

**THESE DE DOCTORAT
DE L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES**

Spécialité : **Structures et Matériaux**

Présentée par

M^{me} Amel AOUAMEUR-MESBAH

pour l'obtention du titre de Docteur
de l'École Nationale des Ponts et Chaussées

**ANALYSE NON-LINEAIRE MATERIELLE ET
GEOMETRIQUE DES STRUCTURES COQUES EN BETON
ARME SOUS CHARGEMENTS STATIQUES ET
DYNAMIQUES**

Soutenue le 15 septembre 1998 devant le jury composé de Messieurs :

**P. DESTUYNDER
J-M. REYNOUARD**

*Rapporteur
Rapporteur*

**P. ARISTAGHES
J-L. CLEMENT
A. EHRLACHER
P. PEYRAC
P. HUMBERT**

*Examineur
Examineur
Examineur
Examineur
Directeur de thèse et examineur*

REMERCIEMENTS

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire a été réalisé au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Section des Modèles Numériques.

Je tiens à témoigner ma profonde reconnaissance à **Franz-Josef Ulm** pour les conseils et les encouragements qu'il m'a généreusement prodigués tout au long de ce travail. Malgré ses multiples charges, il a toujours montré une entière disponibilité et une grande attention à l'égard de mon travail de recherche.

Monsieur **P. Humbert**, Chef de la Section des Modèles Numériques au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, a été à l'origine de ce travail. Je le remercie pour la confiance qu'il m'a accordée afin de mener à bien cette étude.

J'adresse mes vifs remerciements aux Professeurs **J.M. Reynouard**, **P. Destuynder** et **A. Ehrlacher**, ainsi qu'à Messieurs **J.L. Clément**, **P. Aristaghes** et **P. Peyrac**, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant d'être membres du jury.

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à Monsieur **J.J. Brioist** pour toutes ses critiques constructives et ses judicieux conseils ; ils m'ont été très précieux.

Ce travail de recherche s'est enrichi lors de mon stage post-doctoral. C'est l'occasion pour moi de remercier Monsieur **J.F. Semblat** qui a grandement contribué à la réalisation de ce stage et m'a généreusement accueillie dans son bureau.

Mes remerciements vont également à l'ensemble de mes collègues de la Section des Modèles Numériques : **Jacques**, **Marc**, **Alain** et **Christiane**, pour leur cordialité, leur aide et leur agréable compagnie.

Ce travail n'aurait pas été possible sans l'aide financière du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées. Que Monsieur **A. Bonnet**, Directeur scientifique du LCPC, trouve dans ce mémoire le fruit de son soutien financier.

Je remercie vivement ma famille, particulièrement ma **mère** qui m'a toujours encouragée dans mes études et accordé sa confiance. Que ma mère se rassure, je ne ferai pas une seconde thèse!!!

Enfin, et surtout, merci à **Yacine**, mon mari, qui a fait preuve d'une grande patience et a été mon soutien le plus précieux.

SOMMAIRE

RESUME	v
ABSTRACT	vi
AVANT-PROPOS	vii

CHAPITRE 1 : MODELISATION EN COQUES MULTICOUCHES

1-0. Introduction	2
1-1. Différentes échelles de discrétisation des structures coques par éléments finis	3
1-1-1. Echelle globale	3
1-1-2. Echelle locale	4
1-1-3. Echelle semi-globale	4
1-2. Equations de base d'une coque excentrée	8
1-2-1. Hypothèse des petites perturbations	8
1-2-2. Description géométrique	9
1-2-3. Eléments de réduction	13
1-2-4. Hypothèses de déformation des coques	16
1-2-5. Vecteur déplacement et tenseur de déformations linéarisées	17
1-2-6. Mise en équation du problème	18
1-2-6-1. Formulation faible de l'équation d'équilibre mécanique	18
1-2-6-2. Application au cas d'une coque excentrée	19
1-3. Extension au cas multicouche	22
1-3-1. Extension de la formulation faible des équations d'équilibre d'une coque excentrée	23
1-3-2. Formulation variationnelle pour une coque multicouche	24
1-3-3. Méthodes de résolution numériques	26
1-3-3-1. Cas de chargements statiques	26
1-3-3-2. Cas de sollicitations dynamiques	28
1-4. Extension de la formulation coque multicouche à la prise en compte des non-linéarités géométriques	30
1-4-1. Formules de transport appliquées aux coques	31
1-4-2. Formulation faible des équations d'équilibre d'une coque multicouche	33
1-4-2-1. Expression de la formulation faible en description lagrangienne totale	34
1-4-2-2. Expression de la formulation faible en description corotationnelle	34
1-4-3. Application à l'étude du phénomène d'instabilité élastique des coques	35
1-4-3-1. Hypothèse de linéarité	35
1-4-3-2. Formulation variationnelle	35
1-4-3-3. Résolution du problème de flambement linéaire	38

1-4-4. Application à l'étude de problèmes de grands déplacements - grandes rotations : couplage non-linéarités matérielles et géométriques	39
1-4-4-1. Description du mouvement	39
1-4-4-2. Vecteur déplacement d'une couche k	41
1-4-4-3. Formulation variationnelle	41
1-5. Conclusion	44

CHAPITRE 2 :

QUELQUES LOIS DE COMPORTEMENT A VARIABLES INTERNES POUR L'ACIER ET LE BETON

2-0. Introduction	49
2-1. Cadre théorique et traitement numérique des lois de comportement à variables internes	50
2-1-1. Cadre théorique	50
2-1-2. Traitement numérique	51
2-2. Modélisation élastoplastique pour l'acier	55
2-2-1. Modèle plastique isotrope parfait	55
2-2-1-1. Critère de plasticité	57
2-2-1-2. Règle d'écoulement	58
2-2-1-3. Traitement numérique	58
2-2-1-4. Expression du tenseur de comportement tangent	65
2-2-2. Extension au modèle plastique anisotrope	66
2-2-2-1. Critère de plasticité	66
2-2-2-2. Règle d'écoulement	72
2-2-2-3. Traitement numérique	72
2-2-2-4. Expression du tenseur de comportement tangent	73
2-2-3. Récapitulatif de la modélisation élastoplastique pour l'acier	73
2-3. Modélisation du comportement non-linéaire du béton	74
2-3-1. Modélisation élastoplastique du béton sous chargements monotones	74
2-3-1-1. Critère de plasticité	75
2-3-1-2. Règle d'écoulement	79
2-3-1-3. Règle d'écrouissage	79
2-3-1-4. Traitement numérique	81
2-3-1-5. Expression du tenseur de comportement tangent	83
2-3-2. Extension au modèle d'endommagement plastique pour le béton en chargement cyclique	84
2-3-2-1. Traitement numérique	86
2-3-2-2. Expression du tenseur de comportement tangent	90

2-3-3. Extension aux bétons à hautes vitesse : modèle visco-élasto-plastique avec écrouissage visqueux	90
2-3-3-1. Le modèle de Sercombe	91
2-3-3-2. Identification des paramètres du modèle	93
2-3-3-3. Traitement numérique	96
2-3-3-4. Expression du tenseur de comportement tangent	101
2-3-4. Récapitulatif	103
2-4. Conclusion	103

CHAPITRE 3 : **EXEMPLES DE VALIDATION NUMERIQUE**

3-0. Introduction	108
3-1. Présentation du code de calcul par éléments finis CESAR-LCPC	109
3-2. Exemples de validations numériques	111
3-2-1. Coque sphérique sous chargement statique	111
3-2-1-1. Géométrie et modélisation	111
3-2-1-2. Matériau	112
3-2-1-3. Chargements	112
3-2-1-4. Résultats	112
3-2-2. Coque cylindrique sous poids propre	117
3-2-2-1. Géométrie et modélisation	117
3-2-2-2. Matériau	117
3-2-2-3. Chargement	119
3-2-2-4. Résultats	119
3-2-3. Etude d'une dalle circulaire en béton sous pression uniforme	126
3-2-3-1. Géométrie et modélisation	126
3-2-3-2. Matériau	127
3-2-3-3. Chargement	127
3-2-3-4. Résultats	127
3-2-4. Etudes statique et dynamique de dalles circulaires en béton armé	131
3-2-4-1. Géométrie et modélisation	131
3-2-4-2. Matériaux	132
3-2-4-3. Etude du comportement statique non-linéaire des dalles	133
3-2-4-4. Etude du comportement dynamique non-linéaire des dalles	134
3-2-5. Etude du flambement linéaire d'une colonne	140
3-2-5-1. Géométrie et modélisation	140
3-2-5-2. Matériau	140
3-2-5-3. Chargement	141
3-2-5-4. Résultats	141
3-3. Conclusion	142

CHAPITRE 4 : **EXEMPLES D' APPLICATION NUMERIQUE**

4-0. Introduction	145
4-1. Etude de l'entretoisement d'un pont bipoutre à trois travées	146
4-1-1. Caractéristiques géométriques	146
4-1-2. Etude du comportement élastique linéaire de la structure	148
4-1-2-1. Modélisation et conditions aux limites	148
4-1-2-2. Matériaux	150
4-1-2-3. Chargement	150
4-1-2-4. Résultats	151
4-1-3. Etude du comportement non-linéaire de la structure	155
4-1-3-1. Modélisation	155
4-1-3-2. Matériaux	156
4-1-3-3. Chargement	156
4-1-3-4. Résultats	157
4-2. Etude d'une structure multi-étagée en béton armé sous chargement sismique	163
4-2-1. Données et modélisation	163
4-2-2. Etude du comportement dynamique linéaire de la structure : méthode de superposition modale	165
4-2-2-1. Modélisation	165
4-2-2-2. Conditions aux limites	166
4-2-2-3. Matériaux	166
4-2-2-4. Charges additionnelles	166
4-2-2-5. Résultats	167
4-2-3. Etude du comportement dynamique non-linéaire de la structure	171
4-2-3-1. Modélisation	171
4-2-3-2. Matériaux	172
4-2-3-3. Chargement	172
4-2-3-4. Résultats	173
4-2-4. Comparaison avec les résultats obtenus avec un modèle bidimensionnel	177
4-2-5. Comparaison avec les résultats expérimentaux	180
4-3. Conclusion	181
CONCLUSION	184
BIBLIOGRAPHIE	187
ANNEXES	198



RESUME

Les éléments de coques multicouches ont montré une grande efficacité dans l'analyse non-linéaire des structures. A l'origine, ces éléments avaient été développés pour des lois de comportement spécifiques au béton et à l'acier. Leur généralisation à l'analyse des structures dont le comportement est régi par des lois de comportement à variables internes (plasticité, élasto-visco-plasticité, endommagement) constitue le propos de ce travail de thèse.

Issus de l'approche semi-globale, les éléments de coques multicouches permettent de rendre compte des phénomènes non-linéaires tant matériels que géométriques pour l'analyse des structures constituées de coques, sous divers chargements, avec un temps de calcul raisonnable.

Dans une première partie, nous développons ces éléments dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Une extension est ensuite présentée en intégrant les effets non-linéaires géométriques. Une description lagrangienne actualisée avec un traitement semi-tangentiel des paramètres de rotation est utilisée à cet effet.

Dans une seconde partie, nous présentons dans un cadre général, l'aspect théorique ainsi que le traitement numérique des lois de comportement à variables internes. A partir de là, un ensemble de lois de comportement à variables internes permettant la modélisation des comportements de l'acier et du béton sous divers chargements, est présenté. Le but étant d'utiliser ces modèles au sein des éléments finis de coques multicouches, pour le calcul de structures coques en béton armé soumises à des chargements statiques et dynamiques. Une attention particulière est portée sur la condition de contraintes planes d'une part dans le schéma d'intégration des contraintes et d'autre part dans le calcul du tenseur de comportement tangent.

Enfin, les développements effectués sont implantés dans le code de calcul par éléments finis CESAR-LCPC. Au travers d'exemples d'applications numériques, nous précisons le domaine d'application ainsi que les limites des outils proposés.



ABSTRACT

Multilayered shell elements have proven to be highly efficient for non-linear analysis of structures. In the past, these finite elements were applied with specific constitutive laws for concrete and steel. This work is devoted to an extension of multilayered shell element to constitutive laws with internal variables (plasticity, visco-elasto-plasticity, damage).

Based on a semi-global approach, multilayered shell elements allow to account for material and geometrical non-linear effects in structural shell type structures subject to various loadings, at low computation costs.

We first give a formulation of these elements with the hypothesis of small strains. A further development which addresses non-linear geometrical effects, is then given using an Updated Lagrangian Description together with a semi-tangential approximation of finite rotations.

The second part of this work addresses both general theory and numerical procedures for internal variables constitutive laws. We review a number of constitutive laws useful for modelling steel and concrete behaviour under static and dynamic loading. A special attention is given to the plane stress condition in both the local integration scheme of stresses and the calculation of the tangent stiffness matrix.

These developments are implemented in the finite element program CESAR-LCPC. Through a number of numerical applications, we show the field of these developments, as well as their limits, as design tools for structural engineers.

AVANT-PROPOS

L'analyse linéaire des structures fait appel aux deux hypothèses suivantes :

- les matériaux composant le solide ont un comportement élastique linéaire dans le domaine des déformations résultant des faibles déplacements.
- les déplacements et déformations subis par le solide considéré sont très faibles et permettent de confondre les états déformé et non déformé de la structure.

Si l'une au moins de ces hypothèses n'est pas vérifiée, il convient d'entreprendre une analyse non-linéaire du solide étudié. On distingue ainsi :

- l'analyse non-linéaire matérielle en petits déplacements et petites déformations, où la relation contraintes-déformations est non-linéaire.
- l'analyse non-linéaire géométrique en grands déplacements et petites déformations, où la relation déplacements-déformations peut être non-linéaire.
- l'analyse non-linéaire géométrique en grands déplacements et grandes déformations, où les relations contraintes-déformations et déplacement-déformations est généralement non-linéaire. C'est le cas le plus complexe de l'analyse non-linéaire des structures.

Des solutions approchées peuvent être obtenues à l'aide de résolutions simplement linéaires, la raison principale de cette approximation étant la diminution du coût de calcul. Toutefois, cette approche n'est pas toujours acceptable et l'utilisation de méthodes purement non-linéaires devient alors nécessaire.

Avant le développement des programmes informatiques, c'est à dire avant 1960, la modélisation des coques était basée sur des théories de membrane et de flexion en considérant un matériau à comportement linéaire, homogène et intègre. Depuis quelques années, le développement accéléré des méthodes d'analyse numérique, notamment la méthode des éléments finis, ainsi que le progrès dans le domaine de l'informatique, ont permis d'élaborer des approches plus réalistes pour la simulation du comportement des structures, particulièrement celui des coques. Toutefois, l'utilisation sans cesse grandissante des structures coques dans des domaines exigeant un degré de sécurité élevé souligne l'insuffisance d'une analyse linéaire. En effet, la simulation plus réaliste de la réponse de ce type de structures exige une modélisation exacte de sa géométrie, des lois constitutives réalistes et une stratégie de résolution efficace. C'est pourquoi l'intérêt s'est concentré ces dernières années sur les problèmes non-linéaires matériels et géométriques. L'objet de ce rapport s'inscrit dans ce cadre.

Notre contribution reste cependant modeste. Applicable aux domaines statiques et dynamiques, elle se limite à la modélisation numérique des structures en coques au comportement à variables internes. Quatre parties composent ce travail :

Le premier chapitre est consacré à la formulation d'un élément fini particulier : l'élément de coque multicouche. Cet outil numérique est issu de l'approche multicouche et permet de rendre compte des phénomènes non-linéaires matériels et géométriques pour l'analyse des structures constituées de coques, sous divers chargements, avec un temps de calcul raisonnable. L'élément est tout d'abord développé dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Une extension est ensuite présentée en intégrant les effets non-linéaires géométriques. Une description lagrangienne actualisée avec traitement semi-tangentiel des paramètres de rotation est utilisée à cet effet.

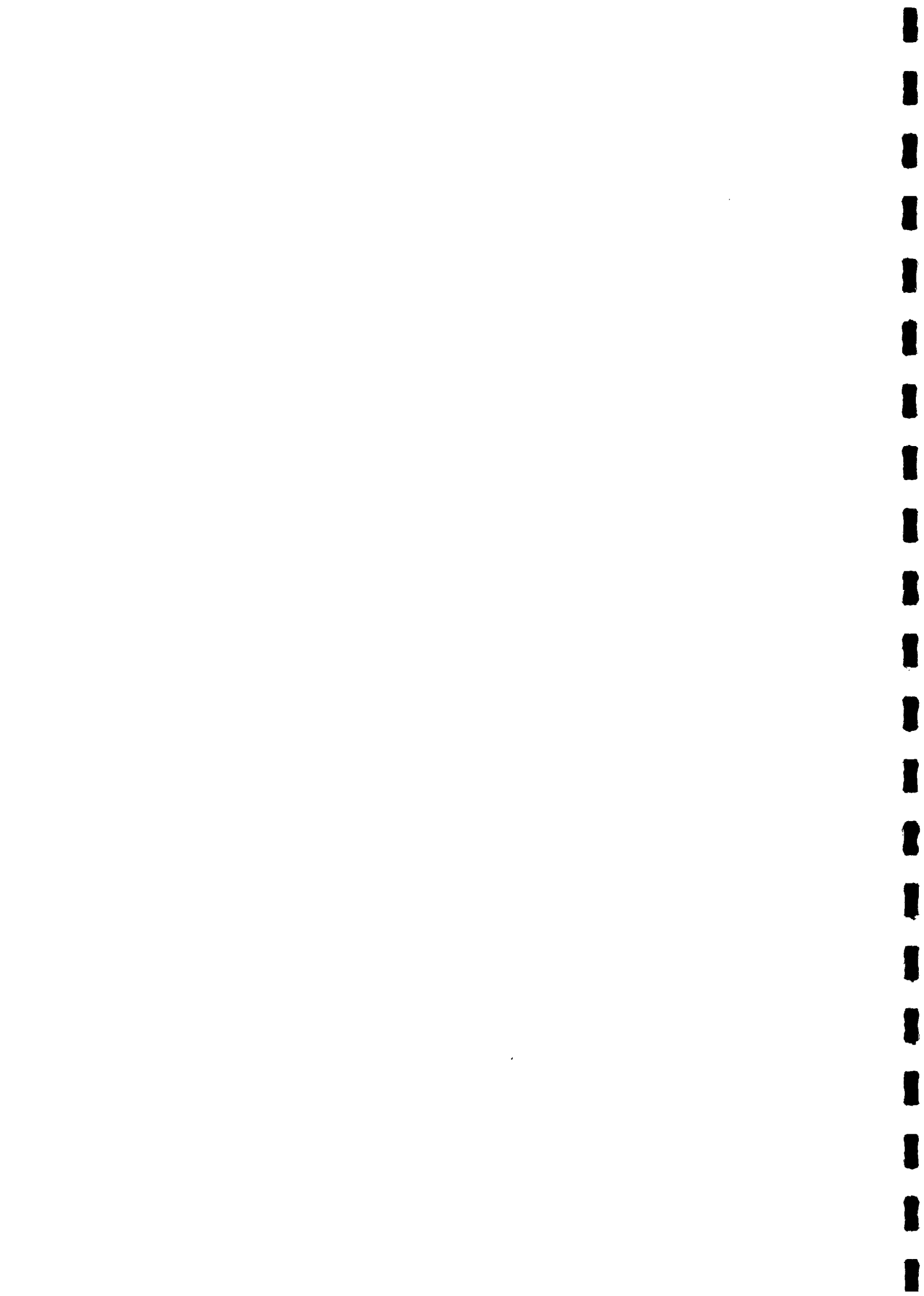
Dans le second chapitre, différentes lois de comportement à variables internes permettant la modélisation des comportements de l'acier et du béton sous divers chargements, sont présentées. Ces lois allant par la suite être utilisées au sein de l'élément fini de coque multicouche développé au chapitre précédent, pour le calcul de structures coques en béton armé soumises à des chargements statiques et dynamiques. Pour la modélisation du comportement de l'acier, deux lois de comportement à variables internes sont présentées : une loi élastoplastique parfaite de *Von-Mises* pour le cas de chargements monotones croissants et une loi anisotrope de *Hill* permettant la modélisation du comportement des lits d'armatures croisés existant dans les coques en béton armé. Pour la modélisation du comportement du béton, le modèle élastoplastique de *Willam-Warnke* à trois paramètres est choisi pour le cas des chargements monotones croissants. Une première extension de ce modèle à un modèle élastoplastique endommageable est effectuée. Celle-ci permet la prédiction des effets du dommage à l'échelle microscopique des structures sous chargements cycliques. Une seconde extension à un modèle visco-élasto-plastique avec écrouissage visqueux est ensuite accomplie. Celle-ci permet de rendre compte du comportement du béton en dynamique rapide. Pour le traitement numérique de ces modèles, deux algorithmes sont présentés : l'algorithme de projection dans l'incrément et l'algorithme de projection dans l'itération. C'est sur l'algorithme de projection dans l'itération que notre choix s'est porté. Toutefois il convient de préciser que lors de ces développements numériques, une attention particulière est portée sur la condition de contraintes planes d'une part dans le schéma d'intégration des contraintes et d'autre part dans le calcul du tenseur tangent de comportement.

Les troisième et quatrième chapitres sont consacrés aux exemples de validations et d'applications numériques. Divers exemples de structures de coques soumises à des chargements statiques et dynamiques sont présentés. Les résultats obtenus sont comparés à des solutions de référence d'origine numérique ou expérimentale.

Enfin, nous concluons ce travail en tentant de tirer les enseignements de cette étude et de définir les axes de recherche pouvant être poursuivis.

CHAPITRE 1

MODELISATION EN COQUES MULTICOUCHES



1-0. Introduction

L'analyse d'une structure par éléments finis nécessite les trois étapes suivantes : le choix d'une échelle de description à laquelle doit se placer le modélisateur pour que son calcul soit réaliste et efficace, la modélisation des différents matériaux constituant la structure, et enfin, la mise en oeuvre numérique dans un code de calcul par éléments finis. Au stade de la première étape, ce sont la nature ainsi que la précision des résultats recherchés qui fixent le choix de l'échelle de modélisation. Nous distinguons : les échelles globale, semi-globale, et locale.

Dans notre étude, notre choix s'est porté sur l'approche de discrétisation semi-globale, celle-ci se trouvant être appropriée au calcul non-linéaire matériel et géométrique de structures constituées de coques sous divers chargements. C'est pourquoi, nous nous proposons dans ce premier chapitre, de développer un outil numérique issu de cette approche : l'élément de coque multicouche. Cet élément est formé d'un empilement de plusieurs coques monocouches excentrées. L'idée de base consiste alors à établir les équations pour une coque excentrée, puis d'en déduire celle d'un élément de coque multicouche par superposition, moyennant certaines hypothèses.

Ce chapitre comprend 5 parties:

La première partie consiste à situer l'approche choisie (approche multicouche) par rapport aux approches de discrétisation par éléments finis existantes.

Au cours de la seconde partie, nous établissons les équations d'équilibre locales d'une coque excentrée dans le cadre des petites perturbations; ce qui nous permettra ensuite de déterminer la formulation faible de celles-ci.

La troisième partie est consacrée à l'extension de la formulation précédente au cas multicouche. A partir de là, nous établissons une formulation coques multicouches tenant compte uniquement des non-linéarités matérielles.

Dans la quatrième partie, nous nous intéressons aux non-linéarités géométriques. Nous commençons par établir une formulation coques multicouches permettant d'étudier le phénomène d'instabilité élastique se produisant dans les coques, et abordons ensuite les problèmes de grands déplacements, grandes rotations et petites déformations tout en combinant ces effets non-linéaires géométriques avec les non-linéarités matérielles.

Enfin, nous concluons ce chapitre par la présentation du domaine d'application de l'outil numérique développé.

1-1. Différentes échelles de discrétisation des structures coques par éléments finis

On peut distinguer trois échelles de discrétisation par éléments finis des structures coques : une échelle globale, une échelle locale et une échelle semi-globale (*figure 1-1*). Ce sont la nature et la précision des résultats recherchés qui fixent le choix d'une échelle.

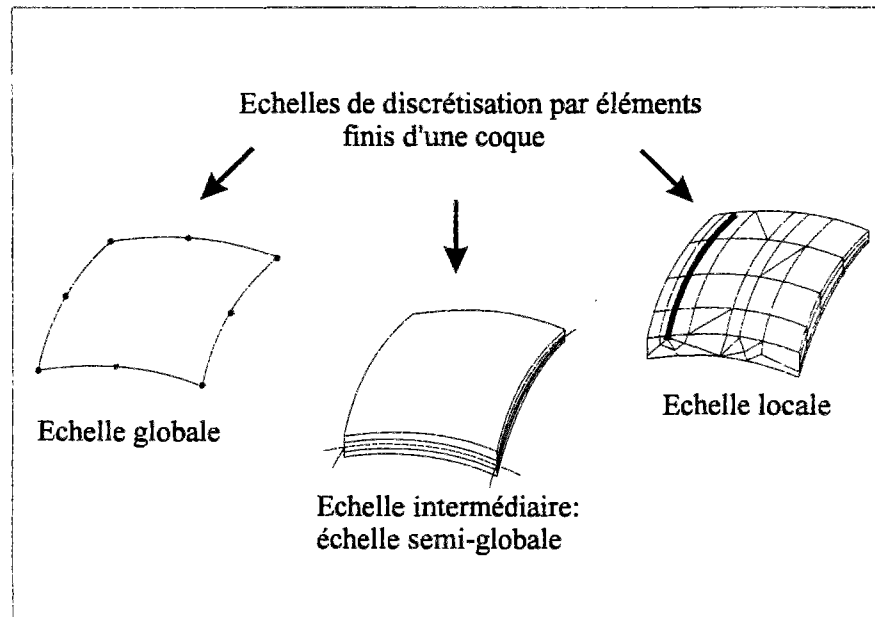


Figure 1-1 : Représentation des différents niveaux de discrétisation d'une coque

1-1-1. Echelle globale

Cette approche consiste à modéliser le comportement de la structure coque considérée à partir de variables généralisées d'efforts et de déformations dans une section. On construit alors le fonctionnement de cette section, pour l'intégrer ensuite sur toute la structure. Plusieurs voies sont possibles, nous distinguons :

- *L'approche par construction d'une courbe limite d'interaction :*

Dans cette approche, on détermine le domaine de résistance d'une section soumise à un effort normal et un moment fléchissant. Pour cela, on construit la formulation à partir des lois uniaxiales des différents matériaux constituant la coque et on recherche l'extremum d'un couple effort normal-moment fléchissant pour une excentricité donnée. L'ensemble des extrema constitue la courbe ultime de la section, appelée « courbe limite d'interaction » qu'on considère comme un critère de plasticité fonction de l'effort normal et du moment fléchissant. L'évolution des variables plastiques de la section : elongations et courbures plastiques, est décrite par une règle d'écoulement (*Cariou, 1988*).

- *L'approche par macro-élément :*

Cette approche a surtout été développée dans le cas des poutres (*Elachachi et Breysse, 1991*). Il s'agit d'étudier la réponse d'un élément de structure appelé « macro-élément » dont la taille est de l'ordre de grandeur des dimensions transverses. Cette étude consiste à tester le macro-élément dans toutes les situations. Les réponses de celui-ci doivent pouvoir être calculées indépendamment de la structure à laquelle il est relié. On paramètre ces réponses pour obtenir des expressions analytiques, puis on procède au calcul global de la structure par l'assemblage de macro-éléments.

Ces approches par discrétisation globale conduisent en général à des temps de calculs réduits mais présentent cependant certains inconvénients :

- Elles sont surtout adaptées aux structures de type poutres. Leur généralisation aux coques est complexe. En effet, l'extension au cas des efforts et moments multiples dans les coques reste très délicate, notamment en ce qui concerne l'interaction entre ces forces qui est difficile à établir sous forme d'une courbe limite d'interaction.
- De plus, pour une coque composite, le comportement non-linéaire en matériaux est difficile à modéliser par l'utilisation d'une approche en discrétisation globale, car toutes les informations géométriques et matérielles sont ramenées à la surface moyenne de celle-ci. Cette approche ne permet donc pas de définir précisément les comportements locaux des différents matériaux constituant la coque puisqu'elle intègre globalement les phénomènes.

Pour la prise en compte des non-linéarités géométriques, l'approche globale permet d'établir des procédures numériques efficaces du fait de la représentation géométrique simple.

1-1-2. Echelle locale

A cette échelle de discrétisation, de type mécanique des milieux continus, on modélise le béton par des éléments de massifs et l'acier par des éléments de barres ou massifs. L'analyse est alors lourde et la prise en compte des non-linéarités matérielles et géométriques nécessite non seulement des temps de calculs importants mais aussi le stockage d'un grand nombre de résultats partiels. Cette approche a toutefois l'avantage d'être proche de la réalité physique et permet d'obtenir des informations locales concernant l'état de plastification, de détérioration et d'endommagement de la structure.

1-1-3. Echelle semi-globale

Cette échelle de discrétisation, intermédiaire entre les deux précédentes, est fondée sur l'utilisation d'éléments multicouches. L'idée principale consiste à associer une description locale du comportement des matériaux à une cinématique d'éléments de structure. Appliquée aux coques, cette approche consiste à découper l'épaisseur de la coque en « couches » pour tenir compte des différents matériaux constitutifs, tout en conservant les hypothèses cinématiques simplificatrices de *Love-Kirchhoff* ou de *Mindlin-Reissner*.

Les passages entre échelles globale et locale se font en permanence : on modélise la coque, considérée comme un solide tridimensionnel, en un élément de coque classique, l'équilibre et la cinématique sont alors gérés à l'échelle globale, en revanche toute information concernant le comportement non-linéaire matériel est gérée au niveau local de chaque couche (*figure 1-2*).

L'échelle de discrétisation semi-globale permet ainsi de traiter, tant les non-linéarités en matériau à une échelle locale, que les non-linéarités géométriques (grands déplacements-grandes rotations) à une échelle globale. Cette modélisation réunit les avantages des deux approches précédentes, à savoir : temps de calculs restreints et lois de comportement locales appropriées. C'est pourquoi nous choisissons d'utiliser cette approche dans notre étude.

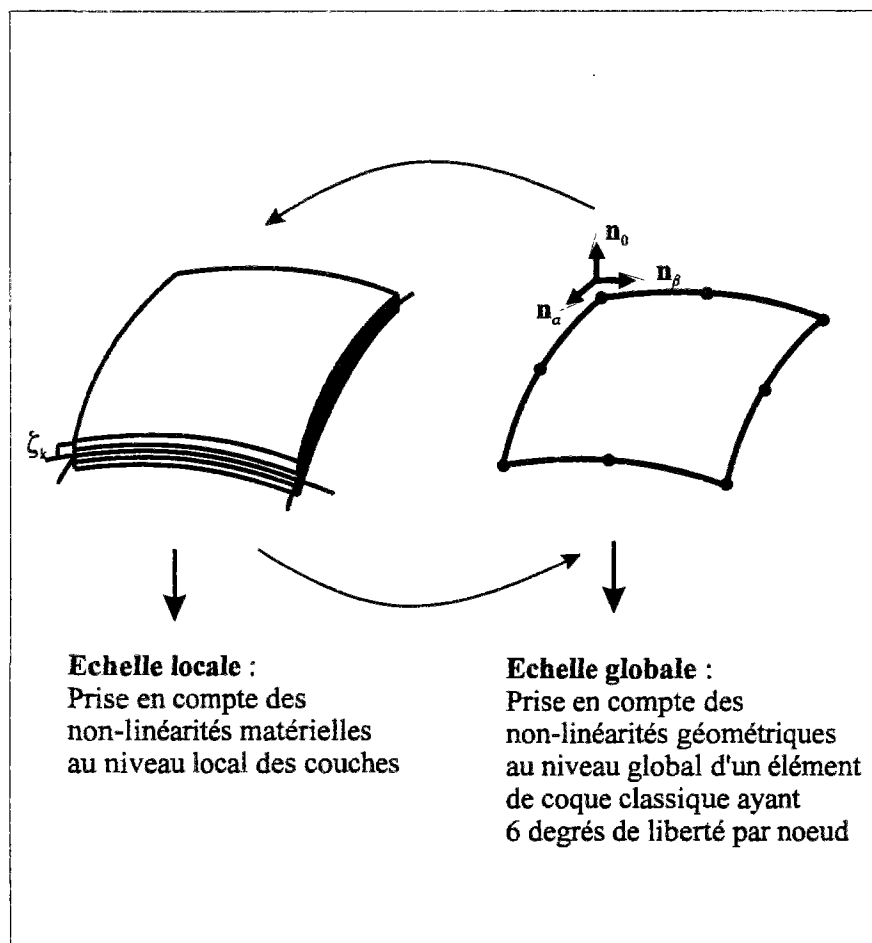


Figure 1-2 : Approche multicouche

Les éléments de coques multicouches datent du début des années 70 (*Hand et al., 1973; Lin et al., 1975*) et sont à présent considérablement répandus dans la littérature du fait qu'ils ont connu de grands développements en statique, dynamique et grands déplacements.

Dans le cadre d'analyses linéaires, ces éléments ont largement été utilisés. *Panda et al., 1981*, ont par exemple étendu le concept d'éléments dégénérés d'Ahmad (*Ahmad et al., 1970*) aux coques multicouches pour l'étude des structures de coques composites.

Huttelmaier et al., 1985, ont proposé une formulation éléments finis pour les coques multicouches épaisses. Ces développements représentaient une extension de leurs travaux concernant les plaques (*Huttelmaier et al., 1983*).

Ramesh et al., 1988, ont considéré le comportement dynamique des coques composites et ont développé pour cela un élément de coque multicouche isoparamétrique dégénéré à 8 noeuds pour l'étude des vibrations libres de coques cylindriques.

Dans le cadre d'analyses non-linéaires, les premières applications ont été effectuées par *Hand et al. (1973)* pour l'étude des plaques et coques en béton armé. Ces auteurs ont utilisé des éléments de coques multicouches adaptables, du point de vue géométrique, pour des plaques et coques minces. Dans leurs développements, ils supposent une loi élastoplastique pour modéliser le comportement mécanique des armatures, et une loi bilinéaire élastique parfaitement plastique pour modéliser le comportement du béton en compression. Pour le béton en traction, ils considèrent celui-ci comme fragile et négligent l'effet « tension stiffening » qui suppose que le béton au voisinage des armatures suit une loi de traction modifiée compte tenu de sa plus forte participation, entre deux fissures, à la reprise des efforts de traction (*Guggenberger, 1992*).

Lin et al., 1975 se sont également intéressés à l'analyse non-linéaire des coques en béton armé, et ont utilisé à cet effet des éléments de coques multicouches plats à 3 noeuds. Ces auteurs supposent une loi élastoplastique, symétrique en traction et compression, pour modéliser le comportement de l'acier; et une loi élastoplastique pour modéliser le comportement du béton en compression uniquement. Pour le béton en traction, ils le considèrent comme fragile et tiennent compte de l'effet « tension stiffening ».

Hu et al., 1991 ont, quant à eux, utilisé pour l'analyse non-linéaire de plaques et coques en béton armé sous chargements monotones, des éléments de coques multicouches, avec, pour l'acier et le béton, des modèles qu'ils ont précédemment développé (*Hu et al., 1989 et 1990*).

Oñate, 1992, s'est intéressé à l'étude non-linéaire des structures coques en béton armé en grands déplacements. Dans cette étude, il a utilisé des éléments de coques multicouches dégénérés plats et courbes, a modélisé le comportement de l'acier par une loi élastoplastique simple et a proposé deux modèles pour le béton. Le premier modèle a été utilisé par *Owen et al., 1984* pour l'analyse de la charge ultime des plaques et coques en béton armé. Celui-ci est basé sur la théorie élastoplastique pour modéliser le comportement en compression du béton, et sur la théorie élastique linéaire pour modéliser le comportement en traction. Le second modèle est un modèle élastoplastique tenant compte de l'endommagement plastique. Ce modèle a été proposé par *Lubliner, Oller, Oliver et Oñate* dans différentes publications (*Oñate et al., 1986, 1987 et 1988, Oller, 1988, Lubliner et al., 1989*).

De nombreux autres auteurs ont étendu ces dernières années l'approche multicouche à l'analyse non-linéaire des plaques et coques en béton armé sous chargements statiques, dynamiques et cycliques, nous citerons : *Millard, 1989, Chahrouh, 1991 et Djeroud, 1992*. Toutefois, sur un plan numérique, ces éléments restent développés pour des lois de comportement spécifiques au béton et à l'acier. On se propose dans cette étude de montrer leur généralisation à l'analyse des structures dont le comportement est régi par des lois à variables internes: plasticité, viscoplasticité, endommagement...

Nous commençons pour cela, dans ce premier chapitre, par mettre en équation la modélisation coques multicouches. Ceci nécessite d'établir d'abord les équations de base pour une coque excentrée puis d'en déduire celles d'une coque multicouche par superposition.

1-2. Equations de base d'une coque excentrée

Il y a deux façons de considérer un solide constitué d'un empilement de couches homogènes :

- Comme un solide tridimensionnel hétérogène globalement.
- Comme un empilement de coques homogènes en interaction mécanique.

L'approche multicouche développe ce second point de vue : chaque couche de matériau y est dotée a priori d'une cinématique de coque excentrée. C'est pourquoi nous établissons dans ce paragraphe les équations régissant la déformation d'une coque excentrée seule sous l'effet de forces données au niveau d'une surface de référence.

Notre propos étant d'obtenir une formulation bidimensionnelle de type coque, nous rapporterons, lors de la mise en équation du problème, toute grandeur mécanique de chaque couche à un système surfacique de référence commun. Nous nous plaçons pour commencer dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations.

1-2-1. Hypothèse des petites perturbations

L'hypothèse des petites perturbations se compose de :

H1 : l'hypothèse des transformations infinitésimales. Pour un point matériel M du solide ayant pour vecteurs positions dans les configurations initiale et actuelle respectivement \mathbf{X} et \mathbf{x} et pour vecteur déplacement $\boldsymbol{\xi}$, cette hypothèse se traduit par :

$$\forall \mathbf{X} \quad \|\text{Grad } \boldsymbol{\xi}\| \ll 1 \quad (1)$$

Elle conduit à celle des déformations infinitésimales. Dans cette hypothèse, on peut confondre les opérateurs gradients lagrangien ($\text{Grad}(\cdot)$) et eulérien ($\text{grad}(\cdot)$) en des points homologues des configurations initiale et actuelle : en particulier pour le déplacement, ceci revient à confondre $\text{Grad } \boldsymbol{\xi}$ et $\text{grad } \boldsymbol{\xi}$. En revanche, elle ne permet pas de confondre les coordonnées de ces points, c'est à dire les vecteurs \mathbf{X} et \mathbf{x} .

H2 : l'hypothèse des petits déplacements. Cette hypothèse permet d'assurer que l'on puisse confondre la géométrie actuelle du solide avec sa géométrie initiale fixe. Toutes les quantités sont alors exprimées dans la configuration initiale, et les coordonnées actuelles et initiales peuvent être confondues dans l'écriture des différents champs.

1-2-2. Description géométrique

Dans ce paragraphe, nous rappelons brièvement les éléments nécessaires à la description géométrique des coques excentrées.

On définit géométriquement une coque excentrée par une surface moyenne A et une épaisseur h . La surface moyenne est excentrée d'une distance e de la surface de référence, et l'épaisseur h , supposée petite par rapport aux autres dimensions de la coque (longueur, rayons de courbure), est définie suivant la direction normale à la surface moyenne (*figure 1-3*).

Deux coordonnées curvilignes orthogonales notées α et β définissent la surface de référence S . Si l'une de ces coordonnées, par exemple β , est incrémentée, nous pouvons définir une série de courbes paramétriques sur la surface de référence le long de laquelle α varie (*figure 1-4*). Ces courbes sont appelées courbes de coordonnées s_α . De même, si l'on incrémente la coordonnée α , on obtient les courbes de coordonnées s_β .

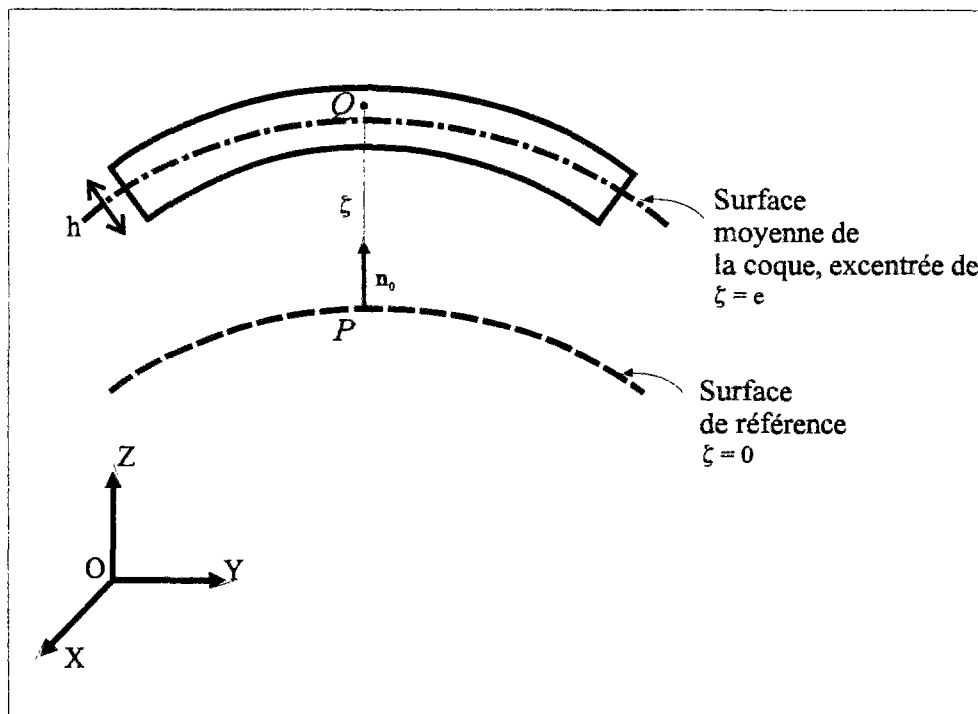


Figure 1-3 : Surface moyenne et surface de référence d'une coque excentrée

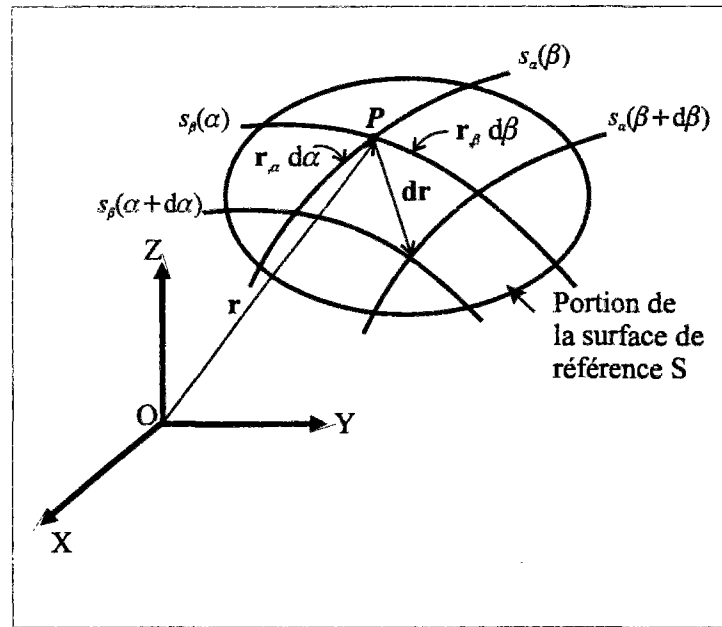


Figure 1-4 : Élément différentiel de la surface de référence d'une coque excentrée

Considérons le vecteur position \mathbf{r} d'un point P de la surface de référence S (figure 1-4). Ce vecteur s'écrit : $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$, et ses dérivées par rapport aux coordonnées curvilignes α et β sont données par :

$$\mathbf{r}_{,\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \quad \mathbf{r}_{,\beta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \quad (2)$$

Utilisant ces notations, l'élément différentiel $d\mathbf{r}$ s'écrit en fonction de $d\alpha$ et $d\beta$:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{,\alpha} d\alpha + \mathbf{r}_{,\beta} d\beta \quad (3)$$

Et sa longueur ds est telle que :

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{r}_{,\alpha} d\alpha)^2 + (\mathbf{r}_{,\beta} d\beta)^2 \quad (4)$$

Définissant :

$$A = \|\mathbf{r}_{,\alpha}\| \quad B = \|\mathbf{r}_{,\beta}\| \quad (5)$$

On obtient :

$$ds^2 = (A d\alpha)^2 + (B d\beta)^2 \quad (6)$$

Les quantités A et B sont appelées *paramètres de Lamé* et sont nécessaires pour l'utilisation de la notion de coordonnées curvilignes orthogonales. Pour interpréter géométriquement leur signification, considérons deux cas pour lesquels chacune des coordonnées α et β varie individuellement et indépendamment. L'équation (6) devient :

$$ds_\alpha = A d\alpha \quad (7)$$

et

$$ds_\beta = B d\beta \quad (8)$$

Ainsi, ds_α représente l'accroissement de la longueur d'arc pris sur la courbe de coordonnée s_α lorsque α est incrémenté de $d\alpha$, et ds_β représente l'accroissement de la longueur d'arc pris sur la courbe de coordonnée s_β lorsque β est incrémenté de $d\beta$. Les paramètres de Lamé sont par conséquent les quantités reliant l'accroissement de la longueur d'arc sur la surface de référence S de la coque, à la variation de la coordonnée curviligne correspondante.

Au point P , précisé précédemment, on définit une base orthonormée composée de deux vecteurs unitaires \mathbf{n}_α et \mathbf{n}_β tangents respectivement aux directions définies par α ($\beta = \text{constante}$) et β ($\alpha = \text{constante}$); et d'un vecteur unitaire \mathbf{n}_0 normal aux deux autres (*figure 1-5*). Ces vecteurs s'écrivent:

$$\mathbf{n}_\alpha = \frac{\mathbf{r}_{,\alpha}}{A} \quad \mathbf{n}_\beta = \frac{\mathbf{r}_{,\beta}}{B} \quad \mathbf{n}_0 = \frac{1}{AB} (\mathbf{r}_{,\alpha} \wedge \mathbf{r}_{,\beta}) \quad (9)$$

et vérifient la relation :

$$\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j = \delta_{ij} \begin{cases} \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j; \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \\ i, j = \alpha, \beta, 0 \end{cases} \quad (10)$$

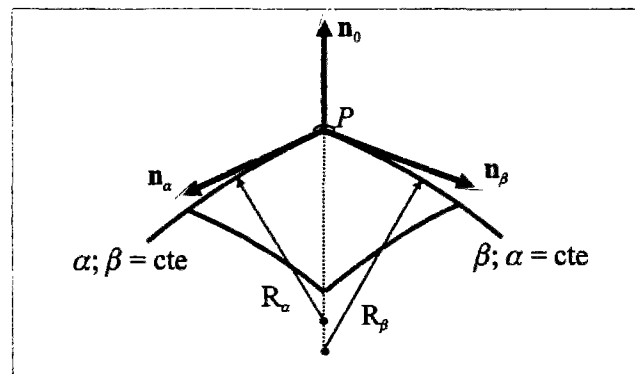


Figure 1-5 : Vecteurs de base \mathbf{n}_α , \mathbf{n}_β et \mathbf{n}_0 et rayons de courbure R_α et R_β

La différentiation de l'équation (10) respectivement à k ($k = \alpha$ ou β) conduit à :

$$(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j)_{,k} = 0 \quad (11)$$

par conséquent :

$$\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{j,k} + \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{n}_{i,k} = 0 \quad (12)$$

Utilisant (12), on peut exprimer les dérivées des vecteurs de la base en P , \mathbf{n}_α , \mathbf{n}_β et \mathbf{n}_0 par rapport aux coordonnées curvilignes α et β tel que (cf. **annexe 1**) :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\alpha,\alpha} &= -\frac{A_{,\beta}}{B} \mathbf{n}_\beta - \frac{A}{R_\alpha} \mathbf{n}_0 \\ \mathbf{n}_{\alpha,\beta} &= -\frac{B_{,\alpha}}{A} \mathbf{n}_\beta \\ \mathbf{n}_{\beta,\alpha} &= -\frac{A_{,\beta}}{B} \mathbf{n}_\alpha \\ \mathbf{n}_{\beta,\beta} &= -\frac{B_{,\alpha}}{A} \mathbf{n}_\alpha - \frac{B}{R_\beta} \mathbf{n}_0 \\ \mathbf{n}_{0,\alpha} &= \frac{A}{R_\alpha} \mathbf{n}_\alpha \\ \mathbf{n}_{0,\beta} &= \frac{B}{R_\beta} \mathbf{n}_\beta \end{aligned} \quad (13)$$

R_α et R_β représentent les rayons de courbures des courbes paramétriques α ($\beta = \text{constante}$) et β ($\alpha = \text{constante}$) de la coque (**figure 1-5**) :

$$R_\alpha = \frac{-A^3 B}{(\mathbf{r}_{,\alpha} \wedge \mathbf{r}_{,\beta}) \cdot \mathbf{r}_{,\alpha\alpha}} \quad R_\beta = \frac{-B^3 A}{(\mathbf{r}_{,\alpha} \wedge \mathbf{r}_{,\beta}) \cdot \mathbf{r}_{,\beta\beta}} \quad (14)$$

1-2-3. Eléments de réduction

Le paragraphe précédent a été consacré à la description géométrique d'une coque excentrée, nous introduisons à présent, pour cette coque, le concept d'efforts. Notre objectif étant d'obtenir une modélisation bidimensionnelle d'un solide a priori tridimensionnel, nous ramènerons toute information de la coque excentrée à une surface bidimensionnelle : la surface de référence.

Considérons un point matériel Q situé à une distance ζ de la surface de référence de la coque et P sa projection orthogonale sur celle-ci (*figure 1-3*). Le vecteur position PQ s'écrit : $PQ = \zeta \mathbf{n}_0$. Si l'on note $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(Q)$ le tenseur de contraintes en Q , les forces généralisées au point P , composées des efforts \mathbf{N} et moments \mathbf{M} , sont définies par les éléments de réductions suivants :

$$\mathbf{N}_\alpha = \int_{A_\alpha} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_\alpha \, dS_\alpha(\zeta) \quad \mathbf{M}_\alpha = \int_{A_\alpha} \mathbf{n}_0 \wedge (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_\alpha) \zeta \, dS_\alpha(\zeta) \quad (15)$$

selon la facette normale à \mathbf{n}_α et :

$$\mathbf{N}_\beta = \int_{A_\beta} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_\beta \, dS_\beta(\zeta) \quad \mathbf{M}_\beta = \int_{A_\beta} \mathbf{n}_0 \wedge (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_\beta) \zeta \, dS_\beta(\zeta) \quad (16)$$

selon la facette normale à \mathbf{n}_β .

Pour un élément de volume $d\Omega = ds_\alpha ds_\beta d\zeta$, situé à une distance ζ de la surface de référence, la longueur selon la facette normale à \mathbf{n}_β vaut :

$$ds_\alpha(\zeta) = \frac{R_\alpha + \zeta}{R_\alpha} ds_\alpha^0 \quad \text{avec} \quad ds_\alpha^0 = ds_\alpha(\zeta = 0) \quad (17)$$

et sa surface :

$$dS_\beta(\zeta) = ds_\alpha(\zeta) d\zeta = \left(1 + \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) d\zeta ds_\alpha^0 \quad (18)$$

De même, pour une section similaire normale à \mathbf{n}_α , on obtient :

$$ds_\beta(\zeta) = \frac{R_\beta + \zeta}{R_\beta} ds_\beta^0 \quad dS_\alpha(\zeta) = ds_\beta(\zeta) d\zeta = \left(1 + \frac{\zeta}{R_\beta}\right) d\zeta ds_\beta^0 \quad (19)$$

Utilisant (18) et (19) dans (15) et (16), on obtient les forces généralisées linéiques en P suivantes :

$$\mathbf{N}_\alpha = \int \frac{d\mathbf{N}_\alpha}{ds_\beta^0} = \int_{e-h/2}^{e+h/2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_\alpha) \left(1 + \frac{\zeta}{R_\beta}\right) d\zeta \quad \mathbf{M}_\alpha = \int \frac{d\mathbf{M}_\alpha}{ds_\beta^0} = \int_{e-h/2}^{e+h/2} \mathbf{n}_0 \wedge (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_\alpha) \zeta \left(1 + \frac{\zeta}{R_\beta}\right) d\zeta \quad (20)$$

selon la facette normale à \mathbf{n}_α et :

$$\mathbf{N}_\beta = \int \frac{d\mathbf{N}_\beta}{ds_\alpha^0} = \int_{e-h/2}^{e+h/2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_\beta) \left(1 + \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) d\zeta \quad \mathbf{M}_\beta = \int \frac{d\mathbf{M}_\beta}{ds_\alpha^0} = \int_{e-h/2}^{e+h/2} \mathbf{n}_0 \wedge (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_\beta) \zeta \left(1 + \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) d\zeta \quad (21)$$

selon la facette normale à \mathbf{n}_β .

Ces forces sont décomposables en composantes hors et dans le plan de chacune de ces deux facettes (*figure 1-6*) :

$$\mathbf{N}_\alpha = N_{\alpha\alpha} \mathbf{n}_\alpha + N_{\alpha\beta} \mathbf{n}_\beta + V_{\alpha 0} \mathbf{n}_0 \quad \mathbf{N}_\beta = N_{\beta\alpha} \mathbf{n}_\alpha + N_{\beta\beta} \mathbf{n}_\beta + V_{\beta 0} \mathbf{n}_0 \quad (22)$$

$$\mathbf{M}_\alpha = -M_{\alpha\beta} \mathbf{n}_\alpha + M_{\alpha\alpha} \mathbf{n}_\beta \quad \mathbf{M}_\beta = -M_{\beta\beta} \mathbf{n}_\alpha + M_{\beta\alpha} \mathbf{n}_\beta \quad (23)$$

Le premier indice de chaque composante correspond à la facette sur laquelle celle-ci agit, alors que le second indique sa direction. Nous noterons toutefois que nous considérons la coque sans torsion, c'est pourquoi seuls les moments de flexion sont pris en compte.

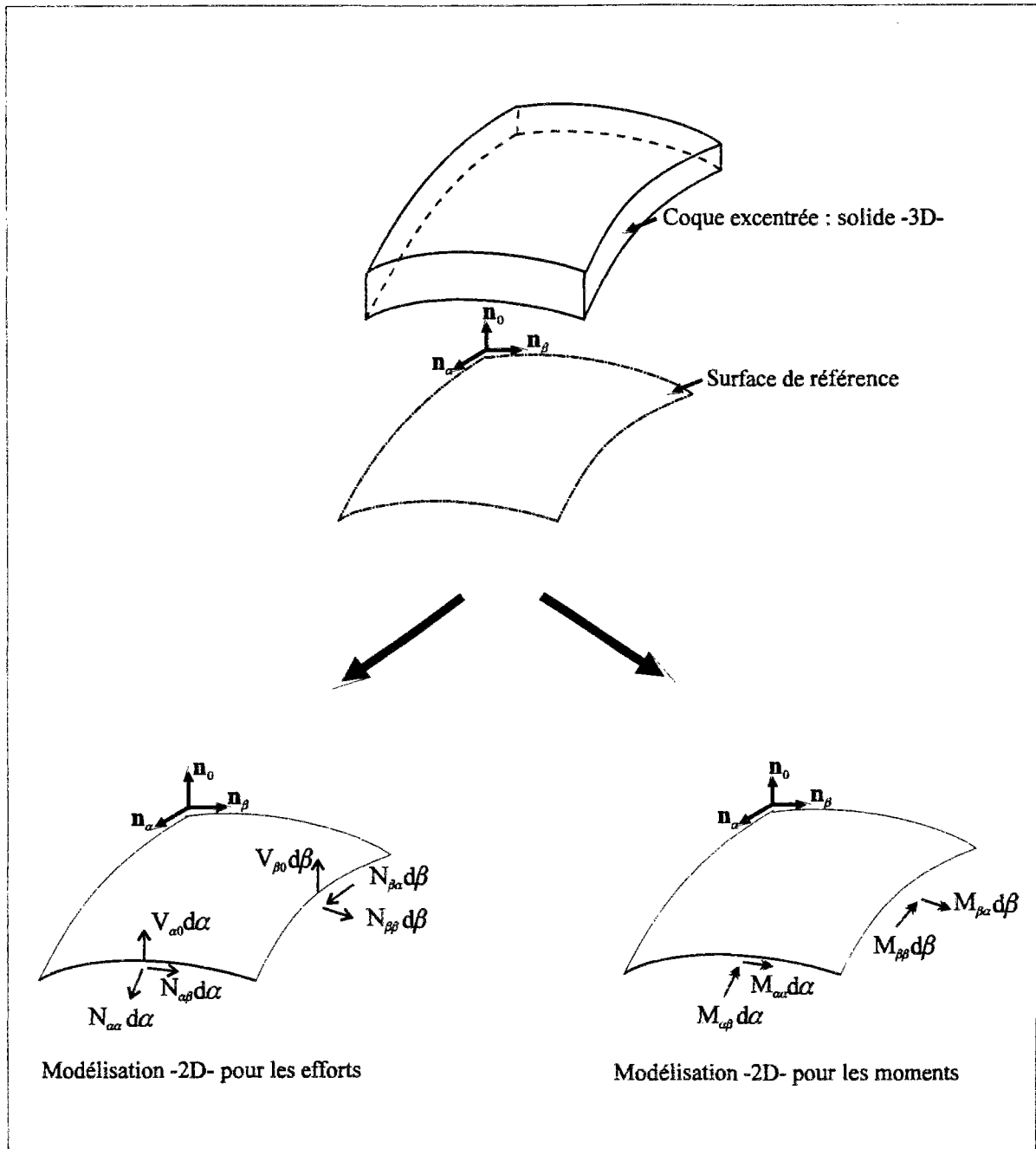


Figure 1-6 : Représentation des efforts intérieurs d'une coque excentrée

1-2-4. Hypothèses de déformation des coques

Nous appliquons :

H3 : l'hypothèse de *Mindlin-Reissner* pour une coque épaisse. Cette hypothèse suppose que toute normale à la surface de référence non déformée de la coque reste droite après déformation mais n'est plus forcément normale à la surface de référence déformée.

H3* : L'hypothèse de *Love-Kirchhoff* pour une coque mince. Cette hypothèse est analogue à celle de Navier-Bernoulli dans le cas des poutres et suppose que toute normale à la surface de référence non déformée de la coque reste normale à la surface de référence déformée.

Pour illustrer géométriquement ces deux hypothèses, considérons un élément différentiel de la surface de référence S de la coque considérée avant et après déformation. La *figure 1-7* montre que le point Q peut prendre après déformation une des deux positions : Q_1 ou Q_2 . Si l'hypothèse de *Love-Kirchhoff* est prise en compte, la conservation des normales est assurée, le point Q se retrouve donc en Q_1 après déformation. Si, en revanche, l'hypothèse de *Mindlin-Reissner* est retenue, la conservation des normales n'est plus assurée, le point Q peut se retrouver en Q_2 après déformation.

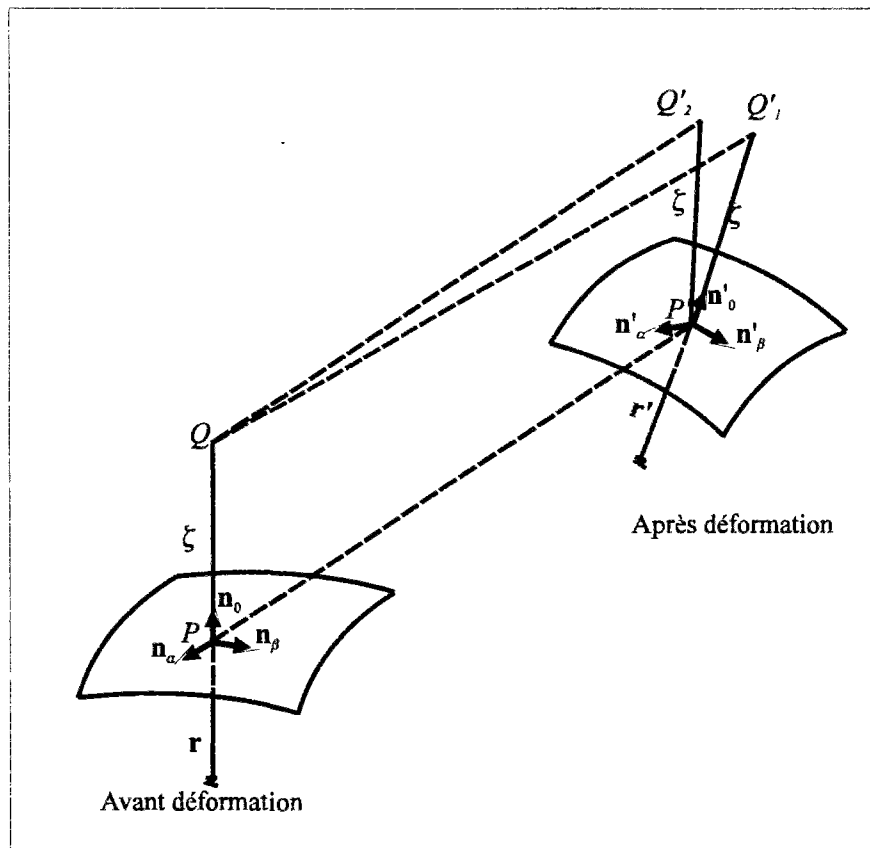


Figure 1-7 : Hypothèses de Love-Kirchhoff et de Mindlin-Reissner

1-2-5. Vecteur déplacement et tenseur de déformations linéarisées

Considérons les points P et Q précédemment définis (*figure 1-3*) et notons par $\xi(P)$ et $\omega(P)$ respectivement les vecteurs déplacement et rotation au point P . Avec les hypothèses **H3** et **H2**, le vecteur déplacement au point Q s'écrit en fonction de $\xi(P)$ et $\omega(P)$:

$$\xi = \xi(Q) = \xi(P) + \omega(P) \wedge PQ \quad (24)$$

ou encore :

$$\xi = \xi(Q) = \xi(P) + \zeta \omega(P) \wedge \mathbf{n}_0 \quad (25)$$

Le tenseur de déformations linéarisé s'obtient à partir du vecteur déplacement $\xi(Q)$ par :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\text{grad} \xi + {}^t \text{grad} \xi) \quad (26)$$

Ses composantes s'expriment donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\xi_{\alpha,\alpha}^P}{A} - \frac{A_{,\beta}}{AB} \xi_{\beta}^P + \frac{1}{R_{\alpha}} \xi_0^P + \zeta \left(\frac{\omega_{\beta,\alpha}^P}{A} - \frac{A_{,\beta}}{AB} \omega_{\alpha}^P \right) \\ \varepsilon_{\beta\beta} = \frac{\xi_{\beta,\beta}^P}{B} - \frac{B_{,\alpha}}{AB} \xi_{\alpha}^P + \frac{1}{R_{\beta}} \xi_0^P - \zeta \left(\frac{\omega_{\alpha,\beta}^P}{B} - \frac{B_{,\alpha}}{AB} \omega_{\beta}^P \right) \\ \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\xi_{\beta,\alpha}^P}{A} - \frac{A_{,\beta}}{AB} \xi_{\alpha}^P + \frac{\xi_{\alpha,\beta}^P}{B} - \frac{B_{,\alpha}}{AB} \xi_{\beta}^P + \zeta \left(\frac{\omega_{\beta,\beta}^P}{B} + \frac{B_{,\alpha}}{AB} \omega_{\alpha}^P - \frac{\omega_{\alpha,\alpha}^P}{A} - \frac{A_{,\beta}}{AB} \omega_{\beta}^P \right) \\ \varepsilon_{\alpha 0} = \frac{\xi_{0,\alpha}^P}{A} - \frac{1}{R_{\alpha}} \xi_{\alpha}^P + \omega_{\beta}^P \\ \varepsilon_{\beta 0} = \frac{\xi_{0,\beta}^P}{B} - \frac{1}{R_{\beta}} \xi_{\beta}^P - \omega_{\alpha}^P \end{array} \right. \quad (27)$$

Le système (27) met en évidence que la composante ε_{00} du tenseur de déformation ne se dérive pas à partir du champ de déplacement (24). En effet, c'est la loi de comportement qui la détermine, notamment l'hypothèse des contraintes planes, comme nous le verrons dans le chapitre 2.

Supposons à présent que l'on retienne, au lieu de l'hypothèse de *Mindlin-Reissner* **H3**, l'hypothèse de *Love-Kirchhoff* **H3***. Les relations (24) et (26) permettant de définir le vecteur déplacement au point Q et le tenseur de déformations linéarisées restent toujours valables, cependant les composantes $\varepsilon_{\alpha 0}$ et $\varepsilon_{\beta 0}$ du tenseur de déformations deviennent nulles avec l'introduction de cette hypothèse. La conservation des normales permet ainsi de définir la relation supplémentaire suivante, liant les vecteurs déplacement et rotation au point P, $\xi(P)$ et $\omega(P)$:

$$\text{grad}(\xi(P)) \cdot \mathbf{n}_0 - \mathbf{n}_0 \wedge \omega(P) = 0 \quad (28)$$

1-2-6. Mise en équation du problème

1-2-6-1. Formulation faible de l'équation d'équilibre mécanique

L'équilibre mécanique d'un système de volume élémentaire $d\Omega$ s'écrit dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations :

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{F} - \boldsymbol{\gamma}) = 0 \quad (29)$$

où $\rho\mathbf{F}$ et $\rho\boldsymbol{\gamma}$ représentent les densités des efforts volumique et d'inertie. Les conditions aux limites en forces et en déplacements se formulent comme suit :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} n_j = f_i^d & \text{sur } S_{f_i} \\ \xi_i = \xi_i^d & \text{sur } S_{\xi_i} \\ \text{avec } S_{f_i} \cap S_{\xi_i} = \emptyset \text{ et } S_{f_i} \cup S_{\xi_i} = S \end{cases} \quad (30)$$

L'exposant « d » indique les composantes « données ».

En multipliant (29) par un champ de vecteur quelconque $\hat{\mathbf{U}}$ puis en intégrant par partie le résultat sur Ω , on obtient la formulation faible de l'équation d'équilibre mécanique (29) :

$$\forall \Omega, \forall \hat{\mathbf{U}} \quad - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{d}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{U}} \, d\Omega + \int_S \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{U}} \, dS - \int_{\Omega} \rho \cdot \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{U}} \, d\Omega = 0 \quad (31)$$

avec $\hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{2}(\text{grad} \hat{\mathbf{U}} + {}^t \text{grad} \hat{\mathbf{U}})$ et $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$.

L'équation (31) peut également s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\forall \Omega, \forall \hat{\mathbf{U}} \quad P_{\text{int}}(\hat{\mathbf{U}}) + P_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{U}}) + P_{\text{iner}}(\hat{\mathbf{U}}) = 0 \quad (32)$$

où P_{int} , P_{ext} et P_{iner} sont respectivement les puissances virtuelles des efforts intérieurs, extérieurs et d'inertie. La satisfaction de cette relation permet la vérification simultanée de l'équation d'équilibre, des conditions aux limites, ainsi que des lois de comportement.

1-2-6-2. Application au cas d'une coque excentrée

Pour une coque excentrée d'épaisseur h et d'excentricité e , le champ vectoriel $\hat{\mathbf{U}}$ est composé de deux champs vectoriels $\hat{\mathbf{U}}_0$ et $\hat{\mathbf{\Omega}}_0$ de composantes respectives $(U_\alpha^p, U_\beta^p, U_0^p)$ et $(\Omega_\alpha^p, \Omega_\beta^p)$. Si le système suit un mouvement de *Mindlin-Reissner*, ces deux champs vectoriels sont liés de manière analogue à l'équation (24). L'utilisation du champ vectoriel $\hat{\mathbf{U}}$ dans la relation (31) et l'application de la définition (20) et (21) des efforts généralisés conduisent à réécrire la première intégrale volumique de (31), et donc la puissance virtuelle des efforts internes, sous la forme suivante :

$$P_{\text{int}}(\hat{\mathbf{U}}_0, \hat{\mathbf{\Omega}}_0) = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{d}} \, d\Omega = - \int_S \frac{1}{A} \mathbf{N}_\alpha \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_0}{\partial \alpha} \, dS - \int_S \frac{1}{B} \mathbf{N}_\beta \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_0}{\partial \beta} \, dS - \int_S \frac{1}{A} \mathbf{M}_\alpha \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{\Omega}}_0}{\partial \alpha} \, dS \\ - \int_S \frac{1}{B} \mathbf{M}_\beta \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{\Omega}}_0}{\partial \beta} \, dS + \int_S (\mathbf{n}_\alpha \wedge \mathbf{N}_\alpha + \mathbf{n}_\beta \wedge \mathbf{N}_\beta) \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_0 \, dS \quad (33)$$

où S est la surface de référence de la coque.

Les seconde et troisième intégrales (volumique et surfacique) de l'équation (31) constituent la puissance virtuelle des efforts extérieurs. Pour la coque excentrée, on choisit de négliger le terme de « volume » pour alléger la formulation. De plus, on décompose le vecteur chargement \mathbf{T} en deux vecteurs \mathbf{q} et \mathbf{m} cofacteurs respectifs des champs vectoriels $\hat{\mathbf{U}}_0$ et $\hat{\mathbf{\Omega}}_0$. L'expression de la puissance virtuelle des efforts extérieurs devient :

$$P_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{U}}_0, \hat{\mathbf{\Omega}}_0) = \int_S (\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_0) \, dS \quad (34)$$

L'interprétation de la représentation des efforts extérieurs impliquée par l'équation (34) est immédiate. En effet, les vecteurs \mathbf{q} et \mathbf{m} ne sont rien d'autre que les vecteurs forces et moments extérieurs appliqués par unité de surface de la coque. Dans la pratique, le vecteur \mathbf{m} est souvent égal à zéro.

Enfin, la quatrième et dernière intégrale de l'équation (31) représente la puissance virtuelle des efforts d'inertie. La décomposition du champ vectoriel $\hat{\mathbf{U}}$ en $\hat{\mathbf{U}}_0$ et $\hat{\mathbf{\Omega}}_0$ satisfaisant la relation (24) permet d'exprimer cette intégrale comme suit :

$$P_{\text{iner}}(\hat{\mathbf{U}}_0, \hat{\mathbf{\Omega}}_0) = - \int_S \int_{e-h/2}^{e+h/2} \rho \left(\ddot{\mathbf{U}}_0 \cdot \hat{\mathbf{U}}_0 + \zeta \ddot{\mathbf{U}}_0 \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_0 + \zeta \ddot{\mathbf{\Omega}}_0 \cdot \hat{\mathbf{U}}_0 + \zeta^2 \ddot{\mathbf{\Omega}}_0 \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_0 \right) \, d\zeta \, dS \quad (35)$$

$$\text{avec } \ddot{\mathbf{U}}_0 = \frac{\partial^2 \mathbf{U}_0}{\partial t^2} \text{ et } \ddot{\mathbf{\Omega}}_0 = \frac{\partial^2 \mathbf{\Omega}_0}{\partial t^2}.$$

Les développements et intégration de l'équation (35) conduisent à :

$$P_{iner}(\hat{\mathbf{U}}_0, \hat{\mathbf{\Omega}}_0) = - \int_S \left[\rho h \ddot{\mathbf{U}}_0 \cdot \hat{\mathbf{U}}_0 + I \ddot{\mathbf{\Omega}}_0 \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_0 + \rho e h \ddot{\mathbf{U}}_0 \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_0 + \rho e h \ddot{\mathbf{\Omega}}_0 \cdot \hat{\mathbf{U}}_0 \right] dS \quad (36)$$

où I est le moment d'inertie dynamique défini par :

$$I = \int_{e-h/2}^{e+h/2} \rho \zeta^2 d\zeta \quad (37)$$

D'une manière condensée, la puissance virtuelle des efforts d'inertie peut s'exprimer pour une coque excentrée suivant un mouvement de *Mindlin-Reissner* :

$$P_{iner}(\hat{\mathbf{U}}) = - \int_S \boldsymbol{\mu} \cdot \ddot{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{U}} dS \quad (38)$$

avec $\boldsymbol{\mu}$ le tenseur d'inertie du second ordre s'écrivant sous la forme matricielle suivante :

$$[\boldsymbol{\mu}] = \begin{bmatrix} \rho h & 0 & 0 & \rho e h & 0 & 0 \\ \rho h & 0 & 0 & \rho e h & 0 & 0 \\ & \rho h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & I & 0 & 0 & 0 \\ \text{SYM} & & & I & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Supposons à présent que la coque excentrée suit un mouvement de *Love-Kirchhoff*. Les champs vectoriels $\hat{\mathbf{U}}_0$ et $\hat{\mathbf{\Omega}}_0$ sont alors liés de manière analogue aux équations (24) et (28). L'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs est obtenue en utilisant dans (33) la décomposition des efforts \mathbf{N}_α et \mathbf{N}_β suivante :

$$\mathbf{N}_\alpha = \mathbf{N}_\alpha + V_{\alpha 0} \mathbf{n}_0 \quad (40)$$

$$\mathbf{N}_\beta = \mathbf{N}_\beta + V_{\beta 0} \mathbf{n}_0 \quad (41)$$

Il vient :

$$P_{int}(\hat{\mathbf{U}}_0, \hat{\mathbf{\Omega}}_0) = - \int_S \frac{1}{A} \left[\mathbf{N}_\alpha \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_0}{\partial \alpha} + V_{\alpha 0} \mathbf{n}_0 \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_0}{\partial \alpha} \right] dS - \int_S \frac{1}{B} \left[\mathbf{N}_\beta \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_0}{\partial \beta} + V_{\beta 0} \mathbf{n}_0 \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_0}{\partial \beta} \right] dS \\ - \int_S \frac{1}{A} \mathbf{M}_\alpha \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{\Omega}}_0}{\partial \alpha} dS - \int_S \frac{1}{B} \mathbf{M}_\beta \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{\Omega}}_0}{\partial \beta} dS + \int_S (V_{\alpha 0} \mathbf{n}_\alpha \wedge \mathbf{n}_0 + V_{\beta 0} \mathbf{n}_\beta \wedge \mathbf{n}_0) \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_0 dS \quad (42)$$

De plus, la condition (28) caractérisant les mouvements de *Love-Kirchhoff* permet d'écrire:

$$-\int_S \frac{1}{A} V_{\alpha 0} \mathbf{n}_0 \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_0}{\partial \alpha} dS - \int_S \frac{1}{B} V_{\beta 0} \mathbf{n}_0 \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_0}{\partial \beta} dS + \int_S (V_{\alpha 0} \mathbf{n}_\alpha \wedge \mathbf{n}_0 + V_{\beta 0} \mathbf{n}_\beta \wedge \mathbf{n}_0) \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_0 dS = 0 \quad (43)$$

L'utilisation de l'équation (43) dans (42) conduit à l'expression suivante de la puissance virtuelle des efforts intérieurs d'une coque suivant un mouvement virtuel de *Love-Kirchhoff*:

$$P_{\text{int}}(\hat{\mathbf{U}}_0, \hat{\mathbf{\Omega}}_0) = - \int_S \frac{1}{A} \mathbf{N}_\alpha \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_0}{\partial \alpha} dS - \int_S \frac{1}{B} \mathbf{N}_\beta \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_0}{\partial \beta} dS - \int_S \frac{1}{A} \mathbf{M}_\alpha \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{\Omega}}_0}{\partial \alpha} dS - \int_S \frac{1}{B} \mathbf{M}_\beta \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{\Omega}}_0}{\partial \beta} dS \quad (44)$$

Concernant les expressions (34) et (38) des puissances virtuelles des efforts extérieurs et d'inertie, celles-ci restent inchangées pour un tel mouvement.

