

---

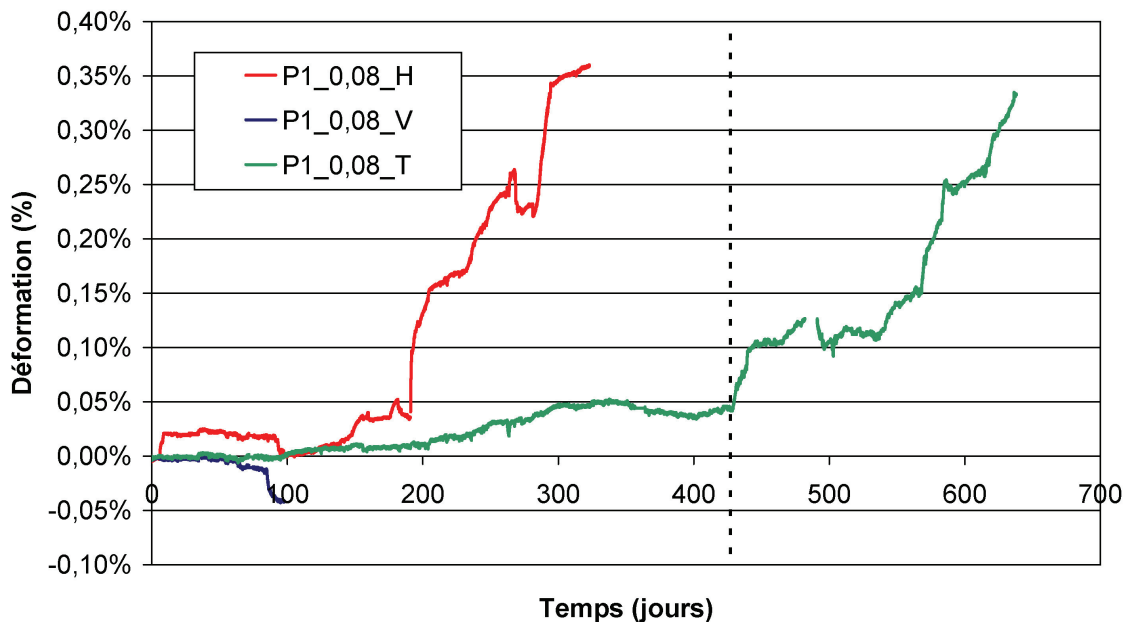
## Annexe 7 Synthèse des essais sur poutres

<b>A1</b>	<b>Suivis dimensionnels de P1.....</b>	<b>537</b>
A1.1	Suivis dimensionnels locaux .....	537
A1.2	Suivis dimensionnels globaux.....	537
A1.3	Suivis des flèches.....	538
A1.4	Fonctionnement structurel dans le cadre de la théorie des poutres .....	538
<b>A2</b>	<b>Suivis dimensionnels de P2.....</b>	<b>539</b>
A2.1	Suivis dimensionnels locaux par jauges.....	539
A2.2	Suivis dimensionnels locaux par extensomètre à cordes vibrantes .....	540
A2.3	Suivis dimensionnels globaux.....	541
A2.4	Suivis des flèches.....	542
A2.5	Fonctionnement structurel dans le cadre de la théorie des poutres .....	542
<b>A3</b>	<b>Suivis dimensionnels de P3.....</b>	<b>544</b>
A3.1	Suivis dimensionnels locaux .....	544
A3.2	Suivis dimensionnels globaux.....	545
A3.3	Suivis des flèches.....	545
A3.4	Fonctionnement structurel dans le cadre de la théorie des poutres .....	546
<b>A4</b>	<b>Suivis dimensionnels de P4.....</b>	<b>547</b>
A4.1	Suivis dimensionnels locaux .....	547
A4.2	Suivis dimensionnels globaux.....	548
A4.3	Suivis des flèches.....	548
A4.4	Fonctionnement structurel dans le cadre de la théorie des poutres .....	549
<b>A5</b>	<b>Suivis dimensionnels de P5.....</b>	<b>550</b>
A5.1	Suivis dimensionnels locaux .....	550
A5.2	Suivis dimensionnels globaux.....	551
A5.3	Suivis des flèches.....	551
A5.4	Fonctionnement structurel dans le cadre de la théorie des poutres .....	552
<b>A6</b>	<b>Suivis dimensionnels de P6.....</b>	<b>553</b>
A6.1	Suivis dimensionnels locaux .....	553
A6.2	Suivis dimensionnels globaux.....	554
A6.3	Suivis des flèches.....	554
A6.4	Fonctionnement structurel dans le cadre de la théorie des poutres .....	555
<b>A7</b>	<b>Synthèse du suivi des flèches.....</b>	<b>556</b>
<b>A8</b>	<b>Synthèse du suivi massique global.....</b>	<b>557</b>

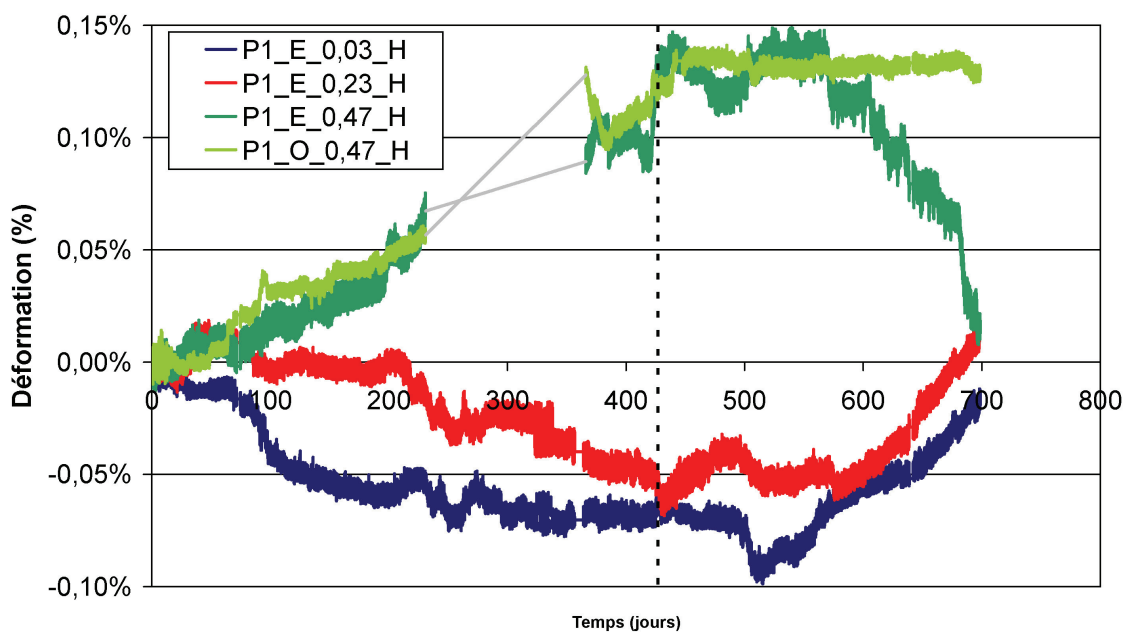


## A1 Suivis dimensionnels de P1

### A1.1 Suivis dimensionnels locaux



### A1.2 Suivis dimensionnels globaux



### A1.3 Suivis des flèches

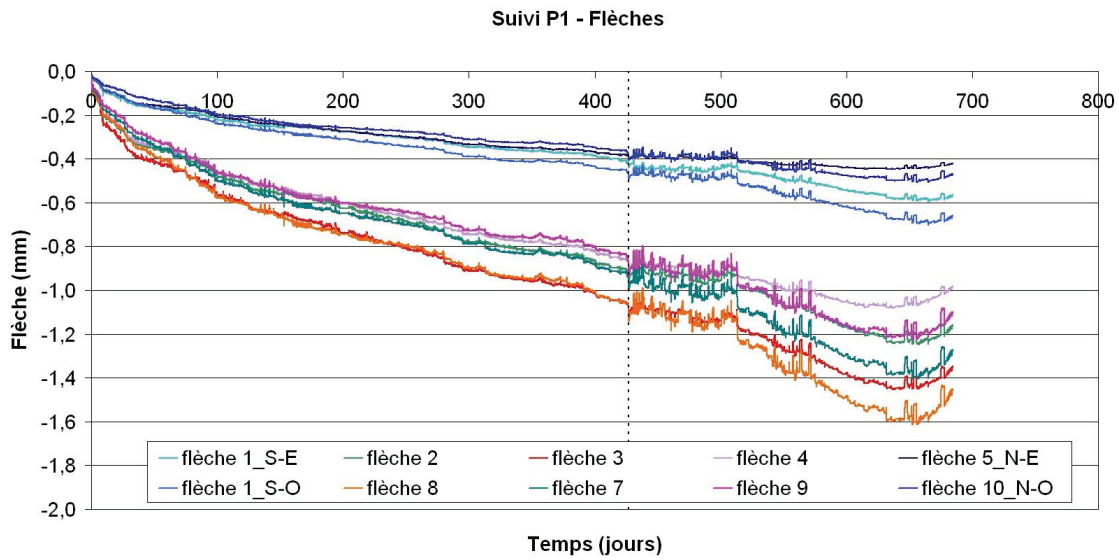


Figure A7.3 : suivi des flèches – poutre P1

### A1.4 Fonctionnement structural dans le cadre de la théorie des poutres

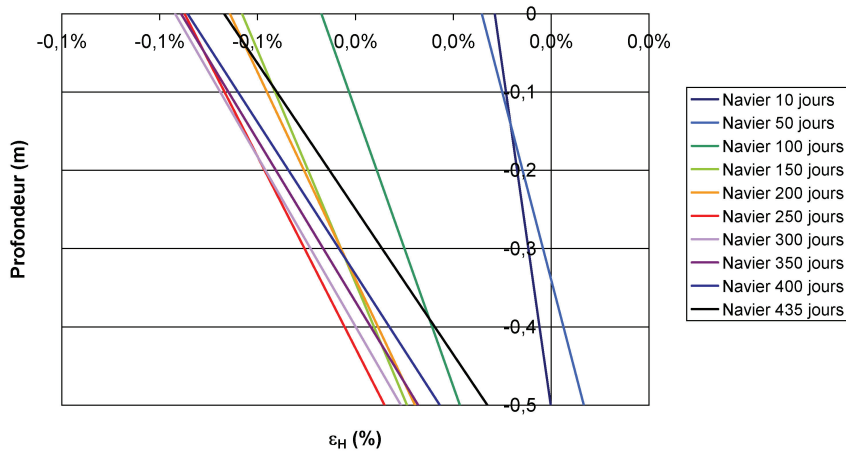


Figure A7.4 : profil de déformation horizontal moyen – poutre P1

Tableau A7.1 : profil de déformation horizontal moyen – poutre P1

Échéance (j)	Courbure $\chi$	Déformation moyenne
10	-2,29E-04	-0,0041%
50	-4,17E-04	0,0133%
100	-5,66E-04	0,0031%
150	-6,74E-04	0,0070%
200	-7,56E-04	0,0061%
250	-8,17E-04	-0,0233%
300	-9,23E-04	-0,0207%
350	-9,69E-04	-0,0372%
400	-1,03E-03	-0,0512%
435	-1,08E-03	-0,0582%

## A2 Suivis dimensionnels de P2

### A2.1 Suivis dimensionnels locaux par jauges

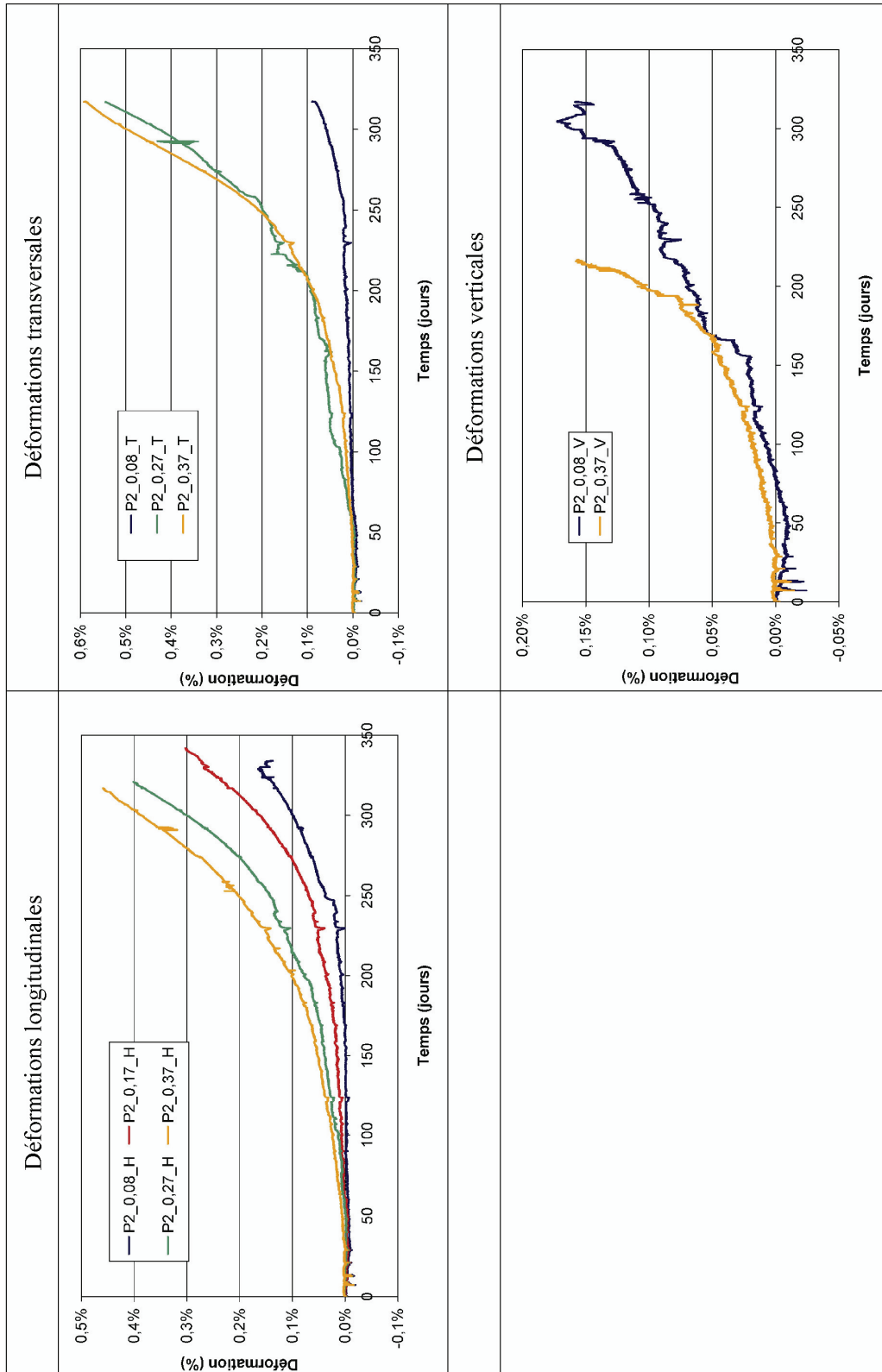


Figure A7.5 : suivis dimensionnels locaux – poutre P2 – jauges noyées

## A2.2 Suivis dimensionnels locaux par extensomètre à cordes vibrantes

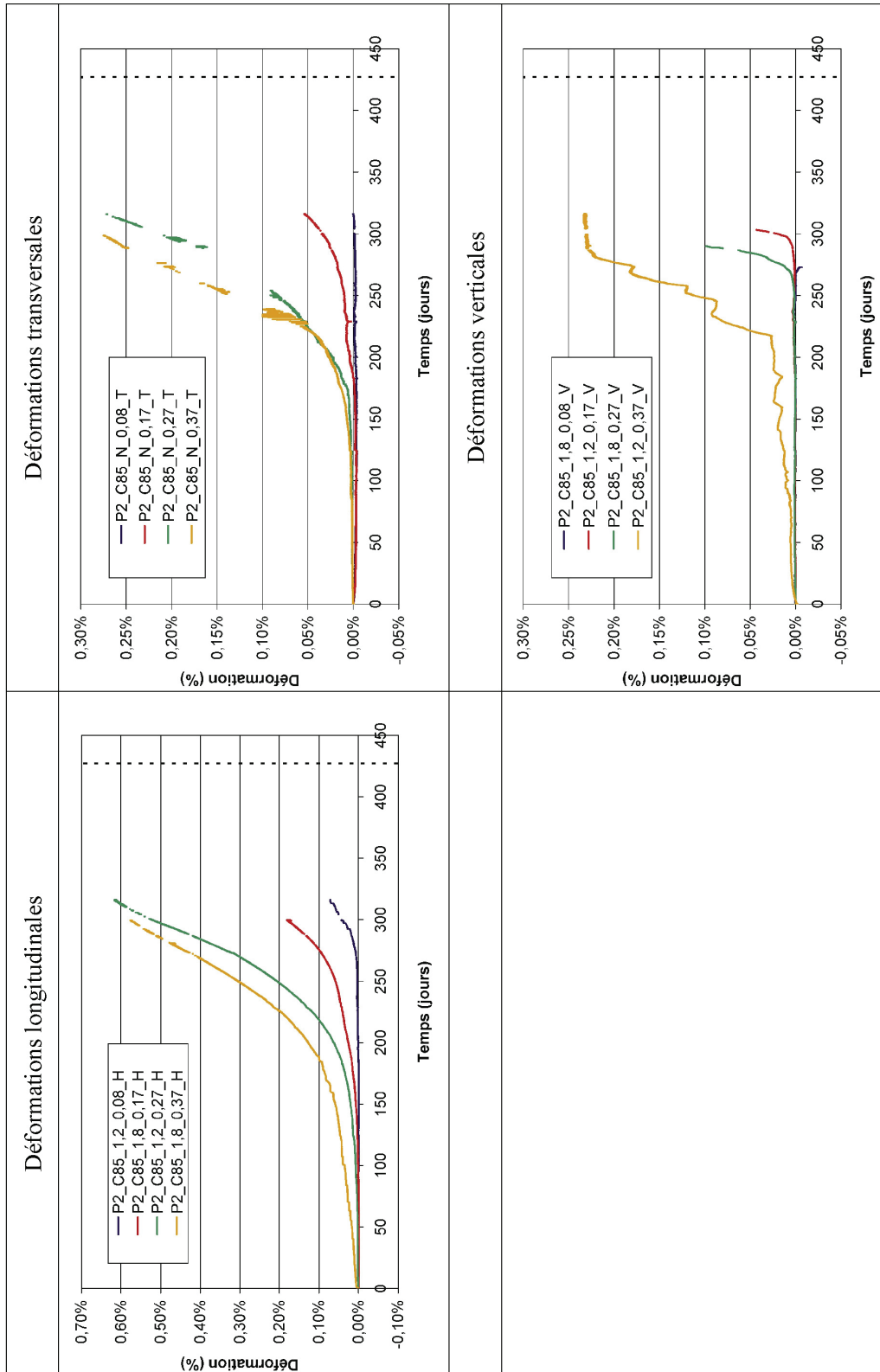


Figure A7. 6 : suivis dimensionnels locaux – poutre P2 – extensomètres à corde vibrante

