



**HAL**  
open science

# Approches stochastiques pour le calcul des ponts aux séismes

Michel Kahan

► **To cite this version:**

Michel Kahan. Approches stochastiques pour le calcul des ponts aux séismes. Matériaux. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996. Français. NNT : . tel-00529960

**HAL Id: tel-00529960**

**<https://pastel.hal.science/tel-00529960>**

Submitted on 27 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NS 20285 (4)

THESE DE DOCTORAT  
DE L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité: Structures et Matériaux

Présentée par

M. Michel KAHAN

pour obtenir le titre de Docteur  
de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

APPROCHES STOCHASTIQUES  
POUR LE CALCUL DES PONTS  
AUX SEISMES

Thèse soutenue le 14 juin 1996  
devant un jury composé de

---

M. Armen DER KIUREGHIAN	Président
M. René-Jean GIBERT	Directeur de thèse et examinateur
M. Robert BOUC	Rapporteur
M. Pierre LABBE	Rapporteur
M. Pierre-Yves BARD	Examineur
M. Darius AMIR-MAZAHERI	Examineur

EN.P.C.



INV04203

21



## Résumé

Nous proposons dans cette étude quelques méthodes stochastiques pour le calcul des ponts aux séismes. Après avoir rappelé les représentations du mouvement sismique par spectres de réponse, densités spectrales de puissance et signaux temporels, nous introduisons des modèles de variabilité spatiale d'ondes sismiques. Nous en étudions l'effet sur la réponse linéaire des ponts grâce à une méthode de spectre de réponse pour structures multi-supportées. Nous proposons une méthode simplifiée permettant un calcul rapide de la sensibilité des ouvrages à de faibles variations spatiales des mouvements du sol et nous donnons un algorithme efficace pour le calcul de la réponse la plus défavorable lorsque les variations spatiales sont grandes et incertaines. Pour tenir compte du potentiel de ductilité des ponts, nous proposons une méthode de spectre de réponse tirant partie de la localisation des non-linéarités matérielles dans la structure (rotules plastiques, appareils d'appui). Les éléments non-linéaires sont remplacés par des éléments linéaires équivalents. Une technique de synthèse modale adaptée à la localisation des non-linéarités permet un calcul rapide de la réponse. Cette approche intègre le caractère aléatoire des sollicitations sans avoir recours à de coûteuses simulations de Monte-Carlo. Elle donne de bons résultats en termes de demande de ductilité et d'énergie dissipée par cycles d'hystérésis dans les éléments non-linéaires. Enfin, nous évoquons une technique de calcul de fiabilité de structures non-linéaires sous sollicitations stochastiques.

Mots clés: variabilité spatiales des ondes sismiques; spectre de réponse pour structures multi-supportées; linéarisation équivalente; spectre de réponse non-linéaire; fiabilité de systèmes non-linéaires sous sollicitations stochastiques.



## En guise de remerciements

Par ce mémoire et le travail qu'il reflète je verse une première contribution au monde du génie parasismique. L'expérience et le temps diront si cette étape initiatique aura trouvé un écho favorable dans la communauté des ingénieurs et si elle est digne d'être poursuivie. Il n'est cependant de premier pas qui ne soit guidé, conseillé et encouragé et je tiens à rendre hommage à tous ceux qui ont œuvré en ce sens.

Monsieur René-Jean Gibert, Professeur à l'Université d'Evry Val d'Essonne, m'a fait le très grand honneur de diriger ma thèse. Son enseignement, ses conseils, la démarche scientifique qu'il m'a inspirée ainsi que ses encouragements m'ont été précieux. Je tiens à lui exprimer ici mes très sincères remerciements.

Je suis très largement redevable à Monsieur Pierre-Yves Bard, qui m'a proposé au tout début de mon travail de prendre en charge le thème de recherche "sismique des ouvrages d'art" du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées. Les grandes orientations de ma recherche sont le fruit de ses conseils et des nombreuses discussions que nous avons eues. Ses encouragements sans cesse renouvelés ont été déterminants pour l'aboutissement de mes efforts. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Monsieur Armen Der Kiureghian, Professeur à l'Université de Californie à Berkeley, m'a fait le très grand honneur de présider mon jury et qui plus est, m'a décerné mon titre de Docteur dans une langue savoureuse que Molière aurait certainement reconnue et appréciée. Son nom figure à de multiples reprises dans ce mémoire au titre de la contribution majeure qu'il a apportée dans les domaines que j'ai abordés. En m'accueillant dans son équipe à Berkeley pour une durée de six mois, il a donné une impulsion considérable à mon travail. Ses conseils et avis scientifiques ont été fondamentaux dans la conduite de ma recherche. Sa gentillesse et son enthousiasme ont rendu ce séjour inoubliable. Qu'il soit assuré ici de ma profonde admiration et de ma reconnaissance.

Je tiens à remercier Monsieur Eduardo Kausel, Professeur au Massachusetts Institute of Technology, qui a dirigé ma recherche de Master of Science et qui m'a apporté un secours bibliographique précieux au début de ma thèse.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Pierre Labbé, Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon et Monsieur Robert Bouc, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille II, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant d'être rapporteurs et pour la qualité de leurs commentaires et le sérieux de leurs rapports.

Je suis également très sensible à l'honneur que m'a fait Monsieur Darius Amir-Mazahéri, Directeur de SEEE-Structures, en participant à mon jury et en y apportant son expertise dans le domaine du comportement sismique des ouvrages d'art.

Monsieur Frédéric Bourquin, m'a accueilli dans la section de Mathématiques Appliquées qu'il dirige au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées. Sa rigueur et son insatiable curiosité scientifique restent un exemple pour moi. J'ai également beaucoup appris au contact de Monsieur Robert Eymard qui dirige le Service de Modélisation pour l'Ingénieur auquel appar-

tient notre section.

J'ai trouvé au Laboratoire des Matériaux et des Structures du Génie Civil, unité mixte de recherche du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées et du Centre National de la Recherche Scientifique, un environnement scientifique et un cadre de travail de qualité. Je tiens à remercier Monsieur Michel Frémond, Directeur du LMSGC, Monsieur Jean-François Coste, Directeur du LCPC et Monsieur Bonnet, Directeur Scientifique du LCPC pour la confiance qu'ils m'ont accordée en m'accueillant au laboratoire et pour le soutien qu'il m'ont apporté depuis. Nombre de mes collègues ont contribué à rendre cette période fructueuse et plaisante. Je les en remercie chaleureusement et je leur garde toute mon amitié.

Je n'oublie pas non plus les personnalités du monde scientifique et technique qui m'ont aidé et encouragé dans ce travail. Ma première pensée va à Monsieur Victor Davidovici, Directeur Technique à la Socotec, qui a su initié l'intérêt que je porte au génie parasismique et qui a encouragé mon effort avec la gentillesse qu'on lui connaît. Ma gratitude va également à Monsieur Gottesdiener de la Socotec, Monsieur Scarlat du Technion d'Haifa, qui m'ont prodigué soutien et conseils, Monsieur Tourtois de GTM, Messieurs Conti et Chabert alors au SETRA, qui m'ont très gentiment fourni les modèles de ponts ayant servi à cette étude. Je suis sensible à l'accueil que m'ont réservé les membres du Comité d'Organisation de la 11<sup>ème</sup> Conférence Européenne de Génie Parasismique.

Je remercie enfin et surtout ma famille et mes amis qui ont su faire preuve d'une patience et d'un soutien sans faille. Je leur voue toute mon affection.

*A ma famille,  
à mes amis,  
à Bénédicte.*



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Prise en compte de la variabilité spatiale des ondes sismiques dans le comportement des ponts</b>	<b>3</b>
<b>1 Mouvements de sol</b>	<b>5</b>
1.1 Représentations de l'action sismique . . . . .	5
1.1.1 Spectre de réponse d'oscillateurs linéaires . . . . .	6
1.1.2 Densités spectrales de puissance . . . . .	7
1.1.3 Adéquation des densités spectrales de puissance aux spectres élastiques réglementaires . . . . .	12
1.1.4 Signaux synthétiques conformes à une densité spectrale de puissance . . . . .	17
1.2 Sources d'incohérence du mouvement sismique . . . . .	19
1.2.1 Mécanismes de rupture et étendue de la source . . . . .	20
1.2.2 Propagation des ondes sismiques . . . . .	21
1.2.3 Effets de site . . . . .	22
1.3 Modèles mathématiques de variabilité spatiale . . . . .	22
1.3.1 Fonctions de cohérence . . . . .	22
1.3.2 Modèles empiriques . . . . .	23
1.4 Génération de signaux aléatoires partiellement corrélés . . . . .	28
<b>2 Variabilité spatiale des ondes sismiques</b>	<b>31</b>
2.1 Règle de recombinaison MSRS . . . . .	32
2.1.1 Analyse temporelle . . . . .	32
2.1.2 Analyse spectrale . . . . .	35
2.1.3 Modèle de variabilité spatiale . . . . .	40
2.1.4 Comparaison aux résultats obtenus par simulations . . . . .	41
2.2 Sensibilité aux petites variations . . . . .	42
2.2.1 Développement limité . . . . .	43
2.2.2 Contributions pseudo-statique et modale à la réponse marginale . . . . .	46
2.3 Etudes de cas . . . . .	48
2.3.1 Mouvements longitudinaux . . . . .	48
2.3.2 Mouvements latéraux . . . . .	49
2.3.3 Mouvements verticaux . . . . .	51
2.4 Suffisance du nombre de modes . . . . .	56
2.5 Grandes variations spatiales . . . . .	59
2.5.1 Calcul des sensibilités . . . . .	60

2.5.2	Valeur maximale de la réponse . . . . .	60
2.5.3	Résultats numériques . . . . .	61
2.6	Effet de site . . . . .	61
2.7	Validation expérimentale . . . . .	63
2.8	Conclusions . . . . .	64
<b>II</b>	<b>Méthodes de calcul en dynamique stochastique non-linéaire</b>	<b>67</b>
<b>3</b>	<b>Spectre pour non-linéarités localisées</b>	<b>69</b>
3.1	Cadre de l'étude . . . . .	70
3.1.1	Spectres inélastiques . . . . .	71
3.1.2	Dimensionnement en capacité . . . . .	72
3.1.3	Simulations de Monte-Carlo . . . . .	73
3.1.4	Perspectives et place de la présente méthode . . . . .	74
3.2	Principe de la méthode . . . . .	74
3.2.1	Système linéaire relaxé . . . . .	75
3.2.2	Equations du mouvement . . . . .	75
3.2.3	Algorithme itératif . . . . .	78
3.3	Méthodes de linéarisation équivalente . . . . .	78
3.3.1	Moyenne stochastique . . . . .	78
3.3.2	Linéarisation stochastique gaussienne . . . . .	85
3.3.3	Limites et avantages comparatifs des techniques de linéarisation . . . . .	90
3.4	Synthèse modale . . . . .	90
3.4.1	Modes propres du système linéaire relaxé . . . . .	91
3.4.2	Synthèse modale compatible avec la moyenne stochastique . . . . .	91
3.4.3	Critère de suffisance des modes retenus . . . . .	94
3.4.4	Synthèse modale compatible avec la linéarisation stochastique gaussienne . . . . .	95
3.5	Spectre de réponse . . . . .	98
3.5.1	Spectre de réponse compatible avec la moyenne stochastique . . . . .	98
3.5.2	Spectre de réponse compatible avec la linéarisation stochastique gaussienne . . . . .	103
3.6	Applications . . . . .	105
3.6.1	Compatibilité avec la méthode du spectre inélastique pour des oscillateurs élasto-plastiques parfaits . . . . .	105
3.6.2	Mouvements latéraux du pont de Lourdes . . . . .	109
3.6.3	Mouvements longitudinaux du pont de Lourdes . . . . .	112
3.7	Conclusions . . . . .	114
<b>4</b>	<b>Fiabilité des systèmes non-linéaires</b>	<b>117</b>
4.1	Etat limite ultime et probabilité de ruine . . . . .	117
4.2	Approximation FORM du système parallèle . . . . .	121
4.3	Point de fonctionnement . . . . .	124
4.3.1	Discrétisation en temps des équations dynamiques . . . . .	125
4.3.2	Processus sollicitation discrétisé . . . . .	126
4.3.3	Intégration des équations . . . . .	127
4.3.4	Algorithme de recherche du point de fonctionnement . . . . .	127
4.4	Exemples d'application . . . . .	129

4.4.1	Oscillateur linéaire . . . . .	129
4.4.2	Oscillateur hystérétique . . . . .	131
4.5	Conclusions et perspectives . . . . .	136
<b>Conclusion générale</b>		<b>137</b>
<b>Annexes</b>		<b>141</b>
<b>A Rappels de vibrations aléatoires</b>		<b>141</b>
A.1	Rappels d'analyse spectrale . . . . .	141
A.2	Technique d'intégration des densités spectrales de puissance . . . . .	142
A.3	Facteur de pic . . . . .	142
<b>B Compléments sur la variabilité spatiale</b>		<b>145</b>
B.1	Indice de courbure du sol . . . . .	145
B.2	Erreur de troncature . . . . .	146
<b>C Présentation sommaire des ouvrages étudiés</b>		<b>147</b>
C.1	Pont sur le Gave de Pau à Lourdes, solution béton précontraint . . . . .	147
C.2	Pont sur le Gave de Pau à Lourdes, solution mixte . . . . .	147
C.3	Pont d'Evripos . . . . .	147
C.4	Viaduc de Carrières . . . . .	151
<b>D Structures à non-linéarités localisées</b>		<b>153</b>
D.1	Actualisation des modes propres . . . . .	153
<b>E Intégration numérique des équations non-linéaires</b>		<b>157</b>
E.1	Algorithme de Newton-Raphson . . . . .	157
E.2	Sensibilité de la réponse . . . . .	159
<b>F Algorithme HL-RF modifié</b>		<b>161</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>163</b>



# Liste des tableaux

1.1	Déplacements maximaux du sol selon les recommandations AFPS . . . . .	7
1.2	Paramètres des filtres de sol pour le spectre de Clough and Penzien . . . . .	10
1.3	Paramètres des densités spectrales de puissance de Clough et Penzien ajustant les spectres de réponse AFPS . . . . .	14
2.1	Conditions de sites aux appuis . . . . .	62
2.2	Influence du déphasage lié à l'effet de site . . . . .	62
2.3	Comparaison de la règle MSRS et de la règle du spectre moyen de l'EC8 . . . . .	63
3.1	Fréquences et périodes moyennes de l'accélération du sol pour chaque site AFPS	109
3.2	Mouvements latéraux, rotules élasto-plastiques; les coefficients de variation des ductilités maximales en rotation et énergétiques sont indiqués entre parenthèses	111
3.3	Mouvements latéraux, rotules suivant le modèle de Bouc-Wen; les coefficients de variation des ductilités maximales en rotation et énergétiques sont indiqués entre parenthèses . . . . .	112
3.4	Mouvements longitudinaux, rotules élasto-plastiques; les coefficients de variation des ductilités maximales en rotation et énergétiques sont indiqués entre parenthèses . . . . .	113
3.5	Mouvements longitudinaux, rotules suivant le modèle de Bouc-Wen; les coefficients de variation des ductilités maximales en rotation et énergétiques sont indiqués entre parenthèses . . . . .	113
4.1	Comparaison des méthodes de Monte-Carlo et FORM pour l'oscillateur linéaire	131
4.2	Paramètres des trois oscillateurs de Bouc-Wen testés . . . . .	131
4.3	Déplacements maximaux moyens pour les trois oscillateurs hystérétiques . . . . .	132
4.4	Comparaison des méthodes de Monte-Carlo et FORM pour l'oscillateur No 1 (acier écroui) . . . . .	133
4.5	Comparaison des méthodes de Monte-Carlo et FORM pour l'oscillateur No 2 (acier) . . . . .	134
4.6	Comparaison des méthodes de Monte-Carlo et FORM pour l'oscillateur No 3 (presque élasto-plastique) . . . . .	135



# Table des figures

1.1	Spectre de réponse élastique normalisé, composante horizontale . . . . .	7
1.2	Densité spectrale de puissance de l'accélération au sol selon le modèle de Kanai-Tajimi pour $S_o = 1$ , $\omega_g = 4\pi rad/s$ et $\zeta_g = 0.6$ . . . . .	9
1.3	Densité spectrale de puissance de l'accélération au sol selon le modèle de Clough et Penzien . . . . .	10
1.4	Densité spectrale de puissance de l'accélération au sol selon le modèle de Boore .	12
1.5	Comparaison des spectres de réponse de Boore et de l'AFPS ( $S_0$ ) . . . . .	13
1.6	Approximations des spectres AFPS (traits pleins) par des spectres de réponse issus des densités spectrales de puissance de Clough et Penzien (traits pointillés)	14
1.7	Spectre de réponse approché et densité et densité spectrale de puissance conforme au spectre AFPS $S_0$ . . . . .	16
1.8	Fenêtre temporelle . . . . .	19
1.9	Propagation d'une onde plane dans le rocher et réfraction dans les couches supérieures de sol . . . . .	21
1.10	Propagation horizontale d'une onde plane . . . . .	22
1.11	Déphasage dû à l'effet de site pour des colonnes de sol satisfaisant aux modèles de Kanai-Tajimi (gauche) et Clough et Penzien (droite) pour sols durs, moyens et souples . . . . .	27
1.12	Déphasage dû à l'effet de site pour des colonnes de sol satisfaisant aux modèles de Clough et Penzien compatibles avec les spectres de réponse AFPS . . . . .	27
2.1	Répartition des noeuds . . . . .	33
2.2	Coefficients de corrélation entre déplacements du sol et réponses d'oscillateurs aux diverses stations . . . . .	39
2.3	Comparaison de la règle MSRS et des moyennes de maxima de simulations: moment fléchissant maximal en pied de pile du pont d'Evripos en Grèce pour deux conditions de site: site rocheux (AFPS S0) et sol souple (AFPS S3). . . . .	42
2.4	Effet statique sur la structure d'une dilatation longitudinale du sol de fondation	47
2.5	Effet statique sur la structure d'une rotation du sol de fondation . . . . .	47
2.6	Pont sur le Gave de Pau, Lourdes, France: Premier mode longitudinal. . . . .	48
2.7	Pont sur le Gave de Pau. Excitation longitudinale: effort tranchant en pied de pile centrale (à gauche) et glissement tablier sur culée (à droite). $V = \infty$ . . . . .	49
2.8	Mouvements latéraux: effort tranchant en pied de pile centrale pour le pont sur le Gave de Pau (à gauche) et en pied de pile de droite pour le pont d'Evripos (à droite). $V = \infty$ . . . . .	50
2.9	Mouvements latéraux. Effet du passage d'onde sur l'effort tranchant en pied de pile centrale sur le pont sur le Gave de Pau (à gauche) et en pied d'une des piles centrales pour le pont d'Evripos (à droite). $\alpha = 0$ . . . . .	51

2.10	Pont sur le Gave de Pau, Lourdes : premier mode de balancement latéral . . . . .	51
2.11	Pont à haubans d'Evripos en Grèce : modes contrôlant la réponse latérale . . . . .	53
2.12	Mouvements verticaux : Moment fléchissant le long du tablier. Pont à quatre travées sur le Gave de Pau (en haut) et viaduc à cinq travées de Carrières (en bas). $\Delta$ : $\alpha = 10^{-3}s/m$ , $V = \infty$ ; $\diamond$ : $\alpha = 2.10^{-3}s/m$ , $V = \infty$ ; $\square$ : $\alpha = 0$ , $V = 500m/s$ . . . . .	54
2.13	Mouvements verticaux : Effort tranchant vertical le long du tablier. Pont à quatre travées sur le Gave de Pau (en haut) et pont à cinq travées de Carrières (en bas). $\Delta$ : $\alpha = 10^{-3}s/m$ , $V = \infty$ ; $\diamond$ : $\alpha = 2.10^{-3}s/m$ , $V = \infty$ ; $\square$ : $\alpha = 0$ , $V = 500m/s$ . . . . .	55
2.14	Pont sur le Gave de Pau, Ratios de masses modales sismiques. En traits pleins: mouvements uniformes de sol ( $r_{TC}$ ). En tirets: mouvements de fondations totalement incohérents ( $r_{TI}$ ). A gauche: mouvements longitudinaux, à droite: mouvements latéraux . . . . .	59
3.1	Localisation des non-linéarités dans la structure . . . . .	75
3.2	Principe de relaxation du système non-linéaire . . . . .	76
3.3	Adjonction d'éléments linéaires équivalents . . . . .	76
3.4	Rotation relative et moment dual . . . . .	77
3.5	Algorithme itératif . . . . .	79
3.6	Boucle d'hystérésis . . . . .	80
3.7	Boucle d'hystérésis d'un composant bilinéaire . . . . .	83
3.8	Raideur et amortissement équivalents pour le composant bilinéaire . . . . .	84
3.9	Facteur de ductilité énergétique . . . . .	84
3.10	Boucle d'hystérésis pour le modèle de Bouc-Wen approchant un composant élasto-plastique parfait ( $\alpha = 0$ , $A = 1$ , $\gamma = \beta = 1/(2z_y^n)$ ) . . . . .	87
3.11	Modèle de Bouc-Wen pour éléments en acier ( $\gamma = \beta = 1/(2z_y)$ ) et en béton armé ( $\gamma = 3/(2z_y^2)$ , $\beta = -1/(2z_y^2)$ ) . . . . .	88
3.12	Boucle d'hystérésis pour frottement de Coulomb . . . . .	90
3.13	Ratio de masse modale effective pour systèmes relaxé et bloqué aux connexions. Mouvement latéral (à gauche) et longitudinal (à droite). . . . .	96
3.14	Lignes de niveau du facteur de pic pour le site AFPS $S_0$ . . . . .	102
3.15	Facteur de pic en fonction de la fréquence propre de l'oscillateur pour deux niveaux d'amortissement propre . . . . .	102
3.16	Coefficient de comportement pour oscillateurs élasto-plastiques parfaits sur site AFPS $S_0$ . . . . .	107
3.17	Coefficient de comportement pour oscillateurs élasto-plastiques parfaits sur site AFPS $S_3$ . . . . .	107
3.18	Coefficient de comportement pour oscillateurs élasto-plastiques parfaits sur site AFPS $S_0$ . . . . .	108
3.19	Coefficient de comportement pour oscillateurs élasto-plastiques parfaits sur site AFPS $S_3$ . . . . .	108
3.20	Coefficient de comportement pour l'oscillateur élasto-plastique parfait fonction de la période de l'oscillateur normalisée par la période moyenne des accélérations de sol, pour deux niveaux de ductilité: $\mu = 2$ à gauche et $\mu = 5$ à droite. . . . .	109
3.21	Dix premiers modes latéraux de l'ouvrage articulé en pied de piles . . . . .	115
3.22	Dix premiers modes longitudinaux du pont rotulé en pied de piles . . . . .	116

4.1	Ruine du système par atteinte de l'état limite ultime . . . . .	119
4.2	Approximation FORM de la probabilité de ruine d'un système parallèle . . . . .	123
4.3	Point de linéarisation $\bar{\mathbf{f}}_2$ . . . . .	124
4.4	Point de fonctionnement et réponse de l'oscillateur linéaire . . . . .	130
4.5	Taux moyen de dépassement pour l'oscillateur linéaire . . . . .	130
4.6	Densité de probabilité de la réponse maximale d'oscillateurs linéaire et hystérétique	132
4.7	Point de fonctionnement à $t = 10s$ et taux moyen de dépassement pour l'oscilla- teur hystérétique No 1 (acier écroui) . . . . .	133
4.8	Point de fonctionnement à $t = 10s$ et taux moyen de dépassement pour l'oscilla- teur hystérétique No 2 (acier) . . . . .	134
4.9	Point de fonctionnement à $t = 10s$ et taux moyen de dépassement pour l'oscilla- teur hystérétique No 3 (presque élasto-plastique) . . . . .	135
C.1	Pont sur le Gave de Pau à Lourdes, solution béton précontraint . . . . .	148
C.2	Pont sur le Gave de Pau à Lourdes, solution mixte . . . . .	149
C.3	Section transverse en pied de pile $P_2$ . Plan de ferrailage longitudinal et dia- gramme moment-courbure . . . . .	149
C.4	Diagrammes contraintes-déformations du béton et de l'acier . . . . .	150
C.5	Pont à haubans d'Evripos (Grèce) . . . . .	150
C.6	Viaduc à cinq travées de Carrières sur Seine . . . . .	151



# Introduction

Les ponts ont eu longtemps la réputation d'être invulnérables aux tremblements de terre et de fait, la proportion d'ouvrages de ce type endommagés par des séismes est faible en comparaison d'autres structures tels que les bâtiments courants. Amir-Mazahéri [10] attribue cette bonne tenue aux qualités intrinsèques de ces ouvrages (souplesse, hyperstaticité), au soin apporté à leur réalisation ainsi qu'au caractère dimensionnant d'autres cas de charges.

Les accidents spectaculaires survenus au Bay Bridge et au Cypress Overpass au cours du tremblement de terre de Loma Prieta le 17 octobre 1989, à six ouvrages de l'agglomération de Los Angeles au cours du séisme de Northridge le 17 janvier 1994 et plus récemment au cours du séisme de Kôbé, le 17 janvier 1995, au Hanshin expressway, au pont en arc de Nishinomiya et au pont ferroviaire de Hankyu, ont montré la vulnérabilité des ouvrages d'art. Si le nombre de victimes dues à leur ruine est fort heureusement faible, les conséquences en termes immédiats d'acheminement des secours et en termes différés de pertes économiques ont été considérables. Les ponts sont en effet, dans ces régions très développées, des points de passages obligés d'un important réseau routier et ferroviaire.

Depuis, chercheurs et ingénieurs ont porté une attention accrue aux ponts, tant du point de vue de leur comportement mécanique aux séismes que des méthodes de calcul. Ces réflexions ont permis d'étendre avec plus ou moins de réussite les règles de calcul et les dispositions constructives établies pour les bâtiments courants aux ouvrages d'art [50, 12]. Toutefois, les ponts présentent certaines particularités de géométrie ou de comportement qui mettent en défaut les méthodes de calcul usuelles :

- A l'image des grands barrages ou des conduites enterrées, les ponts sont des structures étendues pour lesquelles l'hypothèse, communément adoptée dans la pratique, d'un mouvement uniforme du sol de fondation ne se justifie plus nécessairement. De nombreuses études ont porté ces dernières années sur les mouvements différentiels de sol, sans véritablement qu'un modèle de variabilité spatiale d'ondes sismiques s'impose sur les autres. A défaut nous proposons un certain nombre d'outils simples de calcul permettant une étude de sensibilité des ouvrages d'art.
- Le comportement mécanique des ponts est bien mieux identifié que celui des bâtiments courants. En effet, ces derniers possèdent de nombreux éléments non-structurants, de comportement très incertain, qui participent malgré tout à la rigidité et la masse de la structure. Ce n'est pas le cas pour les ponts, qui font en outre l'objet d'un soin particulier lors de leur réalisation. Une description plus détaillée du comportement dynamique des ouvrages d'art, notamment dans le domaine non-linéaire, est donc possible. Elle est même souhaitable puisque les possibilités de redistribution d'effort après plastification de certains éléments existent mais en nombre plus réduit que dans les bâtiments. Les méthodes de simulations permettent cette analyse fouillée mais sont encore onéreuses en calculs

et de ce fait se prêtent peu à des études de sensibilité. Nous proposons ici des méthodes simplifiées d'analyse de systèmes pour lesquels les non-linéarités sont locales (rotules plastiques, appareils d'appui) ce qui se produit dans le cas d'un dimensionnement en capacité. Nous précisons alors les niveaux de demande de ductilité et de dissipation d'énergie des composants non-linéaires.

La première partie de ce mémoire est dédiée à la prise en compte des phénomènes de variabilité spatiale des ondes sismiques dans le calcul des ouvrages d'art. Pour cela nous revenons dans le premier chapitre sur les représentations du mouvement sismique du sol par spectres de réponse, densités spectrales de puissance et signaux temporels en indiquant les passerelles qui permettent de passer de l'une à l'autre de ces représentations. Puis nous y intégrons la variabilité spatiale des ondes sismiques en rappelant les phénomènes physiques qui en sont à l'origine.

Le deuxième chapitre est consacré à la réponse des ouvrages d'art en termes de sensibilité aux variations spatiales des mouvements de sol. Nous y présentons la règle de calcul MSRS qui s'appuie sur les spectres de réponse réglementaires et un modèle au choix de variabilité spatiale. Nous en proposons une formule approchée dans le cas de faibles variations spatiales qui a le mérite de permettre un calcul rapide de la sensibilité de l'ouvrage et qui apporte un éclairage intéressant sur les contributions des diverses composantes de la réponse. Nous donnons une extension du concept de masse modale sismique, estimateur du nombre de modes à retenir pour décrire convenablement la réponse de la structure.

La seconde partie de ce mémoire est consacrée à la réponse non-linéaire des ponts. Nous y faisons l'hypothèse que le comportement post-élastique est concentré en un nombre réduit de points de la structure, sous forme de rotules plastiques ou de déformations inélastiques d'appareils d'appui. Dans le troisième chapitre, nous proposons une méthode de spectre de réponse associée à des techniques de linéarisation équivalente et à une synthèse modale adaptée à la localisation des non-linéarités. Ces méthodes sont rapides et intègrent de façon rationnelle l'aléa associé à l'excitation sismique sans faire appel aux simulations de Monte-Carlo coûteuses en calculs. Les techniques proposées fournissent une approximation très convenable de la demande de ductilité et du degré de dissipation d'énergie dans les divers composants non-linéaires.

Dans le quatrième et dernier chapitre, nous indiquons des possibilités d'ouverture vers des techniques de calcul de fiabilité des structures non-linéaires sous sollicitations stochastiques.

## Première partie

Prise en compte de la variabilité  
spatiale des ondes sismiques dans le  
comportement des ponts



# Chapitre 1

## Mouvements sismiques pour les ouvrages d'art

Dans un souci de simplifier la tâche de l'ingénieur, les règlements de construction définissent l'excitation sismique par ses effets sur les structures. Dans ce but, les spectres de réponses élastiques fournissent la réponse maximale d'oscillateurs linéaires élastiques pour un niveau de séisme donné sur une configuration géologique donnée. Si le comportement de la structure s'apparente à celui d'un tel oscillateur, le maximum de sa réponse s'obtient par lecture directe des spectres. Si son comportement dynamique est gouverné par un ensemble de modes propres, la réponse maximale s'obtient par combinaison des maxima modaux. Cette description du mouvement de sol permet une analyse simple des bâtiments dont la fondation est de petite dimension au regard des longueurs d'ondes. Pour ces ouvrages, on peut faire l'hypothèse d'un mouvement uniforme du sol. Cela n'est plus possible dans le cas de structures étendues. Les ponts, tunnels, ou barrages ont parfois des dimensions de l'ordre des longueurs d'ondes sismiques et de ce fait subissent des déplacements différentiels le long de leurs fondations, ce dont les spectres ne rendent pas compte.

Nous rappelons dans ce premier chapitre, différentes représentations des mouvements sismiques de sol qui prennent en compte leur caractère aléatoire et de possibles variations spatiales. Notre souci est d'adopter la représentation la plus simple possible permettant l'extension des outils communément utilisés en génie parasismique pour les bâtiments, au calcul des structures étendues. Nous revenons dans un premier temps sur les diverses façons de décrire le mouvement ponctuel du sol par l'intermédiaire de spectres de réponse, de densités spectrales de puissance et de signaux temporels, en indiquant les passerelles entre ces représentations. Nous évoquons ensuite les sources de variabilité spatiale des ondes sismiques et l'extension des représentations précédentes aux mouvements qui ne sont que partiellement corrélés en espace.

### 1.1 Représentations de l'action sismique ponctuelle

Dans la pratique du génie parasismique, le mouvement du sol est donné par son action sur les structures. Les règlements ou recommandations [12, 50] fournissent ainsi des spectres de réponse d'oscillateurs dont nous rappelons la définition dans un premier temps. Couramment utilisés par les chercheurs, les processus stochastiques offrent une représentation plus générale du mouvement sismique, qui met clairement en avant son caractère aléatoire. On décrit en particulier le contenu fréquentiel de l'accélération au sol par l'intermédiaire de densités spec-

trales de puissance. Nous en rappelons la définition et donnons quelques exemples classiques. Nous montrons en particulier comment choisir des densités spectrales de puissance de façon à ce qu'elles soient compatibles avec les spectres de réponse élastique. Enfin, nous rappelons les techniques usuelles de génération de signaux sismiques artificiels à partir des densités spectrales de puissance.

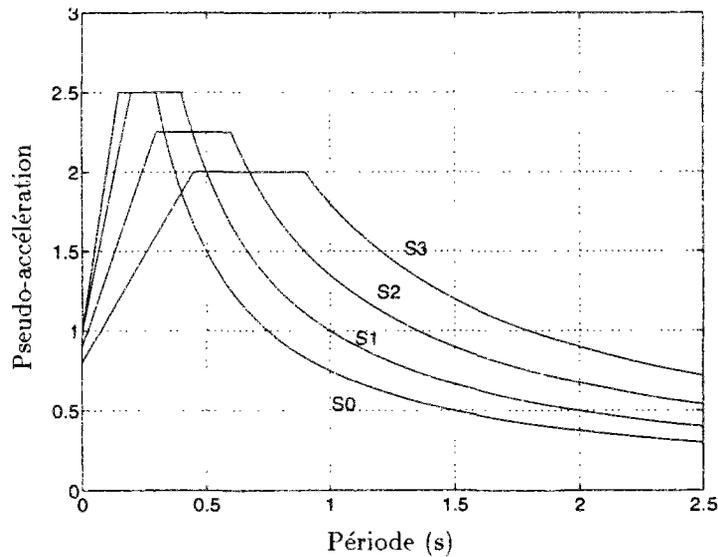
### 1.1.1 Spectre de réponse d'oscillateurs linéaires

Les spectres linéaires donnent la réponse maximale moyenne (parfois augmentée d'un écart-type) d'oscillateurs linéaires élastiques soumis à une excitation de type sismique. Ce sont des fonctions de la pulsation propre  $\omega$  de l'oscillateur, de son ratio d'amortissement  $\zeta$  et de la nature du sol sur lequel l'oscillateur repose. En théorie, ils sont obtenus en prenant la moyenne sur un ensemble de réponses d'oscillateurs soumis à des séismes qu'on peut attendre sur une configuration géotechnique donnée. Dans la pratique, ces spectres sont lissés et simplifiés de façon à couvrir de façon conservative une large gamme de séismes. Ils sont donnés sous la forme de déplacements (allongements) maximaux moyens  $D(\omega, \zeta)$  d'oscillateurs, de pseudo-vitesses  $V(\omega, \zeta) = \omega D(\omega, \zeta)$  ou de pseudo-accélération  $A(\omega, \zeta) = \omega^2 D(\omega, \zeta)$ . L'Association Française de Génie Parasismique (AFPS) recommande quatre spectres selon le contexte géotechnique [11]:

- Site S0: site rocheux ou sol de bonne à très bonne résistance mécanique d'épaisseur inférieure à 15m.
- Site S1: sol de bonne à très bonne résistance mécanique d'épaisseur supérieure à 15m ou sol de résistance mécanique moyenne d'épaisseur inférieure à 15m.
- Site S2: sol de résistance mécanique moyenne d'épaisseur comprise entre 15 et 50m ou sol de faible résistance mécanique d'épaisseur inférieure à 10m.
- Site S3: sol de résistance mécanique moyenne d'épaisseur supérieure à 50m ou sol de faible résistance mécanique d'épaisseur comprise entre 10 et 100m.

Dans des situations de sol plus défavorables une étude spécifique est requise. Les spectres d'oscillateurs élastiques correspondant aux quatre sites précédemment définis sont représentés en pseudo-accélération sur la Figure (1.1) pour une accélération maximale horizontale du sol de  $1m/s^2$ . Les spectres de l'AFPS donnent la réponse maximale moyenne augmentée d'un écart-type. Notons que ces spectres ont été définis dans l'objectif de dimensionner des structures dont la période fondamentale ne dépasse pas quelques secondes. Comme le souligne Bard [19], la technologie des capteurs et les méthodes d'acquisition de données limitent la fiabilité du contenu longue période des spectres expérimentaux et de fait, des spectres réglementaires. Ceci pose un problème pour certains ponts, notamment suspendus, dont la période fondamentale peut dépasser la dizaine de seconde. Bard [19] mentionne en exemple deux situations géologiques dans lesquelles le contenu longue période peut être très important:

- En se réfractant aux bord de bassins sédimentaires larges et profonds, les ondes de volume engendrent des ondes de surface de grande amplitude et de longue période.
- Lorsque la rupture de la faille géologique est proche, on constate de fortes impulsions basses fréquences en vitesse et en déplacement (plus de  $1m/s$  et  $100cm$  enregistrés au cours des tremblement de terre de Landers, Northridge et Kobé) dommageables pour les structures notamment lorsqu'elles plastifient et qui ne sont pas du tout prises en compte par les spectres réglementaires.

FIG. 1.1 - *Spectre de réponse élastique normalisé, composante horizontale*

Les règlements présentent une certaine incohérence aux très basses fréquences. On s'attend en effet à ce que le déplacement relatif maximal d'un oscillateur infiniment souple égale le déplacement maximal du sol. Le Tableau 1.1 montre que la limite du spectre de réponse en déplacement à très basse fréquence ( $\lim_{\omega \rightarrow 0} D(\omega, \zeta)$ ) surestime largement la valeur maximale du déplacement au sol pour les quatre modèles de site des recommandations AFPS [12].

site AFPS	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$\lim_{\omega \rightarrow 0} D(\omega, \zeta) (cm)$	5	8.1	13.2	20.2
$u_{max}$ (cm) selon recommandations AFPS	3	5	7	9

TAB. 1.1 - *Déplacements maximaux du sol selon les recommandations AFPS*

Les spectres sont en général donnés pour les mouvements horizontaux du sol. On admet que la composante verticale du séisme est égale à deux tiers (70% dans l'Eurocode 8) de la composante horizontale. Selon Bard [19], ce ratio sous-estime les mouvements verticaux au voisinage d'une faille inverse de type "dip-slip", mais les surestime dans la plupart des autres cas.

Si, comme nous l'avons souligné, les spectres de réponse présentent un certain nombre de défauts, en particulier dans les basses fréquences, ils n'en sont pas moins simples d'emploi et de ce fait largement utilisés dans la communauté des ingénieurs. Nous présentons dans les paragraphes suivants d'autres façons de décrire le mouvement du sol, parfois plus physiques, en prenant soin de montrer comment ces formulations peuvent être mises en concordance avec les spectres réglementaires.

### 1.1.2 Densités spectrales de puissance

La nature aléatoire des signaux sismiques fait des processus stochastiques une représentation naturelle. Si la forme des signaux temporels varie beaucoup d'un tremblement de terre à l'autre,

on s'accorde à reconnaître que le contenu fréquentiel sous une forme que nous allons définir, apporte des renseignements caractéristiques de la nature des sols et de la situation du site par rapport aux failles géologiques.

Pour l'utilisation pratique, nous faisons l'hypothèse que pendant la durée des mouvements forts, l'accélération du sol est un processus aléatoire gaussien de moyenne nulle, stationnaire, du moins au regard des caractéristiques dynamiques de la structure. Le caractère gaussien se justifie par le théorème central limite: le signal sismique en un point de la surface au sol est la superposition de signaux de distributions à peu près semblables et statistiquement indépendants parce qu'ils ont soit suivi des chemins indépendants, soit proviennent de sources indépendantes sur la faille géologique. Le caractère stationnaire sous-entend que les caractéristiques statistiques du processus évoluent peu sur une durée supérieure ou égale à plusieurs fois (au moins un dizaine de fois) la période propre fondamentale de la structure. Cette hypothèse est parfois mise en défaut dans la pratique, en particulier pour les grands ouvrages d'art dont les premières périodes atteignent plusieurs secondes. Il est tout à fait possible d'introduire des densités spectrales de puissance variables dans le temps [82, 30, 31, 83], toutefois nous conserverons souvent l'hypothèse de stationnarité afin de garder les calculs et les techniques aussi simples que possible. On introduit de ce fait une erreur qui portera toutefois peu à conséquence dans l'utilisation qu'on fera des densités spectrales de puissance dans les chapitres suivants.

La fonction d'auto-corrélation (cf. annexe A.1) de l'accélération du sol  $\ddot{u}_g$  se définit par

$$R_{\ddot{u}_g}(\tau) = E[\ddot{u}_g(t)\ddot{u}_g(t + \tau)] \quad (1.1)$$

où  $E$  désigne l'espérance mathématique. Puisque le signal sismique est stationnaire, c'est une fonction paire de la seule variable  $\tau$ . La variance du processus s'obtient pour  $\tau = 0$ :  $\sigma_{\ddot{u}_g}^2 = R_{\ddot{u}_g}(0)$ . On désigne par *densité spectrale de puissance ponctuelle* d'accélération de sol  $S_{\ddot{u}_g}$  la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation :

$$S_{\ddot{u}_g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\ddot{u}_g}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (1.2)$$

On démontre [82, 93] qu'il s'agit d'une fonction réelle positive et paire. De ce fait on emploie également souvent la densité spectrale de puissance à droite définie pour des fréquences positives par

$$G_{\ddot{u}_g}(\omega) = 2S_{\ddot{u}_g}(\omega) \text{ pour } \omega \geq 0 \quad (1.3)$$

La variance du processus s'exprime simplement en fonction de sa densité spectrale de puissance :

$$\sigma_{\ddot{u}_g}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\ddot{u}_g}(\omega) d\omega = \int_0^{+\infty} G_{\ddot{u}_g}(\omega) d\omega \quad (1.4)$$

Nous passons en revue trois spectres couramment utilisés en génie parasismique en indiquant leurs avantages relatifs en vue du calcul de la réponse des ouvrages d'art. Le spectre ponctuel d'accélération le plus simple, dit de Kanai-Tajimi [74, 115], est donné par la réponse d'une couche de sol de fréquence propre  $\omega_g$ , d'amortissement radiatif  $\zeta_g$  au mouvement du substratum rocheux dont la densité spectrale de puissance d'accélération est un bruit blanc d'amplitude  $S_o$  :

$$S_{\ddot{u}_g}(\omega) = S_o \frac{\omega_g^4 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \quad (1.5)$$

Ce spectre présente l'avantage de la simplicité, mais pose des problèmes à basse fréquence. En effet, la densité spectrale de puissance des déplacements du sol

$$S_u(\omega) = \frac{S_{\ddot{u}}(\omega)}{\omega^4} \quad (1.6)$$

n'est ni définie, ni localement intégrable en zéro. On ne peut donc définir la variance du processus déplacement de sol par cette densité spectrale de puissance. Si cela ne représente pas un inconvénient majeur pour le calcul des bâtiments, c'est une réelle limitation dans le cas des ouvrages étendus et des problèmes non-linéaires que nous rencontrerons.

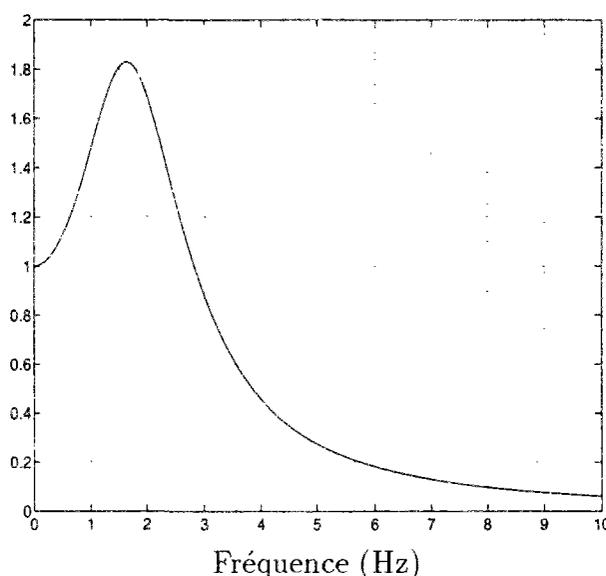


FIG. 1.2 - Densité spectrale de puissance de l'accélération au sol selon le modèle de Kanai-Tajimi pour  $S_0 = 1$ ,  $\omega_g = 4\pi \text{ rad/s}$  et  $\zeta_g = 0.6$

Pour pallier cet inconvénient, Clough et Penzien [37] ont proposé le *double filtre* suivant :

$$S_{\ddot{u}_g}(\omega) = S_0 \frac{\omega_g^4 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \cdot \frac{\omega^4}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_f^2 \omega_f^2 \omega^2} \quad (1.7)$$

qui présente l'avantage sur le spectre de Kanai-Tajimi de conduire à une densité spectrale de puissance en déplacements finie et intégrable. Il est donc tout à fait approprié lorsque la densité spectrale de puissance des déplacements s'avère nécessaire à l'analyse. Les paramètres du modèle peuvent être ajustés pour représenter le contenu spectral de l'excitation sismique qui dépend de la nature du sol. La Figure 1.3 donne une représentation graphique du spectre double filtre pour les paramètres de sols dur, moyen et mou du Tableau 1.2 tiré de la référence [45].

Les formes spectrales de Kanai-Tajimi ou de Clough et Penzien résultent de modèles très simples de propagation d'onde. On ne peut s'attendre à ce qu'ils fournissent des résultats fiables notamment pour les basses fréquences. C'est pourquoi nous jugeons opportun de mentionner ici la densité spectrale de puissance au rocher issue du spectre de Boore [26] (voir aussi [85]) qui s'appuie sur un modèle physique de rupture sismologique et sur des lois d'atténuation. A

sol	$\omega_g(\text{rad/s})$	$\zeta_g$	$\omega_f(\text{rad/s})$	$\zeta_f$
dur	15.0	0.6	1.5	0.6
moyen	10.0	0.4	1.0	0.6
souple	5.0	0.2	0.5	0.6

TAB. 1.2 - Paramètres des filtres de sol pour le spectre de Clough and Penzien

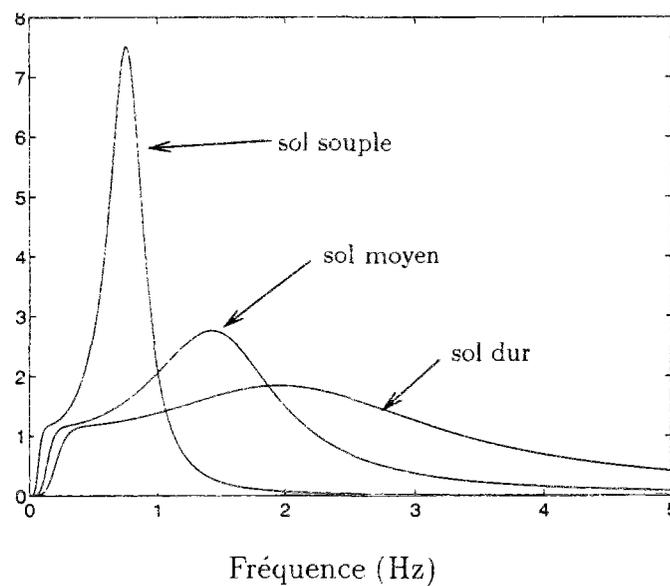


FIG. 1.3 - Densité spectrale de puissance de l'accélération au sol selon le modèle de Clough et Penzien

une distance  $R$  (en  $km$ ) d'une faille sur laquelle se produit une rupture de moment  $M_0$  (en  $din.cm$ ), la densité spectrale de puissance de Boore s'exprime sous la forme :

$$S_{\ddot{u}_y}(\omega) = \frac{C^2 M_0^2}{2\pi T_d} S(\omega, \omega_c) P(\omega, \omega_m) \frac{e^{-\frac{\omega R}{Q\beta}}}{R^2} \quad (1.8)$$

où la constante  $C$  est donnée par :

$$C = \frac{R_{\theta\phi} \cdot FS \cdot PRTITN}{4\pi\rho\beta^3} \quad (1.9)$$

$R_{\theta\phi} = 0.63$  est le schéma de radiation,  $FS = 2$  le facteur d'amplification dû à la surface libre,  $PRTITN = 1/\sqrt{2}$  est un facteur de réduction tenant compte de la partition de l'énergie sur les deux composantes horizontales,  $\rho$  est la masse volumique (en  $g/cm^3$ ) et  $\beta$  la célérité des ondes de cisaillement (en  $km/s$ ). Dans l'expression (1.8),  $S$  est un terme de source :

$$S(\omega, \omega_c) = \left( \frac{\omega^2}{1 + (\omega/\omega_c)^2} \right)^2 \quad (1.10)$$

où  $\omega_c$  est une pulsation de coin.  $P$  est un filtre passe-bas :

$$P(\omega, \omega_m) = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_m)^8} \quad (1.11)$$

Enfin, dans le terme exponentiel décrivant l'atténuation géométrique, le facteur sans dimension  $Q$  vaut 300. Boore fait l'hypothèse que la fréquence de coupure est indépendante de l'importance du séisme ( $f_m = \omega_m/2\pi = 15Hz$ ). La fréquence de coin ( $f_c = \omega_c/2\pi$ ) est, quant à elle, liée au moment sismique  $M_0$  et à un paramètre  $\Delta\sigma$  ayant les dimensions d'une contrainte (on la retrouve dans la littérature sous le nom de contrainte effective, chute de contrainte dynamique, ou encore valeur quadratique moyenne de chute de contrainte) :

$$f_c = 4.9 \times 10^6 \beta (\Delta\sigma/M_0)^{1/3} \quad (1.12)$$

où  $f_c$  est en  $Hz$ ,  $\beta$  en  $km/s$ ,  $\Delta\sigma$  en bars (on prendra une valeur moyenne de 100 bars). La durée des mouvements forts se déduit de la fréquence de coupure par la formule :

$$T_d = \frac{1}{f_c} \quad (1.13)$$

Hanks et McGuire [57] relient l'écart type  $\sigma_{\ddot{u}}$  et la valeur maximale  $\ddot{u}_{max}$  de l'accélération au sol aux paramètres définis plus haut :

$$\sigma_{\ddot{u}} = 0.85 \frac{(2\pi)^2 \Delta\sigma}{106 \rho R} \sqrt{\frac{f_m}{f_c}} \quad (1.14)$$

$$\ddot{u}_{max} = \sigma_{\ddot{u}} \sqrt{2 \ln \left( \frac{2f_m}{f_c} \right)} \quad (1.15)$$

La Figure 1.4 représente la densité spectrale de puissance de Boore pour une magnitude du moment sismique de  $M = 6.5$ . Rappelons que la magnitude est reliée au moment sismique par la relation :

$$M = 2/3 \log M_0 - 10.7 \quad (1.16)$$

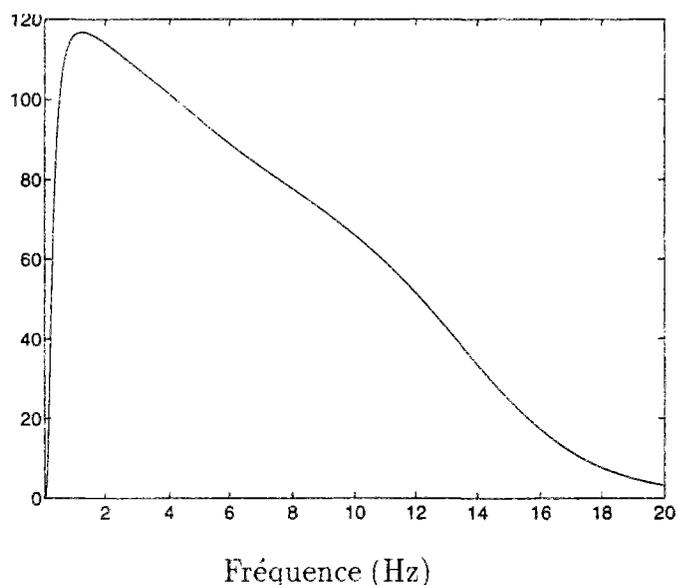


FIG. 1.4 - *Densité spectrale de puissance de l'accélération au sol selon le modèle de Boore*

### 1.1.3 Adéquation des densités spectrales de puissance aux spectres élastiques réglementaires

Nous aurons besoins, aux chapitres suivants, de densités spectrales de puissance compatibles avec des spectres de réponse réglementaires. Pour ce faire, nous pouvons ajuster les paramètres des densités spectrales de puissance définies plus haut, notamment ceux des modèles de Kanai-Tajimi (voir en particulier [78]) et de Clough et Penzien, de façon à ce que les réponses d'oscillateurs qui en découlent se rapprochent au mieux des spectres de réponse réglementaires. Nous pouvons également construire de toutes pièces une densité spectrale de puissance qui satisfasse au même critère. Comme le remarquent Labbé et Bernat [78], les spectres de réponse élastique sont construits à partir d'accélérogrammes normalisés dans la mesure où l'accélération maximale de chacun de ces signaux est unitaire. La variance de la réponse d'oscillateurs très raides est faible du fait de cette normalisation, si bien que la définition du spectre de réponse en moyenne augmentée d'un écart-type est faussée pour les hautes fréquences. Nous adoptons ici une démarche plus simple en supposant que les spectres de réponse élastiques fournissent la moyenne de la réponse maximale des oscillateurs.

On considère souvent que l'accélération du sol est un processus stationnaire gaussien modulé par une fenêtre temporelle déterministe de durée finie. La réponse d'un oscillateur linéaire à ce mouvement d'entraînement est également gaussienne, mais non stationnaire. L'oscillateur est en effet au repos avant d'être sollicité par le séisme et n'est excité que pendant une durée finie  $T$ . On suppose toutefois que la durée d'excitation est suffisamment longue pour que l'oscillateur atteigne son régime stationnaire et y reste pendant une durée qui soit une proportion importante de la durée d'excitation. On pourra alors considérer que la réponse est elle-même stationnaire. Le passage de la densité spectrale de puissance au spectre de réponse linéaire s'effectue en trois étapes :

- La densité spectrale de puissance du déplacement relatif de l'oscillateur de pulsation propre  $\omega_r$  et de ratio d'amortissement propre  $\zeta_r$  s'obtient en multipliant la densité spec-

trale de puissance d'accélération du sol par la norme au carré de la fonction de transfert de l'oscillateur  $h_r(\omega) = [\omega^2 - \omega_r^2 + 2i\zeta_r\omega_r\omega]^{-1}$  [93]:

$$S_r(\omega) = \frac{S_{\ddot{u}_g}(\omega)}{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_r^2\omega_r^2\omega^2} \quad (1.17)$$

– On en tire la variance du déplacement relatif de l'oscillateur :

$$\sigma_r^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_r(\omega) d\omega \quad (1.18)$$

– L'espérance de l'allongement maximal de l'oscillateur se déduit enfin de l'écart-type  $\sigma_r$ , en le multipliant par un facteur de pic dont on trouvera la définition et des expressions approchées à l'annexe A.3 :

$$E[|X_r|_{max}] = p \cdot \sigma_r \quad (1.19)$$

### (a) Densité spectrale de puissance de Boore

Par cette méthode, nous obtenons le spectre d'oscillateurs dérivé de la densité spectrale de puissance de Boore qui représente le mouvement de sol au rocher que nous comparons au spectre de réponse AFPS pour un site rocheux  $S_0$ . Une étude paramétrique nous a permis de montrer que le spectre  $S_0$  était le mieux approché sur l'intervalle des périodes [0.05, 2.5sec] par le spectre de Boore de magnitude  $M = 6.5$ . Pour l'ajustement nous avons utilisé une norme de la forme  $\|A(\omega)\| = \left[ \int_{\ln(0.05)}^{\ln(2.5)} |\ln(A(\omega))|^2 d\ln(\omega) \right]^{1/2}$ . La Figure (1.5) montre cependant la faible adéquation de ces deux spectres.

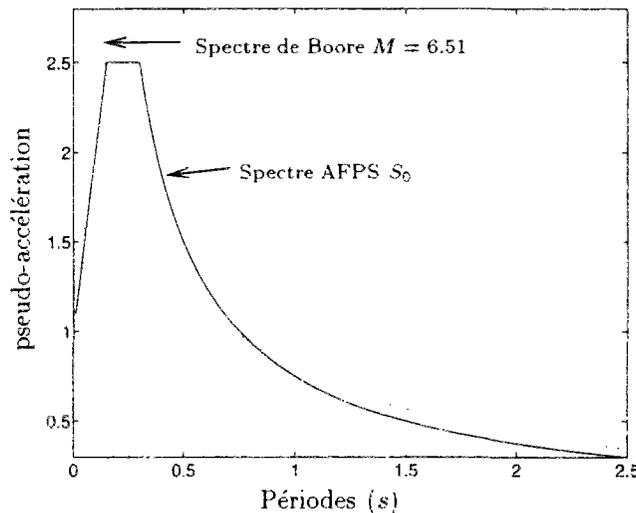


FIG. 1.5 - Comparaison des spectres de réponse de Boore et de l'AFPS ( $S_0$ )

### (b) Densité spectrale de puissance de Clough et Penzien

Nous avons également ajusté les paramètres ( $S_0, \omega_g, \zeta_g, \omega_f, \zeta_f$ ) de la densité spectrale de puissance de Clough et Penzien de façon à ce que les spectres de réponse déduits s'approchent au

mieux (au sens des moindres carrés) des spectres AFPS  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  avec 5% d'amortissement sur l'intervalle des périodes  $[0, 2.5\text{sec}]$ . La Figure 1.6 représente ces quatre spectres en traits pleins et leurs approximations en pointillés. Le Tableau 1.3 donne les valeurs des paramètres identifiés pour chacun des spectres.

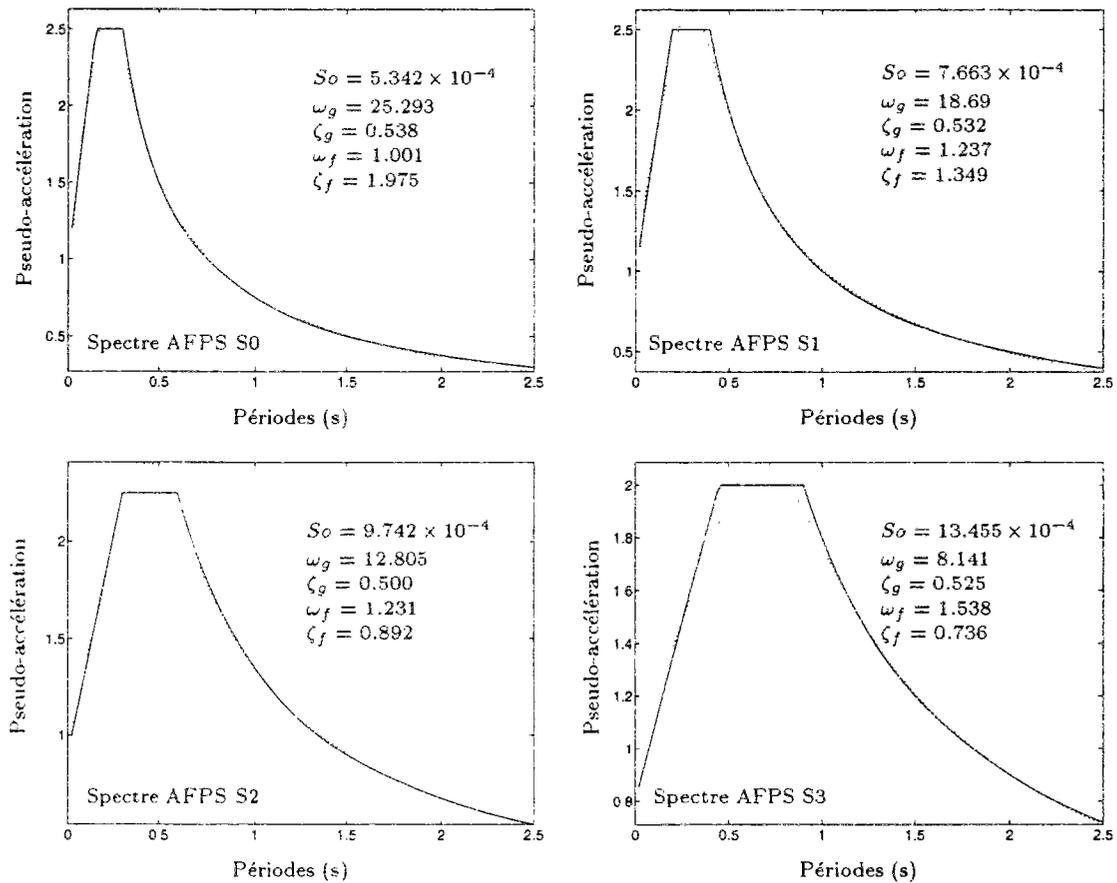


FIG. 1.6 - Approximations des spectres AFPS (traits pleins) par des spectres de réponse issus des densités spectrales de puissance de Clough et Penzien (traits pointillés)

Type de site	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$S_0$	$5.342 \times 10^{-4}$	$7.663 \times 10^{-4}$	$9.742 \times 10^{-4}$	$13.455 \times 10^{-4}$
$\omega_g$	25.293	18.693	12.805	8.141
$\zeta_g$	0.538	0.532	0.500	0.525
$\omega_f$	1.001	1.237	1.231	1.538
$\zeta_f$	1.975	1.349	0.892	0.736

TAB. 1.3 - Paramètres des densités spectrales de puissance de Clough et Penzien ajustant les spectres de réponse AFPS

### (c) Représentation numérique discrète de la densité spectrale de puissance

En dehors des modèles proposés, il est également possible de construire *ex-nihilo* une densité spectrale de puissance discrète, c'est à dire définie sur un ensemble fini de fréquences et

compatible avec un spectre d'oscillateurs donné  $D(\omega, \zeta)$ . Comme le suggèrent Der Kiureghian et Neuenhofer [45], il s'agit de résoudre l'équation en la densité spectrale de puissance à droite  $G_{\ddot{u}_g}(\omega)$ :

$$p(\omega_r, T) \left[ \int_0^{+\infty} G_{\ddot{u}_g}(\omega) |h_r(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2} = D(\omega_r, \zeta) \quad (1.20)$$

pour une plage fréquentielle dans laquelle se situent les pulsations propres  $\omega_r$  intéressant les structures en jeu.  $h_r(\omega)$  est la fonction de transfert  $[\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta\omega_r\omega]^{-1}$  et  $p(\omega_r, T)$  est le facteur de pic associé à la réponse de l'oscillateur de pulsation  $\omega_r$  et d'amortissement  $\zeta$  pour une durée d'excitation forte  $T$ . Dans la pratique, on résout (1.20) de manière itérative pour un nombre fini mais suffisamment grand de pulsations  $\omega_r$ :

1. On choisit une densité spectrale de puissance initiale  $G_{\ddot{u}_g}^{(0)}(\omega) = 2S_{\ddot{u}_g}^{(0)}(\omega)$ , par exemple un bruit blanc ou mieux, un double filtre de Clough et Penzien dont les paramètres sont choisis en conformité avec le spectre de réponse (Table 1.3).
2. Connaissant  $G_{\ddot{u}_g}^{(n)}$  on construit  $G_{\ddot{u}_g}^{(n+1)}$  en posant  $G_{\ddot{u}_g}^{(n+1)}(\omega) = f^{(n)}(\omega)G_{\ddot{u}_g}^{(n)}(\omega)$ , ce qui injecté dans (1.20) en supposant que le facteur de pic ne change que peu, donne:

$$p^{(n)}(\omega_r, T) \left[ \int_0^{+\infty} f^{(n)}(\omega) G_{\ddot{u}_g}^{(n)}(\omega) |h_r(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2} = D(\omega_r, \zeta) \quad (1.21)$$

En supposant  $f^{(n)}$  lentement variable, on approche (1.21) par

$$\begin{aligned} D(\omega_r, \zeta) &\approx p^{(n)}(\omega_r, T) \left[ f^{(n)}(\omega_r) \int_0^{+\infty} G_{\ddot{u}_g}^{(n)}(s) |h_r(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2} \\ &\approx p^{(n)}(\omega_r, T) \left[ f^{(n)}(\omega_r) \lambda_0^{(n)}(\omega_r) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (1.22)$$

et donc :

$$G_{\ddot{u}_g}^{(n+1)}(\omega_r) = \frac{G_{\ddot{u}_g}^{(n)}(\omega_r)}{\lambda_0^{(n)}(\omega_r)} \left[ \frac{D(\omega_r, \zeta)}{p^{(n)}(\omega_r, T)} \right]^2 \quad (1.23)$$

3. On calcule alors les moments spectraux de l'itération  $(n+1)$  par les formules

$$\lambda_m^{(n+1)} = \int_0^{+\infty} \omega^m G_{\ddot{u}_g}^{(n+1)}(\omega) d\omega \quad (1.24)$$

puis le facteur de pic  $p^{(n+1)}(\omega_r, T)$  conformément aux formules approchées de l'annexe A.3.

Un programme informatique a été réalisé par nos soins suivant cette procédure. Der Kiureghian et Neuenhofer [45] ont montré que quelques itérations seulement suffisent pour converger, d'autant plus que dans les applications des chapitres suivants, les densités spectrales de puissance seront essentiellement utilisées pour le calcul de coefficients de corrélation entre réponses modales, pour lesquels une approximation sommaire de la densité spectrale de puissance est suffisante. La Figure 1.7 montre la densité spectrale de puissance ainsi obtenue de façon à être conforme au spectre AFPS  $S_0$ . Sur le graphique en haut de cette figure, on a rappelé le spectre de réponse AFPS  $S_0$  en traits pleins et en pointillés le spectre de réponse obtenu en moyennant les spectres de réponse associés à 300 accélérogrammes issus de la densité spectrale de puissance, selon la procédure qui sera présentée au paragraphe 1.1.4. On constate une très bonne adéquation du spectre synthétique au spectre d'origine.

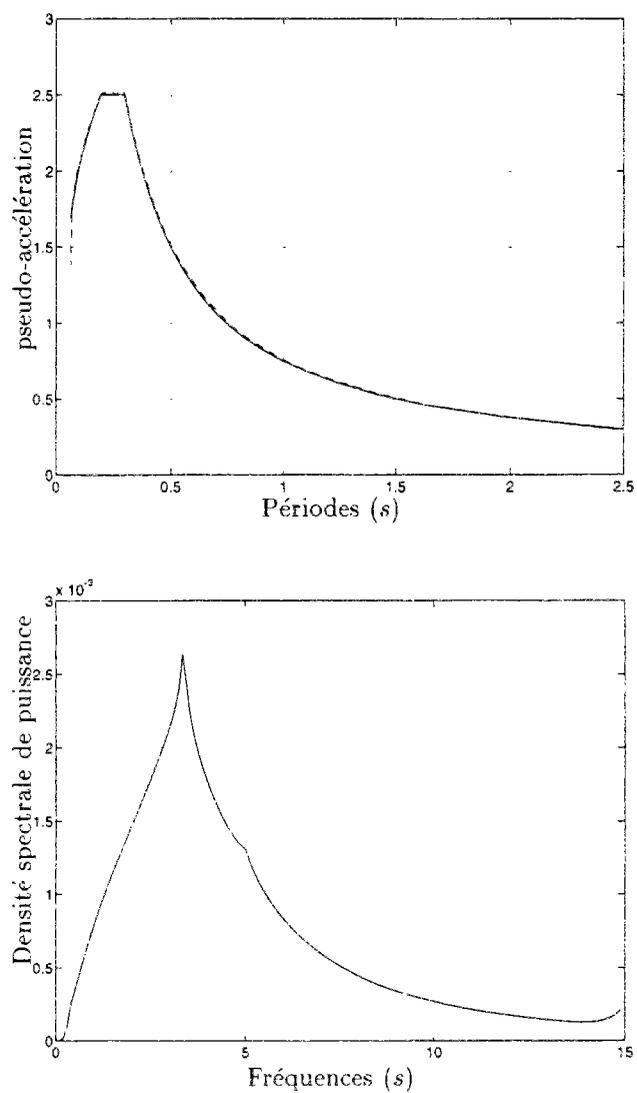


FIG. 1.7 - Spectre de réponse approché et densité et densité spectrale de puissance conforme au spectre AFPS  $S_0$

Dans un souci de commodité, Der Kiureghian et Neuenhofer [45] proposent même de se contenter de la première itération : pour une excitation à large bande et un faible amortissement, on montre que  $\lambda_0^{(0)}(\omega_r) = \pi G_{\ddot{u}_g}^{(0)}(\omega_r)/(2\zeta\omega_r^3)$ . L'équation (1.23) s'écrit alors, pour  $n = 0$  :

$$G_{\ddot{u}_g}^{(1)}(\omega_r) = \frac{2\zeta\omega_r^3}{\pi} \left[ \frac{D(\omega_r, \zeta)}{p^{(0)}(\omega_r, T)} \right]^2 \quad (1.25)$$

Si cette première approximation et les itérations suivantes sont satisfaisantes pour les moyennes et hautes fréquences, elles pèchent dans les basses fréquences par la violation de l'hypothèse de stationnarité du processus au regard de la durée d'excitation  $T$ . On y remédie souvent en remplaçant l'oscillateur dont la réponse est instationnaire par un oscillateur de réponse stationnaire, de même fréquence propre et d'amortissement supérieur [51]. En introduisant l'amortissement équivalent proposé par Rosenblueth et Elorduy [106]  $\zeta' = \zeta + 2/(\omega_r T)$  dans (1.25) Der Kiureghian et Neuenhofer obtiennent :

$$G_{\ddot{u}_g}^{(1)}(\omega_r) = \omega_r^2 \left( \frac{2\zeta\omega_r}{\pi} + \frac{4}{\pi T} \right) \left[ \frac{D(\omega_r, \zeta)}{p^{(0)}(\omega_r, T)} \right]^2 \quad (1.26)$$

Cette correction amplifie les basses fréquences de la densité spectrale de puissance pour tenir compte du caractère transitoire de la réponse. Toutefois, on souhaite également pouvoir définir la densité spectrale de puissance des déplacements du sol  $G_{u_g}(\omega) = G_{\ddot{u}_g}(\omega)/\omega^4$ . Comme le spectre de réponse en déplacement tend en théorie vers le déplacement maximal du sol pour les très basses fréquences ( $D(0, \zeta) = u_{g,max}$ ) et que le facteur de pic est borné, l'équation (1.26) prédit un comportement  $G_{u_g}(\omega) \sim \omega^{-2}$  aux très basses fréquences et une variance du déplacement du sol  $\sigma_{u_g}^2 = \int_0^\infty G_{u_g}(\omega) d\omega$  infinie ce qui n'a pas de sens physique. Der Kiureghian et Neuenhofer [45] proposent une seconde correction sous la forme

$$G_{\ddot{u}_g}(\omega_r) = \frac{\omega_r^{q+2}}{\omega_r^q + \omega_f^q} \left( \frac{2\zeta\omega_r}{\pi} + \frac{4}{\pi T} \right) \left( \frac{D(\omega_r, \zeta)}{p^{(0)}(\omega_r)} \right)^2 \quad \omega \geq 0 \quad (1.27)$$

dans laquelle  $q \geq 2$ . On pourra prendre en particulier  $q = 2, 3$  ou  $4$ , le choix n'affectant que peu l'allure de la densité spectrale de puissance pourvu que  $\omega_f$  soit choisi suffisamment petit. On ajuste ces deux paramètres de façon à satisfaire la relation sur la variance du déplacement du sol :

$$\int_0^{+\infty} \omega^{-4} G_{\ddot{u}_g}(\omega) d\omega = \left( \frac{u_{max}}{p_u} \right)^2 \quad (1.28)$$

Notons que la formule (1.27) fait intervenir le ratio d'amortissement  $\zeta$  des oscillateurs alors qu'il s'agit de la densité spectrale de puissance d'accélération du sol. L'expression en son ensemble serait indépendante de l'amortissement si les spectres d'oscillateurs étaient définis de sorte que la quantité  $(\zeta + 2/(\omega_r T))[D(\omega_r, \zeta)/p(\omega_r)]^2$  soit elle-même indépendante de  $\zeta$ . Ce n'est en général pas tout à fait le cas des spectres réglementaires, pour lesquels la dépendance en l'amortissement n'est défini que de façon très approximative. Pour notre utilisation, nous choisirons les spectres de réponse de base fournis en général pour un ratio d'amortissement critique de 5%.

