



**HAL**  
open science

# Propagation de fissures et endommagement par microfissures des matériaux viscoélastiques linéaires non vieillissants

Sy Tuan Nguyen

► **To cite this version:**

Sy Tuan Nguyen. Propagation de fissures et endommagement par microfissures des matériaux viscoélastiques linéaires non vieillissants. Autre. Université Paris-Est, 2010. Français. NNT : 2010PEST1082 . tel-00598511

**HAL Id: tel-00598511**

**<https://pastel.hal.science/tel-00598511v1>**

Submitted on 6 Jun 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST  
ÉCOLE DOCTORALE MODES

# THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

**Docteur**

de l'Université Paris-Est

**Spécialité : STRUCTURES ET MATÉRIAUX**

Présentée et soutenue par

**Sy Tuan NGUYEN**

**Propagation de fissures et endommagement par  
microfissures dans un milieu viscoélastique  
linéaire non vieillissant**

soutenue le 17 décembre 2010

devant le jury composé de :

**Djimédo KONDO**, univ. Paris 6, rapporteur

**Albert GIRAUD**, univ. Nancy, rapporteur

**Guy BONNET**, univ. Paris-Est, examinateur

**Laurent JEANNIN**, GDFSUEZ E& P, examinateur

**Julien SANAHUJA**, EDF R& D, examinateur

**Luc DORMIEUX**, univ. Paris-Est, directeur de thèse



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Modèle viscoélastique linéaire non vieillissant tridimensionnel</b>	<b>11</b>
2.1	Modèle viscoélastique linéaire non vieillissant . . . . .	12
2.2	Loi de comportement dans l'espace de Laplace-Carson . . . . .	13
2.3	Calcul analytique du fluage . . . . .	14
2.4	Forme incrémentale de l'équation différentielle . . . . .	16
2.5	Calcul numérique de fluage en éléments finis . . . . .	17
2.6	Comportement macroscopique d'une sphère creuse . . . . .	19
2.7	Conclusions . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Propagation de fissure dans une structure viscoélastique : analyses théoriques et numériques</b>	<b>25</b>
3.1	Introduction . . . . .	26
3.2	Mécanique de la rupture fragile . . . . .	27
3.3	Analyse énergétique de la propagation de fissure . . . . .	29
3.3.1	Analyse thermodynamique de la restitution d'énergie . . . . .	30
3.3.2	Délaminage d'une poutre viscoélastique homogène . . . . .	33
3.3.3	Impact de l'hétérogénéité sur l'énergie résiduelle . . . . .	40
3.4	Approche numérique en éléments finis . . . . .	44
3.4.1	Calcul numérique du taux de restitution de l'énergie . . . . .	44
3.4.2	L'exemple de la flexion 3-points : approche numérique . . . . .	46
3.5	Flexion 3-points : approche analytique . . . . .	53
3.5.1	Souplesse d'une poutre entaillée en flexion 3-points dans le cas élastique linéaire . . . . .	55
3.5.2	Flexion 3-points sans propagation de fissure . . . . .	56
3.5.3	Flexion 3-points avec propagation de fissure . . . . .	57
3.6	Conclusions . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Introduction à l'homogénéisation des milieux hétérogènes : application à l'endommagement</b>	<b>65</b>
4.1	Notions de base . . . . .	66
4.2	Problème d'Eshelby . . . . .	73
4.2.1	Retour sur le schéma dilué : application au milieu microfissuré . . . . .	74

4.2.2	Schéma de Mori-Tanaka . . . . .	76
4.2.3	Schéma auto-cohérent . . . . .	78
4.2.4	Approche de Ponte-Castaneda et Willis . . . . .	79
4.3	Conclusions . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Modèle de Burger pour le comportement effectif d'un solide viscoélastique microfissuré</b>	<b>87</b>
5.1	Introduction . . . . .	88
5.2	Homogénéisation des matériaux viscoélastiques microfissurés . . . . .	88
5.2.1	Retour sur le problème élastique linéaire . . . . .	89
5.2.2	Le cas viscoélastique . . . . .	91
5.3	Distribution isotrope de l'orientation des fissures . . . . .	93
5.3.1	Comportement effectif sous chargement sphérique . . . . .	94
5.3.2	Comportement effectif sous chargement déviatorique . . . . .	97
5.3.3	Validation du modèle viscoélastique effectif approché de Burger sur le problème de fluage . . . . .	101
5.4	Distribution parallèle des fissures . . . . .	103
5.4.1	Traction dans la direction de la normale $\mathbf{n}$ . . . . .	106
5.4.2	Traction transversale . . . . .	109
5.4.3	Cisaillement transversal . . . . .	109
5.4.4	Cisaillement en mode 2 . . . . .	110
5.4.5	Validation du modèle de Burger du cas isotrope transverse . . . . .	112
5.5	Etudes sur la "process zone" . . . . .	114
5.6	Conclusions . . . . .	118
<b>6</b>	<b>Approche numérique de l'endommagement dans un milieu viscoélastique</b>	<b>121</b>
6.1	Introduction . . . . .	122
6.2	Comportement effectif d'un milieu microfissuré sans propagation de fissures . . . . .	123
6.2.1	Comportement élastique linéaire . . . . .	124
6.2.2	Approche numérique dans le cas visqueux . . . . .	130
6.3	Etudes analytique et numérique du taux de restitution de l'énergie . . . . .	134
6.3.1	Analyse théorique du taux de restitution d'énergie . . . . .	135
6.3.2	Algorithme pour le calcul numérique du taux de restitution de l'énergie . . . . .	138
6.4	Propagation de microfissures dans un milieu viscoélastique : analyses théorique et numérique . . . . .	140

6.4.1	Algorithme des calculs numériques . . . . .	141
6.4.2	Comparaison de l'algorithme numérique avec le résultat analytique du cas élastique . . . . .	141
6.4.3	Vitesse critique de charge et endommagement asymptotique du milieu . . . . .	143
6.5	Conclusions . . . . .	146
<b>7</b>	<b>Propagation de fissures et endommagement d'une enceinte de confinement sous une pression accidentelle interne</b>	<b>151</b>
7.1	Calculs élémentaires à l'état initial . . . . .	154
7.2	Perte de précontrainte par fluage . . . . .	157
7.3	Comportement de la structure sous une pression accidentelle interne	159
7.3.1	Etape de compression du béton . . . . .	161
7.3.2	Endommagement de la structure par microfissures en état de traction . . . . .	165
7.3.3	Conditions de propagation des macrofissures . . . . .	170
7.4	Conclusions . . . . .	184
<b>8</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>187</b>
<b>A</b>	<b>Calculs tensoriels dans la base sphérique-déviatorique et applications</b>	<b>193</b>
<b>B</b>	<b>Calcul tensoriel dans la base de Walpole et applications</b>	<b>197</b>
<b>C</b>	<b>Tenseur de distribution <math>\mathbb{P}_d</math> pour le cas sphéroïdal</b>	<b>201</b>
<b>D</b>	<b>Contrainte moyenne, déformation moyenne et Lemme de Hill</b>	<b>203</b>
<b>E</b>	<b>Bases de calcul en éléments finis</b>	<b>205</b>
<b>F</b>	<b>Démonstration de (6.39)</b>	<b>207</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>211</b>



## Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Guy Bonnet, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance de thèse ainsi que Messieurs Albert Giraud et Djimédo Kondo qui ont accepté la longue et lourde tâche d'être rapporteurs de ma thèse. Leurs rapports très détaillés ainsi que leurs remarques et questions très intéressantes ont suscité ma réflexion en ouvrant d'autres perspectives à mon travail. Je tiens également à remercier Monsieur Laurent Jeannin qui a examiné mon travail et dont les questions et remarques étaient autant pertinentes que constructives.

Je voudrais remercier vivement mes tuteurs industriels, Messieurs Yann Le Pape et Julien Sanahuja, auprès de qui j'ai toujours pu trouver un soutien aussi bien amical que scientifique. Je tiens également à remercier Messieurs Charle Toulemonde et Nicolas Prompt qui m'ont beaucoup aidé à EDF.

Je souhaite exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse, Monsieur Luc Dormieux, qui m'a suivi durant ces trois années de thèse, en partant des premières notions de la micromécanique, et avec ses précieux conseils et son encadrement, j'ai pu mener à bien ce travail. Les mots ne peuvent pas exprimer tous ce qu'il a fait pour moi, du fond de mon cœur, je le remercie.

Je tiens aussi à exprimer mon amitié à tous mes collègues de l'équipe de Micromécanique et Calcul des Structures du Laboratoire Navier qui m'ont beaucoup aidé pendant ma thèse et avec qui j'ai passé de très bons moments.





# Introduction

---

Actuellement, la plus part de l'électricité produite en France est d'origine nucléaire. Afin de garantir la sécurité des installations nucléaires, EDF a choisi d'adopter, pour les filières REP (réacteur à eau pressurisée) 1300 et 1450 MWe, le concept de double enceinte (figure 1.1) : une paroi externe en béton armé pour protéger le réacteur nucléaire des agressions naturelles et accidentelles ; une paroi interne en béton précontrainte pour limiter le débit de fuite dans l'espace inter-enceintes en cas d'un accident APRP (accident par perte de réfrigérant primaire). La précontrainte vise notamment à fermer les fissures qui se présentent dans la paroi interne de l'enceinte et à s'opposer à leur propagation dans le cas d'une pression interne relative de 0,4 MPa consécutive à l'accident. On sait en effet que la perméabilité d'un matériau fissuré est contrôlée par la densité et la taille de fissures qui conditionnent le niveau d'endommagement.

La prédiction de la perte de précontrainte due au fluage mais aussi l'analyse de ses conséquences constituent actuellement un enjeu majeur pour EDF. En effet, le phénomène en question réduit la marge de résistance à la fissuration de la paroi interne de l'enceinte en situation accidentelle et pourrait conduire à l'augmentation de son taux de fuite. C'est dans ce contexte que s'inscrivent les travaux présentés dans ce mémoire. Ils sont dédiés à l'analyse du comportement d'une structure macroscopique ou élémentaire, fissurée ou microfissurée, constituée d'un matériau qui est le siège de déformations différées, et d'évaluer le risque de propagation. L'échelle de la structure est bien évidemment l'objectif final, puisque celle-ci n'est autre, à terme, que la paroi interne de l'enceinte. On ne peut néanmoins faire l'économie d'une étude à l'échelle du volume élémentaire représentatif où il s'agit d'aborder l'impact du fluage sur l'endommagement et son évolution.

Le plan du mémoire suit fidèlement l'ordre chronologique qui a été suivi au cours de cette thèse et qui est en fait dicté par la règle de difficulté croissante. Le point de départ consiste à définir le comportement du matériau sain ainsi qu'une stratégie numérique pour gérer ses évolutions. On introduit ensuite

une fissure unique et l'on formule un critère de propagation dans le cadre thermodynamique usuel. On met au point une stratégie de résolution numérique propre à cette situation. On passe alors au cas d'un matériau microfissuré qui nécessite de prendre en compte par définition des fissures multiples. Le dernier chapitre s'efforce d'apporter des éléments de réponse à la question industrielle qui a motivée ce travail.

Reprenons ce cheminement en détaillant quelque peu chaque étape.

Le chapitre II introduit un modèle de comportement viscoélastique linéaire non vieillissant *v.l.n.v.*, couramment utilisé pour modéliser le béton. L'équation d'état se présente sous la forme d'une équation différentielle qui se prête bien à l'utilisation de la transformée de Laplace-Carson. Dans la perspective de développements numériques dans des situations qui disqualifient cette dernière, on présente une approche incrémentale obtenue en discrétisant en temps l'équation différentielle en question. Des résolutions analytique et numérique de problèmes posés sur des structures simples sont ensuite développées et comparées de façon à valider l'approche incrémentale en l'absence de fissure.

Le chapitre III commence par proposer une extension au cas viscoélastique de l'approche énergétique classique de la propagation de fissure. On retrouve une notion de taux de restitution de l'énergie sur lequel on formule un critère de propagation. Il est naturel de s'intéresser en priorité à l'effet de la vitesse du chargement sur la propagation. On considère à cet effet des sollicitations caractérisées par une vitesse de chargement constante. L'étude de quelques problèmes de délaminage de poutre dans une modélisation géométrique unidimensionnelle permet d'identifier quelques phénomènes qui distinguent qualitativement les réponses élastique et viscoélastique. Il s'agit en particulier de la dépendance du taux de restitution de l'énergie vis-à-vis de la vitesse de chargement, de l'apparition d'une vitesse de chargement critique en deça de laquelle la propagation n'est pas déclenchée et de l'existence d'une longueur asymptotique de la fissure lorsque le phénomène de propagation a lieu. On passe ensuite à une structure continue tridimensionnelle en choisissant l'exemple de poutre entaillée en flexion 3-points. L'analyse de la propagation de la fissure est effectuée numériquement dans le cadre de la méthode des éléments finis. Elle permet de retrouver les phénomènes identifiés dans le cas des structures unidimensionnelles.

Le chapitre IV, essentiellement bibliographique, a pour objectif d'intro-

---

duire brièvement quelques notions fondamentales pour l'homogénéisation des matériaux hétérogènes à microstructure aléatoire en vue de l'étude de l'endommagement. On rappelle le principe des schémas d'homogénéisation basés sur la solution d'Eshelby : estimation diluée (*DL*), de Mori-Tanaka (*MT*), autocohérente (*AC*). On évoque également l'estimation de Ponte Castaneda et Willis (*PCW*). Ces approches sont appliquées à l'étude du comportement effectif d'un milieu élastique linéaire microfissuré. On se penchera notamment sur le cas d'une distribution isotrope des orientations et isotrope transverse, lorsque les plans des microfissures sont parallèles. On jouera également sur les symétries de la distribution spatiale.

En général, l'homogénéisation d'un matériau hétérogène viscoélastique linéaire non vieillissant est déduite formellement du cas élastique linéaire grâce à la transformée de Laplace-Carson. Une fois identifiée l'expression de l'élasticité homogénéisée fictive dans l'espace de Carson, il suffit de revenir à l'espace réel. Même si cette dernière étape peut poser des problèmes techniques, le principe théorique est donc très simple. On montre au chapitre V que la situation viscoélastique est légèrement plus délicate dans le cas où l'hétérogénéité est constituée par des microfissures. L'origine du problème se trouve dans les non linéarités géométriques inhérentes au modèle de fissure tridimensionnel utilisé dans une approche de type Eshelby, qui interdisent l'emploi de la transformation de Carson. L'objectif pratique de ce cinquième chapitre est l'identification d'un modèle de Burger effectif pour le matériau viscoélastique endommagé. Ces résultats sont exploitables en l'absence de propagation ou dans l'état d'endommagement asymptotique dont l'existence est démontré au chapitre VI.

Le chapitre V a laissé de côté la problématique de la propagation de la microfissuration. Cette question est abordée au moyen de deux approches. La première consiste à écrire le critère de propagation à l'aide du modèle de Burger du matériau endommagé établi au chapitre V. Elle constitue une extension de l'approche micromécanique de l'endommagement par microfissuration proposée dans le cas élastique par Dormieux et Kondo. En parallèle, on propose une approche numérique qui s'efforce de valoriser les acquis du chapitre III en matière de gestion numérique de la propagation en s'inspirant de la notion de motif morphologique représentatif. On verra que les deux approches fournissent des prédictions très cohérentes. On transpose au contexte du comportement local les notions introduites au chapitre III. On retrouve ainsi une vitesse critique de déformation et un endommagement asymptotique fonction de la vitesse de

chargement. Quelques remarques sur l'influence de la zone endommagée au voisinage de la pointe de fissure, appelée "process zone", sur la force au pic d'une poutre entaillée en flexion 3-points concluront ce chapitre.

Dans le chapitre VII par lequel s'achève ce mémoire, on se propose d'appliquer les résultats de ce travail pour une enceinte de confinement fissurée. On étudie la condition de propagation de macrofissures et de microfissures sous l'action d'une pression accidentelle interne. On démontre que l'on est en mesure de quantifier de façon précise le fait que l'accident est d'autant plus dangereux, en termes de risque de fissuration, qu'il survient tard dans la vie de l'ouvrage



FIG. 1.1 – Centrale électrique nucléaire de Golfech, source : energie.edf.fr

## Notations

On définit ici les principales notations utilisées dans ce mémoire pour faciliter la lecture.

$\mathbf{1}$  : tenseur d'identité d'ordre 2

$\mathbb{I}$  : tenseur d'identité d'ordre 4

$\mathbb{J}$  : projection sphérique de  $\mathbb{I}$

$\mathbb{K}$  : projection déviatorique de  $\mathbb{I}$

$\bar{a}_\Omega$  : moyenne d'une grandeur  $a$  dans un domaine  $\Omega$

$\langle a \rangle_\Omega$  : moyenne de  $a$  sur tous les directions dans un domaine  $\Omega$

$\ell$  : taille de fissures (longueur, demi-longueur, rayon, etc)

$\epsilon$  : paramètre d'endommagement

$\mathcal{C}(\ell)$  : raideur d'une structure  $\Omega(\ell)$

$\mathcal{E}$  : paramètre de chargement cinématique

$\mathcal{Q}$  : force duale de  $\mathcal{E}$

$\{\epsilon_\alpha^v\}(t)$  ( $\alpha = M$  ou  $K$ ) : champs des déformations visqueuses

$\mathcal{F}$  : taux de restitution d'énergie, force motrice de propagation de fissures

$G_c$  : taux de restitution d'énergie critique

$G_f$  : énergie de rupture

$W$  : énergie élastique

$W_{res}$  : énergie résiduelle

$\Phi$  : travail des forces extérieures

$P$  : énergie potentielle

$M$  : indice pour la partie de Maxwell

$K$  : indice pour la partie de Kelvin-Voigt

$e$  : exposant pour la partie élastique

$v$  : exposant pour la partie visqueuse

$\mathbb{C}_\beta^\alpha$  ( $\alpha = e$  ou  $v$ ,  $\beta = M$  ou  $K$ ) tenseurs de rigidité

$\mathbb{S}_\beta^\alpha$  ( $\alpha = e$  ou  $v$ ,  $\beta = M$  ou  $K$ ) : tenseurs de souplesse, inverse de  $\mathbb{C}_\beta^\alpha$

$k_\beta$  ( $\beta = M$  ou  $K$ ) : modules de compression volumique

$\mu_\beta$  ( $\beta = M$  ou  $K$ ) : modules de cisaillement

$\eta_\beta^s$  ( $\beta = M$  ou  $K$ ) : coefficients de viscosité sphérique

$\eta_\beta^d$  ( $\beta = M$  ou  $K$ ) : coefficients de viscosité déviatorique

$E_M$  : module d'Young du comportement instantané

$\nu_M$  : coefficient de Poisson du comportement instantané

$t$  : temps

$\tau$  : temps caractéristique

$p$  : variable de Laplace-Carson

$*$  : exposant pour les grandeurs dans l'espace de Laplace-Carson

$\tau_M$  : temps caractéristique du matériau

$\tau_U$  : temps caractéristique de déplacement imposé

$\tau_L$  : temps caractéristique de propagation

$\dot{U}_{cr}$  : vitesse critique de déplacement imposé

$N$  : densité de fissures

$\Sigma$  : contrainte macroscopique

$E$  : déformation macroscopique

$\mathbb{A}(\underline{z})$  : tenseur de localisation de déformation

$\mathbb{B}(\underline{z})$  : tenseur de localisation de contrainte

$\mathbb{C}^{hom}$  : tenseur de rigidité homogénéisé

$\mathbb{S}^{hom}$  : tenseur de souplesse homogénéisé

$\varphi$  : facteur volumique





# Modèle viscoélastique linéaire non vieillissant tridimensionnel

---

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Modèle viscoélastique linéaire non vieillissant . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>2.2</b>	<b>Loi de comportement dans l'espace de Laplace-Carson .</b>	<b>13</b>
<b>2.3</b>	<b>Calcul analytique du fluage . . . . .</b>	<b>14</b>
<b>2.4</b>	<b>Forme incrémentale de l'équation différentielle . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>2.5</b>	<b>Calcul numérique de fluage en éléments finis . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>2.6</b>	<b>Comportement macroscopique d'une sphère creuse . . .</b>	<b>19</b>
<b>2.7</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>23</b>

---

Les essais de compression uniaxiale pratiqués sur des échantillons de béton montrent que la déformation est constituée de deux parties : une partie instantanée et une partie différée. Ce type de comportement est modélisé classiquement par des modèles viscoélastiques linéaires (voir par exemple [3], [12]). D'une façon générale, la théorie de la viscoélasticité linéaire a été largement présentée dans la littérature ([4], [13], [24]).

On s'intéresse, dans la suite, au modèle viscoélastique linéaire non vieillissant *v.l.n.v.* ([25], [41], [43]). On établit tout d'abord une équation différentielle représentant l'équation d'état pour le comportement du matériau correspondant au modèle choisi. En vue de développements théoriques dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation, on en donne la transposition dans l'espace de Laplace-Carson (principe de correspondance). Dans la perspective de calculs numériques en éléments finis, on établit en parallèle une écriture incrémentale de cette équation. Celle-ci s'avèrera nécessaire pour gérer les situations de propagation de fissures.

## 2.1 Modèle viscoélastique linéaire non vieillissant

Une classe de comportements *v.l.n.v.* tridimensionnels isotropes est obtenue en transposant dans un contexte tensoriel les modèles rhéologiques unidimensionnels classiques ([29], [20], [38]). Dans le cas du béton, on utilise couramment le modèle de Burger [43], qui est une combinaison en série des modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt (voir la figure 2.1). On utilise dans la suite les indices  $M$  et  $K$  respectivement pour la partie Maxwell et pour la partie Kelvin-Voigt. Les exposants  $e$  et  $v$  renvoient respectivement à la partie élastique et à la partie visqueuse. Pour établir la loi de comportement du matériau correspondant à ce

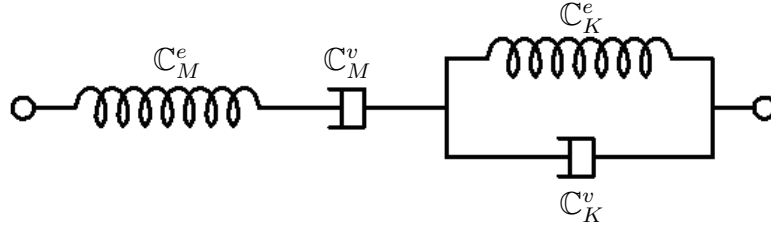


FIG. 2.1 – Modèle rhéologique de Burger pour le béton

modèle, on décompose la vitesse de déformation totale selon la contribution de la partie de Maxwell et celle de la partie de Kelvin-Voigt :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_K \quad (2.1)$$

La vitesse de la déformation de la partie de Maxwell est reliée à la contrainte totale selon :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M = \mathbb{S}_M^e : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbb{S}_M^v : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.2)$$

où  $\mathbb{S}_M^e$  est le tenseur de souplesse élastique de Maxwell et  $\mathbb{S}_M^v$  est l'inverse du tenseur de viscosité  $\mathbb{C}_M^v$  de Maxwell (pour plus de détail sur ces tenseurs, voir [42]). En combinant (2.2) avec (2.1), on arrive à une expression qui exprime  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_K$  en fonction des valeurs globales  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_K = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbb{S}_M^e : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbb{S}_M^v : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.3)$$

La dérivée de cette équation prend la forme :

$$\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_K = \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbb{S}_M^e : \ddot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbb{S}_M^v : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.4)$$

Par ailleurs, l'équation d'état de la partie Kelvin relie la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}_K$  et la contrainte totale  $\boldsymbol{\sigma}$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_K^e : \boldsymbol{\varepsilon}_K + \mathbb{C}_K^v : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_K \quad (2.5)$$

où apparaissent deux nouveaux tenseurs de raideur  $\mathbb{C}_K^e$  et de viscosité  $\mathbb{C}_K^v$  de Kelvin. La dérivation de cette équation par rapport au temps donne :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}_K^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_K + \mathbb{C}_K^v : \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_K \quad (2.6)$$

En introduisant (2.3) et (2.4) dans (2.6), on obtient finalement une équation différentielle d'ordre deux représentant la loi de comportement du matériau :

$$\mathbb{X} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbb{Y} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbb{Z} : \ddot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}_K^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbb{C}_K^v : \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.7)$$

où l'on a posé :

$$\mathbb{X} = \mathbb{C}_K^e : \mathbb{S}_M^v; \quad \mathbb{Y} = \mathbb{I} + \mathbb{C}_K^e : \mathbb{S}_M^e + \mathbb{C}_K^v : \mathbb{S}_M^v; \quad \mathbb{Z} = \mathbb{C}_K^v : \mathbb{S}_M^e \quad (2.8)$$

Les tenseurs d'ordre 4 de raideur et de viscosité (resp. leurs inverses) sont supposés isotropes, de sorte qu'ils sont exprimés en fonction des 8 constantes caractéristiques du matériau qui représentent les raideurs et les viscosités en compression ou en cisaillement (voir [42]) :

$$\mathbb{C}_K^e = 3k_K \mathbb{J} + 2\mu_K \mathbb{K}; \quad \mathbb{C}_K^v = \eta_K^s \mathbb{J} + \eta_K^d \mathbb{K}; \quad \mathbb{C}_M^e = 3k_M \mathbb{J} + 2\mu_M \mathbb{K}; \quad \mathbb{C}_M^v = \eta_M^s \mathbb{J} + \eta_M^d \mathbb{K} \quad (2.9)$$

où les tenseur  $\mathbb{J}$  et  $\mathbb{K}$  sont respectivement les projecteurs des parties sphérique et déviatorique du tenseur unité d'ordre 4. Avec (2.8), il est facile de vérifier que (voir plus de détail dans l'annexe A : (A.3), (A.4) et (A.5)) :

$$\mathbb{X} = \frac{3k_K}{\eta_M^s} \mathbb{J} + \frac{2\mu_K}{\eta_M^d} \mathbb{K}; \quad \mathbb{Y} = \left(1 + \frac{k_K}{k_M} + \frac{\eta_K^s}{\eta_M^s}\right) \mathbb{J} + \left(1 + \frac{\mu_K}{\mu_M} + \frac{\eta_K^d}{\eta_M^d}\right) \mathbb{K}; \quad \mathbb{Z} = \frac{\eta_K^s}{3k_M} \mathbb{J} + \frac{\eta_K^d}{2\mu_M} \mathbb{K} \quad (2.10)$$

## 2.2 Loi de comportement dans l'espace de Laplace-Carson

La transformation de Laplace-Carson ([41], [25]) est un processus mathématique consistant à transformer une fonction temporelle  $a(t)$  à une fonction de la variable de Laplace  $a^*(p)$  en utilisant le facteur exponentiel  $e^{-pt}$  :

$$a^*(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{a}(t) e^{-pt} dt \quad (2.11)$$

Notons que la transformation de la dérivée  $\dot{a}^*$  donne :  $\dot{a}^* = pa^*$ . Cette importante caractéristique permet de travailler aisément avec des équations différentielles. En

l'absence de propagation de fissure, la transformation de Laplace-Carson permet de transformer la loi de comportement *v.l.n.v.* donnée par (2.7) selon :

$$\mathbb{X} : \boldsymbol{\sigma}^* + p\mathbb{Y} : \boldsymbol{\sigma}^* + p^2\mathbb{Z} : \boldsymbol{\sigma}^* = p\mathbb{C}_K^e : \boldsymbol{\varepsilon}^* + p^2\mathbb{C}_K^v : \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (2.12)$$

On obtient alors une relation linéaire entre  $\boldsymbol{\sigma}^*$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbb{C}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (2.13)$$

où l'on a posé :

$$\mathbb{C}^* = \left( \mathbb{X} + p\mathbb{Y} + p^2\mathbb{Z} \right)^{-1} : \left( p\mathbb{C}_K^e + p^2\mathbb{C}_K^v \right) \quad (2.14)$$

Il représente la raideur du matériau dans l'espace de Laplace-Carson. Du fait que tous les tenseurs de raideur et de viscosité du matériau sont isotropes, le tenseur  $\mathbb{C}^*$  est isotrope et on peut l'exprimer en fonction de deux scalaires :

$$\mathbb{C}^* = 3k^*\mathbb{J} + 2\mu^*\mathbb{K} \quad (2.15)$$

où  $k^*$  et  $\mu^*$  représentent les modules apparents de compression volumique et de cisaillement dans l'espace de Laplace-Carson. Ils sont déterminés en utilisant (2.9), (2.10) et (2.14) (voir plus de détail dans l'annexe A : (A.11) et (A.13)) :

$$\frac{1}{k^*} = \frac{1}{k_M} + \frac{1}{p\eta_M^s/3} + \frac{1}{k_K + p\eta_K^s/3}; \quad \frac{1}{\mu^*} = \frac{1}{\mu_M} + \frac{1}{p\eta_M^d/2} + \frac{1}{\mu_K + p\eta_K^d/2} \quad (2.16)$$

Le coefficient apparent de Poisson  $\nu^*$  est déterminé en fonction de  $k^*$  et  $\mu^*$  par la relation classique suivante (voir [42]) :

$$\nu^* = \frac{3k^* - 2\mu^*}{6k^* + 2\mu^*} \quad (2.17)$$

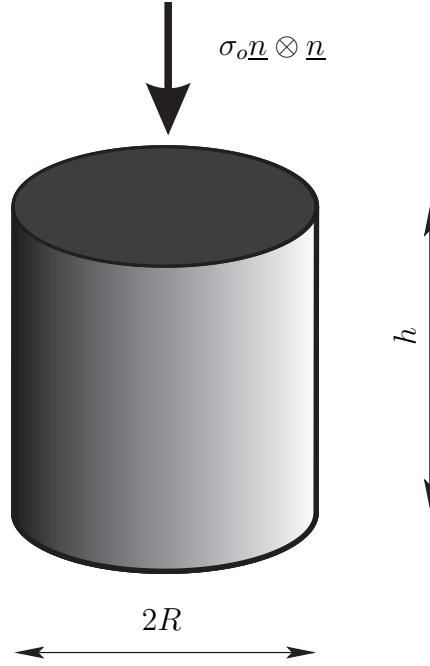
## 2.3 Calcul analytique du fluage

Pour un matériau *v.l.n.v.* isotrope, la loi de comportement donnée par (2.13) peut s'écrire sous la forme suivante [42] :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \frac{1 + \nu^*}{E^*} \boldsymbol{\sigma}^* - \frac{\nu^*}{E^*} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^*) \mathbf{1} \quad (2.18)$$

où apparaissent le tenseur unité d'ordre 2  $\mathbf{1}$  et le module d'Young apparent  $E^*$  dans l'espace de Laplace-Carson. Ce dernier est déterminé par la formule classique suivante (voir [42]) :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{9k^*} + \frac{1}{3\mu^*} \quad (2.19)$$

FIG. 2.2 – Compression uniaxiale d'un cylindre *v.l.n.v.* homogène

On utilise (2.18) pour étudier le problème de fluage uniaxial sous l'action d'une contrainte de compression constante  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_o \underline{n} \otimes \underline{n}$  (voir la figure (2.2)), de type échelon. La transformation de Laplace-Carson de cette contrainte prend la forme :  $\boldsymbol{\sigma}^* = \sigma_o \underline{n} \otimes \underline{n}$ . En introduisant cette expression dans (2.18), on obtient :  $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \varepsilon_{nn}^* \underline{n} \otimes \underline{n} + \varepsilon_{tt}^* (\mathbf{1} - \underline{n} \otimes \underline{n})$  avec :

$$\varepsilon_{nn}^* = \frac{\sigma_o}{E^*}; \quad \varepsilon_{tt}^* = -\frac{\sigma_o \nu^*}{E^*} \quad (2.20)$$

Les composantes  $\varepsilon_{nn}$  et  $\varepsilon_{tt}$  de la déformation sont respectivement obtenues par la transformation inverse de Laplace-Carson de  $\varepsilon_{nn}^*$  et  $\varepsilon_{tt}^*$  en utilisant (2.17), (2.19) et (2.16). On obtient la composante normale de la déformation sous la forme :

$$\varepsilon_{nn} = \frac{\sigma_o}{E_M} + \frac{\sigma_o}{9k_M} \frac{t}{\tau_M^s} + \frac{\sigma_o}{3\mu_M} \frac{t}{\tau_M^d} + \frac{\sigma_o}{9k_K} \left(1 - e^{-t/\tau_K^s}\right) + \frac{\sigma_o}{3\mu_K} \left(1 - e^{-t/\tau_K^d}\right) \quad (2.21)$$

et la composante transversale :

$$\varepsilon_{tt} = \frac{-\sigma_o \nu_M}{E_M} + \frac{\sigma_o}{9k_M} \frac{t}{\tau_M^s} - \frac{\sigma_o}{6\mu_M} \frac{t}{\tau_M^d} + \frac{\sigma_o}{9k_K} \left(1 - e^{-t/\tau_K^s}\right) - \frac{\sigma_o}{6\mu_K} \left(1 - e^{-t/\tau_K^d}\right) \quad (2.22)$$

où on a posé :

$$\tau_M^s = \frac{\eta_M^s}{3k_M}; \quad \tau_M^d = \frac{\eta_M^d}{2\mu_M}; \quad \tau_K^s = \frac{\eta_K^s}{3k_K}; \quad \tau_K^d = \frac{\eta_K^d}{2\mu_K} \quad (2.23)$$

Les  $\tau_\beta^\alpha$  ci-dessus désignent respectivement les temps caractéristiques sphérique (resp. déviatorique) de Maxwell (resp. de Kelvin).  $E_M$  et  $\nu_M$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson de la partie "Maxwell". Ils sont déterminés en fonction de  $k_M$  et  $\mu_M$  par :

$$\nu_M = \frac{3k_M - 2\mu_M}{6k_M + 2\mu_M}; \quad \frac{1}{E_M} = \frac{1}{9k_M} + \frac{1}{3\mu_M} \quad (2.24)$$

## 2.4 Forme incrémentale de l'équation différentielle

Le théorème de correspondance (voir par exemple [42]) basé sur l'emploi de (2.14) et la résolution d'un problème d'élasticité fictif dans l'espace de Laplace-Carson est très efficace pour le calcul de structures constituées de matériaux *v.l.n.v.*. Cependant, en présence de propagation de fissures, on est contraint de lui préférer une méthode de résolution directe, de type numérique. En effet, la propagation peut être assimilée à un changement de nature, au cours du temps, des conditions aux limites : sur la surface de fissure créée, tout se passe comme si on passait d'une condition en déplacement à une condition de contrainte nulle. La présente section prépare la résolution numérique en éléments finis de structures soumises à propagation de fissure.

On part de l'équation différentielle (2.7) et on en propose une forme incrémentale. Pour ce faire, on utilise les approximations suivantes des dérivées par rapport au temps :

$$\dot{a} \simeq \frac{a(t+dt) - a(t)}{dt}; \quad \ddot{a} \simeq \frac{a(t+dt) - 2a(t) + a(t-dt)}{dt^2} \quad (2.25)$$

où les grandeurs sont supposées connues jusqu'à instant  $t$  et où  $dt$  désigne l'incrément de temps. En introduisant (2.25) dans (2.7), celle-ci devient :

$$\begin{aligned} & \left( \mathbb{X} + \frac{1}{dt} \mathbb{Y} + \frac{1}{dt^2} \mathbb{Z} \right) : \boldsymbol{\sigma}(t+dt) - \left( \frac{1}{dt} \mathbb{Y} + \frac{2}{dt^2} \mathbb{Z} \right) : \boldsymbol{\sigma}(t) + \frac{1}{dt^2} \mathbb{Z} : \boldsymbol{\sigma}(t-dt) \\ & = \left( \frac{1}{dt} \mathbb{C}_K^e + \frac{1}{dt^2} \mathbb{C}_K^v \right) : \left( \boldsymbol{\varepsilon}(t+dt) - \boldsymbol{\varepsilon}(t) \right) - \frac{1}{dt^2} \mathbb{C}_K^v : \left( \boldsymbol{\varepsilon}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}(t-dt) \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

En remplaçant les tenseurs  $\mathbb{X}$ ,  $\mathbb{Y}$  et  $\mathbb{Z}$  par les expressions données par (2.10) on obtient :

$$\mathbb{X} + \frac{1}{dt} \mathbb{Y} + \frac{1}{dt^2} \mathbb{Z} = c_1 \mathbb{J} + c_2 \mathbb{K}; \quad \frac{1}{dt} \mathbb{Y} + \frac{2}{dt^2} \mathbb{Z} = c_3 \mathbb{J} + c_4 \mathbb{K}; \quad \frac{1}{dt^2} \mathbb{Z} = c_5 \mathbb{J} + c_6 \mathbb{K} \quad (2.27)$$

On pose de même :

$$\frac{1}{dt}\mathbb{C}_K^e + \frac{1}{dt^2}\mathbb{C}_K^v = c_7\mathbb{J} + c_8\mathbb{K}; \quad \frac{1}{dt^2}\mathbb{C}_K^v = c_9\mathbb{J} + c_{10}\mathbb{K} \quad (2.28)$$

où les coefficients  $c_i$  ( $i$  varie de 1 à 10) sont définis dans l'annexe A. A noter qu'ils dépendent explicitement du pas de temps choisi. Avec ces notations, l'équation (2.26) se met sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(t + dt) = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(t + dt) + \boldsymbol{\sigma}^p(t) \quad (2.29)$$

où le tenseur de rigidité fictif  $\mathbb{C}$  est calculé par :

$$\mathbb{C} = \frac{c_7}{c_1}\mathbb{J} + \frac{c_8}{c_2}\mathbb{K} \quad (2.30)$$

et la précontrainte  $\boldsymbol{\sigma}^p(t)$  est déterminée par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^p(t) &= \left( \frac{c_3}{c_1}\mathbb{J} + \frac{c_4}{c_2}\mathbb{K} \right) : \boldsymbol{\sigma}(t) - \left( \frac{c_5}{c_1}\mathbb{J} + \frac{c_6}{c_2}\mathbb{K} \right) : \boldsymbol{\sigma}(t - dt) \\ &- \left( \frac{c_9}{c_1}\mathbb{J} + \frac{c_{10}}{c_2}\mathbb{K} \right) : \left( \boldsymbol{\varepsilon}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}(t - dt) \right) - \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

On obtient une relation entre  $\boldsymbol{\sigma}(t+dt)$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}(t+dt)$  qui est formellement semblable à une équation d'état élastique linéaire, avec une précontrainte  $\boldsymbol{\sigma}^p(t)$  qui est calculée en fonction des valeurs de la contrainte et de la déformation aux instants  $t$  et  $t - dt$  précédents.

## 2.5 Calcul numérique de fluage en éléments finis

Pour une structure de géométrie quelconque, la méthode des éléments finis constitue une manière systématique pour résoudre le problème du fluage. Le calcul est réalisé pas à pas suivant le temps. A chaque pas de temps, on réalise formellement un calcul élastique avec précontrainte en se basant sur l'équation (2.29). La précontrainte étant déterminée en fonction des contraintes et des déformations aux étapes précédentes par la formule (2.31), l'algorithme en question est donc de type explicite.

En se donnant les modules élastiques et les propriétés visqueuses du matériau ainsi qu'un pas de temps  $dt$ , on détermine les coefficient  $c_i$  par les expressions données dans l'annexe A. Le tenseur de rigidité est ensuite déterminé par (2.30).



La réponse instantanée à l'instant  $t_1 = 0^+$  est élastique, seule la partie élastique de l'élément de type Maxwell contribuant à la rigidité du matériau. La loi de comportement s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbb{C}_M^e : \boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (2.32)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_1$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  sont respectivement la contrainte et la déformation à  $t_1$ . Ces deux champs initiaux sont facilement déterminés par un calcul élastique. On forme tout d'abord la matrice de rigidité  $\mathbf{K}_1$  de la structure à cet instant en fonction du maillage et de la rigidité  $\mathbb{C}_M^e$ . Le vecteur des forces  $\underline{f}_1$  est calculé en fonction des charges à  $t_1$ . Le vecteur des déplacements nodaux est calculé par :

$$\underline{u}_1 = \mathbf{K}_1^{-1} \cdot \underline{f}_1 \quad (2.33)$$

La déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  est déduite en fonction de  $\underline{u}_1$  par l'opérateur différentiel usuel. La contrainte  $\boldsymbol{\sigma}_1$  est calculée en fonction de  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  par la loi de comportement donnée par (2.32).

Pour calculer les grandeurs  $\boldsymbol{\varepsilon}_2$  et  $\boldsymbol{\sigma}_2$  à  $t_2 = dt$ , on établit l'équation différentielle approchée de la loi de comportement à court terme. On décompose  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M$  en deux parties élastique et visqueuse :  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M^v$ . A l'instant  $t = 0^+$ , on observe que  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M^e = \mathbb{S}_M^e : \dot{\boldsymbol{\sigma}}$  et  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M^v = \mathbb{S}_M^v : \boldsymbol{\sigma}$ , de sorte que  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M = \mathbb{S}_M^e : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbb{S}_M^v : \boldsymbol{\sigma}$ . Pour la partie de Kelvin, on reprend l'équation (2.5) où  $\boldsymbol{\varepsilon}_K = 0$  à  $t = 0^+$ . Il en résulte que  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_K^v \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_K$  ou bien  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_K = \mathbb{S}_K^v : \boldsymbol{\sigma}$ . Ainsi, la vitesse de déformation totale qui est la somme de  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M$  et  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_K$  prend la forme :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{S}_M^e : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + (\mathbb{S}_M^v + \mathbb{S}_K^v) : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.34)$$

En appliquant les approches (2.25), on obtient une relation linéaire entre  $\boldsymbol{\varepsilon}_2$  et  $\boldsymbol{\sigma}_2$  :

$$\frac{1}{dt}(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1) = \frac{1}{dt} \mathbb{S}_M^e : (\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_1) + (\mathbb{S}_M^v + \mathbb{S}_K^v) : \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (2.35)$$

ou bien

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbb{C}^{bis} : \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\sigma}_{bis}^p \quad (2.36)$$

avec

$$\mathbb{C}^{bis} = (\mathbb{S}_M^e + dt\mathbb{S}_M^v + dt\mathbb{S}_K^v)^{-1} \quad (2.37)$$

et la précontrainte  $\boldsymbol{\sigma}_{bis}^p$  est déterminée en fonction de  $\boldsymbol{\sigma}_1$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$

$$\boldsymbol{\sigma}_{bis}^p = \mathbb{C}^{bis} : (\mathbb{S}_M^e : \boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_1) \quad (2.38)$$

L'équation (2.36) permet de déterminer  $\varepsilon_2$  et  $\sigma_2$  par des calculs élastiques.

Les grandeurs  $\varepsilon_i$ ,  $\sigma_i$  à l'instant  $t_i = (i - 1)dt$  ( $i > 2$ ) sont calculées en résolvant pas à pas en éléments finis l'équation (2.29) jusqu'à l'instant souhaité.

Etudions à présent le problème du fluage d'un cylindre sous compression uniaxiale. Le problème étant symétrique par rapport à l'axe  $\underline{n}$  de l'échantillon, on réalise un calcul en éléments finis dans le mode axis-symétrique, sur la moitié supérieure du cylindre. Le maillage et les conditions aux limites sont présentés par la figure 2.3. La figure 2.4 présente la confrontation des résultats

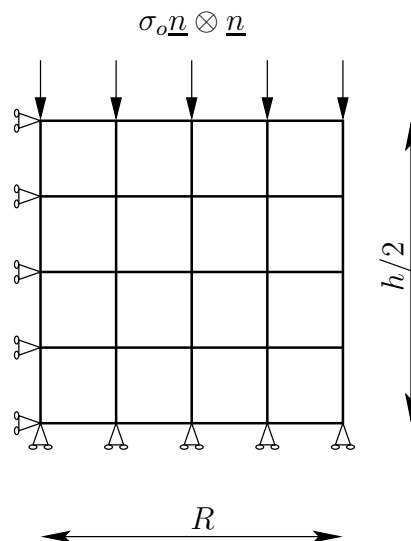


FIG. 2.3 – Maillage et des conditions aux limites en mode axis-symétrique du problème de compression d'un cylindre

analytiques et numériques pour des caractéristiques viscoélastiques du matériau données dans le tableau 2.1, qu'on peut obtenir par callage à partir de résultats expérimentaux. On peut observer que, plus le pas de temps est petit, plus les résultats numériques se rapprochent des résultats analytiques.

## 2.6 Comportement macroscopique d'une sphère creuse

On applique maintenant les études précédente pour étudier le fluage d'une sphère creuse sous l'application d'une traction sphérique. Ce problème simple

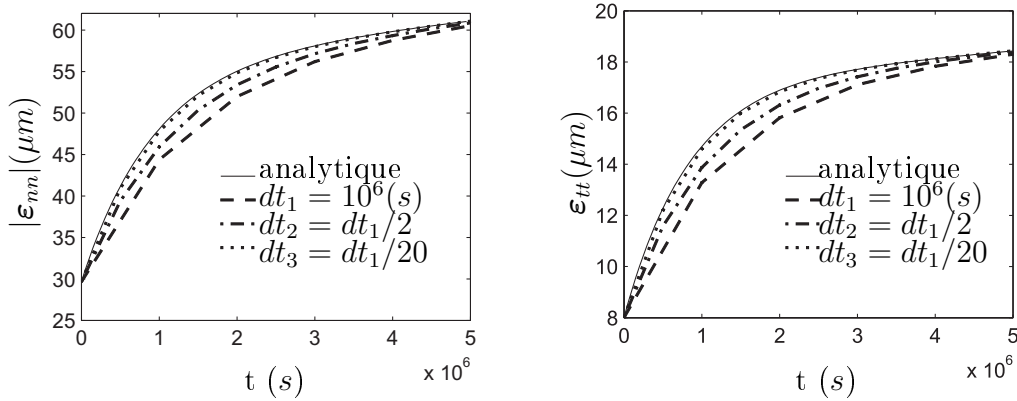


FIG. 2.4 – Validation du calcul numérique de fluage, pour différents pas de temps de calcul, avec les résultats analytiques ( $\sigma_o = 1$  MPa) : les caractéristiques viscoélastiques du matériaux sont donnés par le tableau 2.1 ( $\tau_M^s/dt_1 \simeq 30$ ,  $\tau_M^d/dt_1 \simeq 29$ ,  $\tau_K^s/dt_1 \simeq 1, 3$ ,  $\tau_K^d/dt_1 \simeq 0, 9$ )

nous permettra d'introduire une méthode numérique pour construire la loi de comportement effectif d'un milieu hétérogène.

La géométrie de la structure en étude est présentée par la figure 2.5 à gauche. Grâce à la symétrie du problème, le calcul numérique est réalisé sur la moitié supérieure de la sphère sous mode axis symétrique (le calcul est réalisé dans Castem <sup>1</sup>,  $\underline{e}_z$  est l'axe de la symétrie). La sphère est donc représentée par une section plane qui passe par son axe (voir 2.5 à droite). Le bord  $l_1$  est fixé en déplacement vertical  $u_z$  et le bord  $l_2$  est fixé en déplacement horizontal  $u_r$ . La traction  $\Sigma$  est imposée sur le bord  $l_3$ . Le bord  $l_4$  est libre. Le maillage de la section est présenté par la figure 2.5. La méthode des éléments finis nous permet de déterminer le vecteur des déplacements nodaux  $\underline{U}$ , le champ des déformations  $\underline{\varepsilon}$  et le champ des contraintes  $\underline{\sigma}$ . En se basant sur ces résultats on

<sup>1</sup>Version d'éducation 2009

Parties	$k$ (GPa)	$\mu$ (GPa)	$\eta^s$ (GPa.s)	$\eta^d$ (GPa.s)
Maxwell	24,42	13,27	$22 \times 10^8$	$7,75 \times 10^8$
Kelvin	39,27	14,07	$15,2 \times 10^7$	$2,54 \times 10^7$

TAB. 2.1 – Données viscoélastiques du matériau du cylindre

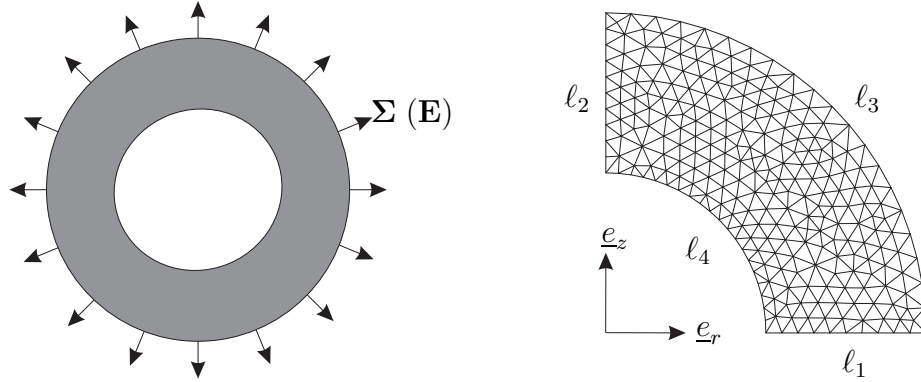


FIG. 2.5 – Géométrie et maillage de la sphère creuse

peut déterminer les valeurs macroscopiques de déformation et de contrainte du problème en prenant la moyenne sur la sphère (qu'on note par  $\Omega$ ) du champ équivalent. Par exemple pour ce cas de contrainte imposé, on détermine la déformation macroscopique par :

$$E = \varphi \bar{\varepsilon}^p + (1 - \varphi) \bar{\varepsilon}^s \quad (2.39)$$

où  $\varphi$  est le facteur volumique de la phase poreuse.  $\bar{\varepsilon}^p$  et  $\bar{\varepsilon}^s$  sont respectivement les moyennes du champ des déformations dans l'espace poreuse et dans la phase solide. Pour la phase solide,  $\bar{\varepsilon}^s$  est déterminée par :

$$\bar{\varepsilon}^s = \frac{1}{|\Omega^s|} \int_{\Omega^s} \frac{\text{tr}(\varepsilon)}{3} d\Omega \quad (2.40)$$

Pour la phase poreuse, on ne peut pas utiliser cette formule parce que le champ de déformation n'y est pas déterminé. Pour surmonter ce difficulté, on impose une pression unité fictive dans le pore, ce qui donne un vecteur des forces nodales  $\underline{P}$ . La variation de volume du pore peut être déterminée en déterminant le travail de ce chargement fictif. La déformation moyenne du pore est donnée par :

$$\bar{\varepsilon}^p = \frac{\underline{P}^t \cdot \underline{U}}{3|\Omega^p|} \quad (2.41)$$

En introduisant (2.40) et (2.41) dans (2.39) on obtient la déformation effective de la sphère. Notons qu'on peut déterminer  $E$  d'une autre façon plus simple en prenant le nouveau rayon de la sphère, mais la méthode présentée ci-dessus est importante par qu'elle va servir des études ultérieures.

De même façon, pour le cas où la déformation macroscopique est imposée,  $\Sigma$  est déterminée en prenant la moyenne du champ des contraintes de  $\Omega$ . Puisque la contrainte dans la phase poreuse est nulle, alors  $\Sigma$  est calculée par :

$$\Sigma = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^s} \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3} d\Omega \quad (2.42)$$

Pour le cas élastique, le module de compression volumique instantané effectif est ensuite déterminé par :

$$k(\varphi) = \frac{\Sigma}{3E} \quad (2.43)$$

On rappelle que pour ce problème simple, le module  $k$  peut être déterminé par la formule (4.6). Le schéma 2.6 donne une bonne validation des résultats numériques par le résultat analytique.

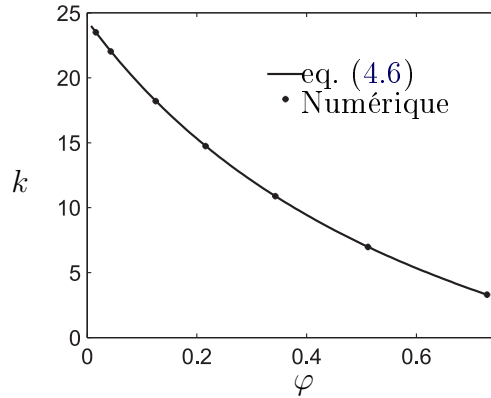


FIG. 2.6 – Module de compression volumique effectif de la sphère creuse en fonction du facteur volumique de la pore

Pour le cas où la phase solide est en matériau *v.l.n.v.* étudié dans le chapitre 2. On peut déterminer analytiquement la déformation différée macroscopique de la sphère en se basant sur le principe de correspondance. Dans l'espace de Laplace-Carson la loi de comportement effectif s'écrit :

$$\boldsymbol{\Sigma}^* = \mathbb{C}^*(\varphi) : \mathbf{E}^* \quad (2.44)$$

où  $\boldsymbol{\Sigma}^* = \Sigma_o \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{E}^* = E^* \mathbf{1}$  et  $\mathbb{C}^*(\varphi) = 3k^*(\varphi)\mathbb{J} + 2\mu^*(\varphi)\mathbb{K}$  avec  $k^*(\varphi)$  est obtenu en remplaçant respectivement  $k^s$  et  $\mu^s$  dans la formule (4.6) par  $k^*$  et  $\mu^*$  qui sont définis par (2.16) :

$$k^*(\varphi) = k^* \left( 1 - \varphi \frac{3k^* + 4\mu^*}{3\varphi k^* + 4\mu^*} \right) \quad (2.45)$$

Alors l'équation (2.43) devient :

$$E^* = \frac{\Sigma_o}{3k^*(\varphi)} \quad (2.46)$$

La déformation de fluage  $E$  est obtenu par la transformation inverse de Laplace-Carson de  $E^*$ . On compare ce résultat avec le résultat obtenu par le calcul numérique. Le schéma 2.7 montre une bonne exactitude de la méthode numérique dans le calcul du comportement différé effectif de la sphère étudiée.

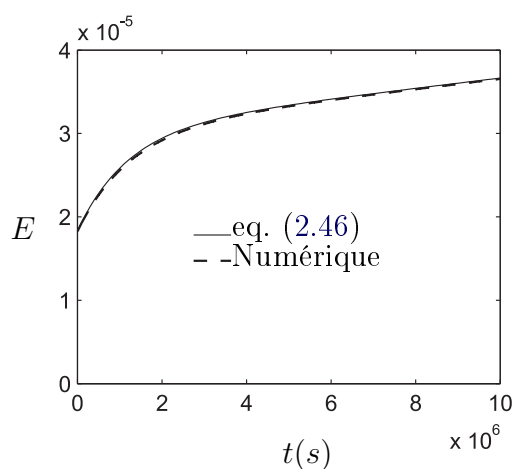


FIG. 2.7 – Fluage de la sphère sous traction  $\Sigma = 1$  MPa pour un facteur volumique  $\varphi = 0,125$

## 2.7 Conclusions

Dans ce chapitre, on a tout d'abord modélisé le comportement *v.l.n.v.* du béton par le modèle de Burger. La loi de comportement correspondante s'écrit sous la forme d'une équation différentielle d'ordre 2. La transformation de Laplace-Carson permet de transposer cette équation sous une forme linéaire entre contraintes et déformations, en introduisant un tenseur de rigidité apparent  $\mathbb{C}^*$ . Ce dernier est déterminé en fonction des modules viscoélastiques du matériau. On identifie par ce procédé les valeurs apparentes du coefficient de Poisson  $\nu^*$ , du module d'Young  $E^*$ , du module de compression volumique  $k^*$  et du module de cisaillement  $\mu^*$ . Une application directe de ces études est le calcul analytique du fluage d'une éprouvette cylindrique soumise à une compression uniaxiale de type échelon. Les variations des déformations longitudinale et

transversale dans le cylindre au cours du temps sont déterminées très simplement (voir (2.21) et (2.22)). Elles font apparaître quatre temps caractéristiques du matériau (2 pour la partie Maxwell et 2 pour la partie Kelvin-Voigt, l'une liée à la partie sphérique et l'autre à la partie déviatorique). Les caractéristiques du modèle de Burger (isotrope), au nombre de huit, peuvent être identifiées par calage à partir des résultats expérimentaux de tels essais de fluage.

En vue des calculs numériques (tout particulièrement dans les situations de propagation de fissure), on a approché la loi de comportement exacte du matériau étudié par une formulation incrémentale. On a réalisé des calculs pas à pas en éléments finis en se basant sur cette équation. On a obtenu une très bonne validation entre l'approche numérique et le calcul analytique lorsque le pas de temps est suffisamment petit par rapport au temps caractéristiques du matériau. La validation est ainsi réalisée pour un problème biphasique par l'exemple d'une sphère creuse en traction isotrope.

# Propagation de fissure dans une structure viscoélastique : analyses théoriques et numériques

---

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>26</b>
<b>3.2</b>	<b>Mécanique de la rupture fragile</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>3.3</b>	<b>Analyse énergétique de la propagation de fissure</b> . . . . .	<b>29</b>
3.3.1	Analyse thermodynamique de la restitution d'énergie . . . . .	30
3.3.2	Délaminage d'une poutre viscoélastique homogène . . . . .	33
3.3.3	Impact de l'hétérogénéité sur l'énergie résiduelle . . . . .	40
<b>3.4</b>	<b>Approche numérique en éléments finis</b> . . . . .	<b>44</b>
3.4.1	Calcul numérique du taux de restitution de l'énergie . . . . .	44
3.4.2	L'exemple de la flexion 3-points : approche numérique . . . . .	46
<b>3.5</b>	<b>Flexion 3-points : approche analytique</b> . . . . .	<b>53</b>
3.5.1	Souplesse d'une poutre entaillée en flexion 3-points dans le cas élastique linéaire . . . . .	55
3.5.2	Flexion 3-points sans propagation de fissure . . . . .	56
3.5.3	Flexion 3-points avec propagation de fissure . . . . .	57
<b>3.6</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>61</b>

---

Dans le cas d'un milieu visco-élastique fragile, l'existence d'une dissipation visqueuse affecte la propagation des fissures. Ce chapitre revient tout d'abord sur la théorie thermodynamique de Griffith étendue à un milieu visco-élastique. Un critère de propagation est dérivé sous la forme d'un seuil sur la force motrice du phénomène. Les implémentations analytiques et numériques sont présentées. La force motrice de la propagation et l'évolution de la longueur de la fissure sont jugées très sensibles à la vitesse de chargement.



### 3.1 Introduction

La notion du taux de restitution d'énergie a été initialement introduite dans la théorie de la propagation des fissures de Griffith [23]. Cette théorie est généralement mise en oeuvre pour les matériaux élastiques fragiles. Dans ce cadre, il est bien connu que la J-intégrale de Rice [39] peut être utilisée pour des calculs numériques du taux de restitution d'énergie. L'intérêt de la J-intégrale se trouve classiquement dans le fait qu'elle est indépendante de la ligne sur laquelle on fait le calcul de l'intégrale. Cette importante propriété n'est utilisable que dans le cadre de l'hypothèse d'un comportement élastique.

Dans le cas de fissures se propageant dans des milieux viscoélastiques, la dissipation n'est pas seulement liée à la création de la longueur de la fissure (resp. de surface), mais comprend également une contribution visqueuse. Dans ce contexte, le J-intégrale dans sa forme standard ne peut plus être utilisé pour la dérivation de la force motrice de la propagation des fissures. Plusieurs auteurs ont proposé diverses extensions de l'approche de Rice afin de tenir compte de la contribution de déformations visqueuses ([44], [45], [18]). Certaines implémentations basées sur la méthode des éléments finis ont également été présentées [33]. Les conséquences du fluage ont également été étudiées à une échelle plus locale, dans le voisinage de la pointe de la fissure. En particulier, l'approche de fissure cohésive [1] qui est initialement introduite pour les matériaux élastiques fragiles a été étendue afin d'incorporer la dissipation visqueuse [51].

Dans ce contexte, la présente étude se concentre sur le cas de chargements mécaniques classiques de la rupture, par exemple une poutre entaillée en flexion trois points, afin d'étudier les spécificités de la réponse visco-élastique par rapport à celle élastique. Un modèle isotrope de Burger est adopté. Dans cette perspective, le rapport entre le temps caractéristique du chargement et du matériau constitutif de la structure est attendu comme un paramètre capital. Dans le régime du court terme, l'écart par rapport au comportement élastique devrait être négligeable. En revanche, dans le régime du long terme, une partie importante de l'énergie mécanique fournie au matériau est dissipée ce qui diminue la quantité d'énergie disponible pour propager les fissures.

Le chapitre est organisé comme suit. Tout d'abord, on présente quelques notions classiques de la mécanique de la rupture fragile. L'analyse thermodynamique de la propagation en présence de dissipation visqueuse est ensuite

détaillée. La force motrice de la propagation des fissures est identifiée dans une forme qui permet, dans la troisième partie, sa détermination numérique au sein de l'approche progressive. Un critère de propagation de fissures écrit également sur cette quantité est proposé, qui tient compte des effets visqueux. Enfin, une analyse avec des notions de vitesse critique de chargement et de longueur asymptotique de la fissure est proposée. En fait, on va montrer l'existence d'un seuil de contrôle de la vitesse de charge : Au-delà de ce seuil, le système évolue vers un régime asymptotique, notamment vers une valeur limite de la longueur de la fissure. Ceci constitue une très forte différence qualitative avec la réponse élastique fragile.

Les analyses énergétiques sont réalisées sur des poutres viscoélastiques unidimensionnelles (homogène ou hétérogène), pour lesquelles les solutions analytiques sont dérivées. Le rôle de la vitesse de chargement et la nature de la charge sont discutés. Cela sert de guide dans l'analyse numérique de la réponse du problème bidimensionnel d'une poutre en flexion 3-points.

## 3.2 Mécanique de la rupture fragile

Durant le 20<sup>e</sup> siècle, une série de catastrophes, causées par une rupture brutale, s'est passée. La figure (FIG 3.1a) présente un de ces problèmes. La mécanique de la rupture a pour l'objectif d'étudier la condition de propagation et la propagation des fissures dans des structures pour prévoir la rupture éventuelle de celles-ci. Des

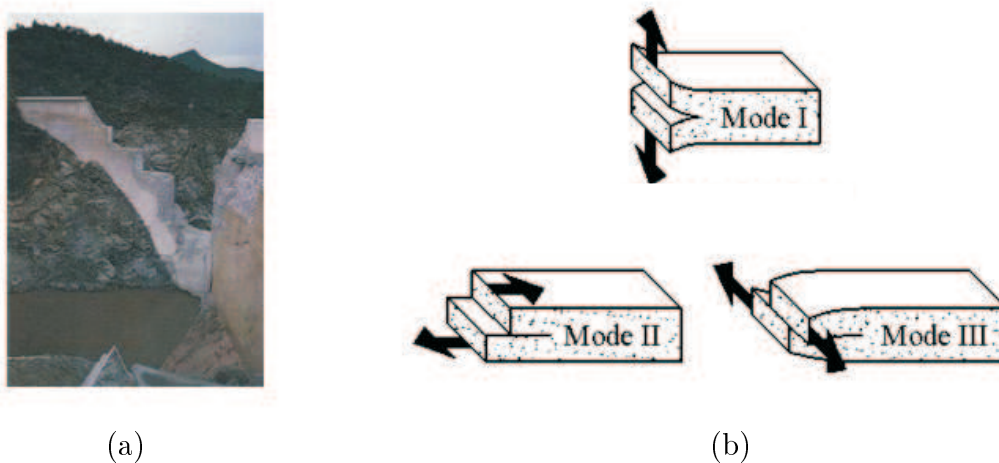


FIG. 3.1 – (a) Rupture du barrage Malpasset en 1959 ; (b) Trois modes de rupture

études concernant la singularité du champ des contraintes en pointe de fissure, en se basant sur des fonctions harmoniques ([30], [10], [47]) ont donné la notion des facteurs d'intensité des contraintes  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  correspondant à trois modes de rupture (FIG 3.1b). Pour le cas de déformations planes, le champ singulier des contraintes en pointe de la fissure s'écrit en fonction de ces facteurs comme suite :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left( 5\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left( -5\sin\frac{\theta}{2} + 3\sin\frac{3\theta}{2} \right) \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left( 3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left( -3\sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{3\theta}{2} \right) \\
 \sigma_{r\theta} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left( \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left( \cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3\theta}{2} \right) \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

où  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires (FIG 3.2a). Pour le cas d'une fissure unique dans un milieu élastique homogène isotrope soumise à une traction (mode I) ou un cisaillement (mode II) (FIG 3.2b), les facteurs d'intensité de contrainte sont simplement calculés par :  $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ ,  $K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}$  où  $a$  est la demi-longueur de la fissure,  $\sigma$  et  $\tau$  sont les contraintes de traction et de cisaillement à l'infini. En

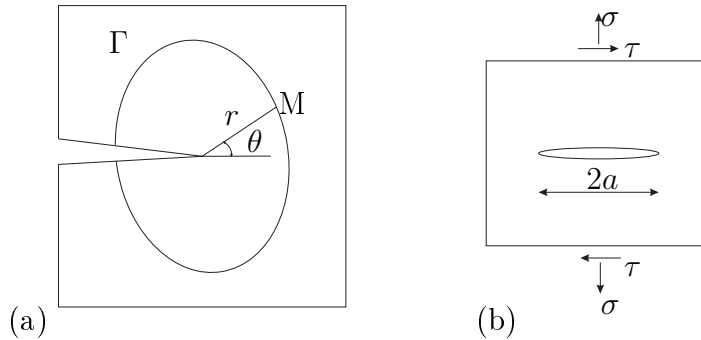


FIG. 3.2 – (a) Champ des contraintes en pointe de fissure est singulier ; (b) Fissure unique dans un milieu infini soumise à un chargement mode I et mode II

1920, Griffith a donné un point de vue énergétique pour traiter des problèmes de rupture [23]. Il a défini une valeur  $G$ , appelé *taux de restitution d'énergie*, qui est la restitution de l'énergie lorsqu'une unité de longueur de la fissure est créée<sup>1</sup>. Elle est égale à l'opposée de la dérivée de l'énergie potentielle totale  $P$  par rapport à la longueur  $\ell$  de la fissure :  $G = -dP/d\ell$ .

En 1958, Irwin a donné une relation entre  $G$  et les facteurs d'intensité

<sup>1</sup>le cas d'une fissure rectiligne

des contraintes :  $G = \frac{1 - \nu^2}{E}(K_I^2 + K_{II}^2)$  pour le cas de déformations planes ;  
 $G = \frac{1}{E}(K_I^2 + K_{II}^2)$  pour le cas de contraintes planes ; où  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson.

En 1968, Rice a contribué à cette étude en donnant une intégrale de contour [39] :

$$G = \int_{\Gamma} (wn_1 - \sigma_{ij}u_{i,1}n_j) ds \quad (3.2)$$

$\Gamma$  est le contour autour de la pointe de la fissure (FIG. 3.2a) ;  $w$  est l'énergie élastique et  $n_j$  est la composante  $j$  du vecteur normale au  $\Gamma$ .

Dans les années 70, avec le développement des méthodes aux éléments finis, il apparait des méthodes telles que la méthode  $G_\theta$ , la méthode  $M_\nu$  [9], qui se basent sur l'intégrale de Rice et qui permettent le calcul numérique de  $G$ . Parallèlement à ces méthodes, il existe aussi la méthode  $COD$ <sup>2</sup> ou bien la méthode de fissuration fictive [46].

La condition de propagation de la fissure est vérifiée en comparant  $G$  avec la valeur critique  $G_c$ , qui est une constante caractéristique du matériau<sup>3</sup>, qui est déterminée par des essais destructifs [46]. La fissure commence à propager lorsque  $G$  atteint  $G_c$  et pendant la propagation  $G$  reste égal à  $G_c$  [19].

La stabilité de la propagation est conditionnée par le signe de la dérivée de  $G$  par rapport à la longueur de la fissure : la propagation est stable si le signe est négatif, au contraire la propagation est instable.

### 3.3 Analyse énergétique de la propagation de fissure

L'étude de propagation de fissure dans un milieu élastique fragile est largement présentée dans littérature (voir par exemple [8], [50]). Dans cette section, une analyse thermodynamique de la restitution d'énergie est discutée pour le cas viscoélastique. La présence de l'énergie résiduelle et sa contribution à la dissipation sont ensuite illustrées par des études énergétiques des poutres 1D en flexion.

<sup>2</sup>Crack Opening Displacement

<sup>3</sup>Pour un matériau parfaitement fragile, le taux de restitution d'énergie critique est constant

### 3.3.1 Analyse thermodynamique de la restitution d'énergie

On considère maintenant un domaine  $\Omega(\ell)$  dans lequel une fissure plane de longueur  $\ell$  est en train de se propager (voir la figure 3.3). Dans cette section, les

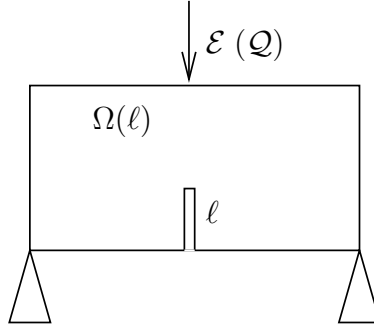


FIG. 3.3 – Structure viscoélastique fissurée soumise à un chargement cinématique

grandeurs telles que l'énergie élastique, la dissipation, la raideur apparente de la structure et la force mobilisée renvoient à l'épaisseur unité dans la direction normale au plan du domaine considéré. Pour simplifier l'exposé, on suppose que le chargement est défini par l'évolution d'un paramètre cinématique noté formellement  $\mathcal{E}(t)$ . Soit  $\mathcal{Q}$  la variable représentant l'effort extérieur dual de  $\mathcal{E}$ . La puissance mécanique fournie à la structure s'écrit donc  $\mathcal{Q} \cdot \dot{\mathcal{E}}$ . Dans le cas élastique linéaire (voir par exemple [30]), l'énergie élastique de la structure est une fonction du paramètre de chargement  $\mathcal{E}(t)$  et de la longueur  $\ell(t)$  de la fissure :  $W = W^e(\mathcal{E}, \ell)$ . On montre que le taux de dissipation s'écrit :

$$\dot{\mathcal{D}} = -\frac{\partial W^e}{\partial \ell} \Big|_{\mathcal{E}} (\mathcal{E}, \ell) \dot{\ell} \quad (3.3)$$

Le taux de restitution de l'énergie  $-\partial W^e / \partial \ell$  apparait ainsi comme la force motrice de la propagation, de sorte que le critère de propagation porte de façon naturelle sur cette quantité.  $W^e(\mathcal{E}, \ell)$  est une fonction quadratique de  $\mathcal{E}$ , elle s'écrit :

$$W^e(\mathcal{E}, \ell) = \frac{1}{2} C(\ell) \mathcal{E}^2 \quad (3.4)$$

qui introduit la raideur globale  $C(\ell)$  du système  $\Omega(\ell)$ . Par conséquent, la force motrice de la propagation de fissure est :

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} C'(\ell) \mathcal{E}^2 = -\frac{C'(\ell)}{2C(\ell)^2} \mathcal{Q}^2 \quad (3.5)$$

Dans le cas viscoélastique, l'énergie élastique stockée dans le système est obtenue par une intégrale de la densité volumique qui tient compte de la contribution de la partie de "Maxwell" et de celle de "Kelvin" :

$$W = \int_{\Omega(\ell)} \left( \frac{1}{2} \varepsilon^e : \mathbb{C}_M^e : \varepsilon^e + \frac{1}{2} \varepsilon_K^v : \mathbb{C}_K^e : \varepsilon_K^v \right) dV \quad (3.6)$$

Où  $\varepsilon^e$  est la déformation élastique et  $\varepsilon_K^v$  est la déformation visqueuse correspondante à la partie de "Kelvin".