### A2.3 Suivis dimensionnels globaux

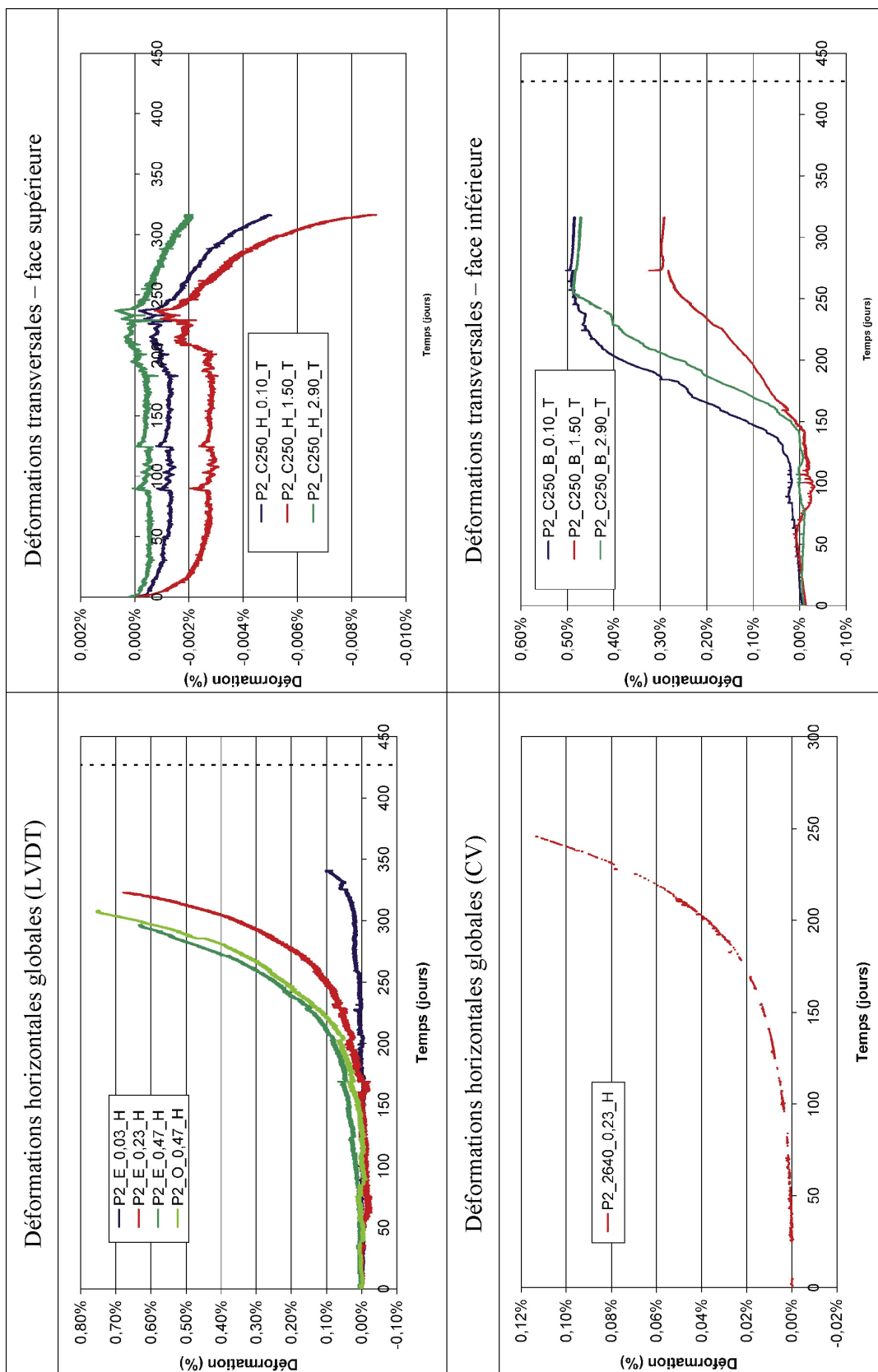


Figure A7. 7 : suivis dimensionnels globaux – poutre P2

## A2.4 Suivis des flèches

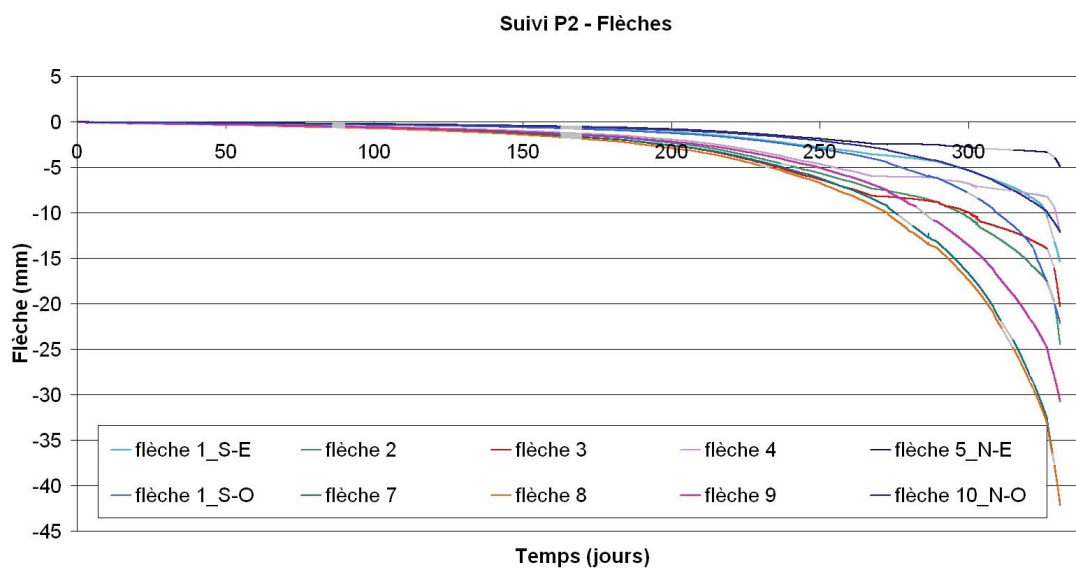


Figure A7. 8 : suivi des flèches – poutre P2

## A2.5 Fonctionnement structurel dans le cadre de la théorie des poutres

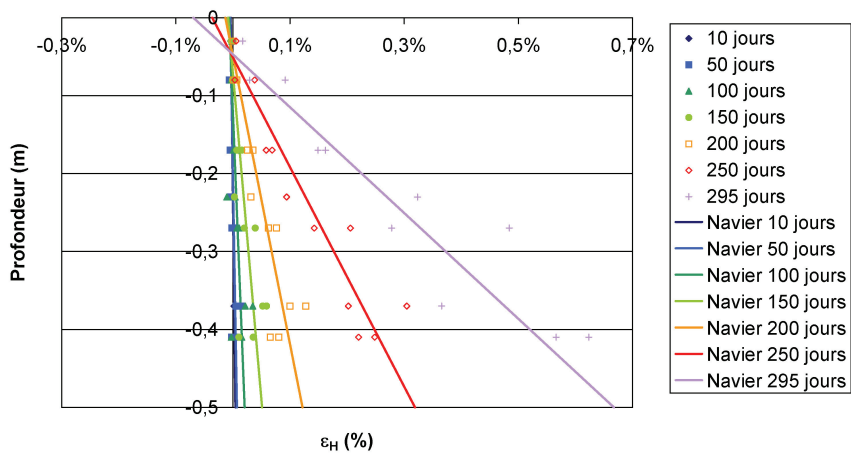


Figure A7. 9 : profil de déformation horizontale moyen – poutre P2

Tableau A7. 2 : profil de déformation horizontale moyen – poutre P2

Échéance (j)	Courbure $\chi$	Déformation moyenne	Ecart quadratique
10	-1,68E-04	0,0003%	0,0021%
50	-2,42E-04	0,0011%	0,0047%
100	-5,43E-04	0,0069%	0,0095%
150	-1,19E-03	0,0212%	0,0139%
200	-2,70E-03	0,0543%	0,0180%
250	-7,10E-03	0,1414%	0,0338%
295	-1,47E-02	0,2991%	0,0714%