#### 1.1.4 Signaux synthétiques conformes à une densité spectrale de puissance

Le calcul de la réponse d'une structure dans le domaine temporel nécessite la définition de signaux sismiques. Lorsqu'ils sont disponibles, on peut utiliser les accélérogrammes enregistrés lors de tremblements de terre sur des sites comparables au site étudié. Toutefois, ces

enregistrements sont en nombre limité et il faut en général avoir recours à des signaux synthétiques. Nous rappelons brièvement un moyen d'obtenir ces derniers, de façon à ce qu'ils soient conformes à une densité spectrale de puissance donnée. Une représentation traditionnelle d'un processus stationnaire gaussien de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance à droite  $G_{\ddot{u}_g}(\omega) = 2S_{\ddot{u}_g}(\omega)$  s'écrit sous la forme d'une somme de cosinus [104, 108]:

$$\ddot{U}_g(t) = \sum_{k=1}^N \sqrt{2G_{\ddot{u}_g}(\omega_k)\Delta\omega} \cos(\omega_k t - \Theta_k) \quad (1.29)$$

où les  $\Theta_k$  sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et uniformément distribuées sur  $[0, 2\pi[$  et  $\omega_k = (k-1/2)\Delta\omega$ . Les réalisations  $\ddot{u}_g(t)$  de  $\ddot{U}_g(t)$  sont  $2\pi/\Delta\omega$  périodiques et donc, en fonction de l'application il convient de choisir  $\Delta\omega$  suffisamment petit pour que  $2\pi/\Delta\omega$  soit largement plus grand que la durée d'excitation. En écrivant (1.29) sous la forme

$$\ddot{U}_g(t) = \text{Re}[F(t)] \quad (1.30)$$

avec

$$F(t) = \sum_{k=1}^N \left\{ \sqrt{2G_{\ddot{u}_g}(\omega_k)\Delta\omega} \exp(-i\Theta_k - i/2\Delta\omega) \right\} \exp(ik\Delta\omega t) \quad (1.31)$$

et en posant  $t_l = \frac{l}{N} \frac{2\pi}{\Delta\omega}$  pour  $l = 0, 1, \dots, N-1$ , on constate que la série formée par les  $F(t_l)$

$$F(t_l) = \sum_{k=1}^N \left\{ \sqrt{2G_{\ddot{u}_g}(\omega_k)\Delta\omega} \exp(-i\Theta_k - i/2\Delta\omega) \right\} \exp\left(i2\pi \frac{kl}{N}\right) \quad (1.32)$$

s'obtient à partir de la série des  $\left\{ \sqrt{2G_{\ddot{u}_g}(\omega_k)\Delta\omega} \exp(-i\Theta_k - i/2\Delta\omega) \right\}$  par transformée de Fourier discrète, pour laquelle on dispose d'algorithmes très performants (transformée de Fourier rapide). Notons toutefois que cette méthode suppose des pulsations  $\omega_k$  réparties à intervalles réguliers. Il est parfois souhaitable d'affiner le maillage fréquentiel dans certaines zones de changement de forme de la densité spectrale de puissance ou dans des zones intéressantes particulièrement la réponse des structures et de le rendre plus grossier ailleurs. L'équipartition des fréquences n'étant plus assurée, l'utilisation de la transformée de Fourier rapide n'est alors plus possible.

La formule (1.29) fournit un signal gaussien stationnaire. Les séismes sont bien entendu de durée limitée. Pour obtenir un signal sismique plus réaliste, nous multiplions par exemple les réalisations de (1.29) par la fenêtre temporelle de la Figure 1.8. On trouvera dans la littérature [37, 36] de nombreuses fenêtres plus élaborées. Durant la phase des mouvements forts, de durée  $T$ , les caractéristiques statistiques du signal sont indépendantes du temps.

Les signaux synthétiques ainsi obtenus sont les réalisations d'un processus aléatoire de densité spectrale de puissance à droite  $G_{\ddot{u}_g}(\omega)$ . Nous avons vu au paragraphe précédent que cette densité spectrale de puissance peut être choisie de façon à produire des processus conformes à des spectres de réponse d'oscillateurs, quoique cette conformité puisse n'être qu'approximative. Pour que le processus soit véritablement conforme à un spectre de réponse donné, on peut corriger individuellement ses réalisations de la façon suivante: on calcule le spectre de réponse  $\hat{D}_i(\omega, \zeta)$  de la réalisation  $\ddot{u}_g(t)$ ; on multiplie la transformée de Fourier  $\mathcal{F}[\ddot{u}_g](\omega)$  de  $\ddot{u}_g(t)$  par le rapport  $D(\omega, \zeta)/\hat{D}_i(\omega, \zeta)$  avant de revenir dans le domaine temporel par une transformée de Fourier inverse. Le programme que nous avons développé suivant cette méthode donne de très bons résultats, au sens où les spectres de réponse des signaux synthétiques sont en moyenne très proches des spectres de réponse cibles (*cf.* Figure 1.7).

Notons que pour conserver une certaine variabilité dans les accélérogrammes, il serait préférable d'effectuer un grand nombre de tirages conformes à une densité spectrale de puissance donnée selon la formule (1.29), sans les corriger individuellement, de calculer le spectre moyen  $\overline{D}(\omega, \zeta)$  de cet ensemble de tirages, puis seulement de corriger la densité spectrale de puissance en la multipliant par le rapport  $[D(\omega, \zeta)/\overline{D}(\omega, \zeta)]^2$ .

Notons enfin qu'il est également possible de construire des signaux aléatoires à partir de l'amplitude de la transformée de Fourier du signal, telle qu'elle est donnée par Boore [26], en imposant par exemple une condition de phase minimale sur le signal. On se référera pour cela à l'article de Hadj-Hamou et Goni [53].

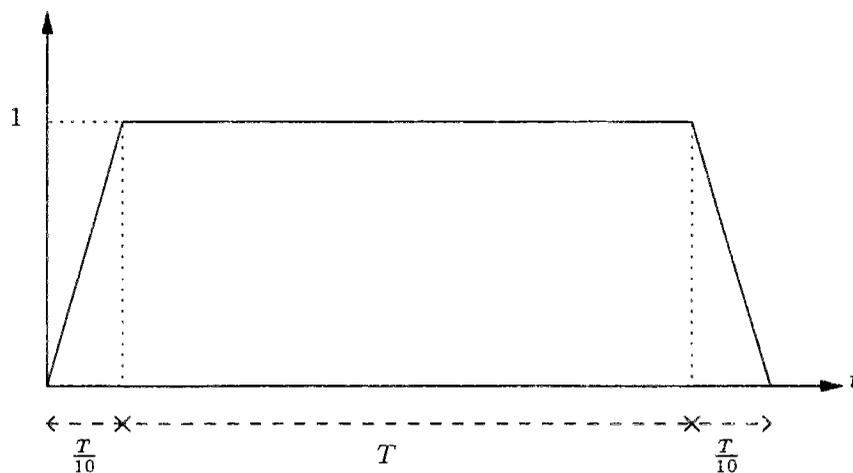


FIG. 1.8 - Fenêtre temporelle

## 1.2 Sources d'incohérence du mouvement sismique

Les enregistrements sismiques effectués sur des structures de grande taille, ainsi que sur des réseaux denses de capteurs au sol, aux Etats-Unis (El Centro), au Japon (Chiba) mais surtout à Taiwan (SMART1, LSST de Lotung) [120], indiquent que les ondes sismiques à la surface du sol varient de manière appréciable sur des distances de l'ordre des dimensions de certaines structures étendues (ponts, barrages). On qualifie ce phénomène de *variabilité spatiale des ondes sismiques* et on lui attribue généralement trois origines [46, 19]:

1. Le phénomène de passage d'onde traduisant le déphasage des ondes sismiques aux différents points d'appui de la structure.
2. La perte de cohérence ou encore le changement de forme du mouvement de sol entre les appuis de l'ouvrage du fait des multiples réflexions des ondes dans un sol hétérogène et de l'étendue de la source sismique.
3. Les effets de site sous chaque appui qui amplifient différemment les sollicitations sismiques et les déphasent.

On pourrait également citer la variabilité liée à l'atténuation géométrique des ondes. Der Kiureghian [44] montre que ce dernier effet est tout à fait négligeable pour les structures construites

par l'homme. Les mouvements différentiels de sol prennent leur source depuis l'origine du mouvement sismique sur la faille de rupture jusqu'aux sites où ils produisent leur effet. Sans prétendre être exhaustifs, nous rappelons les mécanismes essentiels qui sous-tendent les variations spatiales des ondes sismiques.

### 1.2.1 Mécanismes de rupture et étendue de la source

Comme le rappelle Bard [19], une première source très évidente de mouvements différentiels, résulte du déplacement relatif des deux lèvres de la faille. Si l'ouvrage traverse cette discontinuité géologique, ses appuis subiront nécessairement des mouvements différentiels importants durant le séisme qui persisteront après l'évènement sous forme de déplacements résiduels. Bard cite l'exemple du pont devant relier Rio et Antirion près de Patras en Grèce et qui franchit le golfe de Corinthe : les déplacements relatifs prévus pour un évènement de magnitude  $M = 6.5$  sont de l'ordre de  $10\text{cm}$ .

La rupture occasionnant le tremblement de terre ne se produit pas simultanément sur tous les points de la faille. Au contraire, elle se propage sur une longueur finie à une vitesse de l'ordre de la célérité des ondes de cisaillement. Il se produit donc en champ proche un effet de type Doppler qui rend la répartition en fréquence et en amplitude des mouvements de sols dépendante de l'angle formé par la ligne de rupture et le chemin suivi par l'onde de la source au site de l'ouvrage [25].

L'étendue de la source peut également contribuer à la variabilité spatiale des ondes sismiques en champ lointain. Comme le soulignent Sommerville *et al.* [112], les diverses ruptures le long de la faille engendrent des ondes qui suivent de multiples chemins et qui interfèrent différemment en des lieux distants à la surface. Les signaux sismiques aux appuis d'une structure étendue ont de ce fait des allures distinctes. On se référera à l'étude bibliographique de Zerva [134] pour les mécanismes de source et leur influence sur la corrélation spatiale des mouvements de sol, ainsi qu'à ses articles avec Shinozuka [139] et Hirata et Shinozuka [138] dans lesquels est présentée l'influence de la variabilité des paramètres contrôlant les mécanismes de rupture (amplitude de dislocation, temps de montée, vitesse de rupture et dimension de la faille) sur les mouvements différentiels de sol et leur contenu fréquentiel.

Toksöz *et al.* [116] analysent, par simulations numériques, différentes sources d'incohérence spatiale. Ainsi, une source en profondeur engendre des ondes de compression P et de cisaillement S qui se réfléchissent à de multiples reprises sur les interfaces de couches de sol. Les interférences de ces ondes à la surface expliquent en partie la perte de cohérence spatiale, notamment pour les mouvements verticaux. La cohérence est par contre très bonne lorsque la source se situe à faible profondeur (engendrant ainsi essentiellement des ondes de Rayleigh) ou de manière générale lorsque les ondes sont confinées au voisinage de la surface. La forme des ondes se conserve dans ce cas et seul un déphasage intervient entre les différentes stations. Les hétérogénéités de sol (et donc de vitesse de propagation) ou les variations d'épaisseur des couches de sol contribuent également aux phénomènes d'incohérence. Toksöz *et al.* [116] montrent que la perte de cohérence est essentiellement une fonction décroissante de la distance rapportée à la longueur d'onde. La décorrélation spatiale devient significative lorsque les stations sont espacées d'une distance de l'ordre de la longueur d'onde.

Sommerville *et al.* [112] insistent sur le fait que les modèles de variabilité spatiale prenant la forme de fonctions régulières de la fréquence et de la distance, rendent compte convenablement de la réalité lorsque le sol ne présente pas de fortes hétérogénéités latérales tel que des plis rocheux abruptes ou des cassures nettes. Dans ces derniers cas, la perte de cohérence est

chaotique, au sens où elle ne dépend plus régulièrement de la distance entre stations et de la fréquence. En outre, elle est en général plus élevée que dans le cas de bassins alluvionnaires peu accidentés.

### 1.2.2 Propagation des ondes sismiques

Les ondes sismiques se propagent à vitesse finie et de ce fait atteignent les fondations d'une structure étendue à des instants différents. Ce phénomène bien connu de passage d'onde est pourtant souvent difficile à quantifier. On s'accorde souvent à prendre en compte la célérité des ondes de volume se propageant dans le substratum rocheux. Les ondes se réfractent dans les couches supérieures presque verticalement si bien que le déphasage provient essentiellement de la propagation dans le rocher sous-jacent [63] comme le montre la Figure 1.9 dans le cas d'une onde plane. Bien entendu, si les couches supérieures sont profondes et que la rupture se produit en proximité de la surface, la célérité dominante des ondes de volumes peut être celle des couches supérieures. On introduit la notion de célérité apparente d'une onde plane, *i.e.* telle qu'elle est perçue par l'ouvrage, en fonction de l'angle d'incidence  $\theta$  :

$$V = \frac{c}{\sin\theta} \quad (1.33)$$

Cette vitesse apparente est minorée par la célérité des ondes dans le rocher et peut être infinie dans le cas d'une onde se propageant verticalement dans le substratum rocheux. L'angle d'incidence doit bien évidemment être mesuré dans le plan formé par la ligne des appuis de l'ouvrage et la direction de propagation de l'onde. Les Figures 1.9 et 1.10 illustrent le cas d'une onde se propageant respectivement dans un plan vertical et dans un plan horizontal.

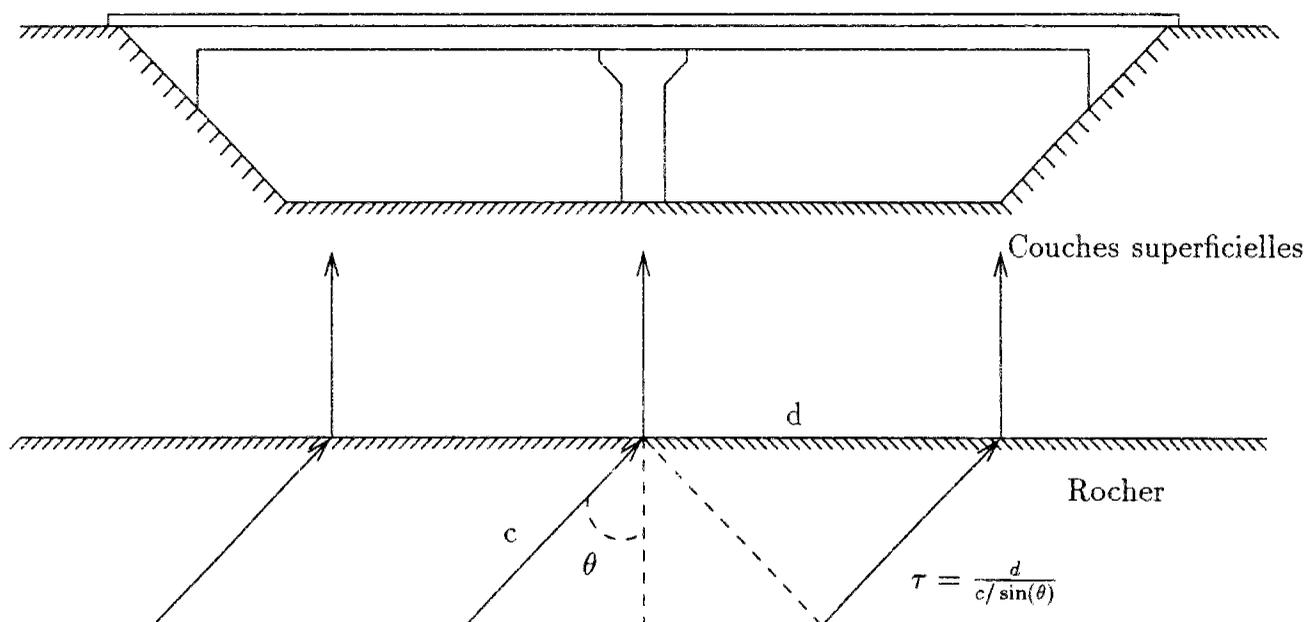


FIG. 1.9 - Propagation d'une onde plane dans le rocher et réfraction dans les couches supérieures de sol

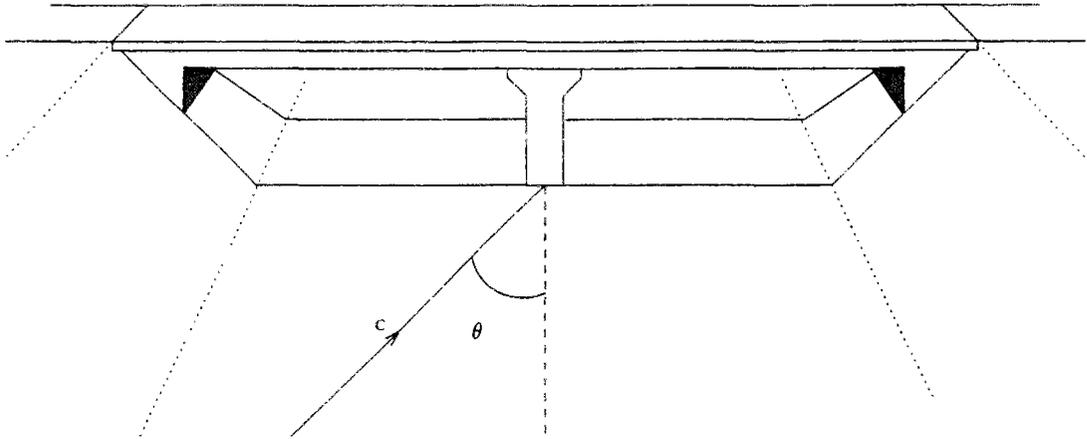


FIG. 1.10 - Propagation horizontale d'une onde plane

### 1.2.3 Effets de site

Si nous reprenons le schéma simplifié de propagation presque verticale dans les couches superficielles (Figure 1.9), nous pouvons identifier deux sources de variabilité spatiale liées au site, ou encore à l'épaisseur et à la nature des couches superficielles : d'une part, le mouvement du substratum rocheux est amplifié par la colonne de sol, ce qui est pris en compte dans les règlements par différentes classes de site; d'autre part, un déphasage dû à la différence de marche de l'onde dans les couches supérieures [44] s'ajoute au déphasage de l'onde déjà présent à l'interface avec le substratum rocheux et dont nous avons parlé au paragraphe précédent.

## 1.3 Modèles mathématiques de variabilité spatiale des ondes sismiques

Du fait de la complexité et des incertitudes régnant sur les mécanismes de rupture au niveau de la faille géologique ainsi que sur les chemins et modes de propagation des ondes sismiques dans les milieux hétérogènes, on est amené à décrire les variations des mouvements du sol de manière probabiliste. Les modèles mathématiques décrivant les phénomènes de variabilité spatiale des ondes sismiques abondent dans la littérature. Tous traduisent les grands modes de variations du mouvement de sol : en amplitude, forme et phase. On distingue deux grandes classes de modèles mathématiques : les uns décrivent le champ d'onde sismique par une densité spectrale en fréquence et en nombre d'onde, les autres le décrivent par une fonction de cohérence. On trouvera une étude bibliographique sur la détermination et l'usage des densités spectrales en fréquence et nombre d'onde dans [124]. Nous nous intéressons ici aux fonctions de cohérence qui nous seront utiles par la suite.

### 1.3.1 Fonctions de cohérence

À l'image des fonctions d'auto-corrélation et de densité spectrale ponctuelle, on définit pour des signaux sismiques stationnaires d'accélération du sol  $\ddot{u}_k$  et  $\ddot{u}_l$  dans une direction donnée, en deux points distincts  $k$  et  $l$ , une fonction de corrélation croisée (cf. annexe A.1) :

$$R_{\ddot{u}_k \ddot{u}_l}(\tau) = E[\ddot{u}_k(t)\ddot{u}_l(t + \tau)] \quad (1.34)$$

et par transformée de Fourier, une densité spectrale de puissance croisée :

$$S_{\ddot{u}_k \ddot{u}_l}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\ddot{u}_k \ddot{u}_l}(\tau) \exp^{-i\omega\tau} d\tau \quad (1.35)$$

D'une grande importance pratique, la fonction de cohérence se définit par :

$$\Gamma_{kl}(\omega) = \frac{S_{\ddot{u}_k \ddot{u}_l}(\omega)}{\sqrt{S_{\ddot{u}_k}(\omega)S_{\ddot{u}_l}(\omega)}} \quad (1.36)$$

C'est une fonction complexe dont l'amplitude  $|\Gamma_{kl}(\omega)|$  mesure la cohérence des signaux d'accélération. La phase de cette fonction quantifie le phénomène de propagation d'onde selon la ligne  $kl$  ainsi que le déphasage lié à l'effet de site.

Notons que la partie des effets de site portant sur l'amplitude du signal sismique est intégrée dans les densités spectrales de puissance ponctuelles  $S_{\ddot{u}_k}(\omega)$  et  $S_{\ddot{u}_l}(\omega)$ . Le déphasage résultant des différences de chemin parcouru dans les couches superficielles apparaît lui dans la phase de la fonction de cohérence  $\Gamma_{kl}(\omega)$ .

Les modèles de mouvements sismiques pour des reliefs homogènes (*i.e.* qui n'intègrent pas l'effet de site) font en général l'hypothèse simplificatrice que la fonction de cohérence se met sous la forme :

$$\Gamma_{kl}(\omega) = |\Gamma_{kl}(d_{kl}, \omega)| e^{-i\omega d_{kl}/V} \quad (1.37)$$

ce qui sous-entend que la célérité apparente des ondes  $V$  est indépendante de leur fréquence. Dans un cadre plus général, on pourrait remplacer la phase linéaire de la fonction de cohérence par une fonction quelconque de la distance entre les stations  $k$  et  $l$  et de la fréquence. L'approximation de la phase linéaire se justifie expérimentalement [60] pour les basses fréquences et des distances inférieures à ou de l'ordre de la longueur d'onde. Rappelons que l'on choisit plutôt pour  $V$  la vitesse apparente des ondes de cisaillement dans le substratum rocheux et non dans la couche superficielle de sol [63].

Notons qu'on peut également définir des fonctions d'auto-corrélation et des densités spectrales de puissance entre les mouvements du sol selon différentes directions. Quoique cela ne se justifie pas toujours, on fait souvent l'hypothèse que les accélérations du sols selon des directions orthogonales sont indépendantes. Les fonctions d'auto-corrélation et les densités spectrales de puissance correspondantes sont nulles et les effets sur les structures de ces actions se recombinent par sommation quadratique.

### 1.3.2 Modèles empiriques

Les modèles de fonctions de cohérence, abondent dans la littérature. On se pourra se référer à [5, 120, 19, 124] pour une bibliographie plus complète. Ces modèles s'appuient pour leur forme sur des considérations physiques, liées à la propagation d'ondes en milieu incertain et sont calés sur des enregistrements obtenus sur l'un des réseaux de capteurs dont il est fait mention plus haut. Les méthodes de calcul et les précautions numériques à prendre pour caler les modèles sont rappelées dans les références [6, 7]. Nous rappelons ici quelques uns de ces modèles, des plus simples aux plus compliqués. Tous proposent une décroissance exponentielle de la cohérence.

– Menke *et al.* [91] proposent un modèle simple, fonction de la distance et de la fréquence :

$$|\Gamma_{kl}(d_{kl}, \omega)| = \exp\left(-\alpha \frac{|\omega d_{kl}|}{2\pi}\right) \text{ avec } 4 \times 10^{-4} \text{ s/m} \leq \alpha \leq 7 \times 10^{-4} \text{ s/m} \quad (1.38)$$

Ce modèle a été calé sur les enregistrements d'un réseau linéaire du Nord-Est américain et dont l'espace entre capteurs varie selon une échelle quasi-logarithmique de  $7m$  à  $354m$  pour une longueur totale de  $734m$ . Le sol y est constitué d'un rocher sain.

- Nadim *et al.* [92] ainsi que Loh et Yeh [85] y intègre la célérité des ondes de cisaillement  $c_s$ :

$$|\Gamma_{kl}(d_{kl}, \omega)| = \exp\left(-\beta \frac{|\omega d_{kl}|}{2\pi c_s}\right) \text{ avec } \beta = 0.48 \quad (1.39)$$

Ce modèle a été calé sur des enregistrements du réseau de capteurs de SMART-1. Les distances entre les capteurs de SMART-1 varient de  $100m$  à  $2km$ .

- Sommerville *et al.* [112] ont utilisé une fonction de cohérence dépendant du carré de la fréquence pour étudier l'influence des conditions de site sur la perte de cohérence:

$$|\Gamma_{kl}(d_{kl}, \omega)| = \exp\left[-(a + b\omega^2)d_{kl}\right] \quad (1.40)$$

Les valeurs de  $a$  et  $b$  dépendent beaucoup des conditions de site. Un bassin alluvionnaire ne comportant que des couches horizontales régulières (Imperial Valley, Lotung) produit une perte de cohérence avec la distance bien moins important qu'une situation géologique moins régulière (Coalinga en Californie).

- Pour l'étude de fondations étendues (échelle décamétrique), Luco et Wong [87] proposent la formule:

$$|\Gamma_{kl}(d_{kl}, \omega)| = \exp\left[-\alpha^2 \omega^2 d_{kl}^2\right] \quad (1.41)$$

avec  $\alpha = 2$  à  $3 \times 10^{-4} s/m$ . A l'usage, cette formule présente l'avantage de la simplicité et de bonnes propriétés de dérivabilité. Nous la retiendrons par la suite dans les calculs de structures, pour ces raisons. Ce modèle a été proposé pour la première fois par Uscinski [118] comme solution du problème de propagation d'onde dans un milieu aléatoire.

- Loh [86] propose pour le site de SMART-1 une décroissance exponentielle d'une fonction affine de la fréquence:

$$|\Gamma_{kl}(d_{kl}, \omega)| = \exp\left[-(a + b|\omega|)d_{kl}\right] \quad (1.42)$$

- A partir de données obtenues sur les capteurs proches de SMART-1 (distances comprises entre  $100$  et  $400m$ ), Oliveira *et al.* [97] proposent un modèle de perte de cohérence anisotrope:

$$|\Gamma_{kl}(d_{kl}, \omega)| = \exp(-\beta^L d_{kl}^L - \beta^T d_{kl}^T) \exp\left[-(\alpha^L \sqrt{d_{kl}^L} + \alpha^T \sqrt{d_{kl}^T}) \frac{|\omega|}{2\pi}\right] \quad (1.43)$$

dans lequel  $d_{kl}^L$  et  $d_{kl}^T$  désignent respectivement les projections sur l'axe longitudinal et l'axe transverse de la distance de séparation entre appuis.  $\alpha^L$  et  $\alpha^T$  sont des fonctions de la fréquence  $\alpha^{L,T} = a^{L,T}/\omega + b^{L,T}\omega + c^{L,T}$

- S'appuyant sur des données de SMART-1, Harichadran et Vanmarcke [61] proposent un modèle plus sophistiqué:

$$|\Gamma_{kl}(d_{kl}, \omega)| = A \exp\left[-\frac{2d_{kl}}{\alpha\Theta(\omega)}(1 - A + \alpha A)\right] + (1 - A) \exp\left[-\frac{2d_{kl}}{\Theta(\omega)}(1 - A + \alpha A)\right] \quad (1.44)$$

$$\Theta(\omega) = k \left[ 1 + \left| \frac{\omega}{2\pi f_0} \right|^b \right]^{-1/2} \quad (1.45)$$

avec  $A = 0.736$ ,  $\alpha = 0.147$ ,  $k = 5210\text{m}$ ,  $f_0 = 1.09\text{Hz}$ ,  $b = 2.78$ .

Ces modèles ont été calés sur des enregistrements des réseaux d'échelles différentes (SMART-1 : échelle hectométrique, LSST de Lotung : échelle décarnétrique). Toutefois Abrahamson *et al.* [8] ont montré que les fonctions de cohérences mesurées sur SMART-1 et sur le réseau dense LSST (situé à l'intérieur de SMART-1) se raccordent continûment. Harichandran [60] donne quelques précautions à suivre pour traiter convenablement les données expérimentales. Comme le souligne Bard [19], la multiplicité des modèles est un bon indicateur de la rareté des données expérimentales sur le problème et de la dispersion des données d'un séisme à l'autre et d'un site à l'autre. Zerva [136] compare les effets relatifs des modèles de Luco et Wong [87] et de Harichandran et Vanmarcke [61] sur des conduites enterrées et constate que le modèle de Harichandran et Vanmarcke produit des déplacements différentiels plus importants dans les basses fréquences et moins important dans les hautes fréquences que le modèle de Luco et Wong.

Notons que pour de petites valeurs de la distance  $d_{kl}$ , ces modèles permettent de construire des densités spectrales de puissance et des spectres de réponse pour les mouvements de torsion du sol [79, 80].

On trouve également dans la littérature, des modèles ne reposant que sur la géologie du site. Par exemple, Zerva et Shinozuka [139] s'intéressent en détail aux mécanismes de rupture le long des failles et à leurs effets sur la variabilité spatiale des ondes sismiques. Pour cela, ils se dotent d'une densité spectrale de puissance des mouvements de sols provoqués par une source migrant le long de la faille. Les mouvements induits à la surface sont ensuite filtrés par des fonctions de transfert approchées reliant les mouvements à la source et à la surface. Ces fonctions de transfert sont en fait des combinaisons linéaires de filtres de type Kanai-Tajimi pour lesquels les facteurs de participation, les fréquences et amortissements propres sont identifiés de façon à approcher au sens des moindres carrés, la fonction de transfert exacte. Cette méthode qui a priori ne nécessite aucun calage sur des enregistrements expérimentaux, requiert toutefois une bonne connaissance de la géologie de la région et des mécanismes possibles de rupture.

En partant de notions élémentaires de vibrations aléatoires et de quelques hypothèses sur les modes de propagation des ondes (propagation verticale dans les couches supérieures de sol reposant sur le rocher), Der Kiureghian [44] construit un modèle général de fonction de cohérence :

$$\Gamma_{kl}(d_{kl}, \omega) = \cos[\beta(d_{kl}, \omega)] \exp \left[ -\frac{1}{2} \alpha^2(d_{kl}, \omega) \right] \exp \{ i [\theta_{kl}^{\text{passage d'onde}}(d_{kl}, \omega) + \theta_{kl}^{\text{effet de site}}(\omega)] \} \quad (1.46)$$

qui intègre la perte de cohérence liée à l'étendue de la source et aux multiples réflexions dans un milieu hétérogène dans le produit des deux premiers termes. Il impose aux fonctions  $\alpha(d_{kl}, \omega)$  et  $\beta(d_{kl}, \omega)$  d'être continues et de satisfaire les limites suivantes :

$$\lim_{d \rightarrow 0} \alpha(d, \omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha(d, \omega) = \lim_{d \rightarrow 0} \beta(d, \omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \beta(d, \omega) = 0 \quad (1.47)$$

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \alpha(d, \omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha(d, \omega) = \infty \quad \lim_{d \rightarrow \infty} \beta(d, \omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \beta(d, \omega) = \frac{\pi}{2} \quad (1.48)$$

On constate que les modèles proposés antérieurement entrent plus ou moins dans le cadre exposé par Der Kiureghian. Le modèle de Luco et Wong [87] s'en approche le plus avec

$\alpha(d, \omega) = \alpha d \omega / \sqrt{2}$  (le  $\alpha$  du membre de droite étant une constante) et  $\beta = 0$ . Les limites de  $\beta$  en l'infini (1.48) ne sont pas respectées, mais à l'échelle des structures humaines et des fréquences du spectre sismique, cela n'a pas grande importance. La phase de la fonction de cohérence provient de deux termes :

- L'un traduisant le phénomène de propagation d'onde dans le substratum rocheux :

$$\theta_{kl}^{\text{passage d'onde}}(d_{kl}, \omega) = -i \frac{\omega d_{kl}}{V(\omega)} \quad (1.49)$$

où la célérité apparente des ondes  $V(\omega)$  dépend de la fréquence ou non, selon que le milieu est dispersif ou non.

- L'autre terme de la phase traduit l'effet de site: si  $H_k(\omega)$  et  $H_l(\omega)$  sont les fonctions de transfert des colonnes de sol du rocher jusqu'à la surface aux sites  $k$  et  $l$ , compte tenu de l'hypothèse de propagation verticale des ondes dans ces couches, le déphasage correspondant s'écrit :

$$\theta_{kl}^{\text{effet de site}}(\omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Im} [H_k(-\omega)H_l(\omega)]}{\text{Re} [H_k(-\omega)H_l(\omega)]} \quad (1.50)$$

L'effet de site ne modifie pas l'amplitude de la fonction de cohérence (il modifie toutefois l'amplitude de la densité spectrale de puissance croisée par l'intermédiaire des densités spectrales de puissance ponctuelles). Le déphasage ne dépend pas de la distance qui sépare les deux sites mais seulement de la différence de nature de sol au droit des appuis. En utilisant des fonctions de transfert

$$H_k(\omega) = \frac{\omega_k^2 + 2i\zeta_k\omega_k\omega}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\zeta_k\omega_k\omega} \quad (1.51)$$

associées aux filtres de Kanai-Tajmi pour sols durs ( $\omega_k = 6\pi$ ,  $\zeta_k = 0.6$ ), moyen ( $\omega_k = 3\pi$ ,  $\zeta_k = 0.4$ ) et souples ( $\omega_k = \pi$ ,  $\zeta_k = 0.2$ ), Der Kiureghian montre que le déphasage dû aux effets de site (Figure 1.11) est plus important que celui lié au passage de l'onde pour des structures dont les fréquences propres appartiennent à l'intervalle  $0.5 - 1.5 Hz$ . Les ponts et viaducs de travées courtes à moyennes, situés dans des zones géologiques rapidement variables sont donc particulièrement sensibles à cet effet. Pour des ouvrages beaucoup plus souples, tels que les ponts suspendus ou haubanés, le phénomène de passage d'onde devient prédominant sur l'effet de site (en ce qui concerne la fonction de cohérence).

À titre indicatif, nous donnons sur la même figure, les déphasages issus des fonctions de transfert

$$H(\omega) = \frac{\omega_g^2 + 2i\zeta_g\omega_g\omega}{\omega_g^2 - \omega^2 + 2i\zeta_g\omega_g\omega} \left| \frac{\omega^2}{\omega_f^2 - \omega^2 + 2i\zeta_f\omega_f\omega} \right| \quad (1.52)$$

associées au double filtre de Clough et Penzien pour sols durs, moyens et souples selon les coefficients indiquées au Tableau 1.2. Nous distinguons, dans cette fonction de transfert, le premier terme lié à la propagation des ondes dans les couches supérieures de sol, porteur de la phase et le second terme qui ne reflète qu'un filtre passe haut, sans rapport avec le déphasage de l'onde spécifique au site et qui de ce fait apparaît en valeur absolue. Les filtres de Kanai-Tajimi et de Clough et Penzien produisent sensiblement les mêmes déphasages avec les valeurs adoptées de paramètres pour sols durs, moyens et souples.

La Figure 1.12 reproduit ces mêmes déphasages pour les doubles filtres de Clough et Penzien conformes aux sites AFPS (coefficients du Tableau 1.3). On observe un moindre déphasage dans

cette représentation. Encore une fois, les données expérimentales ne sont pas légion. Il faudrait disposer, dans le meilleur des cas, d'enregistrements sur la hauteur d'une même colonne de sol.

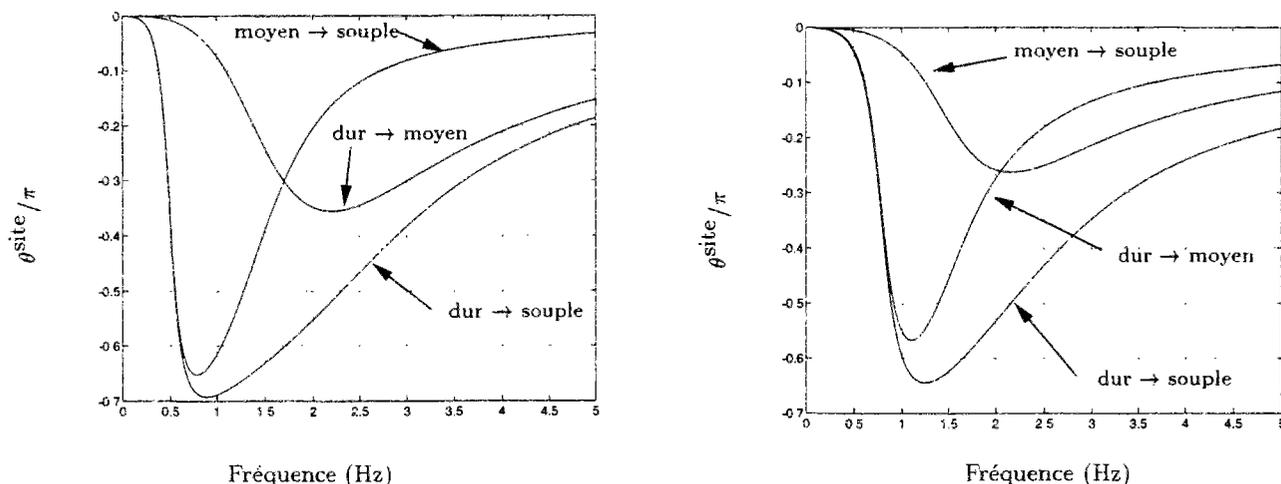


FIG. 1.11 - Déphasage dû à l'effet de site pour des colonnes de sol satisfaisant aux modèles de Kanai-Tajimi (gauche) et Clough et Penzien (droite) pour sols durs, moyens et souples

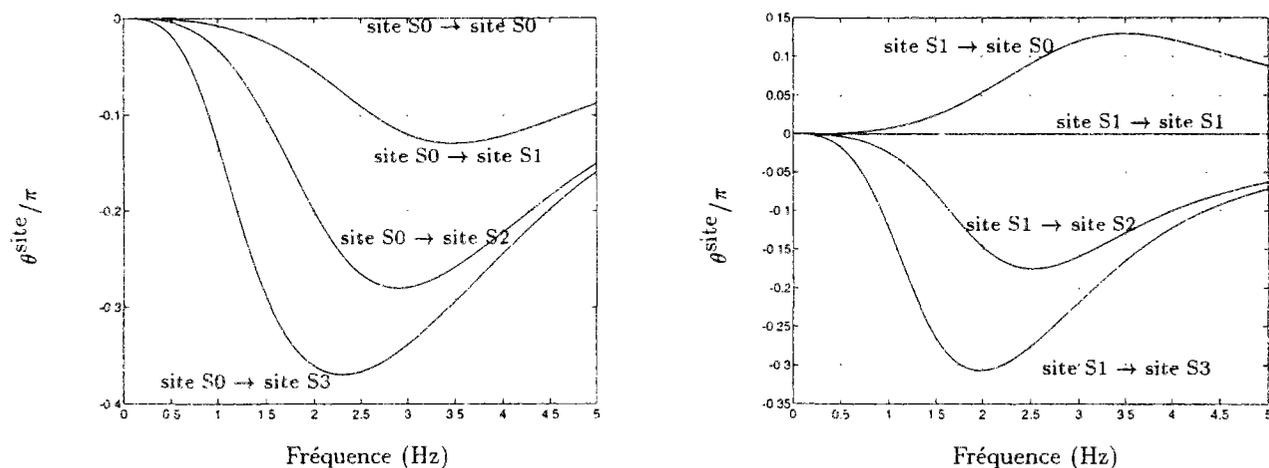


FIG. 1.12 - Déphasage dû à l'effet de site pour des colonnes de sol satisfaisant aux modèles de Clough et Penzien compatibles avec les spectres de réponse AFPS

A défaut de disposer d'un modèle de variabilité spatiale meilleur que les autres, nous adoptons dans la suite le modèle de Luco et Wong pour la perte de cohérence. Ce modèle présente l'avantage de la simplicité et des bonnes propriétés de dérivabilité qui nous seront utiles dans nos développements.

## 1.4 Génération de signaux aléatoires partiellement corrélés

On dispose d'enregistrements d'un même évènement sismique relevés par un réseau spatial de capteurs (SMART-1, LSST à Lotung, *etc.*). Ils sont bien entendu spécifiques d'un site et des caractéristiques de l'évènement telles que sa magnitude, la direction de propagation et le type d'ondes parvenant à l'ouvrage. Ces enregistrements sont encore moins nombreux que les enregistrements ponctuels. Dans la pratique, on a recours à des signaux synthétiques dont nous rappelons la construction.

Shinozuka [108] propose une méthode de construction de processus aléatoires gaussiens partiellement corrélés à partir de la matrice des densités spectrales de puissance croisées :

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega) & S_{12}(\omega) & \cdots & S_{1n}(\omega) \\ S_{21}(\omega) & S_{22}(\omega) & \cdots & S_{2n}(\omega) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1}(\omega) & S_{n2}(\omega) & \cdots & S_{nn}(\omega) \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

Hao *et al.* [59] proposent une méthode similaire dans le cas particulier où la densité spectrale de puissance ponctuelle est uniforme en espace et vaut  $S_0(\omega)$ . La matrice des densités spectrales de puissance croisées s'écrit alors en fonction de la matrice des fonctions de cohérence  $\Gamma_{ij}(\omega)$  :

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}(\omega) & \Gamma_{12}(\omega) & \cdots & \Gamma_{1n}(\omega) \\ \Gamma_{21}(\omega) & \Gamma_{22}(\omega) & \cdots & \Gamma_{2n}(\omega) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma_{n1}(\omega) & \Gamma_{n2}(\omega) & \cdots & \Gamma_{nn}(\omega) \end{bmatrix} S_0(\omega) \quad (1.54)$$

On définit ces matrices pour une suite discrète de fréquences  $-\omega_N \leq \omega_k \leq \omega_N$ . Les séries temporelles sont alors définies comme suit pour  $1 \leq i \leq n$  :

$$u_i(t) = \sum_{m=1}^i \sum_{k=1}^N A_{im}(\omega_k) \cos[\omega_k t + \beta_{im}(\omega_k) + \phi_{mk}(\omega_k)] \quad (1.55)$$

Dans (1.55), les amplitudes  $A_{im}(\omega_k)$  et les phases  $\beta_{im}(\omega_k)$  sont déterminées de façon à satisfaire (1.54);  $\phi_{mk}(\omega_k)$  est une phase aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle  $[0, 2\pi[$ . Notons que  $\phi_{mk}$  et  $\phi_{rs}$  sont statistiquement indépendants sauf si  $m = r$  et  $k = s$ . On montre alors [59] que dans le cadre défini par Hao *et al.* il suffit de choisir pour  $0 \leq \omega_k \leq \omega_N$  :

$$\begin{aligned} A_{im}(\omega_k) &= \sqrt{4S_0(\omega_k)\Delta\omega_k} |l_{im}(\omega_k)| \\ \beta_{im}(\omega_k) &= \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}[l_{im}(\omega_k)]}{\text{Re}[l_{im}(\omega_k)]} \right) \end{aligned}$$

où  $\Delta\omega_k$  désigne la largeur de la bande en fréquence centrée sur  $\omega_k$  et les  $l_{im}$  sont les éléments de la matrice triangulaire inférieure  $\mathbf{L}$ , décomposée de Cholesky de la matrice de cohérence (hermitienne), de sorte que

$$\mathbf{S}(\omega_k) = \mathbf{L}(\omega_k)\mathbf{L}^H(\omega_k)S_0(\omega_k)$$

où  $\mathbf{L}^H$  est la matrice hermitienne de  $\mathbf{L}$ . Rappelons à toutes fins utiles le calcul de la décomposée de Cholesky : pour  $j = 1, 2, \dots, n$

$$l_{jj}(\omega) = \left[ \Gamma_{jj}(\omega) - \sum_{i=1}^{j-1} l_{ji}(\omega)\overline{l_{ji}(\omega)} \right]^{1/2} \quad (1.56)$$

$$l_{ij}(\omega) = \frac{\Gamma_{ij}(\omega) - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}(\omega)\overline{l_{jk}(\omega)}}{l_{jj}(\omega)} \quad i = j + 1, \dots, n \quad (1.57)$$

Dans le cadre plus général d'une densité spectrale de puissance ponctuelle variable dans l'espace (utile pour tenir compte des effets de site), on procède de la même façon en remplaçant les fonctions de cohérence  $\Gamma_{kl}$  par les densités spectrales de puissance croisées  $S_{kl}$  et  $S_0$  par 1. On trouvera également une méthode de simulation voisine s'appuyant sur une densité spectrale de puissance en fréquence et nombre d'onde dans [137].

Les signaux (1.55) sont stationnaires. Pour tenir compte de la durée limitée des signaux réels, nous les multiplions par la fenêtre temporelle de la Figure 1.8.

Si les densités spectrales de puissance ponctuelles utilisées sont conformes à des spectres de réponse d'oscillateurs, les signaux temporels ainsi produits le sont aussi. De la même façon que pour les signaux ponctuels, on peut affiner la conformité de la manière suivante : on calcule le spectre de réponse  $\hat{D}_i(\omega, \zeta)$  de la série temporelle  $u_i(t)$ , puis on multiplie la transformée de Fourier  $\mathcal{F}\{u_i\}(\omega)$  de la série  $u_i(t)$  par le rapport  $D(\omega, \zeta)/\hat{D}_i(\omega, \zeta)$  avant de revenir dans le domaine temporel par une transformée de Fourier inverse. Les fonctions de cohérence ne sont pas modifiées par cette opération si aucun lissage n'est appliqué lors du calcul de la fonction de cohérence [59].

Des programmes informatiques ont été développés selon cette procédure et celle exposée au paragraphe 1.1.4 de façon à produire commodément des signaux sismiques variables ou non dans l'espace.



## Chapitre 2

# Influence de la variabilité spatiale des ondes sismiques sur les ouvrages d'art<sup>1</sup>

La réponse et la sensibilité des ponts et plus généralement des structures étendues à des mouvements sismiques variables en espace a fait l'objet de nombreuses études récentes portant sur des structures allant des simples poutres aux ouvrages d'art.

Il en ressort que l'influence des mouvements asynchrones du sol dépend beaucoup de la rigidité et du degré d'hyperstaticité de la structure pour les mouvements de sol considérés. Ainsi, dans le cas de structures isostatiques telles que des poutres simplement appuyées, la variabilité spatiale des ondes sismiques diminue les efforts intérieurs [62, 23]. La situation peut être différente dans le cas de structures hyperstatiques telles que des portiques [129, 107, 133] ou des arches [58] subissant des accélérations de sol dans la direction de leur ligne d'appui ou encore des poutres multi-supportées excitées transversalement [63, 46].

Du fait de leur importance économique, des grands ouvrages tels que des ponts suspendus ou haubanés ont fait l'objet d'études spécifiques [2, 1, 3, 4, 49, 65]. De part leur grande taille, ils sont largement exposés aux effets des mouvements différentiels du sol. Ils présentent une sensibilité parfois compliquée du fait du couplage par les câbles entre mouvements longitudinaux et verticaux.

Nous proposons dans ce chapitre des techniques permettant de mener à bien, rapidement et avec des outils classiques d'analyse vibratoire, une étude de sensibilité des ponts à la variabilité spatiale des ondes sismiques.

Pour décrire le comportement des ouvrages étendus, les auteurs s'accordent à utiliser un ensemble de modes propres de la structure encastree dans un sol rigide, communément calculés dans les bureaux d'études, en y adjoignant des *déformées pseudo-statiques* ou relèvements, qui sont les réponses statiques de la structure lorsqu'on lui impose un déplacement unitaire successivement à chacune de ses fondations (ponctuelles) dans une direction donnée, longitudinale, transversale ou verticale.

Nous étudions la réponse des structures étendues dans le cadre probabiliste présenté au chapitre précédent, en nous appuyant sur les règles de recombinaison qui en sont issues [21, 45, 22, 47, 23], en particulier celle développée par Der Kiureghian et Neuenhofer [47] dite *Multiple Support Response Spectrum* ou *MSRS*. Elle s'appuie sur des spectres d'oscillateurs linéaires et sur un modèle de variabilité spatiale qui se présente sous la forme d'une fonction de cohérence. Dans ce chapitre, les structures ont un comportement linéaire élastique.

---

1. Une version de ce chapitre est paru dans *Earthquake Engineering and Structural Engineering* [73]

Nous proposons une formule approchée permettant de prendre en compte les petites variations spatiales des ondes sismiques. En découlent en particulier des résultats sur la participation marginale des modes propres encastrés et des termes pseudo-statiques. Nous montrons que la sensibilité de l'ouvrage est le bilan d'une augmentation de la réponse pseudo-statique et, en général, d'une diminution de la réponse modale.

Il apparaît également, lorsqu'on introduit une possible décorrélation des mouvements de sol, qu'un plus grand nombre de modes est nécessaire pour décrire convenablement la réponse de la structure. Nous introduisons à cet effet un critère de choix prolongeant le concept de masse modale sismique utilisé couramment.

Des exemples de calculs de ponts viennent étayer ces résultats et donnent les limites de la formule approchée. Cette dernière ne convient plus pour des cas de forte variabilité spatiale. Il est alors nécessaire de recourir à la règle de recombinaison MSRS. Si en outre les paramètres du modèle de variabilité spatiale (vitesse apparente des ondes, perte de cohérence) sont incertains, comme c'est souvent le cas, on cherche à se placer du côté de la sécurité en calculant la réponse maximale de la structure lorsque ces paramètres évoluent dans un domaine physiquement acceptable. On propose un algorithme de recherche de ce maximum, s'appuyant sur les dérivées premières et secondes de la réponse par rapport aux paramètres du modèle de variabilité spatiale. Ces dérivées se calculent de façon concomitante à la réponse, avec un faible surcoût.

## 2.1 Spectre de réponse pour structures multi-supportées

Nous rappelons ici la règle de recombinaison pour structures multi-supportées dite MSRS (*Multiple Support Response Spectrum*), développée par Der Kiureghian et Neuenhofer [47]. Quoique que la règle s'applique indifféremment à une formulation continue ou discrétisée du problème mécanique, nous adoptons directement une description par éléments finis, dont l'usage est répandu dans les bureaux d'études. La règle MSRS s'établit dans le cadre des hypothèses suivantes :

- La structure a un comportement linéaire élastique.
- On néglige les rotations ponctuelles éventuelles du sol en champ libre : le mouvement à la surface du sol en champ libre ne comporte que des déplacements de translation.
- Le déplacement de translation du sol en champ libre est imposé aux fondations de l'ouvrage.
- Chaque fondation est un corps rigide, ponctuel au regard des longueurs d'onde sismiques.

### 2.1.1 Analyse temporelle

Dans l'approche par éléments finis, les supports géométriques (noeuds) des éléments se répartissent en deux classes correspondant d'une part à la structure et d'autre part aux fondations comme l'indique la Figure 2.1. On distingue les  $N$  degrés de liberté de la superstructure, dont les déplacements sont contenus dans le vecteur  $\mathbf{Y}$  et les  $NS$  degrés de liberté de déplacement en translation des fondations  $\mathbf{Z}$ . Pour ce système discret, l'équation de la dynamique s'écrit matriciellement [37] :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{M}_{sf} \\ \mathbf{M}_{sf}^T & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{Y}} \\ \ddot{\mathbf{Z}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{C}_{sf} \\ \mathbf{C}_{sf}^T & \mathbf{C}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{Y}} \\ \dot{\mathbf{Z}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{K}_{sf} \\ \mathbf{K}_{sf}^T & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

dans laquelle  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  désignent respectivement les matrices de masse, d'amortissement

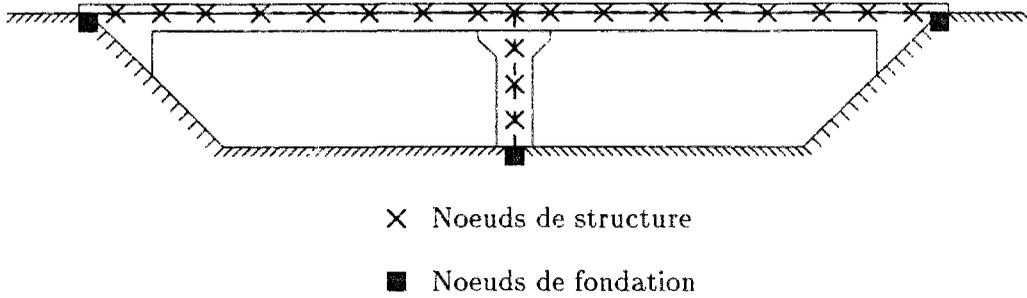


FIG. 2.1 - Répartition des noeuds

visqueux et de rigidité. Les indices  $s$ ,  $f$  et  $sf$  sont relatifs aux termes de la superstructure, aux fondations (ou appuis) et aux termes de couplage. L'analyse sismique, telle qu'elle est pratiquée couramment dans les bureaux d'études, commence par une décomposition de la réponse sur la base des modes propres de la superstructure sur sol rigide. Nous conservons cette approche, mais pour tenir compte de possibles déplacements différentiels des fondations, nous introduisons le déplacement *pseudo-statique*  $\mathbf{S}$  de la structure en résolvant

$$\mathbf{K}_s \mathbf{S} = -\mathbf{K}_{sf} \mathbf{Z} \quad (2.2)$$

$\mathbf{S}$  est le déplacement obtenu en imposant statiquement aux fondations le déplacement  $\mathbf{Z}$ . Il s'écrit encore

$$\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{Z}$$

en introduisant la *matrice d'influence*

$$\tilde{\mathbf{R}} = -\mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{K}_{sf}$$

On décompose alors le déplacement de la superstructure en son déplacement pseudo-statique et un déplacement  $\mathbf{X}$  ayant des conditions aux limites bloquées en translation au droit des fondations. Si en outre, les rotations de la structure sont bloquées aux appuis, alors elles le sont aussi pour le déplacement  $\mathbf{X}$ .

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S} + \mathbf{X} \quad (2.3)$$

Une fois l'équation (2.3) introduite dans la première ligne de (2.1), on obtient :

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_s \mathbf{X} = -(\mathbf{M}_{sf} + \mathbf{M}_s \tilde{\mathbf{R}}) \ddot{\mathbf{Z}} - (\mathbf{C}_{sf} + \mathbf{C}_s \tilde{\mathbf{R}}) \dot{\mathbf{Z}} \quad (2.4)$$

Nous simplifions le membre de droite de cette équation en supposant tout d'abord que les termes de couplage massique  $\mathbf{M}_{sf}$ , qui n'affectent que les degrés de liberté proches des appuis, sont très inférieurs aux termes  $\mathbf{M}_s \tilde{\mathbf{R}}$  répartis sur les degrés de liberté de toute la structure. En outre, nous supposons également que les termes d'amortissement visqueux du membre de droite sont négligeables devant les forces d'inertie. Berrah *et al.* [22] justifient cette hypothèse en remarquant que pour un mouvement de corps rigide de la structure  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{rig}$  et  $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{rig}$ , les matrices de rigidité et d'amortissement vérifient les relations :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{K}_{sf} \\ \mathbf{K}_{sf}^T & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Y}_{rig} \\ \mathbf{Z}_{rig} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{C}_{sf} \\ \mathbf{C}_{sf}^T & \mathbf{C}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{Y}}_{rig} \\ \dot{\mathbf{Z}}_{rig} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

De la première équation nous déduisons que  $\mathbf{Y}_{rig} = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{Z}_{rig}$  et donc  $\dot{\mathbf{Y}}_{rig} = \tilde{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{Z}}_{rig}$ , ce qui introduit dans la deuxième donne

$$0 = \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{Y}}_{rig} + \mathbf{C}_{sf} \dot{\mathbf{Z}}_{rig} = (\mathbf{C}_s \tilde{\mathbf{R}} + \mathbf{C}_{sf}) \dot{\mathbf{Z}}_{rig} \quad (2.6)$$

Le terme dû aux amortissements dans le membre de droite de (2.4) est donc rigoureusement nul pour des déplacements de corps rigide de la structure alors que le terme d'inertie ne l'est pas. Dans le cas d'un mouvement quelconque, nous négligeons encore ces termes d'amortissement, l'équation (2.4) se réduisant alors à

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_s \mathbf{X} = -\mathbf{M}_s \tilde{\mathbf{R}} \ddot{\mathbf{Z}} \quad (2.7)$$

Grâce à la décomposition (2.3), le vecteur  $\mathbf{X}$  appartient à l'espace des déplacements de la superstructure sur sol rigide. Il est donc licite de développer cette portion du déplacement sur la base des modes propres de la structure encastree dans un sol infiniment rigide. En notant  $\Phi$  la matrice modale et  $\mathbf{X}'$  les coordonnées généralisées du vecteur  $\mathbf{X}$  dans la base modale, nous avons :

$$\mathbf{X} = \Phi \mathbf{X}' \quad (2.8)$$

Les matrices de masse et de rigidité de la superstructure se diagonalisent comme suit

$$\begin{aligned} \Phi^T \mathbf{M}_s \Phi &= \text{diag}(m_r) \\ \Phi^T \mathbf{K}_s \Phi &= \text{diag}(m_r \omega_r^2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

et nous faisons l'hypothèse simplificatrice usuelle, dite de Basile, selon laquelle la matrice d'amortissement visqueux de la superstructure se diagonalise dans la même base :

$$\Phi^T \mathbf{C}_s \Phi = \text{diag}(2m_r \zeta_r \omega_r) \quad (2.10)$$

Les termes  $m_r$ ,  $\zeta_r$  et  $\omega_r$  désignent bien entendu respectivement la masse, le ratio d'amortissement critique et la pulsation propre du mode  $r$ . Le déplacement de la structure s'écrit en explicitant (2.8)

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{r=1}^{NM} \phi_r x'_r(t) \quad (2.11)$$

où  $NM$  est le nombre de modes pris en compte et  $x'_r$  la coordonnée généralisée associée au mode  $r$ , solution de l'équation

$$\ddot{x}'_r + 2\zeta_r \omega_r \dot{x}'_r + \omega_r^2 x'_r = -\frac{1}{m_r} \phi_r^T \mathbf{M}_s \tilde{\mathbf{R}} \ddot{\mathbf{Z}} \quad (2.12)$$

avec des conditions initiales nulles si la structure est au repos au début du séisme. Ceci nous permet de définir une matrice de taille  $NM \times NS$  de facteurs de participation locaux :

$$-\text{diag}\left(\frac{1}{m_r}\right) \Phi^T \mathbf{M}_s \tilde{\mathbf{R}} = [\gamma_{rk}]_{\substack{r=1..NM \\ k=1..NS}} \quad \gamma_{rk} = -\frac{\phi_r^T \mathbf{M}_s \tilde{\mathbf{R}}_k}{\phi_r^T \mathbf{M}_s \phi_r} \quad (2.13)$$

Lorsque le déplacement du sol est uniforme, on définit habituellement un facteur de participation modal

$$\gamma_r = -\frac{\phi_r^T \mathbf{M}_s \mathbf{U}}{\phi_r^T \mathbf{M}_s \phi_r} \quad (2.14)$$

dans lequel  $\mathbf{U}$  est le vecteur d'entraînement représentant un déplacement uniforme et unitaire de la structure dans la direction des mouvements sismiques. Si  $\hat{\mathbf{R}}_k$  est la colonne de la matrice  $\hat{\mathbf{R}}$  attachée au  $k^{\text{ème}}$  degré de liberté d'appui, on a la relation

$$\mathbf{U} = \sum_{\substack{k=1, \dots, NS \\ z_k \text{ selon } \mathbf{U}}} \hat{\mathbf{R}}_k \quad (2.15)$$

dans laquelle la sommation s'étend aux degrés de liberté d'appui  $z_k$  dans la direction définie par  $\mathbf{U}$ . On aura donc pris soin de définir chacun des degrés de liberté aux appuis ainsi que  $\mathbf{U}$  selon l'une des trois directions principales du pont : longitudinale, latérale et verticale. On en déduit

$$\gamma_r = \sum_{\substack{k=1, \dots, NS \\ z_k \text{ selon } \mathbf{U}}} \gamma_{rk} \quad (2.16)$$

Notons que la coordonnée généralisée du mode  $r$  s'écrit comme la somme

$$x'_r(t) = \sum_{k=1}^{NS} \gamma_{rk} s_k^r(t) \quad (2.17)$$

où  $s_k^r(t)$  est solution de

$$\ddot{s}_k^r + 2\zeta_r \omega_r \dot{s}_k^r + \omega_r^2 s_k^r = \ddot{z}_k \quad (2.18)$$

Pour le dimensionnement d'un ouvrage, il est important de connaître les déplacements, les déplacements relatifs, mais aussi les efforts induits, *i.e.* moments, efforts tranchants et normaux, couples de torsion ou contraintes dans la structure. Dans une formulation par éléments finis les déplacements et les efforts s'expriment comme combinaisons linéaires des degrés de liberté en déplacements de la structure :

$$\mathcal{E}(t) = \mathbf{D}^T \mathbf{Y}(t) \quad (2.19)$$

ce qui, compte tenu des décompositions (2.3), (2.11) et (2.17) donne :

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{k=1}^{NS} a_k z_k(t) + \sum_{r=1}^{NM} \sum_{l=1}^{NS} b_l^r s_l^r(t) \quad (2.20)$$

La simple somme est la contribution pseudo-statique à la réponse, dans laquelle on a défini l'effet d'un déplacement statique unitaire de la  $k^{\text{ème}}$  fondation :  $a_k = \mathbf{D}^T \hat{\mathbf{R}}_k$ . La double somme est la contribution modale; on y a défini les facteurs  $b_l^r = \gamma_{rk} \mathbf{D}^T \phi_r$  représentant les effets sur la quantité  $\mathcal{E}$  des formes modales  $\phi_r$ , pondérés par les facteurs de participation locaux  $\gamma_{rk}$ . Les  $b_l^r$  sont indépendants de la normalisation des vecteurs propres  $\phi_r$ .

### 2.1.2 Analyse spectrale

Dans le paragraphe 1.3, nous avons défini quelques modèles stochastiques de mouvements de sol, en mettant l'accent sur la variabilité spatiale des ondes sismiques qui, comme nous allons le voir, a une influence sur la réponse des structures étendues à plusieurs appuis. Rappelons deux hypothèses essentielles :

- Les mouvements du sol imposés à la structure sont des processus aléatoires gaussiens.
- La durée  $T$  est plusieurs fois supérieure à la plus grande période propre de la structure. On considère que du point de vue de la structure, l'excitation sismique est un processus stationnaire.

Nous avons vu au chapitre précédent qu'en génie parasismique, les mouvements de sol sont définis par la donnée de spectres de réponse d'oscillateurs linéaires. Lorsque les mouvements de la structure sont exprimés par un ensemble de modes, les déplacements modaux maximaux lus sur des spectres de réponse sont combinés de façon à obtenir la réponse totale de la structure. Lorsque les fréquences propres sont suffisamment espacées, les réponses modales sont statistiquement indépendantes et la règle de combinaison quadratique, dite *SRSS* (*Square Root of the Sum of the Squares*) donne de bons résultats. Lorsque certaines fréquences propres sont rapprochées, il convient de tenir compte des corrélations entre réponses modales, ce qui peut se faire par l'intermédiaire de la méthode de la combinaison quadratique complète, dite *CQC* (*Complete Quadratic Combination*), développée par Der Kiureghian [43]. Aucune de ces méthodes, toutefois, ne tient compte d'une excitation sismique décorrélée en espace.

Der Kiureghian et Neuenhofer [45] ont étendu la procédure à des structures multi-supportées, sous la forme d'une nouvelle règle dite *MSRS* (*Multiple Support Response Spectrum*). Nous examinons les grandes lignes de son élaboration ci-dessous.

De l'équation temporelle (2.20), on déduit la densité spectrale de puissance de la réponse [93] :

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{E}}(\omega) &= \sum_{k=1}^{NS} \sum_{l=1}^{NS} a_k a_l S_{z_k z_l}(\omega) \\
&+ 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{r=1}^{NM} \sum_{k=1}^{NS} \sum_{l=1}^{NS} a_k b_l^r h_r(\omega) S_{z_k \ddot{z}_l}(\omega) \right\} \\
&+ \sum_{r=1}^{NM} \sum_{s=1}^{NM} \sum_{k=1}^{NS} \sum_{l=1}^{NS} b_k^r b_l^s h_r(-\omega) h_s(\omega) S_{\ddot{z}_k \ddot{z}_l}(\omega)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

dans laquelle intervient la fonction de transfert du mode  $r$  :

$$h_r(\omega) = \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta_r \omega_r \omega} \tag{2.22}$$

ainsi que les densités spectrales de puissance croisées entre les déplacements suivant les degrés de liberté de fondation  $k$  et  $l$  ( $S_{z_k z_l}(\omega)$ ), entre les accélérations suivant ces mêmes degrés de liberté ( $S_{\ddot{z}_k \ddot{z}_l}(\omega)$ ), ainsi qu'entre les termes croisés ( $S_{z_k \ddot{z}_l}(\omega)$ ).

La variance du processus aléatoire est donnée par la formule  $\sigma_{\mathcal{E}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\mathcal{E}}(\omega) d\omega$ , c'est à dire dans notre cas par :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{E}}^2 &= \sum_{k=1}^{NS} \sum_{l=1}^{NS} a_k a_l \rho_{z_k z_l} \sigma_{z_k} \sigma_{z_l} \\
&+ 2 \sum_{r=1}^{NM} \sum_{k=1}^{NS} \sum_{l=1}^{NS} a_k b_l^r \rho_{z_k s_l^r} \sigma_{z_k} \sigma_{s_l^r} \\
&+ \sum_{r=1}^{NM} \sum_{s=1}^{NM} \sum_{k=1}^{NS} \sum_{l=1}^{NS} b_k^r b_l^s \rho_{s_k^r s_l^s} \sigma_{s_k^r} \sigma_{s_l^s}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

dans lequel  $\sigma_{z_k}^2$  et  $\sigma_{s_k^r}^2$  sont les variances des déplacements au sol et des réponses modales. Elles s'expriment de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\sigma_{z_k}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{z_k}(\omega) d\omega \\
\sigma_{s_k^r}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |h_r|^2 S_{\ddot{z}_k}(\omega) d\omega
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Les coefficients de corrélation  $\rho$  sont quant à eux donnés par les formules

$$\begin{aligned}\rho_{z_k z_l} &= \frac{1}{\sigma_{z_k} \sigma_{z_l}} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{z_k z_l}(\omega) d\omega \\ \rho_{z_k s_l^r} &= \frac{1}{\sigma_{z_k} \sigma_{s_l^r}} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} \{ h_r(\omega) S_{z_k z_l}(\omega) \} d\omega \\ \rho_{s_k^r s_l^s} &= \frac{1}{\sigma_{s_k^r} \sigma_{s_l^s}} \int_{-\infty}^{+\infty} h_r(-\omega) h_s(\omega) S_{z_k z_l}(\omega) d\omega\end{aligned}\quad (2.25)$$

Les parties imaginaires des densités spectrales de puissance croisées  $S_{z_k z_l}(\omega)$  et  $S_{z_k z_l}(\omega)$  ainsi que des fonctions  $h_r(-\omega)$  et  $h_s(\omega)$  sont des expressions impaires de la pulsation  $\omega$ . On en déduit facilement que les coefficients de corrélation (2.25) sont tous des nombres réels.

Pour le dimensionnement de la structure, il nous reste à connaître la valeur maximale de la réponse au cours du séisme, ou du moins, puisque nous avons suivi un approche probabiliste, l'espérance de ce maximum. Pour cela, nous utilisons la notion de facteur de pic  $p$  (cf. annexe A.3) qui associe l'écart type d'un processus aléatoire stationnaire gaussien  $\sigma_X$  au maximum moyen de ce même processus  $\mu_{X_{max}}$  pour une durée d'excitation  $T$ :

$$\mu_{X_{max}} = p \sigma_X \quad (2.26)$$

L'équation (2.26) nous permet d'écrire l'expression suivante de l'espérance du maximum de la quantité  $\mathcal{E}$ :

$$\begin{aligned}(E[\mathcal{E}_{max}])^2 &= \sum_{k=1}^{NS} \sum_{l=1}^{NS} a_k a_l \rho_{z_k z_l} \frac{p_{\mathcal{E}}^2}{p_{z_k} p_{z_l}} z_{k,max} z_{l,max} \\ &+ 2 \sum_{r=1}^{NM} \sum_{k=1}^{NS} \sum_{l=1}^{NS} a_k b_l^r \rho_{z_k s_l^r} \frac{p_{\mathcal{E}}^2}{p_{z_k} p_{s_l^r}} z_{k,max} D_l(\omega_r, \zeta_r) \\ &+ \sum_{r=1}^{NM} \sum_{s=1}^{NM} \sum_{k=1}^{NS} \sum_{l=1}^{NS} b_k^r b_l^s \rho_{s_k^r s_l^s} \frac{p_{\mathcal{E}}^2}{p_k p_{s_l^s}} D_k(\omega_r, \zeta_r) D_l(\omega_s, \zeta_s)\end{aligned}\quad (2.27)$$

Cette expression peut être simplifiée en tenant compte du fait que les facteurs de pic ne dépendent que modérément des caractéristiques des processus en jeu et donc leurs rapports apparaissant dans (2.27) sont proches de l'unité [42]. Nous obtenons alors la règle de recombinaison MSRS établie par Der Kiureghian et Neuenhofer [46]:

$$\begin{aligned}(E[\mathcal{E}_{max}])^2 &= \sum_{k=1}^{NS} \sum_{l=1}^{NS} a_k a_l \rho_{z_k z_l} z_{k,max} z_{l,max} \\ &+ 2 \sum_{r=1}^{NM} \sum_{k=1}^{NS} \sum_{l=1}^{NS} a_k b_l^r \rho_{z_k s_l^r} z_{k,max} D_l(\omega_r, \zeta_r) \\ &+ \sum_{r=1}^{NM} \sum_{s=1}^{NM} \sum_{k=1}^{NS} \sum_{l=1}^{NS} b_k^r b_l^s \rho_{s_k^r s_l^s} D_k(\omega_r, \zeta_r) D_l(\omega_s, \zeta_s)\end{aligned}\quad (2.28)$$

Dans cette expression  $z_{k,max}$  est l'espérance du déplacement maximal du degré de liberté  $k$  imposé par le sol et  $D_k(\omega_r, \zeta_r)$  est l'espérance du déplacement maximal relatif d'un oscillateur de pulsation  $\omega_r$  et de ratio d'amortissement critique  $\zeta_r$ . On peut lire la valeur de  $D_k(\omega_r, \zeta_r)$  sur un

spectre de réponse élastique correspondant au site sur lequel repose la fondation associée au degré de liberté  $k$ .

Dans l'expression (2.28), la première ligne représente le carré de la réponse pseudo-statique, la troisième le carré de la réponse dynamique et la deuxième contient les termes de couplage entre ces deux effets. Les coefficients de corrélation  $\rho$  intègrent les effets d'incohérence et de déphasage. Introduisons les équations (1.36) et (1.6) dans (2.24) et (2.25) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 \rho_{z_k z_l} &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^{-4} \Gamma_{kl}(\omega) \sqrt{S_{\ddot{z}_k}(\omega) S_{\ddot{z}_l}(\omega)} d\omega}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^{-4} S_{\ddot{z}_k}(\omega) d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{-4} S_{\ddot{z}_l}(\omega) d\omega}} \\
 \rho_{z_k s_l^r} &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^{-2} h_r(\omega) \Gamma_{kl}(\omega) \sqrt{S_{\ddot{z}_k}(\omega) S_{\ddot{z}_l}(\omega)} d\omega}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^{-4} S_{\ddot{z}_k}(\omega) d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |h_r(\omega)|^2 S_{\ddot{z}_l}(\omega) d\omega}} \\
 \rho_{s_k^r s_l^s} &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h_r(-\omega) h_s(\omega) \Gamma_{kl}(\omega) \sqrt{S_{\ddot{z}_k}(\omega) S_{\ddot{z}_l}(\omega)} d\omega}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |h_r(\omega)|^2 S_{\ddot{z}_k}(\omega) d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |h_s(\omega)|^2 S_{\ddot{z}_l}(\omega) d\omega}}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Notons que cette formulation fait intervenir la fonction de cohérence entre les mouvements le long des degrés de liberté  $k$  et  $l$ , mais aussi les différentes conditions de site aux appuis par l'intermédiaire des densités spectrales de puissance ponctuelles  $S_{\ddot{z}_k}$  et  $S_{\ddot{z}_l}$ . Dans la pratique, ces coefficients de corrélation sont évalués numériquement selon par exemple la technique proposée par Zerva [135] que nous rappelons en annexe A.2.

Comme il est indiqué sur la Figure 2.2, les coefficients de corrélation  $\rho$  traduisent le degré de corrélation existant entre les déplacements aux diverses stations (sites) et les réponses d'oscillateurs posés sur ces stations.

Pour des actions sismiques parfaitement corrélées, *i.e.*  $\Gamma_{kl}(\omega) = 1$  et pour un processus d'excitation à large bande (sol dur, rocher), des formules analytiques simplifiées ont été établies [43] pour les coefficients de corrélation dynamique  $\rho_{s^r s^s}$ . Pour le cas plus général exposé ici, Der Kiureghian et Neuenhofer [45] ont effectué de nombreuses simulations numériques en utilisant divers modèles de sol et de cohérence spatiale exposés au paragraphe (1.3) et en ont déduit les propriétés suivantes sur l'importance relative des coefficients de corrélations:

1. Les termes de corrélation croisée pseudo-statique  $\rho_{z_k z_l}$  ( $k \neq l$ ) traduisent le degré de corrélation entre les déplacements au sol aux stations  $k$  et  $l$ . Ils sont en général proches de l'unité, en particulier lorsque les deux stations reposent sur un même sol mou. Pour un sol ferme, le déplacement au sol est plus riche en hautes fréquences; or de telles ondes perdent en cohérence plus rapidement que les ondes longues périodes qu'on trouve sur sols mous. Les phénomènes d'incohérence et de passage d'onde diminuent tous deux la valeur du coefficient de corrélation. Pour des conditions de site différentes aux divers appuis, ce qui précède reste vrai. Toutefois, les coefficients de corrélation croisée sont moindres et toujours strictement inférieurs à l'unité. On note enfin que les coefficients de corrélation pseudo-statiques sont symétriques en leurs indices.
2. Les termes de couplage  $\rho_{z_k s_l^r}$  traduisent le couplage des déplacements au sol en certaines stations et la réponse d'oscillateurs posés en des stations distantes. Ils sont comparative-ment petits par rapport aux autres coefficients de corrélation pour des fréquences modales supérieures à  $0.5Hz$ . Ainsi le terme de couplage entre les contributions pseudo-statique et dynamique peut être négligé si la fréquence fondamentale de la structure est plus grande que  $0.5Hz$ .

