



**HAL**  
open science

# Méthodes numériques pour la spatialisation sonore, de la simulation à la synthèse binaurale

Matthieu Aussal

► **To cite this version:**

Matthieu Aussal. Méthodes numériques pour la spatialisation sonore, de la simulation à la synthèse binaurale. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2014. Français. NNT: . tel-01095801

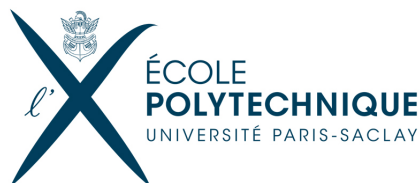
**HAL Id: tel-01095801**

**<https://pastel.hal.science/tel-01095801v1>**

Submitted on 16 Dec 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse pour l'obtention du titre de  
Docteur de l'École Polytechnique  
Spécialité : *Mathématiques appliquées*  
par Matthieu Aussal

# Méthodes numériques pour la spatialisation sonore, de la simulation à la synthèse binaurale.

Soutenue le 02 octobre 2014

## Rapporteurs et membres du jury

<i>Directeur de thèse</i>	:	François Alouges	(École Polytechnique)
<i>Rapporteurs</i>	:	Leslie Greengard	(New York University)
		Jean-Marc Jot	(DTS inc.)
		Séraphin Mefire	(Université de Lorraine)
<i>Examineurs</i>	:	Toufic Abboud	(École Polytechnique)
		Joël Bensoam	(IRCAM)
		Marc Bonnet	(ENSTA)
<i>Directeurs Industriels</i>	:	Vincent Mouret	(Digital Media Solutions)
		Hervé Roux	(Digital Media Solutions)





# Remerciements

Mes premiers remerciements vont tout naturellement à Hervé Roux, initiateur de ces recherches à travers la société Digital Media Solutions et Vincent Mouret, qui a repris le flambeau avec la même ferveur. Merci de m'avoir fait confiance, et ce dès le début, en me laissant toute la liberté d'agir sans autre contrainte que celle d'imaginer l'avenir. En m'impliquant doucement mais sûrement dans les rouages de la société, vous m'avez transmis le goût de l'entrepreneuriat.

Je remercie mes rapporteurs, MM. Leslie Greengard, Jean-Marc Jot et Séraphin Mefire d'avoir accepté de consacrer une partie de leurs vacances à relire mon manuscrit. J'ai été très honoré qu'ils acceptent cette charge et particulièrement touché par les compliments de leurs rapports respectifs.

Je tiens aussi à remercier MM. Toufic Abboud, Joël Bensoam et Marc Bonnet d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Merci à Toufic de nous avoir proposé son aide lorsque nous en avons besoin. Merci à Joël de m'avoir donné le goût des équations intégrales pour l'acoustique. Merci à Marc pour les nombreux échanges passés et à venir.

Par ailleurs, je remercie les doctorants et personnels du Centre de Mathématiques Appliquées de l'École Polytechnique qui se sont prêtés de nombreuses fois à des expériences sonores diverses et variées, et toujours avec le sourire. Un grand merci aussi à l'École Polytechnique, et plus spécifiquement au CMAP et Antonin Chambolle, pour m'avoir accueilli pendant ce doctorat, et pour m'accueillir encore pendant quelques temps.

Une pensée toute particulière accompagne l'équipe Audio 3D de DMS, qui a réussi à supporter mon encadrement sans (trop) broncher!;-) Encore Bravo à Mathieu Coïc pour la quantité/qualité colossale de travail abattu et merci pour cette ambiance si chaleureuse. Merci à Alexandre Dazzoni pour ses conseils et sa grande disponibilité. Je souhaiterais aussi féliciter et remercier les nombreux stagiaires que j'ai eu le plaisir d'encadrer : Ivan Alouges, Louis Anglionin, Martin Averseng, Pierre Bézard, Timothée Chevalier, Marie-Julie Dhaou, Louis Faucon (et merci à l'ADO!), Valentin Labourette, Hanna Ma-



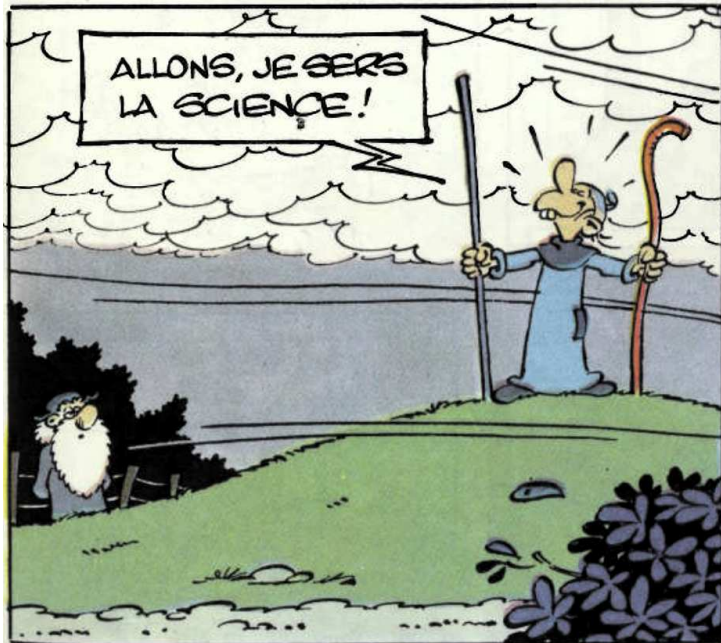
tahri, Lasse Munk, François Salmon, Adel Chelghoum et Augustin Deprez. J'en profite pour remercier tout le personnel de DMS et tout particulièrement Nathalie, Alix, Mika, Walid, Ludo, Pascal C., Eric, Matthieu D., Patrick-Gilles, Guillaume E., Lucas et Alberto.

En vrac, encore merci à Sylvie Tonda-Goldstein pour son aide précieuse en démêlage de sac de nœuds, à Hervé Le Meur pour ses nombreux coups de pouce, à Timothée Chevalier pour ses maillages de tête à trous, à Sylvain Faure et Pascal Frey pour leurs maillages de tête sans trou, à Jean-Christophe Messonnier pour les nombreuses conversations, à Hervé Déjardin pour ses riches conseils, aux membres du consortium BiLi, à Sophie-Anaïs pour son expertise, à Isabelle et Jean pour la transmission de savoirs, à Manou et So pour leurs coups de main, à Grany, à The Mathworks d'avoir inventé *Matlab*, au bâtiment 334, aux d'Yvette d'en face pour leurs superbes voix et à Vincent, l'ami éternel.

Enfin, il faudrait bien plus qu'un merci à ma famille, ma belle-famille et mes amis pour leur soutien sans faille.

Et puisqu'il est coutume de garder le meilleur pour la fin, je tiens à adresser mes plus sincères et chaleureux remerciements à François Alouges. Au-delà d'un encadrement scientifique d'une rare qualité, tu as été d'une extrême bienveillance pendant ces trois années qui, grâce à toi, furent d'une richesse inouïe. Je te dois cette thèse, alors vraiment, merci.

à Caroline  
et à nos enfants



Crédits : Bob de Groot et Turk, *Léonard est un génie*, ed. Le Lombard, 1977.



# Résumé

Les recherches effectuées lors de ce doctorat ont été initiées par un besoin industriel identifié par la société Digital Media Solutions, à savoir la réalisation d'un outil de spatialisation sonore au casque destiné aux non-voyants. Malgré les nombreux dispositifs déjà existants, les techniques de synthèse binaurale butent, depuis leur apparition, sur un obstacle majeur, qui empêche la réalisation de produits de haute qualité. En effet, pour rendre l'illusion d'un espace sonore perceptible, les déformations temporelles et spectrales issues de la propagation d'une onde sonore jusqu'aux tympans doivent être restituées le plus fidèlement possible. En plus des difficultés classiques rencontrées en traitement du signal audio, ceci entraîne, de facto, la nécessité d'individualiser les fonctions de transfert HRTF, traduisant pour chacun l'empreinte spatiale d'une source sonore. Pour réaliser cette personnalisation, une première approche consiste à mesurer en laboratoire les HRTF de chaque individu. Bien qu'offrant des résultats convaincants, cette technique n'est pas encore applicable au grand public, car le processus est long, pénible et relativement coûteux. C'est pourquoi la modélisation mathématique a été envisagée. Sous réserve d'un maillage représentatif de la morphologie de l'auditeur, la résolution numérique des équations de propagation des ondes pourrait avantageusement remplacer la mesure. Aujourd'hui, des outils grand public (e.g. Kinect de Microsoft) permettent la réalisation de maillages satisfaisants, qui peuvent être perfectionnés, voire couplés, à des formes élémentaires analytiques (Sphères, Ellipses, Cônes, etc.). La thèse se concentre alors sur deux axes principaux et complémentaires.

D'une part, nous avons développé (conjointement avec F. Alouges) un nouveau moteur de calcul intégral par éléments finis de frontières (*MyBEM*), réalisé sous *Matlab*. Ce dernier est appliqué à la résolution des équations de l'acoustique. Pour pouvoir calculer les fonctions de transfert HRTF sur l'ensemble des fréquences audibles, une nouvelle méthode rapide de convolution a été conçue, implémentée, puis validée analytiquement. À partir d'une quadrature monodimensionnelle performante d'un noyau de Green quelconque (Laplace, Helmholtz, Stokes, Maxwell, etc), une séparation des variables permet

le calcul rapide d'un produit de convolution dans l'espace. Dénommée "Décomposition Creuse en Sinus Cardinal" (SCSD), cette méthode est confrontée à la "Méthode Multipolaire Rapide" (FMM), référence reconnue en la matière.

D'autre part, une fois les HRTF mesurées ou calculées sur une grille sphérique discrète, une résolution de quelques degrés angulaires est indispensable pour pouvoir effectuer un rendu spatial de grande qualité. Il faut donc procéder à des interpolations de filtres, qui nuisent à la qualité du rendu audio et à l'impression d'externalisation. Cependant, une nouvelle compréhension des HRTF initiée avant la thèse a permis un sous-échantillonnage spatial des bases de données, sans produire d'artefacts audibles, mais aussi une personnalisation par filtrage inverse. Mise en œuvre au sein d'un moteur de rendu audio spatialisé sous *Matlab (PifPaf3D)*, cette technique appelée "Décomposition par Modèle Morphologique" a montré des qualités reconnues par validations subjectives. Par ailleurs, de nombreux outils connexes ont été intégrés à ce moteur, pour améliorer encore le rendu spatial, comme des acoustiques de salles ou la compensation du casque audio.

Ces deux étapes, abouties et maîtrisées, doivent désormais être couplées en vue de réaliser une chaîne complète de synthèse binaurale numérique.

# Abstract

Research conducted during this PhD were initiated by an industrial need identified by Digital Media Solutions, namely the creation of a tool for spatial sound rendering through headphones for blind people. Despite the many existing devices, techniques for binaural synthesis face, since their appearance, a major obstacle that prevents to realize high quality products. Indeed, to make the illusion of a perceptible sound space, temporal and spectral distortions resulting from the propagation of a sound wave to the ears must be reproduced as accurately as possible. In addition to traditional difficulties in audio signal processing, this enlightens the need to individualize the Head Related Transfer Functions (HRTF), that encode the spatial impression of a sound source. To achieve this individualization, a first approach consists in measuring in the laboratory the HRTF of each individual. Although offering convincing results, this technique is not yet applicable to the general public, because the process is long, painful, and relatively expensive. This is why mathematical modeling has been considered. Subject to a mesh representing the morphology of the listener, the numerical solution of the wave propagation equations could advantageously replace the measure. Today, large public tools (e.g. Microsoft Kinect) allow the construction of satisfactory meshes, which can be refined, when coupled with analytical basic shapes (spheres, Ellipse, cones, etc.). The thesis then focuses on two main and complementary axes.

On the one hand, we have developed (jointly with F. Alouges) a new boundary element method software (*MyBEM*). Realized in *Matlab*, we apply it to solve the equations of acoustics. For the calculation of the HRTF across all audible frequencies, a new fast convolution method has been designed, implemented and validated analytically. From the efficient one dimensional quadrature of any Green kernel (Laplace, Helmholtz, Stokes, Maxwell, etc.), a separation of variables allows a fast convolution in space calculation. Called "Sparse Cardinal Sine Decomposition" (SCSD), this method is confronted with the Fast Multipole Method (FMM) renowned as the state-of-the-art in the domain.

Moreover, once the HRTF are measured or calculated on a discrete spherical grid, a resolution of a few angular degrees is essential to perform a high quality spatial rendering. It is therefore necessary to interpolate the filters, and that affects the quality of the audio rendering. However, a new understanding initiated before the PhD allows an undersampling of the databases, without producing audible artifacts, and providing with a possibility of individualization by inverse filtering. Implemented in a spatial audio rendering engine (*PifPaf3D*), this technique called "Morphological Model Decomposition" has been validated by subjective tests. Moreover, many related tools have been integrated into the engine, to further improve the spatial rendering, such as acoustic rooms or headphones compensation.

These two stages, accomplished and mastered must now be coupled in order to achieve a complete chain of digital binaural synthesis.

# Table des matières

<b>Résumé/Abstract</b>	<b>1</b>
<b>1 Synthèse binaurale et HRTF</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction à l'écoute spatialisée . . . . .	7
1.1.1 Espace sonore . . . . .	7
1.1.2 Théorie du Duplex . . . . .	9
1.1.3 Head-Related Transfer Function . . . . .	11
1.2 Exemples de systèmes de spatialisation sonore . . . . .	14
1.2.1 Panning d'Amplitude, de la stéréo au VBAP . . . . .	14
1.2.2 High Order Ambisonics, captation et restitution . . . . .	17
1.2.3 Technologies binaurales, enregistrement et synthèse . . . . .	21
1.3 Head-Related Transfer Function, what else? . . . . .	24
1.3.1 Modèle de HRTF, la sphère rigide . . . . .	25
1.3.2 Mesures de HRTF, Acoustics Research Institute . . . . .	31
1.3.3 Interpolation linéaire . . . . .	34
1.3.4 Interpolation par harmoniques sphériques . . . . .	43
1.4 Décomposition par Modèle Morphologique . . . . .	48
1.4.1 Principe et résultats . . . . .	48
1.4.2 Interpolation optimisée . . . . .	54
1.4.3 Variations de position . . . . .	57
1.4.4 Déraffinement spatial d'une base de données . . . . .	59
1.4.5 Vers une méthode d'individualisation . . . . .	62
<b>2 Moteur binaural <i>PifPaf3D</i></b>	<b>67</b>
2.1 Introduction et configuration . . . . .	67
2.2 Transport et contrôle . . . . .	70
2.3 Traitement Binaural . . . . .	72
2.4 Acoustique de salle et Ambisonics . . . . .	77
2.5 Compensation du casque et égalisation . . . . .	81
2.6 SpherAudio Headphones . . . . .	83



<b>3</b>	<b>Formulations intégrales rapides pour l'acoustique</b>	<b>89</b>
3.1	Représentation et équations intégrales . . . . .	91
3.1.1	Diffraction dans l'espace libre . . . . .	91
3.1.2	Diffraction en présence d'un obstacle . . . . .	93
3.1.3	Équations intégrales . . . . .	96
3.1.4	Formulations discrètes . . . . .	99
3.2	Introduction aux méthodes multipolaires rapides . . . . .	101
3.3	Nouvelle méthode rapide - SCSD . . . . .	104
3.3.1	Vers un problème mono-dimensionnel . . . . .	105
3.3.2	Résolution du problème . . . . .	106
3.3.3	Formalisme final pour l'équation de Helmholtz . . . . .	116
3.3.4	Extension vers Laplace (et plus si affinités...) . . . . .	120
3.4	Comparaisons et performances . . . . .	123
3.4.1	Méthodologie . . . . .	123
3.4.2	Résultats . . . . .	124
<b>4</b>	<b>Moteur intégral <i>MyBEM</i></b>	<b>131</b>
4.1	Présentation . . . . .	131
4.2	Validations . . . . .	135
4.3	Applications au calcul de HRTF . . . . .	142
	<b>Conclusion</b>	<b>153</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>155</b>
	<b>Articles</b>	<b>163</b>

# Chapitre 1

## Synthèse binaurale et HRTF

Ce premier chapitre a pour but de poser le cadre théorique des recherches en spatialisation sonore effectuées avant, puis pendant la thèse, notamment en synthèse binaurale. En effet, il est important de préciser que les travaux de recherche exposés ici s’inscrivent dans la continuité de travaux effectués au préalable et par le même auteur au sein de la société Digital Media Solutions. Ces travaux ont donné naissance à un spatialisateur innovant, appelé *PifPaf3D*, écrit exclusivement en langage *Matlab*, dont le développement s’est poursuivi au cours de ces trois années de thèse. Aussi, certains aspects présentés dans ce chapitre sortent du sujet de thèse initial, mais ont néanmoins motivé des axes de développement non négligeables.

### 1.1 Introduction à l’écoute spatialisée

De par sa grande complexité et ses multiples domaines d’étude (physiologie, neurologie, psycho-acoustique, physique ondulatoire, etc.), seuls les principes généraux de la perception spatiale liée au système auditif humain sont présentés ici, en guise d’introduction ou de rappel. Le lecteur curieux est invité à se documenter sur les ouvrages de références [10], [15] et [68], ou encore les manuscrits de thèse [20] et [70]. Pour une courte introduction, [14] et [17] présentent un excellent résumé, avec une bibliographie détaillée.

#### 1.1.1 Espace sonore

La perception sonore de l’espace, bien que souvent négligée au profit de la perception visuelle, n’en est pas moins fondamentale puisqu’elle est l’unique indicateur environnemental qui ne souffre d’aucune restriction spatiale. À titre comparatif, le système visuel (vision fovéale + périphérique)



FIGURE 1.1 – Vue subjective du célèbre jeu de tir à la première personne Counter Strike.

ne délivre d'informations que sur une faible portion de l'espace, alors que le système auditif est effectif pour toutes les directions, avec une précision angulaire (*Just Noticeable Difference*) de l'ordre de quelques degrés. De plus, le système auditif effectue une analyse permanente et souvent inconsciente de l'environnement, tandis que le système visuel est de plus en plus requis pour effectuer des tâches quotidiennes, nécessitant une attention particulière.

La capture d'écran présentée en figure 1.1 est un exemple issu du monde des jeux vidéo. Cette vision subjective du célèbre jeu de tir à la première personne (FPS) Counter Strike présente un certain nombre d'objets, comme les mains du joueur, des caisses, une terrasse, des murs, etc. Bref, aucun danger n'est visuellement apparent. Si le joueur ne dispose pas d'un système de rendu sonore, il n'aura aucune information relative à son environnement autre que celles fournies par la vision, ce qui est restrictif. Si, au contraire, le joueur dispose d'un rendu stéréo classique, il aura accès à d'autres données non visibles. Cependant, privé d'une perception sonore en rendu spatialisé, le joueur devra balayer visuellement l'ensemble de la scène à la moindre alerte auditive, pour identifier la position de la source sonore (tirs, bruits de pas, explosion, etc.). Ce temps perdu peut lui être dommageable. Aussi, pour que le joueur puisse pleinement et rapidement appréhender tout danger non visible à l'écran, un rendu spatial de la scène sonore serait souhaitable. Les mêmes principes s'appliquent au quotidien, à savoir que le système auditif fournit l'ensemble des informations nécessaires à une perception spatiale de l'environnement, dynamique et analytique.

La spatialisation sonore est une branche de l'Acoustique dont on peut défi-

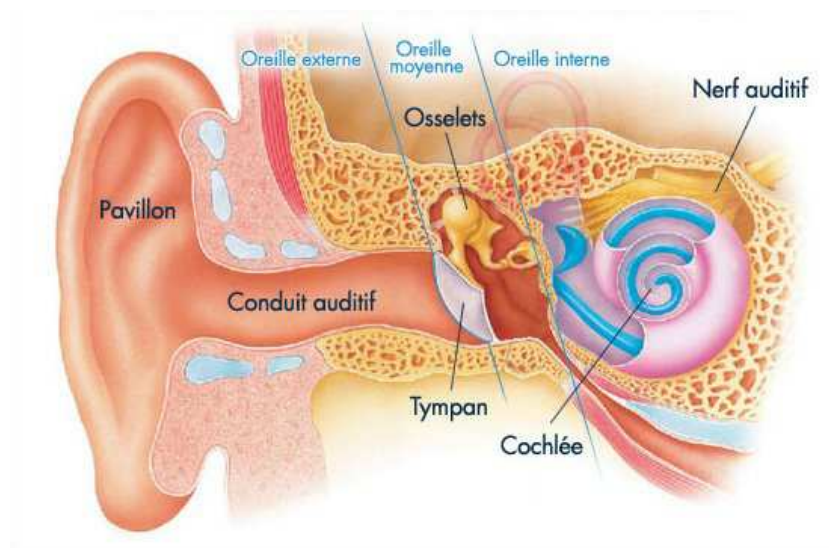


FIGURE 1.2 – Système auditif humain. (source [www.alynsimardaudio.com](http://www.alynsimardaudio.com))

nir l'objectif général comme étant "la (re)création d'un espace sonore subjectif au niveau de l'auditeur" [20]. D'un point de vue physiologique, l'étude de la spatialisation sonore part d'une hypothèse fondatrice, à savoir que l'oreille interne et l'oreille moyenne n'interviennent pas dans la création des indices de localisation tridimensionnels. La figure 1.2 fournit un embryon d'explication par une représentation en coupe du système auditif humain. Lorsqu'une onde sonore (une variation de pression dans l'air) atteint le tympan, celle-ci est ensuite transmise mécaniquement par les osselets vers la cochlée. Cette dernière encode alors le signal sonore en impulsions électriques, acheminées au cerveau par le nerf auditif. Dans ce schéma simpliste, une fois que l'onde sonore a fait vibrer le tympan, ce dernier transmet un signal qui se propage de l'oreille moyenne jusqu'au cerveau, sans aucun ajout possible d'informations spatiales. Aussi, la compression des informations de localisation encodées dans ce signal ne peut être faite qu'avant.

### 1.1.2 Théorie du Duplex

Des indices dits de localisation sont inhérents à l'analyse discriminatoire de l'espace sonore, effectuée par notre système cognitif. Dans ce sens, deux contributions principales ont été mises en évidence par Lord Rayleigh en 1907, formant ainsi la théorie du Duplex [74]. Cette dernière fut ainsi nommée car elle met en lumière l'analyse des indices acoustiques interauraux, c'est-à-dire issus des signaux perçus conjointement par les deux oreilles. Sur le schéma

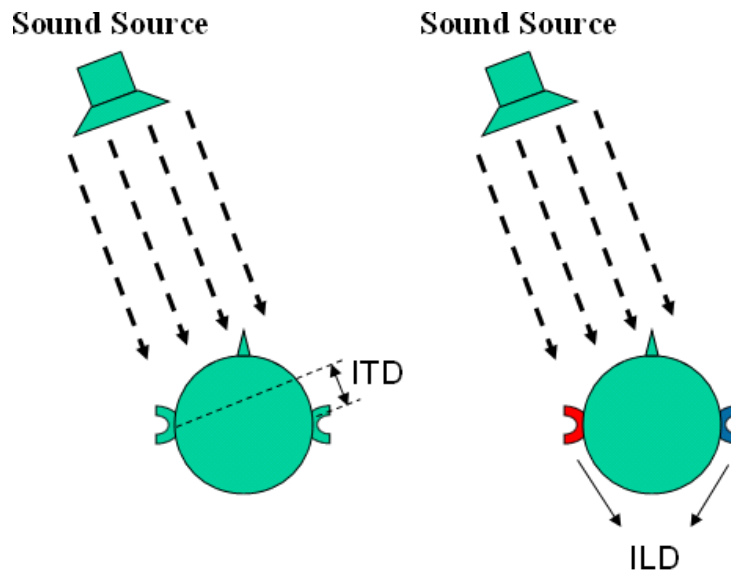


FIGURE 1.3 – Représentation graphique de l’ITD et de l’ILD. (source [www.kfs.oew.ac.at](http://www.kfs.oew.ac.at))

de la figure 1.3, l’onde sonore incidente est supposée provenir de l’infini. De ce fait, les isovalues de pression acoustique sont orthogonales au sens de propagation. Ainsi, de par l’orientation de l’onde dans le plan horizontal, l’oreille gauche percevra l’information plus tôt et plus fort que l’oreille droite. Ces écarts de temps et d’intensité sont caractérisés respectivement par l’ITD et l’ILD :

- *Interaural Time Difference, ITD* : La différence interaurale de temps est la différence de temps d’arrivée d’une onde sonore entre les deux oreilles. Cet indice de localisation joue un rôle fondamental pour la localisation dans le plan horizontal, notamment en basse fréquence ;
- *Interaural Level/Intensity Difference, ILD ou IID* : La différence interaurale de niveau est la différence d’intensité de l’onde sonore entre les deux oreilles. Cet indice de localisation joue de même un rôle fondamental pour la localisation azimuthale, notamment en moyenne et haute fréquence.

En revanche, cette théorie est incomplète pour les sources sonores qui seraient, par exemple, dans le plan médian. En effet, l’ITD et l’ILD sont grossièrement identiques pour une source sonore devant, dessus ou encore derrière un auditeur. Pourtant, l’être humain est capable de discriminer ces directions, avec une précision exemplaire. Le fait est que la théorie du Duplex ne tient pas compte des dissymétries de la tête et du pavillon.

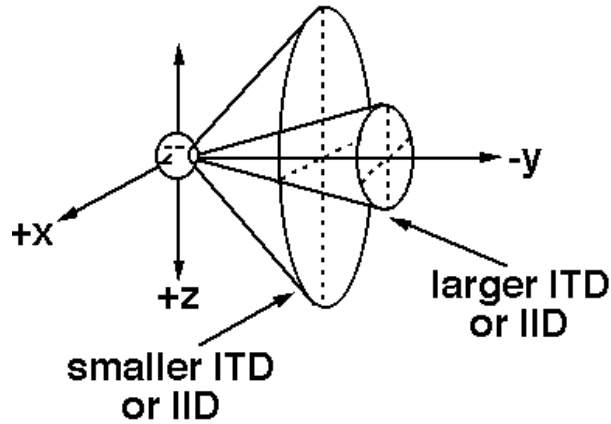


FIGURE 1.4 – Cônes de confusion, représentant les isovaleurs de l'ITD et de l'ILD pour une approximation de tête sphérique sans pavillon. (source [www.humansystems.arc.nasa.gov](http://www.humansystems.arc.nasa.gov))

### 1.1.3 Head-Related Transfer Function

Avec l'approximation de tête sphérique [85], l'ILD et l'ITD de la théorie du Duplex n'apportent pas d'informations discriminatoires dans le plan median, ni dans des cônes communément appelés "cônes de confusion" (fig. 1.4). Il manque donc un indice de localisation pour compléter cette théorie. Ce dernier indice est principalement lié à la morphologie de l'auditeur, notamment la géométrie du pavillon et du conduit auditif de l'oreille externe (fig. 1.2) qui modifie singulièrement l'onde sonore incidente. En effet, des ondes réfléchies peuvent être engendrées selon l'incidence, ainsi que des déformations spectrales liées à des modes de résonance (fig. 1.5). Le timbre du signal émis par la source sonore est alors modifié et ce, en fonction de sa position dans l'espace. Il en résulte des filtres spatio-fréquentiels relativement complexes, encore appelés *Direction-Dependent Filters* (fig. 1.6).

Ces trois indices (ITD, ILD et DDF) sont inclus dans un modèle plus général de filtres fréquentiels communément appelés *Head-Related Transfer Functions* (HRTF). Par Transformée de Fourier, ces filtres s'expriment aussi bien en domaine fréquentiel qu'en domaine temporel, sous forme de Head-Related Impulse Responses (HRIR), et peuvent être définis comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{HRTF} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{C} \\
 (r, \theta, \phi) \times f &\rightarrow HRTF \\
 \mathbf{HRIR} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (r, \theta, \phi) \times t &\rightarrow HRIR
 \end{aligned}$$

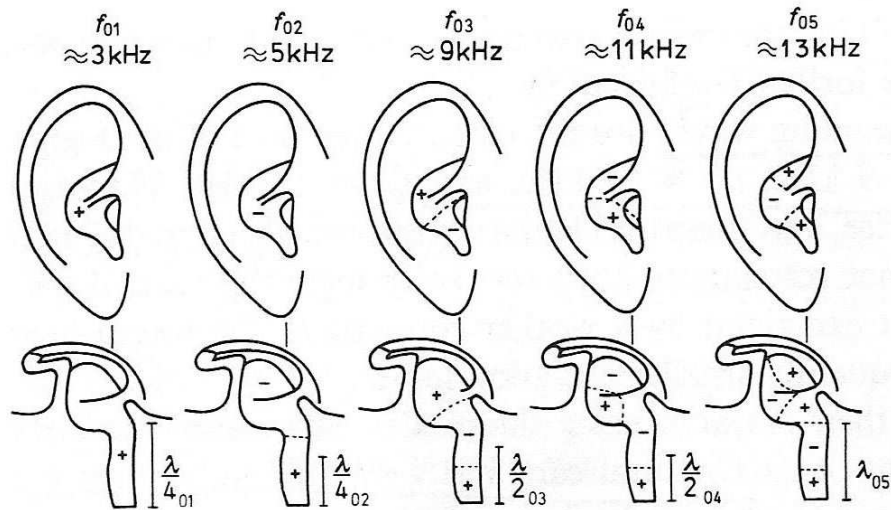


FIGURE 1.5 – Modes de résonance de l'oreille externe. (source [www.dtmlabber.blogspot.fr](http://www.dtmlabber.blogspot.fr), d'après [78])

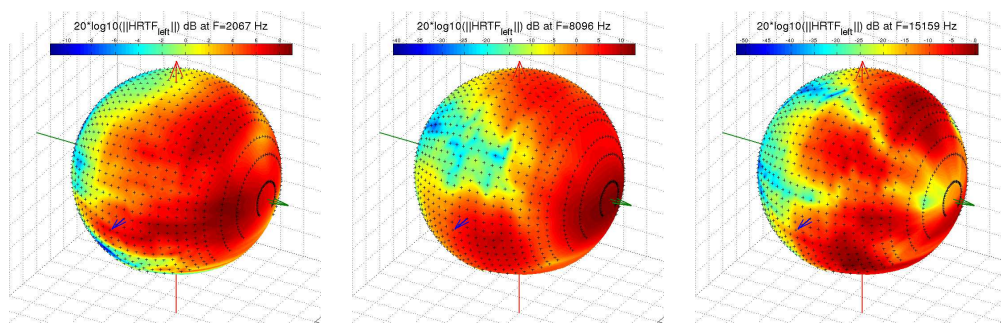


FIGURE 1.6 – Représentation directionnelle des Directions Depending Filters de l'oreille gauche du sujet 003 de la base CIPIC. Visualisation de l'amplitude spectrale (dB) pour des sources sonores situées sur la sphère unité (croix noire), à fréquence fixe, dans le repère de la figure 1.4. De gauche à droite, la fréquence vaut respectivement 2 kHz, 8 kHz et 15 kHz.

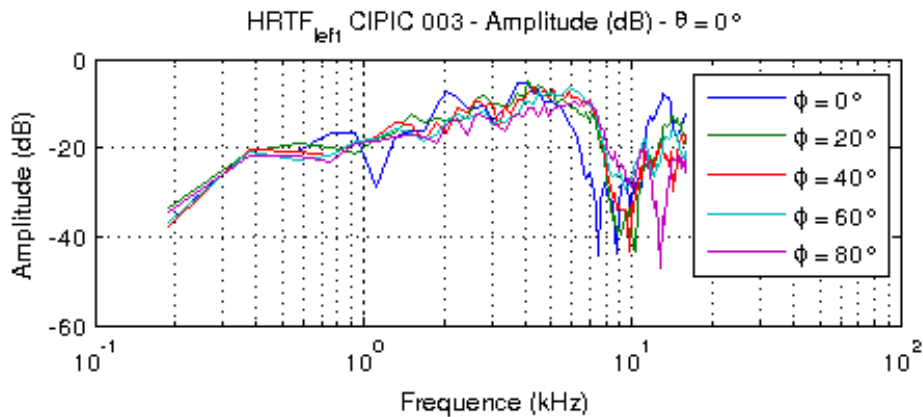


FIGURE 1.7 – Amplitude spectrale (dB) des HRTF de l'oreille gauche du sujet 003 de la base CIPIC, dans le plan médian.

L'amplitude spectrale (dB) pour quelques positions de ces filtres est représentée sur la figure 1.7. L'azimut est fixé à  $0^\circ$ , pour une élévation croissante de  $0^\circ$  à  $80^\circ$  (plan median). Comme le montre cette figure, il existe une forte variabilité entre chacun de ces filtres, induisant une grande complexité dans leur étude. Ces fonctions de transfert HRTF établissent donc une cartographie spatiale minutieuse du système auditif humain et sont, de par leur nature même, propres à chaque individu. Enfin, il est intéressant de souligner que ces filtres peuvent être :

- Mesurés par réponse impulsionnelle sous forme de HRIR (e.g. [3], [62], [6]) ;
- Modélisés de manière analytique (e.g. [85], [57], [25]) ou par simulation numérique (e.g. [50], [51], [39]) ;
- Échangés sous forme de bases de données (e.g. [65], [9]) ;
- Individualisés, par divers et nombreux procédés.

La compréhension et l'exploitation de ces HRTF représente un enjeu majeur pour la recherche en spatialisation sonore, mais aussi pour les industriels soucieux d'innovations technologiques. En effet, la perception d'un espace sonore réaliste devient possible dès lors que les trois indices formant les HRTF sont correctement restitués, ou dans une moindre mesure au moins l'un des trois. Aussi, tout système de restitution sonore en exploite certaines propriétés, directement sur casque audio ou indirectement sur enceintes.



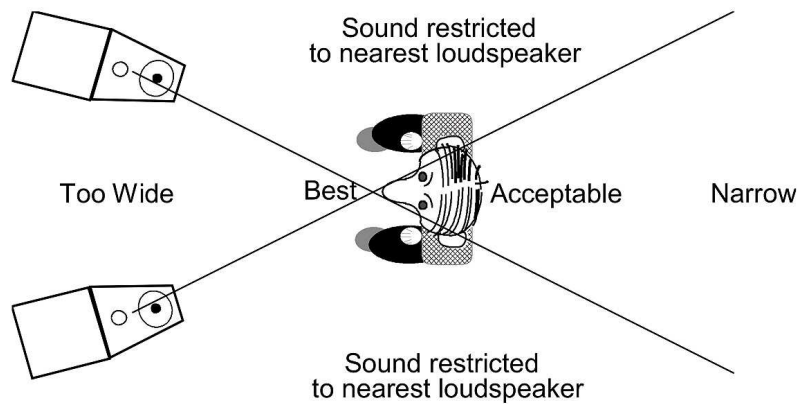


FIGURE 1.8 – Principe de la stéréophonie et notion de "Sweet Spot".

## 1.2 Exemples de systèmes de spatialisation sonore

Il existe de nombreux systèmes de spatialisation sonore, chacun exploitant de savants mélanges au sein des dimensions perceptives et physiques. Dans cette section, trois de ces techniques sont détaillées, à savoir le panning d'amplitude et sa généralisation au *Vector Base Amplitude Panning* (VBAP), l'approche *Ambisonics* et son extension en *High Order Ambisonics* et pour terminer la synthèse binaurale. Ce choix est principalement motivé par le fait qu'elles ont toutes trois été intégrées dans le spatialisateur *PifPaf3D*, moteur de rendu audio 3D *Matlab* détaillé dans le chapitre suivant.

### 1.2.1 Panning d'Amplitude, de la stéréo au VBAP

Le panning d'amplitude est apparu avec les premiers supports utilisant plus d'un canal de diffusion et fait partie des plus anciennes techniques de spatialisation sonore [83]. Le principe théorique est relativement simple, à savoir la création d'une image sonore virtuelle dite "Fantôme", en jouant sur la différence d'intensité de sources sonores réelles ( haut-parleurs). Tout l'art de l'ingénieur du son consiste en l'obtention d'une image sonore robuste et réaliste, répartissant judicieusement l'ensemble des objets virtuels sur des segments reliant les sources réelles. La restitution stéréophonique, encore très largement dominante aujourd'hui, est fondée sur ce principe. En disposant l'auditeur et deux haut-parleurs (gauche et droit) sur les sommets d'un triangle équilatéral, ce système permet une restitution spatialisée sur une dimension d'espace. Il est important de noter qu'une contrainte forte af-

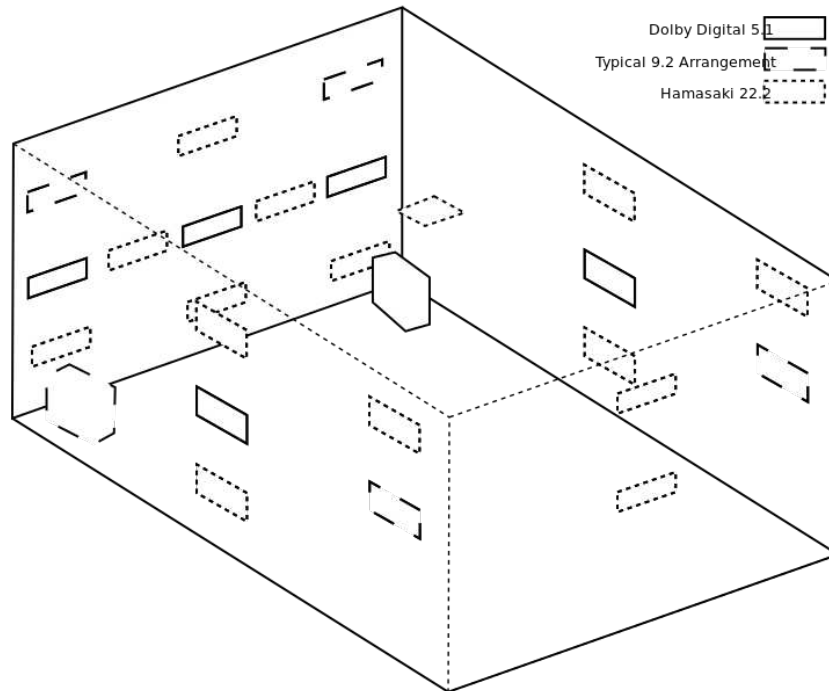


FIGURE 1.9 – Disposition fixée de haut-parleurs en 5.1 (en traits pleins), 9.1 (en tirets) et 22.2 (en pointillés). (source *Wikipedia*)

fecte l'ensemble des systèmes de spatialisation sonore sur enceintes, à savoir le positionnement des sources sonores par rapport à l'auditeur (notion de *Sweet Spot*). Celle-ci est déjà présente sur un système à deux canaux, tel que le montre la figure 1.8.

Dans la lignée de la stéréophonie, plusieurs systèmes de restitution en audio spatialisé sont progressivement apparus, comme la quadraphonie, le 5.1, le 7.1, le 9.1, ou plus récemment le 22.2 de la NHK (fig. 1.9, [42]). Tous utilisent des maillages de haut-parleurs répartis sur des positions préalablement fixées dans l'espace autour de l'auditeur. Ces systèmes permettent d'étendre les principes fondateurs de la stéréophonie sur des maillages plus denses de haut-parleurs, sur un cercle entourant l'auditeur (1D), voire sur une sphère (2D). En appliquant des lois de panning prédéfinies, des sources sonores fantômes peuvent ainsi être créées. Il est intéressant de remarquer qu'aucun de ces systèmes n'est réellement 3D en terme de répartition de haut-parleurs. Ceci est notamment lié à la faible précision de la localisation en distance, qui est préférentiellement rendue dans sa dimension perceptive plutôt que physique [48].

Enfin, de récents travaux ont donné naissance aux techniques de *Vector*

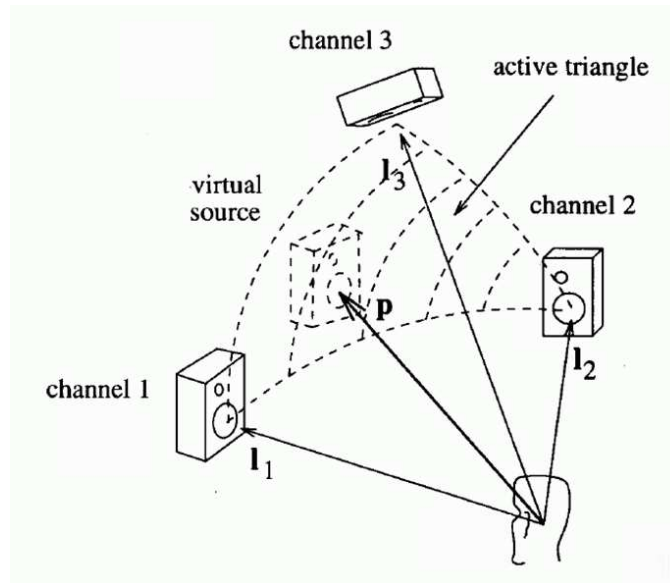


FIGURE 1.10 – Principe du Vector Base Amplitude Panning : la source virtuelle, symbolisée par sa pression acoustique  $p$ , est générée par panning d'intensité de coefficients  $I_j$  appliqués aux trois sources sonores adjacentes  $j$ . (source [www.ausim3d.com/products/Vectsonic](http://www.ausim3d.com/products/Vectsonic))

*Base Amplitude Panning* (VBAP), autorisant une répartition quelconque des haut-parleurs sur une sphère entourant l'auditeur [73]. Cette approche est une extension de la stéréo vers un système à multiples sources sonores réelles, ce qui permet de définir un support quelconque pour les sources fantômes (triangle, quadrangle, etc.). Une loi d'interpolation est alors appliquée aux canaux pour déterminer leurs gains, en utilisant notamment les coordonnées barycentriques de la source virtuelle dans la base formée par les sources réelles (fig. 1.10). Un maillage quelconque de haut-parleurs peut être envisagé, ce qui permet de s'affranchir des contraintes liées aux systèmes fixes précédents. Cette méthode a été implémentée dans le spatialisateur *PifPaf3D*, en marge des travaux de thèse, et testée sur un maillage de 16 haut-parleurs répartis dans une pièce de type bureau. Le script réalisé permet notamment de générer le maillage triangulaire selon la position absolue des haut-parleurs, et de naviguer en temps réel dans ses éléments pour créer les sources fantômes. Les résultats de cette étude feront éventuellement l'objet d'une publication ultérieure.

Face au développement de ces nouveaux systèmes de restitution, toujours plus complexes et précis, la notion d'objet sonore ponctuel devient dès lors incontournable pour que les techniques de spatialisation soient humaine-

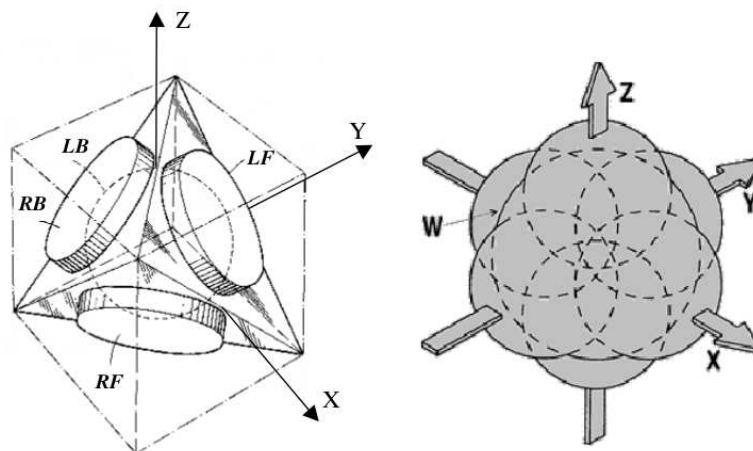


FIGURE 1.11 – (Gauche) Schéma du microphone *Soundfield* tel que breveté [19]. Quatre capsules cardioïdes sont placées sur les faces d’un tétraèdre régulier, dont les signaux (RF,LF,RB,LB) constituent le A-Format, ou format ambisonique brut. (Droite) Les composantes directionnelles du B-Format (W,X,Y,Z) ou format encodé. (source [20]).

ment réalisables. En effet, le mixage stéréo ne nécessite qu’un potentiomètre pour répartir l’intensité sonore de la source virtuelle entre les deux canaux de diffusion. Dans le cas d’un maillage triangulaire dense, il est nécessaire de manipuler des objets sur des surfaces, ce qui complique singulièrement l’interface homme-machine. C’est pourquoi l’ensemble de la chaîne de traitement audio, de la captation à la restitution en passant par le mixage, subit aujourd’hui de grands bouleversements.

### 1.2.2 High Order Ambisonics, captation et restitution

Parmi les nombreuses techniques émergentes de spatialisation sonore, l’approche *Ambisonics* et son extension *High Order Ambisonics* (HOA) fournissent une gamme d’outils complète sur l’ensemble de la chaîne de production (e.g. [19], [20], [21], [33]). Originellement, elles sont issues des techniques de prise de son par couple MS. Le principe général est de capter simultanément et ponctuellement un champ sonore à l’aide d’un micro bidirectionnel et d’un micro omnidirectionnel. Des informations directionnelles de la scène sonore sont alors nativement incluses dans les signaux de sortie des microphones, qui peuvent-être stockés ou échangés comme tels. Pour que l’image sonore soit directement rendue, dans une dimension d’espace, il suffit ensuite de restituer ce champ sur un système stéréophonique, par une sommation

des signaux sur un haut-parleur et une opposition de phase sur l'autre. Cette technique de prise de son fut généralisée aux trois dimensions d'espace par Gerzon et donna naissance au fameux encodage B-Format du microphone *Soundfield* (fig. 1.11). À la restitution, le B-Format est décodé pour s'adapter au système de haut-parleurs, par exemple disposés sur les sommets d'un cube. Ce processus d'encodage-décodage d'une scène sonore spatialisée est une caractéristique propre des méthodes Ambisonics.

Cependant, cette approche souffre d'une faible précision spatiale de par la nature même de la captation, à savoir cardioïde. Aussi, de nombreux travaux, notamment ceux de J. Daniel [20], ont permis de créer un cadre robuste pour étendre *Ambisonics* vers une précision supérieure, appelée *High order Ambisonics* (HOA). Cette extension peut s'introduire de façon théorique en considérant le problème de propagation des ondes dans un espace  $\Omega$  homogène et isotrope, dénué de sources, en régime harmonique. Sous ces hypothèses, l'équation de Helmholtz formalise mathématiquement ce type de problème et s'écrit comme suit :

$$-(\Delta + k^2)u = 0 \quad \text{avec} \quad u \in \Omega. \quad (1.1)$$

Cette équation peut être résolue en introduisant les harmoniques sphériques ( $Y_l^m$ ), qui sont des fonctions propres de l'opérateur Laplace Beltrami sur la sphère  $S^2$ , associées aux valeurs propres  $l(l+1)$  (e.g. [69], [82] et fig. 1.12). Elles forment une base orthonormée pour le produit scalaire  $L^2(S^2)$  et sont définies comme la trace sur la sphère unité  $S^2$  des polynômes homogènes harmoniques de degré  $l$  (i.e. à Laplacien nul sur  $\mathbb{R}^3$ ). Cette base orthonormée ( $Y_l^m$ ) peut être considérée comme un équivalent pour la sphère dans  $\mathbb{R}^3$  de la base ( $e^{im\theta}$ ) pour le cercle dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . D'un point de vue plus formel, les fonctions de Legendre :

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad \text{avec} \quad m \geq 0,$$

définies pour tout  $l$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $-l \leq m \leq l$  et  $-1 < x < 1$ , construisent la famille ( $Y_l^m$ ), définie par :

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\phi)) e^{im\theta}. \quad (1.2)$$

En fixant  $\Omega$  comme l'intérieur ou l'extérieur de la sphère unité  $S^2$ , toute fonction  $u$  solution de l'équation de Helmholtz (1.1) peut se décomposer en harmoniques sphériques comme suit :

$$u(k, r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} \alpha_l^m(k) U_l(kr) Y_l^m(\theta, \phi). \quad (1.3)$$

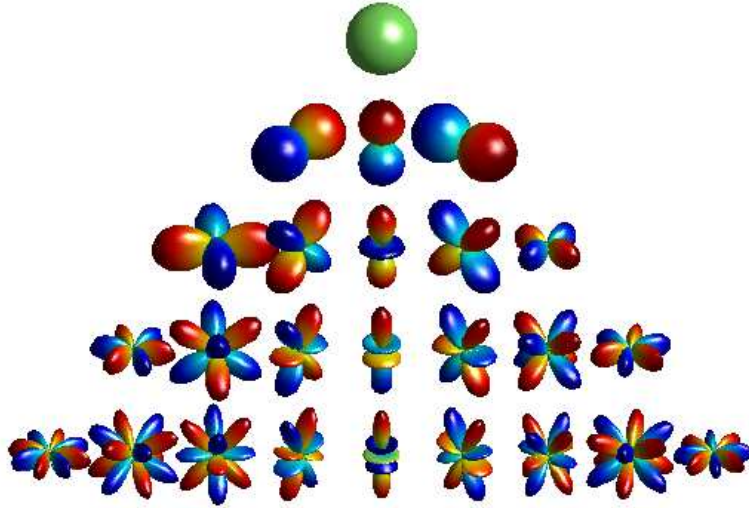


FIGURE 1.12 – Représentation spatiale des cinq premières harmoniques sphérique  $Y_l^m$ , telles que  $r = |Y_l^m(\theta, \phi)|$ .

En pratique, selon les conditions aux limites du problème considéré (Dirichlet, Neumann, Fourier, etc.), la fonction radiale  $U_l(kr)$  est construite par des combinaisons linéaires dans  $\mathbb{C}$  de fonctions de Bessel sphériques, Hankel sphériques et de leurs dérivées.

D'un point de vue strictement mathématique, le formalisme HOA est pleinement contenu dans l'équation (1.3) et la propriété d'orthonormalité des harmoniques sphériques pour le produit  $L^2(S^2)$  [20]. En effet, la captation puis l'encodage HOA consiste en la création des signaux de projection  $\alpha_l^m$  sur les harmoniques sphériques. Ces signaux peuvent être stockés, échangés et utilisés en l'état pour effectuer des opérations simples, comme des zooms ou des rotations spatiales. Par exemple, le B-Format est l'équivalent du signal  $\alpha_l^m$  pour  $l \leq 1$ . Enfin, s'ensuit l'étape de décodage pour la restitution sur un système de haut-parleurs en calculant cette fois les canaux  $u$  correspondants aux signaux  $\alpha_l^m$ . Le protocole suivant, non exhaustif, résume les grandes étapes d'un encodage-décodage HOA dans le cas d'une captation-restitution d'une scène sonore spatialisée.

### Encodage :

1. Suite à la captation d'une scène sonore par une sphère de microphones, le problème aux limites correspondant est formalisé en domaine de Fou-

rier pour expliciter les fonctions  $U_l(kr)$  sous forme de filtres fréquentiels ;

2. En considérant les valeurs du champ  $u$  aux positions des microphones par rapport au centre de la sphère, la série en (1.3) peut alors être tronquée ;
3. En projetant la série (1.3) tronquée sur la base orthonormée des harmoniques sphériques par intégration sur  $S^2$ , un système linéaire est formé ;
4. Puis, ce système est résolu, fréquence par fréquence, pour déterminer les coefficients  $\alpha_l^m(k)$  de la décomposition.

Cette étape d’encodage HOA permet de créer les signaux fréquentiels  $\alpha_l^m(k)$ , ou encore temporels  $\alpha_l^m(t)$  par transformée de Fourier inverse. Ces derniers définissent un format d’échange évolutif et modulable (rotation, zoom, etc.), indépendant de la sphère de microphones utilisée pour la captation. Le B-Format *Ambisonics* est la version à l’ordre  $l = 1$  du format HOA et le couple MS en est la version d’ordre  $l = 1$  avec  $m = 0$  uniquement.

### Décodage :

1. Un nouveau problème aux limites est formalisé pour la diffusion en champ libre par une sphère de haut-parleurs, explicitant notamment un nouveau filtre fréquentiel et une nouvelle matrice de décodage liés aux positions des haut-parleurs dans l’espace centré sur l’auditeur ;
2. Par intégration sur  $S^2$ , un nouveau système linéaire est formé ayant pour inconnues les signaux  $u_i$  discrets ;
3. Ce système est cette fois inversé, délivrant ainsi le signal à diffuser par les haut-parleurs pour recréer un champ sonore identique à la captation.

Une version améliorée de ce protocole a été implémentée durant la thèse dans le moteur *PifPaf3D*, notamment pour effectuer un rendu binaural d’une captation par microphone *Soundfield* en A-Format (fig. 1.11). De nombreux détails soulèvent de grandes difficultés, non présentées dans ce manuscrit, mais bien connues de l’homme de l’art. Peuvent être citées en exemple la troncature de la série harmonique dans l’équation (1.3), les phénomènes d’aliasing fréquentiel liés aux diverses discrétisations, la pseudo inversion de la matrice rectangulaire des harmoniques sphériques, ou encore la régularisation des filtres fréquentiels faisant appels aux fonctions de Bessel et Hankel sphériques. Néanmoins, le module *Matlab* d’encodage-décodage HOA a donné des résultats encourageants pour des captations par microphone *Soundfield*. Il fera sans doute l’objet de recherches ultérieures, par exemple sur le rendu

de microphones d'ordres plus élevés, ou non sphériques, ou encore pour de la localisation spatiale de sources sonores.

Pour conclure, comme toute technique audio, HOA présente des avantages et des inconvénients, à la fois sur les plans perceptif, physique et technique. Ce manuscrit n'ayant pas pour vocation d'en faire une étude détaillée, mais plutôt d'en expliciter les grandes lignes pour comprendre et exploiter l'outil, le lecteur curieux pourra se documenter sur une littérature abondante (e.g. [11], [20], [21], [59], [71]).

