



HAL
open science

Calcul des singularités dans les méthodes d'équations intégrales variationnelles

Nicolas Salles

► **To cite this version:**

Nicolas Salles. Calcul des singularités dans les méthodes d'équations intégrales variationnelles. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris Sud - Paris XI, 2013. Français. NNT : 2013PA112164 . tel-00877482

HAL Id: tel-00877482

<https://pastel.hal.science/tel-00877482>

Submitted on 28 Oct 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université Paris-Sud 11
Ecole Doctorale de Mathématiques
de la région Paris-Sud (ED142)
UFR de Sciences

Thèse en vue de l'obtention du diplôme de
Docteur en Sciences de l'Université Paris Sud
Spécialité : Mathématiques Appliquées

Présentée par
Nicolas SALLES

Calcul des singularités dans les méthodes d'équations intégrales variationnelles

Cette thèse a été soutenue le 18 Septembre 2013.

Le jury était constitué de

François ALOUGES (examinateur)
Xavier ANTOINE (rapporteur)
Eliane BÉCACHE (directrice)
Marc LENOIR (co-directeur)
Bertrand MAURY (examinateur)
Antoine SELLIER (rapporteur)

Thèse effectuée au sein l'équipe 
PROPAGATION DES ONDES : ETUDE MATHÉMATIQUE ET SIMULATION
Unité Mixte de Recherche 7231



ENSTA-ParisTech
Unité de Mathématiques Appliquées
828 Boulevard des Maréchaux
91762 Palaiseau Cedex

Résumé

La mise en oeuvre de la méthode des éléments finis de frontière nécessite l'évaluation d'intégrales comportant un intégrand singulier. Un calcul fiable et précis de ces intégrales peut dans certains cas se révéler à la fois crucial et difficile. La méthode que nous proposons consiste en une réduction récursive de la dimension du domaine d'intégration et aboutit à une représentation de l'intégrale sous la forme d'une combinaison linéaire d'intégrales mono-dimensionnelles dont l'intégrand est régulier et qui peuvent s'évaluer numériquement mais aussi explicitement.

L'équation de Helmholtz 3-D sert d'équation modèle mais ces résultats peuvent être utilisés pour les équations de Laplace et de Maxwell 3-D. L'intégrand est décomposé en une partie homogène et une partie régulière; cette dernière peut être traitée par les méthodes usuelles d'intégration numérique. Pour la discrétisation du domaine, des triangles plans sont utilisés; par conséquent, nous évaluons des intégrales sur le produit de deux triangles. La technique que nous avons développée nécessite de distinguer entre diverses configurations géométriques; c'est pourquoi nous traitons séparément le cas de triangles coplanaires, dans des plans sécants ou parallèles.

Divers prolongements significatifs de la méthode sont présentés : son extension à l'électromagnétisme, l'évaluation de l'intégrale du noyau de Green complet pour les coefficients d'auto-influence, et le calcul de la partie finie d'intégrales hypersingulières.

Mots-clés : intégrales singulières, méthode des éléments finis de frontière, équation de Helmholtz, fonctions homogènes.

Abstract

The implementation of the boundary element method requires the evaluation of integrals with a singular integrand. A reliable and accurate calculation of these integrals can in some cases be crucial and difficult. The proposed method is a recursive reduction of the dimension of the integration domain and leads to a representation of the integral as a linear combination of one-dimensional integrals whose integrand is regular and that can be evaluated numerically and even explicitly.

The 3-D Helmholtz equation is used as a model equation, but these results can be used for the Laplace and the Maxwell equations in 3-D. The integrand is decomposed into a homogeneous part and a regular part, the latter can be treated by conventional numerical integration methods. For the discretization of the domain we use planar triangles, so we evaluate integrals over the product of two triangles. The technique we have developed requires to distinguish between several geometric configurations, that's why we treat separately the case of triangles in the same plane, in secant planes and in parallel planes.

Keywords : singular integrals, boundary element method, Helmholtz equation, homogeneous functions.

Remerciements

Un grand merci à mes deux directeurs de thèse, Eliane et Marc, de m'avoir permis d'effectuer cette thèse. Merci Marc pour la disponibilité, la patience et l'encadrement durant ces quatre années. Je tiens également à remercier Xavier Antoine et Antoine Sellier qui ont accepté la douloureuse expérience de rapporter sur cette thèse.

Merci à mes "colocataires de bureau" à l'ENSTA Paris : Lucas, Nicolas C. et Giovanni qui ont permis d'assurer une ambiance studieuse et décontracté dans le bureau. Ils m'ont permis de découvrir de nombreux grands musiciens et chanteurs et d'échanger sur de nombreux domaines (scientifique bien sûr, politique, économique et même philosophique). En août 2012, l'ENSTA ayant déménagé, un remaniement a été effectué et j'ai hérité de nouveaux compagnons de bureau de grande valeur également : Nadia, Pierre-Louis, Grégoire, Anthony merci à vous !

Le bureau appartenant à un ensemble plus grand qu'est l'Unité de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA-ParisTech, je remercie chaleureusement tous les membres de l'UMA d'avoir su créer et maintenir une ambiance parfaite pour le travail au sein du laboratoire. Merci à Christophe M. et Maurice pour le bon fonctionnement de tout l'informatique du laboratoire (malgré qu'il n'y ait qu'une minorité de *Pomme*) et pour les nombreux repas que l'on a partagé. Merci à tous les doctorants, post-doc, ingénieurs . . . : Nicolas K., Jameson, Athéna, Maxence, Estelle, Manh Ah, Camille . . . mais aussi aux permanents du laboratoire : Francesco, Anne-Sophie, Stéphanie, Marc B., Christophe H., Laurent, Jean-François, Jérôme . . .

Je tiens à remercier chaleureusement Eric Darrigrand qui a m'a permis d'apprendre beaucoup durant nos collaborations ; merci pour ta gentillesse. Merci également à Francis Collino pour les échanges très instructifs.

Quatre personnes m'ont permis d'éviter l'enfer des tâches administratives : merci à Annie Marchal, Corinne Chen, Catherine Poupon et Valérie Blandin-Lavigne pour votre gentillesse et votre efficacité.

Je souhaite aussi remercier toutes les personnes avec qui j'ai échangé durant mes quatre années d'enseignement à Orsay : Myriam Monestier, Bernard Héron, Sébastien Sorgue, Nessim Sibony, Jacek Graczyk, Samuel Lelièvre, Françoise Issard-Roch, Benjamin Graille, Filipa Caetano . . . grâce à vous j'ai beaucoup apprécié enseigner et j'ai appris énormément. Merci à Pierre Pansu et Bertrand Maury qui m'ont soutenu pour l'obtention d'une bourse de thèse et d'un monitorat à Orsay.

Enfin je tiens à remercier ma famille et mes amis.

Table des matières

Remerciements	iii
Introduction générale	ix
Les méthodes d'équations intégrales de frontière	ix
Les intégrales singulières	x
Objectif de la thèse	x
Quelques prolongements significatifs	xi
Organisation de ce mémoire	xii
I La méthode des éléments finis de frontière	1
1 Equations intégrales de frontière	5
1.1 Résolution d'un problème aux limites	5
1.2 Résolution du problème de Dirichlet	8
1.3 Résolution du problème de Neumann	9
1.4 Résolution numérique d'une équation intégrale de frontière	10
2 Présentation de la méthode	15
2.1 Le processus de réduction	15
2.2 Intégration de fonctions homogènes	17
2.3 Paramétrisation et homogénéité	22
2.4 Utilisation des formules de réduction	24
II Triangles coplanaires et dans des plans sécants	29
3 Coefficient d'auto-influence	35
3.1 Notations	35

3.2	Réduction à la dimension 3	36
3.3	Réduction à la dimension 2	38
3.4	Réduction à la dimension 1	39
3.5	Formule finale et Validation	41
4	Triangles coplanaires en position générale	45
4.1	Notations	46
4.2	Réduction à la dimension 3	46
4.3	Réduction à la dimension 2	47
4.4	Réduction à la dimension 1	48
4.5	Calculs explicites	51
4.6	Cas particuliers	52
4.7	Discussion sur le presque-parallélisme	53
4.8	Transition segments sécants à parallèles	55
4.9	Remarques	59
5	Triangles dans des plans sécants	61
5.1	Triangles en positions quelconques	62
5.2	Réduction de $U(\alpha, T)$: cas sécant	62
5.3	Réduction de $U(\alpha, T)$: cas parallèle	66
5.4	Cas particuliers singuliers	70
6	Le potentiel de double couche	73
6.1	Réduction à la dimension 3	73
6.2	Réduction à la dimension 2 : Cas sécant	74
6.3	Réduction à la dimension 2 : Cas parallèle	77
6.4	Cas particuliers	80
III	Triangles dans des plans parallèles	89
7	Introduction	93
7.1	Notations	94
7.2	Organisation des calculs	94
8	Triangles superposés	97
8.1	Réduction à la dimension 3	97

8.2	Réduction à la dimension 2	98
8.3	Réduction à la dimension 1	98
8.4	Retour à J_ζ et I	99
9	Triangles dans des plans parallèles en positions quelconques	101
9.1	Partie symétrique	101
9.2	Partie antisymétrique	103
9.3	Calcul de I	107
9.4	Cas particuliers	107
9.5	Calcul des expressions finales	108
10	Résultats numériques	111
10.1	L'angle solide	111
10.2	Triangles presque superposés	112
10.3	Etude du presque-parallélisme entre côtés de triangles	113
IV	Extensions de la méthode	117
11	Fonctions de base affines	121
11.1	Fonctions de base	121
11.2	Calcul du coefficient d'auto-influence	123
11.3	Triangles adjacents	125
12	Application à l'électromagnétisme	131
12.1	Equations intégrales pour l'électromagnétisme	131
12.2	Résolution numérique	133
12.3	Triangles dans des plans parallèles	135
12.4	Triangles superposés	140
13	Intégrale du noyau de Green complet	143
13.1	Auto-influence	144
13.2	Triangles adjacents coplanaires	146
13.3	Triangles adjacents dans des plans sécants	148
13.4	Le potentiel de double couche	149
13.5	Fonctions de base affines	151
13.6	Expérimentations numériques	153

14 Evaluation d'intégrales hypersingulières	157
14.1 Introduction de la partie finie	157
14.2 Evaluation de parties finies	160
14.3 Processus utilisant une zone d'exclusion du point singulier	161
14.4 Le cas variationnel	165
Conclusion générale	169
V Appendices	171
A Calcul des quantités géométriques	175
A.1 Configuration de deux plans	175
A.2 Projection orthogonale d'un point sur une droite	175
A.3 Projection orthogonale d'un point de l'espace sur un plan	176
A.4 Intersection entre deux droites sécantes contenues dans un même plan . .	176
A.5 Perpendiculaire commune à deux droites dans l'espace	177
B Le potentiel de double couche	179
B.1 Calcul de R_1 et \mathfrak{R}_2	179
B.2 Calcul de \mathcal{S} et \mathcal{L}	180
B.3 Calcul de \tilde{R}_2^1 et $\tilde{\mathfrak{R}}_3^2$	180
B.4 Calcul de $\tilde{\mathcal{S}}_2, \tilde{\mathcal{S}}_3$ et $\tilde{\mathcal{T}}_3$	182
C Triangles dans des plans parallèles : Formules finales	185
C.1 Calcul des intégrands finaux	185
C.2 Intégrales mono-dimensionnelles à un paramètre	187
C.3 Intégrales mono-dimensionnelles à deux paramètres	188
D Fonctions de base affines : Formules finales	189
D.1 Formules finales	189
E Electromagnétisme : Formules finales	193
E.1 Termes pour le calcul de \mathcal{M}_1	193
E.2 Termes pour le calcul de \mathcal{M}_2	194
Références	195

Introduction générale

Cette thèse traite de l'évaluation d'intégrales qui comportent un intégrand singulier provenant de la résolution numérique d'équations intégrales de frontière variationnelles. Une méthode d'évaluation explicite de ces intégrales est présentée et appliquée aux intégrales intervenant dans la résolution numérique de l'équation de Helmholtz 3-D. Cette méthode s'applique également à des problèmes 2-D et à d'autres équations.

Les méthodes d'équations intégrales de frontière

Les méthodes d'équations intégrales constituent une alternative pour la résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires. Elle consiste à transformer l'équation aux dérivées partielles posée dans un domaine en une équation intégrale posée sur le bord du domaine (voir [TA07, Len08, HW08]). C'est en particulier une méthode adaptée pour les problèmes de diffractions qui sont posés en domaine non borné (voir [Giv92]) et pour lesquels la prise en compte de la condition de rayonnement est essentielle. Cette transformation d'un problème aux limites en équation intégrale n'est possible, en général, que pour des problèmes linéaires et définis dans des milieux homogènes (quelques exceptions existent). Il faut noter que pour un problème aux limites donné, plusieurs équations intégrales peuvent être obtenues.

Une fois le problème aux limites converti en une équation intégrale, il est nécessaire de discrétiser le bord du domaine puis de résoudre numériquement cette équation intégrale [YKD10]. Pour ce faire, plusieurs méthodes existent : les méthodes classiques (collocation, Galerkin) et les méthodes rapides pour les éléments du maillage qui sont éloignées (Panel Clustering [HN89], Méthode multipole rapide (FMM) [Liu09] et [FGG04], Adaptive Cross Approximation [Beb00], entre autres). Elles nécessitent toutes de discrétiser le bord du domaine ce que nous ferons à l'aide de triangles plans dans la suite, mais tout autre polygone plan conviendra. Un point commun entre toutes ces méthodes est que pour déterminer les coefficients de la matrice du système linéaire associé, il est nécessaire d'évaluer des intégrales dont l'intégrand est singulier, voire hypersingulier [LPV03]. Ce caractère singulier de l'intégrand, rendant difficile l'évaluation précise des intégrales, a été l'objet d'un grand nombre de publications. Encore actuellement, l'évaluation de ces intégrales présente des difficultés. La méthode présentée dans cette thèse permet d'évaluer ces intégrales « à problèmes » dans le cas variationnel.

Les intégrales singulières

Pour mieux comprendre ce problème d'intégrand singulier, dans le cas variationnel, il faut noter que le domaine d'intégration pour ces intégrales « à problèmes » est le produit de deux éléments du maillage ; soit en 3-D, $S \times T \subset \mathbb{R}^4$ le produit de deux triangles S et T . Lorsque les deux triangles sont éloignés, il est possible d'évaluer l'intégrale avec des méthodes d'intégration numérique standards. Mais les deux cas problématiques sont le cas *singulier*, qui intervient lorsque l'intersection des deux triangles n'est pas vide (triangles identiques, ayant un sommet ou une arête en commun) et le cas presque-singulier intervenant pour des triangles proches mais ayant une intersection vide (voir la Figure 1). Ces deux cas nécessitent un traitement à part et il s'agit d'un domaine de recherche encore très actif.

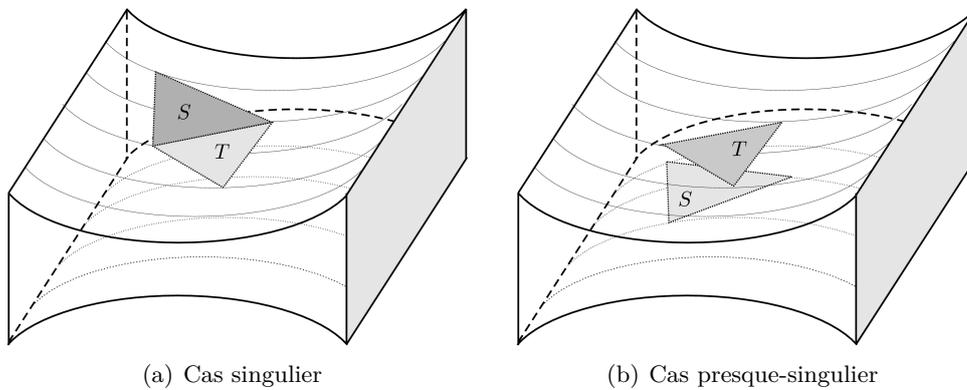


FIGURE 1 – Cas problématiques.

Il est important de noter que ces intégrales correspondent aux coefficients de la matrice du système linéaire à résoudre pour trouver la solution de l'équation intégrale. Les intégrales *singulières* correspondent à des coefficients proches de la diagonale de la matrice alors que les intégrales *presque-singulières* peuvent aussi bien concerner des coefficients proches de la diagonale que des coefficients qui en sont très éloignés. Ces coefficients sont grands en comparaison des coefficients provenant d'intégrales *régulières*. Ainsi, une mauvaise évaluation de grands coefficients peut fortement altérer la précision de la solution obtenue. De nombreuses méthodes ont été proposées pour évaluer ces intégrales singulières ; mais toutes celles-ci reposent finalement sur des formules de quadratures qui nécessitent un ajustement du nombre de points d'intégration suivant la configuration géométrique des triangles.

Objectif de la thèse

Cette thèse a pour objectif de fournir une nouvelle méthode d'évaluation précise des intégrales singulières provenant des méthodes d'équations intégrales (voir [Len06]). L'équation de Helmholtz 3-D sert d'équation modèle pour la présentation de la méthode, mais cette dernière est également applicable à d'autres équations et aussi à des problèmes 2-D. Dans le cas de l'équation de Helmholtz 3-D, la méthode présentée permet de réduire une intégrale 4-D à une combinaison linéaire d'intégrales *mono-dimensionnelles* dont l'intégrand est *régulier*. Il est alors possible d'évaluer

numériquement ces intégrales 1-D, mais aussi explicitement, dans de nombreux cas. Ainsi, il n'y a pas de risque d'erreur dans l'évaluation des intégrales 4-D aussi bien lorsque ces intégrales sont régulières que lorsqu'elles sont singulières ou presque-singulières, ce qui assure une très grande précision.

Cette méthode de réduction repose sur plusieurs formules permettant de réduire d'une dimension la dimension du domaine d'intégration. Ainsi, en répétant trois fois l'utilisation de ces formules on obtient des intégrales 1-D régulières. Ces formules reposent sur le caractère homogène de l'intégrand ; par conséquent, il y a deux conditions à vérifier :

1. l'intégrand doit être homogène ; il faut donc décomposer l'intégrand en une partie homogène, qui est traitée avec notre méthode, et une partie régulière, qui peut être traitée avec des méthodes d'intégration numérique usuelles.
2. des polygones plans doivent être utilisés pour discrétiser le bord du domaine. Ceci afin de conserver l'homogénéité de l'intégrand durant les étapes successives de réduction.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons plus particulièrement aux intégrales singulières issues de l'équation de Helmholtz 3-D, à savoir :

$$I = \int_{S \times T} \frac{1}{\|x - y\|} dx dy \quad J_\zeta = \int_{S \times T} \frac{x - y}{\|x - y\|^{(1+\zeta)}} dx dy, \zeta = 0 \text{ ou } 2. \quad (1)$$

A cet effet, un code a été réalisé en MATLAB pour évaluer ces trois intégrales pour toutes les configurations géométriques des deux triangles.

Quelques prolongements significatifs

Quatre prolongements significatifs de la méthode sont présentés. En premier lieu, nous présentons l'utilisation de la méthode lorsque des fonctions de base affines par élément sont utilisées lors de la discrétisation. Il n'y a pas de difficulté supplémentaire si ce n'est une augmentation importante de la quantité des calculs durant le processus de réduction.

Une seconde extension consiste à utiliser la méthode présentée pour calculer les intégrales singulières qui interviennent dans les formulations en champ électrique (EFIE) et en champ magnétique (MFIE) des équations de Maxwell 3-D (voir [Jin10]).

Dans le cas de l'équation de Helmholtz 3-D, cette méthode, initialement prévue pour calculer l'intégrale de la partie homogène de l'intégrand singulier permet, en fait, de calculer l'intégrale du noyau de Green complet, sans utiliser de décomposition. En effet, l'intégrand singulier comporte une exponentielle que l'on développe en série entière afin de se ramener à une série d'intégrales comportant un intégrand homogène et donc de revenir dans le champ d'application de notre méthode. Dans cette partie, les intégrales 4-D sont transformées en une combinaison linéaire d'intégrales mono-dimensionnelles qu'il n'est plus possible d'évaluer explicitement. Cependant, peu de points d'intégration sont nécessaires pour assurer une bonne précision ce qui permet d'obtenir une réduction intéressante du coût de calcul.

Pour finir, parmi les différentes équations intégrales que l'on peut obtenir à partir d'une équation aux dérivées partielles, il est possible d'obtenir une formulation dite *hy-persingulière* qui fait intervenir la partie finie d'intégrales dont l'intégrand est fortement

singulier (voir [SW92]). En général, pour les intégrales hypersingulières, l'approche variationnelle est préférée à la méthode de collocation puisqu'elle permet d'atténuer le caractère singulier de l'intégrand en utilisant des intégrations par partie afin de porter une dérivée sur la fonction-test [Néd82]. Un point intéressant est que notre méthode permet d'évaluer explicitement la partie-finie d'intégrales provenant de méthodes de collocation très aisément. L'étude des intégrales doubles hypersingulières, issues de la méthode de Galerkin, n'a pas été réalisée.

Organisation de ce mémoire

En général, on distingue les intégrales singulières des intégrales presque-singulières. Dans notre cas la distinction à opérer est différente puisque l'on doit séparer les cas suivant la position géométrique des polygones : lorsque les polygones sont coplanaires, lorsqu'ils sont dans des plans sécants et enfin, lorsqu'ils sont dans des plans parallèles. Pour effectuer les calculs, il est nécessaire d'opérer un choix concernant les polygones servant à la discrétisation, les formules sont fournies pour des triangles mais il est possible d'obtenir des formules pour tout polygone plan. Pour la discrétisation, dans la majorité des cas nous utiliserons des fonctions de base constantes par triangle ; quelques cas avec des fonctions de base affines par triangles seront abordés seulement dans la partie **IV** qui concerne les prolongements de la méthode.

Ce mémoire est composé de quatre parties. La **première partie** est une introduction aux méthodes d'équations intégrales, à l'utilisation des équations intégrales variationnelles pour l'équation de Helmholtz 3-D et aux intégrales singulières qui interviennent. Après quoi, un chapitre est dédié à la présentation de la méthode. L'intégration de fonctions homogènes est présentée et permet d'aboutir aux formules de réduction de la dimension du domaine d'intégration.

La **seconde partie** présente l'évaluation d'intégrales lorsque les triangles sont coplanaires ou dans des plans sécants. Il peut donc s'agir d'intégrales singulières, presque-singulières mais aussi régulières. La majorité des chapitres traitent de l'intégrale I de (1). Nous commençons par l'évaluation du coefficient d'*auto-influence* (lorsque les triangles sont identiques). Le chapitre suivant traite le cas de triangles coplanaires en position quelconque et s'achève avec la présentation des formules simplifiées que l'on obtient lorsque les triangles sont adjacents (une arête commune) ou lorsqu'ils ont un sommet en commun. Après les triangles coplanaires, on s'intéresse au cas plus difficile de triangles dans des plans sécants. Le dernier chapitre concerne les intégrales J_ζ voir (1) lorsque les triangles sont dans des plans sécants. Il n'est pas nécessaire d'évaluer J_ζ lorsque les triangles sont coplanaires comme nous le verrons dans le chapitre 1. Il n'y a pas de chapitre dédié aux résultats numériques ou aux comparaisons numériques puisque les résultats numériques sont disséminés aux endroits propices dans chaque chapitre de cette partie.

La **troisième partie** concerne le traitement des intégrales lorsque les triangles sont dans des plans parallèles. Il s'agit d'un problème encore important actuellement puisque pour des triangles dans des plans très proches, peu de méthodes fournissent un résultat précis pour un faible coût de calcul. Dans cette partie, l'approche est un peu différente, le calcul des intégrales J_ζ de (1) est effectué en premier et permet alors de déduire l'intégrale I . Cette partie commence par le cas, le plus simple, de triangles superposés. La suite logique consiste à traiter le cas de triangles en position quelconque. Après cela, les formules pour l'évaluation de l'intégrale I de (1) sont déduites du calcul de J_ζ puis la

partie s'achève avec plusieurs résultats numériques afin de montrer l'intérêt des formules obtenues.

La **dernière partie** présente quelques prolongement de la méthode. Un chapitre présente les calculs découlant de l'utilisation de fonctions de bases affines par triangles dans l'intégrale I . L'auto-influence et les triangles adjacents (coplanaires et dans des plans sécants) seulement sont présentés. Le second chapitre montre l'utilisation de la méthode pour les équations de Maxwell 3-D. L'intégrale du terme le plus singulier pour l'électromagnétisme a déjà été évaluée pour l'équation de Helmholtz, donc nous nous intéressons à l'autre terme singulier. Ce chapitre s'achève avec la présentation de résultats numériques. Le chapitre suivant présente une réduction de l'intégrale du noyau de Green complet (sans utiliser de décomposition en partie homogène et régulière), bien que la méthode ne s'applique que dans le cas d'un intégrand homogène ; en effet, en décomposant l'exponentielle en série entière, on obtient des intégrands homogènes. Dans ce cas, il n'est pas possible d'obtenir des formules explicites, mais dans les cas les plus singuliers (auto-influence, triangles adjacents ou ayant un sommet commun), l'intégrale 4-D initiale est réduite à une combinaison linéaire d'intégrales mono-dimensionnelles qui sont évaluées numériquement pour un faible coût. Le dernier prolongement étudié concerne l'évaluation de la partie finie d'intégrales hypersingulières au sens d'Hadamard. Dans ce chapitre, les intégrales étudiées ne sont que 2-D, c'est en particulier le cas des intégrales qui peuvent être issues des méthodes de collocation.

Le mémoire s'achève avec des annexes contenant le détail du calcul des quantités géométriques intervenant dans les formules obtenues et les expressions finales des intégrales mono-dimensionnelles découlant des diverses réductions.

Première partie

La méthode des éléments finis de
frontière

Table des matières

1	Equations intégrales de frontière	5
1.1	Résolution d'un problème aux limites	5
1.1.1	Notations et problèmes modèles	5
1.1.2	La méthodes des équations intégrales de frontière	6
1.1.3	Obtention d'une formule de représentation intégrale	7
1.2	Résolution du problème de Dirichlet	8
1.2.1	Problème de Dirichlet par potentiel de simple couche	8
1.2.2	Problème de Dirichlet par potentiel de double couche	8
1.2.3	Autre formulation possible	9
1.3	Résolution du problème de Neumann	9
1.3.1	Problème de Neumann par potentiel de simple couche	9
1.3.2	Problème de Neumann par potentiel de double couche	10
1.4	Résolution numérique d'une équation intégrale de frontière	10
1.4.1	La méthode de collocation	11
1.4.2	Les éléments finis de frontière	11
1.4.3	Intégrales singulières	12
1.4.4	Traitement des intégrales singulières et presque-singulières	13
2	Présentation de la méthode	15
2.1	Le processus de réduction	15
2.2	Intégration de fonctions homogènes	17
2.2.1	Fonction homogène	17
2.2.2	Fonction homogène, cas $q + n = 0$	18
2.2.3	Fonction homogène à paramètre	19
2.2.4	La formule (2.10) avec un intégrand singulier	21
2.3	Paramétrisation et homogénéité	22
2.3.1	Importance de la paramétrisation	23
2.3.2	Utilisation de polygones plans	24
2.4	Utilisation des formules de réduction	24
2.4.1	Exemple d'utilisation de la Formule (2.10)	25
2.4.2	Exemple d'utilisation de la Formule (2.34)	26

Introduction de la partie

Cette partie introductive est composée de deux chapitres. Le premier chapitre présente les méthodes d'équations intégrales de frontière en utilisant l'équation de Helmholtz 3-D comme équation modèle. Les problèmes de Dirichlet et Neumann traités par potentiels de simple et de double couches sont rappelés afin d'indiquer différentes intégrales singulières pour lesquelles notre méthode s'applique.

Le second chapitre introduit la méthode d'évaluation explicite des intégrales comportant un intégrand singulier, issues de la discrétisation des équations intégrales de frontière. Les formules de réduction de la dimension du domaine d'intégration sur lesquelles repose notre méthode sont détaillées. Ce chapitre s'achève sur une présentation de l'utilisation des formules.

Equations intégrales de frontière

Introduction

Nous présentons succinctement les méthodes d'équations intégrales pour la résolution de problèmes aux limites ainsi que les intégrales singulières qui y interviennent. Ces intégrales singulières seront évaluées dans les parties suivantes.

1.1. Résolution d'un problème aux limites

1.1.1 Notations et problèmes modèles

Soient Ω_i et Ω_e deux ouverts complémentaires inclus dans \mathbb{R}^n ($\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega_i}$, où \overline{P} correspond à l'adhérence de l'ouvert P). La frontière entre ces deux domaines est notée Γ . On appelle Ω_i et Ω_e respectivement les domaines intérieur et extérieur (voir Figure 1.1). Lorsque le domaine n'importe pas, on utilise Ω_l , avec l pouvant valoir i ou e .

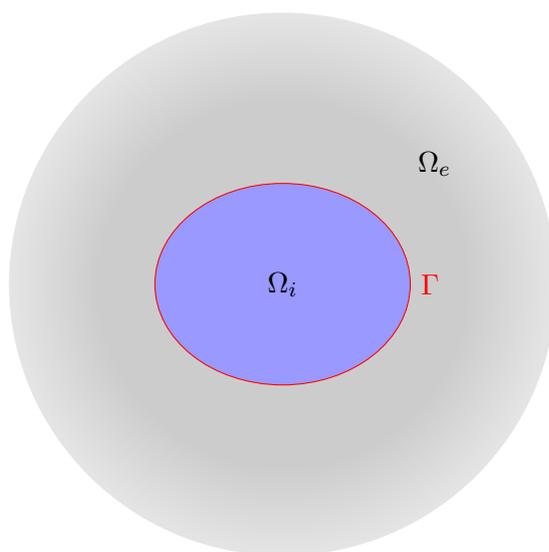


FIGURE 1.1 – Notations : la frontière Γ délimite les deux ouverts Ω_i (domaine intérieur) et Ω_e (domaine extérieur non borné).

Pour présenter les méthodes d'équations intégrales de frontière, nous définissons deux problèmes : le premier est l'équation de Helmholtz avec condition de Dirichlet sur Γ et d'inconnue u_l^D :

$$(\mathcal{P}_l^D) \quad \begin{cases} -(\Delta + k^2)u_l(x) = 0, & x \in \Omega_l \subset \mathbb{R}^n \\ u_l = f^D & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \\ \text{Condition de rayonnement si } \Omega_l = \Omega_e, \end{cases} \quad (1.1)$$

où k est le nombre d'onde et Δ le laplacien. Le second problème est l'équation de Helmholtz avec condition de Neumann sur Γ et d'inconnue u_l^N :

$$(\mathcal{P}_l^N) \quad \begin{cases} -(\Delta + k^2)u_l(x) = 0, & x \in \Omega_l \subset \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u_l}{\partial n_l} = f_l^N & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \\ \text{Condition de rayonnement si } \Omega_l = \Omega_e, \end{cases} \quad (1.2)$$

où $\frac{\partial u_l}{\partial n_l}$ est la dérivée normale selon la normale sortante à Ω_l le long de Γ . On rappelle la condition de rayonnement :

$$\lim_{|R| \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial n}(x) - iku(x) \right|^2 ds_x = 0 \quad (1.3)$$

Les solutions u_l^D et u_l^N sont définies dans Ω_l . Lorsque $\Omega_l = \Omega_e$, la condition de rayonnement assure la décroissance à l'infini de la solution et la causalité de la solution lors d'un retour en temporel.

1.1.2 La méthodes des équations intégrales de frontière

La méthode des équations intégrales de frontière consiste à transformer le problème aux limites posé dans Ω_l en une équation intégrale définie sur $\Gamma = \partial\Omega_l$ (voir [CK83, CK98, Kre99, McL00, Néd01]). Seul un maillage de Γ est donc nécessaire (voir Figure 1.2) pour la résolution numérique de l'équation intégrale. Ce passage d'un problème volumique à un problème surfacique s'effectue en utilisant la solution fondamentale de l'équation, qui est la solution de l'équation prise au sens des distributions avec la distribution de Dirac pour second membre. On note G , la solution fondamentale de l'équation :

$$-(\Delta_y + k^2) G(x, y) = \delta(x - y), \quad \text{dans } \mathbb{R}^n, n = 2, 3 \quad (1.4)$$

Dans le cas des problèmes (1.1) et (1.2), la solution fondamentale, appelée noyau de Green, est donnée par :

$$\begin{aligned} G(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} H_0^{(1)}(\|x - y\|) \quad \text{si } n = 2 \\ G(x, y) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik\|x-y\|}}{\|x - y\|} \quad \text{si } n = 3, \end{aligned} \quad (1.5)$$

où la fonction $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel de première espèce d'ordre 0 (voir [AS72]). La solution fondamentale permet de prendre en compte directement la condition de décroissance à l'infini, aussi appelée condition de rayonnement, sans travail additionnel.

On note que les deux solutions fondamentales sont singulières lorsque $x = y$. Ce caractère singulier de la solution fondamentale complique l'évaluation des intégrales intervenant dans les méthodes d'équations intégrales de frontière. Pour simplifier les calculs dans la suite, on note le caractère symétrique de G par rapport aux deux variables x et y pour ce problème donnée. La solution fondamentale peut ne pas être symétrique, cela dépend du problème étudié. De plus amples détails sur la détermination d'une solution fondamentale sont accessibles dans [OW90], [OW97], [Kyt96] et [Wag04].

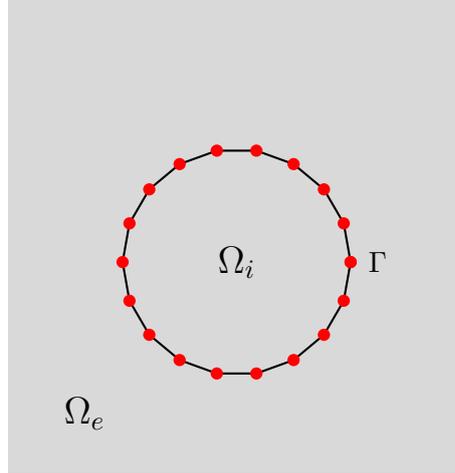


FIGURE 1.2 – Prise en compte d'un domaine borné (Ω_i) et non borné (Ω_e) par les méthodes d'équations intégrales.

1.1.3 Obtention d'une formule de représentation intégrale

A partir de la connaissance de la trace de la solution et de sa dérivée normale sur Γ , on peut déterminer la solution en tout point de Ω_i grâce à la formule de représentation intégrale, par exemple pour notre problème modèle, on a

$$u_i(z) = - \int_{\Gamma} G(z, y) \frac{\partial u_l(y)}{\partial n_l} ds_y + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(z, y)}{\partial n_l} u_l(y) ds_y, \quad \forall z \in \Omega_i. \quad (1.6)$$

avec n_l la normale sortante à Ω_i le long de Γ . Soient le *potentiel de simple couche*

$$\mathcal{S}(q)(z) = - \int_{\Gamma} G(z, y) q(y) ds_y, \quad \forall z \in \Omega_i \quad (1.7)$$

et le *potentiel de double couche*

$$\mathcal{D}_l(p)(z) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G(z, y)}{\partial n_l} p(y) ds_y, \quad \forall z \in \Omega_i, \quad (1.8)$$

qui dépend de la normale utilisée. Avec cette notation (1.6) s'écrit :

$$u_i(z) = \mathcal{S}\left(\frac{\partial u_l}{\partial n_l}\right)(z) + \mathcal{D}_l(u_l)(z), \quad \forall z \in \Omega_i, \quad (1.9)$$

où l'on note que les potentiels de simple et de double couche font intervenir la trace respectivement de la dérivée normale de la solution et de la solution sur Γ (voir par exemple [HW08]). Ainsi, à partir de la connaissance de ces deux quantités, il est possible de calculer la solution en tout point de Ω_i .

Pour prendre en compte la condition au bord sur Γ et obtenir une équation intégrale, il faut faire tendre $z \rightarrow x \in \Gamma$. Avant d'effectuer ce passage à la limite, on définit une nouvelle formule de représentation intégrale pour une inconnue \mathbf{u} définie dans \mathbb{R}^n . Les deux sections suivantes présentent des définitions de \mathbf{u} . On commence par définir les sauts de la trace et de la trace normale de \mathbf{u} sur Γ .

$$\left[\mathbf{u} \right] = (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i)|_{\Gamma} \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right] = \left(\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial n_e} + \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial n_i} \right) |_{\Gamma}, \quad (1.10)$$

où \mathbf{u}_l est la restriction de \mathbf{u} à Ω_l . On rappelle que n_e et n_i sont les normales sortantes le long de Γ respectivement à Ω_e et Ω_i . On obtient la formule de représentation intégrale suivante :

$$\mathcal{S} \left(\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right] \right) (z) + \mathcal{D}_l \left(\left[\mathbf{u} \right] \right) (z) = \mathbf{u}(z), \quad z \in \Omega_i \cup \Omega_e, \quad (1.11)$$

où \mathcal{S} et \mathcal{D}_l sont les potentiels de simple et de double couche définis respectivement en (1.7) et (1.8).

1.2. Résolution du problème de Dirichlet

1.2.1 Problème de Dirichlet par potentiel de simple couche

On définit \mathbf{u} comme le prolongement de la solution du problème de Dirichlet extérieur par la solution du problème de Dirichlet intérieur avec la trace de u_e^D pour donnée sur le bord, soit

$$\mathbf{u}(x) = \begin{cases} u_i^D(x), & \text{si } x \in \Omega_i \\ u_e^D(x), & \text{si } x \in \Omega_e. \end{cases} \quad (1.12)$$

Les traces de u_i^D et u_e^D sur Γ étant identiques, on a $\left[\mathbf{u} \right] = 0$. On introduit l'inconnue $\mathbf{q} = \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right]$, alors $\mathbf{q} \in H^{-1/2}(\Gamma)$. La formule de représentation intégrale (1.11) s'écrit alors :

$$\mathcal{S}(\mathbf{q})(z) = \mathbf{u}(z), \quad \forall z \in \Omega_i \cup \Omega_e. \quad (1.13)$$

Pour prendre en compte la condition de Dirichlet sur Γ , il faut faire tendre z vers $x \in \Gamma$. Il n'y a pas de difficulté à effectuer ce passage à la limite ; on obtient l'équation intégrale suivante

$$-\int_{\Gamma} G(x, y) \mathbf{q}(y) ds_y = f^D(x), \quad \forall x \in \Gamma, \quad (1.14)$$

où f^D est la donnée de Dirichlet du problème (1.1).

1.2.2 Problème de Dirichlet par potentiel de double couche

Une des manière de résoudre le problème de Dirichlet par potentiel de double couche consiste à prolonger la solution du problème de Dirichlet extérieur par la solution du

problème de Neumann intérieur avec comme donnée $\frac{\partial u_e}{\partial n_i} = -\frac{\partial u_e}{\partial n_e}$ sur Γ . Ainsi $\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}\right] = 0$ et l'inconnue du nouveau problème est $\mathbf{p}_e = [\mathbf{u}]$, avec $\mathbf{p}_e \in H^{1/2}(\Gamma)$. L'indice e indique que la solution dépend de la normale utilisée (dans ce cas, la normale extérieur). On a alors :

$$D_e(\mathbf{p}_e)(z) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G(z, y)}{\partial_y n_e} \mathbf{p}_e(y) ds_y = \mathbf{u}(z), \quad \forall z \in \Omega_i \cup \Omega_e, \quad (1.15)$$

ce qui après passage à la limite $z \rightarrow x \in \Gamma$,

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_e(x)} G(x, y) \mathbf{p}_e(y) ds_y + \frac{\mathbf{p}_e(x)}{2} = f^D(x), \quad x \in \Gamma. \quad (1.16)$$

1.2.3 Autre formulation possible

En utilisant directement la première formule de représentation intégrale (1.9) obtenue, pour la résolution du problème de Dirichlet intérieur seulement, on obtient :

$$u_i(z) = \mathcal{S} \left(\frac{\partial u_i}{\partial n_i} \right) (z) + \mathcal{D}_i (f^D) (z), \quad \forall z \in \Omega_i, \quad (1.17)$$

qui fournit après passage à la limite (voir (1.14) et (1.16)) l'équation intégrale :

$$\mathcal{S} \left(\frac{\partial u_i}{\partial n_i} \right) (x) = -\frac{f^D(x)}{2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial_y n_i} f^D(y) ds_y, \quad x \in \Gamma. \quad (1.18)$$

Pour un même problème, plusieurs équations intégrales peuvent être obtenues comme le montrent les équations (1.14) et (1.18) pour le problème de Dirichlet intérieur.

1.3. Résolution du problème de Neumann

1.3.1 Problème de Neumann par potentiel de simple couche

Résoudre un problème de Neumann par potentiel de simple couche revient à prolonger la solution du problème de Neumann extérieur par la solution d'un problème de Dirichlet intérieur avec la trace de u_e^N comme donnée sur le bord. On en déduit que $[\mathbf{u}] = 0$ et que seul le potentiel de simple couche intervient. On pose $\mathbf{q}_e = \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}\right] \in H^{-1/2}(\Gamma)$ comme inconnue dans la formule de représentation intégrale (1.11) ; on a :

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}_e)(z) = \mathbf{u}(z), \quad z \in \Omega_i \cup \Omega_e. \quad (1.19)$$

Pour prendre en compte la condition au bord, on utilise la dérivée normale de (1.19), soit

$$\lim_{z \rightarrow x} -\frac{\partial}{\partial_z n_e} \int_{\Gamma} G(z, y) \mathbf{q}_e(y) ds_y = f_e^N(x), \quad x \in \Gamma, \quad (1.20)$$

ce qui donne l'équation intégrale

$$-\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial_x n_e} G(x, y) \mathbf{q}_e(y) ds_y + \frac{\mathbf{q}_e(x)}{2} = f_e^N(x), \quad x \in \Gamma. \quad (1.21)$$

1.3.2 Problème de Neumann par potentiel de double couche

On définit \mathbf{u} comme le prolongement de la solution du problème de Neumann extérieur (voir (1.2)) par la solution du problème de Neumann intérieur avec $f_i^N = -f_e^N$ de manière à avoir $\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}\right] = 0$. On pose $\mathbf{p}_e = [\mathbf{u}]$, avec $\mathbf{p}_e \in H^{1/2}(\Gamma)$, l'inconnue de l'équation intégrale.

$$\lim_{z \rightarrow x} \frac{\partial}{\partial z n_e} \int_{\Gamma} \frac{\partial G(z, y)}{\partial_y n_e} \mathbf{p}_e(y) ds_y = f_e^N(x), x \in \Gamma. \quad (1.22)$$

La trace normale d'un potentiel de double couche n'est pas une fonction mais doit être vue au sens des distributions. En effectuant deux intégrations par parties dans la formulation variationnelle résultant du problème, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial_x n_e} \int_{\Gamma} \bar{t}(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial_y n_e} \mathbf{p}_e(y) ds_y ds_x \\ &= k^2 \int_{\Gamma \times \Gamma} G(x, y) (n_e(y) \cdot n_e(x)) \bar{t}(x) \mathbf{p}_e(y) dx dy \\ & - \int_{\Gamma \times \Gamma} G(x, y) [(n_e(x) \wedge \nabla_{\Gamma} \bar{t}(x)) \cdot (n_e(y) \wedge \nabla_{\Gamma} \mathbf{p}_e(y))] ds_y ds_x, \end{aligned} \quad (1.23)$$

où ∇_{Γ} est le gradient surfacique défini par

$$\nabla_{\Gamma} u = \nabla u - \vec{n} (\vec{n} \cdot \nabla u). \quad (1.24)$$

La nouvelle expression de la dérivée normale du potentiel de couche obtenue en (1.23) présente l'avantage de ne faire intervenir aucune dérivée du noyau de Green G .

Finalement, on obtient la formulation variationnelle,

$$\begin{aligned} & \forall t \in H^{1/2}(\Gamma), \\ & k^2 \int_{\Gamma \times \Gamma} G(x, y) (n_e(y) \cdot n_e(x)) \bar{t}(x) \mathbf{p}_e(y) dx dy \\ & - \int_{\Gamma \times \Gamma} G(x, y) [(n_e(x) \wedge \nabla_{\Gamma} \bar{t}(x)) \cdot (n_e(y) \wedge \nabla_{\Gamma} \mathbf{p}_e(y))] ds_y ds_x = \int_{\Gamma} f_e^N(x) \bar{t}(x) ds_x \end{aligned} \quad (1.25)$$

1.4. Résolution numérique d'une équation intégrale de frontière

Il existe plusieurs méthodes de résolution numérique des équations intégrales de frontière. Nous supposons que le problème aux limites initial est défini dans un domaine 3-D. La frontière Γ du domaine est donc une surface et peut être discrétisée en utilisant des triangles. La méthode de collocation est présentée succinctement puis on présente la méthode qui intervient dans la suite de la thèse, la méthode des éléments finis de frontière.

Toutes les méthodes numériques pour résoudre des équations intégrales nécessitent la résolution d'un système linéaire que nous écrivons ainsi

$$\mathbb{A} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{B}, \quad (1.26)$$

d'inconnue $\mathbf{\Lambda}$. Nous utilisons le problème de Dirichlet résolu par potentiel de simple couche (voir (1.14)) comme problème modèle pour la présentation des deux méthodes.

1.4.1 La méthode de collocation

La méthode de collocation consiste à chercher une solution vérifiant l'équation intégrale en un certain nombre de points, appelés *points de collocation*. On obtient le système :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } q \in H^{-1/2}(\Gamma) \text{ vérifiant} \\ &-\sum_{m=1}^N \int_{T_m} q(y)G(x_i, y)ds_y = f^D(x_i), \quad i \in [1, \dots, N_c], \end{aligned} \quad (1.27)$$

où N_c est le nombre de points de collocation et N le nombre d'éléments (triangles). Finalement, pour résoudre numériquement (1.27), on introduit une base de dimension N_c de $H^{-1/2}(\Gamma)$. En décomposant q sur la base formée par les fonctions de base ϕ_m , on aboutit au système linéaire (1.26), avec

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{i,m} &= \int_{T_m} \phi_m(y)G(x_i, y)ds_y, \\ \mathbf{B}_i &= f^D(x_i). \end{aligned} \quad (1.28)$$

La solution du problème s'écrit alors :

$$q(y) = \sum_{i=1}^{N_c} \lambda_i \phi_i(y) \quad (1.29)$$

Grâce à sa grande simplicité d'utilisation, la méthode de collocation a été très utilisée dans de nombreux codes de calcul par équations intégrales. Arnold et Wendland dans [AW82, AW83] et de Paula et Telles dans [DPT89] ont effectué des comparaisons entre la méthode de collocation et la méthode des éléments finis de frontière dont la présentation suit.

1.4.2 Les éléments finis de frontière

La méthode des éléments finis de frontière consiste à appliquer la démarche de la méthode des éléments finis à une équation intégrale. On commence donc par l'écriture de la formulation variationnelle du problème de Dirichlet par potentiel de simple couche (1.14) en introduisant une fonction-test $t \in H^{-1/2}(\Gamma)$, prise dans le même espace que celui où la solution de l'équation est recherchée, puis en multipliant l'équation par $\bar{t}(x)$ et finalement en intégrant sur Γ ; on obtient la formulation variationnelle suivante

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{q} \in H^{-1/2}(\Gamma) \text{ vérifiant l'équation} \\ &-\int_{\Gamma} \bar{t}(x) \int_{\Gamma} \mathbf{q}(y)G(x, y)ds_y ds_x = \int_{\Gamma} \bar{t}(x)f^D(x)ds_x, \quad \forall t \in H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned} \quad (1.30)$$

On exprime l'inconnue et la fonction-test à l'aide des fonctions de base :

$$\mathbf{q}(y) = \sum_{j=1}^N q_j \phi_j(x) \quad \text{et} \quad t(x) = \sum_{i=1}^N t_i \phi_i(x), \quad (1.31)$$

ce qui permet de discrétiser (1.30). On obtient alors le système (1.26) avec

$$\mathbb{A}_{i,j} = - \int_{\Gamma \times \Gamma} \bar{\phi}_i(x) G(x,y) \phi_j(y) dy dx, \quad (1.32)$$

$$\mathbf{B}_i = \int_{\Gamma} \bar{\phi}_i(x) g(x) dx. \quad (1.33)$$

Dans le cas de (1.30), $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ peut être discrétisée à l'aide de fonctions de base constantes par triangle. Il faut donc évaluer les intégrales :

$$- \int_{T_i \times T_j} \bar{\phi}_i(x) G(x,y) \phi_j(y) dy dx, \quad (1.34)$$

où T_i et T_j sont des triangles du maillage. Le caractère singulier de G complique l'évaluation de cette intégrale. Dans le cas d'un problème faisant intervenir le potentiel de double couche, l'inconnue qui appartient à $H^{1/2}(\Gamma)$ peut être discrétisée en utilisant des fonctions de base linéaires par élément. Dans la suite nous utilisons des fonctions de base réelles donc nous remplacerons $\bar{\phi}_i$ par ϕ_i .

Les méthodes de collocation et Galerkin présentées jusqu'à présent, dites *conventionnelles*, ont deux limitations :

- la matrice du système linéaire associée est pleine (puisque le noyau de Green G est non-local). Le coût mémoire pour stocker la matrice est donc important et le nombre d'inconnues envisageables pour résoudre un problème est limité.
- la résolution du système devient rapidement très coûteuse.

Des méthodes dites *rapides* permettent de diminuer la taille de la matrice et d'accélérer la résolution du système linéaire (Fast Multipole Method [GR87], Adaptive Cross Approximation [Beb00], Panel Clustering [HLS97] ...) en diminuant la quantité de calcul pour les interactions entre éléments du maillages qui sont éloignés.

1.4.3 Intégrales singulières

La méthode des éléments finis de frontière (*Galerkin Boundary Element Method* ou simplement GBEM) présentée dans la sous-section 1.4.2 nécessite l'évaluation d'intégrales doubles comportant un intégrand singulier. La première intégrale est

$$\int_{S \times T} \phi_j(x) G(x,y) \phi_i(y) dx dy, \quad (1.35)$$

qui provient du potentiel de simple couche (voir (1.14) et (1.18)). La seconde intégrale qui est issue du potentiel de double couche (voir (1.16) et (1.25) s'écrit

$$\int_{S \times T} \phi_j(x) \frac{\partial G}{\partial n_y}(x,y) \phi_i(y) dx dy, \quad (1.36)$$

où $\frac{\partial G}{\partial n_y} = \nabla_y G(x,y) \cdot \vec{n}(y)$ est la dérivée normale de G . Puisque la normale sortante au bord Γ du domaine est constante par élément (triangle plan ou plus généralement polygone plan), on se ramène donc au calcul de l'intégrale

$$\int_{S \times T} \phi_j(x) \nabla_y G(x,y) \phi_i(y) dx dy, \quad (1.37)$$

en gardant en mémoire qu'il faut effectuer le produit scalaire avec la normale sortante au bord du domaine. Enfin, la dernière intégrale qui peut intervenir et provient de la dérivée normale du potentiel de double couche lors de l'utilisation d'une formulation hypersingulière s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \int_{S \times T} \phi_j(x) \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) \phi_i(y) dx dy, \quad (1.38)$$

est évaluée en utilisant (1.23).

Le noyau de Green G est singulier lorsque $r = 0$ (voir (1.5)). Ainsi lorsque l'intersection des deux triangles n'est pas vide (voir la Figure 1(a)), les intégrales (1.35), (1.37) et (1.38) sont singulières. Ce cas apparaît lorsque S et T sont identiques ou lorsqu'ils ont un sommet commun ou une arête commune. Ces cas singuliers apparaissent, en général, lorsque les indices i et j sont proches. Les cas singuliers correspondent donc à des coefficients proches de la diagonale de la matrice \mathbb{A} .

Le caractère singulier de G ($G \sim 1/\|x - y\|$ en 3-D) intervient également lorsque l'intersection des deux triangles est vide. En effet, lorsque S et T sont très proches (voir la Figure 1(b)), les intégrales bien que non singulières, sont difficiles à évaluer avec précision par des méthodes usuelles d'intégration numérique. Dans ce cas, les intégrales sont dites *presque-singulières*. Les cas *presque-singuliers* peuvent correspondre à des coefficients de la matrice qui sont éloignés de la diagonale. Lorsque les triangles S et T sont très proches, les intégrales (1.35), (1.37) et (1.38) peuvent correspondre à des coefficients de valeurs grandes.

Une mauvaise évaluation de coefficients éloignés de la diagonale, issus d'intégrales presque-singulières peut altérer grandement la précision de la solution calculée ; il s'agit du cas le plus difficile. Dans [GPRS06] Gladilin et al. indiquent lors d'une comparaison effectuée entre la méthode des éléments finis (FEM) et une méthode d'équation intégrale de frontière par collocation que la solution obtenue en utilisant la méthode de collocation est moins précise que celle obtenue par les éléments finis (FEM) mais que cela est probablement dû à la singularité de l'intégrand. Cela montre qu'il est important d'évaluer les intégrales singulières, mais aussi presque-singulières avec une méthode précise, sans quoi, les méthodes d'équations intégrales perdent fortement de leur intérêt.

1.4.4 Traitement des intégrales singulières et presque-singulières

Il existe deux grandes classes de méthodes de traitement des intégrales singulières. Les méthodes dites *d'élimination* pour lesquelles un changement de variables permet de régulariser l'intégrand grâce au Jacobien de la transformation. La seconde classe concerne les méthodes dites *de soustraction* pour lesquelles, une fonction singulière est soustraite de l'intégrand afin de le régulariser. Le nouvel intégrand obtenu peut alors être évalué à l'aide de méthodes d'intégration numérique classiques (voir [Str71], [Eva93], [LC94], [Tri09]). Cependant, pour que cette méthode soit intéressante, il faut que l'intégrale de la fonction soustraite soit facilement évaluable. La méthode que nous proposons fait partie des méthodes de soustraction ; et permet d'évaluer avec une grande précision l'intégrale du terme singulier. Nous décomposons l'intégrand en termes singuliers homogènes d'une part et en une partie régulière d'autre part, qui peut être évaluée à l'aide de méthodes usuelles d'intégration numérique. A cet effet, le noyau de Green de

l'équation de Helmholtz 3-D peut se décomposer comme suit,

$$G(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik\|x-y\|}}{\|x-y\|} = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} = -\frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr} - 1}{r}, \quad (1.39)$$

où $r = \|x-y\|$. On remarque que le premier terme de la décomposition diverge lorsque r tend vers 0 donc correspond au terme singulier. A contrario, le second terme est analytique par rapport à la distance r et est donc susceptible d'être intégré numériquement. De même pour le gradient de G :

$$\begin{aligned} \nabla_y G(x, y) &= -\frac{(x-y)(1-ik\|x-y\|)}{\|x-y\|^3} \frac{1}{4\pi} e^{ik\|x-y\|} \\ &= -\frac{(x-y)(1-ikr)}{4\pi r^3} e^{ikr} = -\frac{(x-y)}{4\pi r^3} - \frac{ik(x-y)}{4\pi r} + \frac{x-y}{4\pi} K(r), \end{aligned} \quad (1.40)$$

où K est une fonction analytique de la distance r .

Dans le cadre des méthodes variationnelles, l'intégrale à évaluer est quadri-dimensionnelle. Certaines méthodes, dites *semi-analytiques* proposent d'évaluer explicitement l'intégrale interne puis utilisent des méthodes numériques pour calculer l'intégrale externe. D'autres méthodes proposent des changements de variables, souvent couplés avec des décompositions de domaines puis une intégration numérique complète. Cependant, comme l'indique [BKS05], pour conserver un bon ordre de convergence, il est nécessaire d'adapter l'ordre de la formule de quadrature avec l'erreur de discrétisation. En général, cela se traduit par le fait que l'ordre de quadrature nécessaire croît logarithmiquement avec le nombre d'inconnues ; ce qui peut rapidement poser problème. Un des avantages de la méthode proposée dans cette thèse (voir aussi [LS12]) est qu'elle ne nécessite pas d'intégration numérique ; ainsi, la question de l'adaptation de l'ordre de la méthode de quadrature ne se pose pas. Ceci assure une bonne robustesse de notre méthode.

Des comparaisons numériques ont été effectuées avec la méthode proposée par Sauter et Schwab dans [SS10] et la librairie d'intégration adaptative [CH03]. La première méthode repose sur un changement de variable afin de se ramener à des éléments de références suivi d'une décomposition du domaine puis à l'utilisation de la transformation de Duffy ; ce qui conduit à des intégrales comportant un intégrand régulier sur des hypercubes 4-D qui peuvent donc être évaluées par des méthodes numériques usuelles. Le cas des intégrales presque-singulières est encore très étudié, par exemple Nintcheu-Fata dans [NF10] propose une intégration analytique de l'intégrale interne puis compare trois méthodes (transformation de Duffy, transformation sinh et enfin transformation polynomiale) pour finir l'évaluation à l'aide d'une intégration numérique.

Présentation de la méthode

Introduction

Comme il a été vu dans le chapitre précédent, nous souhaitons évaluer des intégrales, dont l'intégrand est singulier, sur le produit de deux triangles $S \times T$. Il s'agit donc d'une intégrale 4-D. Par ailleurs l'intégrand étant singulier, les méthodes usuelles d'intégration numérique ne peuvent pas être utilisées.

Nous proposons une méthode qui ne nécessite aucune intégration numérique pour l'évaluation d'intégrales singulières provenant des méthodes d'équations intégrales de frontière variationnelles. La méthode permet d'obtenir des formules explicites pour évaluer ces intégrales ce qui procure une très grande précision. Cette méthode de calcul a été introduite par M. Lenoir en 2006, voir [Len06]. Il s'agit d'un processus de réduction de la dimension du domaine d'intégration qui permet de transformer une intégrale 4-D en une combinaison linéaire d'intégrales mono-dimensionnelles régulières. Ces intégrales mono-dimensionnelles peuvent alors être évaluées explicitement.

2.1. Le processus de réduction

Le processus de réduction repose sur plusieurs formules de simplification présentées dans la section 2.2. Ces formules permettent de réduire la dimension du domaine d'intégration. Elles sont utilisables lorsque l'intégrand est homogène, ou positivement homogène. Une fonction est dite homogène de degré q , ou q -homogène, par rapport à la variable $z \in \mathbb{R}^n$, si :

$$f(\lambda z) = \lambda^q f(z), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0. \quad (2.1)$$

D'une manière similaire, une fonction est dite positivement homogène de degré q par rapport à $z \in \mathbb{R}^n$, si

$$f(\lambda z) = \lambda^q f(z), \forall \lambda > 0. \quad (2.2)$$

Tous les intégrands étudiés dans la suite sont positivement homogènes mais afin de simplifier la notation nous utiliserons le terme de fonctions q -homogènes pour parler de fonctions homogènes ou positivement homogènes. Soit l'intégrale

$$\mathcal{I} = \int_{S \times T} f(z) dz,$$

où f est une fonction q -homogène et où $z = (x, y)$, avec $x \in S$ et $y \in T$ (voir la figure 2.1). Pour mieux appréhender l'utilisation de notre méthode, la figure 2.3 présente l'évolution du domaine d'intégration lors de l'application du processus de réduction de la dimension du domaine d'intégration à l'intégrale \mathcal{I} avec S et T sont deux triangles coplanaires.

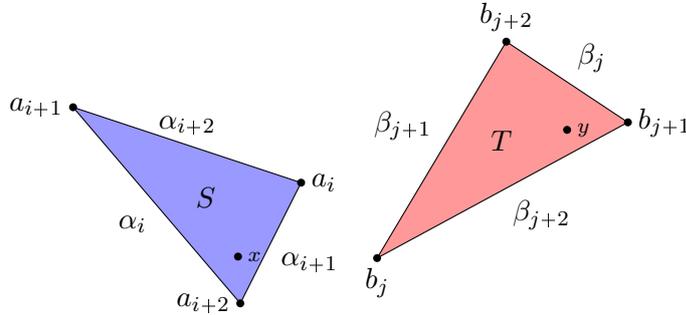


FIGURE 2.1 – Le domaine d'intégration : produit des deux triangles S et T coplanaires.

L'intégrale 4-D initiale est réduite en une combinaison linéaire d'intégrales 3-D de deux types : des intégrales sur des domaines de type $S \times \beta$ et d'autres sur des domaines $\alpha \times T$. L'évolution du domaine d'intégration durant la réduction de $\alpha \times T$ est présentée sur la Figure 2.3. L'intégrale sur $S \times \beta$ se réduit d'une manière similaire.

Une seconde application des formules permet de réduire cette intégrale à deux types d'intégrales 2-D : des intégrales sur des domaines $S \times b$, avec b un des sommets du triangle T ; et des intégrales sur $\alpha \times \beta$.

La dernière réduction permet de se ramener à des intégrales mono-dimensionnelles. L'intégrale sur $S \times b$ se réduit en une combinaison linéaire d'intégrales sur $\alpha \times b$. La réduction de l'intégrale sur $\alpha \times \beta$ dépend de la configuration géométrique des supports des deux segments. Lorsque leurs supports sont sécants, on obtient des intégrales sur $a \times \beta$ et sur $\alpha \times b$. Lorsque les supports des segments sont parallèles, on note $\tilde{\alpha}^-$ et $\tilde{\alpha}^+$ les projections respectives de α et a sur le support de β . L'intégrale sur $\alpha \times \beta$ se réduit alors à des intégrales sur $\tilde{\alpha}^- \times b$ et des intégrales sur $\tilde{\alpha}^+ \times b$. Toutes les intégrales 1-D sont régulières ainsi que nous le constaterons dans la seconde partie de ce manuscrit.

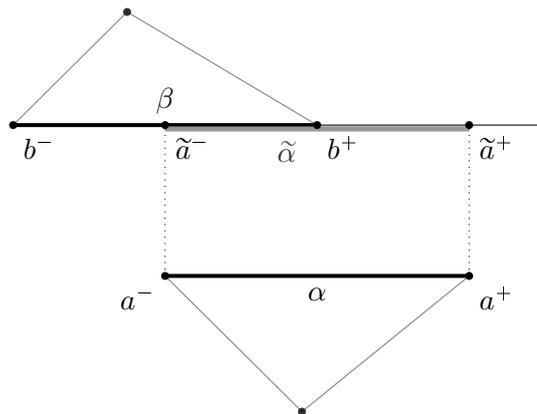


FIGURE 2.2 – Supports de α et β parallèles.

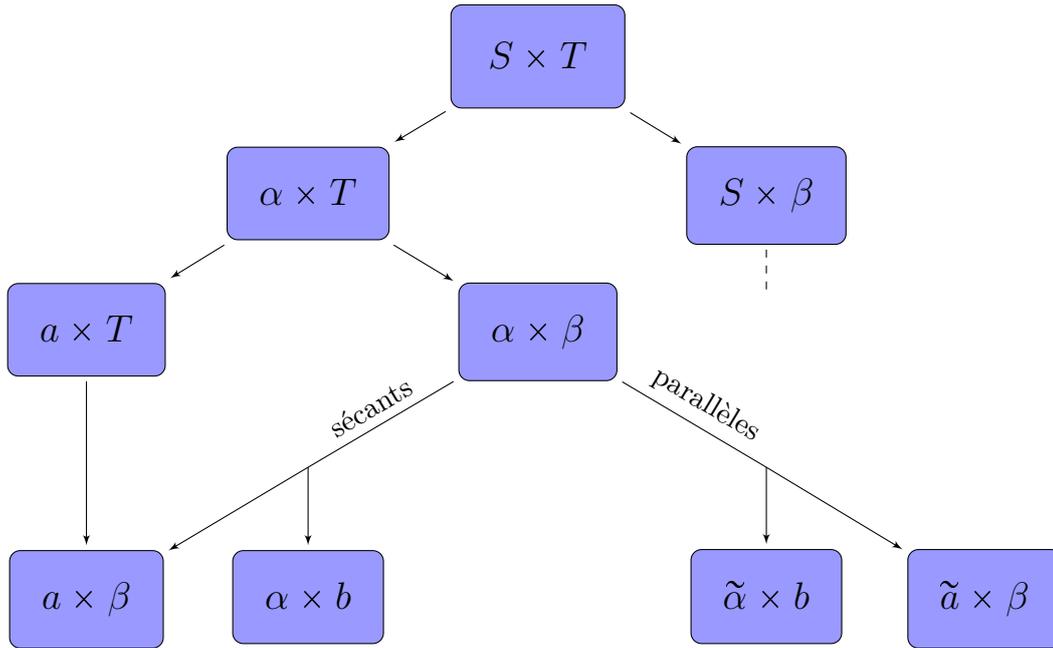


FIGURE 2.3 – Evolution du domaine d'intégration durant le processus de réduction appliqué à une intégrale sur le produit de deux triangles coplanaires S et T .

2.2. Intégration de fonctions homogènes

Pour l'obtention des formules de réduction, il est nécessaire de distinguer deux cas. Lorsque l'intégrand est une fonction q -homogène par rapport à la variable d'intégration z (voir (2.3)) et lorsqu'il s'agit d'une fonction q -homogène par rapport au couple (z, h) formé de la variable d'intégration et d'un paramètre réel h , fonction que l'on appellera fonction q -homogène à paramètre (voir (2.4)) :

$$f(\lambda z) = \lambda^q f(z) \quad (2.3)$$

$$f(\lambda z, \lambda h) = \lambda^q f(z, h). \quad (2.4)$$

Bien que déjà introduites par Viajakumar, Cormack et Rosen (voir [VC88, RC95] pour la réduction d'intégrales singulières 2-D) et Lasserre (voir [Las99] pour la réduction d'intégrales régulières), l'obtention des formules de réduction est présentée afin de fournir un document complet.

2.2.1 Fonction homogène

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction q -homogène régulière, alors d'après la définition (2.1) on a

$$f(\lambda z) = \lambda^q f(z), \quad \forall \lambda \neq 0 \quad (2.5)$$

expression qu'il est possible de dériver par rapport à λ ,

$$z \cdot \nabla f(\lambda z) = q \lambda^{q-1} f(z), \quad \forall \lambda \neq 0. \quad (2.6)$$

L'expression (2.6) est vérifiée pour tout $\lambda \neq 0$ donc à fortiori pour $\lambda = 1$, ce qui donne le résultat du théorème d'Euler (aussi appelée *relation d'homogénéité d'Euler*, voir par exemple [HJ63, p. 471]) :

$$z \cdot \nabla f(z) = qf(z). \quad (2.7)$$

On a donc

$$\int_{\Omega} z \cdot \nabla f(z) dz = q \int_{\Omega} f(z) dz. \quad (2.8)$$

L'objectif est de transformer l'intégrale de gauche pour obtenir une intégrale sur $\partial\Omega$, le bord de Ω . La formule de Green nous permet d'obtenir ce résultat mais il est nécessaire que f soit assez régulière. Si on suppose $f \in C^1(\bar{\Omega})$, alors

$$\int_{\Omega} z \cdot \nabla f(z) dz = -n \int_{\Omega} f(z) dz + \int_{\partial\Omega} (\vec{z} | \vec{\nu}) f(z) ds_z, \quad (2.9)$$

où $\vec{\nu}$ est la normale sortante à $\partial\Omega$ et s_z est l'élément de surface sur $\partial\Omega$. En introduisant $I = \int_{\Omega} f(z) dz$, on obtient

$$(q + n)I = \int_{\partial\Omega} (\vec{z} | \vec{\nu}) f(z) ds_z.$$

Théorème 1 (Formule 1). *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, alors si f est une fonction homogène de degré q avec $q + n \neq 0$ et si f est assez régulière sur Ω , on a la réduction*

$$I := \int_{\Omega} f(z) dz = \frac{1}{q + n} \int_{\partial\Omega} (\vec{z} | \vec{\nu}) f(z) ds_z. \quad (2.10)$$

Dans la sous-section 2.2.4 nous montrons que cette formule peut s'appliquer à des intégrands singuliers.

