement sec ne fluant que très peu).

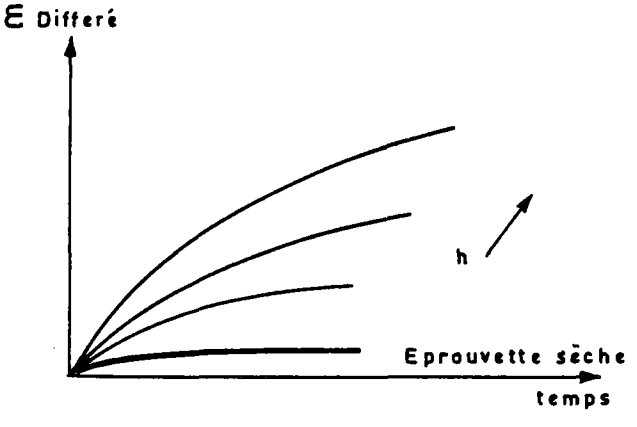


Fig. I.22 : déformations différées en fonction de la teneur en eau h (éprouvettes homogènes).

Si maintenant nous prenons deux éprouvettes homogènes vis-à-vis de leur teneur en eau au temps t = o et que l'une d'elles peut sécher librement (donc de façon hétérogène) alors que l'autre est maintenue à h constante on obtient un résultat surprenant vu ce qui précède: l'éprouvette qui sèche et, qui a donc a une teneur moyenne inférieure à h(t=0), flue beaucoup plus que l'éprouvette homogène (fig I.23).

Le rôle du séchage est ainsi clairement mis en évidence et nous allons maintenant aborder un phénomène essentiel dans la compréhension de ce qui prècède : le retrait.

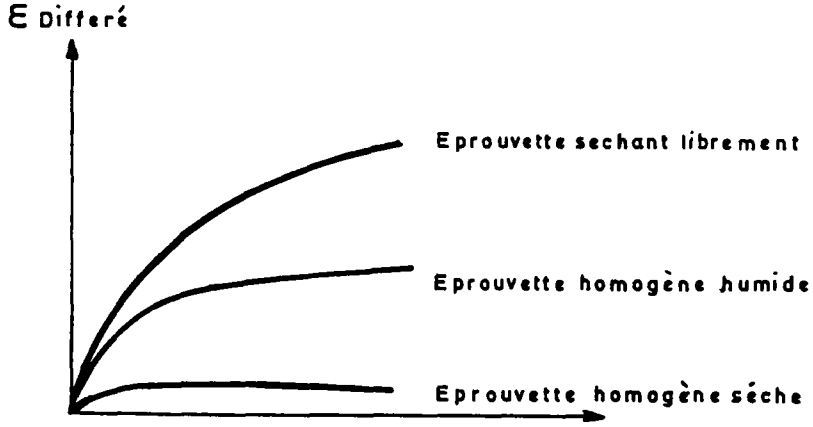


Fig. I.23 : comparaison des déformations différées selon le mode opératoire.

I-2.b <u>le retrait</u> :

Lorsque l'on coule une éprouvette de béton, au bout de quelques jours on peut constater que celle-ci s'est rétractée. C'est ce phénomène que l'on appelle retrait. Il a plusieurs causes : l'une, chimique, est liée au fait que le ciment est un réactif anhydre qui mis en présence d'eau provoque une réaction d'hydratation. Le volume des produits résultants étant inférieur à celui des réactifs de départ ceci explique une partie du retrait. Une partie seulement car l'hydratation du ciment ne consomme pas, en général la totalité de l'eau de départ. En effet, la quantité d'eau nécessaire à l'hydratation complète ne dépasse jamais 30 % du poids de ciment. Or, si l'on fabriquait un béton avec de telles proportions sa mise en place serait longue et difficile. Au contraire, en doublant la quantité d'eau on arrive à mettre en place le béton par écoulement pur et simple ! Mais évidemment à la fin de la réaction d'hydratation il reste une grande quantité d'eau non liée chimiquement. C'est l'évaporation de cette eau qui va causer un nouveau retrait, dit de dessiccation (existe aussi un retrait dû à la contraction thermique).

Différentes explications ont été avancées pour comprendre le retrait de dessiccation (voir les références 26, 27, 28). Toutes mettent en jeu des phénomènes physiques : dépression capillaire, variation de tension superficielle", eau adsorbée entre deux faces solides (variation de pression de disjonction). Globalement, on peut dire que pour l'ensemble des phénomènes cités, l'évaporation s'accompagne d'une augmentation des tensions internes au matériau et provoque ainsi un retrait, qui sera donc lié à la teneur en eau du béton.

Prenons maintenant une éprouvette cylindrique séchant

librement. Il est clair que c'est l'eau située sur la périphérie qui va s'évaporer en premier. La répartition de la teneur en eau à l'intérieur d'une telle éprouvette est alors fortement hétérogène (cf l'HERMITE et MAMILLAN [29]). Si nous pouvions découper l'éprouvette en cylindres concentriques, tels que chacun soit homogène par rapport à la teneur en eau nous constaterions : un retrait différent dans chaque cylindre (fig I.24).

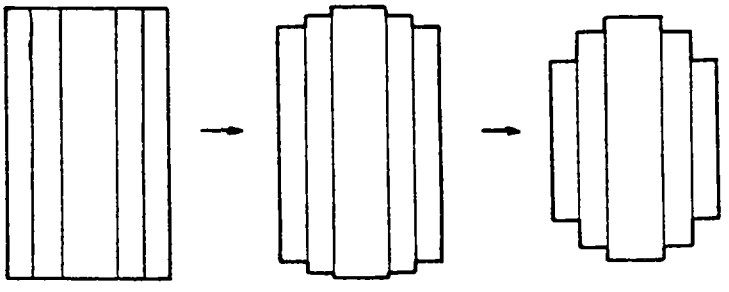


Fig. I.24 : retrait libre.

Pour l'éprouvette réelle le retrait n'est pas libre et l'évaporation va donc entraîner des contraintes internes. Ce fait a été confirmé expérimentalement par ACKER [24], et grâce à une mesure directe des contraintes [30]. Le champ de contrainte obtenu a l'allure suivante : (la contrainte considérée est une moyenne obtenue en considérant le matériau comme homogène)

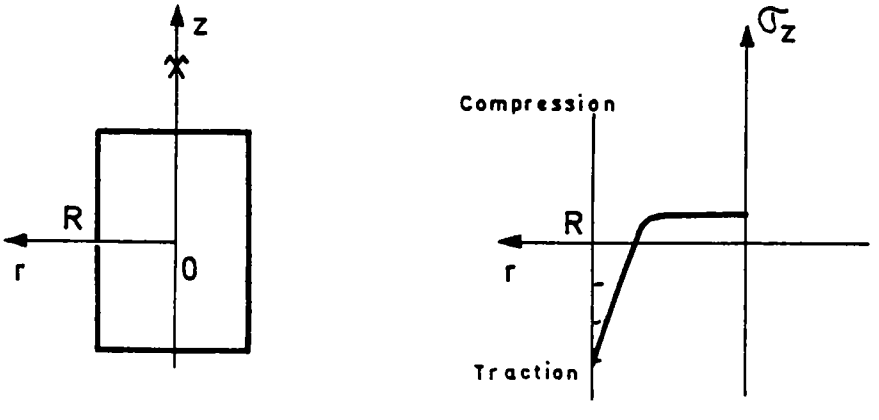


Fig. I.25 : distribution de la contrainte normale dans une éprouvette non chargée séchant librement.

Bien entendu, comme le séchage se poursuit, l'allure du champ de contrainte va varier au cours du temps et ce n'est que lorsque le béton sera en équilibre hygrométrique avec le milieu extérieur que

l'évolution des contraintes sera terminée. (cf. fig. I.26).

En surface la valeur de la contrainte peut atteindre la limite locale de résistance en traction. Il se produit alors une microfissuration du matériau. Celle-ci doit être mise en évidence par des moyens acoustiques car en général aucune macrofissure n'apparait. L'endommagement du matériau est ici véritablement diffus. L'allure de σ_z est décrite à la figure I.27. On remarquera notamment le déchargement dans la zone microfissurée.

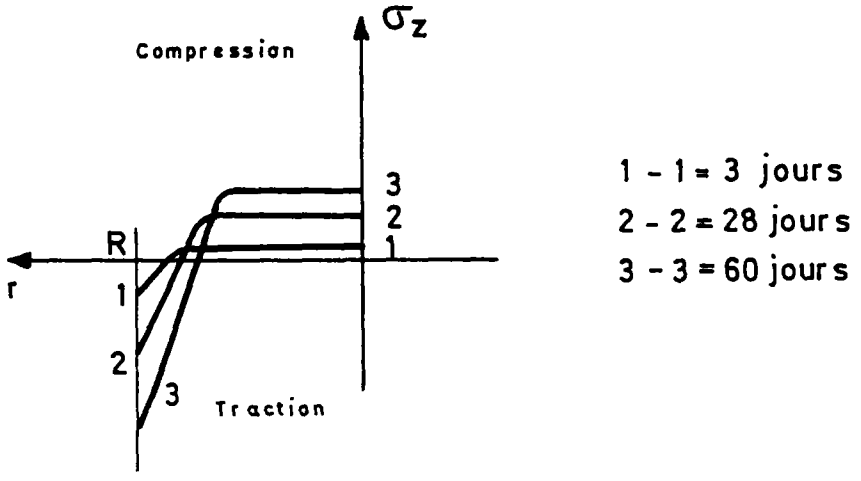


Fig. I.26 : évolution de la contrainte σ_z au cours du temps (éprouvette séchant librement).

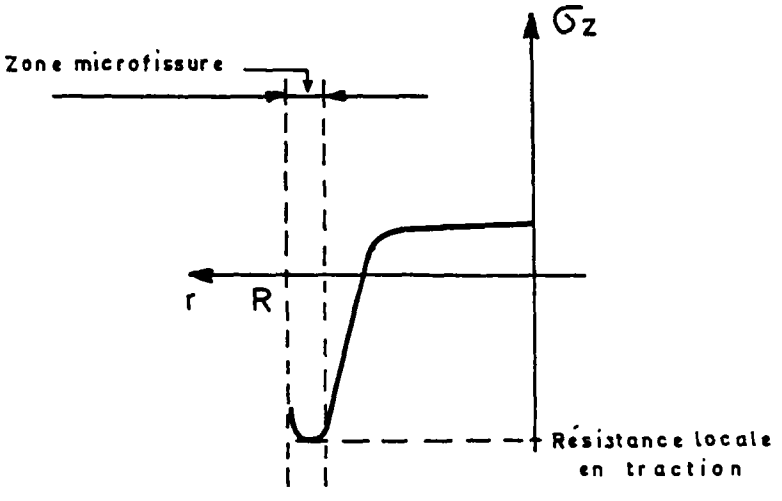


Fig. I.27 : allure de σ_z lorsque la limite locale de traction est atteinte.

La distribution non uniforme des contraintes dans

l'éprouvette peut également être mise en évidence au cours d'un essai de fluage effectué sur une éprouvette séchant à l'air libre. En effet dans ce cas la il y a superposition de la contrainte de compression imposée et de la contrainte due au retrait empêché (fig. I.28). L'éprouvette étant globalement en compression la différence des contraintes entre le coeur de l'éprouvette et sa périphérie est encore plus grande que dans le cas du séchage. Si l'on décharge brutalement cette éprouvette de fortes tractions naissent entraînant des fissures parfois même alors que la décharge n'est pas complète.

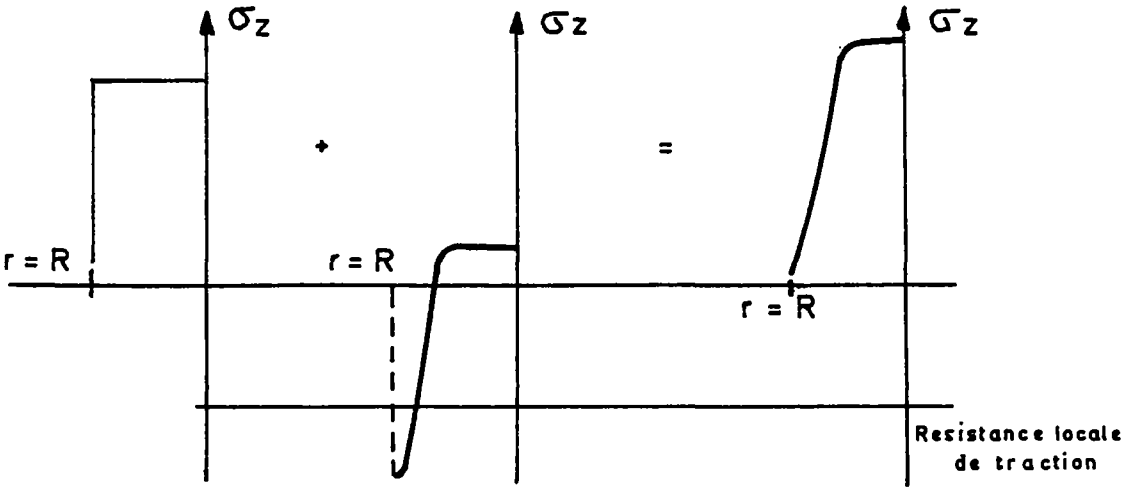


Fig. I.28 : contrainte σ_z au cours d'un essai de fluage résultant du chargement et du retrait empêché.

Une simulation numérique des effets du retrait est possible en couplant le problème de diffusion qui détermine la teneur en eau de l'éprouvette, au problème mécanique par l'intermédiaire de la déformation de retrait, mesurée sur des éprouvettes homogènes. Ce travail, effectué par ACKER, a donné les résultats suivants :

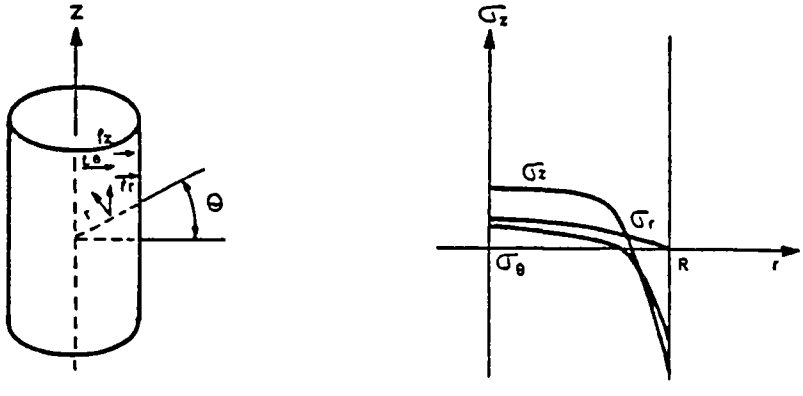


Fig. I.29 : champs de contrainte dus au retrait empêché simulation numérique - d'après ACKER.

I-2.c <u>Le fluage - 2ème partie</u> :

Revenons à l'essai de fluage sur éprouvette séchant librement (l'appellation essai de fluage alors que l'on vient de montrer que les contraintes variaient au cours du temps est conservée par souci de simplicité).

D'après les résultats numériques cités précédemment les contraintes σ_z et σ_θ sont, sur la périphérie, des contraintes de traction et vont donc favoriser un développement de la microfissuration dans les plans radiaux (de vecteurs directeurs $\vec{e_r}$ et $\vec{e_z}$) et dans les plans z=cste.

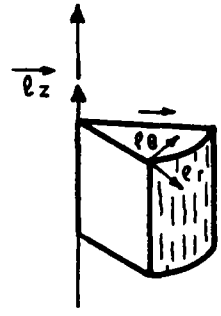


Fig. I.30 : microfissuration due à σ_θ

Lors d'un essai de fluage il faudra superposer à σ_z la charge extérieure (fig.I.28). La contrainte totale n'est plus alors une traction donc il n'y a plus fissuration et le retrait de l'éprouvette, qui va s'ajouter au fluage, sera alors supérieur à celui d'une éprouvette non chargée puisque celle ci fissure.

Dans les plans radiaux (de vecteurs directeurs $\vec{e_r}$ et $\vec{e_z}$), la contrainte σ_θ reste, en peau, une contrainte de traction. Donc le matériau fissure et le module local d'élasticité diminue. Ceci étant dû au séchage, on peut lier module d'élasticité et teneur en eau h. Cette relation a été utilisée par SHAAN [31] qui avec une loi du type $E_z = a.h + E_{oz}$ a couplé le problème de diffusion avec celui du comportement mécanique élastique. Il montre, par un exemple approché permettant d'aboutir à une solution analytique, que l'on retrouve l'allure classique des courbes de fluage <u>sans avoir introduit de viscosité</u>. Bien entendu avec les mêmes hypothèses si l'éprouvette était restée à teneur en eau constante nous n'aurions pas eu de déformations différées.

En conclusion, il existe donc , lorsque l'on effectue un essai

de fluage sur une éprouvette séchant librement, outre le fluage intrinsèque au matériau (appelé fluage propre et qui inclut le retrait), un fluage supplémentaire dû au séchage hétérogène des éprouvettes et aux effets néfastes du retrait empêché (cf fig.I.31). L'apparente contradiction des figures I.22 et I.23 est alors expliquée . Notons que ces deux types de fluage ne sont pas de même nature: l'un, le fluage propre, est lié à l'aspect local du comportement différé du béton alors que l'autre, le fluage d'hétérogénéïté, est un effet structural.

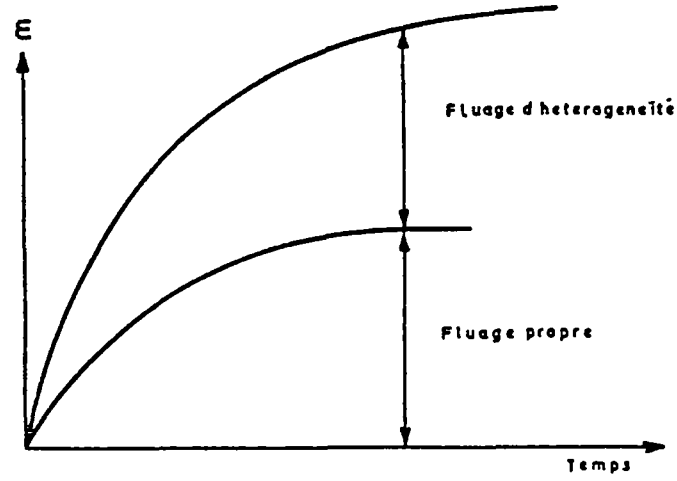


Fig. I.31 : décomposition du fluage.

Il faut toutefois avoir à l'esprit que cette dissociation entre fluage propre et fluage d'hétérogénéïté n'est que théorique et ne peut être obtenue expérimentalement, car même en laboratoire on ne peut avoir une éprouvette qui sèche et reste en même temps homogène. Le lecteur intéressé par ces problèmes pourra se reporter aux très récents travaux d' ABIAR [35].

I-3 INFLUENCE DE LA TENEUR EN EAU SUR LE COMPORTEMENT A COURT TERME DU BETON :

Peu d'auteurs de modèles de comportement du béton ont jusqu'à présent tenu compte de la teneur en eau. Pour notre part nous pensons que sa prise en compte doit permettre de mieux modéliser le comportement à court terme du béton. En effet, comme pour le comportement à long terme, elle intervient à 2 niveaux :

- l'un, local , en influant sur les propriétés mécaniques instantanées du béton

- l'autre, structural, par le retrait empêché qui va créer une microfissuration et un champ de contrainte préexistant aux sollicitations extérieures.

I-3.a Influence de la teneur en eau sur les caractéristiques mécaniques à court terme :

Il est temps maintenant de définir la teneur en eau. Pour cela considérons une éprouvette dont le poids des constituants (eau + ciment + granulats) est égal à P_i . Lorsque l'hydratation du ciment est terminée le poids de l'éprouvette vaut P_{100}. Si l'on place l'éprouvette dans un air d'humidité relative nulle, elle va sécher complètement et ne plus peser que P_0 . On définit alors la teneur en eau comme le rapport $((P - P_0)/(P_{100} - P_0))*100\%$ ou P est le poids actuel de l'éprouvette. Ainsi pour $P = P_{100}$ on a h = 100% et pour $P = P_0$ on retrouve h = 0 .

Il faut toutefois noter que pour le béton la façon dont on le sèche va influer sur la mesure de P . En effet l'eau qu'il contient est en partie liée et le séchage, selon sa brutalité, peut faire évaporer une fraction plus ou moins importante de l'eau liée chimiquement. Pour le béton, il n'y a pas de frontière nette entre l'eau libre contenue dans les pores et l'eau des hydrates. Notre définition de la teneur en eau sera donc relative au mode de séchage choisi.

L'influence de la teneur en eau sur les caractéristiques mécaniques à court terme du béton est apparue principalement lorsque s'est posée la question du mode de conservation des éprouvettes. En effet tous les expérimentateurs savent qu'un béton conservé dans l'eau ou à l'air n'a pas le même comportement (citons par ex [36]). Malheureusement dans ce genre d'étude les éprouvettes ne sont pas homogènes et l'interprétation des essais reste donc très difficile.

De rares études ont porté sur le comportement à court terme d'éprouvettes homogènes vis à vis de leur teneur en eau. L'étude de PIHLAJAVAARA [37] donne quelques résultats concernant la résistance en compression simple.

Après stockage sous un conditionnement étanche pendant 2 ans l'auteur a placé des échantillons de mortier dans des pièces à humidité constante RH variant de 0 à 100 %, pour une durée de 3 ans, ceci afin de pouvoir faire l'hypothèse d'homogénéïté. La question se pose alors de relier RH (humidité relative de l'air) à la teneur en eau du béton. Ceci est

possible à l'aide de ce que l'on nomme courbe de sorption. Cette courbe (fig I.32) traduit la relation d'équilibre qui existe à température constante entre teneur en eau du béton et humidité relative de l'air ambiant.

Nous pouvons donc, à l'aide de celle ci, connaître la teneur en eau des éprouvettes de PIHLAJAVAARA. L'auteur donnant la relation (σ_c, RH) et la courbe de sorption nous allons relier directement résistance en compression simple et teneur en eau (tableau I.33 et fig . I.34).

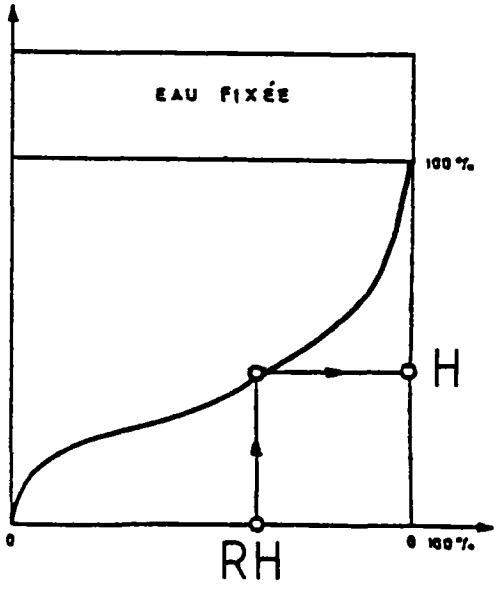


Fig. I.32 : courbe de sorption isotherme.

Teneur en eau %	RH air ambiant %	Mpa
0	0 %	68
9 %	10 %	64,5
14 %	20 %	61
16 %	30 %	58
18 %	40 %	55
27 %	50 %	54
39 %	60 %	54
52 %	70 %	55
66 %	80 %	56
83 %	90 %	57
100%	100 %	57

Tableau I.33 : relation teneur en eau - résistance en compression simple. (déduit des résultats de PIHLAJAVAARA)

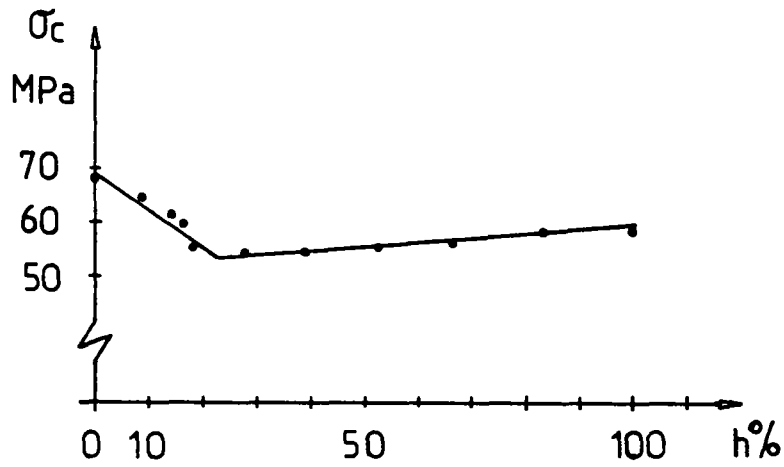


Fig. I.34 : Relation entre teneur en eau et résistance en compression simple (déduit des résultats de PIHLAJAVAARA)

On constate en interprétant de cette manière les résultats obtenus par PIHLAJAVAARA que la résistance diminue en fonction de la teneur en eau jusqu'à h = 20 % avec ensuite une légère remontée. Des résultats analogues ont été obtenus par WITTMANN sur de la pâte de ciment durcie [134].

Sous des conditions de conservation quasi identiques F.H. WITTMANN [38] a également étudié la relation humidité relative de l'air ambiant - module d'élasticité d'une pâte de ciment . Comme précédemment nous allons en déduire la relation teneur en eau - module d'élasticité, sans toutefois ici avoir connaissance de la courbe de sorption. Aussi nous nous servirons de la courbe de PIHLAJAVAARA car pour une interprétation qualitative ceci est suffisant (les courbes de sorption ayant la même allure).

RH air ambiant %	teneur en eau %	E MPa
0	0	14 170
10	9	13 660
20	14	13 140
30	16	12 915
40	18	12 860
50	27	12 970
60	39	13 140
70	52	13 485
80	66	13 830
90	83	14 345
100	100	14 860

Tableau I.35: interprétation des résultats de WITTMANN

Nous pouvons déduire de ce tableau le graphe liant h et E (fig. I.36)

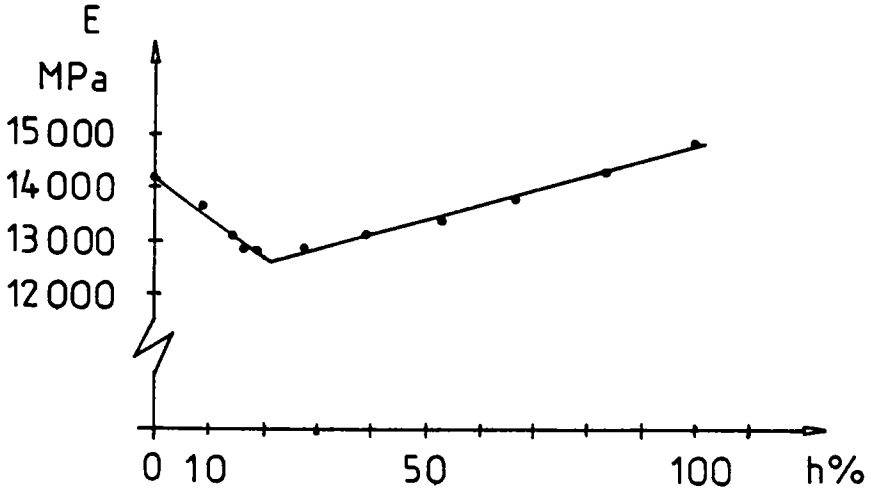


fig. I.36 : relation teneur en eau - module d'élasticité.
(d'après les résultats de WITTMANN)

L'allure de ce graphe est analogue à celle du graphe obtenu à partir des essais de PIHLAJAVAARA (fig. I.34). C'est à dire que la courbe est d'abord décroissante puis redevient croissante à partir d'une teneur en eau avoisinant 20%. WITTMANN explique la décroissance initiale par le fait que l'eau contenue dans la pâte de ciment est adsorbée en surface du squelette solide ce qui a pour effet de diminuer les tensions superficielles et rend le matériau moins résistant et moins raide.

Suivant cette hypothèse les courbes présentées précédemment devraient être monotones. Puisqu'elles ne le sont pas c'est que se superpose un autre effet qui peut être par exemple: une mise en pression de l'eau dans les pores du ciment résultant de la faible perméabilité de ce matériau. Le squelette solide n'est alors plus soumis à la contrainte extérieure σ mais à une contrainte effective σ' inférieure à σ . La pâte de ciment apparaît alors comme étant plus rigide et plus résistante mais ce n'est qu'apparent. Néanmoins pour le ciment ,comme pour le béton, un postulat de type Terzaghi ($\sigma' = \sigma - u$ où u est la pression intersticielle) ne peut s'appliquer , au moins parce que le materiau n'est jamais totalement saturé. On ne considèrera donc que les contraintes totales et on conservera les résultats obtenus comme étant intrinsèques au matériau.

A noter pour compléter ce paragraphe que BERGUES nous a confié avoir mesuré des pressions intersticielles dans un béton soumis à une pression hydrostatique égales à 75% de cette dernière ! (résultats malheureusement jamais publiés)

I-3.b <u>Influence de la teneur en eau sur le comportement à court terme de structures en béton</u> :

Nous venons de voir un aspect de l'influence de la teneur en eau sur le comportement instantané du béton. L'autre aspect que nous allons maintenant développer est structural. En effet comme nous l'avons vu précédemment (paragraphe concernant le retrait) du fait d'une teneur en eau hétérogène les structures en béton sont soumises à un champ de contraintes internes qui peut endommager fortement le matériau.

Le comportement d'une telle structure sera alors déterminé non seulement par sa loi de comportement mais aussi par son état hygrométrique.

Dans un calcul par éléments finis cela se traduira par la prise en compte des 4 équations suivantes :

- conservation de la masse d'eau
- loi de diffusion de l'eau
- équation d'équilibre
- loi de comportement.

Dans le cas général ces équations sont couplées mais pour

un calcul à court terme on peut supposer que les effets sont découplés. Nous allons traiter un exemple de prise en compte de la teneur en eau dans le comportement instantané du béton. Nous avons pour cela étudié une éprouvette cubique dont seulement 2 faces, opposées, permettaient l'évaporation de l'eau.

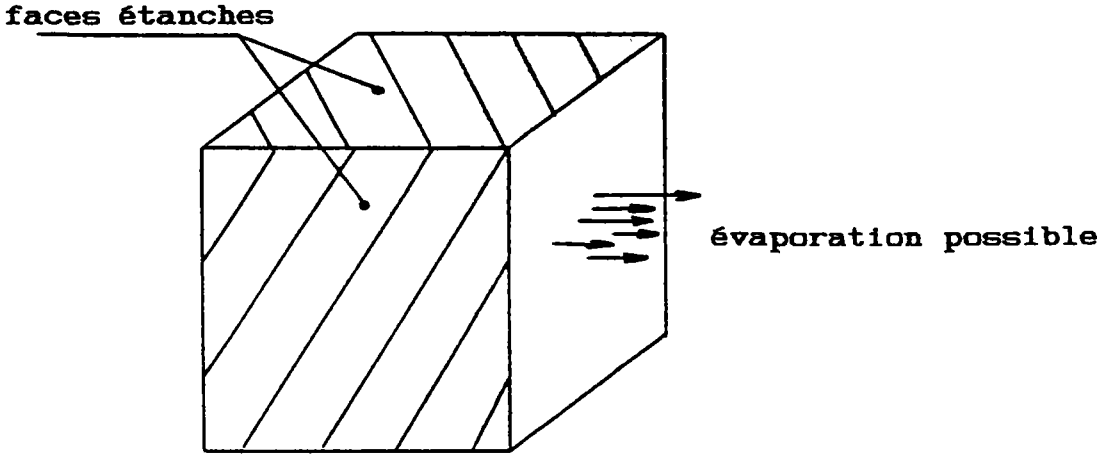


Fig. I.37: L'éprouvette testée.

Le premier stade de l'étude consistait à déterminer l'état hygrométrique de l'éprouvette. Le programme BIDIF (programme de diffusion non linéaire mis au point au LCPC [33]) a permis de tracer les courbes équi teneur en eau à t = 28 jours. On constate qu'à cette date le coeur de l'éprouvette n'a pas encore commencé à sécher.

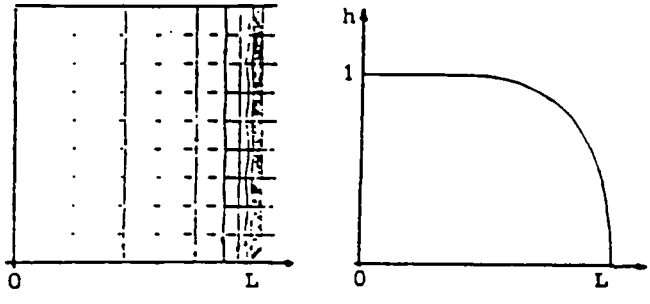


fig.I.38 : distribution des teneurs en eau dans l'échantillon âgé de 28 jours.

Ensuite en reliant la teneur en eau et la déformation volumique locale de retrait on peut calculer le champ de déformation du au retrait empêché. Nous utilisons pour cela les résultats de WITTMANN [38] présentés à la figure I.39.

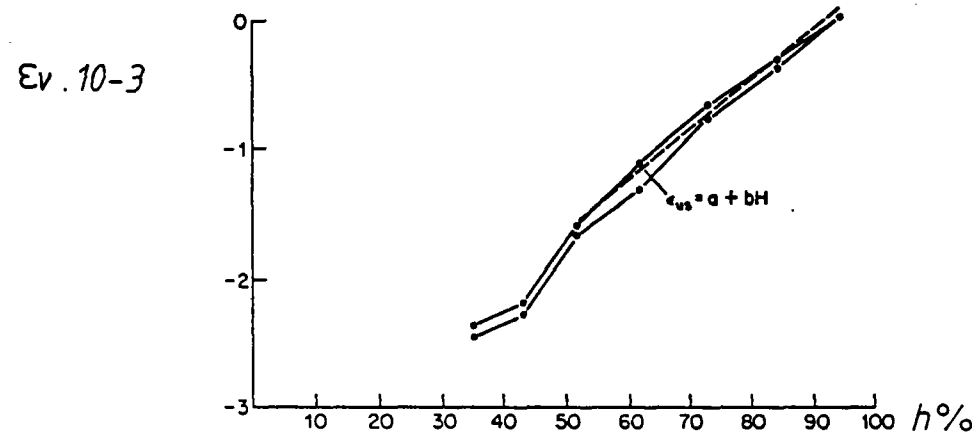


fig. I. 39 : relation entre déformation volumique due au retrait et teneur en eau (d'après WITTMANN [38]).

A l'aide de la loi de comportement on relie alors déformations et contraintes. Ceci a été fait tout d'abord avec une loi élastique linéaire [programme ELIP du LCPC]. La figure I.40 montre le champ de contraintes que l'on obtient alors, sans prise en compte d'une microfissuration.

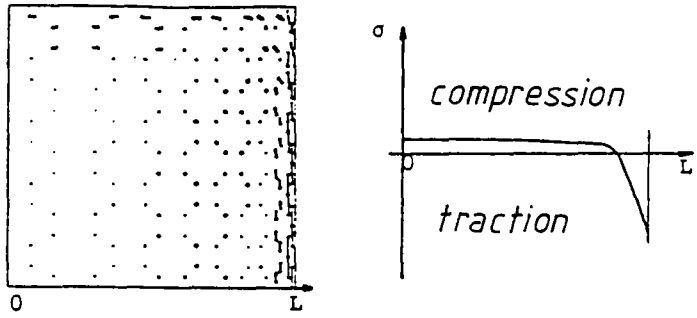


Fig. I.40: Champ de contrainte résultant du retrait empêché.
(éprouvette cubique - calcul élastique)

Les valeurs obtenues pour les contraintes sur les bords de l'éprouvette dépassent largement la contrainte maximale locale de traction dans le béton. Il est donc clair qu'une microfissuration s'établit et ce de façon diffuse. On doit donc utiliser une loi radoucissante pour

prendre en compte les phénomènes. C'est la loi d'endommagement isotrope de LEMAITRE-MAZARS [34] que nous avons utilisée. Cette loi est du type :

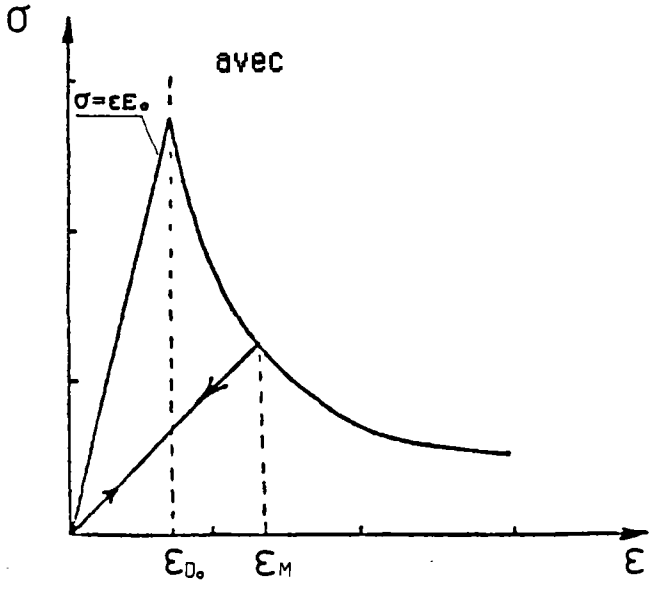


Fig. I.41: modèle d'endommagement isotrope.
(d'après MAZARS [7])

Le champ de contrainte obtenu par éléments finis, correspond alors tout à fait aux constatations expérimentales de ACKER. (cf paragraphe 1-2 b).

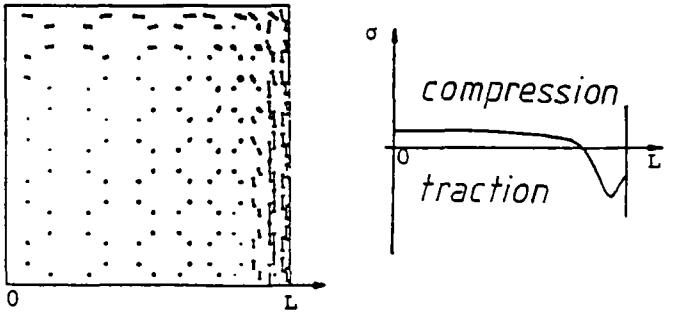


Fig. I.42: Champ de contrainte résultant du retrait empêché.
(modèle d'endommagement)

Si nous imposons à cette éprouvette une compression simple nous obtenons un champ de contrainte qui a l'allure suivante :

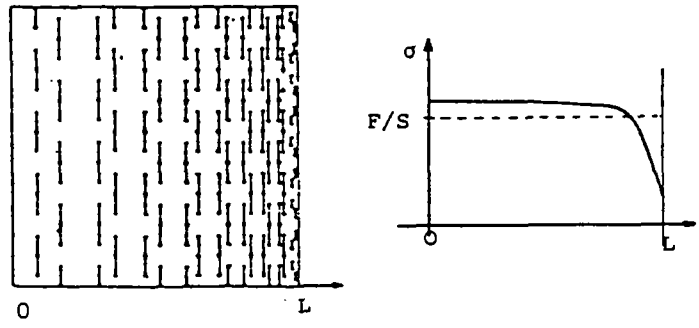
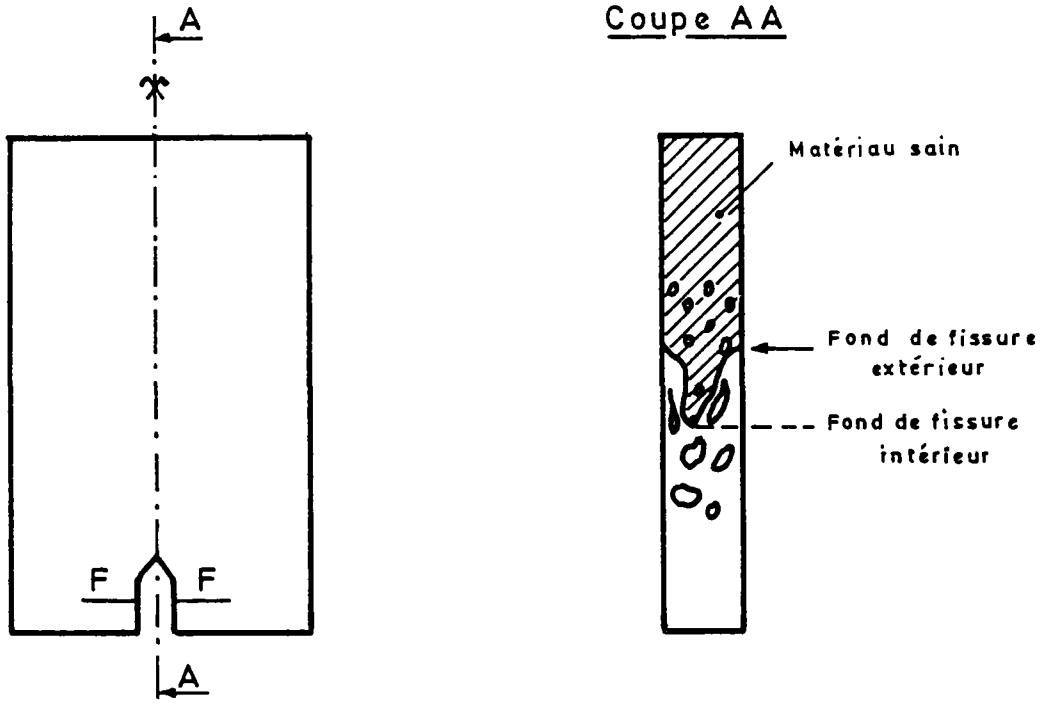


Fig. I.43: Superposition des effets du retrait et du chargement.

Si l'éprouvette sert comme test d'identification pour des paramètres d'une loi de comportement, on voit que le véritable champ de contrainte n'est pas celui que l'on croyait imposer. L'interprétation de l'essai est problèmatique. C'est la raison pour laquelle nous préconisons même pour les modèles ne prenant pas en compte la teneur en eau, de tester des éprouvettes homogènes par rapport à ce paramètre.

Si nous raisonnons maintenant en termes de structure, on voit que c'est le coeur de l'éprouvette qui est le plus sollicité. L'observation extérieure de l'endommagement du matériau ne rapportera donc pas exactement l'état d'endommagement au coeur de la structure ; en traction c'est également ce qui se produit (le coeur de l'éprouvette étant cette fois ci moins sollicité).

Ainsi dans les essais de type mécanique de la rupture (cf fig I.44) plusieurs auteurs ont noté que la fissuration en surface ne correspondait pas à la fissuration dans la masse : MAZARS explique cela par l'effet cumulé du séchage et de l'état tridimensionnel des contraintes.



a) l'essai DCB b) section fissurée

Fig. I. 44: Influence du séchage sur les essais de type Mécanique de la rupture, d'après MAZARS [7].

En conclusion nous retiendrons les faits suivants :

1°) les essais sur le béton doivent être effectués sur un matériau homogène vis à vis de sa teneur en eau.

2°) La non prise en compte du paramètre teneur en eau conduit dans le calcul à court terme d'une structure à une imprecision ainsi qu'à une incapacité à rendre compte de certains effets.

I-4 INFLUENCE DE LA TEMPERATURE SUR LE COMPORTEMENT DU BETON :

Avant de clore, ce premier chapitre, il apparait intéressant de se poser la question de l'influence de la température sur le comportement des structures en béton, comme nous l'avons fait pour l'eau.

Notons tout de suite que la diffusion de l'eau (sous forme de gaz ou de liquide) est évidemment très liée à la température (voir à ce sujet MALIER [39]). Les modèles de diffusion tiennent évidemment compte de ce paramètre.

Comme pour la teneur en eau les études citées par MALIER montrent l'influence de la température sur les caractéristiques mécaniques du béton à court terme.

Enfin pour compléter la similitude l'effet structural existe là aussi et est bien connu : c'est le gradient thermique. Comme tout solide le béton se dilate sous l'effet de la chaleur et on va donc avoir un résultat inverse au retrait (ce qui pose des problèmes dans les jeunes âges du béton quand l'hydratation dégage beaucoup de chaleur et que la non uniformité du champ de température induit, comme pour la teneur en eau, des contraintes internes non négligeables [40]). Néanmoins la diffusion de la chaleur est beaucoup plus rapide que celle de l'eau.

Pour notre étude, dans un souci de simplification, nous ne tiendrons pas compte de la température (si ce n'est par l'intermédiaire de la diffusion de l'eau). Toutefois nous préconisons de conserver les éprouvettes à une température donnée constante afin de s'affranchir au maximum de ce paramètre.

CHAPITRE II

FORMULATION DES

MODELES INCREMENTAUX

CHAPITRE II - FORMULATION DES MODELES INCREMENTAUX :

La formulation d'un modèle de comportement nécessite des précautions :

- utilisation de grandeurs objectives
- respect des principes généraux.

Ce sont ces aspects que nous allons tout d'abord traiter de façon générale, puis, appliquer aux modèles incrémentaux.

Nous développerons enfin le modèle mathématique en gardant toujours à l'esprit les résultats expérimentaux qui nous serviront de garde-fou.

II-1 Grandeurs objectives (ou intrinsèques) :

Tout d'abord, le modèle de comportement doit être indépendant de l'observateur. C'est le principe d'objectivité que nous développerons au paragraphe III. Simplement, pour être respecté, ce principe nécessite que les quantités utilisées pour décrire le comportement du matériau soient elles-mêmes objectives, c'est-à-dire, invariantes par changement du repère d'expression.

La force est un exemple de grandeur objective. Par contre, la vitesse, qui est liée à l'observateur n'est pas une grandeur objective. En règle générale chaque fois qu'il y a dérivation par rapport au temps se pose le problème de l'objectivité.

Ainsi si nous dérivons par rapport au temps dans un repère R' un tenseur du 2ème ordre $\underset{\sim}{H}$ défini dans un repère R on a :

$$\left(\frac{d\underset{\sim}{H}}{dt}\right)_{R'} = \underset{\sim}{Q}\left(\frac{d\underset{\sim}{H}}{dt}\right)_{R}\,{}^{T}\underset{\sim}{Q} + \underset{\sim}{\omega}\,(\underset{\sim}{H})_{R'} - (\underset{\sim}{H})_{R'}\,\underset{\sim}{\omega}$$

où $\underset{\sim}{\omega}$ est le tenseur vitesse de rotation de R par rapport à R' et $\underset{\sim}{Q}$ la matrice de passage telle que :

$$\vec{e_i} = Q_{ij}\,\vec{e_j}'$$

(notons que nous avons alors $\underset{\sim}{\omega} = \dot{\underset{\sim}{Q}}.{}^{T}\underset{\sim}{Q}$)

Nous voyons que le résultat de cette dérivation fait intervenir $\underset{\sim}{\omega}$ c'est-à-dire le mouvement de R par rapport à R'. Le taux de variation de $\underset{\sim}{H}$ n'est donc pas une grandeur objective.

Pour l'être il devrait vérifier

$$\left(\frac{d\underset{\sim}{H}}{dt}\right)_{R'} = \underset{\sim}{Q} \left(\frac{d\underset{\sim}{H}}{dt}\right)_{R} {}^{T}\underset{\sim}{Q}$$

Deux types de solutions sont envisageables pour obtenir des grandeurs objectives :

- définir un référentiel absolu, ou une classe de référentiels pour lesquels la dérivation par rapport au temps conduirait à la même quantité.

- former une grandeur intrinsèque quel que soit le référentiel.

La première méthode aboutit à la "dérivée convective", dérivation par rapport au temps dans un repère entraîné. La deuxième, que nous allons développer, aboutit à ce que l'on appelle les dérivées objectives. La dérivée de JAUMANN, notée $\hat{}$ est une de ces dérivées. Sa définition est la suivante :

$$\hat{\underset{\sim}{H}} = \frac{d\underset{\sim}{H}}{dt} - \underset{\sim}{W}\,\underset{\sim}{H} + \underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{W}$$

ou $\underset{\sim}{W} = (\underset{\sim}{G} - {}^{T}\underset{\sim}{G})/2$ est le taux de rotation, $\underset{\sim}{G}$ étant le gradient de vitesse de la transformation.

(on rappelle que l'on a $\underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{D} + \underset{\sim}{W}$, $\underset{\sim}{D}$ étant le taux de déformation).

Montrons que la dérivée de JAUMANN est objective : pour cela nous devrons montrer que :

$$(\hat{\underset{\sim}{H}})_{R'} = \hat{\underset{\sim}{H}}' = \underset{\sim}{Q}\,\hat{\underset{\sim}{H}}\,{}^{T}\underset{\sim}{Q}$$

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS & CHAUSSÉES
CENTRE PÉDAGOGIQUE DE DOCUMENTATION

Nous avons :

$$\hat{\underset{\sim}{H}}' = \dot{\underset{\sim}{H}}' - \underset{\sim}{W}'\underset{\sim}{H}' + \underset{\sim}{H}'\underset{\sim}{W}'$$

or $$\dot{\underset{\sim}{H}}' = \left(\frac{d\underset{\sim}{H}}{dt}\right)_{R'} = \underset{\sim}{Q}\,\dot{\underset{\sim}{H}}\,{}^{T}\underset{\sim}{Q} + \underset{\sim}{\omega}\,\underset{\sim}{H}' - \underset{\sim}{H}'\underset{\sim}{\omega}$$

d'ou $$\hat{\underset{\sim}{H}}' = \underset{\sim}{Q}\,\dot{\underset{\sim}{H}}\,{}^{T}\underset{\sim}{Q} + \underset{\sim}{\omega}\,\underset{\sim}{H}' - \underset{\sim}{H}'\underset{\sim}{\omega} - \underset{\sim}{W}'\underset{\sim}{H}' + \underset{\sim}{H}'\underset{\sim}{W}'$$

$$= \underset{\sim}{Q}\,\dot{\underset{\sim}{H}}\,{}^{T}\underset{\sim}{Q} + (\underset{\sim}{\omega} - \underset{\sim}{W}')\,\underset{\sim}{H}' - \underset{\sim}{H}'(\underset{\sim}{\omega} - \underset{\sim}{W}')$$

Or nous avons (composition des rotations):

$$\underset{\sim}{W}' = \underset{\sim}{\omega} + \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{W}\,{}^{T}\underset{\sim}{Q}$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{\underset{\sim}{H}}' = \underset{\sim}{Q}\,\dot{\underset{\sim}{H}}\,{}^{T}\underset{\sim}{Q} + \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{W}\,{}^{T}\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{H}' - \underset{\sim}{H}'\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{W}\,{}^{T}\underset{\sim}{Q}$$

de même $$\underset{\sim}{H}' = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{H}\,{}^{T}\underset{\sim}{Q}$$

d'ou $$\underset{\sim}{H}' = \underset{\sim}{Q}\,\dot{\underset{\sim}{H}}\,{}^{T}\underset{\sim}{Q} + \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{W}\,\underset{\sim}{H}\,{}^{T}\underset{\sim}{Q} - \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{W}\,{}^{T}\underset{\sim}{Q}$$

soit $$\hat{\underset{\sim}{H}}' = \underset{\sim}{Q}\,(\dot{\underset{\sim}{H}} + \underset{\sim}{W}\,\underset{\sim}{H} - \underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{W})\,{}^{T}\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{Q}\,\hat{\underset{\sim}{H}}\,{}^{T}\underset{\sim}{Q}$$

L'objectivité est donc démontrée.

Remarque 1 : ce n'est pas toujours l'emploi de la dérivée de JAUMANN qui donnera les meilleurs résultats (voir STUTZ [41]).

Remarque 2 : s'il n'y a pas de rotation la dérivée de JAUMANN est confondue avec $\dot{\underset{\sim}{H}}$. C'est le cas pour les essais triaxiaux.

II-2 Les principes généraux :

(Ce paragraphe s'inspire des travaux de NOLL [42] repris par TRUESDELL [43] et STUTZ [41]).

Comme en géométrie Euclidienne, ou l'on pose des axiomes avant de démontrer certains théorèmes, l'élaboration de lois de comportement nécessite que l'on respecte certains principes généraux. Ce sont ces principes ou axiomes, introduits par NOLL en 1958, que nous allons maintenant étudier.

Axiome 1 : Principe du déterminisme (ou de causalité) :

" Les contraintes, dans la configuration à l'instant t du point matériel P, sont déterminées par l'histoire $\mathcal{X}^t$ du mouvement jusqu'à l'instant t" :

(1) $\underset{\sim}{\sigma}(P,t) = \mathcal{F}(\mathcal{X}^t(M,\tau), P, t)$ avec $\tau < t$, $M \in B$

[B étant le corps contenant la particule M].

$\mathcal{F}$ est une fonctionnelle de l'histoire $\mathcal{X}^t$ du mouvement, du point matériel P et de l'instant t. Une autre façon d'exprimer le principe du déterminisme est alors de dire que les configurations passées et présentes de B déterminent le champ des contraintes exercées dans sa configuration actuelle.

C'est ce principe qui fait intervenir la notion de <u>mémoire</u> du matériau. ($\mathcal{F}$ est d'ailleurs souvent appelée fonctionnelle mémoire).

<u>Axiome 2 : Principe d'action locale</u> :

"Le mouvement des points matériels situés à distance finie de P n'intervient pas dans la détermination de l'état de contrainte en P".

(remarquons que d'après les hypothèses de la Mécanique des Milieux Continus (MMC), les points matériels qui a un instant donné sont à distance finie, le demeurent à tout instant).

Ce principe trouve sa signification dans le fait, qu'en MMC, ce sont les forces de contact qui sont intéressantes.

<u>Hypothèse du milieu matériellement simple</u> :

"L'histoire $\mathcal{X}^t$ du voisinage de P est donnée par l'histoire du gradient de déformation pour P".

Soit $F_K{}^t$ (P) le gradient de déformation, K étant une configuration de référence arbitraire.

Pour un milieu matériellement simple on a alors :

(2) $\underset{\sim}{\sigma}(P,t) = \mathcal{F}_K(F_K{}^t(P), P, t)$

On admettra pour la suite de ce travail que le béton est effectivement un milieu matériellement simple.

<u>Axiome 3 : Principe de l'indifférence matérielle ou d'objectivité</u> :

"Les équations du comportement doivent être indépendantes de l'observateur et de son mouvement : elles doivent être invariantes dans tout changement continu du référentiel d'observation".

La fonctionnelle $\mathcal{F}_K$ doit être indépendante du repère d'expression de la loi.

Si l'on considère deux repères R et R', avec Q matrice de passage, on aura :

$$(3) \qquad \underset{\sim}{\sigma}'(t) = \mathcal{F}_K\left(Q(\tau)\, F^t(\tau)\right) = Q(t) \cdot \mathcal{F}_K\left(F^t(\tau)\right) \cdot {}^T Q(t)$$

Le gradient de déformation F^t peut se décomposer de la manière suivante $F^t = R^t U^t$. Si dans la relation (3) nous prenons R' tel que $Q^t = (R^t)^{-1}$, l'équation (3) devient:

$$(4) \qquad \underset{\sim}{\sigma}'(t) = \mathcal{F}_K\left(U^t(\tau)\right) = Q^t(t)\, \mathcal{F}_K\left(R^t(\tau)\, U^t(\tau)\right)^T Q^t(t)$$

Si l'on replace dans le repère R cela nous donne :

$$(5) \qquad \underset{\sim}{\sigma}(t) = R(t)\, \mathcal{F}_K\left(U^t(\tau)\right)\, R^{-1}(t)$$

Ce résultat montre que, pour un matériau simple, si la rotation actuelle R (t) intervient pour déterminer la réponse en contraintes, seule l'histoire de la dilatation U^t a une influence sur cette réponse, <u>les rotations passées n'en ayant aucune</u>. On ne peut toutefois pas ici en déduire que des essais sans rotation des axes principaux soient suffisants pour déterminer le comportement d'un matériau simple. En effet, U^t est défini également par l'orientation de ses axes principaux, dont l'histoire va intervenir dans $\underset{\sim}{\sigma}$.

Nous avons vu les principes généraux qui servent de base à l'élaboration des lois de comportement. Nous allons maintenant les appliquer à un type bien particulier de modèles : les lois incrémentales.

II- 3- Les lois incrémentales :

Ce type de loi lie soit la vitesse objective de contrainte et la vitesse de déformation soit des incréments de contrainte et déformations. Ces derniers sont définis comme étant les produits des vitesses de contrainte et de déformation par l'incrément de temps dt.

II- 3.a Pourquoi des lois incrémentales ?

Il y a deux raisons à cela :

l'une physique, correspondant au fait que la donnée d'une contrainte ne suffit pas toujours pour déterminer la déformation. Un exemple, donné par DARVE [44], est celui du glissement d'un patin (modèle rhéologique de SAINT VENANT) : en effet, la donnée de la force ne détermine pas le déplacement ; par contre sa direction est donnée.

L'autre raison d'employer des lois incrémentales est numérique. Lorsqu'il y a une non linéarité à prendre en compte, les modèles incrémentaux sont très bien adaptés ; leur mise en oeuvre dans les codes éléments finis est, en outre, très simple.

II-3.b Application des principes généraux aux lois incrémentales - Principe du déterminisme :

"Un incrément de sollicitation appliqué pendant un temps déterminé induit un incrément de réponse déterminé unique".

Si nous exprimons ce principe en terme de vitesse de déformation, et en vitesse (objective) de contrainte cela nous donne :

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}}\left(\underset{\sim}{\dot{D}}, \underset{\sim}{\hat{\sigma}}, \underset{\sim}{M}, m\right) = 0$$

où les $\underset{\sim}{M}$ et **m** sont les paramètres de mémoire tensoriels et scalaires.

Nous faisons maintenant l'hypothèse des petites déformations, ce qui nous permet d'écrire :

$$\underset{\sim}{F}\left(\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}, \underset{\sim}{\hat{\sigma}}, \underset{\sim}{M}, m\right) = 0$$

L'application du principe d'objectivité va impliquer pour la fonctionnelle $\underset{\sim}{F}$ d'être une fonction tensorielle isotrope de $\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}$, $\underset{\sim}{\hat{\sigma}}$ et des paramètres de mémoire du matériau.

II-3.c Séparation entre partie visqueuse et non visqueuse

Nous allons faire une hypothèse supplémentaire concernant la décomposition de $\underset{\sim}{F}$ en partie non visqueuse (indépendante du temps) et visqueuse.

Pour cela plaçons-nous dans E6 ou nous avons :

$$^{T}(\dot{\varepsilon}) = (\dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, \dot{\varepsilon}_{33}, \sqrt{2}\,\dot{\varepsilon}_{23}, \sqrt{2}\,\dot{\varepsilon}_{31}, \sqrt{2}\,\dot{\varepsilon}_{12})$$

(les $\sqrt{2}$ sont introduits pour conserver la métrique).

Hypothèse de décomposition :

Nous supposerons que la réponse en vitesse de déformation peut se décomposer en une partie visqueuse et non visqueuse :

$$\dot{\varepsilon}_\alpha = G_\alpha(\hat{\sigma}_\beta) + C_\alpha$$ (formulation en termes de vitesse)

Soit en formulation incrémentale, proprement dite :

$$\delta\varepsilon_\alpha = G_\alpha(\delta\sigma_\beta) + C_\alpha\,\delta t$$

Les G_α correspondent à la partie non visqueuse et les C_α à la partie visqueuse. En effet, lorsque $\hat{\sigma}_\beta = 0$ on a $\dot{\varepsilon}_\alpha = C_\alpha$ qui correspond au fluage propre.

Opportunité de la décomposition :

Cette décomposition, très intéressante parce qu'elle permet de conférer aux G des propriétés d'homogénéité, nous semble pour le béton se concevoir assez bien. En effet pour ce matériau on arrive ainsi que nous l'avons vu au premier chapitre, en prenant des précautions (c'est à dire en testant le matériau sur des laps de temps assez courts) à séparer les effets de la viscosité des autres, effets, que nous appellerons mécaniques.

Si les C_α correspondent au fluage propre du béton, nous allons maintenant étudier les propriétés de $\underset{\sim}{G}$.

<u>Homogénéité de G</u> :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad G_\alpha(\lambda \hat{\sigma}_\beta) = \lambda G_\alpha(\hat{\sigma}_\beta)$$

Par contre pour $\lambda < 0$, la propriété ne devra plus être vérifié par le matériau béton qui a un comportement incrémentalement non linéaire. Par exemple, si l'on inverse le sens de sollicitation au cours d'un essai de compression, on sait que l' incrément de déformation en décharge n'est pas l'opposé de celui en charge. D'où:

$$G_\alpha(-\hat{\sigma}_\beta) \neq -G_\alpha(\hat{\sigma}_\beta)$$

$\underset{\sim}{G}$ sera donc <u>non linéaire</u>.

D'autre part l'expérience montre que <u>G n'est pas isotrope.</u>

Enfin, comme DARVE [44] l'a fait remarquer, en utilisant la propriété d'homogénéïté d'ordre 1 de $\underset{\sim}{G}$ nous pouvons écrire :

$$G_\alpha(\hat{\sigma}_\beta) = \frac{\partial G_\alpha}{\partial \hat{\sigma}_\beta} \cdot \hat{\sigma}_\beta$$

ou $\dfrac{\partial G_\alpha}{\partial \hat{\sigma}_\beta}$ est une fonction homogène d'ordre 0.

Nous poserons $M_{\alpha\beta} = \partial G_\alpha / \partial \hat{\sigma}_\beta$

On voit donc que la partie non visqueuse du modèle sera déterminée par la donnée des 36 fonctions $M_{\alpha\beta}$, qui sont homogènes de degré 0, c'est-à-dire dépendant uniquement de $u_\gamma = \hat{\sigma}_\beta / \|\hat{\sigma}\|$ qui caractérisent la "direction " de $\hat{\sigma}$.

On a donc finalement :

$$\boxed{\dot{\varepsilon}_\alpha = M_{\alpha\beta}(u_\gamma) \cdot \hat{\sigma}_\beta + C_\alpha}$$

ou, si l'on reprend la formulation incrémentale

$$\delta\varepsilon_\alpha = M_{\alpha\beta} \cdot \delta\sigma_\beta + C_\alpha \cdot \delta t$$

Maintenant, à partir de la décomposition que nous venons d'opérer, nous allons étudier les différents modèles de comportement existant dans la littérature.

II-4 Etude bibliographique des modèles incrémentaux pour le béton :

Pour classer les différents modèles nous appliquerons la méthode proposée par DARVE [45], selon laquelle les modèles sont classés suivant leur nombre de zones tensorielles.

Une zone tensorielle, ou domaine d'expression, est une zone de l'espace des vitesses objectives de sollicitation pour laquelle M est indépendante de la direction u. Ainsi dans chaque zone tensorielle la relation liant $\dot{\varepsilon}$ à $\hat{\sigma}$ est linéaire. Remarquons alors qu'à l'intérieur d'une zone tensorielle le principe de superposition est valable au niveau incrémental.

Le problème que l'on voit tout de suite apparaître est celui de la continuité du modèle au passage entre deux zones tensorielles, problème qui peut conduire à certains avatars numériques, le même modèle ne donnant pas les mêmes résultats selon l'ordinateur utilisé !

Ce problème ne se pose pas encore pour :

II-4.a les modèles a un domaine d'expression :

Pour ces modèles il n'y a qu'une zone tensorielle donc

$$\forall \underset{\sim}{u} \qquad \underset{\sim}{M}(\underset{\sim}{u}) = \underset{\sim}{M}$$

La loi de HOOKE est l'exemple le plus célèbre de ce type de lois. Mais la non linéarité du comportement du béton fait que ce modèle est inutilisable. Pour rendre compte de la non linéarité, la partie non visqueuse de ces modèles va alors être de type hypoélastique. Le schéma hypoélastique permet en effet de passer continument de l'élasticité à la plasticité sans définir de surface de charge [46].

Un exemple de ce type de modèle, pour le béton, est donné par ELWI et MURRAY [47]:

Leur modèle est non visqueux, non linéaire et orthotrope. Il s'écrit :

$$\delta \underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{C} \cdot \delta \underset{\sim}{\varepsilon}$$

avec Cij = Ei Bij

Pour déterminer les Ei, les auteurs utilisent le concept de déformation uniaxiale équivalente développé par DARWIN et PECKNOLD [48]. La déformation uniaxiale équivalente est donnée par :

$d\varepsilon_{iu}$= Bik . $\delta\varepsilon_k$ (les B_{ik} étant fonction des E_i et des ν_i^k)

On a alors :

$$\begin{bmatrix} \delta\sigma_1 \\ \delta\sigma_2 \\ \delta\sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_{1u} \\ \delta\varepsilon_{2u} \\ \delta\varepsilon_{3u} \end{bmatrix}$$

d'ou Ei = $\delta\sigma_i / \delta\varepsilon_{iu}$

La relation liant σ_i à ε_{iu}, obtenue à partir de l'équation de SAENZ [49], généralisée, permet d'obtenir les Ei. Les autres paramètres qui permettent de calculer les B_{ij} sont ensuite obtenus à partir de la déformation uniaxiale au pic de la courbe $(\sigma_i, \varepsilon_{iu})$. Ceci nécessite la connaissance de la contrainte au pic, et donc l'utilisation d'un critère de rupture. (Ici c'est celui d'ARGYRIS qui est utilisé [59]).

En conclusion, ce modèle qui évite la détermination d'une surface de charge, tient compte dans une certaine mesure de l'histoire des sollicitations et de l'anisotropie induite par celle-ci. Son principal défaut, commun à tous les modèles hypoélastiques est le fait qu'il n'y a pas dissociation entre la charge et la décharge. Ce type de modèle ne peut donc convenir que pour des chargements monotones, sinon il faut utiliser deux lois hypoélastiques l'une pour la charge, l'autre pour la décharge, (avec tous les problèmes de continuité que cela entraîne).

A partir de ce moment là on entre dans :

II-4.b <u>les modèles à deux zones tensorielles</u> :

Ce sont principalement les modèles élastoplastiques incrémentaux avec surface de charge unique. Pour le béton plusieurs modèles entrent dans cette catégorie : citons le modèle biaxial de MURRAY et Al [55], celui de WILLIAM et WARNKE [65] et le modèle de CHEN-CHEN [50]. C'est ce dernier que nous allons développer les autres modèles ayant une philosophie analogue.

Le modèle de CHEN:

C'est un modèle incrémental élastoplastique classique. Le béton y est considéré comme un matériau standard. Classiquement pour les modèles élastoplastiques il faut définir une surface de charge et une surface de rupture. Le modèle de CHEN ayant un écrouissage isotrope, ces deux surfaces se déduisent l'une de l'autre par homothétie.

Expérimentalement c'est la surface de rupture que l'on "sait" déterminer (même si cela est sujet à caution, on peut tout de même admettre ici que l'allure de la surface de rupture est effectivement connue). La surface de charge est ensuite déduite grâce à la détermination de points particuliers. (avec toute la difficulté que représente la détermination des limites élastiques, surtout pour le béton !).

- *surface de rupture*:

hypothèses : l'équation de la surface de rupture dépend :

- de la partie déviatoire des contraintes
- de la pression moyenne.

CHEN propose : fu (σij) = fu ($I1_\sigma$, $J2_\sigma$)

où $I1_\sigma$ est le premier invariant du tenseur (σij)
et $J2_\sigma$ le second invariant de (Sij) déviateur des contraintes.

Si l'on est en contraintes principales :

$$I_{1\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$J_{2\sigma} = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

l'équation proposée en compression est :

(1)
$$f_u(\sigma_{ij}) = \frac{K^2}{3} J_{2\sigma} - \frac{K^2}{36} I_{1\sigma}^2 + \frac{1}{12} I_{1\sigma}^2 + \frac{1}{3} A_u I_{1\sigma} = \tau_u^2$$

et celle en traction :

(2)
$$f_u(\sigma_{ij}) = \frac{K^2}{3} J_{2\sigma} - \frac{K^2}{36} I_{1\sigma}^2 - \frac{1}{12} I_{1\sigma}^2 + \frac{1}{3} A_u I_{1\sigma} = \tau_u^2$$

Au et τ_u étant des constantes relatives au matériau (et qui sont différentes pour les deux équations).

En se plaçant dans l'espace des contraintes octahedrales

où $\sigma_{oct} = I_{1\sigma}/3$ et $\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2 J_{2\sigma}}{3}}$, les équations (1) et (2) représentent alors :

une ellipse si $K^2 < 3$
une parabole si $K^2 = 3$
une hyperbole si $K^2 > 3$

La solution elliptique, correspondante à une rupture sous contrainte isotrope, est rejetée car contraire aux concepts élastoplastiques.

Donc $K^2 \geq 3$. Un calage de la surface de rupture par rapport aux travaux de KUPFER [52], montre que c'est la valeur $K^2 = 3$ qui est la meilleure.

L'équation de la surface de rupture devient donc :

(3)
$$f_u = J_{2\sigma} - \frac{l}{6} I_{1\sigma}^2 + \frac{1}{3} A_u I_{1\sigma} = \tau_u^2$$
avec l = 0 en compression
et l = 1 en traction/compression

Les constantes Au et τ_u sont alors des fonctions de σ_c, σ_t et σ_{bc} qui sont les résistances ultimes du béton, respectivement, en

compression simple, traction simple et sous contraintes biaxiales de compression égales.

Si l'on fait une coupe de cette surface dans le plan $\sigma 1$, $\sigma 2$ cela nous donne : (fig II.1)

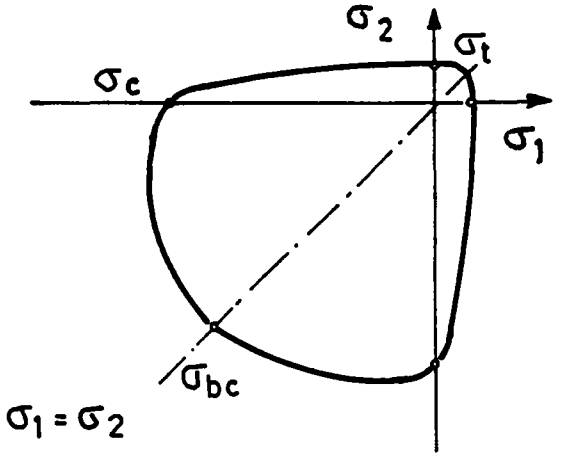


fig II.1 : critère de CHEN

(dans le critère de CHEN les compressions sont prises négatives)

- *surface de charge initiale*:

La surface de rupture étant déterminée, nous savons que la surface de charge est du même type :

(4)

$$f_o = J_{2\sigma} - \frac{\ell}{6} I_{1\sigma}^2 + \frac{1}{3} A_o I_{1\sigma} = \tau_o^2$$

De la même façon que précédemment les coefficients Ao et τ_o dépendent de σ_c, σ_t et σ_{bc} limites élastiques en compression, traction et compression biaxiale avec $\sigma 1 = \sigma 2$.

- *surfaces de charge actualisées* :

Elles doivent être intermédiaires entre la surface initiale et la surface de rupture, et avoir la "même" forme.

CHEN propose pour leur équation :

$$f = \frac{J_{2\sigma} - \ell\, I_{1\sigma}^2/6 + \beta\, I_{1\sigma}/3}{1 - \alpha\, I_{1\sigma}/3} = \tau^2$$

Or lorsque $\tau^2 = \tau_o^2$ on a f = fo

et lorsque $\tau^2 = \tau_u^2$ on a f = fu

Ceci nous donne deux équations que l'on peut résoudre :

$$\alpha = \frac{A_u - A_o}{\tau_u^2 - \tau_o^2} \qquad \beta = \frac{A_o \tau_u^2 - A_u \tau_o^2}{\tau_u^2 - \tau_o^2}$$

- *relation incrémentale contrainte - déformation* :

Selon le schéma élastoplastique nous avons :

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$$

avec $d\varepsilon_{ij} = H_{ijkl}\, d\sigma_{kl}$ partie réversible

$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \quad \partial f / \partial \sigma_{ij}$ partie irréversible.

CHEN propose pour la partie irréversible :

$$d\varepsilon_{ij}^p = G(I_{1\sigma}, J_{2\sigma}) \,.\, \partial f/\partial\sigma_{ij} \,.\, df$$

En multipliant cette équation par elle-même, on peut en déduire :

$$G = \frac{\sqrt{d\varepsilon_{ij}^p \; d\varepsilon_{ij}^p}}{df \sqrt{\partial f/\partial\sigma_{ij} \,.\, \partial f/\partial\sigma_{ij}}}$$

(le numérateur est alors fonction des déformations irréversibles et le dénominateur fonction de l'état de contrainte actuel).

On pose :

$$H = \frac{df}{\sqrt{d\varepsilon_{ij}^p \,.\, d\varepsilon_{ij}^p}}$$ fonction d'écrouissage.

On a alors :

$$G = \frac{1}{H \cdot \sqrt{\partial f/\partial \sigma_{ij} \cdot \partial f/\partial \sigma_{ji}}}$$

comme $df = \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \cdot d\sigma_{mn}$, on a finalement :

$$d\varepsilon_{ij} = \left(H_{ijkl} + \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ji}}}{H \cdot \sqrt{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{sr}}}} \right) \cdot d\sigma_{kl}$$

- *Etude de la fonction d'écrouissage* :

Soit $\sigma_e = \sqrt{f}$ contrainte équivalente

et $\varepsilon^p = \int d\varepsilon^p = \int \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p \cdot d\varepsilon_{ji}^p}$ déformation irréversible

Expérimentalement on peut déterminer la relation si nous la dérivons cela nous donne :

$$\frac{d\sigma_e}{d\varepsilon^p} = \frac{1}{2\sqrt{f}} \cdot \frac{1}{\sqrt{d\varepsilon_{ij}^p \cdot d\varepsilon_{ji}^p}} \; df = \frac{H}{2 \cdot \sigma_e}$$

Nous avons donc :

$$H = 2 \cdot \sigma_e \cdot \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon^p}$$

La connaissance analytique des relations $(\sigma_e, \varepsilon^p)$ en compression et traction-compression définit alors le modèle.

<u>Conclusion sur le modèle</u> :

Il pose l'éternel problème : existe-t -il une zone élastique, c'est-à-dire 100 % réversible ? D'autre part si cette zone existe peut-on, pour le béton, la délimiter avec certitude ?

Outre ces problèmes il semble que le concept de plasticité ne suffise pas à expliquer tous les phénomènes qui entrent en jeu dans le comportement du béton.

De plus, un autre problème a été récemment soulevé par ELNASHAI et NICHOLSON [77]. Les auteurs ont en effet montré que pour des valeurs courantes de σ_c et σ_t, la surface initiale était concave ! (cf fig. II.2)

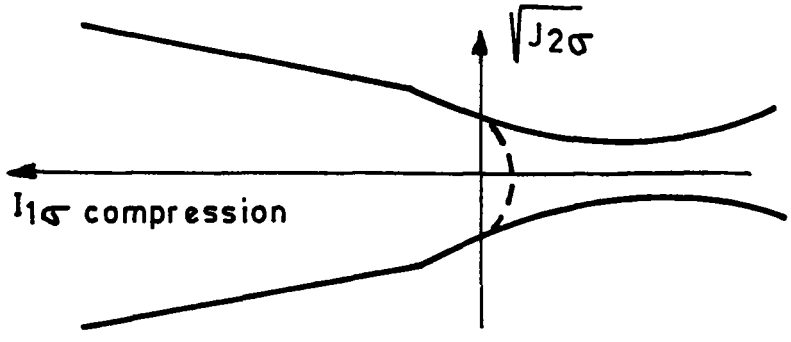


fig. II. 2 : surface de discontinuité initiale
d'après ELNASHAI et NICHOLSON

Malgré cela, du fait de sa simplicité, le modèle est assez employé et donne, semble-t-il , des résultats satisfaisants.

II-4.c <u>les modèles à 2^n zones tensorielles</u> :

Pour prendre en compte plus de phénomènes et améliorer la simulation du comportement des matériaux, une solution possible consiste à prendre en compte plusieurs mécanismes de plasticité. Un bon exemple de ce type de loi, pour la mécanique des sols, est la loi élastoplastique à triple potentiel de AUBRY et al [76]. Dans ce modèle existent trois mécanismes de plasticité, ce qui, compte tenu des différentes intersections des surfaces de charge, va conduire à 2^3 soit 8 zones tensorielles.

Dans le cas du béton BAZANT et KIM [60] ont élaboré un modèle qui, s'il n'est pas vraiment élastoplastique à potentiel multiple, utilise la même idée : deux mécanismes de comportement avec deux potentiels correspondants. Les auteurs nomment ce modèle "plastic-fracturing", ce que nous traduirons par plastique endommageable.

Le modèle associe donc deux phénomènes. Le premier, la plasticité est traitée de façon classique : surface de charge f, règle d'écrouissage, postulat de DRUCKER, règle de normalité ou pas... (cf fig. II.3)

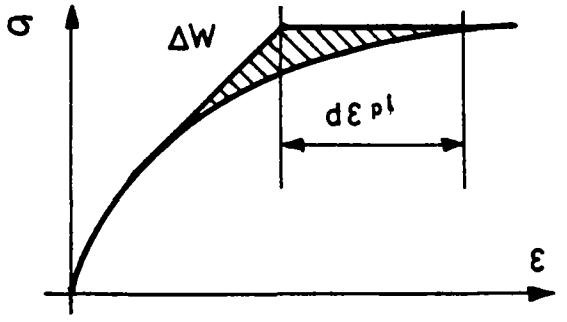


fig. II.3 : modèle de BAZANT-KIM schéma plastique.

Le second phénomène considéré est plus original. Comme la plasticité seule ne peut prendre en compte complètement la microfissuration du béton, un mécanisme de fissuration lui est ajouté. Partant des travaux de DOUGILL [61] sur les matériaux purement élastique fragile BAZANT et KIM définissent une surface seuil, $\Phi(\varepsilon_{ij}, H'_k) = 0$, enveloppe de tous les états qui peuvent être atteints sans que la fissuration ne se développe davantage. Les H'_k sont des paramètres d'endommagement tels que :

$$dH = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{km}} d\varepsilon_{km} + \frac{\partial \Phi}{\partial H'_k} dH'_k = 0$$

La condition de chargement étant $\partial\Phi/\partial\varepsilon_{km} \cdot d\varepsilon_{km} > 0$ on voit que le terme $\frac{\partial \Phi}{\partial H'_k} \cdot dH'_k$ est négatif lorsque la fissuration se développe.

Enfin une règle d'écrouissage cinématique est associée à la surface seuil. On a alors :

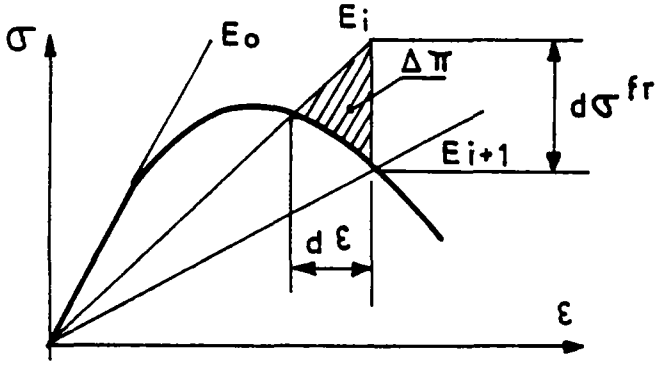


fig II.4 : modèle de BAZANT-KIM schéma endommageable

Les deux mécanismes décrits séparément sont enfin combinés pour obtenir un modèle global. Le comportement est alors du type suivant :

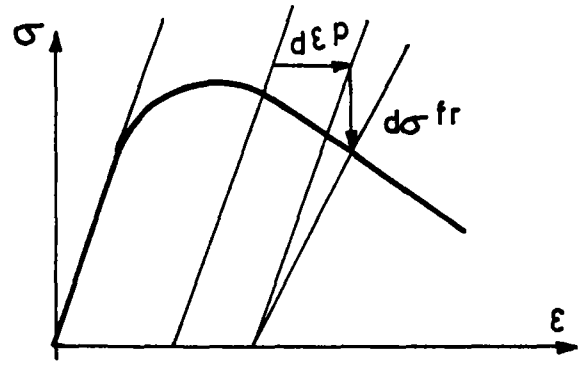


fig II.5 : modèle de BAZANT-KIM
· combinaison des deux mécanismes

Si l'on regarde de plus près ce qui se passe, on voit que le modèle suit le schéma de construction suivant :

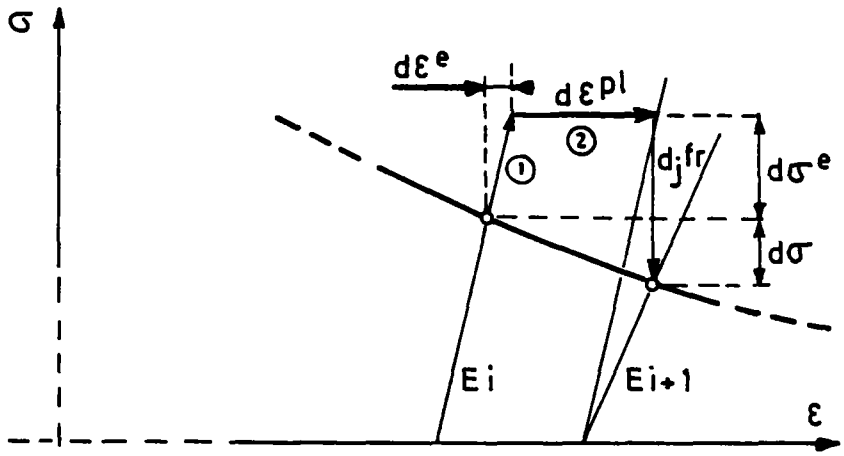


fig II.6 : modèle de BAZANT-KIM
schéma de construction

Les postulats de DRUCKER et ILYUSHIN sont généralisés en :

$$\frac{1}{2}\left(d\varepsilon^{pl} . d\sigma + d\sigma^{fr} . d\varepsilon \right) > 0$$

et l'on a à l'incrément de chargement n° i :

$$① \quad d\varepsilon^{e} = E_i . d\sigma^{e}$$

$$② \quad d\varepsilon^{pl} = \lambda \cdot \partial f / \partial \sigma$$

$$③ \quad d\sigma^{fr} = \mu \cdot \partial \Phi / \partial \varepsilon$$

Pour les chargement cycliques une règle d'écrouissage avec sauts est utilisée : dès qu'il y a inversion du sens de chargement, les centres des surfaces de charge et seuil "sautent" vers une nouvelle position. Ce procédé qui semble donner de bons résultats parait néanmoins assez discutable du point de vue de la continuité du modèle.

Conclusion sur le modèle :

Il permet de compléter le modèle plastique classique pour prendre en compte les spécificités du béton (le concept de plasticité ayant d'autres matériaux comme origine).

Ainsi sont pris en compte la fissuration du béton et son comportement irréversible.

Les critiques qu'on peut porter au modèle concernent encore une fois la détermination des surfaces seuil et de charge. En effet il y a ici deux mécanismes qui se superposent et la détermination des surfaces et règles d'écrouissages respectives de chaque phénomène n'est pas aisée. La réponse a ces problèmes est normalement obtenue par l'observation du comportement en décharge (cf PIJAUDIER CABOT [62]) mais reste toutefois difficile dans le cas du béton.

Le problème de la continuité du modèle, notamment en cyclique, est posé également. Néanmoins de par son originalité, l'utilisation du concept de matériau fragile, il reste très intéressant, et devrait s'appliquer particulièrement bien dans les cas ou la fragilité du béton est un paramètre très important de son comportement c'est-à-dire lorsqu'il y a de la traction.

II-4.d modèles à nombre infini de zones tensorielles :

Pour ces modèles nous avons un nombre infini de zones tensorielles par le fait que M varie continument avec u direction de $\hat{\sigma}$. Remarquons que le problème de continuité au passage entre deux zones tensorielles est forcément résolu ici.

Parmi ces modèles nous pouvons distinguer trois grandes classes :

- les modèles endochroniques
- les modèles à bounding surface (surface limite)
- les lois incrémentales non linéaires de type interpolation.

II-4.d.1 <u>le modèle endochronique BAZANT</u> [57,58]

Ce modèle est d'un type très particulier car différent de la formulation proposée auparavant pour la décomposition de $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}$. En effet, au lieu d'avoir

$$d\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{M}\, d\underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{C}\, dt$$

BAZANT propose : $$d\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{M}\, d\underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{C}\, dz$$

où z est le <u>temps intrinsèque</u> du matériau.
De plus, comme nous le verrons, la partie Cdz correspond au taux de déformation inelastique, c'est-à-dire que nous avons :

$$d\underset{\sim}{\varepsilon} = d\underset{\sim}{\varepsilon}^{el} + d\underset{\sim}{\varepsilon}^{p}$$

avec

$$d\underset{\sim}{\varepsilon}^{el} = \underset{\sim}{M}\, d\underset{\sim}{\sigma} \quad \text{partie élastique}$$

$$d\underset{\sim}{\varepsilon}^{p} = \underset{\sim}{C}\, dz \quad \text{partie inelastique.}$$

Voyons maintenant la philosophie du modèle. Elle repose sur une généralisation de la viscoélasticité.

Etudions le cas monoaxial :

En viscoplasticité on a : $\dot{\varepsilon} = \dfrac{\dot{\sigma}}{E} + \varphi(\sigma, \varepsilon).\sigma$

pour la théorie endochronique la fonction φ dépend également de $\dot{\varepsilon}$. Donc :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \varphi(\sigma, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) . \sigma$$

si nous choisissons :

$$\varphi(\sigma, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \varphi_1(\sigma, \varepsilon) \cdot \sqrt{\rho_0 + \rho_1 \dot{\varepsilon}^2}$$

on a : $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \sigma \varphi_1(\sigma, \varepsilon) \sqrt{\rho_0 + \rho_1 \dot{\varepsilon}^2}$

en divisant par dt cela nous donne :

$$d\varepsilon = \frac{1}{E} d\sigma + \sigma \varphi_1(\sigma, \varepsilon) \sqrt{\rho_0 dt^2 + \rho_1 d\varepsilon^2}$$

si maintenant nous posons dz = $\sqrt{\rho_0 dt^2 + \rho_1 d\varepsilon^2}$

on obtient

$$d\varepsilon = \frac{1}{E} d\sigma + \sigma \varphi_1(\sigma, \varepsilon)\, dz$$

si l'on divise par dz on arrive à :

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = \frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma}{dz} + \sigma \varphi_1(\sigma, \varepsilon)$$

formulation analogue à celle de la viscoplasticité, le temps t, étant remplacé par z qui est appelée temps intrinsèque [en grec chronos = temps, endo = intérieur].

Le temps intrinsèque z étant la somme de termes positifs on voit qu'il ne pourra qu'augmenter : c'est ce qui va traduire la non linéarité du modèle.

<u>Généralisation à l'espace</u> :

La relation constitutive de la viscoplacité est :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = D^{el}_{ijkl}\, \dot{\sigma}_{kl} + \partial F / \partial \sigma_{ij} \cdot \varphi_1(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\varepsilon})$$

F étant analogue à une fonction de charge.

Comme précédemment on ajoute une dépendance par rapport à $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}$:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \underbrace{D^{el}_{ijkl}\, \dot{\sigma}_{kl}}_{\text{partie élastique} = \dot{\varepsilon}^{el}} + \underbrace{\partial F / \partial \sigma_{ij} \cdot \varphi_1(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\varepsilon}) \cdot \varphi_2(\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}})}_{\text{partie irréversible} = \dot{\varepsilon}^{p}}$$

si l'on développe la fonction φ_2 en série de TAYLOR on a :

$$\varphi_2(\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}) = (P_0 + P_{ij} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij} + P_{ijkm}\, \dot{\varepsilon}_{ij}\, \dot{\varepsilon}_{km} + \cdots)^m$$

m étant un exposant dont la valeur doit être discutée.

Deux restrictions s'imposent alors pour des considérations physiques :

1°) φ_2 doit croître comme $|\dot{\varepsilon}|$
c'est-à-dire que $\varphi_2(\dot{\varepsilon} \neq 0) > \varphi_2(\dot{\varepsilon} = 0)$

2°) le rapport de l'incrément de déformation irréversible sur l'incrément de déformation total doit être tel que :

$$\lim_{\|\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}\| \to \infty} \left(\frac{\|d\varepsilon^p\|}{\|d\varepsilon\|} \right) > 0 \quad \text{et} < \infty$$

Cela implique pour φ_2:

1°) Pij = 0

En effet si le terme Pij $\dot{\varepsilon}$ij existe, comme $\dot{\varepsilon}$ij peut être positif ou négatif la première condition sur φ_2 n'est pas assurée. Remarquons qu'il en est de même pour tous les termes du type

$$\underbrace{P_{ijkm\ldots\ldots nl}}_{2n}$$

avec n impair. Lorsque n est pair le produit

$$P_{ijkl\ldots mn}\ \dot{\varepsilon}_{ij}\, \dot{\varepsilon}_{kl} \ldots \dot{\varepsilon}_{mn} \quad \text{est positif}$$

(théorie des formes quadratiques).

En première approximation BAZANT ne garde que les premiers termes :

$$\varphi_2(\dot{\varepsilon}) = (P_0 + P_{ijkl}\, \dot{\varepsilon}_{ij}\, \dot{\varepsilon}_{kl})^m$$

2°) on fait le rapport $\frac{\dot{\varepsilon}^p}{\dot{\varepsilon}}$ et on divise par dt

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS-&-CHAUSSÉES
CENTRE PÉDAGOGIQUE DE DOCUMENTATION

Cela nous donne :

$$\frac{\|d\varepsilon^p\|}{\|d\varepsilon\|} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \varphi_1(\sigma, \varepsilon) \cdot \left(\frac{P_0}{\|\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}\|^{1/m}} + \frac{P_{ijkl}\, d\varepsilon_{ij}\, d\varepsilon_{kl}}{d\varepsilon_{ro}\, d\varepsilon_{ro}} \|\dot{\varepsilon}\|^{2-\frac{1}{m}} \right)^m$$

Rappelons la seconde condition :

$$\lim_{|\dot{\varepsilon}| \to \infty} \frac{\|d\varepsilon^p\|}{\|d\varepsilon\|} > 0 \text{ et } < \infty$$

Or si 2-(1/m) < 0 on a $\dfrac{\|d\varepsilon^p\|}{\|d\varepsilon\|} \longrightarrow 0$

soit un matériau parfaitement élastique pour des chargements rapides ce qui est contraire à l'expérience.

et si 2-(1/m) > 0 $\Longrightarrow$ $\dfrac{\|d\varepsilon^p\|}{\|d\varepsilon\|} \longrightarrow \infty$

ce qui est impossible.

La seule possibilité est donc 2-(1/m) = 0 soit m = 1/2.

On retrouve ainsi l'expression de la formulation monoaxiale.

On pose alors $1/\tau_1 = \sqrt{P_0}\ \varphi_1(\sigma, \varepsilon)$

et $\overline{P_{ijkl}} = \gamma_1^2 \cdot P_{ijkl} \cdot \left(\varphi_1(\sigma, \varepsilon)\right)^2$

où τ_1 peut être interprété comme un temps de relaxation et γ_1 par analogie comme une déformation de relaxation.

BAZANT pose ensuite :

$$d\zeta = \sqrt{\overline{P_{ijkl}} \cdot d\varepsilon_{ij} \cdot d\varepsilon_{kl}}$$

Et z le temps intrinsèque tel que

$$d\gamma = \sqrt{\left(d\zeta/\gamma_1\right)^2 + \left(dt/\tau_1\right)^2}$$

on a alors :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \partial F/\partial\sigma_{ij} \cdot d\gamma$$

Nous allons maintenant chercher à exprimer les relations

contraintes déformations. Pour cela on fait l'hypothèse d'isotropie ; le temps intrinsèque va alors s'exprimer sous la forme :

$$d\gamma^2 = \rho_0 \, J_{2\varepsilon}(d\varepsilon) + \rho_3 \, dt^2$$

où $J2_\varepsilon$ est le second invariant du déviateur des déformations. Comme précédemment on a :

$$d\gamma^2 = \left(\frac{d\xi}{\gamma_1}\right)^2 + \left(\frac{dt}{\tau_1}\right)^2$$

avec $\quad d\xi = f_1(\xi, \sigma, \varepsilon) \cdot d\zeta \quad$ où $\quad d\zeta = \sqrt{J_{2\varepsilon}(d\varepsilon)}$

f_1 est une fonction permettant d'introduire l'écrouissage et le radoucissement, ζ est lié à l'endommagement et ξ à la distorsion.

<u>Relations contraintes déformations</u> :

On a :

partie déviatoire : $\quad de_{ij} = \dfrac{ds_{ij}}{2G} + de''_{ij} \quad ; \quad de''_{ij} = \dfrac{s_{ij}}{2G} \, d\gamma$

partie volumique : $\quad d\varepsilon = \dfrac{d\sigma}{3K} + d\varepsilon'' \; ; \quad d\varepsilon'' = d\lambda + \dfrac{\sigma}{3K}\dfrac{dt}{\tau_1} + d\varepsilon''_0$

où $\quad \varepsilon = \dfrac{1}{3}\varepsilon_{kk} \quad ; \quad \sigma = \dfrac{1}{3}\sigma_{kk}$

eij déviateur de déformations.
sij déviateur de contraintes.

ε_0 la déformation due aux effets thermiques et au retrait.
λ la dilatance inelastique

On voit donc que le modèle est très complet puisqu'il permet de prendre en compte de nombreux phénomènes :

- écrouissage

- radoucissement
- dilatance inelastique
- dépendance de G et K avec la dilatance
- fluage

Mais toute médaille a son revers et ici le gros problème du modèle réside dans le fait que la description de chacun des phénomènes nécessite un grand nombre de paramètres.

Prenons l'exemple du radoucissement :

BAZANT pose $d\zeta = \dfrac{d\eta}{f(\eta)}$ où $d\eta = F(\sigma, \varepsilon)\, d\xi$

la fonction F est décrite par :

$$F(\sigma, \varepsilon) = \left(\frac{a_0}{1 - a_6 I_{3\sigma}} + F_1 \right) . F_3$$

avec $$F_1 = \frac{a_2 (1 + a_5 I_{2\sigma}) \; . \sqrt{J_{2\varepsilon}}}{(1 - a_1 I_{1\sigma} - (a_3 I_{3\sigma})^{1/3})(1 + a_4 I_{2\sigma} \sqrt{J_{2\varepsilon}})}$$

et $$F_3 = 1 + \left(50 \, . \left(1 - \frac{\max \varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\left(1 - \frac{\max \sigma}{\sigma_t}\right)\right)^{-3}$$

Donc uniquement pour décrire le phénomène du radoucissement 6 constantes a1, ... a6 doivent être déterminées ! Et il en est de même pour la description des autres parties du modèle. Ceci est extrèmement gênant car cela signifie que pour un béton donné un grand nombre d'expérience seront nécessaires pour déterminer toutes les constantes ce qui veut dire que le modèle ne peut pas être employé couramment !

De plus, un raffinement de la théorie endochronique qui consiste à lui associer un critère de charge-décharge lui fait perdre beaucoup de son intérêt et, (voir GUDEHUS [56]), la rend discontinue !

II-4.d.2 : Les modèles à surface limite ("bounding surface")

FARDIS et al [65] ont présenté récemment un modèle de ce type. Indépendant du temps, il découle des modèles développés, pour la Mécanique des Sols par MROZ [54] et pour les métaux par DAFALIAS [53].

La philosophie du modèle repose sur l'existence, dans l'espace des contraintes, d'une surface limite ou "bounding surface",

enveloppe de tous les états de contraintes possibles. L'idée force est que c'est la distance à la surface limite dans la direction du chargement qui va déterminer la réponse (cf figure II.7)

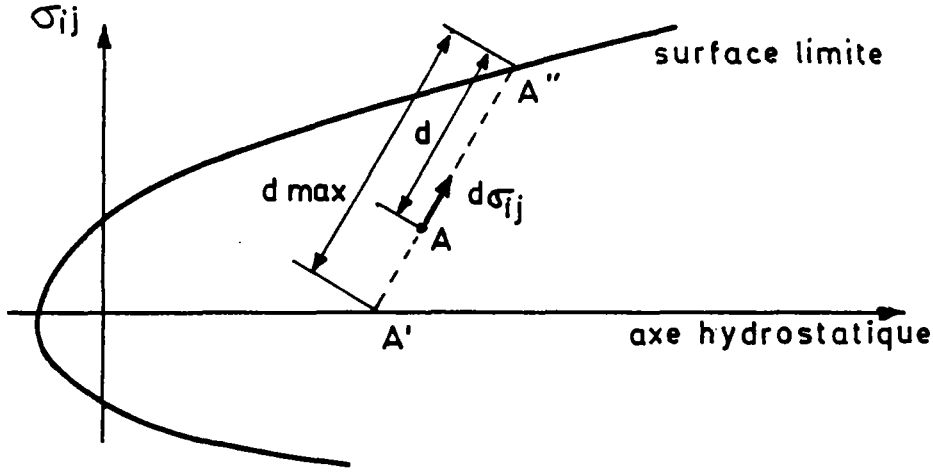


fig. II.7 : le concept de bounding surface.

Le modèle ne nécessite pas alors une dissociation élastique/plastique ; la surface de charge est dégénérée et réduite au point A, état actuel du matériau.

<u>détermination de la surface limite</u> :

C'est évidemment le point crucial du modèle. Remarquons toutefois que du fait de sa définition la surface limite correspond souvent à la surface de rupture (en fait chaque fois que l'histoire des sollicitations est "simple"). Dans les cas ou cette histoire est complexe (les cycles par exemple) les auteurs proposent pour la surface limite :

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{max}) = 0$$

Ou εmax est la déformation principale maximale subie par le matériau durant son histoire.

F est ensuite exprimée en fonction des trois invariants du tenseur de contraintes $I1\sigma$, $J2\sigma$ et $J3\sigma$.

<u>relation contrainte déformation</u> :

Il n'y a donc pas de distinction entre déformation élastique et plastique. Pour déterminer $d\varepsilon ij$, celui-ci est décomposé en

sa partie déviatoire et sa partie "isotrope".

Etudions la partie déviatoire dans le cas du chargement monotone. Se basant sur des résultats expérimentaux les auteurs proposent la relation :

$$\frac{de_{ij}}{s_{ij}} = \frac{d\gamma_{oct}}{\tau_{oct}}$$

avec $\tau_{oct} = \sqrt{\frac{1}{3} s_{ij} s_{ij}}$ contrainte octahédrale

et $\gamma_{oct} = \sqrt{\frac{1}{3} e_{ij} e_{ij}}$ déformation octahédrale

L'hypothèse de linéarité incrémentale est également faite ce qui nous donne :

$$d\gamma_{oct} = \frac{d\tau_{oct}}{H} \qquad \text{d'où} \qquad de_{ij} = \frac{1}{H} s_{ij} \frac{d\tau_{oct}}{\tau_{oct}}$$

H étant un module de cisaillement généralisé, dépendant de l'histoire du matériau. C'est pour déterminer H que va intervenir la surface limite. Reportons nous pour cela à la fig. II.7 où le point A représente l'état actuel de contraintes:

AA" = d, la distance du point actuel à la surface limite dans la direction donnée par $d\sigma_{ij}$

et A'A"= dmax, la distance de l'axe hydrostatique à la surface limite dans la direction donnée par $d\sigma_{ij}$ et passant par A.

On conçoit que lorsque d/dmax→0 alors H→0. On prend alors pour H une variation monotone fonction de ce rapport. Les auteurs obtiennent après calage sur des résultats expérimentaux.

$$H = 16 \cdot \sigma_c \left(\frac{d}{d_{max} \; \varepsilon_{max}} \right)^{0.55}$$

Les problèmes de la méthode apparaissent lors des changements de direction. En effet dans ce cas la valeur de H peut varier brusquement, même si l'on est près de l'axe hydrostatique c'est-à-dire dans un état isotrope. Des règles conservatives sont alors appliquées mais elles font perdre au modèle sa simplicité et surtout elles ne possèdent aucune base physique.