### 1.2.3 Technologies binaurales, enregistrement et synthèse

**Binaural, binaurale, binauraux** (*adj. du latin bini/paire et auris/oreille*) se dit des perceptions auditives engendrées par une stimulation simultanée des deux oreilles. (*Larousse 2013*)

Cette définition introductive a pour but de fixer le vocabulaire employé dans ce manuscrit. En effet, le terme binaural tend à se démocratiser ces dernières années, en devenant un nom commun synonyme d'une écoute spatialisée sur casque audio. En accord avec la définition précédente, il doit en réalité être employé comme adjectif caractérisant une *stimulation simultanée des deux oreilles*, ce qui induit une certaine prudence d'utilisation<sup>1</sup>... Ceci étant, les **technologies binaurales** peuvent être introduites en distinguant deux grandes techniques, ayant comme point commun leur mode de restitution essentiellement sur casque audio, voire sur haut-parleur par *Cross-Talk Cancellation*.

Tout d'abord, l'enregistrement binaural (fig. 1.13) consiste à effectuer une prise de son par l'intermédiaire de deux microphones placés au niveau des tympans d'un être humain, ou d'un objet reprenant tout ou partie des caractéristiques de l'oreille externe (mannequin Gras Kemar, tête artificielle Neumann KU100, oreilles Otokinoko, sphère The Audio BS3D, etc.). Cette technique contient nativement des informations perceptives relatives à la scène sonore originale, ce qui lui confère (en général) un rendu plutôt réaliste, à la fois en direction et en distance. Cependant, elle souffre des contraintes suivantes, liées à la "compression" des informations spatiales dans un signal stéréo :

---

1. En effet, la quasi-totalité du monde de l'audio est basé sur une stimulation simultanée des deux oreilles... Au même titre, les HRTF sont bien souvent associées au "binaural", alors que tout système de restitution audio exploite de manière directe ou indirecte tout ou partie des informations de localisation contenues dans ces filtres.





FIGURE 1.13 – (Gauche) Enregistrement binaural par microphones DPA, situés à l’embouchure du conduit auditif d’un joueur de violoncelle. (Droite) Tête artificielle Neumann KU100, avec microphones intégrés au creux de chaque "oreille". (source [www.neumann.com](http://www.neumann.com))

1. Les divers objets de la scène sonore forment un tout difficilement dissociable ;
2. Il est difficile de construire manuellement une scène sonore ;
3. Les retouches par égaliseurs, compresseurs, limiteurs, réverbérateurs et autres effets risquent d’altérer fortement la spatialisation, native à la captation ;
4. A posteriori, les filtres HRTF liés à la prise de son ne peuvent pas être individualisés à la morphologie de l’auditeur.

Aussi, même si cette approche est connue depuis la fin des années 60, ces difficultés ont sans doute fait obstacle à sa popularisation, à la fois chez les professionnels et les particuliers.

La seconde technique, appelée synthèse binaurale (fig. 1.14), réside en l’application d’algorithmes de traitement du signal audio pour recréer artificiellement la perception spatialisée d’une scène sonore. Le principe de base consiste à mesurer par réponse impulsionnelle les filtres HRIR gauches et droits d’un auditeur, pour une position donnée dans l’espace. Puis, après convolution d’une source audio mono par ces deux filtres, le fichier stéréo issu de cette manipulation peut être écouté sur n’importe quel casque audio (de facture honorable!). Dès lors, la source mono sera perçue dans la direction de la position mesurée. En pratique, les HRIR sont mesurées en plusieurs positions de l’espace et une interpolation spatiale de ces filtres est effectuée pour convoluer n’importe quelle source audio dans n’importe quelle

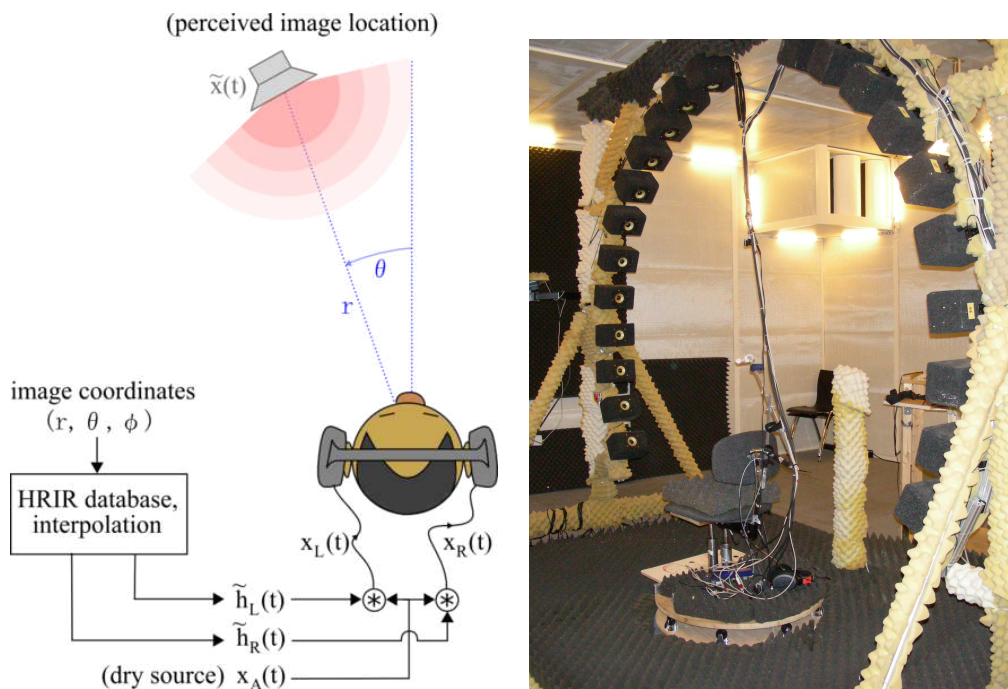


FIGURE 1.14 – (Gauche) Principe de base de la synthèse binaurale :  $\tilde{x}(t)$  correspond au signal mono  $x_A(t)$ , perçu à la position  $(r, \theta, \phi)$  et délivré par les signaux binauraux  $x_L(t)$  et  $x_R(t)$ . Pour ce faire,  $x_A(t)$  est convolué par les filtres HRIR gauches  $\tilde{h}_L(t)$  et droit  $\tilde{h}_R(t)$  de la position  $(r, \theta, \phi)$ , généralement obtenus par interpolation sur une base de données de HRIR. (source *Wikipedia*) (Droite) Système de mesure de HRTF de l'ARI. (source *www.kfs.oew.ac.at*)

direction. Sous réserve d'un workflow draconien, la synthèse binaurale peut s'affranchir des contraintes précédentes liées à l'enregistrement binaural, à savoir :

1. Les sources sonores peuvent être des objets dissociés, issus de prises de son séparées ou non ;
2. Une scène sonore se construit manuellement, par positionnement des sources dans l'espace ;
3. Toutes les retouches nécessaires peuvent être faites avant le rendu par synthèse binaurale, préférentiellement effectué en dernier dans la chaîne de production sonore ;
4. Les bases de données HRIR utilisées pour les convolutions peuvent être différentes selon l'utilisateur, voire même individualisées.

Ce sont toutes ces possibilités offertes par la synthèse binaurale qui ont motivé l'ensemble de ce travail de recherche appliquée, en particulier le dernier point sur l'individualisation des filtres HRIR/HRTF par des méthodes numériques non intrusives. Aussi, même si cette technique est beaucoup plus difficile à mettre en œuvre, les progrès matériels et logiciels de ces dix dernières années appliqués au traitement du signal offrent aujourd'hui de nouvelles perspectives. Le contexte CIFRE de cette thèse n'est d'ailleurs pas sans rappeler que de nombreux industriels suivent de très (très) près les récentes avancées faites en synthèse binaurale, toujours plus prometteuses.

### **1.3 Head-Related Transfer Function, what else ?**

Pour mieux saisir les difficultés liées à l'utilisation des filtres HRTF en synthèse binaurale, une analyse systémique de ces filtres est présentée dans cette section. Cette analyse est effectuée dans la dimension physique des fonctions de transfert, sans se soucier des questions perceptives. La méthodologie est discutable au regard de la psycho-acoustique, mais facilite l'appréhension des résultats de mesures, ainsi que leur couplage avec des résultats issus de modélisations analytiques ou de simulations numériques. Par ailleurs, cette approche rigoureuse a donné naissance à une décomposition fonctionnelle des HRTF en éléments modélisables et résiduels, détaillée dans la section suivante. Aussi, dans toute la suite, les HRTF seront avant tout considérées comme des solutions de radiation sphérique d'un problème de diffraction des ondes sonores par un objet essentiellement rigide, à savoir l'être humain.

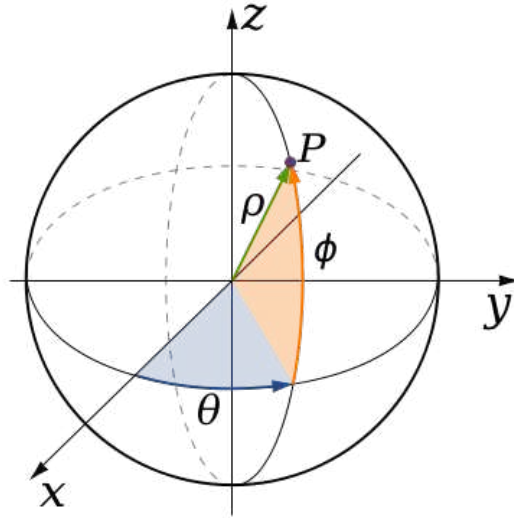


FIGURE 1.15 – Repère en coordonnées sphériques, convention en rayon-longitude-latitude correspondant respectivement à la distance ( $\rho$ ), l’azimut ( $\theta$ ) et l’élévation ( $\phi$ ). (source *Wikipedia*)

### 1.3.1 Modèle de HRTF, la sphère rigide

Avant de s’intéresser aux HRTF réelles issues de mesures en laboratoire, certaines bases méritent d’être posées en étudiant un modèle simplifié, comme les HRTF d’une sphère rigide sans pavillon. Ceci permet notamment d’introduire différents modes de représentations, ainsi que des résultats utiles pour la suite. Pour ce faire, il existe deux principaux modèles associés au problème de diffraction d’une onde sonore par un objet sphérique.

Le premier modèle fournit une solution dans le domaine temporel, à savoir une évaluation analytique du retard interaural (ITD) pour une sphère rigide (e.g. [57], [85]). Ce retard correspond à la différence de temps de propagation d’une onde sonore à l’infini entre deux points diamétralement opposés sur la sphère. En considérant que la direction d’une source sonore à l’infini est caractérisée par un angle d’azimut  $\theta$  et d’élévation  $\phi$  dans un repère sphérique (fig. 1.15), le retard interaural  $\tau$  s’exprime par :

$$\tau = \frac{a}{c} \times (\arcsin(\cos \phi \sin \theta) + \cos \phi \sin \theta), \quad (1.4)$$

avec  $a$  le rayon de la tête sphérique considérée et  $c$  la célérité des ondes sonores dans l’air. La figure (fig. 1.16) donne une représentation du retard  $\tau$  calculé par le modèle d’ITD (1.4), en fonction de l’azimut  $\theta$ , pour trois élévations  $\phi$  significatives. Le rayon de tête choisi pour les calculs correspond au rayon de tête sphérique moyen ( $a = 8.74$  cm [58]) et la vitesse du son dans l’air est

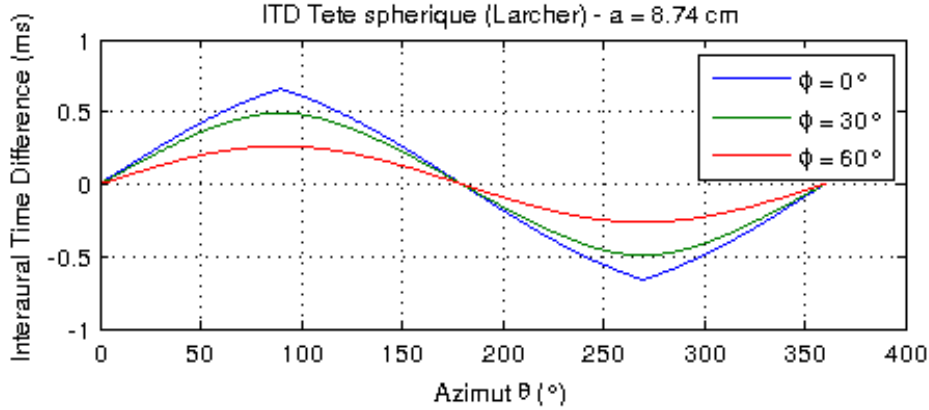


FIGURE 1.16 – Représentation de l’ITD  $\tau$  calculé par le modèle de Larcher (1.4), en fonction de l’azimut  $\theta$ , pour trois élévations  $\phi$  significatives.

prise à  $15^\circ\text{C}$  ( $c = 340$  m/s). En pratique, ce modèle peut simplement être mis en œuvre en approchant les HRTF comme une combinaison de déformations spectrales en amplitude et d’un retard pur :

$$HRTF(\theta, \phi) = |HRTF(\theta, \phi)|e^{i\tau(\theta, \phi)}.$$

Cette décomposition est surtout valable en basse fréquence, lorsque l’approximation de tête sphérique est légitime. Cette technique a été implémentée dès la toute première version du logiciel *PifPaf3D*, notamment pour faciliter les interpolations de filtres et autoriser une personnalisation de la synthèse binaurale au diamètre de la tête de l’auditeur. Cependant, malgré des résultats perceptifs encourageants, cette approche est trop grossière en haute fréquence pour être raisonnablement suffisante.

Le second modèle sphérique a été introduit par Duda [25] et exploite les solutions analytiques du problème de diffraction d’onde par une sphère rigide de rayon  $a$ , en régime harmonique de nombre d’onde  $k$ . La source sonore est cette fois ponctuelle et localisée dans l’espace. Comme ce problème possède une symétrie de révolution, la position de cette source sera entièrement déterminée par sa distance  $r$  et son angle d’incidence  $\theta$ . La fonction de transfert  $H_S$  issue de cette modélisation est analytique et donnée par :

$$H_S(k, a, r, \theta) = -\frac{r}{ka^2}e^{-ikr} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)P_m(\cos\theta) \frac{h_m(kr)}{h'_m(ka)}, \quad r > a, \quad (1.5)$$

où  $P_m$  est le polynôme de Legendre de degré  $m$  et  $h_m$  la fonction de Hankel sphérique de degré  $m$ . De plus, Duda propose un algorithme récursif pour évaluer les fonctions de Hankel et leurs dérivées, ce qui permet un calcul rapide et facilite l’étude. Les deux premières représentations graphiques

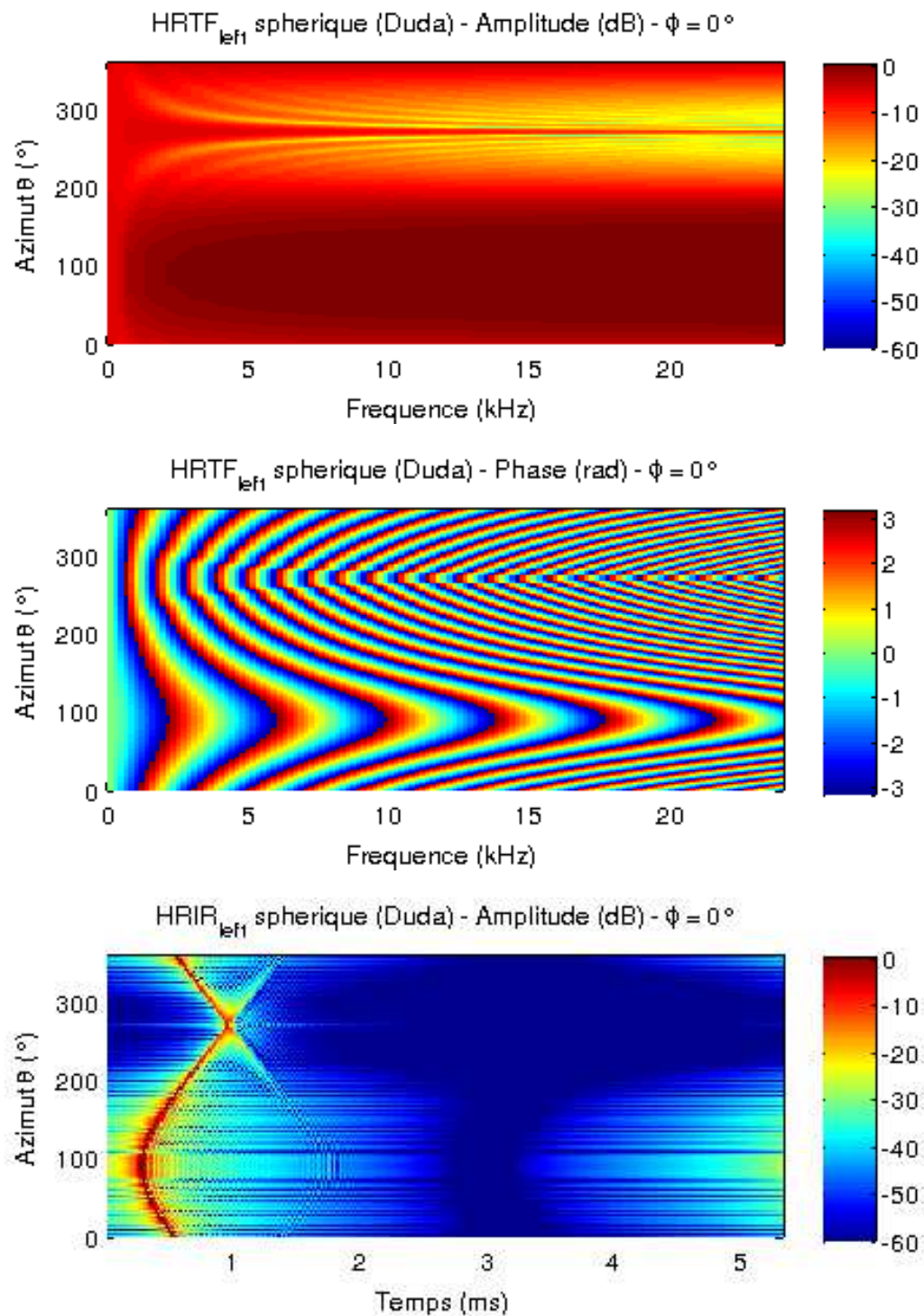


FIGURE 1.17 – Représentations des HRTF du modèle sphérique de Duda, dans le plan azimutal. (Haut) Amplitude spectrale. (Milieu) Portrait de phase. (Bas) Amplitude signal HRIR.

de la figure 1.17 montrent l'amplitude spectrale et le portrait de phase des HRTF sphériques de Duda, évalués à partir de l'équation (1.5). Dans le repère sphérique de la figure 1.15, ces deux grandeurs sont données pour "l'oreille gauche", située en  $(0, a, 0)$ . La discrétisation angulaire du plan d'incidence (azimutal) est de l'ordre du degré et la discrétisation fréquentielle compte 129 échantillons répartis régulièrement entre 0 et 24 kHz. Les valeurs d'amplitude spectrale sont données en dB sur un intervalle audible fixe  $([-60, 0] \text{ dB})$  et la phase est exprimée en radian  $([-\pi, \pi] \text{ rad})$ . Sur la figure 1.17, les amplitudes spectrales des sources ipsilatérales sont relativement monotones, alors qu'apparaissent des interférences constructives et destructives pour les sources contralatérales. De plus, pour les sources diamétralement opposées au point de mesure sur la sphère ( $\theta = 270^\circ$ ), les interférences constructives amènent un gain jusque 20 dB supérieur aux sources juxtaposées. Enfin, le portrait de phase est relativement uniforme, avec des isovaleurs caractéristiques d'un problème à géométrie sphérique, excepté pour ces mêmes sources diamétralement opposées, qui présentent un saut de phase. La dernière représentation graphique de la figure 1.17 montre la transformée de Fourier inverse des HRTF sphériques, soit les HRIR du modèle sphérique de Duda dans le plan d'incidence. La discrétisation temporelle compte 256 échantillons sur un intervalle de l'ordre de quelques millisecondes. Les valeurs d'amplitude du signal sont données en dB sur un intervalle audible fixe  $([-60, 0] \text{ dB})$ . Le modèle d'ITD de Larcher (1.4) en élévation nulle (fig. 1.16) est clairement visible sur la représentation temporelle des HRIR sphériques. Il est néanmoins intéressant de noter un lissage pour l'azimut  $\theta = 90^\circ$ , correspondant à une source ipsilatérale. Ceci peut s'expliquer par l'approximation d'onde incidente à l'infini dans le modèle de Larcher, qui diffère de l'approximation en sources ponctuelles dans le modèle de Duda. Par ailleurs, un second front d'ondes d'amplitude non négligeable apparaît pour les sources contralatérales, retardé par rapport au front d'onde caractérisant l'ITD. Ce résidu est généré par les ondes contournant la sphère par le chemin diamétralement opposé au plus court trajet, dans le plan d'incidence.

La figure 1.17 donne une première forme de représentation graphique des HRTF sphériques, à la fois en fréquence, en temps et en espace. Cependant, autant où les représentations strictement azimutales s'avèrent consistantes pour les HRTF sphériques, autant où elles sont incomplètes pour les HRTF réelles. En effet, ces dernières sont des données directionnelles n'ayant a priori pas de symétries particulières. Or, l'ajout d'une dimension pour l'élévation complique grandement l'analyse, qui nécessite des supports clairs et intuitifs pour être rigoureuse et efficace. Aussi, en fixant la fréquence, une représentation aplatie en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$  de l'amplitude spectrale (fig. 1.18) et du portrait de phase (fig. 1.19), est un bon complément des représentations



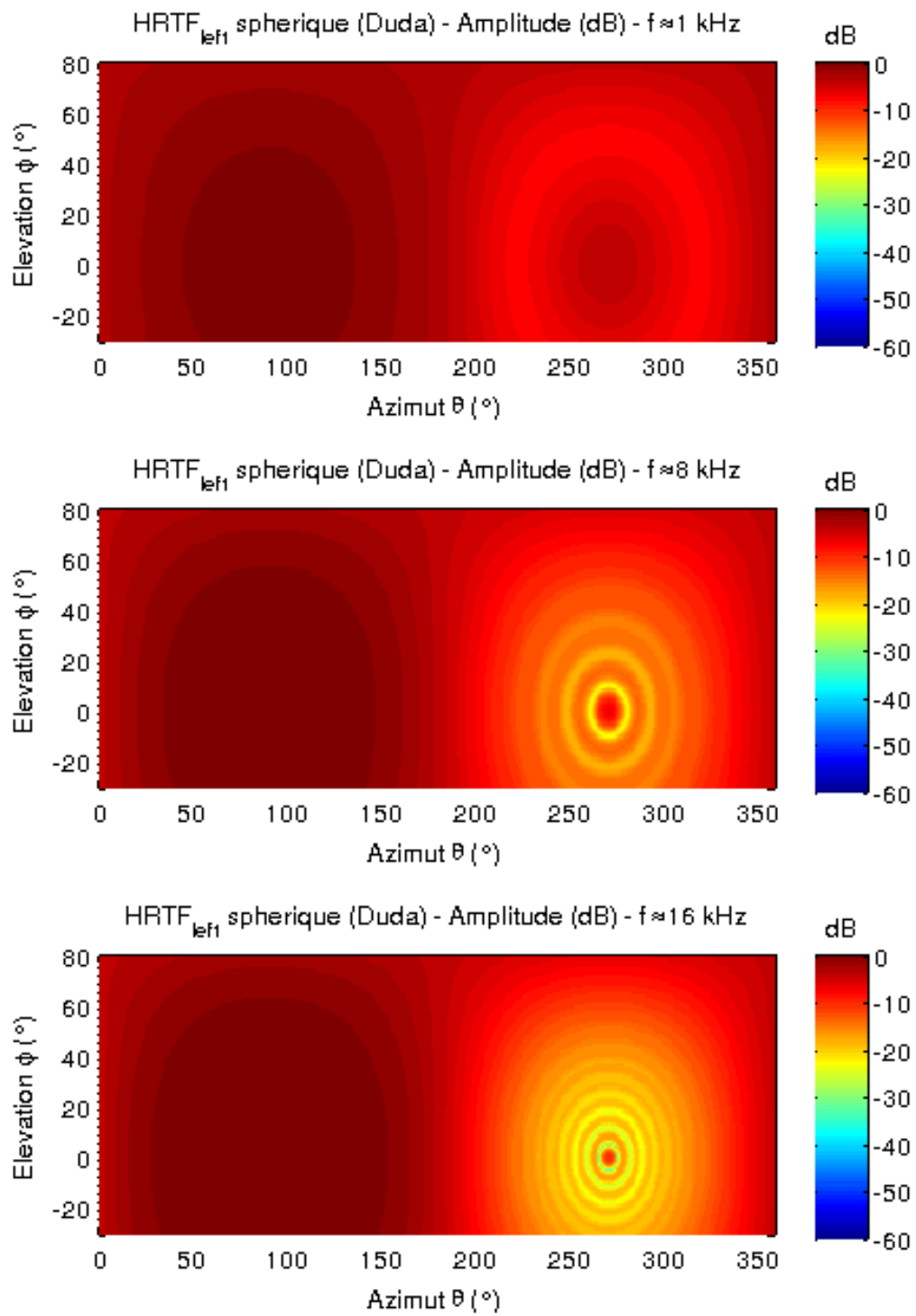


FIGURE 1.18 – Amplitude spectrale (dB) des HRTF gauches du modèle sphérique de Duda (eq. 1.5). Représentation en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$ , à fréquence fixe  $f$ .



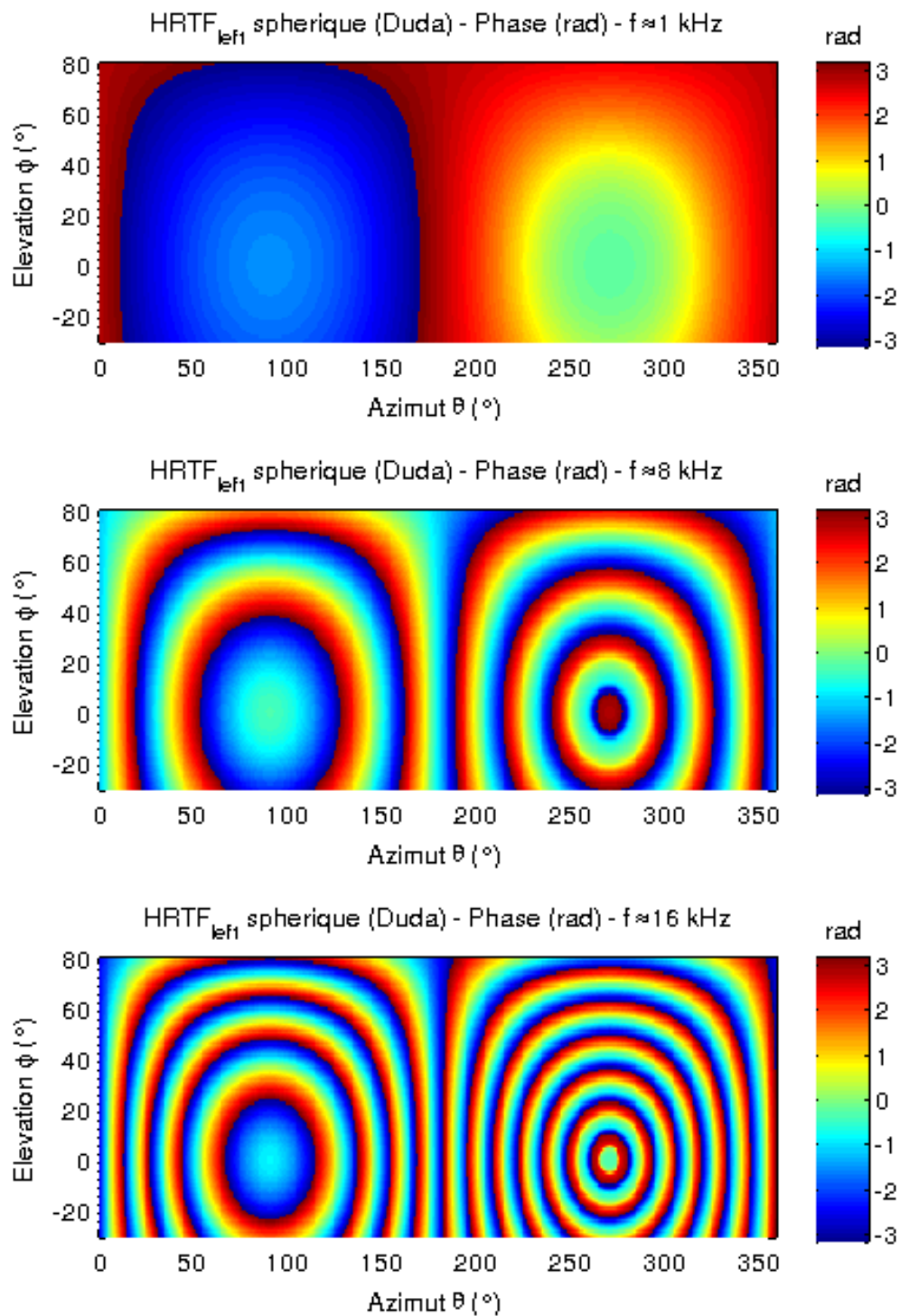


FIGURE 1.19 – Portrait de phase (radian) des HRTF gauches du modèle sphérique de Duda (eq. 1.5). Représentation en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$ , à fréquence fixe  $f$ .

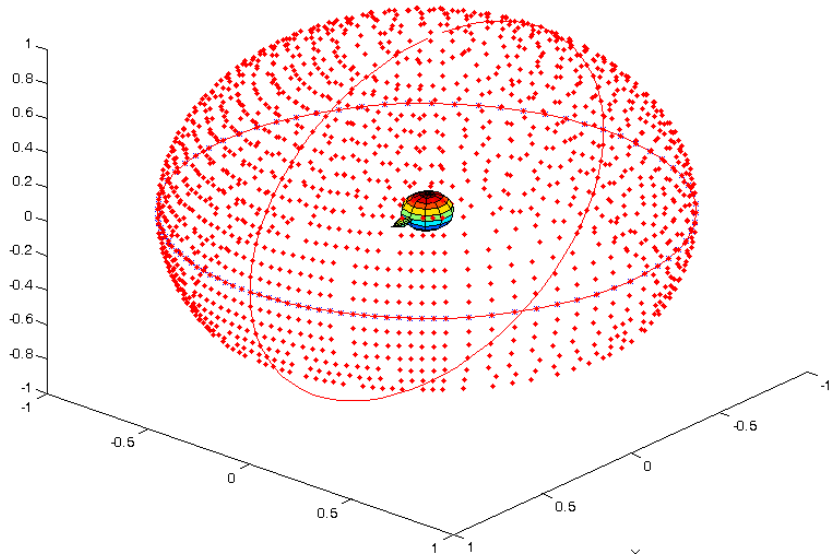


FIGURE 1.20 – Répartition spatiale des positions de mesures pour la base de données ARI. (source [6])

exclusivement fréquence-azimut précédentes. Sur ces figures, les discrétisations en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$  pour le modèle analytique de Duda sont de l'ordre du degré dans chaque dimension. Cette nouvelle représentation offre l'avantage d'afficher toutes les données spatiales sans idées reçues et de mesurer pleinement la nature ondulatoire des HRTF. En effet, l'amplitude spectrale et la phase des HRTF sphériques de Duda (fig. 1.18 et 1.19) ne sont pas sans rappeler les figures d'interférences classiques des problèmes de diffraction d'onde. Enfin, la symétrie axiale d'axe de rotation interaural  $Oy$  est parfaitement visible.

Tous les outils de représentation graphique étant désormais établis avec un modèle analytique, le problème réel des HRTF mesurées peut maintenant être abordé.

### 1.3.2 Mesures de HRTF, Acoustics Research Institute

La base de données récemment mesurée à l'Acoustics Research Institute de l'Austrian Academy of Science a été utilisée dans cette section à des fins de recherche, sous licence *Creative Commons* (cc). Ces mesures présentent l'avantage de compter 1550 positions, quasi-uniformément espacées sur plus d'une demi-sphère (fig. 1.20), avec un écart angulaire de  $2.5^\circ$  frontalement et de  $5^\circ$  sinon. Au vu des schémas de diffraction précédents pour le modèle sphérique analytique (fig. 1.18 et 1.19), ce faible écart angulaire semble

indispensable pour représenter le plus fidèlement possible les variations en hautes fréquences. Pour réaliser ces mesures, le dispositif expérimental mis en place consiste en une batterie de haut-parleurs disposés en arc de cercle autour d'une chaise rotative où s'assoit le sujet, dans une chambre semi-anechoïque (fig. 1.14). Les HRIR sont mesurées par sweep multiples [64] de 50 Hz à 20 kHz, puis post-traitées par filtrage inverse en minimum de phase de l'amplitude spectrale de la *Common Transfer Function* (CTF), afin de compenser l'impact de l'équipement sur la mesure. Pour finir, elles ont été filtrées par coupe-haut à 18 kHz (ce qui rend les données non valables au-delà de cette limite), puis fenêtrées en temps sur 256 échantillons (Tukey asymétrique). Pour plus d'informations sur le protocole expérimental, un extrait est disponible sur le site de l'ARI [6]. Enfin, il n'est pas inutile de préciser que cette base de données est disponible au format *Matlab*, ce qui en facilite grandement l'usage.

La figure 1.21 donne les représentations de l'amplitude spectrale, de la phase et de l'amplitude signal des HRTF du sujet NH5 de la base ARI, en azimut-fréquence. La discrétisation azimutale  $\theta$  est semi-régulière, avec un pas de  $2.5^\circ$  autour de  $\theta = 0^\circ$  et un pas de  $5^\circ$  sinon. Les valeurs d'amplitude spectrale ont été normalisées et sont données en dB sur l'intervalle audible fixe  $[-60, 0]$  dB, pour faciliter les comparaisons avec le modèle sphérique de Duda (fig. 1.17). La discrétisation fréquentielle compte 129 échantillons répartis régulièrement entre 0 et 24 kHz et l'équivalent temporel présente 256 échantillons sur un intervalle de l'ordre de quelques millisecondes. D'une part, sur la représentation temporelle, le modèle d'ITD de Larcher (fig. 1.16) est parfaitement visible, avec le même décrochement à  $\theta = 90^\circ$  que pour la modélisation analytique de Duda (fig. 1.17). De plus, un certain nombre de réflexions supplémentaires, engendrées par le pavillon de l'oreille, mais aussi les épaules et le torse, se dessinent en suivant les mêmes courbes d'ITD. Ces réflexions sont à l'origine des importantes déformations spectrales en amplitude et en phase, caractéristiques des HRTF. D'autre part, certaines remarques peuvent se dégager de l'analyse comparative des représentations fréquentielles des HRTF modélisées (fig. 1.17) et mesurées (fig. 1.21) :

- Les HRTF des sources contralatérales ( $\theta$  proche de  $270^\circ$ ) sont beaucoup plus complexes que celles ipsilatérales ( $\theta$  proche de  $90^\circ$ ) ;
- L'amplitude spectrale des HRTF mesurées est relativement lisse, dans le sens où ses variations présentent peu de sauts critiques, excepté en faible amplitude ;
- Le portrait de phase présente quant à lui de fortes variations et de nombreux sauts ;
- Le modèle de Duda est visible sur l'amplitude spectrale, notamment en basse fréquence pour l'oreille contralatérale et se retrouve aussi sur

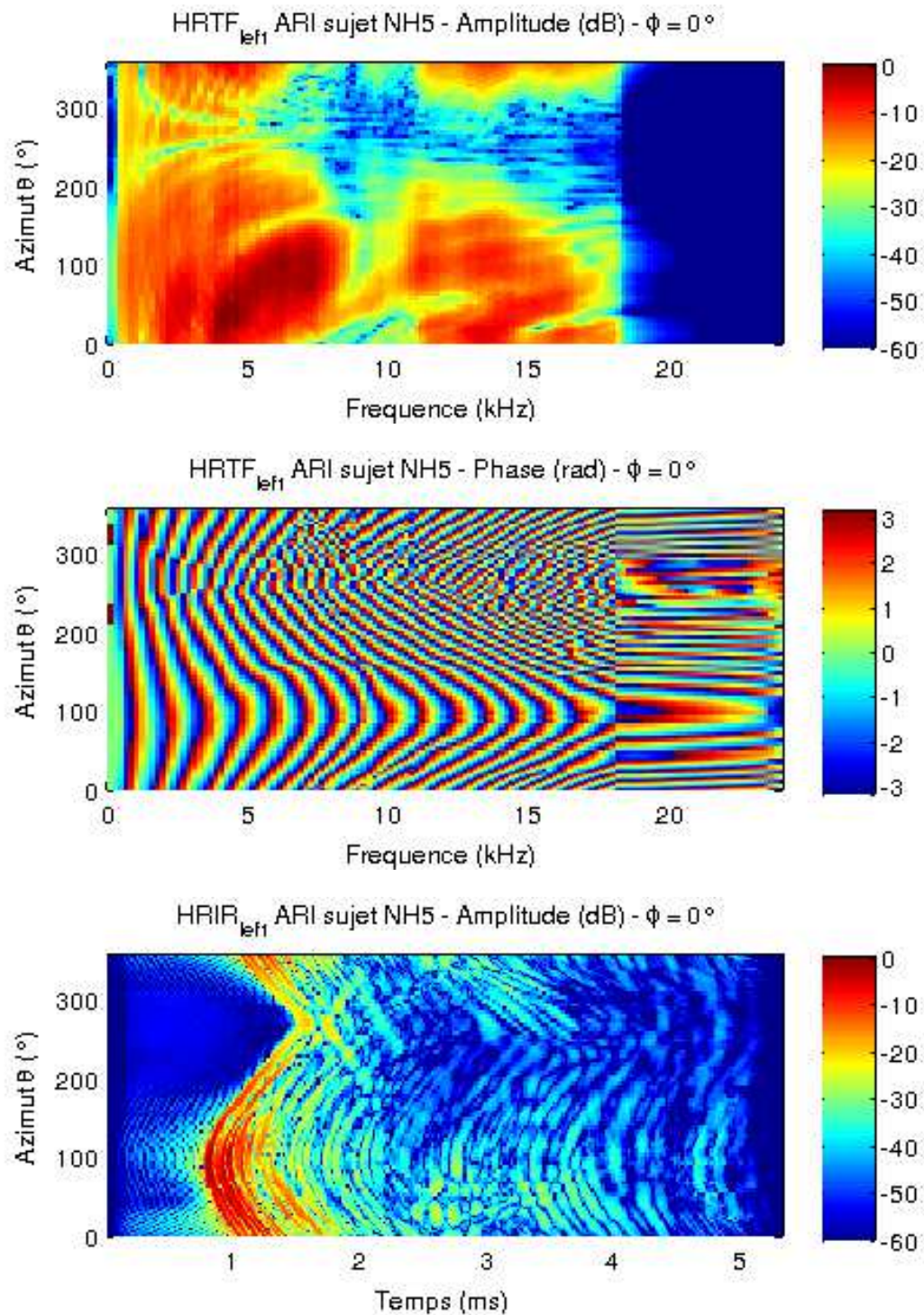


FIGURE 1.21 – Représentations des HRTF du sujet NH5 de la base de données ARI, dans le plan azimutal. (Haut) Amplitude spectrale, avec filtrage coupe-haut d'origine. (Milieu) Portrait de phase. (Bas) Amplitude signal HRIR.

toute la bande fréquentielle du portrait de phase.

Ce dernier point, parfaitement empirique, est fondamental puisqu'il a donné naissance au principe de Décomposition par Modèle Morphologique des HRTF, présenté dans la suite de ce manuscrit.

En complément des représentations azimutales précédentes, les figures 1.22 et 1.23 donnent les représentations en azimut-élévation à fréquence fixe des HRTF mesurées du sujet NH5 de la base ARI. La discrétisation spatiale de cette base oscillant entre  $2.5^\circ$  et  $5^\circ$ , ces figures présentent une discrétisation tous les degrés d'espace en considérant la valeur du plus proche voisin mesuré, ce qui correspond aux diagrammes de Voronoï. Ceci permet d'afficher les résultats de mesures bruts, sans interpolations graphiques éventuellement préjudiciables à l'analyse des données. Les positions spatiales des données mesurées sont représentées par des points noirs. Les propriétés précédemment observées se retrouvent dans la représentation spatiale des HRTF. En effet, l'amplitude spectrale (fig. 1.22) est relativement lisse, y compris en haute fréquence. Certains décrochements sont néanmoins visibles pour les sources contralatérales (en bleu foncé). Mais ces valeurs sont relativisées par leur faible amplitude en échelle logarithmique. Cette représentation laisse penser que la discrétisation spatiale de la base ARI semble surdéterminée, au regard des faibles variations entre chaque point de mesure. Une interpolation, linéaire ou d'ordre supérieur, pourrait donc être envisagée. En revanche, le portrait de phase est quant à lui bien plus oscillant (fig. 1.23). La discrétisation spatiale est suffisante pour une représentation à 0.5 kHz, mais commence à pêcher pour les sources contralatérales à 8 kHz et devient manifestement insuffisante pour ces mêmes positions à 16 kHz. Une interpolation de ces données en l'état est donc relativement difficile à haute fréquence, mais reste envisageable (cf. section suivante). Il est néanmoins intéressant de remarquer une certaine symétrie axiale par rotation autour de l'axe interaural, qui n'est pas sans rappeler le portrait de phase sphérique du modèle de Duda (fig. 1.19).

Toutes les représentations brutes des HRTF et des HRIR équivalentes étant établies, celles-ci vont désormais servir de référence dans toute la suite de ce chapitre.

### 1.3.3 Interpolation linéaire

Les représentations précédentes des diagrammes de Voronoï en azimut-élévation (fig. 1.22 et 1.23) amènent naturellement la question de l'interpolation spatiale des filtres HRTF, à savoir :

**Comment construire des données pertinentes entre les positions discrètes des mesures ?**

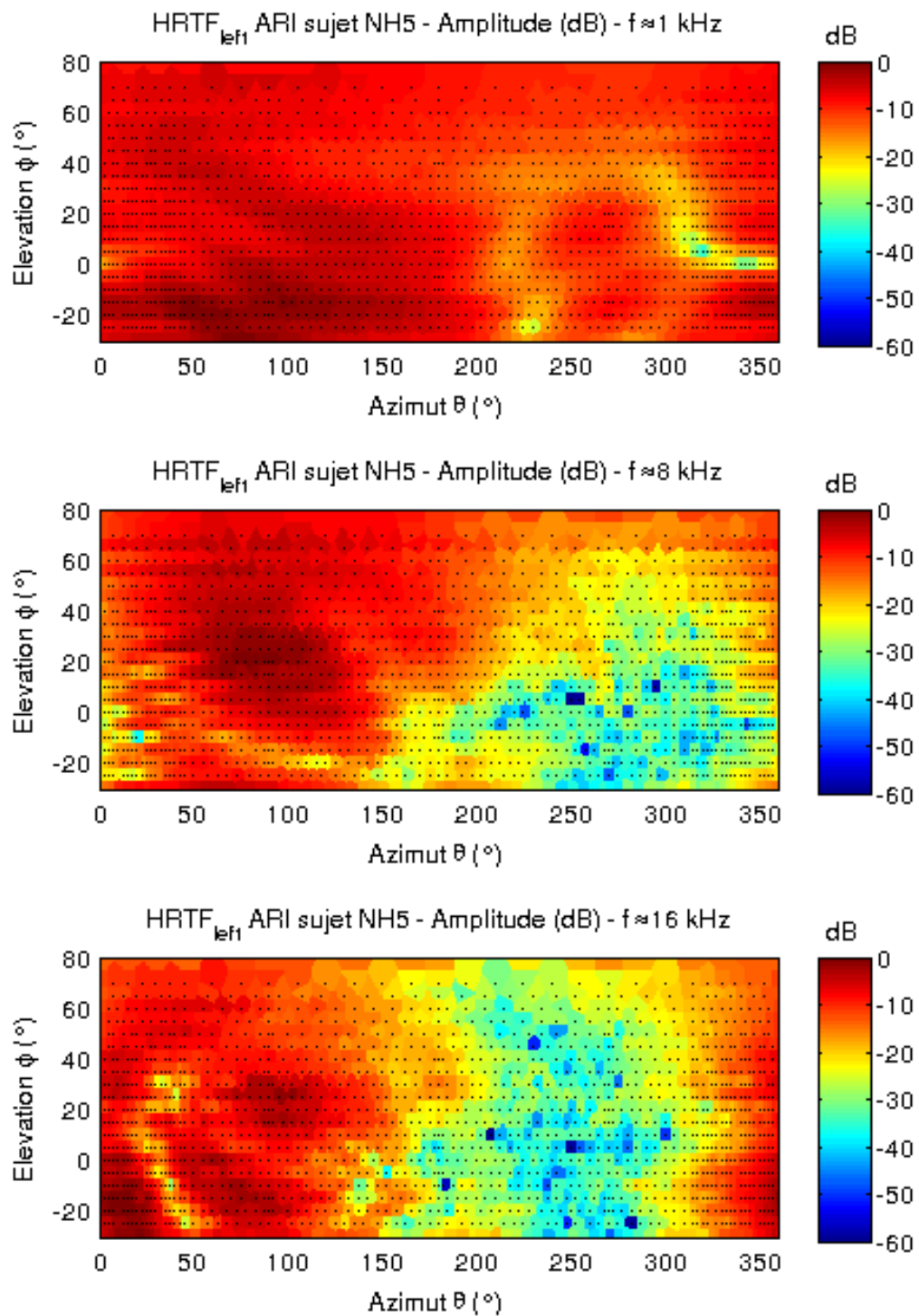


FIGURE 1.22 – Amplitude spectrale (dB) des HRTF gauches du sujet NH5 de la base de données ARI. Représentation en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$ , à fréquence fixe. Les positions des mesures sont données par les points noirs.



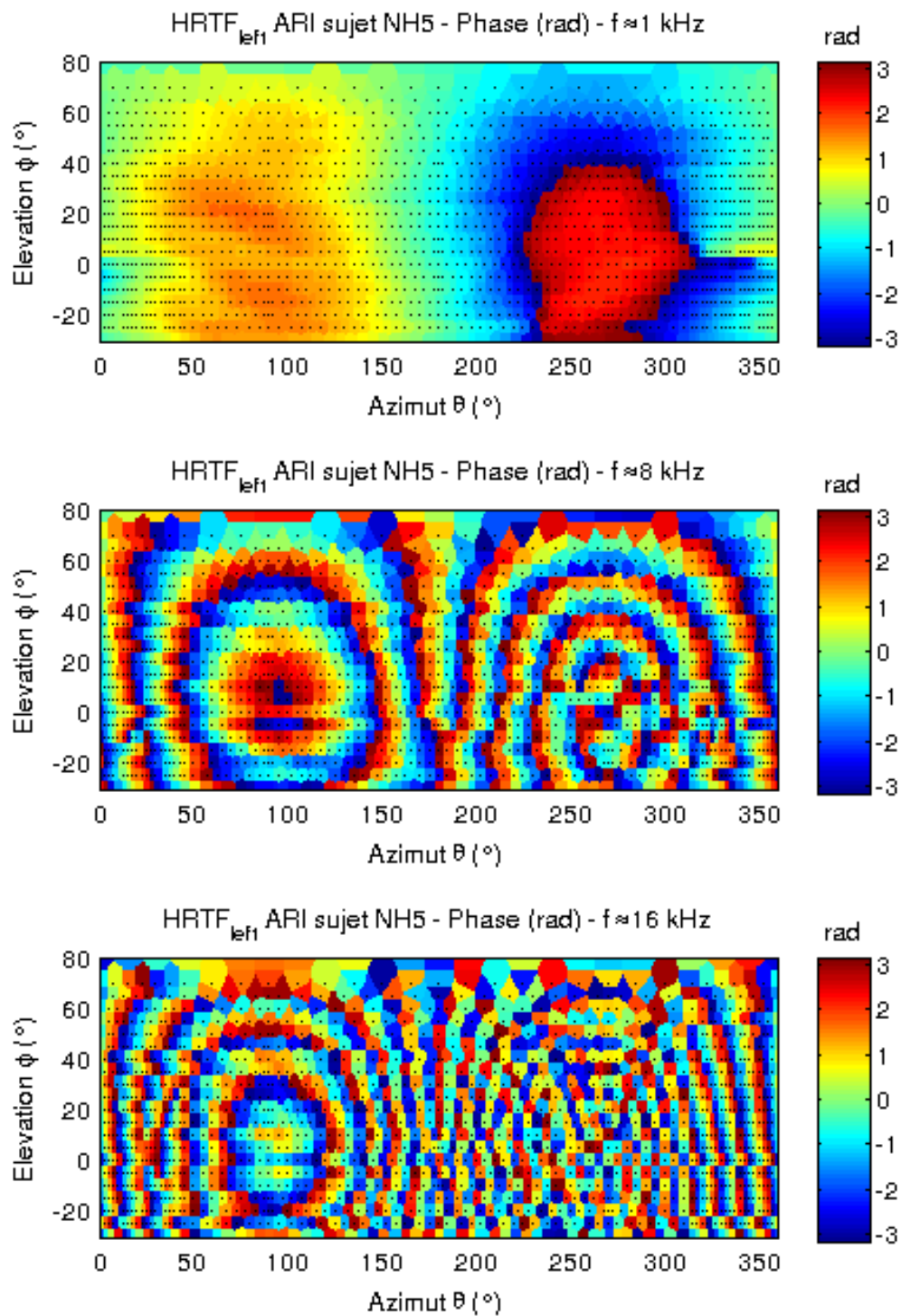


FIGURE 1.23 – Portrait de phase (radian) des HRTF gauches du sujet NH5 de la base de données ARI. Représentation en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$ , à fréquence fixe. Les positions des mesures sont données par les points noirs.

Cette question est fondamentale pour la compréhension de ces fonctions de transfert, ainsi que pour leur exploitation industrielle (e.g. [17], [45], [57]).

Par exemple, une interpolation spatiale de haute qualité permet notamment :

- Un rendu dynamique de la spatialisation sonore en minimisant les artefacts audibles ;
- L'ajout d'un *head-tracking* transparent ;
- Une minimisation de la densité spatiale des mesures, ce qui diminue leur durée, simplifie les appareillages nécessaires et décroît la taille des bases de données de façon quadratique.

Pour ce faire, une interpolation linéaire par triangulation sphérique de la sphère de mesures a été préférentiellement choisie. Tant que la discrétisation des fonctions à interpoler est suffisante pour appliquer une hypothèse de linéarité locale, ce type d'interpolation est un bon compromis entre précision et coûts de calcul. L'algorithme exploité pour produire les représentations ci-après peut se résumer comme suit :

1. Considérer le nuage de points de mesures en coordonnées sphériques ;
2. Subdiviser la surface sphérique en triangles plans, ayant pour sommets les points des mesures ;
3. Construire une grille régulière plus fine, par exemple, tous les degrés en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$  ;
4. Interpoler linéairement triangle par triangle les données aux nœuds sur cette nouvelle grille.

Au vu des variations des HRTF brutes (fig. 1.22 et 1.23), le module et la phase des HRTF ont été traités séparément. Les figures (fig. 1.24 et 1.25) représentent respectivement en azimut-élévation les interpolations linéaires de l'amplitude spectrale et de la phase des HRTF mesurées du sujet NH5 de la base ARI. L'interpolation linéaire de l'amplitude spectrale (fig. 1.24) donne d'excellents résultats puisque, comparativement aux mesures originales (fig. 1.22), les variations semblent entièrement décrites avec la discrétisation spatiale de la base ARI et ce, quelle que soit la fréquence. Autour de l'oreille contralatérale, seuls quelques "trous" de faible amplitude mériteraient une étude plus approfondie, mais leur importance est moindre au regard de la faible amplitude de la zone avoisinante. D'autre part, à 8 kHz, des stries horizontales apparaissent pour l'oreille ipsilatérale et semblent fonctions de l'élévation. Selon le protocole expérimental, à savoir une rangée de haut-parleurs distincts en élévation, il est possible que l'égalisation du dispositif impacte la mesure. Cette problématique limite les mesures d'erreurs possibles et peut justifier qu'une interprétation purement graphique des résultats soit suffisante en première approche. En revanche, l'interpolation linéaire de la



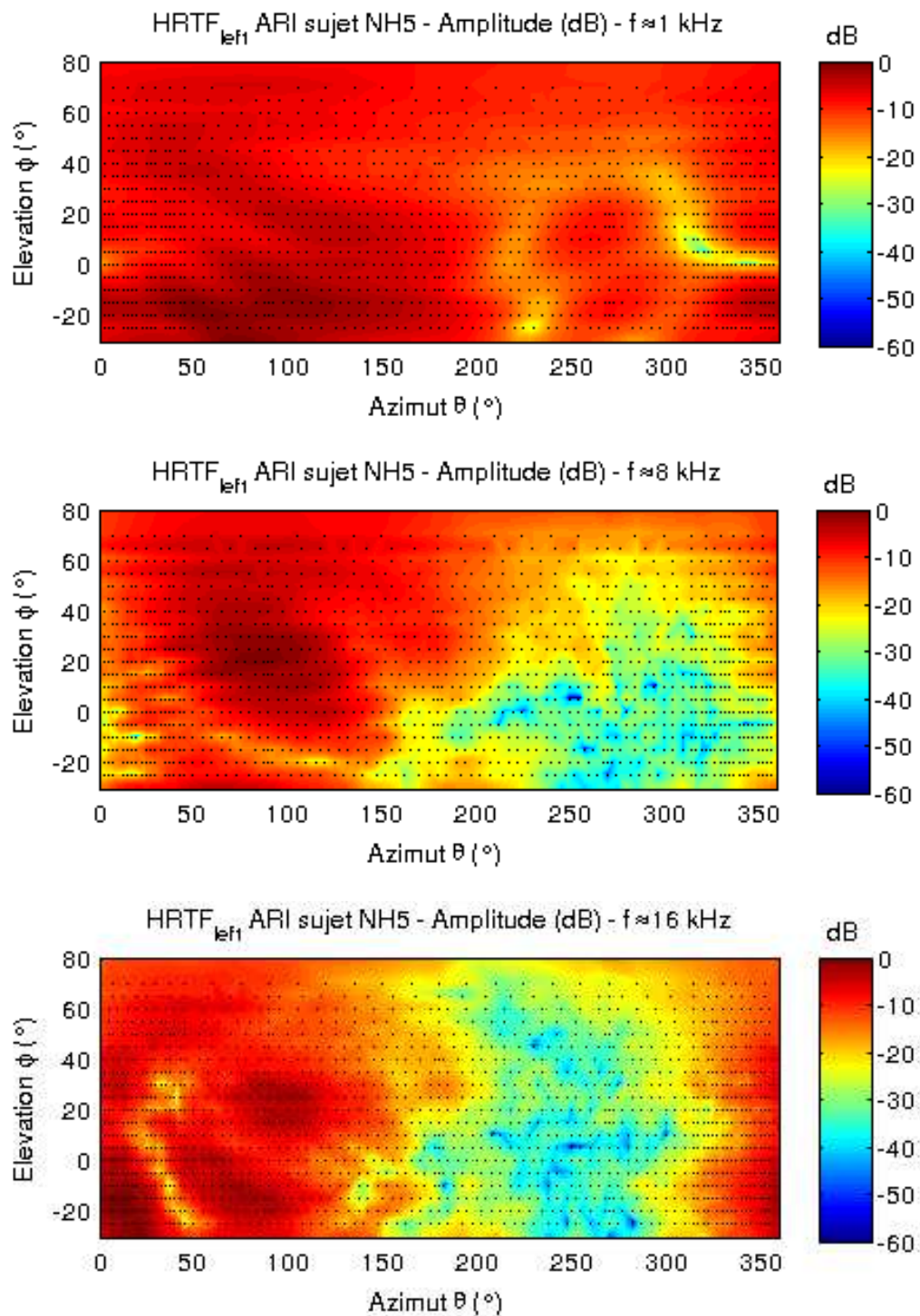


FIGURE 1.24 – Interpolation linéaire de l’amplitude spectrale (dB) des HRTF gauches du sujet NH5 de la base de données ARI. Représentation en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$ , à fréquence  $f$  fixe. Les positions des mesures sont données par les points noirs.