Aussi, qu'il s'agisse d'un mouvement virtuel de *Mindlin-Reissner* ou de celui de *Love-Kirchhoff*, le choix du champ vectoriel $\hat{\mathbf{U}}$ (c'est à dire sa décomposition en deux champs vectoriels $\hat{\mathbf{U}}_0$ et $\hat{\mathbf{\Omega}}_0$ satisfaisant une relation analogue à (24) conduit à négliger la contribution du terme $(\sigma_{00} \hat{\mathbf{d}}_{00})$ dans l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs. Toutefois, ce n'est pas la composante $\hat{\mathbf{d}}_{00}$ qui est égale à zéro, mais plutôt la composante normale σ_{00} du tenseur de contraintes. En effet, cela se justifie par le fait que dans la théorie des coques, on admet :

H4 : l'hypothèse des contraintes planes qui suppose que la contrainte normale à la surface de référence de la coque est nulle, ce qui revient à :

$$\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_0 = 0 \quad (45)$$

Enfin, l'utilisation des relations (33), (34) et (38) dans (32) conduit à :

$$\begin{aligned} & \forall \hat{\mathbf{U}}_0, \forall \hat{\mathbf{\Omega}}_0 \\ & - \int_S B \mathbf{N}_\alpha \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_0}{\partial \alpha} dS - \int_S A \mathbf{N}_\beta \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_0}{\partial \beta} dS - \int_S B \mathbf{M}_\alpha \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{\Omega}}_0}{\partial \alpha} dS - \int_S A \mathbf{M}_\beta \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{\Omega}}_0}{\partial \beta} dS \\ & + \int_S AB (\mathbf{n}_\alpha \wedge \mathbf{N}_\alpha + \mathbf{n}_\beta \wedge \mathbf{N}_\beta) \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_0 dS + \int_S AB (\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_0) dS \\ & - \int_S AB (\rho h \ddot{\mathbf{U}}_0 \cdot \hat{\mathbf{U}}_0 + I \ddot{\mathbf{\Omega}}_0 \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_0 + \rho e h \ddot{\mathbf{U}}_0 \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_0 + \rho e h \ddot{\mathbf{\Omega}}_0 \cdot \hat{\mathbf{U}}_0) dS = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

Afin d'exploiter le fait que cette équation est vérifiée quel que soit les champs vectoriels $\hat{\mathbf{U}}_0$ et $\hat{\mathbf{\Omega}}_0$, il convient de faire apparaître explicitement ces champs dans les quatre premiers termes de (46) par application du théorème de la divergence. Il vient :

$$\nabla \hat{\mathbf{U}}_0, \nabla \hat{\mathbf{\Omega}}_0$$

$$\int_S \left[\frac{\partial (\mathbf{B} \mathbf{N}_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (\mathbf{A} \mathbf{N}_\beta)}{\partial \beta} + \mathbf{A} \mathbf{B} (\mathbf{q} - \rho h \ddot{\mathbf{U}}_0 - \rho e h \ddot{\mathbf{\Omega}}_0) \right] \cdot \hat{\mathbf{U}}_0 dS \quad (47)$$

$$+ \int_S \left[\frac{\partial (\mathbf{B} \mathbf{M}_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (\mathbf{A} \mathbf{M}_\beta)}{\partial \beta} + \mathbf{A} \mathbf{B} (\mathbf{n}_\alpha \wedge \mathbf{N}_\alpha + \mathbf{n}_\beta \wedge \mathbf{N}_\beta + \mathbf{m} - \mathbf{I} \cdot \ddot{\mathbf{\Omega}}_0 - \rho e h \ddot{\mathbf{U}}_0) \right] \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_0 dS = 0$$

Compte tenu du caractère arbitraire des champs vectoriels $\hat{\mathbf{U}}_0$ et $\hat{\mathbf{\Omega}}_0$, l'équation (47) ne peut être vérifiée que si :

$$\frac{\partial (\mathbf{B} \mathbf{N}_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (\mathbf{A} \mathbf{N}_\beta)}{\partial \beta} + \mathbf{A} \mathbf{B} (\mathbf{q} - \rho h \ddot{\mathbf{U}}_0 - \rho e h \ddot{\mathbf{\Omega}}_0) = 0 \quad (48)$$

$$\frac{\partial (\mathbf{B} \mathbf{M}_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (\mathbf{A} \mathbf{M}_\beta)}{\partial \beta} + \mathbf{A} \mathbf{B} (\mathbf{n}_\alpha \wedge \mathbf{N}_\alpha + \mathbf{n}_\beta \wedge \mathbf{N}_\beta + \mathbf{m} - \mathbf{I} \cdot \ddot{\mathbf{\Omega}}_0 - \rho e h \ddot{\mathbf{U}}_0) = 0 \quad (49)$$

Nous obtenons ainsi les équations (48) et (49) traduisant l'équilibre dynamique local d'une coque excentrée sous l'hypothèse des petites perturbations.

1-3. Extension au cas multicouche

Dans la modélisation par éléments finis d'une coque élastique homogène, la discrétisation spatiale se fait au niveau de la surface de référence. Une coque composite est quant à elle composée de plusieurs matériaux aux lois de comportement différentes occupant diverses positions géométriques. L'approche multicouche, détaillée dans le paragraphe 1-1-3, permet de modéliser cette coque.

Dans cette approche, l'élément de coque conserve les hypothèses cinématiques de structure (*Love-Kirchhoff* ou *Mindlin-Reissner*), et la variation du matériau à travers l'épaisseur est prise en compte par une décomposition en « couches ». Chaque couche est dotée d'une cinématique de coque monocouche excentrée et reste définie par rapport à la surface de référence (*figure 1-8*). Les coques excentrées, constitutives des couches, n'interagissent pas directement : c'est de la conjonction des déplacements au niveau de la surface de référence ainsi que de la position de chaque couche qu'une réponse d'ensemble est obtenue.

On admet l'hypothèse des contraintes planes pour la coque multicouche (hypothèse **H4**), chacune des couches constituant la coque doit donc satisfaire cette hypothèse.

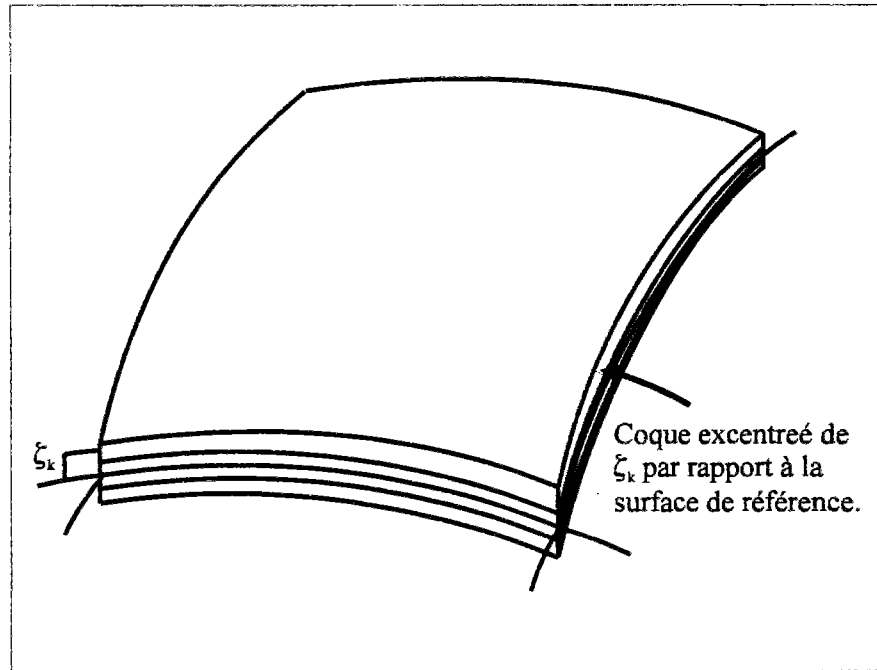


Figure 1-8 : Représentation d'une coque multicouche

1-3-1. Extension de la formulation faible des équations d'équilibre d'une coque excentrée

Considérons alors une coque multicouche, constituée d'un empilement de n -coques monocouches-excentrées. L'extension de la formulation faible des équations d'équilibre d'une coque excentrée au cas multicouche s'obtient donc par superposition. L'équation (32) appliquée à une coque multicouche devient alors :

$$\sum_{k=1,n} P_{int}(\hat{U}_k) + P_{ext}(\hat{U}) + \sum_{k=1,n} P_{iner}(\hat{U}_k) = 0 \quad (50)$$

avec :

$$\sum_{k=1,n} P_{int}(\hat{U}_k) = - \sum_{k=1,n} \int_{\Omega_k} \sigma_k : \hat{d}_k \, d\Omega_k \quad (51)$$

où \hat{d}_k est le taux de déformations virtuelles locales au niveau des couches, défini par :

$$\hat{d}_k = \frac{1}{2} (\text{grad} \hat{U}_k + {}^t \text{grad} \hat{U}_k) \quad (52)$$

$$P_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{U}}) = \int_S \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{U}} \, dS \quad (53)$$

et

$$\sum_{k=1,n} P_{\text{iner}}(\hat{\mathbf{U}}_k) = - \sum_{k=1,n} \int_{\Omega_k} \rho_k \cdot \ddot{\mathbf{U}}_k \cdot \hat{\mathbf{U}}_k \, d\Omega_k \quad (54)$$

Du fait de la discrétisation multicouche, une hypothèse raisonnable consiste à supposer que :

H5 : l'état de contraintes est constant dans l'épaisseur de chaque coque monocouche excentrée.

Avec cette hypothèse les équations (51), (53) et (54) conduisent à la formulation faible pour une coque multicouche suivante :

$$- \sum_{k=1,n} h_k \int_S \boldsymbol{\sigma}_k : \hat{\mathbf{d}}_k \, dS + \int_S \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{U}} \, dS - \sum_{k=1,n} \int_S \boldsymbol{\mu}_k \cdot \ddot{\mathbf{U}}_k \cdot \hat{\mathbf{U}}_k \, dS = 0 \quad (55)$$

1-3-2. Formulation variationnelle pour une coque multicouche

L'expression (55) traduit les conditions de stationnarité de l'énergie potentielle totale φ si l'on identifie les champ $\hat{\mathbf{U}}$ à $\delta \boldsymbol{\xi}$ et $\hat{\mathbf{U}}_k$ à $\delta \boldsymbol{\xi}_k$, c'est à dire :

$$\delta \varphi = 0 \quad (56)$$

avec

$$\varphi = - \sum_{k=1,n} h_k \int_{S_k} \boldsymbol{\sigma}_k : \boldsymbol{\varepsilon}_k \, dS + \int_S \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\xi} \, dS - \sum_{k=1,n} h_k \int_S \boldsymbol{\mu}_k \cdot \ddot{\boldsymbol{\xi}}_k \cdot \boldsymbol{\xi}_k \, dS \quad (57)$$

Une discrétisation spatiale par éléments finis de la coque multicouche conduit à :

$$\delta \varphi = \sum_e \left(- \sum_{k=1,n} h_k \int_{S^e} \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_k \{ \boldsymbol{\sigma} \}_k \, dS^e + \int_{S^e} \langle \delta \boldsymbol{\xi} \rangle \{ \mathbf{T} \} \, dS^e - \sum_{k=1,n} h_k \int_{S^e} \langle \delta \boldsymbol{\xi} \rangle_k [\boldsymbol{\mu}]_k \{ \ddot{\boldsymbol{\xi}} \}_k \, dS^e \right) = 0 \quad (58)$$

avec $\langle \cdot \rangle = \{ \cdot \}^t$.

Pour cette discrétisation, nous avons choisi d'utiliser des éléments de coques multicouches de type *Kirchhoff* à 3 ou à 4 noeuds, ou de type *Mindlin* à 6 ou à 8 noeuds. Ces éléments sont considérés au niveau global comme des éléments de coque classiques à 6 degrés de liberté par noeuds : 3 translations et 3 rotations (*Ait-ali, 1984*), ayant pour vecteur de variables nodales :

$$\langle \xi_n \rangle = \langle \xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i, \omega_1^i, \omega_2^i, \omega_3^i \rangle \quad i=1, nd \quad (59)$$

nd représente le nombre de noeuds de l'élément considéré.

La méthode des éléments finis permet d'exprimer le vecteur déplacements généralisés $\{\xi\}_k$ d'une couche k de la coque en fonction du vecteur des variables nodales de l'élément $\{\xi_n\}$ de la façon suivante :

$$\{\xi\}_k = [N]_k \{\xi_n\} \quad (60)$$

où $[N]_k$ est la matrice des fonctions d'interpolation au niveau local de la couche k considérée. Son expression est précisée en **annexe 2** selon le type d'élément de coque utilisé.

Si l'on applique un opérateur de dérivation à ces fonctions d'interpolation, les composantes des déformations locales au niveau des couches seront reliées au vecteur $\{\xi_n\}$ par :

$$\{\varepsilon\}_k = [B]_k \{\xi_n\} \quad (61)$$

où $[B]_k$ est la matrice des dérivées des fonctions d'interpolation de l'élément, calculée au niveau local de chaque couche.

L'application de l'équation (61) au champ $\{\delta\xi_n\}$ conduit à :

$$\{\delta\varepsilon\}_k = [B]_k \{\delta\xi_n\} \quad (62)$$

Utilisant (60) et (62) dans (58), le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale revient à :

$$\delta\varphi = \sum_e \langle \delta\xi_n \rangle \{R\} = 0 \quad (63)$$

où $\{R\}$ est le vecteur résidu défini par :

$$\{R\} = \{F_{ext}\} - \{F_{int}\} - [M] \{\ddot{\xi}_n\} = \{0\} \quad (64)$$

$\{F_{int}\}$ représente le vecteur des efforts internes calculé pour l'ensemble des couches ($k = 1, n$) tel que :

$$\{F_{int}\} = \sum_{k=1,n} \{F_{int}(\sigma)\}_k = \sum_{k=1,n} h_k \int_{S^e} [B]_k^t \{\sigma\}_k dS^e \quad (65)$$

$\{F_{ext}\}$ le vecteur des efforts externes :

$$\langle \delta \xi_n \rangle \{F_{ext}\} = \int_{S^e} \langle \delta \xi \rangle \{T\} dS^e \quad (66)$$

et $[M]$ la matrice de masse de l'élément de coque multicouche donnée par :

$$[M] = \sum_{k=1,n} [M]_k = \sum_{k=1,n} h_k \int_{S^e} [N]_k^t [\mu]_k [N]_k dS^e \quad (67)$$

La relation (64) représente un système d'équations non-linéaires vu la nature non-linéaire des lois de comportement. Sa résolution peut être réalisée par de nombreuses méthodes numériques.

1-3-3. Méthodes numériques de résolution

Les méthodes numériques de résolution consistent à discrétiser le problème en incréments et à le résoudre de telle manière à ce que à l'intérieur de chaque incrément se déroule un processus itératif permettant d'approcher la solution. Pour le cas de chargements statiques, cette discrétisation correspond à une discrétisation en incréments de chargement. Pour les problèmes dynamiques, celle-ci correspond à une discrétisation en temps.

1-3-3-1. Cas de chargements statiques

Dans le cas de sollicitations statiques, l'équation (64) se réduit à :

$$\{R\} = \{F_{ext}\} - \{F_{int}\} = \{0\} \quad (68)$$

Le problème consiste à déterminer le champ de déplacement $\{\xi_n\}$ à la fin de chaque incrément de chargement. Notons $\{\xi_n\}_i$ une approximation de la solution à l'itération (i) d'un incrément de chargement (j) donné, on peut alors calculer :

$$\{R\}_i = \{F_{ext}\}^j - \{F_{int}\}_i^j = \{F_{ext}\}^j - \sum_{k=1,n} (\{F_{int}(\sigma)\}_k)_i^j \quad (69)$$

et l'on recherche $\{\Delta \xi_n\}_{i+1}$ tel que : $\{\xi_n\}_{i+1} = \{\xi_n\}_i + \{\Delta \xi_n\}_{i+1}$

$$\{R\}_{i+1} = \{0\}$$

En développant en série de Taylor le vecteur résidu $\{R\}_{i+1}$ au voisinage de $\{\xi_n\}_i$ on obtient :

$$\{R\}_{i+1} = \{R\}_i + \left[\frac{\partial R}{\partial \xi} \right]_i \{\Delta \xi_n\}_{i+1} + \dots = \{0\} \quad (70)$$

Une approximation au premier ordre conduit à l'expression suivante :

$$[K]_i \{\Delta \xi_n\}_{i+1} = \{F_{ext}\} - \{F_{int}\}_i \quad (71)$$

avec

$$[K]_i = - \left[\frac{\partial R}{\partial \xi} \right]_i \quad (72)$$

$[K]_i$ représente la matrice de rigidité de l'élément de coque multicouche qui, en utilisant les équations (65) et (68), est donnée par :

$$[K]_i = \sum_{k=1,n} [K]_k = \sum_{k=1,n} h_k \int_{S^e} [B]_k^t \frac{\partial \{\Delta \sigma_i\}_k}{\partial \{\Delta \epsilon\}_k} [B]_k dS^e \quad (73)$$

et $\{F_{int}\}_i$ le vecteur des efforts internes tel que :

$$\{F_{int}\} = \sum_{k=1,n} \{F_{int}(\sigma)\}_k = \sum_{k=1,n} h_k \int_{S^e} [B]_k^t \{\sigma\}_k dS^e \quad (74)$$

Selon le développement du terme $\frac{\partial \{\Delta \sigma_i\}_k}{\partial \{\Delta \epsilon\}_k}$ et la loi de comportement, nous pouvons différencier

différents opérateurs de passage d'une itération à l'autre. Nous distinguons : la matrice de rigidité élastique que l'on conserve durant tout le processus itératif et la matrice de rigidité tangente constitutive que l'on recompose à chaque itération. Des détails concernant ces matrices seront donnés dans le chapitre 2 lors de la présentation des lois de comportement à variables internes. Nous noterons cependant que l'utilisation de l'une de ces méthodes n'affecte pas la solution en déplacement obtenue, mais uniquement le chemin emprunté pour arriver à la convergence.

La résolution de l'équation (71) permet l'obtention du terme correcteur recherché $\{\Delta \xi_n\}_{i+1}$.

Afin de contrôler le processus itératif, il est nécessaire d'introduire des tests de convergence. On utilise ceux portant sur les rapports de normes des déplacements, des forces résiduelles et de l'énergie au cours d'une itération. Le système suivant doit être satisfait :

$$\begin{cases} \frac{\|\{\Delta \xi_n\}_i\|}{\|\{\xi_n\}_i^j\|} < \varepsilon_1 \\ \frac{\|\{R\}_i\|}{\|\{R\}_0^j\|} < \varepsilon_2 \\ \frac{|{R}_i \langle \Delta \xi_n \rangle_i|}{|{R}_0^j \langle \xi_n \rangle_i|} < \varepsilon_3 \end{cases} \quad (75)$$

où $\|\cdot\|$ représente la norme. Les tolérances $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont des données du calcul en général prises égales à 0.1%.

1-3-3-2. Cas de sollicitations dynamiques

Pour les problèmes dynamiques, les effets d'inertie sont à prendre en compte. En négligeant les effets d'amortissement, l'équation d'équilibre incrémentale pour un élément de coque multicouche devient :

$$[M] \{\ddot{\xi}_n\} + \sum_{k=1, n} [K]_k \{\Delta \xi_n\} = \{F_{ext}\} - \sum_{k=1, n} \{F_{int}(\sigma)\}_k \quad (76)$$

Pour résoudre cette équation, nous choisissons d'utiliser un schéma implicite, connu pour ses performances et son caractère inconditionnellement stable moyennant un choix judicieux des paramètres : l'algorithme de *Newmark* (cf. *Bathe, 1982*). Ce schéma pas à pas s'écrit, à l'itération (i) et sur chaque pas de temps (Δt_j), sous la forme :

$$\begin{cases} \{\Delta \xi_n\}_i^j = \Delta t_j \{\dot{\xi}_n\}_i^{j-1} - (\Delta t_j)^2 \left(\frac{1}{2} \{\ddot{\xi}_n\}_i^{j-1} + a \{\Delta \ddot{\xi}_n\}_i^j \right) \\ \{\Delta \dot{\xi}_n\}_i^j = \Delta t_j \left(\{\ddot{\xi}_n\}_i^{j-1} + b \{\Delta \ddot{\xi}_n\}_i^j \right) \end{cases} \quad (77)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} t_j = t_{j-1} + \Delta t_j \\ \{\Delta \ddot{\xi}_n\}_i^j = \{\ddot{\xi}_n\}_i^j - \{\ddot{\xi}_n\}_i^{j-1} \\ \{\Delta \dot{\xi}_n\}_i^j = \{\dot{\xi}_n\}_i^j - \{\dot{\xi}_n\}_i^{j-1} \\ \{\Delta \xi_n\}_i^j = \{\Delta \xi_n\}_i^{j-1} + \{\delta \xi_n\}_i \end{cases} \quad (78)$$

Afin d'assurer la stabilité inconditionnelle de l'algorithme, les paramètres a et b sont choisis tel que : $a = 0.25$ et $b = 0.5$.

Les équations (77) et (78) conduisent à exprimer, à l'itération (i) et sur chaque pas de temps (Δt_j) , l'accélération $\{\ddot{\xi}_n\}_i^j$ et la vitesse $\{\dot{\xi}_n\}_i^j$ par :

$$\begin{cases} \{\ddot{\xi}_n\}_i^j = a_0 \left(\{\Delta \xi_n\}_{i-1}^j + \{\delta \xi_n\}_i \right) - a_2 \{\dot{\xi}_n\}_i^{j-1} - a_3 \{\ddot{\xi}_n\}_i^{j-1} \\ \{\dot{\xi}_n\}_i^j = a_1 \left(\{\Delta \xi_n\}_{i-1}^j + \{\delta \xi_n\}_i \right) - a_4 \{\dot{\xi}_n\}_i^{j-1} - a_5 \{\ddot{\xi}_n\}_i^{j-1} \end{cases} \quad (79)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} a_0 = 1 / (a (\Delta t_j)^2) & a_1 = b / (a \Delta t_j) & a_2 = 1 / (a \Delta t_j) \\ a_3 = 1 / 2a - 1 & a_4 = b / a - 1 & a_5 = \Delta t_j (1 - b / 2a) \end{cases} \quad (80)$$

Utilisant la relation (79) dans (76), on obtient l'expression suivante du système à résoudre à l'itération (i) du pas de temps (Δt_j) :

$$[\tilde{K}]_i^j \{\delta \xi_n\}_i = \{R\}_i^{j-1} \quad (81)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} [\tilde{K}]_i^j = a_0 [M] + [K]_i^j \\ \{R\}_i^{j-1} = \{F_{ext}\}_i^{j-1} + \{F_{int}\}_i^{j-1} - [M] \left\{ a_0 \left(\{\Delta \xi_n\}_{i-1}^j + \{\delta \xi_n\}_i \right) - a_2 \{\dot{\xi}_n\}_i^{j-1} - a_3 \{\ddot{\xi}_n\}_i^{j-1} \right\} \end{cases} \quad (82)$$

$[K]_i^j$, $\{F_{int}\}_i^{j-1}$ et $[M]$ sont données respectivement par les équations (73), (74) et (67).

On effectue des itérations jusqu'à assurer les trois tests de convergence définis au paragraphe 1-3-3-1 de ce chapitre.

1-4. Extension de la formulation coque multicouche à la prise en compte des non-linéarités géométriques

Dans le paragraphe précédent nous avons formulé l'élément de coque multicouche en supposant que les non-linéarités provenaient uniquement du comportement des matériaux. On a également admis que les déformations ainsi que les déplacements qui se produisaient étaient petits, ceci conduit à considérer que la géométrie reste identique à elle-même pendant tout le chargement et que les déformations sont assimilées à des infiniment petits du premier ordre.

Dans la pratique, ces hypothèses ne sont pas toujours valables. Il est nécessaire parfois de prendre en considération les non-linéarités géométriques. C'est pourquoi, nous proposons dans ce paragraphe d'étendre notre formulation à la prise en compte des effets non-linéaires géométriques, où les phénomènes d'instabilité élastique et les problèmes de grands déplacements et grandes rotations trouvent leur origine.

Des efforts considérables ont été consacrés ces dernières années au développement d'outils numériques servant à l'analyse non-linéaire géométrique de structures coques. Plusieurs procédures ont été proposées, les plus utilisées sont : la formulation lagrangienne totale et la formulation lagrangienne actualisée.

Bathe et al. (1979), ont été parmi les premiers à utiliser ces deux formulations pour l'étude non-linéaire matérielle et géométrique des structures plaques et coques.

En se basant sur ces travaux, *Fezans (1981)*, a établi la formulation linéaire d'un élément isoparamétrique tridimensionnel dégénéré (*Ahmad et al., 1970*), et a étendu ses développements à la prise en compte des non-linéarités géométriques en adoptant une formulation lagrangienne totale. *Chao et al. (1984)*, ont également utilisé l'élément isoparamétrique tridimensionnel dégénéré ainsi qu'une description lagrangienne totale pour établir une formulation éléments finis rendant compte des effets non-linéaires géométriques dans l'analyse statique et dynamique de coques composites anisotropes. *Jaamei (1986)* a, quant à lui, proposé différentes formulations éléments finis pour l'analyse non-linéaire matérielle et géométrique de structures poutres, plaques et coques minces. Ces formulations sont basées sur des éléments de poutres droits à deux noeuds et de coques triangulaires plats à trois noeuds, ainsi que sur les descriptions lagrangiennes totale, actualisée et actualisée approchée. Plus tard, *Fafard et al. (1989)*, ont développé un nouvel élément de coque triangulaire à six noeuds pour l'analyse non-linéaire matérielle et géométrique de structures coques. La formulation est basée sur les petites déformations élastoplastiques ainsi que sur une description lagrangienne actualisée.

De nombreux autres auteurs se sont intéressés, ces dernières années, à l'analyse dynamique de structures coques en grands déplacements, nous citerons :

Tsai et al. (1991), qui ont développé une formulation éléments finis prenant en compte les effets non-linéaires géométriques pour les coques cylindriques en vibration. Cette formulation est basée sur un élément de coque mince quadrilatère déjà existant, développé précédemment pour l'analyse statique de structures coques en grands déplacements et grandes rotations.

Selmane et al. (1997), qui ont présenté une approche générale pour prédire l'influence des non-linéarités géométriques sur les vibrations libres des coques cylindriques, minces, élastiques et orthotropes.

El Damatty et al. (1997), qui ont étendu la formulation éléments de coque triangulaires consistants, développée récemment par *Koziev et al. (1997)*, à l'analyse statique et dynamique en grands déplacements. Cette extension est basée sur une description lagrangienne totale.

Dans ce paragraphe, nous proposons d'étendre la formulation coque multicouche présentée, à la prise en compte des effets non-linéaires géométriques, pour l'appliquer ensuite à l'étude des phénomènes d'instabilité élastique se produisant dans les structures coques ainsi qu'aux problèmes de grands déplacements et grandes rotations.

1-4-1. Formules de transport appliquées aux coques

Plaçons nous pour commencer dans le cadre d'une description lagrangienne. Le mouvement d'une coque multicouche peut être décrit par un vecteur \mathbf{x} indiquant la position d'un point matériel de la coque qui, avant déformation, occupait la position \mathbf{X} (*figure 1-9*). Le vecteur déplacement ξ de ce point permet de relier \mathbf{x} et \mathbf{X} par :

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \xi \quad (83)$$

Si l'on désigne par « Grad » et « grad » les opérateurs gradients relatifs respectivement aux configurations de référence $\mathbf{C}(\tau)$ et actuelle déformée $\mathbf{C}(t)$, on peut définir un tenseur de second ordre \mathbf{P} appelé tenseur gradient de déformation tel que :

$$d\mathbf{x} = \mathbf{P}.d\mathbf{X} \quad \mathbf{P} = \text{Grad}\mathbf{x} = \mathbf{1} + \text{Grad}\xi \quad (84)$$

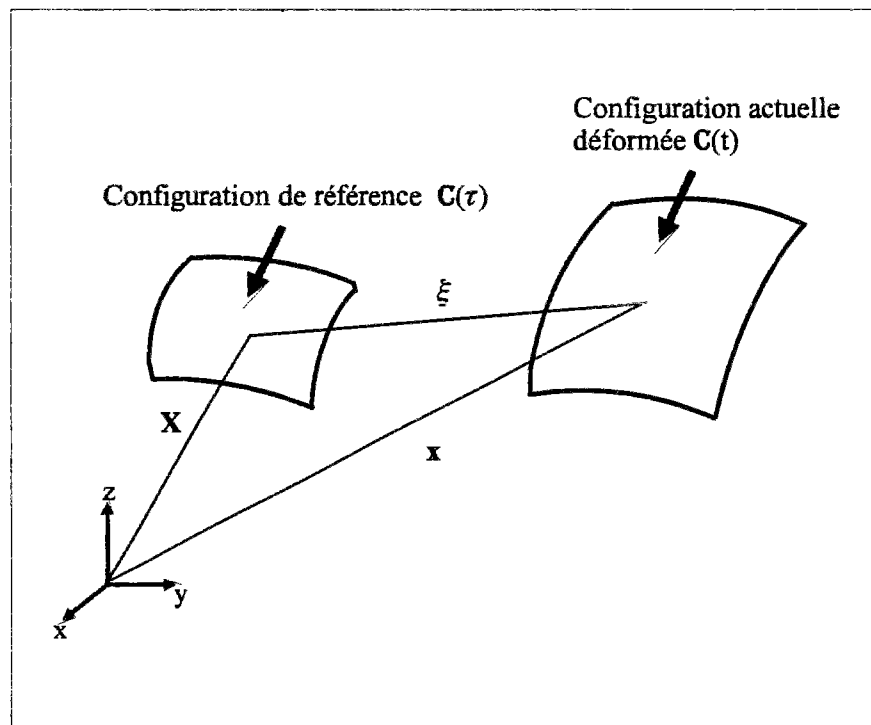


Figure 1-9 : Représentation des configurations de référence et actuelle déformée de la coque

Le tenseur \mathbf{P} permet de relier, via les formules de transport, les quantités physiques infinitésimales mesurées respectivement dans les configurations de référence et actuelle. En effet, pour un élément de volume d'une couche k de la coque, on peut écrire :

$$d\Omega_k^i = J d\Omega_k^r \quad \text{avec} \quad J = \det \mathbf{P} \quad (85)$$

ou encore :

$$h_k^i dS_k^i = J h_k^r dS_k^r \quad (86)$$

où h_k^i et h_k^r sont les épaisseurs de la couche k respectivement dans les configurations actuelle et de référence.

La surface orientée de la coque se transforme selon la formule :

$$\mathbf{n}_0^i dS^i = J {}^i\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{n}_0^r dS^r \quad (87)$$

Les grandeurs infinitésimales volumique $d\Omega_k^r$ et surfacique $\mathbf{n}_0^r dS^r$ (orientée par une normale unitaire surfacique \mathbf{n}_0^r) sont relatives à la configuration de référence $\mathbf{C}(\tau)$, alors que $d\Omega_k^i$ et $\mathbf{n}_0^i dS^i$ sont exprimés par rapport à la configuration actuelle déformée $\mathbf{C}(t)$.

En ce qui concerne les forces, en particulier les forces surfaciques, celles-ci sont déterminées dans la configuration de référence $\mathbf{C}(\tau)$ à l'aide de la formule de transport (87) d'une surface orientée :

$$\mathbf{T}^i dS^i = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_0^i) dS^i = \boldsymbol{\sigma} \cdot J {}^i\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{n}_0^r dS^r = \underbrace{\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{n}_0^r dS^r = \mathbf{T}^r dS^r \quad (88)$$

où $\boldsymbol{\pi} = J \mathbf{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^i\mathbf{P}^{-1}$ représente le tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff.

Cette équation met bien en évidence la difficulté d'établir, dans la configuration de référence, une représentation des forces surfaciques en fonction des contraintes propres à cette configuration, c'est à dire en fonction du tenseur de Piola-Kirchhoff $\boldsymbol{\pi}$. Dans cette configuration, ces forces s'écrivent en fonction d'un tenseur hybride $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\pi}$ appelé tenseur de Boussinesq relatif à la fois à la configuration de référence et à la configuration actuelle.

Ceci a une conséquence très concrète concernant la représentation des efforts généralisés des coques dans une description lagrangienne. Les efforts généralisés, dans la configuration de référence, ne représentent pas seulement un état de contraintes propre à cette configuration, mais sont également fonction d'une grandeur décrivant la déformation : le tenseur gradient de déformation \mathbf{P} .

Le choix particulier d'une configuration de référence permet quelques simplifications. Ce choix n'affecte pas les résultats. Il s'agit de choisir comme configuration de référence une configuration adaptée au problème à traiter. Nous distinguons ainsi différentes approches de la formulation lagrangienne :

- la formulation lagrangienne totale où la configuration de référence est représentée par la configuration initiale (c'est à dire $\mathbf{C}(\tau) = \mathbf{C}(0)$). L'attrait pour cette formulation se justifie par deux avantages essentiels : la constance du domaine d'intégration et la facilité de changement des conditions aux limites. Cependant, la présence d'une configuration de référence fixe devient un inconvénient lors du calcul des contraintes (se reporter à la discussion précédente concernant l'interprétation physique des contraintes calculées).
- la formulation lagrangienne actualisée où la configuration de référence est représentée par la dernière position d'équilibre connue du corps. Cette formulation permet de palier à l'inconvénient majeur présenté par la formulation lagrangienne totale : le calcul des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ se fait dans la configuration actuelle, ce qui permet de redonner un sens physique aux valeurs obtenues. Ces contraintes sont confondues avec les contraintes de Piola-Kirchhoff dans la configuration de référence : $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\sigma}$. Cette formulation nécessite l'actualisation de la configuration de référence à chaque instant. Cette opération peut apparaître comme un inconvénient de la méthode par le surcroît de calcul qu'elle entraîne et la variation permanente des domaines d'intégration.
- la description corotationnelle où la configuration de référence est représentée par la configuration du solide en mouvement de corps rigide (c'est à dire $\mathbf{C}(\tau) = \mathbf{C}_{\text{rig}}(t)$). Cette description est un cas particulier de la formulation lagrangienne actualisée. Elle est basée sur le théorème de la décomposition polaire, qui considère que tout déplacement de corps solide peut être décomposé en la somme d'un déplacement de corps rigide et d'un déplacement créant une énergie de déformation non nulle, ces opérations pouvant s'appliquer dans un ordre arbitraire. Le tenseur gradient de déformation \mathbf{P} peut alors être décomposé, entre les configurations initiale $\mathbf{C}(0)$ et actuelle $\mathbf{C}(t)$, en un tenseur de rotation pure \mathbf{R} et un tenseur de déformation pure \mathbf{D} tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{D} = {}^t\mathbf{D} \cdot {}^t\mathbf{R} \\ \det \mathbf{R} = 1 \end{cases} \quad (89)$$

1-4-2. Formulation faible des équations d'équilibre d'une coque multicouche

Sur la configuration actuelle déformée $\mathbf{C}(t)$, la formulation faible (55) établie précédemment s'écrit en statique pour tout champ de vecteur quelconque $\hat{\mathbf{U}}$:

$$\forall \hat{\mathbf{U}} \quad - \sum_{k=1..n} h_k^t \int_{S^t} \boldsymbol{\sigma}_k : \hat{\mathbf{d}}_k \, dS^t + \int_{S^t} \mathbf{T}^t \cdot \hat{\mathbf{U}} \, dS^t = 0 \quad (90)$$

où $\hat{\mathbf{d}}_k$ et $\boldsymbol{\sigma}_k$ représentent respectivement le tenseur des taux de déformation associé au champ $\hat{\mathbf{U}}$ et le tenseur de contraintes de Cauchy.

La configuration actuelle déformée $\mathbf{C}(t)$ étant inconnue à l'instant t , l'équation (90) est inexploitable sous cette forme et nécessite d'être exprimée par rapport à une configuration de référence connue $\mathbf{C}(\tau)$. Pour notre étude, nous retiendrons les formulations lagrangienne totale et corotationnelle définies en 1-4-1. Ces choix seront justifiés par la suite.

1-4-2-1. Expression de la formulation faible en description lagrangienne totale

En description lagrangienne totale, on adopte comme configuration de référence, la configuration initiale $\mathbf{C}(0)$. L'utilisation des formules de transport (85), (87) et (88) dans (90) conduit à l'expression suivante de la formulation faible sur cette configuration :

$$\forall \hat{\mathbf{U}} \quad - \sum_{k=1,n} h_k^0 \int_{S^0} \boldsymbol{\pi}_k : \hat{\Delta}_k \, dS^0 + \int_{S^0} \mathbf{T}^0 \cdot \hat{\mathbf{U}} \, dS^0 = 0 \quad (91)$$

où :

$$\hat{\Delta}_k = {}^t\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{d}}_k \cdot \mathbf{P} \quad (92)$$

et $\boldsymbol{\pi}_k = \mathbf{J} \mathbf{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}_k \cdot {}^t\mathbf{P}^{-1}$, le tenseur de Piola-Kirchhoff d'une couche k de la coque.

$\hat{\Delta}_k$ se décompose comme suit :

$$\hat{\Delta}_k = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \hat{\boldsymbol{\eta}}_k \quad (93)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \frac{1}{2} (\text{Grad} \hat{\mathbf{U}} + {}^t\text{Grad} \hat{\mathbf{U}}) \\ \hat{\boldsymbol{\eta}}_k = \frac{1}{2} ({}^t\text{Grad} \boldsymbol{\xi} \cdot \text{Grad} \hat{\mathbf{U}} + \text{Grad} \boldsymbol{\xi} \cdot {}^t\text{Grad} \hat{\mathbf{U}}) \end{cases} \quad (94)$$

L'opérateur « Grad » est relatif à la configuration de référence $\mathbf{C}(0)$.

1-4-2-2. Expression de la formulation faible en description corotationnelle

En description corotationnelle, on adopte comme configuration de référence, la configuration de la coque en mouvement de corps rigide $\mathbf{C}_{\text{rig}}(t)$. La formulation faible (90) s'écrit sur cette configuration:

$$\forall \hat{\mathbf{U}} \quad - \sum_{k=1,n} h_k^{\text{rig}} \int_{S^{\text{rig}}} \boldsymbol{\pi}_k^{\text{rig}} : \hat{\Delta}_k^{\text{rig}} \, dS^{\text{rig}} + \int_{S^{\text{rig}}} \mathbf{T}^{\text{rig}} \cdot \hat{\mathbf{U}} \, dS^{\text{rig}} = 0 \quad (95)$$

avec $2\hat{\Delta}_k^{ng} = {}^t\mathbf{D} \cdot \text{Grad } \hat{\mathbf{U}} + {}^t\text{Grad } \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{D}$. L'opérateur « Grad » est relatif ici à la configuration de référence $\mathbf{C}_{rig}(t)$.

Notant $d\Omega_k^r = d\Omega_k^{ng} = d\Omega_k^0$ et utilisant l'équation (89) avec les formules de transport, on définit le tenseur de contraintes d'une couche k de la coque $\boldsymbol{\pi}_k^{ng}$ dans la configuration de corps rigide $\mathbf{C}_{rig}(t)$ par le système suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_k = \frac{1}{J} {}^t\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\pi}_k^{ng} \cdot \mathbf{D} \\ \boldsymbol{\pi}_k^{ng} = {}^t\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\pi}_k^o \cdot \mathbf{R} \end{cases} \quad (96)$$

1-4-3. Application à l'étude du phénomène d'instabilité élastique des coques

Dans ce paragraphe, nous appliquons la formulation coque multicouche proposée à l'étude du phénomène d'instabilité élastique se produisant dans les coques. Nous commençons pour cela par préciser l'hypothèse de base du flambement linéaire pour établir ensuite la formulation variationnelle.

1-4-3-1. Hypothèse de linéarité

Le flambement linéaire constitue une approche particulière de l'analyse non-linéaire. Son but consiste à déterminer le point de bifurcation, c'est à dire la valeur critique de la charge appliquée à une structure donnée. Cette détermination est faite dans l'hypothèse suivante :

H6 : avant flambement, les déplacements restent petits et les déformations linéaires et élastiques.

Ainsi, à partir de résultats issus d'une analyse élastique, on recherche un état de chargement proportionnel à l'état initial, susceptible de provoquer le flambement de la structure. Les résultats obtenus sont alors la charge critique recherchée ainsi que le mode de flambement correspondant.

1-4-3-2. Formulation variationnelle

Considérons le cas où une coque multicouche est soumise à un chargement $\lambda \mathbf{T}$ (\mathbf{T} représente la valeur de référence et λ un paramètre mesurant l'intensité du chargement). Sur la configuration actuelle déformée $\mathbf{C}(t)$, la formulation faible (55) établie précédemment s'écrit en statique pour tout champ de vecteur quelconque $\hat{\mathbf{U}}$:

$$\forall \hat{\mathbf{U}} \quad - \sum_{k=1,n} h_k^t \int_{S^t} \boldsymbol{\sigma}_k : \hat{\mathbf{d}}_k \, dS^t + \int_{S^t} \lambda \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{U}} \, dS^t = 0 \quad (97)$$

où $\hat{\mathbf{d}}_k$ et $\boldsymbol{\sigma}_k$ représentent respectivement le tenseur des taux de déformation associé au champ $\hat{\mathbf{U}}$ et le tenseur de contraintes de Cauchy.

Cette équation nécessite d'être exprimée par rapport à une configuration de référence connue $\mathbf{C}(\tau)$. Nous retiendrons pour ce cas de flambement linéaire la formulation lagrangienne totale. La configuration de référence est donc représentée par la configuration initiale $\mathbf{C}(0)$.

Par analogie à la formulation faible (91) établie en description lagrangienne totale au paragraphe 1-4-2-1, on obtient l'expression suivante de la formulation faible (97) sur la configuration initiale $\mathbf{C}(0)$:

$$\forall \hat{\mathbf{U}} \quad - \sum_{k=1,n} h_k^0 \int_{S^0} \boldsymbol{\pi}_k : \hat{\boldsymbol{\Delta}}_k \, dS^0 + \int_{S^0} \lambda \mathbf{T}^0 \cdot \hat{\mathbf{U}} \, dS^0 = 0 \quad (98)$$

Cette expression (98) traduit les conditions de stationnarité de l'énergie potentielle totale φ si l'on identifie les champs $\hat{\mathbf{U}}$ à $\delta \boldsymbol{\xi}$ et $\hat{\mathbf{U}}_k$ à $\delta \boldsymbol{\xi}_k$, c'est à dire :

$$\delta \varphi = 0 \quad (99)$$

$$\text{avec : } \varphi = - \sum_{k=1,n} h_k^0 \int_{S^0} \boldsymbol{\pi}_k : \boldsymbol{\Delta}_k \, dS^0 + \int_{S^0} \lambda \mathbf{T}^0 \cdot \boldsymbol{\xi} \, dS^0 \quad (100)$$

$\boldsymbol{\Delta}_k$ représente le tenseur des déformations de Green-Lagrange d'une couche k de la coque pouvant se décomposer comme suit : $\boldsymbol{\Delta}_k = \boldsymbol{\varepsilon}_k + \boldsymbol{\eta}_k$.

Une discrétisation spatiale par éléments finis de la coque multicouche conduit à :

$$\sum_e \left(\sum_{k=1,n} h_k^0 \int_{S^{0e}} \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_k \{ \boldsymbol{\pi} \}_k \, dS^{0e} + \sum_{k=1,n} h_k^0 \int_{S^{0e}} \langle \delta \boldsymbol{\eta} \rangle_k \{ \boldsymbol{\pi} \}_k \, dS^{0e} - \lambda \int_{S^{0e}} \langle \delta \boldsymbol{\xi} \rangle \{ \mathbf{T}^0 \} \, dS^{0e} \right) = 0 \quad (101)$$

Ecrivant l'équation (101) au point de bifurcation ($\{ \boldsymbol{\xi}^{cr} \}$, λ^{cr}), on obtient :

$$\sum_e \left(\sum_{k=1,n} h_k^0 \int_{S^{0e}} \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_k \{ \boldsymbol{\pi}^{cr} \}_k \, dS^{0e} + \sum_{k=1,n} h_k^0 \int_{S^{0e}} \langle \delta \boldsymbol{\eta} \rangle_k \{ \boldsymbol{\pi}^{cr} \}_k \, dS^{0e} - \lambda^{cr} \int_{S^{0e}} \langle \delta \boldsymbol{\xi} \rangle \{ \mathbf{T}^0 \} \, dS^{0e} \right) = 0 \quad (102)$$

Par ailleurs, en terme de contraintes, le point de bifurcation se trouve dans le domaine géométriquement linéaire. On peut ainsi confondre pour chaque couche k de la coque le tenseur de contraintes Piola-Kirchhoff $\{ \boldsymbol{\pi}^{cr} \}_k$ avec celui de Cauchy $\{ \boldsymbol{\sigma}^{cr} \}_k$:

$$\{ \boldsymbol{\pi}^{cr} \}_k = [\mathbf{C}]_k \{ \boldsymbol{\varepsilon}^{cr} \}_k = \{ \boldsymbol{\sigma}^{cr} \}_k \quad (103)$$

Utilisant (103) dans (102), on obtient :

$$\sum_e \left(\sum_{k=1,n} h_k^o \int_{S^{oe}} \langle \delta \varepsilon \rangle_k \{ \sigma^{cr} \}_k dS^{oe} + \sum_{k=1,n} h_k^o \int_{S^{oe}} \langle \delta \eta \rangle_k \{ \sigma^{cr} \}_k dS^{oe} - \lambda^{cr} \int_{S^{oe}} \langle \delta \xi \rangle \{ T^o \} dS^{oe} \right) = 0 \quad (104)$$

De plus, la méthode des éléments finis permet d'exprimer le vecteur $\{\eta\}_k$ en fonction du vecteur des variables nodales de l'élément $\{\xi_n\}$ de la façon suivante :

$$\{\eta\}_k = [B_\sigma]_k \{\xi_n\} \quad (105)$$

L'application de l'équation (105) au champ $\{\delta \xi_n\}$ conduit à :

$$\{\delta \eta\}_k = [B_\sigma]_k \{\delta \xi_n\} \quad (106)$$

De même, pour $\{\varepsilon^{cr}\}_k$, on obtient :

$$\{\varepsilon^{cr}\}_k = [B]_k \{\xi^{cr}\} \quad (107)$$

où $[B]_k$ est la matrice des dérivées des fonctions d'interpolation de l'élément, précisée au paragraphe 1-3-2.

En injectant (62), (106) et (107) dans (104), on obtient :

$$\sum_e \left(\sum_{k=1,n} h_k^o \int_{S^{oe}} \langle \delta \xi_n \rangle [B]_k^t [C]_k [B]_k \{\xi^{cr}\} dS^{oe} + \sum_{k=1,n} h_k^o \int_{S^{oe}} \langle \delta \xi_n \rangle [B_\sigma]_k^t \{ \sigma^{cr} \}_k dS^{oe} - \lambda^{cr} \int_{S^{oe}} \langle \delta \xi \rangle \{ T^o \} dS^{oe} \right) = 0 \quad (108)$$

ou encore :

$$\sum_e \left(\langle \delta \xi_n \rangle [K] \{\xi^{cr}\} + \langle \delta \xi_n \rangle [K_\sigma^{cr}] \{\xi^{cr}\} + \lambda^{cr} \langle \delta \xi_n \rangle [K^p] \{\xi^{cr}\} \right) = 0 \quad (109)$$

où :

$[K]$ est la matrice de rigidité élastique de l'élément de coque multicouche définie comme suit :

$$[K] = \sum_{k=1,n} h_k^o \int_{S^{oe}} [B]_k^t [C]_k [B]_k dS^{oe} \quad (110)$$

$[K^P]$ est la matrice élémentaire prenant en compte l'influence des efforts non-conservatifs (efforts fonctions des variations de géométrie subies par le système) :

$$\langle \delta \xi_n \rangle [K^P] \{ \xi^{cr} \} = - \int_{S^{oe}} \langle \delta \xi \rangle \{ T^o \} dS^{oe} \quad (111)$$

Cette matrice devient nulle si les efforts sont conservatifs.

$[K_\sigma^{cr}]$ est la matrice de rigidité élémentaire géométrique à l'état critique. C'est cette matrice qui introduit les effets d'instabilité élastique. Elle est donnée par :

$$\langle \delta \xi_n \rangle [K_\sigma^{cr}] \{ \xi^{cr} \} = \sum_{k=1,n} h_k^o \int_{S^{oe}} \langle \delta \xi_n \rangle [B_\sigma]_k^t \{ \sigma^{cr} \}_k dS^{oe} \quad (112)$$

Pour obtenir $[K_\sigma^{cr}]$, on calcule d'abord cette matrice pour un chargement T (c'est à dire $\lambda = 1$), on obtient donc $[K_\sigma]$. La linéarité du flambement conduit à :

$$[K_\sigma^{cr}] = \lambda^{cr} [K_\sigma] \quad (113)$$

et le mode de flambement est le noyau de la matrice $([K] + \lambda^{cr} [K_\sigma] + \lambda^{cr} [K^P])$. Le problème de flambement revient donc à résoudre le problème de mode propre suivant :

$$([K] + \lambda^{cr} ([K_\sigma] + [K^P])) \{ \xi^{cr} \} = 0 \quad (114)$$

Les inconnues sont à la fois les valeurs propres λ^{cr} et les vecteurs propres $\{ \xi^{cr} \}$.

Parmi les modes de flambement possibles, seul le mode fondamental, de plus faible intensité, intéresse le dimensionnement de la structure coque considérée. Nous ne calculerons donc que le premier mode contenu dans l'équation (114). Pour cela, nous choisissons d'utiliser l'algorithme d'itération inverse basé schématiquement sur les opérations décrites ci-après et qui se prête bien à la résolution du problème.

1-4-3-3. Résolution du problème de flambement linéaire

La première étape de recherche des charges de flambement linéaire consiste à résoudre le problème d'élasticité classique sur la coque soumise au chargement T (c'est à dire $\lambda = 1$), qui s'écrit une fois discrétisé, $[K] \{ \xi_T \} = \{ F_T \}$. Cette résolution permet d'obtenir successivement le vecteur de déplacement $\{ \xi_T \}$, le vecteur de déformation $\{ \varepsilon_T \}$ et enfin le vecteur de contrainte $\{ \sigma_T \}$, nécessaire au calcul de la matrice de la matrice $[K_\sigma]$. A partir de là, on résout le problème de mode propre (114) par la méthode d'itération inverse, ce qui permet l'obtention du mode propre recherché : le mode fondamental. Le *tableau 1-1* résume sous forme algorithmique toutes les étapes nécessaires pour la résolution du problème de flambement linéaire.

1. Assemblage de la matrice $[K]$ et du vecteur $\{F_T\}$
2. Factorisation de $[K]$ par la méthode de Cholesky
3. Résolution de $[K] \{\xi_T\} = \{F_T\}$
4. Calcul de $\{\varepsilon_T\}$ et $\{\sigma_T\}$
5. Calcul de $[K'] = [K_o] + [K^p]$ ($[K^p]$ est nulle si les efforts sont conservatifs)
6. Recherche du premier mode propre du système $[K] \{\xi^{cr}\} = \lambda^{cr} [K'] \{\xi^{cr}\}$ par l'algorithme d'itération inverse, soit :
 - 6-1. Initialisation par un procédé quelconque de $\{\xi^{cr}\}_0$
 - 6-2. Résolution à l'itération i ($i > 0$) de $[K] \{\xi^{cr}\}_i = [K'] \{\xi^{cr}\}_{i-1}$
 - 6-3. Normalisation de $\{\xi^{cr}\}_i$ et calcul de λ_i^{cr}
 - 6-4. Retour en 6-2 si précision requise non satisfaite. Sinon, le mode propre recherché (premier mode) est déterminé

Tableau 1-1 : Récapitulatif de la résolution du problème de flambement linéaire

1-4-4. Application à l'étude de problèmes de grands déplacements - grandes rotations : couplage non-linéarités matérielles et géométriques

Dans le paragraphe précédent, nous avons appliqué la formulation coque multicouche pour le traitement du flambement linéaire des structures coques. Nous nous intéressons à présent aux problèmes de grands déplacements, grandes rotations et petites déformations tout en combinant ces effets aux non-linéarités dues aux propriétés des matériaux constituant la coque. Nous remplacerons ainsi pour de tels problèmes l'hypothèse des transformations infinitésimales **H1** (équation (1)) par l'hypothèse suivante :

H1* : hypothèse des petites déformations en grands déplacements.

1-4-4-1. Description du mouvement

Théoriquement, on peut décomposer le déplacement d'une coque soumise à un chargement donné, en la somme d'un déplacement de corps rigide transportant la coque de la position initiale $C(0)$ en une position $C_{rig}(t)$, et d'un déplacement créant une énergie de déformation non nulle amenant la coque de la position $C_{rig}(t)$ à la position courante déformée $C(t)$ (*figure 1-10*).

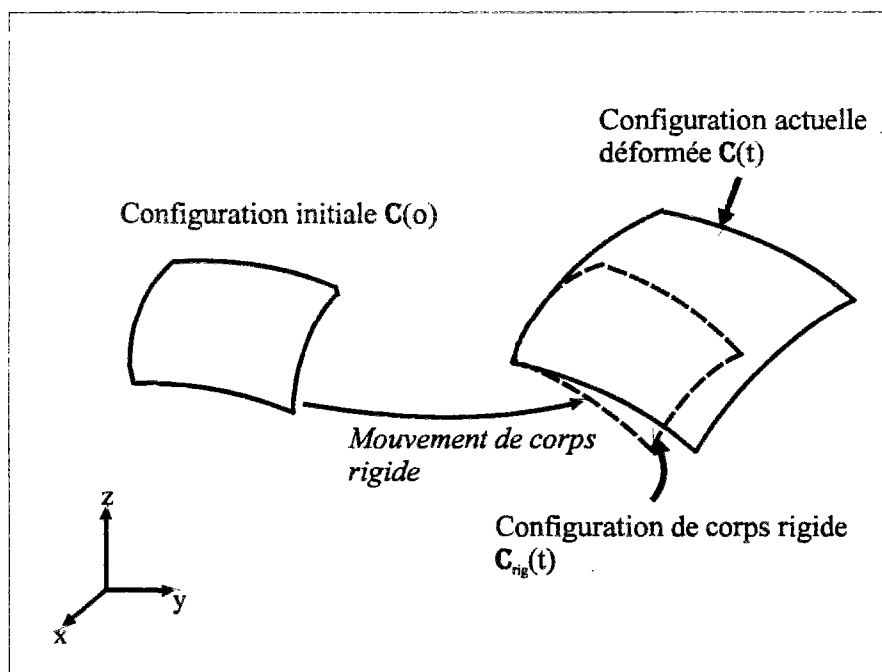


Figure 1-10 : Représentation du mouvement d'une coque en hypothèse des petits déplacements et petites déformations

En hypothèses de grands déplacements et petites déformations (hypothèse **H1***) la coque se déplace beaucoup plus qu'elle ne se déforme. Le déplacement de corps rigide représente ainsi la composante principale du champ de déplacement et par conséquent les non-linéarités géométriques seront caractérisées par le mouvement de corps rigide. En revanche, le passage de la position $C_{rig}(t)$ à $C(t)$ s'effectue par de faibles déplacements, l'hypothèse de petites déformations reste ainsi vérifiée sur la configuration $C_{rig}(t)$.

Nous choisissons donc de prendre pour configuration de référence, la configuration $C_{rig}(t)$. Comme précisé en 1-4-1, ce choix conduit à une description du mouvement appelée : description corotationnelle. Cette description autorise, dans le repère corotationnel (repère lié à la configuration de référence $C_{rig}(t)$), la prise en compte de l'hypothèse des petits déplacements et entraîne par conséquent une formulation simplifiée du problème non-linéaire posé. L'approche corotationnelle est souvent utilisée dans la littérature pour le traitement de problèmes induisant de grands déplacements et rotations mais de petites déformations (*Wempner, 1969; Belytschko et al., 1973; Rankin et al., 1986; Peng et al., 1992; Li et al., 1994 et Jiang et al., 1994*).

1-4-4-2. Vecteur déplacement d'une couche k

Soient P et Q les points définis dans le paragraphe 1-2-3. Le choix d'une description corotationnelle permet de conserver le vecteur de déplacement d'une couche k de la coque utilisé en hypothèse linéaire (petits déplacements), pour passer de la configuration déplacée $\mathbf{C}_{\text{rig}}(t)$ à la configuration déformée $\mathbf{C}(t)$. En désignant par $\mathbf{n}_i^{\text{rig}}$ ($i = \alpha, \beta, 0$), les vecteurs de base dans la configuration de référence $\mathbf{C}_{\text{rig}}(t)$, on obtient :

$$\xi_k = \xi(Q) = \xi(P) + \zeta \omega(P) \wedge \mathbf{n}_0^{\text{rig}} \quad (115)$$

où $\xi(P)$ et $\omega(P)$ représentent respectivement les vecteurs déplacement et rotation au point P .

Le passage entre vecteurs de base $\mathbf{n}_i^{\text{rig}}$ ($i = \alpha, \beta, 0$) dans la configuration de référence de corps rigide et vecteurs de base \mathbf{n}_i^0 ($i = \alpha, \beta, 0$) dans la configuration initiale se fait à partir du concept de rotations semi-tangentielles présenté en **annexe 3**.

1-4-4-3. Formulation variationnelle

Considérons la formulation faible (95) établie en description corotationnelle au paragraphe 1-4-2-2. L'hypothèse de grands déplacements et petites déformations permet de confondre le tenseur gradient de déformation \mathbf{P} avec le tenseur de rotation pure \mathbf{R} défini en 1-4-1. Les équations (89) et (96) conduisent ainsi à :

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \mathbf{R} \\ J = \det \mathbf{P} = \det \mathbf{R} = 1 \end{cases} \quad (116)$$

et :

$$\boldsymbol{\sigma}_k = \boldsymbol{\pi}_k^{\text{rig}} = {}^t \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\pi}_k^0 \cdot \mathbf{R} \quad (117)$$

Avec l'hypothèse **H1***, on peut donc confondre dans la configuration de référence de corps rigide, le tenseur de Piola-Kirchhoff d'une couche k de la coque $\boldsymbol{\pi}_k^{\text{rig}}$ avec le tenseur de contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}_k$. L'équation (95) revient à :

$$\forall \hat{\mathbf{U}} \quad - \sum_{k=1..n} h_k^{\text{rig}} \int_{S_k^{\text{rig}}} \boldsymbol{\sigma}_k : \hat{\boldsymbol{\Delta}}_k \, dS_k^{\text{rig}} + \int_{S^{\text{rig}}} \mathbf{T}^{\text{rig}} \cdot \hat{\mathbf{U}} \, dS^{\text{rig}} = 0 \quad (118)$$

Cette expression traduit les conditions de stationnarité de l'énergie potentielle totale φ si l'on identifie $\hat{\mathbf{U}}$ à $\delta \boldsymbol{\xi}$ et $\hat{\mathbf{U}}_k$ à $\delta \boldsymbol{\xi}_k$, c'est à dire :

$$\delta \varphi = 0 \quad (119)$$

$$\text{avec } \varphi = - \sum_{k=1,n} h_k^{\text{rig}} \int_{S^{\text{rig}}} \boldsymbol{\sigma}_k : \boldsymbol{\Delta}_k dS^{\text{rig}} + \int_{S^{\text{rig}}} \mathbf{T}^{\text{rig}} \cdot \boldsymbol{\xi} dS^{\text{rig}} \quad (120)$$

$\boldsymbol{\Delta}_k$ représente le tenseur des déformations de Green-Lagrange d'une couche k de la coque exprimé dans la configuration de référence de corps rigide. On peut décomposer ce tenseur comme suit : $\boldsymbol{\Delta}_k = \boldsymbol{\varepsilon}_k + \boldsymbol{\eta}_k$.

Une discrétisation spatiale par éléments finis de la coque multicouche conduit à :

$$\delta\varphi = \sum_e \left(- \sum_{k=1,n} h_k^{\text{rig}} \int_{S^{\text{rig}^e}} \langle \delta\varepsilon \rangle_k \{ \sigma \}_k dS^{\text{rig}^e} - \sum_{k=1,n} h_k^o \int_{S^{\text{rig}^e}} \langle \delta\eta \rangle_k \{ \sigma \}_k dS^{\text{rig}^e} + \lambda \int_{S^{\text{rig}^e}} \langle \delta\xi \rangle \{ T^{\text{rig}} \} dS^{\text{rig}^e} \right) = 0 \quad (121)$$

Utilisant les équations (62) et (106) dans (121), le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale revient à :

$$\delta\varphi = \sum_e \langle \delta\xi_n \rangle \{ R \} = 0 \quad (122)$$

où $\{ R \}$ est le vecteur résidu défini par :

$$\{ R \} = \{ F_{\text{ext}} \} - \{ F_{\text{int}} \} \quad (123)$$

$\{ F_{\text{int}} \}$ représente le vecteur des efforts internes se décomposant comme suit :

$$\{ F_{\text{int}} \} = \sum_{k=1,n} \{ F_{\text{int}}^{\text{mat}} \}_k + \sum_{k=1,n} \{ F_{\text{int}}^{\text{geom}} \}_k = \sum_{k=1,n} h_k^{\text{rig}} \int_{S^{\text{rig}^e} } [B]_k^t \{ \sigma \}_k dS^{\text{rig}^e} + \sum_{k=1,n} h_k^{\text{rig}} \int_{S^{\text{rig}^e} } [B_\sigma]_k^t \{ \sigma \}_k dS^{\text{rig}^e} \quad (124)$$

Et $\{ F_{\text{ext}} \}$ est le vecteur des efforts externes :

$$\langle \delta\xi_n \rangle \{ F_{\text{ext}} \} = \int_{S^{\text{rig}^e} } \langle \delta\xi \rangle \{ T^{\text{rig}} \} dS^{\text{rig}^e} \quad (125)$$

Le respect de l'équilibre global entre efforts intérieurs et extérieurs appliqués à la coque est assuré lorsque :

$$\{ R \} = 0 \quad (126)$$

Cette relation représente un système d'équations non-linéaire dont la résolution se fait par la méthode exposée au paragraphe 1-3-3-1. Ainsi, l'utilisation des relations (123), (124), et (125) dans (71) permet d'obtenir l'équation d'équilibre incrementale matricielle pour un élément de coque multicouche dans la configuration de référence de corps rigide qui s'exprime comme suit :

$$\left([K] + [K_\sigma] + [K^p] \right) \{ \Delta\xi_n \} = \{ F_{\text{ext}} \} - \{ F_{\text{int}} \} \quad (127)$$

avec $\{F_{ext}\}$ et $\{F_{int}\}$ respectivement les vecteurs des efforts internes et externes de l'élément de coque multicouche, définis par les relations (124) et (125).

$[K]$ est la matrice constituant la partie non-linéaire en matériau de la matrice de rigidité de l'élément de coque multicouche. Cette matrice est identique à celle déterminée au paragraphe 1-3-3-1. Elle est donnée par :

$$[K] = - \sum_{k=1,n} h_k^{rig} \int_{S^{rig e}} [B]_k^t \frac{\partial \{\Delta \sigma\}_k}{\partial \{\Delta \epsilon\}_k} [B]_k dS^{rig e} \quad (128)$$

$[K_\sigma]$ est la matrice constituant la partie non-linéaire en géométrie de la matrice de rigidité de l'élément de coque multicouche :

$$\langle \delta \xi_n \rangle [K_\sigma] \{\delta \xi_n\} = \sum_{k=1,n} h_k^{rig} \int_{S^{rig e}} \langle \delta \xi_n \rangle [B_\sigma]_k^t \{\sigma\}_k dS^{rig e} \quad (129)$$

Et $[K^p]$ est la matrice élémentaire prenant en compte l'influence des efforts non-conservatifs :

$$\langle \delta \xi_n \rangle [K^p] \{\xi_n\} = - \int_{S^{rig e}} \langle \delta \xi \rangle \{\Delta T^{rig}\} dS^{rig e} \quad (130)$$

1-5. Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons développé un outil numérique permettant l'analyse de structures constituées de coques : l'élément de coque multicouche. Basé sur une approche semi-globale, cet élément permet de traiter les non-linéarités géométriques à une échelle globale, et les non-linéarités matérielles à une échelle locale constituée des couches (*figure 1-11*).

Chaque couche est dotée d'une cinématique de coque excentrée. L'idée de base a donc consisté à établir les équations d'équilibre d'une coque excentrée ainsi que la formulation faible de celles-ci, puis à étendre cette formulation au cas multicouche par superposition.

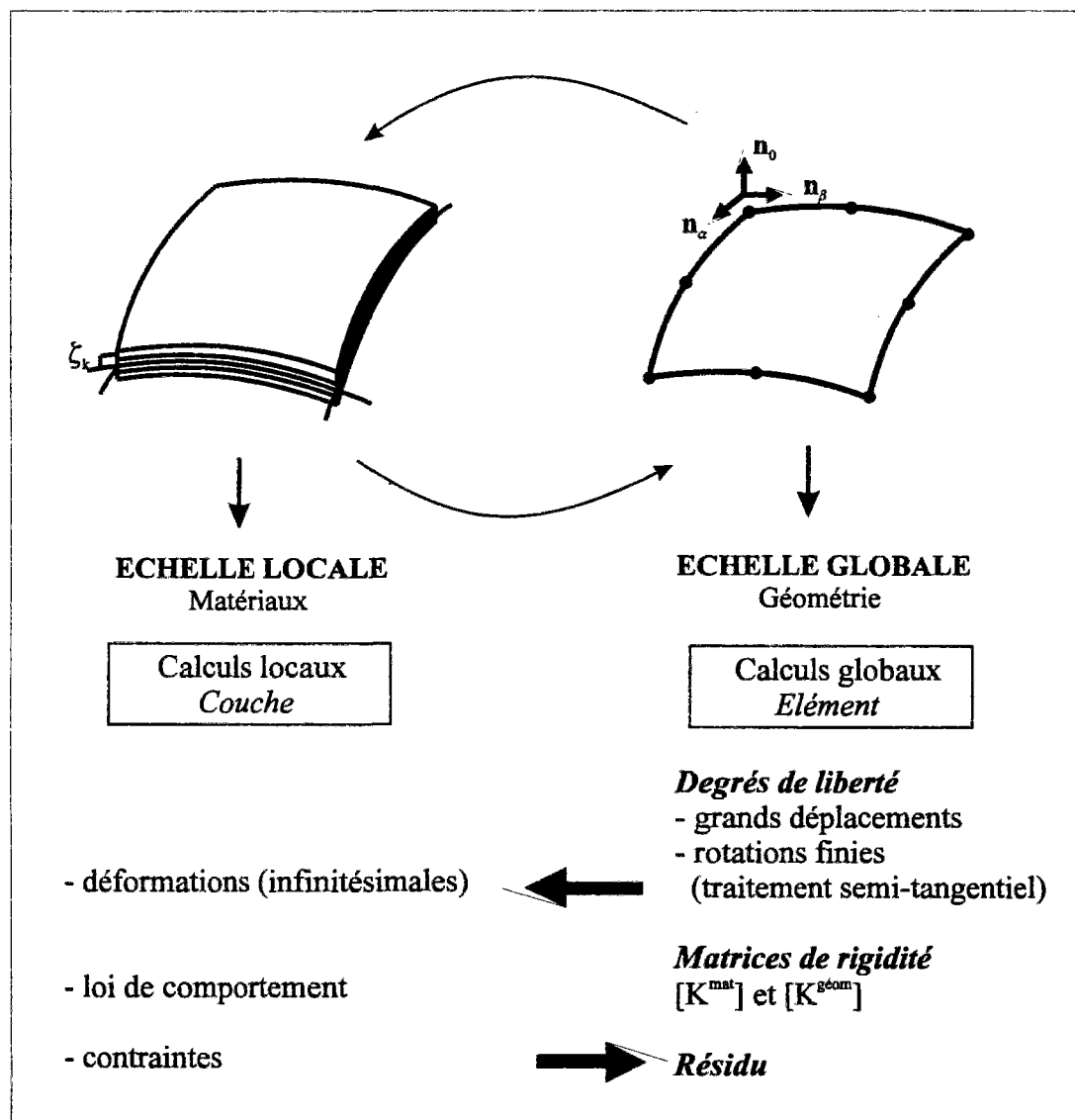


Figure 1-11 : Schéma récapitulatif de l'approche semi-globale pour l'analyse non-linéaire matérielle et géométrique

De la formulation faible établie, nous sommes passé à la formulation éléments finis de coques multicouches, en supposant que les non-linéarités provenaient uniquement des propriétés des matériaux. Nous avons ainsi établi une formulation variationnelle qui nous a permis de déterminer le vecteur des efforts internes ainsi que la matrice de rigidité d'un élément fini de coque multicouche. Lors de ces développements, nous avons été amené à poser les hypothèses suivantes :

- Hypothèses des petites perturbations (cf. 1-2-1) :

H1 : hypothèse des transformations infinitésimales impliquant celle des déformations infinitésimales.

H2 : hypothèse des petits déplacements .

- Hypothèses de déformation des coques (cf. 1-2-4) :

H3 : hypothèse de *Mindlin-Reissner* pour une coque épaisse.

H3* : hypothèse de *Love-Kirchhoff* pour une coque mince.

- Hypothèses sur l'état de contraintes (cf. 1-2-6-2, 1-3-1) :

H4 : hypothèse de contraintes planes.

H5 : hypothèse d'un état de contraintes constant dans l'épaisseur de chaque coque monocouche excentrée.

Après avoir établi la formulation de l'élément de coque multicouche dans le cadre des petites perturbations, nous nous sommes intéressés à l'extension de celle-ci à la prise en compte des non-linéarités géométriques. Dans un premier temps, nous avons développé une formulation coques multicouches permettant d'étudier le phénomène d'instabilité élastique se produisant dans les structures coques. Pour cela, nous avons utilisé une formulation lagrangienne totale et avons supposé que :

- Hypothèse de linéarité du flambement (cf. 1-4-3-1)

H6 : avant flambement les déplacements restent petits et les déformations linéaires et élastiques.

Nous sommes ensuite passés à une formulation coques multicouches couplant les effets non-linéaires matériels et géométriques et permettant d'étudier les problèmes de grands déplacements, grandes rotations et petites déformations. Nous avons utilisé pour cela une description corotationnelle. Dans cette description la configuration de référence est définie par la position du solide après déplacement de corps rigide et l'hypothèse des petits déplacements reste valable dans le repère corotationnel. Nous avons ainsi été amené à remplacer les hypothèses des petites perturbations (**H1** et **H2**) par celles de grands déplacements et petites déformations (**H1*** et **H2***) :

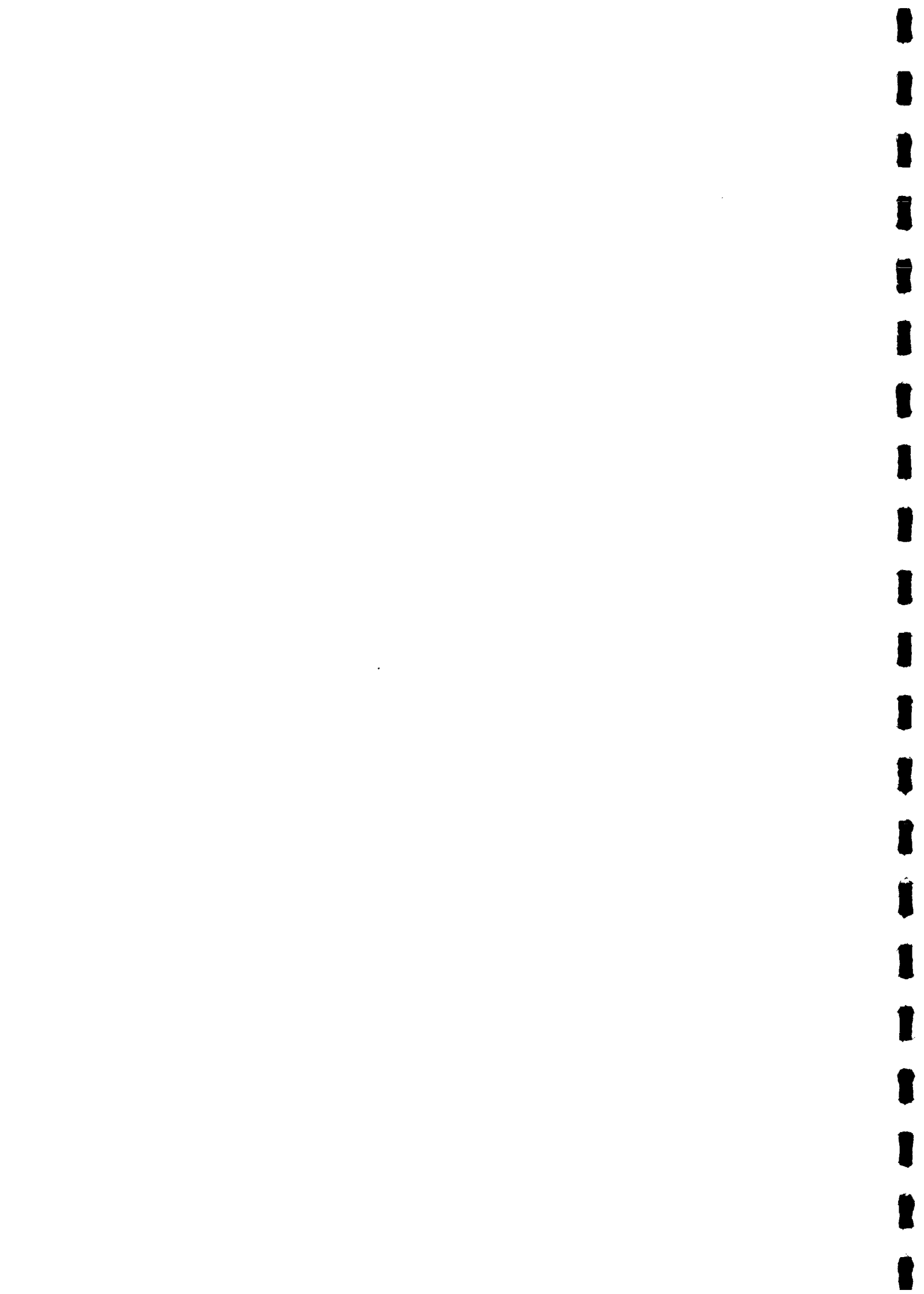
H1* : hypothèse des déformations infinitésimales en grands déplacements (cf.1-4-4). Le mouvement rigidifiant représente la composante principale de la transformation (d'où : $\pi^{rig} = \sigma$, cf.1-4-4-2)

H2* : hypothèse sur le champ de déplacement dans la configuration de référence de corps rigide (cf.1-4-4-2).