2.2.2 Fonction homogène, cas $q + n = 0$

On observe que lorsque $q = -n$, la formule (2.10) ne s'applique plus. Pour obtenir une formule de réduction lorsque $q + n = 0$, nous introduisons $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction τ -homogène positive, avec $\tau \neq 0$. On pose

$$l(z) = f(z) \ln(\theta(z)),$$

alors

$$l(\lambda z) = \lambda^q f(z) \ln(\lambda^\tau \theta(z)) = \tau \lambda^q f(z) \ln(\lambda) + \lambda^q f(z) \ln(\theta(z)), \quad (2.11)$$

et comme dans la sous-section 2.2.1,

$$z \cdot \nabla l(\lambda z) = q\tau \lambda^{q-1} f(z) \ln(\lambda) + \tau \lambda^{q-1} f(z) + q\lambda^{q-1} f(z) \ln(\theta(z)), \quad (2.12)$$

qui donne en prenant $\lambda = 1$,

$$z \cdot \nabla l(z) = \tau f(z) + qf(z) \ln(\theta(z)) = \tau f(z) + ql(z), \quad (2.13)$$

soit en intégrant sur Ω et en utilisant la formule de Green de (2.20),

$$-n \int_{\Omega} l(z) dz + \int_{\partial\Omega} l(z) (\vec{z} | \vec{\nu}) ds_z = \tau \int_{\Omega} f(z) dz + q \int_{\Omega} l(z) dz \quad (2.14)$$

qui donne,

$$\int_{\Omega} f(z) dz = \frac{1}{\tau} \int_{\partial\Omega} (\vec{z} | \vec{\nu}) f(z) \ln(\theta(z)) ds_z, \quad (2.15)$$

ce qui permet d'écrire la formule (2.16) :

Théorème 2. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction régulière et homogène de degré $q = -n$ tel que $q + n = 0$. On introduit une fonction positive $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, arbitraire positivement homogène de degré $\tau > 0$, alors on a*

$$\int_{\Omega} f(z) dz = \frac{1}{\tau} \int_{\partial\Omega} (\vec{z} | \vec{\nu}) f(z) \ln(\theta(z)) ds_z. \quad (2.16)$$

D'autres techniques aboutissent à l'expression (2.16). Par exemple F. Collino intègre la fonction $p(z) = f(z)\theta(z)^\gamma$, où f est l'intégrand initial, θ est une fonction arbitraire positivement homogène de degré $\tau \neq 0$ et γ est positif, ainsi la formule (2.10) peut être utilisée puis en passant à la limite lorsque $\gamma \rightarrow 0$, on obtient (2.16).

2.2.3 Fonction homogène à paramètre

Cette fois, nous nous intéressons aux intégrales d'une fonction q -homogène à paramètre, notée g , soit $\int_{\Omega} g(z, h) dz$, avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}$ un paramètre. En remplaçant z dans la définition (2.1) par le couple (z, h) , on a

$$g(\lambda z, \lambda h) = \lambda^q g(z, h), \quad (2.17)$$

expression qui peut également être dérivée par rapport à λ , comme cela a été fait en (2.6),

$$z \cdot \nabla_z g(\lambda z, \lambda h) + h \frac{\partial g}{\partial h}(\lambda z, \lambda h) = q \lambda^{q-1} g(z, h), \quad (2.18)$$

et en prenant $\lambda = 1$, on obtient

$$z \cdot \nabla g(z, h) + h \frac{\partial g}{\partial h}(z, h) = q g(z, h). \quad (2.19)$$

De la même manière que pour (2.8), on intègre l'expression par rapport à Ω et on pose $I(h) = \int_{\Omega} g(z, h) dz$. La formule de Green

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} z \cdot \nabla g(z, h) dz &= -n \int_{\Omega} g(z, h) dz + \int_{\partial\Omega} (\vec{z} | \vec{\nu}) g(z, h) ds_z \\ &= -n I(h) + \int_{\partial\Omega} (\vec{z} | \vec{\nu}) g(z, h) ds_z, \end{aligned} \quad (2.20)$$

fournit l'équation différentielle ordinaire

$$(q + n)I(h) - hI'(h) = \int_{\partial\Omega} (\vec{z} | \vec{\nu}) g(z, h) ds_x, \quad (2.21)$$

d'inconnue $I(h)$. On remarque que lorsque g est ne dépend pas du paramètre h , alors $I'(h) = 0$ et on retrouve l'expression (2.10).

Lorsque $q + n \neq 0$, cette équation peut-être résolue en utilisant la méthode de la variation de la constante; pour ce faire, on pose

$$I(h) = h^{q+n}K(h), \quad (2.22)$$

alors, K vérifie l'équation

$$K'(h) = -\frac{1}{h^{q+n+1}} \int_{\partial\Omega} (\vec{z}|\vec{\nu})g(z, h)ds_z. \quad (2.23)$$

Soit $h_0 \in \mathbb{R}$ un réel que l'on fixera par la suite en s'assurant que l'intégrale est définie. En intégrant (2.23), on obtient

$$K(h) = K(h_0) + \int_h^{h_0} \frac{1}{u^{q+n+1}} \int_{\partial\Omega} (\vec{z}|\vec{\nu})g(z, u)ds_z du, \quad (2.24)$$

alors en faisant apparaître $I(h)$ dans (2.24), on a

$$I(h) = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{q+n} I(h_0) + h^{q+n} \int_h^{h_0} \frac{1}{u^{q+n+1}} \int_{\partial\Omega} (\vec{z}|\vec{\nu})g(z, u)ds_z du. \quad (2.25)$$

Lorsque $q + n = 0$, l'expression (2.21) devient simplement

$$I'(h) = -\frac{1}{h} \int_{\partial\Omega} (\vec{z}|\vec{\nu})g(z, h)ds_z, \quad (2.26)$$

soit,

$$I(h) = I(h_0) + \int_h^{h_0} \frac{1}{u} \int_{\partial\Omega} (\vec{z}|\vec{\nu})g(z, u)ds_z du, \quad (2.27)$$

qui n'est rien d'autre que l'expression (2.25) avec $q + n = 0$.

Choix de h_0

A présent, il faut faire un choix pour h_0 . Tout d'abord, il est préférable de choisir h_0 du même signe que h afin d'éviter la possible singularité de $g(z, h)$ en $h = 0$. Dans tous les cas que l'on traitera h sera positif, donc nous choisirons $h_0 > 0$. De plus, nous traiterons des intégrands de la forme $(h^2 + \|x - y\|^2)^{q/2}$ et $(x - y)(h^2 + \|x - y\|^2)^{(q-1)/2}$, avec $q < 0$. On a donc

$$g(z, h_0) = h_0^q g\left(\frac{z}{h_0}, 1\right), \quad (2.28)$$

et l'inégalité

$$\left\|g\left(\frac{z}{h_0}, 1\right)\right\| \leq \|x - y\|^\alpha, \quad (2.29)$$

avec $\alpha \in \{0, 1\}$. Ainsi,

$$\|I(h_0)\| = \left\|\frac{h^{q+n}}{h_0^{q+n}} \int_{\Omega} g(z, h_0)dz\right\| \leq \frac{h^{q+n}}{h_0^n} \left\|\int_{\Omega} (x - y)^\alpha dz\right\| \leq \frac{h^{q+n}}{h_0^n} M \longrightarrow 0 \text{ quand } h_0 \rightarrow \infty, \quad (2.30)$$

et ce résultat reste valable lorsque $q + n = 0$. Il est donc raisonnable de choisir $h_0 = \text{sgn}(h)\infty$, donc $h_0 = +\infty$.

Théorème 3. Soit $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors si g est une fonction assez régulière et q -homogène selon ses deux variables, sous la condition

$$\left(\frac{h}{h_0}\right)^{q+n} \int_{\Omega} g(z, h_0) ds_z \longrightarrow 0 \text{ quand } h_0 \rightarrow \text{sgn}(h)\infty, \quad (2.31)$$

on a la simplification :

$$I(h) = h^{q+n} \int_{\partial\Omega} (\vec{z}|\vec{\nu}) \int_h^{\text{sgn}(h)\infty} \frac{g(z, u)}{u^{q+n+1}} du ds_z. \quad (2.32)$$

On note que l'ordre d'intégration a été changé pour obtenir cette formule finale. Il n'y a pas de réduction de la dimension dans l'expression (2.32), cependant dans tous les cas traités il est possible d'évaluer explicitement l'intégrale interne; on obtient donc la formule (2.34) :

Théorème 4. Soit $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors si g est une fonction assez régulière et q -homogène selon ses deux variables, sous la condition

$$\left(\frac{h}{h_0}\right)^{q+n} \int_{\Omega} g(z, h_0) ds_z \longrightarrow 0 \text{ quand } h_0 \rightarrow \text{sgn}(h)\infty, \quad (2.33)$$

on a la simplification :

$$I(h) := \int_{\Omega} g(z, h) dz = \int_{\partial\Omega} (\vec{z}|\vec{\nu}) F(z, h) ds_z \quad (2.34)$$

$$\text{avec } F(z, h) = h^{q+n} \int_h^{\text{sgn}(h)\infty} \frac{g(z, u)}{u^{q+n+1}} du.$$

Il est intéressant de noter qu'avec la formule (2.34) il n'est pas nécessaire de distinguer entre le cas $q+n=0$ et le cas $q+n \neq 0$. Comme on le verra dans la suite, l'intégrand est modifié à chaque utilisation de la formule et devient plus compliqué.

Une question se pose : si g est q -homogène qu'en est-il de $F(z, h)$? Montrons que $F(z, h)$ est q -homogène également via un simple changement de variable :

$$\begin{aligned} F(\lambda x, \lambda h) &= \lambda^{q+n} h^{q+n} \int_{\lambda h}^{\text{sgn}(h)\infty} \frac{g(\lambda x, u)}{u^{q+n+1}} du \\ &= \lambda^{q+n} h^{q+n} \int_h^{\text{sgn}(h)\infty} \frac{g(\lambda x, \lambda v)}{\lambda^{q+n+1} v^{q+n+1}} \lambda dv \\ &= \lambda^q h^{q+n} \int_h^{\text{sgn}(h)\infty} \frac{g(x, v)}{v^{q+n+1}} dv \\ &= \lambda^q F(x, h), \end{aligned} \quad (2.35)$$

ce qui nous assure bien la q -homogénéité de F par rapport au couple de variable (z, h) .

2.2.4 La formule (2.10) avec un intégrand singulier

Soient les domaines $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ et $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ tels que leur intersection soit non vide. On pose $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ et $R(z) = \|x - y\|$ avec $x \in \Omega_1$ et $y \in \Omega_2$. Nous allons montrer que

l'intégrale

$$I = \int_{\Omega} \frac{1}{R(z)} dz, \quad (2.36)$$

est sujette à l'utilisation de la formule (2.10) bien que son intégrand soit homogène de degré $q = -1$ selon le couple de variable (x, y) et singulier puisque $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. On pose

$$I(\epsilon) = \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + R(z)^2}} dz, \quad (2.37)$$

où $\epsilon > 0$, ainsi l'intégrale est définie et l'on peut appliquer la formule (2.34) en notant que $q + n = 3$; l'intégrale $I(\epsilon)$ s'écrit alors :

$$I(\epsilon) = \int_{\partial\Omega} (z|\vec{\nu}) \epsilon^3 \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{u^4 \sqrt{u^2 + R(z)^2}} du ds_z \quad (2.38)$$

On s'intéresse à l'intégrale interne; alors en lui appliquant une intégration par parties, on obtient

$$I(\epsilon) = \int_{\partial\Omega} \frac{(z|\vec{\nu})}{3\sqrt{\epsilon^2 + R(z)^2}} \partial z - \int_{\partial\Omega} (z|\vec{\nu}) \frac{\epsilon^3}{3} \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{u^2 (u^2 + R(z)^2)^{3/2}} du ds_z \quad (2.39)$$

Dans la seconde intégrale, on utilise la majoration :

$$\frac{\epsilon^3}{u^2 (u^2 + R(z)^2)^{3/2}} \leq \frac{u}{(u^2 + R(z)^2)^{3/2}},$$

qui vérifie :

$$\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{u}{(u^2 + R(z)^2)^{3/2}} du = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + R(z)^2}} \leq \frac{1}{R(z)}, \quad (2.40)$$

Finalement, le théorème de convergence dominée de Lebesgue conduit au résultat :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon) = \int_{\partial\Omega} \frac{(z|\vec{\nu})}{3R(z)} ds_z \quad (2.41)$$

qui est exactement le résultat obtenu si l'on applique *naïvement* la formule (2.10) à I .

Ce résultat permet de conclure que la formule (2.10) peut être utilisée pour certains intégrands singuliers (ici homogène de degré -1). Dans la suite de ce manuscrit, nous utiliserons directement la formule (2.10) pour l'intégrand $R(z) = \|x - y\|$ et un domaine d'intégration pouvant être $\Omega = S \times S$ et $\Omega = S \times T$ où S et T sont des triangles adjacents ou ayant un sommet commun.

2.3. Paramétrisation et homogénéité

Il est important de noter que l'homogénéité dans une intégrale n'est pas une propriété intrinsèque. En effet, l'homogénéité de l'intégrand dépend de la paramétrisation utilisée dans le calcul de l'intégrale et donc de l'origine choisie. Nous allons commencer par présenter un petit calcul pour détailler l'importance de l'origine puis nous verrons que cette nécessité de choisir une origine pour assurer l'homogénéité nous force à distinguer trois configurations géométriques lors des calculs.

2.3.1 Importance de la paramétrisation

Soient α et β deux segments du plan (voir la figure 2.4), alors pour calculer l'intégrale suivante

$$Q = \int_{\alpha \times \beta} \frac{1}{\|x - y\|} ds_x ds_y, \quad (2.42)$$

avec $x \in \alpha$ et $y \in \beta$, une infinité de paramétrisations est envisageable.

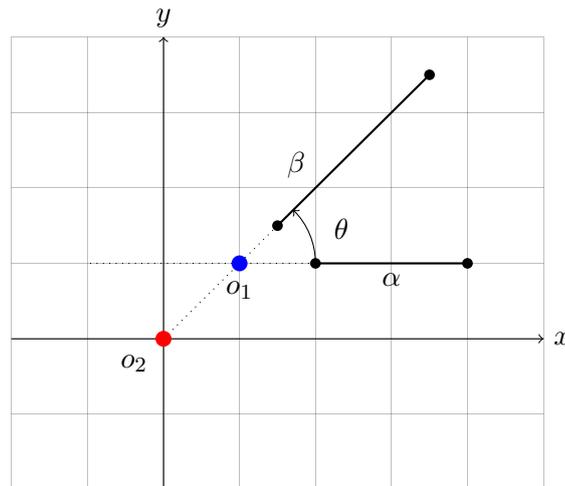


FIGURE 2.4 – Influence de l'origine et de la paramétrisation sur l'homogénéité d'un intégrand.

- En prenant pour origine o_1 , l'intersection des supports des deux segments, on obtient la paramétrisation selon (s, t) :

$$\begin{cases} x_1(s) &= s \\ x_2(s) &= 0 \\ y_1(t) &= t \cos(\theta) \\ y_2(t) &= t \sin(\theta), \end{cases}$$

ce qui fournit l'expression

$$Q = \int_s \int_t \frac{ds dt}{\sqrt{(s - t \cos(\theta))^2 + (t \sin(\theta))^2}}, \quad (2.43)$$

où l'angle θ est fixé. L'intégrand est bien homogène selon le couple de variables (s, t) .

- Par contre, en prenant pour origine o_2 , l'intersection des deux axes, une constante apparaît dans la paramétrisation :

$$\begin{cases} x_1(s) &= s \\ x_2(s) &= \mathbf{1} \\ y_1(t) &= t \cos(\theta) \\ y_2(t) &= t \sin(\theta), \end{cases}$$

alors

$$Q = \int_s \int_t \frac{dsdt}{\sqrt{(s - t \cos(\theta))^2 + (\mathbf{1} - t \sin(\theta))^2}}. \quad (2.44)$$

Cette fois l'intégrand n'est plus homogène.

En pratique, seule l'utilisation de l'intersection des supports des deux segments comme origine assure l'homogénéité de l'intégrand dans (2.42).

On comprend qu'il sera donc très important durant le processus de réduction de choisir avec précaution l'origine afin de conserver le caractère homogène de l'intégrand. Nous verrons également qu'un choix judicieux de l'origine permet de simplifier les calculs.

2.3.2 Utilisation de polygones plans

La méthode nécessite l'utilisation de polygones plans pour discrétiser le domaine. Sans cela, après une première étape de réduction de la dimension, l'intégrand n'est plus homogène; il n'est donc plus possible d'utiliser les formules (2.10) ou (2.34) pour continuer la réduction de la dimension du domaine d'intégration jusqu'à l'obtention d'intégrales mono-dimensionnelles.

En effet, l'utilisation de polygones plans assure que le produit $S \times T$, avec S et T deux polygones plans, est un polyèdre. Ainsi $\partial(S \times T)$ est composé d'hyperplans sur lesquels la normale sortante $\vec{\nu}$ est constante.

Par conséquent, le produit scalaire présent dans les formules (2.10) et (2.34) est constant par morceaux et, en décomposant $\partial(S \times T)$, il est possible de le sortir de l'intégrale pour se ramener à un intégrand homogène et ainsi répéter le processus.

2.4. Utilisation des formules de réduction

Pour découvrir l'utilisation pratique des différentes formules, nous allons évaluer trois intégrales sur le triangle S , en choisissant comme point d'observation, soit $x \in \mathring{S}$, soit \tilde{x} se trouvant à une distance h du plan contenant le triangle S . Le triangle S est défini par ses sommets a_i et ses cotés α_i tels que a_i soit le sommet opposé à α_i , voir la Figure 2.5.

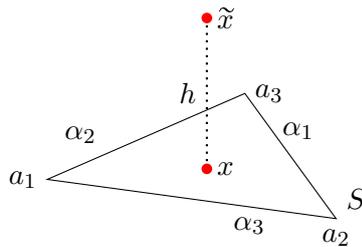


FIGURE 2.5 – Intégration sur le triangle S ; le point d'observation peut être pris en x ou en \tilde{x} .

2.4.1 Exemple d'utilisation de la Formule (2.10)

Soit l'intégrale,

$$I(x) = \int_S \frac{1}{\|x - y\|} dy, \quad (2.45)$$

où S est un triangle et x un point appartenant au triangle S (voir Figure 2.6). On a $z = y$ et $f(z) = \|x - y\|^{-1}$, qui oblige à choisir le point d'observation x comme origine pour avoir l'homogénéité de l'intégrand. L'intégrand est donc homogène de degré $q = -1$ donc $q + n = 1$. En appliquant la formule (2.10), on obtient

$$I(x) = \int_{\partial S} \frac{(\vec{y} | \vec{\nu})}{\|x - y\|} ds_y = \sum_{i=1}^3 \int_{\alpha_i} \frac{(\vec{y} | \vec{\nu})}{\|x - y\|} ds_y, \quad (2.46)$$

puisque le bord de S est simplement l'union de ses cotés α_i . La normale sortante au bord du triangle est notée $\vec{\nu}$. On introduit $\vec{\lambda}_i = \vec{\nu}|_{\alpha_i}$ la normale sortante sur le côté α_i . Le produit scalaire intervenant dans l'expression (2.46) correspond alors à la distance, notée g_i , de l'origine à chaque côté de S (voir la Figure 2.6), alors (2.46) devient

$$I(x) = \sum_{i=1}^3 g_i \int_{\alpha_i} \frac{1}{\|x - y\|} ds_y. \quad (2.47)$$

Afin d'évaluer explicitement les intégrales monodimensionnelles, il faut déterminer une paramétrisation : pour l'intégrale sur α_i , on choisit p_i le projeté orthogonal de x sur α_i comme origine, ce qui donne

$$I(x) = \sum_{i=1}^3 g_i \int_{s_i^-}^{s_i^+} \frac{ds}{\sqrt{g_i^2 + s^2}} = \sum_{i=1}^3 g_i \left[\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{g_i} \right) \right]_{s=s_i^-}^{s_i^+}, \quad (2.48)$$

où s_i^\pm sont les abscisses des extrémités de α_i selon l'origine p_i .

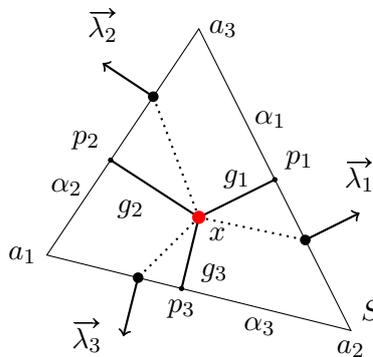


FIGURE 2.6 – Distance de l'origine aux cotés du triangle S . On a $(\vec{x} | \vec{\lambda}_i)_{|\alpha_i} = g_i$, la distance de x au côté α_i .

Ce calcul montre que l'utilisation de la formule (2.10) pour évaluer des intégrales 2-D est très simple.

2.4.2 Exemple d'utilisation de la Formule (2.34)

Soit l'intégrale

$$M(h) = \int_S \frac{1}{\|\tilde{x} - y\|} dy = \int_S \frac{1}{\sqrt{h^2 + \|x - y\|^2}} dy, \quad (2.49)$$

où x est la projection orthogonale de \tilde{x} sur le plan de S . On observe que lorsque $h \rightarrow 0$, $M(h) \rightarrow I$ définie en (2.45). En appliquant la formule (2.34) avec $q = -1$ et l'origine prise en x , on a

$$M(h) = \sum_{i=1}^3 g_i \int_{\alpha_i} h \int_h^{+\infty} \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 + \|x - y\|^2}} ds_y \quad (2.50)$$

puisque le produit scalaire fait apparaître la distance g_i . L'intégrale interne s'évalue selon,

$$h \int_h^{+\infty} \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 + \|x - y\|^2}} = \frac{\sqrt{h^2 + \|x - y\|^2} - h}{\|x - y\|^2}, \quad (2.51)$$

ainsi (2.50) s'écrit

$$M(h) = \sum_{i=1}^3 g_i \int_{\alpha_i} \frac{\sqrt{h^2 + \|x - y\|^2} - h}{\|x - y\|^2} ds_y. \quad (2.52)$$

Les intégrales monodimensionnelles sont toutes régulières puisque $x \notin \alpha_i$. Comme pour les deux exemples précédents, on obtient une formule explicite :

$$M(h) = \sum_{i=1}^3 g_i \int_{s_i^-}^{s_i^+} \frac{\sqrt{h^2 + g_i^2 + s^2} - h}{(g_i^2 + s^2)} ds \quad (2.53)$$

$$= \sum_{i=1}^3 g_i (S_3(s_i^+, g_i, h) - S_3(s_i^-, g_i, h)), \quad (2.54)$$

avec

$$S_3(s, g, h) = \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{\sqrt{h^2 + g^2}} \right) - \frac{h}{g} \operatorname{Arctan} \left(\frac{s}{g} \right) - \frac{h}{g} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + g^2 + isg}{h\sqrt{h^2 + g^2 + s^2}} \right) - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(s) \right\} \quad (2.55)$$

On vérifie que lorsque $h \rightarrow 0$, $S_3(s, g, h) \rightarrow \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{g} \right)$ qui redonne l'expression (2.48) de I .

Conclusion de la première partie

Cette partie a permis de présenter :

- les méthodes d'éléments finis de frontière,
- les intégrales singulières qui y apparaissent,
- les formules utilisées pour l'évaluation explicite des intégrales singulières.

Un point important dans la suite est le choix de l'origine lors des étapes de réduction de la dimension du domaine d'intégration ; ceci afin de conserver l'homogénéité de l'intégrand. Enfin, plusieurs exemples ont permis d'utiliser les formules pour le calcul explicite d'intégrales bi-dimensionnelles.

Deuxième partie

Triangles coplanaires et dans des
plans sécants

Table des matières

3	Coefficient d'auto-influence	35
3.1	Notations	35
3.1.1	Distances	36
3.2	Réduction à la dimension 3	36
3.3	Réduction à la dimension 2	38
3.4	Réduction à la dimension 1	39
3.5	Formule finale et Validation	41
3.5.1	Formule finale	41
3.5.2	Validation des formules	42
4	Triangles coplanaires en position générale	45
4.1	Notations	46
4.2	Réduction à la dimension 3	46
4.3	Réduction à la dimension 2	47
4.4	Réduction à la dimension 1	48
4.4.1	Réduction de P	48
4.4.2	Réduction de $Q(\alpha, \beta)$: supports sécants	49
4.4.3	Réduction de Q : supports parallèles	49
4.5	Calculs explicites	51
4.6	Cas particuliers	52
4.6.1	Triangles ayant un sommet commun	52
4.6.2	Triangles adjacents	52
4.7	Discussion sur le presque-parallélisme	53
4.7.1	Les critères pour le presque-parallélisme	53
4.7.2	Validation numérique	54
4.8	Transition segments sécants à parallèles	55
4.8.1	Notations	55
4.8.2	Calcul dans le cas limite des supports parallèles	57
4.8.3	Calcul dans le cas des supports sécants	58
4.9	Remarques	59
4.9.1	Stabilité des formules	59
5	Triangles dans des plans sécants	61
5.1	Triangles en positions quelconques	62
5.2	Réduction de $U(\alpha, T)$: cas sécant	62

5.2.1	Calcul de $P(a, T)$	63
5.2.2	Calcul de $Q(\alpha, \beta)$: α et β non contenus dans un même plan	65
5.2.3	Calcul de $Q(\alpha, \beta)$: α et β dans un même plan	65
5.3	Réduction de $U(\alpha, T)$: cas parallèle	66
5.3.1	Réduction de $\mathcal{P}_2(\hat{\alpha}, T, h)$	67
5.3.2	Réduction de $\mathcal{Q}_2(\hat{\alpha}, \beta)$: supports de $\hat{\alpha}$ et β sécants	68
5.3.3	Réduction de $\mathcal{Q}_2(\hat{\alpha}, \beta)$: supports de $\hat{\alpha}$ et β parallèles	68
5.3.4	Evaluation de \mathcal{S}_2 et $\tilde{\mathcal{S}}_2$	70
5.4	Cas particuliers singuliers	70
5.4.1	Triangles adjacents	70
5.4.2	Triangles ayant un sommet commun	71
6	Le potentiel de double couche	73
6.1	Réduction à la dimension 3	73
6.2	Réduction à la dimension 2 : Cas sécant	74
6.2.1	Cas sécant, réduction de $\mathcal{P}(a, T; \zeta)$	74
6.2.2	Réduction de $\mathcal{Q}(\alpha, \beta, ; \zeta)$: supports de α et β non sécants	75
6.2.3	Réduction de $\mathcal{Q}(\alpha, \beta, ; \zeta)$: α et β sécants	76
6.3	Réduction à la dimension 2 : Cas parallèle	77
6.3.1	Réduction de $\tilde{\mathcal{U}}_1(\hat{\alpha}, T, h; \zeta)$	77
6.3.2	Réduction de $\tilde{\mathcal{U}}_2(\hat{\alpha}, T, h; \zeta)$	78
6.3.3	Simplification de $\tilde{\mathcal{P}}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$	78
6.3.4	Réduction de $\tilde{\mathcal{Q}}$ et $\tilde{\mathcal{Q}}$: supports de $\hat{\alpha}$ et β sécants	79
6.3.5	Réduction de $\tilde{\mathcal{Q}}$ et $\tilde{\mathcal{Q}}$: supports de $\hat{\alpha}$ et β parallèles	79
6.4	Cas particuliers	80
6.4.1	Simplifications pour J_0	81
6.4.2	Détails pour J_2	81

Introduction de la deuxième partie

Dans cette partie, nous fournissons des formules explicites pour évaluer les intégrales

$$I = \int_{S \times T} \frac{1}{\|x - y\|} dx dy, \quad (2.56)$$

lorsque S et T sont deux triangles coplanaires ou dans des plans sécants, et les deux intégrales

$$J_\zeta = \int_{S \times T} \frac{x - y}{\|x - y\|^{(1+\zeta)}} dx dy, \quad \zeta \in \{0, 2\} \quad (2.57)$$

lorsque S et T sont dans des plans sécants.

Nous commençons par le calcul de I lorsque S et T sont confondus, coplanaires en position générale, puis situés dans des plans sécants. On commence par calculer I puis les deux intégrales $J_\zeta, \zeta = 0, 2$.

Dans le cas de l'auto-influence, une comparaison est effectuée avec la méthode de Sauter et Schwab. Le point sensible du presque-parallélisme entre deux segments est présenté et étudié dans le chapitre suivant et la stabilité des formules est abordée.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous évaluons l'intégrale J_2 , provenant du potentiel de double couche, lorsque S et T sont disjoints dans des plans sécants. Lorsque l'intersection des triangles n'est pas vide (triangles adjacents ou ayant un sommet commun), J_2 doit être prise au sens de la partie finie de Hadamard; nous fournissons une expression de la partie finie pour des triangles adjacents.

Coefficient d'auto-influence

Introduction

Le cas le plus simple est celui où S et T sont confondus, c'est aussi l'un de ceux qui présente le plus de difficulté du point de vue de l'intégration numérique. Nous allons détailler le processus de réduction jusqu'à l'obtention de formules explicites. Comme il a été vu en introduction, seule l'intégrale I , définie en (6.67), doit être évaluée lorsque les triangles sont coplanaires. Pour évaluer les intégrales des termes singuliers du gradient du noyau de Green, il nous faut effectuer le produit scalaire des intégrales J_ζ avec la normale \vec{n}_T au plan auquel appartient le triangle T . Lorsque S et T sont coplanaires, on a donc $J_\zeta \cdot \vec{n}_T = 0$.

3.1. Notations

Soit le triangle S défini par ses sommets $a_i, i = 1, 3$ et ses cotés $\alpha_i, i = 1, 3$ tels que α_i soit opposé à a_i (voir Figure 3.1(a)). On introduit $|\alpha_i|$ la longueur du côté α_i et $\vec{\alpha}_i$ le vecteur $(a_{i+2} - a_{i+1}) = (a_i^+ - a_i^-)$ (voir la Figure 3.1(b)). On note $\vec{\lambda}_i$ la normale extérieur au côté α_i .

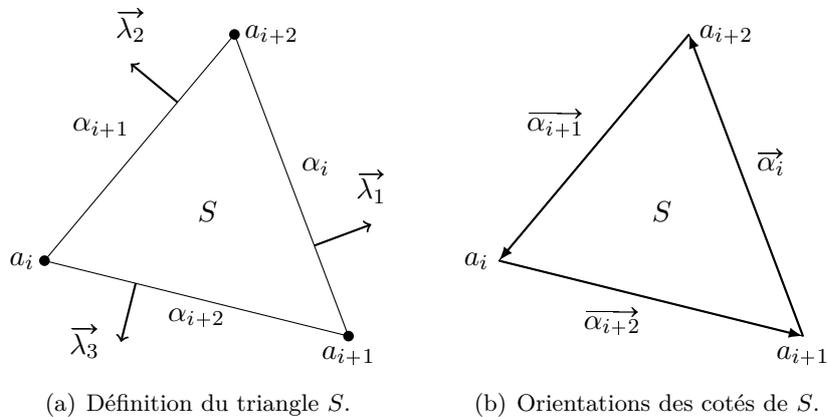


FIGURE 3.1 – Notations pour le coefficient d'auto-influence

3.1.1 Distances

Notons $p_i(x)$ la projection orthogonale (voir Figure 3.2(a)) du point x sur chaque coté α_i du triangle et $g_i(x) = \|x - p_i(x)\|$ la distance du point x au support de α_i . Lorsque $x = a_i$, nous notons que $p_i = p_i(a_i)$ est le pied de la hauteur associée au sommet a_i et que $g_i = g_i(a_i) = \|p_i - a_i\|$ est la longueur de la hauteur (voir Figure 3.2(b)). Enfin, on utilise également la distance signée d'un point au support de α_i qui fait intervenir la normale sortante au triangle sur α_i . Cette distance est définie par $\gamma_i(x) = \left(p_i(x) - x \mid \vec{\lambda}_i \right)$ sur α_i (voir Figure 3.3).

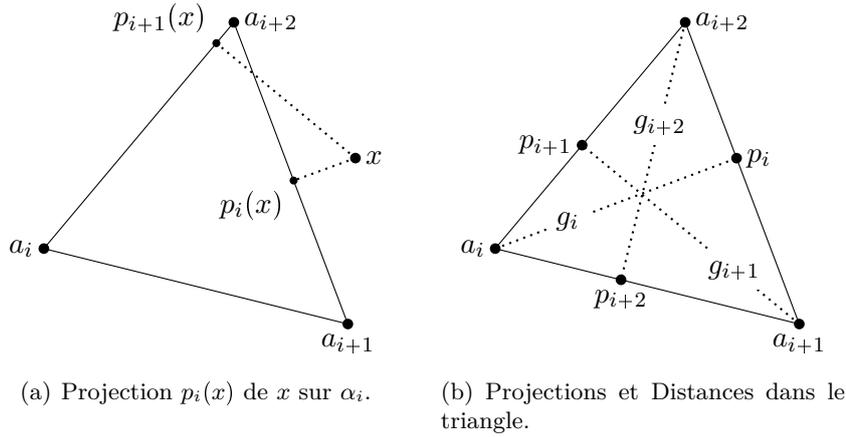


FIGURE 3.2 – Projections et distances intervenant dans le calcul de l'auto-influence.

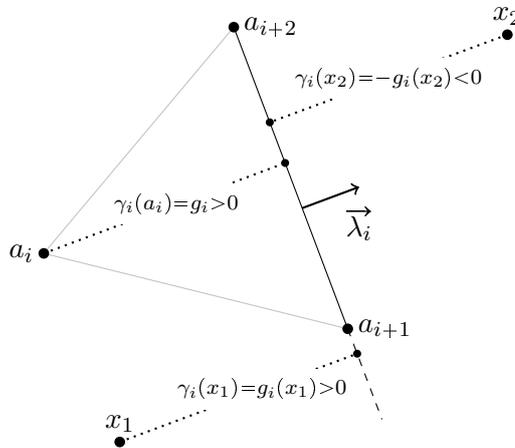


FIGURE 3.3 – Distances et distances signées dans le triangle.

3.2. Réduction à la dimension 3

On souhaite intégrer

$$f(x, y) = \frac{1}{\|x - y\|}; \quad (3.1)$$

c'est une fonction positivement homogène d'ordre $q = -1$ par rapport au couple de variables (x, y) , sur le produit $S \times S$. Afin d'utiliser la formule (2.10), on note $z = (x, y)$

et $\Omega = S \times S \subset \mathbb{R}^4$, soit $n = 4$. On obtient

$$I = \int_{S \times S} \frac{1}{\|x - y\|} dx dy \quad (3.2)$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\partial(S \times S)} ((x, y) | \vec{\nu}) \frac{1}{\|x - y\|} \partial(x, y), \quad (3.3)$$

où $\vec{\nu}$ désigne la normale au bord de $S \times S$. On poursuit le processus de réduction en trois étapes.

1. On explicite $\partial(S \times S)$ de manière plus simple, à l'aide de

$$\partial(S \times S) = (\partial S \times S) \cup (S \times \partial S) \text{ et } \partial S = \bigcup_{i=1,3} \alpha_i,$$

soit,

$$I = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{3} \int_{\alpha_i \times S} ((x, y) | \vec{\nu}) \frac{1}{\|x - y\|} ds_x dy + \sum_{j=1}^3 \frac{1}{3} \int_{S \times \alpha_j} ((x, y) | \vec{\nu}) \frac{1}{\|x - y\|} dx ds_y. \quad (3.4)$$

Le caractère symétrique de l'intégrand permet de simplifier l'expression

$$I = \sum_{i=1}^3 \frac{2}{3} \int_{\alpha_i \times S} \frac{((x, y) | \vec{\nu})}{\|x - y\|} ds_x dy. \quad (3.5)$$

2. On observe que l'intégrand dans (3.5) n'est pas homogène à cause de la présence du produit scalaire. Pour poursuivre le processus de réduction de la dimension du domaine d'intégration, à l'aide de la formule (2.10), et donc se ramener à des intégrales 2-D, il faut que l'intégrand soit homogène. Pour ce faire, on note que sur $\alpha_i \times S$ le produit scalaire s'écrit

$$((x, y) | \vec{\nu})_{\alpha_i \times S} = \left(\vec{x} \middle| \vec{\lambda}_i \right), \quad (3.6)$$

où $\vec{\lambda}_i$ est la normale extérieur à S le long de α_i (voir la Figure 3.1(a)), soit

$$I = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^3 \int_{\alpha_i \times S} \frac{\left(\vec{x} \middle| \vec{\lambda}_i \right)}{\|x - y\|} ds_x dy. \quad (3.7)$$

Afin d'assurer l'homogénéité de l'intégrand, on choisit une origine o , qui sera fixée dans la suite, alors

$$\left(\vec{x} \middle| \vec{\lambda}_i \right) = \gamma_i(o),$$

est la distance signée de o à α_i (voir Figure 3.3). Cette distance étant constante sur chaque coté, on peut sortir le produit scalaire de l'intégrale :

$$I = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^3 \gamma_i(o) \int_{\alpha_i \times S} \frac{1}{\|x - y\|} ds_x dy. \quad (3.8)$$

3. La dernière étape consiste à choisir une origine qui assure l'homogénéité. La Figure 3.4 permet de voir qu'en prenant le sommet a_i de S , comme origine, alors

$$\gamma_{i+1}(x) = \gamma_{i+2}(x) = 0;$$

la formule (3.8) se réduit alors à la simple expression

$$I = \frac{2}{3} g_i U(\alpha_i, S), \quad (3.9)$$

où

$$U(\alpha, S) = \int_{\alpha \times S} \frac{1}{\|x - y\|} ds_x dy \quad (3.10)$$

est le coefficient d'influence entre le segment α et le triangle S et g_i est la distance de a_i à son côté opposé α_i .

L'intégrand initial (voir (3.2)) est symétrique alors que l'expression (3.9) ne l'est plus. Cette perte de symétrie provient du choix d'un des sommets du triangle comme origine; choix permettant de diminuer la quantité de calculs. L'expression obtenue, une fois la réduction réalisée jusqu'à la fin (obtention d'intégrales mono-dimensionnelles) est symétrique (voir (3.17)). On note que l'intégrand de U est homogène, il est donc possible de réitérer le processus pour réduire I à une collection d'intégrales 2-D.

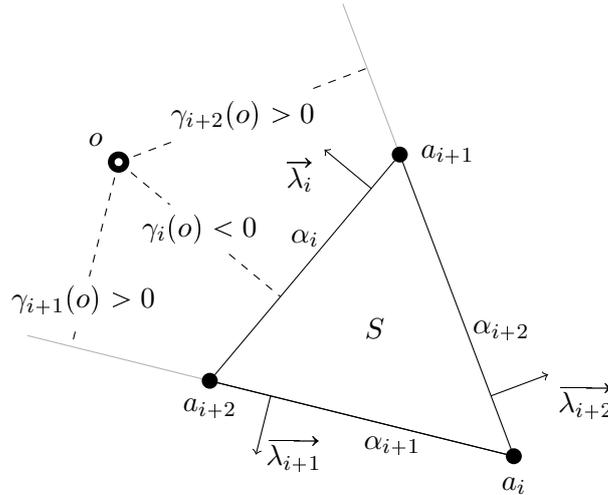


FIGURE 3.4 – Distance signée

3.3. Réduction à la dimension 2

Le processus peut être réitéré, à condition de choisir une nouvelle origine assurant l'homogénéité de l'intégrand. Dans ce cas, l'origine doit être un point du plan contenant le triangle S et appartenant au support de α_i , de telle sorte que la fonction $\|x - y\|^{-1}$ soit homogène sur $\alpha_i \times S$. L'origine peut donc être prise n'importe où sur le support de α_i , mais un choix judicieux consiste à choisir une des extrémités de α_i comme origine. En effet, certaines des distances s'annulant, on aura une simplification. On choisit donc pour origine le point $a_i^- = a_{i+1}$, on a encore $q = -1$ mais $n = 3$. L'application de la

formule (2.10) fournit le résultat

$$U(\alpha_i, S) = \frac{1}{2} \int_{\partial(\alpha_i \times S)} ((x, y) | \vec{\nu}) \frac{1}{\|x - y\|} \partial(x, y), \quad (3.11)$$

où $\vec{\nu}$ est maintenant la normale extérieure au bord de $\alpha_i \times S$ et $\partial(x, y)$ l'élément de surface le long de $\partial(\alpha_i \times S)$. On aura $\partial(\alpha_i \times S) = (\partial\alpha_i \times S) \cup (\alpha_i \times \partial S)$,

$$((x, y) | \vec{\nu})|_{\alpha_i^- \times S} = ((x, y) | \vec{\nu})|_{\alpha_i \times \alpha_i} = ((x, y) | \vec{\nu})|_{\alpha_i \times \alpha_{i+2}} = 0$$

ainsi que (voir la Figure 3.5)

$$((x, y) | \vec{\nu})|_{\alpha_i^+ \times S} = |\alpha_i| \text{ et } ((x, y) | \vec{\nu})|_{\alpha_i \times \alpha_{i+1}} = g_{i+1}.$$

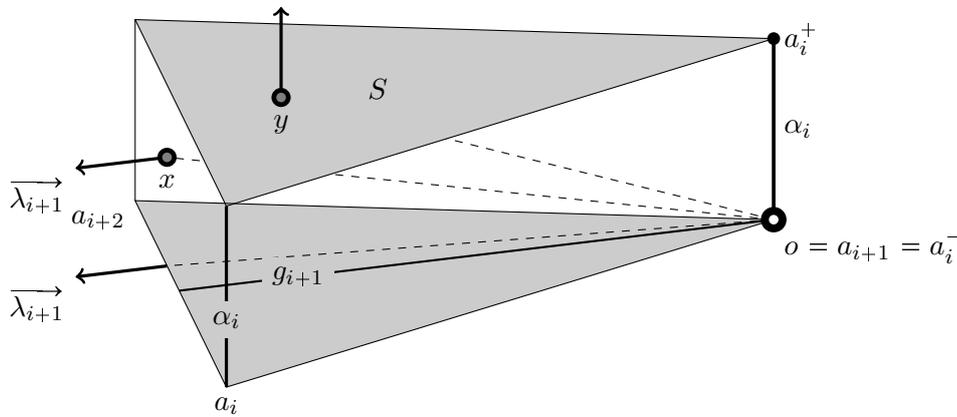


FIGURE 3.5 – Bord de $\alpha_i \times S$.

De la formule (3.11) il résulte donc que

$$U(\alpha_i, S) = \frac{|\alpha_i|}{2} P(a_{i+2}, S) + \frac{g_{i+1}}{2} Q(\alpha_i, \alpha_{i+1}), \quad (3.12)$$

où

$$P(a, S) = \int_S \frac{1}{\|a - y\|} dy \text{ et } Q(\alpha, \beta) = \int_{\alpha \times \beta} \frac{1}{\|x - y\|} ds_x ds_y. \quad (3.13)$$

Plus concrètement $P(a, S)$ est le potentiel créé en a par S et $Q(\alpha, \beta)$ le coefficient d'influence entre α et β .

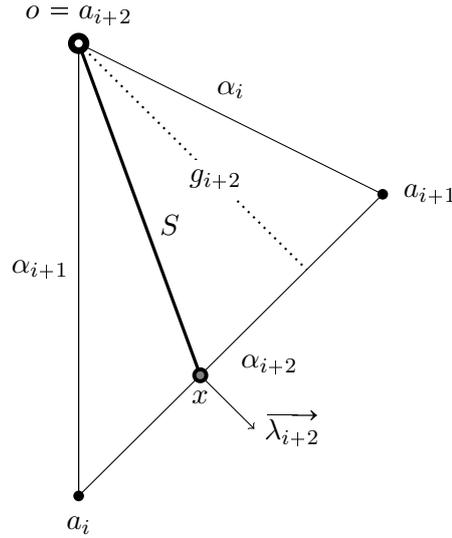
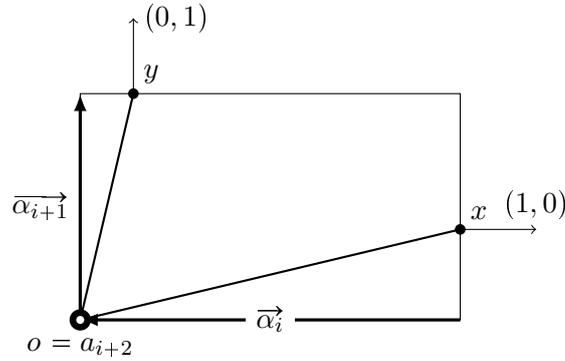
3.4. Réduction à la dimension 1

Il est possible de poursuivre la réduction puisque les intégrands de $P(a, S)$ et $Q(\alpha, \beta)$ (voir (3.13)) sont homogènes. Avec $n = 2$, et a_{i+2} pour origine (voir la Figure 3.6), l'application à (3.13) de (2.10) nous donne d'une part

$$P(a_{i+2}, S) = g_{i+2} R(a_{i+2}, \alpha_{i+2}), \quad (3.14)$$

et d'autre part (voir la Figure 3.7)

$$Q(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = |\alpha_i| R(a_{i+1}, \alpha_{i+1}) + |\alpha_{i+1}| R(a_i, \alpha_i), \quad (3.15)$$

FIGURE 3.6 – Calcul de $P(a_{i+1}, S)$.FIGURE 3.7 – Calcul de $Q(\alpha_i, \alpha_{i+1})$.

où

$$R(a, \beta) = \int_{\beta} \frac{1}{\|a - y\|} ds_y. \quad (3.16)$$

Notons qu'à ce stade, a_i étant le sommet opposé à α_i , il n'est pas situé sur le segment α_i . Ainsi l'intégrand dans la définition (3.16) de R est régulier, ce qui le rend susceptible d'une intégration numérique. En l'occurrence, le calcul de R est suffisamment simple pour dissuader d'opérer ce choix, mais il peut se révéler judicieux dans des situations plus complexes telles qu'on en verra ultérieurement.

Si on récapitule les formules (3.12), (3.14) et (3.15), on constate que

$$I = \frac{2}{3} g_i \frac{|\alpha_i|}{2} g_{i+2} R(a_{i+2}, \alpha_{i+2}) + \frac{2}{3} g_i \frac{g_{i+1}}{2} |\alpha_i| R(a_{i+1}, \alpha_{i+1}) + \frac{2}{3} g_i \frac{g_{i+1}}{2} |\alpha_{i+1}| R(a_i, \alpha_i),$$

soit

$$I = \frac{2}{3} |S| \sum_{i=1}^3 g_i R(a_i, \alpha_i), \quad (3.17)$$

où $|S|$ note la surface du triangle S . L'évaluation de l'intégrale **singulière** I définie en (3.2) a donc été ramenée à l'évaluation d'une combinaison linéaire d'intégrales **mono-dimensionnelles** et **régulières** puisque, par définition, a_i n'appartient jamais à α_i . Le

choix du sommet utilisé comme origine pour la première étape de réduction n'influe pas sur le résultat final.

3.5. Formule finale et Validation

3.5.1 Formule finale

A ce stade aucun calcul de primitive n'a été nécessaire pour ramener l'intégrale relative à $S \times S$, à une combinaison linéaire d'intégrales sur chacun des côtés de S ; il n'en est plus de même en ce qui concerne la détermination de $R(a_i, \alpha_i)$. D'après (3.16), on a

$$R(b, \alpha) = \int_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\|b - p(b)\|^2 + \|p(b) - x\|^2}} ds_x = \int_{s^- - \sigma(b)}^{s^+ - \sigma(b)} \frac{1}{\sqrt{g^2(b) + s^2}} ds, \quad (3.18)$$

où, $p(b)$ est la projection orthogonale de b sur le support de α , $g(b) = \|p(b) - b\|$ et $\sigma(b)$ est l'abscisse de $p(b)$ (voir la sous-section 3.1.1 et la Figure 3.8).

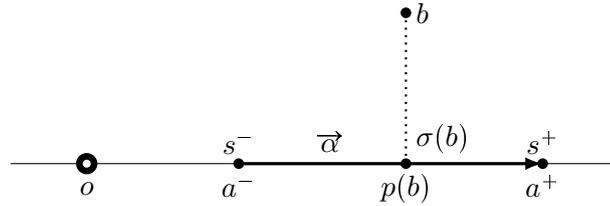


FIGURE 3.8 – Abscisses intervenant dans le calcul de $R(b, \alpha)$.

Or

$$\int \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + s^2}} ds = \text{Arcsinh} \left(\frac{s}{\eta} \right),$$

d'où

$$R(b, \alpha) = \sum_{k=\pm} k \text{Arcsinh} \left(\frac{s^k - \sigma(b)}{g(b)} \right).$$

En choisissant $p(b)$ comme origine, $\sigma(b) = 0$ et on obtient

$$R(b, \alpha) = \sum_{k=\pm} k \text{Arcsinh} \left(\frac{s^k}{g(b)} \right). \quad (3.19)$$

Finalement, l'intégrale I initialement définie en (3.2) devient après réduction :

$$I = \frac{2}{3} |S| \sum_{i=1,3} g_i \sum_{k=\pm} k \text{Arcsinh} \left(\frac{s_i^k}{g_i} \right). \quad (3.20)$$

On observe qu'en partant d'une intégrale singulière 4-D, on aboutit, après utilisation de notre méthode à une expression simple, ne faisant intervenir que des arguments sinus hyperboliques et des quantités géométriques simples à évaluer.

3.5.2 Validation des formules

Afin de s'assurer que la formule (3.20) est valide, on effectue une comparaison entre notre méthode et la méthode proposée par Sauter et Schwab dans leur livre [SS10, Chapitre 5]. Cette méthode transforme l'intégrale sur $S \times S$ en une combinaison de trois intégrales régulières sur l'hypercube $\mathcal{H} = [0, 1]^4$. Nous effectuons cette comparaison pour deux triangles S et T (voir Figure 3.9). Le premier triangle permet de comparer les méthodes lorsque le triangle est non-aplati (triangle S). Le second triangle est presque-aplati (triangle T).

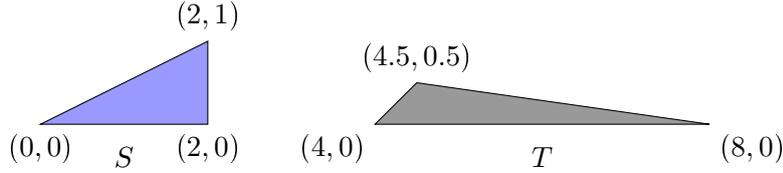


FIGURE 3.9 – Les deux triangles servant à la comparaison. En bleu, le triangle scalène S et en gris, le triangle T presque-dégénéré.

On note $I_S(N)$, la valeur calculée de l'intégrale (3.2) à l'aide de la méthode de Sauter et Schwab en utilisant une méthode de Gauss-Legendre tensorielle avec N points d'intégrations sur le segment $[0, 1]$. Il y a donc $3N^4$ points d'intégration utilisés (la méthode de Sauter et Schwab faisant apparaître quatre intégrales quadri-dimensionnelles). La valeur calculée à l'aide de la formule explicite (3.20) est notée I . La Figure 3.11 représente la différence relative

$$\frac{|I - I_S(N)|}{|I|},$$

en fonction de $\frac{1}{N^4}$ en échelle loglog et fournit quelques valeurs obtenues. On observe que lorsque le triangle est non dégénéré, peu de points suffisent pour que $I_S(N)$ approche avec précision I ($N = 3$). La seconde observation est qu'il faut plus de points pour que obtenir une différence relative du même ordre pour T . Cette comparaison permet de voir l'intérêt majeur de notre méthode : il n'est pas nécessaire d'adapter le nombre de points d'intégration à la forme du triangle pour assurer une précision fixée.

Remarque Dans le cas de l'intégrale (3.2), la méthode de Sauter et Schwab fournit trois intégrales qui peuvent en fait être intégrées explicitement. On obtient l'expression,

$$I = \frac{(L_1^2 L_2^2 - L_s^2)}{4\pi} \left\{ \frac{\ln(L_1^2 + L_s + L_1 L_3) - \ln(L_1 L_2 + L_s)}{3L_1} \right. \quad (3.21)$$

$$+ \frac{\ln(L_2^2 + L_s + L_2 L_3) - \ln(L_1 L_2 + L_s)}{3L_2}$$

$$\left. + \frac{\ln(L_1^2 + L_s + L_1 L_3) - \ln(-L_2^2 - L_s + L_2 L_3)}{3L_3} \right\}$$

avec $L_s = (B - A|C - B)$ et L_1, L_2 et L_3 les longueurs des cotés, comme indiqué dans la Figure 3.10. On peut montrer que cette expression est identique à (3.20).

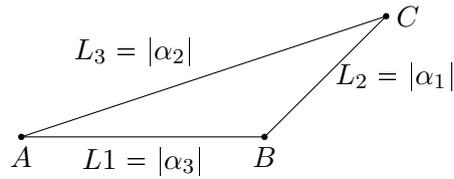


FIGURE 3.10 – Notations pour la formule (3.21).

Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons présenté l'application de la méthode pour l'évaluation explicite d'une intégrale 4-D. Dans le cas significatif de l'auto-influence, l'expression obtenue est très simple. Les notations de ce chapitre seront utilisées dans la suite.

La validation effectuée en utilisant la méthode de Sauter et Schwab permet de s'assurer que les formules obtenues sont correctes. Cette validation permet d'observer un avantage de cette méthode : il n'est pas nécessaire d'adapter le nombre de points d'intégration pour obtenir une précision fixée comme c'est le cas pour les méthodes numériques.

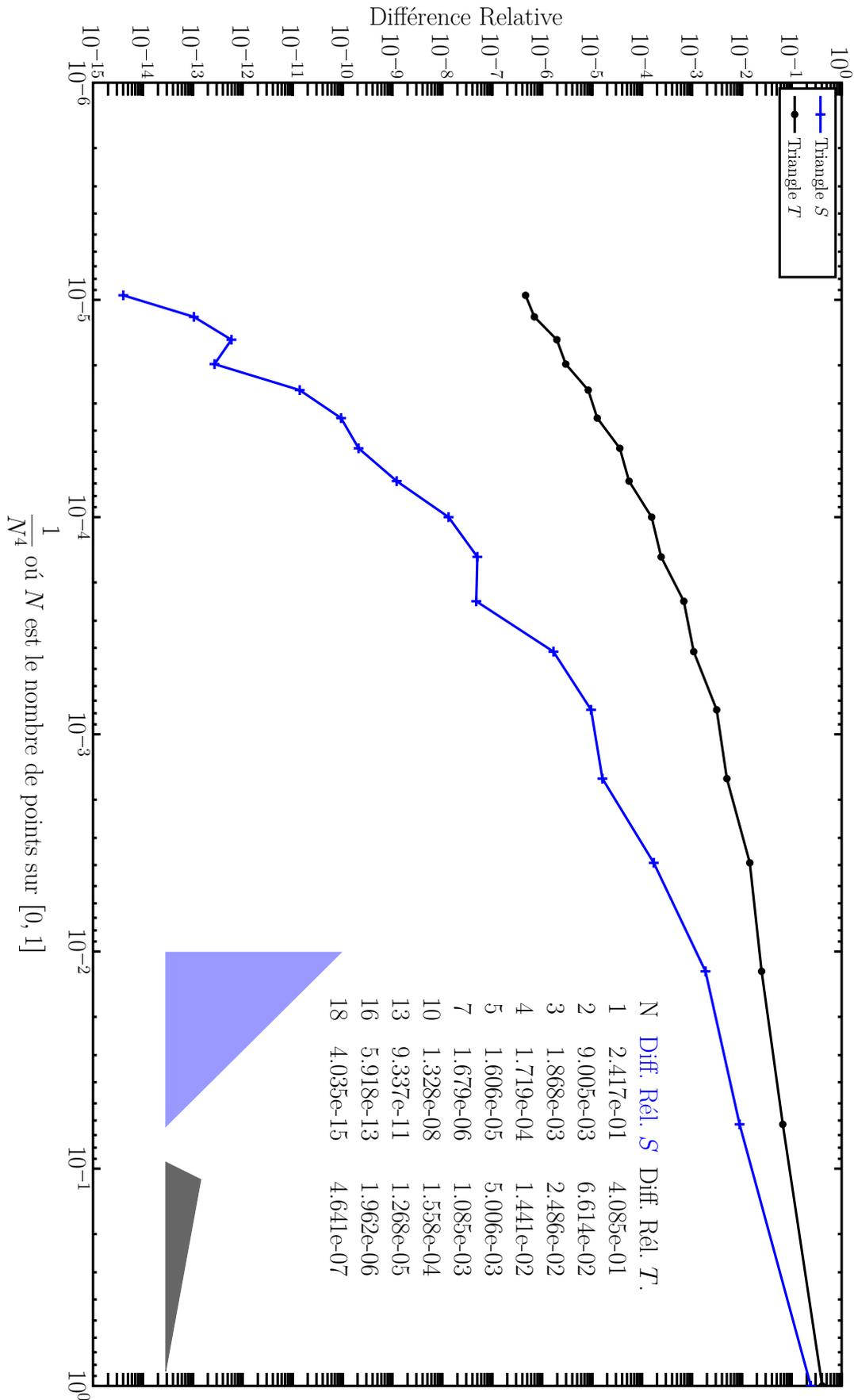


FIGURE 3.11 – Différences relatives entre $I_S(N)$ (calcul de I en utilisant la méthode de Sauter et Schwab avec N points d'intégration sur $[0, 1]$) et I calculée à l'aide de notre méthode.

Triangles coplanaires en position générale

Introduction

Nous étendons le calcul de l'auto-influence, vu au chapitre 3, au cas de triangles coplanaires en position générale. Après l'introduction des notations, projections et distances supplémentaires nécessaires, nous débutons en calculant l'intégrale I (voir (4.1)) pour deux triangles S et T n'ayant aucun sommet commun. Il peut s'agir de triangles ayant une intersection vide (voir Figure 4.1(b)) ou bien de triangles se recouvrant partiellement mais n'ayant pas de sommets communs (voir Figure 4.1(a)). Ce dernier cas est traité sans difficulté additionnelle, au contraire de nombreuses autres méthodes nécessitant de décomposer la zone de recouvrement. Le chapitre s'achève sur les simplifications possibles lorsque les triangles ont une arête ou un sommet en commun.

Jusqu'à la dimension 2, la méthode de réduction est analogue à celle employée dans le chapitre précédent. Pour réduire les intégrales sur le produit de deux segments, il faut distinguer lorsque les supports des segments sont sécants et lorsqu'ils sont parallèles. Dans ce dernier cas, la projection orthogonale d'un des segments sur le support du second segment est nécessaire afin de décomposer la norme $\|x - y\|$.

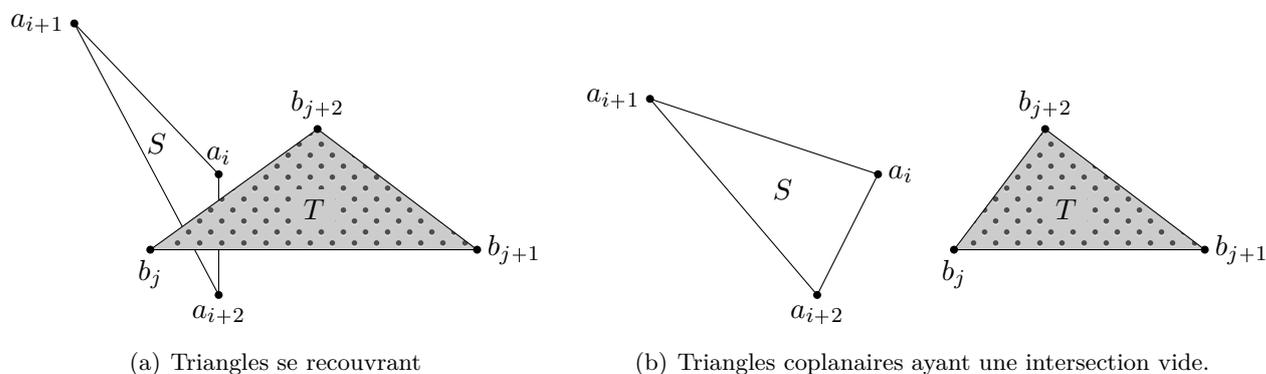


FIGURE 4.1 – Configurations géométriques traitées dans ce chapitre.

4.1. Notations

Nous utilisons des notations pour le triangle T analogues à celles introduites pour le triangle S dans le chapitre 3 (voir les Figures 3.1 et 3.2). Soit le triangle T défini par ses sommets $b_j, j = 1, 3$ et ses cotés β_j tels que β_j soit le coté opposé à b_j . Soient $|\beta_j|$ la longueur du coté β_j , $\vec{\beta}_j$ le vecteur $(b_{j+2} - b_{j+1})$ et $\vec{\kappa}_j$, la normale extérieure au coté β_j (voir la Figure 4.2).

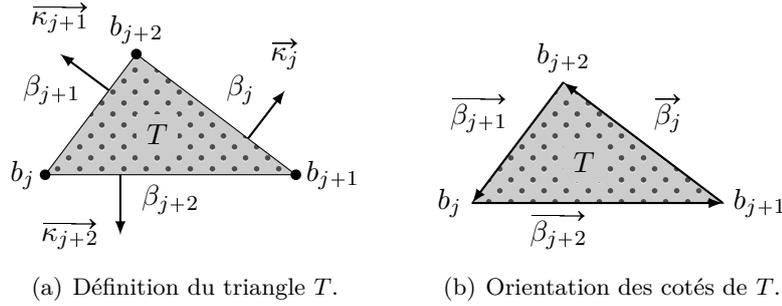


FIGURE 4.2 – Notations pour le triangle T .

La projection orthogonale de y sur le support de β_j , analogue à $p_i(x)$ pour S , est notée $q_j(y)$ et la distance de y au support de β_j est notée $d_j(y) = \|y - q_j(y)\|$. On note $\delta_j(y)$, la distance signée de y au support de β_j (analogue à $\gamma_i(x)$) définie par $\delta_j(y) = (q_j(y) - y | \vec{\kappa}_j)$. Enfin, d_j est l'équivalent de g_i , à savoir la longueur de la hauteur issue de b_j , soit $d_j = d_j(b_j)$ (voir la Figure 4.3).

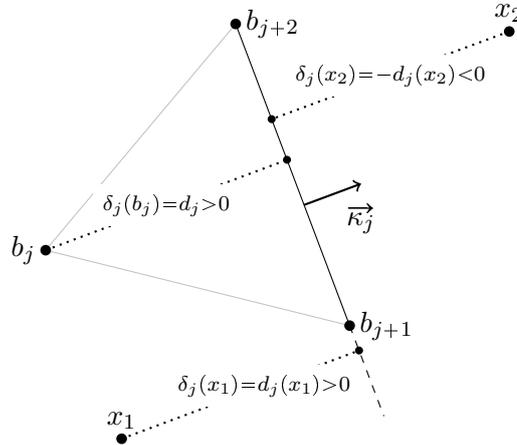


FIGURE 4.3 – Distances et distances signées dans le triangle T .

4.2. Réduction à la dimension 3

Comme dans le chapitre précédent, l'intégrale initiale est

$$I = \int_{S \times T} \frac{1}{\|x - y\|} dx dy. \quad (4.1)$$

Un processus similaire à celui du chapitre 3 est employé. Il faut choisir avec prudence l'origine pour garantir l'homogénéité à chaque étape. Lors de la première étape, la seule contrainte consiste à choisir l'origine dans le plan des deux triangles. En notant que $q = -1, n = 4$, la formule (2.10) donne un résultat similaire à (3.4) :

$$I = \sum_{i=1}^3 \frac{\gamma_i(o)}{3} \int_{\alpha_i \times T} \frac{1}{\|x - y\|} ds_x dy + \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_j(o)}{3} \int_{S \times \beta_j} \frac{1}{\|x - y\|} dx ds_y, \quad (4.2)$$

où $\gamma_i(x)$ et $\delta_j(y)$ sont les distances signées respectivement de x au support de α_i et de y au support de β_j , voir la Figure 4.4.

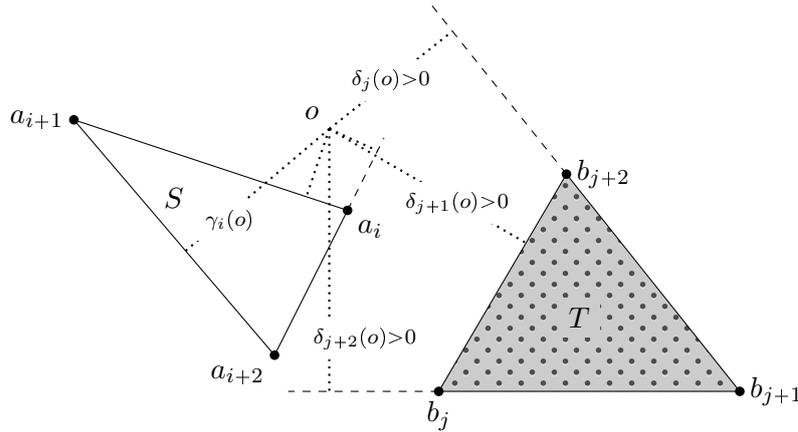


FIGURE 4.4 – Triangles coplanaires en position générale.

Cependant comme pour l'auto-influence, un choix judicieux de l'origine permet de simplifier les calculs. C'est pourquoi, au prix de la perte de la symétrie de (4.2), nous prenons le sommet a_i de S , comme origine (voir la Figure 4.5) ce qui donne

$$I = \frac{g_i}{3} \int_{\alpha_i \times T} \frac{1}{\|x - y\|} ds_x dy + \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_j(a_i)}{3} \int_{S \times \beta_j} \frac{1}{\|x - y\|} dx ds_y. \quad (4.3)$$

L'expression (4.3) peut s'écrire sous forme réduite :

$$I = \frac{g_i}{3} U(\alpha_i, T) + \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_j(a_i)}{3} U(\beta_j, S), \quad (4.4)$$

où la fonction U est définie en (3.10). Suite à l'inversion de l'ordre d'intégration dans les intégrales sur les domaines $S \times \beta_j$ et par symétrie de l'intégrand, on obtient $U(\beta_j, S)$.

4.3. Réduction à la dimension 2

Dans le cas de l'auto-influence, nous avons simplifié $U(\alpha, S)$, où α est un des côtés de S (voir (3.12)); à présent il nous faut simplifier les intégrales $U(\alpha, T)$ et $U(\beta, S)$. Nous ne détaillons que le calcul de $U(\alpha, T)$, l'expression de $U(\beta, S)$ pouvant s'en déduire simplement. On souhaite donc réduire

$$U(\alpha, T) = \int_{\alpha \times T} \frac{1}{\|x - y\|} ds_x dy. \quad (4.5)$$

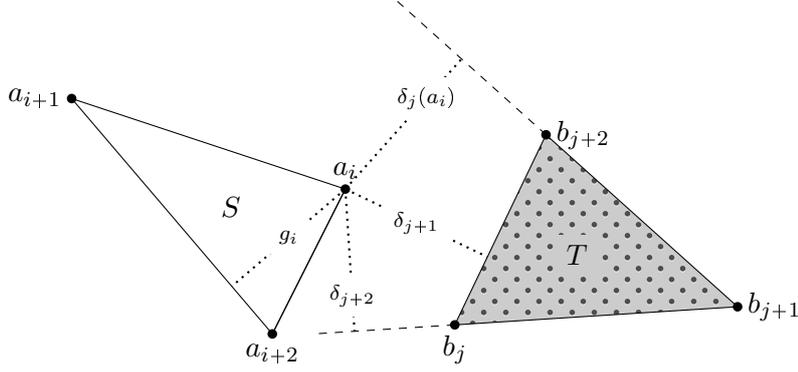


FIGURE 4.5 – Origine prise en a_i pour la réduction à la dimension 3.