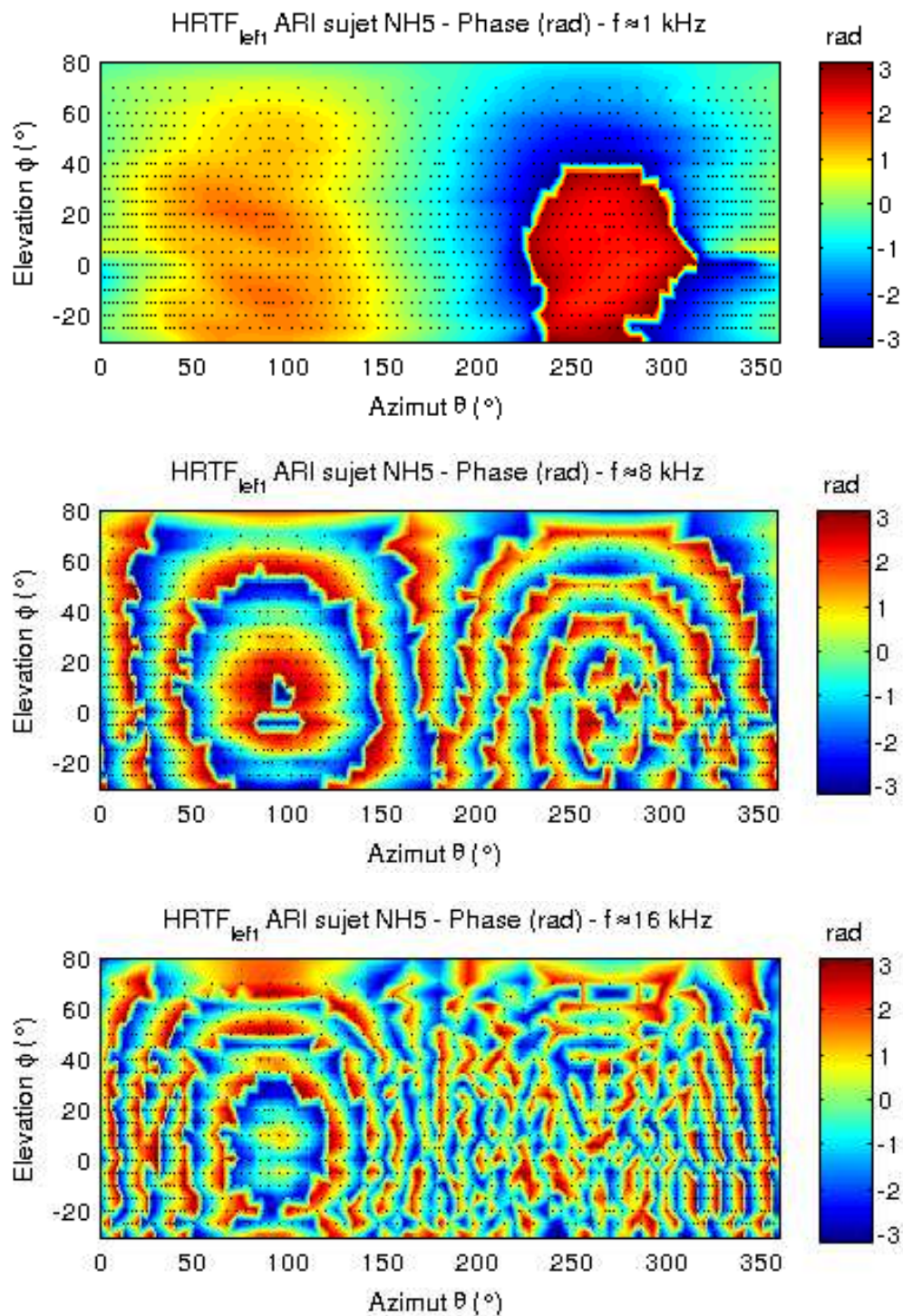


FIGURE 1.25 – Interpolation linéaire du portrait de phase (radian) des HRTF gauches du sujet NH5 de la base de données ARI. Représentation en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$ , à fréquence  $f$  fixe. Les positions des mesures sont données par les points noirs.

phase (fig. 1.25), peut quant à elle être considérée comme un échec. En effet, même si le portrait de phase original (fig. 1.25) est relativement consistant pour les fréquences 1 kHz, voire 8 kHz, la discrétisation spatiale de la base ARI est clairement insuffisante pour ce type d'interpolation à 15 kHz. En effet, étant donné que les données spatiales brutes présentent de nombreux sauts de  $\pi$  vers  $-\pi$ , une interpolation linéaire entre ces sauts génère des artefacts visibles et audibles. À titre comparatif, le portrait de phase théorique des HRTF sphériques de Duda (fig. 1.19) peut être mis en regard du portrait de phase interpolé (fig. 1.25).

Comme les oscillations observées résultent en grande partie de la représentation modulo  $2\pi$ , une approche classique consiste à "dérouler" la phase pour retirer les sauts de  $\pi$  vers  $-\pi$ , obtenant ainsi une phase continue sur un intervalle élargi [10]. Mais, comme le montrent les mesures brutes (fig. 1.23), la question de la direction du déroulement est loin d'être triviale. En effet, celui-ci doit respecter la causalité, qui est difficile à évaluer directement pour des fonctions de transfert définies sur deux dimensions d'espace (azimut et élévation). Des travaux de recherches ont précédemment été entrepris pour tenter de résoudre cette problématique, donnant lieu à des méthodes comme :

- Soustraire la portion de phase linéaire liée au retard de propagation ;
- Soustraire la portion de phase minimale déduite du spectre d'amplitude et représenter l'excès de phase déroulé ("*unwrapped*").

La seconde approche est considérée notamment dans la thèse de Véronique Larcher et propose de mesurer le retard de propagation par une approximation linéaire de l'excès de phase (e.g. [57]).

Une autre méthode, utilisée ici, consiste à interpoler directement les HRTF dans le domaine complexe, en séparant la partie imaginaire et la partie réelle. Étant donné que la transformée de Fourier et la méthode d'interpolation sont toutes deux linéaires, cela revient à effectuer une interpolation linéaire en domaine temporel, soit directement sur les HRIR [45]. L'amplitude spectrale (dB) et la phase (rad) peuvent alors être extraites du résultat et représentées en azimut-élévation à fréquence fixe. Suivant cette technique, le portrait de phase (fig. 1.27) semble cette fois plus cohérent que précédemment (fig. 1.25), notamment à 1 kHz, voire 8 kHz. Cependant, les variations à 16 kHz étant toujours trop fortes pour être interpolées correctement, de nouveaux artefacts apparaissent, comme des phases spatialement constantes (visibles aussi à 8 kHz pour les sources contralatérales). D'autre part, l'amplitude spectrale de cette méthode (fig. 1.27) est quant à elle plutôt médiocre à 8 kHz et 16 kHz, car un aliasing spectral perturbe la reconstruction. Même si la répartition générale est respectée (fig. 1.22), ces oscillations locales de l'amplitude spectrale sont du domaine de l'audible. Ceci modifie de manière conséquente le timbre de la source sonore restituée et peut affecter la localisation spa-

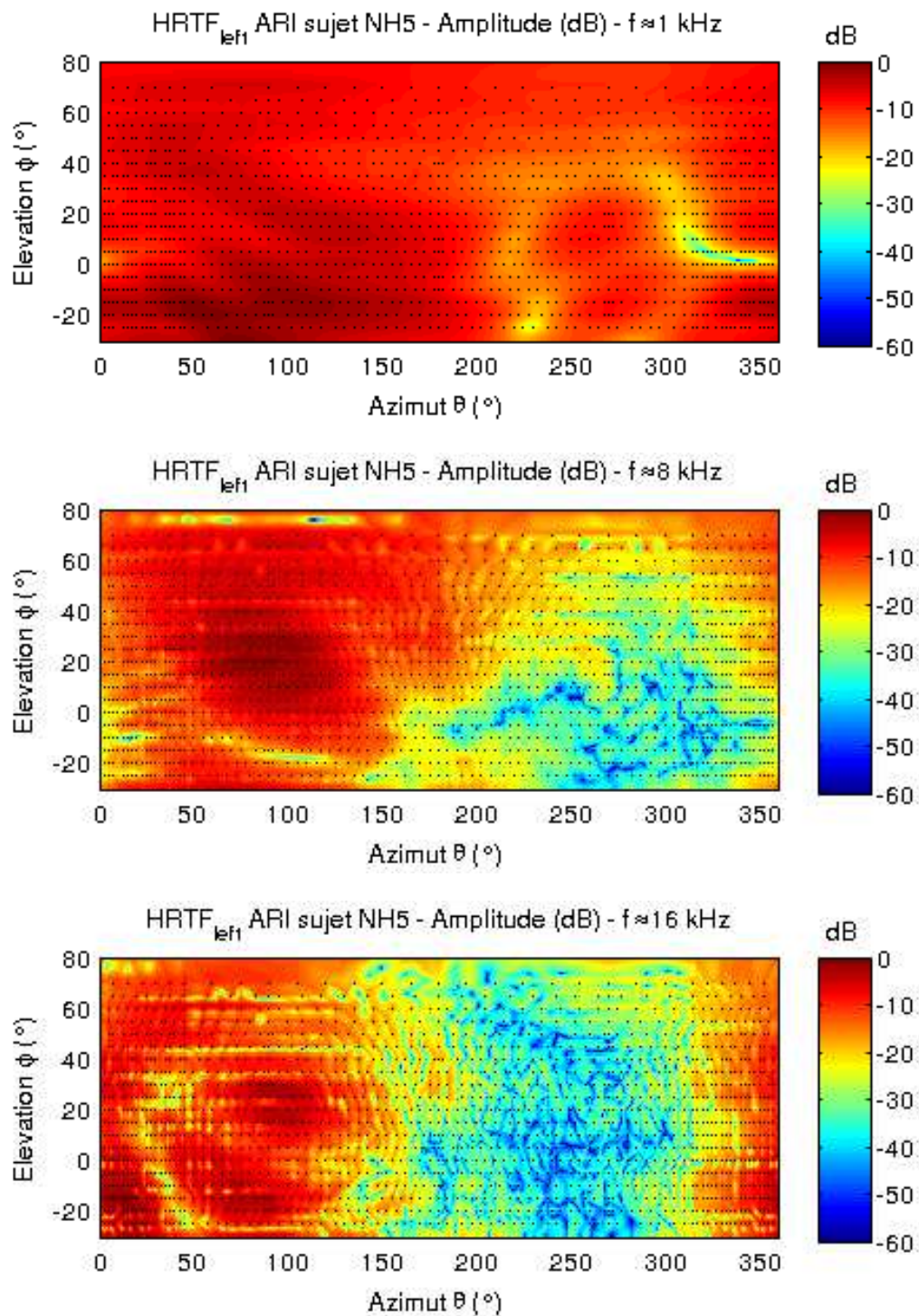


FIGURE 1.26 – Amplitude spectrale (dB) de l’interpolation linéaire complexe des HRTF gauches du sujet NH5 de la base de données ARI (équivalent de l’interpolation des HRIR). Représentation en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$ , à fréquence fixe.



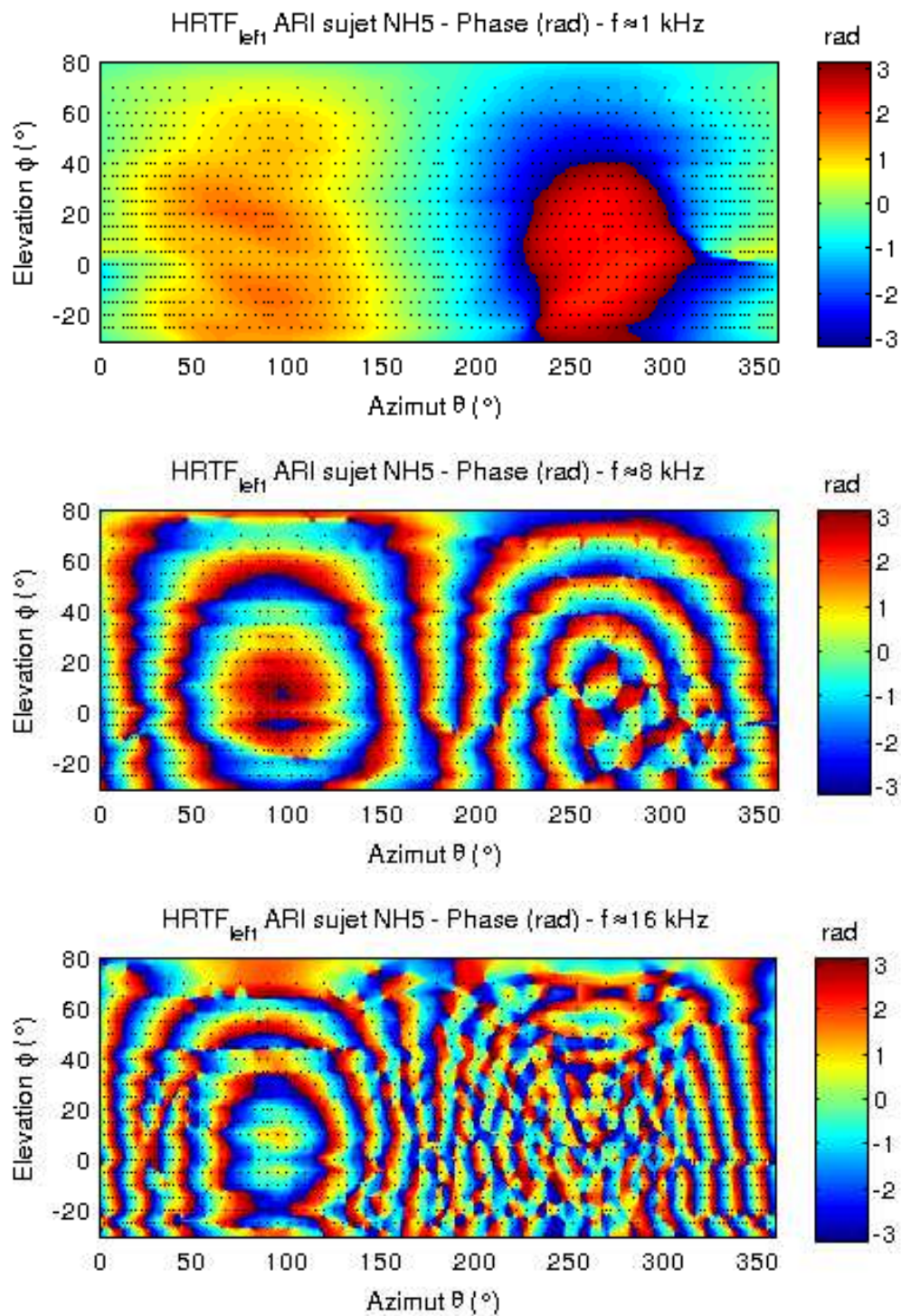


FIGURE 1.27 – Phase (radian) de l’interpolation linéaire complexe des HRTF gauches du sujet NH5 de la base de données ARI (équivalent de l’interpolation des HRIR). Représentation en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$ , à fréquence fixe.

tiale. Cet aliasing est majoritairement dû à la sous-discrétisation spatiale de la phase, qui vient perturber l'interpolation linéaire en domaine temporel. En effet, l'interpolation linéaire des HRTF fait appel à des combinaisons de filtres, qui peuvent générer des erreurs lorsque les interpolants présentent une trop grande variabilité, ou un mauvais alignement temporel.

À partir de ces résultats, une première intuition pour interpoler les HRTF serait de combiner une interpolation linéaire de l'amplitude spectrale (fig. 1.24) avec la phase d'une interpolation temporelle (fig. 1.27). Mais cette phase étant reliée à une amplitude spectrale avec fort aliasing (fig. 1.26), rien ne garantit la validité du résultat. Une nouvelle méthode, dite de "Décomposition par Modèle Morphologique", a été mise au point pour répondre à cette problématique.

### 1.3.4 Interpolation par harmoniques sphériques

En complément de l'interpolation linéaire précédente, un autre type d'interpolation a été étudié, issu des travaux de R. Duraiswami et N. Gumerov (e.g. [27], [28], [53]). Le principe général de la méthode consiste à projeter sur les harmoniques sphériques  $Y_l^m$  (eq. 1.2, fig. 1.12) des fonctions  $u$  définies sur la sphère  $S^2$ , afin de les interpoler en n'importe quel point. Comme les harmoniques sphériques forment une base orthonormée de  $L^2(S^2)$ , toute fonction  $u \in L^2(S^2)$  peut se décomposer selon la série (1.3), indépendamment de  $r$  :

$$u(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \alpha_l^m Y_l^m(\theta, \phi), \quad (1.6)$$

avec  $\alpha_l^m$  les coefficients de cette décomposition. Cette écriture autorise la formation de systèmes matriciels, qui peuvent être résolus ou inversés selon le changement de base souhaité. Pour ce faire, la série précédente doit être tronquée à une valeur fixe  $l \leq L$ , ce qui donne  $(L+1)^2$  termes. Puis, en considérant  $N$  données discrètes  $u_i$  évaluées aux points  $(\theta_i, \phi_i)$  sur la sphère  $S^2$ , la série (1.6) peut être réécrite sous la forme matricielle :

$$U = A\alpha, \quad (1.7)$$

avec  $A$  une matrice rectangulaire formée par les harmoniques sphériques tronquées, évaluées aux points de mesures  $(\theta_i, \phi_i)$ . Cette matrice peut être mal conditionnée, notamment par une répartition parfois incomplète des  $N$  mesures sur la sphère. Aussi, lorsque les coefficients  $\alpha_l^m$  sont obtenus par inversion du système linéaire (1.7), une régularisation de type Tikhonov peut-être mise en place [27] :

$$A^T U = (A^T A + \epsilon D)\alpha. \quad (1.8)$$

Dans l'équation (1.8),  $D = \text{diag}(1 + l(l + 1))$  est une matrice diagonale favorisant les harmoniques sphériques d'ordre peu élevé, pour minimiser les perturbations générées par des "trous" spatiaux présents dans les données originales. D'autre part,  $\epsilon$  est introduit comme constante de pondération de cette régularisation. Après de nombreux essais, un algorithme empirique, relativement simpliste, a été conçu pour calculer automatiquement  $\epsilon$ . En effet, les grandes valeurs de  $\epsilon$  favorisent le lissage, dont l'excès engendre une perte de précision importante dans les informations spatiales. Par ailleurs, les petites valeurs de  $\epsilon$  peuvent rendre la régularisation parfaitement inopérante. Par conséquent, ce paramètre doit être judicieusement choisi pour obtenir de bons résultats, notamment selon le conditionnement du système à résoudre ( $M = A^T A + \epsilon D$ ). Pour cela, un estimateur normalisé du conditionnement est calculé par le produit  $\|M\|_2 \times \|M^{-1}\|_2$ , avec une donnée initiale  $\epsilon_0$  fixée à  $10^{-6}$ . Tant que la valeur de l'estimateur est plus grande que  $10^4$ , ce qui correspond traditionnellement à un système mal conditionné,  $\epsilon$  est multiplié par 10 et l'estimateur est recalculé. Cette régularisation semble relativement efficace pour pallier les nombreuses erreurs numériques engendrées par les troncatures, ou les répartitions de données incomplètes. Pour résumer, une interpolation par harmoniques sphériques d'une fonction  $u \in L^2(S^2)$  peut être effectuée par l'algorithme suivant :

1. Considérer  $N$  valeurs connues de la fonction  $u$  sur la sphère, pour former le vecteur second membre  $U$  de l'équation régularisée (1.8) ;
2. Tronquer la série (1.6) à un ordre  $L$  en fonction de la précision de l'interpolation voulue, pour construire la matrice  $A$  aux  $N$  positions connues de la fonction  $u$  ;
3. Appliquer la régularisation de Tikhonov, ce qui permet a priori de prendre  $L$  relativement quelconque ;
4. Résoudre l'équation (1.8) par inversion matricielle pour calculer le vecteur  $\alpha$  des coefficients de décomposition  $\alpha_l^m$  ;
5. Construire une nouvelle matrice  $B$  d'harmoniques sphériques, évaluées aux  $M$  positions  $(\theta, \phi)$  à interpoler ;
6. Calculer le produit matrice-vecteur  $B\alpha$  pour obtenir le vecteur des valeurs de la fonction  $u$  aux positions interpolées.

Cet algorithme, parfaitement générique, peut être appliqué à toute fonction  $u \in L^2(S^2)$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Or, en décomposant les HRTF fréquence par fréquence, les données résultantes sont typiquement des fonctions de  $L^2(S^2)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Par ailleurs, leurs module, phase et transformée de Fourier (HRIR) sont aussi des

fonctions de  $L^2(S^2)$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . L'interpolation par harmoniques sphériques peut donc être appliquée à tous ces objets, pour estimer des données spatiales non mesurées. Ce type d'interpolation présente l'avantage d'être global, contrairement à l'interpolation linéaire qui est un algorithme local. De plus, la régularisation de Tikhonov induit un certain lissage, qui peut avantageusement compenser les erreurs ponctuelles inhérentes aux mesures. Enfin, les coefficients  $\alpha_l^m$  ne sont rien d'autres que les signaux utilisés par les technologies HOA présentées dans la section précédente. Aussi, cet algorithme peut-être utilisé pour assurer la conversion des mesures discrètes aux signaux ambisonics. Néanmoins, la répartition non uniforme des données issues de systèmes de mesures mécaniques peut générer des erreurs difficilement maîtrisables, notamment à haute fréquence pour des bases de HRTF non suffisamment denses.

Pour limiter le nombre de figures, cet algorithme a uniquement été appliqué à l'amplitude spectrale des HRTF du sujet NH5 de la base ARI (fig. 1.28 et 1.29). Ces données sont donc à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , avec  $N = 1550$  mesures sur une calotte sphérique d'élévation comprise entre  $-30^\circ < \phi < 80^\circ$  (points noirs). Dans un premier temps, la troncature a été arbitrairement fixée à  $L = \lfloor \sqrt{N} \rfloor = 39$  (fig. 1.28) et la constante de régularisation calculée vaut  $\epsilon = 1$ , significative d'un système assez mal conditionné. Au vu des données manquantes pour compléter la sphère, cette valeur n'est pas vraiment surprenante. La comparaison de ces résultats aux mesures brutes (fig. 1.22), ainsi qu'à l'interpolation linéaire (fig. 1.24), semble montrer que ce type d'algorithme est bien adapté à l'interpolation de ces HRTF, et ce, quelque soit la fréquence. Ceci est principalement dû à la grande densité spatiale des mesures originales, autorisant un ordre élevé d'harmoniques sphériques. Cette approche avec  $L$  grand conduit à une interpolation fidèle des données, qui ressemble finalement beaucoup à une interpolation linéaire (fig. 1.24). En effet, un des intérêts de cet algorithme réside dans sa considération globale de l'information spatiale, ce qui est assez peu visible sur la figure (fig. 1.28) tant l'ordre de troncature est élevé. Aussi, un ordre de troncature arbitraire a été fixé à  $L = 15$ , tout en conservant les autres paramètres à l'identique. Le coefficient  $\epsilon$  calculé vaut cette fois 0.1, la matrice étant mieux conditionnée. Un système extrêmement surdéterminé est donc résolu, engendrant un moyennage spatial de l'ensemble des données disponibles. Les résultats de cette approximation sont représentés sur la figure 1.29. Quelle que soit la fréquence, un lissage est clairement visible, tout en conservant les principales variations des HRTF originales (fig. 1.22). Ceci a pour conséquence d'égaliser sphériquement les mesures entre elles, pour en dégager l'essentiel. En faisant l'hypothèse (raisonnable) que le système auditif est limité en précision, donc en ordre de troncature d'harmoniques sphériques, cette méthode permet de



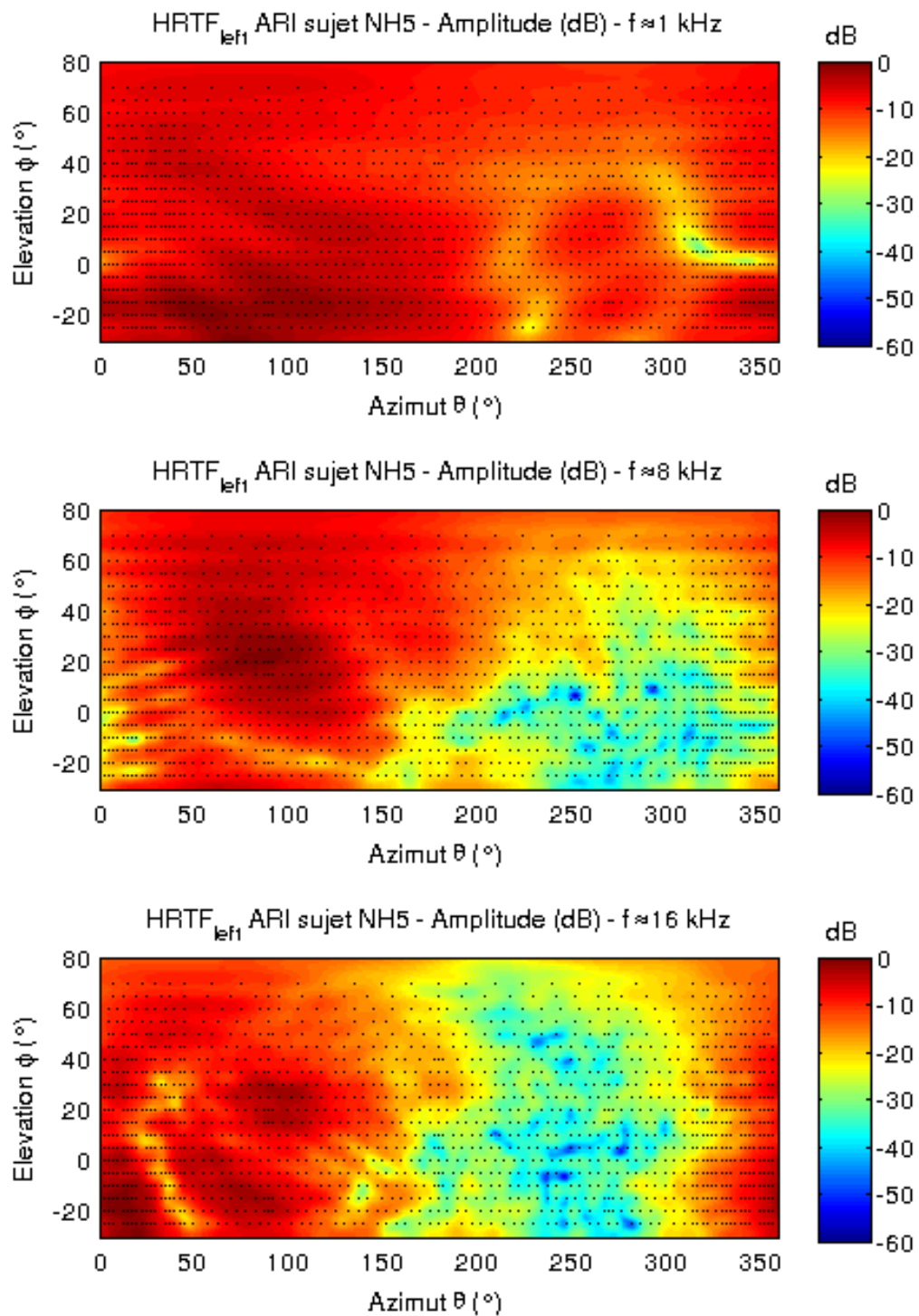


FIGURE 1.28 – Interpolation par harmoniques sphériques ( $L = 39$ ) de l'Amplitude spectrale (dB) des HRTF gauches du sujet NH5 de la base de données ARI. Représentation en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$ , à fréquence fixe.

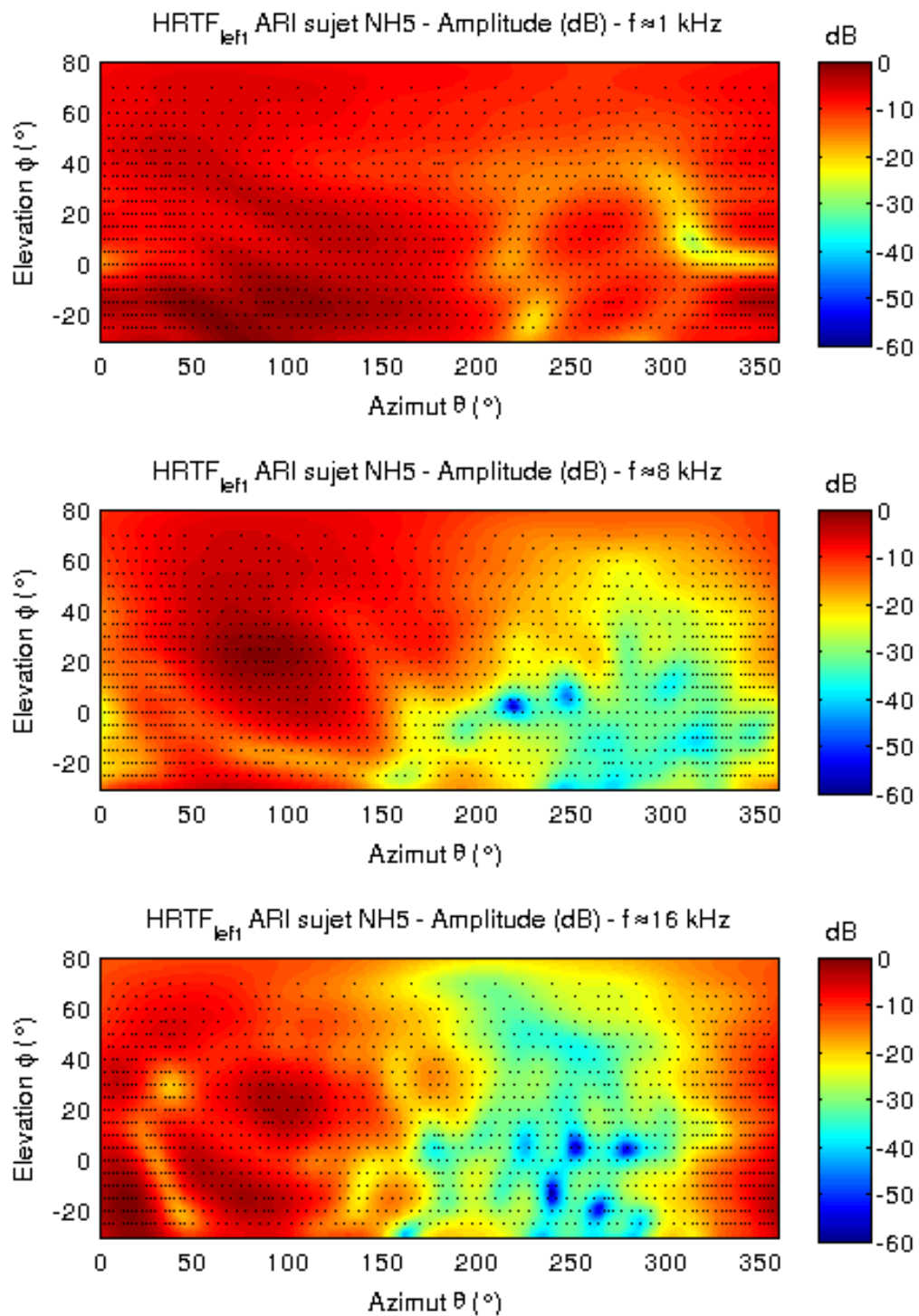


FIGURE 1.29 – Interpolation par harmoniques sphériques ( $L = 15$ ) de l'Amplitude spectrale (dB) des HRTF gauches du sujet NH5 de la base de donnée ARI. Représentation en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$ , à fréquence fixe.

généraliser des bases de données HRTF particulièrement adaptées à la synthèse binaurale. Il reste néanmoins à trouver par des tests subjectifs l'ordre de troncature optimal minimisant les erreurs de localisation.

Que ce soit pour la conversion des HRTF en format HOA, pour l'égalisation sphérique de l'information, ou encore pour l'interpolation globale et automatique des mesures, une attention particulière a été portée à cette méthode durant cette recherche doctorale. Ces études ont conduit à la publication de deux articles de conférence [8] et [9]. Le premier de ces articles concerne l'interpolation harmonique de l'ITD, qui est une fonction de  $L^2(S^2)$  dans  $\mathbb{R}$ . Le second propose une analyse approfondie de la précision de cet algorithme, en mesurant l'erreur d'une interpolation des HRTF sur une grille de mesure dense déraffinée.

## 1.4 Décomposition par Modèle Morphologique

La Décomposition par Modèle Morphologique est issue du constat classique que les modèles sphériques de Larcher [57] et Duda [25] (fig. 1.16 et 1.17) se retrouvent nettement dans les représentations temporelles des HRIR mesurées (fig. 1.21). Aussi, de nombreuses recherches ont été faites et sont actuellement en cours, pour affiner ces modélisations en construisant analytiquement et/ou numériquement des HRTF s'approchant de mesures réelles, en phase comme en amplitude spectrale (e.g. [4], [26], [37], [52], [72], [81]). Toutes ces méthodes ont comme point commun de s'inscrire dans une logique de "**construction**" de modèles de HRTF, se voulant de plus en plus proches de mesures expérimentales. La simulation numérique par *Boundary Element Method* accélérés en *Fast Multipole* sur des maillages de tête individuels haute-résolution en est un aboutissement des plus complexes (e.g. [30], [39], [56]). La Décomposition par Modèle Morphologique suit une démarche inverse, qui consiste cette fois à "**retirer**" des mesures originales les solutions exactes ou approchées issues de modélisations élémentaires. Les HRTF deviennent dès lors le résultat d'un couplage astucieux entre modèle(s) et mesures, ayant vocation à exploiter les avantages de chacun. Cette distinction de cheminement est le point fondamental de cette nouvelle approche, dont le formalisme, ainsi que trois applications, sont détaillés dans la suite de ce chapitre.

### 1.4.1 Principe et résultats

La Décomposition par Modèle Morphologique s'effectue en trois étapes, dans un contexte de traitement du signal en régime harmonique. Tout d'abord,

des fonctions de transfert HRTF originales  $H(X_i)$ , mesurées en  $N$  points de l'espace  $X_i = (r_i, \theta_i, \phi_i)$ , sont décomposées en une série de filtres élémentaires paramétriques  $H^m(p^m, X_i)$ . Ces filtres sont des solutions analytiques ou numériques de modèle  $m$ , paramétrées par un jeu de données  $p^m$  en lien avec la morphologie. La fonction de transfert résiduelle issue de cette décomposition sera notée  $H^r(X_i)$  et est, a priori, parfaitement inconnue. La Décomposition par Modèle Morphologique s'écrit alors :

$$H(X_i) = H^r(X_i) \cdot \prod_m H^m(p^m, X_i), \quad \forall i \in [1, N]. \quad (1.9)$$

Cette décomposition est équivalente à une décomposition additive de l'amplitude en dB et de la phase en radians. La seconde étape consiste en la réécriture de cette décomposition (1.9) par filtrage inverse, afin d'en expliciter le résidu :

$$H^r(X_i) = \frac{H(X_i)}{\prod_m H^m(p^m, X_i)}, \quad \forall i \in [1, N]. \quad (1.10)$$

Ce filtre résiduel  $H^r(X_i)$  peut alors être étudié pour valider, invalider, ou affiner la décomposition. En effet, le résidu est directement équivalent à des erreurs de modélisation, calculées par soustraction. Par exemple, dans le cas idéal où le modèle coïnciderait exactement avec les données mesurées, le résidu serait uniformément nul pour l'amplitude spectrale et la phase, et égal en temps à une impulsion de Dirac. En pratique, si le module ou la phase du résidu présente une plus grande régularité (des variations plus petites) que la fonction de transfert originale  $H(X_i)$ , alors la décomposition peut être jugée satisfaisante. Dans le cas contraire, il faudra retravailler la modélisation d'un ou plusieurs éléments, séparément ou non. Enfin, la dernière étape réside en la recombinaison des HRTF, en exploitant notamment les solutions issues des modèles et connues en tous points de l'espace. Des propriétés propres aux modèles, ainsi que les paramètres  $p^m$  peuvent aussi être exploités pendant cette étape, en fonction du but recherché.

À titre d'exemple d'utilisation de cette méthode, trois applications sont détaillées dans la suite de cette section, à savoir l'interpolation optimisée des HRTF, la sous-discrétisation spatiale et l'individualisation. Pour ce faire, la Décomposition par Modèle Morphologique (1.9) a été appliquée au modèle sphérique de Duda [25], dont la fonction de transfert (1.5) sera notée  $H^{sp}(a, X_i)$ . Ce choix est guidé par un confort d'utilisation, puisque ce modèle est un modèle analytique abouti, aisément calculable. Les solutions sont donc connues en tous points de l'espace, avec en outre un rayon de tête paramétrique  $a$ . Cette décomposition s'écrit alors :

$$H(X_i) = H^r(X_i) \cdot H^{sp}(a, X_i). \quad (1.11)$$

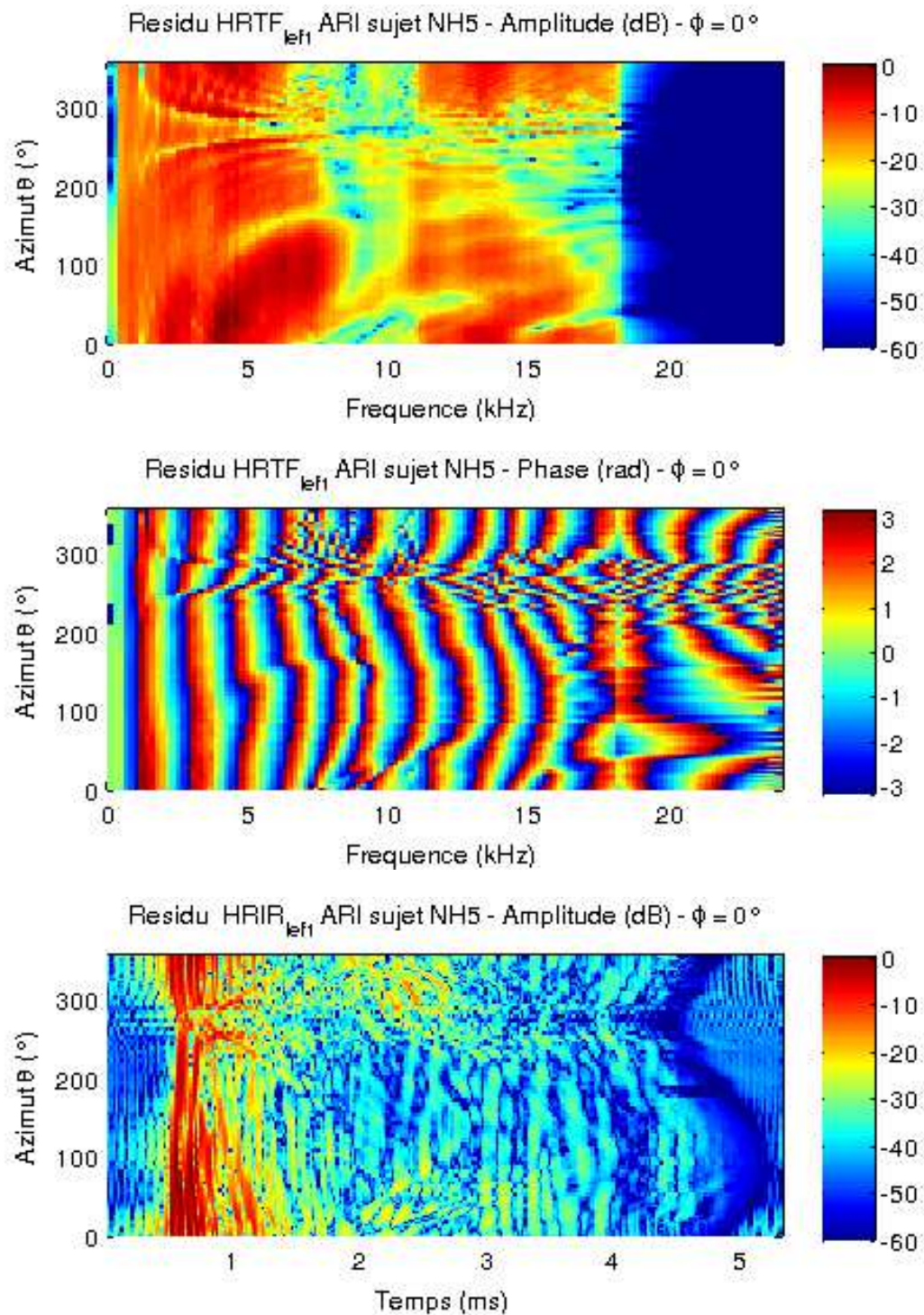


FIGURE 1.30 – Représentations fréquentielles et temporelle dans le plan azimutal du résidu  $H^r$  de la décomposition sphérique des HRTF gauches du sujet NH5 de la base ARI. (Haut) Amplitude spectrale. (Milieu) Portrait de phase. (Bas) Amplitude signal HRIR<sub>50</sub>

La figure 1.30 donne les représentations azimuth-fréquence de l'amplitude spectrale et de la phase du résidu  $H^r(X_i)$ , aux points de mesures  $X_i$ . Ces valeurs sont calculées par filtrage inverse de  $H^{sp}(a, X_i)$  (eq. 1.10), avec un rayon de tête sphérique  $a = 8.74$  cm, correspondant au rayon de tête moyen [58]. Il en ressort de prime abord que le portrait de phase de ce résidu est beaucoup plus droit que celui des HRTF originales (fig. 1.21) et présente, dans l'ensemble, moins de variations, en fréquence comme en azimuth. Cependant, les sources contralatérales ont toujours des irrégularités locales assez fortes. Une des conséquences de ce résultat réside dans l'alignement temporel des HRIR résiduelles, clairement visible sur la représentation en temps azimuth-fréquence du résidu (fig. 1.30). Par ailleurs, en comparaison avec les HRTF originales (fig. 1.21), l'amplitude spectrale du résidu semble avoir été globalement égalisée, notamment certains creux en amplitude de l'oreille contralatérale. En revanche, des stries apparaissent, similaires au portrait d'amplitude des HRTF sphériques (fig. 1.17). Ces stries sont la conséquence d'une modélisation trop grossière, ou mal adaptée, qui vient surcompenser les HRTF originales. Ceci montre les limitations d'un modèle de HRTF sphérique, notamment pour l'oreille contralatérale. Il faudrait donc l'affiner, en conservant certaines propriétés visiblement bénéfiques pour la phase.

Les figures 1.31 et 1.32 viennent compléter les représentations azimuthales précédentes, en donnant l'amplitude spectrale (dB) et le portrait de phase (radian) en azimuth-élévation du résidu  $H^r$  de la décomposition sphérique de rayon  $a = 8.74$  cm, pour les HRTF gauches du sujet NH5 (base ARI). Au même titre que pour les représentations azimuth-fréquence (fig. 1.30), l'amplitude spectrale et la phase sont globalement lissées et ce, quelle que soit la fréquence. D'une part, le portrait de phase présente particulièrement peu de variations, comparé à l'original avant décomposition (fig. 1.23), d'autre part l'amplitude spectrale semble avoir été partiellement "rebouchée", notamment dans la zone contralatérale. Cependant, cette même zone présente encore des irrégularités importantes, en amplitude et en phase. De plus, des sauts de phase verticaux sont à noter en haute fréquence, caractérisés par des stries horizontales à 8 et 16 kHz (fig. 1.32). Celles-ci peuvent être causées par le dispositif expérimental, qui compte un haut-parleur différent par élévation et dont les variations résiduelles sont faibles au regard de la fréquence élevée.

Pour conclure, il semblerait que la décomposition de HRTF par un modèle sphérique de Duda soit plutôt pertinente, surtout pour la phase. L'analyse du résidu  $H^r$  montre une bonne concordance du modèle, surtout en basse fréquence. De plus, même si par construction  $H^r$  n'a pas de sens physique véritable, les résultats de la décomposition précédente donnent l'impression que ce résidu pourrait caractériser des HRTF "privées" d'une tête sphérique. Mais cette hypothèse reste encore à démontrer... En revanche, cette modé-



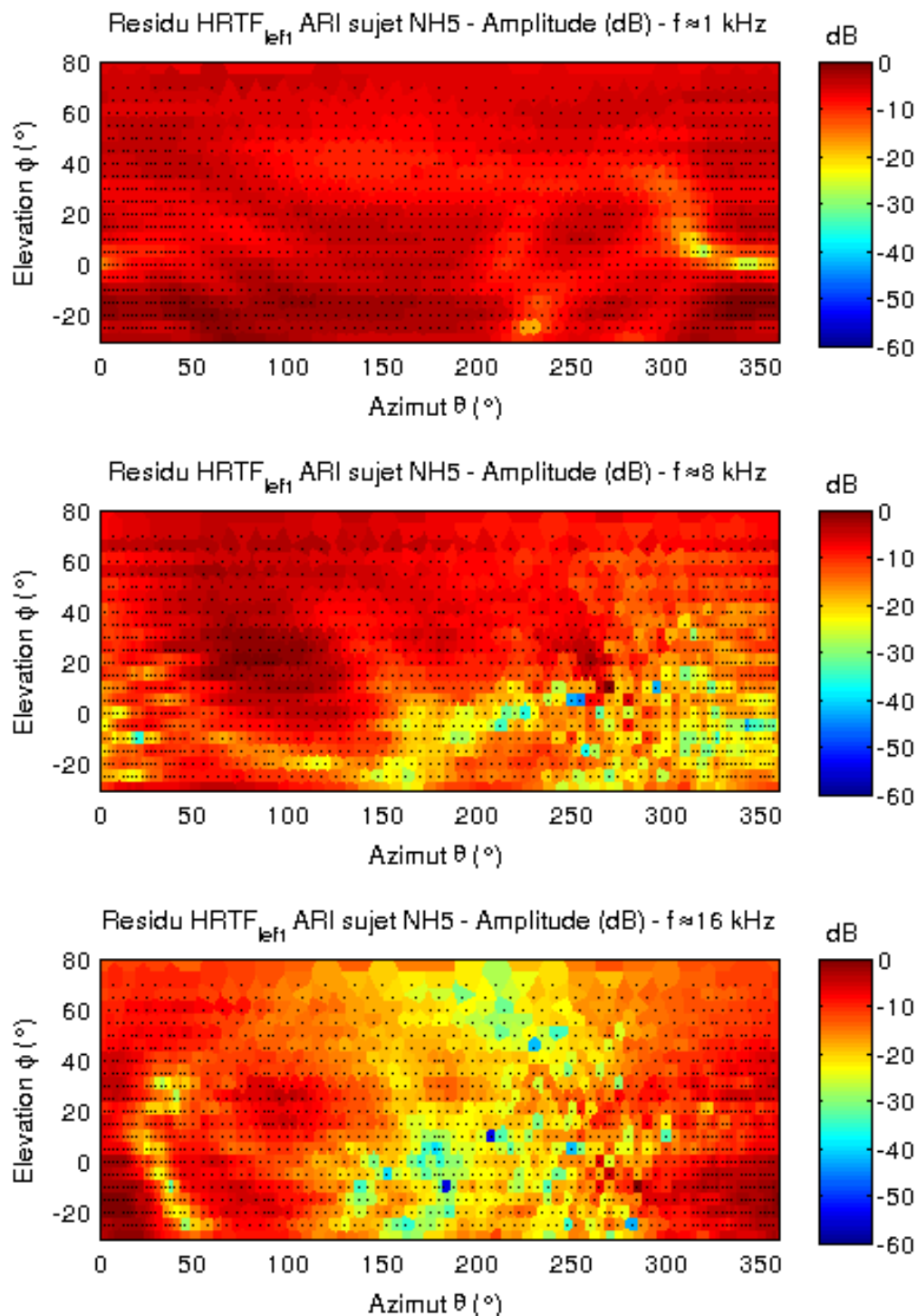


FIGURE 1.31 – Amplitude spectrale (dB) du résidu  $H^r$  de la décomposition sphérique des HRTF gauches du sujet NH5 de la base ARI. Représentation en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$ , à fréquence fixe. Les positions des mesures sont données par les points noirs.

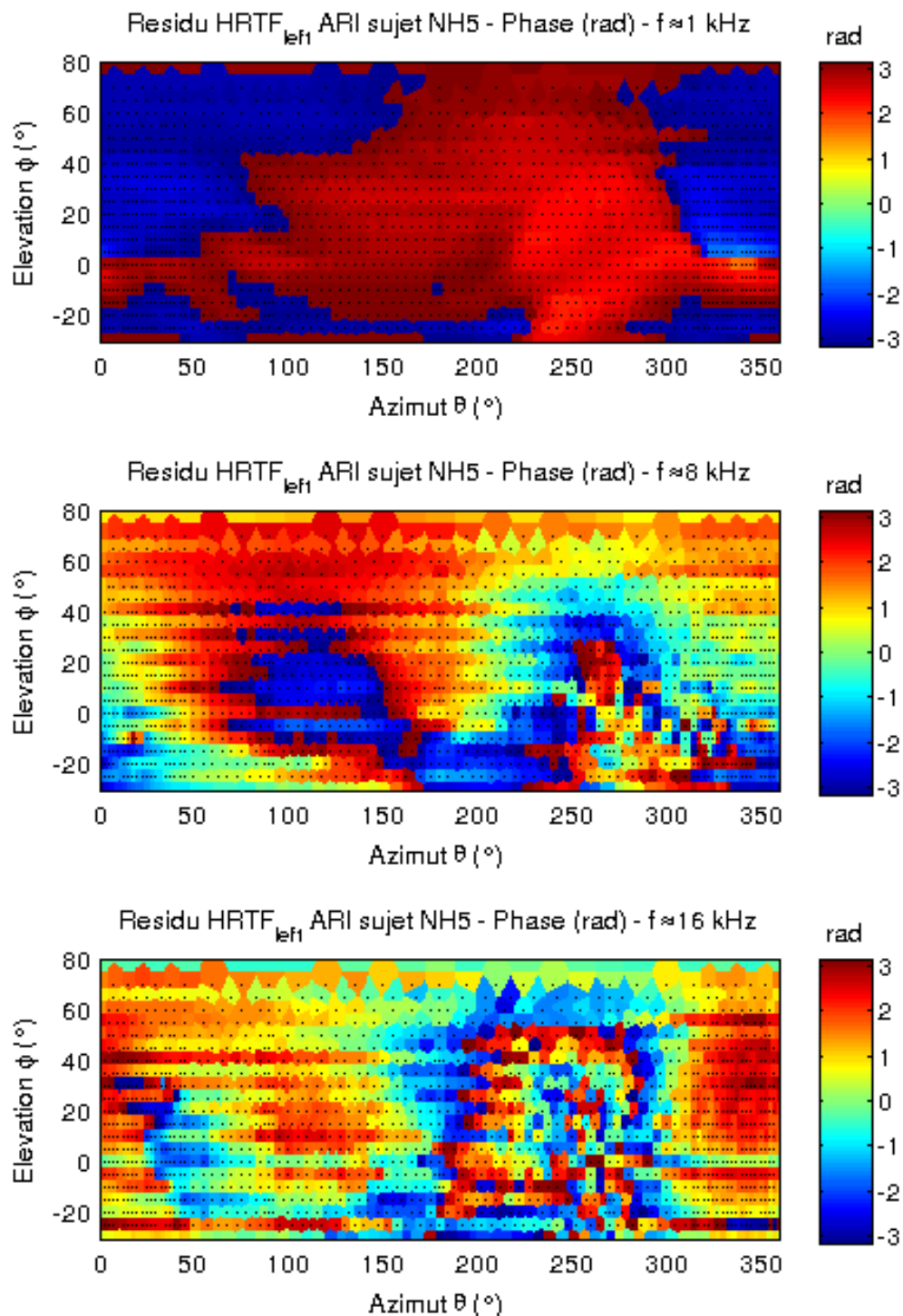


FIGURE 1.32 – Portrait de phase (rad) du résidu  $H^r$  de la décomposition sphérique des HRTF gauches du sujet NH5 de la base ARI. Représentation en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$ , à fréquence fixe. Les positions des mesures sont données par les points noirs.



lisation montre des limites importantes pour les sources contralatérales qui semblent assez mal prises en compte, surtout en haute fréquence. Ceci peut s’expliquer par la sphéricité du modèle qui tend à exagérer la reconstruction des ondes contralatérales par des oreilles diamétralement opposées, induisant une mise en phase contraire à la réalité. Une première amélioration de cette décomposition consisterait par exemple en une modélisation ovoïdale de la tête, avec des oreilles non diamétralement opposées [26]. Mais il n’existe pas de solutions analytiques simples à ce problème, qui nécessite dès lors des outils de simulation numérique. Aussi, malgré ce défaut, trois applications de la décomposition sphérique sont présentées.