La modélisation coque multicouche proposée permet ainsi la prise en compte des non-linéarités matérielles et géométriques dans l'analyse de structures constituées de coques. Pour les non-linéarités en matériaux, cette modélisation permet l'utilisation de lois de comportement triaxiales quelconques. En particulier avec les lois de comportement à variables internes présentées dans le chapitre suivant (chapitre 2), nous pourrons effectuer des calculs de structures coques sous chargements monotones croissants, cycliques, et dynamiques. Pour les non-linéarités géométriques, la modélisation coque multicouche développée permet l'étude du phénomène d'instabilité élastique se produisant dans les structures coques (flambement linéaire), mais aussi les problèmes de grands déplacements et de grandes rotations, tout en restant en petites déformations.

CHAPITRE 2

***QUELQUES LOIS DE COMPORTEMENT A
VARIABLES INTERNES POUR L'ACIER ET LE
BETON***



2-0. Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons un ensemble de lois de comportement à variables internes dans l'objectif de leur utilisation par l'ingénieur pour le calcul de structures coques en béton armé sous divers chargements.

Ces lois de comportement permettent la modélisation du comportement de l'acier et sont aptes à rendre compte des différents phénomènes se produisant dans le béton, matériau constitutif des structures en béton armé sous chargements statiques, cycliques ou dynamiques. Ce sont des lois existantes qui seront par la suite utilisées au sein d'éléments finis particuliers : les éléments de coques multicouches développés au chapitre 1.

L'aspect numérique de ces lois de comportement est également abordé dans ce chapitre. Lors des traitements numériques, une attention particulière est portée sur la condition de contraintes planes, d'une part dans le schéma d'intégration des contraintes, et d'autre part dans le calcul du tenseur de comportement tangent.

Ce chapitre comprend 4 parties :

La première partie consiste à présenter les cadres théorique et numérique des lois de comportement à variables internes. Pour le cadre théorique, nous utilisons une approche thermodynamique tout en supposant les perturbations petites et les évolutions isothermes. Pour le traitement numérique, deux méthodes sont présentées, d'une part, une méthode implicite de projection dans l'incrément, et, d'autre part, une méthode explicite de projection dans l'itération.

La seconde partie est consacrée à la modélisation du comportement de l'acier. Deux lois de comportement à variables internes sont présentées : une loi élastoplastique parfaite pour le cas de chargements monotones croissants qui sera étendue à une loi plastique anisotrope pour la modélisation du comportement des lits d'armatures croisés existant dans les structures de coques en béton armé.

La troisième partie est consacrée à la modélisation du comportement du béton. Un modèle élastoplastique est présenté dans le cas de chargements monotones croissants. Dans ce schéma de comportement, le matériau est considéré comme non endommageant et les effets de vitesse sont négligés. Ceci représente des restrictions provisoires qui seront levées par la suite en procédant à l'extension du modèle élastoplastique à un modèle élastoplastique endommageable, puis à une loi visco-élasto-plastique avec écrouissage visqueux. Le modèle élastoplastique endommageable permet ainsi la prédiction des effets du dommage à l'échelle macroscopique des structures coques sous chargements cycliques, et la loi visco-élastoplastique avec écrouissage visqueux, la modélisation du comportement du béton en dynamique rapide.

La quatrième et dernière partie est consacré aux limites des modèles présentés.

2-1. Cadre théorique et traitement numérique des lois de comportement à variables internes

Dans ce premier paragraphe, nous présentons le cadre théorique ainsi que le traitement numérique des lois de comportement à variables internes. En ce qui concerne le cadre théorique, nous choisissons d'utiliser une approche thermodynamique. Celle-ci permet non seulement de bien définir les variables macroscopiques utilisées, mais aussi d'imposer certaines restrictions sur les évolutions de ces variables. Pour le traitement numérique, nous présentons deux schémas d'intégration des contraintes et précisons leur traitement particulier en contraintes planes. Nous nous limitons pour tout cela aux cas des évolutions isothermes et restons dans le cadre des transformations infinitésimales.

2-1-1. Cadre théorique

Considérons l'inégalité fondamentale de Clausius-Duhem. Celle-ci s'écrit pour des évolutions isothermes (*Lemaitre, 1985; Coussy, 1995*) :

$$\phi = \sigma : \dot{\varepsilon} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (1)$$

où σ et ε représentent respectivement les tenseurs de contraintes et de déformations précisés dans les paragraphes 1-2-3 et 1-2-5 du chapitre 1, et Ψ l'énergie libre volumique. Cette énergie a pour arguments naturels deux types de variables : les variables d'état *externes observables* ε , et les variables d'état *internes* α_i , n'évoluant que spontanément dans les transformations irréversibles sans pouvoir être contrôlées de l'extérieur. Il vient :

$$\Psi = \Psi(\varepsilon, \alpha_i) \quad (2)$$

Utilisant l'équation (2) dans (1), on obtient :

$$\phi = \left(\sigma - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \right) : \dot{\varepsilon} - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \geq 0 \quad (3)$$

Dans le cas où les évolutions sont réversibles, et donc le comportement élastique, la dissipation intrinsèque ϕ est nulle. L'équation d'état est donnée par :

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \quad (4)$$

L'équation (4) relie la variable externe ε à la force σ qui est sa variable conjuguée respective au sens de l'énergie. Dans le cas d'évolutions irréversibles, cette relation reste valable et la dissipation (1) devient :

$$\phi = Q_i : \dot{\alpha}_i \geq 0 \quad Q_i = - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} \quad (5)$$

où Q_i sont les forces thermodynamiques associées dans la dissipation (5) au taux des variables internes $\dot{\alpha}_i$. Les lois complémentaires sont celles qui relient les vitesses $\dot{\alpha}_i$ aux forces Q_i . La seule restriction relative à ces lois est la satisfaction de l'inégalité (5). Ces lois ainsi que la restriction peuvent être écrites comme suit :

$$\dot{\alpha}_i = F(Q_i) \quad Q_i : F(Q_i) \geq 0 \quad (6)$$

Si l'on considère $F(Q_i)$ comme la dérivée d'une fonction $D(Q_i)$ par rapport aux forces thermodynamiques Q_i :

$$F(Q_i) = \dot{\alpha}_i = \frac{\partial D(Q_i)}{\partial Q_i} \quad (7)$$

et si cette fonction D est non-négative et convexe de ses arguments, le deuxième principe de la thermodynamique, c'est à dire la non-négativité de la dissipation intrinsèque ϕ , est automatiquement satisfait.

La fonction D reçoit alors le nom de *potentiel de dissipation* et l'équation (7) traduit l'hypothèse connue comme l'hypothèse de normalité du mécanisme de dissipation associé aux forces Q_i . Bien que cette hypothèse ne soit pas une loi physique, elle correspond à l'une des conditions suffisantes de stabilité du matériau par rapport aux variables α_i .

La loi de comportement à variables internes est donc entièrement définie par la donnée de son énergie libre Ψ en fonction des variables d'état externes $\boldsymbol{\varepsilon}$ et internes α_i , c'est à dire par la relation (2), ainsi que du potentiel de dissipation D permettant de lier les vitesses $\dot{\alpha}_i$ aux forces Q_i par les lois complémentaires (7). Un état $S(\boldsymbol{\sigma}, \alpha_i)$ satisfaisant à la fois les équations d'état et les lois d'évolution est donc considéré comme admissible par la loi de comportement à variables internes.

2-1-2. Traitement numérique

Après avoir rappelé brièvement le cadre théorique des lois de comportement à variables internes, nous nous intéressons à présent au traitement numérique de celles-ci.

Dans une approche par éléments finis, le problème posé consiste à actualiser les variables internes de telle manière à ce qu'elles satisfassent les équations d'état ainsi que les lois d'évolution. Plus précisément, en se plaçant dans un cadre d'Euler implicite (schéma précis au premier ordre) et connaissant l'énergie libre volumique $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_i)$ à l'incrément (n), on cherche à déterminer celle-ci à l'incrément (n+1). La variable d'état externe : le tenseur de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ à l'incrément (n+1), est le champ de solution de la conservation de la quantité de mouvement dans l'approche numérique par éléments finis de type déplacement. En revanche, l'évolution des variables d'état internes nécessite l'intégration numérique des lois complémentaires d'évolution, c'est à dire des équations (6) et (7).

Considérons pour cela les équations (4), (5)₂ et (7). A l'incrément (n+1), celles-ci s'écrivent :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_{i, n+1}) \quad \mathbf{Q}_{i, n+1} = -\partial_{\boldsymbol{\alpha}} \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_{i, n+1}) \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{i, n+1} = \partial_{\mathbf{Q}} D(\mathbf{Q}_{i, n+1}) \quad (8)$$

avec :

$$\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_{i, n+1}) = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{n+1} \quad \partial_{\boldsymbol{\alpha}} \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_{i, n+1}) = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}_j} \right|_{n+1} \quad \partial_{\mathbf{Q}} D_{n+1} = \left. \frac{\partial D}{\partial \mathbf{Q}_i} \right|_{n+1} \quad (9)$$

En supposant l'approximation suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{i, n+1} \equiv \frac{\boldsymbol{\alpha}_{i, n+1} - \boldsymbol{\alpha}_{i, n}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{\alpha}_i}{\Delta t} \quad (10)$$

On peut actualiser les variables internes $\boldsymbol{\alpha}_i$ à l'incrément (n+1) par la résolution de l'équation en $\Delta \boldsymbol{\alpha}_i$:

$$\Delta \boldsymbol{\alpha}_i - \Delta t \partial_{\mathbf{Q}} D_{n+1} = 0 \quad (11)$$

Classiquement, cette équation suffit pour actualiser les variables internes $\boldsymbol{\alpha}_i$. Dans notre étude, les lois de comportement à variables internes vont par la suite être utilisées au sein d'éléments finis de coques multicouches. Nous devons donc rajouter une condition supplémentaire, la condition de contraintes planes (hypothèse **H4** du chapitre 1) s'exprimant :

$$\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \cdot \mathbf{n}_0 = 0 \quad (12)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ représente le tenseur de contraintes actualisé donné par la relation (8)₁, et \mathbf{n}_0 le vecteur unitaire normal à la surface de référence de l'élément de coque multicouche considéré (se reporter au chapitre 1).

En supposant un comportement élastique isotrope, nous pouvons décomposer le tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} + \lambda \operatorname{diag} \left[1, 1, \frac{1-\nu}{\nu} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_{zz, n+1} \quad (13)$$

avec $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$ le tenseur de contraintes calculé en déformations planes, et $\lambda = \nu E / (1+\nu)(1-2\nu)$ le coefficient de Lamé donné en fonction du coefficient de poisson ν et du module d'Young E .

Les équations (12) et (13) conduisent alors à :

$$\begin{cases} \sigma_{xx, n+1} = \bar{\sigma}_{xx, n+1} - \frac{\nu}{1-\nu} \bar{\sigma}_{zz, n+1} \\ \sigma_{yy, n+1} = \bar{\sigma}_{yy, n+1} - \frac{\nu}{1-\nu} \bar{\sigma}_{zz, n+1} \\ \bar{\sigma}_{zz, n+1} + \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \varepsilon_{zz, n+1} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

ou bien sous forme compacte :

$$\sigma_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1} - \text{diag} \left[\frac{\nu}{1-\nu}, \frac{\nu}{1-\nu}, 1 \right] \bar{\sigma}_{zz, n+1} \quad (15)$$

Les inconnues de la projection sont alors les variables internes α_i et la déformation ε_{zz} à l'incrément (n+1). Les expressions (11) et (14)₃ forment le système à résoudre suivant :

$$\{R_{n+1}\} = \begin{cases} \Delta \alpha_i - \Delta t \cdot \partial_Q D_{n+1} \\ \bar{\sigma}_{zz, n+1} + \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \varepsilon_{zz, n+1} \end{cases} = 0 \quad (16)$$

Pour la résolution de celui-ci, nous pouvons distinguer deux méthodes : la méthode de projection dans l'incrément : « *closest point projection algorithm* », et la méthode de projection dans l'itération : « *cutting plane algorithm* ». Celles-ci ont été proposées par Simo et Hughes (*Simo et al., 1986*) dans le cas de la plasticité et de la viscoplasticité.

La méthode de projection dans l'incrément est une méthode implicite consistant à satisfaire les lois d'évolution dans l'incrément. Ceci revient donc à résoudre l'équation $\{R\} = \{0\}$ dans l'incrément par une méthode itérative adaptée.

Considérons l'équation (8)₃ établie précédemment. Si l'on désigne par Ψ^* la transformée de Legendre-Fenchel de l'énergie libre Ψ , on peut écrire :

$$\alpha_{i, n+1} = -\partial_Q \Psi^*(\sigma_{n+1}, Q_{i, n+1}) = -\partial_Q \Psi_{n+1}^* \quad (17)$$

et donc :

$$\Delta \alpha_i = \partial_Q \Psi_n^* - \partial_Q \Psi_{n+1}^* \quad (18)$$

Ainsi, le système (16) devient :

$$\{\mathbf{R}_{n+1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \partial_{\mathbf{Q}} \Psi_n^* - \partial_{\mathbf{Q}} \Psi_{n+1}^* - \Delta t \cdot \partial_{\mathbf{Q}} D_{n+1} \\ \bar{\sigma}_{zz, n+1} + \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \varepsilon_{zz, n+1} \end{array} \right\} = 0 \quad (19)$$

La résolution de ce système peut se faire en utilisant un schéma itératif de Newton-Raphson. On a donc :

$$\{\mathbf{R}_{n+1}\}^{(k+1)} = \{\mathbf{R}_{n+1}\}^{(k)} + \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}} \right]^{(k)} \{\mathbf{d}\mathbf{x}\}^{(k+1)} + \dots = 0 \quad (20)$$

avec :

$$\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{Q}_i, \varepsilon_{zz}\} \quad (21)$$

On obtient ainsi les forces thermodynamiques \mathbf{Q}_i ainsi que la composante ε_{zz} du tenseur de déformation à l'incrément (n+1), ce qui permet l'actualisation des variables internes α_i et du tenseur de contraintes via respectivement les relations (18) et (13).

La méthode de projection dans l'itération est une méthode explicite. Elle consiste à satisfaire les lois d'évolution dans l'itération. On considère alors le résidu $\{\mathbf{R}\}$ dans des itérations locales tel que :

$$\{\mathbf{R}_{n+1}^{(k)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \delta \alpha_i^{(k)} - \Delta t \cdot \partial_{\mathbf{Q}_i} D(\mathbf{Q}_{i, n+1}^{(k-1)}) \\ \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} \cdot \mathbf{n}_0 = 0 \end{array} \right\} = \{0\} \quad (22)$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \alpha_i^{(k)} \\ \delta \varepsilon_{zz}^{(k)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta t \cdot \partial_{\mathbf{Q}_i} D(\mathbf{Q}_{i, n+1}^{(k-1)}) \\ -\frac{\nu}{\lambda(1-\nu)} \delta \bar{\sigma}_{zz}^{(k)} \end{array} \right\} \quad (23)$$

avec $\delta \bar{\sigma}_{zz}^{(k)}$ l'accroissement en $\bar{\sigma}_{zz}$ de la solution en déformations planes.

Ceci conduit à l'actualisation des variables internes α_i et de la déformation ε_{zz} tel que :

$$\alpha_{i, n+1}^{(k)} = \alpha_{i, n+1}^{(k-1)} + \delta \alpha_i^{(k)} \quad \varepsilon_{zz, n+1}^{(k)} = \varepsilon_{zz, n+1}^{(k-1)} + \delta \varepsilon_{zz}^{(k)} \quad (24)$$

mais aussi des forces thermodynamiques associées et du tenseur des contraintes :

$$Q_{i, n+1}^{(k)} = Q_{i, n+1}^{(k-1)} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} : \delta \alpha_j^{(k)} \quad (25)$$

$$\sigma_{n+1}^{(k)} = \bar{\sigma}_{n+1}^{(k-1)} + \delta \bar{\sigma}^{(k)} - \text{diag} \left[\frac{\nu}{1-\nu}, \frac{\nu}{1-\nu}, 1 \right] \delta \bar{\sigma}_{zz}^{(k)} \quad (26)$$

Nous constatons à travers les expressions (24)₁ et (25) que les variables internes α_i ainsi que leurs forces thermodynamiques associées Q_i sont calculées à l'itération (k) à partir de leurs équivalents à l'itération (k-1). C'est le caractère explicite de cette méthode par rapport à la précédente.

2-2. Modélisation élastoplastique pour l'acier

Après avoir présenté les cadres théorique et numérique des lois de comportement à variables internes, nous passons à présent à la modélisation du comportement de l'acier sous divers chargements. A cet effet deux lois de comportement à variables internes sont considérées : une loi élastoplastique parfaite pour le cas de chargement monotones croissants et une loi plastique anisotrope, extension de la loi précédente à la prise en compte de l'anisotropie de comportement des lits d'armatures croisées existant dans les structures coques en béton armé.

2-2-1. Modèle plastique isotrope parfait

Dans ce paragraphe, nous commençons avec la loi la plus simple permettant la modélisation du comportement de l'acier sous chargements monotones : le modèle plastique isotrope parfait de *Von-Mises*. Au travers de cette loi, nous illustrons les éléments théoriques et numériques présentés ci-dessus.

Le modèle rhéologique de la **figure 2-1** schématise de la manière la plus simple le comportement élastoplastique parfait en unidimensionnel. Ce modèle est constitué d'un patin de seuil de glissement k en série avec un ressort de module E . Lorsque l'effort σ auquel est soumis le système atteint, en valeur absolue, le seuil de glissement k du patin, le patin glisse irréversiblement à la vitesse indéterminée $\dot{\epsilon}^p$. Après décharge complète, on enregistre un déplacement irréversible du point d'application de l'effort égal au glissement total ϵ^p subi par le patin. Si l'on recharge, le patin glissera à nouveau une fois que l'effort σ atteindra le même seuil k .

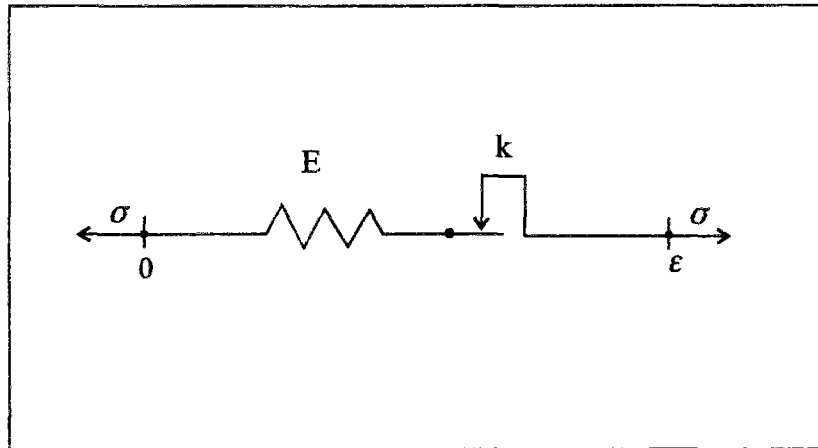


Figure 2-1 Modèle rhéologique du comportement plastique parfait

L'extension de ce modèle au cas tridimensionnel se fait en remplaçant toutes les quantités scalaires par des tenseurs. L'énergie libre volumique s'écrit alors en fonction des tenseurs de déformations totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ et plastique $\boldsymbol{\varepsilon}^p$:

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (27)$$

où $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$ représente l'énergie élastique et \mathbf{C} le tenseur de comportement élastique isotrope s'exprimant en fonction des modules de compressibilité $K = E/3(1 - 2\nu)$ et de cisaillement $G = E/2(1 + \nu)$:

$$\mathbf{C} = K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right] \quad (28)$$

La variable interne étant dans ce cas $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, on a donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad \text{et} \quad \phi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \geq 0 \quad (29)$$

La loi complémentaire est donc la loi reliant $\boldsymbol{\sigma}$ et $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, c'est à dire la règle d'écoulement.

2-2-1-1. Critère de plasticité

A tout modèle élastoplastique est associé un ou plusieurs critères de plasticité. Ces fonctions permettent de définir le point de chargement à partir duquel une déformation plastique peut avoir lieu. Elles servent par conséquent à caractériser la frontière existant entre les comportements élastique (réversible) et plastique (irréversible).

Notre but étant de modéliser le comportement élastoplastique de l'acier dans les coques pour le cas de chargements monotones, nous avons choisi d'utiliser comme critère celui de *Von-Mises*. Ce critère a été proposé indépendamment par Beltrami (*Beltrami, 1903*), Huber (*Huber, 1904*), Von-Mises (*Von-Mises, 1913*) et Hencky (*Hencky, 1924*). La fonction de charge s'exprime :

$$f(\sigma) = \|s\| - R \tag{30}$$

où $s = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \mathbf{1}$ représente le déviateur du tenseur de contraintes σ .

Selon la relation (30), le critère de *Von-Mises* est entièrement déterminé par le seul paramètre R . Ce dernier représente la limite d'élasticité en cisaillement simple [$\sigma_I = -\sigma_{II}$ et $\sigma_{III} = 0$, ($\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$) étant les contraintes principales]. Il est lié à la limite en traction simple f_y par :

$$f_y = R\sqrt{3/2} \tag{31}$$

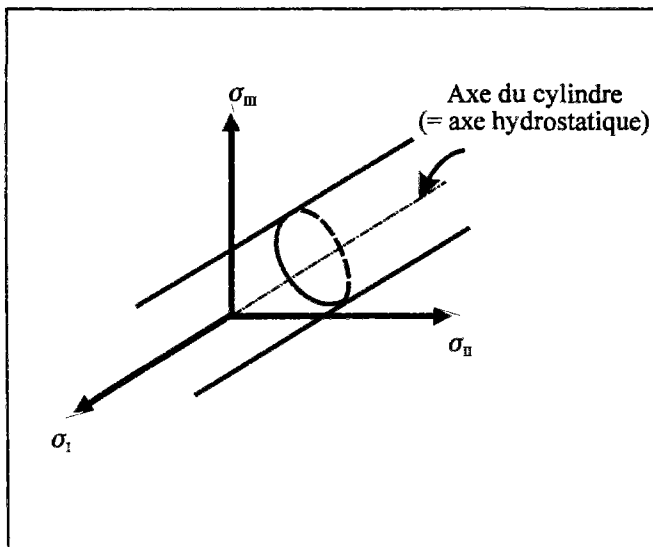


Figure 2-2 : Domaine d'élasticité du critère de Von-Mises dans l'espace des contraintes principales

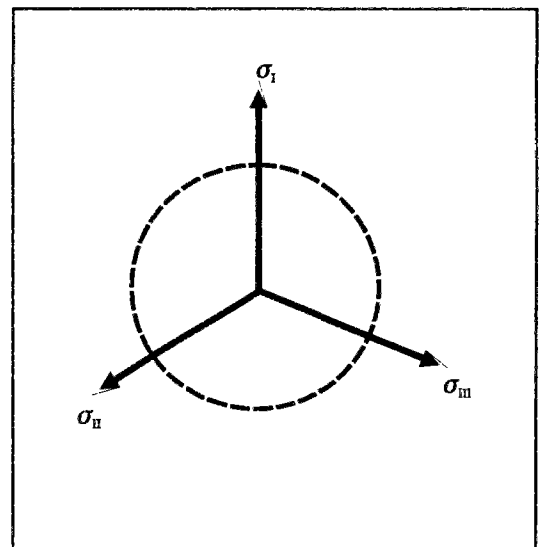


Figure 2-3 : Surface limite du critère de Von-Mises dans le plan déviatorique

Dans l'espace des contraintes principales, la surface limite du critère de *Von-Mises* est un cylindre à base circulaire de rayon R autour de l'axe hydrostatique [$\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$] (cf. *figure 2-2*). La *figure 2-3* représente cette surface dans le plan déviatorique.

Le critère de *Von-Mises* peut recevoir une interprétation énergétique. En effet, on prouve que le second invariant du déviateur de contraintes est proportionnel à l'énergie élastique de distorsion (c'est à dire l'énergie élastique totale diminuée de sa partie provenant d'une pure dilatation volumique); on peut alors considérer dans ce cas, que le critère de *Von-Mises* exprime le fait que la plastification se produit lorsque l'énergie élastique de distorsion a atteint une valeur critique.

On peut également considérer que le critère de *Von-Mises* est un critère de cisssion effective. En effet, pour ce critère, cette cisssion n'est rien d'autre que la cisssion octaédrique $\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|s\|$. L'écoulement ne se produit donc que si la cisssion octaédrique a atteint une valeur critique.

2-2-1-2. Règle d'écoulement

De façon classique, la règle d'écoulement définit comment a lieu l'écoulement plastique. Cette loi conduit à établir, à chaque pas, l'état de la déformation plastique. On l'introduit généralement à partir d'une fonction convexe appelée potentiel plastique et notée g , en imposant certaines conditions quant à sa validité. Si le matériau satisfait l'hypothèse de mécanisme dissipatif normal (cf. 2-1-1), il est dit standard. Le critère de plasticité est alors convexe et la règle d'écoulement normale. Le potentiel plastique g est alors égal à la fonction de charge f et la règle d'écoulement est dite associée.

Avec le critère de *Von-Mises*, l'utilisation d'une règle d'écoulement associée suffit pour modéliser le comportement élastoplastique de l'acier. Le potentiel plastique est donc simplement défini par l'équation du critère (30). La règle d'écoulement s'écrit :

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = d\gamma \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} = d\gamma \mathbf{m} \quad (32)$$

où $d\gamma$ représente le multiplicateur plastique défini par la condition de consistance :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \left(d\boldsymbol{\varepsilon} - d\gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = 0 \quad (33)$$

2-2-1-3. Traitement numérique

Dans une approche par éléments finis, on cherche à actualiser la variable interne $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ de telle manière à ce qu'elle satisfasse non seulement l'équation d'état, mais aussi la loi d'évolution. En adoptant un schéma aux différences de type Euler implicite et connaissant $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ à l'incrément (n), on veut déterminer cette variable à l'incrément ($n+1$).

L'équation d'état (29)₁ conduit à :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + C : (\Delta \varepsilon_{n+1} - \Delta \varepsilon_{n+1}^p) \quad (34)$$

où $\Delta(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1} - (\cdot)_n$; $(\cdot)_n$ et $(\cdot)_{n+1}$ indiquant respectivement les solutions aux incréments (n) et (n+1).

Comme nous l'avons précisé dans le paragraphe 2-1-2 de ce chapitre, l'actualisation de la variable interne ε^p à l'incrément (n+1) a lieu par la résolution du système (16) qui s'écrit plus précisément dans ce cas de plasticité parfaite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \varepsilon^p - \Delta \gamma_{n+1} \partial_{\sigma} f_{n+1} \\ \bar{\sigma}_{zz, n+1} + \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \varepsilon_{zz, n+1} \end{array} \right\} = 0 \quad (35)$$

Pour cette résolution, nous présentons les deux méthodes exposées dans le paragraphe 2-1-2 : la méthode de projection dans l'incrément et la méthode de projection dans l'itération, appliquées au cas de la plasticité parfaite. Nous préciserons toutefois sur laquelle de ces deux méthodes notre choix s'est porté et la raison de ce choix.

. Méthode de projection dans l'incrément

Dans la méthode de projection dans l'incrément (*figure 2-4-a*), on utilise l'équation (34) dans le système (35), ce qui revient à :

$$\left\{ \begin{array}{l} C : \Delta \varepsilon + \sigma_n - \sigma_{n+1} - \Delta \gamma_{n+1} C : \partial_{\sigma} f_{n+1} \\ \bar{\sigma}_{zz, n+1} + \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \varepsilon_{zz, n+1} \end{array} \right\} = 0 \quad (36)$$

Si on introduit le tenseur de contraintes statiquement admissible, σ_{n+1}^* , tenseur de contraintes qu'on obtient en bloquant les déformations plastiques :

$$\sigma_{n+1}^* = C : \Delta \varepsilon + \sigma_n \quad (37)$$

l'utilisation de l'équation (37) ainsi que de la condition de contraintes planes (13) dans (36) conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{n+1}^* - \bar{\sigma}_{n+1} - \lambda \text{diag} \left[1, 1, \frac{1-\nu}{\nu} \right] \varepsilon_{zz, n+1} - \Delta \gamma_{n+1} C : \partial_{\sigma} f_{n+1} \\ \bar{\sigma}_{zz, n+1} + \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \varepsilon_{zz, n+1} \end{array} \right\} = 0 \quad (38)$$

où $\bar{\sigma}_{n+1}$ désigne toujours le tenseur de contraintes, solution élastoplastique à l'incrément (n+1) en déformations planes.

De plus, la théorie de la plasticité impose certaines conditions sur les contraintes et le multiplicateur plastique à l'incrément (n+1). Classiquement elles proviennent des conditions de Kuhn-Tucker, formulées par les inéquations suivantes :

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \leq 0 \\ \Delta\gamma_{n+1} \geq 0 \\ \Delta\gamma_{n+1} f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (39)$$

Ainsi, si l'on rassemble les équations (38) et (39), elles forment le système non-linéaire de 8 équations suivant (6 équations concernant les contraintes R_{1-6} , une concernant le critère de plasticité R_7 et une concernant la condition de contraintes planes R_8) :

$$\begin{cases} R_{1-6} \\ R_7 \\ R_8 \end{cases} = \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} - \lambda \operatorname{diag}\left[1, 1, \frac{1-\nu}{\nu}\right] \boldsymbol{\varepsilon}_{zz, n+1} - \Delta\gamma_{n+1} \mathbf{C} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1} \\ f_{n+1} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{zz, n+1} + \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \boldsymbol{\varepsilon}_{zz, n+1} \end{cases} = 0 \quad (40)$$

Les inconnues du système (40) sont les composantes du tenseur $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$, le multiplicateur plastique $\Delta\gamma_{n+1}$ et la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{zz, n+1}$. Elles peuvent être obtenues en utilisant un schéma de *Newton-Raphson*, selon la formule de récurrence (20), soit dans ce cas de plasticité parfaite :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{(k)} - \lambda \operatorname{diag}\left[1, 1, \frac{1-\nu}{\nu}\right] \boldsymbol{\varepsilon}_{zz, n+1}^{(k)} - \Delta\gamma_{n+1}^{(k)} \mathbf{C} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1}^{(k)} \\ f_{n+1}^{(k)} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{zz, n+1}^{(k)} + \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \boldsymbol{\varepsilon}_{zz, n+1}^{(k)} \end{cases} \\ & + \begin{bmatrix} -[\mathbf{1} + \Delta\gamma_{n+1}^{(k-1)} \mathbf{C} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1}^{(k-1)}] & -\mathbf{C} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1}^{(k-1)} & -\lambda \operatorname{diag}\left[1, 1, \frac{1-\nu}{\nu}\right] : [\mathbf{1} + \Delta\gamma_{n+1}^{(k-1)} \mathbf{C} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1}^{(k-1)}] \\ \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1}^{(k-1)} & 0 & \lambda \operatorname{diag}\left[1, 1, \frac{1-\nu}{\nu}\right] : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1}^{(k-1)} \\ \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0 & 0 & \lambda \frac{1-\nu}{\nu} \end{bmatrix} \begin{cases} d\boldsymbol{\sigma}^{(k)} \\ d\gamma^{(k)} \\ d\boldsymbol{\varepsilon}_{zz}^{(k)} \end{cases} \\ & = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (41)$$

avec \mathbf{n}_0 le vecteur normal à la surface de référence selon la relation (12) et :

$$\partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k)} = \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{n+1}^k = \frac{\partial f}{\partial \sigma}(\sigma_{n+1}^{(k)}) \quad (42)$$

$$\partial_{\sigma\sigma} f_{n+1}^{(k)} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} \right|_{n+1}^k = \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}(\sigma_{n+1}^{(k)}) \quad (43)$$

soit pour le critère de plasticité de *Von-Mises* (30) :

$$\partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k)} = \mathbf{m}_{n+1}^{(k)} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}^*}{\|\mathbf{s}_{n+1}^*\|} = \mathbf{m}_{n+1}^* \quad (44)$$

$$\partial_{\sigma\sigma} f_{n+1}^{(k)} = \frac{1}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{(k)}\|} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{m}_{n+1}^* \otimes \mathbf{m}_{n+1}^* \right) \quad (45)$$

où nous avons utilisé le fait que la direction plastique \mathbf{m} peut être évaluée dans le cas du critère de *Von-Mises* directement à partir du tenseur de contraintes statiquement admissible, σ_{n+1}^* , défini par (37) (cf. *Simo et Hughes, 1986*) :

$$\mathbf{m}_{n+1} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}^*}{\|\mathbf{s}_{n+1}^*\|} = \mathbf{m}_{n+1}^* \quad (46)$$

Cette conservation de la direction plastique dans le critère de *Von-Mises* reste valable en contraintes planes, comme on vérifie sans peine les équations (32) et (13).

La résolution du système (40) par un schéma itératif de *Newton-Raphson* nécessite donc, à chaque itération (k), le calcul de la matrice $\partial R / \partial \mathbf{x}$ selon (41). Le calcul est réitéré jusqu'à satisfaire :

$$|d\mathbf{x}^{(k)}| < \text{TOL} |\mathbf{x}^{(0)}| \quad (47)$$

Le **tableau 2-1** présente un récapitulatif de la méthode de projection dans l'incrément pour ce cas de plasticité parfaite avec prise en compte de la condition de contraintes planes.

1. Calcul de la contrainte statiquement admissible :

$$\sigma_{n+1}^* = C : \Delta \varepsilon + \sigma_n$$

2. Vérification du critère :

Si $f(\sigma_{n+1}^*) \leq 0$ alors : $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^*$
Sinon $k = 0$ aller en (3)

3. Calcul de la solution élasto-plastique : $k = k+1$

Résolution du système réduit $R(\bar{\sigma}_{n+1}, \Delta \gamma_{n+1}, \varepsilon_{zz, n+1}) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x} dx^{(k)} = -R^{(k-1)}$$

4. Vérification de la convergence :

Si $|dx^{(k)}| < \text{TOL} |x^{(0)}|$ actualiser les variables :

$\bar{\sigma}_{n+1}$ est solution du système R

$$\sigma_{n+1}^p = \Delta \gamma_{n+1} \cdot \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \quad \sigma_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1} + \lambda \text{diag} \left[1, 1, \frac{1-\nu}{\nu} \right] \varepsilon_{zz, n+1}$$

Sinon aller en (3)

Tableau 2-1 : Récapitulatif de la méthode de projection dans l'incrément pour le cas de plasticité parfaite avec prise en compte de la condition de contraintes planes.

L'utilisation du schéma itératif de *Newton-Raphson* permet un calcul numérique des inconnues demandant peu d'itérations et dont la précision est contrôlée par l'utilisateur au moyen d'une tolérance spécifiant la valeur maximale du rapport entre la variation $dx^{(k)}$ calculée à l'itération (k) et la valeur initiale de l'inconnue $x^{(0)}$. Cette méthode permet d'obtenir une actualisation des contraintes avec une grande précision. Concernant les déformations plastiques, la résolution se fait de manière implicite, cet algorithme est donc indépendant du pas de chargement. Cette bonne performance est cependant contre-balançée par le temps de calcul relativement important du fait de la résolution d'un système de 8 équations à chaque itération. De plus, l'utilisation de cette méthode impose le calcul des dérivées secondes de la fonction de charge f . Bien que ceci soit facile pour un critère simple comme celui de Von-Mises, ce calcul peut être extrêmement fastidieux et peut poser des problèmes de convergence locale avec certains critères pour lesquels les dérivées secondes ne sont pas définies en tout point. Ainsi, afin de diminuer le temps de calcul et éviter ces problèmes numériques, nous optons dans notre étude, pour l'utilisation de la méthode de projection dans l'itération. Celle-ci, comme nous allons le voir, fait intervenir uniquement les dérivées premières de la fonction de charge ainsi qu'un nombre moindre d'équations à résoudre.

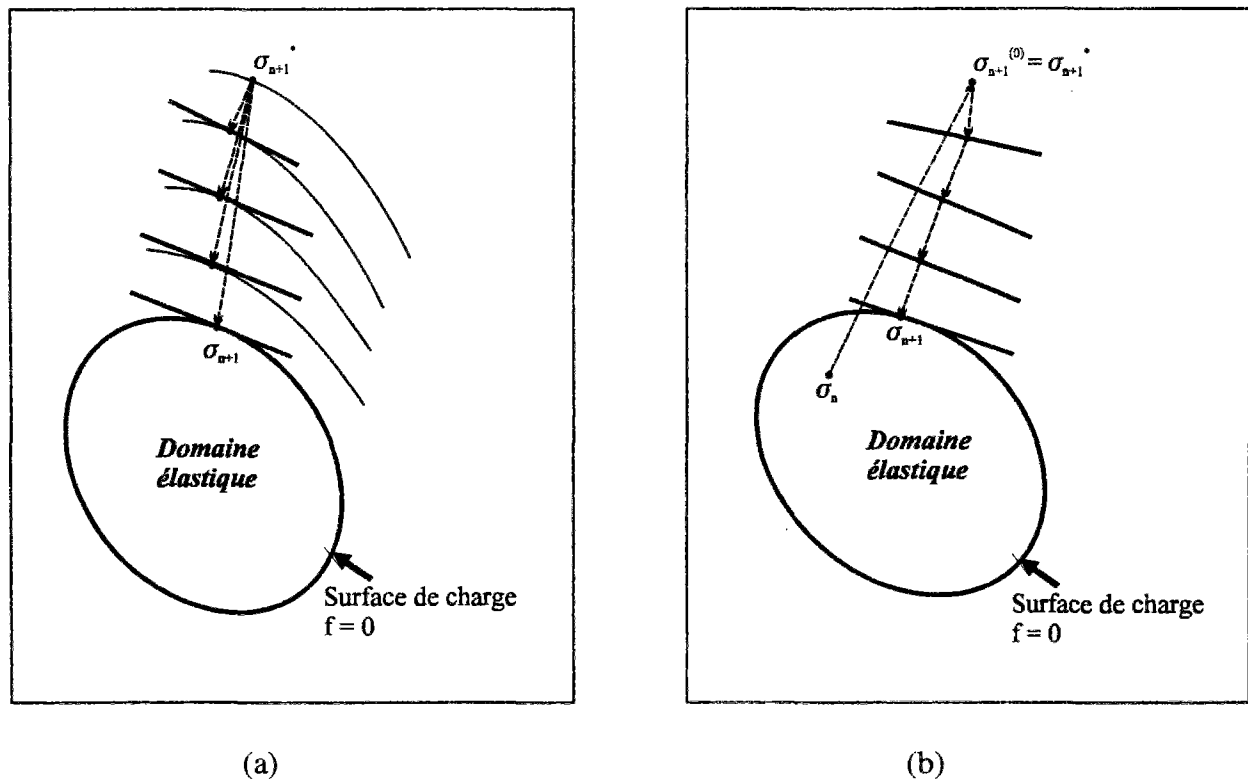


Figure 2-4 : Méthodes de projection dans l'incrément (a) et dans l'itération (b) pour un cas de plasticité parfaite (d'après Simo et Hughes, 1986)

. Méthode de projection dans l'itération

Dans la méthode de projection dans l'itération (*figure 2-4-b*), on utilise le tenseur de contrainte statiquement admissible σ_{n+1}^* précédemment défini par l'équation (37) pour vérifier le critère, c'est à dire $f(\sigma_{n+1}^*) \leq 0$. Si cette condition n'est pas satisfaite, l'état de contraintes statiquement admissible σ_{n+1}^* se trouve alors à l'extérieur de la surface de charge ($f(\sigma_{n+1}^*) > 0$); il est donc nécessaire d'effectuer une correction plastique en projetant cet état de contraintes sur cette surface. Lors de cette projection, on doit d'une part vérifier la condition sur le critère et d'autre part vérifier la condition des contraintes planes, c'est à dire : $\mathbf{n}_0 \cdot \sigma_{n+1} \cdot \mathbf{n}_0 = 0$. On utilise pour cela un schéma itératif local dans lequel on linéarise f à chaque itération (k) et on calcule une correction plastique :

$$f_{n+1}^{(k)} = f_{n+1}^{(k-1)} + \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} : \delta \sigma^{(k)} = f_{n+1}^{(k-1)} - \delta \gamma^{(k)} \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} : \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} = 0 \tag{48}$$

Ce qui conduit à :

$$\delta \gamma^{(k)} = \frac{f_{n+1}^{(k-1)}}{\partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} : \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)}} \tag{49}$$

On corrige alors l'état de contraintes de manière à satisfaire l'hypothèse des contraintes planes :

$$\sigma_{n+1}^{(k)} = \sigma_{n+1}^{(k-1)} - \delta\gamma^{(k)} \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} - \text{diag}\left[\frac{\nu}{1-\nu}, \frac{\nu}{1-\nu}, 1\right] \delta\bar{\sigma}_{zz}^{(k)} \quad (50)$$

On effectue des itérations locales (c'est à dire aux points d'intégration) jusqu'à ce que ce critère soit inférieur à une limite donnée : $|f_{n+1}^{(k)}| \leq \text{TOL} |f_{n+1}^{(0)}|$ et on actualise alors la variable interne ε^p à l'incrément (n+1).

On note alors le double caractère explicite de la méthode de projection dans l'itération : la règle d'écoulement et la condition de contraintes planes ne sont satisfaites qu'à l'itération locale.

Le **tableau 2-2** présente un récapitulatif de la méthode de projection dans l'itération pour ce cas de plasticité parfaite avec prise en compte de la condition de contraintes planes.

1. Calcul de la contrainte statiquement admissible :

$$\sigma_{n+1}^* = \mathbf{C} : \Delta\varepsilon + \sigma_n$$

2. Vérification du critère :

$$\text{Si } f(\sigma_{n+1}^*) \leq 0 \text{ alors : } \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^*$$

Sinon k = 0 aller en (3)

3. Calcul de la solution élasto-plastique : k = k+1

Résolution de l'équation :

$$f_{n+1}^{(k)} = f_{n+1}^{(k-1)} - \delta\gamma^{(k)} \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} : \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} = 0$$

$$\sigma_{n+1}^{(k)} = \sigma_{n+1}^{(k-1)} - \delta\gamma^{(k)} \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} - \text{diag}\left[\frac{\nu}{1-\nu}, \frac{\nu}{1-\nu}, 1\right] \delta\bar{\sigma}_{zz}^{(k)}$$

4. Vérification de la convergence :

$$\text{Si } |f_{n+1}^{(k)}| \leq \text{TOL} |f_{n+1}^{(0)}| : \text{Sortie}$$

Sinon aller en (3)

Tableau 2-2 : Récapitulatif de la méthode de projection dans l'itération pour le cas de plasticité parfaite avec prise en compte de la condition de contraintes planes.

2-2-1-4. Expression du tenseur de comportement tangent

L'utilisation des équations (29) et (32) ainsi que de la condition de consistance (33) permet d'établir l'expression du tenseur de comportement tangent \mathbf{C}^{ep} de ce modèle :

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{ep} : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad \mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C} - \frac{(\mathbf{C} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f)(\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f : \mathbf{C})}{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f : \mathbf{C} : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f} = K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \right] \quad (51)$$

Ce tenseur interviendra dans le calcul de la matrice de rigidité tangente précisée dans le paragraphe 1-3-3-1 du chapitre précédent.

De même que pour l'intégration des contraintes, et donc l'actualisation du tenseur de déformations plastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, l'hypothèse des contraintes planes doit également être satisfaite lors du calcul de ce tenseur de comportement tangent. Une méthode proposée par De Borst (*De Borst, 1991*) est utilisée à cet effet. On considère alors le tenseur de contraintes à l'incrément (n+1), sous la forme vectorielle $\{\boldsymbol{\sigma}\}_{n+1}$ suivante :

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}_{n+1} = \{\boldsymbol{\sigma}\}_n + [\mathbf{C}^{ep}]_{n+1} \{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\}_{n+1} \quad (52)$$

où $[\mathbf{C}^{ep}]$ est la forme matricielle du tenseur de comportement tangent constitutif ne tenant pas compte de la condition des contraintes planes.

La méthode de De Borst consiste à décomposer les termes de l'équation (52) comme suit :

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \left[\{\bar{\boldsymbol{\sigma}}\}, \sigma_{zz} \right]^t \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \left[\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}, \varepsilon_{zz} \right]^t \quad [\mathbf{C}^{ep}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_{11}^{ep}] & [\mathbf{C}_{12}^{ep}] \\ [\mathbf{C}_{21}^{ep}] & (\mathbf{C}_{22}^{ep}) \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\text{avec : } \{\bar{\boldsymbol{\sigma}}\} = \left[\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} \right]^t \quad \text{et} \quad \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = \left[\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy} \right]^t$$

Il vient :

$$\begin{bmatrix} \{\bar{\boldsymbol{\sigma}}\}_{n+1} \\ (\sigma_{zz})_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_{11}^{ep}]_{n+1} & [\mathbf{C}_{12}^{ep}]_{n+1} \\ [\mathbf{C}_{21}^{ep}]_{n+1} & (\mathbf{C}_{22}^{ep})_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}_{n+1} \\ (\Delta\varepsilon_{zz})_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\bar{\boldsymbol{\sigma}}\}_n \\ (\sigma_{zz})_n \end{bmatrix} \quad (54)$$

La condition de contraintes planes $\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \cdot \mathbf{n}_0 = 0$ permet de calculer l'incrément de déformation $(\Delta\varepsilon_{zz})_{n+1}$ par le biais de la relation suivante :

$$(\Delta\varepsilon_{zz})_{n+1} = -(\mathbf{C}_{22}^{ep})_{n+1}^{-1} \left([\mathbf{C}_{21}^{ep}]_{n+1} \{\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}_{n+1} + (\sigma_{zz})_n \right) \quad (55)$$

En injectant l'équation (55) dans (54), on obtient :

$$\{\bar{\sigma}\}_{n+1} = \{\bar{\sigma}\}_n + [\bar{C}^{ep}]_{n+1} \{\Delta\bar{\varepsilon}\}_{n+1} \quad \text{avec} \quad [\bar{C}^{ep}]_{n+1} = \left[[C_{11}^{ep}]_{n+1} - \frac{[C_{12}^{ep}]_{n+1} [C_{21}^{ep}]_{n+1}}{(C_{22}^{ep})_{n+1}} \right] \quad (56)$$

L'expression de la matrice de comportement élastoplastique satisfaisant la condition de contraintes planes est ainsi donnée par l'équation (56).

2-2-2. Extension au modèle plastique anisotrope

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de modéliser le comportement plastique anisotrope des lits d'armatures croisées d'une coque en béton armé pour lesquels des directions privilégiées d'anisotropie interviennent. Ce comportement étant complexe, sa description nécessite des critères bien adaptés. Différents critères ont été proposés dans la littérature, nous citerons : les critères de *Hill* (*De Borst et al., 1990*), de *Hoffman* (*Schellekens et al., 1990*) et le critère de *Tsai* (*Lemaitre, 1985*). Nous nous limitons dans cette étude au critère de *Hill*, adopté également par *Owen* pour l'étude des plaques et coques minces (*Owen et al., 1983a et 1983b*), et considérons le matériau comme élastique parfaitement plastique (c'est à dire sans écrouissage) vu les difficultés à définir les règles d'écrouissage pour les matériaux anisotropes (*De Borst et al., 1990*).

L'énergie libre du système est toujours donnée par l'équation (27) et les équations d'état par (29).

2-2-2-1. Critère de plasticité

En se laissant guider par la forme typique des critères isotropes, on peut préciser par extension, des critères anisotropes ayant les deux propriétés simplificatrices suivantes : l'indépendance vis-à-vis de la pression hydrostatique et la dépendance quadratique en fonction du tenseur déviateur des contraintes. On adopte ainsi pour ces critères l'expression « anisotropisée » ($\sigma : P : \sigma$), avec P un tenseur du quatrième ordre.

Dans les axes d'orthotropie, l'expression de la fonction de charge prend la forme tensorielle suivante :

$$f(\sigma) = \sqrt{(\sigma : P : \sigma)} - R \quad (57)$$

avec $R = \sqrt{2/3} \bar{\sigma}$, $\bar{\sigma}$ étant la contrainte ultime de référence.

Si $[P]$ est la représentation matricielle du tenseur \mathbf{P} , celle-ci s'écrit en fonction de six coefficients adimensionnels α_{ij} :

$$[P] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\alpha_{12} + \alpha_{31}) & -\frac{1}{3}\alpha_{12} & -\frac{1}{3}\alpha_{31} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}\alpha_{12} & \frac{1}{3}(\alpha_{23} + \alpha_{12}) & -\frac{1}{3}\alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}\alpha_{31} & -\frac{1}{3}\alpha_{23} & \frac{1}{3}(\alpha_{31} + \alpha_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha_{66} \end{bmatrix} \quad (58)$$

Ces coefficients sont déterminés expérimentalement par trois essais de traction et trois essais de cisaillement. Nous remarquons bien que lorsque tous les coefficients α_{ij} sont égaux à 1, le critère de *Hill* revient au critère isotrope de *Von-Mises*.

Examinons à présent le type de la surface de charge du critère de *Hill* dans l'espace des contraintes principales. Il convient pour cela de réduire la forme quadratique associée à \mathbf{P} puisque cette surface est une quadrique dont la forme est donnée par les valeurs propres de \mathbf{P} . En effet, en exprimant le polynôme caractéristique de \mathbf{P} dans l'espace des contraintes principales, on obtient des valeurs propres qui, selon leurs signes, permettront la détermination de la nature de la surface de charge du critère de *Hill*.

Considérons donc le tenseur \mathbf{P} dans l'espace des contraintes principales. Celui-ci s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[P'] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\alpha_{12} + \alpha_{31}) & -\frac{1}{3}\alpha_{12} & -\frac{1}{3}\alpha_{31} \\ -\frac{1}{3}\alpha_{12} & \frac{1}{3}(\alpha_{23} + \alpha_{12}) & -\frac{1}{3}\alpha_{23} \\ -\frac{1}{3}\alpha_{31} & -\frac{1}{3}\alpha_{23} & \frac{1}{3}(\alpha_{31} + \alpha_{23}) \end{bmatrix} \quad (59)$$

La détermination des trois paramètres α_{12} , α_{23} , α_{31} se fait en considérant le lit d'armatures croisées comme un milieu plastique orthotrope équivalent (*figure 2-5*). En effet, notons A_i la section des armatures dans la direction i , et n_i , le nombre de barres par unité de longueur l ; les pourcentages d'armatures s'écrivent :

$$\rho_1 = \frac{n_1 A_1}{l} \quad \rho_2 = \frac{n_2 A_2}{l} \quad (60)$$

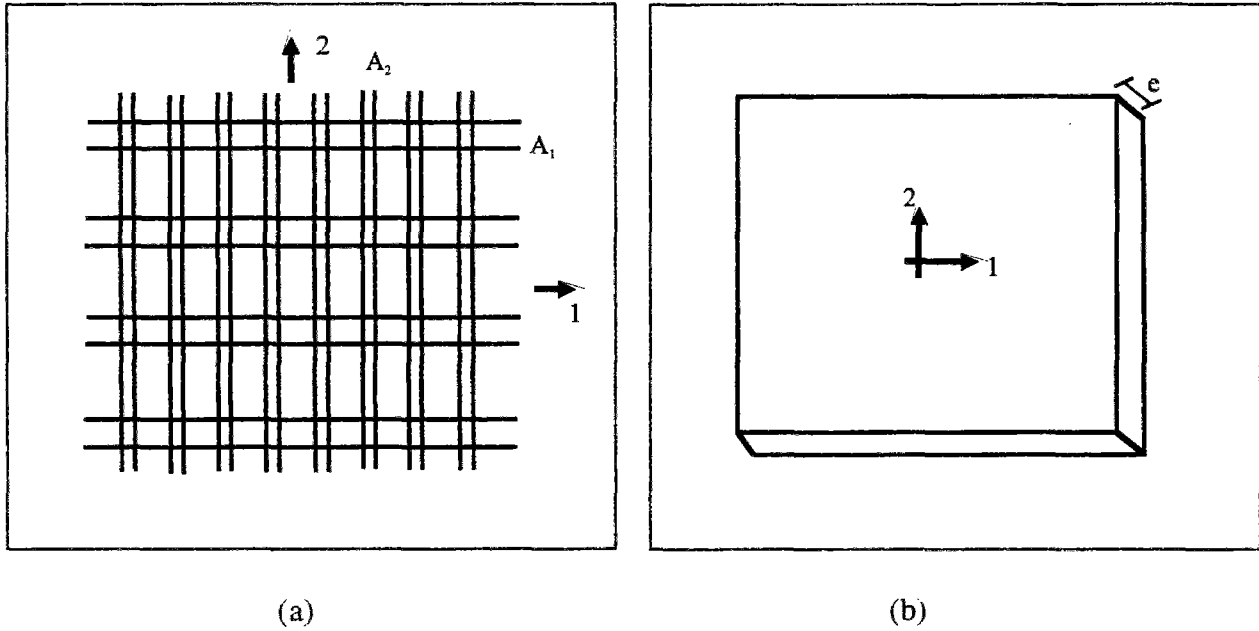


Figure 2-5 : Représentation d'un lit d'armatures croisées (a) et de son milieu homogène équivalent (b).

Si l'on effectue un essai de traction suivant la première direction, sur le lit d'armatures croisées (*figure 2-5-a*), la force limite élastique vaudra :

$$F_1 = n_1 A_1 f_y \quad (61)$$

où f_y représente la contrainte ultime d'élasticité des armatures. Le même essai effectué sur le milieu homogène équivalent (*figure 2-5-b*) conduit à une force limite élastique telle que :

$$F_1 = f_{y1}^{\text{eq}} l e \quad (62)$$

où f_{y1}^{eq} est la contrainte ultime élastique équivalente, et e , l'épaisseur du milieu équivalent s'écrivant en fonction des diamètres d_1 et d_2 des armatures :

$$e = \frac{1}{2}(d_1 + d_2) \quad (63)$$

Les relations (61) et (62) permettent d'écrire :

$$f_{y1}^{\text{eq}} = \frac{\rho_1}{e} f_y \quad (64)$$

Par analogie à la relation (64), la contrainte ultime élastique équivalente dans la deuxième direction est définie par :

$$f_{y2}^{eq} = \frac{\rho_2}{e} f_y \quad (65)$$

Considérons à présent un essai de traction selon une direction faisant un angle de 45° avec la première direction. La force limite élastique vaut :

$$F_{45} = \sqrt{2} (n_1 A_1 + n_2 A_2) f_y \quad (66)$$

et pour le milieu homogène équivalent :

$$F_{45} = f_{y45}^{eq} \sqrt{2} l e \quad (67)$$

Nous en déduisons que :

$$f_{y45}^{eq} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{e} f_y \quad (68)$$

f_{y45}^{eq} est donc la somme de f_{y1}^{eq} et de f_{y2}^{eq} .

Il est à présent possible de déterminer les trois paramètres α_{12} , α_{23} , α_{31} en considérant les trois essais de traction précédents. En effet, pour les essais uniaxiaux dans les directions d'orthotropie 1 et 2, le critère de *Hill* conduit à :

$$\alpha_{12} + \alpha_{31} = 3 \left(\frac{R}{f_{y1}^{eq}} \right) \quad \alpha_{23} + \alpha_{12} = 3 \left(\frac{R}{f_{y2}^{eq}} \right) \quad (69)$$

alors que l'essai à 45° donne :

$$\alpha_{31} + \alpha_{23} = 12 \left(\frac{R}{f_{y45}^{eq}} \right) \quad (70)$$

En utilisant (64), (65) et (68) dans (69) et (70), on obtient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{e}{\rho_1} \right)^2 \\ \left(\frac{e}{\rho_2} \right)^2 \\ \left(\frac{e}{\rho_1 + \rho_2} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (71)$$

Le tenseur \mathbf{P} étant ainsi totalement défini dans l'espace des contraintes principales, on exprime à présent le polynôme caractéristique $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = \det ([\mathbf{P}'] - \lambda [\mathbf{I}]) = \begin{vmatrix} (p_{11} - \lambda) & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & (p_{22} - \lambda) & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & (p_{33} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (72)$$

où $[\mathbf{I}]$ représente la matrice identité.

Le développement de cette relation conduit à :

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + (p_{11} + p_{22} + p_{33}) \lambda^2 - (p_{11}p_{22} + p_{22}p_{33} + p_{11}p_{33} - p_{23}^2 - p_{13}^2 - p_{12}^2) \lambda + (p_{11}p_{22}p_{33} - p_{11}p_{23}^2 - p_{22}p_{13}^2 - p_{33}p_{12}^2 + 2p_{11}p_{22}p_{33}) = 0 \quad (73)$$

On montre après calcul, que le terme constant de l'équation (73) revient au déterminant de $[\mathbf{P}']$ qui est égal à zéro. Il vient :

$$P(\lambda) = \lambda \left[\lambda^2 + (p_{11} + p_{22} + p_{33}) \lambda - (p_{11}p_{22} + p_{22}p_{33} + p_{11}p_{33} - p_{23}^2 - p_{13}^2 - p_{12}^2) \right] = 0 \quad (74)$$

L'équation (74) exprime le fait que l'une des trois valeurs propres est nulle. Nous noterons λ_3 cette valeur. Pour déterminer la nature de la surface de charge, il nous suffit donc de discuter le signe des racines du trinôme $(p_{11}p_{22} + p_{22}p_{33} + p_{11}p_{33} - p_{23}^2 - p_{13}^2 - p_{12}^2)$.

D'après la relation (74), le produit des racines λ_1 et λ_2 est donné par :

$$J = \lambda_1 \lambda_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{33} & p_{13} \\ p_{13} & p_{11} \end{vmatrix} \quad (75)$$

De plus, leur somme est toujours positive puisque :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = p_{11} + p_{22} + p_{33} = \frac{2}{3} e^2 \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{4}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \right) > 0 \quad (76)$$

Nous distinguons par conséquent trois cas :

* $J > 0$, λ_1 et λ_2 sont de même signe et sont positives d'après la relation (76). L'équation (57) est donc celle d'un cylindre elliptique dans l'espace des contraintes principales.

* $J < 0$, λ_1 et λ_2 sont de signes opposés. L'équation (57) est celle d'un cylindre hyperbolique.

* $J = 0$, une des deux valeurs propres est nulle. L'équation (57) est celle d'un cylindre parabolique.

Utilisant (71) dans (75), on obtient après factorisation du numérateur :

$$J = - \frac{3(\rho_1^2 + 2\rho_1\rho_2 - \rho_2^2)(\rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2 - \rho_2^2)(\rho_1^2 + \rho_2^2)(\rho_1^2 + 4\rho_1\rho_2 + \rho_2^2)}{4\rho_1^4\rho_2^4(\rho_1 + \rho_2)^4} \quad (77)$$

Cette quantité est positive uniquement dans le cas où :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} > \sqrt{2} - 1 \quad (78)$$

La relation (78) représente ainsi une restriction du critère de Hill pour la modélisation des lits d'armatures en tant que matériau anisotrope équivalent. En effet, pour $J < 0$, ce critère n'est plus convexe du fait de la forme hyperbolique de la surface de charge.

Les figures 2-6, 2-7 et 2-8 illustrent bien les différentes formes que pourrait prendre la surface de charge en fonction de la valeur du rapport ρ_2 / ρ_1 . Nous constaterons toutefois que si ce dernier est égal à 1, la surface est un cylindre de révolution, et le critère de Hill se réduit au critère isotrope de Von-Mises.

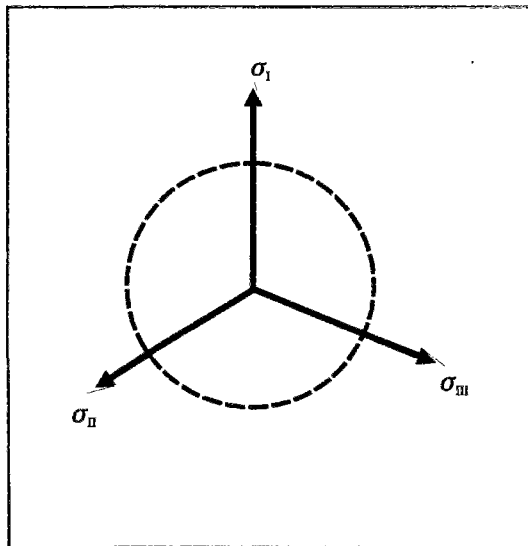


Figure 2-6 : Surface limite du critère de Hill dans le plan déviatorique, $\rho_2 / \rho_1 = 1$.

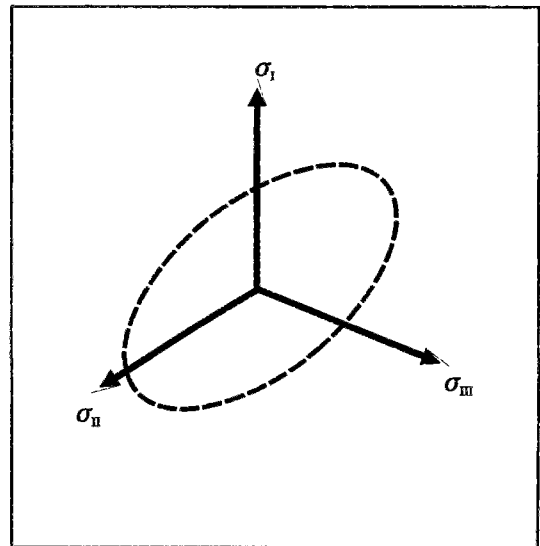


Figure 2-7 : Surface limite du critère de Hill dans le plan déviatorique, $\rho_2 / \rho_1 > \sqrt{2} - 1$.

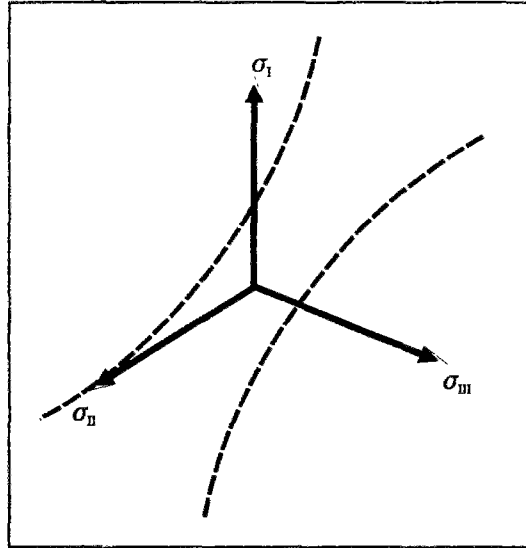


Figure 2-8 : Surface limite du critère de Hill dans le plan déviatorique, $\rho_2 / \rho_1 < \sqrt{2} - 1$.

2-2-2-2. Règle d'écoulement

En ce qui concerne l'évolution des déformations plastiques, elle est précisée par une règle d'écoulement associée. Ceci revient à :

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = d\gamma \frac{\mathbf{P} : \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{P} : \boldsymbol{\sigma}}} \quad (79)$$

Au regard de la condition de convexité du critère (78), l'utilisation de l'équation (79) est limitée par cette restriction.

2-2-2-3. Traitement numérique

De même que pour la plasticité isotrope parfaite, la variable interne intervenant dans le modèle plastique anisotrope est le tenseur de déformations plastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^p$. Le traitement numérique se fera par conséquent de la même manière qu'au paragraphe 2-2-1-3; la méthode de projection dans l'itération étant celle choisie à cet effet.

2-2-2-4. Expression du tenseur de comportement tangent

Le tenseur de comportement tangent C^{ep} s'écrit pour ce modèle :

$$C^{ep} = C - \frac{(C : \partial_{\sigma} f)(\partial_{\sigma} f : C)}{\partial_{\sigma} f : C : \partial_{\sigma} f} \tag{80}$$

avec $\partial_{\sigma} f = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\mathbf{P} : \sigma}{\sqrt{\sigma : \mathbf{P} : \sigma}}$

En ce qui concerne la prise en compte de la condition de contraintes planes lors du calcul du tenseur de comportement tangent, on utilise la même méthode que celle exposée en plasticité parfaite (cf. 2-2-1-4), c'est à dire la méthode proposée par De Borst, méthode qui n'est pas limitée au comportement isotrope seulement.

2-2-3. Récapitulatif de la modélisation élastoplastique pour l'acier

Nous présentons ici un rapide récapitulatif de la modélisation élastoplastique proposée ci-dessus pour l'acier. Le *tableau 2-3* présente les critères, les règles d'écoulement ainsi que les résultats d'essais nécessaires à la détermination des paramètres des différents modèles présentés.

	<i>Modèle plastique isotrope parfait de Von-Mises</i> <i>Un seul paramètre : R</i>	<i>Modèle plastique anisotrope de Hill</i> <i>6 paramètres : $\alpha_{12}, \alpha_{31}, \alpha_{23},$ $\alpha_{44}, \alpha_{55}, \alpha_{66}$</i>
Critère de plasticité	$f = \ \mathbf{s}\ - R$	$f(\sigma) = \sqrt{(\sigma : \mathbf{P} : \sigma)} - R$
Règle d'écoulement	$d\epsilon^p = d\gamma \frac{\mathbf{s}}{\ \mathbf{s}\ }$	$d\epsilon^p = d\gamma \frac{\mathbf{P} : \sigma}{\sqrt{\sigma : \mathbf{P} : \sigma}}$
Résultats nécessaires	. essai de traction simple	. essais de traction simple . essais de compression simple

Tableau 2-3 : Récapitulatif de la modélisation élastoplastique pour l'acier

2-3. Modélisation du comportement non-linéaire du béton

Après avoir modélisé le comportement de l'acier, nous nous intéressons à présent à la modélisation du comportement du béton. Nous commençons pour cela avec une loi élastoplastique pour le cas de chargements monotones croissants, en l'occurrence le critère de *Willam-Warnke* à trois paramètres (*Fauchet, 1991*). A partir de là, nous rappelons l'extension de cette loi à une loi élastoplastique endommageable (*Ulm, 1994*). L'objectif de ce modèle étant la prédiction des effets du dommage à l'échelle macroscopique des structures sous chargements cycliques. Une seconde extension à une loi visco-élasto-plastique avec écrouissage visqueux est ensuite montrée (*Sercombe, 1997*). Le but de cette loi étant la modélisation du comportement du béton en dynamique rapide.

2-3-1. Modélisation élastoplastique du béton sous chargements monotones

Le béton est un matériau que l'on qualifie habituellement de fragile de part son comportement instable se traduisant par l'apparition de fissures visibles, lorsque la charge maximale qu'il peut supporter est dépassée. Toutefois, on observe généralement au préalable une multifissuration du matériau au niveau microscopique, pouvant être considérée comme assez uniforme pour que le matériau conserve son homogénéité au niveau macroscopique. C'est ce phénomène de microfissuration qui est à l'origine du comportement non-linéaire du béton.

Les modèles macroscopiques se distinguent par le choix des variables macroscopiques utilisées pour traduire l'effet de la micro-fissuration du béton sur ses caractéristiques mécaniques. Ces modèles doivent être suffisamment complets pour rendre compte des phénomènes physiques observables et assez simples pour identifier les variables introduites et quantifier les grandeurs physiques correspondantes accessibles par l'expérience.

Dans ce paragraphe, nous commençons par détailler, en se plaçant dans l'hypothèse des petites transformations, les composantes d'un modèle adapté au béton : le critère de plasticité, la règle d'écoulement, la règle d'écrouissage... Dans ce schéma de comportement, nous ne tiendrons compte ni des effets de vitesse ni de l'endommagement. Ceci représente une restriction provisoire qu'on lèvera plus loin lorsqu'on envisagera d'abord le couplage entre plasticité et endommagement ensuite l'extension à la prise en compte des effets visqueux à l'origine des effets de vitesse. Enfin, pour ne pas compliquer inutilement l'étude, l'élasticité sera considérée comme linéaire, afin de pouvoir attribuer sans ambiguïté à la plasticité tout aspect non linéaire.

Considérons le béton comme un matériau élastoplastique écrouissable. L'énergie libre volumique est définie non seulement par la déformation mesurable $\boldsymbol{\varepsilon}$ et par la déformation plastique $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, mais aussi par une variable d'écrouissage χ :

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \chi) = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + U(\chi) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + U(\chi) \quad (81)$$

où $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$ représente l'énergie élastique et $U(\chi)$ l'énergie bloquée par écrouissage.

L'utilisation de (81) dans (1) conduit à :

$$\phi = \sigma : \dot{\epsilon}^p + \zeta : \dot{\chi} \geq 0 \quad (82)$$

Les variables internes sont ϵ^p et χ avec comme forces thermodynamiques associées :

$$\sigma = -\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^p} \quad \zeta = -\frac{\partial U}{\partial \chi} \quad (83)$$

2-3-1-1. Critère de plasticité

En ce qui concerne le critère de plasticité, notre choix s'est porté sur le critère de *Willam-Warnke* à 3 paramètres pour modéliser le comportement élastoplastique du béton sous chargements monotones (*Willam et Warnke, 1975*). Ce critère a été utilisé par plusieurs auteurs, nous citerons par exemple : *Fauchet (Fauchet, 1991)*, *Ulm (Ulm, 1994)* et *Sercombe (Sercombe, 1997)*. Il peut être considéré comme un critère de *Drucker-Prager* adapté au béton dans le domaine des faibles pressions hydrostatiques. La **figure 2-9** représente ce critère dans les demi-plans (τ, σ) et montre que la forme des méridiens de traction $(\theta = 0^\circ)$ et de compression $(\theta = 60^\circ)$ est approximée par une droite dans le domaine de faibles pressions hydrostatiques. Par rapport au critère de *Drucker-Prager*, le critère dépend de l'angle de *Lode* θ . Le critère s'écrit en plasticité parfaite sous la forme :

$$f(\sigma) = \tau + f(\theta)(\sigma - \rho_0) \quad (84)$$

où le triplet (σ, τ, θ) sont les trois invariants du tenseur de contraintes $\sigma = s + \sigma \mathbf{1}$, s désigne le déviateur de σ . En Notant par σ_I, σ_{II} et σ_{III} , les valeurs principales du tenseur de contraintes σ , ordonnées tel que $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$, on définit :

$$\sigma = \text{tr}(\sigma) / 3 \quad \tau = \sqrt{\frac{1}{2} s : s} \quad \theta = \arccos \left(\frac{2\sigma_I - \sigma_{II} - \sigma_{III}}{\sqrt{12} \tau} \right) \quad (85)$$

Le coefficient de frottement $f(\theta)$ dépend de l'angle θ et varie entre les 2 extrêmes suivantes :

$f_c = f(60^\circ)$: coefficient de frottement sur le méridien de compression

$f_t = f(0^\circ)$: coefficient de frottement sur le méridien de traction

La **figure 2-10** illustre bien les différences entre le critère de *Willam-Warnke* à 3 paramètres et celui de *Drucker-Prager* dans le plan déviatorique. L'expression de $f(\theta)$, est telle que dans un plan déviatorique, la section circulaire de *Drucker-Prager* se met sous la forme d'une portion d'ellipse entre deux méridiens successifs, l'un de compression et l'autre de traction. Ainsi, le domaine d'élasticité est un cône dont la section n'est plus circulaire (**figure 2-10**).

Dans le cas particulier où $f_t = f_c$, f ne dépend plus de θ : la coupe du domaine d'élasticité par un plan déviatorique est donc circulaire, et le critère de *Willam-Warnke* revient au critère de *Drucker-Prager*.

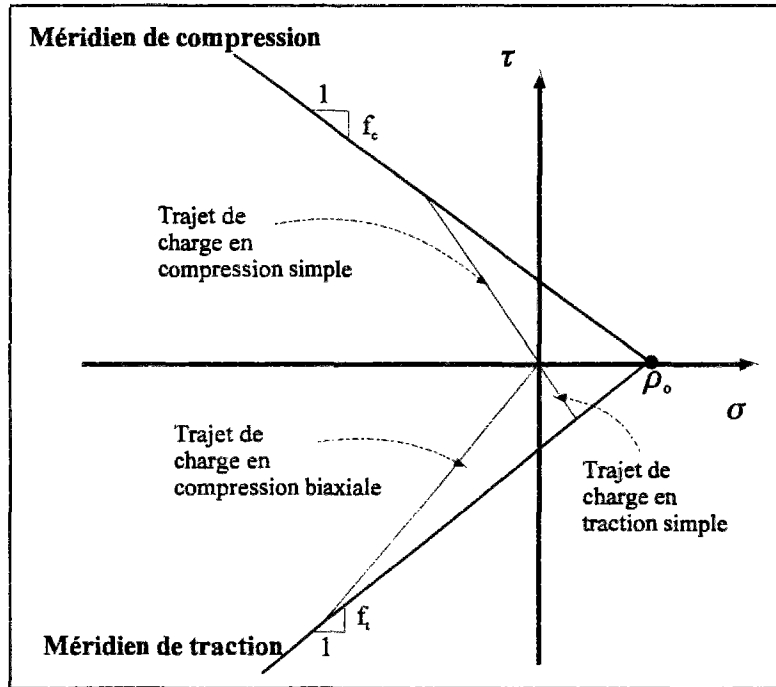


Figure 2-9 : Représentation du critère de Willam-Warnke à 3 paramètres dans les demi-plans (τ, σ)

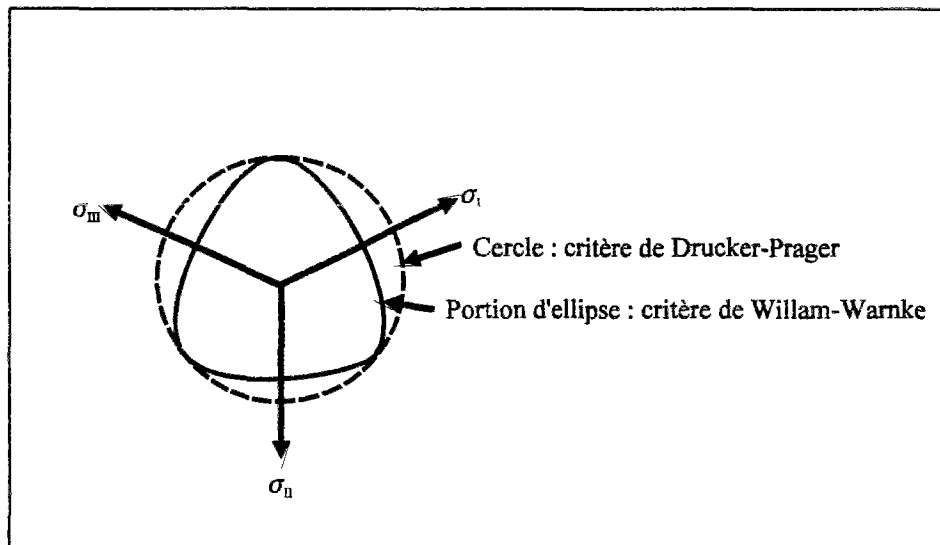


Figure 2-10 : Représentation des domaines d'élasticité de Willam-Warnke à 3 paramètres et de Drucker-Prager dans le plan déviatorique

Pour rendre l'utilisation du critère plus pratique, on peut exprimer les paramètres du modèle f_c, f_t et ρ_0 en fonction de trois caractéristiques mécaniques du matériau directement accessibles à l'expérience : la résistance en traction simple σ_t , en compression simple σ_c et en compression biaxiale σ_{bc} . Les relations sont les suivantes (Fauchet., 1991) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_c = \frac{3 f_c}{\sqrt{3} - f_c} \rho_0 \quad \text{si } f_c < \sqrt{3} \quad \text{sinon } \sigma_c = \infty \\ \sigma_t = \frac{3 f_t}{\sqrt{3} + f_t} \rho_0 \\ \sigma_{bc} = \frac{3 f_t}{\sqrt{3} - 2 f_t} \rho_0 \quad \text{si } f_t < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{sinon } \sigma_{bc} = \infty \end{array} \right. \quad (86)$$

L'existence de ces trois caractéristiques impose alors les inégalités suivantes :

$$0 \leq f_c \leq \sqrt{3} \quad \text{et} \quad 0 \leq f_t \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (87)$$

De plus, la convexité du critère impose que :

$$\frac{1}{2} f_t \leq f_c \leq 2 f_t \quad (88)$$

Le critère de *Willam-Warnke* à 3 paramètres peut être étendu à la prise en compte d'un écrouissage isotrope (écrouissage où l'on envisage, dans l'espace des contraintes, une simple dilatation homothétique de la surface de charge par rapport à l'origine). La fonction de charge dépend alors non seulement des contraintes σ mais aussi de la force d'écrouissage ζ associée à la variable d'écrouissage χ . Ainsi, si l'on considère la pression de cohésion ρ comme paramètre d'écrouissage (paramètre scalaire) tel que : $\rho = z \rho_0$, l'expression (84) devient alors :

$$f(\sigma, z) = \tau + f(\theta) (\sigma - z \rho_0) \quad (89)$$

avec ρ_0 la pression de cohésion maximale déduite du système d'équations (86).