Pour conserver l'homogénéité, l'origine doit appartenir au support de α . Nous notons a^- et a^+ , les extrémités de α telles que $\vec{\alpha} = (a^+ - a^-)$. Alors en choisissant a^- comme origine, la formule (2.10) permet de simplifier (4.5) :

$$U(\alpha, T) = \frac{|\alpha|}{2} \int_T \frac{1}{\|a^+ - y\|} dy + \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_j(a^-)}{2} \int_{\alpha \times \beta_j} \frac{1}{\|x - y\|} ds_x ds_y, \quad (4.6)$$

avec $|\alpha|$ qui désigne la longueur du segment. D'après (3.13), on peut écrire (4.6) sous la forme

$$U(\alpha, T) = \frac{|\alpha|}{2} P(a^+, T) + \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_j(a^-)}{2} Q(\alpha, \beta_j), \quad (4.7)$$

où P et Q sont donnés par l'expression (3.13). De même, l'expression de $U(\beta, S)$ s'obtient en prenant b^- comme origine,

$$U(\beta, S) = \frac{|\beta|}{2} P(b^+, S) + \sum_{l=1}^3 \frac{\gamma_l(b^-)}{2} Q(\alpha_l, \beta). \quad (4.8)$$

4.4. Réduction à la dimension 1

Dans le cas de triangles coplanaires, le calcul de $P(a, T)$ est similaire à l'expression (3.14). Par contre, pour le calcul de $Q(\alpha, \beta)$, il faut distinguer deux configurations géométriques, lorsque les supports des segments sont :

- i) sécants, alors le calcul ressemblera à (3.15),
- ii) parallèles, question qui ne se posait pas pour l'auto-influence.

4.4.1 Réduction de P

Pour calculer $P(a, T)$, on s'inspire de (3.14) mais il faut noter que cette fois a n'est pas un des sommets de T , chaque arête de T portera donc une intégrale et la distance signée $\delta_j(a)$ de a à chaque coté de T interviendra (voir Figure 4.6). En appliquant la formule (2.10) avec $n = 2$ et $q = -1$, on a

$$P(a, T) = \int_T \frac{1}{\|a - y\|} dy = \sum_{l=1}^3 \delta_l(a) \int_{\beta_l} \frac{1}{\|a - y\|} ds_y = \sum_{l=1}^3 \delta_l(a) R(a, \beta_l), \quad (4.9)$$

avec R défini en (3.16). De même,

$$P(b, S) = \sum_{i=1}^3 \gamma_i(b) R(b, \alpha_i) \quad (4.10)$$

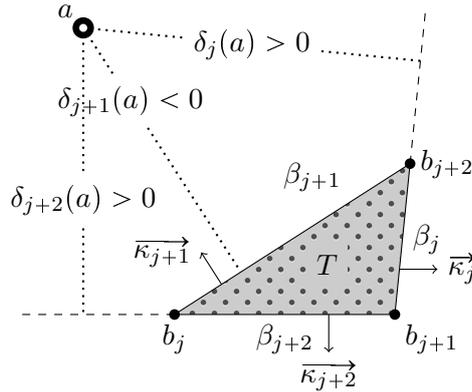


FIGURE 4.6 – Distances intervenant pour le calcul de $P(a, T)$.

4.4.2 Réduction de $Q(\alpha, \beta)$: supports sécants

Lorsque les supports de α et β sont sécants, l'intégrand reste homogène à l'unique condition de choisir l'origine au point \mathcal{I} , intersection des supports des deux segments (voir la Figure 4.7). Dans ce cas, le produit scalaire de la formule (2.10) fait apparaître les abscisses des extrémités des deux segments, ce qui donne :

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{k=\pm} k s^k \int_{\beta} \frac{1}{\|a^k - y\|} ds_y + \sum_{l=\pm} l t^l \int_{\alpha} \frac{1}{\|x - b^l\|} ds_x, \quad (4.11)$$

où s^{\pm} et t^{\pm} sont les abscisses des extrémités respectivement de α et β , définies dans la section 4.1. En utilisant R définie en (3.16), on obtient

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{k=\pm} k s^k R(a^k, \beta) + \sum_{l=\pm} l t^l R(b^l, \alpha). \quad (4.12)$$

Les abscisses sont évalués simplement par

$$s^k = \left(a^k - o \left| \frac{\vec{\alpha}}{|\alpha|} \right. \right) \quad \text{et} \quad t^l = \left(b^l - o \left| \frac{\vec{\beta}}{|\beta|} \right. \right).$$

4.4.3 Réduction de Q : supports parallèles

Lorsque les supports de α et β sont parallèles, il n'existe aucune origine permettant d'assurer l'homogénéité de l'intégrand ; la formule (2.10) n'est donc plus utilisable. Pour

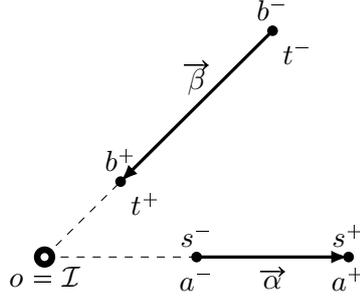


FIGURE 4.7 – Calcul de $Q(\alpha, \beta)$ lorsque les supports des deux segments sont sécants.

poursuivre la simplification, il faut donc utiliser la seconde formule, dite à paramètre, (2.34). Ceci est possible en projetant orthogonalement l'un de deux segments (nous choisissons β) sur le support de l'autre segment (α). La distance d entre les supports des deux segments apparaît donc et joue le rôle du paramètre intervenant dans la formule (2.34). Soient $\tilde{\beta}$ et \tilde{y} les projections orthogonales respectives de β et y sur le support de α , et $d = \|y - \tilde{y}\|$, la distance de β au support de α (voir la Figure 4.8). L'intégrale $Q(\alpha, \beta)$ s'écrit donc

$$Q(\alpha, \beta) = \int_{\alpha \times \beta} \frac{1}{\|x - y\|} ds_x ds_y = \int_{\alpha \times \tilde{\beta}} \frac{1}{\sqrt{d^2 + \|x - \tilde{y}\|^2}} ds_x ds_{\tilde{y}} \quad (4.13)$$

Cette fois, l'intégrand est $(d^2 + \|x - \tilde{y}\|^2)^{-1/2}$, fonction homogène de degré -1 par rapport aux deux variables, le couple (x, \tilde{y}) , et d . En appliquant la formule (2.34) avec $q = -1$ et $n = 2$, on a

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{k=\pm} k s^k \int_{\tilde{\beta}} d \int_d^{+\infty} \frac{1}{u^2 \sqrt{u^2 + \|a^k - \tilde{y}\|^2}} du ds_{\tilde{y}} \quad (4.14)$$

$$+ \sum_{l=\pm} l \tilde{t}^l \int_{\alpha} d \int_d^{+\infty} \frac{1}{u^2 \sqrt{u^2 + \|x - \tilde{b}^l\|^2}} du ds_x,$$

où \tilde{t}^l est l'abscisse de \tilde{b}^l . L'expression (4.14) peut également s'écrire

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{k=\pm} k s^k \int_{\tilde{\beta}} f_1(d, \|a^k - \tilde{y}\|) ds_{\tilde{y}} + \sum_{l=\pm} l \tilde{t}^l \int_{\alpha} f_1(d, \|x - \tilde{b}^l\|) ds_x, \quad (4.15)$$

avec

$$f_1(d, \eta) = d \int_d^{+\infty} \frac{1}{u^2 \sqrt{u^2 + \eta^2}} du. \quad (4.16)$$

On obtient une expression similaire à (4.11) pour $Q(\alpha, \beta)$ dans le cas des supports parallèles :

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{k=\pm} k s^k \mathcal{R}(a^k, \tilde{\beta}, d) + \sum_{l=\pm} l \tilde{t}^l \mathcal{R}(\tilde{b}^l, \alpha, d), \quad (4.17)$$

avec

$$\mathcal{R}(a, \tilde{\beta}, d) = \int_{\tilde{\beta}} \frac{\sqrt{d^2 + \|a - \tilde{y}\|^2} - d}{\|a - \tilde{y}\|^2} ds_{\tilde{y}}, \quad (4.18)$$

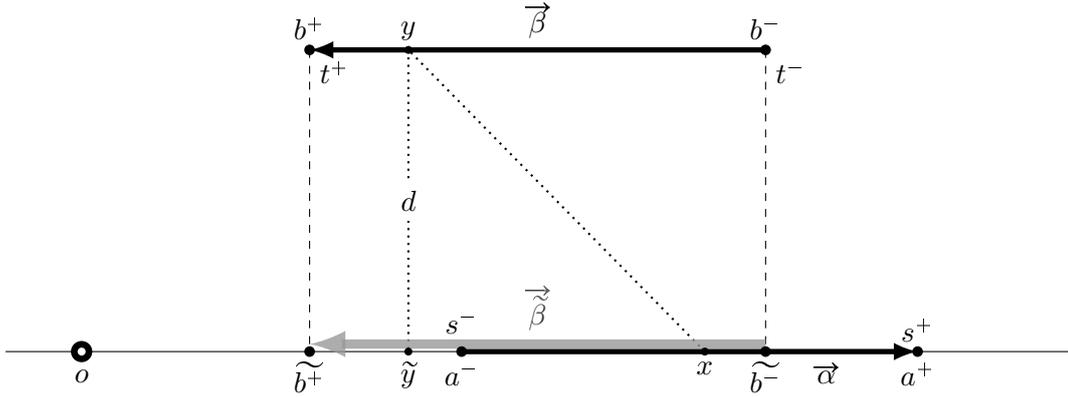


FIGURE 4.8 – Calcul de $Q(\alpha, \beta)$, lorsque les deux segments ont des supports parallèles, avec une origine quelconque prise sur le support de α .

puisqu'il est possible d'obtenir une expression explicite de $f_1(d, \eta) = \frac{\sqrt{h^2 + \eta^2} - d}{\eta^2}$.

En pratique, on choisit une des extrémités d'un des deux segments comme origine pour diminuer le nombre de calculs. En prenant a^- comme origine, on a la simplification

$$Q(\alpha, \beta) = |\alpha| \mathcal{R}(a^+, \tilde{\beta}, d) + \sum_{l=\pm} l \tilde{t}^l \mathcal{R}(\tilde{b}^l, \alpha, d), \quad (4.19)$$

puisqu'il est nul.

Dans la suite, dès lors qu'aucune origine ne permet d'avoir l'homogénéité de l'intégrand, nous effectuerons une projection orthogonale sur un plan ou sur une droite, suivant les configurations géométriques, afin de se ramener à une expression permettant d'utiliser la formule (2.34).

4.5. Calculs explicites

Pour traiter complètement le cas des triangles coplanaires, il nous reste à fournir les expressions explicites des intégrales mono-dimensionnelles. L'expression (3.19) permet de calculer $R(a, \beta)$ et on en déduit

$$R(a, \beta) = \sum_{l=\pm} l \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{t^l}{d(a)} \right), \quad (4.20)$$

où q est la projection orthogonale sur le support de β , $d(a) = \|a - q(a)\|$ (voir Figure 4.3) et t^\pm sont les abscisses des extrémités de β en prenant $q(a)$ comme origine. De manière analogue mais avec le paramètre $d = \|b - \tilde{b}\|$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(a, \tilde{\beta}, d) &= \int_{\tilde{\beta}} \frac{\sqrt{d^2 + \|a - \tilde{y}\|^2} - d}{\|a - \tilde{y}\|^2} ds_{\tilde{y}} = \int_{\tilde{t}^-}^{\tilde{t}^+} \frac{\sqrt{d^2 + t^2} - d}{t^2} dt \\ &= \sum_{l=\pm} l \left(\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\tilde{t}^l}{d} \right) - \frac{\sqrt{d^2 + (\tilde{t}^l)^2} - d}{\tilde{t}^l} \right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

avec les abscisses \tilde{t}^\pm des extrémités de $\tilde{\beta}$ en prenant a comme origine, et

$$\mathcal{R}(\tilde{b}, \alpha, d) = \sum_{k=\pm} k \left(\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s^k}{d} \right) - \frac{\sqrt{d^2 + (s^k)^2} - d}{s^k} \right), \quad (4.22)$$

où \tilde{b} a été pris comme origine.

4.6. Cas particuliers

Lorsque les triangles ont un sommet ou une arête en commun, il est possible de simplifier les calculs.

4.6.1 Triangles ayant un sommet commun

Soit $a_i = b_j$ le sommet commun aux deux triangles S et T (voir la Figure 4.9(a)). En prenant $a_i = b_j$ comme origine, on a : $\delta_{j+1}(b_j) = \delta_{j+2}(b_j) = 0$ et $\delta_j(b_j) = d_j$ dans l'expression (4.4), soit

$$I = \frac{g_i}{3} U(\alpha_i, T) + \frac{d_j}{3} U(\beta_j, S), \quad (4.23)$$

que l'on peut évaluer via l'expression (4.7). Il est possible de continuer la réduction en choisissant a_i^- comme origine pour $U(\alpha_i, T)$ et b_j^- comme origine pour $U(\beta_j, S)$

$$I = \frac{|S|}{3} P(a_{i+2}, T) + \frac{|T|}{3} P(b_{j+2}, S) + \sum_{l=1}^3 \frac{g_i \delta_l(a_{i+1})}{6} Q(\alpha_i, \beta_l) + \sum_{l=1}^3 \frac{\gamma_l(b_{j+1}) d_j}{6} Q(\alpha_l, \beta_j), \quad (4.24)$$

avec P calculé en (4.9) et Q en (4.17) et (4.12) suivant s'il y a parallélisme ou non entre les supports des deux segments.

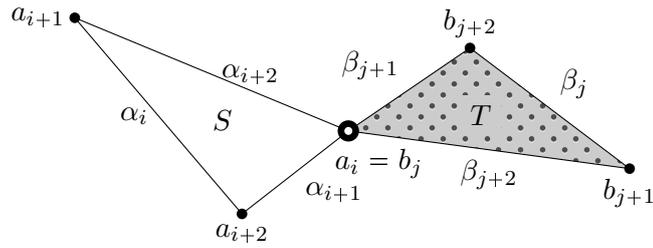
4.6.2 Triangles adjacents

Lorsque les triangles sont adjacents, il y a 2 sommets communs. Pour la première réduction, on prend pour origine l'un des sommets commun aux deux triangles, soit $a_i = b_j$ (voir la Figure 4.9(b)), ce qui redonne l'expression (4.23). Il est possible de poursuivre la réduction en prenant l'autre sommet commun comme origine. Ainsi en choisissant $a_{i+1} = b_{j+1}$ comme origine, on obtient une réduction similaire à (3.12) :

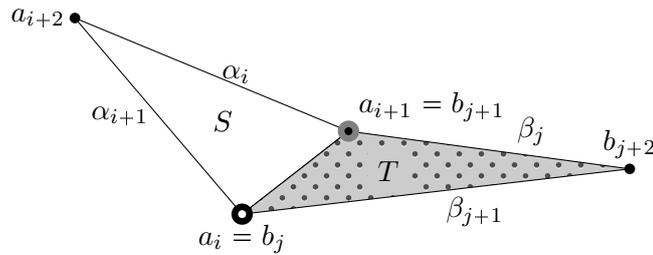
$$I = \frac{|S|}{3} P(a_{i+2}, T) + \frac{g_i d_{j+1}}{6} Q(\alpha_i, \beta_{j+1}) + \frac{|T|}{3} P(b_{j+2}, S) + \frac{g_{i+1} d_j}{6} Q(\alpha_{i+1}, \beta_j), \quad (4.25)$$

puisque $g_i |\alpha_i| = 2|S|$ et $d_j |\beta_j| = 2|T|$. $Q(\alpha_i, \beta_{j+1})$ et $Q(\alpha_{i+1}, \beta_j)$ ne peuvent pas être réduits puisqu'il faut distinguer le cas des supports des segments sécants et parallèles. D'après (4.9), on a

$$\begin{aligned} I &= \frac{|S|}{3} \sum_{j=1}^3 \delta_j(a_{i+2}) R(a_{i+2}, \beta_j) + \frac{|T|}{3} \sum_{i=1}^3 \gamma_i(b_{j+2}) R(b_{j+2}, \alpha_i) \\ &\quad + \frac{g_i d_{j+1}}{6} Q(\alpha_i, \beta_{j+1}) + \frac{g_{i+1} d_j}{6} Q(\alpha_{i+1}, \beta_j) \end{aligned} \quad (4.26)$$



(a) Triangles ayant un sommet commun.



(b) Triangles ayant une arête commune.

FIGURE 4.9 – Triangles adjacents et triangles ayant un sommet communs.

4.7. Discussion sur le presque-parallélisme

Durant les étapes du processus de réduction de la dimension du domaine d'intégration, il faut évaluer des intégrales sur le produit de deux segments $\alpha \times \beta$ (voir (4.7)). La méthode de calcul à employer est différente selon que les supports des segments sont sécants ou parallèles. Le choix de la méthode de calcul utilisée pour la dernière étape de réduction se pose donc lorsque les supports sont presque-parallèles. En effet, dans ce cas l'origine est envoyée à l'infini ; par conséquent, les abscisses s^\pm et t^\pm intervenant dans l'expression (4.12) deviennent très grandes ce qui peut amener à une forme indéterminée.

4.7.1 Les critères pour le presque-parallélisme

Ce n'est pas l'angle entre les supports des deux segments qui est à étudié, mais la distance des extrémités des segments à l'intersection (voir la Figure 4.10).

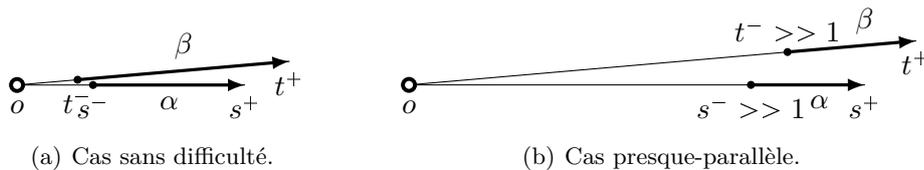


FIGURE 4.10 – Incidence des abscisses dans les cas presque-parallèles.

Il est donc raisonnable de se fixer deux critères :

1. Le premier pour s'assurer qu'il est possible de déterminer l'intersection des deux

supports (donc que les supports ne sont pas exactement parallèles); il s'écrit :

$$(\mathcal{C}_1) \quad \left| 1 - \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \|\beta\|} \right| > \epsilon. \quad (4.27)$$

On choisit la précision machine pour ϵ . Lorsque (\mathcal{C}_1) est vérifiée, on utilise la méthode de calcul pour les supports sécants, par contre si ce premier critère n'est pas vérifié, la méthode de calcul pour les supports parallèles est utilisée.

2. Le second critère pour éviter les formes indéterminées. Lorsque (\mathcal{C}_1) est vérifiée, on peut aboutir à une forme indéterminée (voir Figure 4.10(b)) en utilisant le cas sécant, donc la précision de (4.12) peut être remise en question. Ce second critère permet donc d'indiquer s'il est préférable de traiter deux segments à supports presque-parallèles comme étant parallèles. Le second critère consiste donc à fixer une distance maximale entre l'intersection et les extrémités des segments. Ce second critère s'écrit :

$$(\mathcal{C}_2) \quad \max \left(\frac{\max(|s^-|, |s^+|)}{\|\alpha\|}, \frac{\max(|t^-|, |t^+|)}{\|\beta\|} \right) \geq C, \quad (4.28)$$

avec C une constante à choisir. En pratique pour l'intégrand $\|x - y\|^{-1}$, on peut prendre $C = 10^5$ qui correspond à un angle d'environ 10^{-5} degrés. Lorsque (\mathcal{C}_2) est vérifiée, alors on juge qu'il est plus intéressant de supposer les supports des segments comme étant parallèles plutôt que sécants.

4.7.2 Validation numérique

Un calcul permet d'étudier le comportement de notre méthode lorsque des segments tendent à devenir parallèles. Dans le chapitre 3, la formule (3.17) permet de calculer explicitement le coefficient d'auto-influence

$$I = \int_{S \times S} \frac{1}{\|x - y\|} dx dy \quad (4.29)$$

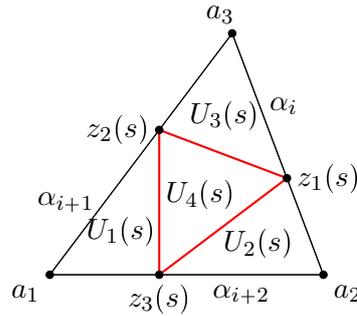
On décompose le triangle S en 4 sous-triangles $(U_1(s), \dots, U_4(s))$ dépendant du paramètre s qui est l'abscisse des points $z_i(s)$ utilisés pour décomposer S (voir la Figure 4.11).

$$\tilde{I}(s) = \sum_{i=1}^4 \int_{U_i \times S} \frac{1}{\|x - y\|} dx dy. \quad (4.30)$$

Lorsque $s = 0$, on a $z_i(0) = a_i^-$, et lorsque $s = 1$, $z_i(1) = a_i^+$. Il est intéressant d'étudier le comportement de $\tilde{I}(s)$ lorsque s est proche de 0.5, ce qui correspond au cas de presque-parallélisme entre des côtes des U_i et des cotés de S . La Figure 4.12(a) présente l'erreur relative

$$E(s) = \frac{|I - \tilde{I}(s)|}{|I|}, \quad (4.31)$$

en fonction du paramètre s en utilisant la méthode de calcul parallèle que pour $s = 0.5$. La Figure 4.12(b) présente la même erreur relative en fixant $C = 100$ dans le critère (\mathcal{C}_2) (voir (4.28)). On observe sur les Figures 4.12(a) et 4.12(b) que même en prenant une


 FIGURE 4.11 – Décomposition du triangle S .

petite valeur de C dans le critère (\mathcal{C}_2) , l'erreur relative reste inférieure à 0.1% cependant l'erreur la plus petite est obtenue sans utiliser le critère (\mathcal{C}_2) . On en déduit qu'il est possible d'effectuer les calculs sans se préoccuper du presque-parallélisme entre côtés de triangles coplanaires.

4.8. Transition segments sécants à parallèles

Lorsque les supports des segments α et β , situés dans un même plan, tendent à devenir parallèles, il est possible d'effectuer le développement asymptotique de $Q(\alpha, \beta)$. Nous fixons β et l'extrémité a^- de α pour étudier l'expression de $Q(\alpha, \beta)$ lorsque a^+ tend vers le point assurant le parallélisme entre les supports de α et β (voir la Figure 4.13). La première idée est de paramétrer les quantités intervenant dans l'expression de Q suivant l'angle θ que font les deux supports des segments, puis d'effectuer le passage à la limite $\theta \rightarrow 0$. Cependant, en utilisant $u = \cos(\theta)$ comme paramètre, des expressions plus simples sont obtenues et le passage à la limite $u \rightarrow 1$ s'effectue avec plus de facilité.

4.8.1 Notations

Soient $\vec{\alpha}'$ et $\vec{\beta}'$ les vecteurs normalisés, $\vec{\tau} = (b^- - a^-) = (-\tau_x, -\tau_y)$ avec $\tau_x, \tau_y > 0$ et $u = \cos(\theta)$. D'après la Figure 4.13, on a

$$\vec{\alpha}' = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{\beta}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

avec $\theta \in [0, \pi/2[$, ainsi $\cos(\theta) = u$ et $\sin(\theta) = \sqrt{1 - u^2}$; ce qui permet d'écrire :

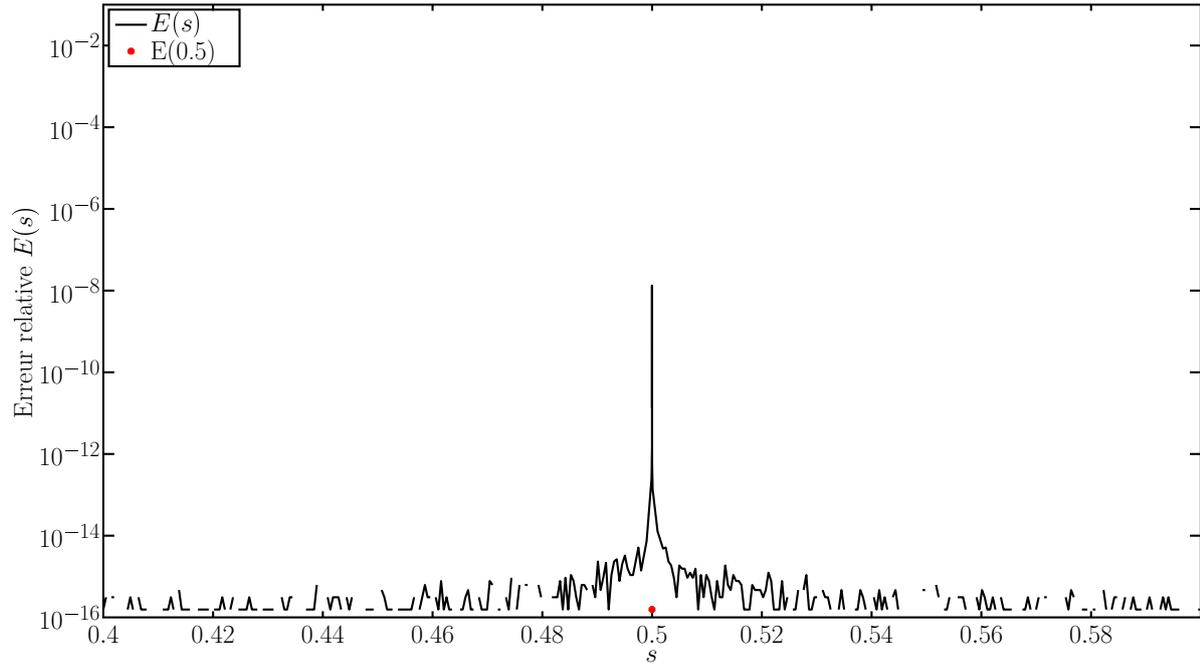
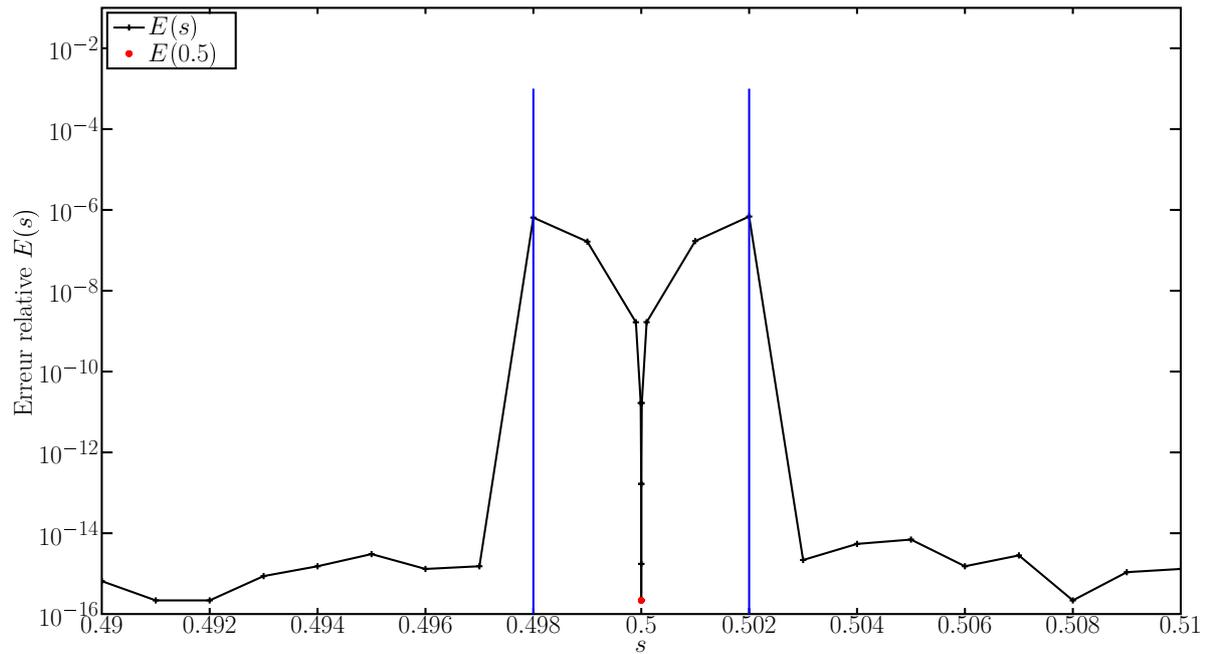
$$\vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}' = -u\tau_x - \sqrt{1 - u^2}\tau_y \quad \text{et} \quad \vec{\tau} \cdot \vec{\beta}' = -\tau_x \quad (4.33)$$

On rappelle l'expression de Q dans le cas de segments à supports sécants :

$$\begin{aligned} Q(\alpha(u), \beta) &= s^+ R(a^+(u), \beta) - s^- R(a^-, \beta) \\ &\quad + t^+ R(b^+, \alpha(u)) - t^- R(b^-, \alpha(u)). \end{aligned} \quad (4.34)$$

L'intersection o des supports des deux segments s'écrit $o = a^- + k\vec{\alpha}' = b^- + l\vec{\beta}'$, ce qui permet d'écrire

$$\vec{\tau} := b^- - a^- = k\vec{\alpha}' - l\vec{\beta}'. \quad (4.35)$$

(a) Calcul de $E(s)$ en n'utilisant que le critère (\mathcal{C}_1) .(b) Calcul de $E(s)$ en utilisant les critères (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) avec $C = 100$. On délimite la zone d'action de (\mathcal{C}_2) en bleu.FIGURE 4.12 – Calcul de $E(s)$ avec ou sans le critère (\mathcal{C}_2) .

En effectuant le produit scalaire de $\vec{\tau}$ de (4.35) avec $\vec{\alpha}^j$ et $\vec{\beta}^j$, on obtient

$$k = \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}^j - u \vec{\tau} \cdot \vec{\beta}^j}{1 - u^2} \text{ et } y = \frac{u \vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}^j - \vec{\tau} \cdot \vec{\beta}^j}{1 - u^2}, \quad (4.36)$$

soit

$$k = -\frac{\tau_y}{\sqrt{1 - u^2}} \text{ et } l = \tau_x - \frac{u \tau_y}{\sqrt{1 - u^2}}. \quad (4.37)$$

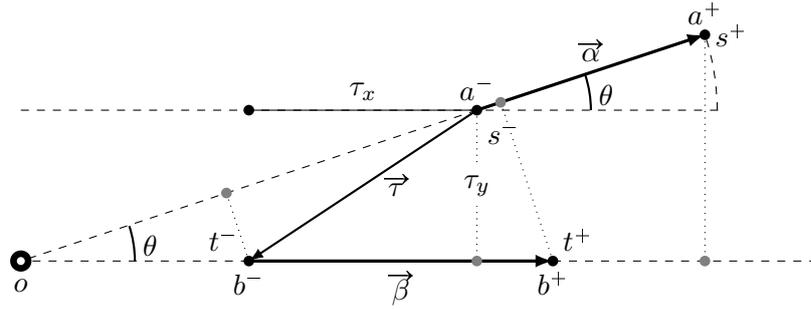


FIGURE 4.13 – Cas presque-parallèle.

4.8.2 Calcul dans le cas limite des supports parallèles

On commence par calculer $Q(\alpha(1), \beta)$, le cas des supports parallèles. A cet fin, on note que la distance entre les deux supports est $d = \tau_y$. En choisissant a^- comme origine (voir Figure 4.14), les abscisses des extrémités des segments valent :

$$s^- = 0, \quad s^+ = |\alpha|, \quad \tilde{t}^- = -\tau_x \quad \text{et} \quad \tilde{t}^+ = (-\tau_x + |\beta|),$$

Soit d'après (4.19),

$$Q(\alpha, \beta) = |\alpha| \mathcal{R}(a^+, \tilde{\beta}, d) + \sum_{l=\pm} \tilde{t}^l \mathcal{R}(\tilde{b}^l, \alpha, d), \quad (4.38)$$

qui s'exprime, après simplification et à l'aide de $\tau_x, \tau_y, |\alpha|$, et β :

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \beta) &= |\alpha| \left(\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{|\beta| - |\alpha| - \tau_x}{\tau_y} \right) + \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\tau_x + |\alpha|}{\tau_y} \right) \right) \\ &+ (|\beta| - \tau_x) \left(\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{|\alpha| + \tau_x - |\beta|}{\tau_y} \right) - \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\tau_x - |\beta|}{\tau_y} \right) \right) \\ &+ \tau_x \left(\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{|\alpha| + \tau_x}{\tau_y} \right) - \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\tau_x}{\tau_y} \right) \right) \\ &+ \sqrt{\tau_y^2 + (|\alpha| + \tau_x - |\beta|)^2} - \sqrt{\tau_y^2 + (\tau_x - |\beta|)^2} \\ &- \sqrt{\tau_y^2 + (|\alpha| + \tau_x)^2} + \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} \end{aligned} \quad (4.39)$$

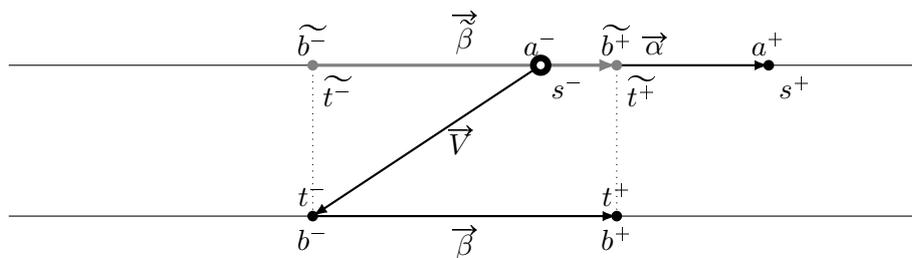


FIGURE 4.14 – Calcul cas parallèle.

Nous allons montrer que l'expression explicite obtenue dans le cas des supports sécants tend vers (4.39) lorsque $u \rightarrow 1$.

4.8.3 Calcul dans le cas des supports sécants

Dans ce cas, on exprime les abscisses s^\pm et t^\pm en fonction de u :

$$\begin{aligned} s^- &= \frac{\tau_y}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{et} \quad s^+ = s^- + |\alpha|, \\ t^- &= -\tau_x + \frac{u\tau_y}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{et} \quad t^+ = t^- + |\beta|. \end{aligned}$$

Les abscisses τ^\pm des projections de a^\pm sur le support de β s'écrivent $\tau^\pm = \cos(\theta)s^\pm = u s^\pm$; de même, les abscisses σ^\pm des projections de b^\pm sur le support de α s'écrivent $\sigma^\pm = u t^\pm$. On utilise g^\pm et d^\pm , les distances respectivement des sommets b^\pm au support de α et des sommets a^\pm au support de β :

$$d^\pm = s^\pm \sqrt{1-u^2} \quad \text{et} \quad g^\pm = t^\pm \sqrt{1-u^2}$$

Toutes les quantités nécessaires ont été exprimées selon u , d'après (4.20), on a :

$$\begin{aligned} Q(\alpha(u), \beta) &= (s^- + |\alpha|) \left[\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{t^+ - \tau^+}{d^+} \right) - \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{t^- - \tau^+}{d^+} \right) \right] \\ &\quad - s^- \left[\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{t^+ - \tau^-}{d^-} \right) - \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{t^- - \tau^-}{d^-} \right) \right] \\ &\quad + (t^- + |\beta|) \left[\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s^+ - \sigma^+}{g^+} \right) - \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s^- - \sigma^+}{g^+} \right) \right] \\ &\quad - t^- \left[\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s^+ - \sigma^-}{g^-} \right) - \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s^- - \sigma^-}{g^-} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

En utilisant les expressions des abscisses selon u , on obtient

$$\begin{aligned} Q(\alpha(u), \beta) &= |\alpha| \left(\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{-\tau_x + |\beta| - u|\alpha|}{\tau_y + \sqrt{1-u^2}|\alpha|} \right) - \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{-\tau_x - u|\alpha|}{\tau_y + \sqrt{1-u^2}|\alpha|} \right) \right) \\ &\quad + (-\tau_x + |\beta|) \left(\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{|\alpha| + u(\tau_x - |\beta|) + \sqrt{1-u^2}\tau_y}{u\tau_y + \sqrt{1-u^2}(|\beta| - \tau_x)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{u(\tau_x - |\beta|) + \sqrt{1-u^2}\tau_y}{u\tau_y + \sqrt{1-u^2}(|\beta| - \tau_x)} \right) \right) \\ &\quad + \tau_x \left(\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{|\alpha| + u\tau_x + \sqrt{1-u^2}\tau_y}{u\tau_y - \sqrt{1-u^2}\tau_x} \right) - \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{u\tau_x + \sqrt{1-u^2}\tau_y}{u\tau_y - \sqrt{1-u^2}\tau_x} \right) \right), \\ &\quad + \frac{\tau_y}{\sqrt{1-u^2}} \left(\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{-\tau_x + |\beta| - u|\alpha|}{\tau_y + \sqrt{1-u^2}|\alpha|} \right) - \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{-\tau_x - u|\alpha|}{\tau_y + \sqrt{1-u^2}|\alpha|} \right) \right) \\ &\quad - \frac{\tau_y}{\sqrt{1-u^2}} \left(\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{|\beta| - \tau_x}{\tau_y} \right) + \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\tau_x}{\tau_y} \right) \right) \\ &\quad + \frac{u\tau_y}{\sqrt{1-u^2}} \left(\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{|\alpha| + u(\tau_x - |\beta|) + \sqrt{1-u^2}\tau_y}{u\tau_y + \sqrt{1-u^2}(|\beta| - \tau_x)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{u(\tau_x - |\beta|) + \sqrt{1-u^2}\tau_y}{u\tau_y + \sqrt{1-u^2}(|\beta| - \tau_x)} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{u\tau_y}{\sqrt{1-u^2}} \left(\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{|\alpha| + u\tau_x + \sqrt{1-u^2}\tau_y}{u\tau_y - \sqrt{1-u^2}\tau_x} \right) \right. \\
& \left. - \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{u\tau_x + \sqrt{1-u^2}\tau_y}{u\tau_y - \sqrt{1-u^2}\tau_x} \right) \right),
\end{aligned}$$

dont la limite, lorsque $u \rightarrow 1$, est simplement l'expression (4.39) correspondant au calcul dans le cas des supports parallèles.

4.9. Remarques

4.9.1 Stabilité des formules

Des instabilités numériques peuvent apparaître dans deux situations :

1. lorsque des distances $d \ll 1$ sont très petites. C'est le cas lorsque un point est très proche du support d'un segment par exemple dans $R(b, \alpha)$.
2. lorsque deux triangles sont très éloignés.

Distances très petites

Pour mieux comprendre cette difficulté, il faut remarquer que

$$R(b, \alpha) = \int_{s^-}^{s^+} \frac{1}{\sqrt{d^2 + s^2}} ds = \left[\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{d} \right) \right]_{s=s^-}^{s^+}, \quad (4.41)$$

où d est la distance de b au support de α , peut aussi s'écrire

$$R(b, \alpha) = \left[\operatorname{Arctanh} \left(\frac{s}{\sqrt{d^2 + s^2}} \right) \right]_{s=s^-}^{s^+}. \quad (4.42)$$

En effet,

$$\operatorname{Arcsinh}(s) = \ln \left(\frac{s + \sqrt{s^2 + 1}}{d} \right) \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctanh}(z) = \frac{1}{2} \{ \ln(1+z) - \ln(1-z) \},$$

donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arctanh} \left(\frac{s}{\sqrt{d^2 + s^2}} \right) &= \frac{1}{2} \left\{ \ln \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2} + s}{\sqrt{d^2 + s^2}} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2} - s}{\sqrt{d^2 + s^2}} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \ln \left(\sqrt{d^2 + s^2} + s \right) - \ln \left(\sqrt{d^2 + s^2} - s \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{d} \right) - \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{-s}{d} \right) \right) \\
&= \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{d} \right),
\end{aligned}$$

car Arcsinh est une fonction impaire.

Lorsque d est très petit ($d < 1.510^{-8}$), numériquement on obtient $\sqrt{d^2 + s^2} = |s|$ donc si on utilise (4.42), on se retrouve à évaluer Arctanh de ± 1 qui vaut $\pm\infty$. Il n'y a pas cette difficulté en utilisant la formule (4.41). Lorsque $d \rightarrow 0$, $\text{Arcsinh}\left(\frac{s}{d}\right) \rightarrow +\infty$ mais dans nos expressions, Arcsinh est pondéré par d donc le produit tend vers 0.

Dans la suite, nous devons évaluer des intégrales d'expressions plus compliquées que ce que l'on a vu jusqu'à présent. Nous utiliserons Maple pour les calculs des primitives. Parfois les formules finales contiendront des fonctions Arctanh analogues à (4.42). Pour garantir une grande précision des résultats dans les cas presque-singuliers (par exemple pour des triangles appartenant à des plans parallèles proches, voir la partie III), il sera important de convertir les expressions comportant des Arctanh analogues à (4.42) en Arcsinh .

Distances très grandes

Une autre instabilité peut apparaître, lorsque les triangles sont très éloignés. Cette fois, elle provient du calcul des quantités géométriques (projection d'un point, distance d'un point au support d'un segment ...) qui peuvent manquer de précision. Pour deux triangles coplanaires de cotés de longueurs proches de 1, ces instabilités apparaissent par exemple lorsque leur centre de gravité sont à une distance supérieure à 10^4 . Toutefois, cette méthode étant prévue pour calculer les intégrales lorsque deux éléments sont proches, cette instabilité est moins problématique. Pour des éléments assez éloignés, une méthode usuelle d'intégration numérique sera très satisfaisante.

Conclusion du chapitre

Le passage de triangles identiques à des triangles coplanaires en position générale a amené de nombreuses nouveautés :

- l'utilisation de la formule (2.34) lorsque les supports de deux segments sont parallèles,
- la problématique du presque-parallélisme qui conduit à fixer des critères pour déterminer quelle méthode de calcul employer dans ce cas.
- l'importance des formules utilisées pour assurer la stabilité numérique des formules (préférer Arcsinh à Arctanh).

L'étude de la transition du calcul de l'influence entre deux segments lorsque leurs supports sécants deviennent parallèles effectuée dans ce chapitre est relativement longue. On comprend donc que ce genre d'étude ne sera pas menée dans des cas plus compliqués (triangles dans des plans presque-parallèles, segments dans l'espace tendant à devenir parallèles ...).

Triangles dans des plans sécants

Introduction

Après avoir évalué explicitement l'intégrale I définie en (6.67), nous passons au cas de triangles situés dans des plans sécants. Dans ce cas, le choix de l'origine est plus limité; en effet, il est nécessaire que l'origine appartienne à l'intersection (ω) entre les deux plans (voir Figure 5.1). Hormis cette restriction relative au choix de l'origine, la première étape de réduction de la dimension du domaine d'intégration reste inchangée. Les étapes suivantes font apparaître de nouvelles configurations géométriques. Nous commençons le calcul par le cas de deux triangles dans des plans sécants en positions quelconques puis nous présentons les simplifications qui apparaissent lorsque les triangles ont une arête commune ou un sommet commun.

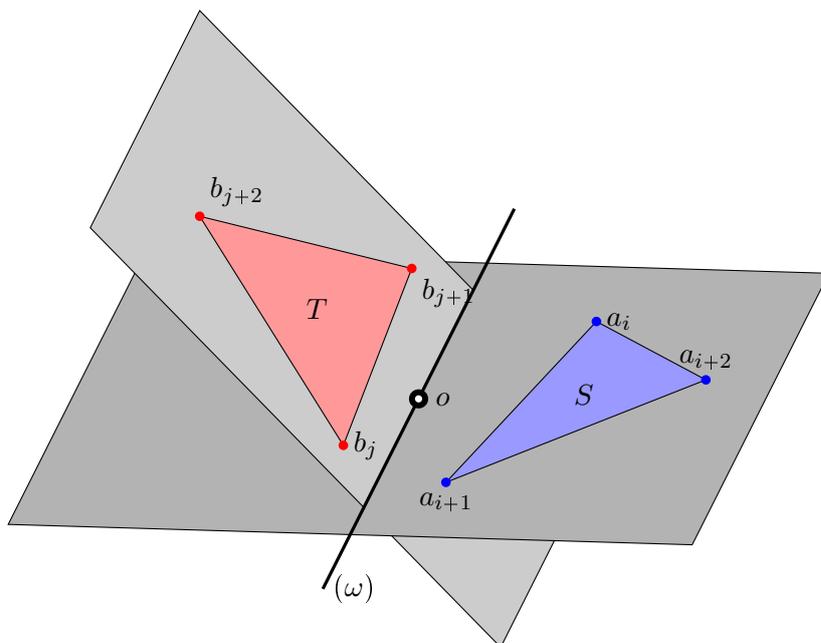


FIGURE 5.1 – Triangles dans des plans sécants

5.1. Triangles en positions quelconques

Nous allons évaluer

$$I = \int_{S \times T} \frac{1}{\|x - y\|} dx dy. \quad (5.1)$$

Lorsque les triangles sont dans des plans sécants, il est encore possible d'utiliser la formule (2.10). L'intégrand est homogène de degré -1 donc $q = -1$, et $S \times T \subset \mathbb{R}^4$ donc $n = 4$. Pour assurer l'homogénéité de l'intégrand, nous prenons un point o de (ω) , la droite formée par l'intersection des deux plans (voir Figure 5.1). On obtient alors

$$I = \sum_{i=1}^3 \frac{\gamma_i(o)}{3} U(\alpha_i, T) + \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_j(o)}{3} U(\beta_j, S), \quad (5.2)$$

avec U définie en (3.10) et γ_i et δ_j les distances signées définies en 3.1.1 et 4.1. Nous ne détaillons que la simplification de $U(\alpha, T)$ puisque celle de $U(\beta, S)$ s'en déduit aisément.

Pour continuer, il faut distinguer deux configurations géométriques :

- Lorsque le support de α et la droite (ω) sont sécants, la seule origine assurant l'homogénéité de l'intégrand de $U(\alpha, S)$ est leur intersection (voir Figure 5.2).
- Lorsque le support de α est parallèle à (ω) il n'y a plus d'origine assurant l'homogénéité (voir Figure 5.3). En utilisant une méthode similaire à celle de la sous-section 4.4.3, on projette le segment α dans le plan contenant le triangle T . Il apparaît en paramètre, la distance du segment α au plan de T , notée h .

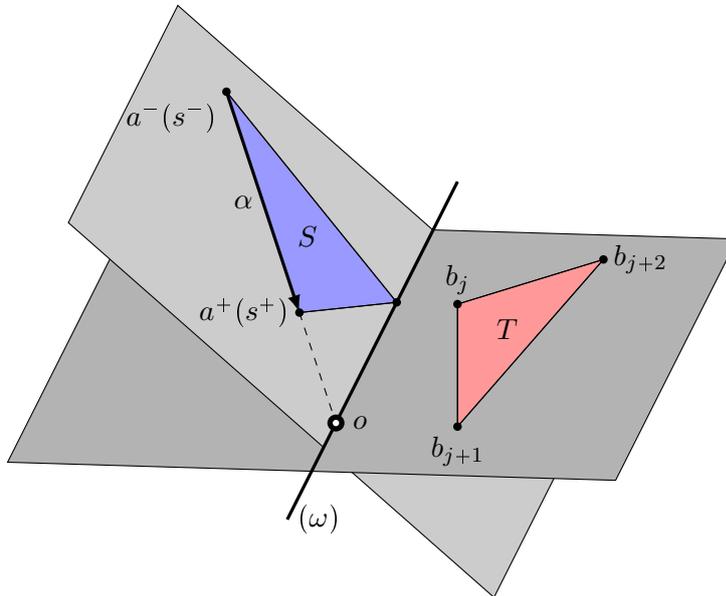
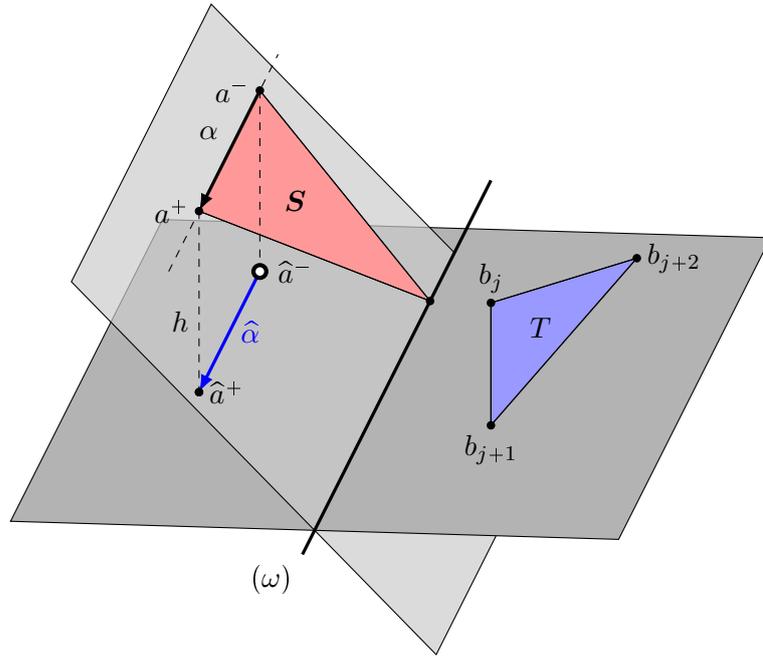


FIGURE 5.2 – Calcul de $U(\alpha, T)$: cas où le support de α et (ω) sont sécants.

5.2. Réduction de $U(\alpha, T)$: cas sécant

Lorsque le support de α et (ω) sont sécants, la formule (2.10) est utilisée en choisissant l'origine au point d'intersection (voir Figure 5.2), on obtient une expression ressemblant


 FIGURE 5.3 – Calcul de $U(\alpha, T)$: cas où le support de α et (ω) sont parallèles.

à (4.7) :

$$U(\alpha, T) = \sum_{k=\pm} \frac{k s^k}{2} P(a^k, T) + \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_j(o)}{2} Q(\alpha, \beta_j), \quad (5.3)$$

avec s^\pm qui sont les abscisses des extrémités de α selon l'origine o . On note que U s'exprime à l'aide des fonctions P et Q définies en (3.13). Pour le calcul de $Q(\alpha, \beta)$, le support de α et (ω) étant supposés sécants, il ne peut pas y avoir de parallélisme entre α et β . Cependant deux configurations géométriques doivent être distinguées :

- i) lorsque les supports des segments ont un point d'intersection appartenant à (ω) .
- ii) lorsque les supports des segments ne sont pas contenus dans le même plan.

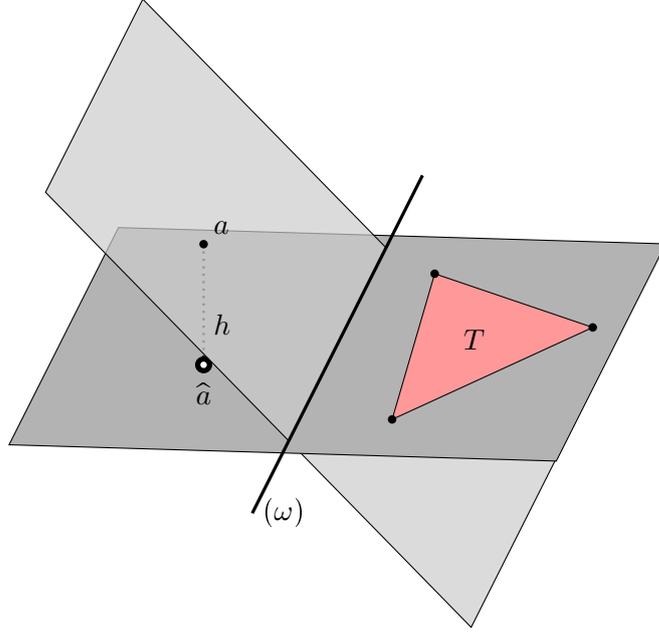
5.2.1 Calcul de $P(a, T)$

Ce calcul diffère de celui du cas coplanaire ; en effet, a n'étant pas un point du plan contenant T , la formule (2.10) n'est pas utilisable. Afin d'opérer la réduction, on projette a sur le plan de T . Soient \hat{a} le projeté de a sur le plan de T et $h = \|a - \hat{a}\|$, la distance du point au plan (voir la Figure 5.4), alors P s'écrit

$$P(a, T) = \int_T \frac{1}{\sqrt{h^2 + \|\hat{a} - y\|^2}} dy.$$

En prenant \hat{a} comme origine, l'intégrand est homogène de degré -1 selon le paramètre h et la variable d'intégration y ; en utilisant la formule (2.34), et en s'inspirant de la Figure 4.6, on obtient

$$P(a, T) = \sum_{j=1}^3 \delta_j(\hat{a}) \int_{\beta_j} h \int_h^{+\infty} \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 + \|\hat{a} - y\|^2}} ds_y,$$

FIGURE 5.4 – Calcul de P dans le cas général.

qui s'écrit également

$$P(a, T) = \sum_{j=1}^3 \delta_j(\hat{a}) \mathcal{R}(\hat{a}, \beta_j, h), \quad (5.4)$$

où \mathcal{R} est définie en (4.18). Cette fois, \hat{a} n'appartient pas au support de β . On ne peut donc pas utiliser directement l'expression (4.21). Soit \tilde{a} , le projeté de \hat{a} sur le support de β et $d = \|\hat{a} - \tilde{a}\|$, la distance de \hat{a} au support de β . On a donc

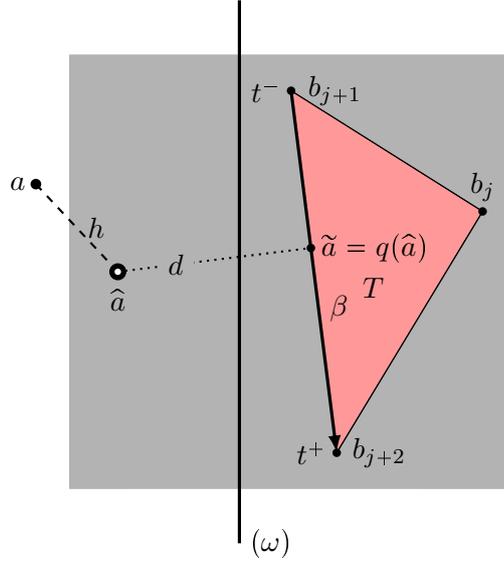
$$\mathcal{R}(\hat{a}, \beta, h) = \int_{\beta} \frac{\sqrt{h^2 + \|\hat{a} - y\|^2} - h}{\|\hat{a} - y\|^2} ds_y = \int_{\beta} \frac{\sqrt{h^2 + d^2 + \|\tilde{a} - y\|^2} - h}{(d^2 + \|\tilde{a} - y\|^2)} ds_y.$$

En rappelant que t^{\pm} sont les abscisses des extrémités b^{\pm} du segment β prises à partir de l'origine $\tilde{a} = q(\hat{a})$ (voir la Figure 5.5), on obtient

$$\mathcal{R}(\hat{a}, \beta, h) = \int_{t^-}^{t^+} \frac{\sqrt{h^2 + d^2 + t^2} - h}{(d^2 + t^2)} dt. \quad (5.5)$$

Il en résulte l'expression suivante, que l'on peut comparer à (3.19) :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\hat{a}, \beta, h) = & \left[\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{t}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) - \frac{h}{d} \operatorname{Arctan} \left(\frac{t}{d} \right) \right. \\ & \left. + \frac{h}{d} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 + itd}{h\sqrt{h^2 + d^2 + t^2}} \right) - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(t) \right\} \right]_{t=t^-}^{t^+}. \end{aligned} \quad (5.6)$$


 FIGURE 5.5 – Calcul de $\mathcal{R}(\hat{a}, \beta, h)$.

5.2.2 Calcul de $Q(\alpha, \beta)$: α et β non contenus dans un même plan

Dans ce cas, afin d'assurer l'homogénéité de l'intégrand on introduit la perpendiculaire commune aux supports des deux segments (voir la Figure 5.6).

$$Q(\alpha, \beta) = \int_{\alpha \times \beta} \frac{1}{\|x - y\|} ds_x ds_y = \int_{\check{\alpha} \times \beta} \frac{1}{\sqrt{h^2 + \|\check{x} - y\|^2}} ds_{\check{x}} ds_y, \quad (5.7)$$

où $\check{\alpha}$ et \check{x} sont les projections respectives de α et x sur le plan orthogonal à la perpendiculaire commune et contenant β . La distance de α à $\check{\alpha}$ est notée $h (= \|\check{a}^- - a^-\|)$. En prenant l'intersection des supports de β et $\check{\alpha}$ comme origine, on obtient

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{k=\pm} ks^k \mathcal{R}(\check{a}^k, \beta, h) + \sum_{l=\pm} lt^l \mathcal{R}(b^l, \check{\alpha}, h), \quad (5.8)$$

où l'expression de \mathcal{R} est donnée par (5.6).

5.2.3 Calcul de $Q(\alpha, \beta)$: α et β contenus dans un même plan

Lorsque les supports de α et β ont un point d'intersection appartenant à (ω) (voir Figure 5.7), c'est-à-dire lorsque α et β sont contenus dans un même plan, on note \underline{o} , le point d'intersection des supports que l'on choisit comme origine ; alors

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{k=\pm} ks^k \mathcal{R}(a^k, \beta) + \sum_{l=\pm} lt^l \mathcal{R}(b^l, \alpha). \quad (5.9)$$

En notant la projection \tilde{b} de b sur le support de α (voir Figure 5.7) et la distance $d = \|\tilde{b} - b\|$ du point b au support de α , on a d'après (3.16) :

$$\mathcal{R}(b, \alpha) = \int_{\alpha} \frac{1}{\|x - b\|} ds_x = \int_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{d^2 + \|x - \tilde{b}\|^2}} ds_x, \quad (5.10)$$

où \mathcal{R} est donnée par (3.19).

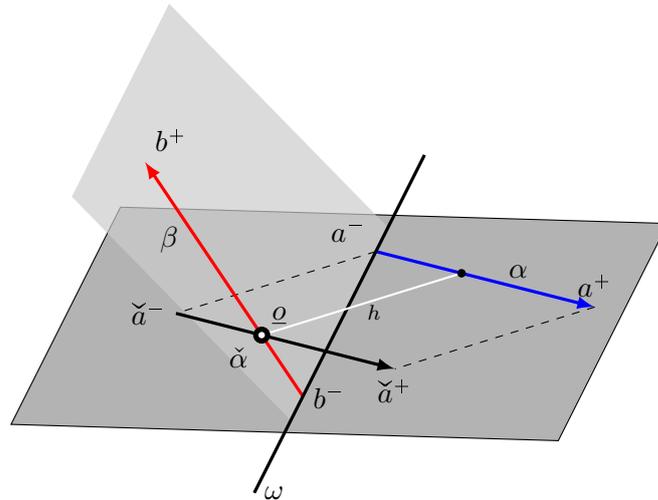


FIGURE 5.6 – Segments dans des plans sécants avec en blanc, la perpendiculaire commune aux supports des segments α et β .

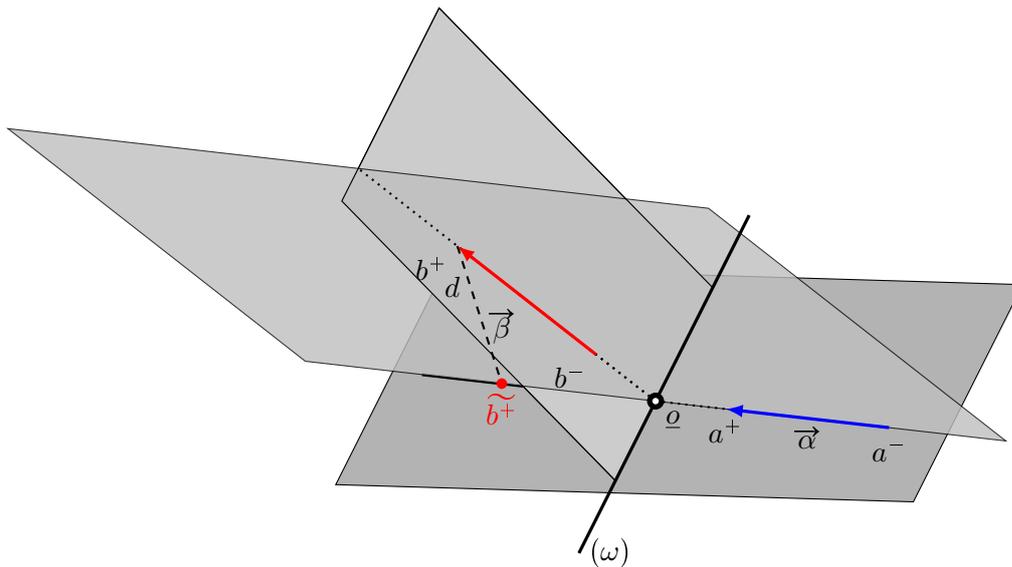


FIGURE 5.7 – Les supports des segments α et β ont un point d'intersection appartenant à (ω) .

5.3. Réduction de $U(\alpha, T)$: cas parallèle

Lorsque le support de α est parallèle à (ω) , on perd l'homogénéité de l'intégrand. On effectue la projection de α sur le plan du triangle T afin de décomposer la norme $\|x - y\|$. Ainsi, soient \hat{a} et \hat{a}^\pm , les projections respectives de α et a^\pm sur le plan de T (voir la Figure 5.3). La distance du segment α au plan de T , notée $h = \|a^- - \hat{a}^-\|$ joue le rôle de paramètre. L'intégrand est ainsi homogène par rapport au couple formé de la variable d'intégration (\hat{x}, y) et du paramètre h . On a donc

$$U(\alpha, T) = \int_{\hat{a} \times T} \frac{1}{\sqrt{h^2 + \|\hat{x} - y\|^2}} ds_{\hat{x}} dy,$$

qui se simplifie, en prenant l'origine en \hat{a}^- et grâce à la formule (2.34) :

$$U(\alpha, T) = |\alpha| \int_T f_2(h, \|\hat{a}^+ - y\|) dy + \sum_{j=1}^3 \delta_j(\hat{a}^-) \int_{\hat{\alpha} \times \beta_j} f_2(h, \|\hat{x} - y\|) ds_{\hat{x}} ds_y,$$

où f_2 est défini par

$$f_2(h, \eta) = h^2 \int_h^{+\infty} \frac{1}{u^3 \sqrt{u^2 + \eta^2}} du. \quad (5.11)$$

On obtient une expression semblable à (4.7)

$$U(\alpha, T) = |\alpha| \mathcal{P}_2(\hat{a}^+, T, h) + \sum_{j=1}^3 \delta_j(\hat{a}^-) \mathcal{Q}_2(\hat{\alpha}, \beta_j, h), \quad (5.12)$$

avec,

$$\mathcal{P}_2(\hat{a}, T, h) = \int_T f_2(h, \|\hat{a}^+ - y\|) dy, \quad (5.13)$$

$$\mathcal{Q}_2(\hat{\alpha}, \beta, h) = \int_{\hat{\alpha} \times \beta_j} f_2(h, \|\hat{x} - y\|) ds_{\hat{x}} ds_y. \quad (5.14)$$

Les expressions restant à réduire sont \mathcal{P}_2 et \mathcal{Q}_2 . Pour la réduction de U (voir 5.12) on a utilisé la formule (2.34), on doit donc poursuivre la réduction en utilisant cette même formule.

5.3.1 Réduction de $\mathcal{P}_2(\hat{a}, T, h)$

En appliquant (2.34) avec l'origine prise en \hat{a} , on a obtenu une expression semblable à (5.4) :

$$\mathcal{P}_2(\hat{a}, T, h) = \sum_{j=1}^3 \delta_j(\hat{a}) \int_{\beta_j} \mathfrak{F}_2(h, \|y - \hat{a}\|) ds_y, \quad (5.15)$$

avec,

$$\mathfrak{F}_2(h, \eta) = h \int_h^{+\infty} \frac{f_2(v, \eta)}{v^2} dv. \quad (5.16)$$

\mathfrak{F}_2 se simplifie, grâce à (5.11), en

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_2(h, \eta) &= h \int_h^{+\infty} \int_v^{+\infty} \frac{du}{u^3 \sqrt{u^2 + \eta^2}} dv = h \int_{u=h}^{+\infty} \left(\int_{v=h}^u dv \right) \frac{dv}{u^3 \sqrt{u^2 + \eta^2}} du \\ &= h \int_u^{+\infty} \frac{u-h}{u^2 \sqrt{u^2 + \eta^2}} du = f_1(h, \eta) - f_2(h, \eta), \end{aligned}$$

qui s'exprime simplement

$$\mathfrak{F}_2(h, \eta) = \frac{\sqrt{h^2 + \eta^2} - 2h}{2\eta^2} + \frac{h^2}{2\eta^3} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\eta}{h} \right). \quad (5.17)$$

Ceci nous donne l'expression finale pour \mathcal{P}_2

$$\mathcal{P}_2(\hat{a}, T, h) = \sum_{j=1}^3 \delta_j(\hat{a}) \mathcal{S}_2(\hat{a}, \beta_j, h), \quad (5.18)$$

où,

$$\mathcal{S}_2(\hat{a}, \beta, h) = \int_{\beta} \left\{ \frac{\sqrt{h^2 + \|\hat{a} - y\|^2} - 2h}{2\|\hat{a} - y\|^2} + \frac{h^2}{2\|\hat{a} - y\|^3} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\|\hat{a} - y\|}{h} \right) \right\} ds_y, \quad (5.19)$$

fait intervenir la distance $h = \|a - \hat{a}\|$ du point a au plan contenant le triangle T . L'expression de \mathcal{S}_2 est donnée par (5.28).

5.3.2 Réduction de $\mathcal{Q}_2(\hat{\alpha}, \beta)$: supports de $\hat{\alpha}$ et β sécants

A ce stade pour poursuivre le processus de réduction il est encore nécessaire de distinguer deux configurations : lorsque les supports de $\hat{\alpha}$ et β sont sécants et lorsqu'ils sont parallèles. D'après (5.8) et (5.14), en choisissant l'intersection des supports comme origine, on a

$$\mathcal{Q}_2(\hat{\alpha}, \beta, h) = \sum_{k=\pm} k s^k \mathcal{S}_2(\hat{a}^k, \beta, h) + \sum_{l=\pm} l t^l \mathcal{S}_2(b^l, \hat{\alpha}, h), \quad (5.20)$$

avec \mathcal{S}_2 définie en (5.19).