Notons que dans le cas des chargements monotones et proportionnels (c'est-à-dire sans changement de direction) le problème ne se pose pas.

Pour la partie isotrope la notion de surface limite intervient indirectement. d εkk est calculé en 2 parties : l'une due à la composante sphérique du tenseur de contraintes, l'autre à sa composante déviatoire.

Pour la composante sphérique nous avons :

$$d\varepsilon_{kk,o} = \frac{dI_{1\varepsilon}}{3K_t} \quad \text{avec} \quad K_t = \frac{K_o}{1 + I_{1\varepsilon}/3\sigma_c}$$

d'après KOTSOVOS et NEWMANN [79]

Pour la composante déviatoire :

$$d\varepsilon_{kk,d} = \beta \, d\gamma_{oct}$$

(c'est ici que la surface limite intervient :

si $\frac{d}{d_{max}} > 0,1$ alors d εkk, d > 0 milieu compactant

si $\frac{d}{d_{max}} < 0.1$ c'est-à-dire si l'on est près de la surface limite alors d εkk, d < 0 dilatant.

Le point $\frac{d}{d_{max}} = 0,1$ constituant la charge critique)

En combinant l'ensemble des composantes de l'incrément de déformation on obtient finalement :

$$d\varepsilon_{ij} = \left(\frac{\Delta_{ij}}{\tau_o} + \delta_{ij}\frac{\beta}{3}\right)\frac{d\tau_{oct}}{H} + \delta_{ij}\frac{dI_{1\varepsilon}}{9K_t}$$

Conclusion sur le modèle :

L'idée de départ est très séduisante car elle permet de se passer de la surface de charge, la non-linéarité du comportement du béton étant rendue par le biais de la distance à la surface limite. Le gros problème est évidemment la détermination de cette surface. L'autre problème soulevé est celui du changement de direction de chargement.

Mais pour les cas de chargement monotone proportionnel, la surface limite étant confondue avec la surface de rupture, le modèle est vraiment très intéressant car très facile à mettre en oeuvre.

Signalons pour être complet les très récents modèles de YANG, DAFALIAS et HERREMANN [64] et de DAFALIAS [133] qui couplent plasticité et surface limite. Sans entrer davantage dans le détail il nous semble que le fait de réintroduire une surface de charge peut faire perdre de son intérêt au concept de bounding surface.

II-4.d.3 Les lois incrémentales non linéaires de type interpolation :

Comme leur nom l'indique ces lois sont caractérisées par la relation non linéaire existant entre $\dot{\varepsilon}$ et $\hat{\sigma}$. Ainsi il n'existe pas de zone tensorielle ou l'on puisse trouver une relation linéaire entre les deux. Donc par exemple il n'existe pas de zone élastique.

Ces modèles sont définis par la connaissance analytique du comportement du matériau sur des chemins triaxiaux généralisés : les axes principaux de contraintes et déformations sont fixes et confondus deux des contraintes principales sont constantes, la troisième variant (cf fig.II.8 et DARVE [66]) une interpolation, linéaire ou non, étant ensuite faite entre ces chemins pour décrire un chemin quelconque.

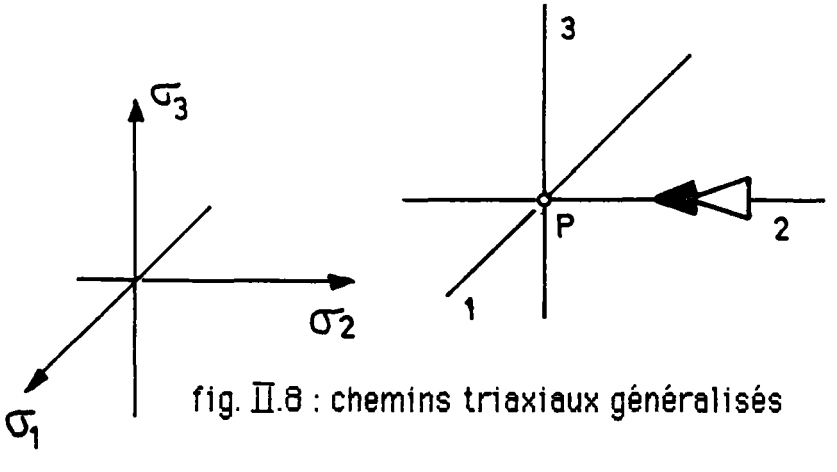


fig. II.8 : chemins triaxiaux généralisés

Si de nombreux modèles de ce type existent pour les sols, à notre connaissance le modèle développé à l'E.N.T.P.E. pour le béton reste unique. C'est ce modèle que nous allons maintenant présenter.

II-5 LE MODELE E.N.T.P.E. :

Nous avons vu dans l'étude expérimentale du béton l'importance du paramètre teneur en eau. Dans ce qui suit, ce paramètre reviendra de façon implicite pour la détermination analytique du comportement du béton sur les chemins triaxiaux généralisés.

II-5.a développement du modèle :

Le modèle est non visqueux donc du type

$$\dot{\varepsilon}_\alpha = M_{\alpha\beta}(u_\gamma) \cdot \hat{\sigma}_\beta$$

Si nous nous replaçons dans E3 nous avons :

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\sim}{G}(\hat{\underset{\sim}{\sigma}})$$

Nous faisons ici une première hypothèse :

H1 : G est orthotrope dans les axes principaux de $\underset{\sim}{\sigma}$

CHAMBON [67] a montré que s'il n'y a pas de paramètres tensoriels de mémoire, cette hypothèse devenait une propriété. Ceci prend toute son importance dans le cas des essais cycliques ou l'état d'inversion $(\sigma_i, \varepsilon_i)$ est le plus souvent paramètre tensoriel de mémoire.

Pour développer le modèle nous allons maintenant utiliser les travaux effectués par WANG [69 à 73] et SMITH [74] sur les fonctions tensorielles isotropes. Comme notre fonction G est orthotrope nous devrons d'abord nous ramener à une fonction isotrope. Or RIVLIN [68] a montré que pour un tenseur symétrique A de $\mathcal{S}$, défini sur une base (V_1, ... Vn) d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$, on avait :

$$\forall A \in \mathcal{S} \qquad G(A) = F(A, V_1, \dots V_n)$$

avec F : $\mathcal{S} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{S}$

Ceci appliqué à notre cas nous donne :

$$[1] \quad \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\sim}{G}(\hat{\underset{\sim}{\sigma}}) = \underset{\sim}{F}(\hat{\underset{\sim}{\sigma}}, \vec{\imath_1}, \vec{\imath_2}, \vec{\imath_3})$$

où $\vec{\imath_1}$, $\vec{\imath_2}$, $\vec{\imath_3}$ sont les vecteurs directeurs des directions d'orthotropie qui constituent bien une base. Comme nous nous sommes ramenés à une fonction isotrope nous pouvons utiliser les résultats de WANG et BOEHLER. Le développement le plus général de F est alors :

$$[2] \quad \underset{\sim}{F}(\hat{\underset{\sim}{\sigma}}, \imath_1, \imath_2, \imath_3) = \alpha_i m_i + \beta_i (m_i \hat{\underset{\sim}{\sigma}} + \hat{\underset{\sim}{\sigma}} m_i) + \gamma_i (m_i \hat{\underset{\sim}{\sigma}}^2 + \hat{\underset{\sim}{\sigma}}^2 m_i)$$

où $m_i = \vec{\imath_i} \otimes \vec{\imath_i}$

et les α_i, β_i, γ_i sont des fonctions de $\mathrm{tr}\, m_j \hat{\underset{\sim}{\sigma}}$, $\mathrm{tr}\, m_j \hat{\underset{\sim}{\sigma}}^2$ et $\mathrm{tr}\, \hat{\underset{\sim}{\sigma}}^3$

Ceci peut aussi s'écrire sous la forme (FAU [81]) :

$$[3] \quad \boxed{F(\hat{\sigma}, \vec{\imath_1}, \vec{\imath_2}, \vec{\imath_3}) = \underset{\sim}{K} + \underset{\sim}{L}\hat{\underset{\sim}{\sigma}} + \hat{\underset{\sim}{\sigma}}\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{M}\hat{\underset{\sim}{\sigma}}^2 + \hat{\underset{\sim}{\sigma}}^2\underset{\sim}{M}}$$

où K, L et M sont des matrices diagonales dans le repère $\vec{\imath_1}, \vec{\imath_2}, \vec{\imath_3}$

Par exemple on a :

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

Le modèle obtenu à ce stade de l'étude est, malgré sa forme séduisante, inopérant du fait que les α_i, β_i et γ_i dépendent de $\hat{\sigma}$. Afin d'obtenir un modèle utilisable nous allons faire les hypothèses suivantes :

$$\alpha_i = a\, \mathrm{tr}\, m_j \hat{\underset{\sim}{\sigma}} + b\, \mathrm{tr}\, m_j \hat{\underset{\sim}{\sigma}}^2 / \|\hat{\underset{\sim}{\sigma}}\|$$

$$\beta_i = \text{cste} \quad ; \quad \gamma_i = \text{cste}$$

Si l'on se replace dans E6, l'équation 3 va alors s'écrire, en tenant compte des hypothèses exprimées qui respectent la condition d'homogénéité, et en regroupant les termes en $\hat{\underset{\sim}{\sigma}}$ et $\hat{\underset{\sim}{\sigma}}^2$:

$$\boxed{\dot{\varepsilon}_\alpha = A_{\alpha\beta} \cdot \hat{\sigma}_\beta + \frac{B_{\alpha\gamma}}{\|\hat{\underset{\sim}{\sigma}}\|} \cdot \hat{\sigma}_\gamma^2}$$

avec

$$A_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & & & \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & & 0 & \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & & & \\ & & & A_{44} & & \\ & 0 & & & A_{55} & \\ & & & & & A_{66} \end{bmatrix}$$

et $B_{\alpha\gamma}$ de la même forme

- $\|\hat{\underset{\sim}{\sigma}}\| = (\hat{\sigma}_{11}^2 + \hat{\sigma}_{22}^2 + \hat{\sigma}_{33}^2 + 2\,\hat{\sigma}_{13}^2 + 2\,\hat{\sigma}_{23}^2 + 2\,\hat{\sigma}_{21}^2)^{1/2}$
- ${}^T\hat{\sigma}^2 = (\hat{\sigma}_{11}^2 + \hat{\sigma}_{12}^2 + \hat{\sigma}_{13}^2, \hat{\sigma}_{21}^2 + \hat{\sigma}_{22}^2 + \hat{\sigma}_{23}^2, \hat{\sigma}_{31}^2 + \hat{\sigma}_{32}^2 + \hat{\sigma}_{33}^2,$
  $\sqrt{2}\,(\hat{\sigma}_{21}\hat{\sigma}_{31} + \hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{23} + \hat{\sigma}_{23}\hat{\sigma}_{33}), \sqrt{2}\,(\hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{31} +$
  $\hat{\sigma}_{12}\hat{\sigma}_{31} + \hat{\sigma}_{31}\hat{\sigma}_{33}), \sqrt{2}\,(\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{12} + \hat{\sigma}_{12}\hat{\sigma}_{22} + \hat{\sigma}_{31}\hat{\sigma}_{23}))$

L'important dans cette formulation réside dans le fait que les coefficients $A_{\alpha\beta}$ et $B_{\alpha\gamma}$ sont cette fois-ci indépendants de $\hat{\sigma}$.

Remarques :

1°) DARVE [66] aboutit à un modèle du même type en partant de l'équation : $\dot{\varepsilon}_\alpha = M_{\alpha\beta}(u_\gamma)\,\hat{\sigma}_\beta$ et en faisant un développement de TAYLOR - MAC LAURIN limité à l'ordre deux de $M_{\alpha\beta}(u_\gamma)$

2°) notre modèle s'exprime par la somme de deux termes l'un linéaire, l'autre non linéaire. Remarquons aussi que le premier terme $A_{\alpha\beta}\,\hat{\sigma}_\beta$ est incrémentalement réversible alors que le second terme ne l'est pas.

3°) On peut voir que nous avons $\dfrac{\hat{\underset{\sim}{\sigma}}^2}{\|\hat{\underset{\sim}{\sigma}}\|} = \underset{\sim}{N}\,\hat{\underset{\sim}{\sigma}}$

avec :

$$\underset{\sim}{N} = \frac{1}{\|\hat{\underset{\sim}{\sigma}}\|}\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11} & 0 & 0 & \frac{\hat{\sigma}_{13}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\hat{\sigma}_{12}}{\sqrt{2}} \\ 0 & \hat{\sigma}_{22} & 0 & 0 & \frac{\hat{\sigma}_{23}}{\sqrt{2}} & \frac{\hat{\sigma}_{12}}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \hat{\sigma}_{33} & \frac{\hat{\sigma}_{31}}{\sqrt{2}} & \frac{\hat{\sigma}_{32}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\hat{\sigma}_{13}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\hat{\sigma}_{13}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\hat{\sigma}_{12}}{\sqrt{2}} & \frac{\hat{\sigma}_{33}}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hat{\sigma}_{23}}{\sqrt{2}} & \frac{\hat{\sigma}_{23}}{\sqrt{2}} & \frac{\hat{\sigma}_{12}}{2} & 0 & \frac{\hat{\sigma}_{31}}{2} \\ \frac{\hat{\sigma}_{12}}{\sqrt{2}} & \frac{\hat{\sigma}_{12}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\hat{\sigma}_{32}}{2} & \frac{\hat{\sigma}_{31}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

et donc $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = (\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{N})\,\hat{\underset{\sim}{\sigma}} = \underset{\sim}{M}(\underset{\sim}{u})\,\hat{\underset{\sim}{\sigma}}$. On retrouve alors dans le cas de la cinématique irrotationnelle les modèles de DARVE et ROBINET[132].

II-5.b <u>détermination des paramètres</u> :

*pour $\alpha, \beta, \gamma \in \{1,2,3\}$

Ainsi que nous l'avons vu dans la présentation générale des lois incrémentales de type interpolation c'est la connaissance analytique du comportement du béton sur des chemins triaxiaux généralisés qui va permettre d'accéder aux coefficients $A_{\alpha\beta}$ et $B_{\alpha\gamma}$.

Soit $\vec{I1}, \vec{I2}, \vec{I3}$ les vecteurs de E6 correspondant à $\vec{i_1}$, $\vec{i_2}$, $\vec{i_3}$ vecteurs unitaires portés par les axes principaux de contraintes et formant une base directe. L'état actuel est l'état de contrainte P. Si nous connaissons analytiquement en ce point P les réponses correspondant aux sollicitations particulières $\pm\,\vec{Ik}\otimes\vec{Ik}$ (voir fig.II.9) on peut déterminer les $A_{\alpha\beta}$ et $B_{\alpha\gamma}$ pour $\alpha,\beta,\gamma \in \{1,2,3\}$ de la manière suivante :
on a analytiquement pour $+\,\vec{Ik}\otimes\vec{Ik}$

$$\sigma_k = f^+(\varepsilon_k) \qquad \text{à } \sigma_i, \sigma_j \text{ constants.}$$
$$\varepsilon_j = g^+(\varepsilon_k)$$

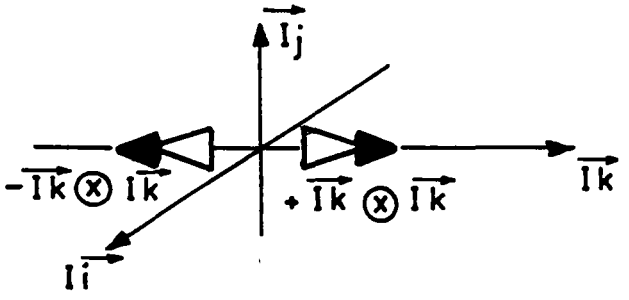


Figure II.9 : sollicitations $\pm\ \vec{Ik} \otimes \vec{Ik}$
(Chemins triaxiaux generalises)

on notera :

$$E_k^+ = \frac{df^+}{d\varepsilon_k} \qquad \text{pseudo module d'Young}$$

$$\nu_k^{j+} = -\frac{dg^+}{d\varepsilon_k} \qquad \text{pseudo coefficient de Poisson}$$

La loi de comportement nous donne quant à elle :

$$\dot{\varepsilon}_k = (A_{kk} + B_{kk})\,\dot{\sigma}_k$$

$$\dot{\varepsilon}_j = (A_{jk} + B_{jk})\,\dot{\sigma}_k$$

soit : $$\frac{\dot{\varepsilon}_k}{\dot{\sigma}_k} = A_{kk} + B_{kk} = \frac{1}{E_k^+}$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_j}{\dot{\sigma}_k} = \frac{\dot{\varepsilon}_j}{\dot{\varepsilon}_k} \cdot \frac{\dot{\varepsilon}_k}{\dot{\sigma}_k} = A_{jk} + B_{jk} = -\frac{\nu_k^{j+}}{E_k^+}$$

de même pour $-\vec{Ik} \otimes \vec{Ik}$ on obtiendra : $A_{kk} - B_{kk} = \dfrac{1}{E_k^-}$

$$A_{jk} - B_{jk} = -\frac{\nu_k^{j-}}{E_k^-}$$

On aura donc finalement en repassant aux indices généraux et en posant $\nu_\alpha^{\alpha\pm} = -1$

$$\boxed{\begin{aligned} A_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\left(\frac{-\nu_\beta^{\alpha+}}{E_\beta^+} + \frac{-\nu_\beta^{\alpha-}}{E_\beta^-}\right) \\ B_{\alpha\gamma} &= \frac{1}{2}\left(\frac{-\nu_\gamma^{\alpha+}}{E_\beta^+} - \frac{-\nu_\gamma^{\alpha-}}{E_\beta^-}\right) \end{aligned}}$$

Donc pour $\alpha,\beta,\gamma \in \{1, 2, 3\}$ les coefficients $A_{\alpha\beta}$ et $B_{\alpha\gamma}$ sont déterminés grâce à la connaissance des fonctions analytiques $f^\pm$, $g^\pm$, $h^\pm$. La teneur en eau, l'état de contrainte actuel,... interviennent au niveau de ces fonctions dont on mesure l'importance. Il nous reste, pour compléter le modèle, à voir les cas ou α, β et γ sont supérieurs à 3.

* $\alpha,\beta,\gamma \in \{4, 5, 6\}$

Remarquons tout d'abord que : $\forall$ i, j $\in \{4, 5, 6\}$ Aij = Bij=o si i $\neq$ j. Donc seuls les coefficients Aii et Bii nous sont nécessaires. Or, d'après le principe d'objectivité ces coefficients sont déterminés par l'histoire des dilatations qu'a subi le matériau. Nous ferons donc l'hypothèse suivante :

pour i $\in \{4,5,6\}$

Aii = f (Ajk,Bjk)
Bii = f'(Ajk,Bjk) avec (j,k) $\in \{1,2,3\}$

Pour déterminer ces relations nous nous servons des travaux de BOEHLER [80] sur les argiles orthotropes. BOEHLER a en effet mis en évidence le fait que les pseudo modules d'Young suivent une loi de variation proche d'une ellipse lorsque l'on fait des rotations autour des axes principaux. Cette hypothèse permet d'obtenir la relation suivante : (SHAROUR [75] et DARVE [45]) :

$$A_{kk} + \sqrt{2}\, B_{kk} = \sqrt{2}\left[(A_{ii} + B_{ii})^2 + (A_{jj} + B_{jj})^2\right]^{1/2}$$
$$- \frac{1}{2}\left(A_{ii} + \frac{1}{\sqrt{2}} B_{ii}\right) - \frac{1}{2}\left(A_{ij} + \frac{1}{\sqrt{2}} B_{ij}\right) - \frac{1}{2}\left(A_{ji} + \frac{1}{\sqrt{2}} B_{ji}\right) - \frac{1}{2}\left(A_{jj} + \frac{1}{\sqrt{2}} B_{jj}\right)$$

où $k \in \{4,5,6\}$
et $i \neq j \in \{1,2,3\}$ obtenus par permutation circulaire (pour k=6 i=1,j=2)

On voit que trois équations seulement pour 6 inconnues sont déterminées. Il est donc obligatoire de refaire un hypothèse : SHAROUR propose d'appliquer l'hypothèse faite précédemment à la partie incrémentalement réversible. Ceci nous donne les trois relations du type:

$$A_{kk} = \sqrt{2}\,\left(A_{ii}^2 + A_{jj}^2\right)^{1/2} - 1/2 \cdot \left(A_{ii} + A_{ij} + A_{ji} + A_{jj}\right)$$

Ainsi tous les coefficients Aij et Bij sont déterminés par la connaissance des pseudo modules d'Young et pseudo coefficients de Poisson, c'est-à-dire par la connaissance du comportement du béton sur les chemins triaxiaux généralisés.

II-5.c <u>Problème de l'interpolation</u>

Un point épineux concernant les modèles de type interpolation a été mis en évidence récemment par P. ROYIS [78]. Pour comprendre ce problème, examinons le cas particulier où $\dot{\sigma} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$. Nous avons alors $\| \dot{\sigma} \| = 1$ et la réponse en vitesse de sollicitation selon la direction 1 vaut :

$$\dot{\varepsilon}_{11} = A_{11}\cos\theta + A_{12}\sin\theta + B_{11}\cos^2\theta + B_{12}\sin^2\theta$$
$$= r_{11}\cos\theta + r_{12}\sin\theta$$

$$r_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_1^+} + \frac{1}{E_1^-}\right)\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_1^+} - \frac{1}{E_1^-}\right)\cos^2\theta$$

Imaginons que nous simulons un essai de compression simple. Et supposons que le pseudo module E_1^+ décroît alors que E_1^- reste sensiblement le même (ce qui correspond aux constatations expérimentales). Traçons alors les graphes $r_{11} = f(\theta)$ avec les hypothèses suivantes :

E_1^- reste fixe et égal à E_{10}^+
E_1^+ diminue de E_{10}^+ jusqu'à 0.

On obtient l'ensemble de graphes suivants :

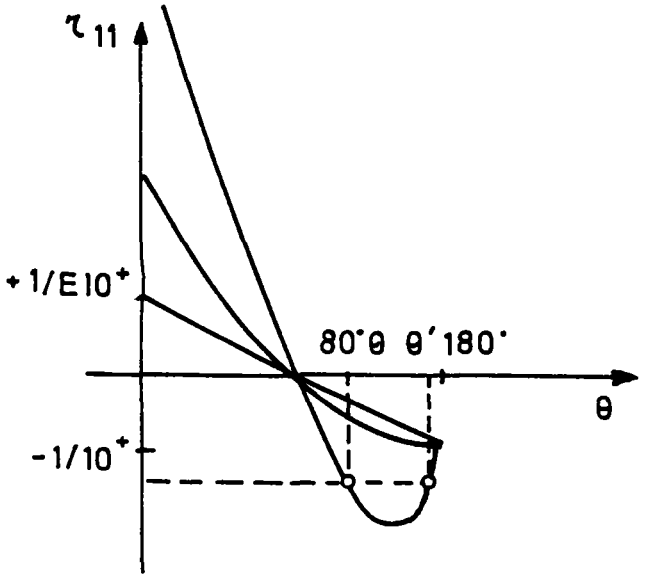


Fig. II.10 : Evolution de τ_{11} en fonction de Θ et de E_1^+

On constate d'après ces graphes qu'il existe une valeur critique de E_1^+ pour laquelle il y a perte de monotonie de l'interpolation. pour notre modèle, cette valeur critique est $E_1^+ = 1/3\ E_{10}^+$. Pour un pseudo module en deçà de cette valeur et à un $\dot{\varepsilon}_1$ donné, vont alors correspondre deux orientations possibles Θ et Θ' pour $\dot{\sigma}$ (voir fig. II. 10). Evidemment, cette perte de bi-univocité doit nous rendre prudent quant à l'utilisation du modèle sous sa forme actuelle dans un code d'éléments finis.

La solution préconisée par P. ROYIS pour éviter cet écueil réside dans la modification de la méthode d'interpolation. En contrepartie la formulation du modèle n'est évidemment plus aussi simple.

C'est pourquoi, et aussi parce que dans ce travail, nous imposerons toujours la contrainte, nous conserverons la formulation présentée. (Il faut noter aussi que pour son modèle, P. ROYIS a besoin exactement des mêmes fonctions $E^{\pm}$, $\nu^{\pm}$ que celles qui nous sont nécessaires. Tout le travail de détermination de ces fonctions serait donc directement transposable.)

CHAPITRE III

ETUDE EXPERIMENTALE

CHAPITRE III - ETUDE EXPERIMENTALE :

Au départ pour déterminer les paramètres relatifs à notre modèle mais aussi pour mieux connaître le comportement du béton, nous avons entrepris la construction d'une presse triaxiale véritable. Ce sont tout d'abord les réflexions que cette construction a imposées que nous allons présenter avant d'examiner les résultats des essais effectués sur la presse.

III-1 Présentation du dispositif expérimental :

III-1.a l'échantillon : géométrie, composition, fabrication, conservation :

Pour tester un matériau sous un état de contraintes multiaxial existent deux types d'essais : soit on exerce des contraintes selon des directions fixes sur un échantillon cubique, soit on superpose à un état triaxial de révolution une torsion, l'échantillon étant alors cylindrique creux :

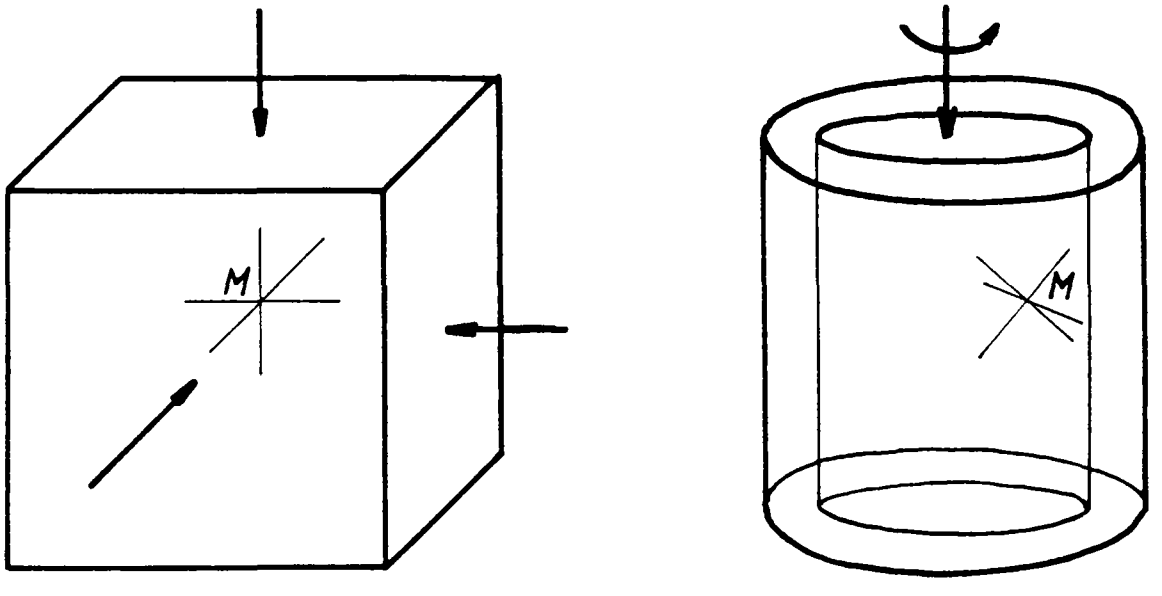


fig. III-1 : les deux types d'essais triaxiaux vrais avec les directions principales en M.

Le deuxième type d'essai est en fait plus complet car il permet l'étude de l'influence de la rotation des axes principaux de contraintes (mesurée par

l'angle α de la figure III-1), sur le comportement du béton. Néanmoins afin de déterminer la part de chacun des facteurs il peut s'avérer nécessaire d'éliminer la rotation, tout en gardant un état triaxial vrai ; il est alors indispensable d'asservir la manipulation afin de maintenir l'angle α constant. Ceci a été réalisé à l'E.N.T.P.E. pour l'argile [82]. Dans le cas du béton la technologie à maîtriser, les vitesses de sollicitation plus importantes ainsi que les dimensions plus grandes des éprouvettes posent de nombreux problèmes (voir par exemple [83]). C'est pourquoi, nous avons choisi le premier type d'essai, d'autant que les résultats qu'il doit fournir sont suffisants pour notre modèle.

La géométrie imposée à l'éprouvette est alors cubique. Mais quelle dimension donner à l'arête du cube ? En effet, nous sommes en présence de deux effets antagonistes : le béton étant un matériau hétérogène, plus l'échantillon est petit moins il sera représentatif. Par contre lorsque l'on augmente les dimensions de l'éprouvette l'effort à exercer pour atteindre des niveaux de contrainte élevés devient considérable. A l'aide d'une formule empirique, citée par GARDNER [84], nous voyons que dans le cas où $\sigma_2 = \sigma_3$ on a :

$$\sigma_1 \text{ rupture} \sim 1{,}5\,\sigma_c + 5\,\sigma_3$$

Soit pour $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c = 30$ MPa $\qquad \sigma_1 \sim 200$ MPa

Si le cube a une arête de 10 cm l'effort à exercer est de 200 T. Pour 15 cm il atteint 450 T. Ne disposant pas d'une dalle d'essai nous avons préféré nous limiter à 200 T, et choisi de tester ainsi des cubes de 10 cm d'arête.

Nous devons maintenant nous intéresser au problème des granulats qui vont rentrer dans la composition de notre béton. Ainsi que nous l'avons vu du premier chapitre les contraintes fluctuent fortement selon que l'on se place sur un granulat, aux abords d'un granulat ou dans la pâte de ciment. La représentativité de l'échantillon dépendra donc du rapport taille des granulats/arête du cube. Pour optimiser ce rapport nous nous sommes servis d'une étude statistique effectuée par KAMEWARA RAO [85]. Dans son travail l'auteur cherchait à dimensionner l'échantillon pour une taille donnée de granulats, problème inverse au nôtre. Pour simplifier notre problème, le béton est assimilé à un mélange de deux constituants : le mortier et les granulats sphériques de diamètre D. On note V_g le volume des granulats et V_m le volume de mortier (donc $V=V_g + V_m$ est celui de l'éprouvette). Le rapport $V_f= V_g / V$ indique la proportion des granulats.

Le nombre moyen de granulats par unité de volume est alors égal à :

$$N = \frac{6 \cdot V_F}{\pi \cdot D^3} \quad (1)$$

d'où le nombre de granulats dans l'échantillon :

$$\lambda = N \cdot V \quad (2)$$

Si le mélange granulats - pate de ciment a été correctement effectué il est légitime de considérer que la distribution des granulats suit une loi de Poisson. La probabilité d'avoir n granulats dans l'échantillon est alors donnée par :

$$P(n) = \frac{\lambda^n \, e^{-\lambda}}{n!} \quad (3)$$

Le paramètre représente également la moyenne et la variance de la distribution. On peut alors introduire un paramètre de forme qui mesure l'importance de l'assymétrie de la distribution : le premier coefficient de Fischer qui dans le cas d'une loi de Poisson vaut :

$$\gamma_1 = 1/\sqrt{\lambda} \quad (4)$$

(ce coefficient permet de quantifier la dispersion des mesures par rapport à la valeur moyenne).

De (2) et (4) on déduit :

$$N = 1 / V \cdot \gamma_1^2$$

ce qui nous donne en substituant dans l'équation (1) :

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\pi \cdot D^3}{6 \cdot V_F \cdot V}} \quad (5)$$

On a donc relié, dans une mesure de la dispersion le diamètre D des granulats et le volume V de l'échantillon. Pour des volumes

V et Vf donnés, on constate que plus le diamètre D est grand, plus la dispersion γ_1 sera importante. Dans le cas qui nous préoccupe (échantillon cubique) nous avons $V = a^3$ (ou a est l'arête du cube). Si l'on veut déterminer le diamètre D en fonction de γ_1 nous aurons :

$$D = a \cdot \left(\frac{6 \cdot Vf \cdot \gamma_1^2}{\pi} \right)^{1/3} \quad (6)$$

En supposant un Vf de l'ordre de 40 % (cas défavorable par rapport à la réalité) et en choisissant un paramètre γ_1 assez contraignant, égal à 5 %, nous obtenons :

D = 12,4 mm

Nous avons alors décidé de nous limiter à un diamètre D égal à 10 mm, ce qui correspond à γ_1 de l'ordre de 4 %, et à un rapport a / D égal à 10.

Remarque : D étant le diamètre maximal des granulats, il est bien sûr défavorable de choisir ce diamètre pour tous les granulats. Par contre le fait de considérer les granulats comme sphériques doit améliorer γ_1 .

Le diamètre maximal de nos granulats étant déterminé, la composition du béton en a découlé :

COMPOSITION AU M3	Poids /m3	densité	Volume/m3
Gravillonsilico-calcaire roulé 4/10 mm région de Seine	1 163 kg	2,62	442 l
Sablesilico-calcaire roulé 0/4 mm région de Seine	733 kg	2,65	275 l
Ciment CPA HP	275 kg	3,14	66 l
Eau	-	-	197 l
Plastifiant liquide BV 40 (dosé à 0,45 % de ciment)	1 234 gr	-	-

Tableau III.2: composition du béton utilisé .

(Si l'on reprend le calcul effectué précédemment nous avons :

$$Vg = 442 + 275 = 717 \text{ l pour } 1 \text{ m}$$

donc ici Vf = 71%, ce qui nous place en sécurité par rapport à notre calcul du diamètre maximal des granulats).

On peut remarquer que notre béton contient une grande quantité d'eau (e / c = 0.7). Ceci est un choix délibéré que nous avons fait dans le but de mettre plus facilement en évidence les phénomènes liés à la teneur en eau du béton.

Fabrication des échantillons :

Après malaxage le béton est coulé dans un moule prismatique de dimensions 154 x 15 x 15 cm. Trois jours après le coulage les cubes ont été extraits par sciage et ensuite les faces ont été rodées. Cette méthode permet d'éviter les effets de parois (cf fig. III-3) ainsi que la remontée de laitance.

fig. III-3 : l'effet de paroi et son élimination.

Les éprouvettes ainsi obtenues étaient alors placées en étuve à 35°C pendant des durées variables afin d'atteindre la teneur en eau recherchée pour chacune. De plus 3 éprouvettes étaient chauffées progressivement jusqu'à 105°C ce qui avait pour effet d'accélérer la cinétique d'hydratation, la perte en poids correspondant alors à peu près à la quantité d'eau superflue. A peu près seulement car si l'hydratation est accélérée, le séchage l'est également. De plus, ainsi que l'a montré Mme REGOURD [86] les produits résultant d'une hydratation à 105°C ne sont pas complètement les mêmes qu'à 35°C et un taux d'hydratation plus faible a

été mis en évidence lorsqu'on augmente la température du béton.

Toutes les éprouvettes ont ensuite été rendues étanches de la manière suivante : elles étaient entourées par un film de polyéthylène puis par 2 feuilles de papier aluminium serrées une à une par un adhésif textile et enfin enrobées d'une résine d'étanchéité appliquée en 3 couches : une couche d'apprêt (résine éponal 336) et deux couches d'efficacité (Eponal 311).

Cette méthode mise au point par M. BELLOC au LCPC, a donné de bons résultats compte tenu de la complexité du problème (quasiment aucune perte en poids). A la fin de cette phase, comme cela a été préconisé au chapitre I, les éprouvettes étaient placées en étuve à température constante (35°C) jusqu'à ce qu'elles soient testées.

Remarques :

- durant la phase de séchage il est clair qu'un gradient de teneur en eau s'établit dans l'éprouvette et que donc des dégradations dues au retrait empêché vont apparaître. Vu la géométrie de notre éprouvette et les délais impartis à l'étude il n'y avait malheureusement pas moyen de faire autrement. Par comparaison PIHLAJAVAARA [37] cité au chapitre I, a laissé ses éprouvettes 2 ans en condition étanche puis 3 ans dans une atmosphère en teneur en eau donnée, soit un total de 5 années avant de les tester !

- ABIAR [35] a constaté, il est vrai avec un revêtement moins sophistiqué, que la résine perdait de son efficacité avec le temps ,ce qui était particulièrement gênant pour l'étude qui le préoccupait : le fluage.

Tableaux III- 4 : calcul de la teneur en eau des éprouvettes testées

notations:

n = numéro de l'éprouvette

Pi = poids initial après façonnage (en g)

Pp = poids au moment de la mise sous protection (en g)

P0 = poids de l'éprouvette sèche (en g)

$$he = \frac{P_i - P_e}{P_i - P_0}$$

Pe = poids au moment de l'essai (en g)

$$h = \frac{P_i - P_e}{P_i - P_o}$$

t = durée sous protection (en mois)

a) série 1

n	Pi	Pp	he%	Pe	h%	t
5	2361,1	2361,1	100	2353,3	92	9,5
10	2360	2267,2	23	2260	17	9,5
13	2362,6	2362,6	100	2352,6	92	10
7	2381,9	2363,3	85	2353,2	76	10
11	2367,6	2330,4	69	2321,2	61	10,5
8	2373,1	2317,4	54	2311	48	10,5
9	2373,5	2299,2	38	2293,6	33	10,5
12	2381	2269	6	2269	6	10,5
6	2381,5	2381,5	100	2372	92	11

b) serie 2 :

n	Pi	Pp	he%	Pe	h%	t
3	2364,6	2364,6	100	2354	90	9
4	2370,2	2370,2	100	2360,5	90	9
5	2369,6	2369,6	100	2360	90	9
6	2378,4	2359,1	83	2348	74	9
7	2379,1	2282,6	19	2278,1	15	9
9	2372,3	2261	6	2261	6	9
10	2369,2	2311,3	50	2302	43	9,5
11	2385,4	2307,3	34	2303	31	9,5
12	2374,1	2332,6	64	2324,7	58	9,5
13	2375,2	2375,2	100	2362,5	89	9,5

III-1.b Présentation générale de la presse :

III-1.b.1 Etude bibliographique :

Avant de présenter l'appareil de l'E.N.T.P.E. il nous a paru important de nous intéresser aux presses triaxiales déjà existantes, et à deux appareils en particulier qui résument assez bien l'ensemble des appareillages existants : l'un, construit au BAM (1) applique les efforts grâce à des vérins et à des appareils d'appuis "solides", l'autre appartenant à l'Université du Colorado (2) soumet le béton à une contrainte multiaxiale par l'intermédiaire d'un fluide. Bien sûr beaucoup d'autres presses existent de par le monde (cf [87]) et en France existe une presse triaxiale véritable chez TOTAL (3) qui la réserve exclusivement à des applications Mécaniques des Roches, mais toutes ces presses, à quelques variantes près, se ramènent aux deux citées précédemment.

La principale différence entre ces deux appareils réside dans les conditions aux limites. En effet, indépendamment des problèmes parasites tels que le frettage dont nous reparlerons ultérieurement, l'ensemble vérin plus appareil d'appui "solide", de rigidité infinie va imposer des conditions en déplacement, alors que l'appui "fluide" de rigidité nulle, va, quant à lui, imposer une contrainte. (en pratique, ceci est à nuancer, ainsi que nous le verrons dans le paragraphe consacré aux appareils d'appui).

---

(1) BAM = Bundes Anstalt für Materialprüfung
Unter den Eichen 87 - D - 1000 Berlin 45

(2) University of Colorado
Départment of civil, Environmental and Architectural Engineering
Boulder, box 42 B, Boulder CO 80 309.

(3) TOTAL CFP
Centre de recherche
laboratoire de stimulation
domaine de Bauplan - route de Versailles
78470 St Remy les Chevreuse.

Interessons-nous d'abord à la presse de l'Université du Colorado. Le principe en est le suivant (fig.III-5) : l'éprouvette est placée à l'intérieur d'un cadre rigide et un fluide sous pression exerce, par l'intermédiaire d'une membrane, une contrainte égale en tout point de la face de l'éprouvette. Sur la figure III-6 on peut voir une vue éclatée de la cellule d'essai.

L'idée principale qui régit cet appareil est bien sûr le fait que l'appui a une rigidité transversale très faible et donc qu'il permet d'appliquer un champ de contrainte très pur et uniforme. Ainsi PARROTT [90] a testé un appareil biaxial conçu selon le même principe, en plaçant un cube en aluminium, instrumenté, sous la presse. Le champ de déformation dans le domaine élastique du métal permet alors de connaître le champ de contrainte. Les champs obtenus à divers niveaux de chargement ont été très uniformes. L'auteur les a comparé ensuite à ceux obtenus avec un appui rigide. On constate dans ce cas une non uniformité flagrante de la distribution des déformations. (fig. III-7). Une expérience analogue effectuée en photoélasticimétrie par ATKINSON et KO [91] sur la presse du Colorado, a permis de vérifier la pureté du champ de contraintes biaxial. Les auteurs indiquent une déviation inférieure à 4 % par rapport à un champ parfait.

Ce type de presse présente également l'avantage de permettre une mesure plus sûre de la contrainte imposée puisque l'on ne passe pas par l'intermédiaire d'un vérin. Enfin pour la même raison l'asservissement de la presse est assez aisé et permet l'obtention de résultats originaux (cf [92]) avec par exemple des chemins de contrainte circulaires autour de l'axe hydrostatique.

Le système de mesure des déplacements est constitué de 6 ensembles de 3 capteurs inductifs qui s'appuient sur chacune des faces. Mais (voir fig. III-6) afin d'améliorer les conditions d'essai, sont intercalés entre le fluide et le béton outre la membrane contenant le fluide sous pression, un appui en polyuréthane et une feuille de cuir (principalement pour que les fluides n'entrent pas en intéraction dans les coins du cadre de chargement). Ce dispositif nécessite alors un étalonnage complet pour chaque chemin de chargement. Cet étalonnage est effectué à l'aide d'un cube en aluminium dont sont connues les caractéristiques mécaniques . Connaissant la contrainte appliquée on peut alors en déduire les déformations autres que celles de l'éprouvette. Un traitement automatique permet ensuite la sortie directe des déformations de l'éprouvette en béton. Cette disposition est évidemment assez lourde (cela

revient à doubler tous les essais) et la répétitivité, malgré tout incertaine, reste une source d'erreurs.

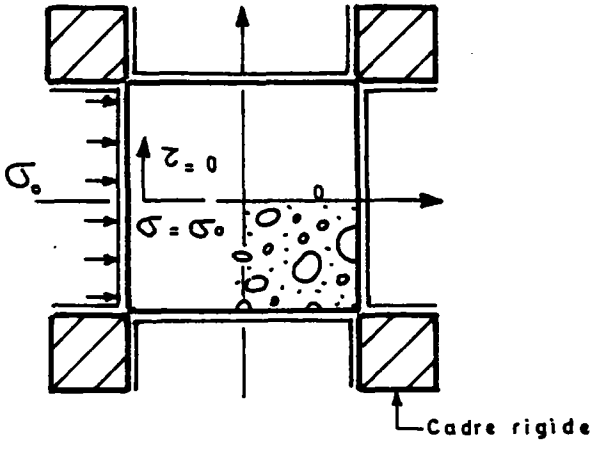


fig. III-5 : principe de l'appui fluide d'après [88].

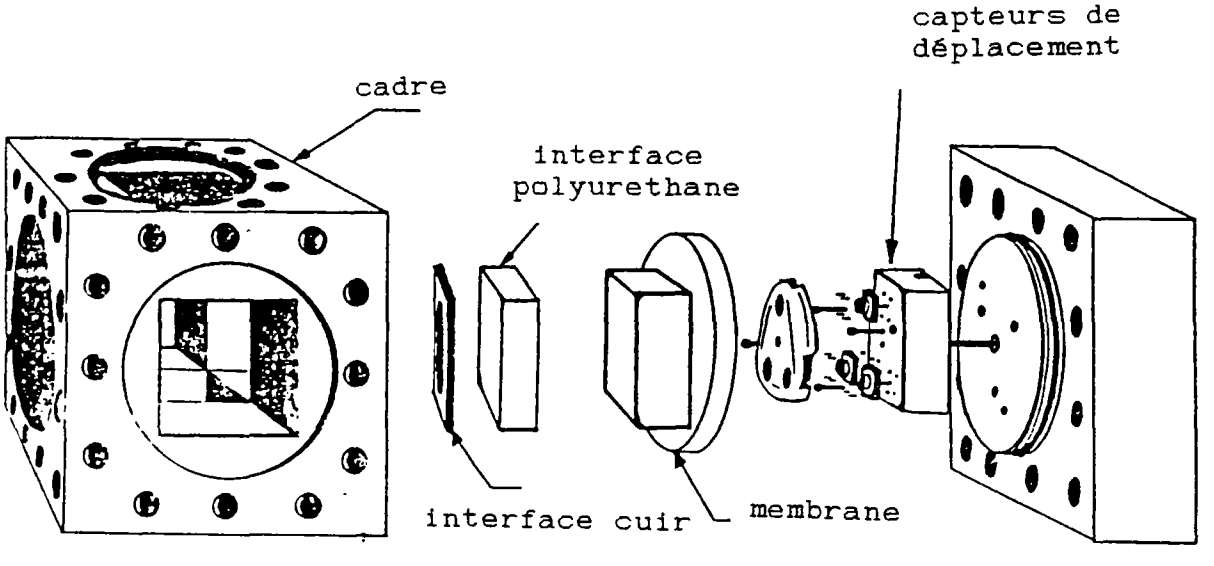
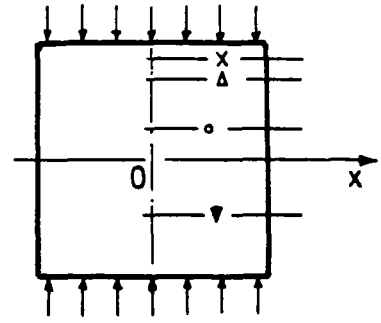
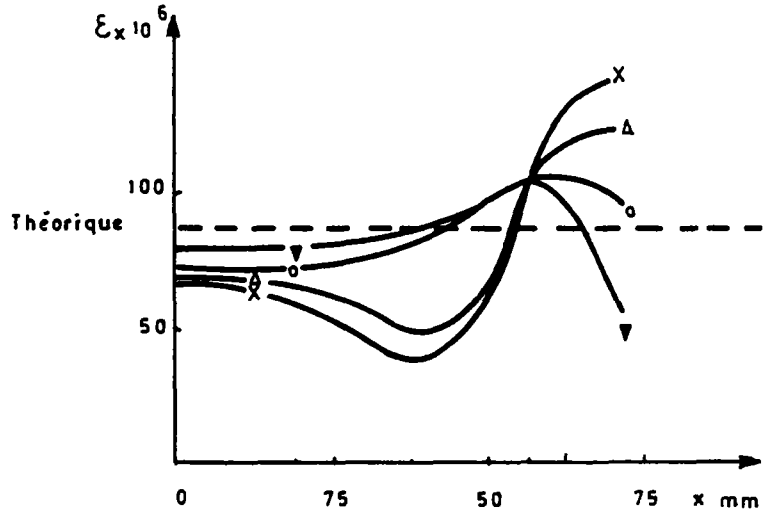


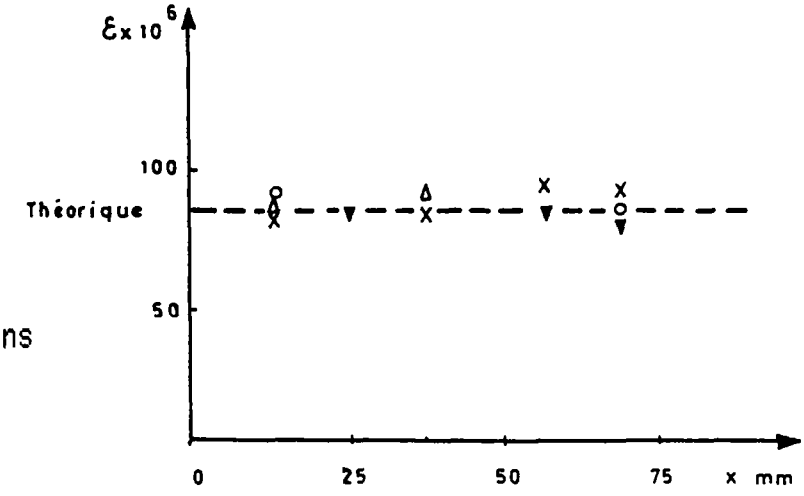
fig. III-6 : cellule d'essai de la presse de l'Université du Colorado d'après [89].



a) implantation des jauges



b) déformations obtenues dans le cas de l'appui solide ;



c) déformations mesurées dans dans le cas de l'appareil d'appui "fluide" ;

fig. III-7 : distribution comparée des déformations pour l'appui solide et l'appui "fluide" (PARROTT [90]).

De plus, ainsi que LINSE [103] l'a montré, lorsqu'un plan de rupture apparait le système est instable (fig. III-8).

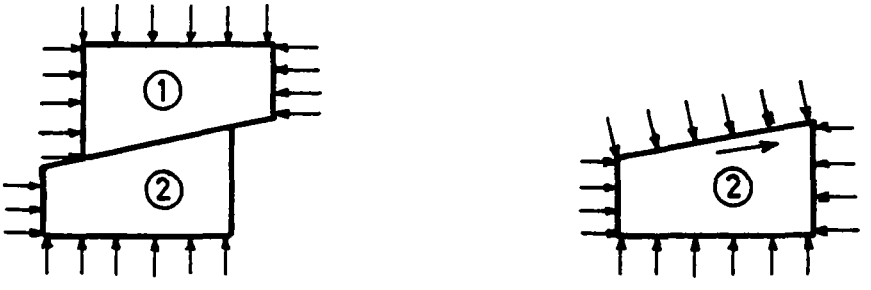


fig. III-8 : instabilité dans le cas de l'appui "fluide"
d'après LINSE [103]

Mais la raison majeure pour laquelle nous n'avons pas retenu ce type d'appareil réside dans le fait qu'il ne peut pas permettre de tractions autres que déviatoires ce qui limite son champ d'action. En effet si la presse du BAM n'a jamais encore servi pour des essais de traction des modifications mineures le permettraient. Ainsi la presse utilisée par VAN MIER [15], qui est exactement du même type que celle du BAM, a permis de tester le béton en traction.

Sur la vue générale de la presse du BAM (fig. III-9) nous constatons qu'elle est constituée de 3 cadres, chacun étant destiné à supporter 2 vérins pour chaque direction de chargement.

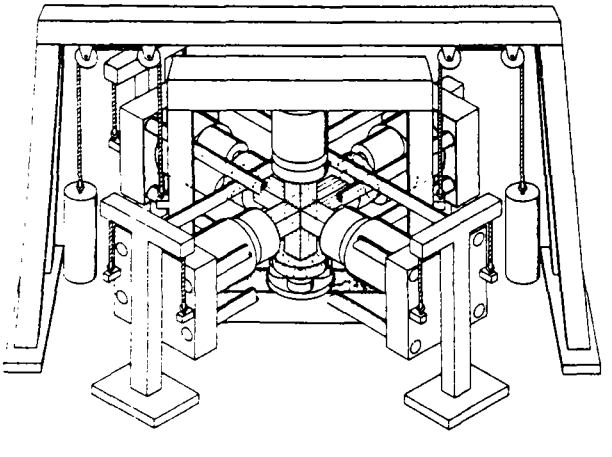


fig. III-9 : la presse triaxiale du BAM [94]

Un contrôle de la pression dans chaque vérin permet un asservissement de force de la presse et ce jusqu'à 2000 KN selon chaque direction. Outre les appareils d'appuis dont nous reparlerons au paragraphe suivant, un des points originaux de l'appareil du BAM réside dans le fait que les 3 cadres de chargement sont indépendants. Ceci est assuré par un système de suspension par contre poids (voir fig. III-9) et permet à la machine de "suivre" en cours d'essai les déformations de l'échantillon dans les directions horizontales et verticales. Le chargement est alors toujours centré (fig. III-10).

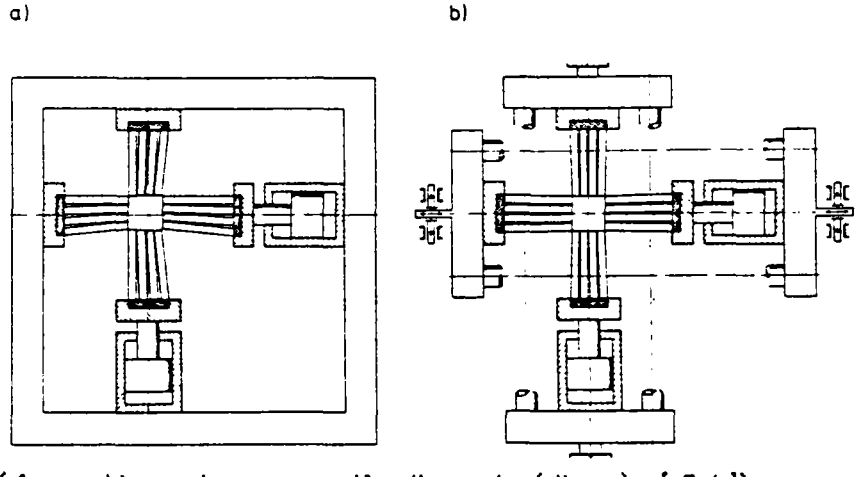


fig. III-10 : déformations des appareils d'appuis (d'après [94]).
a) presse à cadre unique; b) presse à cadres indépendants

Le problème du centrage du chargement a aussi été mis en évidence par BASCOUL [95], et la presse biaxiale de l'INSA de Toulouse comporte un système original permettant à chaque axe de chargement de se déplacer en translation sans frottement. Toutefois nous verrons dans le paragraphe consacré aux appareils d'appuis qu'un choix judicieux de ceux-ci permet d'atténuer fortement les défauts engendrés par l'absence de système de centrage.

III-1.b.2 <u>La presse E.N.T.P.E. - Description générale</u> :

L'E.N.T.P.E. ne disposant pas d'une dalle d'essais, les efforts développés par la presse doivent être repris intérieurement. C'est pourquoi le bâti est constitué d'un cadre fermé réalisé à l'aide de poutrelles d'acier. (cf. fig. III. 11 et photo III .12). En partie supérieure s'appuie le vérin vertical (axe 1), l'effort en partie inférieure s'exerçant par réaction. La presse n'est pour l'instant que biaxiale et le vérin horizontal (axe 2) repose simplement sur un HEM. Mais à la conception ont été prévus la suspension de l'axe 2 et l'installation de l'axe de chargement

n° 3 qui sera identique au n° 2.

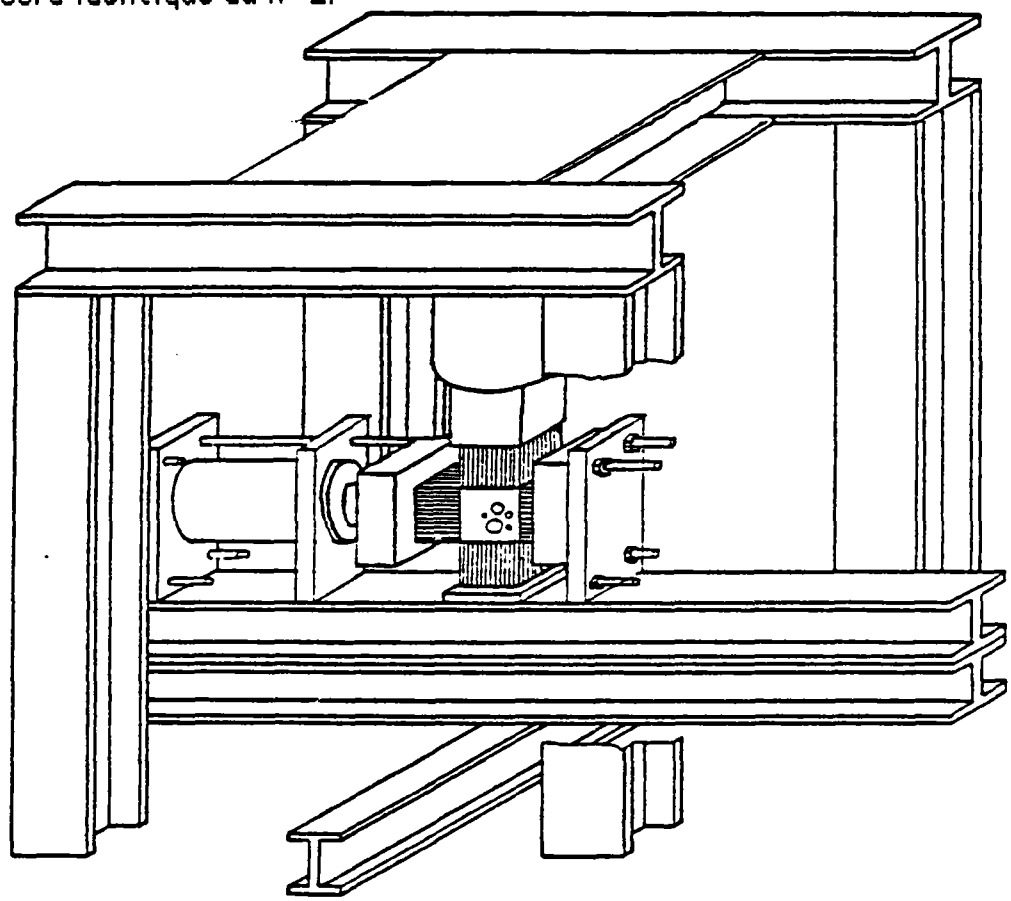


fig. III. 11: la presse ENTPE - schéma de principe

La reprise des efforts dans l'axe 2 est assurée par des tirants de précontrainte. La capacité de chaque axe, (volontairement limitée au niveau des pompes par rapport à la capacité des vérins) est présentée dans le tableau suivant (y figure également le futur toisième axe):

	COMPRESSION	TRACTION
Axe 1	200 MPa	40 MPa
Axe 2	50 MPa	10 MPa
Axe 3	50 MPa	10 MPa

Tableau III. 13 : capacités de la presse E.N.T.P.E.

Les vérins sont munis de valves proportionnelles reliées à des potentiomètres permettant de piloter le niveau de pression ainsi que la vitesse de montée en charge.

Une armoire de commande (photo III.14) permet de regrouper les différentes commandes des pompes alimentant les vérins, les indicateurs de pression ainsi que tous les conditionneurs nécessaires aux différents capteurs. Toutes les mesures sont stockées sur disquettes par l'intermédiaire d'un système HP 85 équipé d'un voltmètre rapide. La figure III.15 résume l'ensemble du dispositif. Le programme d'acquisition est complété par d'autres programmes permettant le tracé de courbes d'étalonnage ou la scrutation de chaque voie de mesure indépendamment. L'asservissement de la presse par l'intermédiaire de servo-valves est également un des axes futurs du développement de la presse (voir fig. III-15).

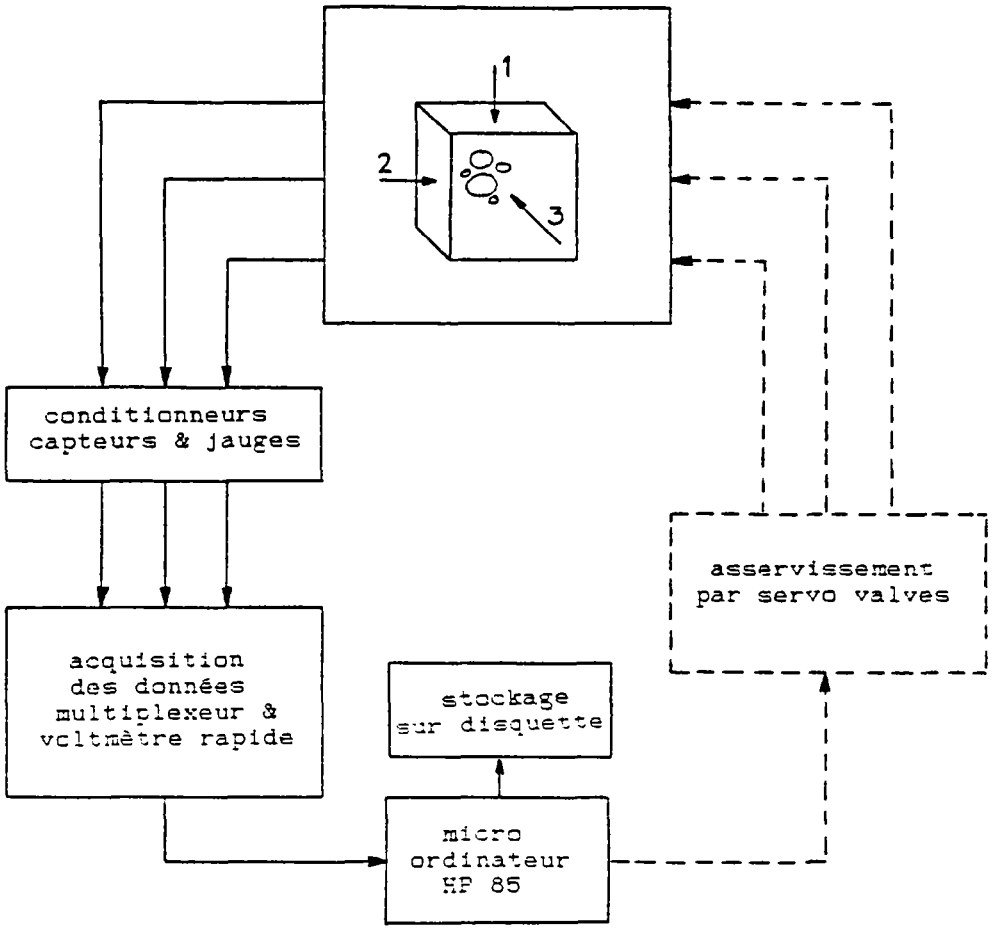


fig. III. 15 : système d'acquisition des données
futur asservissement.

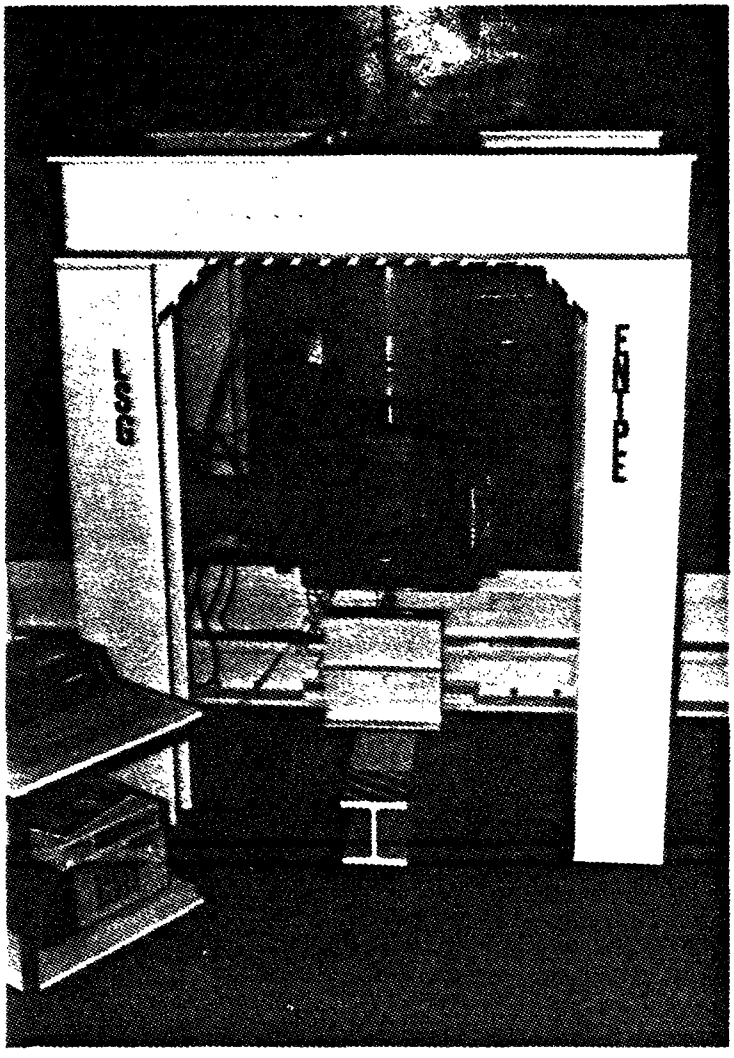


fig. III. 12: la presse ENTPE.

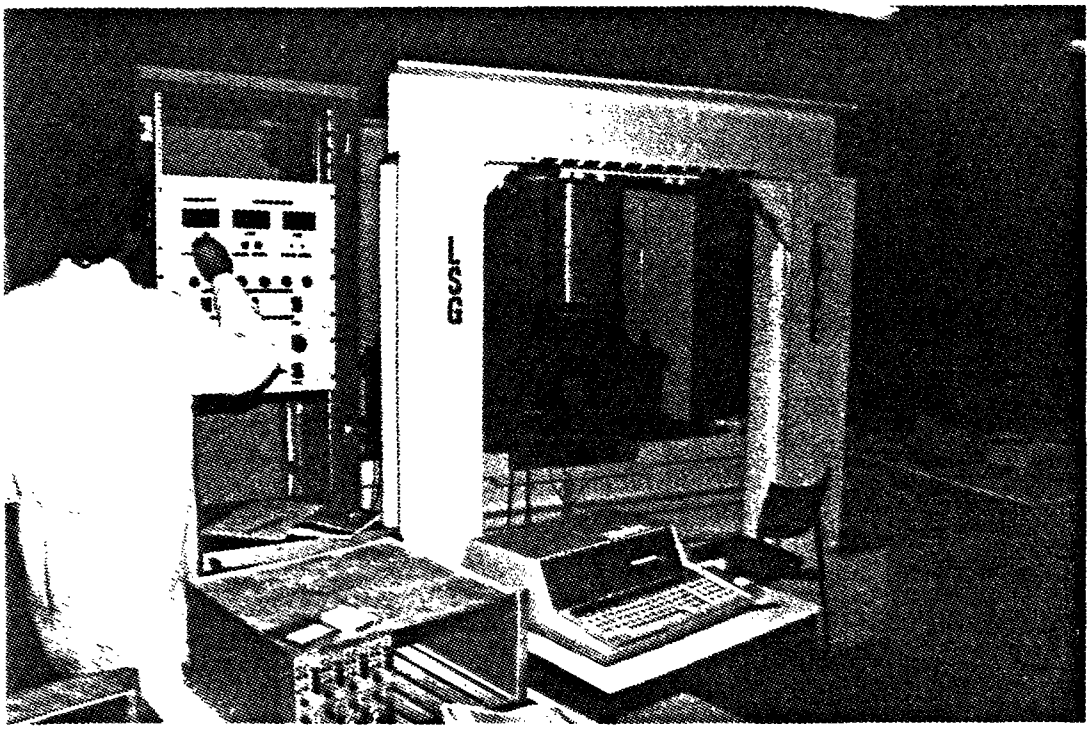


photo III. 14: l'armoire de commande.

III-1.c Les appareils d'appuis :

III-1.c.1 Le frettage :

Lorsque l'appareil d'appui est solide il possède des caractéristiques mécaniques généralement très différentes de celles du matériau à tester. Et par l'intermédiaire du frottement qui existe toujours entre l'appareil d'appui et l'éprouvette apparaît une perturbation des champs de contraintes et de déplacements au niveau des appuis. C'est ce phénomène que l'on nomme frettage. Par exemple, dans le cas où l'appui est un massif en acier et le matériau à tester du béton, on a :

Eacier = 200 000 MPa Ebéton = 20 000 MPa
νacier = 0.30 νbéton = 0.20

Pour un rapport charge-section égal à 20 MPa on a pour les déformations latérales : $\varepsilon_2$acier = 3 . 10^{-5} et $\varepsilon_2$béton = 2 . 10^{-5}.Il est donc clair que le béton a tendance a vouloir se déformer latéralement plus que l'acier, mais le frottement entre les deux matériaux fait qu'il en est empêché (fig. III.16).

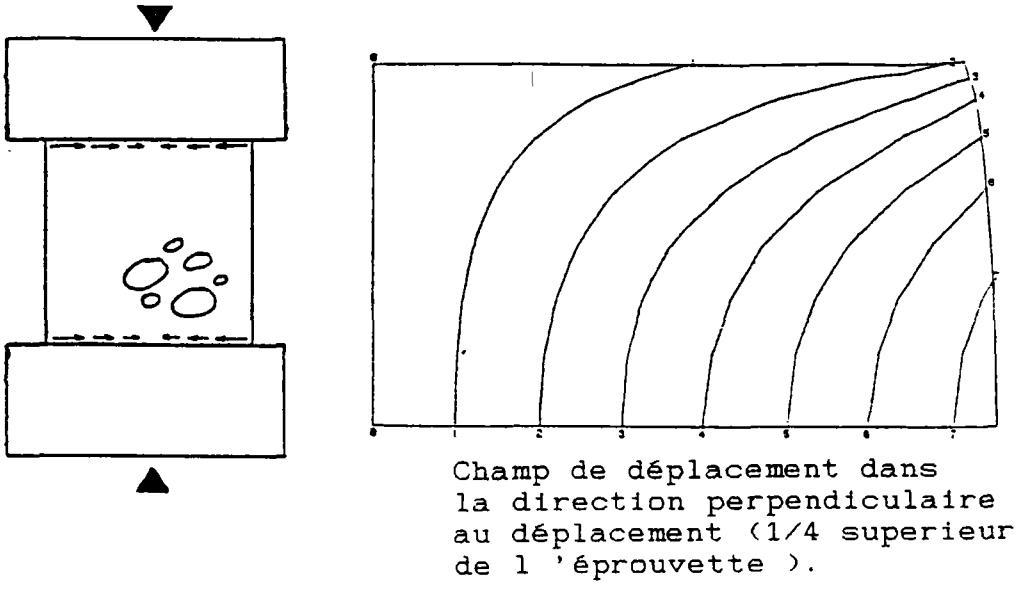
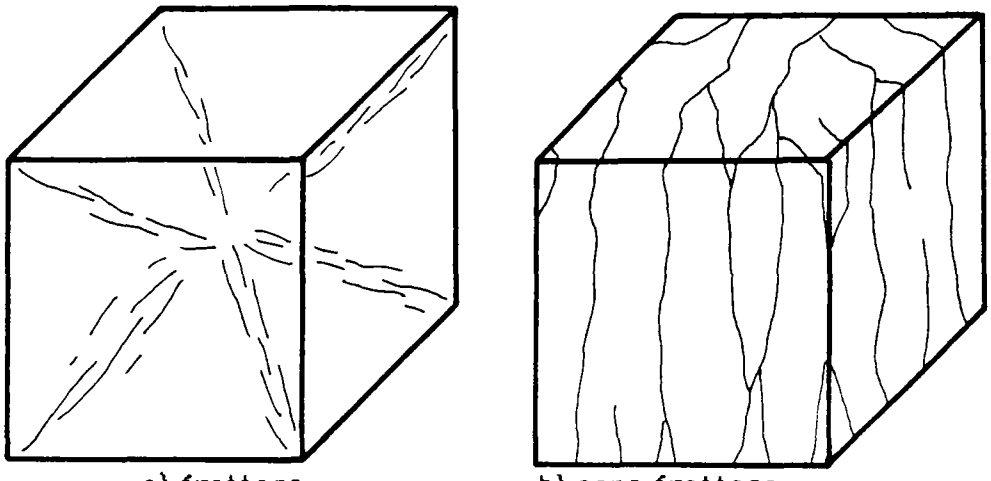


fig. III - 16 : effet du frettage.

Lorsque l'échantillon a un élancement faible les effets de bords sont sensibles dans toute l'éprouvette et le champ de contraintes n'est plus uniaxial mais triaxial, ce qui conduit ainsi qu'on l'a vu au chapitre I à une contrainte à la rupture plus forte. Il y a donc

surestimation de σ_c. De plus la fissuration dans le cas du frettage tend à éviter les zones confinées et donne une rupture en "pyramide" au lieu d'une rupture en "colonnes", caractéristique d'un champ de contrainte uniaxial (fig. III- 17)



a) frettage b) sans frettage

fig. III- 17 : les faciès de rupture en compression simple.

Dans le cas d'essais uniaxiaux la perturbation due au frettage peut être grandement éliminée en augmentant l'élancement. (C'est pour cela que l'éprouvette normalisée pour les essais de compression simple en France est un cylindre d'élancement 2 : hauteur 32 cm, diamètre 16 cm). Bien sûr pour notre cas la géométrie de l 'éprouvette impose un élancement 1. C'est donc sur l'appareil d'appui qu'il va falloir travailler pour pallier le problème.

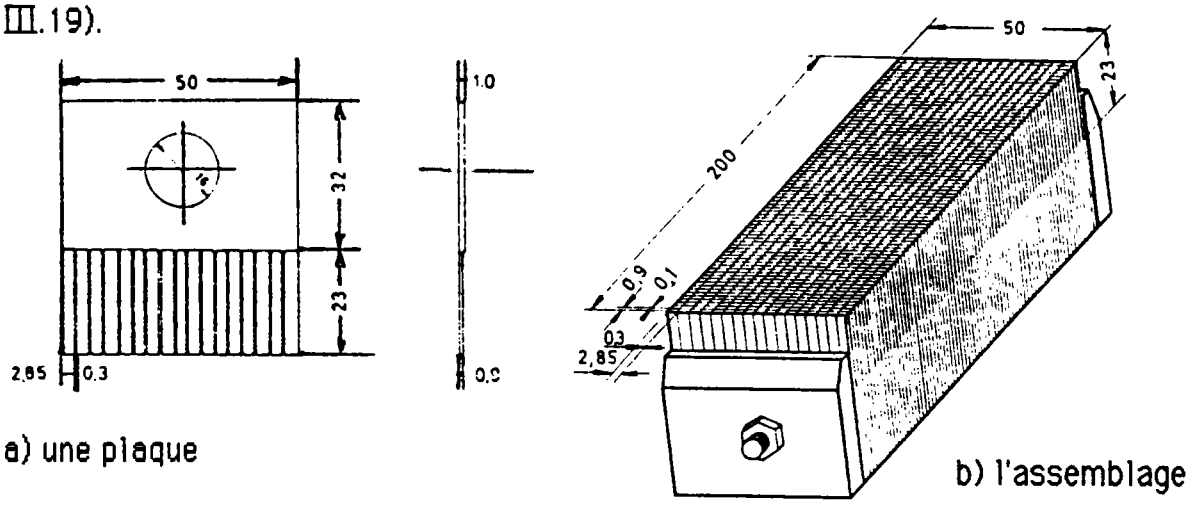
III-1.c.2 <u>étude bibliographique</u> :

Pour supprimer le frettage, la première idée consiste à éliminer le frottement appui-éprouvette. Pour cela HUGUES et BAHRAMIAN [96] ont intercalé entre l'acier et le béton un ensemble composé d'une feuille de polyester, d'une couche de graisse au disulfite de molybdène et d'une feuille d'aluminium. La valeur de la contrainte à la rupture est alors effectivement réduite et les plans de rupture correspondent bien à un champ uniaxial.

Nous n'avons toutefois pas retenu ce dispositif car des essais complémentaires effectués à l'E.N.T.P.E. [97] ont montré ses limites. En effet lorsque la contrainte devient très élevée la feuille d'aluminium a tendance à se percer et le coefficient de frottement réaugmente alors.

Le second moyen d'éliminer le frettage consiste à rendre l'appui déformable latéralement afin qu'il "suive" les déformations du béton. Le premier appui conçu selon ce principe l'a été par HILSDORF [98]. Cet appareil était composé de plaques d'aciers découpées sur une certaine longueur et assemblées (cf fig. III . 18). La flexibilité latérale était alors rendue possible par l'élancement de chaque tige constituant un point d'appui.

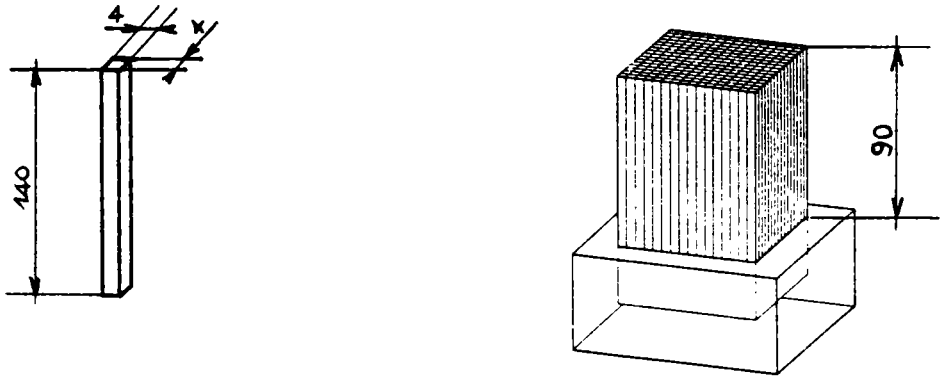
L'interstice entre chaque appui est nécessité par le fait que, sous un état de contraintes multiaxial, la déformation latérale sous appui peut être aussi bien positive que négative. Cet appareil, vu sa géométrie, n'a été utilisé que pour des essais biaxiaux. Pour les essais triaxiaux un appui, reposant sur le même principe, et dit à "peigne", a depuis été mis au point au B A M. L'appui est constitué d'un assemblage de tiges d'acier de section 4 x 4 mm2, espacées de 0,2 mm et encastrées à la base. (fig. III.19).



a) une plaque

b) l'assemblage

fig. III- 18 : l'appareil d'appui de HILSDORF.



a) une tige

b) l'assemblage

fig. III- 19 : l'appareil d'appui à peignes du BAM.

Une étude comparative a été menée au B A M par SCHICKERT [99] avec 3 types d'appareils d'appui : un appui rigide, le même avec des feuilles d'aluminium graissées intercalées entre l'appui et l'éprouvette et enfin l'appareil à peignes. Des essais de compression simple ont été réalisés sur des cubes de 10 cm d'arête sur lesquels étaient collées deux jauges selon la disposition suivante :

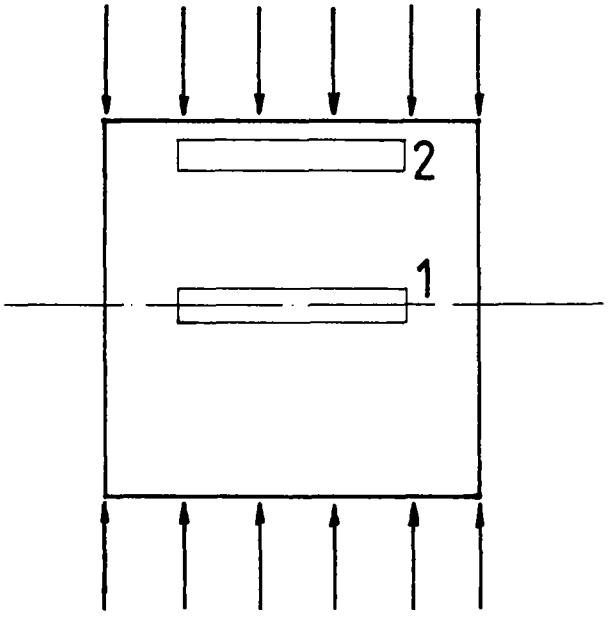


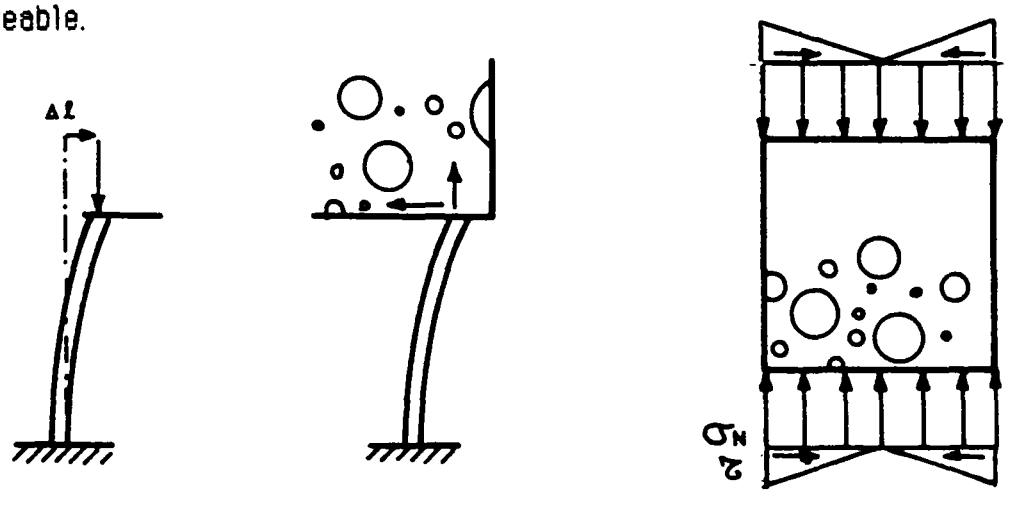
fig. III- 20 : implantation des jauges pour l'essai comparatif des appuis [99]

Les résultats montrent que pour l'appui rigide la déformation sous appui reste très inférieure à celle mesurée au milieu de l'échantillon (ε_2 de l'ordre de 20 % de ε_1 à la rupture). Pour les feuilles d'aluminium graissées, comme cela avait été constaté à l'E.N.T.P.E., il y a une perte d'efficacité lorsque l'on s'approche de la rupture : $\varepsilon_2 \sim 45\ \%.\varepsilon_1$ L'appui à peignes, sans être parfait, présente l'avantage d'avoir un comportement constant tout au long de l'essai : $\varepsilon_2 \sim 50\ \%.\varepsilon_1$. Pour la résistance en compression simple, les résultats obtenus par SCHICKERT sont les suivants :

Appui	rigide	feuilles d'alu	appui à peignes
moyen (MPa)	46,9	43,2	37,9

L'appui à peignes montre donc son efficacité à diminuer les effets du frettage. Un point toutefois à souligner : les tiges d'acier sont sollicitées de telle manière qu'elles induisent un cisaillement en surface de l'échantillon (cf fig.III.21)

Toutefois, VAN MIER [15] a montré que pour un tel appui, le cisaillement maximum restait très faible jusqu'au pic de contrainte (cf fig. III . 22). Dans notre étude, où nous nous limiterons à la partie ascendante de la courbe contrainte déformation ce cisaillement sera donc négligeable.



a) efforts appliqués sur une tige.

b) efforts appliqués par une tige

c) champ de contrainte exercé sur l'échantillon.

fig. III . 21 : cisaillement induit par l'appui.

Indépendamment de la réduction des effets du frettage l'appui à peignes présente un autre avantage : il réduit les effets négatifs dus à l'absence de dispositif de centrage des efforts en cours d'essai, effets dont nous avons déjà parlé (cf III-1.b.1).

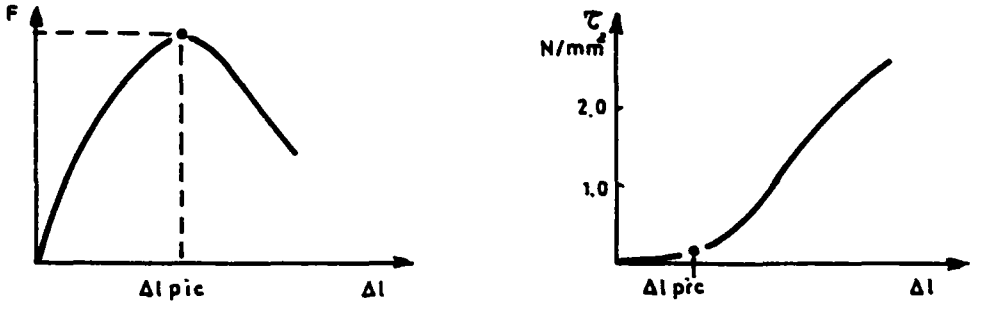


fig III- 22 : estimation du cisaillement induit dans le cas de la compression simple (d'après [15]).

WINKLER, au B A M, a réalisé des essais en bloquant les mouvements relatifs des axes de sa presse. Il a pu alors comparer contraintes et déformations dans les cas où les axes sont dépendants ou indépendants. Il a également testé l'influence de l'appareil d'appui utilisé dans les deux cas. Les résultats sont les suivants : du point de vue déformation et contrainte à la rupture les valeurs obtenues sont très proches dans le cas de l'appareil d'appui à peignes, que les cadres soient indépendants ou non, alors que ce facteur est primordial pour l'appui rigide. (cf fig.III-23 et fig. III - 24).

Il est toutefois certain que des axes indépendants constituent une meilleure solution et que la presse de l'E.N.T.P.E. devra évoluer, ainsi que cela est prévu, vers cette configuration la distribution des efforts étant alors plus symétrique. (fig. III . 25).

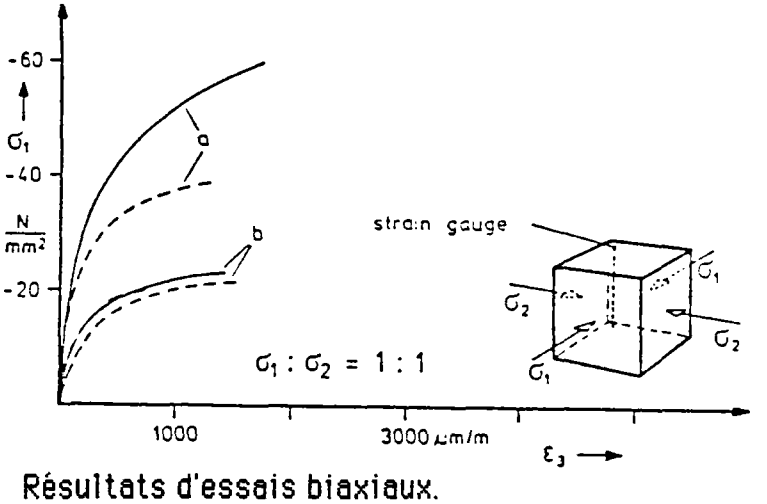


fig . III. 23 : Résultats d'essais biaxiaux.
cadres indépendants : ----- a) appuis rigides
cadres dépendants : ——— b) appuis à peignes

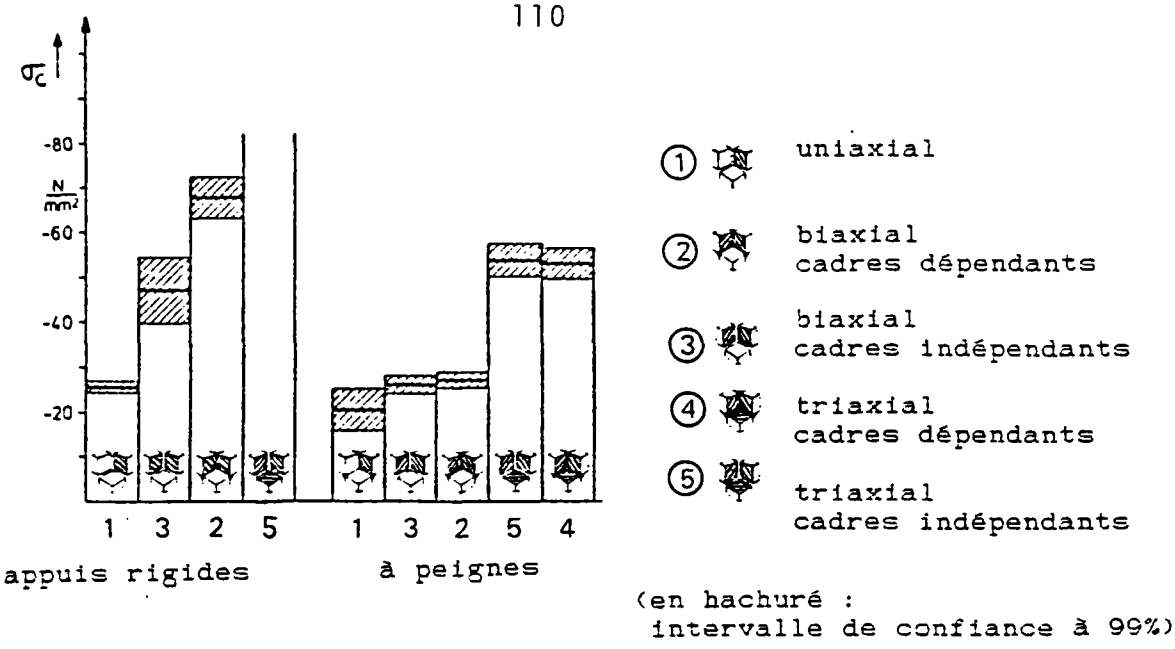


fig. III. 24 : Influence de la machine d'essai sur la résistance.

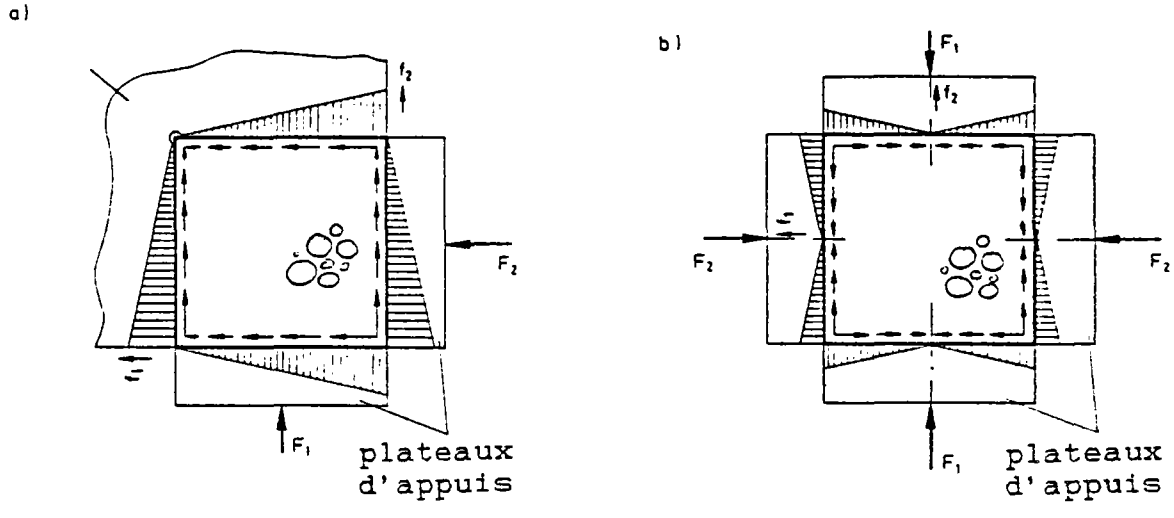


fig . III. 25 : résultante des efforts : a) cadres dépendants
b) cadres indépendants

Nous avons vu jusque là les avantages de l'appui à peignes. Malheureusement celui-ci a également des défauts : comme il n'a plus une rigidité infinie on ne peut plus affirmer que cet appareil va imposer un déplacement. La déformée de l'appui est donnée à la figure III.26.

Toutefois les mesures effectuées à l'aide de jauges par VAN MIER montrent une faible dispersion au niveau des déformations en tout cas pour ce qui concerne la partie précédant le pic de contraintes. Le fait que malgré tout on ne maîtrise plus parfaitement les conditions aux limites imposées par ce type d'appui a conduit le B A M à développer un nouvel appui qui imposerait une contrainte tout en évitant le frettage. (on rejoint là les presses à appui "fluide", tout en ménageant la possibilité d'effectuer des essais de traction en changeant toutefois les appuis).

Le dernier appareil d'appui construit au B A M est composé de paquets de tiges d'acier collées à leur base et constituant un piston, l'ensemble des pistons reposant sur un élastomère qui à hautes pressions, agit comme un fluide. (fig. III. 27). La condition imposée est alors une condition de contrainte moyenne, chaque piston exerçant le même effort sur le cube de béton. On n'est tout de même pas comme dans l'appui "fluide" en contrainte locale imposée.

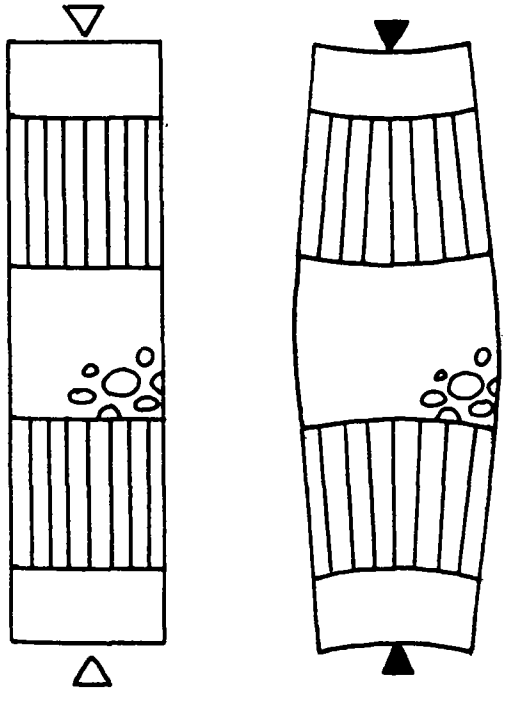


fig. III . 26 : conditions aux limites imposées par l'appui à peignes d'après VAN MIER [15].

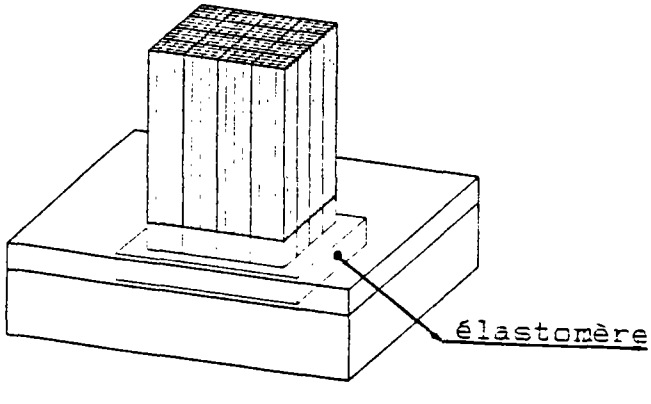


Fig. III.27: l'appareil d'appui pistons-peignes [87]

Nous pouvons maintenant présenter un tableau récapitulatif des différents appareils d'appui avec leurs avantages et inconvénients.

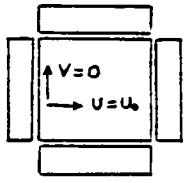
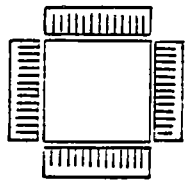
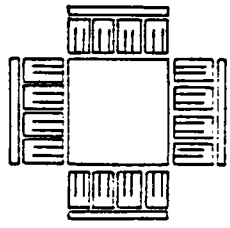
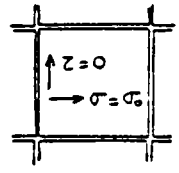
APPUI	RIGIDE	PEIGNES	PISTONS/PEIGNES	FLUIDE
frettage	OUI	NON	NON	NON
traction	OUI	OUI	NON	NON
condition aux limites	déplacement 	déplacement (avec réserves) 	contrainte (moyenne) 	contrainte 

Tableau III- 28 : Récapitulatif des différents appareils d'appui.

III-1.c.3 : L'appareil d'appui E.N.T.P.E.

Parce qu'il présente un bon équilibre entre avantages et difficultés de réalisation, notre choix s'est porté sur l'appareil d'appui à peignes. Pour compléter l'étude bibliographique nous avons réalisé une étude qualitative par photoélasticimétrie.

Rappelons que la photoélasticité est la science qui étudie les effets sur la lumière des contraintes appliquées à un corps élastique. Ainsi lorsque l'on charge un matériau photoélastique apparaissent des lignes isochromatiques correspondant à les lignes d'isocisaillement. (pour plus de renseignements voir [101]). Cette propriété est utilisée comme méthode d'étude (photoélasticimétrie).

Pour le problème qui nous intéresse nous avons étudié par transmission le comportement d'une plaque carrée soumise à une compression simple [100]. Deux types d'appui étaient utilisés : un appui rigide et un appui à peignes réalisé pour l'occasion en polyéthylène. De plus

les appuis étaient combinés ou non avec une rotule.

Les résultats sont présentés sur les figures III-29 à III -32 . Si le champ des contraintes est homogène la teinte de toute la plaque est la même. Donc au contraire plus sont visibles un grand nombre d'isochromatiques, moins le champ des contraintes est homogène. Ainsi on peut constater que l'appui à peigne permet effectivement d'obtenir un "bon" champ de contraintes. Grâce à la photoélasticimétrie on peut aussi noter les effets limités de la discontinuité de l'appui, ainsi que l'influence de la rotule qui permet dans le cas de l'appui rigide de réaliser la symétrie du champ des contraintes, en palliant les défauts de parallélisme du cube.

Notre appareil d'appui sera donc rotulé, la rotule servant uniquement à la mise en place pour rattraper les défauts de fabrication des cubes. (En effet, s'il est aisé d'obtenir une bonne planéïté de chaque face, l'orthogonalité est plus difficile à atteindre). Lors de l'essai, lorsque les efforts deviennent importants, les frottements font que la rotule va se bloquer et permettre de reprendre les moments engendrés par une homogénéïté non parfaite de l'éprouvette. (voir BRETONNIERE [93] qui discute l'influence des conditions encastré/rotulé).

Pour l'axe 1 nous n'avions prévu au départ qu'un seul appui rotulé. En effet un cube ayant 6 faces, si une d'entre elles sert de référence, 5 rotules rattrapent les défauts d'orthogonalité. Or des essais préliminaires ont montré une mauvaise mise en place avec un tel système. Ceci avait déjà été mis en évidence sur une presse biaxiale par BASCOUL [104]. Tous les appareils d'appui sont donc identiques et rotulés.

Le principe d'un appui à peignes étant retenu, reste le problème du dimensionnement des tiges. Pour des raisons de fabrication nous avons retenu pour la section 5 x 5 mm, les tiges étant espacées de 0,2 mm à l'aide de clinquant. Ce qui nous donne 19 tiges sur chaque direction et donc une largeur totale de l'appui égale à 19 x 5 + 18 x 0,2 soit 98,6 mm. La dimension restant à déterminer est alors la longueur libre des tiges .

Pour cela nous devons considérer 2 conditions :

1°) on ne doit pas dépasser la limite d'élasticité du matériau.

2°) on ne doit pas atteindre sa charge critique de

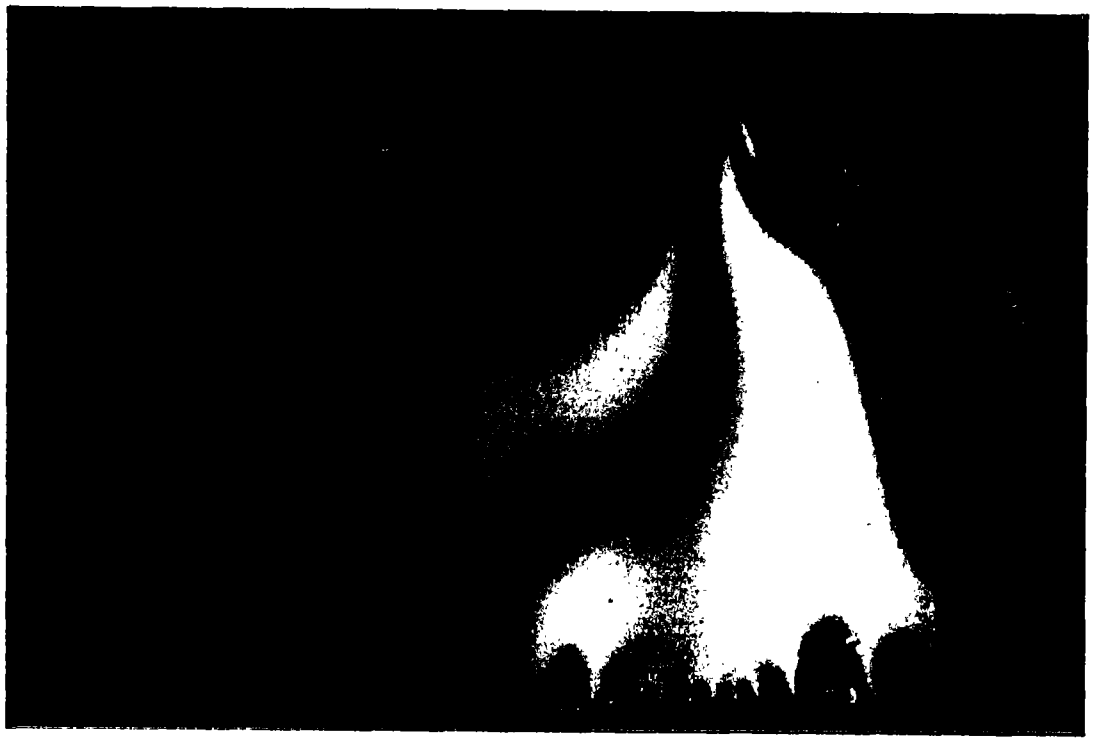


fig. III- 29 : photoélasticimétrie. appareil d'appui rigide non rotulé.