Cet écrouissage plastique est illustré sur les *figures 2-11* et *2-12* où l'on constate l'évolution du domaine d'élasticité dans les demi-plans des méridiens de traction et compression (*figure 2-11*) ainsi que dans une coupe déviatorique (*figure 2-12*). La surface de charge actuelle se déduit de celle pour le cas plastique parfait $z = 1$ par une homothétie de centre l'origine et de rapport z . De même que précédemment, la convexité du critère impose les inégalités (88).

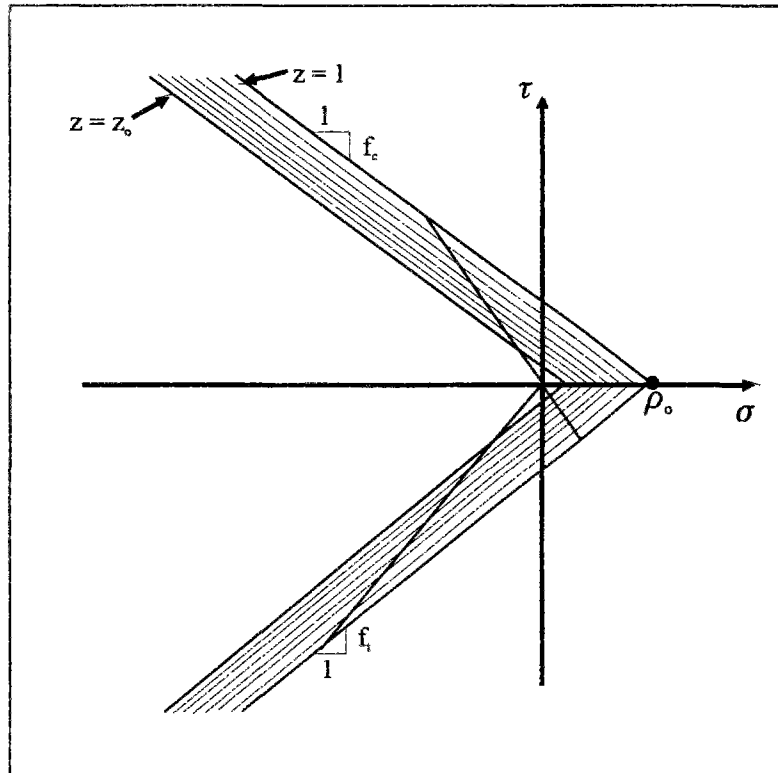


Figure 2-11 : Représentation du critère de Willam-Warnke à 3 paramètres avec écrouissage isotrope dans les demi-plans (τ, σ)

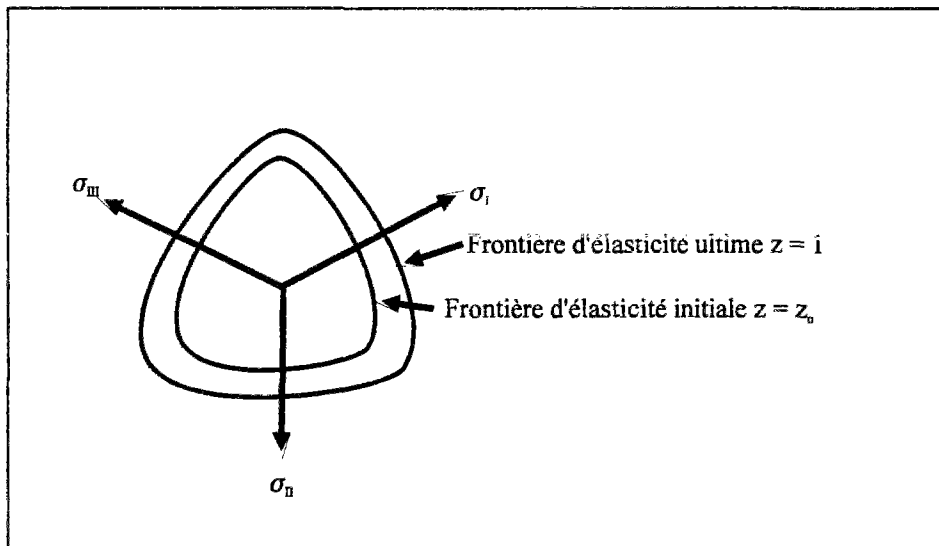


Figure 2-12 : Représentation du domaine d'élasticité de Willam-Warnke à 3 paramètres avec écrouissage isotrope dans le plan déviatorique

2-3-1-2. Règle d'écoulement

L'évolution des variables de déformations plastiques est précisée par une règle d'écoulement associée. La direction des déformations plastiques est alors normale à la frontière du domaine d'élasticité actuel et le potentiel plastique g est simplement défini par l'équation du critère (89). La règle d'écoulement s'écrit donc sous la forme :

$$d\mathcal{E}^p = d\gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = d\gamma \left(\frac{\mathbf{s}}{2\tau} + \frac{f(\theta)}{3} \mathbf{1} + \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} (\sigma - z \rho_0) \right) \quad (90)$$

d'où :

$$\begin{cases} \text{tr}(d\mathcal{E}^p) = d\gamma f(\theta) \\ d\epsilon^p = d\gamma \left(\frac{\mathbf{s}}{2\tau} + \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} (\sigma - z \rho_0) \right) \end{cases} \quad (91)$$

2-3-1-3. Règle d'écrouissage

Afin de formuler la règle d'écrouissage, il est nécessaire de choisir une variable d'écrouissage adéquate. Nous choisissons pour ce modèle comme variable d'état thermodynamique représentant l'évolution du domaine élastique, la variation de volume anélastique $\text{tr}(\mathcal{E}^p)$. En effet, considérons le comportement uniaxial du béton en compression. On peut distinguer les trois phases suivantes (*Chen, 1982*) :

- * 0 - 30% de σ_c : domaine élastique.
- * 30% - 75...80% de σ_c : Phase de fissuration stable où les microfissures se propagent lentement pour former des macro-fissures.
- * 75...80% - 100% de σ_c : Phase de fissuration instable où les macro-fissures conduisent à une diminution de l'effort repris par le béton qui se traduit par un adoucissement.

Le comportement en traction du béton est dissymétrique par rapport au comportement en compression.

De même, dans les essais de compression simple ou biaxiale, on retrouve d'après l'évolution de la variation de volume plastique $\text{tr}(\mathcal{E}^p)$, les mêmes phases observées précédemment, à savoir :

- * une relation élastique linéaire pour une contrainte appliquée inférieure à 30% de la résistance.
- * 30% - 75...90% de la résistance : un comportement plastiquement contractant ($\text{tr}(d\mathcal{E}^p) < 0$).
- * 75...90% - 100% de la résistance : un comportement plastiquement dilatant ($\text{tr}(d\mathcal{E}^p) > 0$).

Pour le comportement en traction du béton, il est uniquement plastiquement dilatant, donc dissymétrique par rapport au comportement en compression.

On peut ainsi considérer la variation de volume anélastique $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p)$ comme un indicateur macroscopique du béton. Selon son signe, on distingue :

- * $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) < 0$: le béton a un comportement écouvissable. Nous distinguons la phase de comportement plastiquement contractant pour laquelle $\text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^p) < 0$, et la phase de comportement plastiquement dilatant pour laquelle $\text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^p) > 0$.
- * $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) > 0$: le béton a un comportement adoucissant.

La variation de volume anélastique permet ainsi de différencier les comportements écouvissant et adoucissant du béton, c'est pourquoi nous avons choisi de l'utiliser comme variable d'écrouissage.

De même que pour l'évolution des variables de déformations plastiques, on doit préciser l'évolution de la variable d'écrouissage χ définissant à tout instant la force d'écrouissage associée ζ et par conséquent la position des surfaces de charge dans l'espace des contraintes. On introduit généralement la règle d'écrouissage à partir d'une fonction convexe appelée potentiel d'écrouissage, à savoir :

$$d\chi = d\gamma \frac{\partial h}{\partial \zeta} \quad (92)$$

où h est le potentiel d'écrouissage.

Pour notre modèle, on opte pour une règle d'écrouissage associée ($h = f$). Ces choix particuliers de la variable d'écrouissage, $\chi = \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^p$, et d'une règle d'écoulement associée indiquent l'expression suivante pour la force d'écrouissage $\zeta = \zeta(\chi)$ dans le critère de *Willam-Warnke* (89) :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \zeta) = \tau + f(\theta) (\sigma - z_0 \rho_0 + \zeta(\chi)) \quad (93)$$

et :

$$\zeta(\chi) = \rho_0 (z_0 - z(\chi)) \quad (94)$$

En effet, l'utilisation de (93) et (92) mène à :

$$d\chi = d\gamma \frac{\partial f}{\partial \zeta} = d\gamma f(\theta) = \text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (95)$$

Ce qui conduit alors en comparant (95) avec (91)₁, à identifier la variation de volume plastique $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p)$ comme variable d'écrouissage χ . Au regard des restrictions (87) et (88), cette variation est toujours positive et le comportement du matériau est alors plastiquement dilatant.

On pourra par conséquent modéliser en traction le comportement adoucissant du béton, alors qu'en compression les comportements écrouissant et adoucissant ne seront modélisés que pour des états de contrainte compris entre 75 et 100% de la résistance. En vue du domaine limité, on propose d'utiliser une seule fonction exponentielle reliant la force d'écrouissage ζ à la variable d'écrouissage χ , à savoir :

$$\zeta(\chi) = \rho_0 (z_0 - z_{ult}) (1 - \exp[-k\chi]) \quad (96)$$

où z_0 et z_{ult} sont respectivement les seuils de plasticité initial et ultime, variant entre 0 et 1.

2-3-1-4. Traitement numérique

Pour ce critère qui s'écrit en fonction de l'angle de *Lode*, la méthode de projection dans l'incrément peut conduire à certains problèmes numériques. En effet, le calcul de la dérivée partielle du critère par rapport à $\cos 3\theta$ mène à :

$$\frac{\partial f}{\partial \cos 3\theta} = \frac{\partial f}{\partial \cos \theta} \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \cos 3\theta} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \cos 3\theta} = -\frac{1}{3\sqrt{(1 - \cos^2 3\theta)}} \quad (97)$$

Lorsque θ tend vers 60° , $(1 - \cos^2 3\theta)$ tend vers zero, la dérivée première tend alors vers l'infini et la dérivée seconde n'est naturellement pas définie pour $\theta = 60^\circ$ mais elle ne l'est pas non plus pour $\theta = 0^\circ$. Les dérivées secondes de la fonction de charge ne sont donc pas définies en tout point, ce qui pose de sérieux problèmes de convergence locales avec un schéma itératif local de type *Newton-Raphson*. C'est pourquoi, notre choix s'est porté ici aussi sur la méthode explicite de projection dans l'itération.

Les variables internes de ce modèle étant $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ et χ , le traitement numérique consiste donc à actualiser, à l'incrément $(n+1)$, non seulement le tenseur des déformations plastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ mais aussi la variable d'écrouissage χ .

Considérons pour cela les équations d'état (83). La différenciation de celles-ci conduit à :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C} : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \quad (98)$$

avec $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \Delta \gamma \partial_\sigma f_{n+1}$ et f_{n+1} donnée par la relation (89).

On définit le tenseur de contraintes statiquement admissible $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^*$ ainsi qu'un écrouissage isotrope ζ_{n+1}^* initial d'une manière standard, en bloquant les évolutions plastiques (c'est à dire $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \chi = 0$) :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^* = \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \boldsymbol{\sigma}_n \quad \zeta_{n+1}^* = \zeta_n = \rho_0 (z_0 - z_{ult}) (1 - \exp[-k\chi_n]) \quad (99)$$

On utilise alors σ_{n+1}^* et ζ_{n+1}^* pour vérifier le critère, c'est à dire $f(\sigma_{n+1}^*, \zeta_{n+1}^*) \leq 0$. Si cette condition n'est pas satisfaite, l'état de contraintes statiquement admissible σ_{n+1}^* se trouve à l'extérieur de la surface de charge ($f(\sigma_{n+1}^*, \zeta_{n+1}^*) > 0$); il est donc nécessaire d'effectuer une correction plastique en projetant cet état de contraintes sur cette surface. Lors de cette projection, on doit d'une part vérifier la condition sur le critère et d'autre part vérifier la condition des contraintes planes, c'est à dire : $\mathbf{n}_0 \cdot \sigma_{n+1} \cdot \mathbf{n}_0 = 0$. On utilise pour cela un schéma itératif local dans lequel on linéarise f à chaque itération (k) tel que :

$$f_{n+1}^{(k)} = f_{n+1}^{(k-1)} + \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} : \delta \sigma^{(k)} + \partial_{\zeta} f_{n+1}^{(k-1)} \partial_{\chi} \zeta^{(k-1)} \delta \chi^{(k)} = 0 \quad (100)$$

En remplaçant $\delta \sigma$ et $\delta \chi$ dans l'expression (100) par :

$$\delta \sigma^{(k)} = -\delta \gamma^{(k)} \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} \quad \delta \chi^{(k)} = \delta \gamma^{(k)} \partial_{\zeta} f_{n+1}^{(k-1)} \quad (101)$$

Et en notant $H_{n+1}^{(k-1)}$ le module d'érouissage :

$$H_{n+1}^{(k-1)} = -(\partial_{\zeta} f_{n+1}^{(k-1)})^2 \partial_{\chi} \zeta_{n+1}^{(k-1)} = -f(\theta)^2 \rho_0 k (z_0 - z_{ult}) \exp[-k \chi_{n+1}^{(k-1)}] \quad (102)$$

on obtient :

$$\delta \gamma^{(k)} = \frac{f_{n+1}^{(k-1)}}{H_{n+1}^{(k-1)} + \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} : \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)}} \quad (103)$$

On corrige alors l'état de contraintes de telle manière à satisfaire l'hypothèse des contraintes planes :

$$\sigma_{n+1}^{(k)} = \sigma_{n+1}^{(k-1)} - \delta \gamma^{(k)} \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} - \text{diag} \left[\frac{\nu}{1-\nu}, \frac{\nu}{1-\nu}, 1 \right] \delta \bar{\sigma}_{zz}^{(k)} \quad (104)$$

On actualise les variables d'état selon :

$$\varepsilon_{n+1}^p(k) = \varepsilon_{n+1}^p(k-1) + \delta \gamma^{(k)} \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} \quad (105)$$

$$\chi_{n+1}^{(k)} = \chi_{n+1}^{(k-1)} + \delta \gamma^{(k)} \partial_{\zeta} f_{n+1}^{(k-1)} = \chi_{n+1}^{(k-1)} + \delta \gamma^{(k)} f(\theta) \quad (106)$$

On effectue des itérations locales jusqu'à ce que le critère soit inférieur à une limite donnée :

$$\left| f_{n+1}^{(k)} \right| \leq \text{TOL} \left| f_{n+1}^{(0)} \right|, \text{ et on actualise ainsi } \varepsilon^p \text{ et } \chi \text{ à l'incrément } (n+1).$$

Le **tableau 2-4** présente un récapitulatif de la méthode de projection dans l'itération pour ce modèle avec prise en compte de la condition de contraintes planes.

1. Calcul de la contrainte statiquement admissible σ_{n+1}^* et de l'écroissage ζ_{n+1}^* :

$$\sigma_{n+1}^* = C : \Delta \epsilon + \sigma_n$$

$$\zeta_{n+1}^* = \zeta_n = \rho_o (z_o - z_{ult}) (1 - \exp[-k\chi_n])$$

2. Vérification du critère :

Si $f(\sigma_{n+1}^*, \zeta_{n+1}^*) \leq 0$ alors :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^* \text{ et } \zeta_{n+1} = \zeta_{n+1}^*$$

Sinon $k = 0$ aller en (3)

3. Calcul de la solution élasto-plastique : $k = k+1$

Résolution de l'équation :

$$f_{n+1}^{(k)} = f_{n+1}^{(k-1)} - \delta\gamma^{(k)} (H_{n+1}^{(k-1)} + \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} : C : \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)}) = 0$$

$$\text{avec : } H_{n+1}^{(k-1)} = -(\partial_{\zeta} f_{n+1}^{(k-1)})^2 \partial_{\chi} \zeta_{n+1}^{(k-1)} = -f(\theta)^2 \rho_o k (z_o - z_{ult}) \exp[-k\chi_{n+1}^{(k-1)}]$$

$$\sigma_{n+1}^{(k)} = \sigma_{n+1}^{(k-1)} - \delta\gamma^{(k)} C : \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} - \text{diag} \left[\frac{\nu}{1-\nu}, \frac{\nu}{1-\nu}, 1 \right] \delta \bar{\sigma}_{zz}^{(k)}$$

$$\epsilon_{n+1}^{p(k)} = \epsilon_{n+1}^{p(k-1)} + \delta\gamma^{(k)} \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)}$$

$$\chi_{n+1}^{(k)} = \chi_{n+1}^{(k-1)} + \delta\gamma^{(k)} \partial_{\zeta} f_{n+1}^{(k-1)} = \chi_{n+1}^{(k-1)} + \delta\gamma^{(k)} f(\theta)$$

4. Vérification de la convergence :

Si $|f_{n+1}^{(k)}| \leq \text{TOL} |f_{n+1}^{(0)}|$: Sortie

Sinon aller en (3)

Tableau 2-4 : Récapitulatif de la méthode de projection dans l'itération pour le modèle élastoplastique de *Willam-Warnke* avec écroissage isotrope et prise en compte de la condition de contraintes planes.

2-3-1-5. Expression du tenseur de comportement tangent

Le tenseur de comportement tangent C^{ep} pour ce modèle est celui du modèle plastique avec écroissage standard, à savoir :

$$C^{ep} = C - \frac{(C : \partial_{\sigma} f)(\partial_{\sigma} f : C)}{H + \partial_{\sigma} f : C : \partial_{\sigma} f} \tag{107}$$

avec, pour le modèle de *Willam-Warnke* à 3 paramètres :

$$\partial_{\sigma} f = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{s}{2\tau} + \frac{f(\theta)}{3} \mathbf{1} + \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} (\sigma - z_o, \rho - \zeta(\chi)) \text{ et } H \text{ le module d'écroissage suivant} \tag{102}.$$

La prise en compte de la condition de contraintes planes lors du calcul du tenseur de comportement tangent se fait en utilisant la même méthode que celle exposée au paragraphe 2-2-1-4, c'est à dire la méthode proposée par De Borst.

2-3-2. Extension au modèle d'endommagement plastique pour le béton en chargement cyclique

Un des traits du comportement du béton n'est pas pris en compte par le modèle élastoplastique standard, comme celui de *Willam-Warnke* à 3 paramètres présenté précédemment. Il s'agit des variations des caractéristiques élastiques du béton avec la micro-fissuration. En effet, si l'on effectue une décharge lors d'un essai en compression simple, le module d'Young apparent du matériau diminue. D'un point de vue pratique, cela signifie en particulier que ce modèle ne permet pas de calculer des structures sous chargements cycliques (*figure 2-13*).

Une amélioration possible de ce modèle consisterait à faire dépendre les caractéristiques élastiques du matériau de la variable d'écrouissage χ , celle-ci n'étant rien d'autre que la déformation volumique anélastique $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p)$. On construirait alors un modèle élastoplastique endommageable, avec comme variable d'endommagement : la variable d'écrouissage. L'accroissement de cette variable correspond à une ouverture des microfissures et par conséquent à l'apparition et à l'évolution du dommage (c'est à dire la micro-fissuration) à l'échelle macroscopique (*Ulm, 1994*).

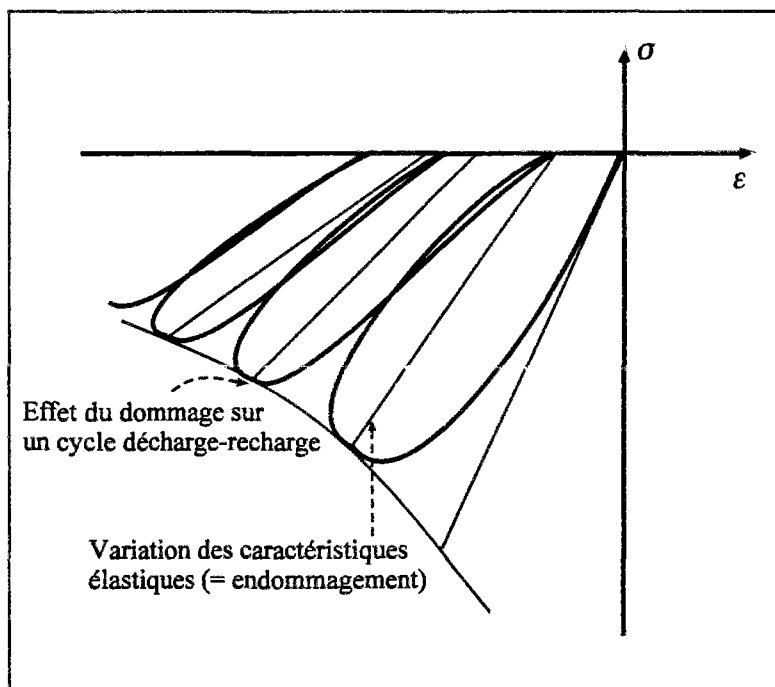


Figure 2-13 : Représentation des limites de la modélisation élastoplastique concernant l'application au cas de chargements cycliques

Si l'on considère l'énergie libre du système en élastoplasticité donnée par l'expression (81), elle prend, en tenant compte de l'endommagement plastique, la forme modifiée suivante :

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \chi) + U(\chi) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \mathbf{C}(\chi) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + U(\chi) \quad (108)$$

La dissipation intrinsèque s'écrit alors :

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \chi} + \frac{\partial U}{\partial \chi} \right) \dot{\chi} \geq 0 \quad (109)$$

Cette expression (109) intègre un terme de dissipation $\frac{\partial \Psi}{\partial \chi} \dot{\chi}$, supplémentaire par rapport à son équivalent en élastoplasticité. Ce terme est lié à la dégradation irréversible des caractéristiques élastiques. Selon l'expression de Ψ définie par (108), on constate que la force associée à la variable plastique χ n'est plus la force d'écrouissage définie par l'équation (83), mais :

$$\xi = -\frac{\partial \Psi}{\partial \chi} - \frac{\partial U}{\partial \chi} = -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \frac{\partial \mathbf{C}(\chi)}{\partial \chi} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \frac{\partial U}{\partial \chi} \quad (110)$$

La force d'écrouissage dépend a priori non seulement de la variable d'écrouissage mais également de la déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p$. Par ailleurs, dans le cadre de l'hypothèse des déformations infinitésimales (c'est à dire $(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \ll 1$), on peut négliger les termes quadratiques en déformations dans l'expression (110), ce qui revient à supposer que :

$$\xi \approx -\frac{\partial U}{\partial \chi} \quad (111)$$

où l'on retrouve la force d'écrouissage précédemment définie en élastoplasticité.

On complète ainsi le modèle élastoplastique en écrivant l'équation d'état dans le cas isotrope :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 G(\chi) (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) + K(\chi) (\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p)) \mathbf{1} \quad (112)$$

où K et G représentent respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement dépendant de la variable d'écrouissage χ . Ces modules s'écrivent en fonction du module d'élasticité E :

$$K(\chi) = \frac{E(\chi)}{3(1-2\nu)} \quad G(\chi) = \frac{E(\chi)}{2(1+\nu)} \quad (113)$$

Une manière de conserver l'isotropie du comportement réversible dans un modèle élastoplastique avec endommagement consiste à traduire l'effet du dommage au niveau du module d'élasticité. Les expériences montrent que le début de la variation du module apparent coïncide avec le début du comportement plastiquement dilatant ($\text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^p) > 0$) (Chen, 1982). On suppose donc que la variation de E en fonction de χ se fait entre deux asymptotes E_0 et E_{ult} qui représentent respectivement les modules d'Young initial et ultime (Mazars, 1984), d'où :

$$E(\chi) = E_0 + \Delta E(\chi) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta E(\chi) = (E_{\text{ult}} - E_0) (1 - \exp[-k\chi]) \\ E_{\text{ult}} < E_0 \end{cases} \quad (114)$$

Ayant ainsi défini la variation des caractéristiques élastiques (module d'Young), le modèle élastoplastique de *Willam-Warnke* endommageable est entièrement construit. C'est par la connaissance de l'évolution des variables plastiques que l'on calcule la variation des caractéristiques élastiques.

2-3-2-1. Traitement numérique

En ce qui concerne le traitement numérique de ce modèle, celui-ci se fait de la même manière que dans le paragraphe 2-3-1-4. Toutefois, le tenseur de comportement élastique $\mathbf{C}(\chi)$ dépend à présent de la variable d'érouissage χ .

Considérons pour cela l'équation d'état (83). On peut reformuler cette équation à l'incrément $(n+1)$ par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}(\chi_{n+1}) : \mathbf{C}^{-1}(\chi_n) : \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}(\chi_{n+1}) : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (115)$$

Si l'on suppose que le tenseur élastique $\mathbf{C}(\chi)$ s'exprime comme le produit du tenseur de comportement isotrope \mathbf{C}_0 et d'une fonction $b(\chi)$:

$$\mathbf{C}(\chi) = \mathbf{C}_0 \cdot b(\chi) \quad (116)$$

avec:

$$b(\chi) = \frac{E_{\text{ult}}}{E_0} - \left(\frac{E_{\text{ult}}}{E_0} - 1 \right) \exp(-k\chi) \quad (117)$$

on peut alors réécrire l'équation (115) comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n \frac{b(\chi_{n+1})}{b(\chi_n)} + \mathbf{C}_0 \cdot b(\chi_{n+1}) : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \quad (118)$$

ou encore :

$$\sigma_{n+1} \frac{b(\chi_n)}{b(\chi_{n+1})} = \sigma_n + C_o b(\chi_n) : (\Delta \epsilon_{n+1} - \Delta \epsilon_{n+1}^p) \quad (119)$$

On définit un tenseur de contraintes statiquement admissible σ_{n+1}^* ainsi qu'un écrouissage isotrope initial ζ_{n+1}^* tels que :

$$\sigma_{n+1}^* = C_o b(\chi_n) : \Delta \epsilon_{n+1} + \sigma_n \quad \zeta_{n+1}^* = \zeta_n = \zeta(\chi_n) = \rho_o (z_o - z_{ult}) (1 - \exp[-k\chi_n]) \quad (120)$$

On utilise σ_{n+1}^* et ζ_{n+1}^* pour vérifier le critère, c'est à dire $f(\sigma_{n+1}^*, \zeta_{n+1}^*) \leq 0$. Si cette condition n'est pas satisfaite, l'état de contraintes statiquement admissible σ_{n+1}^* se trouve à l'extérieur de la surface de charge ($f(\sigma_{n+1}^*, \zeta_{n+1}^*) > 0$); il est donc nécessaire d'effectuer une correction plastique en projetant cet état de contraintes sur la surface. Lors de cette projection, on doit d'une part vérifier la condition sur le critère et d'autre part vérifier la condition des contraintes planes, c'est à dire : $\mathbf{n}_0 \cdot \sigma_{n+1} \cdot \mathbf{n}_0 = 0$. On utilise pour cela un schéma itératif local dans lequel on linéarise f à chaque itération (k). Ce schéma s'écrit :

$$f_{n+1}^{(k)} = f_{n+1}^{(k-1)} + \partial_\sigma f_{n+1}^{(k-1)} : \delta \sigma^{(k)} + \partial_\zeta f_{n+1}^{(k-1)} \partial_\chi \zeta^{(k-1)} \delta \chi^{(k)} = 0 \quad (121)$$

Par ailleurs, à partir de (118), le taux de contraintes $\delta \sigma^{(k)}$ dans (121) est donné par :

$$\delta \sigma^{(k)} = \sigma_{n+1}^{(k)} - \sigma_{n+1}^{(k-1)} = \sigma_{n+1}^{(k-1)} \left[\frac{b(\chi_{n+1}^{(k)})}{b(\chi_{n+1}^{(k-1)})} - 1 \right] - \delta \gamma^{(k)} C_o b(\chi_{n+1}^{(k)}) : \partial_\sigma f_{n+1}^{(k-1)} \quad (122)$$

En linéarisant $b(\chi_{n+1}^{(k)})$ à l'itération (k) :

$$b(\chi_{n+1}^{(k)}) \approx b(\chi_{n+1}^{(k-1)}) + \partial_\chi b_{n+1}^{(k-1)} \delta \chi^{(k)} \quad (123)$$

et en utilisant l'approximation de $C_o b(\chi_{n+1}^{(k)}) : \delta \epsilon^p$ par $C_o b(\chi_{n+1}^{(k-1)}) : \delta \epsilon^p$, on obtient la forme suivante de l'équation (122) :

$$\delta \sigma^{(k)} \approx \delta \gamma^{(k)} \left(\sigma_{n+1}^{(k-1)} \frac{\partial_\chi b_{n+1}^{(k-1)}}{b(\chi_{n+1}^{(k-1)})} \partial_\zeta f_{n+1}^{(k-1)} - C_o b(\chi_{n+1}^{(k-1)}) : \partial_\sigma f_{n+1}^{(k-1)} \right) \quad (124)$$

Enfin, l'utilisation de (124) dans (121) donne :

$$\delta\gamma^{(k)} = \frac{f_{n+1}^{(k-1)}}{H_{n+1}^{(k-1)} + \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} : C_o b(\chi_{n+1}^{(k-1)}) : \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)}} \quad (125)$$

avec :

$$H_{n+1}^{(k-1)} = - \left(\partial_{\xi} f_{n+1}^{(k-1)} \right)^2 \partial_{\chi} \xi^{(k-1)} - \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} : \sigma_{n+1}^{(k-1)} \frac{\partial_{\chi} b_{n+1}^{(k-1)}}{b(\chi_{n+1}^{(k-1)})} \partial_{\xi} f_{n+1}^{(k-1)} \quad (126)$$

On notera alors que dans ce schéma d'intégration explicite, le module H' est la somme du module d'érouissage H et d'un terme prenant en compte l'endommagement plastique. Pour le critère de *Willam-Warnke* à 3 paramètres, l'équation (126) s'écrit :

$$H_{n+1}^{(k-1)} = - f(\theta)^2 \rho_o k (z_o - z_{ult}) \exp[-k\chi_{n+1}^{(k-1)}] + \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} : \sigma_{n+1}^{(k-1)} f(\theta) \frac{\left(1 - \frac{E_{ult}}{E_o}\right) k \exp[-k\chi_{n+1}^{(k-1)}]}{\frac{E_{ult}}{E_o} - \left(\frac{E_{ult}}{E_o} - 1\right) \exp[-k\chi_{n+1}^{(k-1)}]} \quad (127)$$

Enfin, on corrige l'état de contraintes de manière à satisfaire l'hypothèse des contraintes planes :

$$\sigma_{n+1}^{(k)} = \sigma_{n+1}^{(k-1)} + \delta\gamma^{(k)} \left(\sigma_{n+1}^{(k-1)} \frac{\partial_{\chi} b_{n+1}^{(k-1)}}{b(\chi_{n+1}^{(k-1)})} \partial_{\xi} f_{n+1}^{(k-1)} - C_o b(\chi_{n+1}^{(k-1)}) : \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} \right) - \text{diag} \left[\frac{\nu}{1-\nu}, \frac{\nu}{1-\nu}, 1 \right] \delta \bar{\sigma}_{zz}^{(k)} \quad (128)$$

puis on actualise les variables plastiques :

$$\epsilon_{n+1}^{p(k)} = \epsilon_{n+1}^{p(k-1)} + \delta\gamma^{(k)} \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} \quad (129)$$

$$\chi_{n+1}^{(k)} = \chi_{n+1}^{(k-1)} + \delta\gamma^{(k)} \partial_{\xi} f_{n+1}^{(k-1)} \quad (130)$$

On effectue des itérations locales jusqu'à ce que le critère soit inférieur à une limite donnée : $\left| f_{n+1}^{(k)} \right| \leq \text{TOL} \left| f_{n+1}^{(0)} \right|$.

Le **tableau 2-5** présente un récapitulatif de la méthode de projection dans l'itération pour ce modèle avec prise en compte de la condition de contraintes planes.

1. Calcul de la contrainte statiquement admissible σ_{n+1}^* et de l'écroutissage ζ_{n+1}^* :

$$\sigma_{n+1}^* = C b(\chi_n) : \Delta \epsilon + \sigma_n$$

$$\zeta_{n+1}^* = \zeta_n = \zeta(\chi_n)$$

2. Vérification du critère :

Si $f(\sigma_{n+1}^*, \zeta_{n+1}^*) \leq 0$ alors :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^* \text{ et } \zeta_{n+1} = \zeta_{n+1}^*$$

Sinon $k = 0$ aller en (3)

3. Calcul de la solution élasto-plastique : $k = k+1$

Résolution de l'équation :

$$f_{n+1}^{(k)} = f_{n+1}^{(k-1)} - \delta\gamma^{(k)} \left(H_{n+1}'^{(k-1)} + \partial_\sigma f_{n+1}^{(k-1)} : C_o b(\chi_{n+1}^{(k-1)}) : \partial_\sigma f_{n+1}^{(k-1)} \right) = 0$$

$$\text{avec : } H_{n+1}'^{(k-1)} = - \left(\partial_\zeta f_{n+1}^{(k-1)} \right)^2 \partial_\chi \zeta^{(k-1)} - \partial_\sigma f_{n+1}^{(k-1)} : \sigma_{n+1}^{(k-1)} \frac{\partial_\chi b_{n+1}^{(k-1)}}{b(\chi_{n+1}^{(k-1)})} \partial_\zeta f_{n+1}^{(k-1)}$$

$$\sigma_{n+1}^{(k)} = \sigma_{n+1}^{(k-1)} + \delta\gamma^{(k)} \left(\sigma_{n+1}^{(k-1)} \frac{\partial_\chi b_{n+1}^{(k-1)}}{b(\chi_{n+1}^{(k-1)})} \partial_\zeta f_{n+1}^{(k-1)} - C_o b(\chi_{n+1}^{(k-1)}) : \partial_\sigma f_{n+1}^{(k-1)} \right) - \text{diag} \left[\frac{\nu}{1-\nu}, \frac{\nu}{1-\nu}, 1 \right] \delta \bar{\sigma}_{zz}^{(k)}$$

$$\epsilon_{n+1}^{p(k)} = \epsilon_{n+1}^{p(k-1)} + \delta\gamma^{(k)} \partial_\sigma f_{n+1}^{(k-1)}$$

$$\chi_{n+1}^{(k)} = \chi_{n+1}^{(k-1)} + \delta\gamma^{(k)} \partial_\zeta f_{n+1}^{(k-1)}$$

4. Vérification de la convergence :

$$\text{Si } \left| f_{n+1}^{(k)} \right| \leq \text{TOL} \left| f_{n+1}^{(0)} \right| : \text{Sortie}$$

Sinon aller en (3)

Tableau 2-5 : Récapitulatif de la méthode de projection dans l'itération pour le modèle de élastoplastique endommageable avec prise en compte de la condition de contraintes planes.

2-3-2-2. Expression du tenseur de comportement tangent

L'expression du tenseur de comportement tangent \mathbf{C}^{epd} pour ce modèle s'écrit :

$$\mathbf{C}^{\text{epd}} = \mathbf{C}^{\text{ep}}(\chi) + \frac{\partial_{\xi} f \boldsymbol{\sigma} \otimes \partial_{\sigma} f : \mathbf{C}_o \partial_{\chi} b}{H' + \partial_{\sigma} f : \mathbf{C}_o b(\chi) : \partial_{\sigma} f} \quad (131)$$

avec $\partial_{\sigma} f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{s}{2\tau} + \frac{f(\theta)}{3} \mathbf{1} + \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} (\sigma - z_o \rho_o + \xi(\chi))$ et H' le module précisé précédemment.

Dans l'équation (131), $\mathbf{C}^{\text{ep}}(\chi)$ représente le tenseur de comportement tangent du modèle plastique avec prise en compte d'une élasticité dépendant de la variable χ :

$$\mathbf{C}^{\text{ep}}(\chi) = \mathbf{C}_o b(\chi) - \frac{(\mathbf{C}_o b(\chi) : \partial_{\sigma} f) \otimes (\partial_{\sigma} f : \mathbf{C}_o b(\chi))}{H' + \partial_{\sigma} f : \mathbf{C}_o b(\chi) : \partial_{\sigma} f} \quad (132)$$

alors que le second terme résulte de l'endommagement plastique.

La prise en compte de la condition de contraintes planes lors du calcul du tenseur de comportement tangent se fait encore en utilisant la même méthode que celle exposée au paragraphe 2-2-1-4, c'est à dire la méthode proposée par De Borst. Grâce à sa généralité, elle reste valable quelque soit la forme de l'opérateur tangent.

2-3-3. Extension aux bétons à hautes vitesses : modèle visco-élasto-plastique avec écrouissage visqueux

Dans ce paragraphe, une seconde extension du modèle élastoplastique est considérée pour rendre compte du comportement du béton en dynamique rapide : le modèle visco-élasto-plastique avec écrouissage visqueux, développé par Sercombe (*Sercombe, 1997*).

Pour modéliser le béton à hautes vitesses, deux phénomènes sont à prendre en compte : d'une part la fissuration et, d'autre part, l'augmentation de la résistance du béton associée aux effets de vitesse au niveau microscopique. En effet, Rossi a proposé l'explication suivante pour ces effets de vitesse (*Rossi, 1991*) : dans un essai de traction, les parois des pores des bétons sont écartées l'une de l'autre; s'il y a présence d'eau, elles sont soumises à une force de rappel liée à la viscosité de l'eau. Cette force a été mise en évidence sous le nom d'effet Stefan pour des plaques infinies distantes de h et entre lesquelles se trouve un liquide de viscosité η . Ainsi, si cet effet est présent au sein du béton, il doit être majoritairement créé par l'eau des nanopores qui sont inclus entre les feuillettes des cristaux CSH. Cette explication a été confirmée par Toutlemonde (*Toutlemonde, 1995*) au travers d'essais de traction à haute vitesse sur des éprouvettes en bétons humide et sec : pour des éprouvettes saturées en eau libre (eau de gâchage conservée au sein des pores du matériau) les effets de vitesse sont très significatifs; en revanche, ils sont quasi inexistantes pour le béton sec.

Le modèle visco-élasto-plastique développé par Sercombe (*Sercombe, 1997*) consiste à utiliser l'approche élastoplastique standard pour modéliser la fissuration : on note $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur de déformation de l'élément de volume, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ le tenseur de déformation plastique représentant la déformation permanente du squelette et χ la variable d'écrouissage. L'effet stefan est intégré en introduisant une variable x prenant en compte à l'échelle macroscopique les phénomènes visqueux au niveau des nanopores. Cette variable représente une déformation visqueuse moyenne provoquée par l'écartement des nanopores dans l'élément de volume.

2-3-3-1. Le modèle de Sercombe

Pour un matériau visco-élasto-plastique écrouissable, l'énergie libre volumique est paramétrée par les variables $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, χ et x , soit :

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \chi, x) = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p, x) + U(\chi, x) \quad (133)$$

Notons que Ψ et U dépendent à présent de la variable x .

L'utilisation de (133) dans l'équation (1) conduit à l'expression suivante de la dissipation intrinsèque du matériau visco-élasto-plastique écrouissable :

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \zeta \dot{\chi} + A_x \dot{x} \geq 0 \quad (134)$$

Les variables internes étant $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, χ et x , les forces associées sont données par :

$$\boldsymbol{\sigma} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \quad \zeta = -\frac{\partial U}{\partial \chi} \quad A_x = -\frac{\partial (\Psi + U)}{\partial x} \quad (135)$$

Par rapport aux équations d'état (83) établies pour le modèle élastoplastique, nous avons pour le modèle visco-élasto-plastique une équation supplémentaire définissant la force thermodynamique A_x associée aux évolutions de la variable x .

Considérons à présent la transformée de Legendre-Fenchel (*Coussy, 1995*) de l'énergie élastique Ψ . Celle-ci s'écrit :

$$\Psi^* = \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) - \Psi \quad (136)$$

Les équations d'état deviennent :

$$\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{\partial \Psi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \zeta = -\frac{\partial U}{\partial \chi} \quad A_x = \frac{\partial (\Psi^* - U)}{\partial x} \quad (137)$$

ou encore sous forme différentielle :

$$d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial x} dx \quad (138)$$

$$d\zeta = -\frac{\partial^2 U}{\partial \chi \partial \chi} d\chi - \frac{\partial^2 U}{\partial \chi \partial x} dx \quad (139)$$

$$dA_x = \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x \partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \chi} d\chi + \frac{\partial^2 (\Psi^* - U)}{\partial x^2} dx \quad (140)$$

Le tenseur du second ordre $\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial x}$ de l'équation (138) est un terme de couplage entre le tenseur de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et la déformation moyenne x . En le désignant par \mathbf{B} , l'équation (138) devient :

$$d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{C}^{-1} : d\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{B} dx \quad (141)$$

où \mathbf{C}^{-1} représente le tenseur de complianc e élastique. Dans cette relation, le terme « $\mathbf{B} dx$ » peut être considéré comme un incrément de déformation visco-élastique $d\boldsymbol{\varepsilon}^v$ dépendant de l'incrément de déformation moyenne dx , ce qui permet de réécrire (141) après inversion sous la forme suivante :

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p - d\boldsymbol{\varepsilon}^v) \quad \text{avec :} \quad d\boldsymbol{\varepsilon}^v = \mathbf{B} dx \quad (142)$$

Par ailleurs, l'équation (139) montre que la force d'érouissage ζ dépend non seulement de la variable d'érouissage plastique χ mais aussi de la déformation moyenne visqueuse x associée aux effets de vitesse. Ceci met en évidence deux types d'érouissages : un érouissage plastique classique et un érouissage dit « visqueux » qui s'ajoute au précédent. C'est à travers cet érouissage visqueux que sont pris en compte les effets de vitesse sur le seuil de plasticité.

Notons toutefois que l'érouissage plastique n'apparaît que quand le point de charge se trouve sur la surface (c'est à dire pour $f = 0$), alors que l'érouissage visqueux apparaît quelle que soit la position du point de charge (c'est à dire pour $f < 0$ et $f = 0$).

Les évolutions des variables internes de déformations et d'érouissage plastiques étant décrites respectivement par les règles d'écoulement et d'érouissage, il est nécessaire de définir également pour la variable interne de déformation moyenne visqueuse x , une loi d'évolution. La loi linéaire suivante a été proposée (Sercombe, 1997) :

$$A_x = \eta \dot{x} \quad (143)$$

où η représente la viscosité associée au phénomène physique à l'origine des effets de vitesse.

De plus dans ce modèle, le tenseur de couplage \mathbf{B} s'écrit en fonction du déviateur \mathbf{s} du tenseur de contraintes et du second invariant τ de ce déviateur :

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{s}}{2\tau} \tag{144}$$

Les équations (143) et (144) conduisent à :

$$dA_x = d\tau - \kappa dx - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \chi} d\chi \quad \text{avec :} \quad \kappa = \frac{\partial^2 (U - \Psi^*)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \mathbf{C} : \mathbf{B} : \mathbf{B} \tag{145}$$

et après intégration :

$$A_x = \tau - \kappa x - \int \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \chi} d\chi = \eta \dot{x} \tag{146}$$

Ainsi, la formulation du modèle visco-élasto-plastique est entièrement définie. Reste à déterminer à présent, d'une part les différents paramètres de ce modèle et d'autre part l'expression de l'écrouissage visqueux.

2-3-3-2. Identification des paramètres du modèle

La *figure 2-14* illustre le modèle visco-élasto-plastique avec écrouissage visqueux pour le cas unidimensionnel, les paramètres du modèle étant le module dynamique E , la rigidité κ et la viscosité η .

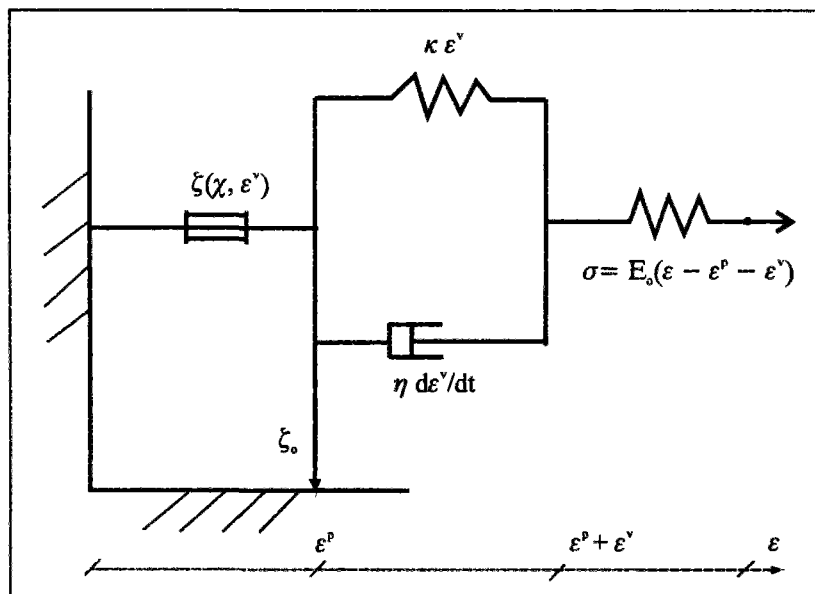


Figure 2-14 Modèle visco-élasto-plastique (1D) avec écrouissage visqueux (d'après Sercombe, 1997)

Leur identification a été montrée par Sercombe (Sercombe, 1997) pour des vitesses de chargement comprises entre 10^{-5} GPa/s et 100 GPa/s.

Considérer que les effets de vitesse au niveau macroscopique résultent de l'effet Stefan conduit à dire que les forces de cohésion au sein des nanopores augmentent avec la vitesse de chargement, tandis que la déformation moyenne visqueuse x diminue. Ainsi, dans le cas où la vitesse de chargement est infinie, la variable x peut être considérée comme négligeable par rapport à la déformation élastique ϵ^e et le module d'élasticité E est alors égal au module d'élasticité mesuré à cette vitesse de chargement :

$$E = E_{\infty}^{\text{dyn}} \quad (147)$$

En revanche, dans le cas où l'on charge très lentement le matériau (c'est à dire comme dans un cas de chargement statique), les effets visqueux deviennent négligeable ($\dot{x} = 0$). En notant par E_{static} le module d'Young apparent du béton, on obtient :

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{E_{\text{static}}} - \frac{1}{E_{\infty}^{\text{dyn}}} \quad (148)$$

ce qui permet d'obtenir la rigidité κ .

Entre ces deux cas limites, l'évolution de la déformation moyenne visqueuse x est donnée par l'équation (146) et contrôlée par le temps caractéristique $\tau_c = \eta/\kappa$. La viscosité η peut être estimée en considérant que ce temps caractéristique est constant et égal à 50 secondes pour tous les bétons.

Enfin, la relation liant la force d'écroutissement ζ à la déformation moyenne visqueuse x peut également être déterminée à partir des essais de traction en haute vitesse. L'expression de cette relation a été proposée par Sercombe (Sercombe *et al.*, 1997) :

$$\zeta_u(x) = 5.21 \alpha \left(\frac{\log(x\sqrt{3})}{\log(\sigma_t / \kappa)} - 1 \right) \quad (149)$$

où ζ_u est la force d'écroutissement dans le cas uniaxial.

L'extension de cette relation à des vitesses de chargement hors de la gamme considérée (c'est à dire ne variant pas entre 10^{-5} GPa/s et 100 GPa/s) est basée sur le raisonnement suivant : pour des chargements inférieurs à la vitesse statique de référence (10^{-5} GPa/s), les effets de vitesse ne sont pas considérés. Pour des vitesses de chargement supérieures à 100 GPa/s, l'augmentation de résistance en traction directe n'est plus due à un phénomène visqueux au sein des nanopores.

Dans notre étude, nous avons choisi d'utiliser le critère élastoplastique de *Willam-Warnke* à 3 paramètres présenté dans le paragraphe 2-3-1 pour modéliser le comportement du béton en dynamique. Ceci nécessite donc, en plus de l'écroissage plastique, l'introduction d'un écroissage visqueux permettant de rendre compte des effets de vitesse dans le critère de plasticité (93), à savoir :

$$f(\sigma, \xi) = \tau + f(\theta) (\sigma - z_0 \rho_0 + \xi(\chi, x)) \quad (150)$$

Pour cette introduction, nous avons choisi de modifier l'expression de la pression de cohésion ρ_0 . D'après les relations (86), cette pression s'exprime en fonction de la contrainte de traction maximale sous chargement statique σ_t et du coefficient de frottement sur le méridien de traction f_t comme suit :

$$\rho_0 = \frac{\sqrt{3} + f_t}{3 f_t} \sigma_t \quad (151)$$

Pour un chargement dynamique, on pourrait définir ρ^{dyn} par analogie à ρ_0 , par :

$$\rho^{\text{dyn}} = \frac{\sqrt{3} + f_t}{3 f_t} \sigma_t^{\text{dyn}} \quad (152)$$

où σ_t^{dyn} représente la résistance dynamique en traction direct qu'on peut exprimer en fonction de la résistance statique σ_t et de la force d'écroissage ξ_u donnée par (149).

$$\sigma_t^{\text{dyn}} = \sigma_t + \xi_u(x) \quad (153)$$

il vient :

$$\rho^{\text{dyn}} = \rho_0 \left(1 + \frac{\rho_0}{\sigma_t} \xi_u(x) \right) = \rho_0 z(x) \quad (154)$$

Utilisant (149) dans (154), on obtient la fonction $z(x)$ traduisant l'écroissage visqueux associé au critère de *Willam-Warnke* à 3 paramètres :

$$z(x) = \left(1 + \frac{\rho_0}{\sigma_t} \left[5.21 \alpha \left(\frac{\log(x\sqrt{3})}{\log(\sigma_t / \kappa)} - 1 \right) \right] \right) \quad (155)$$

Les écrouissages plastique et visqueux sont donc définis indépendamment l'un de l'autre. En prenant en compte d'une manière additive l'écrouissage plastique selon l'équation (94), l'expression de $z(\chi, x)$ intégrant ces deux écrouissages et permettant de préserver le découplage peut se mettre sous la forme :

$$z(\chi, x) = z_o + (z_{ult} - z_o)(1 - \exp[-\kappa\chi]) + \frac{\rho_o}{\sigma_t} \left[5.21 \alpha \left(\frac{\log(x\sqrt{3})}{\log(\sigma_t / \kappa)} - 1 \right) \right] \quad (156)$$

De cette relation, on déduit la force d'écrouissage $\zeta(\chi, x)$:

$$\zeta(\chi, x) = \rho_o (z_o - z_{ult})(1 - \exp[-\kappa\chi]) + \frac{\rho_o^2}{\sigma_t} \left[5.21 \alpha \left(\frac{\log(x\sqrt{3})}{\log(\sigma_t / \kappa)} - 1 \right) \right] \quad (157)$$

Cette relation (157) a été validée en traction et en compression à haute vitesse par Sercombe (Sercombe, 1997). Nous allons l'utiliser pour des calculs avec les éléments de coque multicouches développés dans le chapitre 1.

2-3-3-3. Traitement numérique :

De même que pour les modèles précédemment exposés, on utilise la méthode de projection dans l'itération pour actualiser à l'incrément $(n+1)$ les variables internes de ce modèle : le tenseur de déformations plastiques \mathcal{E}^p , le paramètre d'écrouissage χ et la déformation moyenne visqueuse x . Par ailleurs, à la différence avec le modèle plastique standard, le domaine d'élasticité dépend à présent de la déformation visqueuse. Ceci modifie à la fois l'état de contrainte et la force d'écrouissage. Il convient alors de décomposer la projection en deux problèmes successifs de résolution : un problème viscoélastique et un problème visco-élasto-plastique.

Ecrivons l'équation d'état (142) sous la forme algorithmique suivante :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \mathbf{C} : (\Delta \mathcal{E}_{n+1} - \Delta \mathcal{E}_{n+1}^p - \Delta \mathcal{E}_{n+1}^v) \quad (158)$$

avec $\Delta \mathcal{E}_{n+1}^p = \Delta \lambda_{n+1} \partial_{\sigma} f_{n+1}$, f_{n+1} donnée par la relation (150); et $\Delta \mathcal{E}_{n+1}^v = \Delta x_{n+1} \mathbf{B}_{n+1}$.

Le problème viscoélastique consiste à projeter l'état de contrainte viscoélastique :

$$\sigma_{n+1}^{ve} = \sigma_n + \mathbf{C} : \Delta \mathcal{E}_{n+1} - \mathbf{C} : \Delta x_{n+1} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{2 \tau_{n+1}} \quad (159)$$

sur la surface limite définie par la loi cinétique au sein d'un schéma d'intégration d'Euler implicite :

$$F = \eta \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta t} - \tau_{n+1} + \kappa x_{n+1} = 0 \quad (160)$$

Lors de cette projection, on doit d'une part vérifier la condition sur le critère et d'autre part satisfaire la condition de contraintes planes, c'est à dire : $\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \cdot \mathbf{n}_0 = 0$.

En procédant comme précédemment pour le modèle plastique, on linéarise F à chaque itération (k). Ce schéma itératif local s'écrit :

$$F_{n+1}^{(k)} = F_{n+1}^{(k-1)} + \partial_{\sigma} F_{n+1}^{(k-1)} : \delta \boldsymbol{\sigma}^{ve(k)} + \partial_x F_{n+1}^{(k-1)} : \delta \mathbf{x}^{(k)} = 0 \quad (161)$$

avec :

$$\delta \boldsymbol{\sigma}^{ve(k)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{ve(k)} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{ve(k-1)} = -\delta \mathbf{x}^{(k)} \mathbf{C} : \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{(k-1)}}{2 \tau_{n+1}^{(k-1)}} \quad (162)$$

Utilisant (162) dans (161), on obtient :

$$F_{n+1}^{(k-1)} - \delta \mathbf{x}^{(k)} \partial_{\sigma} F_{n+1}^{(k-1)} : \mathbf{C} : \mathbf{B}_{n+1}^{(k-1)} + \partial_x F_{n+1}^{(k-1)} \delta \mathbf{x}^{(k)} = 0 \quad (163)$$

ce qui conduit à :

$$\delta \mathbf{x}^{(k)} = -\frac{F_{n+1}^{(k-1)}}{\beta_{2,n+1}^{(k-1)}} \quad (164)$$

$$\text{avec : } \beta_{2,n+1}^{(k-1)} = -\partial_{\sigma} F_{n+1}^{(k-1)} : \mathbf{C} : \mathbf{B}_{n+1}^{(k-1)} + \partial_x F_{n+1}^{(k-1)} \quad (165)$$

On corrige alors l'état de contraintes de manière à satisfaire l'hypothèse des contraintes planes :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{ve(k)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{ve(k-1)} - \delta \mathbf{x}^{(k)} \mathbf{C} : \mathbf{B}_{n+1}^{(k-1)} - \text{diag} \left[\frac{\nu}{1-\nu}, \frac{\nu}{1-\nu}, 1 \right] \delta \bar{\sigma}_{zz}^{ve(k)} \quad (166)$$

où $\delta \bar{\sigma}_{zz}^{ve(k)}$ est la contrainte dans la direction z issue de la projection viscoélastique.

On effectue des itérations locales jusqu'à ce que le critère soit inférieur à une limite donnée : $\left| F_{n+1}^{(k)} \right| \leq \text{TOL} \left| F_{n+1}^{(0)} \right|$. Une fois cette condition satisfaite, on obtient la contrainte visco-élastique

$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{ve}$, mais aussi la force d'érouissage initiale ξ_{n+1}^{ve} :

$$\xi_{n+1}^{ve} = \xi \left(\mathbf{x}_{n+1}^{ve}, \mathbf{x}_n \right) \quad \text{avec : } \mathbf{x}_{n+1}^{ve} = \mathbf{x}_n + \sum_k \delta \mathbf{x}^{(k)} \quad (167)$$

On utilise alors cette solution viscoélastique pour vérifier s'il y a des évolutions plastiques :

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{ve}, \zeta_{n+1}^{ve}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\gamma_{n+1} > 0 \quad (168)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{ve}, \zeta_{n+1}^{ve}) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\gamma_{n+1} = 0$$

Il est utile de noter que dans le modèle plastique standard, l'état initial est entièrement défini par la contrainte statiquement admissible, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^*$, alors que dans le modèle visco-élasto-plastique avec écrouissage visqueux cet état est composé à la fois d'une contrainte initiale et d'une force d'écrouissage initiale $(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{ve}, \zeta_{n+1}^{ve})$, solution du problème viscoélastique.

Le problème visco-élasto-plastique consiste, lorsque $f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{ve}, \zeta_{n+1}^{ve}) > 0$, à effectuer une double projection de la contrainte :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \mathbf{C} : \left(\Delta\mathbf{x}_{n+1} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{2\tau_{n+1}} + \Delta\gamma_{n+1} \partial_{\sigma} f \right) \quad (169)$$

d'une part sur le critère plastique (150) et, d'autre part, sur la loi cinétique (160).

En linéarisant ces deux surfaces limites à chaque itération (k), c'est à dire le critère plastique :

$$f_{n+1}^{(k)} = f_{n+1}^{(k-1)} + \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} : \delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \left(\partial_{\zeta} f_{n+1}^{(k-1)} \right)^2 \partial_{\chi} \zeta \delta\gamma^{(k)} + \partial_{\zeta} f_{n+1}^{(k-1)} \partial_{\chi} \zeta \delta\mathbf{x}^{(k)} = 0 \quad (170)$$

et la loi cinétique:

$$F_{n+1}^{(k)} = F_{n+1}^{(k-1)} + \partial_{\sigma} F_{n+1}^{(k-1)} : \delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \partial_{\chi} F_{n+1}^{(k-1)} \partial_{\zeta} f_{n+1}^{(k-1)} \delta\gamma^{(k)} + \partial_{\chi} F_{n+1}^{(k-1)} \delta\mathbf{x}^{(k)} = 0 \quad (171)$$

et en notant la contrainte de correction :

$$\delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} = -\mathbf{C} : \left(\delta\mathbf{x}^{(k)} \mathbf{B}_{n+1}^{(k-1)} + \delta\gamma^{(k)} \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} \right) \quad (172)$$

on obtient le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1, n+1}^{(k-1)} & \alpha_{2, n+1}^{(k-1)} \\ \beta_{1, n+1}^{(k-1)} & \beta_{2, n+1}^{(k-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\gamma^{(k)} \\ \delta\mathbf{x}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{n+1}^{(k-1)} \\ -F_{n+1}^{(k-1)} \end{pmatrix} \quad (173)$$

avec :

$$\alpha_{1,n+1}^{(k-1)} = \partial_{\chi} \xi_{n+1}^{(k-1)} \left(\partial_{\xi} f_{n+1}^{(k-1)} \right)^2 - \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} : \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} \quad (174)$$

$$\alpha_{2,n+1}^{(k-1)} = \partial_{\chi} f_{n+1}^{(k-1)} - \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} : \mathbf{C} : \mathbf{B}_{n+1}^{(k-1)} \quad (175)$$

$$\beta_{1,n+1}^{(k-1)} = -\partial_{\sigma} F_{n+1}^{(k-1)} : \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)} + \partial_{\chi} F_{n+1}^{(k-1)} \partial_{\xi} f_{n+1}^{(k-1)} \quad (176)$$

$$\beta_{2,n+1}^{(k-1)} = -\partial_{\sigma} F_{n+1}^{(k-1)} : \mathbf{C} : \mathbf{B}_{n+1}^{(k-1)} + \partial_{\chi} F_{n+1}^{(k-1)} \quad (177)$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues conduit à la détermination des incréments $\delta\gamma^{(k)}$ et $\delta\chi^{(k)}$. Ces quantités sont alors utilisées pour corriger l'état de contraintes avec (172) tout en satisfaisant la condition de contraintes planes :

$$\sigma_{n+1}^{(k)} = \sigma_{n+1}^{(k-1)} - \delta\sigma^{(k)} - \text{diag} \left[\frac{\nu}{1-\nu}, \frac{\nu}{1-\nu}, 1 \right] \delta\bar{\sigma}_{zz}^{(k)} \quad (178)$$

Ces opérations sont répétées jusqu'à ce que les critères plastique et visqueux soient inférieurs à une limite TOL donnée par l'utilisateur :

$$\left| F_{n+1}^{(k)} \right| \leq \text{TOL} \left| F_{n+1}^{(0)} \right| \quad \text{et} \quad \left| f_{n+1}^{(k)} \right| \leq \text{TOL} \left| f_{n+1}^{(0)} \right| \quad (179)$$

avec $\text{TOL} \ll 1$. On actualise ainsi le tenseur de déformations plastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, le paramètre d'érouissage χ et la déformation moyenne visqueuse x à l'incrément $(n+1)$.

Le **tableau 2-6** présente un récapitulatif de la méthode de projection dans l'itération pour ce modèle avec prise en compte de la condition de contraintes planes.

1. Calcul de la contrainte statiquement admissible :

$$\sigma_{n+1}^* = C : \Delta \varepsilon_{n+1} + \sigma_n$$

2. Calcul de la solution visco-élastique : σ_{n+1}^{ve} et ξ_{n+1}^{ve} $k = k+1$

$$\delta X^{(k)} = - \frac{F_{n+1}^{(k-1)}}{\beta_{2,n+1}^{(k-1)}}$$

$$X_{n+1}^{ve} = X_{n+1}^{ve(k-1)} + \delta X^{(k)}$$

$$\sigma_{n+1}^{ve(k)} = \sigma_{n+1}^{ve(k-1)} - \delta X^{(k)} C : B_{n+1}^{(k-1)} - \text{diag} \left[\frac{\nu}{1-\nu}, \frac{\nu}{1-\nu}, 1 \right] \delta \bar{\sigma}_{zz}^{ve(k)}$$

$$\xi_{n+1}^{ve} = \xi(X_{n+1}^{ve}, \chi_n)$$

3. Vérification de la convergence :

$$\text{Si } |F_{n+1}^{(k)}| \leq \text{TOL} |F_{n+1}^{(0)}| \text{ aller en (4)}$$

Sinon retourner en (2)

4. Vérification du critère :

$$\text{Si } f(\sigma_{n+1}^{ve}, \xi_{n+1}^{ve}) \leq 0 \text{ alors : } \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{ve} \text{ et } \xi_{n+1} = \xi_{n+1}^{ve}$$

Sinon $k = 0$ aller en (5)

5. Calcul de la solution visco-élasto-plastique : $k = k+1$

Résolution du système :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,n+1}^{(k-1)} & \alpha_{2,n+1}^{(k-1)} \\ \beta_{1,n+1}^{(k-1)} & \beta_{2,n+1}^{(k-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \gamma^{(k)} \\ \delta X^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{n+1}^{(k-1)} \\ -F_{n+1}^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

$$X_{n+1}^{(k)} = X_{n+1}^{(k-1)} + \delta X^{(k)}$$

$$\varepsilon_{n+1}^{p(k)} = \varepsilon_{n+1}^{p(k-1)} + \delta \gamma^{(k)} \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)}$$

$$\chi_{n+1}^{(k)} = \chi_{n+1}^{(k-1)} + \delta \gamma^{(k)} \partial_{\xi} f_{n+1}^{(k-1)}$$

$$\sigma_{n+1}^{(k)} = \sigma_{n+1}^{(k-1)} - C : (\delta X^{(k)} B_{n+1}^{(k-1)} + \delta \gamma^{(k)} \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(k-1)}) - \text{diag} \left[\frac{\nu}{1-\nu}, \frac{\nu}{1-\nu}, 1 \right] \delta \bar{\sigma}_{zz}^{(k)}$$

$$\xi_{n+1} = \xi(X_{n+1}^{(k)}, \chi_n)$$

6. Vérification de la convergence :

$$\text{Si } |F_{n+1}^{(k)}| \leq \text{TOL} |F_{n+1}^{(0)}| \text{ et } |f_{n+1}^{(k)}| \leq \text{TOL} |f_{n+1}^{(0)}| : \text{Sortie}$$

Sinon aller en (5)

Tableau 2-6 : Récapitulatif du traitement numérique du modèle visco-élasto-plastique avec écoulement visqueux

2-3-3-4. Expression du tenseur de comportement tangent

Comme point de départ, considérons l'équation d'état incrémentale (142) établie précédemment. Celle-ci conduit à l'expression suivante du tenseur de comportement tangent \mathbf{C}^{ep} pour ce modèle :

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C} - \frac{d\gamma}{d\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f - \frac{dx}{d\boldsymbol{\varepsilon}} : (\mathbf{C} : \mathbf{B}) \quad (180)$$

Comparativement à l'expression classique du tenseur de comportement tangent élastoplastique, le calcul du tenseur de comportement visco-élasto-plastique requiert l'évaluation des deux dérivées suivantes : $\frac{d\gamma}{d\boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\frac{dx}{d\boldsymbol{\varepsilon}}$. La première est généralement définie à partir de la condition de consistance qui, dans notre cas, prend la forme suivante :

$$df = \partial_{\sigma} f : d\boldsymbol{\sigma} + \partial_{\zeta} f \left(\partial_{\chi} \zeta d\gamma + \partial_{\chi} \zeta dx \right) = 0 \quad (181)$$

dans laquelle apparaît, en plus du terme plastique $d\gamma$, un terme lié à la déformation visco-élastique dx . Le calcul de $d\gamma$ en fonction de $d\boldsymbol{\varepsilon}$ ne peut donc pas être dissocié du calcul de dx en fonction de $d\boldsymbol{\varepsilon}$. Pour ce dernier, une condition supplémentaire dépendant a priori également du schéma d'intégration des contraintes utilisé, est nécessaire. Ainsi, pour le schéma explicite, on pourrait utiliser comme condition supplémentaire l'équation régissant l'évolution de la déformation visco-élastique x en supposant $\Delta x / \Delta t$ constant dans l'incrément. Cette hypothèse permet d'écrire :

$$d\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = dA = \partial_{\sigma} A : d\boldsymbol{\sigma} + \partial_{\chi} A d\chi + \partial_x A dx = 0 \quad (182)$$

L'hypothèse d'une vitesse de déformation constante dans l'incrément permet de définir par analogie une seconde « relation de consistance » $dA = 0$. Si l'on remplace $d\boldsymbol{\sigma}$ dans les équations (181) et (182) par son expression (142), on obtient le système suivant à 2 équations et 2 inconnues :

$$\begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\gamma \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{\sigma} f : \mathbf{C} : d\boldsymbol{\varepsilon} \\ \partial_{\sigma} A : \mathbf{C} : d\boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix} \quad (183)$$

avec :

$$H_1 = \partial_{\sigma} f : \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f + \partial_{\zeta} f^2 \partial_{\chi} \zeta \quad (184)$$

$$H_2 = \partial_{\sigma} f : \mathbf{C} : \mathbf{B} + \partial_{\zeta} f \partial_x \zeta \quad (185)$$

$$H_3 = \partial_\sigma A : \mathbf{C} : \partial_\sigma f - \partial_\chi A \partial_\xi f \quad (186)$$

$$H_4 = \partial_\sigma A : \mathbf{C} : \mathbf{B} + \partial_\chi A \quad (187)$$

La solution de ce système, reportée dans l'équation (180) donne l'expression générale du tenseur de comportement tangent visco-élasto-plastique pour le schéma explicite :

$$\mathbf{C}^{\text{ep}} = \mathbf{C} - \left[\frac{H_2}{H_d} \partial_\sigma A : \mathbf{C} - \frac{H_4}{H_d} \partial_\sigma f : \mathbf{C} \right] : \mathbf{C} : \partial_\sigma f - \left[\frac{H_3}{H_d} \partial_\sigma f : \mathbf{C} - \frac{H_1}{H_d} \partial_\sigma A : \mathbf{C} \right] : \mathbf{C} : \mathbf{B} \quad (188)$$

avec : $H_d = H_3 H_2 - H_1 H_4$ le déterminant du système (183).

La forme modifiée du tenseur de comportement tangent ne modifie pas la prise en compte de la condition de contraintes planes lors de son calcul. On utilise la méthode proposée par De Borst, méthode exposée au paragraphe 2-2-1-4.

2-3-4. Récapitulatif de la modélisation du comportement non-linéaire du béton

Nous présentons ici un rapide récapitulatif de la modélisation du comportement non-linéaire du béton. Le *tableau 2-7* présente les critères, les règles d'écoulement ainsi que les résultats d'essais nécessaires à la détermination des paramètres des différents modèles présentés.

	<p align="center">Modèle élastoplastique de Willam-Warnke à 3 paramètres 3 paramètres : f_c, f_t, ρ_o</p>
Critère de plasticité	$f(\boldsymbol{\sigma}, \zeta) = \tau + f(\theta) (\sigma - z_o \rho_o + \zeta(\chi, x))$
Règle d'écoulement	$d\boldsymbol{\epsilon}^p = d\gamma \left(\frac{s}{2\tau} + \frac{f(\theta)}{3} \mathbf{1} + \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} (\sigma - z_o \rho_o + \zeta) \right)$
Règle d'écrouissage	$d\chi = d\gamma f(\theta) = \text{tr}(d\boldsymbol{\epsilon}^p) \geq 0$
Evolution du domaine d'élasticité	$\zeta(\chi) = \rho_o (z_o - z_{ult}) (1 - \exp[-k\chi])$
Résultats d'essais nécessaires	<ul style="list-style-type: none"> . compression simple . traction simple . compression biaxiale
	<p align="center">Extension au modèle élastoplastique endommageable</p>
Variation du module d'Young en fonction de χ	$E(\chi) = E_o + \Delta E(\chi)$ et $\begin{cases} \Delta E(\chi) = (E_{ult} - E_o) (1 - \exp[-k(\chi)]) \\ E_{ult} < E_o \end{cases}$
	<p align="center">Extension au modèle visco-élasto-plastique avec écrouissage visqueux 6 paramètres : $f_c, f_t, \rho_o, E, \kappa, \eta$</p>
Evolution du domaine d'élasticité : introduction d'un écrouissage visqueux	$\zeta(\chi, x) = \rho_o (z_o - z_{ult}) (1 - \exp[-\kappa\chi])$ $+ \frac{\rho_o^2}{\sigma_t} \left[5.21 \alpha \left(\frac{\log(x\sqrt{3})}{\log(\sigma_t / \kappa)} - 1 \right) \right]$
Résultats d'essais nécessaires	<ul style="list-style-type: none"> . compression simple . traction simple . compression biaxiale . module d'élasticité dynamique . module d'élasticité statique . augmentation de résistance en traction directe par unité log

Tableau 2-7 : Récapitulatif de la modélisation du comportement non-linéaire du béton

2-4. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un ensemble de lois de comportement à variables internes permettant la modélisation des comportements de l'acier et du béton sous divers chargements. Le but étant d'utiliser ces modèles au sein d'éléments finis de coques multicouches développés au chapitre 1, pour le calcul de structures en béton armé soumises à des chargements statiques, dynamiques et cycliques.

Nous avons commencé par présenter les cadres théorique et numérique des lois de comportement à variables internes. Pour le cadre théorique, nous avons utilisé une approche thermodynamique en supposant les perturbations petites et les évolutions isothermes. Cela se justifie par le fait que cette approche nous permet non seulement de bien définir les variables macroscopiques utilisées, mais aussi d'imposer certaines restrictions sur les évolutions de ces variables. En ce qui concerne le traitement numérique, deux algorithmes ont été présentés : l'algorithme de projection dans l'incrément et l'algorithme de projection dans l'itération. Lors de ces développements algorithmiques, nous n'avons pas omis d'introduire l'hypothèse des contraintes planes; les lois à variables internes vont en effet être utilisées par la suite au sein d'éléments finis de coques multicouches où l'on admet cette hypothèse.

A partir de là, nous sommes passés à la modélisation du comportement de l'acier et avons présenté deux lois de comportements à variables internes : une loi élastoplastique parfaite de *Von-Mises* pour le cas de chargements monotones croissants et une loi plastique anisotrope de *Hill* permettant la modélisation du comportement des lits d'armatures croisées existant dans les structures coques en béton armé.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la modélisation du comportement du béton. Notre choix s'est porté sur le modèle élastoplastique de *Willam-Warnke* à 3 paramètres pour le cas des chargements monotones croissants. Une première extension de ce modèle à un modèle élastoplastique avec endommagement a été effectuée; l'objectif étant de prendre en compte les effets du dommage à l'échelle macroscopique des structures sous chargements cycliques. A cette échelle, on considère que les variables plastiques du matériau modélisent la micro-fissuration, et la variation des caractéristiques élastiques l'effet du dommage dû à la refermeture incomplète des fissures. La construction du modèle élastoplastique endommageable consistait donc à faire dépendre les caractéristiques élastiques du matériau d'une variable plastique particulière : la déformation volumique anélastique $\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^p)$. Cette variable a été choisie comme variable d'endommagement car son augmentation correspond à une ouverture des microfissures et par conséquent à l'apparition et évolution du dommage à l'échelle macroscopique. Une seconde extension du modèle élastoplastique de *Willam-Warnke* à un modèle visco-élasto-plastique avec écrouissage visqueux, a été montrée. Ce modèle permet de rendre compte du comportement du béton en dynamique rapide. Pour cela, un écrouissage non-plastique, ou plus précisément visqueux, traduisant directement au niveau macroscopique l'augmentation de résistance du béton observée à haute vitesse, a été formulé puis introduit.

Nous disposons ainsi de modèles de comportement :

- Pour l'acier : élastoplastique pour le cas de chargements monotones croissants et anisotrope pour les lits d'armatures croisés.
- Pour le béton : élastoplastique pour le cas de chargements monotones croissants, élastoplastique couplé à l'endommagement pour le cas de chargements cycliques, et visco-élasto-plastique avec écrouissage visqueux pour les bétons en dynamique rapide.