Pour aller plus loin, il est utile d'analyser une formulation alternative de l'équation d'état (2.7), qui s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_M^e : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}^r \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\sigma}^r = -\mathbb{C}_M^e : \boldsymbol{\varepsilon}^v \quad (3.7)$$

Si le champ actuel des déformations visqueuses  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^v\}(t)$  ( $\alpha = M$  ou  $K$ ) est considéré comme donné, la déformation totale apparaissant dans l'équation (3.7) est la solution d'un problème élastique linéaire avec un champ de précontrainte égal à  $\boldsymbol{\sigma}^r$ . Le champ des déformations totales  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  à l'instant  $t$  dépend donc linéairement de  $\mathcal{E}(t)$  et de  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^v\}(t)$  ainsi que de la géométrie du système qui est caractérisée par  $\ell(t)$ . Par conséquent, l'énergie élastique stockée dans le système viscoélastique peut être considérée comme fonction des valeurs actuelles  $\mathcal{E}(t)$  et  $\ell(t)$  du paramètre de chargement et de la longueur de la fissure, ainsi que du champ actuel des déformations visqueuses  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^v\}(t)$  :  $W(t) = W(\mathcal{E}(t), \ell(t), \{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^v\}(t))$ . Dans ces conditions, la dissipation prend la forme :

$$\dot{\mathcal{D}} = \mathcal{Q} \cdot \dot{\mathcal{E}} - \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} \Big|_{\ell, \{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^v\}} \dot{\mathcal{E}} - \frac{\partial W}{\partial \{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^v\}} \Big|_{\mathcal{E}, \ell} \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha^v\} - \frac{\partial W}{\partial \ell} \Big|_{\mathcal{E}, \{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^v\}} \dot{\ell} \quad (3.8)$$

En analysant d'abord une évolution non dissipative, c'est à dire  $\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha^v\}(t) = 0$  et  $\dot{\ell} = 0$ , on montre que :

$$\mathcal{Q} = \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} \Big|_{\ell, \{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^v\}} = C(\ell)(\mathcal{E} - \mathcal{E}^v(\ell, \{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^v\})) \quad (3.9)$$

$C(\ell)$  représente la raideur d'élasticité instantanée de la structure. Il est identique à la raideur apparue dans (3.4), pour une structure élastique dans laquelle le tenseur de rigidité local est  $\mathbb{C}_M^e$ .  $\mathcal{E}^v$  s'interprète comme la valeur du chargement cinématique  $\mathcal{E}$  à l'issue d'une décharge totale instantanée  $\mathcal{Q} = 0$ . Le terme en  $\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha^v\}$  dans (3.8) représente la dissipation visqueuse  $\dot{\mathcal{D}}^v$ . La dérivée étant effectuée par rapport à un champ, elle revêt bien évidemment un sens formel :

$$\dot{\mathcal{D}}^v = - \frac{\partial W}{\partial \{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^v\}} \Big|_{\mathcal{E}, \ell} \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha^v\} \quad (3.10)$$

La puissance dissipée dans la propagation est donc le complémentaire de  $\dot{\mathcal{D}}^v$  dans la dissipation totale :

$$\dot{\mathcal{D}} - \dot{\mathcal{D}}^v = - \frac{\partial W}{\partial \ell} \Big|_{\mathcal{E}, \{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^v\}} \dot{\ell} \quad (3.11)$$

La quantité

$$\mathcal{F} = - \frac{\partial W}{\partial \ell} \Big|_{\mathcal{E}, \{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^v\}} (\mathcal{E}, \ell, \{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^v\}) \quad (3.12)$$

apparaît à nouveau comme la force motrice de la propagation. La nouveauté réside dans le fait que sa valeur est affectée par le champ de déformations visqueuses, lui-même tributaire de l'histoire du chargement  $\mathcal{E}(0 \rightarrow t)$  et de celle de la longueur de fissure  $\ell(0 \rightarrow t)$  sur l'intervalle d'étude  $[0, t]$  considéré.

Pour un raisonnement similaire à l'analyse énergétique développée en microélastoplasticité (voir par exemple [16]), on montre que l'énergie élastique se met sous la forme :

$$W = \frac{1}{2} C(\ell) (\mathcal{E} - \mathcal{E}^v)^2 + W_{res}(\ell, \{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^v\}) \quad (3.13)$$

Le premier terme représente l'énergie récupérable par une décharge instantanée ( $\mathcal{Q} = 0$ ). Le second terme s'interprète comme l'énergie élastique qui subsiste dans la structure immédiatement après cette décharge. Du fait que  $\mathcal{E}^v$  et  $W_{res}$  dépendent tous deux de  $\ell$ , le calcul de  $\mathcal{F}$  ne se réduit pas à celui de  $C'(\ell)$ , à la différence de ce qui prévaut en élasticité linéaire :

$$\mathcal{F} = - \frac{1}{2} C'(\ell) (\mathcal{E} - \mathcal{E}^v)^2 + C(\ell) (\mathcal{E} - \mathcal{E}^v) \frac{\partial \mathcal{E}^v}{\partial \ell} \Big|_{\{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^v\}} - \frac{\partial W_{res}(\ell, \{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^v\})}{\partial \ell} \Big|_{\{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^v\}} \quad (3.14)$$

Le critère de propagation repose sur l'hypothèse adoptée dans cette thèse que **la partie de la dissipation liée à la propagation est proportionnelle au taux de longueur de fissure  $\dot{\ell}$**  :

$$\dot{\mathcal{D}} - \dot{\mathcal{D}}^{vis} = G_c \dot{\ell} \quad (3.15)$$

qui fait intervenir l'énergie critique  $G_c$ . En comparant avec (3.11), on est amené à formuler un critère de propagation sur  $\mathcal{F}$  :

$$\mathcal{F} < G_c \Rightarrow \dot{\ell} = 0 \quad ; \quad \mathcal{F} = G_c \Rightarrow \dot{\ell} \geq 0 \quad (3.16)$$

L'égalité  $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \ell, \{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^v\}) = G_c$  permet de prévoir la propagation en fonction des évolutions du paramètre de chargement. Il est important de voir qu'elle fait intervenir explicitement le champ de déformations visqueuses, et donc la vitesse de sollicitation.

### 3.3.2 Délaminage d'une poutre viscoélastique homogène

A titre d'illustration, on s'intéresse au problème de délaminage qui est réalisé progressivement sur une poutre viscoélastique et qui divise la poutre en deux moitiés symétriques. Chaque moitié est modélisée comme une structure unidimensionnelle en flexion. Un déplacement vertical est imposé de façon symétrique aux extrémités d'abscisse  $x = 0$  des deux parties de la poutre :  $\xi(0, t) = \pm U(t)$  (FIG 3.4). Deux forces opposées  $\pm F(t)$  sont appliquées sur ces extrémités afin

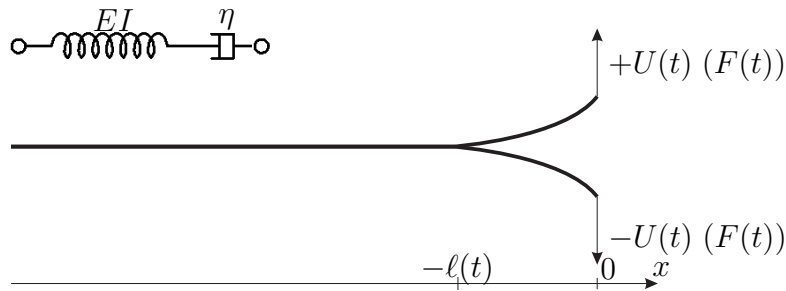


FIG. 3.4 – Délaminage d'une poutre viscoélastique

d'obtenir les déplacements  $\pm U(t)$  en question. Notons que  $F(t)$  est une inconnue du problème. Les deux demi-poutres sont encore collées à partir du point d'abscisse  $x = -\ell(t)$  dans le domaine  $x \leq -\ell(t)$ . Pour chaque demi-poutre, l'abscisse  $x = -\ell(t)$  est considérée comme un encastrement ( $\xi(-\ell(t), t) = 0$ ,  $\partial\xi/\partial x(-\ell(t), t) = 0$ ).  $\ell(t)$  représente également la longueur de la fissure réalisée à l'instant  $t$ . En raison de la symétrie de la structure, on ne considère dans la suite que la demi-poutre supérieure, avec les conditions aux limites suivantes :

$$\xi(-\ell(t), t) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial\xi}{\partial x}(-\ell(t), t) = 0 \quad ; \quad \xi(0, t) = U(t) \quad (3.17)$$

Pour souci de simplicité, le comportement viscoélastique considéré dans cette section est réduit à la partie de "Maxwell". Dans ces conditions, la courbure élastique  $\chi^e$  et le taux de la courbure visqueuse  $\dot{\chi}^v$  sont proportionnels au moment fléchissant  $M$  :

$$\chi^e = \frac{M}{EI} \quad ; \quad \dot{\chi}^v = \frac{M}{\eta} \quad (3.18)$$

Le temps caractéristique du comportement étudié est représenté par  $\tau = \eta/EI$ .

D'autre part, la courbure totale  $\chi$  est égale la dérivée seconde du dépla-



cement vertical par rapport à  $x$  :

$$\chi = \chi^e + \chi^v = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (3.19)$$

On peut remarquer que la demi-poutre considérée est une structure isostatique dont le moment fléchissant est déterminé par  $M(x) = -Fx$ <sup>4</sup>. En combinant (3.18) avec (3.19), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\frac{Fx}{EI} + \chi^v \quad (3.20)$$

En intégrant deux fois l'équation (3.20) par rapport à  $x$  et en utilisant des conditions aux limites données par (3.17), on obtient une expression de la force de délaminage  $F$  en fonction de la grandeur duale  $U$  :

$$F = C(\ell)(U - U^v) \quad (3.21)$$

avec

$$U^v = \int_{-\ell}^0 dx \int_{-\ell}^x \chi^v(z, t) dz \quad (3.22)$$

(3.21) constitue l'illustration de (3.9) dans la situation présente.  $C(\ell)$  représente la raideur instantanée de la poutre :

$$C(\ell) = \frac{3EI}{\ell^3} \quad (3.23)$$

tandis que  $U^v$  peut être interprété comme le déplacement résiduel après un déchargement instantané  $F = 0$ .

L'énergie élastique totale est déterminée par la forme unidimensionnelle de (3.6) sans la contribution de la partie de "Kelvin".

$$W = \int_{-\ell}^0 \frac{EI}{2} \chi^{e2} dx = \int_{-\ell}^0 \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{F^2 \ell^3}{6EI} \quad (3.24)$$

En introduisant (3.21) et (3.23) dans (3.24) on obtient :

$$W = \frac{1}{2} C(\ell) (U - U^v)^2 \quad (3.25)$$

La comparaison avec (3.13) montre que, pour ce problème, il n'y a pas d'énergie résiduelle, c'est à dire que l'énergie élastique globale stockée dans la structure est recouvrable par une décharge totale  $F = 0$ . C'est clairement dû au fait que la

---

<sup>4</sup>où l'on omet provisoirement la variable  $t$  pour alléger l'écriture

structure est isostatique<sup>5</sup>.

Bien que  $U^v$  déterminé par (3.22) soit une fonction de  $\ell$ , sa dérivée par rapport à  $\ell$  dans un incrément d'évolution à déformation visqueuse constante est nulle :

$$\frac{\partial U^v}{\partial \ell} \Big|_{x^v} = 0 \quad (3.26)$$

Ainsi, la force motrice de la propagation donnée par (3.14) est réduite au terme de dérivée de la raideur :

$$\mathcal{F} = -\frac{\partial W}{\partial \ell} \Big|_{U, x^v} = -\frac{1}{2} C'(\ell) (U - U^v)^2 \quad (3.27)$$

Finalement, en introduisant (3.21) et (3.23) dans (3.27), on obtient :

$$\mathcal{F} = \frac{F^2 \ell^2}{2EI} \quad (3.28)$$

On note  $\ell_o$  la longueur initiale de la fissure. Dans le cadre du critère de propagation (3.16), la force  $F_o$ , qui correspond au moment où la fissure commence à propager, s'écrit de façon indépendante de la déformation visqueuse et coïncide avec celle d'un problème élastique :

$$F_o = \frac{\sqrt{2G_c EI}}{\ell_o} \quad (3.29)$$

Plus généralement, durant la propagation ( $\dot{\ell} > 0$ ), la force  $F(t)$  diminue en fonction de la longueur  $\ell(t)$  : elle est donnée par l'expression suivante :

$$F(t) = \frac{\sqrt{2G_c EI}}{\ell(t)} = F_o \frac{\ell_o}{\ell(t)} \quad (3.30)$$

### 3.3.2.1 Délaminage à vitesse de propagation de la fissure constante

Afin d'obtenir la réponse globale de la structure, une hypothèse sur l'histoire du chargement est nécessaire. A titre d'exemple, on suppose maintenant que la vitesse de propagation de la fissure  $\dot{\ell}$  est maintenue constante. Le rapport  $\tau_\ell = \ell_o / \dot{\ell}$  représente le temps caractéristique de la propagation, qui constitue ici une donnée du problème. Par convention, à l'instant  $t = 0$  la condition de propagation est réalisée. Pour  $t > 0$ , la longueur de la fissure est déterminée par :

$$\ell(t) = \ell_o + \dot{\ell} t = \ell_o \left(1 + \frac{t}{\tau_\ell}\right) \quad (3.31)$$

---

<sup>5</sup>On rappelle que le modèle rhéologique est réduit à un "Maxwell".

A l'instant  $t = 0$ , le déplacement de l'extrémité de la poutre est noté  $U_o$ , et la moitié de la poutre avec la géométrie initiale  $[-\ell_o, 0]$  est soumise à un certain champ de courbure visqueuse initiale  $\chi_o^v(x)$ . La composante visqueuse correspondante  $U_o^v$  de  $U_o$  s'écrit (voir (3.22)) :

$$U_o^v = \int_{-\ell_o}^0 dx \int_{-\ell_o}^x \chi_o^v(z) dz \quad (3.32)$$

tandis que sa composante élastique est donnée par (3.21) :

$$U_o^e = U_o - U_o^v = \frac{F_o \ell_o^3}{3EI} \quad (3.33)$$

De même, pour  $t > 0$ , la courbure visqueuse est nécessaire pour la détermination de  $U^v$ . Grâce à (3.18), on peut déterminer le taux de la courbure visqueuse  $\dot{\chi}^v$  par :

$$\dot{\chi}^v(x, t) = \frac{-F(t)x}{\eta} \quad (3.34)$$

$\chi^v(x, t)$  est ensuite obtenue par une intégration par rapport au temps. Pour  $x > -\ell_o$ , en utilisant (3.31) et (3.30), on obtient :

$$x > -\ell_o : \quad \chi^v(x, t) = \chi_o^v(x) - \frac{x}{\eta} \int_0^t F(\tau) d\tau = \chi_o^v(x) - \frac{F_o x}{\eta} \tau_\ell \log\left(1 + \frac{t}{\tau_\ell}\right) \quad (3.35)$$

Considérons maintenant une section située à  $x < -\ell_o$ . Cette section est atteinte par la fissure à  $t_o(x) = -(x + \ell_o)/\dot{\ell}$ , quand  $\ell(t) = -x$ . La courbure visqueuse de cette section reste égale à 0 tant que  $t < t_o(x)$ . Ainsi, l'intégration de (3.34) donne :

$$\left. \begin{array}{l} x < -\ell_o \\ t > t_o(x) \end{array} \right\} \chi^v(x, t) = \frac{-x}{\eta} \int_{t_o(x)}^t F(\tau) d\tau = -\frac{F_o x}{\eta} \tau_\ell \log\left(-\frac{\ell(t)}{x}\right) \quad (3.36)$$

En combinant (3.21), (3.32), (3.35) et (3.36), on obtient la composante visqueuse  $U^v(t)$  du déplacement  $U(t)$  de l'extrémité de la poutre sous la forme :

$$U^v = \frac{F_o \tau_\ell (\ell^3(t) - \ell_o^3)}{9\eta} + U_o^v \quad (3.37)$$

En outre, l'introduction de (3.37) dans (3.21) donne :

$$U = U_o + \frac{F_o \tau_\ell (\ell^3 - \ell_o^3)}{9\eta} + \frac{\ell^3 F - \ell_o^3 F_o}{3EI} \quad (3.38)$$

où (3.33) a été utilisée. Enfin, en introduisant le déplacement normalisé  $u = (U - U_o)/U_o^c$  et la force normalisée  $f = F/F_o$  et en se souvenant de (3.30), (3.38) se réduit à :

$$u = \left(\frac{1}{f^2} - 1\right) + \frac{1}{3} \frac{\tau_\ell}{\tau_M} \left(\frac{1}{f^3} - 1\right) \quad (3.39)$$

où  $\tau_M = \eta/EI$  est le temps caractéristique du matériau.

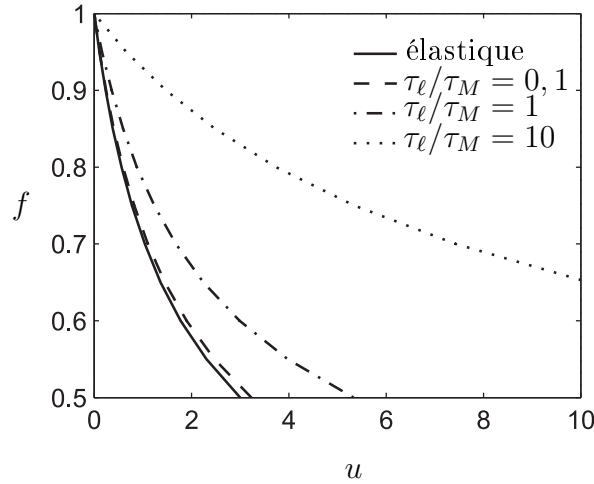


FIG. 3.5 – Délaminage d’une poutre isostatique *v.l.n.v.*, à vitesse constante de propagation de la fissure

Le premier terme dans l’expression de  $u$  correspond au cas élastique-fragile idéal. Le deuxième terme apparaît donc comme une correction tenant compte des effets visqueux. Comme prévu, son ordre de grandeur est contrôlé par le rapport  $\tau_\ell/\tau_M$  : plus la propagation de la fissure est rapide, plus l’écart par rapport à la réponse élastique fragile est faible. La force normalisée  $f$  est tracée en fonction de  $u$  pour 3 valeurs différentes du rapport  $\tau_\ell/\tau_M$  sur la figure 3.5.

### 3.3.2.2 Délaminage à vitesse de déplacement de l’extrémité de la poutre constante

A nouveau, à l’instant  $t = 0$  la condition de propagation est supposée être réalisée, avec à cet instant  $\ell = \ell_o$ ,  $U = U_o$ ,  $F = F_o$  (voir (3.29)). Nous étudions maintenant la condition de propagation à vitesse de déplacement imposée  $\dot{U}$  constante. Pour commencer, on suppose que la vitesse  $\dot{U}$  est suffisamment élevée pour que la fissure puisse effectivement se propager ( $\dot{\ell} > 0$ ). La composante visqueuse  $U^v$  du déplacement de l’extrémité de la poutre est toujours donnée par

(3.22). Sa dérivée par rapport au temps donne :

$$\dot{U}^v(t) = \int_{-\ell(t)}^0 \left( \int_{-\ell(t)}^x \dot{\chi}^v(y, t) dy \right) dx + \ell(t) \dot{\ell} \chi^v(-\ell(t), t) \quad (3.40)$$

Le fait que  $\dot{\chi}^v < \infty$  (voir (3.18)) implique la continuité de la fonction  $\tau \rightarrow \chi^v(-\ell(t), \tau)$  à  $\tau = t$ . Observant que  $\chi^v(-\ell(t), \tau) = 0$  pour  $\tau < t$ , nous concluons donc que  $\chi^v(-\ell(t), t) = 0$ . Ainsi, l'équation (3.41) réduit à :

$$\dot{U}^v(t) = \int_{-\ell(t)}^0 \left( \int_{-\ell(t)}^x \dot{\chi}^v(y, t) dy \right) dx \quad (3.41)$$

En utilisant (3.34) dans (3.41), on obtient finalement :

$$\dot{U}^v = \frac{F\ell^3}{3\eta} \quad (3.42)$$

Considérons maintenant la dérivée temporelle de (3.21) :

$$\dot{F} = \dot{C}(U - U^v) + C(\dot{U} - \dot{U}^v) = \frac{\dot{C}}{C}F + C(\dot{U} - \dot{U}^v) \quad (3.43)$$

La propagation de la fissure implique que  $F$  et  $\ell$  sont liés par (3.30). Cela permet de transformer (3.43) en une équation différentielle ordinaire du premier degré :

$$2\dot{F} + \frac{3EI\dot{U}}{F_o^3 L_o^3} F^3 - \frac{EI}{\eta} F = 0 \quad (3.44)$$

avec la condition initiale  $F(t = 0) = F_o$ . Comme dans (3.39), il est pratique d'utiliser la valeur normalisée  $f = F/F_o$ . Le temps caractéristique de la charge étant défini par  $\tau_U = U_o^e/\dot{U}$ , (3.44) se réduit à :

$$2\frac{\dot{f}}{f} + \frac{1}{\tau_U} f^2 - \frac{1}{\tau_M} = 0 \quad (3.45)$$

dont la solution s'écrit :

$$f = \frac{1}{\sqrt{\frac{\tau_M}{\tau_U} - \exp\left(-\frac{t}{\tau_M}\right)\left(\frac{\tau_M}{\tau_U} - 1\right)}} \quad (3.46)$$

L'hypothèse de la propagation de la fissure implique que  $\dot{\ell} > 0$ , qui implique ensuite que  $\dot{F} < 0$  (voir (3.30)). En conséquence, la solution ci-dessus prouve que la propagation de la fissure à vitesse de l'extrémité  $\dot{U}$  constante exige que  $\tau_M > \tau_U$ . Elle conduit à introduire la vitesse critique  $\dot{U}_{cr}$  :

$$\dot{U}_{cr} = \frac{F_o \ell_o^3}{3\eta} \quad ; \quad \frac{\tau_U}{\tau_M} = \frac{\dot{U}_{cr}}{\dot{U}} \quad (3.47)$$

Si la condition de propagation est atteinte à  $t = 0$ , la fissure ne continue de se propager que si  $\dot{U} > \dot{U}_{cr}$ . La force normalisée  $f$  est tracée en fonction de  $u$  pour 3 valeurs différentes du rapport  $\tau_U/\tau_M < 1$  sur la figure 3.6 (à gauche).

La force normalisée  $f$  tend vers une valeur asymptotique  $f_\infty = \sqrt{\tau_U/\tau_M}$  qui est proportionnelle à  $1/\sqrt{\dot{U}}$ . Par (3.30), on peut conclure également que la longueur de la fissure tend vers une valeur asymptotique  $\ell_\infty$  :

$$\ell_\infty = \ell_o \sqrt{\frac{\tau_M}{\tau_U}} \quad (3.48)$$

Cette conclusion constitue une différence qualitative radicale avec le cas élastique. Au contraire, si  $\tau_U > \tau_M$  ou bien  $\dot{U} < \dot{U}_{cr}$ , la fissure ne se propage pas ( $\dot{\ell} = 0$  et donc  $\dot{C} = 0$  dans (3.43)), de sorte que (3.45) est remplacée par :

$$\dot{f} + \frac{f}{\tau_M} = \frac{1}{\tau_U} \quad (3.49)$$

avec la condition initiale  $f(0) = 1$ . La solution de cette équation s'écrit :

$$f = \left( \frac{\tau_M}{\tau_U} + \left( 1 - \frac{\tau_M}{\tau_U} \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_M}\right) \right) \quad (3.50)$$

La force normalisée tend maintenant vers la limite  $f_\infty = \tau_M/\tau_U$  qui est proportionnelle à  $\dot{U}$ .  $f$  est tracée comme une fonction de  $u$  sur la figure 3.6 (à droite). La condition de propagation est supposée être respectée au point initial ( $f = 1$ ).

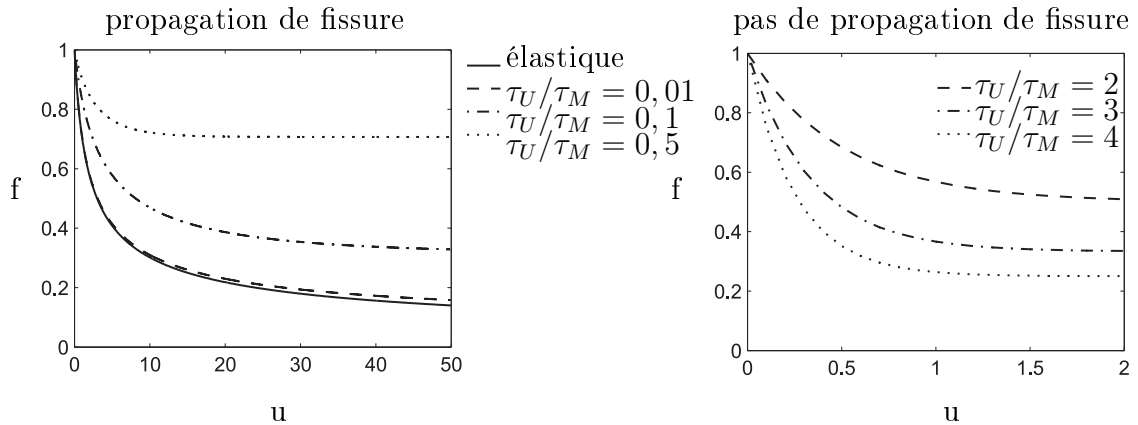


FIG. 3.6 – Délaminage d’une poutre isostatique *v.l.n.v.*, à une vitesse constante de l’extrémité de la poutre

### 3.3.2.3 Vitesse de déplacement de l'extrémité de la poutre constante en l'absence de propagation

Pour finir, on considère une condition de vitesse de déplacement imposée  $\dot{U}$  et une loi linéaire en temps de la forme  $U(t) = \dot{U}t$ , en l'absence de propagation. Cela revient à se donner une valeur suffisamment élevée de  $G_c$ . En dérivant (3.21) par rapport au temps et en utilisant (3.42), on obtient une équation différentielle en temps sur  $F(t)$  :

$$\dot{F} + \frac{C\ell_o^3}{3\eta}F = C\dot{U} \quad (3.51)$$

avec la condition initiale  $F(0) = 0$ . Ceci indique que  $F(t)$  tend vers une valeur asymptotique  $F_\infty$  proportionnelle à  $\dot{U}$  :

$$F_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} F = \frac{3\eta}{\ell_o^3}\dot{U} \quad (3.52)$$

Il est facile de voir que cette valeur asymptotique est égale à celle obtenue à la section 3.3.2.2 en l'absence de propagation dans le cas  $\dot{U} < \dot{U}_{cr}$ . Elle est proportionnelle à  $\dot{U}$ . Notons par ailleurs, compte tenu de (3.28), qu'il existe également une valeur asymptotique  $\mathcal{F}_\infty$  pour le taux de restitution de l'énergie.

### 3.3.3 Impact de l'hétérogénéité sur l'énergie résiduelle

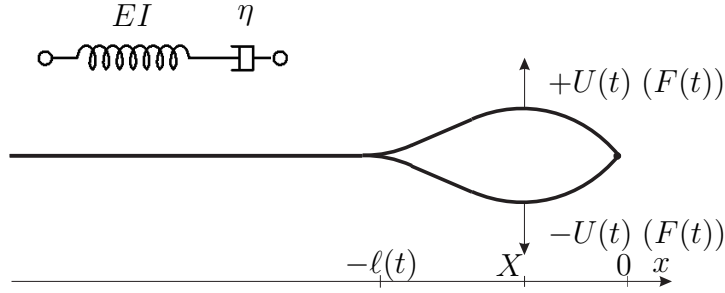
Pour une poutre homogène isostatique, on a montré dans la section 3.3.2 que l'énergie résiduelle après une décharge totale est nulle (voir l'équation (3.25)). Dans la présente section, on introduit un exemple où l'énergie résiduelle n'est pas nulle. Cette analyse est réalisée encore une fois sur un problème de délaminage de poutre. Mais cette fois, on utilise une poutre rendue hyperstatique par le fait que les deux moitiés de la poutre sont articulées à l'extrémité (voir la figure 3.7).  $X$  désigne l'abscisse du point d'application de la charge. Son déplacement  $U(t)$  est prescrit.

On considère la demi-poutre supérieure avec les conditions aux limites suivantes :

$$\xi(-\ell(t), t) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}(-\ell(t), t) = 0 \quad ; \quad \xi(X, t) = U(t) \quad ; \quad \xi(0, t) = 0 \quad (3.53)$$

et

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}(X^-, t) = \frac{\partial \xi}{\partial x}(X^+, t) \quad (3.54)$$


 FIG. 3.7 – Délaminage d'une poutre *v.l.n.v.* hétérogène hyperstatique

On suppose encore une fois que le comportement viscoélastique est de type “Maxwell”. La rigidité élastique en flexion de la poutre est considérée constante sur toute sa longueur et est notée  $EI$ . On introduit une hétérogénéité viscoélastique en supposant que les constantes visqueuses des deux côtés du point d'application de la charge sont différentes. On les note respectivement  $\eta_1$  et  $\eta_2$  pour la partie de gauche ( $x < X$ ) et la partie de droite ( $x > X$ ). De même, les indices 1 et 2 désignent dans la suite des grandeurs relatives aux deux parties de la poutre de part et d'autre du point d'application de la charge.

La loi de comportement locale de la poutre permet d'écrire les relations linéaires suivantes entre les moments fléchissants et les courbures de ses deux parties :

$$\chi_\alpha^e = \frac{M_\alpha}{EI} \quad ; \quad \dot{\chi}_\alpha^v = \frac{M_\alpha}{\eta_\alpha} \quad (3.55)$$

où  $\alpha = 1$  ou  $2$ . D'autre part, les courbures totales  $\chi_\alpha$  sont égales aux dérivées secondes du déplacement vertical par rapport à  $x$  :

$$\chi_\alpha = \chi_\alpha^e + \chi_\alpha^v = \frac{\partial^2 \xi_\alpha}{\partial x^2} \quad (3.56)$$

Soit  $Y$  la réaction à l'articulation. Le moment fléchissant dans les deux parties de la poutre est donc déterminé par :

$$M_1 = F(X - x) - Yx \quad ; \quad M_2 = -Yx \quad (3.57)$$

En combinant (3.55), (3.56) et (3.57), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = \frac{F(X - x) - Yx}{EI} + \chi_1^v \quad ; \quad \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} = \frac{-Yx}{EI} + \chi_2^v \quad (3.58)$$



En intégrant deux fois par rapport à  $x$  et en utilisant les conditions données par (3.53) et (3.54), on obtient un système des deux équations permettant la détermination des forces  $F$  et  $Y$  en fonction de  $U$ . L'expression générale de  $F$  donnée en (3.21) est toujours valable, avec une raideur instantanée de la poutre  $C(\ell)$  spécifique : pour ce cas hyperstatique, elle s'écrit :

$$C(\ell) = \frac{12EI\ell^3}{X^2(3\ell - X)(\ell + X)^3} \quad (3.59)$$

La partie visqueuse  $U^v$  du déplacement est déterminée par :

$$U^v = \frac{(X^3 - 3\ell^2 X)}{2\ell^3} \gamma_1 + \frac{(2\ell - X)(\ell + X)^2}{2\ell^3} (\gamma_3 + X\gamma_2) \quad (3.60)$$

avec :

$$\gamma_1 = \int_{-\ell}^X dx \int_{-\ell}^x \chi^v du; \quad \gamma_2 = \int_{-\ell}^X \chi^v dx; \quad \gamma_3 = \int_0^X dx \int_X^x \chi^v du \quad (3.61)$$

La réaction  $Y$  s'exprime en fonction du déplacement imposé par :

$$Y = \frac{-6EI}{X^2(3\ell - X)(\ell + X)} ((2\ell - X)U + 3X\gamma_1 - 2(\ell + X)(\gamma_3 + X\gamma_2)) \quad (3.62)$$

L'énergie élastique totale est calculée par une intégrale sur la longueur de la poutre des termes quadratiques du moment fléchissant :

$$W = \int_{-\ell}^0 \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx = \int_X^0 \frac{Y^2 x^2}{2EI} dx + \int_{-\ell}^X \frac{(F(X - x) - Yx)^2}{2EI} dx \quad (3.63)$$

D'autre part, l'énergie récupérable est calculée en fonction de la raideur de la poutre et du déplacement élastique par :

$$W_{rec} = \frac{1}{2} C(\ell) (U - U^v)^2 \quad (3.64)$$

Alors, on peut déterminer finalement l'énergie résiduelle  $W_{res}$  par :

$$W_{res} = W - W_{rec} = \frac{3EI}{2\ell^3} \gamma^2 \quad (3.65)$$

où l'on a posé  $\gamma = \gamma_3 + X\gamma_2 - \gamma_1$ . Il est intéressant de noter la relation :

$$\gamma = - \int_{-\ell}^X dx \int_{-\ell}^x \chi^v du \quad (3.66)$$

La nullité de cette quantité, lorsqu'elle a lieu, exprime que le champ de courbure visqueuse est cinématiquement admissible. Dans ces conditions, aucune énergie

n'est stockée dans l'état résiduel où les efforts intérieurs sont alors nuls. Il est donc tout à fait cohérent que  $W_{res}$  s'annule simultanément avec  $\gamma$ .

En général,  $\gamma$  sera cependant non nul, et il en sera de même de  $W_{res}$ . Par exemple, si l'on suppose que la partie à gauche du point d'application de la charge est élastique, on a  $\chi_1^v = 0$ . Par conséquent, les grandeurs  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont nulles (voir (3.61)). L'énergie résiduelle se réduit à :

$$W_{res} = \frac{3EI}{2\ell^3} \gamma_3^2 \quad (3.67)$$

qui est certainement non nulle puisque  $\chi^v$  va garder un signe constant sur la portion de droite de la poutre. Ce résultat est en fait étroitement lié au caractère **hétérogène** des propriétés visqueuses de la poutre.

En effet, dans le cas homogène, c'est-à-dire  $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ , on va voir que l'énergie résiduelle est nulle. En utilisant (3.61), le taux de  $\gamma$  peut être exprimé en fonction de la courbure visqueuse par :

$$\dot{\gamma} = - \int_{-\ell}^X \int_{-\ell}^x \dot{\chi}^v \, dudx + X \int_{-\ell}^X \dot{\chi}^v \, dx + \int_0^X \int_X^x \dot{\chi}^v \, dudx \quad (3.68)$$

où  $\dot{\chi}^v$  est relié au moment fléchissant par (3.55). Les moments fléchissants  $M_\alpha$  sont déterminés par (3.57) où  $F$  et  $Y$  sont des fonctions du déplacement imposé (voir (3.21) et (3.62)). On obtient finalement une équation différentielle d'ordre 1 permettant la détermination de  $\gamma$  :

$$\dot{\gamma} + \tau\gamma = 0 \quad (3.69)$$

où  $\tau = \eta/EI$  est le temps caractéristique du matériau. La résolution de cette équation avec la condition initiale  $\gamma|_{t=0} = 0$  nous donne  $\gamma = 0$ , et donc  $W_{res} = 0$  (voir (3.65)). On peut conclure que, pour une poutre hyperstatique **homogène**, l'énergie résiduelle est nulle, de sorte que l'énergie totale coïncide avec l'énergie récupérable :

$$W = \frac{1}{2} C(\ell) (U - U^v)^2 \quad (3.70)$$

On revient maintenant au calcul du taux de restitution d'énergie (voir (3.14)). En prenant (3.60) et (3.65) on obtient :

$$\frac{\partial U^v}{\partial \ell} \Big|_{\chi^v} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial W_{res}}{\partial \ell} \Big|_{\chi^v} = 0 \quad (3.71)$$

Alors le taux de restitution d'énergie prend la même forme que le cas statique (voir (3.27)).

## 3.4 Approche numérique en éléments finis

Les deux modèles de délaminage iso- et hyperstatique qui viennent d'être présentés ont fait apparaître plusieurs phénomènes étroitement liés à la viscosité dans le processus de propagation de fissure. Il s'agit notamment de l'existence d'une vitesse de chargement critique et d'une longueur de propagation asymptotique. Il importe de déterminer si ces conclusions restent pertinentes pour une structure tridimensionnelle.

Cette étude repose sur une approche numérique en élément finis du calcul du taux de restitution d'énergie et de la propagation de fissures, présentée en détail dans cette section.

Dans la présente section, on indique le principe des simulations numériques effectuées et l'on présente des résultats de calcul sans puis avec propagation. Quelques conclusions qualitatives sont tirées. La prochaine section (3.5) reviendra de façon plus quantitative sur des notions telles que vitesse critique, force et longueur de fissure asymptotiques.

Le comportement *v.l.n.v.* du matériau est modélisé à nouveau par le modèle de Burger (voir le chapitre 2).

### 3.4.1 Calcul numérique du taux de restitution de l'énergie

On cherche à établir un algorithme de calcul numérique du taux de restitution d'énergie  $\mathcal{F}$  d'une structure contenant une fissure unique soumise à un certain chargement extérieur qui comporte *a priori* des données en déplacement et en efforts. On note symboliquement  $\mathcal{E}$  la donnée cinématique et  $\mathcal{Q}$  la grandeur duale. On note encore  $F$  les données en efforts et  $q$  la grandeur (cinématique) duale. Pour le cas d'un chargement cinématique,  $\mathcal{F}$  est calculé par la formule (3.12). Pour le cas de chargement mixte ( $\mathcal{E}+F$ ),  $\mathcal{F}$  est calculé par :

$$\mathcal{F} = -\frac{\partial P}{\partial \ell} \Big|_{\mathcal{E}, F, \{\epsilon_\alpha^v\}}(\mathcal{E}, F, \ell, \{\epsilon_\alpha^v\}) \quad (3.72)$$

où  $P$  est l'énergie potentielle du système qui est la différence entre l'énergie élastique et le travail  $\Phi$  des forces extérieures données ( $F$ ) :

$$P = W - \Phi \quad (3.73)$$

Les calculs numériques du taux de restitution d'énergie basés sur l'intégrale de Rice (voir (3.2)) sont très pertinent pour le cas élastique. Cependant pour le

cas viscoélastique, elle n'est pas valable en raison de la non-compatibilité entre le champ des déformations élastiques et le champ des déplacements. Alors, pour calculer numériquement la dérivée partielle (3.72) dans le contexte viscoélastique, on opte ici pour une approche directe. On teste donc un incrément  $d\ell$  fictif en fixant  $\mathcal{E}$ ,  $F$  et  $\{\varepsilon_\alpha^v\}$  et on calcule l'incrément correspondant de l'énergie potentielle  $dP$ . Le taux de restitution d'énergie  $\mathcal{F}$  est ensuite approché par :  $\mathcal{F} = -dP/d\ell$ .

En pratique, on change les conditions aux limites du problème pour avoir une nouvelle fissure de longueur  $\ell + d\ell$ . On a vu que la dérivée recherchée est à prendre sans variation du chargement **ni des déformations visqueuses**. Or, fixer le champ des déformations visqueuses  $\{\varepsilon_\alpha^v\}$  revient à considérer une réponse locale purement élastique. Pour le cas du matériau de Burger, cela revient à dire que la réponse locale à l'accroissement de longueur  $d\ell$  de la fissure se fait "à pots visqueux bloqués". Seul se déforme le ressort de la partie "Maxwell", caractérisé par les modules élastiques  $k_M$  et  $\mu_M$ .

L'énergie élastique est calculée par une intégration sur  $\Omega$  de l'énergie élastique locale. Celle-ci comporte la contribution de la partie "Maxwell" et celle de la partie "Kelvin" (voir (3.6)) :

$$W = \int_{\Omega} w(\underline{x})dV \quad \text{avec} \quad w = w_M + w_K \quad (3.74)$$

avec :

$$w_M = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{S}_M^e : \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \nu_M}{E_M} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu_M}{E_M} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 \right) \quad (3.75)$$

et

$$w_K = \frac{1}{2} \varepsilon_K^v : \mathbb{C}_K^e : \varepsilon_K^v \quad (3.76)$$

où  $\mathbb{S}_M^e$ ,  $\nu_M$  et  $E_M$  sont respectivement le tenseur de souplesse, le coefficient de Poisson et le module d'Young du comportement instantané du matériau. En réalité, dans le calcul de la variation incrémentale de  $W$ , il suffit de prendre en compte le terme de Maxwell puisque l'énergie élastique stockée localement dans la partie Kelvin est bloquée dans l'évolution considérée.

La variation  $d\Phi$  du travail des forces extérieures données entre l'état réel et l'état fictif est calculée en faisant travailler celles-ci dans le déplacement incrémental  $d\underline{\xi}$ . De façon symbolique :

$$d\Phi = F dq \quad (3.77)$$

Dans un calcul aux éléments finis, cette intégrale est facilement calculée par un produit scalaire entre le vecteur des forces nodales  $\underline{F}$  et la variation du vecteur

des déplacements nodaux  $d\underline{U}$  :

$$d\Phi = \underline{F}.d\underline{U} = \underline{F}.(\underline{U}(\ell + d\ell) - \underline{U}(\ell)) \quad (3.78)$$

Le taux de restitution d'énergie est déterminé par :

$$\mathcal{F} = -\frac{(W(\ell + d\ell) - W(\ell)) - d\Phi}{d\ell} \quad (3.79)$$

### 3.4.2 L'exemple de la flexion 3-points : approche numérique

On considère à présent une poutre entaillée soumise à une expérience de flexion 3-points (voir la figure 3.8) sous l'application d'une force  $F$ .  $U$  désigne le déplacement du point d'application de cette force. Le chargement consiste à prescrire la fonction  $U(t)$ .

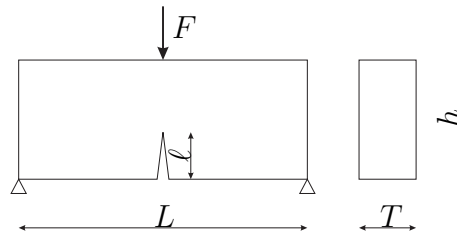


FIG. 3.8 – Poutre *v.l.n.v.* entaillée en flexion 3-points

En raison de la concentration du champ des contraintes dans la zone autour de la pointe de la fissure, on réalise un maillage très fin dans cette zone. Le maillage et la déformée de la poutre sont présentés par la figure 3.9. Dans cette exemple, la taille des éléments locaux autour de la pointe de la fissure est égale à  $h/100$ , où  $h$  est la hauteur de la poutre. Le calcul est effectué en contraintes planes.

Dans le cas élastique linéaire isotrope, la littérature (voir par exemple [46]) fournit l'expression suivante du taux de restitution d'énergie :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{E} \frac{9\pi\ell F^2 L^2}{4h^4 T^2} g\left(\frac{\ell}{h}\right)^2 \quad (3.80)$$

où les notations sont explicitées sur la figure 3.8. Pour  $h/L = 1/4$ ,  $g(X)$  peut être approchée par :

$$g(X) = \frac{1,99 - X(1 - X)(2,15 - 3,93X + 2,7X^2)}{\sqrt{\pi}(1 + 2X)(1 - X)^{3/2}} \quad (3.81)$$

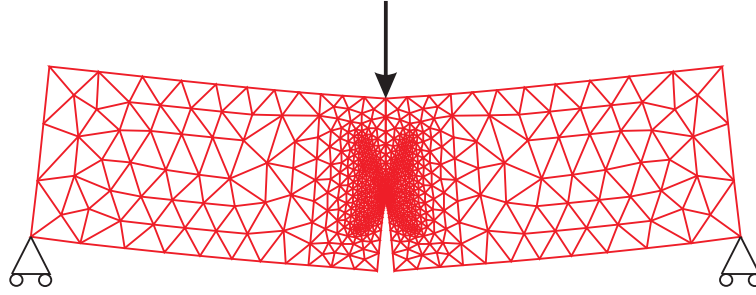


FIG. 3.9 – Maillage et déformée de la poutre en flexion 3-points

Ce résultat permet de vérifier la précision de l'approche numérique de la détermination de  $\mathcal{F}$  dans le cas élastique (voir figure 3.10).

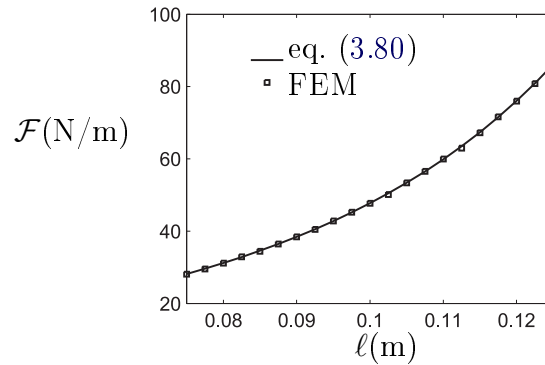


FIG. 3.10 – Poutre en flexion 3-points : taux de restitution d'énergie dans le cas élastique ( $E = 33,7\text{GPa}$ ,  $T = 0,125\text{m}$ ,  $L = 1\text{m}$ ,  $h = 0,25\text{m}$ ,  $F = 10\text{kN}$ ).

### 3.4.2.1 Impact de la vitesse de chargement

Dans cette section, on reprend le problème de poutre en flexion 3-points dans le cas du matériau *v.l.n.v.*, en prescrivant le déplacement du point d'application de la force (figure 3.8). On utilise le modèle de Burger (voir le chapitre 2) dont les caractéristiques sont données par le tableau 2.1. On s'intéresse à l'influence de la vitesse de déplacement imposée sur la valeur du taux de restitution d'énergie, en l'absence de propagation de fissure.

D'une façon générale, les simulations qui sont présentées ici sont évidemment de nature strictement théoriques et ce travail n'aborde pas la validation expérimentale des conclusions qu'on peut en tirer. Comme d'habitude dans

l'analyse du fluage, l'ordre de grandeur des vitesses de chargement considérées constitue en lui-même une difficulté métrologique sérieuse.

Pour commencer, le chargement est défini par une loi linéaire en temps :  $U = \dot{U}t$ . Les calculs sont réalisés pour différentes valeurs de la vitesse  $\dot{U}$  de 0,005nm/s à 5nm/s. Les résultats donnés par la figure 3.11 montrent clairement que pour chaque valeur de  $U$ , plus le chargement est rapide plus la valeur de  $\mathcal{F}$  est grande et approche la valeur de  $\mathcal{F}$  du problème élastique.

Par ailleurs, pour une durée suffisamment longue, la figure 3.12 montre que cette grandeur tend vers une asymptote et suggère que celle-ci est proportionnelle au carré de la vitesse de déplacement imposée. Ce résultat est cohérent avec ce qui est observé dans l'étude analytique sur la poutre 1D à la section 3.3.2.3. On reviendra sur ce point à la section 3.5.2 (voir (3.94)). Ce phénomène est strictement imputable au caractère visqueux du matériau et il n'est pas observé dans le cas élastique.

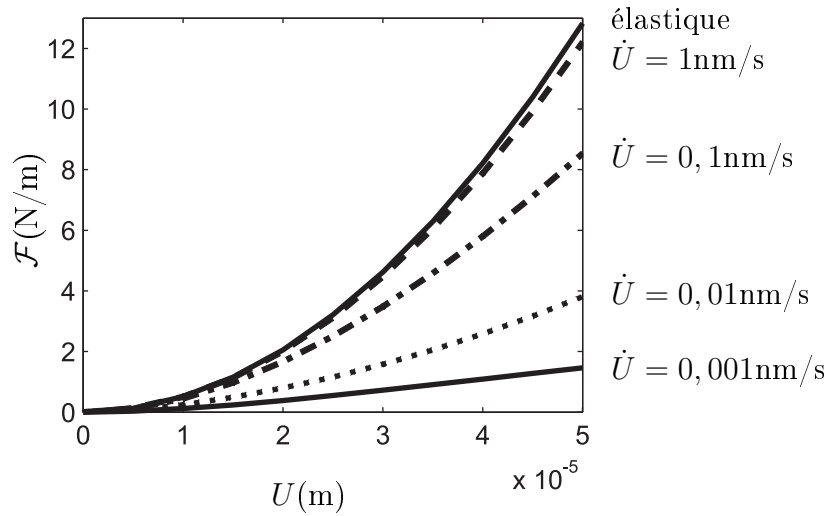


FIG. 3.11 – Influence de la vitesse de chargement à la restitution d'énergie :  $L \times h = 1 \times 0,25\text{m}^2$ ,  $\ell = 0,1\text{m}$

On impose maintenant un saut de déplacement initial  $U_o$  de façon à réaliser la condition de propagation, puis l'on continue par une loi affine en temps :  $U = U_o + \dot{U}t$ . Dans l'analyse précédente consacrée au délaminage d'une poutre viscoélastique 1D (section 3.3.2.2), on a montré que si le temps caractéristique du chargement  $\tau_U = U_o/\dot{U}$  est supérieur à une valeur critique (égale à  $\tau_M$  dans ce cas 1D), la condition de propagation  $\mathcal{F} = G_c$  n'est plus jamais atteinte,

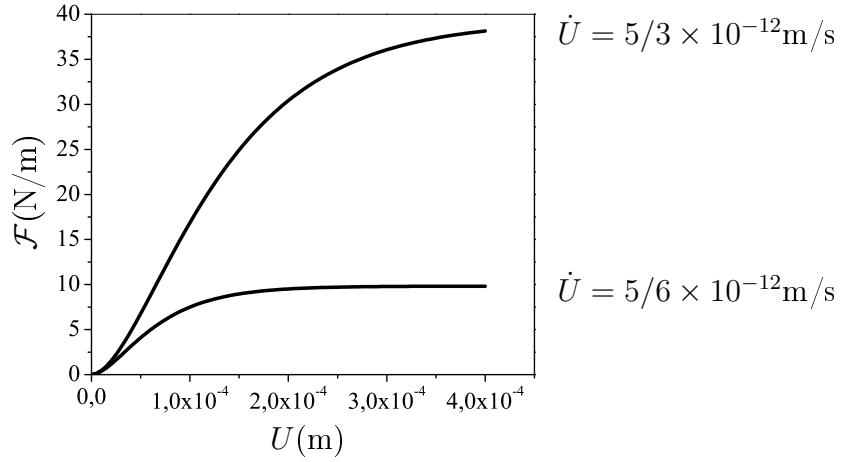


FIG. 3.12 – Asymptote du taux de restitution de l'énergie : effet de  $\dot{U}$ .  $L \times h = 0,3 \times 0,1\text{m}^2$ ,  $\ell = 0,015\text{m}$

quelque soit la durée du chargement, car le taux de restitution de l'énergie est décroissant (voir figure 3.6 et la formule (3.28)). Dans la suite, on va montrer que cette conclusion reste pertinente qualitativement dans le problème de la poutre entaillée 3D. Notons cependant qu'il n'y a plus un unique temps caractéristique du matériau. Il y en a désormais quatre :  $\tau_M^s = 3 \times 10^7\text{s}$ ,  $\tau_M^d = 2,92 \times 10^7\text{s}$ ,  $\tau_K^s = 1,3 \times 10^6\text{s}$  et  $\tau_K^d = 0,9 \times 10^6\text{s}$ .

La figure 3.13 donne les résultats du taux de restitution d'énergie pour différentes valeurs de  $\tau_U$  autour des temps caractéristiques du matériau. On peut observer que, plus  $\tau_U$  est grand, plus  $\mathcal{F}$  diminue vite depuis la valeur initiale.

La figure 3.14 montre en plus que, pour une même vitesse de chargement, le taux de restitution d'énergie tend vers une même valeur asymptotique  $\mathcal{F}_\infty$  pour les deux cas de charge considérés. On peut imaginer qu'il n'y aura jamais de propagation de la fissure si  $\mathcal{F}_\infty < G_c$  sauf que si la valeur initial  $\mathcal{F}_o$  est supérieure à  $G_c$  (pour le deuxième cas de charge). Alors, pour le cas d'une valeur initial  $U_o$  faible, il faut que  $\dot{U}$  soit supérieure à une certaine valeur critique  $\dot{U}_{cr}$  pour que la propagation puisse se passer. Cette idée sera développée ultérieurement.

### 3.4.2.2 Propagation de fissure

On se met maintenant dans la situation de propagation de la fissure. On se limite au cas d'une fissure se propageant suivant la mode 1 dont la ligne de la



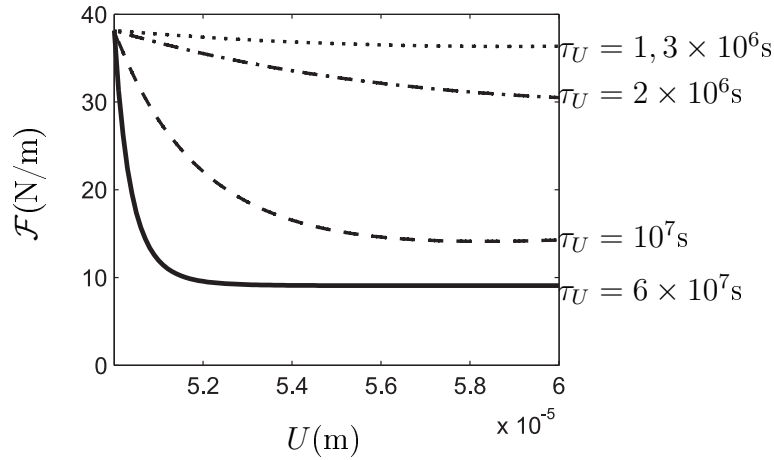


FIG. 3.13 – Influence de  $\tau_U$  à la restitution d'énergie :  $L \times h = 0,3 \times 0,1\text{m}^2$ ,  $\ell = 0,015\text{m}$ ,  $U_o = 50\mu\text{m}$

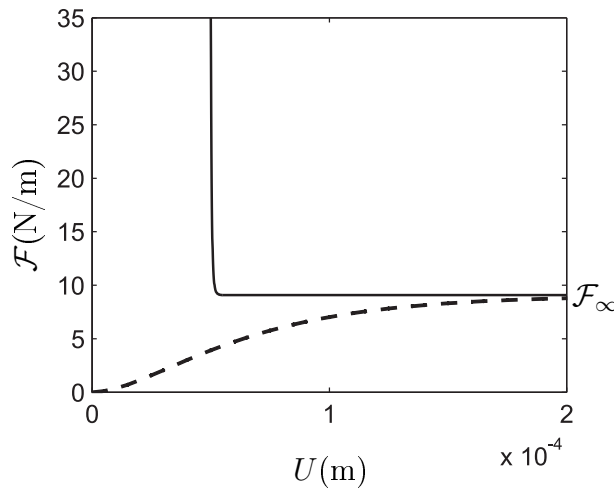


FIG. 3.14 – Le taux de restitution d'énergie tend vers une valeur asymptotique :  $L \times h = 0,3 \times 0,1\text{m}^2$ ,  $\ell = 0,015\text{m}$

propagation est prévue (la ligne de la fissure initiale).

Dans la pratique, c'est l'histoire du chargement qui est imposée. Prévoir la propagation, c'est déterminer la longueur de la fissure  $\ell$  en fonction du niveau de chargement. Ainsi, dans le cas particulier étudié, la donnée du problème est la fonction  $U(t)$  et il s'agit de résoudre par rapport à  $\ell$  l'équation du critère de propagation :  $\mathcal{F}(\ell, U) = G_c$ .

Cependant, dans le cadre d'une approche numérique en éléments finis, il est plus simple d'un point de vue technique (et équivalent d'un point de vue théorique)

d'augmenter progressivement la longueur de la fissure et de chercher la valeur du paramètre de chargement (le déplacement  $U(t)$ ) qui satisfait la condition de propagation. En fin de compte, on aura bien déterminé la correspondance recherchée entre niveau de chargement et longueur de fissure.

Plus précisément, on se place dans la situation où un chargement  $U_1$  réalise le critère de propagation :  $\mathcal{F}(\ell, U_1) = G_c$  (à la tolérance numérique près). On introduit un incrément  $d\ell$  de longueur de fissure. On cherche à déterminer la nouvelle valeur de la charge  $U_2$  qui réalise à nouveau la condition de propagation :  $\mathcal{F}(\ell + d\ell, U_2) = G_c$ .

D'un point de vue technique, une propagation incrémentale  $d\ell$  peut être aisément effectuée, grâce au fait qu'on utilise un maillage régulier très fin sur la ligne de propagation prévue. Il suffit alors de libérer une maille au-delà de la pointe de la fissure lorsque la condition  $\mathcal{F} = G_c$  est satisfaite.

Pour déterminer  $U_2$ , on utilise une discrétisation du paramètre de chargement et l'on ajoute des incréments de chargement  $dU$  successifs en calculant à chaque fois le taux de restitution de l'énergie correspondant. Par ce procédé, on détermine un entier  $n$  (éventuellement nul) tel que :

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(\ell + d\ell, U_1 + ndU) < G_c < \mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}(\ell + d\ell, U_1 + (n+1)dU) \quad (3.82)$$

Il en résulte que  $U_2$  se trouve entre  $U_1 + ndU$  et  $U_1 + (n+1)dU$ . On peut donc le déterminer par interpolation linéaire :

$$U_2 \simeq U_1 + ndU + dU \frac{G_c - \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n} \quad (3.83)$$

La condition de propagation est ensuite testée avec une tolérance  $e_G$  sur l'erreur entre  $\mathcal{F}(\ell + d\ell, U_2)$  et  $G_c$  :

$$\left| \frac{\mathcal{F}(\ell + d\ell, U_2) - G_c}{G_c} \right| < e_G \quad (3.84)$$

Les calculs sont effectués avec  $e_G = 10^{-3}$ . Si la condition (3.84) n'est pas satisfaite, on doit faire un maillage plus fin, diminuer le pas de chargement et refaire le calcul. L'algorithme des calculs est résumé par le schéma 3.16.

Pour prendre en compte la dépendance vis-à-vis de la taille de la fissure, on approche le taux de restitution de l'énergie limite par une courbe  $G_c(\ell)$  du

type proposé par Bazant [46] (voir la figure 3.15) :

$$\begin{aligned} G_c &= G_f \frac{\delta \ell}{\delta \ell_f} \quad \text{si } \delta \ell < \delta \ell_f \\ G_c &= G_f \quad \text{si } \delta \ell > \delta \ell_f \end{aligned} \quad (3.85)$$

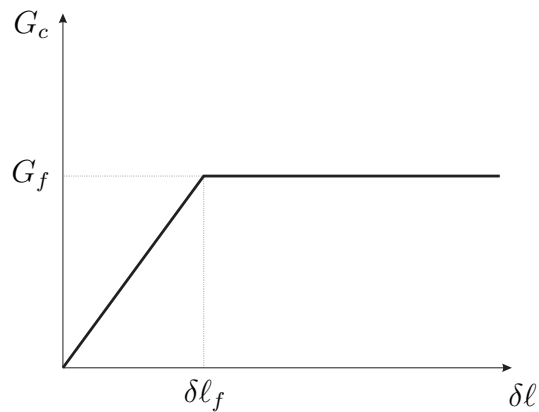


FIG. 3.15 – Approche linéaire du “R-curve” de Bazant et al.

où  $\delta \ell$  est l’extension de la fissure et  $\delta \ell_f$  est une donnée du matériau.  $G_f$  est la valeur asymptotique de  $G_c$ .

La figure 3.17 présente la relation force-déplacement du point d’application de la charge au cours de la propagation de la fissure pour différentes vitesses de propagation ou de déplacement imposées. La figure 3.18 présente influence de la caractéristique  $\delta \ell_f$  sur le comportement macroscopique de la poutre. On peut observer l’influence de ce paramètre sur le pic : plus  $\delta \ell_f$  est petit plus la force au pic est grande. Cependant, elle influence par nettement sur le comportement durant la propagation après pic.

La figure 3.19 présente la variation de la longueur de la fissure en fonction du déplacement imposé pour deux différentes valeurs de la vitesse de chargement. Elle montre que la fissure se propage jusqu’à une taille asymptotique si la vitesse de chargement est suffisamment faible. Cette idée sera détaillée dans la suite.

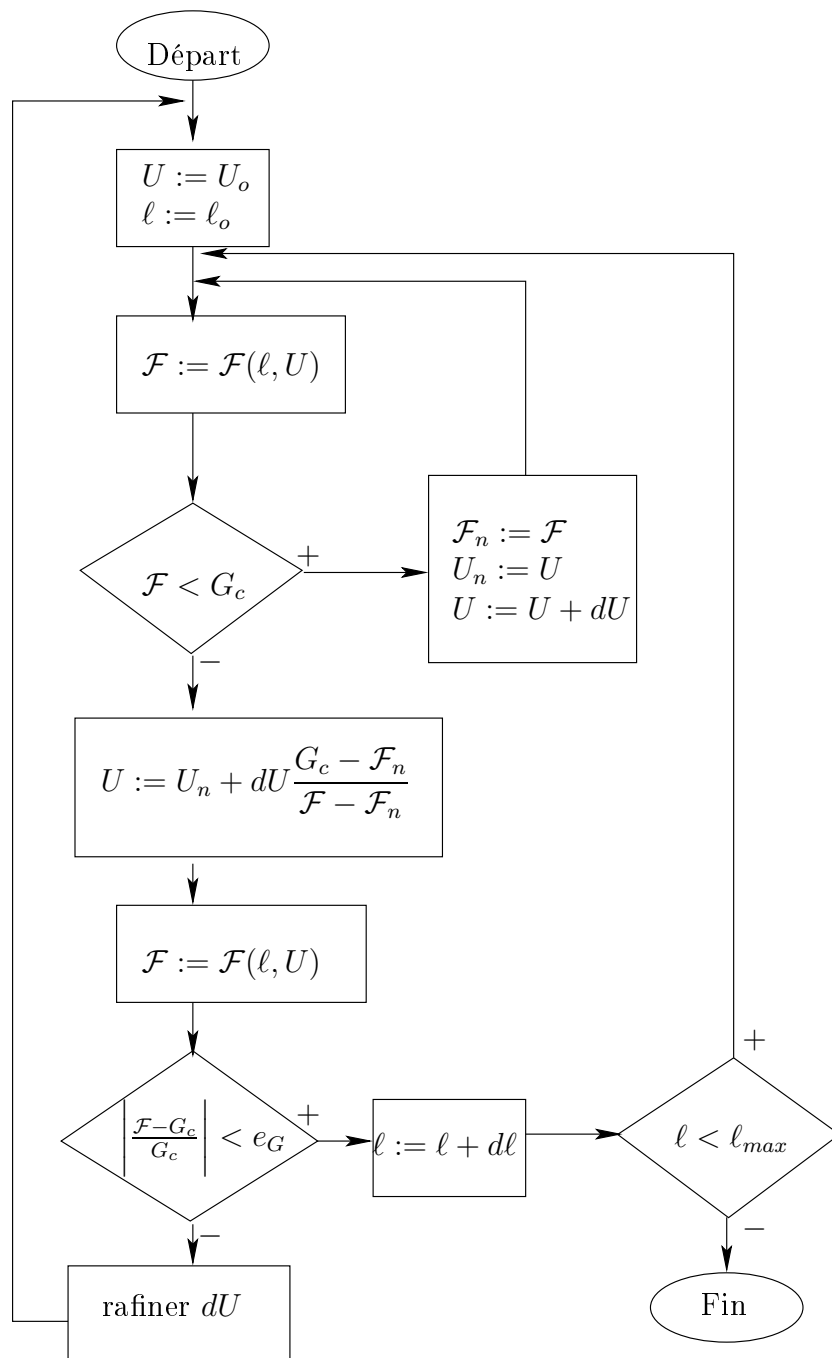


FIG. 3.16 – Algorithme des calculs numériques de propagation de fissure

### 3.5 Flexion 3-points : approche analytique

Considérons encore une fois l'essai de flexion 3-points d'une poutre entaillée (voir figure 3.8). Le but de cette section est de mettre en oeuvre une collaboration entre

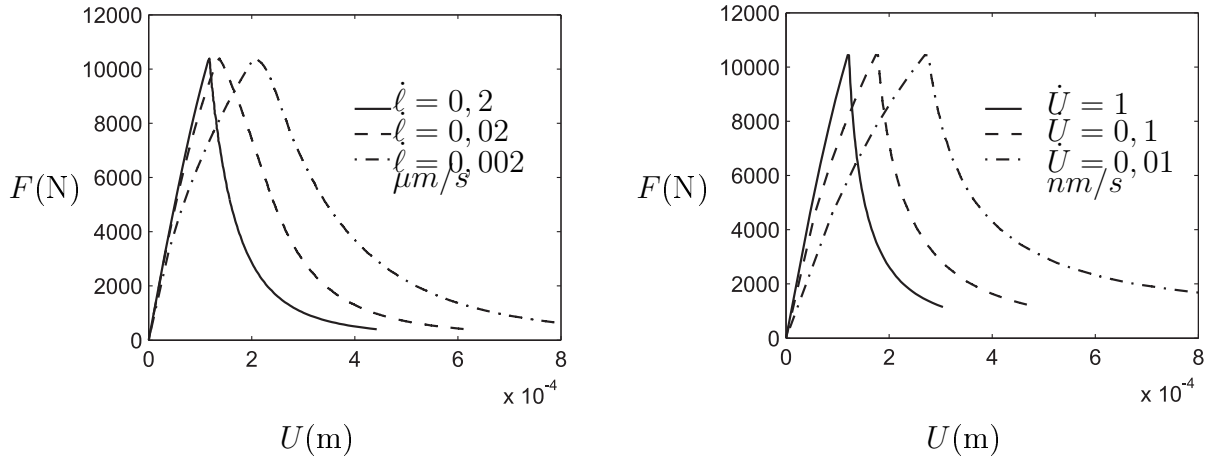


FIG. 3.17 – Poutre viscoélastique entaillée en flexion 3-points : la figure à droite pour le problème de vitesse de déplacement imposée, la figure à gauche pour le problème de vitesse de propagation imposée ( $L \times h \times T = 1 \times 0,25 \times 0,125m^3$ ,  $\ell_o = 0,1m$ ,  $G_f = 61N/m$ ,  $\delta\ell_f = 9,3mm$ )

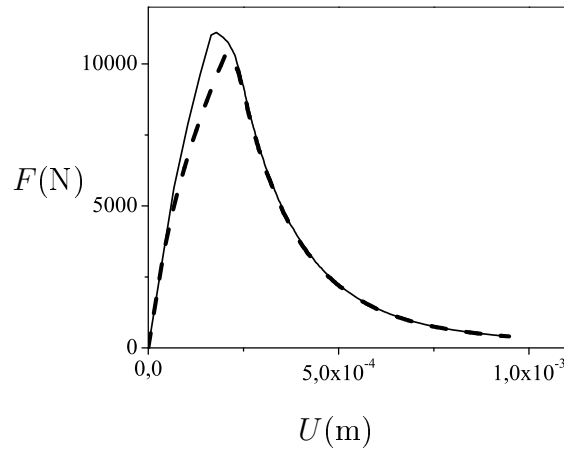


FIG. 3.18 – Impact de  $\delta\ell_f$  sur le comportement macroscopique de la poutre 3-points :  $\delta\ell_f = 3,1mm$  pour la ligne continue,  $\delta\ell_f = 9,3mm$  pour la ligne discontinue ( $L \times h \times T = 1 \times 0,25 \times 0,125m^3$ ,  $\ell_o = 0,1m$ ,  $G_f = 61N/m$ ,  $\dot{\ell} = 2nm/s$ )

l'approche numérique présentée au chapitre 2 et le cadre théorique présenté à la section 3.3.1 pour traiter le problème de propagation de fissures. En particulier, nous voulons étendre les conclusions qualitatives tirées à la section 3.3.2 à un problème 3D réel.

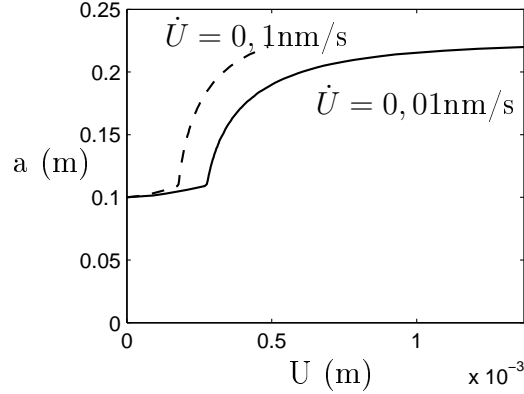


FIG. 3.19 – Poutre viscoélastique entaillée en flexion 3-points : longueur de la fissure en fonction du déplacement imposé pour différentes vitesses ( $L \times h \times T = 1 \times 0,25 \times 0,125\text{m}^3$ ,  $\ell_o = 0,1\text{m}$ ,  $G_f = 61\text{N/m}$ ,  $\delta\ell_f = 9,3\text{mm}$ )

### 3.5.1 Souplesse d'une poutre entaillée en flexion 3-points dans le cas élastique linéaire

On applique une nouvelle fois (3.5) (avec  $F/T$  remplace  $\mathcal{Q}$ ) et (3.80). La rigidité  $C(\ell)$  de la structure définie par :

$$\frac{F}{T} = C(\ell)U \quad (3.86)$$

satisfait donc :

$$-\frac{C'(\ell)}{C(\ell)^2} = \frac{1}{E} \frac{9\pi\ell L^2}{2h^4} g\left(\frac{\ell}{h}\right)^2 \quad (3.87)$$

Une intégration par rapport à  $\ell$  donne la souplesse de la structure :

$$\frac{1}{C(\ell)} - \frac{1}{C(0)} = \frac{1}{E} \frac{9\pi L^2}{2h^2} \int_0^{\frac{\ell}{h}} Xg(X)^2 dX \quad (3.88)$$

où  $C(0)$  est la rigidité de la poutre sans entaille (épaisseur unitaire) :

$$C(0) = E/c(0) \quad (3.89)$$

On obtient finalement la souplesse de la poutre sous forme d'une fonction du module d'Young et d'un coefficient géométrique :

$$\frac{1}{C(\ell)} = \frac{c(\ell/h)}{E} \quad \text{with} \quad c(X) = c(0) + \frac{9\pi}{2} \left(\frac{L}{h}\right)^2 \int_0^X xg(x)^2 dx \quad (3.90)$$

Dans le cas limite  $h/L \ll 1$ , l'expression classique  $1/c(0) \approx 4(h/L)^3$  peut être utilisée. Sinon, une détermination numérique de  $C(0)$  peut facilement être réalisée par la méthode des éléments finis.