### 1.4.2 Interpolation optimisée

Comme expliqué précédemment, la question de l’interpolation des HRTF n’est pas triviale de par la grande variabilité de ces filtres, en temps comme en espace [45]. Une première application de la Décomposition par Modèle Morphologique consiste à optimiser l’interpolation spatiale en tenant compte de solutions modélisées, connues en tous points de l’espace.

Plus exactement, les figures 1.31 et 1.32 montrent que le résidu  $H^r(X_i)$ , issu du filtrage inverse d’une HRTF mesurée  $H(X_i)$  par sa décomposition sphérique  $H^{sp}(a, X_i)$ , est plus régulier que la fonction de transfert originale (fig. 1.22 et 1.23), notamment en phase. En complément, la représentation temporelle de ce résidu (fig. 1.30) montre un alignement azimutal des filtres. Fort de ces deux constats, une idée naturelle consiste à interpoler linéairement en espace le résidu  $H^r(X_i)$  sous sa forme temporelle, ce qui revient par transformée de Fourier à une interpolation du résidu sous sa forme complexe. Ceci fait, des HRTF peuvent être recomposées, calculées avec les valeurs des HRTF sphériques de Duda aux points interpolés. Une grille quelconque peut alors être générée, en tout point de l’espace. Par ailleurs, si les modèles de décomposition et de recomposition sont identiques et que l’interpolation n’est pas régularisante, alors les HRTF aux points de mesure originaux reste inchangées par cette opération. Les figures 1.33 et 1.34 représentent respectivement l’amplitude spectrale et le portrait de phase des HRTF gauches du sujet NH5 de la base ARI, après interpolation optimisée par décomposition morphologique. La nouvelle grille possède un pas constant de  $1^\circ$  en azimut et élévation, au même titre que les représentations précédentes (fig. 1.22 à 1.27). La symétrie sphérique du portrait de phase semble cette fois plutôt bien reconstituée, y compris à 16 kHz. Le résultat est lisse sans aberrations flagrantes, avec une causalité respectée, même pour les sources contralatérales. En revanche, même si l’interpolation de l’amplitude spectrale semble réussie à 1 et 8 kHz, un aliasing spectral est toujours visible à 16 kHz (fig. 1.33).

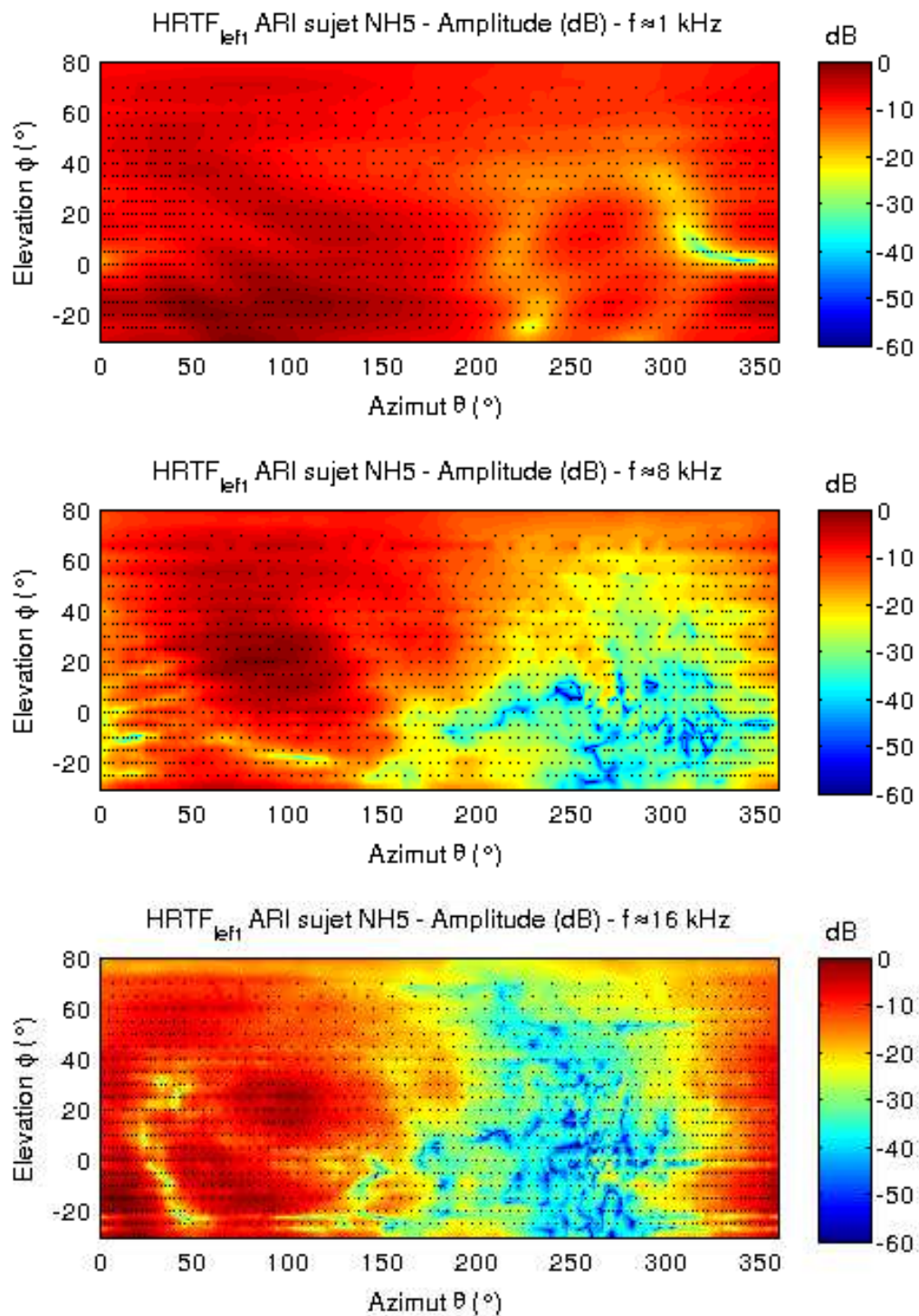


FIGURE 1.33 – Amplitude spectrale (dB) de l’interpolation linéaire par décomposition sphérique, des HRTF gauches du sujet NH5 de la base ARI. Représentation en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$ , à fréquence fixe.

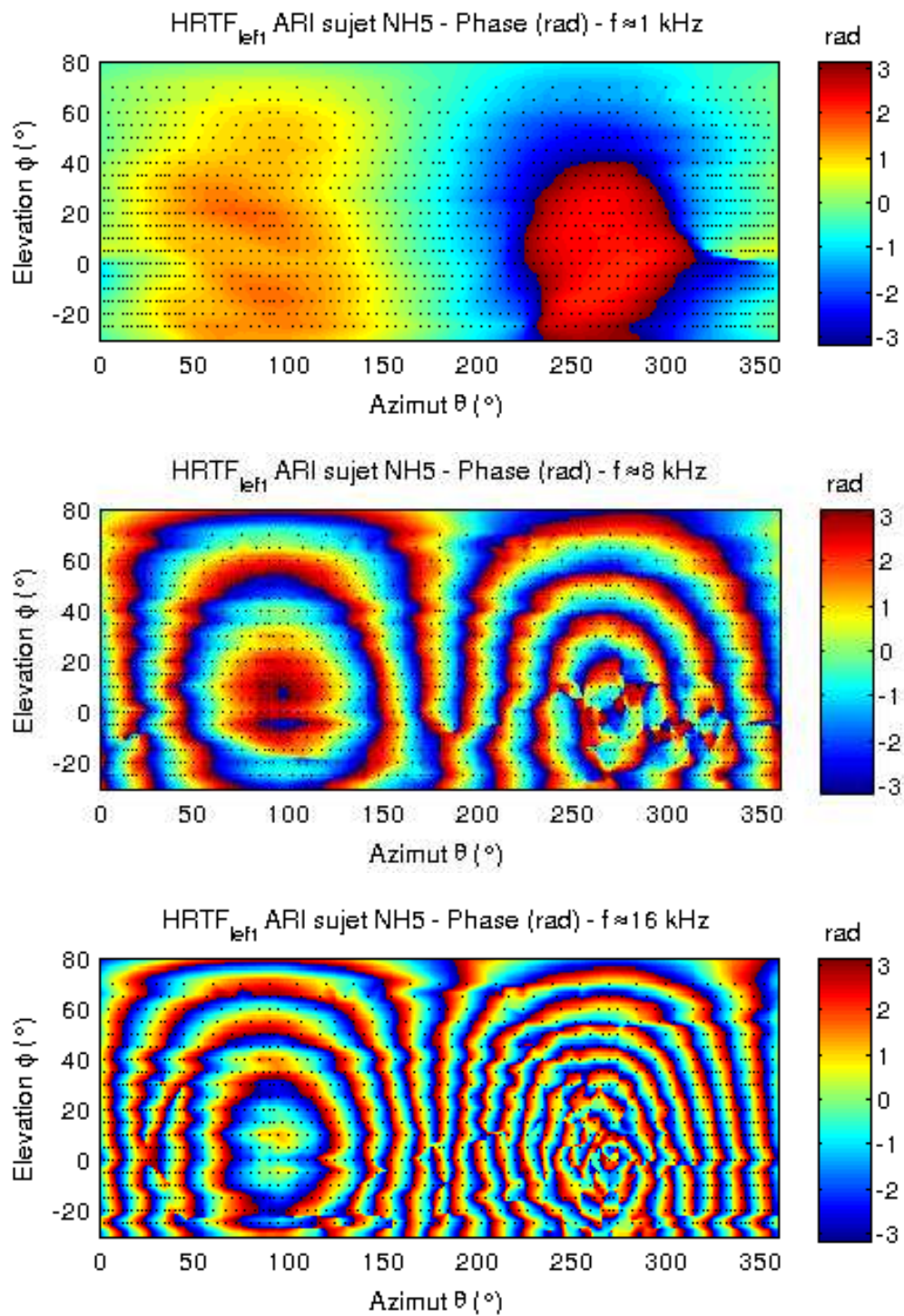


FIGURE 1.34 – Portrait de phase (radian) de l'interpolation linéaire après décomposition par modèle sphérique, HRTF gauches du sujet NH5 de la base ARI. Représentation en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$ , à fréquence fixe.

Bien que plus faible qu'en interpolation linéaire directe (fig. 1.26), cette erreur montre néanmoins les limites du modèle, qui mériterait donc d'être affiné.

Pour conclure, cette interpolation par décomposition morphologique est suffisamment robuste pour être mise en pratique et les résultats de test d'écoute à la volée sont plutôt satisfaisants. Il reste cependant des artefacts d'interpolation audibles pour les sources situées proches de l'axe interaural, dues aux erreurs visibles dans les représentations du résidu  $H^r(X_i)$  (fig. 1.31 et 1.32). Enfin, d'autres méthodes d'interpolation (quadratiques, cubiques, harmoniques sphériques, etc.) peuvent être appliquées sur le résidu  $H^r(X_i)$  et ce, indépendamment de la décomposition morphologique choisie.

### 1.4.3 Variations de position

Une des principales applications de l'interpolation optimisée des HRTF concerne le *Head-Tracking*, qui consiste à corriger en temps réel la direction spatiale  $(\theta, \phi)$  des sources sonores, en fonction des rotations de la tête. L'utilisation d'un tel dispositif augmente singulièrement la qualité d'expérience binaurale, grâce à un rendu dynamique de l'espace, contrôlé consciemment (ou inconsciemment) par l'utilisateur (e.g. [10], [12]). Par exemple, l'image sonore est plus stable, la localisation des directions spatiales des sources sonores est facilitée et l'externalisation est, elle aussi, bien meilleure. Pour ce faire, l'ensemble des directions de l'espace doit être synthétisable par rendu binaural, ce qui implique une définition continue des HRTF. Comme les mesures sont discrètes par nature, il est nécessaire de recourir à des algorithmes d'interpolations à la fois rapides et transparents.

Cependant, l'accès à un *Head-Tracker* n'était pas possible lors de la réalisation du spatialisateur *PifPaf3D*, c'est pourquoi une méthode de rendu dynamique sans *Head-Tracking* a été imaginée. La démarche consiste à rendre mobiles les sources sonores pour profiter d'indices de localisation dynamiques (e.g. [47], [84]), sans pour autant détériorer le rendu binaural par un détimbrage permanent. Des trajectoires spatiales autour des positions fixes ont donc été mises en place, d'amplitude angulaire de l'ordre de la *Just Noticeable Difference* ( $1^\circ$  à  $4^\circ$  selon l'azimut  $\theta$ ), afin de s'adresser à la partie inconsciente de la localisation spatiale.

Une trajectoire de micro-variations est représentée par des ronds noirs sur la figure 1.35, en azimut-élévation. Elle est tout d'abord superposée aux HRTF brutes du sujet NH5 de la base ARI, à 16 kHz, autour de la position  $\theta = 180^\circ$  et  $\phi = 0^\circ$  (en haut). Comme la JND est de l'ordre du degré, l'amplitude maximale du mouvement doit être du même ordre, arbitrairement fixé à  $2^\circ$ . Il apparaît clairement que sans interpolation spatiale des HRTF, les micro-variations sont proprement inutiles, puisque le même filtre HRTF

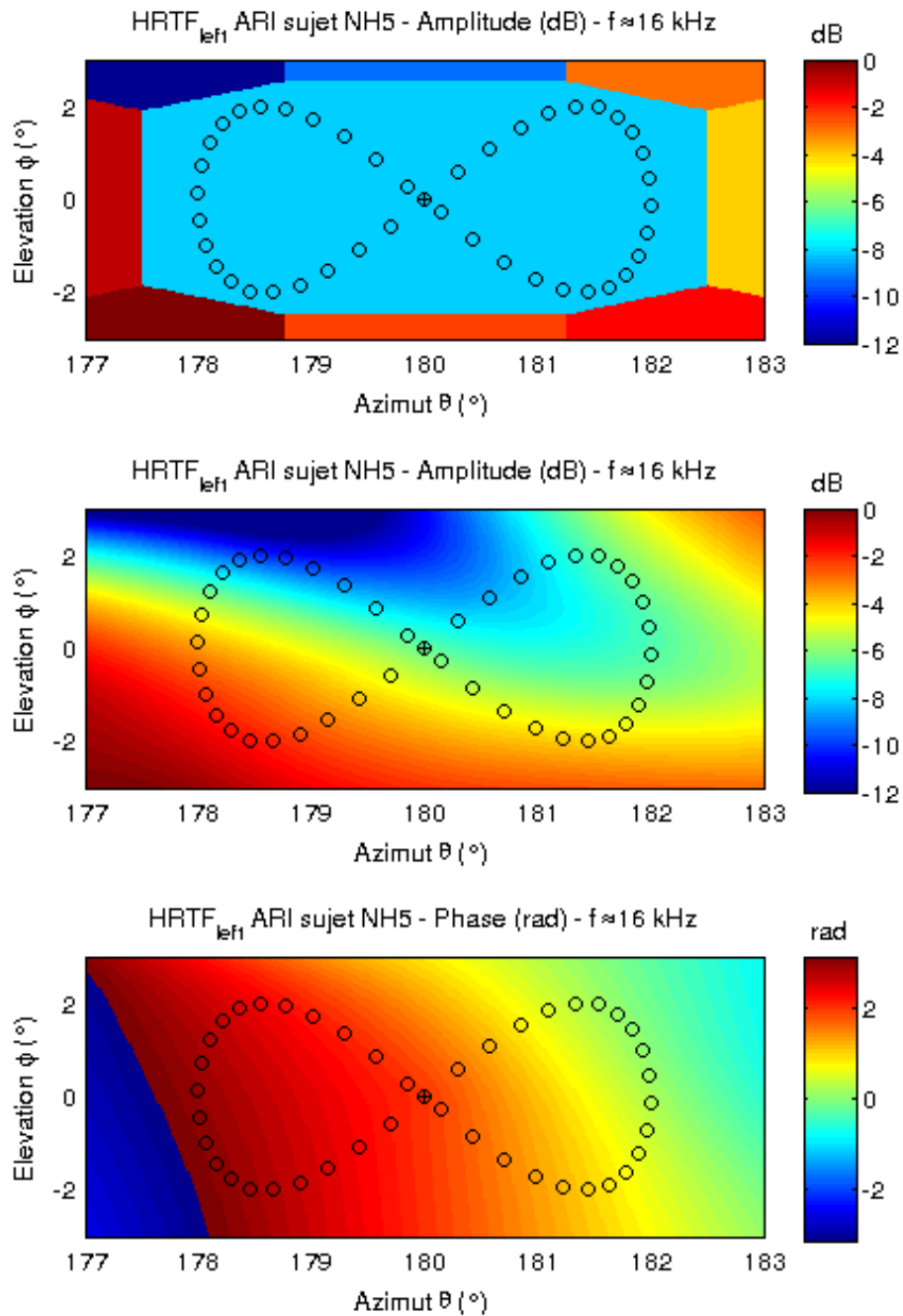


FIGURE 1.35 – Représentation en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$  à 16 kHz des HRTF gauches du sujet NH5 de la base ARI, centrées sur la position  $\theta = 180^\circ$  et  $\phi = 0^\circ$ . Les positions successives des micros-variations sont représentées par les ronds noirs. (Haut) Amplitude spectrale (dB) des mesures brutes. (Milieu) Amplitude spectrale (dB) après interpolation optimisée par décomposition sphérique. (Bas) Phase (rad) après interpolation optimisée par décomposition sphérique.

est toujours utilisé, quelle que soit la position de la source sonore dans l'espace. Les deux représentations suivantes montrent en revanche l'intérêt d'une interpolation optimisée des HRTF, ici par décomposition sphérique. Sur la trajectoire du milieu, des variations en amplitude spectrale sont cette fois bien présentes, principalement en élévation (entre  $-12$  et  $-2$  dB). Sur la trajectoire du bas, les isovalues de phase (agissant notamment sur l'ITD) sont plutôt verticales, ce qui conduit à des variations principalement azimutales. Ces deux constats peuvent s'expliquer par la géométrie de la tête et du pavillon. En effet, il est coutumier de dire que les variations d'ITD sont principalement azimutales, car reliées à la forme plutôt sphérique de la tête. D'autre part, les fortes variations spectrales sont surtout causées par la géométrie du pavillon, qui génère de plus grandes variations dans les HRTF en élévation qu'en azimut (e.g. [15], [12]). Fort de ces deux remarques, la trajectoire des micro-variations représentée sur la figure 1.35 a donc été choisie de manière à exciter à la fois la phase et l'amplitude spectrale, sans a priori. Par ailleurs, ces résultats se retrouvent bien entendu pour des fréquences plus basses que 16 kHz, mais avec des variations moins intenses.

Un stage a été encadré durant cette thèse pour évaluer subjectivement l'impact des micro-variations, mais ces travaux n'ont pas abouti à une conclusion probante. De plus, de nouvelles recherches pourraient être menées sur ce thème, notamment pour générer des trajectoires optimales, trouver des amplitudes et des périodes d'oscillations adaptées, ou encore comparer des trajectoires continues contre des apparitions stochastiques localisées. Enfin, le traitement du signal audio se faisant par blocs de données, la question du nombre de blocs nécessaires pour construire proprement une trajectoire est encore à déterminer.

#### 1.4.4 Déraffinement spatial d'une base de données

Les résultats de l'interpolation par décomposition morphologique ouvrent une perspective intéressante sur la discrétisation spatiale des HRTF. En effet, une interpolation de haute fidélité permet notamment de réduire le nombre d'interpolants nécessaires à la reconstruction spatiale des données. Or, la représentation en azimut-élévation à fréquence fixe de l'amplitude spectrale de la HRTF brute du sujet NH5 de la base ARI (fig. 1.22) laisse supposer une sur-discrétisation du problème. En effet, moyennant une égalisation visible des haut-parleurs entre eux (stries horizontales), les variations en module semblent plutôt faibles au regard de l'échantillonnage spatial des mesures, compris entre  $2.5^\circ$  et  $5^\circ$  en azimut et élévation.

Aussi, un déraffinement arbitraire a été envisagé, de l'ordre de  $15^\circ$  en moyenne en azimut et élévation. De plus, une grille uniforme est préférentiel-

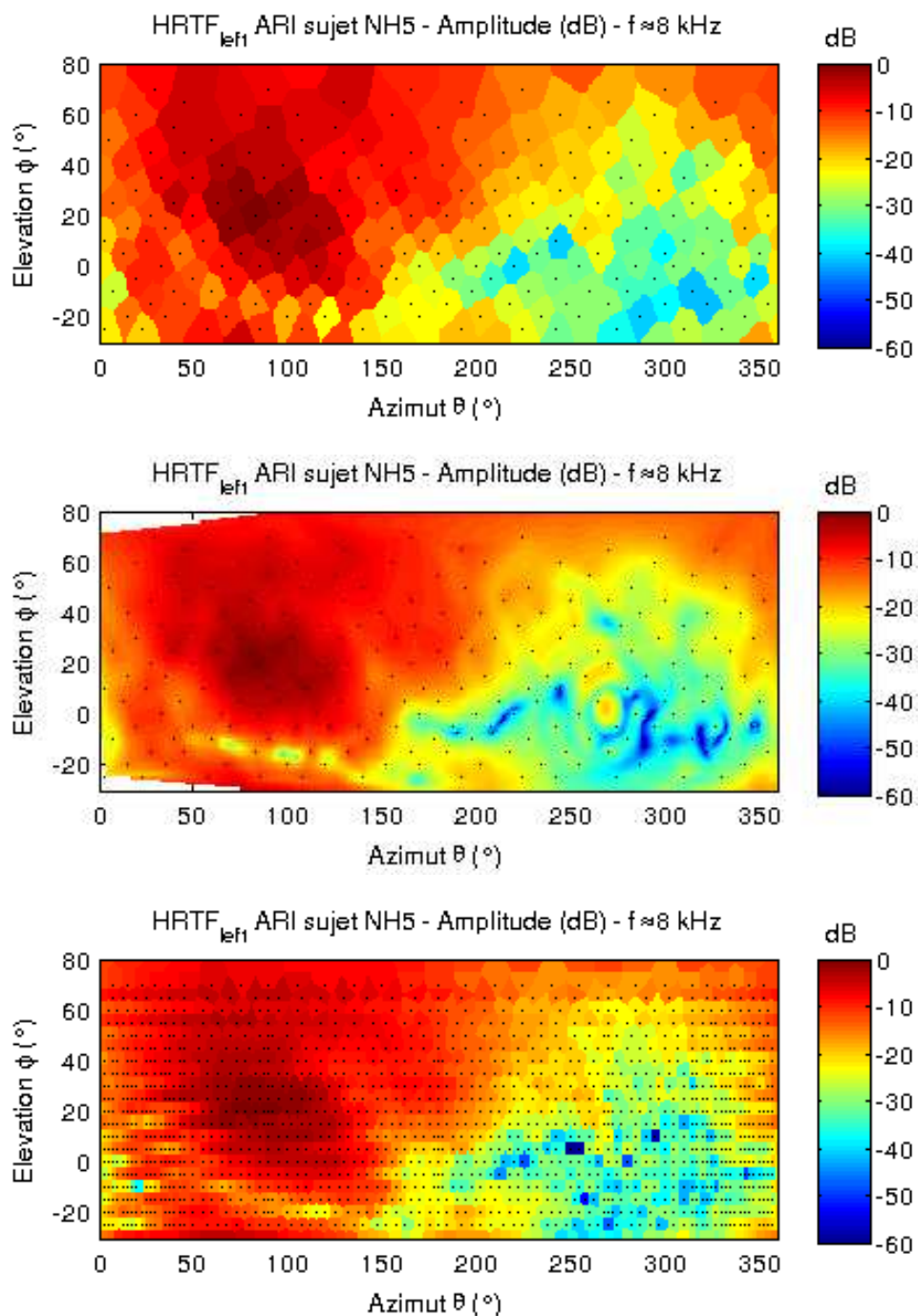


FIGURE 1.36 – Représentation en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$  à 8 kHz de l’amplitude spectrale (dB) des HRTF gauches du sujet NH5 de la base ARI. Les positions des mesures sont données par les points noirs. (Haut) Mesures brutes uniformément déraffinées tous les  $15^\circ$ . (Milieu) Interpolation par décomposition sphérique sur la grille déraffinée. (Bas) Mesures brutes originales.



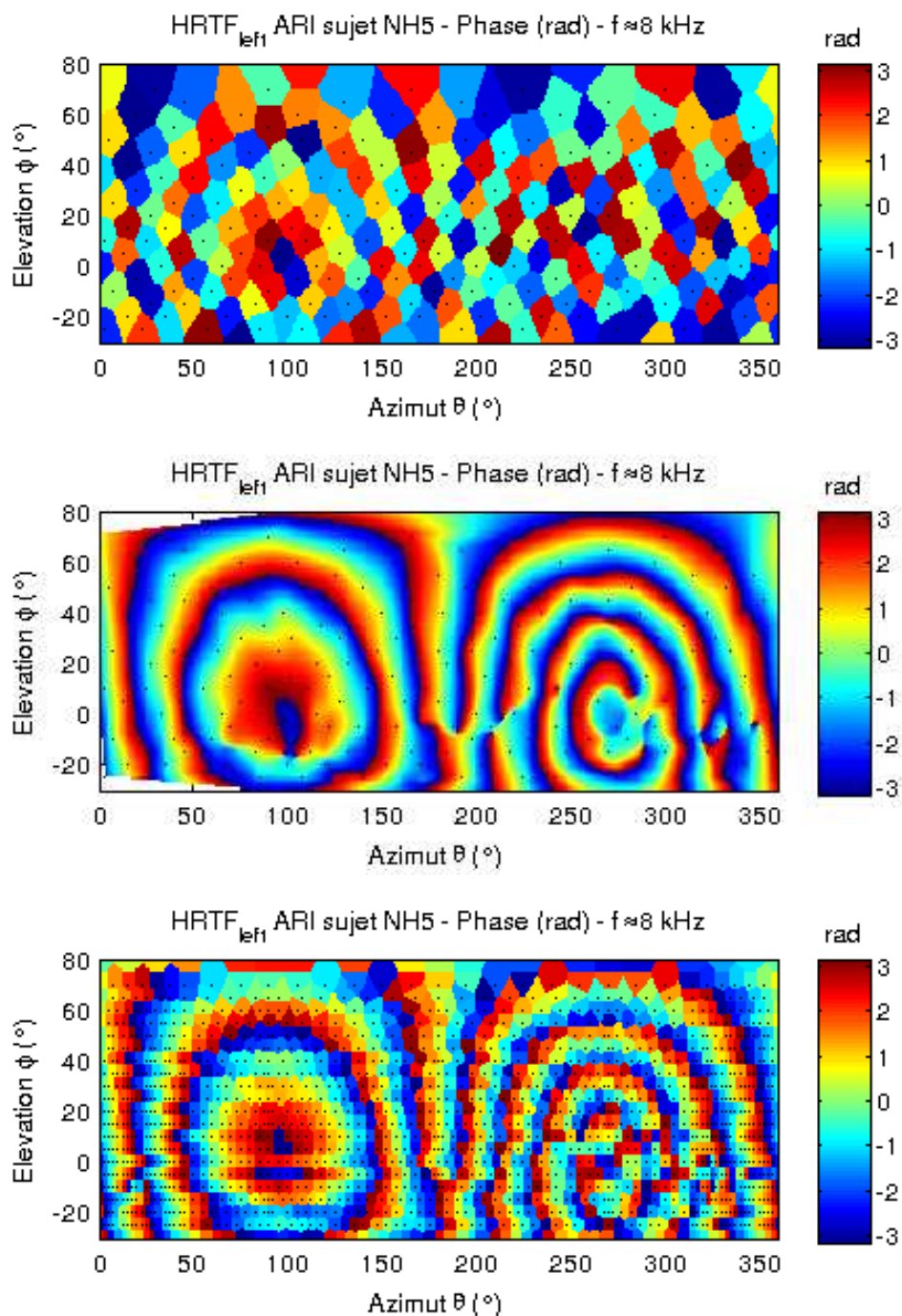


FIGURE 1.37 – Représentation en azimut  $\theta$  et élévation  $\phi$  à 8 kHz du portrait de phase (rad) des HRTF gauches du sujet NH5 de la base ARI. Les positions des mesures sont données par les points noirs. (Haut) Mesures brutes uniformément déraffinées tous les  $15^\circ$ . (Milieu) Interpolation par décomposition sphérique sur la grille déraffinée. (Bas) Mesures brutes originales.



lement extraite de la grille originale, notamment pour limiter les redondances locales. Ce faisant, le nombre de mesures utiles passe de 1550 positions à environ 220, puisque diviser par 3 le nombre de mesures sur chaque dimension revient à diviser par 8 le nombre de mesures total sur la sphère. Cette division est résolument excessive, l'idée étant simplement de montrer une application de la Décomposition par Modèle Morphologique, qui mériterait d'être approfondie par la recherche de grilles optimales en fonction du modèle choisi. La figure 1.36 (haut) donne une représentation en azimuth-élévation de l'amplitude spectrale brute de la HRTF du sujet NH5 de la base ARI, sur la grille déraffinée. La fréquence a été fixée à 8 kHz, puisqu'un aliasing spectral apparaissait déjà à 16 kHz, lorsque l'ensemble des mesures était pris en compte (fig. 1.33). Après interpolation par décomposition sphérique (fig. 1.36, milieu), l'amplitude spectrale résultante semble consistante avec l'originale (fig. 1.36, bas), excepté pour l'oreille contralatérale. Apparaît dans cette zone la diffraction de la sphère par surcompensation, ce qui démontre que le modèle n'est pas suffisamment fin pour être directement exploité. En revanche, le portrait de phase semble plutôt convaincant, comme le montre la figure 1.37, et ce, malgré le peu de mesures originales exploitées. En effet, il n'y a pas d'artefacts visibles, la causalité est respectée et la phase semble se dérouler correctement.

Au vu de ces représentations, la Décomposition par Modèle Morphologique semble une technique tout à fait prometteuse pour le déraffinement spatial des HRTF. Malgré la simplicité apparente du modèle utilisé, les résultats pour la phase sont plutôt bons et ceux pour l'amplitude spectrale ne sont pas dénués d'intérêt. Par ailleurs, il n'est pas inutile de rappeler que la fréquence choisie est assez élevée et le déraffinement plutôt fort. Aussi, comme spécifié plus haut, une piste pour améliorer cet algorithme sans changer de modèle serait de chercher une répartition optimale des données sur la sphère, minimisant les erreurs d'interpolation spectrale sur l'amplitude. Enfin, pour définitivement valider cette approche, des tests subjectifs complémentaires sont encore à réaliser.

### 1.4.5 Vers une méthode d'individualisation

Selon l'équation (1.9), la Décomposition par Modèle Morphologique fait intervenir des paramètres propres aux modèles, notés  $p^m$ . Ces paramètres peuvent être purement abstraits, ou en lien avec des éléments de la morphologie individuelle, à l'origine des HRTF. Auquel cas, les deux applications précédentes pourraient voir leurs performances améliorées, en individualisant les étapes de décompositions et recompositions par un modèle correctement ajusté aux HRTF considérées. En outre, les étapes de décomposition et de

recomposition étant indépendantes, il serait même envisageable de décomposer des HRTF par un modèle adapté, puis de les recomposer en utilisant cette fois une nouvelle paramétrisation dudit modèle, propre à l'auditeur. Sous réserve que le résidu obtenu par décomposition soit bien indépendant des paramètres utilisés, cette approche autoriserait une réelle individualisation des fonctions de transfert HRTF. Par exemple, des mesures de haute qualité, dont les paramètres morphologiques seraient connus, pourraient être couplées à des modèles analytiques ou numériques en vue d'une individualisation sur un ou plusieurs critères morphologiques. Afin d'estimer la faisabilité d'une telle approche, une paramétrisation individualisée a été appliquée à une décomposition par modèle sphérique de Duda (eq. 1.11, [25]). Comme la représentation temporelle du résidu (fig. 1.30) issue de cette décomposition laisse penser que les HRTF décomposées par une sphère ne possède plus d'ITD, ce dernier a préférentiellement été choisi pour valider le concept. De plus, le rayon de la sphère peut être choisi en lien avec le périmètre crânien de l'auditeur, ce qui offre un premier pas vers l'individualisation des HRTF.

Pour ce faire, la première étape consiste à mesurer sur le plan azimutal l'ITD de HRIR originales, ici celles du sujet NH5 de la base ARI (fig. 1.38, haut). Cet ITD a été mesuré en recherchant pour chaque azimut les premiers échantillons temporels où le niveau de l'amplitude signal franchit un certain seuil. Aussi, pour compenser la perte de niveau en distance imputable au décentrage de l'oreille, les HRIR ont préalablement été multipliées par un facteur  $(t \times c)^2$ , où  $t$  correspond au temps de propagation (en seconde) et  $c$  correspond à la célérité des ondes dans l'air à 15° (soit 340 m/s). Enfin, afin de limiter les erreurs dues aux imperfections de mesures, chaque échantillon temporel compensé en niveau a été moyenné par un fenêtrage de Hann sur ses plus proches voisins. Le résultat de ces deux traitements, après normalisation, est représenté sur la figure (fig. 1.38, milieu). En accord avec cette représentation, le seuil de recherche a été fixé à  $-15$  dB. L'ITD ainsi mesuré est représenté par un liserai marron sur les HRIR originales (fig. 1.38, haut) et semble suffisamment satisfaisant pour continuer.

La seconde étape consiste en l'ajustement du rayon  $a$  d'un modèle de tête sphérique, pour coller par essai-erreur un ITD sphérique analytique sur l'ITD mesuré précédemment. Cet ITD sphérique est calculé pour chaque azimut en considérant le maximum des HRIR sphériques analytiques. Ces deux ITD sont représentés en bleu sur la figure (fig. 1.39). Les deux courbes coïncident plutôt bien pour les azimuts situés à l'arrière, voire sur les côtés, mais plus difficilement sur le plan frontal. Ce résultat est probablement causé par la géométrie de la tête, qui tend vers une sphère à l'arrière, mais qui s'en éloigne assez fortement vers l'avant. C'est la raison pour laquelle le "zéro" de l'ITD a été placé à  $\theta = 180^\circ$ , sans tenir compte de  $\theta = 0^\circ$ . Le rayon de la sphère

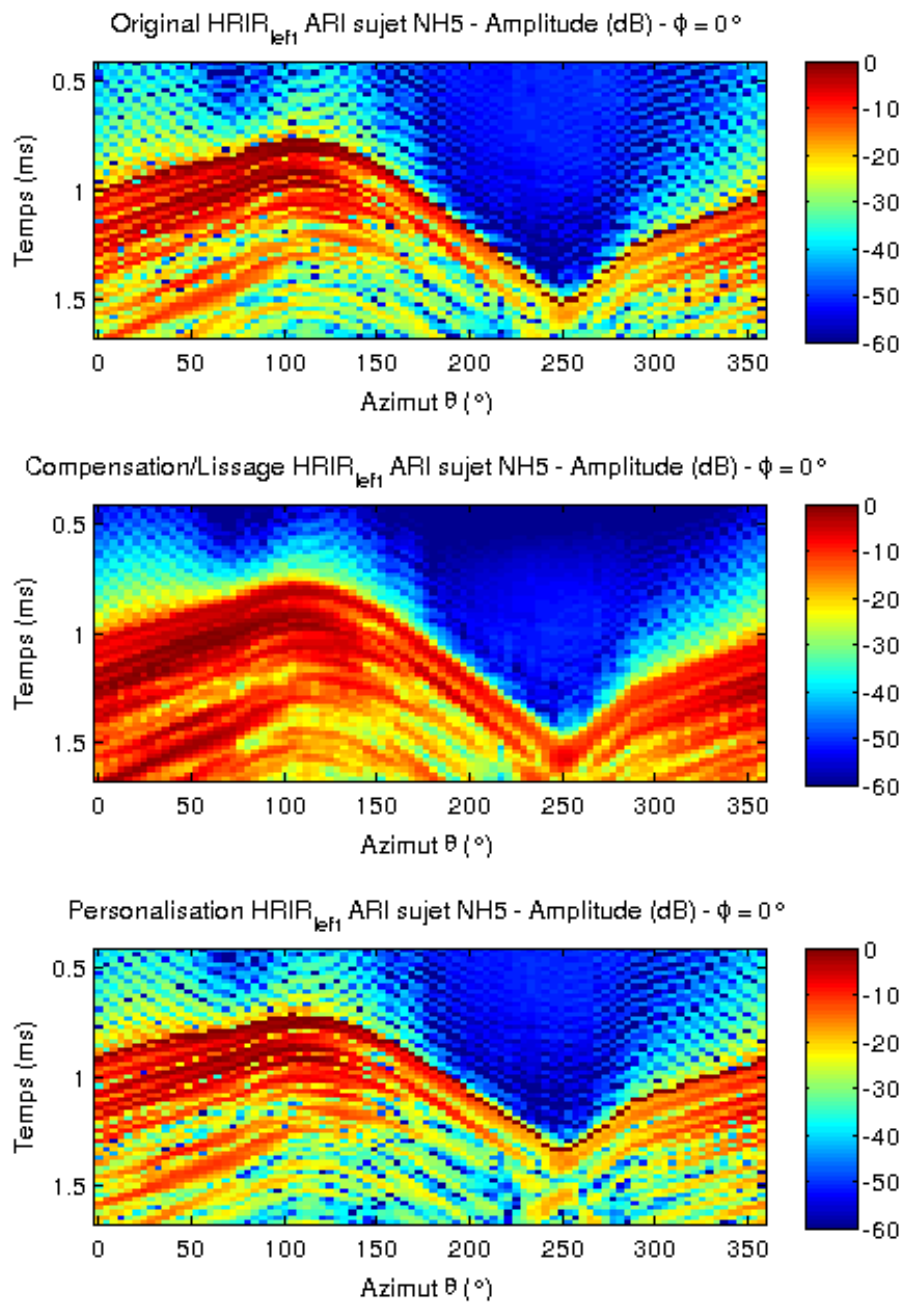


FIGURE 1.38 – (Haut) Représentation temporelle dans le plan azimutal des HRIR du sujet NH5 de la base de données ARI, amplitude signal avant décomposition sphérique (ITD en marron). (Milieu) Représentation temporelle de ces mêmes HRIR compensées en distance et lissées par fenêtrage afin de mesurer l’ITD par seuil de l’amplitude signal, fixé à  $-15$  dB. (Bas) Représentation temporelle de ces mêmes HRIR après individualisation par décomposition sphérique de rayon inférieur (ITD en marron).

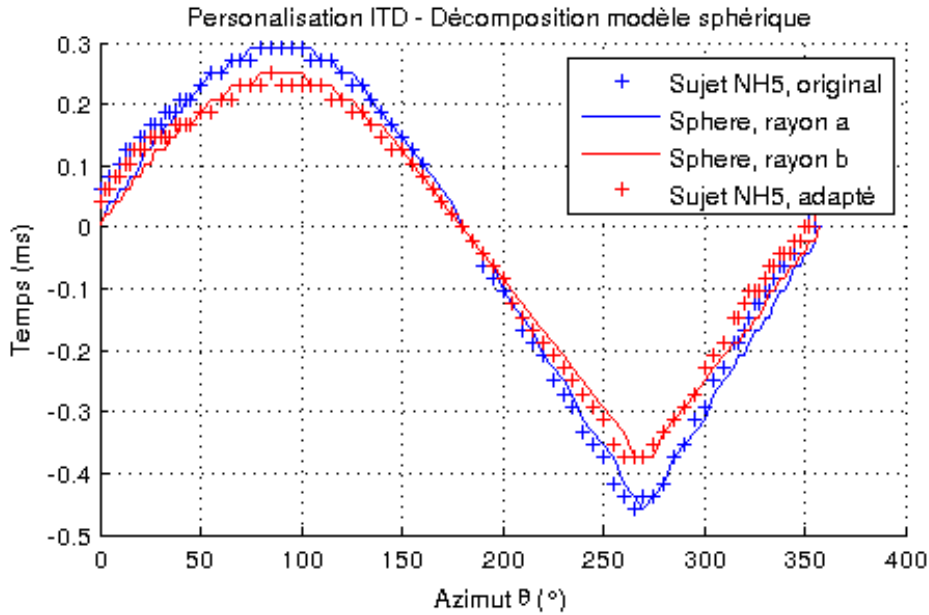


FIGURE 1.39 – Représentation de l’ITD (ms) en fonction de l’azimut  $\theta$  ( $^{\circ}$ ), pour les HRTF originales, sphériques et individualisées avec Décomposition par Modèle Morphologique.

des HRTF azimutales du sujet NH5 a ainsi été estimé à  $a = 9.7$  cm.

Une fois ce paramètre de la décomposition sphérique établi, l’étape suivante consiste à établir un nouveau jeu de paramètres pour le modèle considéré. Dans cette étude, un rayon  $b = 8.0$  cm a été choisi arbitrairement, afin de générer une tête sphérique de circonférence inférieure à celle du sujet NH5. Dès lors, les HRTF originales peuvent être décomposées par le modèle sphérique de paramètre correspondant  $a$ , avant d’être recomposées par le même modèle reparamétré par  $b$ . Si l’hypothèse d’indépendance est bien vérifiée, les HRTF ainsi générées deviennent individualisées.

La dernière étape permettant de valider le concept consiste alors à mesurer l’ITD des HRTF recomposées par le même protocole de mesures que pour les HRTF originales. Le résultat ainsi obtenu est représenté par un liseré marron et superposé aux HRIR individualisées (fig. 1.38, bas). Une bonne coïncidence entre l’ITD mesuré et le front d’onde est de nouveau obtenu par cette méthode. De plus, la HRIR individualisée ne semble pas présenter d’aberration flagrante faisant suite au traitement subi, ce qui donne du crédit au résultat obtenu pour l’ITD. Aussi, ce dernier a été tracé en rouge sur la figure 1.39, au même titre que la mesure de l’ITD du modèle sphérique équivalent. Comme le montrent ces deux dernières courbes, l’ITD individualisé semble coller à son modèle et ce dernier est bien représentatif d’une tête

sphérique singulièrement plus petite que l'originale (en bleu). Donc, mises à part les aberrations frontales déjà présentes pour le modèle sphérique original, il semble bien que l'ITD soit indépendant du résidu de la décomposition sphérique, ce qui en autorise la personnalisation.

Pour poursuivre cette étude, il faudrait désormais valider l'individualisation de la phase et de l'amplitude spectrale. Cette étape, bien plus complexe, n'a pas été abordée durant cette thèse et fera très probablement l'objet de recherches ultérieures. Par ailleurs, des modèles numériques peuvent désormais être utilisés pour affiner l'individualisation, comme des têtes ellipsoïdes, des "*snowman model*", ou encore des maillages de têtes.

## Chapitre 2

# Moteur binaural *PifPaf3D*

Une grande partie des travaux de thèse a porté sur la conception et la réalisation d'un moteur de synthèse binaurale innovant, nommé *PifPaf3D* (fig. 2.1). Ce moteur intègre de nombreuses fonctionnalités pour chaque étape de la chaîne de production sonore, de la captation à la restitution. Il a été entièrement programmé et optimisé en langage *Matlab*, bénéficiant ainsi d'une grande souplesse de programmation pour en faire un outil de prototypage efficace ( $\approx 2000$  lignes de code). De plus, aucune librairie externe n'a été utilisée, ceci afin d'assurer un contrôle total sur l'ensemble des traitements effectués. Aussi, l'essentiel des recherches effectuées en spatialisation sonore, présentées ou non dans ce manuscrit, ont été implémentées dans ce moteur, testées et validées de manière analytique et/ou subjective. Par ailleurs, ce spatialisateur ayant été développé dans le contexte industriel de la thèse CIFRE, pour des raisons évidentes de protection de la propriété industrielle, seule une revue générale des différents modules est présentée dans ce chapitre. Les détails de conception et de programmation de ce moteur ne seront donc pas explicités.

### 2.1 Introduction et configuration

Le spatialisateur *PifPaf3D* est un logiciel exclusivement écrit en langage *Matlab*, interfacé avec une interface graphique (GUI) faisant appel aux différentes parties de la librairie, selon le traitement audio souhaité (fig. 2.1). Il se décompose en différents modules, indépendants et autonomes, ce qui permet de réaliser n'importe quel traitement audio dans un ordre déterminé par l'utilisateur. Les passerelles pour assurer la communication entre chaque module ont été implémentées sous forme de pipe-line et tous les traitements ont été programmés sous forme de fonctions callback. Cette logique de pro-

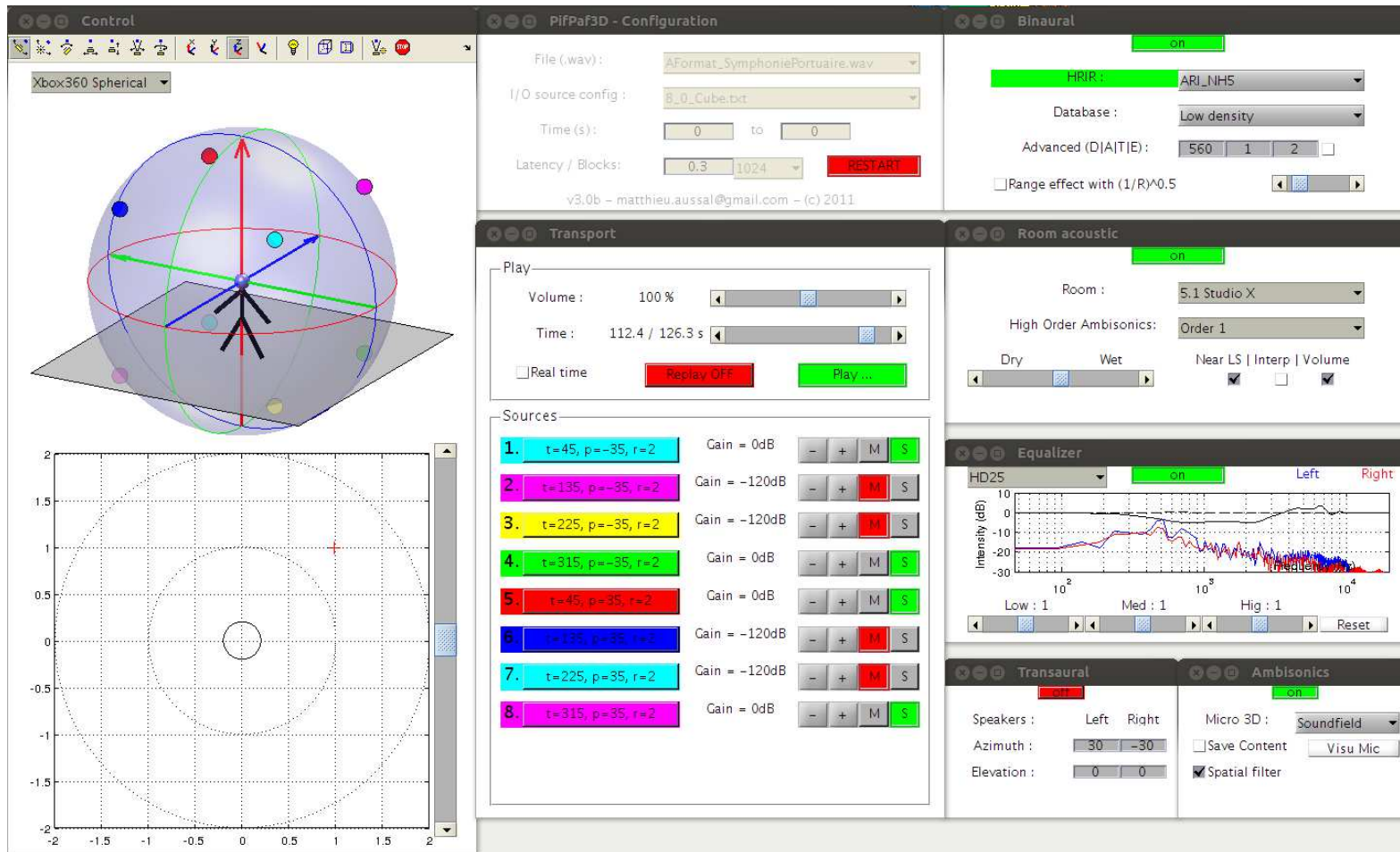


FIGURE 2.1 – *PifPaf3D*, prototype *Matlab* pour la spatialisation sonore en temps réel.

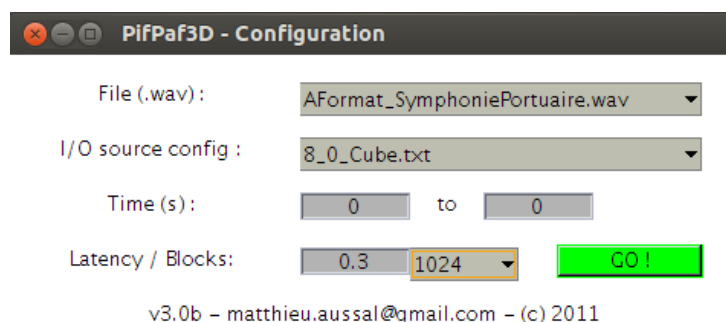


FIGURE 2.2 – *PifPaf3D* - Module de Configuration.

grammation rend ce code suffisamment flexible pour s’adapter au traitement audio temps réel. À titre informatif, sur un ordinateur portable standard dont le processeur est cadencé à 1.6Ghz, il est possible de spatialiser et contrôler en temps réel au moins seize sources sonores dynamiques simultanément. En mode offline, un nombre illimité de sources peut être joué puisque le temps de calcul est simplement proportionnel au nombre de canaux traités.

Au démarrage de *PifPaf3D*, la première étape consiste à configurer le moteur avec l’interface graphique (fig. 2.2), qui permet d’accéder aux principaux paramètres. Tout d’abord, l’utilisateur fait le choix dans une liste de fichiers audio multicanaux, présents dans un dossier ’wav/input/’ à la racine du script de lancement du logiciel. Ces fichiers doivent être au format *.wav*, préférentiellement échantillonnés à 44.1 kHz et de nombre de canaux fixe (mono, stéréo, 5.1, 7.1, n.m, etc.). Ensuite, l’utilisateur peut choisir son *routing* dans une batterie de fichiers *.txt*, disponibles par défaut dans un dossier ’data/speakers’. Ces fichiers contiennent à la fois des positions statiques de sources audio et des trajectoires pré-établies en fonction du temps et de l’espace. L’utilisateur peut ainsi utiliser les *routing* présents, ou créer son propre fichier. Voici, par exemple, un script pour effectuer une trajectoire dynamique sur deux canaux. Ici, le premier canal se déplace pendant 30 secondes derrière l’auditeur, tandis que le second passe au-dessus sur la même durée :

```
% Source 1
sources.azimuth{1} = [90,270]; % Azimut (deg)
sources.elevation{1} = [0,0]; % Elevation (deg)
sources.range{1} = [2,2]; % Distance à l’auditeur (m)
sources.time{1} = [0,30]; % Durée entre les 2 positions (s)

% Source 2
sources.azimuth{2} = [270,270];
sources.elevation{2} = [0,180];
```



```
sources.range{2} = [2,2];  
sources.time{2} = [0,30];
```

Cette étape effectuée, l'intervalle de lecture du fichier audio est défini, avec pour unité la seconde. Enfin, la latence du rendu temps réel peut être modifiée, ainsi que la taille des blocs de traitement du signal. Ces deux paramètres agissent essentiellement sur la fluidité de la lecture en rendu temps réel, qui est fonction de la puissance de calcul disponible sur la machine. Une fois tous ces choix établis, le spatialisateur peut être lancé en cliquant sur le bouton "GO!", ce qui affichera l'interface complète (fig. 2.1) et bloquera définitivement le module de configuration (fig. 2.2). *PifPaf3D* devra donc être relancé pour tout changement ultérieur dans ces données.

Pour les utilisateurs plus avancés, il est possible de choisir d'autres paramètres directement dans le code source. À titre d'exemple, peuvent être cités la forme des fenêtres de traitement audio (Hann, Porte, Sine, Linear, etc.), le répertoire de sortie des fichiers audio après traitement (par défaut 'wav/output/') ou la taille des filtres utilisés.

## 2.2 Transport et contrôle

Le module de transport (fig. 2.3) se décompose en deux parties. La première partie (onglet "*Play*") propose les principales fonctionnalités de lecture et de navigation dans un fichier audio, à savoir un curseur de lecture, un curseur de volume pour le monitoring, un bouton play/pause, ainsi qu'un bouton de répétition. Par ailleurs, il est possible de désactiver la lecture temps réel pour traiter des fichiers audio plus rapidement en mode offline. Tous les algorithmes de traitement du signal sont routés sur ce module, qui réalise une transformée de Fourier en *overlap-add* [7] sur des blocs fenêtrés, typiquement par des fenêtres de Hann. Ce fenêtrage est nécessaire pour limiter l'impact d'éventuels changements brutaux dans des fonctions de transfert utilisées lors d'un filtrage, qui peuvent introduire des claquements audibles perturbant l'écoute. Par exemple, des sauts de filtres interviennent en continu lors du traitement binaural de sources en mouvement. Aussi, cette combinaison entre *overlap-add* et fenêtrage a été optimisée pour le cas particulier du filtrage binaural, dont les fonctions de transfert HRTF ont des caractéristiques propres. Cette optimisation a conduit au développement d'un algorithme type *overlap* performant, qui fera l'objet d'une publication ultérieure.