Enfin, pour le traitement numérique de ces modèles, nous avons opté pour l'algorithme explicite de projection dans l'itération. Ce choix s'explique par le fait que l'utilisation de l'algorithme implicite de projection dans l'incrément conduit à des temps de calcul importants vu la résolution d'un système de plusieurs équations à chaque itération locale. De plus, cet algorithme impose le calcul des dérivées secondes de la fonction de charge f , comme nous l'avons constaté dans le cas de la plasticité parfaite, ce qui peut être extrêmement fastidieux et peut conduire à des problèmes de convergence pour certains critères plastiques (notamment ceux dépendant de l'angle de Lode comme le critère de *Willam-Warnke*).

CHAPITRE 3

EXEMPLES DE VALIDATION NUMERIQUE



3-0. Introduction

Les développements effectués lors des chapitres précédents sont mis en oeuvre au sein du code de calcul par éléments finis CESAR-LCPC (*Humbert, 1989*).

Dans ce chapitre, nous indiquons brièvement à quel niveau de ce code nos développements ont été intégrés. Nous validons ensuite notre approche à l'échelle des structures de coques en acier, béton et béton armé, au travers d'exemples de validations numériques.

Pour chaque exemple présenté, les solutions numériques obtenues sont, dans la mesure des publications existantes, comparées à des solutions de référence d'origine analytique, numérique ou expérimentale. Enfin, et pour tous les exemples exposés, l'hypothèse des petites déformations est prise en compte.

Cinq tests seront successivement évoqués au cours de ce chapitre :

- l'étude d'une coque sphérique en matériau élastoplastique parfait type Von-Mises, soumise à son poids propre puis à une charge concentrée.
- l'étude d'une coque cylindrique en matériau élastoplastique parfait soumise à son poids propre.
- l'étude d'une dalle circulaire en béton sous pression uniforme.
- l'étude, dans les domaines statique et dynamique, de dalles circulaires en béton normal et à haute performance renforcées par un treillis soudé en acier.
- l'étude du flambement linéaire d'une colonne.

Pour chaque test présenté, des graphes permettant de vérifier l'accord des solutions numériques par rapport aux solutions de référence, sont proposés. A partir de ces résultats, nous précisons le domaine d'application ainsi que les limites des outils proposés.

3-1. Présentation du code de calcul par éléments finis CESAR-LCPC

Le code de calcul CESAR-LCPC est un programme général de calcul par la méthode des éléments finis, particulièrement adapté à la résolution des problèmes de génie civil et de génie industriel : calcul des structures, mécanique des sols et des roches, thermique, hydrogéologie (Humbert, 1989, Magnan, 1997 et Itech, 1997).

CESAR-LCPC désigne l'ensemble formé par : le pré-processeur *MAX* permettant la constitution des données nécessaires (maillage et jeu de données), le programme de calcul par éléments finis proprement dit *CESAR* qui effectue la résolution numérique du problème posé et le post-processeur *PEGGY* permettant, par visualisation sur écran graphique, une analyse des résultats du calcul par éléments finis effectué par *CESAR* (cf. *figure 3-1*).

Le programme de calcul *CESAR* effectue la résolution numérique du problème posé en offrant à l'utilisateur un choix de modules d'exécution spécialisés. Chaque module permet de résoudre un problème particulier en : élasticité linéaire, élastoplasticité, dynamique linéaire, diffusion, thermique transitoire, consolidation... Ces modules, récemment enrichis par le module de dynamique non-linéaire développé par Sercombe (Sercombe, 1997), font appel à la bibliothèque des familles d'éléments finis du programme. En particulier, notre intervention a consisté à y intégrer la famille d'éléments de coques multicouches à 3, 4, 6 et 8 noeuds (*famille15*) et à l'adapter avec différents modules (*figure 3-2*) et lois de comportement.

Les familles d'éléments font appel au schéma d'intégration des contraintes conduisant à la bibliothèque standard des modèles de comportement. C'est à ce niveau que se trouvent les lois de comportement présentés au chapitre 2. Une cohérence a donc été établie entre la famille de coques multicouches et ces lois de comportement (*figure 3-3*).

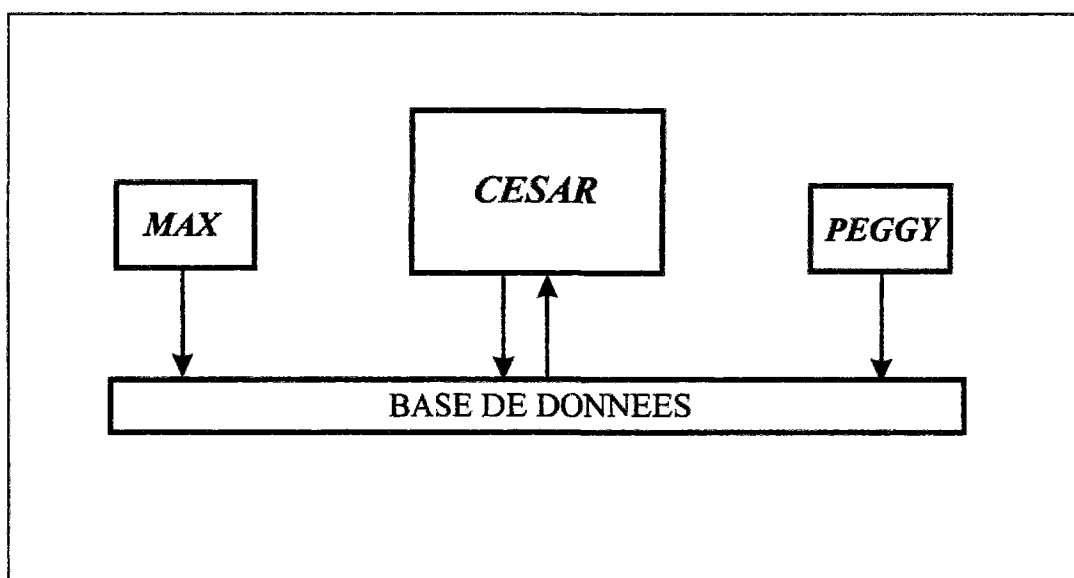


Figure 3-1 : Organisation du code de calcul par éléments CESAR-LCPC

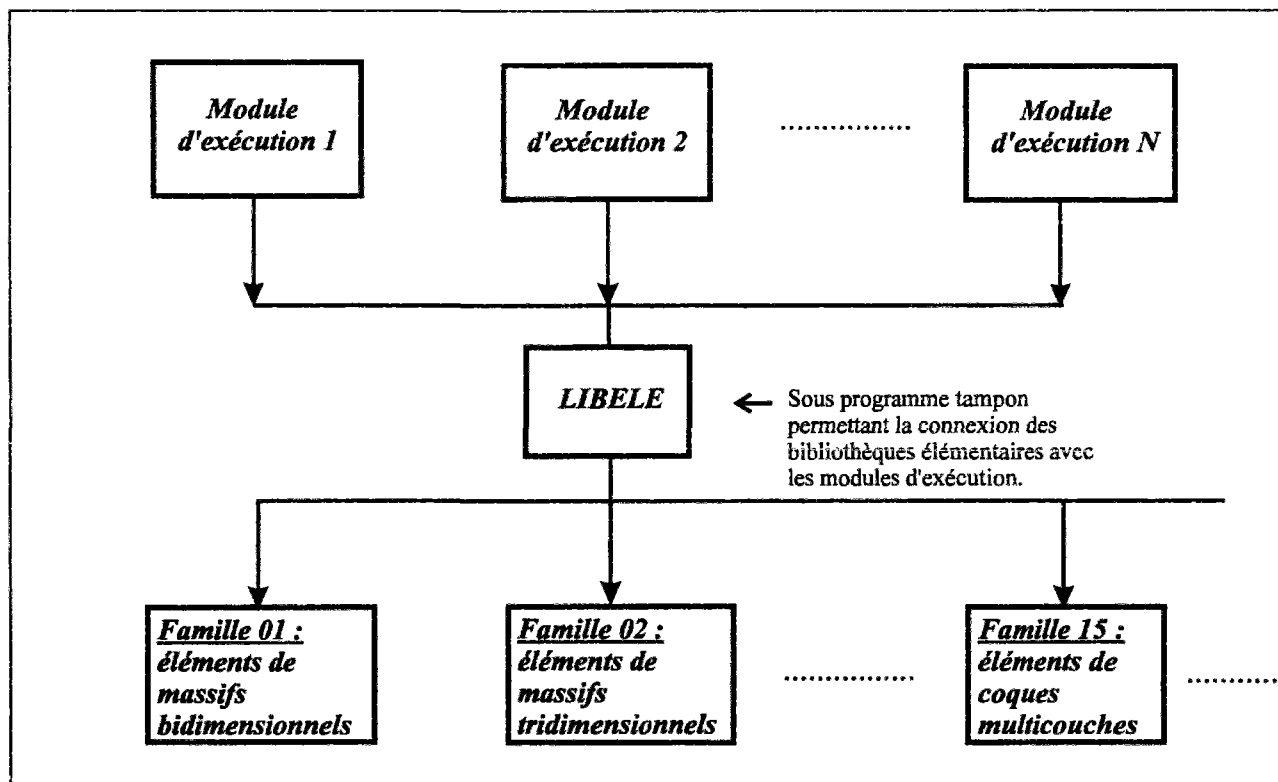


Figure 3-2 : Intégration de la famille 15 dans CESAR-LCPC et adaptation avec les différents modules d'exécution.

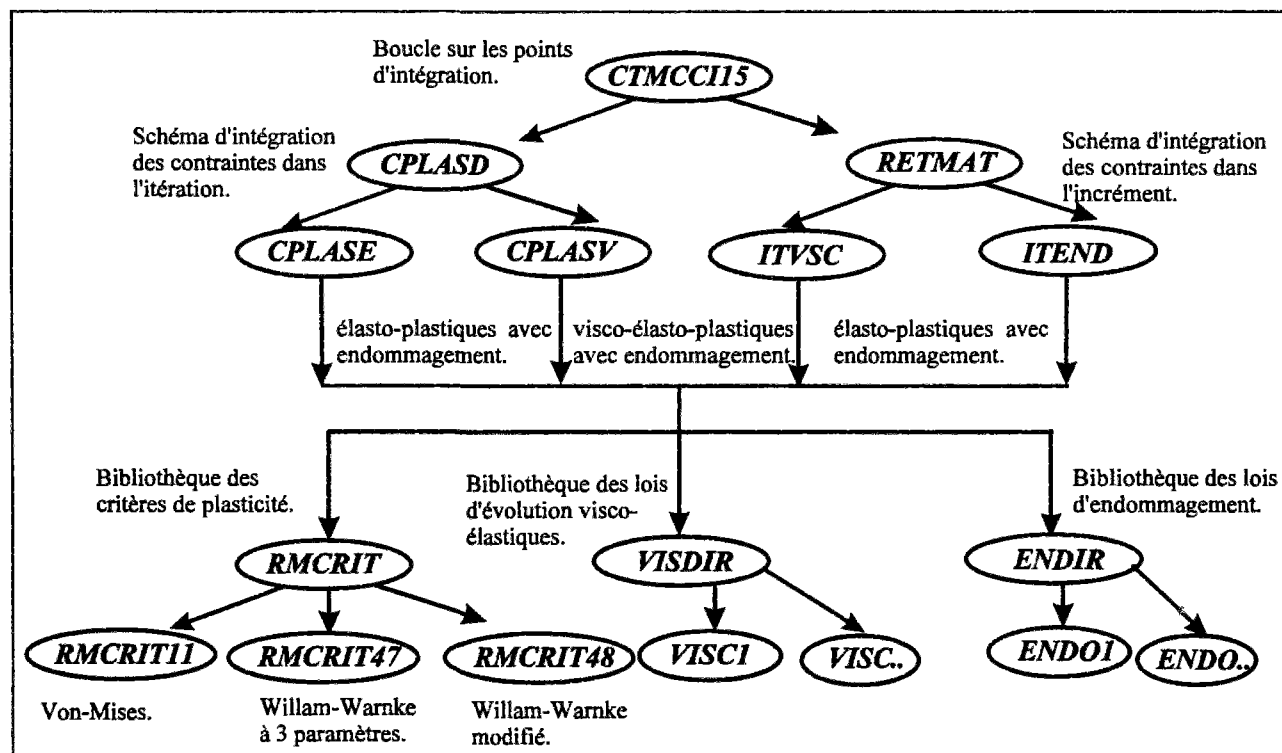


Figure 3-3 : Liaison entre la famille 15 et la bibliothèque des lois de comportement

3-2. Exemples de validations numériques

Après avoir brièvement présenté l'architecture générale du programme de calcul par éléments finis CESAR-LCPC et indiqué à quel niveau nos développements ont été intégrés, nous présentons à présent une série de tests de validations numériques. Les résultats obtenus seront comparés soit à des résultats numériques extraits de la littérature soit à des résultats expérimentaux.

3-2-1. Coque sphérique sous chargement statique

L'exemple qui suit est celui d'une coque sphérique sous chargement statique. Cet exemple classique, testé par Owen et Figueiras (*Owen et al., 1983-a et 1983-b*) et De Borst et Feenstra (*De Borst et al., 1990*), permet de se familiariser pour commencer avec l'approche multicouche.

3-2-1-1. Géométrie et modélisation

La coque, présentée *figure 3-4*, a une longueur de $L = 6\text{m}$ et une épaisseur de $h = 0.2\text{m}$. Pour des raisons de double symétrie, nous ne modélisons qu'un quart de la coque et appliquons des conditions de symétrie. Les supports sont considérés comme articulés. Le maillage comporte 9 éléments de coque multicouche à 8 noeuds et la section est discrétisée en 8 couches.

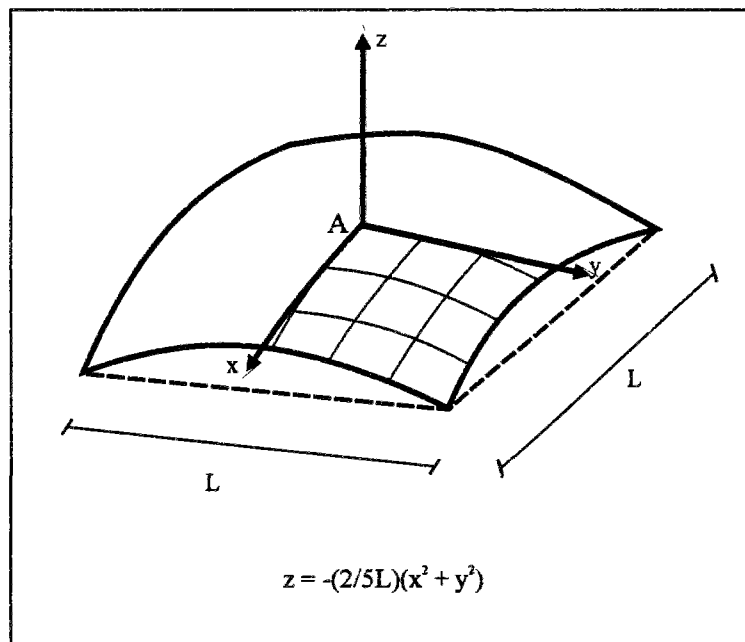


Figure 3-4 : Coque sphérique sous chargement statique

3-2-1-2. Matériau

On utilise pour le matériau considéré, une loi élastoplastique parfaite de *Von-Mises* ayant pour paramètres (cf. 2-2-1) :

$$E = 30000 \text{ MPa}, \nu = 0.3, f_y = 30 \text{ MPa}.$$

3-2-1-3. Chargements

On applique d'abord une charge concentrée verticale au centre de la coque (point A). Le chargement est alors augmenté d'une façon croissante jusqu'à la ruine. On effectue ensuite le même test en soumettant la coque cette fois à son poids propre. Chacune de ces sollicitations est décomposée en seize incréments de chargement.

3-2-1-4. Résultats

Les *figures 3-5 et 3-6* présentent respectivement le maillage déformé de la première analyse numérique et les résultats sous forme d'une courbe charge appliquée - déplacement vertical au centre de la coque (point A). Ces résultats sont comparés avec ceux obtenus par Owen et Figueiras (*Owen et Figueiras, 1983-b*) qui utilisent un maillage de 9 éléments de coques multicouches avec 8 couches dans l'épaisseur, ainsi que ceux présentés par De Borst (*De Borst et al., 1990*) sur un maillage de 9 éléments de coque dégénérés à 8 noeuds avec 2×2 points d'intégration dans le plan et 7 dans l'épaisseur. Une bonne concordance est alors observée.

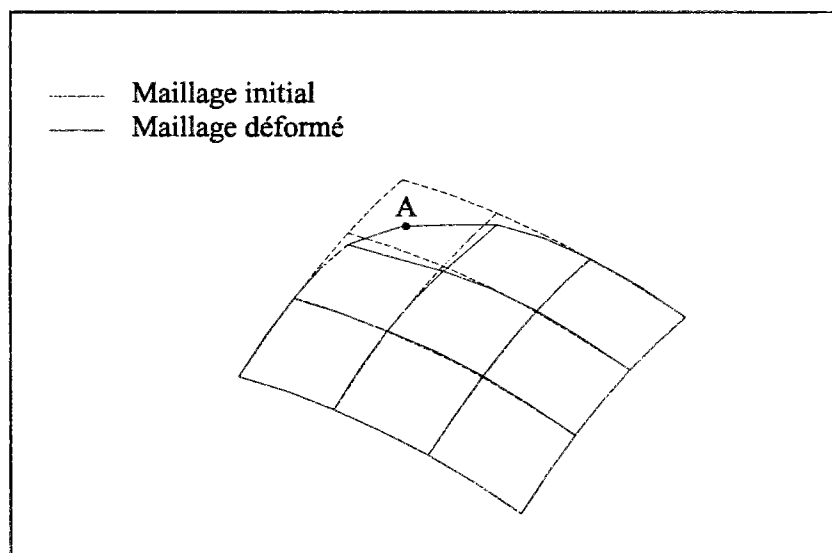


Figure 3-5 : Maillage déformé de la coque soumise au chargement vertical appliqué en son centre

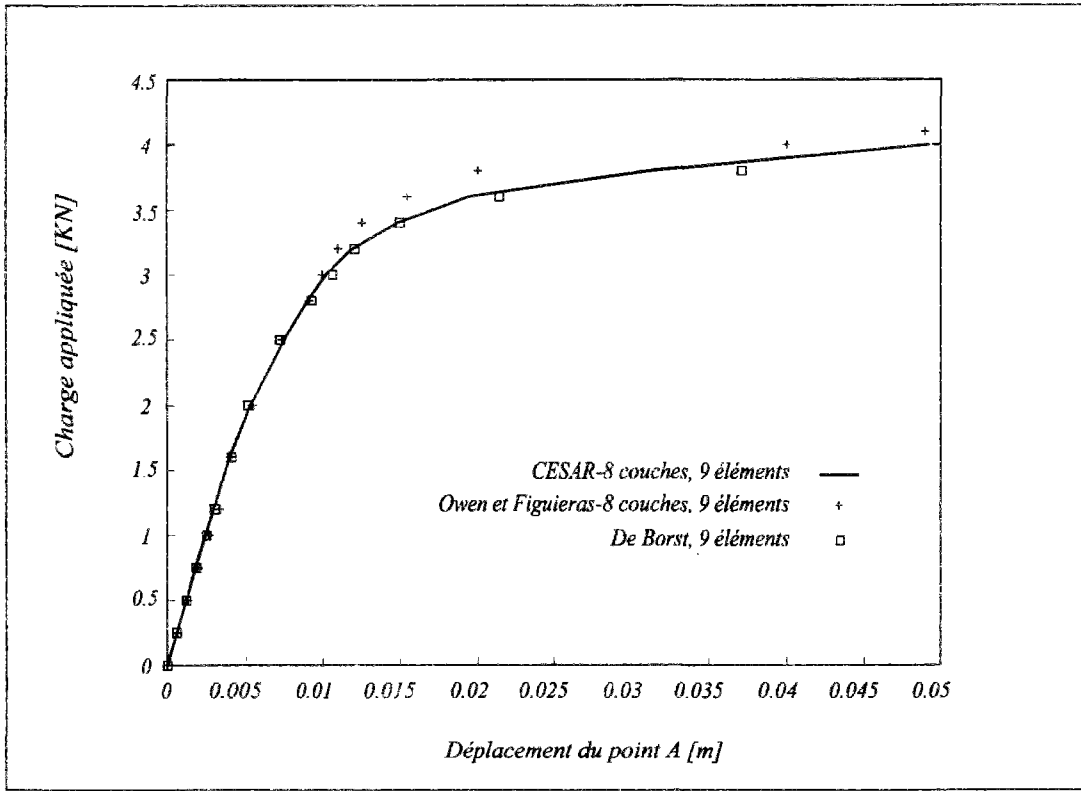
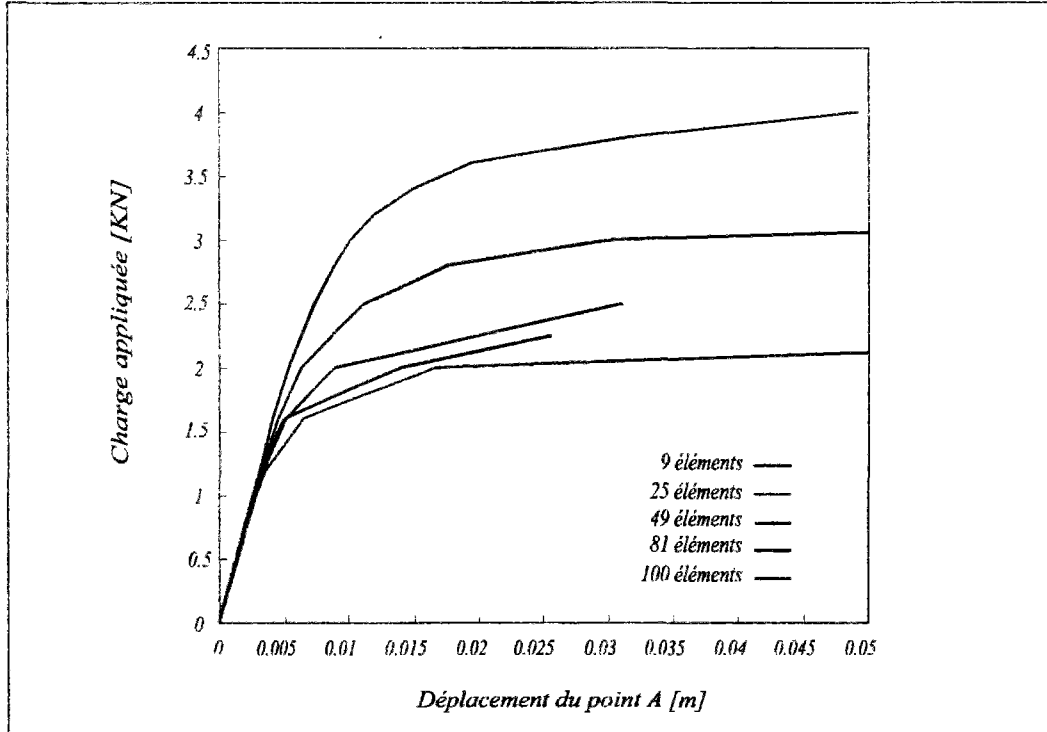


Figure 3-6 : Courbe charge appliquée - déplacement du point A

Figure 3-7 : Courbe charge appliquée-déplacement du point A
- Influence du maillage -

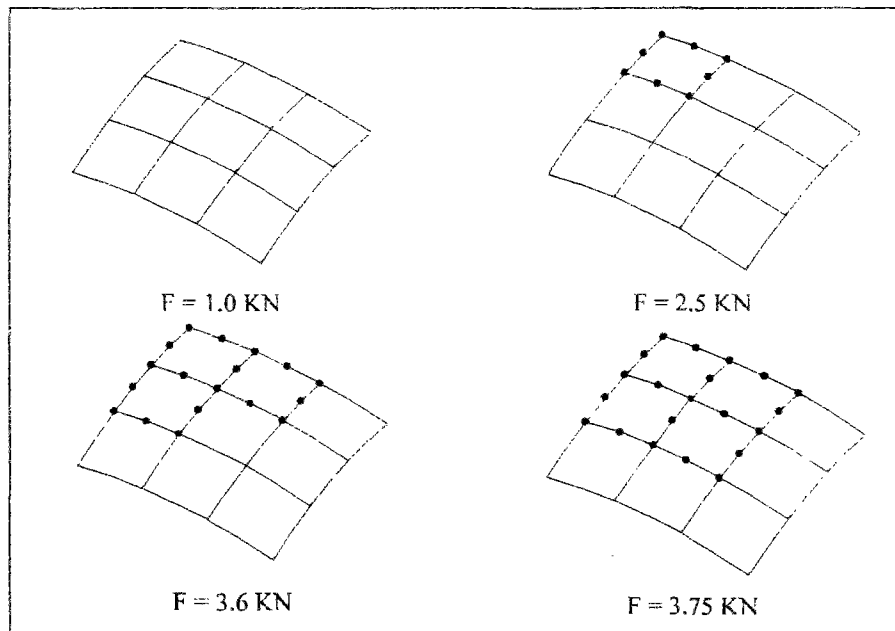


Figure 3-8 : Etendue des zones plastiques
- coque soumise au chargement vertical appliqué en son centre -

Notons toutefois la dépendance de la réponse vis-à-vis du nombre d'éléments. Comme le montre la **figure 3-7**, par rapport à la solution de référence obtenue avec un maillage de 9 éléments, la charge ultime diminue de manière considérable avec l'augmentation du nombre d'éléments.

Enfin, la **figure 3-8** représente l'étendue des zones plastiques sur le quart de la coque, et ce, pour différents niveaux de chargement.

La seconde analyse consiste à considérer la coque soumise à son poids propre. La déformée ainsi que les valeurs du déplacement vertical du point A en fonction du niveau de sollicitation sont respectivement tracées en **figures 3-9 et 3-10**. Nous constatons que les résultats obtenus sont en très bon accord avec les solutions numériques proposées par Owen et Figueiras (*Owen et Figueiras., 1983-a*) sur un maillage de 9 éléments de coque dits "semiloof"^(*) avec 2*2 points d'intégration de Gauss, ainsi que celles proposées par ces mêmes auteurs (*Owen et Figueiras., 1983-b*) en utilisant 9 éléments de coque multicouches avec 8 couches dans l'épaisseur.

Nous nous sommes ensuite intéressés à l'influence du nombre de couches sur la réponse. La **figure 3-11** présente les résultats obtenus sur un maillage de 9 éléments avec différents nombres de couches dans la section : 2, 4, 6, 8 et 10 couches. Nous constatons clairement que plus le nombre de couche augmente, plus les résultats s'améliorent et deviennent plus précis. Toutefois, pour cet exemple, 4 couches suffisent pour obtenir une réponse correcte et proche des solutions de référence précédentes.

Enfin, et de même que pour la première analyse, nous avons représenté l'étendue des zones plastiques sur le quart de la coque pour différents niveaux de chargement (**figure 3-12**).

(*) L'élément *semiloof* est un élément particulier faisant partie de la famille des éléments de type Kirchhoff discret. Il a été proposé en 1976 par Irons (Irons, 1976) et décrit dans les références (Irons, 1976; Irons et al., 1980; Razzaque, 1981 et Hellen, 1986).

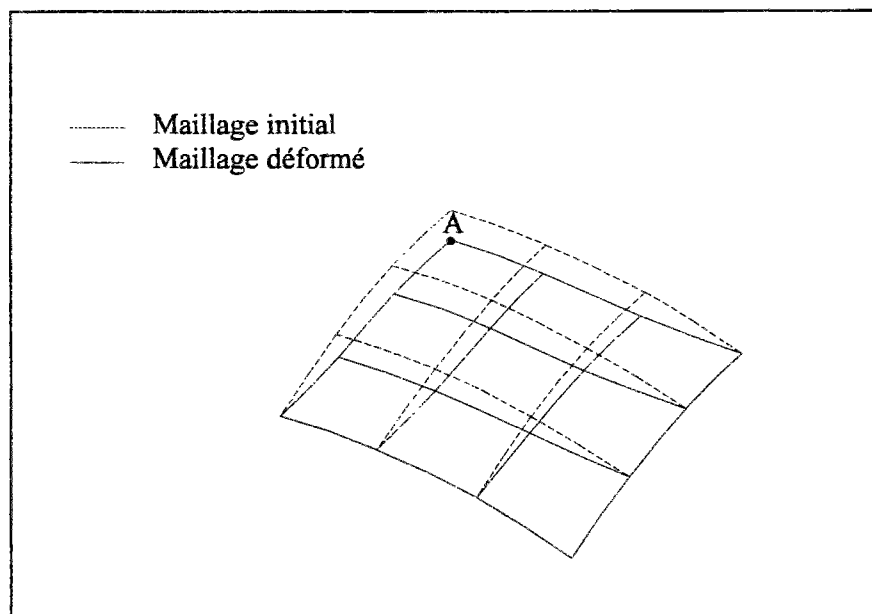


Figure 3-9 : Maillage déformé de la coque soumise à son poids propre

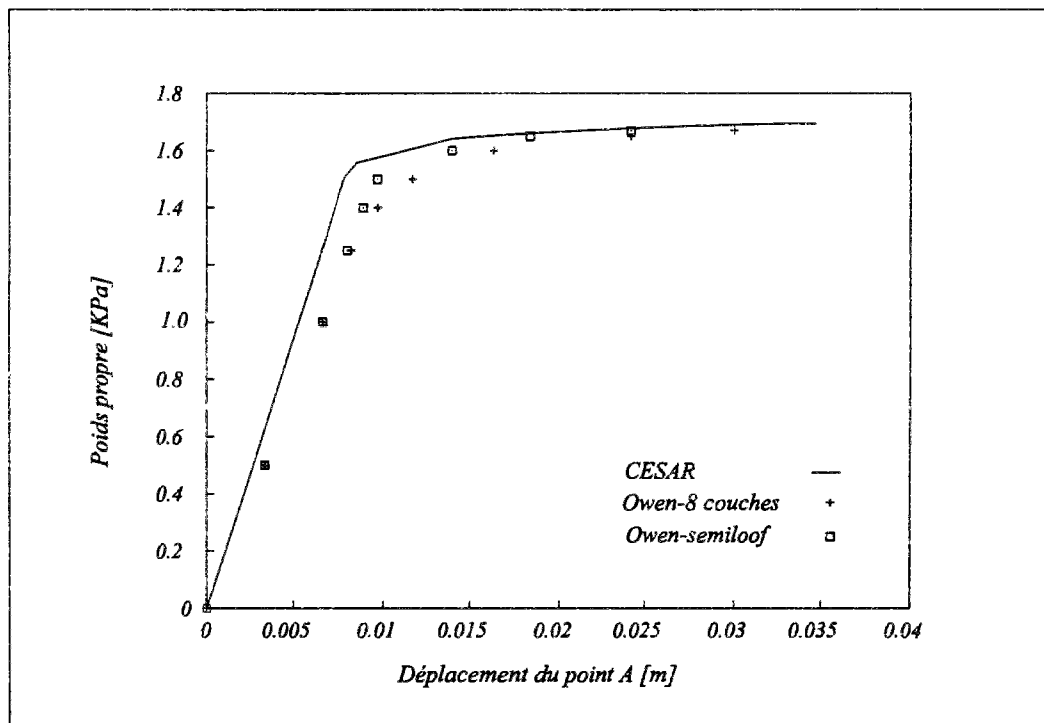


Figure 3-10 : Courbe poids propre - déplacement du point A

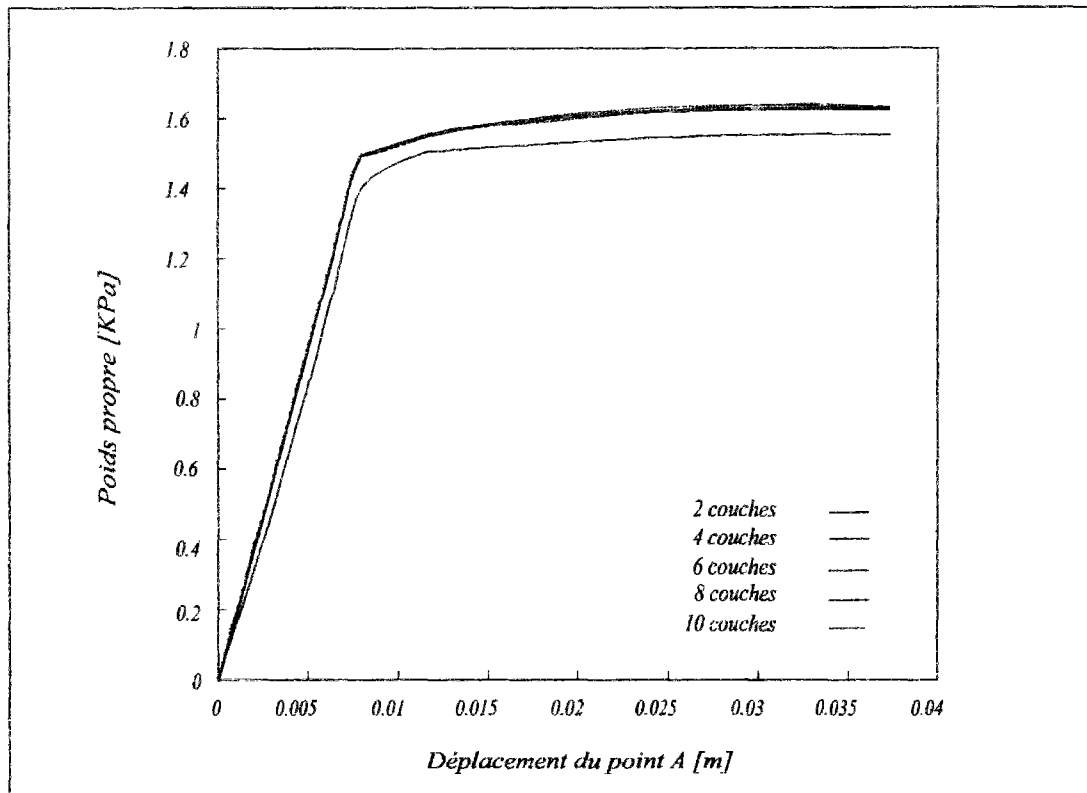


Figure 3-11 : Courbe poids propre-déplacement du point A
- Influence du nombre de couches- Maillage à 9 éléments

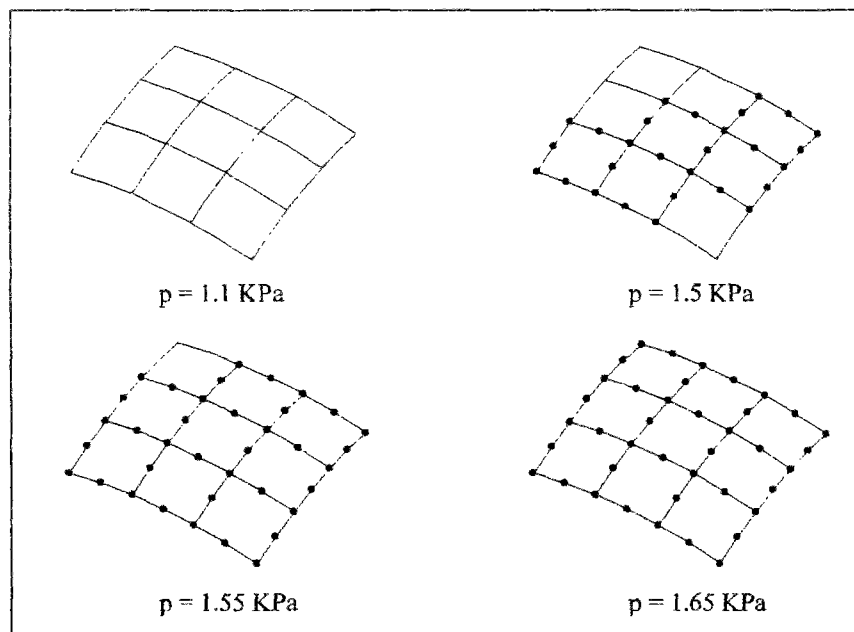


Figure 3-12 : Etendue des zones plastiques
- coque soumise à son poids propre -

En conclusion de ces premiers exemples utilisant une loi de comportement simple, nous retiendrons :

- Une dépendance non-négligeable de la solution vis-à-vis du nombre d'éléments.
- Une faible dépendance de la réponse vis-à-vis du nombre de couches.

3-2-2. Coque cylindrique sous poids propre

L'exemple proposé concerne une coque cylindrique soumise à son poids propre. Cet exemple de validation a également été testé par Owen et Figuieras (*Owen et al., 1983-a et 1983-b*) et De Borst et Feenstra (*De Borst et al., 1990*).

3-2-2-1. Géométrie et modélisation

La coque, présentée sur la *figure 3-13*, a une longueur de $2L = 15.2\text{m}$ et une épaisseur de $h = 0.076\text{m}$. Les bords longitudinaux de cette coque sont libres tandis que les bords courbes sont simplement appuyés (arcs AB et DE). Pour des raisons de double symétrie, seul un quart de la coque est modélisé, et les conditions de symétrie appliquées. Un maillage de 16 éléments de coque multicouches à 8 noeuds est utilisé et la section est discrétisée en 8 couches.

3-2-2-2. Matériau

Trois cas sont considérés :

- *Premier Cas* : le matériau est isotrope. Une loi élastoplastique parfaite de *Von-Mises* est utilisée (cf. 2-2-1).
- *Deuxième Cas* : le matériau est anisotrope. Une loi de *Hill* est utilisée (cf. 2-2-2) tout en supposant l'élasticité isotrope.
- *Troisième Cas* : le matériau est anisotrope. Une loi de *Hill* est utilisée (cf. 2-2-2) tout en supposant l'élasticité isotrope.

Les différentes caractéristiques mécaniques correspondant à chaque cas sont indiquées dans le *tableau 3-1*.

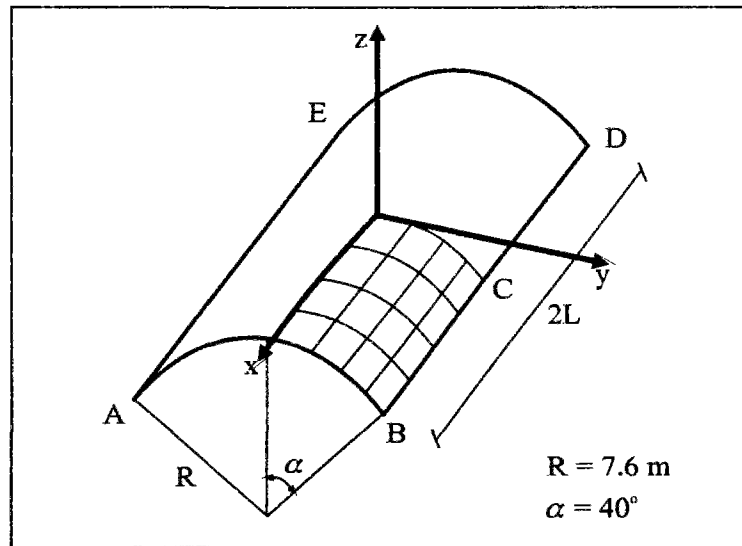


Figure 3-13 : Coque cylindrique sous poids propre

Cas	Modèle	Caractéristiques matérielles	Paramètres du modèle
premier	<i>Von-Mises</i>	$E = 21000 \text{ MPa}$, $\nu = 0$, $f_y = 8.4 \text{ Mpa}$	$R = 2.425 \text{ MPa}$
deuxième	<i>Hill</i>	$E = 21000 \text{ MPa}$, $\nu = 0$ Résistances : $\bar{\sigma} = 4.2 \text{ MPa}$ $\sigma_{11} = 8.4 \text{ MPa}$ $\sigma_{22} = 4.2 \text{ MPa}$ $\sigma_{33} = \sigma_{22}$ $\sigma_{12} = 2.4 \text{ MPa}$ $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{12}$	$\alpha_{12} = 0.25$ $\alpha_{23} = 1.75$ $\alpha_{31} = 0.25$ $\alpha_{44} = 1.021$ $\alpha_{55} = 1.021$ $\alpha_{66} = 1.021$
troisième	<i>Hill</i>	$E = 21000 \text{ MPa}$, $\nu = 0$ Résistances : $\bar{\sigma} = 4.2 \text{ MPa}$ $\sigma_{11} = 4.2 \text{ MPa}$ $\sigma_{22} = 8.4 \text{ MPa}$ $\sigma_{33} = \sigma_{11}$ $\sigma_{12} = 2.4 \text{ MPa}$ $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{12}$	$\alpha_{12} = 0.25$ $\alpha_{23} = 0.25$ $\alpha_{31} = 1.75$ $\alpha_{44} = 1.021$ $\alpha_{55} = 1.021$ $\alpha_{66} = 1.021$

Tableau 3-1 : Caractéristiques matérielles et paramètres des modèles considérés

3-2-2-3. Chargement

La coque est soumise à son poids propre. Le chargement est alors augmenté d'une façon croissante jusqu'à la ruine. 11 incréments de chargement sont utilisés dans le calcul.

3-2-2-4. Résultats

L'évolution du déplacement vertical du point C en fonction de l'intensité du poids propre est tracée pour les 3 cas considérés respectivement en *figure 3-15*, *3-16* et *3-17*, puis comparée aux solutions numériques de référence proposées par Owen et Figuierras (*Owen et al., 1983-a et 1983-b*) et De Borst et Feenstra (*De Borst et al., 1990*).

Owen et Figuierras ont utilisé pour cette étude différents maillages : un maillage de 6 éléments avec 6 couches dans l'épaisseur et un maillage de 6 éléments semiloof avec 2*2 points d'intégration de Gauss. De Borst et Feenstra ont utilisé un maillage de 16 éléments de coque dégénérés à 8 noeuds avec 2*2 points d'intégration de Gauss dans le plan et 5 points d'intégration de Simpson dans l'épaisseur.

Les résultats obtenus par nos calculs ainsi que les solutions numériques de références concordent correctement. La sensible différence peut s'expliquer par le fait que les maillages ainsi que les formulations adoptées ne sont pas identiques. Nous remarquons également que, pour les deux cas où le matériau est anisotrope ($\sigma_{11} = 2\bar{\sigma}$ et $\sigma_{22} = 2\bar{\sigma}$), les courbes poids propre - déplacement vertical du point C diffèrent considérablement. Toutefois, la charge ultime de rupture est pratiquement identique pour ces deux cas. Ceci ne peut être constaté sur les résultats obtenus par Owen et Figuierras car leurs calculs ont été interrompus avant d'atteindre la charge ultime.

Les *figure 3-18* et *3-19* montrent, pour les deux cas anisotropes considérés, l'influence du nombre de couches sur les réponses. De même que pour l'exemple précédent (cf. *3-2-1-4*), nous remarquons que la réponse s'améliore avec l'augmentation du nombre de couches. Toutefois, peu de différence existe entre la réponse obtenue avec une discrétisation de 4 couches et celle avec 10 couches. Ainsi, 4 couches suffisent pour obtenir une réponse correcte et proche des solutions de référence précédentes.

Pour finir, nous avons représenté pour les trois cas étudiés, l'étendue des zones plastiques sur le quart de la coque selon différents niveaux de chargement (*figures 3-20*, *3-21* et *3-22*).

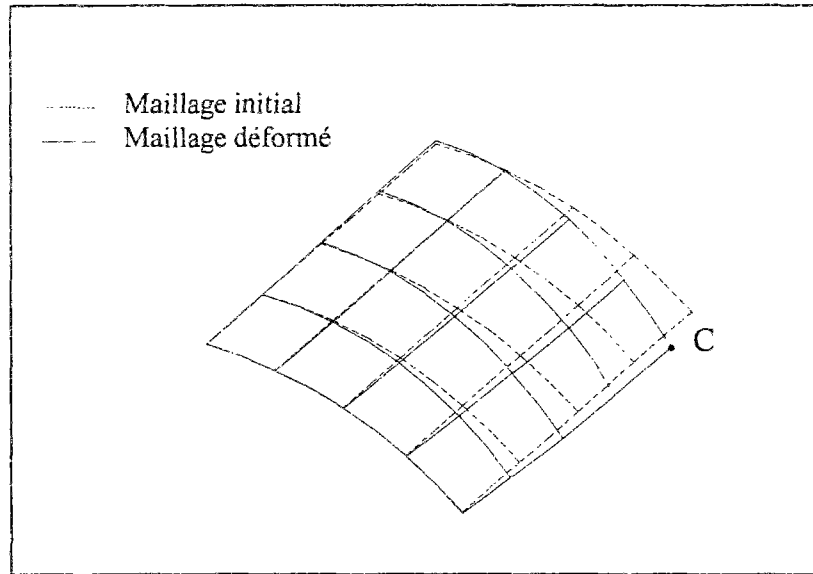
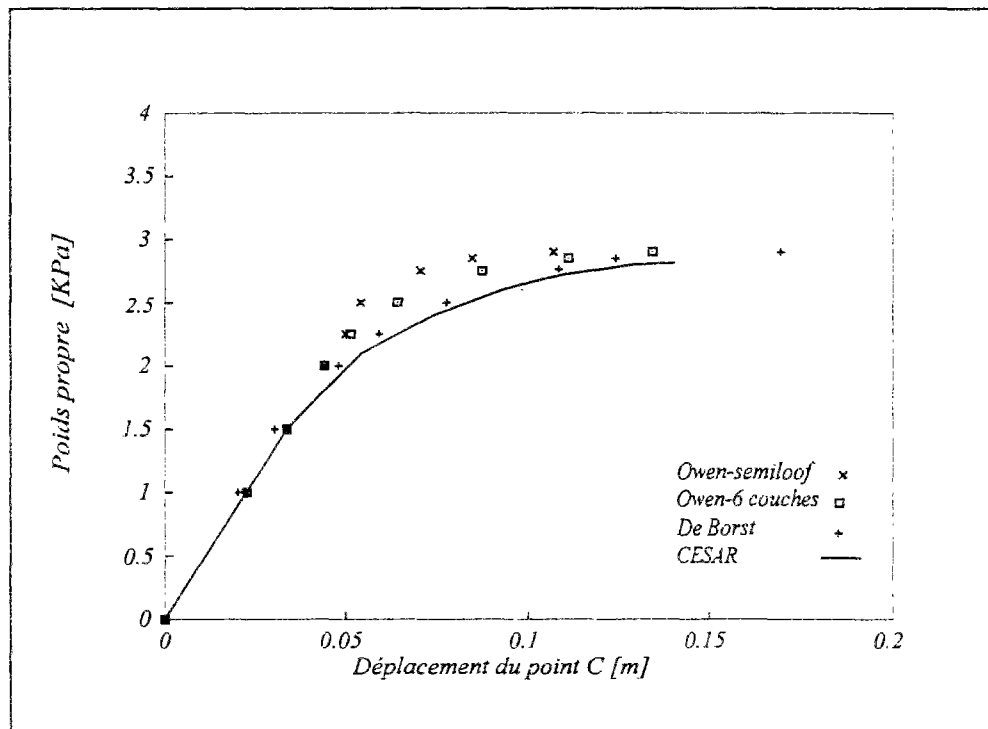


Figure 3-14 : Maillage déformé de la coque considérée

Figure 3-15 : Courbe poids propre-déplacement du point C
- Premier cas -

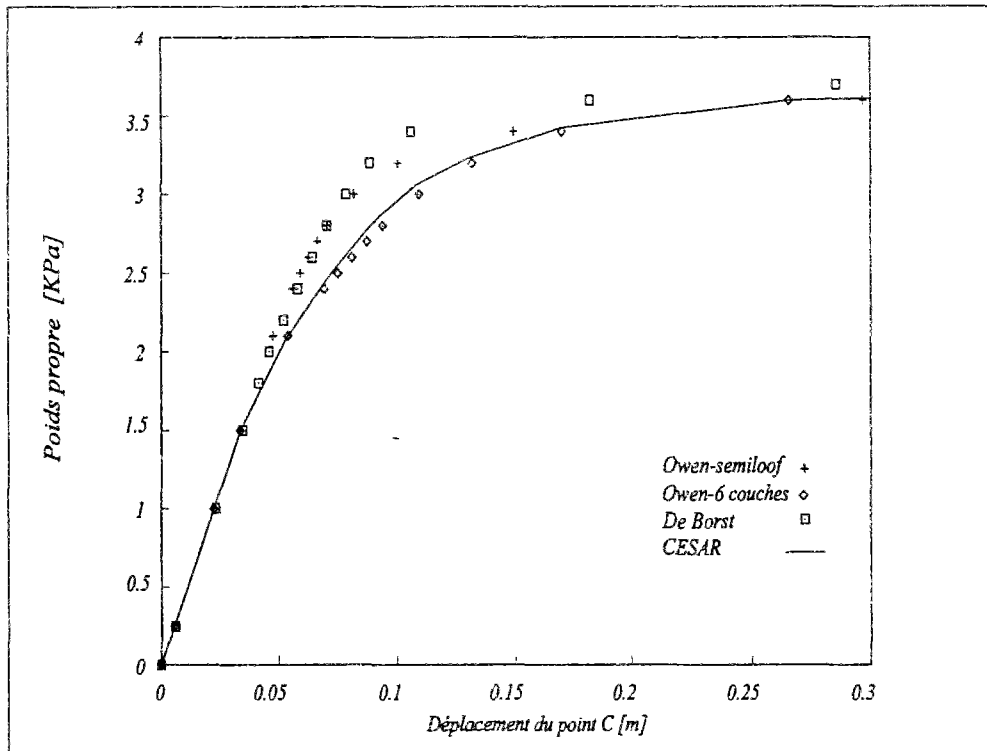


Figure 3-16 : Courbe poids propre-déplacement du point C - $\sigma_{11} = 2\bar{\sigma}$ -
- Deuxième cas -

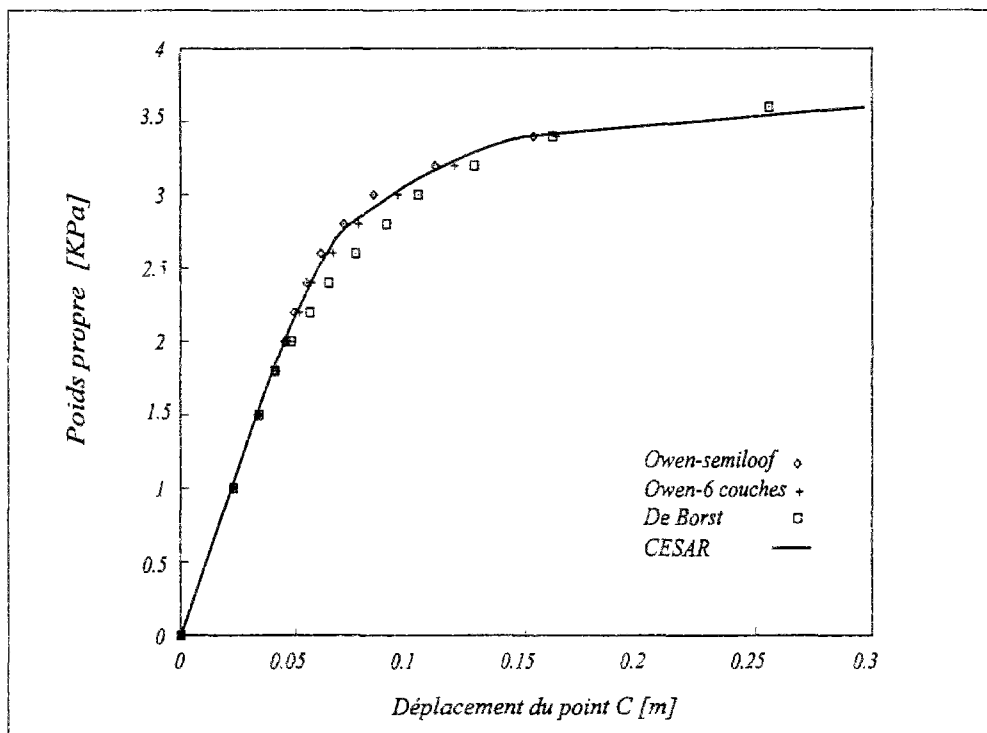


Figure 3-17 : Courbe poids propre-déplacement du point C - $\sigma_{22} = 2\bar{\sigma}$ -
- Troisième cas -

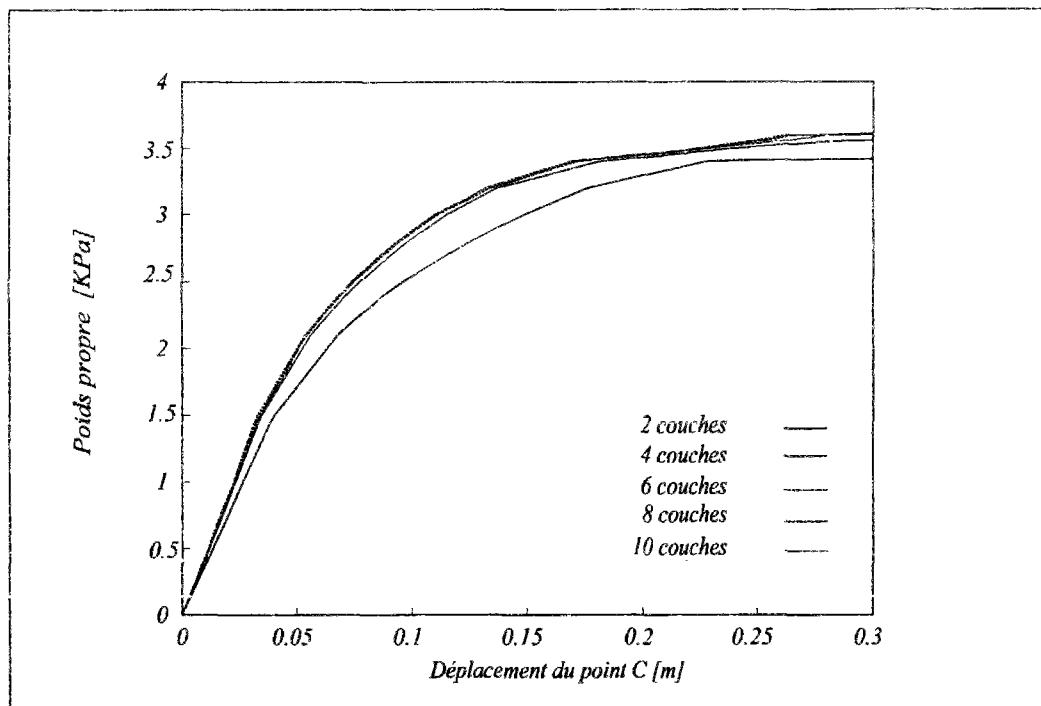


Figure 3-18 : Courbe poids propre-déplacement du point C - $\sigma_{11} = 2 \bar{\sigma}$ -
- Influence du nombre de couches -

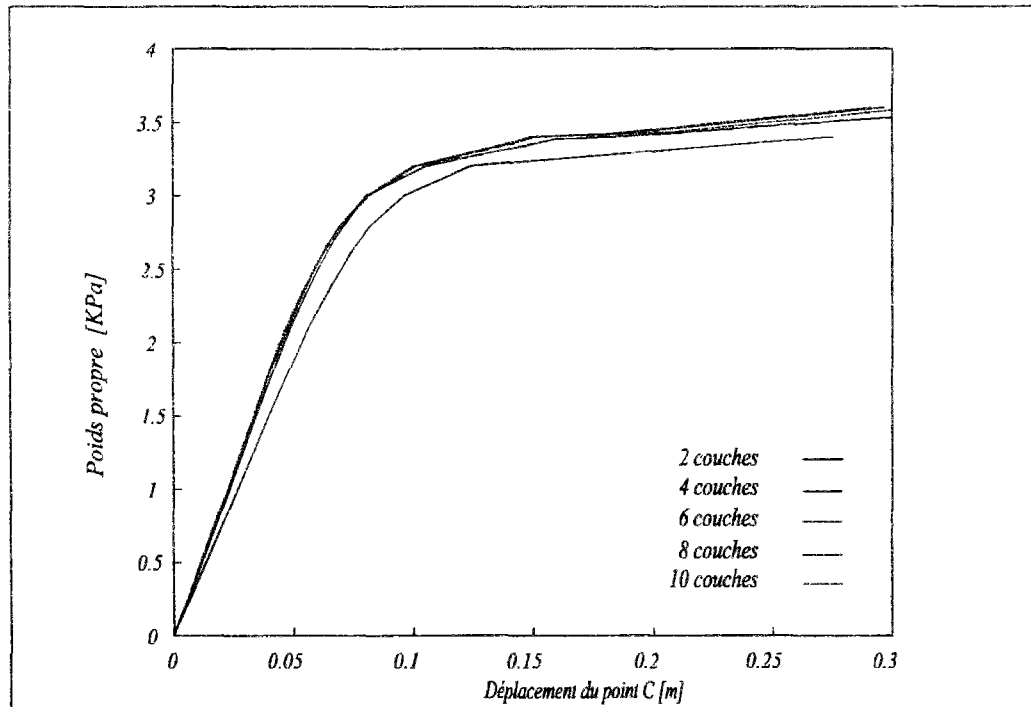


Figure 3-19 : Courbe poids propre-déplacement du point C - $\sigma_{22} = 2 \bar{\sigma}$ -
- Influence du nombre de couches -

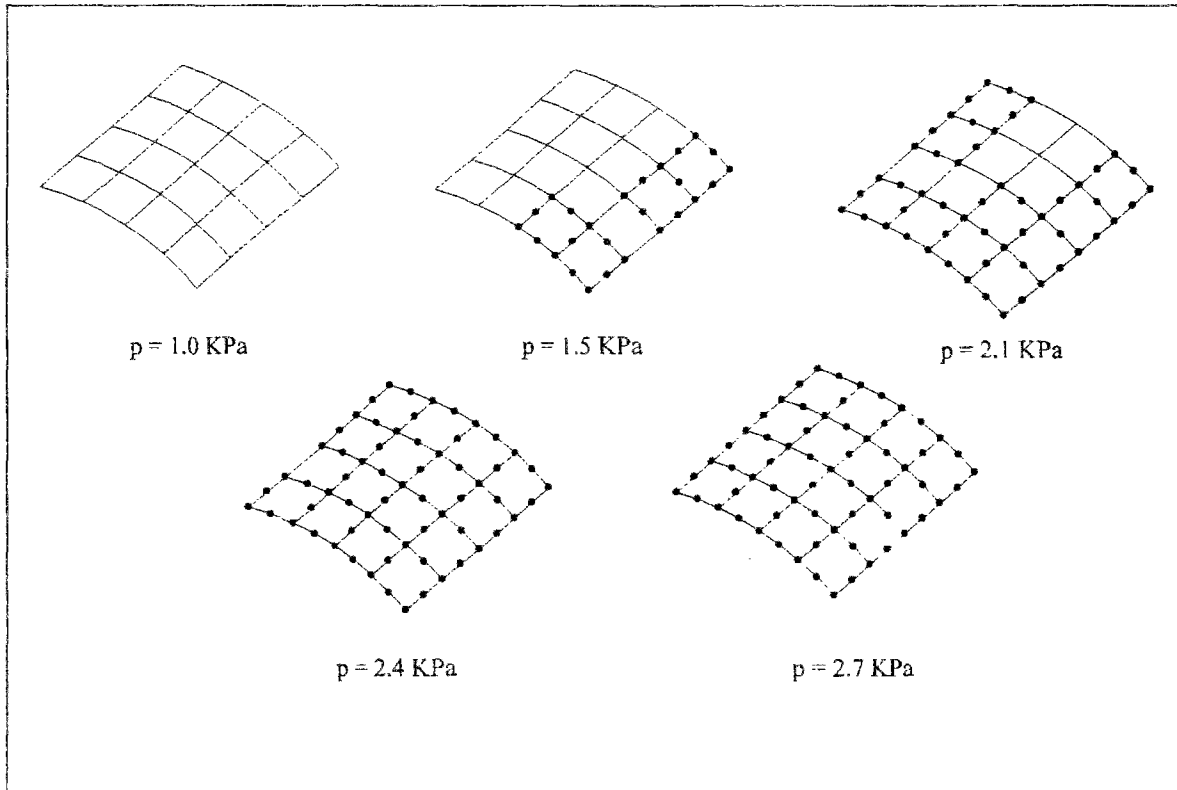


Figure 3-20 : Etendue des zones plastiques
-Premier cas-

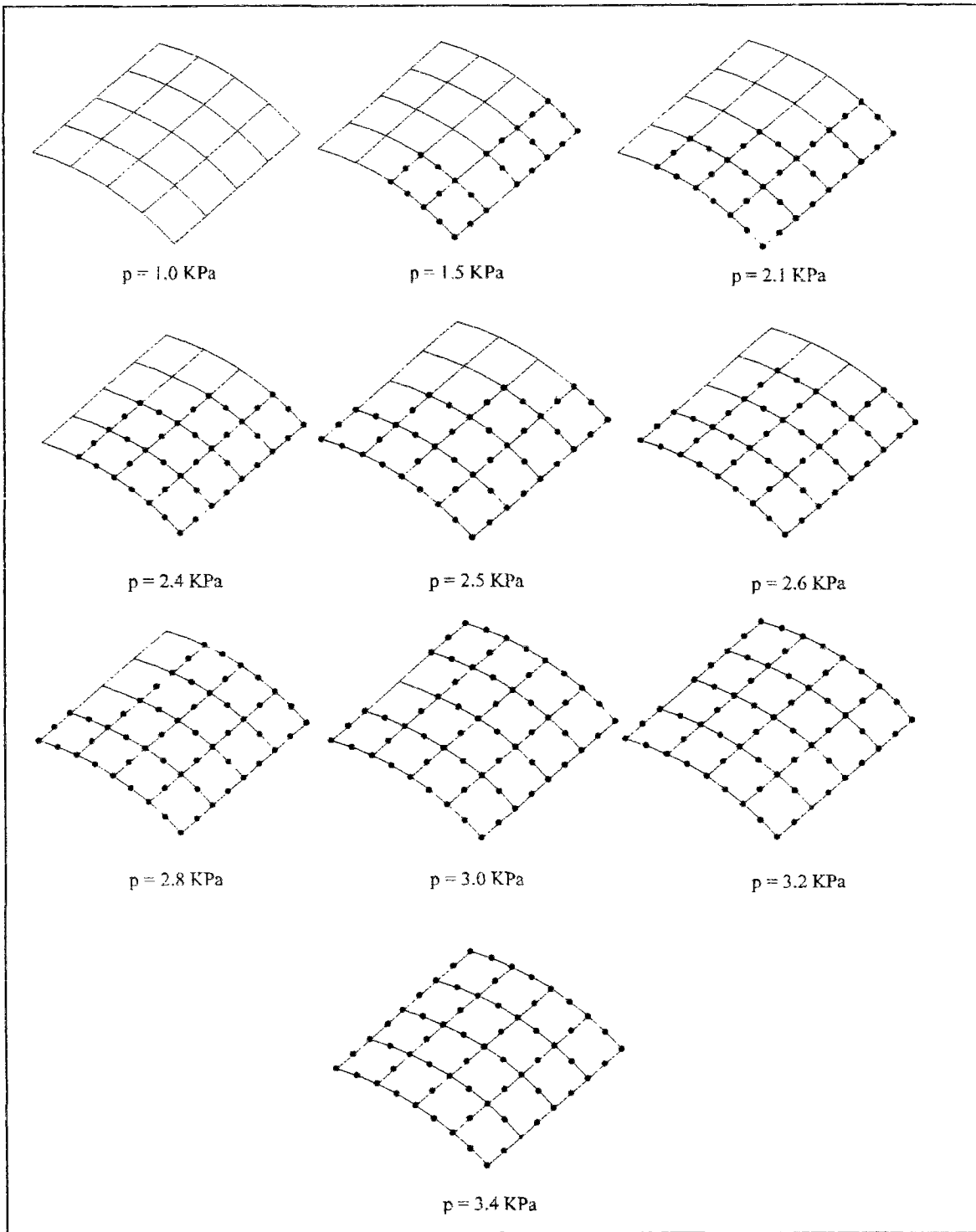


Figure 3-21 : Etendue des zones plastiques - $\sigma_{11} = 2 \bar{\sigma}$ -
-Deuxième cas-

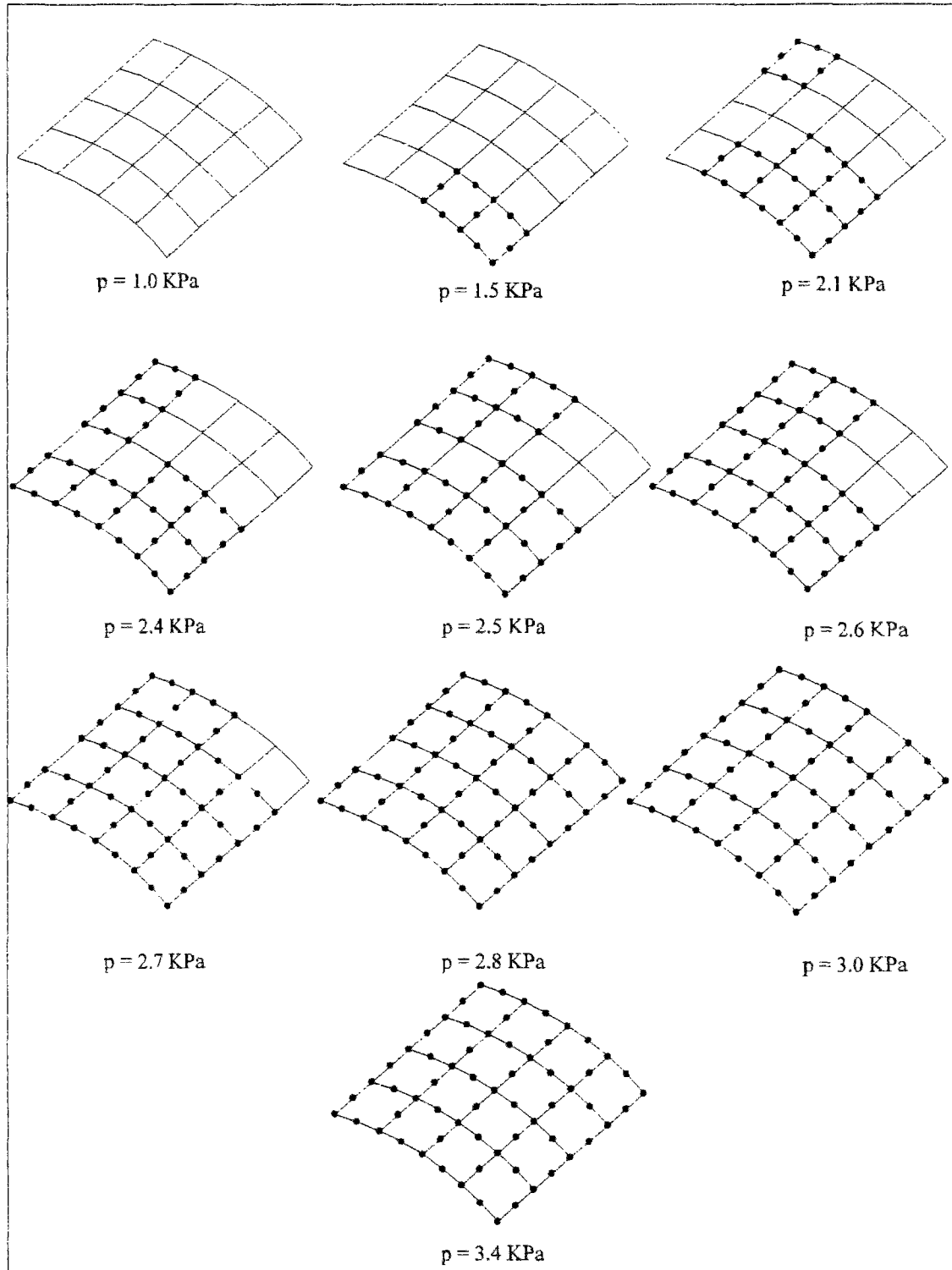


Figure 3-22 : Etendue des zones plastiques - $\sigma_{22} = 2 \bar{\sigma}$ -
-Troisième cas-

3-2-3. Etude d'une dalle circulaire en béton sous pression uniforme

L'exemple qui suit, présente les résultats d'une dalle en béton non-armé, chargée d'une pression uniforme à sa surface. Il est issu d'une série d'expériences effectuée par Toutlemonde pour la compréhension et modélisation des phénomènes physiques expliquant les effets de vitesse au sein du béton (Toutlemonde, 1995).

3-2-3-1. Géométrie et modélisation

La dalle considérée est circulaire de rayon $R = 45\text{cm}$ et d'épaisseur $h = 8\text{cm}$, simplement appuyée à 41cm de son centre sur tout le pourtour (figure 3-23). Cette dalle est discrétisée en 226 éléments de coque multicouche à 3 noeuds et sa section en 8 couches en béton. Par raison de symétrie, nous ne modélisons qu'un quart de la dalle et appliquons des conditions de symétrie (figure 3-24).

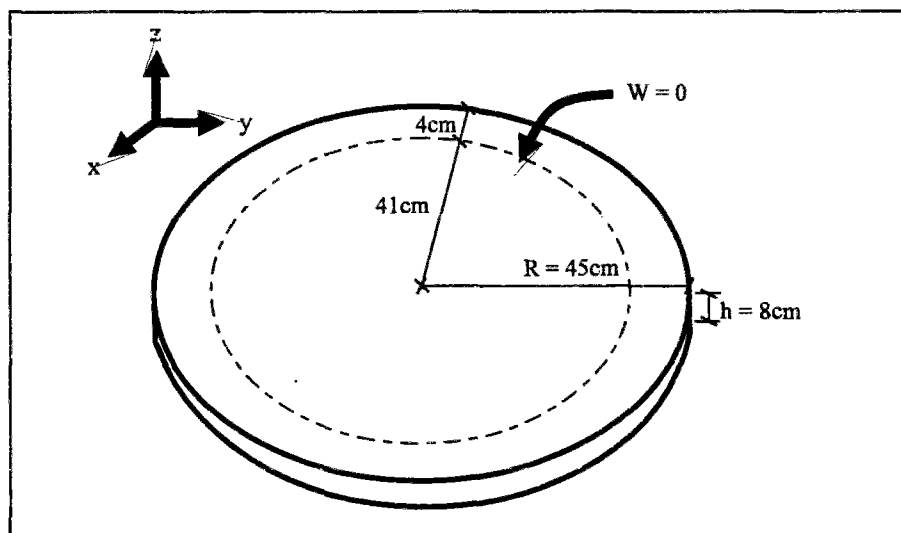


Figure 3-23 : Géométrie de la dalle circulaire considérée

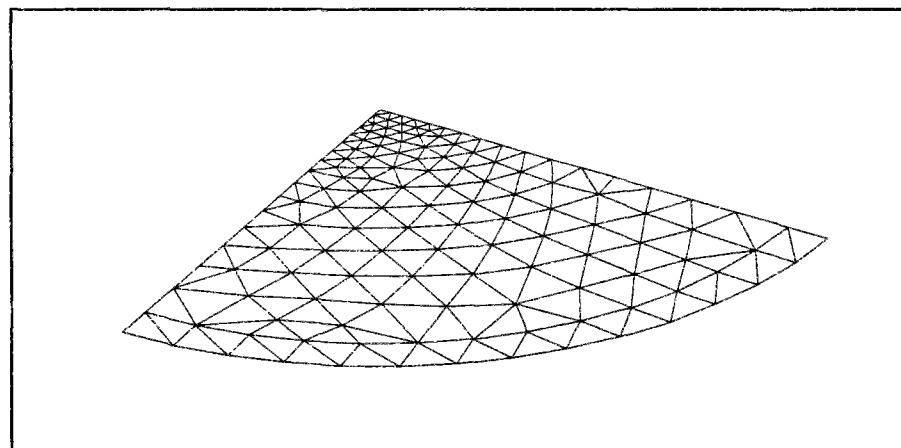


Figure 3-24 : Modélisation de la dalle en coques

3-2-3-2. Matériau

On utilise pour le matériau considéré (béton normal), une loi élastoplastique de *Willam-Warnke* à 3 paramètres avec écrouissage négatif (cf. 2-3-1). Les différentes caractéristiques mécaniques sont indiquées dans le *tableau 3-2*.

Modèle	Caractéristiques matérielles	Paramètres du modèle
Elasticité	$E = 39400 \text{ MPa}$, $\nu = 0.2$	$\rho = 2377 \text{ kg/m}^3$
<i>Willam-Warnke</i> à 3 paramètres	Résistances : $\sigma_c = 44.1 \text{ MPa}$ $\sigma_t = 3.55 \text{ MPa}$ $\sigma_{bc} = 1.15 \sigma_c$	$z_0 = 1.0$ $z_{ult} = 0.01$ $k = 7500$

Tableau 3-2 : Caractéristiques matérielles du béton normal et paramètres du modèle

3-2-3-3. Chargement

La dalle est soumise à une pression uniformément répartie. Le chargement est alors augmenté de façon monotone jusqu'à la rupture. 76 incréments de chargement sont utilisés dans le calcul.

3-2-3-4. Résultats

La *figure 3-25* illustre le maillage déformé de la dalle à un incrément donné. La *figure 3-26* présente quant à elle des résultats numériques de l'étude de la dalle sous forme de courbe pression appliquée - flèche au centre. Ces résultats sont comparés aux résultats d'essais obtenus par *Toutlemonde* sur une dalle en béton normal testée à vitesse lente (*Toutlemonde, 1995*). Une bonne concordance est alors observée. Toutefois, nous constatons que nous arrivons à estimer correctement la pression ultime lors des calculs, en revanche, on sous-estime légèrement la déformabilité du moment d'arrivée au plateau de « plastification ».