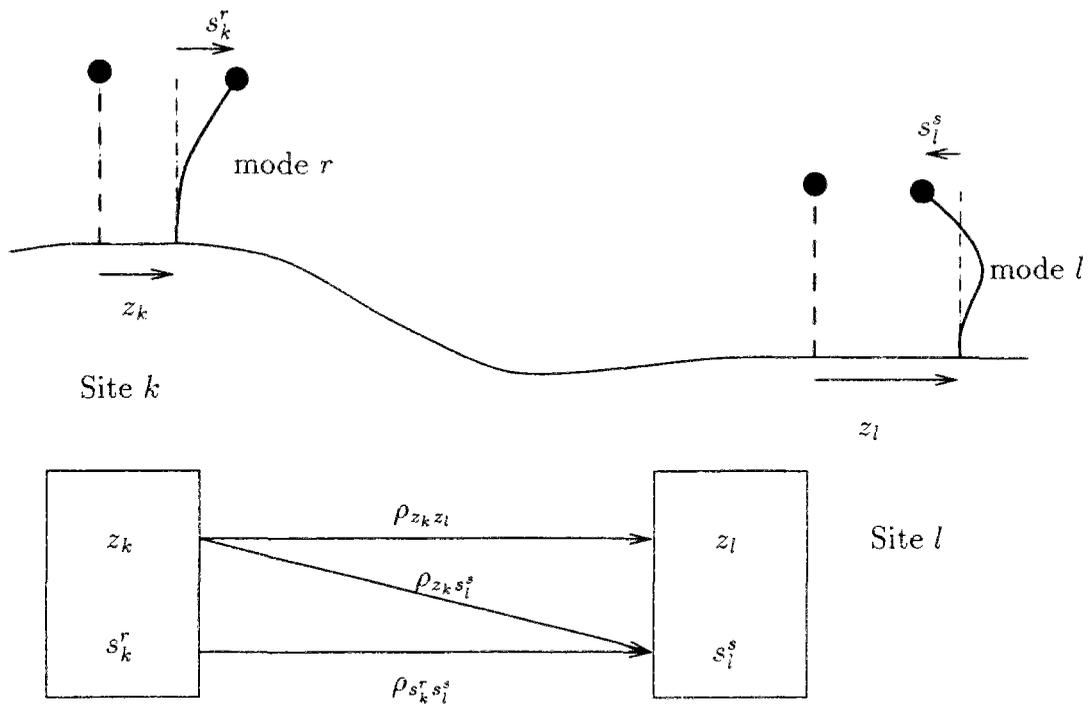


FIG. 2.2 - Coefficients de corrélation entre déplacements du sol et réponses d'oscillateurs aux diverses stations

3. Les coefficients de corrélation croisée  $\rho_{s_k^r s_l^s}$  traduisent le degré de corrélation des réponses d'oscillateurs posés en des stations distantes. Leur importance dépend de la séparation des fréquences  $\omega_r$  et  $\omega_s$  et des conditions de sol aux deux appuis. Dans le cas d'actions parfaitement corrélées aux appuis (ou bien pour  $k = l$ ) et dans le cas d'une excitation à large bande (sols durs) [42], on pourra négliger le terme de corrélation entre deux modes  $(\omega_r, \zeta_r)$  et  $(\omega_s, \zeta_s)$  si le rapport des fréquences  $\omega_r/\omega_s$  ( $\omega_r < \omega_s$ ) est inférieur à  $\frac{0.2}{\zeta_r + \zeta_s + 0.2}$ . Typiquement avec des ratios d'amortissement de 5%, le rapport des fréquences doit être inférieur à 2/3 pour pouvoir négliger le terme de corrélation.

La corrélation diminue d'autant plus que les accélérations aux appuis sont incohérentes. Par contre, sur des sols mous, ou sur des sols quelconques en présence d'un phénomène de passage d'onde, les termes de corrélations peuvent être significatifs même lorsque les fréquences propres sont bien espacées. Notons enfin que les coefficients de corrélation dynamique  $\rho_{s_k^r s_l^s}$  (tout comme les coefficients de couplage) ne sont pas symétriques en leurs indices  $k$  et  $l$  du fait du passage de l'onde.

Berrah et Kausel [22, 23] suivent une démarche semblable à celle de Der Kiureghian et Neuenhofer [45] dans un cadre toutefois plus simple. Négligeant les couplages entre modes, ainsi que le terme pseudo-statique, ils établissent, pour des mouvements sismiques dans une direction donnée, une formule reliant le spectre de réponse d'oscillateurs dans le cadre de mouvements de sol variables dans l'espace  $D^v(\omega_r, \zeta_r)$ , au spectre de réponse usuel (homogène en espace)  $D(\omega_r, \zeta_r)$ :

$$D^v(\omega_r, \zeta_r) = (A_r Q_r A_r^T)^{1/2} D(\omega_r, \zeta_r) \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned}
Q_r &= [\rho_{klr}] \\
\rho_{klr} &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{kl} |h_r(\omega)|^2 S_{\ddot{u}_g}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |h_r(\omega)|^2 S_{\ddot{u}_g}(\omega) d\omega} \\
A_r &= -\frac{\phi_r^T \mathbf{M}_s \tilde{\mathbf{R}}}{\phi_r^T \mathbf{M}_s \mathbf{U}}
\end{aligned}$$

où  $\rho_{kl}$  est une fonction de  $\omega$  et de la distance des points  $k$  et  $l$  rendant compte du phénomène de perte de cohérence et  $\mathbf{U}$  est le vecteur des déplacements unitaires de la superstructure lorsque celle-ci décrit un mouvement de corps rigide dans la direction de l'excitation sismique. L'espérance du déplacement maximal de l'oscillateur  $x'_r$  de l'équation (2.12) s'en déduit alors par la formule :

$$E[x'_{r,max}] = |\gamma_r| \cdot D^v(\omega_r, \zeta_r) \quad (2.31)$$

dans lequel

$$\gamma_r = -\frac{\phi_r^T \mathbf{M}_s \mathbf{U}}{\phi_r^T \mathbf{M}_s \phi_r} \quad (2.32)$$

est le facteur de participation du mode  $r$  pour la direction des mouvements sismiques considérés. Dans [23], Berrah et Kausel appliquent leur méthode à une poutre à travée unique, simplement appuyée, subissant des mouvements différentiels à ses deux appuis. Cette structure se prête bien à cette méthode simplifiée puisque d'une part, le terme pseudo-statique (déplacement rectiligne de la poutre) n'induit aucun effort dans la structure et il est donc licite de ne pas en tenir compte dans le calcul et d'autre part, les fréquences propres sont bien espacées. Les résultats obtenus par la formule (2.31) et par des simulations utilisant des signaux sismiques synthétiques sont très voisins.

La contribution du terme pseudo-statique dans l'effort  $\mathcal{E}$  est étroitement liée au degré d'hyperstaticité de la structure. En effet le degré d'hyperstaticité est, par définition, la dimension de l'espace des champs de contraintes statiquement admissibles avec des forces volumiques ou surfaciques données nulles. Ainsi plus la structure est hyperstatique, plus les champs de contraintes pour des déplacements imposés aux appuis pourront être grands. Pour une poutre simplement appuyée, soumise à des déplacements verticaux ou transversaux aux appuis, les moments induits par le terme pseudo-statique sont nuls. Ce n'est plus vrai pour une poutre sur trois appuis.

### 2.1.3 Modèle de variabilité spatiale d'ondes sismiques

Dans le chapitre 1, nous avons vu qu'à l'heure actuelle, une grande incertitude règne sur les modèles de variabilité spatiale d'ondes sismiques. Pour mener à bien une étude de sensibilité des ouvrages d'art, nous adoptons en conséquence le modèle simple à deux paramètres (1.41) qui reproduit les phénomènes essentiels de passage d'onde et de perte de cohérence.

Pour que l'étude soit aussi générale que possible, nous faisons abstraction dans un premier temps des effets de site dans les mouvements de sol, supposant ainsi que les formations géologiques sont sensiblement identiques sous chaque appui. Il est alors licite d'adopter une densité spectrale de puissance d'accélération homogène  $S_{\ddot{u}}(\omega)$ . Dans les applications numériques qui suivent, la densité spectrale de puissance est calculée itérativement une fois pour toutes de façon à être compatible avec un spectre de réponse donné selon la méthode décrite au paragraphe 1.1.3(c).

La variabilité spatiale des mouvements de sol dans une direction donnée entre les points  $A$  et  $B$  est introduite par l'intermédiaire d'une fonction de cohérence  $\Gamma_{AB}(\omega)$ , ou ce qui est équivalent d'après (1.36), par la densité spectrale de puissance croisée :

$$S_{\ddot{u}_A \ddot{u}_B}(\omega) = \Gamma_{AB}(\omega) S_{\ddot{u}}(\omega) \quad (2.33)$$

Rappelons que la fonction complexe  $\Gamma_{AB}(\omega)$  traduit par son amplitude la cohérence des accélérations en  $A$  et  $B$  et par sa phase, la propagation apparente de l'onde (nous ne tenons pas compte dans un premier temps des effets de site). Dans l'étude de sensibilité qui suit, nous adoptons le modèle suivant :

$$\Gamma_{AB}(\omega) = e^{-(\alpha \omega d_{AB})^2} e^{-i \frac{\omega d_{AB}}{V}} \quad (2.34)$$

proposé pour la première fois par Uscinski [118] comme solution du problème de propagation d'onde dans un milieu aléatoire et qui a été utilisé par la suite notamment par Luco et Wong [87]. Le paramètre  $\alpha$  mesure le taux de perte de cohérence des ondes en fréquence et en distance et  $V$  mesure la vitesse apparente des ondes le long de l'ouvrage. On fait donc l'hypothèse que toutes les ondes se propagent à la même vitesse. Notons qu'il convient d'orienter l'axe de la structure de sorte que la vitesse apparente  $V$  et la distance  $d_{AB}$  entre les points  $A$  et  $B$  puissent prendre des valeurs positives ou négatives. Luco et Wong [87] suggèrent une valeur du paramètre  $\alpha$  de  $2 \cdot 10^{-4} s/m$ . Dans les applications numériques nous irons jusqu'à  $\alpha = 2 \cdot 10^{-3} s/m$ . La vitesse apparente  $V$  varie typiquement entre la célérité des ondes dans le substratum rocheux et l'infini.

### 2.1.4 Comparaison aux résultats obtenus par simulations

A titre d'illustration, on compare les résultats obtenus par la règle de recombinaison MSRS à ceux obtenus par simulations de type Monte-Carlo. La structure choisie est le pont à haubans d'Evripos en Grèce, très souple, qui présentent de nombreux modes à basses fréquences. Certaines des fréquences propres des modes de la structure sont très proches les unes des autres. Les modes principaux contrôlant la réponse latérale sont présentés à la Figure 2.11. L'ouvrage est représenté par ses déformées pseudo-statiques et par une soixantaine de modes. Les simulations temporelles sont obtenues par intégration numérique des réponses modales et pseudo-statiques à partir d'accélération de sols construites selon la méthode présentée au paragraphe 1.4 de façon à être conformes au spectre AFPS de type S0 (rocher) ou S3 (sol souple). La densité spectrale de puissance a été ajustée au spectre de réponse en cinq itérations. La fonction de cohérence est celle présentée au paragraphe précédent. On a choisi de représenter quatre niveaux de perte de cohérence (indiqués par le paramètre  $\alpha$ ) et deux vitesses apparentes de propagation opposées ( $V = \pm 500 m/s$ ). La Figure 2.3 montre l'espérance du maximum du moment fléchissant au pied de l'une des deux piles principales du pont : elle a été calculée par la règle MSRS et par moyenne des maxima atteints lors des simulations temporelles (l'intervalle formé par la moyenne des maxima des simulations plus ou moins deux écarts type est indiqué par une barre verticale). On constate que la recombinaison MSRS fournit des résultats très proches de la référence constituée par les simulations pour le site rocheux (AFPS S0) et surestime légèrement ceux du site sur sol souple (AFPS S3). Ce dernier décalage s'explique par la densité modale dans les basses fréquences particulièrement sollicitées par le séisme sur sol souple. Les corrélations inter-modales sont fortes, y compris pour un déplacement uniforme du sol ( $\alpha = 0$ ) et des erreurs numériques peuvent se glisser dans l'intégration des coefficients de corrélation. Les

résultats fournis par la règle MSRS sont toutefois très convenables au regard de l'incertitude portant sur les mouvements de sol et sont numériquement bien moins onéreux.

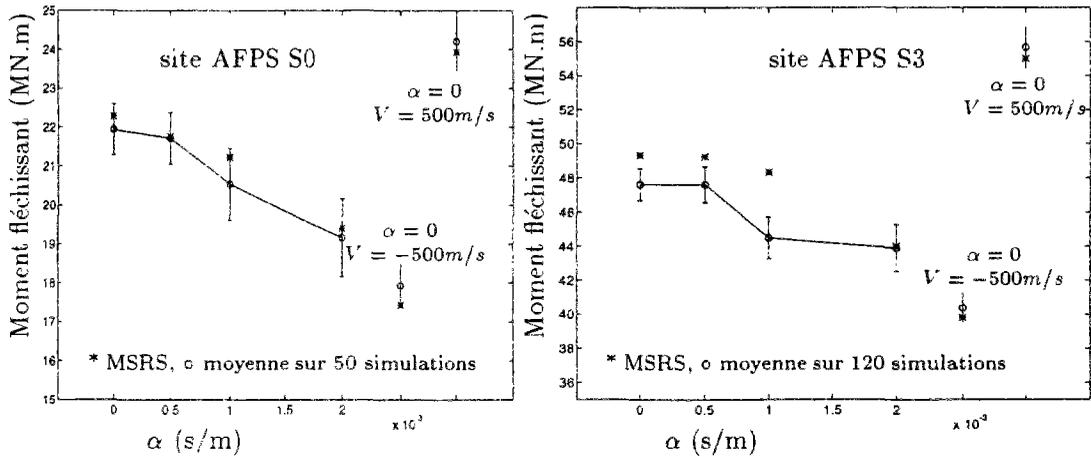


FIG. 2.3 - Comparaison de la règle MSRS et des moyennes de maxima de simulations : moment fléchissant maximal en pied de pile du pont d'Evripos en Grèce pour deux conditions de site : site rocheux (AFPS S0) et sol souple (AFPS S3).

## 2.2 Sensibilité des ouvrages d'art aux petites variations spatiales du mouvement sismique

En matière d'ouvrages d'art, chaque projet présente des caractéristiques de sol, de structure qui en font un objet unique. C'est en particulier le cas dans la gamme des ouvrages de longueur moyenne à grande, susceptibles d'être influencés par la variabilité spatiale des mouvements sismiques. Pour tirer quelques idées générales, nous étudions le cas simplifié dont les hypothèses principales sont les suivantes :

- L'ouvrage est droit, ou de courbure suffisamment faible pour négliger le couplage des mouvements latéraux, longitudinaux et verticaux.
- Pour les ponts à câbles ou en arc, on s'intéressera aux mouvements latéraux afin que le couplage des mouvements longitudinaux et verticaux n'interviennent pas.
- Les mouvements sismiques se produisent dans une seule des trois directions : longitudinale, latérale ou verticale. On ne conserve donc qu'un seul degré de liberté de translation par fondation. On ne prendra pas en compte dans cette étude de sensibilité les possibles corrélations entre ces directions d'excitation qui peuvent toutefois être étudiées grâce à la formule de recombinaison (2.28) pourvu qu'on dispose de densités spectrales de puissance croisées entre accélérations du sol selon les différentes composantes du mouvement. Si les mouvements de sol dans des directions orthogonales sont indépendants, alors la réponse totale s'obtient par sommation quadratique des effets sur la structure des excitations dans chacune des directions.

- Les conditions de site et les densités spectrales de puissance d'accélération de sol sont les mêmes sous chaque fondation.
- On suppose que les variations spatiales du mouvement sismique sont faibles mais non négligeables au regard des dimensions de la structure et de ses caractéristiques dynamiques.
- Les corrélations inter-modales sont négligeables, ce qui se justifie si les fréquences modales sont suffisamment espacées et si l'effet de passage d'onde n'est pas trop prononcé (*cf.* Der Kiureghian and Neuenhofer [45]).
- Le couplage entre les termes pseudo-statiques et dynamiques est négligé, ce qui se justifie si les fréquences propres de la structure sont supérieures à  $0.5Hz$  [45].

### 2.2.1 Développement limité

On suppose dans ce qui suit que les quantités adimensionnelles  $\alpha\omega L$  et  $\omega L/V$ , dans lesquelles  $L$  représente la longueur de l'ouvrage et  $\omega$  la pulsation de l'onde incidente, sont petites devant l'unité, en particulier lorsque  $\omega = \omega_r$  où les  $\omega_r$  sont les pulsations des modes principaux de la structure. La condition  $\omega L/V \ll 1$  signifie que le temps de parcours de l'onde entre les appuis est bien plus court que les périodes principales de la structure ou encore que la longueur d'onde sismique est plus grande que les dimensions caractéristiques du pont.

Avec ces hypothèses, la formule (2.28) se simplifie en :

$$(E[\mathcal{E}_{max}])^2 = \sum_{k,l=1}^{NS} a_k a_l \rho_{z_k z_l} u_{max}^2 + \sum_{r=1}^{NM} \sum_{k,l=1}^{NS} b_k^r b_l^r \rho_{s_k^r s_l^r} D(\omega_r, \zeta_r)^2 \quad (2.35)$$

Définissons les variances du déplacement au sol et de la  $r^{\text{ème}}$  réponse modale :

$$\sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\ddot{u}}(\omega) \frac{d\omega}{\omega^4} \quad , \quad \sigma_r^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |h_r(\omega)|^2 S_{\ddot{u}}(\omega) d\omega \quad (2.36)$$

Avec le modèle de variabilité spatiale (2.34), les coefficients de corrélation de (2.35) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \rho_{z_k z_l} &= \frac{1}{\sigma_u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-(\alpha\omega d_{kl})^2 - i\frac{\omega d_{kl}}{V}\right) S_{\ddot{u}}(\omega) \frac{d\omega}{\omega^4} \\ \rho_{s_k^r s_l^r} &= \frac{1}{\sigma_r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-(\alpha\omega d_{kl})^2 - i\frac{\omega d_{kl}}{V}\right) |h_r(\omega)|^2 S_{\ddot{u}}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (2.37)$$

Nous développons la fonction de cohérence en fonction des petits paramètres  $\alpha\omega d_{kl}$  et  $\omega d_{kl}/V$  :

$$\exp\left(-(\alpha\omega d_{kl})^2 - i\frac{\omega d_{kl}}{V}\right) = 1 - i\frac{\omega d_{kl}}{V} - \left(\alpha^2 + \frac{1}{2V^2}\right) (\omega d_{kl})^2 + 2i\frac{\alpha^2}{V} (\omega d_{kl})^3 + \dots \quad (2.38)$$

Puisque les autres termes des intégrandes ( $S_{\ddot{u}}(\omega)$  et  $|h_r(\omega)|^2$ ) des équations (2.37) sont des fonctions réelles et paires de  $\omega$ , les termes impairs imaginaires purs du développement (2.38) disparaissent (ce ne serait pas le cas si on avait gardé les termes de corrélation inter-modale). Il s'ensuit :

$$(E[\mathcal{E}_{max}])^2 = \left(\sum_{k=1}^{NS} a_k\right)^2 u_{max}^2 + \sum_{r=1}^{NM} \left(\sum_{k=1}^{NS} b_k^r\right)^2 D(\omega_r, \zeta_r)^2$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \alpha^2 + \frac{1}{2V^2} \right) \left\{ \sum_{k,l=1}^{NS} a_k a_l d_{kl}^2 \frac{u_{max}^2}{\sigma_u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\ddot{u}}(\omega) \frac{d\omega}{\omega^2} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{r=1}^{NM} \sum_{k,l=1}^{NS} b_k^r b_l^r d_{kl}^2 \frac{D(\omega_r, \zeta_r)^2}{\sigma_r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |h_r(\omega)|^2 S_{\ddot{u}}(\omega) d\omega \right\} \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Définissons :

$$\mathcal{E}_U = \sum_{k=1}^{NS} a_k = \mathbf{D}^T \sum_{k=1}^{NS} \hat{\mathbf{R}}_k = \mathbf{D}^T \mathbf{U} \quad (2.40)$$

où  $\mathbf{U}$  est le vecteur de déplacement unitaire de la structure.  $\mathcal{E}_U$  est l'effet statique sur la structure d'un déplacement identique imposé aux fondations. Si donc  $\mathcal{E}$  est un effort interne ou un déplacement relatif à l'intérieur de la structure, comme le glissement du tablier sur une pile, alors manifestement  $\mathcal{E}_U = 0$ . De même,

$$\sum_{k=1}^{NS} b_k^r = \left( \sum_{k=1}^{NS} \gamma_{rk} \right) \mathbf{D}^T \phi_r = \gamma_r \mathcal{E}_{\phi_r} \quad (2.41)$$

où  $\mathcal{E}_{\phi_r} = \mathbf{D}^T \phi_r$  est l'effort ou le déplacement associé à la forme modale  $\phi_r$  et  $\gamma_r = \sum_{k=1}^{NS} \gamma_{rk}$  est le facteur de participation usuel pour des mouvements uniformes du sol. Une étude numérique nous a montré qu'avec des densités spectrales de puissance construites selon la procédure du paragraphe 1.1.3(c), le facteur de pic du processus vitesse de sol surestime de moins de 12% le facteur de pic du processus déplacement de sol pour les quatre sites AFPS. En supposant maintenant que ces facteurs de pic sont de manière générale voisins, on a :

$$\frac{1}{\sigma_u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{v}}(\omega) \frac{d\omega}{\omega^2} = \left( \frac{\sigma_{\dot{u}}}{\sigma_u} \right)^2 \approx \left( \frac{\dot{u}_{max}}{u_{max}} \right)^2 \quad (2.42)$$

D'autre part, pour des oscillateurs peu amortis, nous avons l'approximation suivante :

$$\frac{1}{\sigma_r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |h_r(\omega)|^2 S_{\ddot{u}}(\omega) d\omega \approx \frac{\omega_r^2 \sigma_r^2}{\sigma_r^2} = \omega_r^2 \quad (2.43)$$

Si bien qu'on peut écrire l'équation (2.39) sous la forme

$$\begin{aligned}
(E[\mathcal{E}_{max}])^2 & = \mathcal{E}_U^2 u_{max}^2 + \sum_{r=1}^{NM} \gamma_r^2 \mathcal{E}_{\phi_r}^2 D(\omega_r, \zeta_r)^2 \\
& + \left( \alpha^2 + \frac{1}{2V^2} \right) \left\{ \left( - \sum_{k,l=1}^{NS} a_k a_l d_{kl}^2 \right) \dot{u}_{max}^2 + \sum_{r=1}^{NM} \left( - \sum_{k,l=1}^{NS} b_k^r b_l^r d_{kl}^2 \right) \omega_r^2 D(\omega_r, \zeta_r)^2 \right\} \quad (2.44)
\end{aligned}$$

Sur l'axe défini par les piles du pont, nous choisissons une origine  $O$  (arbitraire) et une orientation. Soit  $\bar{d}_{Ok}$  la distance algébrique (*i.e.* positive ou négative) entre l'origine et le centre de masse de la fondation  $k$  (voir Figure 2.4). L'identité  $d_{kl}^2 = (\bar{d}_{Ol} - \bar{d}_{Ok})^2$  nous permet d'obtenir une formule approchée aisément utilisable :

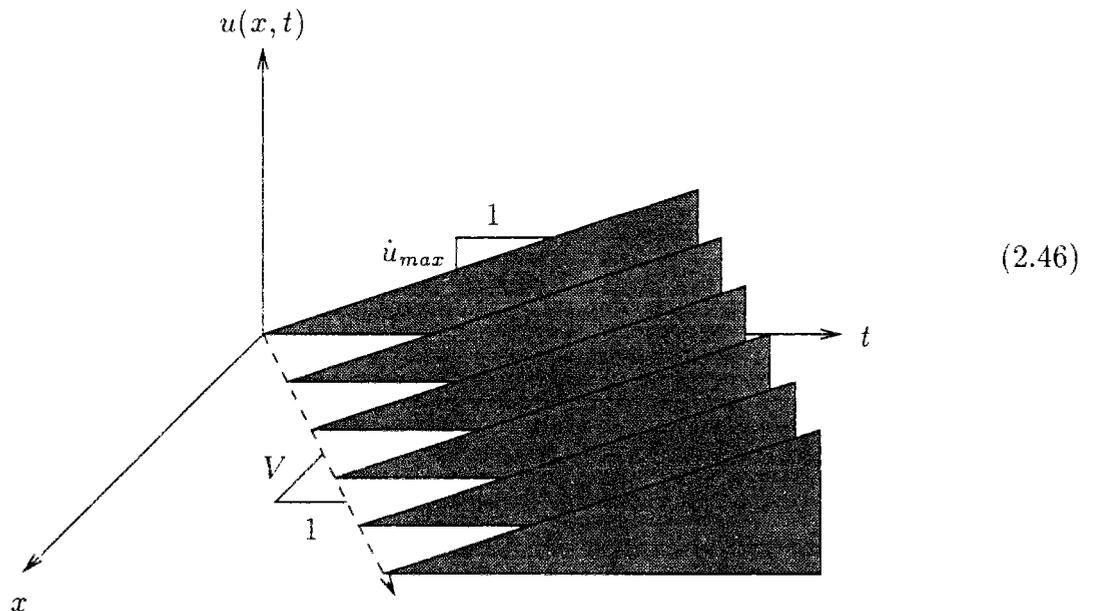
$$\begin{aligned}
E[|\mathcal{E}_{max}|]^2 & = \left\{ \mathcal{E}_U^2 u_{max}^2 + \sum_{r=1}^{NM} \gamma_r^2 \mathcal{E}_{\phi_r}^2 D(\omega_r, \zeta_r)^2 \right\} \\
& + \left( \alpha^2 + \frac{1}{2V^2} \right) \left\{ \Delta_0 \dot{u}_{max}^2 + \sum_{r=1}^{NM} \Delta_r V(\omega_r, \zeta_r)^2 \right\} \quad (2.45)
\end{aligned}$$

La première ligne de la formule approchée (2.45) n'est autre que la règle bien connue de recombinaison quadratique SRSS. Rappelons, que pour des efforts intérieurs ou des déplacements relatifs,  $\mathcal{E}_U$  est nul. La deuxième ligne est l'effet au premier ordre de petites variations spatiales du mouvement sismique :

- Dans le premier facteur, on trouve au carré les deux facteurs pilotant respectivement la perte de cohérence ( $\alpha$ ) et la célérité apparente des ondes ( $V$ );
- Dans le deuxième facteur, on trouve des paramètres associés au mouvement de sol ponctuel tels que la vitesse maximale du sol  $\dot{u}_{max}$  et la réponse spectrale d'oscillateurs en pseudo-vitesse  $V(\omega_r, \zeta_r) = \omega_r D(\omega_r, \zeta_r)$  et des coefficients  $\Delta_0$  et  $\Delta_r$  associés uniquement à la structure et que nous détaillons plus loin.

Si on ne fait intervenir que le phénomène de propagation d'onde ( $\alpha = 0$  et  $|V| < \infty$ ), la deuxième ligne fait apparaître le rapport  $\dot{u}_{max}/V$  et au premier ordre, la contribution marginale du phénomène de propagation d'onde au mouvement pseudo-statique est proportionnel à ce même rapport. Pour le comprendre sur un exemple élémentaire, imaginons une onde ayant la forme d'une rampe (de pente  $\dot{u}_{max}$ ) se déplaçant à la célérité  $V$  le long de l'ouvrage :

$$u(x, t) = \begin{cases} (t - x/V) * \dot{u}_{max} & \text{si } t - x/V \geq 0 \\ 0 & \text{si } t - x/V < 0 \end{cases}$$



On constate bien que  $\dot{u}_{max}$  est la borne supérieure de la vitesse du sol. Si maintenant un effort dans la structure dépend linéairement, pour sa partie pseudo-statique, du déplacement relatif du sol entre deux points d'appui distants de  $L$ , la réponse pseudo-statique est fonction linéaire de la quantité  $u(x + L, t) - u(x, t)$  qui est majorée par  $L \times \dot{u}_{max}/V$ .

les coefficients  $\Delta_0$  et  $\Delta_r$  sont donnés par les formules suivantes :

$$\Delta_0 = 2 \left[ \left( \sum_{k=1}^{NS} \bar{d}_{Ok} a_k \right)^2 - \left( \sum_{k=1}^{NS} a_k \right) \left( \sum_{k=1}^{NS} \bar{d}_{Ok}^2 a_k \right) \right] \quad (2.47)$$

$$\Delta_r = 2\mathcal{E}_r^2 \left[ \left( \sum_{k=1}^{NS} \bar{d}_{Ok} \gamma_{rk} \right)^2 - \left( \sum_{k=1}^{NS} \gamma_{rk} \right) \left( \sum_{k=1}^{NS} \bar{d}_{Ok}^2 \gamma_{rk} \right) \right] \quad (2.48)$$

Il est important de constater que  $\Delta_0$  et  $\Delta_r$  sont indépendants du choix de l'origine  $O$ .

En somme, nous avons séparé dans la réponse marginale due à la variabilité spatiale des ondes sismiques, les termes de variabilité spatiale ( $\alpha$  et  $1/V$ ) des termes de structures ( $\Delta_0$  et  $\Delta_r$ ) et de mouvement ponctuel du sol ( $\dot{u}_{max}$  et  $V(\omega_r, \zeta_r)$ ).

### 2.2.2 Contributions pseudo-statique et modale à la réponse marginale

Nous allons utiliser la formule approchée (2.45) pour analyser la sensibilité des ouvrages aux faibles variations spatiales des ondes sismiques, en mettant l'accent sur l'importance des divers termes, pseudo-statiques et dynamiques. Puisque les paramètres de variabilité spatiale ( $\alpha$  et  $1/V$ ) se découpent facilement dans (2.45), l'étude se ramène à celle des facteurs structuraux  $\Delta_0$  et  $\Delta_r$ .

#### Influence de la direction du mouvement de sol sur la réponse pseudo-statique

Nous ne nous intéressons, en terme de réponse, qu'aux efforts intérieurs (moments fléchissants, effort tranchants...) ou aux déplacements relatifs (glissement du tablier sur culée ou sur pile). Une translation statique du sol de fondation induit une réponse nulle, soit  $\mathcal{E}_U = \sum_{k=1}^{NS} a_k = 0$  et donc

$$\Delta_0 = 2 \left( \sum_{k=1}^{NS} \bar{d}_{Ok} a_k \right)^2 \quad (2.49)$$

Cette quantité positive ou nulle représente l'incrément de réponse dû à la composante pseudo-statique du mouvement. Notons que  $\sum_{k=1}^{NS} \bar{d}_{Ok} a_k$  est l'effet statique d'une variation linéaire des déplacements du sol. S'il s'agit de déplacements longitudinaux, une variation linéaire est une dilatation (ou une contraction) de la ligne de fondation comme le montre la Figure 2.4. Cette dilatation du sol induit des efforts et/ou des déplacements relatifs dans la structure ( $\Delta_0 > 0$ ), en particulier si celle-ci est rigide longitudinalement. Par contre, une variation linéaire de déplacements latéraux ou verticaux représente un mouvement de rotation rigide du sol de fondation qui entraîne statiquement la structure sans engendrer d'effort ou de déplacement relatif comme le montre la Figure 2.5. Le terme pseudo-statique est alors nul ( $\Delta_0 = 0$ ) à cet ordre. On montre dans l'annexe B.1 que les termes conservés dans le développement de la fonction de cohérence (2.38) ne tiennent pas compte d'une éventuelle courbure du sol à l'échelle de la structure. Cette étude de sensibilité n'a donc encore une fois de sens physique que pour de faibles variations spatiales de l'onde sismique.

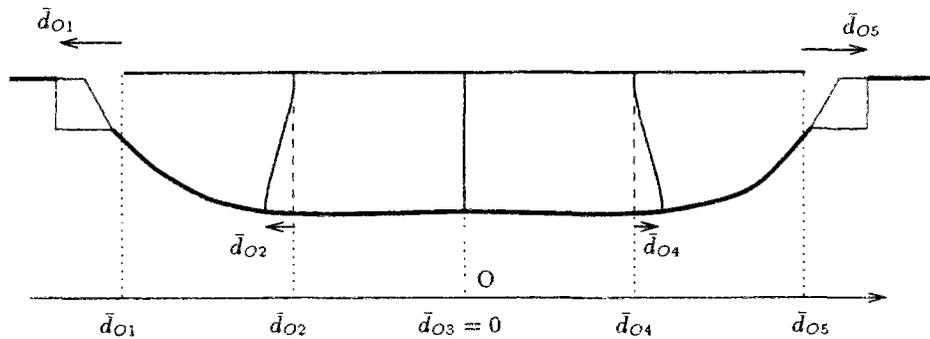


FIG. 2.4 - Effet statique sur la structure d'une dilatation longitudinale du sol de fondation

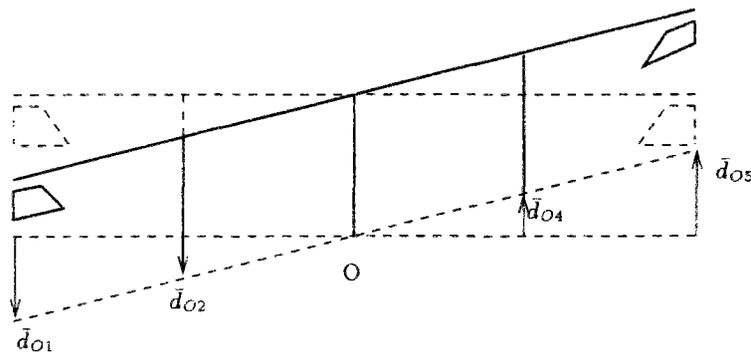


FIG. 2.5 - Effet statique sur la structure d'une rotation du sol de fondation

### Influence de la forme modale

L'incrément de la réponse modale est en général non nul et son signe est celui de l'expression :

$$\sum_{r=1}^{NM} \Delta_r V(\omega_r, \zeta_r)^2 \quad (2.50)$$

qu'on peut évaluer facilement à partir des caractéristiques modales et des déformées pseudo-statiques de la structure. Notons que les modes anti-symétriques d'une structure symétrique (tels que les modes 5, 21 et 39 de la Figure 2.11) ont un facteur de participation usuel nul ( $\gamma_r = \sum_{k=1}^{NS} \gamma_{rk} = 0$ ) et donc leur contribution ne peut qu'augmenter comme le confirme le signe de  $\Delta_r$ .

Nous obtenons un résultat inverse si les facteurs de participation locaux  $\gamma_{rk}$  d'un mode  $r$  sont tous de même signe, par exemple tous positifs. Comme l'origine  $O$  est arbitraire sur l'axe des fondations, nous pouvons la choisir de sorte que les distances algébriques  $\bar{d}_{Ok}$  soient également toutes positives. L'inégalité de Schwarz et la formule (2.48) nous assurent que  $\Delta_r$  est négatif. La contribution de ce mode décroît en présence de variabilité spatiale des ondes sismiques. Un tel cas se produit lorsque la forme modale est entièrement d'un côté de la structure au repos, par exemple dans le cas du mode de balancement latéral d'un pont sur piles souples (Figure 2.10). Comme en général, ce mode contrôle la réponse modale latérale de la structure, on s'attend à ce que la réponse transverse de l'ouvrage diminue.

Quoiqu'il n'y ait pas de démonstration, des calculs de cas concrets ont montré que, presque toujours, le  $\Delta_r$  des modes symétriques est négatif. Leur contribution à la réponse diminue donc en présence de mouvements de sol non uniformes.

## 2.3 Etudes de cas

Nous analysons, dans ce paragraphe, la sensibilité de ponts concrets aux variations spatiales des ondes sismiques, à la lumière des résultats qualitatifs obtenus grâce à la formule approchée (2.45). Nous comparons également les résultats obtenus par la règle de recombinaison complète MSRS (2.28) et par la formule approchée (2.45). Les ponts sont représentés par des modèles aux éléments finis<sup>2</sup>. On trouvera les caractéristiques principales de ces ouvrages en annexe C. Les mouvements de sols sont définis par la donnée de spectres d'oscillateurs élastiques, en l'occurrence, ceux des Recommandations de l'Association Française de Génie Parasismique [11]. La densité spectrale de puissance d'accélération nécessaire pour calculer les coefficients de corrélation de la règle MSRS est obtenue par ajustements itératifs pour être en conformité avec les spectres linéaires utilisés (voir paragraphe 1.1.3). Les réponses d'ouvrages et les études de sensibilité sont calculées par des programmes que nous avons développés en post-processeurs des logiciels d'éléments finis.

### 2.3.1 Mouvements longitudinaux

Pour une excitation longitudinale, la formule de recombinaison approchée (2.45) est la suivante :

$$E[|\mathcal{E}_{max}|]^2 = \sum_{r=1}^{NM} \gamma_r^2 \mathcal{E}_{\Phi_r}^2 D(\omega_r, \zeta_r)^2 + \left( \alpha^2 + \frac{1}{2V^2} \right) \left\{ \Delta_0 \dot{u}_{max}^2 + \sum_{r=1}^{NM} \Delta_r V(\omega_r, \zeta_r)^2 \right\} \quad (2.51)$$

Nous savons de l'équation (2.49) que le terme pseudo-statique augmente la réponse. La Figure 2.6 montre qu'en général les déplacements des degrés de liberté longitudinaux du mode de balancement fondamental dans la direction longitudinale sont tous de même signe. La variabilité spatiale des ondes sismique diminue donc la contribution de ce mode qui est en général prédominant dans la réponse. On s'attend ainsi à ce que la variation de la réponse soit le bilan d'une augmentation du terme pseudo-statique  $\Delta_0 \dot{u}_{max}^2$  et d'une diminution de la contribution du premier mode de balancement longitudinal  $\Delta_1 V(\omega_1, \zeta_1)^2$ . La Figure 2.7 montre l'effort tran-

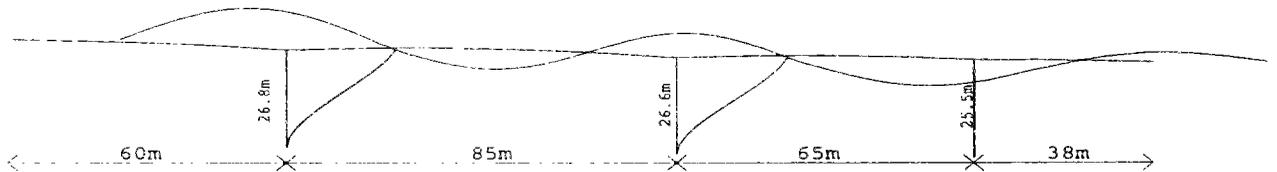


FIG. 2.6 - Pont sur le Gave de Pau, Lourdes, France : Premier mode longitudinal.

chant maximal en pied de pile centrale ainsi que glissement relatif entre le tablier et l'une des culées pour le pont sur le Gave de Pau (solution béton précontraint). L'espérance de la réponse

<sup>2</sup> Les calculs aux éléments finis ont été réalisés sur le code CASTEM 2000 du Commissariat à l'Energie Atomique. Nous tenons à remercier MM. E. Conti et A. Chabert du Service d'Etudes Techniques des Routes et Autoroutes and M. J.M. Tourtois de Grands Travaux de Marseille BTP de nous avoir fourni les modèles et plans des ouvrages que nous avons utilisés dans notre étude.

maximale  $y$  est représentée pour un taux de perte de cohérence  $\alpha$  variant de 0 à  $2 \cdot 10^{-3} \text{ s/m}$ . Elle a été calculée par la règle MSRS et la formule approchée (2.45). Le mode fondamental (Figure 2.6) a une fréquence propre  $f_1 = 0.87 \text{ Hz}$ . La longueur du pont étant de  $248 \text{ m}$ , on ne s'attend pas à ce que la formule approchée donne des résultats précis pour des valeurs de  $\alpha$  supérieures à  $1/(2\pi f_1 L) = 0.74 \times 10^{-3} \text{ s/m}$  (le développement limité suppose en effet que  $\alpha \omega_1 L$  et  $\omega_1 L/V$  soient bien inférieurs à l'unité). La formule approchée donne des résultats convenables au delà de cette valeur pour l'effort tranchant, toutefois ce n'est pas le cas pour le glissement du tablier sur la culée. S'il est illusoire d'attendre des résultats précis pour de grandes variations spatiales du mouvement sismique, la tendance pour des variations petites et moyennes est bien indiquée par la formule approchée, notamment par le signe de la quantité  $\Delta_0 \dot{u}_{max}^2 + \sum_{r=1}^{NM} \Delta_r V(\omega_r, \zeta_r)^2$  : positif pour le glissement du tablier sur la culée, conduisant à une augmentation de la réponse et négatif pour l'effort tranchant en pied de pile centrale, conduisant à une diminution de la réponse.

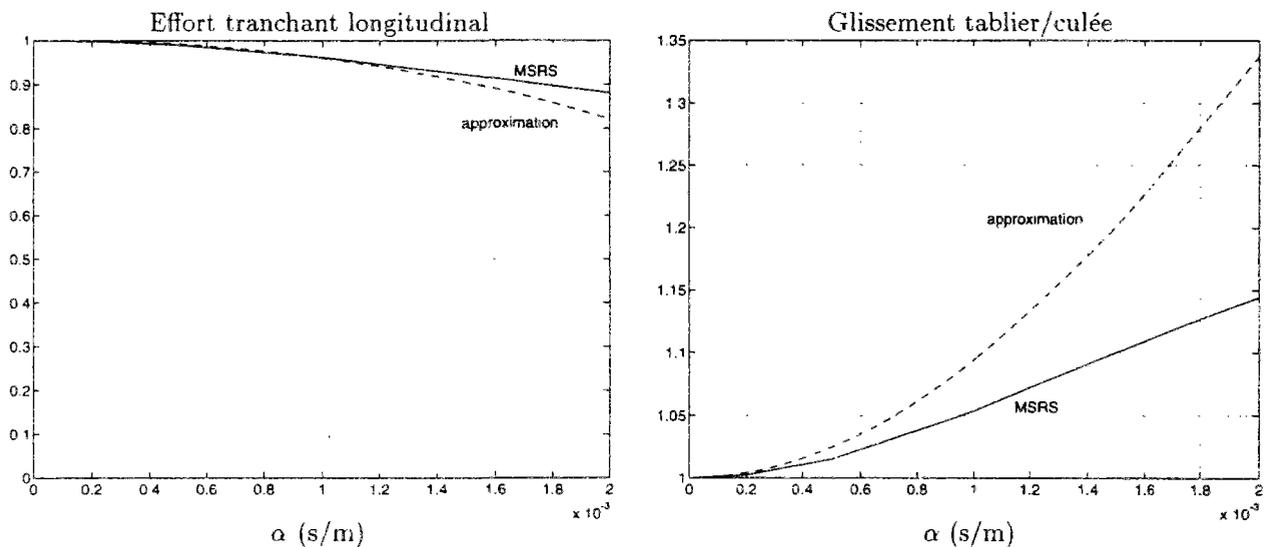


FIG. 2.7 - Pont sur le Gave de Pau. Excitation longitudinale : effort tranchant en pied de pile centrale (à gauche) et glissement tablier sur culée (à droite).  $V = \infty$

### 2.3.2 Mouvements latéraux

Comme nous l'avons souligné plus haut, le terme pseudo-statique disparaît au deuxième ordre de la formule approchée (2.45) pour des mouvements sismiques latéraux ou verticaux. De l'effet des variations spatiales des mouvements sismiques ne subsiste que la composante modale :

$$E[|\mathcal{E}_{max}|^2] = \sum_{r=1}^{NM} \gamma_r^2 \mathcal{E}_{\Phi_r}^2 D(\omega_r, \zeta_r)^2 + \left( \alpha^2 + \frac{1}{2V^2} \right) \left\{ \sum_{r=1}^{NM} \Delta_r V(\omega_r, \zeta_r)^2 \right\} \quad (2.52)$$

Souvent, le mode fondamental de balancement latéral (Figure 2.10) domine la réponse. Et puisque la forme modale se situe d'un seul côté de la structure au repos, ses facteurs locaux de participation  $\gamma_{1k}$  sont tous de même signe et la contribution de ce mode diminue. Si les modes supérieurs interviennent peu, on s'attend à ce que la réponse globale diminue. C'est ce qui se

produit pour les efforts tranchants de la pile centrale du pont sur le Gave de Pau (solution béton précontraint) et d'une des piles du pont d'Evripis en Grèce comme le montre la Figure 2.8. Le premier mode de balancement latéral du pont de Lourdes a une fréquence propre  $f_1 = 1.06 \text{ Hz}$ , ce qui limite le domaine de validité de l'approximation à  $\alpha \leq 6 \cdot 10^{-4} \text{ s/m}$ . Au delà, on constate que l'écart entre la formule approchée et la règle de recombinaison complète devient significatif.

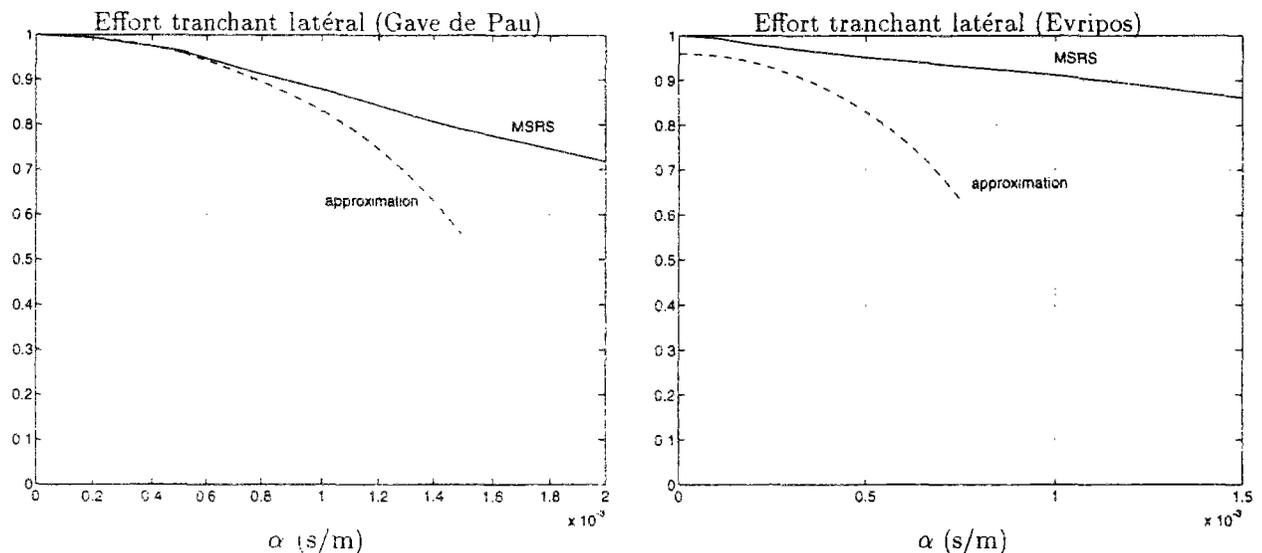


FIG. 2.8 - *Mouvements latéraux : effort tranchant en pied de pile centrale pour le pont sur le Gave de Pau (à gauche) et en pied de pile de droite pour le pont d'Evripis (à droite).  $V = \infty$ .*

Remarquons que pour des ponts souples, les modes supérieurs peuvent très bien se situer dans le spectre excité par le séisme et contribuer ainsi significativement à la réponse ou en tout cas à la réponse marginale due aux variations spatiales des mouvements de sol. On montre grâce notamment aux  $\Delta_r$ , que l'effort tranchant en pied de pile du pont à haubans d'Evripis soumis à une excitation latérale, résulte essentiellement des six modes tracés sur la Figure 2.11. On constate sur la Figure 2.8 que même pour de très faibles variations spatiales, il existe un écart entre la formule approchée et la règle MSRS. Cela est dû au couplage, dont la formule approchée (2.45) ne tient pas compte, entre les modes dont les fréquences sont relativement proches. De plus certaines pulsations propres cessent rapidement de satisfaire au critère  $\alpha \omega_r L \ll 1$

Notons également que le phénomène de passage d'onde a un effet dissymétrique dû au couplage entre les modes [45] que le développement limité ne restitue pas du fait des hypothèses que nous avons adoptées. La Figure 2.9 illustre cet effet dissymétrique sur la réponse fournie par la règle MSRS. Pour le pont d'Evripis, l'écart avec l'approximation devient considérable pour de très faibles vitesses apparentes (qui sortent bien entendu des bornes de validité de la formule approchée). La tendance des deux formules est toutefois comparable pour des grandes vitesses apparentes de propagation. Une méthode dédiée au cas des fortes variations spatiales est présentée plus loin dans ce chapitre.

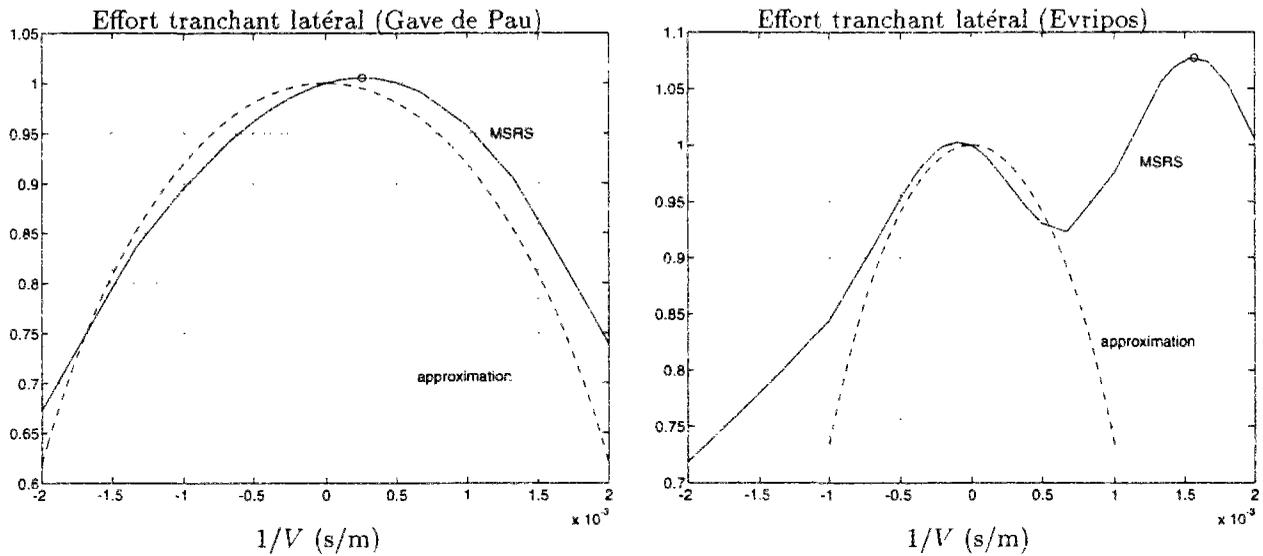


FIG. 2.9 - *Mouvements latéraux. Effet du passage d'onde sur l'effort tranchant en pied de pile centrale sur le pont sur le Gave de Pau (à gauche) et en pied d'une des piles centrales pour le pont d'Evripis (à droite).  $\alpha = 0$ .*

### 2.3.3 Mouvements verticaux

L'équation (2.52) convient également aux mouvements verticaux. Nous nous intéressons plus particulièrement aux moments et aux efforts tranchants dans le tablier. Puisque les piles sont très rigides en compression vis-à-vis de la flexion du tablier (si l'interaction sol-structure est négligeable), le problème est en fait celui d'une poutre vibrant verticalement avec des conditions aux limites dépendant de la nature des liaisons du tablier sur les piles: appui simple si le tablier est rotulé sur la pile, ressort en rotation égal à la rigidité de la pile en flexion en cas d'encastrement du tablier sur la pile.

Si le tablier est constitué de travées indépendantes, alors chacune d'elles peut être étudiée séparément. Dans ce cas, Harichandran *et al.* [62] ont montré que la variabilité spatiale des

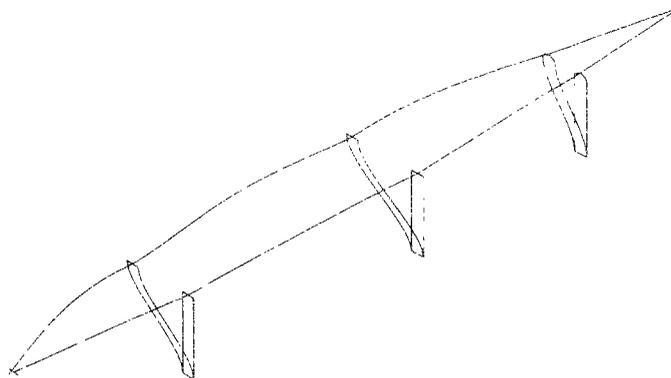


FIG. 2.10 - *Pont sur le Gave de Pau, Lourdes: premier mode de balancement latéral*

ondes sismiques diminue la réponse. Nous nous attendons à un tel résultat puisque l'essentiel de la réponse est contenu dans le premier mode de flexion dont on montre facilement que ses deux facteurs de participation locaux sont de même signe.

La situation est un peu plus compliquée pour des travées continues et l'évolution de la réponse dépend de la rigidité de la poutre [63, 46]. Dans le cas de mouvements de sol uniformes et verticaux, les modes les plus excités sont ceux dont la déformée modale reste d'un même côté de la fibre moyenne. Pour ces modes, le moment de flexion est en général maximal sur appui, la poutre y présentant une plus grande courbure. Le facteur de participation usuel décroît rapidement pour des modes dont la déformée alterne au dessus et en dessous de la fibre moyenne. Ces modes, qui sont donc moins sollicités, ont leurs moments maximaux loin des appuis. Lorsque la variabilité spatiale des ondes sismiques augmente, on s'attend donc à ce que les moments sur appuis diminuent (en même temps que la participation des modes restant d'un seul côté de la fibre moyenne). On ne peut *a priori* rien dire sur les moments en travée. La Figure 2.12 illustre ce fait pour deux tabliers de pont en béton précontraint. On y a représenté l'enveloppe des moments résultant d'actions sismiques verticales uniformes (en trait plein) et partiellement corrélées en espace (en tirets):  $\alpha = 10^{-3}s/m$  et  $V = \infty$ ,  $\alpha = 2.10^{-3}s/m$  et  $V = \infty$ ,  $\alpha = 0$  et  $V = 500m/s$ . Les emplacements des appuis sont soulignés par des triangles ( $\nabla$ ). Les effets de la variabilité spatiale sur les efforts tranchants du tablier (Figure 2.13) ne montrent aucune tendance particulière.

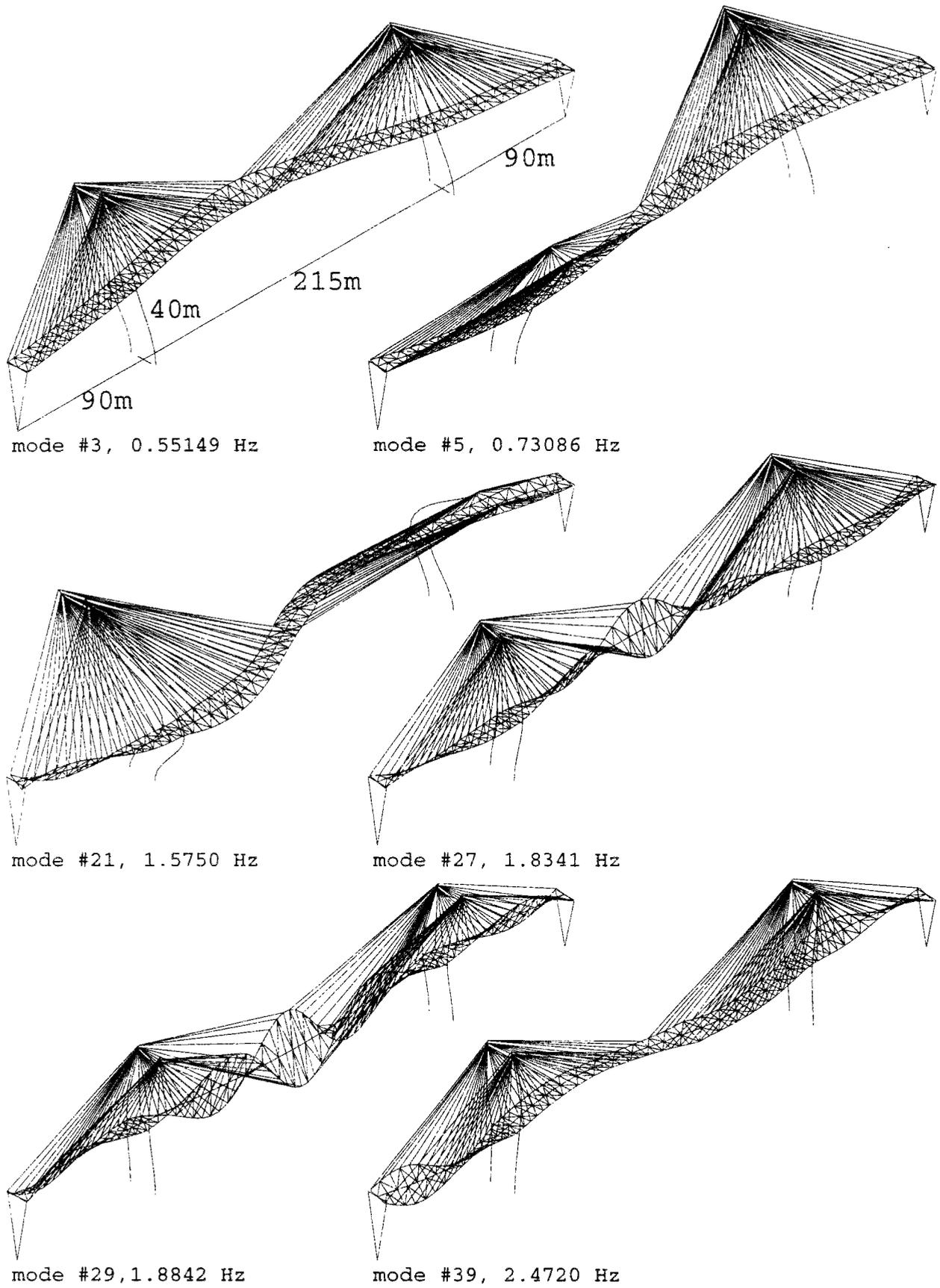


FIG. 2.11 - Pont à haubans d'Evrinos en Grèce : modes contrôlant la réponse latérale

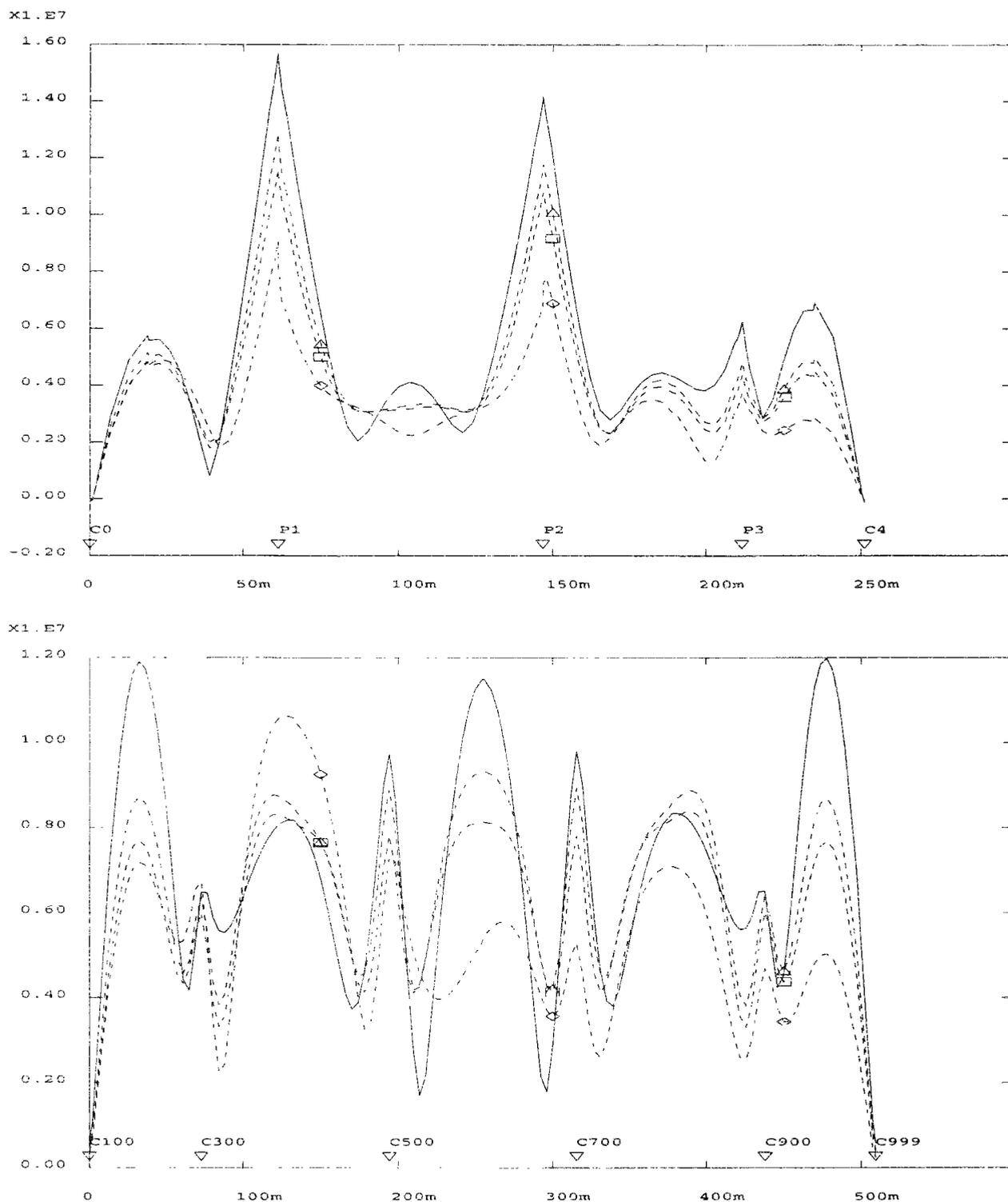


FIG. 2.12 - Mouvements verticaux : Moment fléchissant le long du tablier. Pont à quatre travées sur le Gave de Pau (en haut) et viaduc à cinq travées de Carrières (en bas).  $\Delta$ :  $\alpha = 10^{-3} \text{s/m}$ ,  $V = \infty$ ;  $\diamond$ :  $\alpha = 2.10^{-3} \text{s/m}$ ,  $V = \infty$ ;  $\square$ :  $\alpha = 0$ ,  $V = 500 \text{m/s}$

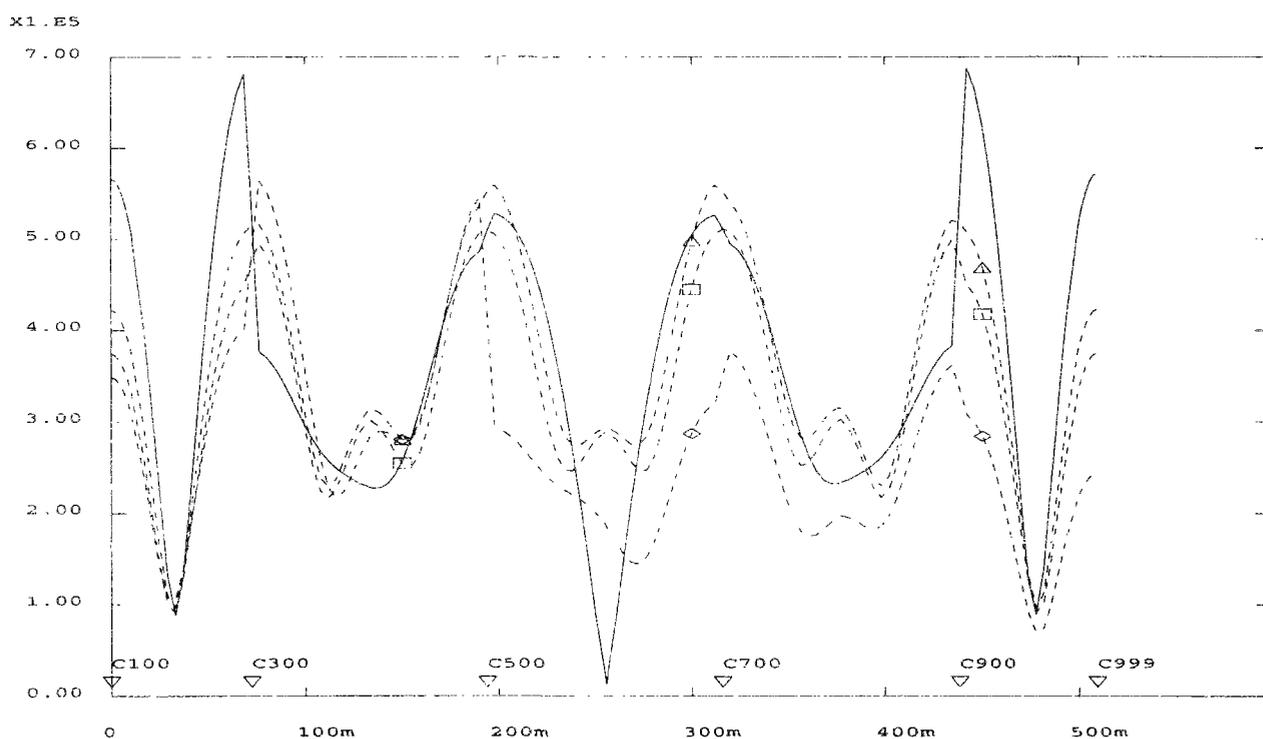
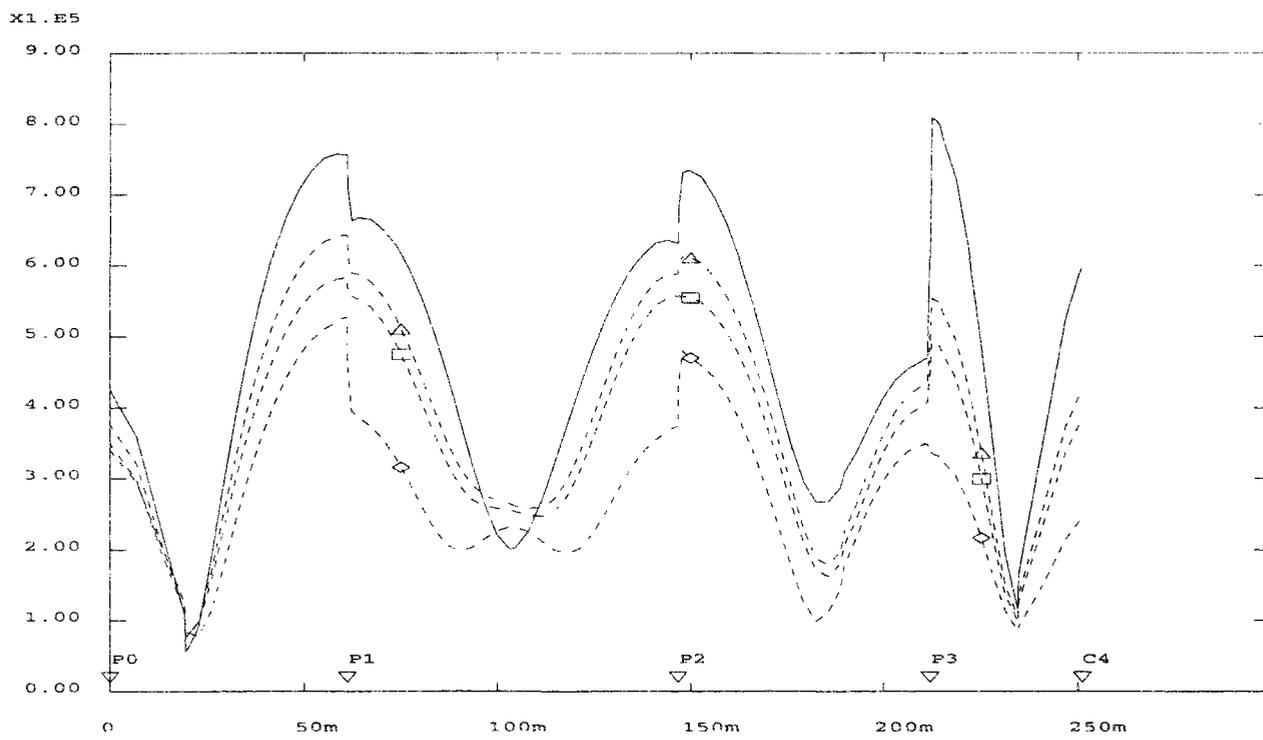


FIG. 2.13 - *Mouvements verticaux : Effort tranchant vertical le long du tablier. Pont à quatre travées sur le Gave de Pau (en haut) et pont à cinq travées de Carrières (en bas).  $\Delta$ :  $\alpha = 10^{-3}s/m$ ,  $V = \infty$ ;  $\diamond$ :  $\alpha = 2.10^{-3}s/m$ ,  $V = \infty$ ;  $\square$ :  $\alpha = 0$ ,  $V = 500m/s$*

## 2.4 Critère de suffisance du nombre de modes

Dans l'analyse sismique conventionnelle, on utilise le concept de masse modale sismique pour rendre compte de la suffisance du nombre de modes propres calculés pour décrire convenablement la réponse de la structure. Pour une direction d'excitation donnée, on définit la masse sismique d'un mode  $r$  comme suit [37] :

$$M^r = m_r \gamma_r^2 \quad (2.53)$$

Nous rappelons ci-dessous, que le cumul des masses modales sismiques des modes propres calculés pour l'analyse donne une mesure de leur potentiel à décrire le vecteur d'entraînement  $\mathbf{U}$  mais aussi l'effort tranchant en pied d'ouvrage pour une accélération uniforme du sol. Il est bien connu que la somme des masses sismiques de la base complète des modes propres restitue la masse totale de l'ouvrage. On convient dans la pratique de garder un ensemble de modes propres dont le cumul des masses sismiques atteint au moins 90% de la masse totale de l'ouvrage.

La prise en compte des accélérations non synchrones aux appuis de la structure requiert une extension du concept de masse modale sismique. Dans ce qui suit, nous proposons un critère permettant d'estimer la qualité de la description modale des forces aux appuis.

On peut extraire des transformées de Fourier des équations (2.1) et (2.3), le vecteur des forces imposées par le sol sur la structure (efforts tranchants en pied de pile) dans le domaine fréquentiel :

$$\mathbf{F}(\omega) = [\mathbf{K}_{ff} + i\omega\mathbf{C}_{ff} - \omega^2\mathbf{M}_{ff}] \mathbf{Z}(\omega) + [\mathbf{K}_{sf}^T + i\omega\mathbf{C}_{sf}^T - \omega^2\mathbf{M}_{sf}^T] \mathbf{X}(\omega) \quad (2.54)$$

où

$$\mathbf{K}_{ff} = \mathbf{K}_f - \mathbf{K}_{sf}^T \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{K}_{sf} \quad \mathbf{C}_{ff} = \mathbf{C}_f - \mathbf{C}_{sf}^T \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{K}_{sf} \quad \mathbf{M}_{ff} = \mathbf{M}_f - \mathbf{M}_{sf}^T \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{K}_{sf} \quad (2.55)$$

En négligeant les termes d'inertie et d'amortissement visqueux dus aux fondations et à leur couplage avec la structure devant les termes de rigidité, l'équation (2.54) se réduit à :

$$\mathbf{F}(\omega) = \mathbf{K}_{ff} \mathbf{Z}(\omega) + \mathbf{K}_{sf}^T \mathbf{X}(\omega) \quad (2.56)$$

Le terme purement dynamique de la réponse s'exprime sur la base complète des NM modes :

$$\mathbf{X}(\omega) = \sum_{r=1}^{NM} \sum_{k=1}^{NS} \gamma_{rk} s_k^r(\omega) \phi_r \quad (2.57)$$

et puisque

$$\mathbf{K}_{sf}^T \phi_r = (-\mathbf{K}_{sf}^T \mathbf{K}_s^{-1})(-\mathbf{K}_s \phi_r) = \tilde{\mathbf{R}}^T (-\omega_r^2 \mathbf{M}_s \phi_r) = \omega_r^2 m_r [\gamma_{r,1} \cdots \gamma_{r,NS}]^T \quad (2.58)$$

l'effort tranchant de la  $l^{\text{ème}}$  pile,  $F_l$  ( $\mathbf{F} = [F_1 \cdots F_{NS}]^T$ ) est donné par :

$$F_l(\omega) = \sum_{k=1}^{NS} \mathbf{K}_{ff,lk} z_k(\omega) + \sum_{r=1}^{NM} \sum_{k=1}^{NS} m_r \gamma_{rl} \gamma_{rk} (\omega_r^2 s_k^r(\omega)) \quad (2.59)$$

Parmi les degrés de corrélations possibles des mouvements de sol aux appuis, nous envisageons les cas extrêmes d'un mouvement uniforme et d'un mouvement totalement décorrélé des fondations de l'ouvrage.