La seconde partie de ce module (onglet "*Sources*", fig. 2.3) permet de visualiser séparément des informations relatives aux canaux audio, préalablement définis dans le *routing*, dans un esprit de mixage objet. C'est pourquoi

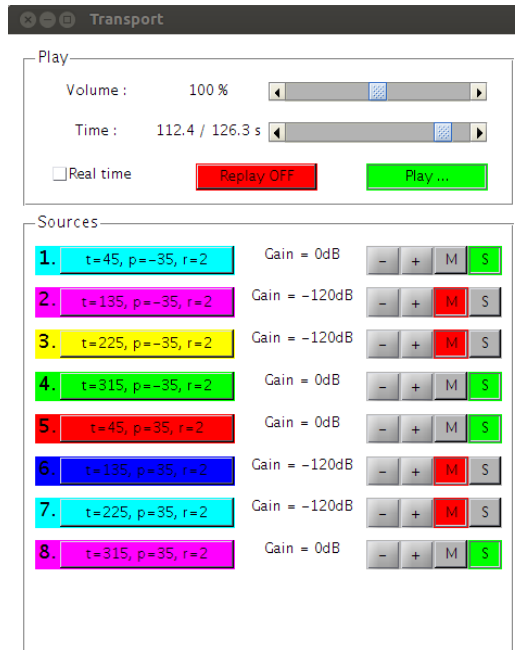


FIGURE 2.3 – *PifPaf3D* - Module de transport.

chaque tranche donne la couleur et les coordonnées sphériques de la source associée, représentée dans le module de contrôle détaillé ci-après (fig. 2.4). De plus, il est possible d'activer ou de désactiver une source sonore par des boutons "Mute/Solo" interconnectés, ainsi que de modifier le gain d'entrée de chaque tranche de +/- 3 dB.

Au même titre que le module de transport, le module de contrôle (fig. 2.4) se décompose en deux parties. La première partie (fig. 2.4, gauche) donne une représentation de l'espace péri-personnel, avec un auditeur représenté en trois dimensions entouré de sources sonores ponctuelles. Pour faciliter la visualisation, les axes cartésiens ont été rajoutés, ainsi que trois cercles de positionnement inclus dans une sphère de rayon unité, le tout complété par un plan sur lequel repose l'auditeur. De plus, des rotations de la camera et de l'éclairage sont autorisées, notamment pour lever d'éventuelles indéterminations de positionnement en naviguant au sein de la scène sonore. Enfin, un onglet situé en haut à gauche de l'interface graphique permet de choisir le mode de déplacement des sources sonores pour les contrôler en temps réel. Les sources à mouvoir sont sélectionnées dans le module de transport (fig. 2.3) par un clic sur le bouton donnant les coordonnées sphériques de leur position, puis déplacées par le pavé numérique du clavier, la souris, ou encore une manette de type Microsoft Xbox 360. Le clavier et la manette

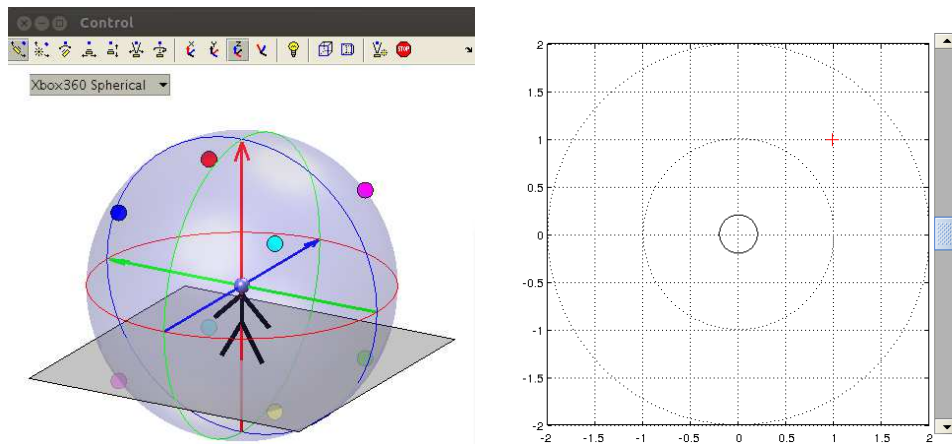


FIGURE 2.4 – *PifPaf3D* - Module de contrôle.

font bouger les sources relativement à leurs positions respectives, tandis que la souris fixe une position absolue. Dans ce dernier cas, la position de la croix rouge sur la grille du module de contrôle (fig. 2.4, droite) détermine les coordonnées azimutales des sources sonores sélectionnées, tandis qu'un curseur sur le côté permet d'en modifier l'élévation. Toutes ces fonctionnalités faisant appel à un rafraîchissement graphique récurrent (plutôt gourmand en CPU), le ratio entre la charge de calcul disponible et le coût de la mise à jour est vérifié en permanence, notamment pour que ces dernières ne soient pas faites au détriment des traitements audio.

Il est important de souligner que ces outils ont avant tout été conçus pour naviguer et contrôler des sources sonores en temps réel sous *Matlab*, afin de tester et valider les différents traitements audio. Ils n'ont donc pas vocation à former une véritable plate-forme de mixage professionnel.

## 2.3 Traitement Binaural

Le module de traitement binaural (fig. 2.5) s'appuie essentiellement sur les recherches présentées dans le premier chapitre de ce manuscrit. Tout d'abord, les bases de données de fonctions HRTF utilisées pour le filtrage (onglet "*HRIR*" de la figure 2.5) sont issues des bases publiques suivantes :

- CIPIC, Université de Californie [3] ;
- ARI, Institut de Recherche en Acoustique de l'Académie des sciences d'Autriche [6] ;
- LISTEN, Institut de Recherche et Coordination en Acoustique et Musique [62].

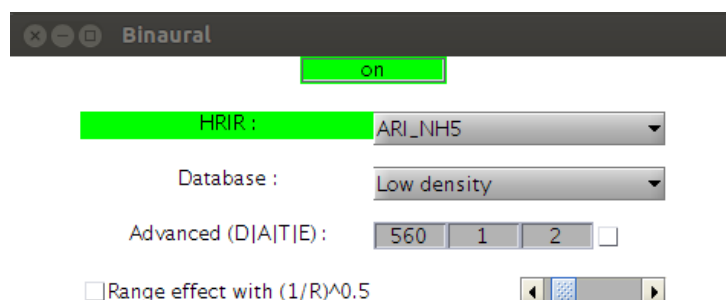


FIGURE 2.5 – *PifPaf3D* - Module de traitement binaural.

Ces bases ont comme points communs d'être disponibles au format *Matlab* et d'être livrées avec des filtres sous forme HRIR, des coordonnées des points de mesures, ainsi que des données morphologiques associées à chaque sujet. Ces trois informations sont nécessaires et suffisantes pour le bon fonctionnement du filtrage binaural dispensé par *PifPaf3D*. En effet, la convolution en domaine de Fourier entre un signal monophonique et les filtres gauches et droits d'une HRTF à une position donnée est réalisée par interpolation linéaire locale quadrangle sur des grilles régularisées de filtres. Pour ce type de support, la recherche des filtres voisins à la position souhaitée est instantanée : les parties entières de l'azimut et de l'élévation donnent directement les indices des filtres à interpoler, tandis que les parties décimales fournissent les coefficients de pondération de la sommation. Il n'y a donc pas de parcours d'arbre, ce qui diminue d'autant les charges de calcul pour chaque position à évaluer. Aussi, une attention particulière a été portée sur l'interpolation globale des HRTF brutes, notamment pour minimiser les erreurs générées au cours de la formation des grilles régulières, à l'origine d'artefacts audibles. Les recherches sur cette problématique ont conduit à la Décomposition par Modèle Morphologique (1.9), présentée dans le chapitre précédent. Ainsi, dans un premier temps, des bases de données fidèles aux mesures brutes ont été créées en vue de pratiquer une interpolation locale inaudible (fig. 1.33 et 1.34). Le modèle sphérique de Duda [25] a été utilisé et paramétré par le rayon de la tête dont sont issues les HRTF mesurées. Lorsque celui-ci n'est pas disponible, le rayon de tête moyen (8.74 cm) sert de référence [58]. Pour effectuer des comparaisons subjectives, trois raffinements sont prévus dans l'onglet "*Database*" de la figure 2.5, à savoir "*Low*", "*Medium*" et "*High density*", correspondant respectivement à 15, 10 et 5 degrés de discrétisation en azimut et élévation. D'autre part, il est important de souligner que les bases de données [3], [6] et [62] ne sont pas les seules exploitables par *PifPaf3D*, puisque l'algorithme d'interpolation globale est applicable dès lors que les

filtres et les positions des mesures sont fournis.

Par la suite, il est apparu après quelques optimisations que la Décomposition par Modèle Morphologique était peu coûteuse en calcul, ce qui rendait le processus adapté pour du traitement en temps réel. Aussi fut-elle intégrée directement dans *PifPaf3D* pour pratiquer les interpolations locales sur des grilles de filtres régulières et déaffinées (exemple fig. 1.36 et 1.37), plus rapides d'accès puisque plus légères en mémoire. De plus, le peu d'espace nécessaire au stockage de ces données favorise le traitement embarqué sur processeurs dédiés de type DSP, qui disposent de plus de ressources de calcul que de mémoire vive. En pratique, *PifPaf3D* exploite désormais les grilles échantillonnées tous les 15 degrés par défaut, sans artefact d'interpolation audible. Le choix de la densité des grilles est toujours proposé à titre comparatif, mais inusité en pratique. Enfin, l'espace mémoire requis pour de telles grilles est d'environ 2 Mo, ce qui constitue un format d'échange exploitable.

Par ailleurs, un bouton "*on/off*" est disponible sur l'interface graphique (fig. 2.5) pour comparer en temps réel l'activation du binaural contre un *downmix* stéréo du contenu multicanal original. Afin d'estimer le gain à fournir aux canaux gauches et droits, le *downmix* utilise la norme *Root Mean Square* (moyenne quadratique) normalisée des filtres HRTF aux positions des sources sonores. Ainsi, le *downmix* est bien rendu en stéréophonie, il tient compte de la position des sources sonores et conserve la norme *RMS* du signal "downmixé" constante par rapport au traitement binaural. Ce faisant, les écoutes comparées permettent d'apprécier à sa juste valeur la spatialisation, sans autres biais que le *Loudness*.

Pour les utilisateurs avertis, *PifPaf3D* propose quatre paramètres avancés disponibles dans l'onglet "*Advanced*" de la figure 2.5 :

1. Le premier de ces paramètres ("*D*") offre une première étape d'individualisation. Le principe est fondé sur la Décomposition par Modèle Morphologique pour l'individualisation, telle que présentée dans le chapitre précédent. L'utilisateur rentre le diamètre de sa tête en cm, qui sera utilisé pendant l'étape de recomposition par modèle sphérique. Les réponses fréquentielles présentes dans les HRTF finales se trouvent dès lors plus proches de celles de l'utilisateur que de celles des HRTF originales, notamment pour l'ITD (fig. 1.39).
2. Les deux paramètres suivants ("*A*", "*T*") règlent respectivement l'amplitude (degré) et la période (seconde) des oscillations des micro-variations de sources, détaillées dans le chapitre précédent (fig. 1.35). Par défaut, ces paramètres sont fixés en deçà du seuil de perception. Des recherches par tests perceptifs ont été effectuées par un stagiaire pour analyser l'impact de ces paramètres sur la localisation. Ces travaux n'ayant pas

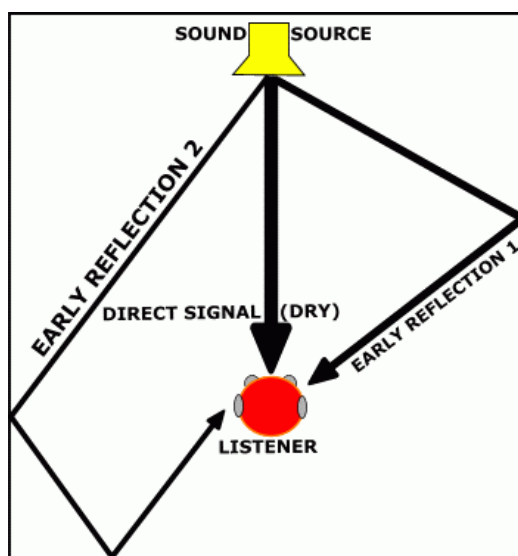


FIGURE 2.6 – Schématisation des premières réflexions intervenant lors de la propagation d’une onde sonore dans un espace clos. (source *www.audacity.sourceforge.net*)

donné de résultats significatifs, des études restent encore à mener pour évaluer les micro-variations et trouver des paramètres rigoureux.

3. La dernière option permet d’activer ou de désactiver un modèle dynamique de premières réflexions (*early reflexions*, fig 2.6), fruit d’une discussion avec J.-C. Messonnier du Conservatoire National Supérieur de Musique et de Danse de Paris [66]. Ce modèle est fondé sur une méthode source-image temps réel [2], indépendante pour chaque source sonore, ayant vocation à simuler la présence de panneaux réflecteurs autour de la source pour favoriser la création d’énergie précoce [63]. Pour ce faire, deux HRTF sont superposées à l’originale, choisies symétriquement de part et d’autre et de la source. Chacune est retardée manuellement, relativement à la distance entre l’auditeur et la source fantôme ainsi créée. Cet outil offre des perspectives intéressantes, en rajoutant des indices de localisation pour lever l’indétermination de positionnement des sources sonores. Une analyse plus approfondie, ainsi qu’une validation subjective fera l’objet de travaux ultérieurs.

Pour terminer, plusieurs effets de distance ont été rajoutés, afin d’imiter artificiellement l’éloignement entre la source sonore et l’auditeur (fig. 2.5). Le premier effet, simple et efficace, consiste à jouer sur le volume de la source sonore en fonction de son éloignement. Une loi en  $\frac{1}{r^\alpha}$  a été employée, avec  $\alpha$  contrôlé par l’utilisateur pour adapter le gain en fonction du contenu audio.

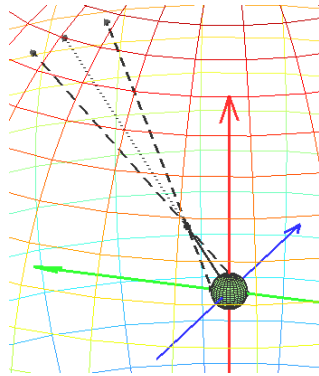


FIGURE 2.7 – *Cross-ear selection* pour la correction des HRTF gauches et droites, en champ proche [75]. Sur ce schéma, la sphère verte représente une tête, le maillage quadrangle appartient à la sphère de mesure des HRTF, la flèche bleu indique l'avant (axe  $Ox$ ), la flèche verte indique la gauche (axe  $Oy$ ) et la flèche rouge le dessus (axe  $Oz$ ). Pour une source proche de l'auditeur (trait plein noir), le filtre HRTF sans traitement spécifique est celui donné par la direction en pointillés, invariant selon la distance. Après *cross-ear selection*, les filtres gauches et droites sont donnés par les directions en tirets.

Le deuxième effet intervient lors de la Décomposition par Modèle Morphologique, en recomposant le résidu sphérique par les HRTF sphériques évaluées cette fois à la distance souhaitée. Le troisième effet consiste à filtrer le signal d'entrée par un coupe-haut modélisant l'absorption de l'air selon la distance parcourue par l'onde sonore. Cet effet intervient principalement pour les sources en champ lointain. Pour le champ proche, un quatrième et dernier effet nommé *cross-ear selection* vient compléter cette panoplie [53] [75]. Les HRTF utilisées pour le traitement binaural sont sélectionnées sur la sphère de mesure originale, en calculant géométriquement les coordonnées des HRTF réellement mises en jeu lorsqu'une source se rapproche de l'auditeur (fig. 2.7). Mathématiquement, cela revient à résoudre une équation du second degré pour chaque oreille, puisque la position cherchée est solution de l'intersection entre une droite et une sphère. Pour l'ensemble de ces effets, il est important de préciser que, faute de base de données de HRTF en distance aisément disponible, aucun procédé n'a été validé analytiquement. Seule une évaluation perceptive a été pratiquée, donnant des résultats encourageants. Une analyse approfondie de ces effets doit désormais être faite pour s'assurer que les HRTF ainsi modifiées respectent bien la physique du problème.

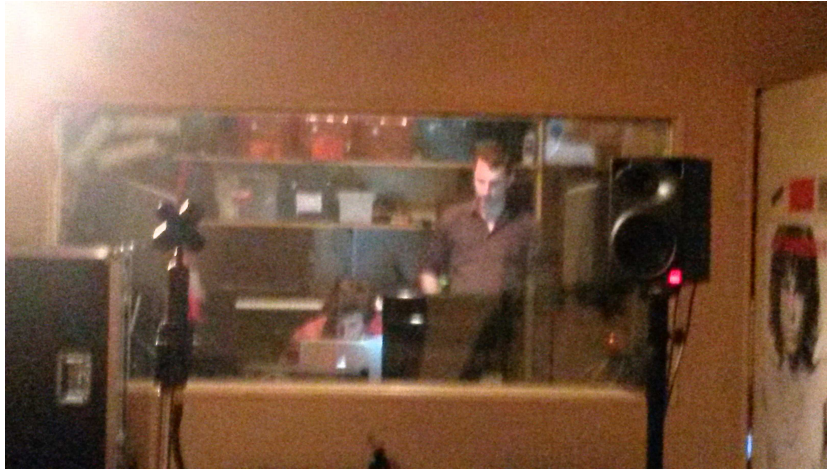


FIGURE 2.8 – Microphone *Soundfield SPS200* et enceinte KH pour la mesure impulsionnelle en B-Format du studio de répétition de l'École Polytechnique. (Atelier des Ondes, [www.atelierdesondes.net](http://www.atelierdesondes.net))

## 2.4 Acoustique de salle et Ambisonics

Comme les HRTF sont classiquement mesurées en chambre anéchoïque, le traitement binaural issu de la convolution avec de tels filtres souffre bien souvent d'un manque d'espace, minimisant la sensation d'externalisation. C'est pourquoi, un module d'acoustique de salle vient avantageusement compléter le module binaural précédent, en apportant l'illusion de la diffusion au sein d'une pièce. Le principe consiste en l'ajout d'une réverbération directionnelle pour chaque source sonore, captée en trois dimensions en *High Order Ambisonics* (HOA) et restituée en binaural par un système de haut-parleurs virtuels fixes. La thèse de J. Daniel [20] en explicite toute la théorie, qui ne sera donc pas reprise ici, mais survolée d'un point de vue pratique en accord avec la courte introduction du premier chapitre.

La première étape pour réaliser ce traitement consiste à construire une base de données de réponse impulsionnelle d'une salle (*Room Impulse Responses*) en format HOA. Pour ce faire, il existe principalement deux méthodes :

- Virtuellement en simulant numériquement la mesure avec des logiciels adaptés, tels que Catt-Acoustique<sup>1</sup>. Cette approche permet d'obtenir un ordre HOA flexible, de considérer n'importe quelle pièce et de disposer les points de mesures à n'importe quelle position de l'espace. En

---

1. Un résultat de simulation numérique d'un studio de type *LEDE*, effectuée au LIMSI/CNRS, a été utilisé dans cette étude.



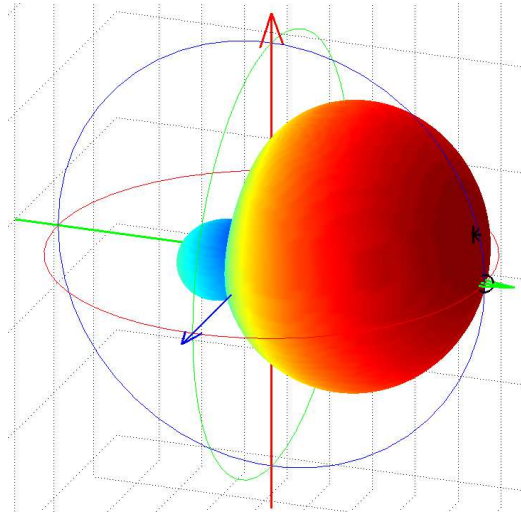


FIGURE 2.9 – Projection sur les harmoniques sphériques de la norme  $RMS$  des quatre signaux du B-Format, représentation spatiale d’une mesure par microphone *SoundField*.

revanche, certaines simulations peuvent générer des artefacts audibles, notamment en haute fréquence, qui nuisent au rendu.

- Réellement en mesurant des réponses impulsionnelles avec une sphère de microphones. Cette technique demande à la fois du matériel de haute qualité (microphones HOA, carte son, haut-parleurs, salle mesurable, etc.), ainsi que des logiciels de traitement du type encodeur/décodeur HOA. Cette technique est plus difficile à mettre en œuvre, mais offre souvent des résultats plus convaincants à l’écoute.

Ces deux approches ont été testées durant la thèse et les résultats intégrés dans *PifPaf3D*. Ainsi, un outil *Matlab* a été spécifiquement programmé pour réaliser des mesures de réponses impulsionnelles par microphone HOA. Cependant, comme le seul microphone 3D à disposition pendant la thèse était un *Soundfield SPS200* (à gauche sur la figure 2.8), toutes les prises de son ont été faites à l’ordre 1 (équivalent du B-Format). Ce logiciel doit donc encore être éprouvé pour les ordres supérieurs. Cela étant, trois pièces ont été mesurées, à savoir la salle à manger de la société Digital Media Solutions, le bureau de l’équipe Audio 3D de DMS et le studio de répétition des étudiants de l’École Polytechnique (fig. 2.8). Dans le cas du studio, un haut-parleur a été placé tous les 30 degrés en azimut, à élévation nulle, pour générer une base de données sur douze positions. Le signal de mesure utilisé est une combinaison entre codes de Golay [32], bruit blanc et *sweep-sine* fréquentiel [80]. À titre d’exemple issu d’une de ces mesures, la projection sur les har-

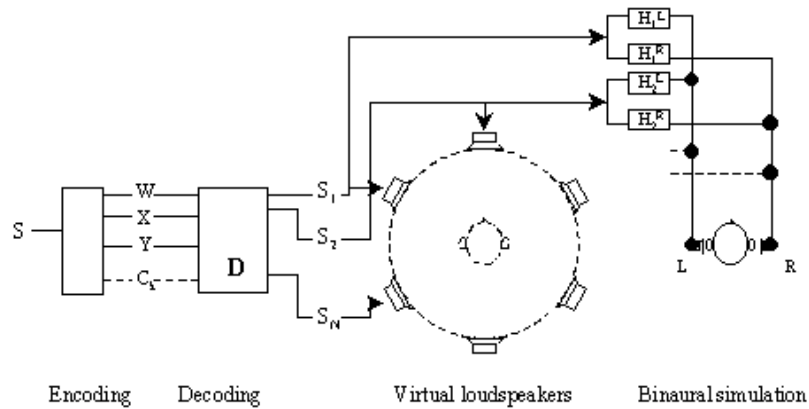


FIGURE 2.10 – Méthode des haut-parleurs virtuels pour le rendu ambisonique en binaural. (source [20])

moniques sphériques de la norme *RMS* des quatre signaux du B-Format est représentée dans l'espace sur la figure 2.9. Cette enveloppe prend la forme d'un champignon, dont le maximum est symbolisé par l'étoile noire, tandis que le cercle noir donne la position théorique du haut-parleur comme référence. La mesure est validée dès lors que ces deux objets sont suffisamment proches, preuve que l'onde directe est captée à la bonne incidence. Avec ce type de représentation, cet outil peut aussi servir à la localisation de sources sonores. En complément de ces données, les RIR effectuées par A. Farina en B-format dans une salle de classe, une bibliothèque et une salle de concert (*www.isophonics.net*, [29]) ont aussi été intégrées dans *PifPaf3D*.

La deuxième étape consiste à filtrer les sources sonores ponctuelles par les fonctions de transfert tridimensionnelles de la pièce, obtenues pendant l'étape précédente. Tout d'abord, chaque position est associée à la plus proche RIR mesurée et le contenu audio de la source est filtré en domaine ambisonique pour obtenir la projection du signal original sur les harmoniques sphériques. Suivant cette étape d'encodage, un filtrage supplémentaire peut éventuellement être ajouté pour corriger la proximité des haut-parleurs, ou encore la sphéricité du microphone dans le cas d'une mesure réelle. Une fois toutes les sources audio traitées par leurs réponses respectives, celles-ci sont sommées, toujours en domaine ambisonique. Un décodage associe alors le signal à diffuser sur chaque haut-parleur virtuel, qui sont in fine rendus par filtrage binaural comme résumé figure 2.10.

En pratique, le module d'acoustique de salle de *PifPaf3D* (gauche, fig. 2.11) est capable de traiter jusqu'à huit sources sonores en temps réel avec un décodage HOA d'ordre 3, diffusé sur un système à vingt canaux disposés aux

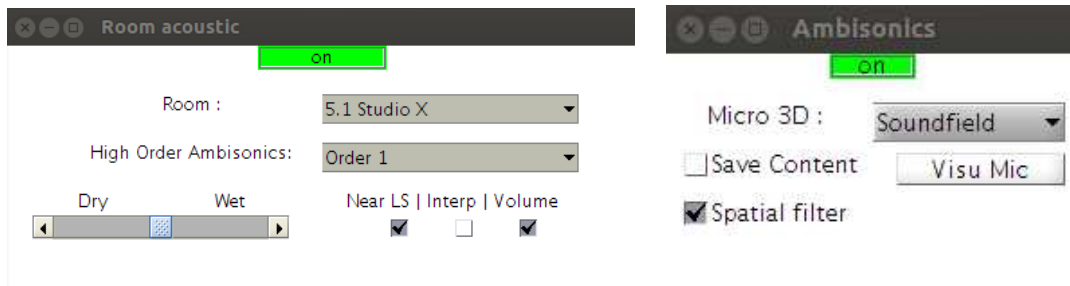


FIGURE 2.11 – *PifPaf3D* - (Gauche) Module de traitement acoustique de salle. (Droite) Module de traitement *High Order Ambisonics*.

sommets d'un dodécaèdre. Pour ce faire, l'algorithme d'*overlap-add* optimisé pour le traitement binaural a été adapté à l'ajout d'acoustique de salle par convolution, ce qui diminue considérablement les coûts de calculs effectués par *Matlab*. De plus, l'interface graphique offre la possibilité de comparer l'ajout d'acoustique de salle au signal original par un bouton "*on/off*", qui active/désactive l'effet en temps réel. Pour respecter les niveaux lors d'écoutes comparées, un contrôle des gains à la volée a été ajouté pour que la norme *RMS* du signal de sortie soit proche de celle du signal d'entrée. Cette option est disponible par simple clic sur le bouton "*Volume*" de l'interface. Par ailleurs, comme expliqué précédemment, plusieurs salles sont présentes par défaut, comme le studio de l'école Polytechnique, et l'utilisateur averti peut aisément rentrer ses propres mesures dans le code source. Un ordre ambisonique variable est proposé, entre 0 (réverbération classique) et 3 (réverbération directionnelle), scalable au besoin selon la théorie HOA. Un curseur permet en outre de jouer sur le rapport "*Dry-Wet*", couramment utilisé par les ingénieurs du son utilisant ce type d'effet. Pour finir, un filtre additionnel permet de compenser la proximité des haut-parleurs (bouton "*Near LS*") et l'utilisateur peut activer une interpolation linéaire des RIR, à la place d'une recherche de la RIR la plus proche (bouton "*Interp*").

Suite aux développements effectués pour les mesures réelles de réponses impulsionnelles de salle en *High Order Ambisonics*, un module autonome de traitement HOA a été ajouté à *PifPaf3D* (droite, fig. 2.11). Ce dernier pratique un encodage/décodage des signaux bruts issus de microphones sphériques, couplé à des filtres correctifs. En pratique, seul le *Soundfield SPS200* a été éprouvé, faute de microphones d'ordre plus élevé disponibles. Les signaux de sortie sont donc directement projetés sur les harmoniques sphériques, relativement aux positions des capsules, avant d'être filtrés en domaine ambisonique pour compenser notamment la répartition sphérique et la directivité des capsules. Enfin, le décodage HOA est effectué sur le sys-

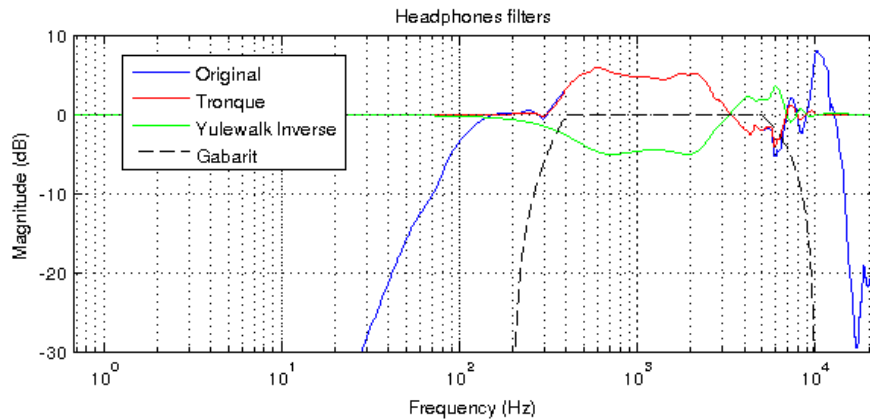


FIGURE 2.12 – Représentation fréquentielle du module des filtres associés au casque Sennheiser HD25.

tème de haut-parleurs choisi lors de la première étape de configuration de *PifPaf3D*. Comme le montre l'interface graphique, un choix de microphones est néanmoins possible et les filtres spatiaux associés sont activables (bouton "*Spatial filter*"). De plus, il est possible de visualiser en trois dimensions le microphone utilisé en cliquant sur le bouton "*Visu Mic*", notamment pour s'assurer du *routing* entre les canaux de sortie du microphone et les entrées fixées dans ce module. Enfin, le contenu encodé en HOA peut être sauvé pour une éventuelle utilisation extérieure des signaux bruts encodés en domaine ambisonique (bouton "*Save Content*").

## 2.5 Compensation du casque et égalisation

Le dernier module présenté dans ce chapitre concerne la compensation du casque et l'égalisation tri-bande du signal de sortie. La compensation du casque consiste en la suppression de la fonction de transfert issue à la fois des transducteurs utilisés, de la forme et des matériaux de la structure du casque, ainsi que de la cavité formée par le système {Oreille Externe; Casque} dans le cas d'une écoute fermée. Pour ce faire, plusieurs séries de mesures ont été pratiquées en plaçant différents casques sur la tête artificielle *Neumann KU100*, isolée phoniquement par des panneaux absorbants. Le signal utilisé pour l'obtention des fonctions de transfert est une combinaison entre code de Golay, bruit blanc et *sweep-sine*, au même titre que pour les mesures de réponses impulsionnelles de salle. Entre chaque excitation, le casque est retiré puis remis, ceci afin de moyennner intrinsèquement les différents positionnements possibles sur les oreilles. Un code *Matlab* a été

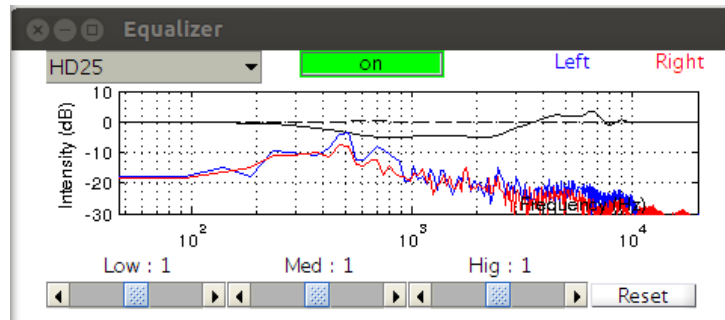


FIGURE 2.13 – *PifPaf3D* - Module de compensation de casque et d'égalisation tri-bandes.

spécifiquement développé pour traiter les données ainsi obtenues et livrer un filtre brut utilisable par *PifPaf3D*. Un exemple de module fréquentiel d'une fonction de transfert mesurée avec un casque type Sennheiser HD25 est représenté en bleu sur la figure 2.12. Sur cette même figure, apparaissent les différents étapes de traitement avec, en premier lieu, le filtre brut tronqué (en rouge) par un gabarit (en noir), dont la bande fréquentielle est définie par l'utilisateur. Étant donné que la mesure par tête artificielle nécessite l'utilisation d'un filtre coupe-bas pour limiter le bruit, la valeur minimale du gabarit a été fixée à 400 Hz. La valeur maximale est déterminée par une estimation empirique de la zone de linéarité des transducteurs au delà de laquelle les mesures ne sont plus considérées comme tangibles (ici 4000 Hz). Le module de la fonction de transfert ainsi obtenue est alors inversé pour servir de référence à la création d'un filtre à minimum de phase par modélisation du type Yulewalk (en vert sur la figure 2.12). Ce filtre compensatoire est alors utilisé par convolution en domaine de Fourier sur les signaux gauches et droits.

L'interface graphique associée au module de compensation du casque (fig. 2.13) propose ainsi un ensemble de corrections de casques, mesurés au sein de la société DMS et obtenu d'après le protocole précédent. Le module du filtre fréquentiel associé est affiché en noir sur cette figure et le résultat du filtrage des canaux gauche et droit est donné en temps réel par les courbes bleu (canal gauche) et rouge (canal droit). Un bouton "on/off" permet d'activer ou désactiver le traitement en temps réel, notamment pour les écoutes comparées. Par ailleurs, en utilisant cette fonctionnalité, un bruit blanc a été compensé par *PifPaf3D* pour chaque casque mesuré. Le fichier audio obtenu a été diffusé et enregistré sur le même dispositif que celui utilisé pour les mesures, à savoir le casque positionné sur la tête artificielle *Neumann KU100*. Ce résultat a été comparé en domaine fréquentiel à la diffusion du bruit blanc de référence, où la fonction de transfert est non compensée. Ainsi, pour la

plupart des casques, le module fréquentiel obtenu après compensation est bien plus aplati, ce qui valide expérimentalement le procédé et les résultats.

Enfin, en complément de cet outil, un égaliseur tri-bande du second ordre est proposé, notamment pour compenser d'éventuelles détériorations fréquentielles du signal original traité par les différents modules composant *PifPaf3D*. Ce dernier est accessible en temps réel par trois curseurs modifiant les gains par bande de fréquence ("*Low*", "*Medium*" et "*High*", fig. 2.12). Un bouton "*Reset*" a été ajouté pour remettre rapidement l'ensemble de ces gains à leur valeur par défaut.

## 2.6 SpherAudio Headphones

Dès ses premières versions, *PifPaf3D* a démontré des performances étonnantes d'un point de vue qualitatif, validées par de nombreux ingénieurs du son, ainsi que d'importants industriels du monde de l'audio. La société DMS a donc rapidement monté une équipe de développement pour créer une librairie C/C++ industrialisable, dont l'équivalence au code *Matlab* est certifiée par une batterie de tests de non régression. Afin d'assurer une retranscription inaudible sur l'ensemble des traitements effectués, ces tests adoptent tous une précision relative fixée à  $10^{-6}$  sur les signaux de sortie. *PifPaf3D* reste donc l'unique référence, limitant les conflits éventuels entre les différents codes. Par ailleurs, la librairie C/C+ a été popularisée sous la marque *SpherAudio Headphones* (fig. 2.14 et 2.15), et interfacée avec :

- un plug'in VST sous Reaper (*SpherAudioVST*);
- un processeur dédié (*BP84*);
- une tablette Samsung Galaxy Tab (*SpherAudioDroid*);
- une web audio API en HTML5 (*SpherAudioAPI*);
- un serveur audio (*SpherAudio@Home*).

Mis à part le *BP84*, tous ces développements ont été réalisés par M. Mathieu Coïc, que j'ai eu le plaisir d'encadrer en parallèle des travaux de recherche doctorale présentés dans ce manuscrit. Par ailleurs, de nombreux stagiaires ont contribué à la réalisation de ces outils. Dès lors, il est agréable de préciser que le plug'in VST et le processeur dédié ont été utilisés par de nombreux organismes, publics ou privés (CNSMDP, Radio France, France Télévision, INA, Technicolor, etc.). De plus, Radio France a mis en ligne un site internet pour diffuser des contenus spatialisés, utilisant la gamme *SpherAudio* pour l'encodage binaural (fig. 2.16). Je profite donc de ce court aparté pour renouveler à tous et à toutes mes sincères félicitations et remerciements.

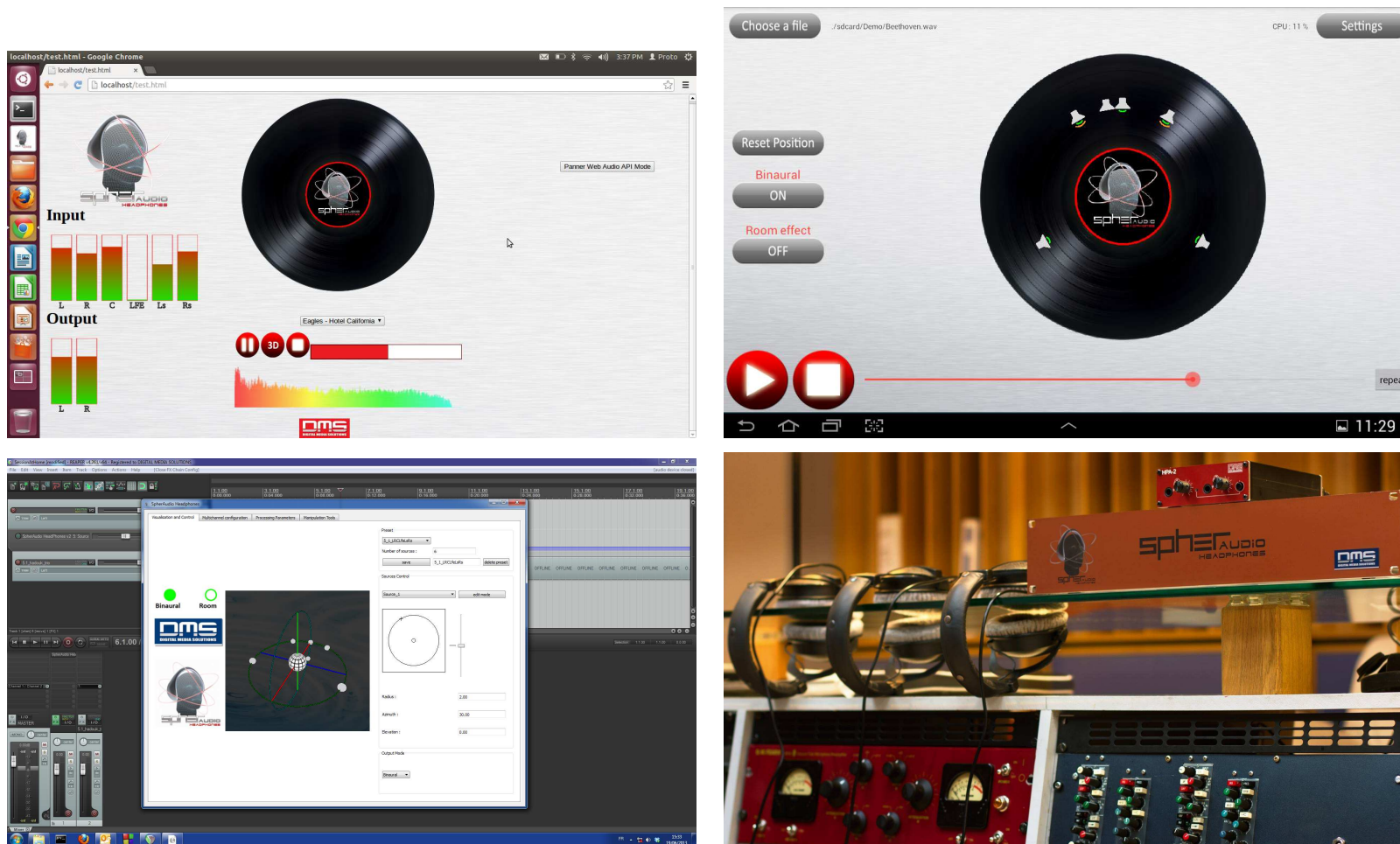


FIGURE 2.14 – Outils et logiciels dérivés de *PifPaf3D*, développés en parallèle de la thèse par la société Digital Media Solutions. (Haut, gauche) Spatialisateur *SpherAudioAPI* pour les plate-formes web compatibles HTML5, comme Google Chrome. (Haut, droite) Spatialisateur *SpherAudioDroid* pour les tablettes Android du type Samsung Galaxy et les terminaux mobiles compatibles. (Bas, gauche) Plug'in VST *SpherAudioVST* pour le logiciel de Musique Assisté par Ordinateur Reaper. (Bas, droite) Processeur Binaural *BP84* pour le traitement professionnel sur système embarqué, proposant huit entrées mono et quatre sorties binaurales.

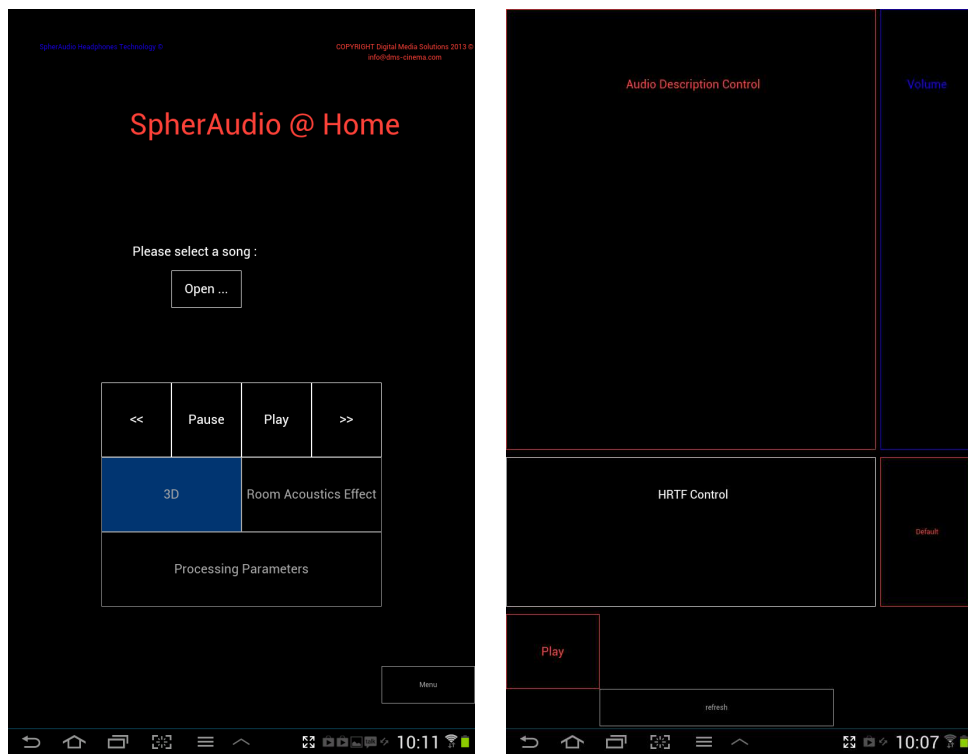


FIGURE 2.15 – Outils et logiciels dérivés de *PifPaf3D*, développés en parallèle de la thèse par les ingénieurs de la société Digital Media Solutions. (Gauche) Interface "télécommande" pour serveur d'Audio spatialisé sous tablette Android. (Droite) Interface "télécommande" pour serveur d'Audio-description spatialisée sous tablette Android, en vue d'améliorer l'accessibilité au cinéma des personnes non-voyantes.



## Comment écouter en binaural ?

Des simples écouteurs permettent d'apprécier le "son 3D" en mode binaural. En effet le son binaural résulte d'un artefact de traitement du son qui permet au cerveau de l'auditeur de reconstituer l'espace sonore au moyen d'une simple stéréo.



Les productions sonores diffusées sur nouvOson sont encodées en binaural au moyen du logiciel SpherAudio de la société DMS



Le son multicanal et binaural

- Accueil
- Documentaires
- Fictions
- Musiques
- Paysages sonores
- Reportages
- Concours

Les formats



Musique

## La Traviata de Verdi

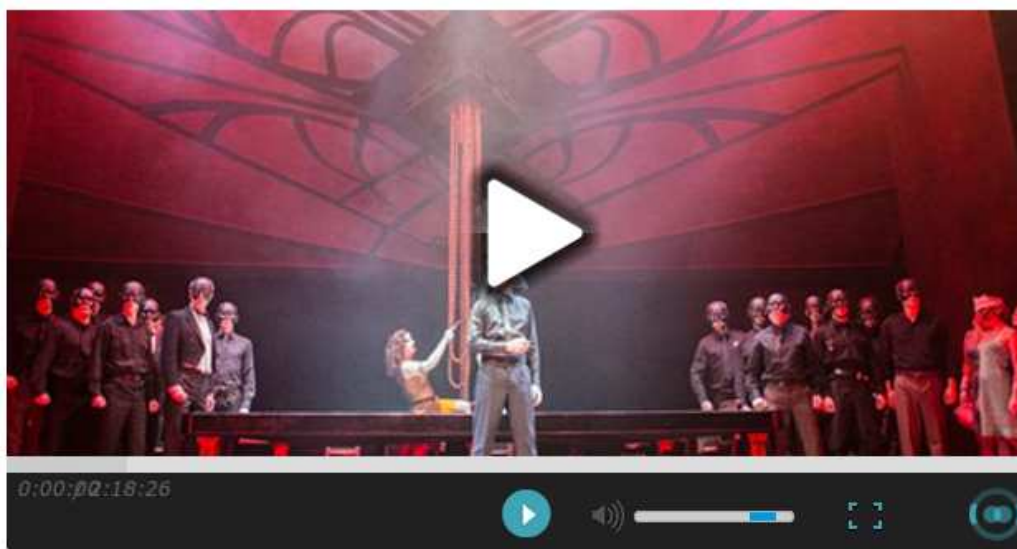


FIGURE 2.16 – Visuels extraits de *nouvOson.radiofrance.fr*, plate-forme de contenus multicanaux mis en ligne par Radio France, utilisant les outils dérivés de *PifPaf3D* pour l'encodage binaural (*BP84* et *SpherAudioVST*).





## Chapitre 3

# Formulations intégrales rapides pour l'acoustique

Une fois que le spatialisateur *PifPaf3D* eut atteint un stade de développement suffisant pour être exploité dans la suite des recherches, la seconde partie de la thèse porta sur la génération numérique des fonctions de transfert HRTF, notamment pour leurs individualisations. En effet, comme expliqué dans les chapitres précédents, une des difficultés majeures que rencontrent aujourd'hui les technologies binaurales concerne la personnalisation de ces filtres, propres à chacun. De nombreuses études ont démontré qu'un filtrage générique est insuffisant pour un rendu de l'espace réellement convaincant (e.g. [12], [67], [86]). C'est pourquoi le but original de l'ensemble du projet de thèse consiste en l'obtention et l'exploitation de HRTF individualisées pour le grand public, obtenues par une reproduction numérique des mesures physiques (e.g. [39], [49], [50], [51], [52]). Le protocole alors envisagé (fig. 3.1) est découpé en trois grandes étapes :

1. Création et adaptation de maillages de tête/corps individuels, obtenus par traitement d'images et fusionnés ou non avec des maillages paramétriques de formes élémentaires (sphères, ovoïdes, cônes, etc.). Cette étape, détaillée dans le chapitre suivant, a notamment été réalisée en *Matlab* à partir de données issues d'une *Kinect Microsoft*.
2. Réalisation d'un moteur de calcul intégral pour résoudre rapidement les équations de propagation des ondes sur lesdits maillages. Cette étape a donné naissance à la librairie *MyBEM*, entièrement programmée en *Matlab* et optimisée par vectorisation. De plus, une nouvelle méthode rapide intitulée "Décomposition Creuse en Sinus Cardinal" ("*Sparse Cardinal Sine Decomposition*") a été implémentée en lieu et place des classiques méthodes multipolaires FMM (e.g. [31], [34], [35], [38], [82]).

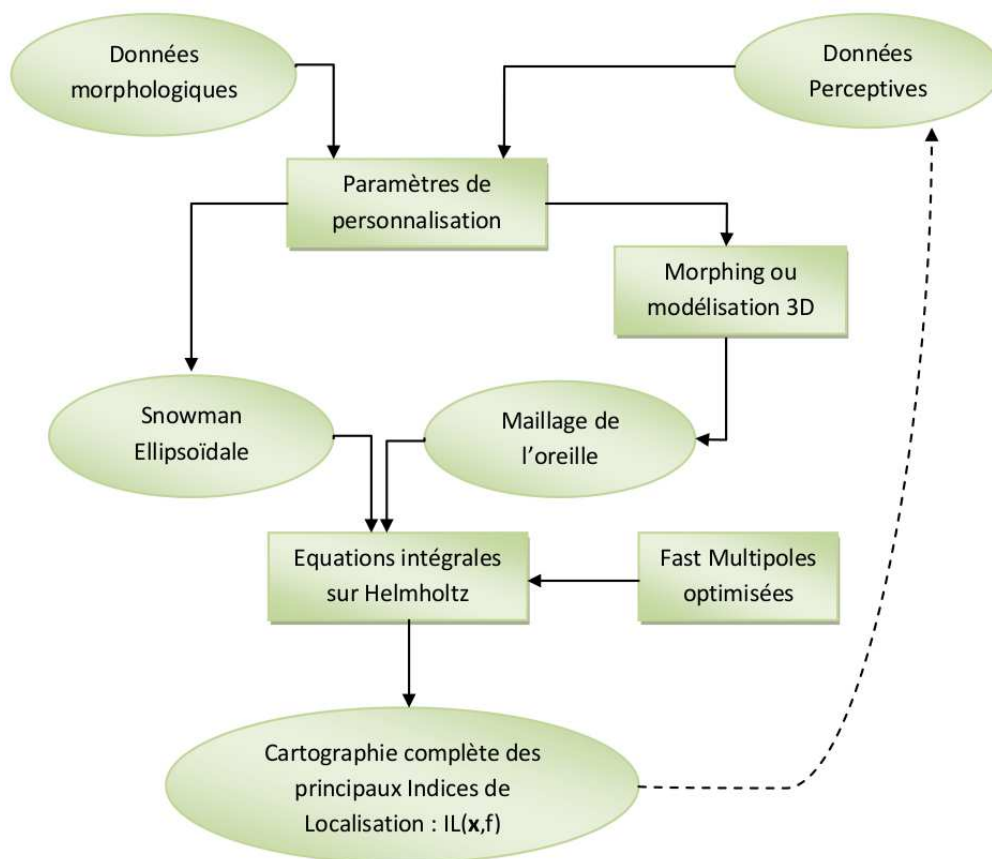


FIGURE 3.1 – Résumé de la méthodologie envisagée pour la création de HRTF numériques individualisées. Diagramme issu du projet de thèse initial, entre mathématiques appliquées et acoustique.

3. Validation par tests perceptifs des HRTF issues des simulations numériques sur les maillages individuels, en utilisant le moteur binaural *PifPaf3D* pour le rendu audio. Cette étape n'a pas été réalisée pendant la thèse et fera l'objet de recherches ultérieures.<sup>1</sup>

Une revue théorique des équations intégrales fait donc l'objet de la première partie de ce chapitre, adjointe à l'introduction de la méthode multipolaire rapide (*Fast Multipole Method*). Dans une seconde partie, la nouvelle méthode rapide SCSD est présentée, non pas de façon théorique, mais en suivant les différentes étapes du raisonnement qui ont menées vers le formalisme final. Une présentation moins empirique, établie en parallèle de la rédaction de ce manuscrit, est disponible dans l'article [5] joint en annexe. La réalisation pratique au sein de la librairie *MyBEM*, développée conjointement avec F. Alouges, est quant à elle présentée dans le chapitre suivant.

## 3.1 Représentation et équations intégrales

Il existe différentes méthodes pour la modélisation numérique des phénomènes de propagation d'ondes, classés parmi les problèmes hyperboliques linéaires. En effet, la linéarité permet un traitement de la variable temps par transformée de Fourier, ce qui autorise une formulation en temps comme en fréquence. Dans le cas de l'acoustique fréquentielle, le problème de diffraction résultant peut être écrit sous une forme intégrale, puis discrétisé par éléments finis de frontière. Cette section introduit donc quelques rappels classiques des équations intégrales sous forme variationnelle. Pour plus de précisions, le lecteur curieux peut se documenter sur les ouvrages suivants : [13], [16], [55], [69] et [82].

### 3.1.1 Diffraction dans l'espace libre

Les équations de l'acoustique s'obtiennent par linéarisation des équations d'Euler, caractérisant les fluides :

- Conservation de la masse ;
- Conservation de la quantité de mouvement ;
- Conservation de l'entropie pour les fluides parfaits.

---

1. En complément, des itérations sur l'ensemble de ce processus sont envisagées pour obtenir une personnalisation optimale. En effet, il doit être possible d'exploiter les données issues des tests perceptifs pour guider la création des maillages de calcul, ainsi que pour définir les conditions aux limites du problème à résoudre. Cette piste fera très probablement l'objet de travaux futurs.

En fixant  $c$  la vitesse du son dans un fluide au repos, la pression acoustique  $p$  vérifie l'équation des ondes scalaire :

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 p - \Delta p = 0. \quad (3.1)$$

Pour que ce modèle conduise à un problème bien posé, il est nécessaire d'ajouter des conditions initiales à  $t = 0$ .