### 3.5.2 Flexion 3-points sans propagation de fissure

Le comportement du matériau est maintenant décrit au chapitre 2. Le chargement est défini par une vitesse constante  $\dot{U}$ .

On s'attend à obtenir les résultats de la section 3.3.2.2 à savoir qu'il existe une vitesse critique de chargement  $\dot{U}_{cr}$  telle que la propagation de la fissure n'a lieu que si  $\dot{U} > \dot{U}_{cr}$ . La détermination de  $\dot{U}_{cr}$  sera discutée ultérieurement. Tout d'abord, la réponse de la structure en l'absence de propagation de la fissure est considérée.

En l'absence de propagation de la fissure ( $\ell = \ell_o$ ), la réponse de la structure peut être déterminée analytiquement à partir du théorème de correspondance. Avec les notations introduites à (2.11), on trouve que :

$$\frac{F^*(p)}{T} = C^*(\ell_o, p)U^*(p) \quad (3.91)$$

Dans l'équation ci-dessus, la rigidité de la structure  $C^*(\ell_o, p)$  est définie par (3.90) :

$$\frac{1}{C^*(\ell_o, p)} = \frac{c(\ell_o/h)}{E^*(p)} \quad (3.92)$$

Le "module d'Young"  $E^*$  est tiré du "tenseur de souplesse"  $\mathbb{C}^*(p)$  de (2.14).

On discute maintenant plus en détails de la réponse asymptotique ( $t \rightarrow \infty$ ). On suppose que la vitesse  $\dot{U}$  est constante après un certain instant  $t_o$ . Le chargement  $U^*(p)$  au voisinage de  $p = 0$  est  $U^*(p) \approx \dot{U}/p$ . De même, on trouve par (2.14) que  $E^*(p) \approx pE_\infty$  avec

$$E_\infty = 3 \left( \frac{1}{\eta_M^s} + \frac{2}{\eta_M^d} \right)^{-1} \quad (3.93)$$

En combinant (3.91) et (3.92), on observe que  $F^*(p)$  tend vers une limite quand  $p \rightarrow 0$ . C'est à dire  $F(t)$  tend vers la même limite quand  $t \rightarrow \infty$  :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{T} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{F^*(p)}{T} = \frac{E_\infty}{c(\ell_o/h)} \dot{U} \quad (3.94)$$

La figure 3.20 compare le résultat du calcul numérique et l'approche de Laplace-Carson. Deux différents types de chargements sont considérés. Dans le cas de chargement 1, il n'y a pas de saut initial de déplacement :  $U_1(t) = \dot{U}t$ . Dans le cas de chargement 2, l'effet d'un saut initial  $U_o$  du déplacement est étudié :  $U_2(t) = \dot{U}t + U_o\mathcal{H}(t)$  ( $\mathcal{H}(t)$  est la fonction Heaviside).

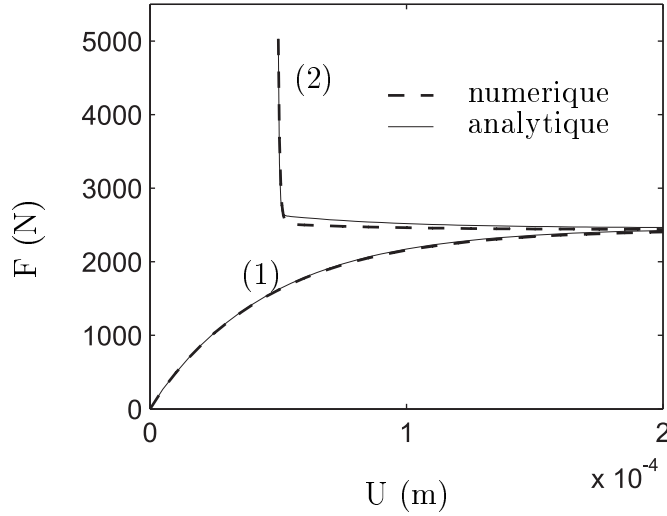


FIG. 3.20 – Variation de la force  $F$  en l'absence de propagation de la fissure :  $L \times h \times T = 1 \times 0,25 \times 0,125 \text{m}^3$ ,  $\ell = 0,1 \text{m}$ ,  $\dot{U} = 5/6 \times 10^{-12} \text{m/s}$ ,  $U_o = 5 \times 10^{-5} \text{m}$ , les modules viscoélastiques du matériau sont données dans le tableau 2.1

### 3.5.3 Flexion 3-points avec propagation de fissure

À vitesse plus élevée  $\dot{U}$ , la propagation de la fissure se produit. Néanmoins, par la conclusion qualitative de la section 3.3.2.2, une force asymptotique  $F_\infty$  et une longueur asymptotique de la fissure  $\ell_\infty$  sont attendues. On cherchera à vérifier numériquement la validité de ces concepts. Le déplacement est donné dans la forme  $U(t) = \dot{U}t\mathcal{H}(t)$ , où  $\mathcal{H}(t)$  est la fonction Heaviside.

L'hypothèse de l'existence de  $\ell_\infty$  et  $F_\infty$  suggère que l'état de contrainte a, n'importe où dans la structure, une limite  $\sigma_\infty$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Dans le cadre du modèle rhéologique étudié dans le chapitre 2, cela suppose que le comportement du matériau tend à devenir purement visqueux quand  $t \rightarrow \infty$ . Dans cette condition, l'équation d'état se réduit à :

$$\sigma_\infty = \mathbb{C}_M^v : \dot{\epsilon}_\infty \quad (3.95)$$

Il s'avère donc que la réponse asymptotique à l'échelle de la structure visqueuse est formellement celle d'un problème élastique linéaire donné par (3.86), à condition que  $U$  soit remplacé par  $\dot{U}$  et le module d'Young apparent soit dérivé du tenseur visqueux  $\mathbb{C}_M^v$  :

$$\frac{F_\infty}{T} = C(\ell_\infty, \mathbb{C}_M^v)\dot{U} \quad (3.96)$$



La rigidité de la structure  $C(\ell_\infty, \mathbb{C}_M^v)$  est définie par (3.90) avec  $\ell = \ell_\infty$  et  $E = E_\infty$  donnés par (3.93) :

$$\frac{F_\infty}{T} = \frac{E_\infty}{c(\ell_\infty/h)} \dot{U} \quad (3.97)$$

Cela donne une première équation entre  $F_\infty$  et  $\ell_\infty$ . La seconde est tirée de la condition de propagation à l'état asymptotique :  $\mathcal{F}_\infty = G_c$  (voir (3.16)). Dans le cas d'une structure homogène<sup>6</sup>, on a démontré numériquement que les contributions de l'énergie résiduelle et du terme de dérivée de déplacement visqueuse de dans  $\mathcal{F}_\infty$  sont négligeable (voir (3.14)). Alors, cette dernière peut être approximée comme suite :

$$\mathcal{F}_\infty = -\frac{1}{2} C'(\ell_\infty, \mathbb{C}_M^e) (U_\infty - U_\infty^v)^2 \quad (3.98)$$

with :

$$U_\infty - U_\infty^v = \frac{F_\infty/T}{C(\ell_\infty, \mathbb{C}_M^e)} \quad (3.99)$$

On obtient finalement :

$$\mathcal{F}_\infty = -\frac{1}{2} \left( \frac{F_\infty/T}{C(\ell_\infty, \mathbb{C}_M^e)} \right)^2 C'(\ell_\infty, \mathbb{C}_M^e) \quad (3.100)$$

Il est souligné que  $C(\ell_\infty, \mathbb{C}_M^e)$  dans l'équation ci-dessus renvoie à la raideur élastique instantanée de la structure, qui est dérivée de la partie élastique de la partie Maxwell (tenseur de rigidité  $\mathbb{C}_M^e$ ) :

$$C(\ell_\infty, \mathbb{C}_M^e) = \frac{E_M}{c(\ell_\infty/h)} \quad (3.101)$$

En combinant (3.97) avec (3.100) et la condition de propagation  $\mathcal{F} = G_c$ , on obtient une équation qui peut être utilisée pour déterminer la longueur asymptotique  $\ell_\infty$  de la fissure :

$$\frac{c'(\ell_\infty/h)}{c(\ell_\infty/h)^2} = h \frac{2G_c}{\dot{U}^2} \frac{E_M}{E_\infty^2} \quad (3.102)$$

La fonction  $c'/c^2$  qui apparaît dans le membre de gauche est représentée à la figure 3.21. On introduit le maximum  $\rho_{max}$  de cette fonction, qui est atteint au  $X = X_{cr}$ , ainsi que la longueur critique  $\ell_{cr} = hX_{cr}$  :

$$\rho_{max} = \max \frac{c'(X)}{c^2(X)} = \frac{c'(X_{cr})}{c^2(X_{cr})} \quad (3.103)$$

---

<sup>6</sup>On a montré rigoureusement que ces conclusions sont justes pour le cas de structures hétérogènes 1D (voir la section 3.3.3), cependant on manque désormais une démonstration pour le cas 3D

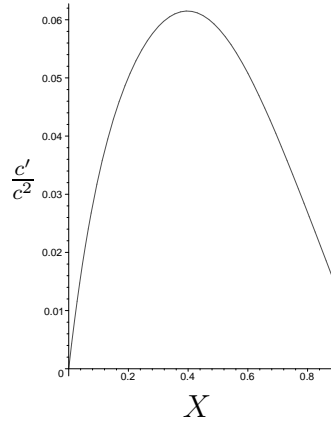


FIG. 3.21 – Variation de  $c'(X)/c^2(X)$  pour  $L/h = 4$

L'équation (3.102) n'a pas de solution  $\ell_\infty$  si la vitesse est inférieure à un seuil critique :  $\dot{U} < \dot{U}_{cr}$ , où :

$$\dot{U}_{cr}^2 = h \frac{2G_c}{\rho_{max}} \frac{E_M}{E_\infty^2} \quad (3.104)$$

En d'autres termes, indépendamment de la longueur de la fissure initiale  $\ell_o$ , la

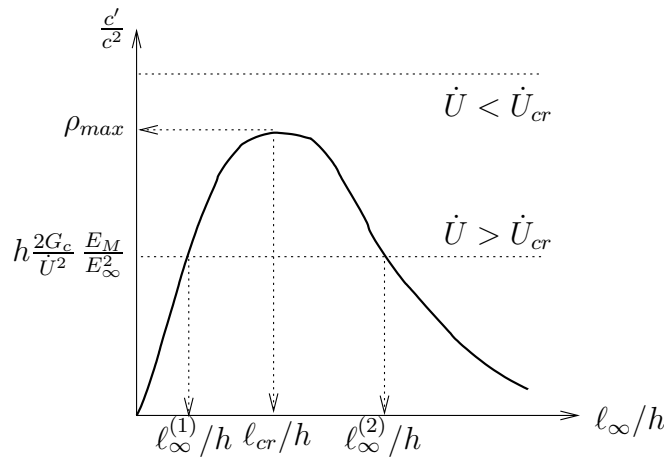


FIG. 3.22 – Longueur et la vitesse de chargement critique. La propagation de la fissure aura lieu que si  $\dot{U} > \dot{U}_{cr}$  et  $\ell_o < \ell_\infty^{(2)}$ .

propagation ne se produit pas si  $\dot{U} < \dot{U}_{cr}$ .

En revanche, deux solutions mathématiques  $\ell_\infty^{(1)} < \ell_\infty^{(2)}$  sont trouvées si  $\dot{U} > \dot{U}_{cr}$  (voir la figure 3.22). Toutefois, la première solution  $\ell_\infty^{(1)}$  se trouve sur la branche croissante ( $\ell_\infty^{(1)} < \ell_{cr}$ ). Cette branche n'a physiquement aucun sens parce que la solution  $\ell_\infty$  qu'on attend doit être une fonction croissante de la

vitesse de chargement  $\dot{U}$ . La solution physiquement acceptable est donc la plus grande, qui est  $\ell_\infty^{(2)}$ , qui se trouve sur la branche décroissante ( $\ell_\infty^{(2)} > \ell_{cr}$ ).

Si la longueur initiale de la fissure  $\ell_o$  est plus petite que la longueur critique  $\ell_{cr}$  (où  $c'/c^2$  atteint son maximum), la longueur asymptotique  $\ell_\infty^{(2)}$  est bien supérieure à  $\ell_o$ . Au contraire, si  $\ell_o > \ell_{cr}$ , deux cas peuvent être rencontrés. Si  $\ell_\infty^{(2)} < \ell_o$ , aucune propagation de fissure ne se produit pour la vitesse de charge considérée  $\dot{U}$  (voir cas (B) sur la figure 3.23). En revanche, si  $\ell_\infty^{(2)} > \ell_o$ , la fissure se propage et la longueur asymptotique est égal à  $\ell_\infty^{(2)}$  (voir cas (A) à la figure 3.23).

Il est souligné que la longueur asymptotique  $\ell_\infty^{(2)}$  de la fissure telle que définie par (3.102) n'est pas affectée par la longueur initiale de la fissure  $\ell_o$  à condition que  $\ell_o < \ell_\infty^{(2)}$ . De même, la force asymptotique  $F_\infty$  ne dépend aussi que de  $\dot{U}$ , indépendamment de la valeur de  $\ell_o$  (voir (3.97)).

Pour  $\ell_o > \ell_{cr}$ , la discussion ci-dessus nécessite d'introduire une autre vitesse de charge critique  $\dot{U}^*(\ell_o) > \dot{U}_{cr}$  en fonction de la longueur de la fissure initiale. Elle est définie par :

$$\frac{c'(\ell_o/h)}{c(\ell_o/h)^2} = h \frac{2G_c}{\dot{U}^*(\ell_o)^2} \frac{E_M}{E_\infty^2} \quad (3.105)$$

Si  $\dot{U} < \dot{U}^*(\ell_o)$ , aucune propagation de la fissure n'a lieu. Par contre, si  $\dot{U} > \dot{U}^*(\ell_o)$ , la propagation de la fissure a lieu et la longueur de la fissure asymptotique est la solution  $\ell_\infty^{(2)}$  de (3.102). Notons que  $\dot{U}^*(\ell_{cr}) = \dot{U}_{cr}$  et que  $\dot{U}^*(\ell_o)$  est une fonction croissante de  $\ell_o$ . La figure 3.24 illustre la propagation de la fissure de la

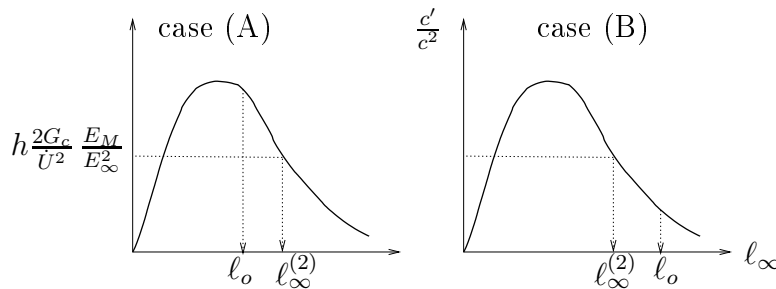


FIG. 3.23 – Cas (A) : si  $\ell_\infty^{(2)} > \ell_o$ ,  $\ell \rightarrow \ell_\infty^{(2)}$ . Cas (B) :  $\ell_o > \ell_\infty^{(2)} \Rightarrow$  pas de propagation de fissure.

poutre  $L \times h \times T = 1 \times 0,25 \times 0,125\text{m}^3$ , les modules viscoélastiques de la phase

solide étant donnés par le tableau 2.1 pour le cas d'une vitesse de chargement  $\dot{U} > \dot{U}_{cr}$  pour trois différentes longueurs initiales de fissure.

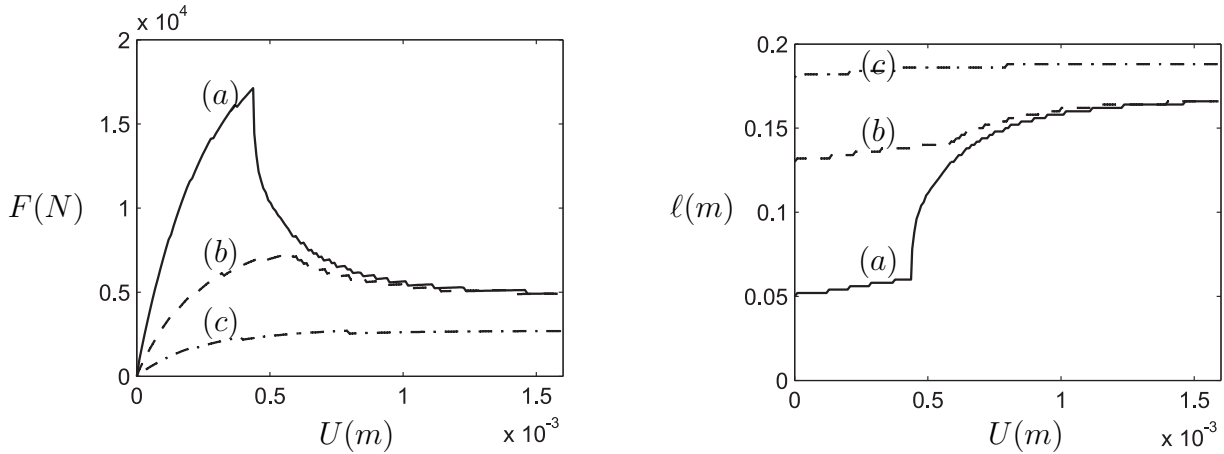


FIG. 3.24 – Vitesse de charge  $\dot{U} = 5 \times 10^{-12} \text{m/s}$  plus grand par rapport à la valeur critique ( $\dot{U}_{cr} = 4 \times 10^{-12} \text{m/s}$ ) pour trois différentes longueurs initiales de la fissure : (a)  $\ell_o = 5 \text{cm}$ , (b)  $\ell_o = 13 \text{cm}$  et (c)  $\ell_o = 18 \text{cm}$

Pour la même poutre, la figure 3.25 illustre le cas d'une vitesse de charge  $\dot{U} < \dot{U}_{cr}$  pour deux différentes longueurs initiales de fissure. La force augmente de façon monotone et tend vers une valeur asymptotique, puisqu'aucune propagation de la fissure n'est activée. Ce cas correspond à la situation analysée à la section 3.5.2 et déjà illustrée à la figure 3.20.

### 3.6 Conclusions

Dans ce chapitre, on s'est penché sur la formulation d'un critère de propagation de fissure dans un milieu viscoélastique. On a étendu la notion classique de taux de restitution de l'énergie (voir (3.12)) qui représente la force motrice de la propagation de fissure. A ce titre, comme dans le cas élastique, on a proposé de faire porter le critère de propagation sur cette quantité (voir (3.16)). Dans l'analyse énergétique, on a noté au passage que, pour les matériaux viscoélastiques, l'énergie élastique est la somme d'une partie récupérable et d'une partie résiduelle, toutes deux étant *a priori* à prendre en compte pour le calcul de la force motrice de la propagation.

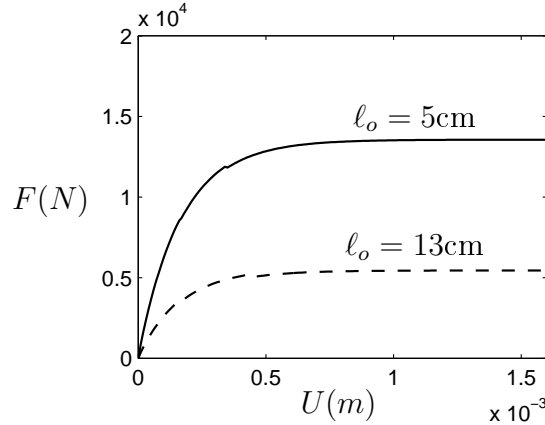


FIG. 3.25 – Vitesse de charge  $\dot{U} = 3 \times 10^{-12}\text{m/s}$  plus petite par rapport à la valeur critique ( $\dot{U}_{cr} = 4 \times 10^{-12}\text{m/s}$ ) pour deux différentes longueurs initiales de la fissure :  $l_o = 5\text{cm}$  et  $l_o = 13\text{cm}$ .

Pour illustrer ces considérations, on a étudié tout d'abord le problème du délaminage d'une poutre dans des situations iso- ou hyperstatique, éventuellement hétérogènes. Pour faciliter les développements analytiques, on utilise pour simplifier le modèle de Maxwell pour modéliser le comportement viscoélastique du matériau. Dans le cas isostatique, il est facile de voir que l'énergie résiduelle est nulle et le taux de restitution de l'énergie est déterminé en dérivant l'énergie récupérable par rapport à la longueur de fissure. Il est proportionnel au carré de la force appliquée à l'extrémité de la poutre (voir (3.28)). En revanche, une énergie résiduelle non nulle peut être obtenue dans le cas hyperstatique sauf si les caractéristiques viscoélastiques sont homogènes.

Deux situations particulières ont été envisagées successivement : une vitesse de propagation imposée constante, puis et une vitesse de déplacement de l'extrémité imposée constante. Dans les deux cas, plus la vitesse de chargement est grande, plus on s'approche le problème élastique (voir la figure 3.5). La vitesse de chargement peut être quantifiée par un temps adimensionnel, à comparer à celui du matériau. Pour le problème à vitesse de déplacement imposée, la notion de vitesse critique du chargement  $\dot{U}_{cr}$  est apparue naturellement. La fissure ne propage que si la vitesse de chargement imposée est supérieure à cette valeur. Dans ce cas, la fissure va propager jusqu'à atteindre une longueur asymptotique  $l_\infty$  et la force mobilisée dans un tel chargement s'établit à

une valeur asymptotique  $F_\infty$ . Ces résultats font apparaître des différences qualitatives essentielles en comparaison avec le cas élastique.

Les études analytiques qui viennent d'être résumées des problèmes ont vocation à servir de point d'appui pour l'analyse numérique de la réponse de structures tridimensionnelles. Dans cette perspective, on s'est penché sur la simulation numérique de la réponse d'une poutre en flexion 3-points. Le calcul numérique permet de revenir au modèle de Burger qui est établi dans le premier chapitre, plus satisfaisant du point de vue pratique.

Le calcul numérique du taux de restitution d'énergie est tout d'abord parfaitement validé par la comparaison avec l'expression analytique disponible dans le problème élastique. Dans le cas visqueux, on a analysé ensuite l'impact de la vitesse du déplacement du point d'application de la charge. Pour une même valeur de déplacement imposé, plus la vitesse de chargement est grande, plus la restitution d'énergie associée à une propagation de fissure est grande (voir la figure 3.11). Si on charge de plus en plus vite, on obtient asymptotiquement la réponse élastique. À l'inverse, on a montré que, pour des vitesses de chargement suffisamment faibles, le taux de restitution de l'énergie tend vers une valeur asymptotique qui elle-même est indépendante d'un éventuel échelon initial de déplacement (voir la figure 3.14).

Le calcul de propagation de fissure est réalisé en se basant sur le critère de propagation. Ici, on a considéré que le taux de restitution de l'énergie critique varie en fonction de l'extension de la fissure selon un schéma inspiré de Bazant (voir la figure 3.15). On a obtenu des courbes force-déplacement pour différentes valeurs de vitesse de propagation imposée et de vitesse de déplacement imposée. On observe à nouveau que la force au pic ne dépend pas de la vitesse de chargement (voir la figure 3.17). En revanche, pour un déplacement imposé quelconque, la longueur de la fissure dépend de la vitesse de déplacement imposé (voir la figure 3.19).

On a pu établir la pertinence de la notion de vitesse critique de déplacement imposée  $\dot{U}_{cr}$  dans le cadre de la flexion 3-points. Ainsi, on a montré qu'il n'y a pas de propagation de fissure si  $\dot{U} < \dot{U}_{cr}$ . Par contre, si  $\dot{U} > \dot{U}_{cr}$ , la fissure est susceptible de se propager. L'étude conduit cependant à introduire la notion de longueur de fissure initiale critique. Dans le cas d'un chargement surcritique, il faut que la longueur initiale de la fissure soit inférieure à cette valeur critique,

notée  $\ell_{cr}$ , pour que la propagation ait lieu. Dans ce cas, la longueur de la fissure et la force du point d'application de charge tendent vers leurs valeurs asymptotiques  $\ell_{\infty}$  et  $F_{\infty}$  (voir la figure 3.24). En l'absence de propagation de fissure, la force croît de façon monotone vers sa valeur asymptotique (voir la figure 3.25) [36].

# Introduction à l'homogénéisation des milieux hétérogènes : application à l'endommagement

---

## Sommaire

---

<b>4.1</b> Notions de base . . . . .	<b>66</b>
<b>4.2</b> Problème d'Eshelby . . . . .	<b>73</b>
4.2.1 Retour sur le schéma dilué : application au milieu micro- fissuré . . . . .	74
4.2.2 Schéma de Mori-Tanaka . . . . .	76
4.2.3 Schéma auto-cohérent . . . . .	78
4.2.4 Approche de Ponte-Castaneda et Willis . . . . .	79
<b>4.3</b> Conclusions . . . . .	<b>83</b>

---

La théorie de l'homogénéisation poursuit l'objectif de la détermination des caractéristiques macroscopiques des milieux hétérogènes à partir de la connaissance des caractéristiques des constituants et d'informations sur la géométrie de la microstructure.

On se préoccupe ici du cas des milieux à microstructure aléatoire. Par exemple, le béton abordé à l'échelle millimétrique rentre manifestement dans ce cadre : il convient en effet de distinguer au moins trois phases (granulats, pâte de ciment, pores). Dans le contexte de la mécanique des milieux continus, la micromécanique consiste à tenter de déduire le comportement mécanique homogénéisé en résolvant un problème aux limites sur un volume élémentaire représentatif (*v.e.r.*). Elle comporte une étape de localisation qui consiste à analyser les conséquences locales d'un chargement global, en termes de champs de contraintes et de déformations au sein du *v.e.r.*, puis une étape d'homogénéisation qui procède par application de règles dites "de moyenne" aux champs locaux en question.



Dans ce chapitre, on rappelle tout d'abord quelques notions de base de micromécanique : on définit le *v.e.r.*, les conditions aux limites uniformes en contrainte ou déformation au bord du *v.e.r.*; on présente ensuite le lemme de Hill et quelques applications de ce dernier; on introduit les tenseurs de localisation de la déformation et de la contrainte et finalement les tenseurs de rigidité et de souplesse homogénéisés. Puis on considère le problème d'Eshelby ([21], [22]) correspondant à une inclusion de type pore. On s'intéresse ensuite à quelques estimations analytiques classiques de la rigidité du matériau poreux à phase solide élastique linéaire avec une attention particulière pour le cas où l'espace poreux est un système de fissure. On passe ainsi en revue l'estimation diluée, l'estimation de Mori-Tanaka et l'approche de Ponte-Castaneda et Willis. Dans ce contexte, on est amené de façon naturelle à introduire un paramètre d'endommagement mesurant l'impact de la microfissuration sur la dépendance des caractéristiques élastiques effectives du matériau.

On se limite aux matériaux endommagés isotropes ou isotropes transverses. Le cas isotrope correspond à une distribution d'orientation isotrope des fissures. Le cas isotrope transverse correspond au cas des fissures parallèles. Les résultats obtenus constituent une référence dans la perspective de confrontations ultérieures avec des calculs numériques.

## 4.1 Notions de base

Cette section rappelle brièvement quelques notions de base de micromécanique.

Considérons une structure constituée d'un matériau hétérogène à microstructure aléatoire. Le *v.e.r.* n'est autre que le volume élémentaire introduit classiquement en Mécanique des Milieux Continus. Il s'agit donc d'un volume suffisamment grand pour incorporer toute l'information mécanique et géométrique sur les hétérogénéités constitutives du matériau en question. Par ailleurs, pour garantir une description continue de la structure macroscopique, le *v.e.r.* doit être de dimension infinitésimale en comparaison avec celle-ci. Plus précisément, notons  $L$ ,  $v$  et  $d$  respectivement les longueurs caractéristiques de la structure (ou éventuellement du chargement), du *v.e.r.* et des hétérogénéités dans le *v.e.r.*. Ces quantités doivent assurer entre elles la condition suivante,

dite de séparation d'échelles :

$$d \ll v \ll L \quad (4.1)$$

La moyenne du champ  $a(\underline{z})$  dans le *v.e.r.*  $\Omega$  (resp. dans le sous-ensemble  $\Omega^\alpha \subset \Omega$ ) est notée  $\bar{a}$  (resp.  $\bar{a}^\alpha$ ) et est déterminée par :

$$\bar{a} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} a(\underline{z}) dV \quad ; \quad \bar{a}^\alpha = \frac{1}{|\Omega^\alpha|} \int_{\Omega^\alpha} a(\underline{z}) dV \quad (4.2)$$

où  $|\Omega|$  (resp.  $|\Omega^\alpha|$ ) est le volume de  $\Omega$  (resp.  $\Omega^\alpha$ ).

**conditions aux limites homogènes** Considérons à présent la problématique de la définition du chargement macroscopique appliqué au *v.e.r.*. Une première option consiste à se donner sur le bord du *v.e.r.* une condition dite "homogène en contrainte" : la force surfacique imposée au point  $\underline{z}$  sur le bord  $\partial\Omega$  est définie par  $\mathbf{T}(\underline{z}) = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n}(\underline{z})$ , où  $\underline{n}(\underline{z})$  est le vecteur normal au bord  $\partial\Omega$  au point considéré.  $\underline{\Sigma}$  s'interprète comme la contrainte macroscopique. On note  $\underline{\sigma}(\underline{z})$  un champ des contraintes statiquement admissible avec  $\underline{\Sigma}$ . Par définition, il est assujéti aux conditions aux limites ci-dessus et vérifie la condition d'équilibre  $\text{div} \underline{\sigma} = 0$ . Par quelques développements mathématiques, on montre que la contrainte macroscopique  $\underline{\Sigma}$  imposée est égale à la moyenne du champ des contraintes dans le domaine :  $\underline{\Sigma} = \bar{\underline{\sigma}}$  (voir la démonstration dans l'annexe D). L'alternative consiste à se donner une condition aux limites de type homogène en déformation" :  $\underline{\xi}(\underline{z}) = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{z}$ , où  $\underline{\mathbf{E}}$  s'interprète comme la déformation macroscopique et  $\underline{\xi}(\underline{z})$  désigne le déplacement local au point  $\underline{z}$ . On note  $\underline{\varepsilon}(\underline{z})$  un champ des déformations cinématiquement admissible avec  $\underline{\mathbf{E}}$  :  $\underline{\varepsilon}(\underline{z}) = \nabla^s \underline{\xi}(\underline{z})$ . On dispose dans ce cadre de la relation de moyenne :  $\underline{\mathbf{E}} = \bar{\underline{\varepsilon}}$  (voir la démonstration dans D).

**lemme de Hill** Les conditions aux limites homogènes (en contrainte ou déformation) permettent d'établir le lemme de Hill ([27], [32]). Ce dernier se présente sous la forme d'une règle de cohérence énergétique (voir la démonstration dans D), concernant la quantité "travail de déformation" :

$$\overline{\underline{\sigma}^* : \underline{\varepsilon}'} = \bar{\underline{\sigma}^*} : \bar{\underline{\varepsilon}'} \quad (4.3)$$

où  $\underline{\sigma}^*$  est un champ des contraintes statiquement admissible, c'est à dire qu'il satisfait l'équation d'équilibre  $\text{div} \underline{\sigma}^* = 0$  et  $\underline{\varepsilon}'$  est un champ des déformations microscopiques cinématiquement admissible, qui satisfait la condition de compatibilité géométrique. L'énoncé (4.3) a lieu si l'un ou l'autre des champs  $\underline{\sigma}^*$  ou

$\varepsilon'$  vérifie une condition aux limites de type uniforme.

Dans le cas de contrainte homogène imposée sur le bord du *v.e.r.*, ce lemme permet de démontrer que la déformation macroscopique est égale à la moyenne du champ des déformations microscopiques  $\mathbf{E} = \bar{\varepsilon}$ . De même, pour le cas de déformation homogène imposée aux limites, la contrainte macroscopique doit être définie comme la moyenne du champs des contraintes microscopiques  $\Sigma = \bar{\sigma}$ .

Pour déterminer la rigidité effective d'un milieu, on impose sur un *v.e.r.* soit une contrainte macroscopique  $\Sigma$  et on calcule la déformation macroscopique en prenant la moyenne du champ des déformations microscopiques dans le *v.e.r.*, soit une déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  et on calcule la contrainte macroscopique en prenant la moyenne du champ des contraintes microscopiques dans le *v.e.r.*. Notons  $\mathbb{C}^{hom}$  le tenseur de rigidité effectif du matériau étudié, la loi de comportement effectif s'écrit sous la forme suivante :

$$\Sigma = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \quad (4.4)$$

**exemple de la sphère creuse** A la suite de Hashin [26], considérons pour illustrer la démarche l'exemple très simple d'une sphère creuse comportant une cavité de même centre, de fraction volumique  $\varphi_1$  (même s'il ne s'agit pas d'un *v.e.r.* de milieu poreux. Sur le bord extérieur de la sphère, on impose soit une contrainte de traction macroscopique isotrope  $\Sigma = \Sigma \mathbf{1}$  (c'est-à-dire une densité de forces surfaciques  $\mathbf{T} = \Sigma \underline{e}_r$ ), soit une déformation macroscopique isotrope  $\mathbf{E} = E \mathbf{1}$  (c'est-à-dire un champ de déplacements  $\underline{\xi}(\underline{z}) = ER \underline{e}_r$  où  $R$  est le rayon extérieur de la sphère creuse). On calcule ensuite la valeur macroscopique duale en prenant la moyenne du champ correspondant. La loi de comportement macroscopique (4.4) s'écrit sous la forme :

$$\Sigma = 3k^{sc}E \quad (4.5)$$

où  $k^{sc}$  est le module de compression volumique effectif de la sphère qui est calculé en fonction du facteur  $\varphi_1$  volumique de la phase poreuse (voir par exemple [16]) :

$$k^{sc} = k^s \left( 1 - \varphi_1 \frac{3k^s + 4\mu^s}{3\varphi_1 k^s + 4\mu^s} \right) \quad (4.6)$$

où  $k^s$  et  $\mu^s$  sont respectivement le module de compression volumique et le module de cisaillement de la phase solide. Grâce à cette valeur effective, on peut ainsi calculer l'énergie élastique  $W$  stockée dans le sphère :

$$W = \frac{\Sigma^2}{2k^{sc}} |\Omega| = \frac{9k^{sc}E^2}{2} |\Omega| \quad (4.7)$$

où  $|\Omega|$  est le volume de la sphère.

**localisation** On se place ici dans le contexte de l'élasticité linéaire. Pour relier la contrainte macroscopique et le champ des contraintes microscopiques correspondant, on introduit la notion de tenseur de concentration de contrainte, noté ici  $\mathbb{B}$  (voir par exemple [16]). Au point  $\underline{z}$  du *v.e.r.*, on a la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{z}) = \mathbb{B}(\underline{z}) : \boldsymbol{\Sigma} \quad (4.8)$$

$\mathbb{B}(\underline{z})$  est nul dans l'espace poreux et sa moyenne sur tout le domaine est égale au tenseur unité d'ordre quatre  $\mathbb{I}$ . Grâce à ce tenseur de localisation, on peut calculer la souplesse effective par une relation de moyenne :

$$\mathbb{S}^{hom} = \overline{\mathbb{S}(\underline{z}) : \mathbb{B}(\underline{z})} \quad (4.9)$$

où  $\mathbb{S}^{hom}$  est le tenseur de souplesse effectif du matériau homogénéisé et  $\mathbb{S}(\underline{z})$  est le tenseur de souplesse local correspondant à  $\underline{z}$ .

De la même façon, le tenseur de concentration de déformation relie la déformation macroscopique et le champ des déformations microscopiques correspondant :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z}) = \mathbb{A}(\underline{z}) : \mathbf{E} \quad (4.10)$$

La moyenne de  $\mathbb{A}$  est aussi égale à  $\mathbb{I}$ . Le tenseur de rigidité effectif est calculé en fonction de  $\mathbb{A}$  par la relation de moyenne :

$$\mathbb{C}^{hom} = \overline{\mathbb{C}(\underline{z}) : \mathbb{A}(\underline{z})} \quad (4.11)$$

Sous réserve de la condition de séparation d'échelles, le théorème de Hill-Mandel montre que le tenseur de souplesse effective obtenu dans le cadre de conditions aux limites homogènes en contrainte est égal à l'inverse du tenseur de rigidité effective obtenu dans le cadre de conditions aux limites homogènes en déformation, au troisième ordre près en  $(d/v)$  où  $d$  et  $v$  sont reliés par la condition (4.1) :

$$\mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}^{hom} = \mathbb{I} + O\left(\frac{d}{v}\right)^3 \quad (4.12)$$

### Borne de Voigt-Reuss

Pour une contrainte macroscopique imposée dans le cadre de conditions aux limites homogènes, les principes de minima de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournissent des bornes supérieure et inférieure de  $\mathbb{S}^{hom}$  (pour plus de détail de la démonstration, voir [16]) :

$$2\Sigma : \overline{\varepsilon(\underline{\xi}') - \varepsilon(\underline{\xi}')} : \overline{\mathbb{C} : \varepsilon(\underline{\xi}')} \leq \Sigma : \mathbb{S}^{hom} : \Sigma \leq \overline{\sigma^* : \mathbb{S} : \sigma^*} \quad (4.13)$$

où  $\Sigma$  est la contrainte macroscopique imposée. Les inégalités ci-dessus ont lieu pour tout champ  $\sigma$  statiquement admissible avec  $\Sigma$  au sens et pour tout champ de déplacement  $\underline{\xi}'$ .

Pour une déformation macroscopique imposée  $\mathbf{E}$  dans le cadre de conditions aux limites homogènes, les principes de minima de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournissent de même des bornes supérieure et inférieure de  $\mathbb{C}^{hom}$  (voir [16]) :

$$2\mathbf{E} : \overline{\sigma^* - \sigma^* : \mathbb{S} : \sigma^*} \leq \mathbf{E} : \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \leq \overline{\varepsilon(\underline{\xi}') : \mathbb{C} : \varepsilon(\underline{\xi}')} \quad (4.14)$$

Les inégalités ci-dessus ont lieu pour tous les champs  $\underline{\xi}'$  cinématiquement admissibles avec  $\mathbf{E}$  et pour tous les champs  $\sigma^*$  satisfaisant la condition d'équilibre.

L'application directe de (4.13) ou de (4.14) donne les bornes de Voigt et de Reuss de la rigidité effective des milieux hétérogènes. Considérons un milieu poreux élastique linéaire. Travaillons par exemple avec (4.13). On considère un champ des déplacements de la forme  $\underline{\xi}'(\underline{z}) = \mathbf{E}' \cdot \underline{z}$  avec  $\mathbf{E}'$  symétrique. La borne inférieure de  $\mathbb{S}^{hom}$  donnée par (4.13) devient :

$$\Sigma : \mathbb{S}^{hom} : \Sigma \geq 2\Sigma : \mathbf{E}' - \mathbf{E}' : \overline{\mathbb{C}} : \mathbf{E}' \quad (4.15)$$

Le terme de droite atteint sa valeur maximale lorsque  $\mathbf{E}'$  atteint la valeur optimale  $\mathbf{E}'_{opt} = \overline{\mathbb{C}}^{-1} : \Sigma$ . Puisque la condition (4.15) est valable pour tout choix de  $\mathbf{E}'$ , on obtient (pour  $\mathbf{E}'_{opt}$ ) :

$$\Sigma : \mathbb{S}^{hom} : \Sigma \geq \Sigma : \overline{\mathbb{C}}^{-1} : \Sigma \quad (4.16)$$

Pour un milieu poreux de porosité  $\varphi$ , cette condition devient :

$$\Sigma : \mathbb{S}^{hom} : \Sigma \geq \frac{1}{1 - \varphi} \Sigma : \mathbb{S}^s : \Sigma \quad (4.17)$$

Ce résultat est connu sous le nom de “borne de Voigt”. Il faut remarquer que cette condition s’applique pour toutes les valeurs de  $\Sigma$ . Par exemple, si l’on impose une contrainte macroscopique sphérique  $\Sigma = \Sigma \mathbf{1}$ , on obtient la borne supérieure du module de compression volumique. Par contre la borne supérieure du module de cisaillement est obtenue en imposant une contrainte macroscopique déviatorique :

$$k^{hom} \leq (1 - \varphi)k^s \quad ; \quad \mu^{hom} \leq (1 - \varphi)\mu^s \quad (4.18)$$

Dans le cas d’un poreux, la “borne de Reuss” se réduit à une forme triviale. Elle est obtenue classiquement en considérant un champ des contraintes microscopiques  $\sigma^* = \Sigma$  uniforme, qui est bien statiquement admissible avec  $\Sigma$ . La borne supérieure de  $\mathbb{S}^{hom}$  donnée par (4.13) devient :

$$\Sigma : \mathbb{S}^{hom} : \Sigma \leq \overline{\Sigma} : \mathbb{S} : \overline{\Sigma} = \Sigma : \overline{\mathbb{S}} : \Sigma = \infty \quad (4.19)$$

En d’autres termes, dans le cas d’un milieu poreux, les bornes inférieures des modules de compression volumique et de cisaillement sont nulles :

$$k^{hom} \geq 0 \quad ; \quad \mu^{hom} \geq 0 \quad (4.20)$$

c’est-à-dire que la “borne de Reuss” n’est pas utile dans ce cas.

## Borne de Hashin-Shtrikman et assemblage de sphères composites de Hashin

On montre que le module  $k^{sc}$  introduit dans le cadre du modèle de sphère creuse constitue une borne supérieure de  $k^{hom}$  pour tout milieu poreux vérifiant la propriété de répartition spatiale isotrope des phases [26]. Il s’agit de la borne dite de Hashin-Shtrikman supérieure, parfois notée  $k^{HS+}$ .

On considère maintenant un milieu poreux modèle constitué par assemblage de sphères creuses homothétiques (de même porosité) et d’un reliquat de solide. On note  $\varphi^{sph}$  la fraction volumique des sphères creuses. Les principes variationnels en élasticité linéaire conduisent aux bornes du module de compression volumique effectif [17] :

$$\left( \frac{1 - \varphi^{sph}}{k^s} + \frac{\varphi^{sph}}{k^{sc}} \right)^{-1} \leq k^{hom} \leq (1 - \varphi^{sph})k^s + \varphi^{sph}k^{sc} \quad (4.21)$$

Dans la limite d’un milieu modèle constitué exclusivement de sphères composites ( $\varphi^{sph} \rightarrow 1$ ), on observe que  $k^{hom} = k^{sc}$ . Ce résultat confirme que la borne supérieure  $k^{sc} = k^{HS+}$  est optimale, puisqu’elle est atteinte (asymptotiquement) par le milieu modèle en question.

### Schéma dilué

Dans le cas d'un milieu poreux dont la phase solide est homogène, la relation (4.11) devient

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : (\mathbb{I} - \varphi \overline{\mathbb{A}}^p) \quad (4.22)$$

L'estimation de  $\mathbb{C}^{hom}$  passe donc par celle de  $\overline{\mathbb{A}}^p$ . Le schéma dilué considère que l'interaction mécanique entre les pores est négligeable. Ceci permet de se ramener à un problème simplifié où un seul pore est plongé dans un milieu homogène infiniment grand par rapport au pore, auquel on confère les propriétés mécaniques de la phase solide. On impose une déformation macroscopique homogène  $\mathbf{E}$  à l'infini ( $\underline{\xi}(\underline{z}) \rightarrow \mathbf{E} \cdot \underline{z}$  pour  $|\underline{z}| \rightarrow \infty$ ). Dans le cas d'un pore de forme ellipsoïdale, le problème ainsi défini est appelé problème d'Eshelby. Il est considéré plus en détail à la section 4.2. Il s'agit d'une façon générale de déterminer le champ des déplacements dans le solide, ce qui permet de déterminer la déformation (moyenne) du pore  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  en fonction de  $\mathbf{E}$ . On obtient par ce procédé une relation entre  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et  $\mathbf{E}$  de la forme  $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbb{A}^p : \mathbf{E}$ , où le tenseur  $\mathbb{A}^p$  constitue l'approximation diluée du tenseur de localisation de la déformation dans le pore. Le tenseur de rigidité effective est finalement estimé par :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : (\mathbb{I} - \varphi \mathbb{A}^p) \quad (4.23)$$

Dans le cas d'un pore sphérique et lorsque le milieu solide est isotrope, il en est de même de  $\mathbb{A}^p$  et ce dernier peut être déterminé analytiquement en utilisant la solution classique de [31]. En considérant successivement des déformations macroscopiques sphérique et déviatorique, on peut déterminer les deux constantes scalaires qui caractérisent  $\mathbb{A}^p$ . Les modules de compression volumique et de cisaillement effectifs sont alors donnés par ([16]) :

$$k^{hom} = k^s \left( 1 - \varphi \left( 1 + \frac{3k^s}{4\mu^s} \right) \right) \quad ; \quad \mu^{hom} = \mu^s \left( 1 - 5\varphi \frac{3k^s + 4\mu^s}{9k^s + 8\mu^s} \right) \quad (4.24)$$

L'estimation diluée peut être généralisée pour le cas où la condition  $\varphi \ll 1$  n'est pas satisfaite : on fait alors appel au schéma différentiel. Il consiste à partir du solide en y incorporant petit à petit la porosité de façon incrémentale par étapes successives. Après chaque étape, le milieu homogénéisé équivalent est déterminé par le schéma dilué et constitue le point de départ de l'étape suivante. Pour plus de détail voir [16].

L'approche ci-dessus, dédiée aux inclusions (resp. pores) sphériques peut également être généralisée à des objets de forme ellipsoïdale, grâce à la solution du problème d'Eshelby que l'on présente ci-après.

## 4.2 Problème d'Eshelby

La solution du problème d'Eshelby est à la base d'une famille très importante de méthodes d'estimation, dont cette section se propose de donner un bref aperçu.

D'une façon générale, le problème de l'inhomogénéité d'Eshelby étudie une inclusion ellipsoïdale  $I$ , élastique linéaire homogène, plongée dans un milieu solide également élastique linéaire homogène (raideur  $\mathbb{C}^s$ ), supposé infini. On se donne asymptotiquement des conditions aux limites homogènes en déformation ( $\underline{\xi}(\underline{z}) \rightarrow \mathbf{E} \cdot \underline{z}$  pour  $|\underline{z}| \rightarrow \infty$ ). Eshelby ([21],[22]) a montré que la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}^I$  dans l'inclusion est homogène. Elle dépend évidemment linéairement de la déformation imposée à l'infini. Dans le cas d'un pore, le tenseur de localisation de la déformation  $\mathbb{A}^I$  s'exprime directement en fonction du tenseur d'Eshelby  $\mathbb{S}$  de l'objet en question (voir ainsi [16]) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = \mathbb{A}^I : \mathbf{E} = (\mathbb{I} - \mathbb{S})^{-1} : \mathbf{E} \quad (4.25)$$

où  $\mathbb{I}$  est le tenseur unité d'ordre 4 et  $\mathbb{S}$  est le tenseur d'Eshelby qui dépend de la rigidité du milieu environnant, de la forme et de l'orientation et de la rigidité de l'inclusion (voir [34], [28], [35]).

Par exemple, pour le cas où l'inclusion est un pore sphérique,  $\mathbb{S}$  est un tenseur isotrope qui s'écrit dans la base ( $\mathbb{J}, \mathbb{K}$ ) [16] :

$$\mathbb{S} = \alpha \mathbb{J} + \beta \mathbb{K} \quad (4.26)$$

avec :

$$\alpha = \frac{3k^s}{3k^s + 4\mu^s} \quad ; \quad \beta = \frac{6(k^s + 2\mu^s)}{5(3k^s + 4\mu^s)} \quad (4.27)$$

On rappelle que  $\mathbb{J} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}/3$  et  $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ .  $k^s$  et  $\mu^s$  sont respectivement le module de compression volumique et de cisaillement de la phase solide.

Pour un pore sphérique plongé dans un milieu infini, le tenseur de concentration de déformation est calculé par  $\mathbb{A}^p = (\mathbb{I} - \mathbb{S})^{-1}$  avec  $\mathbb{S}$  est donné par (4.26). En utilisant cette expression dans (4.23), on peut déduire les modules de compression volumique et de cisaillement effectives estimés par le schéma dilué :

$$k^{DL} = k^s \left( 1 - \varphi \frac{1}{1 - \alpha} \right) \quad ; \quad \mu^{DL} = \mu^s \left( 1 - \varphi \frac{1}{1 - \beta} \right) \quad (4.28)$$

En introduisant (4.27) dans (4.28) on obtient exactement le résultat donné par (4.24). Dans ce raisonnement, on a identifié le solide et le milieu de référence



d'élasticité  $\mathbb{C}^o$  du problème d'Eshelby.

Considérons à présent le cas d'une fissure ellipsoïdal aplati de révolution, défini par l'équation :

$$\frac{z_1^2}{c^2} + \frac{z_2^2 + z_3^2}{\ell^2} = 1 \quad (4.29)$$

$\ell$  désigne le rayon de la fissure et  $c$  la demi-ouverture. Le vecteur unitaire dans la direction perpendiculaire au plan de la fissure est  $\underline{n} = \underline{e}_1$ . Le tenseur  $\mathbb{S}$  dépend du coefficient de Poisson de la phase solide  $\nu^s$  et du rapport d'aspect  $X = c/\ell$  de l'inclusion (voir l'annexe B). A côté du tenseur d'Eshelby, on utilise couramment le tenseur  $\mathbb{P}$  dit "tenseur de Hill de l'inclusion", relié à  $\mathbb{S}$  par  $\mathbb{S} = \mathbb{P} : \mathbb{C}^s$ .

Pour un milieu microfissuré, les fissures tridimensionnelles sont considérées comme des inclusions ellipsoïdales dont le rapport d'aspect est infiniment petit  $X \ll 1$ . On peut alors chercher à appliquer le résultat d'Eshelby en prenant la limite quand  $X$  tend vers 0. Malheureusement, les composantes  $A_{ijkl}^p$  d'indices 1111, 1212 et 1313 n'admettent pas de limite finie. Ceci traduit le fait que les chargements de type cisaillement 12 ou 13 et la traction dans la direction normale à la fissure induisent des grandes déformations.

$$\mathbb{A}^p = \lim_{X \rightarrow 0} (\mathbb{I} - \mathbb{S}(X))^{-1} = \infty \quad (4.30)$$

En revanche, il est utile pour la suite de noter l'existence d'une limite pour la quantité  $X(\mathbb{I} - \mathbb{S}(X))^{-1}$ . La contribution Le tenseur de concentration de déformation de la fissure est calculé donc par :

$$\lim_{X \rightarrow 0} X(\mathbb{I} - \mathbb{S}(X))^{-1} = \mathbb{T}(\underline{n}) \quad (4.31)$$

Lorsque la phase solide du problème d'Eshelby est isotrope,  $\mathbb{T}(\underline{n})$  est un tenseur isotrope transverse vis-à-vis de la direction de la normale à la fissure et qui dépend du coefficient de Poisson de la phase solide  $\nu^s$ . Dans la base de Walpole [49], il s'écrit (voir la démonstration dans l'annexe B : (B.13)) :

$$\mathbb{T}(\underline{n}) = \frac{4(1 - \nu^s)}{\pi} \left( \frac{1 - \nu^s}{1 - 2\nu^s} \mathbb{E}_2(\underline{n}) + \frac{1}{2 - \nu^s} \mathbb{E}_4(\underline{n}) + \frac{\nu^s}{1 - 2\nu^s} \mathbb{E}_5(\underline{n}) \right) \quad (4.32)$$

## 4.2.1 Retour sur le schéma dilué : application au milieu microfissuré

### 4.2.1.1 Distribution isotrope transverse de microfissures

On examine le cas d'un milieu microfissuré constitué de fissures parallèles supposées de même rayon  $\ell$ , de densité volumique  $N$ , de normale  $\underline{n} = \underline{e}_1$ . La relation

(4.23) invite à se pencher sur le calcul de la quantité  $\varphi \overline{\mathbb{A}}^p$ . Il s'agit en fait d'une forme indéterminée, puisqu'on a vu (se reporter à (4.30)) que le tenseur de localisation tend vers l'infini, tandis que la fraction volumique des microfissures est a priori un infiniment petit. Plus précisément, notant  $c$  comme en (4.29) la demi-ouverture et  $X = c/\ell$  le rapport d'aspect, on observe que  $\varphi = 4N\pi\ell^2 c/3$ , c'est-à-dire  $\varphi = 4N\pi\ell^3 X/3$ . Dans l'esprit du schéma dilué, on estime  $\overline{\mathbb{A}}^p$  par  $(\mathbb{I} - \mathbb{S}(X))^{-1}$  : le produit  $\varphi \overline{\mathbb{A}}^p$  fait alors apparaître le tenseur  $\mathbb{T}(\underline{n})$  de (4.31), donné dans la base de Walpole par (4.32). Il en résulte que

$$\varphi \overline{\mathbb{A}}^p = \frac{16(1 - \nu^s)\epsilon}{3} \left( \frac{1 - \nu^s}{1 - 2\nu^s} \mathbb{E}_2(\underline{n}) + \frac{1}{2 - \nu^s} \mathbb{E}_4(\underline{n}) + \frac{\nu^s}{1 - 2\nu^s} \mathbb{E}_5(\underline{n}) \right) \quad (4.33)$$

où l'on a posé  $\epsilon = N\ell^3$ , qu'on l'appelle "paramètre d'endommagement". La décomposition du tenseur de rigidité du matériau sain  $\mathbb{C}^s$  dans le repère de Walpole s'écrit selon (B.7) (voir la démonstration dans l'annexe B) :

$$\mathbb{C}^s = \frac{2\mu^s}{1 - 2\nu^s} \left( \mathbb{E}_1 + (1 - \nu^s)\mathbb{E}_2 + (1 - 2\nu^s)(\mathbb{E}_3 + \mathbb{E}_4) + \nu^s\mathbb{E}_5 \right) \quad (4.34)$$

En introduisant (4.33) et (4.34) dans (4.23), on obtient l'estimation diluée du tenseur de rigidité effective d'un matériau contenant des microfissures parallèles sous la forme :

$$\mathbb{C}^{DL} = \sum_{i=1}^6 c_i^{DL} \mathbb{E}_i \quad (4.35)$$

avec :

$$\begin{aligned} c_1^{DL} &= \frac{2\mu^s}{(1 - 2\nu^s)} \left( 1 + \frac{32\nu^{s2}(\nu^s - 1)\epsilon}{3(1 - 2\nu^s)} \right); \quad c_2^{DL} = \frac{2\mu^s(1 - \nu^s)}{1 - 2\nu^s} \left( 1 - \frac{16(\nu^s - 1)^2\epsilon}{3(1 - 2\nu^s)} \right) \\ c_3^{DL} &= 2\mu^s; \quad c_4^{DL} = 2\mu^s \left( 1 - \frac{16(1 - \nu^s)\epsilon}{3(2 - \nu^s)} \right); \quad c_5^{DL} = c_6^{DL} = \frac{2\mu^s\nu^s}{1 - 2\nu^s} \left( 1 - \frac{16(\nu^s - 1)^2\epsilon}{3(1 - 2\nu^s)} \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Les significations physiques de ces coefficients sont les suivantes :  $k_p = c_1/2$  est le module de compression transversale effectif (dans le plan de fissures);  $\mu_p = c_3/2$  est le module de cisaillement transversal effectif;  $\mu_l = c_4/2$  est le module de cisaillement longitudinal. Le module d'Young dans la direction perpendiculaire au plan de fissures et le coefficient de Poisson correspondant sont respectivement déterminés en fonction des coefficients ci-dessus par (voir [11]) :

$$E_{11} = c_2 - \frac{2c_5^2}{c_1}; \quad \nu_{12} = \frac{c_5}{c_1} \quad (4.37)$$

En utilisant ces formules ci-dessus, on obtient pour les estimations diluées du module d'Young longitudinale et le coefficient de Poisson correspondant par :

$$E_{11}^{DL} = E^s \frac{3(2\nu^s - 1) + 16(1 - \nu^s)^2 \epsilon}{3(2\nu^s - 1) + 32\nu^{s2}(1 - \nu^s)\epsilon} \quad ; \quad \nu_{12}^{DL} = \nu^s \frac{3(2\nu^s - 1) + 16(1 - \nu^s)^2 \epsilon}{3(2\nu^s - 1) + 32\nu^{s2}(1 - \nu^s)\epsilon} \quad (4.38)$$

On peut observer que :

$$\nu_{12}^{DL} / E_{11}^{DL} = \nu^s / E^s \quad (4.39)$$

#### 4.2.1.2 Distribution isotrope de microfissures

Pour le cas des fissures distribuées et orientées de façon isotrope, l'évaluation diluée de  $\overline{\mathbb{A}}^p$  dans (4.23) est obtenue en prenant la moyenne sur toutes les directions de la normale au plan de fissure :

$$\varphi \overline{\mathbb{A}}^p = \frac{4\pi}{3} \epsilon \langle \mathbb{T} \rangle \quad (4.40)$$

où le paramètre d'endommagement  $\epsilon$  conserve l'expression précédente ;  $\langle \mathbb{T} \rangle$  désigne la moyenne sur les orientations de la normale du tenseur  $\mathbb{T}(\underline{n})$  de (4.32) :

$$\langle \mathbb{T} \rangle = \frac{4(1 - \nu^{s2})}{3\pi(1 - 2\nu^s)} \mathbb{J} + \frac{8(1 - \nu^s)(5 - \nu^s)}{15\pi(2 - \nu^s)} \mathbb{K} \quad (4.41)$$

En introduisant (4.40) dans (4.23), on peut déduire les modules de compression volumique et de cisaillement effectifs :

$$k^{DL} = k^s (1 - \gamma \epsilon) \quad ; \quad \mu^{DL} = \mu^s (1 - \zeta \epsilon) \quad (4.42)$$

où  $\gamma$  et  $\zeta$  sont déterminés en fonction du coefficient de Poisson par :

$$\gamma = \frac{16}{9} \frac{1 - \nu^{s2}}{1 - 2\nu^s} \quad ; \quad \zeta = \frac{32}{45} \frac{(1 - \nu^s)(5 - \nu^s)}{2 - \nu^s} \quad (4.43)$$

#### 4.2.2 Schéma de Mori-Tanaka

D'une manière générale, le schéma de Mori-Tanaka est dédié à une microstructure de composites à matrice et inclusions et vise à améliorer l'estimation diluée en prenant en compte l'interaction entre les inclusions. Ce schéma reste basée sur la solution du problème d'Eshelby, dans lequel la condition de déplacement à l'infini ( $\underline{\xi}(\underline{z}) \rightarrow \mathbf{E} \cdot \underline{z}$  pour  $|\underline{z}| \rightarrow \infty$ ) est remplacée par une condition du même type, mais faisant intervenir une déformation auxiliaire  $\mathbf{E}_o$  qui s'interprète comme la déformation moyenne dans la matrice :  $\underline{\xi}(\underline{z}) \rightarrow \mathbf{E}_o \cdot \underline{z}$  pour  $|\underline{z}| \rightarrow \infty$ . La relation entre  $\mathbf{E}_o$  et la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  est obtenue en exploitant la règle

de moyenne sur les déformations locales :  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{E}$ . Pour un milieu poreux à phase solide homogène d'élasticité  $\mathbb{C}^s$ , on obtient [16] :

$$\mathbb{C}^{MT} = (1 - \varphi)\mathbb{C}^s : \left( (1 - \varphi)\mathbb{I} + \sum_i \varphi^i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_i)^{-1} \right)^{-1} \quad (4.44)$$

Cette expression prend en compte des pores indexés par  $i$ , de fraction volumique  $\varphi_i$  ( $\varphi = \sum_i \varphi_i$ ), et de tenseur d'Eshelby  $\mathbb{S}_i$ .

Pour le cas des pores sphériques, les modules de compression volumique et de cisaillement effectives estimés par ce schéma s'écrivent :

$$k^{MT} = k^s \frac{4(1 - \varphi)\mu^s}{3\varphi k^s + 4\mu^s} \quad ; \quad \mu^{MT} = \mu^s \frac{(1 - \varphi)(9k^s + 8\mu^s)}{9k^s(1 + 2\varphi/3) + 8\mu^s(1 + 3\varphi/2)} \quad (4.45)$$

Sur le plan théorique, on montre que les expressions ci-dessus coïncident avec les bornes supérieures de Hashin-Shtrikman ( $k^{HS+}$  (voir section 4.1) et  $\mu^{HS+}$ ), valable pour un poreux quelconque, ayant une phase solide homogène d'élasticité isotrope (modules  $k^s$  et  $\mu^s$ ), sous réserve de l'isotropie statistique.

Pour le cas d'un milieu microfissuré, on prend la limite de la rigidité effective donnée par (4.44) quand  $X \rightarrow 0$ . Cela conduit en particulier à  $\varphi \rightarrow 0$ . On utilise à nouveau le fait que  $\varphi_i = 4\pi\ell^3 X / (3|\Omega|)$ .

#### 4.2.2.1 Distribution isotrope transverse de microfissures

Pour le cas des fissures parallèles,  $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\underline{n})$  est donné par (4.32), de sorte que le tenseur de rigidité effectif estimé par (4.44) s'écrit :

$$\mathbb{C}^{MT} = \sum_{i=1}^6 c_i^{MT} \mathbb{E}_i \quad (4.46)$$

avec :

$$\begin{aligned} c_1^{MT} &= \frac{2\mu^s (16(1 - \nu^s)^2 \epsilon + 3)}{16(1 - \nu^s)^2 \epsilon + 3(1 - 2\nu^s)} \quad ; \quad c_2^{MT} = \frac{6\mu^s(1 - \nu^s)}{16(1 - \nu^s)^2 \epsilon + 3(1 - 2\nu^s)} \quad ; \quad c_3^{MT} = 2\mu^s \\ c_4^{MT} &= \frac{6\mu^s(2 - \nu^s)}{16(1 - \nu^s)\epsilon + 3(2 - \nu^s)} \quad ; \quad c_5^{MT} = c_6^{MT} = \frac{6\mu^s\nu^s}{16(1 - \nu^s)^2 \epsilon + 3(1 - 2\nu^s)} \end{aligned} \quad (4.47)$$

En utilisant les équations dans (4.37), on obtient pour les estimations de Mori-Tanaka du module d'Young longitudinal et le coefficient de Poisson correspondant :

$$E_{11}^{MT} = E^s \frac{3}{3 + 16(1 - \nu^s)^2 \epsilon} \quad ; \quad \nu_{12}^{MT} = \nu^s \frac{3}{3 + 16(1 - \nu^s)^2 \epsilon} \quad (4.48)$$

On peut observer que :

$$\nu_{12}^{MT} / E_{11}^{MT} = \nu^s / E^s \quad (4.49)$$

#### 4.2.2.2 Distribution isotrope de microfissures

On obtient :

$$\mathbb{C}^{MT} = \mathbb{C} : \left( \mathbb{I} + \frac{4\pi}{3} \epsilon \langle \mathbb{T} \rangle \right)^{-1} \quad (4.50)$$

où  $\langle \mathbb{T} \rangle$  est le tenseur de (4.41). Les modules de compression volumique et de cisaillement effectifs obtenus par l'estimation de Mori-Tanaka s'écrivent :

$$k^{MT} = k^s / (1 + \gamma \epsilon); \quad \mu^{MT} = \mu^s / (1 + \zeta \epsilon) \quad (4.51)$$

où  $\gamma$  et  $\zeta$  sont donnés par (4.43). On observe que les estimations diluées de eq :kmuDL constituent un développement limité au premier ordre de celles de (4.51).

#### 4.2.3 Schéma auto-cohérent

L'idée du schéma auto-cohérent consiste à supposer que c'est le matériau homogénéisé lui-même qui joue le rôle de la matrice dans le problème d'Eshelby. En exploitant cette idée, la rigidité d'un milieu poreux prévue par le schéma auto-cohérent, qu'on note  $\mathbb{C}^{ac}$ , a l'expression suivante (voir le détail dans [16]). A la différence de (4.44), les tenseurs d'Eshelby de la phase solide  $\mathbb{S}_s$  et des pores  $\mathbb{S}_i$  sont relatifs au milieu homogénéisé, et non au matériau solide :

$$\mathbb{C}^{ac} = (1 - \varphi) \mathbb{C}^s : (\mathbb{I} + \mathbb{S}_s : \mathbb{C}^{ac-1} : (\mathbb{C}^s - \mathbb{C}^{ac}))^{-1} : \left( (1 - \varphi) (\mathbb{I} + \mathbb{S}_s : \mathbb{C}^{ac-1} : (\mathbb{C}^s - \mathbb{C}^{ac}))^{-1} + \sum_i \varphi^i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_i)^{-1} \right)^{-1} \quad (4.52)$$

Cette expression n'est pas explicite, en raison du fait que  $\mathbb{C}^{ac}$  intervient dans le calcul du membre de droite. Cela rend difficile l'obtention de résultats analytiques, en particulier dans le cas du milieu microfissuré.

Pour le cas plus simple des pores sphériques, les modules de compression volumique et de cisaillement effectives estimés par ce schéma sont solutions du système :

$$k^{ac} = k^s \frac{1 - \varphi}{1 + \alpha^{ac} (k^s - k^{ac}) / k^{ac}} \quad ; \quad \mu^{ac} = \mu^s \frac{1 - \varphi}{1 + \beta^{ac} (\mu^s - \mu^{ac}) / \mu^{ac}} \quad (4.53)$$

avec :

$$\alpha^{ac} = \frac{3k^{ac}}{3k^{ac} + 4\mu^{ac}} \quad ; \quad \beta^{ac} = \frac{6(k^{ac} + 2\mu^{ac})}{5(3k^{ac} + 4\mu^{ac})} \quad (4.54)$$

Les figures 4.1 et 4.2 montrent clairement que les estimations diluée, de Mori-Tanaka et auto-cohérente ne sont voisines que pour  $\varphi \ll 1$ . Pour le module de cisaillement, on observe que les estimations diluée et auto-cohérente restent néanmoins très proches. On note que les estimations diluée et auto-cohérente donnent toujours des valeurs inférieures à celle de l'estimation de Mori-Tanaka, dont on a vu qu'elle coïncide formellement avec la borne supérieure de Hashin-Shtrikman.