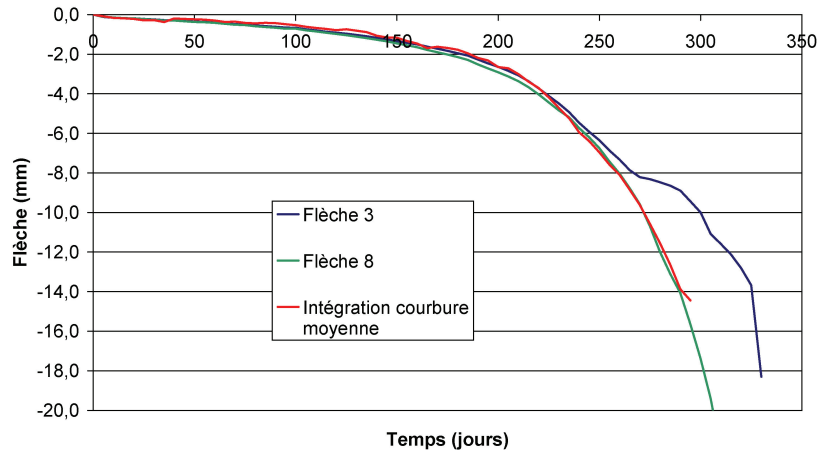


Figure A7. 10 : intégration de la courbure moyenne – poutre P2

## A3 Suivis dimensionnels de P3

### A3.1 Suivis dimensionnels locaux

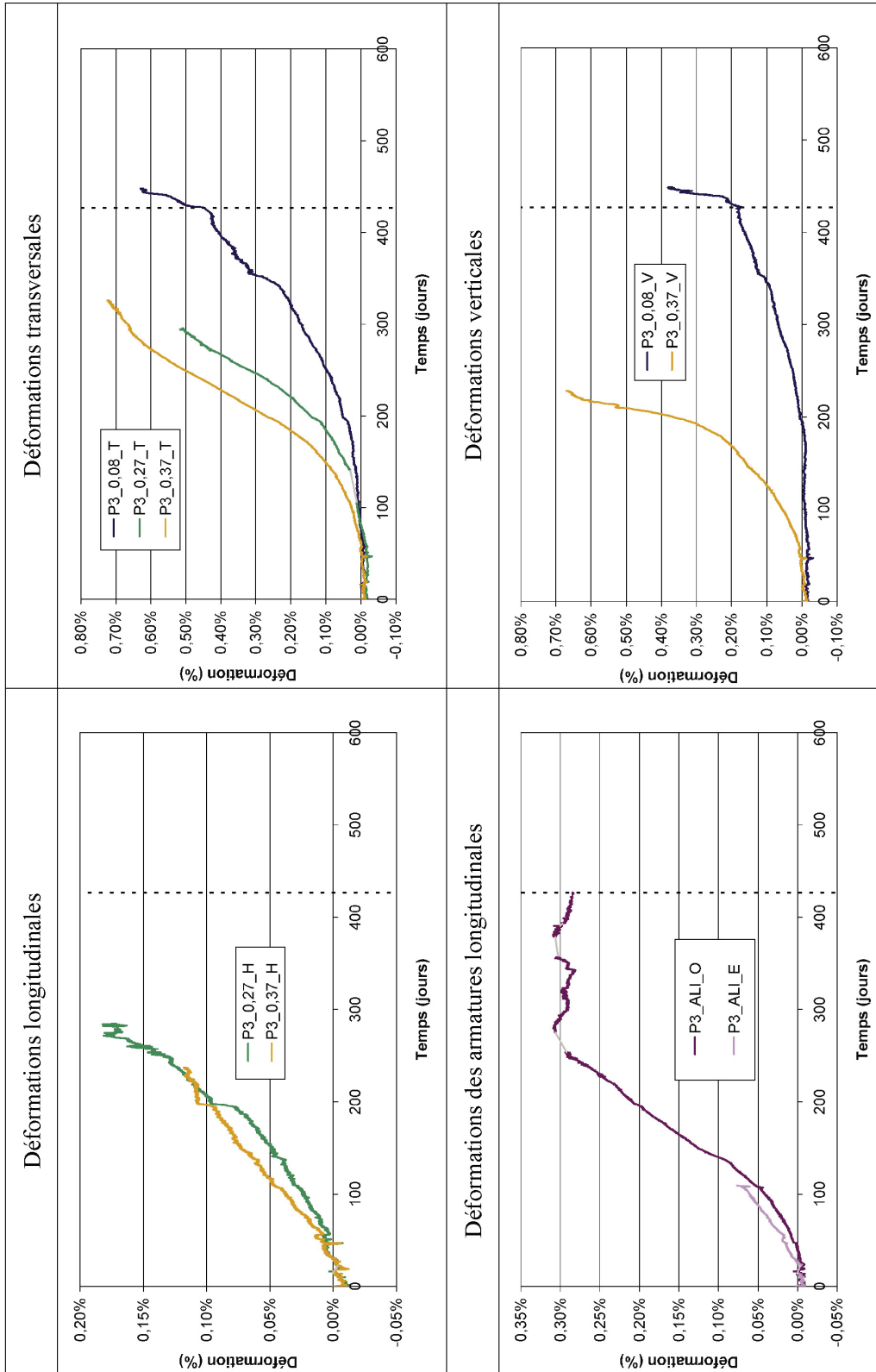


Figure A7. 11 : suivis dimensionnels locaux – poutre P3

### A3.2 Suivis dimensionnels globaux

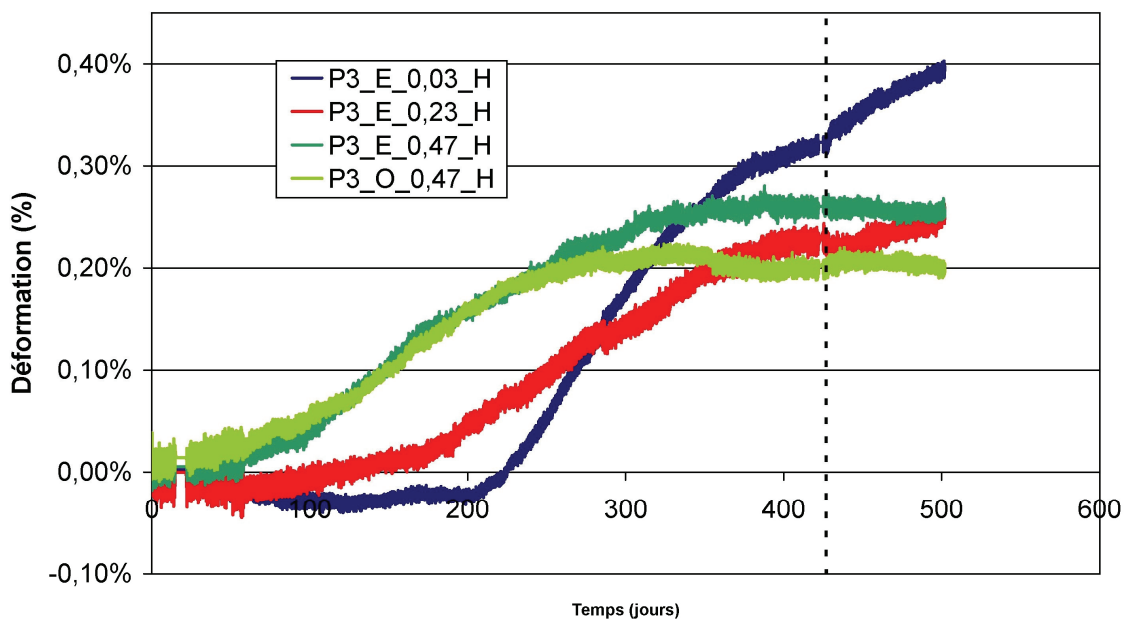


Figure A7.12 : suivi des déformations horizontales globales – poutre P3

### A3.3 Suivis des flèches

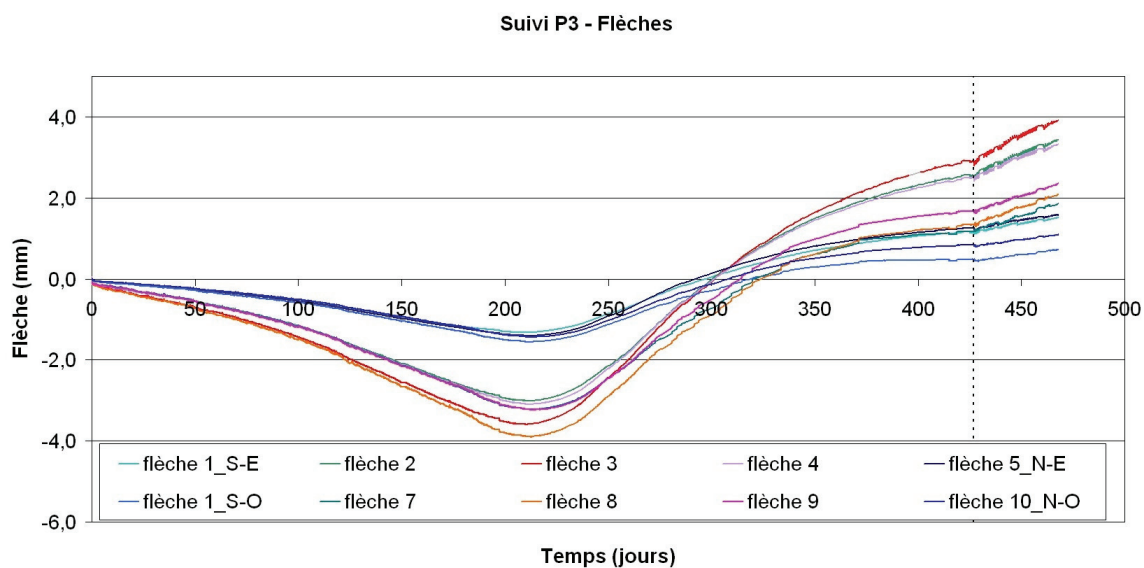


Figure A7.13 : suivi des flèches – poutre P3

### A3.4 Fonctionnement structurel dans le cadre de la théorie des poutres

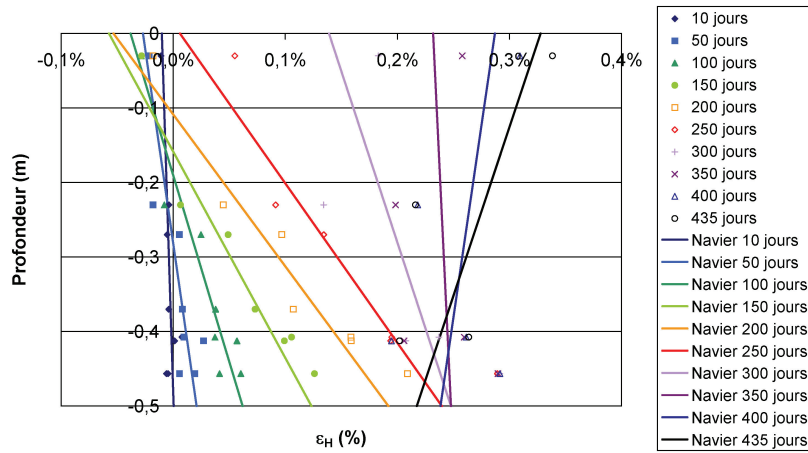


Figure A7. 14 : profil de déformation horizontale moyen – poutre P3

Tableau A7. 3 : profil de déformation horizontale moyen – poutre P3

Échéance (j)	Courbure $\chi$	Déformation moyenne	Ecart quadratique
10	-2,10E-04	-0,0049%	0,0043%
50	-9,57E-04	-0,0031%	0,0084%
100	-2,00E-03	0,0119%	0,0095%
150	-3,61E-03	0,0330%	0,0143%
200	-4,91E-03	0,0694%	0,0211%
250	-4,67E-03	0,1229%	0,0332%
300	-2,18E-03	0,1934%	0,0394%
350	-3,18E-04	0,2399%	0,0344%
400	9,71E-04	0,2628%	0,0403%
435	2,21E-03	0,2726%	0,0383%

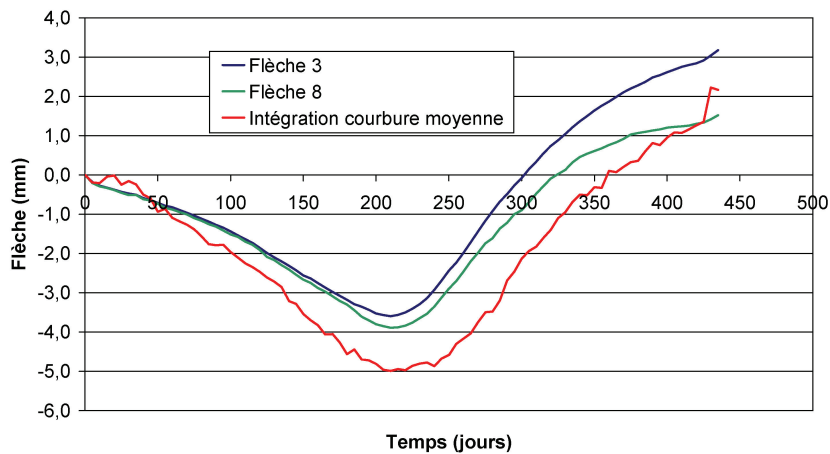


Figure A7. 15 : intégration de la courbure moyenne – poutre P3

## A4 Suivis dimensionnels de P4

### A4.1 Suivis dimensionnels locaux

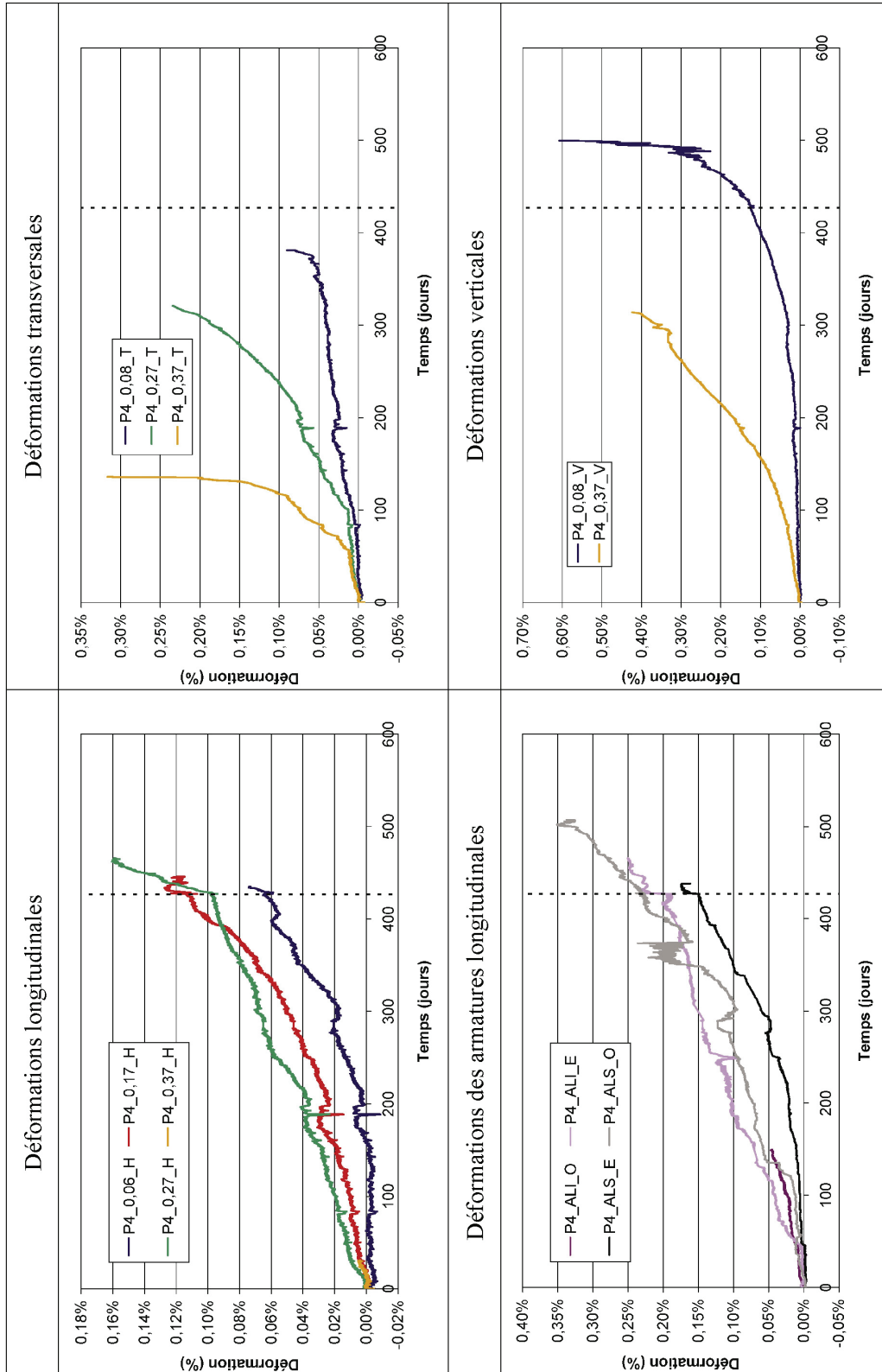


Figure A7.16 : suivis dimensionnels locaux – poutre P4

### A4.2 Suivis dimensionnels globaux

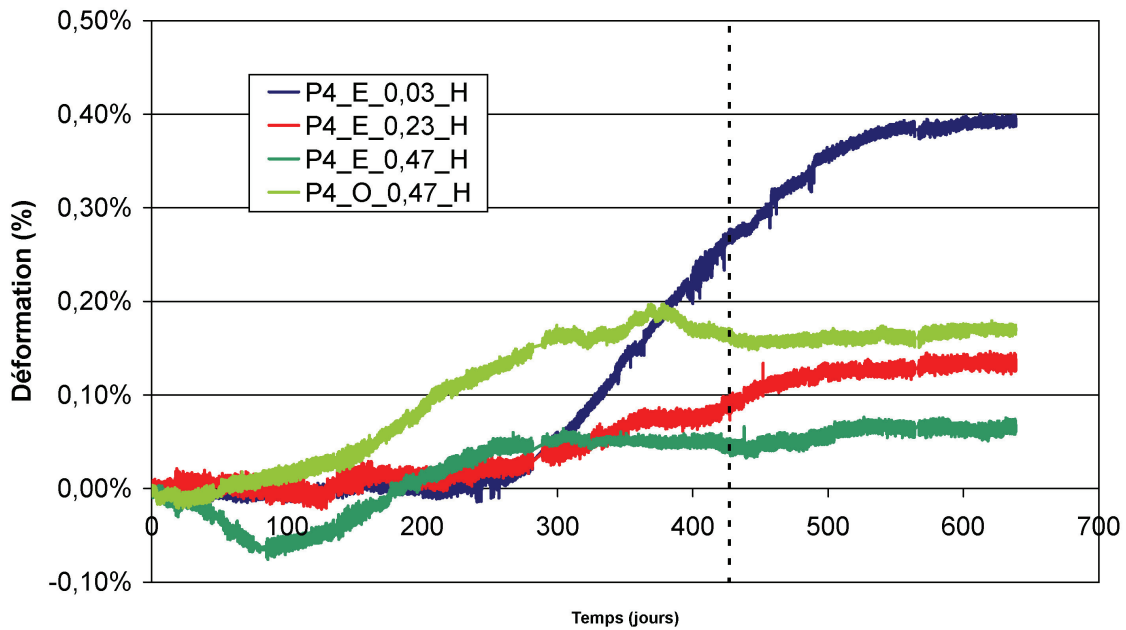


Figure A7. 17 : suivi des déformations horizontales globales – poutre P4

### A4.3 Suivis des flèches

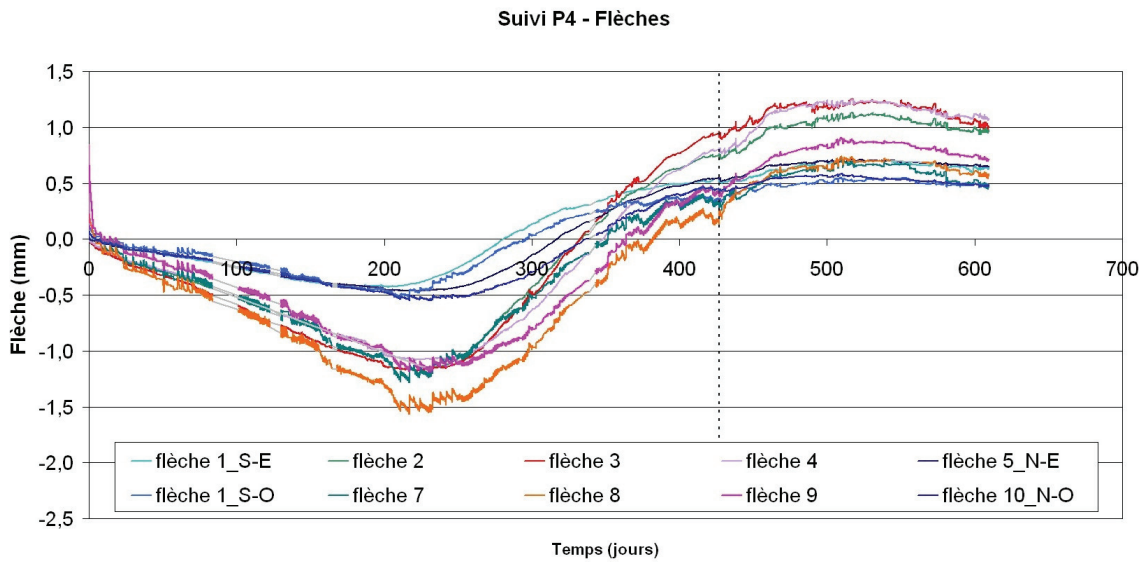


Figure A7. 18 : suivi des flèches – poutre P4

## A4.4 Fonctionnement structurel dans le cadre de la théorie des poutres

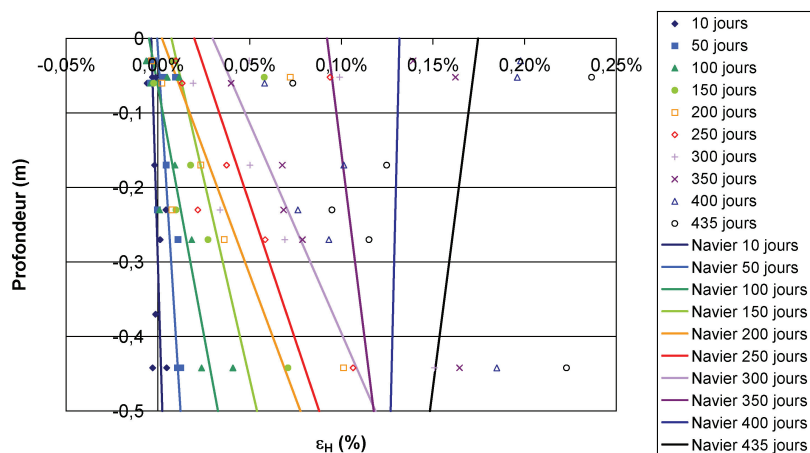


Figure A7. 19 : profil de déformation horizontale moyen – poutre P4

Tableau A7. 4 : profil de déformation horizontale moyen – poutre P4

Échéance (j)	Courbure $\chi$	Déformation moyenne	Ecart quadratique
10	-1,21E-04	-0,0006%	0,0028%
50	-2,54E-04	0,0060%	0,0044%
100	-7,53E-04	0,0139%	0,0078%
150	-9,34E-04	0,0307%	0,0215%
200	-1,51E-03	0,0400%	0,0293%
250	-1,36E-03	0,0539%	0,0305%
300	-1,78E-03	0,0742%	0,0329%
350	-5,09E-04	0,0742%	0,0466%
400	9,61E-05	0,1293%	0,0562%
435	5,25E-04	0,1614%	0,0735%