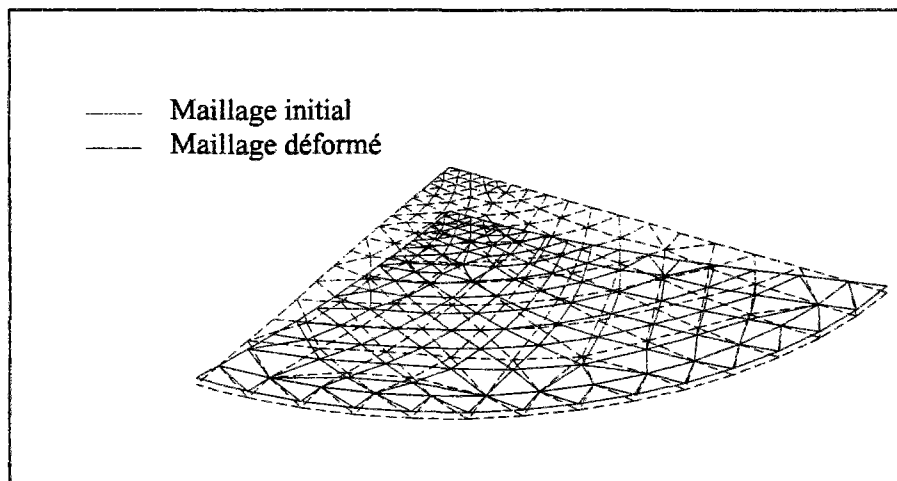


Figure 3-25 : Maillage déformé de la dalle

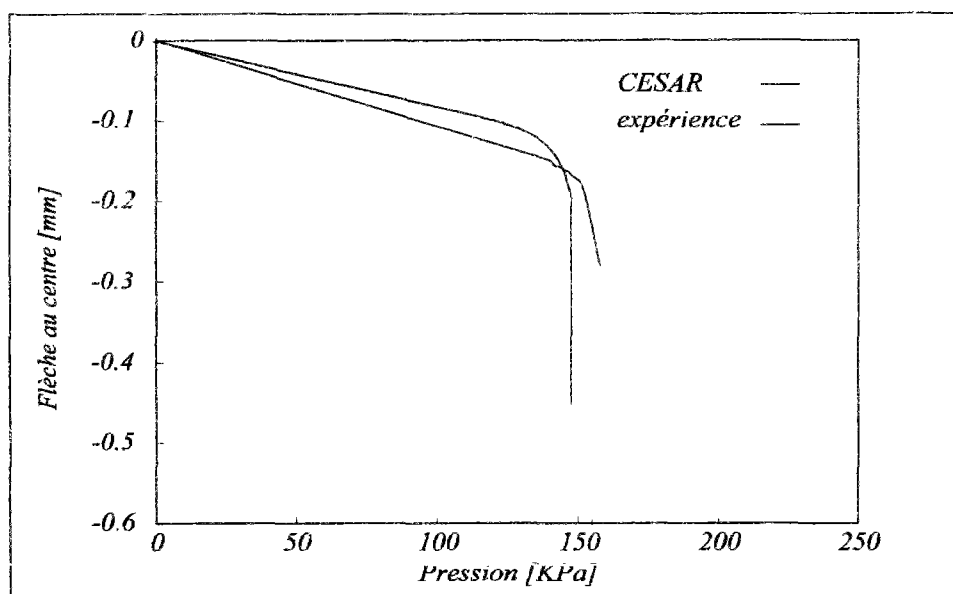


Figure 3-26 : Courbe pression appliquée-flèche au centre pour la dalle étudiée

Les *figures 3-27, 3-28 et 3-29* illustrent respectivement les isovaleurs des contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} pour une valeur de pression de 146 KPa. L'étendue des zones plastiques pour différents niveaux de chargement est représentée sur la *figure 3-30*. Concernant les isovaleurs de contraintes, celles-ci correspondent à la fibre supérieure et donc à la couche externe située en haut de la dalle.

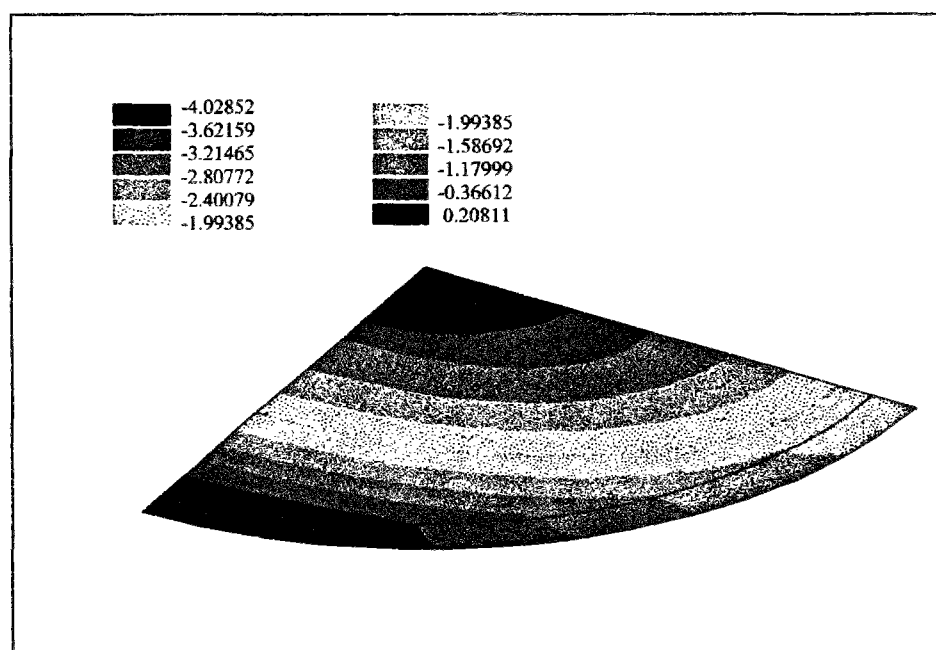


Figure 3-27 : Isovaleur de la contrainte σ_{xx} pour une pression de 146 KPa

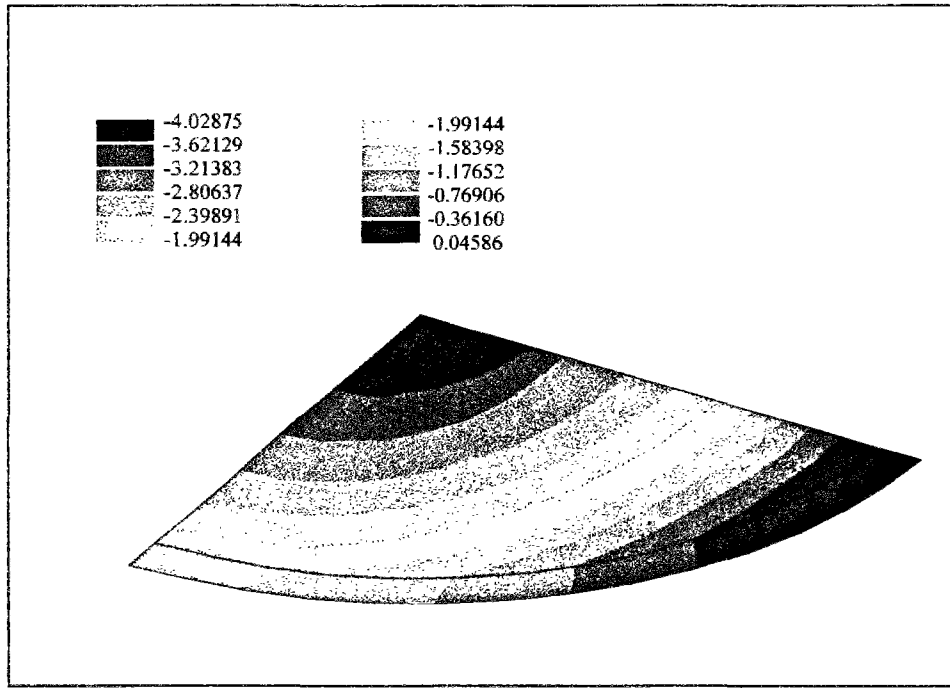


Figure 3-28 : Isovaleur de la contrainte σ_{yy} pour une pression de 146 KPa

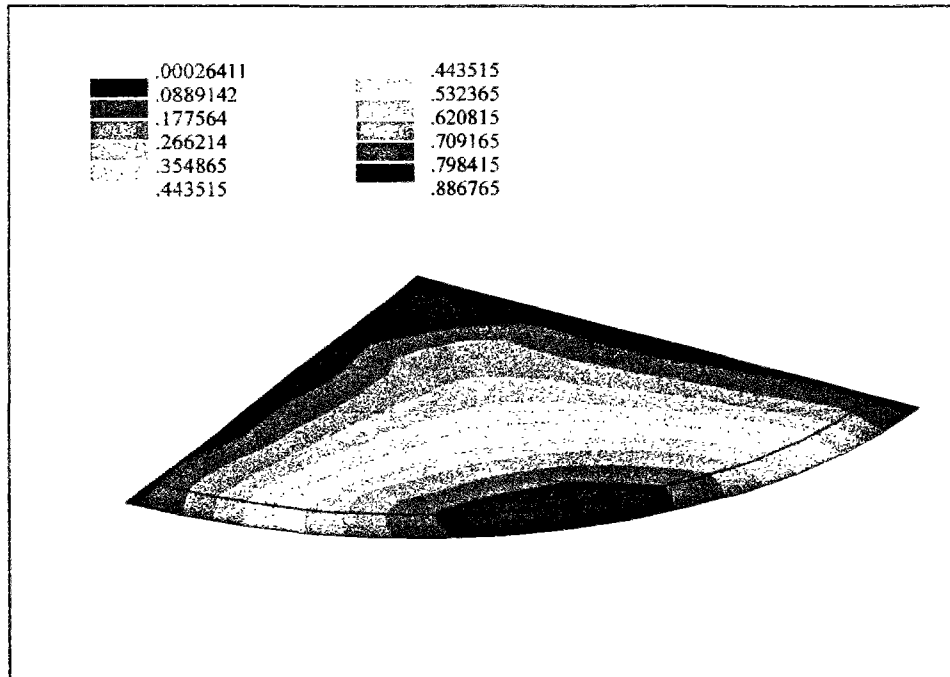


Figure 3-29 : Isovaleur de la contrainte σ_{xy} pour une pression de 146 KPa

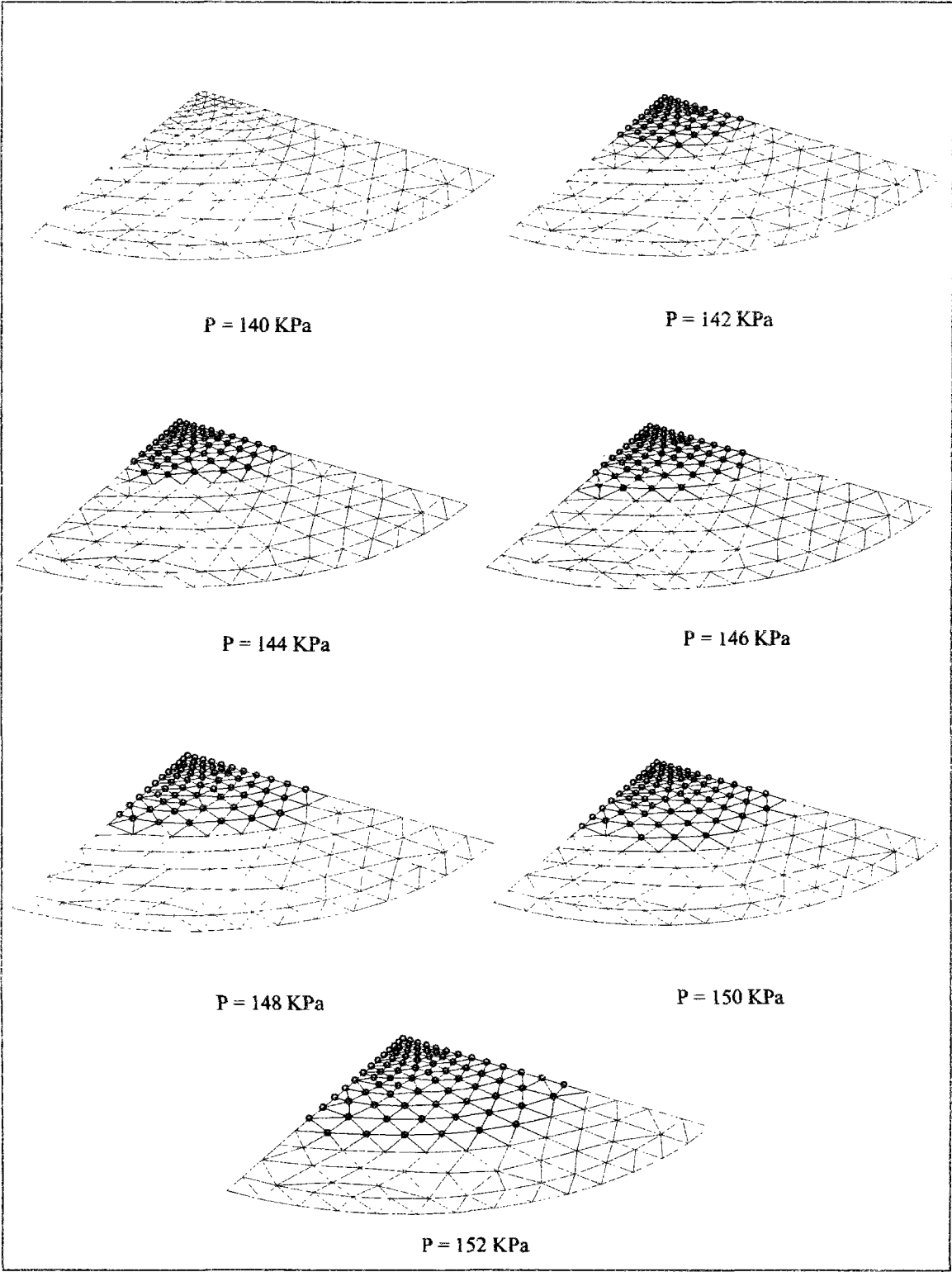


Figure 3-30 : Etendue des zones plastiques pour différentes pressions

3-2-4. Etudes statique et dynamique de dalles circulaires en béton armé

Dans cet exemple, on étudie un ensemble de dalles en béton armé soumises à des chargements statique et dynamique. Ces dalles ont les mêmes caractéristiques géométriques que celle étudiée précédemment (paragraphe 3-2-3). Cet exemple est issu de la série d'expériences effectuée par Toutlemonde (Toutlemonde, 1995).

3-2-4-1. Géométrie et modélisation

Les dalles considérées sont circulaires et ont une section armée par un treillis (figure 3-31). Comme précédemment, ces dalles sont discrétisées en 226 éléments de coque multicouche à 3 noeuds et leur section en 8 couches dont 7 en béton et une en acier (figure 3-32). Cette modélisation supposant acier et béton revient à supposer une adhérence parfaite entre les deux matériaux. Vu la double symétrie, seul un quart de ces dalles est modélisé et les conditions de symétrie appliquées.

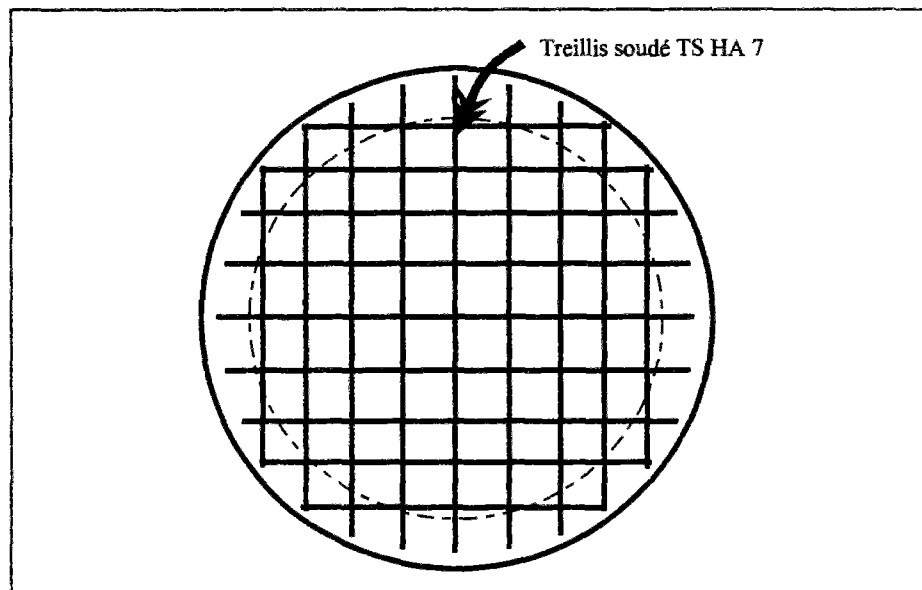


Figure 3-31 : Géométrie des dalles circulaires testées

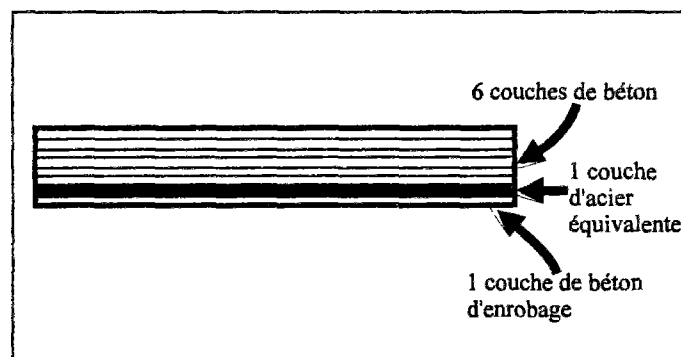


Figure 3-32 : Modélisation de la section des dalles en couches

3-2-4-2. Matériaux

- Béton : loi élastoplastique de *Willam-Warnke* à 3 paramètres avec écrouissage visqueux (cf. 2-3-3). Les essais portent sur des dalles fabriquées en béton normal (N) et à haute performance (HP), dont les caractéristiques mécaniques sont indiquées respectivement dans les *tableaux 3-3* et *3-4*. L'introduction d'un écrouissage plastique négatif et d'un endommagement plastique permet de tenir compte dans les calculs de la diminution de l'effort repris et de la rigidité des dalles lors de leur fissuration.

Modèle	Caractéristiques matérielles	Paramètres du modèle
Elasticité	$E = 39400 \text{ MPa}, \nu = 0.2$	$\rho = 2377 \text{ kg/m}^3$
<i>Willam-Warnke</i> à 3 paramètres	Résistances : $\sigma_c = 44.1 \text{ MPa}$ $\sigma_t = 3.55 \text{ MPa}$ $\sigma_{bc} = 1.15 \sigma_c$	$z_0 = 1.0$ $z_{ult} = 0.01$ $k = 7500$
Endommagement	Module ultime : $E_{ult} = 1/1000 E$	$k = 5000$
Viscosité	Module dynamique : $E_{\infty}^{dyn} = 43000 \text{ MPa}$	$\alpha = 0.6 \text{ Mpa/unité log}$ $\kappa = 47 \text{ GPa}$ $\eta = 23531 \text{ GPa.s}$

Tableau 3-3 : Caractéristiques matérielles du béton normal et paramètres du modèle

Modèle	Caractéristiques matérielles	Paramètres du modèle
Elasticité	$E = 49200 \text{ MPa}, \nu = 0.2$	$\rho = 2446 \text{ kg/m}^3$
<i>Willam-Warnke</i> à 3 paramètres	Résistances : $\sigma_c = 122.4 \text{ MPa}$ $\sigma_t = 6.41 \text{ MPa}$ $\sigma_{bc} = 1.15 \sigma_c$	$z_0 = 1.0$ $z_{ult} = 0.01$ $k = 7500$
Endommagement	Module ultime : $E_{ult} = 1/1000 E$	$k = 5000$
Viscosité	Module dynamique : $E_{\infty}^{dyn} = 57000 \text{ MPa}$	$\alpha = 0.75 \text{ Mpa/unité log}$ $\kappa = 356 \text{ GPa}$ $\eta = 17977 \text{ GPa.s}$

Tableau 3-4 : Caractéristiques matérielles du béton à haute performance et paramètres du modèle

- Acier : loi élastoplastique parfaite de *Von-Mises* (cf. 2-2-1) :

$$E = 200000 \text{ MPa}, \nu = 0.3, f_y = 550 \text{ MPa}, \rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

3-2-4-3. Etude du comportement statique non-linéaire des dalles

Nous proposons d'abord d'étudier le comportement statique non-linéaire des dalles. Ceci permettra de vérifier que le choix de nos paramètres est bien en accord avec la modélisation du comportement du béton après fissuration. Chaque dalle est soumise à une pression uniformément répartie. Le chargement est alors augmenté de façon monotone jusqu'à la rupture.

La *figure 3-33* présente des résultats numériques de l'étude statique des dalles en béton normal (N) ainsi que celles à haute performance (HP), sous forme de courbes pression appliquée - flèche au centre.

Ces résultats montrent une bonne concordance avec les courbes expérimentales 3-34 (Toutlemonde, 1995). En effet, nous constatons pour les deux cas (calculs et expérience) les phases suivantes : une montée en charge élastique suivie d'un seuil de plastification du béton et des aciers, un palier de transition, et enfin, la reprise des efforts de traction par les aciers caractérisée par une phase d'écrouissage. De plus, les courbes expérimentales sont proches l'une de l'autre lorsque les efforts de traction sont repris par les aciers, ce que l'on retrouve dans les résultats issus des calculs. En ce qui concerne les pressions de ruine, celles obtenues numériquement surestiment les valeurs expérimentales. Ceci s'explique par deux raisons : dans la modélisation, l'adhérence acier-béton est considérée comme parfaite; le phénomène de déchaussement des aciers constaté expérimentalement lors de la ruine des dalles n'est donc pas pris en compte. En outre, la modélisation des armatures (treillis) par une couche d'acier équivalente conduit également à cette surestimation.

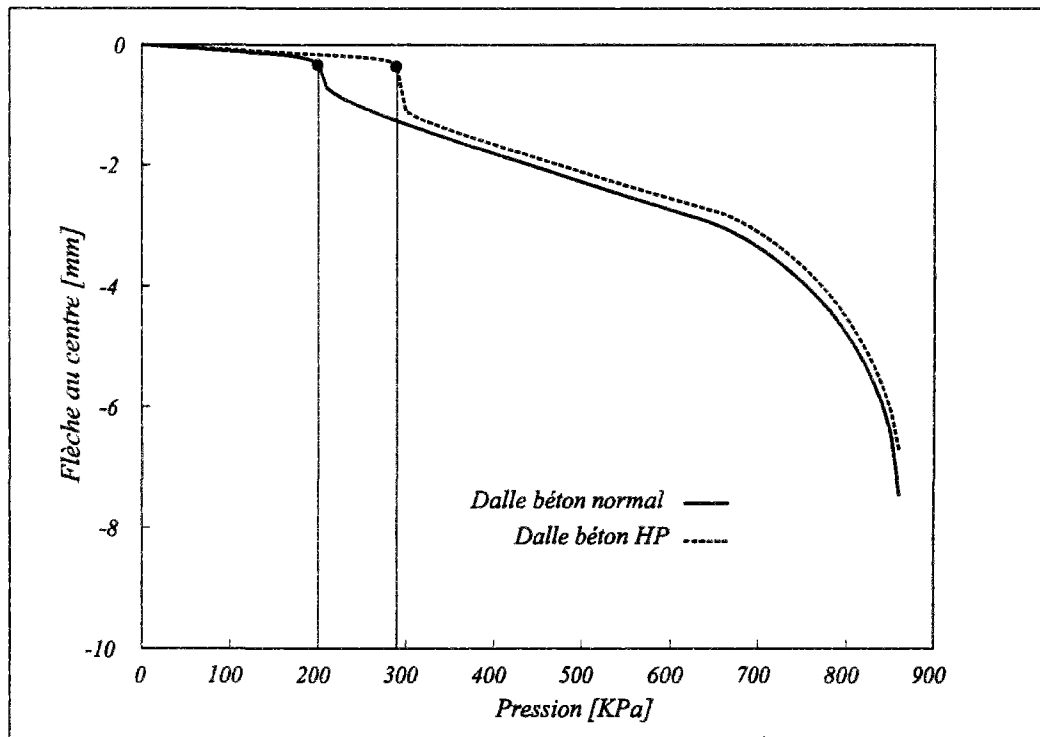


Figure 3-33 : Courbe pression appliquée-flèche au centre pour les dalles en bétons normal et à haute performance

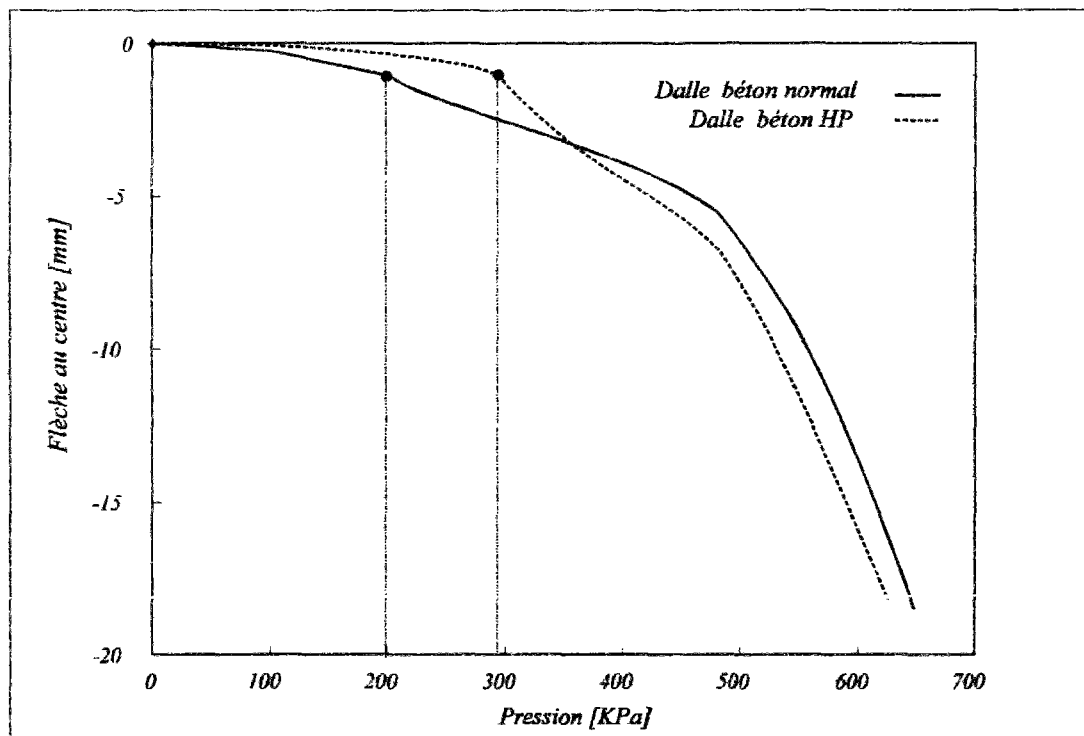


Figure 3-34 : Courbe pression appliquée-flèche au centre pour les dalles en bétons normal et à haute performance, d'après *Toutlemonde, 1995*

3-2-4-4. Etude du comportement dynamique non-linéaire des dalles

Après avoir étudié le comportement non-linéaire des dalles sous chargement statique, nous présentons ici les résultats sous chargement dynamique.

Le chargement dynamique résulte de l'impact d'une onde de choc sur la dalle fixée à l'extrémité du tube. Le diamètre chargé par cette onde, valant 66.7cm, correspond au diamètre du tube. Le profil temporel de l'onde de pression se réfléchissant sur la dalle (*figure 3-35*) se compose d'une brusque montée (en quelques microsecondes la surpression due à l'onde de choc passe de 0 à quelques dizaines ou centaines de kPa), d'un palier dont la durée s'échelonne de 20 à 100 millisecondes environ, suivi d'une redescende relativement lente ramenant en 100 à 200 millisecondes la surpression à une valeur nulle.

Les résultats présentés ont été obtenus avec un pas de temps de $2.5 \cdot 10^{-6}$ et un nombre de pas variant entre 1000 et 5000. Pour chaque dalle, on retire de l'analyse numérique, des résultats des courbes donnant l'évolution de la flèche au centre de la dalle en fonction du temps. La *figure 3-36* représente cette courbe pour une dalle en béton normal soumise à une pression de 363 KPa. Celle-ci met en évidence l'apparition de déplacements irréversibles. Ces déplacements permanents sont représentatifs de la dégradation progressive de certaines couches issue du comportement non-linéaire des matériaux.

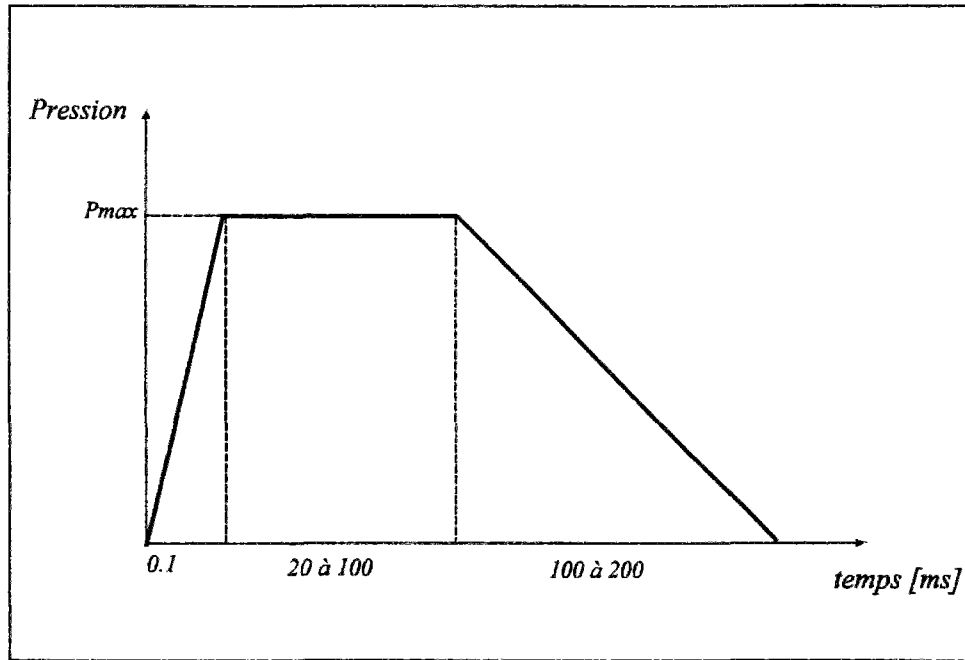


Figure 3-35 : Profil temporel de l'onde de pression générée par le tube à choc

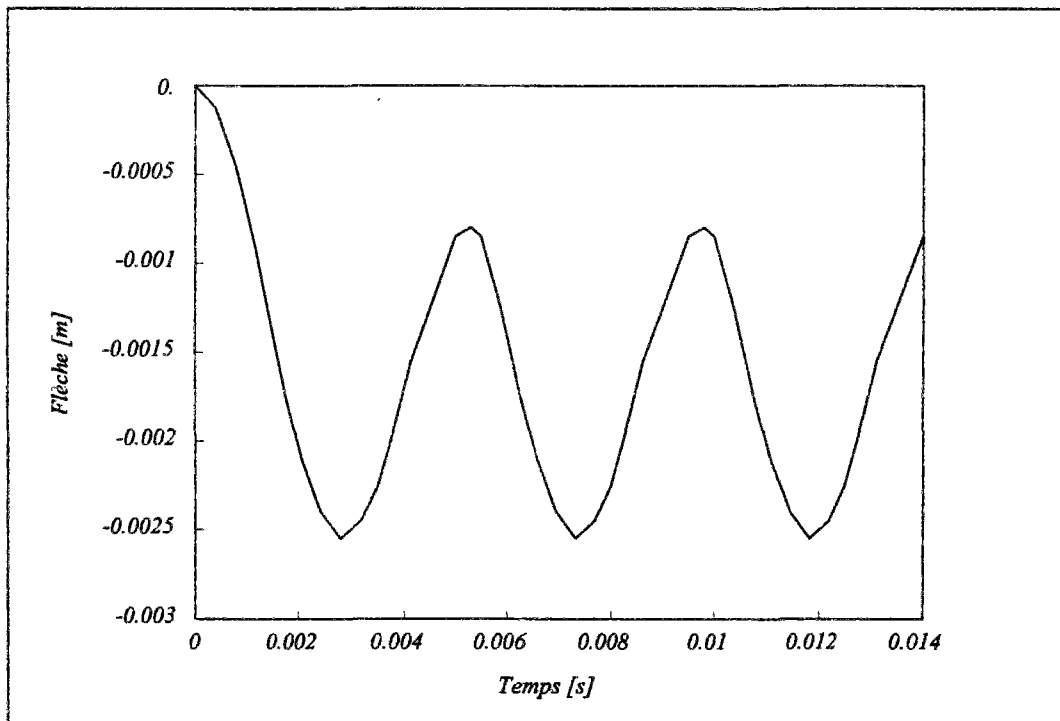


Figure 3-36 : Evolution du déplacement vertical au centre de la dalle en béton normal (N) en fonction du temps pour une pression de 363 KPa.

Les courbes des *figures 3-37, 3-38, 3-40 et 3-41* représentent respectivement les évolutions des flèches maximale et stationnaire au centre de la dalle en fonction de la pression, pour les dalles en béton normal (E et F) et celles à haute performance (W et X). Les courbes des *figures 3-39 et 3-42* représentent l'évolution de la fréquence propre de ces dalles en fonction de la pression appliquée.

L'analyse de ces courbes met en évidence les phénomènes suivants :

- Concernant la dalle F, lors de l'essai à 145 Kpa, la fréquence propre est plus faible et les flèches plus importantes. Ceci s'explique par le fait que cette dalle était endommagée initialement (c'est à dire avant les essais). La comparaison des résultats pour le béton normal est par conséquent basée sur les résultats issus des essais sur la dalle E.
- L'estimation des flèches devient moins précise avec l'augmentation de la pression (*figures 3-37, 3-38, 3-40 et 3-41*). En effet, on remarque que pour des pressions importantes, les valeurs numériques des flèches sous-estiment les valeurs expérimentales. Ceci peut se justifier par le fait que pour des pressions inférieures à 300 kPa, les ouvertures des fissures sont petites (inférieures à 300 μ m); les résultats numériques et expérimentaux sont par conséquent assez proches. En revanche pour des pressions élevées (supérieures à 300 kPa), les ouvertures des fissures tendent à s'agrandir, ce qui diminue remarquablement la rigidité de la dalle avant le choc; phénomène dont on ne tient pas compte dans la modélisation puisque la dalle est supposée non endommagée avant l'application du chargement dans les calculs.
- La fréquence propre se stabilise autour de 180 Hz pour des pressions supérieures à 300 kPa (*figure 3-39 et 3-42*), ce que l'on retrouve expérimentalement (entre 150 et 160 Hz). Ce plateau de fréquence est lié au fait qu'à partir de 300kPa, le béton se fissure et n'intervient plus au niveau de la rigidité de la dalle; seuls les aciers reprennent alors les efforts de traction. On distingue ainsi un seuil de pression (300 kPa) au delà duquel la rigidité du béton en traction n'intervient plus, et que l'on peut déterminer à partir des évolutions des flèches maximale et stationnaire en fonction de la pression (*figures 3-37, 3-38, 3-40 et 3-41*) ou encore de l'évolution de la fréquence propre en fonction de la pression appliquée (*figures 3-39 et 3-42*).

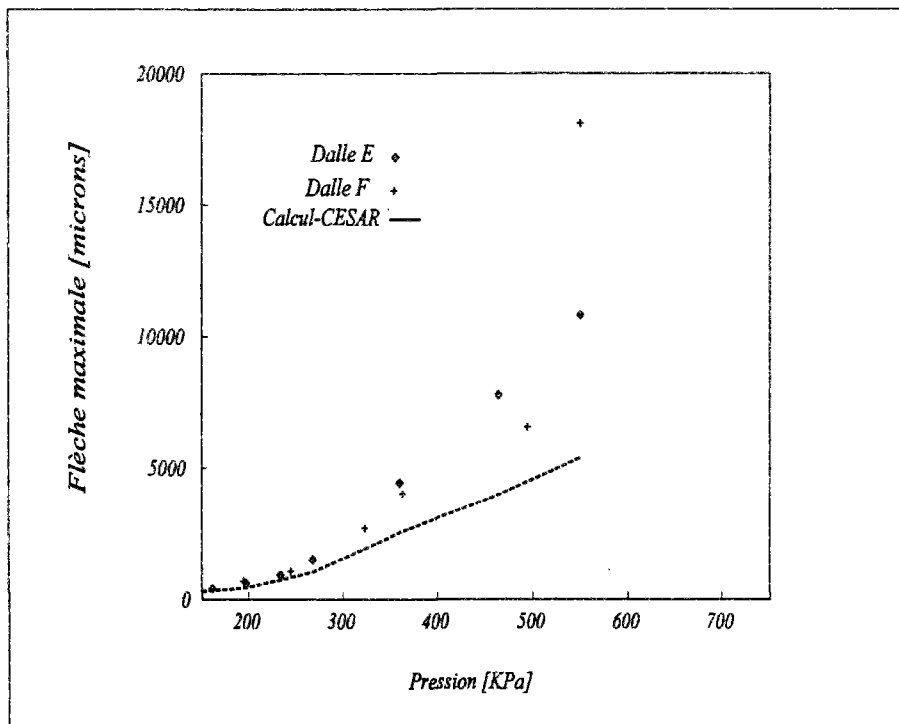


Figure 3-37 : Courbe pression appliquée-flèche maximale
- Dalles en béton normal -

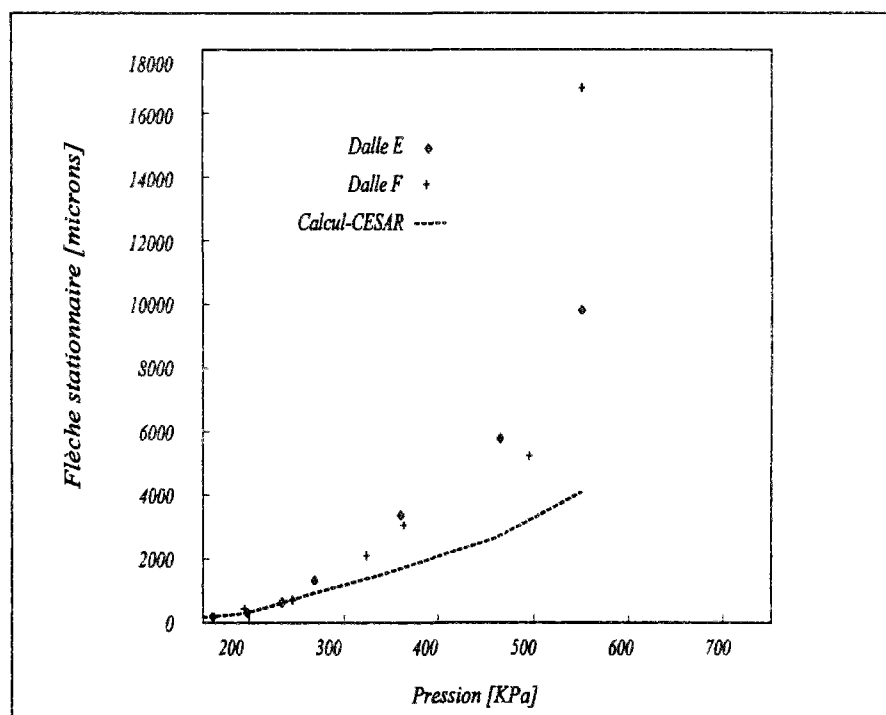


Figure 3-38 : Courbe pression appliquée-flèche stationnaire
- Dalles en béton normal -

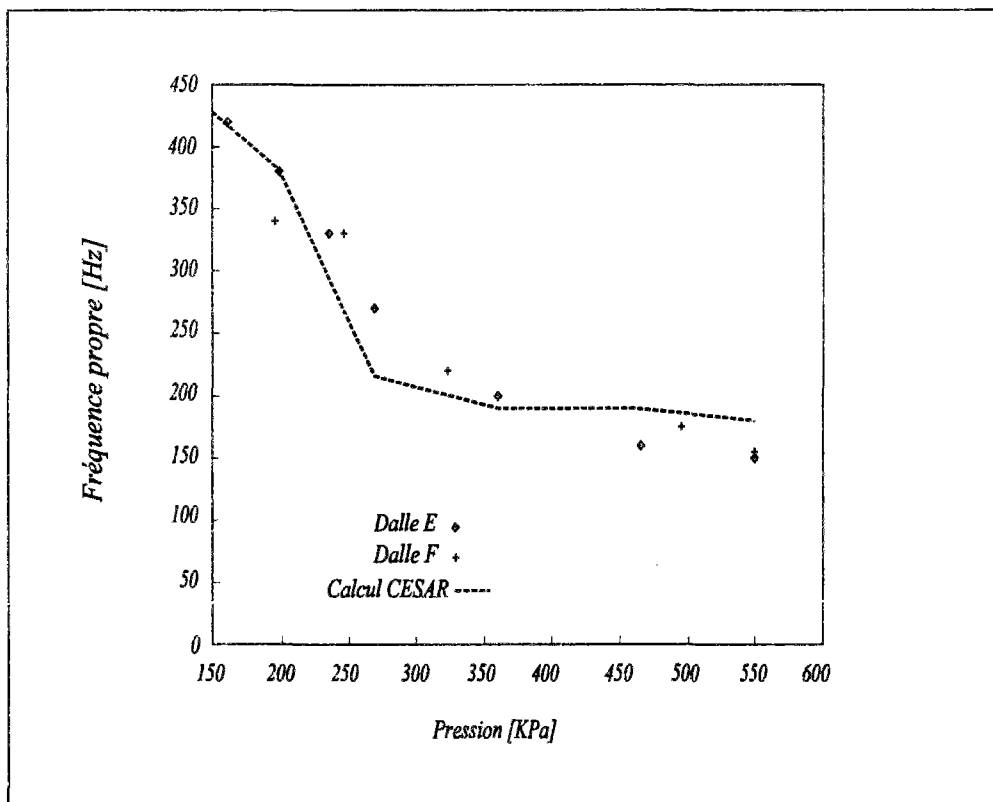


Figure 3-39 : Courbe pression appliquée-fréquence propre
- Dalles en béton normal -

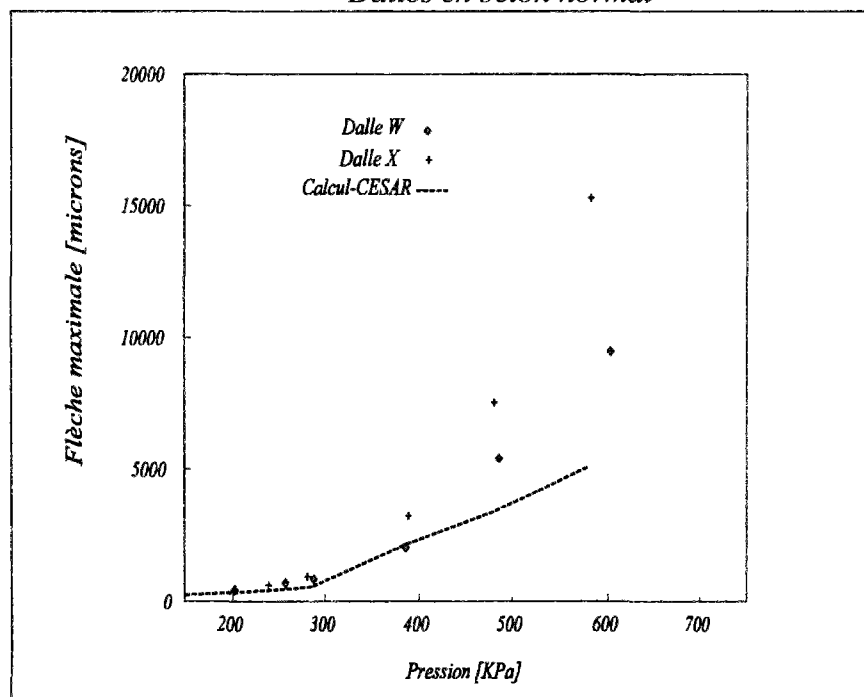


Figure 3-40 : Courbe pression appliquée-flèche maximale
- Dalles en béton à haute performance -

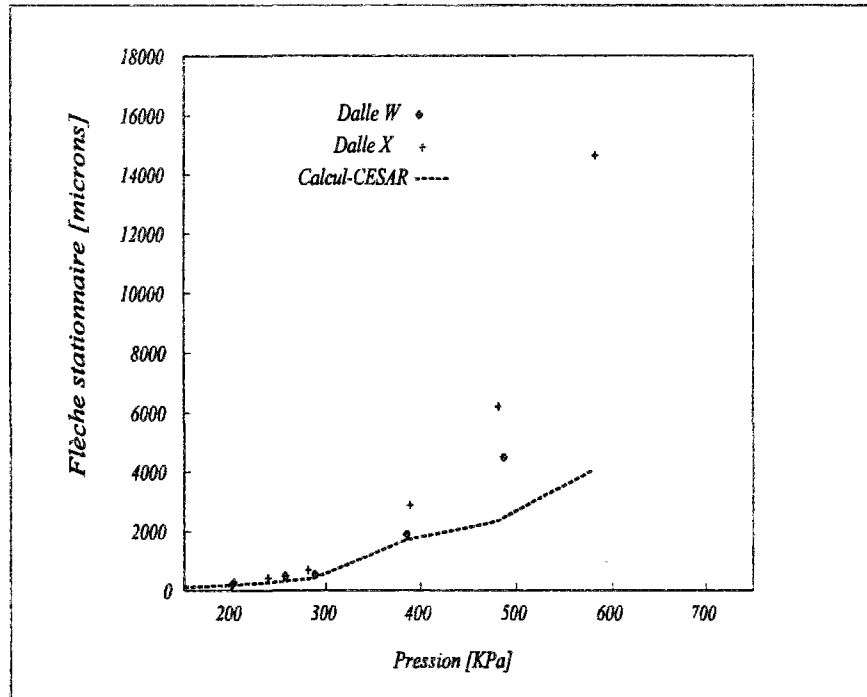


Figure 3-41 : Courbe pression appliquée-flèche stationnaire
- Dalles en béton à haute performance -

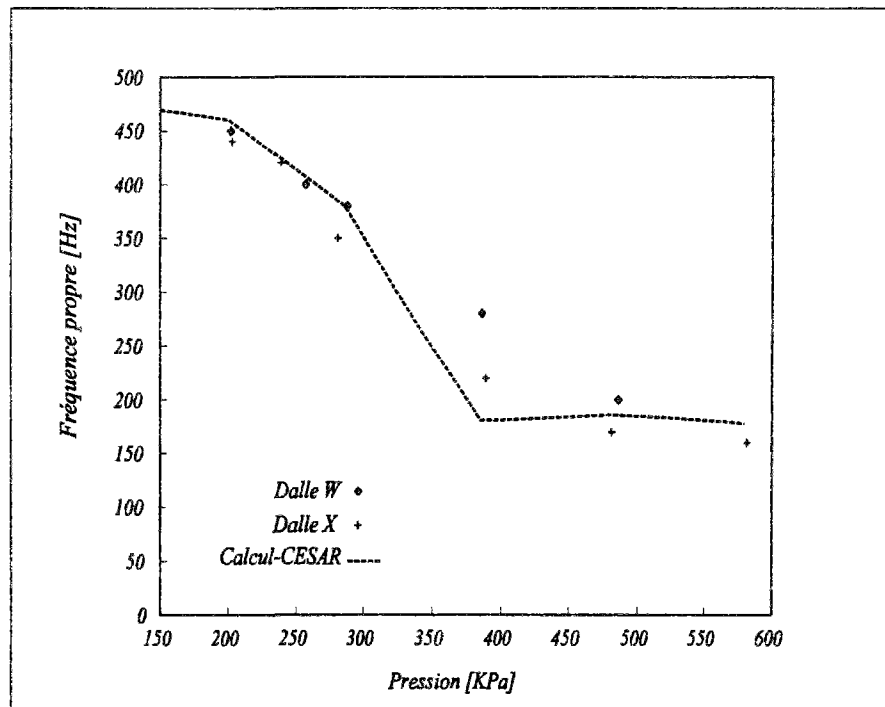


Figure 3-42 : Courbe pression appliquée-fréquence propre
- Dalles en béton à haute performance -

3-2-5. Etude du flambement linéaire d'une colonne

L'exemple qui suit, le flambement linéaire d'une colonne, a été traité de façon rigoureuse par Euler en 1747 via les hypothèses classiques de la résistance des matériaux (*Euler, 1747*). Ici, on traite cet exemple numériquement en utilisant la méthode des éléments finis et plus précisément l'approche multicouche développée précédemment.

3-2-5-1. Géométrie et modélisation

Considérons une colonne en acier avec une section rectangulaire ($h/l = 1\text{cm}/100\text{cm}$) et une longueur $L=10\text{m}$, encastree à une extrémité et libre à l'autre (*figure 3-43*). Cette colonne est discrétisée en éléments de coque multicouches à 4 noeuds et la section en 4 couches. Différents maillages ont été considérés : un premier maillage de $1*1$ élément, un second de $1*5$ éléments, un troisième de $2*10$ éléments et enfin un quatrième maillage de $4*20$ éléments.

3-2-5-2. Matériau

On utilise pour le matériau considéré, une loi élastique ayant pour paramètres :

$$E = 210000 \text{ MPa}, \nu = 0.3, \rho = 7850 \text{ kg/m}^3$$

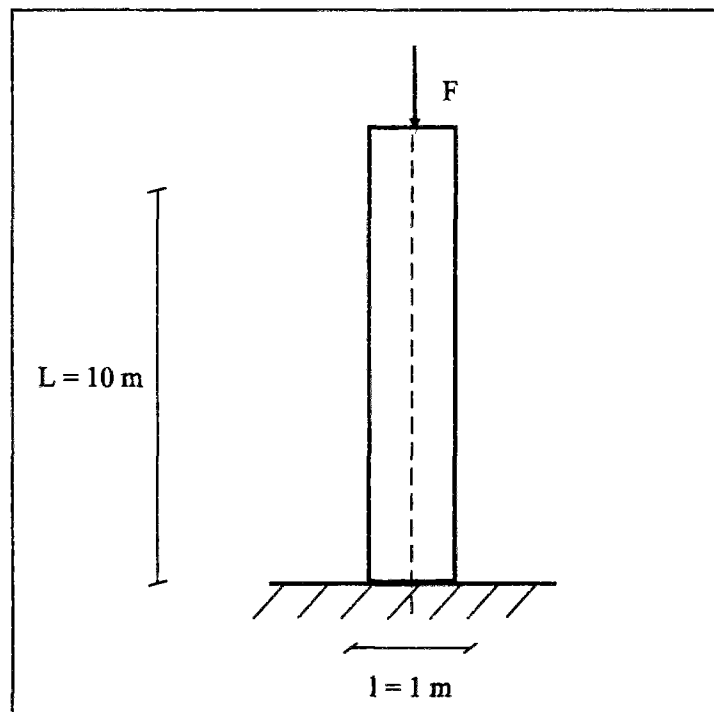


Figure 3-43 : Colonne d'Euler, géométrie et système de chargement

3-2-5-3. Chargement

La colonne est chargée avec une force axiale centrée. La force critique théorique de celle-ci est

donnée par : $F_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{4 L^2} = 431,795 \text{ N}$. Dans le calcul, on néglige le poids propre.

3-2-5-4. Résultats

Le *tableau 3-5* présente les résultats de l'analyse numérique pour les différents maillages considérés. On constate que la charge critique obtenue pour chaque maillage est en très bon accord avec la charge critique théorique. On note également l'influence du maillage sur les résultats. En effet, une discrétisation plus fine conduit à des résultats plus précis.

En ce qui concerne l'influence du nombre de couches sur les résultats, nous avons effectué des calculs sur un maillage de 4*20 éléments avec différents nombres de couches dans la section : 1, 2, 4, 6, 8 et 10 couches. Nous avons constaté que le nombre de couche n'avait aucune influence sur les résultats, c'est à dire que la charge critique obtenue est la même quelque soit le nombre de couches considéré. Ceci s'explique par le fait que la colonne travaille uniquement en membrane, l'état de contraintes est donc constant dans l'épaisseur et seule une couche suffit pour obtenir la charge critique recherchée.

<i>Maillage</i>	1*1 élément	1*5 éléments	2*10 éléments	4*20 éléments
<i>Charge critique obtenue (N)</i>	438,296	431,807	431,796	431,795

Tableau 3-5 : Valeur de la charge critique en fonction des différents maillages considérés

3-3. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons cherché à valider la formulation non-linéaire matérielle et géométrique des éléments de coque multicouches en comportements statique et dynamique. Pour cela, nous avons effectué de nombreux tests non-linéaires dans lesquels nous avons utilisé les lois de comportement à variables internes présentées dans le chapitre 2, ou encore des lois de comportement élastiques (cas du flambement linéaire).

Pour chaque test présenté, les solutions numériques obtenues ont été comparées à des solutions de référence d'origine analytique, numérique ou expérimentale. Ces deux solutions ont montré une bonne concordance. Les exemples présentés précisent de plus les limites des développements effectués. Ces outils se veulent une aide au concepteur des ouvrages d'art en béton armé.

La formulation coque multicouche nous est donc apparue au cours de ce chapitre comme un moyen précis et fidèle de modélisation de structures coques en acier, béton et béton armé, sous divers chargements. Aussi, suite au bon fonctionnement des outils développés dans des cas simples, nous nous sommes intéressé à la simulation de la réponse non-linéaire de structures plus complexes. La formulation coque multicouche a ainsi été appliquée à deux problèmes industriels concrets, présentés dans le chapitre suivant : l'étude de l'entretoisement d'un pont bipoutre à trois travées et l'étude d'une structure tridimensionnelle multi-étagée en béton armé soumise à un chargement sismique.

CHAPITRE 4

EXEMPLES D'APPLICATION NUMERIQUE



4-0. Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous présentons deux problèmes industriels concrets dans lesquels la formulation coque multicouche a été appliquée :

- l'étude de l'entretoisement d'un pont bipoutre à trois travées.
- l'étude d'une structure multi-étagée en béton armé soumise à un chargement sismique.

Le premier exemple consiste à étudier l'entretoisement d'un pont mixte bipoutre à trois travées dans le but de réduire le nombre d'entretoises. L'exemple est proposé par le Service d'Etudes Techniques des Routes et Autoroutes (SETRA).

Le second exemple concerne l'étude dynamique non-linéaire d'une structure multi-étagée en béton armé. Cet exemple est tiré de la contribution du LCPC au projet scientifique international CAMUS (CALcul des MURs sous sollicitation Sismique) proposé par le Commissariat à l'Energie Atomique (CEA), la Fédération Nationale du Bâtiment (FNB) et Electricité De France (EDF).

Le choix de ces deux exemples d'applications permet, en plus de la validation effectuée dans le chapitre 3 précédent, de situer les outils élaborés dans la pratique courante des ingénieurs.

4-1. Etude de l'entretoisement d'un pont bipoutre à trois travées

Le contournement d'Amiens par l'autoroute A16 a nécessité le franchissement de la somme à hauteur de la commune de Longpré. Ce franchissement est à présent assuré par un pont bipoutre à trois travées, mis en service depuis Juin 1995.

Dans cette étude, nous effectuons une comparaison des efforts dans la dalle et les poutres constituant ce pont, dans un schéma avec 15 entretoises régulièrement espacées (*figure 4-1 (a)*) et un autre avec 7 entretoises (*figure 4-1 (b)*). Dans chacun de ces deux schémas, nous étudions le rôle des entretoises et comparons les résultats obtenus dans le but de réduire leur nombre. L'étude est proposée par le Service d'Etudes Techniques des Routes et Autoroutes (SETRA).

Afin de mener à bien ce travail et de répondre rigoureusement à la problématique industrielle posée, nous décomposons cette étude en deux parties :

- une analyse élastique des contraintes générées dans la structure.
- une analyse du comportement non-linéaire de la structure.

La première étude consiste, d'une part à effectuer une comparaison des contraintes générées dans la structure en utilisant les schémas avec 7 et 15 entretoises, et d'autre part à mettre en évidence les endroits où il y a risque de rupture.

La seconde étude consiste à effectuer une analyse non-linéaire de la structure. L'examen des résultats obtenus avec les deux schémas précédents (7 et 15 entretoises) permettra de conclure si l'utilisation de 7 entretoises est suffisante pour assurer la répartition transversale des charges appliquées au pont.

4-1-1. Caractéristiques géométriques

Le pont a une longueur totale de 84 m et comporte 3 travées continues de 23, 38 et 23 m.

La coupe transversale montre (cf. *figure 4-2*) :

- Deux poutres métalliques principales de hauteur 1.50 m et espacées de 10.00 m. Les semelles supérieures de largeur 600 mm, ont une épaisseur de 25 à 90 mm. Les semelles inférieures de largeur 700 mm, varient de 40 à 90 mm. Les caractéristiques géométriques complètes des âmes et semelles de ces poutres sont indiquées en annexe 4 dans les *tableaux A4-1, A4-2 et A4-3*.
- Une dalle en béton armé de 0.25 m d'épaisseur aux extrémités, à 0.40 m au droit des poutres principales et de 16.56 m de largeur. Cette dalle comporte deux lits d'armatures. Le premier lit est situé à 0.035m de l'extrados et le second à 0.215m. Les caractéristiques de ces lits sont précisées respectivement en annexe 4 dans les *tableaux A4-4 et A4-5*. La dalle n'est pas précontrainte transversalement malgré la forte distance entre les poutres et la présence d'entretoises.
- Des entretoises en profilé de commerce de type IPE 600, espacées de 5.75 à 6.50 m et reliant les poutres principales.

Longitudinalement l'ouvrage est considéré rectiligne et horizontal. Transversalement, la chaussée comporte 3 voies de circulation plus une voie d'insertion et une bande dérasée de gauche.

Les appuis de l'ouvrage reposent sur des fondations profondes en pieux béton sous semelles de répartition. Les piles sont constituées de fûts cylindriques indépendants de diamètre 2.20 m, chaque fût se trouvant à l'aplomb des poutres. Les culées présentent un chevêtre en béton armé.

Le délais global de la réalisation des travaux était d'environ douze mois.

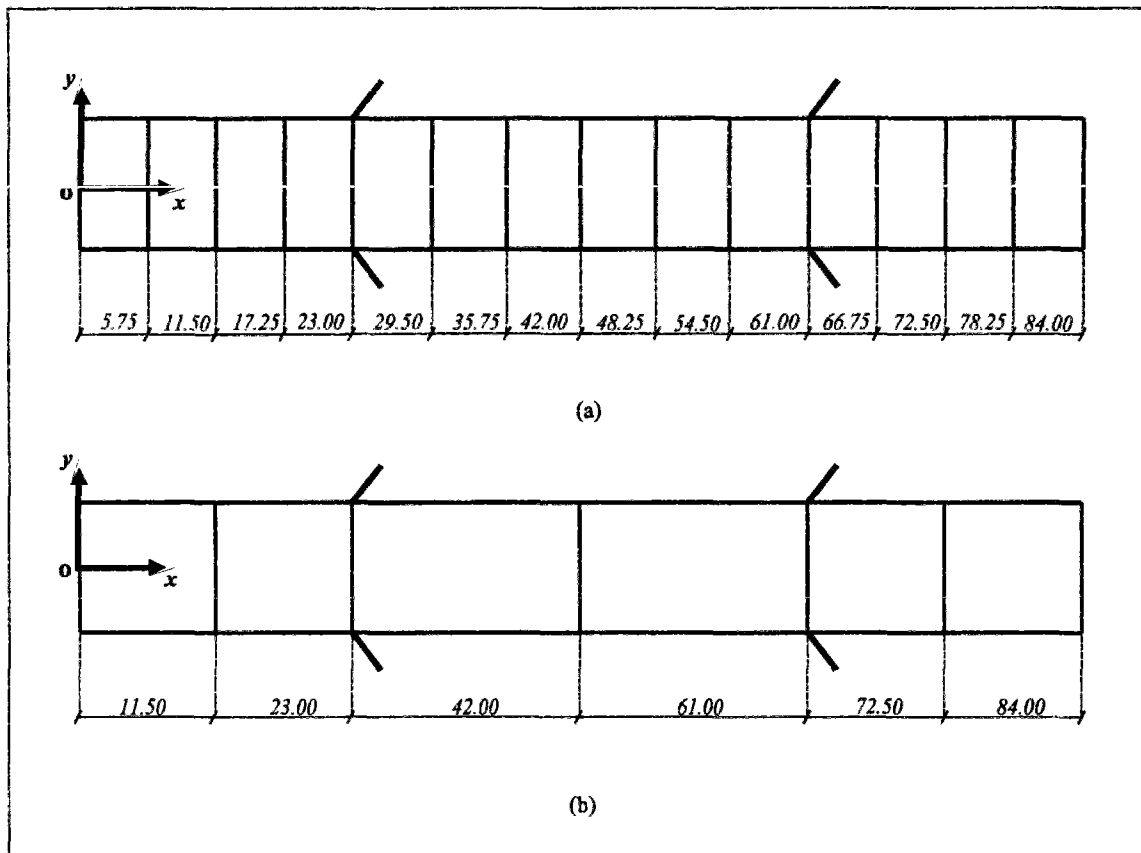


Figure 4-1 : Espacement des entretoises des deux cas à comparer :
(a) 15 entretoises (b) 7 entretoises

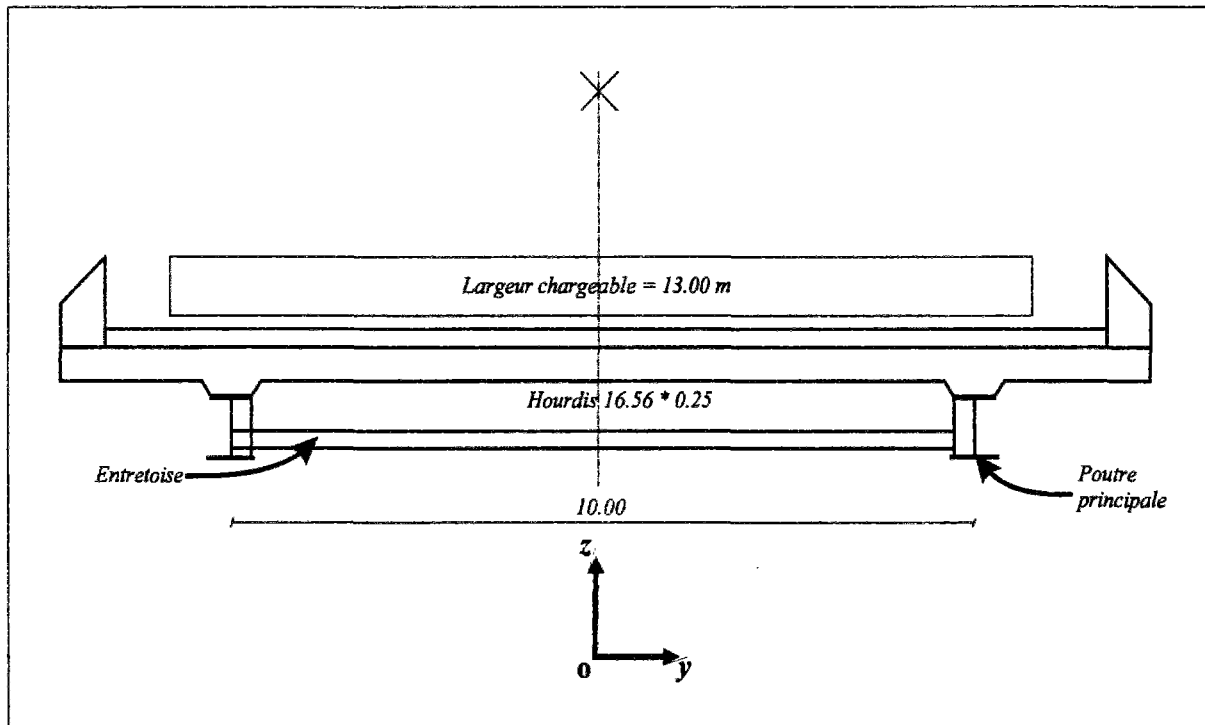


Figure 4-2 : Coupe transversale du pont à étudier

4-1-2. Etude du comportement élastique linéaire de la structure

Dans ce qui suit, nous proposons d'effectuer pour commencer, une étude du comportement élastique linéaire de la structure ou plus précisément une étude élastique des contraintes générées dans le hourdis, les poutres principales et les entretoises.

4-1-2-1. Modélisation et conditions aux limites

Le hourdis, les poutres principales et les entretoises sont modélisés par des éléments de coques multicouches. Afin de tenir compte de l'épaisseur du béton, nous modélisons le hourdis ainsi que la semelle supérieure des poutres principales par des éléments de coques multicouches excentrées par rapport à la surface inférieure de l'hourdis. Pour la semelle inférieure des poutres principales, la surface inférieure de cette semelle est prise comme surface de référence.

Nous effectuons les calculs élastiques en utilisant deux maillages différents. Le premier maillage est constitué de 8392 éléments de coques multicouches à 8 noeuds appartenant à 12 groupes de caractéristiques géométriques et matérielles différentes. Le second maillage est moins important que le précédent et comporte 2506 éléments de coques multicouches à 8 noeuds appartenant à 12 groupes de caractéristiques géométriques et matérielles différentes.

L'utilisation de ces deux maillages nous permet de voir, après comparaison des résultats, si l'on peut utiliser par la suite le second maillage pour l'analyse du comportement non-linéaire de la structure. En effet l'étude non-linéaire nécessite plus d'espace de stockage des résultats (résultats à chaque incrément de chargement). Afin de mener à bien les calculs non-linéaires, il est donc indispensable de réduire cet espace en considérant un maillage moins important que celui avec 8392 éléments.

Les conditions aux limites sont représentées sur la *figure 4-3*. On impose un déplacement vertical nul au niveau de l'emplacement des piles (c'est à dire : $w = 0$), le pont reposant en effet sur ces piles. De plus, sur une des deux culées, on considère tous les déplacements nuls (c'est à dire : $u = v = w = 0$), alors que sur l'autre culée seuls les déplacements horizontal v et vertical w sont pris égaux à zéro.

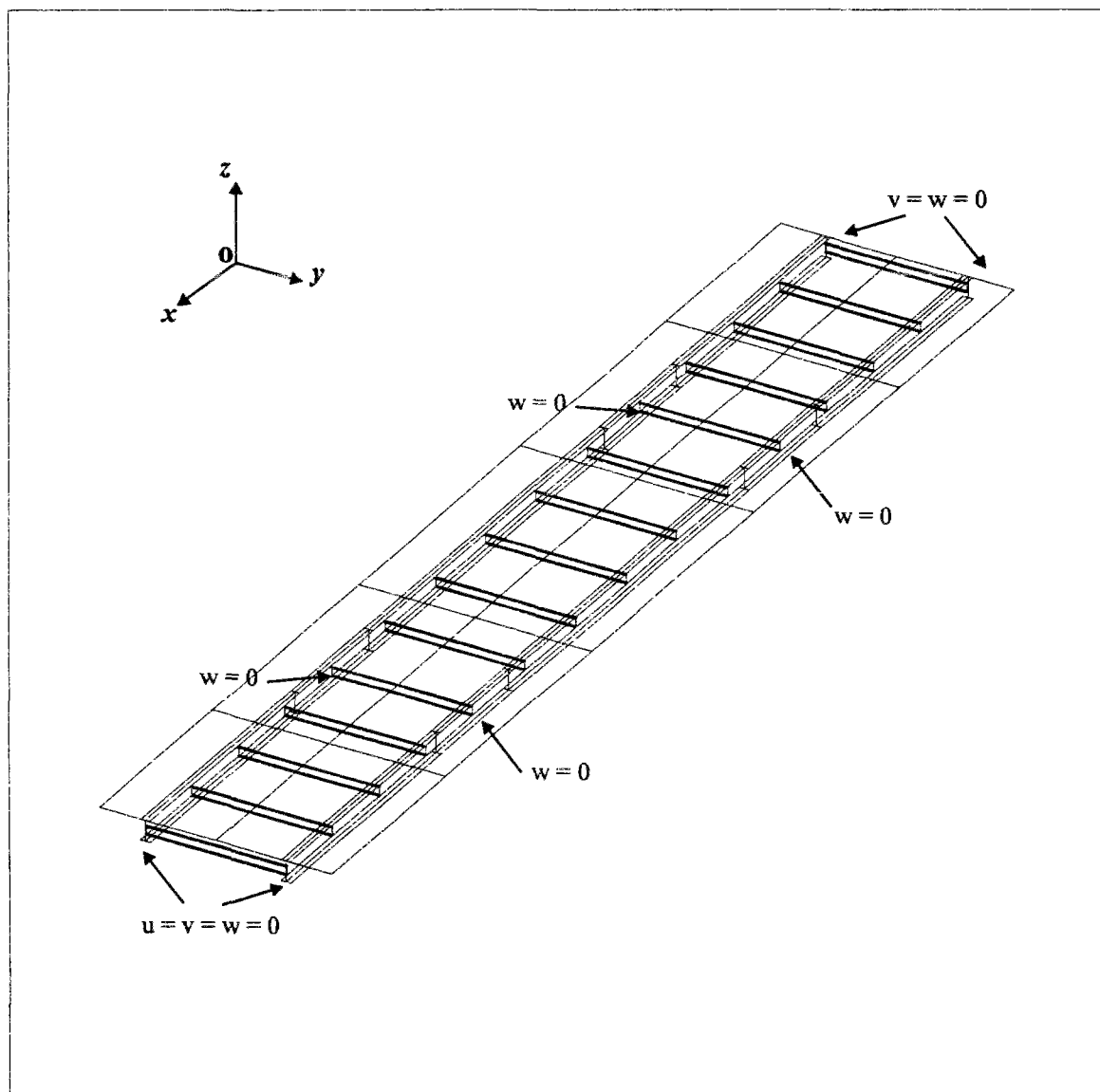


Figure 4-3 : Représentation des conditions aux limites

4-1-2-2. Matériaux

- Béton : loi élastique linéaire. Les caractéristiques et paramètres du modèle sont :

$$E = 35000 \text{ MPa}, \nu = 0.15, \rho = 2600 \text{ kg/m}^3$$

- Acier : loi élastique linéaire. Les caractéristiques et paramètres du modèle sont:

$$E = 214067.3 \text{ MPa}, \nu = 0.3, \rho = 7850 \text{ kg/m}^3$$

Tous ces paramètres sont des données précisées par le SETRA.

4-1-2-3. Chargement

On considère le chargement suivant :

- les poids propres de l'acier et du béton.
- le poids des équipements (cf. annexe 4, *tableau A4-6*)
- les charges routières A et B_c: la charge A est une charge uniforme appliquée le long des travées 1 et 2 sur la largeur chargeable (cf. *figure 4-4*). Son intensité vaut (cf. annexe 4) :

$$A = 543 \text{ kg/m}^2$$

Pour la charge B_c, on positionne un camion au milieu de la travée 1 et un autre au milieu de la travée 2, sur la voie de droite (cf. *figure 4-4*). Les éléments de ce système sont schématisés sur la *figure 4-5*, les longueurs étant exprimées en mètres et les masses en tonnes.

Dans cette partie, l'analyse étant élastique linéaire, nous calculons donc la structure à l'état limite de service (ELS). Nous étudions la combinaison suivante : $G + 1.2 Q$, où G représente les charges permanentes et Q les charges d'exploitations.

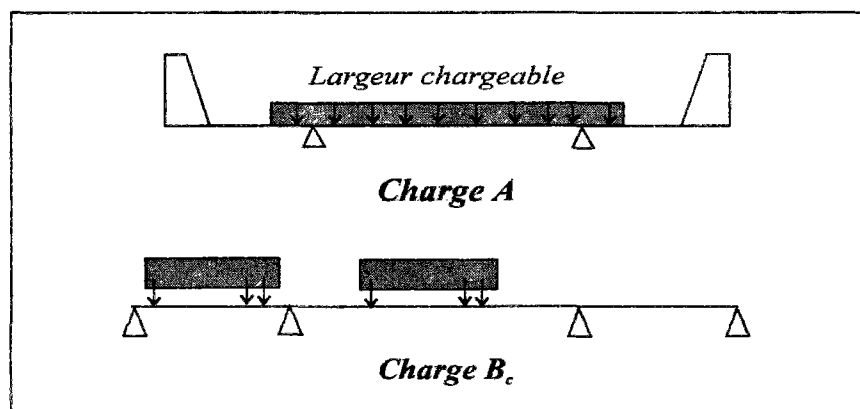
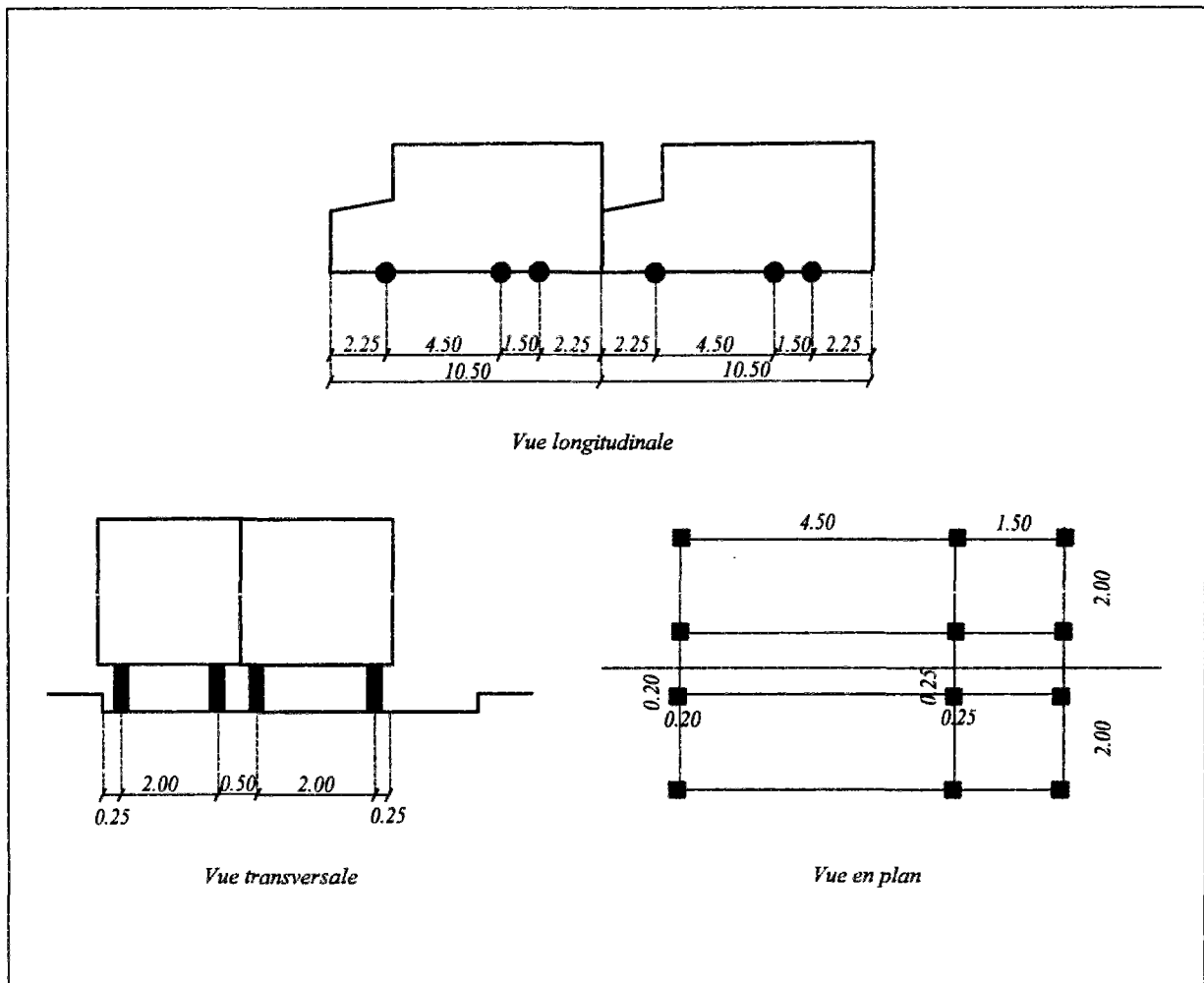


Figure 4-4 : Positionnement des charges routières A et B_c sur le pont

Figure 4-5 : Eléments du système B_c

4-1-2-4. Résultats

Les *tableaux 4-1* et *4-2* présentent respectivement pour les deux maillages considérés, un des résultats de calculs obtenu avec les schémas de 7 et 15 entretoises sous divers chargements. Ces tableaux montrent que sous le chargement total (combinaison à l'ELS) ainsi que sous les charges A, B_c , et m, la flèche obtenue avec un schéma de 7 entretoises est légèrement supérieure à celle obtenue avec un schéma de 15 entretoises. En revanche, l'effet inverse se produit si la structure est soumise uniquement à son poids propre. Cela s'explique par le fait que l'on considère moins d'entretoises dans un schéma de 7 entretoises. Le poids propre appliqué est donc plus faible.