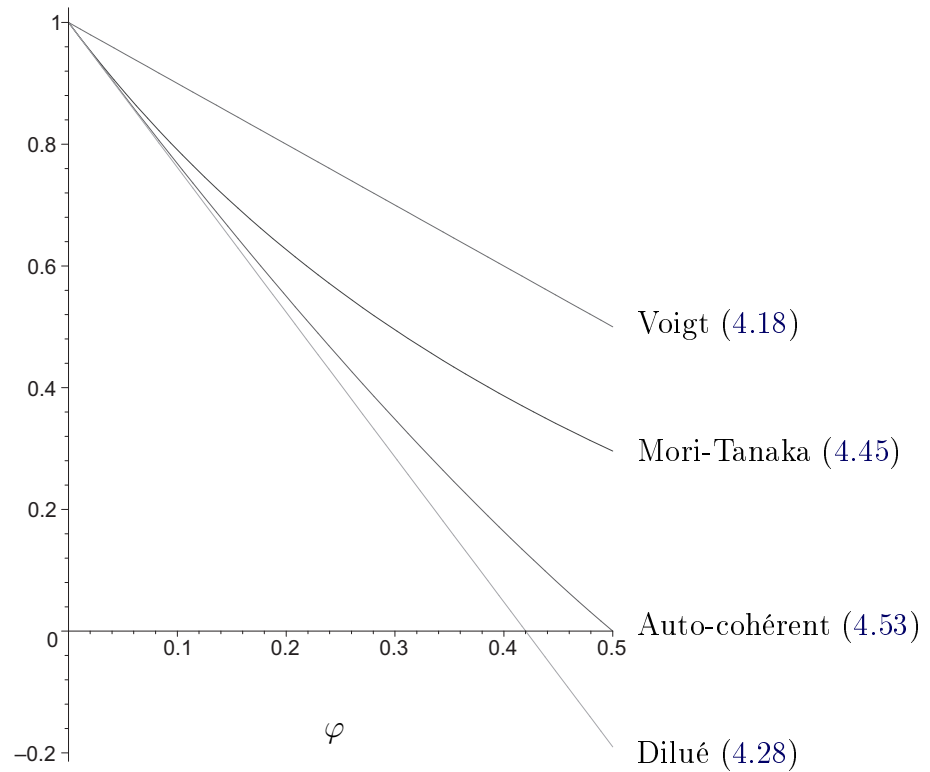


FIG. 4.1 – Estimations et bornes de  $k^{hom}/k^s$  pour un matériau élastique contenant des pores sphériques

#### 4.2.4 Approche de Ponte-Castaneda et Willis

Dédiée au cas d'un composite à matrice et inclusions, l'approche de Ponte-Castaneda et Willis [11] vise à incorporer d'une part l'information concernant la forme et l'orientation des inclusions élémentaires (par exemple, des pores), et

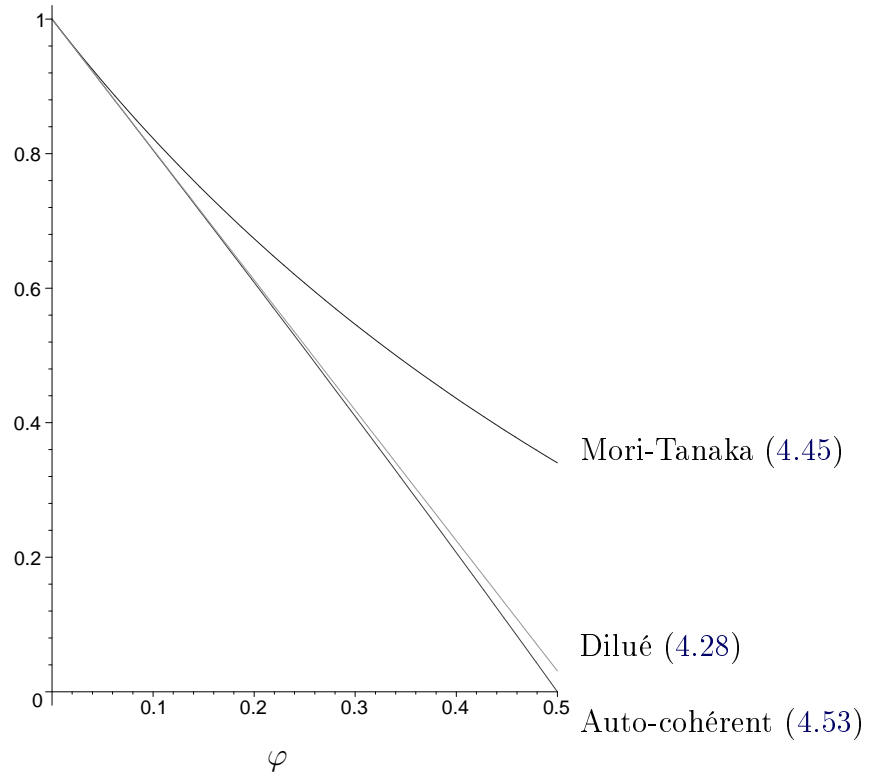


FIG. 4.2 – Estimations de  $\mu^{hom}/\mu^s$  pour un matériau élastique contenant des pores sphériques

d'autre part l'information sur la distribution spatiale de ces objets. A chaque information est attaché un tenseur de Hill (resp. d'Eshelby). Le premier est relatif à la forme (ellipsoïdale) et l'orientation de l'inclusion. Le second, noté  $\mathbb{P}_d$  est relatif à l'ellipsoïde qui décrit la symétrie de la distribution de la phase inclusionnaire considérée par rapport à une autre phase donnée. Il importe évidemment de bien distinguer l'hypothèse concernant la distribution des orientations et celle concernant la distribution spatiale d'une famille inclusionnaire donnée. Elles sont a priori déconnectées.

De type variationnelle, cette démarche délivre des bornes. Dans le cas d'inclusions sphériques distribuées de façon isotrope, on retrouve les bornes de Hashin-Shtrikman. Nous nous intéressons ici tout spécialement à l'application de ces résultats au cas de la microfissuration. Dans le cas d'une distribution spatiale isotrope des familles de microfissures, le tenseur  $\mathbb{P}_d$  est celui d'une sphère plongée dans un milieu d'élasticité  $\mathbb{C}^s$ . On peut alors utiliser les notations

de (4.27) :

$$\mathbb{P}_d = \frac{\alpha^s}{3k^s} \mathbb{J} + \frac{\beta^s}{2\mu^s} \mathbb{K} \quad \text{avec} \quad \alpha^s = \frac{1 + \nu^s}{3(1 - \nu^s)} \quad \text{et} \quad \beta^s = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu^s}{1 - \nu^s} \quad (4.55)$$

Plus généralement, on pourra considérer un tenseur  $\mathbb{P}_d$  unique pour toutes les familles de microfissures, caractérisé par un scalaire  $w_d$  décrivant la symétrie (ellipsoïdale) de la distribution spatiale<sup>1</sup>. Le cas  $w_d = 1$  correspond à l'isotropie de distribution spatiale.

L'expression du tenseur d'élasticité homogénéisé est alors :

$$\mathbb{C}^{PCW} = \mathbb{C}^s - (\mathbb{I} + \mathbb{C}^s : \sum_i \varphi^i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_i)^{-1} : \mathbb{P}_d) : \mathbb{C}^s : \sum_i \varphi^i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_i)^{-1} \quad (4.56)$$

où  $\mathbb{S}_i$  désigne le tenseur d'Eshelby de la microfissure  $i$  plongée dans un milieu d'élasticité  $\mathbb{C}^s$ .

#### 4.2.4.1 Distribution isotrope de l'orientation des microfissures

Dans le cas d'une répartition isotrope de l'orientation des fissures, on obtient :

$$\sum_i \varphi^i (\mathbb{I} - \mathbb{S}_i)^{-1} = \frac{4\pi}{3} \epsilon \langle \mathbb{T} \rangle \quad (4.57)$$

où  $\langle \mathbb{T} \rangle$  est donné par (4.41). Le tenseur d'élasticité effectif  $\mathbb{C}^{PCW}$  est isotrope. Il est obtenu en introduisant (4.41) et (4.55) dans (4.56). Les modules de compression et de cisaillement effectifs sont :

$$k^{PCW} = k^s \frac{1 + \gamma(\alpha^s - 1)\epsilon}{1 + \gamma\alpha^s\epsilon}; \quad \mu^{PCW} = \mu^s \frac{1 + \zeta(\beta^s - 1)\epsilon}{1 + \zeta\beta^s\epsilon} \quad (4.58)$$

Les figures 4.3 et 4.4 présentent la variation des modules élastiques normalisés en fonction du paramètre d'endommagement  $\epsilon$  pour une valeur donnée du coefficient de Poisson de la phase solide. Ces figures montrent que l'estimation de MT donne des valeurs supérieures tandis que les valeurs données par l'estimation DL sont toujours inférieures par rapport aux deux autres. Il n'est valable que pour  $\epsilon < 0,28$ . On peut observer ainsi que le module de compression volumique diminue plus vite que le module de cisaillement quand le niveau d'endommagement augmente.

---

<sup>1</sup>Plus précisément, il s'agit du rapport d'aspect de l'ellipsoïde décrivant la distribution, pour plus de détail, voir [11])



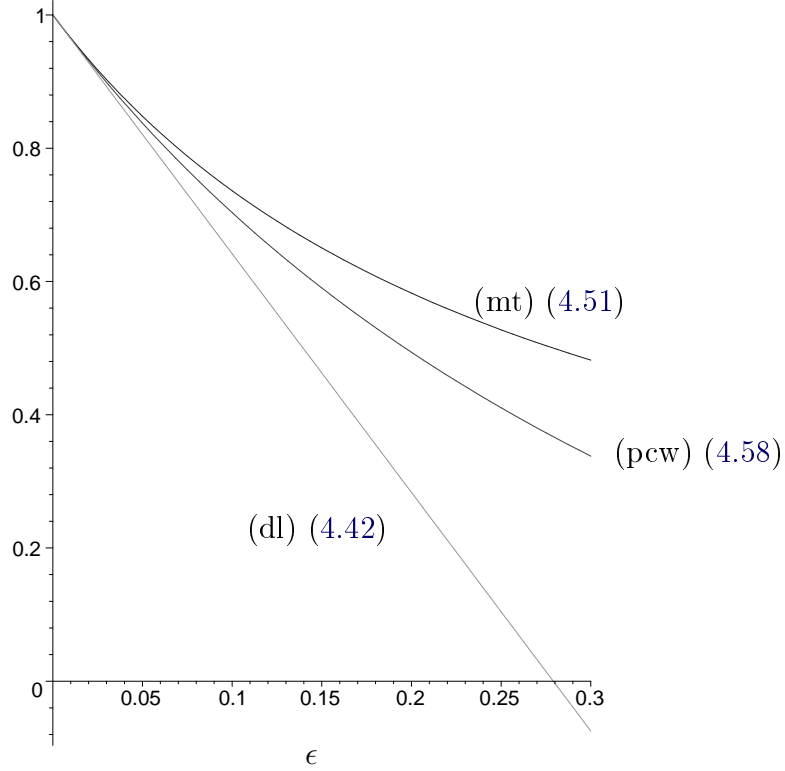


FIG. 4.3 – Estimations de  $k^{hom}/k^s$  le cas de distribution isotrope de microfissures

#### 4.2.4.2 Microfissures parallèles

On considère à présent une famille de fissures parallèles. Pour une distribution spatiale isotrope ( $w_d = 1$ ), le tenseur de distribution de (4.55) exprimé dans la base de Walpole s'écrit :

$$\mathbb{P} = \frac{1 + \nu}{15E^s(1 - \nu)} \left( (6 - 10\nu)\mathbb{E}_1 + (7 - 10\nu)\mathbb{E}_2 + (8 - 10\nu)(\mathbb{E}_3 + \mathbb{E}_4) - (\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) \right) \quad (4.59)$$

Les calculs symboliques dans Maple des produits tensoriels nous donnent les cinq paramètres élastiques endommagés de l'estimation de PCW donnée par (4.56) de ce cas isotrope transverse. En utilisant les équations dans (4.37), on obtient finalement les estimations de Ponte Castaneda et Willis du module d'Young longitudinale et le coefficient de Poisson correspondant par :

$$E_{11}^{PCW} = E^s \frac{128\epsilon - 45}{(240\nu^s - 112)\epsilon - 45} \quad ; \quad \nu_{12}^{PCW} = \nu^s \frac{128\epsilon - 45}{(240\nu^s - 112)\epsilon - 45} \quad (4.60)$$

On peut observer que :

$$\nu_{12}^{PCW} / E_{11}^{PCW} = \nu^s / E^s \quad (4.61)$$

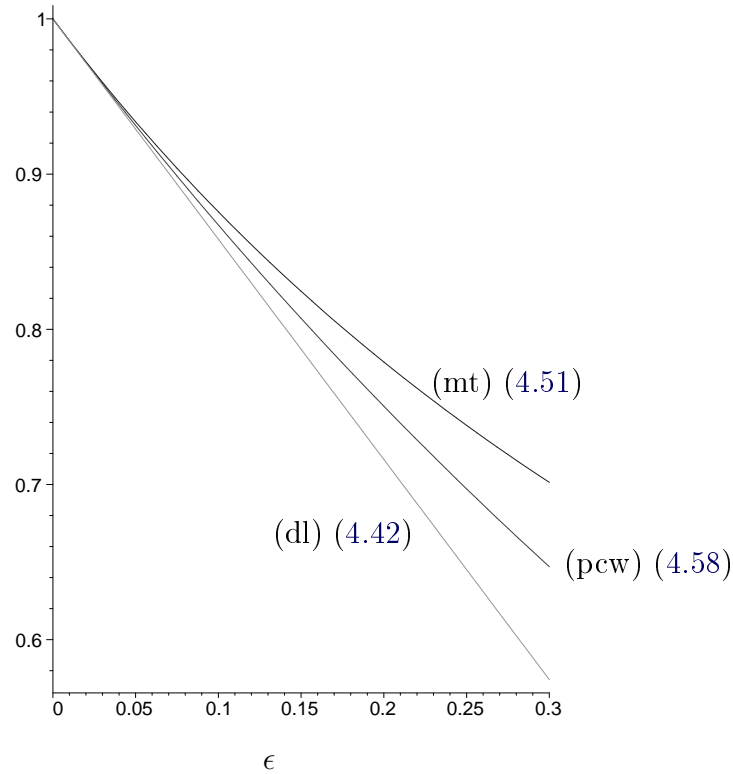


FIG. 4.4 – Estimations de  $\mu^{hom}/\mu^s$  le cas de distribution isotrope de microfissures

Pour une distribution quelconque des fissures parallèles, on peut ainsi déterminer les cinq paramètres élastiques effectives grâce à des expressions des scalaires du tenseur de distribution  $\mathbb{P}$  en fonction de  $w_d$  [11]. On fait des différents calculs avec différentes valeurs de  $w_d$  varie de 1 à 0,1. En comparant les trois estimations, on peut conclure que l'estimation de MT donne toujours des valeurs les plus grandes par rapport aux deux autres, par contre l'estimation DL donne toujours des valeurs les plus petites. Cette conclusion est illustrée par la comparaison des d'Young longitudinale normalisé  $E_{11}^{hom}/E^s$ . La comparaison est présentée par la figure 4.5. On remarque ainsi que l'estimation de PCW tend vers celle de MT lorsque  $w_d$  tend vers 0.

### 4.3 Conclusions

Ce chapitre a introduit quelques éléments de micromécanique pour les milieux élastiques hétérogènes en vue d'applications pour la modélisation de l'endommagement.

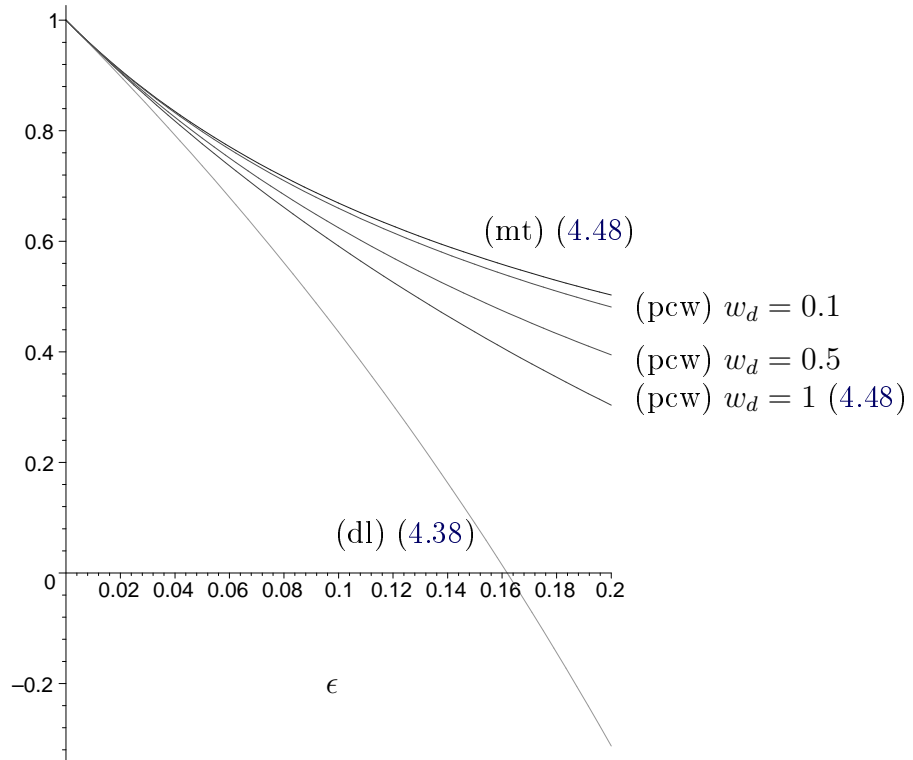


FIG. 4.5 – Estimations de  $E_{11}^{hom}/E^s$  le cas de distribution isotrope transverse de microfissures

On a rappelé tout d'abord les notions de base : le *v.e.r.*, les notions de contrainte et déformation macro- et microscopique en lien avec les conditions sur le bord du *v.e.r.*, les règles de moyenne, le lemme de Hill. On a donné l'expression générale du tenseur de rigidité homogénéisé à l'aide de la notion de tenseur de localisation de contrainte et de déformation. Après avoir évoqué la notion de bornes, on a présenté le problème d'Eshelby pour le cas de l'inclusion de forme ellipsoïdale, qui est à l'origine d'une classe très importante de schémas d'homogénéisation classiques. On a conclu par l'approche variationnelle de Ponte Castaneda et Willis qui offre la possibilité de bien distinguer les symétries de forme et distribution spatiale.

S'agissant de l'endommagement par microfissuration, l'approche micromécanique permet d'introduire naturellement le paramètre d'endommagement  $\epsilon$  qui est déterminé en fonction du rayon de la fissure et de la densité de fissuration.

Différentes estimations (resp. bornes supérieures) des caractéristiques ef-

---

fectives du matériau endommagé sont présentées. On s'est intéressé ici au cas d'une distribution isotrope des orientations et à celui de fissures parallèles en testant l'estimation diluée, celle de Mori-Tanaka, l'estimation autocohérente et l'approche variationnelle de Ponte Castaneda et Willis. On a noté que l'estimation de Mori-Tanaka apparaissait comme un cas limite de l'approche de Ponte Castaneda et Willis.



# Modèle de Burger pour le comportement effectif d'un solide viscoélastique microfissuré

---

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>88</b>
<b>5.2</b>	<b>Homogénéisation des matériaux viscoélastiques microfissurés</b> . . . . .	<b>88</b>
5.2.1	Retour sur le problème élastique linéaire . . . . .	89
5.2.2	Le cas viscoélastique . . . . .	91
<b>5.3</b>	<b>Distribution isotrope de l'orientation des fissures</b> . . . . .	<b>93</b>
5.3.1	Comportement effectif sous chargement sphérique . . . . .	94
5.3.2	Comportement effectif sous chargement déviatorique . . . . .	97
5.3.3	Validation du modèle viscoélastique effectif approché de Burger sur le problème de fluage . . . . .	101
<b>5.4</b>	<b>Distribution parallèle des fissures</b> . . . . .	<b>103</b>
5.4.1	Traction dans la direction de la normale $\mathbf{n}$ . . . . .	106
5.4.2	Traction transversale . . . . .	109
5.4.3	Cisaillement transversal . . . . .	109
5.4.4	Cisaillement en mode 2 . . . . .	110
5.4.5	Validation du modèle de Burger du cas isotrope transverse . . . . .	112
<b>5.5</b>	<b>Etudes sur la “process zone”</b> . . . . .	<b>114</b>
<b>5.6</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>118</b>

---

Le chapitre vise à la détermination du comportement effectif d'un matériau microfissuré viscoélastique linéaire. En raison de la non linéarité de la concentration de déformation dans les fissures, ce dernier ne peut pas être obtenu directement à partir d'une combinaison du principe de correspondance avec les schémas d'homogénéisation basés sur la solution du problème d'Eshelby.

L'approche alternative proposée est basée sur la relation linéaire entre la contrainte macroscopique et la discontinuité des déplacements locaux à travers de la fissure. On en déduit une approche analytique du comportement effectif dans le cadre du modèle de Burger.

On se limite au cas isotrope, à la fois en ce qui concerne la distribution et l'orientation, et au cas isotrope transverse correspondant à des microfissures parallèles.

## 5.1 Introduction

Comme cela a déjà été évoqué au chapitre 2, le comportement mécanique différé du béton est souvent approché par un modèle viscoélastique linéaire, la formulation la plus simple de celui-ci étant non vieillissante (*v.l.n.v.*). En pratique, on exploite le principe de correspondance qui transforme un problème *v.l.n.v.* en un problème élastique linéaire.

C'est l'idée du présent chapitre qui vise à évaluer l'influence des microfissures sur le comportement effectif d'un matériau *v.l.n.v.*. Comme on l'a vu dans le cas de l'élasticité au chapitre 4, la détermination du comportement effectif dans le cadre de l'homogénéisation revient à résoudre un problème aux limites défini sur un volume élémentaire représentatif (*v.e.r.*). Comme le montre de la littérature (voir par exemple [2]), l'homogénéisation des matériaux *v.l.n.v.* hétérogènes peut en général être obtenue par une combinaison du principe de correspondance et des schémas d'homogénéisation de type "Eshelby" pour les milieux aléatoires élastiques hétérogènes. Cependant, on montre ici que la non linéarité de la concentration de déformation dans les fissures interdit l'application directe de ce raisonnement. Sur la base d'une approche alternative, la contribution de la présente étude est de fournir une estimation quantitative du comportement effectif des milieux *v.l.n.v.* et d'en exprimer le résultat sous la forme d'un modèle viscoélastique de Burger.

## 5.2 Homogénéisation des matériaux viscoélastiques microfissurés

On examine l'endommagement induit par des microfissures dans un matériau *v.l.n.v.* du type décrit dans le chapitre 2. Le moyen le plus naturel pour aborder

## 5.2. Homogénéisation des matériaux viscoélastiques microfissurés 89

cette question est de prendre les résultats concernant le comportement effectif des matériaux élastiques linéaires microfissurés (voir par exemple [7], [28], [16]) et d'appliquer le principe de correspondance. Cependant, certaines précautions doivent être prises en compte dans la transposition des résultats mathématiques de l'élasticité à la viscoélasticité.

### 5.2.1 Retour sur le problème élastique linéaire

Il est bien connu que les schémas d'homogénéisation habituels en élasticité hétérogènes, tels que les schémas dilué, autocohérent ou de Mori-Tanaka, sont basés sur le concept de localisation des déformations (voir le chapitre 4 dont on rappelle très brièvement quelques résultats). En bref, étant donné un *v.e.r.*  $\Omega$  et la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$ , la relation entre  $\mathbf{E}$  et le déplacement aux limites de  $\Omega$  est linéaire :

$$(\forall \mathbf{z} \in \partial\Omega) : \quad \boldsymbol{\xi}(\mathbf{z}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{z} \quad (5.1)$$

De ce fait, dans le cadre d'un comportement linéaire, la déformation locale  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{z})$  est reliée linéairement à  $\mathbf{E}$  par un tenseur du quatrième ordre que l'on appelle "tenseur de localisation" :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{z}) = \mathbb{A}(\mathbf{z}) : \mathbf{E} \quad (5.2)$$

Le tenseur de raideur effectif  $\mathbb{C}^{hom}$  du composite est alors calculé par la moyenne  $\overline{\mathbb{C}(\mathbf{z}) : \mathbb{A}(\mathbf{z})}$ , où  $\mathbb{C}(\mathbf{z})$  désigne le tenseur de raideur local. Dans le cas d'un milieu poreux, avec une phase solide homogène dont le tenseur de rigidité est noté  $\mathbb{C}^s$ , on a vu que l'on obtient (voir par exemple [16]) :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^s : (\mathbb{I} - \varphi \overline{\mathbb{A}^p}) \quad (5.3)$$

où  $\varphi$  est le facteur volumique,  $\mathbb{I}$  est le tenseur unitaire d'ordre 4 et  $\overline{\mathbb{A}^p}$  est la moyenne de  $\mathbb{A}(\mathbf{z})$  dans l'espace poreux  $\Omega^p$ . Le principe de l'estimation de  $\overline{\mathbb{A}^p}$  provient de la solution du problème d'Eshelby. Celui-ci considère une inclusion ellipsoïdale unique homogène  $I$  plongée dans un milieu infini également homogène composé d'un matériau élastique différent. Etant donnée une déformation macroscopique  $\mathbf{E}$ , la condition linéaire de déplacement asymptotique prend la forme :

$$|\mathbf{z}| \rightarrow \infty : \quad \boldsymbol{\xi}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{z} \quad (5.4)$$

Eshelby a montré que la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}^I$  dans l'inclusion est uniforme (voir (4.25)). Par exemple, dans le cas d'une cavité au sein d'un milieu solide infini de



tenseur de rigidité  $\mathbb{C}^s$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^I$  est donné par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = (\mathbb{I} - \mathbb{S})^{-1} : \mathbf{E} \quad (5.5)$$

où  $\mathbb{S}$  est le tenseur d'Eshelby de la cavité qui dépend de la géométrie de la cavité et du tenseur d'élasticité du matériau sain  $\mathbb{C}^s$  ([21]). Par la suite (voir les équations (5.2) et (5.3)), le schéma dilué est simplement obtenu en prenant  $\overline{\mathbb{A}}_{dil}^p = (\mathbb{I} - \mathbb{S})^{-1}$  comme une estimation de  $\overline{\mathbb{A}}^p$ . Le schéma de Mori-Tanaka peut être obtenu en considérant l'interaction mécanique entre les pores élémentaires  $\overline{\mathbb{A}}_{MT}^p = (\mathbb{I} - \mathbb{S})^{-1} : ((1 - \varphi)\mathbb{I} + \varphi(\mathbb{I} - \mathbb{S})^{-1})^{-1}$ .

La fissure 3D est habituellement modélisée par un sphéroïde caractérisé par son rapport d'aspect  $X \ll 1$ . Dans ce cas, le tenseur d'Eshelby  $\mathbb{S}$  est une fonction de  $X$ . Soit  $n$  est l'indice associé à la direction normale de la fissure. Le problème mathématique rencontré spécifiquement dans le cas de fissures réside dans le fait que les coefficients d'indices  $nn\alpha\beta$  et  $n\alpha n\alpha$  du tenseur  $(\mathbb{I} - \mathbb{S})^{-1}$  sont de l'ordre de  $1/X$  (voir 4.30 et 4.31). Cela implique que le rapport entre la déformation normale  $\varepsilon_{nn}^I$  de l'inclusion et la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  est de l'ordre de  $1/X$  (voir 5.5). Ceci montre que la variation de  $X$  est non négligeable, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de linéarité sur laquelle la notion de tenseur de concentration de déformation est fondée. Cette question a été discutée en détails dans [14].

Afin de surmonter cette difficulté, l'idée consiste à considérer la formulation différentielle du problème dans laquelle le tenseur de concentration de la déformation doit être remplacé par un tenseur de concentration du taux de déformation de telle sorte que (5.2) devient :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{z}) = \mathbb{A}(\mathbf{z}) : \dot{\mathbf{E}} \quad (5.6)$$

De même, la formulation différentielle de la solution du problème d'Eshelby pour une cavité sphéroïdale devient :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^I = (\mathbb{I} - \mathbb{S}(X))^{-1} : \dot{\mathbf{E}} \quad (5.7)$$

où  $X$  se réfère maintenant à rapport d'aspect dans la *configuration actuelle* de la cavité sphéroïdale. Finalement, l'usage de  $\overline{\mathbb{A}}_{dil}^p$  ou  $\overline{\mathbb{A}}_{MT}^p$  dans l'équation (5.3) conduit à une estimation de la *raideur tangente* effective. Pour des raisons mathématiques liées au fait que la porosité de la fissure  $\varphi$  est proportionnelle à  $X$  (voir par exemple [14]), il s'avère que cette *raideur tangente* effective est en fait indépendante de  $X$ . C'est ce résultat qui permet de conclure que le comportement

## 5.2. Homogénéisation des matériaux viscoélastiques microfissurés 91

effectif est bien élastique *linéaire*. Cette remarque justifie les développements du chapitre 4. D'un point de vue théorique, le raisonnement "en vitesses" basé sur le taux de déformation est indispensable afin d'éviter la difficulté associée à l'existence d'une déformation finie dans la direction normale aux fissures. Mais d'un point de vue pratique, le "passage en force" effectué implicitement au chapitre 4 ne porte pas à conséquence. La situation est nettement plus complexe en viscoélasticité linéaire dans la perspective d'appliquer le principe de correspondance, comme on va le voir maintenant.

### 5.2.2 Le cas viscoélastique

La transformation de Laplace-Carson étant un opérateur linéaire, il ne peut être appliqué utilement qu'à un ensemble d'équations linéaires. Or, dans le cas des microfissures, la section précédente a souligné l'existence d'une non-linéarité à l'échelle locale dans la relation entre la déformation de la fissure et de la déformation macroscopique. Cela implique que l'homogénéisation d'un milieu viscoélastique fissuré n'est pas aussi simple que celle du cas standard, à cause de la spécificité de l'hétérogénéité de type "fissure".

Plus précisément, l'extension standard pour des matériaux *v.l.n.v.* des schémas d'homogénéisation en élasticité linéaire est basée sur la transformation de Laplace-Carson. Elle conduit à remplacer la relation d'homogénéisation élastique  $\mathbb{C}^{hom} = \overline{\mathbb{C} : \mathbb{A}}$  par

$$\mathbb{C}^{hom*} = \overline{\mathbb{C}^* : \mathbb{A}_v} \quad (5.8)$$

Dans (5.8), le tenseur de concentration de la déformation  $\mathbb{A}_v$  doit maintenant être estimé pour un *v.e.r.* fictif ayant la même géométrie que le *v.e.r.* réel et une rigidité élastique fictive  $\mathbb{C}^*(p)$ . Le problème réside dans le changement de configuration du *v.e.r.* au cours du chargement, conséquence des grandes déformations de la fissure. D'autre part, le passage à une localisation "en vitesses" du type (5.7) ne permet pas d'éviter l'obstacle, du fait que cette relation n'est linéaire que dans la seule configuration actuelle. Le but de cette section est de présenter une approche alternative aux schémas de type Eshelby, permettant de surmonter la difficulté qui vient d'être identifiée.

Nous considérons un *v.e.r.*  $\Omega$  constitué d'un matériau *v.l.n.v.* du type décrit au chapitre 2 et comportant un réseau de fissures en forme de disque. Contrairement au modèle de fissure ellipsoïdale considéré dans les approches de type d'Eshelby qui par nature est tridimensionnel, la fissure est mathématiquement abordée à présent comme un disque plan dans le cadre d'un modèle

géométrique de nature bidimensionnelle (fissure de Griffith). En particulier, la notion du rapport d'aspect est étrangère à cette nouvelle approche. Sur l'intervalle de temps du chargement, on suppose que le déplacement  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{z}, t)$  est prescrit sur le bord  $\partial\Omega$ . Celui-ci est relié à l'histoire de la déformation macroscopique  $\mathbf{E}(t)$  par  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{z}, t) = \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{z}$ . En conséquence, la déformation macroscopique est liée au champ de déformations microscopiques dans la phase solide  $\Omega^s$  par une règle de moyenne qui doit être corrigée par un terme tenant compte de la déformation (finie) des fissures :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{|\Omega|} \left( \int_{\Omega^s} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \sum_i \int_{C_i} [\boldsymbol{\xi}]_i \otimes \mathbf{n}_i dS \right) \quad (5.9)$$

où  $C_i$  dénote la fissure  $n^oi$ ,  $\mathbf{n}_i$  est le vecteur unitaire normal au plan de la fissure et  $[\boldsymbol{\xi}]_i$  la discontinuité de déplacement entre les deux lèvres de la fissure comptée dans le sens de  $\mathbf{n}_i$ .

Le tenseur de contrainte macroscopique  $\boldsymbol{\Sigma}(t)$  et le champ des contraintes microscopiques  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z}, t)$  sont liés par la règle de moyenne usuelle :  $\boldsymbol{\Sigma} = \overline{\boldsymbol{\sigma}}$ . Dans le cas des fissures vides, elle prend la forme :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^s} \boldsymbol{\sigma} dV \quad (5.10)$$

L'idée consiste à anticiper que le champ de déformations microscopiques dans le solide et la discontinuité de déplacement  $[\boldsymbol{\xi}]_i$  dépendent linéairement de la déformation macroscopique, ce qui devra être confirmé *a posteriori*. Ceci permet d'appliquer la transformation de Laplace-Carson à la relation de moyenne (5.9), ce qui donne :

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^s} \boldsymbol{\varepsilon}^* dV + \frac{1}{|\Omega|} \left( \sum_i \int_{C_i} [\boldsymbol{\xi}]_i^* \otimes \mathbf{n}_i dS \right) \quad (5.11)$$

Nous cherchons maintenant la relation macroscopique entre la déformation  $\mathbf{E}^*$  et la contrainte  $\boldsymbol{\Sigma}^*$ . Pour commencer, on combine la règle de la contrainte moyenne (5.10) avec l'équation d'état du solide de forme  $\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbb{C}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^*$ . La règle de moyenne (5.11) devient :

$$\mathbf{E}^* = \mathbb{C}^{*-1} : \boldsymbol{\Sigma}^* + \frac{1}{|\Omega|} \left( \sum_i \int_{C_i} [\boldsymbol{\xi}]_i^* \otimes \mathbf{n}_i dS \right) \quad (5.12)$$

L'équation ci-dessus suggère de rechercher une estimation de  $[\boldsymbol{\xi}]_i^*$  en fonction de  $\boldsymbol{\Sigma}^*$ . Pour ce faire, nous utilisons un schéma dilué en contrainte (voir par exemple [15]). Cela revient à considérer une seule fissure dans un milieu fictif élastique

infini de rigidité  $\mathbb{C}^*(p)$  avec un état de contrainte asymptotique, c'est-à-dire à l'infini) qui n'est autre que  $\Sigma^*$ . La discontinuité de déplacement  $[\xi]_i^*$  est alors estimée par la solution de ce problème classique de la mécanique linéaire de la rupture.

Plus précisément, considérons le système de coordonnées cylindriques définis à partir de l'axe de symétrie de la fissure. Le rayon de la fissure est noté par  $\ell$ . Si la contrainte à l'infini est isotrope, par exemple  $\Sigma^* = \Sigma^* \mathbf{1}$ , la discontinuité est normale au plan de fissure (mode I) et s'écrit :

$$[\xi_n]^* = \frac{4(1-\nu^*)}{\pi} \frac{\Sigma^*}{\mu^*} \sqrt{\ell^2 - \rho^2} \quad (5.13)$$

où  $\nu^*$  et  $\mu^*$  sont respectivement donnés par 2.17 et 2.16.  $\rho$  est la distance entre le point considéré et le centre de la fissure. Pour des contraintes de cisaillement à l'infini, par exemple  $\Sigma^* = \Sigma^* \mathbf{n} \otimes \mathbf{t}$ , avec  $\mathbf{t}$  parallèle au plan des fissures, la discontinuité de déplacement est parallèle à la fissure (mode II) et s'écrit :

$$[\xi_t]^* = \frac{4}{\pi} \frac{\Sigma^*}{\mu^*} \frac{1-\nu^*}{2-\nu^*} \sqrt{\ell^2 - \rho^2} \quad (5.14)$$

Les équations (5.13) et (5.14) donnent les relations linéaires entre la discontinuité de déplacement élémentaire et la contrainte macroscopique. L'utilisation de ces dernières dans (5.12) donne clairement une relation linéaire entre  $\Sigma^*$  et  $\mathbf{E}^*$ , qui peut être mise sous la forme  $\Sigma^* = \mathbb{C}^{hom*} : \mathbf{E}^*$ . Cette équation caractérise le comportement effectif dans l'espace de Laplace-Carson. Pour mettre en œuvre cette démarche, il est nécessaire de préciser la distribution des orientations des fissures. Dans la suite, la méthode est illustrée sur les cas d'une distribution isotrope puis parallèle des orientations des fissures.

### 5.3 Distribution isotrope de l'orientation des fissures

Dans cette section, on considère une distribution isotrope de l'orientation des fissures (voir 5.1). Le tenseur de *raideur effectif* apparent dans l'espace de Laplace-Carson défini par  $\mathbb{C}^{hom*}$  est donc isotrope qui s'exprime dans la base ( $\mathbb{J}$ ,  $\mathbb{K}$ ) par :

$$\mathbb{C}^{hom*} = 3k^{hom*} \mathbb{J} + 2\mu^{hom*} \mathbb{K} \quad (5.15)$$

où  $\mathbb{J}$  et  $\mathbb{K}$  sont comme précédemment les projecteurs sphérique et déviatorique d'ordre 4. Pour déterminer  $k^{hom*}$  et  $\mu^{hom*}$ , on considère successivement des

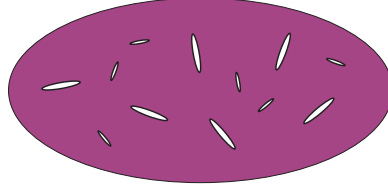


FIG. 5.1 – Distribution isotrope de l'orientation des fissures

chargements macroscopique sphérique et déviatorique.

### 5.3.1 Comportement effectif sous chargement sphérique

On impose une contrainte macroscopique sphérique  $\Sigma^* \mathbf{1}$  de sorte que la fissure s'ouvre suivant le mode I. La discontinuité de déplacement est donc  $[\boldsymbol{\xi}]^* = [\xi_n]^* \mathbf{n}$  où  $[\xi_n]^*$  est donnée par (5.13). La contribution élémentaire d'une fissure à la déformation macroscopique est calculée par :

$$\int_C [\boldsymbol{\xi}]^* \overset{s}{\otimes} \mathbf{n} dS = \frac{4\Sigma^*(1-\nu^*)}{\pi\mu^*} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\ell \sqrt{\ell^2 - \rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \frac{8\ell^3}{3} \frac{\Sigma^*(1-\nu^*)}{\mu^*} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (5.16)$$

On suppose que tous les fissures ont le même rayon  $\ell$ . L'intégration sur tous les orientations des fissures donne :

$$\frac{1}{|\Omega|} \left( \sum_i \int_{C_i} [\boldsymbol{\xi}]_i^* \overset{s}{\otimes} \mathbf{n}_i dS \right) = \frac{8N\ell^3}{3} \frac{\Sigma^*(1-\nu^*)}{\mu^*} \int_{|\mathbf{n}|=1} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \frac{dS}{4\pi} = \frac{8N\ell^3}{9} \frac{\Sigma^*(1-\nu^*)}{\mu^*} \mathbf{1} \quad (5.17)$$

où l'on rappelle que  $N$  est la densité volumique de fissures, c'est-à-dire le nombre de fissures dans un volume unité. En introduisant (5.17) dans (5.12) on obtient :

$$\mathbf{E}^* = \mathbb{C}^{*-1} : (\Sigma^* \mathbf{1}) + \frac{8\epsilon}{9} \frac{\Sigma^*(1-\nu^*)}{\mu^*} \mathbf{1} \quad (5.18)$$

où on rappelle que  $\epsilon = N\ell^3$  est le paramètre d'endommagement [7], qui a déjà été introduit en élasticité au chapitre 4. Dans cette équation, la "complaisance" s'écrit :  $\mathbb{C}^{*-1} = \frac{1}{3k^*} \mathbb{J} + \frac{1}{2\mu^*} \mathbb{K}$  où  $k^*$  et  $\mu^*$  sont donnés par l'équation (2.16). Ceci conduit à la relation scalaire :

$$\text{tr} \mathbf{E}^* = \left( \frac{1}{k^*} + \frac{8\epsilon}{3} \frac{(1-\nu^*)}{\mu^*} \right) \Sigma^* \quad (5.19)$$

D'autre par, la loi de comportement homogénéisée s'écrit  $\mathbf{E}^* = \mathbb{C}^{hom*} : (\Sigma^* \mathbf{1})$ , ce qui se simplifie ici sous la forme  $\text{tr} \mathbf{E}^* = \Sigma^* / k^{hom*}$ . En comparant ce résultat

avec (5.19), on parvient à une estimation du “module de compression volumique”  $k^{hom*}$  :

$$\frac{1}{k^{hom*}} = \frac{1}{k^*} + \frac{8\epsilon}{3} \frac{(1 - \nu^*)}{\mu^*} = \frac{1 + \epsilon Q^*}{k^*} \quad \text{avec} \quad Q^* = \frac{16}{9} \frac{1 - \nu^{*2}}{1 - 2\nu^*} \quad (5.20)$$

Pour la mise en pratique, on cherche à approcher le comportement *v.l.n.v.* effectif du matériau étudié par un modèle de Burger (voir la figure 5.2). Cela revient

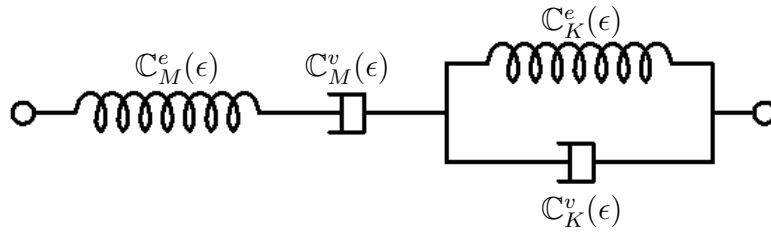


FIG. 5.2 – Modèle rhéologique effectif de Burger pour le matériau endommagé

à rechercher l'ensemble des paramètres de ce dernier sous la forme de fonctions de  $\epsilon$  :  $k_M(\epsilon)$ ,  $k_K(\epsilon)$ ,  $\eta_M^s(\epsilon)$  et  $\eta_K^s(\epsilon)$ . Compte tenu de (2.16), si le matériau homogénéisé était strictement du type “Burger”, il devrait satisfaire la condition suivante :

$$\frac{1}{k^{hom*}} = \frac{1}{k_M(\epsilon)} + \frac{1}{p\eta_M^s(\epsilon)/3} + \frac{1}{k_K(\epsilon) + p\eta_K^s(\epsilon)/3} \quad (5.21)$$

Si l'on reprend l'expression (5.20) de  $k^{hom*}$  et celle de  $\nu^*$  (voir (2.17)), il est facile de voir que (5.21) ne peut pas être satisfaite de façon rigoureuse. Notre but est plutôt d'identifier la meilleure approximation du comportement effectif dans la classe du modèle de Burger. L'idée est de satisfaire le développement en série de (5.21) au second ordre près au voisinage de  $p = 0$  et  $p = \infty$ . Gardant en mémoire que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \lim_{p \rightarrow 0} a^*(p) \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow 0} a(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} a^*(p) \quad (5.22)$$

le modèle de Burger recherché devrait être une excellente approche au moins à court terme et à long terme. Pour la suite, nous utilisons le développement en série de  $Q^*$  dans le voisinage de  $p = 0$  :

$$Q^* = Q_o^o + Q_1^o p + O(p^2) \quad (5.23)$$

avec

$$Q_o^o = \frac{16}{9} \frac{\eta_M^s(\eta_M^s + 2\eta_M^d)}{\eta_M^d(2\eta_M^s + \eta_M^d)} \quad (5.24)$$

et

$$Q_1^o = -\frac{32\eta_M^s}{9\eta_M^d} \frac{\eta_M^s{}^2 + \eta_M^d\eta_M^s + \eta_M^d{}^2}{(2\eta_M^s + \eta_M^d)^2} \left( \frac{\eta_M^s}{3} \left( \frac{1}{k_M} + \frac{1}{k_K} \right) - \frac{\eta_M^d}{2} \left( \frac{1}{\mu_M} + \frac{1}{\mu_K} \right) \right) \quad (5.25)$$

De la même façon, dans le voisinage de  $p = \infty$ , on a :

$$Q^* = Q_o^\infty + \frac{Q_{-1}^\infty}{p} + O(1/p^2) \quad (5.26)$$

avec

$$Q_o^\infty = \frac{4}{3} \frac{k_M(3k_M + 4\mu_M)}{\mu_M(3k_M + \mu_M)} \quad (5.27)$$

et

$$Q_{-1}^\infty = -\frac{4k_M}{3\mu_M} \frac{9k_M^2 + 6\mu_M k_M + 4\mu_M^2}{(3k_M + \mu_M)^2} \left( 3k_M \left( \frac{1}{\eta_M^s} + \frac{1}{\eta_K^s} \right) - 2\mu_M \left( \frac{1}{\eta_M^d} + \frac{1}{\eta_K^d} \right) \right) \quad (5.28)$$

Par ailleurs, le développement en séries de  $1/k^*$  correspondant au modèle Burger (voir (2.16)) s'écrit :

$$p = 0 : \quad \frac{1}{k^*} = \frac{3}{\eta_M^s} \frac{1}{p} + \left( \frac{1}{k_M} + \frac{1}{k_K} \right) + O(p) \quad (5.29)$$

et

$$p = \infty : \quad \frac{1}{k^*} = \frac{1}{k_M} + \frac{1}{p} \left( \frac{3}{\eta_M^s} + \frac{3}{\eta_K^s} \right) + O(1/p^2) \quad (5.30)$$

En combinant (5.29), (5.30) et (5.20) ensemble avec (5.23) et (5.26), les développements en série de  $1/k^{hom*}$  au voisinage de  $p = 0$  et  $p = \infty$  sont respectivement :

$$p = 0 : \quad \frac{1}{k^{hom*}} = 3 \frac{1 + \epsilon Q_o^o}{\eta_M^s} \frac{1}{p} + \left( 3 \frac{\epsilon Q_1^o}{\eta_M^s} + (1 + \epsilon Q_o^o) \left( \frac{1}{k_M} + \frac{1}{k_K} \right) \right) + O(p) \quad (5.31)$$

et

$$p = \infty : \quad \frac{1}{k^{hom*}} = \frac{1 + \epsilon Q_o^\infty}{k_M} + \frac{1}{p} \left( 3(1 + \epsilon Q_o^\infty) \left( \frac{1}{\eta_M^s} + \frac{1}{\eta_K^s} \right) + \frac{\epsilon Q_{-1}^\infty}{k_M} \right) + O(1/p^2) \quad (5.32)$$

D'autre part, le développement en série de  $1/k^{hom*}$  correspondant au modèle de Burger approché s'écrit (voir (5.21)) :

$$p = 0 : \quad \frac{1}{k^{hom*}} = \frac{3}{\eta_M^s(\epsilon)} \frac{1}{p} + \left( \frac{1}{k_M(\epsilon)} + \frac{1}{k_K(\epsilon)} \right) + O(p) \quad (5.33)$$

et

$$p = \infty : \quad \frac{1}{k^{hom*}} = \frac{1}{k_M(\epsilon)} + \frac{1}{p} \left( \frac{3}{\eta_M^s(\epsilon)} + \frac{3}{\eta_K^s(\epsilon)} \right) + O(1/p^2) \quad (5.34)$$

Les raideurs et les paramètres de viscosité du matériau endommagé, c'est-à-dire  $k_M(\epsilon)$ ,  $k_K(\epsilon)$ ,  $\eta_M^s(\epsilon)$  et  $\eta_K^s(\epsilon)$ , doivent assurer la compatibilité entre (5.31) et (5.33), ainsi qu'entre (5.32) et (5.34). On obtient :

$$\frac{1}{k_M(\epsilon)} = \frac{1 + Q_M^e \epsilon}{k_M} \quad ; \quad \frac{1}{k_K(\epsilon)} = \frac{1 + Q_K^e \epsilon}{k_K} \quad (5.35)$$

$$\frac{1}{\eta_M^s(\epsilon)} = \frac{1 + Q_M^v \epsilon}{\eta_M^s} \quad ; \quad \frac{1}{\eta_K^s(\epsilon)} = \frac{1 + Q_K^v \epsilon}{\eta_K^s}$$

où les constantes  $Q_M^e$ ,  $Q_K^e$ ,  $Q_M^v$  et  $Q_K^v$  sont déterminés de la façon suivante en fonction des caractéristiques viscoélastiques du matériau sain :

$$Q_M^e = Q_o^\infty \quad ; \quad Q_M^v = Q_o^o$$

$$Q_K^e = Q_o^o + \frac{3k_K}{\eta_M^s} Q_o^o - \frac{k_K}{k_M} (Q_M^e - Q_o^o) \quad ; \quad Q_K^v = Q_o^\infty + \frac{\eta_K^s}{3k_M} Q_o^\infty - \frac{\eta_K^s}{\eta_M^s} (Q_M^v - Q_o^\infty) \quad (5.36)$$

### 5.3.2 Comportement effectif sous chargement déviatorique

Dans le système de coordonnées cartésiennes orthonormées de base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , on considère un chargement déviatorique où la contrainte macroscopique s'écrit :

$$\boldsymbol{\Sigma}^* = \Sigma^* (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \quad (5.37)$$

La contribution élémentaire d'une fissure à la déformation macroscopique dans l'équation (5.12) est déterminée grâce aux équations (5.13) et (5.14), en fonction de son orientation. Soit  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal au plan de la fissure qui coïncide avec le vecteur unitaire radial  $\mathbf{e}_r$  (coordonnées sphériques : voir la figure 5.3). Les formules de changement de base sont aisément déduites des relations :

$$\mathbf{e}_1 = \cos \varphi \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \varphi \cos \theta \mathbf{e}_\theta - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi \quad ; \quad \mathbf{e}_3 = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (5.38)$$

En introduisant (5.38) dans (5.37) on obtient la forme de  $\boldsymbol{\Sigma}^*$  dans le repère local  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ . Les composantes de traction (mode I)  $\Sigma_{rr}^*$  et de cisaillement (mode II)  $\Sigma_{\varphi r}^*$  et  $\Sigma_{\theta r}^*$  s'écrivent :

$$\Sigma_{rr}^* = X_r \Sigma^* \quad ; \quad \Sigma_{\varphi r}^* = X_\varphi \Sigma^* \quad ; \quad \Sigma_{\theta r}^* = X_\theta \Sigma^* \quad (5.39)$$



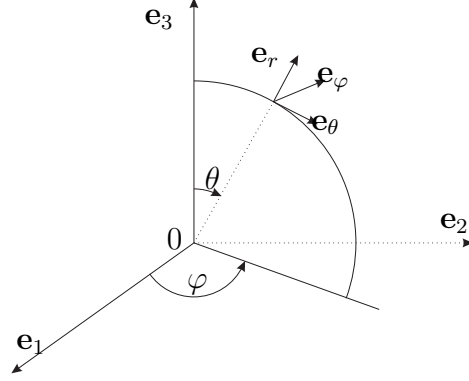


FIG. 5.3 – Coordonnées sphériques

avec

$$X_r = \cos^2 \varphi \sin^2 \theta - \cos^2 \theta; X_\theta = \sin \theta \cos \theta (1 + \cos^2 \varphi); X_\varphi = -\sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \quad (5.40)$$

En introduisant (5.39) dans (5.13) et (5.14) on obtient les trois composantes du vecteur de discontinuité de déplacement entre les deux lèvres de la fissures :

$$[\xi_r]^* = \frac{4(1 - \nu^*)}{\pi} \frac{X_r \Sigma^*}{\mu^*} \sqrt{\ell^2 - \rho^2} \quad (5.41)$$

$$[\xi_\varphi]^* = \frac{8}{\pi} \frac{X_\varphi \Sigma^*}{\mu^*} \frac{1 - \nu^*}{2 - \nu^*} \sqrt{\ell^2 - \rho^2} \quad (5.42)$$

$$[\xi_\theta]^* = \frac{8}{\pi} \frac{X_\theta \Sigma^*}{\mu^*} \frac{1 - \nu^*}{2 - \nu^*} \sqrt{\ell^2 - \rho^2} \quad (5.43)$$

La discontinuité de déplacement total à la traversée de la fissure s'écrit vectoriellement :

$$[\xi]^* = \frac{4\Sigma^*(1 - \nu^*)}{\pi\mu^*} \left( X_r \mathbf{e}_r + \frac{2}{2 - \nu^*} (X_\theta \mathbf{e}_\theta + X_\varphi \mathbf{e}_\varphi) \right) \sqrt{\ell^2 - \rho^2} \quad (5.44)$$

La contribution élémentaire d'une fissure à la déformation macroscopique est donc déterminée par :

$$\int_C [\xi]^* \overset{s}{\otimes} \mathbf{e}_r dS = \frac{4\Sigma^*(1 - \nu^*)}{\pi\mu^*} \mathbf{X} \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \sqrt{\ell^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{8\ell^3 \Sigma^*(1 - \nu^*)}{3\mu^*} \mathbf{X} \quad (5.45)$$

où l'on a introduit pour simplifier le tenseur  $\mathbf{X}$  d'ordre 2 dans le repère local, qui est une fonction de  $\varphi$  et de  $\theta$  :

$$\mathbf{X} = X_r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{2}{2 - \nu^*} (X_\theta \mathbf{e}_\theta \overset{s}{\otimes} \mathbf{e}_r + X_\varphi \mathbf{e}_\varphi \overset{s}{\otimes} \mathbf{e}_r) \quad (5.46)$$

avec les coefficients  $X_r$ ,  $X_\varphi$  et  $X_\theta$  donnés par (5.40). Pour exprimer  $\mathbf{X}$  dans le repère global, on exprime les vecteurs unitaires locaux par ceux de la base fixe :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \varphi \sin \theta \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \varphi \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_2 - \sin \theta \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (5.47)$$

On suppose comme précédemment que toutes les fissures ont le même rayon  $\ell$ . La contribution de l'ensemble des fissures à la déformation macroscopique est déterminée en intégrant la contribution d'une fissure élémentaire donnée par l'équation (5.45) sur toutes les orientations de la sphère unité :

$$\frac{1}{|\Omega|} \left( \sum_i \int_{C_i} [\boldsymbol{\xi}]_i^* \otimes \mathbf{n}_i dS \right) = \frac{8Na^3 \Sigma^* (1 - \nu^*)}{3\mu^*} \int_{|\mathbf{n}|=1} \mathbf{X} \frac{dS}{4\pi} \quad (5.48)$$

où  $dS = \sin(\theta) d\theta d\varphi$  désigne l'élément d'aire de la surface de la sphère unité. En définitive, la contribution de l'ensemble des fissures donnée par (5.48) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Omega|} \left( \sum_i \int_{C_i} [\boldsymbol{\xi}]_i^* \otimes \mathbf{n}_i dS \right) &= \frac{8N\ell^3 \Sigma^* (1 - \nu^*)}{3\mu^*} \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi} \mathbf{X}(\varphi, \theta) d\varphi \right) \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{\epsilon M^*}{2\mu^*} \Sigma^* \end{aligned} \quad (5.49)$$

où apparaît comme précédemment le paramètre d'endommagement  $\epsilon = N\ell^3$ . Dans cette formule, on a posé :

$$M^* = \frac{32}{45} \frac{(1 - \nu^*)(5 - \nu^*)}{2 - \nu^*} \quad (5.50)$$

Par ailleurs, la contribution de la phase solide à la déformation macroscopique s'écrit :

$$\mathbb{C}^{*-1} : \Sigma^* = \Sigma^* \left( \frac{1}{3k^*} \mathbb{J} + \frac{1}{2\mu^*} \mathbb{K} \right) : (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) = \frac{1}{2\mu^*} \Sigma^* \quad (5.51)$$

En introduisant (5.49) et (5.51) dans (5.12), on obtient l'équation d'état macroscopique sous chargement déviatorique :

$$\mathbf{E}^* = \frac{1 + \epsilon M^*}{2\mu^*} \Sigma^* \quad (5.52)$$

Finalement, on rapproche le résultat exprimé par (5.52) avec la forme générale de l'équation d'état macroscopique qui, pour ce cas de chargement, prend la

forme  $\mathbf{E}^* = \Sigma^*/2\mu^{hom*}$ . On obtient ainsi le “module de cisaillement” effectif par identification :

$$\frac{1}{\mu^{hom*}} = \frac{1 + \epsilon M^*}{\mu^*} \quad (5.53)$$

Comme dans le cas du chargement isotrope étudié précédemment, on approche le comportement déviatorique effectif du matériau étudié par le modèle viscoélastique de Burger. Ce dernier est caractérisé par des paramètres viscoélastiques effectifs déviatoriques  $\mu_M(\epsilon)$ ,  $\mu_K(\epsilon)$ ,  $\eta_M^d(\epsilon)$  et  $\eta_K^d(\epsilon)$  définis par la condition suivante (voir (2.16)) :

$$\frac{1}{\mu^{hom*}(p)} = \frac{1}{\mu_M(\epsilon)} + \frac{1}{p\eta_M^d(\epsilon)/2} + \frac{1}{\mu_K(\epsilon) + p\eta_K^d(\epsilon)/2} \quad (5.54)$$

Cette équation doit être satisfaite, au second ordre en  $p$  (resp.  $1/p$ ) près au voisinage de  $p = 0$  et  $p = \infty$ . Le développement en série de  $M^*$  au voisinage de  $p = 0$  s'écrit :

$$p = 0 : M^* = M_o^o + M_1^o p + O(p^2); \quad p = \infty : M^* = M_o^\infty + \frac{M_{-1}^\infty}{p} + O(1/p^2) \quad (5.55)$$

avec

$$M_o^o = \frac{32 (\eta_M^s + 2\eta_M^d)(3\eta_M^s + 2\eta_M^d)}{45 (\eta_M^s + \eta_M^d)(2\eta_M^s + \eta_M^d)} \quad (5.56)$$

$$M_1^o = \frac{32 \eta_M^s \eta_M^d (7\eta_M^s{}^2 + 10\eta_M^s \eta_M^d + 4\eta_M^d{}^2)}{45 (\eta_M^s + \eta_M^d)^2 (2\eta_M^s + \eta_M^d)^2} \left( \eta_M^s \left( \frac{1}{3k_K} + \frac{1}{3k_M} \right) - \eta_M^d \left( \frac{1}{2\mu_K} + \frac{1}{2\mu_M} \right) \right) \quad (5.57)$$

$$M_o^\infty = \frac{16 (9k_M + 4\mu_M)(3k_M + 4\mu_M)}{45 (3k_M + 2\mu_M)(3k_M + \mu_M)} \quad (5.58)$$

$$M_{-1}^\infty = \frac{16 k_M \mu_M (63k_M^2 + 60k_M \mu_M + 16\mu_M^2)}{15 (3k_M + \mu_M)^2 (3k_M + 2\mu_M)^2} \left( 3k_M \left( \frac{1}{\eta_M^s} + \frac{1}{\eta_K^s} \right) - 2\mu_M \left( \frac{1}{\eta_M^d} + \frac{1}{\eta_K^d} \right) \right) \quad (5.59)$$

En combinant (2.16) et (5.48) avec (5.55), les développements en séries de  $1/\mu^{hom*}$  au voisinage de  $p = 0$  et  $p = \infty$  sont respectivement :

$$p = 0 : \frac{1}{\mu^{hom*}} = 2 \frac{1 + \epsilon M_o^o}{\eta_M^d} \frac{1}{p} + \left( 2 \frac{\epsilon M_1^o}{\eta_M^d} + (1 + \epsilon M_o^o) \left( \frac{1}{\mu_M} + \frac{1}{\mu_K} \right) \right) + O(p) \quad (5.60)$$

et

$$p = \infty : \frac{1}{\mu^{hom*}} = \frac{1 + \epsilon M_o^\infty}{\mu_M} + \frac{1}{p} \left( 2(1 + \epsilon M_o^\infty) \left( \frac{1}{\eta_M^d} + \frac{1}{\eta_K^d} \right) + \frac{\epsilon M_{-1}^\infty}{\mu_M} \right) + O(1/p^2) \quad (5.61)$$

que l'on compare avec le développement en séries de  $1/\mu^{hom*}$  dérivé du modèle de Burger (voir (5.54)) :

$$p = 0 : \quad \frac{1}{\mu^{hom*}} = \frac{2}{\eta_M^d(\epsilon)} \frac{1}{p} + \left( \frac{1}{\mu_M(\epsilon)} + \frac{1}{\mu_K(\epsilon)} \right) + O(p) \quad (5.62)$$

et

$$p = \infty : \quad \frac{1}{\mu^{hom*}} = \frac{1}{\mu_M(\epsilon)} + \frac{1}{p} \left( \frac{2}{\eta_M^d(\epsilon)} + \frac{2}{\eta_K^d(\epsilon)} \right) + O(1/p^2) \quad (5.63)$$

Les modules de cisaillement élastiques et visqueux  $\mu_M(\epsilon)$ ,  $\mu_K(\epsilon)$ ,  $\eta_M^d(\epsilon)$  et  $\eta_K^d(\epsilon)$ , doivent assurer la compatibilité entre (5.60) et (5.62) ainsi que entre (5.61) et (5.63). On obtient :

$$\frac{1}{\mu_M(\epsilon)} = \frac{1 + M_M^e \epsilon}{\mu_M} \quad ; \quad \frac{1}{\mu_K(\epsilon)} = \frac{1 + M_K^e \epsilon}{\mu_K} \quad (5.64)$$

$$\frac{1}{\eta_M^d(\epsilon)} = \frac{1 + M_M^v \epsilon}{\eta_M^d} \quad ; \quad \frac{1}{\eta_K^d(\epsilon)} = \frac{1 + M_K^v \epsilon}{\eta_K^d}$$

ou les constantes  $M_M^e$ ,  $M_K^e$ ,  $M_M^v$  et  $M_K^v$  sont déterminées en fonction des caractéristiques viscoélastiques du matériau sain :

$$M_M^e = M_o^\infty \quad ; \quad M_M^v = M_o^o$$

$$M_K^e = M_o^o + \frac{2\mu_K}{\eta_M^d} M_1^o - \frac{\mu_K}{\mu_M} (M_M^e - M_o^o) \quad ; \quad M_K^v = M_o^\infty + \frac{\eta_K^d}{2\mu_M} M_{-1}^\infty - \frac{\eta_K^d}{\eta_M^d} (M_M^v - M_o^\infty) \quad (5.65)$$

La figure 5.4 présente la variation des 8 paramètres du modèle de Burger approché en fonction du paramètre d'endommagement  $\epsilon$ .

### 5.3.3 Validation du modèle viscoélastique effectif approché de Burger sur le problème de fluage

Le modèle construit à la section précédente assure par construction une excellente approximation du comportement endommagé réel à court et long terme. On teste dans cette section sur un chargement particulier la qualité de l'approximation en question en régime transitoire.

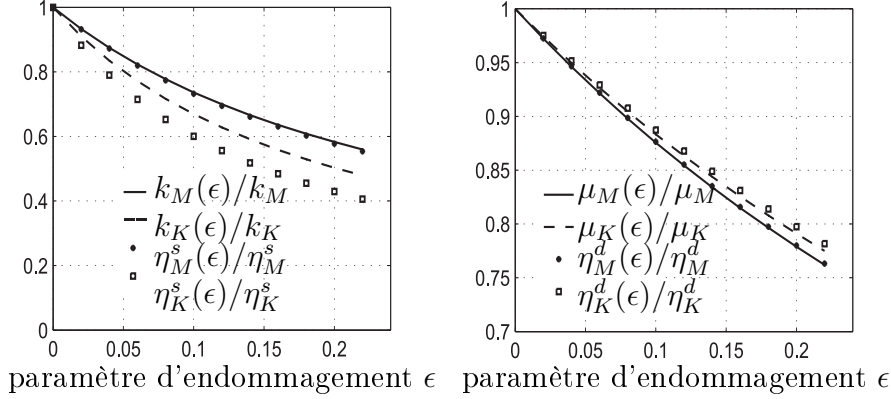


FIG. 5.4 – Approximation du comportement effectif du matériau *v.l.n.v.* microfissuré par le modèle de Burger (les modules viscoélastiques du matériau sain sont donnés par le tableau 2.1)

La loi de comportement macroscopique effective correspondant au modèle de Burger approché est écrite sous la forme d'une équation différentielle d'ordre 2 (voir (2.7)) :

$$\mathbb{X}(\epsilon) : \Sigma + \mathbb{Y}(\epsilon) : \dot{\Sigma} + \mathbb{Z}(\epsilon) : \ddot{\Sigma} = \mathbb{C}_K^e(\epsilon) : \dot{\mathbf{E}} + \mathbb{C}_K^v(\epsilon) : \ddot{\mathbf{E}} \quad (5.66)$$

où  $\Sigma$  et  $\mathbf{E}$  sont respectivement la contrainte macroscopique et la déformation macroscopique. Les constantes tensorielles effectives d'ordre 4 apparaissant dans cette équation sont calculées conformément à (2.8) en fonction des modules effectifs donnés par les équations (5.35) et (5.64) :

$$\mathbb{X}(\epsilon) = \mathbb{C}_K^e(\epsilon) : \mathbb{S}_M^v(\epsilon); \quad \mathbb{Y}(\epsilon) = \mathbb{I} + \mathbb{C}_K^e(\epsilon) : \mathbb{S}_M^e(\epsilon) + \mathbb{C}_K^v(\epsilon) : \mathbb{S}_M^v(\epsilon); \quad \mathbb{Z}(\epsilon) = \mathbb{C}_K^v(\epsilon) : \mathbb{S}_M^e(\epsilon) \quad (5.67)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_K^e(\epsilon) &= 3k_K(\epsilon)\mathbb{J} + 2\mu_K(\epsilon)\mathbb{K}; & \mathbb{C}_K^v(\epsilon) &= \eta_K^s(\epsilon)\mathbb{J} + \eta_K^d(\epsilon)\mathbb{K} \\ \mathbb{S}_M^e(\epsilon) &= \frac{1}{3k_M(\epsilon)}\mathbb{J} + \frac{1}{2\mu_M(\epsilon)}\mathbb{K}; & \mathbb{S}_M^v(\epsilon) &= \frac{1}{\eta_M^s(\epsilon)}\mathbb{J} + \frac{1}{\eta_M^d(\epsilon)}\mathbb{K} \end{aligned} \quad (5.68)$$

Considérons le problème de fluage sous une contrainte macroscopique sphérique  $\Sigma(t) = \Sigma_o \mathcal{H}(t) \mathbf{1}$  imposée, où  $\Sigma_o$  est une constante donnée et  $\mathcal{H}$  est la fonction de Heaviside. Puisque le matériau endommagé est isotrope et que ce cas de chargement est également isotrope, il en est de même de la déformation macroscopique :  $\mathbf{E}(t) = E(t) \mathbf{1}$  où  $E(t)$  représente le tiers de la déformation volumique macroscopique :  $E(t) = \text{tr } \mathbf{E}(t)/3$ . Pour simplifier on note  $E$  au lieu de  $E(\epsilon)$ . En utilisant les règles habituelles de l'algèbre de la base ( $\mathbb{J}, \mathbb{K}$ ) ( $\mathbb{J} : \mathbf{1} = \mathbf{1}, \mathbb{K} : \mathbf{1} = 0$  et

$(a\mathbb{J} + b\mathbb{K}) : (c\mathbb{J} + d\mathbb{K}) = ac\mathbb{J} + bd\mathbb{K}$ ) et en introduisant la combinaison de (5.68) avec (5.67) dans (5.66), l'équation (5.66) devient :

$$\frac{3k_K(\epsilon)}{\eta_M^s(\epsilon)} \Sigma_o = 3k_K(\epsilon) \dot{E} + \eta_K^s(\epsilon) \ddot{E} \quad (5.69)$$

En résolvant cette équation différentielle on obtient la déformation macroscopique  $E(t)$  du problème qui est donnée par la formule suivante :

$$E = \Sigma_o \left( \frac{1}{3k_M(\epsilon)} + \frac{1}{3k_K(\epsilon)} + \frac{t}{\eta_M^s(\epsilon)} - \frac{1}{3k_K(\epsilon)} \exp\left(-\frac{t}{\tau_K(\epsilon)}\right) \right) \quad (5.70)$$

où  $\tau_K(\epsilon) = \frac{\eta_K^s(\epsilon)}{3k_K(\epsilon)}$  est le temps caractéristique effectif de la partie "Kelvin". Rappelons qu'il s'agit de la réponse prévue par le modèle de Burger endommagé, qui est une approximation du comportement réel. Il reste à comparer ce résultat avec celui obtenu par la transformation inverse de Laplace-Carson de la loi de comportement effective donnée par l'équation (5.18) qui prend ici la forme scalaire :

$$E^* = \left( \frac{1}{3k^*} + \frac{8\epsilon}{9} \frac{(1 - \nu^*)}{\mu^*} \right) \Sigma_o \quad (5.71)$$

où  $k^*$ ,  $\mu^*$  et  $\nu^*$  sont les fonctions de  $p$  qui sont données par les équations (2.16) et (2.17). Connaissant les paramètres viscoélastiques du matériau sain et le paramètre d'endommagement, on obtient alors  $E^*$  comme une fonction explicite de  $p$ . La transformation inverse de Laplace-Carson de  $E^*(p)$  donne  $E(t)$  ou bien  $\text{tr}\mathbf{E}(t)/3$ . La figure 5.5 montre un excellent accord entre la solution exacte et le modèle approché pour différents niveaux d'endommagement. Ceci valide (au moins sur ce type de chargement) le recours au modèle viscoélastique effectif de Burger approché.

## 5.4 Distribution parallèle des fissures

Dans cette section, on considère une distribution parallèle des fissures dans un matériau *v.l.n.v.* (voir 5.6). Pour la suite, il est commode de disposer de l'expression du tenseur de "souplesse"  $\mathbb{S}^*(p)$  du matériau sain (isotrope), inverse de  $\mathbb{C}^*(p)$ , dans la base de Walpole (voir (B.1)) :

$$\mathbb{S}^*(p) = \sum_{i=1}^6 s_i^*(p) \mathbb{E}_i \quad (5.72)$$

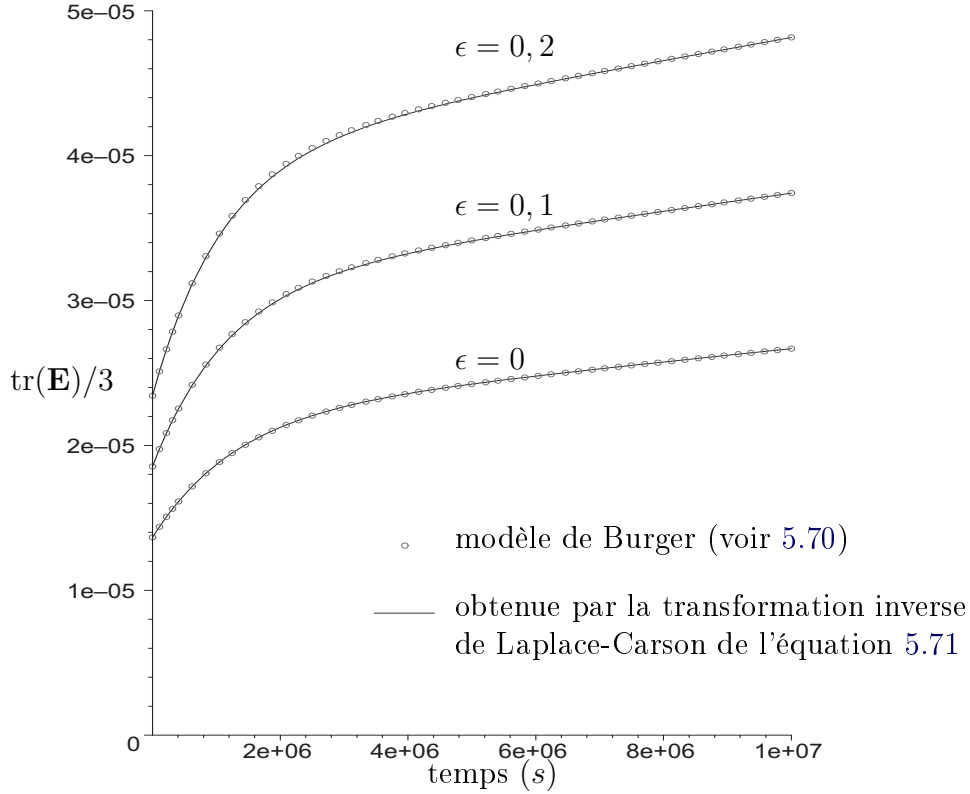


FIG. 5.5 – Validation du modèle de Burger sur le problème de fluage en traction sphérique pour différents niveaux d'endommagement ( $\Sigma_0 = 1(MPa)$ ), les modules viscoélastiques du matériau sain sont donnés par le tableau 2.1)

avec

$$\begin{aligned}
 s_1^*(p) &= \frac{1 - \nu^*}{2\mu^*(1 + \nu^*)} ; s_2^*(p) = \frac{1}{2\mu^*(1 + \nu^*)} ; s_3^*(p) = \frac{1}{2\mu^*} \\
 s_4^*(p) &= \frac{1}{2\mu^*} ; s_5^*(p) = s_6^*(p) = -\frac{\nu^*}{2\mu^*(1 + \nu^*)}.
 \end{aligned}
 \tag{5.73}$$

où  $\nu^*$  et  $\mu^*$  sont respectivement donnés par les équations (2.17) et (2.16). Par ailleurs, la “complaisance”  $\mathbb{S}^{hom^*}(p)$  (inverse de  $\mathbb{C}^{hom^*}(p)$ ) est un tenseur isotrope transverse. Dans la base de Walpole, il est écrit sous la forme :

$$\mathbb{S}^{hom^*}(p) = \sum_{i=1}^6 s_i^{hom^*}(p) \mathbb{E}_i
 \tag{5.74}$$

Pour déterminer les scalaires  $s_i^{hom^*}$  on considère successivement différents cas de chargement. La démarche est, dans l'esprit, très proche de celle déjà utilisé dans le cas d'une distribution isotrope des orientations.