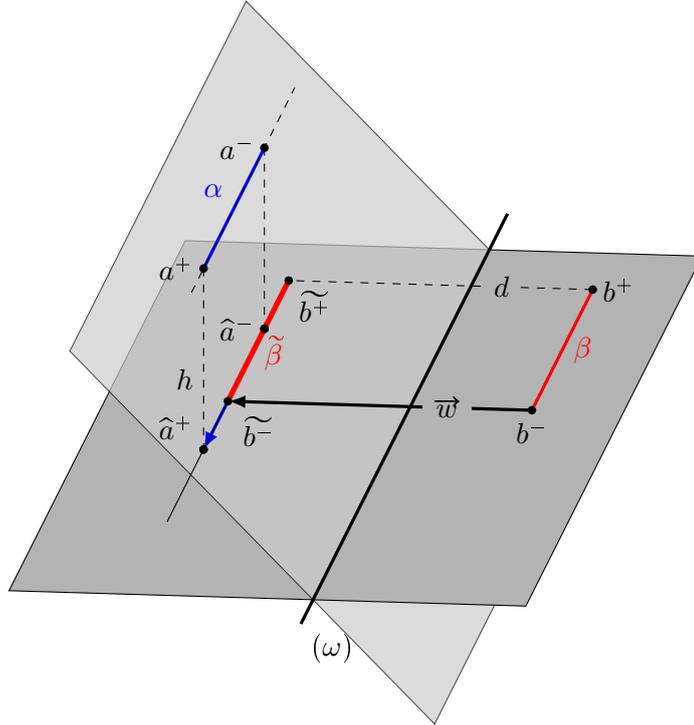
5.3.3 Réduction de $\mathcal{Q}_2(\hat{\alpha}, \beta)$: supports de $\hat{\alpha}$ et β parallèles

Lorsque les supports de $\hat{\alpha}$ et β sont parallèles, c'est aussi dire que α et β sont parallèles à (ω) . On utilise une méthode similaire à celle vue à la section 4.4.3. Afin de restaurer l'homogénéité, on définit la projection $\tilde{\beta}$ de β sur le support de $\hat{\alpha}$ et $d = \|\tilde{b}^- - b^-\|$ (voir Figure 5.8), alors

$$\mathcal{Q}_2(\hat{\alpha}, \beta, h) = \int_{\hat{\alpha} \times \tilde{\beta}} f_2(h, \sqrt{d^2 + \|\hat{x} - \tilde{y}\|^2}) ds_{\hat{x}} ds_{\tilde{y}}. \quad (5.21)$$

La difficulté supplémentaire provient ici de l'apparition d'un second paramètre d . Or il se trouve que lors de la démonstration de (2.34) on utilise la solution explicite de l'équation différentielle ordinaire (2.21) selon la variable h , il est donc nécessaire de se ramener à un seul paramètre scalaire pour utiliser (2.34), ce que l'on fait en posant $\lambda = d/h$, de telle sorte que l'intégrand devienne une fonction homogène de \hat{x}, \tilde{y} et h (voir la Figure 5.8). Cette opération peut en fait être réalisée avec un nombre quelconque de paramètres supplémentaires homogènes d_i en posant $\lambda_i = d_i/h$. Cette méthode conduit à l'expression suivante :

$$\mathcal{Q}_2(\hat{\alpha}, \beta, h) = \int_{\hat{\alpha} \times \tilde{\beta}} f_2(h, \sqrt{\lambda^2 h^2 + \|\hat{x} - \tilde{y}\|^2}) ds_{\hat{x}} ds_{\tilde{y}}. \quad (5.22)$$


 FIGURE 5.8 – Calcul de $Q_2(\hat{\alpha}, \beta, h)$: cas où les supports de $\hat{\alpha}$ et β sont parallèles.

En appliquant (2.34), on obtient

$$\begin{aligned}
 Q_2(\hat{\alpha}, \beta, h) & \sum_{k=\pm} k s^k \int_{\tilde{\beta}} h \int_h^{+\infty} \frac{f_2(u, \sqrt{\lambda^2 u^2 + \|\hat{a}^k - \tilde{y}\|^2})}{u^2} duds_{\tilde{y}} \\
 & + \sum_{l=\pm} l \tilde{t}^l \int_{\hat{\alpha}} h \int_h^{+\infty} \frac{f_2(u, \sqrt{\lambda^2 u^2 + \|\hat{x} - \tilde{b}^l\|^2})}{u^2} duds_{\hat{x}}, \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

soit encore,

$$Q_2(\hat{\alpha}, \beta, h) = \sum_{k=\pm} k s^k \tilde{\mathcal{S}}_2(\hat{a}^k, \tilde{\beta}, h, d) + \sum_{l=\pm} l \tilde{t}^l \tilde{\mathcal{S}}_2(\tilde{b}^l, \hat{\alpha}, h, d), \quad (5.24)$$

où

$$\tilde{\mathcal{S}}_2(\hat{a}, \tilde{\beta}, h, d) = \int_{\tilde{\beta}} \tilde{\mathfrak{F}}_2(h, d, \|\hat{a} - \tilde{y}\|) ds_{\tilde{y}}, \quad (5.25)$$

et

$$\tilde{\mathfrak{F}}_2(h, d, \|\hat{a} - \tilde{y}\|) = h \int_h^{+\infty} \frac{f_2(u, \sqrt{\lambda^2 u^2 + \|\hat{a} - \tilde{y}\|^2})}{u^2} du. \quad (5.26)$$

L'expression de $\tilde{\mathcal{S}}_2(\hat{a}, \tilde{\beta}, h, d)$ est fournie par (5.30).

5.3.4 Evaluation de \mathcal{S}_2 et $\tilde{\mathcal{S}}_2$

Soit \tilde{a} la projection orthogonale de \hat{a} sur le support de β et $d = \|\tilde{a} - \hat{a}\|$, alors en prenant \tilde{a} comme origine, on a

$$\mathcal{S}_2(\hat{a}, \beta, h)\hat{a} = \int_{t^-}^{t^+} \left\{ \frac{\sqrt{h^2 + d^2 + s^2} - 2h}{2(d^2 + s^2)} + \frac{h^2}{2(d^2 + s^2)^{3/2}} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h} \right) \right\} ds \quad (5.27)$$

avec t^\pm les abscisses des extrémités de β par rapport à \tilde{a} . On obtient l'expression finale,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2(\hat{a}, \beta, h) = & \left[\frac{sh^2}{2d^2\sqrt{d^2 + s^2}} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{d^2 + s^2}{h} \right) + \frac{d^2 - h^2}{2d^2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) \right. \\ & \left. - \frac{h}{d} \operatorname{Arctan} \left(\frac{s}{d} \right) - \frac{h}{d} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 + isd}{h\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}} \right) - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(s) \right\} \right]_{t^-}^{t^+}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

De même pour $\tilde{\mathcal{S}}_2$, on obtient,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_2(\hat{a}, \tilde{\beta}, h, d) = & \int_{t^-}^{t^+} \left\{ \frac{\sqrt{h^2 + d^2 + s^2} - \sqrt{h^2 + d^2}}{2s^2} - \frac{h^2}{2ds^2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{d}{h} \right) \right. \\ & \left. + \frac{h^2}{2s^2\sqrt{d^2 + s^2}} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h} \right) \right\} ds, \end{aligned} \quad (5.29)$$

soit,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_2(\hat{a}, \tilde{\beta}, h, d) = & \left[-\frac{\sqrt{h^2 + d^2 + s^2} - \sqrt{h^2 + d^2}}{2s} - \frac{h^2}{2ds} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{d}{h} \right) \right. \\ & \left. - \frac{h^2\sqrt{d^2 + s^2}}{2sd^2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h} \right) + \frac{h^2 + d^2}{2d^2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) \right]_{t^-}^{t^+}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

5.4. Cas particuliers singuliers

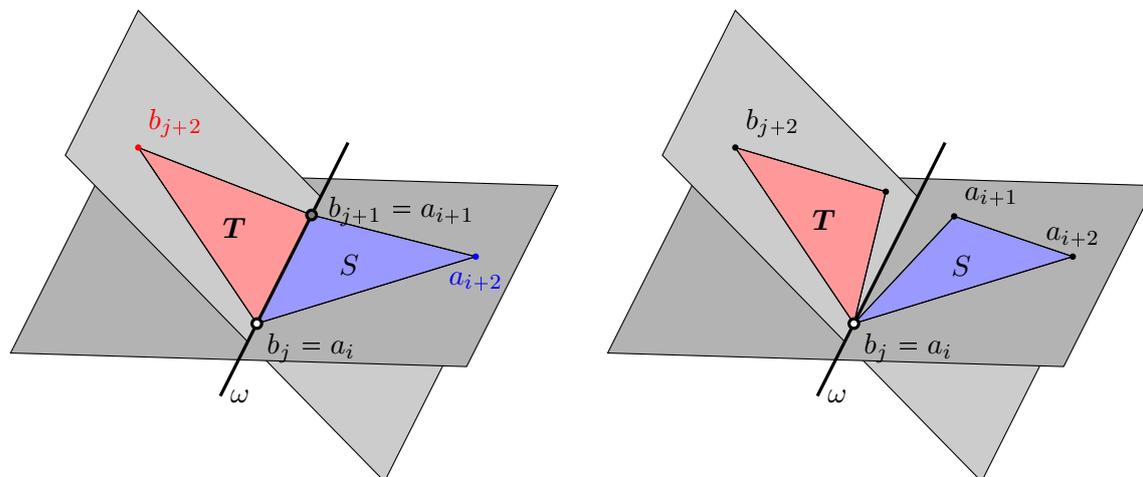
Lorsque les triangles ont un sommet commun ou une arête commune, des simplifications apparaissent. En premier lieu, si les triangles sont adjacents, il ne peut pas y avoir de côtés parallèles à (ω) et on ne rencontre pas non plus le cas où l'intersection des supports de α et β est un point de (ω) . Lorsque les triangles n'ont qu'un sommet commun, toutes les situations sont possibles.

5.4.1 Triangles adjacents

Jusqu'à la dimension 2, la réduction est similaire à celle appliquée pour des triangles coplanaires adjacents (voir (4.25) et la Figure 5.9(a))

$$I = \frac{|S|}{3} P(a_{i+2}, T) + \frac{g_i d_{j+1}}{6} Q(\alpha_i, \beta_{j+1}) + \frac{|T|}{3} P(b_{j+2}, S) + \frac{g_{i+1} d_j}{6} Q(\alpha_{i+1}, \beta_j). \quad (5.31)$$

Les expressions (5.4) et (5.8) permettent d'évaluer complètement l'intégrale.



(a) Triangles adjacents dans des plans sécants.

(b) Triangles dans des plans sécants ayant un sommet commun.

FIGURE 5.9 – Configurations géométriques de triangles dans des plans amenant des simplifications.

5.4.2 Triangles ayant un sommet commun

Si les triangles dans des plans sécants ont un sommet commun, alors d'après la Figure 5.9(b), on a

$$I = \frac{g_i}{3}U(\alpha_i, T) + \frac{d_j}{3}U(\beta_j, S). \quad (5.32)$$

Conclusion du chapitre

Lorsque les triangles sont dans des plans sécants, il faut distinguer plusieurs configurations géométriques :

- lorsqu'un segment est parallèle à l'intersection des deux plans,
- lorsque deux segments sont parallèles,
- ou encore lorsque deux segments ont leur intersection qui appartient à (ω) .

Tout ceci amène à une grande diversité d'intégrales mono-dimensionnelles qu'il faut évaluer. Malgré le nombre élevé de cas, il est toujours possible d'obtenir des formules explicites.

Le potentiel de double couche

Introduction

Dans le chapitre 5 nous avons évalué l'intégrale

$$I = \int_{S \times T} \frac{1}{\|x - y\|} dx dy,$$

lorsque S et T appartiennent à des plans sécants (voir Figure 6.1). A présent, nous allons évaluer les deux intégrales suivantes :

$$J_\zeta = \int_{S \times T} \frac{x - y}{\|x - y\|^{1+\zeta}} dx dy, \quad \zeta = 0 \text{ ou } 2, \quad (6.1)$$

pour la même configuration géométrique des triangles.

Lorsque les triangles se touchent, une difficulté apparaît car la frontière du domaine d'intégration n'est pas régulière. Nous allons donc décomposer ce chapitre en deux parties, les trois premières sections présentent le cas régulier (triangles ayant une intersection vide).

La section 6.4 aborde les cas singuliers (triangles adjacents ou ayant un sommet commun). L'intégrale J_0 est bien définie, mais pour J_2 cela est un peu plus compliqué. On calcule la valeur principale de Cauchy de J_2 .

6.1. Réduction à la dimension 3

La première réduction est identique à (5.2) avec $q = -\zeta$ et l'origine prise sur (ω) :

$$J_\zeta = \sum_{i=1}^3 \frac{\gamma_i(o)}{4 - \zeta} \int_{\alpha_i \times T} \frac{x - y}{\|x - y\|^{1+\zeta}} ds_x dy + \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_j(o)}{4 - \zeta} \int_{S \times \beta_j} \frac{x - y}{\|x - y\|^{1+\zeta}} dx ds_y, \quad (6.2)$$

qui peut s'écrire

$$J_\zeta = \sum_{i=1}^3 \frac{\gamma_i(o)}{4 - \zeta} \mathcal{U}(\alpha_i, T; \zeta) - \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_j(o)}{4 - \zeta} \mathcal{U}(\beta_j, S; \zeta), \quad (6.3)$$

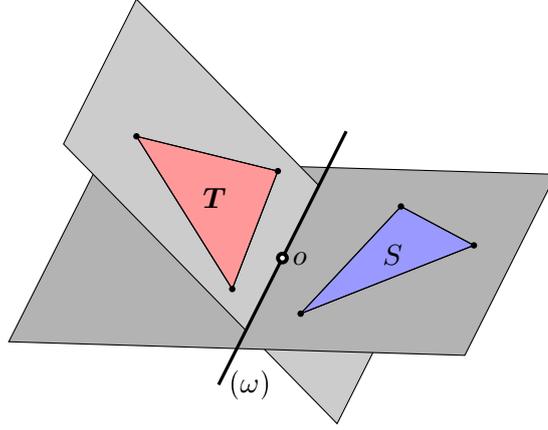


FIGURE 6.1 – Triangles dans des plans sécants

où

$$\mathcal{U}(\alpha, T; \zeta) = \int_{\alpha \times T} \frac{x - y}{\|x - y\|^{1+\zeta}} ds_x dy. \quad (6.4)$$

On note la présence du signe $-$ dans (6.3) qui provient de l'antisymétrie de l'intégrand. Pour poursuivre la réduction de $\mathcal{U}(\alpha, T; \zeta)$, il est nécessaire de choisir l'origine au point d'intersection de (ω) avec le support de α . A ce stade deux cas peuvent donc apparaître ; lorsque le point d'intersection existe, on effectue la réduction à l'aide de la formule (2.10), mais lorsque le support de α et la droite (ω) sont parallèles, il faut utiliser (2.34).

6.2. Réduction à la dimension 2 : Cas sécant

Dans le cas où le point d'intersection existe, la réduction est analogue à celle vue à la section 5.2. L'intersection est prise pour origine (voir Figure 5.2) et l'application de la formule (2.10) fournit

$$\mathcal{U}(\alpha, T; \zeta) = \sum_{k=\pm} \frac{k s^k}{3 - \zeta} \mathcal{P}(a^k, T; \zeta) + \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_j(o)}{3 - \zeta} \mathcal{Q}(\alpha, \beta_j; \zeta), \quad (6.5)$$

avec,

$$\mathcal{P}(a, T; \zeta) = \int_T \frac{a - y}{\|a - y\|^{1+\zeta}} dy, \quad (6.6)$$

$$\mathcal{Q}(\alpha, \beta; \zeta) = \int_{\alpha \times \beta} \frac{x - y}{\|x - y\|^{1+\zeta}} ds_x ds_y. \quad (6.7)$$

6.2.1 Cas sécant, réduction de $\mathcal{P}(a, T; \zeta)$

C'est à ce niveau qu'apparaît la nouveauté par rapport au chapitre 5. En effet, $a - y$ étant affine dans le repère d'origine \hat{a} , il est nécessaire de décomposer \mathcal{P} en deux parties :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a, T; \zeta) &= (a - \hat{a}) \int_T \frac{1}{(h^2 + \|\hat{a} - y\|^2)^{(1+\zeta)/2}} dy + \int_T \frac{\hat{a} - y}{(h^2 + \|\hat{a} - y\|^2)^{(1+\zeta)/2}} dy \\ &= (a - \hat{a}) \mathcal{P}_1(\hat{a}, T, h; \zeta) + \mathcal{P}_2(\hat{a}, T, h; \zeta) \end{aligned} \quad (6.8)$$

où \hat{a} est le projeté de a sur le plan de T et $h = \|a - \hat{a}\|$ (voir Figure 5.4).

Le degré d'homogénéité du premier intégrand conduit à $q = -1 - \zeta$; la formule (2.34) fournit alors

$$\mathcal{P}_1(\hat{a}, T, h; \zeta) = \sum_{j=1}^3 \delta_j(\hat{a}) \mathbf{R}_1(\hat{a}, \beta_j, h; \zeta), \quad (6.9)$$

avec

$$\mathbf{R}_1(\hat{a}, \beta_j, h; \zeta) = \int_{\beta} f_1(h, \|a - y\|; \zeta) ds_y, \quad (6.10)$$

et f_1 est définie par l'expression suivante

$$f_a(h, \eta; \zeta) = h^{a-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{du}{u^{a+1-\zeta} (u^2 + \eta^2)^{(1+\zeta)/2}}. \quad (6.11)$$

Lorsque $\zeta = 0$, on retrouve les expressions (4.16) et (5.11). Le second terme fournit l'expression

$$\mathcal{P}_2(\hat{a}, T, h; \zeta) = \sum_{j=1}^3 \delta_j(\hat{a}) \mathfrak{R}_2(\hat{a}, \beta_j, h; \zeta), \quad (6.12)$$

avec

$$\mathfrak{R}_2(\hat{a}, \beta_j, h; \zeta) = \int_{\beta} (\hat{a} - y) f_2(h, \|\hat{a} - y\|; \zeta) ds_y. \quad (6.13)$$

En regroupant les expressions (6.9) et (6.12), on obtient

$$\mathcal{P}(a, T; \zeta) = \sum_{j=1}^3 \delta_j(\hat{a}) \left[(a - \hat{a}) \mathbf{R}_1(\hat{a}, \beta_j, h; \zeta) + \mathfrak{R}_2(\hat{a}, \beta_j, h; \zeta) \right]. \quad (6.14)$$

Les expressions de \mathbf{R}_1 et \mathfrak{R}_2 sont données en (B.2)-(B.5).

6.2.2 Réduction de $\mathcal{Q}(\alpha, \beta, ; \zeta)$: supports de α et β non sécants

Comme le support de α est supposé posséder une intersection avec (ω) , les segments α et β ne peuvent pas être parallèles. On utilise la même méthode que celle employée dans la sous-section 5.2 en introduisant la projection $\check{\alpha}$ de α sur le plan parallèle à α contenant β . Les supports de $\check{\alpha}$ et β se coupant, on choisit leur intersection, notée o , comme origine (voir Figure 5.6). Soient \vec{z} le vecteur correspondant à la projection ($\vec{z} = (\check{\alpha}^+ - a^+)$) et $h = \|\vec{z}\|$; \mathcal{Q} se décompose en deux termes :

$$\mathcal{Q}(\alpha, \beta; \zeta) = \mathcal{Q}_2(\check{\alpha}, \beta, h; \zeta) - \vec{z} \mathcal{Q}_1(\check{\alpha}, \beta, h; \zeta) \quad (6.15)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1(\check{\alpha}, \beta, h; \zeta) &= \int_{\check{\alpha} \times \beta} \frac{1}{(h^2 + \|\check{x} - y\|^2)^{(1+\zeta)/2}} ds_{\check{x}} ds_y, \\ \mathcal{Q}_2(\check{\alpha}, \beta, h; \zeta) &= \int_{\check{\alpha} \times \beta} \frac{\check{x} - y}{(h^2 + \|\check{x} - y\|^2)^{(1+\zeta)/2}} ds_{\check{x}} ds_y. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Le premier terme se simplifie en notant que $q = -1 - \zeta$:

$$\mathcal{Q}_1(\check{\alpha}, \beta, h; \zeta) = \sum_{k=\pm} k \check{s}^k \mathcal{R}_1(\check{a}^k, \beta, h; \zeta) + \sum_{l=\pm} l t^l \mathcal{R}_1(b^l, \check{\alpha}, h; \zeta). \quad (6.17)$$

En ce qui concerne le second terme, on a $q + n = 2 - \zeta$; la formule (2.34) fournit alors

$$\mathcal{Q}_2(\check{\alpha}, \beta, h; \zeta) = \sum_{k=\pm} k \check{s}^k \mathfrak{R}_2(\check{a}^k, \beta, h; \zeta) - \sum_{l=\pm} l t^l \mathfrak{R}_2(b^l, \check{\alpha}, h; \zeta). \quad (6.18)$$

En regroupant (6.17) et (6.18), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\alpha, \beta) &= \sum_{k=\pm} k \check{s}^k [\mathfrak{R}_2(\check{a}^k, \beta, h; \zeta) - \overline{z} \mathcal{R}_1(\check{a}^k, \beta, h; \zeta)] \\ &\quad - \sum_{l=\pm} l t^l [\mathfrak{R}_2(b^l, \check{\alpha}, h; \zeta) + \overline{z} \mathcal{R}_1(b^l, \check{\alpha}, h; \zeta)], \end{aligned} \quad (6.19)$$

où \mathcal{R}_1 est donnée en (B.2) et (B.3) et \mathfrak{R}_2 en (B.4) et (B.5). A la différence du chapitre 5, une attention particulière doit être portée aux signes dans les expressions (voir (6.19) par exemple) qui ne sont pas tous positifs en raison du caractère anti-symétrique de \mathcal{Q}_2 .

6.2.3 Réduction de $\mathcal{Q}(\alpha, \beta, ; \zeta)$: supports de α et β sécants

Si les supports de α et β sont sécants, leur intersection appartient à (ω) (voir la Figure 5.7). Cette situation a déjà été rencontrée dans la sous-section 5.2.3 et conduit à l'utilisation de la formule (2.10). Le degré d'homogénéité de l'intégrand est $q = -\zeta$; il nous faut distinguer les deux situations relatives respectivement à $\zeta = 0$ et $\zeta = 2$.

Lorsque $\zeta = 0$, on a $q + n = 2$, soit

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\alpha, \beta; \zeta) &= \sum_{k=\pm} \frac{k s^k}{2} \int_{\beta} \frac{a^k - y}{\|a^k - y\|} ds_y + \sum_{l=\pm} \frac{l t^l}{2} \int_{\alpha} \frac{x - b^l}{\|x - b^l\|} ds_x \\ &= \sum_{k=\pm} \frac{k s^k}{2} \mathcal{S}(a^k, \beta) + \sum_{l=\pm} \frac{l t^l}{2} \mathcal{S}(b^l, \alpha), \end{aligned} \quad (6.20)$$

où $\mathcal{S}(a, \beta)$ est donnée en (B.6).

Lorsque $\zeta = 2$, on se trouve dans le cas où $q + n = 0$. La formule (2.10) ne s'applique plus, elle est remplacée par la formule (2.16), d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\alpha, \beta; \zeta) &= \int_{\alpha \times \beta} \frac{x - y}{\|x - y\|^3} ds_x ds_y \\ &= \sum_{k=\pm} k s^k \int_{\beta} \frac{a^k - y}{\|a^k - y\|^3} \ln(\|a^k - y\|) ds_y + \sum_{l=\pm} l t^l \int_{\alpha} \frac{x - b^l}{\|x - b^l\|^3} \ln(\|x - b^l\|) ds_x \\ &= \sum_{k=\pm} k s^k \mathcal{L}(a^k, \beta) - \sum_{l=\pm} l t^l \mathcal{L}(b^l, \alpha), \end{aligned} \quad (6.21)$$

avec

$$\mathcal{L}(a, \beta) = \int_{\beta} \frac{a - y}{\|a - y\|^3} \ln(\|a - y\|) ds_y, \quad (6.22)$$

dont l'expression est donnée en (B.7).

6.3. Réduction à la dimension 2 : Cas parallèle

Si le support de α est parallèle à (ω) et par conséquent au plan de T , il est nécessaire de définir les projections respectives $\hat{\alpha}$ et \hat{a}^k de α et a^k sur le plan de T . On définit également le vecteur projection $\vec{v} = (\hat{a}^+ - a^+)$ et la distance $h = \|\vec{v}\|$ (voir Figure 6.2). On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\alpha, T; \zeta) &= \int_{\alpha \times T} \frac{x - y}{\|x - y\|^{1+\zeta}} ds_x dy. \\ &= \tilde{\mathcal{U}}_2(\hat{\alpha}, T, h; \zeta) - \vec{v} \tilde{\mathcal{U}}_1(\hat{\alpha}, T, h; \zeta), \end{aligned} \quad (6.23)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}_1(\hat{\alpha}, T, h; \zeta) &= \int_{\hat{\alpha} \times T} \frac{1}{(h^2 + \|\hat{x} - y\|^2)^{(1+\zeta)/2}} ds_{\hat{x}} dy, \\ \tilde{\mathcal{U}}_2(\hat{\alpha}, T, h; \zeta) &= \int_{\hat{\alpha} \times T} \frac{\hat{x} - y}{(h^2 + \|\hat{x} - y\|^2)^{(1+\zeta)/2}} ds_{\hat{x}} dy. \end{aligned}$$

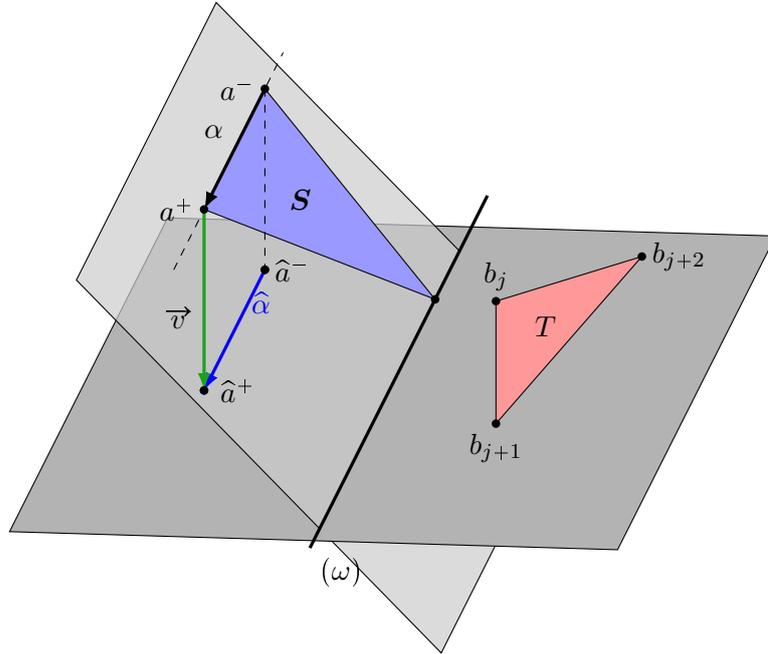


FIGURE 6.2 – Calcul de $\mathcal{U}(\alpha, T; \zeta)$: cas où le support de α et (ω) sont parallèles.

6.3.1 Réduction de $\tilde{\mathcal{U}}_1(\hat{\alpha}, T, h; \zeta)$

En prenant \hat{a}^- comme origine, d'après la formule (2.34), on obtient

$$\tilde{\mathcal{U}}_1(\hat{\alpha}, T, h; \zeta) = |\alpha| \tilde{\mathcal{P}}(\hat{a}^+, T, h; \zeta) + \sum_{j=1}^3 \delta_j(\hat{a}) \tilde{\mathcal{Q}}(\hat{\alpha}, \beta_j, h; \zeta), \quad (6.24)$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{P}}(\hat{a}, T, h; \zeta) &= \int_T \mathfrak{f}_2(h, \|\hat{a} - y\|; \zeta) dy, \\ \tilde{\mathcal{Q}}(\hat{\alpha}, \beta_j, h; \zeta) &= \int_{\hat{\alpha} \times \beta} \mathfrak{f}_2(h, \|\hat{x} - y\|; \zeta) ds_{\hat{x}} ds_y,\end{aligned}$$

où $\mathfrak{f}_2(h, \|\hat{x} - y\|; \zeta)$ est définie en (6.11).

6.3.2 Réduction de $\tilde{\mathcal{U}}_2(\hat{\alpha}, T, h; \zeta)$

De la même manière que pour $\tilde{\mathcal{U}}_1$, on obtient

$$\tilde{\mathcal{U}}_2(\hat{\alpha}, T, h; \zeta) = |\alpha| \tilde{\mathfrak{P}}(\hat{a}^+, T, h; \zeta) + \sum_{j=1}^3 \delta_j(\hat{a}^-) \tilde{\mathfrak{Q}}(\hat{\alpha}, \beta_j, h; \zeta), \quad (6.25)$$

avec

$$\tilde{\mathfrak{P}}(\hat{a}, T, h; \zeta) = \int_T (\hat{a} - y) \mathfrak{f}_3(h, \|\hat{a} - y\|; \zeta) dy \quad (6.26)$$

$$\tilde{\mathfrak{Q}}(\hat{\alpha}, \beta, h; \zeta) = \int_{\hat{\alpha} \times \beta} (\hat{x} - y) \mathfrak{f}_3(h, \|\hat{x} - y\|; \zeta) ds_{\hat{x}} ds_y. \quad (6.27)$$

En regroupant les deux expressions, on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{U}}(\hat{\alpha}, T; \zeta) &= |\alpha| \left(\tilde{\mathfrak{P}}(\hat{a}^+, T, h; \zeta) - \vec{v} \tilde{\mathcal{P}}(\hat{a}^+, T, h; \zeta) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 \delta_j(\hat{a}^-) \left(\tilde{\mathfrak{Q}}(\hat{\alpha}, \beta_j, h; \zeta) - \vec{v} \tilde{\mathcal{Q}}(\hat{\alpha}, \beta_j, h; \zeta) \right).\end{aligned}$$

6.3.3 Simplification de $\tilde{\mathcal{P}}$ et $\tilde{\mathfrak{P}}$

En prenant \hat{a} comme origine, la formule (2.34) nous donne

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{P}}(\hat{a}, T, h; \zeta) &= \sum_{j=1}^3 \delta_j(\hat{a}) \tilde{\mathfrak{R}}_2^1(\hat{a}, \beta_j, h; \zeta), \text{ et} \\ \tilde{\mathfrak{P}}(\hat{a}, T, h; \zeta) &= \sum_{j=1}^3 \delta_j(\hat{a}) \tilde{\mathfrak{R}}_3^2(\hat{a}, \beta_j, h; \zeta),\end{aligned} \quad (6.28)$$

avec

$$\tilde{\mathfrak{R}}_2^1(\hat{a}, \beta, h; \zeta) = \int_{\beta} \mathfrak{F}_2(h, \|\hat{a} - y\|; \zeta) ds_y, \text{ et} \quad (6.29)$$

$$\tilde{\mathfrak{R}}_3^2(\hat{a}, \beta, h; \zeta) = \int_{\beta} (\hat{a} - y) \mathfrak{F}_3(h, \|\hat{a} - y\|; \zeta) ds_y, \quad (6.30)$$

où

$$\mathfrak{F}_c(h, \eta; \zeta) = h^{c-1-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{\mathfrak{f}_c(u, \eta; \zeta)}{u^{c-\zeta}} du, \quad (6.31)$$

est une généralisation de l'expression (5.16). Les expressions de $\tilde{\mathbb{R}}_2^1$ et $\tilde{\mathfrak{R}}_3^2$ sont données respectivement par (B.13)-(B.18).

Pour réduire $\tilde{\mathcal{Q}}(\hat{\alpha}, \beta_j, h; \zeta)$ et $\tilde{\mathcal{Q}}^a(\hat{\alpha}, \beta, h; \zeta)$, nous devons distinguer deux configurations géométriques.

6.3.4 Réduction de $\tilde{\mathcal{Q}}$ et $\tilde{\mathcal{Q}}^a$: supports de $\hat{\alpha}$ et β sécants

Lorsque les supports de $\hat{\alpha}$ et β sont sécants, on choisit l'intersection comme origine et l'application de la formule (2.34) permet de conclure :

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\hat{\alpha}, \beta, h; \zeta) = \sum_{k=\pm} k \hat{s}^k \tilde{\mathbb{R}}_2^1(\hat{a}^k, \beta, h; \zeta) + \sum_{l=\pm} l t^l \tilde{\mathbb{R}}_2^1(b^l, \hat{\alpha}, h; \zeta), \quad \text{et} \quad (6.32)$$

$$\tilde{\mathcal{Q}}^a(\hat{\alpha}, \beta, h; \zeta) = \sum_{k=\pm} k \hat{s}^k \tilde{\mathfrak{R}}_3^2(\hat{a}^k, \beta, h; \zeta) - \sum_{l=\pm} l t^l \tilde{\mathfrak{R}}_3^2(b^l, \hat{\alpha}, h; \zeta). \quad (6.33)$$

6.3.5 Réduction de $\tilde{\mathcal{Q}}$ et $\tilde{\mathcal{Q}}^a$: supports de $\hat{\alpha}$ et β parallèles

C'est aussi dire que les supports de β et α sont parallèles à (ω) . On projette β sur le support de $\hat{\alpha}$ et on introduit la distance d entre les deux segments (voir la Figure 5.8). Soit $\tilde{\beta}$ et \tilde{b}^\pm les projections respectives de β et de ses extrémités et $\vec{w} = (\tilde{b}^- - b^-)$. Comme dans la sous-section 5.3.3, on pose $d = \lambda h$ ce qui permet de se ramener au cas d'un unique paramètre et ainsi d'utiliser la formule (2.34).

Réduction de $\tilde{\mathcal{Q}}$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{Q}}(\hat{\alpha}, \beta, h; \zeta) &= \int_{\hat{\alpha} \times \tilde{\beta}} f_2(h, \sqrt{d^2 + \|\hat{x} - \tilde{y}\|^2}; \zeta) ds_{\hat{x}} ds_{\tilde{y}} \\ &= \int_{\hat{\alpha} \times \tilde{\beta}} f_2(h, \sqrt{\lambda^2 h^2 + \|\hat{x} - \tilde{y}\|^2}; \zeta) ds_{\hat{x}} ds_{\tilde{y}}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

D'une manière similaire à (5.24), on a

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\hat{\alpha}, \beta, h; \zeta) = \sum_{k=\pm} k \hat{s}^k \tilde{\mathcal{S}}_2(\hat{a}^k, \tilde{\beta}, h, d; \zeta) + \sum_{l=\pm} l t^l \tilde{\mathcal{S}}_2(\tilde{b}^l, \hat{\alpha}, h, d; \zeta), \quad (6.35)$$

avec

$$\tilde{\mathcal{S}}_2(\hat{a}, \tilde{\beta}, h, d; \zeta) = \int_{\tilde{\beta}} \tilde{\mathfrak{S}}_2(h, d, \|\hat{a} - \tilde{y}\|; \zeta) ds_{\tilde{y}}, \quad (6.36)$$

et

$$\tilde{\mathfrak{S}}_2(h, d, \eta; \zeta) = h^{1-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{f_2(u, \sqrt{\lambda^2 u^2 + \eta^2})}{u^{2-\zeta}} du. \quad (6.37)$$

L'expression de $\tilde{\mathcal{S}}_2(\hat{a}, \tilde{\beta}, h, d; \zeta)$ est fournie par (B.21) et (B.22).

Réduction de $\tilde{\mathfrak{Q}}$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{Q}}(\hat{\alpha}, \beta, h, \zeta) &= \int_{\hat{\alpha} \times \beta} (\hat{x} - y) f_3(h, \|\hat{x} - y\|; \zeta) ds_{\hat{x}} ds_y \\ &= \tilde{\mathfrak{Q}}_2(\hat{\alpha}, \tilde{\beta}, h, d; \zeta) + \vec{w} \tilde{\mathfrak{Q}}_1(\hat{\alpha}, \tilde{\beta}, h, d; \zeta),\end{aligned}\quad (6.38)$$

où,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{Q}}_2(\hat{\alpha}, \tilde{\beta}, h, d; \zeta) &= \int_{\hat{\alpha} \times \tilde{\beta}} (\hat{x} - \tilde{y}) f_3(h, \sqrt{d^2 + \|\hat{x} - \tilde{y}\|^2}; \zeta) ds_{\hat{x}} ds_{\tilde{y}} \\ \tilde{\mathfrak{Q}}_1(\hat{\alpha}, \tilde{\beta}, h, d; \zeta) &= \int_{\hat{\alpha} \times \tilde{\beta}} f_3(h, \sqrt{d^2 + \|\hat{x} - \tilde{y}\|^2}; \zeta) ds_{\hat{x}} ds_{\tilde{y}}\end{aligned}$$

Le terme antisymétrique se réduit à

$$\tilde{\mathfrak{Q}}_2(\hat{\alpha}, \tilde{\beta}, h, d; \zeta) = \sum_{k=\pm} k \hat{s}^k \tilde{\mathcal{T}}_3(\hat{a}^k, \tilde{\beta}, h, d; \zeta) - \sum_{l=\pm} l \tilde{t}^l \tilde{\mathcal{T}}_3(\tilde{b}^l, \hat{\alpha}, h, d; \zeta), \quad (6.39)$$

avec,

$$\tilde{\mathcal{T}}_3(\hat{a}, \tilde{\beta}, h, d; \zeta) = \int_{\tilde{\beta}} (\hat{a} - \tilde{y}) \tilde{\mathfrak{F}}_3(h, d, \|\hat{a} - \tilde{y}\|; \zeta) ds_{\tilde{y}}, \quad (6.40)$$

et

$$\tilde{\mathfrak{F}}_3(h, d, \eta; \zeta) = h^{2-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{f_3(u, \sqrt{\lambda^2 u^2 + \eta^2})}{u^{3-\zeta}} du. \quad (6.41)$$

Les expressions de $\tilde{\mathcal{T}}_3$ sont données en (B.23)-(B.24). Le terme symétrique se réduit comme en (6.35) :

$$\tilde{\mathfrak{Q}}_1(\hat{\alpha}, \tilde{\beta}, h, d; \zeta) = \sum_{k=\pm} k \hat{s}^k \tilde{\mathcal{S}}_3(\hat{a}^k, \tilde{\beta}, h, d; \zeta) + \sum_{l=\pm} l \tilde{t}^l \tilde{\mathcal{S}}_3(\tilde{b}^l, \hat{\alpha}, h, d; \zeta), \quad (6.42)$$

avec

$$\tilde{\mathcal{S}}_3(\hat{a}, \tilde{\beta}, h, d; \zeta) = \int_{\tilde{\beta}} \tilde{\mathfrak{F}}_3^1(h, d, \|\hat{a} - \tilde{y}\|; \zeta) ds_{\tilde{y}}, \quad (6.43)$$

et

$$\tilde{\mathfrak{F}}_3^1(h, d, \eta; \zeta) = h^{1-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{f_3(u, \sqrt{\lambda^2 u^2 + \eta^2})}{u^{2-\zeta}} du. \quad (6.44)$$

Les expressions de $\tilde{\mathcal{S}}_3$ sont données en (B.26)-(B.27).

6.4. Cas particuliers

Deux configurations géométriques peuvent conduire à des simplifications dans les calculs : lorsque les triangles ont un sommet commun ou lorsqu'ils ont une arête commune. Il n'y a aucune difficulté nouvelle concernant J_0 que l'on traite en premier. Le sujet plus délicat de J_2 , intégrale non définie pour ces configurations de S et T , est abordé en second.

6.4.1 Simplifications pour J_0

Lorsque les triangles sont adjacents, de la même manière qu'à la section 4.6, on a

$$J_0 = \frac{|S|}{6} \mathcal{P}(a_{i+2}, T; 0) - \frac{|T|}{6} \mathcal{P}(b_{j+2}, S; 0) \quad (6.45)$$

$$+ \frac{g_i d_{j+1}}{12} \mathcal{Q}(\alpha_i, \beta_{j+1}; 0) + \frac{g_{i+1} d_j}{12} \mathcal{Q}(\alpha_{i+1}, \beta_j; 0).$$

Lorsque les triangles S et T ont un sommet en commun, on obtient

$$J_0 = \frac{g_i}{4} \mathcal{U}(\alpha_i, T; 0) - \frac{d_j}{4} \mathcal{U}(\beta_j, S; 0). \quad (6.46)$$

6.4.2 Détails pour J_2

Lorsque la frontière du domaine est régulière, le noyau

$$\frac{(x - y | \vec{n}_y)}{\|x - y\|^3}$$

est intégrable ; il n'en est pas de même ici car $(x - y | \vec{n}_y) \sim \|x - y\|$ lorsque x et y tendent vers un point situé sur (ω) . Ce cas apparaît lorsque les triangles S et T sont adjacents ou ont un sommet commun. Nous allons montrer que J_2 peut être définie comme la limite d'un cas régulier, ce qui correspond à une valeur principale de Cauchy. Lorsque $\Gamma = \partial\Omega$ est une frontière lipschitzienne, ce qui est le cas lorsque la discrétisation est réalisée à l'aide de polygones plans, Costabel montre cependant dans son article [Cos88] que la trace de l'opérateur de double couche, définie par :

$$Cv := \gamma_0 \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} v(y) ds_y \right), \quad (6.47)$$

est continue de $H^{1/2+\sigma}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2+\sigma}(\Gamma)$, avec $\sigma \in [-1/2, 1/2]$. Nous allons mettre à profit ce résultat pour déterminer une expression explicite de $J_2 \cdot \vec{n}_T$.

Soient S et T , deux triangles adjacents (voir Figure 6.3(b)); on note T_ϵ le triangle de cotés $\tilde{\beta}_j(\epsilon)$ et de sommets $\tilde{b}_j(\epsilon)$ défini à partir de T , tel que $\tilde{\beta}_3$ soit parallèle à β_3 et à une distance ϵ (voir Figure 6.3(a)). Par ailleurs, on note $\tilde{\delta}_j(y)$, la distance signée de y au support de $\tilde{\beta}_j$. On observe que $\tilde{\delta}_2(y) = \delta_2(y)$ et $\tilde{\delta}_1(y) = \delta_1(y)$. Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, $T_\epsilon \rightarrow T$. Dans la suite, nous omettrons les références à ϵ pour $\tilde{\beta}_j$ et \tilde{b}_j . Nous noterons

$$J_2 \cdot \vec{n}_T = \int_{S \times T} \frac{(x - y) \cdot \vec{n}_T}{\|x - y\|^3} dx dy, \quad (6.48)$$

la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ de

$$F(\epsilon) = \int_{S \times T_\epsilon} \frac{(x - y) \cdot \vec{n}_T}{\|x - y\|^3} dx dy. \quad (6.49)$$

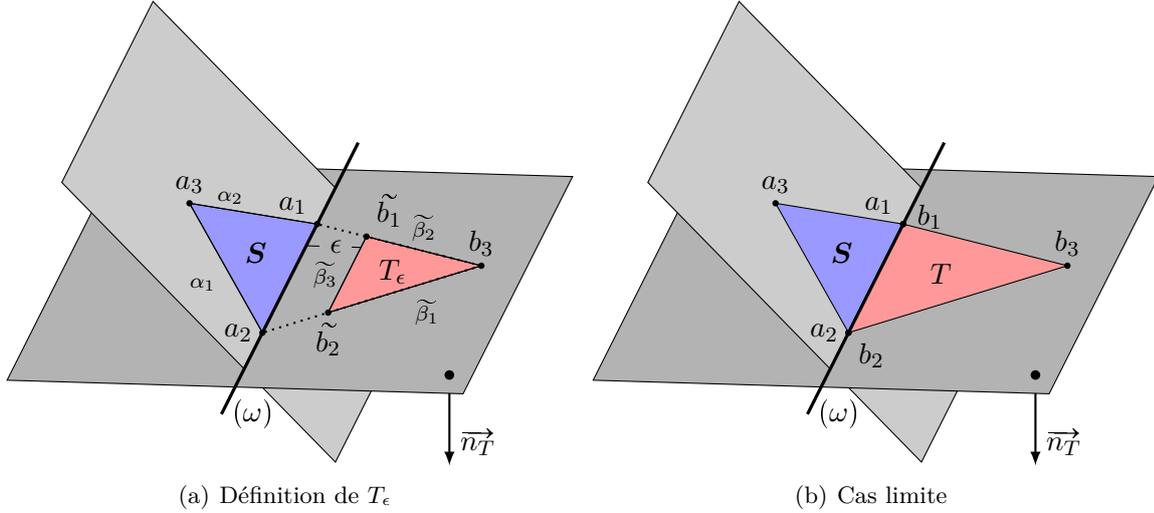


FIGURE 6.3 – Configurations géométriques pour le passage à la limite.

En appliquant la formule (2.10) on obtient une première réduction :

$$\begin{aligned}
 F(\epsilon) &= \frac{g_1}{2} \int_{\alpha_1 \times T_\epsilon} \frac{(x-y) \cdot \vec{n}_T}{\|x-y\|^3} ds_x dy + \frac{\tilde{\delta}_1(a_1)}{2} \int_{S \times \tilde{\beta}_1} \frac{(x-y) \cdot \vec{n}_T}{\|x-y\|^3} dx ds_y \\
 &+ \frac{\tilde{\delta}_3(a_1)}{2} \int_{S \times \tilde{\beta}_3} \frac{(x-y) \cdot \vec{n}_T}{\|x-y\|^3} dx ds_y,
 \end{aligned} \tag{6.50}$$

où g_1 est la hauteur issue de a_1 (voir la sous-section 3.1.1). L'intégrale selon $\tilde{\beta}_2$ n'apparaît pas puisque a_1 appartient au support de $\tilde{\beta}_2$ donc $\tilde{\delta}_2(a_1) = \delta_2(a_1) = 0$. Une seconde utilisation de la formule (2.10) conduit à une expression que l'on décompose en deux parties :

$$F(\epsilon) = F_R(\epsilon) + F_S(\epsilon). \tag{6.51}$$

Nous allons montrer que $F_S(\epsilon)$ tend vers zéro lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ et que $F_R(\epsilon)$ donnée par

$$\begin{aligned}
 F_R(\epsilon) &= |S| \mathcal{P}(a_3, T_\epsilon; 2) \cdot \vec{n}_T - \frac{\delta_1(a_1) |\tilde{\beta}_1|}{2} \mathcal{P}(b_3, S; 2) \cdot \vec{n}_T \\
 &+ \frac{g_1 \tilde{\delta}_2(a_2)}{2} \mathcal{Q}(\alpha_1, \tilde{\beta}_2; 2) \cdot \vec{n}_T + \frac{\gamma_2(\tilde{b}_2) \tilde{\delta}_1(a_1)}{2} \mathcal{Q}(\alpha_2, \tilde{\beta}_1; 2) \cdot \vec{n}_T,
 \end{aligned}$$

a pour limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ (d'après (6.6) et (6.7)) :

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_R(\epsilon) &= \left[|S| \mathcal{P}(a_3, T; 2) - |T| \mathcal{P}(b_3, S; 2) + \frac{g_1 d_2}{2} \mathcal{Q}(\alpha_1, \beta_2; 2) \right. \\
 &\left. + \frac{g_2 d_1}{2} \mathcal{Q}(\alpha_2, \beta_1; 2) \right] \cdot \vec{n}_T,
 \end{aligned}$$

qui est analogue à l'expression (6.45), obtenue pour J_0 pour les triangles sont adjacents.

A présent, nous montrons que

$$\begin{aligned} F_S(\epsilon) &= -\frac{\tilde{\delta}_3(a_1)|\tilde{\beta}_3|}{2}\mathcal{P}(\tilde{b}_2, S; 2) \cdot \vec{n}_T + \frac{\tilde{\delta}_1(a_1)\gamma_1(\tilde{b}_2)}{2}\mathcal{Q}(\alpha_1, \tilde{\beta}_1; 2) \cdot \vec{n}_T \\ &\quad + \frac{\tilde{\delta}_3(a_1)\gamma_2(\tilde{b}_1)}{2}\mathcal{Q}(\alpha_2, \tilde{\beta}_2; 2) \cdot \vec{n}_T + \frac{g_1\tilde{\delta}_3(a_2) + \tilde{\delta}_3(a_1)\gamma_1(\tilde{b}_1)}{2}\mathcal{Q}(\alpha_1, \tilde{\beta}_3; 2) \cdot \vec{n}_T \\ &\quad + \frac{\tilde{\delta}_1(a_1)\gamma_3(\tilde{b}_2)}{2}\mathcal{Q}(\alpha_3, \tilde{\beta}_1; 2) \cdot \vec{n}_T + \frac{\tilde{\delta}_3(a_1)\gamma_3(\tilde{b}_1)}{2}\mathcal{Q}(\alpha_3, \tilde{\beta}_3; 2) \cdot \vec{n}_T, \end{aligned}$$

tend vers 0 lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. A cette fin, nous décomposons $F_S(\epsilon)$ en quatre termes :

1. **Premier terme.** On pose

$$E_1(\epsilon) = -\frac{\tilde{\delta}_3(a_1)|\tilde{\beta}_3|}{2}\mathcal{P}(\tilde{b}_2, S; 2), \quad (6.52)$$

qui d'après (6.14) s'écrit aussi (en notant que $\tilde{\delta}_3(a_1) = \epsilon$),

$$E_1(\epsilon) = -\frac{\epsilon|\tilde{\beta}_3|}{2}\left\{(\tilde{b}_2 - \hat{b}_2)\mathcal{P}_1(\hat{b}_2, S, h; 2) + \mathcal{P}_2(\hat{b}_2, S, h; 2)\right\},$$

avec \hat{b}_2 la projection orthogonale de \tilde{b}_2 sur le plan contenant S et $h = \|\tilde{b}_2 - \hat{b}_2\|$. D'après (6.9) et (6.12), on a

$$E_1(\epsilon) = -\frac{\epsilon|\tilde{\beta}_3|}{2}\sum_{l=1}^3\gamma_l(\hat{b}_2)\left\{(\tilde{b}_2 - \hat{b}_2)\mathcal{R}_1(\hat{b}_2, \alpha_l, h; 2) + \mathfrak{R}_2(\hat{b}_2, \alpha_l, h; 2)\right\}.$$

A ce stade, on note que $h = \epsilon \sin(\phi) = O(\epsilon)$, où ϕ est l'angle que forment les deux plans, $(\tilde{b}_2 - \hat{b}_2) = O(\epsilon)\vec{n}_S$, où \vec{n}_S est la normale au plan contenant le triangle S et $\gamma_1(\hat{b}_2) = \gamma_3(\hat{b}_2) = O(\epsilon)$. On observe que les abscisses s_1^- et s_3^+ du sommet a_2 qui est une des extrémités de α_1 et α_3 s'écrivent $s_1^- = s_3^+ = O(\epsilon)$ et les abscisses des autres extrémités s_1^+ et s_3^- qui correspondent respectivement aux sommets a_3 et a_1 , sont fixes. L'expression explicite de \mathcal{R}_1 donnée par (B.3) implique :

$$\mathcal{R}_1(\hat{b}_2, \alpha_1, h; 2) = \mathcal{R}_1(\hat{b}_2, \alpha_3, h; 2) = O\left(\frac{\log(\epsilon)}{\epsilon^2}\right).$$

Finalement, on a,

$$\epsilon\gamma_l(\hat{b}_2)(\tilde{b}_2 - \hat{b}_2)\mathcal{R}_1(\hat{b}_2, \alpha_l, h; 2) = O(\epsilon \log(\epsilon)). \quad (6.53)$$

De même,

$$\mathcal{R}_1(\hat{b}_2, \alpha_2, h; 2) = O(\log(\epsilon)), \quad (6.54)$$

d'où,

$$\epsilon(\tilde{b}_2 - \hat{b}_2)\mathcal{R}_1(\hat{b}_2, \alpha_2, h; 2) = O(\epsilon^2 \log(\epsilon)). \quad (6.55)$$

Un raisonnement similaire permet d'écrire

$$\mathfrak{R}_2(\hat{b}_2, \alpha_1, h; 2) = \mathfrak{R}_2(\hat{b}_2, \alpha_3, h; 2) = \mathcal{R}_1(\hat{b}_2, \alpha_2, h; 2) = \mathfrak{R}_2(\hat{b}_2, \alpha_2, h; 2) = O(\log(\epsilon)),$$

soit,

$$E_1(\epsilon) = O(\epsilon \log(\epsilon)), \quad (6.56)$$

d'où $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E_1(\epsilon) = 0$.

2. Deuxième terme : Soit

$$E_2(\epsilon) = \frac{\delta_1(a_1)\gamma_1(\tilde{b}_2)}{2} \mathcal{Q}(\alpha_1, \tilde{\beta}_1; 2). \quad (6.57)$$

Les supports des deux segments ont un point d'intersection qui est le sommet a_2 . De plus, on note que le degré d'homogénéité de l'intégrand est $q = -2 = -n$. Il s'agit par conséquent de la situation où $q + n = 0$; c'est donc la formule (2.16) qui conduit à la réduction suivante :

$$E_2(\epsilon) = \frac{\delta_1(a_1)\gamma_1(\tilde{b}_2)}{2} \left\{ |\alpha_2| \int_{\tilde{\beta}_1} \frac{(a_3 - y)}{\|a_3 - y\|^3} \ln(\|a_3 - y\|) ds_y \right. \\ \left. + |\beta_3| \int_{\alpha_1} \frac{(x - b_3)}{\|x - b_3\|^3} \ln(\|x - b_3\|) ds_x - t \int_{\alpha_1} \frac{(x - \tilde{b}_2)}{\|x - \tilde{b}_2\|^3} \ln(\|x - \tilde{b}_2\|) ds_x \right\},$$

où t est l'abscisse de \tilde{b}_2 . Les deux premières intégrales sont finies, seule la troisième intégrale est à étudier :

$$\int_{\alpha_1} \frac{(x - \tilde{b}_2)}{\|x - \tilde{b}_2\|^3} \ln(\|x - \tilde{b}_2\|) ds_x = \int_{\alpha_1} \frac{(x - \check{b}_2)}{2 \left(h^2 + \|x - \check{b}_2\|^2 \right)^{3/2}} \ln(h^2 + \|x - \check{b}_2\|) ds_x \\ + (\check{b}_2 - \tilde{b}_2) \int_{\alpha_1} \frac{\ln(h^2 + \|x - \check{b}_2\|)}{2 \left(h^2 + \|x - \check{b}_2\|^2 \right)^{3/2}} ds_x$$

La première intégrale se comporte en $O\left(\frac{\ln(\epsilon)}{\epsilon}\right)$ alors que la seconde se comporte en $O\left(\frac{\ln(\epsilon)}{\epsilon^2}\right)$. Cependant, en notant que $t \gamma_1(\tilde{b}_2) = O(\epsilon^2)$ et $(\check{b}_2 - \tilde{b}_2) = O(\epsilon) \vec{n}_S$, on obtient le résultat :

$$E_2(\epsilon) = O(\epsilon \log(\epsilon)), \quad (6.58)$$

ainsi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E_2(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(a_1)\gamma_1(\tilde{b}_2)}{2} \int_{\alpha_1 \times \tilde{\beta}_1} \frac{(x - y)}{\|x - y\|^3} ds_x ds_y = 0 \quad (6.59)$$

et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_3(a_1)\gamma_2(\hat{b}_1)}{2} \int_{\alpha_2 \times \tilde{\beta}_2} \frac{(x - y)}{\|x - y\|^3} ds_x ds_y = 0 \quad (6.60)$$

3. Troisième terme : Puisque $\delta_3(a_1) = \delta_3(a_2) = \epsilon$, on étudie le terme,

$$E_3(\epsilon) = \epsilon \mathcal{Q}(\alpha_1, \tilde{\beta}_3; 2). \quad (6.61)$$

On introduit la perpendiculaire commune aux supports de α_1 et $\tilde{\beta}_3$ (voir Figure 5.6), ainsi que les projections $\hat{\beta}_3, \hat{b}^\pm$ de $\tilde{\beta}_3$ et de ses extrémités sur le plan contenant le triangle S . Le vecteur $\vec{z} = \hat{b}_2 - \tilde{b}_2$ est alors un vecteur directeur de la perpendiculaire commune (voir Figure 6.4) et

$$\mathcal{Q}(\alpha_1, \tilde{\beta}_3; 2) = \int_{\alpha_1 \times \hat{\beta}_3} \frac{(x - \hat{y})}{(h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{3/2}} ds_x ds_{\hat{y}} + \vec{v} \int_{\alpha_1 \times \hat{\beta}_3} \frac{1}{(h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{3/2}} ds_x ds_{\hat{y}}.$$

Avec comme origine l'intersection des supports de $\hat{\beta}_3$ et α_1 , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\alpha_1, \tilde{\beta}_3; 2) &= \sum_{k=\pm} k s^k \left[\mathfrak{R}_2(a^k, \hat{\beta}_3, h; 2) + \vec{v} R_1(a^k, \hat{\beta}_3, h; 2) \right] \\ &\quad - \sum_{l=\pm} l t^l \left[\mathfrak{R}_2(\hat{b}^l, \alpha_1, h; 2) - \vec{v} R_1(\hat{b}^l, \alpha_1, h; 2) \right]. \end{aligned}$$

On obtient donc que

$$E_3(\epsilon) = O(\epsilon \log(\epsilon)). \quad (6.62)$$

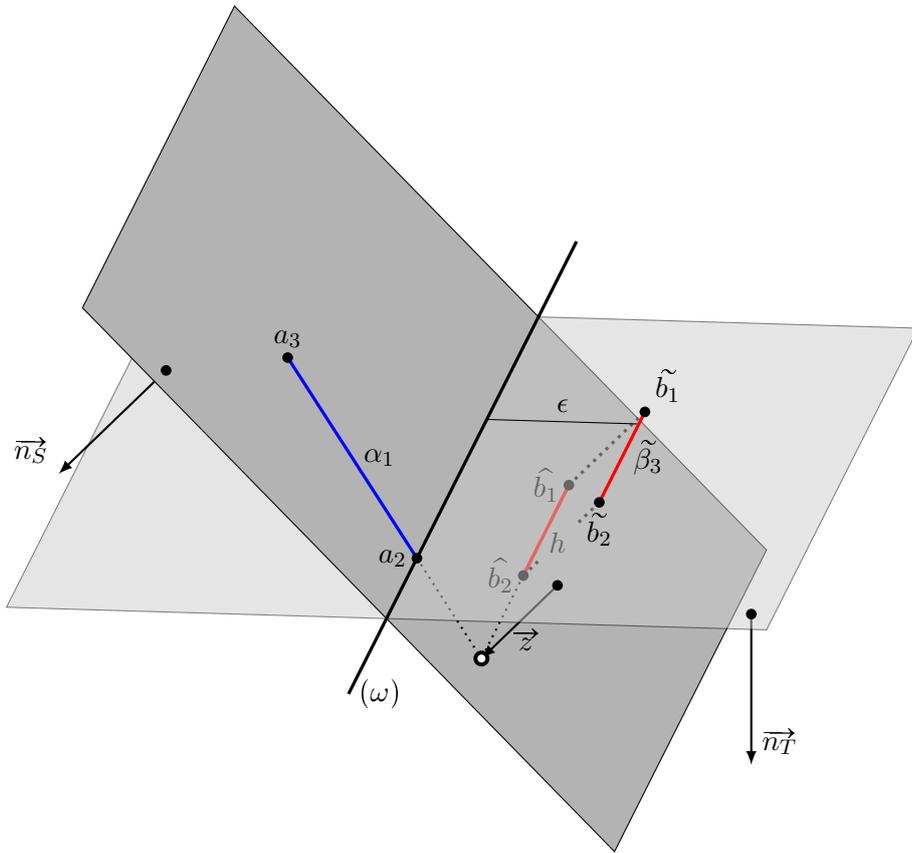


FIGURE 6.4 – Perpendiculaire commune.

4. **Dernier terme** : Lorsque $x \in \alpha_3$ et $y \in \tilde{\beta}$, on a la simplification $(x - y) \cdot \vec{n}_T = 0$ donc

$$\mathcal{Q}(\alpha_3, \tilde{\beta}_3; 2) \cdot \vec{n}_T = \mathcal{Q}(\alpha_3, \tilde{\beta}_1; 2) \cdot \vec{n}_T = 0. \quad (6.63)$$

Notons que la réduction de $\mathcal{Q}(\alpha_3, \tilde{\beta}_3; 2)$ et de $\mathcal{Q}(\alpha_3, \tilde{\beta}_1; 2)$, conduit à des expressions explicites qui permettent de montrer le résultat suivant :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_3(a_1) \gamma_3(\hat{b}_1)}{2} \mathcal{Q}(\alpha_3, \tilde{\beta}_3; 2) = \frac{\delta_1(a_1) \gamma_3(\hat{b}_2)}{2} \mathcal{Q}(\alpha_3, \tilde{\beta}_1; 2) = 0. \quad (6.64)$$

Résultat Final

D'après (6.63), (6.56), (6.58) et (6.62), lorsque S et T sont des triangles adjacents dans des plans sécants, en définissant $J_2 \cdot \vec{n}_T$ comme la limite de $F(\epsilon)$, on obtient la formule explicite suivante :

$$J_2 \cdot \vec{n}_T = \left[|S| \mathcal{P}(a_3, T; 2) - |T| \mathcal{P}(b_3, S; 2) + \frac{g_1 d_2}{2} \mathcal{Q}(\alpha_1, \beta_2; 2) + \frac{g_2 d_1}{2} \mathcal{Q}(\alpha_2, \beta_1; 2) \right] \cdot \vec{n}_T. \quad (6.65)$$

Un raisonnement similaire permet de montrer que lorsque S et T ont un sommet commun (noté $a_1 = b_1$), on a

$$J_2 \cdot \vec{n}_T = \left[\frac{g_1}{2} \int_{\alpha_1 \times T} \frac{x - y}{\|x - y\|^3} ds_x dy + \frac{d_1}{2} \int_{S \times \beta_1} \frac{x - y}{\|x - y\|^3} dx ds_y \right] \cdot \vec{n}_T. \quad (6.66)$$

Les expressions (6.65) et (6.66) s'obtiennent en utilisant la méthode dite *naïve* qui consiste à annuler toutes les expressions faisant intervenir des distances nulles (voir la sous-section 14.4.1 qui utilise cette méthode *naïve* pour calculer des parties finies).

Conclusion du chapitre

Il n'y a pas de réelle difficulté supplémentaire pour passer du potentiel de simple couche au potentiel de double couche. L'intégrand étant vectoriel, il est nécessaire de le décomposer à chaque étape pour conserver l'homogénéité. La méthode permet de calculer J_2 lorsque les triangles sont adjacents.

Conclusion de la deuxième partie

Dans cette partie, nous avons obtenu des formules explicites pour évaluer les intégrales

$$I = \int_{S \times T} \frac{1}{\|x - y\|} dx dy, \quad (6.67)$$

lorsque S et T sont deux triangles coplanaires ou dans des plans sécants, et les deux intégrales

$$J_\zeta = \int_{S \times T} \frac{x - y}{\|x - y\|^{(1+\zeta)}} dx dy, \quad \zeta \in \{0, 2\} \quad (6.68)$$

lorsque S et T sont dans des plans sécants.

Lorsque les intégrales sont effectivement singulières (triangles identiques, adjacents ou ayant un sommet commun) les formules obtenues sont relativement simples. Des résultats numériques montrent la grande précision des formules obtenues.

Dans le dernier chapitre, on a déterminé une expression de

$$\text{v.p.} \int_{S \times T} \frac{x - y}{\|x - y\|^3} dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S \times T_\epsilon} \frac{x - y}{\|x - y\|^3} dx dy \quad (6.69)$$

lorsque les triangles S et T sont adjacents ou lorsqu'ils ont un sommet commun. L'existence de cette limite est une conséquence d'un théorème de Costabel.

Troisième partie

Triangles dans des plans parallèles

Table des matières

7	Introduction	93
7.1	Notations	94
7.2	Organisation des calculs	94
8	Triangles superposés	97
8.1	Réduction à la dimension 3	97
8.2	Réduction à la dimension 2	98
8.3	Réduction à la dimension 1	98
8.3.1	Réduction de $\mathcal{P}^s(a, S, h; \zeta)$	99
8.3.2	Réduction de $\mathcal{Q}^s(\alpha_i, \alpha_{i+1}, h; \zeta)$	99
8.4	Retour à J_ζ et I	99
9	Triangles dans des plans parallèles en positions quelconques	101
9.1	Partie symétrique	101
9.1.1	Réduction à la dimension 3	101
9.1.2	Réduction à la dimension 2	101
9.1.3	Réduction à la dimension 1	102
9.2	Partie antisymétrique	103
9.2.1	Réduction à la dimension 3	104
9.2.2	Réduction à la dimension 2	104
9.2.3	Réduction à la dimension 1	104
9.3	Calcul de I	107
9.4	Cas particuliers	107
9.4.1	Triangles ayant un sommet commun	107
9.4.2	Triangles presque-adjacents	107
9.5	Calcul des expressions finales	108
9.5.1	Calcul de $\Phi_a^c(h, \eta; \zeta)$	108
9.5.2	Calcul de $\tilde{\Phi}_a^c(h, d, \eta; \zeta)$	108
9.5.3	Remarque	109
10	Résultats numériques	111
10.1	L'angle solide	111
10.2	Triangles presque superposés	112
10.3	Etude du presque-parallélisme entre côtés de triangles	113

Introduction de la troisième partie

Dans cette partie, nous fournissons des formules explicites pour évaluer les trois intégrales

$$\begin{aligned} I &= \int_{S \times T} \frac{1}{\|x - y\|} dx dy, \\ J_\zeta &= \int_{S \times T} \frac{x - y}{\|x - y\|^{1+\zeta}} dx dy, \quad \zeta = 0 \text{ ou } 2, \end{aligned} \quad (6.70)$$

lorsque S et T sont dans des plans parallèles.

Nous commençons par présenter le cas plus simple des triangles superposés, puis nous traitons du cas de triangles situés dans des plans parallèles en position quelconque; enfin nous présentons quelques résultats numériques afin de montrer l'intérêt de la méthode.

Introduction

Cette partie traite de l'évaluation des intégrales I et J_ζ ci-dessous :

$$I = \int_{S \times T} \frac{1}{\|x - y\|} dx dy \quad (7.1)$$

$$J_\zeta = \int_{S \times T} \frac{x - y}{\|x - y\|^{1+\zeta}} dx dy, \zeta \in \{0, 2\} \quad (7.2)$$

lorsque les triangles S et T sont dans des plans parallèles. La comparaison avec le cas de triangles coplanaires ou situés dans des plans sécants fait apparaître une différence essentielle : c'est dès la première étape de réduction qu'on doit utiliser la formule (2.34), dite formule à paramètre, à la place de la formule (2.10). Pour le confort du lecteur, nous rappelons ici cette formule : soit $g : (z, h) \in \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction q -homogène par rapport au couple (z, h) , alors

$$\int_{\Omega} g(z, h) dz = \int_{\partial\Omega} (\vec{z} | \vec{\nu}) F(z, h) ds_z \quad (7.3)$$

avec,

$$F(z, h) = h^{q+n} \int_h^{\text{sgn}(h)\infty} \frac{g(z, u)}{u^{q+n+1}} du. \quad (7.4)$$

La complexité plus grande des formules dans le cas de triangles situés dans des plans parallèles découle de cette utilisation précoce de la formule (2.34), l'intégrand étant modifié à chaque étape de la réduction. Un ingrédient essentiel pour simplifier le calcul consiste à inverser l'ordre naturel des trois intégrales successives conduisant à l'expression des intégrands mono-dimensionnels. Il a donc été jugé préférable de ne pas effectuer le calcul explicite de ces intégrands au cours du processus de réduction, de façon à bénéficier de cette souplesse (voir la section 9.5). Il faut noter, qu'à la différence de nombreuses autres méthodes d'évaluation d'intégrales singulières et presque-singulières, aucune difficulté supplémentaire n'apparaît lorsque les triangles se recouvrent partiellement (voir la Figure 7.1).

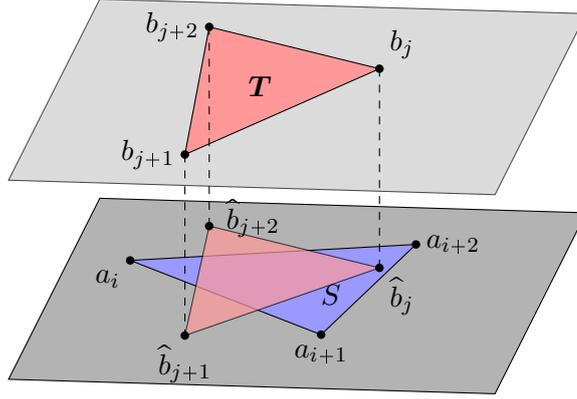


FIGURE 7.1 – Configuration géométrique prise en compte par la méthode.