Nous constatons également que les résultats obtenus avec le premier maillage sont très proches de ceux obtenus avec le second maillage. Ce dernier serait a priori suffisant pour obtenir des résultats corrects. Nous pourrions confirmer ceci après comparaison des contraintes.

Les *tableaux 4-3, 4-4, 4-5 et 4-6* présentent les valeurs maximales en traction et compression des contraintes principales S_1 et S_2 pour les différents schémas et maillages considérés. Seules les valeurs dans les âmes et semelles inférieures des poutres principales sont reportées dans ces tableaux. En effet, c'est à ces niveaux que les contraintes principales sont maximales.

Les résultats montrent que pour les deux maillages considérés, les contraintes obtenues avec les schémas de 7 et 15 entretoises sont très proches. On constate également qu'avec le premier maillage, ces contraintes sont inférieures à celles obtenues avec le second maillage.

Chargement	Poids propre	Charge A	Poids des équipements : masse m	Charge B _c	Chargement total (combinaison à l'ELS)
Flèche [m] (7 entretoises)	-0.0347146	-0.0321626	-0.0676817	-0.02050	-0.16559
Flèche [m] (15 entretoises)	-0.0349404	-0.0320241	-0.0673030	-0.020494	-0.16526

Tableau 4-1 : Flèches obtenues en fonction du chargement appliqué - *premier maillage* -

Chargement	Poids propre	Charge A	Poids des équipements : masse m	Charge B _c	Chargement total (combinaison à l'ELS)
Flèche [m] (7 entretoises)	-0.0324781	-0.0309458	-0.0634764	-0.0199541	-0.1570344
Flèche [m] (15 entretoises)	-0.0329698	-0.0307527	-0.0632591	-0.0198185	-0.1569143

Tableau 4-2 : Flèches obtenues en fonction du chargement appliqué - *second maillage* -

	<i>Contrainte principale S_1 (MPa)</i>		<i>Contrainte principale S_2 (MPa)</i>	
	Valeur maximale en traction	Valeur maximale en compression	Valeur maximale en traction	Valeur maximale en compression
<i>Schéma avec 7 entretoises</i>	336.426	-212.779	146.783	-466.589
<i>Schéma avec 15 entretoises</i>	333.621	-240.327	151.120	-462.474

Tableau 4-3 : Valeurs maximales des contraintes principales S_1 et S_2 dans les âmes des poutres principales - *premier maillage* -

	<i>Contrainte principale S_1 (MPa)</i>		<i>Contrainte principale S_2 (MPa)</i>	
	Valeur maximale en traction	Valeur maximale en compression	Valeur maximale en traction	Valeur maximale en compression
<i>Schéma avec 7 entretoises</i>	333.886	-58.313	113.026	-225.604
<i>Schéma avec 15 entretoises</i>	334.582	-59.141	113.514	-225.584

Tableau 4-4 : Valeurs maximales des contraintes principales S_1 et S_2 dans les semelles inférieures des poutres principales - *premier maillage* -

	<i>Contrainte principale S_1, (MPa)</i>		<i>Contrainte principale S_2, (MPa)</i>	
	Valeur maximale en traction	Valeur maximale en compression	Valeur maximale en traction	Valeur maximale en compression
<i>Schéma avec 7 entretoises</i>	414.636	-327.067	133.938	-647.315
<i>Schéma avec 15 entretoises</i>	410.778	-354.911	141.127	-645.760

Tableau 4-5 : Valeurs maximales des contraintes principales S_1 et S_2 dans les âmes des poutres principales - *second maillage* -

	<i>Contrainte principale S_1, (MPa)</i>		<i>Contrainte principale S_2, (MPa)</i>	
	Valeur maximale en traction	Valeur maximale en compression	Valeur maximale en traction	Valeur maximale en compression
<i>Schéma avec 7 entretoises</i>	409.614	-85.943	146.948	-205.912
<i>Schéma avec 15 entretoises</i>	414.589	-88.702	147.316	-205.771

Tableau 4-6 : Valeurs maximales des contraintes principales S_1 et S_2 dans les semelles inférieures des poutres principales - *second maillage* -

De l'analyse élastique linéaire de la structure, nous retiendrons que :

- l'utilisation de 7 entretoises est a priori suffisante pour assurer la répartition transversale des charges appliquées au pont.
- l'utilisation du second maillage permet d'obtenir des résultats satisfaisants en déplacements. En revanche, les contraintes sont supérieures à celles obtenues avec le premier maillage. En effet, lorsque le nombre d'éléments diminue, la rigidité ainsi que les contraintes augmentent. Pour l'analyse non-linéaire, afin de mener à bien les calculs, nous utiliserons ce second maillage tout en sachant que la plastification se produira plus tôt qu'avec le premier maillage.
- les âmes et semelles inférieures des poutres principales constituent des zones fragiles où la rupture risque de se produire (les contraintes sont maximales à ces niveaux).

4-1-3. Etude du comportement non-linéaire de la structure

Après avoir effectué une étude élastique des contraintes générées dans la structure, nous présentons ici les résultats de l'étude du comportement non-linéaire de celle-ci.

4-1-3-1. Modélisation

Le hourdis, les poutres principales et les entretoises sont modélisés par des éléments de coques multicouches. Le maillage utilisé dans cette partie correspond au second maillage utilisé au paragraphe 4-1-2-1 pour l'analyse linéaire de la structure (*figure 4-6*). Il est constitué de 6974 noeuds, de 2506 éléments de coques multicouches à 8 noeuds appartenant à 12 groupes de caractéristiques géométriques et matérielles différentes.

Comparativement à l'étude linéaire, nous ne considérons dans cette partie que ce maillage. Celui-ci nous permet en effet de réduire l'espace de stockage des résultats et donc de mener à bien les calculs.

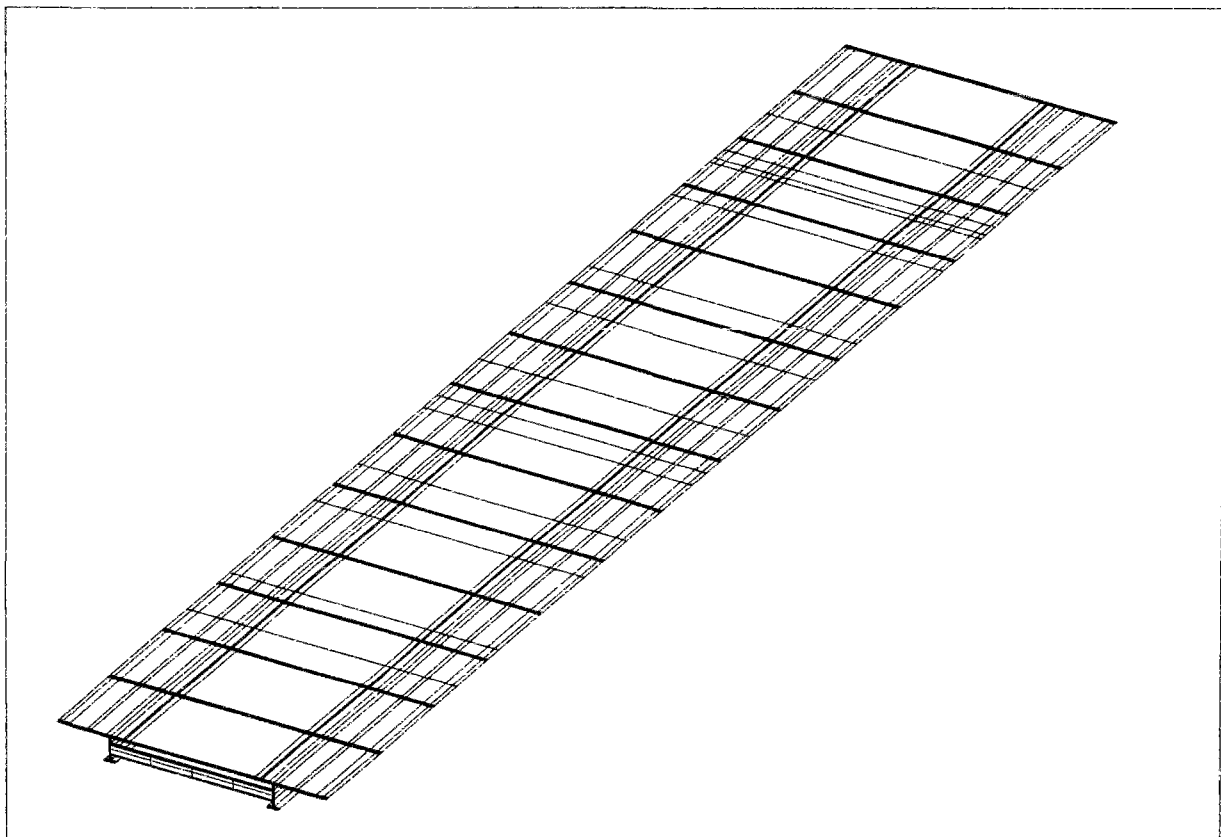


Figure 4-6 : Modélisation de la structure considérée en éléments de coques multicouches
- Cas non- linéaire -

4-1-3-2. Matériaux

- *Béton* : loi élastoplastique écrouissable de *Willam-Warnke* à 3 paramètres (cf. 2-3-1). Les caractéristiques mécaniques ainsi que les paramètres du modèle sont indiqués dans le *tableau 4-7*.

Modèle	Caractéristiques matérielles	Paramètres du modèle
Elasticité	$E = 35000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.15$	$\rho = 2600 \text{ kg/m}^3$
<i>Willam-Warnke</i> à 3 paramètres	Résistances : $\sigma_c = 35 \text{ MPa}$ $\sigma_t = 3.1 \text{ MPa}$ $\sigma_{bc} = 1.15 \sigma_y$	$z_0 = 1.0$ $z_{ult} = 0.01$ $\kappa = 7500$

Tableau 4-7 : Caractéristiques matérielles du béton et paramètres du modèle

- *Acier* : loi élastoplastique parfaite de *Von-Mises* (cf. 2-2-1) :

$$E = 214067.3 \text{ MPa}, \nu = 0.3, f_y = 500 \text{ MPa}, \rho = 7850 \text{ kg/m}^3$$

Notons que les paramètres élastiques, la limite en traction simple de l'acier et les résistances du béton, sont des données précisées par le SETRA. En revanche, nous nous sommes basés sur l'exemple des dalles circulaires en béton armé (cf. 3-2-4) pour estimer les paramètres d'écrouissage du modèle de *Willam-Warnke* (z_0 , z_{ult} et κ).

4-1-3-3. Chargement

La structure est soumise au chargement précisé précédemment au paragraphe 4-1-2-3. L'analyse de la structure étant non-linéaire, nous choisissons d'effectuer nos calculs d'abord à l'état limite de service (ELS) puis à l'état limite ultime (ELU). Le chargement à appliquer n'étant pas défini de manière explicite par le SETRA.

A l'état limite de service, nous étudions la combinaison suivante : $G + 1.2 Q$, où G représente les charges permanentes et Q les charges d'exploitations. A l'état limite ultime, nous étudions la combinaison définie par les BAEL 90 (Béton Armé aux États Limites) : $1.35 G + 1.5 Q$.

Ces chargements sont alors augmentés de façon croissante jusqu'à la ruine. 20 incréments de chargement sont utilisés. A l'état limite de service, nous utilisons : $\gamma (G + 1.2 Q)$ et à l'état limite ultime : $\beta (1.35 G + 1.5 Q)$. γ et β représentent des facteurs multiplicateurs que l'on augmente à chaque incrément de chargement.

4-1-3-4. Résultats

La *figure 4-7* illustre le maillage déformé de la structure à un incrément donné.

Les *figures 4-8* et *4-9* présentent respectivement des résultats numériques de l'étude aux états limites de service et ultime, sous forme de courbes chargement appliqué - flèche. Ces résultats sont obtenus pour les deux schémas considérés (7 et 15 entretoises).

Quelque soit le type de chargement appliqué (ELS ou ELU), nous constatons que les courbes obtenues avec un schéma de 7 entretoises sont très proches de celles obtenues avec un schéma de 15 entretoises. De plus, la rupture de la structure se produit quasiment au même moment pour ces deux schémas. Toutefois, à l'état limite de service, la charge de rupture est nettement supérieure à celle obtenue à l'état limite ultime ($\gamma = 1.5$ alors que $\beta = 1.0$). Ceci est normal dans le sens où la rupture de la structure se produit plus rapidement à l'état limite ultime.

Les *tableaux 4-8*, *4-9*, *4-10* et *4-11* présentent les valeurs maximales en traction et compression des contraintes principales S_1 et S_2 pour les différents schémas et chargements considérés. Seules les valeurs dans les âmes et semelles inférieures des poutres principales sont reportées dans ces tableaux. En effet, c'est à ces niveaux que les contraintes principales sont maximales.

Les résultats montrent que pour les deux types de chargements (ELS et ELU), les contraintes obtenues avec les schémas de 7 et 15 entretoises sont très proches, notamment au niveau des semelles inférieures. On constate également qu'à l'état limite de service, les contraintes principales sont inférieures à celles obtenues à l'état limite ultime.

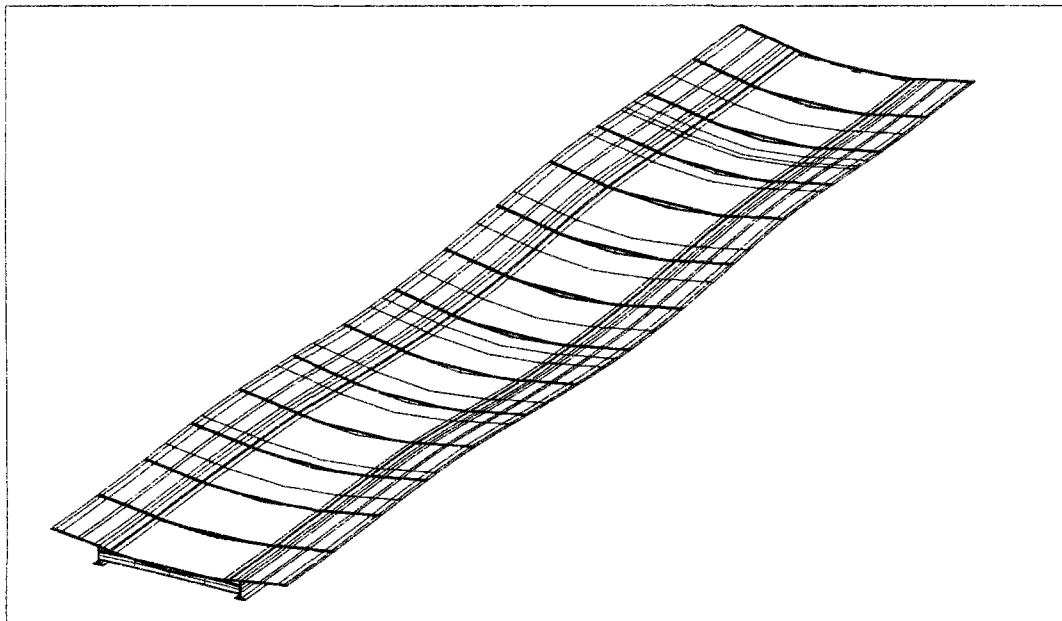


Figure 4-7 : Maillage déformé de la structure

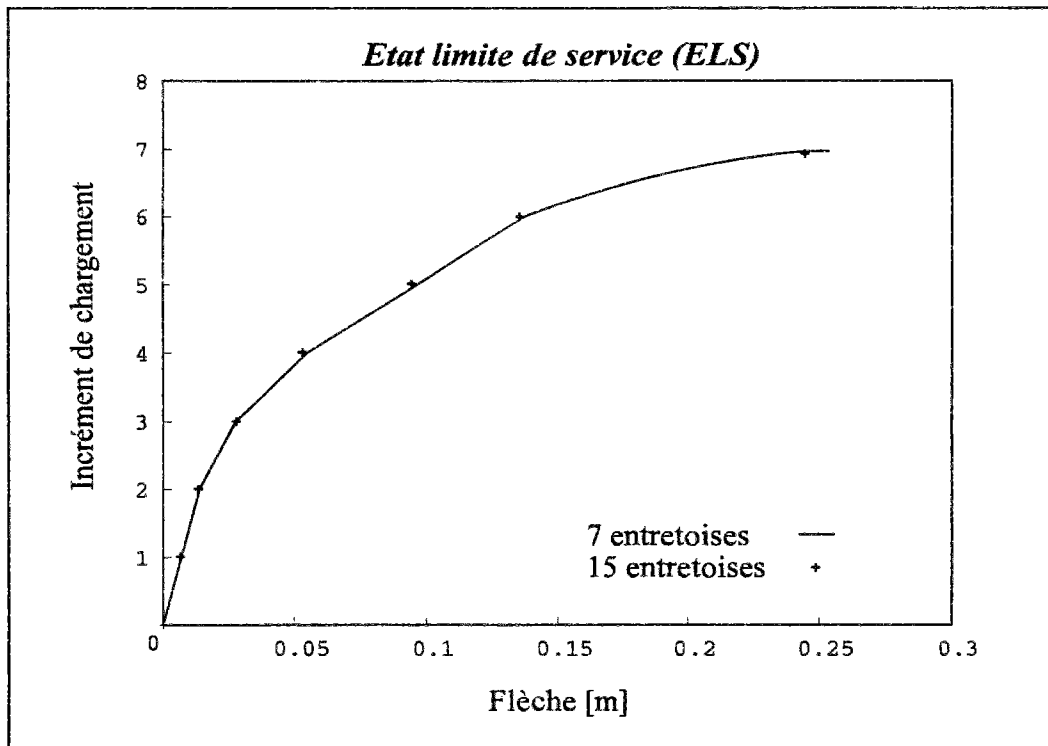


Figure 4-8 : Courbe incrément de chargement en fonction de la flèche - *Etat limite de service* - (7 et 15 entretoises)

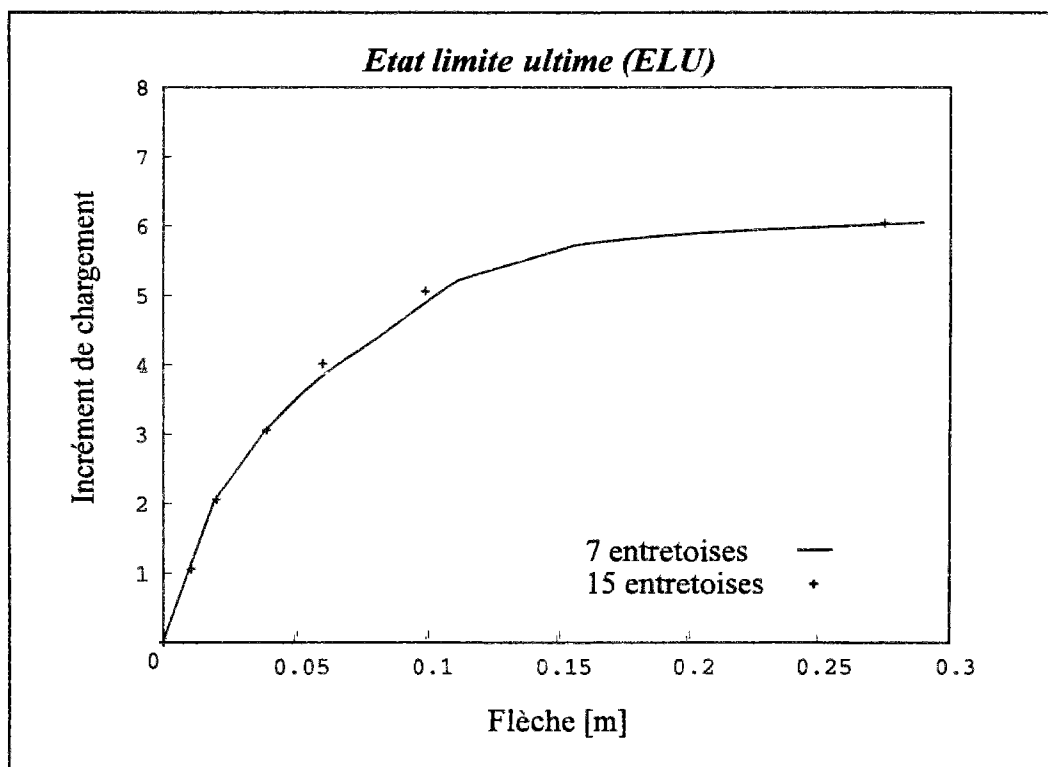


Figure 4-9 : Courbe incrément de chargement en fonction de la flèche - *Etat limite ultime* - (7 et 15 entretoises)

	<i>Contrainte principale S_1 (MPa)</i>		<i>Contrainte principale S_2 (MPa)</i>	
	Valeur maximale en traction	Valeur maximale en compression	Valeur maximale en traction	Valeur maximale en compression
<i>Schéma avec 7 entretoises</i>	290.445	-475.931	92.953	-625.125
<i>Schéma avec 15 entretoises</i>	284.278	-469.867	93.491	-623.666

Tableau 4-8 : Valeurs maximales des contraintes principales S_1 et S_2 dans les âmes des poutres principales - calcul à l'état limite de service -

	<i>Contrainte principale S_1 (MPa)</i>		<i>Contrainte principale S_2 (MPa)</i>	
	Valeur maximale en traction	Valeur maximale en compression	Valeur maximale en traction	Valeur maximale en compression
<i>Schéma avec 7 entretoises</i>	433.129	-199.900	348.943	-489.400
<i>Schéma avec 15 entretoises</i>	434.390	-200.147	350.050	-489.455

Tableau 4-9 : Valeurs maximales des contraintes principales S_1 et S_2 dans les semelles inférieures des poutres principales - calcul à l'état limite de service -

	<i>Contrainte principale S_1 (MPa)</i>		<i>Contrainte principale S_2 (MPa)</i>	
	Valeur maximale en traction	Valeur maximale en compression	Valeur maximale en traction	Valeur maximale en compression
<i>Schéma avec 7 entretoises</i>	385.796	-496.449	139.953	-652.708
<i>Schéma avec 15 entretoises</i>	371.247	-487.766	140.372	-648.941

Tableau 4-10 : Valeurs maximales des contraintes principales S_1 et S_2 dans les âmes des poutres principales - calcul à l'état limite ultime -

	<i>Contrainte principale S_1 (MPa)</i>		<i>Contrainte principale S_2 (MPa)</i>	
	Valeur maximale en traction	Valeur maximale en compression	Valeur maximale en traction	Valeur maximale en compression
<i>Schéma avec 7 entretoises</i>	516.483	-335.934	485.654	-604.510
<i>Schéma avec 15 entretoises</i>	516.797	-336.303	489.632	-604.507

Tableau 4-11 : Valeurs maximales des contraintes principales S_1 et S_2 dans les semelles inférieures des poutres principales - calcul à l'état limite ultime -

Les *tableaux 4-8, 4-10 et 4-11* montrent que la valeur maximale de la contrainte principale S_2 est de l'ordre de 600 MPa en compression. Nous avons tenté de localiser le noeud où nous obtenons cette valeur et avons relevé la valeur de la contrainte principale S_1 . Ces deux composantes nous ont permis de voir si le critère était bien vérifié en ce noeud (c'est à dire : $\sqrt{(S_1^2 + S_2^2 - S_1 S_2)} \leq f_y$). Ceci n'est pas le cas. En effet, nous obtenons pour $\sqrt{(S_1^2 + S_2^2 - S_1 S_2)}$ une valeur de l'ordre de 530 MPa alors que f_y vaut 500 Mpa. Cela s'explique par le fait que dans les calculs, les contraintes sont d'abord calculées aux points d'intégration. A partir de là, nous effectuons une interpolation pour obtenir les contraintes aux noeuds. Le critère est donc vérifié aux points d'intégration mais pas forcément aux noeuds du fait de l'interpolation.

Les *figures 4-10 et 4-11* représentent à l'état limite ultime, l'étendue des zones plastiques pour les différents schémas considérés. Seul l'état limite ultime est pris en compte car les résultats en contraintes et déplacements obtenus précédemment montrent que cet état est plus défavorable que l'état limite de service.

Nous constatons sur les *figures 4-10 et 4-11*, que les âmes des poutres principales plastifient en premier et les semelles inférieures par la suite. Ceci confirme bien les résultats prédits par les calculs élastiques précédents. De plus, pour les deux schémas considérés (7 et 15 entretoises), les étendues des zones plastiques sont très proches.

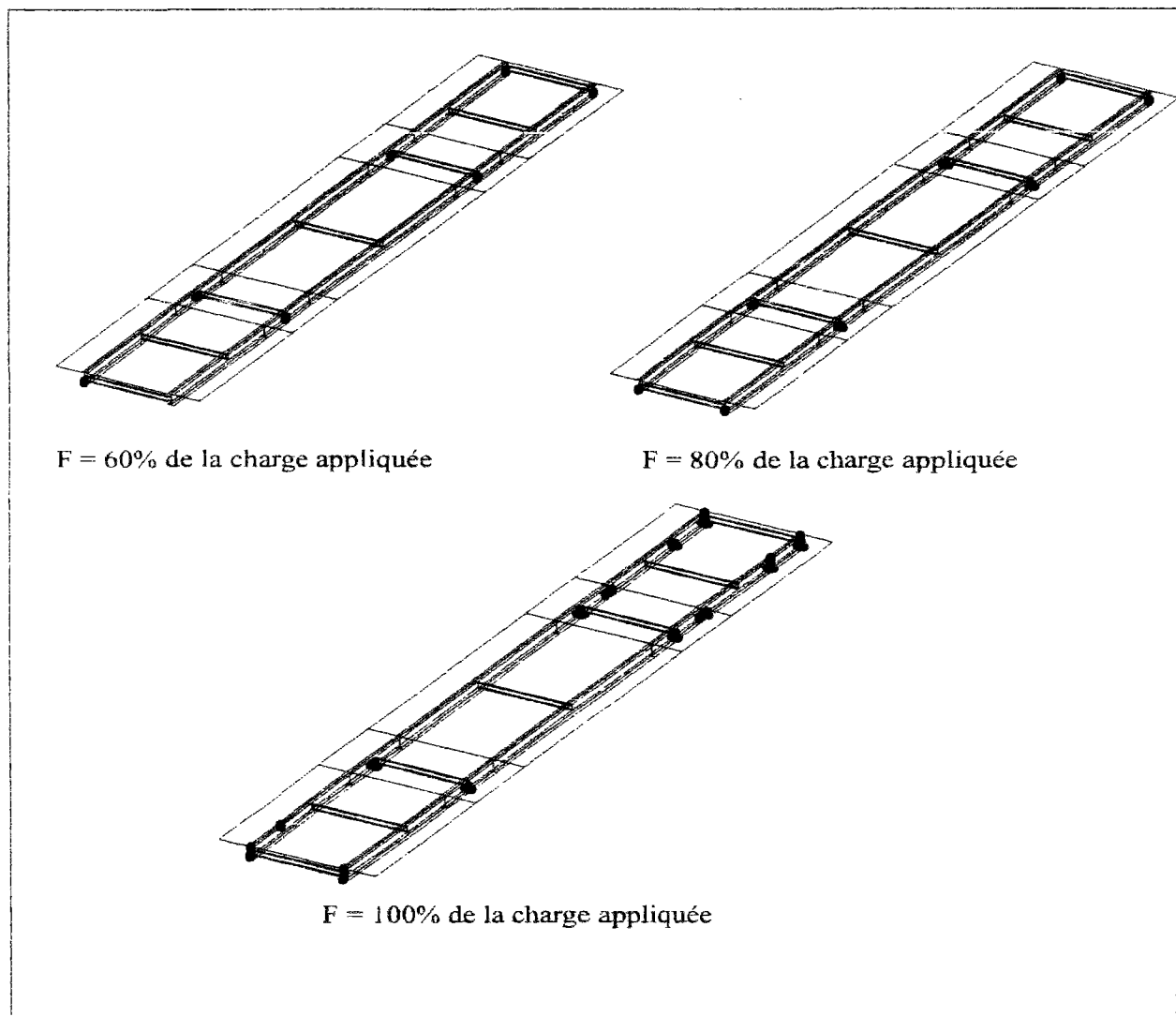


Figure 4-10 : Etendue des zones plastiques - *Etat limite ultime* -
Schéma avec 7 entretoises

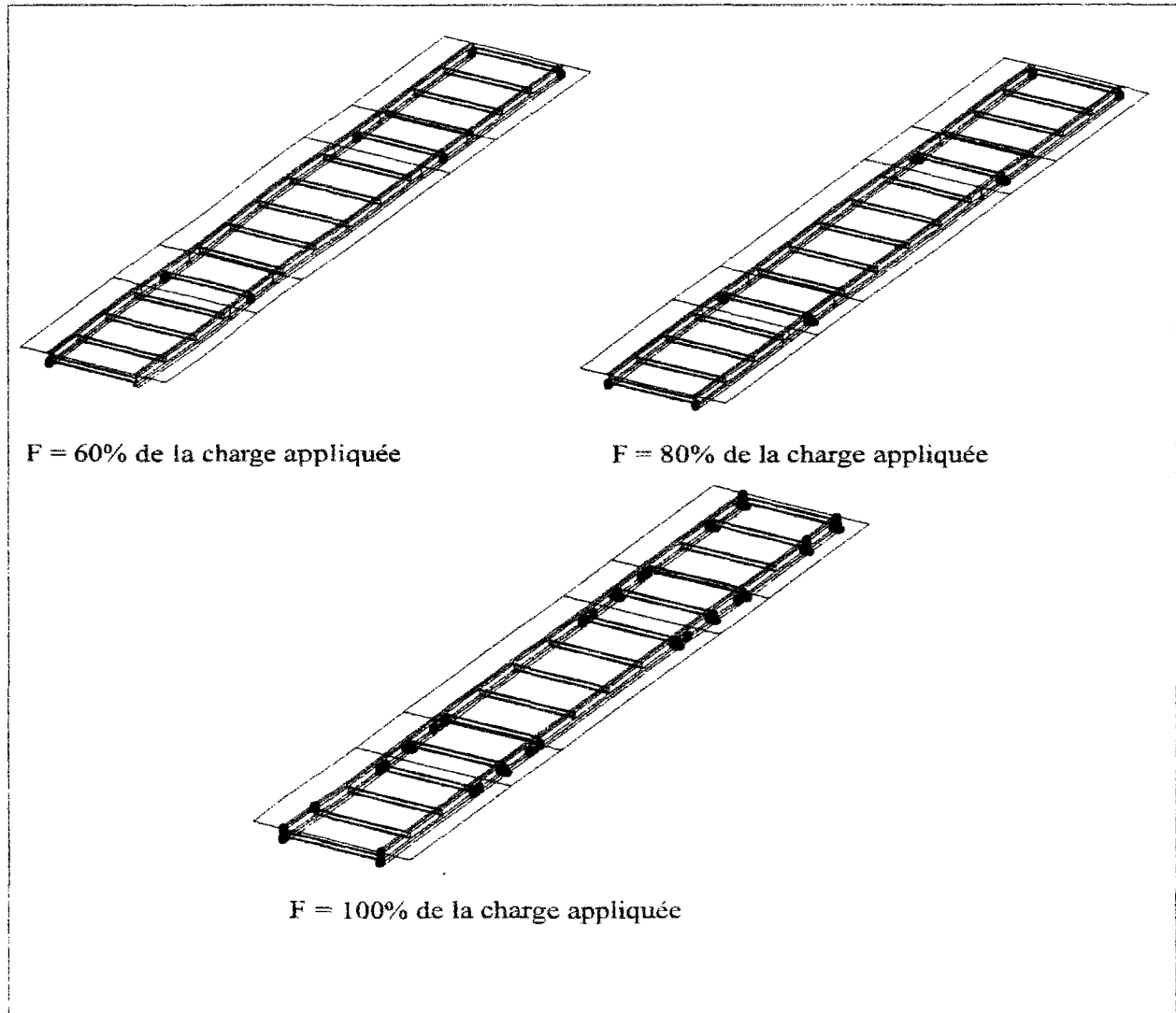


Figure 4-11 : Etendue des zones plastiques - *Etat limite ultime* -
Schéma avec 15 entretoises

L'examen des résultats obtenus en analyses linéaire et non-linéaire nous permet de répondre à la problématique industrielle posée. En effet, ces résultats montrent clairement que l'utilisation de 7 entretoises est suffisante pour assurer la répartition transversale des charges appliquées au pont. Nous pouvons donc réduire le nombre d'entretoises de 15 à 7.

4-2. Etude d'une structure multi-étagée en béton armé sous chargement sismique

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats d'une application des éléments de coque multicouche, au cas d'une structure multi-étagée en béton armé sous chargement sismique. Cet exemple est tiré de la contribution du LCPC au projet scientifique international CAMUS (CALcul des MURs sous sollicitation Sismique) proposé par le Commissariat à l'Energie Atomique (CEA), la Fédération Nationale du Bâtiment (FNB) et Electricité De France (EDF). Les essais expérimentaux ont été effectués au CEA à Saclay et la comparaison entre résultats numériques et expérimentaux a eu lieu à Paris en septembre 1998.

Trois objectifs majeurs guident ce travail :

- La mise au point d'outils en dynamique non-linéaire utilisant des moyens performants. Ceci, aussi bien pour les modèles de comportement que pour les algorithmes et les codes de calculs.
- L'utilisation des outils réalisés pour des calculs prévisionnels avant expérimentation et pour aider à l'analyse du comportement de la maquette.
- Le recalage et la confrontation des modèles et concepts utilisés par la confrontation avec les résultats d'essais.

Dans notre étude, une discrétisation tridimensionnelle permettant d'analyser les principaux aspects de la représentation spatiale du problème, a été utilisée. Cette discrétisation fait intervenir les éléments de coques multicouches développés au chapitre 1, ce qui nous permet de tester leur performance ainsi que leur aptitude à effectuer des calculs prévisionnels.

L'étude est décomposée en deux parties :

- Analyse modale de la structure.
- Calculs prévisionnels non-linéaires.

La géométrie ainsi que la modélisation de la structure sont d'abord présentées. Nous montrons par la suite quelques résultats de calculs.

4-2-1. Données et modélisation

La structure à étudier est une structure composée de six étages munis d'un système de contreventement et de deux murs en béton armé sans files d'ouvertures connectés à une table (*figure 4-12*). Les dimensions des différentes parties sont les suivantes :

- Mur : longueur = 1.70m épaisseur = 0.06m hauteur = 0.90m
- Plancher : longueur = 1.70m épaisseur = 0.21m largeur = 1.70m
- Fondation : longueur = 2.10m épaisseur = 0.10m hauteur = 0.60m

Le système de contreventement permet de réduire les risques de rupture pouvant être dus à des mouvements parasites transversaux ou à une rupture non symétrique des murs.

La structure a été testée au Commissariat à l'Energie Atomique sous chargement sismique dans la direction indiquée sur la *figure 4-12*.

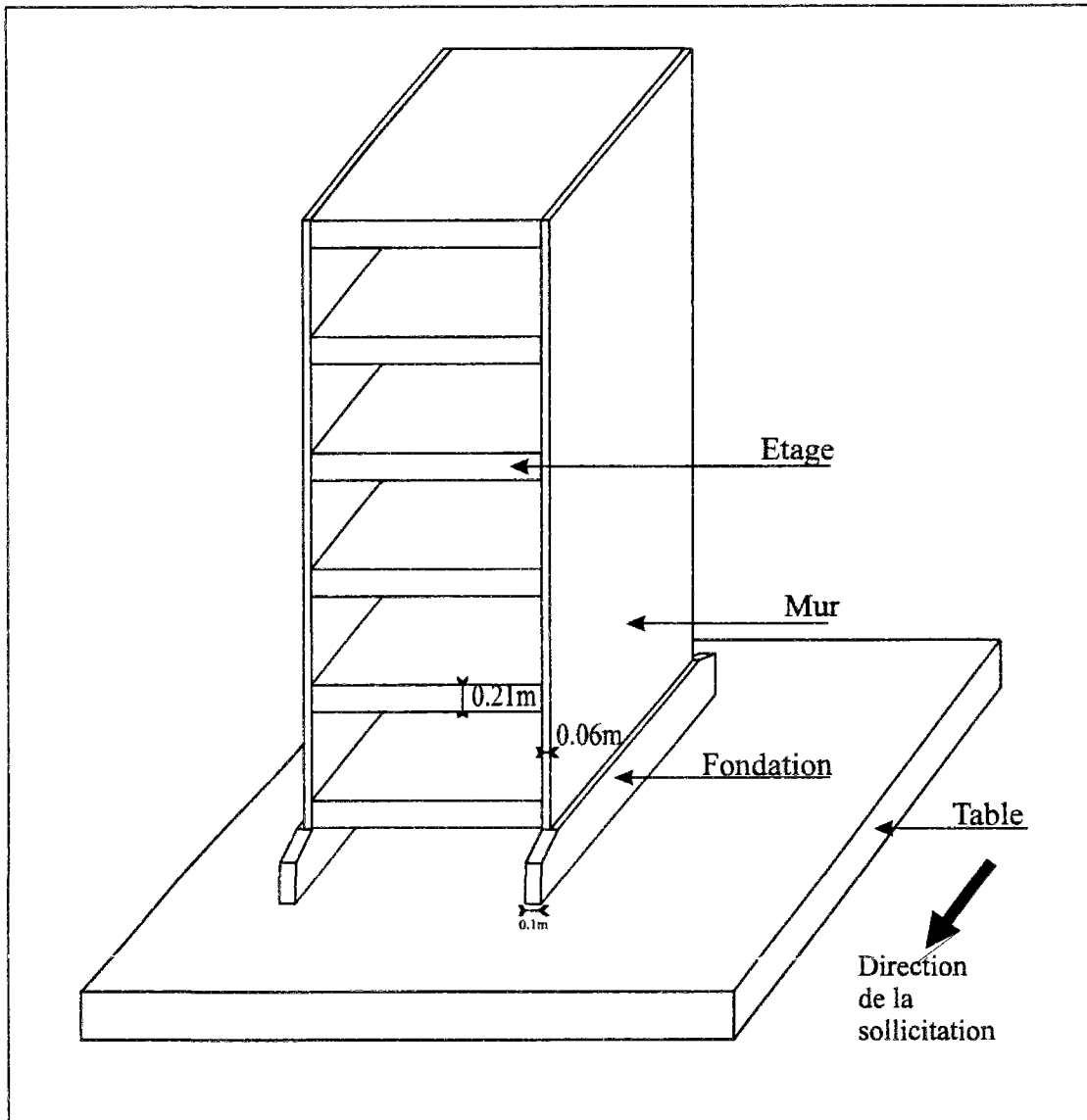


Figure 4-12 : Représentation de la structure considérée avec la table

4-2-2. Etude du comportement dynamique linéaire de la structure : méthode de superposition modale

Nous proposons d'abord de commencer par étudier le comportement dynamique linéaire de la structure. Pour cela, nous effectuons une analyse modale et utilisons par la suite la méthode de superposition modale pour obtenir la réponse dynamique linéaire recherchée.

4-2-2-1. Modélisation

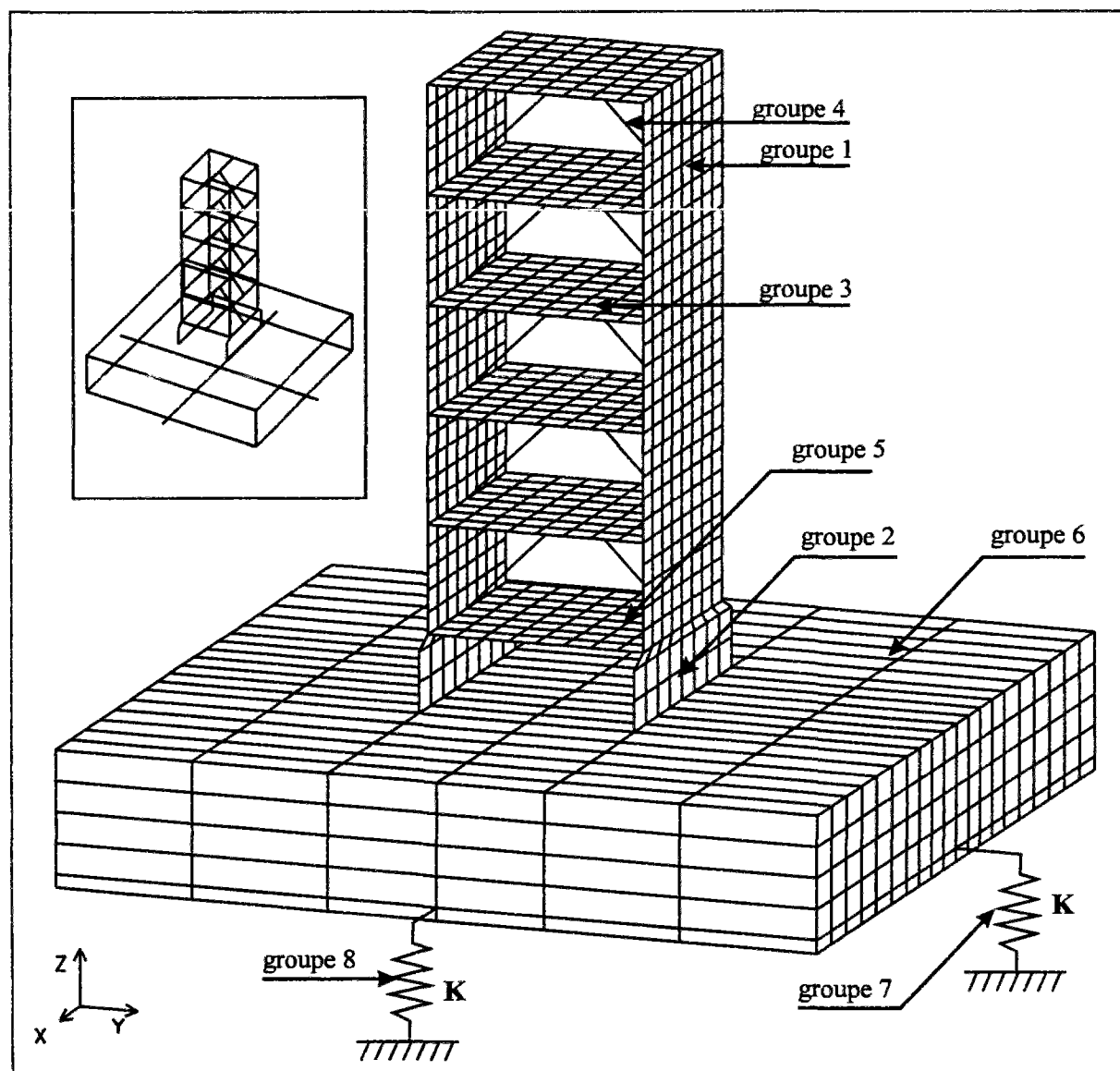


Figure 4-13 : Maillage du modèle 3D avec prise en compte de la table

Dans notre modèle 3D, les murs et les planchers sont représentés par des éléments de coques multicouches, la table par des éléments de massifs tridimensionnels et les contreventements par des éléments de poutres tridimensionnels.

Le maillage (*figure 4-13*) est constitué de 5871 noeuds et de 832 éléments de coques multicouches avec 8 couches dans la section, 600 éléments de massifs tridimensionnels, 112 éléments de poutres et 4 éléments spéciaux appartenant à 8 groupes de caractéristiques géométriques et matérielles différentes.

4-2-2-2. Conditions aux limites

Les conditions aux limites concernent le centre de gravité de la table. Ce dernier est fixé horizontalement pour empêcher le mouvement de corps rigide de la structure.

4-2-2-3. Matériaux

- Béton : $E = 28000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.2$
- Acier : $E = 210000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$

Par raison de simplification, nous ne considérons pas les armatures dans cette partie. Leur influence étant en effet négligeable lors de l'analyse dynamique linéaire de la structure. Seul le système de contreventement est pris en compte.

4-2-2-4. Charges additionnelles

Nous considérons pour chaque plancher des charges complémentaires (*figure 4-14*) que l'on intègre en modifiant la masse volumique des planchers.

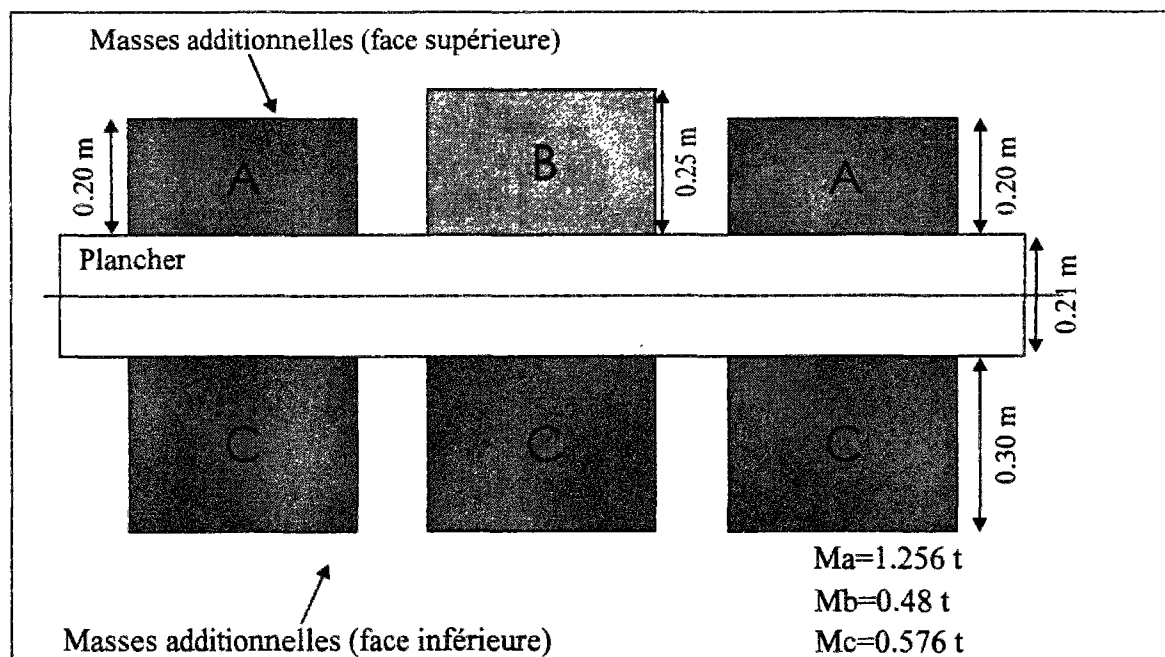


Figure 4-14 : Plancher avec prise en compte des masses additionnelles

4-2-2-5. Résultats

Les résultats de l'analyse modale obtenus avec le modèle -3D- sont présentés sur le **tableau 4-12**. La première fréquence propre expérimentale a été mesurée avant les premiers tests et a été estimée à environ 7.24 Hz, la seconde à 20 Hz (mode propre vertical) et la troisième à 33 Hz (mode de flexion dans le plan). Dans nos calculs, nous avons considéré différentes valeurs de K. Nous constatons que la comparaison entre les valeurs mesurées et obtenues est bonne pour une valeur de K égale à 3.10^8 N/m (écarts inférieurs à 5.6 %). C'est donc la valeur que l'on retiendra dans la suite des calculs. Notons également que les valeurs des fréquences obtenues sont très proches des valeurs mesurées.

Valeurs de K	Fréquence propre f_1 (Hz)	Fréquence propre f_2 (Hz)	Fréquence propre f_3 (Hz)	Pourcentage d'erreur sur f_1	Pourcentage d'erreur sur f_2	Pourcentage d'erreur sur f_3
$4.0.10^8$	7.81	21.69	34.28	7.8%	8.4%	3.8%
$3.0.10^8$	7.65	19.58	33.25	5.6%	2.1%	0.07%
$2.5.10^8$	7.52	18.26	32.40	3.8%	8.7%	1.8%

Tableau 4-12 : Fréquences propres obtenues avec le modèle 3D pour différentes valeurs de K

Les **figures 4-15**, **4-16** et **4-17** présentent les déformées de la structure pour les premier, second et troisième modes propres. La valeur de K étant prise égale à 3.10^8 N/m. Le premier mode propre correspond bien à une flexion dans le plan, le second à un mouvement vertical pur et le troisième à un autre mode de flexion dans le plan.

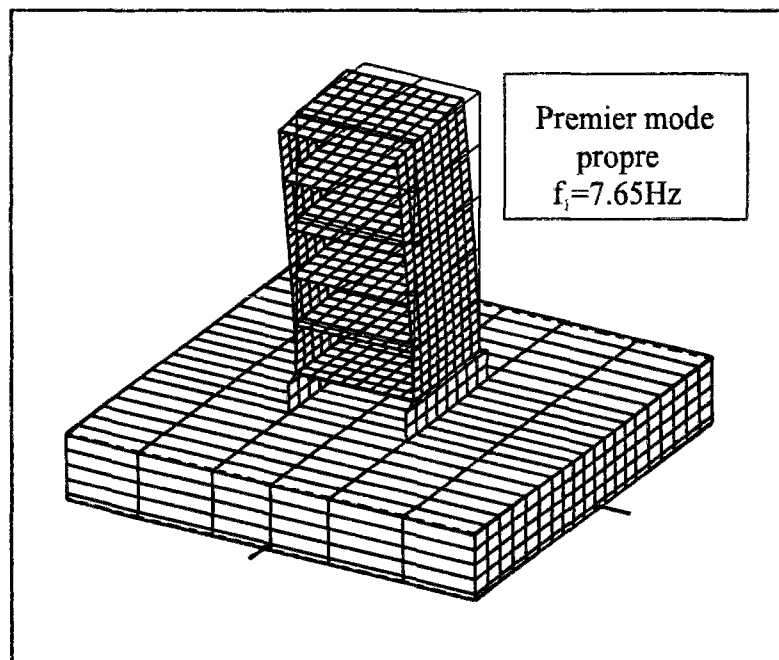


Figure 4-15 : Premier mode propre - modèle 3D avec table -

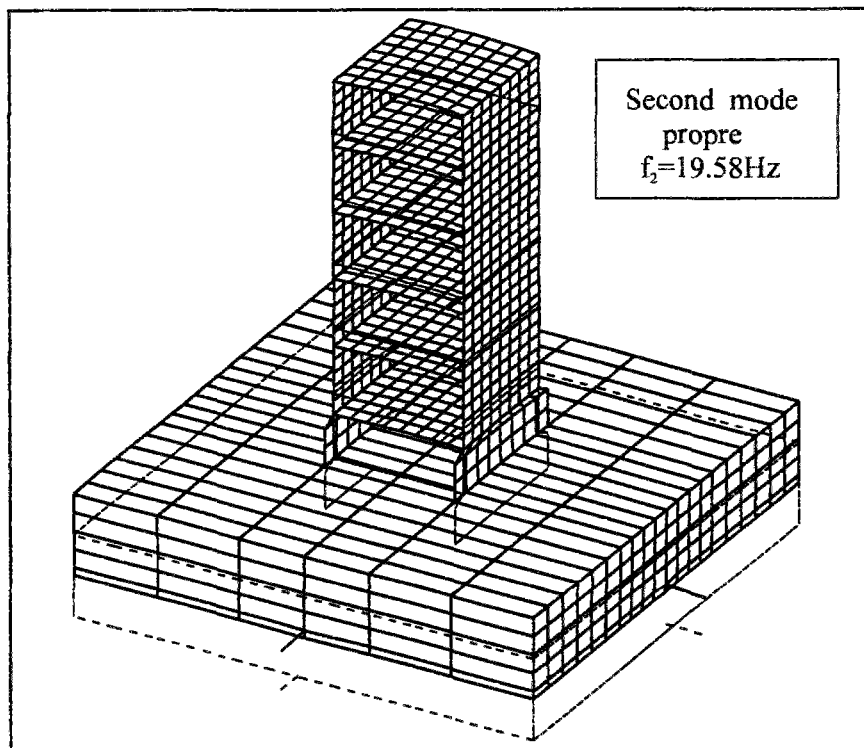


Figure 4-16 : Second mode propre - *modèle 3D avec table* -

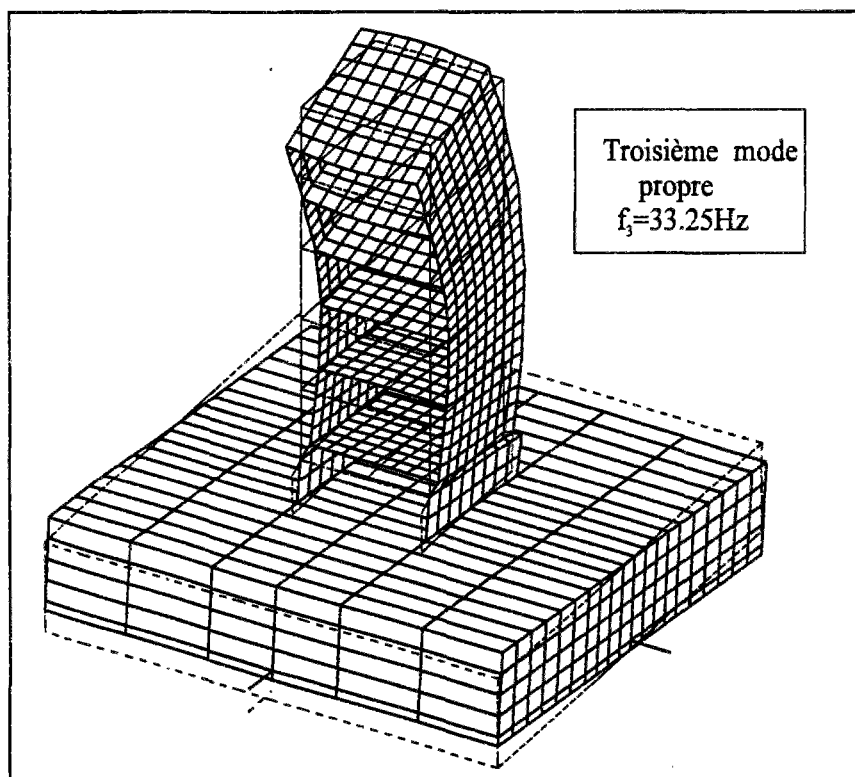


Figure 4-17 : Troisième mode propre - *modèle 3D avec table* -

Nous nous intéressons à présent à la réponse dynamique linéaire de la structure. Pour cela, nous considérons les deux signaux d'accélération présentés sur les *figures 4-18 (a) et 4-19 (a)*. Ces signaux correspondent à l'accélération horizontale appliquée à la table. L'utilisation de ce type d'excitation et de la méthode de superposition modale permettent d'obtenir la réponse dynamique linéaire recherchée.

Dans nos calculs, ces accélérations sont divisées en 1200 incréments et l'intervalle de temps est pris égal à 0.01 s. Les *figures 4-18 (b) et 4-19 (b)* illustrent le déplacement horizontal au sommet de la structure en fonction du temps, pour les différents signaux d'accélération considérés (camus17 et camus19). Ce déplacement est un déplacement relatif au centre de gravité de la table. En effet, dans le cas de sollicitations sismiques, l'équation d'équilibre dynamique vérifiée par le vecteur des déplacements inconnus $\{U\}$, s'écrit dans le repère absolu $\{R\}$, en négligeant l'effet de l'amortissement :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{0\} \quad (1)$$

où $[M]$ et $[K]$ désignent respectivement les matrices de masse et de rigidité de la structure.

Si $\{R'\}$ désigne le repère lié à la base de la structure, en translation par rapport au repère absolu $\{R\}$, le vecteur $\{U\}$ peut alors se décomposer sous la forme :

$$\{U\} = \{U^{ent}\} + \{U^{rel}\} \quad (2)$$

avec $\{U^{ent}\}$ le vecteur décrivant le mouvement d'entraînement du repère $\{R\}$ par rapport à $\{R'\}$ et $\{U^{rel}\}$ le vecteur des déplacements relatifs de la structure par rapport au repère $\{R'\}$. Ce dernier satisfait donc l'équation d'équilibre dynamique :

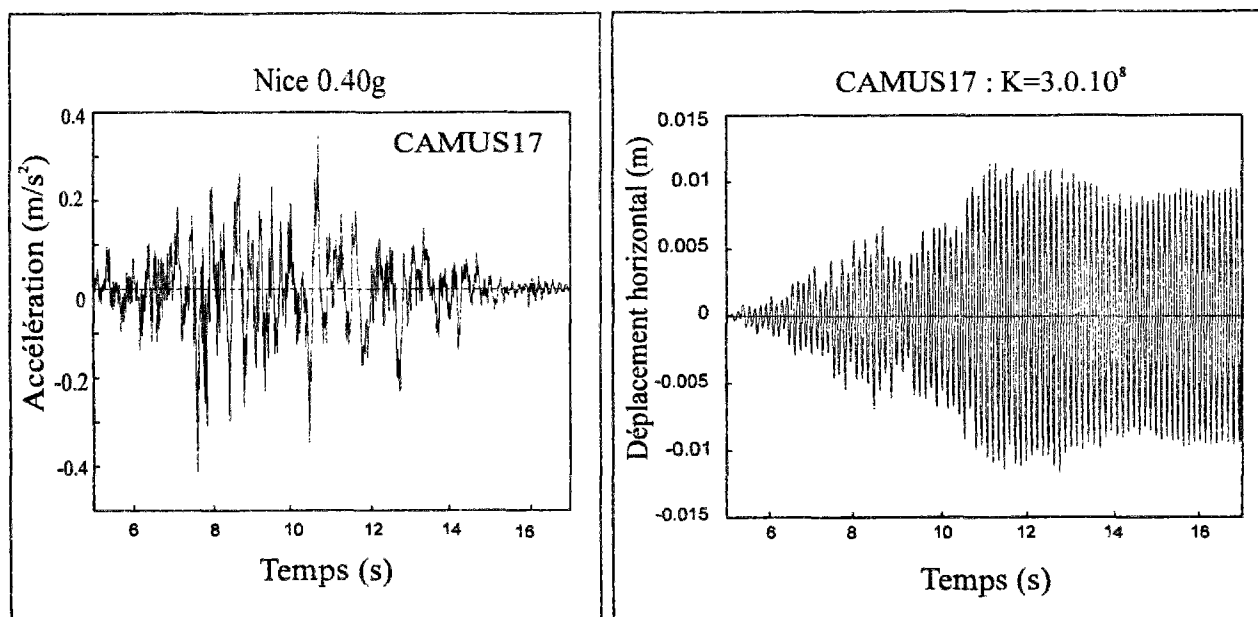
$$[M]\{\ddot{U}^{rel}\} + [K]\{U^{rel}\} = -[M]\{\ddot{U}^{ent}\} - [K]\{U^{ent}\} \quad (3)$$

Cependant, la base étant supposée rigide, le vecteur $[K]\{U^{ent}\}$ associé à un mouvement de corps rigide est nul. L'équation (3) devient alors :

$$[M]\{\ddot{U}^{rel}\} + [K]\{U^{rel}\} = -[M]\{\ddot{U}^{ent}\} \quad (4)$$

L'action du séisme apparaît clairement sur cette dernière équation à travers le terme $-[M]\{\ddot{U}^{ent}\}$ qui s'apparente à une force extérieure.

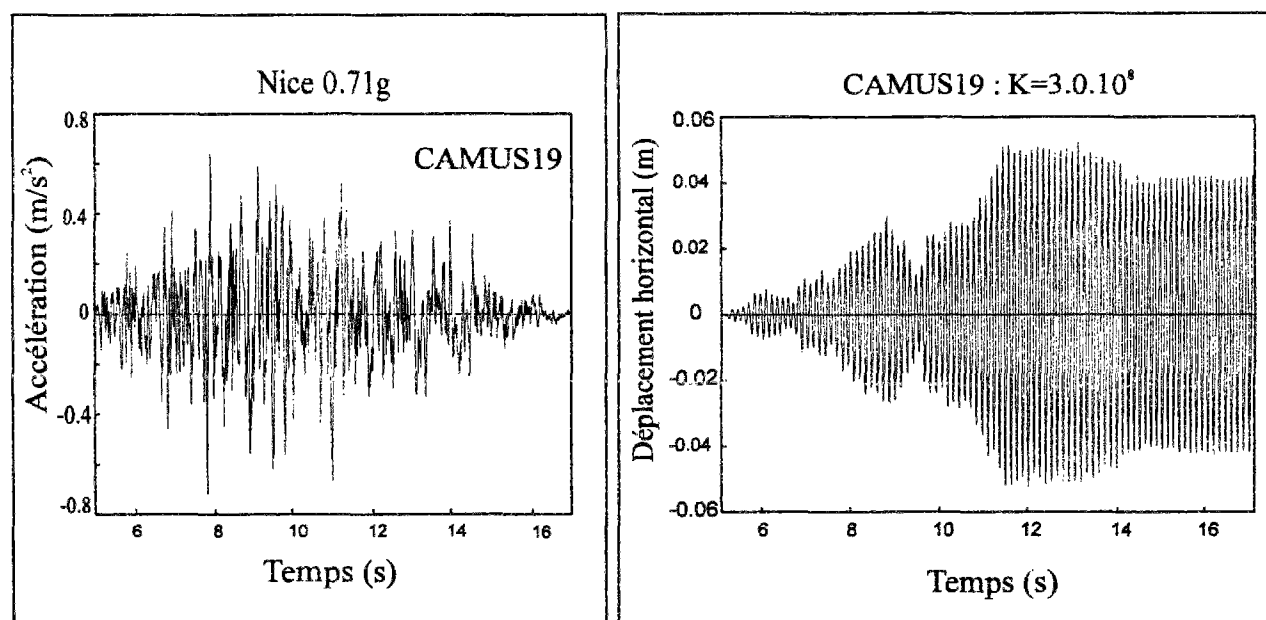
Les *figures 4-18 (b) et 4-19 (b)* nous permettent de constater que le déplacement horizontal au sommet de la structure augmente avec la sévérité du séisme. En effet, pour le signal d'accélération *Nice 0.40g*, le déplacement maximal est de 1.2cm. En revanche, pour le signal d'accélération *Nice 0.71g*, le déplacement maximal vaut 5.0cm, soit environ quatre fois plus que le précédent.



(a)

(b)

Figure 4-18 : (a) Signal d'accélération *Nice 0.40g* (Camus 17)
(b) déplacement horizontal au sommet de la structure en fonction du temps - *Camus 17* -



(a)

(b)

Figure 4-19 : (a) Signal d'accélération *Nice 0.71g* (Camus 19)
(b) déplacement horizontal au sommet de la structure en fonction du temps - *Camus 19* -

4-2-3. Etude du comportement dynamique non-linéaire de la structure

L'étude dynamique linéaire de la structure ayant conduit à des résultats satisfaisants, nous nous intéressons à présent à l'étude du comportement dynamique non-linéaire de la structure.

4-2-3-1. Modélisation

Le modèle -3D- considéré pour l'analyse dynamique non-linéaire comprend tous les éléments structuraux de la maquette ainsi que la table. Le maillage est constitué de 1194 noeuds et de 256 éléments de coques multicouches avec 8 couches dans l'épaisseur, 40 éléments de massifs tridimensionnels, 607 éléments de poutre et 3 éléments spéciaux appartenant à 21 groupes de caractéristiques géométriques et matérielles différentes (*figure 4-20*).

Par raison de symétrie, seule la moitié de la structure est modélisée. Les conditions aux limites appliquées sont alors les conditions de symétrie ainsi que celles concernant le centre de gravité de la table.

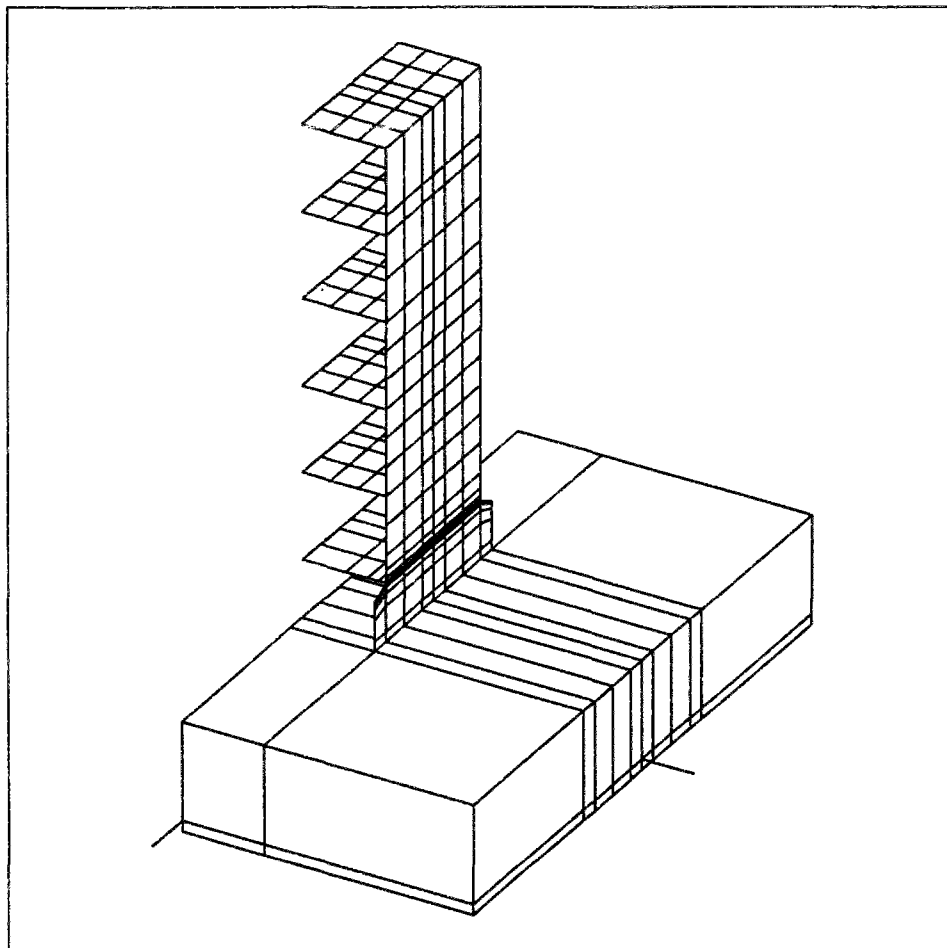


Figure 4-20 : Maillage du modèle non-linéaire 3D avec prise en compte de la table
- Demi-structure -

4-2-3-2. Matériaux

- *Béton* : loi élastoplastique de *Willam-Warnke* à 3 paramètres avec endommagement (cf. 2-3-2). Les caractéristiques mécaniques ainsi que les paramètres du modèle sont indiqués dans le *tableau 4-13*.

Modèle	Caractéristiques matérielles	Paramètres du modèle
Elasticité	$E = 28000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.2$	
<i>Willam-Warnke</i> à 3 paramètres	Résistances : $\sigma_c = 30 \text{ MPa}$ $\sigma_t = 2.5 \text{ MPa}$ $\sigma_{bc} = 1.15 \sigma_y$	$A_0 = 1.0$ $B_0 = 0.01$ $\kappa = 7500$
Endommagement	Module ultime : $E_{ult} = 1/1000 E$	$k = 5000$

Tableau 4-13 : Caractéristiques matérielles du béton et paramètres du modèle

Notons que nous n'avons pas utilisé ici le modèle visco-élasto-plastique avec écrouissage visqueux développé par Sercombe (*Sercombe, 1997*) (cf. 2-3-3), car les effets de vitesse ne sont pas très significatifs, nous négligeons donc ces effets et considérons un modèle élastoplastique endommageable.

- *Acier* : loi élastique linéaire :

$$E = 210000 \text{ MPa}, \nu = 0.3, \rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

Dans cette partie, nous effectuons une analyse dynamique non-linéaire de la structure, nous devons donc prendre en compte les armatures selon le plan de ferrailage précisé par les organisateurs du Benchmark. Ces armatures jouent un rôle important lors de la fissuration du béton à l'échelle de la structure.

4-2-3-3. Chargement

La structure est soumise au chargement précisé précédemment au paragraphe 4-2-2-5. Ce chargement est en revanche divisé ici en 6000 incréments. L'intervalle de temps est donc pris égal à 0.002 s.

4-2-3-4. Résultats

Les courbes des *figures 4-21* et *4-22* représentent le déplacement horizontal au sommet de la structure en fonction du temps pour les différents signaux d'accélération considérés (*Nice 0.40g* et *Nice 0.71g*). La réponse dynamique non-linéaire obtenue est alors comparée avec la réponse élastique obtenue précédemment par superposition modale. Ces deux réponses coïncident durant les premières secondes puis tendent à différer au moment où les effets non-linéaires liés à la fissuration du béton à l'échelle de la structure apparaissent.

La comparaison des réponses numériques obtenues (élastiques linéaires et non-linéaires) met ainsi en évidence les effets du dommage à l'échelle de la structure après dépassement de la limite d'élasticité globale. Ils se traduisent par une augmentation de la période et donc une chute de la fréquence. A partir de là, cette fréquence tend à se stabiliser. Cette stabilisation est essentiellement due à la ductilité de la structure qui provient de la ductilité des armatures longitudinales.

Cependant, plus le niveau d'accélération est important, plus la chute de fréquence est brutale. Certaines structures peuvent même atteindre la ruine dynamique. La fréquence chute alors à zéro et les oscillations s'arrêtent. Ceci n'est évidemment pas le cas pour notre structure.

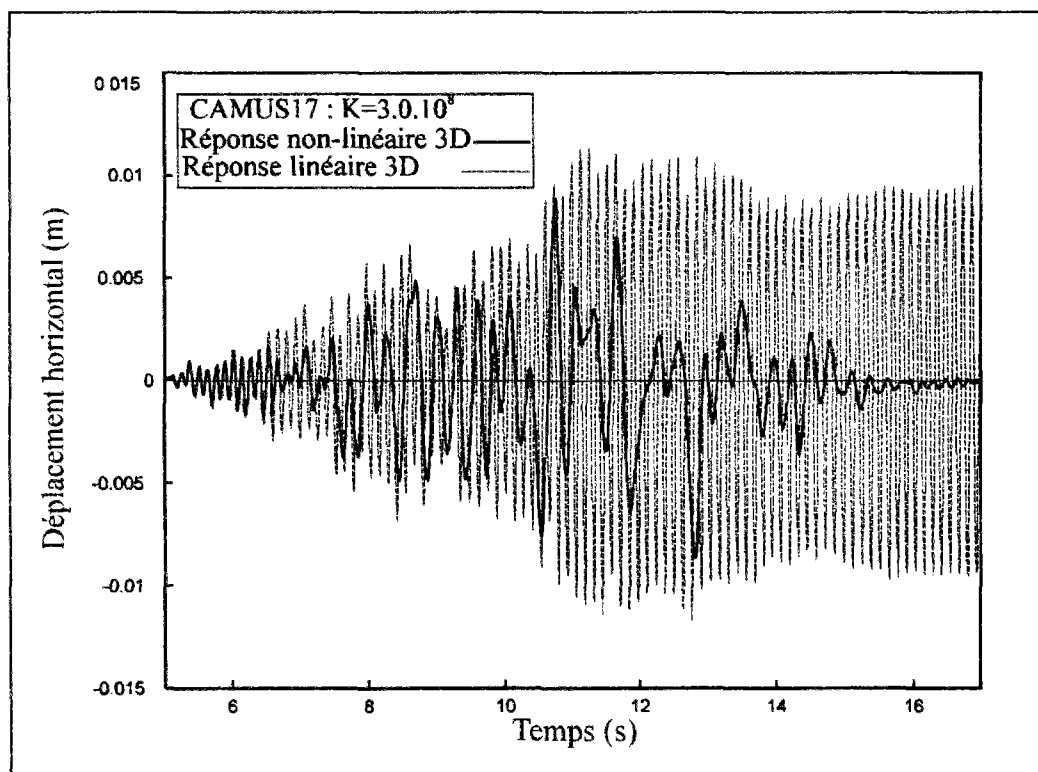


Figure 4-21 : Déplacement horizontal au sommet de la structure en fonction du temps
- comparaison des réponses linéaire et non-linéaire 3D - *Camus 17* -

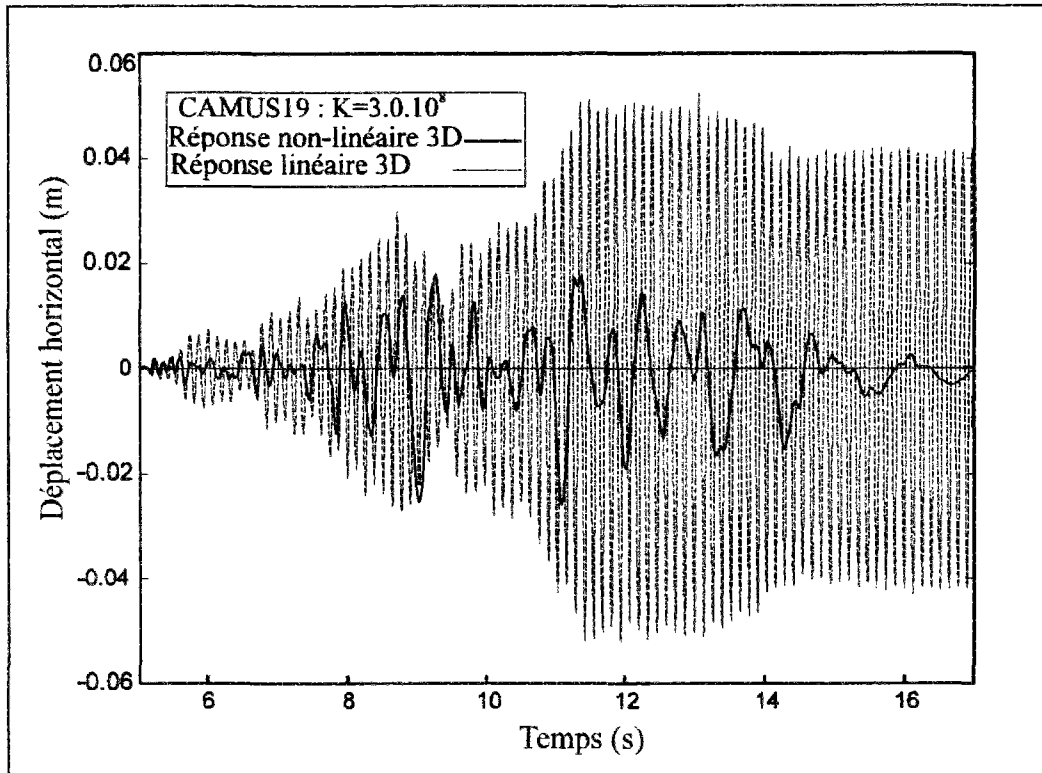
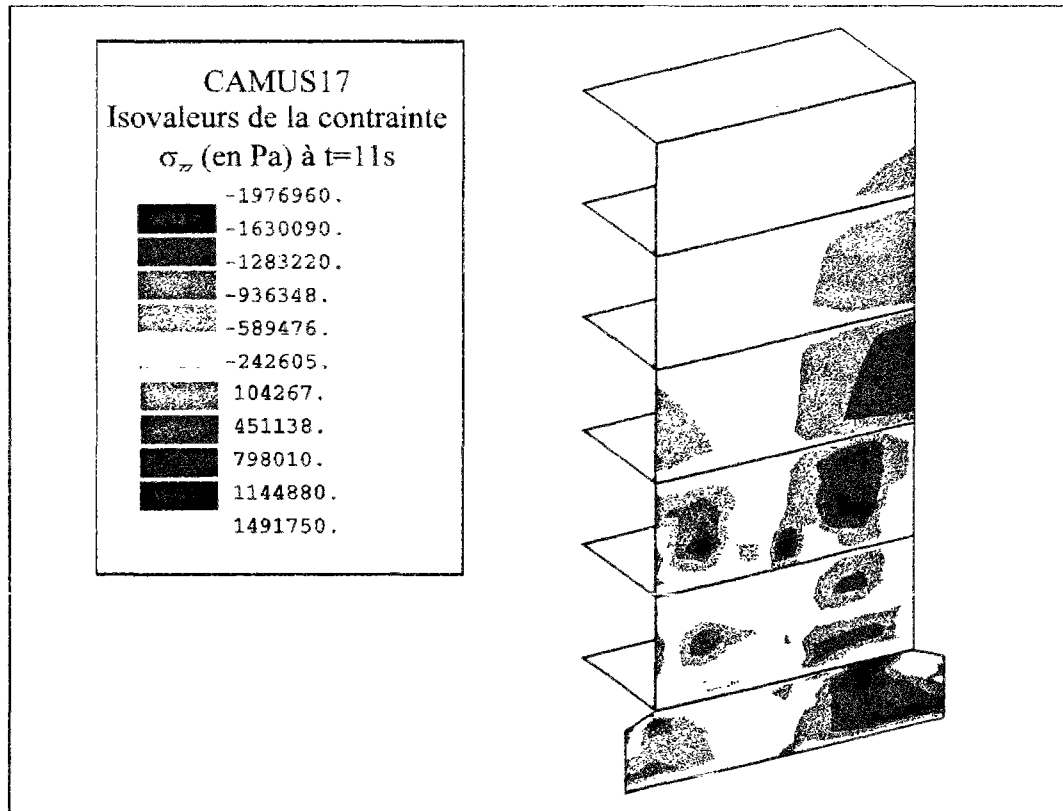
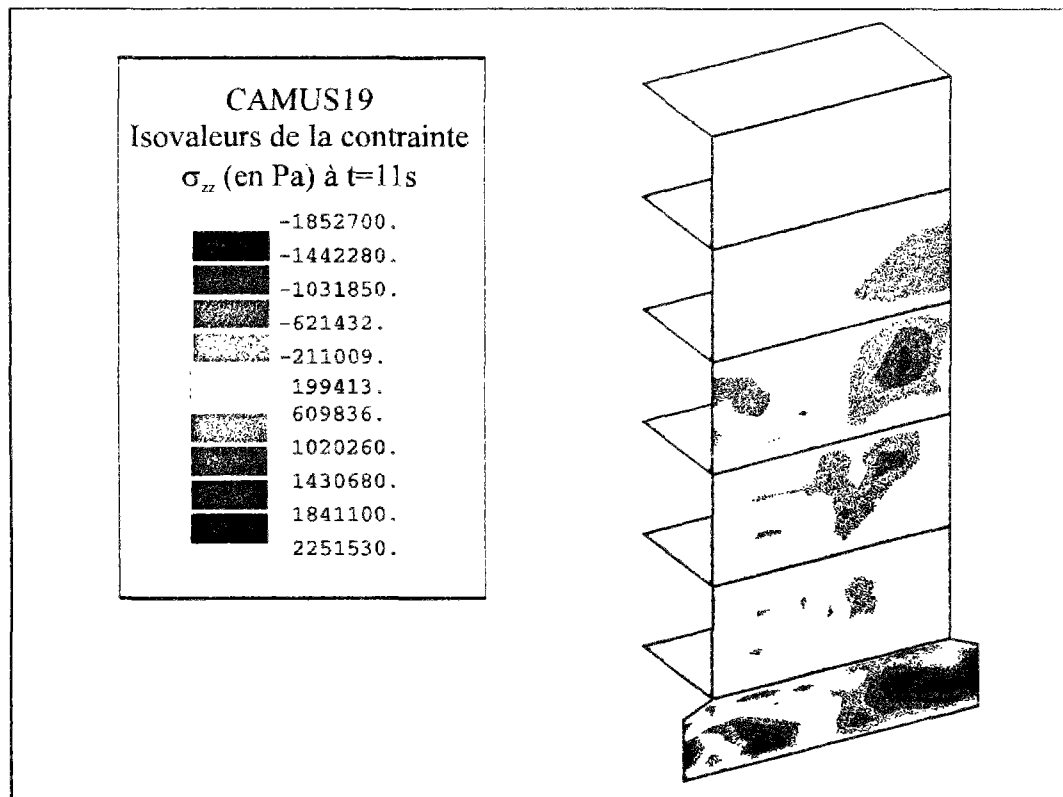


Figure 4-22 : Déplacement horizontal au sommet de la structure en fonction du temps
- comparaison des réponses linéaire et non-linéaire 3D - *Camus 19* -

Les *figures 4-23* et *4-24* illustrent les isovaleurs de la contrainte σ_{zz} pour les différents signaux d'accélération considérés *Nice 0.40g* et *Nice 0.71g*. Elles correspondent à $t = 11$ s pour ces deux signaux et sont relatives à la fibre supérieure, donc à la couche externe située du côté de l'observateur.