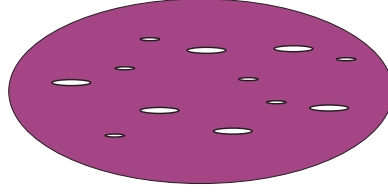


FIG. 5.6 – Distribution parallèle des fissures

Parallèlement, on désire approcher le comportement vicoélastique du matériau endommagé par le modèle v.l.n.v. de Burger. On cherche à cet effet à identifier les caractéristiques effectives du modèle approché, c'est-à-dire les tenseurs  $\mathbb{S}_M^e(\epsilon)$ ,  $\mathbb{S}_M^v(\epsilon)$ ,  $\mathbb{S}_K^e(\epsilon)$  et  $\mathbb{S}_K^v(\epsilon)$ . Si le comportement effectif était rigoureusement de type Burger, le tenseur  $\mathbb{S}^{hom*}$  satisferait la relation :

$$\mathbb{S}^{hom*} = \mathbb{S}_M^e(\epsilon) + \frac{1}{p}\mathbb{S}_M^v(\epsilon) + (\mathbb{S}_K^e(\epsilon)^{-1} + p\mathbb{S}_K^v(\epsilon)^{-1})^{-1} \quad (5.75)$$

On cherche à déterminer les caractéristiques du modèle effectif approché de manière à ce que cette équation soit satisfaite au voisinage de  $p = 0$  et  $p = \infty$ . On a déjà eu l'occasion de dire qu'on obtenait par ce procédé l'accord à court terme et à long terme entre le modèle de Burger et le comportement réel. Le développement en série polynomiale de  $\mathbb{S}^{hom*}$  s'écrit :

$$p = 0 : \quad \mathbb{S}^{hom*} = \frac{1}{p}\mathbb{S}_M^v(\epsilon) + (\mathbb{S}_M^e(\epsilon) + \mathbb{S}_K^e(\epsilon)) + O(p) \quad (5.76)$$

et

$$p = \infty : \quad \mathbb{S}^{hom*} = \mathbb{S}_M^e(\epsilon) + \frac{1}{p}(\mathbb{S}_M^v(\epsilon) + \mathbb{S}_K^v(\epsilon)) + O(1/p^2) \quad (5.77)$$

Si on décompose tous les tenseurs apparaissant dans 5.76 et 5.77 dans la base de Walpole  $\mathbb{S} = \sum_{i=1}^6 s_i \mathbf{E}_i$ , on obtient six relations entre les scalaires de même indice  $i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ) :

$$p := 0 \quad s_i^{hom*} = \frac{1}{p}s_{M_i}^v(\epsilon) + (s_{M_i}^e(\epsilon) + s_{K_i}^e(\epsilon)) + O(p) \quad (5.78)$$

et

$$p := \infty \quad s_i^{hom*} = s_{M_i}^e(\epsilon) + \frac{1}{p}(s_{M_i}^v(\epsilon) + s_{K_i}^v(\epsilon)) + O(1/p^2) \quad (5.79)$$



### 5.4.1 Traction dans la direction de la normale $\mathbf{n}$

On considère une traction uniaxiale selon la normale  $\mathbf{n}$  aux fissures : la contrainte macroscopique s'écrit  $\Sigma^* \mathbf{N}$  (mode I). La discontinuité de déplacement à travers de la fissure est donc  $[\xi_n]^* \mathbf{n}$  où  $[\xi_n]^*$  est donné par l'équation (5.13). La contribution élémentaire d'une fissure à la déformation macroscopique (voir l'équation 5.12) s'écrit donc :

$$\int_C [\xi]^* \otimes \mathbf{n} dS = \frac{4(1-\nu^*)}{\pi\mu^*} \Sigma^* \mathbf{N} \int_C \sqrt{\ell^2 - \rho^2} dS = \frac{8\ell^3(1-\nu^*)}{3\mu^*} \Sigma^* \mathbf{N} \quad (5.80)$$

On suppose que tous les fissures ont le même rayon  $\ell$ . La contribution de l'ensemble des fissures à la déformation macroscopique donnée par l'équation 5.12 est obtenue en multipliant la contribution élémentaire par la densité  $N$  :

$$\frac{1}{|\Omega|} \left( \sum_i \int_{C_i} [\xi]_i^* \otimes \mathbf{n}_i dS \right) = \frac{8N\ell^3}{3} \frac{\Sigma^*(1-\nu^*)}{\mu^*} \mathbf{N} = \frac{8\epsilon}{3} \frac{\Sigma^*(1-\nu^*)}{\mu^*} \mathbf{N} \quad (5.81)$$

Dans cette formule,  $\epsilon = N\ell^3$  est toujours le paramètre d'endommagement. D'autre part, la contribution de la phase solide à la déformation macroscopique est déterminée par :

$$\mathbb{S}^*(p) : \Sigma^*(p) = s_2^*(p) \Sigma^*(p) \mathbf{N} + s_5^*(p) \Sigma^*(p) \mathbf{T} \quad (5.82)$$

En introduisant (5.17) et (5.82) dans (5.12), on obtient la relation exprimant la réponse macroscopique à ce type de chargement :

$$\mathbf{E}^* = \left( \left( s_2^* + \frac{8\epsilon(1-\nu^*)}{3\mu^*} \right) \mathbf{N} + s_5^* \mathbf{T} \right) \Sigma^* \quad (5.83)$$

D'autre part, dans l'espace de Laplace-Carson, la loi de comportement macroscopique s'écrit de façon générale :  $\mathbf{E}^* = \mathbb{S}^{hom*} : \Sigma^*$ , où  $\mathbb{S}^{hom*}$  est donné par l'équation (5.74). Cette relation peut être exprimée sous une formule similaire à l'équation (5.83) :

$$\mathbf{E}^* = \left( s_2^{hom*} \mathbf{N} + s_5^{hom*} \mathbf{T} \right) \Sigma^* \quad (5.84)$$

En comparant terme à terme les équations 5.83 et 5.84, on obtient :

$$s_2^{hom*} = s_2^* + \frac{8(1-\nu^*)\epsilon}{3\mu^*} = s_2^*(1 + N^*\epsilon); \quad \text{avec} \quad N^* = \frac{16(1-\nu^{*2})}{3} \quad (5.85)$$

et

$$s_5^{hom*} = s_5^* \quad (5.86)$$

Pour  $i = 5$ ,  $s_5^{hom*}$ , qui est donnée par l'équation (5.86), est indépendante de  $\epsilon$ . Le développement de ce coefficient peut donc être écrit en fonction des caractéristiques du matériau sain :

$$p := 0 \quad s_5^{hom*} = \frac{1}{p} s_{M5}^v + (s_{M5}^e + s_{K5}^e) + O(p) \quad (5.87)$$

et

$$p := \infty \quad s_5^{hom*} = s_{M5}^e + \frac{1}{p} (s_{M5}^v + s_{K5}^v) + O(1/p^2) \quad (5.88)$$

En comparant 5.78 avec 5.87 et 5.79 avec 5.88, on obtient que tous les coefficients d'indice 5 des tenseurs effectifs de souplesse élastique et visqueuse du matériau de Burger approché sont égaux à ceux du matériau sain :

$$\begin{aligned} s_{M5}^e(\epsilon) &= s_{M5}^e = -\frac{\nu_M}{2\mu_M(1+\nu_M)}; & s_{M5}^v(\epsilon) &= s_{M5}^v = -\frac{\nu_{vM}}{\eta_M^d(1+\nu_{vM})} \\ s_{K5}^e(\epsilon) &= s_{K5}^e = -\frac{\nu_K}{2\mu_K(1+\nu_K)}; & s_{K5}^v(\epsilon) &= s_{K5}^v = -\frac{\nu_{vK}}{\eta_K^d(1+\nu_{vK})} \end{aligned} \quad (5.89)$$

Dans ces relations,  $\nu_M$  est le coefficient de Poisson de "Maxwell" qui est calculé en fonction de  $k_M$  et  $\mu_M$  par (2.24). De la même façon,  $\nu_K$ ,  $\nu_{vM}$  et  $\nu_{vK}$  sont déterminés en fonction des modules viscoélastiques de la phase solide par :

$$\nu_K = \frac{3k_K - 2\mu_K}{6k_K + 2\mu_K}; \quad \nu_{vM} = \frac{\eta_M^s - \eta_M^d}{2\eta_M^s + \eta_M^d}; \quad \nu_{vK} = \frac{\eta_K^s - \eta_K^d}{2\eta_K^s + \eta_K^d} \quad (5.90)$$

Pour  $i = 2$ ,  $s_2^{hom*}$  est donnée par l'équation (5.85). Le développement en séries polynomiales de  $N^*$  s'écrit :

$$p = 0 : \quad N^* = N_o^o + N_1^o p + O(p^2); \quad p = \infty : \quad N^* = N_o^\infty + \frac{1}{p} N_{-1}^\infty + O(1/p^2) \quad (5.91)$$

avec

$$N_o^o = \frac{16}{3} - \frac{16}{3} \frac{(\eta_M^s - \eta_M^d)^2}{(2\eta_M^s + \eta_M^d)^2} \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned} N_1^o &= \frac{-32}{3} \frac{(\eta_M^s - \eta_M^d)^2}{(2\eta_M^s + \eta_M^d)^3} \left( 2\eta_M^s{}^2 \left( \frac{1}{3k_M} + \frac{1}{3k_K} \right) + \eta_M^d{}^2 \left( \frac{1}{2\mu_M} + \frac{1}{2\mu_K} \right) \right) \\ &+ \frac{32}{3} \frac{(\eta_M^s - \eta_M^d)}{(2\eta_M^s + \eta_M^d)^2} \left( \eta_M^s{}^2 \left( \frac{1}{3k_M} + \frac{1}{3k_K} \right) - \eta_M^d{}^2 \left( \frac{1}{2\mu_M} + \frac{1}{2\mu_K} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.93)$$

$$N_o^\infty = \frac{16}{3} - \frac{16}{3} \frac{(3k_M - 2\mu_M)^2}{(6k_M + 2\mu_M)^2} \quad (5.94)$$

$$N_{-1}^{\infty} = \frac{-32}{3} \frac{(3k_M - 2\mu_M)^2}{(6k_M + 2\mu_M)^3} \left( 18k_M^2 \left( \frac{1}{\eta_M^s} + \frac{1}{\eta_K^s} \right) + 4\mu_M^2 \left( \frac{1}{\eta_M^d} + \frac{1}{\eta_K^d} \right) \right) + \frac{32}{3} \frac{(3k_M - 2\mu_M)}{(6k_M + 2\mu_M)^2} \left( 9k_M^2 \left( \frac{1}{\eta_M^s} + \frac{1}{\eta_K^s} \right) - 4\mu_M^2 \left( \frac{1}{\eta_M^d} + \frac{1}{\eta_K^d} \right) \right) \quad (5.95)$$

Par ailleurs, le développement en séries de  $s_2^*$  à  $p = 0$  et  $p = \infty$  s'écrit :

$$p = 0 : \quad s_2^* = \frac{1}{p} s_{M2}^v + (s_{M2}^e + s_{K2}^e) + O(p); \quad p = \infty : \quad s_2^* = s_{M2}^e + \frac{1}{p} (s_{M2}^v + s_{K2}^v) + O(1/p^2) \quad (5.96)$$

En introduisant (5.91) et (5.96) dans (5.85), on obtient le développement en séries polynomiales de  $s_2^{hom*}$  à  $p = 0$  et  $p = \infty$  :

$$p = 0 : \quad s_2^{hom*} = \frac{1}{p} s_{M2}^v (N_o^o \epsilon + 1) + \left( (s_{M2}^e + s_{K2}^e) (N_o^o \epsilon + 1) + s_{M2}^v N_1^o \epsilon \right) + O(p) \quad (5.97)$$

et

$$p = \infty : \quad s_2^{hom*} = s_{M2}^e (N_o^{\infty} \epsilon + 1) + \frac{1}{p} \left( (s_{M2}^v + s_{K2}^v) (N_o^{\infty} \epsilon + 1) + s_{M2}^e N_{-1}^{\infty} \epsilon \right) + O(1/p^2) \quad (5.98)$$

Il reste à comparer 5.78 avec 5.97 et 5.79 avec 5.98 (pour  $i = 2$ ). On obtient tous les coefficients d'indice 2 des tenseurs effectifs de souplesse élastique et visqueuse exprimés en fonction de ceux du matériau sain sous la forme de fonctions affines de  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} s_{M2}^e(\epsilon) &= s_{M2}^e (1 + N_M^e \epsilon); & s_{M2}^v(\epsilon) &= s_{M2}^v (1 + N_M^v \epsilon) \\ s_{K2}^e(\epsilon) &= s_{K2}^e (1 + N_K^e \epsilon); & s_{K2}^v(\epsilon) &= s_{K2}^v (1 + N_K^v \epsilon) \end{aligned} \quad (5.99)$$

On rappelle que :

$$\begin{aligned} s_{M2}^e &= \frac{1}{2\mu_M(1 + \nu_M)}; & s_{M2}^v &= \frac{1}{\eta_M^d(1 + \nu_{vM})} \\ s_{K2}^e &= \frac{1}{2\mu_K(1 + \nu_K)}; & s_{K2}^v &= \frac{1}{\eta_K^d(1 + \nu_{vK})} \end{aligned} \quad (5.100)$$

Les coefficients  $N_b^a$  ( $a = e$  ou  $v$  et  $b = M$  ou  $K$ ) sont également déterminés en fonction des caractéristiques viscoélastiques du matériau sain :

$$\begin{aligned} N_M^e &= N_o^{\infty}; & N_K^e &= N_o^o + N_1^o \frac{s_{M2}^v}{s_{K2}^e} + (N_o^o - N_o^{\infty}) \frac{s_{M2}^e}{s_{K2}^e} \\ N_M^v &= N_o^o; & N_K^v &= N_o^{\infty} + N_{-1}^{\infty} \frac{s_{M2}^e}{s_{K2}^v} + (N_o^{\infty} - N_o^o) \frac{s_{M2}^v}{s_{K2}^v} \end{aligned} \quad (5.101)$$

### 5.4.2 Traction transversale

On considère une traction transversale dans laquelle la contrainte macroscopique s'écrit  $\Sigma^* \mathbf{T}$ . La discontinuité de déplacement à travers de la fissure et la contribution élémentaire d'une fissure à la déformation macroscopique sont donc nulles. Il en résulte que la déformation macroscopique est déterminée par :

$$\mathbb{S}^*(p) : \Sigma^*(p) = (2s_5^*(p)\mathbf{N} + s_1^*(p)\mathbf{T}) \Sigma^*(p) \quad (5.102)$$

Par ailleurs, dans l'espace de Laplace-Carson, la loi de comportement macroscopique s'écrit :

$$\mathbf{E}^* = \mathbb{S}^{hom*} : \Sigma^* = \left( 2s_5^{hom*}\mathbf{N} + s_1^{hom*}\mathbf{T} \right) \Sigma^* \quad (5.103)$$

En comparant les deux équations ci-dessus, on trouve que, comme  $s_5^{hom*}$ ,  $s_1^{hom*}$  est indépendant de  $\epsilon$ . Ainsi, tous les coefficients d'indice 1 des tenseurs effectifs de souplesse élastique et visqueuse qui sont respectivement égaux à ceux du matériau sain :

$$\begin{aligned} s_{M1}^e(\epsilon) &= \frac{1 - \nu_M}{2\mu_M(1 + \nu_M)}; & s_{M1}^v(\epsilon) &= \frac{1 - \nu_{vM}}{\eta_M^d(1 + \nu_{vM})} \\ s_{K1}^e(\epsilon) &= \frac{1 - \nu_K}{2\mu_K(1 + \nu_K)}; & s_{K1}^v(\epsilon) &= \frac{1 - \nu_{vK}}{\eta_K^d(1 + \nu_{vK})} \end{aligned} \quad (5.104)$$

### 5.4.3 Cisaillement transversal

On considère une contrainte macroscopique de cisaillement imposée  $\Sigma^* \mathbf{e}_2 \otimes^s \mathbf{e}_3$  où  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$  sont ici les directions perpendiculaires transversales. La discontinuité de déplacement à la traversée de la fissure est à nouveau nulle. La contribution d'une fissure à la déformation macroscopique calculée par (5.12) est donc également nulle, de sorte que la déformation effective donnée par l'équation (5.12) peut être exprimée par :

$$\mathbf{E}^* = \mathbb{S}^* : (\mathbf{e}_2 \otimes^s \mathbf{e}_3) \Sigma^* = s_3^* \mathbf{e}_2 \otimes^s \mathbf{e}_3 \Sigma^* \quad (5.105)$$

De plus, la loi de comportement macroscopique donne une deuxième relation entre  $\mathbf{E}^*$  et  $\Sigma^*$ . Pour ce cas de chargement, cette relation prend une forme similaire :

$$\mathbf{E}^* = \mathbb{S}^{hom*} : (\mathbf{e}_2 \otimes^s \mathbf{e}_3) \Sigma^* = s_3^{hom*} \mathbf{t}_1 \otimes^s \mathbf{t}_2 \Sigma^* \quad (5.106)$$

En comparant les expressions 5.105 et 5.106 on trouve que  $s_3^{hom*}$  est lui aussi indépendant de  $\epsilon$ . Ainsi, tous les coefficients d'indice 3 des tenseurs effectifs de

souplesse élastique et visqueuse sont respectivement égaux à ceux du matériau sain :

$$s_{M3}^e(\epsilon) = \frac{1}{2\mu_M}; \quad s_{M3}^v(\epsilon) = \frac{1}{\eta_M^d}; \quad s_{K3}^e(\epsilon) = \frac{1}{2\mu_K}; \quad s_{K3}^v(\epsilon) = \frac{1}{\eta_K^d} \quad (5.107)$$

#### 5.4.4 Cisaillement en mode 2

On considère un chargement dans le mode 2, c'est-à-dire une contrainte macroscopique imposée de la forme  $\Sigma^* \mathbf{e}_2 \otimes^s \mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}$  selon  $\mathbf{e}_1$ ). La discontinuité de déplacement à la traversée de la fissure est donc  $[\xi_t]^* \mathbf{e}_2$  avec  $[\xi_t]^*$  donné par l'équation (5.14). La contribution élémentaire d'une fissure à la déformation macroscopique calculée par 5.12 s'écrit :

$$\int_C [\xi]^* \otimes^s \mathbf{n} dS = \frac{4(1-\nu^*)}{\pi\mu^*(2-\nu^*)} \Sigma^* \mathbf{e}_2 \otimes^s \mathbf{n} \int_C \sqrt{\ell^2 - \rho^2} dS = \frac{8\ell^3(1-\nu^*)}{3\mu^*(2-\nu^*)} \Sigma^* \mathbf{e}_2 \otimes^s \mathbf{n} \quad (5.108)$$

Pour des fissures de même rayon  $\ell$ , la déformation effective donnée par l'équation 5.12 s'écrit :

$$\mathbf{E}^* = \left( \mathbb{S}^* : (\mathbf{e}_2 \otimes^s \mathbf{n}) + \frac{8N\ell^3(1-\nu^*)}{3\mu^*(2-\nu^*)} \mathbf{e}_2 \otimes^s \mathbf{n} \right) \Sigma^* = \left( s_4^* + \frac{8\epsilon(1-\nu^*)}{3\mu^*(2-\nu^*)} \right) \mathbf{e}_2 \otimes^s \mathbf{n} \Sigma^* \quad (5.109)$$

La déformation macroscopique est également donnée par l'équation d'état générale :

$$\mathbf{E}^* = \mathbb{S}^{hom*} : (\mathbf{e}_2 \otimes^s \mathbf{n}) \Sigma^* = s_4^{hom*} \mathbf{e}_2 \otimes^s \mathbf{n} \Sigma^* \quad (5.110)$$

En comparant les expressions (5.109) et (5.110), on identifie  $s_4^{hom*}$  :

$$s_4^{hom*} = s_4^*(1 + P^*\epsilon) \quad avec \quad P^* = \frac{16(1-\nu^*)}{3(2-\nu^*)} \quad (5.111)$$

Le développement en séries polynomiales de  $P^*$  s'écrit :

$$p = 0 : \quad P^* = P_o^o + P_1^o p + O(p^2); \quad p = \infty : \quad P^* = P_o^\infty + \frac{1}{p} P_{-1}^\infty + O(1/p^2) \quad (5.112)$$

avec

$$P_o^o = \frac{16(\eta_M^s + 2\eta_M^d)}{9(\eta_M^s + \eta_M^d)} \quad (5.113)$$

$$P_1^o = \frac{16\eta_M^s \eta_M^d}{9(\eta_M^s + \eta_M^d)^2} \left( \eta_M^s \left( \frac{1}{3k_M} + \frac{1}{3k_K} \right) - \eta_M^d \left( \frac{1}{2\mu_M} + \frac{1}{2\mu_K} \right) \right) \quad (5.114)$$

$$P_o^\infty = \frac{16(3k_M + 4\mu_M)}{9(3k_M + 2\mu_M)} \quad (5.115)$$

$$P_{-1}^{\infty} = \frac{32k_M\mu_M}{3(3k_M + 2\mu_M)^2} \left( 3k_M \left( \frac{1}{\eta_M^s} + \frac{1}{\eta_K^s} \right) - 2\mu_M \left( \frac{1}{\eta_M^d} + \frac{1}{\eta_K^d} \right) \right) \quad (5.116)$$

Le développement en séries de  $s_4^*$  au voisinage de  $p = 0$  et  $p = \infty$  s'écrit :

$$p = 0 : \quad s_4^* = \frac{1}{p} s_{M4}^v + (s_{M4}^e + s_{K4}^e) + O(p); \quad p = \infty : \quad s_4^* = s_{M4}^e + \frac{1}{p} (s_{M4}^v + s_{K4}^v) + O(1/p^2) \quad (5.117)$$

Il reste à introduire (5.112) et (5.117) dans (5.111) pour obtenir le développement en séries polynomiales de  $s_4^{hom*}$  au voisinage de  $p = 0$  et  $p = \infty$  :

$$p = 0 : \quad s_4^{hom*} = \frac{1}{p} s_{M4}^v (P_o^o \epsilon + 1) + (s_{M4}^e + s_{K4}^e) (P_o^o \epsilon + 1) + s_{M4}^v P_1^o \epsilon + O(p) \quad (5.118)$$

et

$$p = \infty : \quad s_4^{hom*} = s_{M4}^e (P_o^{\infty} \epsilon + 1) + \frac{1}{p} ((s_{M4}^v + s_{K4}^v) (P_o^{\infty} \epsilon + 1) + s_{M4}^e P_{-1}^{\infty} \epsilon) + O(1/p^2) \quad (5.119)$$

En comparant (5.78) avec (5.118) et (5.79) avec (5.119) pour  $i = 4$ , il apparaît que tous les coefficients d'indice 4 des tenseurs effectifs de souplesse élastique et visqueuse sont des fonctions affines de  $\epsilon$  que l'on peut caractériser à l'aide des constantes du matériau sain :

$$\begin{aligned} s_{M4}^e(\epsilon) &= s_{M4}^e (1 + P_M^e \epsilon); & s_{M4}^v(\epsilon) &= s_{M4}^v (1 + P_M^v \epsilon) \\ s_{K4}^e(\epsilon) &= s_{K4}^e (1 + P_K^e \epsilon); & s_{K4}^v(\epsilon) &= s_{K4}^v (1 + P_K^v \epsilon) \end{aligned} \quad (5.120)$$

avec

$$\begin{aligned} s_{M4}^e &= \frac{1}{2\mu_M}; & s_{M4}^v &= \frac{1}{\eta_M^d} \\ s_{K4}^e &= \frac{1}{2\mu_K}; & s_{K4}^v &= \frac{1}{\eta_K^d} \end{aligned} \quad (5.121)$$

Les coefficients  $P_b^a$  ( $a = e; v$  et  $b = M; K$ ) sont donnés par :

$$\begin{aligned} P_M^e &= P_o^{\infty}; & P_K^e &= P_o^o + P_1^o \frac{s_{M4}^v}{s_{K4}^e} + (P_o^o - P_o^{\infty}) \frac{s_{M4}^e}{s_{K4}^e} \\ P_M^v &= P_o^o; & P_K^v &= P_o^{\infty} + N_{-1}^{\infty} \frac{s_{M4}^e}{s_{K4}^v} + (P_o^{\infty} - P_o^o) \frac{s_{M4}^v}{s_{K4}^v} \end{aligned} \quad (5.122)$$

La figure 5.7 résume l'étude qui vient d'être consacrée à la caractérisation d'un modèle de Burger approché pour la situation de fissures parallèles. On a vu que seuls les coefficients d'indice 2 et 4 dans la base de Walpole des éléments du modèle (visqueux ou élastiques) étaient affectés par l'endommagement. Leur variation en fonction de  $\epsilon$  est significative mais peu sensible à la nature de la composantes du modèle.

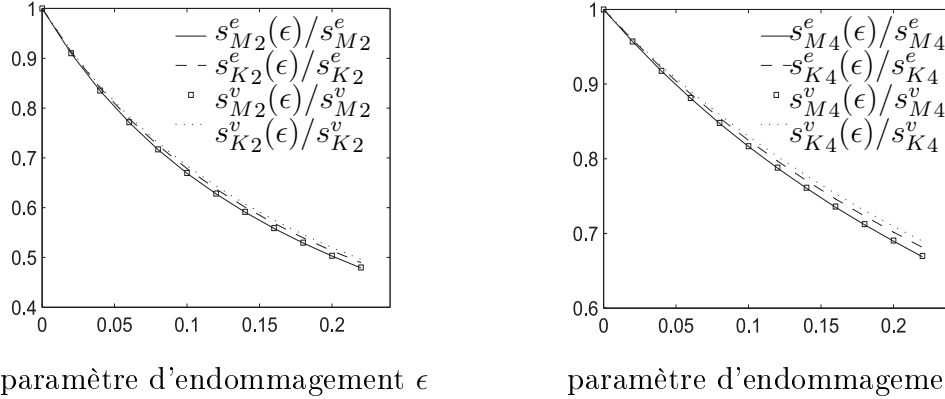


FIG. 5.7 – Approximation du comportement effectif du matériau *v.l.n.v.* contenant des microfissures parallèles par le modèle de Burger (les modules viscoélastiques du matériau sain sont donnés par le tableau 2.1)

### 5.4.5 Validation du modèle de Burger du cas isotrope transverse

Le modèle effectif de Burger établi précédemment permet de déterminer explicitement les tenseurs de “complaisances” en connaissant le paramètre d'endommagement et les modules viscoélastiques du matériau sain par des formules (5.89), (5.99), (5.104), (5.107) et (5.120). Ce résultat permet ensuite de calculer le tenseur de souplesse globale dans l'espace de Laplace-Carson par l'équation (5.75) qui est décomposé, dans la base de Walpole, en cinq composantes. On d'en extrait le deuxième scalaire qui s'écrivent :

$$s_2^*(\epsilon, p) = s_{M2}^e(\epsilon) + \frac{1}{p} s_{M2}^v(\epsilon) + \frac{s_{K2}^v(\epsilon)a(\epsilon)p + s_{K2}^e(\epsilon)b(\epsilon)}{a(\epsilon)p^2 + c(\epsilon)p + b(\epsilon)} \quad (5.123)$$

où on a mise :  $a = 2s_{K5}^e{}^2 - s_{K1}^e s_{K2}^e$ ;  $b = 2s_{K5}^v{}^2 - s_{K1}^v s_{K2}^v$  et  $c = 4s_{K5}^e s_{K5}^v - s_{K1}^e s_{K2}^v - s_{K1}^v s_{K2}^e$ .  $p$  est la variable de Laplace-Carson.

Considérons le problème de fluage sous traction dont la contrainte macroscopique s'écrit :

$$\Sigma = \Sigma_o \mathcal{H}(t) \mathbf{N} \quad (5.124)$$

où  $\Sigma_o$  est une constante donnée,  $\mathcal{H}(t)$  est la fonction de Heaviside. La transformation de Laplace-Carson de cette contrainte prend la forme :  $\Sigma^* = \Sigma_o \mathbf{N}$ . La loi de comportement s'écrit sous la forme :  $\mathbf{E}^*(\epsilon, p) = \mathbb{S}^*(\epsilon) : \Sigma^*$ . Notons quelques simplifications dans la base de Walpole :  $\mathbb{E}_1 : \mathbf{N} = 0$ ;  $\mathbb{E}_2 : \mathbf{N} = \mathbf{N}$ ;  $\mathbb{E}_3 : \mathbf{N} = 0$ ;  $\mathbb{E}_4 : \mathbf{N} = 0$ ;  $\mathbb{E}_5 : \mathbf{N} = \mathbf{T}$ . Alors pour ce cas de chargement, la déformation

macroscopique transformée s'écrit :

$$\mathbf{E}^*(\epsilon, p) = s_2^*(\epsilon, p)\Sigma_o\mathbf{N} + s_5^*(\epsilon, p)\Sigma_o\mathbf{T} \quad (5.125)$$

On peut extraire de cette équation la composante de déformation dans la direction de traction qu'on note  $E_{nn}^*(\epsilon, p)$  qui est une fonction explicite de la variable de Laplace-Carson  $p$  et dépend du niveau d'endommagement :

$$E_{nn}^*(\epsilon, p) = s_2^*(\epsilon, p)\Sigma_o \quad (5.126)$$

où  $s_2^*(\epsilon, p)$  est donné par (5.123). La transformation inverse de Laplace-Carson de  $E_{nn}^*(\epsilon, p)$  donne la composante dans la direction de traction de la déformation macroscopique dans l'espace réelle :

$$\begin{aligned} E_{nn}(\epsilon, t) &= \Sigma_o (s_{K2}^e(\epsilon) + s_{M2}^e(\epsilon)) + \Sigma_o s_{M2}^v(\epsilon)t \\ &\quad - \Sigma_o s_{K2}^e(\epsilon) \exp(-t/\tau_1) \left( \cosh(t/\tau_2) + \frac{\tau_2}{\tau_1} \sinh(t/\tau_2) \right) \\ &\quad + 2s_{K2}^v\tau_2(\epsilon) \exp(-t/\tau_1) \sinh(t/\tau_2) \end{aligned} \quad (5.127)$$

où on a mise :  $\tau_1 = 2a/c$  et  $\tau_2 = 2a/\sqrt{c^2 - 4ab}$  qui jouent le rôle des temps caractéristiques effectives. On valide ce résultat en comparant avec le résultat obtenu par la transformation inverse de Laplace-Carson de la loi de comportement réelle donnée par l'équation 5.83. En faite, en remplaçant respectivement  $\mathbf{E}^*$  et  $\Sigma^*$  dans cette équation par  $E_{nn}^*\mathbf{N} + E_{tt}^*\mathbf{T}$  et  $\Sigma_o$ , on obtient la relation suivante :

$$E_{nn}^* = \left( s_2^* + \frac{8\epsilon}{3} \frac{(1 - \nu^*)}{\mu^*} \right) \Sigma_o \quad (5.128)$$

où  $s_2^*$  est donnée par 5.73. Pour des modules viscoélastique du matériau sain et le paramètre d'endommagement donnée, on obtient alors  $E_{nn}^*$  qui est une fonction explicite de  $p$ . La transformation inverse de Laplace-Carson de ceux-ci donne  $E_{nn}(t)$ . La figure 5.8 montre une excellente validation pour différents niveaux d'endommagement entre les résultats donnés par (5.127) et (5.128). Ceci affirme que le modèle viscoélastique effectif de Burger qu'on a trouvé est une excellente approche du comportement réel du matériau fissuré étudié. Il permet en plus d'éviter les calculs mathématiques compliqués de la transformation inverse de Laplace-Carson. Pour cette raison, dans la suite, ce modèle effectif sera utilisé pour les calculs analytiques des problèmes sans propagation de fissures et des problèmes à l'état asymptotique (la taille de fissures tend vers la valeur limite).



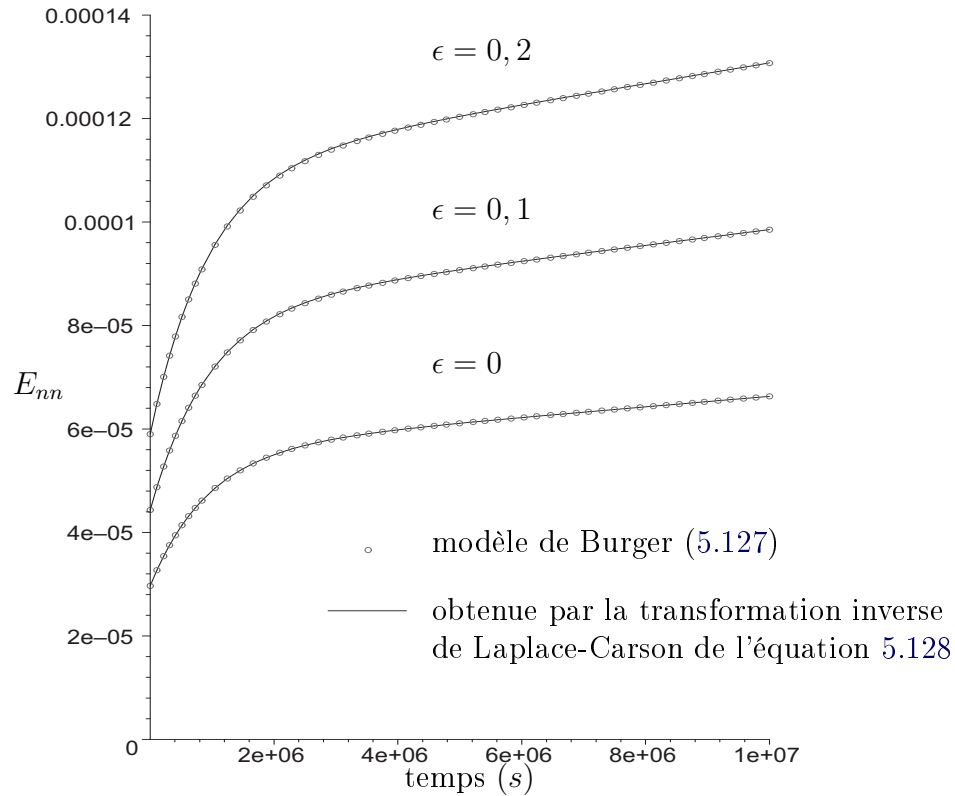


FIG. 5.8 – Validation du modèle de Burger par le problème de fluage en traction dans la direction de la symétrie pour différents niveaux d’endommagement : le cas des fissures parallèles. ( $\Sigma_0 = 1(MPa)$ , les modules viscoélastiques du matériau sain sont donnés par le tableau 2.1)

## 5.5 Etudes sur la “process zone”

La “process zone” est une zone endommagée autour de la pointe de la fissure. On revient maintenant au problème de poutre entaillée en flexion 3-points (figure 5.9) en considérant l’influence de la “process zone” sur le comportement macroscopique de la poutre. On suppose que le matériau de cette zone est isotrope et le paramètre d’endommagement est connu, on peut alors approcher le comportement *v.l.n.v.* de son matériau par un modèle de Burger effectif. On estime tous les caractéristiques viscoélastiques effectives en se basant sur des études ci-dessus. On suppose ainsi que la taille de la “process zone” est connue. On peut alors étudier en éléments finis le comportement macroscopique de la poutre.

On considère par exemple le matériau sain dont les caractéristiques viscoélastiques sont données par le tableau 2.1. Pour chaque valeur du paramètre

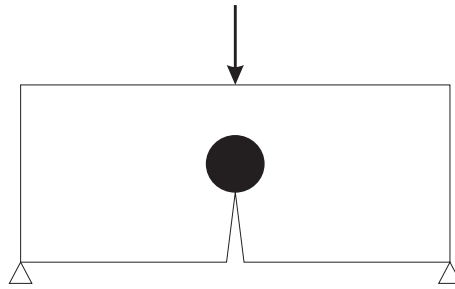


FIG. 5.9 – Poutre v.l.n.v. entaillé en flexion 3-points : existence une “process zone” en pointe de la fissure

d’endommagement  $\epsilon$ , on détermine les caractéristiques viscoélastiques de la “process zone” par les formules (5.35) et (5.64). Les résultats obtenus sont présentés par le tableau 5.1.

Parties	$k$ (GPa)	$\mu$ (GPa)	$\eta^s$ (GPa.s)	$\eta^d$ (GPa.s)
$\epsilon = 0$				
Maxwell	24,42	13,27	$22 \times 10^8$	$7,75 \times 10^8$
Kelvin	39,27	14,07	$15,2 \times 10^7$	$2,54 \times 10^7$
$\epsilon = 0,1$				
Maxwell	17,17	11,62	$15,38 \times 10^8$	$6,79 \times 10^8$
Kelvin	24,74	12,42	$8,46 \times 10^7$	$2,25 \times 10^7$
$\epsilon = 0,2$				
Maxwell	12,06	10,33	$10,74 \times 10^8$	$6,04 \times 10^8$
Kelvin	16,04	11,12	$5,10 \times 10^7$	$2,02 \times 10^7$

TAB. 5.1 – Modules viscoélastiques du béton correspondant au modèle de Burger

La dépendance du taux de restitution d’énergie en fonction du niveau d’endommagement et de la taille de la “process zone” est présentée par les figures 5.10 et 5.11. On peut observer que, pour même valeur de la charge, plus la taille et le

niveau d'endommagement de la "process zone" est importante, plus la valeur du taux de restitution d'énergie est grande.

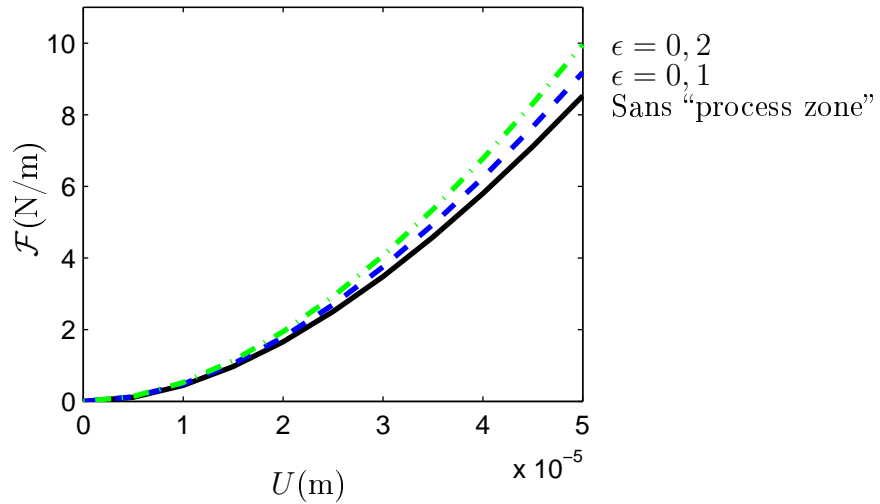


FIG. 5.10 – Influence du niveau d'endommagement de la "process zone" à la restitution d'énergie : ( $L = 1\text{m}$ ,  $h = 0,25\text{m}$ ,  $\ell = 0,1\text{m}$ , rayon de la process zone  $r = 0,05\text{m}$ ,  $\dot{U} = 0,1\text{nm/s}$ )

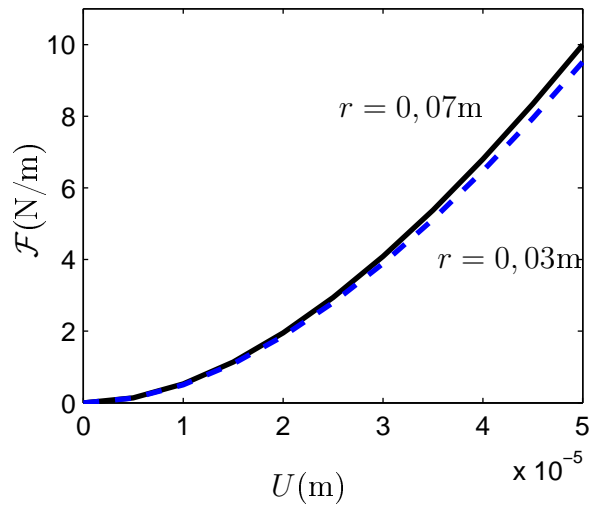


FIG. 5.11 – Influence de la taille de la "process zone" à la restitution d'énergie : ( $L = 1\text{m}$ ,  $h = 0,25\text{m}$ ,  $\ell = 0,1\text{m}$ ,  $\epsilon = 0,2$ ,  $\dot{U} = 0,1\text{nm/s}$ ,  $r$  est le rayon de la "process zone")

On regarde maintenant la force au pic, c'est à dire la force duale du paramètre

de chargement cinématique  $U$  lorsque  $\mathcal{F}$  atteint la valeur critique  $G_c$  qu'on suppose constante. Les résultats sont présentés dans les tableaux 5.2 et 5.3. On peut observer que, plus le niveau d'endommagement et la taille de la “process zone” sont grand, plus la force au pic est petite.

$\epsilon$	0	0,1	0,2
$F_{pic}(N)$	11343	10736	9972

TAB. 5.2 – Influence de la “process zone” à la force au pic ( $L = 1\text{m}$ ,  $h = 0,25\text{m}$ ,  $\ell_o = 0,1\text{m}$ ,  $T = 0,125\text{m}$ ,  $r = 0,03\text{m}$ ,  $\dot{U} = 0,1\text{nm/s}$ )

$r(\text{m})$	0,03	0,05	0,07
$F_{pic}(N)$	9972	9881	9572

TAB. 5.3 – Influence de la “process zone” à la force au pic ( $L = 1\text{m}$ ,  $h = 0,25\text{m}$ ,  $\ell = 0,1\text{m}$ ,  $T = 0,125\text{m}$ ,  $\epsilon = 0,2$ ,  $\dot{U} = 0,1\text{nm/s}$ )

On aborde maintenant la question sur la dépendance de la force au pic à la vitesse de chargement du problème de poutre entaillée en flexion 3-points. Des essais réalisés ont montré que, plus la vitesse de chargement cinématique  $\dot{U}$  est faible, plus la force au pic  $F_{pic}$  est petite. Cependant, les calculs numériques (voir la figure 3.17) donnent des valeurs de la force au pic qui sont égales pour différentes valeurs de  $\dot{U}$ . Cette erreur est tout d'abord expliquée par la considération que  $G_f$  est une constante du matériau, qui est en réalité dépend de la vitesse de chargement [40]. On essaie maintenant à expliquer la dépendance de  $F_{pic}$  au  $\dot{U}$  en considérant le rôle de la “process zone”. On suppose que la taille et le niveau d'endommagement de la process zone ne dépendent pas de la vitesse de chargement ( $r$  et  $\dot{U}$  sont donnés). On fait les calculs pour le matériau dont les caractéristiques sont données par le tableau 2.1. Les résultats sont présentés par le tableau 5.4. On observe que, plus la vitesse de chargement est faible, plus la force au pic est petite. Ce résultat coïncide qualitativement avec ce qui est montré par des essais.

## 5.6 Conclusions

Dans ce chapitre, on a réussi à établir un modèle de Burger pour modéliser le comportement effectif des matériaux viscoélastiques microfissurés. En se basant sur les études de Griffith, on considère la fissure comme une disque plane. On peut alors écrire une relation linéaire entre la déformation macroscopique, la contrainte macroscopique et les ouvertures des fissures (voir (5.9), (5.13) et (5.14)). On a pu alors utiliser la transformation de Laplace-Carson pour estimer le tenseur de rigidité effective apparente dans l'espace transformée.

On considère tout d'abord le problème isotrope. En considérant un chargement sphérique, on a estimé le module de compression volumique effectif apparente dans l'espace de Laplace-Carson (voir (5.20)). On a supposé ensuite que le comportement viscoélastique du matériau endommagé est modélisé par un modèle effectif de Burger. Dans l'espace de Laplace-Carson, on a identifié le module de compression volumique estimé avec le module du modèle à court terme et à long terme, puis on a déterminé tous les paramètres sphériques du modèle (voir (5.35)). De même façons, en considérant un chargement déviatorique, on a déterminé tous les paramètres déviatoriques du modèle (voir (5.64)). On a observé que, tous les modules viscoélastiques effectifs sont les fonctions décroissantes du paramètre d'endommagement (voir la figure 5.4) [37]. Bien qu'on a fait les identifications à court et à long terme, par un exemple de fluage uniaxiale d'un cylindre, la figure 5.5 a montré que, le modèle donne des résultats qui collent parfaitement avec les résultats estimés non seulement à court et à long terme mais ainsi à moyen terme.

On a développé ensuite les études ci-dessus pour les cas isotrope transverse. Les tenseurs de rigidité et de souplesse sont décomposés dans la base de Walpole. On a au totale 48 modules effectives du modèle à déterminer.

$\dot{U}(\text{nm/s})$	0,01	0,1	1	10
$F_{pic}(\text{N})$	9624	9652	9781	9800

TAB. 5.4 – Influence de la vitesse de chargement, en considérant la “process zone”, à la force au pic ( $L = 1\text{m}$ ,  $h = 0,25\text{m}$ ,  $\ell_o = 0,1\text{m}$ ,  $T = 0,125\text{m}$ ,  $r = 0,07\text{m}$ ,  $\epsilon = 0,2$ )

---

Cependant, 32 modules sont identiques à ceux du matériau sain. Les autres sont décroissantes en fonction de  $\epsilon$  (voir la figure 5.7). Une excellente validation du modèle par rapport avec les résultats estimés est ainsi présentée par la figure 5.8.

Ces études sont ensuite utilisées pour étudier le problème de flexion d'une poutre 3-points en considérant la "process zone". On a montré clairement que, la restitution d'énergie dépend de la taille et du niveau d'endommagement de cette zone. Plus la taille et le niveau d'endommagement sont grands, plus la restitution d'énergie est faible. On a montré ainsi que, la force au pic dépend de la vitesse de chargement même si  $G_f$  est une constante du matériau, contrairement au problème sans "process zone".



# Approche numérique de l'endommagement dans un milieu viscoélastique

---

## Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>122</b>
<b>6.2</b>	<b>Comportement effectif d'un milieu microfissuré sans propagation de fissures</b> . . . . .	<b>123</b>
6.2.1	Comportement élastique linéaire . . . . .	124
6.2.2	Approche numérique dans le cas visqueux . . . . .	130
<b>6.3</b>	<b>Etudes analytique et numérique du taux de restitution de l'énergie</b> . . . . .	<b>134</b>
6.3.1	Analyse théorique du taux de restitution d'énergie . . . . .	135
6.3.2	Algorithme pour le calcul numérique du taux de restitution de l'énergie . . . . .	138
<b>6.4</b>	<b>Propagation de microfissures dans un milieu viscoélastique : analyses théorique et numérique</b> . . . . .	<b>140</b>
6.4.1	Algorithme des calculs numériques . . . . .	141
6.4.2	Comparaison de l'algorithme numérique avec le résultat analytique du cas élastique . . . . .	141
6.4.3	Vitesse critique de charge et endommagement asymptotique du milieu . . . . .	143
<b>6.5</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>146</b>

---

Dans le cas d'un milieu viscoélastique microfissuré, l'approche numérique est indispensable pour résoudre le problème de propagation de fissure. La méthode pas à pas est utilisée pour traiter, en éléments finis, une motif morphologie représentatif (*m.m.r.*) du milieu. Le calcul du comportement effectif du milieu dans le cas sans propagation de microfissures montrera une bonne validation avec le



modèle effectif de Burger obtenu dans les études analytiques précédentes. On développera ainsi la notion de la vitesse critique de la charge et de la longueur asymptotique.

## 6.1 Introduction

En l'absence de propagation de fissures, la transformation de Laplace-Carson nous a permis de nous ramener formellement à un problème d'élasticité hétérogène. L'homogénéisation nous permet d'identifier un modèle de Burger effectif pour le comportement viscoélastique d'un milieu microfissuré (voir le chapitre 5). Cependant, la transformation de Laplace-Carson n'est pas utilisable pour le cas où les fissures se propagent. On a donc choisi de développer une approche numérique pour prévoir la propagation de microfissures, en s'appuyant sur les développements du chapitre 3.

Ce chapitre vise donc à développer un outil numérique basé sur la méthode des éléments finis permettant la détermination du comportement effectif d'un matériau microfissuré viscoélastique linéaire avec ou sans propagation des fissures. Pour minimiser le temps de calcul, on ne cherche pas à décrire un *v.e.r.* avec un système de fissures "réel". La démarche proposée s'inscrit dans le cadre de l'utilisation du concept de motif morphologique représentatif (*m.m.r.*).

La notion de motif morphologique représentatif a été initialement introduite et développée par A. Zaoui et son équipe (voir par exemple [6], [5], [48], [53]). L'idée consiste à combiner une description déterministe de motifs composites bien choisis, repérés dans la microstructure, et une représentation statistique de leur distribution dans le *v.e.r.*. Par exemple, pour un milieu microfissuré, le modèle le plus simple consiste à envisager un volume sphérique contenant une fissure unique dont le rayon soit calculé à partir de la densité de microfissures. On gère ensuite de façon statistique l'information relative à l'orientation des fissures. Par la suite, on peut introduire au besoin une anisotropie dans la distribution spatiale des microfissures en remplaçant le volume sphérique par un volume ellipsoïdal, dans l'esprit de l'approche de [11]. Dans la suite, le *m.m.r.* désignera une sphère ou un ellipsoïde comportant une fissure unique. On se limitera ici aux cas où les fissures sont spatialement distribuées et orientées de façon isotrope ou isotrope transverse (fissures parallèles).

Techniquement, la démarche pour la détermination du comportement macroscopique d'un milieu décrit par *m.m.r.* est assez proche de celle qu'on utilise dans le cadre des schémas d'homogénéisation de type "Eshelby". Chaque *m.m.r.* est plongé dans un milieu homogène infini (en pratique suffisamment grand) dont les caractéristiques (en l'occurrence viscoélastiques) sont celles de la matrice du milieu réel. Les conditions aux limites en déformation uniforme imposées "à l'infini" sont déterminées de façon à ce que la moyenne des déformations sur les *m.m.r.* mis en œuvre soit égale à la déformation macroscopique du problème réel. On est ainsi ramené au problème de la propagation d'une fissure unique étudié dans le chapitre 3. En particulier, le calcul numérique est réalisé explicitement pas à pas grâce à l'équation incrémentale de la loi de comportement donnée par (2.29).

On examine d'abord le milieu microfissuré sans propagation. Dans le cas d'un matériau élastique, on compare le résultat de la méthode mettant en œuvre des *m.m.r.* sphériques avec l'estimation analytique de Ponte Castaneda et Willis [11]. Dans le cas d'une distribution de fissures parallèle spatialement à symétrie ellipsoïdale, on teste l'effet du rapport d'aspect de l'ellipsoïde en question en se comparant notamment à l'estimation analytique de Mori-Tanaka. On aborde ensuite le matériau viscoélastique contenant des microfissures et l'on confronte les résultats obtenus avec ce que l'on obtient en utilisant le modèle viscoélastique effectif de Burger établi au chapitre 5.

On s'attaque ensuite au comportement effectif du matériau en régime de propagation de fissures, en valorisant l'approche énergétique présentée dans le chapitre 3. C'est l'occasion de transposer dans le contexte de l'endommagement des concepts introduits lors de l'étude de la fissure unique, comme par exemple la notion de vitesse critique.

## **6.2 Comportement effectif d'un milieu microfissuré sans propagation de fissures**

La loi de comportement effective d'un milieu *v.l.n.v.* microfissuré a déjà été étudiée au chapitre 5 dans le cadre d'une méthode d'homogénéisation de type "approche diluée en contraintes". Celle-ci s'est concrétisée par un modèle de comportement viscoélastique effectif de Burger. On va maintenant développer

la méthode numérique évoquée à la section 6.1 et puis comparer les résultats des deux approches. Dans cette section, on se limite au cas où il n'y a pas de propagation de fissures.

Comme on l'a annoncé, le calcul en éléments finis ne vise pas à identifier de façon directe la réponse mécanique d'un *v.e.r.* comportant un système des microfissures déterministe. Dans le cadre de l'idée de motif morphologique représentatif *m.m.r.* [52], on sélectionne un motif typique dans la microstructure qui joue ensuite le rôle d'inhomogénéité dans un problème semblable à celui d'Eshelby. La figure 6.1 présente un exemple de *m.m.r.*.

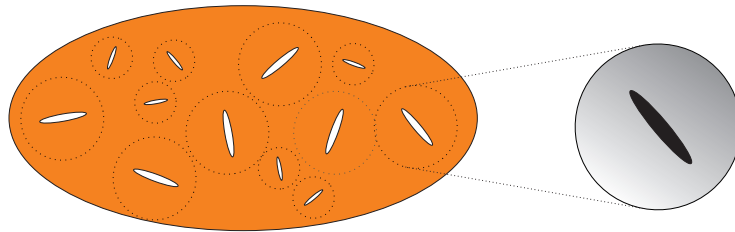


FIG. 6.1 – Motif morphologie représentatif

## 6.2.1 Comportement élastique linéaire

On teste d'abord la méthode dans le cas de l'élasticité linéaire, successivement dans la situation de l'isotropie, puis dans celle de l'isotropie transverse.

### 6.2.1.1 Module de compression volumique élastique effectif

On commence par étudier un milieu *élastique* microfissuré isotrope. Pour rendre compte de l'isotropie de distribution spatiale, on considère un motif de forme sphérique. De plus, on se donne une répartition statistique isotrope de l'orientation.

Notant comme précédemment  $\epsilon$  le paramètre de densité de fissures  $N\ell^3$ <sup>1</sup>, on a vu au chapitre 4 que le module de compression volumique effectif du milieu  $k(\epsilon)$  peut être estimé par des approches analytiques classiques telles que l'estimation diluée, l'estimation de Mori-Tanaka et l'estimation de Ponte Casteneda-Willis. De façon alternative, le calcul de  $k$  par la méthode numérique

---

<sup>1</sup> $\ell$  est le rayon de la fissure.

en éléments finis consiste à se donner un motif sphérique de rayon  $R$  contenant une fissure unique. Le rayon en question est déterminé conformément aux définitions de la densité de fissures  $N$  et de  $\epsilon$  :

$$R = \ell \left( \frac{3}{4\pi\epsilon} \right)^{1/3} \quad (6.1)$$

Une première approche de type Voigt consisterait à imposer directement un champ des déplacement  $\mathbf{E} \cdot \underline{z}$ <sup>2</sup> sur le bord du *m.m.r.* et calculer la contrainte macroscopique  $\Sigma$  en prenant la moyenne du champ de contrainte dans le *m.m.r.* par (2.42). On peut cependant vérifier que ce choix surestime considérablement la raideur effective, dès lors que la condition  $\epsilon \ll 1$  n'est plus satisfaite.

Une deuxième approche inspirée du schéma de Mori-Tanaka consiste à plonger le *m.m.r.* dans une matrice qui est le matériau sain du milieu étudié (voir la figure 6.2 à gauche). On note  $\mathcal{O}$  le milieu fictif formé par le *m.m.r.* et

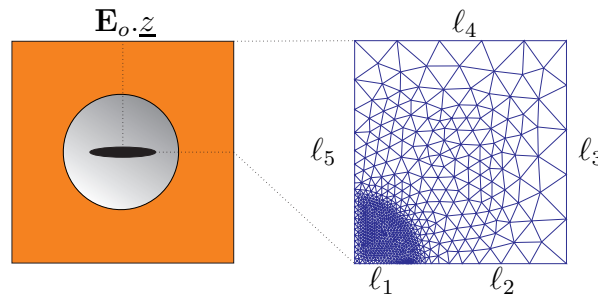


FIG. 6.2 – (a) Domain équivalent dans le calcul numérique ; (b) Maillage de la section de calcul en mode axis symétrique

la matrice qui l'entoure. Destiné au calcul numérique, ses dimensions sont finies par nature. Pour éviter les effets de bord, la taille de  $\mathcal{O}$  doit être suffisamment grande par rapport à la taille de *m.m.r.*. Par ailleurs, d'une manière générale, il faut garder en mémoire qu'on doit prendre en compte une distribution isotrope des orientations de fissures.

Pour déterminer le module de compression effectif, il suffit d'examiner la réponse du schéma d'homogénéisation à un chargement isotrope. Sur le bord de  $\mathcal{O}$  on impose un champ des déplacements de la forme  $\mathbf{E}_o \cdot \underline{z}$  où  $\mathbf{E}_o = E_o \mathbf{1}$

<sup>2</sup> $\mathbf{E}$  est la déformation macroscopique imposée et  $\underline{z}$  est le vecteur position du point où on impose le déplacement.

n'est généralement pas égale à  $\mathbf{E}$ .  $E_o$  est choisi pour assurer que la moyenne des déformations dans les *m.m.r.* (compte tenu des différentes orientations) est égale à  $\mathbf{E} = E\mathbf{1}$ .

Sur le plan pratique, on impose tout d'abord une déformation unité (déplacement  $\underline{\xi}$  égal à  $\underline{z}$ ) sur le bord de  $\mathcal{O}$ . La déformation moyenne sur le *m.m.r.* est déduite de la relation homologue de (5.9) :

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{|\omega|} \left( \int_{\omega^s} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_C [\underline{\xi}]^s \otimes \mathbf{n} dS \right) \quad (6.2)$$

où  $\omega$  désigne le *m.m.r.*,  $\omega^s$  la phase solide du *m.m.r.* et  $C$  la fissure. Compte tenu des symétries du problème, elle est de la forme

$$\mathbf{E}_1 = E_{tt}^1 (\mathbf{1} - \underline{n} \otimes \underline{n}) + E_{nn}^1 \underline{n} \otimes \underline{n} \quad (6.3)$$

où  $\underline{n}$  désigne la normale à la fissure. La moyenne sur les orientations de la fissure est clairement le tenseur sphérique  $E_1 \mathbf{1}$  avec

$$E_1 = \frac{2E_{tt}^1 + E_{nn}^1}{3} \quad (6.4)$$

La déformation volumique moyenne  $3E_1$  dans le *m.m.r.* est évidemment indépendante de l'orientation de la fissure dans le *m.m.r.*. Celle-ci peut être déterminée directement par (6.5)

$$3E_1 = \frac{1}{|\omega|} \left( \int_{\omega^s} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_C [\xi_n] dS \right) \quad (6.5)$$

où  $[\xi_n]$  est l'ouverture de la fissure. Ce calcul tient compte de la contribution de l'ouverture de la fissure par le terme en  $[\xi_n]$ . Techniquement, ce dernier est obtenu en évaluant le travail d'une pression unité fictive dans le déplacement des lèvres de la fissure, soit  $\underline{P}^t \cdot \underline{U}$ , où  $\underline{P}$  est le vecteur des forces nodales associé à la pression et  $\underline{U}$  celui des déplacements.

La moyenne des contraintes dans le *m.m.r.* en réponse au chargement unité a la même structure que la déformation moyenne (voir (6.2)) :

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = \Sigma_{tt}^1 (\mathbf{1} - \underline{n} \otimes \underline{n}) + \Sigma_{nn}^1 \underline{n} \otimes \underline{n} \quad (6.6)$$

et la moyenne sur les orientations donne :

$$\langle \boldsymbol{\Sigma}_1 \rangle = \Sigma_1 \mathbf{1} \quad \text{avec} \quad \Sigma_1 = \frac{2\Sigma_{tt}^1 + \Sigma_{nn}^1}{3} \quad (6.7)$$

Compte tenu de la définition de  $E_1$ , il est facile de voir que  $E_o$  n'est autre que le quotient  $E/E_1$ . Connaissant  $E_o$ , on peut maintenant déterminer la contrainte macroscopique résultant de la moyenne sur tous les *m.m.r.* (resp. toutes les orientations) sous la forme  $\Sigma \mathbf{1}$  avec  $\Sigma = E_o \Sigma_1$ , le champ des contraintes et puis la contrainte moyenne  $\Sigma$  de *m.m.r.*. Le module de compression volumique est finalement calculé par :

$$k(\epsilon) = \frac{\Sigma}{3E} \quad (6.8)$$

Un exemple de calcul numérique est réalisé à l'aide du maillage présenté à la figure 6.2. Ici, grâce à la symétrie du problème, on effectue le calcul sur la moitié supérieure de  $\Omega$  en mode axisymétrique. La fissure est modélisée par un segment libre en déplacement  $\ell_1$ . Le côté  $\ell_2$  est fixé en déplacement vertical et le côté  $\ell_5$  est fixé en déplacement radial. Le déplacement est imposé sur les contours  $\ell_3$  et  $\ell_4$ . La figure 6.3 présente les résultats de l'approche numérique en la comparant avec les estimations analytiques issues de (4.42), (4.51) et (4.58). On observe que le calcul numérique donne des résultats en parfaite cohérence avec l'estimation de Ponte Castaneda et Willis.

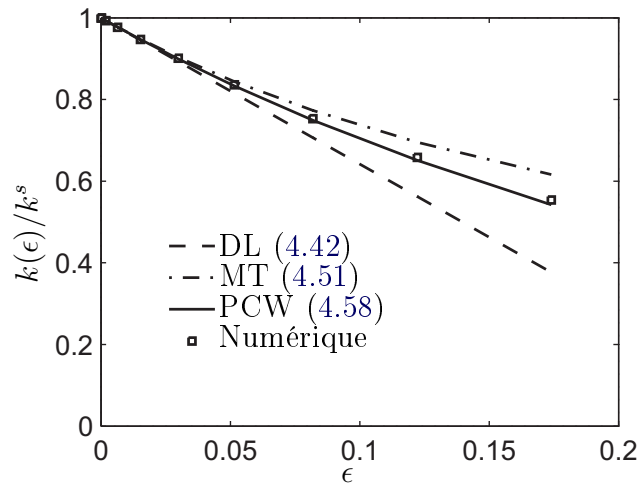


FIG. 6.3 – Module de compression volumique effectif normalisé en fonction du paramètre d'endommagement : cas d'un matériau élastique linéaire fissuré isotrope (coefficient de Poisson du matériau sain  $\nu^s = 0,27$ )

### 6.2.1.2 Module d'Young longitudinal et coefficient de Poisson : cas isotrope transverse

On continue l'étude numérique avec le cas isotrope transverse correspondant à une distribution de microfissures parallèles. On considère par exemple une éprouvette contenant des microfissures perpendiculaires à l'axe. L'éprouvette est soumise à une traction simple, correspondant à un état de contrainte macroscopique est notée  $\Sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ . La déformation longitudinale duale est notée  $E$ . La relation

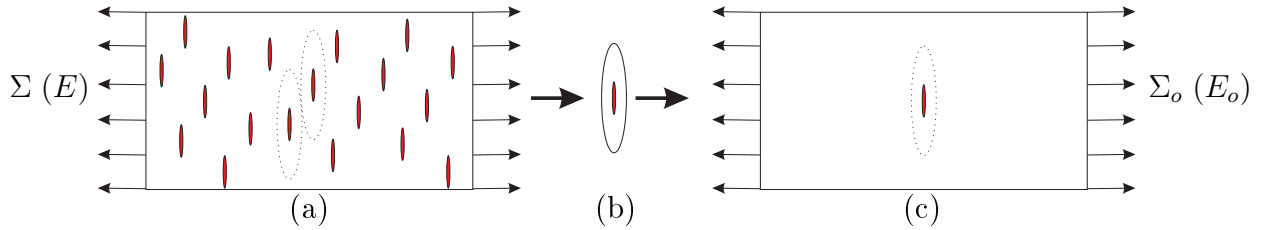


FIG. 6.4 – (a) La poutre microfissurée en traction, (b) le *m.m.r.*, (c) le modèle équivalent

entre ces deux grandeurs s'écrit :

$$E = \frac{\Sigma}{E_{11}(\epsilon)} \quad (6.9)$$

où  $E_{11}(\epsilon)$  est le module d'Young longitudinal effectif de la poutre dont des différentes estimations analytiques sont données par (4.38), (4.48) et (4.60).

De façon alternative, le calcul numérique est réalisé sur un *m.m.r.* comportant à nouveau une fissure unique, qui est un ellipsoïde de révolution, ayant même axe de symétrie que la fissure. Notons  $X$  le rapport d'aspect de ce dernier<sup>3</sup> (voir le lien entre  $X$  et la notion de symétrie ellipsoïdale dans [11]). On note  $R$  le rayon de l'ellipsoïde dans le plan de la fissure et  $R_v = RX$  désigne donc la demi-longueur selon l'axe de révolution. Les dimensions du *m.m.r.* sont reliées par :

$$R = \ell \left( \frac{3}{4\pi\epsilon X} \right)^{1/3} ; \quad R_v = RX \quad (6.10)$$

Comme précédemment,  $\mathcal{O}$  désigne le milieu fictif formé par le *m.m.r.* et la matrice dans laquelle il est plongé. Sur le bord de  $\mathcal{O}$ , illustrons l'usage de conditions aux limites uniformes en contrainte. On impose sur  $\partial\mathcal{O}$  une traction unité  $\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$  où  $\underline{e}_z$  est le vecteur unité de l'axe de l'éprouvette (resp. la normale aux fissures). On

<sup>3</sup> $X < 1$  (resp.  $X > 1$ ) pour un ellipsoïde aplati (resp. allongé).

calcule la contrainte longitudinale moyenne  $\Sigma_1$  mobilisée dans le *m.m.r.* par :

$$\Sigma_1 = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega^s} \sigma_{zz}^1 d\omega \quad (6.11)$$

Pour obtenir une contrainte axiale moyenne égale à  $\Sigma$ , la contrainte à imposer sur le bord  $\partial\mathcal{O}$  est donc  $\Sigma_o \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ , avec en divisant  $\Sigma_o = \Sigma/\Sigma_1$ .

Connaissant  $\Sigma_o$ , on peut déterminer le champ des déformations et puis la déformation longitudinale moyenne  $E_z$  de *m.m.r.* par :

$$E_z = \Sigma_o \left( \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega^s} \varepsilon_{zz}^1 d\omega + P_z U_z^1 \right) \quad (6.12)$$

où l'indice 1 renvoie à la réponse au chargement unité sur  $\partial\mathcal{O}$ .  $U_z^1$  et  $P_z$  sont respectivement la composante dans la direction  $\underline{e}_z$  du vecteur des déplacements nodaux et du vecteur des forces nodales associé à la pression fictive. Le module de Young longitudinal effectif est finalement calculé par :  $E_{11}(\epsilon) = \Sigma/E_z$ .

De même, on peut aussi déterminer la déformation latérale moyenne  $E_r$  du *m.m.r.* par :

$$E_r = \frac{\int_{\omega^s} \varepsilon_{rr} d\omega}{|\omega|} \quad (6.13)$$

où  $U_r$  et  $P_r$  sont respectivement les composantes dans la direction latérale  $\underline{r}$  du vecteur des forces nodales fictives et du vecteur des déplacements nodaux. Le coefficient effectif de Poisson est calculé par :  $\nu_{12}(\epsilon) = -E_r/E_z$ .

Grâce à la symétrie du problème, on réalise le calcul sur la moitié supérieure de  $\Omega$  dans mode axis symétrique. La fissure est donc un segment libre en déplacement. Le schéma 6.5 compare les résultats numériques avec l'estimation de Mori-Tanaka (voir (4.48)). On peut observer que, plus la distribution est alignée, plus l'approche numérique reposant sur le motif morphologique représentatif ellipsoïdal (avec  $X \rightarrow 0$ ) s'approche du résultat du modèle analytique de Mori-Tanaka (resp. dilué en contrainte). Ainsi, pour  $X = 1/5$ , on constate que les deux démarches fournissent des modélisations très voisines de l'endommagement.

On a ainsi vérifié numériquement que  $\nu_{12}(\epsilon)/E_{11}(\epsilon) = \nu^s/E^s$  pour différentes valeurs de  $X$ . Ce résultat est parfaitement cohérent avec ce qui est montré analytiquement dans le chapitre 4 (voir (4.39), (4.49) et (4.61))



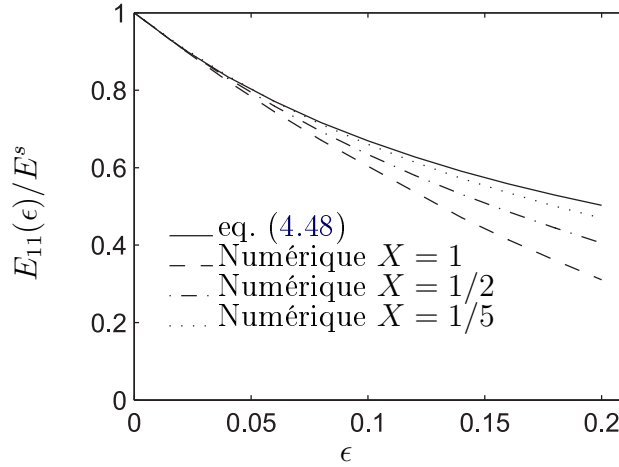


FIG. 6.5 – Module d'Young longitudinal normalisé de la poutre le cas élastique en fonction du paramètre d'endommagement ( $\nu^s = 0,27$ )

## 6.2.2 Approche numérique dans le cas visqueux

On se place maintenant dans le cas d'un matériau *v.l.n.v.*. On envisage deux types différents de chargement et de nature des conditions aux limites sur le *v.e.r.*.