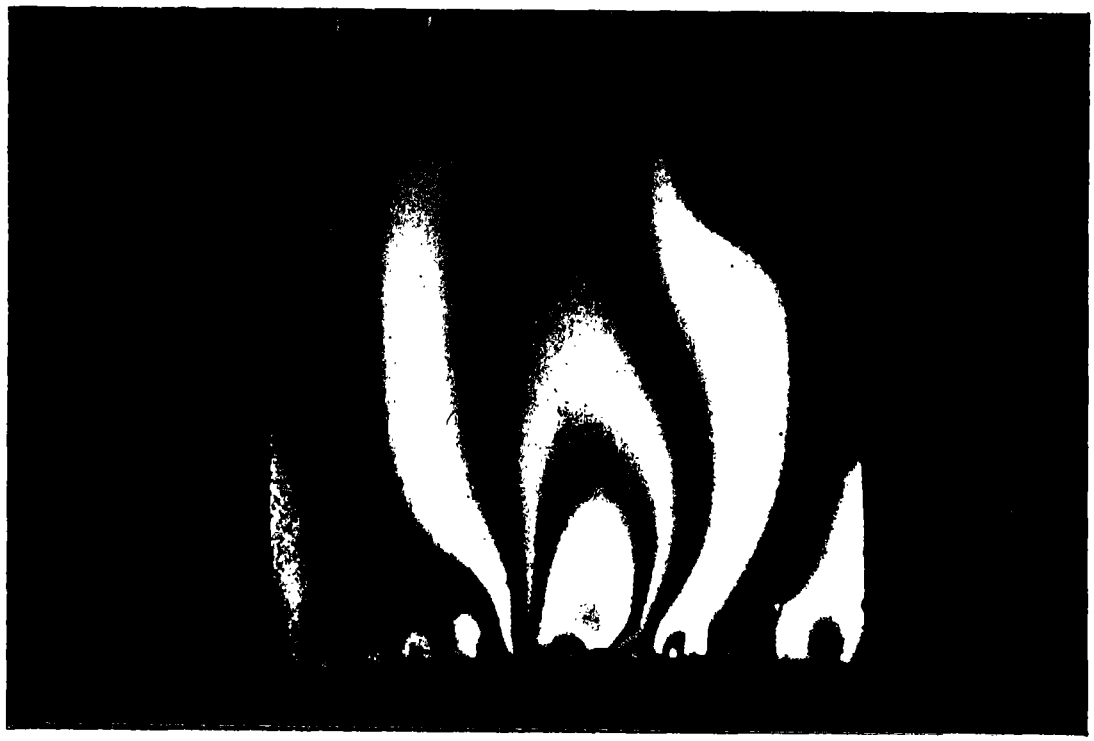


fig. III-30 : photoélasticimétrie. appareil d'appui rigide rotulé.

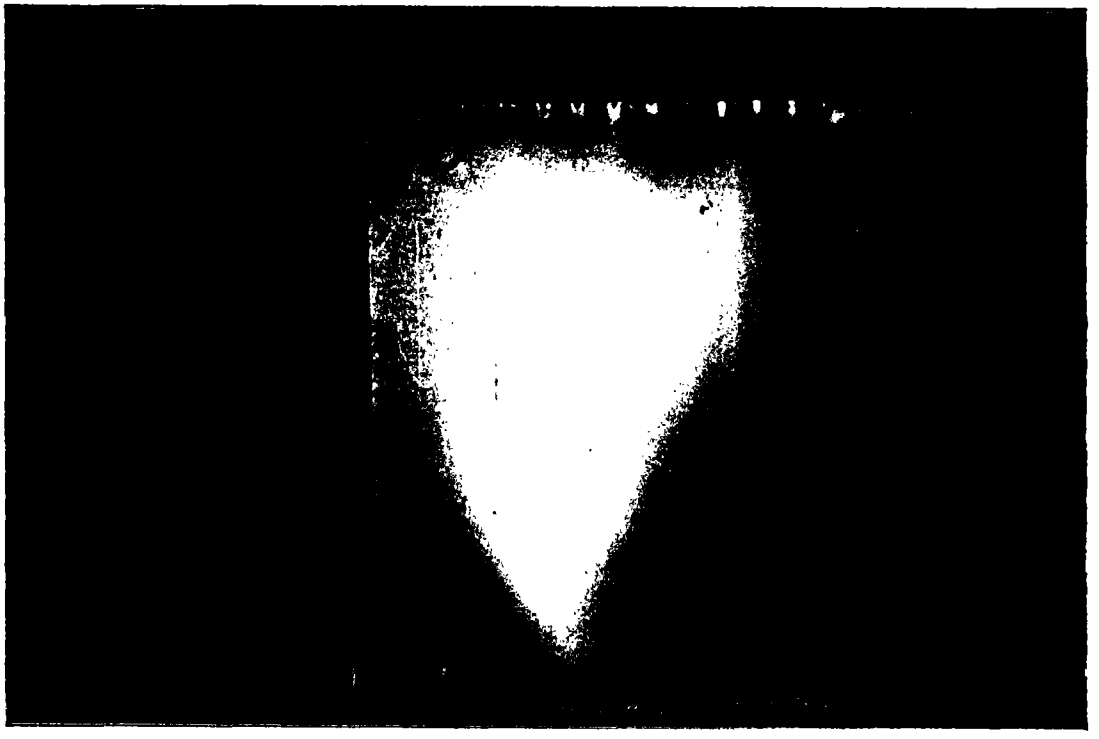


fig. III- 31: photoélasticimétrie. appui à peigne non rotulé.

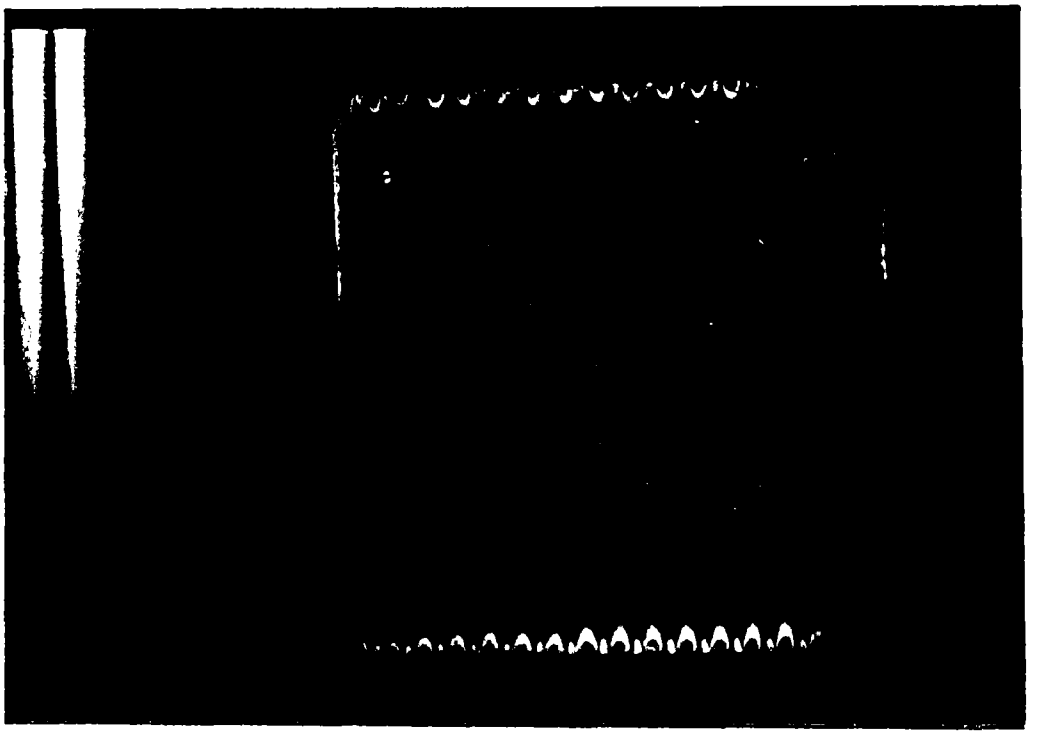


fig. III-32 : photoélasticimétrie appui à peigne rotulé.

flambement.

Etudions tout d'abord la première condition. La section de chaque tige est de 25 mm2. La limite d'élasticité de l'acier employé est de 240 MPa. On obtient alors une charge limite par tige égale à 6000 N. Comme nous avons 19 x 19 soit 361 tiges, cela correspond à une charge totale de 6000x361=2166 kN soit 216 T , ce qui est supérieur à la charge maximale que peut exercer notre presse. La première condition n'influe donc pas sur le dimensionnement.

Voyons la deuxième et examinons tout d'abord les conditions aux limites des tiges, paramètre important dans le calcul d'une charge limite. D'un côté les tiges sont encastrées par construction. De l'autre, au contact du béton, cela est moins net. En fait la condition doit être intermédiaire entre un appui libre et un appui encastré. Le tableau III-33 donne alors les longueurs correspondantes dans la formule d'Euler:

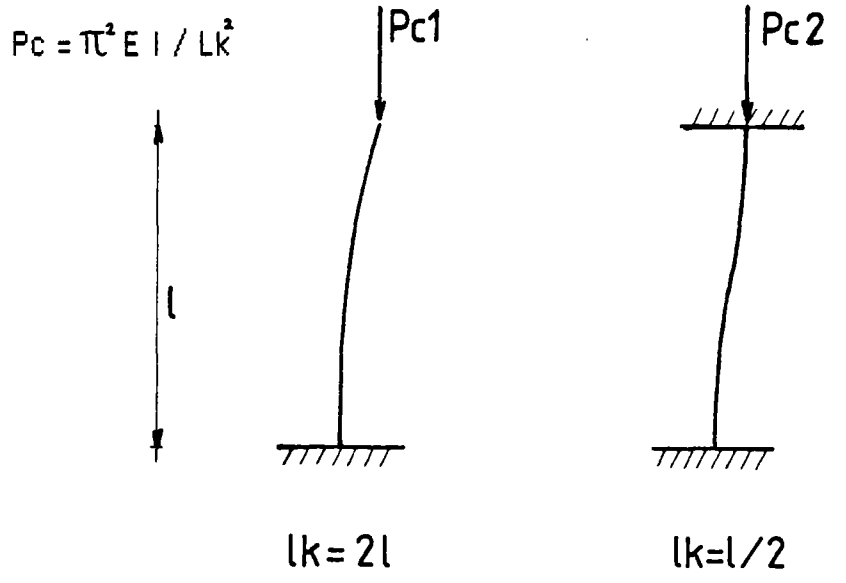


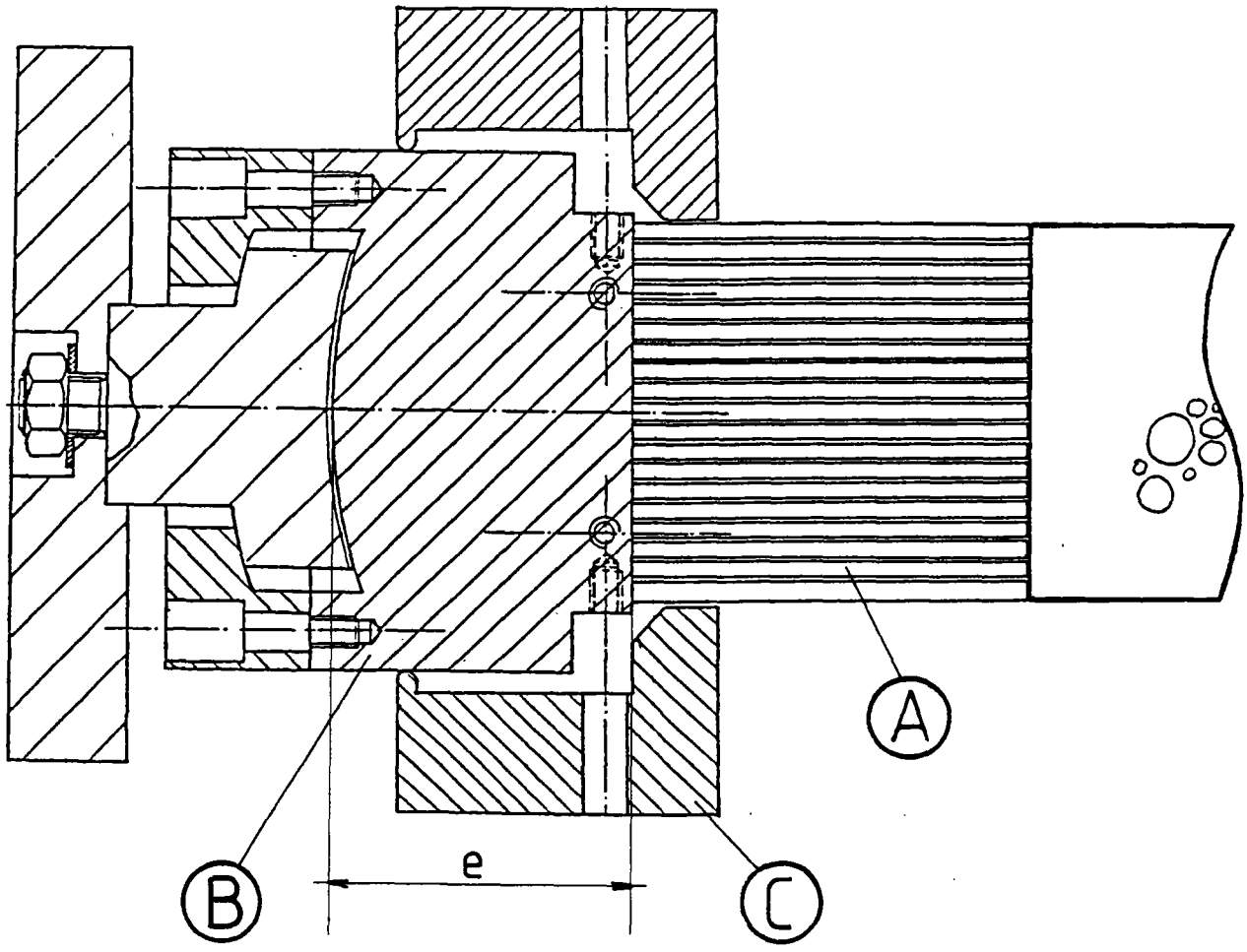
tableau III- 33 : conditions aux limites des tiges.

Pour une longueur libre l = 80 mm on obtient alors :

Pc1 = 4020 N et Pc2 > 6000 N

Le flambement dans le cas n° 2 ne pourra donc apparaître. La charge Pc1 correspond, elle, à une charge totale égale à 145 T. Pour les essais uniaxiaux et biaxiaux la charge totale restera largement inférieure à cette valeur. De même pour la plupart des essais triaxiaux. On peut toutefois s'inquiéter pour les essais triaxiaux à pression moyenne élevée. Il semble toutefois que, dans ce cas, on se rapproche du cas n° 2 du

tableau III. 33 (voir LINSE [103] à ce sujet). Nous avons donc adopté 80 mm comme longueur libre de nos tiges. Les principales caractéristiques de l'appui sont alors déterminées et présentées à la fig. III. 34 .



A: peignes
B: socle
C: brides

fig. III-34: l'appareil d'appui E.N.T.P.E.

Difficultés rencontrées :

Les problèmes expérimentaux se sont focalisés au niveau de l'encastrement des tiges. En effet , pour simplifier notre appui et pour faciliter le remplacement éventuel de tiges, celles-ci sont simplement posées sur le socle B et maintenues sérrées au moyen des brides C (voir

figure III. 34). Le premier dimensionnement de ces brides conduisait malheureusement, lorsque l'effort latéral dans les tiges devenait trop important, à une rotation de celles-ci ou à bien un cisaillement des vis de serrage, empêchant par la même un fonctionnement correct de l'appui. Ce n'est qu'après plusieurs modifications que l'appui a pu prendre sa forme définitive et opérationnelle.

Notons aussi que l'appui nécessite un état de surface parfaitement plan ce qui implique un démontage régulier afin de procéder à un resurfaçage. Des améliorations sont certainement possibles de ce point de vue : coller à leurs bases, par exemple, les tiges, par paquets de 16 qui seraient interchangeables.

Conditions aux limites, champs exercés:

Le problème du fonctionnement réel de l'appui se posant nous avons décidé une étude numérique au moyen du programme par élements finis de P. ROYIS [78]. Nous en avons profité pour faire varier différents paramètres et pour comparer les résultats obtenus avec ceux résultant de l'emploi d'un appareil d'appui massif [105]. Dans les différents maillages (fig. III. 35) le déplacement a été imposé au niveau de la rotule, et nous avons fait varier, outre le type d'appui, la distance entre la rotule et le béton (ceci pour tenir compte d'une flexion possible de l'appui dans sa partie massive. En raison des symétries, 1/4 de l'éprouvette a été maillé avec une moitié de chaque appareil d'appui.

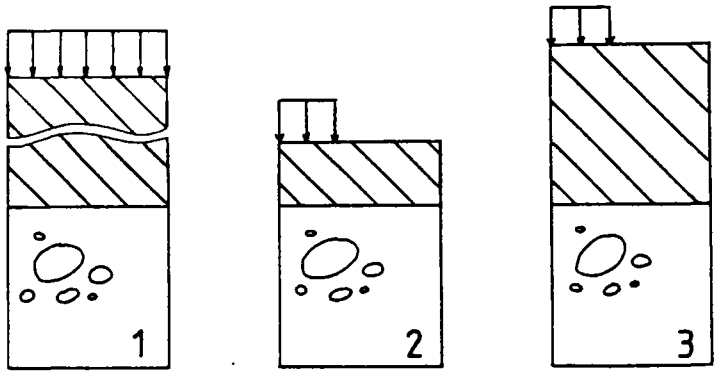
Nous avons travaillé en contraintes planes, en supposant pour tous les matériaux mis en jeu un comportement élastique linéaire de caractéristiques mécaniques suivantes :

Béton	E = 20 000 MPa	ν = 0.2
Acier	E = 200 000 MPa	ν = 0.3
Vide entre peignes	E = 10 MPa	ν = 0.1

(nous n'avons pas pris des valeurs nulles pour des raisons de calcul).

Après divers essais nous avons utilisé des éléments de type quadrilatères à quatre noeuds formés de quatre triangles linéaires isoparamétriques. Leur emploi permet en fait de multiplier par 4 le nombre des éléments sans augmenter le nombre de noeuds, et sans trop alourdir le temps de calcul par rapport à un quadrilatère à 4 noeuds de type Lagrange

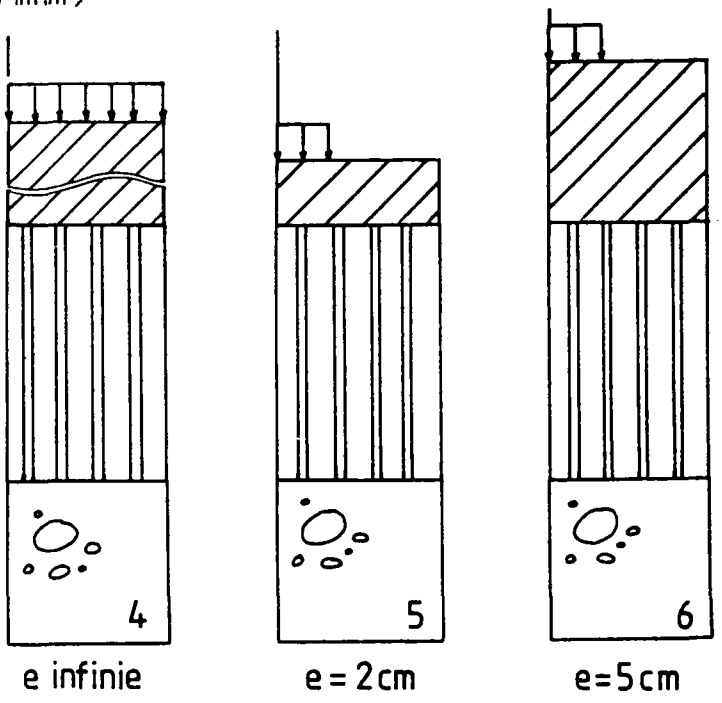
(voir Fig.III.36).



maillage n° 1
appui massif sans
flexion possible.
(massif infini)

maillage n° 2
appui massif
épaisseur 2 cm.

maillage n° 3
appui massif
épaisseur 5 cm.



maillage n° 4
appui à peignes
sans flexion possible.
(massif infini)

maillage n° 5
appui à peignes
+ massif épaisseur 2 cm

maillage n° 6
appui à peignes
+ massif épaisseur 5 cm

Fig. III. 35 : les différents maillages utilisés.

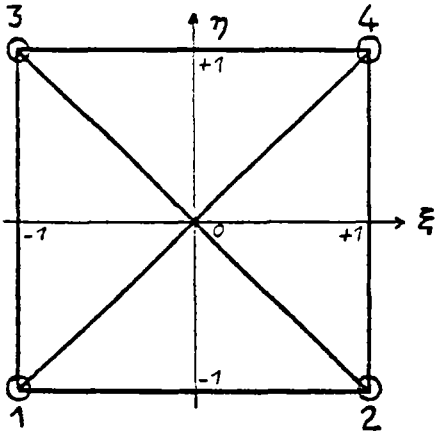


fig. III . 36: l'élément utilisé dans le calcul numérique.

Le programme aux éléments finis permet, outre une sortie sur imprimante des résultats en contraintes et déplacements, un traitement graphique de ceux-ci : sont ainsi accessibles le maillage, sa déformée, les contraintes principales, les déformations principales, les courbes isovaleurs de déplacement, de déformation et de contrainte.

Nous avons analysé au vu des résultats l'incidence de la flexion de l'appui. Imaginons que 2 jauges soient collées sur le cube en béton selon le schéma de la figure III. 37.

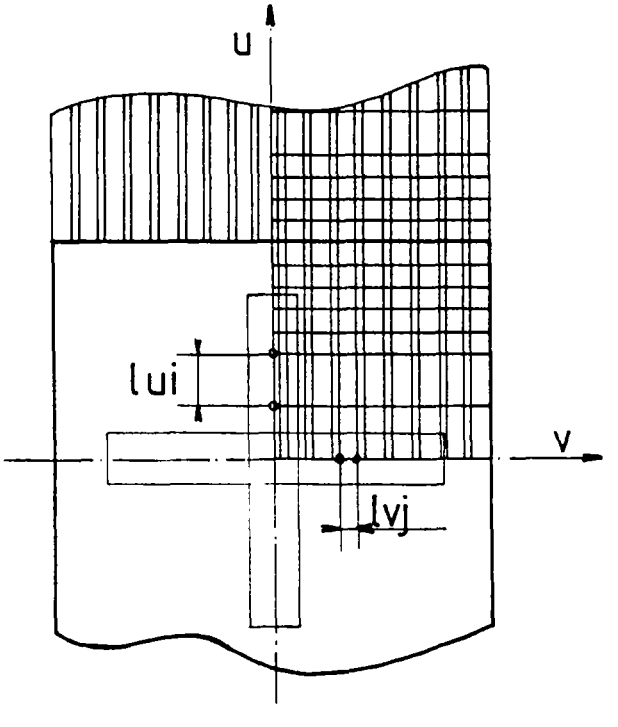


fig. III. 37: Implantation supposée des jauges.

Les valeurs de ε_1 et ε_2 qui correspondent à ces jauges sont calculées à partir des déplacements des noeuds :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\ell_u} \Delta u \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{\ell_v} \Delta v$$

Nous pouvons ainsi obtenir pour les différents maillages les coefficients de Poisson apparents que devraient mesurer les jauges :

MAILLAGE	1	2	3	4	5	6
ε_1	-9 631	-9 113	-8 842	-338	79,3	75
ε_2	1 880	2 641	1 815	66,4	20	15,3
$\nu = -\varepsilon_2/\varepsilon_1$	0,194	0,29	0,205	0,196	0,25	0,2

Rappelons que le coefficient de Poisson introduit dans le calcul valait 0,20. On voit donc nettement dans ce tableau l'influence de la flexibilité de l'appui qui conduit à une surestimation du coefficient de Poisson apparent. (Voir maillage 2 et 5). Cette étude nous a permis de dimensionner correctement notre appareil d'appui.

Les résultats numériques nous ont aussi permis d'étudier plus précisément <u>les conditions aux limites</u> dont on a vu qu'elles étaient mal connues pour l'appareil à peignes. Là aussi l'influence de la flexion de l'appui est très sensible (cf fig. III.38). Dans le cas du maillage 6 par exemple, la contrainte normale sous appui en x = 5 cm (bord du cube) n'atteint plus que 40 % de σm alors que dans le maillage 5 elle est égale à 85 % de σm. De plus, on constate grâce au maillage 4 que c'est la flexion et non pas le fonctionnement des peignes, qui entraîne une perturbation du champ de contrainte.

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS-&-CHAUSSÉES
CENTRE PÉDAGOGIQUE DE DOCUMENTATION

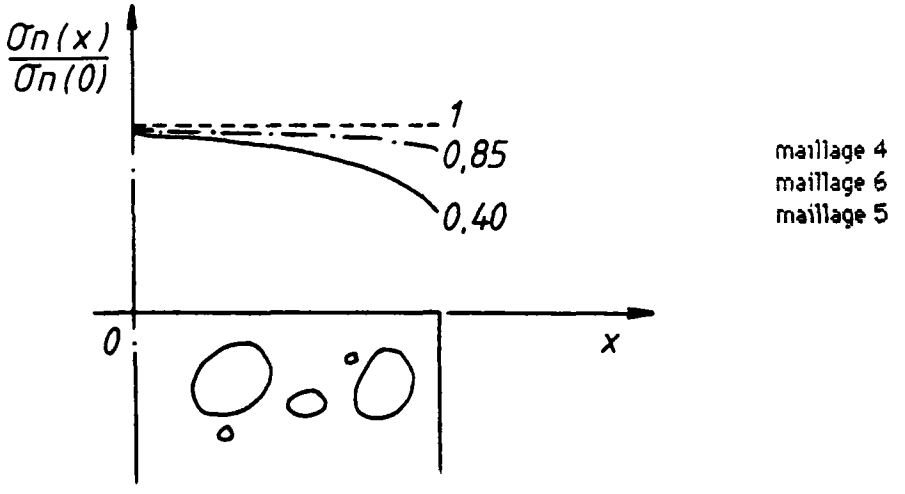


Fig. III. 38 : Contraintes normales sous appui.

En ce qui concerne le champ de déplacement sous l'appui nous obtenons les courbes suivantes : (fig. III. 39)

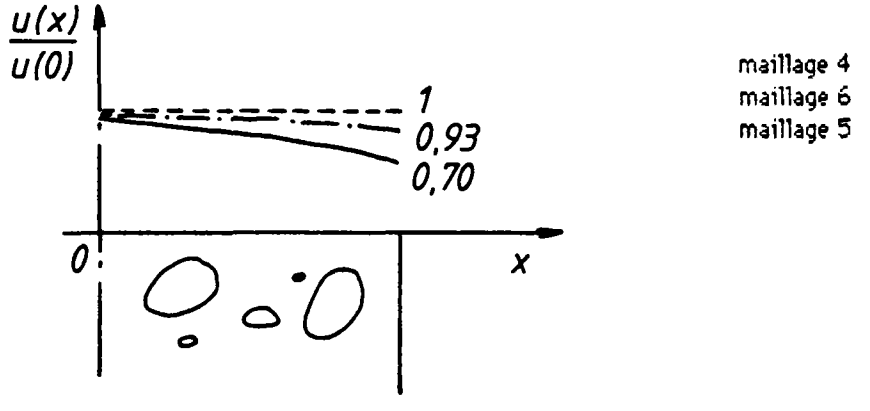


fig. III-39 : déplacement normal sous appui.

Pour le maillage 5 le rapport déplacement en x = 5 cm sur déplacement en x = 0 atteint 70 % alors que pour le maillage 6 il est limité à 93 %.

L'analyse par éléments finis nous a également permis de confirmer le fait que le cisaillement induit par les tiges d'acier sur la surface de l'éprouvette reste très faible. Ainsi pour les maillages 5 et 6 nous avons :

Maillage	max/ moyen
5	5 %
6	2 %

Nous allons maintenant nous intéresser aux champs de contrainte et de déformation à l'intérieur de l'éprouvette. Sur la figure III.40 sont présentées les courbes isovaleurs du déplacement suivant la direction orthogonale au chargement. On peut ici constater l'influence du frettage (maillage 1, 2 et 3) et l'efficacité des peignes (maillages 4, 5 et 6). La comparaison des champs de déplacement entre les maillage 5 et 6 par exemple montre encore une fois l'influence de la flexion de l'appui.

Nous avons également comparé les isovaleurs de la contrainte orthogonale au chargement (il faut noter ici que cette contrainte due au frettage existe dans les 2 directions orthogonales au chargement, ce qui signifie que l'hypothèse de contraintes planes est sujette à caution dès lors qu'il y a du frettage ; l'analyse des résultats ne sera donc que qualitative. C'est le même problème, signalé par MAZARS [6] qui fausse les critères expérimentaux de résistance biaxiale du béton). Les effets néfastes du frettage sont clairement visibles sur les maillages 1, 2 et 3 (fig.III.41). Sur les maillages 4, 5 et 6 on peut noter la forme particulière du champ de contrainte sous l'appui, due à la discontinuité de celui-ci. L'influence de celle-ci est d'ailleurs assez limité. On notera également l'apparition de tractions, certes faibles dans le cas du maillage 6, mais fort gênantes dans le cas du béton. Ces tractions sont dues uniquement à la flexion de l'appui car elles n'existent pas pour le maillage 4.

D'ailleurs la flexion est largement aussi gênante que le frettage même si ses effets sont différents. Il faut donc la limiter au maximum. C'est pourquoi, ainsi que cela a déjà été dit, c'est l'appui correspondant au maillage n° 6 qui est actuellement utilisé.

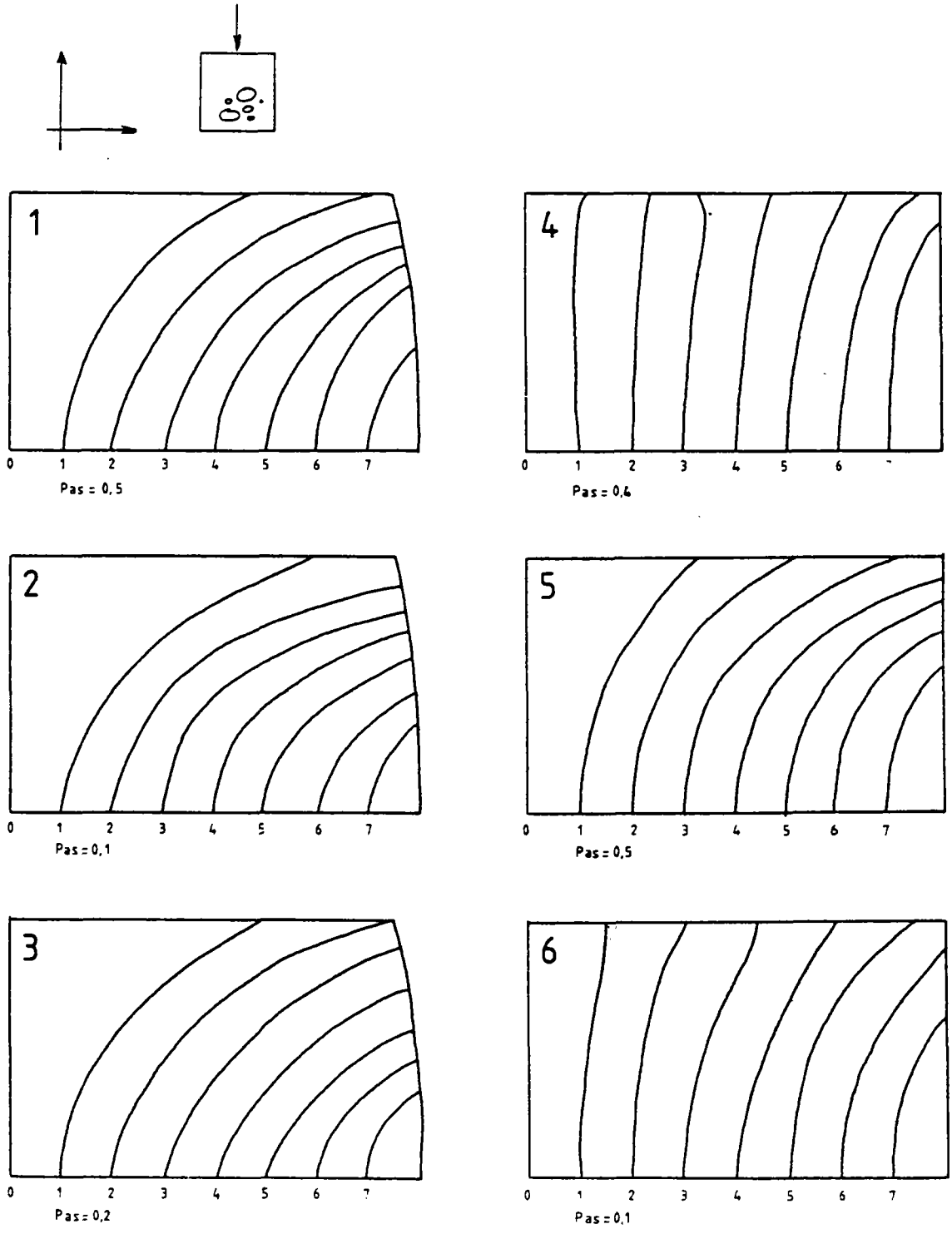


fig. III.40: courbes isovaleur du déplacement dans le sens perpendiculaire au chargement.

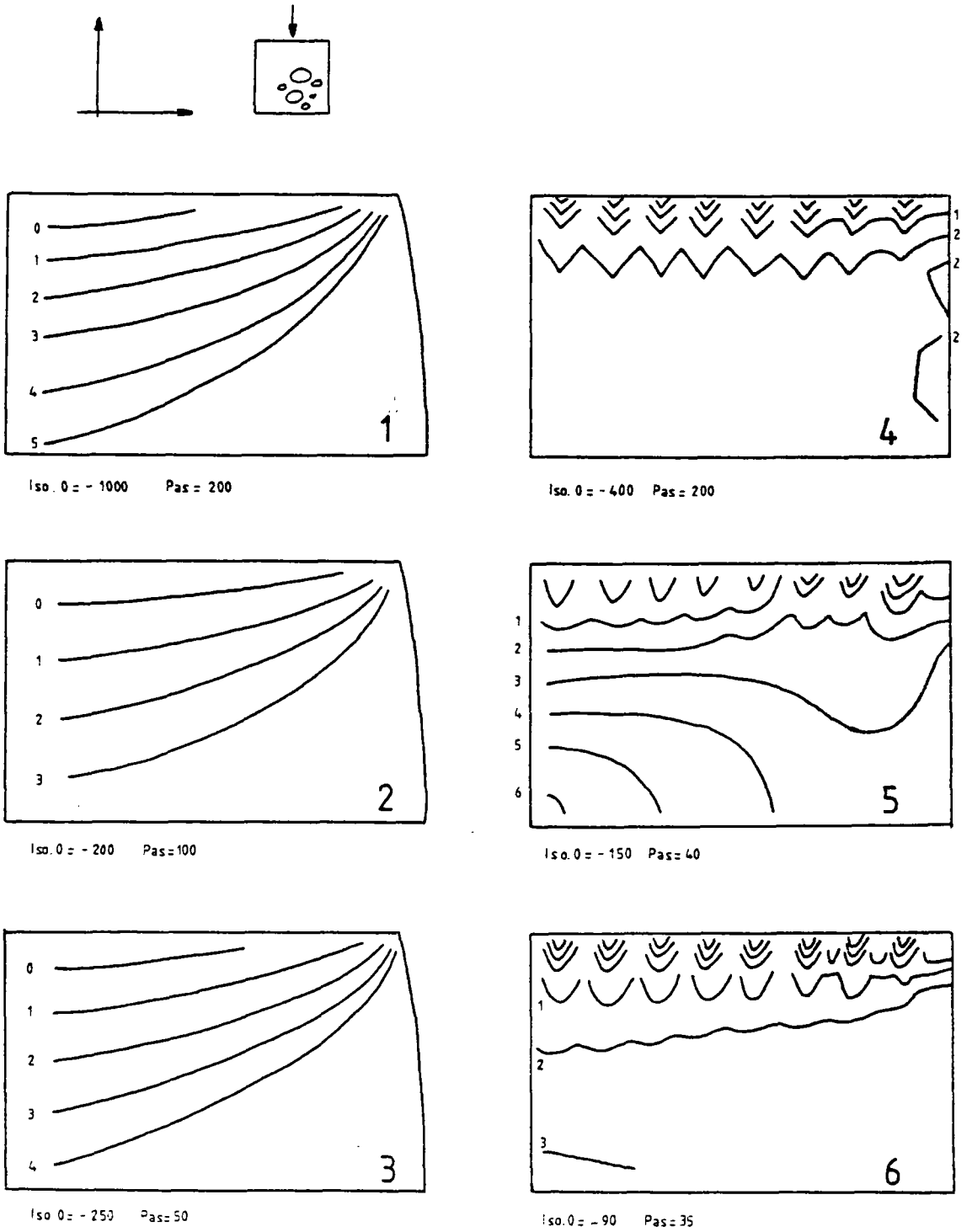


fig. III- 41: courbes isovaleurs de la contrainte dans la direction perpendiculaire au chargement.

Dans l'annexe 2, figurent toutes les sorties graphiques relatives à cet appareil d'appui. Etudions-en tout de même certaines. Par exemple le tracé des isovaleurs du déplacement dans le sens de chargement (voir fig. III. 42). Nous retrouvons sur cette figure un fait déjà signalé auparavant et concernant la déformée imposée par l'appui à peignes. De plus pour notre cas particulier s'ajoute une petite flexion de l'appui.

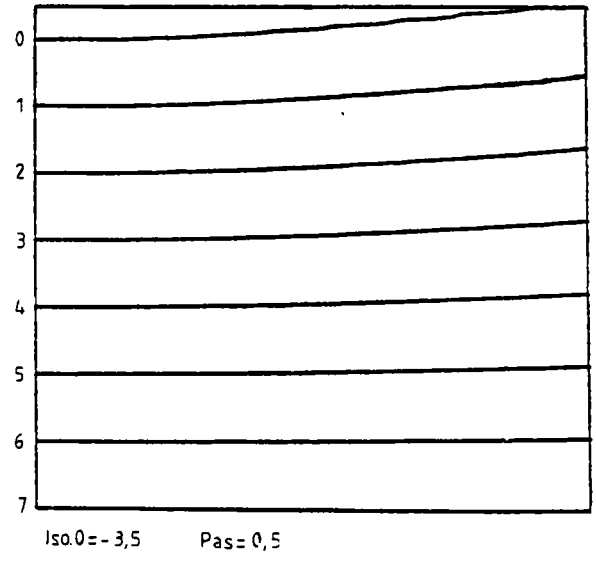
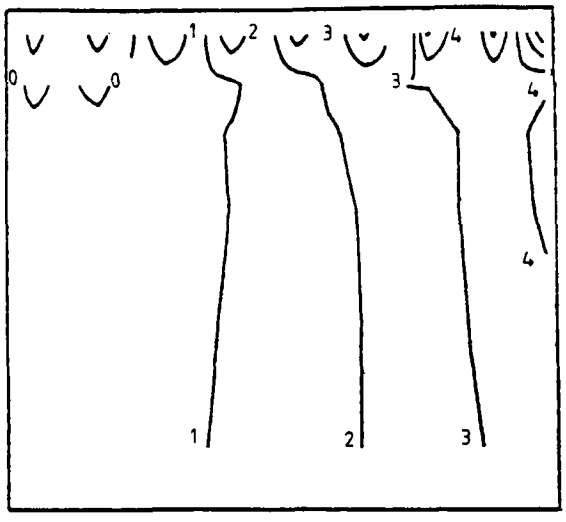


fig. III. 42: courbes isovaleurs du déplacement dans la direction du chargement (cas du maillage n°6).

Si nous étudions maintenant les courbes isovaleurs de la contrainte dans la direction du chargement, nous constatons que celle-ci décroît depuis le centre de l'éprouvette vers le bord libre. (fig.III.43). Néanmoins, cette non homogénéïté de la contrainte reste limitée. Ainsi nous avons :

$$\frac{\text{isovaleur 4 - isovaleur 0}}{\text{isovaleur 0}} = 5\,\%$$

De plus, nous constatons qu'au dela de 1 cm de profondeur l'influence de la discontinuité de l'appui ne se fait plus sentir. Ceci est d'autant plus encourageant que, pour des raisons pratiques, nous avons pris des discontinuités de 2 mm dans les maillages, alors qu'en réalité elles sont dix fois plus petites (2/10 de mm).



Iso.0= - 0,15E-4 Pas= 0,3E-2

fig. III. 43: courbes isovaleurs de la contrainte dans la direction du chargement (cas du maillage n° 6).

En conclusion de cette partie, nous retiendrons les points suivants :

- l'appui à peignes permet d'éliminer en grande partie le frettage.

- il doit être correctement dimensionné vis-à-vis de la flexion.

- si les conditions aux limites qu'il impose ne sont pas parfaites, elles s'en écartent peu (n'oublions pas toutefois que nous avons effectué nos calculs en élasticité linéaire. Pour le matériau réel les perturbations du champ de contrainte auront une importance accrue, notamment au voisinage de la rupture).

III-1.d Mesures :

III-1.d.1 Mesure des forces, accès aux contraintes :

La mesure des forces s'effectue au moyen de capteurs de pression placés sur chaque vérin. Un étalonnage, effectué à l'aide d'un peson étalon par la section de contrôle et d'étalonnage du LCPC, a permis de relier l'effort exercé par le vérin et la pression correspondante (voir figure III.44).La linéarité de la réponse est très bonne dans la plage d'utilisation considérée qui est celle des essais uniaxiaux et biaxiaux.

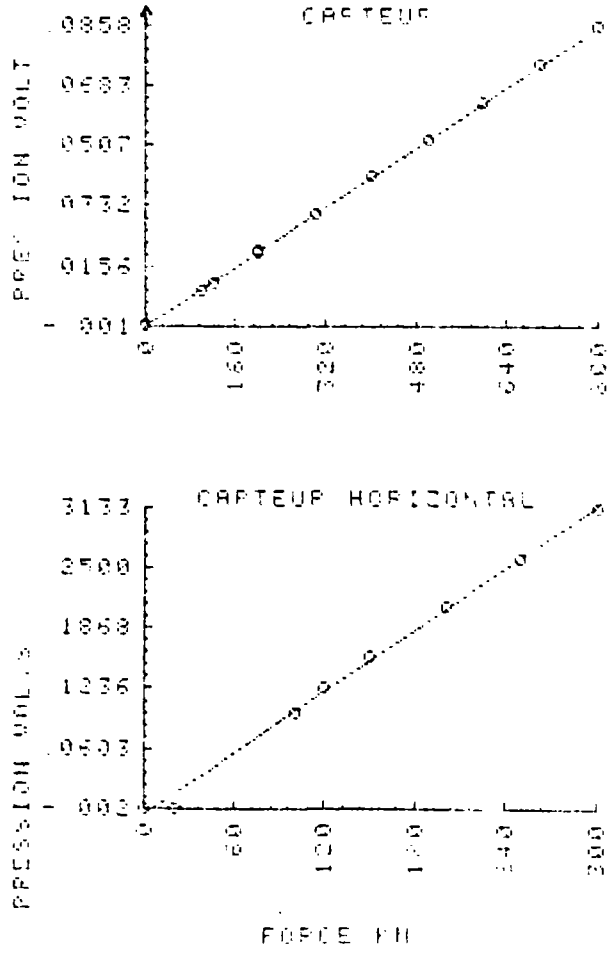


fig. III.44 : courbes d'étalonnage des vérins 1 et 2

La contrainte exercée sur le matériau est simplement déduite par la relation $\sigma = F / S$ où S est la section de l'éprouvette. Nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'il n'y a pas trop de distorsion dans le champ de contrainte, et donc que l'erreur commise en prenant pour la contrainte sa valeur moyenne reste faible.

Une amélioration possible de notre système consisterait à mesurer les forces directement par un capteur de force situé entre le vérin et l'éprouvette, ceci permettant une mesure n'incluant pas les frottements qui existent toujours à l'intérieur du vérin.

III-1.d.2 Mesures des déformations, des déplacements :

Deux techniques permettent ce genre de mesures : les jauges électriques (coûteuses et perdues après chaque essai) et les capteurs de déplacements réutilisables, mais qui intégrent dans leur mesure les conditions aux limites. Dans la mesure du possible, nous avons essayé dans tous nos essais de coupler ces 2 méthodes, que nous allons détailler.

Tout d'abord, les jauges. Différents problèmes sont posés par leur emploi. Par exemple ,elles doivent être suffisamment longue pour intégrer les discontinuités du champ de déplacement. Une étude préalable [100] nous a conduit à des longueurs de jauge de 60 mm. Avec cette longueur la jauge est collée suffisamment loin des bords. On a ainsi une mesure plus propre car non perturbée par les conditions aux limites. Se pose aussi le problème de la mesure en triaxial, car la jauge ne peut évidemment pas se trouver directement sous l'appui. Au BAM ce problème a été résolu en rainurant le cube (fig III.45) et en collant les jauges en fond de rainure. La rainure est ensuite remplie à l'aide d'un mortier sans retrait. Même si l'emploi de jauges dans de telles conditions n'est pas courant les résultats du BAM semblent probants, la concordance obtenue étant bonne entre une jauge en fond de rainure et une jauge collée sur une surface libre, dans le cas d'un essai biaxial.

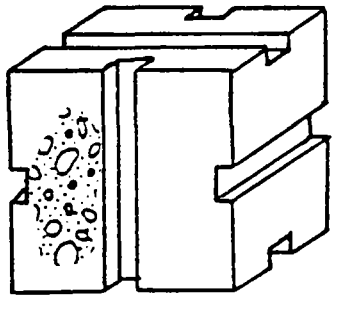


Fig. III.45 : le cube rainuré du BAM

Dans le cadre de notre étude qui ne comprenait pas d'essais triaxiaux, ce problème ne s'est pas posé. Nous n'avons donc pas rainuré nos cubes. Et nous avons collé nos jauges de la manière suivante :

deux jauges collées en croix sur les deux faces opposées non chargées des essais biaxiaux.

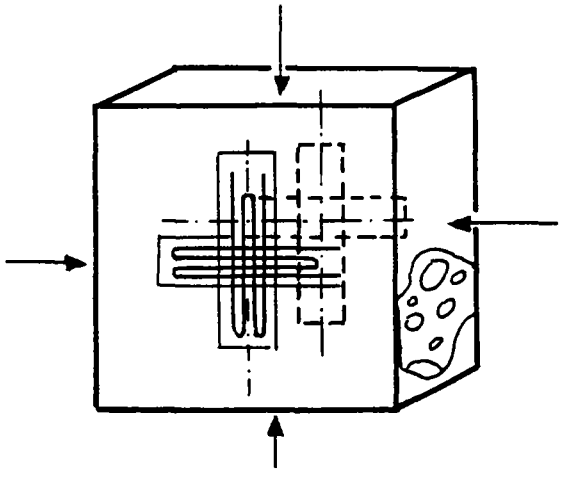


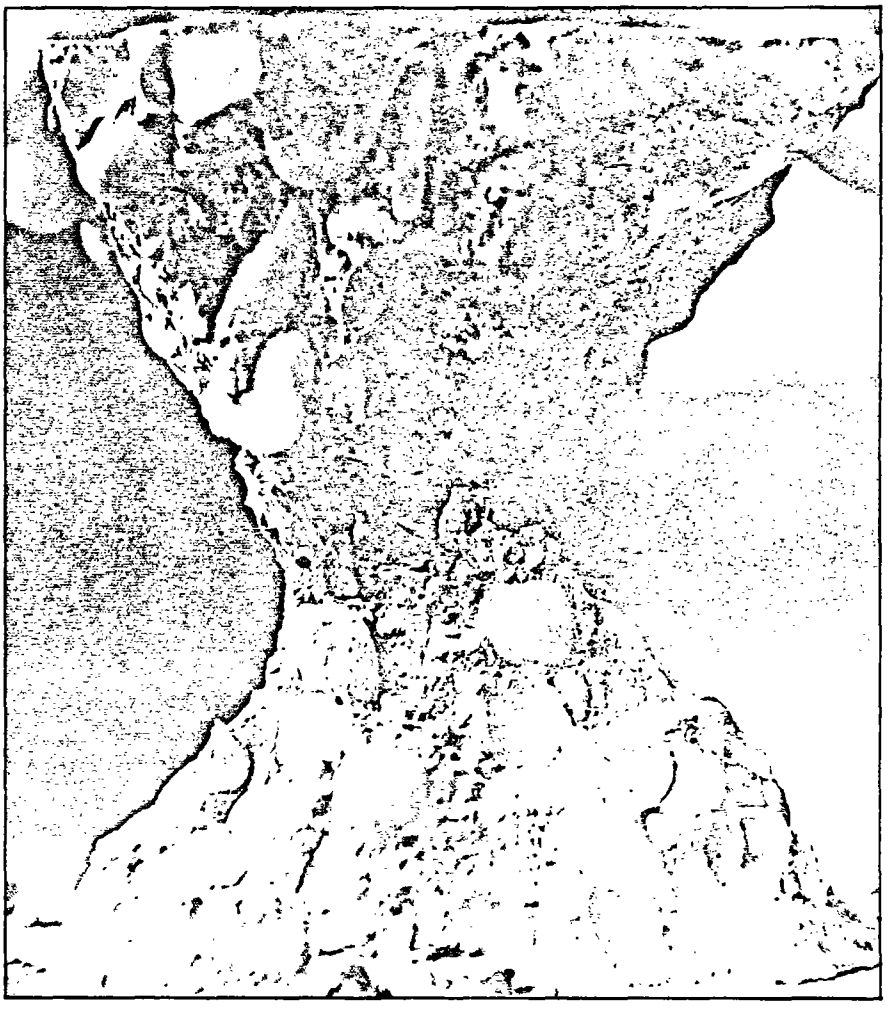
Fig. III.46 : implantation des jauges.

Le fait de superposer des jauges n'est pas classique mais a été éprouvé par WINKLER en alternant l'ordre du collage (jauge longitudinale en-dessous puis au-dessus de la jauge transversale). Les résultats obtenus sont très voisins. La double implantation nous a permis de mettre en évidence un effet parasite : l'excentrement de la charge en compression simple. Celui-ci s'est manifesté par le fait que les réponses des jauges opposées n'étaient pas identiques, et que la différence ne pouvait s'expliquer par l'hétérogénéïté du matériau (en tournant le cube d'un demi tour les réponses s'inversaient !). Ce phénomène ne peut s'expliquer que parce que le centre de poussée n'est pas confondu avec l'axe de symétrie de l'éprouvette, et ce pour des raisons diverses. (voir [93] pour quelques exemples édifiants dus à LE BECHEC). Une expérience a été menée pour quantifier l'excentrement de la charge (voir annexe 1). Celui-ci reste inférieur au millimètre, mais suffit pour perturber les mesures.

Une autre expérience très simple, suggérée par LE BECHEC, a également été menée : elle consistait à bloquer les peignes c'est-à-dire à fretter l'éprouvette. Les plans de rupture de l'éprouvette cubique dont la charge est centrée lui donnent alors une forme pyramidale. Cette expérience, concluante (voir photographie III.47), a montré que l'excentrement reste faible, lorsque le niveau de charge s'élève.

Toutefois on peut constater au vu des résultats de l'annexe 1 que, même avec un excentrement faible, les valeurs des déformations mesurées par jauges sont faussées. La solution retenue pour pallier ce défaut est la suivante : nous ferons la moyenne des déformations

lues par chaque jauge.



Photographie III.47: rupture d'un cube en compression simple avec appuis classiques.

Nous avons alors comparé les courbes moyennes obtenues en compression simple avant et après avoir fait tourner d'un quart de tour le cube. Ces courbes se superposent quasiment (voir annexe 1). Malgré tout le problème ne peut être parfaitement résolu lorsque l'on rentre dans la phase non linéaire du comportement du béton, ou la notion de moyenne ne peut plus être employée sans risque d'erreur. C'est pourquoi nous avons décidé l'emploi simultané de jauges et de capteurs de déplacements. Ceux-ci sont, de toute façon, indispensables pour un cube non rainuré, dans les cas bi et triaxiaux.

Examinons tout d'abord le cas triaxial et les solutions retenues par VAN MIER et LINSE. (fig III.48 et III.49). VAN MIER a choisi de mesurer le déplacement en prenant des points fixes situés plus loin que les peignes. Un étalonnage préalable est alors nécessaire pour déduire la déformation des peignes de la déformation totale. Même si l'auteur semble satisfait par ce système nous restons sceptique à son égard, craignant que la mesure ne soit pas reproductible de façon sure. Si la solution proposée par LINSE ne présente pas ce défaut, elle en présente par contre un autre plutôt gênant : la mesure est effectuée dans la zone la plus perturbée de l'éprouvette.

Néanmoins, cette solution est techniquement facile à mettre en oeuvre. La solution à laquelle nous avions pensé reprenait l'idée de VAN MIER, mais en se plaçant beaucoup plus près de l'échantillon. (fig. III . 50 a). Le problème dans ce cas vient de la flexion des peignes qui fausse complètement la mesure (fig. III.50 b). Comme nous n'avons pas, dans le cadre de ce travail, effectué d'essais triaxiaux le problème reste ouvert.

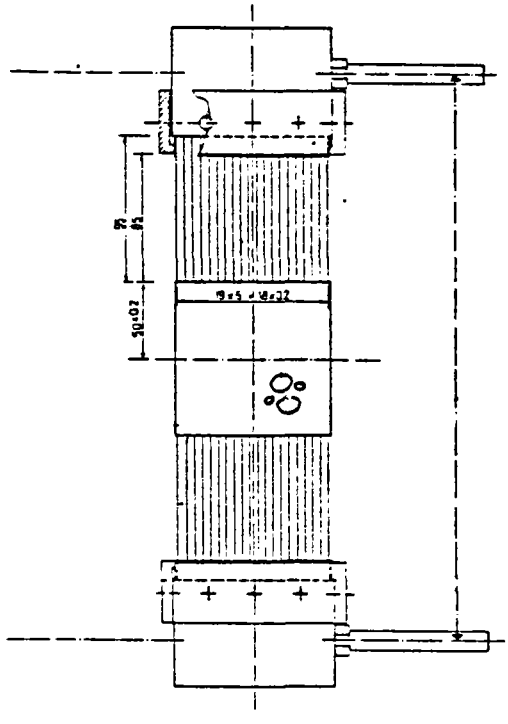


Fig. III.48 : la solution VAN MIER [15]

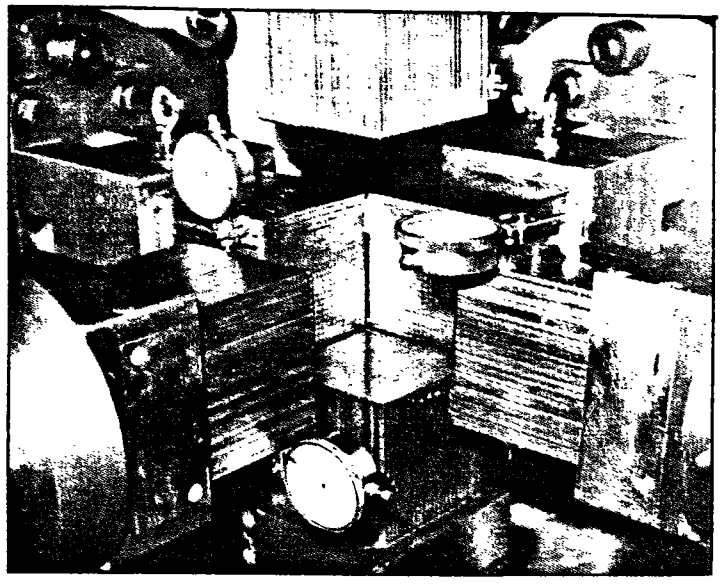


Fig. III.49 : la solution LINSE [102]

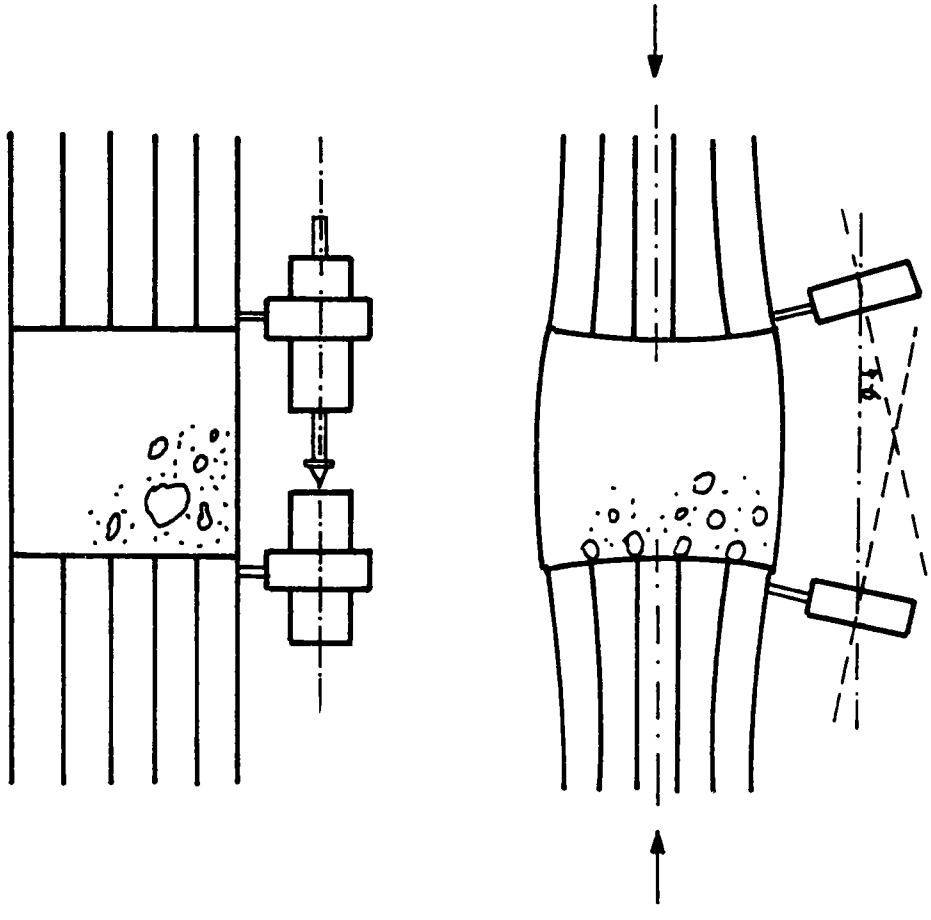


Fig III.50 : solution adaptée de VAN MIER.

Dans le cas biaxial, outre les solutions présentées précédemment pour le triaxial, le fait que deux faces de l'éprouvette soient accessibles permet d'envisager d'autres possibilités. La première possibilité consiste à coller des supports pour les capteurs à même l'éprouvette (voir BASCOUL [107]). Mais les résultats que nous avons obtenus ont été très mauvais, sans doute parce qu'il y avait, là aussi, une rotation des supports qui faussait fortement la mesure. Nous avons également rejeté la solution de capteurs tenus par des supports magnétiques, car ne disposant pas de dalle d'essais, les déformations transmises par la presse à ces capteurs faussaient complètement les résultats.

La dernière possibilité consiste pour la mesure du déplacement des faces non chargées, à mesurer celui-ci à l'aide d'un cadre prenant appui directement sur l'éprouvette. Un bon exemple de cette technologie est donné par BASCOUL (fig III.51). Pour ce type de capteur on peut toutefois s'inquiéter de la sensibilité de la mesure vis à vis de la déformation locale au point de collage (il vaut sans doute mieux séparer la fonction support de la fonction mesure).

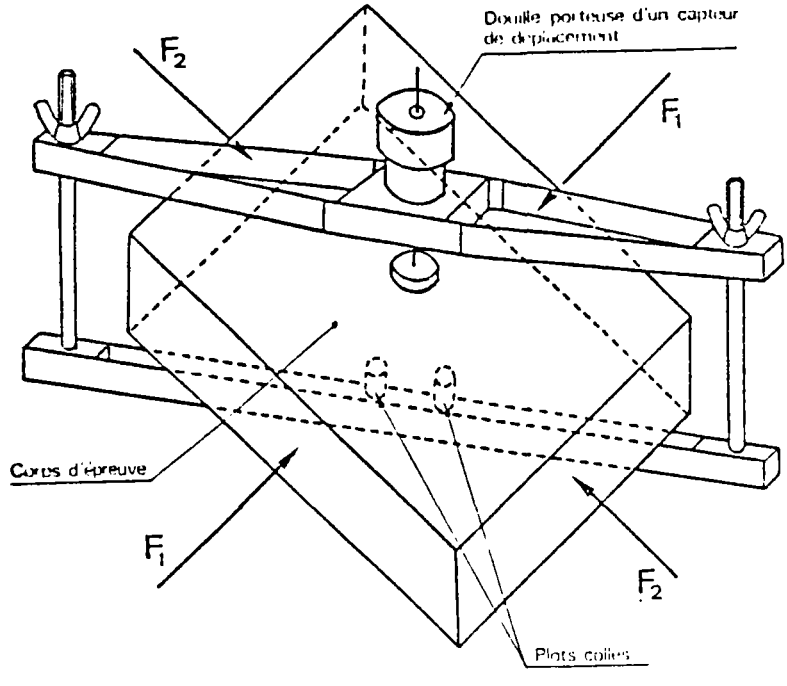


fig. III.51 : dispositif de mesures des déformations transversales, presse de l'INSA de TOULOUSE.

Après plusieurs essais de mise au point nous avons retenu la solution suivante : un cadre prenant appui sur le cube et supportant deux capteurs de déplacements (ce qui permet d'éviter de coller des plots sur le cube). Les photos III.52 et 53 présentent le montage.

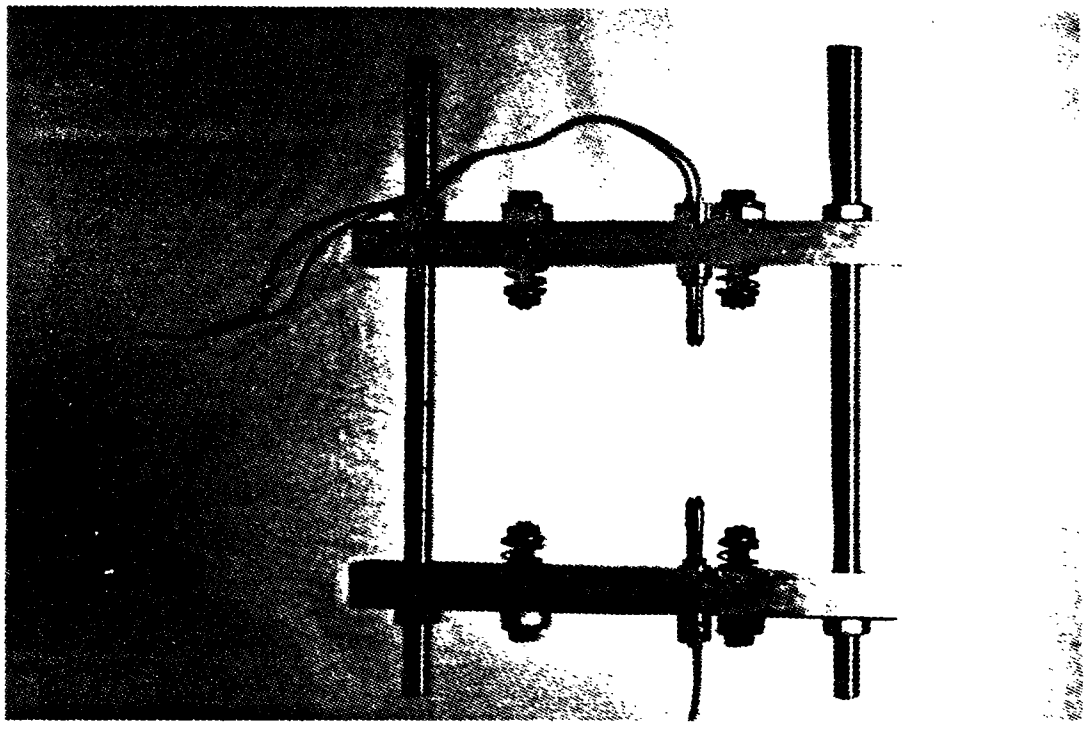


fig III.52 : dispositif de mesure des déformations dans la direction non chargée.

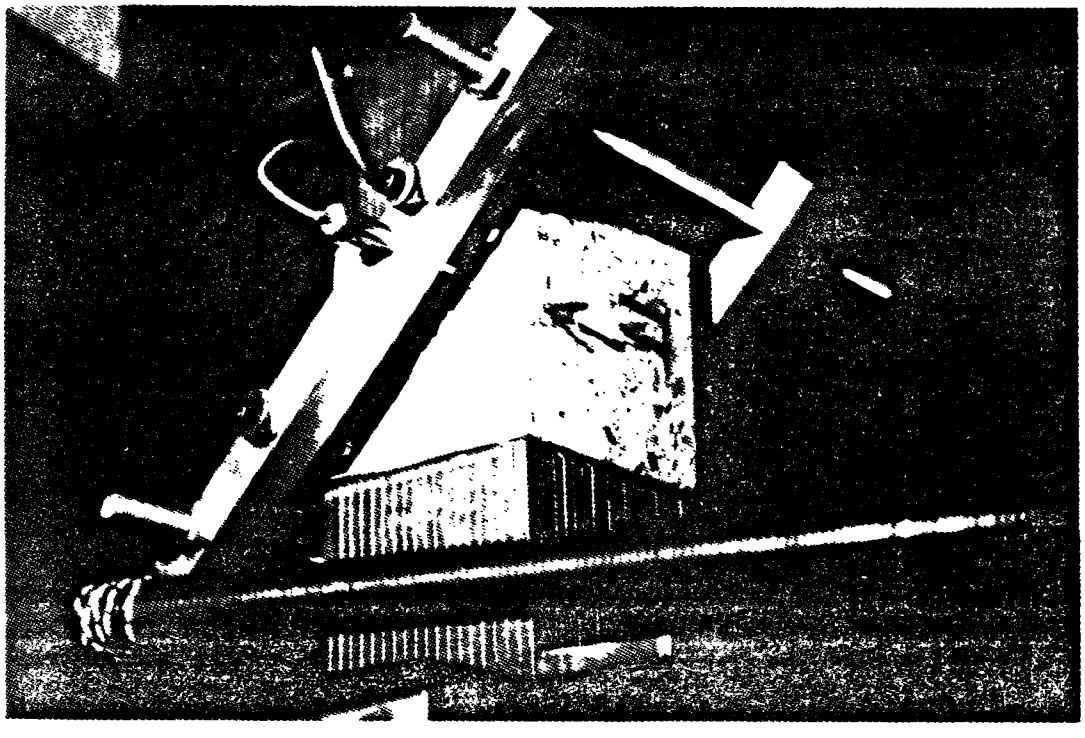


fig III.53 : mise en place du dispositif de mesure.

III-1.d.3 Comparaison jauges - capteurs sur essais uniaxiaux :

Deux remarques préalables sont à faire : tout d'abord, compte tenu des difficultés rencontrées (voir paragraphe précédent), la comparaison systématique jauges-capteurs n'a pu être vraiment faite. (surtout lors des premières expérimentations). Ensuite les capteurs ont été placés de la même manière que lors des essais triaxiaux, c'est-à-dire qu'ils avaient une base de mesure orthogonale à celle des jauges (fig. III.54).

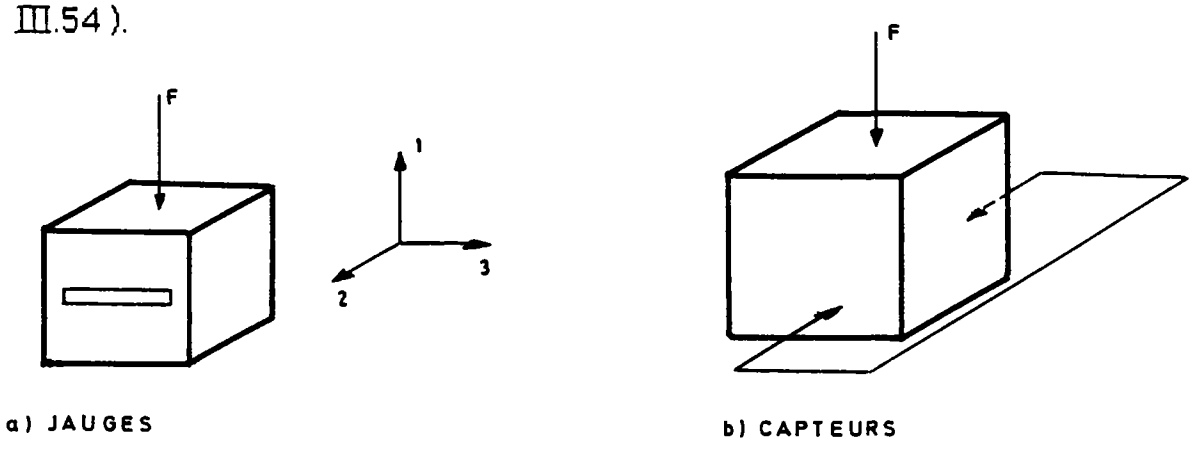


fig. III.54 : comparaison des bases de mesures jauges-capteurs.

Ceci est important pour l'interprétation des résultats. En effet le béton n'est pas réellement isotrope. Après coulage, lors de la prise , se forment sous les granulats des lentilles d'eau qui rendent le matériau légèrement orthotrope. VAN MIER a fait quelques tests comparatifs sur ce sujet [15].

Il explique la difference constatée (fig. III. 55) par le fait que selon la direction du chargement les défauts initiaux favorisent ou non la progression des fissures (fig.III.56) .HUGUES et ASH [106] ont effectué des tests similaires. Ils ont aussi constaté une grande différence dans leur résultats (fig.III.57). Signalons toutefois que pour VAN MIER la résistance est quasiment inchangée et que la différence porte sur les déformations à la rupture alors que pour HUGUES c'est le contraire (!?!) Seule véritable conclusion à tirer: pour nos essais, avec un béton ayant un e/c voisin de 0.7, il était impératif d'éliminer ce paramètre afin de pouvoir comparer réellement jauges et capteurs. Pour cela nous avons testé nos éprouvettes dans les mêmes conditions de gravitation qu'à la fabrication (fig.III.58).

Ainsi les directions 2 et 3 sont équivalentes.

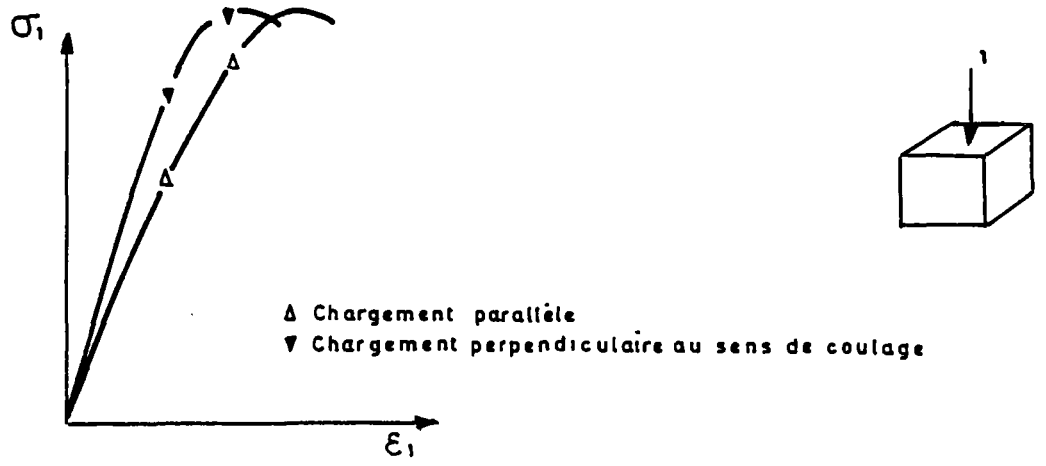


fig.III.55: influence de l'anisotropie initiale sur la courbe contrainte déformation en compression.
(d'après VAN MIER [15])

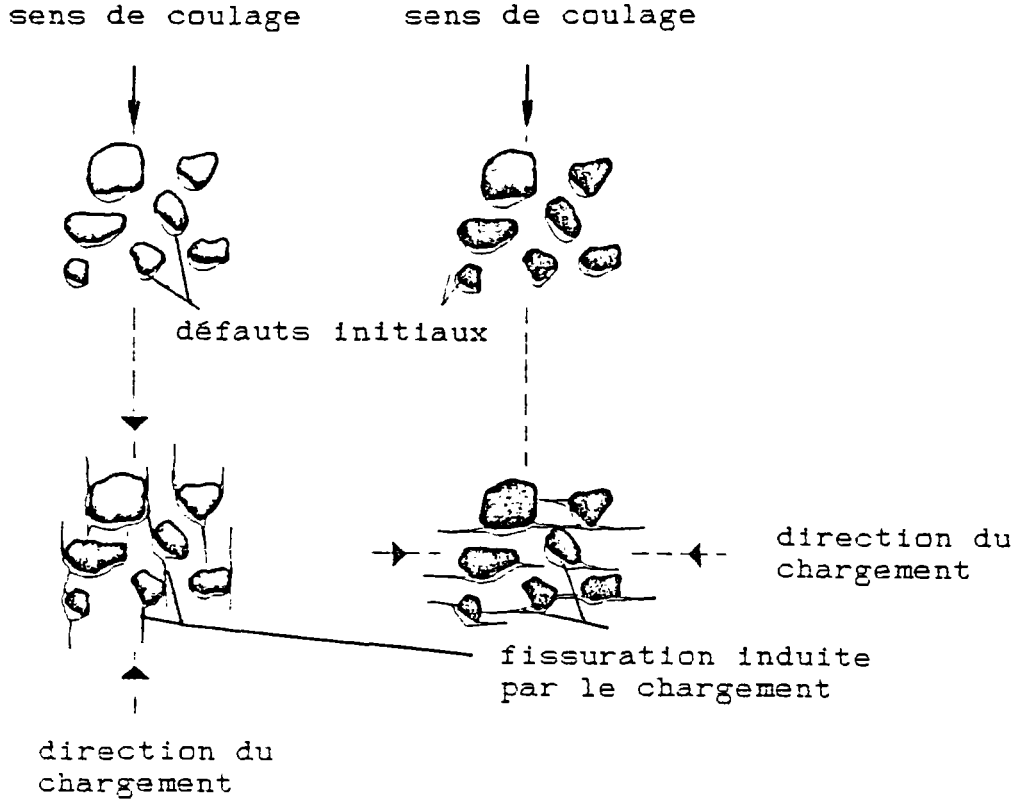


fig.III.56: influence des défauts initiaux combinée au sens de chargement sur la propagation de la fissuration.
(d'après VAN MIER)

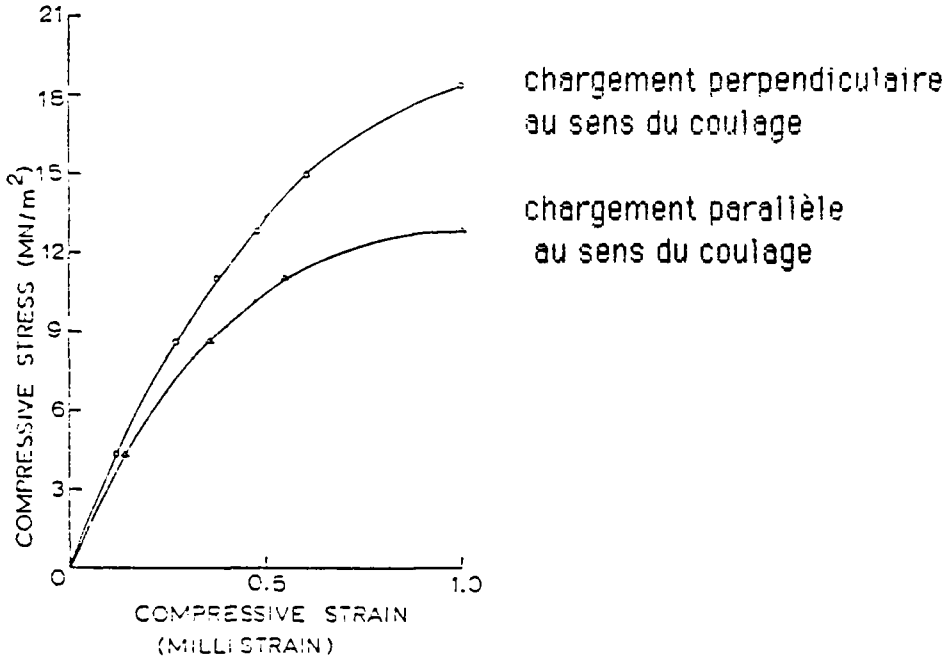


fig.III.57:influence de l'anisotropie initiale
sur la courbe contrainte déformation.
(d'après HUGUES et ASH [106])

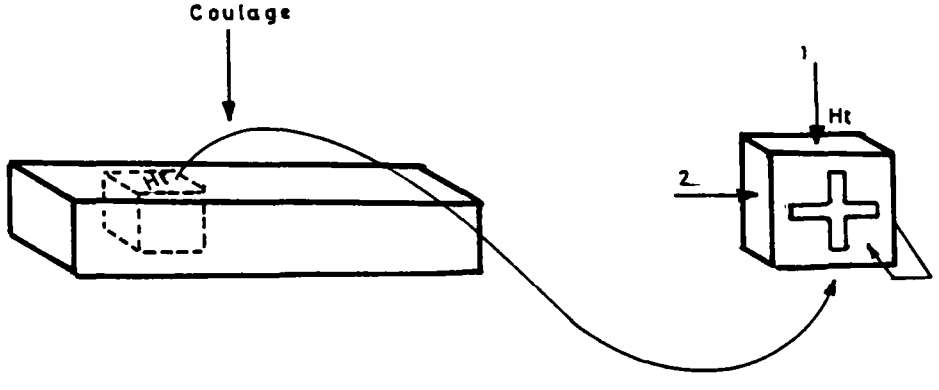


fig.III.58:processus expérimental choisi

Les résultats des essais UC31P et UC33P nous ont confirmé que jauges et capteurs donnaient des résultats équivalents, au moins dans la partie initiale de la courbe. Ensuite, dès qu'apparaissent des non linéarités, les jauges qui indiquent une valeur locale ne donnent plus forcément la même réponse que les capteurs qui, eux, mesurent un

déplacement global.

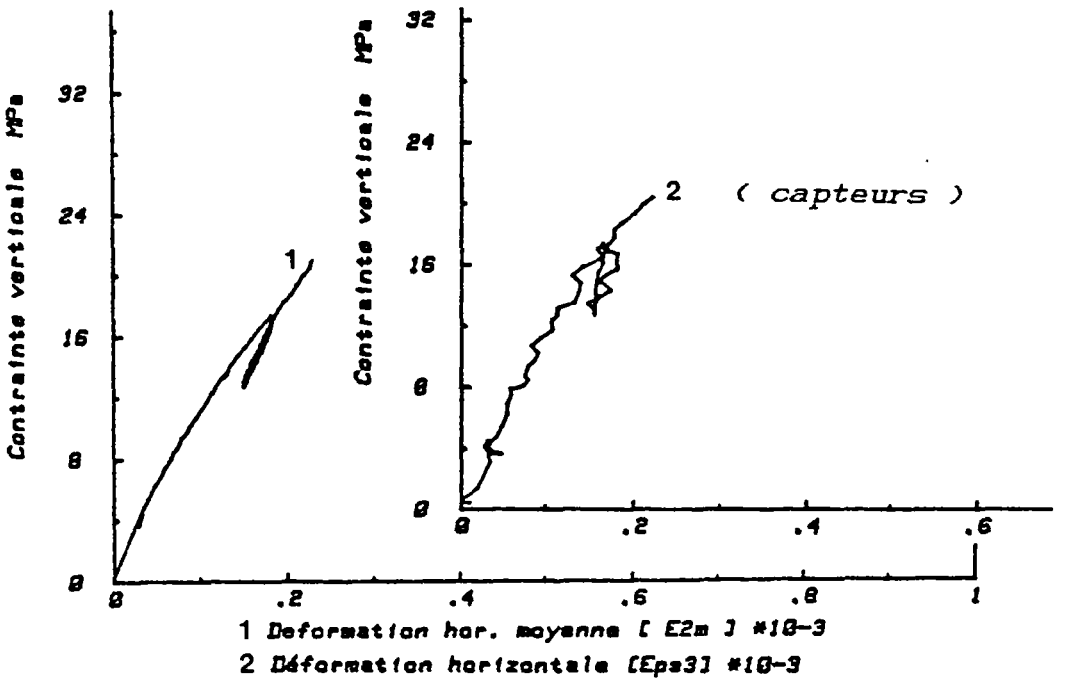


fig.III.59: essai UC31P - comparaison jauges-capteurs.

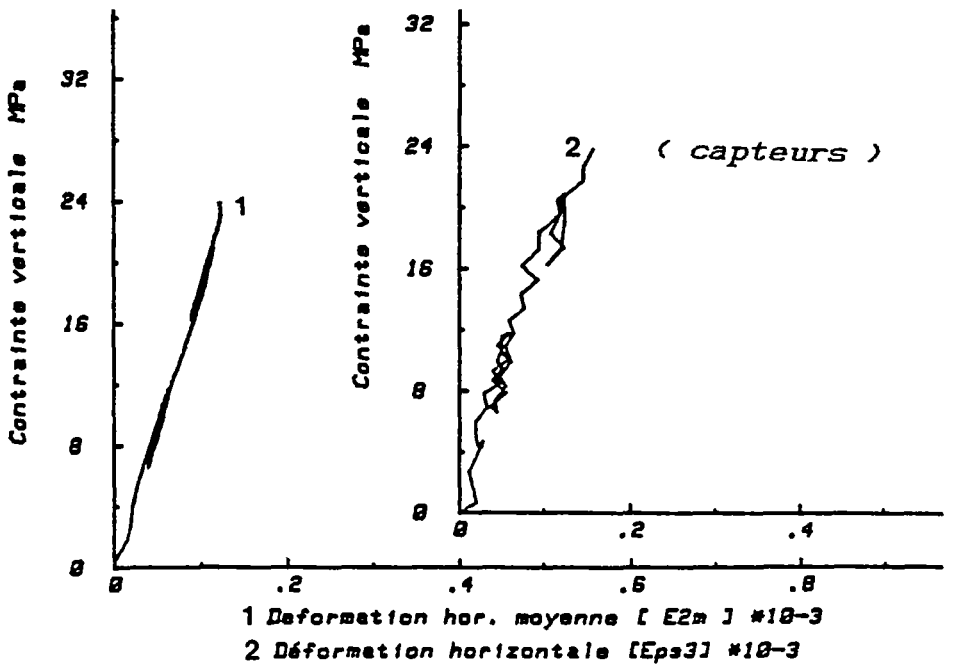


fig.III.60: essai UC33P - comparaison jauges-capteurs.

Nous avons tout de même effectué un essai uniaxial avec direction de chargement perpendiculaire à la direction de coulage des éprouvettes(fig.III.61).

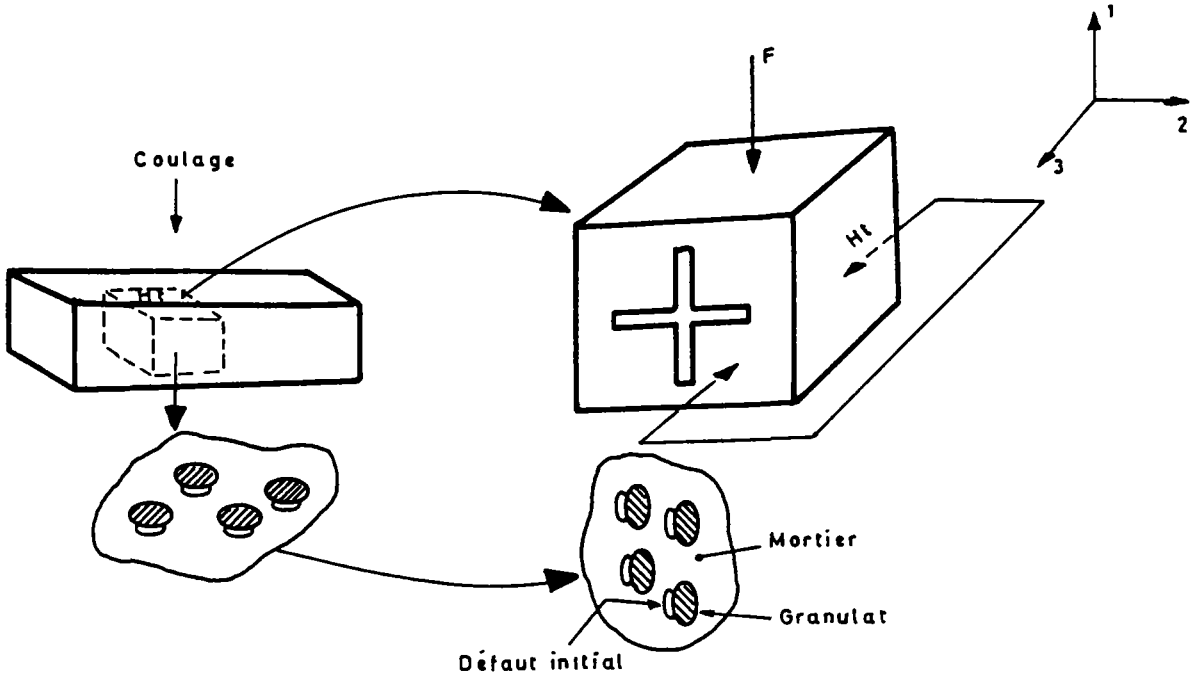


Fig.III.61:cas de l'essai UC32P.

Ainsi que nous l'avons vu au chapitre I , et ceci a été confirmé par nos expériences, la fissuration se développe parallèlement à la direction du chargement (dans notre cas la direction 1). Or, à cause des défauts initiaux, les directions 2 et 3 sont équivalentes. Ici la fissuration se développera préférentiellement selon les plans 1-3. La réponse enregistrée par la jauges devrait donc être moins " raide " que celle des capteurs. C'est bien ce que nous avons constaté (fig.III.62).

Notons que le coefficient de POISSON déduit des déplacements des capteurs est égal à 0.16 alors que les jauges nous donnent ν = 0.25 ! On mesure ici l'importance des défauts initiaux, accentués par notre choix d'un e/c élevé.

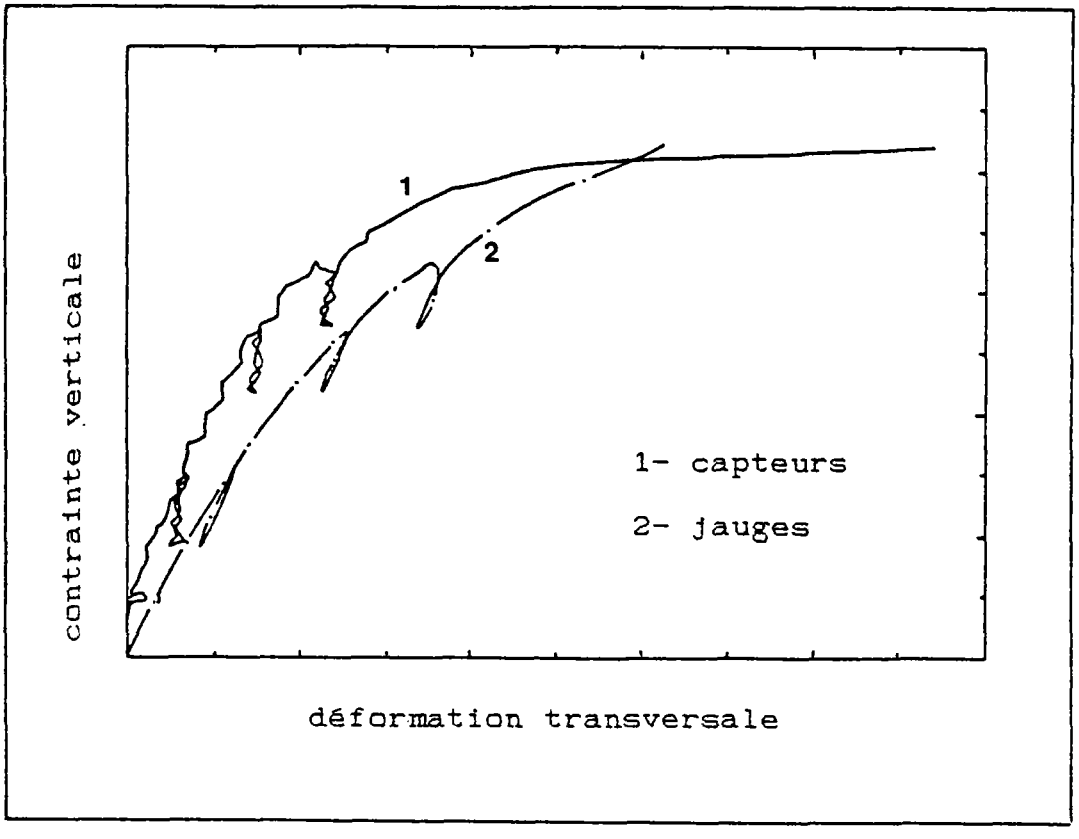


fig.III.62: essai UC 32P - comparaison des réponses jauges-capteurs.

III-2 - Les essais uniaxiaux :

Il peut paraitre étonnant d'étudier encore, à notre époque, le comportement uniaxial du béton alors que des millions d'essais de ce type ont été réalisés. Pourtant, même sur cet essai, bien des points restent à éclaircir. De plus, la relative nouveauté de notre appareil d'appui nous imposait de le tester en premier lieu au moyen d'un essai simple. Nous avons donc entrepris une campagne d'essais en compression simple en faisant toutefois varier pour plusieurs éprouvettes un des paramètres dont nous avons montré au chapitre I que son influence était mal connue : la teneur en eau.

Avant d'analyser plus en détail les résultats expérimentaux nous allons décrire qualitativement le comportement du

béton en compression simple lorsque la charge est transmise à l'aide des appuis à peignes. La fissuration tout d'abord : elle se développe de façon globalement rectiligne dans le sens du chargement, en contournant en général les granulats (fig. III.63 et photo III.64). Ceci est tout à fait en accord avec les résultats présentés au chapitre I et confirme que les appuis à peignes remplissent correctement leur rôle anti-frettage.

En ce qui concerne les courbes (σ_1, ε_1) et (ε_1, ε_2) on note, pour les deux, une non linéarité cependant plus marquée en ε_2 ce qui correspond à la fissuration effectivement constatée.(fig. III.65 et III.66) La courbe de variation de volume fonction de la charge montre un comportement d'abord contractant (l'élasticité l'emporte sur la création de fissures) puis dilatant (phase de fissuration intense). Qualitativement ces courbes sont similaires à celles obtenues à partir d'essais classiques (essais sur cylindres avec appuis massifs).

Toutefois la non linéarité du comportement apparaît moins marquée dans nos essais. A l'aide d'essais comparatifs ensemble cubes + peignes par rapport à cylindres + appuis massifs, effectués sur un même béton nous avons obtenu les résultats suivants : le module d'élasticité initial et la résistance en compression simple sont voisins alors qu'une différence importante peut être constatée sur la déformation longitudinale à la rupture. Celle mesurée lors des essais avec peignes est en moyenne plus faible de 15 %. Ceci avait déjà été observé par KUPFER [108] qui avait noté que, pour des essais uniaxiaux ou biaxiaux, les déformations sont, en valeur absolue, supérieures ou égales dans les cas où sont utilisés des appuis massifs. Il expliquait alors cela par le fait que la zône centrale de l'éprouvette peut subir des déformations plus grandes parce que les déformations sous les faces d'appuis sont gênées par le frettage.

Autre explication possible : avec les appuis massifs la fissuration sous appui n'est pas parallèle au chargement mais inclinée par rapport à la direction de celui-ci. La composante du déplacement due à la fissuration est alors plus importante dans la direction longitudinale par rapport à celle qu'on obtiendrait dans un essai sans frettage. Notons enfin que dans la partie située directement sous l'appui, l'état de contrainte est fortement triaxial. Or nous avons vu au chapitre I que dans ce cas le matériau avait un comportement beaucoup plus "ductile". Nous verrons plus loin dans ce chapitre une explication "structurale" de ce phénomène que l'on retrouve aussi dans les essais du BAM.

Fig.III.63: faciès de rupture en compression simple.

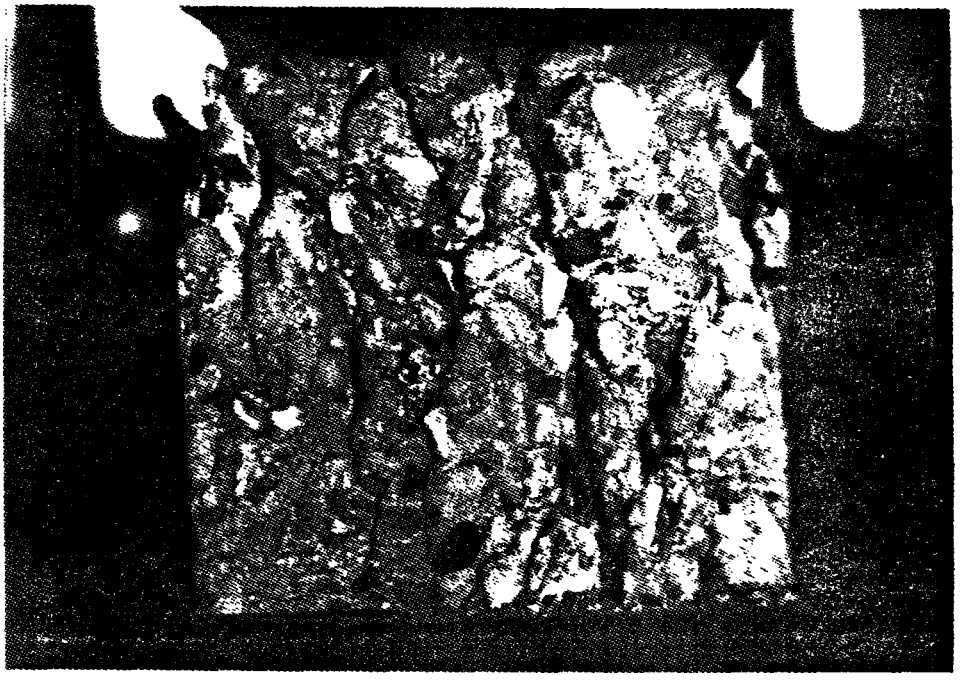


Photo III.64: vue d'une éprouvette après rupture en compression simple

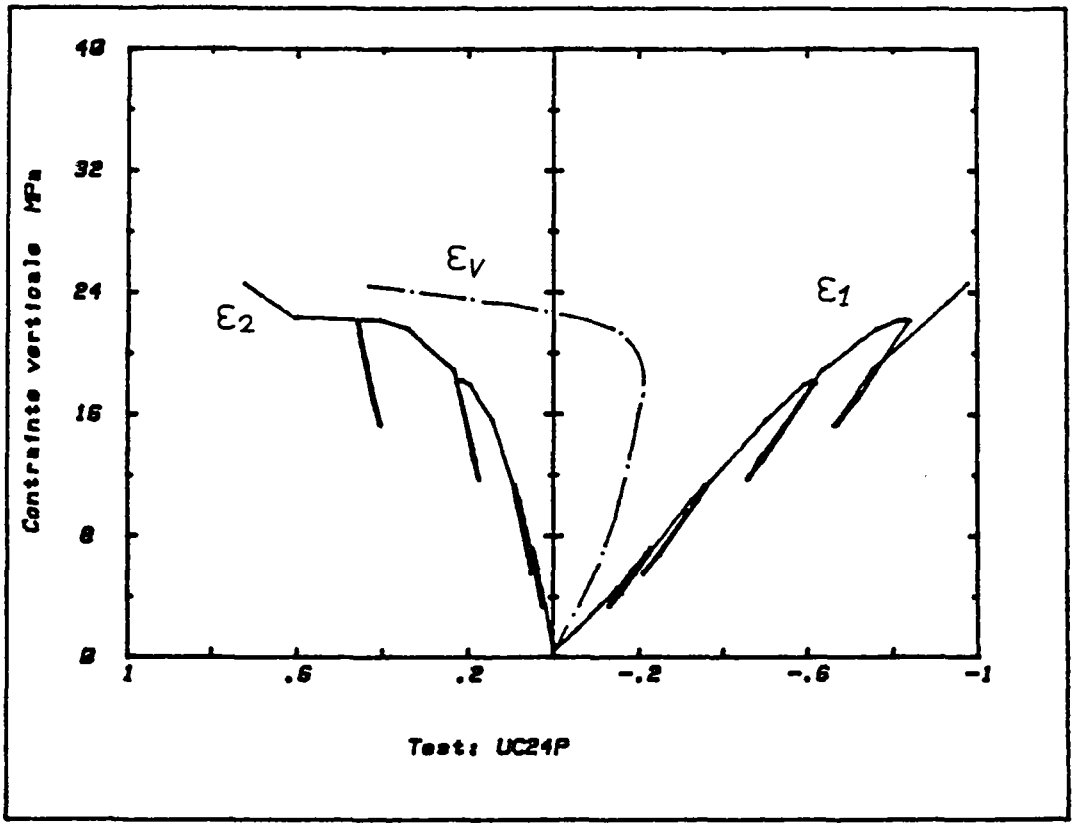


Fig.III.65: courbes contrainte déformation
(cas de la compression simple)

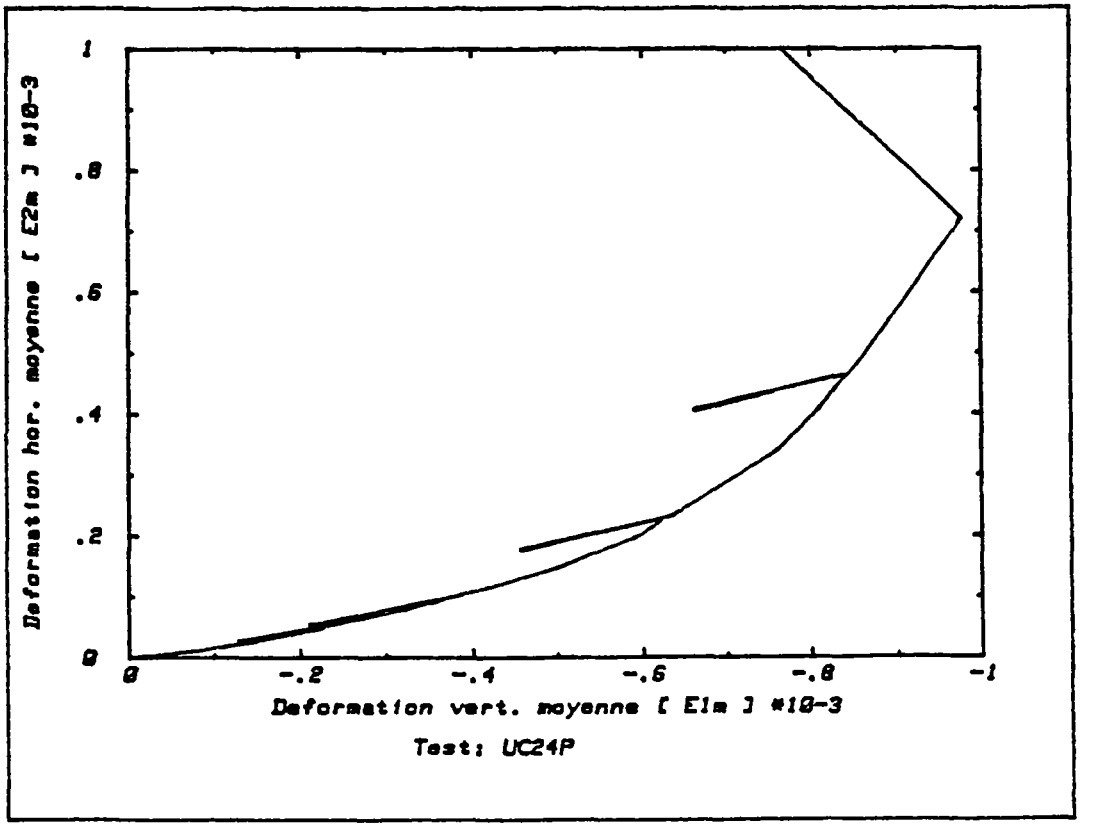


Fig.III.66: déformation latérale fonction de la déformation longitudinale.