Nous constatons à travers ces isovaleurs que, pour le signal d'accélération *Nice 0.40g* (*Camus 17*), le côté droit de la structure est sollicité en traction et le côté gauche en compression. En revanche, l'effet inverse est observé pour le signal *Nice 0.71g* (*camus 19*). Ceci s'explique par le fait que la structure se déforme vers le côté gauche pour le premier signal et pour le second vers le côté droit. Nous confirmons ceci après observation des déformées à $t = 11$ s.

Notons également que la contrainte σ_{zz} augmente avec le niveau d'accélération. En effet, les valeurs de cette contrainte obtenues pour le second signal, sont plus élevées que celles obtenues pour le premier signal.

Figure 4-23 : Isovaleurs de la contrainte σ_{zz} à $t = 11s$ - *Camus 17* -Figure 4-24 : Isovaleurs de la contrainte σ_{zz} à $t = 11s$ - *Camus 19* -

Les figures 4-25 et 4-26 illustrent les isovaleurs des déformations plastiques. Elles correspondent à $t = 11s$ pour les deux signaux d'accélération considérés (Camus 17 et 19). Nous constatons à travers ces isovaleurs que les déformations plastiques augmentent avec le niveau d'accélération. En effet, les valeurs de ces déformations varient entre 0. et 0.00192 pour le signal d'accélération *Nice 0.40g* (Camus 17), alors que pour le signal *Nice 0.71g* (camus 19), elles varient entre 0. et 0.00261. Nous remarquons également que l'étendue des déformations plastiques est plus importante pour le deuxième signal. Celle-ci atteint en effet le troisième niveau. En revanche pour le premier signal, elle n'arrive qu'au deuxième niveau.

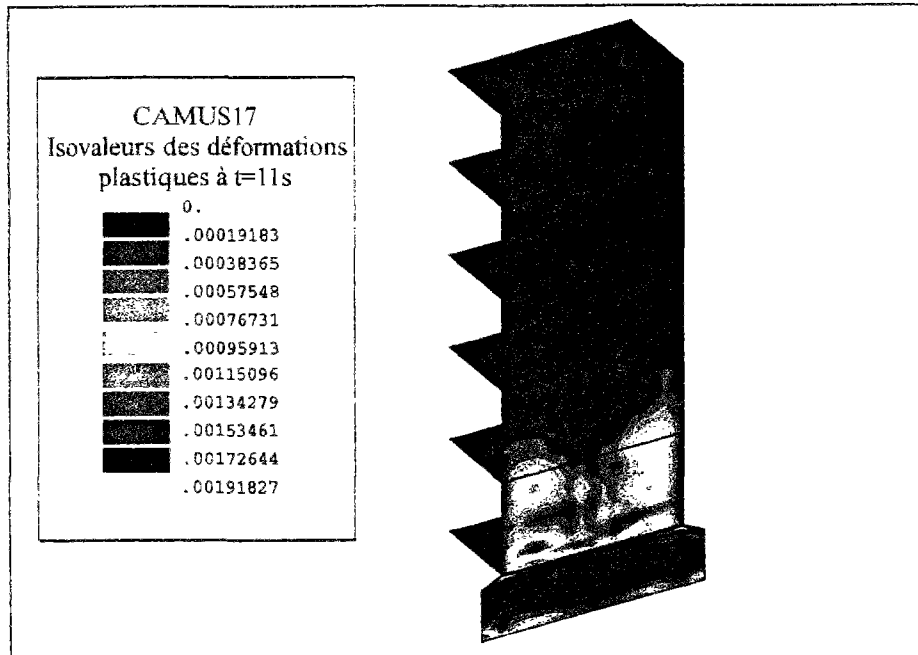


Figure 4-25 : Isovaleurs des déformations plastiques à $t = 11s$ - *Camus 17* -

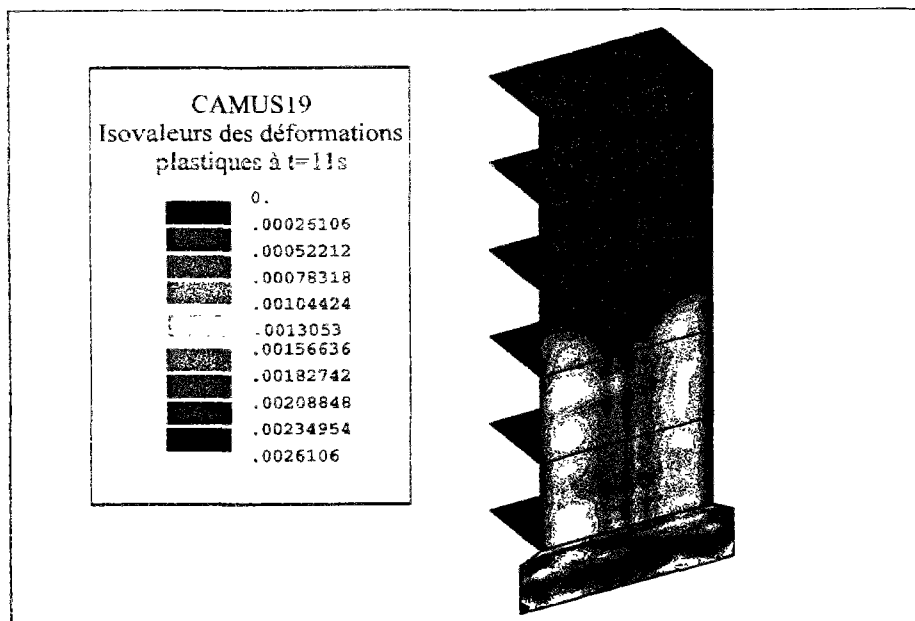


Figure 4-26 : Isovaleurs des déformations plastiques à $t = 11s$ - *Camus 19* -

4-2-4. Comparaison avec les résultats obtenus avec un modèle bidimensionnel

Afin de valider les résultats précédents obtenus avec le modèle tridimensionnel, nous avons réitéré les calculs en utilisant cette fois, une discrétisation traditionnelle consistant en un maillage bidimensionnel. Dans ce modèle, les murs sont représentés par des éléments de massifs bidimensionnels et les planchers et contreventements par des éléments poutres.

De même que précédemment, nous avons d'abord effectué une analyse modale de la structure, puis sommes passé aux calcul prévisionnels non-linéaires.

Le modèle 2D utilisé pour l'analyse modale comprend les éléments structuraux, la table et les ressorts. Le maillage (*figure 4-27*) est constitué de 969 noeuds et de 288 éléments de massifs bidimensionnels, 93 éléments de poutre et 3 éléments spéciaux appartenant à 9 groupes de caractéristiques géométriques et matérielles différentes.

Les résultats de l'analyse modale obtenus avec le modèle 2D sont très proches de ceux obtenus avec le modèle 3D (cf. 4-2-2-5). Les fréquences propres sont précisées dans le *tableau 4-14* pour différentes valeurs de K . De même que pour le modèle 3D, nous constatons que la comparaison entre les valeurs obtenues et mesurées est bonne pour une valeur de K égale à $3 \cdot 10^8$ N/m (écarts inférieurs à 7 % dans ce cas).

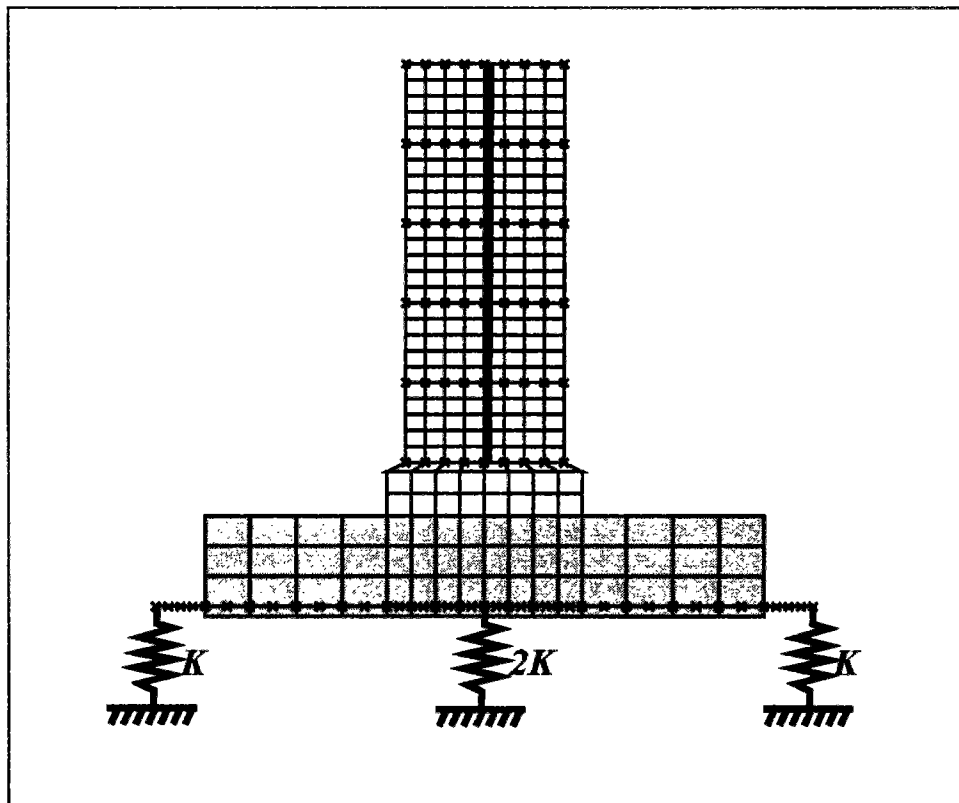


Figure 4-27 : Maillage du modèle 2D - Analyse modale-

Valeurs de K	Fréquence propre f_1 (Hz)	Fréquence propre f_2 (Hz)	Fréquence propre f_3 (Hz)	Pourcentage d'erreur sur f_1	Pourcentage d'erreur sur f_2	Pourcentage d'erreur sur f_3
$4.0 \cdot 10^8$	7.93	22.87	35.17	9.5%	14.35%	6.5%
$3.0 \cdot 10^8$	7.75	20.43	33.82	7.0%	2.0%	2.4%
$2.5 \cdot 10^8$	7.61	18.95	32.84	5.0%	5.1%	0.5%

Tableau 4-14 : Fréquences propres obtenues avec le modèle 2D pour différentes valeurs de K

Pour l'analyse dynamique non-linéaire de la structure, nous avons considéré un modèle 2D comprenant tous les éléments structuraux de la maquette ainsi que la table. Le maillage (*figure 4-28*) est constitué de 821 noeuds et de 250 éléments de massifs bidimensionnels, 837 éléments de poutre et 3 éléments spéciaux appartenant à 21 groupes de caractéristiques géométriques et matérielles différentes.

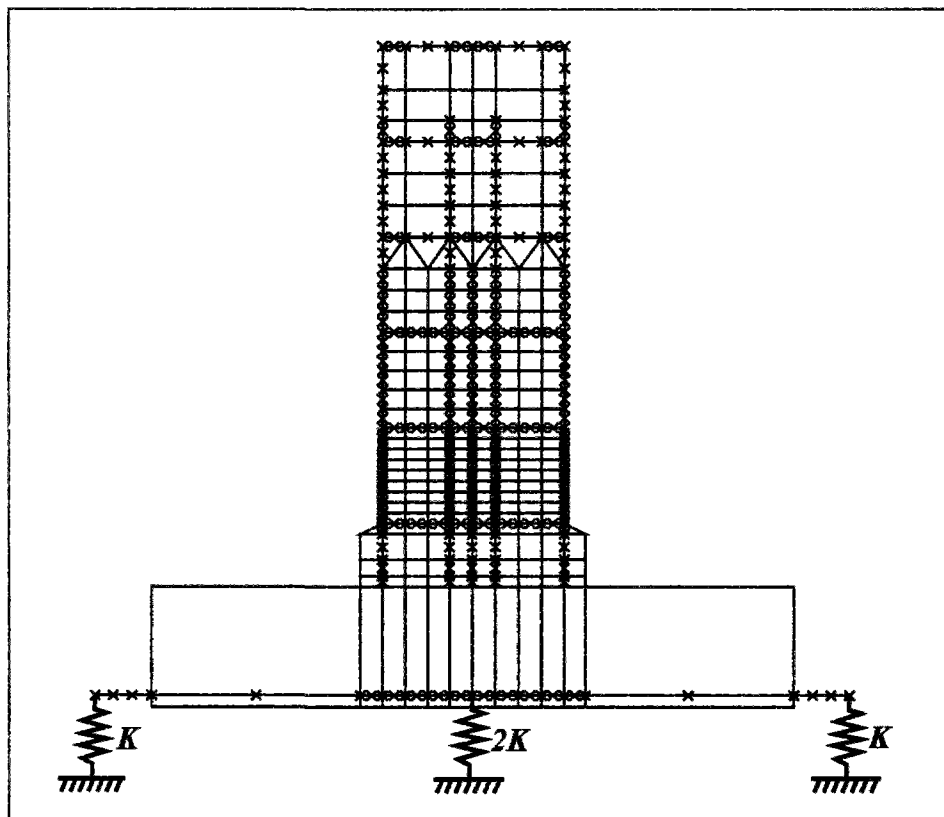


Figure 4-28 : Maillage du modèle 2D - Analyse non-linéaire-

Les courbes des *figures 4-29* et *4-30* représentent le déplacement horizontal au sommet de la structure en fonction du temps, obtenues avec le modèle 2D pour les différents signaux d'accéléérations considérés : *Nice 0.40g* (Camus 17) et *Nice 0.71g* (camus 19). Ces courbes sont comparées avec celles obtenues précédemment avec le modèle 3D. Nous constatons une très bonne concordance. De plus, que l'on utilise le modèle 2D ou 3D, les calculs ont montré que les effets non-linéaires liés à la fissuration du béton apparaissent au même moment.

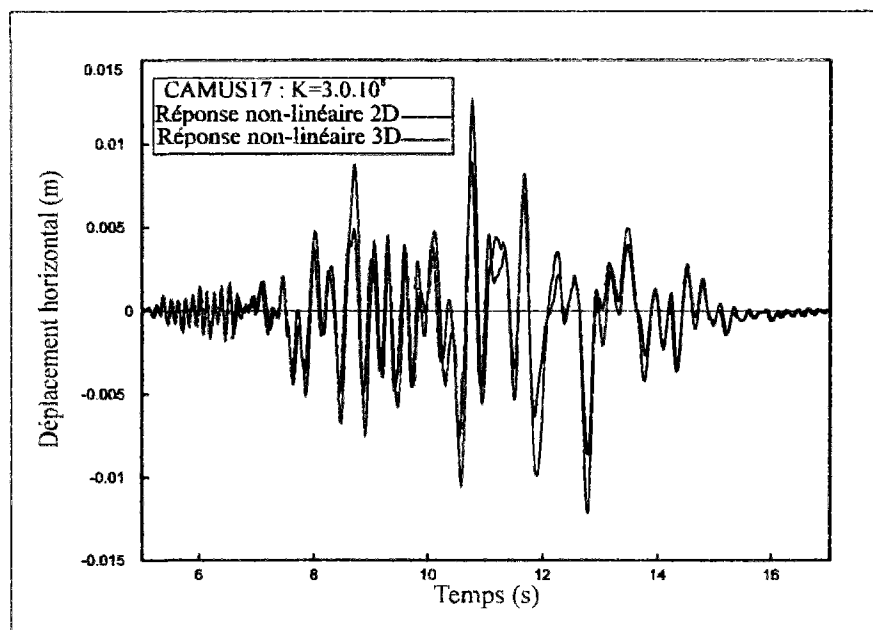


Figure 4-29 : Déplacement horizontal au sommet de la structure en fonction du temps
- comparaison des réponses non-linéaires 2D et 3D - *Camus 17* -

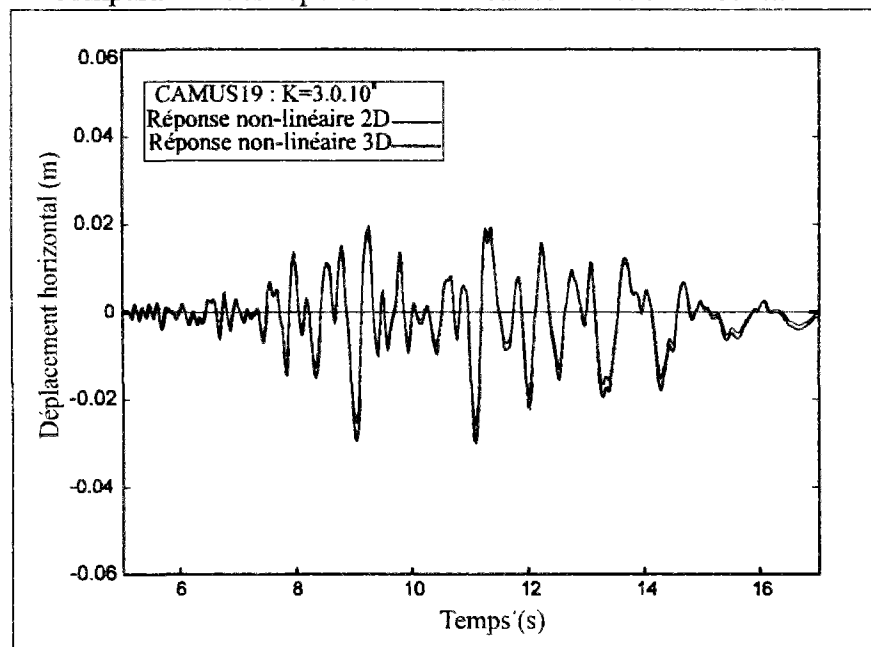


Figure 4-30 : Déplacement horizontal au sommet de la structure en fonction du temps
- comparaison des réponses non-linéaires 2D et 3D - *Camus 19* -

4-2-5. Comparaison avec les résultats expérimentaux

Dans ce dernier paragraphe, nous comparons les résultats expérimentaux et les résultats obtenus avec le modèle tridimensionnel. Les essais expérimentaux ayant actuellement lieu au CEA, nous n'avons pu obtenir des expériences, que le déplacement horizontal au sommet de la structure en fonction du temps, pour le signal d'accélération *Nice 0.71g* (camus 19).

La courbe de la *figure 4-31* représente ce déplacement. Cette courbe est comparée avec celle obtenue précédemment avec le modèle 3D (cf. 4-2-3-4).

La confrontation des modèle et concepts utilisés avec les résultats d'essais montre une bonne concordance en fréquence. Toutefois l'amplitude des déplacements expérimentaux est supérieure à celle obtenue avec le modèle 3D. Ceci pourrait provenir de la difficulté de la modélisation de la base de la structure.

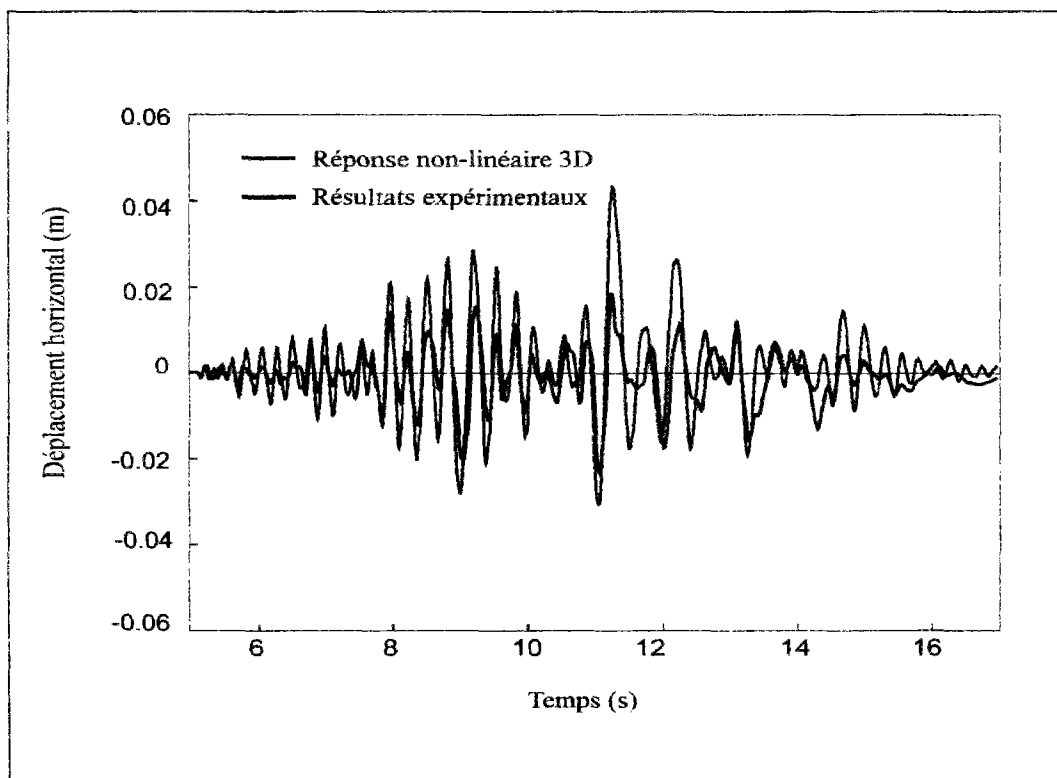


Figure 4-31 : Déplacement horizontal au sommet de la structure en fonction du temps - comparaison de la réponse non-linéaire 3D et des résultats expérimentaux - *Camus 19*-

4-3. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre deux exemples d'applications numériques utilisant les éléments de coques multicouches : l'étude de l'entretoisement d'un pont bipoutre à trois travées et l'étude d'une structure multi-étagée en béton armé soumise à un chargement sismique.

Ces deux exemples montrent que les outils numériques développés répondent de façon satisfaisante à la problématique industrielle posée. En effet, la première étude consistait à étudier le rôle des entretoises d'un pont bipoutre à trois travées dans le but de réduire leur nombre. Nous avons commencé par effectuer une analyse élastique linéaire des contraintes générées dans la structure en utilisant deux schémas : l'un avec 7 entretoises et l'autre avec 15 entretoises. Nous sommes ensuite passés à une analyse non-linéaire de la structure. L'examen des résultats obtenus avec les deux schémas (7 et 15 entretoises) a permis de conclure que l'utilisation de 7 entretoises était suffisante pour assurer la répartition transversale des charges appliquées au pont.

Le second exemple d'application consistait à étudier une structure multi-étagée en béton armé sous chargement sismique. Nous avons utilisé pour cela une discrétisation tridimensionnelle permettant d'analyser les principaux aspects de la représentation spatiale du problème. Cette discrétisation faisait intervenir les éléments de coques multicouches développés au chapitre 1. Les résultats obtenus en analyse linéaire et non-linéaire ont montré que ces outils numériques étaient aptes à effectuer des calculs prévisionnels de structures en béton armé sous chargement sismique. En effet, ces résultats ont été confrontés aux résultats d'essais et à des résultats obtenus en utilisant une discrétisation bidimensionnelle, une bonne concordance a été constatée.

La gamme d'applications possibles des éléments de coques multicouches est assez étendue. Les exemples précédents montrent que l'on peut effectuer des calculs sur des structures constituées d'un mélange d'éléments de coques, de poutres et de massifs tridimensionnels. Toutefois, leur performance nécessite toujours des améliorations. De plus, leur domaine d'application étant principalement le domaine sismique, il serait intéressant de modéliser les poutres de la structure multi-étagée, en éléments de poutres multifibres (Ulm, 1994). Ceci permettrait d'aboutir à une analyse dynamique plus complète.



CONCLUSION



Conclusion et perspectives

Dans cette étude, nous avons formulé un élément fini particulier permettant l'analyse non-linéaire de structures coques en béton armé sous chargements statiques et dynamiques : l'élément de coque multicouche. Issu de l'approche semi-globale, cet élément permet de traiter les non-linéarités géométriques à une échelle globale, mais aussi les non-linéarités matérielles à une échelle locale : les couches.

L'élément de coque multicouche date du début des années soixante-dix. Il est à présent considérablement répandu dans la littérature du fait qu'il ait connu de grands développements en statique, dynamique et grands déplacements. Toutefois, sur un plan numérique, cet élément reste développé pour des lois de comportement spécifiques au béton et à l'acier. Dans cette étude, nous avons montré sa généralisation à l'analyse de structures dont le comportement est régi par des lois à variables internes : plasticité, endommagement, visco-élasto-plasticité...

Deux grandes parties composent notre travail. Une première partie a été consacrée à la formulation de l'élément de coque multicouche. Dans une seconde nous avons présenté un ensemble de lois de comportement à variables internes pour l'acier et le béton en vue de leur utilisation au sein de cet élément.

Concernant la formulation de l'élément fini de coque multicouche, celui-ci a tout d'abord été développé dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Une extension a ensuite été présentée en intégrant les effets non-linéaires géométriques. Nous avons revu au sein de cette formulation coques multicouches, le phénomène d'instabilité élastique se produisant dans les coques (flambement linéaire), et avons ensuite abordé les problèmes de grands déplacements, grandes rotations et petites déformations en combinant les effets non-linéaires géométriques avec les non-linéarités matérielles.

Pour traiter des problèmes non-linéaires des matériaux constitutifs des structures en béton armé, nous avons présenté différentes lois de comportement à variables internes pour l'acier et le béton. Une loi élastoplastique parfaite de Von-Mises modélisant le comportement de l'acier dans le cas de chargements monotones, une loi anisotrope de Hill modélisant le comportement des lits d'armatures croisés existant dans les coques en béton armé, et une loi élastoplastique de Willam-Warnke à trois paramètres modélisant le comportement du béton. Une première extension du modèle de Willam-Warnke à un modèle élastoplastique endommageable a été effectuée dans le but de prédire les effets du dommage à l'échelle microscopique des structures sous chargements cycliques. Une seconde extension à un modèle visco-élasto-plastique avec écrouissage visqueux a été accomplie pour rendre compte du comportement du béton en dynamique rapide.

Concernant le traitement numérique de ces lois, nous avons présenté deux algorithmes : l'algorithme implicite de projection dans l'incrément et l'algorithme explicite de projection dans l'itération. Notre choix s'est porté sur le second algorithme. Celui-ci étant en effet plus simple d'utilisation que le premier et conduisant à des temps de calculs raisonnables.

Les lois de comportement à variables internes présentées, ont été utilisées au sein de l'élément fini de coque multicouche. Une attention particulière a donc été portée sur l'hypothèse des contraintes planes lors des développements algorithmiques. Cela a nécessité un traitement particulier lors de l'intégration des contraintes et du calcul de la matrice de comportement tangente. L'outil développé permet ainsi d'utiliser des lois de comportement triaxiales quelconques au sein d'un élément de coque classique.

Les développements effectués ont été mis en oeuvre au sein du code de calcul par éléments finis CESAR-LCPC. De nombreux problèmes non-linéaires ont été traités. Nos résultats ont été comparés à des solutions de référence d'origine analytique, numérique ou expérimentale. Une bonne concordance a été constatée. La formulation coque multicouche nous est donc apparue comme un moyen fidèle de modélisation de structures coques en acier, béton et béton armé sous divers chargements.

Malgré ces résultats prometteurs, cette formulation présente quelques limites qui rendent nécessaires des développements ultérieurs, en particulier au travers des exigences de la pratique courante des ingénieurs. Les quelques propositions qui suivent constituent des extensions possibles de notre travail qu'il est nécessaire de mener à bien pour compléter notre étude :

- La première extension consiste à prendre en compte l'effet de la précontrainte en tant que problème de conditions aux limites à l'interface acier-béton. En effet, la modélisation multicouche proposée suppose une adhérence parfaite entre les couches et ne permet aucun glissement. Cependant, dans les structures en béton armé, la détérioration progressive de l'adhérence entre acier et béton affecte de manière importante leur comportement global. Il est donc important de tenir compte de ce phénomène, notamment dans le cas de structures coques en béton précontraint. Cette prise en compte du glissement s'effectue dans le cadre des petites perturbations et consiste à introduire dans la formulation, des degrés de liberté correspondant aux déplacements relatifs entre acier et béton (*Ulm, 1994*).
- Une autre extension consiste à tenir compte du phénomène de localisation. En effet, le phénomène de fissuration des matériaux étant discontinu par nature, on pourrait se poser la question de la pertinence d'un modèle continu standard représentant ces phénomènes discontinus. En fait, les modèles présentés dans le cadre de cette thèse restent applicables tant que la fissuration n'est pas fortement localisée sous la forme d'une discontinuité macroscopique à l'échelle de la structure. Certes, ces limites mériteraient d'être étudiées plus en détail.
- D'un point de vue numérique, il reste à mettre en oeuvre dans le logiciel CESAR-LCPC les problèmes de grands déplacements, grandes rotations et petites déformations en combinant les effets non-linéaires géométriques avec les non-linéarités matérielles.

BIBLIOGRAPHIE



Références bibliographiques

-A-

Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. (1970), "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 2, pp 419-451.

Aït-ali H. (1984), "Développement d'éléments finis de coque pour le calcul des ouvrages d'art", thèse de doctorat, ENPC.

Aravas N. (1987), "On the numerical integration of class of pressure dependent plasticity models", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 24, pp 1395-1416.

Argyris J.H., Dunne P.C., Scharpf D.W. (1978-a), "On large displacement small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom", *Comp.meth.appl.mech.and engng.*, vol 15, pp 99-135.

Argyris J.H., Dunne P.C., Scharpf D.W. (1978-b), "On large displacement small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom", *Comp.meth.appl.mech.and engng.*, vol 14, pp 401-451.

Argyris J.H. (1982), "An excursion into large rotations", *Comp.meth.appl.mech.and engng.*, vol 32, pp 85-155.

-B-

Bathe K.J., Bolourchi S. (1979), "A geometric and material non-linear plate and shell element", *computers and structures*, vol 11, pp 23-48.

Bathe K.J. (1982), "Finite element procedures in engineering analysis", Prentice Hall, New-York.

Batoz J.L. (1992), "Modélisation des structures par éléments finis", tomes 1, 2 et 3, éditions HERMES.

Beltrami E. (1903), *Rendiconti Math. Annal.*, p 704.

Belytschko T., Hsieh B.J. (1973), "Nonlinear transient finite element analysis with convected co-ordinates", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 7, pp 255-271.

-C-

Cariou D. (1988), "Calculs par éléments finis de structures poutres bidimensionnelles et tridimensionnelles en grands déplacements élastoplastiques sous sollicitations dynamiques", Thèse de doctorat, ENPC.

Chahrour I. (1991), "Contribution à l'analyse non-linéaire matérielle et géométrique des coques en béton armé", Thèse de doctorat, INSA de Lyon.

Chao W.C., Reddy J.N. (1984), "Analysis of laminated composite shells using a degenerated 3-D element", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 20, pp 1991-2007.

Chen W.F. (1982), "Plasticity in reinforced concrete", McGraw-Hill Inc.

Coussy O. (1995), "Mechanics of porous continua", Ed. John Wiley and Sons.

-D-

De Borst R., Feenstra P.H. (1990), "Studies in anisotropic plasticity with reference to the Hill criterion", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 29, pp 315-336.

De Borst R. (1991), "The zero-normal-stress condition in plane-stress and shell elastoplasticity", communication in applied numerical methods, vol7, pp 29-33.

Djeroud M. (1992), "Contribution à l'analyse des pièces fléchies en béton armé sous chargement monotone et cyclique : développement et validation de modèles élastoplastiques", Thèse de doctorat, INSA de Lyon.

-E-

Elachachi S.M., Breysse D. (1991), "Macro-élément : un concept pour le calcul non-linéaire des structures en béton armé", communication Aussois 1991, rapport annuel, GRECO géomatériaux.

El Damatty A.A., Korol R.M., Mirza F.A. (1997), "Large displacement extension of consistent shell element for static and dynamic analysis", *computers and structures*, vol 62, n 6, pp 943-960.

Euler L. (1744), "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes", Appendix I, "De curvis elasticis", Bousquet, Lausanne and geneva. English translation : **OLDFATHER W.A., ELLIS C.A., BROWN D.M.**, *Isis*, vol 20, 1993, pp 72-160.

-F-

Fafard M., Dhatt G., Batoz J.L. (1989), "A new discrete kirchhoff plate/shell element with updated procedures", computers and structures, vol 31, n 4, pp 591-606.

Faucher B. (1991), "Analyse poroplastique des barrages en béton et de leurs fondations. Rôle de la pression interstitielle", Thèse de doctorat, ENPC, Paris.

Fézans G. (1981), "Analyse linéaire et non-linéaire géométrique des coques par éléments finis isoparamétriques tridimensionnels dégénérés, Thèse de doctorat, ENPC.

-G-

Gould P.L. (1987), "Analysis of shells and plates", éditions Springer-Verlag.

Guggenberger J. (1992), "Analyse non-linéaire des poutres précontraintes", Mémoire du projet de fin d'études, ENPC.

-H-

Hand F.R., Pecknold D.A., Schnobrich W.C. (1973), "Nonlinear layered analysis of RC plates and shells", ASCE Journal of structural division, vol 99, pp 1491-1503.

Hellen T.K. (1986), "An assessment of the semi-loof shell element", Int.J.numer.meth.eng., vol 22, pp 133-151 .

Hencky H. (1924), "Zur theorie plastischer deformationen und der hierdurch in material hervorgernufunen nebenspannungen", Proceeding of the first international congress on applied mechanics, J. Waltman edition, Delft.

Hu H.-T., Schnobrich W.C. (1989), "Constitutive modelling of concrete by using nonassociated plasticity", J.mater.civ.eng., ASCE (1), pp 199-216.

Hu H.-T., Schnobrich W.C. (1990), "Nonlinear analysis of cracked reinforced concrete", ACI struct. Jnl, vol 87, pp 199-207.

Hu H.-T., Schnobrich W.C. (1991), "Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete plates and shells under monotonic loading", computers and structures., vol 38, n 5/6, pp 637-651.

Humbert P. (1989), "CESAR-LCPC : Un code général de calculs par éléments finis", Bulletin de liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, 160, pp 112-116.

Huttelmaier H.P., Epstein M. (1983), "A finite element formulation for multilayered and thick plates", computers and structures, vol 16, n 5, pp 645-650.

Huttelmaier H.P., Epstein M. (1985), "A finite element formulation for multilayered and thick shells". computers and structures, vol 21, n 6, pp 1181-1185.

-I-

Irons B. (1976), "The semi-loof shell elements, in finite elements for thin shells and curved members", Eds. Ashwell et al., J. Wiley, p 197-222.

Irons B., Ahmad S. (1980), "Techniques of finite elements", Ellis Horwood.

Itech. (1997), "CESAR-LCPC, la référence en génie civil", Plaquette de présentation éditée par la société ITECH, Montreuil (93).

-J-

Jaamei S. (1986), "Etude de différentes formulations lagrangiennes pour l'analyse non-linéaire des plaques et coques minces elasto-plastiques en grands déplacements et grandes rotations", Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne (UTC).

Jiang L., Chernuka M.W. (1994), "A co-rotational formulation for geometrically nonlinear analysis of spatial beams", Trans. CSME, vol 18, pp 65-88.

Jiang L., Chernuka M.W. (1994), "A simple four noded co-rotational shell element for arbitrarily large rotation", computers and structures, vol 53, pp 1123-1132.

-K-

Koziey B., Mirza F.A. (à paraître), "Consistent thick shell element", computers and structures.

-L-

Lemaitre J., Chaboche J.L. (1985), "Mécanique des matériaux solides", éditions DUNOD.

Li P., Chen Z.D. (1994), "The updated co-moving coordinate formulation of continuum mechanics based on the S-R decomposition theorem", comput. meth. appl. mech. eng., vol 114, pp 21-34.

Lin C.S., Scordelis A.C. (1975), "Nonlinear analysis of RC shells of general form", ASCE Journal of structural division, vol 101, pp 523-538.

Lublinter J., Oller S., Oliver J., Oñate E. (1989), "A plastic damage model for non-linear analysis of concrete", Int.J.solids struct., vol 25, n 3, pp 299-326.

-M-

Magnan J-P., Mestat Ph., Leca E., Humbert P. (1997), "Expérimentations et modélisation en géotechnique au LCPC : 30 ans de comparaison entre comportements observés et calculés", Xveme rencontres universitaires de Génie civil EC'97, Strasbourg, 22-23 mai.

Matzenmiller A., Taylor R.L. (1994), "A return mapping algorithm for isotropic elastoplasticity", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 37, pp 813-826.

Mazars J. (1984), "Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structures", Thèse de doctorat, Université Paris 6.

Millard A., Reynouard J.M., Merabet O. et al. (1989), "Structural analysis of reinforced concrete structures under monotonous and cyclic loading : numerical aspect", *Transactions of the SMIRT 10th Conf.*, Vol. H, Anaheim Cal.USA.

Millard A. (1995), "Numerical algorithms for plane stress elastoplasticity : Review and recommendation", in D.R.J Owen, E. Oñate, E. Hinton : *computational plasticity*, vol 1, pineridge Press, Swansea, UK, pp 237-247.

-O-

Oller S. (1988), "Un modelo de daño continuo para materiales friccionales", Thèse de doctorat, Dept. De Estructuras, Univ. Politècnica de Catalunya, Barcelona, España.

Oñate E., Oliver J., Bugeda G. (1986), "Finite element analysis of nonlinear response of concrete dams subject to internal loads", *Europe-US symposium on finite element methods for nonlinear problems*, Springer-Verlag.

Oñate E., Oller S., Oliver J., Lubliner J. (1987), "A fully elastoplastic constitutive model nonlinear analysis of concrete", *Proc. second Int. Conf. advances methods in numerical methods in engineering, Theory and applications-NUMETA*, Martinus Nijhoff, Swansea.

Oñate E., Oller S., Lubliner J. (1987), "A constitutive model cracking of concrete based on the incremental theory of plasticity", *Proc. Int. Conf. computational plasticity, Part 2*, pp 1311-1327, Pinridge press, Barcelona.

Oñate E., Oller S., Lubliner J. (1988), "A constitutive model of concrete based on the incremental theory of plasticity", *Eng.comput.*, vol 5, n 4.

Oñate E. (1992), "Lectures on nonlinear finite element analysis of concrete shells", *Centro internacional de métodos numéricos en ingeniería, Primera Edición*, Barcelona.

Owen D.R.J., Figueiras J.A. (1983-a), "Elasto-plastic analysis of anisotropic plates and shells by the semiloof element", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 19, pp 521-539.

Owen D.R.J., Figueiras J.A. (1983-b), "Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 19, pp 541-566.

Owen D.R.J., Figueiras J.A. (1984), "Ultimate load analysis of reinforced concrete plates and shells", -In finite element software for plates and shells, E. Hinton and D.R.J. Owen (Eds.), Pineridge press.

-P-

Panda S.C., Natarajan R. (1979), "Finite element analysis of laminated composite plates", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 14, pp 69-79.

Panda S.C., Natarajan R. (1981), "Analysis of laminated composite shell structures by finite element method", *computers and structures.*, vol 14, pp 225-230.

Peng X., Crisfield M.A. (1992), "A consistent co-rotational formulation for shells using the constant stress/constant moment triangle", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 35, pp 1829-1847.

-R-

Ramesh kumar R., Sadasiva Rao Y.V.K. (1988), "Free vibrations of multilayered thick composite shells", *computers and structures*, vol 28, n 6, pp 717-722.

Rankin C.C., Brogan F.A. (1986), "An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations", *ASME J. Press. Vessel. Tech.*, vol 108, pp 165-174.

Razzaque A. (1981), "Thin shell analysis : semiloof vs underintegrated thick shell element", *New and future developments in commercial finite element method*, Robinson Ed., Int. Conf. Los Angeles, pp 407-421.

Rossi P. (1991), "Influence of cracking in the presence of free water on the mechanical behaviour of concrete", *Magazine of concrete research*, vol 43, pp 53-57.

Rossi P. (1991), "A physical phenomenon which can explain the mechanical behaviour of concrete under high strain rates", *Materials and structures*, pp 422-424.

-S-

Schellekens J.C.J, De Borst R. (1990), "The use of Hoffman yield criterion in finite element analysis of anisotropic composites", *computers and structures*, vol 37, n 6, pp 1087-1096.

Selmane A., Lakis A.A. (1997), "Influence of geometric non-linearities on the free vibrations of orthotropic open cylindrical shells", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 40, pp 1115-1137.

Sercombe J., Ulm F.J., Toutlemonde F. (1996), "Modélisation du béton en dynamique rapide", 4^{ème} colloque national de génie parasismique, AFPS, Saint-Rémy-lès-chevreuse, France, 10-12 avril 1996.

Sercombe J., Ulm F.J., Toutlemonde F. (1996), "Modelling of concrete in high rate dynamics", Third European Conference on Structural Dynamics, EURO-DYN'96, Florence, Italie, 5-8 juin 1996.

Sercombe J., Ulm F.J., Toutlemonde F. (1997), "Viscous hardening plasticity for concrete in high rate dynamics", 4^{ème} International Conference on Computational plasticity, Barcelone, Espagne, avril 1997.

Sercombe J. (1997), "Modélisation du comportement du béton en dynamique rapide : Application au calcul des conteneurs à haute intégrité", Thèse de doctorat, ENPC.

Simo J.C., Hughes T.J. (1986), "Elastoplasticity and viscoplasticity".

-T-

Toutlemonde F. (1995), "Résistance au choc des structures en béton. Du comportement du matériau au calcul des ouvrages", Thèse de doctorat, ENPC.

Tsai C.T., Palazotto A.N. (1991), "On the finite element analysis of non-linear vibration for cylindrical shells with high-order shear deformation theory", *Int.J. Non-linear Mechanics*, vol 26, n 3/4, pp 379-388.

-U-

Ulm F.J. (1994), "Modélisation élastoplastique avec endommagement du béton de structures", Thèse de doctorat, ENPC.

-W-

Wempner G. (1969), "Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells", *Int.J.Solids structures*, vol 5, pp 117-153.

Willam K.J., Warnke E.P. (1975), "Constitutive model for the axial behavior of concrete", International Association of Bridge and Structural Engineers, Seminar on Concrete Structures subjected to triaxial stresses, paper III-1, Bergamo, Italy, *IABSE Proc. 19*.

-Y-

Yunus S.M., Kohnka P.C., Saigal S. (1989), "An efficient through-thickness integration scheme in an unlimited layer doubly curved isoparametric composite shell element", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 28, pp 2777-2793.

Références complémentaires :

- Beakou A., Touratier M.** (1993), "A rectangular finite element for analysing composite multilayered shallow shells in statics, vibration and buckling", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 36, pp 627-653.
- Boehler J.P.** (1978), "Loi de comportement anisotrope des milieux continus", *J. de mécanique*, vol 17, n 2, pp 153-190.
- Bui H.D., Zarka J.** (1972), "Fondements expérimentaux et modèles pour l'étude du comportement global des métaux", plasticité et viscoplasticité, Séminaire Ecole Polytechnique, Paris, pp 1-20.
- Burgoyne C.J., Crisfield M.A.** (1990), "Numerical integration strategy for plates and shells", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 29, pp 105-121.
- Dhatt G., Touzot G.** (1984), "Une présentation de la méthode des éléments finis", éditions Maloine SA editeur, Paris.
- Dhatt G., Marcotte L., Matte Y.** (1986), "A new triangular discrete kirchhoff plate-shell element", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 23, pp 453-470.
- Fejér T.** (1997), "Anisotropic plasticity features of steel-mat reinforcement in concrete plates and shells", rapport de stage, LCPC, Paris.
- Halphen B., Salençon J.** (1987), "Elasto-plasticité", Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Hill R.** (1947), "A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic materials", *Proc. R. Soc, A* 193, pp 281-297.
- Hill R.** (1950), "The mathematical theory of plasticity", Clarendon Press, Oxford (G.B).
- Hu H.-T., Schnobrich W.C.** (1991), "Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete plates and shells under monotonic loading", *computers and structures.*, vol 38, n 5/6, pp 637-651.
- Hueckel T., Nova R.** (1983), "Anisotropic failure criteria for geotechnical materials, recent trends", *Gen. Lect. Int. Coll. CNRS, "failure criteria of structured media"*, (Villard de Lans, 1983).
- Hyafil, D'Escatha,** "Cours de plasticité", ENSTA.
- Lee S.W., Dai C.C., Yeom C.H.** (1985), "Triangular element for thin plates and shells", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 21, pp 1813-1831.

- Liao C.L., Tsai J.S.** (1992), "Partial mixed -3D- element for the analysis of thick laminated composite structures", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 35, pp 1521-1539.
- Lin C.S., Scordelis A.C.** (1975), "Nonlinear analysis of RC shells of general form", *ASCE Journal of structural division*, vol 101, pp 523-538.
- Loret B.** (1987), "Elastoplasticité à simple potentiel", *Manuel de rhéologie des matériaux*, sous la direction de Felix Darve, presses de l'ENPC.
- Lubliner J., Oller S., Oliver J., Oñate E.** (1989), "A plastic damage model for non-linear analysis of concrete", *Int.J.solids struct.*, vol 25, n 3, pp 299-326.
- Merabet O.** (1990), "Modélisation des structures planes en béton armé sous chargements monotone et cyclique. Construction et validation d'un modèle numérique", Thèse de doctorat, INSA de Lyon.
- Mestat P.** (1992), "Progammation des lois de comportement mécanique dans le code de calcul par éléments finis CESAR-LCPC, Rapport interne du LCPC, 44 pages.
- Mestat P.** (1993), "Lois de comportement des géomatériaux et modélisation par la méthode des éléments finis", Collection: Etudes et Recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées, série géotechnique GT52, Paris.
- Morley L.S.D.** (1984), "Finite element criteria for some shells", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 20, pp 1711-1728.
- Noor A.K.** (1992), "Mechanics of anisotropic plates and shells-Anew look at an old subject", *computers and structures*, vol 44, n 3, pp 499-514.
- Ortiz M., Simo J.C.** (1986), "An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 23, pp 353-366.
- Prat M., Bisch P., Mestat P., Millard A., Pijaudier-Cabot G.** (1997), "Calcul des ouvrages généraux de construction", volume 1, Ed. Hermès.
- Prema kumar W.P., Palaninathan R.** (1997), "Finite element analysis of laminated shells with exact through-thickness integration", *computers and structures.*, vol 63, n 1, pp 173-184.
- Ricard A.** (1975), "Etude des massifs continus à comportement non-linéaire"; Rapport de recherche n 44, ENPC.
- Salençon J.** (1984), "Yield-strength of anisotropic soils", *C. R. 16ème congrès Int. Mec. Th. Appl. Lyngby.*
- Seide P., Chaudhuri R.A.** (1987), "Triangular finite element for analysis of thick laminated shells", *Int.J.numer.meth.eng.*, vol 24, pp 1563-1579.

Sinha P.K., Chakravorty D. (1995), "Free vibration analysis of point-supported laminated composite doubly curved shells-A finite element approach", computers and structures, vol 54, n 2, pp 191-198.

Timoshenko S.P., Woinovsky-Krieger (1959), "Theory of plates and shells". réimpression de la deuxième édition de 1959, Mc Graw Hill book.

Tresca H. (1964), "Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions", Académie des sciences, Paris, France.

Vlachoutsis S. (1990), "Explicit integration for three-dimensional degenerated shell finite elements", Int.J.numer.meth.eng., vol 29, pp 861-880.

Wang C.C. (1970), "A new representation theorem for isotropic functions", Parts I et II, Arch. Rat. Mech. An., 36, pp 162-223, corrigendum, 43, (1971), pp 392-395.

Zaoui A., François D., Pineau A. (1991), "Comportement mécanique des matériaux", volumes 1 et 2, Ed. Hermes.

Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Too J.M. (1971), "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells", Int.J.numer.meth.eng., vol 3, pp 275-290.

ANNEXES



ANNEXE 1 : Calcul des dérivées des vecteurs \mathbf{n}_α , \mathbf{n}_β et \mathbf{n}_0

Pour tous les développements exposés au cours de cette annexe, les notations sont identiques à celles du paragraphe 1-2-2 du chapitre 1 et ne sont pas redéfinies ici.

A1.1 Composantes des dérivées des vecteurs \mathbf{n}_α et \mathbf{n}_β suivant les directions α et β

On rappelle les expressions des vecteurs \mathbf{n}_α et \mathbf{n}_β de la base orthonormée au point P précisé dans le paragraphe 1-2-2 :

$$\mathbf{n}_\alpha = \frac{\mathbf{r}_{,\alpha}}{A} \quad \mathbf{n}_\beta = \frac{\mathbf{r}_{,\beta}}{B} \quad (1)$$

où A et B représentent les paramètres de Lamé.

L'égalité des dérivées secondes partielles mixtes du vecteur position \mathbf{r} se traduit par :

$$\mathbf{r}_{,\alpha\beta} = \mathbf{r}_{,\beta\alpha} \quad (2)$$

Utilisant (1) dans (2), on obtient :

$$(A \mathbf{n}_\alpha)_{,\beta} = \mathbf{n}_\alpha A_{,\beta} + A \mathbf{n}_{\alpha,\beta} = (B \mathbf{n}_\beta)_{,\alpha} = \mathbf{n}_\beta B_{,\alpha} + B \mathbf{n}_{\beta,\alpha} \quad (3)$$

ce qui conduit à :

$$\mathbf{n}_{\beta,\alpha} = \frac{1}{B} \left[-\mathbf{n}_\beta B_{,\alpha} + \mathbf{n}_\alpha A_{,\beta} + A \mathbf{n}_{\alpha,\beta} \right] \quad (4)$$

Considérons à présent la dérivée du produit scalaire $(\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta)$, respectivement à α :

$$(\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta)_{,\alpha} = \mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{n}_{\alpha,\alpha} + \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_{\beta,\alpha} \quad (5)$$

Sachant que $\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta = 0$:

$$\mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{n}_{\alpha,\alpha} = -\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_{\beta,\alpha} \quad (6)$$

En remplaçant $\mathbf{n}_{\beta,\alpha}$ par l'expression (4), il vient :

$$\mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{n}_{\alpha,\alpha} = -\frac{1}{B} \mathbf{n}_\alpha \cdot \left[-\mathbf{n}_\beta B_{,\alpha} + \mathbf{n}_\alpha A_{,\beta} + A \mathbf{n}_{\alpha,\beta} \right] \quad (7)$$

La relation (11) du chapitre 1 nous permet de déduire que $(\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta)_{,\alpha} = 0$. De plus, utilisant le fait que $\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha = 1$ et que $\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta = 0$, on obtient :

$$\mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{n}_{\alpha,\alpha} = -\frac{A_{,\beta}}{B} \quad (8)$$

Ainsi, l'équation (8) ne représente rien d'autre que la composante de $\mathbf{n}_{\alpha,\alpha}$ selon la direction \mathbf{n}_β , précisée dans les relations (13) du chapitre 1.

En ce qui concerne les autres composantes des dérivées des vecteurs \mathbf{n}_α et \mathbf{n}_β suivant les directions α et β , elles sont déterminées de la même manière que ci-dessus.

A1.2 Dérivées du vecteur \mathbf{n}_0

Considérons une section normale, en un point P_1 de la ligne de coordonnée s_α (*figure A1-1*). Le vecteur \mathbf{n}_0 est représenté au point P_1 ainsi qu'au point P_2 situé à une distance Δs_α de celui-ci. La *figure A1-1* montre que le changement en \mathbf{n}_0 , $\Delta \mathbf{n}_0$, est approximativement parallèle à la tangente à la courbe en P_1 . Ceci conduit à :

$$\Delta \mathbf{n}_0 = \|\Delta \mathbf{n}_0\| \mathbf{n}_\alpha \quad (9)$$

Le théorème des triangles semblables conduit à :

$$\frac{\|\Delta \mathbf{n}_0\|}{\|\mathbf{n}_{01}\|} = \frac{\overline{P_1 P_2}}{R_\alpha} \quad (10)$$

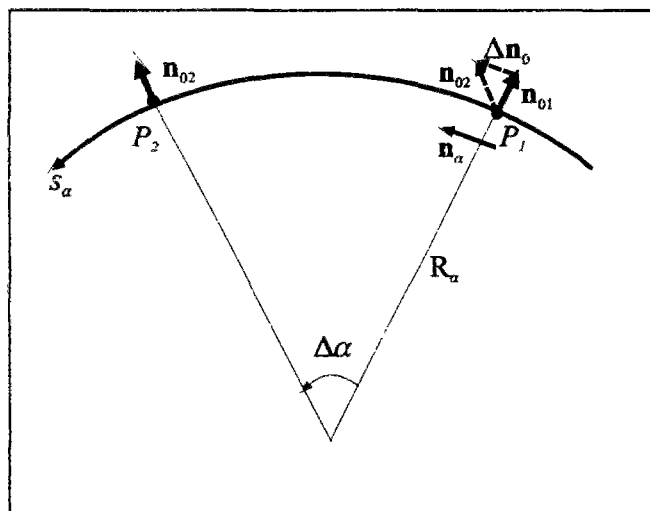


Figure A1-1 : Représentation de $\Delta \mathbf{n}_0$ (d'après Gould, 1987)

Si l'on considère l'équation (7) du chapitre 1, on peut écrire :

$$\overline{P_1 P_2} \approx \Delta s_\alpha = A \Delta \alpha \quad (11)$$

En injectant (9) et (11) dans (10) et utilisant le fait que le vecteur \mathbf{n}_{01} est unitaire, on obtient :

$$\frac{\Delta \mathbf{n}_0}{\Delta \alpha} = \frac{A}{R_\alpha} \mathbf{n}_\alpha \quad (12)$$

En faisant tendre $\Delta \alpha$ vers zéro pour chaque membre de l'équation (12), il vient :

$$\mathbf{n}_{0,\alpha} = \frac{A}{R_\alpha} \mathbf{n}_\alpha \quad (13)$$

L'équation (13) ne représente rien d'autre que la dérivée du vecteur \mathbf{n}_0 respectivement à la direction α , précisée dans les relations (13) du chapitre 1. Concernant la dérivée $\mathbf{n}_{0,\beta}$, on la détermine de la même manière que ci-dessus.

A1.3 Composantes des dérivées des vecteurs \mathbf{n}_α et \mathbf{n}_β suivant la direction normale

Considérons la dérivée du produit scalaire $(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_\alpha)$ respectivement à α :

$$(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_\alpha)_{,\alpha} = \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_{0,\alpha} + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_{\alpha,\alpha} \quad (14)$$

Sachant que $\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_\alpha = 0$, il vient :

$$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_{\alpha,\alpha} = -\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_{0,\alpha} \quad (15)$$

L'utilisation de (13) dans (15) conduit à :

$$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_{\alpha,\alpha} = -\frac{A}{R_\alpha} \quad (16)$$

L'équation (16) représente donc la composante de normale de $\mathbf{n}_{\alpha,\alpha}$, précisée dans les relations (13) du chapitre 1. Pour les autres composantes normales des dérivées des vecteurs \mathbf{n}_α et \mathbf{n}_β , elles sont déterminées de la même manière que ci-dessus.



ANNEXE 2 : Elément fini de coque multicouche

Dans cette annexe, nous précisons pour les différents types d'éléments de coque multicouche considérés, l'expression de la matrice des fonctions d'interpolation $[N]_k$ du champ de déplacement d'une couche k , utilisée dans le paragraphe 1-3-2 du chapitre 1.

A2.1 Expression de la matrice des fonctions d'interpolation

Considérons un point matériel Q situé à une distance e_k de la surface de référence de la coque, et P sa projection orthogonale sur celle-ci. Le vecteur déplacement ξ_k d'une couche k de la coque est repéré par le vecteur de position PQ et s'écrit dans le repère local de l'élément de vecteurs de base \mathbf{n}_i ($i = \alpha, \beta, 0$) :

$$\xi_k = \xi(Q) = \xi(P) + \omega(P) \wedge PQ \quad (1)$$

avec les composantes :

$$\begin{cases} \xi_{\alpha k} = \xi_k \cdot \mathbf{n}_\alpha = \xi_\alpha^p + e_k \omega_\beta^p \\ \xi_{\beta k} = \xi_k \cdot \mathbf{n}_\beta = \xi_\beta^p - e_k \omega_\alpha^p \\ \xi_{0k} = \xi_k \cdot \mathbf{n}_0 = \xi_0^p \end{cases} \quad (2)$$

Une discrétisation par éléments finis conduit à exprimer le champ de déplacement $\xi(P)$ en fonction du vecteur des déplacements nodaux de l'élément $\xi_n(P)$ par l'intermédiaire de fonctions d'interpolation. Pour les éléments de coque épais à 6 ou à 8 noeuds, ceci revient à :

$$\begin{cases} \xi_\alpha^p = H_i \xi_{i\alpha}^p \\ \xi_\beta^p = H_i \xi_{i\beta}^p \\ \xi_0^p = H_i \xi_{i0}^p \quad i=1, nd \\ \omega_\alpha^p = H_i \omega_{i\alpha}^p \\ \omega_\beta^p = H_i \omega_{i\beta}^p \end{cases} \quad (3)$$

où nd représente le nombre de noeuds.

Les fonctions d'interpolation H s'expriment :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = -r(1-2r) \\ H_2 = -s(1-2s) \\ H_3 = -(1-r-s)[1-2(1-r-s)] \\ H_4 = 4rs \\ H_5 = 4s(1-r-s) \\ H_6 = 4r(1-r-s) \end{array} \right. \quad (4)$$

pour les éléments de coque à 6 noeuds, et :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = -\frac{1}{4}(1-r)(1-s)(1+r+s) \\ H_2 = -\frac{1}{4}(1+r)(1-s)(1-r+s) \\ H_3 = -\frac{1}{4}(1+r)(1+s)(1-r-s) \\ H_4 = -\frac{1}{4}(1-r)(1+s)(1+r-s) \\ H_5 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s) \\ H_6 = \frac{1}{2}(1+r)(1-s^2) \\ H_7 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s) \\ H_8 = \frac{1}{2}(1-r)(1-s^2) \end{array} \right. \quad (5)$$

pour les éléments de coque à 8 noeuds .

Dans les expressions (4) et (5), r et s représentent les coordonnées paramétriques sur les éléments de référence (*figure A2-1*).

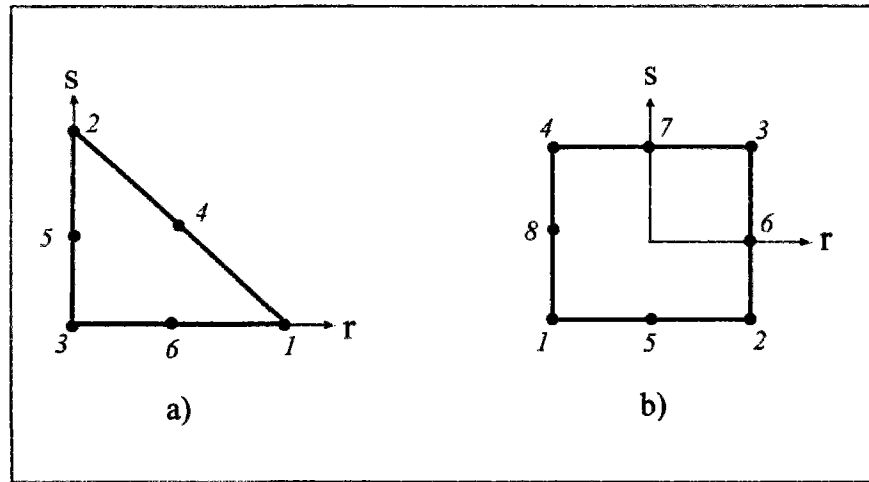


Figure A2-1 : Eléments de référence - a) 6 noeuds - b) 8 noeuds

Les éléments de coque mince à 3 et à 4 noeuds sont des éléments qui travaillent comme des plaques; l'effet géométrique de la courbure n'est donc pas pris en compte et le repère local de vecteurs de base \mathbf{n}_i ($i = \alpha, \beta, 0$) revient à un repère cartésien. Pour ces éléments, les composantes de translation dans le plan du champ de déplacement $\xi(P)$ sont interpolées comme suit :

$$\begin{cases} \xi_x^p = N_i \xi_{ix}^p \\ \xi_y^p = N_i \xi_{iy}^p \end{cases} \quad i=1, nd \quad (6)$$

où N sont les fonctions d'interpolation s'exprimant pour les éléments de coque à 3 noeuds :

$$\begin{cases} N_1 = 1 - r - s \\ N_2 = r \\ N_3 = s \end{cases} \quad (7)$$

et pour ceux à 4 noeuds :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \end{cases} \quad (8)$$

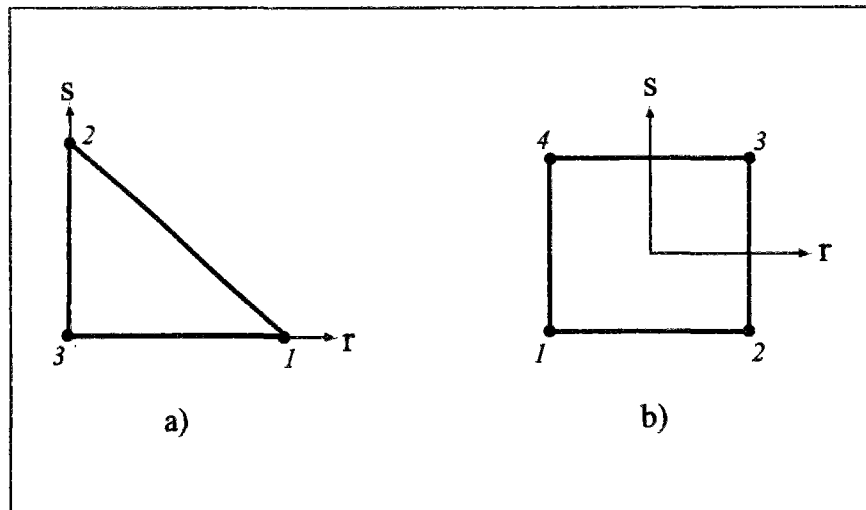


Figure A2-2 : Eléments de référence - a) 3 nœuds - b) 4 nœuds

Les composantes de rotation sont quant à elles interpolées par (Batoz, 1992) :

$$\begin{cases} \omega_x^p = H_i \omega_{ix}^p + H_j \omega_{jx}^p \\ \omega_y^p = H_i \omega_{iy}^p + H_j \omega_{jy}^p \end{cases} \quad i = 1, nd \text{ et } j = (nd+1, 2nd) \quad (9)$$

où H représentent les fonctions d'interpolation précédemment définies par les relations (4) et (5), selon qu'il s'agisse d'éléments de coque à 3 nœuds ou ceux à 4 nœuds. Pour les rotations ω_{jx}^p ($j = nd+1, 2nd$), elles correspondent aux rotations calculées au milieu de chaque coté en considérant une variation linéaire le long des cotés (Ait-ali, 1984).

Aucune interpolation n'a été introduite pour le déplacement transversal ξ_{iz}^p , ceci est lié à l'idée de construction de ces éléments (Batoz, 1992).

Enfin, selon le type d'élément considéré, l'utilisation des relations (6) et (9) ou alors de l'équation (3) dans le système (2) permet l'obtention de la matrice des fonctions d'interpolation $[N]_k$ (paragraphe 1-3-2 du chapitre 1).

ANNEXE 3 : Rotations semi-tangentielles

Pour tous les développements exposés au cours de cette annexe, les notations sont identiques à celles du paragraphe 1-4-4-2 du chapitre 1 et ne sont pas redéfinies ici.

A3.1 Concept de rotations semi-tangentielles

Le problème majeur qui se pose lors de l'utilisation des grandes rotations dans l'espace est la non-commutativité de ces rotations par rapport à des axes fixes ou mobiles. Argyris (*Argyris et al.*, 1978 et 1982) a proposé à cet effet le concept de rotations semi-tangentielles. L'idée de base de ce dernier consiste à définir un mode de composition des rotations rendant le résultat vectoriel final indépendant de l'ordre dans lequel les rotations sont appliquées. Ce concept a précédemment été appliqué par Cariou (*Cariou*, 1988) et Ulm (*Ulm*, 1994) pour la résolution par éléments finis des problèmes non-linéaires dans le cas des poutres bidimensionnelles et tridimensionnelles. Dans ce paragraphe, nous appliquons le concept de rotations semi-tangentielles au cas des coques multicouches développées au chapitre 1.

Soit $\mathbf{\Omega}$ le vecteur des rotations totales (mouvement de corps rigide et déformation) ayant pour composantes $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ dans le repère \mathbf{n}_i^0 ($i = \alpha, \beta, 0$) relatif à la configuration initiale. Argyris montre qu'en analyse non-linéaire (grands déplacements), les vecteurs de base \mathbf{n}_i^t ($i = \alpha, \beta, 0$) relatifs à la configuration actuelle déformée, s'écrivent en fonction des vecteurs \mathbf{n}_i^0 :

$$\mathbf{n}_i^t = \mathbf{R}(\mathbf{\Omega}^t) \cdot \mathbf{n}_i^0 \quad (1)$$

où \mathbf{R} est le tenseur rotation s'écrivant en fonction du pseudo-vecteur de rotation $\mathbf{\Omega}^t$:

$$\mathbf{R}(\mathbf{\Omega}^t) = 1 + \frac{2}{1 + \mathbf{\Omega}^t \cdot \mathbf{\Omega}^t} (\mathbf{S} + \mathbf{S}^2) \quad (2)$$

avec :

$$\mathbf{\Omega}^t = \tan(\|\mathbf{\Omega}\| / 2) \frac{\mathbf{\Omega}}{\|\mathbf{\Omega}\|} \quad \|\mathbf{\Omega}\| = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2} \quad (3)$$

et sous forme matricielle :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -\tan(\Omega_3 / 2) & \tan(\Omega_2 / 2) \\ \tan(\Omega_3 / 2) & 0 & -\tan(\Omega_1 / 2) \\ -\tan(\Omega_2 / 2) & \tan(\Omega_1 / 2) & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Si l'on désigne par Ω'_0 et ω' les pseudo-vecteurs de rotation associés respectivement au mouvement de corps rigide et à celui entraînant des déformations, le pseudo-vecteur de rotation Ω' s'écrit alors (Cariou, 1988; Ulm, 1994) :

$$\Omega' = \frac{1}{1 - \Omega'_0 \cdot \omega'} (\Omega'_0 + \omega') \quad (5)$$

L'hypothèse des petites déformations conduit à :

$$\Omega' \approx (\Omega'_0 + \omega') \quad (6)$$

ou encore :

$$\Omega'_0 = (\Omega' - \omega') \quad (7)$$

En effet, la norme du pseudo-vecteur ω' devient faible devant l'unité avec la prise en compte de cette hypothèse.

L'utilisation de l'équation (7) dans (2) permet ainsi la détermination des vecteurs de base $\mathbf{n}_i^{\text{rig}}$ ($i = \alpha, \beta, 0$) relatifs à la configuration de référence (configuration de corps rigide) en fonction des vecteurs \mathbf{n}_i^0 relatifs à la configuration initiale par :

$$\mathbf{n}_i^{\text{rig}} = \overline{\mathbf{R}}(\Omega'_0) \cdot \mathbf{n}_i^0 \quad (8)$$

**ANNEXE 4 : Etude de l'entretoisement d'un pont bipoutre à trois travées
- compléments de résultats -**

Les notations utilisées au cours de cette annexe sont identiques à celles du paragraphe 4-1 du chapitre 4 et ne sont pas redéfinies ici.

A4.1 Caractéristiques géométriques des poutres principales et des lits d'armatures de la dalle en béton armé

Longueur (m)	Largeur (m)	Epaisseur (m)
18.50	0.6	0.025
9.00	0.6	0.090
29.00	0.6	0.025
9.00	0.6	0.090
18.50	0.6	0.025

Tableau A4-1 : Caractéristiques géométriques des semelles supérieures des poutres principales

Longueur (m)	Epaisseur (m)
18.50	0.018
9.00	0.024
29.00	0.018
9.00	0.024
18.50	0.018

Tableau A4-2 : Caractéristiques géométriques des âmes des poutres principales

Longueur (m)	Largeur (m)	Epaisseur (m)
18.50	0.7	0.040
9.00	0.7	0.090
29.00	0.7	0.040
9.00	0.7	0.090
18.50	0.7	0.040

Tableau A4-3 : Caractéristiques géométriques des semelles inférieures des poutres principales

Longueur (m)	Aire totale / ml	Distance à l'extrados (m)
14.00	0.00062	0.035
18.00	0.00167	0.035
20.00	0.00062	0.035
18.00	0.00167	0.035
14.00	0.00062	0.035

Tableau A4-4 : Caractéristiques géométriques du premier lit d'armatures de la dalle en béton armé

Longueur (m)	Aire totale / ml	Distance à l'extrados (m)
14.00	0.00062	0.215
18.00	0.00083	0.215
20.00	0.00062	0.215
18.00	0.00083	0.215
14.00	0.00062	0.215

Tableau A4-5 : Caractéristiques géométriques du deuxième lit d'armatures de la dalle en béton armé

A4.2 Poids des équipements considérés

Dix masses linéiques définissent les superstructures :

Masse (t/ml)	Ordonnée y (m)
0.05	-8.28
0.00	-8.03
0.50	-7.60
0.50	-4.14
1.50	-3.80
0.05	8.28
0.00	8.03
0.50	7.60
0.50	4.14
1.50	3.80

Tableau A4-6 : Poids des équipements considérés

A4.3 Calcul de la charge roulable A

L'intensité de la charge roulable A est calculée selon les règlements tel que (se rapporter au bulletin officiel du ministère de l'urbanisme et du logement, circulaire 81-63 du 28/07/1981) :

$$A = a_1 \cdot a_2 \cdot A(\lambda)$$

où a_1 est un coefficient donné en fonction du nombre de voies chargées et de la classe du pont, a_2 est le rapport entre la largeur de la voie l_v et une largeur l_0 donnée en fonction de la classe du pont, et $A(\lambda)$ la charge répartie exprimée en kg/m^2 et donnée en fonction de la largeur chargée λ par :

$$A(\lambda) = 230 + \frac{36000}{(\lambda + 12)}$$

On prend : $\lambda = 23 + 38 + 0 = 61$ m, ce qui conduit à :

$$A(\lambda) = 724 \text{ kg/m}^2$$

De plus, le pont faisant partie de la première classe et comprenant 4 voies, les coefficients a_1 et a_2 valent :

$$a_1 = 0.75 \quad \text{et} \quad a_2 = l_v/l_0 = 3.5/3.5 = 1$$

Ce qui permet de calculer la charge A :

$$A = 0.75 \times 1 \times 724 = 543 \text{ kg/m}^2$$