1. Dans le cas d'un mouvement de sol uniforme :  $z_k(\omega) = z(\omega)$  et le terme pseudo-statique disparaît ( $\sum_{k=1}^{NS} \mathbf{K}_{ff,lk} = 0$ ). De même,  $s_k^r(\omega) = s^r(\omega)$  et le terme dynamique se réduit d'autre part à :

$$F_l(\omega) = \sum_{r=1}^{NM} m_r \gamma_{rl} \gamma_r \left( \omega_r^2 s^r(\omega) \right) \quad (2.60)$$

où  $\gamma_r = \sum_{k=1}^{NS} \gamma_{rk}$ . L'effort tranchant total en pied d'ouvrage est alors :

$$F(\omega) = \sum_{l=1}^{NS} F_l(\omega) = \sum_{r=1}^{NM} m_r \gamma_r^2 \left( \omega_r^2 s^r(\omega) \right) \quad (2.61)$$

d'où, en négligeant les corrélations inter-modales, l'espérance de l'effort tranchant maximal s'obtient par la formule

$$E [ |F|_{max} ]^2 = \sum_{r=1}^{NM} (m_r \gamma_r^2)^2 (A(\omega_r, \zeta_r))^2 \quad (2.62)$$

dans laquelle  $A(\omega_r, \zeta_r)$  est la réponse élastique en pseudo-accélération. La masse modale sismique apparaît ici naturellement. Elle indique l'importance de la contribution modale, à pondérer toutefois par le contenu spectral de l'excitation  $A(\omega_r, \zeta_r)$ .

2. Cas de mouvements totalement incohérent des fondations : les coefficients de corrélation (2.29) sont, en supposant l'indépendance statistique entre les termes pseudo-statiques et les termes dynamiques ainsi qu'entre les réponses des différents modes :

$$\rho_{z_k z_l} = \delta_{kl} \quad \rho_{z_k s_i^r} = 0 \quad \rho_{s_k^r s_l^s} = \delta_{kl} \delta_{rs} \quad (\delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \text{ et } 0 \text{ sinon}) \quad (2.63)$$

On en déduit l'effort tranchant maximal en pied de chacune des piles :

$$E [ |F_l|_{max} ]^2 = \sum_{k=1}^{NS} (\mathbf{K}_{ff,lk})^2 z_{max}^2 + \sum_{r=1}^{NM} \sum_{k=1}^{NS} (m_r \gamma_{rl} \gamma_{rk})^2 A(\omega_r, \zeta_r)^2 \quad (2.64)$$

Finalement en additionnant l'ensemble de ces efforts tranchants en pied de piles, on obtient :

$$\sum_{l=1}^{NS} E [ |F_l|_{max} ]^2 = \left[ \sum_{k,l=1}^{NS} (\mathbf{K}_{ff,lk})^2 \right] z_{max}^2 + \sum_{r=1}^{NM} \left[ m_r \sum_{k=1}^{NS} \gamma_{rk}^2 \right]^2 A(\omega_r, \zeta_r)^2 \quad (2.65)$$

On introduit alors naturellement une masse modale sismique pour mouvements de fondations totalement incohérents :

$$M_{TI}^r = m_r \sum_{k=1}^{NS} \gamma_{rk}^2 \quad (2.66)$$

Notons que puisque  $\tilde{\mathbf{R}}_k = \sum_{r=1}^{NM} \gamma_{rk} \phi_r$  on a aussi  $\tilde{\mathbf{R}}_k^T \mathbf{M}_s \tilde{\mathbf{R}}_k = \sum_{r=1}^{NM} m_r \gamma_{rk}^2$  et donc

$$\sum_{k=1}^{NS} \tilde{\mathbf{R}}_k^T \mathbf{M}_s \tilde{\mathbf{R}}_k = \sum_{r=1}^{NM} M_{TI}^r \quad (2.67)$$

Dorénavant, nous désignons le membre de gauche  $\sum_{k=1}^{NS} \tilde{\mathbf{R}}_k^T \mathbf{M}_s \tilde{\mathbf{R}}_k$  sous le nom de “masse pseudo-statique”. Elle se calcule facilement à partir de la matrice de masse de la structure  $\mathbf{M}_s$  et des déformées pseudo-statiques  $\tilde{\mathbf{R}}_k$ , un peu comme on calculerait la masse totale de la structure  $M_T = \mathbf{U}^T \mathbf{M}_s \mathbf{U}$ .

Puisque les premiers modes contiennent l’essentiel de la réponse, il est de pratique courante de tronquer la base modale, en ne gardant qu’un petit nombre ( $NM' \ll NM$ ) de modes propres. En ce qui concerne l’effort en pied de piles, la troncature peut se justifier dans les deux cas de corrélation spatiale extrêmes évoqués ci-dessus par les ratios suivants :

1. Le ratio des masses modales sismiques cumulées sur la masse totale de l’ouvrage :

$$r_{TC} = \frac{\sum_{r=1}^{NM'} M^r}{M_T} \quad (2.68)$$

2. Le ratio des masses modales sismiques pour mouvements totalement décorrélés sur la “masse pseudo-statique” :

$$r_{TI} = \frac{\sum_{r=1}^{NM'} M_{TI}^r}{\sum_{k=1}^{NS} \tilde{\mathbf{R}}_k^T \mathbf{M}_s \tilde{\mathbf{R}}_k} \quad (2.69)$$

Ces deux rapports indiquent le degré de restitution des efforts tranchants en pied de piles respectivement pour un mouvement de sol uniforme et pour des mouvements totalement décorrélés des fondations. Plus ces rapports sont proches de l’unité, meilleure est la restitution. On pourra par exemple proposer que  $r_{TC}$  soit supérieur à 90% comme c’est l’usage et que  $r_{TI}$ , généralement inférieur au précédent et qui n’offre d’intérêt que pour des mouvements décorrélés, soit supérieur à 80%.

L’erreur de troncature dans l’équation (2.62) est en effet :

$$err_{NM'} = \sum_{r=NM'+1}^{NM} (M^r A(\omega_r, \zeta_r))^2 \quad (2.70)$$

et comme le spectre linéaire en pseudo-accélération décroît (ou est stationnaire) dans les hautes fréquences,

$$err_{NM'} \leq (M_T A(\omega_{NM'}, \zeta_{NM'}))^2 \sum_{r=NM'+1}^{NM} \left( \frac{M^r}{M_T} \right)^2 \leq (M_T A(\omega_{NM'}, \zeta_{NM'}))^2 \sum_{r=NM'+1}^{NM} \frac{M^r}{M_T} \quad (2.71)$$

ou encore

$$err_{NM'} \leq (M_T A(\omega_{NM'}, \zeta_{NM'}))^2 (1 - r_{TC}) \quad (2.72)$$

De la même façon, pour des accélérations totalement incohérentes des fondations, l’erreur de troncature (2.65) est majorée par :

$$err_{NM'} \leq \left( \sum_{k=1}^{NS} \tilde{\mathbf{R}}_k^T \mathbf{M}_s \tilde{\mathbf{R}}_k \right)^2 A(\omega_{NM'}, \zeta_{NM'})^2 (1 - r_{TI}) \quad (2.73)$$

Remarquons qu’il est possible de trouver un majorant de l’erreur de troncature pour tous les cas intermédiaires de variabilité spatiale de mouvements sismiques (voir annexe B.2). On a en particulier intérêt à ce que le ratio  $r_{TI}$  soit proche de l’unité. La Figure 2.14 montre ces ratios

en fonction du nombre de modes pour le pont sur le Gave de Pau (solution béton précontraint) :  $r_{TC}$  converge plus vite que  $r_{TI}$  vers l'unité, ce qui semble indiquer que lorsqu'on introduit des mouvements sismiques variables dans l'espace, il faille inclure un plus grand nombre de modes pour bien représenter la réponse.

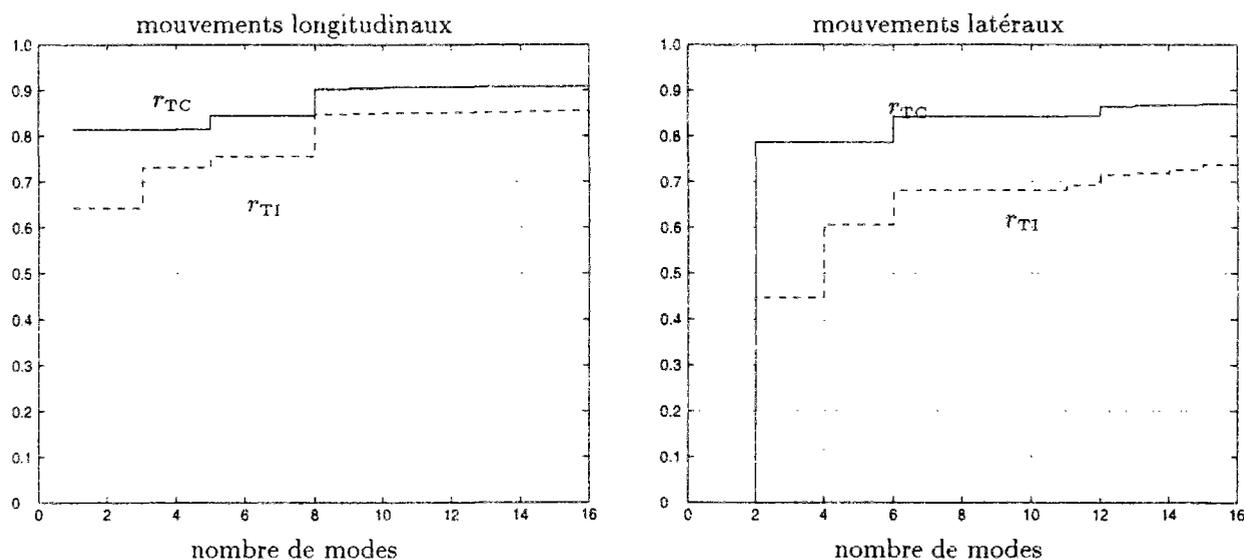


FIG. 2.14 - Pont sur le Gave de Pau, Ratios de masses modales sismiques. En traits pleins: mouvements uniformes de sol ( $r_{TC}$ ). En tirets: mouvements de fondations totalement incohérents ( $r_{TI}$ ). A gauche: mouvements longitudinaux, à droite: mouvements latéraux

## 2.5 Variations spatiales grandes et/ou incertaines

La formule approchée utilisée dans les paragraphes précédents est limitée aux petites variations spatiales du mouvement sismique et aux structures présentant de faibles corrélations inter-modales. D'autre part, comme nous l'avons rappelé au premier chapitre, les paramètres des modèles de variabilité spatiale sont en général mal connus, en dehors de quelques sites très instrumentés comme celui de Lotung à Taiwan. Si l'épicentre du séisme est incertain, la vitesse apparente des ondes l'est également et varie typiquement entre la célérité des ondes dans le substratum rocheux (si les ondes se propagent selon la ligne définie par les fondations) et l'infini (si les ondes se propagent perpendiculairement à cette ligne). La perte de cohérence, mesurée par le paramètre  $\alpha$  dans le modèle de Luco et Wong (1.41) est aussi très incertaine. On lui accorde souvent des bornes de façon empirique.

Afin que le dimensionnement soit conservatif, on peut donc chercher la plus grande valeur de la réponse maximale donnée par la règle MSRS (2.28) lorsque les paramètres du modèle de variabilité spatiale évoluent librement dans un domaine de valeurs physiquement acceptables. Pour un modèle de variabilité donné, par exemple celui défini par la fonction de cohérence (2.34), les coefficients de corrélation et de ce fait la réponse maximale espérée (2.28) sont des fonctions non-linéaires mais régulières des paramètres du modèle. Il existe des techniques de recherche de maxima de telles fonctions qui sont d'autant plus efficaces que l'on possède des dérivées d'ordre élevé de la fonction. Nous montrons dans un premier temps, qu'il est possible de calculer avec un

faible surcoût les dérivées premières et secondes de la réponse maximale espérée par rapport aux paramètres  $\alpha$  et  $1/V$  du modèle de variabilité spatiale (2.34), puis nous utilisons ces résultats dans un algorithme très simple d'optimisation.

### 2.5.1 Calcul des sensibilités de la réponse aux paramètres du modèle de variabilité

Nous commençons par calculer les dérivées premières et secondes de la fonction de cohérence par rapport aux paramètres  $\alpha$  et  $1/V$  :

$$\frac{\partial \Gamma_{AB}}{\partial \alpha}(\omega) = -2\alpha(\omega d_{AB})^2 \Gamma_{AB}(\omega) \quad \frac{\partial \Gamma_{AB}}{\partial (1/V)}(\omega) = -i\omega d_{AB} \Gamma_{AB}(\omega) \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial^2 \Gamma_{AB}}{\partial \alpha^2}(\omega) = 2(\omega d_{AB})^2 \{2(\alpha \omega d_{AB})^2 - 1\} \Gamma_{AB}(\omega) \quad \frac{\partial^2 \Gamma_{AB}}{\partial (1/V)^2}(\omega) = -(\omega d_{AB})^2 \Gamma_{AB}(\omega) \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial^2 \Gamma_{AB}}{\partial \alpha \partial (1/V)}(\omega) = 2i\alpha(\omega d_{AB})^3 \Gamma_{AB}(\omega)$$

Nous profitons du fait que les coefficients de corrélations sont calculés numériquement par les formules (2.29) pour calculer simultanément leurs dérivées premières et secondes qui s'obtiennent tout simplement en remplaçant  $\Gamma$  par ses dérivées dans les numérateurs des équations (2.29). Pour l'intégration numérique, on pourra utiliser le schéma proposé dans [135] et rappelé en annexe A.2. Des dérivées des coefficients de corrélation, on déduit simplement les dérivées de l'espérance de la réponse maximale (2.28). Les calculs de la réponse maximale et de ses dérivées étant menés de front, le surcoût est faible.

### 2.5.2 Valeur maximale de la réponse

Pour simplifier l'écriture, nous notons  $\hat{\mathcal{E}}(\underline{\theta})$  l'espérance du maximum de la réponse donnée par la règle MSRS (2.28), pour un ensemble de  $\kappa$  paramètres contenus dans le vecteur  $\underline{\theta}$  (dans le modèle de Luco et Wong,  $\kappa = 2$  et  $\underline{\theta} = [\alpha \quad 1/V]^T$ ). Au voisinage d'un ensemble de paramètres  $\underline{\theta}^0$ , le développement au second ordre de la réponse s'écrit :

$$\hat{\mathcal{E}}(\underline{\theta}) = \hat{\mathcal{E}}(\underline{\theta}^0) + \nabla \hat{\mathcal{E}} \delta \underline{\theta} + \frac{1}{2} \delta \underline{\theta}^T \mathcal{H} \delta \underline{\theta} \quad (2.76)$$

où  $\delta \underline{\theta} = \underline{\theta} - \underline{\theta}^0$ ,  $\nabla \hat{\mathcal{E}}$  désigne le gradient et  $\mathcal{H}$  la matrice des dérivées secondes :

$$\nabla \hat{\mathcal{E}} = \left[ \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}}{\partial \theta_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}}{\partial \theta_\kappa} \right] \quad , \quad \mathcal{H}_{i,j} = \left[ \frac{\partial^2 \hat{\mathcal{E}}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \quad (2.77)$$

$\mathcal{H}$  est une petite matrice ( $\kappa \times \kappa$ ) qui se diagonalise de la manière suivante :

$$\mathbf{P}^T \mathcal{H} \mathbf{P} = \text{diag} \left\{ \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_\kappa \right\} \quad (2.78)$$

où  $\mathbf{P}$  est une matrice orthogonale de vecteurs propres  $\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1 | \mathbf{P}_2 | \dots | \mathbf{P}_\kappa]$ . Chaque vecteur propre donne la direction d'une courbure principale de  $\hat{\mathcal{E}}$ . Les valeurs propres  $\lambda_i$  sont les courbures principales. Définissons le vecteur des variations des paramètres dans le repère des axes

de courbures principales  $\underline{\delta\xi} = \mathbf{P}^T \underline{\delta\theta}$ . L'équation (2.76) s'écrit alors :

$$\hat{\mathcal{E}} = \hat{\mathcal{E}}^0 + \sum_{i=1}^{\kappa} (\nabla \hat{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{P}_i) \delta\xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_i (\delta\xi_i)^2 \quad (2.79)$$

Dans le repère des axes de courbures principales, chaque variable se traite indépendamment. Si l'équation (2.79) était globale, on ne pourrait trouver un maximum que si toutes les courbures  $\lambda_i$  étaient négatives, la solution étant alors donnée par l'ensemble des variations des paramètres de l'espace des courbures principales :  $\delta\xi_i = -(\nabla \hat{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{P}_i) / \lambda_i$ . Comme (2.79) n'est qu'une approximation locale, nous adoptons la stratégie suivante dans chacune des directions principales :

- Si  $\lambda_i < 0$  alors  $\delta\xi_i = -(\nabla \hat{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{P}_i) / \lambda_i$  (pour atteindre un maximum local dans cette direction) ou  $\delta\xi_i = \text{signe}(\nabla \hat{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{P}_i) \delta\xi_{max}$  (dans la direction des valeurs croissantes) en choisissant la plus petite en valeur absolue de ces deux quantités.
- Si  $\lambda_i \geq 0$  alors  $\delta\xi_i = \text{signe}(\nabla \hat{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{P}_i) \delta\xi_{max}$  (dans la direction des valeurs croissantes)

où  $\delta\xi_{max}$  est un pas maximum défini à l'avance. De retour dans l'espace original, ( $\underline{\delta\theta} = \mathbf{P} \underline{\delta\xi}$ ), on peut limiter les paramètres ( $\underline{\theta} = \underline{\theta}^0 + \underline{\delta\theta}$ ) à des valeurs physiquement acceptables ou à des bornes empiriques (par exemple  $\alpha \geq 0$ ,  $|V| \geq$  vitesse des ondes de cisaillement dans le substratum rocheux). On calcule alors la combinaison MSRS pour le nouvel ensemble de paramètres de variabilité spatiale en même temps que les dérivées premières et secondes. On réitère cette étape jusqu'à convergence.

### 2.5.3 Résultats numériques

On applique cette méthode pour trouver la valeur maximale de l'effort tranchant en pied de pile des deux ponts examinés plus haut. Les paramètres  $\alpha$  et  $V$  du modèle de variabilité spatiale (2.34) sont bornés de la manière suivante :

$$0 \leq \alpha \leq 2 \times 10^{-3} s/m \quad \text{et} \quad |V| \geq 200 m/s \quad (2.80)$$

Les valeurs maximales ainsi trouvées (en très peu d'itérations) sont indiquées sur la Figure 2.9 par de petits cercles (o). Le cas du pont d'Evripos nous met en garde contre un possible piège créé par la présence de maxima locaux et non globaux. Il est donc conseillé de chercher la solution à partir de plusieurs ensembles de valeurs initiales.

## 2.6 Effet de site

Jusqu'à présent nous avons omis d'inclure l'effet de site parmi les phénomènes influant sur la sensibilité des ouvrages. Cet effet est particulier à chaque configuration géologique et il est, rappelons le, indépendant de la distance entre appuis. Il est de ce fait difficile de produire des règles générales. Nous proposons ici d'illustrer l'effet de déphasage produit par un changement de nature de sol entre appuis. Der Kiureghian [44] a montré que le déphasage lié à l'effet de site peut avoir une importance non négligeable dans le cas de structures rigides (passages supérieurs d'autoroute, viaducs à travées courtes et moyennes). Pour des structures plus souples, le déphasage lié à l'effet de site diminue et le déphasage provoqué par la propagation de l'onde dans le sol devient prédominant. Nous avons choisi ici une structure intermédiaire, le pont sur

le Gave de Pau à Lourdes (solution à tablier en béton précontraint). Les conditions de sol sont représentées par leur classement en site AFPS  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  ou  $S_3$ . Nous envisageons deux situations géologiques, la première en imposant les conditions de site réelles, la seconde en imposant des variations amplifiées des conditions de site (voir le Tableau 2.1 pour l'intitulé des sites AFPS correspondants et l'annexe C pour la définition des appuis). Nous avons effectué

appuis	Culée $C_0$	Pile $P_1$	Pile $P_2$	Pile $P_3$	Culée $C_4$
cas 1 (réel)	$S_1$	$S_1$	$S_2$	$S_2$	$S_2$
cas 2 (amplifié)	$S_0$	$S_0$	$S_3$	$S_3$	$S_0$

TAB. 2.1 - Conditions de sites aux appuis

deux types de calcul, l'un (noté  $MSRS^\theta$ ) incorporant le déphasage lié à l'effet de site évalué selon la méthode présentée au paragraphe 1.3.2 en utilisant les fonctions de transfert du double filtre de Clough et Penzien conformes aux spectres de réponse AFPS (voir Tableau 1.3), l'autre calcul (noté simplement  $MSRS$ ) n'incluant pas ce déphasage dans les coefficients de corrélation. Les deux calculs prennent en compte l'amplitude des mouvements de sol à chaque appui par l'intermédiaire des spectres AFPS spécifiques aux conditions géologiques sous chaque fondation, conformément à la formule de recombinaison (2.28). Le tableau 2.2 présente le rapport des résultats de ces deux calculs pour l'effort tranchant longitudinal ( $V_x$ ) et latéral ( $V_y$ ) au pied de la pile  $P_2$ , ainsi que le glissement ( $GL_x$ ) du tablier sur la culée  $C_4$ . On constate que pour cet

	$V_y$	$V_x$	$GL_x$
cas 1 : $MSRS^\theta/MSRS$	1.00	0.86	1.00
cas 2 : $MSRS^\theta/MSRS$	1.01	1.18	1.09

TAB. 2.2 - Influence du déphasage lié à l'effet de site

ouvrage, l'effort tranchant latéral en pied de pile  $P_2$  n'est que peu modifié par le déphasage lié à l'effet de site. L'effort tranchant longitudinal est lui affecté du fait de la différence de situation géologique entre les piles  $P_1$  et  $P_2$  liées en tête presque de façon rigide par le tablier (la pile  $P_3$  n'intervient pas puisque le tablier glisse sur elle librement). Seul le calcul permet de prévoir si l'effet du déphasage est pénalisant ou non. En ce qui concerne le glissement relatif du tablier sur la culée  $C_4$ , seul le deuxième cas donne de l'importance au déphasage ce qui s'explique par la grande différence de situation géologique pour la culée  $C_4$  et la pile  $P_2$ .

L'Eurocode 8 [50] ne tient pas compte du déphasage lié à l'effet de site, par contre il propose une règle pour le choix du niveau d'action sismique pour des structures dont les fondations reposent sur des sites de nature différente, sous la forme d'une moyenne des spectres de réponse pondérés par une estimation du niveau d'effort au droit de chaque appui. Soit  $r_k$  la réaction à la base de la pile ou culée  $k$  à un déplacement uniforme et unitaire du tablier. L'Eurocode 8 propose le spectre de réponse moyen suivant :

$$S_{moyen}(T) = \sum_{k=1}^{NS} \left( \frac{r_k}{\sum_{k=1}^{NS} r_k} \right) S_k(T) \quad (2.81)$$

Cette définition pose un problème lorsque le tablier est bloqué par un appui sans souplesse. La réaction à cet appui est infinie et le spectre moyen est celui du site de l'appui en question.

Afin de comparer les réponses obtenues en utilisant ce spectre moyen et celles obtenues par la méthode MSRS, nous faisons l'hypothèse de mouvements aux appuis parfaitement cohérents (*i.e.*  $\Gamma_{kl} = 1$  pour tout couple de fondations  $k, l$ ). Les sites géologiques sous appuis sont toutefois différents. Nous avons choisi d'étudier les effets des mouvements longitudinaux du sol sur l'effort tranchant en pied de pile centrale du pont sur le Gave de Pau, version béton précontraint, d'une part parce que le tablier n'étant lié qu'à des piles souples, la définition du spectre moyen ne pose pas le problème évoqué ci-dessus et d'autre part, parce que les piles sont suffisamment souples pour que les termes pseudo-statiques soient négligeables (le problème de leur intégration dans les résultats selon le règlement européen ne se pose pas). Le tablier est encastré dans les piles  $P_1$  et  $P_2$  et glisse librement sur les culées et la pile  $P_3$ . Les seules réactions à un déplacement longitudinal statique du tablier sont en pied des piles  $P_1$  et  $P_2$ . On a en particulier

$$\frac{r_{P_1}}{r_{P_1} + r_{P_2}} = 0.495 \quad \frac{r_{P_2}}{r_{P_1} + r_{P_2}} = 0.505$$

Les conditions de site en dehors des appuis  $P_1$  et  $P_2$  ne jouent aucun rôle dans cet exemple. Le Tableau 2.3 donne des résultats pour quatre situations géologiques différentes. Le spectre moyen est utilisé avec la méthode de recombinaison quadratique complète *CQC* [43]. On constate dans cet exemple, que la méthode du spectre moyen proposée par l'Eurocode sous-estime largement la réponse prévue par la règle MSRS dans les cas de changement important de nature de sol.

site pile $P_1$	site pile $P_2$	(EC8 <i>i.e.</i> spectre moyen et <i>CQC</i> )/MSRS
$S_0$	$S_0$	0.98
$S_0$	$S_3$	0.84
$S_3$	$S_0$	0.84
$S_0$	$S_0$	0.99

TAB. 2.3 - Comparaison de la règle MSRS et de la règle du spectre moyen de l'EC8

## 2.7 Validation expérimentale

Dans les sections précédentes, nous avons fait un certain nombre d'hypothèses quant aux mouvements sismiques du sol et leur influence sur les structures étendues. Quelques ponts californiens ont été instrumentés dans le cadre du Californian Strong Motion Instrumentation Program (CSMIP) et leurs réponses à de fortes secousses sismiques, nous permettent de valider ou de nuancer certaines de nos hypothèses. Les données sont toutefois encore peu nombreuses et leur interprétation en matière de sensibilité des ouvrages à la variabilité spatiale des ondes sismiques difficile. Il manque à l'heure actuelle des enregistrements effectués simultanément sur un réseau spatial de capteurs et sur un ouvrage voisin, qui permettraient de mesurer pour un même évènement les variations spatiales des ondes et leur effet sur la structure.

Bard [18] analyse les réponses du Rio Dell Overpass situé dans une zone très active en Californie et pour lequel on dispose de six enregistrements sismiques et du Meloland Road Overpass en Californie du Sud dont l'enregistrement a été obtenu lors du séisme d'Imperial Valley en 1979. Ces deux ouvrages sont des passages supérieurs semblables à celui représenté à la Figure 1.10. Les appuis du Rio Dell présentent en outre un biais important par rapport

au tablier. Bard constate que les déphasages entre appuis correspondent à des vitesses de propagation supérieures à 1500 m/s et donc bien trop rapides pour que le phénomène de passage d'onde influe sur la réponse de la structure. Par contre, on mesure une forte perte de cohérence entre les mouvements verticaux des appuis les plus distants du Rio Dell Overpass (à 80m l'un de l'autre), pour des fréquences supérieures à 3Hz. La cohérence des mouvements horizontaux dépend, quant à elle, beaucoup de la direction des mouvements sismiques : la cohérence est meilleure entre des points alignés avec la direction principale de ces mouvements. De manière générale, la perte de cohérence est plus importante pour les mouvements verticaux que pour les mouvements horizontaux. Enfin, la comparaison des mouvements en champ libre et des mouvements aux appuis montre que l'hypothèse selon laquelle les mouvements de sol sont imposés à la structure (hypothèse d'une interaction sol-structure négligeable), n'est que partiellement vérifiée. Les accélérations verticales des appuis de ce petit ouvrage sont en effet amplifiées de 50 à 100% du fait de l'interaction, les mouvements transverses sont également amplifiés sur les appuis latéraux sur talus mais pas sur l'appui central et enfin les mouvements longitudinaux à la base de l'appui central sont, quant à eux, réduits par rapport aux mouvements en champ libre. Ces phénomènes doivent pouvoir s'expliquer par l'interaction entre le sol (en particulier les talus) et une structure relativement rigide du fait de sa petite taille ou encore par l'effet de site associé aux talus.

Werner *et al.* [128] proposent une technique d'identification pour structures multi-supportées en adoptant une description des mouvements de la structure semblable à celle présentée dans ce chapitre. Malheureusement la méthode est appliquée au Meloland Road Overpass, passage supérieur d'autoroute, pour lequel les déplacements différentiels aux appuis ne sont pas suffisamment importants pour que le caractère multi-supporté de l'identification apporte une amélioration significative.

Wilson *et al.* [131] ont remarqué la présence d'ondes de Rayleigh d'une période de 3 secondes dans les enregistrements effectués sur le San Juan Bautista Bridge en Californie durant le séisme de Coyote Lake (1979). Cette composante basse fréquence du déplacement peut avoir un effet sur la réponse, au moins pseudo-statique, de structures très étendues. En utilisant une technique d'identification linéaire couplé avec un modèle par éléments finis, Wilson constate dans un article ultérieur [130], que la réponse de l'ouvrage s'écarte à divers titres d'une réponse linéaire élastique: blocage des appuis, dissipation énergétique probablement liée au comportement non-linéaire des matériaux. Nous reviendrons sur des techniques d'analyse non-linéaire des ouvrages d'art dans les chapitres suivants.

## 2.8 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons examiné la sensibilité des ouvrages d'art à la variabilité spatiale des ondes sismiques. Pour cela nous avons développé à partir de la règle de recombinaison MSRS, une formule approchée dont le domaine de validité est restreint aux petites variations spatiales. Elle permet un calcul rapide qui peut-être utile pour évaluer la pertinence des choix structuraux lors de la conception de l'ouvrage. Par le biais de cette formule nous obtenons également un éclairage intéressant sur la sensibilité des diverses composantes de la réponse, en fonction de la direction des mouvements sismiques :

- Pour des efforts internes ou des mouvements relatifs (glissements du tablier sur une culée ou une pile), la composante pseudo-statique de la réponse n'est affectée au premier ordre

que par la variabilité spatiale des mouvements longitudinaux du sol et cela d'autant plus que la structure est rigide dans cette direction.

- La variabilité spatiale des ondes diminue la réponse des modes de balancement fondamentaux (latéraux et longitudinaux), dont la déformée se situe d'un seul côté de la structure au repos et fait apparaître la contribution des modes antisymétriques.
- La formule approchée donne une expression simple à calculer de l'effet global sur la structure, bilan de la composante pseudo-statique et de la composante modale.

Il apparaît que pour tenir compte des mouvements asynchrones des fondations, un plus grand nombre de modes propres de la structure est nécessaire. A cet effet, nous étendons le concept de masse modale sismique, en proposant un nouveau critère de suffisance de l'ensemble des modes propres retenus pour l'analyse.

Les grandes variations spatiales des ondes sismiques sortent du cadre de la formule approchée. C'est en particulier le cas pour des ouvrages de grande portée, tels que les ponts suspendus ou haubanés. On a alors recours à la règle de recombinaison MSRS. Cette dernière s'appuie sur un modèle (au choix) de variabilité spatiale. Les paramètres de ces modèles ne sont connus que très approximativement et peuvent varier de façon significative d'un site à l'autre. Pour pallier cette incertitude, nous proposons un algorithme de recherche du maximum de la réponse pour des paramètres du modèle de variabilité spatiale évoluant librement dans un domaine physiquement acceptable. On se place ainsi du côté de la sécurité. L'algorithme s'appuie sur les dérivées premières et secondes de la réponse maximale espérée par rapport aux paramètres du modèle de variabilité spatiale. Le calcul de ces dérivées est mené de front avec celui de la réponse et de ce fait, n'occasionne qu'un faible surcoût.

Enfin, nous rappelons que les effets de site participent aux variations d'amplitude et de phase du mouvement sismique entre les appuis de la structure. Ces effets sont particulièrement importants pour des ouvrages de petite ou moyenne taille situés dans des zones de géologie rapidement variable.

En génie parasismique, la plus grande incertitude provient des mouvements de sol. En particulier, on dispose de peu d'informations en matière de variabilité spatiale en dehors de zones très instrumentées. Les outils présentés dans ce chapitre devraient permettre aux ingénieurs d'aborder le problème de façon rationnelle et simple.



## Deuxième partie

# Méthodes de calcul en dynamique stochastique non-linéaire



## Chapitre 3

# Spectre de réponse pour structures à non-linéarités localisées<sup>1</sup>

Les méthodes modernes de conception parasismique autorisent les structures à pénétrer largement dans le domaine non-linéaire de leur comportement mécanique. Le coût des ouvrages à la construction en est réduit. Il faut toutefois s'assurer de leur résistance à l'état limite ultime et pour cela il est nécessaire de connaître le degré d'incursion dans le domaine post-élastique. Si le spectre de réponse inélastique associé à un coefficient de comportement est un outil de dimensionnement d'oscillateurs élasto-plastiques parfaits ou de structures qui s'en rapprochent, il ne permet de prévoir le maximum de la réponse non-linéaire de la structure que dans la mesure où celle-ci a été dimensionnée au plus juste de façon à ce que la ductilité appelée égale la capacité en ductilité. Seule une analyse temporelle non-linéaire permet aujourd'hui d'appréhender la réponse de systèmes complexes comportant de multiples degrés de liberté. Malheureusement, l'excitation sismique étant hautement aléatoire, de nombreuses simulations sont parfois nécessaires pour un même processus d'accélération de sol afin d'obtenir des résultats significatifs, ce qui rend l'utilisation de l'analyse temporelle non-linéaire très onéreuse en calculs et donc exceptionnelle. Il y a manifestement place pour des techniques intermédiaires, dont le fondement est naturellement probabiliste afin de tenir compte de l'incertitude portant sur les sollicitations. Il est souhaitable que toute nouvelle approche soit conforme aux spectres inélastiques pour des oscillateurs élasto-plastiques parfaits à un degré de liberté et les étende de façon rationnelle aux structures comportant de nombreux degrés de liberté.

Ce chapitre présente une méthode de spectre de réponse pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté dont les non-linéarités sont réduites à des zones de faible étendue au regard des dimensions des éléments de la structure. On s'intéressera en particulier aux ponts pour lesquels les non-linéarités sont susceptibles de se produire dans les appareils d'appui ou sous la forme de rotules plastiques en tête ou en pied de pile, en particulier si ces ouvrages ont été conçus selon la méthode du dimensionnement en capacité (*Capacity Design*). A cet égard, les ponts se distinguent des bâtiments non isolés à la base par le petit nombre d'éléments non-linéaires. En effet, pour des bâtiments classiques, le haut degré d'hyperstaticité autorise une redistribution des efforts si bien que l'on cherche à répartir le comportement post-élastique sur toute la hauteur de l'immeuble, en général aux extrémités des poutres horizontales. On réduit ainsi le risque de formation d'un mécanisme à un étage particulier. Pour les ponts, les possibilités de redistribution des efforts sont limitées, c'est pourquoi nous portons une attention

---

1. Une version de ce chapitre a été présentée à la Conférence Mondiale de Génie Parasismique, Acapulco, juin 1996 [72]

particulière à chacun des éléments potentiellement non-linéaires.

La démarche que nous proposons repose sur deux techniques de linéarisation équivalente dans un contexte probabiliste : une moyenne stochastique pour des systèmes dont la réponse est à bande étroite et une linéarisation stochastique gaussienne associée au modèle mathématique de Bouc-Wen. Ces techniques sont adaptées au comportement hystérétique des matériaux du génie civil. La réponse du système linéaire équivalent est obtenue grâce aux spectres de réponse élastique. Puisque les propriétés équivalentes des éléments non-linéaires dépendent des caractéristiques de la réponse (amplitude, fréquence moyenne, *etc.*), une méthode itérative s'impose. Nous proposons un algorithme efficace qui fait usage du caractère local (ponctuel) des éléments non-linéaires. Pour tirer parti de la linéarité du reste de l'ouvrage, on réalise une unique analyse modale de la structure complète en relaxant certains degrés de liberté au droit des éléments non-linéaire. L'analyse itérative qui s'ensuit, dans laquelle sont introduits les éléments linéaires équivalents en lieu et place des éléments potentiellement inélastiques, repose sur un système de petite taille ne faisant intervenir qu'un nombre limité de coordonnées généralisées. La réponse de la structure obtenue par analyse spectrale permet d'actualiser les caractéristiques des éléments linéaires équivalents. Cette méthode repose entièrement sur un spectre de réponse linéaire donné et sur les relations constitutives des éléments potentiellement non-linéaires.

Afin de situer notre étude, nous présentons rapidement les méthodes communément utilisées de dimensionnement d'ouvrages. Nous rappelons ensuite les deux techniques de linéarisation équivalente en contexte probabiliste. Nous montrons comment incorporer efficacement les éléments linéaires équivalents dans le modèle de l'ouvrage par l'intermédiaire d'une synthèse modale adaptée, en mettant encore une fois l'accent sur un critère de choix des modes propres de la structure linéaire. Les modes propres de la structure complète, incorporant les éléments équivalents, sont complexes et il convient d'en tenir compte dans le calcul de la réponse à partir des spectres de réponse élastique.

Nous appliquons cette méthode au calcul de la réponse d'un pont pour lequel des rotules plastiques peuvent se développer en pied de pile. Les valeurs obtenues pour la demande de ductilité maximale et la quantité d'énergie dissipée par chacune des rotules sont proches de celles obtenues en prenant la moyenne de simulations temporelles du problème non-linéaire.

### 3.1 Cadre de l'étude

Les techniques de calcul exact (de type Fokker-Planck) de la réponse de structures non-linéaires, soumises à une excitation incertaine de nature sismique, sont rares, limitées dans la pratique à des comportements mécaniques particuliers et presque toujours à des structures représentées par des modèles ne comportant qu'un très petit nombre de degrés de liberté, souvent un seul [82, 83]. Seules les simulations de type Monte-Carlo associées à une intégration temporelle des équations non-linéaires permettent de traiter de grands systèmes, à comportement mécanique général. Toutefois, de nombreuses simulations sont parfois nécessaires pour obtenir des résultats fiables et même avec les outils dont nous disposons aujourd'hui, cette technique reste coûteuse en temps de calcul et de ce fait, est restreinte à la vérification de structures exceptionnelles. Dans la pratique, en particulier au stade du dimensionnement, on utilise une méthode beaucoup plus simple s'appuyant sur des *spectres inélastiques*. Elle consiste essentiellement à faire un calcul linéaire sur la base des propriétés purement élastiques de la structure, puis à corriger les forces obtenues par un coefficient de comportement. Nous revenons dans un premier temps sur cette technique. Elle a l'avantage d'être d'une utilisation extrêmement

simple, mais son usage est en théorie limité aux oscillateurs élasto-plastiques parfaits et elle ne permet pas de prévoir proprement les zones de la structure dont le comportement est effectivement non-linéaire. Une technique plus récente, dite de *dimensionnement en capacité*, permet à l'ingénieur de choisir les éléments non-linéaires (en général localisés en espace) qui dissiperont l'énergie pendant le séisme et de préserver le caractère linéaire élastique du reste de la structure.

La méthode que nous proposons par la suite étend de façon rationnelle les spectres inélastiques à des structures complexes et précise le degré d'incursion dans le domaine post-élastique des éléments non-linéaires qui auront été choisis conformément à la technique du dimensionnement en capacité.

### 3.1.1 Spectres inélastiques

Les structures très sensibles, présentant un risque majeur en cas d'endommagement, comme les centrales nucléaires, ou bien primordiales à l'acheminement des secours sont dimensionnées de façon à rester essentiellement élastiques pendant le tremblement de terre maximum qu'on peut attendre, ou de façon à ne subir que de très faibles dégâts, réparables rapidement. Il ne serait pas économique de dimensionner de la sorte toutes les structures et on accepte que des ouvrages de moindre importance subissent un certain endommagement sans atteindre la ruine. Les méthodes de calcul doivent donc prendre en compte des incursions, qui peuvent être importantes, dans le domaine post-élastique.

Dans les années 60 (*cf.* [96, 95, 36]), on a étudié la réponse d'oscillateurs simples à comportement non-linéaire. Newmark et Hall [95] ont proposé une méthode d'évaluation de la réponse d'oscillateurs élasto-plastiques parfaits, à partir de spectres linéaires corrigés pour tenir compte du comportement post-élastique ou *spectres inélastiques*. Cette méthode prévaut encore aujourd'hui pour le dimensionnement de structures beaucoup plus complexes. On trouvera dans [36] une analyse détaillée de la méthode et dans [90] une synthèse de diverses méthodes d'élaboration des spectres inélastiques.

La méthode de dimensionnement consiste à faire un calcul élastique puis à diviser les efforts obtenus par un *coefficient de comportement*  $q$  rendant compte du comportement post-élastique. Newmark et Hall [95] ont montré que le coefficient de comportement  $q$  dépend fortement de la période propre de l'oscillateur (élastique). Malgré cela, pour simplifier, certains règlements [50, 12] proposent d'utiliser un coefficient de comportement forfaitaire, indépendant de la période, accompagné soit du spectre élastique, soit d'un spectre corrigé dit *spectre de dimensionnement* qui rend compte d'une certaine dépendance en la fréquence du coefficient de comportement [48]. Notons que les recommandations parasismiques pour les ponts en Nouvelle-Zélande [24] prennent en compte la dépendance du coefficient de comportement en la période et que les versions prochaines du *Uniform Building Code* américain prendront également cette voie.

Pour un oscillateur élasto-plastique parfait, on définit le niveau de ductilité comme le rapport  $\mu = x_{max}/x_y$  de la déformée maximale de l'oscillateur sur la limite élastique. Newmark et Hall [95] ont établi à partir de simulations, que pour un niveau de ductilité cible donné  $\mu$ , le coefficient de comportement dépend de la période (élastique)  $T$  de l'oscillateur de la façon suivante :

$$q = \begin{cases} 1 & T < 0.03s \\ \sqrt{2\mu - 1} & 0.125s < T < 0.5s \\ \mu & T > 0.5s \end{cases} \quad (3.1)$$

Les raccords peuvent être précisés sur un diagramme tripartite [36]. A l'exception des oscilla-

teurs très rigides, de période inférieure à 0.03s, on autorise une réduction des efforts en jeu en acceptant que l'oscillateur plastifie avec un certain niveau de ductilité. Bien que cette étude ne traite que des oscillateurs élasto-plastiques parfaits, on a étendu son usage à des structures beaucoup plus complexes. La démarche est la suivante :

- On effectue un calcul linéaire de la structure, par une analyse modale suivie d'une recombinaison des maxima modaux lus sur un spectre élastique, par une des règles usuelles (SRSS, CQC, MSRS).
- On divise les efforts obtenus dans chaque élément par un coefficient de comportement forfaitaire dépendant de la nature de l'élément (pile, culée, tablier...), en particulier de ses possibilités ductiles et éventuellement de la période fondamentale de l'ouvrage.
- On dimensionne les divers éléments de la structure par une analyse statique équivalente pour les efforts réduits trouvés précédemment.

Cette méthode, très simple présente bien évidemment un certain nombre de défauts :

- La méthode a été développée pour des oscillateurs élasto-plastiques parfaits simples. La structure n'étant pas linéaire, les réponses modales ne se superposent pas et la recombinaison des maxima modaux n'est en aucune manière justifiée.
- Le calcul modal est effectué sur la structure élastique. Du fait notamment des rotules plastiques apparaissant aux appuis de la structure, les conditions aux limites de la partie élastique de la structure changent au cours du temps et les modes propres représentent moins bien les mouvements admissibles de la structure.
- Les coefficients de comportement sont forfaitaires et ne rendent pas compte des non-linéarités qui se produisent effectivement dans la structure.

Pour pallier ce dernier inconvénient, on a élaboré un *critère de cohérence* [12] qui stipule que l'on doit vérifier que les éléments pour lesquels on a autorisé une réduction des efforts, par l'intermédiaire d'un coefficient de comportement plus grand que un, plastifient effectivement. Sinon, on reprend l'étude avec des coefficients de comportement plus faibles (et donc des efforts plus importants) pour ces éléments. Toutefois, il n'est pas possible de vérifier par cette méthode les demandes de ductilité dans les différents éléments.

### 3.1.2 Dimensionnement en capacité

La méthode de *dimensionnement en capacité* (en anglais *capacity design*) permet de s'assurer que la dissipation énergétique se produit effectivement là où on le souhaite dans la structure. Développée essentiellement en Nouvelle-Zélande durant ces vingt dernières années, son usage se répand et elle a fait son entrée dans certains règlements. La procédure suit les étapes suivantes [100] :

- On choisit un mécanisme plastique de la structure de façon à satisfaire la demande de ductilité globale en déplacement de l'ouvrage tout en minimisant (en les répartissant) les demandes de ductilité individuelles en rotation dans les rotules plastiques.
- On définit de manière précise les régions dissipatives d'énergie (*i.e.* les rotules plastiques).

- On dimensionne les rotules plastiques pour résister aux actions permanentes et aux actions sismiques (réduites) déterminées conformément au paragraphe précédent, puis on dimensionne les autres éléments de la structure de façon à ce qu'ils restent élastiques lorsque toutes les rotules plastiques se sont développées.

Il s'agit d'une méthode de dimensionnement et non pas d'une technique d'analyse. On ne peut pas en particulier prévoir le niveau de ductilité atteint dans chaque rotule plastique. L'idée sous-jacente est, qu'avec des dispositions constructives suffisamment soignées pour les rotules plastiques, on autorisera de larges demandes de ductilité sans pour autant perdre en capacité résistante aux efforts latéraux. En dehors des rotules, la structure reste intègre, *i.e.* linéaire élastique. On contrôle ainsi l'étendue des dommages.

De cette technique, nous retiendrons surtout pour notre étude, la localisation des non-linéarités. Nous chercherons toutefois à préciser le niveau de demande de ductilité dans chacune des rotules plastiques.

### 3.1.3 Simulations de Monte-Carlo

Comme nous l'avons souligné, il s'agit de la seule méthode permettant l'évaluation des statistiques de la réponse de systèmes non-linéaires comportant de nombreux degrés de liberté. Le principe d'une simulation est simple: on effectue un tirage d'un accélérogramme de sol, conformément à la procédure évoquée au paragraphe 1.1.4, puis on intègre temporellement les équations non-linéaires du mouvement. On extrait de la solution un certain nombre de résultats intéressants, par exemple la dissipation d'énergie dans une rotule plastique, un indice d'endommagement, ou ce qui est plus courant, quoique peu justifié dans le cadre de structures ductiles, la rotation maximale  $x_{max}$  de la rotule ou plus généralement le déplacement relatif des bornes d'un élément non-linéaire, sur la durée de l'excitation. Il s'agit donc de la réalisation d'une variable aléatoire  $X_{max}$ . Nous nous intéressons en général à l'espérance, parfois à la variance de cette dernière. Un estimateur  $\hat{m}$  de l'espérance de  $X_{max}$  est obtenu en réalisant un certain nombre ( $n$ ) de simulations d'où l'on tire les réalisations  $x_{max,i}$ :

$$\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{max,i} \quad (3.2)$$

Cet estimateur est sans biais puisque  $E[\hat{m}] = E[X_{max}]$ . De même, on dispose d'un estimateur sans biais de la variance de la variable aléatoire  $X_{max}$ :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{max,i} - \hat{m})^2 \quad (3.3)$$

$E[\hat{\sigma}^2] = Var[X_{max}]$ . Les réalisations  $x_{max,i}$  étant indépendantes et équidistribuées, on sait d'après le théorème fondamental de la loi statistique que  $\hat{m}$  et  $\hat{\sigma}^2$  convergent respectivement vers l'espérance  $E[X_{max}]$  et la variance  $Var[X_{max}]$  avec une probabilité un lorsque  $n$  tend vers l'infini. Toutefois, un grand nombre de réalisations peuvent être nécessaires pour obtenir une bonne convergence. Pour juger de la pertinence des simulations effectuées pour évaluer l'espérance de  $X_{max}$ , nous calculons la variance de l'estimateur (3.2):

$$Var[\hat{m}] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var[x_{max,i}] = \frac{1}{n} Var[X_{max}] \quad (3.4)$$

On ne peut la calculer directement, toutefois, on en possède un estimateur grâce à (3.3) :

$$\hat{Var}[\hat{m}] = \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{max,i} - \hat{m})^2 \quad (3.5)$$

On définit alors un coefficient de variation (c.d.v.) des simulations :

$$\text{c.d.v.} = \frac{\sqrt{\hat{Var}[\hat{m}]}}{\hat{m}} \quad (3.6)$$

Il s'agit, rappelons-le d'un critère de pertinence de l'estimateur  $\hat{m}$ . Pour  $n$  grand, le coefficient de variation se comporte comme suit :

$$\text{c.d.v.} \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{Var[X_{max}]}}{E[X_{max}]} \quad (3.7)$$

Ainsi si  $Var[X_{max}]$  est finie, c.d.v. tend vers zéro, lentement, en  $1/\sqrt{n}$ . Dans les exemples qui suivent, en particulier pour des systèmes comportant des éléments inélastiques, il n'est pas rare de trouver des ratios  $\sqrt{Var[X_{max}]/E[X_{max}]}$  de l'ordre de 50%. Pour obtenir un coefficient de variation de l'ordre de 5% sur l'estimateur  $\hat{m}$ , on devra réaliser une centaine de simulations. L'Eurocode 8, quant à lui, ne requiert au plus qu'une dizaine de simulations. Notons que les formules ci-dessus sont des estimateurs de la pertinence d'un ensemble de simulations issues d'un même processus stochastique d'accélération de sol. L'Eurocode 8, quant à lui, valide un ensemble d'accélérogrammes dès qu'il est compatible avec un spectre de réponse, ce qui est une condition bien moins restrictive.

### 3.1.4 Perspectives et place de la présente méthode

Entre l'analyse simpliste fondée sur les spectres inélastiques et les simulations temporelles non-linéaires, onéreuses en temps de calcul, apparaît un besoin de méthodes simples, applicables en temps réel au cours du dimensionnement d'un ouvrage afin de faciliter les choix structuraux et intégrant de façon rationnelle les non-linéarités. La technique que nous proposons dans ce chapitre cherche à satisfaire ces critères. Nous nous efforçons également de n'utiliser que des méthodes de calcul répandues dans les bureaux d'études, comme l'analyse modale des structures linéaires et nous restreignons l'analyse non-linéaire à des systèmes de petite taille.

## 3.2 Principe de la méthode

On suppose dans ce qui suit, que la structure se comporte essentiellement de manière linéaire élastique, à l'exception d'un nombre fini d'éléments de petite taille au regard des dimensions de la structure (cerclés sur la Figure 3.1). Rappelons que c'est le cas de toute structure conçue suivant la méthode du dimensionnement en capacité : certains éléments (rotules plastiques, appareils d'appui spéciaux) sont choisis pour dissiper l'énergie lors du tremblement de terre, préservant ainsi le caractère linéaire élastique du reste de la structure, dimensionné en conséquence. Nous désignerons par "connexions" ou "rotules potentiellement plastiques" ces éléments dans la mesure où nous ne supposons pas *a priori* que leur comportement est effectivement non-linéaire.

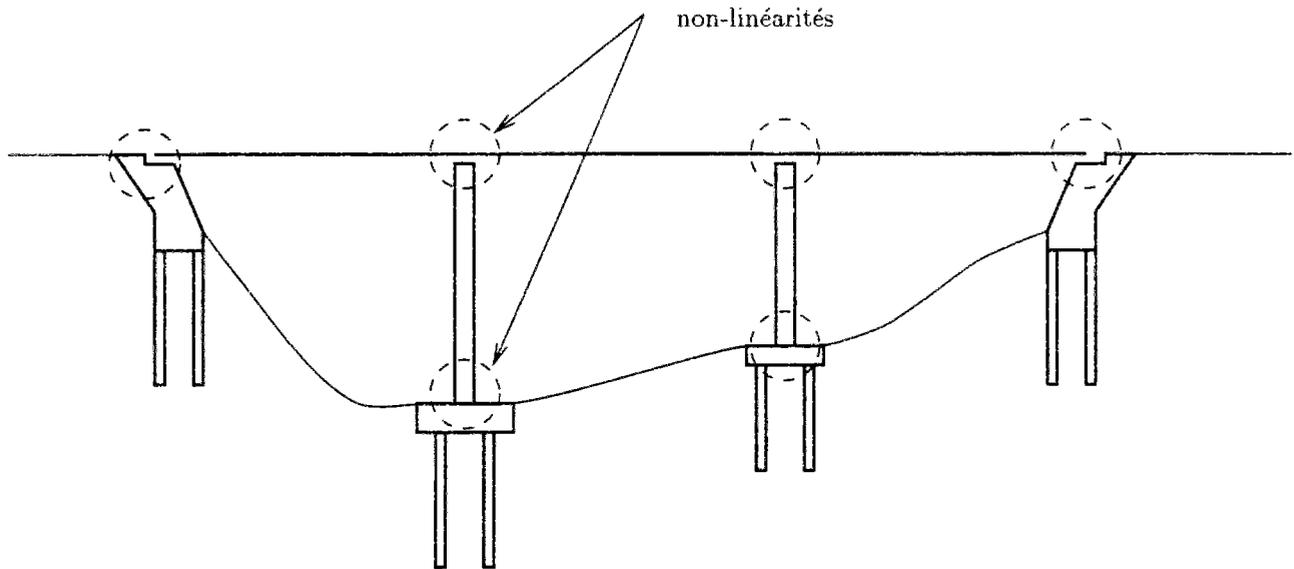


FIG. 3.1 - Localisation des non-linéarités dans la structure

### 3.2.1 Système linéaire relaxé

Avec pour objectif d'utiliser une méthode de spectre de réponse de façon rationnelle, nous remplaçons les connexions potentiellement non-linéaires par des éléments linéaires équivalents, selon des techniques exposées au paragraphe suivant. Nous allons au préalable tirer parti du fait que le comportement du reste de la structure est élastique linéaire. La méthode que nous utilisons ici s'apparente aux techniques de sous-structuration de type "libre-libre", en ce sens que nous remplaçons dans un premier temps les rotules potentiellement plastiques par de véritables rotules, les appareils d'appui s'opposant au glissement relatif de deux degrés de liberté par des appareils d'appui parfaitement glissants. De manière générale nous relaxons les contraintes associées aux éléments potentiellement plastiques en remplaçant les éléments en question par des conditions aux limites de type Neumann (contrainte nulle) entre les sous-structures linéaires. Nous ne le faisons que pour les degrés de liberté associés aux déformations inélastiques. Ainsi pour les rotules potentiellement plastique, seule la contrainte en rotation est relaxée mais pas les contraintes en translation (Figure 3.2). De même, si un appareil d'appui bloque le mouvement de translation dans une direction (1) et possède un comportement non-linéaire dans une direction perpendiculaire (2), seule la contrainte dans la direction (2) est relaxée. Nous désignons par *système linéaire relaxé* le système dans lequel tous les éléments potentiellement non-linéaires ont été remplacés par les conditions aux limites susmentionnées entre sous-systèmes. Dans une deuxième étape nous placerons des éléments linéaires équivalents sur le système linéaire relaxé au droit des éléments potentiellement non-linéaires. Ainsi, une des techniques de linéarisation nous conduira à introduire des ressorts et amortisseurs équivalents que nous ajouterons comme indiqué à la Figure 3.3.

### 3.2.2 Equations du mouvement

Les notations que nous utilisons sont adaptées au traitement des rotules potentiellement plastiques. Pour prendre en compte des appareils d'appui travaillant en translation, il suffit de

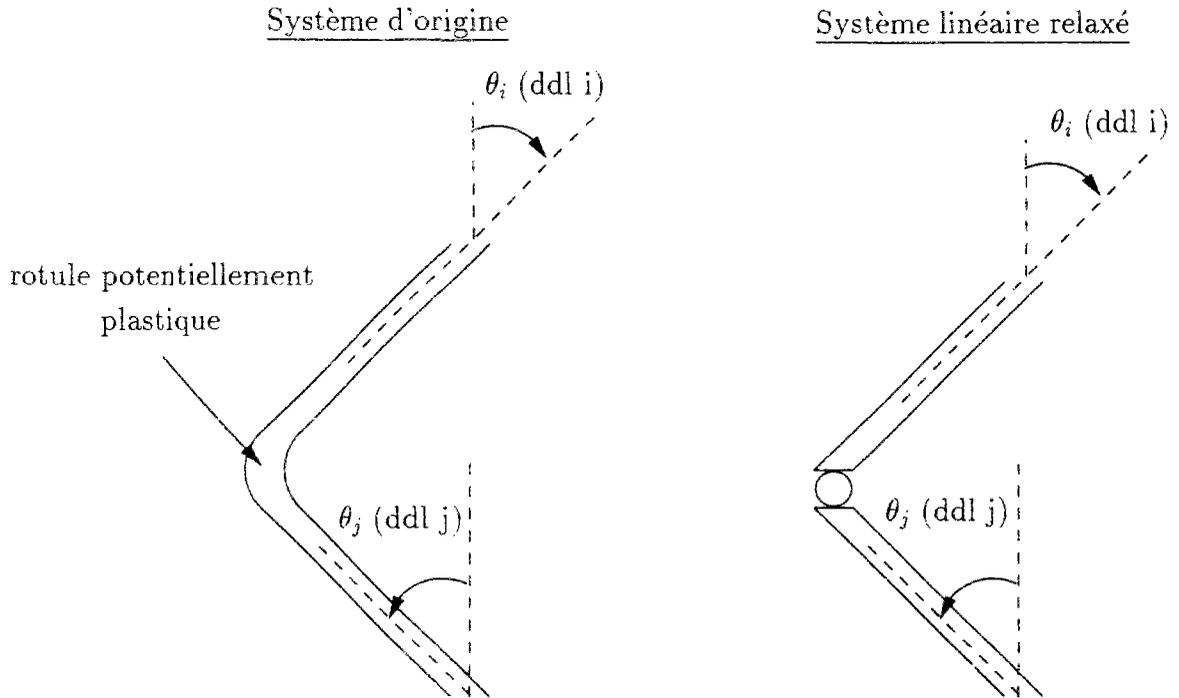


FIG. 3.2 - Principe de relaxation du système non-linéaire

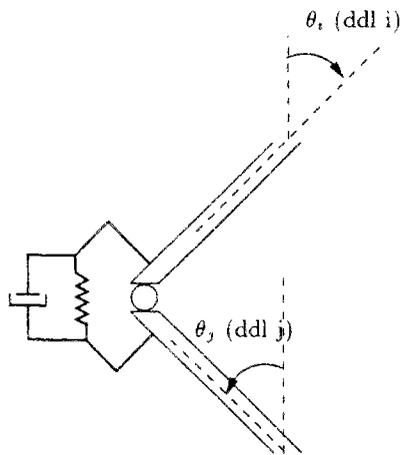


FIG. 3.3 - Adjonction d'éléments linéaires équivalents

remplacer les rotations relatives entre sous-systèmes ( $\theta_j - \theta_i$  sur la Figure 3.2) par des translations relatives et les moments duaux que nous allons introduire par des efforts tranchants. Les rotations relatives du système linéaire relaxé correspondant aux NR éléments potentiellement non-linéaires sont rassemblées dans le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  et les moments duaux, fonctions non-linéaires des rotations relatives et éventuellement de leurs dérivées en temps, dans le vecteur  $\mathcal{M}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ . La Figure 3.4 montre une rotation relative et son moment dual dans le cas où la rotule plastique se forme en pied de pile : on a alors  $\theta = \theta_j$  et  $\theta_i = 0$ . Dans une représentation de la structure

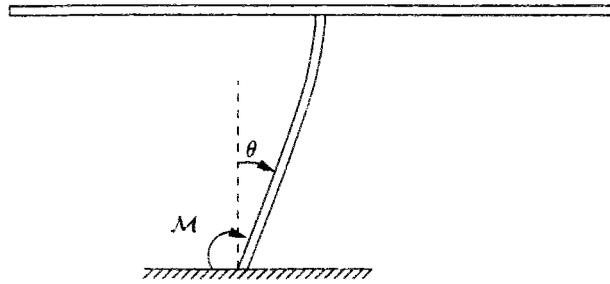


FIG. 3.4 - Rotation relative et moment dual

par éléments finis, le principe des travaux virtuels s'écrit pour le système non-linéaire complet ( $\delta$  indique le déplacement virtuel) :

$$-\delta \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} - \delta \mathbf{X}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} + \delta \boldsymbol{\theta}^T \mathcal{M} = \delta \mathbf{X}^T \mathbf{M} (\mathbf{U} \ddot{u}_g + \ddot{\mathbf{X}}) \quad (3.8)$$

où  $\mathbf{U}$  est un vecteur de déplacement unitaire de la structure dans la direction d'excitation et  $\ddot{u}_g$  est l'accélération de sol qu'on suppose uniforme dans ce chapitre. Les matrices de rigidité  $\mathbf{K}$ , d'amortissement  $\mathbf{C}$  et de masse  $\mathbf{M}$  sont celles du système linéaire relaxé.  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{C}$  n'induisent aucun effort intérieur dans les éléments potentiellement inélastiques, selon les degrés de liberté relaxés. Les rotations relatives s'expriment comme projections du vecteur  $\mathbf{X}$  des degrés de liberté de la structure :

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{P}_{rot} \mathbf{X} \quad , \quad \delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{P}_{rot} \delta \mathbf{X} \quad (3.9)$$

Si par exemple, la première rotation relative du vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  est la différence entre la rotation  $\theta_i$  (degré de liberté  $i$  du vecteur  $\mathbf{X}$ ) et la rotation  $\theta_j$  (degré de liberté  $j$  du vecteur  $\mathbf{X}$ ), alors la première ligne de  $\mathbf{P}_{rot}$  est nulle sauf en position  $i$ , où elle prend la valeur 1 et en position  $j$ , où elle prend la valeur  $-1$ . En éliminant les déplacements virtuels (quelconques) on obtient :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{P}_{rot}^T \mathcal{M} - \mathbf{M} \mathbf{U} \ddot{u}_g \quad (3.10)$$

$\mathcal{M}$  est *a priori* une fonction non-linéaire de  $\boldsymbol{\theta}$  et  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ . Des techniques de linéarisation équivalente nous permettrons d'écrire  $\mathcal{M}$  sous la forme d'une expression linéaire, pas nécessairement des mêmes variables. Les coefficients de l'expression linéaire dépendent toutefois des caractéristiques statistiques de la réponse des rotations relatives (variances, fréquences moyennes...). Ils seront donc déterminés par un processus itératif que nous détaillons ci-après. Pour ne pas effectuer de gros calculs à chaque itération, nous profitons de la linéarité du système linéaire relaxé pour pratiquer une analyse modale sur le membre de gauche de (3.10). En tronquant la base modale du système linéaire relaxé nous pourrions effectuer les itérations successives sur un système réduit d'équations portant uniquement sur les coordonnées généralisées conservées.

### 3.2.3 Algorithme itératif

La Figure 3.5 présente les grandes lignes de l'algorithme itératif. Il commence par une analyse modale du système linéaire relaxé effectuée une fois pour toutes par un logiciel aux éléments finis<sup>2</sup>. On choisit des paramètres initiaux pour les éléments linéaires équivalents, par exemple les caractéristiques linéaires initiales, si elles existent, des connexions. On forme alors un système linéaire équivalent complet qu'on exprime sur une base tronquée de modes propres du système linéaire relaxé. Nous verrons que cela impose certaines contraintes sur le choix des modes propres. On effectue alors une synthèse modale approchée du système linéaire équivalent, puis on calcule la réponse de la structure, soit par une technique d'analyse stochastique, soit par une technique de spectre de réponse linéaire adaptée. Enfin les caractéristiques des éléments linéaires équivalents sont actualisées en fonction de la réponse obtenue. Toutes les étapes de cet algorithme, mise à part l'analyse modale du système linéaire relaxé, font l'objet de modules informatiques que nous avons développés.

Notons qu'il existe des techniques pour lesquelles les paramètres des éléments linéaires équivalents dépendent du temps (voir par exemple [126, 16, 105]). Ces méthodes sont beaucoup plus lourdes à mettre en œuvre et ne permettent pas l'utilisation de spectres de réponse. La méthode que nous proposons ici convient mieux aux systèmes atteignant rapidement un régime stationnaire. Elle peut ne pas convenir aux systèmes pour lesquels le régime stationnaire en déplacement n'existe pas (c'est le cas par exemple, de structures ne reposant que sur des appuis glissants) ou est long à obtenir.

## 3.3 Méthodes de linéarisation équivalente

Qu'il s'agisse de rotules plastiques ou d'appareils d'appui en élastomère fretté ou glissant, les éléments non-linéaires des structures du génie civil ont souvent un comportement hystérétique. Nous cherchons, pour ces objets, des modèles linéaires équivalents qui rendent compte de caractéristiques "moyennes" de raideur et de dissipation d'énergie. D'autres types de non-linéarités, comme les chocs [52], peuvent être traitées par des techniques similaires. Quoique des chocs puissent se produire dans les ouvrages d'art, par exemple entre éléments de tablier ou entre le tablier et les culées, nous concentrons notre étude sur les phénomènes liés à la plasticité des matériaux ou au glissement des éléments, qui produisent des non-linéarités de nature hystérétique.

De très nombreuses techniques de linéarisation en environnement stochastique ont vu le jour durant ces trente dernières années. On trouvera une revue critique et comparative de ces méthodes dans les références [127, 105, 83]. Nous utilisons ici deux techniques adaptées à des modèles de comportement hystérétique : la moyenne stochastique qui s'applique aux réponses à bande étroite, l'autre plus générale dite de linéarisation stochastique gaussienne que nous utiliserons conjointement avec le modèle d'hystérésis de Bouc-Wen.

### 3.3.1 Moyenne stochastique

Développée par Caughey [33, 34] à partir de l'approximation de Krylov et Bogoliubov [77], la technique de la moyenne stochastique s'appuie sur des moyennes temporelles établies sur des cycles d'hystérésis dont les caractéristiques évoluent lentement dans le temps. C'est en

---

2. Pour les applications, nous avons utilisé le logiciel CASTEM 2000 du Commissariat à l'Énergie Atomique

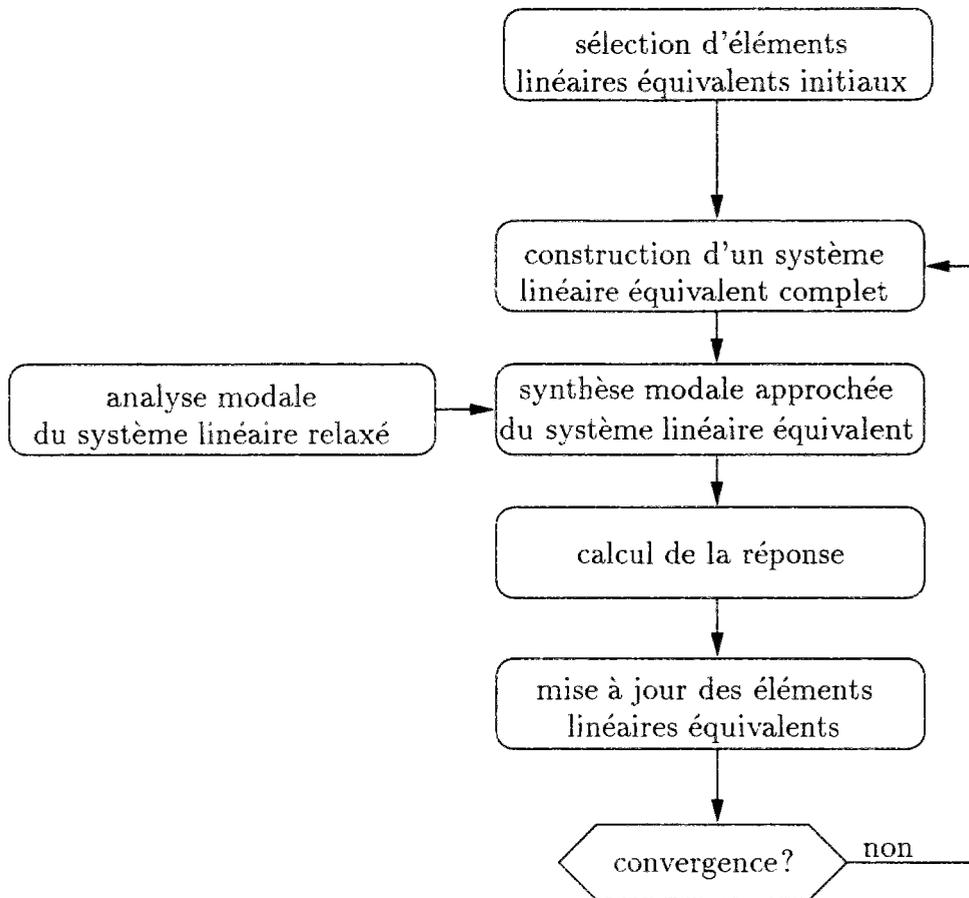


FIG. 3.5 - *Algorithme itératif*

particulier la propriété des systèmes dont la réponse est à bande étroite. On trouvera une description complète de la méthode dans [105, 68, 69]. La force (ou le moment) de rappel de l'élément non-linéaire est décrit par les deux branches de sa boucle d'hystérésis (Figure 3.6) :

$$F(x, \dot{x}) = \begin{cases} F_s(x) & \dot{x} > 0 \\ F_i(x) & \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

où  $F_s$  et  $F_i$  sont respectivement les branches supérieure et inférieure de la boucle. La technique

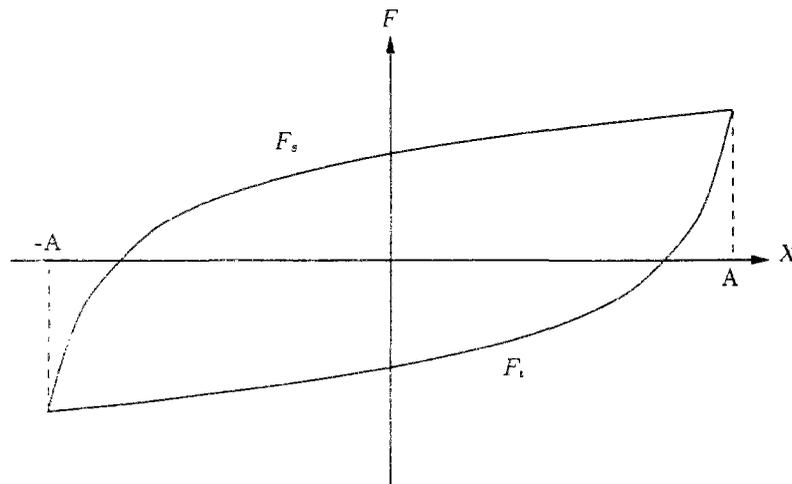


FIG. 3.6 - Boucle d'hystérésis

de linéarisation consiste à remplacer l'élément non-linéaire par un ressort et un amortisseur en parallèle :

$$F_{eq}(t) = c_{eq}\dot{x}(t) + k_{eq}x(t) \quad (3.12)$$

dont les coefficients sont calculés de façon à minimiser l'erreur suivante au cours d'un cycle :

$$\varepsilon = F(t) - F_{eq}(t) \quad (3.13)$$

A cet effet, on applique une transformation de van der Pol à la variable déplacement  $x$  :

$$x(t) = A(t)\cos(\omega_{eq}t + \phi(t)) \quad (3.14)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_{eq}A(t)\sin(\omega_{eq}t + \phi(t))$$

Tout comme  $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$ ,  $A(t)$  et  $\phi(t)$  sont des processus aléatoires. Toutefois, en supposant que la réponse est à bande étroite, nous pouvons affirmer que chaque réalisation de l'amplitude  $A(t)$  et de la phase  $\phi(t)$  varient lentement au cours du temps. En conséquence, sur un cycle nous les approchons par des variables aléatoires  $A$  et  $\phi$  (indépendantes du temps). On choisit pour paramètres des éléments linéaires équivalents les solutions du problème de minimisation quadratique :

$$\min_{c_{eq}, k_{eq}} \left\{ E \left[ \int_{1 \text{ cycle}} \varepsilon^2 \right] \right\} \quad (3.15)$$

Un calcul simple nous donne [69] :

$$k_{eq} = 2 \frac{E[C(A)]}{E[A^2]} \quad c_{eq} = 2 \frac{E[S(A)]}{\omega_{eq} E[A^2]} \quad (3.16)$$

où

$$C(A) = \frac{A}{2\pi} \left\{ \int_0^\pi F_i[A \cos \theta] \cos \theta d\theta + \int_\pi^{2\pi} F_s[A \cos \theta] \cos \theta d\theta \right\} \quad (3.17)$$

$$S(A) = -\frac{A}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} F_i[A \cos \theta] \sin \theta d\theta + \int_\pi^{2\pi} F_s[A \cos \theta] \sin \theta d\theta \right\} \quad (3.18)$$

Notons que  $2\pi S(A)$  mesure l'énergie dissipée par cycle d'hystérésis.  $c_{eq}$  est un coefficient d'amortissement ne traduisant que la dissipation énergétique d'origine hystérétique. Pour tenir compte d'un éventuel amortissement visqueux indépendant, il convient d'ajouter un terme supplémentaire. On peut interpréter physiquement le terme  $C(A)$  en l'écrivant de la manière suivante :

$$C(A) = \oint_{1 \text{ cycle}} F(\theta)x(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \quad (3.19)$$

où, du fait du comportement cyclique de la réponse  $\frac{d\theta}{2\pi}$  apparaît comme la densité de probabilité uniforme de présence de la phase dans l'intervalle  $[\theta, \theta + d\theta]$ . A amplitude  $A$  fixée,

$$\frac{C(A)}{\oint_{1 \text{ cycle}} x(\theta)^2 \frac{d\theta}{2\pi}} = 2 \frac{C(A)}{A^2} \quad (3.20)$$

est la pente de la régression linéaire du couple de variable aléatoire  $(x, F)$ . Dans les équations précédentes  $\omega_{eq}$  est la pulsation moyenne du processus à bande étroite. On la détermine par la formule de Rice :

$$\omega_{eq} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} \quad (3.21)$$

où les  $\lambda_m$  sont les moments spectraux (voir annexe A.3, équation (A.20)) du processus réponse. Les facteurs  $k_{eq}$  et  $c_{eq}$  sont des fonctions de la distribution statistique de l'amplitude  $A$  de l'oscillation. Or cette dernière et la pulsation moyenne  $\omega_{eq}$  dépendent de la réponse, qui elle-même résulte des éléments linéaires équivalents. On comprend aisément qu'un processus itératif soit nécessaire. Notons que puisque l'excitation sismique est gaussienne (*cf.* chapitre 1), la réponse issue du système linéaire équivalent est également gaussienne. On montre alors, dans le cas de processus stationnaires, que l'amplitude  $A$  suit une distribution de Rayleigh :

$$f(A) = \frac{A}{\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad (3.22)$$

dans laquelle  $\sigma_x^2$  désigne la variance du processus  $x(t)$  dont  $A(t)$  est l'amplitude. On en déduit

$$E[C(A)] = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_0^\infty AC(A) \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) dA \quad (3.23)$$

$$E[S(A)] = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_0^\infty AS(A) \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) dA \quad (3.24)$$

Pour la distribution de Rayleigh, on possède les moments statistiques suivants :

$$E[A^n] = (\sqrt{2}\sigma_x)^n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \quad \text{où} \quad \Gamma(u) = \int_0^{+\infty} t^{u-1} e^{-t} dt \quad (3.25)$$

avec, en particulier

$$E[A^2] = 2\sigma_x^2 \quad E[A^4] = 8\sigma_x^4 \quad (3.26)$$

Si les fonctions (3.17) et (3.18) sont polynomiales en  $A$ , alors les paramètres des éléments équivalents s'obtiennent analytiquement grâce ces formules. De manière générale, on peut exprimer les paramètres linéaires équivalents en fonction de l'écart-type et de la pulsation moyenne  $\omega_{eq}$  de la réponse :

$$k_{eq}(\sigma_x) = \frac{1}{\sigma_x^4} \int_0^\infty AC(A) \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) dA \quad (3.27)$$

$$c_{eq}(\sigma_x, \omega_{eq}) = \frac{1}{\omega_{eq}\sigma_x^4} \int_0^\infty AS(A) \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) dA \quad (3.28)$$

Notons que dans un contexte purement déterministe, Tsai et Kelly [117] ont établi des relations empiriques reliant les coefficients équivalents  $k_{eq}$  et  $c_{eq}$  à la déformée maximale d'isolateurs sismiques en élastomère fretté, sur la base d'un petit nombre de simulations. Ils ont ensuite utilisé ces relations dans un algorithme itératif proche de celui que nous exposons par la suite. A titre de comparaison, mentionnons que la technique de moyenne stochastique tient compte de l'incertitude portant sur l'excitation et s'adapte à toute forme de comportement hystérétique cyclique.