Par ailleurs, comme l'équation des ondes scalaire (3.1) est linéaire, la transformée de Fourier en convention temporelle  $e^{i\omega t}$  conduit à l'équation de Helmholtz scalaire :

$$-\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2} u = -\Delta u - k^2 u = 0, \quad (3.2)$$

où  $k$  représente le nombre d'onde ( $rad.m^{-1}$ ) et  $u(\omega) = p(\omega)$ ,  $\omega$  étant la pulsation ( $rad.s^{-1}$ ). Il existe certaines solutions non triviales à cette équation, mentionnées à toutes fins utiles :

- Les ondes planes, dont le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , de module  $k$ , fixe la direction de propagation :

$$u(\mathbf{x}) = u_0 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.3)$$

- Les ondes sphériques :

$$u(\mathbf{x}) = u_0 \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^*. \quad (3.4)$$

Enfin, pour que le problème fréquentiel (3.2) équivalent à la formulation temporelle (3.1) soit bien posé, il faut rajouter des conditions aux limites pour fixer le sens du temps et fermer le système. La condition de radiation de Sommerfeld (3.5), introduite à partir de considérations énergétiques, joue ce rôle en assurant l'unicité d'une solution :

$$r (\partial_r u + iku) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad r = |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty. \quad (3.5)$$

Il est d'ores et déjà possible de constater que certaines solutions de l'équation de Helmholtz (3.2) ne respectent pas cette condition, à l'instar des ondes planes (3.3), dites non causales (ou non physiques). Pour résumer, un problème bien posé de diffraction dans l'espace libre s'écrit dans le cas général :

$$\begin{cases} -\Delta u - k^2 u = f, \\ r (\partial_r u + iku) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad r \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

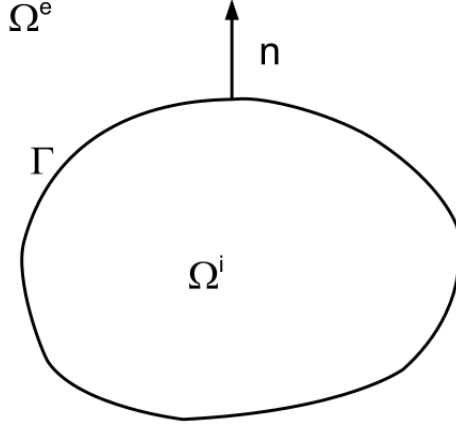


FIGURE 3.2 – Notations associées à la modélisation des phénomènes de propagation d’ondes. (source [82])

Pour  $f \equiv \delta_y$ , ce système possède une solution élémentaire  $E \in D'(\mathbb{R}^3)$ , au sens des distributions. Dans le cas tridimensionnel, le noyau (ou fonction) de Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est introduit à partir de  $E$  :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{e^{-ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^3, \quad (3.6)$$

et permet d’établir l’expression de la solution générale  $u$  du problème, issue du produit de convolution  $\star$  suivant :

$$u(\mathbf{x}) = (E \star f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} f(\mathbf{y})d\mathbf{y}. \quad (3.7)$$

Pour que cette expression ait un sens, des restrictions sur  $f$  doivent être imposées avec, par exemple,  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ .

### 3.1.2 Diffraction en présence d’un obstacle

Une surface fermée régulière et orientable  $\Gamma$  découpe désormais l’espace  $\Omega$  en un ouvert borné  $\Omega^i$  et un ouvert non borné  $\Omega^e$  (fig. 3.2). La présence d’une telle frontière permet de définir deux distributions surfaciques, utilisées pour établir les résultats fondamentaux de ce chapitre :

- Pour toute fonction  $\lambda$  régulière définie sur une surface  $\Gamma$ , la distribution de simple couche de densité  $\lambda$  sur  $\Gamma$  correspond à la mesure de Radon  $s(\lambda) = \lambda(\mathbf{x})d\Gamma_x$  telle que :

$$\langle s(\lambda), \phi \rangle = \int_{\Gamma} \lambda(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})d\Gamma_x \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R}^3). \quad (3.8)$$



- La distribution de double couche de densité  $\mu$ , notée  $d(\mu)$ , est quant à elle définie par :

$$\langle d(\mu), \phi \rangle = \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{x}) \partial_n \phi(\mathbf{x}) d\Gamma_x \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R}^3). \quad (3.9)$$

Ainsi, dans le cas particulier du rayonnement de sources réparties sur la surface  $\Gamma$ , le potentiel de simple couche  $\mathcal{S}\lambda$  peut être établi comme la solution  $u$  du problème de diffraction dans l'espace libre pour une distribution de simple couche  $s(\lambda)$  (3.8) :

$$\begin{cases} -\Delta u - k^2 u = s(\lambda), \\ r (\partial_r u + iku) \rightarrow 0 \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

D'après la formulation générale des solutions de ce problème (3.7),  $\mathcal{S}\lambda$  s'écrit donc comme le produit de convolution :

$$\mathcal{S}\lambda(\mathbf{x}) = (E \star s(\lambda))(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \lambda(\mathbf{y}) d\Gamma_y \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.10)$$

et possède les propriétés suivantes :

- Continuité dans  $\mathbb{R}^3$ ;
- $\mathcal{C}^\infty$  en dehors de  $\Gamma$ ;
- Solution de l'équation de Helmholtz homogène (3.2) en dehors de  $\Gamma$ ;
- Vérifie la condition de radiation à l'infini de Sommerfeld.

L'opérateur  $\mathcal{S}$  associé est appelé "opérateur de simple couche" et sa restriction à la frontière  $\Gamma$  sera notée  $S$ . Au même titre, un opérateur dit de "double couche"  $\mathcal{D}$  peut être appliqué à toute fonction régulière  $\mu$ , définie sur  $\Gamma$ , pour former le potentiel de double couche suivant :

$$\mathcal{D}\mu(\mathbf{x}) = (E \star d(\mu))(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \partial_{n_y} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu(\mathbf{y}) d\Gamma_y \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.11)$$

où  $d(\mu)$  est la distribution de double couche (3.9). Le potentiel de double couche  $\mathcal{D}\mu$  possède les mêmes propriétés que celui de simple couche  $\mathcal{S}\lambda$ , mais présente une discontinuité sur  $\mathbb{R}^3$  par un saut de  $-\mu$  à la traversée de  $\Gamma$ . La restriction de l'opérateur double couche  $\mathcal{D}$  à la frontière  $\Gamma$  sera notée  $D$ .

Les solutions  $u^{tot}$  du problème de diffraction en présence d'un obstacle peuvent désormais être explicitées à partir de ces potentiels de rayonnement. En posant le champ diffracté  $u = u^{tot} - u^{in}$  comme la différence entre le champ total  $u^{tot}$  et le champ incident  $u^{in}$ ,  $u$  est solution de l'équation de Helmholtz homogène (3.2), pour laquelle le théorème de représentation intégrale s'applique.

**Théorème 1** (de représentation intégrale) Soit  $u$  une fonction régulière définie de part et d'autre d'une frontière  $\Gamma$  régulière orientée. La restriction de  $u$  à  $\Omega^i$  est notée  $u^i$  et la restriction à  $\Omega^e$  est notée  $u^e$ . Les sauts de  $u$  et de sa dérivée normale  $\partial_n u$  sont notés  $\mu$  et  $\lambda$  :

$$\mu = [u] = u^i - u^e \quad \text{et} \quad \lambda = [\partial_n u] = \partial_n u^i - \partial_n u^e \quad \text{sur} \quad \Gamma.$$

D'après la formule des sauts appliquée à la distribution  $\{u\}$ , définie par  $u$  en dehors de  $\Gamma$  :

$$\Delta\{u\} = \{\Delta u\} - s([\partial_n u]) + d([u]),$$

si les hypothèses suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} -(\Delta u^i + k^2 u^i) = 0 & \text{dans} \quad D'(\Omega^i), \\ -(\Delta u^e + k^2 u^e) = 0 & \text{dans} \quad D'(\Omega^e), \\ r (\partial_r u^e + i k u^e) \rightarrow 0 & \text{quand} \quad r \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

alors la fonction  $u$  vérifie :

$$-(\Delta + k^2)u = s(\lambda) - d(\mu) \quad \text{dans} \quad D'(\mathbb{R}^3),$$

ainsi que la condition de radiation à l'infini.  $u$  est donc la somme d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de double couche :

$$\begin{aligned} u &= E \star s(\lambda) - E \star d(\mu), \\ u &= \mathcal{S}\lambda - \mathcal{D}\mu \quad \text{dans} \quad D'(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Plus précisément, les formulations de représentation intégrale suivantes peuvent être explicitées :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \mathcal{S}\lambda(\mathbf{x}) - \mathcal{D}\mu(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega^i \cup \Omega^e, \\ \frac{1}{2}(u^i(\mathbf{x}) + u^e(\mathbf{x})) &= S\lambda(\mathbf{x}) - D\mu(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \frac{1}{2}(\partial_n u^i(\mathbf{x}) + \partial_n u^e(\mathbf{x})) &= D^*\lambda(\mathbf{x}) - H\mu(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \end{aligned}$$

où les opérateurs  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $S$  et  $D$  sont tels qu'introduits dans (3.10) et (3.11). Les opérateurs  $D^*$  et  $H$  (hypersingulier), sont respectivement obtenus par dérivation normale des opérateurs de simple et double couches  $S$  et  $D$ . Par ailleurs, dans le cas de singularités géométriques présentes sur une surface  $\Gamma$  lipschitzienne, les facteurs  $\frac{1}{2}$  doivent être remplacés par les rapports à  $4\pi$  des limites des angles solides intérieurs et extérieurs.

### 3.1.3 Équations intégrales

Le théorème de représentation intégrale 1 est la pierre angulaire des méthodes intégrales. Il peut élégamment s'écrire sous la forme d'opérateurs matriciels, appelés projecteurs de Calderón intérieur  $C_i$  et extérieur  $C_e$ .

**Théorème 2** (*Projecteurs de Calderón*) Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux fonctions régulières quelconques définies sur  $\Gamma$ , alors la fonction  $u$  définie par  $u = \mathcal{S}\lambda - \mathcal{D}\mu$  dans  $D'(\mathbb{R}^3)$  est solution de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega^i \cup \Omega^e$  et vérifie la condition de radiation à l'infini. De plus, les traces intérieures et extérieures de  $u$  et de sa dérivée normale sur  $\Gamma$  sont données par :

$$\begin{pmatrix} u^i \\ \partial_n u^i \end{pmatrix} = \left(\frac{Id}{2} + C\right) \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = C_i \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u^e \\ \partial_n u^e \end{pmatrix} = \left(-\frac{Id}{2} + C\right) \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = C_e \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix},$$

où  $C$  est l'opérateur

$$\begin{pmatrix} -D & S \\ -H & D^* \end{pmatrix}.$$

De plus, les projecteurs  $C_e$  et  $C_i$  satisfont les relations suivantes :

$$C_i^2 = C_i, \quad C_e^2 = C_e, \quad C_i - C_e = Id,$$

qui peuvent se réécrire à partir des opérateurs surfaciques usuels :

$$DS = SD^*, \quad HD = D^*H, \quad D^2 - SH = D^{*2} - HS = \frac{Id}{4}. \quad (3.12)$$

Ces projecteurs confirment que les potentiels de simple et double couches sont définis partout et vérifient l'équation de Helmholtz en dehors de  $\Gamma$ , ainsi que la condition de radiation de Sommerfeld à l'infini.

Cependant, afin de calculer explicitement la solution du problème de diffraction en présence d'un obstacle, il reste encore à déterminer les sauts  $\mu$  et  $\lambda$ . Pour cela, des prolongements sur les traces intérieures et extérieures de  $u$  permettent d'établir des équations intégrales, définies sur la frontière  $\Gamma$ . Pour former un système bien posé, ces équations sont alors couplées à des conditions de bord, fixées par la modélisation physique de la structure diffractante. Trois types de condition de bord sont utilisés en pratique :

– La condition de Dirichlet, pour les obstacles dits mous (ou *soft*) :

$$u = u_D \quad \text{régulière sur } \Gamma; \quad (3.13)$$

– La condition de Neumann, pour les obstacles dits rigides (ou *hard*) :

$$\partial_n u = \mathbf{grad}(u) \cdot \mathbf{n} = u_N \quad \text{régulière sur } \Gamma; \quad (3.14)$$

– La condition de Robin (ou Fourier), pour les obstacles d'impédance  $\beta$  :

$$\partial_n u - ik\beta u = u_R \quad \text{régulière sur } \Gamma. \quad (3.15)$$

Selon la modélisation physique souhaitée, il existe de nombreuses équations intégrales liées aux conditions de bord et au choix du prolongement des traces intérieures ou extérieures. Aussi, pour ne pas surcharger le manuscrit par de nombreuses formules, seuls les problèmes extérieurs de Dirichlet et Neumann sont détaillés.

Dans le cas d'un problème de Dirichlet extérieur (3.13), la formulation bien posée est la suivante :

$$\begin{cases} -(\Delta u^e + k^2 u^e) = 0 & \text{dans } \Omega^e, \\ u^e = u_D & \text{régulière sur } \Gamma, \\ r (\partial_r u^e + ik u^e) \rightarrow 0 & \text{quand } r \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

et selon le prolongement choisi pour la trace intérieure, cinq équations intégrales peuvent être formulées en saut :

Prolongement	$\mu$	$\lambda$
Dirichlet	0	$S\lambda = u_D$
Neumann	$-(0.5Id + D)\mu = u_D$	0
Zéro	$-u_D$	$S\lambda = (0.5Id - D)u_D$
Zéro ( $\partial_n$ )	$-u_D$	$(0.5Id + D^*)\lambda = -Hu_D$
Robin, $\beta \in \mathbb{C}$	$(ik\beta S - (0.5Id + D))\mu = u_D$	$ik\beta\mu$

Pour les quatre premières équations, le prolongement n'est pas unique si  $k^2$  est une valeur propre du problème de Dirichlet intérieur relatif à l'opérateur  $-\Delta$ . L'opérateur associé à l'équation intégrale ne sera donc pas inversible pour ces fréquences propres.

Dans le cas d'un problème de Neumann extérieur (3.14), la formulation bien posée s'écrit cette fois :

$$\begin{cases} -(\Delta u^e + k^2 u^e) = 0 & \text{dans } \Omega^e, \\ \partial_n u^e = u_N & \text{régulière sur } \Gamma, \\ r (\partial_r u^e + i k u^e) \rightarrow 0 & \text{quand } r \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

avec les équations intégrales associées :

Prolongement	$\mu$	$\lambda$
Dirichlet	0	$(-0.5Id + D^*)\lambda = u_N$
Neumann	$-H\mu = u_N$	0
Zéro	$-H\mu = (0.5Id + D^*)u_N$	$-u_N$
Zéro (trace)	$(0.5Id - D)\mu = Su_N$	$-u_N$
Robin, $\beta \in \mathbb{C}$	$-(H + ik\beta(0.5Id - D^*))\mu = u_N$	$ik\beta\mu$

Au même titre que pour le problème de Dirichlet, seule la dernière équation assure l'existence et l'unicité d'une solution pour toutes les fréquences.

Une fois ces équations établies, il ne reste plus qu'à les résoudre numériquement pour obtenir les sauts  $\mu$  et  $\lambda$ . En accord avec le théorème de représentation intégrale, la solution générale  $u$  pourra dès lors être calculée en tous points de l'espace, par rayonnement des potentiels de simple et double couches  $\mathcal{S}\lambda$  et  $\mathcal{D}\mu$ . Pour mémoire, les opérateurs intégraux mis en jeu s'écrivent dans l'espace tridimensionnel :

$$\mathcal{S}\lambda(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\lambda(\mathbf{y})d\Gamma_y \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \quad (3.16)$$

$$\mathcal{D}\mu(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \partial_{n_y} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mu(\mathbf{y})d\Gamma_y \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \quad (3.17)$$

$$S\lambda(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\lambda(\mathbf{y})d\Gamma_y \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (3.18)$$

$$D\mu(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \partial_{n_y} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mu(\mathbf{y})d\Gamma_y \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (3.19)$$

$$D^*\lambda(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \partial_{n_x} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\lambda(\mathbf{y})d\Gamma_y \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (3.20)$$

$$H\mu(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \partial_{n_{xy}}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mu(\mathbf{y})d\Gamma_y \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (3.21)$$

où  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est le noyau de Green introduit en (3.6). De plus, en posant  $\mathbf{x} = |\mathbf{x}|\nu = r\nu$  dans  $\mathbb{R}^3$ , à ces relations s'ajoutent les potentiels de champ

lointain, obtenus par développement limité du noyau de Green pour  $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}|$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\lambda(\mathbf{x}) &= \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \mathcal{S}^\infty \lambda(\nu) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ \text{avec } \mathcal{S}^\infty \lambda(\nu) &= \int_{\Gamma} e^{ik\nu \cdot \mathbf{y}} \lambda(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \mathcal{D}\mu(\mathbf{x}) &= \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \mathcal{D}^\infty \mu(\nu) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ \text{avec } \mathcal{D}^\infty \mu(\nu) &= ik \int_{\Gamma} (\mathbf{n}_{\mathbf{y}} \cdot \nu) e^{ik\nu \cdot \mathbf{y}} \mu(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Les opérateurs  $\mathcal{S}^\infty$  et  $\mathcal{D}^\infty$  sont appelés "opérateurs de rayonnement à l'infini" et sont couramment utilisés pour représenter la radiation en champ lointain, sans tenir compte de la décroissance  $\frac{1}{r}$ .

### 3.1.4 Formulations discrètes

Le problème de Dirichlet extérieur prolongé par un problème de Dirichlet intérieur a été choisi pour établir une formulation discrète des équations intégrales. À partir de cet exemple, la méthodologie peut aisément être reproduite pour obtenir les formulations d'autres problèmes. Aussi, pour toute fonction régulière  $f$ , l'équation intégrale à résoudre s'écrit :

$$\begin{aligned} S\lambda &= f, \\ S\lambda(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \lambda(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} = f(\mathbf{x}) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma. \end{aligned}$$

Ce problème peut alors être formulé sous la forme variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \lambda \in V = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ tel que} \\ \langle S\lambda, \lambda^t \rangle = \langle f, \lambda^t \rangle \quad \forall \lambda^t \in V. \end{array} \right.$$

Les méthodes par éléments finis de frontière consistent, en premier lieu, à approcher la surface  $\Gamma$  par un maillage élémentaire  $\mathcal{T}_h$  de taille  $h$ , composé par exemples de triangles  $T_i$  formant une discrétisation  $\Gamma_h$  de  $\Gamma$ . Ce maillage doit vérifier les propriétés classiques sur l'intersection de deux éléments, la qualité des éléments, etc. Dès lors, l'espace variationnel  $V$  peut être approché par un espace :

$$V_h = \{ \lambda_h = \lambda_i \text{ sur le triangle } T_i, T_i \in \mathcal{T}_h \},$$

et la formulation variationnelle devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \lambda_h \in V_h \text{ tel que} \\ \langle S\lambda_h, \lambda_h^t \rangle = \langle f, \lambda_h^t \rangle \quad \forall \lambda_h^t \in V_h. \end{array} \right.$$

Cette approximation, dite  $P^0$ , est conforme et permet d'approcher  $\lambda$  par  $\lambda_h$ , constante par morceau. De plus,  $V_h$  est de dimension  $N$  égale au nombre de triangles de  $\mathcal{T}_h$  et sa base  $\{\phi_i, i = 1, \dots, N\}$  s'exprime relativement simplement par :

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{sur le triangle } T_i, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Une fois ce cadre formel établi, en posant  $\Lambda^h$  les coordonnées de  $\lambda_h \in V_h$  dans la base  $\{\phi_i, i = 1, \dots, N\}$  telles que :

$$\lambda_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \Lambda_i^h \phi_i(\mathbf{x}),$$

le problème discret équivalent à la formulation variationnelle approchée consiste en la résolution du système linéaire  $S^h \Lambda^h = F^h$ . Chaque coefficient de la matrice  $S^h$  est défini par :

$$S_{i,j}^h = \int_{T_i} \int_{T_j} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dT_j(\mathbf{y}) dT_i(\mathbf{x}) \quad \text{pour } (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2,$$

et le vecteur  $F^h$  a pour coordonnées :

$$F_i^h = \int_{T_i} f(\mathbf{x}) dT_i(\mathbf{x}).$$

En supposant, d'une part, que  $k^2$  n'est pas une valeur propre du problème de Dirichlet intérieur pour  $-\Delta$ , d'autre part, que le maillage est suffisamment fin pour que la base choisie puisse représenter correctement le problème, le système linéaire ainsi formé admet une unique solution  $\Lambda^h$ .

Dès lors, le champ approché  $u_h$  de la solution du problème de diffraction  $u$  peut être calculé dans tout l'espace, par représentation intégrale des potentiels de simple et double couches approchés  $\mathcal{S}^h \lambda_h$  et  $\mathcal{D}^h \mu_h$ . Dans le cas d'un problème de Dirichlet extérieur prolongé par Dirichlet intérieur,  $\mu = 0$  et la représentation discrète s'écrit :

$$\begin{aligned} u_h(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_h} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \lambda_h(\mathbf{y}) d\Gamma_h(\mathbf{y}) \\ &= \sum_{j=1}^N \Lambda_j^h \int_{T_j} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dT_j(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Heuristiquement, pour obtenir des résultats raisonnables en approximation  $P^0$ , il faut que la taille  $h$  des éléments soit au minimum inférieure au dixième de la longueur d'onde (donnée empirique). Un espace variationnel

discret  $P^1$  permet d'estimer  $\lambda_h$  par des fonctions de bases plus précises, linéaires par morceaux (fonctions chapeaux). Auquel cas, au prix d'une intégration locale plus fine, la taille  $h$  des éléments peut être seulement inférieure au sixième, voire au quart de la longueur d'onde. In fine, quelle que soit la dimension de l'espace d'approximation variationnelle, l'assemblage du système linéaire à résoudre est principalement fonction des interactions élémentaires dans  $\mathcal{T}_h$ , estimées numériquement par intégration de Gauss. En omettant les problèmes liés aux singularités des intégrales, ceci revient donc à calculer l'ensemble des interactions au sein d'un nuage de points, évaluées avec une complexité quadratique. C'est pourquoi le calcul rapide de ces interactions est un enjeu majeur pour la compétitivité des méthodes intégrales.

## 3.2 Introduction aux méthodes multipolaires rapides

La méthode des multipôles rapides (*Fast Multipole Method*) a été introduite par L. Greengard et V. Rokhlin à la fin du  $XX^e$  siècle [34], pour ramener la complexité des méthodes intégrales de quadratique ( $N^2$ ) à quasi-linéaire ( $N \log N$ ). Cet algorithme a littéralement bousculé les ordres de grandeurs des problèmes jusqu'alors résolus, et, pour cela, a été classé parmi les dix algorithmes majeurs du siècle dernier (source *Wikipedia*). Pour réaliser cette compression, le principe de base consiste à calculer des produits matrices-vecteurs de manière économique, à la fois en mémoire vive et en charge de calcul. Seule une brève introduction est présentée dans ce manuscrit, essentiellement pour illustrer les concepts principaux mis en jeu. Pour de plus amples détails, de nombreux ouvrages de référence expliquent les fondements théoriques et pratiques de cette méthode (e.g. [35], [38], [82]).

En méthodes intégrales, quelle que soit la formulation variationnelle et l'équation intégrale considérée, le produit matrice vecteur calculé dans la résolution d'un problème de diffraction se ramène toujours à la forme :

$$\int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{x}) g(\mathbf{y}) d\Gamma_h(\mathbf{x}) d\Gamma_h(\mathbf{y}),$$

avec  $f$  et  $g$  des fonctions scalaires. Hors singularités, les quadratures utilisées pour l'évaluation numérique des intégrales font généralement appel à des points de Gauss  $\mathbf{x}_g$  et  $\mathbf{y}_g$ , répartis sur la surface  $\Gamma_h$ . La formulation précédente peut donc être approchée par la discrétisation :

$$\sum_{\mathbf{x}_g \in \Gamma_h} \sum_{\mathbf{y}_g \in \Gamma_h} G(\mathbf{x}_g, \mathbf{y}_g) f(\mathbf{x}_g) g(\mathbf{y}_g), \quad (3.24)$$



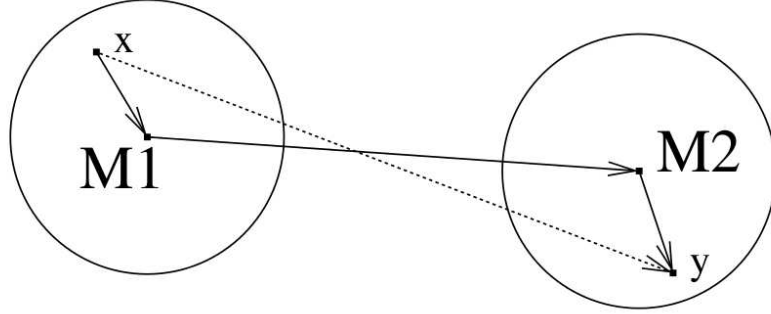


FIGURE 3.3 – Configuration type d’une répartition spatiale pour l’application du théorème d’addition de Gegenbauer. (source [82])

où les fonctions  $f$  et  $g$  incluent aussi les poids d’intégration des quadratures. L’idée générale de la FMM consiste à séparer les variables spatiales  $\mathbf{x}_g$  et  $\mathbf{y}_g$ , pour calculer indépendamment, donc rapidement, les deux sommes de la formulation (3.24) :

$$\sum_{\mathbf{x}_g \in \Gamma_h} \left( \sum_{\mathbf{y}_g \in \Gamma_h} G(\mathbf{x}_g, \mathbf{y}_g) g(\mathbf{y}_g) \right) f(\mathbf{x}_g). \quad (3.25)$$

Pour cela, le noyau de Green est décomposé à l’aide du théorème suivant :

**Théorème 3** (*d’addition de Gegenbauer*) Soient  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$  quatre points de l’espace, avec  $\mathbf{x}$  "proche" de  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{y}$  "proche" de  $\mathbf{M}_2$  (fig. 3.3).  $\mathbf{s}$  est un point de la sphère unité  $S^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $P_l$  le polynôme de Legendre de rang  $l$  et  $h_l$  la fonction de Hankel sphérique du premier type de rang  $l$ . En posant le vecteur  $\mathbf{xy} = \mathbf{xM}_1 + \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2\mathbf{y}$ , le noyau de Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  peut se décomposer en :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{ik}{16\pi^2} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{s} \in S^2} e^{iks \cdot \mathbf{xM}_1} T_{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}^L(\mathbf{s}) e^{iks \cdot \mathbf{M}_2\mathbf{y}} d\mathbf{s}, \quad (3.26)$$

avec

$$T_{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}^L(\mathbf{s}) = \sum_{l=0}^L (2l+1) i^l h_l(k|\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2|) P_l(\cos(\mathbf{s}, \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)).$$

Dans (3.26), les variables  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont bien séparées et les trois termes de l’intégrale sphérique peuvent s’interpréter comme suit :

- $e^{iks \cdot \mathbf{xM}_1}$  transporte l’information du point source  $\mathbf{x}$  au centre  $\mathbf{M}_1$  ;
- $T_{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}^L(\mathbf{s})$  transfère l’information du centre  $\mathbf{M}_1$  au centre  $\mathbf{M}_2$  ;
- $e^{iks \cdot \mathbf{M}_2\mathbf{y}}$  envoie l’information du centre  $\mathbf{M}_2$  au point de destination  $\mathbf{y}$ .

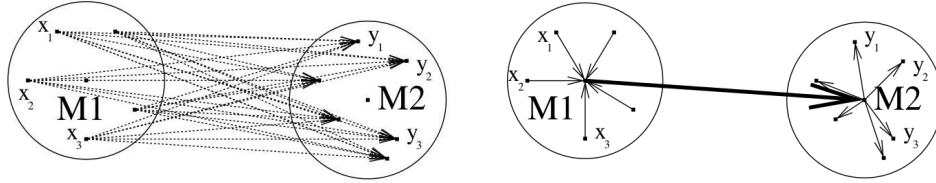


FIGURE 3.4 – (Gauche) Traitement des interactions sans regroupement multipolaire. (Droite) Traitement des interactions en FMM. (source [82])

Ainsi, de par la centralisation des informations sur  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$  due au théorème d'addition de Gegenbauer (3.26), le nombre d'interactions à calculer entre le nuage de points en  $\mathbf{x}$  et celui en  $\mathbf{y}$  diminue grandement entre la méthode classique et la méthode multipolaire (fig. 3.4). Il reste néanmoins à choisir une valeur de troncature pour  $L$ , ainsi qu'une quadrature sur la sphère unité  $S^2$ , en fonction de la précision souhaitée pour l'évaluation des interactions ponctuelles entre les deux groupes de points. Cette étape, particulièrement délicate, est grandement liée à la "proximité" des objets mis en jeu dans la configuration type (fig. 3.3). Le domaine de calcul original  $\Omega$  doit donc être découpé en sous-domaines, où la séparation des variables est valable lorsque les deux sous-domaines en interaction ne sont pas voisins. Si tel est le cas, le calcul de la double somme (3.24) sera traité classiquement, sans regroupement multipolaire. Dans l'exemple de gauche de la figure 3.5, les interactions entre  $C$  et  $C'$  peuvent être calculées par séparation des variables, centrées respectivement sur  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{M}'$ . Ce découpage conduit à la formulation FMM mono-niveau du produit matrice-vecteur discret (3.24), entre  $C$  et  $C'$  :

$$\frac{ik}{16\pi^2} \sum_{\mathbf{x}_g \in C'} \int_{s \in S^2} \left[ \left( \sum_{\mathbf{y}_g \in C} e^{iks \cdot \mathbf{y}_g \mathbf{M}} f(\mathbf{y}_g) \right) T_{\mathbf{M}\mathbf{M}'}^L(\mathbf{s}) e^{iks \cdot \mathbf{M}' \mathbf{x}_g} ds \right] g(\mathbf{x}_g).$$

En considérant l'ensemble des interactions entre chaque sous-domaines, la complexité finale de l'algorithme mono-niveau est de l'ordre de  $N^{3/2}$ . Pour atteindre la limite  $N \log N$ , les interactions multipolaires doivent être effectuées suivant un algorithme du type *Divide and Conquer*. Pour ce faire, des sous-domaines hiérarchiques sont construits à l'aide d'un *octree* (fig. 3.5 à droite), en vue de former par bloc le produit matrice vecteur associé au problème. Les interactions très lointaines seront, dès lors, traitées différemment des interactions lointaines, banlieues, proches, etc. Cette méthode, bien que robuste et bien maîtrisée, est relativement complexe, notamment dans sa programmation, et de nombreux détails soulèvent toujours de grandes difficultés. Par ailleurs, bien que la complexité théorique de l'algorithme FMM

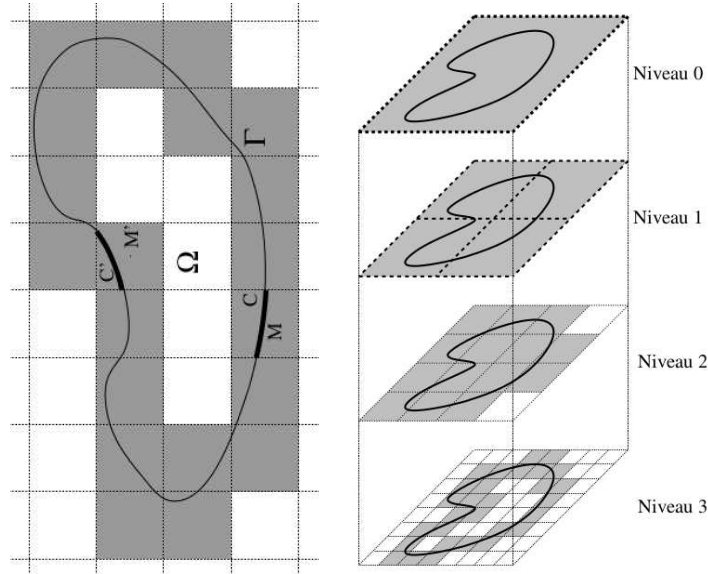


FIGURE 3.5 – (Gauche) Découpage mono-niveau du domaine original  $\Omega$  et de la frontière  $\Gamma$  en sous-domaines de calcul. (Droite) Découpage multi-niveaux. (source [82])

multi-niveaux ait pour limite  $N \log N$ , la constante de cette complexité peut être assez lourde si l'algorithme n'est pas correctement réglé pour le problème à résoudre. Ces deux raisons ont poussé les recherches effectuées lors de cette thèse vers une solution alternative, la Décomposition Creuse en Sinus Cardinal (SCSD).

### 3.3 Nouvelle méthode rapide - SCSD

La séparation des variables d'espace (3.25) conduit au calcul rapide des produits matrices-vecteurs (3.24), issus des équations intégrales. Dans le cas de l'acoustique tridimensionnelle, cet assemblage se résume à évaluer le produit de convolution  $(G_f)(\mathbf{x}_p)$ , défini pour toute fonction régulière  $f$  par :

$$(G_f)(\mathbf{x}_p) = \sum_{q=1}^{N_y} G(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_q) f(\mathbf{y}_q) = \sum_{q=1}^{N_y} \frac{e^{-ik|\mathbf{x}_p - \mathbf{y}_q|}}{4\pi|\mathbf{x}_p - \mathbf{y}_q|} f(\mathbf{y}_q). \quad (3.27)$$

Ce résultat n'est pas sans rappeler la forme des solutions générales d'un problème de diffraction (3.7), construites par le produit de convolution  $\star$ .

### 3.3.1 Vers un problème mono-dimensionnel

Le fondement de la Décomposition Creuse en Sinus Cardinal (SCSD) réside dans la représentation intégrale de la fonction sinus cardinal [69] et [82]. Pour tout  $\mathbf{z}$  dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$\frac{\sin(k|\mathbf{z}|)}{|\mathbf{z}|} = \frac{k}{4\pi} \int_{S^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{s}\cdot\mathbf{z}} d\mathbf{s}, \quad (3.28)$$

avec  $S^2$  est la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$  et  $k$  le nombre d'onde (positif). En posant  $|\mathbf{z}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ , la partie imaginaire du noyau de Green (3.6) peut s'écrire en variables séparées :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} &= \frac{k}{(4\pi)^2} \int_{S^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{s}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} d\mathbf{s} \\ &= \frac{k}{(4\pi)^2} \int_{S^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{s}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{s}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Sous réserve d'une quadrature efficace pour la sphère unité  $S^2$ , cette séparation des variables peut se substituer au théorème d'addition de Gegenbauer (3.26), dont dérivent la FMM. Par ailleurs, une intégration sur  $S^2$  apparaît aussi dans (3.26), mais le couplage avec les fonctions de transfert  $T_{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}^L(\mathbf{s})$  complexifie grandement la tâche. Dans (3.29), ces fonctions de transfert ont disparu.

Une transformée de Fourier en espace  $\mathcal{F}[\cdot]$  est appliquée sur l'équation élémentaire de Helmholtz, pour obtenir une représentation intégrale de la partie réelle du noyau de Green (3.6) :

$$\mathcal{F} [(-\Delta - k^2)G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = \mathcal{F}[\delta_{\mathbf{y}}].$$

En posant  $\mathbf{y} = 0$  dans l'égalité précédente, celle-ci devient :

$$(|\xi|^2 - k^2) \mathcal{F}[G(\mathbf{x}, 0)] = 1,$$

ce qui permet d'écrire la transformée de Fourier du cosinus cardinal :

$$\mathcal{F} \left[ \frac{\cos(k|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \right] = \frac{4\pi}{|\xi|^2 - k^2}.$$

Une représentation intégrale de la partie réelle du noyau de Green est alors obtenue par transformée de Fourier inverse sur l'équation précédente :

$$\frac{\cos(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\xi|^2 - k^2} e^{i\xi\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} d\xi,$$

amenant de nouveau la séparation des variables d'espace :

$$\frac{\cos(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\xi|^2 - k^2} e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} e^{-i\xi \cdot \mathbf{y}} d\xi. \quad (3.30)$$

La singularité du cosinus cardinal présente en 0 lui confère une forte irrégularité. Celle-ci est traduite en domaine de Fourier par une représentation intégrale sur tout l'espace  $\mathbb{R}^3$ , alors que la partie sinus s'intègre sur uniquement sur  $S^2$  (eq. 3.29). À cela s'ajoute une singularité en  $|\xi| = k$ , ce qui peut sembler rédhibitoire.

Néanmoins, après réécriture de l'équation (3.30) en coordonnées sphériques, la représentation intégrale du sinus cardinal (3.28) permet d'établir l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\cos(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\rho=0}^{+\infty} \frac{\rho^2}{\rho^2 - k^2} \left( \int_{S^2} e^{i\rho \mathbf{s} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} d\mathbf{s} \right) d\rho, \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\rho=0}^{+\infty} \frac{\rho}{\rho^2 - k^2} \frac{\sin(\rho|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\rho. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Si l'intégrale sur  $\rho$  converge bien dans (3.31), alors une séparation des variables de la partie réelle pourrait découler de celle obtenue pour la partie imaginaire (3.29). De plus, pour éviter de retomber sur les difficultés de programmation de la FMM, il est nécessaire qu'une même quadrature, la plus précise possible, puisse être utilisée pour  $R$  dans un grand intervalle  $[R_{min}, R_{max}]$ . Pour étudier ce problème, l'intégrale (3.31) est réécrite sous la forme :

$$\cos(R) = \frac{2}{\pi} \int_{\rho=0}^{+\infty} \frac{\rho}{\rho^2 - 1} \sin(\rho R) d\rho, \quad (3.32)$$

avec  $R = k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ .

### 3.3.2 Résolution du problème

Le problème d'intégration mono-dimensionnel à résoudre est le suivant :

**Existe-il une quadrature vérifiant l'égalité (3.32) pour tout  $R$  dans un intervalle  $[R_{min}, R_{max}]$  le plus grand possible, avec peu de points d'intégration  $\rho$  dans un intervalle  $[0, A]$  petit ?**

En première approche, des méthodes classiques de quadrature du type Trapèze, Simpson, ou encore Fourier ont été appliquées sur une formulation

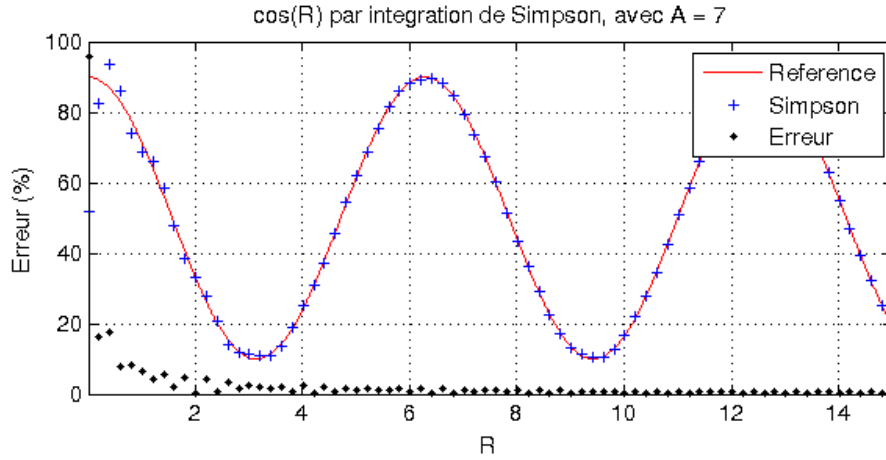


FIGURE 3.6 – Calcul du cosinus par intégration de Simpson, pour  $R$  dans  $[0, 15]$ . 71 points d’intégrations en  $\rho$ , espacés régulièrement sur  $[0, 7]$ , ont été utilisés pour approcher l’intégrale (3.33). L’erreur relative est inférieure au seuil de 5% pour  $R > 3$ .

tronquée en  $A$  et régularisée avec une solution analytique :

$$\cos(R) \approx \frac{2}{\pi} \left( \int_{\rho=0}^A \frac{\rho}{\rho^2 - 1} (\sin(\rho R) - \sin(R)) d\rho \right) + \frac{2 \sin(R)}{\pi} \int_{\rho=0}^A \frac{\rho}{\rho^2 - 1} d\rho. \quad (3.33)$$

Dans cette approximation, le membre de gauche est bien régulier pour  $\rho$  autour de 1 et le membre de droite s’intègre exactement au sens des valeurs principales. Les résultats présentés sur la figure 3.6 sont peu satisfaisants et dépendent beaucoup de l’intervalle dans lequel évolue  $R$ . Pour  $R$  petit,  $A$  est grand avec des points d’intégration relativement espacés, tandis que pour  $R$  grand,  $A$  est petit mais il faut de nombreuses valeurs pour discrétiser l’intervalle  $[0, A]$ . Ces résultats sont, bien entendu, liés à la singularité du cosinus, quand  $R$  tend vers 0. Une quadrature classique pour l’évaluation de  $\cos(R)$  sur un intervalle  $[R_{min}, R_{max}]$  grand n’est donc pas raisonnable.

Une quadrature entièrement numérique pour la résolution de ce problème a donc été envisagée. Pour ce faire, l’équation (3.32) est réécrite sous la formulation discrète suivante, tronquée en  $N \in \mathbb{N}$  :

$$\cos(R) \approx \sum_{n=0}^N \alpha_n \sin(\rho_n R). \quad (3.34)$$

Le problème d’intégration approchée à résoudre devient :

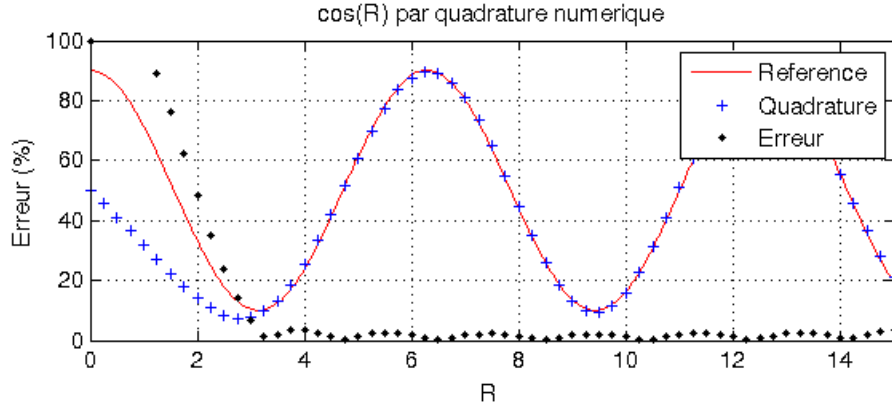


FIGURE 3.7 – Calcul du cosinus par quadrature numérique issue d’une minimisation sous contrainte (3.35), pour  $R$  dans  $[0, 15]$ . 5 points d’intégrations en  $\rho$ , espacés régulièrement sur  $[0, 1.2]$ , ont été trouvés pour évaluer l’approximation (3.34). L’erreur relative est inférieure au seuil de 5% pour  $R > 3$ .

**Pour  $N$  le plus petit possible, existe-il un vecteur  $(\rho_n)_{n \in [0, N]}$  de petites valeurs, associées à un vecteur  $(\alpha_n)_{n \in [0, N]}$ , tels que la relation (3.34) soit vérifiée pour tout  $R$  dans un intervalle  $[R_{min}, R_{max}]$  le plus grand possible ?**

Comme il n’est pas évident de résoudre analytiquement cette question, une minimisation sous contrainte a d’abord été programmée pour tenter d’obtenir des éléments de réponses. Une discrétisation  $(R_i)_{i \in [0, M]}$  de  $R$  dans  $[R_{min}, R_{max}]$  est utilisée pour former un système matriciel, dont chaque ligne  $i$  est définie par :

$$(\cos(R_i))_{i \in [0, M]} = \left( \sum_{n=0}^N \alpha_n \sin(\rho_n R_i) \right)_{i \in [0, M]}. \quad (3.35)$$

Dans ce système linéaire,  $(\alpha_n)_{n \in [0, N]}$  est le vecteur inconnu, recherché au sens des moindres carrés. Les contraintes sont fixées sur le calcul de  $(\rho_n)_{n \in [0, N]}$ , discrétisé par pas régulier sur  $[0, A]$ , avec  $A$  exigé le plus petit possible. De plus, à chaque itération de la minimisation, le rang du système linéaire est estimé avec une précision  $\epsilon$  donnée. Si ce rang n’est pas plein, l’ordre de troncature  $N$  est diminué pour assurer un nombre de termes minimal dans la quadrature. Ce procédé permet de tenir compte du défaut de rang constaté dans les opérateurs intégraux issus du noyau de Green (3.6) et exploité dans d’autres méthodes de compression comme  $\mathcal{H}$ -matrix [43], GGQ [18], Skeletonization, ACA, etc. Cet algorithme a été développé en langage *Matlab*

et la structure "*optimset*" a été utilisée pour établir la minimisation sous contraintes du système matriciel. La figure 3.7 donne un résultat issu de cette approche empirique, avec une configuration identique à l'intégration de Simpson précédente (fig. 3.6). Après convergence, 5 points en  $\rho$  ont été trouvés, compris entre 0 et 1.2. Ces valeurs apportent cette fois une solution tangible au problème mono- dimensionnel et le calcul d'un produit matrice-vecteur rapide peut être envisagé, pour toutes les interactions entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  telles que  $R_{min} < k|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < R_{max}$ .

Cependant, malgré une certaine robustesse éprouvée à l'usage, l'algorithme de minimisation sous contrainte ne permet pas de comprendre les mécanismes mis en jeu, ce qui a poussé les recherches vers une quadrature analytique. Celle-ci peut être introduite à partir de la quadrature de l'unité suivante :

$$1 \approx \sum_{n=0}^N \beta_n \sin(\rho_n R). \quad (3.36)$$

En effet, il existe une formule exacte similaire à l'approximation (3.36), définie pour tout  $t$  dans  $(0, \pi)$  :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)t) = 1.$$

Cette série, couramment utilisée en traitement du signal pour définir la fonction créneau, est issue de la décomposition en série de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique égale à  $-1$  sur  $(-\pi, 0)$  et  $1$  sur  $(0, \pi)$ . En posant le changement de variable  $t = \frac{R}{b}\pi$  pour tout  $R$  dans  $(0, b)$ , l'égalité précédente devient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin\left(\frac{\pi}{b}(2n+1)R\right) = 1.$$

La convergence de cette série est assez lente et dépend fortement des valeurs de  $R$ . Aussi, une troncature avec  $N$  petit conduit à de fortes oscillations aux extrémités de l'intervalle de  $R$ , dues à la discontinuité en zéro de la fonction créneau (phénomène de Gibbs). Cet artefact est classiquement lissé par l'introduction d'un facteur correctif de Lanczos, encore appelé  $\sigma$ -approximation (e.g. [1], [44]), qui consiste à pondérer la série précédente par une puissance de sinus cardinal :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{4}{\pi(2n+1)} \left[ \text{sinc}\left(\frac{2n+1}{2N}\pi\right) \right]^q \sin\left(\frac{\pi}{b}(2n+1)R\right) \approx 1,$$

avec  $q$  entier (typiquement  $q = 1$  ou  $2$ ). En fixant dans (3.36) :

$$\beta_n = \frac{4}{\pi(2n+1)} \left[ \text{sinc}\left(\frac{2n+1}{2N}\pi\right) \right]^q \quad \text{et} \quad \rho_n = \frac{\pi}{b}(2n+1), \quad (3.37)$$



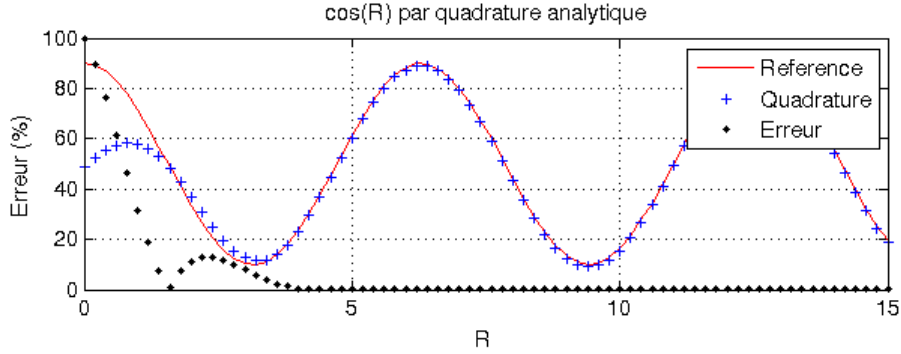


FIGURE 3.8 – Calcul du cosinus par quadrature analytique issue des coefficients exacts (3.37) de la quadrature de l’unité (3.36), avec  $q = 1$  pour  $R$  dans  $[0, 15]$ . 6 points d’intégration en  $\rho$ , espacés régulièrement sur  $[0, 1.4]$ , sont nécessaires pour une erreur relative inférieure à 5%.

une quadrature analytique de l’unité avec une bonne convergence est ainsi établie.

Une quadrature analytique du cosinus (3.34) peut être déduite en multipliant (3.36) par  $\cos(R)$ , puis en appliquant la formule trigonométrique  $\sin(A)\cos(B) = 0.5(\sin(A+B) + \sin(A-B))$  :

$$\cos(R) \approx \sum_{n=0}^N 0.5\beta_n (\sin((1 + \rho_n)R) - \sin((1 - \rho_n)R)), \quad (3.38)$$

où les  $\rho_n$  sont donnés par (3.37). Enfin, lorsque  $b = 2\pi L$  avec  $L \in \mathbb{N}^*$ , la variante (3.38) se décompose sous la forme :

$$\begin{aligned} \cos(R) &\approx \sum_{n=0}^N 0.5\beta_n (\sin((1 + \rho_n)R)) \\ &\quad - \sum_{n=0}^{L-1} 0.5\beta_n (\sin((1 - \rho_n)R)) \\ &\quad + \sum_{n=L-1}^N 0.5\beta_n (\sin((\rho_n - 1)R)), \end{aligned}$$

où tous les facteurs devant  $R$  appartiennent à la même discrétisation de  $\rho$  dans l’intervalle  $[\rho_0; 1 + \rho_N]$ . Ainsi, après réagencement et unification des termes de cette nouvelle série, la quadrature analytique du cosinus (3.34) peut être obtenue à partir de celle de l’unité (3.36). En pratique, pour tout  $R$  dans  $[R_{min}, R_{max}] \subset [R_{min}, b]$ , il suffit de rechercher  $N$  tel que l’erreur relative  $\epsilon$  de cette quadrature soit inférieure à une précision fixée. Par ailleurs, pour

limiter l'impact du phénomène de Gibbs et minimiser  $N$ , il est avantageux de symétriser l'erreur commise en posant  $b \geq (R_{max} + R_{min})$ , multiple de  $2\pi$ . La figure 3.8 offre une comparaison de la quadrature analytique avec les deux quadratures précédentes (fig. 3.6 et 3.7). Même si ce résultat est du même ordre de grandeur que celui de la figure 3.7, les valeurs de  $\rho_n$  et  $N$  sont légèrement supérieures à celles obtenues par l'algorithme de minimisation sous contraintes. Cette remarque est d'autant plus vraie pour  $b$  plus grand, non représenté ici.

Aussi, une quadrature hybride a été développée à partir des deux quadratures précédentes. Comme les valeurs analytiques de  $\rho_n$  sont connues pour tout  $n \leq N$  (eq. 3.37), celles-ci peuvent directement être utilisées dans la quadrature du cosinus (3.34) pour former le système matriciel (3.35), utilisé par l'algorithme de minimisation sous contrainte. Après résolution, les valeurs calculées de  $\alpha_n$  lissent au sens des moindres carrés l'erreur relative  $\epsilon$ , pour tout  $R$  sur l'intervalle de quadrature  $[R_{min}, R_{max}]$ . En itérant ce processus sur  $N$  pour atteindre une précision donnée, cette approche permet d'estimer  $\alpha_n$  pour que l'erreur commise soit plus uniforme. Par ailleurs, suivant le même principe, il est possible d'estimer  $\beta_n$  par une quadrature hybride de l'unité et d'obtenir une nouvelle quadrature du cosinus en utilisant la formule de passage (3.38). Trois méthodes peuvent donc être confrontées (fig. 3.9) :

1. Quadrature analytique du cosinus, d'après une quadrature analytique de l'unité lissée par  $\sigma$ -approximation avec  $q = 2$  ("Analytique", courbe bleue) ;
2. Quadrature analytique du cosinus, d'après une quadrature hybride de l'unité lissée au sens des moindres carrés ("Hybride Un", ronds verts) ;
3. Quadrature numérique du cosinus lissée au sens des moindres carrés. ("Hybride Cos", croix rouges).