Dernier point à souligner mais non le moindre : nos essais sont pilotés en charge et notre presse est peu rigide. La rupture n'est alors pas maîtrisée ce qui conduit certainement à sous-estimer les déformations à la rupture. Un asservissement de la presse en déformation permettrait d'éliminer ce problème.

Autre aspect différent par rapport aux essais classiques: nous mesurons sur l'ensemble de nos essais un coefficient de Poisson égal à 0,25. Cette valeur apparaît comme élevée au regard de celles couramment admises pour ν, comprise entre 0.16 et 0.22. Pour les essais sur éprouvettes séchées, essais qui correspondent aux valeurs les plus élevées de ν , il est certain que le retrait, plus important en peau a endommagé cette zone, où s'effectue la mesure à l'aide des jauges (cf chapitre I). Mais pour les éprouvettes 100 % humides nous trouvons, avec les jauges comme avec les capteurs, un coefficient de Poisson voisin là encore de 0,25. L'explication précédente n'étant plus acceptable restent deux autres possibilités. Tout d'abord le fonctionnement de l'appui qui, on l'a vu, peut fausser la mesure de ν . Mais, à priori, notre appui est justement dimensionné pour minimiser ce problème. Autre cause possible : le fort rapport eau/ciment de notre béton (voisin rappelons-le de 0.7). En effet nous avons vu précédemment que le ressuage impliquait une anisotropie initiale de notre matériau. Considérons donc celui-ci comme élastique, orthotrope de révolution. (la direction privilégiée étant celle du coulage). Sa loi de comportement est alors la suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{12}/E_2 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{22}/E_2 \\ -\nu_{21}/E_1 & -\nu_{22}/E_2 & 1/E_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Plaçons-nous dans le cas de l'essai UC 32P (chargement perpendiculaire à la direction de coulage, soit $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$) Nous avons alors :

$$\varepsilon_1 = -\frac{\nu_{12} \cdot \sigma_2}{E_2} = -\nu_{12} \cdot \varepsilon_2$$ soit $\nu_{12} = 0.16$ mesuré par capteurs

$\varepsilon_2 = \sigma_2 / E_2 \longrightarrow E_2 = 27000$ MPa mesuré par jauges

$\varepsilon_3 = -\frac{\nu_{22} . \sigma_2}{E_2} = -\nu_{22} \varepsilon_2 \longrightarrow \nu_{22} = 0.25$ mesuré par jauges

Or dans le cas de l'élasticité orthotrope la matrice constitutive est symétrique ce qui implique que :

$$\frac{-\nu_{21}}{E_1} = \frac{-\nu_{12}}{E_2} \quad \text{soit} \quad \nu_{21} = \nu_{12} . \frac{E_1}{E_2}$$

Les essais UC 31P et UC 32P (chargement parallèle au sens de coulage) nous donnent :

$E_1 = 45000$MPa

d'où :

$\nu_{21} = 0.26$

ce qui correspond effectivement aux mesures concordantes des jauges et capteurs. Il semble donc bien que ce soit le rapport e/c élevé qui soit la cause principale d'un fort coefficient de Poisson. Nous n'avons malheureusement pas pu trouver dans la littérature de résultat infirmant ou confirmant ceci.

Le modèle incrémental nécessitant de connaître les E nous avons donc essayé d'observer le comportement à la décharge du béton lors d'un essai de compression simple (fig. III .67).

Or il s'est avéré (voir fig. III.68) que la pente à la décharge était toujours plus raide que celle correspondant au chargement. Ceci n'est, bien sûr, pas imputable au matériau (voir en I.1g la discussion concernant l'inversion du sens de chargement). Des essais sur cube en acier nous ont permis de confirmer ceci. En fait il semble que ce soit notre vérin qui ne réagit pas, en charge et en décharge, de façon symétrique. L'effort transmis ne correspond pas, au cours de la décharge, à la pression d'huile mesurée par le capteur. Comme cela a déja été proposé dans le paragraphe consacré à la mesure des contraintes, pour remédier à ce problème existe une solution : mesurer l'effort sous le vérin.

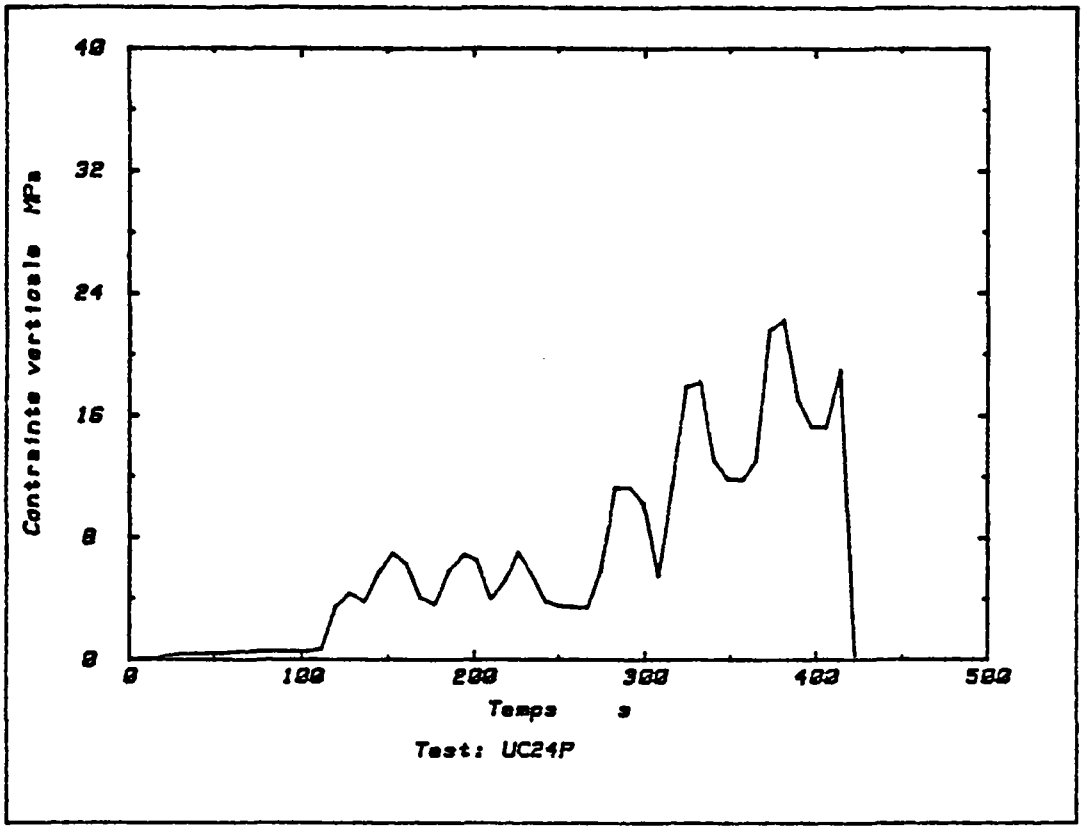


fig. III.67 : évolution de la contrainte au cours du temps dans un essai de compression avec décharge.

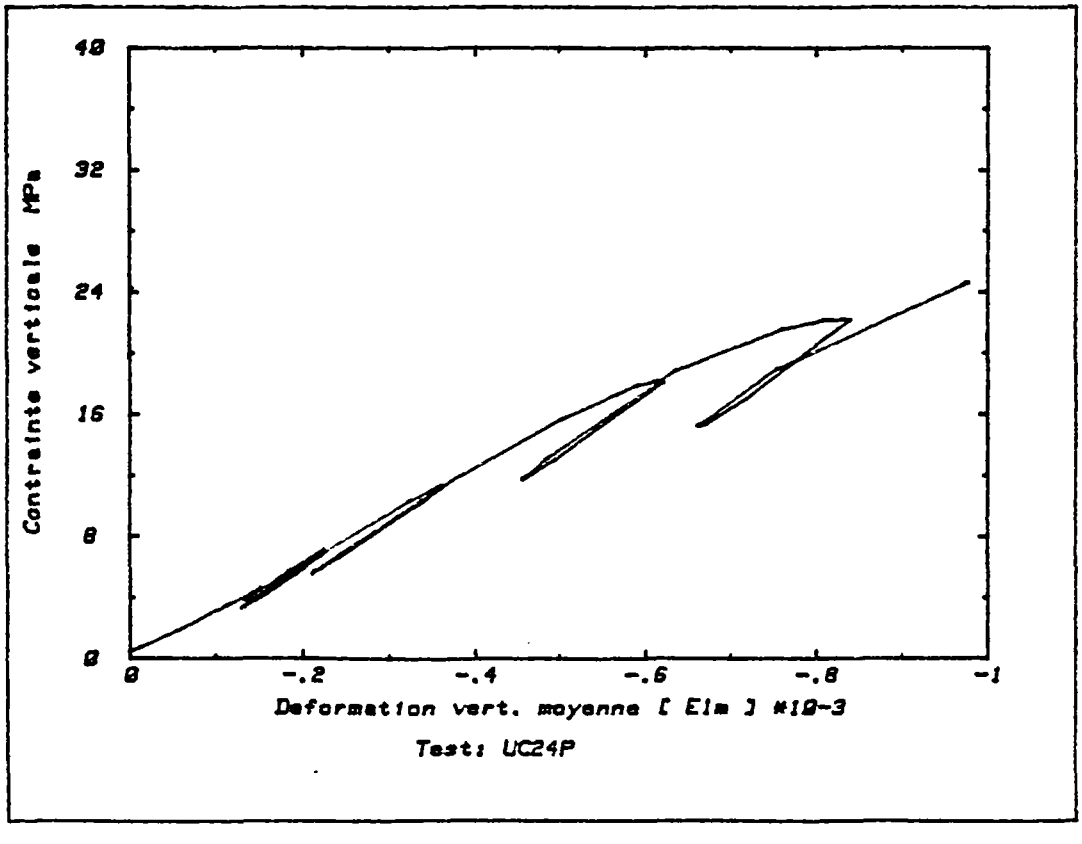


Fig. III.68 : courbe effort-déformation
essai de compression simple avec décharges.

III-3 Relation entre fissuration et non linéarité :

A partir des résultats précédents, représentant le comportement macroscopique, on conçoit qu'il existe une relation de cause à effet entre la fissuration du béton et le caractère non linéaire de son comportement. Si besoin est, l'émission acoustique permet de confirmer cette intuition. Nous allons maintenant essayer d'approfondir cette relation en partant d'un essai plus facile à interpréter que l'essai de compression simple.

III-3.a la traction simple :

Comme nous l'avons vu au chapitre I, la rupture dans un essai de traction simple est finalement localisée dans un plan perpendiculaire à la direction de chargement. Ceci correspond, si l'on considère le matériau comme homogène, à une fissuration qui se développe en mode I :

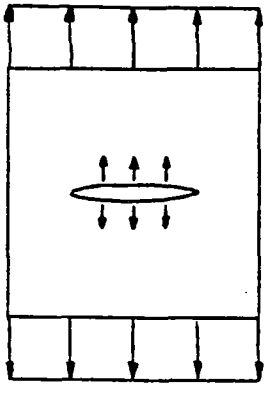


fig III.69 : développement de la fissuration en mode I
(essai de traction)

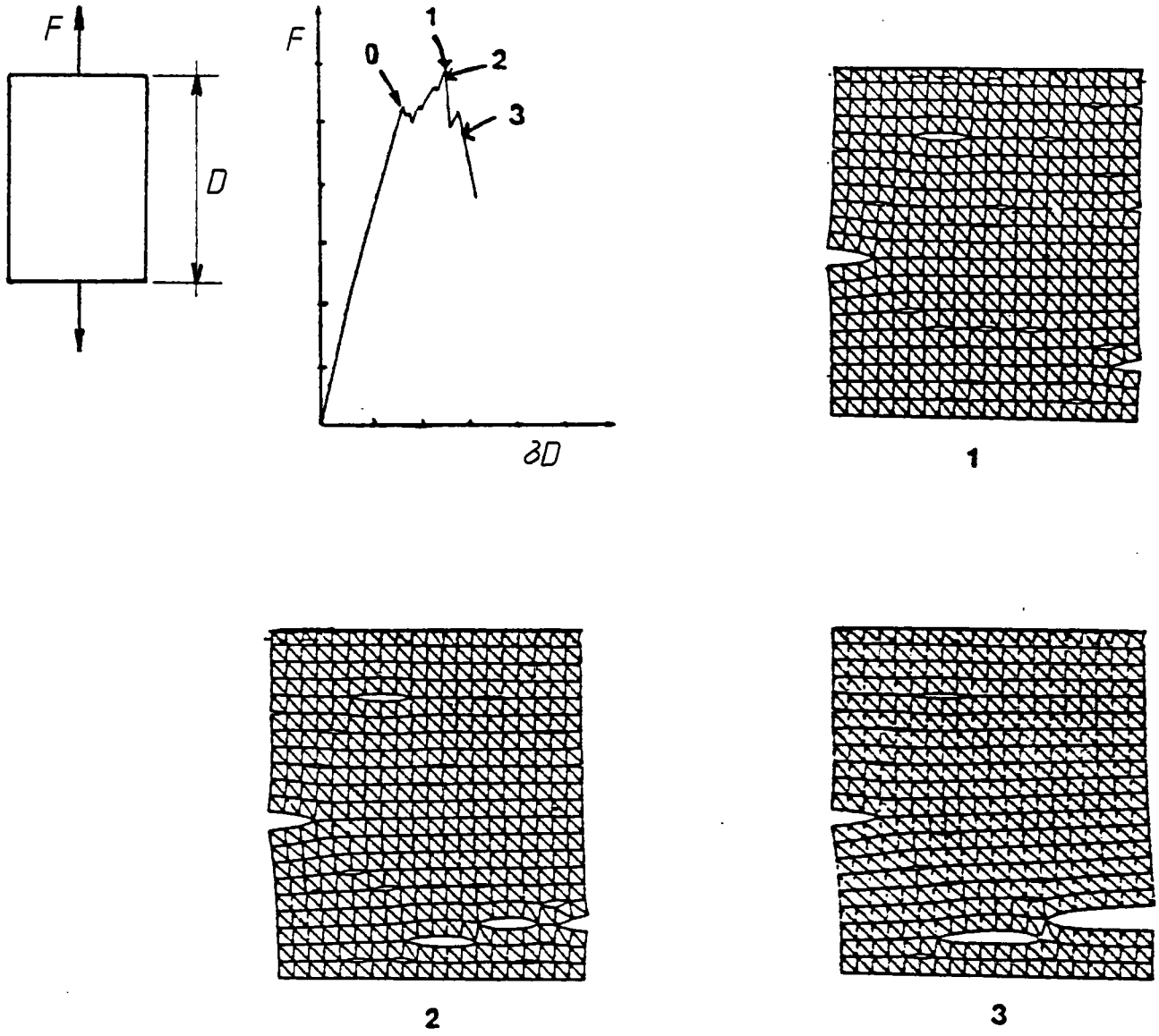
Partant de cette idée, et utilisant les travaux numériques de RICHER [109], P. ROSSI a développé un modèle stochastique de fissuration du béton [110]. A partir d'essais de traction direction sur des éprouvettes de volumes différents il a déduit une distribution statistique des résistances en traction, fonction du volume sollicité. Ces résistances sont ensuite distribuées de manière aléatoire dans un maillage éléments finis ,constitué pour le cas de la traction, de triangles à 6 noeuds classiques, doublés d'éléments de contact pour les

lignes perpendiculaires au sens de chargement . Ces éléments, d'épaisseur nulle, sont "ouverts" lorsqu'ils atteignent la résistance qui leur a été attribuée aléatoirement.

Les résultats obtenus par ROSSI permettent de suivre l'évolution de la fissuration ainsi que sa localisation. Sont notamment mis en évidence le lien entre le début de la non linéarité et l'apparition des premières fissures (état 1) ainsi que la liaison entre le radoucissement et la localisation. (figure III.70). On retrouve bien, grâce à ce modèle, la formation d'un plan de rupture. Ce type de modélisation permet également de simuler l'effet d'échelle (c'est-à-dire la variation de résistance en fonction du volume de l'éprouvette) (figure III.71).

Une autre approche, utilisant la Mécanique Linéaire de la Rupture est proposée par ZAITSEV et WITTMANN [111]. Leur modèle, qui tient compte des hétérogénéïtés du matériau, repose sur les hypothèses suivantes : il considère qu'existent dans le béton trois zônes de caractéristiques mécaniques différentes : la matrice et les inclusions bien sûr mais aussi une zone d'interface qui correspond, au plan physique, à ce que MASO [120] appelle l'auréole de transition. Pour ces trois zônes les ténacités (qui quantifient la résistance à la fissuration) sont telles que l'on ait : Kic (inclusion) ≥ Kic (matrice) ≥ Kic (interface). De plus, chaque inclusion a un défaut de cohésion initial avec la matrice (dû par exemple au ressuage).

A l'aide d'une distribution aléatoire des granulats, ZAITSEV simule la structure du béton, et une analyse par la Mécanique Linéaire de la Rupture lui permet de déterminer l'évolution de la fissuration. Cette analyse repose sur une solution analytique du problème de la fissuration autour d'un granulat. La charge nécessaire pour qu'il y ait propagation de fissure est alors connue en fonction de l'angle d'ouverture Θ et comparée avec celle à mettre en oeuvre pour une propagation dans la matrice (fig. III.72) (une fissure initiale d'ouverture Θ_o préexiste à l'interface. Cet angle correspond à la position stable de la fissuration).



état 0 : apparition de la 1ère fissure.

état 1 : pic de contrainte - fissuration répartie.

état 2 : radoucissement - localisation de la fissuration

état 3 : propagation d'une macro fissure localisée.

fig. III.70 évolution de la fissuration et courbe effort déplacement
(d'après le modèle stochastique de ROSSI [110])

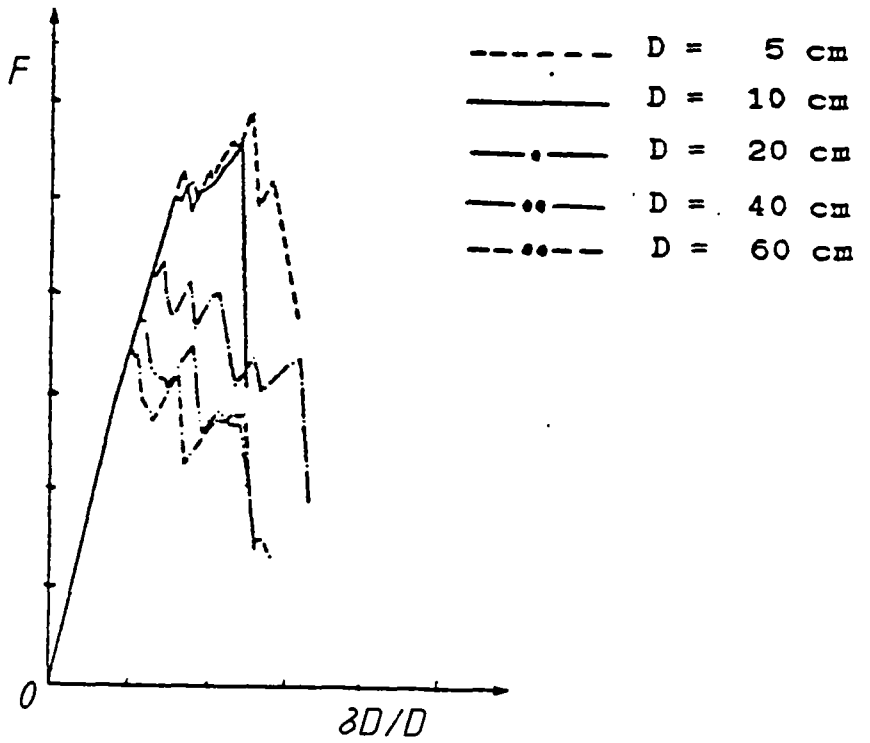


fig. III.71 : effet d'échelle : courbes effort-allongement relatif pour différents volumes d'éprouvettes.
(d'après ROSSI [110]).

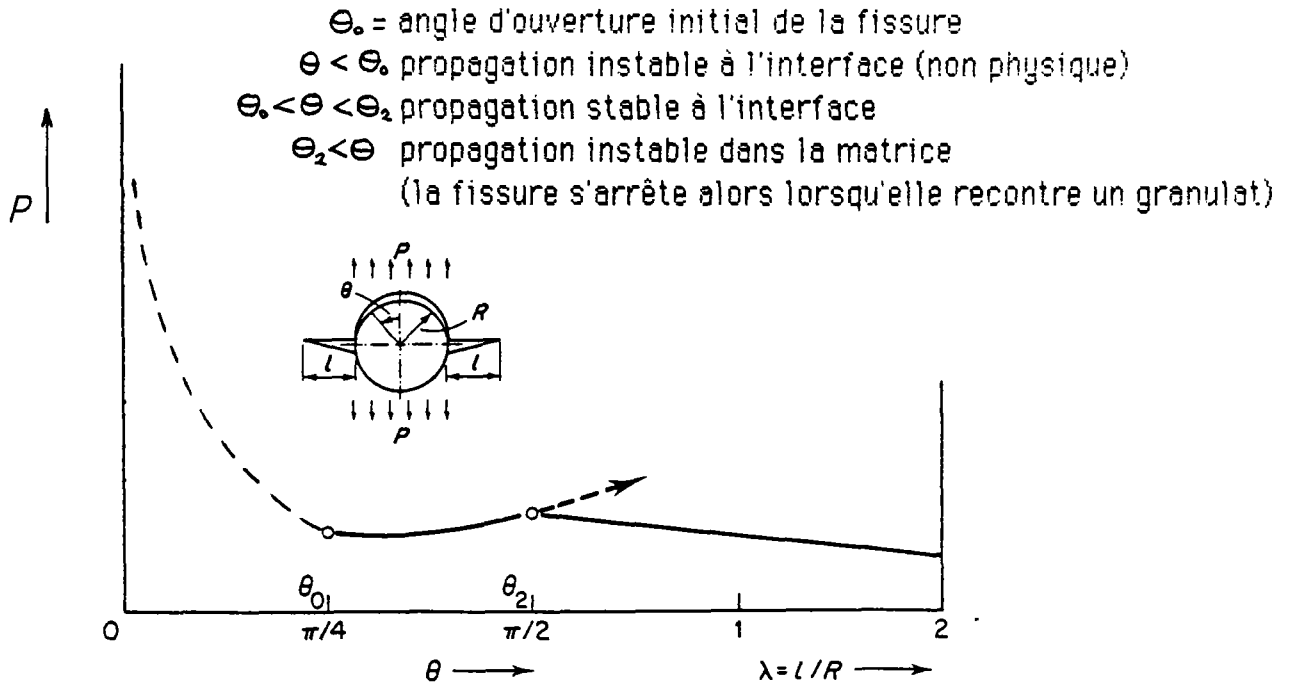


fig. III.72 : critère de propagation de la fissuration
(d'après ZAITSEV et WITTMANN)

Plusieurs remarques sont à faire concernant cette modélisation. Tout d'abord le fait que le critère de propagation de la fissuration dans la matrice soit obtenu en considérant la fissure comme rectiligne de longueur 2 (1 + R) . De plus, le critère de propagation de la fissure à l'interface n'est obtenu analytiquement que dans le cas d'une fissure unique dans un milieu infini chargé uniformément. Et lorsque plusieurs fissures se développent l'hypothèse précédente n'est bien sûr plus rigoureuse.

A ces réserves près, le modèle donne tout de même des résultats qui sont qualitativement (fig. III.73) en accord avec l'expérience. Ainsi, le modèle permet de retrouver l'apparition d'un plan de fissuration perpendiculaire à la direction de chargement.

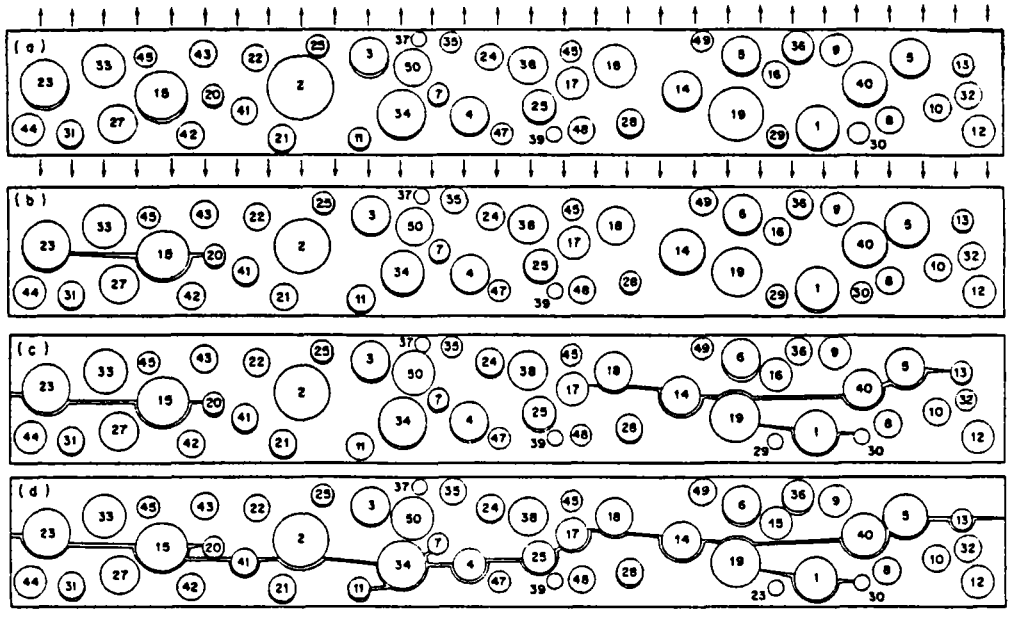
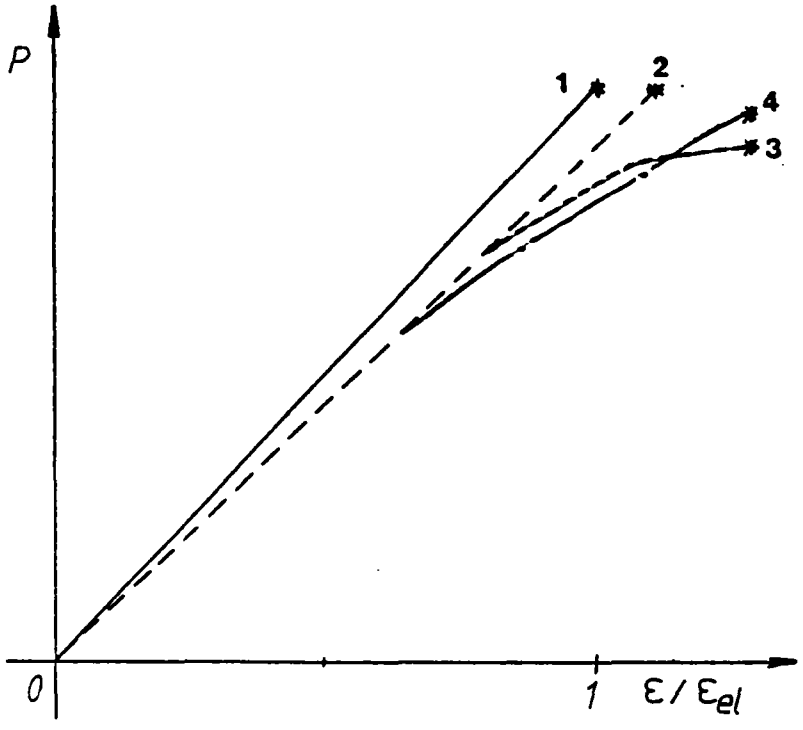


fig. III.73 : évolution de la fissuration dans un essai de traction (modèle de ZAITSEV-WITTMANN)

Si l'on étudie maintenant les courbes effort-déformation déduites de ces résultats, on constate un bon accord entre celles-ci et les résultats expérimentaux (fig. III.74) On peut noter aussi l'assez bonne corrélation entre le moment réel où apparaissent les premières non

linéarités et celui prévu numériquement.



1 - élastique linéaire sans fissuration
2 - linéaire avec fissures préexistantes mais sans propagation
3 - modèle ZAITSEV - WITTMANN
4 - résultats expérimentaux

Fig. III.74 : courbes contrainte déformation en traction simple.

Pour conclure sur l'essai de traction nous pouvons retenir les points suivants qui s'accordent dans toutes les modélisations :

- la fissuration se développe en mode I.
- l'ouverture des fissures explique la non linéarité du comportement avant pic, qui reste de toutes les façons faible dans le cas de la traction.

III-3.b <u>en compression</u> :

Dans ce cas de chargement, où la non linéarité est plus fortement marquée, on peut être tenté de reprendre les raisonnements décrits précédemment. ZAITSEV et WITTMANN ont ainsi appliqué en Mécanique Linéaire de la Rupture au cas du béton en compression simple. Par rapport à l'étude précédente ils introduisent la possibilité d'une évolution en mode II avec l'hypothèse suivante :

$$K_{II}c(\text{matrice}) \gg K_{II}c(\text{interface})$$

De ce fait la fissure initiale se développe, de façon instable, le long de l'interface à partir d'un défaut initial, et s'arrête lorsque l'interface pâte-granulat change d'orientation (cela nécessite pour le calcul d'utiliser des granulats anguleux et non pas circulaires comme dans le cas de la traction simple). On a ensuite une propagation stable en mode I dans la matrice (fig. III.75).

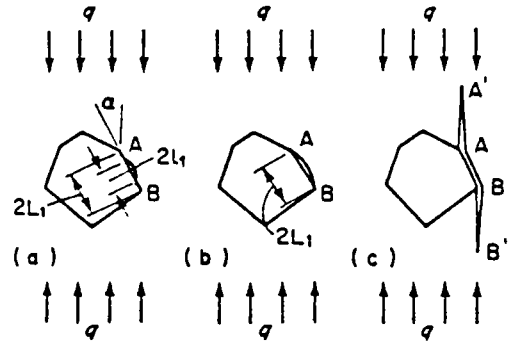


fig. III.75 : développement de la fissuration autour du granulat par le modèle ZAITSEV-WITTMANN

Le critère de propagation de cette fissure est obtenu à partir de l'étude d'un milieu infini uniformément chargé comprenant une seule fissure faisant un angle α avec la direction de chargement .

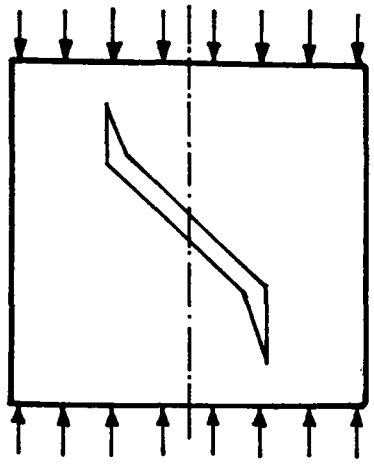


fig. III.76 : problème type utilisé par ZAITSEV et WITTMANN

Dans le cas qui nous intéresse (interface matrice-granulat) les auteurs étendent les résultats obtenus dans le cas précédent en introduisant des coefficients de concentration de contrainte, simulant l'influence du granulat. Ceci constitue bien sûr une hypothèse forte du modèle. Autre hypothèse que l'on peut discuter : la fissuration se développe dans la matrice parallèlement au chargement. Or, LINO [112] notamment, a montré que la fissure tendait à s'aligner parallèlement à la direction de la contrainte de compression mais seulement après avoir progressé dans une direction faisant un angle voisin de 70° avec la fissure initiale (fig. III.77). Cette direction est celle de la facette où la traction est maximale.

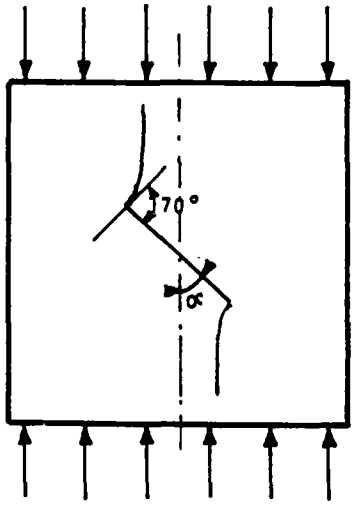


fig. III .77 : propagation de fissure d'après LINO [112]

Toutefois il faut noter que les fissures qui se propagent les premières sont celles pour lesquelles l'inclinaison est la plus faible. Dans ce cas l'alignement avec la direction de chargement est très rapide et l'erreur commise en considérant que la fissure se développe immédiatement selon la direction du chargement est très limitée.

Lorsque la fissure, qui se propage en mode I, rencontre un granulat, se pose à nouveau le problème de son évolution. La fissure va-t-elle contourner le granulat (mode II) ou bien le traverser (mode I) ? En fait, cela dépend fortement du type de béton : ordinaire, léger ou hautes performances. Pour ces deux derniers les hypothèses suivantes, c'est-à-dire KIc (inclusion) faible pour le béton léger et KIIc (interface) élevé pour le béton hautes performances, conduisent à un résultat analogue: les fissures traversent les granulats (ce qui est conforme à l'expérience). Pour le béton ordinaire le choix des caractéristiques mécaniques fait que la fissuration contourne les granulats (fig. III.78)

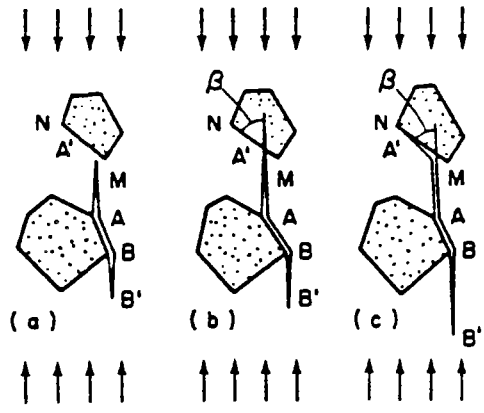


fig. III.78 : développement de la fissuration lorsqu'elle rencontre un granulat - cas du béton ordinaire, selon ZAITSEV, WITTMANN

Comme dans le cas de la traction, les auteurs ont ensuite distribué aléatoirement leurs granulats et simulé l'évolution d'une éprouvette sous un chargement de compression simple (fig.III.79). La fissuration obtenue, qui contourne les granulats et se développe dans la matrice parallèlement au chargement, correspond effectivement aux

constatations expérimentales. Il faut cependant noter ici, comme dans le cas de la traction, que les fissures ne sont plus indépendantes. Nous sommes alors loin de l'hypothèse de calcul faite au départ, c'est-à-dire une fissure dans un milieu infini.

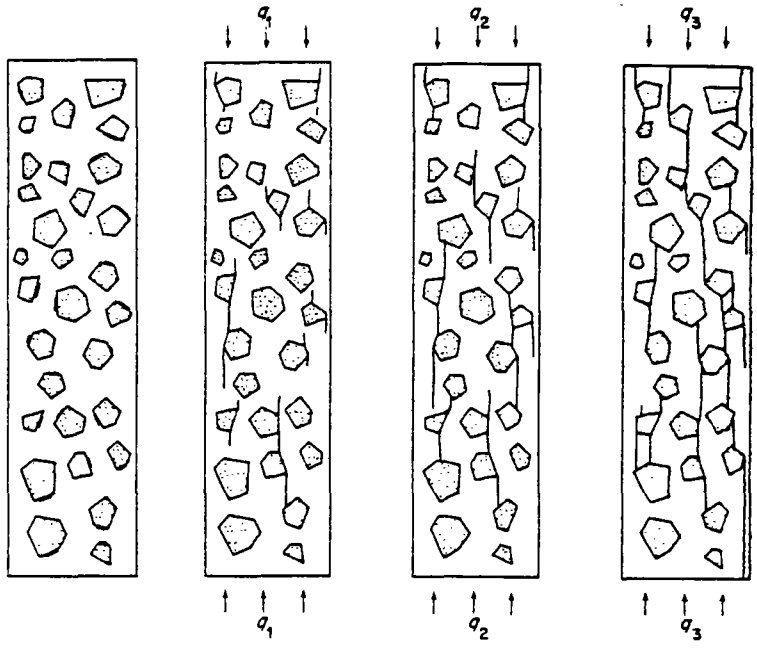


fig. III.79 : évolution de la fissuration à différents niveaux de charge.
cas de la compression simple
modèle de ZAITSEV, WITTMANN

Observons maintenant les courbes contrainte déformation déduites de cette simulation et comparons les deux courbes types obtenus pour un essai uniaxial. (Pour cela nous nous placerons dans les axes σ/σ_c et $\varepsilon/\varepsilon_c$). On constate, (fig. III .80) qualitativement, un bon accord entre expérience et simulation.

Nous pensons toutefois que, si la fissuration est la cause directe de la non linéarité du comportement du béton, d'autres facteurs peuvent s'ajouter pour expliquer celle-ci. Ce peut être par exemple l'existence de contraintes initiales (voir ACKER [113]). Nous avons vu en effet que le béton est sujet au retrait. Mais en fait, seule la pâte de ciment se rétracte, les granulats étant, de ce point de vue, inertes. Ceci engendre dans le matériau de fortes contraintes avant même que ne soit appliquée une charge extérieure. ROELFSTRA, SADOUKI et WITTMANN ont réalisé, grâce à leur modèle de béton numérique [114], une simulation de ces contraintes initiales.

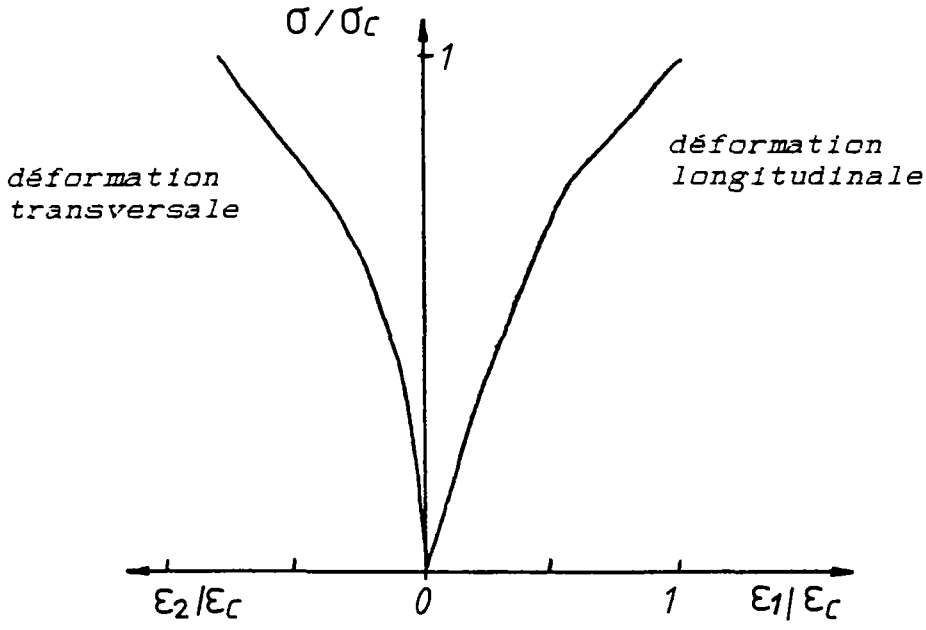
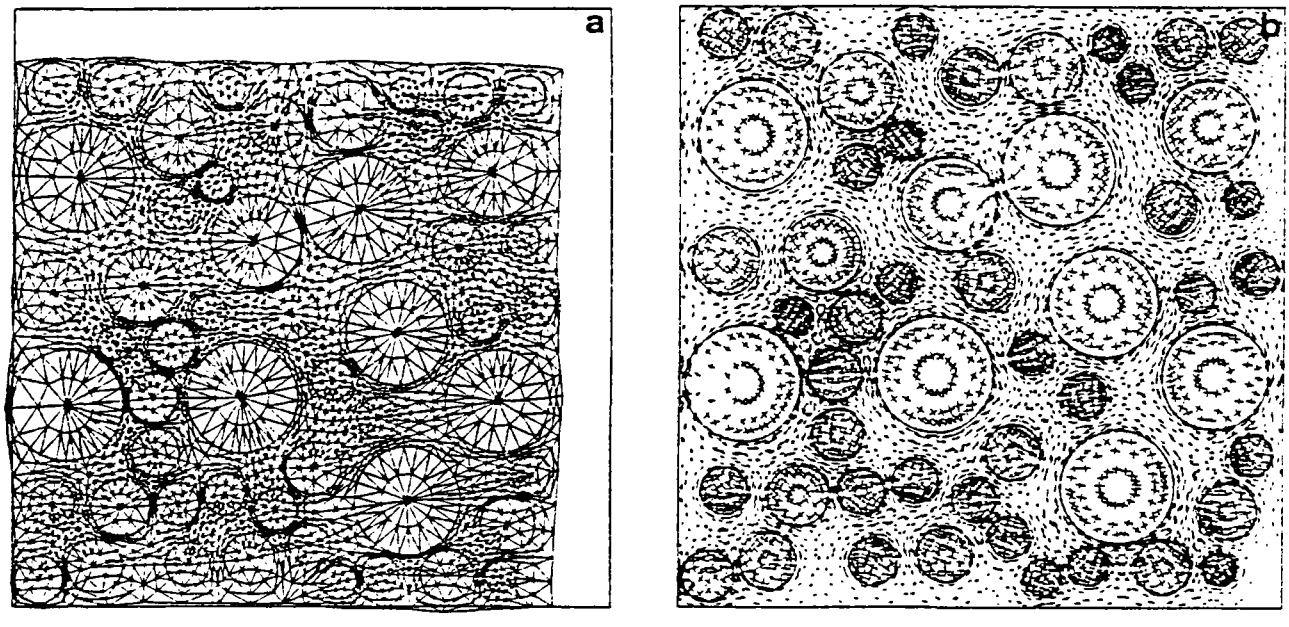


fig. III.80 : courbes contraintes déformations en compression simple.
(d'après les résultats de ZAITSEV et WITTMANN)



a) déformée

b) contraintes principales

c) détail du b) : contraintes autour d'un granulat

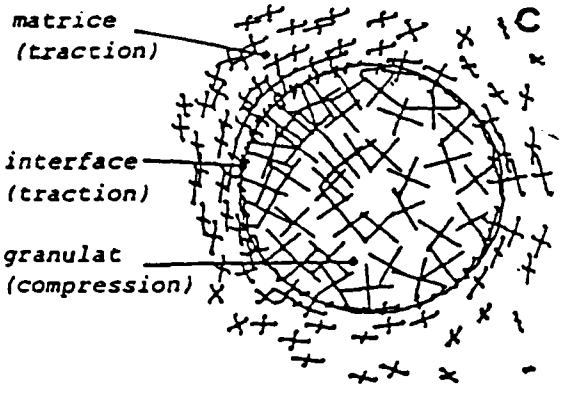
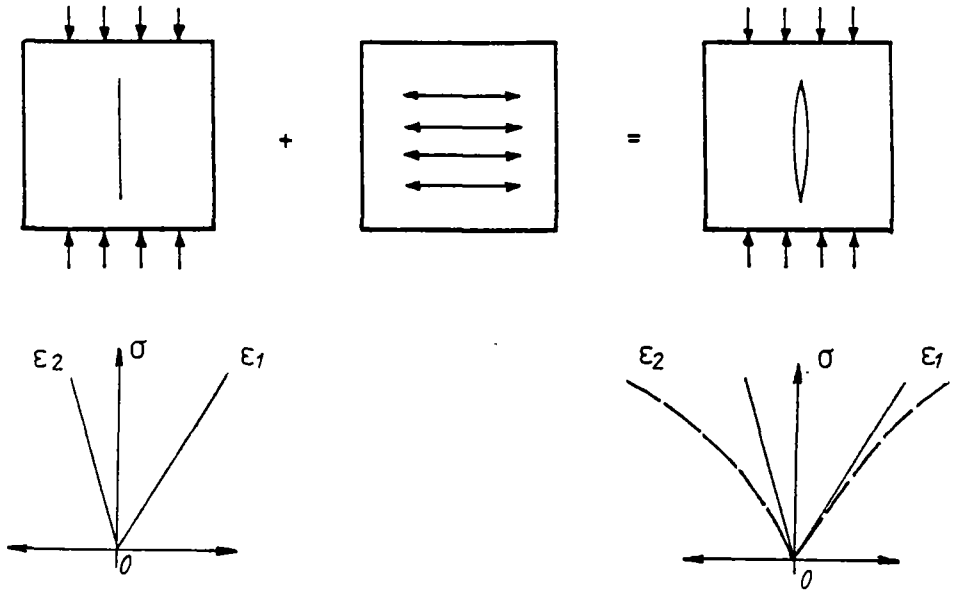


fig. III.81 : effets du retrait simulation grâce au modèle de béton numérique de ROELSTRA, SADOUKI et WITTMANN

On remarque que la matrice et son interface avec les granulats sont en majeure partie soumises à des tractions, les granulats étant pour leur part comprimés. Cette traction va donc faciliter l'évolution en mode I de la fissuration (y compris peut-être à l'interface). Pour quantifier cette influence il est possible d'utiliser le modèle stochastique de P. ROSSI, présenté précédemment. Notons que celui-ci ne permet pas, à priori, si l'on ne tient pas compte des contraintes initiales, d'expliquer la non linéarité en compression simple. En effet une fissure pré-existante, orientée selon la direction du chargement dans un milieu homogène, ne s'ouvrirait pas. C'est sa conjonction avec les contraintes initiales dues au retrait qui permettra d'obtenir la non linéarité du comportement (fig. III.82)

On peut noter que cette modélisation conduit à une non linéarité plus marquée en ε_2 qu'en ε_1. Suivant la direction 1, en effet, le déplacement en tête de fissure est d'un ordre de grandeur inférieur à celui de l'ouverture de la fissure. Ceci correspond qualitativement à nos résultats expérimentaux. Cette application particulière du modèle stochastique est programmée par P. ROSSI afin de vérifier si l'on retrouve quantitativement le comportement du béton.



milieu homogène fissuré contraintes initiales

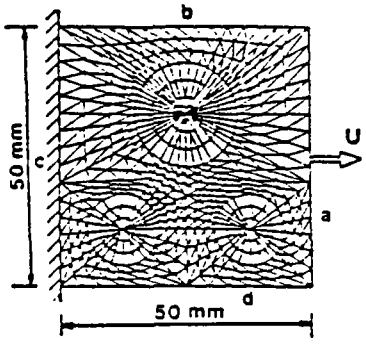
fig. III.82 : influence des contraintes internes sur la fissuration en compression simple.

Le modèle de béton numérique de WITTMANN et ROELFSTRA permet lui aussi de superposer les effets de la fissuration aux contraintes initiales (dans ce cas précis les auteurs n'introduisent pas réellement une fissuration mais un comportement radoucissant de la zone d'interface et de la matrice). Une application (dans le cas de la traction mais en compression nous aurions qualitativement des résultats similaires) montre clairement que les contraintes initiales accroissent la non-linéarité (fig.III. 83) [115]. Le comportement radoucissant est évidemment décrit compte tenu du type de modélisation choisi (loi de comportement de la matrice radoucissante). Mais en fait celle-ci cache l'aspect physique du phénomène et reste de toutes les manières difficile à déterminer (cf. chapitre I).

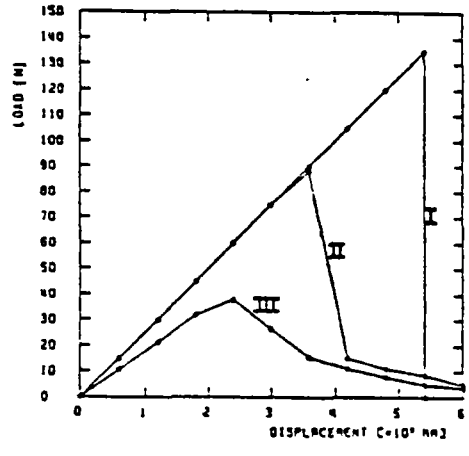
Quant aux modèles de ZAITSEV-WITTMANN et stochastique plus contraintes initiales, ils ne peuvent aucunement expliquer le radoucissement en compression simple.

C'est pourquoi sont apparus des modèles "structureux" qui permettent de simuler à la fois les non-linéarités et le comportement radoucissant d'une éprouvette de béton. Dans cette classe de modèles figure celui de DOUGILL [116]. C'est un modèle à barres. Celles-ci sont réparties aléatoirement (voir fig. III.84). Elles suivent un comportement

élastique fragile et ont des caractéristiques mécaniques (modules et résistances) qui sont distribuées de façon aléatoire. A chaque incrément de sollicitation imposé au système de barres sont calculés les efforts dans chacune d'entre elles. Lorsque la résistance d'une barre est atteinte, celle-ci voit sa raideur s'annuler et ne participe donc plus à l'effort d'ensemble. La distribution des efforts est alors recalculée.



* détail de la structure modélisée



* courbes efforts déplacements de I à III augmentation des contraintes initiales.

Fig.III.83: influence des contraintes initiales résultats obtenus à l'aide du béton numérique [115]

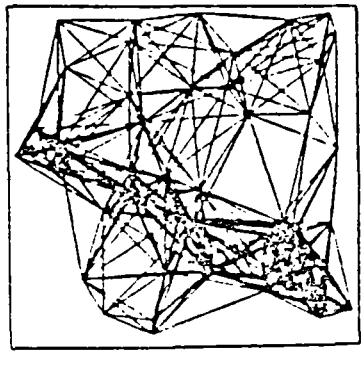


Fig.III.84: modèle à barres de DOUGILL .

Les résultats obtenus par DOUGILL sont qualitativement bons : il retrouve le comportement macroscopique, le radoucissement et la localisation ainsi que l'effet d'échelle. Pourtant il nous semble que ce modèle est critiquable au moins sur deux points. Premièrement, dans les cas de chargement de compression multiaxiale, il ne peut, tel qu'il est formulé, rendre compte de l'augmentation de résistance du matériau (en fait, le modèle est plus adapté aux cas des tractions). Deuxièmement, le lien entre une modélisation par barres et la physique du matériau n'apparaît pas de façon évidente. (le modèle n'est en fait validé que par les résultats qu'il permet d'obtenir).

C'est pour cette raison que, partant d'une idée similaire à celle proposée au chapitre I pour le radoucissement (flambement de colonnettes formées par la fissuration fig. I.16), F. de LARRARD associe à un modèle stochastique de fissuration un critere de flambement [117] : lorsqu'une colonnette atteint sa longueur critique elle se rompt et ne participe plus à la résistance de l'éprouvette (fig III.85)

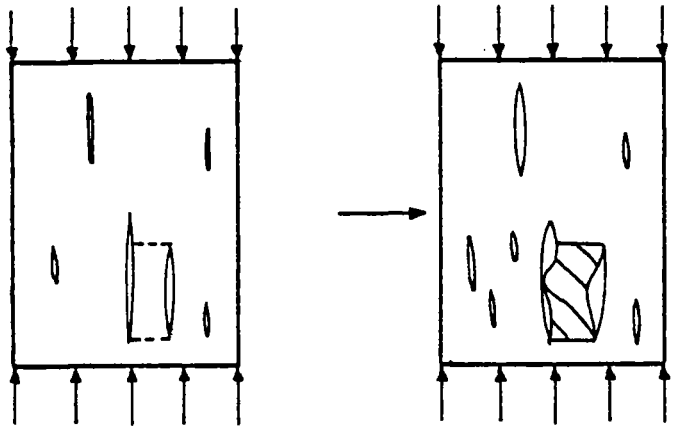


fig. III .85 : flambement d'une colonnette.

Il est clair que les hypothèses, qui sont voisines de celles du modèle de DOUGILL, aboutissent à des résultats similaires : <u>comportement non linéaire et radoucissant.</u>

A noter que selon ce modèle :

- la fissuration n'est plus la cause directe de la non linéarité; schématiquement nous avons:

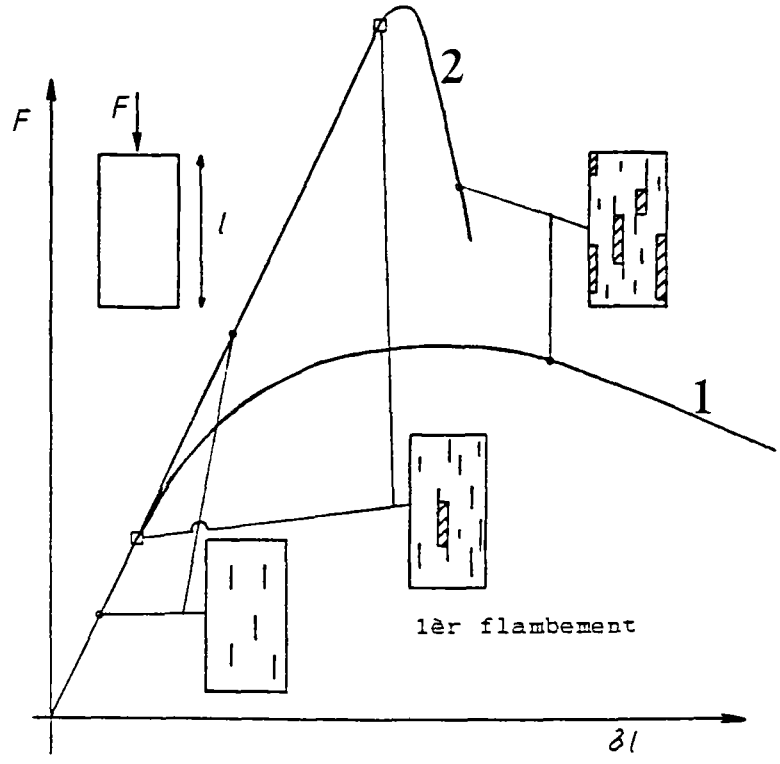
fissuration → flambement → non linéarité.

- si le béton est très homogène, le modèle conduira à un comportement de type fragile. Au contraire, si la distribution des caractéristiques mécaniques du matériau est étendue, avec les mêmes valeurs moyennes que pour le béton homogène, le modèle indique une non-linéarité accrue et une résistance plus faible (fig. III.86)

- les conditions d'expérimentation (géométrie de l'éprouvette, conditions d'appui) jouent bien sûr un rôle capital du fait de l'aspect "structural" du modèle. On obtiendra ainsi des déformations plus importantes avec des plateaux massifs (problème signalé au III.2.1).

- dans le même ordre d'idée, si l'on considère un cas de chargement triaxial de révolution, l'augmentation de la contrainte à la rupture et la ductilité du matériau peuvent s'expliquer par l'amélioration, due au confinement, de la stabilité des colonnettes.

- enfin le modèle permet de retrouver le comportement post pic du béton, ce qui est cohérent avec son idée originelle.



1 - distribution étalée des résistances
2 - distribution resérrée des résistances.
fig. III.86 : simulation du comportement du béton en compression simple (modèle F. de LARRARD)

Ce modèle, très simple, permet donc de retrouver la plupart des caractéristiques du comportement du beton en compression. Il n'est toutefois pour l'instant qu'une hypothese qui demande a etre confrontée à l'expérience, au moyen, sans doute, de nouvelles techniques d'analyse, nous pensons ici à la stéréophotogrammetrie.

Cette technique, connue et employée depuis longtemps en cartographie ou pour le cinéma en trois dimensions, a été récement utilisée en Mécanique des Sols par DESRUES [118] pour un problème similaire au nôtre. Elle permet, grâce à la superposition de photos de la même éprouvette à divers stades de son chargement, de visualiser les déplacements par apparition d'un faux relief. Dans le cadre du GRECO " Rhéologie des Géomatériaux " [119], nous allons étudier son applicabilite au matériau béton et essayer de mettre en évidence les mécanismes conduisant au radoucissement afin de confirmer ou d'infirmer l'hypothèse flambement.

III-3.c conclusions :

Nous venons de voir que le comportement non linéaire du béton a de nombreuses causes possibles, modélisables de façons très différentes. Néanmoins, les différents auteurs s'accordent pour conclure que, quel que soit le mode de chargement, lorqu'il n'y a pas de confinement c'est le mode I qui prédomine pour expliquer la non linéarite (le mode II, quand il intervient, n'étant qu'un mode d'initiation des fissures). Lorsqu'il y a un confinement MAZARS a montré que le mode II pouvait devenir prépondérant.

L'analyse effectuée par ZAITSEV et WITTMANN, fondée sur la Mécanique Linéaire de la Rupture, perait déjà limitée par ses hypothèses et par une applicabilité delicate au cas multiaxial. Elle nous semble insuffisante pour expliquer en totalité le comportement du béton en compression simple. De même, le modèle stochastique de P. ROSSI, tres adepte pour la traction, ne peut suffire en compression. La prise en compte des contraintes de traction pre-existantes dans la matrice, nous semble être la première voie à suivre en vue d'ameliorer les modèles précédents et notre compréhension des phenomènes.

Le comportement radoucissant du materiau nous incite également à tenir compte d'effets structuraux dans la modélisation. De ce point de vue les modèles à barres, du type DOUGILL, s'ils donnent des

résultats intéressants, semblent trop éloignés du matériau et de plus ne peuvent que difficilement rendre compte du comportement du béton sous chargements multiaxiaux. Il nous semble préférable de chercher le mécanisme physique (par exemple le flambement de colonnettes, mais on peut imaginer d'autres mécanismes) qui conduit au radoucissement et pour cela nous fondons de grands espoirs sur l'analyse stéréophotogrammétrique qui sera entreprise en 1987.

III-4 Influence de la teneur en eau.

III-4.a Relations avec la résistance et le module d'élasticité.

Ainsi que nous l'avons relevé au chapitre I, la teneur en eau est un facteur clé du comportement du béton. Sur l'aspect long terme de la relation teneur en eau-comportement un grand nombre d'études ont été réalisées. Curieusement très peu l'ont été sur le court terme (voir chapitre I). Il nous a donc semblé important de profiter de la phase de mise au point de la presse pour tester ce paramètre.

Sur les figures III. 87 et III. 88 sont présentés les résultats obtenus sur les séries 1 et 2 concernant la résistance en compression simple et le module d'Young initial fonctions de la teneur en eau.

On constate que ces deux courbes ont une allure similaire entre elles et analogues également à celles obtenues par PIHLAJAVAARA [37] et WITTMANN [38] (Chapitre I). Toutefois la dispersion relative de nos résultats ne masque pas que deux phénomènes distincts , de nature différente, sont mis en jeu.

En ce qui concerne la partie décroissante des courbes (pour une teneur en eau comprise entre 0 et 30% environ) rappelons l'explication fournie par WITTMANN et déjà présentée au chapitre I: l'adsorption d'eau en surface des particules constituant la pâte de ciment diminue l'énergie de surface existante résultant des interactions entre particules. (Ce modèle , dit de Munich, permet en outre d'expliquer le retrait). Le séchage a donc tendance à augmenter les tensions superficielles mais son action n'est sensible que lorsqu'un certain niveau de teneur en eau est atteint. Ce niveau doit correspondre à un seuil dans la porosité: dans la partie située à droite le séchage ne fait intervenir qu'un petit nombre de pores,

disséminés dans le volume. L'effet d'auto-contrainte reste alors faible, alors que dans la partie gauche le niveau de séchage est tel qu'il concerne des pores suffisamment voisins pour qu'un effet de précontrainte se fasse sentir dans le matériau, le rendant ainsi plus rigide et plus resistant. Les relations entre résistance en compression simple ou module d'Young et la teneur en eau, compte tenu de cette seule hypothèse ont alors l'allure suivante:(fig.III.89)

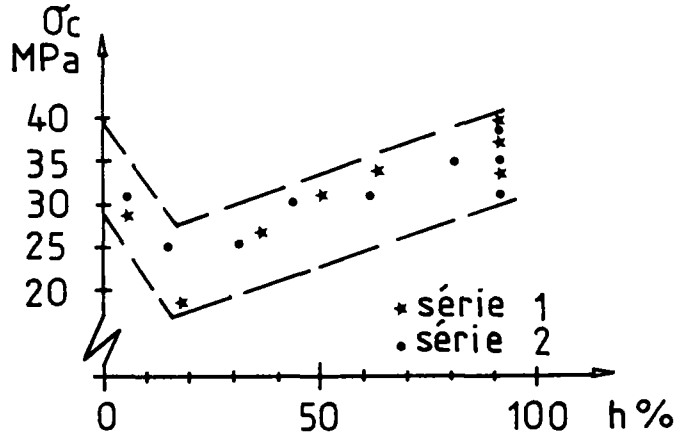


fig.III. 87 : relation σ_c , h (essais ENTPE)

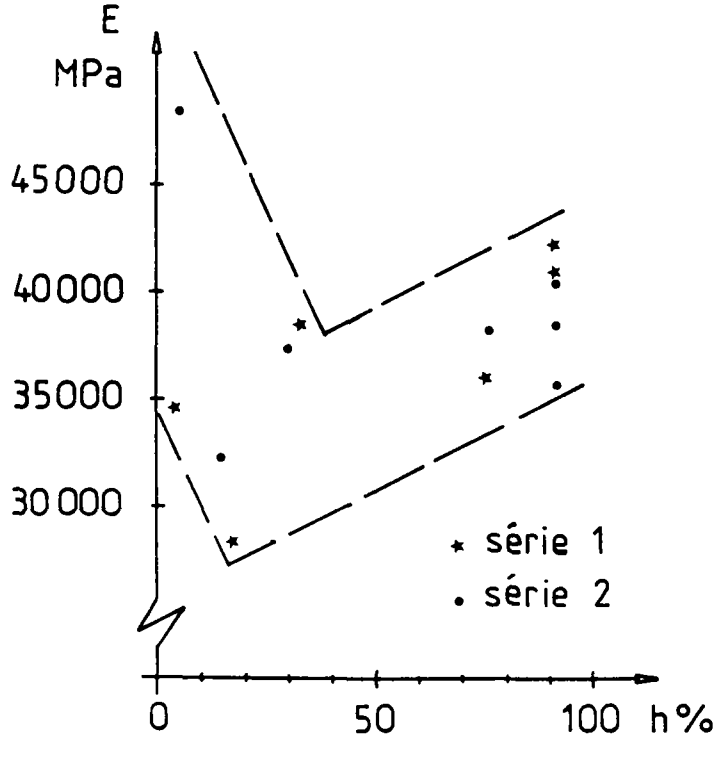


fig.III. 88: relation E , h (essais ENTPE)

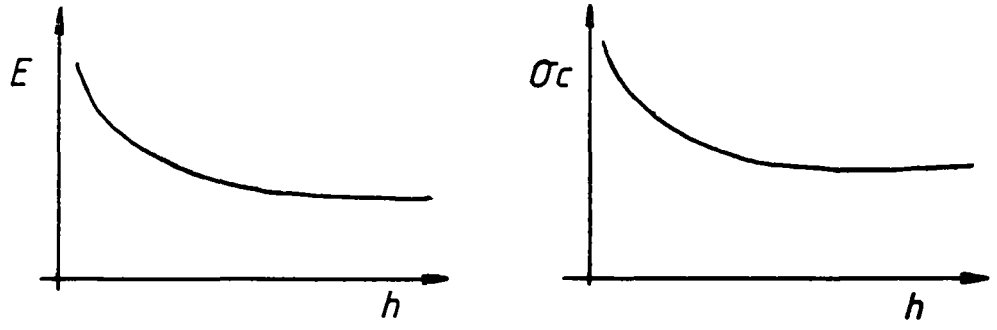


fig.III. 89: relations (σ_c, h) et (E , h)
déduites du modèle de Munich (WITTMANN [38] et [134])

Il nous faut maintenant expliquer la remontée de nos courbes lorsque la teneur en eau dépasse 30%. WITTMANN propose d'expliquer cette remontée par le fait que l'eau contenue dans les pores a une certaine capacité portante (c'est à dire qu'il y a mise en pression de l'eau intersticielle et effet de contrainte effective). Nous allons montrer que cette explication, si elle conduit bien à une remontée de la courbe (E,h) ne peut avoir les mêmes conséquences pour la courbe (σ_c,h).

Pour cela supposons notre béton saturé et de perméabilité très faible. A court terme un essai de compression pourra donc être considéré comme non drainé. Nous allons définir nos notations à partir du modèle suivant:

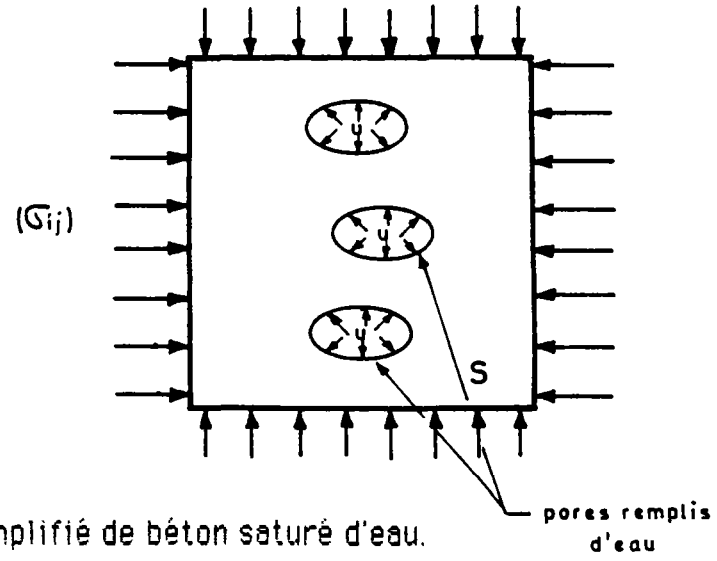


Fig.III.90:modèle simplifié de béton saturé d'eau.

Nous noterons:

σ_{ij} contrainte totale appliquée à S (les contraintes sont choisies normales à la surface extérieure de S)

E , ν caractéristiques élastiques du matériau en conditions non drainées (c'est à dire lorsqu'une certaine pression intersticielle u existe dans les pores)

E_o, ν_o caractéristiques élastiques en conditions drainées (u=0)

E_s, ν_s caractéristiques élastiques du squelette

Nous considérons le béton comme élastique linéaire et nous supposons sa porosité isotrope. Soit (σ_{ij})s les contraintes appliquées au squelette. Ecrivons l'équilibre suivant la direction 1 de notre éprouvette:

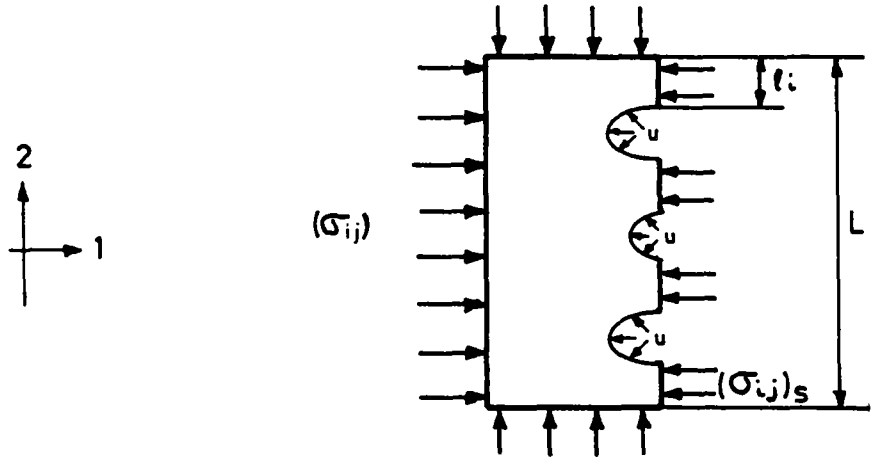


Fig.III.91: équilibre des forces.

$$\int_L [(\sigma_{ij}).\vec{n_1}].\vec{n_1}\,dx = \sigma.L = u(L-\ell) + \int_\ell [(\sigma_{ij})_s.\vec{n_1}].\vec{n_1}\,dx$$

avec $\ell = \sum_i \ell_i$

Définissons maintenant la contrainte effective σ'_{ij} telle que si $\sigma' = [(\sigma_{ij}).\vec{n_1}]\vec{n_1}$ nous avons:

$$\sigma'.L = \int_\ell [(\sigma_{ij})_s . n_1].n_1\,dx$$

La déformation ε_{ij} peut alors s'exprimer des deux manières suivantes:

$$\varepsilon_{ij} = (1+\nu)/E\ .\ \sigma_{ij} - \nu/E\ \mathrm{tr}\,\sigma_{ij}\ .\ \delta_{ij}$$

ou $$\varepsilon_{ij} = (1+\nu_0)/E_0 \cdot \sigma'_{ij} - \nu_0/E_0 \cdot tr\,\sigma'_{ij} \cdot \delta_{ij}$$

Pour déterminer la relation liant σ'_{ij} à σ_{ij} et u nous allons décomposer l'état A en un état B avec u=0 et un état C de compression hydrostatique égale à u (cf MORLIER [121]):

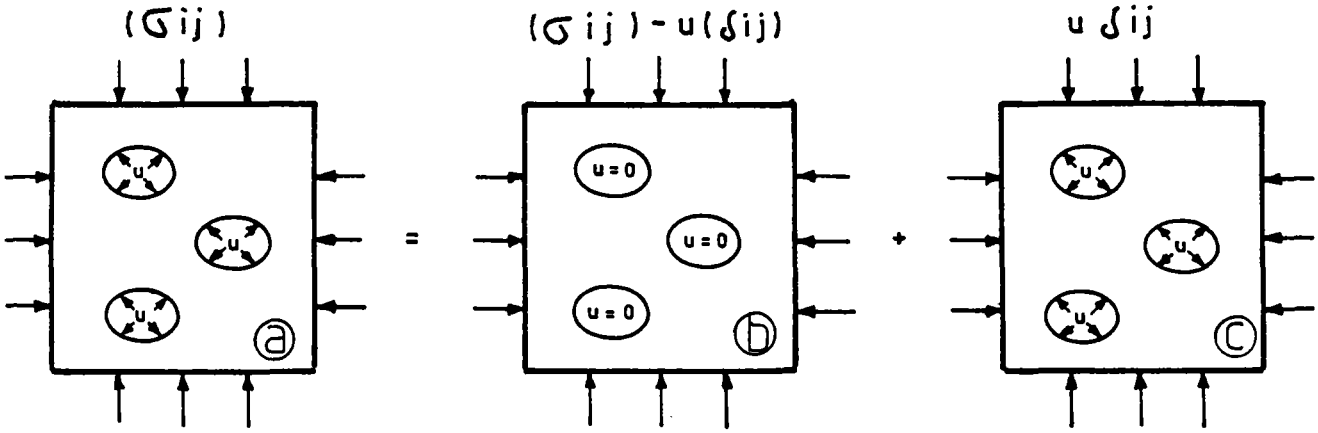


Fig.III.92: décomposition de l'état de contraintes

Nous avons alors

- pour l'état A: $$(\varepsilon_{ij})_A = (1+\nu)/E \cdot \sigma_{ij} - \nu/E \cdot tr\,\sigma_{ij} \cdot \delta_{ij}$$
$$= (1+\nu_0)/E_0 \cdot \sigma'_{ij} - \nu_0/E_0 \cdot tr\,\sigma'_{ij} \cdot \delta_{ij}$$
- pour l'état B: $$(\varepsilon_{ij})_B = (1+\nu_0)/E_0 \cdot (\sigma_{ij} - u\,\delta_{ij}) - \nu_0/E_0 \cdot tr(\sigma_{ij} - u\,\delta_{ij}) \cdot \delta_{ij}$$

-pour l'état C, il est clair que la contrainte appliquée au squelette solide est égale à u. Nous aurons donc:

$$(\varepsilon_{ij})_C = (1+\nu_s)/E_s \cdot u\,\delta_{ij} - \nu_s/E_s \cdot tr(u\,\delta_{ij}) \cdot \delta_{ij} = \frac{u}{K_s} \cdot \delta_{ij}$$

avec $$K_s = \frac{E_s}{1-2\nu_s}$$

Cherchons à exprimer σ'_{ij} sous la forme $\sigma_{ij} - \alpha.u$ ou α est le coefficient de BIOT [122].

Nous avons: $(\varepsilon_{ij})_A = (\varepsilon_{ij})_B + (\varepsilon_{ij})_C$ (principe de superposition)

d'où $\frac{1+\nu_0}{E_0}(\sigma_{ij} - \alpha u) - \frac{\nu_0}{E_0}(\mathrm{tr}\,\sigma_{ij} - 3\alpha . u) . \delta_{ij}$

$$= \frac{1+\nu_0}{E_0} . \sigma_{ij} - \frac{\nu_0}{E_0} . \mathrm{tr}\,\sigma_{ij} . \delta_{ij} - \left(\frac{1-2\nu_0}{E_0} - \frac{1}{K_s}\right) u . \delta_{ij}$$

soit $\alpha . \frac{2\nu_0 - 1}{E_0} = -\left(\frac{1-2\nu_0}{E_0} - \frac{1}{K_s}\right)$

c'est à dire $\boxed{\alpha = 1 - \frac{K_0}{K_s}}$ avec $K_0 = \frac{E_0}{1-2\nu_0}$

Comme nous avons $0 \leq K_0 \leq K_s \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq 1$

Revenons maintenant à l'état B seul afin de donner une signification physique au paramètre α que nous venons d'introduire de manière artificielle.

Soit $(\sigma'_{ij})_B$ la contrainte effective pour ce cas de chargement.

Nous avons donc: $\sigma'_B = [(\sigma'_{ij})_B . \vec{n_1}] . \vec{n_1}$
d'où

$$\sigma'_B . L = \int_\ell [(\sigma_{ij} - u\,\delta_{ij}) . \vec{n_1}] . \vec{n_1} . dx$$

$$= \int_\ell (\sigma_{ij} . \vec{n_1}) . \vec{n_1}\, dx - u . \ell$$

$$= \sigma' . L - u . \ell$$

$$\Rightarrow \sigma'_B = \sigma' - \frac{\ell}{L} . u$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \ell / L}$$

Ce paramètre correspond donc à la porosité d'aire du béton. (on retrouve alors la condition $0 \leq \alpha \leq 1$). En réalité, pour un matériau non élastique et surtout non saturé comme le notre, α sera vraisemblablement différent de cette valeur. Enfin si la porosité n'est pas isotrope ce ne sera pas un scalaire mais un tenseur d'ordre 4.

A partir de la relation $(\varepsilon_{ij})A = (\varepsilon_{ij})B + (\varepsilon_{ij})C$ nous pouvons aussi exprimer u fonction de σ_{ij}.

En effet nous avons:

$$\frac{1+\nu}{E} \cdot \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\, tr\sigma_{ij}\, \delta_{ij} = \frac{1+\nu_0}{E_0}\, \sigma_{ij} - \frac{\nu_0}{E_0}\, tr\sigma_{ij}\, \delta_{ij} - \left(\frac{1-2\nu_0}{E_0} - \frac{1}{K_s}\right) u\, \delta_{ij}$$

d'où

$$u \cdot \delta_{ij} = \frac{\sigma_{ij}\left(\frac{1+\nu_0}{E_0} - \frac{1+\nu}{E}\right) - tr\sigma_{ij} \cdot \delta_{ij}\left(\frac{\nu_0}{E_0} - \frac{\nu}{E}\right)}{1/K_0 \quad - \quad 1/K_s}$$

Sommons sur i=j

$$3 \cdot u = \frac{\left(\frac{1+\nu_0}{E_0} - \frac{1+\nu}{E} - 3\left(\frac{\nu_0}{E_0} - \frac{\nu}{E}\right)\right) \cdot tr\sigma_{ij}}{1/K_0 \quad - \quad 1/K_s}$$

et en posant $K = \frac{E}{1-2\nu}$ cela nous donne finalement:

$$\boxed{u = \frac{1}{3}\left(\frac{1/K_0 - 1/K}{1/K_0 - 1/K_s}\right) tr\sigma_{ij} = \frac{1}{3}\,\chi \cdot tr\sigma_{ij}}$$

avec $\chi = \frac{1/K_0 - 1/K}{1/K_0 - 1/K_s}$ coefficient de compressibilité.

Ce résultat est classique en Mécanique des Roches (cf MORLIER [121]). C'est ce ce coefficient qu'a mesuré BERGUES. Il l'a été également par CAMPUS [123] pour différents types de béton. On peut estimer, selon ces auteurs, χ aux alentours de 0,75.

Plaçons nous dans le cas de la compression simple et admettons que la relation $u = \frac{1}{3}\chi\, tr\sigma_{ij}$ reste vérifiée. Dans ce cas nous aurons:

$$u = \frac{1}{3}\chi\sigma_1 = \frac{\sigma_1}{4}$$

et pour les contraintes effectives:

$$\sigma_1' = \sigma_1 - \alpha u = \sigma_1 - \alpha\frac{\sigma_1}{4} = \sigma_1 \cdot \frac{4-\alpha}{4} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{4}{4-\alpha} \cdot \sigma_1'$$

et

$$\sigma_2' = -\alpha u = -\frac{\alpha}{4} \cdot \sigma_1 = -\frac{\alpha}{4-\alpha} \cdot \sigma_1'$$

Comme α est compris entre 0 et 1 nous pouvons tracer les droites (σ_1', σ_2') et (σ_1', σ_1) en fonction de ce paramètre. Si maintenant nous comparons les valeurs des couples (σ_1', σ_2') à un critère de rupture obtenu pour le matériau sec, nous allons obtenir les valeurs de σ_1 correspondantes (cf fig.III.93). On constate alors que la plus grande valeur de σ_1 est obtenue pour $\alpha = 0$ (on retrouve alors $\sigma_1 = \sigma_c$). Ceci est

imputable à la faible résistance du béton en traction. Il est donc certain que s'il y a mise en pression de l'eau intersticielle contenue dans le béton elle ne peut expliquer, bien au contraire, la remontée des courbes (σ_c , h).

Inversement nous ne pouvons pas non plus conclure que parce qu'il y a augmentation de σ_c avec h au dessus d'un certain seuil, il n'y a pas mise en pression de l'eau intersticielle. Celle-ci, certainement faible, peut être masquée par un phénomène majeur de nature différente que nous allons essayer de mettre en évidence.

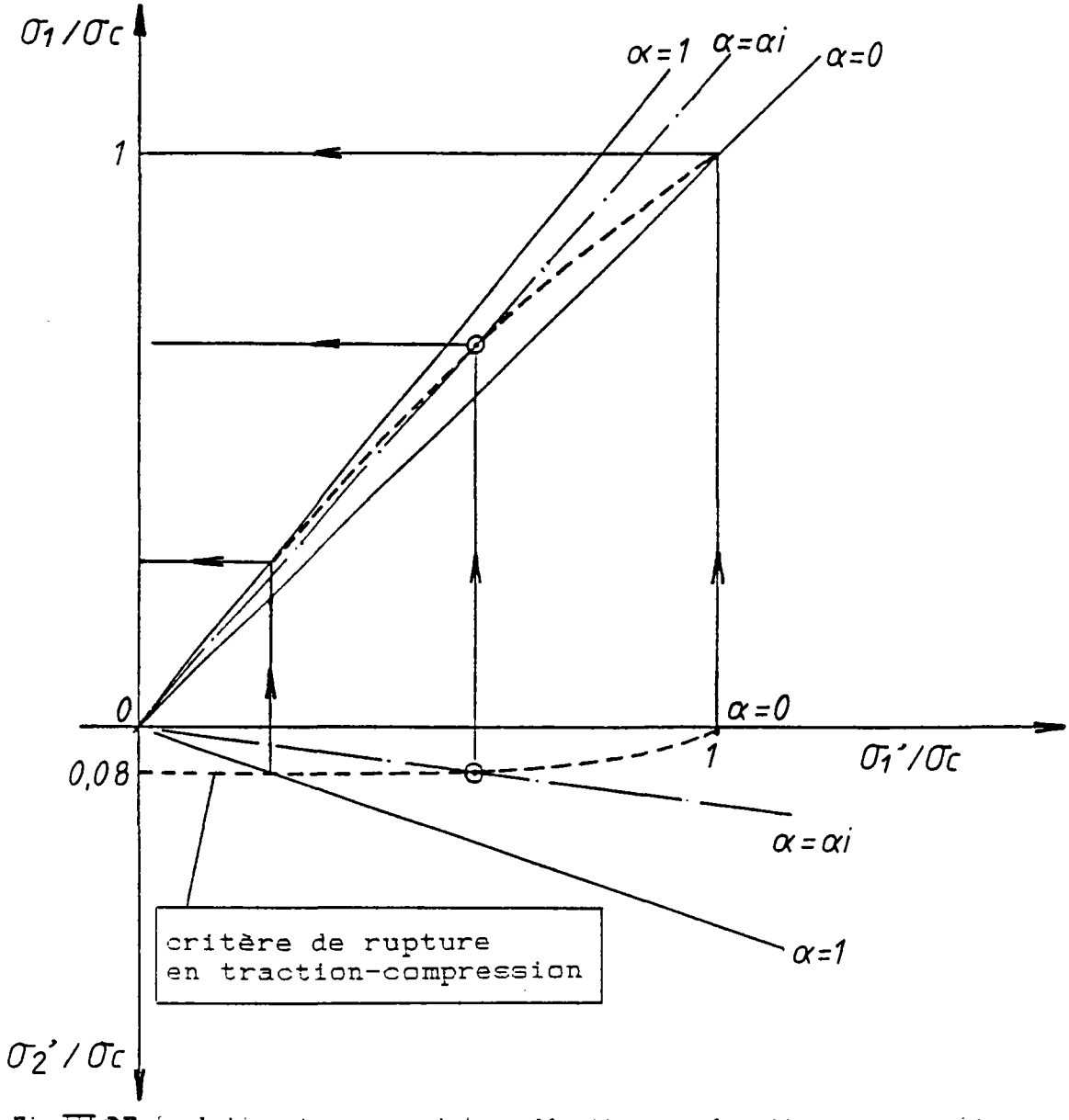


Fig.III.93: évolution des contraintes effectives en fonction du paramètre dans un essai de compression simple.

Regardons ce qui se passe pour le module dans le cas où il y aurait mise en pression de l'eau. Nous aurions alors:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \cdot tr\sigma_{ij} \cdot \delta_{ij}$$
$$= \frac{1+\nu_0}{E_0} \cdot \sigma'_{ij} - \frac{\nu_0}{E_0} \cdot tr\sigma'_{ij} \cdot \delta_{ij}$$

Dans le cas de la compression simple nous avons aussi:

$$\sigma'_1 = \frac{4-\alpha}{4} \cdot \sigma_1 \qquad \sigma'_2 = \sigma'_3 = -\frac{\alpha}{4} \cdot \sigma_1$$

et $\quad tr\sigma'_{ij} = \frac{4-3\alpha}{4} \cdot \sigma_1$

d'où $\quad \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_1 = \frac{1+\nu_0}{E_0} \cdot \frac{4-\alpha}{4} \cdot \sigma_1 - \frac{\nu_0}{E_0} \cdot \frac{4-3\alpha}{4} \cdot \sigma_1$

$$= \frac{1}{4E_0}\left(4 - \alpha(1+\nu_0)\right)\sigma_1$$

$$\Rightarrow E = \frac{4}{4-\alpha(1+\nu_0)} \cdot E_0$$

Comme nous savons que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $0 \leqslant \nu_0 \leqslant 0{,}5$ cela implique $E > E_0$. Donc en ce qui concerne les modules , la mesure apparente E , opérée sous pression d'eau, est supérieure à la valeur E_0, correspondant au cas u=0.

Revenons maintenant aux courbes (σ_c , h) et au problème de l'augmentation de résistance avec h . Celle-ci peut être comprise à partir du processus expérimental mis au point pour obtenir un niveau donné de teneur en eau: les éprouvettes ont été mises en étuve à 45°C pendant des durées différentes. Il est certain que par une telle méthode les éprouvettes ne sèchent pas de façon homogène. Avec l'aide de LEMINOUS et GUIRAUD [118] nous avons mis au point un programme permettant de déterminer l'évolution de la teneur en eau dans le cas d'une éprouvette cubique. Ce programme, qui repose sur une méthode de discrétisation de type différences finies (Cranck - Nicholson), permet de faire varier les conditions aux limites au cours du temps, exactement comme pour nos éprouvettes. Les résultats obtenus sont seulement qualitatifs car nous n'avons pu les recaler par gammadensimétrie, toujours à cause de la géométrie particulière de nos éprouvettes (la gammadensimétrie est une méthode permettant de mesurer les variations de teneur en eau dans une éprouvette. Elle nécessite l'utilisation d' éprouvettes à symétrie de révolution pour éliminer les effets dispersifs de la méthode et ne peut être utilisée qu'en diffusion plane, voir MENSI [33] à ce sujet). Pour

simplifier le problème numérique nous n'avons considéré que deux types de conditions aux limites:

a) phase de séchage
$h = 0$ sur la surface des éprouvettes. (choix évidemment pénalisant)

b) phase étanche
$\partial h / \partial n = 0$ sur la surface

On peut alors suivre sur la figure III.94 l'évolution de la concentration en eau dans la section médiane d'un quart de notre éprouvette dans sa phase de séchage. Des gradients de teneur en eau apparaissent rapidement, ce qui conduit à un endommagement préjudiciable du matériau dû au retrait gêné (cf chapitre I). Lorsque l'éprouvette est rendue étanche (fig.III.95) la teneur en eau tend à s'uniformiser. Toutefois si le béton a été endommagé au moment du séchage il le restera et cela influera lors des essais

Cette analyse est corroborée par la rupture très explosive des éprouvettes humides tandis que celles qui avaient subi un cycle de séchage se comportaient d'une manière moins fragile (photos III.96 et III.97), et cela pour un niveau de contrainte équivalent. L'éprouvette 100% humide étant intacte a des caractéristiques mécaniques très homogènes. La fissuration ne s'y développe qu'à un niveau de contrainte élevé et de façon répartie dans tout le volume. La rupture survient alors brusquement (d'autant que nous pilotons nos essais en force). Pour les éprouvettes séchées, au contraire, la fissuration se développe à partir des défauts initiaux donc à un niveau de contraintes plus faible. Elle est de plus localisée dans les zones les plus endommagées par le séchage c'est à dire les zones externes des éprouvettes. Le comportement global est alors plus stable (ceci est à rapprocher du modèle " flambement " avec caractéristiques mécaniques dispersées où bien du calcul " béton numérique " avec prise en compte des contraintes initiales qui montrent que ces facteurs influent sur la non-linéarité du matériau et sur la valeur de la résistance à la rupture). Si nous prenons comme référence la résistance obtenue pour 100% de teneur en eau et que nous admettons que l'effet local n'est sensible qu'au delà d'un seuil situé aux alentours de h = 30% nous obtenons la courbe intrinsèque liant σ_c à h déduction faite des effets structuraux liés au retrait gêné (fig.III.98):

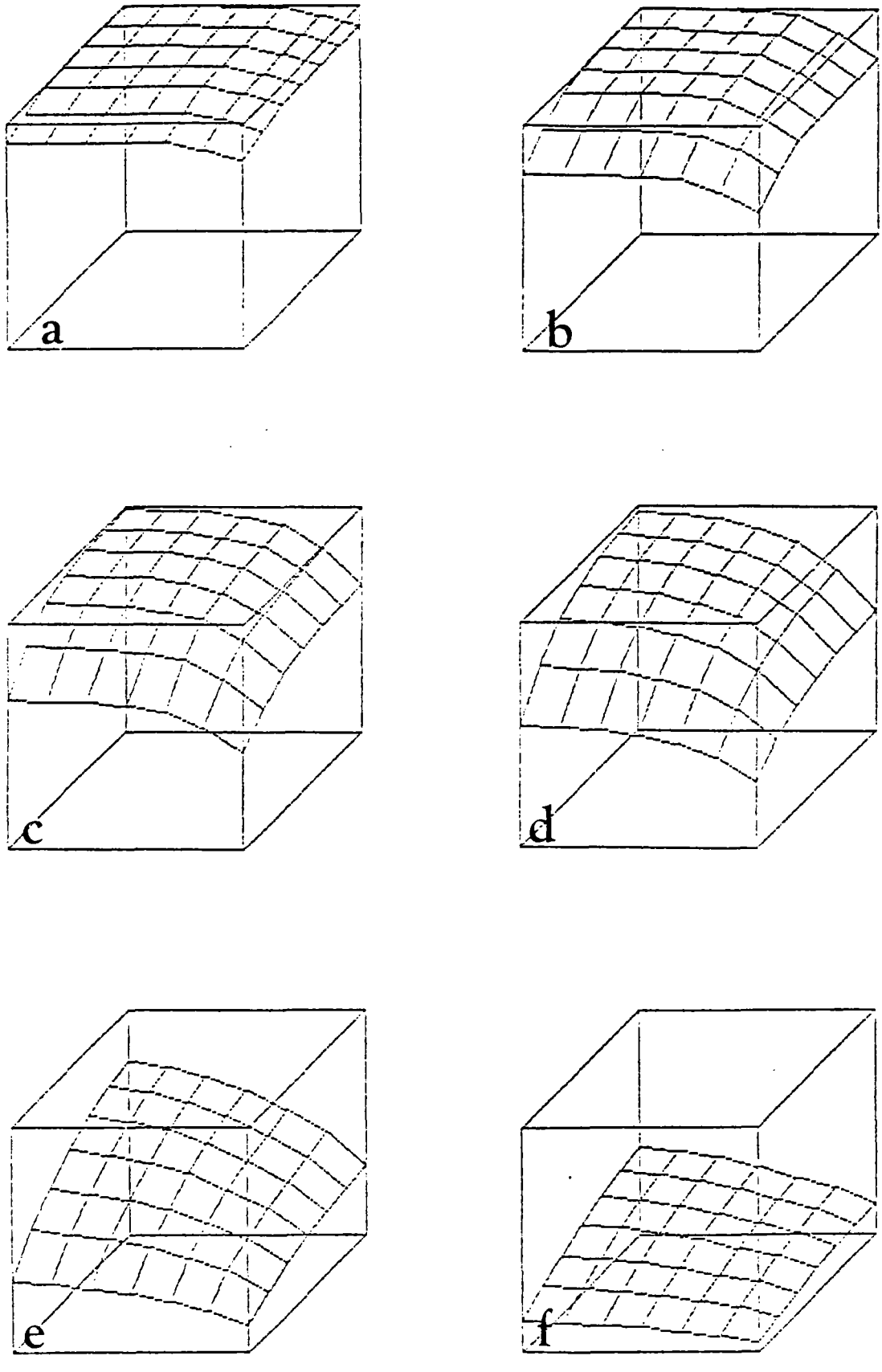


Fig.III.94: phase de séchage (conditions de Dirichlet)
de a) à f) évolution du temps.

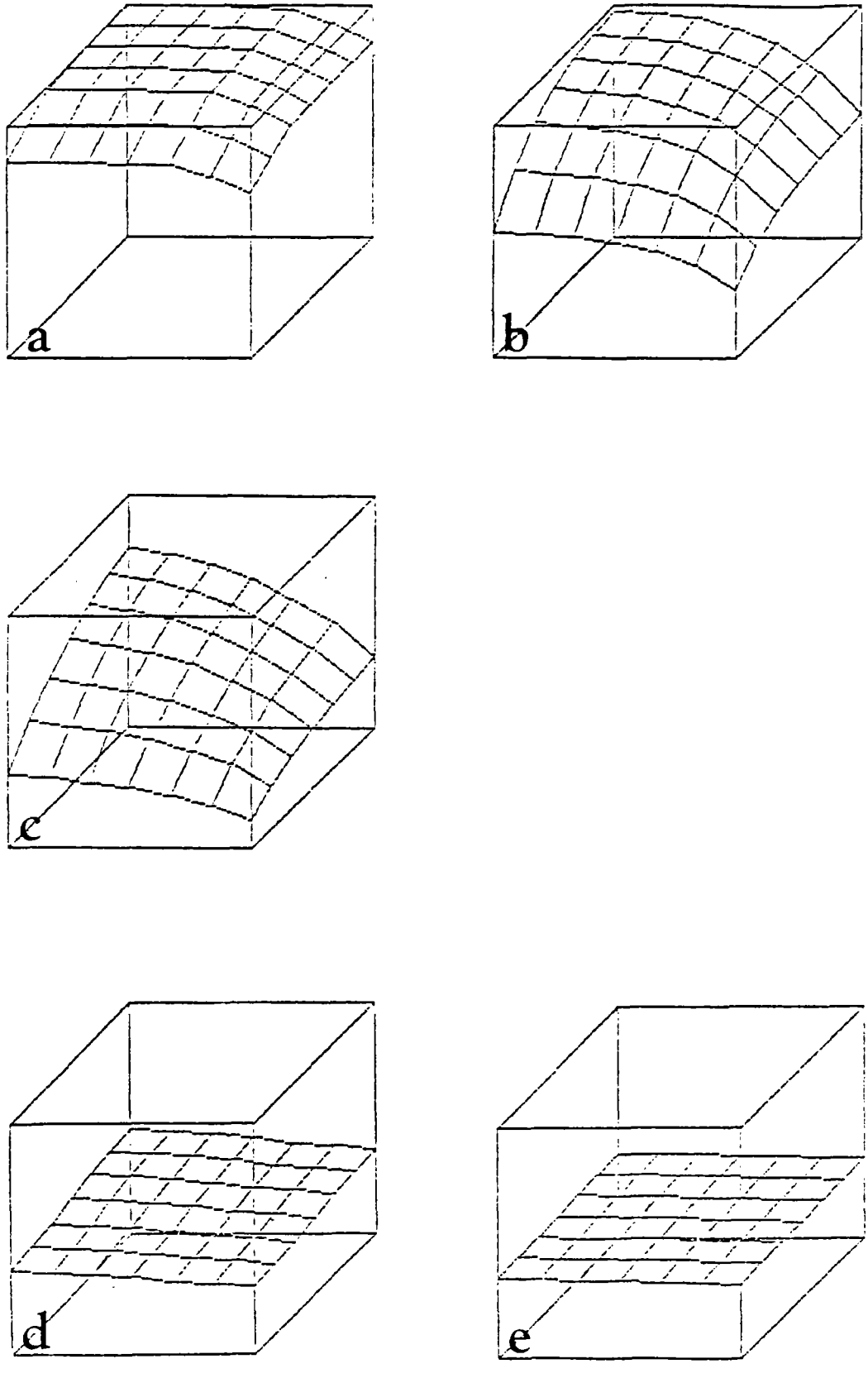


Fig.III.95:phase de séchage suivie d'une phase étanche
de a) à c) conditions de Dirichlet
de d) à e) conditions de Neumann

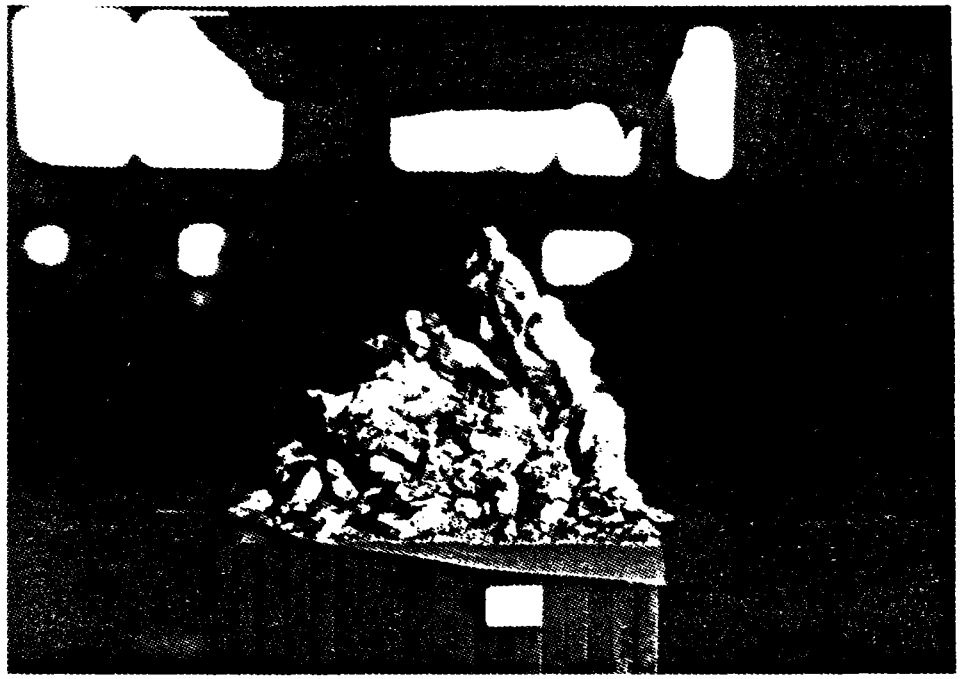


Photo III.96: essai UC27P - éprouvette 100% humide

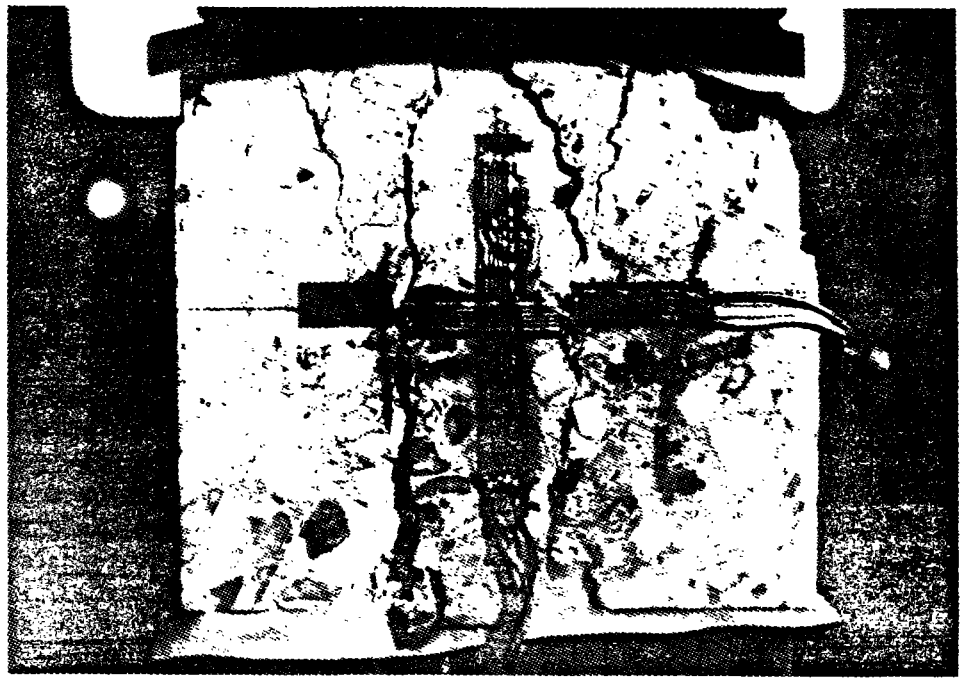


Photo III.97: essai UC24P - éprouvette à h ~ 10%

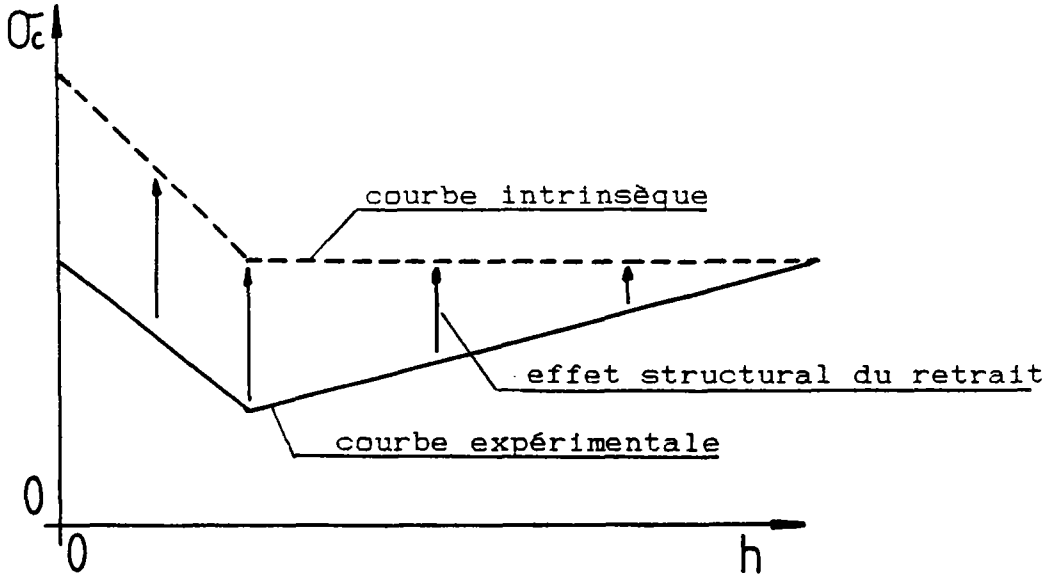


Fig.III.98: courbe intrinsèque (σ_c , h)

Remarque: le retrait gêné, qui nous apparaît comme l'explication la plus plausible de nos résultats, n'est pas la seule possible. On peut en effet imaginer que la partie droite des courbes liant σ_c à h corresponde à un degré d'hydratation différent des éprouvettes, dû ,là encore , à notre méthode expérimentale. Car même si, pour des teneurs en eau variant entre 30% et 100% il y a suffisamment d'eau libre pour que l'hydratation se fasse, et si nous avons accéléré celle-ci en conservant nos échantillons à 35°C, la cinétique de la réaction dépend toutefois de la teneur en eau. Dans le cadre d'une expérimentation future sur le même sujet il conviendra donc de vérifier que les niveaux d'hydratation sont voisins (ceci est réalisable au moyen de la thermo gravimétrie qui permet l'évaporation de toutes les molécules d'eau, y compris celles qui ont participé à la réaction d'hydratation du ciment).