Dans la transformation de van der Pol (3.14), la pulsation  $\omega_{eq}$  est indépendante de l'amplitude du cycle. Il s'agit d'une approximation qui se justifie dans nos applications par le fait que la réponse de la structure et en particulier sa fréquence moyenne, résulte en général non pas du comportement d'un seul composant inélastique, mais de plusieurs composants ainsi que du système linéaire relaxé. Pour des systèmes plus simples, tels que des oscillateurs non-linéaires à un degré de liberté, on peut préciser la réponse en faisant dépendre la pulsation moyenne de l'amplitude du cycle [105, paragraphe 8.2.1]. Bouc [29] montre que ce faisant, la pulsation de l'oscillateur équivalent devient une variable aléatoire, fonction de l'amplitude du cycle (elle-même aléatoire). La densité spectrale de puissance de l'oscillateur non-linéaire est bien mieux reproduite par l'oscillateur à pulsation aléatoire que par l'oscillateur à pulsation déterministe  $\omega_{eq}$ . Malheureusement, pour employer cette méthode dans nos applications, il faudrait exhiber une relation entre chacune des pulsations propres de la structure et l'amplitude de déformation des différents éléments non-linéaires. Cette tâche s'avère aujourd'hui difficile.

### Exemple d'un composant élasto-plastique à écouissage cinématique (bilinéaire)

Parmi les modèles de comportement hystérétique, le modèle élasto-plastique à écouissage cinématique ou bilinéaire est un des plus simples. Son cycle est rappelé à la Figure 3.7, dans laquelle  $k_o$  désigne la raideur de charge et décharge élastique,  $\alpha$  un coefficient d'écouissage cinématique, ratio de la raideur tangente après plastification à la raideur initiale et  $x_y$  est la limite élastique de l'élément.

Pour cet élément, on trouve les relations suivantes

$$\begin{aligned} C(A) &= \frac{\alpha k_o A^2}{2} + \frac{(1-\alpha)k_o A^2}{2\pi} \left\{ \theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right\} & S(A) &= \frac{2(1-\alpha)k_o x_y (A - x_y)}{\pi} & \text{si } A \geq x_y \\ C(A) &= \frac{k_o A^2}{2} & S(A) &= 0 & \text{si } A \leq x_y \\ \text{avec } \cos \theta &= 1 - \frac{2x_y}{A} \end{aligned} \quad (3.29)$$

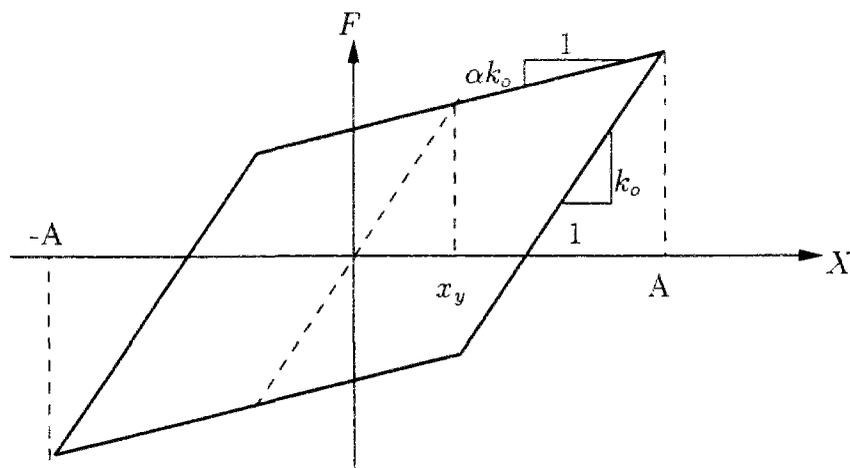


FIG. 3.7 - Boucle d'hystérésis d'un composant bilinéaire

Si l'amplitude  $A$  reste en deçà de la limite élastique  $x_y$ , l'élément reste élastique linéaire. Sinon, il plastifie et l'énergie dissipée par cycle vaut  $2\pi S(A) = 4(1 - \alpha)k_o z_y (A - z_y)$ . On en déduit une expression analytique des paramètres du ressort et de l'amortisseur équivalents [33] :

$$k_{eq} = k_o \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x_y}{\sigma_x}} a^3 e^{-\frac{a^2}{2}} da + \frac{1}{2} \int_{\frac{x_y}{\sigma_x}}^{+\infty} a^3 \left( \alpha + (1 - \alpha) \frac{\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta)}{\pi} \right) e^{-\frac{a^2}{2}} da \right\} \quad (3.30)$$

$$c_{eq} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1 - \alpha)k_o}{\omega_{eq}} \frac{x_y}{\sigma_x} \operatorname{erfc} \left( \frac{x_y}{\sqrt{2}\sigma_x} \right) \quad (3.31)$$

où

$$\operatorname{erfc}(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_X^{+\infty} \exp(-t^2) dt \quad \text{et} \quad \theta = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{2x_y}{a} \right) \quad (3.32)$$

Remarquons que ces valeurs ne dépendent que de la raideur initiale  $k_o$ , du coefficient d'écroutissage  $\alpha$  et de l'écart-type de la demande de ductilité  $\sigma_x/x_y$ . Naturellement, lorsque la demande de ductilité devient très petite ( $\sigma_x/x_y \rightarrow 0$ ), la raideur équivalente  $k_{eq}$  tend vers la raideur initiale  $k_o$  et l'énergie dissipée sous forme hystérique s'annule ( $c_{eq} = 0$ ). Inversement, lorsque la demande de ductilité devient très grande ( $\sigma_x/x_y \rightarrow \infty$ ), alors  $k_{eq}$  tend vers la raideur résiduelle  $\alpha k_o$  et  $\omega_{eq} c_{eq}$  tend vers zéro. Toutefois, comme la pulsation équivalente tend elle-même probablement vers zéro, on ne peut rien en déduire à ce stade en ce qui concerne la quantité d'énergie dissipée. La Figure 3.8 montre l'évolution des coefficients de raideur  $k_{eq}$  et de la quantité liée à l'amortissement hystérique  $\omega_{eq} c_{eq}$  en fonction de l'écart-type de la demande de ductilité de l'élément  $\sigma_x/x_y$ .

L'expression du déplacement (3.14) ne tient pas compte du glissement en  $X$  du centre de la boucle d'hystérésis qu'on observe pour des oscillateurs élasto-plastiques soumis à une excitation de nature sismique. Kobori *et al.* [76] introduisent en variable supplémentaire, l'abscisse du centre de la boucle. La méthode de la moyenne stochastique se conduit de la même façon, mais les calculs sont plus compliqués et ne conduisent pas à des résultats analytiques simples [105, page 257].

Dans la pratique du génie parasismique, on exprime la demande de ductilité essentiellement sous la forme d'une déformation maximale (ou déplacement maximal) rapporté à la limite

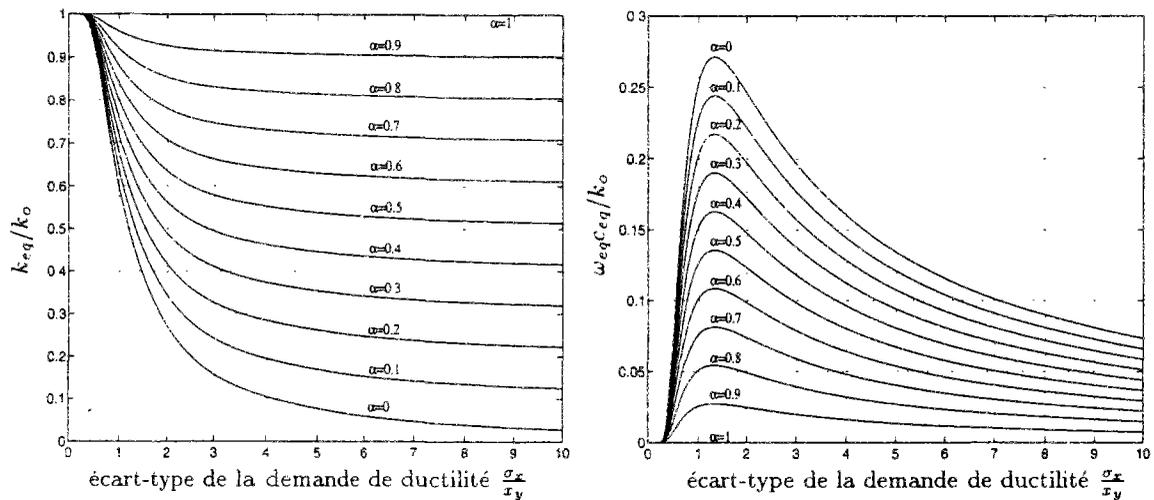


FIG. 3.8 - Raideur et amortissement équivalents pour le composant bilinéaire

élastique de déformation (ou de déplacement) :

$$\mu_d = \frac{x_{max}}{x_y} \quad (3.33)$$

Nous exposerons dans les paragraphes suivants une technique d'estimation de cet indice d'endommagement. On peut définir un indice tout aussi intéressant (quoique encore peu utilisé) dans le cas de cycles répétés: le *facteur de ductilité énergétique*  $\mu_{\text{énergie}}$  qui a pour valeur la demande de ductilité en déplacement  $\mu_d$  d'un composant élasto-plastique parfait, de même limite élastique et de même raideur initiale que le composant en question et qui, chargé de façon monotone, dissipe la même quantité d'énergie  $W_D$  [90] comme indiqué sur la Figure 3.9, soit :

$$\mu_{\text{énergie}} = \frac{\text{Energie dissipée}}{F_y x_y} + 1 = \frac{W_D}{k_0 x_y^2} + 1 \quad (3.34)$$

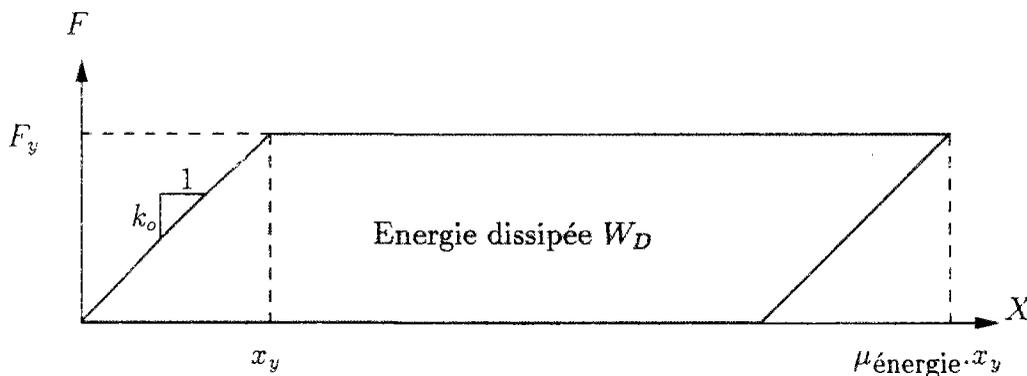


FIG. 3.9 - Facteur de ductilité énergétique

Dans le cas du composant bilinéaire, on peut obtenir une expression analytique du facteur de ductilité énergétique. L'énergie dissipée par cycle d'hystérésis vaut  $w_D = 2\pi S(A)$ . Son espérance

se calcule à partir des formules (3.29) :

$$E[w_D] = 2\sqrt{2\pi}(1 - \alpha)k_c z_y \sigma_x \operatorname{erfc}\left(\frac{z_y}{\sqrt{2}\sigma_x}\right) \quad (3.35)$$

Avec un nombre moyen de cycles  $\frac{T\omega_{eq}}{2\pi}$  dans l'intervalle de temps  $[0, T]$ , l'énergie totale moyenne dissipée vaut  $E[W_D] = \frac{T\omega_{eq}}{2\pi} E[w_D]$  et le facteur de ductilité énergétique devient :

$$\mu_{\text{énergie}} = 1 + \frac{T\omega_{eq}}{2\pi} \frac{E[w_D]}{k_c z_y^2} = 1 + T\omega_{eq} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 - \alpha) \frac{\sigma_x}{z_y} \operatorname{erfc}\left(\frac{z_y}{\sqrt{2}\sigma_x}\right) \quad (3.36)$$

Park et Ang [98] utilisent une combinaison linéaire de la demande de ductilité en déplacement et la demande de ductilité énergétique pour formuler un indice d'endommagement de composants en béton armé. Cet indice rend compte de l'endommagement sous sollicitation cyclique et chargement monotone, alors que la demande de ductilité en déplacement, couramment utilisée en génie parasismique, ne rend compte que de l'endommagement sous chargement monotone.

### 3.3.2 Linéarisation stochastique gaussienne

La linéarisation stochastique gaussienne est une extension de la technique de linéarisation introduite par Krylov et Bogoliubov [77] et fut développée à l'origine par Caughey [34] puis par Iwan et Yang [70]. Atalik et Utku [13] proposent une formulation générale pour extraire de systèmes dynamiques non-linéaires en leurs termes d'inertie, d'amortissement ou de rigidité, un système linéaire équivalent minimisant l'erreur commise sur les forces. Dans le cas d'une excitation gaussienne, Atalik et Utku donnent une expression explicite des coefficients du système linéaire équivalent, que nous rappelons ci-dessous. Cette technique est une extension de la précédente dans la mesure où elle ne suppose pas que la réponse est à bande étroite.

Wen [125, 126] l'utilise pour obtenir la variance de la réponse d'un système hystérétique dérivé du modèle de Bouc [27, 28], à une excitation gaussienne instationnaire et trouve des résultats corroborant ceux obtenus par simulations temporelles dans le cadre d'une méthode de Monte-Carlo. Baber et Wen l'appliquent dans le cas de bâtiments dont les éléments résistants à chaque étage forment une sous-structure à comportement hystérétique [16], puis à des structures en treillis [17, 14] dans lesquelles les masses et les éléments non-linéaires sont concentrés aux noeuds. Dans les deux cas, la dégradation du système est prise en compte et l'endommagement est mesuré par la quantité d'énergie dissipée par hystérésis (voir aussi [114]). Baber et Noori [15] étendent la méthode à des composants dont la boucle d'hystérésis présente un pincement central, ce qui se produit avec l'ouverture/fermeture de fissures et le glissement d'armatures longitudinales dans des pièces en béton armé.

Constantinou et Tadjbakhsh [39] ont étudié par linéarisation stochastique gaussienne, la réponse transitoire d'une masse glissante à un bruit blanc filtré et ont obtenu des résultats proches de ceux fournis par simulations de Monte-Carlo. Par la même méthode, Pons [102] ainsi que Constantinou et Papageorgiou [38] examinent la réponse d'une structure souple sur appuis glissants. Bouc *et al.* [32], Karray et Bouc [75] s'intéressent quant à eux aux structures isolées à la base par des appuis parasismiques à comportement hystérétique.

Récemment Cunha a montré, dans un article de synthèse [41], l'intérêt pratique de la linéarisation stochastique gaussienne pour l'analyse du comportement hystérétique des bâtiments en proposant un algorithme de calcul de la réponse transitoire et une estimation de la fiabilité de la structure. Ses calculs sont toutefois trop lourds pour une utilisation au stade du dimensionnement.

Atalik et Utku [13] envisagent le système dynamique non-linéaire sous la forme vectorielle générale suivante :

$$\mathbf{g}(\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t) \quad (3.37)$$

et suggèrent de le remplacer par le système linéaire suivant :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_{eq} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_{eq} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{eq} = \mathbf{f}(t) \quad (3.38)$$

A la condition que  $\mathbf{f}$  soit un processus aléatoire gaussien et que  $\mathbf{g}$  soit une fonction non-linéaire, suffisamment régulière (pour extraire des dérivées partielles) et croissant moins rapidement qu'une certaine fonction exponentielle, Atalik et Utku montrent que les coefficients du système linéaire équivalent minimisent l'erreur sur la force

$$E \left[ (\mathbf{g}(\ddot{\mathbf{x}}_{eq}, \dot{\mathbf{x}}_{eq}, \mathbf{x}_{eq}) - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_{eq} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_{eq} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{eq})^2 \right] \quad (3.39)$$

dans laquelle  $\mathbf{x}_{eq}$  est solution de (3.38), s'obtiennent de manière explicite sous la forme :

$$\mathbf{M}_{eq} = E \left[ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \ddot{\mathbf{x}}} \right] \quad \mathbf{C}_{eq} = E \left[ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right] \quad \mathbf{K}_{eq} = E \left[ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right] \quad (3.40)$$

Les espérances ci-dessus se calculent à partir de la densité de probabilité des processus conjointement gaussiens  $\ddot{\mathbf{x}}_{eq}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_{eq}$  et  $\mathbf{x}_{eq}$ , solutions de (3.38). Le système linéaire équivalent dépend donc du temps, sauf si la réponse est stationnaire. Il s'agit encore une fois d'équations implicites puisque les coefficients équivalents dépendent de la solution, qui elle-même dépend du système linéaire équivalent. Une méthode itérative s'impose. Spanos et Iwan [113] ont montré que la solution de (3.40) existe et est unique pourvu que la matrice  $E \left[ \mathbf{x}_{eq} \mathbf{x}_{eq}^T \right]$  soit non-singulière. Sinon, la solution n'est pas unique, mais au moins tout aussi bonne qu'une autre solution.

Il est important que les non-linéarités soient formulées de façon explicite par des fonctions non-linéaires différentiables du déplacement, de la vitesse ou de l'accélération.

### Modèle de Bouc-Wen

Bouc [27, 28] a développé un modèle mathématique, repris par Wen [125], désigné par la suite modèle de Bouc-Wen, susceptible de décrire des comportements hystérétiques variés par ajustement d'un petit nombre de paramètres [125]. D'autre part ce modèle convient particulièrement bien à la technique de linéarisation présentée ici. La mémoire des déformations inélastiques, facteur important des systèmes hystérétiques, est introduite par l'intermédiaire d'une variable supplémentaire par composant non-linéaire. La force de rappel d'un tel composant peut s'écrire :

$$F = - \{ \alpha k_o x + (1 - \alpha) k_o z \} \quad (3.41)$$

où  $x$  est la déformation totale de l'élément et  $z$  est une variable supplémentaire dépendant de l'historique du chargement. Le modèle de Bouc-Wen donne une règle d'écoulement de la variable  $z$  :

$$\dot{z} + \gamma |\dot{x}| z |z|^{n-1} + \beta \dot{x} |z|^n - A \dot{x} = 0 \quad (3.42)$$

On peut, par exemple, approcher avec ce modèle le comportement d'un composant élasto-plastique avec écrouissage cinématique. On pourra choisir les paramètres suivants :  $A = 1$ ,  $\gamma = \beta = 1/(2z_y^n)$ . L'entier  $n$  contrôle la transition élastique-plastique. Plus  $n$  est grand, plus cette transition est marquée. Inversement la transition est d'autant plus lisse que  $n$  est petit. La constante  $k_o$  représente typiquement la raideur initiale du composant et  $\alpha$  s'interprète

comme le ratio de la raideur tangente post-élastique sur la raideur initiale. Dans les phases de charge/décharge élastique,  $\delta x \approx \delta z$ ,  $\delta F \approx k_o \delta x$  et la raideur tangente vaut  $k_o$ . Dans les phases purement plastiques  $\delta z = 0$  et  $\delta F = \alpha k_o \delta x$ . Cherng et Wen [35] ont remarqué que pour de faibles valeurs de  $n$ , le modèle met en défaut certains postulats de plasticité. Les grandes valeurs de  $n$  posent, quant à elles, des problèmes numériques dans l'utilisation de l'équation (3.42). On trouve pour  $n = 4$  ou  $5$  un bon compromis entre efficacité numérique et propriétés mécaniques.

La Figure 3.10 montre les boucles d'hystérésis de ce modèle élasto-plastique parfait approché ( $\alpha = 0$ ) pour trois valeurs du paramètre  $n$  : 1, 2 et 5.

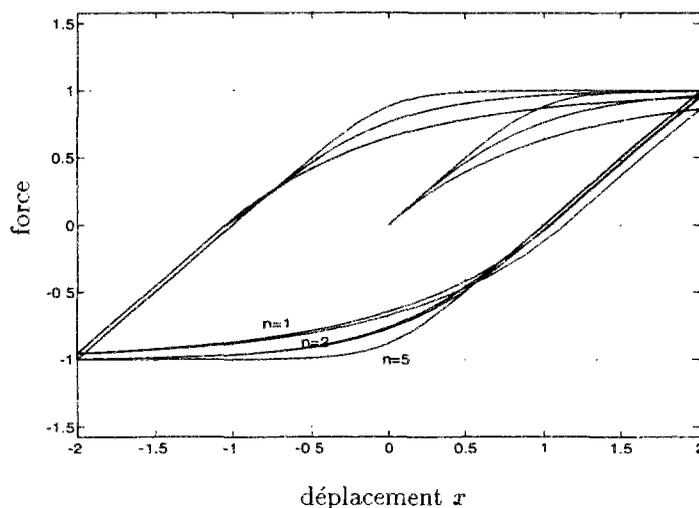


FIG. 3.10 - Boucle d'hystérésis pour le modèle de Bouc-Wen approchant un composant élasto-plastique parfait ( $\alpha = 0$ ,  $A = 1$ ,  $\gamma = \beta = 1/(2z_y^n)$ )

A partir de données expérimentales, Sues, Mau et Wen [114] ont identifié les paramètres suivants pour les éléments de structure en acier et en béton armé :

$$\begin{aligned} \alpha = 0.04 \quad n = 1 \quad A = 1 \quad \gamma = \beta = \frac{1}{2z_y} & \quad \text{pour des éléments en acier} \\ \alpha = 0.02 \quad n = 2 \quad A = 1 \quad \gamma = \frac{3}{2z_y^2}, \beta = -\frac{1}{2z_y^2} & \quad \text{pour le béton armé} \end{aligned} \quad (3.43)$$

La Figure 3.11 illustre les cycles d'hystérésis obtenus pour ces deux modèles.

Park, Wen et Ang [99] ont étendu le modèle de Bouc-Wen aux éléments biaxiaux hystériques, tels que des piles de ponts, ou des appareils d'appui sollicités dans deux directions orthogonales simultanément. Karray et Bouc [75] donnent une formulation tridimensionnelle et l'appliquent à des appareils d'isolation sismique.

Il est tout à fait possible d'appliquer la méthode de la moyenne stochastique au modèle de Bouc-Wen (cf. [141]), toutefois ce modèle est particulièrement bien adapté à la linéarisation stochastique gaussienne. En suivant le démarche d'Atalik et Utku, nous linéarisons l'équation (3.42) :

$$\dot{z} + \eta \dot{x} + \kappa z = 0 \quad (3.44)$$

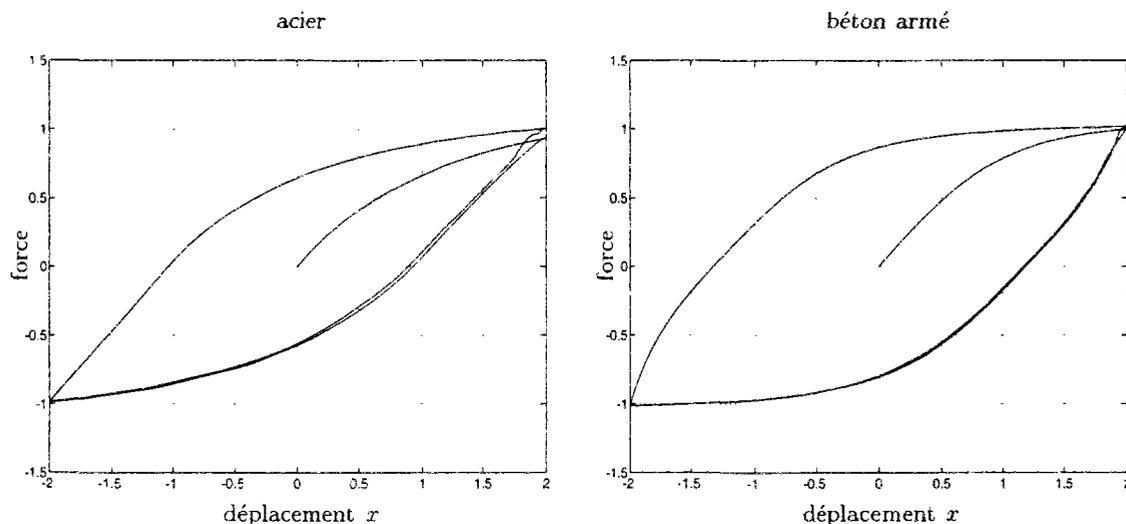


FIG. 3.11 - *Modèle de Bouc-Wen pour éléments en acier* ( $\gamma = \beta = 1/(2z_y)$ ) *et en béton armé* ( $\gamma = 3/(2z_y^2)$   $\beta = -1/(2z_y^2)$ )

avec

$$\eta = \gamma E \left[ \frac{\partial |\dot{x}|}{\partial \dot{x}} z |z|^{n-1} \right] + \beta E [|z|^n] - A \quad (3.45)$$

$$\kappa = n\gamma E [|\dot{x}| |z|^{n-1}] + n\beta E \left[ \dot{x} \frac{\partial |z|}{\partial z} |z|^{n-1} \right] \quad (3.46)$$

Notons que  $\frac{\partial |z|}{\partial z} = \text{signe}(z)$  et  $\frac{\partial |\dot{x}|}{\partial \dot{x}} = \text{signe}(\dot{x})$ . Baber et Wen [16, 17] ont donné des expressions analytiques des diverses espérances apparaissant dans les formules précédentes. L'excitation étant gaussienne de moyenne nulle, la réponse du système linéaire équivalent l'est également. Les variables aléatoires  $\dot{x}(t)$  et  $z(t)$  ont une distribution jointe normale de moyenne nulle, de variances  $\sigma_{\dot{x}}^2$  et  $\sigma_z^2$  et de coefficient de corrélation  $\rho$  :

$$E \left[ \frac{\partial |\dot{x}|}{\partial \dot{x}} z |z|^{n-1} \right] = \frac{2^{n/2} \sigma_z^n}{\pi} \Gamma \left( \frac{n+2}{2} \right) I(\rho) \quad (3.47)$$

$$E [|z|^n] = \frac{2^{n/2} \sigma_z^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left( \frac{n+1}{2} \right) \quad (3.48)$$

$$E [|\dot{x}| |z|^{n-1}] = \frac{2^{n/2} \sigma_{\dot{x}} \sigma_z^{n-1}}{\pi} \Gamma \left( \frac{n+2}{2} \right) \left\{ 2 \frac{(1-\rho^2)^{\frac{n+1}{2}}}{n} + \rho I(\rho) \right\} \quad (3.49)$$

$$E \left[ \dot{x} \frac{\partial |z|}{\partial z} |z|^{n-1} \right] = \frac{2^{n/2} \rho \sigma_{\dot{x}} \sigma_z^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left( \frac{n+1}{2} \right) \quad (3.50)$$

avec

$$s(\rho) = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \right) \quad \text{et} \quad I(\rho) = 2 \int_{s(\rho)}^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta \quad (3.51)$$

Ces expressions se calculent numériquement ou bien analytiquement [35, annexe D].

Baber et Wen [16] donnent une expression de la dissipation hystérétique d'énergie :

$$W_D = (1 - \alpha)k_o \int_0^T z(t)\dot{x}(t)dt \quad (3.52)$$

dont l'espérance vaut :

$$E[W_D] = (1 - \alpha)k_o \int_0^T \sigma_z(t)\sigma_{\dot{x}}(t)\rho(t)dt \quad (3.53)$$

On en déduit le facteur de ductilité énergétique :

$$\mu_{\text{énergie}} = 1 + \frac{E[W_D]}{k_o z_y^2} = 1 + (1 - \alpha) \int_0^T \frac{\sigma_z(t)}{z_y} \frac{\sigma_{\dot{x}}(t)}{z_y} \rho(t)dt \quad (3.54)$$

où l'on a défini l'équivalent d'une limite d'élasticité

$$z_y = \left[ \frac{A}{\gamma + \beta} \right]^{1/n} \quad (3.55)$$

seuil au delà duquel tout incrément de déformation  $\delta x$  induit un incrément de force hystérétique nul  $(1 - \alpha)k_o \delta z = 0$ . Dans le cas d'une réponse stationnaire

$$\mu_{\text{énergie}} = 1 + (1 - \alpha)T \frac{\sigma_z}{z_y} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{z_y} \rho \quad (3.56)$$

### Linéarisation équivalente d'un appareil d'appui glissant (frottement de Coulomb)

La Figure 3.12 montre une boucle d'hystérésis d'un appareil d'appui suivant une loi de frottement de Coulomb. La force de rappel ne dépend que du signe de la vitesse relative  $\dot{x}$  :

$$F(x, \dot{x}) = -F_y \text{signe}(\dot{x}) \quad (3.57)$$

Les équations (3.40) montrent que le composant linéaire équivalent se réduit à un amortisseur visqueux de constante :

$$c_{eq} = F_y E \left[ \frac{\partial \text{signe}(\dot{x})}{\partial \dot{x}} \right] = F_y E [2\delta(\dot{x})] \quad (3.58)$$

ce qui, étant donné que  $\dot{x}$  suit une loi normale centrée de variance  $\sigma_{\dot{x}}^2$ , conduit à :

$$c_{eq} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{F_y}{\sigma_{\dot{x}}} \quad (3.59)$$

Notons ici, que la moyenne stochastique donne les résultats suivants :

$$C(A) = 0 \quad S(A) = \frac{2AF_y}{\pi} \quad (3.60)$$

$$k_{eq} = 0 \quad c_{eq} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{F_y}{\omega_{eq} \sigma_x} \quad (3.61)$$

Si le système se compose uniquement d'une masse glissant sur un plan, du fait de la nullité de la raideur équivalente  $k_{eq}$ , la pulsation moyenne équivalente  $\omega_{eq}$  est également nulle et le coefficient d'amortissement visqueux n'est pas défini, à moins qu'on interprète  $\omega_{eq} \sigma_x$  comme l'écart-type de la vitesse relative  $\sigma_{\dot{x}}$ .

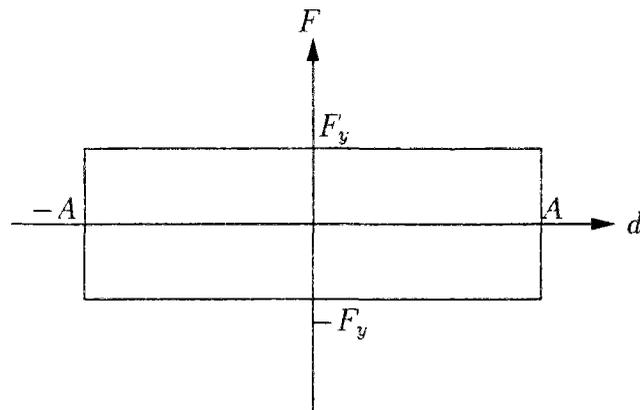


FIG. 3.12 - Boucle d'hystérésis pour frottement de Coulomb

### 3.3.3 Limites et avantages comparatifs des techniques de linéarisation

Les deux techniques de linéarisation exposées ci-dessus visent à minimiser les moments d'ordre deux d'une erreur entre les forces de rappel inélastiques et les forces de rappel linéaires équivalentes. On ne doit donc pas s'attendre à obtenir de très bons résultats, en force ou en déplacement, sur les moments d'ordre supérieurs à deux et en particulier sur la distribution des extremums. D'autre part, les coefficients du système linéaire équivalent sont évalués en calculant des espérances sur la base d'une réponse équivalente gaussienne. Or la réponse d'un système non-linéaire à une excitation gaussienne est notoirement non-gaussienne. De multiples techniques permettent de préciser le caractère non gaussien de la réponse (voir par exemple [105, chapitre 9]), toutefois elles sont lourdes à mettre en œuvre pour des systèmes dépassant l'oscillateur à un degré de liberté.

Roberts et Spanos [105, paragraphe 10.4.4] comparent la moyenne stochastique à des simulations de Monte-Carlo pour oscillateurs bilinéaires soumis à un bruit blanc gaussien. Ils constatent que la moyenne stochastique donne de bons résultats (en terme de variance de la réponse) pour des oscillateurs peu plastiques ou franchement plastiques. La réponse des oscillateurs intermédiaires est à bande plus large et, de ce fait, la moyenne stochastique donne de moins bons résultats. La technique de linéarisation stochastique gaussienne peut être appliquée à des oscillateurs élasto-plastiques, mais les changements abruptes de raideur tangente de ce type d'oscillateurs font que cette technique ne donne pas de très bons résultats. Pour des non-linéarités gouvernées par le modèle de Bouc-Wen, les résultats sont bien meilleurs et sont très voisins de ceux fournis par simulations de Monte-Carlo [126]. Rappelons que cette dernière technique n'est pas soumise à l'hypothèse d'une réponse à bande étroite.

## 3.4 Synthèse modale

À chaque itération, nous linéarisons grâce à l'une des techniques décrites dans le paragraphe précédent, l'expression du terme non-linéaire  $\mathcal{M}$  du membre de droite de l'équation de la dynamique (3.10). Nous cherchons alors à obtenir des caractéristiques statistiques de la réponse du système linéarisé, telles que des maxima moyens de déformations, des moments spectraux, des fréquences moyennes des déplacements relatifs au droit des connexions. Tous ces résultats peuvent être obtenus par des méthodes de spectre de réponse élastique à la condition qu'on

possède un ensemble suffisamment complet de modes propres du système linéarisé. Idéalement nous devrions pratiquer une analyse modale à chaque itération sur le nouveau système linéarisé. Toutefois, cela serait numériquement cher et de ce fait de peu d'utilité pratique. Nous proposons une méthode approchée plus simple, dans laquelle un ensemble de modes propres du système linéarisé est calculé, suivant une méthode de Ritz, dans l'espace formé par une base tronquée des modes propres du système linéaire relaxé. Les modes propres du système linéaire relaxé sont calculés une fois pour toutes au début de la procédure. A chaque itération, les modes propres du système linéarisé sont obtenus par analyse d'un système de petite taille. L'ensemble des modes propres du système linéaire relaxé doit être suffisamment grand pour permettre *a priori* de décrire la variété des conditions possibles de jonction au droit des connexions. Nous donnons un critère évaluant l'aptitude des modes propres du système linéaire relaxé à satisfaire cette clause.

### 3.4.1 Modes propres du système linéaire relaxé

Nous désignons par  $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$ , l'ensemble des modes propres retenus du système linéaire relaxé. Il s'agit d'une base modale tronquée du système non amorti  $(\mathbf{K}, \mathbf{M})$ . Notons que puisque les conditions aux limites des sous-systèmes ont été relaxées au droit des connexions, il se peut très bien qu'on obtienne parmi les modes propres, un certain nombre de mécanismes, ou modes propres de fréquence nulle. Si en théorie, cela ne pose pas de problème, dans la pratique, certains logiciels ont des difficultés lorsque de tels modes apparaissent. On pourra, dans ce cas, remplacer les conditions parfaitement relaxées par des éléments de très faible rigidité pour obtenir des modes voisins des mécanismes en question. Nous normalisons les modes propres de façon à ce que

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{Id} \text{ (matrice identité)}, \quad \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \text{diag}\{\omega_i^2\} \quad (3.62)$$

et nous faisons l'hypothèse dite de Basile que la matrice d'amortissement visqueux se diagonalise sur la même base :

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \text{diag}\{2\zeta_i \omega_i\} \quad (3.63)$$

Notons qu'il s'agit là d'un amortissement réparti sur les sous-structures, ce qui justifie habituellement l'hypothèse et non pas d'un amortissement provenant d'une dissipation de nature hystérétique au droit des connexions.

### 3.4.2 Synthèse modale compatible avec la moyenne stochastique

La moyenne stochastique fournit des ressorts et amortisseurs équivalents en lieu et place des connexions. Le terme non-linéaire du membre de droite de l'équation (3.10) se linéarise donc comme suit :

$$\mathcal{M} = -\mathbf{K}_c \boldsymbol{\theta} - \mathbf{C}_c \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.64)$$

où les indices  $c$  se réfèrent aux connexions. Puisque  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{P}_{rot} \mathbf{X}$ , nous obtenons

$$-\mathbf{P}_{rot}^T \mathcal{M} = \left( \mathbf{P}_{rot}^T \mathbf{K}_c \mathbf{P}_{rot} \right) \mathbf{X} + \left( \mathbf{P}_{rot}^T \mathbf{C}_c \mathbf{P}_{rot} \right) \dot{\mathbf{X}} \quad (3.65)$$

Précisons le contenu de ces matrices :  $\mathbf{K}_c$  et  $\mathbf{C}_c$  sont des matrices diagonales dont les coefficients sont respectivement les raideurs  $\alpha_{r,k}$  des ressorts équivalents et les constantes  $\alpha_{a,k}$  des amortisseurs équivalents, où  $k$  est un indice repérant les connexions (au nombre de  $NR$ ). Nous désignons par  $\mathbf{l}_k$  la  $k^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $\mathbf{P}_{rot}$ , qui rappelons-le est le *vecteur lien* de la  $k^{\text{ème}}$

connexion, valant zéro partout sauf en position  $i$ , où il vaut 1 et en position  $j$ , où il vaut  $-1$ , si la connexion joint les degrés de liberté  $i$  et  $j$  du vecteur  $\mathbf{X}$ . L'équation (3.65) s'écrit alors :

$$-\mathbf{P}_{rot}^T \mathcal{M} = \left( \sum_{k=1}^{NR} \alpha_{r,k} l_k^T l_k \right) \mathbf{X} + \left( \sum_{k=1}^{NR} \alpha_{a,k} l_k^T l_k \right) \dot{\mathbf{X}} \quad (3.66)$$

Si on reporte l'expression (3.65) de  $-\mathbf{P}_{rot}^T \mathcal{M}$  dans le premier membre de (3.10), on trouve :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \left( \mathbf{C} + \mathbf{P}_{rot}^T \mathbf{C}_c \mathbf{P}_{rot} \right) \dot{\mathbf{X}} + \left( \mathbf{K} + \mathbf{P}_{rot}^T \mathbf{K}_c \mathbf{P}_{rot} \right) \mathbf{X} = -\mathbf{M}\mathbf{U}\ddot{u}_g \quad (3.67)$$

Si on effectuait maintenant une analyse modale sur le membre de gauche, on constaterait qu'il n'y a aucune raison pour la matrice d'amortissement complète  $\mathbf{C}_{tot} = \mathbf{C} + \mathbf{P}_{rot}^T \mathbf{C}_c \mathbf{P}_{rot}$  se diagonalise sur la même base que la matrice de raideur complète  $\mathbf{K}_{tot} = \mathbf{K} + \mathbf{P}_{rot}^T \mathbf{K}_c \mathbf{P}_{rot}$  et la matrice de masse  $\mathbf{M}$ . Ceci tient à la localisation de la dissipation d'énergie par les connexions. Les nouveaux modes propres sont donc complexes. Il est courant dans ce cas (voir par exemple [67]) de reformuler l'équation différentielle du second degré (3.67) en une équation du premier degré de taille double :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{B}\mathbf{Y} = \mathbf{F}\ddot{u}_g \quad (3.68)$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C}_{tot} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{tot} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}\mathbf{U} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{X} \end{Bmatrix} \quad (3.69)$$

Le problème aux valeurs propres associé s'écrit :

$$\mu \mathbf{A} \hat{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{B} \hat{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{0} \quad (3.70)$$

Les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  étant réelles, les solutions  $(\hat{\boldsymbol{\psi}}, \mu)$  apparaissent en paires complexes conjugués. De l'équation (3.68), on obtient facilement que  $\hat{\boldsymbol{\psi}}$  est de la forme :

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} = \begin{Bmatrix} \mu \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi} \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

où  $\boldsymbol{\psi}$  est solution de

$$\left\{ \mu^2 \mathbf{M} + \mu \mathbf{C}_{tot} + \mathbf{K}_{tot} \right\} \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (3.72)$$

Les valeurs propres peuvent s'écrire sous la forme

$$\mu = -\zeta^* \omega^* \pm i \sqrt{1 - \zeta^{*2}} \omega^* \quad (3.73)$$

avec

$$\omega^* = |\mu| \quad \text{et} \quad \zeta^* = \text{Re}(\mu)/|\mu| \quad (3.74)$$

Le problème aux valeurs propres, tel qu'il est formulé dans l'équation (3.70) est un problème dont la dimension est le double du nombre initial de degrés de liberté. Il est donc trop cher de résoudre ce problème à chaque itération. Nous résolvons un problème approché, dans lequel nous exprimons l'équation (3.68) ainsi que les vecteurs propres de (3.70) sur la base tronquée des vecteurs propres du système linéaire relaxé  $\Phi$  selon une méthode de Ritz. En notant  $\mathbf{X}_o$  et  $\mathbf{Y}_o$  les coordonnées généralisées de  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  sur cette base, *i.e.* :

$$\mathbf{X} = \Phi \mathbf{X}_o, \quad \dot{\mathbf{X}} = \Phi \dot{\mathbf{X}}_o, \quad \mathbf{Y}_o = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_o \\ \mathbf{X}_o \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix} \mathbf{Y}_o \quad (3.75)$$

l'équation dynamique (3.68) s'écrit :

$$\mathbf{A}_o \dot{\mathbf{Y}}_o + \mathbf{B}_o \mathbf{Y}_o = \mathbf{F}_o \ddot{u}_g \quad (3.76)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_o &= \begin{bmatrix} \Phi^T & \\ & \Phi^T \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \Phi & \\ & \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Id} \\ \mathbf{Id} & \Phi^T \mathbf{C}_{tot} \Phi \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_o &= \begin{bmatrix} \Phi^T & \\ & \Phi^T \end{bmatrix} \mathbf{B} \begin{bmatrix} \Phi & \\ & \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Id} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi^T \mathbf{K}_{tot} \Phi \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_o &= \begin{bmatrix} \Phi^T \\ & \Phi^T \end{bmatrix} \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\Phi^T \mathbf{M} \mathbf{U} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Remarquons que compte tenu de la normalisation des modes  $\phi_i$ , la deuxième partie du vecteur  $\mathbf{F}_o$  est constituée des facteurs de participation usuels. D'autre part, des définitions de  $\mathbf{K}_{tot}$  et  $\mathbf{C}_{tot}$  et des équations (3.62), (3.63) et (3.66) on déduit :

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Id} \\ \mathbf{Id} & \text{diag}\{2\zeta_i \omega_i\} + \sum_{k=1}^{NR} \alpha_{a,k} \mathbf{l}_{o,k}^T \mathbf{l}_{o,k} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

et

$$\mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} -\mathbf{Id} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}\{\omega_i^2\} + \sum_{k=1}^{NR} \alpha_{r,k} \mathbf{l}_{o,k}^T \mathbf{l}_{o,k} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

où l'on a défini les contributions modales aux vecteurs liens  $\mathbf{l}_{o,k} = \mathbf{l}_k \Phi$ . Selon la méthode de Ritz, le problème aux valeurs propres approché s'écrit :

$$\mu \mathbf{A}_o \hat{\psi}_o + \mathbf{B}_o \hat{\psi}_o = \mathbf{0} \quad (3.80)$$

Les matrices  $\mathbf{A}_o$  et  $\mathbf{B}_o$  ont pour dimension  $2 \times \text{NM}$  où  $\text{NM}$  est le nombre de vecteurs propres du système linéaire relaxé retenus dans la base tronquée. C'est en général un nombre bien plus petit que la taille du système original. Il faut toutefois conserver un nombre suffisant de modes du système linéaire relaxé pour pouvoir décrire convenablement tout type de connexion entre les sous-systèmes. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe 3.4.3. Le problème aux valeurs propres est donc en général de petite taille et peut être résolu par des programmes standards des bibliothèques mathématiques. On présente toutefois en annexe D.1, un algorithme qui fait usage de la forme particulière des matrices  $\mathbf{A}_o$  et  $\mathbf{B}_o$ . Les vecteurs propres complexes de (3.80) ont la forme suivante :

$$\hat{\psi}_o = \begin{Bmatrix} \mu \psi_o \\ \psi_o \end{Bmatrix} \quad (3.81)$$

et sont reliés aux vecteurs propres du problème original (3.70) par les formules

$$\hat{\psi} = \begin{bmatrix} \Phi & \\ & \Phi \end{bmatrix} \hat{\psi}_o = \begin{Bmatrix} \mu \Phi \psi_o \\ \Phi \psi_o \end{Bmatrix} \quad (3.82)$$

Notons que les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  (respectivement  $\mathbf{A}_o$  et  $\mathbf{B}_o$ ) étant symétriques, les vecteurs propres  $\hat{\psi}_i$  (respectivement  $\hat{\psi}_{o,i}$ ) sont orthogonaux, *i.e.* :

$$\hat{\psi}_i^T \mathbf{A} \hat{\psi}_j = \hat{\psi}_i^T \mathbf{B} \hat{\psi}_j = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (3.83)$$

et

$$\hat{\psi}_{o,i}^T \mathbf{A} \hat{\psi}_{o,j} = \hat{\psi}_{o,i}^T \mathbf{B} \hat{\psi}_{o,j} = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (3.84)$$

### 3.4.3 Critère de suffisance des modes retenus

Rappelons qu'en génie parasismique, on utilise le concept de masse modale sismique pour estimer l'aptitude de l'ensemble des modes propres retenus à décrire la réponse de la structure. Pour chaque mode  $\phi_r$  du système linéaire relaxé, on la définit par :

$$M^r = \frac{(\phi_r^T \mathbf{M} \mathbf{U})^2}{\phi_r^T \mathbf{M} \phi_r} = (\phi_r^T \mathbf{M} \mathbf{U})^2 \quad \text{puisque } \phi_r^T \mathbf{M} \phi_r = 1 \quad (3.85)$$

On sait que si le sous-espace engendré par l'ensemble des modes propres est dense dans l'espace des déplacements admissibles, alors la somme des masses modales sismiques restitue la masse totale  $M_T$  de l'ouvrage. On définit ainsi le ratio des masses sismiques sur la masse de la structure pour le système linéaire relaxé (slr) :

$$r_{slr} = \frac{\sum_{r=1}^{NM} M^r}{M_T} \quad (3.86)$$

Rappelons que ce rapport reflète l'aptitude des modes retenus du système linéaire relaxé à décrire le vecteur des forces d'entraînement  $\mathbf{M} \mathbf{U}$ . Du fait de la relaxation des conditions aux limites au droit des connexions, les modes propres de ce système permettent de grands déplacements relatifs et leur utilisation est appropriée lorsque les éléments non-linéaires connaissent de grandes déformations inélastiques et présentent une raideur moyenne faible.

A l'autre extrême, on souhaite également que le même ensemble de vecteurs propres permettent de décrire convenablement la réponse d'un système presque parfaitement élastique obtenu en plaçant des ressorts très rigides aux connexions, voire en encastrant les connexions. L'ensemble des vecteurs propres permettrait alors de décrire des situations comprises entre un système dont les connexions restent essentiellement linéaires et un système dont les connexions sont essentiellement plastiques. A la limite, en imposant des ressorts extrêmement rigides entre sous-systèmes, on bloque les déplacements relatifs des éléments potentiellement non-linéaires. Les modes propres de cette structure satisfont donc à des conditions aux limites bloquées entre sous-structures. Comme ces modes sont aussi des combinaisons linéaires des modes propres  $\phi_i$  du système linéaire relaxé, l'espace engendré par les modes du système aux connexions bloquées est le suivant :

$$V_{\text{bloqué}} = \left\{ x, x = \sum_{r=1}^{NM} \alpha_r \phi_r = \Phi \alpha, \text{ avec } \mathbf{P}_{rot} \Phi \alpha = \mathbf{0} \right\} \quad (3.87)$$

Notons que le terme général de la matrice  $NR \times NM$   $[\mathbf{P}_{rot} \Phi]_{i,j}$  est le déplacement relatif à la connexion  $i$  associé au mode  $j$ . De façon à introduire un nouveau critère similaire à la masse modale sismique, on cherche à approcher le vecteur unitaire  $\mathbf{U}$  par les modes propres du système bloqué aux connexions, ou ce qui est équivalent, à l'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &\approx \sum_{r=1}^{NM} \alpha_r \phi_r = \Phi \alpha \\ \mathbf{P}_{rot} \Phi \alpha &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.88)$$

On cherche le vecteur  $\alpha$  qui minimise la distance (pondérée par la masse) du vecteur  $\mathbf{U}$  au sous-espace  $V_{\text{bloqué}}$ . Il s'agit de la solution du problème quadratique suivant :

$$\begin{cases} \text{Min } J(\alpha) &= \frac{1}{2} (\mathbf{U} - \Phi \alpha)^T \mathbf{M} (\mathbf{U} - \Phi \alpha)^T \\ \mathbf{P}_{rot} \Phi \alpha &= \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.89)$$

Remarquons que

$$J(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}\mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{U} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{U}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2}\mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{U} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{P}^T\boldsymbol{\alpha} \quad (3.90)$$

étant donné la définition des facteurs de participation  $\mathbf{P} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_{NM}]^T$  (avec  $p_i = -\boldsymbol{\phi}_i^T\mathbf{M}\mathbf{U}$ ) et la normalisation des modes du système linéaire relaxé ( $\boldsymbol{\phi}_i^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_j = \delta_{ij}$ ). En définissant les multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_{NR}]^T$ , la solution du problème quadratique satisfait le système linéaire suivant, pourvu que les lignes de la matrice  $\mathbf{P}_{rot}\boldsymbol{\Phi}$  soient linéairement indépendantes :

$$\begin{cases} J'(\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{P}_{rot}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{rot}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.91)$$

ou, explicitement sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Id} & \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{P}_{rot}^T \\ \mathbf{P}_{rot}\boldsymbol{\Phi} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

On peut résoudre ce système dès que l'analyse modale du système linéaire relaxé a été effectuée. Notons toutefois que les lignes de la matrice  $\mathbf{P}_{rot}\boldsymbol{\Phi}$  ne peuvent être indépendantes si le nombre de modes retenus (qui est aussi le nombre de colonnes de  $\mathbf{P}_{rot}\boldsymbol{\Phi}$ ) est plus petit que le nombre de connexions potentiellement non-linéaires de la structure (nombre de lignes de  $\mathbf{P}_{rot}\boldsymbol{\Phi}$ ).

On définit un nouveau ratio :

$$r_{\text{bloqué}} = \frac{(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha})^T\mathbf{M}(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\alpha})}{M_T} = \frac{\sum_{r=1}^{NM} \alpha_r^2}{M_T} \quad (3.93)$$

d'où l'on tire une définition de la masse effective des modes du système linéaire relaxé contraints par les conditions aux limites bloquées entre sous-structures :  $\alpha_r^2\boldsymbol{\phi}_r^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_r = \alpha_r^2$ .

Remarquons qu'en l'absence de contrainte de blocage aux connexions,  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{P}$  et  $\alpha_r^2 = M^r$  d'où  $r_{\text{bloqué}} = r_{\text{sir}}$ . Si la base modale du système linéaire relaxé est complète, alors  $V_{\text{bloqué}}$  est l'espace des déplacements admissibles bloqués aux connexions. Cet espace est dense dans l'espace des déplacements non-bloqués et donc  $r_{\text{bloqué}} = r_{\text{sir}} = 1$ .

La Figure 3.13 montre ces ratios pour les modes longitudinaux et latéraux du pont sur le Gave de Pau (version simplifiée de l'ouvrage avec tablier mixte, cf. paragraphes 3.6.2 et 3.6.3). En dessous de trois modes les conditions d'encastrement des trois rotules en pied de piles ne peuvent être satisfaites. Au moins huit modes sont nécessaires pour bien décrire la réponse latérale tandis que quatre semblent suffire dans la direction longitudinale.

### 3.4.4 Synthèse modale compatible avec la linéarisation stochastique gaussienne

Nous nous restreignons ici aux non-linéarités répondant au modèle de Bouc-Wen. A chaque connexion  $k$ , associée à un déplacement relatif  $\theta_k$ , on introduit une variable auxiliaire  $z_k$  de sorte que la force de rappel non-linéaire prend la forme vectorielle suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{M} = -\mathbf{K}_0\boldsymbol{\theta} - \mathbf{K}_1\mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{h}(\dot{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{z}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.94)$$

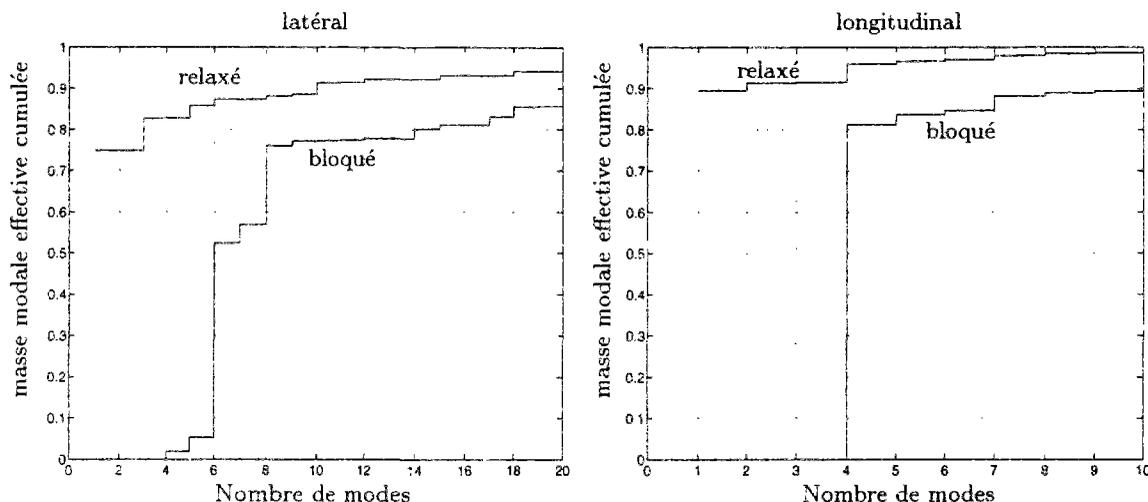


FIG. 3.13 - Ratio de masse modale effective pour systèmes relaxé et bloqué aux connexions. Mouvement latéral (à gauche) et longitudinal (à droite).

Les matrices  $\mathbf{K}_0$  et  $\mathbf{K}_1$  sont diagonales. Dans le cas de connexions proches de composants élasto-plastiques avec écrouissage cinématique, les coefficients de  $\mathbf{K}_0$  sont les raideurs tangentes après plastification et les coefficients de  $\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1$  sont les raideurs tangentes de charge/décharge élastique. La seconde équations vectorielle de (3.94) comprend autant de relations non-linéaires du type Bouc-Wen  $\dot{z}_k + h_k(\theta_k, z_k) = 0$  (voir équation (3.42)) qu'il y a d'éléments potentiellement non-linéaires. Le système différentiel devient :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K} + \mathbf{P}_{rot}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{P}_{rot})\mathbf{X} + \mathbf{P}_{rot}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{z} = -\mathbf{M}\mathbf{U}\ddot{u}_g \\ \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{h}(\dot{\theta}, \mathbf{z}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.95)$$

Notons que la matrice de rigidité étendue  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{P}_{rot}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{P}_{rot}$  correspond au système linéaire relaxé auquel on a ajouté des ressorts dont raideurs sont les coefficients de  $\mathbf{K}_0$  aux connexions. Dans le cas élasto-plastique, il s'agit de la matrice de rigidité tangente de la structure lorsque toutes les connexions ont plastifié. Puisque la linéarisation ne porte que sur la deuxième ligne de (3.95), on a tout intérêt à intégrer dans le système linéaire relaxé la matrice de rigidité  $\tilde{\mathbf{K}}$  en lieu et place de la matrice  $\mathbf{K}$ . On effectue une analyse modale du couple matriciel  $(\tilde{\mathbf{K}}, \mathbf{M})$  et en faisant l'hypothèse que la matrice d'amortissement visqueux se diagonalise sur la base des vecteurs propres, on obtient un ensemble de valeurs propres  $\omega_i^2$  et de vecteurs propres  $\phi_i$  satisfaisant les relations :

$$\phi_j^T \tilde{\mathbf{K}} \phi_i = \omega_i^2 \delta_{ij} \quad \phi_j^T \mathbf{M} \phi_i = \delta_{ij} \quad \phi_j^T \mathbf{C} \phi_i = 2\zeta_i \omega_i \delta_{ij} \quad (3.96)$$

En exprimant les déplacements sur la base modale  $\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^{NM} a_i(t) \phi_i$ , on trouve un système d'équations couplées :

$$\begin{cases} \ddot{a}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{a}_i(t) + \omega_i^2 a_i(t) + (\mathbf{P}_{rot} \phi_i)^T \mathbf{K}_1 \mathbf{z} = p_i \ddot{u}_g \\ \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{h}(\sum_{i=1}^{NM} \dot{a}_i(t) \mathbf{P}_{rot} \phi_i, \mathbf{z}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.97)$$

dans lequel on a introduit les facteurs de participation  $p_i = -\frac{\phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{U}}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i}$ . Notons que les  $\mathbf{P}_{rot} \phi_i$  sont les déplacements relatifs aux connexions, liés aux modes propres  $\phi_i$ . C'est par l'intermé-

diaire des contraintes aux connexions que le système est couplé. Remarquons également que la seconde partie du système se compose d'un ensemble de NR équations scalaires :

$$\dot{z}_k + h_k \left( \sum_{i=1}^{NM} \dot{a}_i(t) \mathbf{l}_k \phi_i, z_k \right) = 0 \quad (3.98)$$

où  $\mathbf{l}_k \phi_i$  est le déplacement relatif du mode  $i$  à la connexion  $k$ . En supposant que l'excitation est gaussienne, on linéarise 3.98 conformément à la méthode de linéarisation stochastique (3.44) :

$$\dot{z}_k + \eta_k \sum_{i=1}^{NM} \dot{a}_i(t) \mathbf{l}_k \phi_i + \kappa_k z_k = 0 \quad (3.99)$$

où  $\eta_k = E \left[ \frac{\partial h_k}{\partial \theta_k} \right]$  et  $\kappa_k = E \left[ \frac{\partial h_k}{\partial z_k} \right]$ . Définissons les matrices suivantes

$$\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_{NM}] \quad \Omega^2 = \text{diag}\{\omega_i^2\} \quad 2\zeta\Omega = \text{diag}\{2\zeta_i\omega_i\} \quad (3.100)$$

$$\kappa = \text{diag}\{\kappa_k\} \quad \eta = [\eta_k \mathbf{l}_k \phi_i]_{\substack{k=1 \dots NR \\ i=1 \dots NM}} = \text{diag}\{\eta_k\} \mathbf{P}_{rot} \Phi \quad (3.101)$$

ainsi que le vecteur des coordonnées généralisées  $\mathcal{A} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{NM}]^T$  et le vecteur des facteurs de participation  $\mathbf{P} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_{NM}]^T$ . Le système différentiel linéaire équivalent devient :

$$\begin{cases} \ddot{\mathcal{A}} + 2\zeta\Omega\dot{\mathcal{A}} + \Omega^2\mathcal{A} + (\mathbf{P}_{rot}\Phi)^T \mathbf{K}_1 \mathbf{z} = \mathbf{P} \ddot{u}_g \\ \dot{\mathbf{z}} + \eta\dot{\mathcal{A}} + \kappa\mathbf{z} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.102)$$

Pour résoudre numériquement ce système couplé, on le transforme en un système différentiel du premier degré en le vecteur d'état  $\mathbf{Y}$  :

$$\mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathcal{A}} \\ \mathcal{A} \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} \quad (3.103)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Id} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Id} & 2\zeta\Omega & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Id} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{Y}} + \begin{bmatrix} -\mathbf{Id} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega^2 & (\mathbf{P}_{rot}\Phi)^T \mathbf{K}_1 \\ \eta & \mathbf{0} & \kappa \end{bmatrix} \mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \ddot{u}_g \quad (3.104)$$

ou encore, avec des notations évidentes

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{B}\mathbf{Y} = \mathbf{F}\ddot{u}_g \quad (3.105)$$

où  $\mathbf{A}$  est symétrique mais  $\mathbf{B}$  ne l'est pas. Ce couple de matrices possède des vecteurs propres complexes à gauche ( $\psi_{g,i}$ ) et à droite ( $\psi_{d,i}$ ) associés aux mêmes valeurs propres complexes  $\mu_i$ . Ils obéissent aux relations :

$$\mu_i \mathbf{A} \psi_{d,i} + \mathbf{B} \psi_{d,i} = \mathbf{0} \quad (3.106)$$

$$\mu_i \mathbf{A}^T \psi_{g,i} + \mathbf{B}^T \psi_{g,i} = \mathbf{0} \quad (3.107)$$

et satisfont les propriétés d'orthogonalité :

$$\psi_{g,i}^T \mathbf{A} \psi_{d,j} = \psi_{g,i}^T \mathbf{B} \psi_{d,j} = 0 \quad , \quad \text{si } i \neq j \quad (3.108)$$

Puisque les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont réelles, les valeurs propres et vecteurs propres sont soit réels, soit apparaissent en paires complexes conjuguées. On s'attend à ce qu'il y ait au moins autant de valeurs propres réelles que de connexions. On développe le vecteur d'état  $\mathbf{Y}$  sur la base des vecteurs propres à droite :

$$\mathbf{Y}(t) = \sum_{i=1}^{2NM+NR} s_i(t) \boldsymbol{\psi}_{d,i} \quad (3.109)$$

Les propriétés d'orthogonalité (3.108) permettent d'obtenir le système découplé des équations différentielles du premier ordre :

$$\dot{s}_i(t) - \mu_i s_i(t) = \frac{\boldsymbol{\psi}_{g,i}^T \mathbf{F}}{\boldsymbol{\psi}_{g,i}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\psi}_{d,i}} \ddot{u}_g \quad (3.110)$$

## 3.5 Spectre de réponse

Dans les paragraphes précédents, nous avons évoqué les moyens efficaces de construire une base modale approchée du système linéaire équivalent. Du fait de la localisation de la dissipation d'énergie dans les éléments non-linéaires, les modes propres ne sont pas ceux qu'on a l'habitude d'utiliser en dynamique des structures. Nous rappelons ici les techniques d'analyse vibratoire susceptibles d'être utilisées.

### 3.5.1 Spectre de réponse compatible avec la moyenne stochastique

Pour des structures dont l'amortissement est réparti, on fait en général l'hypothèse simplificatrice (dite de Basile) que la matrice d'amortissement se diagonalise dans la même base que les matrices de masse et de rigidité. Toutefois, l'adjonction d'amortisseurs localisés au droit des connexions fait que la matrice d'amortissement  $\mathbf{C}_{tot}$  de l'équation de la dynamique (3.67) possède une forme très particulière et peut être très loin de se diagonaliser sur la base des vecteurs propres du système non amorti  $(\mathbf{K}_{tot}, \mathbf{M})$ . Les modes propres du système amorti sont alors complexes conjugués et les méthodes de recombinaison modale (SRSS, CQC, ...) ne s'appliquent plus directement. Nous rappelons ici les éléments principaux d'une méthode développée par Igusa, Der Kiureghian et Sackman [66, 67] pour de tels systèmes. On pourra également se référer à des techniques voisines [109, 121, 132, 71].

#### Réponse temporelle

Le système linéaire équivalent obtenu par moyenne stochastique se met sous la forme d'une équation différentielle du premier degré (3.68) :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{B}\mathbf{Y} = \mathbf{F}\ddot{u}_g \quad (3.111)$$

Typiquement, nous nous intéressons à la réponse de la structure en termes d'un déplacement relatif, d'une déformation, ou d'un effort intérieur s'écrivant sous la forme d'une combinaison linéaire des déplacements de la structure :

$$\mathcal{E}(t) = \mathbf{d}^T \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{d}^T \end{bmatrix} \mathbf{Y}(t) \quad (3.112)$$

En particulier, le déplacement relatif de la  $k^{\text{ème}}$  connexion s'obtient avec  $\mathbf{d}^T = \mathbf{l}_k$ . En exprimant la réponse sur l'ensemble des  $2 \times \text{NM}$  modes propres complexes solutions de (3.70) :

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{2 \times \text{NM}} s_i(t) \hat{\boldsymbol{\psi}}_i \quad (3.113)$$

et en utilisant l'orthogonalité (3.83) des modes complexes par rapport aux matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , on obtient que les coordonnées généralisées  $s_i(t)$  sont solutions des équations différentielles découplées du premier ordre :

$$\dot{s}_i(t) - \mu_i s_i(t) = \frac{\hat{\boldsymbol{\psi}}_i^T \mathbf{F}}{\hat{\boldsymbol{\psi}}_i^T \mathbf{A} \hat{\boldsymbol{\psi}}_i} \ddot{u}_g(t) \quad (3.114)$$

avec une condition initiale nulle si la structure est au repos avant le séisme. On définit naturellement les facteurs de participation  $b_i$  :

$$b_i = \frac{\hat{\boldsymbol{\psi}}_i^T \mathbf{F}}{\hat{\boldsymbol{\psi}}_i^T \mathbf{A} \hat{\boldsymbol{\psi}}_i} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{d}^T \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\psi}}_i = \frac{\hat{\boldsymbol{\psi}}_{o,i}^T \mathbf{F}_o}{\hat{\boldsymbol{\psi}}_{o,i}^T \mathbf{A}_o \hat{\boldsymbol{\psi}}_{o,i}} (\mathbf{d}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\psi}_{o,i}) \quad (3.115)$$

La réponse s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{i=1}^{2 \times \text{NM}} b_i \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \exp[\mu_i(t - \tau)] d\tau \quad (3.116)$$

Puisque les valeurs propres et vecteurs propres apparaissent en paires complexes conjuguées, nous obtenons :

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{i=1}^{\text{NM}} [a_i h_i(t) + c_i \dot{h}_i(t)] \quad (3.117)$$

où

$$a_i = -2\text{Re}(b_i \bar{\mu}_i) \quad , \quad c_i = 2\text{Re}(b_i) \quad (3.118)$$

et  $h_i(t)$  est l'intégrale de Duhamel :

$$h_i(t) = \frac{1}{\omega_i^* \sqrt{1 - \zeta_i^{*2}}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \exp(-\zeta_i^* \omega_i^*(t - \tau)) \sin(\omega_i^* \sqrt{1 - \zeta_i^{*2}}(t - \tau)) d\tau \quad (3.119)$$

dans laquelle

$$\omega_i^* = |\mu_i| \quad \text{et} \quad \zeta_i^* = -\text{Re}(\mu_i)/|\mu_i| \quad (3.120)$$

Remarquons que le non respect de l'hypothèse de Basile introduit dans (3.117) le terme  $c_i \dot{h}_i(t)$  qui s'apparente à une réponse en vitesse.

### Moments spectraux - Technique de vibrations aléatoires

La densité spectrale à droite du processus  $\mathcal{E}$  est obtenue à partir de (3.117) par les techniques classiques de vibrations aléatoires [66, 67] :

$$G_{\mathcal{E}}(\omega) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q [C_{ij} + i\omega D_{ij} + \omega^2 E_{ij}] \overline{H_i(\omega)} H_j(\omega) G_{\ddot{u}_g}(\omega) \quad (3.121)$$

où  $H_i(\omega) = [\omega_i^{*2} - \omega^2 + 2i\zeta_i^* \omega_i^* \omega]^{-1}$  est la fonction de transfert modale.  $G_{\ddot{u}_g}(\omega)$  est la densité spectrale de puissance à droite d'accélération du sol. On a défini les coefficients suivants  $C_{ij} = a_i a_j$ ,  $D_{ij} = (a_i c_j - a_j c_i)$  et  $E_{ij} = c_i c_j$ . Pour les systèmes amortis classiquement, *i.e.* respectant l'hypothèse de Basile, on montre que  $b_i$  est imaginaire pur,  $a_i$  est le facteur de participation,  $c_i = 0$ ,  $D_{ij} = E_{ij} = 0$  et l'équation (3.121) se réduit à l'équation bien connue de la densité spectrale de puissance (A.9) pour les systèmes amortis classiquement. Les moments spectraux du processus réponse

$$\lambda_m = \int_0^\infty \omega^m G_{\mathcal{E}}(\omega) d\omega \quad (3.122)$$

s'expriment en termes des moments spectraux modaux et inter-modaux :

$$\lambda_{m,ij} = \int_0^\infty \omega^m G_{\ddot{u}_g}(\omega) \overline{H_i(\omega)} H_j(\omega) d\omega \quad (3.123)$$

de la façon suivante

$$\lambda_m = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q [C_{ij} \operatorname{Re} \lambda_{m,ij} - D_{ij} \operatorname{Im} \lambda_{m+1,ij} + E_{ij} \operatorname{Re} \lambda_{m+2,ij}] \quad (3.124)$$

L'amortissement localisé introduit donc des moments spectraux d'ordre plus élevé ( $D_{ij}$  et  $E_{ij}$  sont en général non nuls).

Dans la technique de la moyenne stochastique, on utilise la variance  $\lambda_0$  et la pulsation moyenne  $\omega_{e\sigma} = \sqrt{\lambda_2/\lambda_0}$  du processus déplacement différentiel au droit d'un élément non-linéaire pour actualiser les coefficients des ressorts et amortisseurs équivalents. Ces termes peuvent être évalués numériquement à partir des équations (3.121)-(3.122) pourvu que l'on dispose d'une densité spectrale de puissance d'accélération au sol  $G_{\ddot{u}_g}(\omega)$ . Nous avons vu, dans le premier chapitre, divers exemples de telles fonctions, ainsi qu'une technique pour obtenir numériquement une densité spectrale de puissance conforme à un spectre de réponse d'oscillateurs. Dans les applications nous désignons par *technique de vibrations aléatoires* le calcul des moments spectraux par intégration numérique de la densité spectrale de puissance du processus réponse. Alternativement, nous rappelons ci-dessous une technique de *spectre de réponse*.