### 6.2.2.1 Fluage d'une poutre viscoélastique microfissurée

On considère une poutre *v.l.n.v.* microfissurée par des fissures parallèles. Le *m.m.r.* est identique à celui utilisé à la section 6.2.1.2.

La poutre est d'abord soumise à une contrainte de traction uniaxiale dans la direction de la normale au plan des fissures, notée ici  $\underline{e}_z$ . En d'autres termes, pour  $t > 0$ , la contrainte macroscopique imposée s'écrit  $\underline{\Sigma} = \Sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ . En utilisant le modèle effectif de Burger, on peut déterminer analytiquement une estimation de la déformation longitudinale effective de la poutre par l'équation (5.127). Ce résultat sera confronté ultérieurement à celui de l'approche numérique qu'on se propose de décrire dans ce qui suit.

Pour mettre en œuvre celle-ci, la question centrale est celle de la détermination de l'histoire de la contrainte auxiliaire  $\underline{\Sigma}_o(t)$  qu'il convient d'imposer sur le bord de  $\mathcal{O}$  pour que la valeur moyenne de la contrainte locale dans le *m.m.r.* soit bien égale à  $\underline{\Sigma}$ . Même dans le cas où  $\underline{\Sigma}$  est une constante (pour  $t > 0$ ), c'est-à-dire que le chargement réel est un échelon de contrainte, on doit

s'attendre à ce que  $\Sigma_o$  varie durant le temps de calcul en raison des déformations de fluage. D'autre part, rien ne garantit *a priori* que la structure tensorielle de  $\Sigma_o$  soit identique à celle de  $\Sigma$ , c'est-à-dire uniaxiale. En première approche, on utilisera néanmoins cette hypothèse. La valeur initiale (à  $t = 0^+$ ) de  $\Sigma_o$  est déterminée comme dans le problème élastique ci-dessus. On suppose maintenant qu'on connaît  $\Sigma_o(t)$ , et l'on cherche à déterminer  $\Sigma_o(t + dt)$ .

Rappelons l'équation incrémentale (2.29), propre au comportement visco-élastique, qui peut être écrite sous la forme des variations entre deux instants  $t$  et  $t + dt$  de la contrainte et de la déformation locales :

$$\boldsymbol{\sigma}(t + dt) - \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}(t + dt) - \boldsymbol{\varepsilon}(t)) + \boldsymbol{\sigma}^q(t) \quad (6.14)$$

où l'on a noté  $\boldsymbol{\sigma}^q(t) = \boldsymbol{\sigma}^p(t) - \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(t)$  qui est déterminée en fonction des contraintes et des déformations à  $t$ . Cette équation est écrite sur la totalité de  $\mathcal{O}$ . Le problème de la réponse incrémentale est donc un problème d'élasticité linéaire à deux paramètres de chargement :

- les conditions aux limites sur le bord  $\partial\mathcal{O}$  associé à la contrainte auxiliaire  $d\Sigma_o$  (supposée de la forme  $d\Sigma_o \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ );
- le champ  $\boldsymbol{\sigma}^q(t)$  de précontrainte. Il n'est pas *a priori* autoéquilibré mais qui possède la symétrie cylindrique.

La réponse incrémentale locale est donc la somme de deux contributions, associées respectivement à chacune des deux composantes du chargement. L'inconnue du problème est le scalaire  $d\Sigma_o$ .

Notons  $\delta\boldsymbol{\sigma}^q$  le champ local dans le *m.m.r.* induit par le champ de précontrainte  $\boldsymbol{\sigma}^q(t)$ , avec des conditions de bord libre sur  $\partial\mathcal{O}$ <sup>4</sup>. Notons encore  $\boldsymbol{\sigma}^1$  le champ local dans le *m.m.r.* induit par une traction unité selon  $\underline{e}_z$  sur  $\partial\mathcal{O}$ . Ce dernier est la solution d'un calcul élastique linéaire avec le tenseur d'élasticité  $\mathbb{C}$  de (2.30). Les valeurs moyennes sur le *m.m.r.* de ces champs sont aisément calculées, et notées ci-après  $\delta\Sigma^q$  et  $\Sigma^1$ . Comme on admet que le chargement auxiliaire est uniaxial, le problème consiste à déterminer l'amplitude  $d\Sigma_o$  telle que la moyenne de  $d\sigma_{zz}$  sur le *m.m.r.* soit égale à  $d\Sigma$ . Cette condition se traduit par l'équation :

$$d\Sigma = d\Sigma_o \Sigma_{zz}^1 + \delta\Sigma_{zz}^q \quad (6.15)$$

qui permet de déterminer  $d\Sigma_o$  :

$$d\Sigma_o = \frac{d\Sigma - \delta\Sigma_{zz}^q}{\Sigma_{zz}^1} \quad (6.16)$$

---

<sup>4</sup>Dans la pratique, le calcul effectué valorise la symétrie cylindrique

On peut vérifier que la moyenne des contraintes dans la *m.m.r.* a bien une structure uniaxiale (à la tolérance numérique près), ce qui justifie *a posteriori* l'hypothèse formulée sur  $\Sigma_o$ .

Connaissant  $d\Sigma_o(t)$ , on détermine la variation du champ des déplacements nodaux  $d\underline{U}$  et puis le champ des déformations  $\underline{\varepsilon}(t + dt)$ . La déformation macroscopique duale de  $\Sigma(t + dt)$  est ensuite déterminée en prenant la moyenne de  $\varepsilon_{zz}(t + dt)$  dans la *m.m.r.* en tenant compte l'ouverture de la fissure (voir (6.12)).

Le schéma (6.6) présente la confrontation du calcul numérique avec le modèle effectif de Burger pour différentes valeurs du paramètre  $X$  de distribution spatiale. Rappelons à ce sujet que le modèle de Burger "endommagé" a été déterminé avec un schéma dilué en contraintes qui coïncide (dans le cas élastique linéaire) avec un schéma de Mori-Tanaka. Comme on pouvait s'y attendre, on peut observer que, plus la distribution est alignée ( $X \rightarrow 0$ ), plus les résultats numériques s'approchent de ce que prévoit le modèle analytique de Burger. Ainsi, pour  $X = 1/5$ , on constate déjà une excellente concordance entre les deux approches. On retrouve ici un commentaire de même nature que celui formulé à la fin de la section 6.2.1.2.

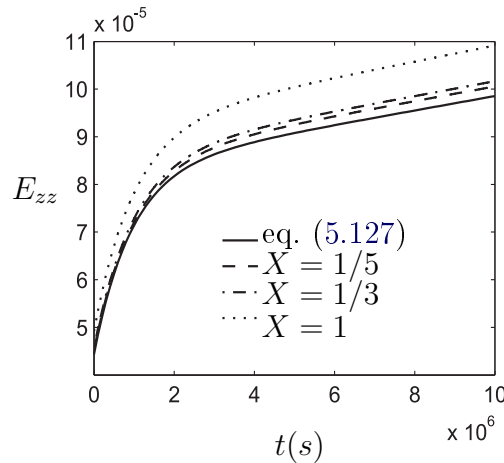


FIG. 6.6 – Calcul numérique et analytique du fluage de la poutre ( $\epsilon = 0, 1$ ,  $\Sigma = 1\text{MPa}$ , les caractéristiques viscoélastiques sont données par le tableau 2.1)

**6.2.2.2 Vitesse de déformation imposée**

On continue l'étude de traction d'une poutre *v.l.n.v.* microfissurée isotrope transverse pour une vitesse de déformation imposée pour montrer l'existence d'une force asymptotique. Cette étude est une continuation de l'étude d'une poutre en flexion à trois point qu'on a évoquée dans le chapitre 3. La poutre est mise sous une traction en déformation macroscopique imposée dont la vitesse est constante  $E = \dot{E}t$ . On suppose qu'il y a pas de propagation de fissures. Alors on peut utiliser le modèle effectif de Burger pour déterminer la relation macroscopique entre la contrainte  $\Sigma(t)$  et la déformation  $E(t)$  pour chaque paramètre d'endommagement  $\epsilon$  et chaque vitesse de déformation imposée  $\dot{E}$ . Dans l'espace de Laplace-Carson, cette relation s'écrit :

$$\Sigma^*(\epsilon, p) = F^*(\epsilon, p)\dot{E}/p \quad (6.17)$$

où  $F^*(\epsilon, p)$  le "module d'Young longitudinal" apparent dans l'espace de Laplace-Carson qui est l'inverse de  $s_2^*(\epsilon, p)$  et qui est déterminée par :

$$\frac{1}{F^*(\epsilon, p)} = \frac{1}{F_M^e(\epsilon)} + \frac{1}{pF_M^v(\epsilon)} + \frac{1}{F_K^e(\epsilon) + pF_K^v(\epsilon)} \quad (6.18)$$

où  $F_\beta^\alpha(\epsilon) = 1/s_{\beta_2}^\alpha(\epsilon)$  avec  $\alpha = e$  ou  $v$  et  $\beta = M$  ou  $K$ ,  $s_{\beta_2}^\alpha(\epsilon)$  sont estimées dans le chapitre 5 (voir (5.99)). Alors, en connaissant  $\epsilon$ , on obtient par (6.17) la contrainte macroscopique transformée  $\Sigma^*(p)$  qui est une fonction explicite de  $p$ .  $\Sigma(t)$  est obtenue par une transformation inverse de Laplace-Carson de  $\Sigma^*(p)$ . De plus, en prenant la limite quand  $p \rightarrow 0$  on obtient :

$$\Sigma^\infty(\epsilon) = \lim_{p \rightarrow 0} \Sigma^*(\epsilon, p) = F_M^v(\epsilon)\dot{E} \quad (6.19)$$

Dans le calcul numérique, pour chaque pas de temps de calcul  $dt$  où un pas de déformation  $dE = \dot{E}dt$ , on cherche à déterminer le pas de déformation du problème équivalent  $dE_o$  pour assurer que la déformation moyenne dans la *m.m.r* est égale à  $dE$ . Supposons qu'à chaque instant  $t$ , on connaît déjà la valeur de  $dE_o(t)$ , la déformation moyenne dans le *m.m.r* est donc déterminée par :

$$dE = E^q(t) + dE_o(t)E_1 \quad (6.20)$$

où  $E^q(t)$  et  $E_1$  sont respectivement les déformations de traction moyennes de la *m.m.r.* due à  $\sigma^q(t)$  et à une déformation de traction unitaire. Alors on peut déterminer  $dE_o(t)$  par :

$$dE_o(t) = \frac{dE - E^q(t)}{E_1} \quad (6.21)$$

Connaissant  $dE_o(t)$ , on peut déterminer les champs des déplacements et des contraintes  $\sigma(t)$  qui permet de déterminer la contrainte macroscopique  $\Sigma_{zz}(t)$  en prenant la moyenne de  $\sigma_{zz}(t)$  sur la *m.m.r.*. Le schéma (6.7) présente une excellente validation du calcul numérique avec le modèle effectif de Burger pour une distribution très alignée des microfissure ( $X = 1/5$ ). On peut observer ainsi que pour  $\epsilon = 0,1$ ,  $\dot{E} = 10^{-11}$ , la contrainte macroscopique tend vers la valeur limite donnée par (6.19)  $\Sigma_{zz}^\infty = 6,621MPa$ .

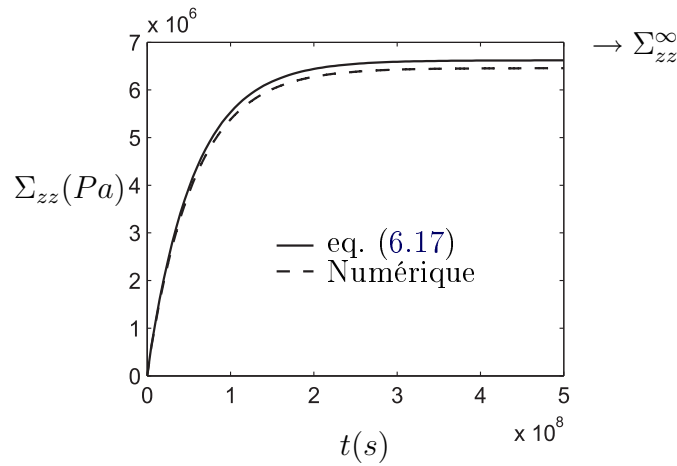


FIG. 6.7 – Pour un taux de déformation constant imposé, la contrainte duale tend vers un valeur asymptotique : calculs analytique et numérique ( $\epsilon = 0,1$ ,  $\dot{E} = 10^{-11}$ )

### 6.3 Etudes analytique et numérique du taux de restitution de l'énergie

Pour le cas élastique, le taux de restitution de l'énergie d'un milieu microfissuré peut être estimé lorsqu'on dispose d'un schéma d'homogénéisation permettant de mesurer l'effet des microfissures sur l'élasticité homogénéisée, par exemple celui de Mori-Tanaka (voir [16]). Pour le cas viscoélastique, on se propose de développer une approche de même nature en se basant sur le modèle viscoélastique effectif de Burger établi dans le chapitre 5. En parallèle, on réalise une approche numérique pour déterminer cette quantité. Pour finir, on confronte les résultats des deux méthodes.

### 6.3.1 Analyse théorique du taux de restitution d'énergie

On rappelle la condition de propagation (3.16) où le taux de restitution d'énergie  $\mathcal{F}$  est défini par l'équation (3.12) pour le cas d'un chargement contrôlé par une variable cinématique et d'une fissure se propageant de façon rectiligne. Pour le cas de microfissures, la grandeur homologue du taux de restitution de l'énergie fait intervenir le paramètre  $\epsilon$  à la place de la longueur de fissure. Plus précisément, il est défini par (voir [16] pour le cas élastique) :

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{|\Omega|} \frac{\partial W_\Omega}{\partial \epsilon} \Big|_{\mathbf{E}, \{\epsilon_\alpha^v\}} (\mathbf{E}, \epsilon, \{\epsilon_\alpha^v\}) \quad (6.22)$$

où la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  est le paramètre de chargement cinématique,  $W_\Omega$  est l'énergie élastique du *v.e.r.* <sup>5</sup>.

D'un point de vue numérique, on évalue dans ce qui suit l'énergie élastique et ses variations à partir d'un *m.m.r.*. On admet donc qu'il est équivalent de définir  $\mathcal{F}$  par

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{|\omega|} \frac{\partial W_\omega}{\partial \epsilon} \Big|_{\mathbf{E}, \{\epsilon_\alpha^v\}} (\mathbf{E}, \epsilon, \{\epsilon_\alpha^v\}) \quad (6.23)$$

où  $\omega$  désigne le *m.m.r.* et  $W_\omega$  son énergie élastique.

L'accroissement de la variable  $\epsilon$  qui est pris en compte dans le calcul de  $\mathcal{F}$  suppose que la population de fissures puisse être caractérisée par une variable scalaire (voir sections précédentes 6.2.1.1, 6.2.1.2, 6.2.2.1), y compris lors de ses évolutions. C'est le cas dans la situation de fissures de même rayon dont les orientations sont distribuées de façon isotrope ou de fissures parallèles. Au cours de la propagation, cela nécessite que toutes les microfissures évoluent de manière identique. La généralisation à des familles de fissures plus complexes a été discutée dans [16]. Pratiquement, la variation de  $\epsilon$  <sup>6</sup> qui est envisagée dans la définition de  $\mathcal{F}$  revient à une variation de la longueur de fissure, la densité de fissures restant invariable. C'est cette remarque qui guidera la mise en œuvre numérique de la définition (6.23).

Rappelons que le matériau considéré est modélisé par le modèle rhéologique de Burger, de sorte que l'énergie élastique dans la formule (6.23) se compose d'une partie de Maxwell et d'une partie de Kelvin <sup>7</sup> :

$$W_\omega = \int_{\omega(\epsilon)} \left( \frac{1}{2} \epsilon^e : \mathbb{C}_M^e : \epsilon^e + \frac{1}{2} \epsilon_K^v : \mathbb{C}_K^e : \epsilon_K^v \right) dV \quad (6.24)$$

<sup>5</sup>Pour le cas général, on peut être amené à considérer l'énergie potentielle

<sup>6</sup>On rappelle que  $\epsilon = N\ell^3$ .

<sup>7</sup>voir (3.6)

où  $\varepsilon^e$  est la déformation élastique et  $\varepsilon_K^v$  est la composante de la déformation visqueuse correspondante à la partie de "Kelvin". L'évolution considérée dans la dérivée de (6.23) se produisant sans déformation visqueuse, la contribution de la partie Kelvin n'est pas modifiée. Ainsi, l'introduction de (6.24) dans (6.23) donne la simplification suivante :

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{|\omega|} \frac{\partial W_\omega^M}{\partial \epsilon} \Big|_{\mathbf{E}, \{\varepsilon_\alpha^v\}} (\mathbf{E}, \epsilon, \{\varepsilon_\alpha^v\}) \quad (6.25)$$

où la contribution de la partie Maxwell

$$W_\omega^M = \int_{\omega(\epsilon)} \frac{1}{2} \varepsilon^e : \mathbb{C}_M^e : \varepsilon^e dV \quad (6.26)$$

peut être à son tour décomposée sous la forme d'une partie récupérable, fonction de la différence  $\mathbf{E} - \mathbf{E}^v$  entre la déformation macroscopique et sa partie visqueuse, et d'une partie résiduelle. Cette dernière représente l'énergie élastique qui subsiste dans la partie Maxwell après une décharge totale, c'est-à-dire lorsque la contrainte macroscopique  $\Sigma$  est mise à 0 (voir aussi (3.13)) :

$$W_\omega^M = \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^v) : \mathbb{C}_M^e(\epsilon) : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^v) + W_{res}^M(\epsilon, \{\varepsilon_\alpha^v\}) \quad (6.27)$$

Les grandeurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{E}^v$  remplacent respectivement  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}^v$  dans (3.13). En introduisant (6.27) dans (6.25) on obtient *a priori* trois contributions au taux de restitution de l'énergie, à l'image de (3.14) :

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^v) : \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathbb{C}_M^e(\epsilon) : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^v) + (\mathbf{E} - \mathbf{E}^v) : \mathbb{C}_M^e(\epsilon) : \frac{\partial \mathbf{E}^v}{\partial \epsilon} \Big|_{\{\varepsilon_\alpha^v\}} - \frac{\partial W_{res}^M}{\partial \epsilon} \Big|_{\mathbf{E}, \{\varepsilon_\alpha^v\}} \quad (6.28)$$

Dans le cas d'une structure 1D homogène, on a montré que les deux derniers termes de (3.14) sont en fait nuls (voir chapitre 3). Dès lors, en raisonnant par induction, il est tentant de faire l'hypothèse que ce résultat reste valable dans le présent contexte. C'est déjà ce que nous avons fait à la section (3.5.3) dans la situation d'une fissure unique. La justification de cette simplification n'est pour l'instant possible que par voie numérique, en vérifiant que les contributions des termes des dérivées de l'énergie résiduelle et de la partie visqueuse de la déformation macroscopique sont négligeables. Dans ces conditions, la formule (6.28) se simplifie et le taux de restitution de l'énergie peut être exprimé au choix en fonction de la déformation macroscopique (qui est aussi le paramètre de chargement) ou de la contrainte macroscopique, en vertu de l'équation d'état :

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^v) : \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathbb{C}_M^e(\epsilon) : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^v) = \frac{1}{2} \Sigma : \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathbb{S}_M^e(\epsilon) : \Sigma \quad (6.29)$$

### 6.3.1.1 Calcul analytique du taux de restitution de l'énergie : le cas élastique

On considère à nouveau le problème de la traction uniaxiale d'une poutre contenant des microfissures parallèles qui sont perpendiculaires à la direction de traction (voir la figure 6.4). Dans le cas élastique, on peut estimer le tenseur de souplesse effectif du matériau par l'approche de Mori-Tanaka, noté ici  $\mathbb{S}^{mt}(\epsilon)$ . Le taux de restitution d'énergie est estimé grâce à la connaissance de la fonction  $\mathbb{S}^{mt}(\epsilon)$  par (voir (6.29))<sup>8</sup> :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \Sigma : \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathbb{S}^{mt}(\epsilon) : \Sigma = \frac{1}{2} \Sigma^2 \mathbf{1} : \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathbb{S}^{mt}(\epsilon) : \mathbf{1} = \frac{1}{2} \Sigma^2 \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \frac{1}{E_{11}^{mt}(\epsilon)} \right) \quad (6.30)$$

où l'on rappelle que  $E_{11}^{mt}(\epsilon)$  est le module d'Young longitudinal effectif de la poutre. Il est déterminé par l'équation (4.48). On obtient ainsi :

$$\mathcal{F} = \frac{\Sigma^2}{2} \frac{H}{E^s} \quad (6.31)$$

avec  $H = 16(1 - \nu^{s2})/3$ .

### 6.3.1.2 Calcul analytique du taux de restitution de l'énergie : le cas viscoélastique

Considérons de nouveau le problème de la figure 6.4. Pour le cas isotrope transverse, (6.29) devient :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \Sigma^2 \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \frac{1}{F_M^e(\epsilon)} \right) \quad (6.32)$$

où  $F_M^e(\epsilon)$  est le module d'Young longitudinal instantané qui est déterminée par :

$$F_M^e(\epsilon) = \frac{E_M}{1 + N_M^e \epsilon} \quad (6.33)$$

avec  $N_M^e$  est déterminé par (5.101). Alors le taux de restitution d'énergie est déterminé par :

$$\mathcal{F} = \frac{\Sigma^2}{2} \frac{N_M^e}{E_M} \quad (6.34)$$

où  $\Sigma$  est déterminé par (6.17).

En particulier, lorsque la contrainte macroscopique tend vers une valeur asymptotique, le taux de restitution de l'énergie tend lui-même vers une limite :

$$\mathcal{F}^\infty = \frac{\Sigma^{\infty 2}}{2} \frac{N_M^e}{E_M} \quad (6.35)$$

---

<sup>8</sup>voir ainsi [16]



Rappelons que la contrainte asymptotique  $\Sigma^\infty$  est déterminée par l'équation (6.19). Elle dépend linéairement de la vitesse de déformation imposée  $\dot{E}$ , du paramètre d'endommagement et des caractéristiques visqueuses de Maxwell. En introduisant ce résultat dans (6.35), on obtient la forme suivante de  $\mathcal{F}^\infty$  :

$$\mathcal{F}^\infty = c_M(\epsilon) \dot{E}^2 \quad (6.36)$$

où, pour la raison de la simplification, on a posé

$$c_M(\epsilon) = \frac{1}{2} \frac{N_M^e}{E_M} \frac{E_M^v{}^2}{(1 + N_M^v \epsilon)^2} \quad (6.37)$$

Ce facteur dépend des caractéristiques viscoélastiques de Maxwell et du paramètre d'endommagement. On peut conclure que, pour un matériau *v.l.n.v.* microfissuré, le taux de restitution d'énergie tend vers une valeur asymptotique qui est une fonction quadratique de la vitesse de déformation imposée.

L'évolution de  $\mathcal{F}$  en fonction du temps pour différentes vitesses de déformation imposée (voir (6.34)) est présentée par la figure 6.8. On retrouve des tendances qualitatives qui transposent au milieu microfissuré les observations faites antérieurement dans le cas d'une fissure unique (voir figure 3.12).

Ainsi, le taux de restitution de l'énergie reste borné supérieurement par une valeur qui décroît lorsque la vitesse de chargement diminue. Par conséquent, on pressent qu'en dessous d'une vitesse critique, le seuil de propagation ne pourra être atteint (section 6.4.3).

Si la vitesse de chargement est fixée,  $\mathcal{F}^\infty$  est une fonction décroissante du paramètre d'endommagement. Plus le matériau est endommagé, plus l'énergie disponible pour propager les fissures est faible. C'est l'origine de l'idée de paramètre d'endommagement critique (section 6.4.3).

### 6.3.2 Algorithme pour le calcul numérique du taux de restitution de l'énergie

On développe maintenant un algorithme numérique pour la détermination du taux de restitution de l'énergie  $\mathcal{F}$ . Les calculs dans le cadre de la méthode des éléments finis sont réalisés sur le domaine équivalent  $\mathcal{O}$  dans lequel on trouve un *m.m.r.* plongé dans une matrice infinie constituée du matériau sain. Comme précédemment, le *m.m.r.* contient une fissure unique. Par définition,  $\mathcal{F}$  peut être déterminé par la formule (6.23). Cependant, soulignons dans cette

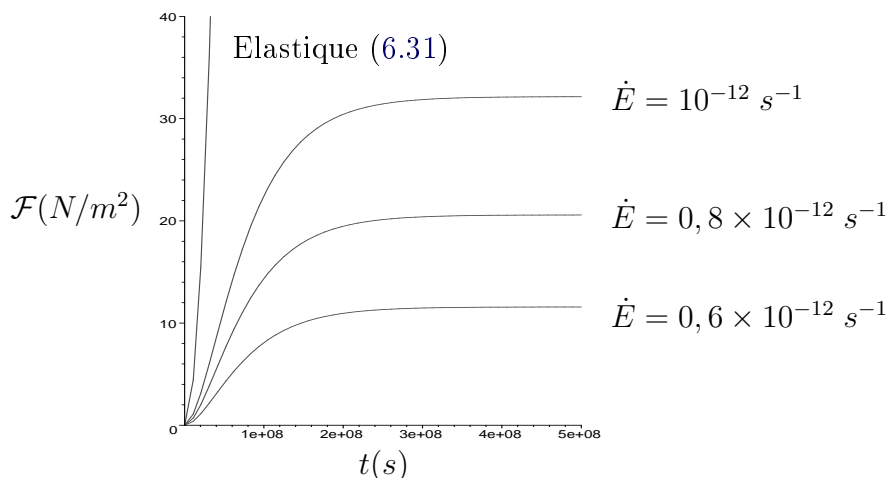


FIG. 6.8 – Evolution du taux de restitution d'énergie dans un matériau *v.l.n.v.* microfissuré pour différentes vitesses de déformation imposée. ( $\epsilon = 0,1$ ,  $X = 1/30$ )

formule que la dérivée est prise à paramètre de chargement  $\mathbf{E}$  fixé. Une difficulté pratique apparait donc du fait que le chargement imposé sur le domaine fictif  $\mathcal{O}$  est  $\mathbf{E}_o$  et non  $\mathbf{E}$ . Or, de toute évidence, pour que la déformation moyenne du *m.m.r.* reste fixée à  $\mathbf{E}$  quand  $\epsilon$  varie, il convient de modifier judicieusement la valeur de  $\mathbf{E}_o$  qui définit les conditions aux limites “lointaines”, sur le bord de  $\mathcal{O}$ . Il est certes possible de mener le calcul de cette façon. Cependant, il existe en réalité une façon approchée plus commode que la mise en œuvre de la définition directe, c'est-à-dire la relation (6.23), pour le calcul numérique de  $\mathcal{F}$ .

Notons en effet  $W_{\mathcal{O}}^M(E_o, \epsilon, \{\epsilon_\alpha^v\})$  l'énergie élastique<sup>9</sup> de  $\mathcal{O}$ . Elle est composée de la contribution  $W_\omega^M$  de  $\omega$  et de celle du complémentaire  $\mathcal{C} = \mathcal{O} \setminus \omega$  du *m.m.r.* dans  $\mathcal{O}$ , notée  $W_{\mathcal{C}}^M$  :

$$W_{\mathcal{O}}^M(E_o, \epsilon, \{\epsilon_\alpha^v\}) = W_\omega^M(E, \epsilon, \{\epsilon_\alpha^v\}) + W_{\mathcal{C}}^M(E_o, E, \{\epsilon_\alpha^v\}) \quad (6.38)$$

On démontre (voir la démonstration dans l'annexe F) la proposition suivante :

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{|\omega|} \frac{\partial W_{\mathcal{O}}^M}{\partial \epsilon} \Big|_{E_o, \{\epsilon_\alpha^v\}}(E_o, \epsilon, \{\epsilon_\alpha^v\}) \quad (6.39)$$

En d'autres termes, on s'est ramené à un calcul classique de taux de restitution de l'énergie, correspondant à une propagation de fissure sous conditions aux

<sup>9</sup>Seule est à considérer la contribution de la partie de Maxwell.

limites fixes, en remplaçant le *m.m.r.* par le domaine  $\mathcal{O}$  tout entier, qui comporte le *m.m.r.* et la matrice dans laquelle il est plongé. Le type de tâche à effectuer a déjà été étudié en détail au chapitre 3. Il est clair qu'on parvient ainsi à un problème nettement plus simple. Indiquons pour finir que la confrontation des résultats numériques de cette approche avec ceux de la méthode directe a confirmé un parfait accord.

Pour la mise en œuvre pratique de (6.39), on doit créer une variation fictive  $d\epsilon$  en fixant le champ des déformations visqueuses. A cet effet, on considère, comme d'habitude, un comportement élastique avec précontrainte, caractérisé par la partie élastique de Maxwell du matériau. Le chargement  $\mathbf{E}_o$  est fixé et on calcule la variation d'énergie élastique correspondante  $dW$ .  $\mathcal{F}$  est ensuite approché par  $-dW/d\epsilon$ .

La création de  $d\epsilon$  est réalisée en introduisant un incrément fictif  $d\ell$  du rayon de la fissure dans le *m.m.r.*. Rappelons que  $\epsilon = N\ell^3$  où  $N$  est la densité de fissures, de sorte que l'on obtient  $d\epsilon = 3N\ell^2 d\ell$  si l'on raisonne à densité  $N$  constante. La propagation fictive est donc créée en libérant un segment  $d\ell = \ell d\epsilon / (3\epsilon)$ . A titre d'exemple, on reconsidère le problème de traction de poutre (voir la figure 6.4). Grâce à la symétrie du problème, on a réalisé un calcul en mode "axisymétrique".

Le schéma (6.5) fait apparaître un excellent accord entre les prévisions du modèle analytique effectif de Burger et celles du calcul numérique, pour une distribution fortement "aplatie" (anisotrope) de microfissures ( $X = 1/30$ ). On peut observer ainsi que pour  $\epsilon = 0.1$ ,  $\dot{E} = 10^{-12}$ , le taux de restitution de l'énergie tend vers la valeur limite donnée par (6.36)  $\mathcal{F}^\infty = 32,153 N/m^2$ .

## 6.4 Propagation de microfissures dans un milieu viscoélastique : analyses théorique et numérique

L'évolution de l'endommagement d'un milieu microfissuré est prise en compte numériquement par la propagation d'une fissure unique<sup>10</sup> présente dans un *m.m.r.*. La condition de propagation est définie par (3.16) où  $G_c$  dépend de la taille de

---

<sup>10</sup>voir le problème de fissure unique dans le chapitre 3

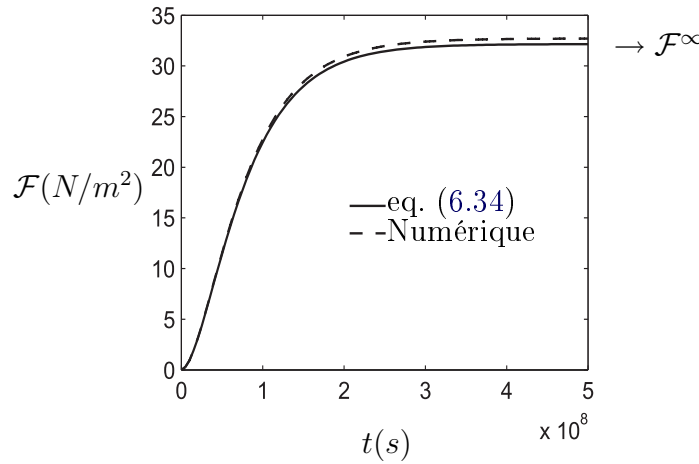


FIG. 6.9 – Evolution du taux de restitution d'énergie dans un matériau *v.l.n.v.* microfissuré pour une vitesse de déformation imposée : calculs numérique et analytique. ( $\epsilon = 0, 1$ ,  $X = 1/30$ ,  $\dot{E} = 10^{-12} \text{ s}^{-1}$ )

la fissure par (voir [16]) :

$$G_c = \frac{2\pi G_f}{3 \ell} \quad (6.40)$$

$G_f$  est ici le taux de restitution d'énergie critique du matériau qui est considéré constant et  $\ell$  est le rayon de la fissure.

### 6.4.1 Algorithme des calculs numériques

La méthode croise en fait les acquis de la section 3.4.2.2 (voir figure 3.16), consacrée à la propagation de fissure, et ceux de la section 6.2.2, qui traite de la prise en compte d'un chargement défini sur un *m.m.r.* par le biais de conditions aux limites auxiliaires. On se limite donc dans ce qui suit à un bref résumé des séquences du calcul.

On résume par la figure 6.10 l'algorithme de calcul numérique de propagation de microfissures destiné à rendre compte de l'évolution de l'endommagement d'un milieu viscoélastique.

### 6.4.2 Comparaison de l'algorithme numérique avec le résultat analytique du cas élastique

On se place tout d'abord dans le cas élastique. On examine une traction simple perpendiculaire à un réseau de fissures parallèles. On note  $\ell_o$  et  $\epsilon_o$  respectivement

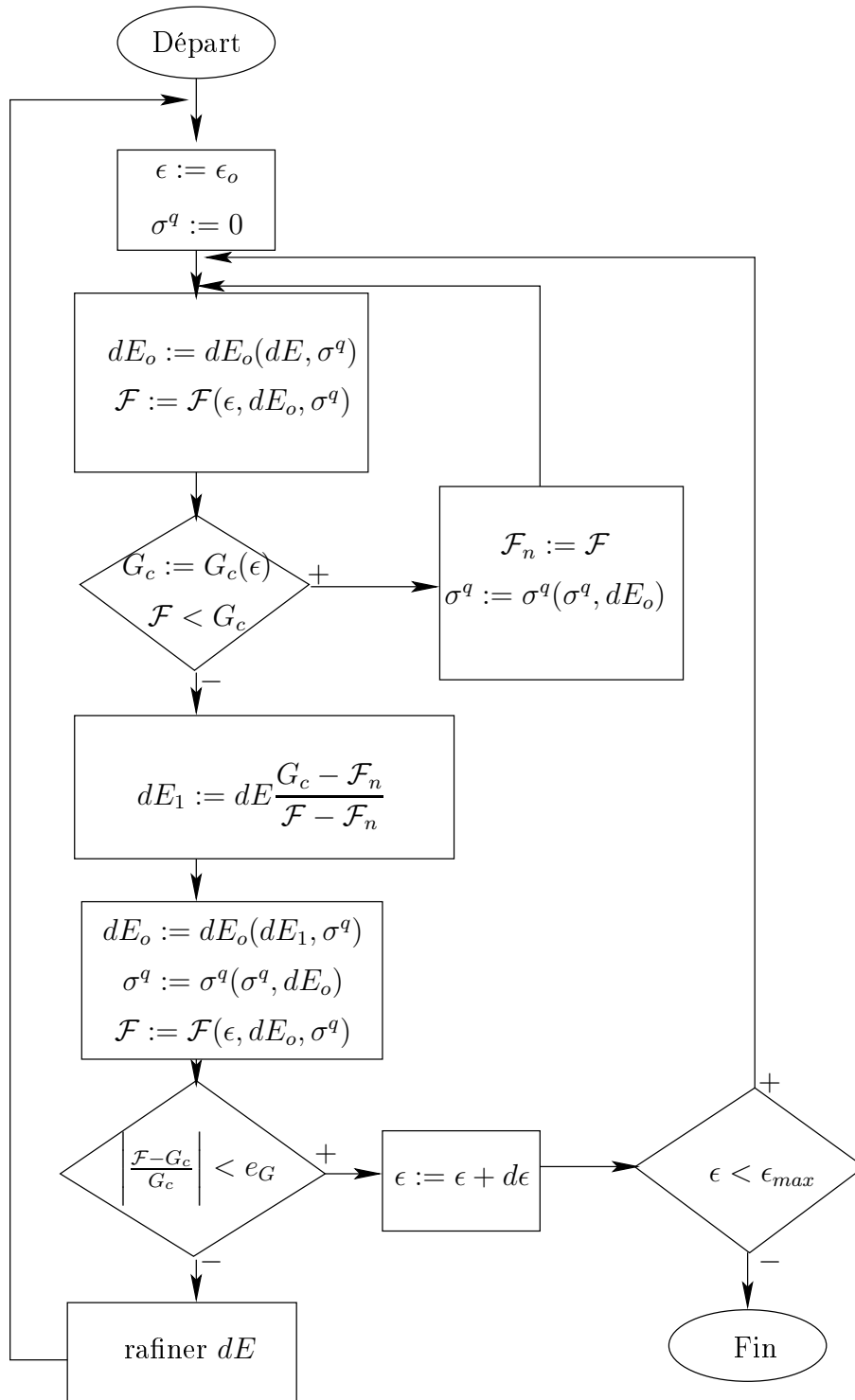


FIG. 6.10 – Algorithme des calculs numériques de propagation de microfissures

la longueur initiale des fissures et le paramètre d'endommagement initial du milieu. On note ainsi  $E_p$  et  $\Sigma_p$  respectivement les valeurs de  $E$  et de  $\Sigma$  au pic (où les fissures commencent à propager). Le taux de restitution de l'énergie calculé par (6.31) peut être écrit sous la forme :

$$\mathcal{F}^{mt} = \frac{H}{2E^s} \Sigma^2 = \frac{HE^s}{2(1+H\epsilon)^2} E^2 \quad (6.41)$$

Le taux de restitution d'énergie critique est donné par (6.40). Au pic, pour  $\ell = \ell_o$ , la condition de propagation prend la forme :

$$\frac{2\pi G_f}{3 \ell_o} = \frac{H}{2E^s} \Sigma_o^2 = \frac{HE^s}{2(1+H\epsilon_o)^2} E_o^2 \quad (6.42)$$

En procédant de la même façon pour un niveau quelconque de l'endommagement, on obtient des relations entre la déformation et la contrainte macroscopique avec le paramètre d'endommagement :

$$\frac{2\pi G_f}{3 \ell} = \frac{H}{2E^s} \Sigma^2 = \frac{HE^s}{2(1+H\epsilon)^2} E^2 \quad (6.43)$$

En divisant terme à terme les équations (6.43) et (6.42) on obtient :

$$\frac{\Sigma}{\Sigma_o} = \left( \frac{\ell_o}{\ell} \right)^{1/2} \quad ; \quad \frac{E}{E_o} = \frac{1+H\epsilon}{1+H\epsilon_o} \left( \frac{\ell_o}{\ell} \right)^{1/2} \quad (6.44)$$

où l'on rappelle que  $\epsilon = N\ell^3$ ,  $N$  désignant la densité de fissure). (6.44) devient :

$$\frac{\Sigma}{\Sigma_o} = \left( \frac{\epsilon_o}{\epsilon} \right)^{1/6} \quad ; \quad \frac{E}{E_o} = \frac{1+H\epsilon}{1+H\epsilon_o} \left( \frac{\epsilon_o}{\epsilon} \right)^{1/6} \quad (6.45)$$

La figure 6.11 montre une très bonne validation entre ce résultat et les résultats de l'approche numérique pour le cas du comportement élastique.

### 6.4.3 Vitesse critique de charge et endommagement asymptotique du milieu

L'étude de la propagation d'une fissure unique dans le problème d'une poutre *v.l.n.v.* entaillée en flexion à trois points (voir le chapitre 3) a montré l'existence d'une vitesse de chargement critique<sup>11</sup>. Si la vitesse de déplacement imposée est inférieure à cette valeur, la condition de propagation de fissure n'est jamais atteinte. De plus, pour le cas sur-critique, on a montré que la fissure se propage

---

<sup>11</sup>le paramètre de chargement étant le déplacement du point d'application de la charge

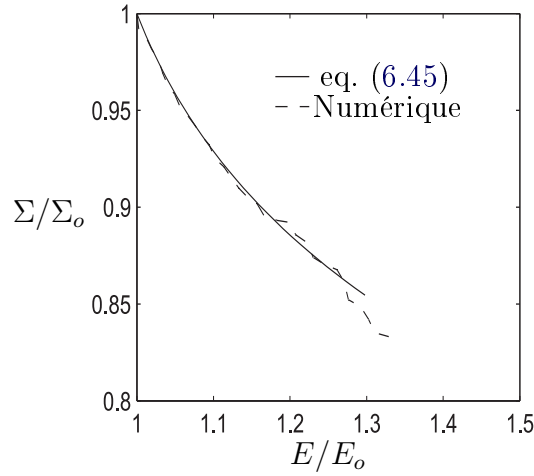


FIG. 6.11 – Propagation de microfissures dans un matériau élastique : approche numérique et analytique ( $\epsilon_o = 0, 1, X = 1/30$ )

vers une longueur asymptotique qui dépend de la vitesse de chargement. Si la longueur initiale est supérieure à cette valeur, il n'y a pas de propagation de fissure. Dans cette section, on va transposer ce résultats en introduisant et en quantifiant des notions de taux de déformation et de niveau d'endommagement critiques.

Supposons que les microfissures se propagent jusqu'à un état d'endommagement asymptotique quand  $t \rightarrow \infty$ . La loi de comportement macroscopique à ce régime est donnée par (6.19) et le taux de restitution d'énergie est donné par (6.36). La condition de propagation s'écrit :

$$\mathcal{F}_\infty = \frac{2\pi G_f}{3 \ell_\infty} \quad (6.46)$$

où  $\ell_\infty$  est le rayon de fissure à  $t = \infty$  qui est relié au paramètre d'endommagement par :

$$\ell_\infty = \left( \frac{\epsilon_\infty}{N} \right)^{(1/3)} \quad (6.47)$$

Alors la condition de propagation est réécrite sous la forme :

$$\mathcal{F}_\infty = \frac{2\pi N^{1/3} G_f}{3 \epsilon_\infty^{1/3}} \quad (6.48)$$

En introduisant (6.36) dans (6.48) on obtient :

$$\frac{\dot{E}^2 N_M^e}{2 E_M (1 + N_M^v \epsilon_\infty)^2} = \frac{2\pi N^{1/3} G_f}{3 \epsilon_\infty^{1/3}} \quad (6.49)$$

ou bien :

$$f(\epsilon_\infty) = \frac{\epsilon_\infty^{1/3}}{(1 + N_M^v \epsilon_\infty)^2} = \frac{2\pi N^{1/3} 2G_f}{3} \frac{E_M}{\dot{E}^2 N_M^e E_M^v{}^2} = \frac{\delta}{\dot{E}^2} \quad (6.50)$$

où  $\delta$  est un coefficient déterminé en fonction des données du matériau :

$$\delta = \frac{2\pi N^{1/3} 2G_f E_M}{3 N_M^e E_M^v{}^2} \quad (6.51)$$

On dispose ainsi d'une fonction caractéristique qui permet de déterminer la valeur limite du paramètre endommagement en fonction de la vitesse de déformation imposée. La figure (6.12) représente l'allure de  $f$  qui se compose de deux parties dont l'une est croissante et l'autre est décroissante. Notons  $f_{max}$  la valeur maxi-

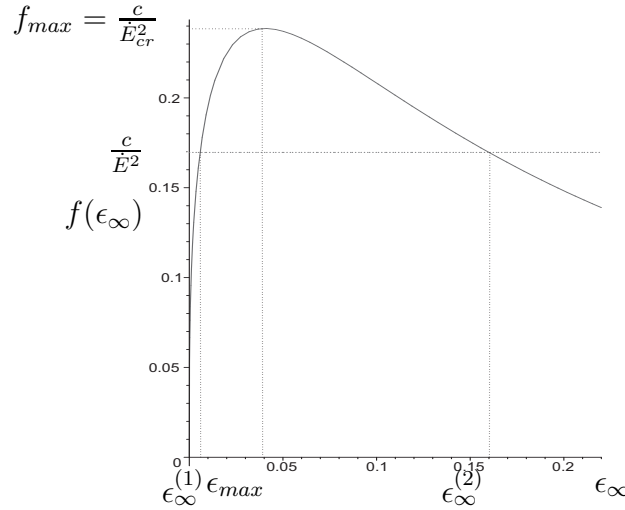


FIG. 6.12 – Fonction caractéristique permettant la détermination de la vitesse critique et du paramètre d'endommagement critique

male de  $f$  correspondant à la valeur  $\epsilon_{max}$  du paramètre d'endommagement. On introduit une vitesse critique qui est déterminée par :

$$\dot{E}_{cr} = \sqrt{\frac{\delta}{f_{max}}} \quad (6.52)$$

Pour que l'équation (6.50) ait une solution, il faut que  $\dot{E} \geq \dot{E}_{cr}$ . Dans le cas où cette condition est satisfaite, notons  $\epsilon_\infty^{(2)}$  la plus grande solution<sup>12</sup> de l'équation (6.50). Si le paramètre d'endommagement initial  $\epsilon_o$  est inférieur à la valeur critique  $\epsilon_\infty^{(2)}$ , la fissure se propage et le paramètre d'endommagement tend vers

<sup>12</sup>Comme dans le cas d'une fissure unique, la solution sur la branche croissante de la fonction  $f$  n'est pas physique.



la valeur limite  $\epsilon_\infty^{(2)}$ . En particulier, si  $\epsilon_o \leq \epsilon_{max}$ , les fissures se propagent pour toutes les vitesses surcritiques de déformation imposée. Par contre si  $\epsilon_o \geq \epsilon_\infty^{(2)}$ , il n'y a pas de propagation de fissures.

Les figures 6.13 et 6.14 montrent l'évolution de la contrainte macroscopique et du taux de restitution d'énergie, respectivement pour le cas sous-critique ( $\dot{E} \leq \dot{E}_{cr}$ ) et le cas où  $\epsilon_o \geq \epsilon^{(2)}$  où les microfissures ne propagent pas. Les

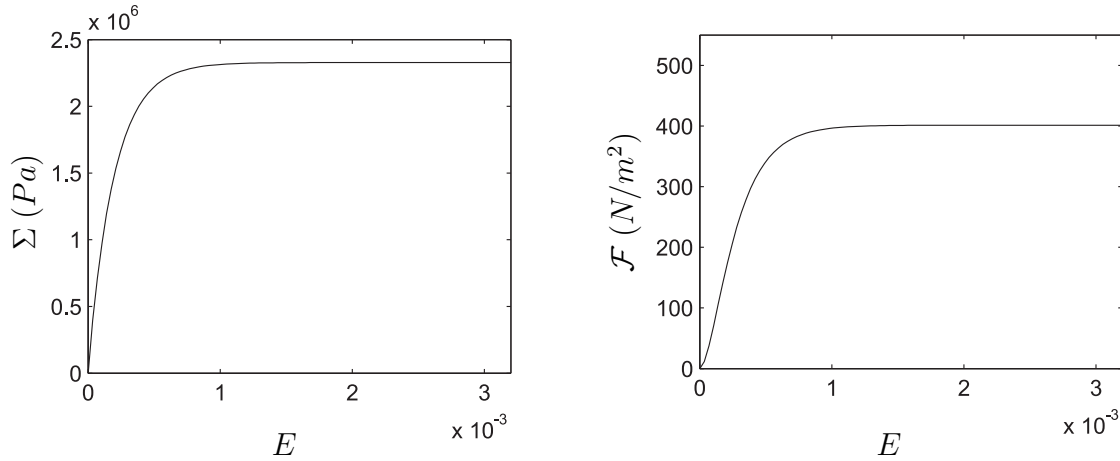


FIG. 6.13 – Sans propagation de fissures pour une vitesse de déformation imposée sous critique  $\dot{E} = 3,5 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}$  ( $\dot{E}_{cr} \simeq 4 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}$ ,  $\epsilon_o = 0,1$ )

figures 6.15 et 6.16 montrent que, pour le cas de propagation de microfissure ( $\dot{E} \geq \dot{E}_{cr}$  et  $\epsilon_o \leq \epsilon^{(2)}$ ), le paramètre d'endommagement (resp. la contrainte macroscopique) tend à une valeur asymptotique.

## 6.5 Conclusions

Ce chapitre introduit une méthode numérique pour résoudre le problème de la propagation de microfissure. L'idée consiste à s'appuyer sur la notion de motif morphologique représentatif *m.m.r.*. Etant donné que l'objectif prioritaire est de prendre en compte la spécificité du comportement visqueux, nous nous sommes contentés d'un motif très simple, comportant une fissure unique, permettant néanmoins de rendre compte d'une éventuelle anisotropie dans la distribution spatiale des fissures.

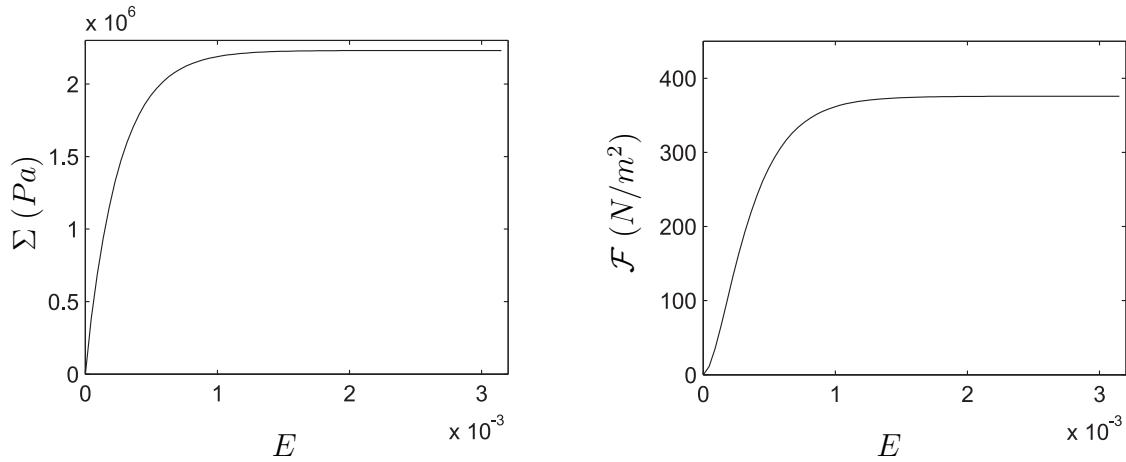


FIG. 6.14 – Sans propagation de fissures pour un paramètre d'endommagement initial  $\epsilon_o = 0,2$  supérieur à  $\epsilon^{(2)} \simeq 0,17$  ( $\dot{E} = 4,5 \times 10^{-12} s^{-1}$ ,  $\dot{E}_{cr} \simeq 4 \times 10^{-12} s^{-1}$ )

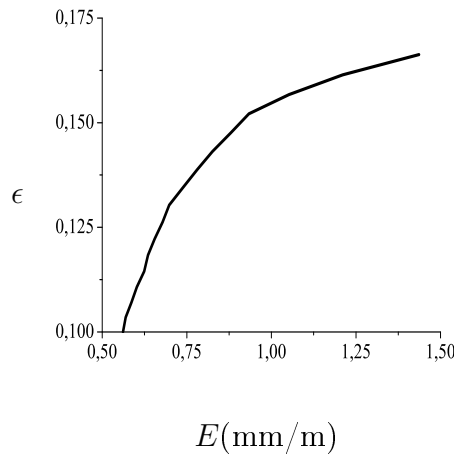


FIG. 6.15 – Evolution de l'endommagement d'un matériau *v.l.n.v.* endommagé sous une vitesse de chargement sur-critique imposée ( $\epsilon_o = 0,1$ ,  $\epsilon^{(2)} \simeq 0,17$ ,  $X = 1/30$ ,  $\dot{E} = 4,5 \times 10^{-12} s^{-1}$ ,  $\dot{E}_{cr} \simeq 4 \times 10^{-12} s^{-1}$ )

Pour commencer, le modèle numérique a été validé en confrontant les calculs numériques du comportement effectif d'un milieu élastique microfissuré isotrope ou isotrope transverse avec l'estimation analytique de Mori-Tanaka (resp. diluée en contraintes) et celle de Ponte Castaneda et Willis. Pour le cas d'une distribution spatiale isotrope (modèle de *m.m.r.* sphérique), le calcul numérique donne des résultats en très bon accord avec l'estimation de Ponte

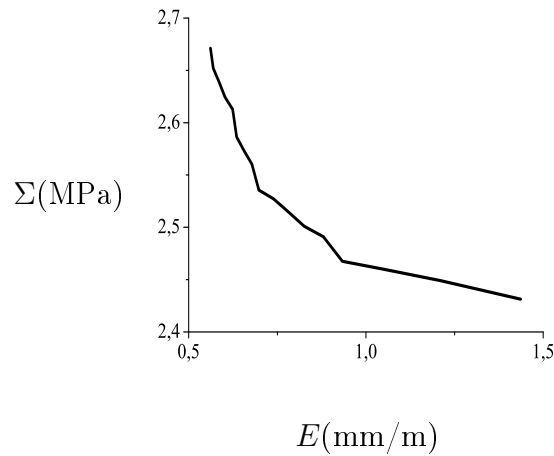


FIG. 6.16 – Comportement macroscopique d'un matériau *v.l.n.v.* endommagé durant la propagation de microfissures ( $\epsilon_o = 0,1$ ,  $\epsilon^{(2)} \simeq 0,17$ ,  $X = 1/30$ ,  $\dot{E} = 4,5 \times 10^{-12} s^{-1}$ ,  $\dot{E}_{cr} \simeq 4 \times 10^{-12} s^{-1}$ )

Castaneda et Willis (voir les figures 6.3). Pour le cas de microfissures parallèles, les résultats numériques tendent vers l'estimation analytique de Mori-Tanaka lorsque l'anisotropie de distribution croît (modèle de *m.m.r.* d'aplatissement de plus en plus marqué), comme le montre la figure 6.5.

Pour le cas viscoélastique en l'absence de propagation, on a considéré le problème du fluage d'une microstructure microfissurée isotrope transverse. Là encore, plus l'anisotropie de distribution spatiale est marquée, plus les calculs numériques donnent des résultats qui tendent vers les résultats analytiques obtenus en utilisant le modèle de Burger effectif (voir la figure 6.6). De plus, dans le problème à vitesse de déplacement imposée, le modèle de Burger comme le modèle numérique prévoient que la contrainte macroscopique tend vers une valeur asymptotique (voir la figure 6.7) avec un accord excellent également sur le plan quantitatif.

La deuxième partie du chapitre a été consacrée à l'étude numérique de la restitution d'énergie et de la propagation de microfissures. Sur le plan des calculs analytiques, on exploite le fait que, dans les cas analysés dans cette thèse, l'énergie résiduelle après une décharge totale est très faible par rapport à l'énergie totale. Notons que ceci est conforme à l'enseignement qui peut être tiré des modèles élémentaires du chapitre 3. Le calcul analytique du taux de restitution de l'énergie, pour des vitesses de déformation macroscopiques

imposées, a démontré qu'il augmente avec la vitesse de chargement. Cependant, contrairement au problème élastique, il tend vers une valeur asymptotique (voir la figure 6.8) fonction de la vitesse de déformation imposée. Il s'avère que les résultats analytiques sont parfaitement cohérents, en matière de taux de restitution de l'énergie, avec les résultats de la méthode numérique (figure ).

on aborde finalement le problème de la propagation des microfissures. On commence par le problème élastique dont un traitement analytique est disponible (voir l'équation (6.45)). Les résultats numériques sont parfaitement conformes à ce modèle dans le cas d'une distribution spatiale de fissures parallèles fortement anisotrope (figure 6.11. Dans le cas visqueux, on valide ensuite les idées de vitesse critique, endommagement initial critique et endommagement asymptotique inspirées du chapitre 3 (problème de la fissure unique). Pour le cas de vitesse de déformation macroscopique imposée, on a montré qu'il existe une vitesse critique en dessous de laquelle l'endommagement n'évolue pas. Par contre si la vitesse de chargement est supérieure à la valeur critique, la propagation aura lieu si le paramètre d'endommagement initial est inférieur à certaine valeur critique qui dépend de la vitesse de chargement. Dans le cas de propagation de microfissure, le paramètre d'endommagement tend vers une valeur asymptotique.



# Propagation de fissures et endommagement d'une enceinte de confinement sous une pression accidentelle interne

---

## Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Calculs élémentaires à l'état initial . . . . .</b>	<b>154</b>
<b>7.2</b>	<b>Perte de précontrainte par fluage . . . . .</b>	<b>157</b>
<b>7.3</b>	<b>Comportement de la structure sous une pression acci- dentelle interne . . . . .</b>	<b>159</b>
7.3.1	Etape de compression du béton . . . . .	161
7.3.2	Endommagement de la structure par microfissures en état de traction . . . . .	165
7.3.3	Conditions de propagation des macrofissures . . . . .	170
<b>7.4</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>184</b>

---

Ce chapitre consiste à appliquer les études précédentes au problème de la propagation de fissures et l'endommagement d'une enceinte de confinement en état de pression accidentelle interne. On va travailler avec le bâtiment REP (réacteur à eau pressurisée) 1450 MWe (une enceinte typique en France). On commence par le problème de perte de précontrainte par fluage. On considère ensuite le comportement instantané du bâtiment en situation accidentelle après une certaine perte de précontrainte au cours du temps. On va montrer que le moment de l'accident joue un rôle très important dans ce problème. Plus l'accident se produit tard, plus la précontrainte restante est faible et plus la condition de propagation de fissure risque d'être atteinte. Les problèmes de macrofissures et de microfissures seront séparément considérés.

**Chapitre 7. Propagation de fissures et endommagement d'une enceinte de confinement sous une pression accidentelle interne**

Notations :

Grandeurs	Définitions
$R$	Rayon de la paroi
$e$	Épaisseur de la paroi
$H$	Hauteur de la paroi
$R_d$	Rayon du dôme
$e_d$	Épaisseur du dôme
$V_d$	Volume du dôme
$\rho$	Poids propre du béton
$P$	Pression accidentelle interne
$\gamma_h$	Facteur volumique des cables d'acier horizontaux
$\gamma_v$	Facteur volumique des cables d'acier verticaux
$E_a$	Module d'Young de l'acier
$\sigma_p$	Compression due au poid propre du bâtiment
$\sigma_v^a$	Contrainte des cables d'acier verticaux
$\sigma_h^a$	Contrainte des cables d'acier horizontaux
$\sigma_v^b$	Contrainte du béton dans la direction $\mathbf{e}_z$
$\sigma_h^b$	Contrainte du béton dans la direction $\mathbf{e}_\theta$
$\varepsilon_v^b$	Déformation du béton dans la direction $\mathbf{e}_z$
$\varepsilon_h^b$	Déformation du béton dans la direction $\mathbf{e}_\theta$
$\sigma_{ac}$	Contrainte de traction accidentelle

Grandeurs	Définitions
$t_{ac}$	Instant de l'accident
$t_{cr}$	Valeur critique de $t_{ac}$ où la structure est mise en traction
$t_{pr}$	Valeur de $t_{ac}$ satisfaisant la condition de propagation de microfissures
$t_{pr}^{(1)}$	Valeur de $t_{ac}$ satisfaisant la condition de propagation de macrofissure de type 1
$t_{pr}^{(2)}$	Valeur de $t_{ac}$ satisfaisant la condition de propagation de macrofissure de type 2
$\sigma_{vo}^b$	Contrainte du béton dans la direction $\mathbf{e}_z$ en état initial
$\sigma_{ho}^b$	Contrainte du béton dans la direction $\mathbf{e}_\theta$ en état initial
$\sigma_{v1}^b$	Contrainte du béton dans la direction $\mathbf{e}_z$ juste avant l'accident
$\sigma_{h1}^b$	Contrainte du béton dans la direction $\mathbf{e}_\theta$ juste avant l'accident
$\sigma_{v2}^b$	Contrainte du béton dans la direction $\mathbf{e}_z$ à l'état critique
$\sigma_{h2}^b$	Contrainte du béton dans la direction $\mathbf{e}_\theta$ à l'état critique
$\sigma_{v3}^b$	Contrainte du béton dans la direction $\mathbf{e}_z$ à l'état final
$\sigma_{h3}^b$	Contrainte du béton dans la direction $\mathbf{e}_\theta$ à l'état final
$d_{PZ}$	Diamètre de la "process zone"
$\epsilon_{PZ}$	Paramètre d'endommagement de la "process zone"
$\epsilon_o$	Paramètre d'endommagement initial du cas de microfissures
$\ell_{cr}^{(1)}$	Demi-longueur critique des macrofissures de type 1
$\ell_{cr}^{(2)}$	Longueur critique des macrofissures de type 2



## 7.1 Calculs élémentaires à l'état initial

On étudie une enceinte de confinement de type REP 1450 MWe, dont la géométrie est présentée par la figure 7.1. Dans le cas d'un accident, le bâtiment

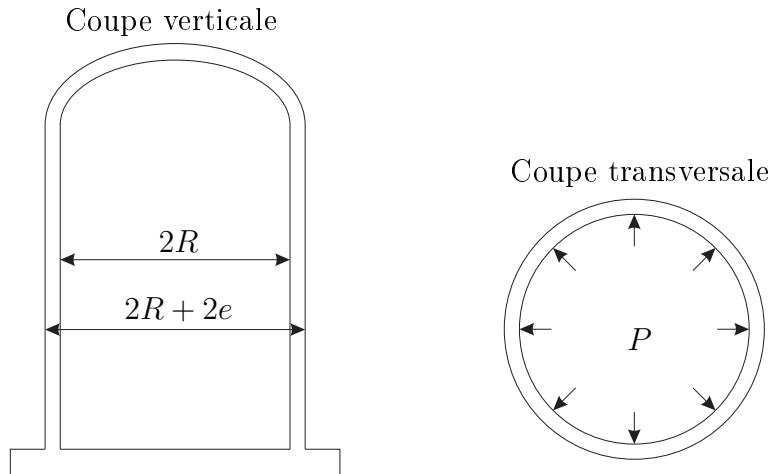


FIG. 7.1 – Coupes verticale et horizontale de l'enceinte de confinement de type REP 1450 MWe

subit une pression interne  $P$  qui peut le mettre en traction. Il peut causer l'ouverture et la propagation des fissures et par conséquent l'augmentation du débit de fuite. Pour empêcher cela, la paroi est mise en précontrainte par des cables d'acier dans les directions verticale  $\sigma_v^a$  et horizontale  $\sigma_h^a$  (figure 7.2). Le bâtiment est initialement en état de compression. Cependant, la précontrainte diminue au cours du temps à cause du fluage du béton. La structure peut être mise en traction s'il y a une pression accidentelle interne. Il est donc important de prévoir la condition de propagation de fissures et l'endommagement du bâtiment en supposant que l'accident se passe à un certain moment dans la période d'exploitation.

La paroi de l'enceinte est de forme axi-symétrique, on introduit alors le système de coordonnées cylindriques  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_z$  (voir la figure 7.2). Les cables horizontaux sont mis dans la direction  $\mathbf{e}_\theta$  et les cables verticaux sont mis dans la direction  $\mathbf{e}_z$ .

On étudie maintenant une partie de la paroi, qu'on note par  $\Omega$ , qui est délimitée par deux coupes transversales voisines dont les hauteurs sont respec-

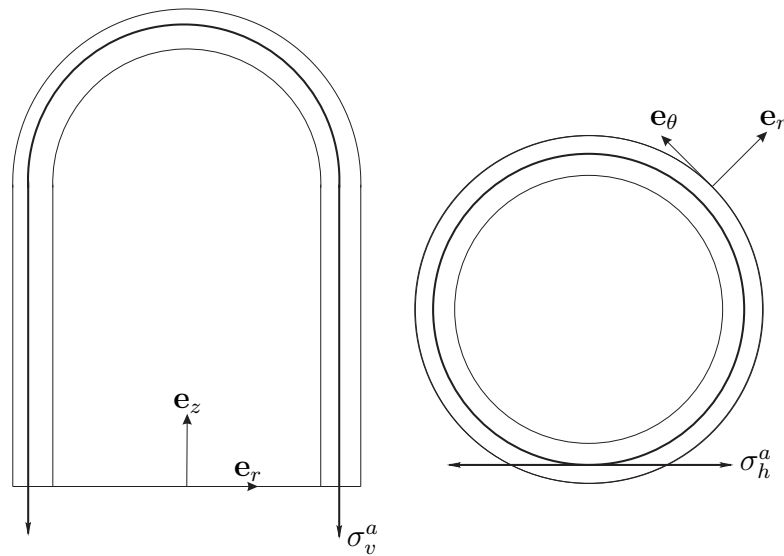
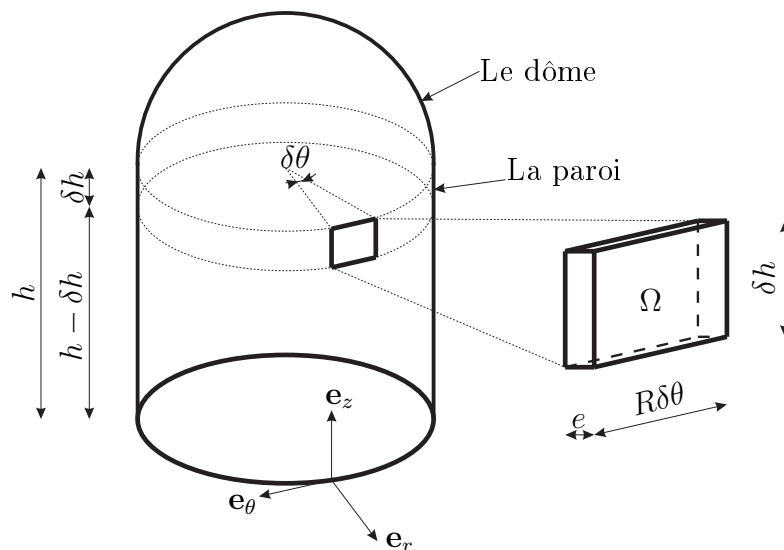


FIG. 7.2 – Mise en précotrainte de l'enceinte de confinement par des cables d'acier

tivement  $h$  et  $h - \delta h$  et par un angle  $\delta\theta$  (voir la figure 7.3). Comme  $R \gg e$ , on peut considérer ce domaine comme une plaque en contrainte plane. Il subit le

FIG. 7.3 – Les calculs sont réalisés sur un domaine  $\Omega$  qui est extrait de la structure

pois propre de la partie du bâtiment qui se situe au-dessus de ce domaine et qui se présente comme une charge de compression.

Le dôme est une partie d'une sphère de rayon  $R_d$  et d'épaisseur  $e_d$ . Le

volume du dôme est déterminé par la formule classique suivante :

$$V_d = 2\pi e_d R_d^2 \left( 1 - \frac{\sqrt{R_d^2 - R^2}}{R_d} \right) \quad (7.1)$$

La hauteur totale de la paroi est notée par  $H$ , alors le volume de la partie de la paroi qui se situe au-dessus de  $\Omega$  est calculé par :

$$V_p = 2\pi R e (H - h) \quad (7.2)$$

On note le poids volumique du béton par  $\rho$ , la contrainte de compression sur  $\Omega$  due à au poid propre du bâtiment, qui est dans la direction  $\mathbf{e}_z$ , est déterminée par :

$$\sigma_p = -\frac{\rho(V_d + V_p)}{2\pi R e} \quad (7.3)$$

Connaissant  $\sigma_p$ , on peut déterminer les précontraintes initiales du béton du domaine  $\Omega$  dans les directions verticale et horizontale par les conditions d'équilibre suivantes :

$$\sigma_{ho}^b = -\gamma_h \sigma_{ho}^a \quad ; \quad \sigma_{vo}^b = \sigma_p - \gamma_v \sigma_{vo}^a \quad (7.4)$$

où  $\sigma_{ho}^a$  (resp.  $\sigma_{vo}^a$ ), qui est la valeur initiale de  $\sigma_h^a$  (resp.  $\sigma_v^a$ ), est donnée.  $\gamma_h$  et  $\gamma_v$  sont respectivement les fractions volumique des cables horizontaux et verticaux. Notons que dans l'équation (7.4), on a approché  $1/(1 - \gamma_h)$  et  $1/(1 - \gamma_v)$  par 1 cas  $\gamma_h$  et  $\gamma_v$  sont très faible par rapport à 1 ( $\simeq 0,01$ ).

Supposons que à l'état de compression, le béton n'est pas endommagé. On peut supposer donc qu'il est homogène isotrope. Les composantes du tenseur des déformations initiales du béton sont déterminées par les relations classiques suivantes :

$$\varepsilon_{ho}^b = \frac{1}{E_M} \sigma_{ho}^b - \frac{\nu_M}{E_M} \sigma_{vo}^b \quad ; \quad \varepsilon_{vo}^b = \frac{1}{E_M} \sigma_{vo}^b - \frac{\nu_M}{E_M} \sigma_{ho}^b \quad (7.5)$$

Les données de base de la structure (dimensions et matériaux) sont dans le tableau 7.1. On considère par exemple la partie qui se trouve en haut de la paroi ( $h = H$ ), on obtient  $\sigma_{ho}^b = -16\text{MPa}$ ,  $\sigma_{vo}^b = -13,73\text{MPa}$ . Ces valeurs se trouvent bien dans la limite de la capacité portante du béton en compression ( $-40\text{MPa}$ ).