III-4.b relation avec la non linéarité

Compte tenu de l'analyse qui précède nous avons étudié l'évolution de la non linéarité en fonction de la teneur en eau. En effet, les éprouvettes séchées devraient présenter un comportement non linéaire beaucoup plus marqué que celles qui étaient humides. Notre première approche à consister à mesurer la non linéarité au moment de la rupture. Ceci n'a pas abouti en raison d'une trop grande dispersion des mesures liée à la mesure locale des déformations (il peut y avoir réhumidification du béton en surface) et au fait que notre presse ne soit pas asservie en déformation.

Aussi nous avons choisi un autre critère afin de mettre en évidence les effets néfastes du séchage. Nous lions la teneur en eau au niveau relatif de contraintes pour lequel la courbe (ε_1 , ε_2) n'est plus linéaire. La relation obtenue (fig.III.99) semble indiquer que la fissuration se développe plus tôt dans les éprouvettes qui ont subi un séchage, ce qui conforterait notre hypothèse concernant la courbe (σ_c , h). Restons néanmoins prudent car la dispersion reste très grande.

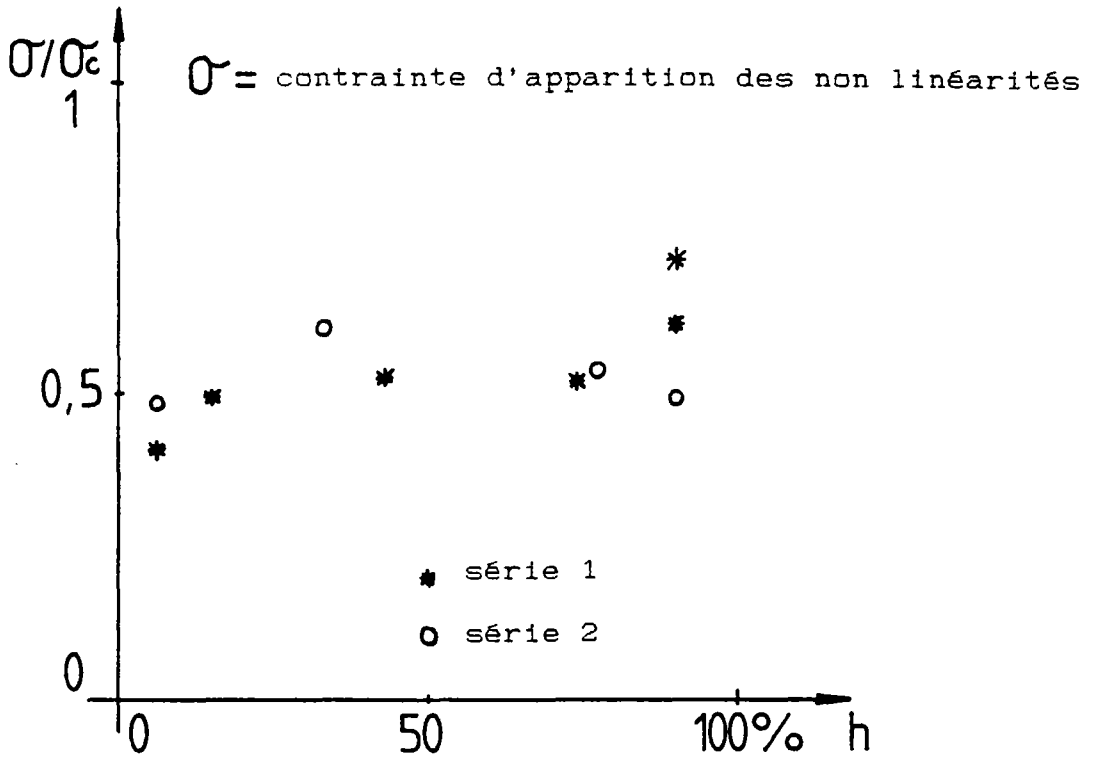


Fig.III.99: relation teneur en eau - niveau d'apparition des non linéarités.

III-4.c conclusions

Nous retiendrons finalement que, outre ses effets structuraux qui perturbent l'interprétation des essais, la teneur en eau a également une action au niveau local sur les caractéristiques mécaniques du béton. Une expérimentation sur une durée plus longue (celle de

PIHLAJAVAARA dura cinq ans) avec un séchage graduel du béton et sur des éprouvettes de géométrie plus adaptée (cylindre creux par exemple), permettrait d'atténuer les effets structuraux et éliminerait le facteur hydratation afin d'obtenir les relations intrinsèques entre teneur en eau et comportement mécanique du béton.

L'hypothèse de mise en pression de l'eau intersticielle mériterait, quant à elle, une étude spécifique permettant de la valider ou non, le degré de saturation du matériau étant obtenu à l'aide d'une étude complémentaire de la porosité. Un modèle du type "béton numérique" pourrait enfin permettre de quantifier les éventuels effets d'une mise en pression de l'eau intersticielle.

III-5 Les essais biaxiaux

Nous avons effectué sur une série de 11 cubes conservés de façon étanche jusqu'au moment des essais (donc à une teneur en eau voisine de 100%), 9 essais biaxiaux et 2 essais uniaxiaux. L'ensemble des courbes résultats des essais biaxiaux pour lesquels la mesure des déplacements à l'aide des capteurs a fonctionné correctement figure en annexe 5.

III-5.a Description générale du comportement

Le comportement du béton sous sollicitations biaxiales tel que nous avons pu l'observer est analogue à celui décrit par les expérimentateurs nous ayant précédé : KUPFER [108], SCHICKERT et WINKLER au BAM [20] notamment. On peut ainsi voir sur la photos III.101 et la figure III.102 un exemple de la fissuration observable après rupture pour des essais à des niveaux de contraintes différents. On constate que même pour une contrainte moyenne "faible" ($\sim$ 5 MPa) les plans de rupture sont orientés parallèlement à la surface libre. Ils sont donc perpendiculaires à la direction d'extension maximale.

III-5.a.1 évolution des déformations

Nos essais ont été réalisés sur des chemins de contrainte séquentiels (voir fig. III.100 un exemple type de ces chemins), alors que les essais de KUPFER et du BAM l'avaient été sur des chemins de

chargement proportionnels ou radiaux (rapport σ_1 / σ_2 constant et $\sigma_3 = 0$). On constate sur les courbes (ε_1 , σ_1), (ε_2 , σ_1) et (ε_3 , σ_1) que seulement dans le cas de cette dernière apparaît une non linéarité marquée (fig.III.103). De même si l'on considère les courbes (ε_1 , ε_2) et (ε_1 , ε_3).

On doit donc retenir que dans le cas d'un chargement biaxial les relations liant déformations et contraintes dans les directions de chargement restent quasi linéaires, seule la déformation dans la direction non chargée évoluant de façon non linéaire.

Si nous traçons maintenant dans l'espace des contraintes les courbes isovaleurs de la déformation ε_3 nous constatons que tant que σ_2 reste faible, les courbes obtenues sont similaires à celles de BASCOUL [107] et KUPFER (Fig.III. 104). L'essai BC10P a volontairement été omis. Nous reviendrons plus loin sur celui-ci qui correspond à un rapport σ_2/σ_c voisin de 1. Retenons pour l'instant que lorsque l'une des contraintes reste "faible" (inférieure à 75 % de σ_c) il y a peu de différences entre essai séquentiel et essai proportionnel.

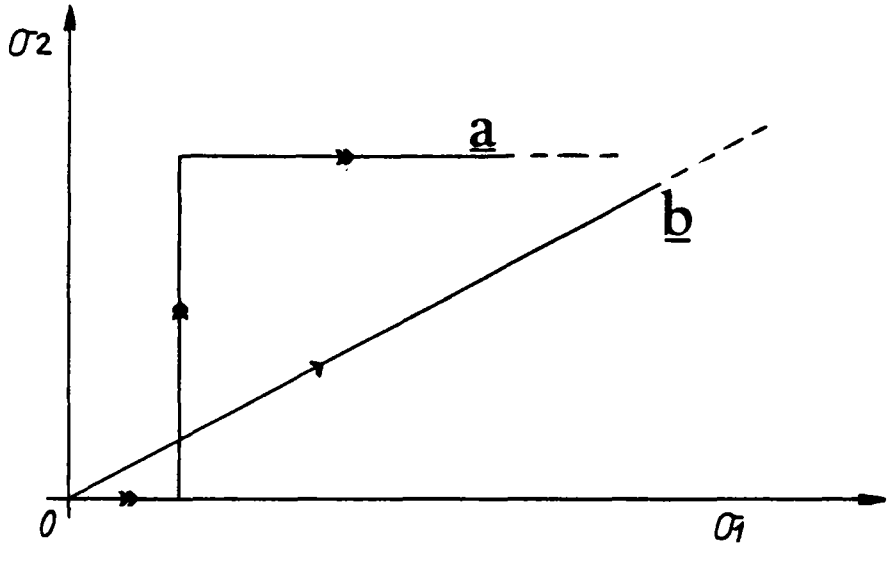


Fig.III. 100 : chemins de chargement
a) séquentiel
b) proportionnel

Photo III.101 : Fissuration dans le cas biaxial

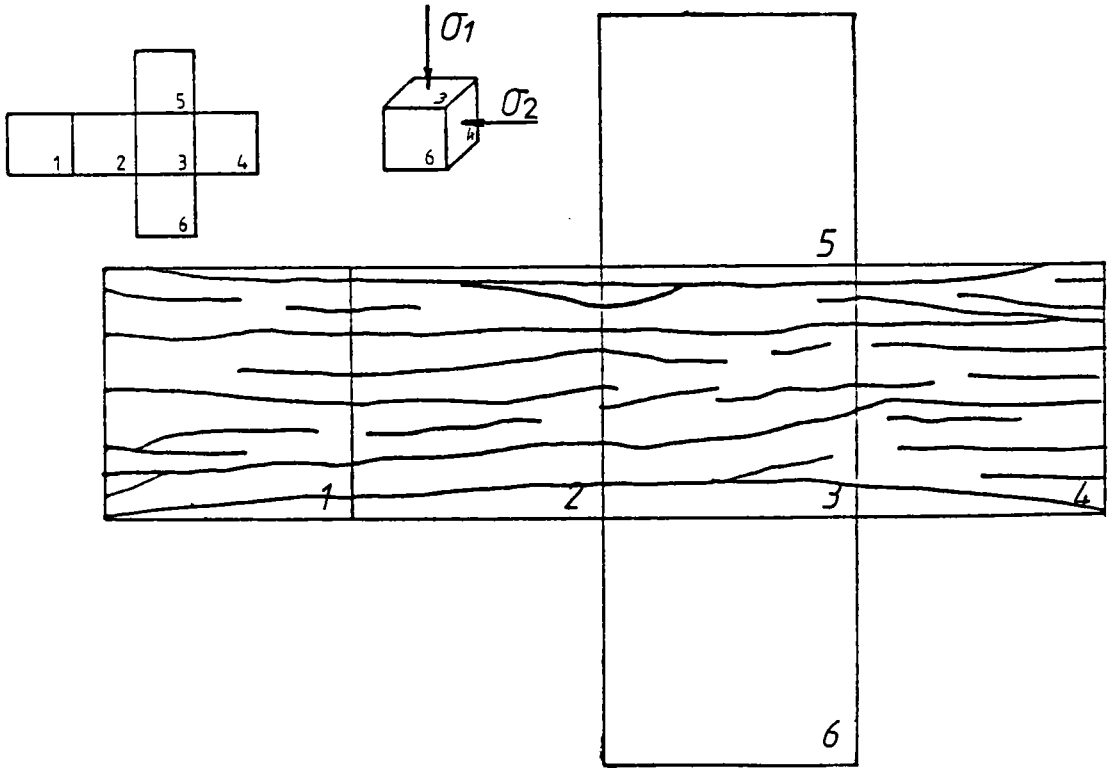
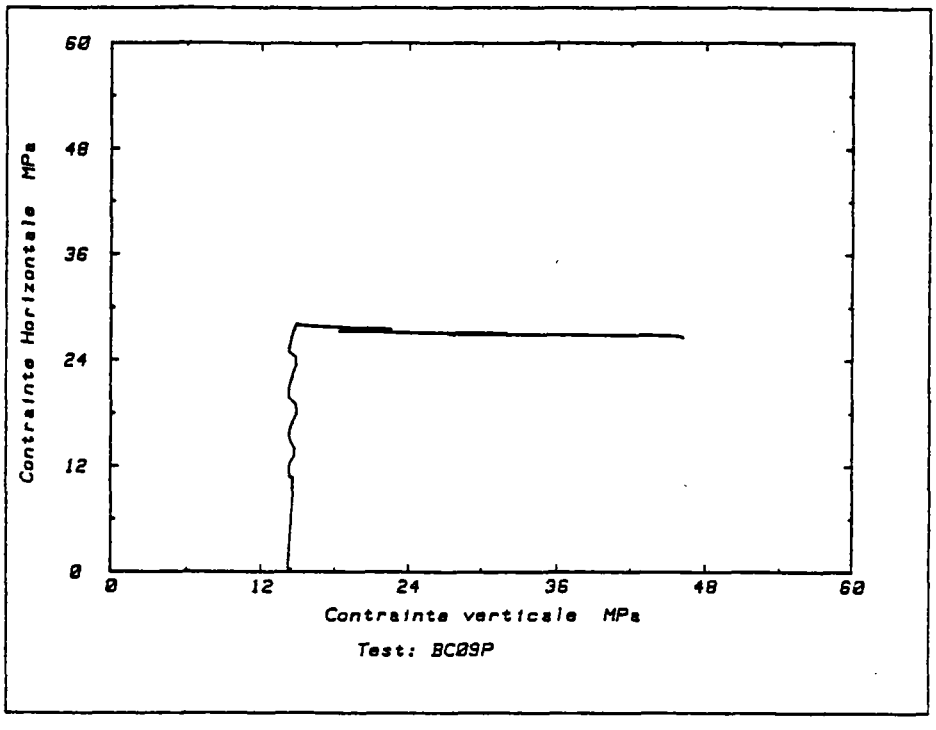
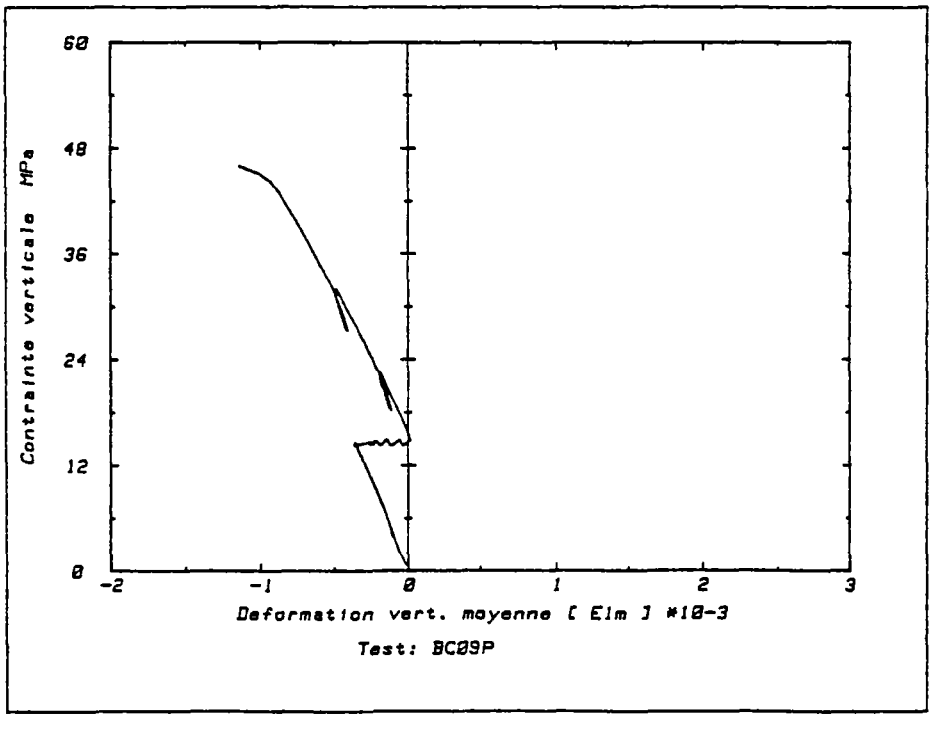


Fig.III.102 : Relevé de la fissuration dans le cas biaxial.

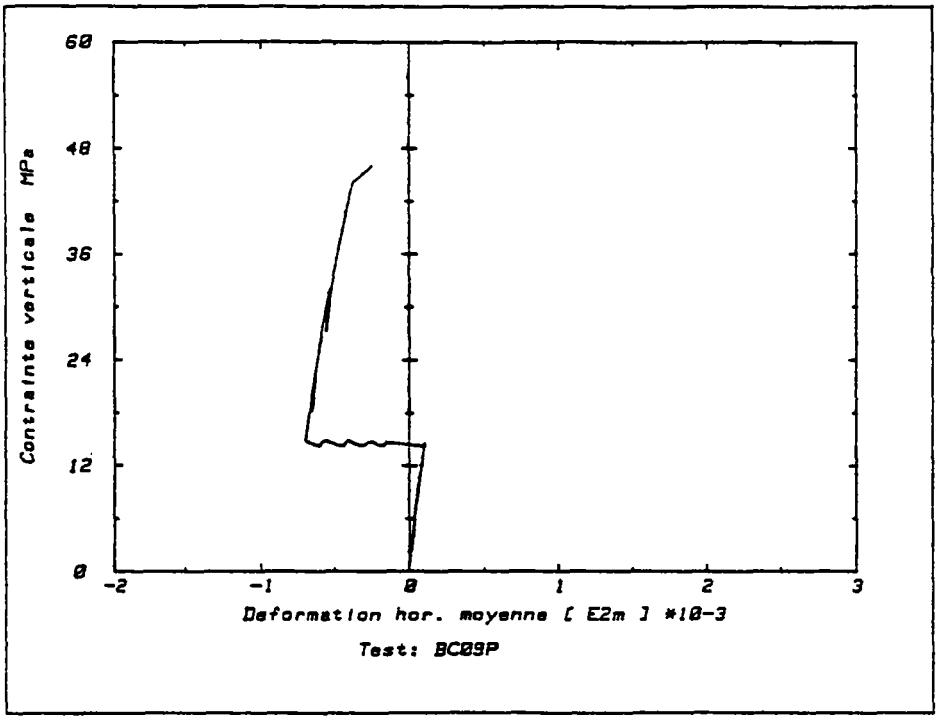
Fig.III.103 : résultats expérimentaux.
essai biaxial BC 09P



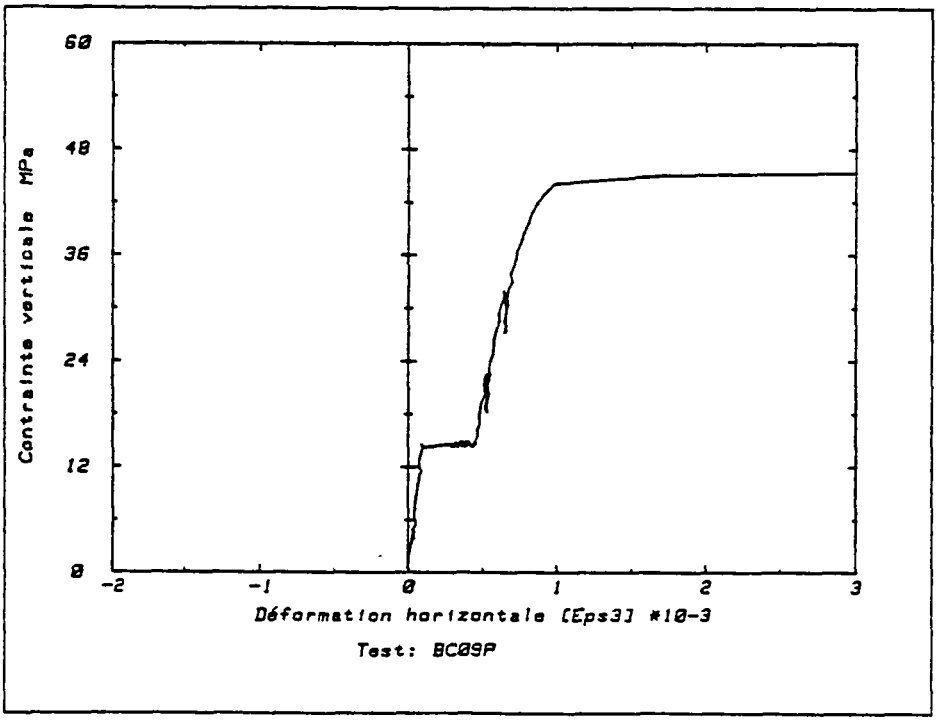
a) trajet de chargement



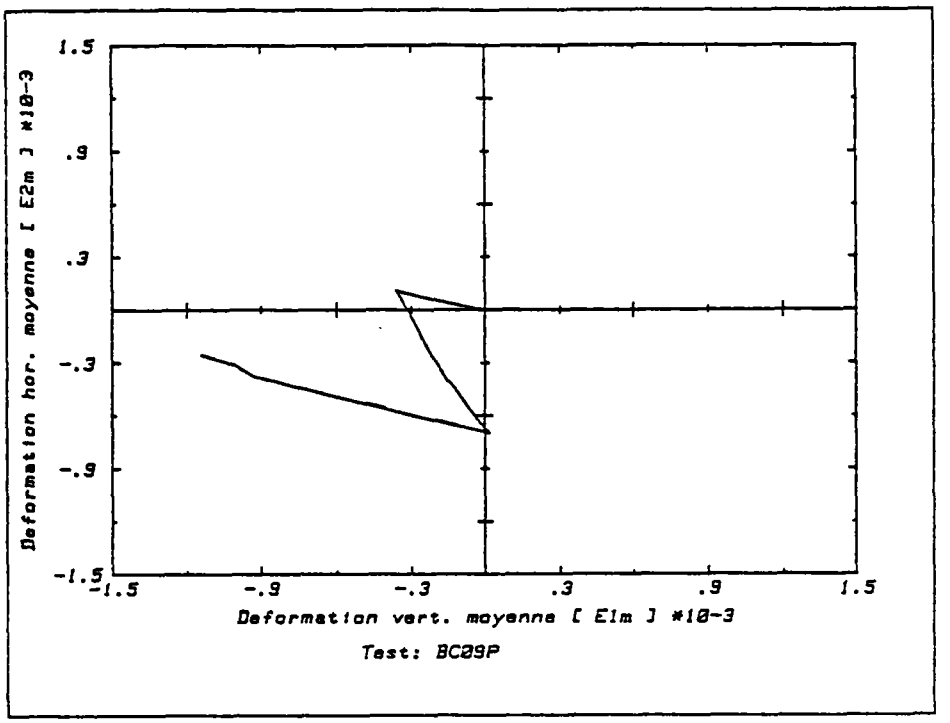
b) courbe (σ_1 , ε_1)



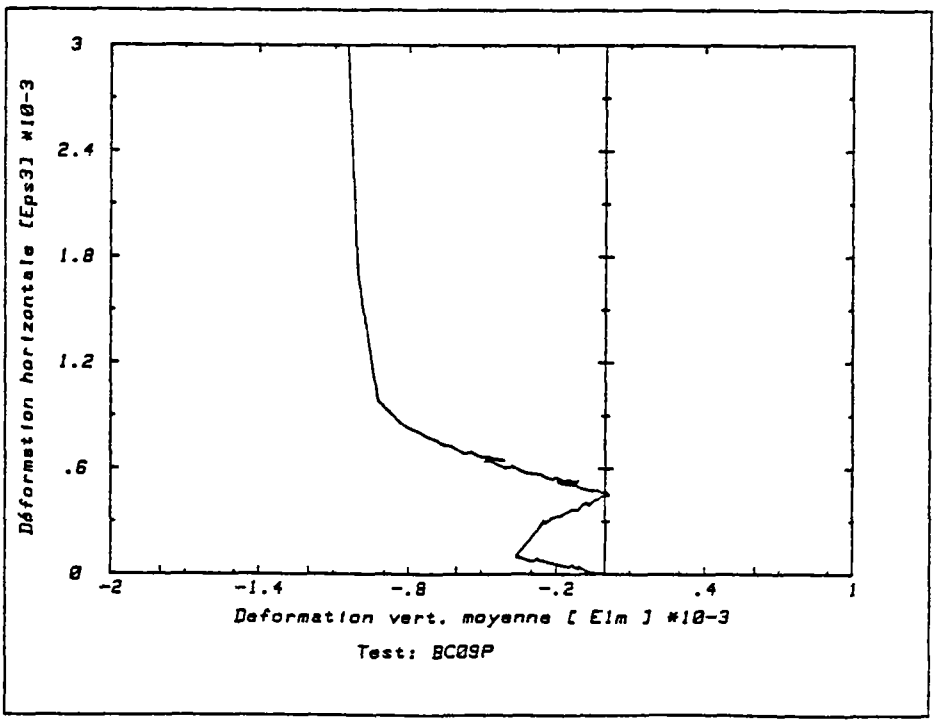
c) courbe (σ_1 , ε_2)



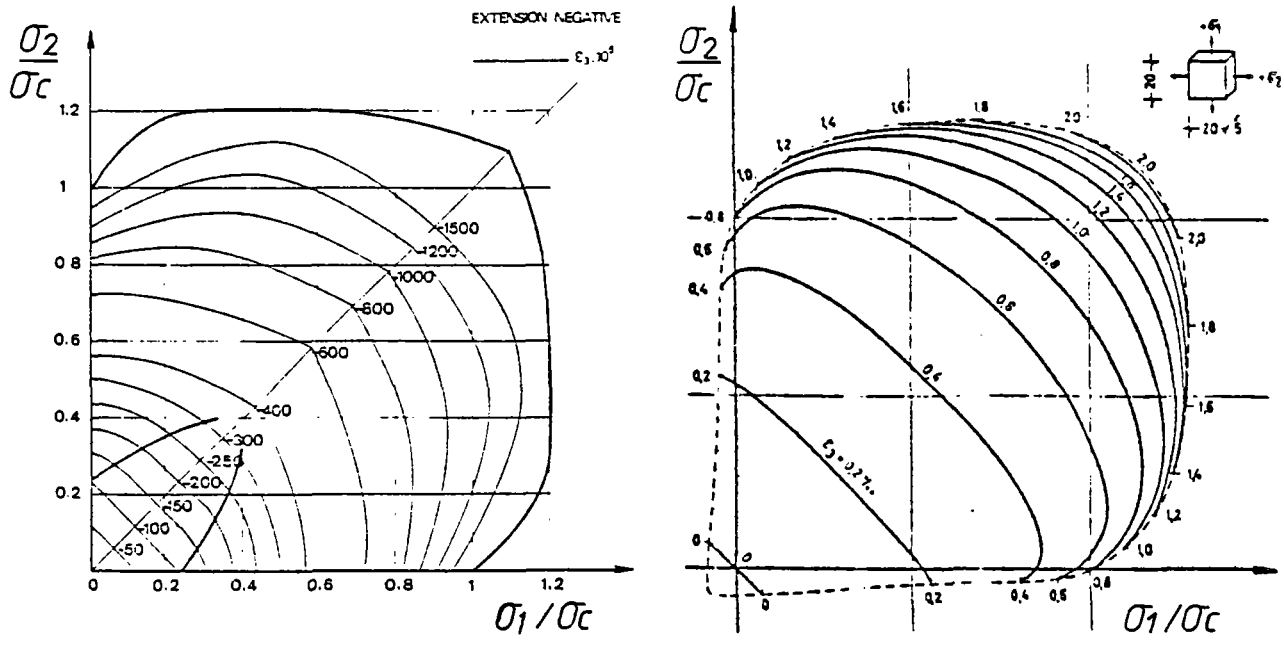
d) courbe (σ_1 , ε_3)



e) courbe (ε_1, ε_2)

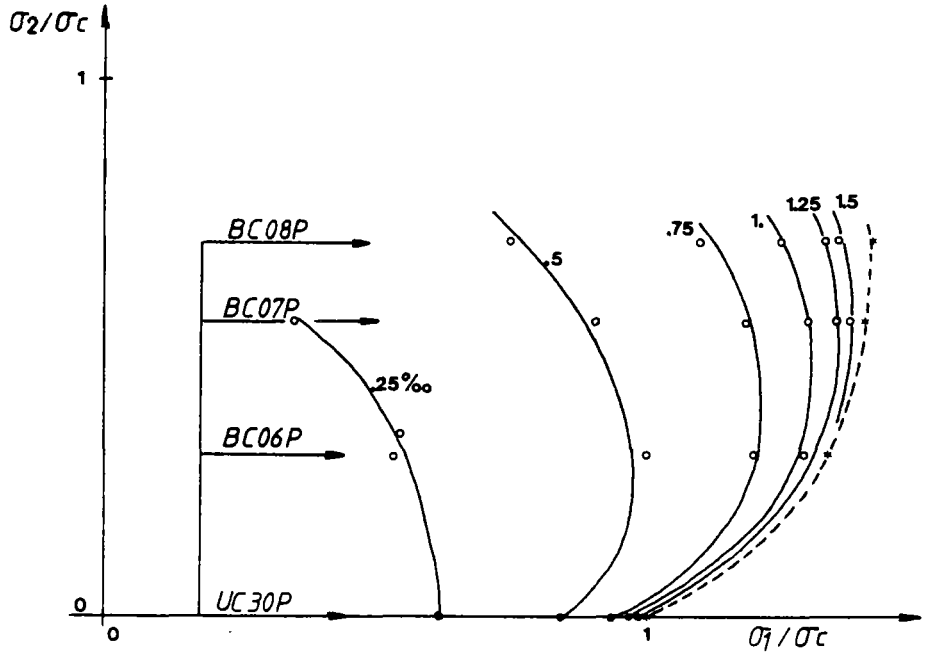


f) courbe (ε_1, ε_3)



a) essais BASCOUL

b) essais KUPFER



c) essais ENTPE

Fig.III.104 : courbes isovaleurs de la déformation transversale

III-5.a.2 critère de rupture

Nous avons reporté dans le plan (σ_1 , σ_2) l'ensemble des résultats expérimentaux concernant les chemins de contraintes suivis et la valeur de (σ_1 , σ_2) à la rupture (fig.III.105). On note sur l'ensemble des résultats une dispersion certaine que nous allons nous efforcer de quantifier.

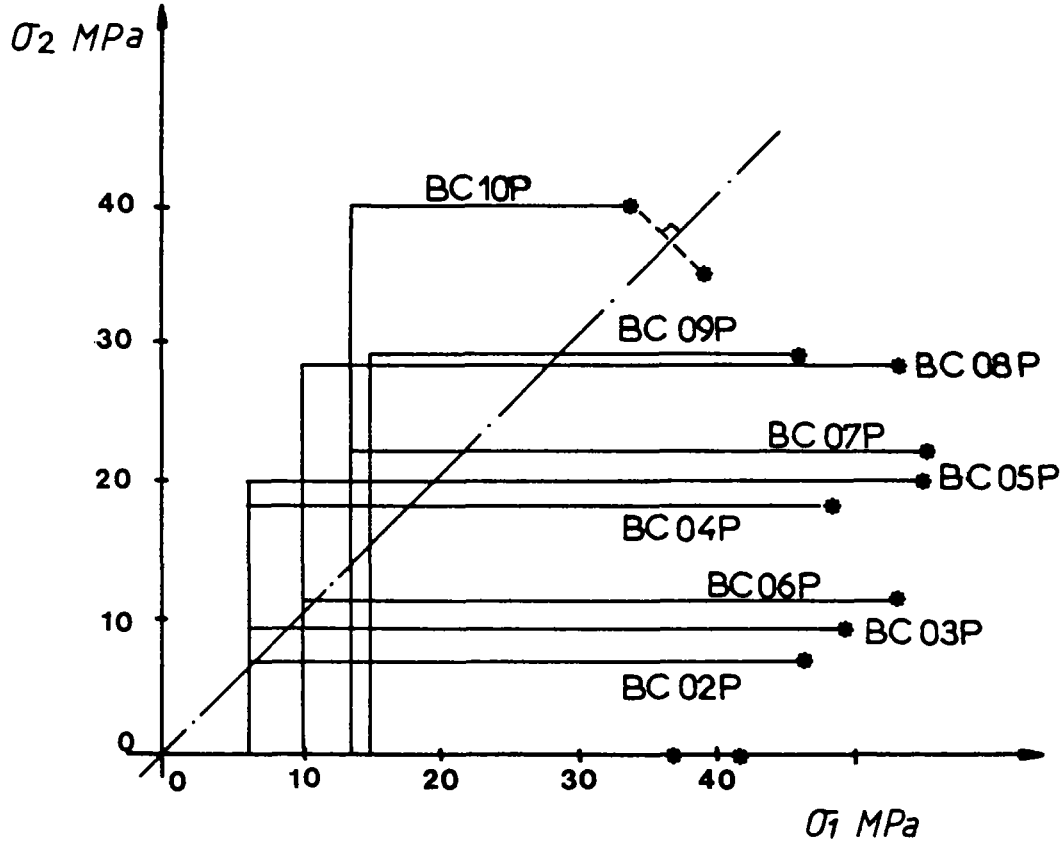


Fig.III.105 : Les essais biaxiaux ENTPE.

Ainsi pour σ_2 voisin de 20 MPa nous disposons des essais BC04P, BC05P et BC07P. Les valeurs obtenues sont les suivantes:

BC04P	σ_1 = 48 MPa	σ_2 = 18 MPa
BC05P	σ_1 = 55	σ_2 = 20
BC07P	σ_1 = 56	σ_2 = 22

Nous cherchons seulement un ordre de grandeur de la dispersion et pour cela nous pouvons considérer $\sigma_2 \sim 20$ MPa pour ces 3 essais (ils se situent dans une zone du critère de rupture où une variation de σ_2 conduit à une faible variation de σ_1). Nous obtenons sur l'ensemble des trois essais :

* contrainte moyenne selon la direction 1:

$$\overline{\sigma_1} = \frac{1}{3}\left(48 + 55 + 56 \right) = 53 \text{ MPa}$$

* variance :

$$s = 4,36$$

Faisons maintenant l'hypothèse suivante: la valeur du couple (σ_1 , σ_2) à la rupture suit une loi normale. Cette hypothèse est courante et justifiée pour des résultats expérimentaux. La variable $(\sigma_1 - \overline{\sigma_1})/(s/\sqrt{n})$ suit alors une loi de Student, c'est à dire qu'il existe t_α tel que la probabilité

$$P\left[-t_\alpha < \frac{\sigma_1 - \overline{\sigma_1}}{s/\sqrt{n}} < t_\alpha \right] = 90\ \%$$

Les tables de Student nous indiquent alors que pour n=3, $t_\alpha = 2.92$. Lorsque σ_2 est égal à 20 MPa, il y a 90% de chances pour que σ_1 appartienne à l'intervalle [45.5 , 60.5] MPa.

Nous avons comparé nos essais à ceux de différents auteurs: BASCOUL (fig.III.106), KUPFER (fig.III.107) et SCHICKERT (BAM) (fig.III. 108). Compte tenu des dispersions relatives de chacun , les courbes obtenues se recoupent. Le fait que nos résultats soient globalement compris entre ceux de BASCOUL et KUPFER, obtenus sur des plaques, confirme le bon fonctionnement de notre sysrème anti-frettage. En effet, les résultats des essais biaxiaux sont très fortement influencés par le fait que l'état de contraintes imposé à l'échantillon testé soit vraiment plan où non. Ceci implique d'utiliser un système d'anti-frettage faute de quoi les résultats obtenus ne sont pas réellement représentatifs d'un état de contrainte biaxial (voir les essais de LAUNAY, GACHON et POITEVIN [128] (fig.III.109)). Utiliser des cubes sous chargement biaxial est également défavorable sauf si le système anti-frettage est suffisamment efficace.

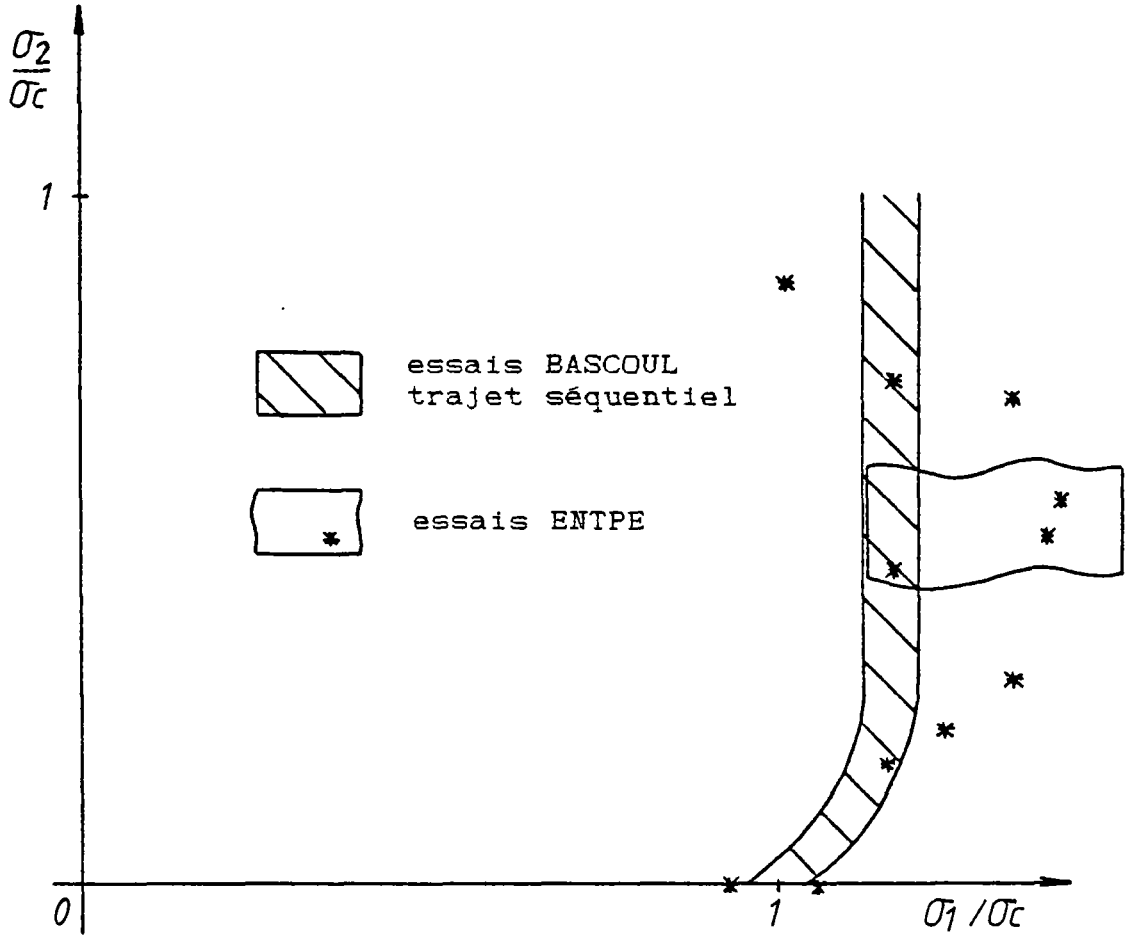


Fig.III. 106 : Comparaison essais ENTPE/ essais BASCOUL

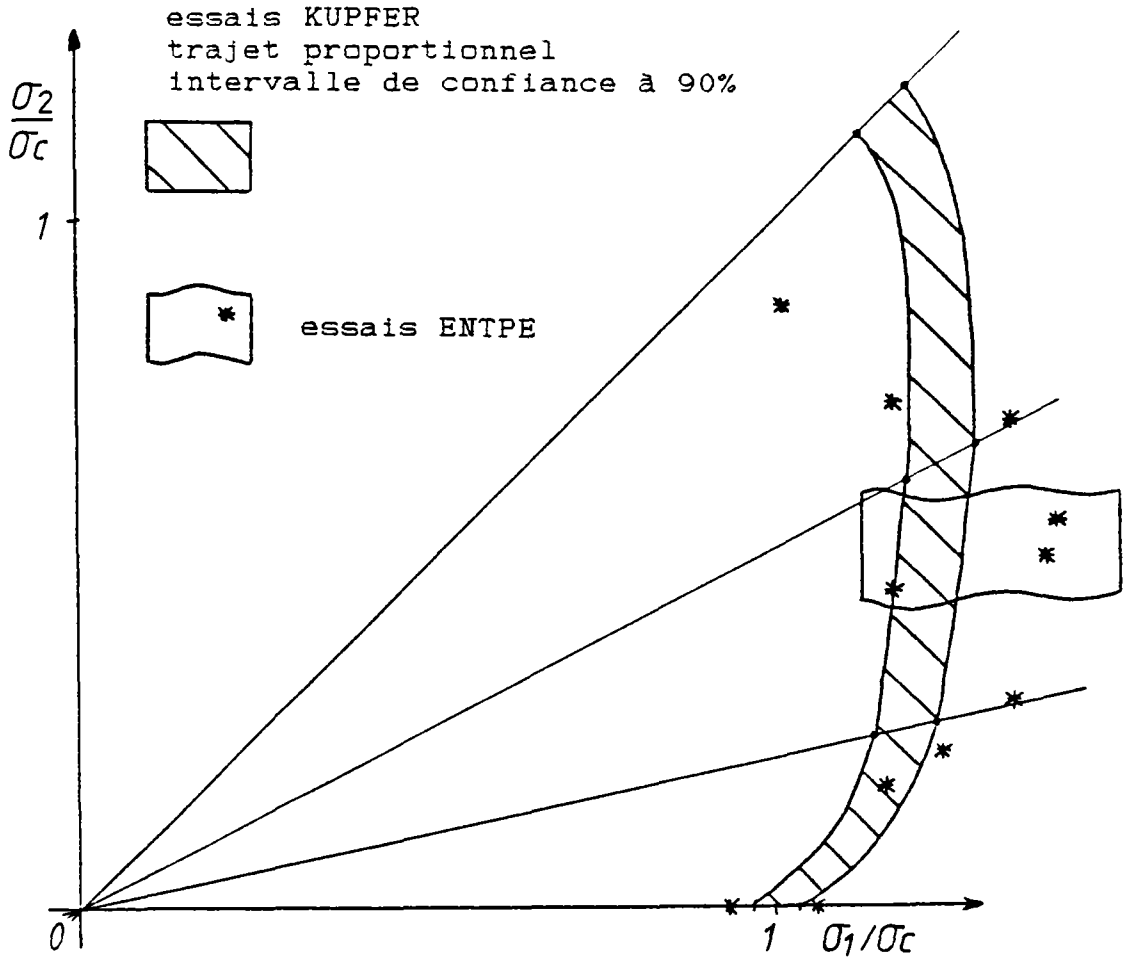


Fig.III. 107 : Comparaison essais ENTPE/ essais KUPFER

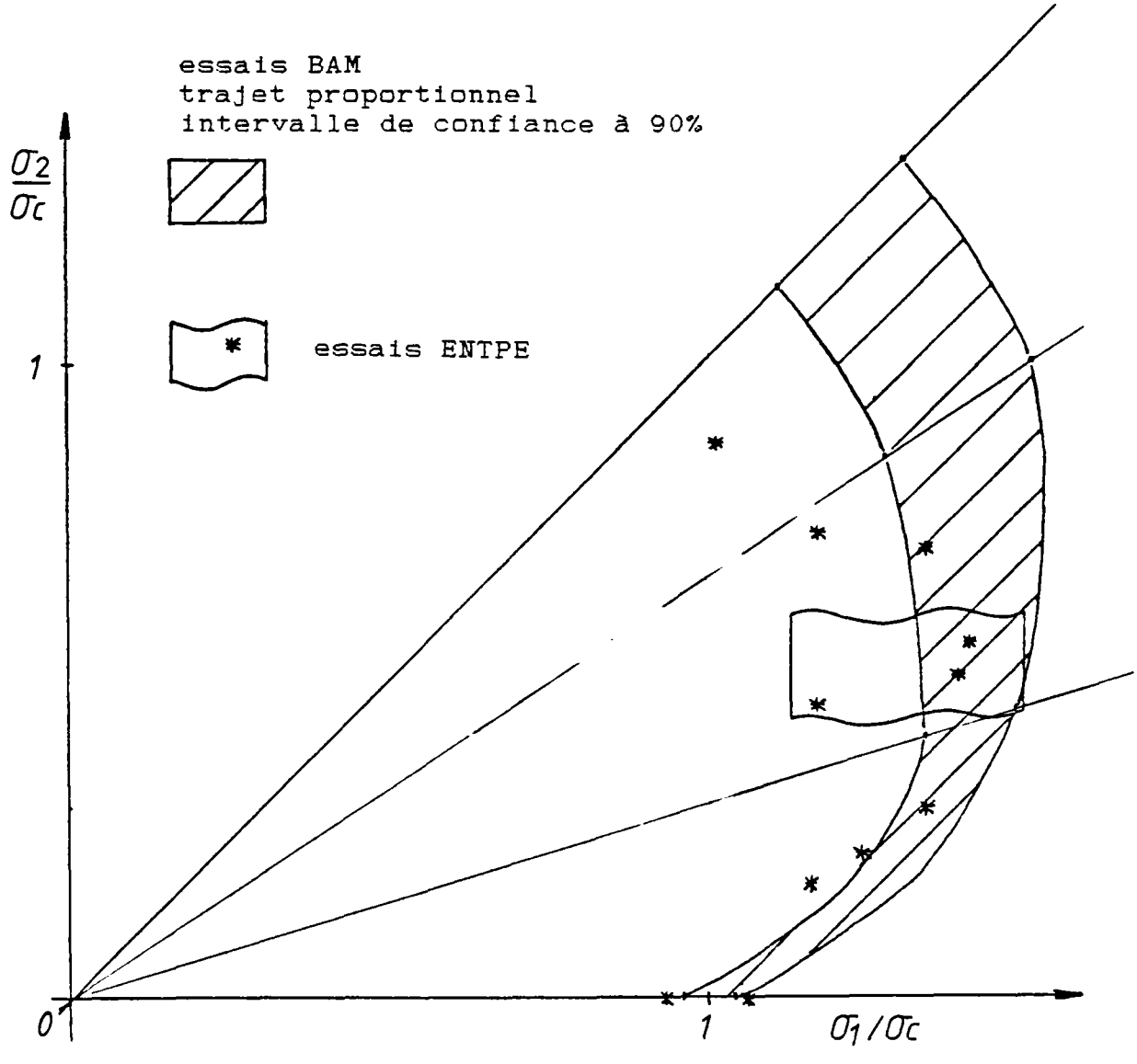


Fig.III. 108: Comparaison essais ENTPE/ essais BAM

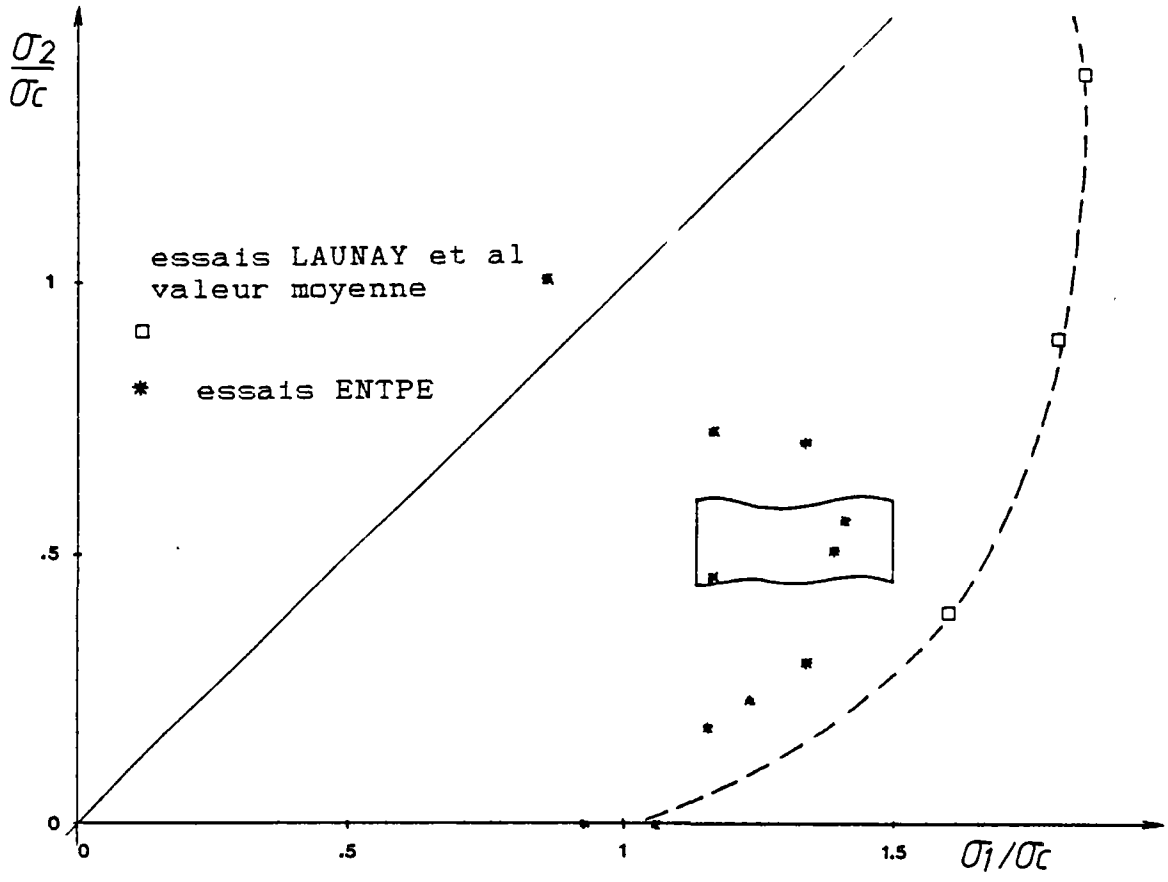


Fig.III. 109 : Comparaison essais ENTPE/ essais LAUNAY

III-5.b Comportement biaxial et trajet de chargement

Cette relation est d'un grand intêret pour la modélisation du comportement du béton appliquée aux calculs de structures. En effet, il paraît peu probable de rencontrer sur ouvrage réel un chargement proportionnel. C'est pourquoi différents auteurs ont comparé les résistances obtenues en compression biaxiale selon les deux types de chemins de chargement définis précedemment (fig.III.100). Ainsi BASCOUL a essayé de voir si les différences de résistances étaient significatives mais n'a pu conclure en raison de la dispersion des résultats .(voir fig.III.110)

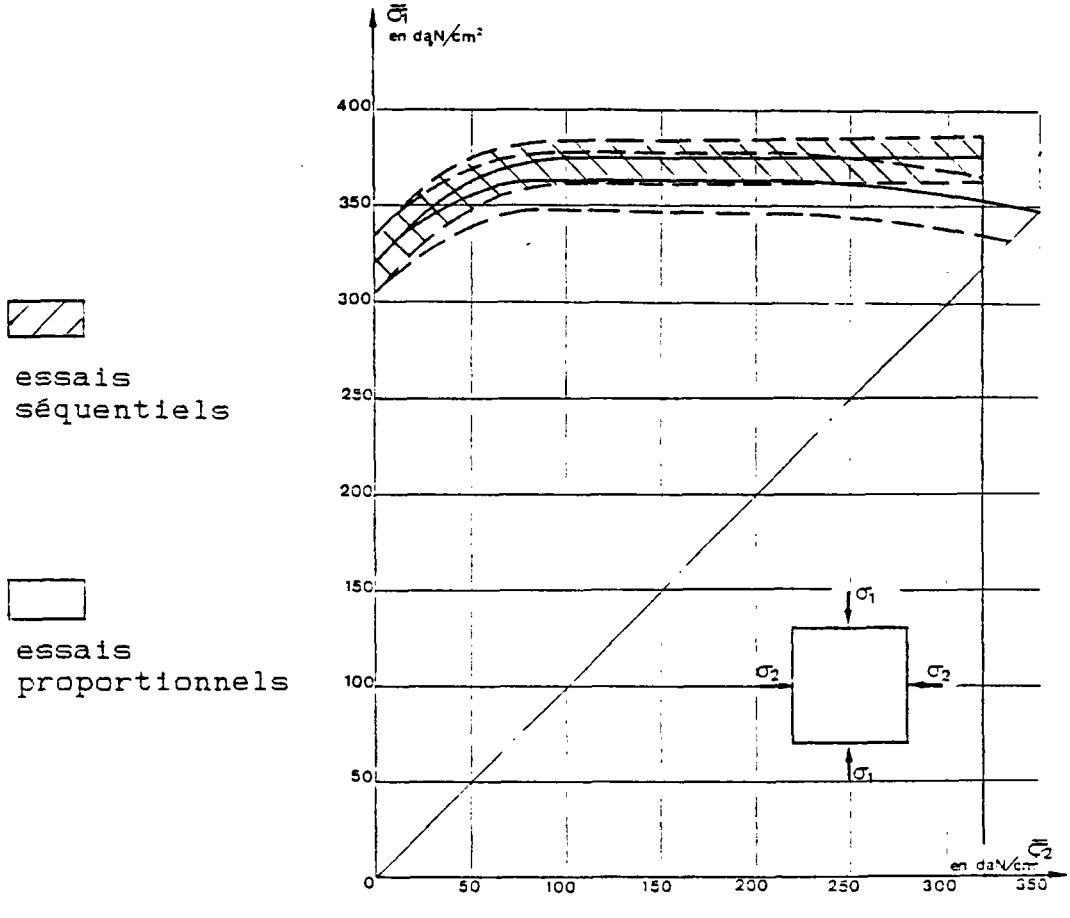


Fig.III.110 : comparaison entre essais séquentiels et proportionnels d'après BASCOUL

Une étude du même type a été entreprise par TAYLOR et JAIN [124], mais sur un béton léger, donc au comportement différent de celui du béton classique. Toutefois leurs résultats sont extrèmement

interessants. En effet, ils montrent que si l'on utilise des appuis classiques il n'y a pratiquement pas de différences entre résistances à la rupture selon que l'on suive un type de chemin de sollicitations ou un autre. Par contre lorsque la presse est équipée d'appuis à peignes une nette différence apparaît (fig.III.111): les essais séquentiels conduisant plus tôt à la rupture.

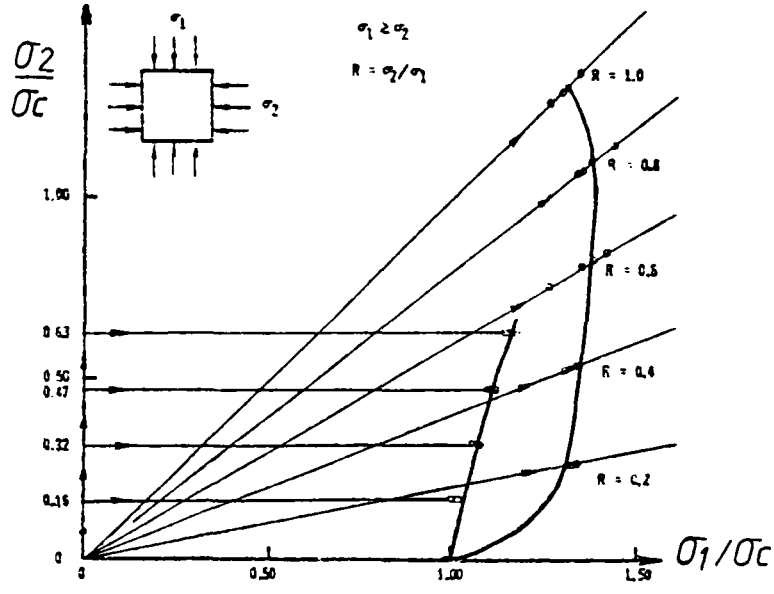


Fig.III.111 : comparaison entre essai séquentiel et proportionnel sur un béton léger.
(d'après TAYLOR)

Nous n'avons pas nous même effectué d'essais proportionnels et nous ne pouvons donc pas nous prononcer sur l'influence du chemin de chargement vis à vis de la valeur des contraintes à la rupture. Examinons toutefois les résultats obtenus pour notre essai BC10P. Cet essai a été réalisé selon le chemin de sollicitation suivant:

- 1ere étape: précharge jusqu'à σ_1 = 13 MPa
  (σ_2 = 0)
- 2ème étape: augmentation de σ_2 jusqu'à 40 MPa
  (σ_1 = 13 MPa)
- 3ème étape: augmentation de σ_1 jusqu'à la rupture
  (σ_2 = 40 MPa)

On peut noter le niveau élevé de la contrainte σ_2 qui avoisine la valeur de la résistance en compression simple.

Nous observons pour cet essai (fig.III. 112):

- une valeur de σ_1 à la rupture qui semble faible (< σ_c) toutefois au vu de la dispersion estimée precedemment nous nous garderons d'interpréter ce fait.

- une forte non linéarité en ε_3 , sans commune mesure avec celle mesurée pour les autres essais et certainement imputable à la forte valeur de σ_2 .

Tout en restant prudent, nous n'avons réalisé qu'un seul essai avec une contrainte σ_2 élevée, nous pouvons penser que le trajet de chargement a une influence sur le comportement biaxial du béton lorsque la contrainte intermédiaire est "forte"(σ_2 > 75 % de σ_c).

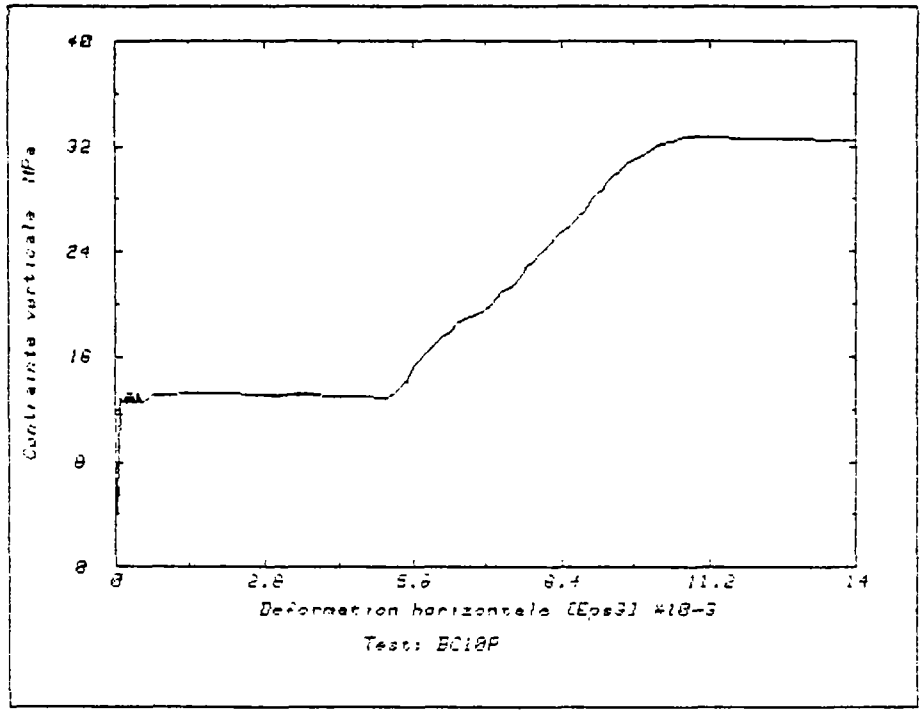


Fig.III. 112 : relation (σ_1 , ε_3) , essai BC10P

III-5.c comportement biaxial et teneur en eau

Comme en uniaxial la question de l'influence de la teneur en eau se pose. Celle ci a été mise en évidence par AKROYD [125] sur des essais triaxiaux de révolution. Il a constaté que l'augmentation de résistance due à la pression de confinement était plus faible pour les éprouvettes humides que pour les éprouvettes sèches. Il attribuait ceci à une mise en pression de l'eau contenue dans les pores.

Dans le cas du chargement biaxial reprenons le raisonnement en contraintes effectives tenu pour la compression simple. La pression intersticielle vaut:

$$u = \chi \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3}$$

Pour simplifier plaçons nous dans le cas où $\sigma_1 = \sigma_2$:

$$u = \frac{3}{4} \cdot \frac{2.\sigma_1}{3} = \frac{\sigma_1}{2}$$

(soit une pression double de celle obtenue dans le cas uniaxial)
d'où

$$\sigma_1' = \sigma_2' = \sigma_1 - \alpha u$$

$$\sigma_1' = \sigma_2' = \sigma_1 \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \sigma_1 = \frac{2}{2-\alpha} \cdot \sigma_1'$$

et

$$\sigma_3' = -\alpha u = -\frac{\alpha}{2} \sigma_1 = \frac{-\alpha}{2-\alpha} \sigma_1' < 0$$

La contrainte σ_3' est donc une contrainte de traction double de celle que l'on obtenait dans le cas uniaxial. Cette mise en traction du matériiau, si elle existe, conduira à une diminution de σ_{bc}, contrainte totale de rupture lorsque $\sigma_1 = \sigma_2$.

Par rapport aux résultats expérimentaux on ne note toutefois pas de différences supérieures à la dispersion entre d'une part, les essais de BASCOUL et les notres effectués sur des éprouvettes humides à 100% et, d'autre part les essais de KUPFER et du BAM réalisés à partir d'échantillons conservés à 65% d'humidité relative. Ceci peut s'interpréter de deux manières:

- soit α est voisin de zéro (ce qui signifierait que la porosité a peu d'influence sur la compressibilité du béton, donc hypothèse

peu réaliste)

- soit nous avons surestimé la pression u, hypothèse plus vraisemblable.

L'hypothèse de mise en pression de l'eau intersticielle dans le cas des essais biaxiaux demande donc à être confirmée (où infirmée) par une série d'essais comparatifs, sur cubes 100% humides et sur cubes secs testés sur la même presse afin d'éliminer le facteur conditions aux limites.

III-5.d conclusion

La première série d'essais biaxiaux réalisés à l'ENTPE sur des chemins de sollicitation séquentiels (donc par-là même différents de ceux disponibles dans la littérature) nous a permis de mettre en évidence les éléments suivants:

- la rupture se produit par fissuration dans des plans perpendiculaires à la direction d'extension maximale.

- dans cette direction la déformation dénote un caractère fortement non linéaire.

- Il paraît vraisemblable que le trajet de chargement a une influence sur le comportement du matériau dès que la contrainte intermédiaire est assez élevée.

- la teneur en eau pourrait également jouer un rôle vis à vis du comportement multiaxial du béton.

Toutefois, compte tenu du nombre restreint d'essais réalisés à l'ENTPE, qui implique une forte amplitude de l'intervalle de confiance à 90%, nous ne pouvons pas réellement conclure sur ces deux derniers points. Nous préconisons donc des essais complémentaires ciblés sur chacun de ces paramètres.

CHAPITRE IV

SIMULATION NUMERIQUE

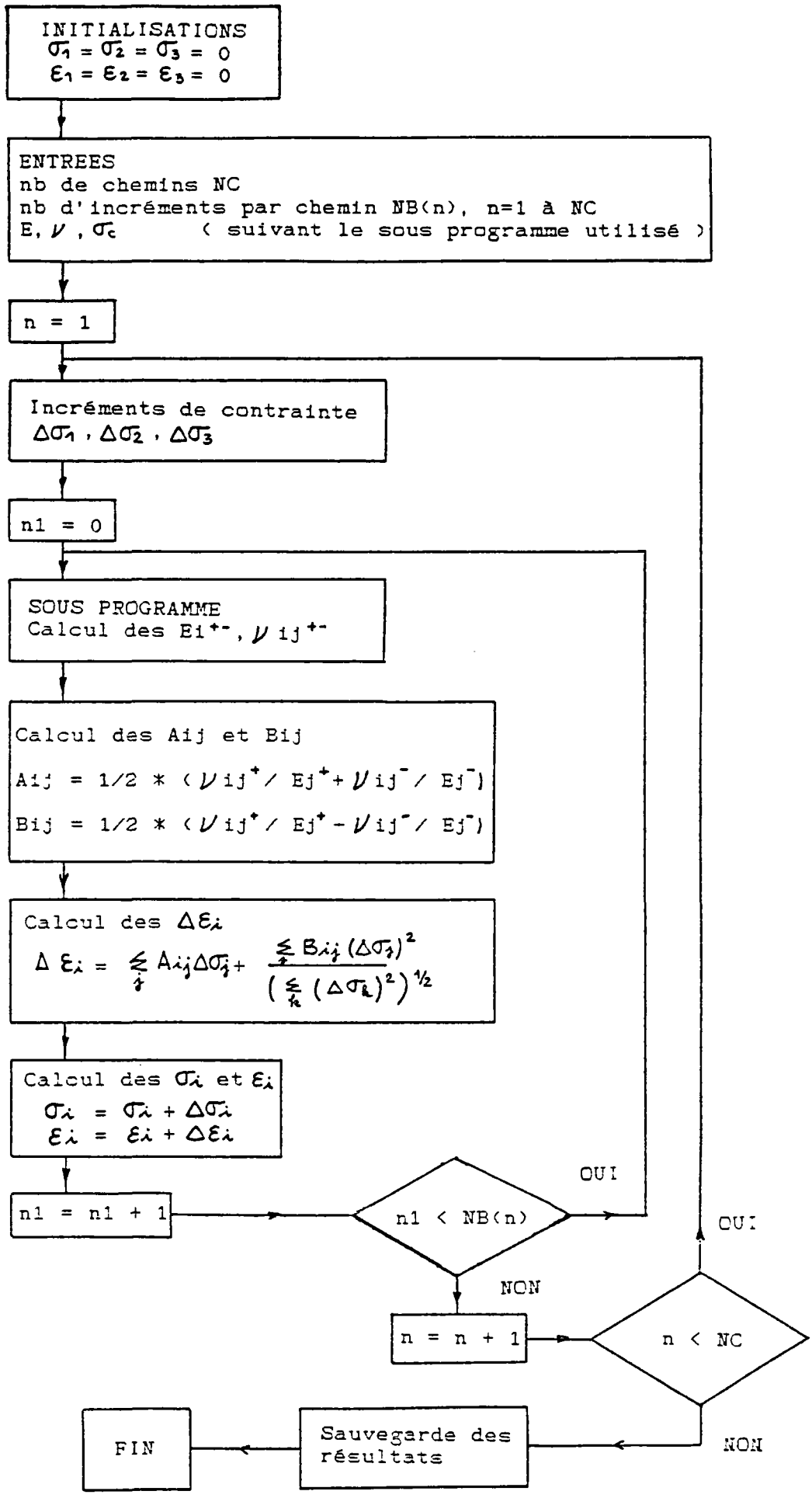
CHAPITRE IV - SIMULATION NUMERIQUE :

Ce chapitre a pour objet la comparaison de divers essais de la littérature ou réalisés à l'E.N.T.P.E. avec les résultats obtenus grâce à une simulation numérique du comportement du béton, effectué à l'aide du modèle incrémental.

Outre le programme de simulation présenté en annexe 4 nous présentons l'organigramme de simulation. Pour chaque type de chemin de sollicitations (isotrope, triaxial de révolution par exemple) une décomposition en incréments est effectuée, les déformations étant calculées à chaque pas.

Rappelons que le modèle nécessite la connaissance du comportement du béton sur des chemins triaxiaux généralisés (voir chapitre II). Selon les 3 directions d'orthotropie sont alors calculés les pseudo modules d'Young et les pseudo coefficients de Poisson.

ORGANIGRAMME DE SIMULATION



IV-1 - FORMULATION ANALYTIQUE :

Lorsque débuta ce travail, nous voulions élaborer de façon concomitante un modèle et une presse permettant de déterminer les paramètres nécessaires à celui-ci. Les difficultés rencontrées dans l'élaboration puis dans l'exploitation d'une presse toute nouvelle (pour nous tout au moins), ont fait évoluer l'idée de départ compte tenu des délais impartis. Nous avons donc préféré ne pas attendre les premiers résultats d'essais pour commencer à mettre au point la formulation analytique nécessaire au modèle, nos essais servant alors de complément à ceux déjà disponibles dans la littérature en vue de la validation du modèle.

D'autre part nous avons volontairement pris le parti de la simplicité: notre formulation n'utilise comme paramètres que les résultats de l'essai le plus simple à réaliser, la compression simple.

IV-1.a en décharge :

Nous commençons par étudier le cas de la décharge modélisée plus simplement. En effet, nous avons choisi de prendre pour celle-ci :

$$E_i^- = E_0 \quad \forall i$$
$$\nu_{ij}^- = \nu_0 \quad \forall i \neq j$$

ou E_0 et ν_0 sont les valeurs initiales du module d'Young et du coefficient de Poisson mesurés à l'aide d'un essai de compression. Il est clair que cette formulation, simpliste, ne prend pas en compte tous les phénomènes décrits au chapitre I.

Néanmoins dans un premier temps elle nous est apparue suffisante (il n'était pas question pour nous de simuler des essais cycliques pour lesquels il est certain que la formulation choisie ne suffirait pas). Nous n'avons pas non plus simulé d'essais de traction mais seulement quelques essais de compression uni- ou multiaxiale avec décharges limitées.

IV-1.b en charge :

Plutôt que de repenser une formulation analytique nous nous sommes inspirés du modèle de ELWI MURRAY [47] présenté succintement au chapitre II. Il est de type hypoélastique mais dans notre cas (charge seulement) le problème de la non dissociation entre charge et décharge ne

se pose pas.Il utilise le principe de déformation uniaxiale équivalente de DARWIN et PECKNOLD [48]. Nos résultats multiaxiaux n'étant pas encore disponibles ce concept permet de nous en passer dans un premier temps. Enfin, il présente l'avantage d'être orthotrope et possède une mémoire de l'histoire des sollicitations. Nous allons l'examiner plus en détail, dans le cas où les axes de chargement restent invariables et donc confondus avec les axes d'orthotropie.

Existe alors une relation liant incréments de déformation et de contraintes : $d\varepsilon = M\, d\sigma$

soit

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix}$$

La théorie hypoélastique implique une symétrie de M

d'où :

$$-\nu_{ij}/E_j = -\nu_{ji}/E_i \implies \nu_{ij} E_i = \nu_{ji} E_j$$

Si l'on pose: $\mu_{ij} = \nu_{ij} E_i$

la relation précédente s'écrit maintenant :

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\mu_{12}/E_1E_2 & -\mu_{13}/E_1E_3 \\ -\mu_{21}/E_2E_1 & 1/E_2 & -\mu_{23}/E_2E_3 \\ -\mu_{31}/E_3E_1 & -\mu_{32}/E_3E_2 & 1/E_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix}$$

Si nous inversons ce système nous aurons :

$d\sigma = C\, d\varepsilon$ avec $C = M^{-1}$

Si l'on pose $\alpha_{ij} = \mu_{ij}/\sqrt{E_i E_j}$

et $\Phi = 1 - \alpha_{12}^2 - \alpha_{13}^2 - \alpha_{23}^2 - 2\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}$

nous obtenons:

$$C = \frac{1}{\Phi}\begin{bmatrix} E_1(1-\alpha_{23}^2) & \sqrt{E_1E_2}(\alpha_{12}+\alpha_{13}\alpha_{23}) & \sqrt{E_1E_3}(\alpha_{13}+\alpha_{12}\alpha_{23}) \\ \sqrt{E_1E_2}(\alpha_{12}+\alpha_{13}\alpha_{23}) & E_2(1-\alpha_{13}^2) & \sqrt{E_2E_3}(\alpha_{23}+\alpha_{12}\alpha_{13}) \\ \sqrt{E_1E_3}(\alpha_{13}+\alpha_{12}\alpha_{23}) & \sqrt{E_2E_3}(\alpha_{23}+\alpha_{12}\alpha_{13}) & E_3(1-\alpha_{12}^2) \end{bmatrix}$$

Pour déterminer cette matrice nous utilisons le concept de déformation équivalente. Par définition celle-ci est telle que:

$$d\sigma_i = E_i \; d\varepsilon_{iu}$$

où ε_{iu} est la déformation équivalente.

cela revient à écrire C de la manière suivante :

$$C = \begin{bmatrix} E_1 B_{11} & E_1 B_{12} & E_1 B_{13} \\ E_2 B_{21} & E_2 B_{22} & E_2 B_{23} \\ E_3 B_{31} & E_3 B_{32} & E_3 B_{33} \end{bmatrix}$$

et à poser : $d\varepsilon_{iu} = B_{i1}\,d\varepsilon_1 + B_{i2}\,d\varepsilon_2 + B_{i3}\,d\varepsilon_3$

On a alors :

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_{1u} \\ d\varepsilon_{2u} \\ d\varepsilon_{3u} \end{bmatrix}$$

L'hypothèse forte consiste alors à supposer que la relation liant contrainte et déformation équivalente suit une loi de type compression simple. ELWI et MURRAY utilisent la relation de SAENZ.[49] Celle-ci s'écrit :

$$\sigma_i = \frac{E_0\,\varepsilon_{iu}}{1 + (R + R_E - 2)\,\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic} - (2R-1)(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic})^2 + R(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic})^3}$$

avec $R_E = E_o / E_s$ où $E_s = \sigma_{ic}/\varepsilon_{ic}$ (voir fig.IV.1)

$$R = R_E \frac{R_\sigma - 1}{(R_\varepsilon - 1)^2} - \frac{1}{R_E} \quad \text{où} \quad R_\sigma = \sigma_{ic}/\varepsilon_{if} \text{ et } R_\varepsilon = \varepsilon_{ic}/\varepsilon_{if}$$

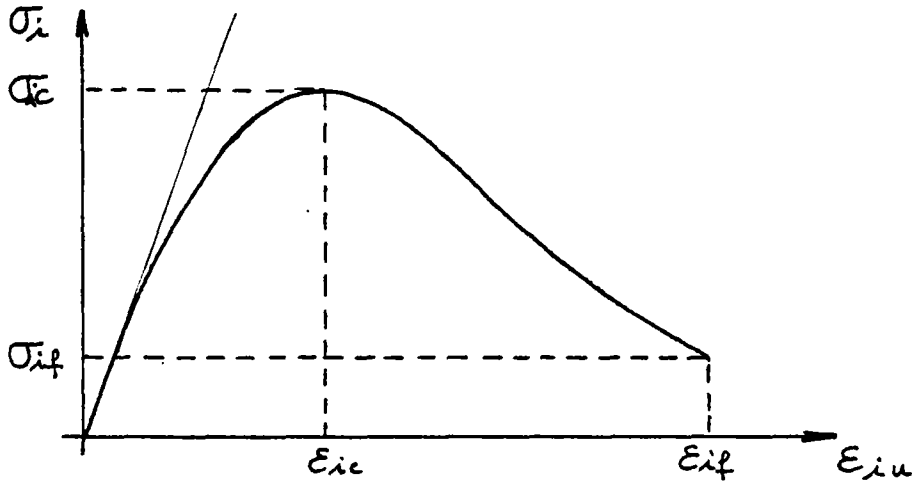


figure IV-1 : relation de SAENZ liant contrainte et déformation équivalente

Or nous voyons que cette équation utilise la déformation ε_{if} , correspondant au maximum de la déformation, et σ_{if} contrainte associée à ε_{if} . Au chapitre I nous nous sommes efforcés de montrer que l'expérimentateur était incapable de fournir le comportement post pic du béton. ELWI et MURRAY, conscients du problème, fixent forfaitairement :

$$\varepsilon_{if} = 4 \cdot \varepsilon_{ic} \quad \text{et} \quad \sigma_{if} = \sigma_{ic}/4$$

Comme nous voulons uniquement modéliser le comportement du béton avant que ne soit atteint le pic de contrainte, il nous a paru opportun de choisir une formulation plus simple, évitant cet ecueil. L'équation réaliste la plus simple est du type:

$$\sigma_i = \frac{E_o \, \varepsilon_{iu}}{a + b\,\varepsilon_{iu} + c\,\varepsilon_{iu}^2}$$

Les conditions à vérifier sont les suivantes:

pour $\varepsilon_{iu} = 0$, $\sigma_i = 0$

$$\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_{iu}} = E_o \implies a = 1$$

pour $\varepsilon_{iu} = \varepsilon_{ic}$, $\sigma_i = \sigma_{ic}$, $\dfrac{d\sigma_i}{d\varepsilon_{iu}} = 0$ $\Longrightarrow$ $b = \left(\dfrac{E_0}{\sigma_c}\varepsilon_{ic} - 2\right)/\varepsilon_{ic}$, $c = (1/\varepsilon_{ic})^2$

d'où finalement:

$$\sigma_i = \frac{E_0\,\varepsilon_{iu}}{1 + \left(\dfrac{E_0\varepsilon_{ic}}{\sigma_{ic}} - 2\right)\dfrac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} + \left(\dfrac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}}\right)^2}$$

L'allure de cette courbe reste très similaire à celle de l'équation de SAENZ, pour sa partie croissante au moins.
Les modules tangents E_i^+ sont alors obtenus en dérivant :

$$\boxed{E_i^+ = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_{iu}} = \frac{E_0\left(1 - \left(\dfrac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}}\right)^2\right)}{\left[1 + \left(\dfrac{E_0\varepsilon_{ic}}{\sigma_{ic}} - 2\right)\dfrac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} + \left(\dfrac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}}\right)^2\right]^2}}$$

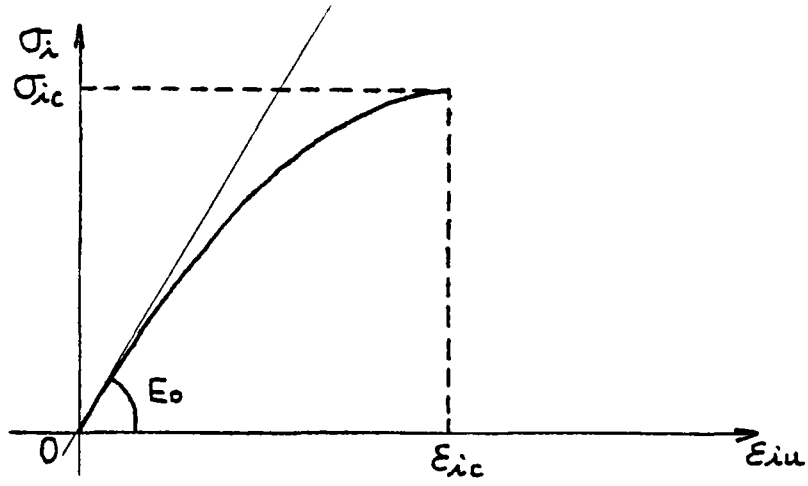


Fig.IV.2: formulation analytique de la relation entre contrainte et déformation uniaxiale équivalente

Ils dépendent de ε_{iu} et c'est de cette manière que l'on tient compte de la mémoire du matériau, ε_{iu} dépendant pour un même état de contrainte du chemin suivi puisque:

$$\varepsilon_{iu} = \int \frac{d\sigma_i}{E_i}$$

Pour les coefficients de Poisson nous nous fondons sur une détermination expérimentale obtenue à partir d' essais uniaxiaux généralisée aux déformations équivalentes:

$$\nu_i = \nu_0 \; f(\varepsilon_{iu} / \varepsilon_{ic})$$

ELWI et MURRAY proposent la relation suivante :

$$\nu_i = \nu_0 \left[1 + 1.38(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic}) - 5.36(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic})^2 + 8.59(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic})^3 \right]$$

où ν_0 est le coefficient de Poisson initial. Nous simplifions cette équation en :

$$\nu_i = \nu_0 \left[1 + 1.4(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic}) - 5(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic})^2 + 8(\varepsilon_{iu}/\varepsilon_{ic})^3 \right]$$

On suppose maintenant :

$$\nu_i \nu_j = \nu_{ij} \nu_{ji} = \alpha^2_{ij}$$

De plus : $\mu_{ij} = \nu_{ij} E_i = \nu_{ji} E_j$

d'ou :

$$\mu_{ij}^2 = \nu_{ij} E_i \cdot \nu_{ji} E_j = \alpha^2_{ij} E_i E_j$$

$$\Longrightarrow \quad \mu_{ij} = \alpha_{ij} \sqrt{E_i E_j} = \sqrt{\nu_i \nu_j} \sqrt{E_i E_j}$$

$$\nu_{ij} = \mu_{ij}/E_i = \boxed{\sqrt{\nu_i \nu_j} \sqrt{E_j / E_i} = \nu_{ij}}$$

Les ν_{ij}^+ sont alors obtenus pour $d\sigma_i > 0$ et $d\sigma_j = d\sigma_k = 0$
La détermination des coefficients E_i^+ et ν_{ij}^+ nécessitera donc de connaître E_0 et ν_0 ainsi que σ_{ic} et ε_{ic}.

<u>Discussion sur les hypothèses faites</u> :

Le concept de déformation équivalente, lorgement utilisé ici, soulève quelques questions quant au bien fondé de son emploi. Pour un matériau élastique linéaire le concept de déformation équivalente s'applique rigoureusement : prenons le cas d'une compression biaxiale ou les contraintes valent $(\sigma_1, \alpha\sigma_1, 0)$.

Nous avons :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \alpha\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}(1-\alpha\nu)$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_1}{E}(\alpha-\nu)$$
$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_1}{E}(-\nu(1+\alpha))$$

De la même façon nous avons :

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{bmatrix} = \frac{1}{1-\nu-2\nu^2}\begin{bmatrix}E(1-\nu) & E\nu & E\nu\\ E\nu & E(1-\nu) & E\nu\\ E\nu & E\nu & E(1-\nu)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{bmatrix}$$

D'après la définition des déformations équivalentes nous en déduisons:

$$\varepsilon_{1u} = \frac{1}{1-\nu-2\nu^2}\left[(1-\nu)\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_3\right]$$
$$= \frac{1}{1-\nu-2\nu^2}\cdot\frac{\sigma_1}{E}\cdot(1-\nu-2\nu^2) = \frac{\sigma_1}{E}$$

Soit : $\varepsilon_{1u} = \frac{\sigma_1}{E}$

de la même façon : $\varepsilon_{2u} = \frac{\sigma_2}{E}$ et $\varepsilon_{3u} = 0 = \frac{\sigma_3}{E}$

Nous avons ainsi vérifié que dans le cas d'un matériau élastique linéaire l'hypothèse faite sur la déformation équivalente était exacte.

Il est clair que cela n'est plus le cas lorsque le matériau ne suit pas ce type de comportement. Alors plusieurs facteurs, non pris en compte, comme par exemple la non linéarité du comportement ou l'influence la pression moyenne, vont intervenir. L'emploi de la déformation équivalente n'est plus alors rigoureux et ce sont les résultats obtenus, et leur concordance avec l'expérience qui seuls permettent de valider a postériori l'emploi de ce concept, en tenant compte de sa simplicité.

Dernier point sur le modèle, il nécessite de connaître σ_{ic} et ε_{ic},c'est-à-dire la contrainte et la déformation à la rupture. Ces valeurs dépendent :

1°) du critère de rupture
2°) du chemin suivi pour aller à la rupture.

ELWI et MURRAY choisissent un chemin rectiligne partant de 0,0,0 et passant par l'état actuel du matériau (ceci pour ne faire qu'une seule recherche par incrément de charge). Compte tenu de notre mode de simulation il nous a semblé plus logique de chercher σ_{ic} et ε_{ic} pour chaque direction d'orthotropie, ces valeurs pouvant être fort disparates.

Avant d'aborder le problème du critère de rupture, il reste un dernier point à aborder concernant les montées en charge isotropes. Nous avons vu au chapitre I que le mode d'endommagement du matériau était différent selon que l'on soit dans un état de contraintes isotrope ou non. Comme le concept de déformation équivalente utilise la loi de comportement en compression simple, il ne peut pas rendre compte de l'endommagement isotrope.

C'est pourquoi pour les sollicitations à faible déviateur nous avons repris une formulation analytique inspirée des essais de NEWMANN [79]

$$\varepsilon_{iso} = k \cdot \sigma_{iso}^{n}$$

avec n=1,3
et k=-2,8*10-7 σ_c +2,1*10-5
(σ_c étant exprimée en MPa)

Nous tirons alors de cette relation $\varepsilon_{iso} = \dfrac{1}{n\,k\,\sigma_{iso}^{n-1}}$

IV-1.c <u>Critère de rupture</u> :

Il existe un grand nombre de critères de rupture (exprimés en contraintes) pour le béton. A cet égard l'étude comparative [126] effectuée par WASTIELS est très riche en renseignements. L'auteur y passe en revue les différents critères et les tests par rapport aux résultats expérimentaux de KUPFER [108] et SCHICKERT [20]. Parmi les critères qui "passent" bien cette épreuve figure le critère de WILLIAM et WARNKE [63].

C'est un critère défini en contraintes octahedrales . Rappelons que nous avons alors :

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

$$\cos\theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2\left((\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right)}}$$

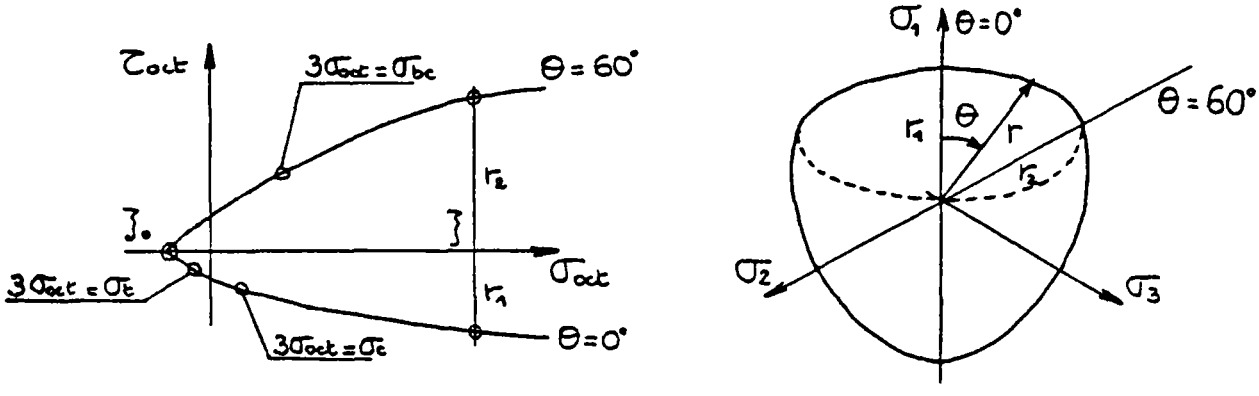
d'où si $\sigma_1 = \sigma_2 \geqslant \sigma_3$ $\quad \cos\theta = \frac{1}{2}$ $\quad \theta = 60°$

et si $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 = \sigma_3$ $\quad \cos\theta = 1$ $\quad \theta = 0°$

La rupture est atteinte lorsque

$$\tau_{oct} = r(\sigma_{oct}, \theta)$$

Si nous représentons ce critère dans le plan $(\sigma_{oct}, \tau_{oct})$ et dans le plan déviatoire nous obtenons la figure IV-3.



a) plan $(\sigma_{oct}, \tau_{oct})$ b) plan déviatoire

figure IV-3 : représentation du critère de WILLIAM et WARNKE.

Les hypothèses permettant la construction de ce critère sont les suivantes :

1°) dans le plan déviatoire $r(\theta)$ varie de façon elliptique avec $r = r_1$ pour $\theta = 0$ et $r = r_2$ pour $\theta = 60°$
ce qui nous donne :

$$r(\theta) = \frac{2 r_2 r_{21} \cos\theta + (2r_1 - r_2)\sqrt{4 r_{21} \cos^2\theta + 5r_1^2 - 4r_1 r_2}}{4 r_{21} \cos^2\theta + (r_2 - 2r_1)^2}$$

avec $r_{21} = r_2^2 - r_1^2$

2°) dans le plan des contraintes octahedrales r_1 et r_2 sont des fonctions paraboliques de σ_{oct}.

On a alors pour $\Theta = 0°$

$$r_1 = a_0 + a_1 \frac{\sigma_{oct}}{\sigma_c} + a_2 \left(\frac{\sigma_{oct}}{\sigma_c}\right)^2$$

et pour $\Theta = 60°$

$$r_2 = b_0 + b_1 \frac{\sigma_{oct}}{\sigma_c} + b_2 \left(\frac{\sigma_{oct}}{\sigma_c}\right)^2$$

3°) les six degrés de liberté a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 sont déterminés à partir de :

σ_c résistance en compression simple,

σ_t résistance en traction simple,

σ_{bc} résistance en compression biaxiale ($\sigma_1 = \sigma_2$),

ξ_0 point d'intersection des 2 paraboles lorsque $\tau_{oct} = 0$,

et enfin les valeurs déterminées expérimentalement de r_1 et r_2 pour un ξ donné correspondant à un σ_{oct} "élevé".

Le but de notre travail n'étant pas d'obliger l'utilisateur du modèle à effectuer un grand nombre d'essais nous avons choisi de limiter le nombre des paramètres à un seul : la résistance en compression simple. Les autres seront exprimés en fonction de cette valeur, comme dans le travail de WASTIELS [126]. Ceci nous donne :

$$\sigma_t = 0{,}09\ \sigma_c$$
$$\sigma_{bc} = 1{,}15\ \sigma_c$$

pour $\xi = 1{,}5\sigma_c$ et $\Theta = 0°$ $\quad r_1 = 0{,}725$

pour $\xi = 1{,}5\sigma_c$ et $\Theta = 60°$ $\quad r_2 = 0{,}9$

On obtient finalement :

$$r_1 = 0{,}05 - 0{,}51 \frac{\sigma_{oct}}{\sigma_c} - 0{,}04\left(\frac{\sigma_{oct}}{\sigma_c}\right)^2$$

$$r_2 = 0{,}09 - 0{,}9 \frac{\sigma_{oct}}{\sigma_c} - 0{,}24\left(\frac{\sigma_{oct}}{\sigma_c}\right)^2$$

Le critère en contraintes est alors déterminé. Mais notre formulation nécessite également de connaître ε_{ic}, déformation équivalente à la rupture. Or les critères de rupture en déformation sont très rares. Citons celui de MAZARS [6].

Pour notre cas, compte tenu du fait que dans la simulation nous allons devoir utiliser une méthode numérique pour calculer il nous a semblé préférable de supposer que l'allure du critère de rupture en déformation est semblable à celui exprimé en contraintes, ceci nous

permettant d'utiliser la même méthode numérique.

En déformation nous aurons donc besoin de déformation à la rupture en compression simple. Deux possibilités s'offraient à nous: soit utiliser la mesure de ε_c effectuée lors d'un essai de compression (avec tous les aléas sur cette mesure), soit estimer ε_c à partir de σ_c . Nous avons choisi la seconde solution plus réaliste en vue de l'emploi du modèle.

Nous avons:

$\varepsilon_c = 0{,}8 \sqrt[3]{\sigma_c} \cdot 10^{-3}$ (formule analogue à celle du BPEL, σ_c en MPa)

$\varepsilon_t = 0{,}046\ \varepsilon_c$ (déformation à la rupture en traction)

$\varepsilon_{bc} = 1{,}3\ \varepsilon_c$ (déformation à la rupture dans un essai biaxial où $\sigma_1 = \sigma_2$)

et pour $\zeta = 1{,}5\ \varepsilon_c$ et $\theta = 0°$ $\quad r_1 = 0{,}81$

pour $\zeta = 1{,}5\varepsilon_c$ et $\theta = 60°$ $\quad r_2 = 1{,}32$

On obtient avec ces valeurs :

$$r_1 = 0{,}025 - 0{,}54\ \frac{\varepsilon_{oct}}{\varepsilon_c} - 0{,}015\left(\frac{\varepsilon_{oct}}{\varepsilon_c}\right)^2$$

$$r_2 = 0{,}046 - 1{,}00\ \frac{\varepsilon_{oct}}{\varepsilon_c} - 0{,}10\left(\frac{\varepsilon_{oct}}{\varepsilon_c}\right)^2$$

IV-1.d Recherche de σ_{ic}, ε_{ic}

L'expression du critère de rupture de WILLIAM et WARNKE étant non linéaire, la recherche des valeurs à la rupture σ_{ic} et ε_{ic} doit se faire par une méthode itérative appropriée. Nous avons choisi la méthode de NEWTON, simple à programmer. On construit la suite des (x_n) de la manière suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\partial f/\partial x\,(x_n)}$$

La figure IV-4 reproduit le schéma itératif.

Pour notre problème le choix du point de départ des itérations est vital. En effet, le critère de rupture peut présenter deux solutions : l'une en charge, l'autre en décharge. (cette question est développée plus en détail dans l'annexe 3 où est présenté également le calcul des dérivées nécessaires à la mise en oeuvre de la méthode de

NEWTON).

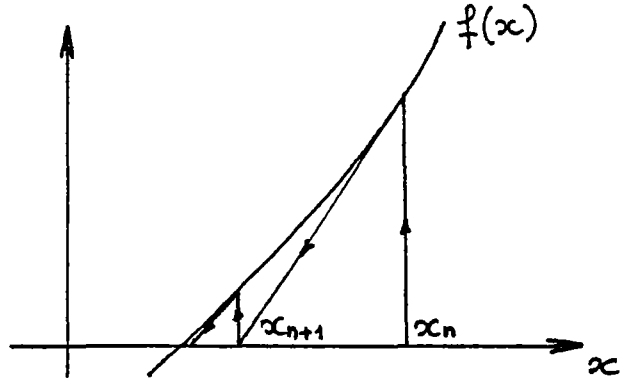


figure IV-4 : résolution de f(x)=0 par la méthode de Newton.

IV-1.e Comparaison du critère de WILLIAM et WARNKE avec l'expérimentation :

Du fait que ce critère est exprimé en contraintes octahedrales, la première idée est de le comparer aux résultats expérimentaux dans les axes (σ_{oct}, τ_{oct}). Pourtant ainsi que l'a montré WASTIELS [127], ceci n'est pas toujours sans risque. En effet dans le cas d'un chargement biaxial en compression-compression ou traction-compression, les zones correspondantes dans l'espace (σ_{oct}, τ_{oct}), sont extrèmement réduites :

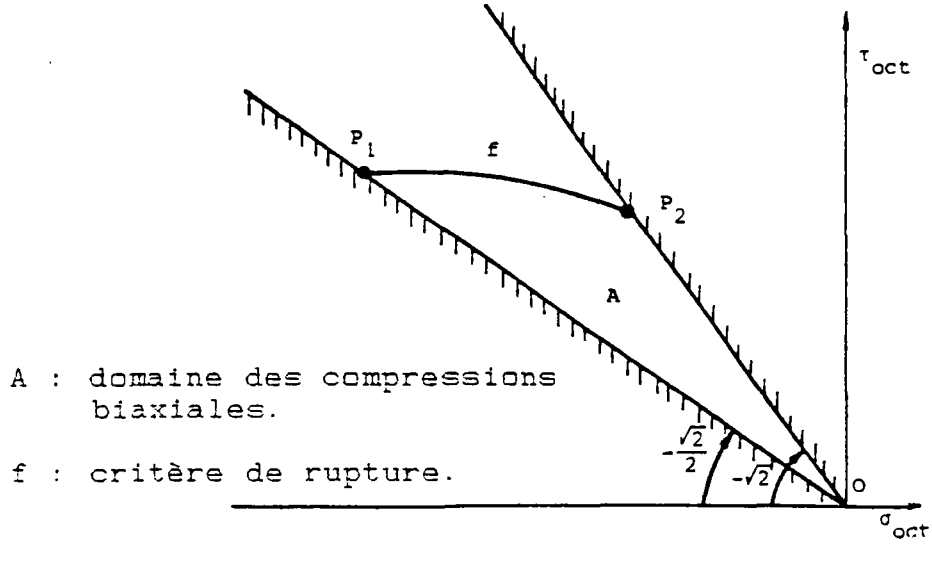
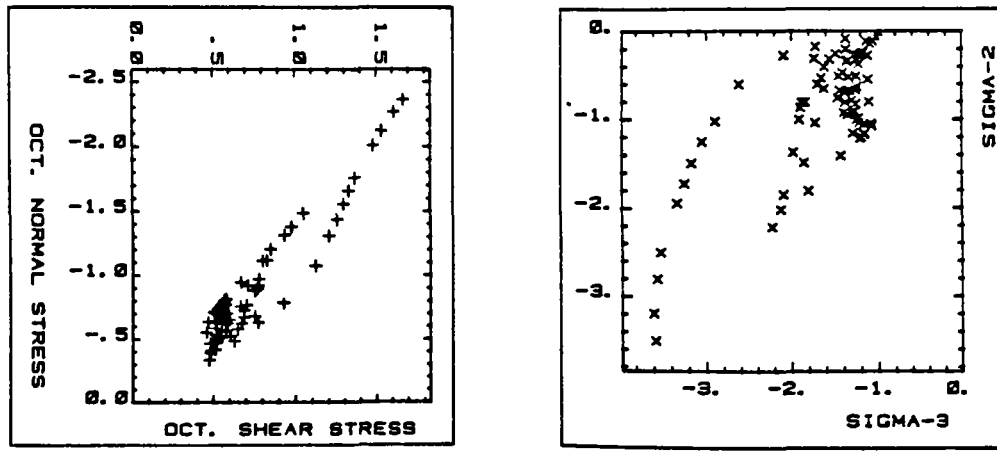


fig. IV.5 : lieu des points (σ_{oct} , τ_{oct}) dans le cas biaxial (d'après WASTIELS).