### Spectre de réponse approché

Des méthodes de spectre de réponse pour des systèmes amortis de façon non classique ont été élaborées par Singh [109] et plus récemment, avec une formulation plus simple, par Igusa et Der Kiureghian [66] et Igusa, Der Kiureghian et Sackman [67] qui ont donné une expression simplifiée de la réponse dans l'hypothèse où l'excitation est un processus à large bande stationnaire sur une durée suffisamment longue (plusieurs fois la période fondamentale du système linéaire équivalent). Les moments spectraux (3.124) sont mis sous la forme :

$$\lambda_m = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q [C_{ij} \rho_{m,ij} w_{m,ij} - D_{ij} \eta_{m,ij} w_{m+1,ij} + E_{ij} \rho_{m+2,ij} w_{m+2,ij}] \sqrt{\lambda_{0,ii} \lambda_{0,jj}} \quad (3.125)$$

dans laquelle

$$\rho_{m,ij} = \frac{\operatorname{Re} \lambda_{m,ij}}{\sqrt{\lambda_{m,ii} \lambda_{m,jj}}} \quad \eta_{m,ij} = \frac{\operatorname{Im} \lambda_{m,ij}}{\sqrt{\lambda_{m,ii} \lambda_{m,jj}}} \quad w_{m,ij} = \frac{\sqrt{\lambda_{m,ii} \lambda_{m,jj}}}{\sqrt{\lambda_{0,ii} \lambda_{0,jj}}} \quad (3.126)$$

Igusa *et al.* [66] ont montré que, dans le cas d'une excitation à large bande, les coefficients de corrélation précédents peuvent être approchés par :

$$\begin{aligned} \rho_{0,ij} &\approx R_{ij} [4\zeta_a + \zeta_d \omega_d / \omega_a] & \rho_{1,ij} &\approx R_{ij} [4\zeta_a - 2\omega_d^2 / (\pi \omega_a^2)] & \rho_{2,ij} &\approx R_{ij} [4\zeta_a - \zeta_d \omega_d / \omega_a] \\ \rho_{3,ij} &\approx R_{ij} [4\zeta_a + \omega_d^2 / (\pi \omega_a^2)] & \rho_{4,ij} &\approx \rho_{0,ij} & & \text{avec } R_{ij} = \frac{\omega_a^2 \sqrt{\zeta_i^* \zeta_j^*}}{\omega_d^2 + 4\zeta_a^2 \omega_a^2} \end{aligned} \quad (3.127)$$

où  $\omega_a = (\omega_i^* + \omega_j^*)/2$ ,  $\zeta_a = (\zeta_i^* + \zeta_j^*)/2$ ,  $\omega_d = \omega_i^* - \omega_j^*$  et  $\zeta_d = \zeta_i^* - \zeta_j^*$

$$\eta_{m,ij} = 2R_{ij} \frac{\omega_d}{\omega_a} \quad , \quad w_{m,ij} = \begin{cases} (\omega_i^* \omega_j^*)^{m/2} & \text{m pair} \\ (\omega_i^* \omega_j^*)^{m/2} \left[ \left(1 - \frac{2\zeta_i^*}{\pi}\right) \left(1 - \frac{2\zeta_j^*}{\pi}\right) \right]^{1/2} & \text{m impair} \end{cases} \quad (3.128)$$

On dispose en général d'un spectre de réponse  $D(\omega, \zeta)$  spécifique du site. Rappelons qu'on le relie à l'écart-type de la réponse modale par la formule [43] :

$$D(\omega_i^*, \zeta_i^*) = p_i \sqrt{\lambda_{0,ii}} \quad (3.129)$$

où  $p_i$  est le facteur de pic de la réponse d'un oscillateur de pulsation  $\omega_i^*$  et de ratio d'amortissement  $\zeta_i^*$ . On peut calculer ce facteur de pic à partir des relations (A.16)-(A.17) de l'annexe A.3, pourvu qu'on se donne une durée  $T$  des mouvements forts. Notons, qu'avec l'hypothèse d'excitation à large bande et si l'amortissement n'est pas trop grand, on a

$$\nu = \omega_i^* / \pi \quad \text{et} \quad \delta = 2\sqrt{\frac{\zeta_i^*}{\pi}} \quad (3.130)$$

Dans le cas où l'amortissement peut être grand, on peut calculer numériquement les facteurs de pic associés à un spectre de réponse, une fois pour toutes, de la façon suivante :

- On calcule une densité spectrale de puissance conforme au spectre de réponse, selon la procédure indiquée au premier chapitre.
- Pour des niveaux d'amortissement donnés ( $\zeta = 2\%$ ,  $5\%$ ,  $10\%$ ,  $15\%$ , ...) on calcule les moments d'ordre 0 d'un ensemble d'oscillateurs dont les pulsations propres balaient une gamme susceptible d'intéresser les structures de génie civil.
- On déduit de l'équation (3.129) les valeurs du facteur de pic pour un site donné, sur une grille de valeurs de pulsations et d'amortissements propres. La Figure 3.14 montre les lignes de niveau du facteur de pic ainsi obtenu pour le spectre de réponse AFPS  $S_0$  et une durée d'excitation  $T = 20s$ . La Figure 3.15 présente le facteur de pic calculé avec l'approximation d'excitation à large bande donnant les valeurs de  $\nu$  et  $\delta$  de l'équation (3.130) (en traits plein) ainsi que le facteur de pic tenant compte du site (en tirets). On constate que l'approximation large bande est bonne pour un faible amortissement propre (5%) mais largement conservatrice pour un amortissement propre plus grand (30%). Du fait des rotules plastiques, l'amortissement propre équivalent peut être grand et on utilisera donc de préférence des facteurs de pic conformes aux spectres de réponse.

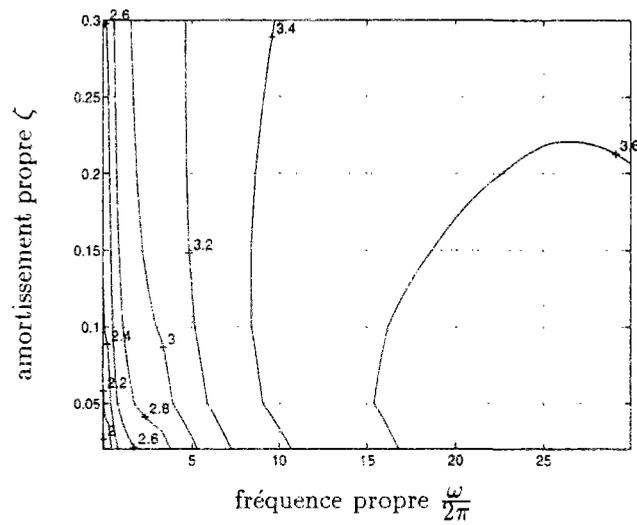
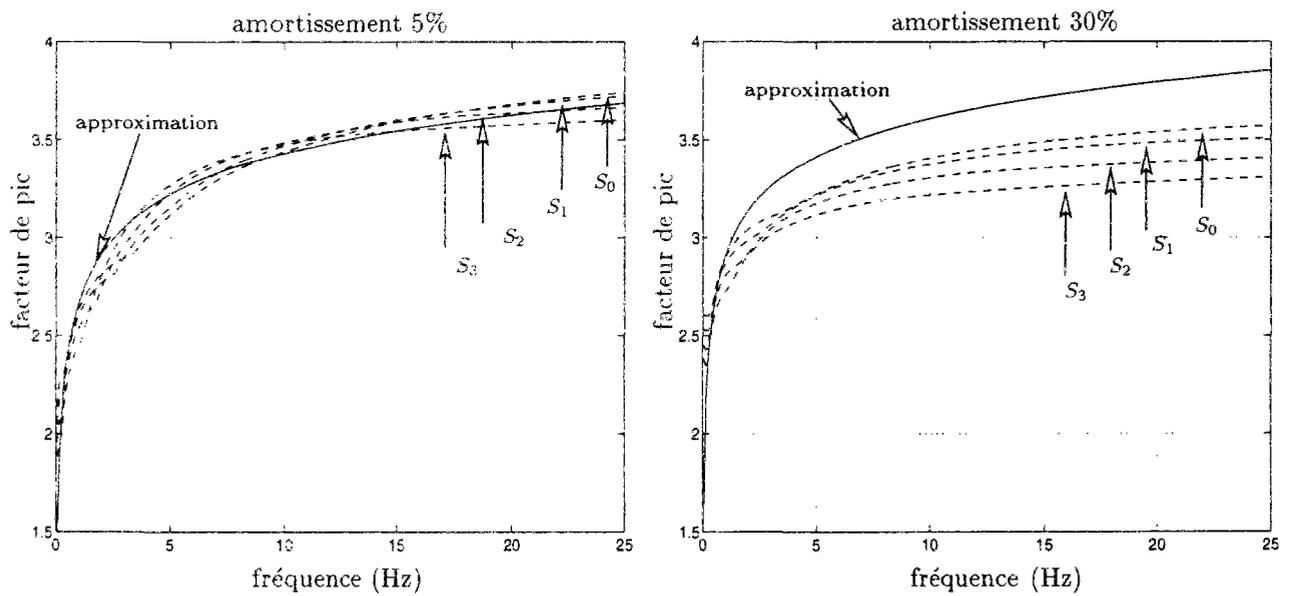
FIG. 3.14 - Lignes de niveau du facteur de pic pour le site AFPS  $S_0$ 

FIG. 3.15 - Facteur de pic en fonction de la fréquence propre de l'oscillateur pour deux niveaux d'amortissement propre

En substituant (3.129) dans (3.125), on obtient les trois premiers moments spectraux ( $m = 1, 2, 3$ ) qui sont nécessaires au calcul des coefficients des éléments linéaires équivalents :

$$\lambda_m = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q [C_{ij}\rho_{m,ij}w_{m,ij} - D_{ij}\eta_{m,ij}w_{m+1,ij} + E_{ij}\rho_{m+2,ij}w_{m+2,ij}] \frac{D_\tau(\omega_i^*, \zeta_i^*)D_\tau(\omega_j^*, \zeta_j^*)}{p_i p_j} \quad (3.131)$$

La réponse maximale moyenne  $E[|\mathcal{E}|_{max}] = p\sqrt{\lambda_0}$  s'obtient en calculant le facteur de pic d'après les formules de l'annexe A.3. C'est l'approche que nous avons adoptée dans les applications ci-dessous. Notons que plus simplement, on pourrait faire l'hypothèse que les ratios des facteurs de pic  $p_i/p$  sont proches de l'unité, ce dont on déduirait :

$$E[|\mathcal{E}|_{max}] = \left[ \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q [C_{ij}\rho_{0,ij} - D_{ij}\eta_{0,ij}w_{1,ij} + E_{ij}\rho_{2,ij}w_{2,ij}] D_\tau(\omega_i^*, \zeta_i^*)D_\tau(\omega_j^*, \zeta_j^*) \right]^{1/2} \quad (3.132)$$

### 3.5.2 Spectre de réponse compatible avec la linéarisation stochastique gaussienne

#### Réponse temporelle

Comme précédemment, nous cherchons la réponse de la structure en termes de déplacement relatif, déformation ou effort intérieur, qui s'exprime cette fois comme combinaison linéaire des degrés de liberté usuels  $\mathbf{X}$  et des variables supplémentaires  $\mathbf{z}$  :

$$\mathcal{E}(t) = \mathbf{d}_X^T \mathbf{X}(t) + \mathbf{d}_z^T \mathbf{z}(t) \quad (3.133)$$

En utilisant la décomposition modale du système linéaire relaxé :

$$\mathbf{X}(t) = \Phi \mathcal{A}(t) \quad (3.134)$$

on obtient

$$\mathcal{E}(t) = \mathbf{d}_X^T \Phi \mathcal{A}(t) + \mathbf{d}_z^T \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{d}_X^T \Phi & \mathbf{d}_z^T \end{bmatrix} \mathbf{Y}(t) \quad (3.135)$$

compte tenu de la définition (3.103) du vecteur d'état  $\mathbf{Y}$ . Des équations (3.109) et (3.110), on tire :

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{i=1}^{2 \times \text{NM} + \text{NR}} b_i \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \exp[\mu_i(t - \tau)] d\tau, \quad (3.136)$$

où l'on a défini les facteurs de participation :

$$b_i = \frac{\psi_{g,i}^T \mathbf{F}}{\psi_{g,i}^T \mathbf{A} \psi_{d,i}} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{d}_X^T \Phi & \mathbf{d}_z^T \end{bmatrix} \psi_{d,i} \quad (3.137)$$

Comme nous l'avons remarqué, les valeurs propres  $\mu_i$  sont soit réelles, soit apparaissent en paires complexes conjuguées. Désignons par  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ , celles des racines complexes conjuguées dont la partie imaginaire est strictement positive qui sont associées aux facteurs de participation  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Les valeurs propres conjuguées  $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \dots, \bar{\mu}_n$  sont associées aux facteurs de participation conjugués  $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n$ . Nous notons  $\mu_1^r, \mu_2^r, \dots, \mu_{n'}^r$ , et  $b_1^r, b_2^r, \dots, b_{n'}^r$ , les valeurs propres et facteurs de participation réels. On a bien entendu  $2 \times \text{NM} + \text{NR} = 2 \times n + n'$ . Alors,

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) (b_i e^{\mu_i(t-\tau)} + \bar{b}_i e^{\bar{\mu}_i(t-\tau)}) d\tau + \sum_{i=1}^{n'} b_i^r \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{\mu_i^r(t-\tau)} d\tau \quad (3.138)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \sum_{i=1}^n \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{\operatorname{Re}(\mu_i)(t-\tau)} (2\operatorname{Re}(b_i) \cos(\operatorname{Im}(\mu_i)(t-\tau)) - 2\operatorname{Im}(b_i) \sin(\operatorname{Im}(\mu_i)(t-\tau))) d\tau \\ &+ \sum_{i=1}^{n'} b_i^r \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{\mu_i^r(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (3.139)$$

En utilisant les notations (3.118)-(3.120) pour les  $2n$  valeurs propres complexes et

$$h_i^r(t) = \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \exp(\mu_i^r(t-\tau)) d\tau \quad (3.140)$$

pour les  $n'$  valeurs propres réelles, on trouve :

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{i=1}^n [a_i h_i(t) + c_i \dot{h}_i(t)] + \sum_{i=1}^{n'} b_i^r h_i^r(t) \quad (3.141)$$

En désignant par  $H_i(\omega) = [\omega_i^{*2} - \omega^2 + 2i\zeta_i^* \omega_i^* \omega]^{-1}$  et  $H_k^r(\omega) = [i\omega - \mu_k^r]^{-1}$  les fonctions de transfert associées à  $h_i(t)$  et  $h_k^r(t)$  et :

$$H_{\mathcal{E}}(\omega) = \sum_{i=1}^n [a_i + i\omega c_i] H_i(\omega) + \sum_{i=1}^{n'} b_i^r H_k^r(\omega) \quad (3.142)$$

on trouve la densité spectrale de puissance à droite suivante :

$$G_{\mathcal{E}}(\omega) = \overline{H_{\mathcal{E}}(\omega)} H_{\mathcal{E}}(\omega) G_{\ddot{u}_g}(\omega) \quad (3.143)$$

Cette expression permet de calculer numériquement les moments spectraux de la réponse  $\mathcal{E}$  et d'en tirer les statistiques qui nous intéressent (variance, espérance du maximum...). Il est possible d'explicitier les moments spectraux à l'image de l'équation (3.121), en faisant intervenir des sommations supplémentaires dues à la présence des valeurs propres réelles.

### Spectre de réponse

Dans la perspective de n'utiliser que des spectres de réponse, nous pouvons poursuivre la technique développée dans le cadre de la moyenne stochastique, en introduisant les spectres associés aux diverses composantes de la réponse. On constate, par exemple dans l'équation (3.142), que la réponse est la somme de la contribution d'oscillateurs classiques, associés aux termes  $H_i(\omega)$  et de la contribution d'oscillateurs un peu particuliers associés aux termes  $H_k^r(\omega)$  ou encore à l'équation différentielle du premier ordre en temps :

$$\dot{s}_k - \mu_k^r s_k = \ddot{u}_g \quad (3.144)$$

Singh *et al.* [111] et Singh et Maldonado [110] ont développé des spectres de réponse pour ces "oscillateurs sans masse" à partir de simulations. Ils ont ensuite élaboré une règle de recombinaison des réponses individuelles d'oscillateurs (avec et sans masse). C'est une voie intéressante qui, comme nous l'avons indiqué au paragraphe 3.3.3, devrait donner de bons résultats en particulier dans le cas de fortes demandes de ductilité et dans le cas où la réponse n'est pas à bande étroite. Les résultats sont malheureusement encore très compliqués et, de ce fait, le développement d'une méthode de spectre de réponse ne se justifie pas complètement.

## 3.6 Applications

### 3.6.1 Compatibilité avec la méthode du spectre inélastique pour des oscillateurs élasto-plastiques parfaits

Dans ce paragraphe, nous comparons la méthode de linéarisation équivalente fondée sur la moyenne stochastique et la méthode du spectre inélastique largement utilisée en génie parasismique mais qui, rappelons le, ne s'applique qu'aux oscillateurs élasto-plastiques parfaits. Selon la méthode de Newmark et Hall [95], le spectre inélastique s'obtient en divisant un spectre de réponse élastique par un coefficient de comportement  $q$  dépendant de la fréquence. Plus précisément,  $q$  est le coefficient par lequel il faut diviser l'effort élastique pour obtenir l'effort de dimensionnement à ductilité donnée. Tout effort de dimensionnement supérieur à celui ainsi obtenu provoquera un appel de ductilité moindre dans la structure. Par la méthode de linéarisation équivalente, nous obtenons un coefficient de comportement que nous comparons à celui de Newmark et Hall ainsi qu'à celui obtenu par simulations numériques.

Nous calculons le coefficient de comportement associé à la linéarisation équivalente par moyenne stochastique de la façon suivante :

1. Pour une pulsation  $\omega_0$ , un ratio d'amortissement critique  $\zeta_0$  et des conditions de site, on lit sur le spectre de réponse linéaire le déplacement relatif maximal  $d_{max}^{lin}$  de l'oscillateur linéaire et on calcule son écart-type  $\sigma_x$  grâce au facteur de pic évalué selon la procédure exposé au paragraphe 3.5.1.
2. On se donne une ductilité cible  $\mu_{cible}$  et on calcule un candidat pour la limite élastique de l'oscillateur :  $x_y = d_{max}^{lin} / \mu_{cible}$ .
3. Etant donné  $\omega_0$ ,  $\zeta_0$ ,  $\sigma_x$  et  $x_y$ , on calcule la pulsation de l'oscillateur linéaire équivalent à partir des formules (3.30) (avec  $\alpha = 0$ ) et :

$$\omega_{eq} = \omega_0 \sqrt{\frac{k_{eq}}{k_0}} \quad (3.145)$$

Notons qu'au ratio d'amortissement lié aux boucles d'hystérésis s'ajoute un ratio d'amortissement visqueux de sorte que la constante de l'amortisseur équivalent  $c_{eq} = 2m\zeta_{eq}\omega_{eq}$  est la somme de la constante de l'amortisseur visqueux  $2m\zeta_0\omega_0$  et de la constante de l'amortisseur hystérétique donnée par la formule (3.30), d'où

$$\zeta_{eq} = \frac{1}{2m\omega_{eq}} \left[ 2m\zeta_0\omega_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_0}{\omega_{eq}} \frac{x_y}{\sigma_x} \operatorname{erfc} \left( \frac{x_y}{\sqrt{2}\sigma_x} \right) \right] \quad (3.146)$$

soit après simplification

$$\zeta_{eq} = \zeta_0 \frac{\omega_0}{\omega_{eq}} + \left( \frac{\omega_0}{\omega_{eq}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x_y}{\sigma_x} \operatorname{erfc} \left( \frac{x_y}{\sqrt{2}\sigma_x} \right) \quad (3.147)$$

4. Du spectre de réponse linéaire, on obtient la réponse de l'oscillateur linéaire équivalent ( $\omega_{eq}$ ,  $\zeta_{eq}$ ) en termes de déplacement relatif maximal  $d_{max}^{eq}$ , d'écart-type  $\sigma_x$ , de demande de ductilité  $\mu = d_{max}^{eq} / x_y$ . Si la demande de ductilité et la ductilité cible ne sont pas suffisamment proches, on actualise la limite élastique de l'oscillateur élasto-plastique  $x_y = d_{max}^{eq} / \mu_{cible}$  et on répète les étapes 3 et 4 jusqu'à convergence.

5. On obtient alors le facteur de comportement :

$$q = \frac{F_{max}^{lin}}{F_{max}^{eq}} = \frac{\sqrt{(k_0 d_{max}^{lin})^2 + (c_0 \dot{d}_{max}^{lin})^2}}{\sqrt{(k_{eq} d_{max}^{eq})^2 + (c_{eq} \dot{d}_{max}^{eq})^2}} \quad (3.148)$$

Notons que les sommations quadratiques au numérateur et au dénominateur se justifient par l'indépendance des processus déplacement et vitesse de la réponse stationnaire et gaussienne d'un oscillateur linéaire soumis à une excitation elle-même stationnaire et gaussienne. Puisque  $d_{max}^{lin} \approx \omega_0 d_{max}^{lin}$  et  $\dot{d}_{max}^{eq} \approx \omega_{eq} d_{max}^{eq}$ , on trouve :

$$q = \frac{d_{max}^{lin}}{d_{max}^{eq}} \left( \frac{\omega_0}{\omega_{eq}} \right)^2 \sqrt{\frac{1 + 4\zeta_0^2}{1 + 4\zeta_{eq}^2}} \quad (3.149)$$

Le facteur de comportement qu nous avons ainsi obtenu est présenté en fonction de la période de l'oscillateur élastique  $T = 2\pi/\omega_0$  à gauche sur les Figures 3.16 et 3.17 respectivement pour des sites AFPS  $S_0$  (sol rocheux) et  $S_3$  (sol souple). Les courbes ont été obtenues pour cinq niveaux de ductilité cible. A droite de ces mêmes figures sont représentés les coefficients de comportement obtenus par 300 simulations de Monte-Carlo. Pour ces dernières, on a en fait calculé la demande de ductilité moyenne sur les 300 simulations pour un quadrillage de valeurs du coefficient de comportement  $1 \leq q \leq 6$  et de la période  $0.1s \leq T \leq 8s$  de l'oscillateur élastique, puis on a tracé les courbes de niveau des demandes de ductilité moyennes.

Sur les Figures 3.18 et 3.19 on a tracé le coefficient de comportement en fonction de la ductilité cible pour différentes valeurs de la période de l'oscillateur élastique, pour les deux sites susmentionnés. A gauche on a représenté en traits pleins le coefficient de comportement issu de la linéarisation équivalente et en tirets les approximations de Newmark et Hall aux courtes ( $\mu = 1$ ), moyennes ( $q = \sqrt{2\mu - 1}$ ) et longues ( $q = \mu$ ) périodes. A droite on a représenté les résultats des simulations.

On constate que pour les très courtes périodes, le coefficient de comportement tend vers un, quelque soit la ductilité cible. En effet, dans cette région, même un léger dépassement de la limite élastique en déplacement conduit à des demandes de ductilité très importantes. A ductilité cible fixée, l'oscillateur de très courte période se doit donc de rester essentiellement élastique. Dans cette gamme de périodes, le coefficient de comportement issu de la linéarisation équivalente se comporte comme le prévoient à la fois les simulations et la méthode de Newmark et Hall, dans les deux cas de site.

Pour les longues périodes, le coefficient de comportement tend vers la ductilité cible, selon les prédictions de Newmark et Hall. Les simulations confirment ce résultat. Les oscillations du coefficient de comportement obtenu par simulations aux très longues périodes sur les Figures 3.16 et 3.17 sont dues au fait que les simulations ont une durée finie de 20 secondes et qu'en conséquence le nombre d'oscillations et de maxima locaux pendant la durée d'excitation est réduit. Dans cette gamme de périodes, le coefficient de comportement issu de la linéarisation équivalente surestime la valeur issue des simulations, légèrement sur sol rocheux (AFPS  $S_0$ ), un peu plus sur le site sol souple (AFPS  $S_3$ ). La linéarisation équivalente est donc légèrement sous-conservative, en ce qu'elle autorise une trop grande réduction des efforts. Notons toutefois que pour ces longues périodes, les spectres élastiques en pseudo-accélérations diminuent rapidement et ne sont pas très contraignants pour les structures.

Pour les moyennes périodes, on constate que le coefficient de comportement issu de la linéarisation équivalente est plus faible que celui issu des simulations. Cela rend la technique de linéarisation conservatrice en ce qu'elle autorise des réductions d'efforts moins importantes que ne le feraient les simulations. Sur les Figures 3.18 et 3.19 on constate que le coefficient de comportement issu de la linéarisation est voisin de celui obtenu par simulations pour des ductilité cibles inférieures à 3. Au delà, les résultats sont nettement moins bons.

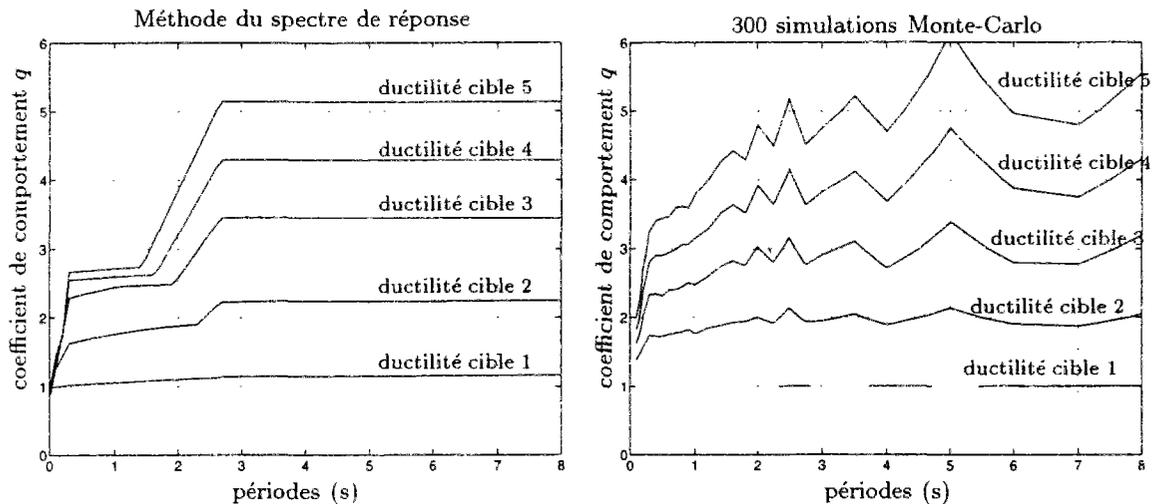


FIG. 3.16 - Coefficient de comportement pour oscillateurs élasto-plastiques parfaits sur site AFPS  $S_0$

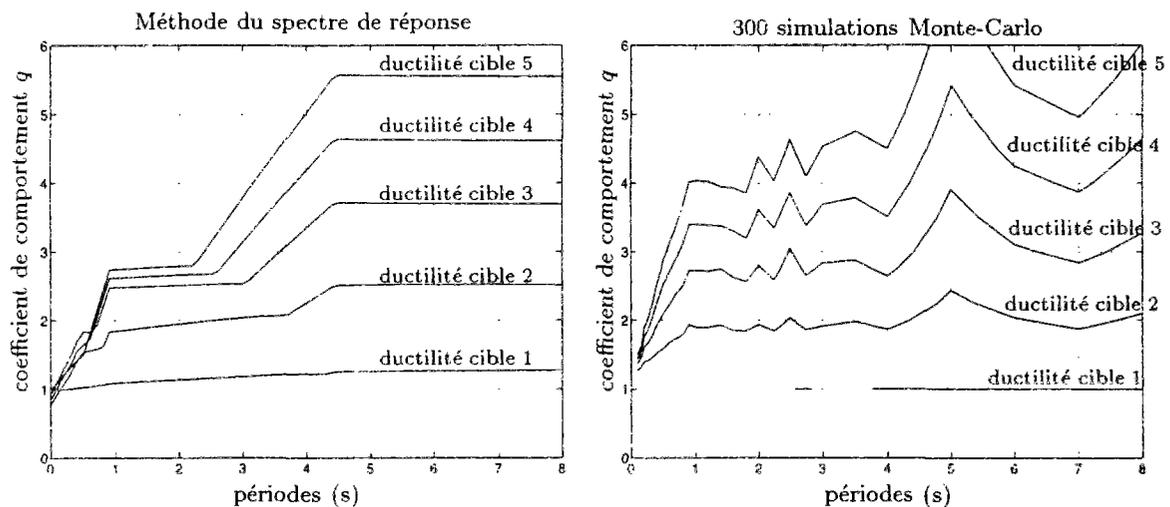


FIG. 3.17 - Coefficient de comportement pour oscillateurs élasto-plastiques parfaits sur site AFPS  $S_3$

Enfin, sur la Figure 3.20, nous présentons le coefficient de comportement pour un oscillateur élasto-plastique parfait, issu de la linéarisation pour deux niveaux d'appel de ductilité  $\mu = 2$  et  $\mu = 5$ , en fonction d'une période normalisée de l'oscillateur. La période de l'oscillateur

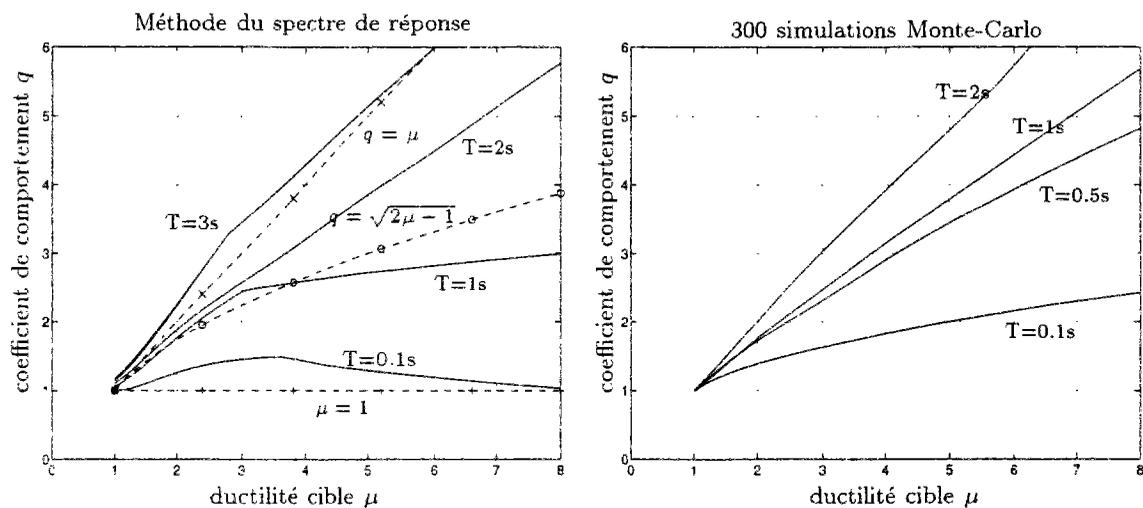


FIG. 3.18 - Coefficient de comportement pour oscillateurs élasto-plastiques parfaits sur site AFPS  $S_0$

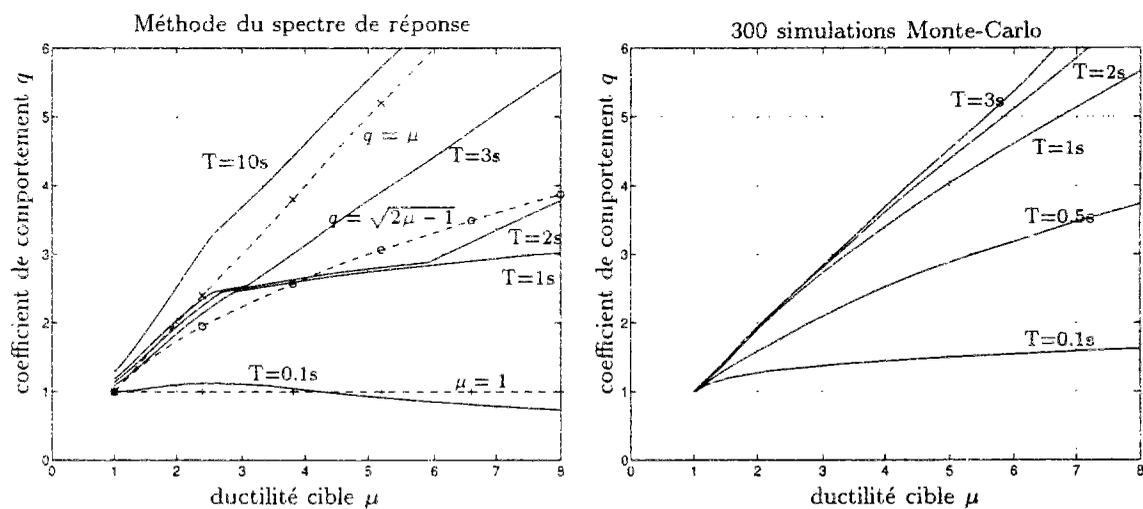


FIG. 3.19 - Coefficient de comportement pour oscillateurs élasto-plastiques parfaits sur site AFPS  $S_3$

est rapportée à la période  $T_g = 2\pi/\omega_g$  associée à la pulsation moyenne du sol donnée par la formule de Rice  $\omega_g = \sqrt{\lambda_2/\lambda_0}$ . Les moments spectraux de l'accélération du sol  $\lambda_0$  et  $\lambda_2$  ont été calculés numériquement par la formule A.20 et les densités spectrales de puissance définies au paragraphe 1.1.3(c). Les fréquences et périodes moyennes de l'accélération du sol sont indiquées au Tableau 3.1.

Site AFPS	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
$\omega_g/2\pi$ (Hz)	5.66	4.71	3.58	2.71
$T_g$ (s)	0.18	0.21	0.28	0.37

TAB. 3.1 - Fréquences et périodes moyennes de l'accélération du sol pour chaque site AFPS

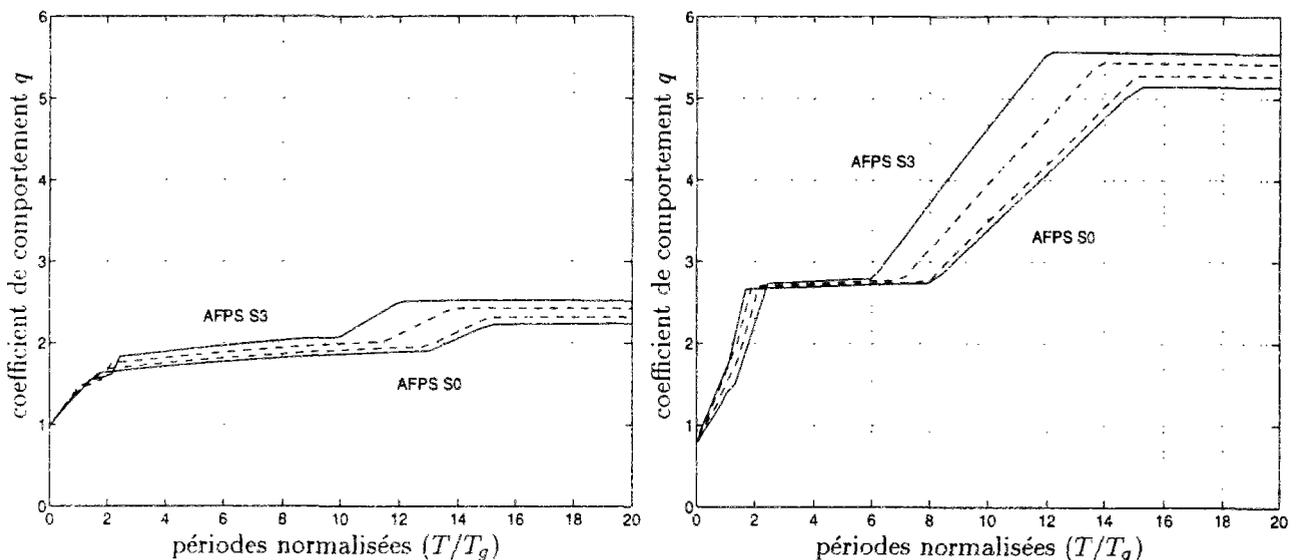


FIG. 3.20 - Coefficient de comportement pour l'oscillateur élasto-plastique parfait fonction de la période de l'oscillateur normalisée par la période moyenne des accélérations de sol, pour deux niveaux de ductilité :  $\mu = 2$  à gauche et  $\mu = 5$  à droite.

Ainsi, pour l'oscillateur élasto-plastique, la méthode du spectre de réponse associé à la moyenne stochastique donne des résultats voisins de ceux obtenus par simulations et par la méthode de Newmark et Hall, pour des niveaux de ductilité faibles à modérés. Elle couvre bien d'autres applications, en particulier le calcul des structures plus complexes comme nous allons le voir dans les paragraphes suivants.

### 3.6.2 Mouvements latéraux du pont de Lourdes

Dans ce paragraphe et le suivant, nous étudions la réponse d'un modèle simplifié du pont sur le Gave de Pau (solution tablier mixte). On trouvera les caractéristiques principales de cet ouvrage en annexe C. Le modèle simplifié suppose que les deux fûts d'un même appui subissent exactement les mêmes déformations. Les fûts sont articulés en tête et sont bloqués en translation sur le tablier. Le tablier est bloqué latéralement et verticalement sur les culées.

Le tablier participe donc à la rigidité latérale de l'ouvrage. On suppose que pour des mouvements de sol latéraux, le tablier reste élastique (il est donc dimensionné en conséquence) et seule la base des piles peut avoir un comportement non-linéaire sous la forme de rotules plastiques.

Conformément à la procédure présentée dans ce chapitre, on considère un système linéaire relaxé dans lequel on a placé des vraies rotules à une hauteur des piles correspondant à la longueur  $L_p$  des rotules plastiques définie par l'Eurocode [50] (voir aussi [100]) :

$$L_p = 0.08L + 0.022D_s f_y \quad (3.150)$$

où  $L$  est la hauteur totale (en mètres) de la pile,  $D_s$  est le diamètre (en mètres) des armatures longitudinales et  $f_y$  est la limite élastique des aciers (en MPa).  $L_p$  vaut respectivement 2.1m, 2.5m et 2.25m pour les piles  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ .

### Réponse associée à la moyenne stochastique

On suppose dans un premier temps que le comportement de chaque rotule est élasto-plastique parfait, approchant ainsi le diagramme moment-courbure (pour chargement monotone quasi-statique) indiqué à la Figure C.3 de l'annexe C. La limite élastique en courbure a été évaluée selon la procédure préconisée par Pauley et Priestley [100, paragraphe 3.5.2] : si  $M_u$  est le moment ultime de la section,  $M_e$  et  $\phi_e$  le moment et la courbure à la première plastification des aciers (sous chargement monotone), alors la limite élastique en courbure est :

$$\phi_y = \frac{M_u}{M_e} \phi_e \quad (3.151)$$

La limite élastique en rotation de la rotule vaut  $\theta_y = L_p \phi_y$ . La raideur initiale  $k_o$  du modèle élasto-plastique est la raideur sécante en rotation de la rotule à la première plastification des aciers ( $EI_{sécant}/L_p$ ). Ces paramètres dépendent de l'effort normal dans la section, qui en toute rigueur varie au cours du séisme. Nous l'approchons par sa valeur sous chargement permanent.

On effectue une analyse modale du système linéaire relaxé. Remarquons que du fait de la rigidité latérale provenant du blocage transverse du tablier sur les culées, les rotules ne provoquent pas de mécanisme dans cette direction. Les dix premiers modes latéraux sont présentés sur la Figure 3.21. On ajoute par la suite des ressorts et des amortisseurs équivalents agissant sur les rotations des rotules, conformément à l'algorithme utilisant la moyenne stochastique.

Nous présentons au Tableau 3.2 la demande maximale de ductilité en rotation des rotules plastiques  $\mu_d = \theta_{max}/\theta_y$  et la ductilité énergétique liée aux cycles d'hystérésis (équation (3.36)). Les résultats ont été obtenus selon les trois méthodes abordées dans ce chapitre :

- Technique de vibrations aléatoires (*i.e.* intégration des densités spectrales de puissance)
- Spectre de réponse
- Simulations de Monte-Carlo qui constituent ici la référence.

Ces dernières ont été réalisées par intégration temporelle de la réponse de la structure représentée par les modes propres du système linéaire relaxé et les relations non-linéaires temporelles des rotules plastiques en pied de piles, selon la méthode de Newmark avec accélération constante combinée avec un algorithme de Newton-Raphson pour la résolution des équations non-linéaires à chaque pas de temps (*cf.* [20]). Des accélérogrammes ont été synthétisés selon la procédure exposée au chapitre 1, de façon à être conformes en moyenne au spectre AFPS  $S_3$  (conditions

plus défavorables que les conditions réelles). Nous avons utilisé deux niveaux d'accélération maximale du sol:  $a_g = 0.25g$  et  $a_g = 0.5g$ . Lorsqu'il était disponible, nous avons également indiqué entre parenthèses dans le Tableau 3.2 et les suivants, le coefficient de variation de ces ductilités, rapport de l'écart-type sur l'espérance. Rappelons que dans le cas des simulations, le coefficient de variation de l'estimateur de l'espérance de ductilité maximale ou énergétique (c.d.v. dans l'équation (3.6)) s'obtient en divisant la valeur indiquée entre parenthèse par la racine carrée du nombre de simulations. Le c.d.v. de l'estimateur est dans tous les cas inférieur à 4%.

Pour une accélération maximale du sol de  $0.25g$ , les piles latérales ( $P_1$  et  $P_3$ ) restent essentiellement élastiques et seule la pile centrale ( $P_2$ ) voit une rotule plastique se développer à son pied avec une demande de ductilité en rotation de 1.45 et une dissipation d'énergie par cycles d'hystérésis sensiblement plus grande que sur les deux autres piles. Les techniques de vibrations aléatoires et de spectre de réponse reproduisent les résultats des simulations avec une bonne précision.

Pour une accélération maximale du sol de  $0.5g$  des rotules plastiques se développent dans toutes les piles. Notons que la dispersion sur les ductilités maximales est élevée (coefficient de variation de 20 à 30%). Une nouvelle fois, les techniques de vibrations aléatoires et de spectre de réponse donnent des résultats très voisins de ceux produits par simulations de Monte-Carlo, en un temps beaucoup plus court (de l'ordre de la minute au lieu de quelques heures).

$a_g = 0.25g$		P1	P2	P3
$\mu_d$	230 simulations	0.78 (9%)	1.25 (17%)	0.67 (9%)
	vibrations aléatoires	0.84 (20%)	1.23 (22%)	0.75 (20%)
	spectre de réponse	0.92 (18%)	1.34 (19%)	0.81 (18%)
$\mu_{\text{énergie}}$	230 simulations	1.04 (5%)	2.33 (40%)	1.03 (4%)
	vibrations aléatoires	1.11	3.33	1.02
	spectre de réponse	1.12	3.44	1.02
$a_g = 0.50g$		P1	P2	P3
$\mu_d$	230 simulations	1.23 (34%)	2.34 (25%)	1.00 (25%)
	vibrations aléatoires	1.24 (19%)	2.02 (20%)	1.11 (18%)
	spectre de réponse	1.39 (17%)	2.39 (16%)	1.23 (16%)
$\mu_{\text{énergie}}$	230 simulations	1.88 (33%)	17.07 (22%)	1.24 (23%)
	vibrations aléatoires	2.62	15.45	1.66
	spectre de réponse	3.03	19.83	1.96

TAB. 3.2 - *Mouvements latéraux, rotules élasto-plastiques; les coefficients de variation des ductilités maximales en rotation et énergétiques sont indiqués entre parenthèses*

### Réponse associée à la linéarisation stochastique gaussienne

On suppose désormais que le comportement de la rotule est décrit par le modèle de Bouc-Wen pour des éléments en béton armé dont les paramètres sont spécifiés dans les formules (3.43). La raideur initiale  $k_o$  du modèle est la raideur sécante en rotation de la rotule à la première plastification des aciers. On définit une limite élastique (en rotation) pour le modèle de Bouc-Wen:  $z_y = L_p \phi_y$ . Le Tableau 3.3 donne les ductilités maximales en rotations et les facteurs de ductilité énergétique (équation (3.56)) des rotules inélastiques pour ce modèle. Les résultats

ont été obtenus par simulations de Monte-Carlo qui servent de référence et par la technique de vibrations aléatoires. On constate que cette dernière sous-estime le niveau de ductilité en rotation mais donne de bons résultats en termes de ductilité énergétique.

$a_g = 0.25g$		P1	P2	P3
$\mu_d$	500 simulations	0.54 (23%)	0.93 (21%)	0.45 (20%)
	vibrations aléatoires	0.63 (19%)	0.91 (20%)	0.56 (18%)
$\mu_{\text{énergie}}$	500 simulations	1.72 (7%)	4.12 (12%)	1.44 (5%)
	vibrations aléatoires	1.72	3.94	1.42
$a_g = 0.50g$		P1	P2	P3
$\mu_d$	500 simulations	1.32 (31%)	2.00 (24%)	1.05 (29%)
	vibrations aléatoires	0.99 (18%)	1.59 (18%)	0.87 (17%)
$\mu_{\text{énergie}}$	500 simulations	4.77 (12%)	12.30 (13%)	3.59 (12%)
	vibrations aléatoires	4.16	14.38	2.98

TAB. 3.3 - *Mouvements latéraux, rotules suivant le modèle de Bouc-Wen; les coefficients de variation des ductilités maximales en rotation et énergétiques sont indiqués entre parenthèses*

### 3.6.3 Mouvements longitudinaux du pont de Lourdes

Pour les mouvements longitudinaux, nous faisons l'hypothèse simplificatrice supplémentaire que le tablier se comporte comme un corps rigide se déplaçant exclusivement longitudinalement. Le tablier est lié par des articulations aux piles. Des rotules plastiques sont susceptibles de se développer en pied de ces dernières. Notons que si les trois rotules plastiques se développent simultanément, la structure présente un mécanisme. L'analyse modale du système linéaire relaxé, qui possède de vraies rotules en pied de piles, produit donc un mode propre de fréquence nulle et dont la déformée est précisément le mécanisme en question. Certains codes d'éléments finis ont des difficultés à gérer de telles situations. On peut alors remplacer les vraies rotules par de petits éléments de poutre de faible raideur en flexion (Sues *et al.*[114] ont estimé la raideur post-élastique d'une poutre en béton armé à 2% de la raideur initiale en flexion). En choisissant de tels éléments on obtient un premier mode de très basse fréquence et dont la déformée est très voisine de celle du mécanisme. La Figure 3.22 montre ce premier mode propre ainsi que les neuf suivants qui sont essentiellement des modes propres locaux des piles.

#### Réponse associée à la moyenne stochastique

Le Tableau 3.4 présente les ductilités maximales en rotation des rotules élasto-plastiques parfaites ainsi que les ductilités énergétiques pour les trois piles. Le comportement inélastique est cette fois distribué sur les trois rotules. Il est légèrement accentué sur les piles latérales plus courtes. Pour une accélération maximale au sol de  $0.25g$ , les simulations de Monte-Carlo et les techniques de vibrations aléatoires et de spectre de réponse donnent des résultats très comparables en termes de ductilité maximale en rotation. Pour une accélération maximale au sol de  $0.50g$ , la comparaison est un peu moins bonne mais encore tout à fait acceptable au regard de la dispersion des résultats. Notons que les techniques de vibrations aléatoires et de spectre de réponse permettent d'identifier quels sont les éléments dissipateurs d'énergie par cycles d'hystérésis et donnent des résultats quantitatifs convenables.

$a_g = 0.25g$		P1	P2	P3
$\mu_d$	277 simulations	1.22 (20%)	0.94 (15%)	1.37 (19%)
	vibrations aléatoires	1.20 (23%)	0.99 (23%)	1.33 (23%)
	spectre de réponse	1.36 (19%)	1.10 (20%)	1.51 (19%)
$\mu_{\text{énergie}}$	277 simulations	1.93 (41%)	1.10 (12%)	3.15 (46%)
	vibrations aléatoires	3.12	1.62	4.56
	spectre de réponse	3.28	1.67	4.81
$a_g = 0.50g$		P1	P2	P3
$\mu_d$	280 simulations	2.44 (54%)	1.82 (54%)	2.54 (50%)
	vibrations aléatoires	1.85 (20%)	1.47 (20%)	2.00 (20%)
	spectre de réponse	2.09 (20%)	1.64 (17%)	2.24 (17%)
$\mu_{\text{énergie}}$	280 simulations	10.47 (23%)	4.07 (26%)	14.31 (23%)
	vibrations aléatoires	10.98	4.98	13.81
	spectre de réponse	12.65	5.66	15.59

TAB. 3.4 - *Mouvements longitudinaux, rotules élasto-plastiques; les coefficients de variation des ductilités maximales en rotation et énergétiques sont indiqués entre parenthèses*

### Réponse associée à la linéarisation stochastique gaussienne

Le modèle de Bouc-Wen et la linéarisation stochastique gaussienne donnent les résultats indiqués au Tableau 3.5. Les ductilités en rotation obtenues par la technique de vibrations aléatoires sont proches de celles obtenus par simulations pour une accélération maximale au sol de  $0.25g$ , mais les résultats sont moins bons pour une accélération double. Notons que pour les mouvements longitudinaux, les niveaux de ductilité atteints par les rotules suivant le modèle de Bouc-Wen sont plus faibles que ceux issus du modèle élasto-plastique. Les prédictions des ductilités énergétiques par la technique de vibrations aléatoires sont bonnes pour les deux niveaux d'accélération au sol.

$a_g = 0.25g$		P1	P2	P3
$\mu_d$	500 simulations	0.87 (32%)	0.66 (31%)	0.93 (30%)
	vibrations aléatoires	0.86 (20%)	0.71 (20%)	0.94 (20%)
$\mu_{\text{énergie}}$	500 simulations	3.14 (12%)	2.09 (9%)	3.74 (13%)
	vibrations aléatoires	3.22	2.14	4.11
$a_g = 0.50g$		P1	P2	P3
$\mu_d$	500 simulations	2.18 (40%)	1.64 (41%)	2.20 (39%)
	vibrations aléatoires	1.42 (19%)	1.13 (19%)	1.58 (19%)
$\mu_{\text{énergie}}$	500 simulations	9.13 (11%)	5.73 (10%)	10.11 (11%)
	vibrations aléatoires	9.86	5.55	12.68

TAB. 3.5 - *Mouvements longitudinaux, rotules suivant le modèle de Bouc-Wen; les coefficients de variation des ductilités maximales en rotation et énergétiques sont indiqués entre parenthèses*

### 3.7 Conclusions

La méthode d'analyse non-linéaire que nous proposons dans ce chapitre est un compromis entre la méthode simpliste des spectres inélastiques et les simulations de Monte-Carlo coûteuses en temps de calcul. Elle est dédiée aux structures dont les non-linéarités de nature hystérétique sont concentrées en certains points de la structures et donne des résultats proches de ceux obtenus par simulations en un temps suffisamment court pour qu'ils puissent être utilisés lors du dimensionnement de la structure. Afin d'utiliser les résultats classiques d'analyse vibratoire linéaire, la méthode s'appuie sur des techniques de linéarisation équivalente stochastique. En plus de sa rapidité, elle présente l'avantage d'une utilisation simple, puisque qu'une seule analyse modale d'un système linéaire relaxé au droit des connexions potentiellement non-linéaires est nécessaire. L'ajustement des coefficients des éléments linéaires équivalents remplaçant les éléments non-linéaires se fait de manière itérative en n'utilisant qu'un nombre réduit de modes propres du système linéaire relaxé pour décrire les mouvements de l'ouvrage. A chaque itération les réponses, en particulier les demandes de ductilité des éléments non-linéaires sont évaluées par une technique de spectre de réponse ou de vibrations aléatoires en conjonction avec une recombinaison modale adaptée. Ceci permet d'actualiser les paramètres des éléments linéaires équivalents. L'analyse portant sur un système de taille réduite est rapide et met en exergue l'importance relatives des non-linéarités des composants dissipatifs d'énergie. En somme, la méthode présente les avantages suivants :

1. Elle incorpore l'incertitude sur les mouvements de sol sans avoir recours aux simulations temporelles non-linéaires de Monte-Carlo, coûteuses en temps de calcul.
2. Elle permet à l'ingénieur d'effectuer des études paramétriques sur les éléments non-linéaires à un coût réduit. Cela peut s'avérer important et économique lors de la conception de l'ouvrage.
3. Elle procure un aperçu des contributions relatives des divers éléments non-linéaires dans le comportement d'ensemble de la structure, en donnant en particulier le lieu et le degré de dissipation d'énergie.

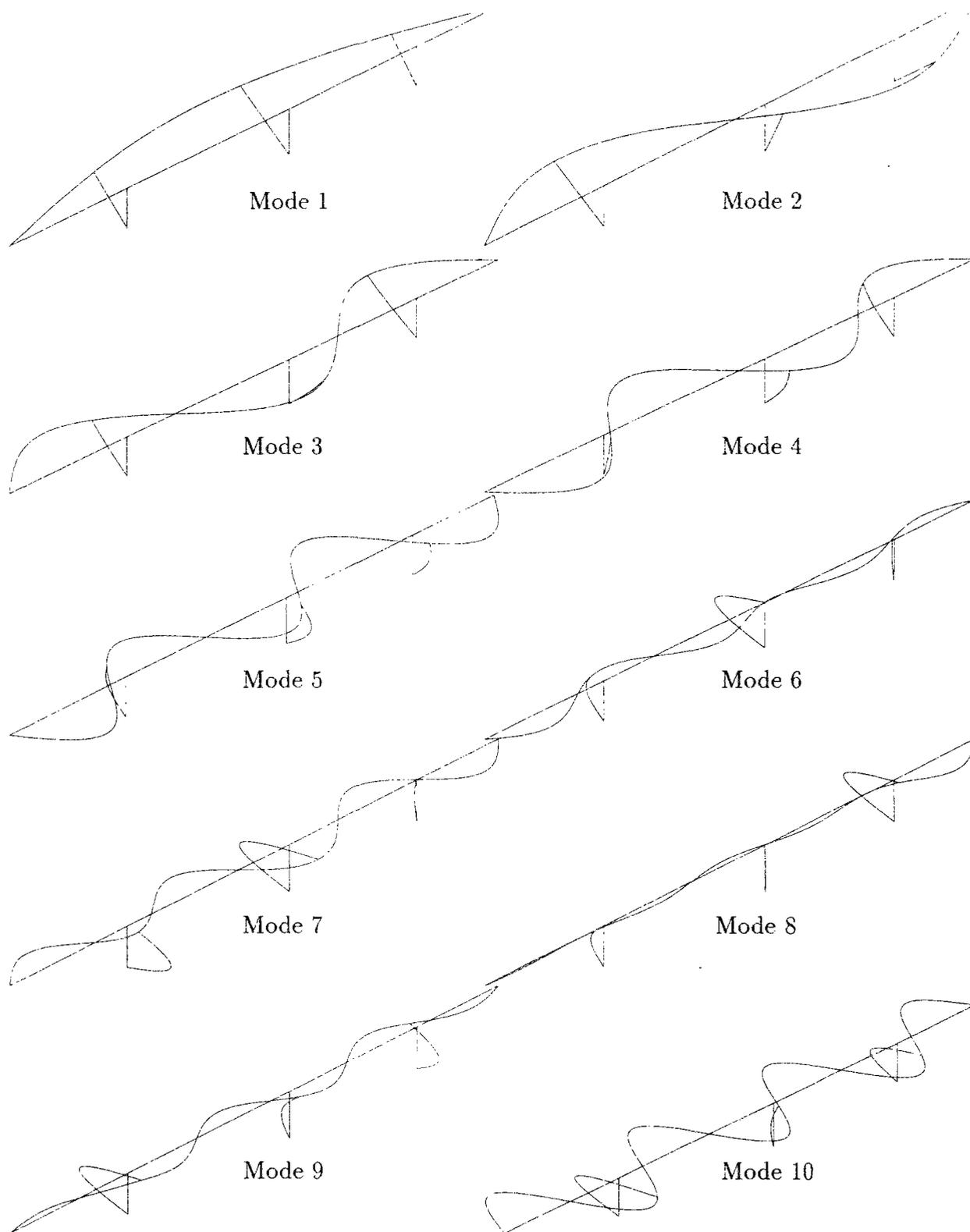


FIG. 3.21 - Dix premiers modes latéraux de l'ouvrage articulé en pied de piles

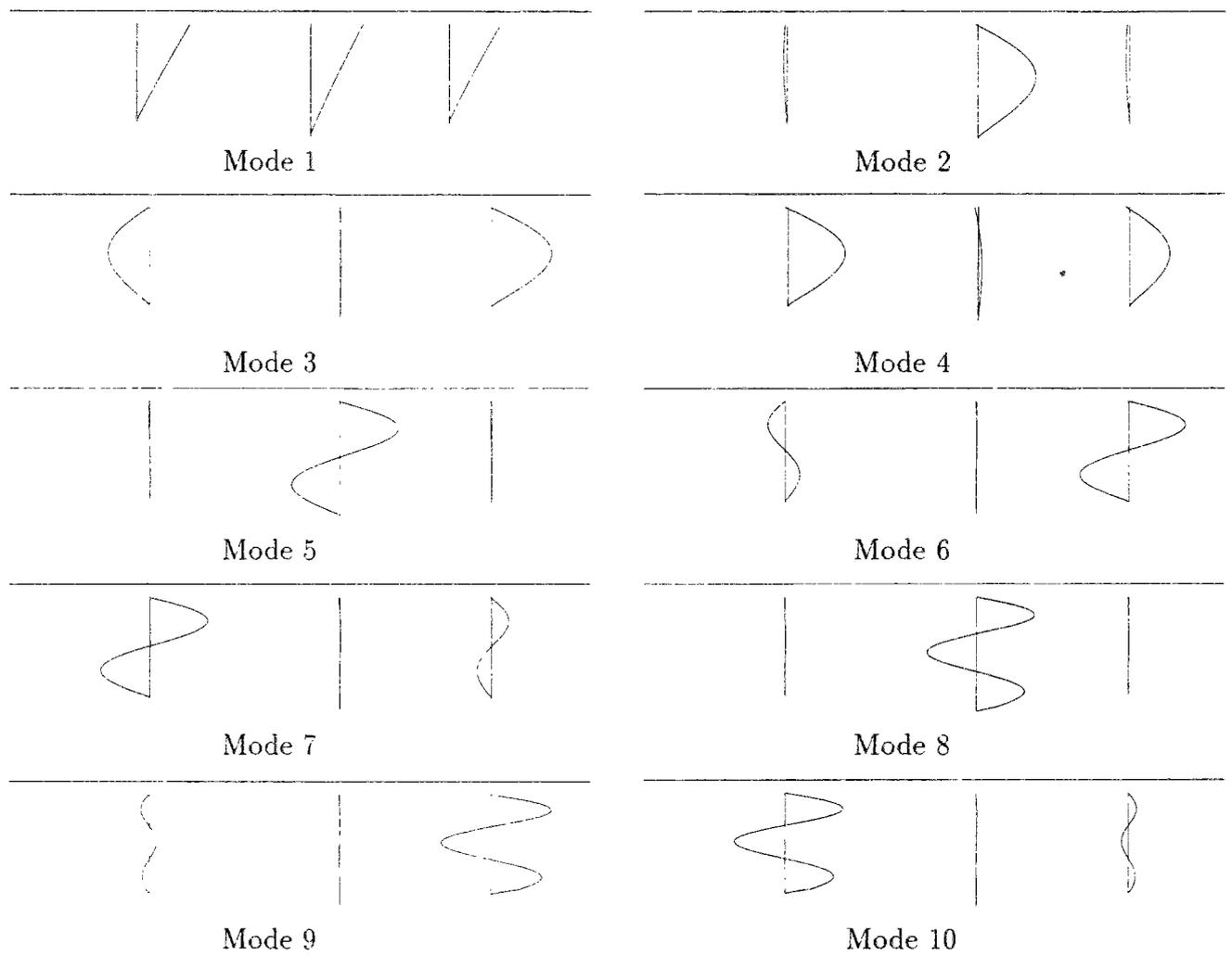


FIG. 3.22 - Dix premier modes longitudinaux du pont rotulé en pied de piles

## Chapitre 4

# Sur la fiabilité des systèmes non-linéaires soumis à une excitation stochastique

Les méthodes de linéarisation évoquées au chapitre précédent ont pour objet de restituer le comportement moyen de la structure au travers d'un système linéaire équivalent. Elles ne prétendent pas donner avec précision les valeurs extrêmes atteintes par la réponse du système non-linéaire. Dans le domaine de la fiabilité des structures, nous nous intéressons précisément à ces valeurs et plus particulièrement à la probabilité que la réponse de la structure soumise à une sollicitation stochastique dépasse un *état limite ultime* pendant la durée  $T$  d'excitation. Les simulations de Monte-Carlo fournissent un moyen de calcul mais leur utilisation devient vite prohibitive lorsque la probabilité de dépassement de l'état limite ultime est faible. Dans ce chapitre, nous exposons une méthode de calcul approché, développée par Li et Der Kiureghian [81] et nous l'appliquons à des oscillateurs linéaires et hystériques rencontrés au chapitre 3. Elle fait appel, comme intermédiaire de calcul, au taux moyen de dépassement de l'état limite, qu'on évalue à l'aide d'une méthode FORM (*First Order Reliability Method*). Les algorithmes présentés s'appuient sur des simulations temporelles et sur la sensibilité des résultats obtenus aux variations du processus d'excitation.

### 4.1 Etat limite ultime et probabilité de ruine

En génie civil, on dimensionne les structures en statique à l'*état limite ultime* pour qu'elles résistent à des charges extrêmes en comparant les efforts intérieurs induits par ces charges à la capacité des éléments résistants. Bien que dans la pratique du génie parasismique, on procède de même, il est plus rationnel de s'intéresser aux déformations maximales induites par le séisme et de les comparer aux capacités de déformation des éléments résistants. Dans ce chapitre, nous définirons donc l'état limite ultime d'un élément résistant en termes de déformations ou de déplacements relatifs. Lorsque l'état limite ultime est fonction de plusieurs variables de sollicitation, comme par exemple les déformations dans deux directions orthogonales d'un appareil d'appui, on le représente par une surface appelée *surface de ruine*. Lorsque l'état limite ultime ne dépend que d'une variable, comme par exemple la rotation d'une rotule plastique, la surface de ruine dégénère en une ou deux bornes sur la droite réelle. La surface de ruine peut dépendre du temps. Par exemple, la capacité en rotation d'une rotule plastique peut

dépendre de l'histoire du chargement imposé à la section. La Figure 4.1 donne deux exemples de surfaces de ruine (indépendante du temps) pour des états limites ultimes fonctions d'une ou deux variables. Nous supposons que pour une structure, la surface de ruine peut s'écrire sous la forme :

$$G(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}(t)) = 0 \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{X}(t)$  est le vecteur d'état de la structure, par exemple la réponse de la structure en terme d'efforts intérieurs ou de déplacements relatifs;  $\mathbf{V}(t)$  est un vecteur regroupant des paramètres définissant la capacité résistante de la structure et  $G$  est une *fonction de ruine* continue. Typiquement il s'agit d'une expression explicite du vecteur d'état de la structure et des capacités résistantes. Pour une rotule élasto-plastique, nous définirons par exemple l'état limite ultime sous la forme d'une demande de ductilité maximale en rotation :

$$G(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}(t)) = \theta_{\max} - \theta(t) \quad (4.2)$$

Dans ce cas, le vecteur d'état se résume à  $\mathbf{X}(t) = \theta(t)$  et le vecteur capacité (indépendant du temps) à  $\mathbf{V}(t) = \theta_{\max}$ . On pourra également le définir sous la forme d'une énergie maximale dissipée dans la rotule :

$$G(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}(t)) = \varepsilon_{\max} - \int_0^t \mathcal{M}(\tau) \dot{\theta}(\tau) d\tau \quad (4.3)$$

auquel cas  $\mathbf{X}(t) = [\mathcal{M}(t), \dot{\theta}(t)]$  et  $\mathbf{V}(t) = \varepsilon_{\max}$ . Dans ces deux exemples, comme dans la plupart des cas courants, l'état limite est une fonction explicite des processus  $\mathbf{X}(t)$  et  $\mathbf{V}(t)$ .

Dans un contexte probabiliste,  $\mathbf{X}(t)$  et  $\mathbf{V}(t)$  sont des processus aléatoires. Pour simplifier, nous supposons dans ce chapitre que les capacités résistantes du système sont indépendantes du temps.  $\mathbf{V}(t)$  se réduit alors à une variable aléatoire  $\mathbf{V}$ . La surface de ruine (4.1) délimite deux régions : une région de sécurité, domaine des états de la structure en deçà de l'état limite ultime, repérée mathématiquement par l'inégalité  $G(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}) > 0$  et un domaine de ruine, regroupant les états de la structure au delà de l'état limite ultime avec  $G(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}) < 0$ .

Un système possède en général plusieurs mode de ruine. Une rotule plastique périra par rupture des aciers longitudinaux, écrasement du béton ou encore en dépassant sa capacité résistante en cisaillement. En fiabilité des structures on décrit le *système* comme un assemblage de *composants* possédant chacun une fonction de ruine  $g(\mathbf{X}(t), \mathbf{V})$  [89]. Si la ruine de l'un quelconque des composants entraîne la ruine du système, on parle d'un système série. C'est le cas de la rotule plastique évoquée ci-dessus, qui perd sa capacité résistante dès que l'un des trois modes de ruine (ruine de composant) est atteint. Si la ruine n'arrive qu'après la ruine de tous les composants, on parle d'un système parallèle. C'est le cas de certains systèmes hyperstatiques dans lesquels la ruine d'un composant entraîne une redistribution des efforts dans les autres composants, sans provoquer la ruine fragile du système. Il existe bien sûr bien d'autres systèmes, assemblages de sous-systèmes parallèles et séries.

Pour évaluer la fiabilité d'une structure soumise à une sollicitation stochastique, nous calculons la *probabilité de ruine* :

$$P_R(T) = P \left[ \left\{ \min_{0 \leq t \leq T} G(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}) \right\} \leq 0 \right] \quad (4.4)$$

qui est la probabilité que la structure atteigne l'état limite ultime à un moment quelconque pendant la période d'excitation, compte tenu des incertitudes portant sur les sollicitations et sur les capacités résistantes des éléments. Dans ce calcul, on définit le séisme par l'accélération

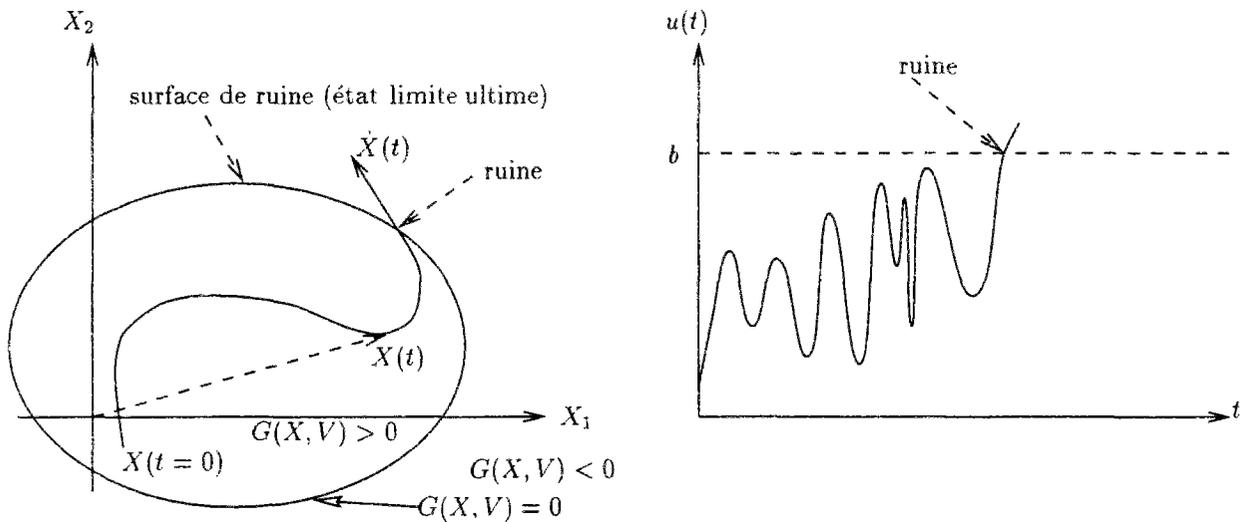


FIG. 4.1 - Ruine du système par atteinte de l'état limite ultime

au sol, processus aléatoire dont on connaît certaines caractéristiques, comme par exemple la durée  $T$  et la densité spectrale de puissance. La probabilité de ruine  $P_R(T)$  est conditionnelle au fait qu'il se produit un évènement sismique de cette nature. La probabilité de ruine de l'ouvrage pendant sa durée de vie s'obtient en sommant par la formule de Bayes ces probabilités conditionnelles pondérées par les probabilités d'occurrence des évènements correspondants pendant la durée de vie de l'ouvrage.

Remarquons que la ruine du système sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  s'écrit :

$$\left\{ \min_{0 \leq t \leq T} G(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}) \leq 0 \right\} = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \{G(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}) \leq 0\} \quad (4.5)$$

On parle en effet de ruine si à un instant quelconque l'état limite ultime est atteint. Il s'agit donc d'un système série dont les composants sont les états  $\mathbf{X}(t)$  de la structure aux divers instants  $t$  de l'intervalle  $[0, T]$ . La ruine d'un tel composant s'écrit :

$$\{G(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}) \leq 0\} \quad (4.6)$$

Il existe des techniques permettant d'évaluer approximativement la probabilité de ruine d'un système série à partir des probabilités de ruine des composants et des probabilités de ruine simultanée de deux composants [89]. Malheureusement, ces méthodes fonctionnent mal lorsque les ruines (4.6) sont très corrélées, comme c'est le cas ici pour deux composants à des temps  $t$  rapprochés.

Pour le calcul de la probabilité de ruine  $P_R(T)$  en, nous utilisons plutôt la notion de *dépassement de l'état limite*. Un dépassement survient lorsque le vecteur  $\mathbf{X}(t)$  atteint la surface de ruine et que sa dérivée en temps  $\dot{\mathbf{X}}(t)$  pointe vers le domaine de ruine (voir Figure 4.1). Soit  $N(T)$  le nombre de dépassements dans l'intervalle de temps  $]0, T]$ . Il y a ruine si le système est à l'instant  $t = 0$  dans le domaine de ruine ou s'il se produit au moins un dépassement. En d'autres termes :

$$P_R(T) = P \{ \{G(\mathbf{X}(0), \mathbf{V}) \leq 0\} \cup \{N(T) \geq 1\} \} \quad (4.7)$$

Dans tous les cas pratiques, le système est dans le domaine de sécurité à l'état initial ( $t = 0$ ) avec une probabilité un et donc [89]:

$$P_R(T) = P[N(T) \geq 1] = \sum_{n=1}^{+\infty} P[N(T) = n] \leq \sum_{n=1}^{+\infty} nP[N(T) = n] = E[N(T)] \quad (4.8)$$

L'espérance du nombre de dépassements  $E[N(T)]$  est un majorant de la probabilité de ruine  $P_R(T)$ . Dans la pratique du génie civil, on dimensionne la structure pour que la probabilité de ruine soit très faible, de telle façon que le dépassement de l'état limite ultime soit un évènement rare. Si donc la structure est très fiable, *i.e.* le seuil de dépassement est très élevé et que la réponse est à bande raisonnablement large afin que les dépassements ne se produisent pas par paquets, l'occurrence de deux dépassements ou plus a une probabilité négligeable devant la probabilité d'un seul dépassement, *i.e.*:

$$P[N(T) = 1] \gg \sum_{n=2}^{+\infty} P[N(T) = n] \quad (4.9)$$

Le majorant  $E[N(T)]$  est alors une bonne approximation de la probabilité de ruine  $P_R(T)$ . Dans tous les cas on a:

$$P_R(T) \leq E[N(T)] = \int_0^T \nu(t) dt \quad (4.10)$$

où  $\nu(t)$  est le taux moyen de dépassement de l'état limite ultime par unité de temps. Si de plus on fait l'hypothèse qu'un dépassement à un instant  $t$  est indépendant d'un dépassement éventuel à un instant antérieur  $\tau$ , alors le processus de comptage de dépassement  $N(t)$  suit une loi de Poisson et:

$$P_R(T) \approx 1 - \exp\left(-\int_0^T \nu(t) dt\right) \quad (4.11)$$

Notons qu'à chaque dépassement de l'état limite ultime correspond un passage par zéro vers les valeurs négatives du processus scalaire  $G(\mathbf{X}(t), \mathbf{V})$  [81]. En appliquant la formule de Rice [104], on obtient donc:

$$\nu(t) = \int_{-\infty}^0 |\dot{G}| p_{G\dot{G}}(G = 0, \dot{G}, t) d\dot{G} \quad (4.12)$$

où  $p_{G\dot{G}}(G, \dot{G}, t)$  est la densité de probabilité du couple de variables aléatoires  $G(\mathbf{X}(t), \mathbf{V})$  et  $\dot{G}(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}) = \frac{d}{dt}G(\mathbf{X}(t), \mathbf{V})$  à l'instant  $t$ . Malheureusement, pour des structures non-linéaires et un état limite quelconque, cette densité de probabilité n'est en général pas disponible.