$\cos(R)$	$R_{min}$	$R_{max}$	$N$	$\rho_N$	erreur $L^2$	erreur $L^\infty$
1. Analytique	3	15	14	4.5	$2.26e^{-4}$	$7.83e^{-4}$
2. Hybride Un	3	15	14	4.5	$1.83e^{-6}$	$5.27e^{-6}$
3. Hybride Cos	3	15	14	4.5	$7.91e^{-8}$	$1.91e^{-7}$

Pour  $R$  dans  $[R_{min}, R_{max}]$  et  $\rho$  dans  $[\rho_0, \rho_N]$  avec  $N$  fixé, il apparaît très nettement sur ces valeurs numériques et sur la figure 3.9 que l'évaluation de  $\alpha_n$  par ces trois méthodes fournit des erreurs relatives et uniformes singulièrement différentes. En effet, plus d'un facteur 1000 sépare la quadrature analytique de la quadrature hybride en cosinus. Aussi, en fixant un seuil d'erreur relative  $\epsilon_\infty$  à  $10^{-3}$  (norme  $L^\infty$ ) pour  $R \in [R_{min}, R_{max}]$ , puis en minimisant le

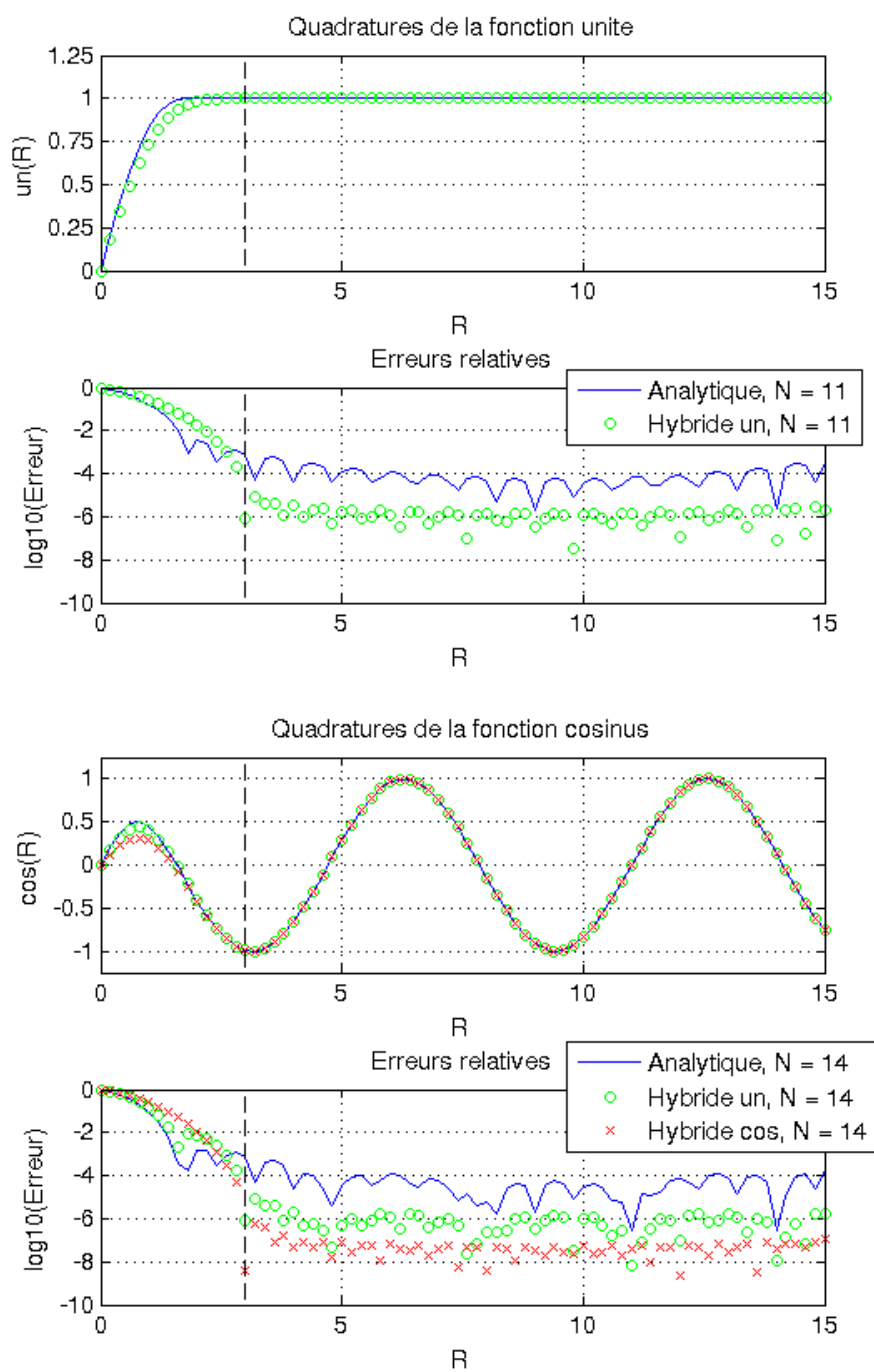


FIGURE 3.9 – Quadratures de l’unité et du cosinus pour  $R$  dans  $[3, 15]$ , avec respectivement 11 et 14 points d’intégrations fixés, inclus dans  $[0, 3.5]$  et  $[0, 4.5]$ . L’erreur relative ( $\epsilon_\infty$  en norme  $L^\infty$ ) en fonction de  $R$  est donnée en échelle logarithmique pour une meilleure lisibilité.

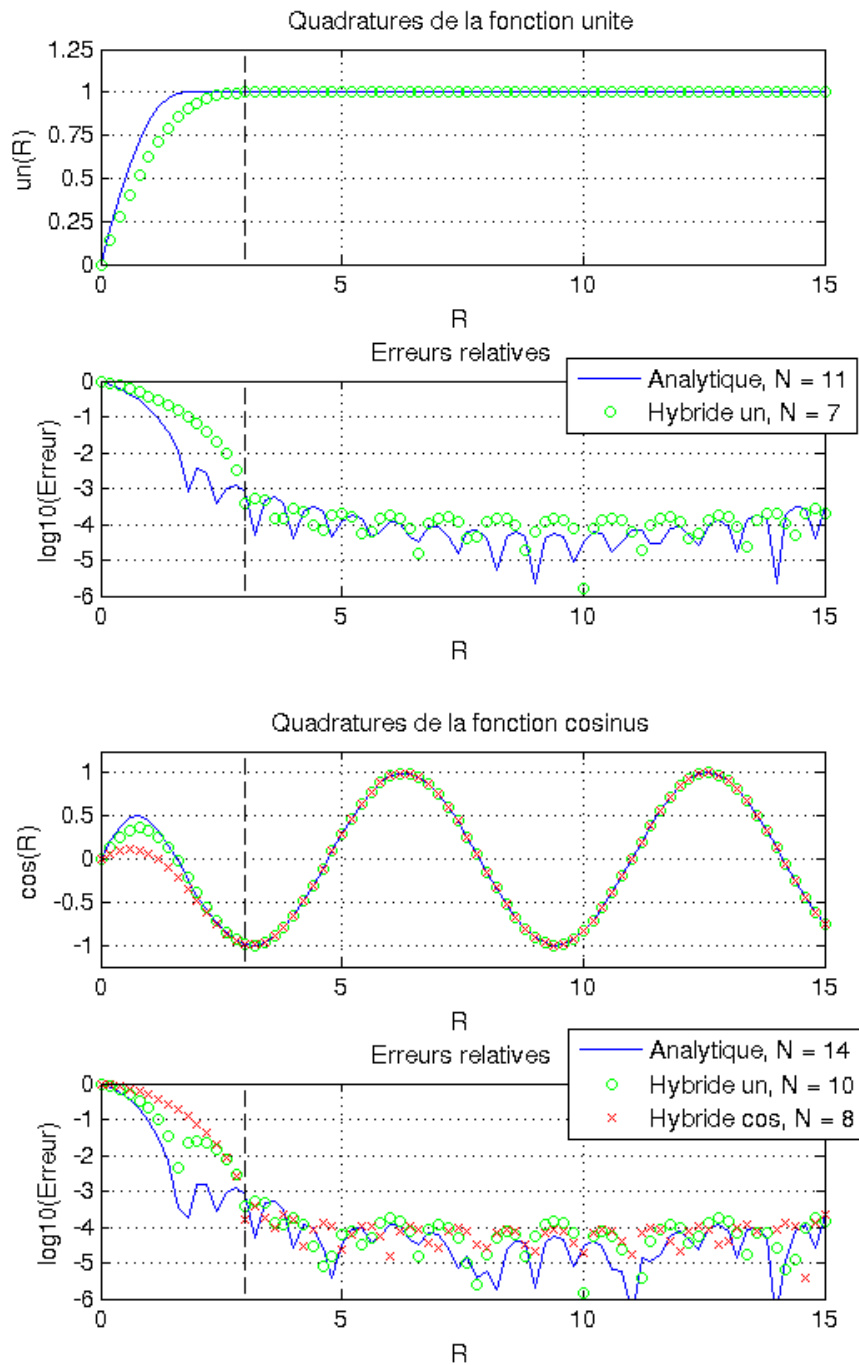


FIGURE 3.10 – Quadratures de l’unité et du cosinus pour  $R$  dans  $[3, 15]$ , avec un seuil d’erreur relative  $\epsilon_\infty$  fixée à  $1e-3$ . Le nombre de points d’intégration  $N$  varie en fonction de la quadrature.

nombre  $N$  de points d'intégrations nécessaires pour atteindre cette précision, les résultats suivants sont obtenus (fig. 3.10) :

$\cos(R)$	$R_{min}$	$R_{max}$	$N$	$\rho_N$	erreur $L^2$	erreur $L^\infty$
1. Analytique	3	15	14	4.5	$2.26e^{-4}$	$7.83e^{-4}$
2. Hybride Un	3	15	10	3.17	$1.95e^{-4}$	$5.62e^{-4}$
3. Hybride Cos	3	15	8	2.5	$1.40e^{-4}$	$3.47e^{-4}$

Pour une précision fixée, les valeurs de  $N$  et  $\rho_N$  sont fortement liées à la quadrature considérée, ce qui est particulièrement intéressant dans le contexte de cette étude. Par exemple, la quadrature hybride en cosinus semble tout à fait adaptée pour répondre au problème mono-dimensionnel posé dans cette section.

Au vu de ces résultats, l'intervalle  $[R_{min}, R_{max}]$  et la précision relative en norme  $L^\infty$  ont donc été modifiés, pour éprouver la robustesse des quadratures (fig. 3.11) :

Cosinus	$R_{min}$	$R_{max}$	$N$	$\rho_N$	erreur $L^2$	erreur $L^\infty$
1. Analytique	3	150	115	4.58	$7.05e^{-5}$	$9.65e^{-4}$
2. Hybride Un	3	150	80	3.18	$1.11e^{-4}$	$9.41e^{-4}$
3. Hybride Cos	3	150	61	2.42	$1.13e^{-4}$	$9.98e^{-4}$
1. Analytique	3	1000	734	4.58	$2.81e^{-5}$	$9.97e^{-4}$
2. Hybride Un	3	1000	510	3.18	$4.68e^{-5}$	$9.97e^{-4}$
3. Hybride Cos	3	1000	392	2.45	$5.02e^{-5}$	$9.95e^{-4}$
1. Analytique	0.5	150	436	4.58	$5.92e^{-5}$	$8.85e^{-4}$
2. Hybride Un	0.5	150	281	3.18	$6.06e^{-5}$	$6.89e^{-4}$
3. Hybride Cos	0.5	150	259	2.45	$9.09e^{-5}$	$9.93e^{-4}$
1. Analytique	3	150	-	-	-	-
2. Hybride Un	3	150	213	8.5	$1.16e^{-13}$	$7.96e^{-13}$
3. Hybride Cos	3	150	189	4.4	$1.62e^{-13}$	$9.21e^{-13}$

Pour les quadratures hybrides de l'unité et du cosinus, la linéarité apparente

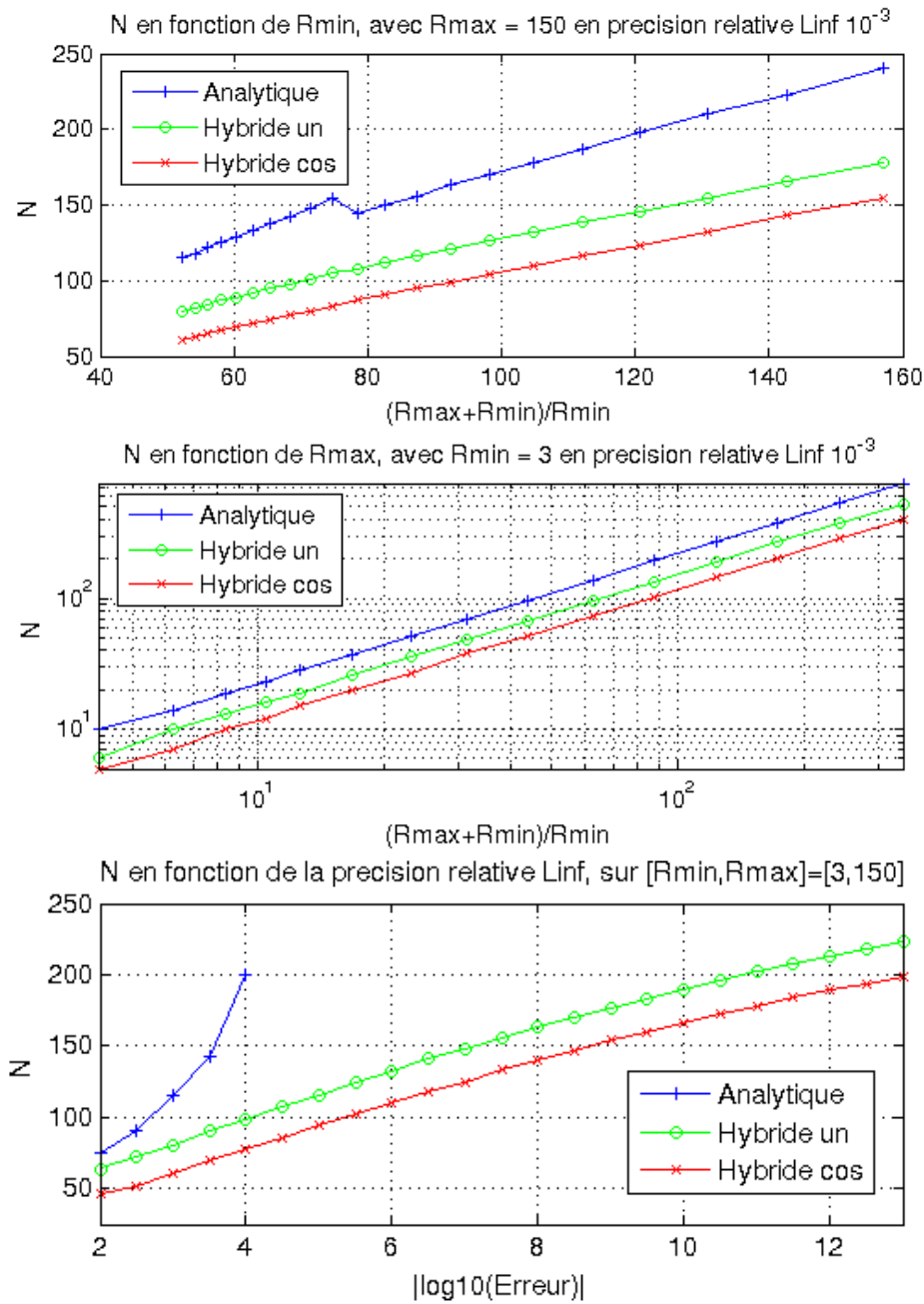


FIGURE 3.11 – Représentation du nombre  $N$  de termes nécessaires à chaque quadrature. (Haut)  $R_{min}$  dans  $[1, 3]$  et  $R_{max} = 150$ , pour une précision relative fixée à  $10^{-3}$ . (Milieu)  $R_{min} = 3$  et  $R_{max}$  dans  $[10, 1000]$ , pour une précision relative fixée à  $10^{-3}$ . (Bas)  $[R_{min}, R_{max}] = [3, 150]$ , pour une précision relative dans  $[10^{-13}, 10^{-2}]$ .

de l'ensemble des courbes de la figure 3.11 permet de conjecturer la relation :

$$N \propto \frac{R_{max} + R_{min}}{R_{min}} |\log(\epsilon)|. \quad (3.39)$$

Une dépendance logarithmique en erreur relative est donc empiriquement établie, ainsi qu'une dépendance linéaire pour l'intervalle de  $R$ . Ce résultat est fondamental pour les applications visées. Il ne reste plus qu'à savoir si la linéarité de la conjecture (3.39) sur  $N$  va permettre d'atteindre une complexité finale raisonnable pour le calcul rapide du noyau de Green.

Pour terminer, non seulement il apparaît que l'efficacité d'une quadrature ne dépende que de  $\alpha_n$ , mais aussi  $N$  diminue lorsque le rapport entre l'erreur  $L^2$  et l'erreur  $L^\infty$  tend vers 1. Les trois méthodes proposées ne seraient donc peut-être pas les seules et de nouveaux algorithmes pourraient être recherchés en vue de diminuer  $N$ , ce qui aurait un impact très fort sur l'efficacité globale de la méthode SCSD.

### 3.3.3 Formalisme final pour l'équation de Helmholtz

Pour une précision  $\epsilon$  donnée, la section précédente a mis numériquement en lumière qu'il existe deux suites  $(\alpha_n)_{n \in [0, N]}$  et  $(\rho_n)_{n \in [0, N]}$  telles que, pour tout  $R$  dans  $[R_{min}, R_{max}]$  :

$$\cos(R) \approx \sum_{n=0}^N \alpha_n \sin(\rho_n R) \quad \text{avec} \quad N \propto \frac{R_{max} + R_{min}}{R_{min}} |\log(\epsilon)|.$$

Le retour vers le problème tri-dimensionnel original s'effectue simplement à travers la définition de  $R$ , à savoir  $R = k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  pour tous points  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . En divisant la relation précédente par  $4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ , la partie réelle du noyau de Green (3.6) peut être approchée par la quadrature suivante :

$$\frac{\cos(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \approx \sum_{n=0}^N \alpha_n \frac{\sin(\rho_n k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|},$$

équivalent discret de (3.31). En ajoutant à cette relation la partie imaginaire du noyau de Green, la quadrature complète du noyau peut être établie, sous la forme d'une somme pondérée de sinus cardinaux :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx \sum_{n=0}^{N+1} \alpha_n \frac{\sin(\rho_n k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|},$$

où  $\alpha_{N+1} = -i$  et  $\rho_{N+1} = 1$ . En appliquant la représentation intégrale du sinus cardinal (3.28) sur ce résultat fondamental, la séparation des variables

de la SCSD peut être formulée comme une somme pondérée d'intégrales surfaciques sur  $N + 2$  sphères unités :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx \frac{k}{(4\pi)^2} \sum_{n=0}^{N+1} \alpha_n \rho_n \int_{S^2} e^{ik\rho_n \mathbf{s} \cdot \mathbf{x}} e^{-ik\rho_n \mathbf{s} \cdot \mathbf{y}} d\mathbf{s}, \quad (3.40)$$

ou encore sur des sphères emboîtées de rayon  $k\rho_n$  :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{n=0}^{N+1} \alpha_n \int_{k\rho_n S^2} e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{s} \cdot \mathbf{y}} d\mathbf{s}.$$

Pour obtenir une version totalement discrète de la séparation des variables du noyau de Green (3.40), il reste à choisir une dernière quadrature pour l'intégration sphérique. De nombreux travaux traitent de ce sujet récurrent et certaines solutions sont couramment utilisées dans divers domaines des mathématiques appliquées [46]. Pour la SCSD, les quadratures de Gauss-Legendre ont été préférées aux grilles de Fibonacci [41], ou encore aux sphères de Lebedev [60].

### Quadrature de Gauss-Legendre sur la sphère unité $S^2$ :

Pour un entier  $N_a$  donné, les angles azimutaux  $(\theta_i)_{i \in [1, 2N_a]}$  sont choisis dans  $\{0, \frac{\pi}{N_a}, \dots, 2\pi - \frac{\pi}{N_a}\}$ , tandis que les angles d'élévations  $(\phi_j)_{j \in [1, N_a]}$  sont tels que  $\cos(\phi_j)$  appartient aux zéros du  $N_a^{\text{ième}}$  polynôme de Legendre  $P_{N_a}$ . Une grille sphérique  $(\mathbf{s}_{i,j})_{i \times j \in [1, N_s]}$  de dimension  $N_s = 2N_a^2$  peut alors être générée en  $(\theta, \phi)$ , associée aux poids d'intégrations  $\omega_s$ .

Cette quadrature intègre exactement toutes les harmoniques sphériques  $Y_l^m$  (1.2) de degré inférieur ou égal à  $2N_a - 1$ , mais discrétise la sphère par pas régulier en azimut, ce qui crée une concentration de points élevée aux pôles. En pratique, la quadrature de Gauss-Legendre dans l'approximation (3.40) est telle que  $N_a$  doit être au moins proportionnel à la plus grande distance évaluée sous l'intégrale, c'est-à-dire :

$$N_a \propto k\rho_n \max(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \Rightarrow N_s \propto (\rho_n R_{max})^2. \quad (3.41)$$

L'approximation (3.40) conduit alors à :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx \frac{k}{(4\pi)^2} \sum_{n=0}^{N+1} \alpha_n \rho_n \sum_{\mathbf{s}}^{N_s} \omega_s e^{ik\rho_n \mathbf{s} \cdot \mathbf{x}} e^{-ik\rho_n \mathbf{s} \cdot \mathbf{y}}.$$

Puis, pour tout  $l$  dans  $[1, N_\xi]$  tel que  $N_\xi = \sum_{n=0}^{N+1} N_s$ , en posant :

$$\xi_l = k\rho_n \mathbf{s} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \omega_l = \frac{k\alpha_n \rho_n \omega_s}{(4\pi)^2} \quad \text{dans } \mathbb{R}, \quad (3.42)$$



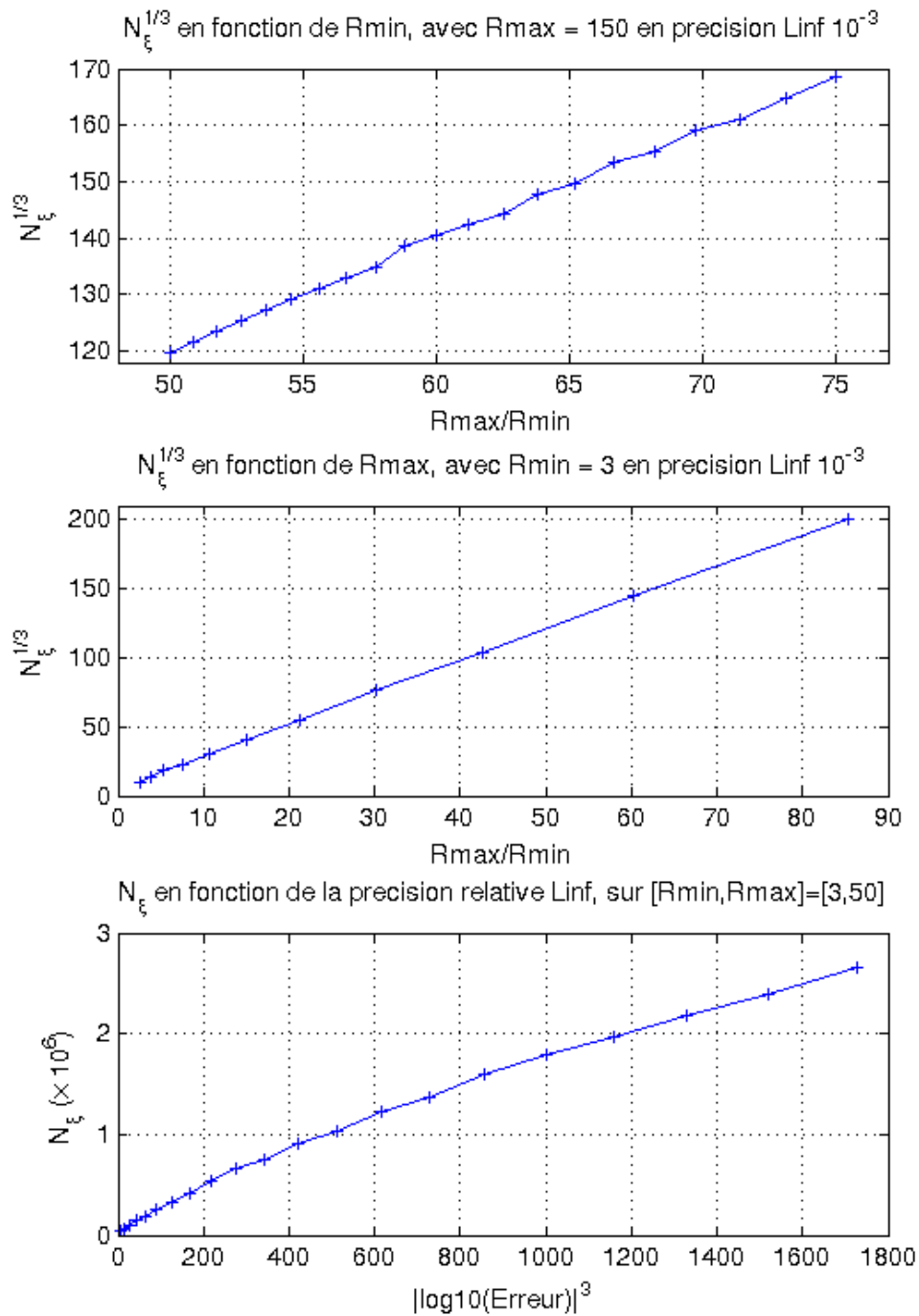


FIGURE 3.12 – Représentation du nombre total de points  $N_\xi$  d’une quadrature SCSD, pour le noyau de Helmholtz (3.43). (Haut)  $R_{min}$  dans  $[2, 3]$  et  $R_{max} = 150$ , pour une précision relative fixée à  $10^{-3}$ . (Milieu)  $R_{min} = 3$  et  $R_{max}$  dans  $[10, 250]$ , pour une précision relative fixée à  $10^{-3}$ . (Bas)  $[R_{min}, R_{max}] = [3, 50]$  pour une précision relative dans  $[10^{-12}, 10^{-2}]$ .

la version discrète de la séparation des variables SCSD peut être établie :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx \sum_{l=1}^{N_\xi} \omega_l e^{i\xi_l \cdot \mathbf{x}} e^{-i\xi_l \cdot \mathbf{y}}. \quad (3.43)$$

De plus, d'après les relations (3.37) et (3.41) :

$$N_s \propto \left( \frac{R_{max}}{R_{min} + R_{max}} (2n + 1) \right)^2.$$

Dès lors, à partir de la conjecture (3.39) sur  $N$ ,  $N_\xi$  peut être estimé par une majoration de la somme des carrés impairs pour  $R_{max} \gg R_{min}$  :

$$N_\xi = \sum_{n=0}^{N+1} N_s \propto \left( \frac{R_{max}}{R_{min}} |\log(\epsilon)| \right)^3. \quad (3.44)$$

La figure 3.12 vient confirmer ce résultat, par l'apparente linéarité des fonctions représentées. La séparation des variables de la SCSD est donc logarithmique en erreur et le nombre de points total est simplement fonction du rapport des extremums  $R_{max}$  sur  $R_{min}$ , élevé au cube.

Pour terminer, la quadrature en  $\xi$  (3.43) est directement injectée dans le produit de convolution initial (3.27) :

$$G_f(\mathbf{x}_p) \approx \sum_{q=1}^{N_y} f(\mathbf{y}_q) \left( \sum_{l=1}^{N_\xi} \omega_l e^{i\xi_l \cdot \mathbf{x}_p} e^{-i\xi_l \cdot \mathbf{y}_q} \right),$$

pour aboutir au calcul rapide par SCSD :

$$G_f(\mathbf{x}_p) \approx \sum_{l=1}^{N_\xi} e^{i\xi_l \cdot \mathbf{x}_p} \left( \sum_{q=1}^{N_y} e^{-i\xi_l \cdot \mathbf{y}_q} f(\mathbf{y}_q) \right) \omega_l. \quad (3.45)$$

Ce résultat, fondateur de la méthode de Décomposition Creuse en Sinus Cardinal, est le pendant discret du théorème d'addition de Gegenbauer (3.26), qui conduit à la séparation des variables en FMM. En comparaison, cette formulation est bien moins complexe et le calcul des sommes du type :

$$\sum_{q=0}^n e^{\pm i\mathbf{a}_p \cdot \mathbf{b}_q} h(\mathbf{b}_q) \quad \text{avec} \quad (\mathbf{a}_p, \mathbf{b}_q) \in \mathbb{R}^3,$$

peut être réalisé par transformée de Fourier 3D rapide, non uniforme en espace/fréquence. Cet algorithme, plus connu sous le nom de *Type-III Non Uniform Fast Fourier Transform* (NUFFT), est notamment utilisé en traitement d'image et propose une complexité quasi-linéaire  $N \log N$  (e.g. [24], [36], [61]). Un calcul de produit matrice-vecteur en SCSD (3.45) se résume donc à :

1. Passer du domaine spatial (en  $\mathbf{y}$ ) vers le domaine de Fourier (en  $\xi$ ), par NUFFT directe de type-III;
2. Multiplier le résultat obtenu par les poids  $\omega_l$ , liés aux quadratures de la SCSD;
3. Retourner dans l'espace (en  $\mathbf{x}$ ) par NUFFT inverse de type-III.

In fine, comme le produit matrice-vecteur (3.27) est issu d'une convolution spatiale entre le noyau de Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  et la fonction régulière  $f(\mathbf{y})$  (eq. 3.7), la SCSD reflète simplement l'idée qu'une telle convolution se traduit en domaine de Fourier par un produit. Toute l'originalité de la méthode réside finalement dans l'efficacité et la robustesse de la quadrature mono-dimensionnelle (3.34).

### 3.3.4 Extension vers Laplace (et plus si affinités...)

Avant de poursuivre vers des résultats applicatifs, une légère digression mérite d'être faite pour les problèmes de Laplace, qui interviennent dans de nombreux domaines de la physique (Électrostatique, Magnétostatique, Gravitation, *etc.*). Introduite par l'équation :

$$-\Delta u = f, \quad \text{avec } f \text{ régulière sur } \mathbb{R}^3,$$

la solution générale d'un problème de Laplace est formée par interactions Coulombiennes :

$$u(\mathbf{x}) = E_{Lap} \star f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dy,$$

dont la version discrète s'écrit :

$$u(\mathbf{x}_p) = \sum_{q=1}^{N_y} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}_p - \mathbf{y}_q|} f(\mathbf{y}_q). \quad (3.46)$$

Sensiblement proche des interactions helmholtziennes (3.27), seules les oscillations liées à l'exponentielle complexe n'apparaissent plus dans ce nouveau noyau de Green.

Or, le problème mono-dimensionnel a été résolu à la fois pour la quadrature du cosinus (3.34) et pour celle de l'unité (3.36). En effet, les résultats précédents montrent bien que l'unité peut être approchée comme une somme pondérée de sinus, pour une précision donnée sur un intervalle  $[R_{min}, R_{max}]$ . Par conséquent, suivant le même raisonnement, les grandes étapes de la Décomposition Creuse en Sinus Cardinal du noyau de Laplace sont données

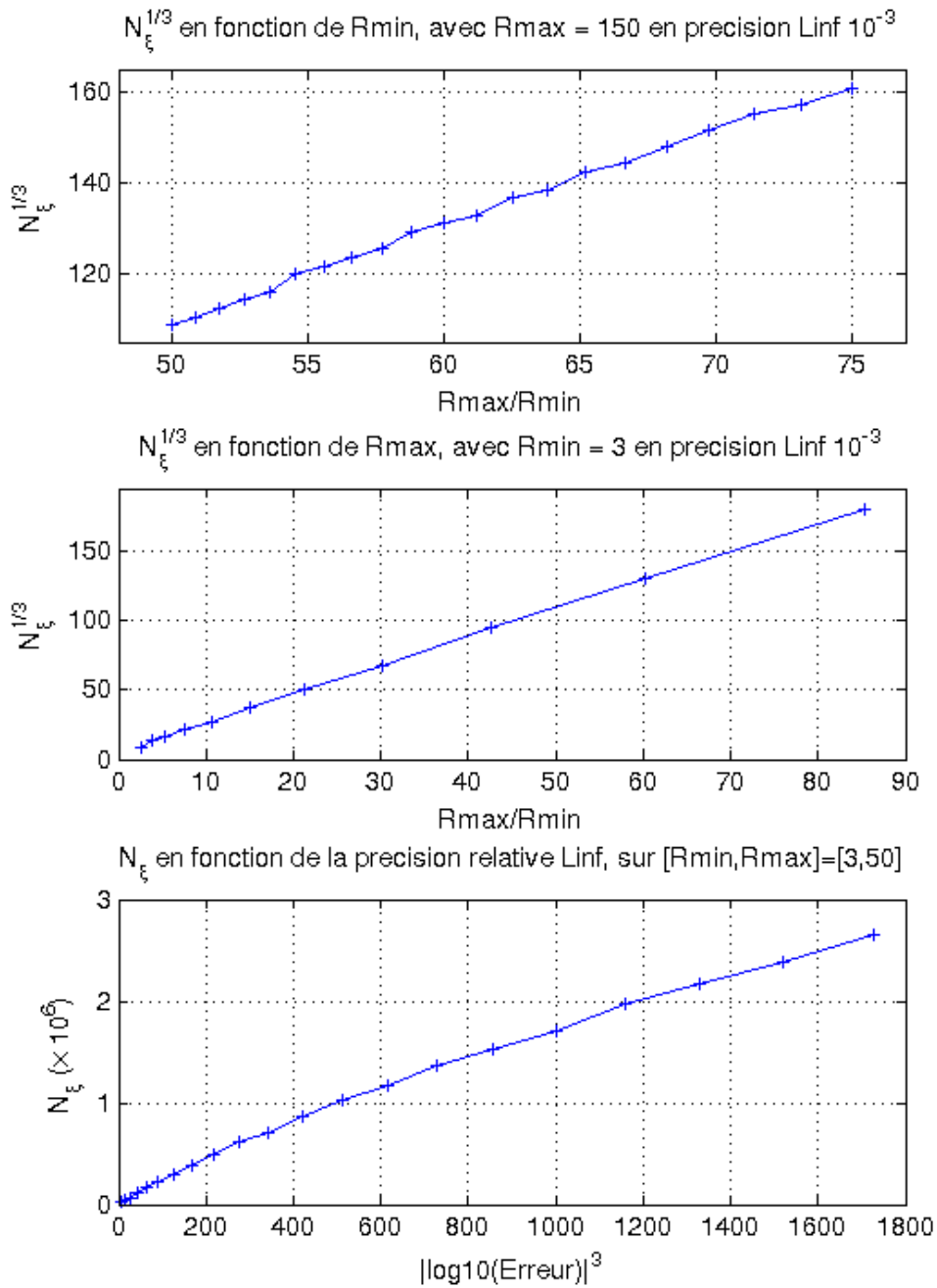


FIGURE 3.13 – Représentation du nombre total de points  $N_\xi$  d’une quadrature *CSD*, pour le noyau de Laplace (3.48). (Haut)  $R_{min}$  dans  $[2, 3]$  et  $R_{max} = 150$ , pour une précision relative fixée à  $10^{-3}$ . (Milieu)  $R_{min} = 3$  et  $R_{max}$  dans  $[10, 250]$ , pour une précision relative fixée à  $10^{-3}$ . (Bas)  $[R_{min}, R_{max}] = [3, 50]$  pour une précision relative dans  $[10^{-12}, 10^{-2}]$ .

par :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}_p - \mathbf{y}_q|} &\approx \sum_{n=0}^N \beta_n \frac{\sin(\rho_n|\mathbf{x}_p - \mathbf{y}_q|)}{4\pi|\mathbf{x}_p - \mathbf{y}_q|}, \\
&\approx \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{n=0}^N \beta_n \rho_n \int_{S^2} e^{i\rho_n \mathbf{s} \cdot \mathbf{x}_p} e^{-i\rho_n \mathbf{s} \cdot \mathbf{y}_q} d\mathbf{s}, \\
&\approx \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{l=1}^{N_{\xi'}} \omega'_l e^{i\xi'_l \cdot \mathbf{x}_p} e^{-i\xi'_l \cdot \mathbf{y}_q},
\end{aligned}$$

avec  $\xi'_l$  et  $\omega'_l$  similaires à  $\xi_l$  et  $\omega_l$  dans (3.42) :

$$\xi'_l = \rho_n \mathbf{s} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \omega'_l = \frac{\beta_n \rho_n \omega_s}{(4\pi)^2} \quad \text{dans } \mathbb{R}. \quad (3.47)$$

Ce résultat offre donc une séparation des variables identique à l'équation (3.45) :

$$u(\mathbf{x}_p) \approx \sum_{l=1}^{N'_{\xi}} e^{i\xi'_l \cdot \mathbf{x}_p} \left( \sum_{q=1}^{N_y} e^{-i\xi'_l \cdot \mathbf{y}_q} f(\mathbf{y}_q) \right) \omega'_l, \quad (3.48)$$

où chaque somme peut être calculée rapidement par NUFFT de type III. L'étude détaillée des quadratures du noyau de Laplace n'est pas présentée ici, mais la figure 3.13 montre bien que la loi sur  $N_{\xi}$ , établie pour Helmholtz (eq. 3.44), semble toujours vérifiée pour Laplace. De plus, l'article [5] disponible en annexe propose une revue théorique de la SCSD pour Laplace, étendue ensuite sur Helmholtz. Cet article fait donc office de référence en la matière et n'est donc pas repris dans ce manuscrit.

Il est donc fondamental de remarquer qu'une même méthode générique peut-être appliquée à deux noyaux distincts, en vue de calculer rapidement des interactions ponctuelles, oscillantes ou non. Cette constatation s'étend aux noyaux de Stokes ou Maxwell, respectivement dérivés des noyaux de Laplace et d'Helmholtz, ou plus largement encore à tous noyaux de Green exprimés en domaine de Fourier. Par conséquent, la SCSD est intrinsèquement multi-physique, contrairement à la FMM, qui nécessite des développements propres à chaque noyau. À elle seule, cette remarque peut justifier l'intérêt des recherches effectuées sur cette nouvelle méthode.

## 3.4 Comparaisons et performances

Comme les produits de convolution par les noyaux de Green pour Helmholtz (3.27) et Laplace (3.46) sont tous deux définis par :

$$G_p = \sum_{q=1}^N G(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) f_q \quad \forall p \in [1, N], \quad (3.49)$$

un nuage de  $N$  points  $\mathbf{x}$  est défini dans  $\mathbb{R}^3$ , associé à un vecteur  $(f_q)_{q \in [1, N]}$  de valeurs aléatoires complexes. Une routine *Matlab* a été programmée pour comparer l'évaluation du produit  $G_p$  (3.49) par différentes méthodes, dont la SCSD. Ce code n'est pas un solveur d'équations intégrales, mais un outil de validation analytique. La machine utilisée pour l'ensemble des tests de cette section est un PC portable disposant de 8 GO de mémoire vive et d'un processeur à 8 cœurs cadencés à 1.6 GHz.

### 3.4.1 Méthodologie

En premier lieu, le nuage de  $N$  points  $\mathbf{x}$  dans  $\mathbb{R}^3$  est créé suivant trois répartitions :

- Aléatoire dans une boule ;
- Aléatoire dans un cube ;
- Uniforme sur une sphère.

Chacune de ces répartitions est centrée en zéro, de sorte à maximiser par symétrie l'efficacité de la méthode SCSD. Pour assurer un régime fréquentiel adapté aux méthodes approchées, une normalisation sur la position des points  $\mathbf{x}$  est effectuée : la plus grande distance au sein du nuage est imposée telle que  $R_{max} = \sqrt[3]{N}$  et le nombre d'onde  $k$ , intervenant dans le noyau de Green de Helmholtz (3.6), est fixé à 1.

Une fois le domaine de calcul établi, la SCSD a été programmée en neuf grandes étapes, tirées des formulations du produit de convolution (3.49) pour Helmholtz (3.45) et Laplace (3.48) :

1. Quadrature hybride de l'unité ou du cosinus pour les interactions lointaines dans  $[R_{min}, R_{max}]$  ;
2. Quadrature des sphères d'intégrations et construction du domaine de Fourier en  $(\xi_l)_{l \in [1, N_\xi]}$  associé aux poids  $(\omega_l)_{l \in [1, N_\xi]}$  ;
3. NUFFT type-III directe de l'espace  $(\mathbf{x}_q)_{q \in [1, N]}$  vers les fréquences  $(\xi_l)_{l \in [1, N_\xi]}$ , appliquée sur  $(f_q)_{q \in [1, N]}$  ;
4. Pondération du résultat précédent par les poids de quadrature  $(\omega_l)_{l \in [1, N_\xi]}$  ;

5. NUFFT type-III inverse des fréquences  $(\xi_l)_{l \in [1, N_\xi]}$  vers l'espace  $(\mathbf{x}_p)_{p \in [1, N]}$ , appliquée sur le résultat pondéré ;
6. Recherche des interactions proches, définies par  $|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q| \leq R_{min}$  ;
7. Calcul du noyau de Green pour les interactions proches ;
8. Calcul de la partie réelle de la quadrature SCSD pour les interactions proches, inexacte, mais régulière sur  $[0, R_{min}]$  ;
9. Addition des résultats issus des interactions proches et lointaines, puis soustraction des évaluations inexactes SCSD.

Cet algorithme permet une implémentation vectorielle relativement simple. Aussi, toutes les routines ont été écrites nativement en *Matlab*, à l'exception de la NUFFT qui dispose de nombreuses versions *.mex* en accès libre sur internet (e.g. [93], [94], [95], [96], etc.). Après quelques tests comparatifs, celle proposée par L. Greengard [95] a été choisie, notamment pour sa rapidité, sa précision et sa simplicité d'utilisation.

Pour valider les résultats issus de la SCSD, deux autres méthodes ont servi de référence au calcul du produit de convolution (3.49) :

- La méthode directe, notée DM (exacte, complexité quadratique) ;
- La méthode multipolaire rapide FMM (approchée, complexité quasi-linéaire).

Les deux routines utilisées sont issues d'une autre librairie Fortran écrite par L. Greengard, toujours interfacée *Matlab*, mais dédiée cette fois au calcul intégral [88]. Étant donné que L. Greengard est un pionnier de la FMM, les comparaisons avec cette librairie ont semblé toutes naturelles. Pour s'assurer du bon réglage de ces outils, la précision machine a été vérifiée sur des petits cas ( $N < 10000$ ), en comparant les méthodes directe et rapide proposées par L. Greengard, avec un produit de convolution écrit nativement en *Matlab*.

Afin d'être le plus objectif possible, le multi-threading a été désactivé pour les exécutions *Matlab* (options `'-singleCompThread'` au démarrage) et pour les bibliothèques externes (re-compilées sans OpenMP). Seul le parallélisme du calcul direct de la méthode exacte en Fortran a été conservé, afin de minimiser l'impact de la complexité quadratique sur les temps de calcul.

### 3.4.2 Résultats

La figure 3.14 compare les temps de calcul de la convolution avec le noyau de Laplace, en fonction du nombre  $N$  de points dans l'espace. La précision des méthodes relatives est fixée à  $10^{-3}$  et  $R_{min}$  est fixé à 1. Tout d'abord, il apparaît que la méthode directe présente bien des temps de calcul supérieurs, ce qui est attendu. Ensuite, les temps d'assemblage FMM et SCSD sont

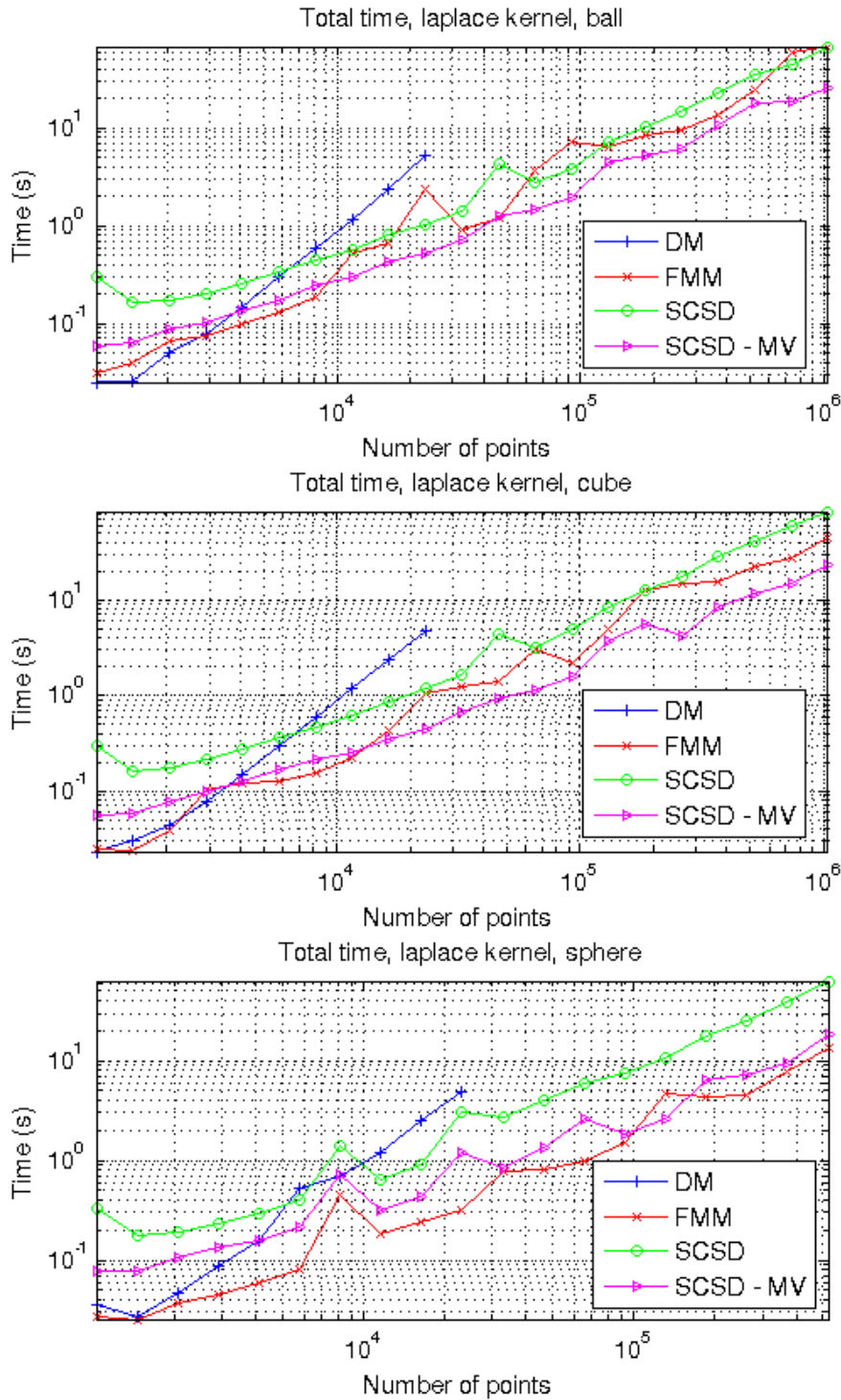


FIGURE 3.14 – Temps totaux comparatifs pour la convolution (3.49) du noyau de Laplace, en fonction du nombre  $N$  de points  $\mathbf{x}$  en interactions dans  $\mathbb{R}^3$ . La précision relative des méthodes approchées est fixée à  $10^{-3}$  et  $R_{min} = 1$  pour la SCSD.



comparables sur une boule, alors que la FMM est légèrement plus rapide pour le cube et bien plus rapide pour la sphère. Ceci peut s'expliquer par les fondements même de chaque méthode :

- La SCSD est optimale pour les répartitions volumiques dans une boule. En effet, sa complexité est fonction de la quadrature en domaine de Fourier, dont le nombre de points  $N_\xi$  est, dans ce cas, très proche de  $N$  (eq. 3.44 avec  $R_{min} = 1$  et  $R_{max} = \sqrt[3]{N}$ );
- La FMM est plus adaptée aux répartitions volumiques dans un cube, de par le découpage de l'espace en *octree*. De plus, quelle que soit la répartition spatiale, sa complexité reste  $N \log N$ . C'est pourquoi le cas sphérique n'est pas plus difficile en FMM.

Par ailleurs, toutes les erreurs relatives finales obtenues entre méthode directe, FMM et SCSD sont de l'ordre de grandeur de la précision souhaitée (dans ce cas  $\approx 10^{-3}$ ). Enfin, autant la pente de la méthode directe montre bien une complexité plus grande que les méthodes approchées, autant la SCSD et la FMM présentent la même linéarité, malgré quelques accrocs numériques inexplicables. Ceci laisse penser que la complexité empirique de la SCSD pourrait être du même ordre que celle de la FMM, de mille à un million de points en interactions (soit mille milliards d'interactions calculées). De plus, en pré-calculant les interactions proches lors de calculs itératifs, le produit matrice-vecteur résultant (SCSD - MV, fig. 3.14) est quant à lui tout à fait compétitif avec la FMM.

La figure 3.15 présente les mêmes courbes que la figure 3.14, mais pour une convolution avec le noyau oscillant de Helmholtz. La précision des méthodes relatives est toujours fixée à  $10^{-3}$ , et  $R_{min}$  à 1. Quelle que soit la répartition spatiale de  $\mathbf{x}$  dans  $\mathbb{R}^3$ , il apparaît cette fois que la méthode SCSD est la plus rapide. De plus, les pentes des courbes des méthodes approchées montrent toujours une complexité empirique équivalente. Enfin, le pré-calcul des parties proches lors de résolutions itératives offre un produit matrice-vecteur particulièrement rapide.

Pour terminer, la figure 3.16 donne les temps de calculs pour les convolutions de Laplace et Helmholtz sur une sphère, avec une précision fixée à  $10^{-6}$ . Pour réaliser des calculs SCSD en accord avec la loi (3.44),  $R_{min}$  a été augmenté et fixé arbitrairement à 3. Il apparaît de nouveau une grande similitude pour les divers temps de résolution, malgré une précision relative mille fois supérieure. Par conséquent, la SCSD montre en outre une certaine robustesse à la précision, comparable à celle de la FMM.

En conclusion, la SCSD semble tout à fait comparable à la FMM, tant en terme de complexité que de précision. La plupart des résultats présentés a d'ailleurs été démontrée dans un article rédigé en parallèle de ce manuscrit, ce qui a permis de valider et maîtriser pleinement cette approche [5]. De plus,

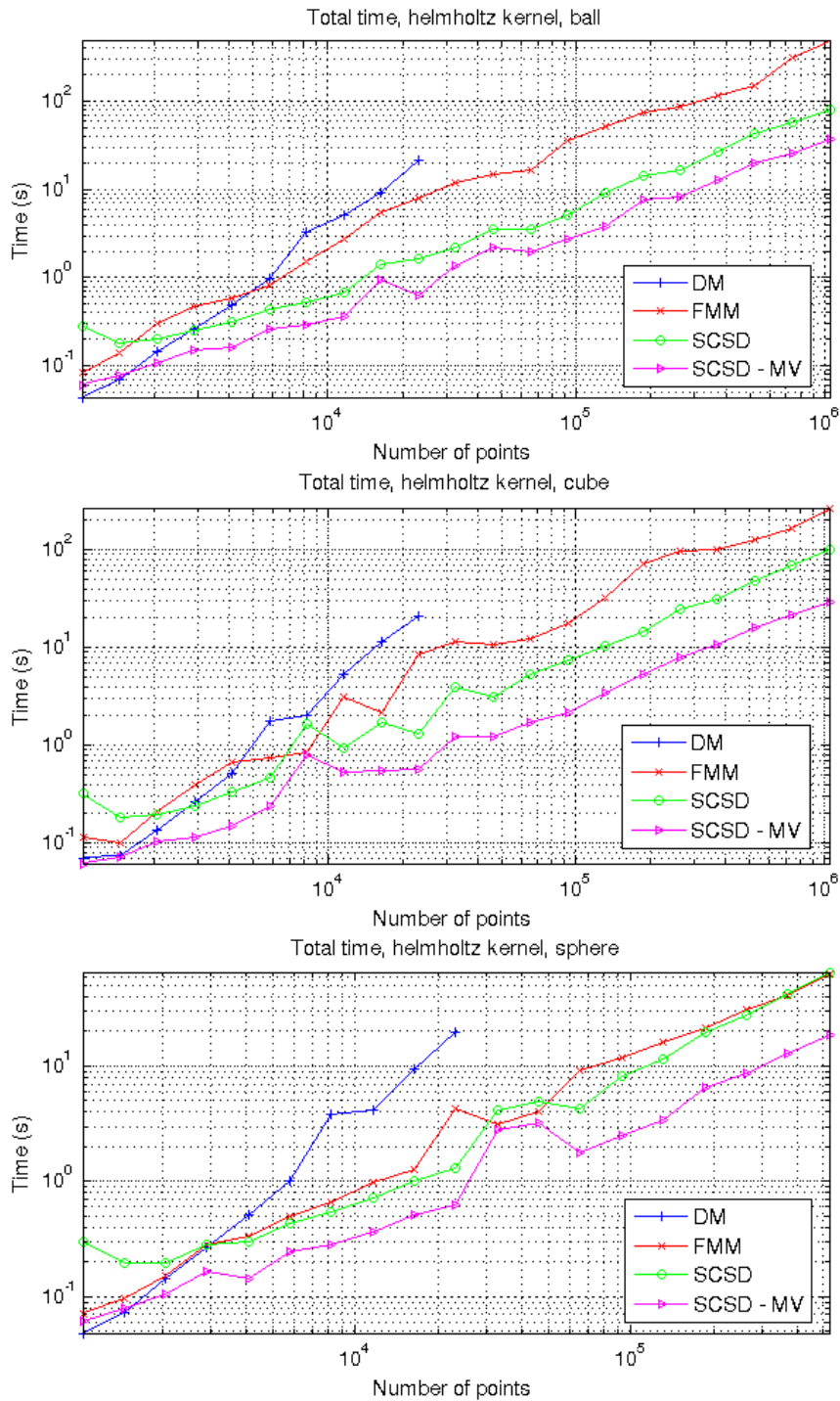


FIGURE 3.15 – Temps totaux comparatifs pour la convolution (3.49) du noyau de Helmholtz, en fonction du nombre  $N$  de points  $\mathbf{x}$  en interactions dans  $\mathbb{R}^3$ . La précision relative des méthodes approchées est fixée à  $10^{-3}$  et  $R_{min} = 1$  pour la SCSD.