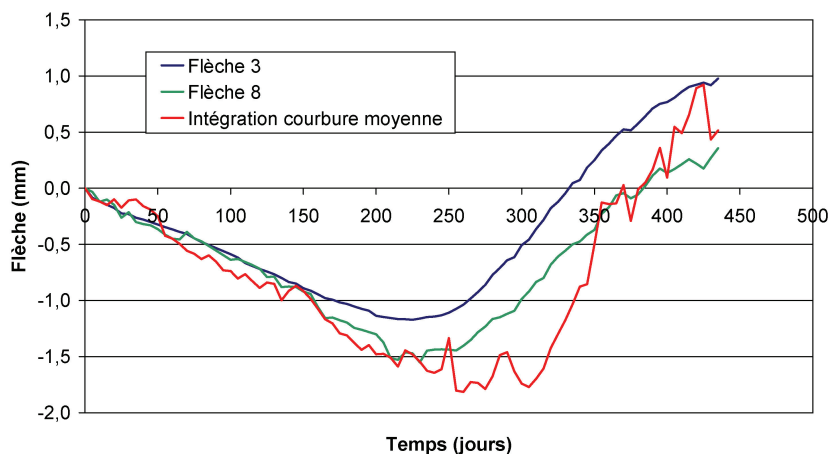


Figure A7. 20 : intégration de la courbure moyenne – poutre P4

## A5 Suivis dimensionnels de P5

### A5.1 Suivis dimensionnels locaux

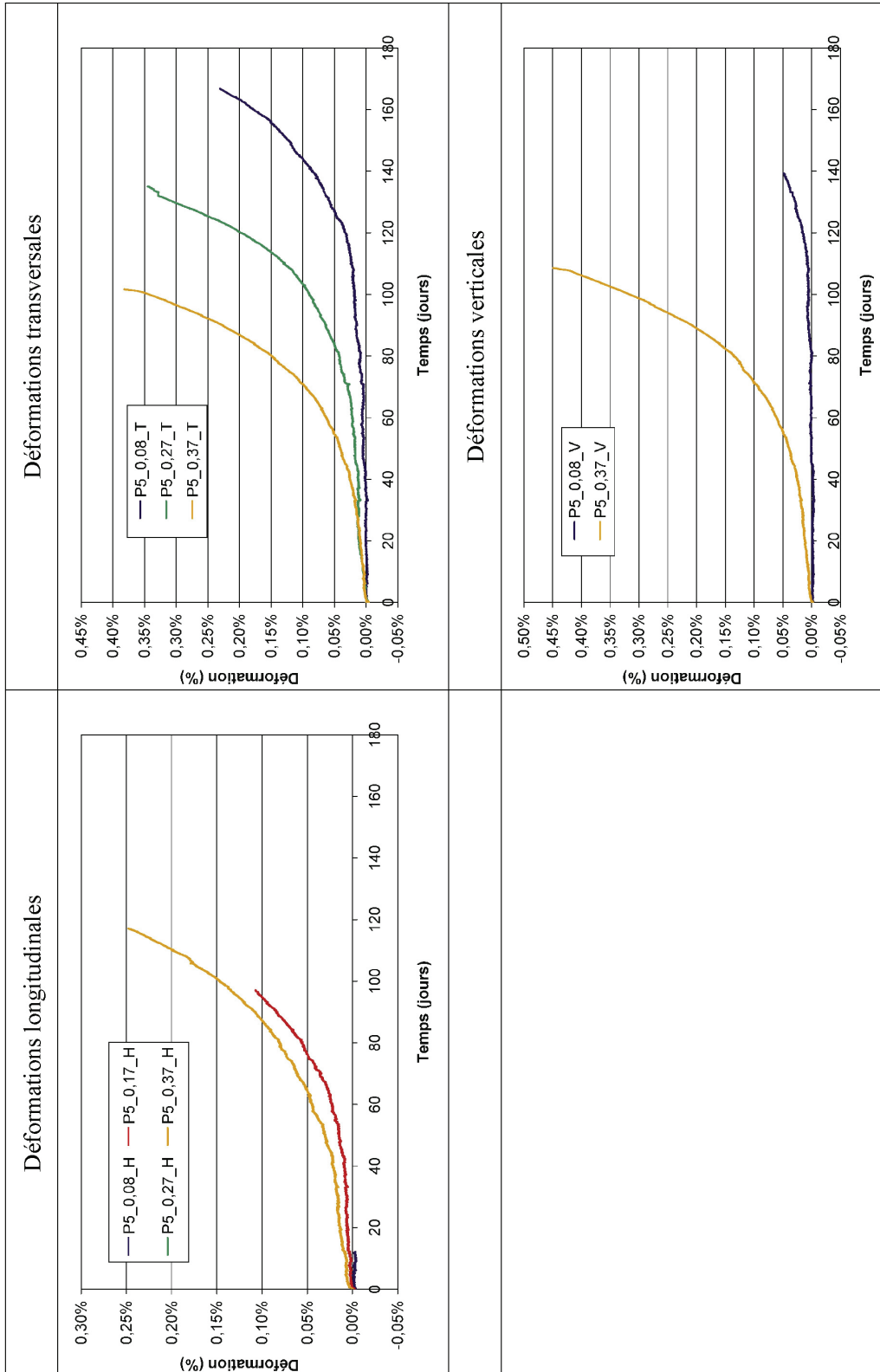


Figure A7. 21 : suivis dimensionnels locaux – poutre P5



### A5.2 Suivis dimensionnels globaux

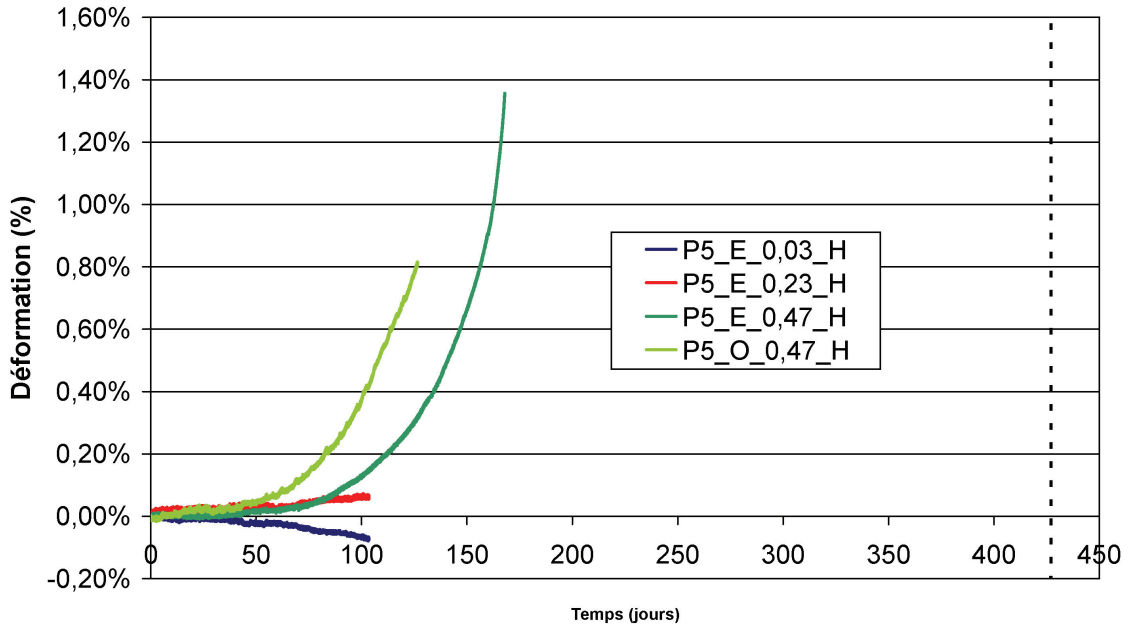


Figure A7. 22 : suivi des déformations horizontales globales – poutre P5

### A5.3 Suivis des flèches

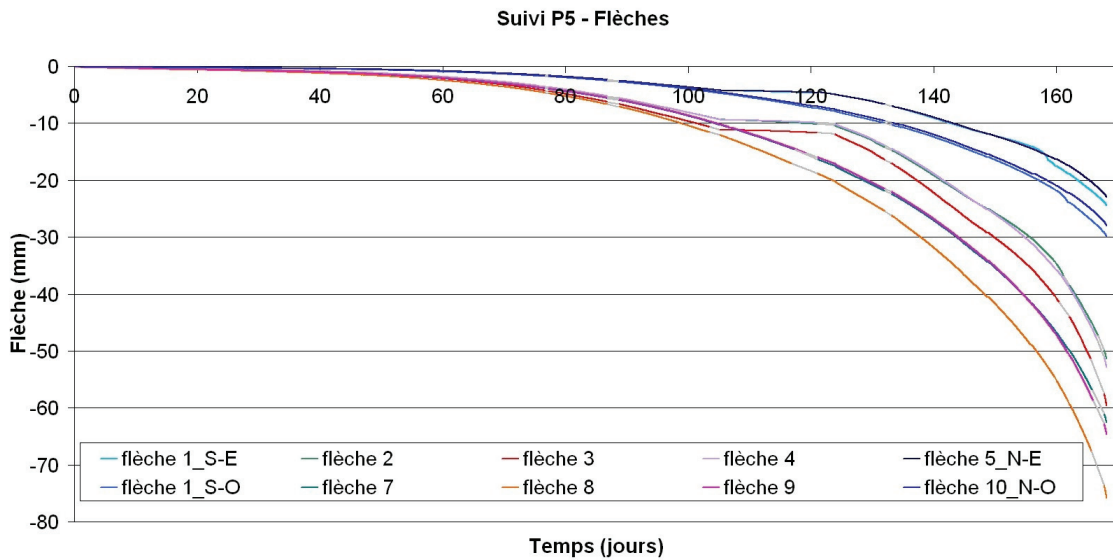


Figure A7. 23 : suivi des flèches – poutre P5

## A5.4 Fonctionnement structurel dans le cadre de la théorie des poutres

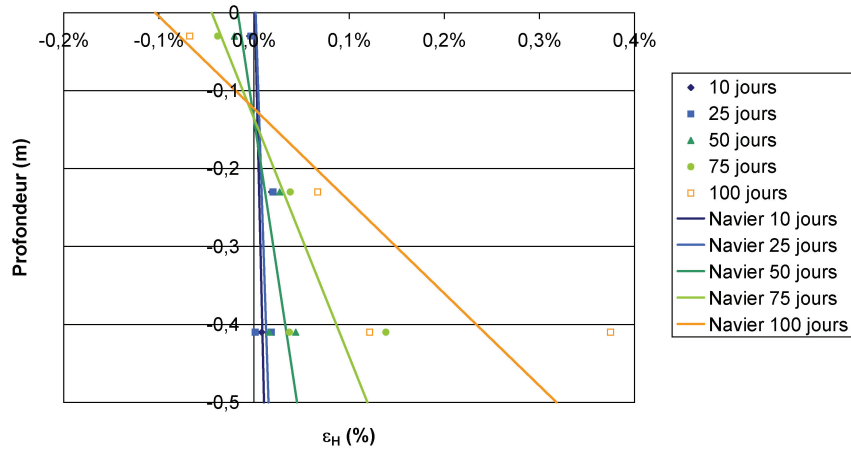


Figure A7. 24 : profil de déformation horizontale moyenne – poutre P5

Tableau A7. 5 : profil de déformation horizontal moyen – poutre P5

Échéance (j)	Courbure $\chi$	Déformation moyenne	Ecart quadratique
10	-1,91E-04	0,0058%	0,0079%
25	-2,70E-04	0,0086%	0,0093%
50	-1,25E-03	0,0141%	0,0133%
75	-3,27E-03	0,0375%	0,0361%
100	-8,44E-03	0,1071%	0,0906%