Hagen et Tvedt [54] proposent d'évaluer le taux moyen de dépassement par la formule:

$$\nu(t) = \lim_{\substack{\delta t \rightarrow 0 \\ \delta t > 0}} \frac{P[g_1(t) < 0 \cap g_2(t, \delta t) < 0]}{\delta t} \quad (4.13)$$

$$\text{avec } \begin{cases} g_1(t) = -G(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}) \\ g_2(t, \delta t) = G(\mathbf{X}(t + \delta t), \mathbf{V}) \end{cases} \quad (4.14)$$

Nous obtenons une approximation du taux moyen de dépassement en prenant la valeur de  $P[g_1(t) < 0 \cap g_2(t, \delta t) < 0] / \delta t$  pour un  $\delta t$  fixé et petit. Au numérateur figure la probabilité que  $\mathbf{X}(\tau)$  soit dans le domaine de sécurité à l'instant  $\tau = t$  et dans le domaine de ruine à l'instant  $\tau = t + \delta t$ . Il s'agit de la probabilité d'un évènement défini par l'intersection des ruines de deux

composants ou encore de la probabilité de ruine d'un système parallèle à deux composants dont les états limites sont définis par les fonctions  $g_1$  et  $g_2$ . Notons que la fonction de ruine du second composant s'écrit au premier ordre en  $\delta t$

$$g_2(t, \delta t) \approx G(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}) + \nabla_{\mathbf{X}} G(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}) \dot{\mathbf{X}}(t) \delta t \quad (4.15)$$

C.C. Li et A. Der Kiureghian [81] proposent de calculer la probabilité

$$P_{12} = P[g_1(t) < 0 \cap g_2(t, \delta t) < 0] \quad (4.16)$$

grâce à une *méthode de fiabilité du premier ordre* dite FORM (*first order reliability method*). Nous rappelons les éléments essentiels de la méthode dans le paragraphe suivant.

## 4.2 Approximation FORM du système parallèle

Considérons le problème général du calcul de la probabilité

$$P_R = \int_R p_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (4.17)$$

où  $\mathbf{y}$  est un vecteur aléatoire réel de densité de probabilité  $p_{\mathbf{y}}$  et  $R$  est le sous ensemble de l'espace des réalisations, intersection de deux domaines de ruine :

$$R = \{\mathbf{y}, g_1(\mathbf{y}) \leq 0 \cap g_2(\mathbf{y}) \leq 0\} \quad (4.18)$$

On suppose qu'il existe une transformation  $T$  biunivoque de sorte que :

$$\mathbf{y} = T(\mathbf{f}) \quad (4.19)$$

où  $\mathbf{f}$  est un vecteur dont les composantes sont des variables aléatoires gaussiennes réduites indépendantes. La densité de probabilité de  $\mathbf{f}$  est  $p_{\mathbf{f}}(\mathbf{f}) = (2\pi)^{-n/2} \exp(-1/2\mathbf{f}^T \mathbf{f})$ , où  $n$  est la taille des vecteurs  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{f}$ . Les fonctions de ruine ont pour expression dans l'espace des variables gaussiennes réduites  $\mathbf{f}$ , également appelé *espace normal standard* :

$$\mathcal{G}_i(\mathbf{f}) = g_i(T(\mathbf{f})) \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (4.20)$$

L'approximation FORM consiste à linéariser les surfaces de ruine  $\mathcal{G}_1(\mathbf{f}) = 0$  et  $\mathcal{G}_2(\mathbf{f}) = 0$  dans l'espace des variables gaussiennes réduites, au voisinage de deux points  $\mathbf{f}_1^*$  et  $\mathbf{f}_2^*$  dont nous discutons le choix plus loin. Ainsi au premier ordre,

$$\frac{\mathcal{G}_i(\mathbf{f})}{\|\nabla \mathcal{G}_i(\mathbf{f}_i^*)\|} \approx \frac{\mathcal{G}_i(\mathbf{f}_i^*)}{\|\nabla \mathcal{G}_i(\mathbf{f}_i^*)\|} + \frac{\nabla \mathcal{G}_i(\mathbf{f}_i^*)}{\|\nabla \mathcal{G}_i(\mathbf{f}_i^*)\|} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_i^*) \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (4.21)$$

dans lequel  $\nabla \mathcal{G}_i$  désigne le gradient de  $\mathcal{G}$  par rapport aux variables du vecteur  $\mathbf{f}$  (vecteur ligne de taille  $n$ ) et  $\|\mathbf{x}\|$  désigne la norme euclidienne  $\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ . On a encore

$$\frac{\mathcal{G}_i(\mathbf{f})}{\|\nabla \mathcal{G}_i(\mathbf{f}_i^*)\|} \approx \beta_i - \alpha_i \mathbf{f} \quad (4.22)$$

avec

$$\beta_i = \frac{\mathcal{G}_i(\mathbf{f}_i^*)}{\|\nabla \mathcal{G}_i(\mathbf{f}_i^*)\|} - \frac{\nabla \mathcal{G}_i(\mathbf{f}_i^*)}{\|\nabla \mathcal{G}_i(\mathbf{f}_i^*)\|} \mathbf{f}_i^* \quad \text{et} \quad \alpha_i = -\frac{\nabla \mathcal{G}_i(\mathbf{f}_i^*)}{\|\nabla \mathcal{G}_i(\mathbf{f}_i^*)\|} \quad (4.23)$$

fonction  $\beta_i$  est la distance de l'origine à l'hyperplan tangent à la surface de ruine  $\mathcal{G}_i(\mathbf{f})$  au point  $\mathbf{f}_i^*$  et  $\boldsymbol{\alpha}_i^T$  est le vecteur unitaire normal à cet hyperplan pointant vers le domaine de ruine du composant. Remarquons que lorsque le point  $\mathbf{f}_i^*$  est choisi sur la surface de ruine du composant  $i$ , alors  $\mathcal{G}_i(\mathbf{f}_i^*) = 0$  et  $\beta_i = \boldsymbol{\alpha}_i^T \mathbf{f}_i^*$ ; dans ce cas, on montre que l'indice  $\beta_i$  est indépendant de la formulation de la surface de ruine.

On obtient une approximation de la probabilité  $P_{12}$  en remplaçant les surfaces de ruine par leur hyperplan tangent (voir par exemple [89]):

$$P_{12} \approx \Phi(-\beta_1)\Phi(-\beta_2) + \int_0^{\rho_{12}} \phi_{12}(-\beta_1, -\beta_2, \rho) d\rho \quad (4.24)$$

où

$$\rho_{12} = \boldsymbol{\alpha}_1 \boldsymbol{\alpha}_2^T \quad (4.25)$$

mesure le cosinus de l'angle formé par les normales aux hyperplans tangents,  $\phi_{12}$  est la densité de probabilité d'un couple de variables normales centrées corrélées :

$$\phi_{12}(x, y, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right) \quad (4.26)$$

et  $\Phi$  est la fonction de répartition associée à la densité de probabilité gaussienne réduite  $\phi$ :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(\xi) d\xi \quad (4.27)$$

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \quad (4.28)$$

### Choix des points de linéarisation $\mathbf{f}_i^*$

Du fait de la décroissance exponentielle de la densité de probabilité  $p_{\mathbf{f}}$  de l'espace normal standard, dans les directions radiale et ortho-radiale, il est naturel de choisir pour les points de linéarisation  $\mathbf{f}_i^*$ , les points les plus proches de l'origine sur chacune des surfaces de ruines  $\mathcal{G}_i(\mathbf{f}) = 0$ . On parle alors de *points de fonctionnement* (en anglais *design points*). Ce choix représenté sur la Figure 4.2 a l'avantage de faire appel à une technique d'optimisation associée à une seule contrainte par surface de ruine comme nous le verrons dans le paragraphe 4.3.4. La valeur du paramètre  $\beta_i = \boldsymbol{\alpha}_i^T \mathbf{f}_i^*$  porte le nom d'*indice de fiabilité*. Sa valeur absolue  $|\beta|$  mesure la distance entre l'origine et la surface de ruine du composant  $i$ . Il est positif si l'origine se trouve dans le domaine de sécurité, négatif dans le cas contraire. Dans le cas d'une fonction de ruine linéaire, la probabilité de ruine du composant vaut :

$$P_R = \Phi(-\beta) \quad (4.29)$$

Si l'état limite n'est pas une fonction linéaire des variables aléatoires, la formule (4.29) donne la probabilité de ruine correspondant à l'approximation de la surface de ruine par son hyperplan tangent au droit du point de fonctionnement. Nous adoptons cette technique dans les applications qui suivent. Notons toutefois que Li et Der Kiureghian [81] proposent de linéariser en la solution, *a priori* plus optimale, du programme suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Minimiser } \|f\| \\ \mathcal{G}_1(\mathbf{f}) \leq 0 \text{ et } \mathcal{G}_2(\mathbf{f}) \leq 0 \end{array} \right. \quad (4.30)$$

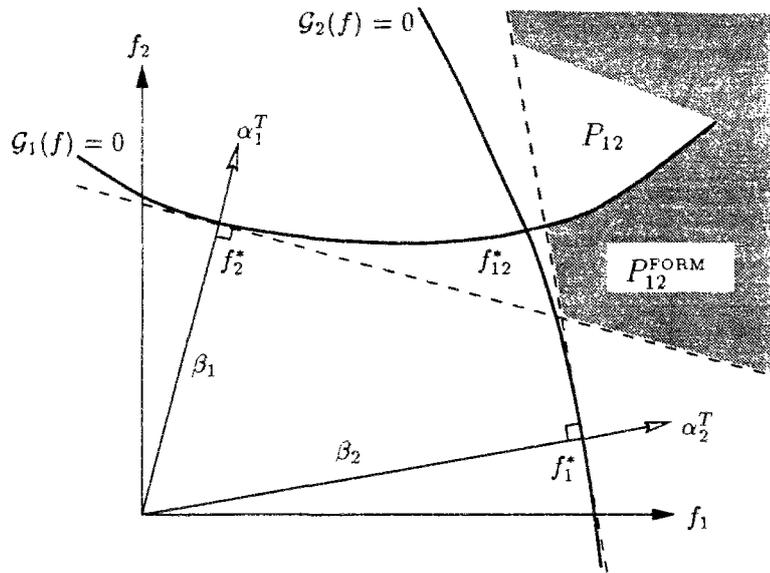


FIG. 4.2 - Approximation FORM de la probabilité de ruine d'un système parallèle

La solution  $\mathbf{f}^*$  de ce programme est située sur la frontière du domaine de ruine du système parallèle. Elle peut être sur les frontières des domaines de ruine des deux composants, *i.e.*  $\mathcal{G}_1(\mathbf{f}) = 0$  et  $\mathcal{G}_2(\mathbf{f}) = 0$  comme c'est le cas sur la Figure 4.2 (point  $\mathbf{f}_{12}^*$ ), ou bien n'être située que sur la frontière d'un seul de ces deux domaines, par exemple du premier:  $\mathcal{G}_1(\mathbf{f}^*) = 0$  et  $\mathcal{G}_2(\mathbf{f}^*) < 0$ . Dans ce cas, on linéarise  $\mathcal{G}_1(\mathbf{f}) = 0$  en  $\mathbf{f}_1^* = \mathbf{f}^*$  et  $\mathcal{G}_2(\mathbf{f}) = 0$  en un point  $\mathbf{f}_2^*$  que l'on choisit par exemple parmi les points suivants :

- Le point sur  $\mathcal{G}_2(\mathbf{f}) = 0$  le plus proche de  $\mathbf{f}_1^*$  :  $\mathbf{f}_{2a}^*$  sur la Figure 4.3.
- Le point intersection de la droite  $(O\mathbf{f}_1^*)$  et de la surface  $\mathcal{G}_2(\mathbf{f}) = 0$  :  $\mathbf{f}_{2b}^*$  sur la Figure 4.3.
- La solution du problème

$$\begin{cases} \text{Minimiser } \|\mathbf{f}\| \\ \mathcal{G}_1(\mathbf{f}) \leq 0 \text{ et } \mathcal{G}_2(\mathbf{f}) = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

indiquée par le point  $\mathbf{f}_{2c}^*$ .

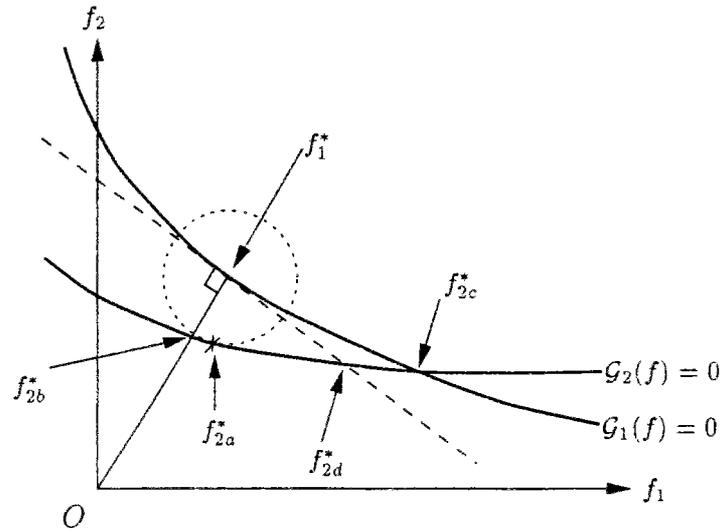
- La solution du problème

$$\begin{cases} \text{Minimiser } \|\mathbf{f}\| \\ \beta_1 - \alpha_1 \mathbf{f} \leq 0 \text{ et } \mathcal{G}_2(\mathbf{f}) = 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

( $\mathbf{f}_{2d}^*$  sur la Figure 4.3) dans lequel on utilise l'approximation linéaire de la première contrainte.

### Choix des variables aléatoires

En théorie donc, le calcul de la probabilité de ruine du système parallèle (4.16) peut se faire à l'aide d'approximations FORM. Toutefois pour appliquer la transformation (4.19), il faut connaître la densité de probabilité conjointe du couple  $\mathbf{X}(t)$  et  $\mathbf{X}(t + \delta t)$  ou bien celle du

FIG. 4.3 - Point de linéarisation  $f_2$ 

couple  $\mathbf{X}(t)$  et  $\dot{\mathbf{X}}(t)$ . Or ces dernières sont en général inconnues pour des réponses de structures non-linéaires à une excitation stochastique. L'idée de Li et Der Kiureghian [81] est d'exprimer le processus réponse en fonction du processus aléatoire d'excitation sismique, l'accélération au sol, dont on sait qu'elle peut être approchée par un processus gaussien centré de type bruit blanc filtré. La réponse s'obtient par intégration numérique des équations non-linéaires de la dynamique. Dans ce qui suit nous utilisons l'algorithme de Newmark avec accélération constante, inconditionnellement stable, associé à une technique de Newton-Raphson pour la résolution des équations non-linéaires à chaque pas de temps. Il s'agit d'une technique d'intégration par collocation en temps, transformant un processus discret d'excitation :

$$\mathbf{f}^T = [f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_n)] \quad (4.33)$$

en un processus réponse en déplacement  $\mathbf{X}(t_i)$  et vitesse  $\dot{\mathbf{X}}(t_i)$  où  $t_i = i \times \Delta t$ . Nous reviendrons précisément sur la technique d'intégration au paragraphe 4.3. Il apparaît dès maintenant que par cette méthode, on contourne le problème difficile de la détermination de la densité de probabilité conjointe de  $\mathbf{X}(t_{i^*})$  et  $\dot{\mathbf{X}}(t_{i^*})$  à une date donnée  $t_{i^*}$  grâce à l'utilisation des variables discrètes  $f(t_i)$  gaussiennes indépendantes. La difficulté est rejetée dans le plus grand nombre de variables  $f(t_i)$  et une expression de la surface de ruine qui n'est en général plus une fonction explicite de ces dernières du fait de la complexité de la transformation de  $\mathbf{f}$  en  $(\mathbf{X}(t_{i^*}), \dot{\mathbf{X}}(t_{i^*}))$ . Nous examinons maintenant cette démarche plus en détail.

### 4.3 Calcul du point de fonctionnement pour un composant

Dans ce paragraphe, nous présentons la recherche du point de fonctionnement qui est dans l'espace normal standard, le point de la surface de ruine du composant  $\mathcal{G}(\mathbf{f}) = 0$  le plus probable,

c'est à dire le plus proche de l'origine. Il s'agit de la solution du problème :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } \|f\| \\ \mathcal{G}(\mathbf{f}) = 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

Typiquement, la fonction d'état limite dans l'espace d'origine  $(\mathbf{X}(t), \mathbf{V})$  est une fonction explicite. La difficulté réside dans la transformation des variables entre les deux espaces.

### 4.3.1 Discrétisation en temps des équations dynamiques

Nous supposons que l'équation de la dynamique de la structure se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}_0\mathbf{u} + \mathbf{K}_1\mathbf{z}(t) &= \mathbf{r}f(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{h}(\mathbf{P}\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{z}(t)) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.35)$$

très voisine des équations (3.95) ou (3.97). Le vecteur  $\mathbf{u}$  regroupe les degrés de liberté de déplacement de la structure tandis que les composantes du vecteur  $\mathbf{z}$  sont des variables auxiliaires permettant de décrire le comportement des éléments non-linéaires de la structure. Cette formulation est tout à fait adaptée à l'utilisation du modèle de Bouc-Wen (3.42) pour des éléments hystérétiques. Dans tous les cas les non-linéarités sont regroupées dans la fonction  $\mathbf{h}(\cdot, \cdot)$ . La deuxième partie du système (4.35) s'écrit explicitement de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 + h_1(\mathbf{P}^1\dot{\mathbf{u}}, z_1) = 0 \\ \dot{z}_2 + h_2(\mathbf{P}^2\dot{\mathbf{u}}, z_2) = 0 \\ \vdots \\ \dot{z}_\kappa + h_\kappa(\mathbf{P}^\kappa\dot{\mathbf{u}}, z_\kappa) = 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

où  $\mathbf{P}^j$  est la  $j^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $\mathbf{P}$ .

Les solutions analytiques sont exceptionnelles. On intègre ces équations de façon approchées, par exemple par la méthode de Newmark avec accélération constante [94] (voir aussi [20]), qui est une méthode de collocation en temps, *i.e.* résolvant (4.35) sur un ensemble discret de dates  $t_i$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{K}_0\mathbf{u}_i + \mathbf{K}_1\mathbf{z}_i &= \mathbf{r}f_i \\ \dot{\mathbf{z}}_i + \mathbf{h}(\mathbf{P}\dot{\mathbf{u}}_i, \mathbf{z}_i) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.37)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &\approx \mathbf{u}(t_i) & \dot{\mathbf{u}}_i &\approx \dot{\mathbf{u}}(t_i) & \ddot{\mathbf{u}}_i &\approx \ddot{\mathbf{u}}(t_i) \\ \mathbf{z}_i &\approx \mathbf{z}(t_i) & \dot{\mathbf{z}}_i &\approx \dot{\mathbf{z}}(t_i) & f_i &= f(t_i) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Sur chaque pas de temps  $]t_{i-1}, t_i[$ , on suppose l'accélération constante, ce qui mène au schéma d'intégration :

$$\dot{\mathbf{u}}_i = -\dot{\mathbf{u}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}) \quad (4.39)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_i = -\ddot{\mathbf{u}}_{i-1} - \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1})$$

$$\dot{\mathbf{z}}_i = -\dot{\mathbf{z}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t}(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{i-1}) \quad (4.40)$$

$$\ddot{\mathbf{z}}_i = -\ddot{\mathbf{z}}_{i-1} - \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{z}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2}(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{i-1})$$

où  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ . Injecté dans (4.38), ce schéma fournit une équation non-linéaire à chaque pas de temps qu'on résout grâce à une méthode de Newton-Raphson [20]. On présente à l'annexe E.1 le détail de l'algorithme.

### 4.3.2 Processus sollicitation discrétisé

Nous avons vu au chapitre 1 des modèles d'accélération de sol obtenus en filtrant en fréquence et en modulant par une fonction temporelle un bruit blanc gaussien stationnaire. Nous conservons cette approche pour une raison qui apparaîtra par la suite, en supposant que le terme d'excitation figurant au membre de droite de l'équation (4.35) est un bruit blanc  $B(t)$  multiplié par une fenêtre temporelle déterministe d'intensité  $I(t)$ :

$$f(t) = I(t)B(t) \quad (4.41)$$

La méthode d'intégration numérique de Newmark est une méthode de collocation en temps. Elle nécessite la définition des variables aléatoires  $f_i = f(t_i)$ . Or pour un bruit blanc,  $f(t_i)$  est de variance infinie, ce qui est incompatible avec la méthode FORM que nous présentons par la suite. Toutefois,  $f_i$  peut être choisi comme la valeur au temps  $t_i$  d'un processus  $\tilde{f}(t)$  dont les caractéristiques statistiques se rapprochent de celle de  $f(t)$ . Supposons pour simplifier que le pas de temps  $\Delta t$  soit constant. Nous construisons le processus aléatoire:

$$\tilde{f}(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} I(t)F_i 1_{[t_i - \frac{\Delta t}{2}, t_i + \frac{\Delta t}{2}]}(t) \quad (4.42)$$

où les  $F_i$  sont des variables gaussiennes centrées, indépendantes et de variance  $\sigma_F^2$  et la fonction  $1_{[t_i - \frac{\Delta t}{2}, t_i + \frac{\Delta t}{2}]}(t)$  vaut 1 sur l'intervalle  $[t_i - \frac{\Delta t}{2}, t_i + \frac{\Delta t}{2}]$  et 0 ailleurs. La valeur en  $t_i$  de la fonction est parfaitement définie:

$$f_i = \tilde{f}(t_i) = I(t_i)F_i \quad (4.43)$$

C'est une variable aléatoire normale centrée de variance  $I(t_i)^2 \sigma_F^2$ . L'indépendance des  $f_i$  liée au caractère de bruit blanc filtré de  $f(t)$  facilite considérablement la mise en œuvre de la méthode FORM: le vecteur  $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3, \dots]$  est gaussien de composantes indépendantes. Le passage à l'espace normal standard est alors immédiat puisqu'il suffit de normaliser chacune des composantes par son écart-type.

On établit facilement que la fonction d'autocorrélation de  $\tilde{f}$  est:

$$E[\tilde{f}(t)\tilde{f}(t+\tau)] = \begin{cases} 0 & \text{si } |\tau| > \Delta t \\ I(t)I(t+\tau)(1 - \frac{|\tau|}{\Delta t})\sigma_F^2 & \text{si } |\tau| \leq \Delta t \end{cases} \quad (4.44)$$

En supposant que  $I(t)$  varie peu sur un intervalle de temps  $\Delta t$ , on trouve que la densité spectrale de puissance associée vaut:

$$S_{\tilde{f}}(\omega) \approx I(t)^2 \frac{\sigma_F^2 \Delta t}{2\pi} \frac{1 - \cos(\omega \Delta t)}{(\omega \Delta t)^2 / 2} \quad (4.45)$$

Lorsque  $\Delta t$  tend vers zéro,  $\tilde{f}$  s'approche d'un bruit blanc gaussien d'intensité  $\Delta t / (2\pi) \sigma_F^2 I(t)^2$ . Dans les exemples numériques qui suivent, nous avons choisi pour  $I(t)$  une fenêtre rectangulaire d'amplitude unité et de durée  $T$ .

Une accélération  $a_g$  dont la densité spectrale de puissance durant les mouvements forts est donnée par la formule de Kanai-Tajimi (1.5) s'obtient alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} a_g(t) &= \omega_g^2 u_g(t) + 2\zeta_g \omega_g \dot{u}_g(t) \\ \ddot{u}_g(t) + 2\zeta_g \omega_g \dot{u}_g(t) + \omega_g^2 u_g(t) &= \sqrt{S_0} \tilde{f}(t) \end{aligned} \quad (4.46)$$

A titre d'exemple, nous envisageons la réponse d'un oscillateur hystérétique dont la non-linéarité s'écrit sous la forme (3.41, 3.42), excité par un bruit blanc filtré de type Kanai-Tajimi :

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 2\zeta_0 \omega_0 \dot{u} + \alpha \omega_0^2 u + (1 - \alpha) \omega_0^2 z &= \omega_g^2 u_g + 2\zeta_g \omega_g \dot{u}_g \\ \ddot{u}_g + 2\zeta_g \omega_g \dot{u}_g + \omega_g^2 u_g &= \sqrt{S_0} f \\ \dot{z} + h(\dot{u}, z) &= 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

L'équation discrétisée en temps s'écrit sous la forme (4.38) :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i + \begin{bmatrix} 2\zeta_0 \omega_0 & -2\zeta_g \omega_g \\ 0 & 2\zeta_g \omega_g \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i + \begin{bmatrix} \alpha \omega_0^2 & -\omega_g^2 \\ 0 & \omega_g^2 \end{bmatrix} \mathbf{u}_i + \begin{bmatrix} (1 - \alpha) \omega_0^2 \\ 0 \end{bmatrix} z_i &= \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{2\pi S_0}{\Delta t}} \end{bmatrix} \tilde{f}_i \\ \dot{z}_i + h(\dot{u}_i, z_i) &= 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

avec

$$\mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{g,i} \end{Bmatrix} \quad \dot{\mathbf{u}}_i = \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_{g,i} \end{Bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{u}}_i = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_{g,i} \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

On aura pris soin de choisir des variables aléatoires  $F_i$  normales centrées de variance unité (*i.e.* gaussienne réduite) dans l'équation (4.42) de façon à ce que  $\sqrt{\frac{2\pi S_0}{\Delta t}} \tilde{f}(t)$  se rapproche d'un bruit blanc gaussien d'intensité  $S_0$  lorsque  $\Delta t$  tend vers zéro.

### 4.3.3 Intégration des équations

Nous montrons dans l'annexe E.1 qu'à chaque pas de temps  $t_i$ , on doit résoudre une équation implicite de la forme :

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_{i-1}) = \mathcal{L}(f_i, f_{i-1}, \mathbf{X}_{i-1}) \quad (4.50)$$

où  $\mathbf{X}_i^T = [\mathbf{u}_i^T \quad \mathbf{z}_i^T \quad \dot{\mathbf{u}}_i^T \quad \dot{\mathbf{z}}_i^T]$  est le vecteur approché des déplacements et vitesses au temps  $t_i$ ,  $\mathbf{A}$  est une fonction non-linéaire et  $\mathcal{L}$  est une forme linéaire. La solution de ce problème implicite non-linéaire s'obtient par une méthode itérative de Newton-Raphson au cours de laquelle, on calcule le gradient  $\underline{\nabla}_{\mathbf{X}_i} \mathbf{A}$  de l'opérateur  $\mathbf{A}$  par rapport au vecteur  $\mathbf{X}_i$ . Nous verrons au paragraphe 4.3.4 que ce gradient calculé en la solution permet d'obtenir les sensibilités de la réponse aux variations du vecteur d'excitation  $\mathbf{f}^T = [f_1, f_2, f_3 \dots]$ .

### 4.3.4 Algorithme de recherche du point de fonctionnement

Nous calculons le point de fonctionnement, solution du problème de minimisation (4.34) grâce à l'algorithme dit HL-RF (Hasofer et Lind [64], Rackwitz et Fiessler [103]) modifié (Liu et Der Kiureghian [84], Zhang et Der Kiureghian [140]), présenté à l'annexe F et pour lequel nous avons développé un programme Fortran. L'algorithme repose sur le calcul du gradient de la fonction  $\mathcal{G}(\mathbf{f})$ . Rappelons que l'état limite s'exprime par une fonction  $G$  du vecteur d'état

$\mathbf{u}(t)$  de la structure, solution de l'équation dynamique (4.35). Par exemple, pour l'oscillateur hystérétique (4.47), nous définissons pour état limite un seuil de déplacement :

$$G(u(t)) = b - u(t) \quad (4.51)$$

Bien sûr, puisque nous ne disposons que d'un ensemble discret de valeurs de  $u(t)$  aux temps  $t_i$ , nous ne possédons qu'un ensemble discret de fonctions de ruine :

$$G_i = b - u_i \quad (4.52)$$

L'état limite exprimé dans l'espace des variables d'excitation  $\mathbf{f}$  s'obtient par la transformation (4.20) :

$$\mathcal{G}_i(\mathbf{f}) = G_i(\mathbf{u}(\mathbf{f})) = b - u_i(\mathbf{f}) = b - u_i(f_1, f_2, \dots, f_j, \dots) \quad (4.53)$$

Pour calculer le taux moyen de dépassement du seuil au temps  $t_i$  par la formule (4.13), nous utilisons les deux composants (4.14) dont le premier s'écrit clairement ici :

$$g_1 = u_i - b \quad (4.54)$$

Pour le deuxième, nous avons le choix de fixer  $\delta t = t_{i+1} - t_i$  auquel cas

$$g_2 = b - u_{i+1} \quad (4.55)$$

ou bien nous utilisons la formule (4.15) et

$$g_2 = b - u_i - \dot{u}_i \delta t \quad (4.56)$$

qui permet de choisir un  $\delta t$  plus petit que  $t = t_{i+1} - t_i$ . Toutefois, nous avons constaté que pour des  $\delta t$  trop petits, les deux surfaces de ruine  $g_1 = 0$  et  $g_2 = 0$  sont très proches l'une de l'autre et le calcul de la probabilité (4.16) est sujet à des erreurs numériques. Dans la pratique, nous avons donc utilisé la formule (4.55).

Nous cherchons les points de fonctionnement associés aux surfaces de ruine  $g_1 = 0$  et  $g_2 = 0$  dans l'espace normal standard des variables  $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_j, \dots]$ . L'algorithme présenté en annexe F fait appel au gradient  $\nabla_{\mathbf{f}} g_i$  de la fonction de ruine par rapport au vecteur des variables aléatoires  $f_j$ . Dans notre exemple, ces fonctions sont linéaires en  $u_i$  (voire aussi en  $\dot{u}_i$ ), si bien que le gradient  $\nabla_{\mathbf{f}} g_i$  est une expression linéaire du gradient  $\nabla_{\mathbf{f}} u_i$ . Notons que puisque le système est causal,  $u_i$  ne dépend que de l'excitation antérieure à  $t_i$ , donc  $\frac{\partial u_i}{\partial f_j} = 0$  dès que  $j > i$ . Rappelons que pour un vecteur d'excitation  $\mathbf{f}$  donné, la solution discrète en temps vérifie :

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_{i-1}) = \mathcal{L}(f_i, f_{i-1}, \mathbf{X}_{i-1}) \quad (4.57)$$

En différentiant cette équation par rapport à la variable  $f_j$  (voir l'annexe (E.2)) on obtient :

$$\underline{\underline{\nabla_{X_i} \mathbf{A}}} \frac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial f_j} = \mathcal{L}(\delta_{i,j}, \delta_{i-1,j}, \frac{\partial \mathbf{X}_{i-1}}{\partial f_j}) - \underline{\underline{\nabla_{X_{i-1}} \mathbf{A}}} \frac{\partial \mathbf{X}_{i-1}}{\partial f_j} \quad (4.58)$$

où les gradients de la fonction non-linéaire  $\mathbf{A}$ ,  $\underline{\underline{\nabla_{X_i} \mathbf{A}}}$  et  $\underline{\underline{\nabla_{X_{i-1}} \mathbf{A}}}$  sont pris respectivement aux points de la solution  $\mathbf{X}_i$  et  $\mathbf{X}_{i-1}$ . Les sensibilités de la solution au pas de temps  $t_i$  par rapport aux variables  $f_j$ ,  $\frac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial f_j}$ , sont solutions du problème linéaire (4.58) dont le membre de droite est lui même une fonction linéaire des sensibilités de la solution au pas de temps précédents  $\frac{\partial \mathbf{X}_{i-1}}{\partial f_j}$ . Ainsi si les  $\frac{\partial \mathbf{X}_{i-1}}{\partial f_j}$  pour  $j \leq i-1$  sont connus, on obtient facilement les  $\frac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial f_j}$  pour  $j \leq i$  (rappelons que  $\frac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial f_j} = 0$  pour  $j > i$ ). A cet effet, on ne factorise  $\underline{\underline{\nabla_{X_i} \mathbf{A}}}$  qu'une seule fois. Les sensibilités de la réponse aux variations du vecteur d'excitation s'obtiennent ainsi de proche en proche.

## 4.4 Exemples d'application

A titre d'illustration, nous présentons les résultats du calcul<sup>1</sup> du point de fonctionnement et du taux moyen de dépassement pour divers oscillateurs sollicités par un bruit blanc filtré de type Kanai-Tajimi (4.47) pour sol dur. Les paramètres du filtre sont :

$$S_0 = 1.248 \times 10^{-3} \quad \omega_g = 6\pi \text{rad/s} \quad \zeta_g = 0.6 \quad (4.59)$$

L'accélération maximale d'entraînement ( $a_g = \omega_g^2 u_g + 2\zeta_g \omega_g \dot{u}_g$ ) qui en découle est d'environ  $1m/s^2$ . Nous avons choisi une fenêtre temporelle  $I(t)$  (cf. équation (4.42)) rectangulaire, d'amplitude unité et de longueur  $T = 20s$ .

### 4.4.1 Oscillateur linéaire

Nous choisissons un oscillateur linéaire de fréquence  $f_0 = \omega_0/2\pi = 2Hz$  (*i.e.*  $T_0 = 0.5s$ ), d'amortissement  $\zeta_0 = 5\%$ . Dans les équations (4.47), on choisit donc  $\alpha = 1$  et  $h(\dot{u}, z) = -\dot{u}$ . Soumis à 10000 réalisations de la sollicitation décrite précédemment, il présente un déplacement maximal moyen  $\hat{u}_{max}^{lin} = 0.01555m$  (pour un c.d.v. (3.6) de 0.2%).

Pour une fonction de ruine linéaire et un oscillateur linéaire, la fonction de ruine est une expression linéaire des sollicitations  $f_j$ . L'approximation FORM des surfaces de ruine est donc exacte et aux erreurs numériques près, on obtient la valeur exacte de la probabilité de ruine du système parallèle (4.16).

La Figure 4.4 (à gauche) montre le point de fonctionnement à l'instant  $t = 5s$  pour l'état limite défini par  $u = \hat{u}_{max}^{lin}$ . Il s'agit de la sollicitation minimale  $\mathbf{f}$  qui amène le système à la ruine à l'instant  $t = 5s$ . On constate qu'évidemment, au delà de  $5s$ , la sollicitation  $f(t)$  du point de fonctionnement est nulle puisqu'elle n'a pas d'influence sur la ruine à l'instant  $t = 5s$ . A droite de la même figure, nous avons représenté la réponse  $u$  de l'oscillateur à la sollicitation de fonctionnement.

Les points de fonctionnement aux instant  $t$  et  $t + \delta t$  nous permettent de calculer le taux moyen de dépassement selon la formule (4.13) (avec  $\delta t$  fixé valant  $0.01s$ ). La Figure 4.5 représente les taux moyens de dépassement ainsi obtenus pour quatre niveaux de seuil indiqués sur le graphique de droite. On constate que l'oscillateur atteint un régime stationnaire après environ cinq secondes (ou une dizaine de cycles). Le graphique de gauche détaille la phase transitoire. Les oscillations du taux moyen de dépassement sont dues à la nature vibratoire de l'oscillateur. Elles sont représentées avec précision sur le graphique : pour les premières secondes, nous avons calculé le taux moyen de dépassement toutes les  $0.05$  secondes. Toutefois, seule l'intégrale de ces courbes nous intéresse pour estimer la probabilité de ruine de l'oscillateur sur la durée d'excitation ( $T = 20s$ ), si bien qu'un calcul toutes les secondes aurait suffi.

Le Tableau 4.1 montre la comparaison des probabilités de ruine de l'oscillateur linéaire pour différents seuils d'état limite. Nous avons reporté les résultats des simulations de Monte-Carlo et ceux obtenus grâce au taux moyen de dépassement. Rappelons que l'hypothèse selon laquelle la probabilité d'un dépassement est très nettement supérieure à la probabilité de deux dépassements ou plus n'est vérifiée que pour des seuils élevés, *i.e.* pour de faibles probabilités de ruine. On constate en effet sur le Tableau 4.1 que la borne supérieure de la probabilité de ruine ( $E[N(t)] = \int_0^T \nu(t)dt$ ) ainsi que l'estimation de cette même probabilité, compte tenu de

1. Nous avons d'abord testé les algorithmes de recherche du point de fonctionnement et de calcul du taux moyen de dépassement en utilisant le logiciel CALREL de l'Université de Californie à Berkeley, puis nous avons élaboré notre propre logiciel.

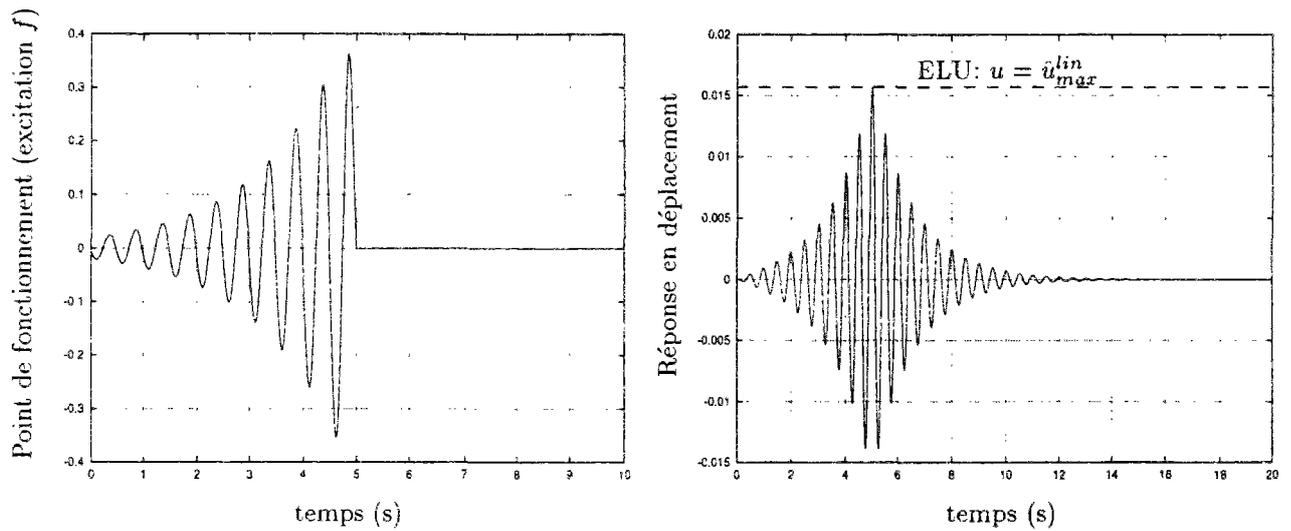


FIG. 4.4 - Point de fonctionnement et réponse de l'oscillateur linéaire

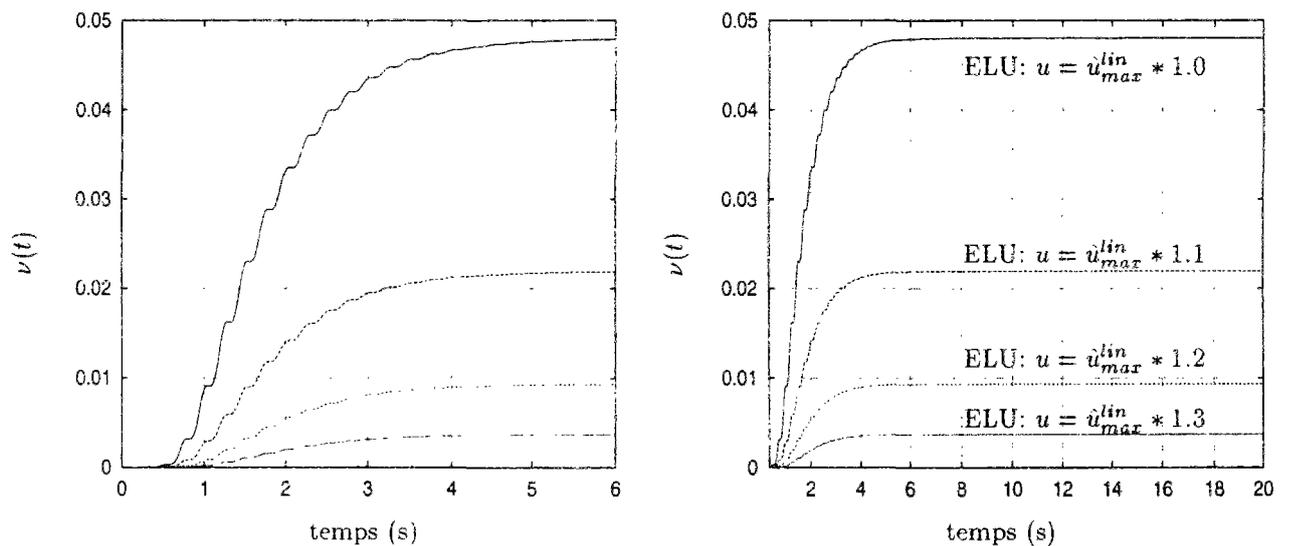


FIG. 4.5 - Taux moyen de dépassement pour l'oscillateur linéaire

l'hypothèse où le comptage des dépassements est un processus de Poisson ( $1 - \exp(-E[N(t)])$ ) sont d'autant meilleurs que le seuil est élevé. On obtient de très bons résultats dès que ce seuil dépasse le le maximum moyen de la réponse  $\hat{u}_{max}^{lin}$  de 20%.

état limite (mode de ruine)	simulations de Monte-Carlo			FORM	
	$P_R(T)$	c.d.v.	nombre de tirages	$\int_0^T \nu(t)dt$	$1 - e^{-\int_0^T \nu(t)dt}$
$\max_{0 < t < T} u(t) \geq \hat{u}_{max}^{lin}$	0.432	5%	528	0.874	0.583
$\max_{0 < t < T} u(t) \geq 1.1 \hat{u}_{max}^{lin}$	0.257	5%	1161	0.396	0.327
$\max_{0 < t < T} u(t) \geq 1.2 \hat{u}_{max}^{lin}$	0.131	5%	2651	0.167	0.154
$\max_{0 < t < T} u(t) \geq 1.3 \hat{u}_{max}^{lin}$	0.0591	5%	6384	0.0657	0.0636
$\max_{0 < t < T} u(t) \geq 1.5 \hat{u}_{max}^{lin}$	0.00785	11%	10000	0.00815	0.00812

TAB. 4.1 - Comparaison des méthodes de Monte-Carlo et FORM pour l'oscillateur linéaire

### 4.4.2 Oscillateur hystérétique

A titre d'exemple, nous dimensionnons un oscillateur élasto-plastique parfait associé à l'oscillateur linéaire précédent pour un coefficient de comportement  $q_0 = 3$ . Le spectre élastique AFPS  $S_0$  pour sol dur prévoit une pseudo-accelération  $0.75/T_0 = 1.5m/s^2$ . L'effort de dimensionnement de l'oscillateur élasto-plastique est donné, quant à lui, en terme de pseudo-accelération par le spectre de dimensionnement divisé par le coefficient de comportement et vaut en l'occurrence  $1.12/(T_0^{2/3} q_0) = 0.593m/s^2$ . Le coefficient de comportement réel vaut donc  $q = 1.5/0.523 = 2.53$ . Nous définissons alors une limite élastique pour l'oscillateur élasto-plastique parfait  $z_y = \hat{u}_{max}^{lin}/q = 0.01555/2.53 = 6.146 \times 10^{-3}$ . Sur la base de cette limite élastique, nous étudions trois oscillateurs répondant à différents modèles de Bouc-Wen :

$$\dot{z} + \gamma |\dot{x}| z |z|^{n-1} + \beta \dot{x} |z|^n - A \dot{x} = 0 \tag{4.60}$$

Les paramètres des trois oscillateurs sont indiqués dans le Tableau 4.2

cas	$\alpha$	$\gamma$	$\beta$	$n$	$A$	type d'oscillateur
1	0.50	$1/2z_y$	$1/2z_y$	1	1	acier "écroui" (faiblement hystérétique)
2	0.04	$1/2z_y$	$1/2z_y$	1	1	acier
3	0.02	$1/2z_y^5$	$1/2z_y^5$	5	1	presque élasto-plastique parfait

TAB. 4.2 - Paramètres des trois oscillateurs de Bouc-Wen testés

Sur la Figure 4.6, nous avons représenté la densité de probabilité du maximum de la réponse sur une durée d'excitation de 20 secondes, obtenue grâce à 20000 simulations de Monte-Carlo, pour l'oscillateur linéaire précédemment étudié et l'oscillateur hystérétique No 3. On constate que la densité de probabilité du maximum de la réponse hystérétique est beaucoup plus dispersée que son correspondant linéaire et que l'allure des queues de distribution est assez différente. Ceci justifie l'étude fine des valeurs extrêmes de la réponse non-linéaire que nous rapportons dans ce chapitre. Par simulations, nous avons obtenu les déplacements maximaux moyens indiqués dans le Tableau 4.3. Ils sont tous compris entre les deux valeurs prévues par le règlement :  $\mu = u_{max}/z_y = \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 1} = 1.36$  et  $\mu = q = 2.53$ .

oscillateur No	1	2	3
$E[u_{max}]$	$1.98z_y$	$2.17z_y$	$2.19z_y$

TAB. 4.3 - Déplacements maximaux moyens pour les trois oscillateurs hystérétiques

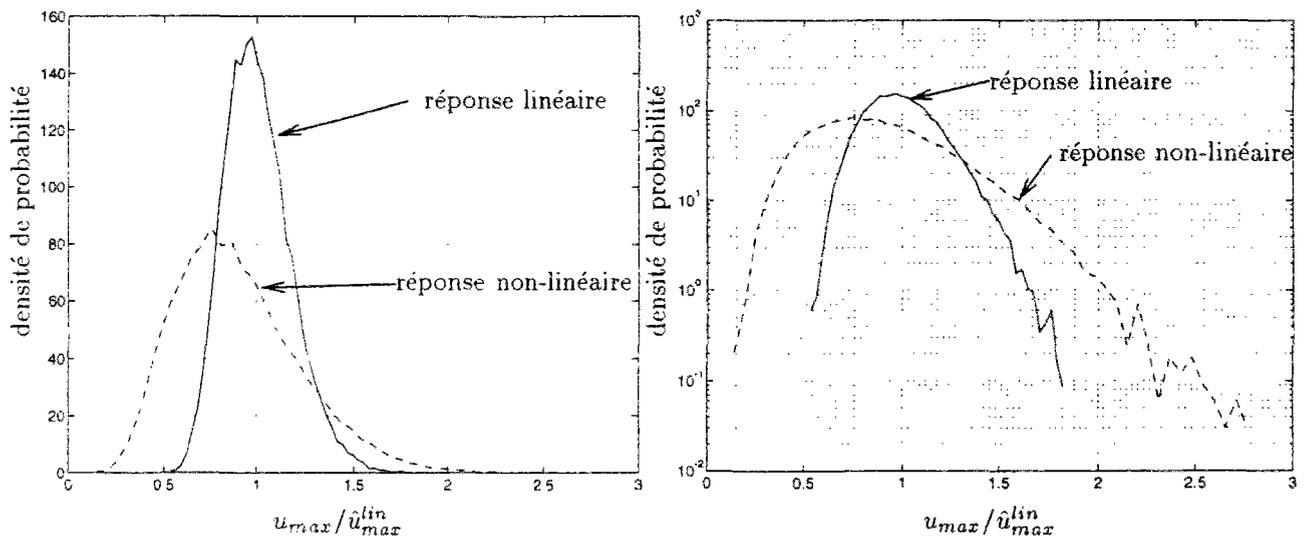


FIG. 4.6 - Densité de probabilité de la réponse maximale d'oscillateurs linéaire et hystérétique

Sur les Figures 4.7, 4.8 et 4.9, nous avons représenté le point de fonctionnement de chacun des trois oscillateurs hystérétiques, correspondant à la surface de ruine  $g = \hat{u}_{lin}^{max} - u(t = 10s)$ . Sur chacune de ces figures, le point de fonctionnement est représenté en haut à gauche en termes du vecteur d'excitation  $f(t)$ . En haut à droite figure la réponse temporelle en déplacement  $u(t)$  et en force  $\alpha u(t) + (1 - \alpha)z(t)$ . Les cycles d'hystérésis sont présentés en bas à gauche. Enfin, en bas à droite sont tracés les taux moyens de dépassement en fonction du temps, pour trois seuils à chaque fois, définis en termes de ductilité  $\mu = b/z_y$ . Ils correspondent aux fonctions de ruine des composants au temps  $t$ :  $g(t) = \mu z_y - u(t)$ .

Des taux moyens de dépassement de seuil, on déduit une estimation de la probabilité de ruine sur l'intervalle de temps  $[0, 20s]$ . Les résultats sont inscrits dans les Tableaux 4.4, 4.5 et 4.6. On constate que la présente méthode convient très bien pour l'oscillateur No 1, moyennement hystérétique et pour de faibles probabilités de ruine. Pour les oscillateurs No 2 et 3, plus franchement hystérétiques, la méthode approchée donne le bon ordre de grandeur de la probabilité de ruine pour des ductilités limites de 2.53 et 3.00. Toutefois, les résultats sont bien moins bons pour une ductilité limite de 4.00. Cela est probablement dû à une plus grande courbure de la surface de ruine du composant à l'instant  $t$ :  $g(t) = b - u(t)$ . L'approximation FORM de la surface de ruine est alors moins bonne. Il existe d'autres méthodes d'approximation de la surface de ruine du composant donnant une expression analytique de la probabilité de ruine du composant, notamment une méthode quadratique, dite *SORM (Second Order Reliability Method)*. Ces méthodes sont bien entendu plus lourdes à mettre en œuvre et requièrent un plus grand ordre de dérivabilité (que le modèle de Bouc-Wen ne possède pas) des équations non-linéaires.

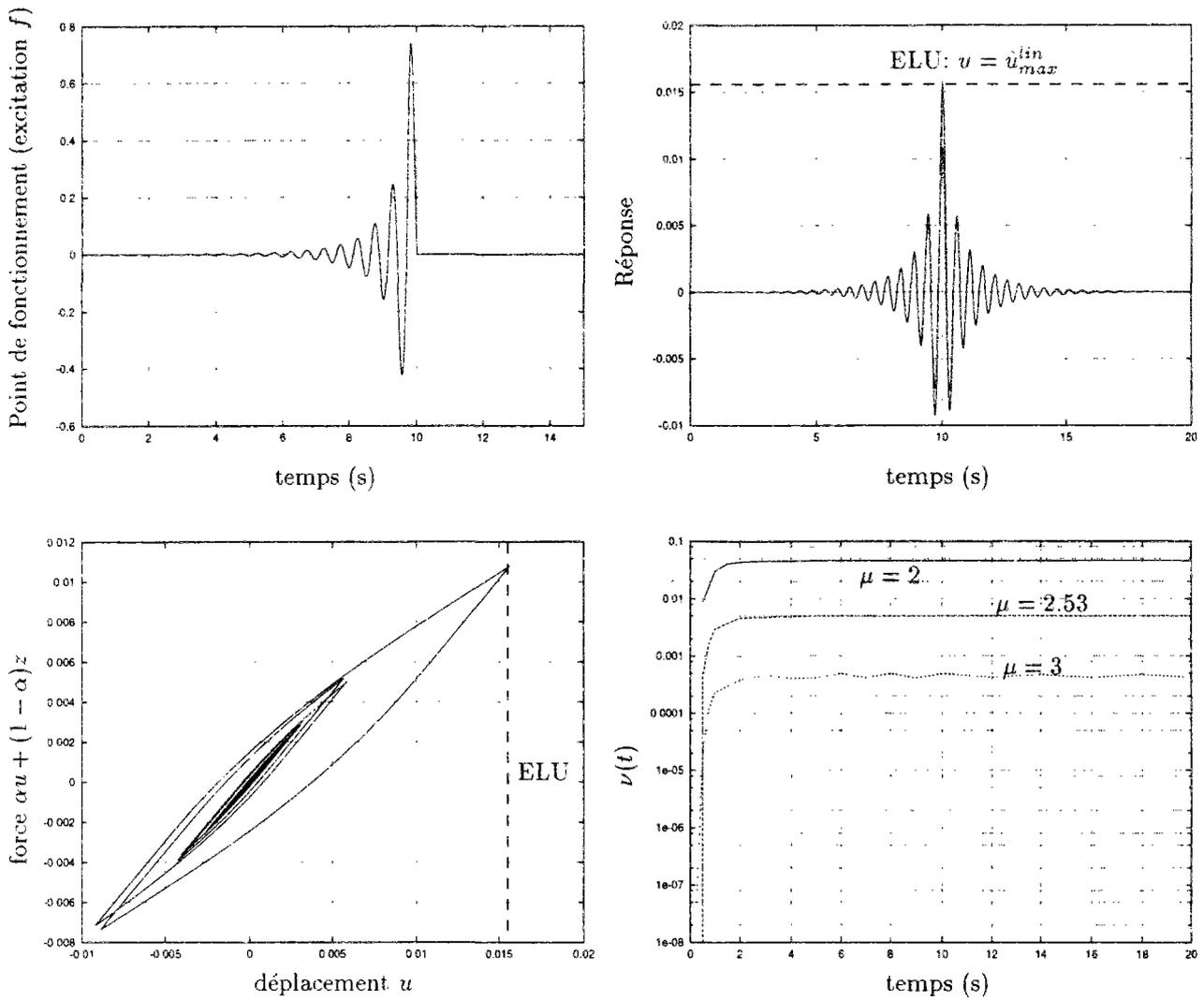


FIG. 4.7 - Point de fonctionnement à  $t = 10s$  et taux moyen de dépassement pour l'oscillateur hystérique No 1 (acier écroui)

état limite (mode de ruine)	simulations de Monte-Carlo			FORM	
	$P_R(T)$	c.d.v.	nombre de tirages	$\int_0^T \nu(t)dt$	$1 - e^{-\int_0^T \nu(t)dt}$
$\max_{0 < t < T} u(t) \geq 2.00z_y$	0.437	5%	517	0.872	0.582
$\max_{0 < t < T} u(t) \geq 2.53z_y$	0.0654	5%	5720	0.0936	0.0833
$\max_{0 < t < T} u(t) \geq 3.00z_y$	0.00687	9%	16000	0.00836	0.00832

TAB. 4.4 - Comparaison des méthodes de Monte-Carlo et FORM pour l'oscillateur No 1 (acier écroui)

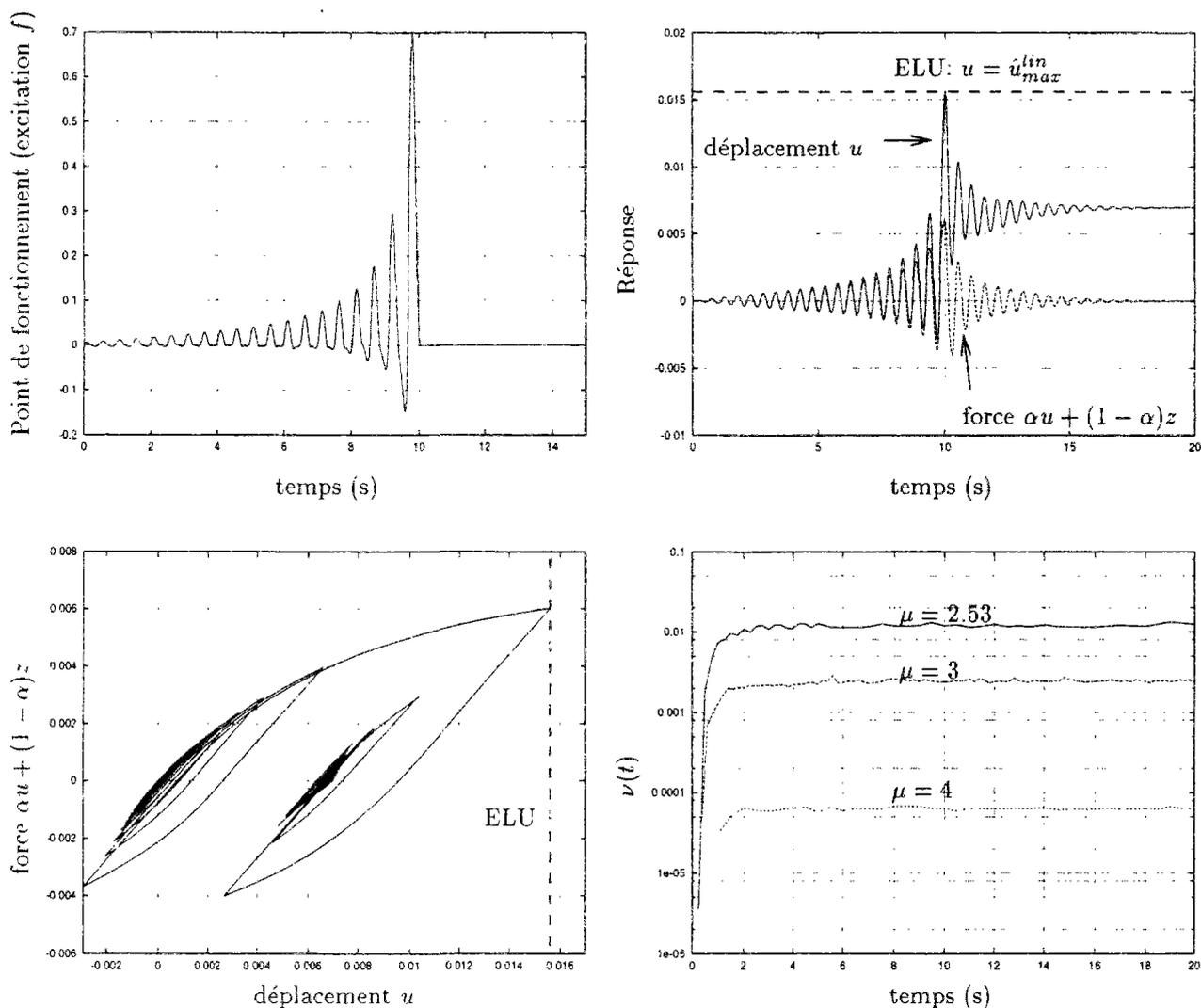


FIG. 4.8 - Point de fonctionnement à  $t = 10$ s et taux moyen de dépassement pour l'oscillateur hystérique No 2 (acier)

état limite (mode de ruine)	simulations de Monte-Carlo			FORM	
	$P_R(T)$	c.d.v.	nombre de tirages	$\int_0^T \nu(t) dt$	$1 - e^{-\int_0^T \nu(t) dt}$
$\max_{0 < t < T} u(t) \geq 2.53z_y$	0.266	5%	1110	0.225	0.202
$\max_{0 < t < T} u(t) \geq 3.00z_y$	0.108	5%	3316	0.0458	0.0448
$\max_{0 < t < T} u(t) \geq 4.00z_y$	0.00758	8%	20000	0.00119	0.00119

TAB. 4.5 - Comparaison des méthodes de Monte-Carlo et FORM pour l'oscillateur No 2 (acier)

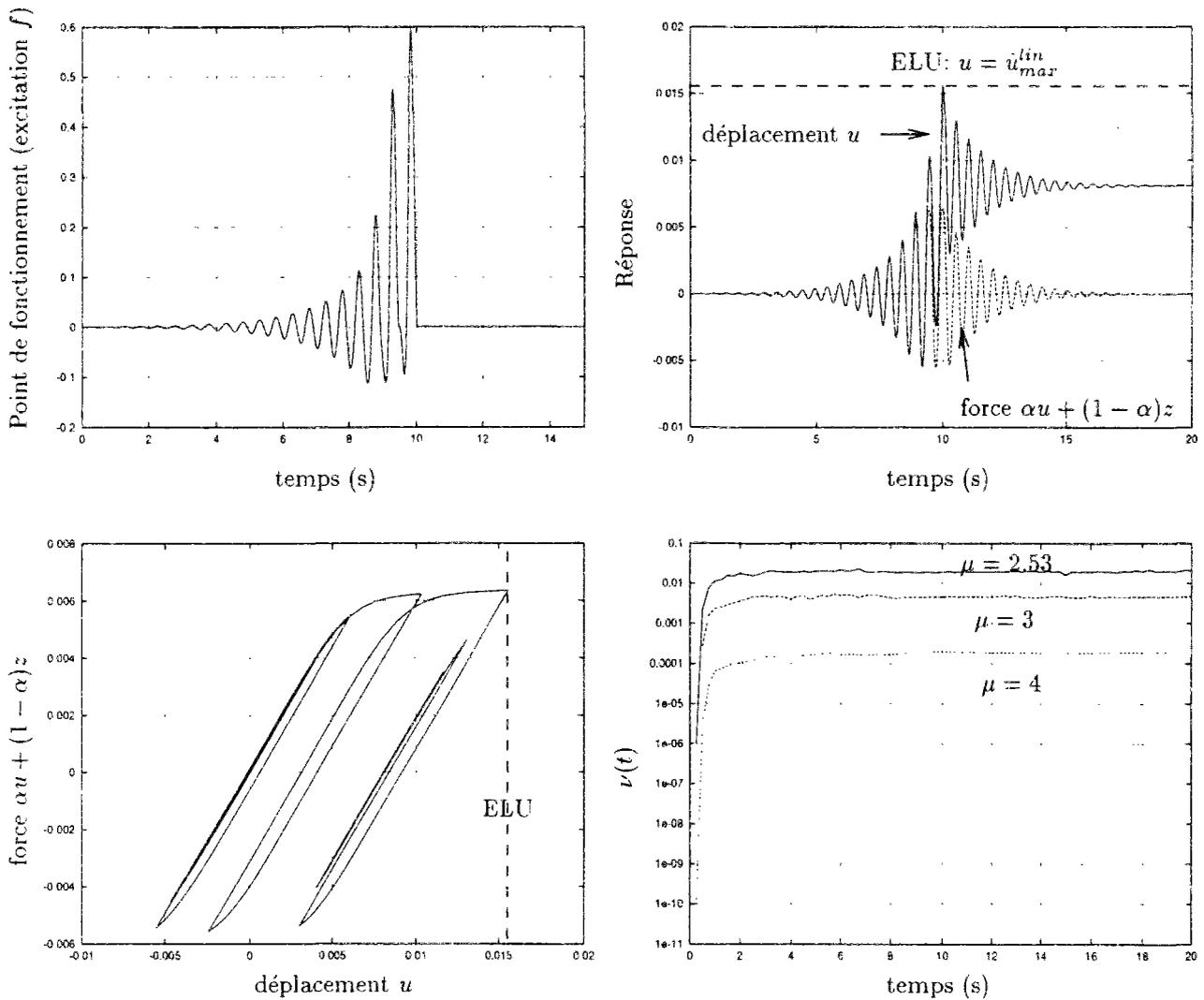


FIG. 4.9 - Point de fonctionnement à  $t = 10s$  et taux moyen de dépassement pour l'oscillateur hystérétique No 3 (presque élasto-plastique)

état limite (mode de ruine)	simulations de Monte-Carlo			FORM	
	$P_R(T)$	c.d.v.	nombre de tirages	$\int_0^T \nu(t) dt$	$1 - e^{-\int_0^T \nu(t) dt}$
$\max_{0 < t < T} u(t) \geq 2.53z_y$	0.346	5%	361	0.370	0.309
$\max_{0 < t < T} u(t) \geq 3.00z_y$	0.171	5%	1523	0.0879	0.0842
$\max_{0 < t < T} u(t) \geq 4.00z_y$	0.031	5%	12139	0.00331	0.00331

TAB. 4.6 - Comparaison des méthodes de Monte-Carlo et FORM pour l'oscillateur No 3 (presque élasto-plastique)

## 4.5 Conclusions et perspectives

Dans ce dernier chapitre, nous avons esquissé la présentation d'une technique très générale de calcul de la fiabilité de systèmes non-linéaires soumis à une excitation stochastique. Elle donne des résultats très encourageants en termes de probabilités de dépassement pour le calcul des valeurs extrêmes atteintes par des oscillateurs hystérétiques excités par un bruit blanc filtré. Son extension à des systèmes plus complexes est immédiate. Dans ce chapitre, nous nous sommes contentés d'une analyse dans laquelle la structure est déterministe. Il est cependant tout à fait possible de tenir compte de l'incertitude pouvant porter sur les caractéristiques mécaniques des matériaux.

## Conclusion générale

Nous avons présenté tout au long de ce mémoire des outils de calcul permettant d'appréhender le comportement des structures du génie civil soumises à des sollicitations de type sismique. Nous avons mis l'accent sur la réponse des ponts en prenant en compte, dans un premier temps, la variabilité spatiale du mouvement sismique. Nous avons mené une étude de sensibilité des ouvrages d'art à de petites variations spatiales de l'onde sismique grâce à une méthode de spectre de réponse pour structures linéaires multi-supportées et nous avons donné des outils permettant un calcul rapide utile lors de la conception, au stade des choix structuraux. Pour les variations spatiales grandes et incertaines nous avons proposé un algorithme efficace permettant de déterminer la sollicitation la plus défavorable.

Nous avons consacré la deuxième partie de notre travail à la réponse non-linéaire des ouvrages d'art en tirant partie de la localisation des non-linéarités potentielles. Nous avons élaboré une méthode approchée de spectre de réponse non-linéaire en nous appuyant sur des techniques de linéarisation stochastique équivalente et sur une technique de synthèse modale adaptée. Elle présente l'avantage de tenir compte du caractère aléatoire des sollicitations sans avoir recours à de coûteuses simulations de Monte-Carlo et de ne faire appel qu'à une seule analyse modale de la structure complète. Enfin, dans la perspective d'explorer les valeurs extrêmes de la réponse, nous avons exposé une technique de calcul de fiabilité de structures non-linéaires sous sollicitations stochastiques.

Ces outils doivent permettre à l'ingénieur d'aborder de façon rationnelle le problème du comportement sismique des ouvrages d'art, en tenant compte de la variabilité spatiale des ondes sismiques ainsi que du comportement non-linéaire des matériaux sans avoir recours systématiquement à des simulations de Monte-Carlo. Les outils proposés permettent ainsi de mener à bien des études de sensibilité à coût réduit.

Les outils développés sont purement numériques. Pour les valider, il conviendra dans l'avenir de les confronter aux enregistrements sismiques qu'on pourra rassembler sur les ouvrages d'art.



## **Annexes**



# Annexe A

## Rappels de vibrations aléatoires

### A.1 Rappels d'analyse spectrale

Nous rappelons ici, quelques résultats d'analyse spectrale pour des processus aléatoires stationnaires. La fonction d'auto-corrélation du signal stationnaire  $u(t)$  se définit comme suit :

$$R_u(\tau) = E[u(t)u(t + \tau)] \quad (\text{A.1})$$

où  $E$  désigne l'espérance statistique. C'est une fonction paire de  $\tau$  qui, dans le cas stationnaire, ne dépend pas de  $t$ . La fonction de corrélation croisée entre deux signaux stationnaires  $u(t)$  et  $v(t)$  est :

$$R_{uv}(\tau) = E[u(t)v(t + \tau)] = E[u(t - \tau)v(t)] \quad (\text{A.2})$$

En dérivant deux fois par rapport à la variable  $\tau$  l'un ou l'autre des membres de droite, on obtient :

$$R_{u\dot{v}} = \frac{dR_{uv}}{d\tau}(\tau) = -R_{\dot{u}v} \quad , \quad R_{u\ddot{v}} = \frac{d^2R_{uv}}{d\tau^2}(\tau) = R_{\ddot{u}v} \quad , \quad R_{\dot{u}\dot{v}} = -\frac{d^2R_{uv}}{d\tau^2}(\tau) \quad (\text{A.3})$$

Si  $u(t)$  et  $v(t)$  sont obtenus en filtrant des signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  respectivement par  $h_x(t)$  et  $h_y(t)$ , *i.e.*

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_x(s)x(t-s)ds \quad \text{et} \quad v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_y(s)y(t-s)ds \quad (\text{A.4})$$

alors

$$R_{xv}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_y(s)R_{xy}(\tau-s)ds \quad , \quad R_{uy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_x(s)R_{xy}(\tau+s)ds \quad (\text{A.5})$$

$$R_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_x(s_1)h_y(s_2)R_{xy}(\tau+s_1-s_2)ds_1ds_2 \quad (\text{A.6})$$

Pour des signaux  $u, v$  réels, la densité spectrale de puissance ponctuelle  $S_u(\omega)$  est une fonction paire et positive; la partie réelle de la densité spectrale de puissance croisée  $S_{uv}(\omega)$  est paire, sa partie imaginaire est impaire. Par transformée de Fourier, on définit la fonction de transfert  $h(\omega)$  et les densités spectrales de puissance ponctuelle  $S_u(\omega)$  et croisée  $S_{uv}(\omega)$  :

$$h(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt \quad , \quad S_u(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad , \quad S_{uv}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uv}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad (\text{A.7})$$

Par transformée de Fourier inverse, on obtient les fonctions d'origine :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad , \quad R_u(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad , \quad R_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{uv}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (\text{A.8})$$

On montre facilement les identités très utiles suivantes :

$$S_{uv}(\omega) = h_x(-\omega) h_y(\omega) S_{xy}(\omega) \quad , \quad S_u(\omega) = |h_x(\omega)|^2 S_x(\omega) \quad (\text{A.9})$$

avec en particulier

$$S_{\dot{u}}(\omega) = \omega^2 S_u(\omega) \quad , \quad S_{\ddot{u}}(\omega) = \omega^4 S_u(\omega) \quad (\text{A.10})$$

## A.2 Technique d'intégration des densités spectrales de puissance

A titre indicatif, nous rappelons la technique d'intégration des densités spectrales de puissance proposée par Zerva [135]. On cherche à estimer numériquement l'intégrale

$$I = \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega \quad (\text{A.11})$$

où  $G(\omega)$  est une fonction éventuellement complexe, continue et intégrable. Il s'agit typiquement du produit d'une fonction très régulière, comme la densité spectrale de puissance (ou densité spectrale de puissance croisée) d'accélération du sol, par des fonctions de transfert  $h_k(\omega) = [\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\zeta_k\omega_k\omega]^{-1}$ . La fonction  $G(\omega)$  présente donc des pics au voisinage des pulsations  $\omega_k$ . Typiquement, en dehors des intervalles  $[\omega_k(1 - 5\zeta_k), \omega_k(1 + 5\zeta_k)]$ ,  $G(\omega)$  varie lentement. On subdivise l'intervalle  $[0, +\infty[$  en une union d'intervalles

$$[0, \omega_k(1 - 5\zeta_k)[ \cup \dots \cup [\omega_{k-1}(1 + 5\zeta_{k-1}), \omega_k(1 - 5\zeta_k)[ \cup [\omega_k(1 - 5\zeta_k), \omega_k(1 + 5\zeta_k)[ \cup \dots \cup [\omega_\kappa(1 + 5\zeta_\kappa), +\infty[ \quad (\text{A.12})$$

en les réduisant éventuellement pour qu'ils soient disjoints. Pour ne pas tronquer arbitrairement l'intégrale, on transforme le domaine d'intégration  $[0, +\infty[$  en  $[0, 1]$  par

$$x = \frac{1}{1 + \omega} \quad \omega = \frac{1}{x} - 1 \quad (\text{A.13})$$

L'intégrale s'écrit ainsi

$$I = \int_0^1 G(1/x - 1) \frac{dx}{x^2} \quad (\text{A.14})$$

On effectue alors une intégration aux points de Gauss (entre 20 et 40) sur chacun des intervalles de (A.12) transformés par la relation (A.13).