Ce qui correspond en contraintes octahedrales quasiment à une droite a alors l'allure d'un nuage de points dans les axes (σ_1 , σ_2) .



a) repère octahédral b) repère principal

Fig.IV.6:influence du repère choisi pour l'analyse des résultats expérimentaux dans le cas de la compression-compression (d'après WASTIELS)

Nous avons donc définitivement rejeté le repère octahedral pour comparer le critère de WILLIAM et WARNKE et les résultats expérimentaux.

A l'aide du programme présenté dans l'annexe 3, nous avons pu confronter le critère aux résultats expérimentaux dans deux cas : compression biaxiale et compression triaxiale. Pour la compression biaxiale les résultats expérimentaux disponibles sont ceux de KUPFER, HILSDORF et RUSCH [52], de SCHICKERT et WINKLER [20], de LAUNAY, GACHON et POITEVIN [128] et enfin bien sûr nos propres résultats. (Nous avons discuté au chapitre III la validité de ces résultats principalement par rapport à l'hypothèse des contraintes planes).

En ce qui concerne la compression triaxiale nous avons comparé le critère aux résultats des essais du B A M [20]. Ces essais sont à pression moyenne constante (où σ_{oct} = cste) et sont réalisés selon le schéma de la figure IV.8.

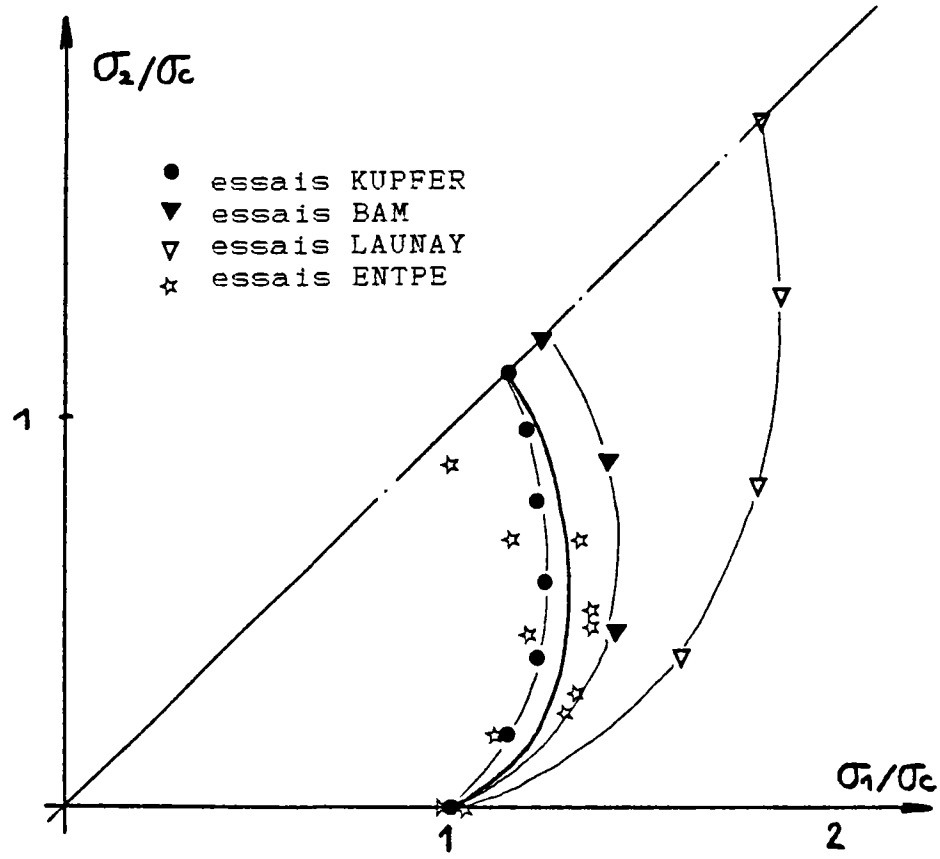
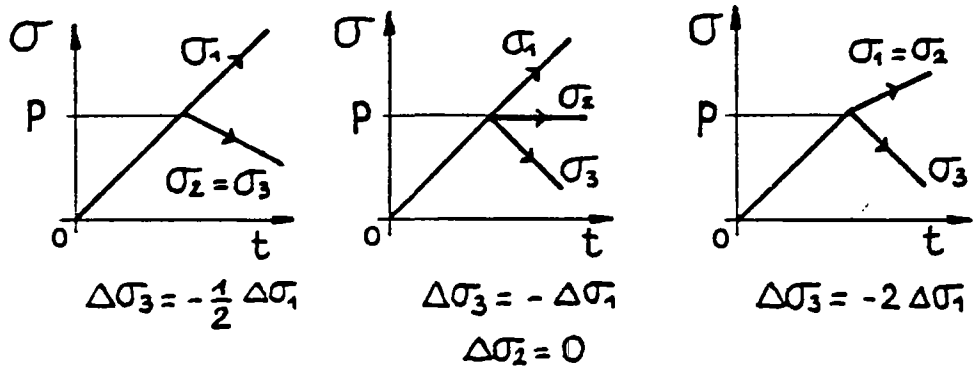


fig. IV.7 : comparaison du critère de WILLIAM et WARNKE avec les résultats expérimentaux en chargement biaxial.



a) chemin n°1 b) chemin n°2 c) chemin n°3

fig. IV.8 : chemins de chargements triaxiaux du B A M

Du fait que ces essais sont effectués à pression moyenne leurs résultats sont présentés dans le plan déviatoire, qui nous apparait comme le mieux adapté (voir fig. IV.9).

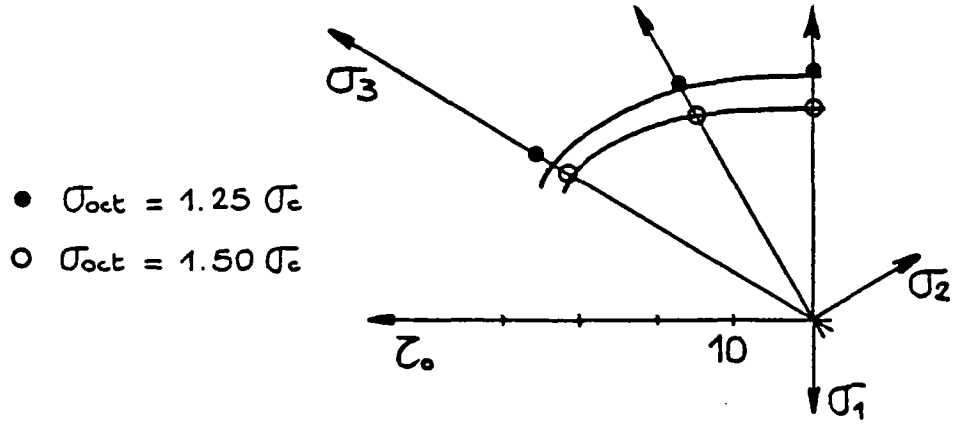


Fig.IV.9: comparaison du critère de WILLIAM et WARNKE avec les essais triaxiaux du BAM.

L'accord est très bon entre le critère et les essais, l'effet néfaste du frettage étant moins sensible que dans le cas biaxial.

En ce qui concerne le critère exprimé en déformation nous n'avons pas fait de comparaison avec les résultats expérimentaux. En effet la totalité des essais disponibles a été effectuée, certes en pilotant en général les presses en vitesses de déplacement, mais toujours sur un chemin de contrainte donné. Il nous semble donc que, si comme cela a été dit au chapitre précédent, il est important d'avoir un critère de rupture du béton exprimé en déformation (extensions) il est tout aussi important d'effectuer des essais sur des chemins en déformations ,et non pas seulement en contraintes comme cela se pratique, ceci afin de pouvoir réellement comparer modèles et résultats expérimentaux.

IV-1.f conclusions

Nous avons délibérément construit une formulation analytique simplifiée pour notre modèle. Ainsi, les seuls paramètres intervenants seront déterminés à l'aide de l'essai le plus pratiqué sur le béton: l'essai de compression simple. La simulation à l'aide de notre modèle ne nécessite en effet que:

E_o module d'élasticité initial

ν_o coefficient de Poisson

σ_c résistance en compression simple

Dans une phase ultérieure, lorsque notre presse aura fourni davantage de résultats expérimentaux, il sera possible d'améliorer cette partie, l'emploi du concept de déformation uniaxiale conduisant malgré tout à une forte simplification.

IV. 2 - Prise en compte par la simulation de différents facteurs ayant une influence sur le comportement du béton:

IV-2. a la teneur en eau:

Nous avons apprécié (chapitre I et III) l'influence de ce facteur. Nous allons donc le faire intervenir dans notre simulation et ce, au niveau des pseudo modules d'Young. En effet nous avons

$$E_i^+ = E_o\, f(\varepsilon_{iu}, \sigma_{ic}, \ldots)$$
$$= E_o(h) \cdot f(\varepsilon_{iu}, \sigma_{ic}, \ldots)$$

Pour la simulation des essais autres que ceux effectués à l'ENTPE, lorsque la valeur de h n'est pas connue, nous supposerons qu'elle est la même pour toute la série d'éprouvettes et donc que $E_o = E_o(h)$ et $\sigma_c = \sigma_c(h)$ de façon implicite.

Pour montrer l'influence de ce paramètre sur des essais de compression simple (et avant de comparer ces résultats aux notres) nous présentons (fig. IV.10) l'ensemble des courbes obtenues grâce à notre programme de simulation, lorsque l'on fait varier h. Les fonctions $E_o(h)$ et $\sigma_c(h)$ sont obtenues directement à partir des résultats expérimentaux présentés au chapitre III (c'est à dire que la simulation sera relative au comportement d'une éprouvette cubique ayant séché pendant une certaine durée).

Ainsi pour $h \leqslant 30\%$ nous avons:

$E_o = 40\,000 - 270 * h$ MPa

$\sigma_c = 35 - 0{,}5 * h$ MPa

pour $h \geqslant 30\%$

$E_o = 28\,450 + 115 * h$ MPa

$\sigma_c = 16{,}25 + 0{,}25 * h$ MPa

Nous pouvons constater les variations du comportement simulé avec la teneur en eau qui soulignent encore une fois l'importance de ce paramètre.

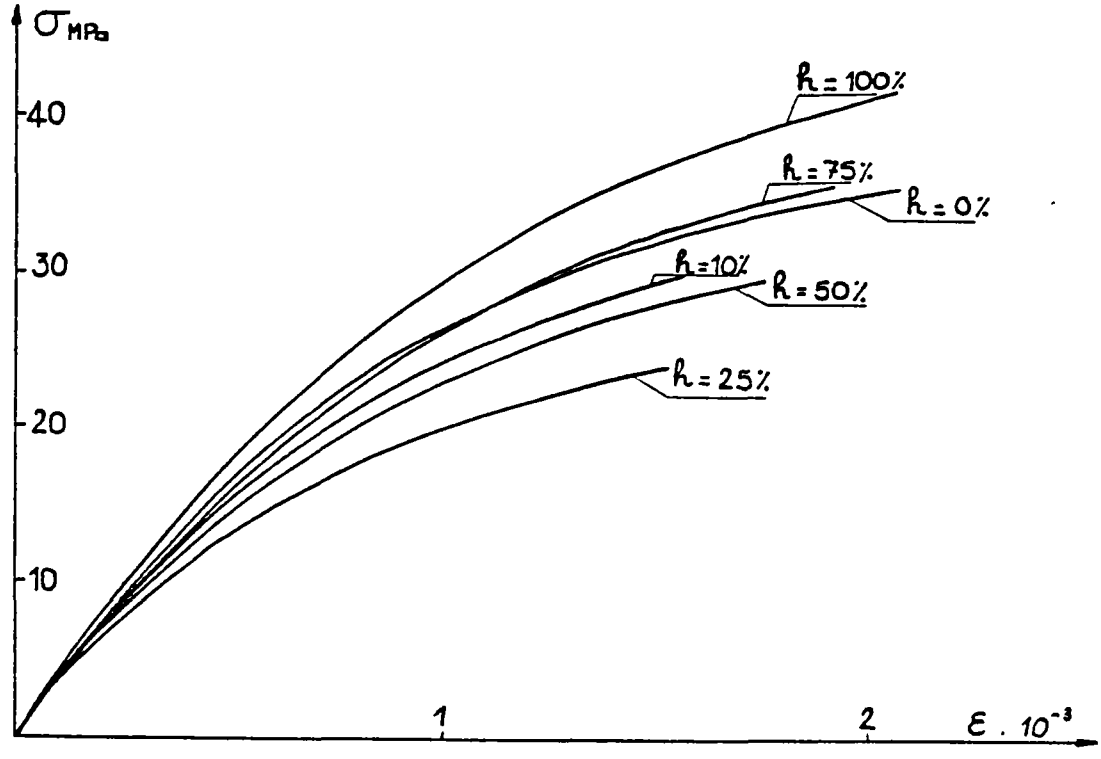


fig. IV.10 : simulation de l'influence de la teneur en eau sur un essai en compression simple.

IV-2. b le chemin de chargement

Le concept de déformation équivalente permet de tenir compte de ce facteur. Nous allons quantifier cette influence grâce à la comparaison des résultats de simulation d'essais biaxiaux sur des trajets de chargements proportionnels et séquentiels. Compte tenu que le critère de rupture utilisé ne tient pas compte de l'histoire des sollicitations, les valeurs des contraintes à la rupture ne dépendent pas du chemin de chargement suivi. Nous avons donc choisi de comparer des chemins menant aux mêmes états de contraintes. L'ensemble des chemins simulés est représenté à la figure IV.11.

Nous constatons que les déformations (simulées) selon les chemins séquentiels sont plus importantes que celles obtenues en suivant des chemins proportionnels aboutissant au même état de contraintes à la rupture.(Fig.IV.12 a, b, c) De plus, sur les chemins séquentiels, plus la contrainte intermédiaire σ_2 est élevée plus les déformations calculées

sont importantes (ce que semblait indiquer l'essai BC10P). Ces résultats montrent les possibilités du modèle au niveau de la simulation de la mémoire du matériau.

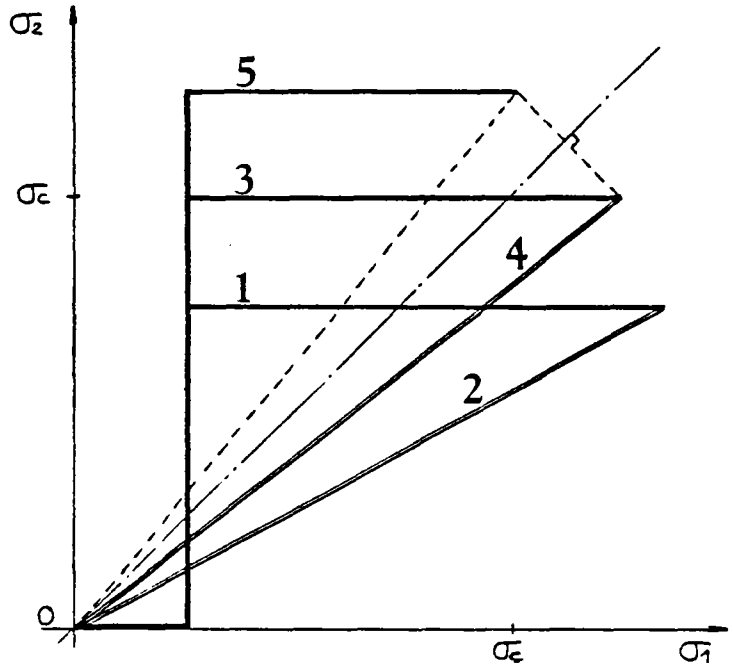


Fig.IV.11:les trajets de chargements simulés.

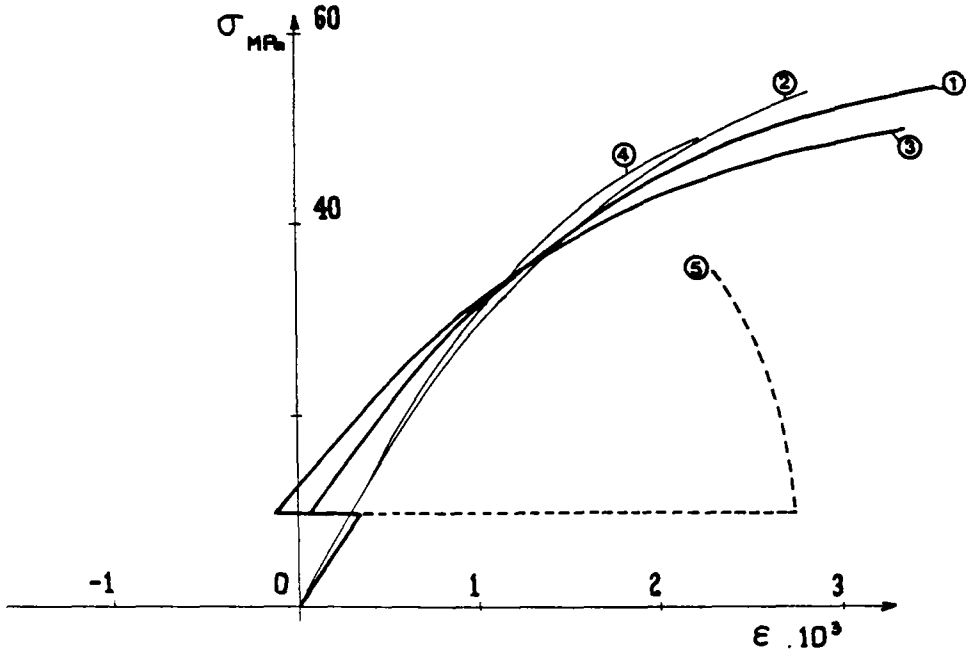


Fig.IV.12 a: courbes $(\sigma_1, \varepsilon_1)$ pour les chemins 1,2,3,4
courbe $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ pour le chemin 5

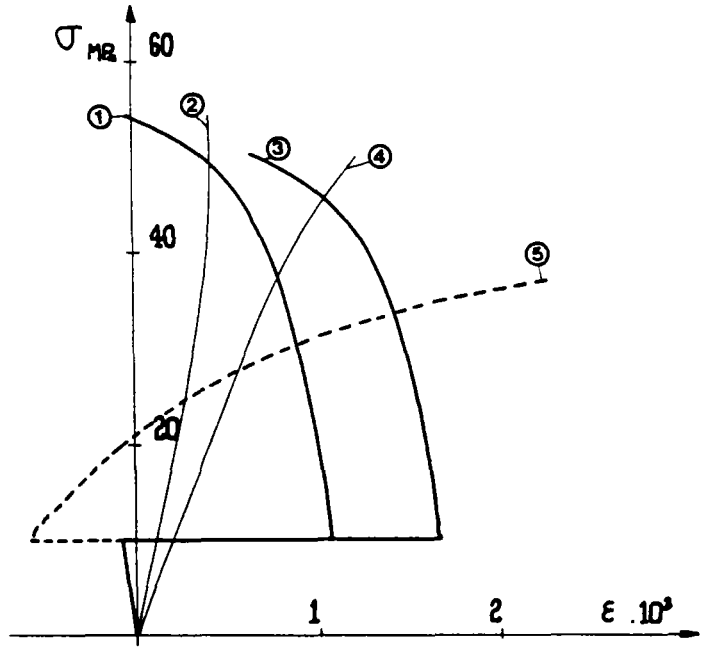


Fig.IV.12 b: courbes $(\sigma_1, \varepsilon_2)$ pour les chemins 1,2,3,4
courbe $(\sigma_2, \varepsilon_1)$ pour le chemin 5

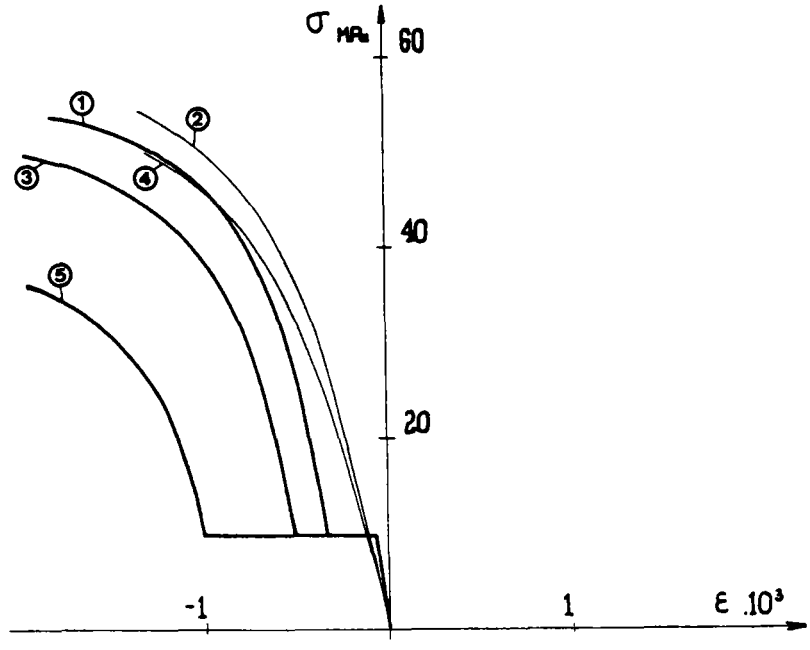


Fig.IV.12 c: courbes $(\sigma_1, \varepsilon_3)$ pour les chemins 1,2,3,4
courbe $(\sigma_2, \varepsilon_3)$ pour le chemin 5

IV.3: Simulation d'essais.

Dans cette partie nous allons tester le modèle grâce à des essais réalisés par différents auteurs sur les chemins de chargement les plus variés possibles afin de cerner le mieux possible ses possibilités de prévision. Nous n'envisagerons toutefois ni le cas de chargements de traction ou de décharges de grandes amplitudes (et donc à fortiori pas le cas des chargements cycliques) ni le cas des sollicitations en cinématique rotationnelle (compression - torsion par exemple). Ceci pourrait faire l'objet d'un développement futur du modèle.

IV-3.1 les essais uniaxiaux

IV-3.1a essai uniaxial de BOULAY, COLSON [131]

Nous avons choisi cet essai car les mesures des déformations n'ont pas été réalisées à partir de jauges mais à l'aide d'un extensomètre spécifique permettant la libre dilatation latérale du cylindre de béton testé (ce qui garantit une mesure correcte des déformations).

La simulation à l'aide de notre modèle reste très proche des résultats expérimentaux sauf près de la rupture pour la déformation latérale (Fig.IV.13) lorsque l'extensomètre peut continuer à mesurer des déformations là où des jauges seraient détruites.

IV-3.1b essais uniaxiaux de WISCHERS (cités par CHEN [130])

Ces essais nous ont paru interessants car réalisés sur des bétons de résistances différentes. La simulation à l'aide du modèle incrémental (Fig.IV.14) indique que la prise en compte du paramètre résistance ainsi que l'évaluation de la déformation à la rupture sont correctes.

IV-3.1c essais uniaxiaux de l'ENTPE

Nous avons simulé nos essais en reprenant les relations proposées au paragraphe IV.2.a pour σ_c et E fonctions de la teneur en eau. Nous pouvons constater sur les figures IV.15 à IV.18 que , bien que nous n'utilisions pas les mesures de E et σ_c déterminées à partir de chaque essai, les simulations sont correctes.

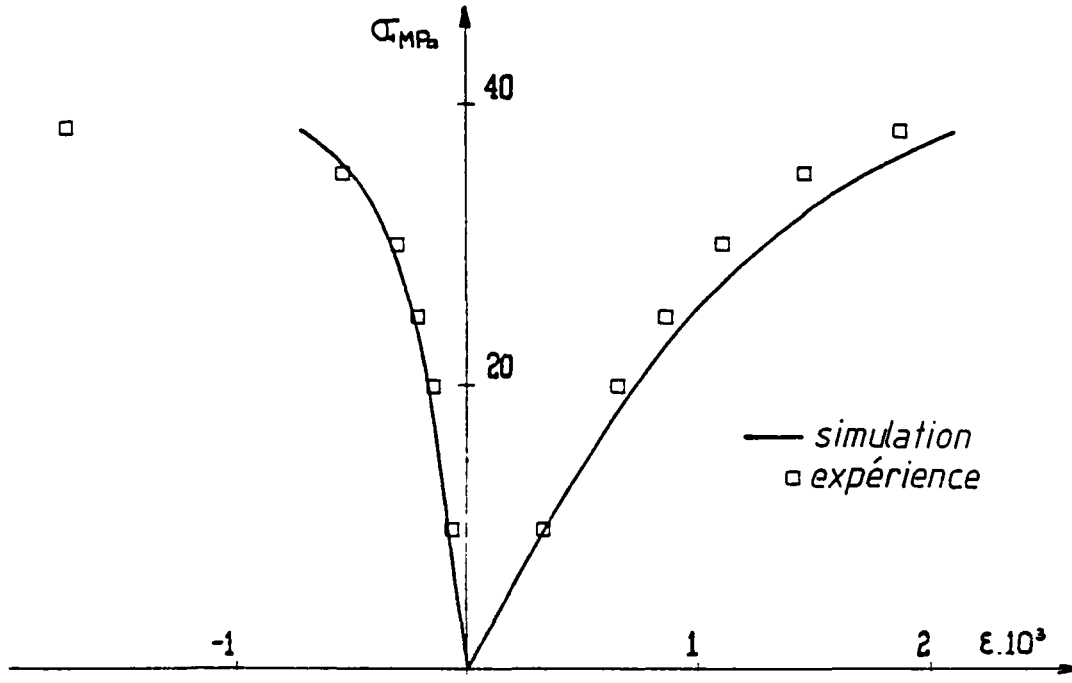


Fig.IV.13: simulation de l'essai de compression simple de BOULAY-COLSON

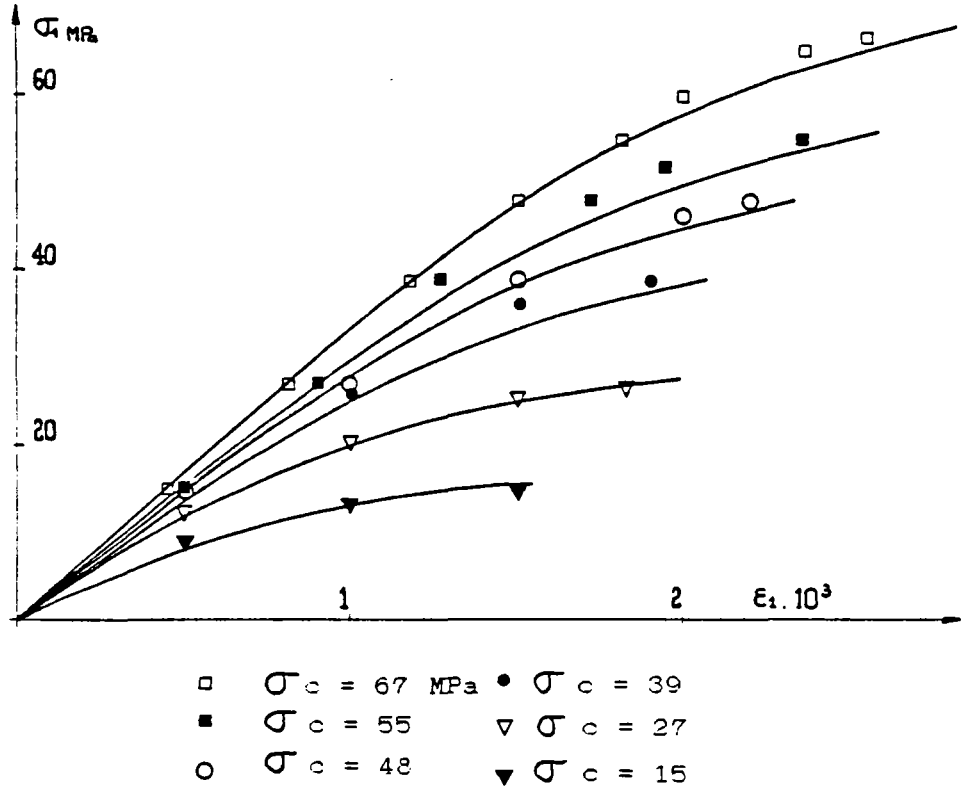


Fig.IV.14: simulation des essais de WISCHERS (bétons de résistances différentes)

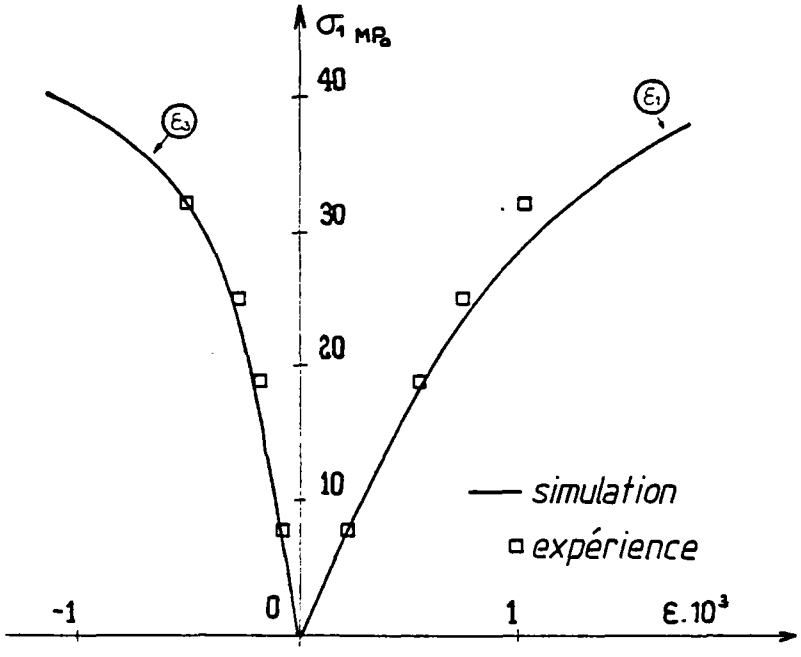


Fig.IV.15: simulation d' un essai uniaxial de l'ENTPE.
essai UC17P : h= 90 %

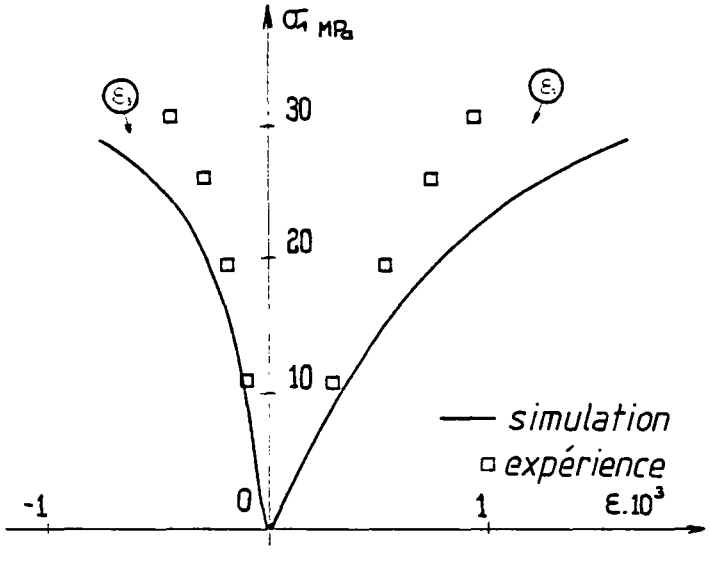


Fig.IV.16: simulation d'un essai uniaxial de l'ENTPE.
essai UC23P : h= 43 %

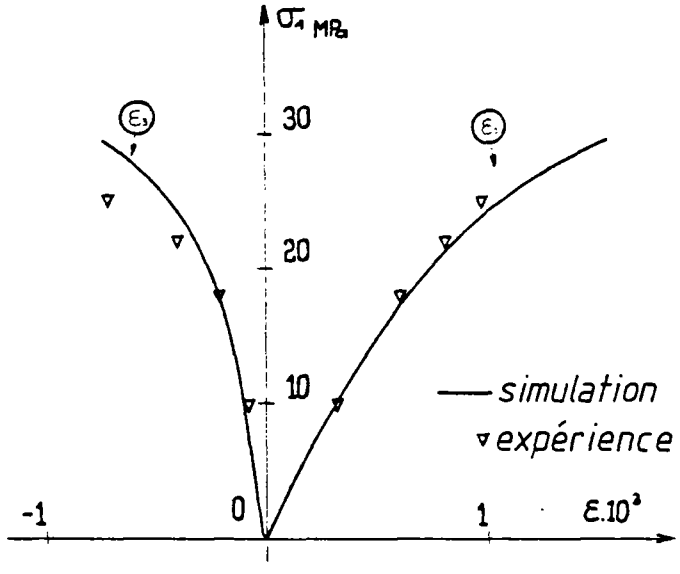


Fig.IV.17: simulation d'un essai uniaxial de l'ENTPE.
essai UC24P : h= 15 %

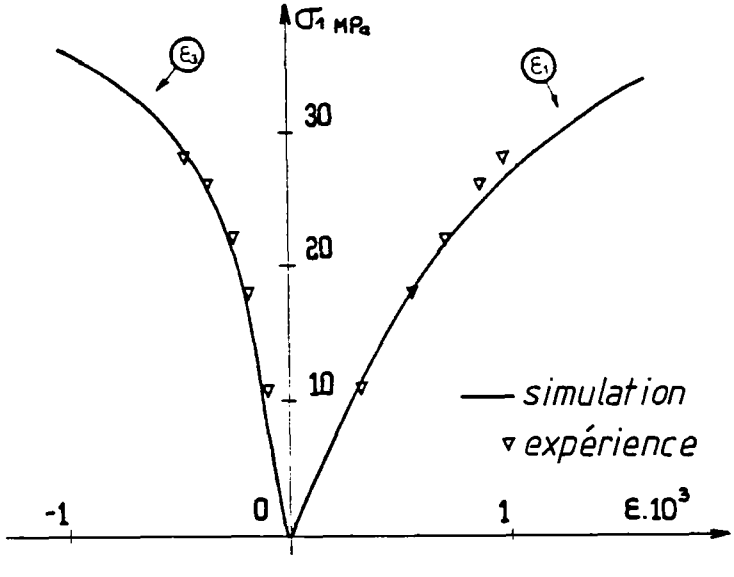


Fig.IV.18: simulation d'un essai uniaxial de l'ENTPE.
essai UC26P : h= 6 %

IV-3.2 les essais biaxiaux

IV-3.2a les essais de KUPFER [52]

KUPFER a réalisé des essais biaxiaux suivant des chemins de chargements proportionnels présentés à la figure IV. 19 . Sur ces chemins nous avons $\sigma_2 = \alpha . \sigma_1$ et $\sigma_3 = 0$.

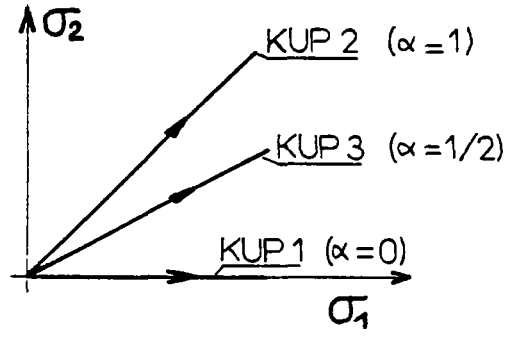


Fig.IV. 19 : chemins de chargement des essais biaxiaux de KUPFER.

Pour notre simulation nous avons choisi:

$\sigma_c = 32$ MPa
$E_0 = 32400$ MPa
$\nu_0 = 0,2$

Les résultats obtenus (cf fig.IV.20 à IV.22) montrent une simulation correcte des essais de KUPFER par notre modèle. Rappellons toutefois que ce sont ces essais qui ont servi à établir la relation donnant l'évolution des coefficients de Poisson en fonction de la déformation uniaxiale équivalente.

b) les essais du BAM [20]

Nous avons simulé les essais biaxiaux du BAM en prenant comme valeur pour les paramètres (valeurs issues des essais uniaxiaux du BAM):

$\sigma_c = 30$ MPa
$E_0 = 24000$ MPa et $\nu_0 = 0,2$

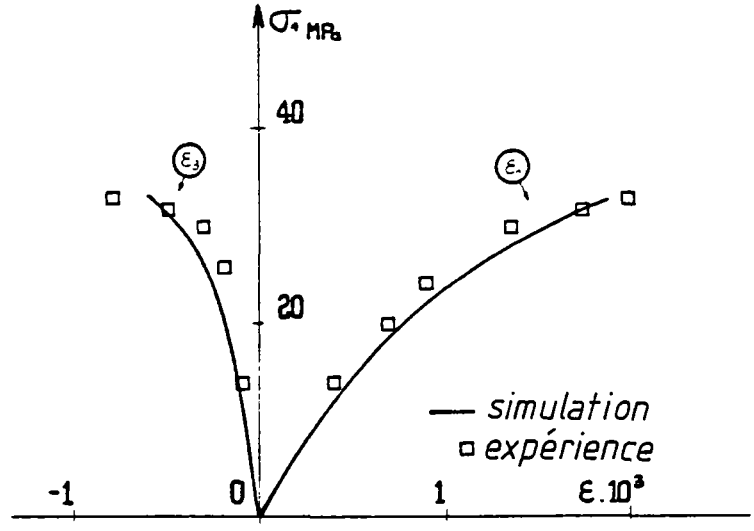


Fig.IV.20: simulation de l'essai KUP 1.

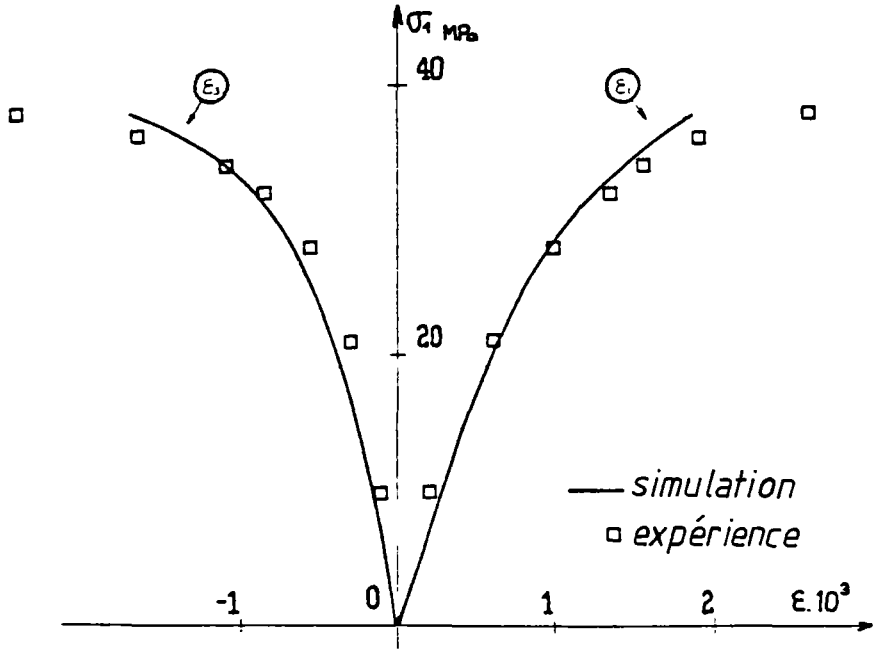


Fig.IV.21: simulation de l'essai KUP 2.

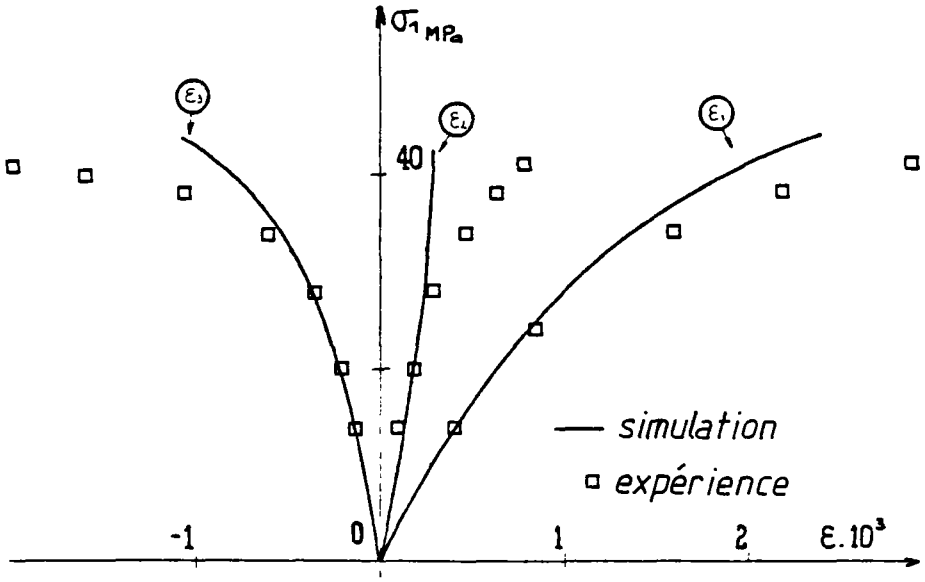


Fig.IV.22: simulation de l'essai KUP 3.

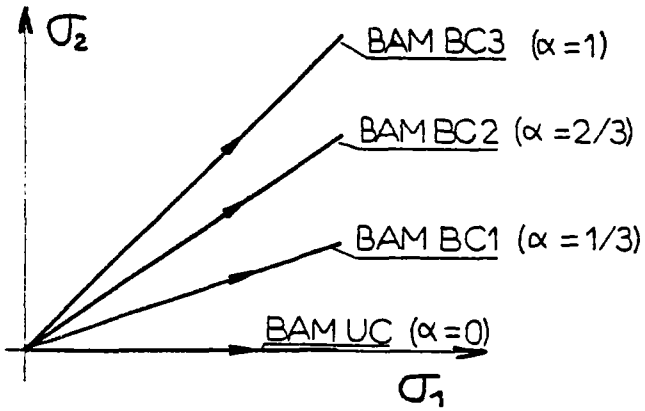


Fig.IV.23 : chemins de chargement des essais biaxiaux du BAM.

Les essais sont proportionnels et représentés à la figure IV. 23 . Ils sont extrêmement instructifs car SCHICKERT et WINKLER ne se sont pas contentés de fournir les courbes moyennes (obtenues sur six essais pour chaque chemin de sollicitation) mais ont également présenté les intervalles de confiance à 90% des courbes (σ , ε). Nous pouvons constater sur les figures IV. 24 à IV. 27 qu'un bon accord existe entre la simulation et l'expérience, les résultats numériques étant pratiquement toujours dans l'intervalle de confiance à 90%. L'erreur la plus forte est toujours rencontrée pour la déformation (on reste toutefois proche de l'intervalle de confiance). Nous avons bien sur essayé d'améliorer nos résultats en modifiant la relation $\nu_i = f(\nu_0, \varepsilon_{ic})$ mais cela fut au détriment de la simulation d'autres essais. On peut penser que nous nous heurtons à un problème de conditions d'essais forcément différentes suivant les presses employées et qui deviennent prépondérantes au voisinage de la rupture.

c) les essais biaxiaux ENTPE

Nos essais ont été réalisés sur des trajets de chargement séquentiels (voir fig.III.100). Le béton testé étant conservé humide nous avons pris pour l'ensemble des simulations:

σ_c = 41,25 MPa
E_0 = 40000 MPa et ν_0 = 0,25

L'ensemble des résultats de simulation est en accord avec le comportement expérimental (fig.IV.28 à IV.32). On constate toutefois un décalage des courbes consécutivement à la simulation de la partie correspondant au chargement selon la direction 2. Ceci provient du fait que notre modèle est initialement isotrope alors que nous avons montré que notre béton ne l'était pas. Nous pourrions donc améliorer cet état de fait en tenant compte de l'orthotropie initiale du matériau, mais cela impliquerait de connaître les 3 modules d'Young et les 6 coefficients de Poisson initiaux. Il nous semble que cela alourdirait beaucoup trop le travail expérimental nécessaire avant la mise en oeuvre du modèle et dans la plupart des cas le jeu n'en vaudrait pas la chandelle.

Enfin le comportement simulé dans les directions 1 et 2 semble un peu plus non linéaire que dans la réalité. Ceci peut provenir d'une mauvaise estimation de σ_c imputable soit à une surestimation de ε_{ic} soit à notre critère de rupture en déformation. (car pour une même valeur de σ_c si ε_{ic} est sous-estimé cela conduira à une diminution des non-linéarités).

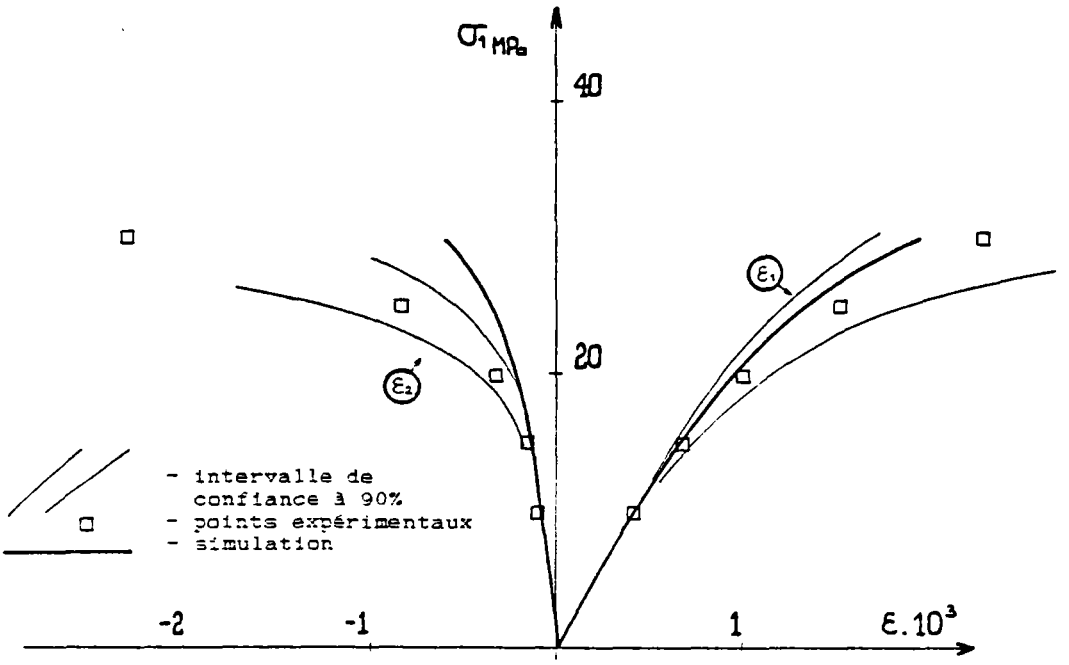


Fig.IV.24: simulation de l'essai BAM UC.

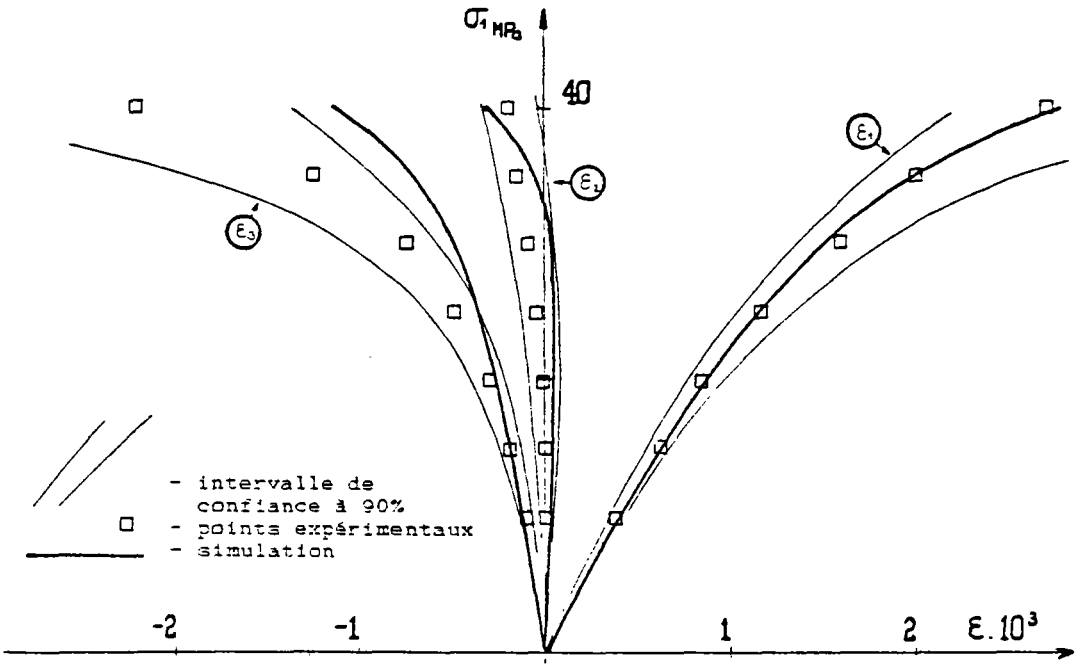


Fig.IV.25: simulation de l'essai BAMBC1.

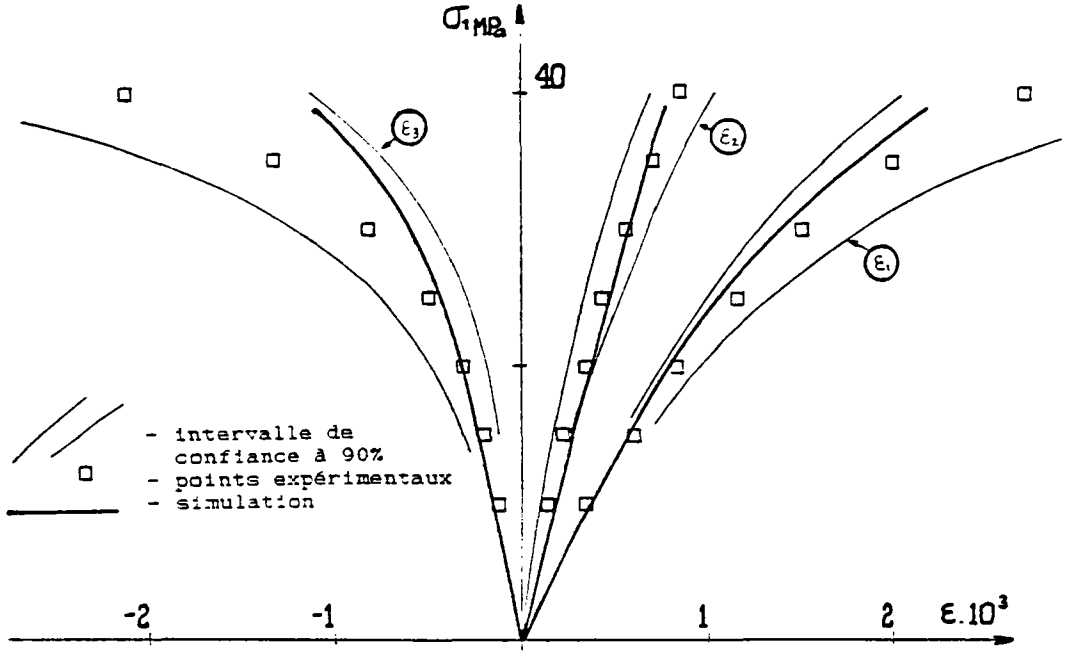


Fig.IV.26: simulation de l'essai BAMBC2.

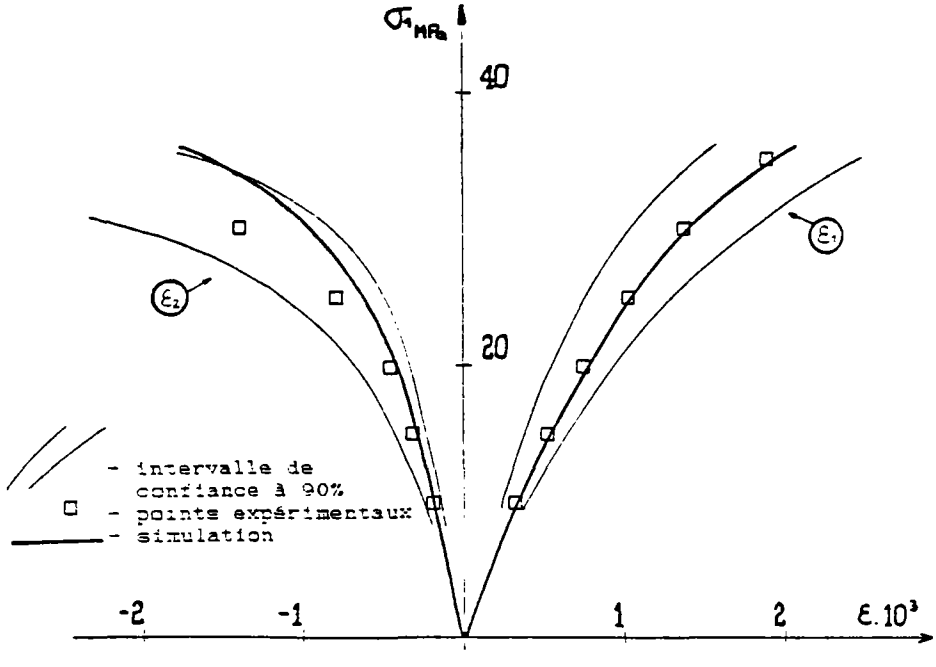


Fig.IV.27: simulation de l'essai BAMBC3.

Malgré ces défauts le modèle donne des résultats quantitativement bons, surtout dans la direction 3 (direction non chargée) , qui on l'a vu est la direction perpendiculaire à la fissuration .

IV-3.3 les essais triaxiaux

IV-3.3a essais isotropes de KOTSOVOS - NEWMANN [79]

Ces essais sont ceux qui ont servi à établir la relation (σ , ε) pour les cas de chargement hydrostatique (endommagement volumique). C'est donc uniquement pour vérification que nous présentons les résultats de la simulation (fig. IV. 33).

IV-3.3b les essais triaxiaux du BAM

Les résultats de ces essais réalisés sur des chemins de chargement particuliers (chargement isotrope puis pression moyenne constante, voir fig. IV.8) sont, comme dans le cas biaxial, présentés avec la donnée d'un intervalle de confiance à 90% (hypothèse de distribution normale des résultats d'essais). Nous pouvons alors constater que la simulation, toujours qualitativement correcte, est acceptable du point de vue quantitatif (fig.IV.34 à IV. 45). En effet elle se situe toujours , soit à l'intérieur de l'intervalle de confiance à 90%, soit très proche. Dans ce dernier cas c'est souvent la partie isotrope qui fait que la simulation s'éloigne des résultats expérimentaux. La dispersion des essais peut paraître importante bien que calculée à partir des résultats de six essais pour chaque chemin. Pourtant, au BAM, ont également été réalisés des essais avec appuis massifs sur les mêmes chemins de chargement et il apparaît que, dans ce cas, la dispersion est encore accentuée. Le modèle, malgré sa relative simplicité, nous paraît donc suffisant pour décrire les compressions multiaxiales.

IV-3.3c essais triaxiaux de révolution de KOTSOVOS [79]

Ces essais sont réalisés sur des éprouvettes cylindriques soumises à une étreinte hydrostatique p puis à une contrainte déviatoire (le déviateur σ_1 - p pouvant être positif ou négatif). Sur la figure IV.46 sont présentés les chemins que nous avons simulés.

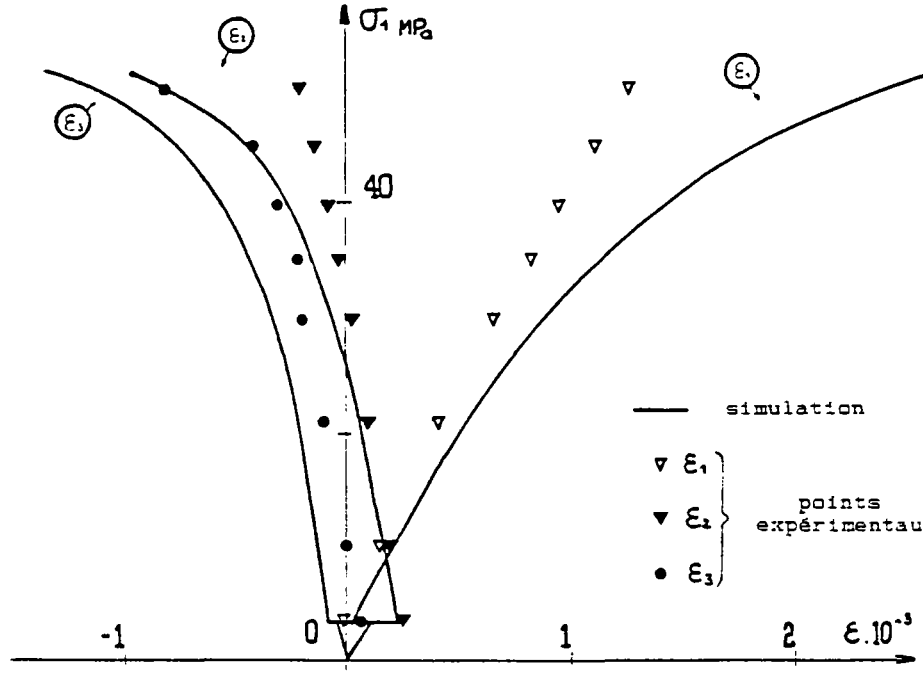


Fig.IV.28: simulation de l'essai BC04P (ENTPE)
(σ_2 = 9 MPa)

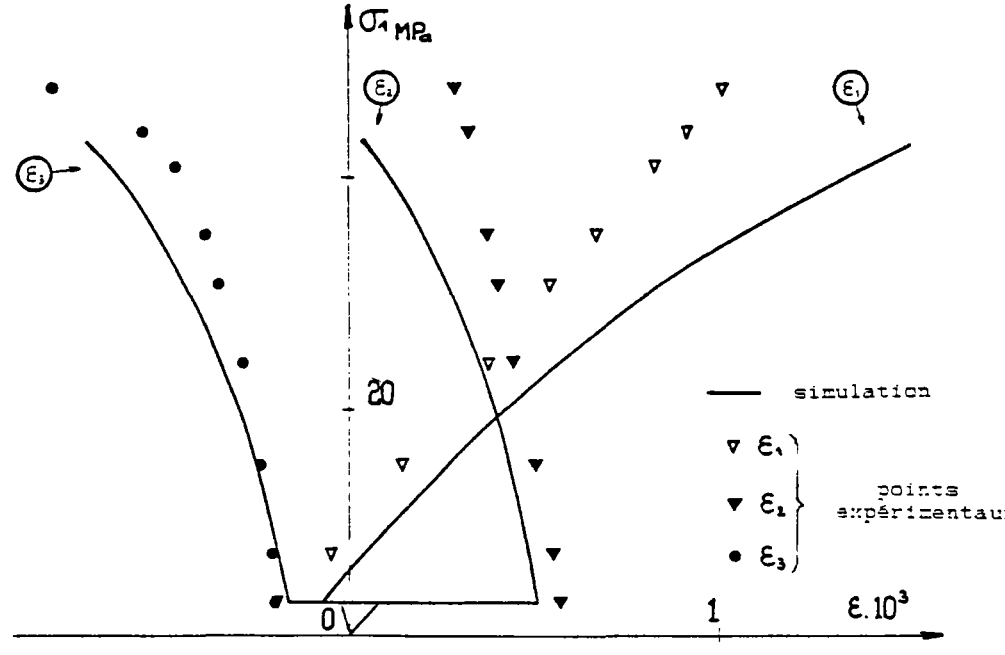


Fig.IV.29: simulation de l'essai BC05P (ENTPE)
(σ_2 = 18 MPa)

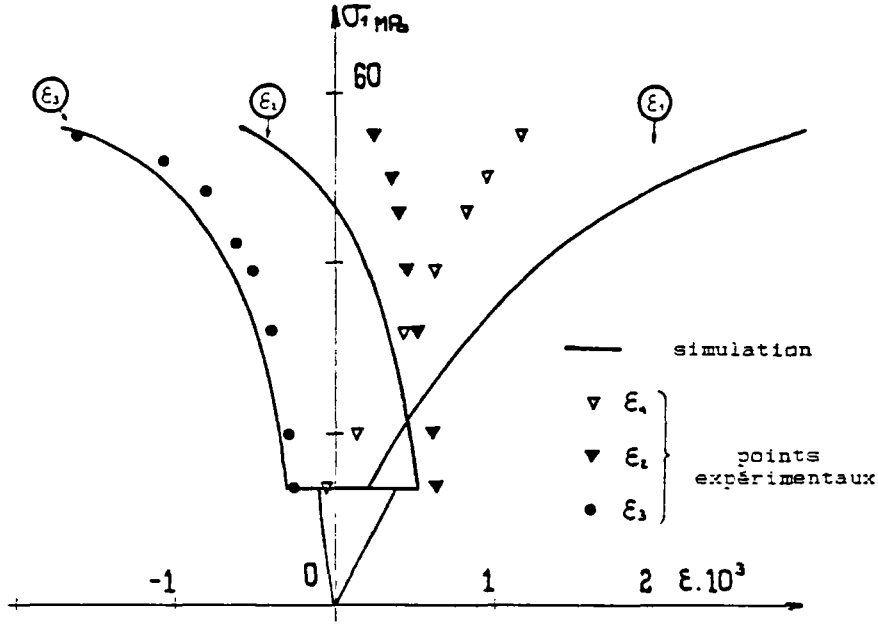


Fig.IV.30: simulation de l'essai BC07P (ENTPE)
(σ_2 = 22 MPa)

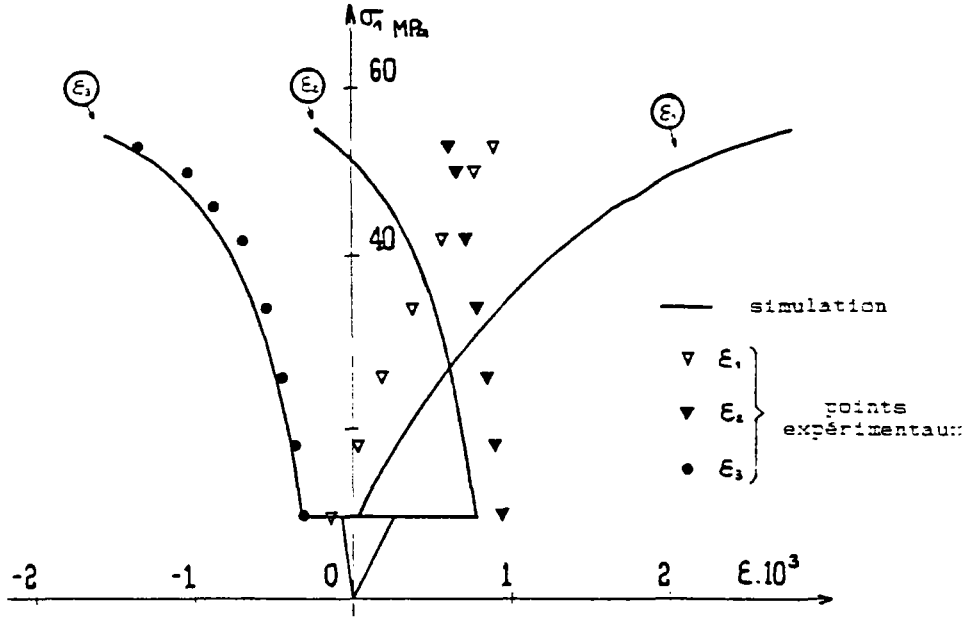


Fig.IV.31: simulation de l'essai BC08P (ENTPE)
(σ_2 = 27 MPa)

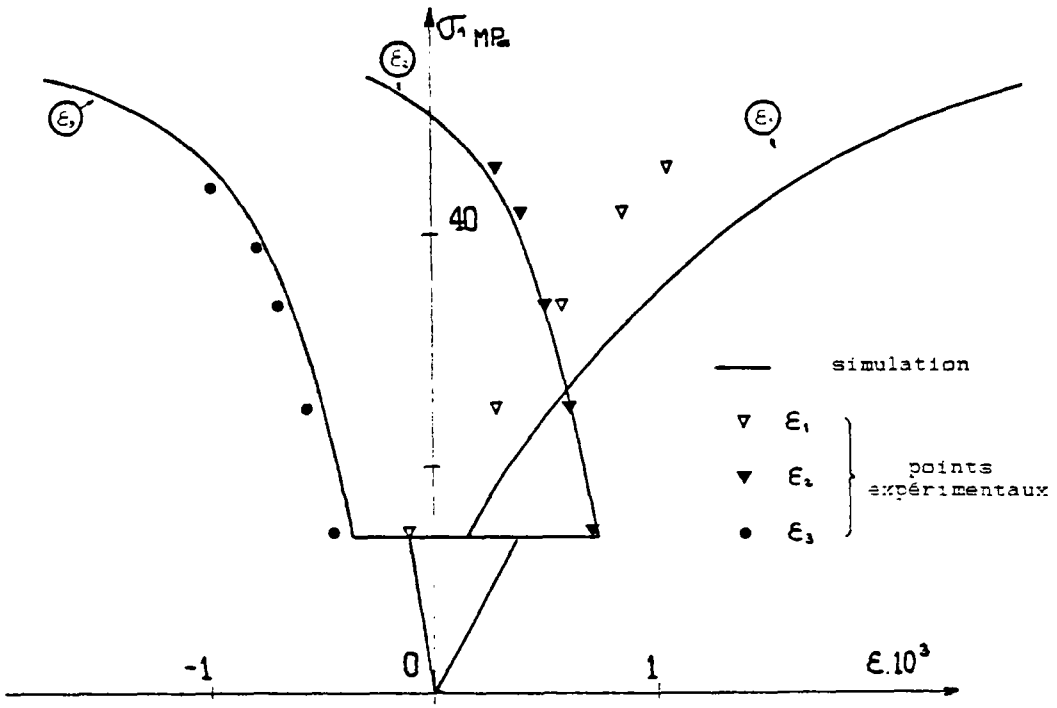


Fig.IV.32: simulation de l'essai BC09P (ENTPE)
(σ_2 = 28 MPa)

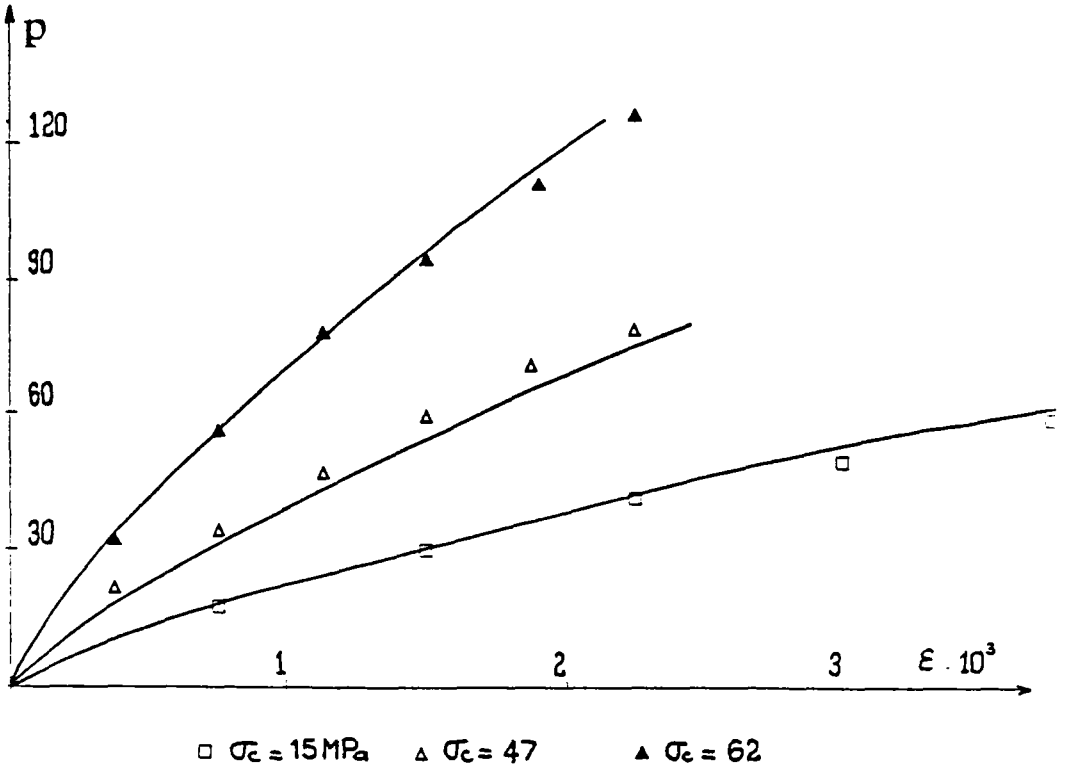


Fig.IV.33: simulation des essais isotropes
de KOTSOVOS - NEWMANN.

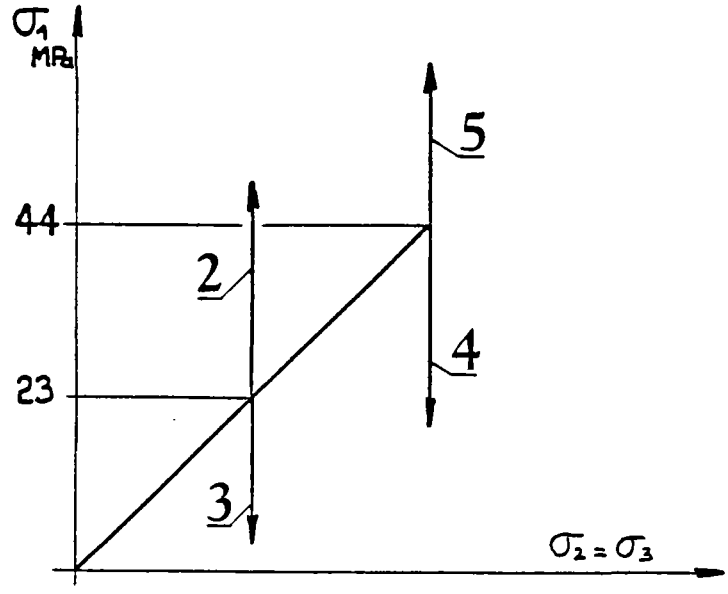


Fig.IV. 46 : chemins triaxiaux de révolution
de KOTSOVOS - NEWMANN.

Lorsque le déviateur est positif, l'analyse des résultats de la simulation montre encore un bon accord avec l'expérience, les différences constatées sur les valeurs à la rupture et les déformations longitudinales plus élevées pouvant être imputées au système d'application des efforts (pas d'anti-frettage) (fig.IV. 47 et 48).

Dans le cas du déviateur négatif nous avons voulu comparer les pentes initiales en décharge. La encore la simulation donne une idée correcte du comportement instantané à la décharge (fig.IV. 49 et 50). On voit tout de même que lorsque la décharge est poursuivie les courbes s'incurvent et le modèle n'est plus apte à simuler cet aspect du comportement du matériau (il n'a d'ailleurs pas été conçu pour cela).

IV-3.4 conclusion

Compte tenu des limitations de notre modèle, nous l'avons testé sur un grand nombre d'essais dans son domaine d'application. Qualitativement l'accord est toujours bon entre l'expérience et la simulation. Quantitativement il reste correct vis à vis de la dispersion des essais. Vu le faible nombre de paramètres à introduire pour la simulation le résultat nous paraît acceptable. On peut toutefois noter une difficulté du modèle à simuler, dans le cas des chargements triaxiaux, la non-linéarité de la réponse dans la direction de la contrainte principale majeure.

Il sera possible d'améliorer ceci mais cela impliquera une perte de simplicité du modèle (la relation contrainte-déformation équivalente devant, sans doute, être rejetée). L'autre voie de développement absolument indispensable est la simulation de chargements de traction et d'une façon plus générale de chargements cycliques.

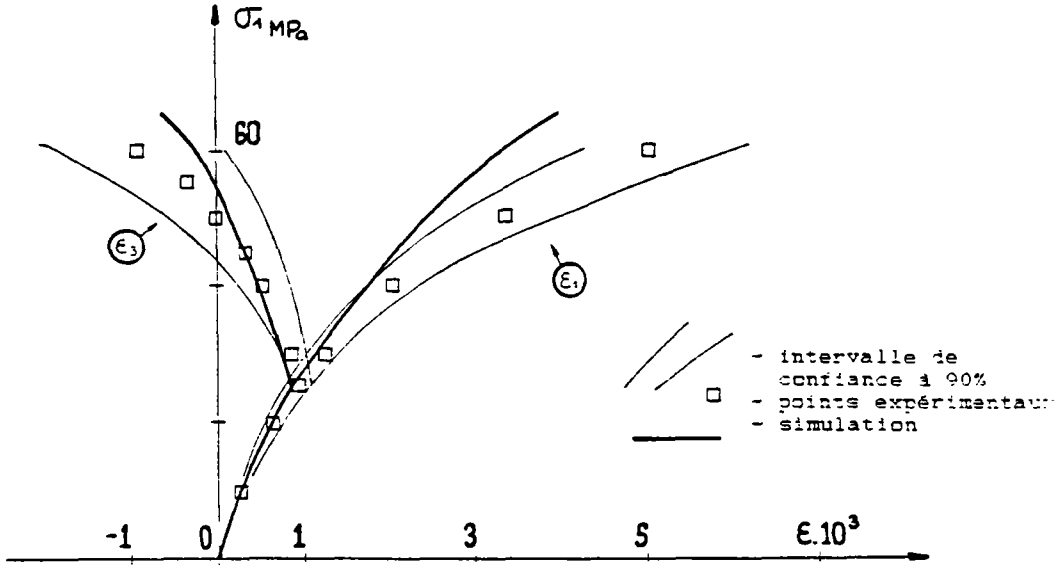


Fig.IV.34: simulation d'un essai triaxial du BAM: BAM1
chemin n°1, pression moyenne p = 0,75 σ_c

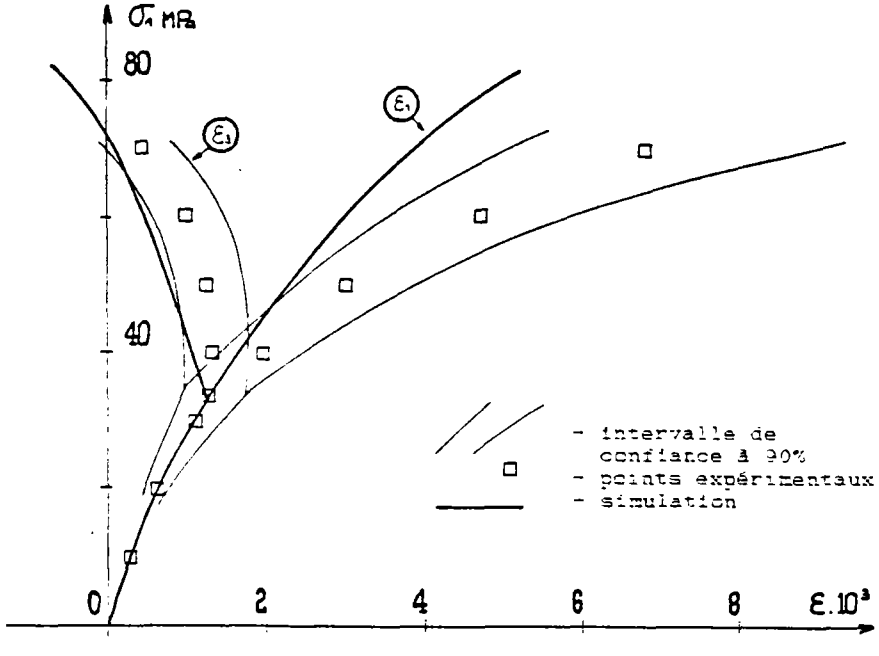


Fig.IV.35: simulation de l'essai BAM2
chemin n°1, p = σ_c

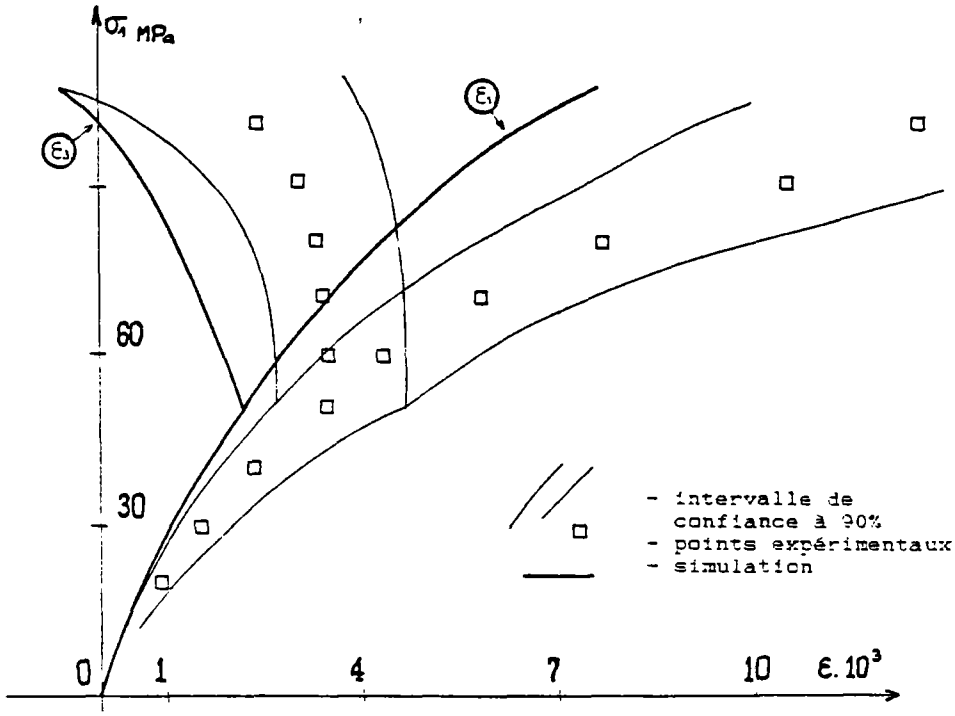


Fig.IV.36: simulation de l'essai BAM3
chemin n°1, p = 1,5 σ_c

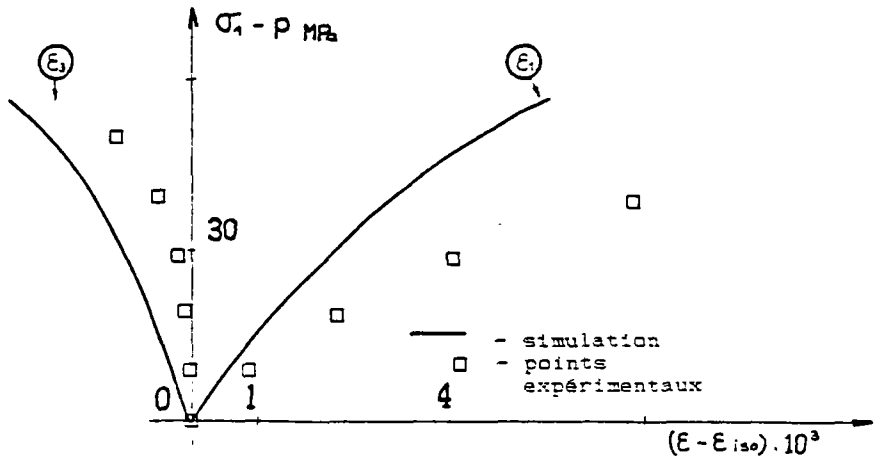


Fig.IV.37: essai BAM3, courbe (σ_1 - p, ε - ε_{iso})

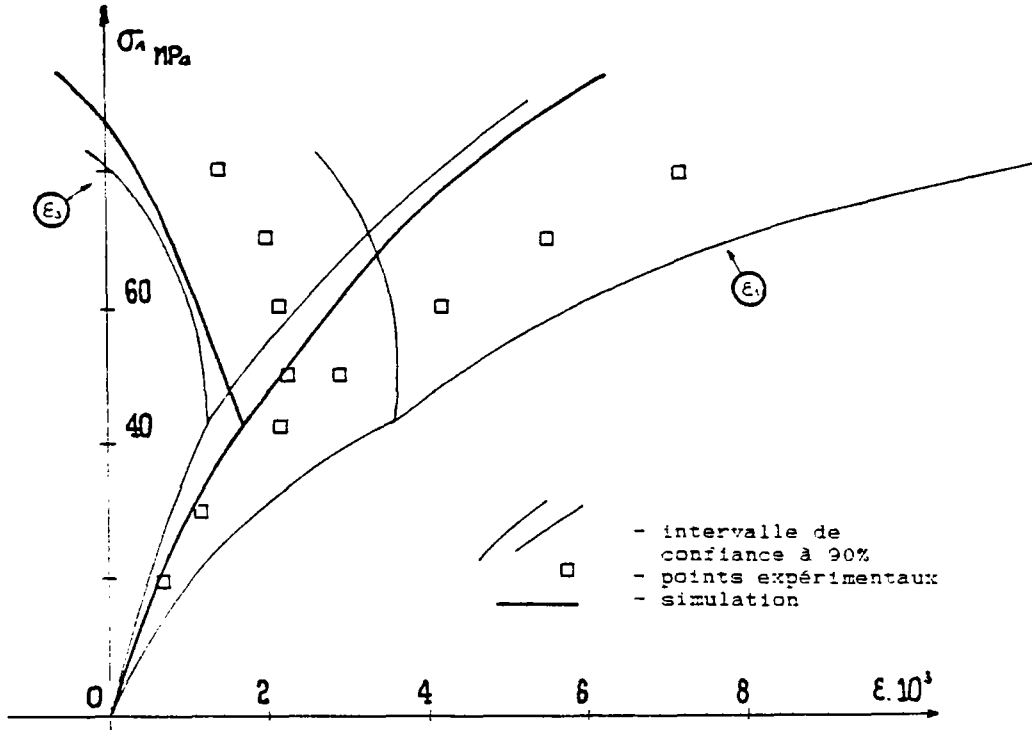


Fig.IV.38: simulation de l'essai BAM4
chemin n°1, p = 1,25 σ_c

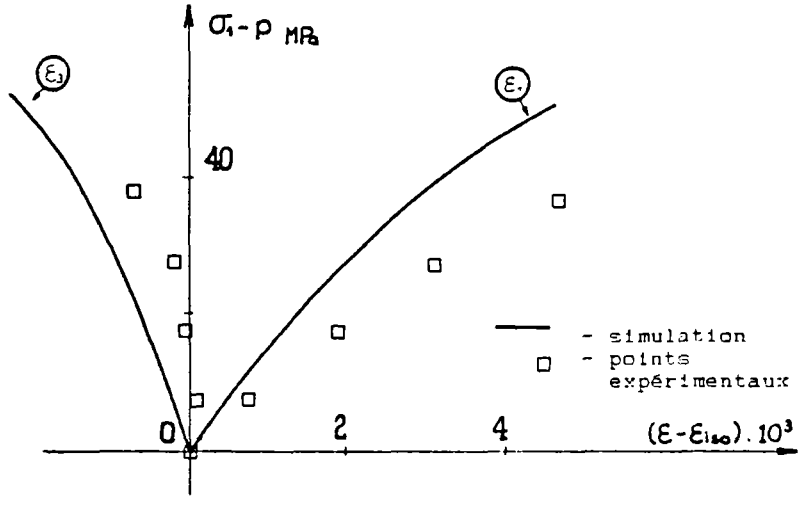


Fig.IV.39: essai BAM4, courbe (σ_1 - p, $\varepsilon - \varepsilon_{iso}$)

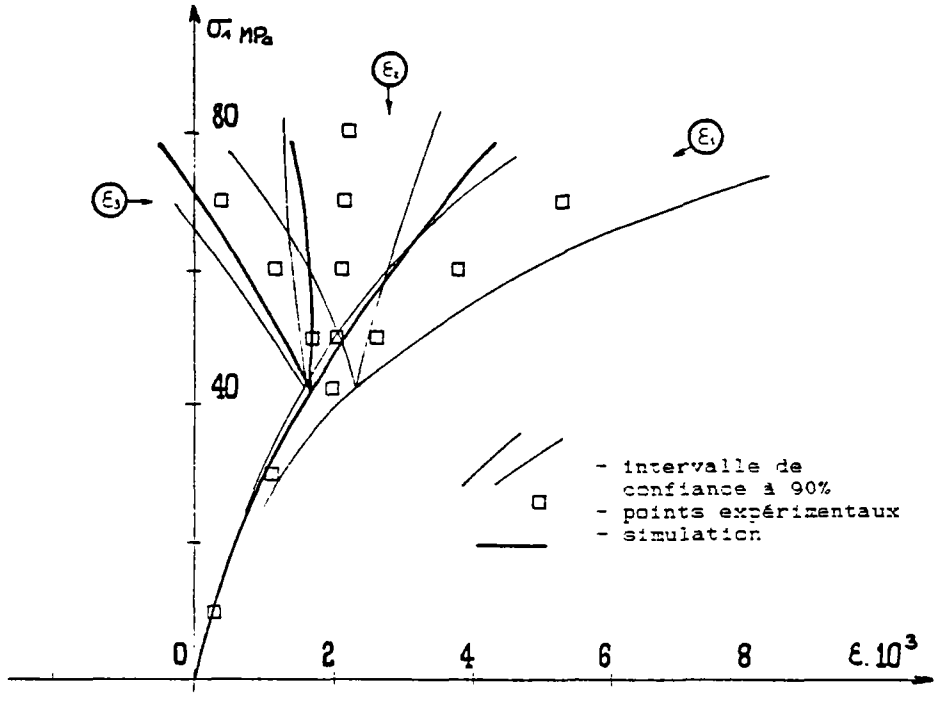


Fig.IV.40: simulation de l'essai BAM5
chemin n°2, p=1,25 σ_c

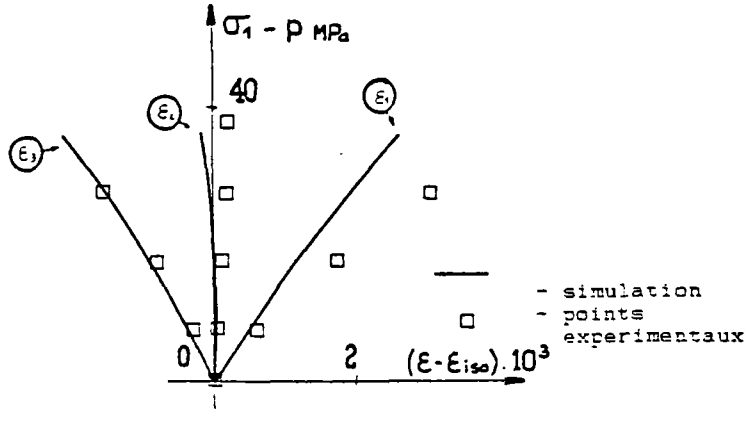


Fig.IV.41: essai BAM5, courbe (σ_1 - p, ε - ε_{iso})

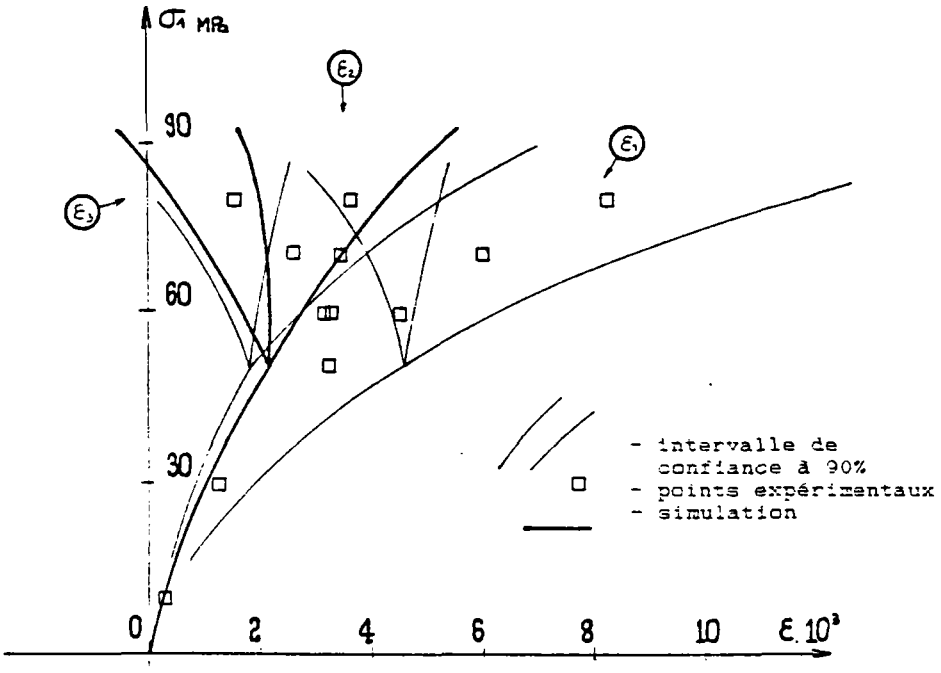


Fig.IV.42: simulation de l'essai BAM6
chemin n°2, p = 1,5 σ_c

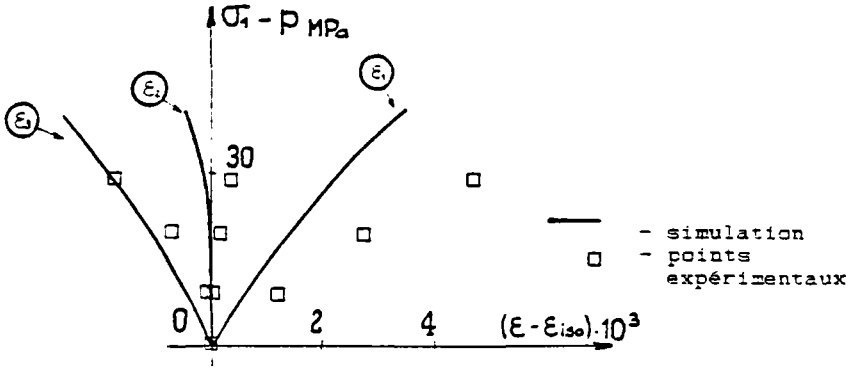


Fig.IV.43: essai BAM6, courbe (σ_1 - p, ε - ε_{iso})

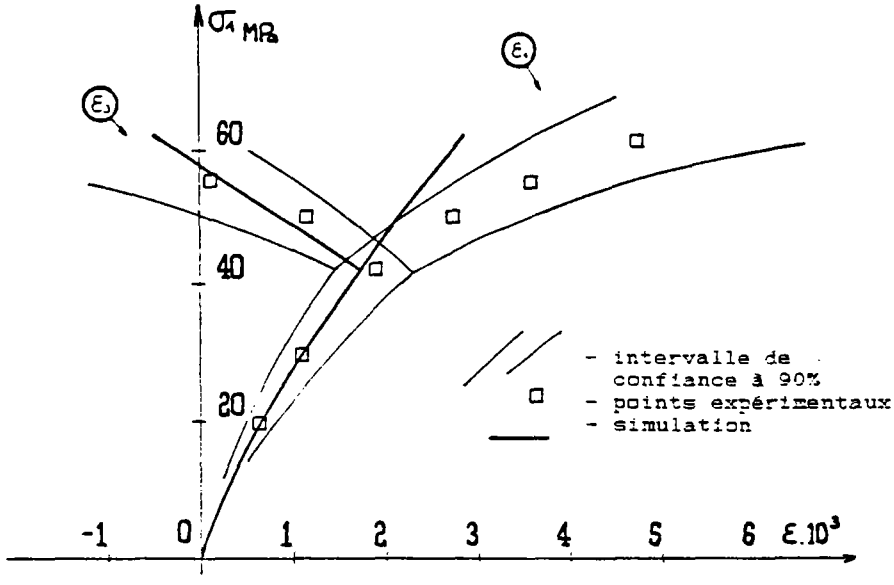


Fig.IV.44: simulation de l'essai BAM7
chemin n°3, p = 1,25 σ_c

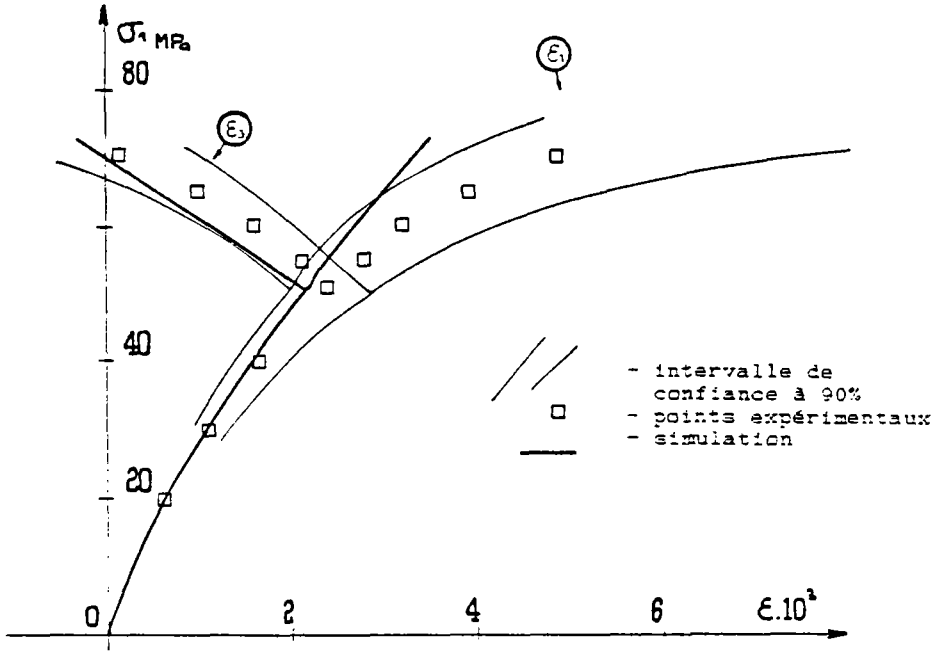


Fig.IV.45: simulation de l'essai BAM8
chemin n°3, p = 1,5 σ_c

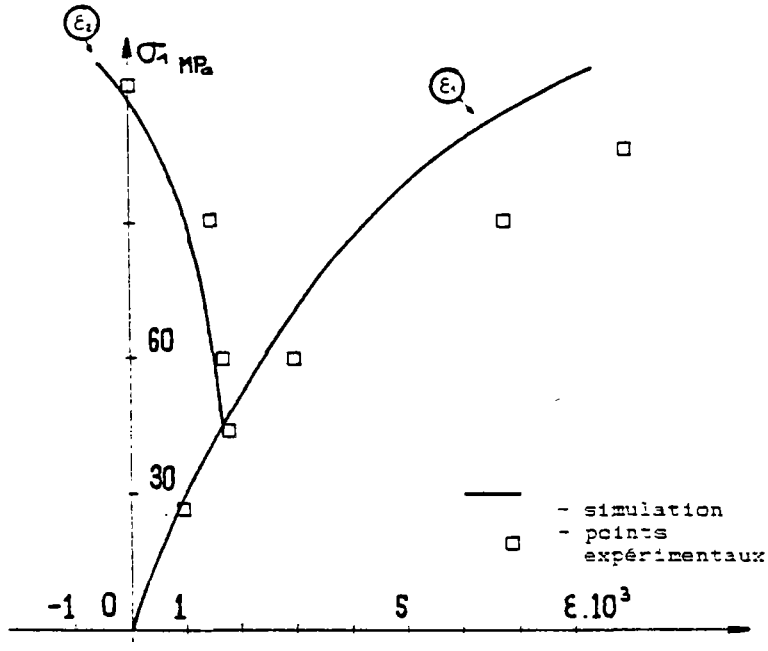


Fig.IV.47: simulation de l'essai n°5 de KOTSOVOS.
(montée isotrope jusqu'à p = 44 MPa)

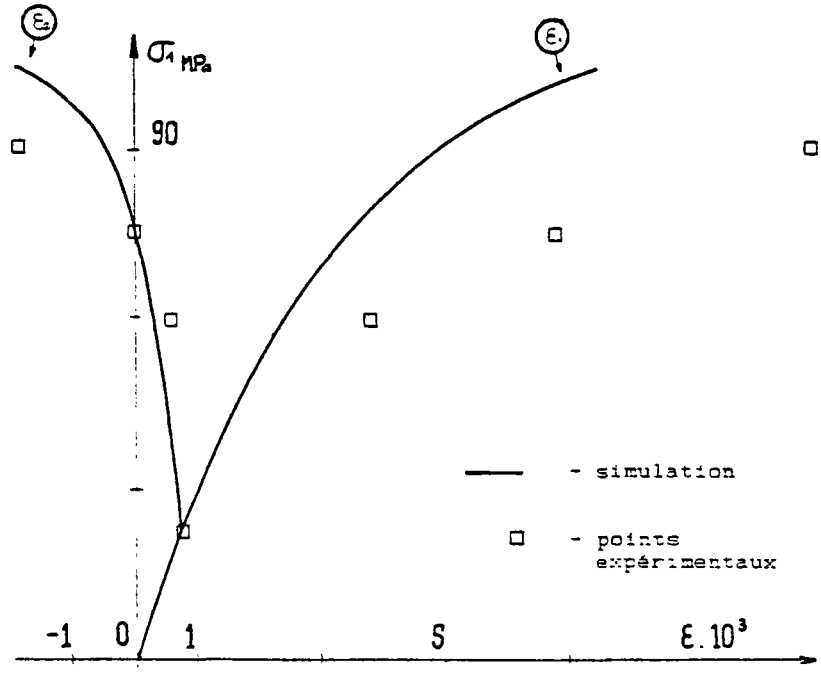


Fig.IV.48: simulation de l'essai n°2 de KOTSOVOS.
(montée isotrope jusqu'à p = 23 MPa)

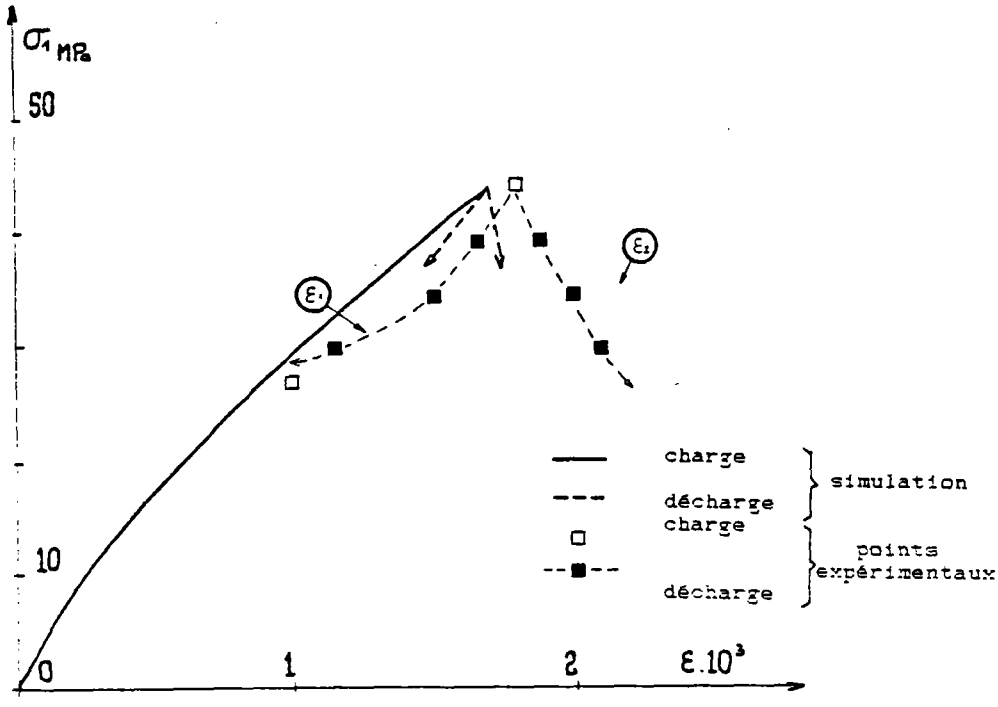


Fig.IV.49: simulation de l'essai n°4 de KOTSOVOS.
(montée isotrope jusqu'à p = 44 MPa)

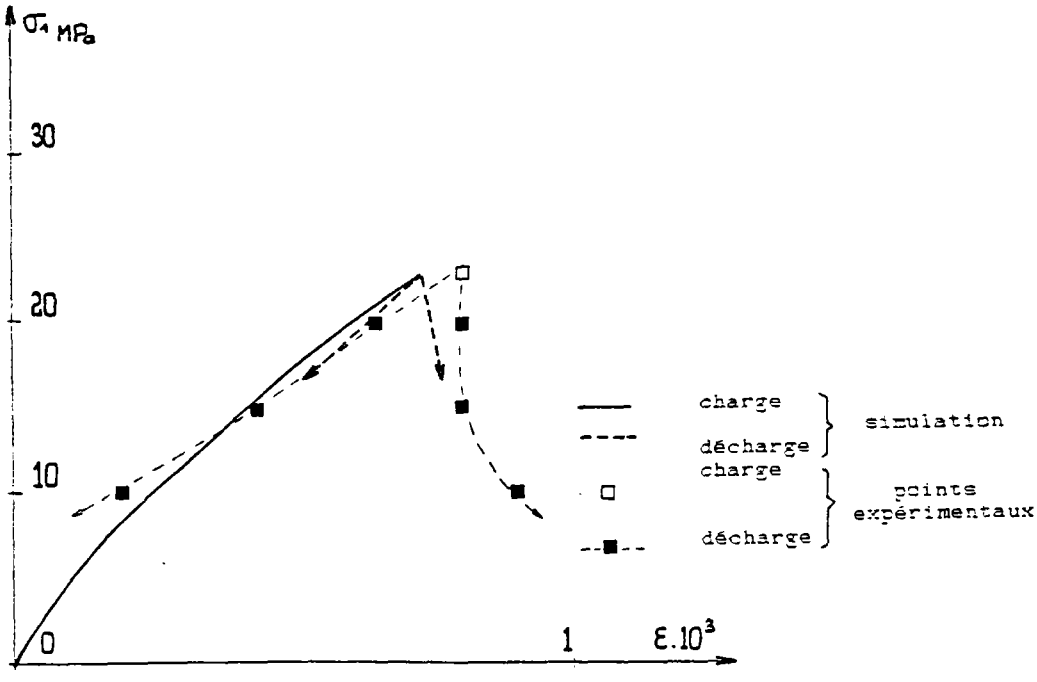


Fig.IV.50: simulation de l'essai n°3 de KOTSOVOS.
(montée isotrope jusqu'à p = 23 MPa)

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

* Rappel des objectifs

Le premier objectif de notre travail était la modélisation du comportement du béton sous étreinte multiaxiale. Nous avons choisi de le faire à l'aide d'un modèle incrémental non linéaire bien adapté à la description phénoménologique du comportement du béton et facile à mettre en oeuvre numériquement.