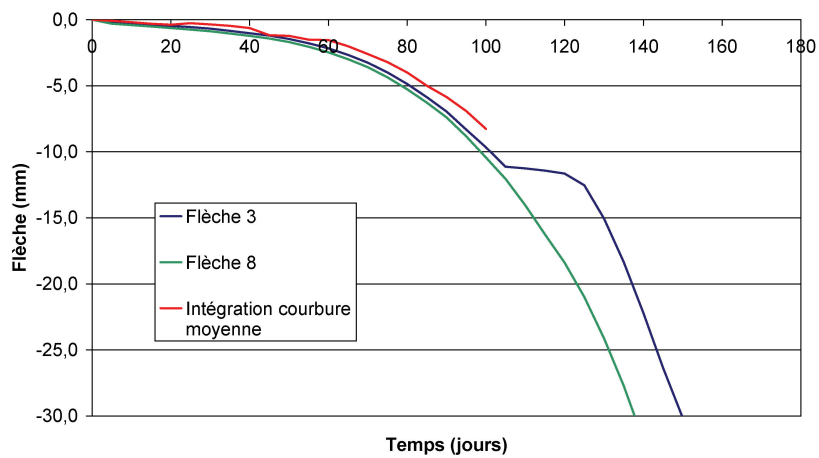


Figure A7. 25 : intégration de la courbure moyenne – poutre P5

## A6 Suivis dimensionnels de P6

### A6.1 Suivis dimensionnels locaux

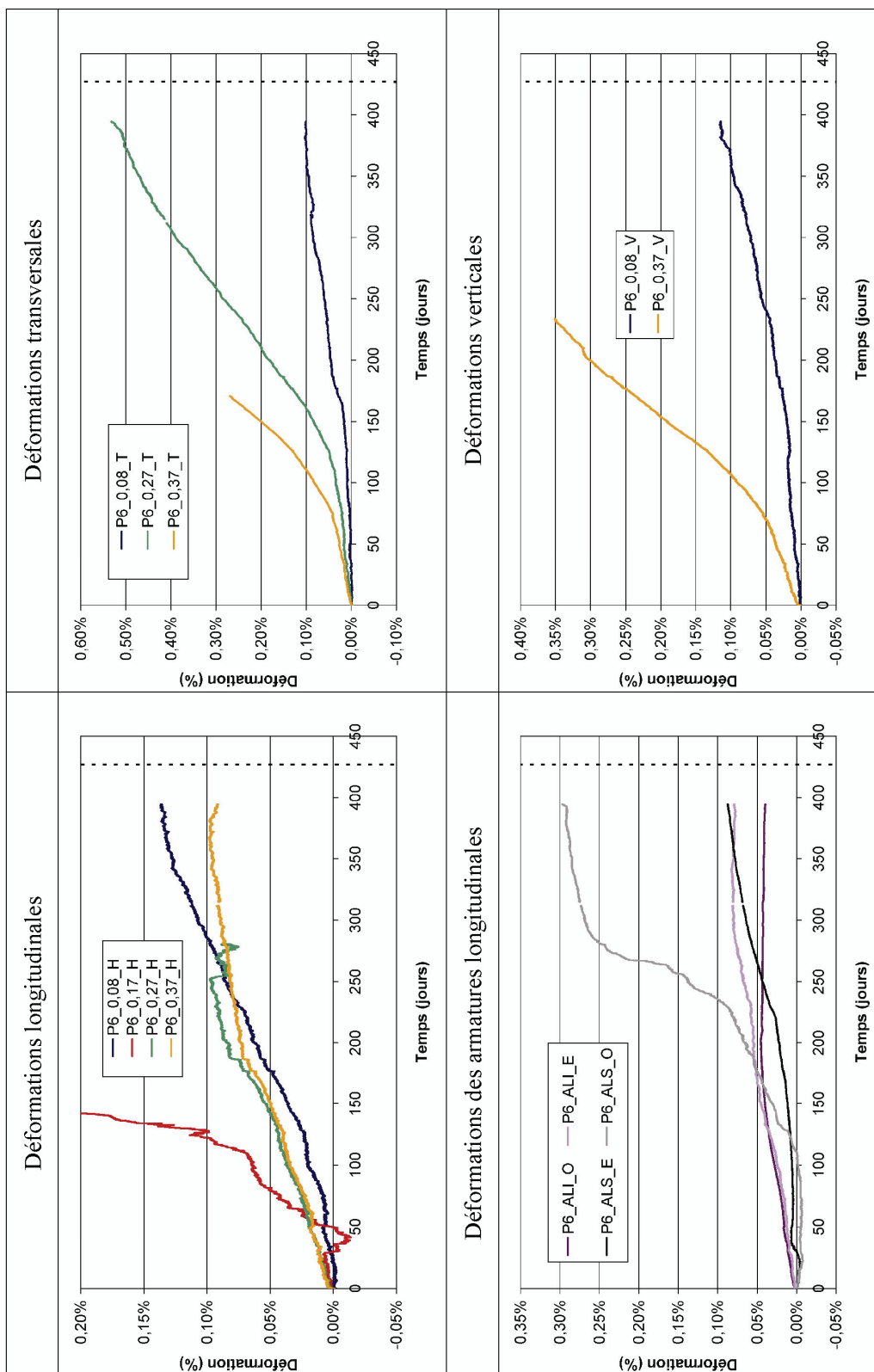


Figure A7.26 : suivis dimensionnels locaux – poutre P6

## A6.2 Suivis dimensionnels globaux

Suivi LVDT P6

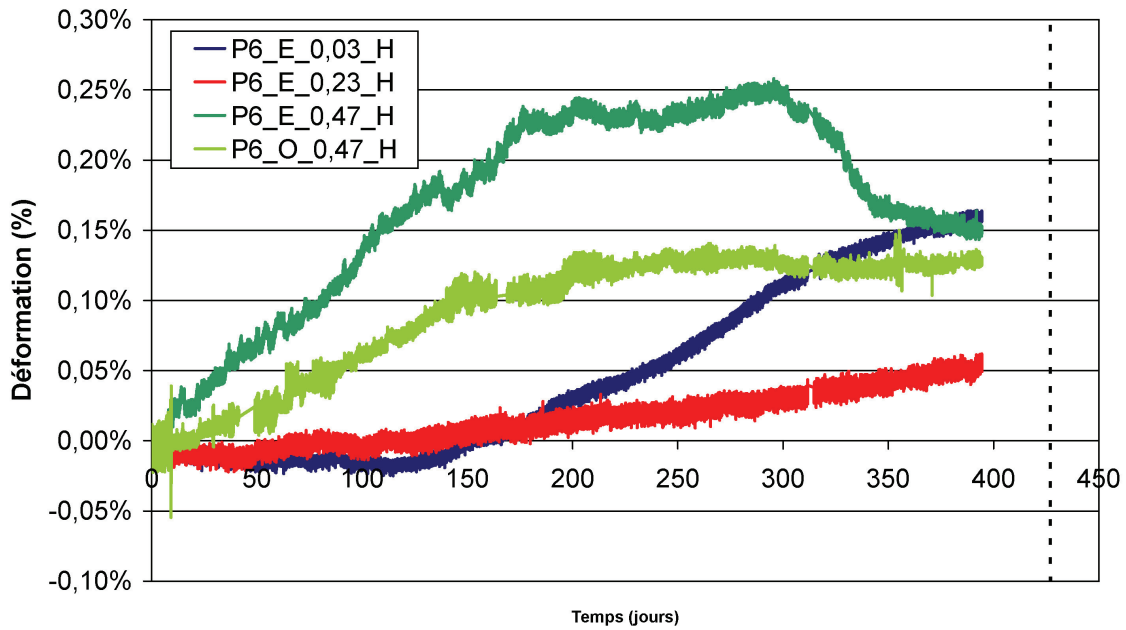


Figure A7. 27 : suivi des déformations horizontales globales – poutre P6

## A6.3 Suivis des flèches

Suivi P6 - Flèches

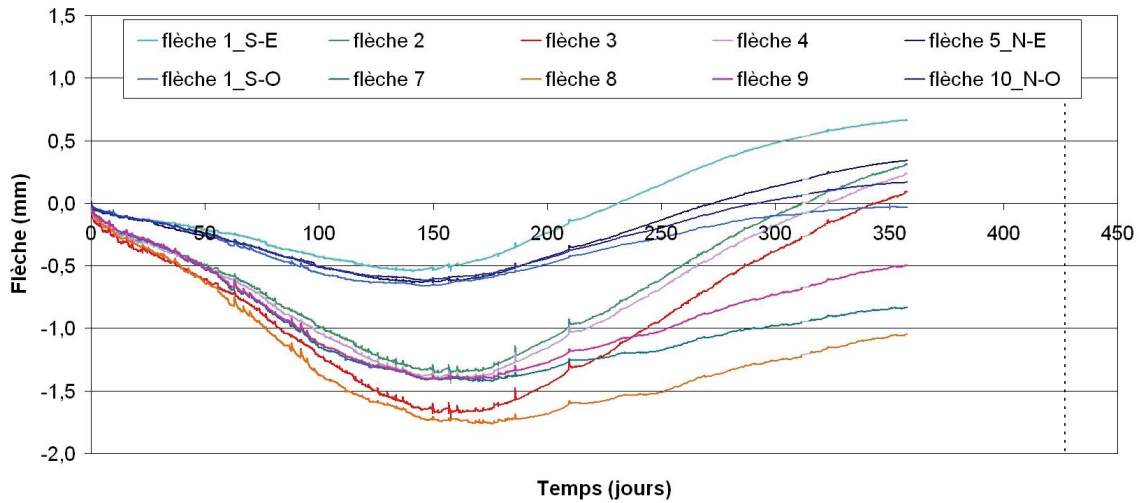


Figure A7. 28 : suivi des flèches – poutre P6

## A6.4 Fonctionnement structurel dans le cadre de la théorie des poutres

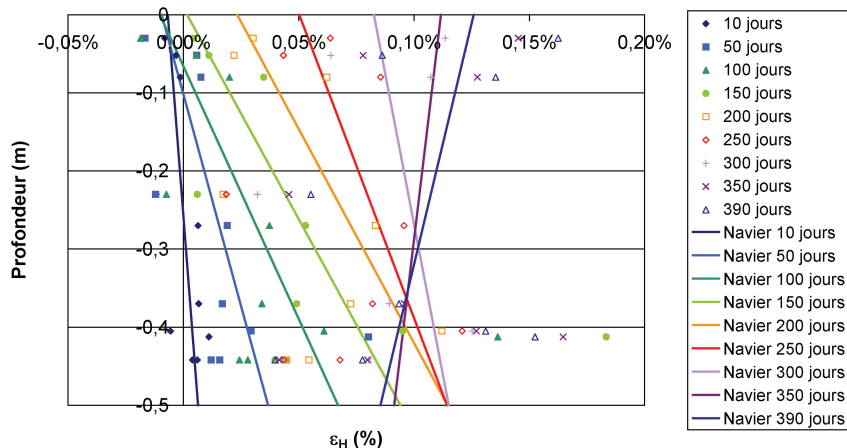


Figure A7. 29 : profil de déformation horizontale moyen – poutre P6

Tableau A7. 6 : profil de déformation horizontal moyen – poutre P6

Échéance (j)	Courbure $\chi$	Déformation moyenne	Ecart quadratique
10	-2,62E-04	-0,0002%	0,0058%
50	-9,22E-04	0,0136%	0,0206%
100	-1,55E-03	0,0284%	0,0329%
150	-1,85E-03	0,0478%	0,0413%
200	-1,82E-03	0,0689%	0,0526%
250	-1,28E-03	0,0823%	0,0523%
300	-6,49E-04	0,0988%	0,0595%
350	4,05E-04	0,1015%	0,0402%
390	8,09E-04	0,1056%	0,0387%

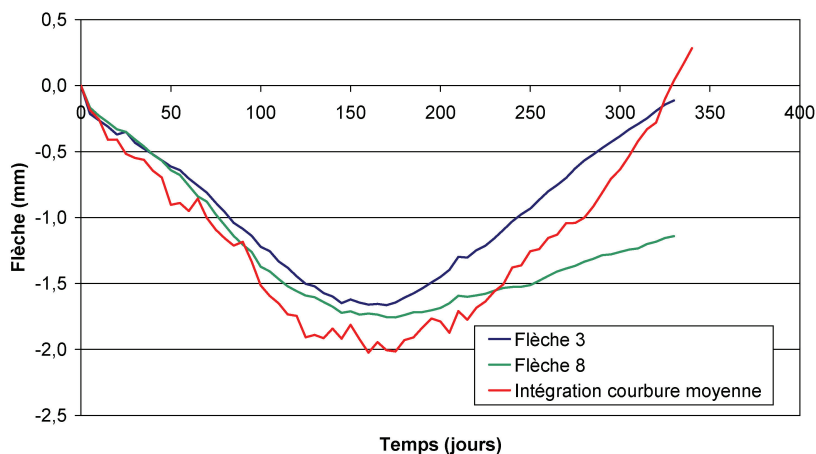


Figure A7. 30 : intégration de la courbure moyenne – poutre P6

## A7 Synthèse du suivi des flèches

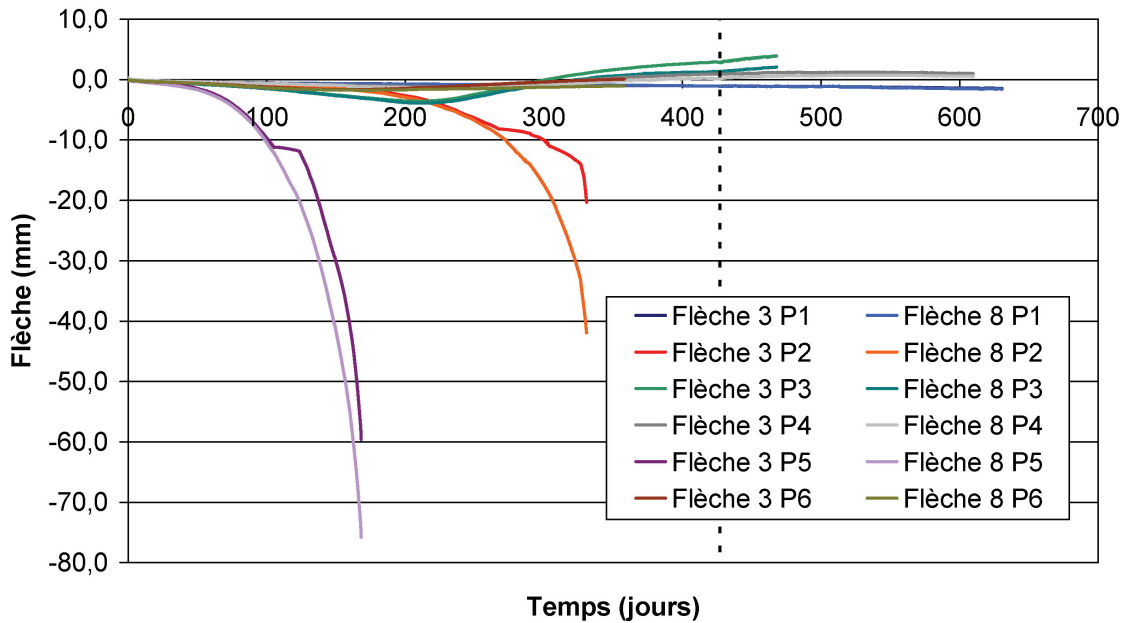


Figure A7.31 : suivi des flèches des poutres

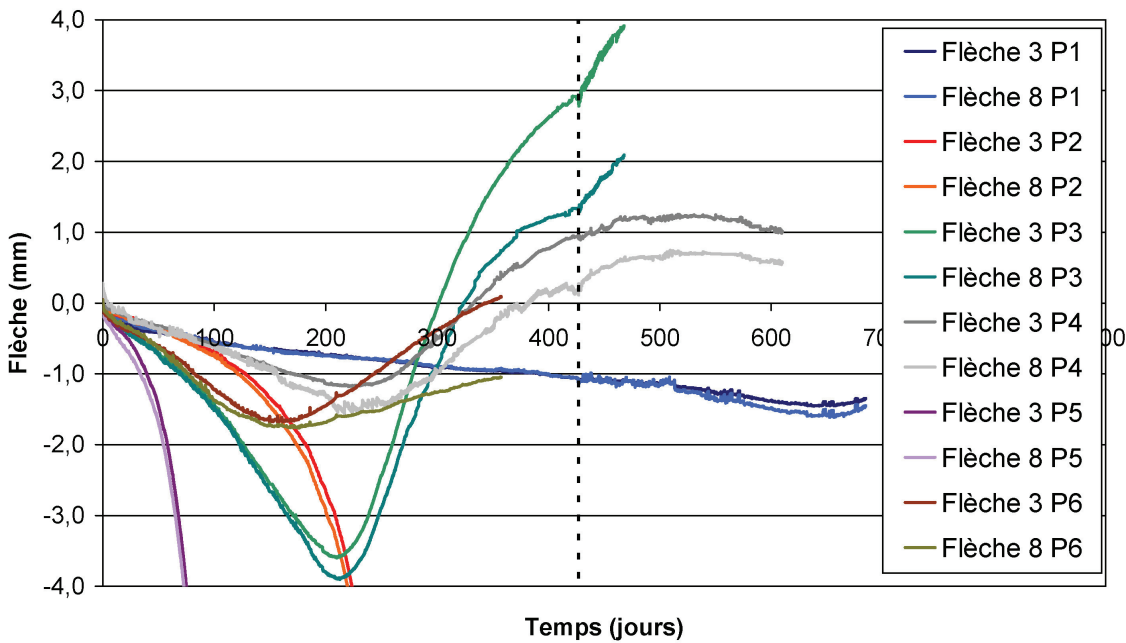


Figure A7.32 : suivi des flèches des poutres (zoom)

## A8 Synthèse du suivi massique global

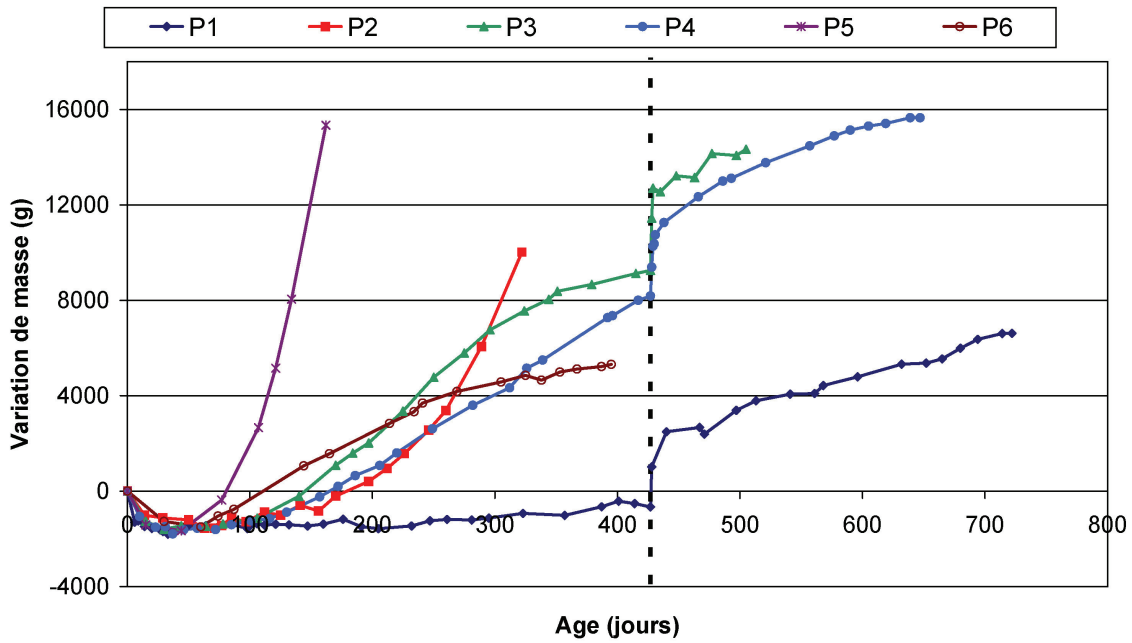


Figure A7.33 : suivi massique global des poutres

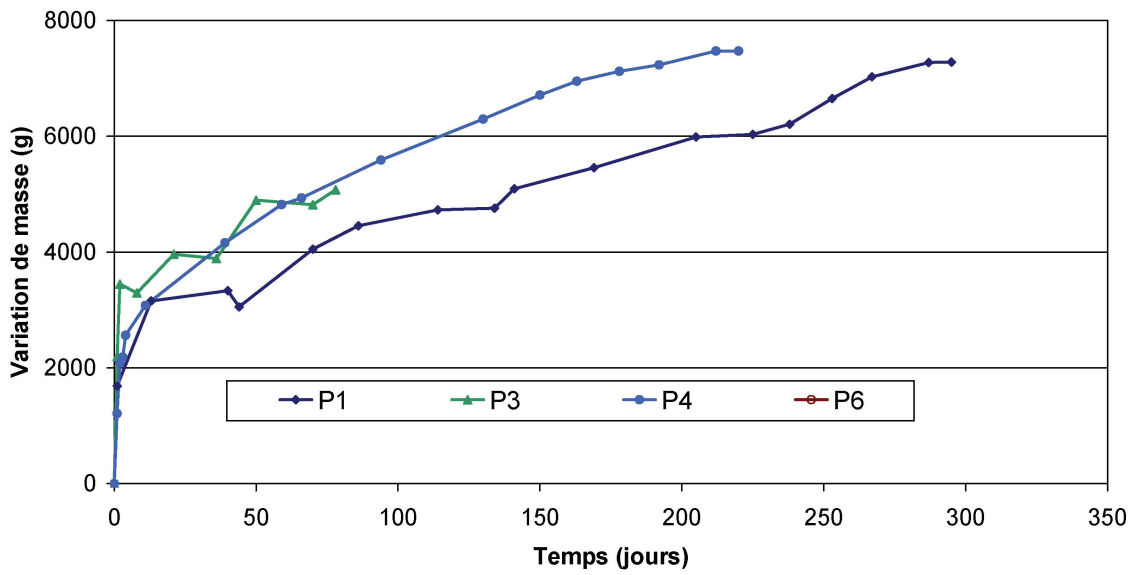


Figure A7.34 : suivi massique global des poutres après recalage du temps et des masses à l'instant de remouillage





---

## Annexe 8 Détail des calculs de modélisation des poutres

<b>A1</b>	<b>Calcul d'incertitude des modélisations hydriques .....</b>	<b>561</b>
A1.1	Calcul d'incertitude du paramètre P du modèle de comportement hydrique binaire des poutres .....	561
A1.2	Calcul d'incertitude du paramètre D du modèle de comportement hydrique de gonflement libre pondéré par la cinétique d'imbibition globale.....	563
<b>A2</b>	<b>Modélisation RdM des poutres .....</b>	<b>564</b>
A2.1	Principe de modélisation .....	564
A2.2	Cas d'une poutre non armée avec module d'Young considéré constant .....	566
A2.2.1	Résolution du système .....	566
A2.2.2	Incertitude sur les déformations et les flèches – modèle de comportement hydrique binaire .....	567
A2.2.3	Incertitude sur les déformations et les flèches – modèle de comportement hydrique de gonflement libre pondéré .....	568
A2.3	Cas d'une poutre non armée avec variation du module d'Young sous les effets d'une réaction de gonflement interne .....	569
A2.3.1	Résolution du système .....	569
A2.3.2	Incertitude sur les déformations et les flèches – modèle de comportement hydrique binaire .....	570
A2.3.3	Incertitude sur les déformations et les flèches – modèle de comportement hydrique de gonflement libre pondéré .....	572
A2.4	Cas d'une poutre armée avec module d'Young considéré constant.....	574
A2.5	Cas d'une poutre armée avec variation du module d'Young sous les effets d'une réaction de gonflement interne .....	575
A2.5.1	Résolution du système .....	575
A2.5.2	Incertitude sur les déformations et les flèches – modèle de comportement hydrique binaire .....	576
A2.5.3	Incertitude sur les déformations et les flèches – modèle de comportement hydrique de gonflement libre pondéré .....	577



## A1 Calcul d'incertitude des modélisations hydriques

Dans le Chapitre 5, on propose différentes modélisations afin de retranscrire les mouvements hydriques dans les structures. Cette section propose un calcul des incertitudes inhérentes aux différents calculs menés.