7.1. Notations

Quelques notations nouvelles vont se révéler nécessaires : on note \hat{T} et \hat{b}_j les projections respectives du triangle T et de ses sommets b_j sur le plan contenant le triangle S , ainsi que $\hat{\beta}_j$ celles des arêtes β_j du triangle T (voir Figure 7.2). Les projections et les distances dans les triangles \hat{T} sont définies de façon analogue à celles dans le triangle T : on note $\hat{q}_j(x)$ la projection de x , point du plan contenant S et \hat{T} , sur le support de $\hat{\beta}_j$, $\hat{d}_j(x)$ et $\hat{\delta}_j(x)$ respectivement les distances et distances signées du point x au côté $\hat{\beta}_j$ du triangle \hat{T} (voir Figure 7.3).

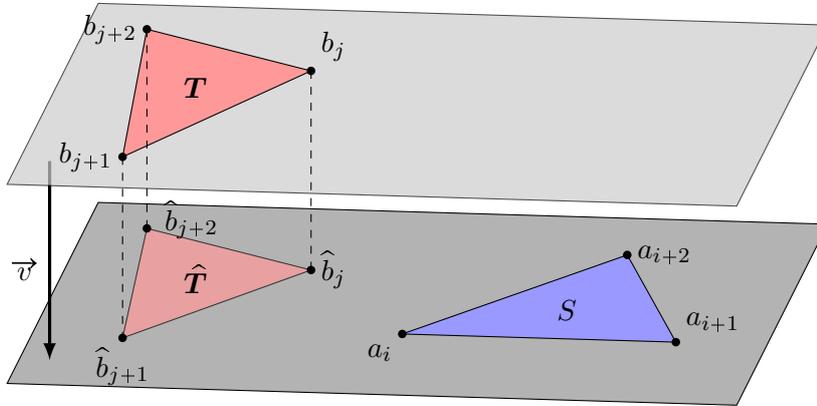


FIGURE 7.2 – Triangles dans des plans parallèles.

7.2. Organisation des calculs

Remarquons que J_ζ se décompose en deux intégrales :

$$J_\zeta = \int_{S \times T} \frac{x - y}{\|x - y\|^{1+\zeta}} dx dy = \vec{v} J_\zeta^s + J_\zeta^a, \quad (7.5)$$

avec

$$J_\zeta^s = \int_{S \times \hat{T}} \frac{1}{(h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{(1+\zeta)/2}} dx d\hat{y} \text{ et } J_\zeta^a = \int_{S \times \hat{T}} \frac{x - \hat{y}}{(h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{(1+\zeta)/2}} dx d\hat{y}, \quad (7.6)$$

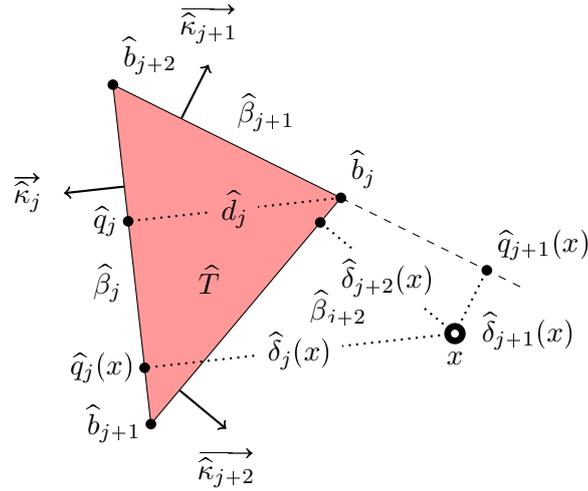


FIGURE 7.3 – Projection et distance dans \hat{T} .

or l'intégrale I s'écrit,

$$I = \int_{S \times T} \frac{1}{\|x - y\|} dx dy = \int_{S \times \hat{T}} \frac{1}{\sqrt{h^2 + \|x - \hat{y}\|^2}} dx d\hat{y}, \quad (7.7)$$

on a donc $I = J_0^s$. Contrairement à la partie **II**, nous commençons donc par l'étude de J_ζ , dont nous déduisons celle de l'intégrale I .

Dans le cadre de cette troisième partie, on note \vec{n}_T la normale au plan contenant le triangle T , alors $J_\zeta^a \cdot \vec{n}_T = 0$, puisque $(x - \hat{y}) \cdot \vec{n}_T = 0$, ce qui nous dispense du calcul de ce terme pour la discrétisation de l'équation de Helmholtz ; nous calculons cependant J_ζ^a , terme qui interviendra au chapitre **13** lors de la discrétisation des équations de Maxwell.

Triangles superposés

Introduction

Ce chapitre détaille le calcul de l'influence entre deux triangles superposés, soit $\hat{T} = S$ (voir Figure 8.1). Notons que dans ce cas le terme antisymétrique J_ζ^a s'annule, ce qui ne nous laisse à traiter que

$$J_\zeta^s = \int_{S \times S} \frac{1}{(h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{(1+\zeta)/2}} dx d\hat{y}.$$

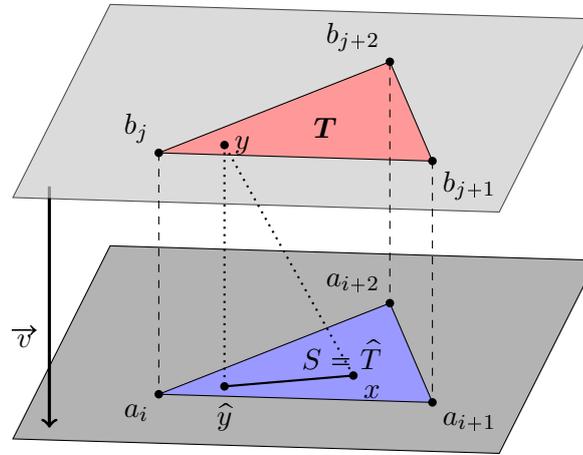


FIGURE 8.1 – Triangles superposés.

8.1. Réduction à la dimension 3

On note que $\Omega = S \times S$ donc $n = 4$ et on choisit a_i pour origine. En appliquant la formule (2.34) avec $z = (x, \hat{y})$ et $g(z, h) = (h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{-(1+\zeta)/2}$, on a

$$J_\zeta^s = 2g_i \int_{\alpha_i \times S} h^{3-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{du}{u^{4-\zeta} (u^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{(1+\zeta)/2}} ds_x d\hat{y}, \quad (8.1)$$

puisque $q+n = 3-\zeta$. On rappelle que g_i est la distance du sommet a_i au côté opposé α_i . Ainsi que nous l'avions annoncé, nous ne déterminons pas d'expression explicite pour

l'intégrale interne, nous nous contentons de la notation

$$f_a(h, \eta; \zeta) = h^{a-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{du}{u^{a+1-\zeta}(u^2 + \eta^2)^{(1+\zeta)/2}}, \quad (8.2)$$

qui constitue une généralisation de la fonction f_1 , définie en (4.16) dans la sous-section 4.4.3. On reconnaît la fonction $f_3(h, \|x - \hat{y}\|; \zeta)$ dans l'expression (8.1), ce qui permet d'écrire

$$J_\zeta^s = 2g_i \int_{\alpha_i \times S} f_3(h, \|x - \hat{y}\|; \zeta) ds_x d\hat{y} = 2g_i \mathcal{U}^s(\alpha_i, S, h; \zeta), \quad (8.3)$$

avec

$$\mathcal{U}^s(\alpha, S, h; \zeta) = \int_{\alpha \times S} f_3(h, \|x - \hat{y}\|; \zeta) ds_x d\hat{y}. \quad (8.4)$$

8.2. Réduction à la dimension 2

Pour poursuivre la réduction, il faut choisir une nouvelle origine appartenant au support de α_i (voir Figure 3.5), soit a_{i+1} . Selon la formule (2.34) avec $q + n = 2 - \zeta$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_i \times S} f_3(h, \|x - \hat{y}\|; \zeta) ds_x d\hat{y} &= |\alpha_i| \int_S h^{2-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{f_3(u, \|a_{i+2} - \hat{y}\|; \zeta)}{u^{3-\zeta}} du d\hat{y} \\ &+ g_{i+1} \int_{\alpha_i \times \alpha_{i+1}} h^{2-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{f_3(u, \|x - \hat{y}\|; \zeta)}{u^{3-\zeta}} du ds_x ds_{\hat{y}}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

On introduit une nouvelle notation :

$$\mathfrak{F}_a(h, \eta; \zeta) = h^{a-1-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{f_a(u, \eta; \zeta)}{u^{a-\zeta}} du, \quad (8.6)$$

d'où l'expression similaire à (3.12) :

$$\mathcal{U}^s(\alpha_i, S, h; \zeta) = |\alpha_i| \mathcal{P}^s(a_{i+2}, S, h; \zeta) + g_{i+1} \mathcal{Q}^s(\alpha_i, \alpha_{i+1}, h; \zeta), \quad (8.7)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^s(a, S, h; \zeta) &= \int_S \mathfrak{F}_3(h, \|a - \hat{y}\|; \zeta) d\hat{y}, \\ \mathcal{Q}^s(\alpha_i, \alpha_{i+1}, h; \zeta) &= \int_{\alpha_i \times \alpha_{i+1}} \mathfrak{F}_3(h, \|x - \hat{y}\|; \zeta) ds_x ds_{\hat{y}}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

8.3. Réduction à la dimension 1

Nous transformons maintenant les deux expressions de (8.8) en des combinaisons linéaires d'intégrales mono-dimensionnelles.

8.3.1 Réduction de $\mathcal{P}^s(a, S, h; \zeta)$

Le degré d'homogénéité de l'intégrand reste inchangé soit $q + n = 1 - \zeta$. En prenant a_{i+2} comme origine, on obtient

$$\mathcal{P}^s(a_{i+2}, S, h; \zeta) = g_{i+2} \int_{\alpha_{i+2}} h^{1-\zeta} \int_h^\infty \frac{\mathfrak{F}_3(u, \|a_{i+2} - \hat{y}\|; \zeta)}{u^{2-\zeta}} du ds_{\hat{y}}. \quad (8.9)$$

En définissant la fonction,

$$\Phi_a^c(h, \eta; \zeta) = h^{c-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{\mathfrak{F}_a(u, \eta; \zeta)}{u^{c+1-\zeta}} du \quad (8.10)$$

on reconnaît Φ_3^1 dans l'expression (8.9), qui se réduit donc à

$$\mathcal{P}^s(a_{i+2}, S, h; \zeta) = g_{i+2} \int_{\alpha_{i+2}} \Phi_3^1(h, \|a_{i+2} - y\|; \zeta) ds_{\hat{y}}$$

Pour achever cette réduction, on introduit une dernière fonction

$$\mathbb{R}_3^1(a, \alpha, h; \zeta) = \int_\alpha \Phi_3^1(h, \|a - x\|; \zeta) ds_x \quad (8.11)$$

et ainsi,

$$\mathcal{P}^s(a_{i+2}, S, h; \zeta) = g_{i+2} \mathbb{R}_3^1(a_{i+2}, \alpha_{i+2}, h; \zeta) \quad (8.12)$$

8.3.2 Réduction de $\mathcal{Q}^s(\alpha_i, \alpha_{i+1}, h; \zeta)$

On choisit a_{i+2} , l'intersection de α_i et α_{i+1} , pour origine. Comme en (3.15), nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^s(\alpha_i, \alpha_{i+1}, h; \zeta) &= |\alpha_i| \int_{\alpha_{i+1}} h^{1-\zeta} \int_h^\infty \frac{\mathfrak{F}_3(u, \|a_i - \hat{y}\|; \zeta)}{u^{2-\zeta}} du ds_{\hat{y}} \\ &\quad + |\alpha_{i+1}| \int_{\alpha_i} h^{1-\zeta} \int_h^\infty \frac{\mathfrak{F}_3(u, \|a_{i+1} - x\|; \zeta)}{u^{2-\zeta}} du ds_x. \end{aligned}$$

A l'aide de \mathbb{R}_3^1 défini en (8.11), on obtient l'expression

$$\mathcal{Q}^s(\alpha_i, \alpha_{i+1}, h; \zeta) = |\alpha_i| \mathbb{R}_3^1(a_{i+1}, \alpha_{i+1}, h; \zeta) + |\alpha_{i+1}| \mathbb{R}_3^1(a_i, \alpha_i, h; \zeta). \quad (8.13)$$

L'expression de \mathbb{R}_3^1 est donnée par (C.8) de l'Annexe C.

8.4. Retour à J_ζ et I

D'après (8.3), (8.7), (8.12), et (8.13), on obtient :

$$J_\zeta^s = 2|S| \sum_{i=1}^3 g_i \mathbb{R}_3^1(a_i, \alpha_i, h; \zeta), \quad (8.14)$$

ce qui donne le résultat final :

$$J_\zeta = 2 |S| \vec{v} \sum_{i=1}^3 g_i R_3^1(a_i, \alpha_i, h; \zeta), \quad (8.15)$$

où $|S|$ est l'aire du triangle de S . D'après l'expression (7.7), on obtient I :

$$I = 2 |S| \sum_{i=1}^3 g_i R_3^1(a_i, \alpha_i, h; 0), \quad (8.16)$$

dont la limite quand $h \rightarrow 0$ est l'expression (3.17) déterminée dans le cas de coefficient d'auto-influence.

Triangles dans des plans parallèles en positions quelconques

Introduction

Le cas de triangles en position générale se traite de façon analogue (voir Figure 7.2) en ce qui concerne la partie symétrique ; nous commençons donc par sa détermination. Le cas de la partie antisymétrique est traitée dans un second temps.

9.1. Partie symétrique

9.1.1 Réduction à la dimension 3

Pour cette première réduction, la seule contrainte consiste à choisir l'origine dans le plan de S ; ce que l'on fait en choisissant le sommet a_i . En s'inspirant de (8.1) et en notant que $q + n = 3 - \zeta$, la formule (2.34) fournit l'expression

$$J_\zeta^s = g_i \int_{\alpha_i \times \hat{T}} f_3(h, \|x - \hat{y}\|; \zeta) ds_x d\hat{y} + \sum_{j=1}^3 \hat{\delta}_j(a_i) \int_{S \times \hat{\beta}_j} f_3(h, \|x - \hat{y}\|; \zeta) dx ds_{\hat{y}},$$

qui à l'aide de (8.4) prend la forme suivante :

$$J_\zeta^s = g_i \mathcal{U}^s(\alpha_i, \hat{T}, h; \zeta) + \sum_{j=1}^3 \hat{\delta}_j(a_i) \mathcal{U}^s(\hat{\beta}_j, S, h; \zeta). \quad (9.1)$$

9.1.2 Réduction à la dimension 2

Comme pour (8.7), la réduction de $\mathcal{U}^s(\alpha_i, \hat{T}, h; \zeta)$ utilise \mathcal{P}^s et \mathcal{Q}^s . En prenant $a_i^- = a_{i+1}$ comme origine, on a

$$\mathcal{U}^s(\alpha_i, \hat{T}, h; \zeta) = |\alpha_i| \mathcal{P}^s(a_{i+2}, \hat{T}, h; \zeta) + \sum_{j=1}^3 \hat{\delta}_j(a_{i+1}) \mathcal{Q}^s(\alpha_i, \hat{\beta}_j, h; \zeta), \quad (9.2)$$

avec \mathcal{P}^s et \mathcal{Q}^s définis en (8.8)

9.1.3 Réduction à la dimension 1

La réduction de \mathcal{P}^s se déduit des cas traités précédemment. Pour \mathcal{Q}^s , il faut distinguer entre les cas où les supports de α et $\hat{\beta}$ sont sécants ou parallèles.

Réduction de $\mathcal{P}^s(a_{i+2}, \hat{T}, h)$

Comme en (4.9) et en (8.12), on a

$$\mathcal{P}^s(a_{i+2}, \hat{T}, h; \zeta) = \sum_{j=1}^3 \hat{\delta}_j(a_{i+2}) R_3^1(a_{i+2}, \hat{\beta}_j, h; \zeta). \quad (9.3)$$

Réduction de $\mathcal{Q}^s(\alpha_i, \hat{\beta}_j, h)$, cas des supports sécants

Lorsque α_i et $\hat{\beta}_j$ sont à supports sécants, on choisit l'intersection comme origine et en s'inspirant de (8.13) (voir la Figure 9.1), on obtient

$$\mathcal{Q}^s(\alpha_i, \hat{\beta}_j, h; \zeta) = \sum_{k=\pm} k s^k R_3^1(a_i^k, \hat{\beta}_j, h; \zeta) + \sum_{l=\pm} l \hat{t}^l R_3^1(\hat{b}_j^l, \alpha_i, h; \zeta) \quad (9.4)$$

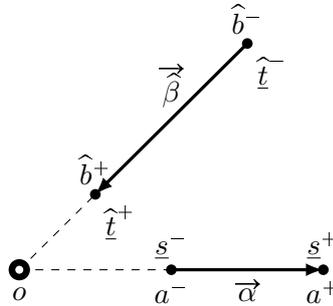


FIGURE 9.1 – Cas des supports de $\hat{\beta}$ (la projection de β sur le plan de S) et α sécants.

Réduction de $\mathcal{Q}^s(\alpha_i, \hat{\beta}_j, h)$, cas des supports parallèles

Lorsque les supports de α_i et $\hat{\beta}_j$ sont parallèles, un second paramètre apparaît pour conserver l'homogénéité (voir la Figure 9.2). Une méthode analogue à celle présentée dans la sous-section 5.3.3 est utilisée. On introduit donc $\tilde{\alpha}_i$ et d respectivement la projection de α_i sur le support de $\hat{\beta}_j$ et la distance de α_i au support de $\hat{\beta}_j$. Pour simplifier les calculs, on choisit pour origine \hat{b}_j^- et on note que $q + n = 1 - \zeta$:

$$\mathcal{Q}^s(\alpha_i, \hat{\beta}_j, h; \zeta) = \int_{\tilde{\alpha}_i \times \hat{\beta}_j} \mathfrak{F}_3(h, \sqrt{d^2 + \|\tilde{x} - \hat{y}\|^2}; \zeta) ds_{\tilde{x}} ds_{\hat{y}}. \quad (9.5)$$

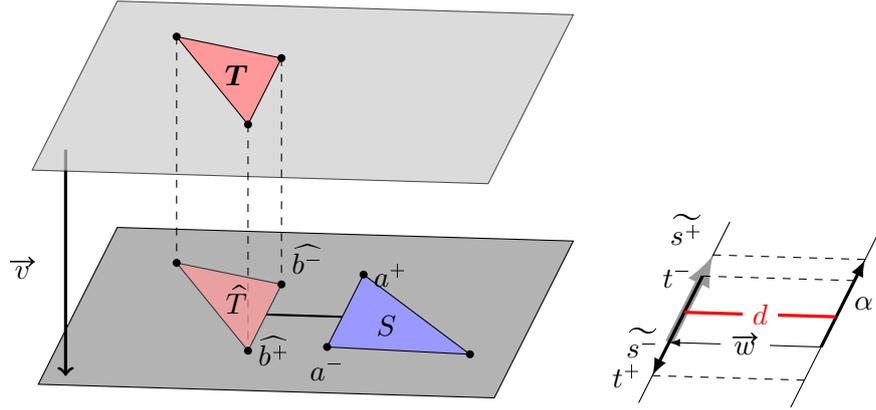


FIGURE 9.2 – Segments de projections parallèles

En posant $\lambda = d/h$ puis en appliquant la formule (2.34), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^s(\alpha_i, \hat{\beta}_j, h; \zeta) &= \sum_{k=\pm} k \underline{s}^k \int_{\hat{\beta}_j} h^{1-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{\mathfrak{F}_3(u, \sqrt{\lambda^2 u^2 + \|\tilde{a}_i^k - \hat{y}\|^2}; \zeta)}{u^{2-\zeta}} du ds_{\hat{y}} \\ &+ \sum_{l=\pm} l \underline{t}^l \int_{\tilde{\alpha}_i} h^{1-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{\mathfrak{F}_3(u, \sqrt{\lambda^2 u^2 + \|\tilde{x} - \hat{b}_j^l\|^2}; \zeta)}{u^{2-\zeta}} du ds_{\tilde{x}}. \end{aligned}$$

On définit une fonction analogue à (8.10) pour le cas parallèle :

$$\tilde{\Phi}_a^c(h, d, \eta; \zeta) = h^{c-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{\mathfrak{F}_a(u, \sqrt{(\frac{d}{h})^2 u^2 + \eta^2}; \zeta)}{u^{c+1-\zeta}} du, \quad (9.6)$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^s(\alpha_i, \hat{\beta}_j, h; \zeta) &= \sum_{k=\pm} k \underline{s}^k \int_{\hat{\beta}_j} \tilde{\Phi}_3^1(h, d, \|\tilde{a}_i^k - \hat{y}\|; \zeta) ds_{\hat{y}} \\ &+ \sum_{l=\pm} l \underline{t}^l \int_{\tilde{\alpha}_i} \tilde{\Phi}_3^1(h, d, \|\tilde{x} - \hat{b}_j^l\|; \zeta) ds_{\tilde{x}}. \end{aligned}$$

La forme réduite suivante pour \mathcal{Q}^s en découle :

$$\mathcal{Q}^s(\alpha_i, \hat{\beta}_j, h; \zeta) = \sum_{k=\pm} k \underline{s}^k \tilde{\mathbb{R}}_3^1(\tilde{a}_i^k, \hat{\beta}_j, h, d; \zeta) + \sum_{l=\pm} l \underline{t}^l \tilde{\mathbb{R}}_3^1(\hat{b}_j^l, \tilde{\alpha}_i, h, d; \zeta), \quad (9.7)$$

où

$$\tilde{\mathbb{R}}_3^1(\hat{b}, \tilde{\alpha}, h, d; \zeta) = \int_{\tilde{\alpha}} \tilde{\Phi}_3^1(h, d, \|\tilde{x} - \hat{b}\|; \zeta) ds_{\tilde{x}}. \quad (9.8)$$

9.2. Partie antisymétrique

On rappelle que

$$J_\zeta^a = \int_{S \times \hat{T}} \frac{x - \hat{y}}{(h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{(1+\zeta)/2}} dx d\hat{y}.$$

9.2.1 Réduction à la dimension 3

Comme pour la partie symétrique (voir Figure 7.2), on choisit a_i pour origine et en notant que $q + n = 4 - \zeta$; on peut utiliser (2.34) :

$$J_\zeta^a = g_i \int_{\alpha_i \times \hat{T}} (x - \hat{y}) h^{4-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{du}{u^{5-\zeta} (u^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{(1+\zeta)/2}} ds_x d\hat{y} \quad (9.9)$$

$$+ \sum_{j=1}^3 \hat{\delta}_j(a_i) \int_{S \times \hat{\beta}_j} (x - \hat{y}) h^{4-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{du}{u^{5-\zeta} (u^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{(1+\zeta)/2}} dx ds_{\hat{y}}. \quad (9.10)$$

Or d'après (8.2), on note que l'on peut utiliser la fonction f_4 , ce qui donne la version réduite

$$J_\zeta^a = g_i \mathcal{U}^a(\alpha_i, \hat{T}, h; \zeta) - \sum_{j=1}^3 \hat{\delta}_j(a_i) \mathcal{U}^a(\hat{\beta}_j, S, h; \zeta), \quad (9.11)$$

où,

$$\mathcal{U}^a(\alpha, \hat{T}, h; \zeta) = \int_{\alpha \times \hat{T}} (x - \hat{y}) f_4(h, \|x - \hat{y}\|; \zeta) ds_x d\hat{y}. \quad (9.12)$$

9.2.2 Réduction à la dimension 2

On continue la simplification en choisissant a_{i+1} pour origine et en notant que $q + n = 3 - \zeta$. A l'aide de (8.6), on obtient :

$$\mathcal{U}^a(\alpha_i, \hat{T}, h; \zeta) = |\alpha_i| \int_{\hat{T}} (a_{i+2} - \hat{y}) \mathfrak{F}_4(h, \|a_{i+2} - \hat{y}\|; \zeta) d\hat{y} \quad (9.13)$$

$$+ \sum_{j=1}^3 \hat{\delta}_j(a_{i+1}) \int_{\alpha_i \times \hat{\beta}_j} (x - \hat{y}) \mathfrak{F}_4(h, \|x - \hat{y}\|; \zeta) ds_x ds_{\hat{y}}, \quad (9.14)$$

qui se réduit, par analogie avec la partie symétrique (9.1) à

$$\mathcal{U}^a(\alpha_i, \hat{T}, h; \zeta) = |\alpha_i| \mathcal{P}^a(a_{i+2}, \hat{T}, h; \zeta) + \sum_{j=1}^3 \hat{\delta}_j(a_{i+1}) \mathcal{Q}^a(\alpha_i, \hat{\beta}_j, h; \zeta) \quad (9.15)$$

en introduisant

$$\mathcal{P}^a(a_{i+2}, \hat{T}, h; \zeta) = \int_{\hat{T}} (a_{i+2} - \hat{y}) \mathfrak{F}_4(h, \|a_{i+2} - \hat{y}\|; \zeta) d\hat{y}, \quad (9.16)$$

$$\mathcal{Q}^a(\alpha, \hat{\beta}_j, h; \zeta) = \int_{\alpha \times \hat{\beta}_j} (x - \hat{y}) \mathfrak{F}_4(h, \|x - \hat{y}\|; \zeta) ds_x ds_{\hat{y}}. \quad (9.17)$$

9.2.3 Réduction à la dimension 1

En ce qui concerne \mathcal{Q}^a en (9.17), il est nécessaire de prendre en compte le possible parallélisme entre les segments α et $\hat{\beta}_j$.

Réduction de $\mathcal{P}^a(a_{i+2}, \widehat{T}, h; \zeta)$

A ce stade, a_{i+2} est le seul choix possible pour l'origine. On note que $q + n = 2 - \zeta$, ce qui donne après utilisation des expressions (2.34) et (8.10)

$$\mathcal{P}^a(a_{i+2}, \widehat{T}, h; \zeta) = \sum_{j=1}^3 \widehat{\delta}_j(a_{i+2}) \int_{\widehat{\beta}_j} (a_{i+2} - \widehat{y}) \Phi_4^2(h, \|a_{i+2} - \widehat{y}\|; \zeta) ds_{\widehat{y}}.$$

Ainsi, on aboutit à l'expression plus compacte

$$\mathcal{P}^a(a_{i+2}, \widehat{T}, h; \zeta) = \sum_{j=1}^3 \widehat{\delta}_j(a_{i+2}) \mathfrak{R}_4^2(a_{i+2}, \widehat{\beta}_j, h; \zeta), \quad (9.18)$$

où

$$\mathfrak{R}_4^2(a_{i+2}, \widehat{\beta}, h; \zeta) = \int_{\widehat{\beta}} (a_{i+2} - \widehat{y}) \Phi_4^2(h, \|a_{i+2} - \widehat{y}\|; \zeta) ds_{\widehat{y}}. \quad (9.19)$$

Réduction de $\mathcal{Q}^a(\alpha, \widehat{\beta}_j, h; \zeta)$, cas des supports sécants

Lorsque les supports de α_i et $\widehat{\beta}_j$ sont sécants (voir la Figure 9.1), on choisit l'intersection comme origine et en s'inspirant de (8.13) et (9.18), on obtient

$$\mathcal{Q}^a(\alpha_i, \widehat{\beta}_j, h; \zeta) = \sum_{k=\pm} k \underline{s}^k \mathfrak{R}_4^2(a_i^k, \widehat{\beta}_j, h; \zeta) - \sum_{l=\pm} l \underline{t}^l \mathfrak{R}_4^2(b_j^l, \alpha_i, h; \zeta). \quad (9.20)$$

Réduction de $\mathcal{Q}^a(\alpha, \widehat{\beta}_j, h; \zeta)$, cas des supports parallèles

Comme lors du calcul de (9.7), on introduit $\tilde{\alpha}$, \tilde{a}^\pm les projections respectives de α et a^\pm sur le support de $\widehat{\beta}$ et le second paramètre $d = \|a^+ - \tilde{a}^+\|$ (voir Figure 9.2). L'origine est choisie en \widehat{b}_j^- et on note que $q + n = 2 - \zeta$. Il est nécessaire de décomposer $x - \widehat{y}$ sous la forme $x - \widehat{y} = \overline{w} + (\tilde{x} - \widehat{y})$ (voir Figure 9.2) :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^a(\alpha_i, \widehat{\beta}_j, h; \zeta) &= \overline{w} \int_{\widehat{\alpha}_i \times \widehat{\beta}_j} \mathfrak{F}_4(h, \sqrt{d^2 + \|\tilde{x} - \widehat{y}\|^2}; \zeta) ds_{\tilde{x}} ds_{\widehat{y}} \\ &\quad + \int_{\widehat{\alpha}_i \times \widehat{\beta}_j} (\tilde{x} - \widehat{y}) \mathfrak{F}_4(h, \sqrt{d^2 + \|\tilde{x} - \widehat{y}\|^2}; \zeta) ds_{\tilde{x}} ds_{\widehat{y}}. \end{aligned}$$

Pour garder des expressions concises, nous introduisons

$$\mathcal{Q}_1^a(\tilde{\alpha}_i, \widehat{\beta}_j, h, d; \zeta) = \int_{\widehat{\alpha}_i \times \widehat{\beta}_j} \mathfrak{F}_4(h, \sqrt{d^2 + \|\tilde{x} - \widehat{y}\|^2}; \zeta) ds_{\tilde{x}} ds_{\widehat{y}}, \quad (9.21)$$

$$\mathcal{Q}_2^a(\tilde{\alpha}_i, \widehat{\beta}_j, h, d; \zeta) = \int_{\widehat{\alpha}_i \times \widehat{\beta}_j} (\tilde{x} - \widehat{y}) \mathfrak{F}_4(h, \sqrt{d^2 + \|\tilde{x} - \widehat{y}\|^2}; \zeta) ds_{\tilde{x}} ds_{\widehat{y}}, \quad (9.22)$$

ce qui donne,

$$\mathcal{Q}^a(\alpha_i, \widehat{\beta}_j, h; \zeta) = \overline{w} \mathcal{Q}_1^a(\tilde{\alpha}_i, \widehat{\beta}_j, h, d; \zeta) + \mathcal{Q}_2^a(\tilde{\alpha}_i, \widehat{\beta}_j, h, d; \zeta) \quad (9.23)$$

Pour ces deux termes, l'origine est choisie en \widehat{b}_j^- et comme précédemment, on remplace le second paramètre en posant $\lambda = \frac{d}{h}$.

Terme antisymétrique \mathcal{Q}_2^a En notant que $q + n = 2 - \zeta$, on utilise la formule (2.34) :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_2^a(\tilde{\alpha}_i, \hat{\beta}_j, h, d; \zeta) &= \sum_{k=\pm} k \underline{s}^k \int_{\hat{\beta}_j} (\tilde{a}_i^k - \hat{y}) h^{2-\zeta} \int_h^\infty \frac{\mathfrak{F}_4^3(u, \sqrt{(\frac{d}{h})^2 u^2 + \|\tilde{a}_i^k - \hat{y}\|^2}; \zeta)}{u^{3-\zeta}} du ds_{\hat{y}} \\ &+ \sum_{l=\pm} l \underline{t}^l \int_{\tilde{\alpha}_i} (\tilde{x} - \hat{b}_j^l) h^{2-\zeta} \int_h^\infty \frac{\mathfrak{F}_4^3(u, \sqrt{(\frac{d}{h})^2 u^2 + \|\tilde{x} - \hat{b}_j^l\|^2}; \zeta)}{u^{3-\zeta}} du ds_{\tilde{x}} \end{aligned}$$

et l'utilisation de la fonction $\tilde{\Phi}_a^c$ définie en (9.6) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_2^a(\tilde{\alpha}_i, \hat{\beta}_j, h, d; \zeta) &= \sum_{k=\pm} k \underline{s}^k \int_{\hat{\beta}_j} (\tilde{a}_i^k - \hat{y}) \tilde{\Phi}_4^2(h, d, \|\tilde{a}_i^k - \hat{y}\|; \zeta) ds_{\hat{y}} \\ &- \sum_{l=\pm} l \underline{t}^l \int_{\tilde{\alpha}_i} (\hat{b}_j^l - \tilde{x}) \tilde{\Phi}_4^2(h, d, \|\tilde{x} - \hat{b}_j^l\|; \zeta) ds_{\tilde{x}}, \end{aligned} \quad (9.24)$$

ce qui conduit au résultat suivant :

$$\mathcal{Q}_2^a(\tilde{\alpha}_i, \hat{\beta}_j, h, d; \zeta) = \sum_{k=\pm} k \underline{s}^k \tilde{\mathfrak{R}}_4^2(\tilde{a}_i^k, \hat{\beta}_j, h, d; \zeta) - \sum_{l=\pm} l \underline{t}^l \tilde{\mathfrak{R}}_4^3(\hat{b}_j^l, \tilde{\alpha}_i, h, d; \zeta), \quad (9.25)$$

où

$$\tilde{\mathfrak{R}}_4^2(\tilde{a}_i^k, \hat{\beta}_j, h, d; \zeta) = \int_{\hat{\beta}_j} (\tilde{a}_i^k - \hat{y})^2 \tilde{\Phi}_4^3(h, d, \|\tilde{a}_i^k - \hat{y}\|; \zeta) ds_{\hat{y}}. \quad (9.26)$$

Terme symétrique \mathcal{Q}_1^a Le second terme est traité de la même manière, soit

$$\mathcal{Q}_1^a(\tilde{\alpha}_i, \hat{\beta}_j, h, d; \zeta) = \sum_{k=\pm} k \underline{s}^k \int_{\hat{\beta}_j} h^{1-\zeta} \int_h^\infty \frac{\mathfrak{F}_4(u, \sqrt{(\frac{d}{h})^2 u^2 + \|\tilde{a}_i^k - \hat{y}\|^2}; \zeta)}{u^{2-\zeta}} du ds_{\hat{y}} \quad (9.27)$$

$$+ \sum_{l=\pm} l \underline{t}^l \int_{\tilde{\alpha}_i} h^{1-\zeta} \int_h^\infty \frac{\mathfrak{F}_4(u, \sqrt{(\frac{d}{h})^2 u^2 + \|\tilde{x} - \hat{b}_j^l\|^2}; \zeta)}{u^{2-\zeta}} du ds_{\tilde{x}}, \quad (9.28)$$

que l'on peut réécrire à l'aide de (9.6)

$$\mathcal{Q}_1^a(\tilde{\alpha}_i, \hat{\beta}_j, h, d; \zeta) = \sum_{k=\pm} k \underline{s}^k \int_{\hat{\beta}_j} \tilde{\Phi}_4^1(h, d, \|\tilde{a}_i^k - \hat{y}\|; \zeta) ds_{\hat{y}} \quad (9.29)$$

$$+ \sum_{l=\pm} l \underline{t}^l \int_{\tilde{\alpha}_i} \tilde{\Phi}_4^1(h, d, \|\tilde{x} - \hat{b}_j^l\|; \zeta) ds_{\tilde{x}}, \quad (9.30)$$

soit encore

$$\mathcal{Q}_1^a(\tilde{\alpha}_i, \hat{\beta}_j, h, d; \zeta) = \sum_{k=\pm} k \underline{s}^k \tilde{\mathfrak{R}}_4^1(\tilde{a}_i^k, \hat{\beta}_j, h, d; \zeta) + \sum_{l=\pm} l \underline{t}^l \tilde{\mathfrak{R}}_4^1(\hat{b}_j^l, \tilde{\alpha}_i, h, d; \zeta), \quad (9.31)$$

où

$$\tilde{\mathfrak{R}}_4^1(\tilde{a}_i^k, \hat{\beta}_j, h, d; \zeta) = \int_{\hat{\beta}_j} \tilde{\Phi}_4^1(h, d, \|\tilde{a}_i^k - \hat{y}\|; \zeta) ds_{\hat{y}}. \quad (9.32)$$

Finalement, on obtient :

$$\mathcal{Q}^a(\alpha_i, \hat{\beta}_j, h; \zeta) = \sum_{k=\pm} k \underline{s}^k \left[(a_i^- - \widetilde{a}_i^-) \widetilde{\mathcal{R}}_4^1(\widetilde{a}_i^k, \hat{\beta}_j, h, d; \zeta) + \widetilde{\mathcal{R}}_4^2(\widetilde{a}_i^k, \hat{\beta}_j, h, d; \zeta) \right] \quad (9.33)$$

$$+ \sum_{l=\pm} l \underline{t}^l \left[(a_i^- - \widetilde{a}_i^-) \widetilde{\mathcal{R}}_4^1(\hat{b}_j^l, \widetilde{a}_i, h, d; \zeta) - \widetilde{\mathcal{R}}_4^2(\hat{b}_j^l, \widetilde{a}_i, h, d; \zeta) \right]. \quad (9.34)$$

Les expressions de $\widetilde{\mathcal{R}}_4^1$ et $\widetilde{\mathcal{R}}_4^2$ sont données respectivement en (C.12) et (C.13).

9.3. Calcul de I

Ainsi qu'il a été indiqué dans la section 7.2, on obtient I en posant $\zeta = 0$ dans la formule (9.1), soit

$$I = g_i \mathcal{U}^s(\alpha_i, \hat{T}, h; 0) + \sum_{j=1}^3 \hat{\delta}_j(a_i) \mathcal{U}^s(\hat{\beta}_j, S, h; 0) \quad (9.35)$$

9.4. Cas particuliers

Lorsque la projection \hat{T} de T sur le plan de S et S possèdent un sommet commun ou une arête commune, des simplifications sont possibles (voir la Figure 9.3).

9.4.1 Triangles ayant un sommet commun

Lorsque \hat{T} et S ont un sommet en commun, en prenant $a_i = \hat{b}_j$, le point commun comme origine, on obtient d'après (9.1) et (9.11),

$$\begin{aligned} J_\zeta &= g_i \left(\vec{\mathcal{U}}^s(\alpha_i, \hat{T}, h; \zeta) + \mathcal{U}^a(\alpha_i, \hat{T}, h; \zeta) \right) \\ &\quad + \hat{d}_j \left(\vec{\mathcal{U}}^s(\hat{\beta}_j, S, h; \zeta) - \mathcal{U}^a(\hat{\beta}_j, S, h; \zeta) \right). \end{aligned} \quad (9.36)$$

9.4.2 Triangles presque-adjacents

Lorsque \hat{T} possède une arête commune avec S , les triangles S et T sont dits presque-adjacents. Il est alors possible de poursuivre la simplification de (9.36) à l'aide de (9.2) et (9.15), avec $a_{i+1} = b_{j+1}$ comme origine, soit

$$\begin{aligned} J_\zeta &= 2|S| \left(\vec{\mathcal{P}}^s(a_{i+2}, \hat{T}, h; \zeta) + \mathcal{P}^a(a_{i+2}, \hat{T}, h; \zeta) \right) \\ &\quad + 2|\hat{T}| \left(\vec{\mathcal{P}}^s(\hat{b}_{j+2}, S, h; \zeta) - \mathcal{P}^a(\hat{b}_{j+2}, S, h; \zeta) \right) \\ &\quad + g_i d_{j+1} \left(\vec{\mathcal{Q}}^s(\alpha_i, \hat{\beta}_{j+1}, h; \zeta) + \mathcal{Q}^a(\alpha_i, \hat{\beta}_{j+1}, h; \zeta) \right) \\ &\quad + g_{i+1} d_j \left(\vec{\mathcal{Q}}^s(\alpha_{i+1}, \hat{\beta}_j, h; \zeta) + \mathcal{Q}^a(\alpha_{i+1}, \hat{\beta}_j, h; \zeta) \right). \end{aligned} \quad (9.37)$$

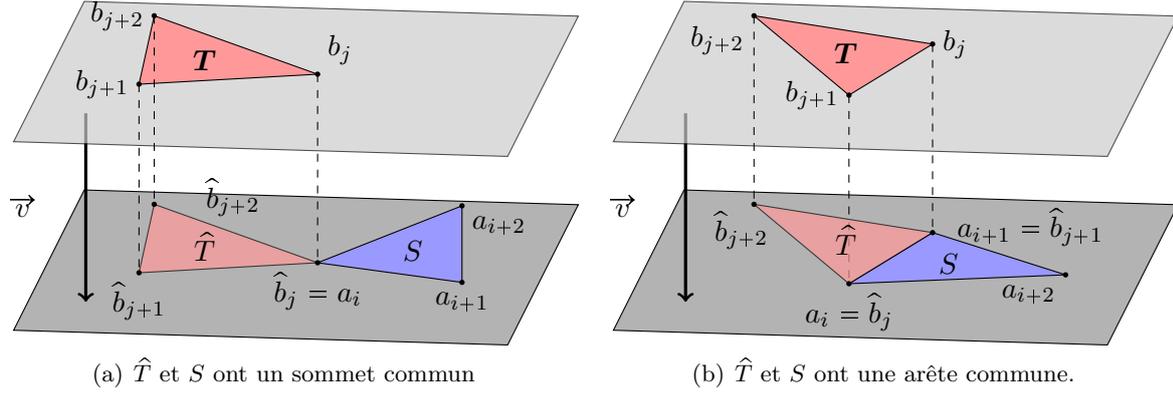


FIGURE 9.3 – Cas amenant des simplifications.

9.5. Calcul des expressions finales

Pour achever le calcul, il nous reste à évaluer les intégrands mono-dimensionnels afin de calculer les intégrales R_a^c , \mathfrak{R}_a^c , \tilde{R}_a^c et $\tilde{\mathfrak{R}}_a^c$.

9.5.1 Calcul de $\Phi_a^c(h, \eta, ; \zeta)$

D'après les expressions (8.10), (8.6) et (8.2), l'intégrand $\Phi_a^c(h, \eta, ; \zeta)$ est le résultat d'une intégrale triple :

$$\Phi_a^c(h, \eta, ; \zeta) = \int_{w=h}^{+\infty} \int_{v=w}^{+\infty} \int_{u=v}^{+\infty} \frac{h^{c-\zeta} w^{a-c-2}}{u^{a+1-\zeta} (u^2 + \eta^2)^{(1+\zeta)/2}} du dv dw. \quad (9.38)$$

En changeant l'ordre d'intégration (voir Figure 9.4), l'évaluation de Φ_a^c devient beaucoup plus simple ; on obtient, en effet :

$$\begin{aligned} \Phi_a^c(h, \eta, ; \zeta) &= h^{c-\zeta} \int_{u=h}^{+\infty} \frac{1}{u^{a+1-\zeta} (u^2 + \eta^2)^{(1+\zeta)/2}} \cdot \int_{v=h}^u \int_{w=h}^v w^{a-c-2} dv dw du \\ &= \frac{h^{c-\zeta}}{2} \int_{u=h}^{+\infty} \frac{(u-h)^2}{u^{a+1-\zeta} (u^2 + \eta^2)^{(1+\zeta)/2}} du. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Les expressions des $\Phi_a^c(h, \eta, ; \zeta)$ sont données dans la section C.1 en Annexe.

9.5.2 Calcul de $\tilde{\Phi}_a^c(h, d, \eta, ; \zeta)$

Lorsque des triangles situés dans des plans parallèles ont des côtés parallèles (voir Figure 9.2), on se retrouve dans la situation dite de "double-parallélisme". Le second paramètre d qui apparaît (traité en posant $\lambda = d/h$) rend plus difficile l'évaluation des intégrales triples $\tilde{\Phi}_a^c$ puisque la méthode utilisée en (9.39) n'est plus applicable. On rappelle l'expression de $\tilde{\Phi}_a^c$:

$$\tilde{\Phi}_a^c(h, d, \eta, ; \zeta) = h^{c-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{\mathfrak{F}_a(u, \sqrt{(\frac{d}{h})^2 u^2 + \eta^2}; \zeta)}{u^{c+1-\zeta}} du.$$

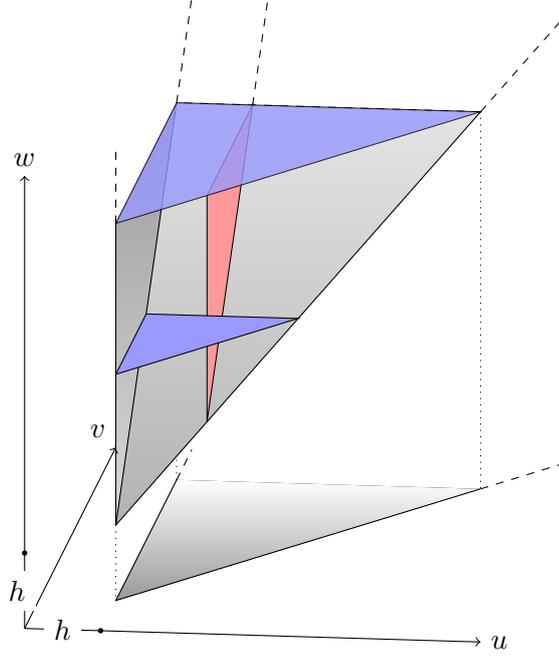


FIGURE 9.4 – Domaine d'intégration. En bleu, l'intégration directe, en rouge après inversion de l'ordre d'intégration.

On calcule explicitement $\mathfrak{F}_a(u, \eta; \zeta)$ ce qui permet d'obtenir $\mathfrak{F}_a(u, \sqrt{(\frac{d}{h})^2 u^2 + \eta^2}; \zeta)$ puis de calculer l'intégrale définissant $\tilde{\Phi}_a^c$. D'après (8.6) et (8.2), on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_a(h, \eta; \zeta) &= h^{a-1-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{f_a(u, \eta; \zeta)}{u^{a-\zeta}} du = h^{a-1-\zeta} \int_{v=h}^{+\infty} \int_{u=v}^{+\infty} \frac{du}{u^{a+1-\zeta} (u^2 + \eta^2)^{(1+\zeta)/2}} dv \\ &= h^{a-1-\zeta} \int_{u=h}^{+\infty} \frac{u-h}{u^{a+1-\zeta} (u^2 + \eta^2)^{(1+\zeta)/2}} du. \end{aligned}$$

Les expressions des fonctions \mathfrak{F}_a et $\tilde{\Phi}_a^c$ sont données dans la sous-section C.1.2 en Annexe.

9.5.3 Remarque

Si $\zeta = 2$, une autre approche est possible pour réduire l'intégrale J_2^a . En remarquant que

$$\frac{x - \hat{y}}{(h^2 + \|x - y\|^2)^{3/2}} = \nabla_{\hat{y}} \left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + \|x - \hat{y}\|^2}} \right),$$

une application du théorème du gradient fournit

$$\begin{aligned} \int_{\hat{T}} \frac{x - \hat{y}}{(h^2 + \|x - y\|^2)^{3/2}} d\hat{y} &= \int_{\hat{T}} \nabla_{\hat{y}} \left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + \|x - \hat{y}\|^2}} \right) d\hat{y} \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_{\hat{\beta}_j} \frac{\vec{\kappa}_j}{\sqrt{h^2 + \|x - \hat{y}\|^2}} ds_{\hat{y}}, \end{aligned}$$

où $\vec{\kappa}_j$ est la normale le long de $\hat{\beta}_j$. Une réduction de la dimension a été obtenue sans utiliser notre méthode :

$$J_2^a = \sum_{j=1}^3 \vec{\kappa}_j \int_{S \times \hat{\beta}_j} \frac{1}{\sqrt{h^2 + \|x - \hat{y}\|^2}} dx ds_{\hat{y}}. \quad (9.40)$$

Les intégrales résultantes sont sujettes à l'utilisation de notre méthode. L'intégrand étant scalaire, moins de calculs seront nécessaires.

Conclusion du chapitre

Pour déterminer les intégrands des intégrales mono-dimensionnelles finales, il faut évaluer une intégrale triple. L'inversion de l'ordre d'intégration permet de simplifier le calcul. Lorsqu'il y a « double parallélisme », c'est-à-dire lorsque des segments sont parallèles dans des plans parallèles, l'évaluation de l'intégrale triple devient plus compliquée mais reste réalisable.

Finalement, l'ensemble des intégrands mono-dimensionnels et des formules finales sont fournis dans l'Annexe [C](#).

Résultats numériques

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques expériences numériques qui permettent d'assurer l'exactitude et d'estimer la précision et la stabilité de quelques unes des formules présentées dans les chapitres précédents.

10.1. L'angle solide

Soient S et T deux triangles superposés et h la distance entre les deux plans (voir Figure 10.1); on aura

$$J = \int_{S \times T} \frac{x - y}{\|x - y\|^3} dx dy = \vec{v} \int_{S \times S} \frac{1}{(h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{3/2}} dx d\hat{y}. \quad (10.1)$$

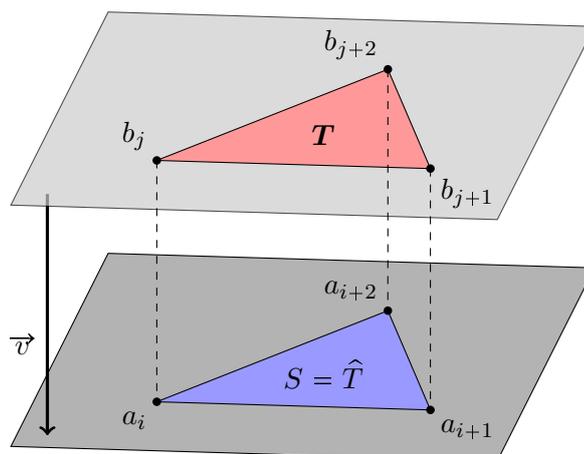


FIGURE 10.1 – Triangles superposés.

L'intégrale J correspond à l'intégrale sur T de l'angle solide sous lequel un point y de T voit le triangle S , multipliée par le vecteur \vec{v} . L'expression (8.15) permet d'évaluer explicitement cette intégrale. Afin d'étudier le comportement du code MATLAB développé durant ma thèse, nous réalisons une étude expérimentale de la conver-

gence de la troisième composante de J vers $2\pi|S|$ lorsque la distance entre les deux plans tend vers 0. Pour cette expérience, nous avons choisi un triangle S vérifiant $2|S| = 1$.

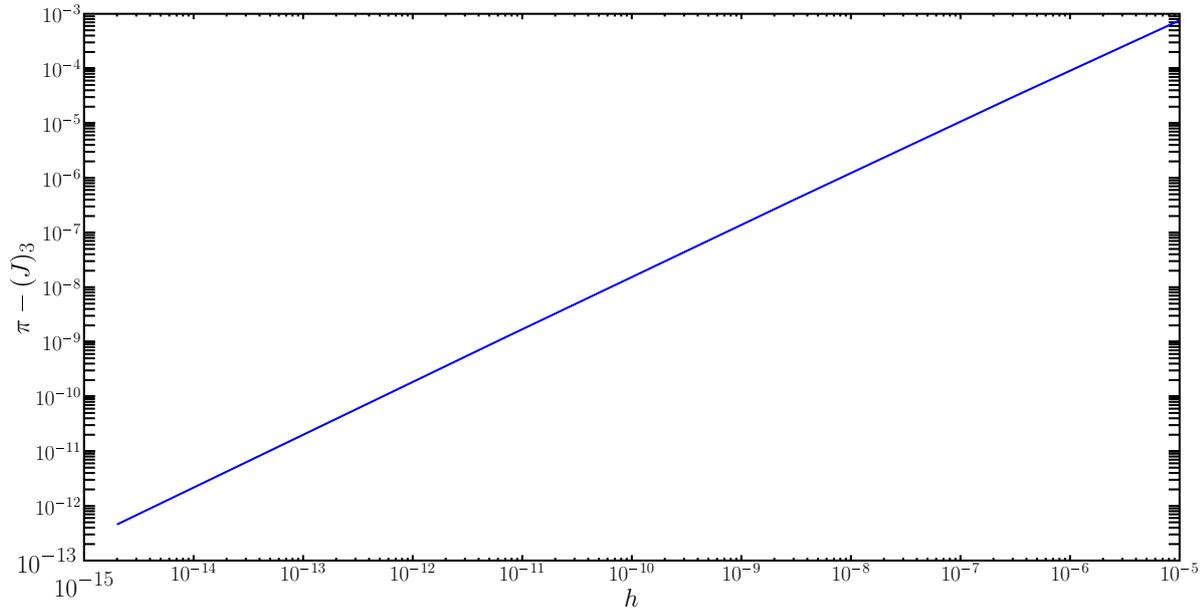


FIGURE 10.2 – Différences

La Figure 10.2 atteste de la robustesse de notre méthode de calcul lorsque h devient très petit, c'est-à-dire de l'ordre de 10^{-15} ce qui constitue un point très intéressant pour l'utilisation de cette méthode dans un cadre industriel.

10.2. Triangles presque superposés

Soient les triangles dans la configuration géométrique présentée dans la Figure 10.3(a). Nous effectuons une comparaison entre le calcul de l'intégrale

$$I = \int_{S \times T} \frac{1}{\|x - y\|} dx dy,$$

en utilisant l'expression (8.16) et la valeur obtenue en décomposant le triangle T en 9 sous-triangles (voir Figure 10.3(b)), soit

$$I_V = \sum_{j=1}^9 \int_{S \times V_j} \frac{1}{\|x - y\|} dx dy. \quad (10.2)$$

La Figure 10.4 présente les résultats obtenus. La première courbe (rouge) présente l'écart relatif entre la valeur de I obtenue directement à partir de (8.16) et la valeur de I_V (obtenue en décomposant T) lorsque h tend vers 0. On observe que l'erreur relative est toujours de l'ordre de la précision machine. La seconde courbe (noire) représente l'évolution de l'écart relatif entre I et I_c valeur obtenue lorsque $h = 0$. La décomposition utilisée pour T n'est pas unique, on pourrait traiter la zone de recouvrement comme un unique polygone.

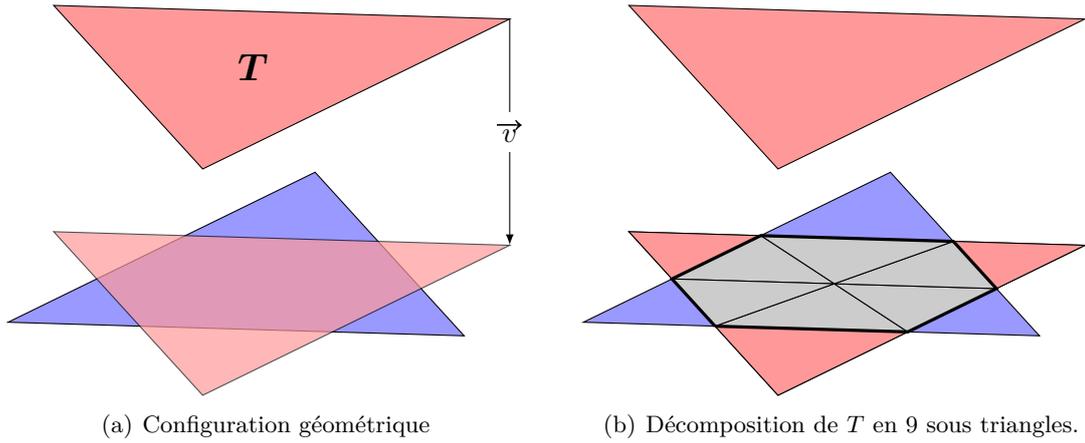


FIGURE 10.3 – Triangles se recouvrant partiellement.

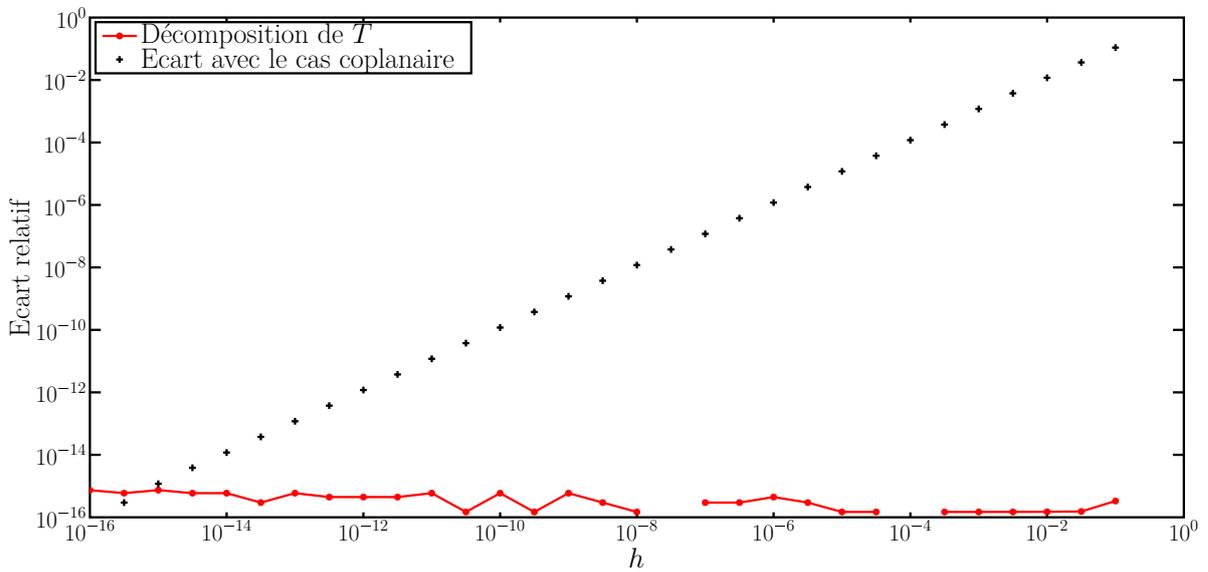


FIGURE 10.4 – Comparaison lorsque les triangles se recouvrent partiellement.

10.3. Etude du presque-parallélisme entre côtés de triangles situés dans des plans parallèles

L'étude effectuée à la section 4.7 est réalisée à nouveau pour des triangles situés dans des plans parallèles. L'expression (8.16) permet d'évaluer explicitement l'intégrale

$$I = \int_{S \times T} \frac{1}{\|x - y\|} dx dy = \int_{S \times T} \frac{1}{\sqrt{h^2 + \|x - \hat{y}\|^2}} dx d\hat{y}, \quad (10.3)$$

lorsque S et T sont superposés. Les arêtes du triangle sont de longueur ≈ 1 et la distance entre les deux plans est $h = 10^{-4}$. Nous décomposons le triangle T en quatre sous-triangles $U_l, l = 1, 4$ et nous faisons varier l'abscisse s des points de décomposition autour de 0.5 (cas exactement parallèle) comme présenté sur la Figure 10.5. Soit

$$\tilde{I}(s) = \sum_{l=1}^4 \int_{S \times U_l} \frac{1}{\|x - y\|} dx dy,$$

alors la Figure 10.6 présente la différence relative :

$$E(s) = \frac{|I - \tilde{I}(s)|}{|I|},$$

pour s proche de 0.5. On en conclut, comme pour les triangles coplanaires, qu'il est possible d'effectuer les calculs sans se préoccuper du presque-parallélisme entre côtés de triangles dans des plans parallèles.

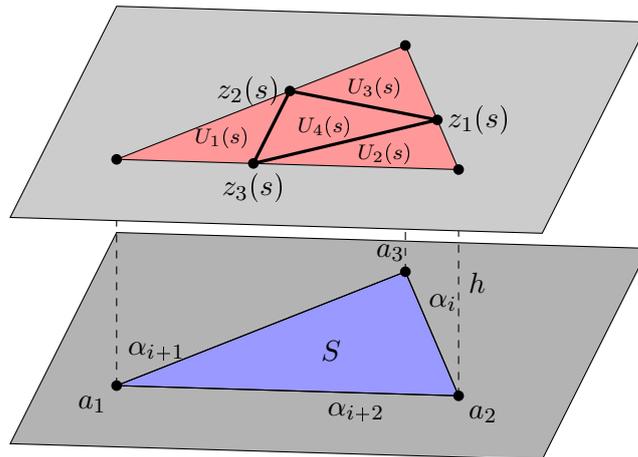


FIGURE 10.5 – Décomposition du triangle T .

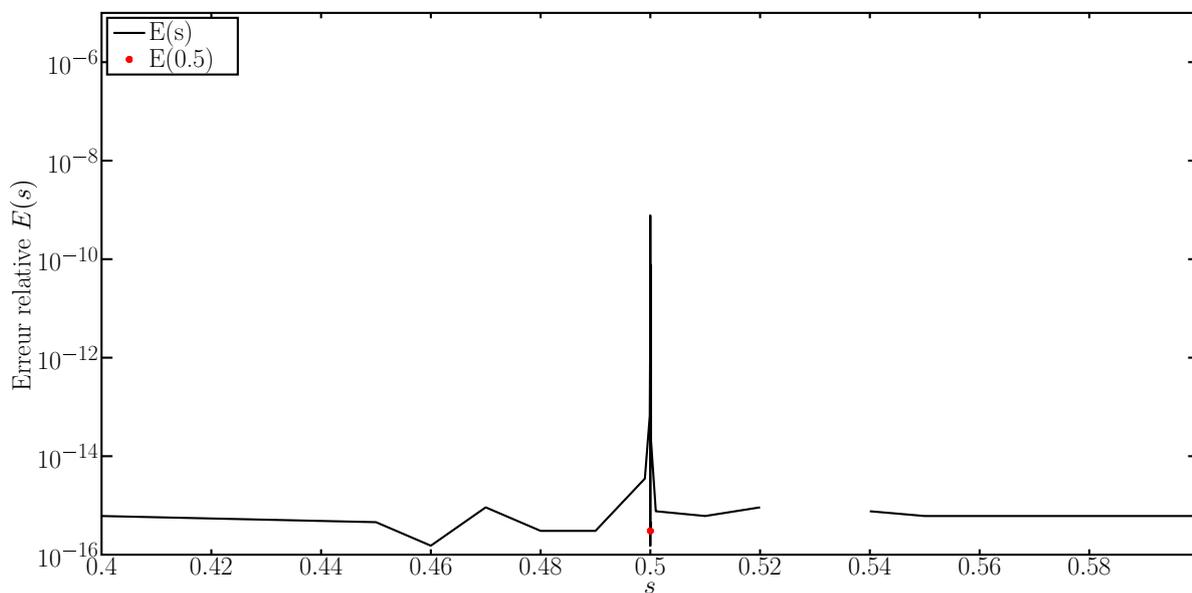


FIGURE 10.6 – Erreur relative $E(s)$ en n'utilisant que le critère (\mathcal{C}_1) .

Conclusion de la troisième partie

La résolution des équations de propagation dans des couches minces conduit au calcul de coefficients d'influence entre triangles situés dans des plans parallèles très proches. Les résultats issus des techniques d'intégration numérique peinent à assurer une précision acceptable lorsque les maillages des deux surfaces en regard sont constitués de façon indépendante.

Ces calculs sont considérés comme difficiles dans le cadre de l'intégration numérique ; notre méthode permet de lever cette difficulté au prix de l'utilisation de formules un peu lourdes mais faciles à implémenter.

Quatrième partie

Extensions de la méthode

Table des matières

11 Fonctions de base affines	121
11.1 Fonctions de base	121
11.1.1 Définition	121
11.1.2 Décomposition en intégrands homogènes	122
11.2 Calcul du coefficient d'auto-influence	123
11.2.1 Coefficients diagonaux	123
11.2.2 Coefficients non diagonaux	124
11.3 Triangles adjacents	125
11.3.1 Réduction jusqu'à la dimension 2	125
11.3.2 Triangles dans des plans sécants	126
11.3.3 Cas de triangles coplanaires	128
12 Application à l'électromagnétisme	131
12.1 Equations intégrales pour l'électromagnétisme	131
12.2 Résolution numérique	133
12.2.1 Simplification de \mathcal{L}	134
12.2.2 Simplification de \mathcal{K}	134
12.3 Triangles dans des plans parallèles	135
12.3.1 Réduction de \mathcal{M}_1	136
12.3.2 Réduction de \mathcal{M}_2	138
12.4 Triangles superposés	140
13 Intégrale du noyau de Green complet	143
13.1 Auto-influence	144
13.1.1 Réduction dans le cas de l'auto-influence	144
13.1.2 Evaluation explicite en tronquant la série entière	145
13.2 Triangles adjacents coplanaires	146
13.2.1 Segments à supports sécants	147
13.2.2 Segments à supports parallèles	147
13.3 Triangles adjacents dans des plans sécants	148
13.3.1 Intégrales sur un triangle	149
13.3.2 Intégrales sur le produit de deux segments	149
13.4 Le potentiel de double couche	149
13.4.1 Triangles dans des plans sécants	150
13.5 Fonctions de base affines	151

13.5.1	Notations	152
13.5.2	Coefficients	152
13.6	Expérimentations numériques	153
13.6.1	Evaluation de J	153
13.6.2	Evaluation de $J^{i,j}$	153
14	Evaluation d'intégrales hypersingulières	157
14.1	Introduction de la partie finie	157
14.2	Evaluation de parties finies	160
14.2.1	Réduction de I_s	160
14.2.2	Application à I_{-3}	160
14.3	Processus utilisant une zone d'exclusion du point singulier	161
14.3.1	Equivalence entre les contours utilisés	161
14.3.2	Equivalence entre les deux processus lorsque $s < -2$	163
14.3.3	Cas $s = -2$	164
14.4	Le cas variationnel	165
14.4.1	Utilisation "naïve" de la formule (2.10)	165
14.4.2	Développement asymptotique du cas de deux triangles superposés	165
	Conclusion générale	169

Introduction de la partie

Cette partie présente quatre extensions de la méthode. En premier lieu, on présente son utilisation lorsque les fonctions de base ne sont plus constantes mais affines par élément. Puis, on montre qu'il est possible de l'appliquer aux problèmes d'électromagnétisme en profitant partiellement du travail réalisé pour l'équation de Helmholtz 3-D. Le troisième prolongement présente la réduction de l'intégrale du noyau de Green complet avec des fonctions de base constantes et affines par éléments. Cette partie s'achève en présentant l'évaluation de parties finies d'intégrales hypersingulières.

Fonctions de base affines

Introduction

Dans les parties **I** et **II**, nous nous sommes limités au calcul des coefficients découlant de fonctions de base constantes sur chaque triangle. Ce chapitre présente l'évaluation de l'intégrale I lorsqu'on utilise des fonctions de base affines dans chaque élément, soit

$$I^{p,q} = \int_{S \times T} \frac{\phi_p(x) \psi_q(y)}{\|x - y\|} dx dy. \quad (11.1)$$

Nous commençons par présenter les fonctions de base utilisées et quelques-unes de leurs propriétés qui permettront de simplifier les calculs. Nous ne traitons ici que le cas des triangles adjacents ou confondus.

Le cas général ne présente pas de difficulté particulière mais conduit à des calculs plus lourds.