Construire un modèle impliquait de connaître expérimentalement le comportement du matériau, afin de déterminer quels phénomènes il devrait être capable de simuler ainsi que les différents paramètres influant sur le comportement. L'expérience était également nécessaire pour déterminer les paramètres du modèle et enfin pour valider celui-ci. C'est pourquoi notre deuxième objectif a été la construction d'une presse multiaxiale. Celle-ci devait permettre la réalisation d'essais spécifiques concernant les paramètres pouvant influer sur le comportement du béton (la teneur en eau par exemple) ainsi que des essais multiaxiaux pour tester le modèle.

* principaux résultats obtenus.

En ce qui concerne la partie expérimentale nous avons donc élaboré une presse biaxiale en insistant particulièrement sur les conditions aux limites imposées aux éprouvettes testées. Le dimensionnement des appuis et leur principe de fonctionnement (appuis à peignes déformables latéralement) ont été choisis dans le but de minimiser les effets parasites tels que le frettage et obtenir des champs de contraintes et de déformations aussi homogènes que possible. Les résultats obtenus, fissuration rectiligne en uniaxial comme en biaxial, indiquent que notre but a été en grande partie atteint. La comparaison de nos résultats avec ceux de différents chercheurs le confirme également.

Nous avons constaté que le comportement du béton était non linéaire surtout selon les directions non chargées où il n'y a pas de contrainte appliquée. Ceci met en évidence le rôle joué par les extensions vis à vis de la rupture du béton. Notre tentative d'analyse des phénomènes entraînant les non-linéarités à l'aide de modèles physiques simples nous a

montré que, si dans le cas de la traction ces modèles permettent de retrouver et d'expliquer le comportement réel du matériau, nous sommes encore loin du compte dans le cas de la compression. En fait, les phénomènes physiques mis en jeu (fissuration, contraintes initiales, instabilités ...) ne sont pas encore totalement appréhendés et sont donc imparfaitement modélisés. Il en est de même pour le radoucissement pour lequel nous avons démontré, à partir d'une étude bibliographique, que même s'il peut être une caractéristique intrinsèque du matériau, sa mise en évidence expérimentale reste difficile voire impossible.

A la lumière d'une étude préalable montrant son importance, nous nous sommes attachés à connaître l'influence de la teneur en eau sur le comportement à court terme du béton. Les résultats obtenus montrent des fluctuations importantes des résistances en compression simple et des modules d'Young en fonction de ce paramètre (le minimum pour ces deux valeurs se situant lorsque la teneur en eau avoisine 30%). Toutefois, pour des raisons de méthodologie expérimentale, nous n'avons pu séparer complètement les effets locaux dus à la teneur en eau des effets structuraux qu'elle engendre par le biais du retrait de dessiccation (séchage non homogène). Aussi c'est surtout de manière qualitative que nous pouvons affirmer que la teneur en eau a une influence réelle et non négligeable sur le comportement du béton.

En parallèle à la partie expérimentale a été développé le modèle incrémental. Il a été construit dans le cadre axiomatique de NOLL (principe du déterminisme,...) en supposant possible la décomposition de la vitesse de déformation en une partie dépendante du temps (terme de fluage) et une seconde partie indépendante de ce paramètre. Seule cette dernière a été étudiée. L'hypothèse d'orthotropie et les travaux de WANG et BOEHLER ont permis, moyennant quelques simplifications, d'aboutir à la formulation suivante:

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{\hat{\sigma}} + \underset{\sim}{B}\,\frac{\underset{\sim}{\hat{\sigma}}^2}{\|\underset{\sim}{\hat{\sigma}}\|}$$

où $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{B}$ sont indépendants de $\underset{\sim}{\hat{\sigma}}$. La détermination de ces tenseurs est alors possible grâce à la connaissance analytique du comportement du matériau sur des chemins triaxiaux généralisés (chemins colinéaires aux directions d'orthotropie).

Le cadre général du modèle étant bâti, nous l'avons appliqué à l'aide d'une formulation analytique simple reposant sur le concept de déformation équivalente de DARWIN et PECKNOLD. Les simulations d'essais réalisés par divers auteurs en compressions uni-, bi- et triaxiales ont montré la capacité du modèle à simuler de tels essais. Il faut noter que nous n'utilisons que trois paramètres pour nos simulations: la résistance en compression simple, le module d'élasticité et le coefficient de Poisson.

* perspectives.

A partir du cadre général de notre modèle les voies de développement sont nombreuses. Si la formulation analytique est suffisante (à notre avis) dans le cas des compressions, il faudra la compléter dans le domaine des tractions afin de pouvoir simuler le comportement du béton sous chargements alternés. Enfin, avant d'introduire le modèle dans un progamme de type éléments finis (but ultime à atteindre), il faudra éliminer le problème de la non-biunivocité de l'interpolation (cf chapitre I). Pour cela l'utilisation d'interpolation différentes, comme celle proposée par ROYIS, sera possible sans remettre en cause notre travail.

Sur le fond, on doit se poser la question de la poursuite du développement des modèles de type phénoménologiques, comme le nôtre, au regard de modèles plus physiques (modèle stochastique par exemple). Il est en effet inéluctable que l'avenir réside chez ces derniers car ils sont en prise directe avec le matériau. Simplement, à l'heure actuelle, ils sont encore limités dans leurs capacités de prévisions et assez difficile à employer (coûts en calcul élevés). Ceci signifie que les modèles phénoménologiques, même s'ils seront dépassés à long terme ont encore de beaux jours devant eux et méritent, certes, la poursuite de leur développement. Pour le nôtre, c'est vers la simulation des chargements cycliques que nous devrons nous diriger.

Quant à la presse biaxiale, de par sa conception, elle appelle de nombreux développements. La possibilité d'effectuer des chargements triaxiaux est le plus évident. Piloter les essais en vitesse de déplacement pour permettre des mesures plus fiables des déformations en est un autre de même que mesurer les forces grâce à des capteurs de forces. Et beaucoup d'autres améliorations sont encore possibles.

La question de l'influence de la teneur en eau sur le comportement du béton à court terme mérite la réalisation d'expériences complémentaires à partir d'éprouvettes de géométrie plus adaptée qu'un cube (cylindre creux par exemple), séchant de manière homogène (dans un four à micro-ondes ?) et à taux d'hydratation identique (en attendant par exemple un an avant de commencer le séchage).

L'étude du problème du radoucissement et de la description des non-linéarités par des modèles simples est, quant à elle, d'ores et déja entreprise.

* the never ending story.

Dans l'introduction nous faisions remarquer que notre sujet de recherche, le comportement du béton, pouvait a priori surprendre. Notre espoir est qu'après la lecture de ce mémoire le lecteur soit encore plus surpris devant tous les points qui restent encore à éclaircir, même si nous osons croire que nous avons contribué à soulever un coin du voile.

BIBLIOGRAPHIE

1. E. L. KEMP
"Torsion in concrete - annotated"
ACI bibliography n° 12
ACI Publication.

2. P. DANTU
"Etude des contraintes dans les milieux hétérogènes
Application au béton "
Annales de l'I.T.B.T.P., n° 121, 1958, pp 54-77

3. O. BUYUKOZTURK , A.H. NILSON, F.O. SLATE
" Stress strain response and fracture of a concrete model in biaxial loading "
ACI Journal, 1971, vol 68, pp. 590 - 599

4. S.P. SHAH, G. WINTER
"Inelastic behavior and fracture of concrete"
ACI Journal - vol 63 - 1966

5. J.F. VILLARD
" Etude de la fissuration du béton"
Cassette vidéo - ENTPE - 1985

6. J. MAZARS
" Application de la Mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire est à la rupture du béton de structure"
Thèse d'Etat - Université Paris VI - 1984

7. J. MAZARS
"Mécanismes physiques de rupture, et modèles de comportement mécanique du béton hydraulique"
Le Beton Hydraulique - chapitre 17 - Presses ENPC - 1982

8. J. WASTIELS
"Behaviour of concrete under multiaxial stresses - a review" - cement and concrete Research vol 9, pp 35-44, 1979.

9. R. PALANISWAMY et S.P. SHAH
"Deformation and failure of hardened cement paste subjected to multiaxial rupture des solides soumis à des sollicitations pluriaxiales"
colloque RILEM sur "La déformation et la rupture des solides soumis à des sollicitations pluriaxiales " - Cannes - 1972

10. B. POSTACIOGLU
"L'effet de la contrainte principale intermédiaire sur la rupture du béton"
colloque International RILEM sur "la déformation et la rupture des solides soumis à des sollicitations pluriaxiales" - Cannes - 1972

11. D. W.HOBBS , C. D. POMEROY, J. B. NEWMAN
"Design stresses for concrete structures subjected to multi-axial stresses".
The structur. Engrg. ,vol 55 n° 4, 1977, pp 151-164

12. L. L. MILLS , R. M. ZIMMERMANN
" Compressive strength of plain concrete under multiaxial loading conditions"
ACI Journal, vol 67, n° 10, oct. 1970 pp 802 - 807

13. H. AOYAMA, H. NOGUCHI
"Mechanical properties of concrete under load cycles idealizing seismic actions"
congrès AI CAP/CEB - Rome 1979

14. STEGBAUER, LINSE
"Comparison of stress - strain behaviour of concrete and other materials under biaxial loading"
colloque RILEM, tome 1, p 229 à 255, Cannes, 1972.

15. VAN MIER
"Strain softening of concrete under multiaxial loading conditions" - thèse de Docteur Ingénieur - Technishe Hogeschool Eindhoven - 1984

16. P. HABIB
"Quelques remarques relatives à la modelisation du radoucissement"
International conference on concrete under multiaxial conditions - colloque RILEM - Toulouse - 1984

17. H. G. HEILMANN, H. H. HILSDORF, K. FINSTER WALDER
"Festigkeit und verformung von beton unter zugspannungen"
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 203, W. Ernst Sohn, Berlin, 1969

18. P. HABIB
"Les surfaces de glissement en Mécanique des sols"
Revue Française de geotechnique - n° 27 - 1984

19. G. SCHICKERT, J. DANSSMANN
"Behaviour of concrete stressed by high hydrostatic compression" - International conference on concrete under mulstiaxial conditions - Toulouse - 1984 -

20. G. SCHICKERT, H. WINKLER
" Results of test concerning strength and strain of concrete subjected to multiaxial compressive stresses"
Deutscher Ausschuss fur stahlbeton, heft 277, Berlin

21. HUET, ACKER, BARON
"Fluage et autres effets rhéologiques différés du béton"
in le Béton Hydraulique - Presses de l'E.N.P.C. - 1982.

22. Z.P. BAZANT, F.H. WITTMANN
"Creep and shrinkage in concrete structures"
J. WILEY et Sons - 1982

23. P.ACKER
"De la controverse sur les lois de fluage du béton et des moyens d'en sortir".
Cement and Concrete Research - vol 13 pp 580-582, 1983.

24. P. ACKER
"Le séchage du béton et ses conséquences sur l'interprétation des essais de fluage"
CEB Task group "Prédiction du comportement différé du béton" - Lausanne 1980.

25. BAZANT, ASGHARI, SCHMIDT
"Expérimental study of creep of hardened PORTLAND Lement paste at variable water content"
Matériaux et constructions - vol 9 n° 52 - 1976 p 275 - 290

26. BAZANT
"Advanced topics in inelasticity and failure of concrete"
cours ENPC

27. BARON
"Les retraits de la pate de ciment"
in "Le Beton Hydraulique" - Paris - Presses de l'E.N.P.C. - 1982

28. BARON
"Les fissurations spontanées et accidentelles du béton non armé et armé"
in " Le Béton Hydraulique" - Paris - Presses de l'ENPC - 1982

29. L'HERMITE, MAMILLAN
"Repartition de la teneur en eau dans le béton durci"
Annales de l'ITBTP - n° 309-310 - 1973 p 30-34

30. "Mesure directe des contraintes dans le béton"
extrait du rapport d'activités 1984 du LCPC

31. SHAAN
"Contribution à la modélisation du comportement du matériau béton"
- Mémoire de DEA - EUDIL - nov. 1983.

32. ANDRIEUX
"Un modèle de matériau microfissuré application aux roches et aux bétons"
Thèse DI - ENPC - 1983

33. MENSI
"Etude du comportement hygrométrique du béton"
mémoire de DEA - ENI Tunis - 1983

34. LEMAITRE, MAZARS
"Application de la théorie de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure".
Annales de l'ITBTP - n° 401 - janvier 1982 -

35. ABIAR
thèse DI à paraître - ENPC - 1986

36. P. NISCHER
"Influence du mode de conservation du béton sur l'évolution de sa résistance et de son module d'élasticité"
Bentonwerk + Fertigkil - Technik, n° 11, 1977 , pp 536 - 541

37. S.E. PIHLAJA VAARA
"A review of some of the main results of a research on the ageing phenomena of concrete effect of moisture conditions on strengthn shrinkage and creep of mature concrete"
cement and concrete research vol 4, pp 761-771, 1974

38. F.H. WITTMANN
"Deformation of concrete at variable moisture content"
in Mechanics of geomaterials - Edited by Z. BAZANT- 1985 - John Wiley

39. Y. MALIER
"Action de la température sur les propriétés du béton durçi"
in Le Beton Hydraulique - chap. 23 - pp 409-422 - Presses de l'ENPC

40. P. ACKER
"Effets thermiques dans les bétons en cours de fabrication et applications aux ouvrages d'arts"
Annales de l'ITBTP - n° 442 - fév. 1986 pp 62-79.

41. STUTZ
"Formulation des lois de comportement - Les principes généraux" - Ecole d'Hiver de Rhéologie des géomatériaux - Aussois 1984.

42. W. NOLL
"A. Mathematical theory of the mechanical behaviour of continuous media"
Arch. Rational Mech. Anal., 1958, 2, 197 - 226 - Reimpression dans "Continuum Mechanics II, The Rational Mechanics of Materials" edition C. TRUESDELL, N. Y. GORDON and BREACH 1965, et dans "Continuum Theory of Inhomogeneities in Simple Bodies" N.Y., Springer Verlag 1968.

43. C. TRUESDELL
"Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus", éditions MASSON, Paris 1974.

44. F. DARVE
"L'écriture incrémentale des lois rhéologiques et les grandes classes de lois de comportement"
Ecole d'Hiver de Rhéologie des geomateriaux - Aussois 1984 -

45. F. DARVE
"Une formation incrémentale des lois rhéologiques - Application aux sols"
Thèse d'Etat - USM et INPG - Grenoble 1978 -

46. C. TRUESDELL
"Hypo - elasticity"
J. ration. mech. Analysis, vol 4, pp 83-133, 1955.

47. A.A. ELWI, D.W. MURRAY
" A 3D Hypoelastic concrete constitutive relationship"
Journal of the Engineering Mechanics Division, vol 105, n° EM4, pp 623-641, Aug 1979.

48. D. DARWIN, D.A. PECKNOLD
"Non linear biaxial law for concrete"
Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 103, n° EM2, pp 229-241, April 1977.

49. I.P. SAENZ
discussion of "Equation for the stress-strain curve of concrete" by P. DESAYI et S. KRISHNAN, American concrete Institute Journal, Proceedings, vol 61, n° 9, pp 1229-1235, sept 64.

50. A.C.T. CHEN, W.F. CHEN
"Constitutive relations for concrete"
Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol 101, n° EM4, Proc. paper 1529, 1975, pp 465-481.

51. M.N. FARDIS, B. ALIBE, J.L. TASSOULAS
"Monotonic and cyclic constitutive law for concrete"
Journal of the Engineering Mechanics, ASCE, vol 109, n° 2, April 1983, pp 516-536.

52. H.B. KUPPER, H.K. HILSDORF , H. RUSCH
"Behavior of concrete under biaxial stresses"
American concrete Institute Journal Proceedings, vol 66, n° 6, Aug 1969, pp 656-666.

53. Y.F. DAFALIAS, E.P. POPOV
"A model of nonlinearly hardening materials for complex loading"
Acta Mechanica, vol 21, 1975, pp 173-192.

54. Z. MROZ, V.A. NORRIS
"Elastoplastic and Viscoplastic constitutive models for soils vith application to cyclic loading"
in Soils Mechanics - Transient and cyclic load - edited by G.N. PANDE et O.C. ZIENKIEWICZ, 1982, John Wiley et sons ltd.

55. D.W. MURRAY, L. CHINUYANONDH, K.Y. RIJUB AGHA, C. WONG
"Concrete plasticity theory for biaxial stress analysis"
J. Eng. Mech. Div., ASCE, vol 105, n° EM6, decembre 79
pp 989-1106.

56. GUDEHUS G
"A. comparison of some constitutive law for soils under radially symmetric loading and unloading"
Int. conf. on Num. Meth. in geomech. AA. Balkema, ed. W. Wittke, vol 4, pp 1309-1324. 1979

57. Z.P. BAZANT, C.L. SHIEH
" Hysteretic fracturing endochronic theory for concrete"
Journal of the Eng. Mech. Div., ASCE, vol 106, n° EM5, 1980

58. Z.P. BAZANT, P.D. BHAT
"Endochronic theory of inelasticity and failure of concrete"
Journal of the Eng. Mech. Div., ASCE, vol 102, n° EM4, August 1976, pp 701-722.

59. ARGYRIS, KREMPL , WILLIAM
"Constitutive models and Finite Element Solution of Inelastic Behaviour"
August 9-13, 1976 Symposium on "Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis - MIT - Boston.

60. BAZANT, KIM
"Plastic-Fracturing theory for concrete"
Journal of the Eng. Mech. Div. - ASCE - Vol 105 n° EM3 - juin 1979.

61. DOUGILL
"On stable progressively Fracturing Solids"
Zeitschrift angewandte Mathematik und Physik - vol 27, Fasc. 4, 1976, pp 423-437

62. G. PIJAUDIER CABOT
"Caractérisation et modélisation du comportement du béton par un essai multiaxial automatique "
Thèse de 3ème cycle, ENSET, France,1985

63. WILLIAM , WARNKE
"Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete".
Seminaire IABSE on "concrete structures subjected to triaxial stresses" - 17-19 mai 1974. Bergame.

64. YANG, DAFALIAS, HERRMANN
" A bounding surface plasticity model for concrete "
Journal of Engineering Mechanics, vol 111, n°3, mars 1985

65. M.N. FARDIS, B.ALIBE, J.L. TASSOULAS
"Monotonic and cyclic constitutive law for concrete"
Journal of Engineering Mechanics,vol 109, n°2,1983

66. F. DARVE
"Les Lois incrementales non linéaires"
Ecole d'Hiver de Rhéologie des geomatériaux - Aussois 1984.

67. CHAMBON
"Contribution à la modelisation numérique non linéaire des sols", Thèse d'Etat, Grenoble 1981.

68. RIVLIN
in "continuum Physics" tome II - Cemal Eringen.

69. CC. WANG
"On representations for isotropic functions I"
Arch. rat. Mech. An. vol 33 - 1969 - p 249-267.

70. CC. WANG
"On representations for isotropic functions II" Arch. Rat. Mech. An., Vol 33 - 1969 - p 268-287.

71. CC. WANG
"A new representation theorem for isotropic functions I"
Arch. Rat. Mech. An., Vol 35-36 - 1970 pp 166-197.

72. C.C. WANG
"A new representation theorem for isotropic functions II"
Arch. Rat. Mech. An., vol 35-36 - 1970 pp 198-223.

73. CC. WANG
"Corrigendum"
Arch. Rat. Mech. An. vol 43 - 1971 - pp 392-395

74. GF SMITH
"On a fundamental error in two papers of C.C. WANG"
Arch. Rat. Mech. An., vol 36 - 1970 pp 161-165

75. SHAROUR
"Contribution à l'élaboration d'un modele rhéologique incremental non linéaire et son introduction dans un programme de calculs par éléments finis".
- Thèse de doctorat d'ingénieur - ENPC - 1984

76. D. AUBRY, J.C. HUJEUX, F. LASSOUDIERE, Y. MEIMON :
"A double memory model with multiple mechanisms for cyclic soil behaviour"
Proceedings of Int. Symp. of Num. Models in geomech., A.A. Balkema, Zurich 1982.

77. A.S. ELNASHAI, R.W. NICHOLSON
"Some restrictions on Lehigh-Purdue concrete plasticity model"
Journal of Engineering Mechanics - Vol 112 n°2 Fevrier 1986 -

78. P. ROYIS
" Formulation mathématique de lois de comportement. Modélisation numérique de problèmes aux limites en mécanique des milieux déformables "
thèse de DDI, INPG, 1986

79. KOTSOVOS, NEWMANN
" A Mathematical description of the deformational behavior of concrete under complex loading"
Magazine of concrete research, vol 31, n°107, 1979

80. BOEHLER
"Contributions théoriques et expérimentales à l'étude des milieux plastiques anisotropes"
Thèse d'état, Grenoble, 1968

81. D. FAU
"Etude d'une loi rhéologique; réalisation d'une presse permettant des essais de torsion"
mémoire de DEA,ENTPE/Université de Grenoble, 1982

82. J. GOLCHEH
" Etude de sollicitations rotationnelles sur une kaolinite - Réalisation d'un appareillage de torsion"
Thèse de l' ECL, Paris, 1986

83. T. ZAGBAI
" Etude du matériau béton en compression et cisaillement combinés"
Thèse de DDI, ENPC, 1986

84. N.J. GARDNER
" Triaxial behavior of concrete"
ACI Journal, vol 66, 1969

85. C.V.S. KAMEWARA RAO
" Effect of aggregate size on the minimum size of test specimen"
International Journal of Cement Composite

86. M. REGOURD
" L'hydratation du ciment PORTLAND"
in " Le béton hydraulique",presses de l'ENPC, Paris, 1982

87. H. WINKLER
" Grundsätzliche untersuchungen zum geräteeinfuss bei der mehraxialen druckprüfung von beton"
Deutscher ausschuss für stahlbeton
Heft 366, Berlin, 1985

88. K.H. GERTSLE et 13 autres auteurs
" Behavior of concrete under multiaxial stress states"
Journal of the Eng. Mech. Div., ASCE, vol 106, n°EM6, 1980

89. E. ANDENAES, K.H. GERSTLE, H.Y. KO
"Response of mortar and concrete to biaxial compression"
Journal of the Eng. Mech. Div., ASCE, vol 103, n°EM4, 1977

90. L.J. PARROTT
" An improved apparatus for biaxial loading of concrete specimens"
Journal of strain analysis
vol 5, n°3, pp 169-176, 1970

91. R.H. ATKINSON, H.Y. KO
" A multiaxial device for testing rock materials"
colloque RILEM " La déformation et la rupture des solides sioumis à des sollicitations pluriaxiales", tome III, Cannes, 1972

92. R. SCAVUZZO, T. STANKOWSKI, K.H. GERSTLE
" stress strain curves for concrete under multiaxial load histories "
rapport du Department of civil, environmental and architectural engineering, University of Colorado, 1983

93. S. BRETONNIERE
" Les enceintes de conservation et les presses, deux équipements de laboratoire importants"
in " Le béton hydraulique " , presses de l' ENPC, Paris, 1982

94. H. WINKLER
" Fundamental investigations on the influence of test equipment on multiaxial test result of concrete"
colloque RILEM " Réponse du béton aux sollicitations multiaxiales " Toulouse, 1984

95. A. BASCOUL, J.P. BOURDES, J.C. MASO
" Une nouvelle machine de compression biaxiale"
colloque RILEM " La déformation et la rupture des solides soumis à des sollicitations multiaxiales", tome III, Cannes, 1972

96. B.P. HUGUES, B. BAHRAMIAN
" Cube tests and the uniaxial compressive strength of concrete "
Magazine of Concrete Research
vol 17, n°53, 1965

97. F. BAUDOT, D. LAROCHE, P. MATHIEU, D. STRYPSTEEN
" Loi de comportement triaxiale en écriture incrémentale pour le béton"
TFE ENTPE, 1979

98. H. HILSDORF
" Die bestimmung der zweiachsigen festigkeit des betons "
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, n° 173, 1965

99. G. SCHICKERT
" On the influence of different load application techniques on the lateral strain and fracture of concrete specimens "
Cement and Concrete Research
vol 3, pp 487-494, 1973

100. A. MIKNAS, J. SAHRANE
" Contribution à l'amélioration des essais triaxiaux pour le béton"
TFE ENTPE, 1984

101. J. AVRIL
" Encyclopédie Vishay d'analyse des contraintes "
Vishay micromesures, France

102. LINSE, STEGBAUER
" Behavior of concrete under triaxial loading "
colloque RILEM " La déformation et la rupture des solides soumis à des sollicitations pluriaxiales ", tome IV, pp170-173, Cannes, 1972

103. LINSE
" Lösung veruschstechnischer fragen bei der ermittung des festigkeits und verformungsverhaltens von beton unter dreiachsiger belastung "
Deutscher Ausschüss für Stahlbeton, Heft 292, Berlin, 1978

104. A. BASCOUL
discussion sur l'article " Une nouvelle machine de compression biaxiale " par A.Bascoul, J.P. Bourdes, J.C. Maso
colloque RILEM " La déformation et la rupture des solides soumis à des sollicitations pluriaxiales ", tome IV, pp158-164, Cannes, 1972

105. A.PEIRANI, V.VERGUET
" Comportement du béton sous contraintes multiaxiales "
TFE ENTPE, 1986

106. HUGUES , ASH
" Anisotropy and failure criteria for concrete "
Matériaux et constructions, vol 3, n°18, 1970

107. A. BASCOUL
" Etude du comportement mécanique du béton en compression biaxiale "
Thèse de DDI, Toulouse, 1974

108. KUPFER
" Das verhalten des betons unter mehrachsiger kurzzeitbelasrung unter besonderer berucksichtigung der zweiachsigen beansoruchung "
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, heft 229, Berlin, 1973

109. S. RICHER
" Résolution des problèmes de contact entre solides élastiques par la méthode des éléments finis "
Thèse de l'ENPC, 1985

110. P.ROSSI, S.RICHER
" Stochastic modelling of concrete cracking "
in " Constitutive laws for engineering materials - Theory and application " - ed. CS DESAI - Elsevier - 1987

111. ZAITSEV
" Inelastic properties of solids with random cracks "
in Mechanics of geomaterials - ed. Z.P. BAZANT - J.WILEY - 1985

112. LINO
" Un modèle de matériau microfissuré "
Revue française de Géotechnique, n°11, 1980

113. P.ACKER, C.BOULAY, P.ROSSI
" De l'importance des contraintes initiales dans le béton et des effets qui en résultent "
à paraître dans Cement and Concrete Research

114. P.E. ROELFSTRA, H. SADOUKI, F.H. WITTMANN
" Le béton numérique "
Matériaux et Constructions, vol.18, n°107, 1986

115. P.E. ROELFSTRA, H. SADOUKI
" Total fracture energy of composite materials "
vortrage der 17. sitzung des arbeitskreises bruchvorgänge
ed. deutscher verband für materialprüfung, Berlin, 1985

116. N.J. BURT, J.W. DOUGILL
" Progressive failure in a model heterogeneous medium "
Journal of the Eng. Mech. Div., ASCE, vol.103, n°EM3, 1977

117. F. DE LARRARD
" Modélisation du comportement non linéaire du béton "
note interne de la section BBAP, LCPC, 1986

118. J. LE MINOUS, H. GUIRAUD
" Simulation numérique du séchage du béton par une méthode de différences finies "
projet libre ENTPE, 1987

119. J.M. TORRENTI
Proposition de recherche au Greco Géomatériaux
note LCPC, 1986

120. J.C. MASO
" La liaison pâte granulats"
in Le béton hydraulique, chap. 14, presses de l'ENPC, 1982

121. P. MORLIER
" Role des fluides en mécanique des roches"
Proceedings of the second congress of the international society for rock mechanics - vol. 2 - thème 3 - Beograd, 1970

122. M.A. BIOT
"Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic body"
J. Applied Phys. , 182, 1955

123. F. CAMPUS, N. DEHOUSSE, J HAMOIR
" Les pressions intersticielles dans les ouvrages hydrauliques et leur fondation - partie II: étude expérimentale: détermination du coefficient de pression intersticielle dans les mortiers et les bétons "
Matériaux et constructions, vol.2 ,n°12, 1969

124. M.A. TAYLOR, A.K. JAIN
"path dependent biaxial compressive testing of an all lightweight aggregate concrete"
ACI Journal, n°69-71, 1972

125. Z.N.W. AKROYD
" Concrete under triaxial stress"
Magazine of concrete research, vol.13, n°39, 1961

126. J. WASTIELS
"Failure criteria for concrete subjected to multiaxial stresses"
rapport interne à l'Université de Bruxelles, 1981

127. J. WASTIELS
" Strength representation of concrete and other materials in the octahedral stress space "
Cement and Concrete Research, vol. 12, pp 625-631, 1982

128. P. LAUNAY, H. GACHON, P. POITEVIN
" Déformation et résistance ultime du béton sous étreinte triaxiale"
Annales de l' ITBTP, n° 269, 1970

129. A.HILLERBORG, M. MODEER, P.E. PETERSON
" Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements"
Cement and Concrete Research, vol.6, 1976, pp. 773-782.

130. W.F. CHEN
" Plasticity in reinforced concrete "
Mac Graw Hill ed., 1982.

131. C. BOULAY, A. COLSON
" Un extensomètre éliminant l'influence des déformations transversales sur la mesure des déformations longitudinales "
Matériaux et Constructions, vol.14, n°79, pp. 35-38, 1981

132. J.C. ROBINET
" Loi rhéologique en écriture incrémentale. Application aux sols et au béton"
Thèse d'état, Grenoble, 1980

133. DAFALIAS
" Bounding surface plasticity.
I: mathematical foundation and hypoplsticity"
Journal of Engineering Mechanics, vol.112, n°9, 1986

134. F.H. WITTMANN
"Etude de la force d'adhésion en fonction du mouillage"
colloque RILEM "Liaisons de contacts dans les matériaux composites utilisés en Génie Civil", Toulouse, 1972.

ANNEXES

Annexe 1

Problème de l'excentrement de la charge

Lorsque la résultante des forces appliquées ne concorde pas avec l'axe de symétrie de l'éprouvette (fig. a1.1), le champ de contrainte appliqué à l'éprouvette n'est pas homogène.Supposons qu'il soit trapézoïdal.

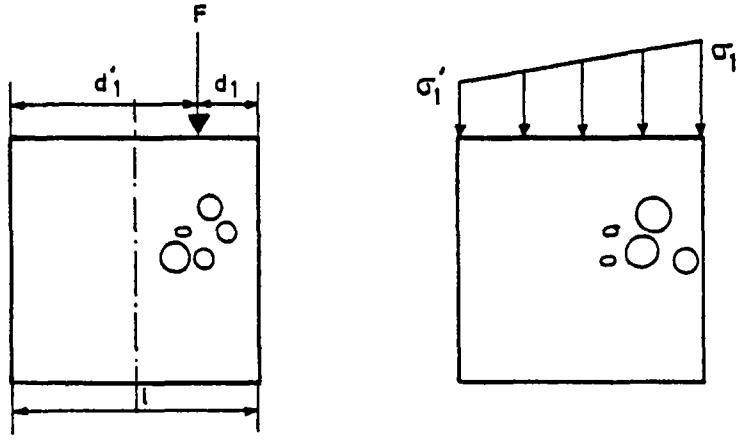


fig. a1.1: Champ de contrainte supposé dans le cas où la charge n'est pas centrée

Nous avons alors:

$$\sigma_1' \times S + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_1') \times S = F = \sigma_m \times S$$

soit: $$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_1')$$

Le moment en A vaut quant à lui:

$$\sigma_1' . \ell . \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_1') . \ell . \frac{2\ell}{3} = F . d_1'$$

$$\ell^2 \left(\frac{\sigma_1}{3} + \frac{\sigma_1'}{6} \right) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_1') . d_1' . \ell$$

$$\ell\,(2\sigma_1 + \sigma_1') = 3 \cdot d_1' \cdot (\sigma_1 + \sigma_1')$$

$$(d_1 + d_1')(2\sigma_1 + \sigma_1') = 3\,d_1'\,(\sigma_1 + \sigma_1')$$

$$2\sigma_1\,(d_1 + d_1') - 3\sigma_1\,d_1' + \sigma_1'\,(d_1 + d_1' - 3d_1') = 0$$

$$\sigma_1\,(2d_1 - d_1') + \sigma_1'\,(d_1 - 2d_1') = 0$$

$$\sigma_1 = 2\sigma_m - \sigma_1'$$

$$2\sigma_m\,(2d_1 - d_1') + \sigma_1'\,(d_1 - 2d_1' - 2d_1 + d_1') = 0$$

d'où: $$\sigma_1' = 2\sigma_m \left(\frac{2d_1 - d_1'}{\ell}\right)$$

et de même: $$\sigma_1 = 2\sigma_m \left(\frac{2d_1' - d_1}{\ell}\right)$$

(vérification : si $d_1 = d_1' = l/2$ (charge centrée) $\sigma_1' = 2\sigma_m \cdot \frac{1}{2} = \sigma_m = \sigma_1$)

Comme $\sigma_1 = E\,\varepsilon_1$ et $\sigma_1' = E\,\varepsilon_1'$

$$\sigma_1 + \sigma_1' = E\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_1') = 2\sigma_m$$

On pose $\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_1'}{2}$ alors $E = \sigma_m / \varepsilon_m$

d'où

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m}\,\varepsilon_1 = 2\sigma_m \left(\frac{2d_1' - d_1}{\ell}\right)$$

$$\sigma_1' = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m}\,\varepsilon_1' = 2\sigma_m \left(\frac{2d_1 - d_1'}{\ell}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2d_1' - d_1 = \dfrac{\ell\,\varepsilon_1}{2\,\varepsilon_m} \\[2ex] 2d_1 - d_1' = \dfrac{\ell\,\varepsilon_1'}{2\,\varepsilon_m} \end{cases}$$

d'où $$3\,d_1 = \ell\left(\frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon_m} + \frac{\varepsilon'_1}{\varepsilon_m}\right)$$

soit:

$$\boxed{\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ell}{3}\left(\frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon_m} + \frac{\varepsilon'_1}{\varepsilon_m}\right) \\ d'_1 &= \frac{\ell}{3}\left(\frac{\varepsilon'_1}{2\varepsilon_m} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_m}\right) \end{aligned}}$$

(vérification: si les charges sont centrées $\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 = \varepsilon_m \Rightarrow d_1 = \frac{\ell}{3}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{\ell}{2} = d'_1$)

L'excentrement e est alors égal à:

$$e = \left| d'_1 - \frac{\ell}{2} \right| = \frac{1}{2}\left| d'_1 - d_1 \right| = \frac{\ell}{6}\left| \left(\frac{\varepsilon'_1}{2\varepsilon_m} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_m}\right) - \left(\frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon_m} + \frac{\varepsilon'_1}{\varepsilon_m}\right) \right|$$

$$\boxed{e = \frac{\ell}{12\,\varepsilon_m}\left| \varepsilon_1 - \varepsilon'_1 \right|}$$

Pour mesurer l'excentrement de la charge sur notre presse nous avons réalisé l'expérience suivante: des jauges étant collées en croix sur deux faces opposées nous avons testé un cube en béton en compression simple puis, après l'avoir tourné d'un quart de tour, nous avons renouvelé l'expérience (fig. a1.2). Ceci nous a permis d'évaluer l'excentrement selon les deux directions où il peut exister. Les résultats sont présentés dans le tableau a1.3. L'excentrement déduit de ces mesures est inférieur à 1 mm selon chaque direction.

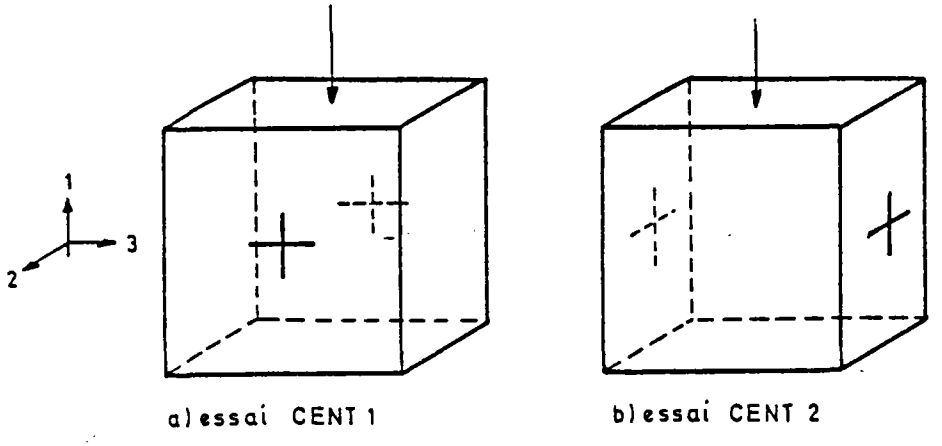
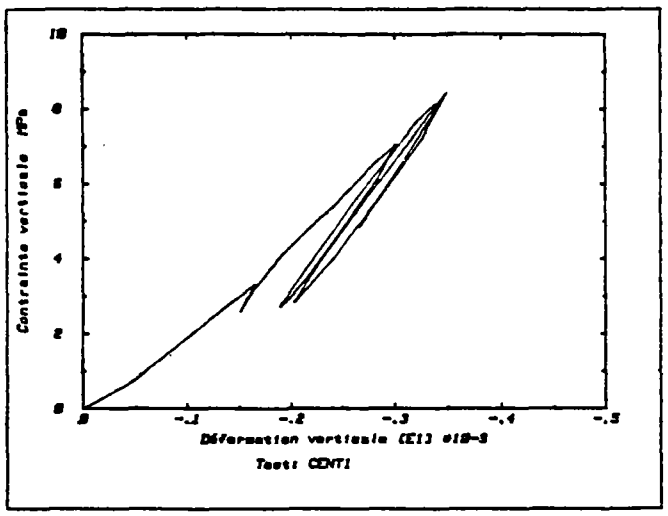


fig. a1.2: mesure de l'excentrement
a) selon la direction 2
b) selon la direction 3

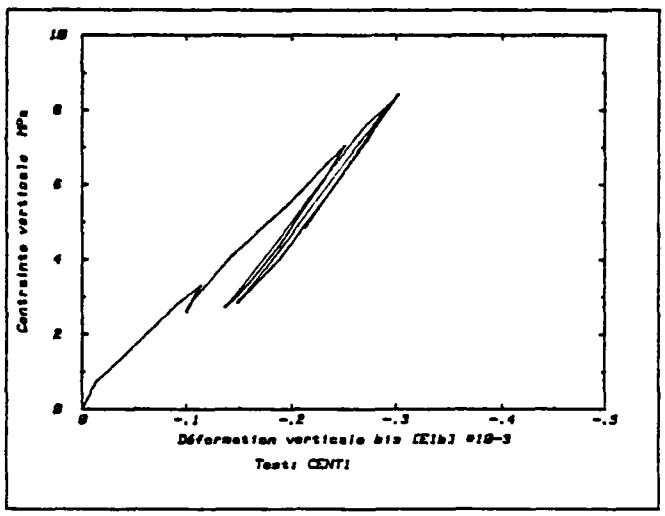
	CENT 1	CENT 2
$\varepsilon_1 \cdot 10^6$	321	388
$\varepsilon'_1 \cdot 10^6$	332,5	350.5
ε_m	327	369
d_1 mm	50.30	49.15
d'_1 mm	49.69	50.85
vérif. d1+d1 = 100	99.99	100.00
excentrement e = 1/2	0.30	0.85

Tableau a. 1. 3

a)



b)



c)

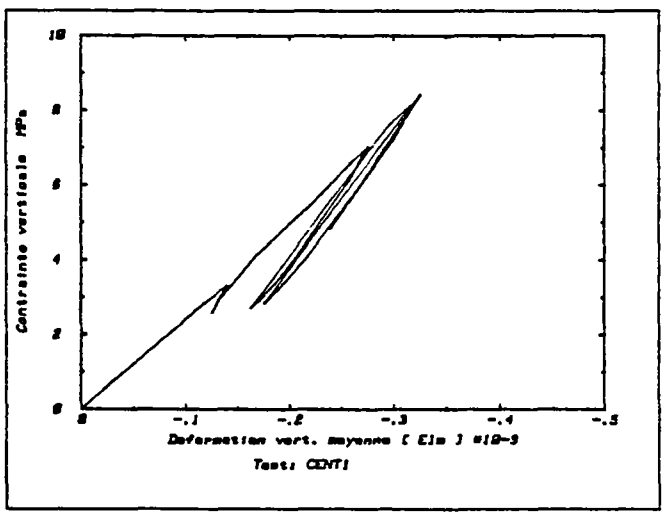
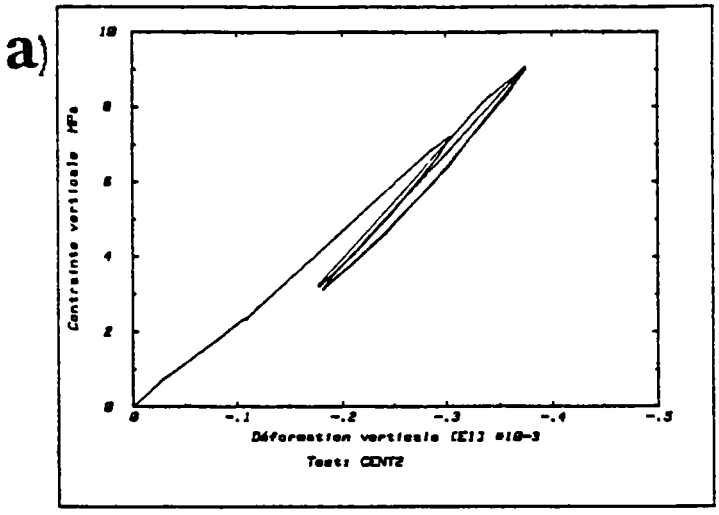
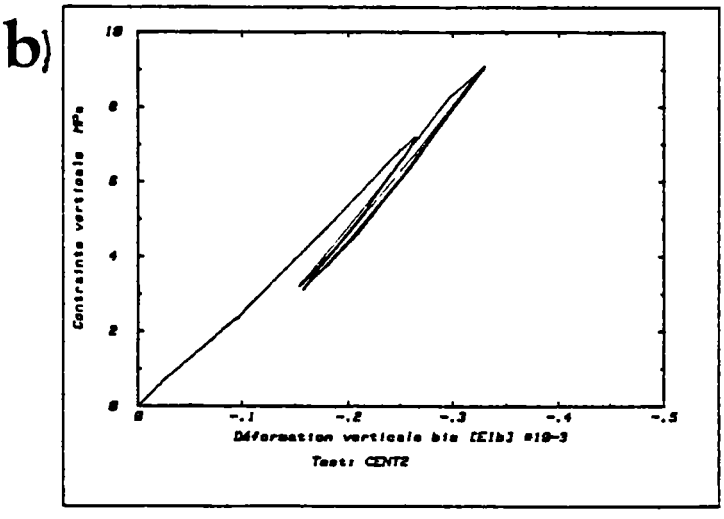


Fig.a.1.4: essai CENT 1
a) jauge 1
b) jauge 2
c) moyenne des jauges 1 et 2





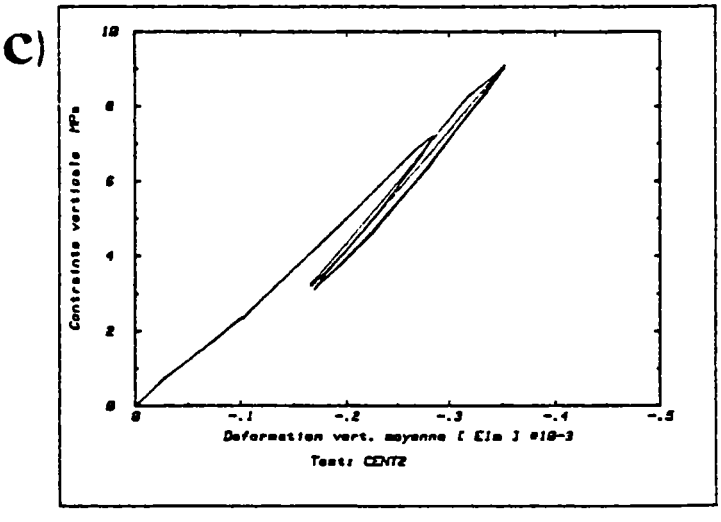


Fig. a.1.5. essai CENT 2
a) jauge 1
b) jauge 2
c) moyenne des jauges 1 et 2

Annexe 2

Simulation par éléments finis de l'appareil d'appui.
Sorties graphiques.

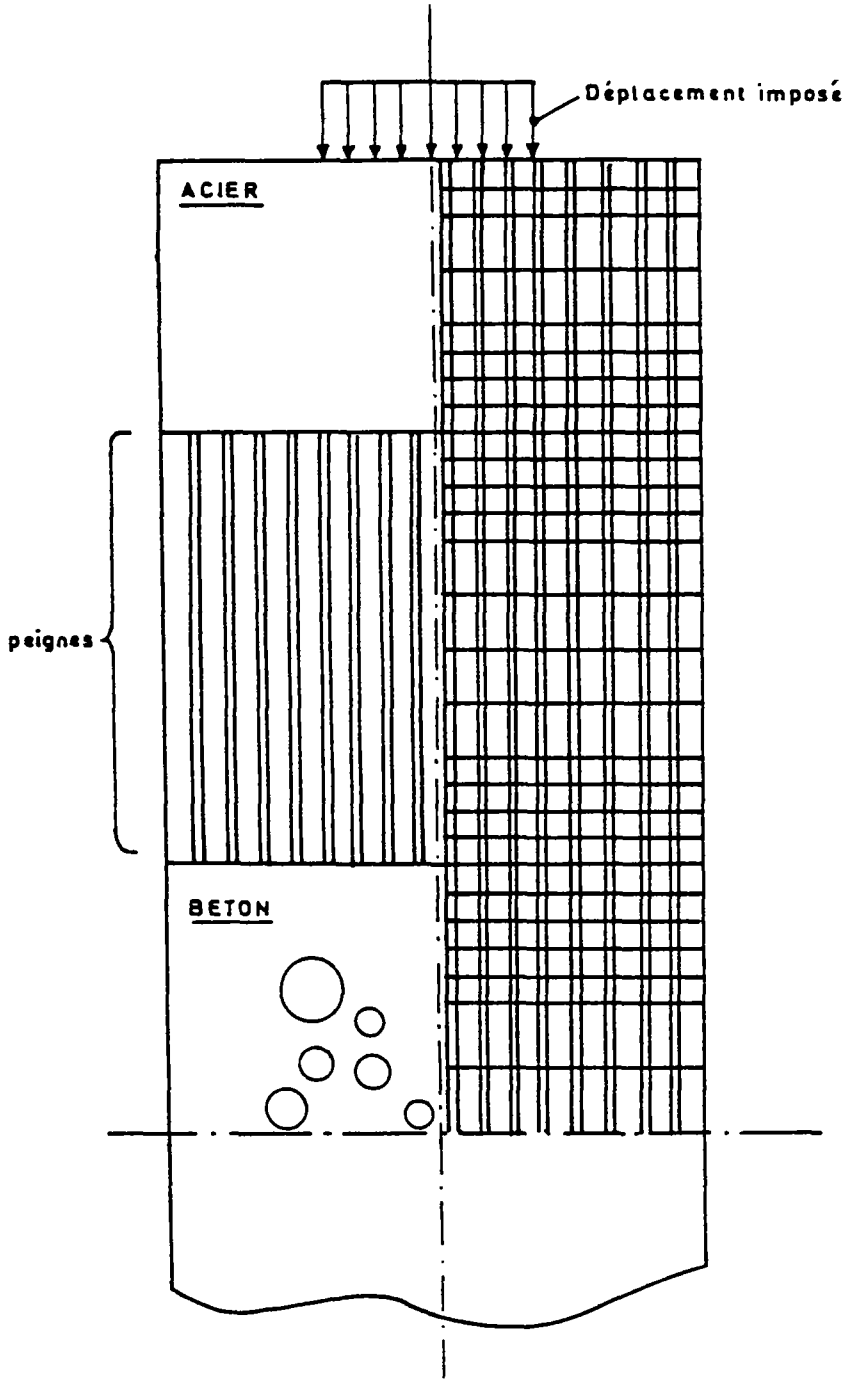
Nota: toutes les sorties graphiques sont réduites à la partie béton du maillage.

Rappel des hypothèses de calcul:
- élasticité linéaire
- contraintes planes
- caractéristiques mécaniques des matériaux

acier $E = 200\,000$ MPa
$\nu = 0.3$

béton $E = 20\,000$ MPa
$\nu = 0.2$

vide $E = 10$ MPa
$\nu = 0.1$


Déplacement imposé
ACIER
peignes
BETON

DEFORMATIONS PRINCIPALES

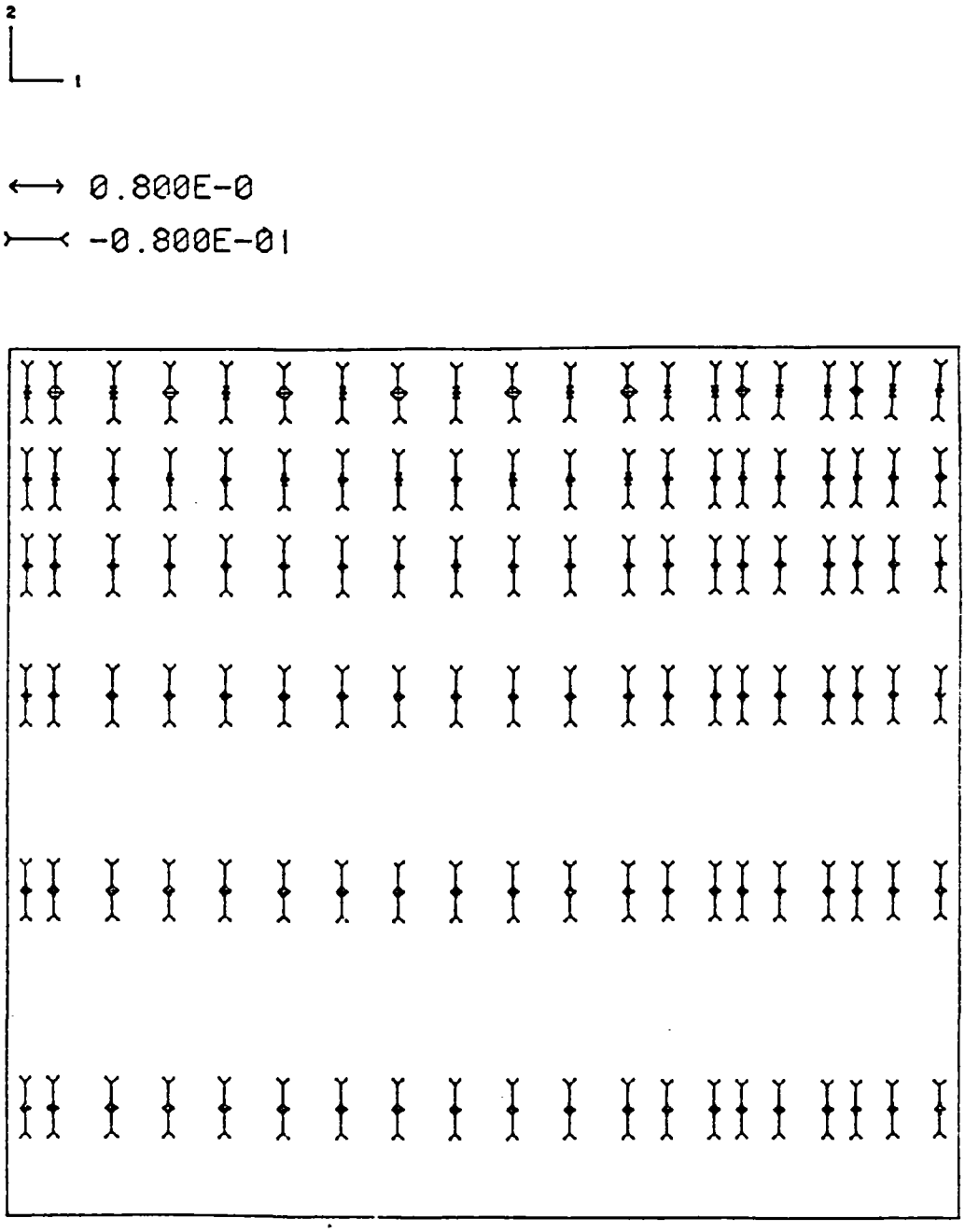


Fig. a2.1

CONTRAINTES PRINCIPALES

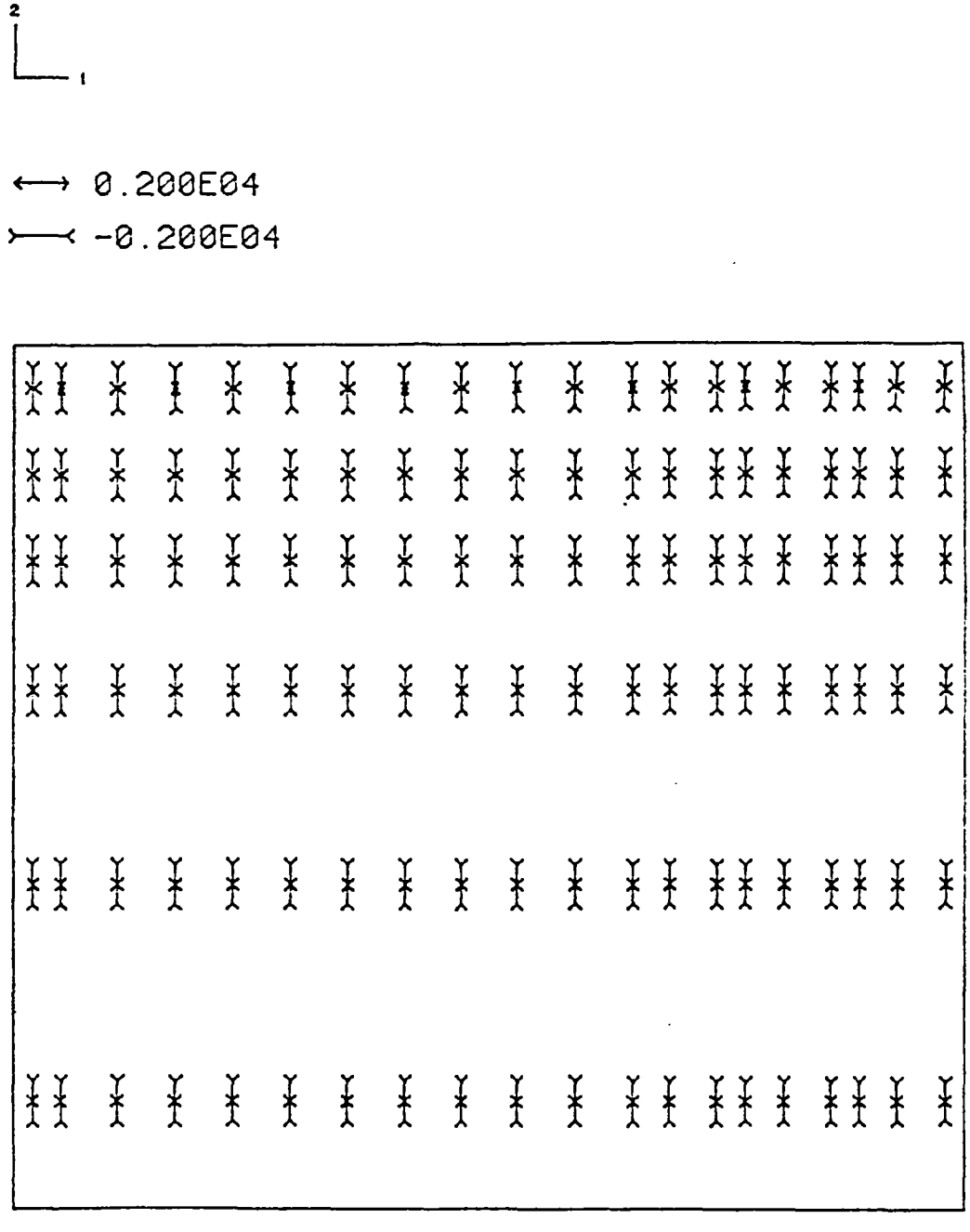


Fig. a2.2

ISOVALEURS DE U1

ISOVALEUR 0 = 0.

PAS = 0.100E00

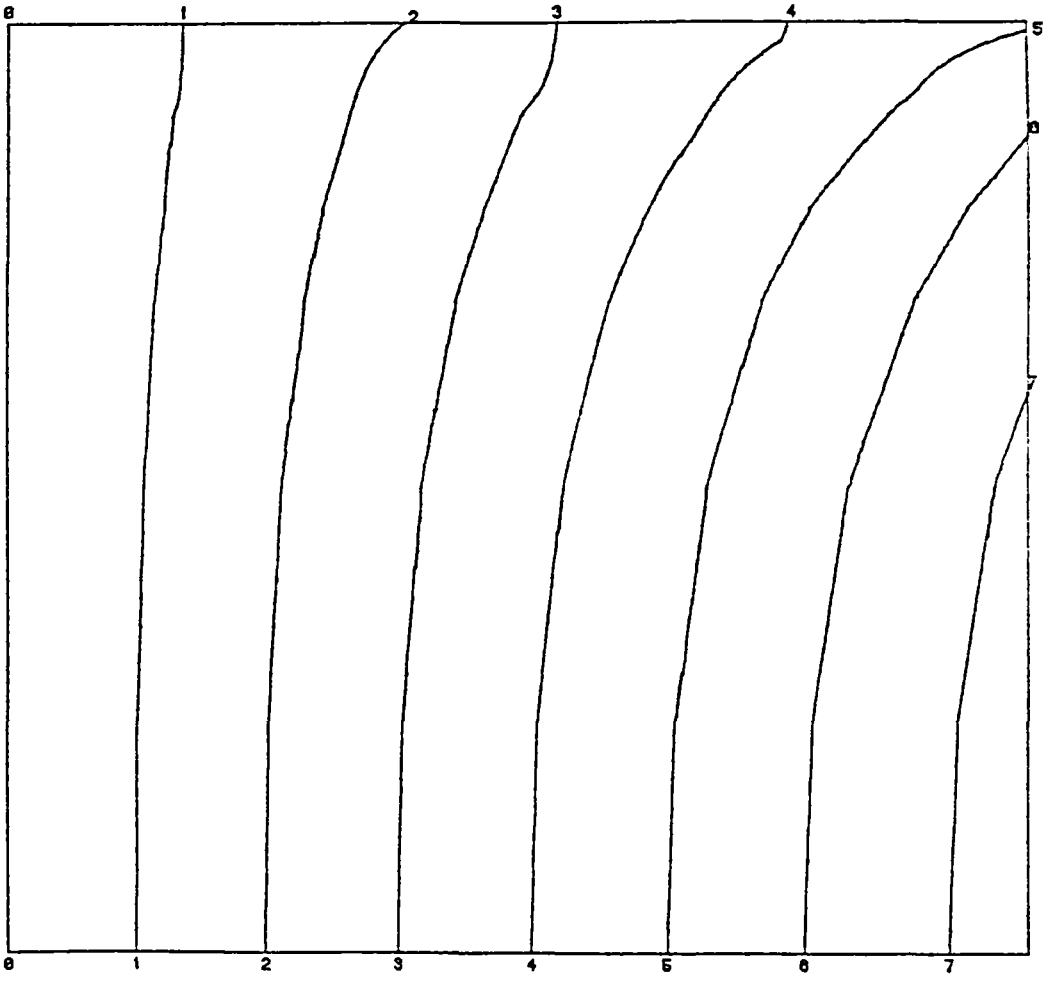


Fig. a2.3

ISOVALEURS DE U2

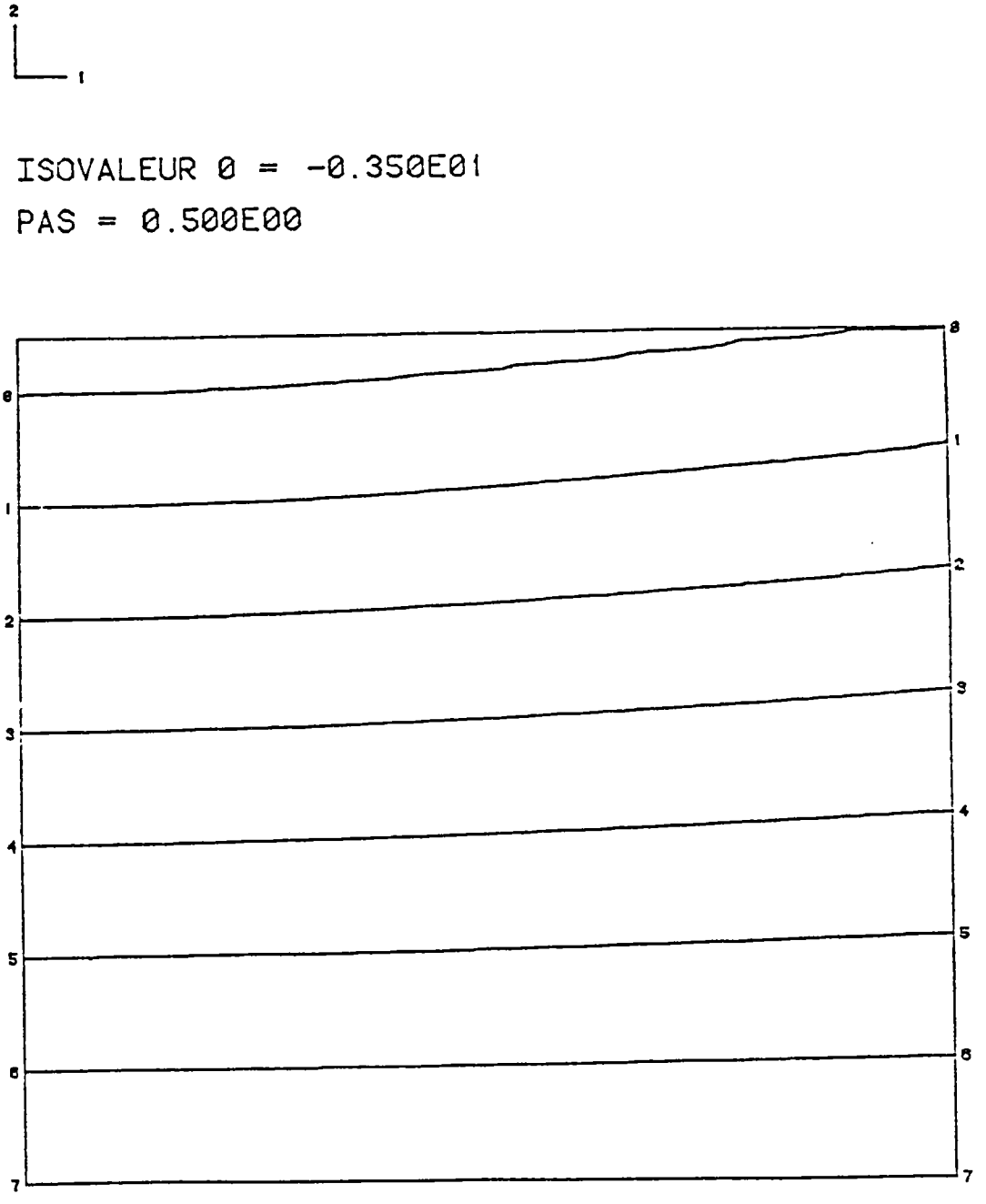
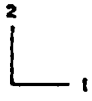


Fig. a2.4

ISOVALEURS DE EPS1



ISOVALEUR 0 = 0.100E-01

PAS = 0.200E-02

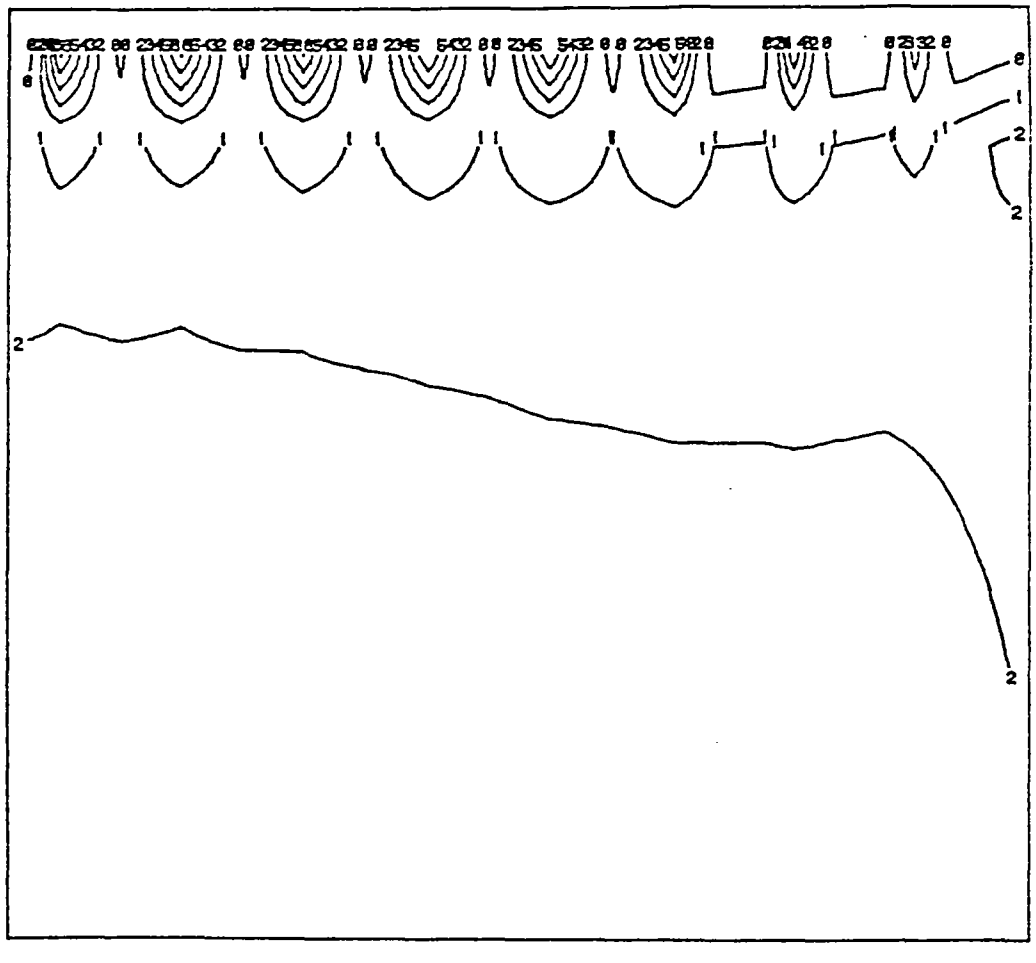


Fig. a2.5

ISOVALEURS DE EPS2

ISOVALEUR 0 = -0.740E-01

PAS = 0.150E-02

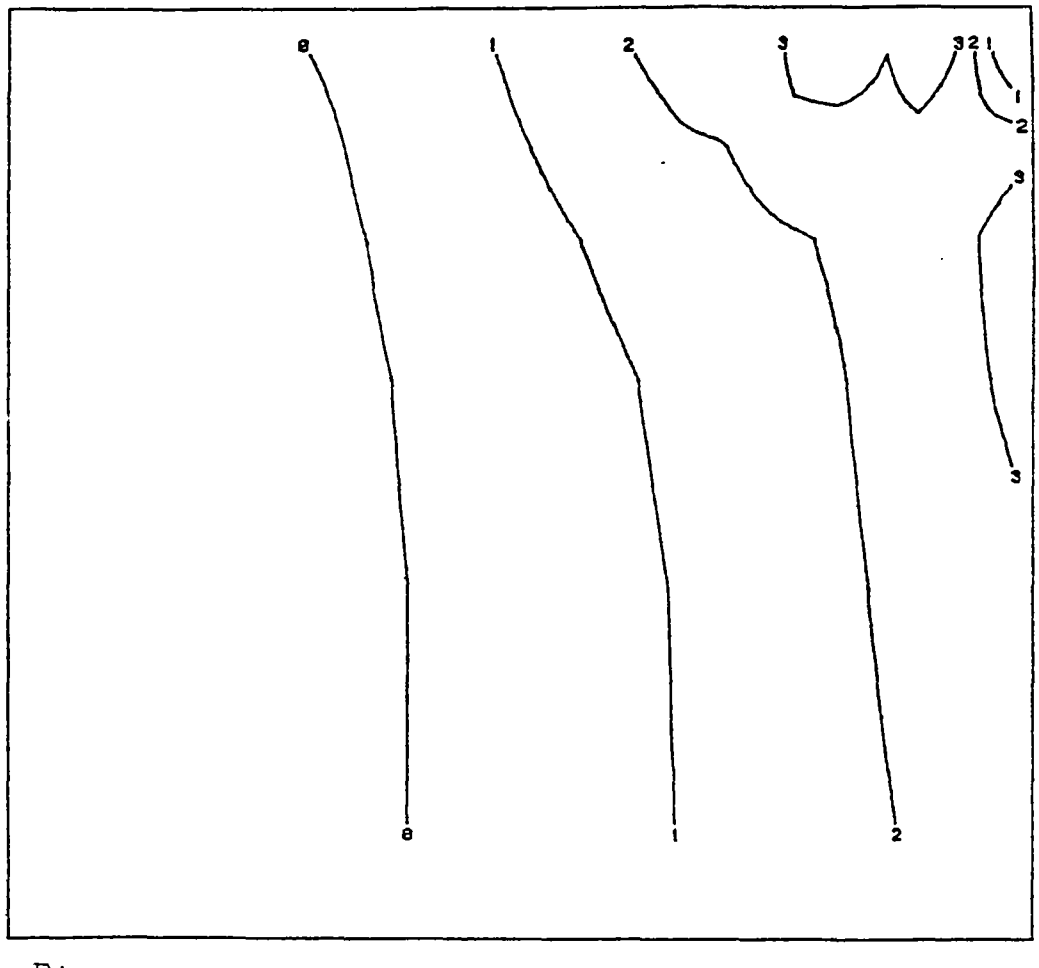


Fig. a2.6

ISOVALEURS DE EPS3

ISOVALEUR 0 = 0.125E-01

PAS = 0.500E-03

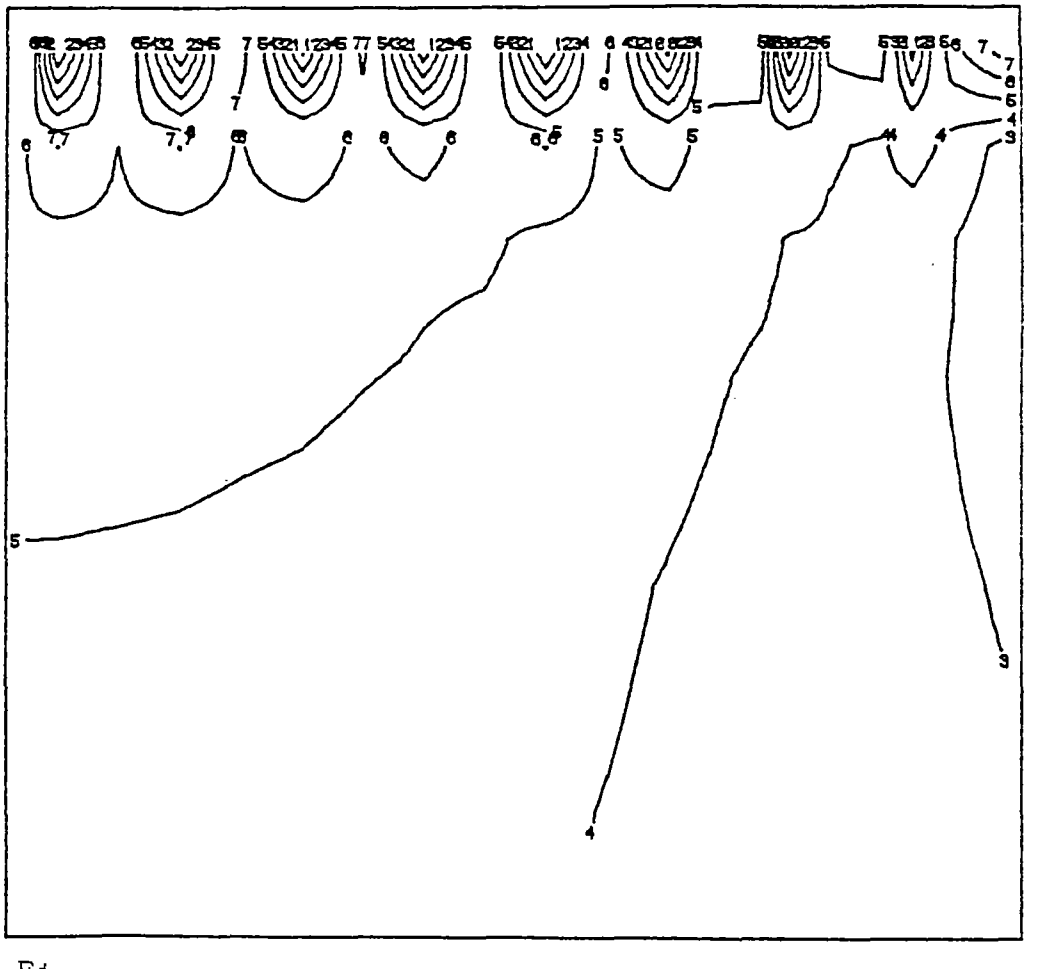
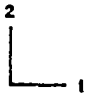


Fig. a2.7

ISOVALEURS DE GAM12



ISOVALEUR 0 = -0.800E-02

PAS = 0.200E-02

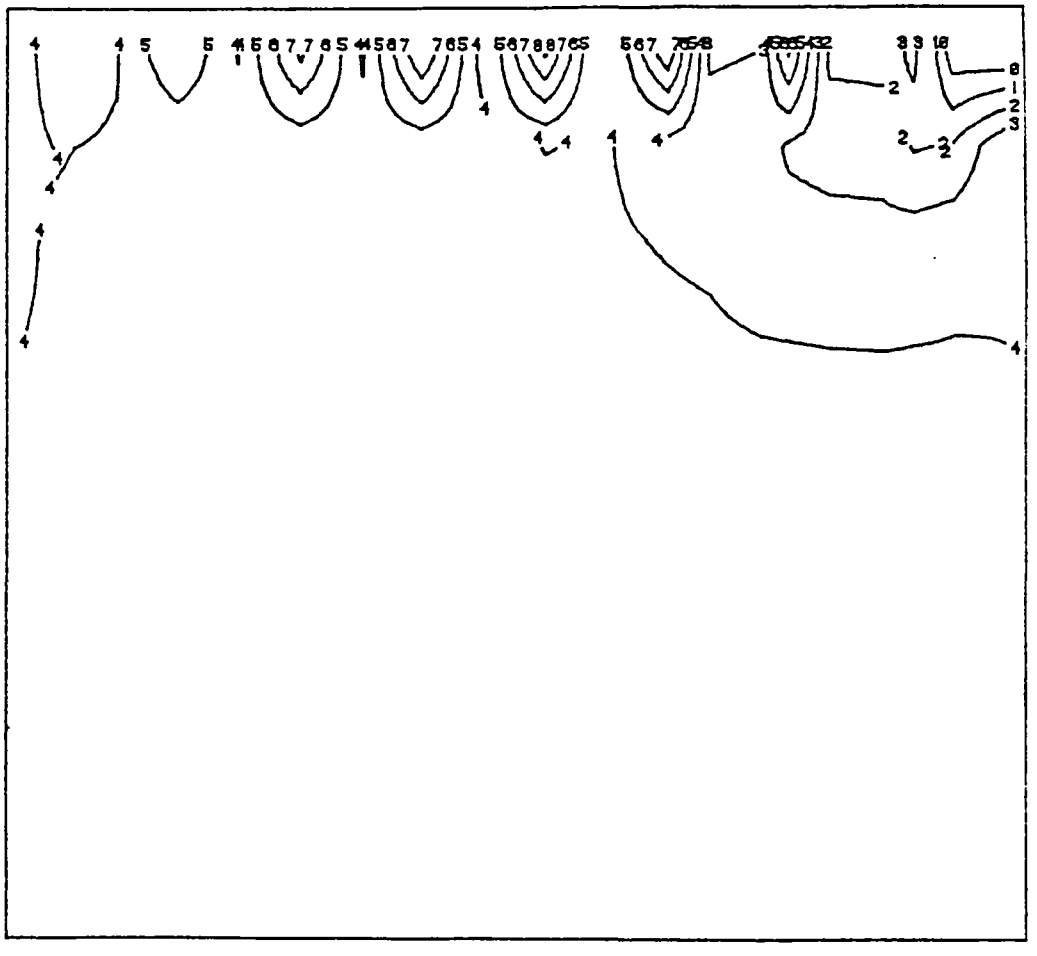


Fig. a2.8

ISOVALEURS DE SIG1

ISOVALEUR 0 = -0.880E02

PAS = 0.340E02

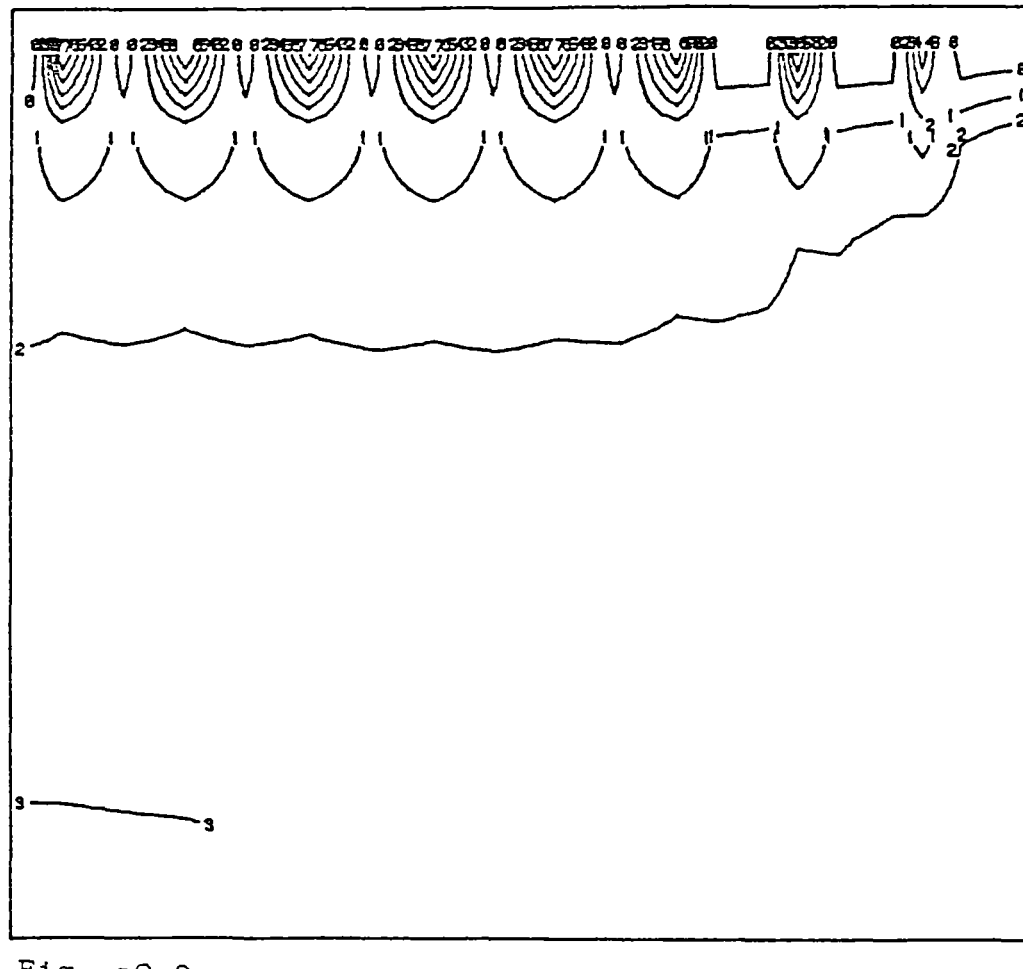


Fig. a2.9

ISOVALEURS DE SIG2

ISOVALEUR 0 = -0.151E04

PAS = 0.300E02

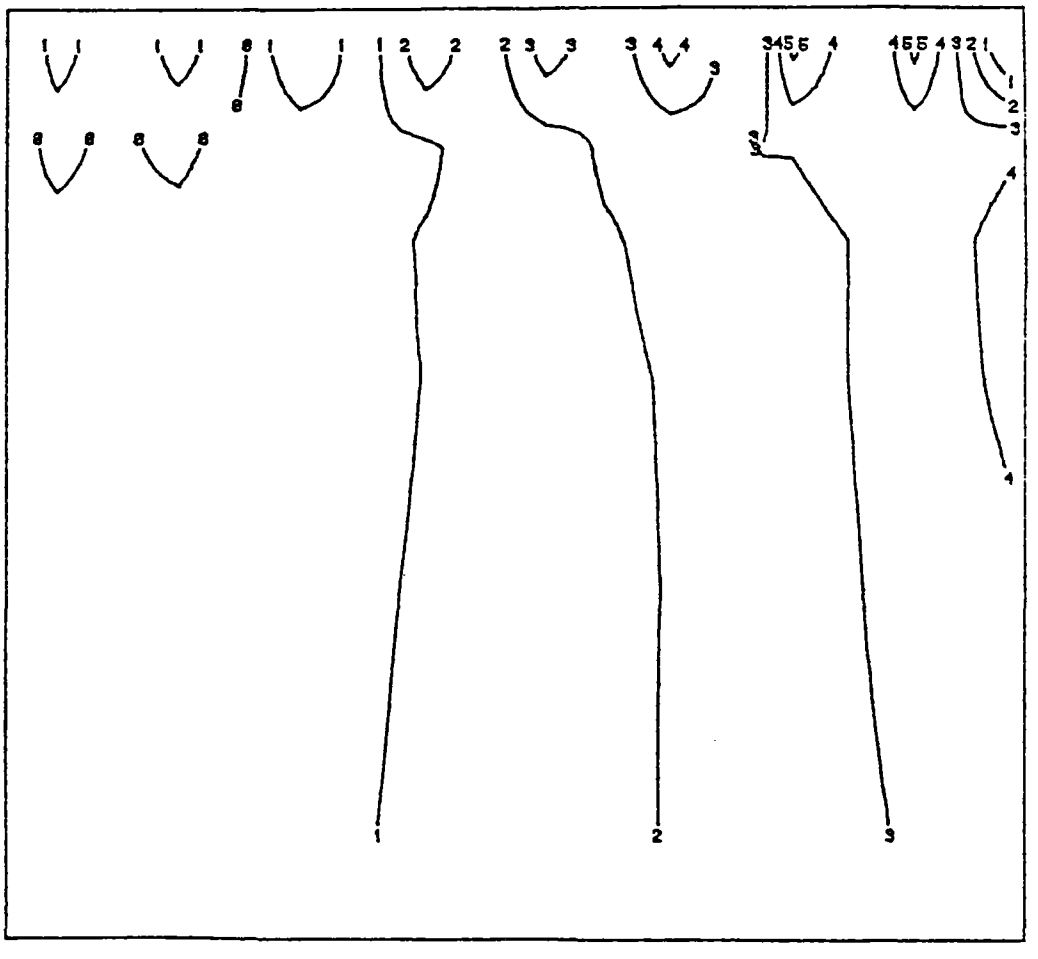


Fig. a2.10

ISOVALEURS DE TAU12

ISOVALEUR 0 = -0.630E02

PAS = 0.180E02

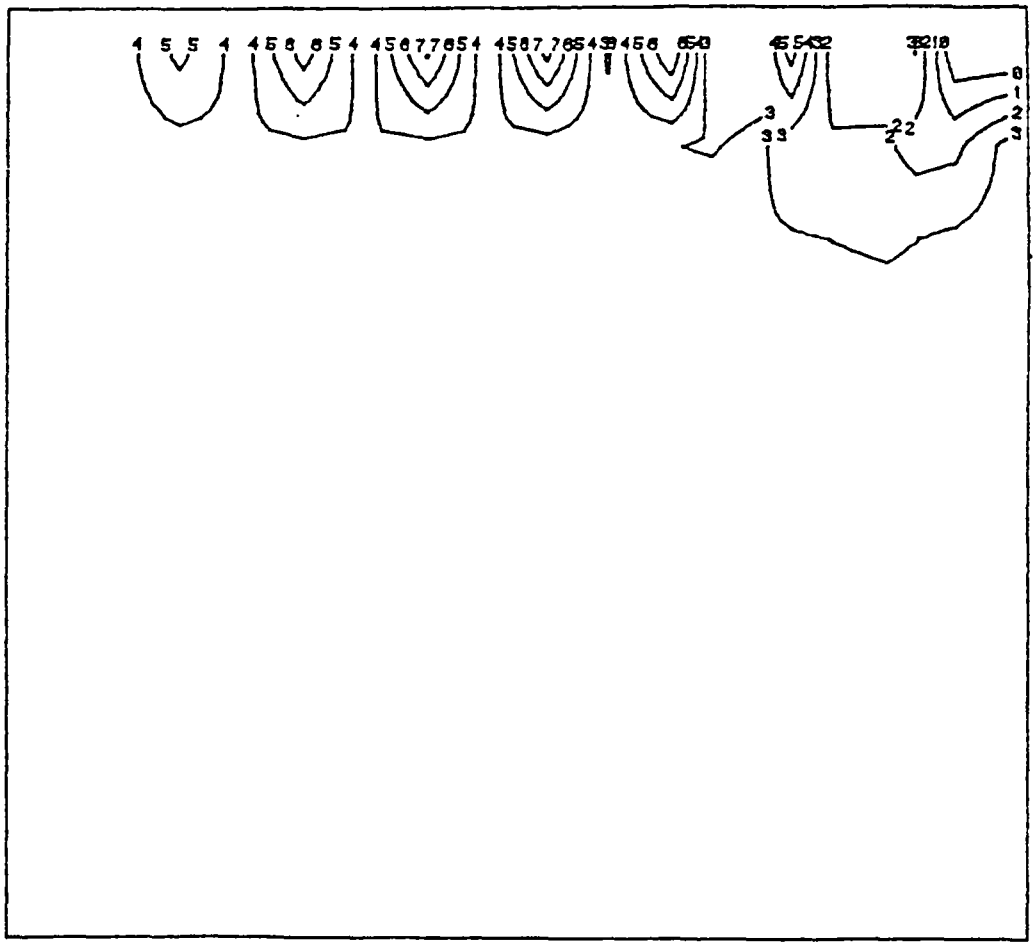


Fig. a2.11

Annexe 3

Détermination numérique des contraintes à la rupture

Nous avons vu au chapitre IV que la détermination des coefficients Aij et Bij nécessaires pour le modèle incrémental, implique la connaissance des contraintes à la rupture selon les directions d'orthotropie.

La comparaison du critère de William et Warnke avec les différents essais (biaxiaux et triaxiaux) nous a permis de tester et mettre au point la méthode numérique utilisée dans le programme de simulation.

a) principe de la méthode

Ainsi que cela est indiqué au chapitre IV, la méthode numérique utilisée est celle de NEWTON. C'est une méthode itérative telle que:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \text{ tel que } f(x_0) = 0$$

$$\text{avec } x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Dans notre cas la fonction f est définie par:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = r(\theta) - \sqrt{\frac{3}{5}}\, \tau_{oct}$$

Prenons le cas $0 \leqslant \theta \leqslant 60°$, les autres cas s'en déduisant par permutation. On a alors:

$$r(\theta) = \frac{2 r_2 (r_2^2 - r_1^2) \cos\theta + r_2 (2 r_1 - r_2) \sqrt{4 (r_2^2 - r_1^2) \cos^2\theta + 5 r_1^2 - 4 r_1 r_2}}{4 (r_2^2 - r_1^2) \cos^2\theta + (r_2 - 2 r_1)^2}$$

$$\text{avec } \begin{cases} r_1 = a_0 + a_1 \left(\frac{\sigma_{oct}}{\sigma_c}\right) + a_2 \left(\frac{\sigma_{oct}}{\sigma_c}\right)^2 \\ r_2 = b_0 + b_1 \left(\frac{\sigma_{oct}}{\sigma_c}\right) + b_2 \left(\frac{\sigma_{oct}}{\sigma_c}\right)^2 \\ \cos\theta = \dfrac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]}} \end{cases}$$

Si nous posons: $r_{21} = r_2^2 - r_1^2$

$$f_1 = 2\, r_2\, r_{21} \cos\theta$$

$$f_2 = r_2\,(2r_1 - r_2)\sqrt{4\, r_{21} \cos^2\theta + 5 r_1^2 - 4 r_1 r_2}$$

$$f_3 = 4\, r_{21} \cos^2\theta + (r_2 - 2r_1)^2$$

nous avons

$$f = \frac{f_1 + f_2}{f_3}$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} = \frac{f_3\, \partial(f_1+f_2)/\partial\sigma_i \;-\; (f_1+f_2)\, \partial f_3/\partial\sigma_i}{f_3^2}$$

Nous devons donc calculer $\dfrac{\partial f_i}{\partial \sigma_j}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_i} = 2\,\frac{\partial r_2}{\partial \sigma_i}\, r_{21} \cos\theta + 2\, r_2\, \frac{\partial r_{12}}{\partial \sigma_i} \cos\theta + 2\, r_2\, r_{21}\, \frac{\partial \cos\theta}{\partial \sigma_i}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_i} = r_2 \left(2\,\frac{\partial r_1}{\partial \sigma_i} - \frac{\partial r_2}{\partial \sigma_i}\right)\sqrt{4\, r_{21} \cos^2\theta + 5 r_1^2 - 4 r_1 r_2}$$

$$+ \frac{\partial r_2}{\partial \sigma_i}\,(2r_1 - r_2)\sqrt{4\, r_{21} \cos^2\theta + 5 r_1^2 - 4 r_1 r_2}$$

$$+ \frac{r_2\,(2r_1 - r_2)\left(4\,\frac{\partial r_{21}}{\partial \sigma_i} \cos^2\theta + 8\, r_{21} \cos\theta\, \frac{\partial \cos\theta}{\partial \sigma_i} + 10 r_1\, \frac{\partial r_1}{\partial \sigma_i} - 4\left(\frac{\partial r_1}{\partial \sigma_i}\, r_2 + r_1 \frac{\partial}{\partial}\right.\right.}{2\sqrt{4\, r_{21} \cos^2\theta + 5 r_1^2 - 4 r_1 r_2}}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \sigma_i} = 4\,\frac{\partial r_{21}}{\partial \sigma_i} \cos^2\theta + 8\, r_{21} \cos\theta\, \frac{\partial \cos\theta}{\partial \sigma_i} + 2\,(r_2 - 2r_1)\left(\frac{\partial r_2}{\partial \sigma_i} - 2\,\frac{\partial r_1}{\partial \sigma_i}\right)$$

Le calcul de ces dérivées nécessite donc de connaître:

$$\frac{\partial r_1}{\partial \sigma_i} = \frac{a_1}{\sigma_c} \cdot \frac{\partial \sigma_{oct}}{\partial \sigma_i} + 2\,\frac{a_2}{\sigma_c} \cdot \frac{\sigma_{oct}}{\sigma_c} \cdot \frac{\partial \sigma_{oct}}{\partial \sigma_i}$$

comme

$$\frac{\partial \sigma_{oct}}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial}{\partial \sigma_i}\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right) = \frac{1}{3} \quad \forall i$$

d'où

$$\frac{\partial r_1}{\partial \sigma_i} = \frac{1}{3\sigma_c}\left(a_1 + 2\, a_2\, \frac{\sigma_{oct}}{\sigma_c}\right)$$

de même $$\frac{\partial r_2}{\partial \sigma_i} = \frac{1}{3\sigma_c}\left(b_1 + 2 b_2 \frac{\sigma_{oct}}{\sigma_c}\right)$$

$$\frac{\partial r_{21}}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial}{\partial \sigma_i}(r_2^2 - r_1^2) = 2 r_2 \frac{\partial r_2}{\partial \sigma_i} - 2 r_1 \frac{\partial r_1}{\partial \sigma_i}$$

$$\frac{\partial \cos\theta}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial}{\partial \sigma_i}\left(\frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}}\right)$$

d'où

$$\frac{\partial \cos\theta}{\partial \sigma_1} = \frac{3(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{\sqrt{2}\ \sqrt[3]{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}}$$

$$= \frac{3(\sigma_2-\sigma_3)^2}{\sqrt{2}\ .\ (3\tau_{oct})^{2/3}}$$

$$\frac{\partial \cos\theta}{\partial \sigma_2} = \frac{-3(\sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)}{\sqrt{2}\ (3\tau_{oct})^{2/3}}$$

$$\frac{\partial \cos\theta}{\partial \sigma_3} = \frac{-3(\sigma_2^2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3)}{\sqrt{2}\ (3\tau_{oct})^{2/3}}$$

Toutes les dérivées nécessaires sont alors calculées.

b) Application au cas biaxial

Le critère de William et Warnke ne tenant pas compte de l'histoire des sollicitations, nous avons choisi pour déterminer le critère de rupture dans l'espace (σ_1,σ_2) de fixer σ_2 et de ne faire varier que σ_1.

C'est ce qui est réalisé par le programme NEWTON dont le listingest joint à la fin de cet annexe. Ce programme nous a permis de tester l'influence du point de départ de nos itérations dans la solution trouvée. En effet, tout d'abord, la méthode de Newton n'est pas toujours

convergente. Ensuite le citère de rupture peut présenter deux solutions (une en charge et une en décharge).

Comme cela est indiqué au Chapitre IV pour notre formulation analytique seule est intérressante la solution obtenue pour $\sigma_1 > 0$.

Après divers essais nous avons retenu comme point de départ:

$$\sigma_1 = \sigma_1 + 200 \quad MPa$$

Nous obtenons alors les résultats suivants:
(rappelons que $\sigma_3 = 0$)

σ_2/σ_c	σ_1/σ_c
0	0.99
0.1	1.16
0.2	1.23
0.3	1.28
0.4	1.31
0.5	1.32
0.6	1.33
0.7	1.32
0.8	1.30
0.9	1.27
1	1.23
1.1	1.15
1.2	1.05

c) application au cas triaxial

En ce qui concerne le programme de simulation, la méthode utilisée est exactement semblable à celle décrite précedemment. En effet sur les chemins triaxiaux généralisés une seule contrainte varie (voir Chapitre II).