### A1.1 Calcul d'incertitude du paramètre P du modèle de comportement hydrique binaire des poutres

L'expression du paramètre P du modèle de comportement hydrique binaire des poutres est donnée par la relation (1) :

$$\begin{aligned}
 P &= \left( \frac{\Delta M_{\text{global}}(t) - M_v \cdot \int_{\text{ps}} \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\gamma} (z, t) \cdot dz}{M_v \cdot \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\text{épreuve}} (\infty)} \right) \cdot \frac{1 + \exp\left(-\frac{t - \tau_{1\_m}}{\tau_{c\_m}}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{c\_m}}\right)} \\
 &= \left( \frac{\text{Pesée} - \text{Gamma}}{M_v \cdot \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\text{épreuve}} (\infty)} \right) \cdot \frac{1 + \exp\left(-\frac{t - \tau_{1\_m}}{\tau_{c\_m}}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{c\_m}}\right)} \\
 &= f\left(\text{Pesée}, \text{Gamma}, \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\text{épreuve}} (\infty), \tau_{c\_m}, \tau_{1\_m}\right)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Par conséquent, il vient :

$$\begin{aligned}
 dP &= \frac{\partial P}{\partial \text{Pesée}} \cdot d\text{Pesée} + \frac{\partial P}{\partial \text{Gamma}} \cdot d\text{Gamma} + \frac{\partial P}{\partial \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\text{épreuve}} (\infty)} \cdot d\left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\text{épreuve}} (\infty) \\
 &+ \frac{\partial P}{\partial \tau_{c\_m}} \cdot d\tau_{c\_m} + \frac{\partial P}{\partial \tau_{1\_m}} \cdot d\tau_{1\_m}
 \end{aligned} \tag{2}$$

En considérant les sources d'incertitude comme indépendantes, il vient (3).

$$u_P = \sqrt{\left( \left( \frac{\partial P}{\partial \text{Pesée}} \right)^2 \cdot u_{\text{Pesée}}^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial \text{Gamma}} \right)^2 \cdot u_{\text{Gamma}}^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\text{épreuve}} (\infty)} \right)^2 \cdot u_{\left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\text{épreuve}} (\infty)}^2 \right.} \quad (3)$$

$$\left. + \left( \frac{\partial P}{\partial \tau_{c\_m}} \right)^2 \cdot u_{\tau_{c\_m}}^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial \tau_{l\_m}} \right)^2 \cdot u_{\tau_{l\_m}}^2 \right.}$$

Le calcul des dérivées partielles donne les résultats suivants :

$$\frac{\partial P}{\partial \text{Pesée}} = \frac{1}{M_v \cdot \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\text{épreuve}} (\infty)} \cdot \frac{1}{S(t)} \quad (4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \text{Gamma}} = - \frac{1}{M_v \cdot \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\text{épreuve}} (\infty)} \cdot \frac{1}{S(t)} \quad (5)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\text{épreuve}} (\infty)} = - \frac{\frac{\Delta M_{\text{global}}(t)}{S_p} - M_v \cdot \int_{ps} \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\gamma} (z, t) \cdot dz}{M_v \cdot \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\text{épreuve}} (\infty)} \cdot \frac{1}{S(t)} \quad (6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau_{c\_m}} = \frac{\frac{\Delta M_{\text{glob}}(t)}{S_p} - M_v \cdot \int_{ps} \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\gamma} dz}{M_v \cdot \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\text{épreuve}} (\infty)} \cdot \frac{e^{\left( \frac{t+\tau_{l\_m}}{\tau_{c\_m}} \right)} \cdot t - e^{\left( \frac{t+\tau_{l\_m}}{\tau_{c\_m}} \right)} \cdot \tau_{l\_m} + e^{\left( \frac{t}{\tau_{c\_m}} \right)} \cdot t + e^{\left( \frac{\tau_{l\_m}}{\tau_{c\_m}} \right)} \cdot \tau_{l\_m}}{\left( e^{\left( \frac{t}{\tau_{c\_m}} \right)} - 1 \right)^2 \cdot \tau_{c\_m}^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \tau_{l\_m}} = \frac{\frac{\Delta M_{\text{global}}(t)}{S_p} - M_v \cdot \int_{ps} \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\gamma} (z, t) \cdot dz}{M_v \cdot \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\text{épreuve}} (\infty)} \cdot \frac{e^{\left( \frac{\tau_{l\_m}}{\tau_{c\_m}} \right)}}{\left( e^{\left( \frac{t}{\tau_{c\_m}} \right)} - 1 \right) \cdot \tau_{c\_m}} \quad (8)$$

Avec :

$$S(t) = \frac{1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{c\_m}}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{t - \tau_{l\_m}}{\tau_{c\_m}}\right)} \quad (9)$$

Les valeurs d'incertitude des différents paramètres sont les suivantes :

$$\begin{cases} u_{\text{Pesée}} = 130 \text{ g/m}^2 \\ u_{\text{Gamma}} = 530 \text{ g/m}^2 \\ u_{\left(\frac{\delta m}{m}\right)_{\text{épreuve}}(\infty)} = \text{écart type déterminé par les essais de gonflement libre} \\ u_{\tau_{c\_m}} = u_{\tau_{l\_m}} = 20 \text{ jours} \end{cases}$$

Les incertitudes de pesée et de gammadensimétrie sont issues des essais de qualification de ces appareils. Les incertitudes sur les paramètres  $\tau_{c\_m}$  et  $\tau_{l\_m}$  ont été prises égales à 20 jours : devant le manque de données expérimentales permettant de confirmer notre hypothèse de cinétique de remontée du front d'imbibition, il a été choisi de réaliser une estimation sécuritaire de l'incertitude en choisissant cette valeur élevée. La valeur des incertitudes est donnée dans le Chapitre 4. Pour les poutres P1, P3, P4 et P6 dont les expansions restent modérées, l'incertitude est de l'ordre de 5 cm. En revanche, pour les poutres P2 et P5, elle est de l'ordre de 20 cm et caractérise les difficultés d'évaluation de la position du front d'imbibition pour des structures aussi réactives.

### **A1.2 Calcul d'incertitude du paramètre D du modèle de comportement hydrique de gonflement libre pondéré par la cinétique d'imbibition globale**

L'expression du paramètre de D du modèle de comportement hydrique de gonflement libre pondéré par la cinétique d'imbibition globale de la poutre est donnée par :

$$\begin{aligned} D &= \left( \frac{\frac{\Delta M_{\text{global}}(t)}{S_p} - M_v \cdot \int_{ps} \left(\frac{\delta m}{m}\right)_{\gamma}(z, t) \cdot dz}{M_v \cdot \left(\frac{\delta m}{m}\right)_{\text{épreuve}}(t)} - 0,07 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \\ &= \left( \frac{\text{Pesée} - \text{Gamma}}{M_v \cdot \left(\frac{\delta m}{m}\right)_{\text{épreuve}}(t)} - 0,07 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \\ &= f \left( \text{Pesée}, \text{Gamma}, \left(\frac{\delta m}{m}\right)_{\text{épreuve}}(t) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

En considérant les sources d'incertitude comme indépendantes, il vient :

$$u_D = \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial \text{Pesée}}\right)^2 \cdot u_{\text{Pesée}}^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial \text{Gamma}}\right)^2 \cdot u_{\text{Gamma}}^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial \left(\frac{\delta m}{m}\right)_{\text{épreuve}}(t)}\right)^2 \cdot u_{\left(\frac{\delta m}{m}\right)_{\text{épreuve}}(t)}^2} \quad (11)$$

Le calcul des dérivées partielles donne les résultats suivants :

$$\frac{\partial D}{\partial \text{Pesée}} = \frac{1}{M_v \cdot \left(\frac{\delta m}{m}\right)_{\text{épreuve}}(t)} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (12)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \text{Gamma}} = -\frac{1}{M_v \cdot \left(\frac{\delta m}{m}\right)_{\text{épreuve}}(t)} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (13)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \left(\frac{\delta m}{m}\right)_{\text{épreuve}}(t)} = -\frac{\frac{\Delta M_{\text{global}}(t)}{S_p} - M_v \cdot \int_{ps} \left(\frac{\delta m}{m}\right)_{\gamma}(z, t) \cdot dz}{M_v \cdot \left(\frac{\delta m}{m}\right)_{\text{épreuve}}^2(t)} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (14)$$

Tout comme pour le paramètre P, l'incertitude sur D est fonction des poutres considérées. Pour des poutres fortement armées, les incertitudes restent modérées et de l'ordre de 1 à  $2 \cdot 10^{-3} \text{ m.jour}^{-1/2}$ . Pour les poutres non armées dont les déformations sont bien plus conséquentes, l'incertitude est de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-3} \text{ m.jour}^{-1/2}$  et caractérise les plus fortes variations hydriques dans ces structures.

## A2 Modélisation RdM des poutres

### A2.1 Principe de modélisation

Par convention, l'axe suivant la hauteur de la poutre (z) est orienté vers le haut et son origine est fixée au niveau de la face supérieure de la poutre. Par conséquent, les profondeurs considérées pour les structures sont négatives.

Principe de la modélisation RdM des poutres :

1. Détermination du profil de variation massique au cours du temps : évaluation du profil de séchage et de la hauteur de remontée du front d'imbibition (les dimensions sont exprimées en m).

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta M(t) &= M_v \cdot S \cdot \int_0^h \frac{\delta m}{m} dz \\ &= M_v \cdot S \cdot \left[ \int_0^d \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\text{séchage}}(z, t) \cdot dz + \int_{h+P(t)}^h \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\text{imbibition}}(t) \cdot dz \right] \\ M_v &= \text{masse volumique} = \text{donnée d'entrée} \\ S &= 3 \cdot 0,25 = \text{section transversale} \\ \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\text{séchage}}(z, t) &= \text{profil de séchage (gammadensimétrie)} = \text{donnée d'entrée} \\ P(t) &= \text{hauteur de remontée du front d'imbibition} = \text{donnée d'entrée} \\ h &= -0,5 = \text{hauteur de section} \\ d &= \text{profondeur de séchage} \\ \left( \frac{\delta m}{m} \right)_{\text{imbibition}}(t) &= \text{variation massique du matériau imbibé} = \text{donnée d'entrée} \end{aligned} \right.$$

2. Détermination du profil de déformation imposée à partir du profil hydrique  
a. Partie séchante :

$$\left\{ \begin{aligned} z &\in [0; d] \\ \varepsilon_{\text{imp}}(z, t) &= \frac{\varepsilon_{\text{ret}}(t)}{-0,01 - d} \cdot (z - d) \\ \varepsilon_{\text{ret}}(t) &= \text{déformation de retrait à } 0,01 \text{ m de profondeur établie à partir des} \\ &\text{résultats d'essais sur éprouvettes de gonflement libre et des variations massiques} \\ &\text{locales de la poutre établies par gammadensimétrie} \end{aligned} \right.$$

- b. Partie affectée par le front d'imbibition :

$$\left\{ \begin{aligned} z &\in [h + P(t); h] \\ \varepsilon_{\text{imp}}(t) &= \varepsilon_{\text{imp\_imbibition}}(t) \\ \varepsilon_{\text{imp\_imbibition}}(t) &= \text{déformation imposée dans la partie imbibée fonction} \\ &\text{de la modélisation considérée} \end{aligned} \right.$$

- c. Partie non affectée par les échanges hydriques :

$$\left\{ \begin{aligned} z &\in [d; h + P(t)] \\ \varepsilon_{\text{imp}}(t) &= \varepsilon_{\text{imp\_scellé}}(t) \\ \varepsilon_{\text{imp\_scellé}}(t) &= \text{déformation imposée dans la partie non soumise à un échange} \\ &\text{hydrique fonction de la modélisation considérée} \end{aligned} \right.$$

## 3. Ecriture et résolution des équations d'équilibre des efforts intérieurs

$$\begin{cases} N = \int_0^h \sigma(z) \cdot b \cdot dz = 0 \\ M = \int_0^h \sigma(z) \cdot z \cdot b \cdot dz = 0 \\ b = \text{largeur de la poutre} \end{cases} \quad (15)$$

Pour résoudre le problème, on pose les deux hypothèses suivantes :

- Hypothèse de chemo-élasticité :

$$\sigma(z) = E \cdot (\varepsilon(z) - \varepsilon_{\text{imp}}(z)) \quad (16)$$

- Hypothèse de validité de la théorie des poutres (les sections droites restent planes) :

$$\varepsilon = \varepsilon_0' \cdot z + \varepsilon_0 \quad (17)$$

## A2.2 Cas d'une poutre non armée avec module d'Young considéré constant

### A2.2.1 Résolution du système

La combinaison des relations (15), (16) et (17) aboutit au système (18) de deux équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} N = \int_0^h \sigma(z) \cdot b \cdot dz = 0 \\ M = \int_0^h \sigma(z) \cdot z \cdot b \cdot dz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_0' \cdot \frac{h^2}{2} + \varepsilon_0 \cdot h = \int_0^h \varepsilon_{\text{imp}}(z) \cdot dz = I_n \\ \varepsilon_0' \cdot \frac{h^3}{3} + \varepsilon_0 \cdot \frac{h^2}{2} = \int_0^h \varepsilon_{\text{imp}}(z) \cdot z \cdot dz = I_m \end{cases} \quad (18)$$

La résolution du système aboutit aux relations données par (19) :

$$\begin{cases} \varepsilon_0' = -\frac{12}{h^3} \cdot \left( \frac{h}{2} \cdot I_n - I_m \right) \\ \varepsilon_0 = \frac{4}{h} \cdot I_n - \frac{6}{h^2} \cdot I_m \end{cases} \quad (19)$$



Le calcul des intégrales  $I_n$  et  $I_m$  donne les résultats suivant :

$$\begin{cases} I_n(t) = \frac{\varepsilon_{ret}(t)}{-0,01-d} \cdot \left(-\frac{d^2}{2}\right) + \varepsilon_{imp\_imbib}(t) \cdot (h - P(t)) + \varepsilon_{imp\_scellé}(t) \cdot (P(t) - d) \\ I_m(t) = \frac{\varepsilon_{ret}(t)}{-0,01-d} \cdot \left(-\frac{d^3}{6}\right) + \varepsilon_{imp\_imbib}(t) \cdot \left(\frac{h^2}{2} - \frac{P(t)^2}{2}\right) + \varepsilon_{imp\_scellé}(t) \cdot \left(\frac{P(t)^2}{2} - \frac{d^2}{2}\right) \end{cases} \quad (20)$$

### A2.2.2 Incertitude sur les déformations et les flèches – modèle de comportement hydrique binaire

Dans le cas du modèle de comportement hydrique binaire (cf. section A1.1), il est possible d'écrire :

$$P(t) = h + P \cdot S(t) \quad (21)$$

Dans ce cas, il vient :

$$\begin{cases} I_n(t) = \frac{\varepsilon_{ret}(t)}{-0,01-d} \cdot \left(-\frac{d^2}{2}\right) - \varepsilon_{imp\_imbib}(t) \cdot P \cdot S(t) + \varepsilon_{imp\_scellé}(t) \cdot (h + P \cdot S(t) - d) \\ \quad = f(\varepsilon_{ret}, \varepsilon_{imp\_imbib}, \varepsilon_{imp\_scellé}, P, d) \\ I_m(t) = \frac{\varepsilon_{ret}(t)}{-0,01-d} \cdot \left(-\frac{d^3}{6}\right) + \varepsilon_{imp\_imbib}(t) \cdot \left(\frac{h^2}{2} - \frac{(h + P \cdot S(t))^2}{2}\right) + \varepsilon_{imp\_scellé}(t) \cdot \left(\frac{(h + P \cdot S(t))^2}{2} - \frac{d^2}{2}\right) \\ \quad = g(\varepsilon_{ret}, \varepsilon_{imp\_imbib}, \varepsilon_{imp\_scellé}, P, d) \end{cases} \quad (22)$$

De par l'écriture du champ de déformation, les sources d'incertitudes de  $I_n$  et  $I_m$  sont également celles de  $\varepsilon$ . Par conséquent, en considérant les sources d'incertitude comme indépendantes, il vient :

$$u_{\varepsilon(z)} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varepsilon(z)}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} \cdot u_{\varepsilon_{imp\_imbib}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon(z)}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} \cdot u_{\varepsilon_{imp\_scellé}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon(z)}{\partial \varepsilon_{ret}} \cdot u_{\varepsilon_{ret}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon(z)}{\partial P} \cdot u_P\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon(z)}{\partial d} \cdot u_d\right)^2} \quad (23)$$

En notant  $X_i$  chacune des sources d'incertitude, il vient :

$$u_{\varepsilon(z)} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^5 \frac{\partial \varepsilon(z)}{\partial X_i} u_{X_i}\right)^2} \quad (24)$$

De par l'écriture du champ de déformation, on peut écrire :

$$\frac{\partial \varepsilon(z)}{\partial X_i} = \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial X_i} \cdot z + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial X_i} \quad (25)$$

Enfin, en combinant les équations (19) et (25), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon_0'}{\partial X_i} = -\frac{12}{h^3} \cdot \left( \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial I_n}{\partial X_i} - \frac{\partial I_m}{\partial X_i} \right) \\ \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial X_i} = \frac{4}{h} \cdot \frac{\partial I_n}{\partial X_i} - \frac{6}{h^2} \cdot \frac{\partial I_m}{\partial X_i} \end{cases} \quad (26)$$

Le calcul des dérivées partielles donne :