## A.3 Facteur de pic

Le facteur de pic relie l'écart-type d'un processus gaussien stationnaire à moyenne nulle à l'espérance de son maximum sur une durée  $T$ .

$$E \left[ \max_T |x(t)| \right] = p \cdot \sigma_x \quad (\text{A.15})$$

Pour que ce facteur de pic ait un sens pour la réponse d'un oscillateur, il faut donc que cet oscillateur ait atteint un régime stationnaire et donc que la durée  $T$  soit plusieurs fois plus grande que sa période propre. En s'appuyant sur la fonction de répartition du maximum atteint par le processus pendant une durée  $T$ , calculée par Vanmarcke [119], Der Kiureghian [42] donne une formule approchée du facteur de pic :

$$p = \begin{cases} 1.253 + 0.209\nu_e T & 0 \leq \nu_e T \leq 2.1 \\ (2 \ln \nu_e T)^{1/2} + \frac{0.5772}{(2 \ln \nu_e T)^{1/2}} & 2.1 \leq \nu_e T \leq 1000 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

avec

$$\frac{\nu_e}{\nu} = \begin{cases} 2\delta & 0 < \delta \leq 0.1 \\ (1.63\delta^{0.45} - 0.38) & 0.1 \leq \delta \leq 0.69 \\ 1 & 0.69 \leq \delta < 1 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

dans lequel  $\nu$  est le nombre moyen de passages du processus par la valeur 0 par unité de temps et comme rappelons le, il s'agit d'un processus à moyenne nulle, c'est aussi le nombre de demi-cycles du processus par unité de temps. Il est donné par la formule de Rice [104]

$$\nu = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{1/2} \quad (\text{A.18})$$

$\nu_e$ , appelé nombre réduit de demi-cycles par unité de temps [42], représente un taux équivalent de franchissements indépendants de la valeur 0. Il tient compte du facteur de forme  $\delta$ , mesurant la largeur de bande :

$$\delta = \left( 1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0 \lambda_2} \right)^{1/2} \quad (\text{A.19})$$

Les moments spectraux  $\lambda_m$  apparaissant dans les formules précédentes s'expriment à partir de la densité spectrale de puissance à droite  $G(\omega)$  du processus ( $G_x(\omega) = 2S_x(\omega)$  pour  $\omega > 0$ ) :

$$\lambda_m = \int_0^{+\infty} \omega^m G_x(\omega) d\omega \quad (\text{A.20})$$

On trouvera dans [42] des expressions analytiques exactes et approchées des moments spectraux  $\lambda_m$  pour  $m = 0, 1, 2$  pour des signaux réponses d'oscillateurs harmoniques à un bruit blanc gaussien et à un bruit blanc gaussien filtré de type Kanai-Tajimi. Notons également qu'il existe une notion similaire de facteur de pic  $q$  pour l'écart type du maximum du processus :

$$\sigma_{\max_T |x(t)|} = q \cdot \sigma_x \quad (\text{A.21})$$

Der Kiureghian [42] en donne une expression approchée :

$$q = \begin{cases} 0.655 + 0.0016\nu_e T & 0 \leq \nu_e T \leq 2.1 \\ \frac{1.2}{(2 \ln \nu_e T)^2} - \frac{5.4}{13 + (2 \ln \nu_e T)^{3.2}} & 2.1 \leq \nu_e T \leq 1000 \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

On trouvera dans [51] une analyse numérique détaillée de ces facteurs de pic.



## Annexe B

# Compléments sur la variabilité spatiale

### B.1 Indice de courbure du sol

Dans ce paragraphe, on définit un indice de courbure pour les déplacements du sol et on montre que l'ordre de développement de la fonction de cohérence retenu pour la formule approchée (2.45) ne permet pas de tenir compte d'une éventuelle courbure du sol. Supposons pour simplifier que la vitesse apparente de propagation des ondes soit infinie (on obtiendrait un résultat similaire si elle ne l'était pas). Le coefficient de corrélation des déplacements des points  $A$  et  $B$  séparés d'une distance  $d$  s'écrit :

$$\rho_{u_A u_B} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(\alpha\omega d)^2] S_u(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) d\omega} \quad (\text{B.1})$$

En utilisant seulement les deux premiers termes du développement de Taylor de la fonction exponentielle, on a :

$$\rho_{u_A u_B} = 1 - (\alpha d)^2 \frac{m_2}{m_0} \quad (\text{B.2})$$

dans lequel  $m_n$  est le moment spectral  $m_n = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^n S_u(\omega) d\omega$ . On définit un indice de courbure à l'abscisse  $x$  sur la ligne définie par les appuis du pont :

$$\delta_2(x) = \frac{u(x+d) - 2u(x) + u(x-d)}{d^2} \quad (\text{B.3})$$

Cet indice est véritablement un estimateur de courbure si les déplacements considérés sont transverses ou verticaux. Pour des déplacements longitudinaux, il s'agit d'un estimateur du taux de variation de la déformation longitudinale du sol. En effet, la limite lorsque la distance  $d$  tend vers zéro de  $\delta_2(x)$  est la dérivée seconde du déplacement par rapport à  $x$ . L'espérance du champ aléatoire  $\delta_2(x)$  est manifestement nulle et en supposant que la variance du déplacement  $\sigma_u^2$  est homogène (*i.e.* indépendante de  $x$ ) on obtient :

$$E[(\delta_2)^2] = \frac{\sigma_u^2}{d^4} \left( 6 - 4\rho_{u(x+d)u(x)} - 4\rho_{u(x)u(x-d)} + 2\rho_{u(x+d)u(x-d)} \right) \quad (\text{B.4})$$

En utilisant (B.2) on trouve que  $E[(\delta_2)^2] = 0$ , ce qui signifie qu'un développement limité (B.2) de la fonction de cohérence ne retient au sens des moindres carrés qu'une variation affine en espace du déplacement du sol. On comprend qu'ainsi la formule approchée (2.45) ne soit valable que pour de petites variations spatiales du mouvement sismique.

## B.2 Erreur de troncature

Dans ce paragraphe, nous examinons l'erreur de troncature pour la somme quadratique des efforts tranchants en pied de piles, dans le cas d'accélération de sol partiellement corrélées en espace. Supposons que les contributions modales ne soient pas corrélées ( $\rho_{s_k^r s_l^r} = 0$  for  $r \neq s$ ) mais prenons en compte les corrélations partielles des accélérations aux appuis ( $\rho_{s_k^r s_l^r} \neq 0$  en général), on obtient :

$$\sum_{l=1}^{NS} E [|F_l|_{max}]^2 = \left[ \sum_{k,k',l=1}^{NS} \rho_{z_k z_{k'}} \mathbf{K}_{ff,lk} \mathbf{K}_{ff,lk'} \right] z_{max}^2 \quad (B.5)$$

$$+ \sum_{r=1}^{NM} \sum_{k,k',l=1}^{NS} \rho_{s_k^r s_{k'}^r} (m_r \gamma_{rk} \gamma_{rl}) (m_r \gamma_{rk'} \gamma_{rl}) A(\omega_r, \zeta_r)^2$$

d'où l'on tire l'erreur de troncature

$$err_{NM'} = \sum_{r=NM'+1}^{NM} \left( \sum_{k,k'=1}^{NS} \gamma_{rk} \gamma_{rk'} \rho_{s_k^r s_{k'}^r} \right) \left( \sum_{l=1}^{NS} \gamma_{rl}^2 \right) A(\omega_r, \zeta_r)^2 \quad (B.6)$$

Or, nous avons la majoration

$$\left| \sum_{k,k'=1}^{NS} \gamma_{rk} \gamma_{rk'} \rho_{s_k^r s_{k'}^r} \right| \leq \sum_{k,k'=1}^{NS} |\gamma_{rk}| |\gamma_{rk'}| \quad (B.7)$$

La forme quadratique du membre de droite est associée à la matrice symétrique  $NS \times NS$  :

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{Bmatrix} [1 \ 1 \ \dots \ 1] \quad (B.8)$$

qui possède les deux seules valeurs propres 0 et  $NS$ . On en déduit que la forme quadratique est majorée par  $NS$  fois la norme Euclidienne :

$$\sum_{k,k'=1}^{NS} |\gamma_{rk}| |\gamma_{rk'}| \leq NS \times \sum_{k=1}^{NS} \gamma_{rk}^2 \quad (B.9)$$

A son tour, l'erreur de troncature est majorée par :

$$err_{NM'} \leq \sum_{r=NM'+1}^{NM} NS \times \left( m_r \sum_{l=1}^{NS} \gamma_{rl}^2 \right)^2 A(\omega_r, \zeta_r)^2 \quad (B.10)$$

ou encore,

$$err_{NM'} \leq NS \times \left( \sum_{k=1}^{NS} \tilde{\mathbf{R}}_k^T \mathbf{M}_s \tilde{\mathbf{R}}_k \right)^2 A(\omega_{NM'}, \zeta_{NM'})^2 (1 - r_{TI}) \quad (B.11)$$

Ceci montre, une nouvelle fois, qu'il est judicieux de prendre suffisamment de modes pour que le ratio  $r_{TI}$  soit proche de 1.

## Annexe C

# Présentation sommaire des ouvrages étudiés

On présente ici les caractéristiques générales des principaux ouvrages étudiés dans ce document à titre d'illustration.<sup>1</sup>

### C.1 Pont sur le Gave de Pau à Lourdes, solution béton précontraint

Le tablier mono-caisson en béton précontraint est encastré sur les piles  $P_1$  et  $P_2$ . Il est libre de glisser longitudinalement sur la pile  $P_3$  et sur les culées. Il est bloqué latéralement sur tous les appuis. Les piles sont formées de deux fûts. Les sites correspondant aux appuis sont indiqués dans le Tableau 2.1. On trouvera de plus amples détails sur la conception parasismique de cet ouvrage pour cette solution et celle présentée au paragraphe suivant dans les références [40, 122].

### C.2 Pont sur le Gave de Pau à Lourdes, solution mixte

Cet ouvrage, qui a finalement été retenu pour construction, se distingue du précédent par un tablier en ossature mixte qui lui donne une plus grande légèreté. Le chevrêtre en tête de pile a été supprimé (*cf.* Figure C.2). Les fûts des piles forment donc un système très souple, propice à un bon comportement sous séisme. La Figure C.3 représente un schéma simplifié de la section transverse en pied de pile centrale ( $P_2$ ) ainsi que la relation moment courbure pour chargement monotone. Les caractéristiques des matériaux sont rappelées sur la Figure C.4.

### C.3 Pont d'Evripas

On trouvera dans les références [123, 9] une étude du dimensionnement parasismique de cet ouvrage. Le tablier de ce pont à haubans est une dalle de 45cm d'épaisseur sur 14m de large, précontrainte en certains endroits. Les caractéristiques principales apparaissent sur la Figure C.5.

---

1. Les données concernant le pont sur le Gave de Pau et le pont d'Evripas nous ont été aimablement fournies par le SETRA, celles du viaduc de Carrières par GTM-TP

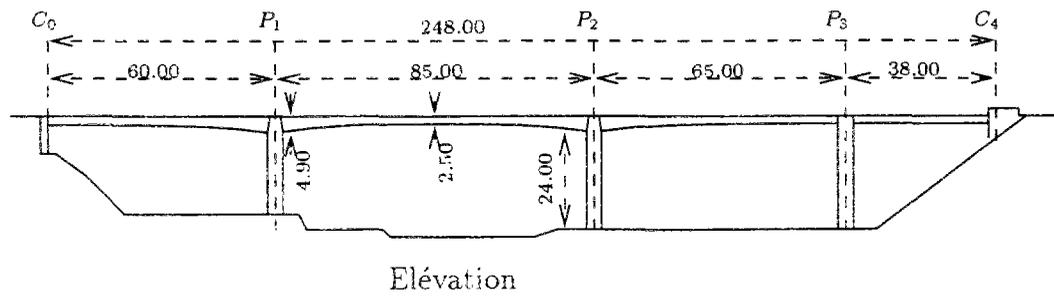
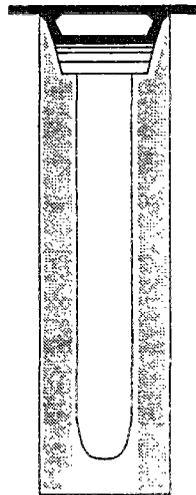
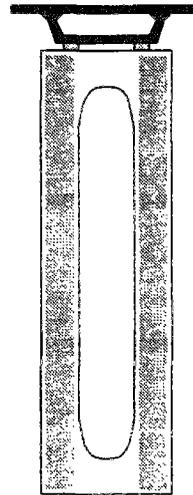
Piles  $P_1$  et  $P_2$ Pile  $P_3$ 

FIG. C.1 - Pont sur le Gave de Pau à Lourdes, solution béton précontraint

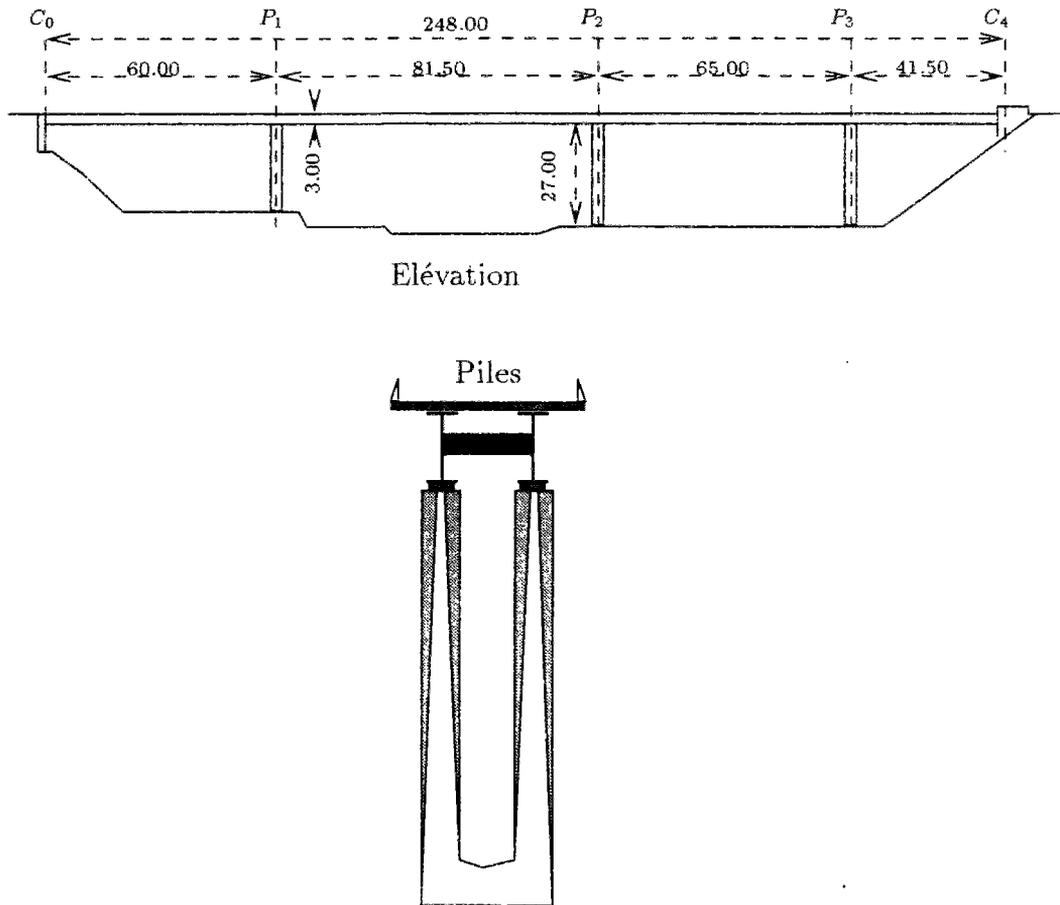


FIG. C.2 - Pont sur le Gave de Pau à Lourdes, solution mixte

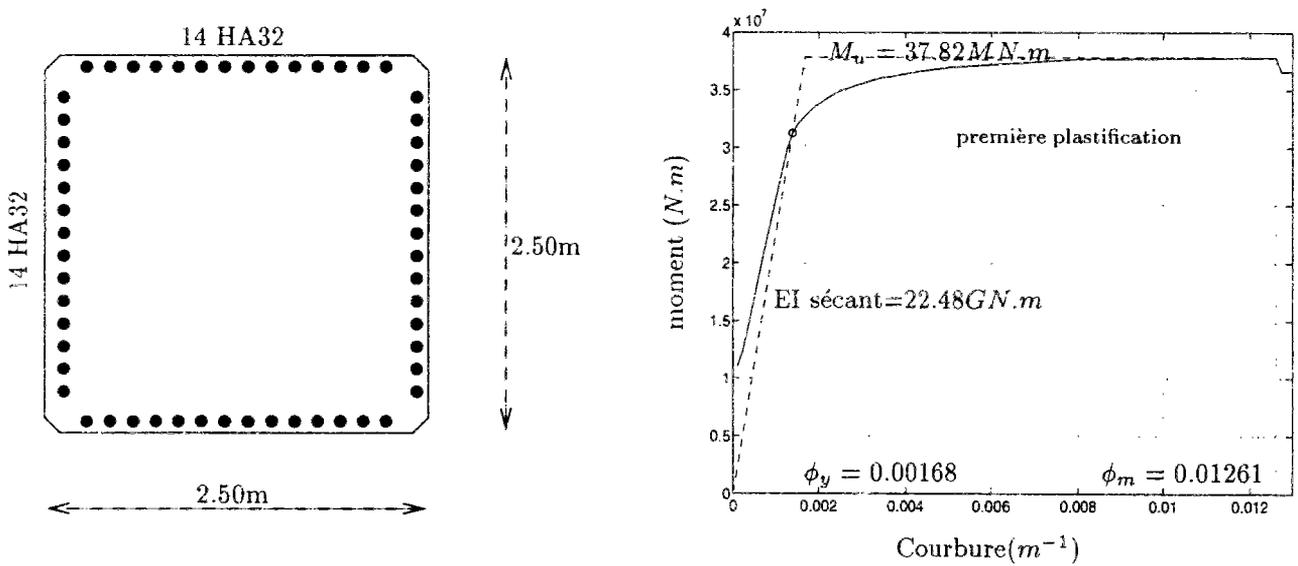


FIG. C.3 - Section transverse en pied de pile P<sub>2</sub>. Plan de ferrailage longitudinal et diagramme moment-courbure

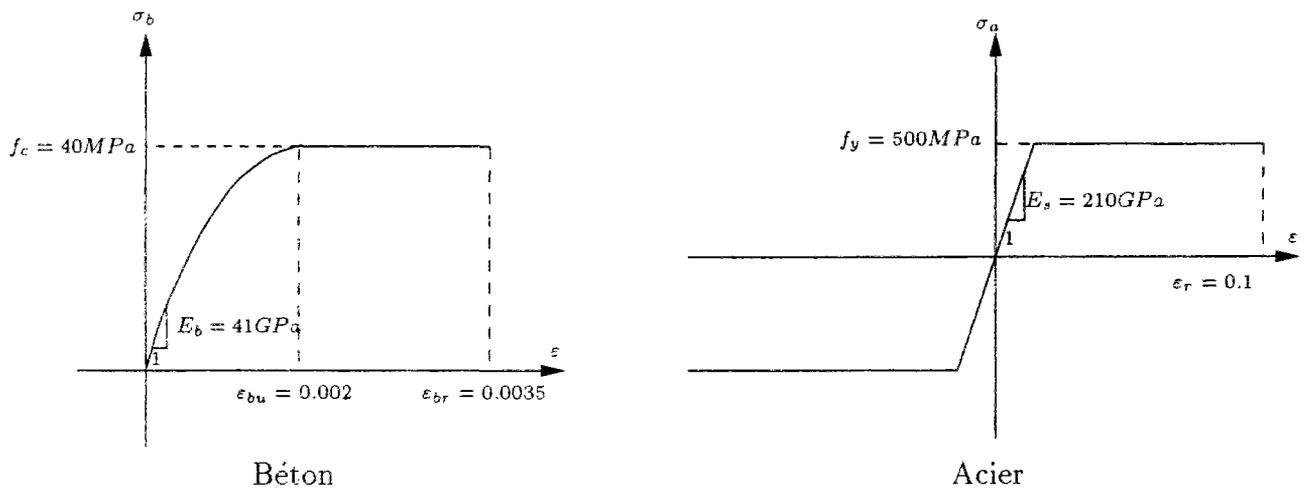


FIG. C.4 - Diagrammes contraintes-déformations du béton et de l'acier

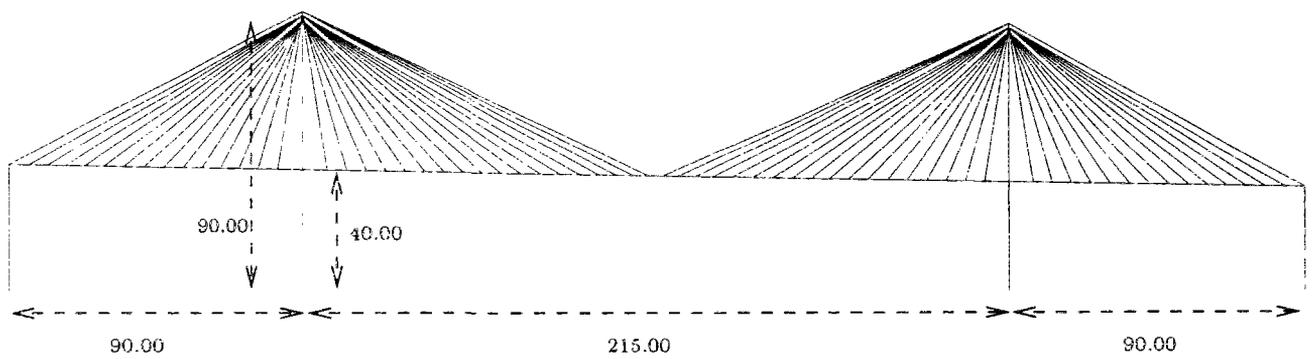


FIG. C.5 - Pont à haubans d'Evripos (Grèce)

## C.4 Viaduc de Carrières

Situé en région Parisienne, le Viaduc de Carrières sur Seine (Figure C.6) n'a pas fait l'objet de dimensionnement parasismique. Nous avons utilisé cet ouvrage pour illustrer le comportement (élastique) du tablier en réponse à des mouvements de sol verticaux, variables dans l'espace.

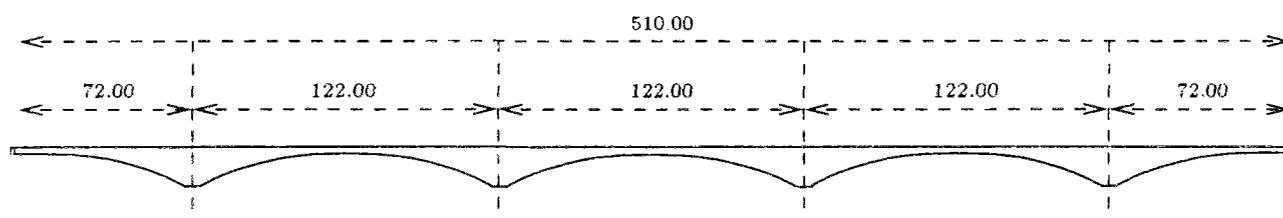


FIG. C.6 - Viaduc à cinq travées de Carrières sur Seine



## Annexe D

# Compléments sur les spectres de réponse pour structures à non-linéarités localisées

### D.1 Actualisation des vecteurs propres du système linéaire équivalent

Dans cette section, nous présentons un algorithme permettant de calculer les propriétés modales du système linéaire équivalent dans le cas où celui-ci est constitué du système linéaire relaxé auquel on ajoute des ressorts et des amortisseurs équivalents au droit des connexions. Les éléments linéaires équivalents sont ajoutés un à un et à chaque étape les propriétés modales sont évaluées sur la base des vecteurs propres de l'étape précédente. Ce procédé est intéressant lorsque le nombre de modes propres retenus du système linéaire relaxé est important et qu'une analyse modale complète du système réduit (3.80) se révèle coûteuse.

Supposons connus les vecteurs propres formant la matrice modale

$$\hat{\Psi}^{(m)} = \left[ \hat{\psi}_1^{(m)}, \hat{\psi}_2^{(m)}, \dots, \hat{\psi}_{2NM}^{(m)} \right] \quad (D.1)$$

et les valeurs propres  $\mu_1^{(m)}, \mu_2^{(m)}, \dots, \mu_{2NM}^{(m)}$  du système linéaire relaxé auquel on a ajouté  $m_r$  ressorts équivalents et  $m_a$  amortisseurs équivalents ( $m = m_r + m_a$ ). En d'autres termes, avec :

$$\mathbf{A}_o^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Id} \\ \mathbf{Id} & \text{diag}\{2\zeta_i\omega_i\} + \sum_{k=1}^{m_a} \alpha_{o,k} \mathbf{1}_{o,k}^T \mathbf{1}_{o,k} \end{bmatrix} \quad (D.2)$$

et

$$\mathbf{B}_o^{(m)} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Id} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}\{\omega_i^2\} + \sum_{k=1}^{m_r} \alpha_{r,k} \mathbf{1}_{o,k}^T \mathbf{1}_{o,k} \end{bmatrix} \quad (D.3)$$

on a :

$$\mathbf{A}_o^{(m)} \hat{\Psi}^{(m)} \begin{bmatrix} \dots \\ \mu^{(m)} \\ \dots \end{bmatrix} + \mathbf{B}_o^{(m)} \hat{\Psi}^{(m)} = \mathbf{0} \quad (D.4)$$

$$\hat{\Psi}^{(m)T} \mathbf{A}_o^{(m)} \hat{\Psi}^{(m)} = \mathbf{Id} \quad (D.5)$$

Lorsqu'on ajoute une  $m + 1^{\text{ème}}$  connexion, les matrices du système sont modifiées de la façon suivante :

- Pour un ressort supplémentaire de constante  $\alpha_r$  et de vecteur lien  $\mathbf{l}_o = \mathbf{l}\Phi$

$$\mathbf{A}_o^{(m+1)} = \mathbf{A}_o^{(m)} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_o^{(m+1)} = \mathbf{B}_o^{(m)} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha_r \mathbf{l}_o^T \mathbf{l}_o \end{bmatrix} \quad (\text{D.6})$$

- Pour un amortisseur supplémentaire de constante  $\alpha_d$  et de vecteur lien  $\mathbf{l}_o = \mathbf{l}\Phi$

$$\mathbf{A}_o^{(m+1)} = \mathbf{A}_o^{(m)} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha_d \mathbf{l}_o^T \mathbf{l}_o \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_o^{(m+1)} = \mathbf{B}_o^{(m)} \quad (\text{D.7})$$

Comme le suggèrent Hallquist and Snyder [56], on peut exprimer chaque nouveau vecteur propre  $\hat{\psi}$  associé à une nouvelle valeur propre  $\lambda$  sur la base des anciens vecteurs propres :

$$\hat{\psi} = \hat{\Psi}^{(m)} \mathbf{Z} \quad (\text{D.8})$$

$$\lambda \mathbf{A}_o^{(m+1)} \hat{\Psi} + \mathbf{B}_o^{(m+1)} \hat{\Psi}^{(m)} \hat{\Psi} = \mathbf{0} \quad (\text{D.9})$$

En injectant (D.8) dans (D.9) et en multipliant à gauche par  $\hat{\Psi}^{(m)T}$ , on obtient :

$$\left[ \lambda \hat{\Psi}^{(m)T} \mathbf{A}_o^{(m+1)} \hat{\Psi}^{(m)} + \hat{\Psi}^{(m)T} \mathbf{B}_o^{(m+1)} \hat{\Psi}^{(m)} \right] \mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad (\text{D.10})$$

soit encore

1. Pour un ressort supplémentaire :

$$\left[ \lambda \mathbf{Id} - \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \mu_i^{(m)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} + \alpha_s \mathbf{U}^T \mathbf{U} \right] \mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad (\text{D.11})$$

2. Pour un amortisseur supplémentaire :

$$\left[ \lambda \mathbf{Id} - \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \mu_i^{(m)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} + \lambda \alpha_d \mathbf{U}^T \mathbf{U} \right] \mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad (\text{D.12})$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{l}_o \end{bmatrix} \hat{\Psi}^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{l}\Phi \end{bmatrix} \hat{\Psi}^{(m)} \quad (\text{D.13})$$

On peut alors montrer (*cf.* [101]) que la nouvelle valeur propre  $\lambda$  et les coordonnées  $Z_k$  du vecteur propre  $\hat{\psi}$  sur les anciens vecteurs propres  $\hat{\psi}_k^{(m)}$  vérifient le système :

$$(\lambda - \mu_1^{(m)}) \frac{Z_1}{U_1} = (\lambda - \mu_2^{(m)}) \frac{Z_2}{U_2} = \dots = (\lambda - \mu_{2NM}^{(m)}) \frac{Z_{2NM}}{U_{2NM}} = \begin{cases} -\alpha_s \sum_{k=1}^{2NM} U_k Z_k & \text{(ressort)} \\ -\lambda \alpha_d \sum_{k=1}^{2NM} U_k Z_k & \text{(amortisseur)} \end{cases} \quad (\text{D.14})$$

qui conduit à l'équation caractéristique :

$$\frac{1}{\alpha_s} + \sum_{k=1}^{2NM} \frac{U_k^2}{\lambda - \mu_k} = 0 \quad (\text{ressort}) \quad (\text{D.15})$$

$$\frac{1}{\lambda \alpha_d} + \sum_{k=1}^{2NM} \frac{U_k^2}{\lambda - \mu_k} = 0 \quad (\text{amortisseur}) \quad (\text{D.16})$$

qu'on peut résoudre numériquement en utilisant par exemple un algorithme de Newton-Raphson. Notons que si le système est peu modifié par l'apport de l'élément linéaire équivalent, il est particulièrement efficace de démarrer l'algorithme à partir des anciennes valeurs propres  $\mu_k^{(m)}$ . Ainsi, à pour chaque nouvel ensemble d'éléments linéaires équivalents, on aura intérêt à ajouter l'incrément de ressort et l'incrément d'amortisseur de chaque connexion au système linéaire équivalent précédent, plutôt que d'ajouter au système linéaire relaxé les nouveaux ressorts et amortisseurs équivalents. Les variations de valeurs propres seront ainsi *a priori* moins grandes et l'algorithme convergera plus vite. Notons que si  $U_k = 0$ , alors  $\lambda = \mu_k$  est une nouvelle valeur propre, solution de (D.14), associée à l'ancien vecteur propre  $\hat{\psi}_k^{(m)}$  qui figure donc dans la liste des nouveaux vecteurs propres. En d'autres termes, ce couple valeur propre - vecteur propre n'est pas affecté par les nouveau ressort ou amortisseur. Une fois obtenues les solutions  $\lambda$  de l'équation caractéristique (D.14), les composantes des nouveaux vecteurs propres sur la base des anciens sont trivialement :

$$Z_k = \frac{U_k}{\lambda - \mu_k} \quad (\text{D.17})$$

L'algorithme fonctionne tel quel, si les valeurs propres à l'étape ( $m$ ) sont toutes distinctes. En cas de valeur propre multiple, on utilisera le résultat suivant [55] : si  $\mu_k^{(m)}$  est une valeur propre de multiplicité  $j + 1$ , *i.e.*  $\mu_k^{(m)} = \mu_{k+1}^{(m)} = \dots = \mu_{k+j}^{(m)}$ , alors l'adjonction d'un nouveau ressort ou d'un nouvel amortisseur laisse inchangées  $j - 1$  de ces valeurs propres. Seules deux nouvelles valeurs propres sont à rechercher.

On utilisera également le fait que les valeurs propres et vecteurs propres apparaissent en paires complexes conjuguées et donc que seule la moitié de ces couples est à trouver.



## Annexe E

# Intégration numérique des équations non-linéaires

### E.1 Algorithme de Newton-Raphson

A chaque pas de temps, on doit résoudre le système non-linéaire en les variables  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{z}_i$  :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{K}_0\mathbf{u}_i + \mathbf{K}_1\mathbf{z}_i = \mathbf{r}f_i \quad (\text{E.1})$$

$$\dot{\mathbf{z}}_i + \mathbf{h}(\mathbf{P}\dot{\mathbf{u}}_i, \mathbf{z}_i) = \mathbf{0} \quad (\text{E.2})$$

Compte tenu de l'hypothèse d'accélération constante sur le pas de temps, moyenne des accélérations au pas de temps  $t_{i-1}$  et  $t_i$ , qui donne :

$$\dot{\mathbf{u}}_i = -\dot{\mathbf{u}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}) \quad (\text{E.3})$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_i = -\ddot{\mathbf{u}}_{i-1} - \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}) \quad (\text{E.4})$$

$$\dot{\mathbf{z}}_i = -\dot{\mathbf{z}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t}(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{i-1}) \quad (\text{E.5})$$

$$\ddot{\mathbf{z}}_i = -\ddot{\mathbf{z}}_{i-1} - \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{z}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2}(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{i-1})$$

le système (E.1), (E.2) s'écrit

$$\left[ \mathbf{K}_0 + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{C} + \frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M} \right] \mathbf{u}_i + \mathbf{K}_1\mathbf{z}_i = \quad (\text{E.6})$$

$$\mathbf{r}f_i + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{i-1} + \left[ \frac{4}{\Delta t}\mathbf{M} + \mathbf{C} \right] \dot{\mathbf{u}}_{i-1} + \left[ \frac{2}{\Delta t}\mathbf{C} + \frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M} \right] \mathbf{u}_{i-1} \quad (\text{E.7})$$

$$\frac{2}{\Delta t}\mathbf{z}_i + \mathbf{h} \left( \mathbf{P} \left\{ -\dot{\mathbf{u}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}) \right\}, \mathbf{z}_i \right) = \dot{\mathbf{z}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{z}_{i-1} \quad (\text{E.8})$$

Après avoir remplacé  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{i-1}$  grâce à l'expression (E.1) à l'étape  $i-1$ , on obtient un système d'équations non-linéaires en les variables de déplacements et vitesses seules

$$\mathbf{X}^T = \left[ \mathbf{u}^T \quad \mathbf{z}^T \quad \dot{\mathbf{u}}^T \quad \dot{\mathbf{z}}^T \right] \quad (\text{E.9})$$

de la forme :

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_{i-1}) = \mathbf{R}_i \quad (\text{E.10})$$

dans laquelle le membre de gauche s'écrit :

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_{i-1}) = \begin{cases} \frac{2}{\Delta t} \mathbf{z}_i + \mathbf{h} \left( \mathbf{P} \left\{ -\dot{\mathbf{u}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}) \right\}, \mathbf{z}_i \right) \\ \dot{\mathbf{u}}_i - \frac{2}{\Delta t} \mathbf{u}_i \\ \dot{\mathbf{z}}_i - \frac{2}{\Delta t} \mathbf{z}_i \end{cases} \quad (\text{E.11})$$

avec les matrices

$$\mathbf{K}_{uu} = \left[ \mathbf{K}_0 + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{C} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right] \quad (\text{E.12})$$

$$\mathbf{K}_{uz} = \mathbf{K}_1 \quad (\text{E.13})$$

et le membre de droite :

$$\mathbf{R}_i = \begin{cases} \mathbf{R}_{u,i} = \mathbf{r}(f_i + f_{i-1}) + \frac{4}{\Delta t} \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_{i-1} + \left[ -\mathbf{K}_0 + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{C} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right] \mathbf{u}_{i-1} - \mathbf{K}_1 \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{R}_{z,i} = \dot{\mathbf{z}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{R}_{\dot{u},i} = -\dot{\mathbf{u}}_{i-1} - \frac{2}{\Delta t} \mathbf{u}_{i-1} \\ \mathbf{R}_{\dot{z},i} = -\dot{\mathbf{z}}_{i-1} - \frac{2}{\Delta t} \mathbf{z}_{i-1} \end{cases} \quad (\text{E.14})$$

On résout l'équation en  $\mathbf{X}_i$  (E.10) par la méthode itérative de Newton-Raphson (voir par exemple [20]) :

- On initialise la solution en prenant  $\mathbf{X}_i^0 = \mathbf{X}_{i-1}$ .
- La solution à l'itération  $k$  s'obtient à partir de la solution à l'itération précédente par  $\mathbf{X}_i^k = \mathbf{X}_i^{k-1} + \Delta \mathbf{X}$  où l'incrément  $\Delta \mathbf{X}$  est solution de :

$$\underline{\underline{\nabla_{X_i} \mathbf{A}}} \Delta \mathbf{X}^k = \mathbf{R}_i - \mathbf{A}(\mathbf{X}_i^{k-1}, \mathbf{X}_{i-1}) \quad (\text{E.15})$$

- On réitère l'opération précédente jusqu'à ce que la norme du membre de droite descende sous une tolérance prescrite à l'avance.

La matrice  $\underline{\underline{\nabla_{X_i} \mathbf{A}}}$  des dérivées partielles de l'opérateur non-linéaire  $\mathbf{A}$  peut être calculée à chaque itération :  $\underline{\underline{\nabla_{X_i} \mathbf{A}}}(\mathbf{X}_i^{k-1})$  (méthode de Newton-Raphson complète), ou bien sur la solution du pas de temps précédent :  $\underline{\underline{\nabla_{X_i} \mathbf{A}}}(\mathbf{X}_{i-1})$  (méthode de Newton-Raphson modifiée) ou périodiquement au cours des itérations. Cette matrice s'écrit :

$$\underline{\underline{\nabla_{X_i} \mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{uz} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{zu} & \mathbf{K}_{zz} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{2}{\Delta t} \mathbf{Id} & \mathbf{0} & \mathbf{Id} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{2}{\Delta t} \mathbf{Id} & \mathbf{0} & \mathbf{Id} \end{bmatrix} \quad (\text{E.16})$$

où

$$\mathbf{K}_{zu} = \text{diag} \left\{ \frac{2}{\Delta t} \frac{\partial h_j}{\partial \dot{u}_j} \mathbf{P}^j \right\}_{j=1 \dots \kappa} \quad (\text{E.17})$$

$$\mathbf{K}_{zz} = \text{diag} \left\{ \frac{2}{\Delta t} + \frac{\partial h_j}{\partial z_j} \right\}_{j=1 \dots \kappa} \quad (\text{E.18})$$

où les notations sont celles de l'équation (4.36).

Remarquons que de part la forme en blocs de la matrice  $\underline{\underline{\nabla_{X_i} \mathbf{A}}}$ , il est commode de calculer les solutions  $\mathbf{u}_i^k$  et  $\mathbf{z}_i^k$  en utilisant une décomposition LU du bloc supérieur gauche. Les vitesses  $\dot{\mathbf{u}}_i^k$  et  $\dot{\mathbf{z}}_i^k$  s'obtiennent alors par des opérations matricielles élémentaires.

Dans le cas de non-linéarités suivant le modèle de Bouc-Wen (3.42), on a :

$$h(\dot{u}, z) = \gamma |\dot{u}| z |z|^{n-1} + \beta \dot{u} |z|^n - A \dot{u} \quad (\text{E.19})$$

$$\frac{\partial h}{\partial \dot{u}}(\dot{u}, z) = \{\gamma \text{signe}(\dot{u}) \text{signe}(z) + \beta\} |z|^n - A \quad (\text{E.20})$$

$$\frac{\partial h}{\partial z}(\dot{u}, z) = n |\dot{u}| |z|^{n-1} \{\gamma + \beta \text{signe}(\dot{u}) \text{signe}(z)\} \quad (\text{E.21})$$

## E.2 Sensibilité de la réponse aux variations des valeurs du vecteurs d'excitation

Prenons les dérivées partielles du système non-linéaire au pas de temps  $t_i$  (équation (E.10)) par rapport aux composantes  $f_j$  pour  $j \leq i$  du vecteur d'excitation (le système étant causal les dérivées partielles pour  $j > i$  sont nulles) :

$$\underline{\underline{\nabla_{X_i} \mathbf{A}}} \frac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial f_j} = \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial f_j} - \underline{\underline{\nabla_{X_{i-1}} \mathbf{A}}} \frac{\partial \mathbf{X}_{i-1}}{\partial f_j} \quad (\text{E.22})$$

ou encore explicitement :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial f_j} + \mathbf{K}_{uz} \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial f_j} &= \mathbf{r}(\delta_{i,j} + \delta_{i-1,j}) + \frac{4}{\Delta t} \mathbf{M} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{i-1}}{\partial f_j} + \left[ -\mathbf{K}_0 + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{C} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right] \frac{\partial \mathbf{u}_{i-1}}{\partial f_j} - \mathbf{K}_1 \frac{\partial \mathbf{z}_{i-1}}{\partial f_j} \\ \mathbf{K}_{zu} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial f_j} + \mathbf{K}_{zz} \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial f_j} &= \frac{\partial \dot{\mathbf{z}}_{i-1}}{\partial f_j} + \frac{2}{\Delta t} \frac{\partial \mathbf{z}_{i-1}}{\partial f_j} + \mathbf{K}_{zu} \left\{ \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{i-1}}{\partial f_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_{i-1}}{\partial f_j} \right\} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_i}{\partial f_j} - \frac{2}{\Delta t} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial f_j} &= -\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{i-1}}{\partial f_j} - \frac{2}{\Delta t} \frac{\partial \mathbf{u}_{i-1}}{\partial f_j} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{z}}_i}{\partial f_j} - \frac{2}{\Delta t} \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial f_j} &= -\frac{\partial \dot{\mathbf{z}}_{i-1}}{\partial f_j} - \frac{2}{\Delta t} \frac{\partial \mathbf{z}_{i-1}}{\partial f_j} \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$



## Annexe F

# Algorithme HL-RF modifié pour la recherche du point de conception

L'algorithme HL-RF fut proposé à l'origine par Hasofer et Lind [64] puis étendu par Rackwitz et Fiessler [103]. Il a été amélioré par Liu et Der Kiureghian [84] puis par Zhang et Der Kiureghian [140] en vue d'assurer une meilleure convergence. Il s'agit de chercher la solution du problème d'optimisation sous contrainte :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } \|f\| \\ \mathcal{G}(\mathbf{f}) = 0 \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

où  $\mathcal{G}(\mathbf{f})$  est une fonction non-linéaire. La solution s'obtient de manière itérative en construisant une suite de points :

$$\mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{f}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k \quad (\text{F.2})$$

où  $\mathbf{d}_k$  est une direction de descente et  $\lambda_k$  le pas de descente à l'itération  $k$ . Dans la procédure HL-RF, on détermine  $\mathbf{d}_k$  en linéarisant la contrainte  $\mathcal{G}(\mathbf{f})$  en  $\mathbf{f}_k$  :

$$\mathcal{L}_k(\mathbf{f}) = \mathcal{G}(\mathbf{f}_k) + \nabla \mathcal{G}(\mathbf{f}_k) (\mathbf{f} - \mathbf{f}_k) \quad (\text{F.3})$$

où  $\nabla \mathcal{G}(\mathbf{f}_k)$  désigne le gradient (vecteur ligne) de  $\mathcal{G}$  en  $\mathbf{f}_k$ . La distance de l'origine à l'hyperplan tangent  $\mathcal{L}_k(\mathbf{f}) = 0$  vaut :

$$\beta_k = \frac{\mathcal{G}(\mathbf{f}_k) - \nabla \mathcal{G}(\mathbf{f}_k) \mathbf{f}_k}{\|\nabla \mathcal{G}(\mathbf{f}_k)\|} \quad (\text{F.4})$$

Le vecteur normal  $\boldsymbol{\alpha}_k^T$  à l'hyperplan tangent est donné par

$$\boldsymbol{\alpha}_k = - \frac{\nabla \mathcal{G}(\mathbf{f}_k)}{\|\nabla \mathcal{G}(\mathbf{f}_k)\|} \quad (\text{F.5})$$

Cette distance (algébrique) (F.4) multipliée par ce vecteur normal fournit le point le plus proche de l'origine sur la contrainte linéarisée. On définit alors la direction de descente comme la vecteur joignant  $\mathbf{f}_k$  à ce point :

$$\mathbf{d}_k = \beta_k \boldsymbol{\alpha}_k^T - \mathbf{f}_k = \left[ \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{f}_k + \frac{\nabla \mathcal{G}(\mathbf{f}_k)}{\|\nabla \mathcal{G}(\mathbf{f}_k)\|} \right] \boldsymbol{\alpha}_k^T - \mathbf{f}_k \quad (\text{F.6})$$

Les premières versions de l'algorithme HL-RF utilisaient un pas constant et unitaire  $\lambda_k = 1$ . Toutefois lorsque la surface limite présente de fortes courbures, cet algorithme peut diverger.

Liu et Der Kiureghian ont proposé d'utiliser une fonction de mérite pour contrôler le pas de descente. Pour assurer une convergence globale, il est nécessaire que la fonction de mérite prennent son minimum en la solution de (F.1) et que la demi-droite  $[\mathbf{f}_k, \mathbf{d}_k)$  en soit une direction de descente en tout point. Zhang et Der Kiureghian [140] ont montré que la fonction de mérite :

$$m(\mathbf{f}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{f}\|^2 + c |\mathcal{G}(\mathbf{f})| \quad (\text{F.7})$$

satisfait ces deux conditions pourvu que la pénalité  $c$  satisfasse

$$c > \frac{\|\mathbf{f}\|}{\|\nabla \mathcal{G}(\mathbf{f})\|} \quad (\text{F.8})$$

On détermine  $\lambda_k$ , soit simplement en s'assurant que la fonction de mérite décroît, quitte à réduire progressivement ce pas, soit par la règle d'Armijo [88] :

$$\lambda_k = \max_{j \text{ entier } \geq 1} \left\{ b^j \text{ tel que } m(\mathbf{f}_k + b^j \mathbf{d}_k) - m(\mathbf{f}_k) \leq ab^j \nabla m(\mathbf{f}_k) \mathbf{d}_k \right\} \quad (\text{F.9})$$

On se donne des valeurs initiales pour  $c$  et  $\mathbf{f}$ . Pour ce dernier, on choisira par exemple le point de plus forte probabilité  $\mathbf{f}_0 = \mathbf{0}$ . On peut changer la valeur de  $c$  au cours de la descente pourvu qu'elle satisfasse la contrainte (F.8). On atteint la convergence lorsque les deux critères suivants sont vérifiés :

$$\left| \frac{\mathcal{G}(\mathbf{f}_k)}{\mathcal{G}(\mathbf{f}_0)} \right| \leq \varepsilon_1 \quad \|\mathbf{f}_k - (\alpha_k \mathbf{f}_k) \alpha_k^T\| \leq \varepsilon_2 \quad (\text{F.10})$$

dans lesquels les constantes  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont les (petites) tolérances. Le premier critère assure que la solution est bien sur la surface de ruine et le deuxième qu'il s'agit bien d'une projection de l'origine sur l'hyperplan tangent. Si la convergence de l'algorithme est assurée, ce n'est pas forcément vers un minimum global. En cas de doute, il faut recommencer la recherche à partir d'un autre point initial.

## Bibliographie

- [1] Abdel-Ghaffar A. M. et Rubin L. I. – Lateral earthquake response of suspension bridges. *Journal of Structural Engineering*, vol. 109, n° 3, 1983, pp. 664–675.
- [2] Abdel-Ghaffar A. M. et Rubin L. I. – Suspension bridge response to multiple support excitations. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, vol. 108, n° EM2, avril 1983, pp. 419–435.
- [3] Abdel-Ghaffar A. M. et Rubin L. I. – Vertical seismic behavior of suspension bridges. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 11, 1983, pp. 1–19.
- [4] Abdel-Ghaffar A. M. et Stringfellow R. G. – Response of suspension bridges to traveling earthquake excitations: Part I. Vertical response. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 3, n° 2, 1984, pp. 62–72.
- [5] Abrahamson N. A., Bolt B.A., Darragh R.B., Penzien J. et Tsai Y.B. – The SMART-1 accelerograph array (1980-1987): A review. *Earthquake Spectra*, vol. 3, n° 2, 1987, pp. 263–287.
- [6] Abrahamson N. A., Schneider J. F. et Stepp J. C. – *Spatial coherence of strong ground motion for application to soil-structure interaction*. – Rapport technique n° RP2978-1, Electrical Power Research Institute, 1990.
- [7] Abrahamson N. A., Schneider J. F. et Stepp J. C. – Empirical spatial coherency functions for application to soil-structure interaction analyses. *Earthquake Spectra*, vol. 7, n° 1, 1991, pp. 1–27.
- [8] Abrahamson N. A., Schneider J. F. et Stepp J. C. – Spatial coherency of shear waves from the Lotung, Taiwan large-scale seismic test. *Structural Safety*, vol. 10, 1991, pp. 145–162.
- [9] Amir-Mazahéri D. – Pont d'Evripos, sensibilité au séisme, contrôle des études sismiques. *In: Journées d'Etudes AFPS-AFPC*. – Saint-Rémy-lès-Chevreuse, janvier 1991.
- [10] Amir-Mazahéri D. – Seismic design methodology of bridges: point of present reflections and needs. *In: Proceedings of the 10th European Conference on Earthquake Engineering, Vienne, Autriche*, éd. par G. Duma. EAEE. – A.A. Balkema.
- [11] Association Française de Génie Parasismique. – *Recommandations AFPS90*. – Paris, Presses des Ponts et Chaussées, 1990.
- [12] Association Française de Génie Parasismique. – *Guide AFPS 92 pour les ponts*. – Paris, Presses des Ponts et Chaussées, 1995.

- [13] Atalik T.S. et Utku S. – Stochastic linearization of multi-degree-of-freedom non-linear systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 4, 1976, pp. 411–420.
- [14] Baber T.T. – Modal analysis for random vibration of hysteretic frames. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 14, 1986, pp. 841–859.
- [15] Baber T.T. et Noori M.N. – Random vibration of degrading, pinching systems. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 111, n° 8, août 1985, pp. 1010–1026.
- [16] Baber T.T. et Wen Y.K. – Random vibration of hysteretic, degrading systems. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, vol. 107, n° EM6, décembre 1981, pp. 1069–1087.
- [17] Baber T.T. et Wen Y.K. – Stochastic response of multistorey yielding frames. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 10, 1982, pp. 403–416.
- [18] Bard P.-Y. – Comportement simique d'un passage supérieur d'autoroute: analyse de données expérimentales. In: *Journée d'Etudes AFPS-AFPC, Ponts en zone sismique*. – Saint-Rémy-lès-Chevreuse, janvier 1993.
- [19] Bard P.-Y. – Seismic input motion for large structures. In: *18th European Regional Earthquake Engineering Seminar*. – Lyon, septembre 1995.
- [20] Bathe K.J. – *Finite element procedures in engineering analysis*. – Prentice-Hall, 1982.
- [21] Berrah M. et Kausel E. – *Modified response spectrum for the design of structures subjected to spatially varying seismic excitations*. – Rapport technique n° R90-2, MIT Department of Civil Engineering, Cambridge, Massachusetts, 1990.
- [22] Berrah M. et Kausel E. – Response spectrum analysis of structures subjected to spatially varying motions. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 21, 1992, pp. 461–470.
- [23] Berrah M. et Kausel E. – Spectrum analysis of a beam under non uniform seismic motion. In: *Second European Conference on Structural Dynamics, EURODYN'93*. pp. 27–32. – Trondheim, Norvège, 1993.
- [24] Berrill J.B., Priestley M.J.N. et Chapman H.E. – Design earthquake loading and ductility demand. *Bulletin of the New Zealand National Society for Earthquake Engineering*, vol. 13, n° 3, septembre 1980, pp. 232–241.
- [25] Bolt B.A. – The nature of earthquake ground motion. In: *The seismic design handbook*, éd. par Naeim F. – Van Nostrand Reinhold, New-York, 1989.
- [26] Boore D. M. – Stochastic simulation of high-frequency ground motions based on seismological models of the radiated spectra. *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 73, n° 6, décembre 1983, pp. 1865–1894.
- [27] Bouc R. – Forced vibration of mechanical systems with hysteresis. In: *4th International Conference on Nonlinear Oscillations*. – Prague, 1967.
- [28] Bouc R. – Modèle mathématique d'hystérésis. *Acustica*, vol. 24, 1971, pp. 16–25.

- [60] Harichandran R. S. – Estimating the spatial variation of earthquake ground motion from dense array recordings. *Structural Safety*, vol. 10, 1991, pp. 219–233.
- [61] Harichandran R. S. et Vanmarcke E. H. – Stochastic variation of earthquake ground motion in space and time. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 112, n° 2, février 1986, pp. 154–174.
- [62] Harichandran R. S. et Wang W. – Response of a simple beam to a spatially varying earthquake excitation. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 114, n° 9, septembre 1988, pp. 1526–1541.
- [63] Harichandran R. S. et Wang W. – Response of indeterminate two-span beam to spatially varying seismic excitation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 19, 1990, pp. 173–187.
- [64] Hasofer A.M. et Lind N.C. – Exact and invariant second-moment code format. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, vol. 100, n° 1, 1974, pp. 111–121.
- [65] Hyun C. H., Yun C. B. et Lee D. G. – Non-stationary response analysis of suspension bridges for multiple support excitations. *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 7, 1992, pp. 27–35.
- [66] Igusa T. et Der Kiureghian A. – Response spectrum method for systems with non-classical damping. In: *4th Engineering Mechanics Division Specialty Conference*. – West Lafayette, Indiana, mai 1983.
- [67] Igusa T., Der Kiureghian A. et Sackman J.L. – Modal decomposition method for stationary response of non-classically damped systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 12, 1984, pp. 121–136.
- [68] Igusa T. et Sinha R. – Probabilistic-based design of vibration absorbers in secondary systems. In: *Current Topics in Structural Mechanics*, éd. par Chung H., pp. 27–34. – ASME, PVP, 1989.
- [69] Igusa T. et Sinha R. – Response analysis of secondary systems with nonlinear supports. *Journal of Pressure Vessel Technology, ASME*, vol. 113, novembre 1991, pp. 524–531.
- [70] Iwan W.D. et Yang I.M. – Application of statistical linearization techniques to non-linear multi-degree-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics*, juin 1972, pp. 545–550.
- [71] Jangid R.S. et Datta T.K. – Spectral analysis of systems with non-classical damping using classical mode superposition technique. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 22, 1993, pp. 723–735.
- [72] Kahan M. – Nonlinear response spectrum for systems with localized nonlinearities. In: *11<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering*. – Acapulco, Mexico, juin 1996.
- [73] Kahan M., Gibert R.-J. et Bard P.-Y. – Influence of seismic waves spatial variability on bridges: a sensitivity analysis. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 25, 1996, pp. 795–814.

- [74] Kanai K. – An empirical formula for the spectrum of strong earthquake motion. *In: Proceedings of the Second World Conference on Earthquake Engineering.* – Tokyo et Kyoto, Japon, 1960.
- [75] Karay M.A. et Bouc R. – Etude dynamique d'un système d'isolation anti-sismique. *Annales de l'Enit*, vol. 3, n° 1, janvier 1989, pp. 43-60.
- [76] Kobori T., Minai R. et Suzuki Y. – Statistical linearization techniques for hysteretic structures with earthquake excitations. *Bulletin of the Disaster Prevention Institute, Kyoto University*, vol. 23, n° 215, 1973, pp. 111-135.
- [77] Krylov N. et Bogoliubov N. – *Introduction to Nonlinear Mechanics.* – Kiev, 1943.
- [78] Labbé P. et Bernat S. – Modélisation de mouvements sismiques de référence sous forme de bruits blancs filtrés. *In: 3ème Colloque National AFPS*, pp. ASA32-ASA41. – Saint-Rémy-lès-Chevreuse, mars 1993.
- [79] Laoumi N. et Labbé P. – Seismic torsional motions induced by spatial variability on LSST-Lotung (Taiwan). *In: Proceedings of the Seventh International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering*, pp. 613-618. – Paris, juillet 1995.
- [80] Laoumi N. et Labbé P. – Spectre de torsion induit par la variabilité spatiale du mouvement sismique. *In: 4ème Colloque National AFPS.* – Saint-Rémy-lès-Chevreuse, avril 1996.
- [81] Li C.-C. et Der Kiureghian A. – Mean out-crossing rate of nonlinear response to stochastic input. *In: Proceedings of the Seventh International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering.* – Paris, France, juillet 1995.
- [82] Lin Y.K. – *Probabilistic theory of structural dynamics.* – McGraw-Hill, Inc., 1967.
- [83] Lin Y.K. et Cai G.C. – *Probabilistic structural dynamics: advanced theory and applications.* – McGraw-Hill, Inc., 1995.
- [84] Liu P.L. et Der Kiureghian A. – Optimization algorithms for structural reliability. *Structural Safety*, vol. 9, 1991, pp. 161-177.
- [85] Loh C. H. et Yeh Y. T. – Spatial variation and stochastic modeling of seismic differential ground movement. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 16, 1988, pp. 583-596.
- [86] Loh C.H. – Spatial variability of seismic waves and its engineering application. *Structural Safety*, vol. 10, 1991, pp. 95-111.
- [87] Luco J. E. et Wong H. L. – Response of a rigid foundation to a spatially random ground motion. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 14, 1986, pp. 891-908.
- [88] Luenberg D.G. – *Introduction to nonlinear programming.* – Reading, Massachusetts, Addison Wesley, 1986.
- [89] Madsen H.O., Krenk S. et Lind N.C. – *Methods of structural safety.* – Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, Inc., 1986.

- [29] Bouc R. – The power spectral density of response for a strongly non-linear random oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 175, n° 3, 1994, pp. 317–331.
- [30] Bouc R. et Defilippi M. – Galerkin multi-harmonic procedure for nonlinear multidimensional random vibration. *International Journal of Engineering Science*, vol. 25, n° 6, 1987, pp. 723–733.
- [31] Bouc R. et Defilippi M. – Application d'une méthode de Galerkin multiharmonique au calcul des densités spectrales de puissance évolutive. In : *3ème Colloque National AFPS*. – Saint-Rémy-lès-Chevreuse, mars 1993.
- [32] Bouc R., Delfosse G. et Nayroles B. – Calcul déterministe et stochastique de la réponse des structures sur appuis visco-élastiques. In : *Génie Parasismique*, éd. par Victor Davidovici. – Presses des Ponts et Chaussées, 1985.
- [33] Caughey T. K. – Random excitation of a system with bilinear hysteresis. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, vol. 27, 1960, pp. 649–652.
- [34] Caughey T. K. – Equivalent linearization techniques. *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 35, 1963, pp. 1706–1711.
- [35] Cherng R.H. et Wen Y.K. – *Stochastic finite element analyses of uncertain non-linear plane trusses under random excitations*. – Rapport technique n° SRS 567, University of Illinois at Urbana-Champaign, février 1992.
- [36] Chopra A.K. – *Dynamics of structures*. – Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1995.
- [37] Clough R.W. et Penzien J. – *Dynamics of structures*. – Mc Graw-Hill, New-York, 1993.
- [38] Constantinou M.C. et Papageorgiou A.S. – Stochastic response of practical sliding isolation systems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 5, n° 1, 1990, pp. 27–34.
- [39] Constantinou M.C. et Tadjbakhsh I.G. – Response of a sliding structure to filtered random excitation. *Journal of Structural Mechanics*, vol. 12, n° 3, 1984, pp. 401–418.
- [40] Conti E., Vivien N. et Tardy R. – Le Pont de Lourdes - Conception para-sismique. *Ouvrages d'Art*, no12, juillet 1992, pp. 5–10.
- [41] Cunha A.A.M.F. – The role of the stochastic equivalent linearization method in the analysis of non-linear seismic response of building structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 23, 1994, pp. 837–857.
- [42] Der Kiureghian A. – Structural response to stationary excitation. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, vol. 106, décembre 1980, pp. 1195–1213.
- [43] Der Kiureghian A. – A response spectrum method for random vibration analysis of MDF systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 9, 1981, pp. 419–435.
- [44] Der Kiureghian A. – A coherency model for spatially varying ground motions. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 25, 1996, pp. 99–111.

- [45] Der Kiureghian A. et Neuenhofer A. – *A response spectrum method for multiple-support seismic excitations*. – Rapport technique n° UCB/EERC-91/08, College of Engineering, University of California at Berkeley, Earthquake Engineering Research Center, août 1991.
- [46] Der Kiureghian A. et Neuenhofer A. – Response spectrum method for incoherent support motions. *In: Earthquake Engineering, Tenth World Conference*. – Madrid, 1992.
- [47] Der Kiureghian A. et Neuenhofer A. – Response spectrum method for multiple-support seismic excitation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 21, 1992, pp. 713–740.
- [48] Despeyroux J. – Le projet de construction parasismique. *In: Génie Parasismique*, éd. par Victor Davidovici. – Presses des Ponts et Chaussées, 1985.
- [49] Dumanoglu A. A., Brownjohn J. M. W. et Severn T. – Seismic analysis of the Fatih Sultan Mehmet (Second Bosphorus) suspension bridge. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 21, 1992, pp. 881–906.
- [50] *Eurocode 8, Part II: Bridges*. – 1994.
- [51] Gibert R.-J. – *Vibrations des structures: interaction avec des fluides, sources d'excitation aléatoires*. – Eyrolles, 1988.
- [52] Guihot P. – *Analyse de la réponse de structures non-linéaires sollicitées par des sources d'excitation aléatoires. Application au comportement des lignes de tuyauteries sous l'effet d'un séisme*. – Thèse de Doctorat, Université Paris VI, décembre 1990.
- [53] Hadj-Hamou T. et Goni J.J. – Simulation d'accélérogrammes à partir d'un spectre de Fourier et le principe de la phase minimum. *In: 3ème Colloque National AFPS*, pp. ASA42–ASA52. – Saint-Rémy-lès-Chevreuse, mars 1993.
- [54] Hagen Ø. et Tvedt L. – Vector process out-crossing as parallel system sensitivity measure. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 117, n° 10, 1991, pp. 2201–2220.
- [55] Hallquist J.O. et Snyder V.W. – Synthesis of two discrete vibratory systems using eigenvalue modification. *AIAA Journal*, vol. 11, n° 2, 1973, pp. 247–249.
- [56] Hallquist J.O. et Snyder V.W. – On the connection of viscously damped continuous vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 32, n° 1, 1974, pp. 131–142.
- [57] Hanks T. C. et McGuire R. K. – The character of high-frequency strong ground motion. *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 71, n° 6, décembre 1981, pp. 2071–2095.
- [58] Hao H. – Arch response to correlated multiple excitations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 22, 1993, pp. 389–404.
- [59] Hao H., Oliveira C.S. et Penzien J. – Multiple-station ground motion processing and simulation based on SMART-1 array data. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 111, 1989, pp. 293–310.

- [90] Mahin S.A. et Bertero V.V. – An evaluation of inelastic seismic design spectra. *Journal of the Structural Division, ASCE*, vol. 107, n° ST9, septembre 1981, pp. 1777–1795.
- [91] Menke W., Lerner-Lam A.L. et Mithal R. – Spatial coherence of 5-25 Hz seismic wavefields at a hard rock site. *Structural Safety*, vol. 10, 1991, pp. 163–179.
- [92] Nadim F., Vanmarcke E.H., Gudmestad O.T. et Hetland S. – Influence of spatial variation of earthquake motion on response of gravity based platforms. *Structural Safety*, vol. 10, 1991, pp. 113–128.
- [93] Newland D. E. – *An introduction to random vibrations and spectral analysis*. – Longman Scientific and Technical, 1984.
- [94] Newmark N.M. – A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, vol. 85, 1959, pp. 67–94.
- [95] Newmark N.M. et Hall W.J. – Procedures and criteria for earthquake resistant design. *In: Building Practice for Disaste Mitigation*, pp. 209–236. – Washington D.C., National Bureau of Standards, février 1973.
- [96] Newmark N.M. et Rosenblueth E. – *Fundamentals of earthquake engineering*. – Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.
- [97] Oliveira C.S., Hao H. et Penzien J. – Ground motion modeling for multiple-input structural analysis. *Structural Safety*, vol. 10, 1991, pp. 79–93.
- [98] Park Y.J. et Ang H.-S. – Mechanistic seismic damage model for reinforced concrete. *Journal of Structural Engineering*, vol. 111, n° 4, avril 1985, pp. 722–739.
- [99] Park Y.J., Wen Y.K. et Ang H.-S. – Random vibration of hysteretic systems under bi-directional ground motions. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 14, 1986, pp. 543–557.
- [100] Pauley T. et Priestley M.J.N. – *Seismic design of reinforced concrete and masonry buildings*. – John Wiley and Sons, Inc., 1992.
- [101] Pomazal R.J. et Snyder V.W. – Local modifications of damped linear systems. *AIAA Journal*, vol. 9, n° 11, 1971, pp. 2216–2221.
- [102] Pons J.C. – Comportement d'une structure souple sur appuis glissants. *In: 2ème Colloque National AFPS*. – Saint-Rémy-lès-Chevreuse, avril 1989.
- [103] Rackwitz R. et Fiessler B. – Structural reliability under combined random load sequences. *Computers and Structures*, vol. 9, 1978, pp. 489–494.
- [104] Rice S.O. – Mathematical analysis of random noise. *Bell System Technical Journal*, vol. vol. 23, pp. 282-332; vol 24., pp. 46-156, 1944, 1945. – Reprinted in *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, ed. N. Wax, Dover, New-York, 1954.
- [105] Roberts J.B. et Spanos P.D. – *Random vibration and statistical linearization*. – John Wiley & Sons, England, 1990.

- [106] Rosenblueth E. et Elorduy J. – Response of linear systems to certain transient disturbances. *In: Proc. 4th World Conference on Earthquake Engineering*, pp. 185–196. – Santiago, Chili, 1969.
- [107] Rutenberg A. et Heidebrecht A. C. – Approximate spectral multiple support seismic analysis: traveling wave approach. *Proc. Instn Civ. Engrs, Part 2*, vol. 85, juin 1988, pp. 223–236.
- [108] Shinozuka M. – Monte Carlo solution of structural dynamics. *Computers and Structures*, vol. 2, 1972, pp. 855–874.
- [109] Singh M.P. – Seismic response by SRSS for non-proportional damping. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, vol. 106, n° EM6, décembre 1980, pp. 1405–1419.
- [110] Singh M.P. et Maldonado G.O. – A response spectrum method for seismic analysis of inelastic structures. *In: Ninth World Conference on Earthquake Engineering*, pp. 117–122. – Tokyo and Kyoto, Japon, 1988.
- [111] Singh M.P., Maldonado G.O., Heller R.A. et Faravelli L. – Modal analysis of nonlinear hysteretic structures for seismic motions. *In: Nonlinear stochastic dynamic engineering systems, IUTAM Symposium*, éd. par Ziegler F. et Schuëller G.I. pp. 442–454. – Innsbruck, Autriche, 1987.
- [112] Sommerville P. G., McLaren J. P., Sen M. K. et Helmberger D. V. – The influence of site conditions on the spatial incoherence of ground motions. *Structural Safety*, vol. 10, 1991, pp. 1–13.
- [113] Spanos P.T.D. et Iwan W.D. – On the existence and uniqueness of solutions generated by equivalent linearization. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, vol. 13, 1978, pp. 71–78.
- [114] Sues R.H., Mau S.T. et Wen Y.K. – System identification of degrading hysteretic restoring forces. *Journal of Structural Engineering*, vol. 114, n° 5, mai 1988, pp. 833–846.
- [115] Tajimi H. – A statistical method for determining the maximum response of a building structure during an earthquake. *In: Proceedings of the Second World Conference on Earthquake Engineering*. – Tokyo et Kyoto, Japon, 1960.
- [116] Toksöz M. N., Dainty A. M. et Charrette E. E. – Spatial variation of ground motion due to lateral heterogeneity. *Structural Safety*, vol. 10, 1991, pp. 53–77.
- [117] Tsai H.C. et Kelly J.M. – Dynamic parameter identification for non-linear isolation systems in response spectrum analysis. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 18, 1989, pp. 1119–1132.
- [118] Uscinski B. J. – *The elements of wave propagation in random media*. – Mc Graw-Hill, New-York, 1977.
- [119] Vanmarcke E.H. – On the distribution of the first-passage time for normal stationary random processes. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, mars 1975, pp. 215–220.

- [120] Vanmarcke E.H. – Spatial variation of earthquake ground motion. Proceedings of the International workshop, Princeton University, November 1988. *Structural Safety*, vol. 10, 1991.
- [121] Veletsos A.S. et Ventura C.E. – Modal analysis of non-classically damped linear systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 14, 1986, pp. 217–243.
- [122] Virlogeux M., Conti E. et Tardy R. – Le pont sur le Gave à Lourdes, conception parasismique. In : *FIP Symposium '93*. Prestressed Concrete Engineering Association. – Kyoto, Japon, octobre 1993.
- [123] Virlogeux M. et Fontaine J. F. – Analyse sismique simplifiée d'un pont à haubans: le pont d'evripos en grèce. In : *Journées d'Etudes AFPS-AFPC*. – Saint-Rémy-lès-Chevreuse, janvier 1991.
- [124] Wang F. – *Synthèse de la bibliographie sur la non-cohérence spatiale du mouvement sismique*. – Rapport technique n° DMT/93/549, Commissariat à l'Energie Atomique, 1993.
- [125] Wen Y.K. – Method for random vibration of hysteretic systems. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, vol. 102, n° EM2, avril 1976, pp. 249–263.
- [126] Wen Y.K. – Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation. *Transaction of the ASME*, vol. 47, mars 1980, pp. 150–154.
- [127] Wen Y.K. – Methods of random vibration for inelastic structures. *Applied Mechanics Review, ASME*, vol. 42, n° 2, février 1989, pp. 39–52.
- [128] Werner S. D., Beck J. L. et Levine M. B. – Seismic response evaluation of Meloland Road Overpass using 1979 Imperial Valley earthquake records. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 15, 1987, pp. 249–274.
- [129] Werner S. D., Lee L. C., Wong H. L. et Trifunac M. D. – Structural response to traveling seismic waves. *Journal of the Structural Division, ASCE*, vol. 105, n° 12, décembre 1979.
- [130] Wilson J. C. – Analysis of the observed seismic response of a highway bridge. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 14, 1986, pp. 339–354.
- [131] Wilson J. C. et Jennings P. C. – Spatial variation of ground motion determined from accelerograms recorded on a highway bridge. *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 75, n° 6, 1985, pp. 1515–1533.
- [132] Xu K. et Igusa T. – Dynamic characteristics of non-classically damped structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 20, 1991, pp. 1127–1144.
- [133] Zembaty Z. et Krenk S. – On the spatial seismic excitations and response spectra. *To appear in the Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, décembre 1993.
- [134] Zerva A. – Seismic source mechanisms and ground motion models - review paper. *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 3, n° 2, 1988, pp. 64–74.

- [135] Zerva A. – Response of multi-span beams to spatially incoherent seismic ground motions. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 19, 1990, pp. 819–832.
- [136] Zerva A. – Development of differential response spectra from spatial variability models. *In: Earthquake Engineering, Tenth World Conference.* – Madrid, 1992.
- [137] Zerva A. – Seismic ground motion simulations from a class of spatial variability models. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 21, 1992, pp. 351–361.
- [138] Zerva A., Hirata K. et Shinozuka M. – Random source effects on seismic ground motions. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 116, n° 6, 1990, pp. 1198–1219.
- [139] Zerva A. et Shinozuka M. – Stochastic differential ground motion. *Structural Safety*, vol. 10, 1991, pp. 129–143.
- [140] Zhang Y. et Der Kiureghian A. – Two improved algorithms for reliability analysis. *In: Proceeding 6th IFIP WG 7.5 Working Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems*, éd. par R. Rackwitz, G. Augusti, A. Borri. – Assisi, Italie, septembre 1994.
- [141] Zhu W.Q., Huang C.D. et Soong T.T. – Stochastic response of hysteretic systems to narrow-band excitation. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 61, Mar 1994, pp. 211–213.



## Résumé

Nous proposons dans cette étude quelques méthodes stochastiques pour le calcul des ponts aux séismes. Après avoir rappelé les représentations du mouvement sismique par spectres de réponse, densités spectrales de puissance et signaux temporels, nous introduisons des modèles de variabilité spatiale d'ondes sismiques. Nous en étudions l'effet sur la réponse linéaire des ponts grâce à une méthode de spectre de réponse pour structures multi-supportées. Nous proposons une méthode simplifiée permettant un calcul rapide de la sensibilité des ouvrages à de faibles variations spatiales des mouvements du sol et nous donnons un algorithme efficace pour le calcul de la réponse la plus défavorable lorsque les variations spatiales sont grandes et incertaines. Pour tenir compte du potentiel de ductilité des ponts, nous proposons une méthode de spectre de réponse tirant partie de la localisation des non-linéarités matérielles dans la structure (rotules plastiques, appareils d'appui). Les éléments non-linéaires sont remplacés par des éléments linéaires équivalents. Une technique de synthèse modale adaptée à la localisation des non-linéarités permet un calcul rapide de la réponse. Cette approche intègre le caractère aléatoire des sollicitations sans avoir recours à de coûteuses simulations de Monte-Carlo. Elle donne de bons résultats en termes de demande de ductilité et d'énergie dissipée par cycles d'hystérésis dans les éléments non-linéaires. Enfin, nous évoquons une technique de calcul de fiabilité de structures non-linéaires sous sollicitations stochastiques.

Mots clés: variabilité spatiales des ondes sismiques; spectre de réponse pour structures multi-supportées; linéarisation équivalente; spectre de réponse non-linéaire; fiabilité de systèmes non-linéaires sous sollicitations stochastiques.

## Summary

Stochastic methods for the seismic analysis of bridges are discussed in the present work. Models describing the seismic input by response spectra, power spectral densities and accelerograms are reviewed along with their extensions to spatially varying ground motions. The effect on bridges of the seismic waves spatial variability is studied within the framework of a multiple support response spectrum. A simplified method is suggested to quickly evaluate the sensitivity of bridge structures to small spatial variations. An algorithm is given to find the least favorable solicitation when spatial variability is large and uncertain. A nonlinear response spectrum technique is proposed to account for the ductility capacity in the structure. It is based on equivalent linearization techniques and a modal synthesis that takes advantage of the localized character of nonlinear elements in bridges (plastic hinges, bearings). Results in terms of ductility demand and energy dissipated through hysteretic cycles compare favorably with Monte-Carlo simulations but are far less costly. Eventually, a reliability analysis technique for nonlinear structures subjected to stochastic loading processes is discussed.

Key words: spatial variability of seismic waves; multiple support response spectrum; equivalent linearization; nonlinear response spectrum; reliability of nonlinear systems under stochastic loads