11.1. Fonctions de base

11.1.1 Définition

Soit le triangle S de sommets a_i et de cotés α_i . On note $\vec{\alpha}_i = a_{i+2} - a_{i+1}$ (voir Figure 11.1(a)). On introduit les fonctions de base ϕ_p associées aux sommets du triangle S (voir Figure 11.1(a)) :

$$\phi_p(x) = 1 + (x - a_p | \vec{e}_p), \quad p \in \{1, 2, 3\} \quad (11.2)$$

avec

$$\vec{e}_p = \mu_1 \vec{\alpha}_{p+1} + \mu_2 \vec{\alpha}_{p+2},$$

où

$$\mu_1 = \frac{\|\vec{\alpha}_{p+2}\|^2 + (\vec{\alpha}_{p+1} | \vec{\alpha}_{p+2})}{\|\vec{\alpha}_{p+1}\|^2 \|\vec{\alpha}_{p+2}\|^2 - (\vec{\alpha}_{p+1} | \vec{\alpha}_{p+2})^2},$$

$$\mu_2 = -\frac{\|\vec{\alpha}_{p+1}\|^2 + (\vec{\alpha}_{p+1} | \vec{\alpha}_{p+2})}{\|\vec{\alpha}_{p+1}\|^2 \|\vec{\alpha}_{p+2}\|^2 - (\vec{\alpha}_{p+1} | \vec{\alpha}_{p+2})^2}.$$

Ainsi définie, la fonction de base ϕ_p vérifie $\phi_p(a_p) = 1, \phi_p(a_{p+1}) = \phi_p(a_{p+2}) = 0$ (voir Figure 11.1(b)), ainsi que

$$\phi_p|_{\alpha_p} = 0, \quad \phi_p(x)|_{\alpha_{p+1}} = 1 - \frac{x - a_p}{|\alpha_{p+1}|} \quad \text{et} \quad \phi_p(x)|_{\alpha_{p+2}} = 1 - \frac{x - a_p}{|\alpha_{p+2}|}. \quad (11.3)$$

De même, si les fonctions de base ψ_q sont associées aux sommets b_q du triangle T :

$$\psi_q(y) = 1 + \left(y - b_q \middle| \vec{f}_q \right), \quad q \in \{1, \dots, 3\} \quad (11.4)$$

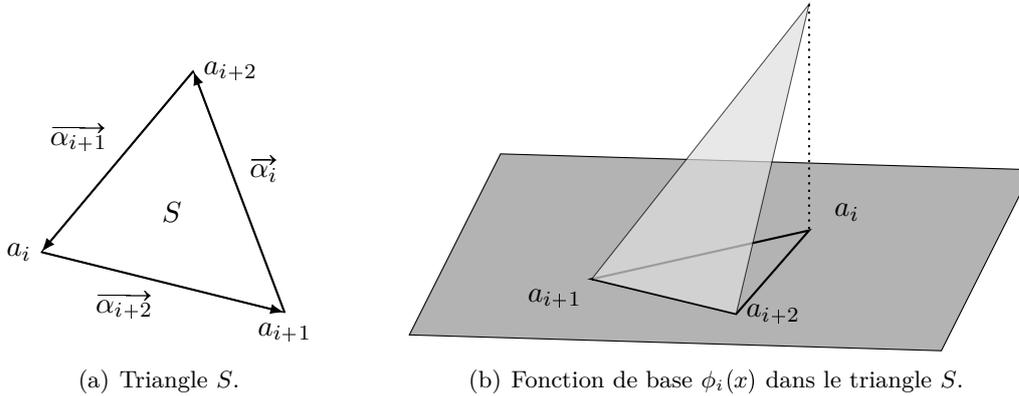


FIGURE 11.1 – Fonctions de base sur le triangle S .

11.1.2 Décomposition en intégrands homogènes

Les fonctions de base étant affines, l'intégrand dans (11.1) n'est plus homogène, on est donc conduit à décomposer celles-ci en une partie linéaire et une partie constante en effectuant un changement d'origine :

$$\begin{aligned} \phi_p(x) &= 1 + (o - a_p | \vec{e}_p) + (x - o | \vec{e}_p) = \phi_p(o) + (x | \vec{e}_p) \\ \psi_q(y) &= 1 + (o - b_q | \vec{f}_q) + (y - o | \vec{f}_q) = \psi_q(o) + (y | \vec{f}_q), \end{aligned} \quad (11.5)$$

où o est la nouvelle origine, $\underline{x} = x - o$ et $\underline{y} = y - o$. Plus généralement, nous noterons $\underline{\alpha}$ et \underline{S} le segment α et le triangle S avec cette nouvelle origine.

Selon (11.5), on constate que l'intégrale $I^{p,q}$ doit être décomposée en 4 intégrales dont les intégrands ont des degrés d'homogénéité selon les cas égaux à $-1, 0$ et 1 :

$$\begin{aligned} I^{p,q} &= \int_{S \times T} \frac{(x | \vec{e}_p) (y | \vec{f}_q)}{\|\underline{x} - \underline{y}\|} d\underline{x} d\underline{y} + \phi_p(o) \int_{S \times T} \frac{(y | \vec{f}_q)}{\|\underline{x} - \underline{y}\|} d\underline{x} d\underline{y} \\ &+ \psi_q(o) \int_{S \times T} \frac{(x | \vec{e}_p)}{\|\underline{x} - \underline{y}\|} d\underline{x} d\underline{y} + \phi_p(o) \psi_q(o) \int_{S \times T} \frac{1}{\|\underline{x} - \underline{y}\|} d\underline{x} d\underline{y}. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Cette décomposition effectuée, la méthode de réduction s'applique selon les cas par l'intermédiaire des formules (2.10) ou (2.34). Au cours du calcul, après chaque étape de réduction, on s'attachera à exprimer les résultats en termes des ϕ_p et ψ_q afin de profiter au mieux des propriétés (11.3) des fonctions de base.

11.2. Calcul du coefficient d'auto-influence

Soit donc à évaluer pour le coefficient d'auto-influence ($T = S$).

$$I^{i,j} = \int_{S \times S} \frac{\phi_i(x)\phi_j(y)}{\|x - y\|} dx dy \text{ pour } i = 1, 3 \text{ et } j = 1, 3. \quad (11.7)$$

Le calcul de $I^{i,i}$, $I^{i,i+1}$ et $I^{i,i+2}$ permet de déterminer l'ensemble des coefficients de la matrice élémentaire.

11.2.1 Coefficients diagonaux

Pour calculer $I^{i,i}$, il est judicieux de choisir comme origine $o = a_i$. Dans ce cas les fonctions de base s'écrivent

$$\phi_i(x) = 1 + (\underline{x} | \vec{e}_i) \text{ et } \phi_i(y) = 1 + (\underline{y} | \vec{e}_i),$$

ce qui, en utilisant les symétries existantes, conduit à la décomposition

$$I^{i,i} = \int_{S \times S} \frac{1}{\|\underline{x} - \underline{y}\|} dx dy + 2 \int_{S \times S} \frac{(\underline{x} | \vec{e}_i)}{\|\underline{x} - \underline{y}\|} dx dy + \int_{S \times S} \frac{(\underline{x} | \vec{e}_i)(\underline{y} | \vec{e}_i)}{\|\underline{x} - \underline{y}\|} dx dy \quad (11.8)$$

où la première intégrale a déjà été traitée au Chapitre 3. Les autres intégrands sont respectivement 0-homogène et 1-homogène; ainsi d'après (3.17) et en utilisant (2.10), on obtient

$$\begin{aligned} I^{i,i} &= \frac{2g_i}{3} U(\underline{\alpha}_i, \underline{S}) + \frac{g_i}{2} \int_{\underline{\alpha}_i \times \underline{S}} \frac{(\underline{x} | \vec{e}_i)}{\|\underline{x} - \underline{y}\|} ds_x dy + \frac{g_i}{2} \int_{\underline{S} \times \underline{\alpha}_i} \frac{(\underline{x} | \vec{e}_i)}{\|\underline{x} - \underline{y}\|} dx ds_y \\ &+ \frac{g_i}{5} \int_{\underline{\alpha}_i \times \underline{S}} \frac{(\underline{x} | \vec{e}_i)(\underline{y} | \vec{e}_i)}{\|\underline{x} - \underline{y}\|} ds_x dy + \frac{g_i}{5} \int_{\underline{S} \times \underline{\alpha}_i} \frac{(\underline{x} | \vec{e}_i)(\underline{y} | \vec{e}_i)}{\|\underline{x} - \underline{y}\|} dx ds_y. \end{aligned} \quad (11.9)$$

D'après (11.5), on se ramène à l'origine initiale selon la formule

$$(\underline{x} | \vec{e}_i) = \phi_i(x) - \phi_i(a_i) = \phi_i(x) - 1$$

ce qui fait apparaître les fonctions de base, et en vertu de (11.3) permet d'écrire

$$\begin{aligned} I^{i,i} &= g_i U(\underline{\alpha}_i, \underline{S}) \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) + \frac{2g_i}{5} U^{\phi_i, \phi_i}(\alpha_i, S) \\ &+ g_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \right) U^{\phi_i, 1}(\alpha_i, S) + g_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \right) U^{1, \phi_i}(\alpha_i, S), \end{aligned}$$

soit encore,

$$\begin{aligned} I^{i,i} &= \frac{g_i}{15} U(\underline{\alpha}_i, \underline{S}) + \frac{2g_i}{5} U^{\phi_i, \phi_i}(\alpha_i, S) \\ &+ \frac{g_i}{10} U^{\phi_i, 1}(\alpha_i, S) + \frac{g_i}{10} U^{1, \phi_i}(\alpha_i, S), \end{aligned} \quad (11.10)$$

avec

$$U^{v,w}(\alpha, T) = \int_{\alpha \times T} \frac{v(x)w(y)}{\|x - y\|} ds_x dy. \quad (11.11)$$

Comme $\phi_i|_{\alpha_i} \equiv 0$, l'expression (11.10) se réduit à

$$I^{i,i} = \frac{g_i}{15}U(\alpha_i, S) + \frac{g_i}{10}U^{1,\phi_i}(\alpha_i, S), \quad (11.12)$$

où le premier terme découle du cas des fonctions de base constantes (voir (3.12)), soit

$$\frac{g_i}{15}U(\alpha_i, S) = \frac{|S|}{15} \sum_{l=1}^3 g_l R(a_l, \alpha_i). \quad (11.13)$$

Le second terme s'écrit

$$U^{1,\phi_i}(\alpha_i, S) = \int_{\alpha_i \times S} \frac{\phi_i(y)}{\|x - y\|} ds_x dy. \quad (11.14)$$

La seconde étape de réduction est réalisée en choisissant comme origine l'une des extrémités de α_i , soit par exemple $o = a_{i+1}$. On aura alors $\phi_i(o) = 0$ donc $\phi_i(y) = (y|e_i^{\rightarrow})$. Le second terme est réduit en effectuant un changement d'origine dans la fonction de base puis en appliquant la formule (2.10) :

$$U^{1,\alpha_i}(\alpha_i, S) = \frac{|\alpha_i|}{3}P^{\phi_i}(a_{i+2}, S) + \frac{g_{i+1}}{3}Q^{1,\phi_i}(\alpha_i, \alpha_{i+1}), \quad (11.15)$$

avec

$$P^{\phi_i}(a, T) = \int_T \frac{\phi(y)}{\|a - y\|} dy \quad \text{et} \quad Q^{v,w}(\alpha, \beta) = \int_{\alpha \times \beta} \frac{v(x)w(y)}{\|x - y\|} ds_x ds_y. \quad (11.16)$$

Tout ceci permet d'écrire,

$$I^{i,i} = \frac{|S|}{15} \sum_{l=1}^3 g_l R(a_l, \alpha_i) + \frac{|S|}{15}P^{\phi_i}(a_{i+2}, S) + \frac{g_i g_{i+1}}{30}Q^{1,\phi_i}(\alpha_i, \alpha_{i+1}). \quad (11.17)$$

La dernière réduction s'effectue en prenant a_{i+2} comme origine, alors comme $\phi_i|_{\alpha_i} \equiv 0$ et on obtient :

$$\begin{aligned} I^{i,i} &= \frac{|S|}{15} \sum_{l=1}^3 g_l R(a_l, \alpha_i) + \frac{|S|}{30}g_i R(a_i, \alpha_i) \\ &+ \frac{|S|}{30} (g_{i+1}R^{\phi_i}(a_{i+1}, \alpha_{i+1}) + g_{i+2}R^{\phi_i}(a_{i+2}, \alpha_{i+2})), \end{aligned} \quad (11.18)$$

où

$$R^{\phi_i}(a, \alpha) = \int_{\alpha} \frac{\phi_i(x)}{\|a - x\|} ds_x, \quad (11.19)$$

est donné par (D.7).

11.2.2 Coefficients non diagonaux

Le calcul des autres coefficients ne sera pas détaillé. Ils ont pour expressions

$$\begin{aligned} I^{i,l} &= \frac{|S|}{30} \sum_{j=1}^3 g_j R(a_j, \alpha_j) + \frac{|S|}{60} (g_l R(a_l, \alpha_l) + g_i R(a_i, \alpha_i)) \\ &+ \frac{|S|}{60} (g_i R^{\phi_l}(a_i, \alpha_i) + g_m R^{\phi_l}(a_m, \alpha_m) + g_{i+1} R^{\phi_l}(a_{i+1}, \alpha_{i+1}) + g_{i+2} R^{\phi_l}(a_{i+2}, \alpha_{i+2})) \\ &+ \frac{|S|}{30} (g_i R^{\phi_l}(a_i, \alpha_i) + g_l R^{\phi_l}(a_l, \alpha_l)) \end{aligned} \quad (11.20)$$

où $(l, m) = (i + 1, i + 2)$ ou $(i + 2, i + 1)$.

11.3. Triangles adjacents

Lorsque les triangles sont adjacents, la méthode de calcul est similaire. De même qu'à la section 4.6, jusqu'à la dimension 2, on ne distingue pas le cas des triangles coplanaires, de celui où ils sont situés dans des plans sécants. La distinction entre ces deux cas n'apparaît que lors des dernières réductions.

11.3.1 Réduction jusqu'à la dimension 2

En utilisant la formule (2.10) en prenant $a_i = b_j$ pour origine (voir Figure 4.9(b)), on obtient

$$\begin{aligned} I^{i,j} &= \frac{|S|}{30}P(a_{i+2}, T) + \frac{|T|}{30}P(b_{j+2}, S) + \frac{\gamma_i \delta_{j+1}}{60}Q(\alpha_i, \beta_{j+1}) + \frac{\delta_j \gamma_{i+1}}{60}Q(\alpha_{i+1}, \delta_j) \quad (11.21) \\ &+ \frac{|S|}{30}P^{\psi_j}(a_{i+2}, T) + \frac{|T|}{30}P^{\phi_i}(b_{j+2}, S) \\ &+ \frac{\gamma_i \delta_{j+1}}{60}Q^{1,\psi_j}(\alpha_i, \beta_{j+1}) + \frac{\gamma_{i+1} \delta_j}{60}Q^{\phi_i,1}(\alpha_{i+1}, \beta_j), \end{aligned}$$

et par symétrie $I^{i+1,j+1}$ est donné

$$\begin{aligned} I^{i+1,j+1} &= \frac{|S|}{30}P(a_{i+2}, T) + \frac{|T|}{30}P(b_{j+2}, S) + \frac{\gamma_i \delta_{j+1}}{60}Q(\alpha_i, \beta_{j+1}) + \frac{\delta_j \gamma_{i+1}}{60}Q(\alpha_{i+1}, \delta_j) \quad (11.22) \\ &+ \frac{|S|}{30}P^{\psi_{j+1}}(a_{i+2}, T) + \frac{|T|}{30}P^{\phi_{i+1}}(b_{j+2}, S) \\ &+ \frac{\gamma_{i+1} \delta_j}{60}Q^{1,\psi_{j+1}}(\alpha_{i+1}, \beta_j) + \frac{\gamma_i \delta_{j+1}}{60}Q^{\phi_{i+1},1}(\alpha_i, \beta_{j+1}). \end{aligned}$$

Les trois coefficients suivants :

$$\begin{aligned} I^{i,j+1} &= \frac{|S|}{60}(P(a_{i+2}, T) + 2P^{\psi_{j+1}}(a_{i+2}, T)) + \frac{|T|}{60}(P(b_{j+2}, S) + 2P^{\phi_i}(b_{j+1}, S)) \quad (11.23) \\ &+ \frac{\gamma_{i+1} \delta_j}{120}(Q(\alpha_{i+1}, \beta_j) + 2Q^{1,\psi_{j+1}}(\alpha_{i+1}, \beta_j) + 2Q^{\phi_i,1}(\alpha_{i+1}, \beta_j)) \\ &+ \frac{\gamma_{i+1} \delta_j}{20}Q^{\phi_i,\psi_{j+1}}(\alpha_{i+1}, \beta_j) + \frac{\gamma_i \delta_{j+1}}{120}Q(\alpha_i, \beta_{j+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I^{i,j+2} &= \frac{|T|}{10}P^{\phi_i}(b_{j+2}, S) + \frac{|T|}{30}P(b_{j+2}, S) + \frac{|S|}{30}P^{\psi_{j+2}}(a_{i+2}, T) \quad (11.24) \\ &+ \frac{\gamma_{i+1} \delta_j}{60}Q^{1,\psi_{j+2}}(\alpha_{i+1}, \beta_j) + \frac{\gamma_i \delta_{j+1}}{60}Q^{1,\psi_{j+2}}(\alpha_i, \beta_{j+1}) \\ &+ \frac{\gamma_{i+1} \delta_j}{20}Q^{\phi_i,\psi_{j+2}}(\alpha_{i+1}, \beta_j), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I^{i+1,j+2} &= \frac{|T|}{10} P^{\phi_{i+1}}(b_{j+2}, S) + \frac{|T|}{30} P(b_{j+2}, S) + \frac{|S|}{30} P^{\psi_{j+2}}(a_{i+2}, T) \\
&+ \frac{\gamma_{i+1}\delta_j}{60} Q^{1,\psi_{j+2}}(\alpha_{i+1}, \beta_j) + \frac{\gamma_i\delta_{j+1}}{60} Q^{1,\psi_{j+2}}(\alpha_i, \beta_{j+1}) \\
&+ \frac{\gamma_i\delta_{j+1}}{20} Q^{\phi_{i+1},\psi_{j+2}}(\alpha_{i+1}, \beta_j),
\end{aligned} \tag{11.25}$$

fournissent respectivement, par symétrie, les coefficients $I^{i+1,j}$, $I^{i+2,j}$ et $I^{i+2,j+1}$. Finalement,

$$\begin{aligned}
I^{i+2,j+2} &= \frac{|S|}{10} P^{\psi_{j+2}}(a_{i+2}, T) + \frac{|T|}{10} P^{\phi_{i+2}}(b_{j+2}, S) \\
&+ \frac{\gamma_{i+1}\delta_{j+1}}{20} Q^{\phi_{i+2},\psi_{j+2}}(\alpha_i, \beta_{j+1}) + \frac{\gamma_{i+1}\delta_j}{20} Q^{\phi_{i+2},\psi_{j+2}}(\alpha_{i+1}, \beta_j).
\end{aligned} \tag{11.26}$$

C'est lors du calcul des fonctions P^v , $Q^{1,w}$ et $Q^{v,w}$ que la nécessité de distinguer le cas de triangles coplanaires du cas des triangles dans des plans sécants apparaît. Nous abordons dans un premier temps le cas de triangles dans des plans sécants, puis celui des triangles coplanaires.

11.3.2 Triangles dans des plans sécants

Calcul de P^v

Comme dans la sous-section 5.2, on note \hat{a} la projection du point a sur le plan de T et $h = \|a - \hat{a}\|$ (voir Figure 5.4). Alors

$$P^{\phi_q}(a, T) = \int_T \frac{\phi_q(y)}{\|a - y\|} dy = \int_T \frac{\phi_q(y)}{\sqrt{h^2 + \|\hat{a} - y\|^2}} dy, \tag{11.27}$$

se simplifie, en prenant l'origine en \hat{a} , à l'aide de la formule (2.34) en

$$\begin{aligned}
P^{\phi_q}(a, T) &= \phi_q(\hat{a}) \sum_{l=1}^3 \delta_l(\hat{a}) \mathcal{T}(\hat{a}, \beta_l, h) \\
&+ \delta_{q+1}(\hat{a}) \mathcal{S}^{\phi_q}(\hat{a}, \beta_{q+1}, h) + \delta_{q+2}(\hat{a}) \mathcal{S}^{\phi_q}(\hat{a}, \beta_{q+2}, h),
\end{aligned} \tag{11.28}$$

où,

$$\mathcal{T}(\hat{a}, \beta, h) = \int_{\beta} f_1(h, \|y - \hat{a}\|) - f_2(h, \|y - \hat{a}\|) ds_y \tag{11.29}$$

$$\mathcal{S}^{\phi}(\hat{a}, \beta, h) = \int_{\beta} \phi(y) f_2(h, \|y - \hat{a}\|) ds_y, \tag{11.30}$$

avec,

$$f_c(h, \eta) = h^c \int_h^{+\infty} \frac{du}{u^{c+1} \sqrt{u^2 + \eta^2}}. \tag{11.31}$$

Calcul de $Q^{1,w}$

Dans la sous-section 5.2.2, nous avons réduit l'intégrale dans le cas d'une fonction de base w constante par élément ; dans ce précédent cas, le choix du segment (α ou β) à projeter était arbitraire. Nous utilisons une méthode analogue pour $Q^{1,w}$, cependant la réduction est plus simple en projetant α sur le plan parallèle à α contenant β (voir Figure 5.6) puisque β est le support de la fonction de base, soit

$$Q^{1,w}(\alpha, \beta) = \int_{\alpha \times \beta} \frac{w(y)}{\|x - y\|} ds_x ds_y = \int_{\check{\alpha} \times \beta} \frac{w(y)}{\sqrt{h^2 + \|\check{x} - y\|^2}} ds_{\check{x}} ds_y \quad (11.32)$$

Les triangles étant adjacents, il n'est pas possible que $\check{\alpha}$ et β soient parallèles. On choisit l'intersection o , des supports de $\check{\alpha}$ et β comme origine ; ce qui permet d'obtenir

$$\begin{aligned} Q^{1,w}(\alpha, \beta) = w(o) \left\{ \sum_{k=\pm} k \underline{s}^k \mathcal{T}(\check{a}^k, \beta, h) + \sum_{l=\pm} l \underline{t}^l \mathcal{T}(b^l, \check{\alpha}, h) \right\} \\ + \sum_{k=\pm} k \underline{s}^k \mathcal{S}^w(\check{a}^k, \beta, h) + \sum_{l=\pm} l \underline{t}^l w(b^l) \mathcal{S}(b^l, \check{\alpha}, h), \end{aligned} \quad (11.33)$$

où $\mathcal{S} = \mathcal{S}^w$ avec $w \equiv 1$, ce que l'on peut aussi noter

$$\mathcal{S}(b, \check{\alpha}, h) = \mathcal{S}^1(b, \check{\alpha}, h) = \int_{\check{\alpha}} f_2(h, \|\check{x} - b\|) ds_{\check{x}}. \quad (11.34)$$

Calcul de $Q^{v,w}$

La méthode utilisée consiste à ré-exprimer les fonctions de base :

$$\phi_p(x) = 1 + \mu \frac{(x - a_p | \vec{\alpha})}{|\alpha|^2} = 1 + \mu \frac{(\check{x} - \check{a}_p | \vec{\alpha})}{|\alpha|^2} \quad (11.35)$$

$$\psi_q(y) = 1 + \nu \frac{(y - b_q | \vec{\beta})}{|\beta|^2}, \quad (11.36)$$

avec $\mu = \pm 1$ ($\mu = 1$ lorsque $a_p = a^+$ et $\mu = -1$ lorsque $a_p = a^-$). De même $\nu = \pm 1$ suivant que $b_q = b^+$ ou b^- . L'intersection des supports de $\check{\alpha}$ et β , notée o , est choisie comme origine ; on obtient :

$$\phi_p(x) = C_\alpha + \mu \frac{(\check{x} - o | \vec{\alpha})}{|\alpha|^2} \quad (11.37)$$

$$\psi_q(y) = C_\beta + \nu \frac{(y - o | \vec{\beta})}{|\beta|^2}, \quad (11.38)$$

avec $C_\alpha = 1 + \frac{\mu(o-a_p|\vec{\alpha})}{|\alpha|^2}$ et $C_\beta = 1 + \frac{\nu(o-b_q|\vec{\beta})}{|\beta|^2}$. Tout ceci permet alors d'écrire,

$$\begin{aligned}
Q^{v,w}(\alpha, \beta) &= C_\alpha C_\beta \int_{\check{\alpha} \times \beta} \frac{1}{\sqrt{h^2 + \|\check{x} - y\|^2}} ds_{\check{x}} ds_y \\
&\quad + C_\alpha \frac{\nu}{|\beta|^2} \int_{\check{\alpha} \times \beta} \frac{(y - o|\vec{\beta})}{\sqrt{h^2 + \|\check{x} - y\|^2}} ds_{\check{x}} ds_y \\
&\quad + C_\beta \frac{\mu}{|\alpha|^2} \int_{\check{\alpha} \times \beta} \frac{(\check{x} - o|\vec{\alpha})}{\sqrt{h^2 + \|\check{x} - y\|^2}} ds_{\check{x}} ds_y \\
&\quad + \frac{\mu\nu}{|\alpha|^2 |\beta|^2} \int_{\check{\alpha} \times \beta} \frac{(\check{x} - o|\vec{\alpha})(y - \mathcal{I}|\vec{\beta})}{\sqrt{h^2 + \|\check{x} - y\|^2}} ds_{\check{x}} ds_y
\end{aligned} \tag{11.39}$$

On aboutit à l'expression suivante,

$$\begin{aligned}
Q^{v,w}(\alpha, \beta) &= C_\alpha C_\beta \left\{ \sum_{k=\pm} k \check{s}^k \mathcal{R}(\check{a}^k, \beta, h) + \sum_{l=\pm} l t^l \mathcal{R}(b^l, \check{\alpha}, h) \right\} \\
&\quad + \sum_{k=\pm} k \check{s}^k \left\{ \frac{C_\alpha \nu}{|\beta|^2} \tilde{\mathcal{V}}(\check{a}^k, o, \beta, h) + \frac{C_\beta \mu}{|\alpha|^2} (\check{a}^k - o|\vec{\alpha}) \mathcal{S}(b^l, \check{\alpha}, h) \right\} \\
&\quad + \sum_{l=\pm} l t^l \left\{ \frac{C_\alpha \nu}{|\beta|^2} (b^l - o|\vec{\beta}) \mathcal{S}(b^l, \check{\alpha}, h) + \frac{C_\beta \mu}{|\alpha|^2} \tilde{\mathcal{V}}(b^l, o, \check{\alpha}, h) \right\} \\
&\quad + \frac{\mu\nu}{|\alpha|^2 |\beta|^2} \left\{ \sum_{k=\pm} k \check{s}^k \tilde{\mathcal{W}}(\check{a}^k, o, \beta, h) + \sum_{l=\pm} l t^l \tilde{\mathcal{W}}(b^l, o, \check{\alpha}, h) \right\},
\end{aligned} \tag{11.40}$$

où $\tilde{\mathcal{V}}$ et $\tilde{\mathcal{W}}$ sont définies par

$$\tilde{\mathcal{V}}(\check{a}, \mathcal{I}, \beta, h) = \int_{\beta} (y - \mathcal{I}|\vec{\beta}) f_2(d, \|\check{a} - y\|) ds_y, \tag{11.41}$$

et,

$$\tilde{\mathcal{W}}(\check{a}, \mathcal{I}, \beta, h) = \int_{\beta} (y - \mathcal{I}|\vec{\beta}) f_3(d, \|\check{a} - y\|) ds_y, \tag{11.42}$$

et f_3 est définie par (11.31).

11.3.3 Cas de triangles coplanaires

Comme il a été vu dans la section 4.6.2, il nous faut distinguer deux configurations pour les supports des cotés α et β , celle où ils sont parallèles et celle où ils sont sécants.

Calcul de P^v

On calcule $P^{\psi_a}(a, T)$ en utilisant la formule (2.10) avec a comme origine (voir la Figure 4.6), alors

$$\begin{aligned}
P^{\psi_a}(a, T) &= \phi_q(a) \sum_{m=1}^3 \frac{\delta_m(a)}{2} R(a, \beta_m) + \frac{\delta_{q+1}(a)}{2} R^{\psi_a}(a, \beta_{q+1}) \\
&\quad + \frac{\delta_{q+2}(a)}{2} R^{\psi_a}(a, \beta_{q+2}),
\end{aligned} \tag{11.43}$$

avec R et R^ϕ donnés respectivement par (D.2) et (D.7).

Segments à supports sécants

Lorsque les supports de α et β sont sécants, on choisit l'intersection des supports, notée o , comme origine (voir la Figure 4.7).

Calcul de Q^{1,ϕ_q}

$$Q^{1,\psi_q}(\alpha, \beta) = \frac{\psi_q(o)}{2} \left\{ \sum_{k=\pm} k s^k R(a^k, \beta) + \sum_{l=\pm} l t^l R(b^l, \alpha) \right\} \quad (11.44)$$

$$+ \sum_{k=\pm} k s^k R^{\psi_q}(a^k, \beta) + \sum_{l=\pm} l t^l \psi_q(b^l) R(b^l, \alpha),$$

avec $\phi_q(b^l)$ s'annulant en une des extrémités de β .

Calcul de $Q^{v,w}$

En utilisant des décompositions identiques à (11.37) et (11.38), on a

$$\phi_p(x) = C_\alpha + \mu \frac{(x - o|\vec{\alpha})}{|\alpha|^2} \text{ et } \psi_q(y) = C_\beta + \nu \frac{(y - o|\vec{\beta})}{|\beta|^2}, \quad (11.45)$$

avec $\mu = \pm 1$ et $\nu = \pm 1$ comme en (11.35) et (11.36) et $C_\alpha = 1 + \frac{\mu(o-a_p|\vec{\alpha})}{|\alpha|^2}$ et $C_\beta = 1 + \frac{\nu(o-b_q|\vec{\beta})}{|\beta|^2}$. D'après la formule (2.10), on a

$$Q^{\phi_p, \psi_q}(\alpha, \beta) = \quad (11.46)$$

$$\sum_{k=\pm} k \underline{s}^k \left[\left(C_\alpha C_\beta + \frac{\mu C_\beta}{2|\alpha|^2} \right) R(a^k, \beta) + \left(\frac{\nu C_\alpha}{2|\beta|^2} + \frac{\mu\nu}{3|\alpha|^2|\beta|^2} (a^k - o|\vec{\alpha}) \right) \mathcal{V}(a^k, \mathcal{I}, \beta) \right]$$

$$+ \sum_{l=\pm} l \underline{t}^l \left[\left(C_\alpha C_\beta + \frac{\nu C_\alpha}{2|\beta|^2} \right) R(b^l, \alpha) + \left(\frac{\mu C_\beta}{2|\alpha|^2} + \frac{\mu\nu}{3|\alpha|^2|\beta|^2} (b^l - o|\vec{\beta}) \right) \mathcal{V}(b^l, \mathcal{I}, \alpha) \right],$$

avec

$$\mathcal{V}(a, o, \beta) = \int_\beta \frac{(y - o|\vec{\beta})}{\|y - a\|} ds_y. \quad (11.47)$$

L'expression finale de \mathcal{V} est donnée en (D.17).

Segments à supports parallèles

Lorsque les supports de α et β sont parallèles, la formule (2.34) remplace (2.10).

Calcul de Q^{1,ψ_q}

Comme la seule fonction de base est relative à β , on projette α sur le support de β .

En prenant $\underline{o} = b^-$ comme origine, on obtient

$$\begin{aligned} Q^{1,\psi_q}(\alpha, \beta) &= \int_{\tilde{\alpha} \times \beta} \frac{\psi_q(y)}{\sqrt{d^2 + \|\tilde{x} - y\|^2}} ds_{\tilde{x}} ds_y \\ &= \psi_q(b^-) \left\{ |\beta| \mathcal{T}(b^+, \tilde{\alpha}, d) + \sum_{k=\pm} k \underline{s}^k \mathcal{T}(\tilde{\alpha}^k, \beta, d) \right\} \\ &\quad + |\beta| \psi_q(b^+) \mathcal{S}(b^+, \tilde{\alpha}, d) + \sum_{k=\pm} k \underline{s}^k \mathcal{S}^{\psi_q}(\tilde{\alpha}^k, \beta, d). \end{aligned}$$

Les expressions de \mathcal{S} , \mathcal{S}^ϕ et \mathcal{T} sont respectivement données par (D.8), (D.13) et (D.15).

Calcul de Q^{ϕ_p, ψ_q}

On utilise une décomposition identique à (11.37) et (11.38). Cette fois, on remplace \mathcal{I} par a^- qui est notre nouvelle origine et on effectue la projection orthogonale de β sur le support de α . On note par $\tilde{\beta}$ et \tilde{y} les projections respectivement de β et y sur le support de α et $d = \|b^- - \tilde{b}^-\|$ (voir la Figure 4.8).

$$\phi_p(x) = 1 + \mu \frac{(x - a_p | \vec{\alpha})}{|\alpha|^2} = C_\alpha + \mu \frac{(x - a^- | \vec{\alpha})}{|\alpha|^2} \quad (11.48)$$

$$\psi_q(y) = 1 + \nu \frac{(y - b_q | \vec{\beta})}{|\beta|^2} = C_\beta + \nu \frac{(\tilde{y} - a^- | \vec{\beta})}{|\beta|^2}, \quad (11.49)$$

avec μ, ν définis comme en (11.35) et (11.36), et $C_\alpha = 1 + \frac{\mu(a^- - a_p | \vec{\alpha})}{|\alpha|^2}$, $C_\beta = 1 + \frac{\nu(a^- - \tilde{b}_q | \vec{\beta})}{|\beta|^2}$. Après calcul, on a

$$\begin{aligned} Q^{\phi_p, \psi_q}(\alpha, \beta) &= \int_{\alpha \times \beta} \frac{\phi_p(x) \psi_q(y)}{\|x - y\|} ds_x ds_y \quad (11.50) \\ &|\alpha| \left[C_\alpha C_\beta \mathcal{R}(a^+, \tilde{\beta}, d) + \mu C_\beta \mathcal{S}(a^+, \tilde{\beta}, d) + \frac{\nu C_\alpha}{|\beta|^2} \tilde{\mathcal{V}}(a^+, a^-, \tilde{\beta}, d) + \frac{\mu\nu}{|\beta|^2} \tilde{\mathcal{W}}(a^+, a^-, \tilde{\beta}, d) \right] \\ &+ \sum_{l=\pm} l \underline{l}^l \left[C_\alpha C_\beta \mathcal{R}(\tilde{b}^l, \alpha, d) + \frac{\nu C_\alpha}{|\beta|^2} (\tilde{b}^l - a^- | \vec{\beta}) \mathcal{S}(\tilde{b}^l, \alpha, d) \right] \\ &+ \sum_{l=\pm} l \underline{l}^l \left[\frac{\mu C_\beta}{|\alpha|^2} \tilde{\mathcal{V}}(\tilde{b}^l, a^-, \alpha, d) + \frac{\mu\nu}{|\alpha|^2 |\beta|^2} (\tilde{b}^l - a^- | \vec{\beta}) \tilde{\mathcal{W}}(\tilde{b}^l, a^-, \alpha, d) \right], \end{aligned}$$

avec \mathcal{R} , \mathcal{S} , $\tilde{\mathcal{V}}$ et $\tilde{\mathcal{W}}$ données en annexe.

Conclusion du chapitre

Nous avons montré que la méthode n'est pas limitée aux fonctions de base constantes par éléments mais est aussi utilisable avec des fonctions de base affines. Il est possible de traiter des ordres supérieurs, cependant même si le principe reste identique, les calculs deviennent plus lourds.

Application à l'électromagnétisme

Introduction

Le travail présenté dans les parties **II** et **III** concerne l'équation de Helmholtz 3-D. Nous abordons succinctement l'utilisation de notre méthode pour les intégrales comportant un intégrand singulier provenant de la discrétisation des équations de Maxwell.

Nous présentons les intégrales singulières qui interviennent dans les formulations en champs (EFIE, MFIE et CFIE).

Des formules explicites pour toutes les configurations géométriques des triangles peuvent être obtenues mais nous ne présentons que des résultats pour des triangles situés dans des plans parallèles et lorsque des fonctions de base RWG sont utilisées.

12.1. Equations intégrales pour l'électromagnétisme

Soient Ω un obstacle de frontière Γ , nous notons Ω_e le domaine $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ (voir Figure 12.1). Nous définissons le champ électromagnétique incident par (E^i, H^i) , le champ diffracté (E, H) et le champ total (E^t, H^t) . Tous ces champs électromagnétiques sont composés d'un champ électrique noté E et d'un champ magnétique noté H . Les potentiels de simple et de double couche étudiés dans le cas de l'équation de Helmholtz (voir (1.7) et (1.8)) ont des équivalents pour l'électromagnétisme avec \mathbb{L} et \mathbb{K} définis comme suit

$$\mathbb{L}J(x) = \int_{\Gamma} \left(G(x, y)J(y) + \frac{\nabla_x G(x, y)}{k^2} \nabla_{\Gamma} \cdot J(y) \right) dy \quad (12.1)$$

$$\mathbb{K}M(x) = \int_{\Gamma} \nabla_y G(x, y) \wedge M(y) dy, \quad (12.2)$$

où

$$G(x, y) = -\frac{e^{ik\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|},$$

est le noyau de Green associé à l'équation de Helmholtz 3-D, Γ est la frontière du domaine supposée régulière (voir Figure 12.1), J et M sont les courants respectivement électrique et magnétique, tous deux tangents à Γ . La divergence surfacique notée $\nabla_{\Gamma} \cdot$

est définie comme suit :

$$\nabla_{\Gamma} \cdot J(y) = \nabla J(y) - (\nabla J(y) \vec{n}) \cdot \vec{n}, \quad (12.3)$$

où \vec{n} est la normale unitaire à la surface Γ . M et J sont définis par

$$J = \vec{n} \wedge H \quad \text{et} \quad M = -\vec{n} \wedge E. \quad (12.4)$$

Le champ électromagnétique (E, H) en tout point de Ω_e admet une représentation intégrale, donnée par les formules de Stratton-Chu (voir [CK98]) :

$$E(x) = E^i(x) + ikZLJ(x) + \mathbb{K}M(x), x \in \Omega_e \quad (12.5)$$

$$H(x) = H^i(x) - \mathbb{K}J(x) + ikZ^{-1}LM(x), x \in \Omega_e, \quad (12.6)$$

où k est le nombre d'onde, Z l'impédance, Ω_e le domaine extérieur et (E^i, H^i) le champ électromagnétique incident. Le champ électrique E et le champ magnétique H ainsi définis vérifient la condition de Silver-Müller

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (H(x) \wedge x - |x|E(x)) = 0, \quad (12.7)$$

qui assure la décroissance des champs à l'infini et l'unicité de la solution (solution rayonnante).

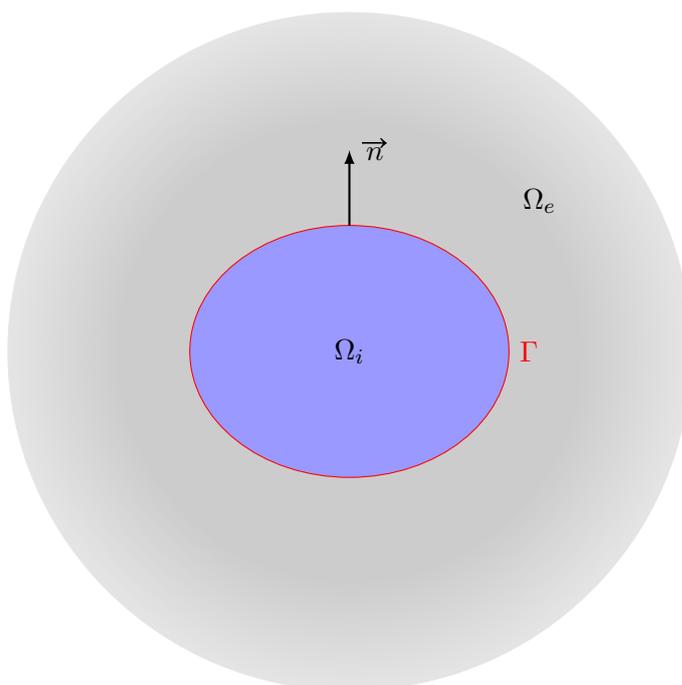


FIGURE 12.1 – Domaine Ω_i et Ω_e

Nous étudions les intégrales singulières intervenant dans les formulations variationnelles des équations intégrales en champs :

1. électrique (EFIE, pour Electric Field Integral Equation),
2. magnétique (MFIE, pour Magnetic Field Integral Equation),
3. ou encore en champs combinés (CFIE) qui revient à réaliser une combinaison des équations EFIE et MFIE.

12.2. Résolution numérique

L'étape de passage à la limite vers Γ dans les équations (12.5) et (12.6) et l'obtention de la formulation variationnelle ne sont pas présentées. Lors de la résolution d'un problème en électromagnétisme par la méthode des éléments de frontière variationnelle, les potentiels de simple et de double couche conduisent aux intégrales singulières suivantes :

$$\int_{\Gamma \times \Gamma} G(x, y) \left(J(y) \cdot J'(x) - \frac{1}{k^2} \nabla_{\Gamma} \cdot J(y) \nabla_{\Gamma} \cdot J(x) \right) dx dy, \quad (12.8)$$

$$\int_{\Gamma \times \Gamma} \vec{n}(x) \wedge (\nabla_y G(x, y) \wedge J(y)) \cdot J'(x) dx dy \quad (12.9)$$

où J' est une fonction-test. L'intégrale (12.8) intervient dans l'équation EFIE et (12.9) dans l'équation MFIE.

Nous utilisons les fonctions de base de Rao-Wilton-Glisson (voir [RWG82, GSS99]), notées RWG, pour la discrétisation. Ces fonctions de base assurent la conservation du flux des solutions à travers deux triangles adjacents.

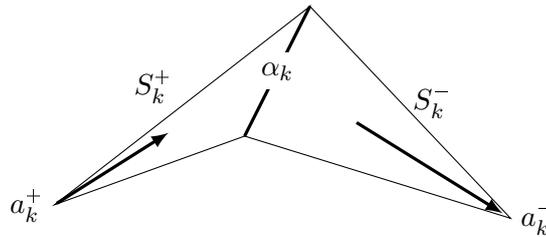


FIGURE 12.2 – Fonctions de base RWG associée à l'arête α_k qui appartient aux triangles S_k^{\pm} . Les flèches indiquent le sens du flux.

Soit α_k une arête du maillage qui appartient à deux triangles, notés S_k^+ et S_k^- , alors la fonction de base associée à l'arête α_k est définie par

$$\phi_k(x) = \begin{cases} \frac{|\alpha_k|}{2|S_k^+|} (x - a_k^+), & x \in S_k^+ \\ -\frac{|\alpha_k|}{2|S_k^-|} (x - a_k^-), & x \in S_k^- \\ 0, & x \notin S_k^- \cup S_k^+, \end{cases} \quad (12.10)$$

où a_k^+ et a_k^- sont les sommets opposés à α_k , $|\alpha_k|$ est la longueur de l'arête et $|S_k^{\pm}|$ sont les aires des deux triangles (voir la Figure 12.2). La divergence surfacique de ϕ_k s'écrit

$$\nabla_{\Gamma} \cdot \phi_k(x) = \begin{cases} \frac{|\alpha_k|}{2|S_k^+|}, & x \in S_k^+ \\ -\frac{|\alpha_k|}{2|S_k^-|}, & x \in S_k^- \\ 0, & x \notin S_k^- \cup S_k^+, \end{cases} \quad (12.11)$$

La fonction ϕ_k n'est pas continue sur l'arête α_k mais sa composante normale à cette arête l'est. Par ailleurs, le long du bord de $S_k^+ \cup S_k^-$, la composante de ϕ_k normale à ce

bord est nulle. Ces propriétés des fonctions de base RWG permettent de conserver la continuité du courant de surface à travers les arêtes.

Pour chaque paire de triangles S et T , on calcule les influences entre chaque arête des triangles puis ces réactions élémentaires sont ajoutées à la matrice globale du système linéaire. Les réactions élémentaires s'écrivent :

$$\mathcal{L}(S, T) = \int_{S \times T} G(x, y) \left(\phi_i(x) \cdot \psi_j(y) - \frac{1}{k^2} \nabla_{\Gamma} \cdot \phi_i(x) \nabla_{\Gamma} \cdot \psi_j(y) \right) dx dy, \quad (12.12)$$

et

$$\mathcal{K}(S, T) = \int_{S \times T} \phi_i(x) \cdot \nabla_y G(x, y) \wedge \psi_j(y) dx dy, \quad (12.13)$$

pour $1 \leq i, j \leq 3$. La divergence surfacique ∇_{Γ} est définie en (12.3).

On remarque que $\mathcal{L}(S, T)$ et $\mathcal{K}(S, T)$ correspondent à des matrices de taille 3×3 . Il faut donc calculer 9 intégrales pour déterminer chaque matrice élémentaire. Nous allons montrer que l'évaluation de $\mathcal{L}(S, T)$ ne nécessite, en réalité, que l'évaluation de 4 intégrales. Ces intégrales sont similaires à celles évaluées pour l'équation de Helmholtz 3-D en utilisant des fonctions de base constantes et affines par triangle. L'évaluation complète de $\mathcal{K}(S, T)$ requiert le calcul de seulement deux intégrales ; l'une d'entre elles a déjà été partiellement calculée pour l'équation de Helmholtz. Dans la suite, nous omettrons les signes dans la définition des fonctions de base (voir (12.10)) puisque notre objectif est l'évaluation des intégrales singulières. Pour résoudre les équations de Maxwell, il faut donc prendre en compte l'orientation choisie de la surface et le signe de chaque fonction de base.

12.2.1 Simplification de \mathcal{L}

Nous utilisons $\mathcal{L}_{i,j}$ à la place de $(\mathcal{L}(S, T))_{i,j}$ pour simplifier les notations. D'après (12.11), la réaction élémentaire \mathcal{L} définie en (12.12) s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(S, T)_{i,j} = & \frac{1}{4|S||T|} \left[\int_{S \times T} G(x, y) (x - a_1) \cdot (y - b_1) dx dy \right. \\ & + \left((a_1 - a_i) \cdot (b_1 - b_j) - \frac{4}{k^2} \right) \int_{S \times T} G(x, y) dx dy \\ & + (a_1 - a_i) \cdot \int_{S \times T} G(x, y) (y - b_1) dx dy \\ & \left. + (b_1 - b_j) \cdot \int_{S \times T} G(x, y) (x - a_1) dx dy \right]. \end{aligned} \quad (12.14)$$

12.2.2 Simplification de \mathcal{K}

Dans la suite, on note $\mathcal{K}_{i,j} = (\mathcal{K}(S, T))_{i,j}$. D'après (12.13), on a

$$\mathcal{K}_{i,j} = \frac{1}{4|S||T|} \int_{S \times T} (x - a_i) \cdot \nabla_y G(x, y) \wedge (y - b_j) dx dy. \quad (12.15)$$

En premier lieu, on rappelle deux propriétés du produit vectoriel et du produit mixte :

$$v \wedge v = 0 \quad \text{et} \quad u \cdot (v \wedge u) = 0 \quad (12.16)$$

puis on introduit la décomposition

$$y - b_j = (y - x) + (x - a_i) + (a_i - b_j),$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{i,j} &= \frac{1}{4|S||T|} \int_{S \times T} (x - a_i) \cdot \nabla_y G(x, y) \wedge (y - x) dx dy \\ &+ \frac{1}{4|S||T|} \int_{S \times T} (x - a_i) \cdot \nabla_y G(x, y) \wedge (x - a_i) dx dy \\ &+ \frac{1}{4|S||T|} \int_{S \times T} (x - a_i) \cdot \nabla_y G(x, y) \wedge (a_i - b_j) dx dy. \end{aligned}$$

Le gradient du noyau de Green a une forme particulière dont on tire profit : $\nabla_y G(x, y) = (x - y)F(\|x - y\|)$, alors les deux premières intégrales s'annulent en vertu de (12.16). Finalement, il reste

$$\mathcal{K}_{i,j} = \frac{(a_i - b_j)}{4|S||T|} \cdot \int_{S \times T} (x - a_i) \wedge \nabla_y G(x, y) dx dy,$$

puisque $u \cdot (v \wedge w) = w \cdot (u \wedge v)$. Nous avons réduit le nombre d'intégrales à évaluer de 9 à 3. En utilisant la décomposition $x - a_i = (x - a_1) + (a_1 - a_i)$, avec a_1 un sommet du triangle S fixé arbitrairement, on se ramène à 2 intégrales seulement. En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{i,j} &= \frac{(a_i - b_j)}{4|S||T|} \cdot \int_{S \times T} (x - a_1) \wedge \nabla_y G(x, y) dx dy \\ &+ \frac{(a_i - b_j)}{4|S||T|} \cdot (a_1 - a_i) \wedge \int_{S \times T} \nabla_y G(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (12.17)$$

Ce qui donne l'expression finale pour $\mathcal{K}(S, T)$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}(S, T))_{i,j} &= \frac{1}{4|S||T|} \left[(a_i - b_j) \wedge (a_1 - a_i) \cdot \int_{S \times T} \nabla_y G(x, y) dx dy \right. \\ &\quad \left. + (a_i - b_j) \cdot \int_{S \times T} (x - a_1) \wedge \nabla_y G(x, y) dx dy \right] \end{aligned} \quad (12.18)$$

12.3. Triangles dans des plans parallèles

Lorsque les triangles S et T sont dans des plans parallèles très proches, certaines intégrales sont difficiles à évaluer avec une bonne précision. Les deux intégrales présentant les intégrands les plus singuliers sont les suivantes

$$\int_{S \times T} \nabla_y G(x, y) dx dy \quad \text{et} \quad \int_{S \times T} (x - a_1) \wedge \nabla_y G(x, y) dx dy.$$

Dans la partie **III**, les termes singuliers issus de la première intégrale ont déjà été évalués, nous allons donc nous limiter à la seconde intégrale et plus précisément à l'intégrale

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \int_{S \times T} (x - a_1) \wedge \frac{(x - y)}{\|x - y\|^3} dx dy \\ &= \int_{S \times \hat{T}} (x - a_1) \wedge \frac{(x - \hat{y})}{(h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{3/2}} dx d\hat{y} - \vec{v} \wedge \int_{S \times \hat{T}} \frac{x - a_1}{(h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{3/2}} dx d\hat{y},\end{aligned}\quad (12.19)$$

où \vec{v} est le vecteur correspondant à la projection orthogonale du plan de T sur le plan de S (voir la Figure 7.2). En utilisant la simplification :

$$\int_{\Omega} \nabla f(y) dy = \int_{\partial\Omega} f(y) \vec{v}(y) ds_y, \quad (12.20)$$

indiquée dans la sous-section 9.5.3, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\hat{T}} \frac{x - \hat{y}}{(h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{3/2}} d\hat{y} &= \int_{\hat{T}} \nabla_y \left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + \|x - \hat{y}\|^2}} \right) d\hat{y} = \int_{\partial\hat{T}} \frac{\vec{v}}{\sqrt{h^2 + \|x - \hat{y}\|^2}} ds_{\hat{y}}, \\ &= \sum_{j=1}^3 \vec{\lambda}_j \int_{\hat{\beta}_j} \frac{1}{\sqrt{h^2 + \|x - \hat{y}\|^2}} ds_{\hat{y}},\end{aligned}\quad (12.21)$$

où \vec{v} est la normale le long des côtés de \hat{T} et $\vec{\lambda}_j = \vec{v}|_{\hat{\beta}_j}$. D'après (12.19) et (12.21), on a

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= - \sum_{j=1}^3 \vec{\lambda}_j \wedge \int_{S \times \hat{\beta}_j} \frac{x - a_1}{\sqrt{h^2 + \|x - \hat{y}\|^2}} dx ds_{\hat{y}} - \vec{v} \wedge \int_{S \times \hat{T}} \frac{x - a_1}{(h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{3/2}} dx dy \\ &= - \sum_{j=1}^3 \vec{\lambda}_j \wedge \mathcal{M}_1 - \vec{v} \wedge \mathcal{M}_2,\end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= \int_{S \times \hat{\beta}_j} \frac{x - a_1}{\sqrt{h^2 + \|x - \hat{y}\|^2}} dx ds_{\hat{y}} \\ \mathcal{M}_2 &= \int_{S \times \hat{T}} \frac{x - a_1}{(h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{3/2}} dx d\hat{y}.\end{aligned}$$

12.3.1 Réduction de \mathcal{M}_1

Pour effectuer une première simplification, il faut choisir pour origine un point du support de $\hat{\beta}_j$. Nous décomposons l'intégrale afin de prendre comme origine \hat{b}_j^- ,

$$\mathcal{M}_1 = \int_{S \times \hat{\beta}_j} \frac{x - \hat{b}_j^-}{\sqrt{h^2 + \|x - \hat{y}\|^2}} dx ds_{\hat{y}} + (\hat{b}_j^- - a_1) \int_{S \times \hat{\beta}_j} \frac{1}{\sqrt{h^2 + \|x - \hat{y}\|^2}} dx ds_{\hat{y}},$$

alors l'application de la formule (2.34) nous fournit

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= |\hat{\beta}_j| \left\{ \mathcal{P}_3(\hat{b}_j^-, \hat{b}_j^+, S, h) + (\hat{b}_j^- - a_1) \mathcal{P}_2(\hat{b}_j^+, S, h) \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \gamma_i(\hat{b}_j^-) \left\{ \mathcal{Q}_3(\hat{b}_j^-, \alpha_i, \hat{\beta}_j, h) + (\hat{b}_j^- - a_1) \mathcal{Q}_2(\alpha_i, \hat{\beta}_j, h) \right\},\end{aligned}\quad (12.22)$$

avec,

$$\mathcal{P}_p(m, \hat{b}, S, h) = \int_S (x - m) f_p(h, \|x - \hat{b}\|; 0) dx \quad (12.23)$$

$$P_p(\hat{b}, S, h) = \int_S f_p(h, \|x - \hat{b}\|; 0) dx \quad (12.24)$$

$$\mathcal{Q}_p(\hat{b}, \alpha, \hat{\beta}, h) = \int_{\alpha \times \hat{\beta}} (x - \hat{b}) f_p(h, \|x - \hat{y}\|; 0) ds_x ds_{\hat{y}} \quad (12.25)$$

$$Q_p(\alpha, \hat{\beta}, h) = \int_{\alpha_i \times \hat{\beta}_j} f_p(h, \|x - \hat{y}\|; 0) ds_x ds_{\hat{y}}. \quad (12.26)$$

L'intégrand f_p est défini en (8.2).

Réduction de \mathcal{P}_3

On décompose l'intégrale en deux parties :

$$\mathcal{P}_3(m, \hat{b}, S, h) = \int_S (x - \hat{b}) f_3(h, \|x - \hat{b}\|; 0) dx + (\hat{b} - m) \int_S f_3(h, \|x - \hat{b}\|; 0) dx.$$

On a donc,

$$\mathcal{P}_3(m, \hat{b}, S, h) = \sum_{i=1}^3 \gamma_i(\hat{b}) \left\{ \mathcal{V}_3^2(\hat{b}, \alpha_i, h) + (\hat{b} - m) \mathcal{V}_3^1(\hat{b}, \alpha_i, h) \right\}, \quad (12.27)$$

avec

$$\mathcal{V}_3^2(\hat{b}, \alpha, h) = \int_{\alpha} (x - \hat{b}) \mathfrak{F}_3^2(h, \|x - \hat{b}\|; 0) ds_x$$

$$\mathcal{V}_3^1(\hat{b}, \alpha, h) = \int_{\alpha} \mathfrak{F}_3^1(h, \|x - \hat{b}\|; 0) ds_x,$$

et plus généralement,

$$\mathcal{V}_p^q(\hat{b}, \alpha, h) = \int_{\alpha} (x - \hat{b}) \mathfrak{F}_p^q(h, \|x - \hat{b}\|; 0) ds_x, \quad (12.28)$$

$$\mathcal{V}_p^q(\hat{b}, \alpha, h) = \int_{\alpha} \mathfrak{F}_p^q(h, \|x - \hat{b}\|; 0) ds_x, \quad (12.29)$$

où \mathfrak{F}_p^q est une généralisation de (8.6), à savoir

$$\mathfrak{F}_p^q(h, \eta; \zeta) = h^{q-\zeta} \int_{v=h}^{+\infty} \frac{f_p(v, \eta; \zeta)}{v^{q+1-\zeta}} dv. \quad (12.30)$$

L'expression (8.6) correspond à \mathfrak{F}_p^{p-1} .

Réduction de P_2

D'après (12.29), on a

$$P_2(\hat{b}, S, h) = \sum_{i=1}^3 \gamma_i(\hat{b}) \mathcal{V}_2^1(\hat{b}, \alpha, h), \quad (12.31)$$

Réduction de \mathcal{Q}_3

Nous ne traitons que le cas où les supports de α et $\hat{\beta}$ sont sécants. On prend I l'intersection des deux supports, comme origine. Pour conserver l'homogénéité, l'intégrale est décomposée en deux parties :

$$\mathcal{Q}_3(\hat{b}, \alpha, \hat{\beta}, h) = \int_{\alpha \times \hat{\beta}} (x - I) f_3(h, \|x - \hat{y}\|; 0) ds_x ds_{\hat{y}} + (I - \hat{b}) \int_{\alpha \times \hat{\beta}} f_3(h, \|x - \hat{y}\|; 0) ds_x ds_{\hat{y}}.$$

D'après (2.34), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_3(\hat{b}, \alpha, \hat{\beta}, h) &= \sum_{k=\pm} k s^k \left\{ (a^k - I) V_3^2(a^k, \hat{\beta}, h) + (I - \hat{b}) V_3^1(a^k, \hat{\beta}, h) \right\} \\ &\quad + \sum_{l=\pm} l \hat{t}^l \left\{ V_3^2(I, \hat{b}^l, \alpha, h) + (I - \hat{b}) V_3^1(\hat{b}^l, \alpha, h) \right\}. \end{aligned} \quad (12.32)$$

Réduction de \mathcal{Q}_2

De la même manière que pour \mathcal{Q}_3 , on choisit I comme origine et on obtient

$$\mathcal{Q}_2(\alpha, \hat{\beta}, h) = \sum_{k=\pm} k s^k V_2^1(a^k, \hat{\beta}, h) + \sum_{l=\pm} l \hat{t}^l V_2^1(\hat{b}^l, \alpha, h). \quad (12.33)$$

12.3.2 Réduction de \mathcal{M}_2

Nous souhaitons évaluer l'intégrale

$$\mathcal{M}_2 = \int_{S \times \hat{T}} \frac{x - a_1}{(h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{3/2}} dx d\hat{y}.$$

Si S et \hat{T} ont au moins un sommet commun, alors on utilise ce sommet (noté $a_i = b_j$) comme origine, on décompose \mathcal{M}_2 :

$$\mathcal{M}_2 = \int_{S \times \hat{T}} \frac{x - a_i}{(h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{3/2}} dx d\hat{y} + (a_i - a_1) \int_{S \times \hat{T}} \frac{1}{(h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{3/2}} dx d\hat{y},$$

où la seconde intégrale, qui correspond à J_2^s en (7.6) a déjà été calculée. Si les triangles n'ont aucun sommet commun, alors on choisit a_1 comme origine et la seconde intégrale n'apparaît pas. En conséquence, nous présentons la réduction de l'intégrale :

$$\tilde{\mathcal{M}}_2 = \int_{S \times \hat{T}} \frac{x - a_i}{(h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{3/2}} dx d\hat{y}. \quad (12.34)$$

En prenant a_i comme origine, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}_2 &= g_i \int_{\alpha_i \times \hat{T}} (x - a_i) f_4(h, \|x - \hat{y}\|; 2) ds_x d\hat{y} \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 \hat{\delta}_j(a_i) \int_{S \times \hat{\beta}_j} (x - a_i) f_4(h, \|x - \hat{y}\|; 2) dx ds_{\hat{y}}. \end{aligned}$$

Intégrale sur $\alpha_i \times \hat{T}$

On décompose l'intégrale pour prendre en compte une origine assurant l'homogénéité :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_i \times \hat{T}} (x - a_i) f_4(h, \|x - \hat{y}\|; 2) ds_x d\hat{y} &= \int_{\alpha_i \times \hat{T}} (x - a_i^-) f_4(h, \|x - \hat{y}\|; 2) ds_x d\hat{y} \\ &\quad + (a_i^- - a_i) \int_{\alpha_i \times \hat{T}} f_4(h, \|x - \hat{y}\|; 2) ds_x d\hat{y} \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha_i \times \hat{T}} (x - a_i) f_4(h, \|x - \hat{y}\|; 2) ds_x d\hat{y} \\ &= |\alpha_i| \left\{ (a_i^+ - a_i^-) P_4^3(a_i^+, \hat{T}, h) + (a_i^- - a_i) P_4^2(a_i^+, \hat{T}, h) \right\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 \hat{\delta}_j(a_i^-) \left\{ Q_4^3(a_i^-, \alpha_i, \hat{\beta}_j, h) + (a_i^- - a_i) Q_4^2(\alpha_i, \hat{\beta}_j, h) \right\}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} P_p^q(a, \hat{T}, h) &= \int_{\hat{T}} \mathfrak{F}_p^q(h, \|a - \hat{y}\|; 2) d\hat{y}, \\ Q_p^q(a, \alpha, \hat{\beta}, h) &= \int_{\alpha \times \hat{\beta}} (x - a) \mathfrak{F}_p^q(h, \|x - \hat{y}\|; 2) ds_x ds_{\hat{y}}, \\ Q_p^q(\alpha, \hat{\beta}, h) &= \int_{\alpha \times \hat{\beta}} \mathfrak{F}_p^q(h, \|x - \hat{y}\|; 2) ds_x ds_{\hat{y}}. \end{aligned}$$

Nous commençons par effectuer la réduction de P_4^3 et P_4^2 . Nous réduisons ensuite les intégrales sur le produit de deux segments uniquement dans le cas de segments à supports sécants par soucis de simplicité. Le cas des supports parallèles se traite en utilisant la méthode déjà présentée dans la section [9.2.3](#).

Réduction de P_4^3 et P_4^2

$$P_4^3(a, \hat{T}, h) = \int_{\hat{T}} \mathfrak{F}_4^3(h, \|a - \hat{y}\|; 2) d\hat{y} = \sum_{j=1}^3 \hat{\delta}_j(a) \int_{\hat{\beta}_j} {}^1\Phi_4^3(h, \|a - \hat{y}\|; 2) ds_{\hat{y}},$$

où, encore une fois, ${}^r\Phi_p^q$ est une généralisation de [\(8.10\)](#) :

$${}^r\Phi_p^q(h, \eta; \zeta) = h^{r-\zeta} \int_{w=h}^{+\infty} \frac{\mathfrak{F}_p^q(w, \eta; \zeta)}{w^{r+1-\zeta}} dw. \quad (12.35)$$

Comme dans la sous-section [9.5.1](#), un changement de l'ordre d'intégration permet d'évaluer plus simplement ${}^r\Phi_p^q$.

$$P_4^3(a, \hat{T}, h) = \sum_{j=1}^3 \hat{\delta}_j(a) {}^1R_4^3(a, \hat{\beta}_j, h; 2), \quad (12.36)$$

où

$${}^r\mathcal{R}_p^q(a, \hat{\beta}, h; \zeta) = \int_{\hat{\beta}} {}^r\Phi_p^q(h, \|a - \hat{y}\|; \zeta) ds_{\hat{y}}. \quad (12.37)$$

De la même manière,

$$\mathcal{P}_4^2(a, \hat{T}, h) = \sum_{j=1}^3 \hat{\delta}_j(a) {}^1\mathcal{R}_4^2(a, \hat{\beta}_j, h; 2),$$

Réduction de \mathcal{Q}_4^3

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_4^3(a, \alpha, \hat{\beta}, h) &= \int_{\alpha \times \hat{\beta}} (x - I) \mathfrak{F}_4^3(h, \|x - \hat{y}\|; 2) ds_x ds_{\hat{y}} \\ &\quad + (I - a) \int_{\alpha \times \hat{\beta}} \mathfrak{F}_4^3(h, \|x - \hat{y}\|; 2) ds_x ds_{\hat{y}}, \end{aligned}$$

soit,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_4^3(a, \alpha, \hat{\beta}, h) &= \sum_{k=\pm} k s^k \left\{ (a^k - I) {}^2\mathcal{R}_4^3(a^k, \hat{\beta}, h; 2) + (I - a) {}^1\mathcal{R}_4^3(a^k, \hat{\beta}, h; 2) \right\} \\ &\quad + \sum_{l=\pm} l \hat{t}^l \left\{ {}^2\mathcal{R}_4^3(I, \hat{b}^l, \alpha, h; 2) + (I - a) {}^1\mathcal{R}_4^3(\hat{b}^l, \alpha, h; 2) \right\} \end{aligned}$$

avec,

$${}^2\mathcal{R}_4^3(I, \hat{b}, \alpha, h, ; \zeta) = \int_{\alpha} (x - I) {}^2\Phi_4^3(h, \|x - \hat{b}\|; \zeta), \quad (12.38)$$

Réduction de \mathcal{Q}_4^2

Les supports des segments α et $\hat{\beta}$ sont supposés être sécants. On prend comme origine, l'intersection I des supports, alors

$$\mathcal{Q}_4^2(\alpha, \hat{\beta}, h) = \sum_{k=\pm} k s^k {}^1\mathcal{R}_4^2(a^k, \hat{\beta}, h; 2) + \sum_{l=\pm} l \hat{t}^l {}^1\mathcal{R}_4^2(\hat{b}^l, \alpha, h; 2) \quad (12.39)$$

12.4. Triangles superposés

Nous présentons les simplifications qui apparaissent lorsque S et T sont superposés.

$$\mathcal{M} = \int_{S \times S} (x - a_1) \wedge \frac{(x - \hat{y})}{(h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{3/2}} dx d\hat{y} - \vec{v} \int_{S \times S} \wedge \frac{(x - a_1)}{(h^2 + \|x - \hat{y}\|^2)^{3/2}} dx d\hat{y},$$

se simplifie du fait de l'annulation de la première intégrale (que l'on note \mathcal{A}). Ce résultat se montre aisément en prenant a_1 comme origine, puis en utilisant la formule (2.34) et finalement en inversant l'ordre d'intégration de la dernière intégrale :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= g_1 \int_{\alpha_1 \times S} (x - a_1) \wedge (x - y) f_5(h, \|x - y\|; 2) ds_x dy \\ &\quad + g_1 \int_{\alpha_1 \times S} (y - a_1) \wedge (y - x) f_5(h, \|x - y\|; 2) ds_x dy,\end{aligned}$$

Or $(y - a_1) \wedge (x - y) = (x - a_1) \wedge (x - y)$, donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= g_1 \int_{\alpha_1 \times S} (x - a_1) \wedge (x - y) f_5(h, \|x - y\|; 2) ds_x dy \\ &\quad - g_1 \int_{\alpha_1 \times S} (x - a_1) \wedge (x - y) f_5(h, \|x - y\|; 2) ds_x dy,\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat $\mathcal{A} = 0$ lorsque $\hat{T} = S$. Il en résulte que le calcul de \mathcal{M} (voir (12.19)) revient au seul calcul de \mathcal{M}_2 :

$$\mathcal{M} = -\vec{v} \wedge \int_{S \times S} \frac{x - a_1}{(h^2 + \|x - y\|^2)^{3/2}} dx dy = -\vec{v} \wedge \mathcal{M}_2. \quad (12.40)$$

D'après la sous-section 12.3.2, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2 &= 2|S| \vec{\alpha}_3 \sum_{l=1}^3 g_l {}^2R_4^3(a_l, \alpha_l, h; 2) + 2|S| \vec{\alpha}_1 \sum_{l=1}^3 g_l {}^1R_4^3(a_l, \alpha_l, h; 2) \\ &\quad + 2|S| g_1 {}^2R_4^3(a_1, \alpha_1, h; 2) - 2|S| \vec{\alpha}_1 g_2 {}^2R_4^3(a_2, \alpha_2, h; 2),\end{aligned}$$

avec la notation indiquée dans la figure 12.3.

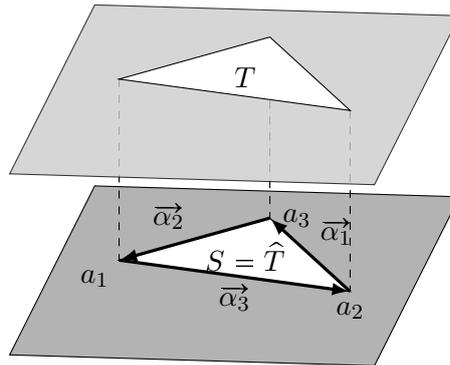


FIGURE 12.3 – Triangles superposés.