$\frac{\partial I_n}{\partial \varepsilon_{\text{imp\_imbib}}} = -P \cdot S(t)$	$\frac{\partial I_m}{\partial \varepsilon_{\text{imp\_imbib}}} = \frac{h^2}{2} - \frac{(h + P \cdot S(t))^2}{2}$
$\frac{\partial I_n}{\partial \varepsilon_{\text{imp\_scellé}}} = h + P \cdot S(t) - d$	$\frac{\partial I_m}{\partial \varepsilon_{\text{imp\_scellé}}} = \frac{(h + P \cdot S(t))^2}{2} - \frac{d^2}{2}$
$\frac{\partial I_n}{\partial \varepsilon_{\text{ret}}} = \frac{1}{-0,01 - d} \cdot \left( -\frac{d^2}{2} \right)$	$\frac{\partial I_m}{\partial \varepsilon_{\text{ret}}} = \frac{1}{-0,01 - d} \cdot \left( -\frac{d^3}{6} \right)$
$\frac{\partial I_n}{\partial P} = (-\varepsilon_{\text{imp\_imbib}} + \varepsilon_{\text{imp\_scellé}}) \cdot S(t)$	$\frac{\partial I_m}{\partial P} = (\varepsilon_{\text{imp\_scellé}} - \varepsilon_{\text{imp\_imbib}}) \cdot (h + P \cdot S(t)) \cdot S(t)$
$\frac{\partial I_n}{\partial d} = \frac{100 \cdot d \cdot (50 \cdot d + 1)}{(100 \cdot d + 1)^2} \varepsilon_{\text{ret}} - \varepsilon_{\text{imp\_scellé}}$	$\frac{\partial I_m}{\partial d} = \frac{50 \cdot d^2 \cdot (200 \cdot d + 3)}{3 \cdot (100 \cdot d + 1)^2} \varepsilon_{\text{ret}} - d \cdot \varepsilon_{\text{imp\_scellé}}$

### A2.2.3 Incertitude sur les déformations et les flèches – modèle de comportement hydrique de gonflement libre pondéré

Dans le cas du modèle de comportement hydrique de gonflement libre pondéré par la cinétique d'imbibition globale de la poutre (cf. section A1.2), il est possible d'écrire :

$$P(t) = h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t} \quad (27)$$

Dans ce cas, il vient :

$$\begin{cases} I_n(t) = \frac{\varepsilon_{\text{ret}}(t)}{-0,01 - d} \cdot \left( -\frac{d^2}{2} \right) - \varepsilon_{\text{imp\_imbib}}(t) \cdot (0,07 + D \cdot \sqrt{t}) + \varepsilon_{\text{imp\_scellé}}(t) \cdot (h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t} - d) \\ \quad = f(\varepsilon_{\text{ret}}, \varepsilon_{\text{imp\_imbib}}, \varepsilon_{\text{imp\_scellé}}, D, d) \\ I_m(t) = \frac{\varepsilon_{\text{ret}}(t)}{-0,01 - d} \cdot \left( -\frac{d^3}{6} \right) + \varepsilon_{\text{imp\_imbib}}(t) \cdot \left( \frac{h^2}{2} - \frac{(h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t})^2}{2} \right) + \varepsilon_{\text{imp\_scellé}}(t) \cdot \left( \frac{(h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t})^2}{2} - \frac{d^2}{2} \right) \\ \quad = g(\varepsilon_{\text{ret}}, \varepsilon_{\text{imp\_imbib}}, \varepsilon_{\text{imp\_scellé}}, P, d) \end{cases} \quad (28)$$

Le calcul des dérivées partielles donne :

$\frac{\partial I_n}{\partial \varepsilon_{\text{imp\_imbib}}} = -(0,07 + D \cdot \sqrt{t})$	$\frac{\partial I_m}{\partial \varepsilon_{\text{imp\_imbib}}} = -\frac{(0,07 + D \cdot \sqrt{t})(2h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t})^2}{2}$
$\frac{\partial I_n}{\partial \varepsilon_{\text{imp\_scellé}}} = h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t} - d$	$\frac{\partial I_m}{\partial \varepsilon_{\text{imp\_scellé}}} = -\frac{\left( (D \cdot \sqrt{t})^2 + 2D \cdot \sqrt{t} \cdot (h + 0,07) + h^2 \right) + 0,14h - d^2 + 0,0049}{2}$
$\frac{\partial I_n}{\partial \varepsilon_{\text{ret}}} = \frac{1}{-0,01 - d} \cdot \left( -\frac{d^2}{2} \right)$	$\frac{\partial I_m}{\partial \varepsilon_{\text{ret}}} = \frac{1}{-0,01 - d} \cdot \left( -\frac{d^3}{6} \right)$
$\frac{\partial I_n}{\partial D} = (-\varepsilon_{\text{imp\_imbib}} + \varepsilon_{\text{imp\_scellé}}) \cdot \sqrt{t}$	$\frac{\partial I_m}{\partial D} = (\varepsilon_{\text{imp\_scellé}} - \varepsilon_{\text{imp\_imbib}}) \cdot (h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t}) \cdot \sqrt{t}$
$\frac{\partial I_n}{\partial d} = -\frac{5 \cdot 10^{-5} \cdot \varepsilon_{\text{ret}}}{(d + 0,01)^2} + \frac{\varepsilon_{\text{ret}}}{2} - \varepsilon_{\text{imp\_scellé}}$	$\frac{\partial I_m}{\partial d} = \frac{\varepsilon_{\text{ret}}}{600 \cdot (100d + 0,01)^2} - \frac{d \cdot (3 \cdot \varepsilon_{\text{imp\_imbib}} - \varepsilon_{\text{ret}})}{3} - \frac{\varepsilon_{\text{ret}}}{600}$

### **A2.3 Cas d'une poutre non armée avec variation du module d'Young sous les effets d'une réaction de gonflement interne**

#### **A2.3.1 Résolution du système**

En considérant le développement progressif d'une RGI, on assiste à une dégradation des performances mécaniques impliquant notamment une diminution du module d'Young au cours du temps. Ainsi, la simplification du système d'équation (15) aboutissant à l'équation (18) n'est plus possible.

On considère ici que seule la partie affectée par le front d'imbibition subit une diminution brutale du module. Ainsi, il vient :

$$E = E(z) = \begin{cases} E_b & \text{si } z \in [0; h + P(t)] \\ E_{\text{red}} & \text{si } z \in [h + P(t); h] \end{cases} \quad (29)$$

$E_b$  = module d'Young du béton sain  
 $E_{\text{red}}$  = module d'Young dégradé suite au développement d'une RGI

En combinant les relations (15), (16), (17), et (29), il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \cdot \varepsilon'_0 + b \cdot \varepsilon_0 = I'_n = \int_0^h E(z) \cdot \varepsilon_{imp}(z) \cdot dz \\ a' \cdot \varepsilon'_0 + b' \cdot \varepsilon_0 = I'_m = \int_0^h E(z) \cdot \varepsilon_{imp}(z) \cdot z \cdot dz \\ a = E_b \cdot \frac{(h + P(t))^2}{2} + E_{red} \cdot \left( \frac{h^2}{2} - \frac{(h + P(t))^2}{2} \right) \\ b = E_b \cdot (h + P(t)) + E_{red} \cdot (-P(t)) \\ a' = E_b \cdot \frac{(h + P(t))^3}{3} + E_{red} \cdot \left( \frac{h^3}{3} - \frac{(h + P(t))^3}{3} \right) \\ b' = E_b \cdot \frac{(h + P(t))^2}{2} + E_{red} \cdot \left( \frac{h^2}{2} - \frac{(h + P(t))^2}{2} \right) \end{array} \right. \quad (30)$$

La solution de ce système est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon'_0 = \frac{b' \cdot I'_n - b \cdot I'_m}{\Delta} \\ \varepsilon_0 = \frac{a \cdot I'_m - a' \cdot I'_n}{\Delta} \\ \Delta = a \cdot b' - a' \cdot b \end{array} \right. \quad (31)$$

Le calcul des termes correspondant aux déformations imposées donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} I'_n = \frac{E_b \cdot \varepsilon_{ret}}{-0,01 - d} \cdot \left( -\frac{d^2}{2} \right) + E_b \cdot \varepsilon_{imp\_scellé} \cdot (h + P(t) - d) + E_{red} \cdot \varepsilon_{imp\_imbib} \cdot (-P(t)) \\ I'_m = \frac{E_b \cdot \varepsilon_{ret}}{-0,01 - d} \cdot \left( -\frac{d^3}{6} \right) + E_b \cdot \varepsilon_{imp\_scellé} \cdot \frac{(h + P(t))^2 - d^2}{2} + E_{red} \cdot \varepsilon_{imp\_imbib} \cdot \frac{h^2 - (h + P(t))^2}{2} \end{array} \right. \quad (32)$$

### A2.3.2 Incertitude sur les déformations et les flèches – modèle de comportement hydrique binaire

La prise en compte d'une variation du module d'Young du matériau affecté par la réaction de gonflement introduit une nouvelle source d'incertitude dans les calculs réalisés. Ainsi, l'écriture de l'incertitude sur les déformations s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{\varepsilon(z)} = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^7 \frac{\partial \varepsilon(z)}{\partial X_i} \mathbf{u}_{X_i} \right)^2} \\ X_1 = P ; X_2 = E_b ; X_3 = E_{red} ; X_4 = d \\ X_5 = \varepsilon_{imp\_imbib} ; X_6 = \varepsilon_{imp\_scellé} ; X_7 = \varepsilon_{ret} \end{array} \right. \quad (33)$$

Les termes  $a$ ,  $a'$ ,  $b$  et  $b'$  faisant intervenir les grandeurs  $E_b$  et  $E_{red}$ , ils interviennent dans le calcul d'incertitude, contrairement au cas présenté en section A2.2. Ainsi, les dérivées partielles des termes  $\varepsilon_0$  et  $\varepsilon_0'$  deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial X_i} (\varepsilon_0') = \frac{\partial}{\partial X_i} \left( \frac{b' \cdot I_n' - b \cdot I_m'}{\Delta} \right) \\ = - \frac{\frac{\partial b}{\partial X_i} \cdot \Delta \cdot I_m' - \frac{\partial b'}{\partial X_i} \cdot \Delta \cdot I_n' - \frac{\partial \Delta}{\partial X_i} \cdot (b \cdot I_m' - b' \cdot I_n') + \left( b \cdot \frac{\partial I_m'}{\partial X_i} - b' \cdot \frac{\partial I_n'}{\partial X_i} \right) \cdot \Delta}{\Delta^2} \\ \frac{\partial}{\partial X_i} (\varepsilon_0) = \frac{\partial}{\partial X_i} \left( \frac{a \cdot I_m' - a' \cdot I_n'}{\Delta} \right) \\ = \frac{\frac{\partial a}{\partial X_i} \cdot \Delta \cdot I_m' - \frac{\partial a'}{\partial X_i} \cdot \Delta \cdot I_n' - \frac{\partial \Delta}{\partial X_i} \cdot (a \cdot I_m' - a' \cdot I_n') + \left( a \cdot \frac{\partial I_m'}{\partial X_i} - a' \cdot \frac{\partial I_n'}{\partial X_i} \right) \cdot \Delta}{\Delta^2} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial X_i} = \frac{\partial a}{\partial X_i} \cdot b' - \frac{\partial b}{\partial X_i} \cdot a' - \frac{\partial a'}{\partial X_i} \cdot b + \frac{\partial b'}{\partial X_i} \cdot a \end{array} \right. \quad (34)$$

Le calcul des dérivées partielles donne les résultats suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a}{\partial P} = (E_b - E_{red}) \cdot S(t) \cdot (h + P \cdot S(t)) \\ \frac{\partial a}{\partial E_b} = \frac{(h + P \cdot S(t))^2}{2} \\ \frac{\partial a}{\partial E_{red}} = - \frac{P \cdot S(t)}{2} \cdot (2 \cdot h + P \cdot S(t)) \\ \frac{\partial a}{\partial d} = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{ret}} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a'}{\partial P} = (E_b - E_{red}) \cdot S(t) \cdot (h + P \cdot S(t))^2 \\ \frac{\partial a'}{\partial E_b} = \frac{(h + P \cdot S(t))^3}{3} \\ \frac{\partial a'}{\partial E_{red}} = - \frac{P \cdot S(t) \cdot (P^2 \cdot S(t)^2 + 3 \cdot h \cdot P \cdot S(t) + 3 \cdot h^2)}{3} \\ \frac{\partial a'}{\partial d} = \frac{\partial a'}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = \frac{\partial a'}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = \frac{\partial a'}{\partial \varepsilon_{ret}} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial b}{\partial P} = (E_b - E_{red}) \cdot S(t) \\ \frac{\partial b}{\partial E_b} = h + P \cdot S(t) \\ \frac{\partial b}{\partial E_{red}} = -P \cdot S(t) \\ \frac{\partial b}{\partial d} = \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_{ret}} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial b'}{\partial P} = (E_b - E_{red}) \cdot S(t) \cdot (h + P \cdot S(t)) \\ \frac{\partial b'}{\partial E_b} = \frac{(h + P \cdot S(t))^2}{2} \\ \frac{\partial b'}{\partial E_{red}} = -\frac{P \cdot S(t)}{2} \cdot (2 \cdot h + P \cdot S(t)) \\ \frac{\partial b'}{\partial d} = \frac{\partial b'}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = \frac{\partial b'}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = \frac{\partial b'}{\partial \varepsilon_{ret}} = 0 \end{array} \right.$$

$\frac{\partial I_n'}{\partial E_b} = \frac{2 \cdot (d + 0,01) \cdot PS(t) \cdot \varepsilon_{imp\_scellé} - d^2 \cdot (2 \cdot \varepsilon_{imp\_scellé} - \varepsilon_{ret}) + 2d \cdot (h - 0,01) \cdot \varepsilon_{imp\_scellé} + 0,02h \cdot \varepsilon_{imp\_scellé}}{2 \cdot (d + 0,01)}$	
$\frac{\partial I_n'}{\partial P} = (E_b \cdot \varepsilon_{imp\_scellé} - E_{red} \cdot \varepsilon_{imp\_imbib}) \cdot S(t)$	$\frac{\partial I_n'}{\partial E_{red}} = -\varepsilon_{imp\_imbib} \cdot P \cdot S(t)$
$\frac{\partial I_n'}{\partial d} = \frac{-5 \cdot 10^{-5} \cdot E_b \cdot \varepsilon_{ret} - E_b \cdot \varepsilon_{imp\_scellé} + \frac{E_b \cdot \varepsilon_{ret}}{2}}{(d + 0,01)^2}$	$\frac{\partial I_n'}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = -E_{red} \cdot P \cdot S(t)$
$\frac{\partial I_n'}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = E_b \cdot (h + P \cdot S(t) - d)$	$\frac{\partial I_n'}{\partial \varepsilon_{ret}} = \frac{E_b \cdot d^2}{2 \cdot (d + 0,01)}$

$\frac{\partial I_m'}{\partial E_b} = \frac{\varepsilon_{imp\_scellé}}{d + 0,01} \cdot \left( PS(t) \left( PS(t) \left( \frac{d}{2} + 0,005 \right) + dh + 0,01 \cdot h \right) - d \cdot \left( \frac{d^2}{2} + 0,005 \cdot d - \frac{h^2}{2} \right) + 0,005 \cdot h^2 \right) + \frac{d^3 \cdot \varepsilon_{ret}}{6(d + 0,01)}$	
$\frac{\partial I_m'}{\partial P} = (E_b \cdot \varepsilon_{imp\_scellé} - E_{red} \cdot \varepsilon_{imp\_imbib}) \cdot (h + P \cdot S(t)) \cdot S(t)$	$\frac{\partial I_m'}{\partial E_{red}} = -\frac{\varepsilon_{imp\_imbib} \cdot P \cdot S(t) \cdot (2 \cdot h + P \cdot S(t))}{2}$
$\frac{\partial I_m'}{\partial d} = \frac{E_b \cdot \varepsilon_{ret}}{600(100d + 1)^2} - \frac{d \cdot E_b \left( 3\varepsilon_{imp\_scellé} - \varepsilon_{ret} \right)}{3} + \frac{E_b \cdot \varepsilon_{ret}}{600}$	$\frac{\partial I_m'}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = \frac{E_b \cdot \left( (h + P \cdot S(t))^2 - d^2 \right)}{2}$
$\frac{\partial I_m'}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = -\frac{E_{red} \cdot P \cdot S(t) \cdot (2 \cdot h + P \cdot S(t))}{2}$	$\frac{\partial I_n'}{\partial \varepsilon_{ret}} = \frac{E_b \cdot d^3}{6 \cdot (d + 0,01)}$

### A2.3.3 Incertitude sur les déformations et les flèches – modèle de comportement hydrique de gonflement libre pondéré

Le calcul d'incertitude est mené de la même manière qu'en section A2.3.2. Les expressions des dérivées partielles sont données ci-après :

$\frac{\partial I_n'}{\partial E_b} = \frac{2 \cdot (d + 0,01) \cdot D\sqrt{t} \cdot \varepsilon_{imp\_sc} + 2h \cdot \varepsilon_{imp\_sc} \cdot (d + 0,01) + d^2 \left( 2 \cdot \varepsilon_{imp\_sc} - \varepsilon_{ret} \right) + (0,12d + 0,0014) \cdot \varepsilon_{imp\_sc}}{2 \cdot (d + 0,01)}$
--