Pour le cas particulier de la comparaison des essais du BAM (voir figure IV. 9) avec le critère de rupture nous avons réalisé un programme spécifique qui calcule la valeur du critère le long du trajet de chargement, s'arrêtant lorsque cette valeur s'annule. Est alors calculé τ_{oct} ce qui permet, connaissant θ, de comparer les résultats obtenus avec ceux du BAM. Le listing de ce programme, nommé WWBAM, est présenté, avec un exemple d'application, à la fin de cet annexe.

```
1 ' ***********************************
2 ' *                                 *
3 ' *     CRITERE DE RUPTURE DE       *
4 ' *       WILLIAM ET WARNKE         *
5 ' *                                 *
6 ' *       methode de newton         *
7 ' *                                 *
8 ' ***********************************
9 '
10 '
11 '  une seule contrainte varie,
13 '  les deux autres sont fixes
14 '
15 '
16 '  les compressions sont > 0
17 '
18 '
20 '  VERSION 2.0
21 '  mise a jour le 29/12/86
22 '
27 '
28 '
29 ' coeffs du critere de William et Warnke
30 '
31 ax=0.05:ay=-0.51:az=-0.04
32 bx=0.09:by=-0.9:bz=-0.24
33 '
34 '
35 PRINT "II=0 ----> ecran":PRINT "II=8 ----> imprimante":INPUT "votre choix"
:IF ii=0 OR ii=8 THEN GOTO 40 ELSE GOTO 35
39 '
40 CLS:INPUT "fc";fc:ft=-0.0934*fc
41 PRINT #ii,"fc=";fc:PRINT #ii
50 PRINT:PRINT "entrez les 2 valeurs connues de contraintes":INPUT "s2,s3";s2
:IF (s2<ft OR s3<ft) THEN PRINT "impossible car ft="
;ft:GOTO 50
51 PRINT #ii,"s2=";s2:PRINT #ii,"s3=";s3
52 s1=-fc-200:PRINT #ii,"s1="     ' point de depart des iterations
70 s2=-s2
80 s3=-s3
90 GOSUB 2000
91 '
92 '
100 s=s1
110 s1=s1-f/df
111 PRINT #ii, -s1
120 IF (ABS(s-s1))<0.5 THEN PRINT #ii:PRINT #ii,"s1,s2,s3="USING "###.#";-s1;
;-s3 ELSE GOTO 90
125 PRINT #ii:PRINT #ii,"*************************"
130 PRINT #ii,"en normant / fc:":PRINT #ii:PRINT #ii,"  s1    s2    s3":PRINT
,USING "#.##  "; -s1/fc;-s2/fc;-s3/fc
135 PRINT #ii,"*************************"
140 GOTO 50
200 END
1997 '
1998 '
1999 '
2000 sa=(s1+s2+s3)/(3*fc)
```

```
2010 ta1=(((s1-s2)^2)+((s2-s3)^2)+((s3-s1)^2))
2020 ta=(ta1^0.5)/((15^0.5)*fc)
2030 r1=(ax+(ay*sa)+(az*(sa^2)))
2040 r2=(bx+(by*sa)+(bz*(sa^2)))
2041 IF (s1>s2) OR (s1=s2) GOTO 2065
2042 IF (s1>s3) OR (s1=s3) GOTO 2061
2043 IF (s2>s3) OR (s2=s3) GOTO 2061
2050 c=((2*s3)-s1-s2)/((2^0.5)*(ta1^0.5))
2051 dc1=((-3)*((s2^2)-(s1*s2)-(s3*s2)+(s1*s3)))/((2^0.5)*(ta1^1.5)):GOTO 2070
2061 c=((2*s2)-s3-s1)/((2^0.5)*(ta1^0.5))
2062 dc1=((-3)*((s3^2)-(s1*s3)-(s2*s3)+(s1*s2)))/((2^0.5)*(ta1^1.5)):GOTO 2070
2065 IF (s1<s3) OR (s1=s3) GOTO 2050
2066 c=((2*s1)-s3-s2)/((2^0.5)*(ta1^0.5))
2067 dc1=(3*(((s2-s3)^2)))/(2^0.5)*(ta1^1.5)
2070 r12=((r2^2)-(r1^2))
2080 f1=2*r2*r12*c
2090 f2=r2*((2*r1)-r2)*(((4*r12*(c^2))+(5*(r1^2))-(4*r1*r2))^0.5)
2100 f3=(4*r12*(c^2))+((r2-(2*r1))^2)
2110 f=((f1+f2)/f3)-ta
2120 da1=(ay+(2*az*sa))/(3*fc)
2130 da2=(by+(2*bz*sa))/(3*fc)
2140 da12=((2*r2*da2)-(2*r1*da1))
2150 d1=((2*s1)-s2-s3)/(((15^0.5)*fc)*(ta1^0.5))
2160 df11=2*((da2*r12*c)+(r2*da12*c)+(r2*r12*dc1))
2170 dg=((4*r12*(c^2))+(5*(r1^2))-(4*r1*r2))
2180 dg1=da2*((2*r1)-r2)*(dg^0.5)
2190 dh=((4*da12*(c^2))+(10*r1*da1)-(4*da1*r2)-(4*r1*da2))
2200 dh1=dh+(8*r12*dc1*c)
2210 df21=dg1+dg2+(dg3*dh1)
2220 dk=(4*da12*(c^2))+(2*(r2-(2*r1))*(da2-(2*da1)))
2230 df31=dk+(8*r12*c*dc1)
2240 df=(((f3*(df11+df21))-(df31*(f1+f2)))/(f3^2))-d1
2250 RETURN
```

```
     Programme NEWTON:
     exemple d'application


fc= 40

s2= 0
s3= 0
s1=
 183.399557
 136.612306
 97.8675087
 69.1042091
 51.5514128
 43.3782317
 40.5114571
 39.6827392
 39.4621671

s1,s2,s3= 39.5  0.0  0.0

**************************
en normant / fc:

  s1   s2    s3
0.99  0.00  0.00
**************************


s2= 10
s3= 0
s1=
 185.953433
 141.892383
 106.424165
 81.0868955
 65.5264863
 57.1821997
 53.1751481
 51.4042673
 50.6612973
 50.3578179

s1,s2,s3= 50.4 10.0  0.0

**************************
en normant / fc:

  s1   s2    s3
1.26  0.25  0.00
**************************
```

```
1 ' ********************************
2 ' *                              *
3 ' *     CRITERE DE W. ET W.      *
4 ' *                              *
5 ' *       chemins du BAM         *
6 ' *                              *
7 ' ********************************
10 '
11 ' VERSION 1.1    prog. WWBAM
12 '
13 ' derniere mise a jour: 29/12/86
14 '
28 '
29 ' coeffs du critere
30 '
31 ax=0.05:ay=-0.51:az=-0.04
32 bx=0.09:by=-0.9:bz=-0.24
33 PRINT "II=0 ----> ecran ":PRINT "II=8 ----> imprimante":INPUT "votre choix";i
i:IF ii=0 OR ii=8 THEN GOTO 40 ELSE GOTO 33:
40 CLS:INPUT "fc";fc:PRINT #ii, "fc=";fc
50 INPUT  "pression moyenne "; p:PRINT #ii,"pression moyenne = ";p
51 PRINT #ii, "type de chemin suivi (1,2 ou 3)"
52 INPUT  "votre choix ";ch:IF ch=1 OR ch=2 OR ch=3 THEN GOTO 53 ELSE GOTO 51
53 PRINT #ii,"chemin suivi = ";ch:IF ch=1 THEN GOSUB 3001
54 IF ch=2 THEN GOSUB 3010
55 IF ch=3 THEN GOSUB 3020
58 '
59 '
81 f1=0:FOR i=1 TO 100:s1=s1+ds1:s2=s2+ds2:s3=s3+ds3:GOSUB 2000
82 xx=f1*f:IF xx<0 GOTO 100
85 f1=f:xs1=s1:xs2=s2:xs3=s3:NEXT i:STOP
100 PRINT #ii," s1      s2      s3"
110 ys1=-(xs1+(s1-xs1)*f1/(f1-f))
120 ys2=-(xs2+(s2-xs2)*f1/(f1-f))
130 ys3=-(xs3+(s3-xs3)*f1/(f1-f))
140 PRINT #ii,USING "###.# ";ys1;ys2;ys3
150 GOSUB 4000
200 END
2000 sa=(s1+s2+s3)/(3*fc)
2010 ta1=(((s1-s2)^2)+((s2-s3)^2)+((s3-s1)^2))
2020 ta=(ta1^0.5)/((15^0.5)*fc)
2030 r1=(ax+(ay*sa)+(az*(sa^2)))
2040 r2=(bx+(by*sa)+(bz*(sa^2)))
2041 IF (s1>s2) OR (s1=s2) GOTO 2065
2042 IF (s1>s3) OR (s1=s3) GOTO 2061
2043 IF (s2>s3) OR (s2=s3) GOTO 2061
2050 c=((2*s3)-s1-s2)/((2^0.5)*(ta1^0.5))
2051 dc1=((-3)*((s2^2)-(s1*s2)-(s3*s2)+(s1*s3)))/((2^0.5)*(ta1^1.5)):GOTO 2070
2061 c=((2*s2)-s3-s1)/((2^0.5)*(ta1^0.5))
2062 dc1=((-3)*((s3^2)-(s1*s3)-(s2*s3)+(s1*s2)))/((2^0.5)*(ta1^1.5)):GOTO 2070
2065 IF (s1<s3) OR (s1=s3) GOTO 2050
2066 c=((2*s1)-s3-s2)/((2^0.5)*(ta1^0.5))
2067 dc1=(3*(((s2-s3)^2)))/(2^0.5)*(ta1^1.5)
2070 r12=((r2^2)-(r1^2))
2080 f1=2*r2*r12*c
2090 f2=r2*((2*r1)-r2)*(((4*r12*(c^2))+(5*(r1^2))-(4*r1*r2))^0.5)
2100 f3=(4*r12*(c^2))+((r2-(2*r1))^2)
2110 f=((f1+f2)/f3)-ta
```

```
2120 da1=(ay+(2*az*sa))/(3*fc)
2130 da2=(by+(2*bz*sa))/(3*fc)
2140 da12=((2*r2*da2)-(2*r1*da1))
2150 d1=((2*s1)-s2-s3)/(((15^0.5)*fc)*(ta1^0.5))
2160 df11=2*((da2*r12*c)+(r2*da12*c)+(r2*r12*dc1))
2170 dg=((4*r12*(c^2))+(5*(r1^2))-(4*r1*r2))
2180 dg1=da2*((2*r1)-r2)*(dg^0.5)
2190 dh=((4*da12*(c^2))+(10*r1*da1)-(4*da1*r2)-(4*r1*da2))
2200 dh1=dh+(8*r12*dc1*c)
2210 df21=dg1+dg2+(dg3*dh1)
2220 dk=(4*da12*(c^2))+(2*(r2-(2*r1))*(da2-(2*da1)))
2230 df31=dk+(8*r12*c*dc1)
2240 df=(((f3*(df11+df21))-(df31*(f1+f2)))/(f3^2))-d1
2250 RETURN
3000 '
3001 ' stress path 1
3002 '
3003 s1=-p-4:s2=-p+2:s3=-p+2
3004 ds1=-2:ds2=1:ds3=1
3006 RETURN
3010 ' stress path 2
3011 '
3012 '
3013 s1=-p-2:s2=-p:s3=-p+2
3014 ds1=-1:ds2=0:ds3=1
3016 RETURN
3020 ' stress path 3
3021 s1=-p-2:s2=-p-2:s3=-p+4
3022 ds1=-1:ds2=-1:ds3=2
3024 RETURN
4000 ' cacul de tau octahedral
4010 '
4020 '
4030 t0=(SQR(2)/3)*SQR(s1^2+s2^2+s3^2-s1*s2-s2*s3-s3*s1)
4040 PRINT #ii,"tau oct. = " USING "###.#";t0
4050 RETURN
```

Exemple d'application de WWBAM:

```
fc= 40
pression moyenne =  50
type de chemin suivi (1,2 ou 3)
chemin suivi =  1
 s1      s2      s3
111.9  19.0  19.0
tau oct. =  43.8
```

```
fc= 40
pression moyenne =  50
type de chemin suivi (1,2 ou 3)
chemin suivi =  2
 s1      s2      s3
 94.0  50.0   6.0
tau oct. =  35.9
```

```
fc= 40
pression moyenne =  50
type de chemin suivi (1,2 ou 3)
chemin suivi =  3
 s1      s2      s3
 73.0  73.0   4.0
tau oct. =  32.5
```

Annexe 4

Listing du programme de simulation

```
1 ' ********* simulation ************
2 ' **** modele incremental *********
3 ' ****   elwi murray      *********
4 '          SIMUL6   version 1.0  - mise a jour le 1/3/87 - entree globale des c
hemins - incremental non lineaire - eq. de SAENZ sim
plifiee - estimation de ecu
5 DIM t(10),av(10),au(10),u(10),at(4,10),ue(10),ep(10),em(10),vp(10,10),vm(10,10
)
6 DIM a(10,10),b(10,10),d(10),h(10),nb(10),x(10),y(10),z(10),ps1(10),fx(10),dfx(
10)
7 DIM ps2(10),ps3(10),fy(10),fz(10),dfy(10),dfz(10),aw(10),ay(10),az(10),ps4(10)
,ps5(10),ps6(10)
8 DIM faw(10),fay(10),faz(10),dfaw(10),dfay(10),dfaz(10),ec(10),sigc(10)
9 DIM sig(3,100),eps(3,100)
10 '
11 '    traitement du bug de l'openout
12 OPENOUT"bidon":MEMORY HIMEM-1:CLOSEOUT
13 '
14 '
15 ON ERROR GOTO 3000
20 '   coeff. critere de
21 '   WILLIAM et WARNKE
22 '
23 h1=0.05:h2=-0.51:h3=-0.04
24 k1=0.09:k2=-0.9:k3=-0.24
25 l1=0.025:l2=-0.54:l3=-0.015
26 m1=0.046:m2=-1:m3=-0.1
27 '
28 '
30 '   donnees
31 MODE 2:PRINT "Conventions: compression>0;extensions<0":PRINT "Resistance ult
me en compression simple (MPa)":INPUT "Fcu = ";fcu
32 ecu=0.001*0.8*(fcu^0.33):PRINT "ec=";ecu
33 PRINT:PRINT "module d'young initial (MPa)":INPUT "Eo = ";e0
34 PRINT :PRINT "coeff. de poisson initial":INPUT "Vo = ";v0
35 '
40 '   initialisations
41 '
42 FOR i=1 TO 3
43 t(i)=0:u(i)=0:ue(i)=0
44 ep(i)=e0:em(i)=e0:av(i)=v0
45 NEXT i
46 '
47 compt=0
48 '
49 '
50 '   donnee des chemins
51 '     en contraintes
52 '
53 CLS:INPUT "nb de chemins a suivre ";nc
54 FOR n=1 TO nc:PRINT "chemin numero ";n:PRINT "nb d'increments sur ce chemin":
INPUT nb(n):
55 PRINT "valeur des increments: ":INPUT at(1,n),at(2,n),at(3,n)
56 NEXT n
57 CLS: PRINT "les def. sont multipliees par 1000":PRINT:FOR n=1 TO nc
60 n1=0
61 '
62 '   test isotropie
```

```
63 mt=(t(1)+t(2)+t(3))/3
64 dev=(t(1)-mt)^2+(t(2)-mt)^2+(t(3)-mt)^2
65 mt2=(at(1,n)+at(2,n)+at(3,n))/3:dev2=(at(1,n)-mt2)^2+(at(2,n)-mt2)^2+(at(3,n)
-mt2)^2
66 IF ((dev>1) OR (dev2>1)) GOTO 100
67 '
68 '   chemin iso
69 '
70 PRINT "chemin iso"
71 np=nb(n)
72 FOR l=1 TO np:FOR i=1 TO 3
73 ak(1)=((-1.4E-09)*(10*fcu))+(0.00000107)
74 u(i)=ak(1)*((10*(l*at(i,n))))^1.3
75 t(i)=t(i)+at(i,n)
76 ue(i)=ue(i)+(at(i,n)/ep(i))
77 NEXT i
78 '
79 '
80 PRINT USING "####.#";t(1);t(2);t(3)    ' contraintes
81 PRINT USING "###.##";u(1)*1000;u(2)*1000;u(3)*1000    ' deformations*1000
82 compt=compt+1
83 sig(1,compt)=t(1)
84 sig(2,compt)=t(2)
85 sig(3,compt)=t(3)
86 eps(1,compt)=u(1)
87 eps(2,compt)=u(2)
88 eps(3,compt)=u(3)
99 NEXT l:GOTO 999
100 '     chemin deviatoire
101 '
102 'PRINT "suivant x: "
103 x$="c"              '  contraintes
104 x(1)=-fc-200
105 p=1
106 x1=x(p):x2=-t(2):x3=-t(3):GOSUB 1000     '  newton
107 fx(p)=f
108 dfx(p)=df1
109 x(p+1)=x(p)-(fx(p)/dfx(p))
110 ps1(p)=x(p+1)-x(p)
111 x1p=ps1(p)
112 IF (x1p>0) OR(x1p=0) GOTO 114
113 x1p=-x1p
114 IF (x1p<1) GOTO 117
115 p=p+1
116 GOTO 106
117 sigc(1)=-x(p+1)
118 PRINT "sigma1r = ";sigc(1)
119 aw(1)=-ue(1)-0.01:p=1:x$="d"
120 x1=aw(p):x2=-ue(2):x3=-ue(3):GOSUB 1000     '  newton
121 faw(p)=f
122 dfaw(p)=df1
123 aw(p+1)=aw(p)-(faw(p)/dfaw(p))
124 ps4(p)=aw(p+1)-aw(p)
125 aw1p=ps4(p)
126 IF (aw1p >0) GOTO 128
127 aw1p=-aw1p
128 IF (aw1p <0.001) GOTO 130
129 p=p+1:GOTO 120
130 ec(1)=-aw(p+1)
```

```
131 'PRINT "eps1r = ";ec(1)
132 '
133 '
137 '
138 '
139 '
140 'PRINT "suivant Y "
141 y(1)=-fc-200
142 p=1:x$="c"
143 x2=y(p):x1=-t(1):x3=-t(3):GOSUB 1000     '  newton
144 fy(p)=f
145 dfy(p)=df2
146 y(p+1)=y(p)-(fy(p)/dfy(p))
147 ps2(p)=y(p+1)-y(p)
148 y1p=ps2(p)
149 IF (y1p >0) GOTO 151
150 y1p=-y1p
151 IF (y1p <1) GOTO 153
152 p=p+1:GOTO 143
153 sigc(2)=-y(p+1)
154 PRINT " sigma2r = ";sigc(2)
155 '
156 '
157 '
158 ay(1)=-ue(2)-0.01
159 p=1:x$="d"
160 x1=-ue(1):x2=ay(p):x3=-ue(3):GOSUB 1000      '  newton
161 fay(p)=f
162 dfay(p)=df2
163 ay(p+1)=ay(p)-(fay(p)/dfay(p))
164 ps5(p)=ay(p+1)-ay(p)
165 ay1p=ps5(p)
166 IF (ay1p > 0) GOTO 168
167 ay1p=-ay1p
168 IF (ay1p <0.001) GOTO 170
169 p=p+1:GOTO 160
170 ec(2)=-ay(p+1)
171 'PRINT " eps2r = ";ec(2)
172 '
173 '
174 '
178 '
179 '
180 'PRINT " suivant Z "
181 z(1)=-fc-200
182 p=1
183 x1=-t(1):x2=-t(2):x3=z(p)
184 x$="c":GOSUB 1000
185 fz(p)=f
186 dfz(p)=df3
187 z(p+1)=z(p)-(fz(p)/dfz(p))
188 ps3(p)=z(p+1)-z(p)
189 z1p=ps3(p)
190 IF (z1p >0) GOTO 192
191 z1p=-z1p
192 IF (z1p<1) GOTO 194
193 p=p+1:GOTO 183
194 sigc(3)=-z(p+1)
195 PRINT "sigma3r = ";sigc(3)
```

```
196 '
197 '
200 az(1)=-ue(3)-0.01
201 p=1:x$="d"
202 x1=-ue(1):x2=-ue(2):x3=az(p):GOSUB 1000
203 faz(p)=f
204 dfaz(p)=df3
205 az(p+1)=az(p)-(faz(p)/dfaz(p))
206 ps6(p)=az(p+1)-az(p)
207 az1p=ps6(p)
208 IF (az1p > 0) GOTO 210
209 az1p=-az1p
210 IF (az1p < 0.001) GOTO 212
211 p=p+1:GOTO 202
212 ec(3)=-az(p+1)
213 'PRINT " eps3r = ";ec(3)
214 '
215 '
216 '
217 '
218 '
219 '
250 '     calcul des Aij et Bij
251 '
252 '
253 FOR k=1 TO 3
254 u1=ec(k):t1=sigc(k):t2=ue(k)
255 GOSUB 2000
256 ep(k)=fp:em(k)=fm:av(k)=gp
257 NEXT k
258 '
259 '
260 FOR i=1 TO 3:FOR j=1 TO 3
261 vp(i,j)=-1
262 IF (i=j) GOTO 264
263 vp(i,j)=((av(i)*av(j))^0.5)*((ep(j)/ep(i))^0.5)
264 NEXT j:NEXT i
265 '
266 '
267 '
270 FOR i=1 TO 3:FOR j=1 TO 3
271 vm(i,j)=vp(i,j)
272 NEXT j:NEXT i
273 '
274 '
280 FOR i=1 TO 3:FOR j =1 TO 3
281 a(i,j)=(-1)*(((vp(j,i)/ep(j))+(vm(j,i)/em(j)))/2)
282 b(i,j)=(-1)*(((vp(j,i)/ep(j))-(vm(j,i)/em(j)))/2)
283 NEXT j:NEXT i
284 '
285 '
286 '
290 FOR i=1 TO 3
291 j=0
292 d(i)=0
293 j=j+1
294 d(i)=d(i)+(a(i,j)*at(j,n))
295 IF( (j<3) OR (j=3)) GOTO 293
```

```
296 k=0
297 h(i)=0
298 k=k+1
299 h(i)=h(i)+(b(i,k)*(at(k,n)^2))
300 IF k<4 GOTO 298
301 al=(at(1,n)^2)+(at(2,n)^2)+(at(3,n)^2)
302 au(i)=d(i)+(h(i)/al^0.5)
303 NEXT i
304 '
305 '
306 '
310 FOR i=1 TO 3
311 t(i)=t(i)+at(i,n)
312 u(i)=u(i)+au(i)
313 ue(i)=ue(i)+(at(i,n)/ep(i))
314 NEXT i
315 '
316 '
317 '
320 PRINT USING "####.#";t(1),t(2),t(3)
321 PRINT USING "###.##";u(1)*1000,u(2)*1000,u(3)*1000
322 '
323 compt=compt+1
324 sig(1,compt)=t(1)
325 sig(2,compt)=t(2)
326 sig(3,compt)=t(3)
327 eps(1,compt)=u(1)
328 eps(2,compt)=u(2)
329 eps(3,compt)=u(3)
330 FOR i=1 TO 3
331 IF (t(i) > sigc(i)) THEN PRINT "rupture ":GOSUB 3000:END
332 NEXT i
333 n1=n1+1
334 IF (n1 <nb(n)) GOTO 100
999 NEXT n:GOSUB 3000:END
1000 '
1001 '
1002 '*************** sub newton **********
1003 '
1004 '
1010 ' passage dps7 -> cpc464
1011 '
1012 x=x1:y=x2:z=x3
1013 IF x$="c" THEN ax=h1:ay=h2:az=h3:bx=k1:by=k2:bz=k3:t=fcu
1014 IF x$="d" THEN ax=l1:ay=l2:az=l3:bx=m1:by=m2:bz=m3:t=ecu
1015 '
1016 '
1020 sa=(x+y+z)/(3*t)
1021 ta1=(((x-y)^2)+((y-z)^2)+((z-x)^2))
1022 ta=(ta1^0.5)/((15^0.5)*t)
1023 a1=(ax+(ay*sa)+(az*(sa^2)))
1024 a2=(bx+(by*sa)+(bz*(sa^2)))
1025 IF (x>y) GOTO 1050
1026 IF (x>z) GOTO 1040
1027 IF (y>z) GOTO 1040
1028 '
1029 '
1030 c=((2*z)-x-y)/((2^0.5)*(ta1^0.5))
1031 dc1=((-3)*((y^2)-(x*y)-(z*y)+(x*z)))/((2^0.5)*(ta1^1.5))
```

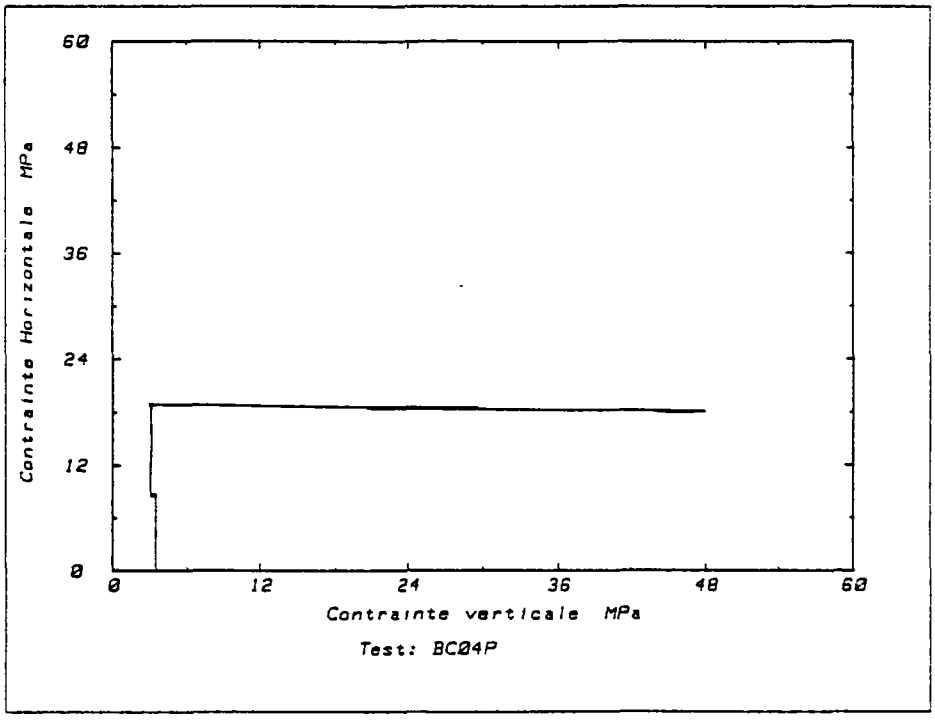
```
1032 dc2=((-3)*((x^2)-(x*y)-(z*x)+(y*z)))/((2^0.5)*(ta1^1.5))
1033 dc3=(3*(((x-y)^2)))/((2^0.5)*(ta1^1.5))
1034 GOTO 1060
1035 '
1036 '
1037 '
1040 c=((2*y)-x-z)/((2^0.5)*(ta1^0.5))
1041 dc1=((-3)*((z^2)-(x*z)-(z*y)+(x*y)))/((2^0.5)*(ta1^1.5))
1042 dc2=(3*(((x-z)^2)))/((2^0.5)*(ta1^1.5))
1043 dc3=((-3)*((x^2)-(x*y)-(z*x)+(y*z)))/((2^0.5)*(ta1^1.5))
1044 GOTO 1060
1045 '
1046 '
1047 '
1050 IF (x<z) GOTO 1030
1051 c=((2*x)-y-z)/((2^0.5)*(ta1^0.5))
1052 dc1=(3*(((y-z)^2)))/((2^0.5)*(ta1^1.5))
1053 dc2=((-3)*((z^2)-(z*y)-(z*x)+(y*x)))/((2^0.5)*(ta1^1.5))
1054 dc3=((-3)*((y^2)-(x*y)-(z*y)+(x*z)))/((2^0.5)*(ta1^1.5))
1055 '
1056 '
1057 '
1060 a12=((a2^2)-(a1^2))
1061 f1=2*a2*a12*c
1062 f2=a2*((2*a1)-a2)*(((4*a12*(c^2))+(5*(a1^2))-(4*a1*a2))^0.5)
1063 f3=(4*a12*(c^2))+((a2-(2*a1))^2)
1064 f=((f1+f2)/f3)-ta
1065 da1=(ay+(2*az*sa))/(3*t)
1066 da2=(by+(2*bz*sa))/(3*t)
1067 da12=((2*a2*da2)-(2*a1*da1))
1068 d1=((2*x)-y-z)/(((15^0.5)*t)*(ta1^0.5))
1069 d2=((2*y)-x-z)/(((15^0.5)*t)*(ta1^0.5))
1070 d3=((2*z)-x-y)/(((15^0.5)*t)*(ta1^0.5))
1071 df11=2*((da2*a12*c)+(a2*da12*c)+(a2*a12*dc1))
1072 df12=2*((da2*a12*c)+(a2*da12*c)+(a2*a12*dc2))
1073 df13=2*((da2*a12*c)+(a2*da12*c)+(a2*a12*dc3))
1074 dg=((4*a12*(c^2))+(5*(a1^2))-(4*a1*a2))
1075 dg1=da2*((2*a1)-a2)*(dg^0.5)
1076 dg2=a2*((2*da1)-da2)*(dg^0.5)
1077 dg3=a2*((2*a1)-a2)/(2*(dg^0.5))
1078 dh=((4*da12*(c^2))+(10*a1*da1)-(4*da1*a2)-(4*a1*da2))
1079 dh1=dh+(8*a12*dc1*c)
1080 dh2=dh+(8*a12*dc2*c)
1081 dh3=dh+(8*a12*dc3*c)
1082 df21=dg1+dg2+(dg3*dh1)
1083 df22=dg1+dg2+(dg3*dh2)
1084 df23=dg1+dg2+(dg3*dh3)
1085 dk=(4*da12*(c^2))+(2*(a2-(2*a1))*(da2-(2*da1)))
1086 df31=dk+(8*a12*c*dc1)
1087 df32=dk+(8*a12*c*dc2)
1088 df33=dk+(8*a12*c*dc3)
1089 df1=(((f3*(df11+df21))-(df31*(f1+f2)))/(f3^2))-d1
1090 df2=(((f3*(df12+df22))-(df32*(f1+f2)))/(f3^2))-d2
1091 df3=(((f3*(df13+df23))-(df33*(f1+f2)))/(f3^2))-d3
1092 RETURN:END
1093 '
1094 '
1095 '
1096 '
```

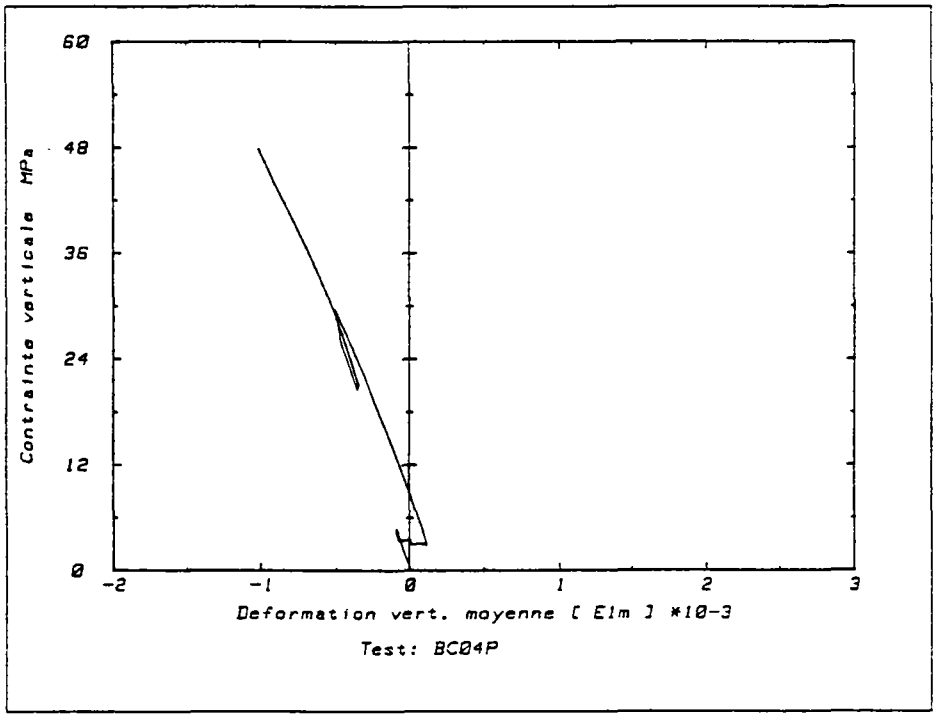
```
1097 '
1098 '
1099 '
2000 '
2001 '********* sub f0 **********
2002 '
2003 '
2004 x=u1:y=t1:z=t2
2006 r2=(e0*x)/y
2007 fpa=1-(z/x)^2
2009 fpb=1+(r2-2)*(z/x)+(z/x)^2
2010 fp=e0*(fpa/(fpb^2))
2011 fm=e0          ' inc. non lin.
2012 gp=v0*(1+(1.4*(z/x))-(5*((z/x)^2))+(8*((z/x)^3)))
2013 gm=v0          ' inc. non lin.
2014 RETURN:END
3000 '
3001 '******* sauvegarde *******
3002 '
3003 '
3004 PRINT "voulez vous sauvegarder les resultats ? (o/n)":INPUT q$
3005 IF q$="n" THEN RETURN
3006 CAT:PRINT "nom du fichier = ?":INPUT f$:OPENOUT f$
3007 PRINT #9,compt
3008 FOR i=1 TO 3:FOR j=0 TO compt
3009 PRINT #9,USING "####.#";sig(i,j):PRINT #9,USING "###.##";eps(i,j)*1000
3010 NEXT j:NEXT i
3011 PRINT #9,fcu
3012 PRINT #9,ecu
3013 PRINT #9,e0
3014 PRINT #9,v0
3020 CLOSEOUT
```

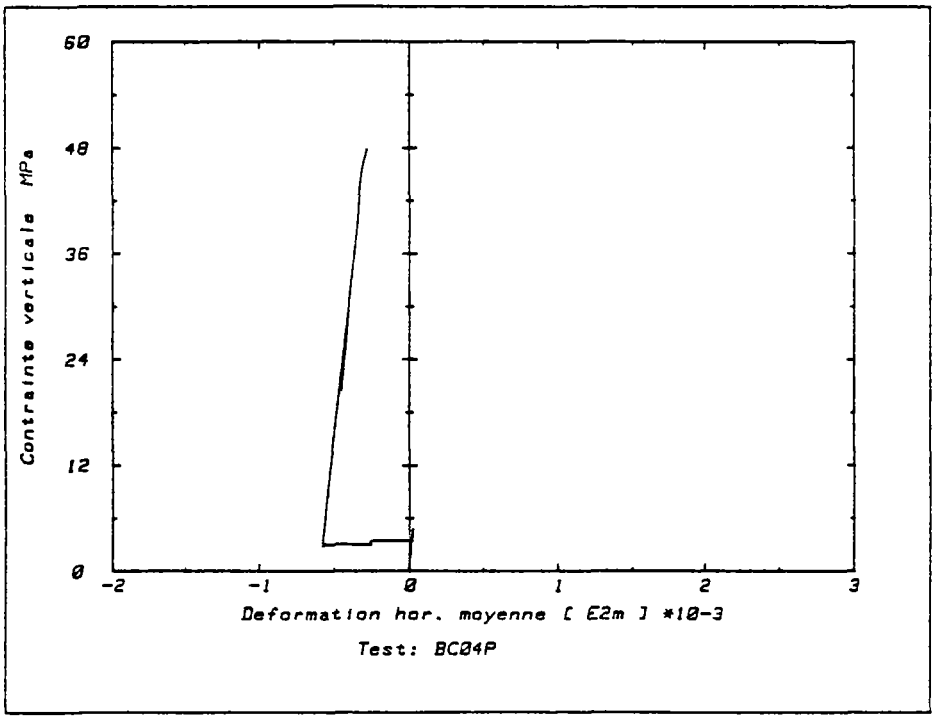
Annexe 5

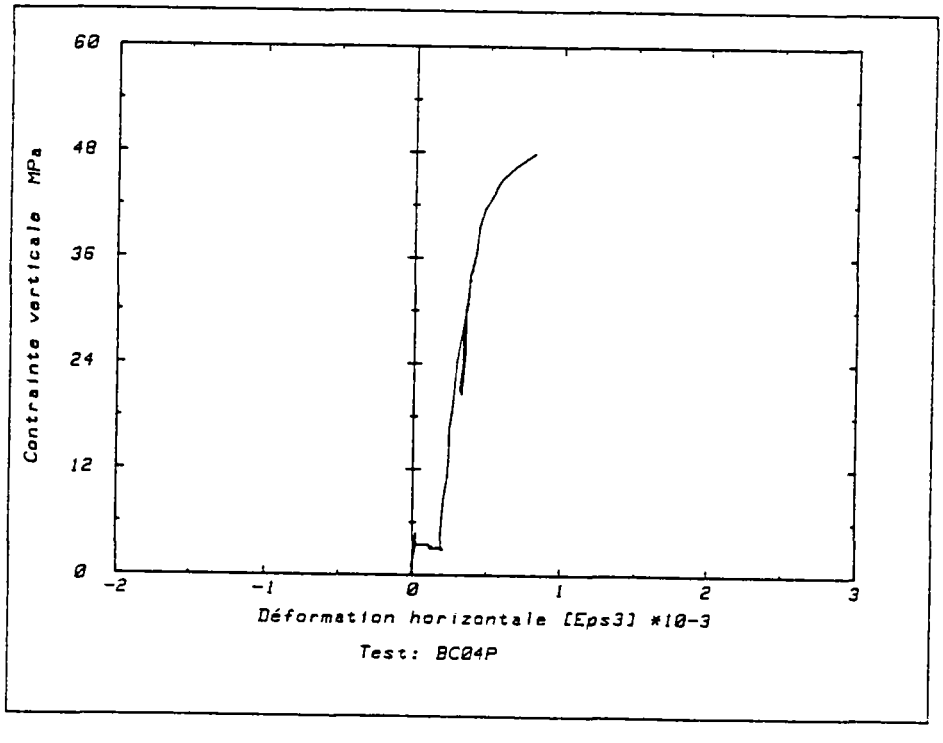
Essais biaxiaux

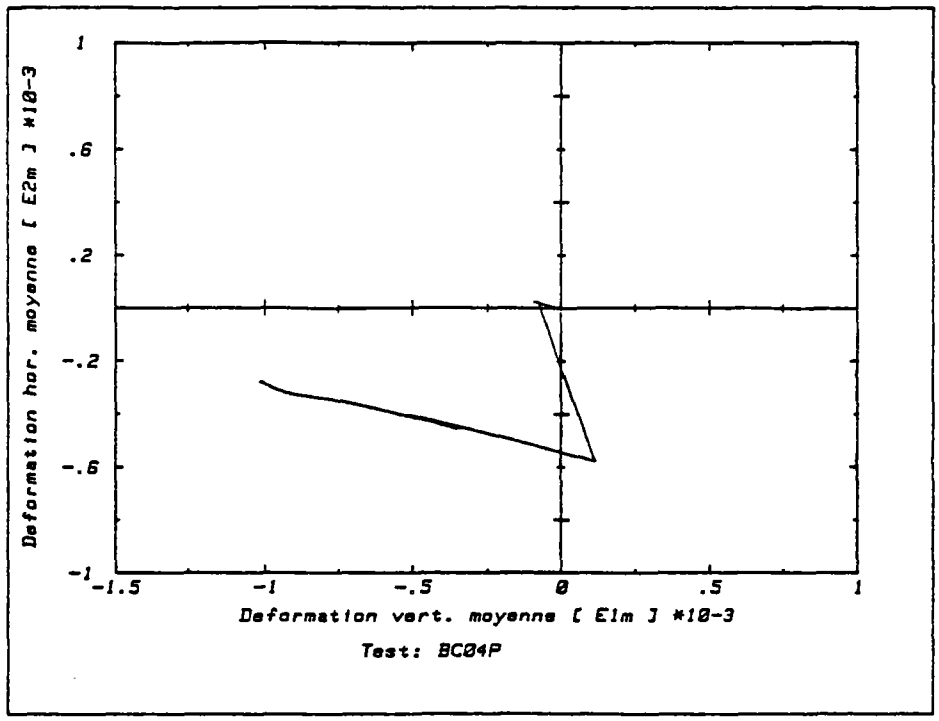
Essai BC04P

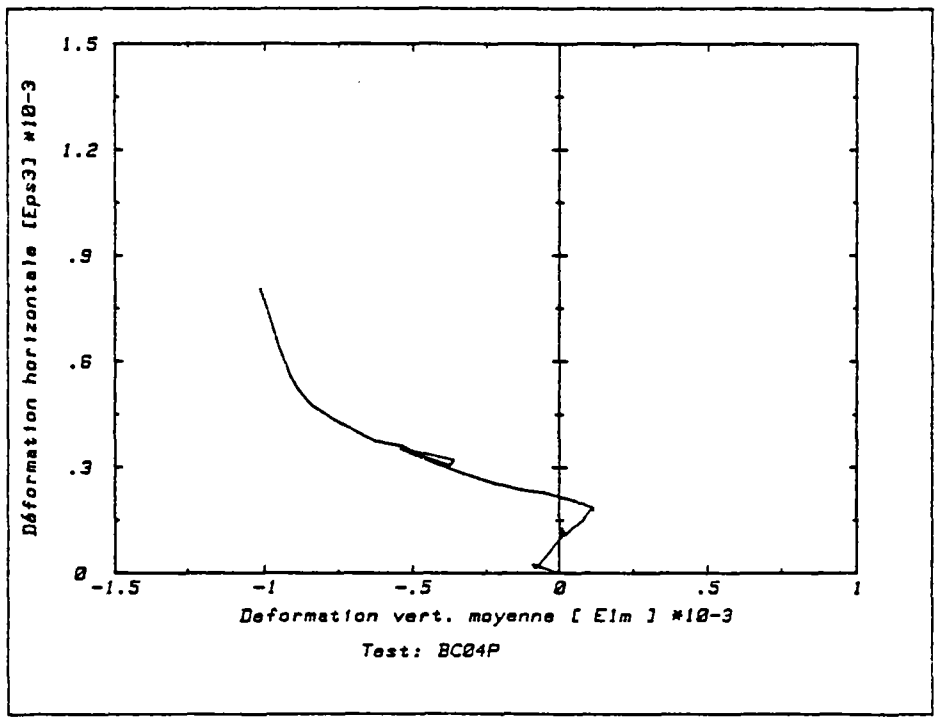

60
48
36
24
12
0
Contrainte Horizontale MPa
0
12
24
36
48
60
Contrainte verticale MPa
Test: BC04P


60
48
36
24
12
0
Contrainte verticale MPa
-2
-1
0
1
2
3
Deformation vert. moyenne [Elm] *10-3
Test: BC04P

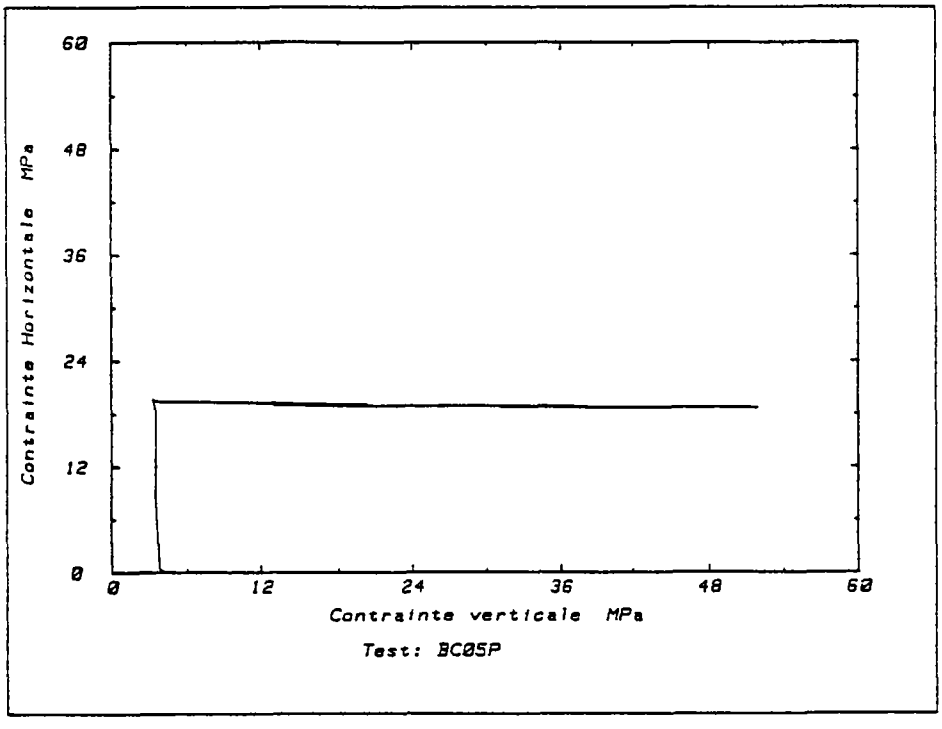

60
48
36
24
12
0
Contrainte verticale MPa
-2
-1
0
1
2
3
Deformation hor. moyenne [E2m] *10-3
Test: BC04P

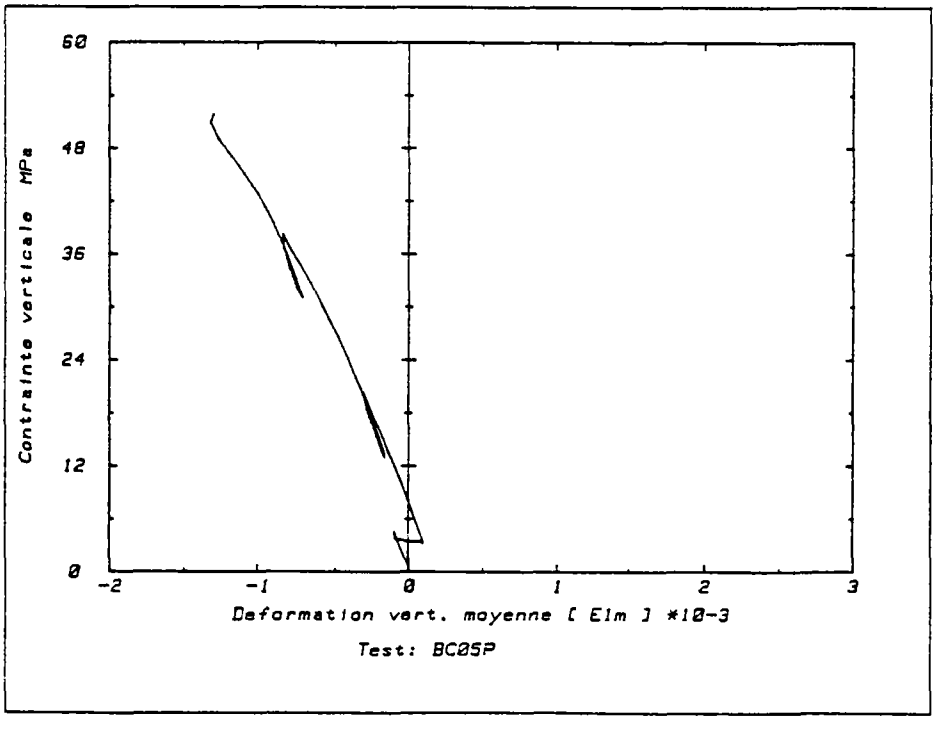

60
48
36
24
12
0
Contrainte verticale MPa
-2
-1
0
1
2
3
Déformation horizontale [Eps3] *10-3
Test: BC04P

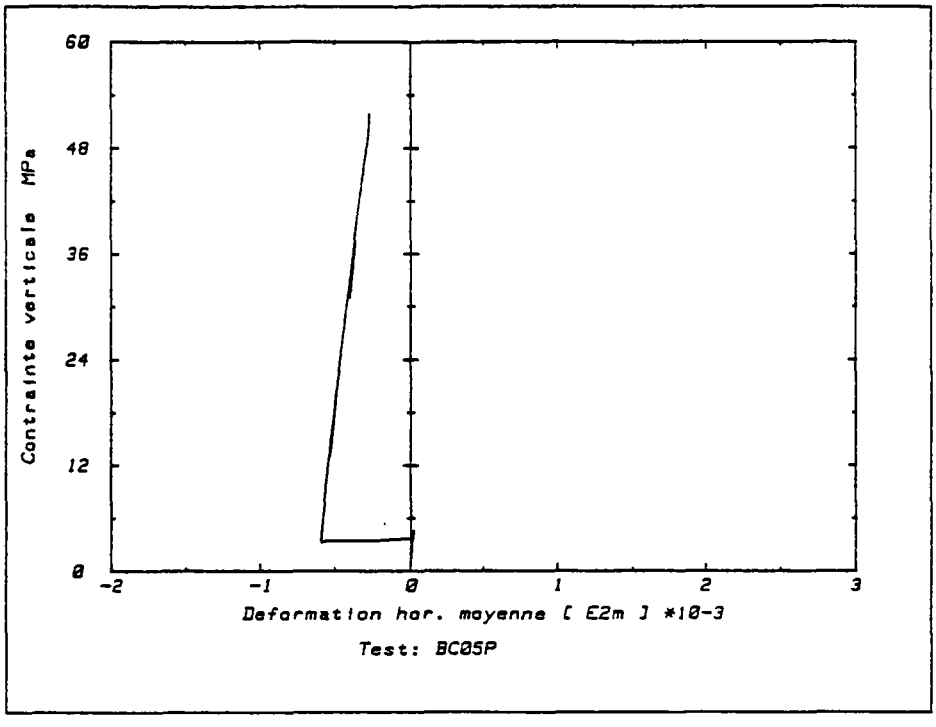

Deformation hor. moyenne [E2m] *10-3
1
.6
.2
-.2
-.6
-1
-1.5
-1
-.5
0
.5
1
Deformation vert. moyenne [E1m] *10-3
Test: BC04P

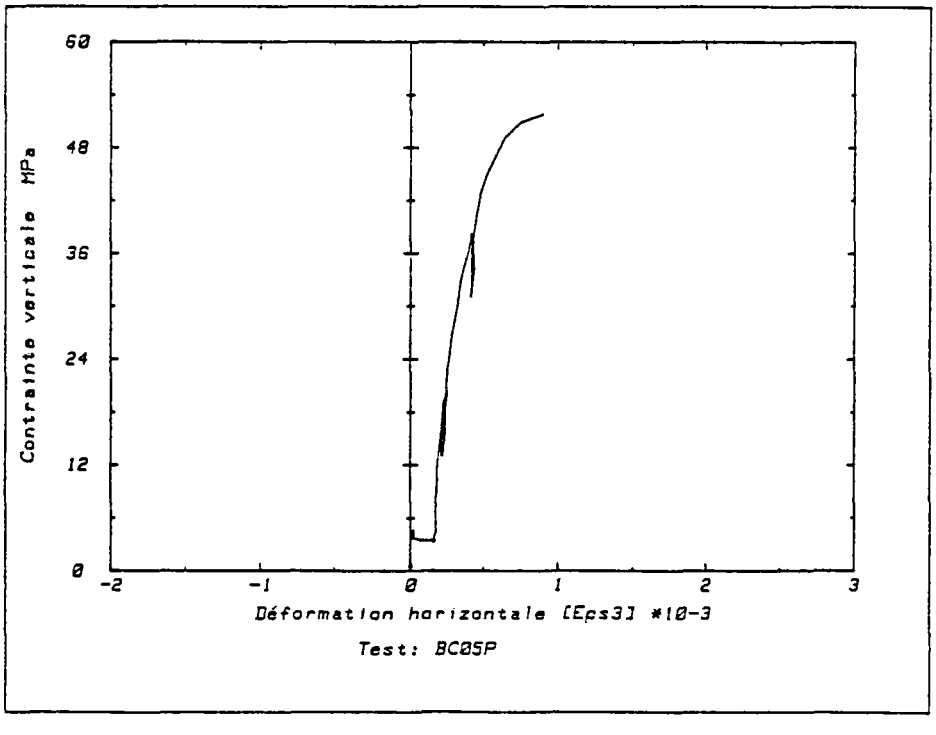

Déformation horizontale [Eps3] *10-3
1.5
1.2
.9
.6
.3
0
-1.5
-1
-.5
0
.5
1
Deformation vert. moyenne [E1m] *10-3
Test: BC04P

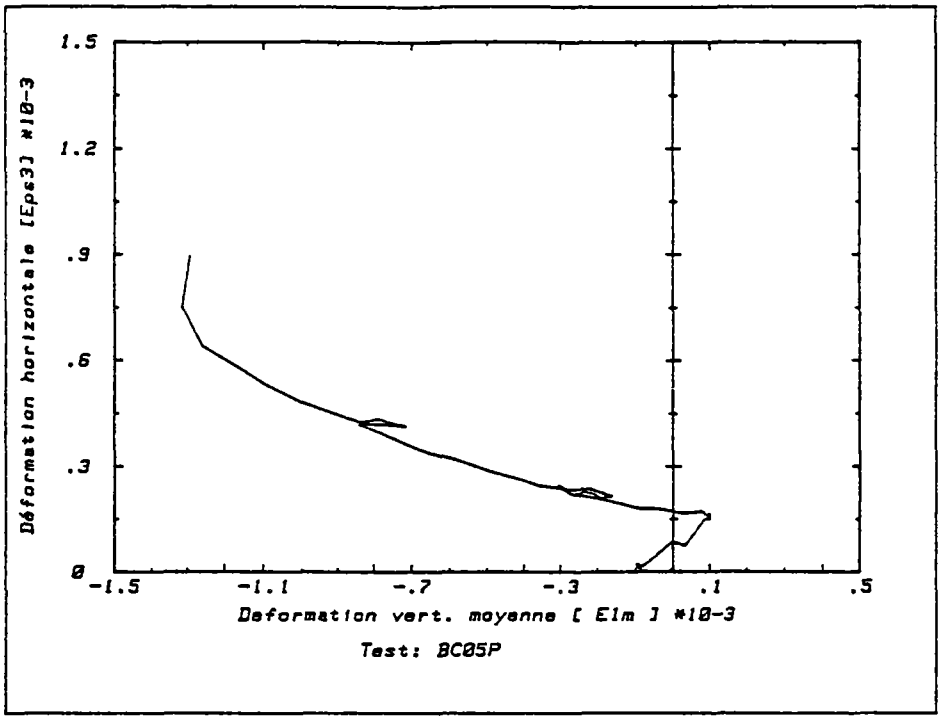
Essai BC05P

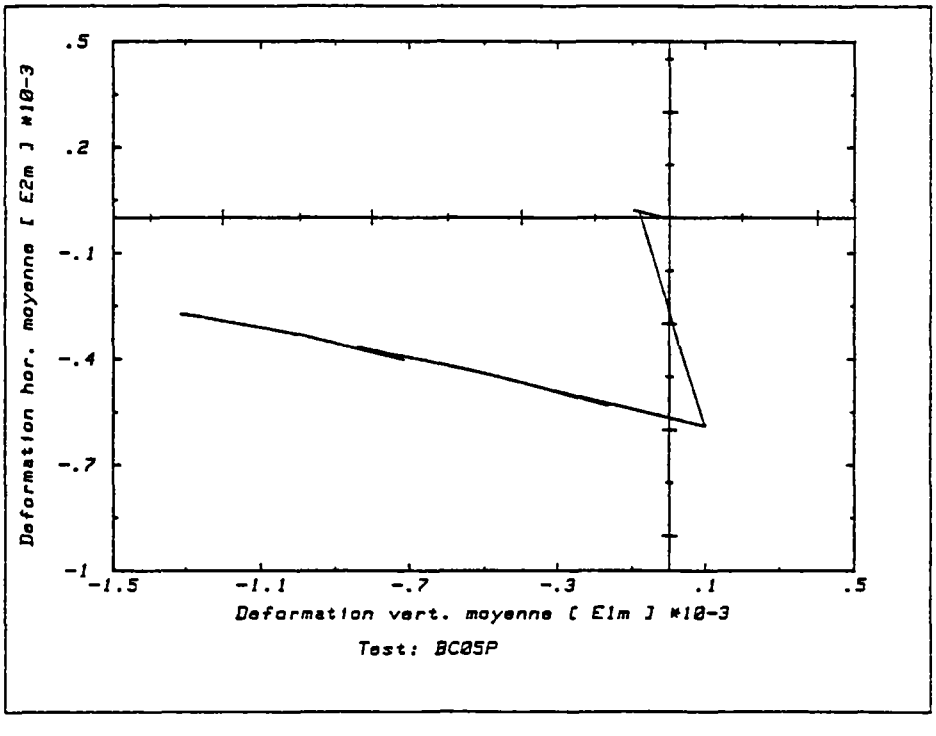

60
48
36
24
12
0
Contrainte Horizontale MPa
0
12
24
36
48
60
Contrainte verticale MPa
Test: BC05P


60
48
36
24
12
0
Contrainte verticale MPa
-2
-1
0
1
2
3
Deformation vert. moyenne [Elm] *10-3
Test: BC05P

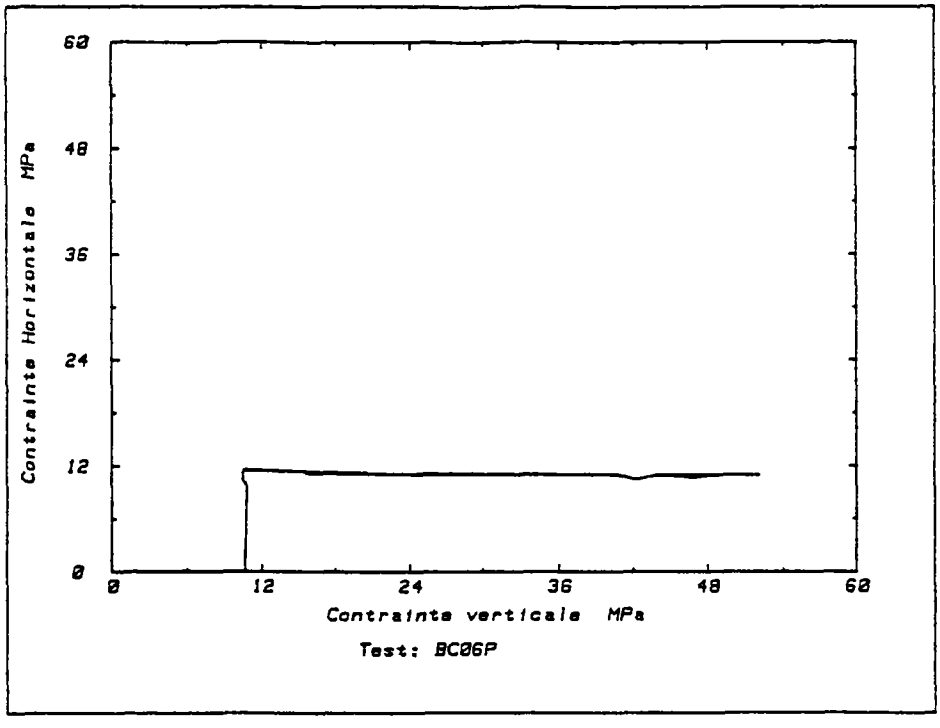

60
48
36
24
12
0
Contrainte verticale MPa
-2
-1
0
1
2
3
Deformation hor. moyenne [E2m] *10-3
Test: BC05P

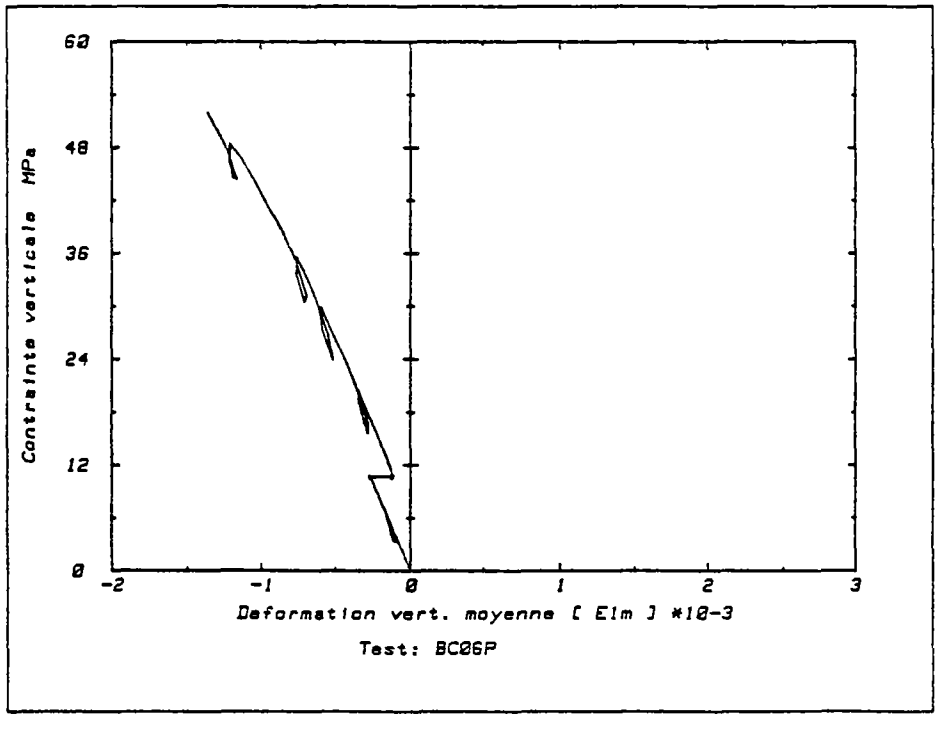

60
48
36
24
12
0
Contrainte verticale MPa
-2
-1
0
1
2
3
Déformation horizontale [Eps3] *10-3
Test: BC05P

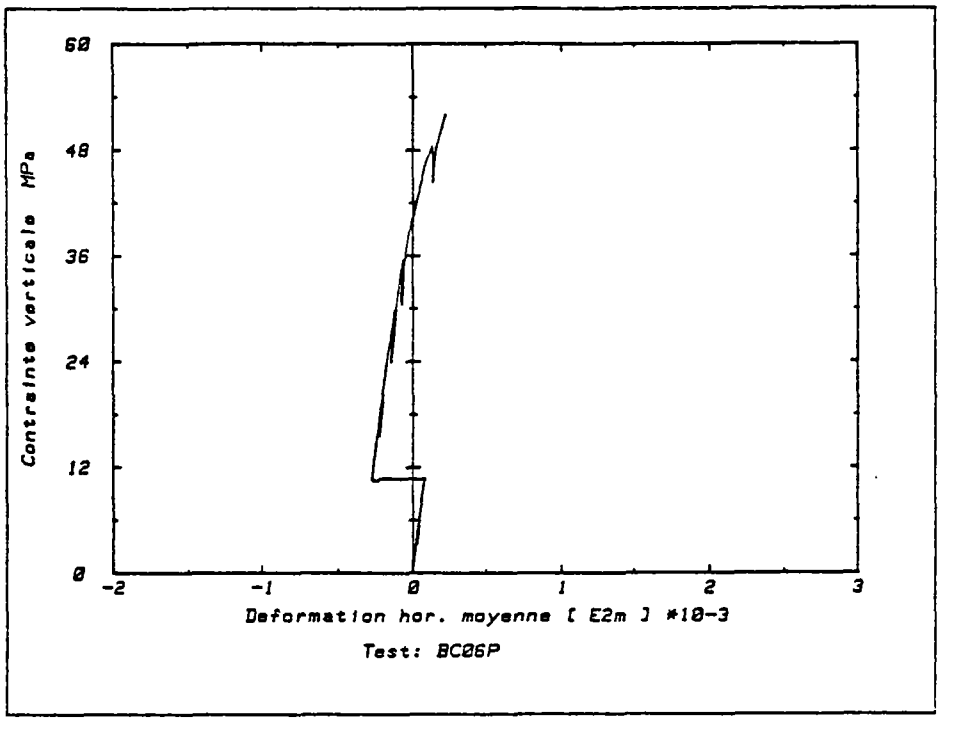

1.5
1.2
.9
.6
.3
0
-1.5
-1.1
-.7
-.3
.1
.5
Déformation horizontale [Eps3] *10-3
Deformation vert. moyenne [E1m] *10-3
Test: BC05P

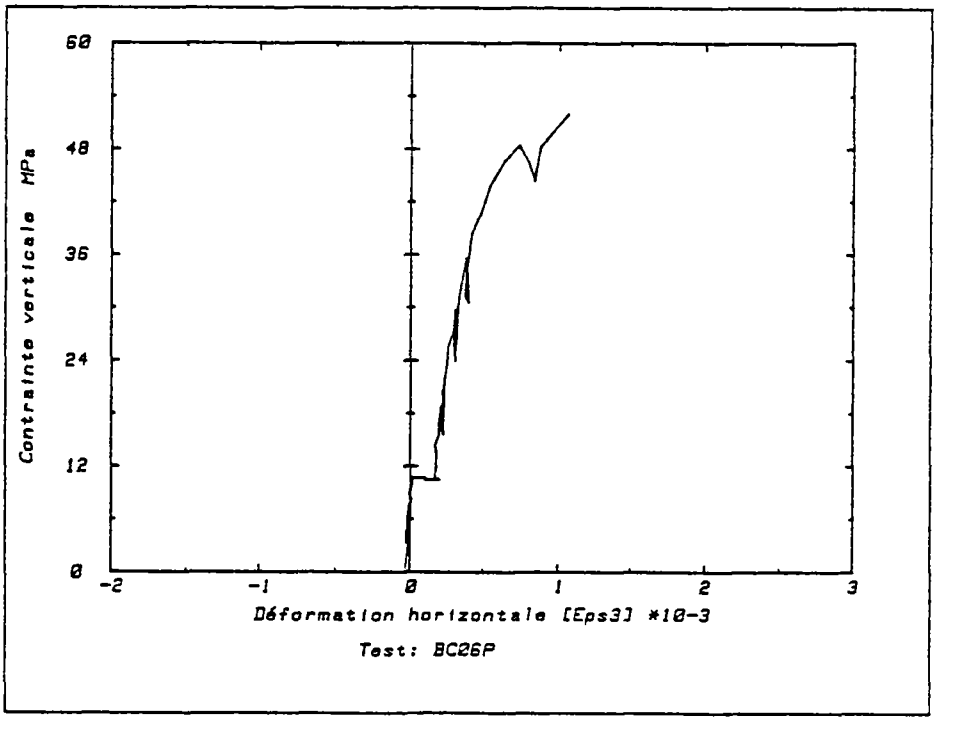

.5
.2
-.1
-.4
-.7
-1
-1.5
-1.1
-.7
-.3
.1
.5
Deformation hor. moyenne [E2m] *10-3
Deformation vert. moyenne [E1m] *10-3
Test: BC05P

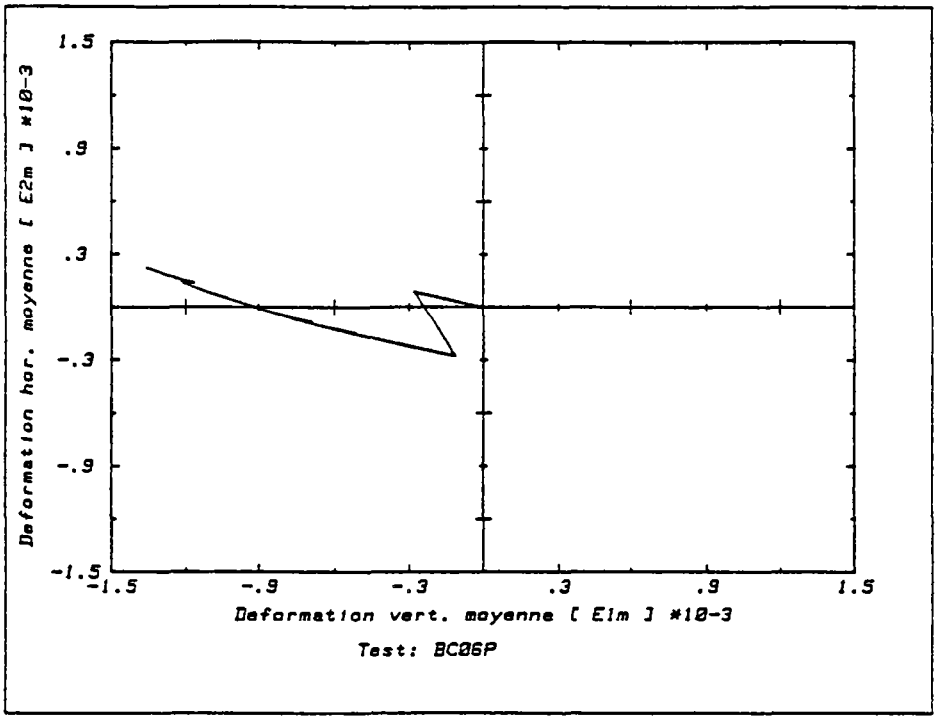
Essai BC06P

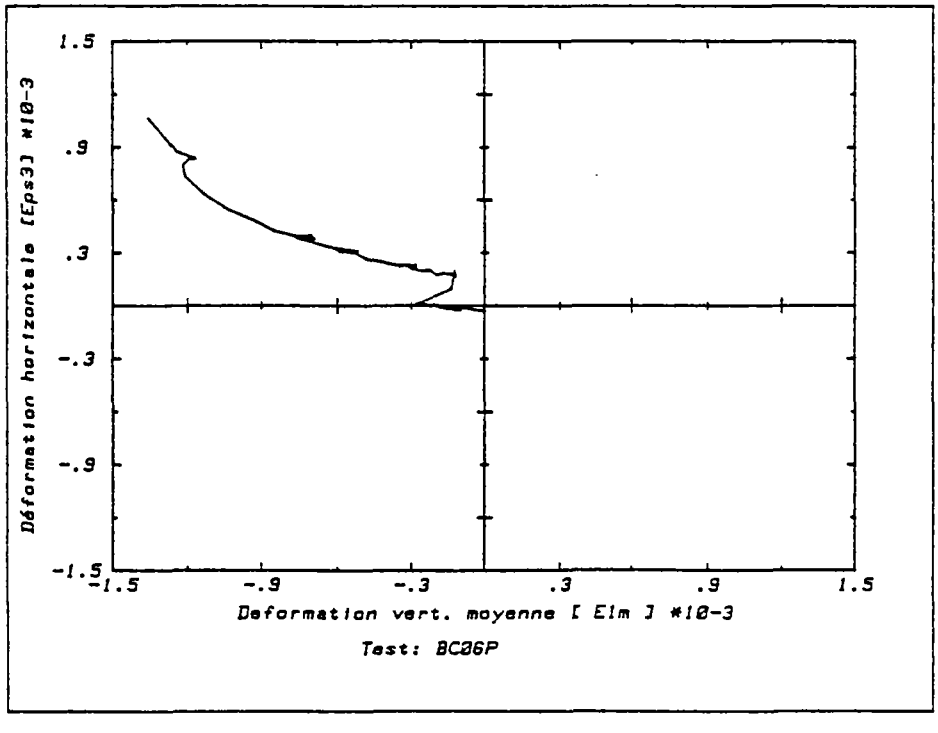

60
48
36
24
12
0
Contrainte Horizontale MPa
0
12
24
36
48
60
Contrainte verticale MPa
Test: BC06P


60
48
36
24
12
0
Contrainte verticale MPa
-2
-1
0
1
2
3
Deformation vert. moyenne [Elm] *10-3
Test: BC06P

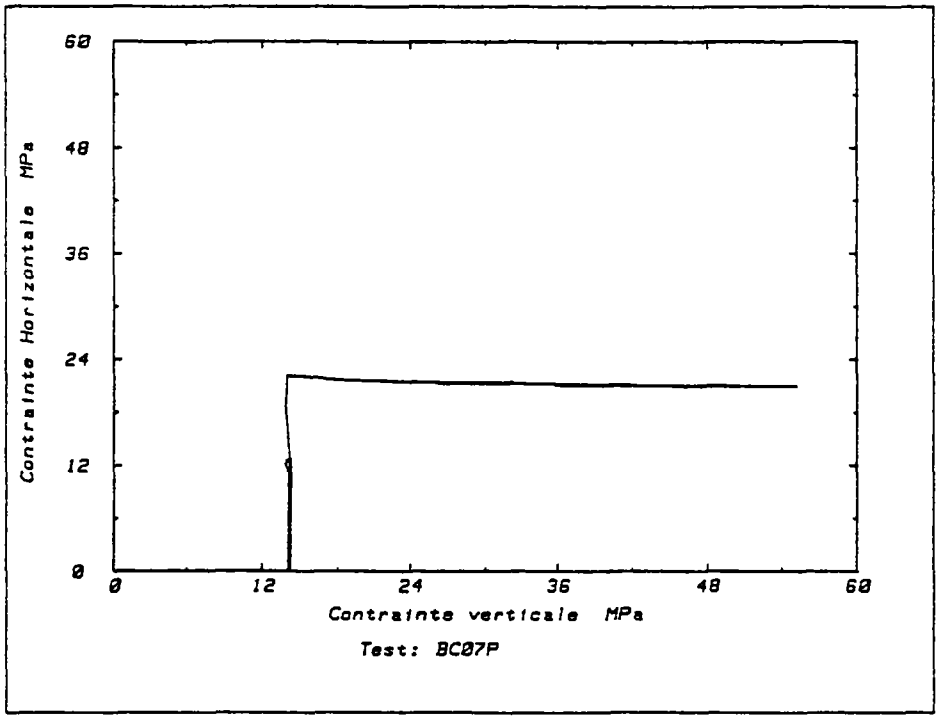

60
48
36
24
12
0
-2
-1
0
1
2
3
Contrainte verticale MPa
Deformation hor. moyenne [E2m] *10-3
Test: BC06P

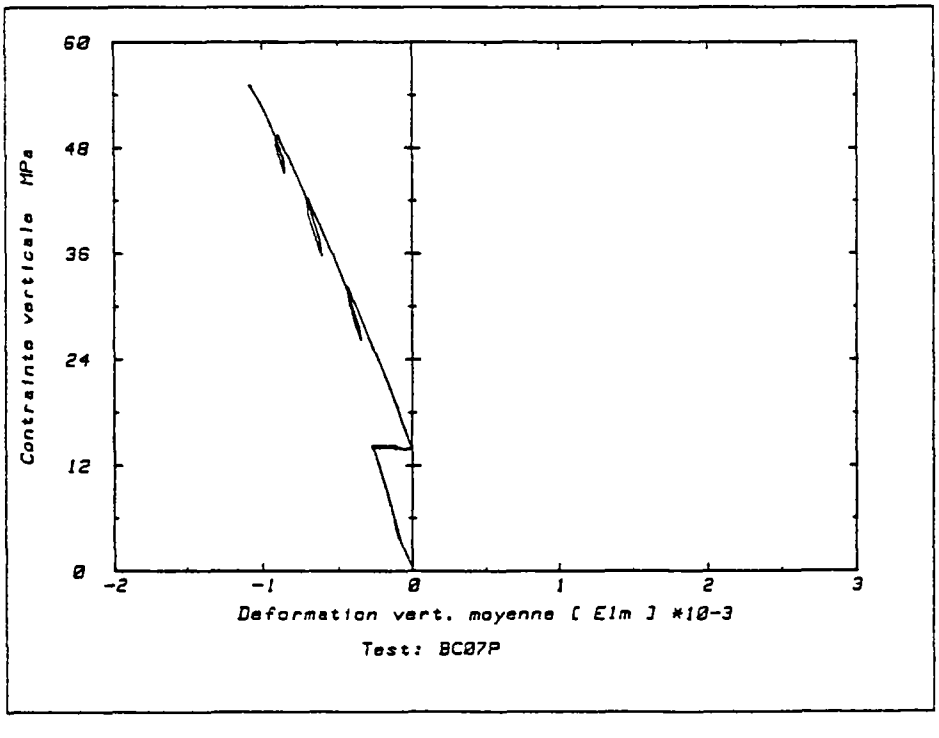

60
48
36
24
12
0
-2
-1
0
1
2
3
Contrainte verticale MPa
Déformation horizontale [Eps3] *10-3
Test: BC26P

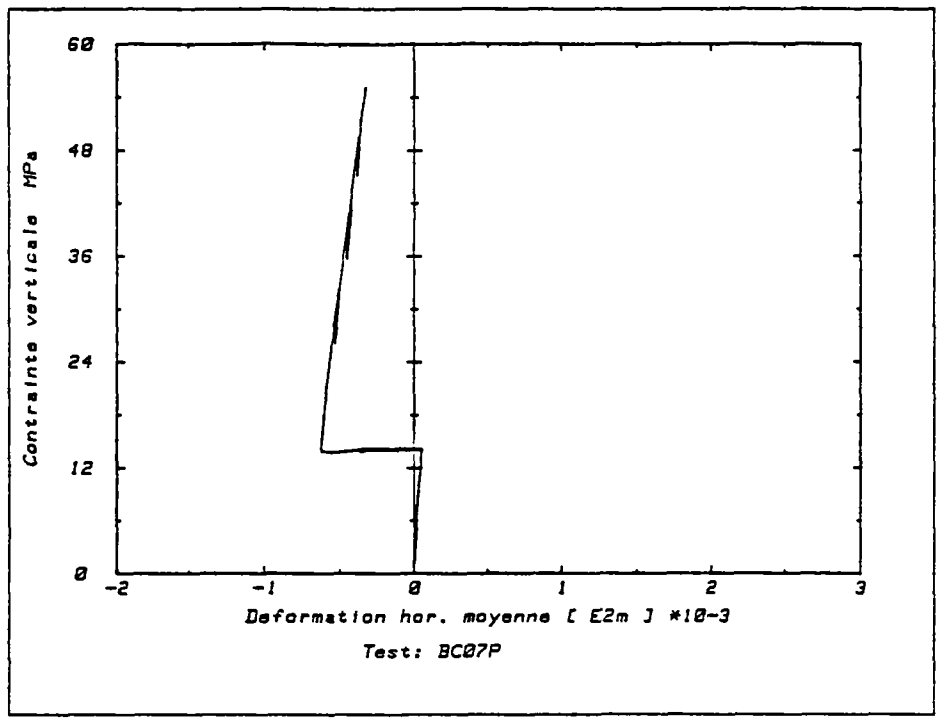

1.5
.9
.3
-.3
-.9
-1.5
-1.5
-.9
-.3
.3
.9
1.5
Deformation hor. moyenne [E2m] *10-3
Deformation vert. moyenne [E1m] *10-3
Test: BC06P

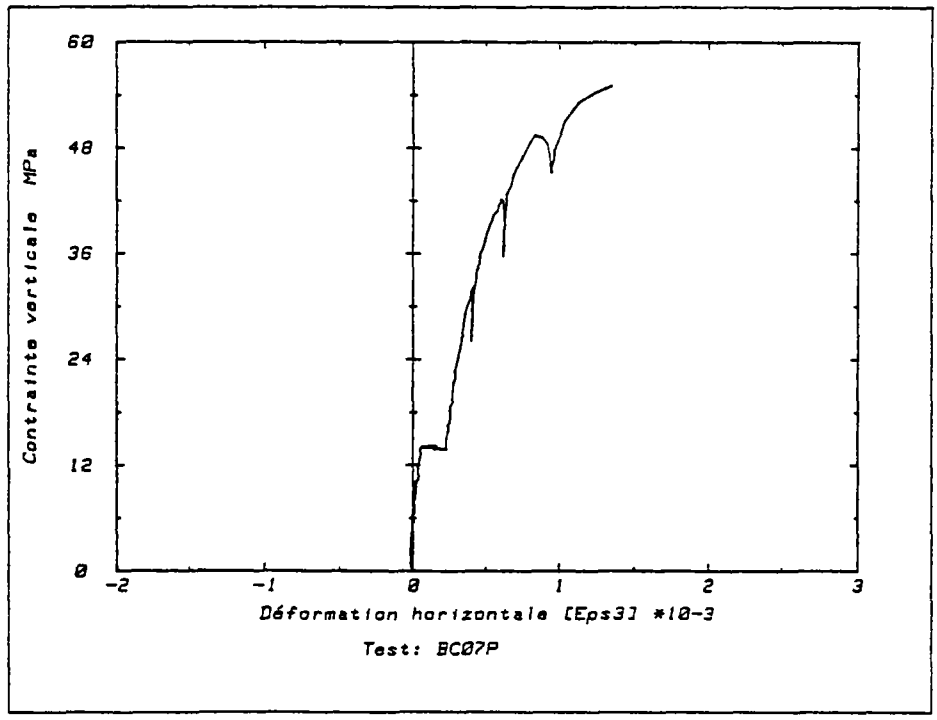

1.5
.9
.3
-.3
-.9
-1.5
-1.5
-.9
-.3
.3
.9
1.5
Déformation horizontale [Eps3] *10-3
Deformation vert. moyenne [E1m] *10-3
Test: BC06P

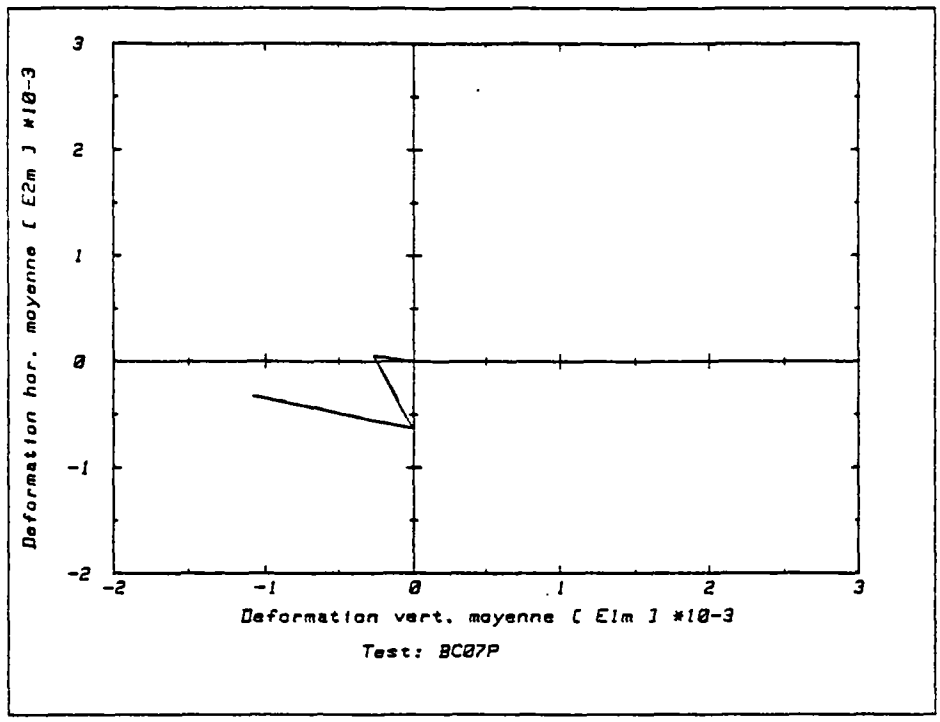
Essai BC07P

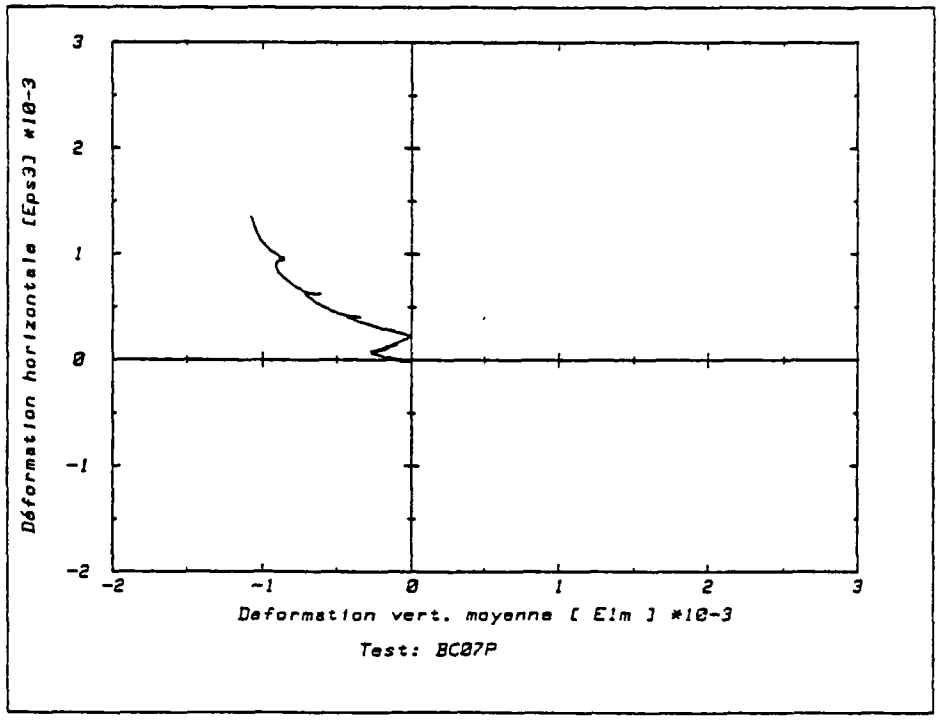

60
48
36
24
12
0
Contrainte Horizontale MPa
0
12
24
36
48
60
Contrainte verticale MPa
Test: BC07P


60
48
36
24
12
0
Contrainte verticale MPa
-2
-1
0
1
2
3
Deformation vert. moyenne [Elm] *10-3
Test: BC07P

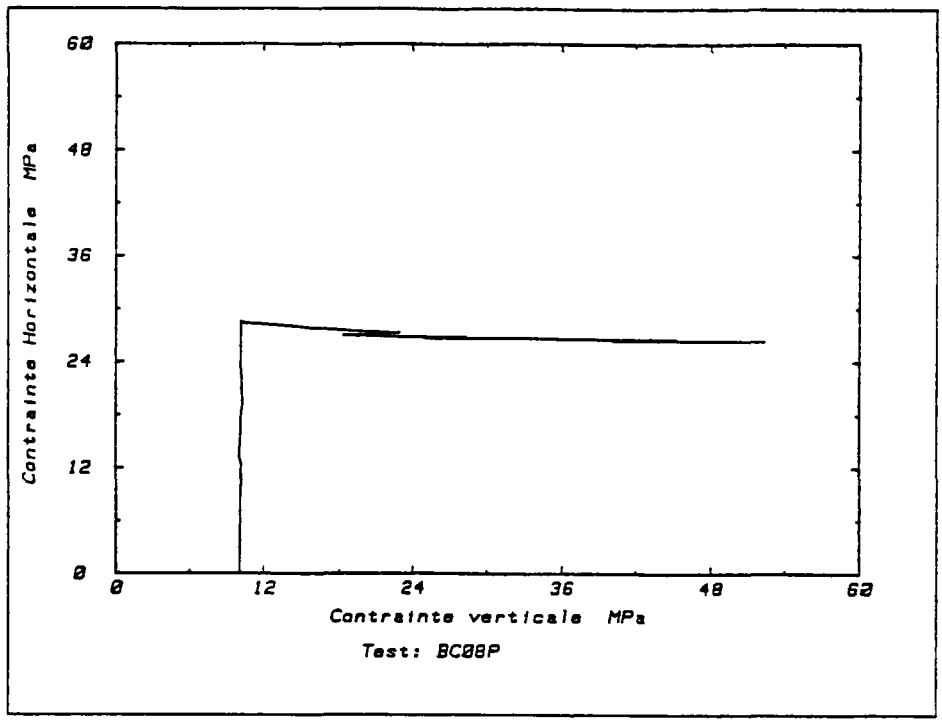

60
48
36
24
12
0
Contrainte verticale MPa
-2
-1
0
1
2
3
Deformation hor. moyenne [E2m] *10-3
Test: BC07P

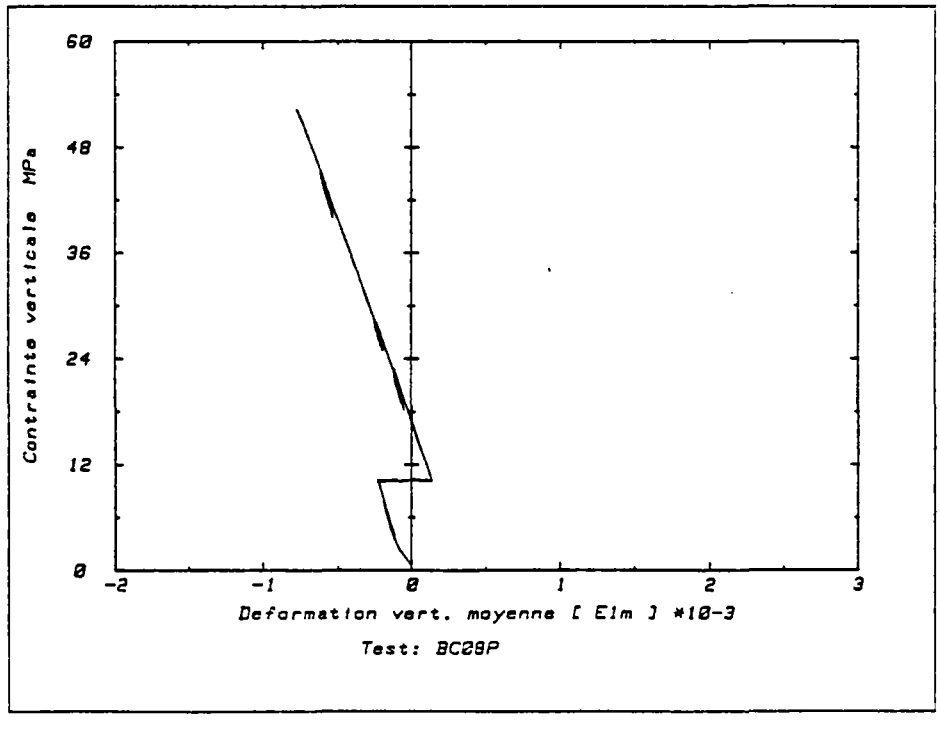

60
48
36
24
12
0
Contrainte verticale MPa
-2
-1
0
1
2
3
Déformation horizontale [Eps3] *10-3
Test: BC07P

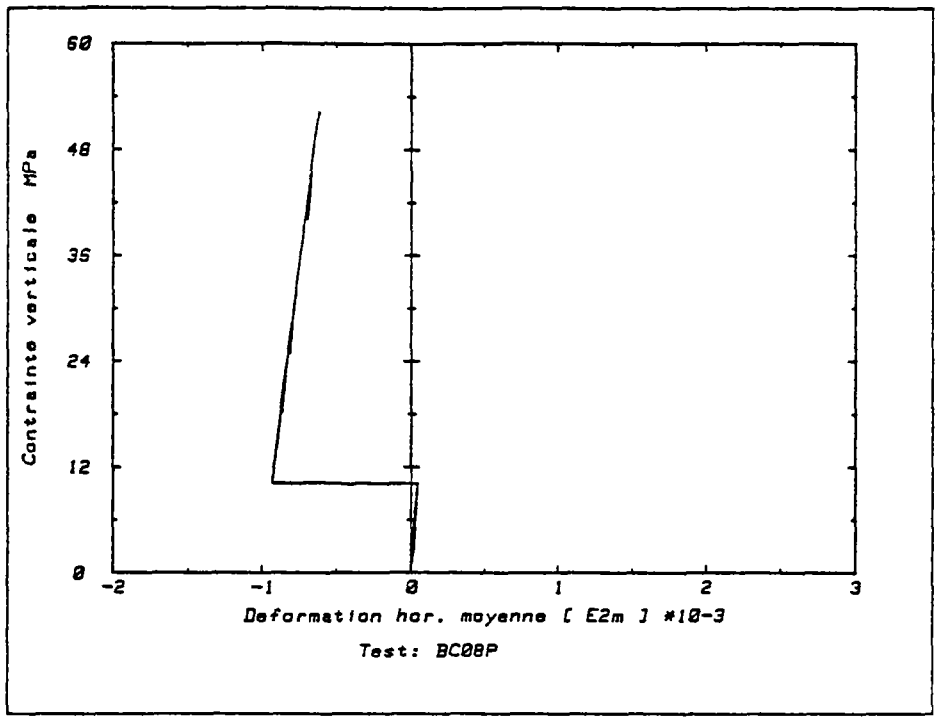

Deformation hor. moyenne [E2m] *10-3
3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
3
Deformation vert. moyenne [E1m] *10-3
Test: BC07P

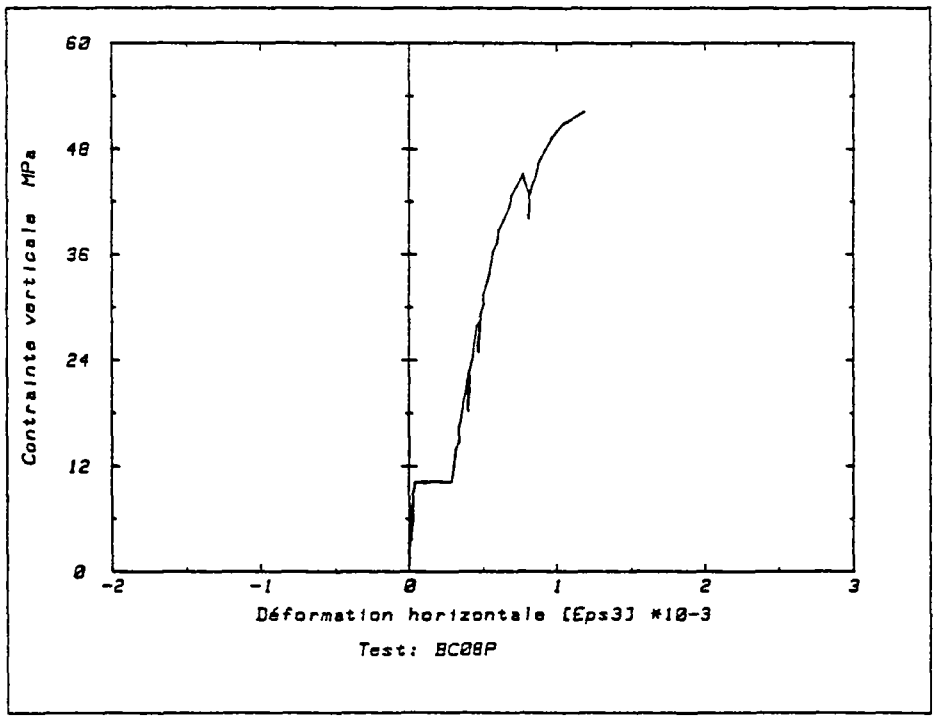

Déformation horizontale [Eps3] *10-3
3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
3
Deformation vert. moyenne [E1m] *10-3
Test: BC07P

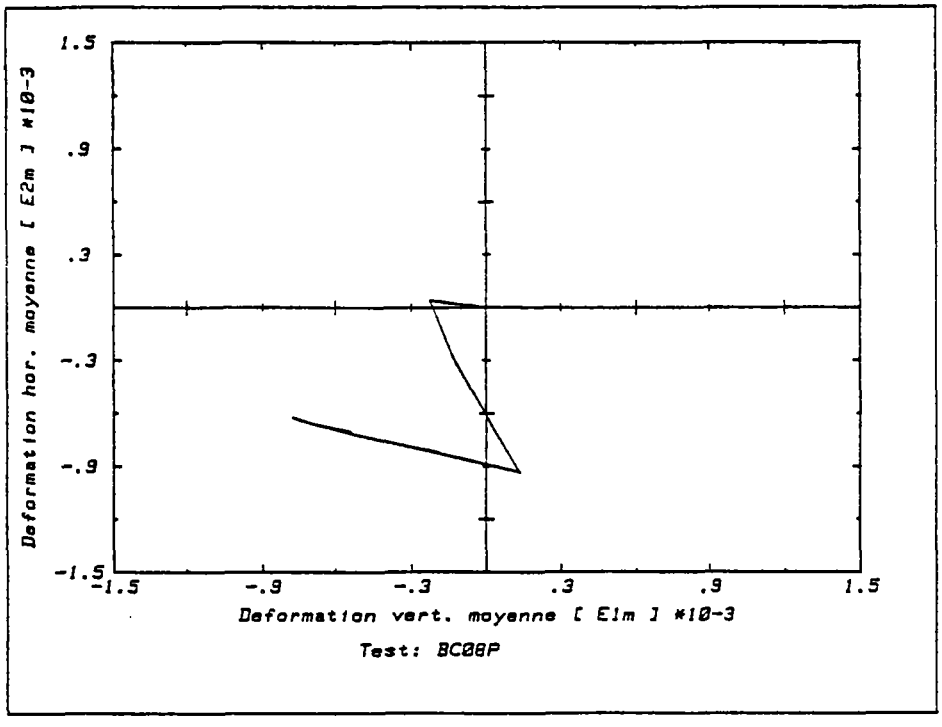
Essai BC08P

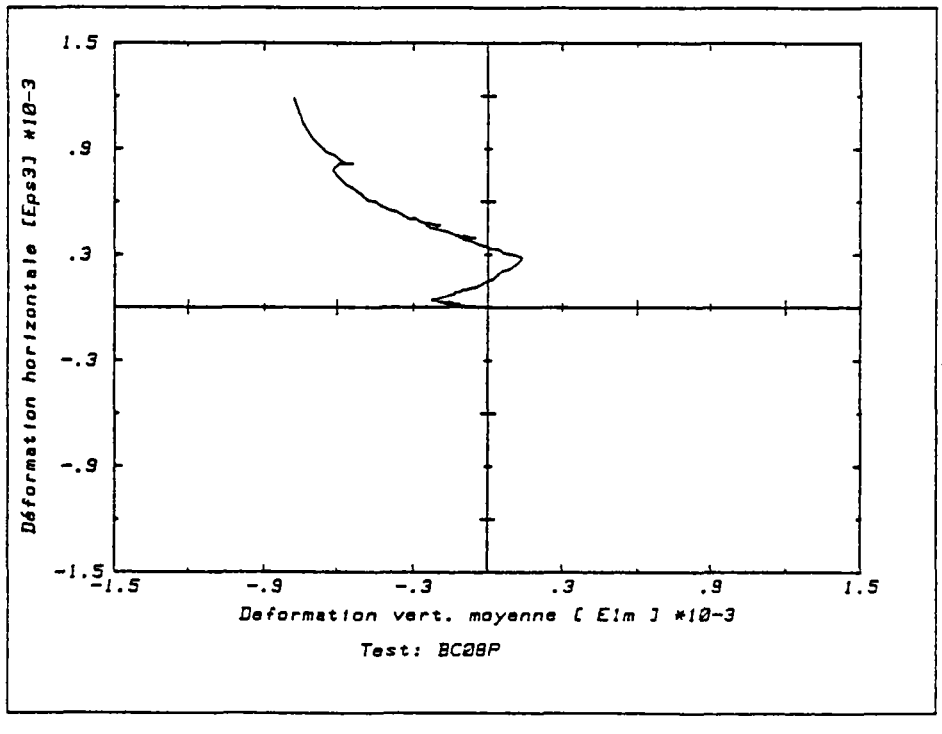

60
48
36
24
12
0
Contrainte Horizontale MPa
0
12
24
36
48
60
Contrainte verticale MPa
Test: BC08P


60
48
36
24
12
0
Contrainte verticale MPa
-2
-1
0
1
2
3
Deformation vert. moyenne [Elm] *10-3
Test: BC08P


60
48
36
24
12
0
-2
-1
0
1
2
3
Contrainte verticale MPa
Deformation hor. moyenne [E2m] *10-3
Test: BC08P


60
48
36
24
12
0
-2
-1
0
1
2
3
Contrainte verticale MPa
Déformation horizontale [Eps3] *10-3
Test: BC08P


1.5
.9
.3
-.3
-.9
-1.5
-1.5
-.9
-.3
.3
.9
1.5
Deformation hor. moyenne [E2m] *10-3
Deformation vert. moyenne [E1m] *10-3
Test: BC08P


1.5
.9
.3
-.3
-.9
-1.5
-1.5
-.9
-.3
.3
.9
1.5
Déformation horizontale [Eps3] *10-3
Deformation vert. moyenne [E1m] *10-3
Test: BC08P