Intégrale du noyau de Green complet

Introduction

Le noyau de Green de l'équation de Helmholtz 3-D se décompose en une partie singulière et une partie régulière :

$$-\frac{e^{ik\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|} = -\frac{1}{4\pi\|x-y\|} - \frac{e^{ik\|x-y\|} - 1}{4\pi\|x-y\|}, \quad (13.1)$$

où le premier terme est le terme singulier, traité dans les parties [II](#) et [III](#), et le second terme est intégré numériquement.

Nous présentons dans ce chapitre une technique permettant de réduire l'intégrale du noyau de Green complet sans distinguer les parties homogènes (singulières) et régulières. Un développement en série entière de l'exponentielle présente dans le noyau de Green permet d'obtenir une série d'intégrales comportant chacune un intégrand homogène susceptible d'être réduit à l'aide de notre méthode.

Cette technique est utile lorsque les triangles sont coplanaires ou dans des plans sécants mais n'apporte pas de simplification significative pour les plans parallèles. Nous présentons des résultats avec des fonctions de base constantes et affines par élément.

Afin d'appliquer la méthode de réduction au noyau de Green, on développe l'exponentielle en série entière,

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{r} \sum_{l \geq 0} \frac{(ikr)^l}{(l+1)!} = \sum_{l \geq -1} \frac{(ik)^{l+1}}{(l+1)!} r^l, \quad (13.2)$$

où $r = \|x - y\|$. L'intégrale initiale 4-D devient alors une série d'intégrales comportant un intégrand homogène :

$$I_G = \int_{S \times T} \frac{e^{ik\|x-y\|}}{\|x-y\|} dx dy = \sum_{l \geq -1} \frac{(ik)^{l+1}}{(l+1)!} \int_{S \times T} \|x-y\|^l dx dy. \quad (13.3)$$

Il est donc possible d'utiliser notre méthode pour transformer chaque intégrale de la série en une combinaison linéaire d'intégrales sur des domaines d'intégration de dimension

inférieure. La réduction jusqu'à l'obtention d'intégrales mono-dimensionnelles n'est pas toujours possible ; cela dépend de la configuration géométrique des deux triangles.

13.1. Auto-influence

13.1.1 Réduction dans le cas de l'auto-influence

Lorsque les deux triangles coïncident, (13.3) devient

$$I_G = \sum_{l \geq -1} \frac{(ik)^{l+1}}{(l+1)!} \int_{S \times S} \|x - y\|^l dx dy = \sum_{l \geq -1} \frac{(ik)^{l+1}}{(l+1)!} I_l, \quad (13.4)$$

avec

$$I_l = \int_{S \times S} \|x - y\|^l dx dy. \quad (13.5)$$

En appliquant la formule (2.10) trois fois successivement, on obtient

$$\begin{aligned} I_l &= \frac{2g_i}{(l+4)} \int_{\alpha_i \times S} \|x - y\|^l ds_x dy \\ &= \frac{4|S|}{(l+4)(l+3)} \int_S \|a_{i+2} - y\|^l dy + \frac{2g_i g_{i+1}}{(l+4)(l+3)} \int_{\alpha_i \times \alpha_{i+1}} \|x - y\|^l ds_x ds_y, \end{aligned}$$

qui donne finalement

$$I_l = \frac{4|S|}{(l+4)(l+3)(l+2)} \sum_{i=1}^3 g_i \int_{\alpha_i} \|a_i - y\|^l ds_y, \quad (13.6)$$

En combinant (13.6) et (13.4), on obtient

$$I_G = 4|S| \sum_{l \geq -1} \frac{(ik)^{l+1}}{(l+4)!} \left\{ \sum_{i=1}^3 g_i \int_{\alpha_i} \|a_i - y\|^l ds_y \right\}. \quad (13.7)$$

La simplification s'achève en intervertissant l'intégrale et la somme (selon l),

$$I_G = 4|S| \sum_{i=1}^3 g_i \int_{\alpha_i} \left\{ \sum_{l \geq -1} \frac{(ik)^{l+1}}{(l+4)!} \|a_i - y\|^l \right\} ds_y. \quad (13.8)$$

On évalue la série entière :

$$f(r) := \sum_{l \geq -1} \frac{(ik)^{l+1}}{(l+4)!} r^l = i \frac{e^{ikr} - D_2(r)}{k^3 r^4}, \quad (13.9)$$

où,

$$D_n(r) = \sum_{j=0}^n \frac{(ikr)^j}{j!}, \quad (13.10)$$

est le développement à l'ordre n de e^{ikr} en 0. On note que α_i est le côté opposé à a_i ainsi $r = \|a_i - y\|$ avec $y \in \alpha_i$ ne s'annule jamais ; ce qui donne le résultat final :

$$I_G = 4|S| \sum_{i=1}^3 g_i \int_{\alpha_i} f(\|a_i - y\|) ds_y. \quad (13.11)$$

A la différence du chapitre 3, nous ne connaissons pas d'expression explicite de l'intégrale mono-dimensionnelle dans (13.11). Cependant, il est beaucoup plus facile d'évaluer numériquement les intégrales de l'expression (13.11) que l'intégrale quadri-dimensionnelle de (13.4). La section 13.6 présente une comparaison de l'évaluation numérique des intégrales (13.4) et (13.11).

13.1.2 Evaluation explicite en tronquant la série entière

L'évaluation des intégrales mono-dimensionnelles de (13.7) conduit à des expressions contenant des fonctions hypergéométriques :

$$\int_{s^-}^{s^+} (g_i^2 + s^2)^{l/2} ds = d^l \left[s {}_2F_1 \left(\left[\frac{1}{2}, -\frac{l}{2} \right], \frac{3}{2}, -\frac{s^2}{g_i^2} \right) \right]_{s=s^-}^{s^+}; \quad (13.12)$$

ce qui constitue un sérieux obstacle à l'obtention d'une forme explicite pour la somme de la série (13.7). Cependant, on peut noter que pour un l fixé, la fonction hypergéométrique correspondante possède une expression sous forme de fonctions élémentaires. Soit alors $P : l \in \mathbb{N} \rightarrow s {}_2F_1 \left(\left[\frac{1}{2}, -\frac{l}{2} \right], \frac{3}{2}, -\frac{s^2}{g_i^2} \right)$; les premiers termes de la série ont pour expression :

$$\begin{aligned} P(-1) &= \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{g_i} \right), \\ P(0) &= s, \\ P(1) &= \frac{s\sqrt{g_i^2 + s^2}}{2} + \frac{g_i^2}{2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{g_i} \right), \\ P(2) &= g_i^2 s + \frac{s^3}{3}, \\ P(3) &= \frac{s\sqrt{g_i^2 + s^2} (2s^2 + 5g_i^2)}{8} + \frac{3g_i^4}{8} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{g_i} \right). \end{aligned}$$

On peut alors envisager de calculer une approximation de la somme de la série (13.7) en la tronquant à un nombre déterminé, soit

$$I_G^{\text{tronq}}(N) = 4|S| \sum_{i=1}^3 g_i \left\{ \sum_{l=-1}^N \frac{(ik)^{l+1}}{(l+4)!} \int_{\alpha_i} \|a_i - y\|^l \right\} ds_y. \quad (13.13)$$

On définit I_G^{ref} , la solution de référence calculée à l'aide de (13.11) avec un nombre suffisant de points d'intégration de Gauss-Legendre pour assurer une bonne précision, et l'erreur relative suivante :

$$E_G^{\text{tronq}}(N) = \left| \frac{I_G^{\text{ref}} - I_G^{\text{tronq}}(N)}{I_G^{\text{ref}}} \right|. \quad (13.14)$$

Sur le tableau 13.1, on a consigné l'évolution de l'écart entre la somme de la série tronquée à 5, 10 et 15 termes et l'approximation I_G^{ref} obtenue par quadrature numérique, en fonction de la forme du triangle S . On a choisi de considérer une famille de triangle isocèle dont la base est de longueur 1 et la hauteur augmente (voir la Figure 13.1). On constate que la précision décroît quand la hauteur augmente pour un nombre de termes fixé dans l'approximation.

h	$I^{\text{ref}}(h)$	$E_G^{\text{tronq}}(5)$	$E_G^{\text{tronq}}(10)$	$E_G^{\text{tronq}}(15)$
0.100	$3.8703463e - 04$	$8.2241244e - 05$	$4.2847083e - 09$	$5.5826256e - 14$
0.500	$9.6444203e - 03$	$1.0492621e - 04$	$4.9577244e - 09$	$5.8539137e - 14$
1.000	$3.7779606e - 02$	$4.2640225e - 04$	$4.1856350e - 08$	$8.7053186e - 13$
1.500	$8.1714342e - 02$	$2.9195008e - 03$	$1.9169057e - 06$	$2.6648345e - 10$
2.000	$1.3744554e - 01$	$1.4741639e - 02$	$4.0398374e - 05$	$2.2706765e - 08$
2.500	$2.0075512e - 01$	$5.5326586e - 02$	$4.6337815e - 04$	$7.8328214e - 07$
3.000	$2.6826115e - 01$	$1.6747417e - 01$	$3.5192573e - 03$	$1.4746204e - 05$
3.500	$3.3807405e - 01$	$4.3227441e - 01$	$1.9883009e - 02$	$1.8033899e - 04$
4.000	$4.0981083e - 01$	$9.8583448e - 01$	$8.9779765e - 02$	$1.5948148e - 03$
4.500	$4.8399380e - 01$	$2.0352605e + 00$	$3.3977004e - 01$	$1.0946598e - 02$
5.000	$5.6120268e - 01$	$3.8741417e + 00$	$1.1151567e + 00$	$6.1315742e - 02$
6.000	$7.2436528e - 01$	$1.1646978e + 01$	$8.6488607e + 00$	$1.2044444e + 00$

TABLE 13.1 – Erreur relative $E_G^{\text{tronq}}(N)$ pour $N = 5, 10$ et 15 .

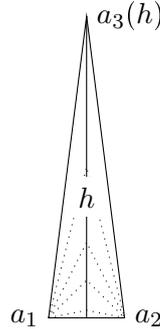


FIGURE 13.1 – Triangles étudiés.

13.2. Triangles adjacents coplanaires

Pour deux triangles coplanaires partageant une arête commune (voir Figure 4.9(b)), selon la même méthode

$$I_G = \int_{S \times T} \frac{e^{ik\|x-y\|}}{\|x-y\|} dx dy = \sum_{l \geq -1} \frac{(ik)^{l+1}}{(l+1)!} \int_{S \times T} \|x-y\|^l dx dy \quad (13.15)$$

qui donne après réduction à la dimension 2,

$$I_G = \sum_{l \geq -1} \frac{(ik)^{l+1}}{(l+1)!} \frac{1}{(l+4)(l+3)} \left(2|S| \int_T \|a_{i+2} - y\|^l dy + 2|T| \int_S \|x - b_{j+2}\|^l dx \right) \\ + g_i d_{j+1} \int_{\alpha_i \times \beta_{j+1}} \|x-y\|^l ds_x ds_y + g_{i+1} d_j \int_{\alpha_{i+1} \times \beta_j} \|x-y\|^l ds_x ds_y \Bigg)$$

Le calcul des intégrales sur les triangles ne présente pas de difficulté particulière. En effet,

$$\int_T \|a_{i+2} - y\|^l dy = \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_j(a_i)}{(l+2)!} \int_{\beta_j} \|a_{i+2} - y\|^l ds_y, \quad (13.16)$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} I_G = & 2 \left(|S| \sum_{j=1}^3 \delta_j(a_i) \int_{\beta_j} f(\|a_{i+2} - y\|) ds_y + |T| \sum_{i=1}^3 \gamma_i(b_j) \int_{\alpha_i} f(\|x - b_{j+2}\|) ds_x \right) \\ & + \sum_{l \geq -1} \frac{(ik)^{l+1}(l+2)}{(l+4)!} \left(g_i d_{j+1} \int_{\alpha_i \times \beta_{j+1}} \|x - y\|^l ds_x ds_y \right. \\ & \left. + \sum_{l \geq -1} \frac{(ik)^{l+1}(l+2)}{(l+4)!} g_{i+1} d_j \int_{\alpha_{i+1} \times \beta_j} \|x - y\|^l ds_x ds_y \right), \end{aligned} \quad (13.17)$$

où $f(r)$ est la fonction définie par (13.9).

13.2.1 Segments à supports sécants

Lorsque les supports des segments α et β sont sécants (voir Figure 4.7), le calcul est similaire :

$$\begin{aligned} & \sum_{l \geq -1} \frac{(ik)^{l+1}}{(l+1)!} \frac{g_i d_{j+1}}{(4+l)(3+l)} \int_{\alpha_i \times \beta_{j+1}} \|x - y\|^l ds_x ds_y \\ & = g_i d_{j+1} \left(\sum_{m=\pm} m s^m \int_{\beta_{j+1}} f(\|a^m - y\|) ds_y + \sum_{m=\pm} m t^m \int_{\alpha_i} f(\|x - b^m\|) ds_x \right), \end{aligned} \quad (13.18)$$

où s^\pm et t^\pm sont les abscisses des extrémités respectives des segments α et β relativement à l'intersection des supports des deux segments.

13.2.2 Segments à supports parallèles

Lorsque les supports des segments α_i et β_{j+1} sont parallèles (voir Figure 4.8), la formule (2.10) ne s'applique plus. Bien qu'on doive utiliser la formule à paramètre (2.34), il est possible d'obtenir une réduction similaire à (13.18). On note $\tilde{\beta}_{j+1}$, et \tilde{b}_{j+1}^\pm les projections respectives du segment β_{j+1} et de ses extrémités b_{j+1}^\pm sur le support de α . On introduit la distance d entre les deux segments β_{j+1} et $\tilde{\beta}_{j+1}$. Il nous faut alors évaluer un terme de la forme suivante,

$$g_i d_{j+1} \sum_{l \geq 0} \frac{(l+2)(ik)^l}{(l+4)!} \int_{\alpha_i \times \tilde{\beta}_{j+1}} (d^2 + \|x - \tilde{y}\|^2)^{l/2} ds_x ds_{\tilde{y}}. \quad (13.19)$$

En utilisant la formule (2.34), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_i \times \tilde{\beta}_{j+1}} (d^2 + \|x - \tilde{y}\|^2)^{l/2} ds_x ds_{\tilde{y}} &= \sum_{m=\pm} ms_i^m \int_{\tilde{\beta}_{j+1}} d^{l+2} \int_d^{+\infty} \frac{(u^2 + \|a_i^m - \tilde{y}\|^2)^{l/2}}{u^{l+3}} dud s_{\tilde{y}} \\ &+ \sum_{m=\pm} mt_{j+1}^m \int_{\alpha} d^{l+2} \int_d^{+\infty} \frac{(u^2 + \|x - \tilde{b}_{j+1}^m\|^2)^{l/2}}{u^{l+3}} dud s_x. \end{aligned} \quad (13.20)$$

L'intégrale interne s'évalue explicitement,

$$d^{l+2} \int_d^{+\infty} \frac{(u^2 + \eta^2)^{l/2}}{u^{l+3}} du = \frac{(d^2 + \eta^2)^{1+l/2} - d^{l+2}}{\eta^2 (l+2)}. \quad (13.21)$$

Cette expression permet de sommer les séries ; en effet, on pose

$$g(\eta, d) := \frac{1}{\eta^2} \left(\sum_{l \geq -1} \frac{(ik)^{l+1}}{(l+4)!} (d^2 + \eta^2)^{1+l/2} - \sum_{l \geq -1} \frac{(ik)^{l+1}}{(l+4)!} d^{l+2} \right),$$

alors d'après (13.10), on a

$$g(\eta, d) = i \frac{e^{ik\sqrt{d^2+\eta^2}} - D_2(\sqrt{d^2+\eta^2})}{k^3 \eta^2 (d^2 + \eta^2)} - i \frac{e^{ikd} - D_2(d)}{k^3 d^2 \eta^2}, \quad (13.22)$$

avec D_n défini en (13.10). D'après (13.19) et (13.20), on a

$$\int_{\alpha_i \times \tilde{\beta}_{j+1}} (d^2 + \|x - \tilde{y}\|^2)^{l/2} ds_x ds_{\tilde{y}} = \sum_{m=\pm} ms_i^m \int_{t_{j+1}^-}^{t_{j+1}^+} g(t, d) dt + \sum_{m=\pm} mt_{j+1}^m \int_{s_i^-}^{s_i^+} g(s, d) ds$$

L'évaluation de I_G nécessite donc la quadrature numérique d'intégrales mono-dimensionnelles sur chaque côtés du triangle S ce qui constitue en fait un procédé efficace compte tenu du peu de points d'intégration nécessaires pour obtenir une bonne précision.

13.3. Triangles adjacents dans des plans sécants

On s'intéresse à

$$I_l = \int_{S \times T} \|x - y\|^l dx dy.$$

où S et T sont des triangles adjacents contenus dans des plans sécants. En appliquant la méthode utilisée dans les sections 13.1 et 13.2, on obtient la réduction sous la forme d'intégrales bi-dimensionnelles

$$\begin{aligned} I_l &= \frac{2|S|}{(4+l)(3+l)} \int_T \|a_{i+2} - y\|^l dy + \frac{2|T|}{(4+l)(3+l)} \int_S \|x - b_{j+2}\|^l dx \\ &+ \frac{g_i d_{j+1}}{(4+l)(3+l)} \int_{\alpha_i \times \beta_{j+1}} \|x - y\|^l ds_x ds_y + \frac{g_{i+1} d_j}{(4+l)(3+l)} \int_{\alpha_{i+1} \times \beta_j} \|x - y\|^l ds_x ds_y. \end{aligned}$$

13.3.1 Intégrales sur un triangle

Les intégrales sur un triangle ne présentent pas de difficulté, en effet pour l'intégrale

$$\int_T \|a - y\|^l dy, \quad (13.23)$$

on projette le point a sur le plan contenant le triangle T (voir Figure 5.4). D'après (13.21), on a

$$\begin{aligned} \int_T \|a - y\|^l dy &= \int_T (h^2 + \|\hat{a} - y\|^2)^{l/2} dy \\ &= \sum_{j=1}^3 \delta_j(\hat{a}) \int_{\beta_j} \frac{(h^2 + \|\hat{a} - y\|^2)^{1+l/2} - h^{l+2}}{\|\hat{a} - y\|^2 (l+2)} ds_y. \end{aligned} \quad (13.24)$$

En regroupant tous les termes, on obtient

$$\sum_{j=1}^3 \delta_j(\hat{a}) \int_{\beta_j} \sum_{l \geq -1} \frac{(ik)^{l+1} (h^2 + \|\hat{a} - y\|^2)^{1+l/2} - h^{l+2}}{(l+4)! \|\hat{a} - y\|^2} ds_y, \quad (13.25)$$

ce qui donne d'après (13.22),

$$\sum_{j=1}^3 \delta_j(\hat{a}) \int_{\beta_j} g(\|\hat{a} - y\|, h) ds_y. \quad (13.26)$$

13.3.2 Intégrales sur le produit de deux segments

Les intégrales sur le produit de deux segments nécessitent l'utilisation de la perpendiculaire commune et l'introduction d'un paramètre h (voir Figure 5.6).

$$\int_{\alpha \times \beta} \|x - y\|^l ds_x ds_y = \int_{\check{\alpha} \times \beta} (h^2 + \|\check{x} - y\|)^{l/2} ds_{\check{x}} ds_y, \quad (13.27)$$

qui est identique à l'expression de (13.20). On en conclut que la simplification est réalisable lorsque S et T sont des triangles adjacents dans des plans sécants.

13.4. Le potentiel de double couche

Nous pouvons appliquer cette méthode au terme régulier du potentiel de double couche. Soit la décomposition du gradient du noyau de Green

$$\nabla_y G(x, y) = -\frac{(x - y)}{4\pi \|x - y\|^3} - \frac{k^2(x - y)}{8\pi \|x - y\|} - \frac{x - y}{4\pi} K(\|x - y\|),$$

avec

$$K(r) = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(ik)^{l+3} r^l (l+2)}{(l+3)!}.$$

Nous nous intéressons à l'intégrale du terme régulier

$$J = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(ik)^{l+3} r^l (l+2)}{(l+3)!} \int_{S \times T} (x-y) \|x-y\|^l dx dy = \sum_{l \geq 0} \frac{(ik)^{l+3} (l+2)}{(l+3)!} J_l, \quad (13.28)$$

avec,

$$J_l = \int_{S \times T} (x-y) \|x-y\|^l dx dy. \quad (13.29)$$

13.4.1 Triangles dans des plans sécants

Nous présentons la réduction dans le cas de triangles dans des plans sécants avec une arête d'un triangle contenue dans (ω) , l'intersection des plans (voir Figure 13.2).

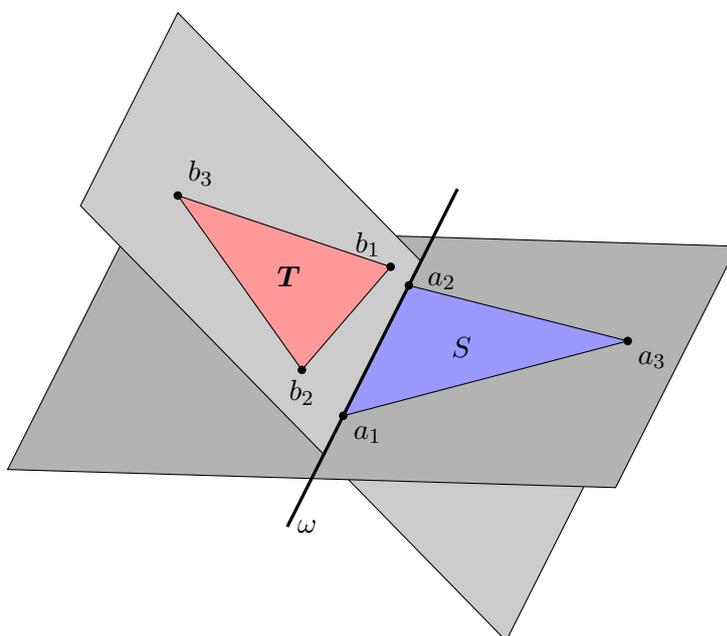


FIGURE 13.2 – Configuration étudiée pour la simplification du terme régulier provenant du potentiel de double couche.

En prenant a_i comme origine (voir Figure 13.2) et en notant que $q = l + 1$ soit $q + n = l + 5$, l'application de la formule (2.10) à J_l conduit à

$$J_l = \frac{g_1}{l+5} \int_{\alpha_1 \times T} (x-y) \|x-y\|^l ds_x dy + \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_j(a_1)}{l+5} \int_{S \times \beta_j} (x-y) \|x-y\|^l dx ds_y.$$

Les intégrales 3-D peuvent être réduites. En prenant a_{i+1} comme origine, la première intégrale devient

$$\int_{\alpha_1 \times T} (x-y) \|x-y\|^l ds_x dy = \frac{|\alpha_1|}{l+4} \int_T (a_3 - y) \|a_3 - y\|^l dy + \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_j(a_2)}{l+4} \int_{\alpha_1 \times \beta_j} (x-y) \|x-y\|^l ds_x ds_y.$$

Pour les autres intégrales, on prend l'intersection, notée o_j , du support de β_j avec (ω) comme origine et on a

$$\begin{aligned} \int_{S \times \beta_j} (x-y) \|x-y\|^l dx ds_y &= \sum_{k=\pm} \frac{k t_j^k}{l+4} \int_S (x-b_j^k) \|x-b_j^k\|^l dx \\ &+ \sum_{i=1}^3 \frac{\gamma_i(o_j)}{l+4} \int_{\alpha_i \times \beta_j} (x-y) \|x-y\|^l ds_x ds_y. \end{aligned}$$

La réduction doit être stoppée à ce stade ; en effet, continuer nécessiterait l'usage d'un paramètre et l'utilisation de la formule (2.34), ce qui conduirait à des expressions contenant des fonctions hypergéométriques. Nous sommes donc la série pour obtenir des intégrales 2-D, soit

$$p(r) = \sum_{l \geq 0} \frac{(ik)^{l+3}(l+2)}{(l+5)!} r^l, \quad (13.30)$$

alors

$$\begin{aligned} J &= 2|S| \int_T (a_3 - y) p(\|a_3 - y\|) dy \\ &+ \sum_{j=1}^3 g_1 \delta_j(a_2) \int_{\alpha_1 \times \beta_j} (x-y) p(\|x-y\|) ds_x ds_y \\ &+ \sum_{j=1}^3 \delta_j(a_1) \sum_{i=1}^3 \gamma_i(o_j) \int_{\alpha_i \times \beta_j} (x-y) p(\|x-y\|) ds_x ds_y \\ &+ \sum_{j=1}^3 \delta_j(a_1) \sum_{k=\pm} k t_j^k \int_S (x-b_j^k) p(\|x-b_j^k\|) dx, \end{aligned}$$

avec la fonction $p(r)$ définie par

$$p(r) = \frac{3i}{k^5 r^5} (e^{ikr} - D_4(r)) + \frac{1}{k^4 r^4} (e^{ikr} - D_3(r)), \quad (13.31)$$

où $D_n(r)$, donné par (13.10), est le développement à l'ordre n de e^{ikr} en 0.

13.5. Fonctions de base affines

La méthode s'applique aussi pour l'évaluation de l'intégrale suivante :

$$J^{i,j} = \int_{S \times T} \phi_i(x) \frac{e^{ik\|x-y\|}}{\|x-y\|} \psi_j(y) dx dy.$$

Cette intégrale est réduite à une collection d'intégrales 1-D régulières qui sont évaluées numériquement. Ces travaux étant récents, seul le cas de l'auto-influence est présenté. L'approche utilisée est identique à celle du Chapitre 11.

13.5.1 Notations

Soient les trois fonctions suivantes :

$$\Upsilon(r) = -i \frac{e^{ikr} - 1 - ikr + (k^2 r^2)/2 + i(k^3 r^3)/6 - (k^4 r^4)/24}{k^5 r^6} \quad (13.32)$$

$$\Lambda(r) = \frac{(4i + kr)e^{ikr} - 4i + 3kr + ir^2 k^2 - (k^3 r^3)/6}{k^5 r^6} \quad (13.33)$$

$$\Psi(r) = \frac{(-8i - 5kr + ir^2 k^2)e^{ikr} + 8i - 3kr - (k^3 r^3)/6}{k^5 r^6}, \quad (13.34)$$

et

$$W = \sum_{l=1}^3 g_l \int_{\alpha_l} \Upsilon(\|a_l - y\|) ds_y. \quad (13.35)$$

13.5.2 Coefficients

On obtient des expressions sous forme d'intégrales mono-dimensionnelles pour

- les coefficients diagonaux :

$$J^{i,i} = 4|S| \left(2W + g_i \int_{\alpha_i} \Lambda(\|a_i - y\|) ds_y \right. \quad (13.36)$$

$$\left. + g_{i+1} \int_{\alpha_{i+1}} \Lambda(\|a_{i+1} - y\|) \phi_i(y) ds_y + g_{i+2} \int_{\alpha_{i+2}} \Lambda(\|a_{i+2} - y\|) \phi_i(y) ds_y \right)$$

- les coefficients d'indice $i, i + 1$:

$$J^{i,i+1} = 2|S| \left(2W + g_i \int_{\alpha_i} \Lambda(\|a_i - y\|) ds_y + g_{i+1} \int_{\alpha_{i+1}} \Lambda(\|a_{i+1} - y\|) ds_y \right. \quad (13.37)$$

$$\left. + g_{i+2} \int_{\alpha_{i+2}} \phi_i(x) \Lambda(\|x - a_{i+2}\|) ds_x + g_{i+2} \int_{\alpha_{i+2}} \Lambda(\|a_{i+2} - y\|) \phi_{i+1}(y) ds_y \right.$$

$$\left. + g_{i+1} \int_{\alpha_{i+1}} \phi_i(x) \Psi(\|x - a_{i+1}\|) ds_x + g_i \int_{\alpha_i} \Psi(\|a_i - y\|) \phi_{i+1}(y) ds_y \right)$$

- les coefficients d'indice $i, i + 2$:

$$J^{i,i+2} = 2|S| \left(2W + g_i \int_{\alpha_i} \Lambda(\|a_i - y\|) ds_y + g_{i+2} \int_{\alpha_{i+2}} \Lambda(\|a_{i+2} - y\|) ds_y \right. \quad (13.38)$$

$$\left. + g_{i+1} \int_{\alpha_{i+1}} \Lambda(\|a_{i+1} - y\|) \phi_{i+2}(y) ds_y + g_{i+1} \int_{\alpha_{i+1}} \phi_i(x) \Lambda(\|x - a_{i+1}\|) ds_x \right.$$

$$\left. + g_{i+2} \int_{\alpha_{i+2}} \phi_i(x) \Psi(\|x - a_{i+2}\|) ds_x + g_i \int_{\alpha_i} \Psi(\|a_i - y\|) \phi_{i+2}(y) ds_y \right)$$

A l'aide de ces expressions, la matrice élémentaire est donc évaluée complètement.

Il faut évaluer 18 intégrales 1-D avec notre méthode pour déterminer la matrice élémentaire. Pratiquement, avec $M = 20$ points d'intégration utilisés (soit un nombre

total de $18M = 360$ points), l'écart relatif est de l'ordre de la précision machine (10^{-15}). Avec $M = 4$, l'écart relatif maximal est de 10^{-9} . En comparaison, la méthode de Sauter et Schwab, nécessite $9 \cdot 3 \cdot N^4$ points d'intégration au total.

13.6. Expérimentations numériques

Nous présentons ici une expérimentation numérique afin d'estimer l'intérêt des formules proposées pour l'intégration du noyau de Green complet et le noyau de Green combiné à des fonctions de base affines par élément. Nous étudions la convergence de notre méthode et de la méthode de Sauter et Schwab (voir [SS10]) suivant le nombre de points d'intégration employés.

13.6.1 Evaluation de J

Nous évaluons l'intégrale suivante : $J = \int_{S \times T} \frac{e^{ik\|x-y\|}}{\|x-y\|} dx dy$,

1. Soit $\tilde{J}(M)$ l'évaluation de J en utilisant la formule réduite (13.11) et en intégrant numériquement les intégrales 1-D à l'aide de M points d'intégration de Gauss-Legendre. Le nombre total de points d'intégration utilisés est égal à $3M$.
2. Soit $\check{J}(N)$ l'évaluation de J en utilisant méthode de Sauter et Schwab (présentée dans [SS10]) en utilisant N points d'intégration pour une intégrale 1-D. Le nombre total de points d'intégration est donc égal à $3N^4$.
3. Finalement, on note $J_{\text{ref}} = \tilde{J}(300)$, la valeur utilisée comme référence pour comparer ces deux méthodes.

La Figure 13.3 présente les différences relatives :

- $\frac{|\tilde{J}(M) - J_{\text{ref}}|}{|J_{\text{ref}}|}$ en fonction de $\frac{1}{3M}$
- $\frac{|\check{J}(N) - J_{\text{ref}}|}{|J_{\text{ref}}|}$ en fonction de $\frac{1}{3N^4}$

On observe (voir Figure 13.3) qu'avec peu de points d'intégration notre méthode présente une très haute précision.

13.6.2 Evaluation de $J^{i,j}$

De la même manière que dans la sous-section 13.6.1, on introduit

1. $\tilde{J}^{i,j}(M)$ l'évaluation de $J^{i,j}$ en utilisant les formules réduites (13.36)-(13.38) et en intégrant numériquement les intégrales 1-D à l'aide de M points d'intégrations de Gauss-Legendre. Le nombre total de points d'intégration pour évaluer la matrice élémentaire complètement est égal à $18M$.
2. $\check{J}^{i,j}(N)$ l'évaluation de $J^{i,j}$ en utilisant méthode de Sauter et Schwab (présentée dans [SS10]) en utilisant N points d'intégration pour une intégrale 1-D. Le nombre total de points d'intégration pour évaluer la matrice élémentaire est donc $27N^4$.
3. $J_{\text{ref}}^{i,j} = \tilde{J}^{i,j}(300)$.

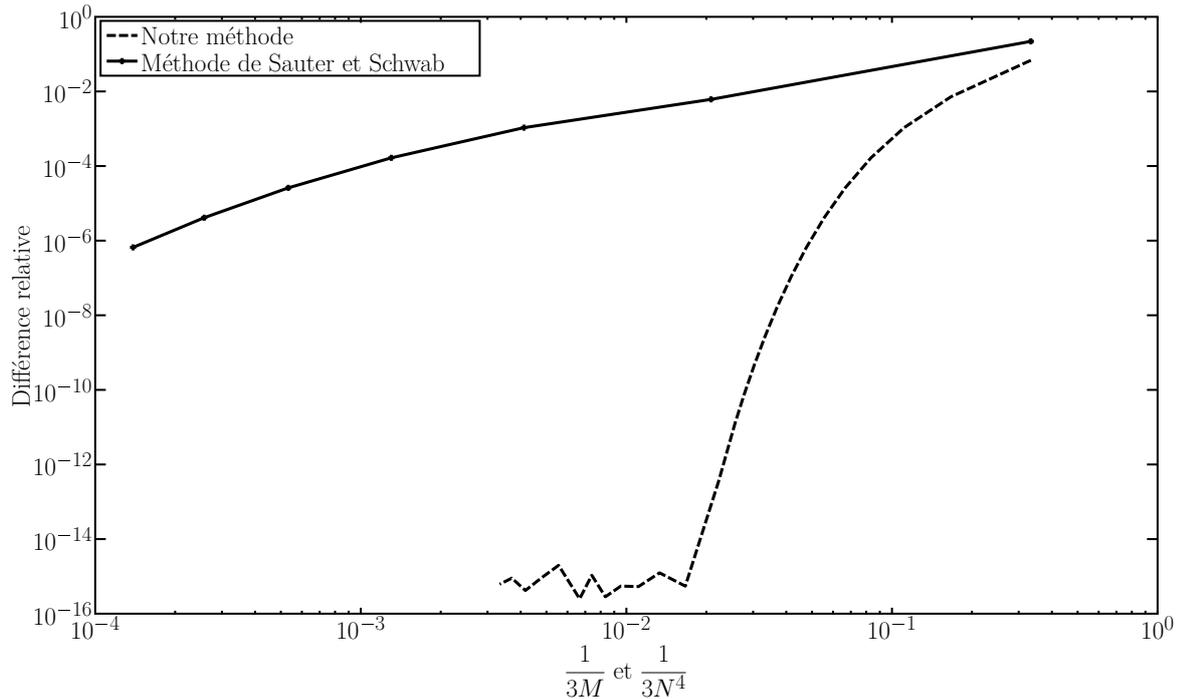


FIGURE 13.3 – Courbe de convergence de la méthode de Sauter et Schwab et de notre méthode dans le cas de fonctions de base constantes par élément.

La Figure 13.4 présente les différences relatives :

- $\max_{1 \leq i, j \leq 3} \frac{|\tilde{J}^{i,j}(M) - J_{\text{ref}}^{i,j}|}{|J_{\text{ref}}^{i,j}|}$ en fonction de $\frac{1}{18M}$, où $\tilde{J}(M)$ est évaluée en utilisant la méthode de réduction.
- $\max_{1 \leq i, j \leq 3} \frac{|\check{J}^{i,j}(N) - J_{\text{ref}}^{i,j}|}{|J_{\text{ref}}^{i,j}|}$ en fonction de $\frac{1}{27N^4}$, où $\check{J}^{i,j}(N)$ est calculée à l'aide de la méthode de Sauter et Schwab.

Conclusion de ce chapitre

Quatre points importants sont à retenir de ce chapitre :

1. Il est possible d'appliquer la méthode de réduction à l'intégrale du noyau de Green, mais aussi aux intégrales du noyau de Green combiné avec des fonctions de base affines par éléments.
2. On ramène l'intégrale 4-D du noyau de Green à des combinaisons linéaires d'intégrales 1-D lorsque les triangles sont coplanaires ou dans des plans sécants. Lorsque les triangles sont dans des plans parallèles, une réduction d'une dimension seulement est envisageable.
3. Une réduction de deux dimensions peut être obtenue pour l'intégrale du terme régulier du gradient du noyau de Green.
4. Les premiers résultats numériques montrent l'intérêt de la méthode de réduction (coût de calcul et précision) avec le noyau de Green complet.

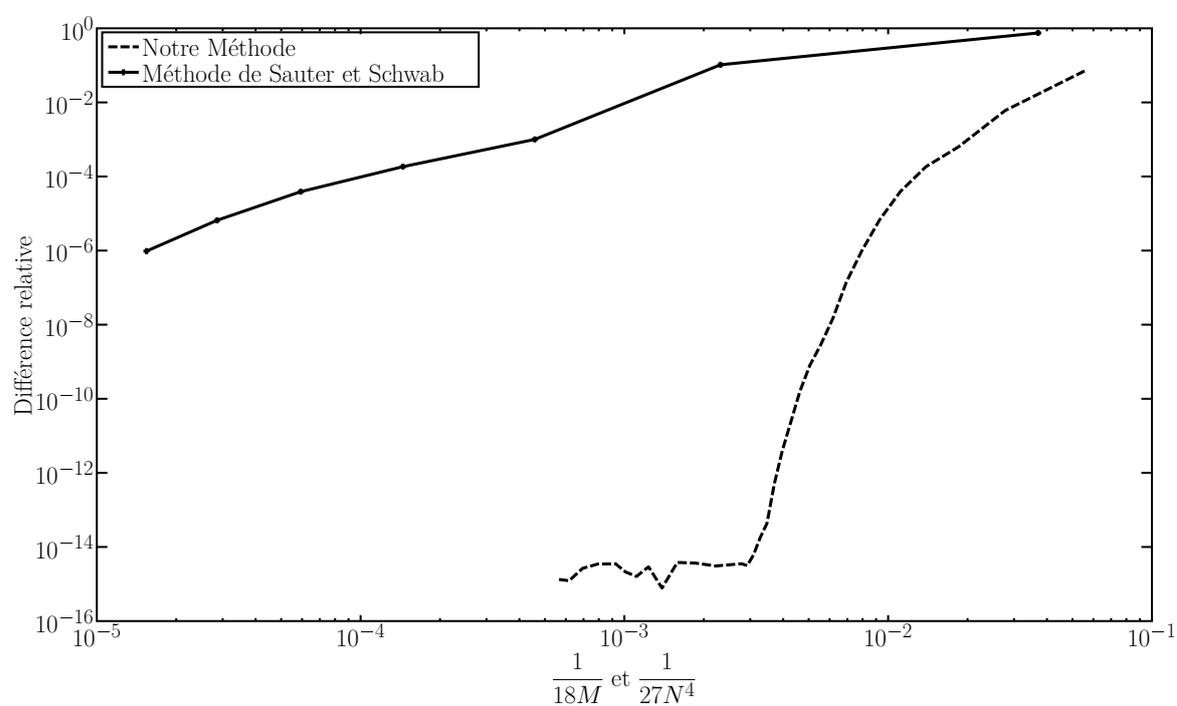


FIGURE 13.4 – Courbe de convergence de la méthode de Sauter et Schwab et de notre méthode dans le cas de fonctions de base affines par élément.

Evaluation d'intégrales hypersingulières

Introduction

Après l'évaluation d'intégrales régulières, nous montrons dans ce chapitre que la méthode de réduction peut aussi s'appliquer à l'évaluation explicite de la partie finie d'intégrales.

L'utilisation des formules de réduction pour le calcul de la partie finie d'intégrales hypersingulières a été présentée par Cormack, Rosen et Vijayakumar (voir [VC88, RC93]). Dans ce chapitre nous étudions différents processus asymptotiques permettant de définir la partie finie de Hadamard et nous montrons que dans certains cas, pour le calcul de la valeur principale de Cauchy notamment, il faut utiliser les formules avec prudence.

Nous commençons par définir la partie finie de Hadamard puis nous montrons qu'il y a équivalence entre plusieurs contours utilisés pour exclure le point singulier. Le calcul de la partie finie d'une intégrale divergente est présenté à la suite et finalement le cas d'intégrales doubles est présentée.

14.1. Introduction de la partie finie

Avant d'introduire la partie finie de Hadamard, nous présentons la *valeur principale de Cauchy* qui joue un rôle important dans les méthodes d'équations intégrales (voir [Gui91]) et est un cas particulier de partie finie. Un exemple élémentaire est l'intégrale

$$I = \int_{-a}^b \frac{1}{x} dx, \text{ avec } a, b \in]0, +\infty[\quad (14.1)$$

où a et b sont deux réels strictement positifs. Cette intégrale n'est pas définie puisque 0 appartient au domaine d'intégration. Soient $\epsilon_1(\epsilon)$ et $\epsilon_2(\epsilon)$ deux fonctions positives vérifiant

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon_1(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon_2(\epsilon) = 0.$$

On pose alors,

$$I(\epsilon) = \int_{-a}^{-\epsilon_1(\epsilon)} \frac{1}{x} dx + \int_{\epsilon_2(\epsilon)}^b \frac{1}{x} dx, \quad (14.2)$$

ainsi

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon),$$

or

$$I(\epsilon) = \left[\ln(\epsilon_1(\epsilon)) - \ln(a) + \ln(b) - \ln(\epsilon_2(\epsilon)) \right] = \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln\left(\frac{\epsilon_1(\epsilon)}{\epsilon_2(\epsilon)}\right). \quad (14.3)$$

Si $\epsilon_1(\epsilon) = \epsilon_2(\epsilon)$ l'expression (14.3) se simplifie comme suit :

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon) = \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad (14.4)$$

et $I(\epsilon)$ possède une limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Cependant on observe dans (14.3) que si $\epsilon_1(\epsilon) = 2\epsilon_2(\epsilon)$, alors on obtient :

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon) = \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln(2), \quad (14.5)$$

et il suffit que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon_1(\epsilon)}{\epsilon_2(\epsilon)} \in]0, +\infty[$, pour que la limite quand $\epsilon \rightarrow 0$ de $I(\epsilon)$ existe. Le résultat est donc défini à une constante près, qui dépend du processus asymptotique utilisé. La définition de la valeur principale de Cauchy est de prendre $\epsilon_1(\epsilon) = \epsilon_2(\epsilon) = \epsilon$ dans (14.3), soit

Définition 14.1.1. *La valeur principale de Cauchy de I de (14.1) est définie par :*

$$v.p. I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-a}^{-\epsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\epsilon}^b \frac{1}{x} dx \right] = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (14.6)$$

Définition 14.1.2. *Soit le domaine d'intégration borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et I :*

$$I = \int_{\Omega} f(\|x - y\|) dy = \int_{\Omega} f(\|x - y\|) dy,$$

qui n'est pas une intégrale définie au sens de Lebesgue lorsque f est une fonction homogène de degré $q \leq -d$ et $x \in \Omega$. On introduit,

$$\tilde{I}(\epsilon) = \int_{\Omega \setminus B(x, \epsilon)} f(\|x - y\|) dy, \quad (14.7)$$

où $B(x, \epsilon)$ est le disque centré en x de rayon ϵ si $d = 2$ et la sphère de rayon ϵ si $d = 3$ (voir Figure 14.1). $\tilde{I}(\epsilon)$ est une intégrale définie dès lors que $\epsilon > 0$. Si $\tilde{I}(\epsilon)$ admet un développement du type :

$$\tilde{I}(\epsilon) = a_0 + a_1 \log(\epsilon) + \sum_{j=2}^m \frac{a_j}{\epsilon^{j-1}} + o(1), \quad \text{quand } \epsilon \rightarrow 0, \quad (14.8)$$

alors :

- a_0 est appelée partie finie de $\tilde{I}(\epsilon)$, et
- $a_1 \log(\epsilon) + \sum_{j=2}^m \frac{a_j}{\epsilon^{j-1}}$ est la partie infinie de $\tilde{I}(\epsilon)$.

La forme de développement utilisée dans le cas présent n'est pas la plus généraliste mais convient aux cas traités. Se reporter à [Sel97] pour voir la définition de la partie finie à l'aide d'un développement ayant une forme plus générale. Un autre processus asymptotique, plus proche de celui découlant d'une méthode d'équations intégrales, consiste à décaler le point d'observation x hors de Ω . A cet effet, on définit $z_\epsilon = x + \epsilon \vec{n}$ où \vec{n} est la normale à la surface de Ω . Dans notre cas, Ω est le triangle S (voir la Figure 14.2).

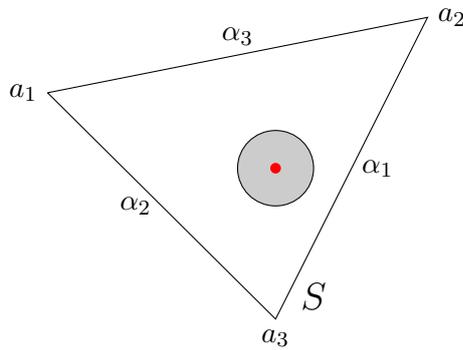


FIGURE 14.1 – Domaine d'intégration (triangle S) et point singulier. x est le point singulier (en rouge) et en gris, on observe $B(x, \epsilon)$.

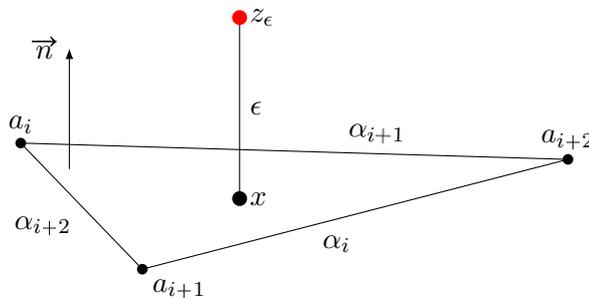


FIGURE 14.2 – Point z_ϵ hors du plan contenant S .

Dans ce cas, l'intégrale (14.7) devient

$$\tilde{I}(\epsilon) = \int_{\Omega} f(\|z_\epsilon - y\|) dy = \int_{\Omega} f\left(\sqrt{\epsilon^2 + \|x - y\|^2}\right) dy, \tag{14.9}$$

qui admet un développement de la forme (14.8). Pour ces deux processus, on définit la partie finie de l'intégrale I (voir [KSW92]) comme le terme constant du développement de $\tilde{I}(\epsilon)$:

Définition 14.1.3. La partie finie de l'intégrale I , notée $pf I$ est la partie finie de $\tilde{I}(\epsilon)$

$$pf I := \oint_{\Omega} f(\|x - y\|) dy = a_0$$

Les intégrands apparaissant dans les méthodes d'équations intégrales sont de la forme $\|x - y\|^s$ ou $(x - y)\|x - y\|^s$ avec $s \leq -n$ où n est la dimension du domaine d'intégration. Nous présentons une méthode pour évaluer la partie finie d'intégrales comportant des intégrands de la première forme lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (donc $n = 2$), soit l'intégrale

$$I_s = pf \int_S \|x - y\|^s dy. \quad (14.10)$$

Le premier processus, défini en (14.7), ne permet pas de traiter le cas $s = -2$ alors que le second processus (voir (14.9)) permet de traiter tous les s .

14.2. Evaluation de parties finies

14.2.1 Réduction de I_s

En appliquant (14.9) à I_s , on obtient lorsque $s < -2$:

$$\tilde{I}_s(\epsilon) = \int_S (\epsilon^2 + \|x - y\|^2)^{s/2} dy. \quad (14.11)$$

D'après la formule (2.34), on a

$$\begin{aligned} \tilde{I}_s(\epsilon) &= \sum_{i=1}^3 \gamma_i(x) \int_{\alpha_i} \epsilon^{s+2} \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{(u^2 + \|x - y\|^2)^{s/2}}{u^{s+3}} du ds_y \\ &= \sum_{i=1}^3 \gamma_i(x) \int_{\alpha_i} \frac{(\epsilon^2 + \|x - y\|^2)^{s/2+1} - \epsilon^{s+2}}{(s+2)\|x - y\|^2} ds_y. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Cette expression peut se décomposer sous la forme (14.8) ce qui permet d'observer que le terme en ϵ^{s+2} appartient à la partie infinie et d'obtenir le résultat suivant :

$$pf \tilde{I}_s(\epsilon) = \sum_{i=1}^3 \frac{\gamma_i(x)}{(s+2)} \int_{\alpha_i} \|x - y\|^s ds_y. \quad (14.13)$$

Lorsque $s = -2$, on a

$$\tilde{I}_{-2}(\epsilon) = \sum_{i=1}^3 \gamma_i(x) \int_{\alpha_i} \frac{\ln(\epsilon^2 + \|x - y\|^2) - \ln(\epsilon^2)}{2\|x - y\|^2} ds_y, \quad (14.14)$$

donc

$$pf \tilde{I}_{-2}(\epsilon) = \sum_{i=1}^3 \gamma_i(x) \int_{\alpha_i} \frac{\ln(\|x - y\|^2)}{2\|x - y\|^2} ds_y. \quad (14.15)$$

14.2.2 Application à I_{-3}

Le calcul explicite des intégrales mono-dimensionnelles est possible en fixant s . Par exemple, pour le cas $s = -3$ qui peut apparaître lors de la décomposition du gradient des solutions fondamentales des équations de Laplace et Helmholtz 3-D. On obtient :

1. lorsque $x \in \mathring{S}$ et $x \notin \bar{S}$:

$$I_{-3} = pf \tilde{I}_{-3} = - \sum_{i=1}^3 \gamma_i(x) \left[\frac{t}{d_i^2 \sqrt{d_i^2 + t^2}} \right]_{t=s_i^-}^{s_i^+}, \quad (14.16)$$

où $d_i = |\gamma_i(x)|$ est la distance du point x au support de α_i et s_i^\pm sont les abscisses des extrémités de α_i selon l'origine prise au point $p_i(x)$ qui est la projection orthogonale de x sur le support de α_i .

2. lorsque $x = a_i$:

$$I_{-3} = pf \tilde{I}_{-3} = -\gamma_i(x) \left[\frac{t}{d_i^2 \sqrt{d_i^2 + t^2}} \right]_{t=s_i^-}^{s_i^+}$$

3. lorsque $x \in \alpha_i$:

$$\tilde{I}_{-3} = -\gamma_{i+1}(x) \left[\frac{t}{d_{i+1}^2 \sqrt{d_{i+1}^2 + t^2}} \right]_{t=s_{i+1}^-}^{s_{i+1}^+} - \gamma_{i+2}(x) \left[\frac{t}{d_{i+2}^2 \sqrt{d_{i+2}^2 + t^2}} \right]_{t=s_{i+2}^-}^{s_{i+2}^+}. \quad (14.17)$$

14.3. Processus utilisant une zone d'exclusion du point singulier

Nos formules de réduction s'appliquent lorsque les domaines sont des polygones ; c'est pourquoi, nous montrons que dans le processus (14.7), il est possible de remplacer le disque $B(x, \epsilon)$, centré en x et de rayon ϵ (noté dans la suite plus simplement B_ϵ) par un triangle entourant x (voir la Figure 14.3(a)). Pour des raisons de simplicité, le choix s'est porté sur un triangle équilatéral de centre de gravité x et de hauteur 3ϵ (voir la Figure 14.3(b)) ; de cette manière x est à une distance ϵ de chaque coté de T_ϵ .

14.3.1 Equivalence entre les contours utilisés

Pour prouver que la partie finie est identique, qu'elle soit calculée en utilisant un disque ou un triangle en guise de zone d'exclusion, nous évaluons l'intégrale $T_\epsilon \setminus B(x, \epsilon)$ (voir la Figure 14.3(b)). Nous montrons cette équivalence des zones d'exclusion pour I_s ce qui correspond à prendre pour intégrand la fonction $f(r) = r^s$. L'intégrale sur la zone grisée (voir Figure 14.3(b)) s'écrit

$$P(\epsilon) = \int_{\mathcal{G}_\epsilon} f(\|x - y\|) dy = \sum_{i=1}^3 \int_{\theta_i}^{\theta_i + \pi/3} \int_\epsilon^{R(\theta)} f(r) r dr d\theta, \quad (14.18)$$

et comme f ne dépend pas de θ , il est possible de simplifier l'expression en

$$P(\epsilon) = 6 \int_0^{\pi/6} \int_\epsilon^{R(\theta)} f(r) r dr d\theta. \quad (14.19)$$

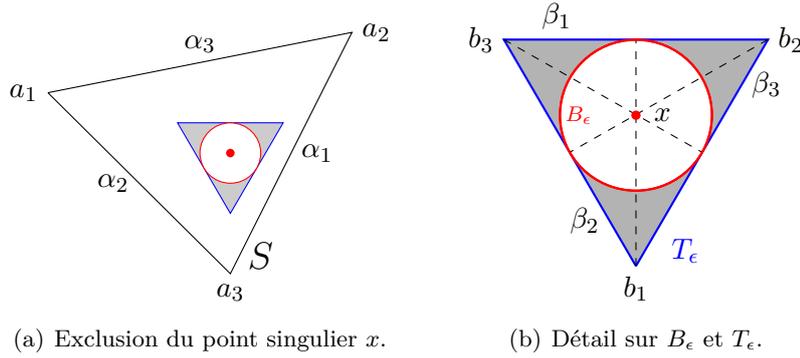


FIGURE 14.3 – En bleu le triangle équilatéral T_ϵ de centre de gravité x et de hauteur 3ϵ . En rouge, le bord de B_ϵ .

Cas $s < -2$

On commence par se placer dans le cas où $s \neq -2$, l'intégrale selon r devient

$$\int_\epsilon^{R(\theta)} f(r)rdr = \int_\epsilon^{R(\theta)} r^{s+1}dr = \frac{R(\theta)^{s+2} - \epsilon^{s+2}}{s+2}, \quad (14.20)$$

donc

$$P(\epsilon) = \frac{6}{s+2} \int_0^{\pi/6} R(\theta)^{s+2}d\theta - \frac{\pi\epsilon^{s+2}}{s+2}, \quad (14.21)$$

où l'expression de $R(\theta)$ est connue :

$$R(\theta) = \frac{\epsilon}{\cos(\theta)}, \quad (14.22)$$

soit,

$$P(\epsilon) = \frac{6\epsilon^{s+2}}{s+2} \int_0^{\pi/6} \frac{d\theta}{\cos(\theta)^{s+2}} - \frac{\pi\epsilon^{s+2}}{s+2}, \quad (14.23)$$

ce qui donne

$$P(\epsilon) = \frac{3\epsilon^{s+2}}{s+2} \left({}_2F_1 \left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3+s}{2} \right], \left[\frac{3}{2} \right], \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{3} \right), \quad (14.24)$$

où ${}_2F_1$ est la fonction hypergéométrique, comme introduit dans [AS72].

On observe que lorsque $s < -2$, $P(\epsilon)$, donnée par (14.24), conduit à un développement de la forme (14.8) qui ne comporte qu'un terme divergent. Ce terme appartenant à la partie infinie de l'intégrale, il disparaît lorsque l'on prend la partie finie ainsi les deux contours sont bien équivalents.

De même, un contour carré produira la même partie finie ainsi, lorsque $s < -2$, plusieurs contours sont équivalents du point de vue de la partie finie.

Cas $s = -2$

Lorsque $s = -2$, les calculs sont un peu différents ; en effet, on a

$$P(\epsilon) = 6 \int_0^{\pi/6} \int_\epsilon^{R(\theta)} \frac{1}{r} dr d\theta = 6 \int_0^{\pi/6} \ln(R(\theta)) - \ln(\epsilon) d\theta, \quad (14.25)$$

soit, puisque $R(\theta) = \frac{\epsilon}{\cos(\theta)}$,

$$P(\epsilon) = 6 \int_0^{\pi/6} \ln(\cos(\theta)) d\theta, \quad (14.26)$$

qui est indépendant de ϵ et fournit une constante dépendant du contour utilisé. Cette dépendance vis à vis du contour utilisé lorsque $s = -2$ conduit à préférer définir la partie finie à l'aide du processus de passage à la limite d'un point vers le plan de S (voir (14.9)).

14.3.2 Equivalence entre les deux processus lorsque $s < -2$

Le processus consistant à utiliser une zone d'exclusion utilise la formule (2.10) et nécessite de distinguer plusieurs cas :

1. Lorsque $x \in \mathring{S}$, l'intégrale I_s n'est pas définie au sens usuel mais on peut évaluer sa partie finie. On introduit le triangle équilatéral T_ϵ pour exclure le point singulier du domaine d'intégration (voir Figure 14.4), alors

$$\begin{aligned} \tilde{I}_s(\epsilon) &= \int_{T \setminus T_\epsilon} \|x - y\|^s dy \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\gamma_i(x)}{s+2} \int_{\alpha_i} \|x - y\|^s ds_y - \sum_{i=1}^3 \frac{\epsilon}{s+2} \int_{\beta_j} \|x - y\|^s ds_y, \end{aligned} \quad (14.27)$$

puisque la distance signée de x à β_i est négative et vaut $-\epsilon$. De plus, les intégrales sur les côtés β_i de T_ϵ s'écrivent

$$\begin{aligned} \epsilon \int_{\beta_i} \|x - y\|^s ds_y &= \epsilon \int_{-\sqrt{3}\epsilon}^{\sqrt{3}\epsilon} (\epsilon^2 + t^2)^{s/2} dt \\ &= 2\sqrt{3}\epsilon^{s+2} {}_2F_1 \left(\left[\frac{1}{2}, \frac{-s}{2} \right], \left[\frac{3}{2} \right], -3 \right), \end{aligned} \quad (14.28)$$

où ${}_2F_1$ est une fonction hypergéométrique (voir [AS72]). En conséquence, $\tilde{I}_s(\epsilon)$ admet un développement de la forme (14.8) :

$$\tilde{I}_s(\epsilon) = - \sum_{i=1}^3 \frac{\gamma_i(x)}{s+2} \int_{\alpha_i} \|x - y\|^s ds_y - 6\sqrt{3}\epsilon^{s+2} {}_2F_1 \left(\left[\frac{1}{2}, \frac{-s}{2} \right], \left[\frac{3}{2} \right], -3 \right). \quad (14.29)$$

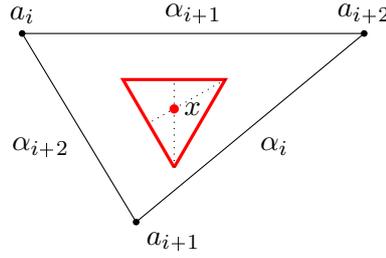
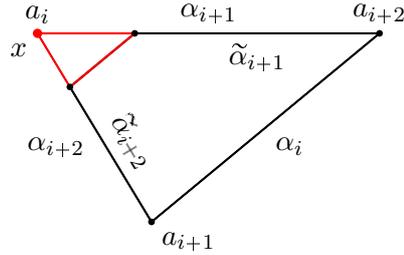
Les termes qui font apparaître les intégrales sur les côtés β_i de T_ϵ appartiennent à la partie infinie de $I(\epsilon)$; on en déduit que

$$I_s = pf \tilde{I}_s(\epsilon) = \sum_{i=1}^3 \frac{\gamma_i(x)}{s+2} \int_{\alpha_i} \|x - y\|^s ds_y, \quad (14.30)$$

expression identique à (14.13).

2. Lorsque $x = a_i$, on utilise un triangle différent en guise de zone d'exclusion. On définit T_ϵ homothétiquement, tel que $\frac{|\tilde{\alpha}_{i+1}|}{|\alpha_{i+1}|} = \frac{|\tilde{\alpha}_{i+2}|}{|\alpha_{i+2}|} = \frac{|\tilde{\alpha}_{i+3}|}{|\alpha_i|} = \epsilon$, où $\tilde{\alpha}_{i+3}$ est le côté de T_ϵ parallèle à α_i (voir Figure 14.5). On obtient alors

$$pf \tilde{I}_s(\epsilon) = \frac{\gamma_i}{s+2} \int_{\alpha_i} \|a_i - y\|^s ds_y. \quad (14.31)$$

FIGURE 14.4 – Cas $x \in \mathring{T}$.FIGURE 14.5 – Cas $x = a_i$.

3. Finalement, lorsque $x \in \alpha_i$ (voir Figure 14.6) on décompose S en 2 triangles tel que le x soit un sommet de chaque sous-triangle et on effectue la réduction en utilisant (14.31).

Conclusion : Lorsque $s < -2$, les deux processus (14.7) et (14.9) sont bien équivalents.

14.3.3 Cas $s = -2$

Lorsque $s = -2$, le processus (14.7) dépend du contour utilisé, nous allons mettre en évidence cette difficulté lorsque $x \in \mathring{T}$ (voir Figure 14.4). La formule (2.10) n'est plus utilisable puisque nous avons $q + n = 0$, nous appliquons donc la formule (2.16) :

$$\widetilde{I}_{-2}(\epsilon) = \sum_{i=1}^3 \frac{\gamma_i(x)}{2} \int_{\alpha_i} \frac{\ln(\|x - y\|^2)}{\|x - y\|^2} ds_y - \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\beta_i} \frac{\ln(\|x - y\|^2)}{\|x - y\|^2} ds_y. \quad (14.32)$$

Les intégrales sur les contours β_i fournissent

$$\frac{\epsilon}{2} \int_{-\sqrt{3}\epsilon}^{\sqrt{3}\epsilon} \frac{\ln(\epsilon^2 + t^2)}{(\epsilon^2 + t^2)} dt = \frac{2\pi}{3} \ln(\epsilon) + \mathbf{C}, \quad (14.33)$$

avec $C \approx 0.4368$. Ce qui nous donne d'après (14.8)

$$pf \widetilde{I}_{-2}(\epsilon) = \sum_{i=1}^3 \frac{\gamma_i(x)}{2} \int_{\alpha_i} \frac{\ln(\|x - y\|^2)}{\|x - y\|^2} ds_y - 3\mathbf{C}, \quad (14.34)$$

résultat similaire à (14.15) si l'on omet la constante $3\mathbf{C}$ provenant des intégrales sur le contour de la zone d'exclusion.

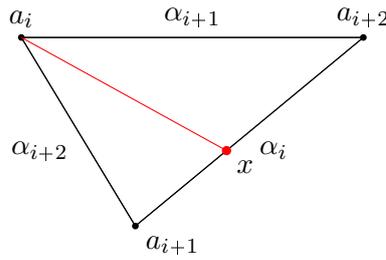


FIGURE 14.6 – Cas $x \in \alpha_i$.

14.4. Le cas variationnel

Soit l'intégrale suivante, prise au sens de la partie finie de Hadamard :

$$J_5 = pf \int_{S \times S} \|x - y\|^{-5} dx dy, \tag{14.35}$$

du fait du caractère hypersingulier de l'intégrand. Nous allons montrer que de manière surprenante, deux processus produisent le même résultat pour le calcul de J_5 . Le choix s'est porté sur J_5 car il n'y a pas d'équivalence entre les deux processus pour les intégrales J_s lorsque $s \in [2, 4]$; il y a équivalence pour tout $s \geq 5$.

14.4.1 Utilisation "naïve" de la formule (2.10)

Nous commençons par utiliser la méthode employée dans le chapitre 3 : annuler tous les termes faisant intervenir une distance nulle. On choisit $o = a_i$ comme origine, alors $\gamma_{i+1}(o) = \gamma_{i+2}(o) = 0$ et $q + n = -1$, soit :

$$J_5 = -2g_i \int_{\alpha_i \times S} \frac{ds_x dy}{\|x - y\|^5}. \tag{14.36}$$

La seconde étape consiste à choisir une des extrémités a_{i+1} de α_i comme origine, on a

$$J_5 = 2|S| \int_S \frac{dy}{\|a_{i+2} - y\|^5} + g_i g_{i+1} \int_{\alpha_i \times \alpha_{i+1}} \frac{ds_x ds_y}{\|x - y\|^5}. \tag{14.37}$$

La dernière étape consiste à choisir $o = a_{i+2}$, ce qui conduit au résultat suivant :

$$J_5 = -\frac{2|S|}{3} \sum_{l=1}^3 g_l \int_{\alpha_l} \frac{dy}{\|a_l - y\|^5} ds_y = -\frac{2|S|}{9} \sum_{l=1}^3 g_l \left[\frac{s(3g_l^2 + 2s^2)}{g_l^4 (g_l^2 + s^2)^{3/2}} \right]_{s_l^-}^{s_l^+}. \tag{14.38}$$

14.4.2 Développement asymptotique du cas de deux triangles superposés

Soit l'intégrale

$$T(\epsilon) = \int_{S \times S} \frac{1}{(\epsilon^2 + \|x - y\|^2)^{5/2}} dx dy, \tag{14.39}$$

qui est l'intégrale sur le produit de triangles superposés à une distance ϵ . On montre que le terme constant du processus asymptotique lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ est (14.38). $T(\epsilon)$ peut s'écrire d'une manière similaire à (8.15) :

$$T(\epsilon) = 4|S| \sum_{l=1}^3 g_l {}^1R_3^2(a_l, \alpha_l, \epsilon; 4), \quad (14.40)$$

avec,

$${}^1R_3^2(a, \alpha, \epsilon; 4) = \int_{\alpha} {}^1\Phi_3^2(\epsilon, \|x - a\|; 4) \quad (14.41)$$

dont l'expression est

$$\begin{aligned} {}^1R_3^2(a, \alpha, \epsilon; 4) &= \frac{s(\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 + d^2 + s^2})}{6\epsilon^2 d^2 (d^2 + s^2)} + \frac{\epsilon^2 + d^2}{6\epsilon^3 d^3} \operatorname{Arctan}\left(\frac{s}{d}\right) \\ &+ \frac{\epsilon^2 + d^2}{6\epsilon^3 d^3} \Im \left\{ \operatorname{Arctanh}\left(\frac{\epsilon^2 + d^2 + isd}{\epsilon\sqrt{\epsilon^2 + d^2 + s^2}}\right) - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(s) \right\} \end{aligned} \quad (14.42)$$

${}^1R_3^2(a, \alpha, \epsilon; 4)$ se développe pour $\epsilon \rightarrow 0$ sous la forme (14.8) :

$${}^1R_3^2(a, \alpha, \epsilon; 4) = \frac{a_4}{\epsilon^3} + \frac{a_3}{\epsilon^2} + \frac{a_2}{\epsilon^1} + \left(-\frac{s(3d^2 + 2s^2)}{18d^4 (d^2 + s^2)^{3/2}} \right) + O(\epsilon), \quad (14.43)$$

d'où

$$pf T(\epsilon) = -\frac{2}{9}|S| \sum_{l=1}^3 g_l \left[-\frac{s(3g_l^2 + 2s^2)}{18g_l^4 (g_l^2 + s^2)^{3/2}} \right]_{s_l^-}^{s_l^+}, \quad (14.44)$$

qui est identique au résultat obtenu en (14.38).

Conclusion de ce chapitre

Ce chapitre présente l'évaluation explicite de la partie finie d'intégrales bi-dimensionnelles en utilisant notre méthode.

Une propriété surprenante de la méthode pour l'évaluation de la partie finie d'intégrales 4-D a été présentée à la fin de ce chapitre et incite à poursuivre l'étude dans ce domaine.

Conclusion de la quatrième partie

Cette partie a permis de présenter la prise en compte de fonctions de base affines par triangle. La quantité de calcul augmente mais la difficulté n'est pas plus importante. L'application de la méthode à l'électromagnétisme est présentée. En décomposant les intégrales intervenant dans les équations de Maxwell 3-D, on réduit le nombre d'intégrales à évaluer tout en faisant apparaître des intégrales déjà calculées pour l'équation de Helmholtz 3-D.

Plutôt que de distinguer les parties singulière et régulière du noyau de Green, on peut évaluer l'intégrale du noyau de Green complet avec des fonctions de base constantes ou affines par éléments. Cependant, il n'est plus possible d'obtenir de formules explicites, l'utilisation de la méthode réduit l'intégrale 4-D en une combinaison linéaire d'intégrales mono-dimensionnelles qui sont évaluées numériquement avec peu de points d'intégration lorsque les triangles sont coplanaires ou dans des plans sécants.

Finalement, un dernier prolongement permet de calculer explicitement la partie finie d'intégrales hypersingulières.