Annexe 8 Détail des calculs de modélisation des poutres

$\frac{\partial I_n'}{\partial D} = (E_b \cdot \varepsilon_{imp\_scellé} - E_{red} \cdot \varepsilon_{imp\_imbib}) \cdot \sqrt{t}$	$\frac{\partial I_n'}{\partial E_{red}} = -\varepsilon_{imp\_imbib} \cdot (0,07 + D \cdot \sqrt{t})$
$\frac{\partial I_n'}{\partial d} = \frac{-5 \cdot 10^{-5} \cdot E_b \cdot \varepsilon_{ret}}{(d + 0,01)^2} - E_b \cdot \varepsilon_{imp\_scellé} + \frac{E_b \cdot \varepsilon_{ret}}{2}$	$\frac{\partial I_n'}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = -E_{red} \cdot (0,07 + D \cdot \sqrt{t})$
$\frac{\partial I_n'}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = E_b \cdot (h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t} - d)$	$\frac{\partial I_n'}{\partial \varepsilon_{ret}} = \frac{E_b \cdot d^2}{2 \cdot (d + 0,01)}$

$\frac{\partial I_m'}{\partial E_b} = \frac{1}{6 \cdot (d + 0,01)} \cdot \left( \begin{aligned} &3(D\sqrt{t})^2 (d + 0,01) \cdot \varepsilon_{imp\_sc} + 6D\sqrt{t} \cdot (h + 0,07) \cdot (d + 0,01) \cdot \varepsilon_{imp\_sc} + 3h^2 (d + 0,01) \cdot \varepsilon_{imp\_sc} \\ &+ 0,42h \cdot (d + 0,01) \cdot \varepsilon_{imp\_sc} - d^3 \left( 3 \cdot \varepsilon_{imp\_sc} - \varepsilon_{ret} \right) - 0,03d^2 \cdot \varepsilon_{imp\_sc} \\ &+ 0,0147d \cdot \varepsilon_{imp\_sc} + 1,47 \cdot 10^{-4} \cdot \varepsilon_{imp\_sc} \end{aligned} \right)$	
$\frac{\partial I_m'}{\partial D} = (E_b \varepsilon_{imp\_sc} - E_{red} \varepsilon_{imp\_imbib}) \cdot (h + 0,07 + D\sqrt{t}) \sqrt{t}$	$\frac{\partial I_m'}{\partial E_{red}} = -\frac{\varepsilon_{imp\_imb} (0,07 + D\sqrt{t}) (2 \cdot h + 0,07 + D\sqrt{t})}{2}$
$\frac{\partial I_m'}{\partial d} = \frac{E_b \cdot \varepsilon_{ret}}{600(100d + 1)^2} - \frac{d \cdot E_b \left( 3\varepsilon_{imp\_scellé} - \varepsilon_{ret} \right)}{3} - \frac{E_b \cdot \varepsilon_{ret}}{600}$	$\frac{\partial I_m'}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = \frac{E_b \cdot \left( (D\sqrt{t})^2 + 2D\sqrt{t} \cdot (h + 0,07) + h^2 + 0,14h - d^2 + 0,0049 \right)}{2}$
$\frac{\partial I_m'}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = -\frac{E_{red} \cdot (0,07 + D\sqrt{t}) \cdot (2 \cdot h + 0,07 + D\sqrt{t})}{2}$	$\frac{\partial I_n'}{\partial \varepsilon_{ret}} = \frac{E_b \cdot d^3}{6 \cdot (d + 0,01)}$

$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial D} &= (E_b - E_{red}) \cdot \sqrt{t} \cdot (h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t}) \\ \frac{\partial a}{\partial E_b} &= \frac{E_{red} \cdot (0,07 + D \cdot \sqrt{t}) \cdot (2h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t})}{2 \cdot E_b} \\ \frac{\partial a}{\partial E_{red}} &= -\frac{(0,07 + D\sqrt{t}) \cdot (2h + 0,07 + D\sqrt{t})}{2} \\ \frac{\partial a}{\partial d} &= \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{ret}} = 0 \end{aligned} \right.$	$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial D} &= (E_b - E_{red}) \cdot \sqrt{t} \cdot (h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t})^2 \\ \frac{\partial a}{\partial E_b} &= \frac{E_{red} (7 + 100D \cdot \sqrt{t}) \left( (100D\sqrt{t})^2 + 3 \cdot (100h)^2 + 2100h + 49 + 200D\sqrt{t}(150h + 7) \right)}{3 \cdot 10^6 \cdot E_b} \\ \frac{\partial a}{\partial E_{red}} &= -\frac{(100D\sqrt{t} + 7) \left( (100D\sqrt{t})^2 + 200D\sqrt{t} \cdot (150h + 7) + 3 \cdot (100h)^2 + 2100h + 49 \right)}{3 \cdot 10^6} \\ \frac{\partial a}{\partial d} &= \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{ret}} = 0 \end{aligned} \right.$
---	---

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial b}{\partial D} = (E_b - E_{red}) \cdot \sqrt{t} \\ \frac{\partial b}{\partial E_b} = \frac{E_{red} \cdot (0,07 + D \cdot \sqrt{t})}{E_b} \\ \frac{\partial b}{\partial E_{red}} = -(0,07 + D \cdot \sqrt{t}) \\ \frac{\partial b}{\partial d} = \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_{ret}} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial b'}{\partial D} = (E_b - E_{red}) \cdot \sqrt{t} \cdot (h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t}) \\ \frac{\partial b'}{\partial E_b} = \frac{E_{red} \cdot (0,07 + D \cdot \sqrt{t}) \cdot (2h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t})}{2 \cdot E_b} \\ \frac{\partial b'}{\partial E_{red}} = -\frac{(0,07 + D \cdot \sqrt{t}) \cdot (2h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t})}{2} \\ \frac{\partial b'}{\partial d} = \frac{\partial b'}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = \frac{\partial b'}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = \frac{\partial b'}{\partial \varepsilon_{ret}} = 0 \end{array} \right.$$

### A2.4 Cas d'une poutre armée avec module d'Young considéré constant

Dans le cas d'une poutre armée, l'écriture des équations d'équilibre fait intervenir les efforts repris par les armatures :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \int_0^h \sigma(z) \cdot b \cdot dz + A \cdot \sigma_{st} + A' \cdot \sigma_{sc} = 0 \\ M = \int_0^h \sigma(z) \cdot z \cdot b \cdot dz + |e| \cdot A \cdot \sigma_{st} + |e'| \cdot A' \cdot \sigma_{sc} = 0 \\ A = \text{section des aciers longitudinaux supérieurs} \\ A' = \text{section des aciers longitudinaux inférieurs} \\ \sigma_{st} = \text{contrainte dans les aciers longitudinaux supérieurs} \\ \sigma_{sc} = \text{contrainte dans les aciers longitudinaux inférieurs} \\ e = \text{position des aciers longitudinaux supérieurs} \\ e' = \text{position des aciers longitudinaux inférieurs} \end{array} \right. \quad (35)$$

Afin de résoudre ce système, on pose les deux hypothèses complémentaires suivantes :

- Comportement élastique des aciers :

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s \quad (36)$$

- Adhérence parfaite acier-béton

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{st} = E_s \cdot (\varepsilon'_0 \cdot e + \varepsilon_0) \\ \sigma_{sc} = E_s \cdot (\varepsilon'_0 \cdot e' + \varepsilon_0) \end{array} \right. \quad (37)$$



Le système régissant le fonctionnement d'une poutre armée s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \cdot \varepsilon'_0 + b \cdot \varepsilon_0 = I_n = \int_0^h \varepsilon_{imp}(z) \cdot dz \\ a' \cdot \varepsilon'_0 + b' \cdot \varepsilon_0 = I_m = \int_0^h \varepsilon_{imp}(z) \cdot z \cdot dz \\ a = \frac{h^2}{2} + \frac{n}{b} \cdot (e \cdot A + e' \cdot A') \\ b = h + \frac{n}{b} \cdot (A + A') \\ a' = \frac{h^3}{3} + \frac{n}{b} (|e| \cdot e \cdot A + |e'| \cdot e' \cdot A') \\ b' = \frac{h^2}{2} + \frac{n}{b} \cdot (|e| \cdot A + |e'| \cdot A') \\ n = \text{coefficient d'équivalence acier - béton} \end{array} \right. \quad (38)$$

En considérant qu'il n'y a pas d'incertitude sur les données relatives aux aciers, les déformations imposées (i.e. les termes  $I_n$  et  $I_m$ ) sont identiques. Par conséquent, les incertitudes se calculent de la même manière qu'en section A2.2.2 et A2.2.3.

## A2.5 Cas d'une poutre armée avec variation du module d'Young sous les effets d'une réaction de gonflement interne

### A2.5.1 Résolution du système

On considère une variation du module d'Young sur la hauteur de la poutre telle qu'elle est définie par la relation (29).

Dans ce cas, l'écriture du système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \cdot \varepsilon'_0 + b \cdot \varepsilon_0 = \frac{I'_n}{E_b} = \frac{1}{E_b} \cdot \int_0^h E(z) \cdot \varepsilon_{imp}(z) \cdot dz \\ a' \cdot \varepsilon'_0 + b' \cdot \varepsilon_0 = \frac{I'_m}{E_b} = \frac{1}{E_b} \cdot \int_0^h E(z) \cdot \varepsilon_{imp}(z) \cdot z \cdot dz \\ a = \frac{(h + P(t))^2}{2} + \frac{E_{red}}{E_b} \cdot \left( \frac{h^2}{2} - \frac{(h + P(t))^2}{2} \right) + \frac{A}{b} \cdot n \cdot e + \frac{A'}{b} \cdot n' \cdot e' \\ b = (h + P(t)) + \frac{E_{red}}{E_b} \cdot (-P(t)) + \frac{n}{b} \cdot A + \frac{n'}{b} \cdot A' \\ a' = \frac{(h + P(t))^3}{3} + \frac{E_{red}}{E_b} \cdot \left( \frac{h^3}{3} - \frac{(h + P(t))^3}{3} \right) + \frac{|e|}{b} \cdot A \cdot n \cdot e + \frac{|e'|}{b} \cdot A \cdot n' \cdot e' \\ b' = \frac{(h + P(t))^2}{2} + \frac{E_{red}}{E_b} \cdot \left( \frac{h^2}{2} - \frac{(h + P(t))^2}{2} \right) + \frac{|e|}{b} \cdot A \cdot n + \frac{|e'|}{b} \cdot A \cdot n' \\ n = \text{coefficient d'équivalence acier - béton sain} \\ n' = \text{coefficient d'équivalence acier - béton dégradé} \end{array} \right. \quad (39)$$

### A2.5.2 Incertitude sur les déformations et les flèches – modèle de comportement hydrique binaire

Comme en section A2.3.2, on considère que les incertitudes proviennent des paramètres  $P$ ,  $d$ ,  $E_b$ ,  $E_{red}$ ,  $\varepsilon_{imp\_imbib}$ ,  $\varepsilon_{imp\_scellé}$  et  $\varepsilon_{ret}$ . Le calcul des incertitudes se fait suivant une méthode identique à celle présentée dans cette section. Les déformations imposées aux structures étant identiques, les dérivées partielles des termes  $I_n'$  et  $I_m'$  sont identiques. Les dérivées partielles des coefficients du système régissant les variations de  $\varepsilon_0$  et  $\varepsilon_0'$  sont données ci-après :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a}{\partial P} = \frac{(E_b - E_{red}) \cdot S(t) \cdot (h + P \cdot S(t))}{E_b} \\ \frac{\partial a}{\partial E_b} = \frac{(h + P \cdot S(t))^2}{2 \cdot E_b} - \frac{A}{b \cdot E_b} \cdot n \cdot e \\ \frac{\partial a}{\partial E_{red}} = -\frac{P \cdot S(t)}{2 \cdot E_b} \cdot (2 \cdot h + P \cdot S(t)) \\ \quad - \frac{A'}{b \cdot E_{red}} \cdot n' \cdot e' \\ \frac{\partial a}{\partial d} = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{ret}} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a'}{\partial P} = \frac{(E_b - E_{red}) \cdot S(t) \cdot (h + P \cdot S(t))^2}{E_b} \\ \frac{\partial a'}{\partial E_b} = \frac{(h + P \cdot S(t))^3}{3 \cdot E_b} - \frac{A}{b \cdot E_b} \cdot n \cdot e \cdot |e| \\ \frac{\partial a'}{\partial E_{red}} = -\frac{P \cdot S(t) \cdot (P^2 \cdot S(t)^2 + 3 \cdot h \cdot P \cdot S(t) + 3 \cdot h^2)}{3} \\ \quad - \frac{A'}{b \cdot E_{red}} \cdot n' \cdot e' \cdot |e'| \\ \frac{\partial a'}{\partial d} = \frac{\partial a'}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = \frac{\partial a'}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = \frac{\partial a'}{\partial \varepsilon_{ret}} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial b}{\partial P} = \frac{(E_b - E_{red}) \cdot S(t)}{E_b} \\ \frac{\partial b}{\partial E_b} = \frac{h + P \cdot S(t)}{E_b} - \frac{A}{b \cdot E_b} \cdot n \\ \frac{\partial b}{\partial E_{red}} = -\frac{P \cdot S(t)}{E_b} - \frac{A'}{b \cdot E_{red}} \cdot n' \\ \frac{\partial b}{\partial d} = \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_{ret}} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial b'}{\partial P} = \frac{(E_b - E_{red}) \cdot S(t) \cdot (h + P \cdot S(t))}{E_b} \\ \frac{\partial b'}{\partial E_b} = \frac{(h + P \cdot S(t))^2}{2 \cdot E_b} - \frac{A}{b \cdot E_b} \cdot n \cdot |e| \\ \frac{\partial b'}{\partial E_{red}} = -\frac{P \cdot S(t)}{2} \cdot (2 \cdot h + P \cdot S(t)) - \frac{A'}{b \cdot E_{red}} \cdot n' \cdot |e'| \\ \frac{\partial b'}{\partial d} = \frac{\partial b'}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = \frac{\partial b'}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = \frac{\partial b'}{\partial \varepsilon_{ret}} = 0 \end{array} \right.$$

### A2.5.3 Incertitude sur les déformations et les flèches – modèle de comportement hydrique de gonflement libre pondéré

Les sollicitations sont inchangées par rapport au cas de la section A2.3.3. Les dérivées partielles utiles au calcul des incertitudes suivant la méthode de la section A2.5.2 sont données ci-après :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a}{\partial D} = \frac{(E_b - E_{red}) \cdot \sqrt{t} \cdot (h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t})}{E_b} \\ \frac{\partial a}{\partial E_b} = \frac{E_{red} \cdot (0,07 + D \cdot \sqrt{t}) \cdot (2h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t})}{2 \cdot E_b^2} \\ \quad - \frac{A}{b \cdot E_b} \cdot n \cdot e \\ \frac{\partial a}{\partial E_{red}} = - \frac{(0,07 + D \cdot \sqrt{t}) \cdot (2h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t})}{2 \cdot E_b} \\ \quad - \frac{A}{b \cdot E_{red}} \cdot n \cdot e \\ \frac{\partial a}{\partial d} = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{ret}} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a}{\partial D} = \frac{(E_b - E_{red}) \cdot \sqrt{t} \cdot (h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t})^2}{E_b} \\ \frac{\partial a}{\partial E_b} = \frac{E_{red} (7 + 100D \cdot \sqrt{t}) \left( (100D\sqrt{t})^2 + 3 \cdot (100h)^2 + 2100h + 49 + 200D\sqrt{t}(150h + 7) \right)}{3 \cdot 10^6 \cdot E_b^2} \\ \quad - \frac{A}{b \cdot E_b} \cdot n \cdot e \cdot |e| \\ \frac{\partial a}{\partial E_{red}} = - \frac{(100D\sqrt{t} + 7) \left( (100D\sqrt{t})^2 + 200D\sqrt{t} \cdot (150h + 7) + 3 \cdot (100h)^2 + 2100h + 49 \right)}{3 \cdot 10^6} \\ \quad - \frac{A}{b \cdot E_{red}} \cdot n \cdot e \cdot |e| \\ \frac{\partial a}{\partial d} = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_{ret}} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial b}{\partial D} = \frac{(E_b - E_{red}) \cdot \sqrt{t}}{E_b} \\ \frac{\partial b}{\partial E_b} = \frac{E_{red} \cdot (0,07 + D \cdot \sqrt{t})}{E_b^2} - \frac{A}{b \cdot E_b} \cdot n \\ \frac{\partial b}{\partial E_{red}} = - \frac{(0,07 + D \cdot \sqrt{t})}{E_b} - \frac{A}{b \cdot E_{red}} \cdot n \\ \frac{\partial b}{\partial d} = \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_{ret}} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial b}{\partial D} = \frac{(E_b - E_{red}) \cdot \sqrt{t} \cdot (h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t})}{E_b} \\ \frac{\partial b}{\partial E_b} = \frac{E_{red} \cdot (0,07 + D \cdot \sqrt{t}) \cdot (2h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t})}{2 \cdot E_b^2} \\ \quad - \frac{A}{b \cdot E_b} \cdot n \cdot |e| \\ \frac{\partial b}{\partial E_{red}} = - \frac{(0,07 + D \cdot \sqrt{t}) \cdot (2h + 0,07 + D \cdot \sqrt{t})}{2 \cdot E_b} \\ \quad - \frac{A}{b \cdot E_{red}} \cdot n \cdot |e| \\ \frac{\partial b}{\partial d} = \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_{imp\_imbib}} = \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_{imp\_scellé}} = \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_{ret}} = 0 \end{array} \right.$$