$R$	$e$	$R_d$	$e_d$	$H$	$\rho$	$\sigma_{vo}^a$
21,9m	1,2m	32m	0,9m	53,75m	24kN	1350MPa
$\sigma_{ho}^a$	$\gamma_h$	$\gamma_v$	$E_a$	$P$		
1600MPa	0,01	0,01	190GPa	0,4MPa		

TAB. 7.1 – Données numériques de l'enceinte de confinement de type REP 1450 MWe

## 7.2 Perte de précontrainte par fluage

Le comportement viscoélastique du béton du domaine  $\Omega$  est modélisé par le modèle de Burger. On suppose qu'en état de compression, il n'y a pas d'ouverture de fissures, on peut considérer que le béton est isotrope et les champs des contraintes et des déformations du béton dans  $\Omega$  sont homogènes. Le principe de correspondance permet d'écrire la loi de comportement du béton sous la forme linéaire dans l'espace de Laplace-Carson :  $\boldsymbol{\sigma}^{b*} = \mathbb{C}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^{b*}$ . Ici, on considère la déformation depuis l'état libre naturel. Pour ce cas isotrope, cette équation s'écrit sous la forme habituelle :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{b*} = \frac{1 + \nu^*}{E^*} \boldsymbol{\sigma}^{b*} - \frac{\nu^*}{E^*} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}^{b*} \mathbf{1} \quad (7.6)$$

où  $E^*$  et  $\nu^*$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson apparents dans l'espace de Laplace-Carson qui sont donnés par les équations (2.19) et (2.17). On suppose que la contrainte dans la direction  $\mathbf{e}_r$  est négligeable (contrainte plane), de sorte que  $\boldsymbol{\sigma}^{b*} = \sigma_v^{b*} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \sigma_h^{b*} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta$ . L'équation (7.6) devient :

$$\varepsilon_h^{b*} = \frac{1}{E^*} \sigma_h^{b*} - \frac{\nu^*}{E^*} \sigma_v^{b*} \quad ; \quad \varepsilon_v^{b*} = \frac{1}{E^*} \sigma_v^{b*} - \frac{\nu^*}{E^*} \sigma_h^{b*} \quad (7.7)$$

où  $\sigma_h^{b*}$  (resp.  $\sigma_v^{b*}$ ) est la valeur transformée de la composante horizontale  $\sigma_h^b$  (resp. verticale  $\sigma_v^b$ ) du tenseur des contraintes du béton.  $\varepsilon_h^{b*}$  (resp.  $\varepsilon_v^{b*}$ ) est la valeur transformée de la composante horizontale  $\varepsilon_h^b$  (resp. verticale  $\varepsilon_v^b$ ) du tenseur des déformations du béton.

On considère maintenant le comportement des cables d'acier. On remarque que, sur chaque direction, les variations des déformations du béton et de l'acier sont égales. C'est-à-dire que les variations des déformations des cables horizontaux et verticaux, entre l'état initial et état actuel, sont  $\varepsilon_h^b - \varepsilon_{ho}^b \mathcal{H}(t)$  et  $\varepsilon_v^b - \varepsilon_{vo}^b \mathcal{H}(t)$ .

**Chapitre 7. Propagation de fissures et endommagement d'une  
enceinte de confinement sous une pression accidentelle interne**

Ces câbles travaillent en traction simple, la loi de Hooke permet d'écrire les relations élastiques classiques suivantes :

$$\sigma_h^a - \sigma_{ho}^a \mathcal{H}(t) = E_a(\varepsilon_h^b - \varepsilon_{ho}^b \mathcal{H}(t)) \quad ; \quad \sigma_v^a - \sigma_{vo}^a \mathcal{H}(t) = E_a(\varepsilon_v^b - \varepsilon_{vo}^b \mathcal{H}(t)) \quad (7.8)$$

où les contraintes de l'acier sont reliées aux contraintes du béton par les conditions d'équilibre suivantes :  $\sigma_h^b + \gamma_h \sigma_h^a = 0$  et  $\sigma_v^b + \gamma_v \sigma_v^a = \sigma_p \mathcal{H}(t)$ . En introduisant ces conditions dans l'équation (7.8), on obtient les relations suivantes entre les composantes des tenseurs des contraintes et des déformations du béton :

$$-\sigma_h^b / \gamma_h = \sigma_{ho}^a \mathcal{H}(t) + E_a(\varepsilon_h^b - \varepsilon_{ho}^b \mathcal{H}(t)) \quad ; \quad (\sigma_p \mathcal{H}(t) - \sigma_v^b) / \gamma_v = \sigma_{vo}^a \mathcal{H}(t) + E_a(\varepsilon_v^b - \varepsilon_{vo}^b \mathcal{H}(t)) \quad (7.9)$$

En appliquant la transformation de Laplace-Carson sur ces équations, on obtient les relations entre les valeurs transformées des composantes des tenseurs des contraintes et déformations du béton :

$$-\sigma_h^{b*} / \gamma_h = \sigma_{ho}^a + E_a(\varepsilon_h^{b*} - \varepsilon_{ho}^b) \quad ; \quad (\sigma_p - \sigma_v^{b*}) / \gamma_v = \sigma_{vo}^a + E_a(\varepsilon_v^{b*} - \varepsilon_{vo}^b) \quad (7.10)$$

Ici, on rappelle que, pour une constante  $a$  :  $(a\mathcal{H}(t))^* = a$ . En combinant (7.7) et (7.10), on obtient un système d'équations permettant la détermination de  $\sigma_v^{b*}$  et de  $\sigma_h^{b*}$  :

$$a_1(p)\sigma_h^{b*} + a_2(p)\sigma_v^{b*} = \sigma_1 \quad ; \quad a_3(p)\sigma_h^{b*} + a_4(p)\sigma_v^{b*} = \sigma_2 \quad (7.11)$$

où pour simplifier, on a posé :  $a_1(p) = (1 + \gamma_h E_a / E^*)$ ,  $a_2(p) = -\gamma_h E_a \nu^* / E^*$ ,  $a_3(p) = -\gamma_v E_a \nu^* / E^*$  et  $a_4(p) = (1 + \gamma_v E_a / E^*)$ . Les valeurs  $\sigma_1 = \gamma_h E_a \varepsilon_{ho}^b - \gamma_h \sigma_{ho}^a$  et  $\sigma_2 = \gamma_v E_a \varepsilon_{vo}^b + \sigma_p - \gamma_v \sigma_{vo}^a$  sont des constantes qui ne dépendent que des valeurs initiales du système. L'équation (7.11) donne les solutions suivantes :

$$\sigma_h^{b*} = \frac{\sigma_1 a_4(p) - \sigma_2 a_2(p)}{a_1(p) a_4(p) - a_2(p) a_3(p)} \quad ; \quad \sigma_v^{b*} = \frac{\sigma_1 a_3(p) - \sigma_2 a_1(p)}{a_2(p) a_3(p) - a_4(p) a_1(p)} \quad (7.12)$$

$\sigma_h^b$  (resp.  $\sigma_v^b$ ) est ensuite obtenue par la transformation inverse de  $\sigma_h^{b*}$  (resp.  $\sigma_v^{b*}$ ).

Pour obtenir les caractéristiques viscoélastiques du béton, on considère par exemple une courbe expérimentale de fluage propre du béton en compression unidimensionnelle (les essais sont réalisés à EDF R&D) qui est présentée à la figure 7.4 (les points). En utilisant le modèle de Burger, on peut ajuster les caractéristiques viscoélastiques du matériau. Différentes approches sont proposées (voir la figure 7.4). La courbe (1) correspond à un matériau dont le fluage est trop rapide par rapport au matériau expérimenté. La courbe (2) approche

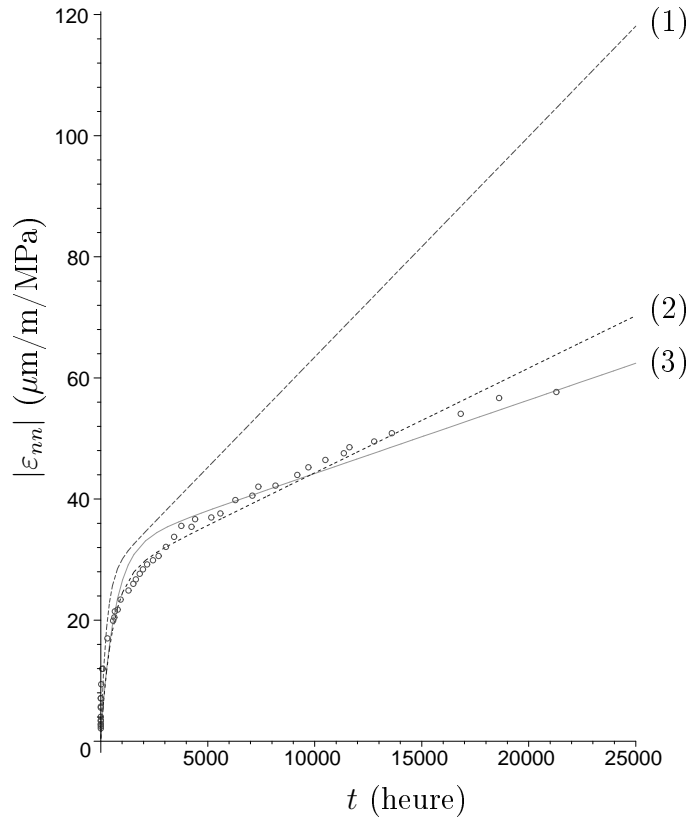


FIG. 7.4 – Résultats expérimentaux et des approches par le modèle de Burger du fluage propre du béton utilisé pour le bâtiment de confinement d’une centrale d’électricité nucléaire.  $\varepsilon_{nm}$  est la déformation longitudinale de l’échantillon sous une contrainte de compression de 1MPa.

mieux ce matériau pour une durée de 25000 heures ( $\simeq 3$  ans). La courbe (3) donne une bonne approche pour le long terme. On utilise les caractéristiques viscoélastiques correspondantes à ces trois courbes, dans les équations (7.12), pour analyser la perte de précontrainte par fluage. Les résultats sont présentés par les figures 7.5 et 7.6.

### 7.3 Comportement de la structure sous une pression accidentelle interne

On regarde maintenant la possibilité de la mise en traction de la paroi par une pression accidentelle interne. On suppose qu’à un certain instant  $t_{ac}$ , le bâtiment

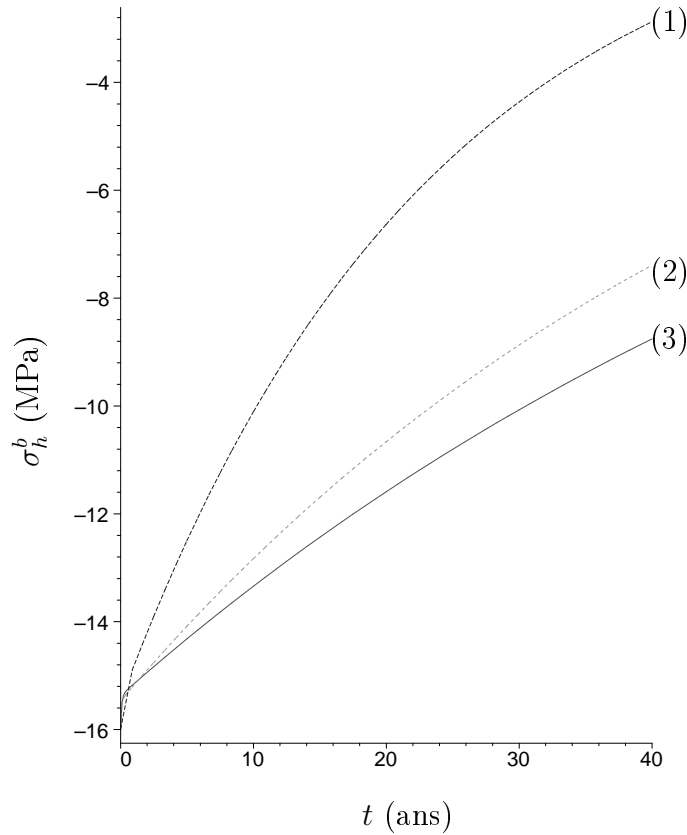


FIG. 7.5 – Perte de précontrainte dans la direction  $\mathbf{e}_\theta$  par fluage d'une enceinte de confinement pour différentes approches du comportement viscoélastique du béton qui sont présentées par la figure 7.4

subit une pression interne  $P$ . Les contraintes de traction correspondantes dans deux directions  $\mathbf{e}_\theta$  et  $\mathbf{e}_z$  sont respectivement :  $\sigma_{ac} = PR/e$  et  $\sigma_{ac}/2$ . Pour les données dans le tableau (7.1), on obtient :  $\sigma_{ac} = 7,3$  MPa.

Bien que l'accident soit instantané, il peut se passer trois étapes dans lesquelles la paroi change de l'état de compression à l'état de traction et puis en état de propagation des fissures (voir la figure 7.7). On remarque que la traction accidentelle dans la direction  $\mathbf{e}_\theta$  est deux fois plus grande par rapport à la traction dans la direction  $\mathbf{e}_z$  tandis que les précontraintes dans ces deux directions ne sont pas très différentes. Alors si le béton de la paroi est mis en traction, il est tout d'abord mis en traction dans la direction  $\mathbf{e}_\theta$ . Le cas critique est celui où  $\sigma_h^b$  devient positive.

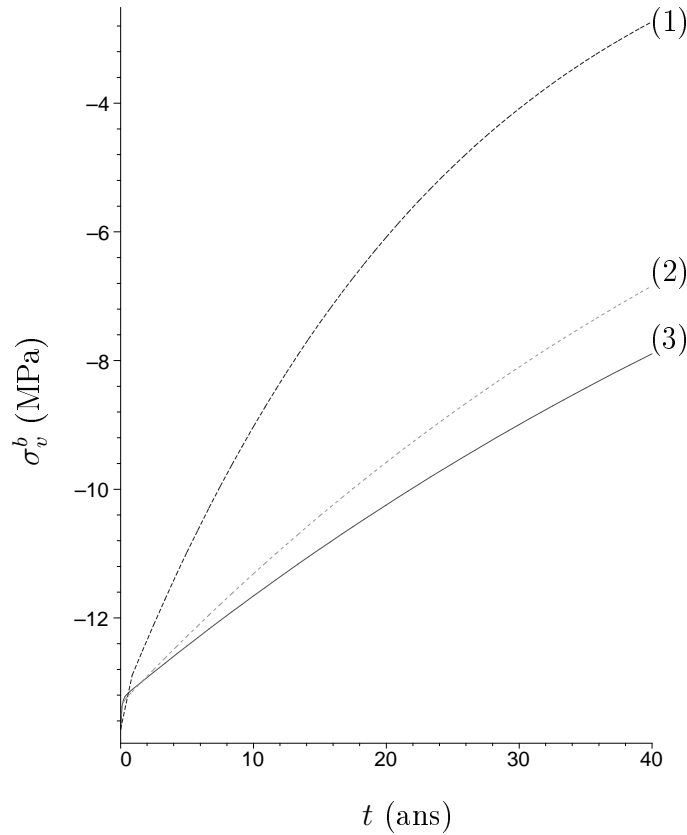


FIG. 7.6 – Perte de précontrainte dans la direction  $\mathbf{e}_z$  par fluage d’une enceinte de confinement pour différentes approches du comportement viscoélastique du béton qui sont présentées par la figure 7.4

### 7.3.1 Etape de compression du béton

Puisque l’accident se passe instantanément, le béton travaille donc, durant cette période, comme un matériau élastique. On suppose pour le moment que l’accident se passe suffisamment tôt où les précontraintes sont encore élevées et la paroi est en état de compression malgré la traction accidentelle (voir la figure 7.8). Dans une telle condition, on suppose que les fissures sont fermées et le béton de la structure est supposé isotrope. On note l’état juste avant l’accident par (1) et les composantes de la contrainte correspondante du béton par  $\sigma_{v1}^b$  et  $\sigma_{h1}^b$ . Les contraintes de l’acier dans cet état sont déterminées par des conditions d’équilibre :  $\sigma_{v1}^a = (\sigma_p - \sigma_{v1}^b)/\gamma_v$ ,  $\sigma_{h1}^a = -\sigma_{h1}^b/\gamma_h$ . On note aussi l’état juste après l’accident par (2) et les composantes de la contrainte correspondante du béton par  $\sigma_{v2}^b$  et  $\sigma_{h2}^b$ . Les relations entre les variations des composantes des tenseurs de



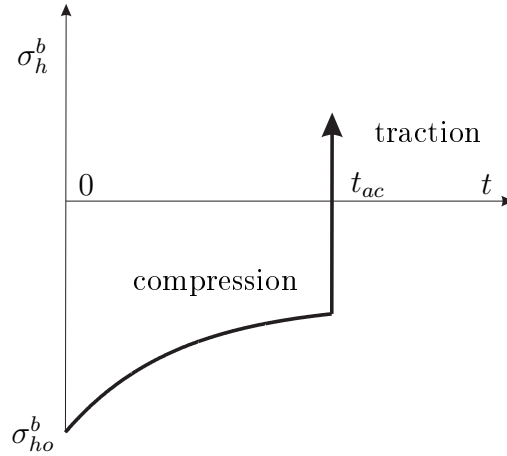


FIG. 7.7 – Changement de contrainte du béton de la paroi lors d'une pression accidentelle interne

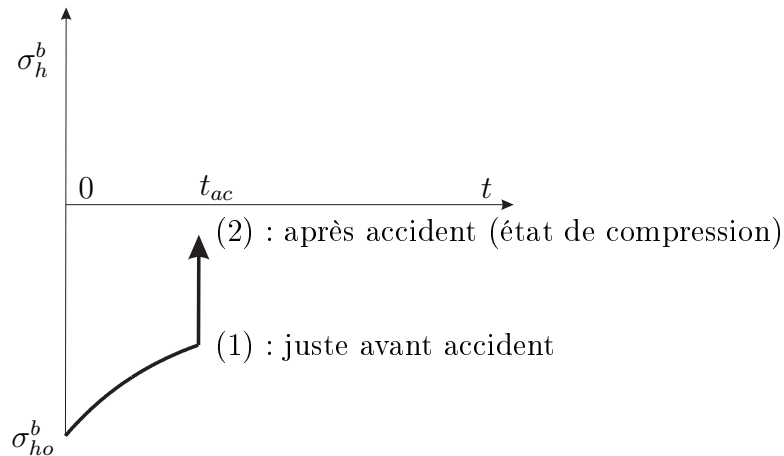


FIG. 7.8 – Le béton de l'enceinte est en état de compression malgré la traction accidentelle

contrainte et de déformation du béton s'écrivent :

$$\delta\varepsilon_h^b = \frac{1}{E_M}(\sigma_{h2}^b - \sigma_{h1}^b) - \frac{\nu_M}{E_M}(\sigma_{v2}^b - \sigma_{v1}^b) \quad ; \quad \delta\varepsilon_v^b = \frac{1}{E_M}(\sigma_{v2}^b - \sigma_{v1}^b) - \frac{\nu_M}{E_M}(\sigma_{h2}^b - \sigma_{h1}^b) \quad (7.13)$$

où  $E_M$  et  $\nu_M$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du comportement instantané du béton (partie de "Maxwell" du modèle de comportement viscoélastique). En plus, sous l'application des tractions accidentelles verticale et horizontale, les conditions d'équilibre permettent d'écrire les relations suivantes :

$$(\sigma_{h2}^b - \sigma_{h1}^b) + \gamma_h \delta\sigma_h^a = \sigma_{ac} \quad ; \quad (\sigma_{v2}^b - \sigma_{v1}^b) + \gamma_v \delta\sigma_v^a = \sigma_{ac}/2 \quad (7.14)$$

où les variations de la contrainte de l'acier sont respectivement déterminées par les variations de déformation par :  $\delta\sigma_v^a = E_a\delta\varepsilon_v^b$  et  $\delta\sigma_h^a = E_a\delta\varepsilon_h^b$ . On obtient alors deux relations entre les variations des contraintes et des déformations du béton :

$$(\sigma_{h2}^b - \sigma_{h1}^b) + \gamma_h E_a \delta\varepsilon_h^b = \sigma_{ac} \quad ; \quad (\sigma_{v2}^b - \sigma_{v1}^b) + \gamma_v E_a \delta\varepsilon_v^b = \sigma_{ac}/2 \quad (7.15)$$

En combinant (7.13) avec (7.15), on obtient un système des équations permettant de déterminer  $\sigma_{v2}^b$  et  $\sigma_{h2}^b$  :

$$a_1(\sigma_{h2}^b - \sigma_{h1}^b) + a_2(\sigma_{v2}^b - \sigma_{v1}^b) = \sigma_{ac} \quad ; \quad a_3(\sigma_{h2}^b - \sigma_{h1}^b) + a_4(\sigma_{v2}^b - \sigma_{v1}^b) = \sigma_{ac}/2 \quad (7.16)$$

où pour simplifier, on a posé :  $a_1 = 1 + \gamma_h E_a / E_M$ ,  $a_2 = -\gamma_h E_a \nu_M / E_M$ ,  $a_3 = -\gamma_v E_a \nu_M / E_M$  et  $a_4 = 1 + \gamma_v E_a / E_M$ . Ces constantes dépendent des caractéristiques élastiques et des fractions volumiques de l'acier. L'équation (7.16) donne les solutions suivantes :

$$\sigma_{h2}^b = \sigma_{h1}^b + \sigma_{ac}/f_h \quad ; \quad \sigma_{v2}^b = \sigma_{v1}^b + \sigma_{ac}/f_v \quad (7.17)$$

où on a posé :

$$f_h = \frac{2(a_1 a_4 - a_2 a_3)}{2a_4 - a_2} \quad \text{et} \quad f_v = \frac{2(a_2 a_3 - a_1 a_4)}{2a_3 - a_1} \quad (7.18)$$

Ces deux constantes ne dépendent ainsi que des caractéristiques élastiques et des fractions volumiques des matériaux. Comme  $\sigma_{ac}$  est une donnée du problème, la valeur de  $\sigma_{h2}^b$  (resp.  $\sigma_{v2}^b$ ) ne dépend que de  $\sigma_{h1}^b$  (resp.  $\sigma_{v1}^b$ ) c'est-à-dire de l'instant de l'accident  $t_{ac}$  (on rappelle que  $\sigma_{h1}^b$  et  $\sigma_{v1}^b$  sont les composantes de la précontrainte du béton à l'instant  $t_{ac}^-$ ).

On définit un état critique où  $\sigma_{h2}^b = 0$  (par des commentaires précédentes, on a montré qu'en ce moment la contrainte dans la direction verticale est encore négative :  $\sigma_{v2}^b < 0$ ) (voir la figure 7.9). On définit ainsi un instant critique  $t_{cr}$  : si l'accident se passe avant cet instant ( $t_{ac} < t_{cr}$ ), le béton de la paroi est en état de compression ( $\sigma_{h2}^b < 0$ ,  $\sigma_{v2}^b < 0$ ) malgré la traction accidentelle. En revanche, si  $t_{ac} > t_{cr}$ , le béton est mis en traction dans la direction  $\mathbf{e}_\theta$  (on suppose qu'il est encore en état de compression dans la direction  $\mathbf{e}_z$ ) et les fissures, dont les plans sont perpendiculaires à  $\mathbf{e}_\theta$ , peuvent s'ouvrir et peut-être se propager.

Par exemple, pour  $\nu_M = 0,27$  et  $E_M = 33,7\text{GPa}$  (correspondant aux trois courbes approchées du fluage du béton expérimenté, sur la figure 7.4) et les données du tableau 7.1 on obtient :  $\sigma_{h2}^b \simeq \sigma_{h1}^b + 6,962\text{MPa}$  et  $\sigma_{v2}^b \simeq \sigma_{v1}^b + 3,556\text{MPa}$ .

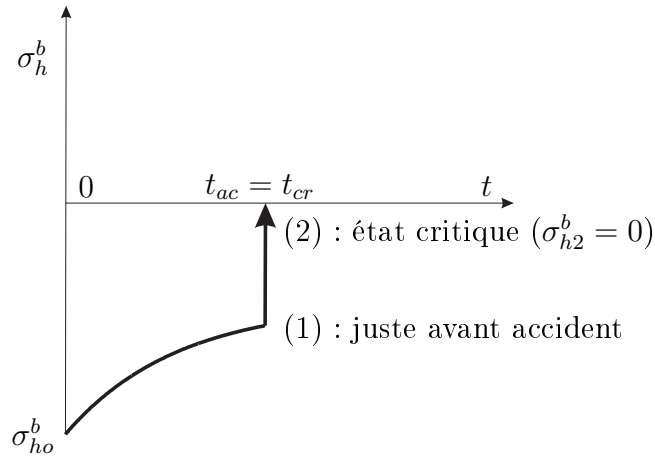


FIG. 7.9 – Etat critique de la structure et l’instant critique de l’accident

L’instant critique  $t_{cr}$  est déterminé en résolvant l’équation  $\sigma_{h2}^b = 0$ , c’est-à-dire  $\sigma_{h1}^b(t_{cr}) = -6,962\text{MPa}$ . Pour les données viscoélastiques correspondantes aux trois approches de fluage (1), (2) et (3) du béton expérimenté (les courbes sont présentées sur la figure 7.4), on obtient respectivement  $t_{cr} \simeq 19\text{ans}$ ,  $43\text{ans}$  et  $59\text{ans}$ . On peut conclure que, pour les bonnes approches du fluage du matériau qui est utilisé pour les structures réelles, le temps caractéristique  $t_{cr}$  est assez grand (par rapport à l’âge actuel des bâtiments de confinement réels). On remarque en plus que, les valeurs ci-dessus (43 ou 59 ans) sont sous estimées (c’est-à-dire que  $t_{cr}$  d’une structure réelle est plus grand que ces valeurs) car le fluage du matériau réel est plus lent que celui qui est estimé par le modèle (courbes (2) et (3) sur la figure 7.4). Ceci est expliqué par le fait que le béton en calcul est considéré “non vieillissant” et les caractéristiques viscoélastiques sont calées par des essais de fluage d’une durée de 3 ans et sont utilisées pour des calculs sur des dizaines d’années.

Dans la suite, pour pouvoir étudier pédagogiquement l’endommagement par microfissures et la condition de propagation de macrofissures et microfissures, on va travailler avec le matériau correspondant à la courbe de fluage (1).

### 7.3.2 Endommagement de la structure par microfissures en état de traction

On se met maintenant dans un état surcritique ( $t_{ac} > t_{cr}$ ). On suppose en plus qu'il existe des microfissures qui se distribuent de façon localement isotrope transverse : le plan de chaque microfissure est perpendiculaire à  $\mathbf{e}_\theta$  (voir la figure 7.10). Pour le cas sans acier, le comportement effectif du béton peut être estimé par des

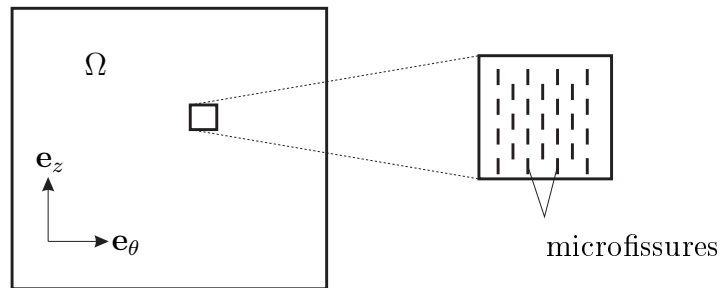


FIG. 7.10 – Les plans des microfissures sont perpendiculaires à  $\mathbf{e}_\theta$

théories classiques de micromécanique : estimations de Mori-Tanaka, de Ponté-Castaneda et Willis, etc (voir le chapitre 4). Dans cette section, on va développer ces études pour le cas où les câbles d'acier sont présents.

#### 7.3.2.1 Comportement effectif sans propagation de microfissures

Si  $t_{ac} > t_{cr}$ , on peut décomposer la contrainte de traction accidentelle en deux parties :  $\sigma_{ac} = \sigma_{cr} + (\sigma_{ac} - \sigma_{cr})$ . La partie  $\sigma_{cr}$  permet de mettre le béton en état critique (voir la figure 7.11). On note respectivement les composantes de la contrainte du béton dans les directions  $\mathbf{e}_\theta$  et  $\mathbf{e}_z$  en état critique par  $\sigma_{h2}^b$  et  $\sigma_{v2}^b$ . Alors :  $\sigma_{h2}^b = 0$ . En utilisant (7.17) on peut déterminer  $\sigma_{cr}$  par :

$$\sigma_{cr} = -\sigma_{h1}^b f_h \quad (7.19)$$

On rappelle que  $\sigma_{h1}^b$  est la contrainte du béton dans la direction  $\mathbf{e}_\theta$  juste avant l'accident (à  $t_{ac}^-$ ). On note respectivement les contraintes de l'acier dans les directions  $\mathbf{e}_\theta$  et  $\mathbf{e}_z$  en état critique par  $\sigma_{h2}^a$  et  $\sigma_{v2}^a$ . Les conditions d'équilibre à l'état critique s'écrivent :

$$\gamma_h \sigma_{h2}^a = \sigma_{cr} \quad ; \quad \sigma_{v2}^b + \gamma_v \sigma_{v2}^a = \sigma_p + \frac{1}{2} \sigma_{cr} \quad (7.20)$$

La partie  $\sigma_{ac} - \sigma_{cr}$  permet de mettre le béton de la paroi en traction sur la direction  $\mathbf{e}_\theta$ . On note l'état de traction du béton par le chargement accidentel

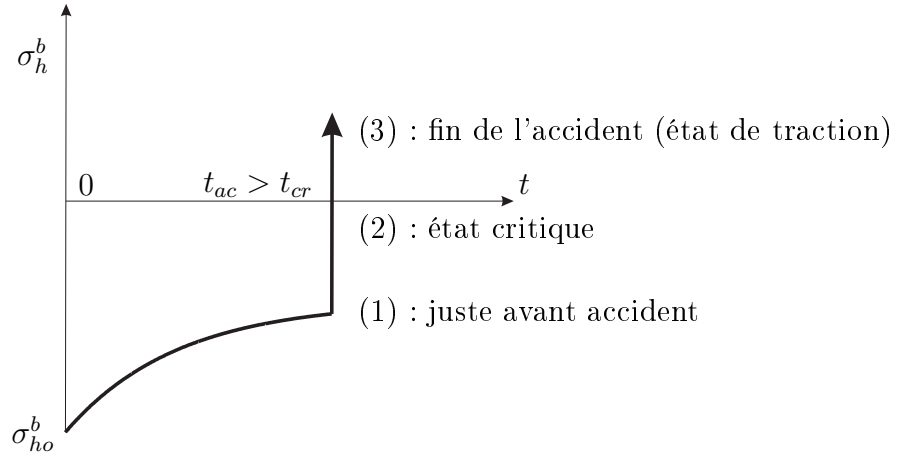


FIG. 7.11 – Etat surcritique de la structure :  $t_{ac} > t_{cr}$

total par l'indice (3) et les contraintes correspondantes du béton par  $\sigma_{h3}^b$  et  $\sigma_{v3}^b$ . Ainsi on note les contraintes de l'acier, dans cette situation, par  $\sigma_{h3}^a$  et  $\sigma_{v3}^a$ . Les conditions d'équilibre à cet état sont :

$$\sigma_{h3}^b + \gamma_h \sigma_{h3}^a = \sigma_{ac} \quad ; \quad \sigma_{v3}^b + \gamma_v \sigma_{v3}^a = \sigma_p + \frac{1}{2} \sigma_{ac} \quad (7.21)$$

Les équations (7.20) et (7.21) permettent d'établir les relations suivantes entre les variations des contraintes du béton et de l'acier entre l'état critique (l'état (2)) et l'état final (l'état (3)) :

$$\sigma_{h3}^b + \gamma_h (\sigma_{h3}^a - \sigma_{h2}^a) = \sigma_{ac} - \sigma_{cr} \quad ; \quad (\sigma_{v3}^b - \sigma_{v2}^b) + \gamma_v (\sigma_{v3}^a - \sigma_{v2}^a) = \frac{1}{2} (\sigma_{ac} - \sigma_{cr}) \quad (7.22)$$

On note respectivement  $\delta \varepsilon_h^b$  et  $\delta \varepsilon_v^b$  les variations des déformations horizontale et verticale du béton entre l'état (2) et l'état (3). On remarque que ce sont aussi les variations des déformations des cables d'acier correspondantes. En appliquant la loi de Hooke pour l'acier, on a les relations suivantes :

$$\sigma_{h3}^a - \sigma_{h2}^a = E_a \delta \varepsilon_h^b \quad ; \quad \sigma_{v3}^a - \sigma_{v2}^a = E_a \delta \varepsilon_v^b \quad (7.23)$$

D'autre part, en condition de traction, on suppose que le béton est endommagé par les microfissures. Pour simplifier, on suppose qu'il ne contient que des microfissures dont les plans sont perpendiculaires à  $\mathbf{e}_\theta$  et par conséquent qu'il est isotrope transverse. On suppose en plus, dans cette section, qu'il n'y a pas de propagation de microfissures, de sorte que la rigidité du béton est définie par le tenseur d'ordre quatre  $\mathbb{C}_M^e(\epsilon_o)$  (voir le modèle de Burger effectif établi dans le chapitre 5) qui dépend des caractéristiques élastiques du béton (comportement

instantané) et du paramètre d'endommagement du béton qu'on note par  $\epsilon_o$  (endommagement initial). La loi de comportement entre deux états (2) et (3) donne une relation entre les variations de la déformation et de la contrainte du béton :  $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{C}_M^{\epsilon_o}{}^{-1}(\epsilon_o) : (\boldsymbol{\sigma}_3 - \boldsymbol{\sigma}_2)$ , ici  $\boldsymbol{\sigma}_2$  est la contrainte à l'état critique (2) et  $\boldsymbol{\sigma}_3$  est la contrainte à l'état final (3). On suppose que la contrainte dans la direction  $\mathbf{e}_r$  est négligeable, les relations en composantes de cette dernière s'écrivent :

$$\delta\varepsilon_h^b = \frac{1}{E_M(\epsilon_o)}\sigma_{h3}^b - \frac{\nu_M(\epsilon_o)}{E_M(\epsilon_o)}(\sigma_{v3}^b - \sigma_{v2}^b) \quad ; \quad \delta\varepsilon_v^b = \frac{1}{E_M(0)}(\sigma_{v3}^b - \sigma_{v2}^b) - \frac{\nu_M(\epsilon_o)}{E_M(\epsilon_o)}\sigma_{h3}^b \quad (7.24)$$

On remarque que, pour le cas de microfissures, on a la relation suivante :  $\nu_M(\epsilon_o)/E_M(\epsilon_o) = \nu_M(0)/E_M(0)$  avec  $\nu_M(0) = \nu_M$  et  $E_M(0) = E_M$  (voir (4.39), (4.49) et (4.61)). En introduisant cette relation dans (7.24), on obtient :

$$\delta\varepsilon_h^b = \frac{1}{E_M(\epsilon_o)}\sigma_{h3}^b - \frac{\nu_M}{E_M}(\sigma_{v3}^b - \sigma_{v2}^b) \quad ; \quad \delta\varepsilon_v^b = \frac{1}{E_M}(\sigma_{v3}^b - \sigma_{v2}^b) - \frac{\nu_M}{E_M}\sigma_{h3}^b \quad (7.25)$$

En combinant (7.22), (7.23) et (7.25), on obtient :

$$\begin{aligned} a_1(\epsilon_o)\sigma_{h3}^b + a_2(\sigma_{v3}^b - \sigma_{v2}^b) &= \sigma_{ac} - \sigma_{cr} \\ a_3\sigma_{h3}^b + a_4(\sigma_{v3}^b - \sigma_{v2}^b) &= \frac{1}{2}(\sigma_{ac} - \sigma_{cr}) \end{aligned} \quad (7.26)$$

où pour la raison de la simplification, on a posé :  $a_1(\epsilon_o) = 1 + \gamma_h E_a / E_M(\epsilon_o)$  (les coefficients  $a_2, a_3, a_4$  sont définis précédemment dans la section 7.3.1). L'équation (7.26) donne les solutions suivantes :

$$\sigma_{h3}^b = (\sigma_{ac} - \sigma_{cr}) \frac{2a_4 - a_2}{2(a_1(\epsilon_o)a_4 - a_2a_3)} \quad ; \quad \sigma_{v3}^b = \sigma_{v2}^b + (\sigma_{ac} - \sigma_{cr}) \frac{a_1(\epsilon_o) - 2a_3}{2(a_1(\epsilon_o)a_4 - a_2a_3)} \quad (7.27)$$

Pour faciliter les développements ultérieurs, on écrit  $\sigma_{h3}^b$  sous la forme suivante :

$$\sigma_{h3}^b = \frac{\sigma_{ac} - \sigma_{cr}}{f_h(\epsilon_o)} \quad (7.28)$$

Où on a posé  $f_h(\epsilon_o) = 2(a_1(\epsilon_o)a_4 - a_2a_3) / (2a_4 - a_2)$ . On remarque que  $f_h(\epsilon_o)$  est positif parce que  $\sigma_{h3}^b > 0$  et  $\sigma_{ac} - \sigma_{cr} > 0$

### 7.3.2.2 Condition de la propagation de microfissures

On suppose que  $t_{ac}$  est suffisamment grand pour que les microfissures risquent de se propager. On cherche à vérifier la condition de propagation des microfissures :

$\mathcal{F}(\epsilon_o) \geq G_c$ . Où on rappelle que  $G_c$  est le taux de restitution d'énergie critique et  $\mathcal{F}(\epsilon_o)$  est estimé par l'approche de Mori-Tanaka (voir la formule (6.41)) :

$$\mathcal{F}(\epsilon_o) = \frac{8(1 - \nu_M^2)}{3E_M} \sigma_{h3}^{b\ 2} \quad (7.29)$$

Dans cette formule,  $E_M$  et  $\nu_M$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du comportement instantané du béton. La contrainte  $\sigma_{h3}^b$  est déterminée par la formule (7.28). Le taux de restitution d'énergie critique est déterminé par (6.40), avec :

$$\ell = (\epsilon_o/N)^{1/3} \quad (7.30)$$

Alors la condition de propagation des microfissures devient :

$$\frac{8(1 - \nu_M^2)}{3E_M} \sigma_{h3}^{b\ 2} = \frac{2\pi N^{1/3} G_f}{3} \frac{1}{\epsilon_o^{1/3}} \quad (7.31)$$

Ici, on rappelle que  $G_f$  est l'énergie de rupture qui est considéré comme une constante donnée du béton. En introduisant  $\sigma_{h3}^b$  déterminée par (7.28) dans (7.31), on obtient :

$$\rho_2(\epsilon_o) = \frac{\epsilon_o^{1/3}}{f_h(\epsilon_o)^2} \geq \frac{c_2}{(\sigma_{ac} - \sigma_{cr})^2} \quad (7.32)$$

Où on a noté  $c_2 = \frac{2\pi N^{1/3} E_M G_f}{8(1 - \nu_M^2)}$ , qui est une constante du matériau. Le terme de gauche est une fonction de  $\epsilon_o$  qu'on note par  $\rho_2(\epsilon_o)$ . L'acier est présent dans cette fonction (voir l'expression de  $f_h(\epsilon_o)$  à la fin de la section 7.3.2.1). La condition de propagation de microfissures peut être testée directement sur la fonction  $\rho_2(\epsilon_o)$ . On l'appelle donc la fonction caractéristique de la propagation de microfissures.

En supposant que tous les informations sur les caractéristiques élastiques des matériaux, sur la distribution et la taille des microfissures ainsi que sur la contrainte accidentelle  $\sigma_{ac}$  sont données, le terme de droite ne dépend alors que de la contrainte  $\sigma_{cr}$  ou bien de  $t_{ac}$  ( $\sigma_{cr}$  est déterminé en fonction de  $\sigma_{h1}^b$  qui est la précontrainte, dans la direction  $\mathbf{e}_\theta$ , subsistant à  $t_{ac}^-$ , voir 7.19). On le note donc par  $\zeta(t_{ac})$ , c'est une fonction décroissante tendant vers une asymptote qui vaut  $c_2/\sigma_{ac}^2$ .

Par la figure 7.12, on peut observer que, pour le cas sans acier,  $\rho_2(\epsilon_o)$  est une fonction croissante. Ainsi, pour n'importe quelle valeur de  $\epsilon_o$ , la condition de propagation sera atteinte pour une valeur suffisamment grande de  $t_{ac}$ .

### 7.3. Comportement de la structure sous une pression accidentelle interne 169

Par contre, pour le cas avec l'acier ( $\gamma_h > 0$ ,  $\gamma_v > 0$ ),  $\rho_2(\epsilon_o)$  se compose de deux parties, l'une est croissante et l'autre est décroissante. Elle a une valeur maximale qu'on note par  $\rho_2^{max}$  pour un paramètre d'endommagement critique qu'on note par  $\epsilon_{cr}$  (voir la figure 7.13).

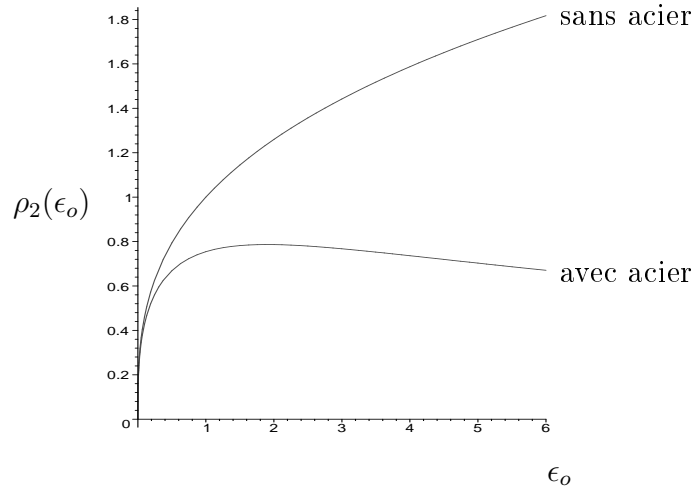


FIG. 7.12 – Fonctions caractéristiques de la propagation de microfissures : avec acier et sans acier.

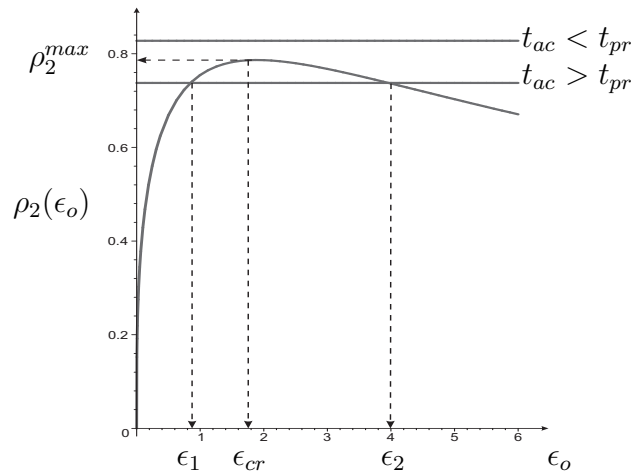


FIG. 7.13 – Condition de propagation de microfissures

Correspondant à  $\epsilon_{cr}$ , il existe une valeur de  $t_{ac}$  qu'on note par  $t_{pr}$  (l'indice *pr* pour "propagation") qui satisfait l'égalité (7.32) :  $\rho_2(\epsilon_{cr}) = \zeta(t_{pr})$ . Si  $t_{ac} < t_{pr}$ , la condition (7.32) ne peut jamais être atteinte quelque soit la valeur de  $\epsilon_o$ . Ainsi,



si l'accident se passe suffisamment tôt, les fissures ne propagent pas quelque soit le niveau d'endommagement initial.

Par contre, si  $t_{ac} > t_{pr}$ , pour chaque valeur de  $t_{ac}$ , l'équation  $\rho_2(\epsilon_o) = \zeta(t_{ac})$  a deux solutions  $\epsilon_1(t_{ac}) < \epsilon_2(t_{ac})$  (voir la figure 7.13). Si  $\epsilon_o < \epsilon_1(t_{ac})$  ou  $\epsilon_o > \epsilon_2(t_{ac})$ , il n'y a pas de propagation de microfissures car  $\rho_2(\epsilon_o) < \zeta(t_{ac})$ . En revanche, si  $\epsilon_1(t_{ac}) < \epsilon_o < \epsilon_2(t_{ac})$ , les microfissures vont propager car  $\rho_2(\epsilon_o) > \zeta(t_{ac})$ .

Pour chaque valeur de  $t_{ac}$ , on calcule  $\zeta(t_{ac})$ , puis on détermine  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  en résolvant l'équation  $\rho(\epsilon_o) = \zeta(t_{ac})$ . La figure 7.14 présente la condition de propagation portée sur  $\epsilon_o$  et  $t_{ac}$ . Une fois que la condition de propagation est atteinte :

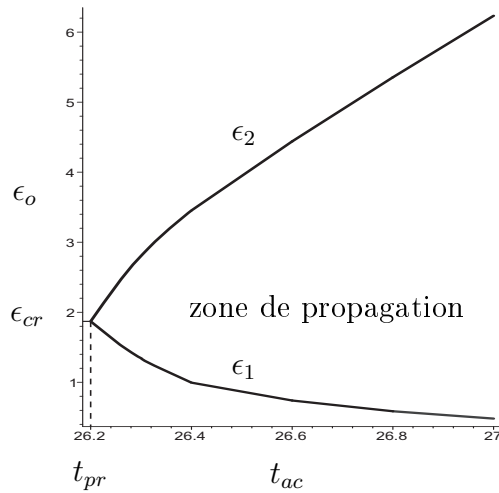


FIG. 7.14 – Conditions de propagation de microfissures

( $t_{ac} > t_{pr}$  et  $\epsilon_1(t_{ac}) < \epsilon_o < \epsilon_2(t_{ac})$ ), la propagation se développe instantanément jusqu'à l'état d'endommagement final dont le paramètre d'endommagement est  $\epsilon_2(t_{ac})$ .

### 7.3.3 Conditions de propagation des macrofissures

On suppose dans cette section qu'il existe des macrofissures dans la structure (le bâtiment de confinement) : soit des fissures qui ont traversé l'épaisseur de la paroi et qui tendent à propager dans la direction  $\mathbf{e}_z$  (fissures type 1, voir la figure 7.18), soit des fissures dont le plan est à nouveau perpendiculaire à  $\mathbf{e}_\theta$ , de grande longueur dans la direction de  $\mathbf{e}_z$ , et qui tendent à propager dans la direction  $\mathbf{e}_r$  (fissures type 2, voir la figure 7.25). On suppose, pour les macrofissures de type 2, que la taille dans la direction  $\mathbf{e}_z$  est suffisamment grande pour qu'on puisse

la considérer comme infinie et on peut se ramener au le problème de fissures 2D en prenant une tranche transversale du bâtiment (voir la figure 7.25).

On se met dans la situation surcritique ( $t_{ac} > t_{cr}$ ). Le béton de la structure est mis en traction et les fissures peuvent s'ouvrir. On remarque que l'accident se passe instantanément et le comportement du béton durant cette période est supposé être élastique. Dans cette section, on suppose que les microfissures se trouvent que dans les "process zone" aux pointes des macrofissures. On suppose en plus que tous les caractéristiques du béton et de l'acier ainsi que tous les informations sur les dimensions de la structure et sur les charges sont données. On va analyser les influences de la taille des macrofissures et des "process zone" ainsi que l'influence de l'instant de l'accident  $t_{ac}$  sur la condition de propagation de macrofissures.

Les calculs numériques sont réalisés sur une structures en béton pur (sans acier). Les cables d'acier de précontrainte sont remplacés par des charges de compression sur le béton. Cependant on rencontre une difficulté sur la détermination de ces charges car elles varient en fonction du champ des déformations du béton. On doit alors réaliser des calculs itératifs jusqu'à la convergence. On part de l'état (1) (l'instant juste avant l'accident  $t_{ac}^-$ ) où on connaît l'état de contrainte du béton et de l'acier. Le tableau 7.2 donne, par exemple, quelques valeurs des composantes de la contrainte du béton pour différentes valeurs de  $t_{ac}^-$  (correspondant aux courbes (1) sur les figures 7.5 et 7.6). Les calculs

$t_{ac}^-$ (ans)	19	20	21	22	23
$\sigma_{v1}^b$ (MPa)	-6,328	-6,082	-5,846	-5,618	-5,399
$\sigma_{h1}^b$ (MPa)	-6,914	-6,630	-6,358	-6,096	-5.846

TAB. 7.2 – Contraintes du béton (correspondant à la courbe de fluage (1) sur la figure 7.4) juste avant l'accident pour différentes valeur de  $t_{ac}$

itératifs commencent par un champ des déformations nulles (on considère l'état (1) comme l'état initial). On peut alors déterminer les chargements extérieurs (seul la pression accidentelle qui joue le rôle de chargement). Les calculs numériques vont permettre de déterminer le champ des déformations du béton. Connaissant les déformations, on peut déterminer les charges dues

aux câbles d'acier qui s'appliquent sur le béton. On répète les calculs des déformations et des chargements de l'acier jusqu'à la convergence. Cette dernière est contrôlée par l'erreur de déformations calculée entre deux étapes simultanées.

On va commencer par le problème d'une plaque (en précontrainte) entaillée en traction mode 1 pour expliquer plus en détail la méthode numérique itérative présentée ci-dessus. On profite ainsi cet exemple pour montrer l'influence des câbles d'acier sur le taux de restitution d'énergie. Les problèmes correspondant aux deux types de fissures sont ensuite simultanément détaillés à la lumière de la méthode numérique itérative développée.

### 7.3.3.1 Plaque entaillée en traction mode 1

On commence par un problème simple d'une plaque entaillée élastique en traction mode 1 (voir la figure 7.15). Pour le cas sans acier et pour une largeur

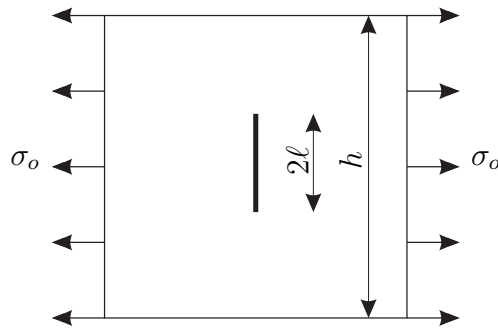


FIG. 7.15 – Plaque entaillée en traction mode 1

suffisamment grande pour qu'on puisse considérer comme infinie, la mécanique de la rupture fragile furni la formule suivante pour la détermination du taux de restitution d'énergie ([46]) :

$$\mathcal{F} = \frac{\sigma_o^2 \pi \ell}{E} g\left(\frac{2\ell}{h}\right)^2 \quad (7.33)$$

où  $\sigma_o$  est la contrainte constante de traction,  $\ell$  est la demi-longueur de la fissure,  $h$  est la hauteur de la plaque,  $E$  est le module d'Young et  $g(X)$  est une fonction géométrique qui est déterminée par la formule :

$$g(X) = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi X}{2}\right)}^{-1} \quad (7.34)$$

### 7.3. Comportement de la structure sous une pression accidentelle interne 173

Les calculs numériques de  $\mathcal{F}$  sont réalisés selon les méthodes présentées au chapitre 3 sur un quart de la plaque qu'on note par  $\omega$  (par symétrie du problème).

On considère le cas de câbles d'acier qui se situent dans la direction de traction. Les calculs sont réalisés par la méthode itérative. Par symétrie du problème, on considère le quart de la plaque qui est considérée comme en béton pure. Les conditions aux limites sont présentées par la figure 7.16. Les calculs

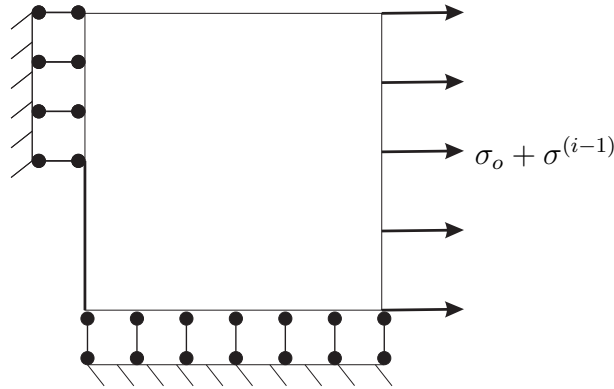


FIG. 7.16 – Conditions aux limites des calculs numériques d'un quart de la plaque

numériques sont réalisés par les étapes suivantes :

1 - Dans la première étape, on impose la traction  $\sigma_o$  pour déterminer le champ des déformations du béton qu'on note par  $\epsilon^{(1)}$  (l'exposant  $(i)$  est pour l'étape  $i$ ). La déformation moyenne des câbles d'acier est ensuite approchée par la déformation horizontale moyenne du béton :  $\bar{\epsilon}^a = \bar{\epsilon}_h^{(1)}$ . La compression due aux câbles d'acier sur le béton dans cette étape qu'on note par  $\sigma^{(1)}$  est finalement déterminée par :  $\sigma^{(1)} = -E_a \gamma_a \bar{\epsilon}^a$ . La charge totale est donc :  $\sigma_o + \sigma^{(1)}$ .

2 - On répète l'étape 1 avec la nouvelle valeur du chargement. A l'étape  $i$ , en appliquant la charge  $\sigma_o + \sigma^{(i-1)}$ , on détermine le champ des déformations du béton  $\epsilon^{(i)}$ . On vérifie la convergence des calculs par un contrôle de l'erreur en déformation sous la forme de la condition suivante :

$$\left| \frac{\epsilon_h^{(i)} - \epsilon_h^{(i-1)}}{\epsilon_h^{(i)}} \right| < \Delta \quad (7.35)$$

où  $\Delta$  est une constante qu'on choisit selon la précision qu'on veut atteindre (par exemple 0,001).

3 - Une fois que la condition (7.35) est satisfaite, on arrête les boucles des calculs. On détermine le champ des contraintes du béton  $\sigma^b$ . La contrainte de traction moyenne des câbles d'acier  $\overline{\sigma^a}$  est ainsi déterminée en fonction de la déformation horizontale moyenne du béton :  $\overline{\sigma^a} = E_a \gamma_a \overline{\varepsilon_h^b}$ . L'énergie élastique du système comprend une partie du béton et une partie de l'acier :  $W = W_b + W_a$ . La partie du béton est calculée de façon habituelle (voir le chapitre 3). L'énergie de l'acier est déterminée par :

$$V_a \frac{\overline{\sigma^a}^2}{2E_a} \quad (7.36)$$

où  $V_a = \gamma_a V_\omega$  est le volume de l'acier dans le domaine  $\omega$ . L'énergie élastique totale du système dépend de la longueur de la fissure, on la note donc par  $W(\ell)$ .

Comme ce qu'on a fait dans le chapitre 3, pour calculer le taux de restitution d'énergie, on crée une propagation fictive de la fissure qui est définie par un incrément de demi-longueur  $\delta\ell$ . On détermine l'énergie élastique du système pour cette nouvelle géométrie :  $W(\ell + \delta\ell)$ . La variation de l'énergie élastique entre deux configurations est :  $\delta W = W(\ell + \delta\ell) - W(\ell)$

On note la différence du vecteur des déplacements nodaux entre deux configuration  $\omega(\ell)$  et  $\omega(\ell + \delta\ell)$  par  $\delta\mathbf{U}$ . On note le vecteur des forces nodales (traction accidentelle et le poids propre de la partie du bâtiment qui se trouve au-dessus de  $\Omega$ ) par  $\mathbf{F}_{ext}$ . La variation du travail des forces extérieures causée par la propagation fictive s'écrit :  $\delta\Phi = \mathbf{F}_{ext}^t \cdot \delta\mathbf{U}$ . La dissipation d'énergie de  $\Omega$  est quatre fois plus grande que celle de  $\omega$  et la variation fictive de la longueur de la fissure est de  $2\delta\ell$ . Le taux de restitution d'énergie de  $\Omega$  est donc déterminé par l'équation suivante :

$$\mathcal{F}(\Omega) = -\frac{4(\delta W(\omega) - \delta\Phi(\omega))}{2\delta\ell} \quad (7.37)$$

La figure 7.17 présente la variation de  $\mathcal{F}$  en fonction de la demi-longueur  $\ell$  de la fissure. Elle donne une très bonne validation des résultat analytique avec ceux des calculs numériques pour le cas sans acier. On peut observer ainsi que la présence des câbles d'acier, avec un pourcentage de 1%, permet de diminuer plus de deux fois la valeur de  $\mathcal{F}$ .

### 7.3.3.2 Macrofissures de type 1

On considère maintenant le cas des macrofissures de type 1 (figure 7.18). Le

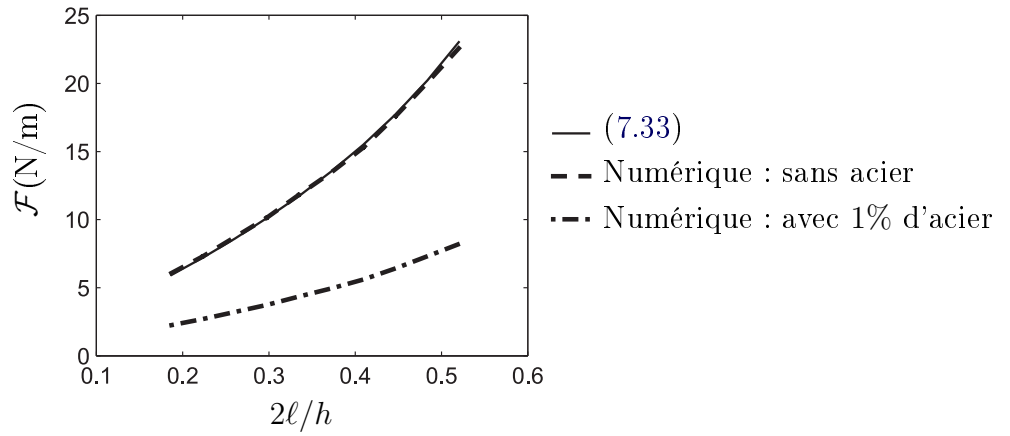


FIG. 7.17 – Taux de restitution d’énergie de la plaque : calculs numériques (CASTEM) et analyses théoriques ( $h = 5,375$ ,  $\sigma_o = 0,3478\text{MPa}$ )

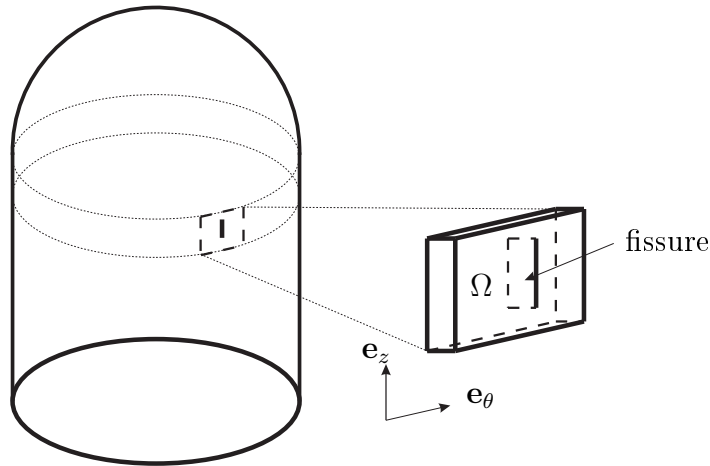


FIG. 7.18 – Macrofissure de type 1

taux de restitution d’énergie  $\mathcal{F}$ , qui est la force motrice de la propagation, est une fonction de la longueur de la fissure  $\ell$ , de la “process zone”, de l’instant de l’accident  $t_{ac}$  et de la distribution des fissures. On suppose que les fissures sont distribuées périodiquement. On extrait une cellule de base  $\Omega$  en béton pure contenant une fissure unique. Comme  $R \ll e$ , on peut considérer  $\Omega$  comme une plaque entaillée en traction. Les dimensions de  $\Omega$  sont déterminées par : la hauteur  $h = H/n_H$  et la largeur  $L = 2\pi R/n_R$ , où  $n_R$  est le nombre de fissures sur une coupe transversale et  $n_H$  est le nombre de fissures sur une coupe verticale. On suppose qu’il existe une “process zone” aux pointes

de la fissure qui est définie par un cercle de diamètre  $d_{PZ}$  et le paramètre d'endommagement  $\epsilon_{PZ}$ . Le cas sans process zone correspond à  $d_{PZ} = 0$  ou  $\epsilon_{PZ} = 0$ . La condition de périodicité demande des déplacements uniformes des bords vertical et horizontal. Pour le faire, on définit des liaisons entre les déplacements. Au lieu d'imposer les contraintes de traction, on impose des forces ponctuelles. La figure 7.19 présente des conditions et des chargements qu'on applique sur le domaine. Ici, par symétrie du problème, on travaille sur un quart de  $\Omega$  qu'on note par  $\omega$ . Par périodicité, sur les bords AB et BC, on définit respectivement les relations suivantes :  $\xi_{x|_{AB}} = \xi_{x|_B}$  et  $\xi_{y|_{BC}} = \xi_{y|_B}$ . Les forces  $F_h$

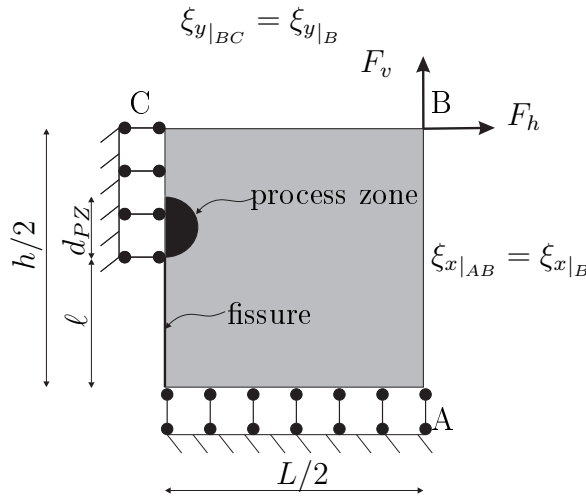


FIG. 7.19 – Calcul en éléments finis d'un quart de  $\Omega$  : conditions aux limites et chargements

et  $F_v$  appliquées au point B sont déterminées en multipliant respectivement les contraintes de traction correspondantes avec les longueurs des lignes d'application.

On rappelle que la traction accidentelle  $\sigma_{ac}$  est décomposée en deux parties :  $\sigma_{ac} = \sigma_{cr} + (\sigma_{ac} - \sigma_{cr})$ . La partie  $\sigma_{cr}$  met la structure en état critique où la contrainte du béton dans la direction horizontale  $\sigma_{h2}^b$  est nulle. La partie restante met le béton de la structure en état de traction, qui peut faire s'ouvrir et propager les fissures. Les calculs numériques partent de l'état critique et c'est la partie  $(\sigma_{ac} - \sigma_{cr})$  qui est la charge du problème. Cependant, les calculs numériques sont réalisés sur un domaine en béton pur, on ne peut pas déterminer les forces  $F_h$  et  $F_v$  directement par  $(\sigma_{ac} - \sigma_{cr})$  car il faut prendre en compte la contribution des câbles d'acier. On doit alors réaliser des calculs itératifs par les

démarches suivantes.

1 - Etape de préparation : pour une valeur donnée de  $t_{ac}$ , on détermine tout d'abord les précontraintes subsistant dans le béton juste avant l'accident :  $\sigma_{v1}^b$  et  $\sigma_{h1}^b$  par les schémas 7.5 et 7.6 (voir par exemple le tableau 7.2). Puis la contrainte critique  $\sigma_{cr}$  est déterminée par (7.19). Connaissant  $\sigma_{cr}$ , on calcule ensuite les contraintes du béton à l'état critique. On rappelle que la contrainte dans la direction horizontale du béton  $\sigma_{h2}^b$  à cet état est nulle. La contrainte dans la direction verticale est déterminée par (7.17) où on remplace  $\sigma_{ac}$  par  $\sigma_{cr}$  :

$$\sigma_{v2}^b = \sigma_{v1}^b + \sigma_{cr}/f_v \quad (7.38)$$

Les contraintes des cables d'acier  $\sigma_{h2}^a$  et  $\sigma_{v2}^a$  sont déterminées par les conditions d'équilibre (voir (7.20)).

2 - Les itérations de calcul : on part de l'état de contrainte critique ( $\sigma_{h2}^b = 0$ ). Depuis cet état, le système qui est composé du béton et des cables d'acier est d'abord soumis à des forces qui sont déterminées par :

$$F_h^{(1)} = \frac{h}{2}(\sigma_{ac} - \sigma_{cr}) \quad ; \quad F_v^{(1)} = \frac{L}{2} \frac{\sigma_{ac} - \sigma_{cr}}{2} \quad (7.39)$$

Dans la première itération, on applique directement ces forces sur le domaine de calcul qui est en béton pure qu'on a noté par  $\omega$ . On détermine ensuite le champ des déformations correspondantes du béton et puis les déformations des cables d'acier. On remarque que, avec les conditions aux limites qui sont définies ci-dessus, les déformations des cables d'acier verticale et horizontale, durant l'accident, sont homogènes : on les note par  $E_v^{(1)}$  et  $E_h^{(1)}$ . Ces valeurs seront utilisées pour déterminer les forces appliquées dans l'itération de calcul suivante.

3 - Dans l'itération de calcul numéro  $i$ , on détermine les forces  $F_h^{(i)}$  et  $F_v^{(i)}$  en fonction des déformations calculées par des itérations précédentes par :

$$F_h^{(i)} = F_h^{(1)} - a_h E_a E_h^{(i-1)} \quad ; \quad F_v^{(i)} = F_v^{(1)} - a_v E_a E_v^{(i-1)} \quad (7.40)$$

où  $a_h = h\gamma_h/2$  et  $a_v = L\gamma_v/2$  sont respectivement les aires totales des cables d'acier dans le domaine de calcul dans les direction horizontale et verticale. On remarque que, à l'état critique, qui est l'état de départ des calculs numériques, on a les conditions suivantes :  $E_v^{(0)} = 0$  et  $E_h^{(0)} = 0$ . On vérifie la convergence des calculs par un contrôle de l'erreur en déformation sous la forme des conditions



**Chapitre 7. Propagation de fissures et endommagement d'une  
178 enceinte de confinement sous une pression accidentelle interne**

suivantes :

$$\left| \frac{E_h^{(i)} - E_h^{(i-1)}}{E_h^{(i)}} \right| < \Delta \quad ; \quad \left| \frac{E_v^{(i)} - E_v^{(i-1)}}{E_v^{(i)}} \right| < \Delta \quad (7.41)$$

où  $\Delta$  est une constante qu'on choisit selon la précision qu'on veut atteindre.

4 - Calcul du taux de restitution d'énergie : pour une longueur donnée de la fissure, par les étapes 1, 2 et 3, on peut déterminer l'état de contrainte du béton et de l'acier sous l'application des tractions accidentelles. L'énergie élastique du système comprend une partie du béton et une partie de l'acier :  $W = W_b + W_a$ . La partie du béton est calculée de façon habituelle (voir le chapitre 3). L'énergie de l'acier est déterminée par :

$$W_a = V_v \frac{\sigma_v^a{}^2}{2E_a} + V_h \frac{\sigma_h^a{}^2}{2E_a} \quad (7.42)$$

où  $V_v = \gamma_v V_\omega$  (resp.  $V_h = \gamma_h V_\omega$ ) est le volume de l'acier dans le domaine de calcul  $\omega$ . L'énergie élastique totale du système dépend de la longueur de la fissure, on la note donc par  $W(\ell)$ .

Comme ce qu'on a fait dans le chapitre 3, pour calculer le taux de restitution d'énergie, on crée une propagation fictive de la fissure qui est définie par un incrément de longueur  $\delta\ell$ . On détermine l'énergie élastique du système pour cette nouvelle géométrie :  $W(\ell + \delta\ell)$ . La variation de l'énergie élastique entre deux configurations est :  $\delta W = W(\ell + \delta\ell) - W(\ell)$

On note la différence du vecteur des déplacements nodaux entre deux configuration  $\omega(\ell)$  et  $\omega(\ell + \delta\ell)$  par  $\delta\underline{U}$ . On note le vecteur des forces nodales (traction accidentelle et le poids propre de la partie du bâtiment qui se trouve au-dessus de  $\Omega$ ) par  $\underline{F}_{ext}$ . La variation du travail des forces extérieures causée par la propagation fictive s'écrit :  $\delta\Phi = \underline{F}_{ext}^t \cdot \delta\underline{U}$ .

Le taux de restitution est finalement calculé par :

$$\mathcal{F} = -2 \frac{\delta W - \delta\Phi}{\delta\ell} \quad (7.43)$$

La figure 7.20 présente le maillage et la déformée de  $\omega$ . Ici, on fait un maillage très fin à la pointe de la fissure.

Pour un instant de l'accident et une taille de la "process zone" donnés, les variations de  $\mathcal{F}$  en fonction de  $\ell$  pour différentes valeurs de  $\epsilon_{PZ}$  sont présentées sur la

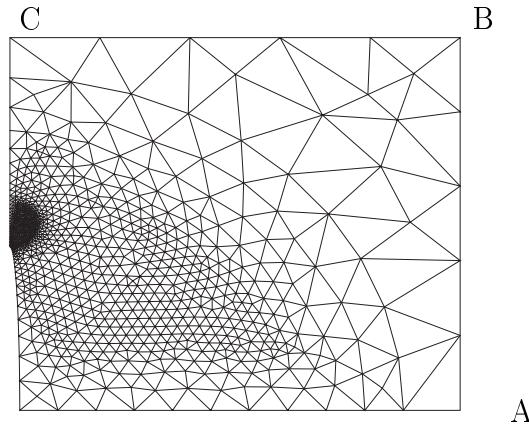


FIG. 7.20 – Maillage et déformée de  $\omega$

figure 7.21. On peut observer que le taux de restitution d'énergie est une fonction croissante de ces deux paramètres. Par ces résultats, pour chaque valeur du taux de restitution d'énergie  $G_c$  (on suppose que c'est une constante donnée du béton), et pour chaque niveau d'endommagement de la "process zone", on peut déterminer la demi-longueur critique pour ce type de fissure, qu'on note par  $\ell_{cr}^{(1)}$  qui satisfait la condition de propagation  $\mathcal{F} = G_c$  (voir la figure 7.22).