Conclusion générale

L'objectif de cette thèse était de détailler une méthode d'évaluation d'intégrales comportant un intégrand singulier intervenant dans les méthodes d'équations intégrales variationnelles. Les formules présentées dans la première partie permettent de traiter les intégrales singulières et presque singulières mais nécessitent la distinction entre trois configurations géométriques des éléments du maillage : lorsqu'ils sont *i*) coplanaires, *ii*) situés dans des plans sécants, *iii*) situés dans des plans parallèles (non confondus) ; chaque configuration conduit à des calculs différents.

Nous avons appliqué le processus de réduction aux intégrales issues de l'utilisation de la méthode des éléments finis de frontières pour les équations de Laplace, Helmholtz et Maxwell en 3-D avec des fonctions de base constantes ou affines par élément. On peut noter que plus les éléments ont des sommets communs plus les formules obtenues sont simples (le calcul du coefficient d'auto-influence étant le plus simple). Si l'on ne traite que la partie homogène et singulière de l'intégrand initial, on aboutit à des formules explicites ce qui garantit un coût fixe pour une très grande précision. Notre méthode a donc l'avantage de ne pas nécessiter d'intégration numérique ce qui nous évite de devoir adapter le nombre de points d'intégration pour assurer une précision fixée.

Les résultats numériques montrent la précision et la robustesse de la méthode aussi bien pour les cas singuliers (auto-influence, triangles adjacents ...) que pour les cas presque-singuliers, avec notamment le cas des triangles situés dans des plans parallèles qui a fait l'objet de l'article [LS12]. Ce dernier cas qui est un des plus difficiles pour les méthodes d'intégration numérique, principalement lorsque les triangles se recouvrent partiellement, est simple à traiter avec cette méthode. Dans le cas du noyau de Green complet de l'équation de Helmholtz 3-D, les intégrales 4-D sont réduites à une combinaison linéaire d'intégrales mono-dimensionnelles qui sont évaluées numériquement. Dans ce cas, le coût de calcul pour obtenir une erreur inférieure à 1% est peu important.

Bien que ce manuscrit puisse donner l'impression que l'utilisation de la méthode soit compliquée, la méthode est simple à mettre en oeuvre en pratique. La méthode est limitée à la discrétisation par des polygones plans en 3-D et des segments rectilignes en 2-D. Elle nécessite que l'intégrand soit homogène ; lorsque ce n'est pas le cas, il est toujours possible de le développer en termes homogènes sujets à l'application de notre méthode et en une partie régulière qui peut être évaluée numériquement. Ce manuscrit peut être vu comme un mode d'emploi de la méthode afin que chacun puisse appliquer la méthode aux cas souhaités. La seule difficulté (en apparence) est le traitement du cas des segments presque-parallèles, mais comme cela est présenté dans la section 4.7, il n'est pas nécessaire d'y prêter attention pour obtenir des résultats précis. Seuls les cas pour lesquels le calcul de l'intersection des supports des segments n'est pas possible (parallélisme exact) nécessitent l'application de la formule (2.34).

D'apparence limitée, la méthode est en réalité très souple puisqu'elle peut être appliquée aux intégrales issues des méthodes de collocation et des méthodes variationnelles, à d'autres noyaux, à des fonctions de base d'ordre plus élevé ou encore au calcul explicite de la partie finie de Hadamard d'intégrales hypersingulières. Sa souplesse provient du fait qu'il est également possible d'effectuer une réduction partielle puis de conclure en opérant une intégration numérique pour un intégrand régulier. Enfin, la méthode est aussi utilisable dans le cas d'équations intégrales volumiques.

Perspectives

Il serait intéressant de poursuivre le traitement des intégrales singulières provenant des équations de Maxwell et d'étendre l'application de la méthode à d'autres noyaux (élasticité notamment). La poursuite de l'étude de l'utilisation de la méthode pour calculer la partie finie d'intégrales provenant des formulations hypersingulières pourrait conduire à des résultats d'une grande utilité.

Afin de les valider, les formules ont été implémentées dans un code MATLAB, cependant aucune optimisation n'a été réalisée. Une partie des formules a été implémentée récemment en C++ afin d'être intégrée dans le code d'équations intégrales développé par Eric Darrigrand de l'IRMAR (Université de Rennes 1) pour réaliser des comparaisons. Une prochaine étape consisterait à optimiser l'utilisation de la méthode (factoriser des calculs de distances par exemple) pour réduire le temps de calcul ce qui rendrait la méthode encore plus attractive et on pourrait envisager son usage dans des codes industriels.

Cinquième partie

Appendices

Table des matières

A	Calcul des quantités géométriques	175
A.1	Configuration de deux plans	175
A.2	Projection orthogonale d'un point sur une droite	175
A.3	Projection orthogonale d'un point de l'espace sur un plan	176
A.4	Intersection entre deux droites sécantes contenues dans un même plan	176
A.5	Perpendiculaire commune à deux droites dans l'espace	177
B	Le potentiel de double couche	179
B.1	Calcul de R_1 et \mathfrak{R}_2	179
B.2	Calcul de \mathcal{S} et \mathcal{L}	180
B.3	Calcul de \tilde{R}_2^1 et $\tilde{\mathfrak{R}}_3^2$	180
B.4	Calcul de $\tilde{\mathcal{S}}_2, \tilde{\mathcal{S}}_3$ et $\tilde{\mathcal{T}}_3$	182
C	Triangles dans des plans parallèles : Formules finales	185
C.1	Calcul des intégrands finaux	185
C.2	Intégrales mono-dimensionnelles à un paramètre	187
C.3	Intégrales mono-dimensionnelles à deux paramètres	188
D	Fonctions de base affines : Formules finales	189
D.1	Formules finales	189
E	Electromagnétisme : Formules finales	193
E.1	Termes pour le calcul de \mathcal{M}_1	193
E.2	Termes pour le calcul de \mathcal{M}_2	194

Calcul des quantités géométriques

Introduction

Des quantités géométriques apparaissent durant les étapes de réduction de la dimension de l'espace d'intégration et dans les formules finales; leur calcul est détaillé dans ce chapitre. Nous rappelons les calculs de la projection orthogonale d'un point sur une droite et sur un plan, de l'intersection de deux droites sécantes dans un même plan. Nous présentons les critères utilisés pour déterminer si des plans sont sécants ou parallèles, et finalement nous indiquons le calcul de la perpendiculaire commune à deux droites non parallèles dans l'espace.

A.1. Configuration de deux plans

Soient les deux plans P_1 et P_2 de normales unitaires respectives \vec{n}_1 et \vec{n}_2 , alors si

$$\cos(\theta) = |\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2| < 1,$$

les deux plans sont sécants et l'angle qu'il forme est θ ; si le produit scalaire des deux normales est égales à ± 1 les plans sont parallèles ou confondus. Pour déterminer si les plans sont confondus, on utilise les équation respectives des plans :

$$\begin{cases} (P_1) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ (P_2) : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

tels que $\|(a_1, b_1, c_1)\| = \|(a_2, b_2, c_2)\| = 1$. Les plans sont confondus si

$$d_1 = \frac{d_2}{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2},$$

et parallèles sinon.

A.2. Projection orthogonale d'un point sur une droite

Soient b un point et (α) une droite définie par deux points a^- et a^+ . On note le vecteur $\vec{\alpha} = a^+ - a^-$ et sa version normalisée $\vec{\alpha}' = \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$. Pour finir, on introduit $p(b)$

la projection orthogonale de b sur la droite (α) et $\vec{\tau} = b - a^-$ (voir Figure A.1). On a alors

$$p(b) = a^- + k\vec{\alpha}' \quad \text{et} \quad (b - p(b)) \cdot \vec{\alpha}' = (b - a^- - k\vec{\alpha}') \cdot \vec{\alpha}' = 0.$$

On obtient donc,

$$k = \vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}'. \quad (\text{A.2})$$

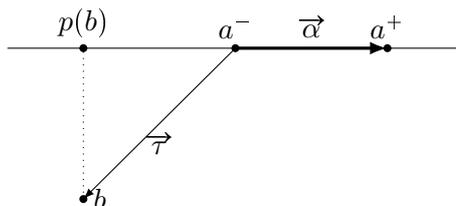


FIGURE A.1 – Projection d'un point sur une droite.

A.3. Projection orthogonale d'un point de l'espace sur un plan

Soit le point $b \in \mathbb{R}^3$ et le plan P défini par son équation : $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0$, qui peut aussi s'écrire

$$\vec{n} \cdot \vec{x} + d = 0,$$

où \vec{n} est un vecteur normal unitaire de P . On note \hat{b} la projection orthogonale de b sur le plan P , alors :

$$\hat{b} = b + k\vec{n},$$

donc

$$k = -(\vec{n} \cdot \vec{b} + d). \quad (\text{A.3})$$

De plus, la distance du point b au plan P , s'écrit

$$h = \|b - \hat{b}\| = |\vec{n} \cdot \vec{b}|. \quad (\text{A.4})$$

A.4. Intersection entre deux droites sécantes contenues dans un même plan

Soient les droites (α) et (β) respectivement définies par deux sommets a^-, a^+ et b^-, b^+ . On définit de plus les vecteurs :

$$\vec{\alpha} = a^+ - a^- \quad \text{et} \quad \vec{\beta} = b^+ - b^-,$$

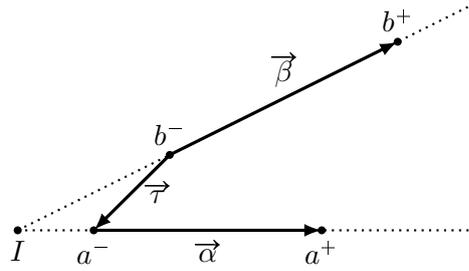


FIGURE A.2 – Intersection de deux segments dans le même plan.

et les vecteurs normalisés

$$\vec{\alpha}' = \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} \text{ et } \vec{\beta}' = \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}.$$

On note I l'intersection de (α) et (β) , alors I vérifie :

$$\begin{aligned} I &= a^- + k\vec{\alpha}' \\ I &= b^- + l\vec{\beta}', \end{aligned}$$

donc en introduisant $\vec{\tau} = b^- - a^-$, on a

$$\vec{\tau} = k\vec{\alpha}' - l\vec{\beta}'. \quad (\text{A.5})$$

Soit, encore, le système suivant, en effectuant le produit scalaire avec $\vec{\alpha}'$ puis $\vec{\beta}'$:

$$\begin{aligned} (\vec{\tau} | \vec{\alpha}') &= k - l (\vec{\alpha}' | \vec{\beta}') \\ (\vec{\tau} | \vec{\beta}') &= k (\vec{\alpha}' | \vec{\beta}') - l. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} k &= \frac{(\vec{\tau} | \vec{\alpha}') - (\vec{\tau} | \vec{\beta}') (\vec{\alpha}' | \vec{\beta}')}{1 - (\vec{\alpha}' | \vec{\beta}')^2} \\ l &= -\frac{(\vec{\tau} | \vec{\beta}') - (\vec{\tau} | \vec{\alpha}') (\vec{\alpha}' | \vec{\beta}')}{1 - (\vec{\alpha}' | \vec{\beta}')^2}. \end{aligned}$$

A.5. Perpendiculaire commune à deux droites dans l'espace

Deux droites dans l'espace ont soit une infinité de perpendiculaires communes (lorsqu'elles sont parallèles), soit une unique perpendiculaire commune. Soient (α) et (β) , deux droites non parallèles dans l'espace. On note (D) la perpendiculaire commune à ces deux droites et I_α et I_β les intersections respectives de (D) avec (α) et (β) . On introduit deux points sur chaque droite, soient a^\pm et b^\pm les extrémités respectivement du segment $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$. Enfin, on note les vecteurs normalisés

$$\vec{\alpha}' = \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} \text{ et } \vec{\beta}' = \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}.$$

On a les expressions,

$$\begin{aligned}I_\alpha &= a^- + k\vec{\alpha}' \\I_\beta &= b^- + l\vec{\beta}',\end{aligned}$$

donc

$$I_\beta - I_\alpha = b^- - a^- + l\vec{\beta}' - k\vec{\alpha}'. \quad (\text{A.6})$$

On introduit $\vec{\tau} = b^- - a^-$, alors en effectuant le produit scalaire de (A.6) avec $\vec{\alpha}'$ et $\vec{\beta}'$, on obtient le système :

$$\begin{aligned}\vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}' + l\vec{\alpha}' \cdot \vec{\beta}' - k &= 0 \\ \vec{\tau} \cdot \vec{\beta}' + l - k\vec{\alpha}' \cdot \vec{\beta}' &= 0,\end{aligned}$$

soit pour k et l ,

$$\begin{aligned}k &= \frac{(\vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}') - (\vec{\tau} \cdot \vec{\beta}') (\vec{\alpha}' \cdot \vec{\beta}')}{1 - (\vec{\alpha}' \cdot \vec{\beta}')^2} \\ l &= \frac{(\vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}') (\vec{\alpha}' \cdot \vec{\beta}') - \vec{\tau} \cdot \vec{\beta}'}{1 - (\vec{\alpha}' \cdot \vec{\beta}')^2},\end{aligned}$$

ce qui permet de déterminer I_α et I_β .

Le potentiel de double couche

Nous fournissons les formules finales pour l'évaluation explicite de l'intégrale du terme singulier du potentiel de double couche dans le cas de triangles dans des plans sécants.

B.1. Calcul de R_1 et \mathfrak{R}_2

- Calcul $R_1(a, \beta, h; \zeta)$.

Soit $q(a)$ la projection de a sur le support de β , alors

$$R_1(a, \beta, h; \zeta) = \int_{t^-}^{t^+} f_1(h, \sqrt{d^2 + s^2}; \zeta) ds, \quad (\text{B.1})$$

où t^\pm sont les abscisses des extrémités de β par rapport à $q(a)$ et $d = \|q(a) - a\|$. On obtient donc,

$$\begin{aligned} R_1(\hat{a}, \beta, h; 0) = & \left[-\frac{h}{d} \left(\text{Arctan} \left(\frac{s}{d} \right) + \frac{\pi \text{sgn}(s)}{2} \right) + \text{Arcsinh} \left(\frac{s}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) \right. \\ & \left. - \frac{h}{d} \mathcal{I}m \left\{ \text{Arctanh} \left(\frac{h^2 + isd + d^2}{h\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}} \right) - \frac{i\pi}{2} \text{sgn}(s) \right\} \right]_{t^-}^{t^+} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

et

$$\begin{aligned} R_1(\hat{a}, \beta, h; 2) = & \left[\frac{1}{hd} \left(\text{Arctan} \left(\frac{s}{d} \right) + \frac{\pi \text{sgn}(s)}{2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{hd} \mathcal{I}m \left\{ \text{Arctanh} \left(\frac{h^2 + isd + d^2}{h\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}} \right) - \frac{i\pi}{2} \text{sgn}(s) \right\} \right]_{t^-}^{t^+} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

- Calcul $\mathfrak{R}_2(a, \beta, h; \zeta)$.

Il est nécessaire de décomposer \mathfrak{R}_2 comme suit,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_2(a, \beta, h; \zeta) = & (a - q(a)) \int_{t^-}^{t^+} f_2(h, \sqrt{d^2 + s^2}; \zeta) ds \\ & - \vec{\beta} \int_{t^-}^{t^+} s f_2(h, \sqrt{d^2 + s^2}; \zeta) ds. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_2(a, \beta, h; 0) = & \left[-\vec{\beta} \left\{ \frac{\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}}{2} + \frac{h^2}{2\sqrt{d^2 + s^2}} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h} \right) \right\} \right. \\ & + (a - q(a)) \left\{ \frac{h^2 + d^2}{2d^2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) \right. \\ & \left. \left. - \frac{sh^2}{2d^2\sqrt{d^2 + s^2}} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h} \right) \right\} \right]_{t^-}^{t^+} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_2(a, \beta, h; 2) = & \left[\frac{\vec{\beta}}{\sqrt{d^2 + s^2}} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h} \right) \right. \\ & + (a - q(a)) \left\{ \frac{s}{d^2\sqrt{d^2 + s^2}} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h} \right) \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{d^2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) \right\} \right]_{t^-}^{t^+}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

B.2. Calcul de \mathcal{S} et \mathcal{L}

On a

$$\mathcal{S}(a, \beta) = \left[(a - q(a)) \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{d} \right) - \vec{\alpha} \sqrt{d^2 + s^2} \right]_{t^-}^{t^+}, \quad (\text{B.6})$$

avec $d = \|q(a) - a\|$ et t^\pm , les abscisses des extrémités de β selon $q(a)$. De même,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a, \beta) = & \left[(a - q(a)) \left\{ \frac{s (\log(d^2 + s^2) + 2)}{2d^2\sqrt{d^2 + s^2}} - \frac{\operatorname{Arcsinh}(s/d)}{d^2} \right\} \right. \\ & \left. - \vec{\beta} \left\{ \frac{2 + \log(d^2 + d^2)}{2\sqrt{d^2 + s^2}} \right\} \right]_{t^-}^{t^+}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

B.3. Calcul de $\tilde{\mathfrak{R}}_2^1$ et $\tilde{\mathfrak{A}}_3^2$

D'après les expressions (6.29) et (6.29), on calcule en premier les expressions des fonctions \mathfrak{F}_2 et \mathfrak{F}_3 dont on rappelle la définition :

$$\mathfrak{F}_c(h, \eta; \zeta) = h^{c-1-\zeta} \int_h^{+\infty} \frac{f_c(u, \eta; \zeta)}{u^{c-\zeta}} du, \quad (\text{B.8})$$

alors, on a

$$\mathfrak{F}_2(h, \eta; 0) = \frac{\sqrt{h^2 + \eta^2} - 2h}{2\eta^2} + \frac{h^2}{2\eta^3} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\eta}{h} \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\mathfrak{F}_2(h, \eta; 2) = \frac{1}{h\eta^2} - \frac{1}{\eta^3} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\eta}{h} \right) \quad (\text{B.10})$$

et,

$$\mathfrak{F}_3(h, \eta; 0) = \frac{\sqrt{h^2 + \eta^2} (4h^2 + \eta^2)}{6\eta^4} - \frac{2h^3}{3\eta^4} - \frac{h^2}{2\eta^3} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\eta}{h} \right) \quad (\text{B.11})$$

$$\mathfrak{F}_3(h, \eta; 2) = \frac{1}{\eta^3} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\eta}{h} \right) - 2 \frac{\sqrt{h^2 + \eta^2} - h}{\eta^4}. \quad (\text{B.12})$$

La projection $q(\hat{a})$ de \hat{a} sur le support de β est choisie comme origine. Les abscisses t^\pm des extrémités de β interviennent dans les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{R}}_2^1(\hat{a}, \beta, h; 0) &= \left[\frac{sh^2}{2d^2\sqrt{d^2 + s^2}} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h} \right) - \frac{h}{d} \operatorname{Arctan} \left(\frac{s}{d} \right) \right. \\ &\quad - \frac{h}{d} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 + isd}{h\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}} \right) - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(s) \right\} \\ &\quad \left. + \frac{d^2 - h^2}{2d^2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{\sqrt{d^2 + h^2}} \right) \right]_{s=t^-}^{t^+} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

et

$$\tilde{\mathfrak{R}}_2^1(\hat{a}, \beta, h; 2) = \left[\frac{1}{d^2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) + \frac{1}{hd} \operatorname{Arctan} \left(\frac{s}{d} \right) \right. \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} &\quad \left. + \frac{1}{hd} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 + isd}{h\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}} \right) - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(s) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{s}{d^2\sqrt{d^2 + s^2}} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h} \right) \right]_{s=t^-}^{t^+} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

D'une manière similaire,

$$\tilde{\mathfrak{R}}_3^2(\hat{a}, \beta, h; 0) = (\hat{a} - q(\hat{a})) \left[\frac{sh^2 (\sqrt{h^2 + d^2 + s^2} - h)}{3d^3 (d^2 + s^2)} + \frac{(3h^2 + d^2)}{6d^2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) \right. \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} &\quad - \frac{h^3}{3d^3} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 + isd}{h\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}} \right) - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(s) \right\} \\ &\quad - \frac{h^3}{3d^3} \operatorname{Arctan} \left(\frac{s}{d} \right) - \frac{sh^2}{2d^2\sqrt{d^2 + s^2}} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h} \right) \Big]_{s=t^-}^{t^+} \\ &\quad - \frac{1}{\beta} \left[- \frac{(h^2 + d^2 + s^2)^{3/2} - h^3}{3(d^2 + s^2)} + \frac{\sqrt{h^2 + d^2 + s^2} 2}{3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^2}{2\sqrt{d^2 + s^2}} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h} \right) \right]_{s=t^-}^{t^+} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{R}}_3^2(\hat{a}, \beta, h; 2) &= (\hat{a} - q(\hat{a})) \left[-s \frac{(h^2 + d^2 + s^2)^{3/2} - h^3}{d^2 h^2 (d^2 + s^2)} + \frac{h}{d^3} \operatorname{Arctan} \left(\frac{s}{d} \right) \right. \\
&+ \frac{h}{3d^3} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 + isd}{h\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}} \right) - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(s) \right\} \\
&+ s \frac{\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}}{d^2 h^2} - \frac{1}{d^2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) \\
&+ \left. \frac{s}{d^2 \sqrt{d^2 + s^2}} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h} \right) \right]_{s=t^-}^{t^+} \\
&- \vec{\beta} \left[-\frac{1}{\sqrt{d^2 + s^2}} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h} \right) - \frac{\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}}{h^2} \right. \\
&+ \left. \frac{(h^2 + d^2 + s^2)^{3/2} - h^3}{h^2 (d^2 + s^2)} \right]_{s=t^-}^{t^+}
\end{aligned} \tag{B.18}$$

B.4. Calcul de $\tilde{\mathfrak{S}}_2$, $\tilde{\mathfrak{S}}_3$ et $\tilde{\mathfrak{T}}_3$

On a,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{F}}_2(h, d, \eta; 0) &= \frac{\sqrt{h^2 + d^2 + \eta^2} - \sqrt{h^2 + d^2}}{2\eta^2} - \frac{h^2}{2d\eta^2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{d}{h} \right) \\
&+ \frac{h^2}{2\eta^2 \sqrt{d^2 + \eta^2}} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{d^2 + \eta^2}{h} \right)
\end{aligned} \tag{B.19}$$

et

$$\tilde{\mathfrak{F}}_2(h, d, \eta; 2) = \frac{1}{d\eta^2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{d}{h} \right) - \frac{1}{\eta^2 \sqrt{d^2 + \eta^2}} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{d^2 + \eta^2}{h} \right) \tag{B.20}$$

alors,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{S}}_2(\hat{a}, \tilde{\beta}, h, d; 0) &= \left[-\frac{\sqrt{h^2 + d^2 + s^2} - \sqrt{h^2 + d^2}}{2s} + \frac{h^2}{2ds} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{d}{h} \right) \right. \\
&+ \left. \frac{h^2 + d^2}{2d^2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) - \frac{h^2 \sqrt{d^2 + s^2}}{2sd^2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h} \right) \right]_{t^-}^{t^+}
\end{aligned} \tag{B.21}$$

et,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{S}}_2(\hat{a}, \tilde{\beta}, h, d; 2) &= \left[\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{sd^2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h} \right) - \frac{1}{ds} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{d}{h} \right) \right. \\
&- \left. \frac{1}{d^2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) \right]_{t^-}^{t^+}.
\end{aligned} \tag{B.22}$$

De même,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{F}}_3(h, d, \eta; 0) &= \frac{h^3}{3d\eta^3} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\eta}{d} \right) + \frac{\sqrt{h^2 + d^2 + \eta^2}}{6\eta^2} + \frac{h^2 (\sqrt{h^2 + d^2 + \eta^2} - h)}{3\eta^2(d^2 + \eta^2)} \\ &+ \frac{ih^3}{6d\eta^3} \left(\operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 + i\eta d}{h\sqrt{h^2 + d^2 + \eta^2}} \right) - \operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 - i\eta d}{h\sqrt{h^2 + d^2 + \eta^2}} \right) \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{F}}_3(h, d, \eta; 2) &= -\frac{h}{d\eta^3} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\eta}{d} \right) + \frac{1}{\eta^3} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\eta}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) - \frac{\sqrt{h^2 + d^2 + \eta^2} - h}{\eta^2(d^2 + \eta^2)} \\ &+ \frac{ih}{2d\eta^3} \left(\operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 + i\eta d}{h\sqrt{h^2 + d^2 + \eta^2}} \right) - \operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 - i\eta d}{h\sqrt{h^2 + d^2 + \eta^2}} \right) \right) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{T}}_3(\hat{\alpha}, \tilde{\beta}, h, d; 0) &= -\vec{\beta} \left[\frac{\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}}{6} - \frac{h^3}{3ds} \operatorname{Arctan} \left(\frac{s}{d} \right) \right. \\ &+ \frac{(d^2 + 3h^3)}{6s} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) \\ &\left. - \frac{h^3}{3ds} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 + isd}{h\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}} \right) - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(s) \right\} \right]_{s=t^-}^{t^+} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

et,

$$\tilde{\mathcal{T}}_3(\hat{\alpha}, \tilde{\beta}, h, d; 2) = -\vec{\beta} \left[\frac{h}{ds} \operatorname{Arctan} \left(\frac{s}{d} \right) - \frac{1}{s} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) \right] \quad (\text{B.24})$$

$$+ \frac{h}{ds} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 + isd}{h\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}} \right) - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(s) \right\} \Big]_{s=t^-}^{t^+} \quad (\text{B.25})$$

Finalement,

$$\mathfrak{F}_3^1(h, d, \eta; 0) = \frac{(h^2 + d^2 + \eta^2)^{3/2}}{3\eta^2(d^2 + \eta^2)} + \frac{h^3}{3d^2(d^2 + \eta^2)} - \frac{(d^2 + h^2)^{3/2}}{3d^2\eta^2}$$

$$\mathfrak{F}_3^1(h, d, \eta; 2) = \frac{\sqrt{d^2 + \eta^2} - h}{d^2(d^2 + \eta^2)} - \frac{\sqrt{h^2 + d^2 + \eta^2} - \sqrt{d^2 + h^2}}{\eta^2(d^2 + \eta^2)}$$

donc

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_3(\hat{\alpha}, \tilde{\beta}, h, d; 0) &= \left[\frac{1}{3} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{\sqrt{d^2 + h^2}} \right) + \frac{h^3}{3d^3} \operatorname{Arctan} \left(\frac{s}{d} \right) \right. \\ &- \frac{(h^2 + d^2 + s^2)^{3/2} - (d^2 + h^2)^{3/2}}{3d^2s} + \frac{s\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}}{3d^2} \\ &\left. + \frac{h}{3d^3} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 + isd}{h\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}} \right) - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(s) \right\} \right]_{s=t^-}^{t^+}, \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_3(\hat{a}, \tilde{\beta}, h, d; 2) = & \left[\frac{\sqrt{h^2 + d^2 + s^2} - \sqrt{h^2 + d^2}}{sd^2} - \frac{h}{d^3} \operatorname{Arctan} \left(\frac{s}{d} \right) \right. \\ & \left. - \frac{h}{d^3} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 + isd}{h\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}} \right) - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(s) \right\} \right]_{s=t^-}^{t^+} \quad (\text{B.27}) \end{aligned}$$

Triangles dans des plans parallèles : Formules finales

C.1. Calcul des intégrands finaux

C.1.1 Calcul de Φ_a^c

Comme il a été vu dans la section 9.5.1, d'après les formules (8.2), (8.6) et (8.10) on a

$$\Phi_a^c(h, \eta; \zeta) = \int_{w=h}^{+\infty} \int_{v=w}^{+\infty} \int_{u=v}^{+\infty} h^{c-\zeta} \frac{w^{a-c-2}}{u^{a+1-\zeta}(u^2 + \eta^2)^{(1+\zeta)/2}} dudvdw.$$

Une inversion de l'ordre d'intégration (voir Figure 9.4) conduit à l'expression suivante :

$$\Phi_a^c(h, \eta; \zeta) = \int_{u=h}^{+\infty} \frac{h^{c-\zeta}}{u^{a+1-\zeta}(u^2 + \eta^2)^{(1+\zeta)/2}} \int_{v=h}^u \int_{w=h}^v w^{a-c-2} dw dv du,$$

et plus particulièrement

$$\Phi_a^{a-2}(h, \eta; \zeta) = \frac{h^{a-2-\zeta}}{2} \int_h^{+\infty} \frac{(u-h)^2}{u^{a+1-\zeta}(u^2 + \eta^2)^{(1+\zeta)/2}} du, \quad (\text{C.1})$$

qu'il est plus simple d'évaluer avec Maple que l'expression initiale.

Expressions des Φ_a^c

$$\begin{aligned} \Phi_3^1(h, \eta; 0) &= \frac{h^2}{2\eta^3} \operatorname{Arcsinh}\left(\frac{\eta}{h}\right) + \frac{\sqrt{h^2 + \eta^2} - 3h}{6\eta^2} - \frac{2h^2(\sqrt{h^2 + \eta^2} - h)}{6\eta^4} \\ \Phi_3^1(h, \eta; 2) &= \frac{(\sqrt{h^2 + \eta^2} - h)}{\eta^4} + \frac{1}{2h\eta^2} - \frac{1}{\eta^3} \operatorname{Arcsinh}\left(\frac{\eta}{h}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} \Phi_4^2(h, \eta; 0) &= \frac{(2\eta^2 + 23h^2)\sqrt{h^2 + \eta^2}}{48\eta^4} - \frac{2h^3}{3\eta^4} + \frac{h^2(3h^2 - 4\eta^2)}{16\eta^5} \operatorname{Arcsinh}\left(\frac{\eta}{h}\right) \\ \Phi_4^2(h, \eta; 2) &= \frac{(8h - 5\sqrt{h^2 + \eta^2})}{4\eta^4} - \frac{(3h^2 - 2\eta^2)}{4\eta^5} \operatorname{Arcsinh}\left(\frac{\eta}{h}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

C.1.2 Calcul des $\tilde{\Phi}_a^c$

Dans la définition (9.6) de $\tilde{\Phi}_a^c$, on remarque que l'intégrand fait intervenir \mathfrak{F}_a ; on fournit donc leurs expressions :

$$\mathfrak{F}_3(h, \eta; 0) = \frac{\sqrt{h^2 + \eta^2}}{6\eta^2} - \frac{h^2}{2\eta^3} \operatorname{Arcsinh}\left(\frac{\eta}{h}\right) + \frac{2h^2(\sqrt{h^2 + \eta^2} - h)}{3\eta^4}$$

$$\mathfrak{F}_3(h, \eta; 2) = \frac{1}{\eta^3} \operatorname{Arcsinh}\left(\frac{\eta}{h}\right) - \frac{2(\sqrt{h^2 + \eta^2} - h)}{\eta^4}$$

$$\mathfrak{F}_4(h, \eta; 0) = \frac{\sqrt{h^2 + \eta^2}}{12\eta^2} - \frac{3h^4}{8\eta^5} \operatorname{Arcsinh}\left(\frac{\eta}{h}\right) - \frac{h^2(7\sqrt{h^2 + \eta^2} - 16h)}{24\eta^4}$$

$$\mathfrak{F}_4(h, \eta; 2) = \frac{\sqrt{h^2 + \eta^2} - 4h}{2\eta^4} + \frac{3h^2}{2\eta^5} \operatorname{Arcsinh}\left(\frac{\eta}{h}\right)$$

Pour conserver des expressions concises, on introduit les notations suivantes

$$\begin{aligned} T_1 &= \operatorname{Arcsinh}\left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h}\right), T_2 = \operatorname{Arcsinh}\left(\frac{s}{\sqrt{h^2 + d^2}}\right), T_3 = \operatorname{Arctan}\left(\frac{s}{d}\right), \\ T_4 &= \frac{\sqrt{h^2 + d^2 + s^2} - h}{d^2 + s^2}, T_5 = \frac{\sqrt{h^2 + d^2 + s^2} - \sqrt{h^2 + d^2}}{d^2}, \\ T_6 &= \operatorname{Arctanh}\left(\frac{h^2 + d^2 + isd}{h\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}}\right), T_7 = \operatorname{Arcsinh}\left(\frac{d}{h}\right), \\ T_8 &= T_3 + \mathcal{I}m(T_6) - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(s) \quad \text{et} \quad T_9 = \frac{\sqrt{h^2 + d^2} - h}{d^2} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Expressions des $\tilde{\Phi}_a^c$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_3^1(h, d, s; 0) &= \frac{3h^2}{s^2\sqrt{d^2 + s^2}} T_1 - \frac{3h^2}{ds^2} T_7 + \frac{d^2}{s^2} T_5 - \frac{2h^2}{s^2} T_4 + \frac{2h^2}{s^2} T_9 \\ \tilde{\Phi}_3^1(h, d, s; 2) &= \frac{6}{ds^2} T_7 - \frac{6}{s^2\sqrt{d^2 + s^2}} T_1 + \frac{6d^2}{s^2(d^2 + s^2)} T_5 - \frac{6}{d^2 + s^2} T_9 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_4^2(h, d, s; 0) &= -\frac{3h^4 T_1}{4d^2(d^2 + s^2)^{3/2}} - \frac{d^4 + 6d^2 h^2 - 3h^4}{4s^3 d^2} T_2 + \frac{h^2}{s^2} T_4 \\ &\quad + \frac{2h^3 T_8}{ds^3} + \frac{(h^2 + d^2 + s^2)^{3/2} - 4h^3}{4s^2(d^2 + s^2)} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$\tilde{\Phi}_4^2(h, d, s; 2) = \frac{3h^2 T_1}{d^2(d^2 + s^2)^{3/2}} + \frac{3(d^2 - h^2)}{d^2 s^3} T_2 - \frac{3T_4}{s^2} + \frac{3h}{s^2(d^2 + s^2)} - \frac{6hT_8}{ds^3}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_4^1(h, d, s; 0) &= -\frac{3h^4}{4d^3s^2}T_7 + \frac{3h^4}{s^2(d^2 + s^2)^{3/2}}T_1 + \frac{d^2}{2s^2}T_5 + \frac{5h^2}{4s^2}T_4 \\
&\quad - \frac{h^2(5d^2 + 8s^2)}{4s^2(d^2 + s^2)}T_9 + \frac{3h^2\sqrt{h^2 + d^2}}{d^2(d^2 + s^2)} \\
\tilde{\Phi}_4^1(h, d, s; 2) &= \frac{h^2}{2d^3s^2}T_7 - \frac{h^2}{2s^2(d^2 + s^2)^{3/2}}T_1 - \frac{d^2}{2s^2(d^2 + s^2)}T_5 \\
&\quad + \frac{1}{2(d^2 + s^2)}T_9 - \frac{h}{2d^2(d^2 + s^2)}
\end{aligned} \tag{C.7}$$

C.2. Intégrales mono-dimensionnelles à un paramètre

Soient \mathcal{K} et \mathfrak{K} , les primitives respectives de R_a^c et \mathfrak{R}_a^c , alors avec $\chi^\pm = s^\pm - \sigma$, on obtient

$$R_a^c(b, \alpha, h; \zeta) = \left[\mathcal{K}(s, h, d; \zeta) \right]_{s=\chi^+}^{\chi^-}, \quad \mathfrak{R}_a^c(b, \alpha, h; \zeta) = -\frac{\vec{\alpha}}{\|\vec{\alpha}\|} \left[\mathfrak{K}(s, h, d; \zeta) \right]_{s=\chi^+}^{\chi^-}$$

On a alors les résultats :

$$\begin{aligned}
R_3^1(a, \beta, h; 0) &= \left[\frac{sh^2T_1}{2\sqrt{d^2 + s^2}d^2} + \frac{(d^2 - 3h^2)T_2}{6d^2} - \frac{sh^2T_4}{6d^2} - \frac{h(3d^2 - h^2)T_8}{6d^3} \right]_{s=\chi^+}^{\chi^-} \\
R_3^1(a, \beta, h; 2) &= \left[-\frac{sT_1}{d^2\sqrt{d^2 + s^2}} + \frac{sT_4}{2d^2} + \frac{T_2}{d^2} + \frac{(d^2 - h^2)T_8}{2hd^3} \right]_{s=\chi^+}^{\chi^-}
\end{aligned} \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned}
R_4^2(a, \beta, h; 0) &= \left[-\frac{sh^2(4d^4 + 4d^2s^2 - 2s^2h^2 - 3d^2h^2)T_1}{16d^4(d^2 + s^2)^{3/2}} - \frac{h^3}{3d^3}T_8 \right. \\
&\quad \left. + \frac{(d^4 + 6d^2h^2 - 3h^4)T_2}{4d^4} + \frac{h^2s}{8d^2} \left(13T_4 - \frac{3h}{d^2 + s^2} \right) \right]_{s=\chi^+}^{\chi^-} \\
R_4^2(a, \beta, h; 2) &= \left[\frac{3sT_1}{d^2\sqrt{d^2 + s^2}} \left(1 - \frac{h^2}{d^2} - \frac{h^2}{2(d^2 + s^2)} \right) + \frac{s}{4d^2} \left(\frac{h}{d^2 + s^2} - 3T_4 \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(d^2 - h^2)T_2}{2d^4} + \frac{h}{d^3}T_8 \right]_{s=\chi^+}^{\chi^-}
\end{aligned} \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_4^2(a, \beta, h; 0) &= \left[\frac{h^2(4(d^2 + s^2) - h^2)T_1}{16(d^2 + s^2)^{3/2}} + \frac{2\sqrt{h^2 + d^2 + s^2} - 13h^2T_4}{48} + \frac{h^3}{16(d^2 + s^2)} \right]_{s=\chi^-}^{\chi^+} \\
\mathfrak{R}_4^2(a, \beta, h; 2) &= \left[\frac{1}{4} \left(3T_4 - \frac{h}{d^2 + s^2} \right) - \frac{(2d^2 + 2s^2 - h^2)T_1}{4(d^2 + s^2)^{3/2}} \right]_{s=\chi^-}^{\chi^+}
\end{aligned} \tag{C.10}$$

C.3. Intégrales mono-dimensionnelles à deux paramètres

Pour le confort du lecteur, les intégrales mono-dimensionnelles dans le cas de double parallélisme (plans parallèles et segments à supports parallèles) sont rappelées :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{R}}_a^c(b, \alpha, h, d; \zeta) &= \int_{\alpha} \tilde{\Phi}_a^c(h, d, \|b - x\|; \zeta) ds_x, \\ \tilde{\mathfrak{X}}_a^c(b, \alpha, h, d; \zeta) &= \int_{\alpha} (x - b) \tilde{\Phi}_a^c(h, d, \|b - x\|; \zeta) ds_x.\end{aligned}$$

Finalement, on a les formules

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{R}}_3^1(a, \beta, h, d; 0) &= \left[\frac{3h^2 T_7}{ds} + \frac{(d^2 + 3h^2) T_2}{d^2} - \frac{(d^2 - 2h^2)}{s} T_5 - \frac{2h^3 T_8}{d^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3h^2 \sqrt{d^2 + s^2}}{sd^2} T_1 \right]_{s=\chi^-}^{\chi^+} \\ \tilde{\mathfrak{R}}_3^1(a, \beta, h; 2) &= \left[\frac{6\sqrt{d^2 + s^2} T_1}{sd^2} - \frac{6T_7}{sd} - \frac{6T_2}{d^2} - \frac{6T_5}{s} + \frac{6hT_8}{d^3} \right]_{s=\chi^-}^{\chi^+}\end{aligned}\quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{R}}_4^1(a, \beta, h, d; 0) &= \left[\frac{3h^4 T_7}{4d^3 s} - \frac{3h^4(2s^2 + d^2)}{4d^4 s \sqrt{d^2 + s^2}} T_1 + \frac{d^4 + 3h^4}{2d^4} T_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2d^2 + 5h^2}{4s} T_5 + \frac{2h^3 T_8}{d^3} \right]_{s=\chi^-}^{\chi^+} \\ \tilde{\mathfrak{R}}_4^1(a, \beta, h; 2) &= \left[-\frac{3h^2 T_7}{d^3 s} + \frac{3h^2(2s^2 + d^2)}{d^4 s \sqrt{d^2 + s^2}} T_1 - \frac{6h^2 T_2}{d^4} + \frac{3T_5}{s} - \frac{6hT_8}{d^3} \right]_{s=\chi^-}^{\chi^+}\end{aligned}\quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{X}}_4^2(a, \beta, h, d; 0) &= \left[\frac{d^4 + 6h^2 d^2 - 3h^4}{4sd^2} T_2 + \frac{3h^4 T_1}{4d^2 \sqrt{d^2 + s^2}} - \frac{2h^3 T_8}{ds} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}}{4} + \frac{3h^3}{4d^2} \text{Arcsinh} \left(\frac{h}{\sqrt{d^2 + s^2}} \right) - \frac{3h^3}{4d^2} \text{Re}(T_6) \right]_{s=\chi^-}^{\chi^+} \\ \tilde{\mathfrak{X}}_4^2(a, \beta, h; 2) &= \left[-\frac{3h^2 T_1}{d^2 \sqrt{d^2 + s^2}} - \frac{3(d^2 - h^2)}{sd^2} T_2 + \frac{6hT_8}{ds} \right]_{s=\chi^-}^{\chi^+}\end{aligned}\quad (\text{C.13})$$

Fonctions de base affines : Formules finales

D.1. Formules finales

D.1.1 Calcul de $R(b, \alpha)$

Avec les notations de la Figure 3.8, en introduisant la distance $d = \|b - p(b)\|$ et en prenant $p(b)$ comme origine, on a

$$R(b, \alpha) = \int_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{d^2 + \|p(b) - x\|^2}} ds_x = \int_{s^-}^{s^+} \frac{1}{\sqrt{d^2 + s^2}} ds \quad (\text{D.1})$$

$$= \sum_{k=\pm} k \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s^k}{d} \right). \quad (\text{D.2})$$

D.1.2 Evaluation de $\mathcal{R}(a, \beta, h)$

Quand a n'appartient pas au support de β , on utilise $q(a)$, la projection orthogonale de a sur le support de β comme origine.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(a, \beta, h) &= \int_{\beta} f_1(h, \|x - a\|) ds_x = \int_{\beta} \frac{\sqrt{h^2 + d^2 + \|x - \tilde{a}\|^2} - h}{(d^2 + \|x - \tilde{a}\|^2)} ds_x \\ &= \left[\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{t}{\sqrt{d^2 + h^2}} \right) - \frac{h}{d} \operatorname{Arctan} \left(\frac{t}{d} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{h}{d} \mathcal{Zm} \operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 + itd}{h\sqrt{h^2 + d^2 + t^2}} \right) - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(t) \right]_{t=t^-}^{t^+}, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

avec $d = \|a - q(a)\|$. Dans le cas de triangles coplanaires avec des cotés parallèles, a appartient au support de β donc $d = 0$ et la formule devient

$$\mathcal{R}(a, \beta, h) = \left[\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{h} \right) - \frac{\sqrt{s^2 + h^2} - h}{s} \right]_{t=t^-}^{t^+} \quad (\text{D.4})$$

D.1.3 Calcul de $R^{\phi_i}(b, \alpha)$

Sur l'arête α_i , la fonction de base ϕ_i s'annule donc les calculs sont à effectuer seulement sur α_{i+k} , $k = 1, 2$. L'expression de ϕ_i sur α_{i+k} , $k = 1, 2$ est

$$\phi_i(x)|_{\alpha_{i+k}} = 1 - \frac{|x - a_i|}{|\alpha_{i+k}|}, k = 1 \text{ ou } 2,$$

alors

$$R^{\phi_i}(b, \alpha_{i+k}) = R(b, \alpha_{i+k}) - \frac{1}{|\alpha_{i+k}|} \int_{\alpha_{i+k}} \frac{|x - a_i|}{\|x - b\|} ds_x. \quad (\text{D.5})$$

En introduisant ζ_i l'abscisse de a_i (s_{i+k}^- ou s_{i+k}^+ dépendant de l'orientation choisie), on a

$$R^{\phi_i}(b, \alpha_{i+k}) = R(b, \alpha_{i+k}) - \frac{\mu}{|\alpha_{i+k}|} \int_{s_{i+k}^-}^{s_{i+k}^+} \frac{\zeta_i - s}{\sqrt{\gamma_i^2(b) + s^2}} ds, \quad (\text{D.6})$$

avec

$$\mu = \begin{cases} 1, & \text{si } a_i = a^+ \\ -1, & \text{si } a_i = a^- \end{cases}$$

ce qui conduit à la formule finale

$$R^{\phi_i}(b, \alpha_{i+k}) = R(b, \alpha_{i+k}) + \frac{\mu}{|\alpha_{i+k}|} \left[\sqrt{\gamma_i^2(b) + s} - \zeta_i \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{s}{|\gamma_i(b)|} \right) \right]_{s=s_{i+k}^-}^{s_{i+k}^+}. \quad (\text{D.7})$$

D.1.4 Calcul de \mathcal{S}

$$\mathcal{S}(\hat{a}, \beta, h) = \left[\frac{h^2 + d^2}{2d^2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{t}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) - \frac{th^2}{2d^2 \sqrt{d^2 + t^2}} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + t^2}}{h} \right) \right]_{t=t^-}^{t^+}. \quad (\text{D.8})$$

Si \hat{a} appartient au support de β , alors $d = 0$ et

$$\mathcal{S}(\hat{a}, \beta, h) = \left[\frac{h^2 + 2t^2}{4t^2} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{t}{h} \right) - \frac{\sqrt{t^2 + h^2}}{4t} \right]_{t^-}^{t^+}. \quad (\text{D.9})$$

Calcul de \mathcal{S}^ϕ On utilise la décomposition : $\phi_q(y)|_\beta = 1 - \frac{|y-b_q|}{|\beta|}$, alors

$$\mathcal{S}^{\phi_q}(\hat{a}, \beta, h) = \mathcal{S}(\hat{a}, \beta, h) - \frac{1}{|\beta|} \int_\beta |y - b_q| f_2(h, \|\hat{a} - y\|) ds_y \quad (\text{D.10})$$

$$= \mathcal{S}(\hat{a}, \beta, h) - \frac{\nu}{|\beta|} \int_{t^-}^{t^+} (\zeta_q - t) f_2(h, \sqrt{d^2 + t^2}) dt, \quad (\text{D.11})$$

avec $\nu = -1$ if $b_q = b^-$ and $\nu = +1$ if $b_q = b^+$.

$$\mathcal{S}^{\phi_q}(\hat{a}, \beta, h) = \left(1 - \frac{\nu \zeta_q}{|\beta|}\right) \mathcal{S}(\hat{a}, \beta, h) + \frac{\nu}{|\beta|} \int_{t^-}^{t^+} t f_2(h, \sqrt{d^2 + t^2}) dt, \quad (\text{D.12})$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\phi_q}(\hat{a}, \beta, h) &= \left(1 - \frac{\nu \zeta_q}{|\beta|}\right) \mathcal{S}(\hat{a}, \beta, h) + \frac{\nu}{|\beta|} \left[\frac{h^2 + d^2}{2d^2} \text{Arcsinh} \left(\frac{s}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{sh^2}{2d^2 \sqrt{d^2 + s^2}} \text{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h} \right) \right]_{t^-}^{t^+}. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

D.1.5 Calcul de \mathcal{T}

$$\mathcal{T}(\hat{a}, \beta, h) = \left[\frac{sh^2}{2d^2 \sqrt{d^2 + s^2}} \text{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h} \right) - \frac{h^2 - d^2}{2d^2} \text{Arcsinh} \left(\frac{s}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) \right]_{t^-}^{t^+} \quad (\text{D.14})$$

$$- \frac{h}{d} \text{Arctan} \left(\frac{s}{d} \right) - \frac{h}{d} \text{Im} \left\{ \text{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 + itd}{h \sqrt{h^2 + d^2 + t^2}} \right) - \frac{i\pi}{2} \text{sgn}(t) \right\} \Bigg]_{t^-}^{t^+}. \quad (\text{D.15})$$

D.1.6 Calcul de $\mathcal{V}(a, \mathcal{I}, \beta)$

On introduit $q(a)$ la projection orthogonale de a sur le support de β et $d = \|a - q(a)\|$ dans l'expression (11.47), alors

$$\mathcal{V}(a, \mathcal{I}, \beta) = \int_\beta \frac{(y - q(a)) \cdot \vec{\beta}}{\sqrt{d^2 + \|y - q(a)\|^2}} ds_y + (q(a) - \mathcal{I} \vec{\beta}) R(a, \beta). \quad (\text{D.16})$$

En choisissant $q(a)$ pour origine, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(a, \mathcal{I}, \beta) &= \int_\beta \frac{(y - q(a)) \cdot \vec{\beta}}{\sqrt{d^2 + \|y - q(a)\|^2}} ds_y + (q(a) - \mathcal{I} \vec{\beta}) R(a, \beta) \\ &= \left[|\beta|^2 \sqrt{d^2 + t^2} + (q(a) - \mathcal{I} \vec{\beta}) \text{Arcsinh} \left(\frac{t}{d} \right) \right]_{t=t^-}^{t=t^+}. \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

D.1.7 Calcul de $\tilde{\mathcal{V}}$

Soient $q(\check{a})$ la projection orthogonale de \check{a} sur le support de β et $d = \|\check{a} - q(\check{a})\|$. En choisissant $q(\check{a})$ pour origine, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}}(\check{a}, \mathcal{I}, \beta, h) &= \frac{|\beta|^2}{2} \left[\frac{h^2 \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\sqrt{d^2 + s^2}}{h} \right)}{\sqrt{d^2 + s^2}} + \sqrt{h^2 + d^2 + s^2} \right. \\ &\quad - \frac{h}{2} \operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 + isd}{h\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}} \right) - \frac{h}{2} \operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 - isd}{h\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}} \right) \\ &\quad \left. + h \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{h}{\sqrt{d^2 + s^2}} \right) \right]_{t=t^-}^{t^+} + (q(\check{a}) - \mathcal{I}|\vec{\beta}) \mathcal{S}(\check{a}, \beta, h). \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Quand \check{a} appartient au support de β alors $d = 0$. Dans ce cas, il n'y a pas de difficulté pour utiliser (D.18).

D.1.8 Calcul de $\tilde{\mathcal{W}}$

Comme pour (D.18), on a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{W}}(\check{a}, \mathcal{I}, \beta, h) &= \left[\frac{|\beta|^2}{3} \frac{(h^2 + d^2 + t^2)^{3/2} - h^3}{d^2 + t^2} + \frac{(q(\check{a}) - \mathcal{I}|\vec{\beta})}{3} \left(\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{t}{\sqrt{h^2 + d^2}} \right) \right. \right. \\ &\quad + \frac{h^3}{d^3} \operatorname{Arctan} \left(\frac{t}{d} \right) - \frac{th^2(\sqrt{h^2 + d^2 + t^2} - h)}{d^2(d^2 + t^2)} \\ &\quad \left. \left. + \frac{h^3}{d^3} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{Arctanh} \left(\frac{h^2 + d^2 + itd}{h\sqrt{h^2 + d^2 + t^2}} \right) - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(t) \right\} \right) \right]_{t=t^-}^{t^+}. \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Quand \check{a} appartient au support de β , $d = 0$. L'utilisation directe de (D.19) n'est pas possible, un développement s'impose :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{W}}(\check{a}, \mathcal{I}, \beta, h) &= \left[\frac{|\beta|^2}{3} \frac{(h^2 + t^2)^{3/2} - h^3}{t^2} + \frac{(\check{a} - \mathcal{I}|\vec{\beta})}{3} \left(\operatorname{Arcsinh} \left(\frac{t}{h} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{h^2 - t^2}{3s\sqrt{h^2 + t^2}} - \frac{2h^3(\sqrt{h^2 + t^2} - h)}{3t^3\sqrt{h^2 + t^2}} \right) \right]_{t=t^-}^{t^+}. \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

Electromagnétisme : Formules finales

E.1. Termes pour le calcul de \mathcal{M}_1

E.1.1 Expressions des intégrands mono-dimensionnels

Pour déterminer une expression explicite de \mathcal{M}_1 , il nous faut les expressions :

$$\mathfrak{F}_3^2(h, \|x - \hat{b}\|; 0) = \frac{2h^2 (\sqrt{h^2 + \eta^2} - h)}{3\eta^4} + \frac{\sqrt{h^2 + \eta^2}}{6\eta^2} - \frac{h^2 + \eta^2}{2\eta^3} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\eta}{h} \right) \quad (\text{E.1})$$

$$\mathfrak{F}_3^1(h, \|x - \hat{b}\|; 0) = \frac{(h^2 + \eta^2)^{3/2} - h^3}{3\eta^4} - \frac{h}{2\eta^2} \quad (\text{E.2})$$

$$\mathfrak{F}_2^1(h, \|x - \hat{b}\|; 0) = \frac{\sqrt{h^2 + \eta^2} - h}{2\eta^2} - \frac{h}{2\eta^2} + \frac{h^2}{2\eta^3} \operatorname{Arcsinh} \left(\frac{\eta}{h} \right) \quad (\text{E.3})$$

E.1.2 Formules finales pour \mathcal{M}_1

En utilisant les notations introduites par (C.4), on obtient les expressions suivantes :

$$V_3^2(\hat{b}, \alpha, h) = \left[-\frac{h^3}{3d^3} T_8 + \frac{sh^2}{3d^2} T_4 - \frac{sh^2}{2d^2 \sqrt{d^2 + s^2}} T_1 + \frac{3h^2 + d^2}{6d^2} T_2 \right]_{s^-}^{s^+} \quad (\text{E.4})$$

$$V_3^1(\hat{b}, \alpha, h) = \left[-\frac{3d^2 + h^2}{6d^3} T_8 + \frac{sh^2}{d^2} T_4 + \frac{1}{3} T_2 \right]_{s^-}^{s^+} \quad (\text{E.5})$$

$$V_2^1(\hat{b}, \alpha, h) = \left[-\frac{h}{d}T_8 + \frac{sh^2}{2d^2\sqrt{d^2+s^2}}T_1 - \frac{h^2-d^2}{2d^2}T_2 \right]_{s^-}^{s^+} \quad (\text{E.6})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_3^2(\hat{b}, \alpha, h) &= \int_{\alpha} (x - \hat{b}) \mathfrak{F}_3^2(h, \|x - \hat{b}\|; 0) ds_x \\ &= \int_{\alpha} (x - p(\hat{b})) \mathfrak{F}_3^2(h, \|x - \hat{b}\|; 0) ds_x + (p(\hat{b}) - \hat{b}) V_3^2(\hat{b}, \alpha, h), \end{aligned}$$

or,

$$\int_{\alpha} (x - p(\hat{b})) \mathfrak{F}_3^2(h, \|x - \hat{b}\|; 0) ds_x = \left[\frac{h^2}{2\sqrt{d^2+s^2}}T_1 - \frac{h^2}{3}T_4 + \frac{\sqrt{h^2+d^2+s^2}}{6} \right]_{s^-}^{s^+} \quad (\text{E.7})$$

E.2. Termes pour le calcul de \mathcal{M}_2

Les formules finales pour la réduction de \mathcal{M}_2 s'obtiennent de la même manière que dans la section C.1; dans cette dernière section, seule des cas du type ${}^cR_a^{a-1}$ apparaissaient (et la notation R_a^c était utilisée). Pour \mathcal{M}_2 , les formules finales sont de la forme ${}^cR_a^b$, avec $b = a - 1$ ou $a - 2$ et $c = a - 3$ ou $a - 4$.

$${}^rR_p^q(a, \hat{\beta}, h; 2) = \int_{\hat{\beta}} {}^r\Phi_p^q(h, \|a - \hat{y}\|; 2) ds_{\hat{y}}. \quad (\text{E.8})$$

avec

$${}^c\Phi_a^b(h, \eta; 2) = \int_{w=h}^{+\infty} \int_{v=w}^{+\infty} \int_{u=v}^{+\infty} \frac{h^{c-2}w^{b-2}v^{a-2}}{w^{c-1}v^{b-1}u^{a-1}(u^2 + \eta^2)^{3/2}} dudvdw \quad (\text{E.9})$$

E.2.1 Intégrands finaux

$${}^2\Phi_4^3(h, \eta; 2) = -\frac{3h^2 - 2\eta^2}{4\eta^5} \text{Arcsinh}\left(\frac{\eta}{h}\right) - \frac{5(\sqrt{h^2 + \eta^2} - h)}{4\eta^4} + \frac{3h}{4\eta^4} \quad (\text{E.10})$$

$${}^1\Phi_4^3(h, \eta; 2) = -\frac{h^2}{2\eta^5} \text{Arcsinh}\left(\frac{\eta}{h}\right) - \frac{\sqrt{h^2 + \eta^2} - h}{2\eta^4} + \frac{3h^2 + \eta^2}{6h\eta^4} \quad (\text{E.11})$$

$${}^1\Phi_4^2(h, \eta; 2) = \frac{h^2 - 6\eta^2}{4\eta^5} + \frac{7(\sqrt{h^2 + \eta^2} - h)}{4\eta^4} - \frac{3h^2 - 8\eta^2}{12h\eta^4} \quad (\text{E.12})$$

E.2.2 Formules finales

En utilisant les notations introduites par (C.4), on obtient les expressions suivantes :

$${}^2\mathcal{R}_4^3(\hat{b}, \alpha, h; 2) = \left[\frac{h}{d^3}T_3 + \frac{h^2 - d^2}{2d^4}T_2 + \frac{h}{d^3}T_8 - \frac{3s}{4d^2}T_4 \right. \\ \left. + \frac{hs}{4d^2(d^2 + s^2)} + \frac{s}{2d^2\sqrt{d^2 + s^2}} \left(1 - \frac{h^2(3d^2 + 2s^2)}{2d^2(d^2 + s^2)} \right) \right] \quad (\text{E.13})$$

$${}^1\mathcal{R}_4^3(\hat{b}, \alpha, h; 2) = \left[\frac{h^2}{3d^4}T_2 - \frac{sh(3d^3 + 2s^2)}{6d^4(d^2 + s^2)^{3/2}}T_1 + \frac{3h^2 + d^2}{6d^3h}T_8 \right. \\ \left. - \frac{s}{3d^2}T_4 + \frac{hs}{6d^2(d^2 + s^2)} \right]$$

$${}^1\mathcal{R}_4^2(\hat{b}, \alpha, h; 2) = \left[-\frac{h^2 - 9d^2}{6d^4}T_2 + \frac{s}{d^2}T_4 - \frac{s\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}}{12d^2(d^2 + s^2)} \right. \\ \left. - \frac{3h^2 - d^2}{3d^3h}T_8 - \frac{s}{2d^2\sqrt{d^2 + s^2}} \left(3 - \frac{h^2(3d^2 + 2s^2)}{6d^2(d^2 + s^2)} \right) T_1 \right]$$

La dernière intégrale à calculer est :

$${}^2\mathcal{R}_4^3(I, \hat{b}, \alpha, h, ; 2) = \int_{\alpha} (x - I)^2 \Phi_4^3(h, \|x - \hat{b}\|; 2).$$

En utilisant la décomposition $x - I = (x - p(\hat{b})) + (p(\hat{b}) - I)$, on obtient

$${}^2\mathcal{R}_4^3(I, \hat{b}, \alpha, h, ; 2) = {}^2\mathcal{R}_4^3(p(\hat{b}), \hat{b}, \alpha, h, ; 2) + (p(\hat{b}) - I) {}^2\mathcal{R}_4^3(\hat{b}, \alpha, h, ; 2). \quad (\text{E.14})$$

Seule la première intégrale doit être calculée puisque ${}^2\mathcal{R}_4^3$ est donnée en (E.13). En prenant $p(\hat{b})$ comme origine sur le support de α , on a

$${}^2\mathcal{R}_4^3(p(\hat{b}), \hat{b}, \alpha, h, ; 2) = \vec{\alpha} \int_{s^-}^{s^+} s^2 \Phi_4^3(h, \sqrt{d^2 + s^2}; 2) ds \quad (\text{E.15}) \\ = \left[\frac{1}{2\sqrt{d^2 + s^2}} \left(\frac{h^2}{2(d^2 + s^2)} - 1 \right) T_1 + T_4 - \frac{\sqrt{h^2 + d^2 + s^2}}{4(d^2 + s^2)} \right]_{s=s^-}^{s^+}.$$

Bibliographie

- [AS72] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs and mathematical tables*/edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. Dover Publications, 1972.
- [AW82] D.N. Arnold and W.L. Wendland. Collocation versus galerkin procedures for boundary integral methods. *Boundary element methods in engineering*, pages 18–33, 1982.
- [AW83] D.N. Arnold and W.L. Wendland. On the asymptotic convergence of collocation methods. *Mathematics of Computation*, 41(164) :349–381, 1983.
- [Beb00] M. Bebendorf. Approximation of boundary element matrices. *Numerische Mathematik*, 86(4) :565–589, 2000.
- [BKS05] S. Börm, N. Krzebek, and S.A. Sauter. May the singular integrals in BEM be replaced by zero? *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(2) :383–393, 2005.
- [CH03] R. Cools and A. Haegemans. Algorithm 824 : Cubpack : A package for automatic cubature ; framework description. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 29(3) :287–296, 2003.
- [CK83] David L Colton and Rainer Kress. *Integral equation methods in scattering theory*, volume 57. Wiley New York, 1983.
- [CK98] D. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93. Springer, 1998.
- [Cos88] Martin Costabel. Boundary integral operators on lipschitz domains : Elementary results. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 19(3) :613–626, 1988.
- [DPT89] FA De Paula and JCF Telles. A comparison between point collocation and galerkin for stiffness matrices obtained by boundary elements. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 6(3) :123–128, 1989.
- [Eva93] G. Evans. *Practical numerical integration*. Wiley Chichester, 1993.
- [FGG04] M. Fischer, U. Gauger, and L. Gaul. A multipole galerkin boundary element method for acoustics. *Engineering analysis with boundary elements*, 28(2) :155–162, 2004.
- [Giv92] D. Givoli. *Numerical methods for problems in infinite domains*. Elsevier Amsterdam, 1992.
- [GPRS06] E. Gladilin, V. Pekar, K. Rohr, and HS Stiehl. A comparison between bem and fem for elastic registration of medical images. *Image and Vision Computing*, 24(4) :375–379, 2006.

- [GR87] L. Greengard and V. Rokhlin. A fast algorithm for particle simulations. *Journal of computational physics*, 73(2) :325–348, 1987.
- [GSS99] Levent Gürel, Kubilay Sertel, and Ibrahim KurŞat Şendur. On the choice of basis functions to model surface electric current densities in computational electromagnetics. *Radio Science*, 34(6) :1373–1387, 1999.
- [Gui91] M. Guiggiani. The evaluation of cauchy principal value integrals in the boundary element method—a review. *Mathematical and Computer Modelling*, 15(3) :175–184, 1991.
- [HJ63] Alexis Hocquenghem and Paul Jaffard. *Mathématiques : Algèbre linéaire, Représentation des fonctions. Analyse vectorielle. Equations fonctionnelles*, volume 2. Masson, 1963.
- [HLS97] W. Hackbusch, C. Lage, and S. Sauter. On the efficient realization of sparse matrix techniques for integral equations with focus on panel clustering, cubature and software design aspects. *Boundary element topics*, pages 51–76, 1997.
- [HN89] W. Hackbusch and Z.P. Nowak. On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering. *Numerische Mathematik*, 54(4) :463–491, 1989.
- [HW08] G.C. Hsiao and W.L. Wendland. *Boundary integral equations*, volume 164 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 2008.
- [Jin10] J.M. Jin. *Theory and computation of electromagnetic fields*. Wiley Online Library, 2010.
- [Kre99] Rainer Kress. *Linear integral equations*, volume 82. Springer, 1999.
- [KSW92] R. Kieser, C. Schwab, and W.L. Wendland. Numerical evaluation of singular and finite-part integrals on curved surfaces using symbolic manipulation. *Computing*, 49(3) :279–301, 1992.
- [Kyt96] P. Kythe. *Fundamental Solutions of Partial Differential Equations and Applications*. Birkhäuser Boston, 1996.
- [Las99] J.B. Lasserre. Integration and homogeneous functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 127(3) :813–818, 1999.
- [LC94] J. N. Lyness and Ronald Cools. A survey of numerical cubature over triangles. In *Mathematics of Computation 1943–1993 : a half-century of computational mathematics (Vancouver, BC, 1993)*, volume 48 of *Proc. Sympos. Appl. Math.*, pages 127–150. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [Len06] M. Lenoir. Influence coefficients for variational integral equations. *Comptes Rendus Mathématique*, 343(8) :561 – 564, 2006.
- [Len08] M. Lenoir. Equations intégrales et problèmes de diffraction, 2008. Polycopié de cours.
- [Liu09] Y. Liu. *Fast multipole boundary element method*. Cambridge university press, 2009.
- [LPV03] I.K. Lifanov, L.N. Poltavskii, and M.G.M. Vainikko. *Hypersingular integral equations and their applications*, volume 4. CRC, 2003.
- [LS12] M. Lenoir and N. Salles. Evaluation of 3-d singular and nearly singular integrals in Galerkin BEM for thin layers. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34(6) :A3057–A3078, 2012.

- [McL00] William CH McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge university press, 2000.
- [Néd82] J.C. Nédélec. Integral equations with non integrable kernels. *Integral equations and operator theory*, 5(1) :562–572, 1982.
- [Néd01] J.C. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations : Integral representations for harmonic problems*, volume 144. Springer, 2001.
- [NF10] S. Nintcheu Fata. Semi-analytic treatment of nearly-singular galerkin surface integrals. *Applied Numerical Mathematics*, 60(10) :974–993, 2010.
- [OW90] N. Ortner and P. Wagner. Some new fundamental solutions. *Mathematical methods in the applied sciences*, 12(5) :439–461, 1990.
- [OW97] N. Ortner and P. Wagner. A survey on explicit representation formulae for fundamental solutions of linear partial differential operators. *Acta Applicandae Mathematicae*, 47(1) :101–124, 1997.
- [RC93] D. Rosen and D.E. Cormack. Singular and near singular integrals in the bem : A global approach. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 53(2) :340–357, 1993.
- [RC95] D. Rosen and D.E. Cormack. The continuation approach : a general framework for the analysis and evaluation of singular and near-singular integrals. *SIAM J. Appl. Math.*, 55 :723–762, June 1995.
- [RWG82] S. Rao, D. Wilton, and A. Glisson. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 30(3) :409–418, 1982.
- [Sel97] A Sellier. Application du concept d’intégration en partie finie au sens d’hadamard à la résolution asymptotique d’équations intégrales intervenant en mécanique des fluides, 1997. Mémoire d’habilitation à diriger des Recherches.
- [SS10] S.A. Sauter and C. Schwab. *Boundary element methods*. Springer Series in Computational Mathematics 39. Berlin : Springer. xvii, 561 p., 2010.
- [Str71] A.H. Stroud. *Approximate calculation of multiple integrals*. Prentice Hall, 1971.
- [SW92] C. Schwab and W.L. Wendland. Kernel properties and representations of boundary integral operators. *Mathematische Nachrichten*, 156(1) :187–218, 1992.
- [TA07] Terrasse, I. and Abboud, T. Modélisation des phénomènes de propagation d’ondes, 2007. Polycopié de cours.
- [Trî09] R.T. Trîmbițaș. Adaptive cubatures on triangle. *Results in Mathematics*, 53(3) :453–462, 2009.
- [VC88] S. Vijayakumar and D.E. Cormack. An invariant imbedding method for singular integral evaluation on finite domains. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 48(6) :1335–1349, 1988.
- [Wag04] P. Wagner. On the explicit calculation of fundamental solutions. *Journal of mathematical analysis and applications*, 297(2) :404–418, 2004.
- [YKD10] K.H. Yu, A.H. Kadarman, and H. Djojodihardjo. Development and implementation of some bem variants—a critical review. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34(10) :884–899, 2010.