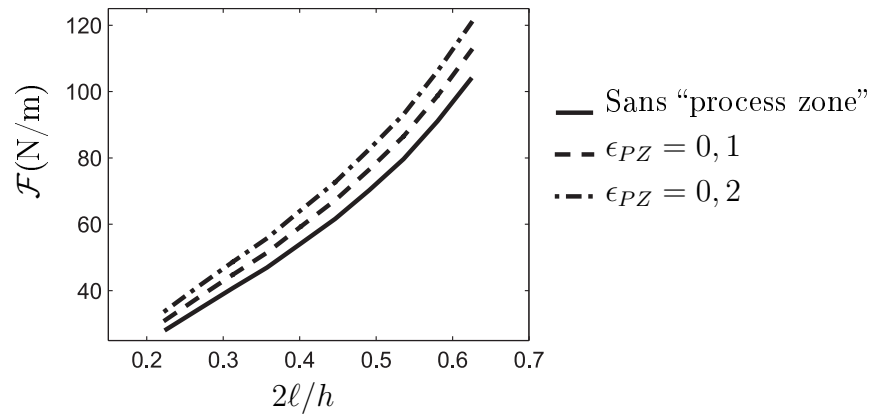


FIG. 7.21 – Taux de restitution d'énergie est une fonction croissante de la longueur de fissure et du niveau d'endommagement de la "process zone" ( $n_H = 12$ ,  $n_R = 30$ ,  $t_{ac} = 22$ ans,  $d_{PZ}/h = 0,067$ )

On peut observer ainsi que  $\mathcal{F}$  est une fonction croissante de la taille de la "process

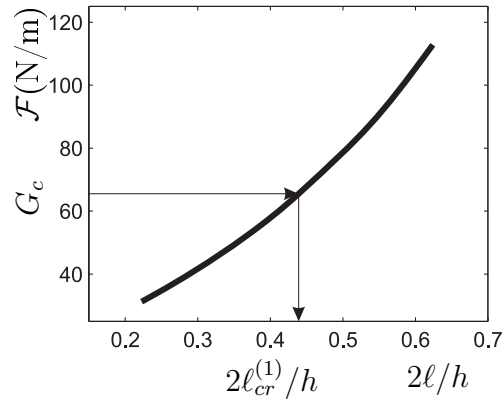


FIG. 7.22 – Longueur critique de la fissure ( $n_H = 12$ ,  $n_R = 30$ ,  $t_{ac} = 22$ ans,  $d_{PZ}/h = 0,067$ ,  $\epsilon_{PZ} = 0,1$ )

zone”  $d_{PZ}$  (voir la figure 7.23).

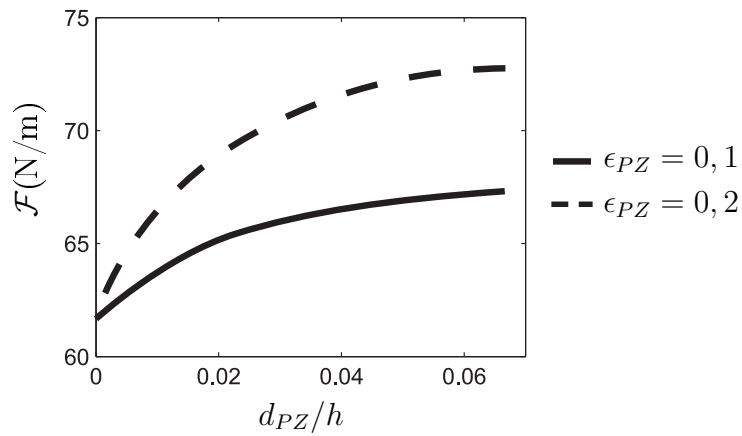


FIG. 7.23 – Taux de restitution d’énergie est une fonction croissante de la taille de la “process zone” ( $n_H = 12$ ,  $n_R = 30$ ,  $t_{ac} = 22$ ans,  $2\ell/h = 0,446$ )

On étudie maintenant l’influence de  $t_{ac}$  sur le taux de restitution d’énergie. Les variations de  $\mathcal{F}$  en fonction de  $t_{ac}$  pour des valeurs données de  $\ell$ ,  $d_{PZ}$  et de  $\epsilon_{PZ}$  sont présentées sur la figure 7.24. On peut observer que, si l’accident se passe après l’instant critique  $t_{cr}$ , le taux de restitution d’énergie dépend fortement de  $t_{ac}$ . Pour une valeur donnée de  $G_c$ , on définit un instant qu’on note par  $t_{pr}^{(1)}$  qui satisfait la condition de propagation de fissure  $\mathcal{F}(t_{pr}^{(1)}) = G_c$  (voir la figure 7.24).

Si l'accident se passe après cet instant, les fissures vont se propager.

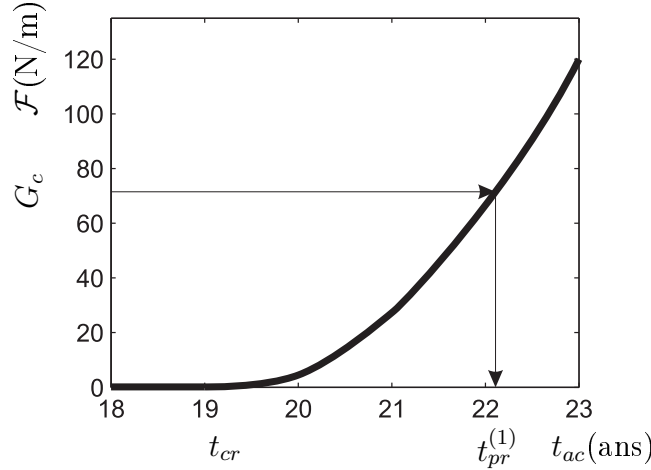


FIG. 7.24 – Taux de restitution d'énergie en fonction de l'instant de l'accident ( $n_H = 12$ ,  $n_R = 30$ ,  $2\ell/h = 0,446$ ,  $d_{PZ}/h = 0,067$ ,  $\epsilon_{PZ} = 0,1$ )

### 7.3.3.3 Macrofissure type 2

On considère maintenant le problème de macrofissures qui sont en train d'envahir l'épaisseur du paroi et qui se distribuent de façon périodique dans le plan horizontal (voir la figure 7.25 à gauche). En vertu de la périodicité du problème, on considère une cellule de base sur une tranche transversale de la paroi de la structure (voir la figure 7.25 à droite) dont les bords BC et KD sont bloqués en déplacement dans la direction  $\mathbf{e}_\theta$ . La fissure est définie par la ligne AK qui est libre en déplacement et en contrainte. L'angle  $\alpha$  est déterminé par le nombre  $n$  de fissures qu'on suppose qu'il est donné :  $\alpha = 2\pi/n$ . On considère le problème en mode de déformation plane. On va vérifier la condition de propagation de la fissure sous l'action d'une pression interne  $P = 0,4$  MPa qui cause une traction dans la direction  $\mathbf{e}_\theta$  (mode 1).

Le rôle de l'acier est définie par une charge de compression dans la direction  $\mathbf{e}_\theta$  :  $\gamma_h \sigma_{h3}^a$  sur le bord rayonnau de droite BC ou  $\sigma_{h3}^a$  est la contrainte de l'acier dans la direction considérée sous l'action de l'accident. Car ce bord est bloqué en déplacement, on ne peut pas imposer cette charge. On impose alors une traction équivalente sur le bord interne AB (voir la figure 7.25 à droite)

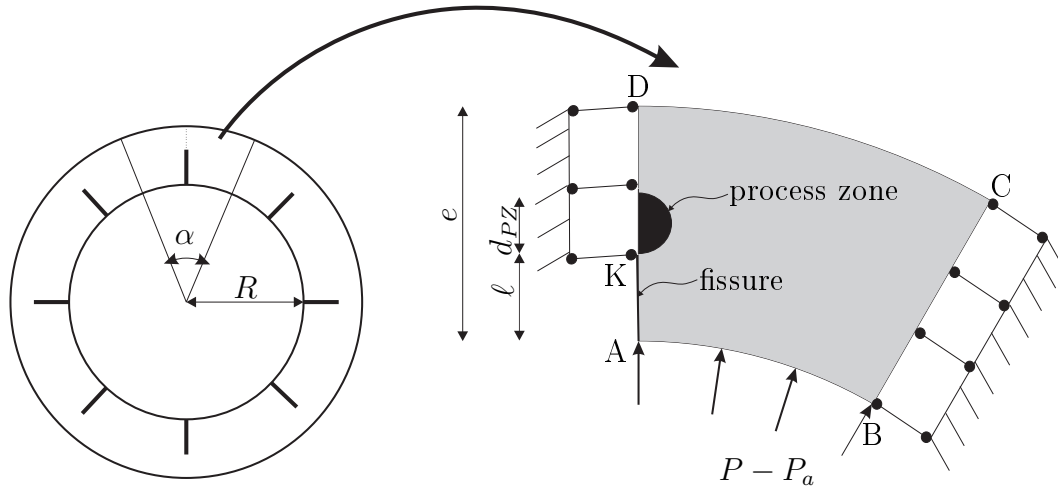


FIG. 7.25 – Modèle de calcul de macrofissure de type 2

dont la valeur est déterminée par :

$$P_a = \gamma_h \sigma_{h3}^a \frac{e}{R} \quad (7.44)$$

On remarque que,  $\sigma_{h3}^a$  est une inconnue, elle dépend de la déformation dans la direction  $\mathbf{e}_\theta$  qui est la solution du problème. Alors  $P_a$ , qui joue le rôle d'une charge, est aussi inconnue. On doit alors réaliser des calculs itératifs par des étapes suivantes.

1 - Pour une valeur donnée de  $t_{ac}$ , par l'étape de préparation, on détermine les contraintes du béton et de l'acier à l'état critique  $\sigma_{v2}^b = 0$ ,  $\sigma_{h2}^b$ ,  $\sigma_{v2}^a$  et  $\sigma_{h2}^a$  (voir l'étape de préparation du problème de macrofissures de type 1). On considère cet état comme l'état initial des calculs.

2 - Dans la première itération (boucle) de calcul, on commence par une déformation nulle. La contrainte de traction correspondant sur le bord AB due à l'acier qu'on note par  $P_a^{(1)}$  est déterminée par :

$$P_a^{(1)} = \gamma_h \sigma_{h2}^a \frac{e}{R} \quad (7.45)$$

Sous l'application de  $P - P_a^{(1)}$ , on détermine le champ des déformations du béton. La déformation dans la direction  $\mathbf{e}_\theta$  est noté par  $\varepsilon_h^{(1)}$ .

3 - Connaissant  $\varepsilon_h^{(i)}$  (l'exposant  $(i)$  est pour les valeurs déterminées à la boucle  $i$ ), on peut à nouveau déterminer la traction  $P_a^{(i+1)}$  par :

$$P_a^{(i+1)} = \gamma_h \left( \sigma_{h2}^a + E_a \varepsilon_h^{(i)} \right) \frac{e}{R} \quad (7.46)$$

La déformation  $\varepsilon_h^{(i+1)}$  est ensuite déterminée par l'application de  $P - P_a^{(i+1)}$ . Le calcul continue jusqu'à la convergence qui est vérifiée par la condition :

$$\left| \frac{\varepsilon_h^{(i+1)} - \varepsilon_h^{(i)}}{\varepsilon_h^{(i)}} \right| < \Delta \quad (7.47)$$

où  $\Delta$  est une constante qu'on choisit selon la précision qu'on veut atteindre.

4 - A l'état final, on calcule le taux de restitution d'énergie en créant une propagation fictive de la fissure  $\delta\ell$  (voir le problème de macrofissure de type 1). Le maillage et la déformée d'une cellule de base sont présentés par la figure 7.26.

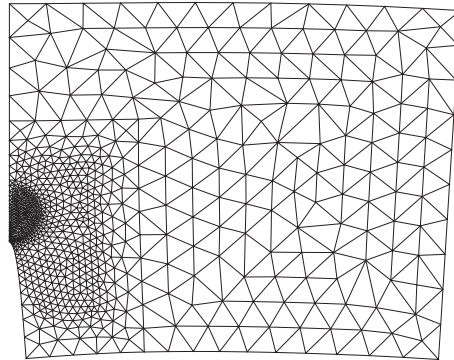


FIG. 7.26 – Maillage et déformée de la moitié de droite d'une cellule de base (par la symétrie du problème, on fait le calcul sur la moitié d'une cellule de base)

Par les figures 7.27 et 7.28, on peut observer que  $\mathcal{F}$  est une fonction croissante de  $\ell$ ,  $d_{PZ}$  et de  $\epsilon_{PZ}$ . Pour une valeur donnée de  $G_c$ , on peut déterminer la longueur critique des fissures qu'on note par  $\ell_{cr}^{(2)}$  qui satisfait la condition  $\mathcal{F} = G_c$ . Les fissures vont se propager si  $\ell > \ell_{cr}^{(2)}$  (voir la figure 7.29).

Par la figure 7.30, on peut observer ainsi que  $\mathcal{F}$  est une fonction croissante de  $t_{ac}$ . Pour une valeur donnée de  $G_c$ , on définit un instant qu'on note par  $t_{pr}^{(2)}$  qui satisfait la condition  $\mathcal{F}(t_{pr}^{(2)}) = G_c$ . Les fissures vont se propager si  $t_{ac} > t_{pr}^{(2)}$ .

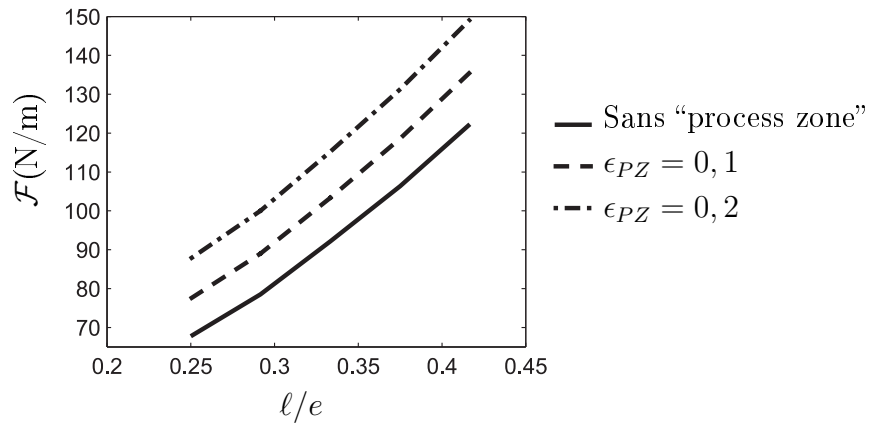


FIG. 7.27 – Taux de restitution d'énergie en fonction de la longueur de fissure et du niveau d'endommagement de la "process zone" ( $n = 100$ ,  $t_{ac} = 22$ ans,  $d_{PZ}/e = 0,167$ )

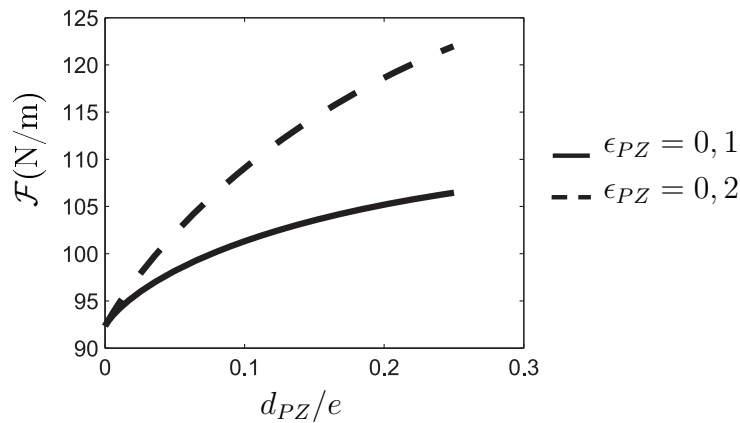


FIG. 7.28 – Taux de restitution d'énergie en fonction de la taille et du niveau d'endommagement de la "process zone" ( $n = 100$ ,  $t_{ac} = 22$ ans,  $\ell/e = 0,333$ )

## 7.4 Conclusions

Dans ce chapitre, on a appliqué les études précédentes à une enceinte de confinement fissurée, siège d'une perte de précontrainte due au fluage du béton. On a commencé par des études analytiques de perte de précontrainte par fluage du béton en état de compression avant l'accident. A un certain instant, on a supposé que la structure subit une pression accidentelle interne. On a observé que, pour les caractéristiques viscoélastiques du béton qui sont données par les essais

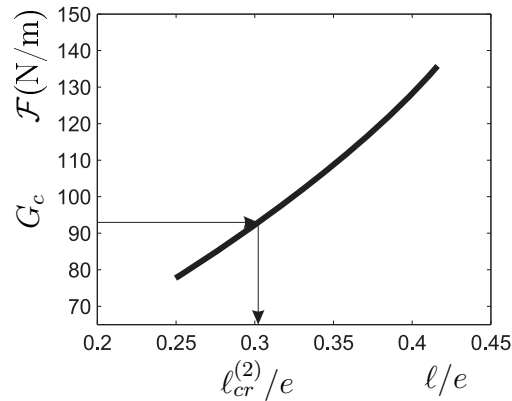


FIG. 7.29 – Longueur critique des fissures ( $n = 100$ ,  $t_{ac} = 22$ ans,  $d_{PZ}/e = 0,167$ )

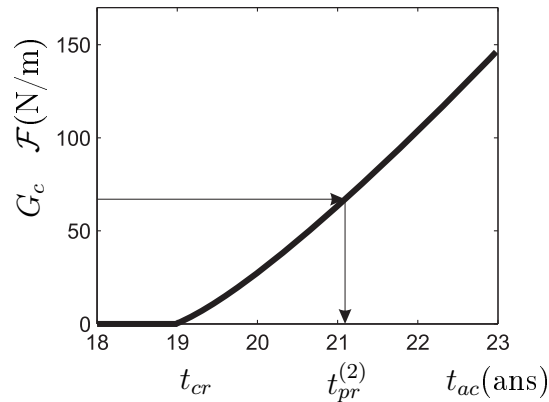


FIG. 7.30 – Taux de restitution d'énergie en fonction de l'instant de l'accident et le niveau d'endommagement de la "process zone" ( $n = 100$ ,  $\ell/e = 0,333$ ,  $d_{PZ}/e = 0,167$ ,  $\epsilon_{PZ} = 0,1$ )

réalisés à EDF, la perte de précontrainte est très lente. Après 50 ans, la structure sera donc en état de compression malgré la charge accidentelle. Il n'y a donc pas de risque sérieux de propagation de fissure. Pour pouvoir illustrer cette étude, on s'est placé dans un cadre extrême et l'on a supposé que le matériau étudié a des caractéristiques très défavorables par rapport au matériau réel. On a montré qu'il existe un instant critique. Si l'accident se passe avant cet instant, la précontrainte restante est encore élevée par rapport à la contrainte de traction causée par la charge accidentelle. La structure est en état de compression et il n'y a pas ouverture ni propagation de fissure. Par contre, si l'accident se passe après cet instant, les macrofissures et microfissures peuvent se propager. Le cas des



**186 Chapitre 7. Propagation de fissures et endommagement d'une  
enceinte de confinement sous une pression accidentelle interne**

---

microfissures est étudié analytiquement car le comportement des matériaux durant l'accident est élastique. Deux types de macrofissures avec la présence d'une "process zone" sont également abordés numériquement.

# Conclusions et perspectives

---

## Conclusions

Dans ces travaux de thèse, on a répondu plusieurs questions posées sur la propagation de fissure et sur l'endommagement par microfissure dans un milieu viscoélastique linéaire non vieillissant. On s'est intéressé à la fois à des études analytiques et numériques. En premier lieu, on s'est basé sur le principe de correspondance pour traiter analytiquement des problèmes mécaniques reliant aux caractéristiques visqueuses du matériau : le fluage et la perte de précontrainte d'une enceinte de confinement par fluage, le comportement effectif des matériaux viscoélastiques microfissurés, etc. En second lieu, à la lumière de la méthode des éléments finis et des différences finis, on a étudié numériquement les problèmes de propagation de macrofissures et de microfissures.

On a choisi tout d'abord le modèle de Burger pour modéliser le comportement viscoélastique du béton. On a analysé ensuite la restitution d'énergie des structures viscoélastiques fissurées en définissant le taux de restitution d'énergie qui est la force motrice de propagation de fissure. Le critère de propagation de fissure a été écrit sur cette valeur. Plusieurs conclusions importantes ont été tirées de ces études.

1 - L'énergie élastique, d'une structure viscoélastique en état de chargement, est la somme de deux parties : une partie récupérable et une partie résiduelle. Pour les structures qui sont viscoélastiquement homogènes (les temps caractéristiques du matériau sont homogènes partout dans la structure), l'énergie résiduelle est nulle.

2 - Pour le cas d'un chargement cinématique, la vitesse de déplacement imposé influence strictement sur la restitution de l'énergie de la structure. Plus  $\dot{U}$  est grande, plus  $\mathcal{F}$  est grand et tend vers le résultat du problème élastique. On a montré ainsi que, quand  $t \rightarrow \infty$ ,  $\mathcal{F}$  tend vers une valeur asymptotique  $\mathcal{F}_\infty$  qui est proportionnelle à  $\dot{U}^2$ .

3 - Il existe une vitesse critique  $\dot{U}_{cr}$  avec laquelle la valeur asymptotique du

taux de restitution d'énergie est égale à la valeur critique  $G_c$ . Si la vitesse de déplacement imposé est inférieur à  $\dot{U}_{cr}$ , le taux de restitution d'énergie est inférieur à  $G_c$  quelque soit la valeur de la charge, alors il n'y a jamais de propagation de fissure.

4 - Il existe une longueur initiale critique de la fissure  $\ell_{cr}$ . Si la longueur initiale de la fissure  $\ell_o$  est supérieur à  $\ell_{cr}$ , il n'y a pas de propagation de fissure même si  $\dot{U} > \dot{U}_{cr}$ .

5 - Si  $\dot{U} > \dot{U}_{cr}$  et  $\ell_o < \ell_{cr}$ , pour une valeur suffisamment grand de  $U$ , la fissure va se propager. Dans ce cas, la longueur de la fissure et la force duale du déplacement imposé vont respectivement tendre vers leurs valeurs asymptotiques  $\ell_\infty$  et  $F_\infty$  qui ne dépendent que de  $\dot{U}$ .

6 - Si on considère que  $G_c$  est une constante du matériau, la force au pic (force de rupture) ne dépend que de la longueur initiale de la fissure  $\ell_o$  mais ne dépend pas de la vitesse de chargement.

On remarque que les notions de la vitesse de chargement critique, longueur initiale critique, longueur et force asymptotiques n'existent pas dans le problème élastique. Elles relient strictement aux caractéristiques visqueuses du matériau.

Pour des matériaux viscoélastiques microfissurés, on a établi, en développant des résultats classiques de micromécanique élastique et en appliquant le principe de correspondance, un modèle de Burger effectif pour les cas isotrope et isotrope transverse. Les variations des modules viscoélastiques du modèle en fonction du paramètre d'endommagement sont explicitement déterminées. On remarque que, ces résultats sont valable pour le cas sans propagation de microfissures.

Grâce à ces études, on a pu revenir au problème de poutre entaillée en flexion 3-points en tenant compte la "process zone". On a montré que, même si  $G_c$  est une constante du matériau, la force au pic varie en fonction de la taille et niveau d'endommagement de la "process zone" ainsi que de la vitesse de déplacement imposé. Cependant, différemment au résultats expérimentaux, la variation de la force au pic en fonction de la vitesse de chargement est très faible. Ceci est expliqué par l'évolution de  $G_c$  en fonction du fluage du béton cequi a été montré par des études expérimentales sur le béton [40].

Parallèlement avec les études analytiques ci-dessus, des calculs numériques

---

de propagation de microfissures ont été réalisés sous l'aide de la notion du motif morphologique représentatif. On a tout d'abord parfaitement validé le modèle de Burger effectif pour le cas sans propagation de microfissures. On a ensuite développé les idées de vitesse critique de déplacement imposé, de longueur initiale critique, de longueur et de force asymptotiques. On a défini alors les notions de vitesse critique de déformation macroscopique imposée, de paramètre d'endommagement initial critique, de paramètre d'endommagement et de contrainte macroscopique asymptotiques.

En fin, on a utilisé les études ci-dessus pour résoudre le problème de propagation de macrofissures et de microfissures d'une enceinte de confinement par la perte de précontrainte due au fluage du béton. On a montré tout d'abord que, avec les modules viscoélastiques qui sont tirés d'une courbe expérimentale de fluage réalisé à EDF R&D, la précontrainte restante dans la structure après 40 ans (en regardant sur l'âge des structures réelles) est encore suffisamment élevée pour garder le béton en état de compression même si la structure doit supporter une pression accidentelle interne (de 0,4 MPa). Alors, pour la raison pédagogique, on a considéré un béton avec des caractéristiques viscoélastiques très défavorables pour pouvoir étudier le problème de propagation de fissures. On a montré que, durant l'accident, il peut se passer trois étapes où le béton change de compression à traction et puis à l'état de propagation de fissures. Les conditions de propagation de microfissures et de deux types de macrofissures sont analysées. On a remarqué que, l'instant de l'accident joue le rôle principale dans cette question. On a défini un instant critique  $t_{cr}$ , si l'accident se passe avant cet instant, il n'y a pas de problème car le béton est en état de compression. Cette valeur dépend certainement des caractéristiques viscoélastiques du béton. On a défini ainsi des instants de propagation pour les problèmes de microfissures et de macrofissures. Par exemple, pour le cas de microfissure, il existe un instant  $t_{pr}$ . Si l'accident se passe avant cette instant, il n'y a pas de propagation des microfissures, au contraire, la structure est cassée par l'augmentation du niveau d'endommagement du béton. De même façon, pour le cas de macrofissure, on définit des instants de propagation  $t_{pr}^{(1)}$  et  $t_{pr}^{(2)}$  respectivement pour 2 types de macrofissures. L'accident devient très dangereux s'il se passe après cet instant. Les notions de  $t_{cr}$ ,  $t_{pr}$  et  $t_{pr}^{(1)}$  et  $t_{pr}^{(2)}$  donnent une idée pratique sur l'âge d'exploitation de la structure.

## Perspectives

Plusieurs poursuites de cette thèse sont possibles. Soit sur le comportement du matériau, on peut développer ces études pour les lois de comportement plus compliquées : soit un modèle plus complexe que le modèle de Burger (modèles de Maxwell ou de Kelvin généralisé) ; soit une loi de comportement viscoélastique vieillissant ; soit un comportement visco-élasto-plastique. Sur le problème de fissure unique, dans cette thèse, on se limite à la propagation suivant la mode 1, des études sur les autres modes sont donc à compléter. L'approche de fissure cohésive est ainsi envisagée.

Sur la question que la force au pic, du problème de poutre en flexion 3-points, dépend de la vitesse de déplacement imposée. On a essayé d'expliquer par la présence de la "process zone". Cependant la variation de la force au pic dans ce cas est très faible par rapport à ce qu'on peut observer par des essais. Une autre explication pour ce phénomène porte sur le taux de restitution d'énergie critique  $G_c$ . Par des essais réalisés (à LCPC par exemple), on a montré qualitativement que  $G_c$  varie en fonction de la vitesse de chargement. On pose alors des études quantitatives sur la variation de  $G_c$  et introduit dans les études numériques qui sont présentées dans le chapitre 2 pour estimer plus exactement la variation de la force au pic. On prévoit que la connaissance sur la variation de  $G_c$  permet ainsi d'expliquer le phénomène de fluage tertiaire.

Sur l'étude de l'endommagement par microfissure, on se limite aux cas isotropes ou isotrope transverse du matériau endommagé. On peut alors développer ces études pour les autres anisotropies plus complexes, par exemple le cas d'orthotrope. De plus, on a construit un modèle de Burger pour un matériau endommagé dont le matériau sain est modélisé par le même modèle. Une question posée directement c'est que : si le matériau sain prend un modèle plus complexe, qu'est qu'on peut utiliser pour modéliser le matériau endommagé. On peut ainsi poser une question d'homogénéisation d'un milieu hétérogène donc chaque phase est viscoélastique.

Quand on regarde sur la méthode numérique, on observe que, les calculs numériques sur le motif morphologique représentatif collent parfaitement avec l'estimation de Ponté Castaneda et Willis, car tous ces deux méthodes considèrent la distribution spatiale des fissures. Tandis que le modèle de Burger effectif pour le cas viscoélastique est sortie de l'estimation de Mori-Tanaka. Alors

chaque fois qu'on veut valider les calculs numériques, on doit considérés une distribution alignée des fissures. Une question posée c'est qu'est-ce qu'on peut construire une méthode numérique qui colle avec l'estimation de Mori-Tanaka pour tous les cas de la distribution de microfissures.

Encore sur la méthode numérique, on peut, dans cette thèse, construire une motif morphologique représentatif d'un milieu avec des fissures qui se distribuent de façon isotrope ou alignée. La question posée c'est qu'est-ce qu'on peut utiliser cette méthode pour les autres distributions.

Une petite application est réalisée sur le bâtiment de confinement dans le dernier chapitre. Cependant, durant l'accident, le comportement est élastique, on n'a donc pas l'effet de la viscosité sur la condition de propagation de fissure. Alors, des autres applications des études de cette thèse pour des autres structures et des autres chargement sont à exploiter.

On pense également à combiner les résultats de cette thèse avec des études des granulats du béton.



# Calculs tensoriels dans la base sphérique-déviatorique et applications

---

Dans la base de projecteurs sphérique et déviatorique  $\mathbb{J}$  et  $\mathbb{K}$ , un tenseur isotrope d'ordre 4 quelconque  $\mathbb{L}$  peut être décomposé par :

$$\mathbb{L} = \ell_1 \mathbb{J} + \ell_2 \mathbb{K} \quad (\text{A.1})$$

où  $\mathbb{J}$  et  $\mathbb{K}$  sont respectivement les parties sphérique et déviatorique du tenseur identité  $\mathbb{I}$ . On peut alors utiliser deux scalaires  $\ell_1$  et  $\ell_2$  pour définir le tenseur  $\mathbb{L}$ . On remarque que les calculs tensoriels, pour le cas isotrope, sont très facilement réalisés dans la base  $(\mathbb{J}, \mathbb{K})$ . En fait, considérons un deuxième tenseur  $\mathbb{M}$  qui est défini par deux scalaires  $m_1$  et  $m_2$ , on a :

$$\mathbb{L}^{-1} = \frac{1}{\ell_1} \mathbb{J} + \frac{1}{\ell_2} \mathbb{K} \quad ; \quad \mathbb{L} + \mathbb{M} = (\ell_1 + m_1) \mathbb{J} + (\ell_2 + m_2) \mathbb{K} \quad ; \quad \mathbb{L} : \mathbb{M} = \ell_1 m_1 \mathbb{J} + \ell_2 m_2 \mathbb{K} \quad (\text{A.2})$$

On revient maintenant à (2.8) où les tenseurs de rigidité élastiques et de viscosité sont définis par 8 caractéristiques du matériau considéré (voir (2.9)). Grâce à (A.2), on peut déterminer le tenseur  $\mathbb{X}$  par :

$$\mathbb{X} = \mathbb{C}_K^e : \mathbb{S}_M^v = (3k_K \mathbb{J} + 2\mu_K \mathbb{K}) : \left( \frac{1}{\eta_M^s} \mathbb{J} + \frac{1}{\eta_M^d} \mathbb{K} \right) = \frac{3k_K}{\eta_M^s} \mathbb{J} + \frac{2\mu_K}{\eta_M^d} \mathbb{K} \quad (\text{A.3})$$

le tenseur  $\mathbb{Y}$  par :

$$\begin{aligned} \mathbb{Y} &= \mathbb{I} + \mathbb{C}_K^e : \mathbb{S}_M^e + \mathbb{C}_K^v : \mathbb{S}_M^v \\ &= (\mathbb{J} + \mathbb{K}) + \left( \frac{3k_K}{3k_M} \mathbb{J} + \frac{2\mu_K}{2\mu_M} \mathbb{K} \right) + \left( \frac{\eta_K^s}{\eta_M^s} \mathbb{J} + \frac{\eta_K^d}{\eta_M^d} \mathbb{K} \right) \\ &= \left( 1 + \frac{k_K}{k_M} + \frac{\eta_K^s}{\eta_M^s} \right) \mathbb{J} + \left( 1 + \frac{\mu_K}{\mu_M} + \frac{\eta_K^d}{\eta_M^d} \right) \mathbb{K} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

et le tenseur  $\mathbb{Z}$  par :

$$\mathbb{Z} = \mathbb{C}_K^v : \mathbb{S}_M^e = (\eta_K^s \mathbb{J} + \eta_K^d \mathbb{K}) : \left( \frac{1}{3k_M} \mathbb{J} + \frac{1}{2\mu_M} \mathbb{K} \right) = \frac{\eta_K^s}{3k_M} \mathbb{J} + \frac{\eta_K^d}{2\mu_M} \mathbb{K} \quad (\text{A.5})$$



**Annexe A. Calculs tensoriels dans la base sphérique-déviatorique et applications**

---

Le tenseur de rigidité apparent  $\mathbb{C}^*$  est déterminé par (2.14), ou bien :

$$\mathbb{C}^{*-1} = (\mathbb{X} + p\mathbb{Y} + p^2\mathbb{Z}) : (p\mathbb{C}_K^e + p^2\mathbb{C}_K^v)^{-1} \quad (\text{A.6})$$

où :

$$(p\mathbb{C}_K^e + p^2\mathbb{C}_K^v)^{-1} = \frac{1}{3pk_K + p^2\eta_K^s} \mathbb{J} + \frac{1}{2p\mu_K + p^2\eta_K^d} \mathbb{K} \quad (\text{A.7})$$

et en utilisant (A.3), (A.4) et (A.5) on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{X} + p\mathbb{Y} + p^2\mathbb{Z} &= \left( \frac{3k_K}{\eta_M^s} + p \left( 1 + \frac{k_K}{k_M} + \frac{\eta_K^s}{\eta_M^s} \right) + p^2 \frac{\eta_K^s}{3k_M} \right) \mathbb{J} \\ &+ \left( \frac{2\mu_K}{\eta_M^d} + p \left( 1 + \frac{\mu_K}{\mu_M} + \frac{\eta_K^d}{\eta_M^d} \right) + p^2 \frac{\eta_K^d}{2\mu_M} \right) \mathbb{K} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

D'autre part, on a :

$$\mathbb{C}^{*-1} = \frac{1}{3k^*} \mathbb{J} + \frac{1}{3\mu^*} \mathbb{K} \quad (\text{A.9})$$

En identifiant les coefficients du tenseur  $\mathbb{J}$  des deux côtés de l'équation (A.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3k^*} &= \left( \frac{3k_K}{\eta_M^s} + p \left( 1 + \frac{k_K}{k_M} + \frac{\eta_K^s}{\eta_M^s} \right) + p^2 \frac{\eta_K^s}{3k_M} \right) \frac{1}{3pk_K + p^2\eta_K^s} \\ &= \frac{1}{3k_M} + \frac{1}{p\eta_M^s} + \frac{1}{3k_K + p\eta_K^s} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

ou bien :

$$\frac{1}{k^*} = \frac{1}{k_M} + \frac{1}{p\eta_M^s/3} + \frac{1}{k_K + p\eta_K^s/3} \quad (\text{A.11})$$

De même façon, en identifiant les coefficients du tenseur  $\mathbb{K}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu^*} &= \left( \frac{2\mu_K}{\eta_M^d} + p \left( 1 + \frac{\mu_K}{\mu_M} + \frac{\eta_K^d}{\eta_M^d} \right) + p^2 \frac{\eta_K^d}{2\mu_M} \right) \frac{1}{2p\mu_K + p^2\eta_K^d} \\ &= \frac{1}{2\mu_M} + \frac{1}{p\eta_M^d} + \frac{1}{2\mu_K + p\eta_K^d} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

ou bien :

$$\frac{1}{\mu^*} = \frac{1}{\mu_M} + \frac{1}{p\eta_M^d/2} + \frac{1}{\mu_K + p\eta_K^d/2} \quad (\text{A.13})$$

On remarque que, les résultats (A.11) et (A.13) peuvent être respectivement obtenus en considérant les rhéologies de la partie sphérique et de la partie déviatorique du modèle viscoélastique considéré.

Grâce à (A.2), on peut ainsi déterminer les coefficients apparaissant dans

le calcul du tenseur de rigidité et de la précontrainte intervenant dans l'équation incrémentale de la loi de comportement *v.l.n.v.* (voir les équations (2.30) et (2.31)). Dans la suite, on donne les expressions de ces coefficients :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{3k_K}{\eta_M^s} + \frac{1}{dt} \left( 1 + \frac{k_K}{k_M} + \frac{\eta_K^s}{\eta_M^s} \right) + \frac{1}{dt^2} \frac{\eta_K^s}{3k_M} \\ c_2 &= \frac{2\mu_K}{\eta_M^d} + \frac{1}{dt} \left( 1 + \frac{\mu_K}{\mu_M} + \frac{\eta_K^d}{\eta_M^d} \right) + \frac{1}{dt^2} \frac{\eta_K^d}{2\mu_M} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{1}{dt} \left( 1 + \frac{k_K}{k_M} + \frac{\eta_K^s}{\eta_M^s} \right) + \frac{2}{dt^2} \frac{\eta_K^s}{3k_M} \\ c_4 &= \frac{1}{dt} \left( 1 + \frac{\mu_K}{\mu_M} + \frac{\eta_K^d}{\eta_M^d} \right) + \frac{2}{dt^2} \frac{\eta_K^d}{2\mu_M} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$c_5 = \frac{1}{dt^2} \frac{\eta_K^s}{3k_M}; \quad c_6 = \frac{1}{dt^2} \frac{\eta_K^d}{2\mu_M} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} c_7 &= \frac{1}{dt} 3k_K + \frac{1}{dt^2} \eta_K^s; \quad c_8 = \frac{1}{dt} 2\mu_K + \frac{1}{dt^2} \eta_K^d \\ c_9 &= \frac{1}{dt^2} \eta_K^s; \quad c_{10} = \frac{1}{dt^2} \eta_K^d \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$



# Calcul tensoriel dans la base de Walpole et applications

---

Pour faciliter les calculs tensoriels dans le cas isotrope transverse, on utilise la base de Walpole [49]. Celle-ci est définie par des tenseurs d'ordre 4 suivants :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_1(\mathbf{n}) &= \frac{1}{2}\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}; & \mathbb{E}_2(\mathbf{n}) &= \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}; & \mathbb{E}_3(\mathbf{n}) &= \mathbf{T} \underline{\otimes} \mathbf{T} - \mathbb{E}_1(\mathbf{n}) \\ \mathbb{E}_4(\mathbf{n}) &= \mathbf{N} \underline{\otimes} \mathbf{T} + \mathbf{T} \underline{\otimes} \mathbf{N}; & \mathbb{E}_5(\mathbf{n}) &= \mathbf{N} \otimes \mathbf{T}; & \mathbb{E}_6(\mathbf{n}) &= \mathbf{T} \otimes \mathbf{N}\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

où  $\mathbf{N} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$  et  $\mathbf{T} = \mathbf{1} - \mathbf{N}$  avec  $\mathbf{n}$  est la direction transversale

On remarque que :

$$\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3 + \mathbb{E}_4 = \mathbb{I} \quad (\text{B.2})$$

et :

$$\mathbb{E}_p : \mathbb{E}_q = \mathbb{E}_p \text{ si } p = q; \quad \mathbb{E}_p : \mathbb{E}_q = 0 \text{ si } p \neq q \quad (\text{B.3})$$

Un tenseur isotrope transverse d'ordre 4 quelconque  $\mathbb{L}$  peut être décomposé dans la base de Walpole par :

$$\mathbb{L} = L_1\mathbb{E}_1 + L_2\mathbb{E}_2 + L_3\mathbb{E}_3 + L_4\mathbb{E}_4 + L_5\mathbb{E}_5 + L_6\mathbb{E}_6 \quad (\text{B.4})$$

Les scalaires apparaissent dans cette expression sont déterminées en fonction des composantes de  $\mathbb{L}$  par :

$$\begin{aligned}L_1 &= L_{1111} + L_{1122} \quad ; \quad L_2 = L_{3333} \\ L_3 &= L_{1111} - L_{1122} \quad ; \quad L_4 = 2L_{3131} \\ L_5 &= L_{3311} \quad ; \quad L_6 = L_{1133}\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

On peut écrire  $\mathbb{L}$  sous une forme symbolique suivante :  $\mathbb{L} = [L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6]$ . Si  $\mathbb{L}$  est symétrique,  $L_5 = L_6$ . On considère par exemple le tenseur de rigidité d'un matériau élastique isotrope  $\mathbb{C}^s$ . Les

## 198 Annexe B. Calcul tensoriel dans la base de Walpole et applications

composantes de ce tenseur sont déterminées en fonction des modules élastiques du matériau par :

$$\begin{aligned} C_{1111}^s &= C_{2222}^s = C_{3333}^s = k^s + \frac{4}{3}\mu^s \quad ; \quad C_{1122}^s = C_{1133}^s = C_{2233}^s = k^s - \frac{2}{3}\mu^s \\ C_{1212}^s &= C_{3131}^s = C_{2323}^s = \mu^s \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

avec  $C_{iijj} = C_{jjii}$ , les autres composantes sont nulles. Dans la base de Walpole,  $\mathbb{C}^s$  s'écrit sous la forme  $[C_1^s, C_2^s, C_3^s, C_4^s, C_5^s, C_6^s]$  avec :

$$\begin{aligned} C_1^s &= C_{1111}^s + C_{1122}^s = 2k^s + \frac{2}{3}\mu^s = \frac{2\mu^s}{1-2\nu^s} \\ C_2^s &= C_{3333}^s = k^s + \frac{4}{3}\mu^s = \frac{2\mu^s(1-\nu^s)}{1-2\nu^s} \\ C_3^s &= C_{1111}^s - C_{1122}^s = 2\mu^s \\ C_4^s &= 2C_{3131}^s = 2\mu^s \\ C_5^s &= C_6^s = C_{1133}^s = k^s - \frac{2}{3}\mu^s = \frac{2\mu^s\nu^s}{1-2\nu^s} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Dans la base de Walpole, l'inverse d'un tenseur  $\mathbb{L}$  est facilement déterminé par :

$$\mathbb{L}^{-1} = \left[ \frac{L_2}{c}, \frac{L_1}{c}, \frac{1}{L_3}, \frac{1}{L_4}, \frac{-L_5}{c}, \frac{-L_6}{c} \right] \quad (\text{B.8})$$

avec  $c = L_1L_2 - 2L_5L_6$ .

Pour le calcul de double contraction, on considère un deuxième tenseur isotrope transverse :  $\mathbb{L}' = [L'_1, L'_2, L'_3, L'_4, L'_5, L'_6]$ . Le produit de  $\mathbb{L}$  et  $\mathbb{L}'$  s'écrit :

$$\mathbb{L} : \mathbb{L}' = \left[ L_1L'_1 + 2L_6L'_5, L_2L'_2 + 2L_5L'_6, L_3L'_3, L_4L'_4, L_5L'_1 + L_2L'_5, L_6L'_2 + L_1L'_6 \right] \quad (\text{B.9})$$

On considère maintenant le tenseur d'Eshelby  $\mathbb{S}$  d'une fissure qui est considérée comme un ellipsoïde aplati de révolution de rapport d'aspect  $X \ll 1$ . Le vecteur normal à la fissure coïncide avec  $\mathbf{e}_3$ . Les composantes de  $\mathbb{S}$  sont déterminées en fonction de  $X$  par (voir [34], [28], [35]) :

$$\begin{aligned} S_{1111} &= S_{2222} = \frac{13-8\nu^s}{32(1-\nu^s)}\pi X \quad ; \quad S_{3333} = 1 - \frac{1-2\nu^s}{4(1-\nu^s)}\pi X \\ S_{1122} &= S_{2211} = \frac{8\nu^s-1}{32(1-\nu^s)}\pi X \quad ; \quad S_{1133} = S_{2233} = 1 - \frac{2\nu^s-1}{8(1-\nu^s)}\pi X \\ S_{3311} &= S_{3322} = \frac{\nu^s}{1-\nu^s} \left( 1 - \frac{4\nu^s+1}{8\nu^s}\pi X \right) \quad ; \quad S_{1212} = \frac{7-8\nu^s}{32(1-\nu^s)}\pi X \\ S_{1313} &= S_{2323} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\nu^s-2}{4(1-\nu^s)}\pi X \right) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Les autres composantes sont déterminées par les relations :  $S_{ijkl} = S_{ijlk} = S_{jikl}$ . Dans la base de Walpole,  $\mathbb{S}$  s'écrit sous la forme suivante :  $\mathbb{S} = [S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6]$  avec :

$$\begin{aligned} S_1 &= S_{1111} + S_{1122} = \frac{3}{8(1-\nu^s)}\pi X \quad ; \quad S_2 = S_{3333} = 1 - \frac{1-2\nu^s}{4(1-\nu^s)}\pi X \\ S_3 &= S_{1111} - S_{1122} = \frac{7-8\nu^s}{16(1-\nu^s)}\pi X \quad ; \quad S_4 = 2S_{3131} = 1 + \frac{\nu^s-2}{4(1-\nu^s)}\pi X \\ S_5 &= S_{3311} = \frac{\nu^s}{1-\nu^s} \left( 1 - \frac{4\nu^s+1}{8\nu^s}\pi X \right) \quad ; \quad S_6 = S_{1133} = 1 - \frac{2\nu^s-1}{8(1-\nu^s)}\pi X \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Le tenseur  $\mathbb{T}(\underline{n})$  qui apparait dans l'expression du tenseur de localisation de déformation  $\mathbb{A}^f$  de fissure (voir (4.30)) est déterminé en prenant la limite quand  $X$  tend to zéro de  $\mathbb{F}(X) = X(\mathbb{I} - \mathbb{S}(X))^{-1}$ . Grâce à (B.8), on peut déterminer les composantes de  $\mathbb{F}(X)$  dans la base de Walpole. En prenant la limite quand  $X$  tend vers zero de chaque composante, on obtient :

$$\begin{aligned} T_1 &= \lim_{X \rightarrow 0} F_1(X) = 0 \quad ; \quad T_2 = \lim_{X \rightarrow 0} F_2(X) = \frac{4(1-\nu^s)}{\pi} \frac{1-\nu^s}{1-2\nu^s} \\ T_3 &= \lim_{X \rightarrow 0} F_3(X) = 0 \quad ; \quad T_4 = \lim_{X \rightarrow 0} F_4(X) = \frac{4(1-\nu^s)}{\pi} \frac{1}{2-\nu^s} \\ T_5 &= \lim_{X \rightarrow 0} F_5(X) = \frac{4(1-\nu^s)}{\pi} \frac{\nu^s}{1-2\nu^s} \quad ; \quad T_6 = \lim_{X \rightarrow 0} F_6(X) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbb{T}(\underline{n}) = \frac{4(1-\nu^s)}{\pi} \left( \frac{1-\nu^s}{1-2\nu^s} \mathbb{E}_2(\underline{n}) + \frac{1}{2-\nu^s} \mathbb{E}_4(\underline{n}) + \frac{\nu^s}{1-2\nu^s} \mathbb{E}_5(\underline{n}) \right) \quad (\text{B.13})$$



# Tenseur de distribution $\mathbb{P}_d$ pour le cas sphéroïdal

---

Dans la base de Walpole, le tenseur de distribution spatiale s'écrit de façon symbolique par :  $\mathbb{P}_d = [p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_5]$ . Les composantes de ce tenseur sont déterminées en fonction du rapport d'aspect  $w_d$  et les caractéristiques de la matrice  $k$  (module de compression volumique) et  $\mu$  (module de cisaillement) par (voir [11]) :

$$p_1 = \frac{(7h(w_d) - 2w_d^2 - 4w_d^2h(w_d))\mu + 3(h(w_d) - 2w_d^2 + 2w_d^2h(w_d))k}{4(1 - w_d^2)\mu(4\mu + 3k)} \quad (\text{C.1})$$

$$p_2 = \frac{(6 - 5h(w_d) - 8w_d^2 + 8w_d^2h(w_d))\mu + 3(h(w_d) - 2w_d^2 + 2w_d^2h(w_d))\mu}{2(1 - w_d^2)\mu(4\mu + 3k)} \quad (\text{C.2})$$

$$p_3 = \frac{(15h(w_d) - 2w_d^2 - 12w_d^2h(w_d))\mu + 3(3h(w_d) - 2w_d^2)\mu}{8(1 - w_d^2)\mu(4\mu + 3k)} \quad (\text{C.3})$$

$$p_4 = \frac{2(4 - 3h(w_d) - 2w_d^2)\mu + 3(2 - 3h(w_d) + 2w_d^2 - 3w_d^2h(w_d))\mu}{4(1 - w_d^2)\mu(4\mu + 3k)} \quad (\text{C.4})$$

$$p_5 = \frac{(\mu + 3k)(-h(w_d) + 2w_d^2 - 2w_d^2h(w_d))}{4(1 - w_d^2)\mu(4\mu + 3k)} \quad (\text{C.5})$$

avec :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x(\arccos(x) - x\sqrt{1-x^2})}{(1-x^2)^{3/2}} & \text{si } x < 1 \\ h(x) &= \frac{x(x\sqrt{1-x^2} - \operatorname{arccosh}(x))}{(x^2-1)^{3/2}} & \text{si } x > 1 \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$





# Contrainte moyenne, déformation moyenne et Lemme de Hill

---

On va montrer que, pour le cas de contrainte homogène imposée sur le bord d'un domaine  $\Omega : \underline{T}(\underline{z}) = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n}(\underline{z})$ , la contrainte macroscopique  $\underline{\Sigma}$  est égale à la moyenne du champ des contraintes dans  $\Omega$ . En fait, on a :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\sigma_{ik} x_j)_{,k} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ik} x_j n_k ds \\ &= \Sigma_{ik} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} x_j n_k ds = \Sigma_{ik} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} x_{j,k} d\Omega = \Sigma_{ik} \delta_{kj} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} d\Omega = \Sigma_{ij} \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

De la même façon, pour le cas de déformation homogène imposée sur le bord de  $\Omega : \xi(\underline{z}) = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{z}$ , on a :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \xi_{i,j} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \xi_i n_j ds = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} E_{ik} x_k n_j ds \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} E_{ik} x_{k,j} d\Omega = E_{ik} \delta_{kj} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} d\Omega = E_{ij} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

On démontre maintenant le Lemme de Hill : pour des conditions aux limites homogènes en déformation ou en contrainte, on a la relation suivante :  $\overline{\sigma} : \overline{\varepsilon}' = \overline{\sigma \varepsilon}'$ . Où  $\sigma$  est un champ des contraintes qui satisfait l'équation d'équilibre  $\text{div} \sigma = 0$  et  $\varepsilon'$  est un champ indépendant de  $\sigma$  qui satisfait la condition de compatibilité :  $\varepsilon'(\underline{z}) = \nabla^s \xi'(\underline{z})$  où  $\xi'$  est cinématiquement admissible avec des conditions homogènes en déformation. En fait, on a :

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{ij} \varepsilon'_{ij}} &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon'_{ij} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \xi'_{i,j} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \xi'_i)_{,j} d\Omega \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \xi'_i n_j ds \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Pour le cas de contrainte homogène imposée :  $\underline{T}(\underline{z}) = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n}(\underline{z})$ , on obtient :

$$\overline{\sigma_{ij} \varepsilon'_{ij}} = \Sigma_{ij} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \xi'_{i,j} d\Omega = \Sigma_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} \quad (\text{D.4})$$

Pour de cas de déformation homogène imposée sur le bord de  $\Omega$  :  $\xi(\underline{z}) = \mathbf{E} \cdot \underline{z}$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \overline{\sigma_{ij} \varepsilon'_{ij}} &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} E'_{ik} x_k n_j ds = \mathbf{E}'_{ik} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} x_k n_j ds = \mathbf{E}'_{ik} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} x_k)_{,j} d\Omega \\
 &= \mathbf{E}_{ik} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij} x_{k,j} d\Omega = \mathbf{E}_{ik} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta_{kj} d\Omega = \mathbf{E}_{ik} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ik} d\Omega = E_{ij} \bar{\sigma}_{ij}
 \end{aligned}
 \tag{D.5}$$

## Bases de calcul en éléments finis

---

La contrainte et la déformation macroscopiques d'un milieu microfissuré sont calculées en fonction du champ correspondant. Par exemple, pour le cas isotrope, la contrainte macroscopique  $\Sigma$  est déterminée en fonction du champ  $\sigma$  dans le domaine  $\Omega$  par :

$$\Sigma = \text{tr} \langle \bar{\sigma}_\Omega \rangle = \frac{1}{3|\Omega|} \text{tr} \int_\Omega \sigma d\Omega \quad (\text{E.1})$$

La déformation macroscopique  $E$  est déterminée en fonction du champ  $\varepsilon$  dans le domaine  $\Omega$  par la même façon en tenant compte le volume de fissures :

$$E = \text{tr} \langle \bar{\varepsilon}_\Omega \rangle = \frac{1}{3|\Omega|} \text{tr} \int_\Omega \varepsilon d\Omega + \frac{V_f}{|\Omega|} \quad (\text{E.2})$$

où  $V_f$  est le volume des fissures en état déformé (le volume initiale des fissures est considéré être nul). Dans le calcul numérique où on travaille avec une fissure unique,  $V_f$  est calculé en imposant une pression unitaire fictive  $P_f$  sur la surface de la fissure. On note  $\underline{U}$  le vecteur des déplacements nodaux et  $\underline{F}_f$  le vecteur des forces nodales du à  $P_f$ . Le volume de la fissure est déterminé par :

$$V_f = \underline{U} \cdot \underline{F}_f \quad (\text{E.3})$$

Pour le cas isotrope transverse où les fissures sont parallèles, le tenseur de contrainte macroscopique a deux composante  $\Sigma_V$  (dans la direction perpendiculaire au plan des fissures  $\mathbf{e}_z$ ) et  $\Sigma_H$  (dans la direction transversale). Elles sont déterminées en fonction du champ  $\sigma$  dans le domaine  $\Omega$  par :

$$\Sigma_V = \overline{\sigma_{zz}\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \sigma_{zz} d\Omega; \quad \Sigma_H = \overline{\sigma_{xx}\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \sigma_{xx} d\Omega; \quad (\text{E.4})$$

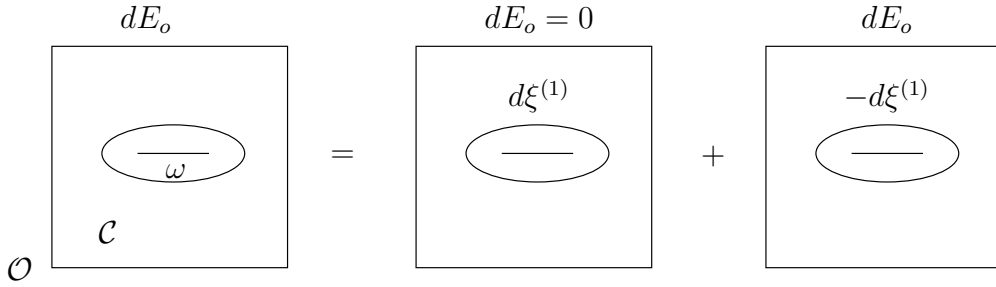
De la même façon, on détermine les composantes de la déformation macroscopique :  $E_V$  et  $E_H$ . Elles sont déterminées en fonction du champ  $\varepsilon$  dans le domaine  $\Omega$  par :

$$E_V = \langle \bar{\varepsilon}_{zz\Omega} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \varepsilon_{zz} d\Omega + \frac{V_f}{|\Omega|}; \quad E_H = \langle \bar{\varepsilon}_{xx\Omega} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \varepsilon_{xx} \quad (\text{E.5})$$

L'énergie élastique d'une domaine  $\Omega$  est calculée par son état de contrainte (par le champ  $\boldsymbol{\sigma}$ ) et les modules élastiques de la partie de Maxwell  $E_M, \nu_M$  (le matériau est modélisé par le modèle de Burger) par :

$$W = \frac{1 + \nu_M}{2E_M} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \frac{\nu_M}{2E_M} \int_{\Omega} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})^2 d\Omega \quad (\text{E.6})$$

# Démonstration de (6.39)

FIG. F.1 – Décomposition de chargement sur  $\mathcal{O}$ 

Le taux de restitution de l'énergie d'un milieu microfissuré est calculé numériquement sur un *m.m.r.*. Conformément à la définition de cet objet, on doit considérer une propagation fictive  $d\ell$  de la fissure dans le *m.m.r.* en fixant le chargement  $\mathbf{E}$  et le champ des déformations visqueuses. Cependant le chargement imposé sur le domaine fictif  $\mathcal{O}$  dans lequel le *m.m.r.* est plongé est une déformation auxiliaire  $\mathbf{E}_o$ . Il est donc nécessaire d'introduire une variation de celle-ci de façon à assurer la condition que la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$ , c'est-à-dire la déformation moyenne du *m.m.r.* ne change pas.

Notons  $\boldsymbol{\sigma}_o$  et  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$  la contrainte avant les chargements ( $dE_o$  et  $d\ell$ ) et la variation de déformation due à ces chargements. La contrainte obtenue après le chargement s'écrit :  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_o + \mathbb{C}_M^e : \delta\boldsymbol{\varepsilon}$ . La variation de l'énergie élastique du *m.m.r.* est donc (au facteur 2 près) :

$$2\delta W_\omega = \int_\omega \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{S}_M^e : \boldsymbol{\sigma} d\omega - \int_\omega \boldsymbol{\sigma}_o : \mathbb{S}_M^e : \boldsymbol{\sigma}_o d\omega = \int_\omega \boldsymbol{\sigma}_o : \delta\boldsymbol{\varepsilon} d\omega \quad (\text{F.1})$$

Comme la réponse étudiée à une propagation fictive est élastique<sup>1</sup>, on peut décomposer ce problème en deux problèmes auxiliaires comme l'indique la figure F.1. Dans le premier problème, on bloque  $\mathbf{E}_o$  ( $dE_o = 0$ ) et on fait varier  $\ell$ . Notons  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$  la variation correspondante de déformation et  $\delta\underline{\xi}^{(1)}$  celle du champ

<sup>1</sup>Le champ des déformations visqueuses est bloqué.

des déplacements dans le *m.m.r.*. Dans ce premier problème ( $d\mathbf{E}_o = 0$ ,  $d\ell \neq 0$ ), un déplacement  $\delta\underline{\xi}^{(1)}$  du bord du *m.m.r.* a lieu du fait de la propagation de la fissure. Il en résulte une déformation moyenne :

$$\overline{\delta\varepsilon^{(1)}}^{mmr} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\partial\omega} \delta\underline{\xi}^{(1)} \otimes^s \underline{n} dS \quad (\text{F.2})$$

On introduit à présent un deuxième problème en choisissant une variation  $d\mathbf{E}_o$  de façon à induire une déformation moyenne dans le *m.m.r.* qui soit l'opposée de  $\overline{\delta\varepsilon^{(1)}}^{mmr}$ . Par ce procédé, on a bien réalisé dans la superposition des deux problèmes une évolution sans variation de la déformation moyenne du *m.m.r.*, conformément à la définition (6.23) de  $\mathcal{F}$ .

De façon simplifiée, on admettra (voir la discussion en fin d'annexe) que le choix de  $d\mathbf{E}_o$  assure que la variation du champ de déplacement du bord du *m.m.r.* soit l'opposée de celle qui se produit dans le premier problème :

$$\delta\underline{\xi}^{(2)} = -\delta\underline{\xi}^{(1)} \quad (\text{F.3})$$

Notons  $\delta\varepsilon^{(2)}$  la variation du champ des déformations correspondant. La déformation totale est  $d\varepsilon = \delta\varepsilon^{(1)} + \delta\varepsilon^{(2)}$  de sorte que l'équation (F.1) devient :

$$\delta W_\omega = \int_\omega \boldsymbol{\sigma}_o : \delta\varepsilon^{(1)} dV + \int_\omega \boldsymbol{\sigma}_o : \delta\varepsilon^{(2)} dV \quad (\text{F.4})$$

Concentrons-nous sur la deuxième intégrale du membre de droite que l'on peut transformer en une intégrale de bord :

$$\int_\omega \boldsymbol{\sigma}_o : \delta\varepsilon^{(2)} dV = \int_{\delta\omega} \delta\underline{\xi}^{(2)} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_o \cdot \underline{n}) dS \quad (\text{F.5})$$

A l'aide de (F.3), on a :

$$\int_\omega \boldsymbol{\sigma}_o : \delta\varepsilon^{(2)} dV = - \int_{\delta\omega} \delta\underline{\xi}^{(1)} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_o \cdot \underline{n}) dS \quad (\text{F.6})$$

On remarque que la frontière de  $\omega$  coïncide avec une partie de la frontière de  $\mathcal{C} = \mathcal{O} \setminus \omega$ . Sur l'autre partie de  $\partial\mathcal{C}$ , c'est-à-dire le bord extérieur de  $\mathcal{O}$ , le déplacement  $\delta\underline{\xi}^{(1)}$  est nul. On a donc encore :

$$\int_\omega \boldsymbol{\sigma}_o : \delta\varepsilon^{(2)} dV = \int_{\delta\mathcal{C}} \delta\underline{\xi}^{(1)} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_o \cdot \underline{n}) dS \quad (\text{F.7})$$

Pour finir, on transforme l'intégrale de bord ci-dessus en intégrale de volume sur  $\mathcal{C}$  :

$$\int_\omega \boldsymbol{\sigma}_o : \delta\varepsilon^{(2)} dV = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\sigma}_o : \delta\varepsilon^{(1)} dV \quad (\text{F.8})$$

Il reste à reporter ce résultat dans (F.4) et l'on obtient :

$$\delta W_\omega = \int_\omega \boldsymbol{\sigma}_o : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} dV + \int_c \boldsymbol{\sigma}_o : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} dV = \int_{\mathcal{O}} \boldsymbol{\sigma}_o : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} dV \quad (\text{F.9})$$

qui n'est autre que la variation d'énergie  $\delta W_{\mathcal{O}}(d\mathbf{E}_o = 0, d\ell)$  du domaine  $\mathcal{O}$  tout entier, en l'absence de variation de la condition de bord ( $d\mathbf{E}_o = 0$ ) quand on introduit une propagation fictive  $d\ell$ . On a donc prouvé que :

$$\delta W_\omega(d\mathbf{E} = 0, d\ell) = \delta W_{\mathcal{O}}(d\mathbf{E}_o = 0, d\ell) \quad (\text{F.10})$$

Ainsi, la restitution de l'énergie du *m.m.r.* peut être calculée en considérant la restitution de tout le domaine  $\mathcal{O}$  en fixant  $\mathbf{E}_o$  durant la propagation fictive.

Il y a cependant une faiblesse dans le raisonnement précédent : elle réside dans le fait qu'il n'est pas assuré qu'il soit possible de réaliser de façon exacte la condition aux limites  $\delta \underline{\xi}^{(2)} = -\delta \underline{\xi}^{(1)}$  sur le bord du *m.m.r.* par une valeur appropriée de  $d\mathbf{E}_o$ . Cette condition aux limites n'est en fait assurée que de façon globale, c'est-à-dire du point de vue de la déformation moyenne associée. Ceci est inhérent au fait que le chargement imposé au *m.m.r.* est obtenu en plongeant ce dernier dans une matrice qui joue un rôle de filtre. Par ce procédé, on ne saurait prétendre au contrôle local des déplacements. C'est en ce sens que le résultat (6.39) n'est en toute rigueur qu'une estimation approchée de  $\mathcal{F}$ .





# Bibliographie

- [1] G.I. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 7 :55–129, 1962. 26
- [2] S. Beurthey and A. Zaoui. Structural morphology and relaxation spectra of viscoelastic heterogenous materials. *Eur. J. Mech. A/Solide*, 2000. 88
- [3] M. Biot. Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena. *J. Appl. Phys.*, pages 1385–1391, 1954. 11
- [4] D.R. Bland. *The theory of linear viscoelasticity*. Pergamon, 1960. 11
- [5] M. Bornert. A generalized pattern-based self-consistent scheme. *Comp. Mat. Science*, pages 17–31, 1996. 122
- [6] M. Bornert, C. Stolz, and A. Zaoui. Morphologically representative pattern-based bounding in elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 1996. 122
- [7] B. Budiansky and R. O’Connell. Elastic moduli of a cracked solid. *Int. J. Solids Struct.*, pages 12 :81–97, 1976. 89, 94
- [8] D. Bui, A. Ehrlacher, S. Nguyen, et al. Propagation de fissure en thermo-élasticité dynamique. *Journal de Mécanique*, 19 :697–723, 1980. 29
- [9] H. D. BUI. Intégrale  $m_\nu$  pour la propagation de fissure dans un milieu viscoélastique. *Compte Rendus Mécanique*, 335 :727–731, 2007. 29
- [10] H.D. Bui and P. Germain. *Mécanique de la rupture fragile*. Masson Paris, 1978. 28
- [11] P. Ponte Castaneda and R. Willis. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *Elsevier Science Ltd*, 1995. 75, 79, 81, 83, 122, 123, 128, 201
- [12] B.D. Coleman. Thermodynamics of materials with memory. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, pages 1–46, 1964. 11
- [13] B.D. Coleman and W. Noll. Foundations of linear viscoelasticity. *Reviews of Modern Physics*, 33(2) :239–249, 1961. 11
- [14] V. Deudé, L. Dormieux, D. Kondo, and S. Maghous. Micromechanical approach to non linear poroelasticity : application to cracked rocks. *J. Eng. Mech.*, pages 128 :848–855, 2002. 90
- [15] L. Dormieux and D. Kondo. Stress-based estimates and bounds of effective elastic properties : The case of cracked media with unilateral effects. *Computational Mater. Sci.*, 2009. 92

- [16] L. Dormieux, D. Kondo, and F. Ulm. *Microporomechanics*. Willey, 2006. 32, 68, 69, 70, 72, 73, 77, 78, 89, 134, 135, 137, 141
- [17] L. Dormieux, A. Molinari, and D. Kondo. Micromechanical approach to the behavior of poroelastic materials. *J. of the Mech. and Phys. of Solids*, 50 :2203–2231, 2002. 71
- [18] F. Dubois and C. Petit. Modelling of the crack growth initiation in viscoelastic media by the  $g_v$ -integral. *Eng. Fract. Mech.*, 72 :2821–2836, 2005. 26
- [19] A. Ehrlacher. *Contribution à l'étude thermodynamique de la progression de la fissure et à la mécanique de l'endommagement brutal*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie Paris 6, Paris, 1985. 29
- [20] F.R. Eirich and RS Marvin. Rheology. *Physics Today*, 11 :30, 1958. 12
- [21] J. D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. R. Soc. Lond.*, pages A 241 :376–396, 1957. 66, 73, 90
- [22] J.D. Eshelby. Elastic inclusions and inhomogeneities. *Progress in solid mechanics*, 2(Amsterdam) :87–140, 1961. 66, 73
- [23] A. A. Griffith. *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*, volume Series A 221. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1920. 26, 28
- [24] ME Gurtin and E. Sternberg. On the linear theory of viscoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11(1) :291–356, 1962. 11
- [25] Y. M. Haddad. *Viscoelasticity of engineering materials*. Chapman & Hall, UK, 1995. 11, 13
- [26] Z. Hashin. The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl. Mech.*, pages 29 :143–150, 1962. 68, 71
- [27] R. Hill. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, pages 15 :79–95, 1967. 67
- [28] H. Horii and S. Nemat-Nasser. Overall moduli of solids with microcracks : load-induced anisotropy. *J. Mech. Phys. Solids*, pages 31 :155–171, 1983. 73, 89, 198
- [29] M.R. In. Fr eirich, editor, rheology vol. 1, 1956. 12
- [30] J. B. Leblond. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Germes, 2003. 28, 30

- [31] A.E.H. Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover, New York, 1944. 72
- [32] J. Mandel. Plasticité classique et viscoplasticité. *CISM Lecture Notes*, 1972. 67
- [33] J.R. Masuero and G.J. Creus. Crack growth initiation in concrete-like materials in the presence of creep. *Nuclear Engineering and design*, 156 :209–218, 1995. 26
- [34] T. Mura. *Micromechanics of defects in solids, 2nd edition*. Martinus Nijhoff, 1987. 73, 198
- [35] S. Nemat-Nasser and M. Horii. *Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*. North Holland, 1993. 73, 198
- [36] S.T. Nguyen, L. Dormieux, Y. Le Pape, and J. Sanahuja. Crack propagation in viscoelastic structures : Theoretical and numerical analyses. *Comput. Mat. Sci.*, 2010. 64
- [37] S.T. Nguyen, L. Dormieux, Y. Le Pape, and J. Sanahuja. A burger model for the effective behavior of a microcracked viscoelastic solid. *Int. J. Damage Mech.*, in press. 118
- [38] B. Persoz. *La rhéologie : recueil de travaux des sessions de perfectionnement, Institut national des sciences appliquées, Lyon*. Masson, 1969. 12
- [39] J.R. Rice. A path independent integral and the approximate analysis of strain conservations by notches and cracks. *Journal Applied Mechanics*, 35 :379–385, 1968. 26, 29
- [40] P. Rossi and C. Boulay. Influence de la présence de l'eau libre au sein du béton sur son processus de fissuration. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 310 :1155–1161, 1990. 117, 188
- [41] J. Salençon. *Viscosité*. Presses de l'ENPC, Paris, 1983. 11, 13
- [42] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus : Tome 2, Thermoélasticité*. Editions Ecole Polytechnique, 2008. 12, 13, 14, 16
- [43] J. Salençon. *Viscoélasticité pour le calcul des structures*. Editions Ecole Polytechnique, 2009. 11, 12
- [44] R. A. Schapery. Correspondence principles and a generalized j integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media. *Int. J. Fract.*, 25 :195–223, 1984. 26
- [45] R. A. Schapery. On some path independent integrals and their use in fracture of nonlinear viscoelastic media. *Int. J. Fract.*, 42 :189–207, 1990. 26

- 
- [46] S.P. Shah, S.E. Swartz, and C. Ouyang. *Fracture mechanic of concrete*. John Wiley & Sons, 1995. 29, 46, 52, 172
- [47] GC Sih. Stress distribution near internal crack tips for longitudinal shear problems. *J. appl. Mech*, 32(1) :51–58, 1965. 28
- [48] C. Stolz and A. Zaoui. Analyse morphologique et approches variationnelles du comportement d'un milieu élastique hétérogène. *C. R. Acad. Sci.*, pages 143–150, 1991. 122
- [49] L. J. Walpole. Elastic behavior of composite materials : theoretical foundations. *Adv. Appl. Mech*, 21 :169–242, 1981. 74, 197
- [50] JR Yates and RA Mohammed. Crack propagation under mixed mode (i+iii) loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 19(10) :1285–1290, 2007. 29
- [51] C. Yoon and D.H. Allen. Damage dependent constitutive behavior and energy release rate for a cohesive zone in a thermoviscoelastic solid. *Int. J. Fract.*, 96 :96–74, 1999. 26
- [52] A. Zaoui. Structural morphology and constitutive behavior of microheterogeneous materials. *International center for mechanical sciences*, 377 :308–327, 1997. 124
- [53] A. Zaoui. Continuum micromechanics : survey. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 128(8) :808–816, 2002. 122