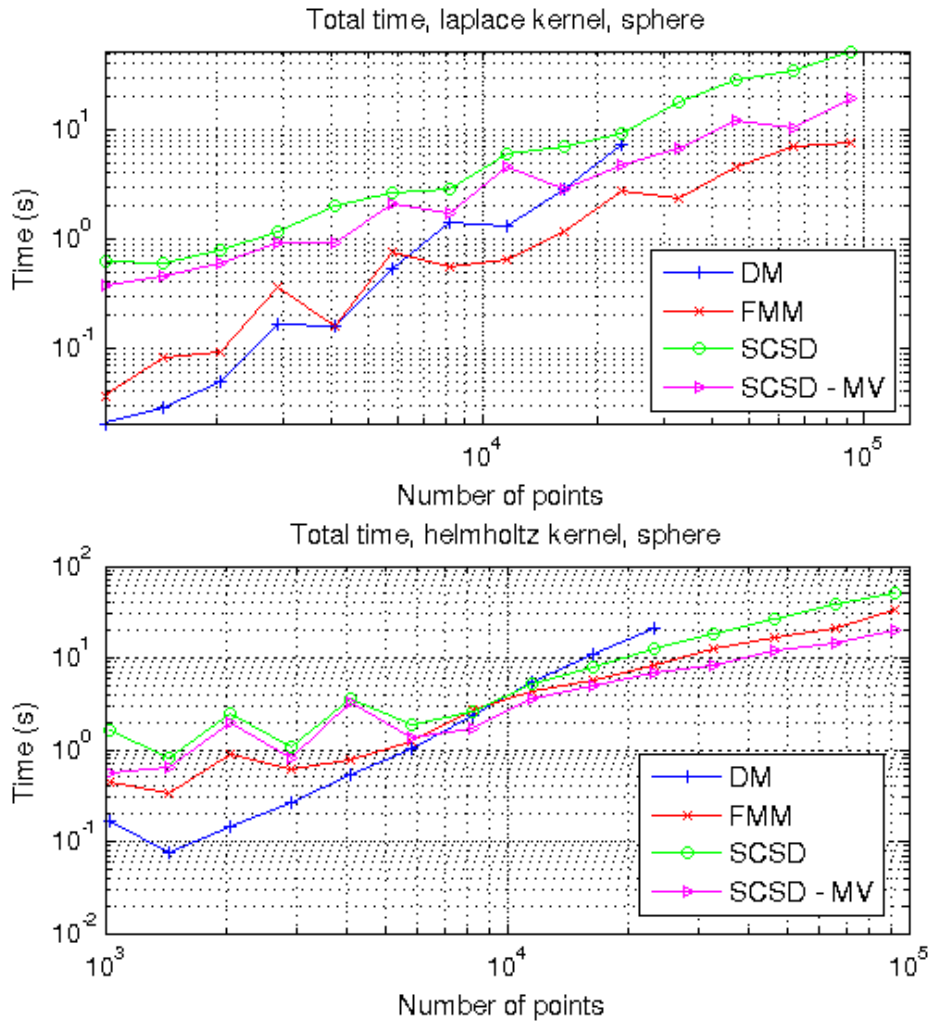


FIGURE 3.16 – Temps totaux comparatifs pour la convolution (3.49) des noyaux de Laplace (Haut) et Helmholtz (Bas), en fonction du nombre  $N$  de points  $\mathbf{x}$  en interactions dans  $\mathbb{R}^3$ . La précision relative des méthodes approchées est fixée à  $10^{-6}$  et  $R_{min} = 3$  pour la SCSD.

de nombreuses optimisations mathématiques et algorithmiques sont encore envisageables (et envisagées) pour chacune des étapes de cette méthode (pré-calculs, parallélismes, amélioration des quadratures, etc.), ouvrant un large pan de recherche pour de futurs travaux. Par ailleurs, comme le même code *Matlab* a été utilisé pour calculer les produits de convolution (3.49) pour Laplace (3.48) et Helmholtz (3.45), ces optimisations impacteront directement toutes les physiques compatibles (gravitation, acoustique, électromagnétisme, mécanique des fluides, etc). C'est pourquoi cette méthode a d'ores et déjà été implémentée avec succès dans un moteur de calcul d'équations intégrales pour l'acoustique, présenté dans le dernier chapitre de ce manuscrit.



# Chapitre 4

## Moteur intégral *MyBEM*

Une fois la SCSD validée pour le calcul des interactions au sein d'un nuage de points, elle fut aussitôt implémentée dans une nouvelle routine *Matlab*, qui assemble par collocation les opérateurs sphériques de simple couche (3.18) et de double couche (3.19). En estimant les interactions lointaines par le produit matrice-vecteur (3.45), des solutions tirées d'une résolution itérative sont obtenues, pour des problèmes de diffraction de 1 000 à 50 000 inconnues. Ces résultats furent alors confrontés aux solutions analytiques du rayonnement sphérique, avec succès. Ce principe montra de bonnes performances, mais il n'était pas possible d'aller plus loin sans une approximation de Galerkin bien établie. Il fut donc décidé d'implémenter la SCSD dans un vrai moteur de calcul intégral en éléments finis  $P^1$  (*MyBEM*), dont le prototype est présenté dans ce dernier chapitre. Ce moteur a été développé en collaboration avec François Alouges à partir d'une librairie *Matlab* dont il est l'auteur, initialement conçue pour l'enseignement des éléments finis 2D. Ce co-développement a permis d'en étendre rapidement et très significativement la portée.

### 4.1 Présentation

*MyBEM* est une librairie de calcul intégral par éléments finis de frontières, appliquée à l'acoustique tri-dimensionnelle et nativement écrite en langage *Matlab*. De nombreux services connexes y ont été associés, comme la gestion de maillage, le pré/post-traitement de données et la visualisation de résultats. De prime abord, le choix d'une implémentation *Matlab* peut surprendre au regard des performances exigibles en calcul numérique, mais cette plateforme fut initialement adoptée pour assurer un prototypage rapide et efficace. Au final, il aura fallu moins d'une année pour aboutir à la version présentée dans ce manuscrit. Par ailleurs, une vectorisation drastique de

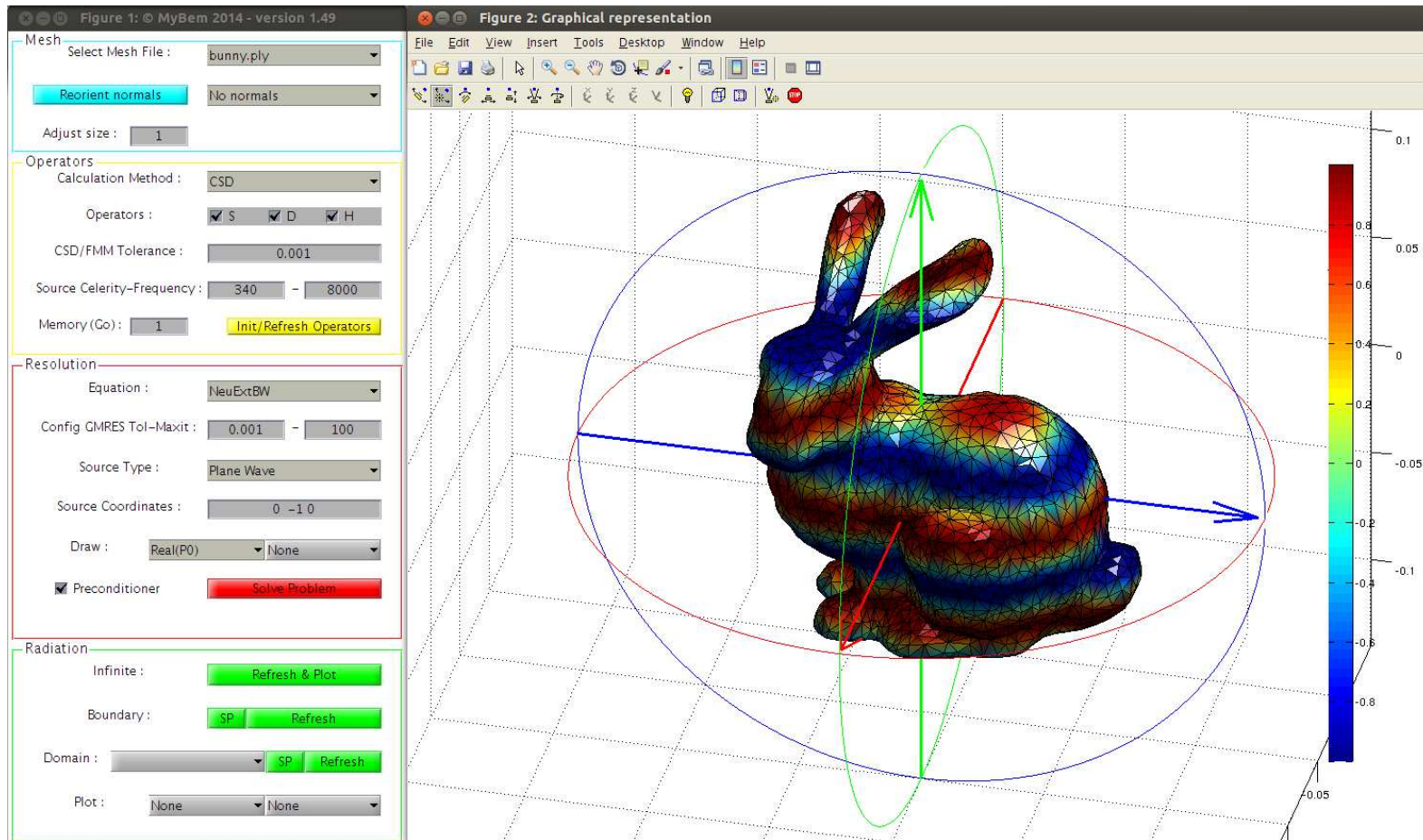


FIGURE 4.1 – *MyUI*, interface graphique de *MyBEM*, prototype *Matlab* pour le calcul intégral en acoustique tridimensionnelle.

l'ensemble des opérations a été effectuée, ceci afin d'assurer des performances comparables à celles obtenues par des langages de plus bas niveau. Enfin, la *Parallel Computing Toolbox* proposée par Mathwork a définitivement scellé ce choix, puisque les calculs les plus gourmands ont pu bénéficier d'un multi-threading efficace, au prix d'un effort de développement réellement modique (remplacer les boucles "for" par "parfor"). En pratique, les temps de calcul sont en moyenne divisés par cinq sur une machine comptant huit cœurs.

*MyBEM* est programmé dans une logique objet et les fonctions membres comme les attributs sont accessibles par appels directs, ou par interface graphique dédiée à l'utilisateur (*MyUI*, fig. 4.1). L'ensemble des données et des traitements est inclu dans six objets distincts, relatifs aux différentes étapes intervenant dans la résolution d'une formulation intégrale :

1. **Mesh** : Contient l'ensemble des données sur maillages, ainsi que les routines de lecture de fichiers *.vtk*, *.ply*, *.mat*, *.mesh*, etc. Toutes les données utiles (arêtes, normales, tangentes, surfaces, etc.) sont calculées par *MyBEM*, à partir des nœuds et des éléments.
2. **Mef** : Contient l'ensemble des données relatives à l'espace d'éléments finis des méthodes de Galerkin (degrés de liberté, fonctions de bases, formules d'intégrations, matrices d'intégrations de Gauss, etc.). Ces données sont automatiquement générées à partir des maillages et ne nécessitent, a priori, aucune intervention de la part de l'utilisateur. Dans sa version actuelle, *MyBEM* se limite aux formulations  $P^1$ , avec les inconnues aux nœuds de mailles triangulaires. Des travaux sont en cours pour ajouter d'autres éléments finis.
3. **Opr** : Contient l'ensemble des données relatives aux opérateurs intégraux usuels (eq. 3.16 à 3.23), ainsi que les différentes méthodes pour les assembler. En effet, *MyBEM* propose non seulement une construction matricielle classique par évaluation exacte des noyaux de Green, mais aussi des assemblages FMM et SCSD de produits matrices-vecteurs approchés (3.27). Dans tous les cas, les opérateurs sont construits à partir des interactions entre les points de Gauss des éléments finis, puis intégrés pour former le système final aux degrés de liberté. Par ailleurs, pour limiter les erreurs dues aux singularités, les intégrations proches sont régularisées analytiquement [77].
4. **Sol** : Contient l'ensemble des données relatives à la modélisation mathématique du problème de diffraction, ainsi qu'à sa résolution. Les fonctions membres permettent à l'utilisateur de définir les sources [ondes planes (3.3) ou ondes sphériques (3.4)], les conditions de bord [Dirichlet (3.13) ou Neumann (3.14)] et le prolongement de la trace. Le système linéaire correspondant est ensuite établi, puis résolu de ma-



nière directe ou itérative selon la méthode d’assemblage choisie pour former les opérateurs. De plus, pour accélérer les résolutions itératives, des préconditionneurs issus des identités de Calderón (3.12) sont couplés à la décomposition  $LU$  des interactions proches (e.g. [54], [79]). Les solutions alors obtenues sont rendues en saut, pour conserver le cadre généraliste des formulations indirectes.

5. **Rad** : Contient l’ensemble des services de post-traitement des résultats, notamment de rayonnement dans l’espace. Par exemple, des solutions peuvent être calculées sur le maillage surfacique initial, mais aussi sur un maillage volumique quelconque fourni par l’utilisateur, ainsi que dans toutes les directions d’un rayonnement infinitésimal.
6. **Draw** : Contient l’ensemble des outils de visualisation graphique, en domaine fréquentiel et temporel.

Parmi l’ensemble des traitements proposés par *MyBEM*, trois bibliothèques externes interfacées avec *Matlab* ont été utilisées :

- **FMM** : Bibliothèque Fortran de L. Greengard [88], pour le calcul de produits matrices-vecteurs approchés. La routine d’interaction ponctuelle *hfm3dpart* de L. Greengard est couplée aux matrices d’intégrations de Galerkin calculées par *MyBEM* pour obtenir une formulation éléments finis  $P^1$ . Cette bibliothèque est utilisable pour les maillages conséquents, lorsque l’assemblage matriciel des opérateurs n’est plus envisageable. Elle est nativement parallèle.
- **NUFFT** : Bibliothèque Fortran de L. Greengard [95], pour le calcul de transformées de Fourier non uniformes, de une à trois dimensions. La routine *nufft3d3* intervient dans la SCSD. Bien que déjà très performante, elle est néanmoins non parallèle, ce qui impacte les temps de calcul lors des résolutions itératives. De plus, de nombreux pré-calculs pourrait être réalisés, toujours en vue de minimiser les temps de chaque itération. C’est pourquoi le développement d’une nouvelle bibliothèque NUFFT est actuellement envisagé.
- **OpenTSTOOL** : Bibliothèque C++ de C. Merkwirth [98], pour le calcul rapide de distances au sein d’un nuage de points. La routine *range\_search* est utilisée par la SCSD pour rechercher et calculer les interactions ponctuelles dont la distance est inférieure au rayon  $R_{min}$ . Cette bibliothèque n’est pas parallèle, mais son usage est très localisé donc peu impactant. Par ailleurs, la fonction *rangeSearch* est aussi proposée par MathWorks dans la *Statistics Toolbox*, mais celle-ci n’était pas à disposition lors de la création de *MyBEM*.

Avant de clore cette brève présentation, il n'est pas inutile de préciser que l'interface graphique *MyUI* (fig. 4.1) interagit par callback avec chacune de ces structures. C'est pourquoi, les différentes étapes de résolution liées à ces objets ont été identifiées par couleurs : en bleu la gestion de maillage, en jaune la création des opérateurs, en rouge la résolution du problème et en vert le post-traitement. Seuls les éléments finis ne sont pas visibles, puisque leur paramétrisation n'est pas nécessaire et requiert une certaine expertise.

## 4.2 Validations

Un protocole de validation analytique de la librairie *MyBEM* a été mis en place dès l'obtention des premiers résultats numériques. Celui-ci permet d'assurer le bien-fondé des solutions obtenues, ainsi qu'une assurance de non-régression lors des fréquentes mises à jour. Lors de ces tests, les divers temps de calcul sont aussi comparés, ce qui permet l'élaboration d'algorithmes toujours plus rapides, avec une précision maîtrisée. Par ailleurs, des résultats similaires sont discutés dans [22] et peuvent être confrontés à ceux présentés ici. Enfin, tous les résultats de cette section ont été calculés sur une machine disposant de 8 cœurs cadencés à 3.3 Ghz, de 128 Go de mémoire vive et de la version *R2013a* de *Matlab*.

Lorsqu'une onde plane (3.3) est diffractée par une sphère, des solutions explicites peuvent être calculées analytiquement à l'aide d'une décomposition en harmoniques sphériques [23]. En effet, pour des conditions de Dirichlet au bord de la sphère (3.13), le système :

$$\begin{cases} -(\Delta u + k^2 u) = 0 & \text{dans } \Omega^e, \\ u = u_D = -e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} & \text{sur } S^2, \\ r(\partial_r u + iku) \rightarrow 0 & \text{quand } r \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

possède des solutions analytiques, données en coordonnées sphériques par :

$$u_{ref}(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \kappa_n h_n^{(2)}(kr) P_n(\cos(\gamma)). \quad (4.1)$$

$\gamma$  représente l'angle d'incidence avec la direction  $\mathbf{k}$  de l'onde plane et la constante  $\kappa_n$  est définie par :

$$\kappa_n = -\frac{j_n(k)}{h_n^{(2)}(k)}, \quad (4.2)$$

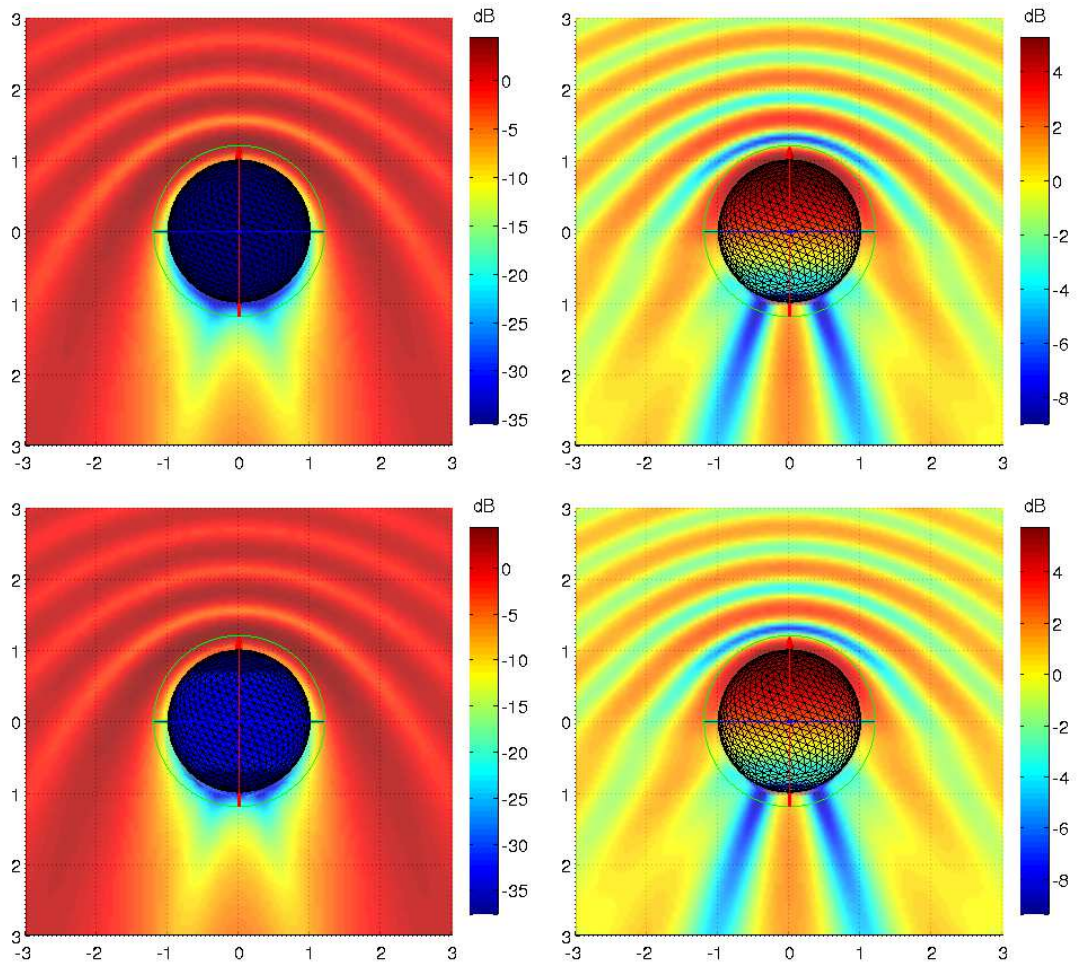


FIGURE 4.2 – Champ total issu de la diffraction d’une onde plane par une sphère unité, à la fréquence  $f = 300$  Hz. Représentation en décibel ( $20 \log |u|$ ). (Haut) Solutions analytiques. (Bas) Solutions numériques calculées par *MyBEM*, pour une sphère à 1000 inconnues. (Gauche) Problème de Dirichlet. (Droite) Problème de Neumann.

avec  $j_n$  la fonction de Bessel sphérique et  $h_n^{(2)}$  la fonction de Hankel sphérique de seconde espèce. Cette solution décrit exactement l'évolution du champ diffracté pour tout  $r \geq 1$  et la série converge suffisamment rapidement pour être estimée avec une bonne précision. Par ailleurs, pour un problème de Neumann, le système :

$$\begin{cases} -(\Delta u + k^2 u) = 0 & \text{dans } \Omega^e, \\ \partial_n u = u_N = -\partial_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} & \text{sur } S^2, \\ r(\partial_r u + iku) \rightarrow 0 & \text{quand } r \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

a pour solution (4.1), avec une nouvelle constante  $\kappa_n$  :

$$\kappa_n = -\frac{j_n'(k)}{h_n^{(2)'}(k)}. \quad (4.3)$$

À titre d'exemple, des solutions analytiques de problèmes de diffraction sphériques de Dirichlet et Neumann ont été représentées en haut de la figure 4.2 (respectivement à gauche et à droite). Des solutions numériques issues de *MyBEM*, sur un maillage de sphère à 1000 inconnues, sont quant à elles visibles en bas de cette même figure. Toutes ces représentations sont données en décibel ( $20 \log |u|$ ).

Même si les résultats concordent à première vue, la décroissance du rayonnement en  $\frac{1}{r}$  complique l'utilisation d'une mesure objective de l'erreur commise dans l'espace. C'est pourquoi la solution en champ lointain, indépendante de la distance  $r$ , a été préférentiellement choisie :

$$u_{ref}^\infty(\theta, \phi) = \frac{i}{k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \kappa_n P_n(\cos(\gamma)). \quad (4.4)$$

Comme cette solution est symétrique par rapport à l'incidence  $\mathbf{k}$ , l'évaluation pour  $\gamma$  dans  $[0, 2\pi]$  est suffisante, voire préférable pour la lisibilité des résultats. Par ailleurs, l'équivalent numérique de (4.4), noté  $u^\infty$ , est donné par le rayonnement des potentiels de champ lointain (3.22) et (3.23). Ce rayonnement a donc été ajouté dans les fonctionnalités proposées par *MyBEM*, avec une évaluation rapide par NUFFT type-III. L'analyse des résultats est réalisée à la fois par superposition graphique des deux solutions et par l'intermédiaire des normes quadratiques et infinies du rapport signal sur bruit

(*Signal/ Noise Ratio*), définies par :

$$SNR_2 = \sqrt{\frac{1}{N_\gamma} \sum_{\gamma_i \in [1, N_\gamma]} 20 \log_{10} \left( \left| \frac{u^\infty(\gamma_i)}{u_{ref}^\infty(\gamma_i)} \right| \right)^2}, \quad (4.5)$$

$$SNR_\infty = \max_{\gamma_i \in [1, N_\gamma]} \left| 20 \log_{10} \left( \left| \frac{u^\infty(\gamma_i)}{u_{ref}^\infty(\gamma_i)} \right| \right) \right|. \quad (4.6)$$

Les résultats de validation présentés dans les différents tableaux de la figure 4.3 ont été obtenus en utilisant les formulations Brackage-Warner des problèmes de Dirichlet et Neumann préconditionnés. Ce choix découle essentiellement de la forme bien posée issue du prolongement de Robin, qui assure l'existence et l'unicité de la solution quelque soit la fréquence. Les différentes méthodes d'assemblage proposées dans *MyBEM* sont comparées (*BEM*, *FMM* et *SCSD*), en précision ( $SNR_2$  et  $SNR_\infty$ ), mais aussi en temps d'assemblage des parties proches ( $tps_P$ ) et temps de résolution ( $tps_R$ ). Le nombre d'itérations des résolutions approchées est précisé ( $N_{iter}$ ), ce qui donne une estimation du temps passé dans un produit matrice-vecteur. Pour tous les problèmes étudiés, les sphères unités sont maillées à l'aide de grilles uniformes de Fibonacci, de  $10^3$  à  $10^6$  points. Étant donné que *MyBEM* est programmé en formulation variationnelle approchée par éléments finis de frontière  $P^1$ , les  $N$  inconnues correspondent exactement aux sommets du maillage. Par ailleurs, comme 3 points de Gauss ont été utilisés par éléments, le calcul des interactions ponctuelles pour l'assemblage des différents opérateurs a donc lieu entre les  $6N$  points de gauss. De plus, pour qu'une longueur d'onde soit représentée au minimum par 6 inconnues, la fréquence  $f$  a été ajustée pour chaque grille, en fonction de la taille de la plus grande arête  $a_{max}$  ( $ka_{max} \approx 1$ ). Enfin, la précision des méthodes approchées a été fixée à  $10^{-3}$ , au même titre que celle du solveur GMRES [76] utilisé pour les résolutions itératives de la FMM et de la SCSD. En complément de ces données, les figure 4.4 et 4.5 offrent une représentation graphique des rayonnements analytiques  $u_{ref}^\infty$ , superposés aux solutions numériques  $u^\infty$  obtenues par SCSD.

Il apparaît d'une part que les rapports signal sur bruit ( $SNR$ ) sont stables, et montrent une grande précision pour tous les résultats. En effet, l'écart entre les solutions numériques et analytiques sont de l'ordre de  $10^{-2}$  dB en norme quadratique et  $10^{-1}$  dB en norme infinie. Ces performances se retrouvent dans les représentations graphiques des figures 4.4 et 4.5, puisque les solutions numériques et analytiques sont trait sur trait, en échelle logarithmique (dB). Les temps de calcul totaux, somme des temps d'assemblage des parties proches  $tps_P$  et des temps de résolution  $tps_R$ , sont

DIRICHLET			<i>BEM</i>		<i>FMM</i>			<i>SCSD</i>	
$N$	$f$ (Hz)	$kr_{\max}$	$SNR_2$	$SNR_\infty$	$SNR_2$	$SNR_\infty$	$SNR_2$	$SNR_\infty$	
$10^3$	300	5	0.017	0.032	0.033	0.067	0.016	0.032	
$10^4$	1000	19	0.002	0.008	0.017	0.060	0.009	0.024	
$10^5$	3200	118	-	-	0.011	0.039	0.019	0.073	
$10^6$	10000	368	-	-	0.021	0.120	0.014	0.090	

NEUMANN			<i>BEM</i>		<i>FMM</i>		<i>SCSD</i>	
$N$	$f$ (Hz)	$kr_{\max}$	$SNR_2$	$SNR_\infty$	$SNR_2$	$SNR_\infty$	$SNR_2$	$SNR_\infty$
$10^3$	300	5	0.050	0.161	0.052	0.159	0.047	0.158
$10^4$	1000	19	0.021	0.134	0.026	0.201	0.019	0.179
$10^5$	3200	118	-	-	0.015	0.093	0.017	0.110
$10^6$	10000	368	-	-	0.025	0.214	0.013	0.061

DIRICHLET			<i>BEM</i>		<i>FMM</i>			<i>SCSD</i>		
$N$	$f$ (Hz)	$kr_{\max}$	$tps_P$	$tps_R$	$tps_P$	$tps_R$	$N_{iter}$	$tps_P$	$tps_R$	$N_{iter}$
$10^3$	300	5	1.78	0.13	0.74	1.02	5	0.96	0.71	5
$10^4$	1000	19	140	22.4	3.21	12.5	7	4.49	3.58	7
$10^5$	3200	118	-	-	23.4	174	9	56.7	39.1	9
$10^6$	10000	368	-	-	235	2460	12	782	618	12

NEUMANN			<i>BEM</i>		<i>FMM</i>			<i>SCSD</i>		
$N$	$f$ (Hz)	$kr_{\max}$	$tps_P$	$tps_R$	$tps_P$	$tps_R$	$N_{iter}$	$tps_P$	$tps_R$	$N_{iter}$
$10^3$	300	5	1.78	0.13	0.74	2.83	5	0.96	0.84	5
$10^4$	1000	19	140	24.2	3.21	34.8	6	4.49	4.59	6
$10^5$	3200	118	-	-	23.4	479	7	56.7	47.0	7
$10^6$	10000	368	-	-	235	6324	9	782	740	9

FIGURE 4.3 – Tableaux comparatifs de la précision et des temps de calculs de *MyBEM* pour un problème de diffraction sphérique de  $10^3$  à  $10^6$  inconnues. Tous les temps sont donnés en secondes et les  $SNR$  sont données en décibel ( $20 \log |u|$ ).

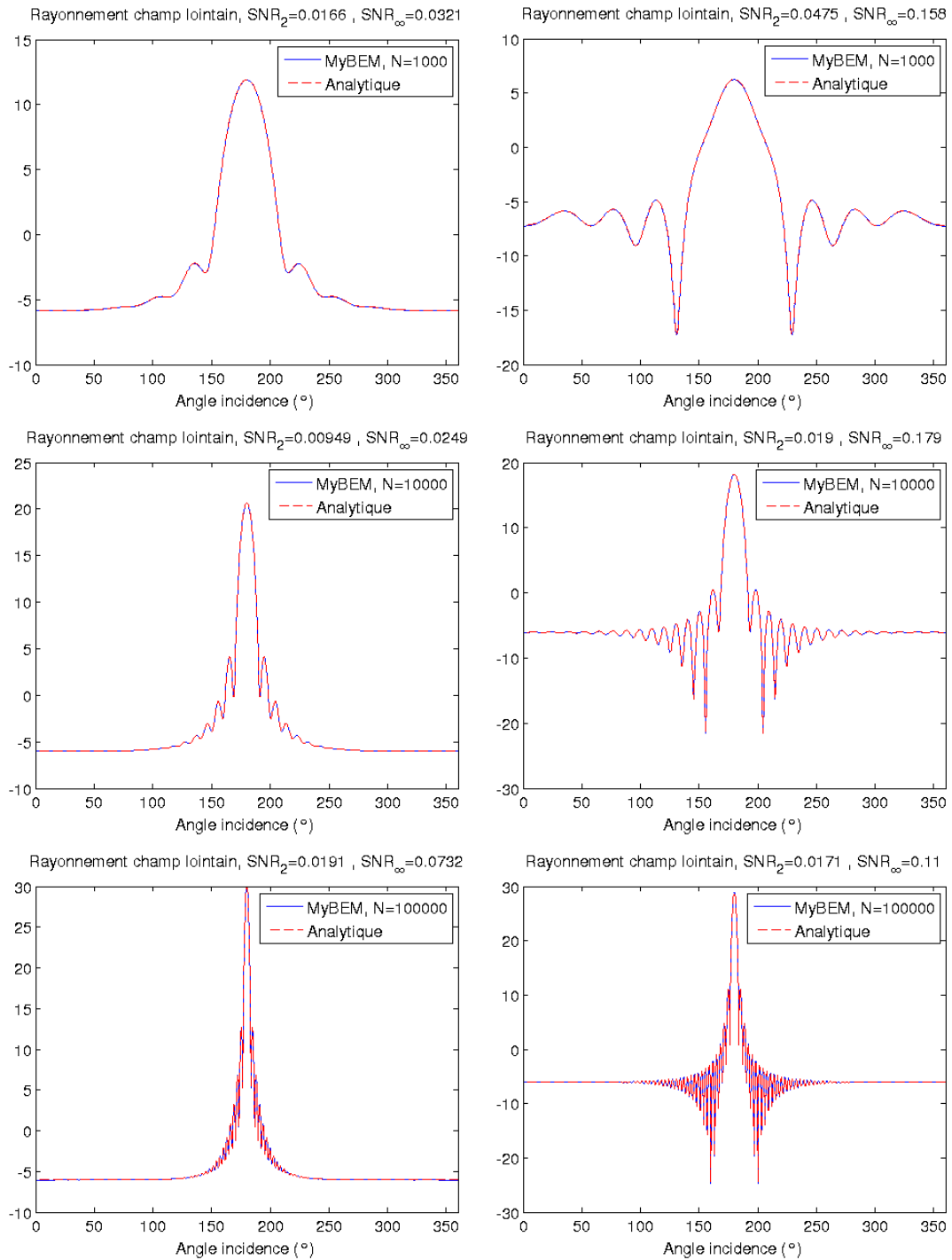


FIGURE 4.4 – Représentations en décibel des diagrammes de rayonnement en champs lointains des solutions analytiques ( $u_{ref}^\infty$ ) et numériques, obtenues par *MyBEM* en SCSD ( $u_{SCSD}^\infty$ ). (Gauche) Problèmes de Dirichlet. (Droite) Problèmes de Neumann.

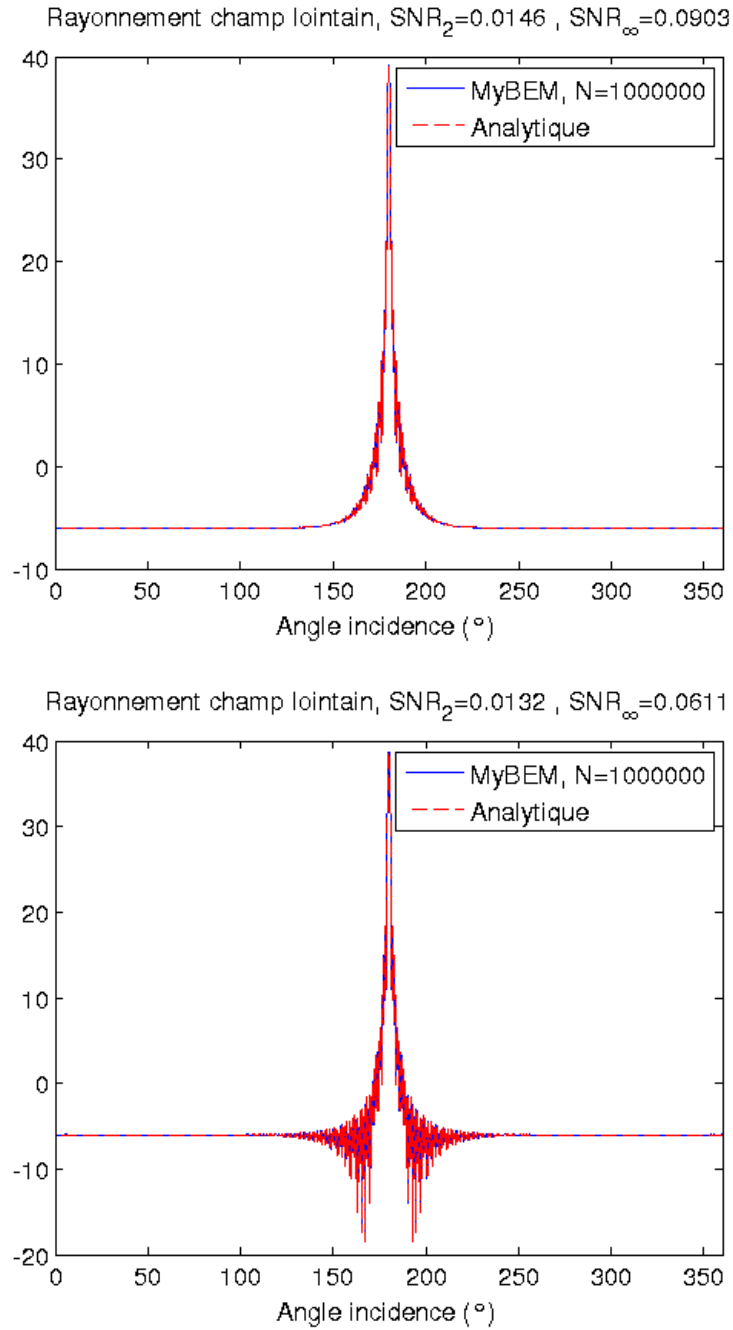


FIGURE 4.5 – Représentations en décibel des diagrammes de rayonnement en champs lointains des solutions analytiques ( $u_{ref}^\infty$ ) et numériques, obtenues par *MyBEM* en SCSD ( $u_{SCSD}^\infty$ ). (Haut) Problèmes de Dirichlet. (Bas) Problèmes de Neumann.



favorables à la méthode SCSD. En effet, bien qu'assez performante dans son assemblage, la BEM ne peut pas résoudre des problèmes d'une taille supérieure à 25 000 inconnues, puisque le stockage mémoire des opérateurs explose de façon quadratique. D'autre part, la FMM est globalement moins rapide que la SCSD, à précision équivalente. Néanmoins, ces résultats sont à nuancer par les nombreuses différences intrinsèques aux deux algorithmes (niveau de langage, parallélisme de la FMM mais pas des NUFFT, accessibilité aux différentes étapes de construction, etc.), qui rendent hasardeuse toute conclusion objective. De nouvelles études sont donc à prévoir, ainsi que divers benchmark, mais il apparaît déjà que *MyBEM*, l'interface FMM de L. Greengard et la nouvelle méthode rapide SCSD semblent prometteurs pour réaliser du calcul intégral haute performance sous *Matlab*.

### 4.3 Applications au calcul de HRTF

La validité des calculs de la librairie intégrale *MyBEM* étant désormais établie, des exemples d'applications plus concrètes sont présentés dans cette dernière section. Pour ne pas s'écarter du but initial, des simulations sur des maillages de têtes et d'oreilles ont été effectués. Néanmoins, par manque de temps, la construction d'une HRTF complète n'a pas encore été réalisée et fera l'objet de travaux futurs, en vue d'une confrontation finale aux mesures réelles.

Dans un premier temps, des maillages de calcul ont été générés en trois étapes (fig. 4.6). Tout d'abord, un maillage initial d'une tête artificielle Neumann KU100 [91] a été réalisé par balayage optique, à l'aide de la Kinect [90] et du kit de développement Microsoft. Ce maillage n'étant pas utilisable en l'état (trous, intersections d'éléments, abérations géométriques, etc.), l'oreille gauche en a été extraite. Ensuite, un maillage paramétrique de "tête" a été créé sous *Matlab*, à partir d'une grille sphérique de Fibonacci, déformée en ovoïde. Pour finir, les deux maillages ont été fusionnés sous *Matlab*, puis corrigés et rééchantillonnés à l'aide d'outils comme MeshLab [92], Remesh [97], VTK [99], etc. Trois maillages de tête ont ainsi été générés, comptant respectivement 4 000, 15 000 et 50 000 sommets, pour des fréquences optimales de 5 000, 10 000 et 20 000 Hz. En complément, l'oreille tirée du maillage initial a été fermée par un demi-ovoïde, pour disposer d'un maillage d'étude de petite taille, fonctionnel sur toute la bande de fréquence audible. Ce dernier maillage ne compte que 6 000 sommets, ce qui autorise l'assemblage BEM exact avec résolution directe.

À partir de ces maillages, une première application de *MyBEM* a consisté à calculer des modes de résonance du pavillon auditif, notamment pour tes-

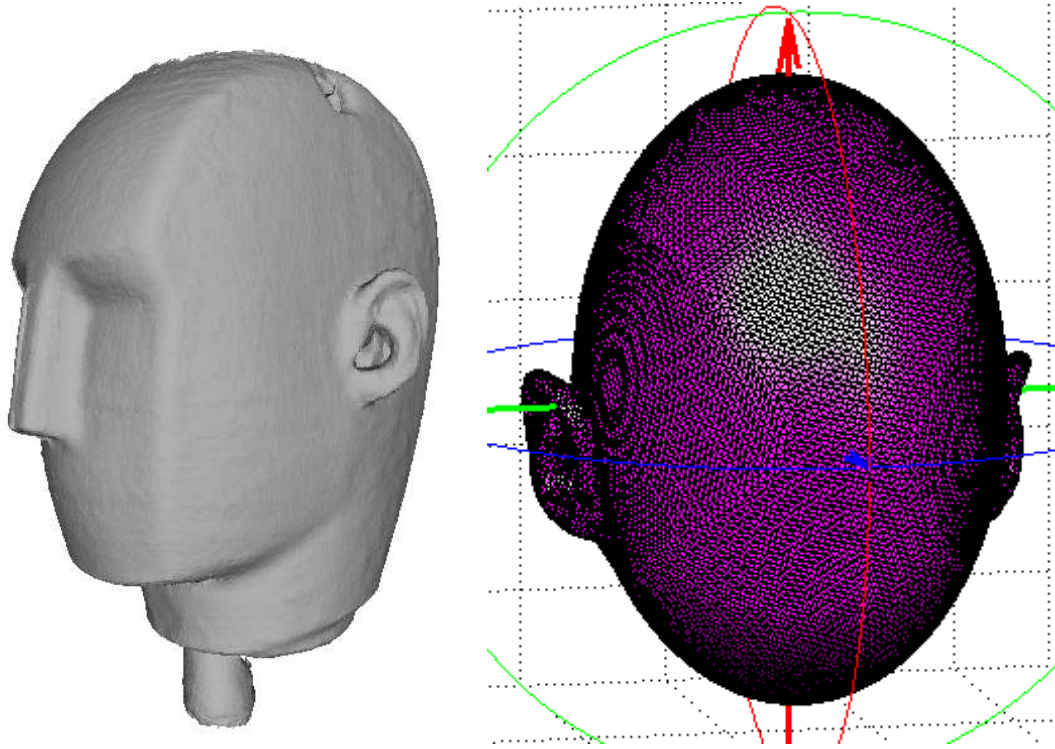


FIGURE 4.6 – Balayage de la tête artificielle Neumann KU100 par mesures optiques Kinect, et création de maillages de calcul. (Haut) Système de mesure de la tête Neumann et tête de Timothée. (Bas, gauche) Maillage obtenu avec le kit de développement Microsoft. (Bas, droite) Maillage final par fusion de l'oreille gauche sur un ovoïde.

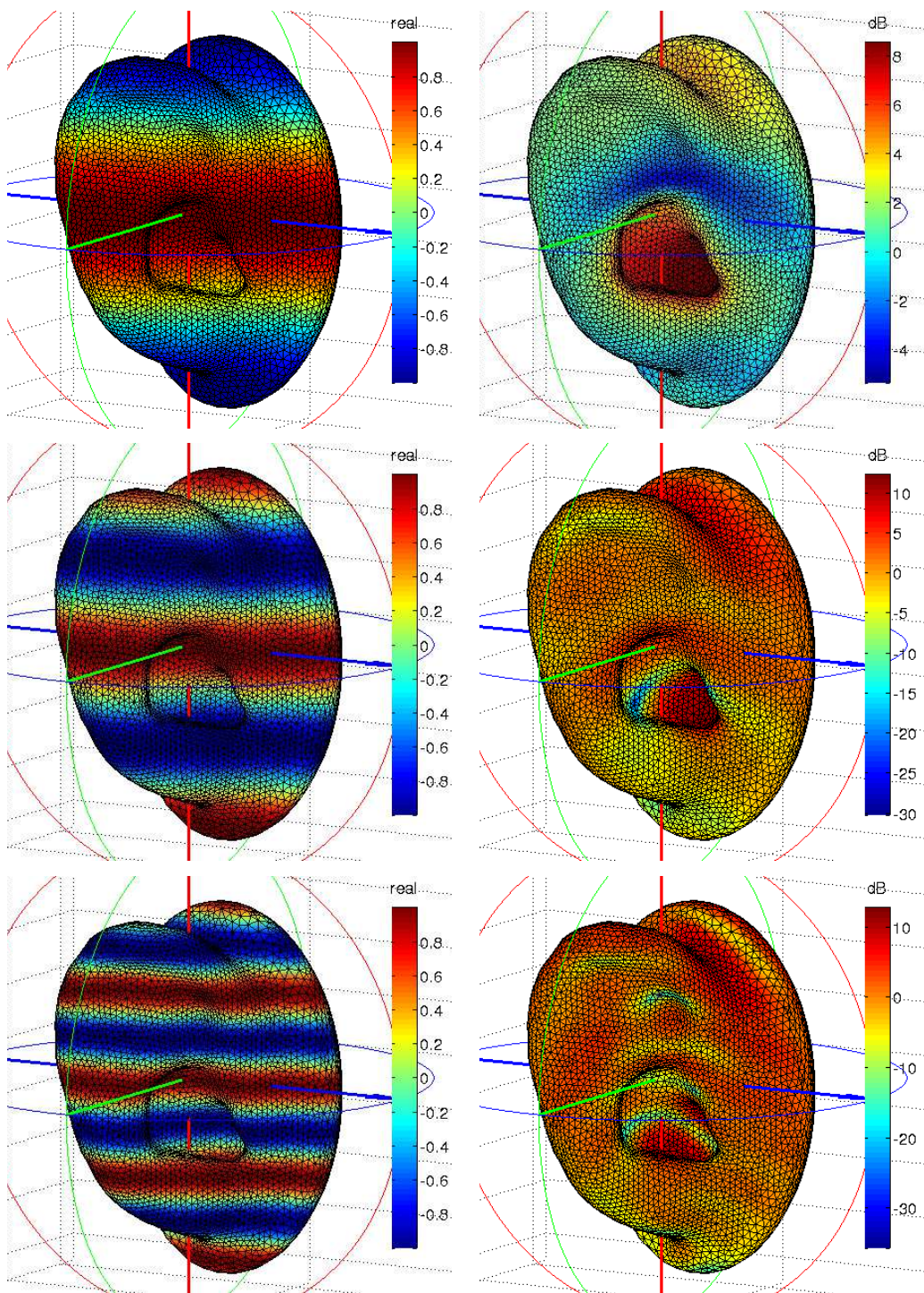


FIGURE 4.7 – (Gauche) Excitation par onde plane de l'oreille fermée. (Droite) Modes de résonances du pavillon obtenus par BEM. (Haut) 5 000 Hz. (Milieu) 10 000 Hz. (Bas) 20 000 Hz.



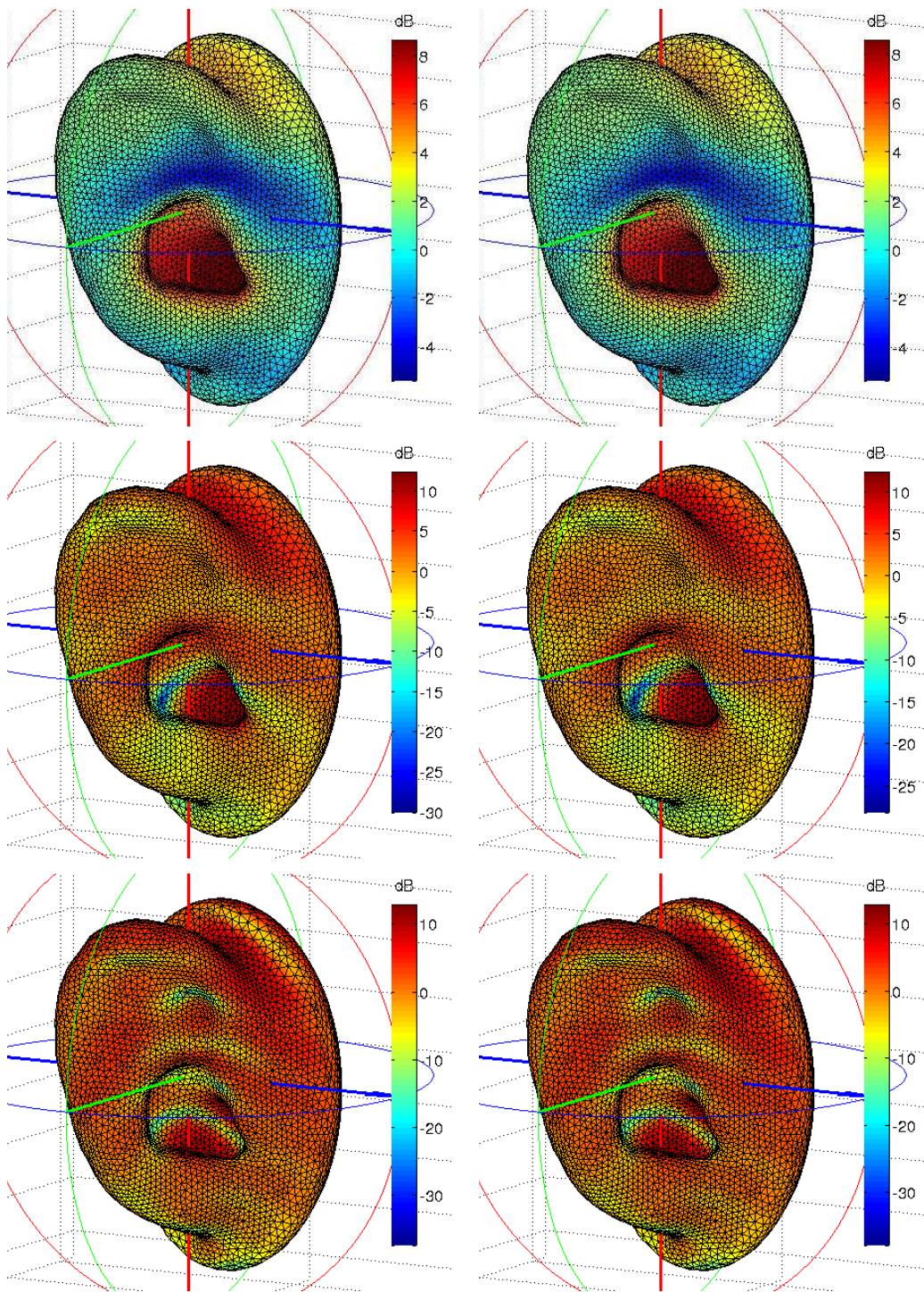


FIGURE 4.8 – (Gauche) Modes de résonances du pavillon obtenus par FMM. (Droite) Modes obtenus par SCSD. (Haut) 5 000 Hz. (Milieu) 10 000 Hz. (Bas) 20 000 Hz.



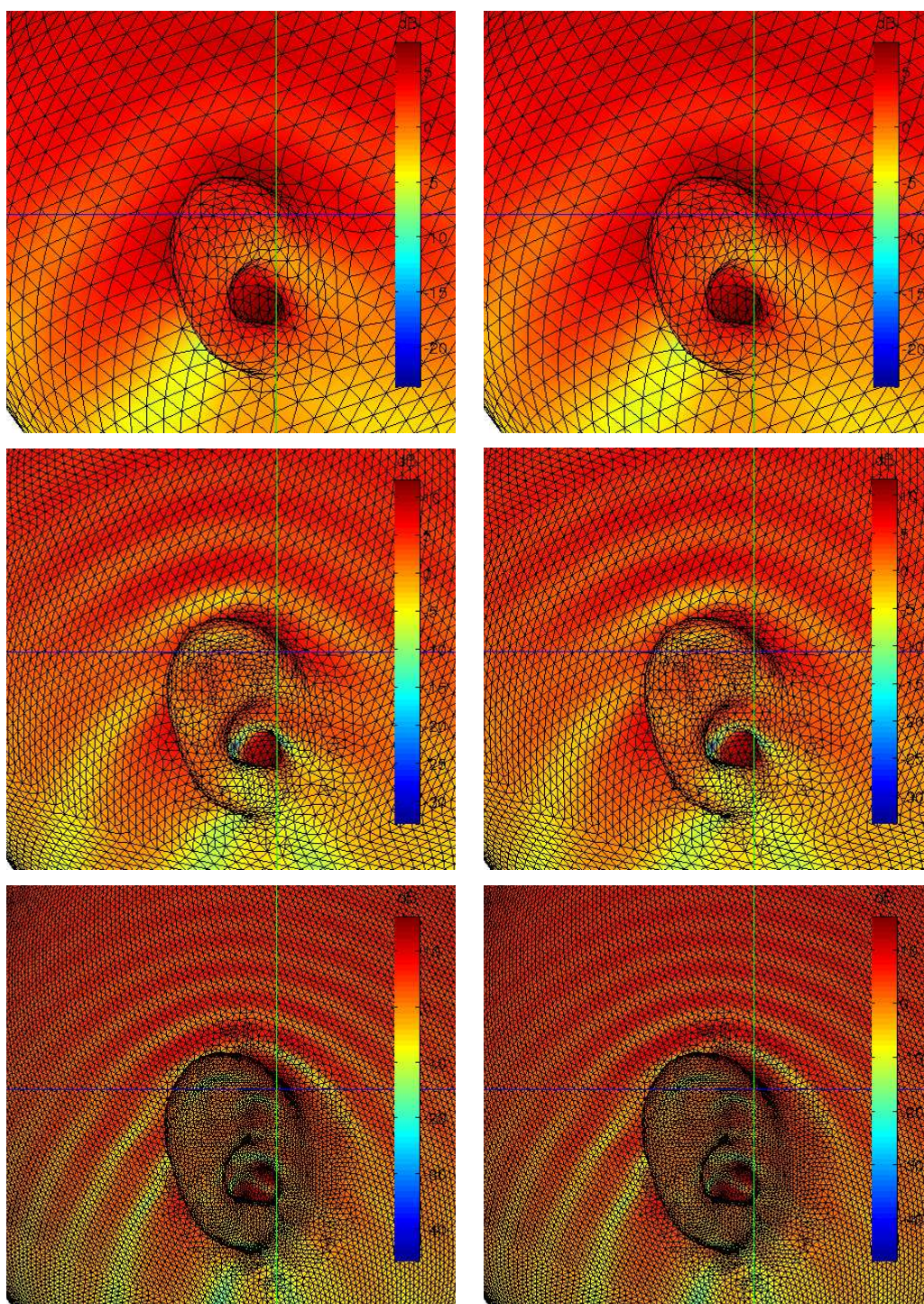


FIGURE 4.9 – Modes de résonance du pavillon avec diffraction par une tête ovoïdale. (Gauche) Assemblage BEM et FMM en bas. (Droite) Assemblage SCSD uniquement. (Haut) 5 000 Hz. (Milieu) 10 000 Hz. (Bas) 20 000 Hz.

ter les trois méthodes d'assemblage (*BEM*, *FMM* et *SCSD*) sur un cas concret difficile. Pour chaque fréquence (5 000, 10 000 et 20 000 Hz), le problème de Neumann homogène a été résolu, modélisant mathématiquement la rigidité de la peau [50]. Les formulations en Brackage-Werner ont été choisies pour assurer l'existence et l'unicité de la solution, préconditionnées par identités de Calderón et décomposition LU, et toutes les précisions ont été fixée à  $10^{-3}$ . Les solutions sont représentées sur les figures 4.7, 4.8 et 4.9, en décibel ( $20 \log |u|$ ), avec les temps suivants :

OREILLE	<i>BEM</i>		<i>FMM</i>			<i>SCSD</i>		
$f$ (Hz)	$tps_P$	$tps_R$	$tps_P$	$tps_R$	$N_{iter}$	$tps_P$	$tps_R$	$N_{iter}$
5 000	58.0	7.10	2.34	41.6	14	5.75	5.80	14
10 000	56.5	7.26	2.42	44.7	15	5.95	5.55	15
20 000	57.2	7.07	2.36	52.4	17	5.73	6.17	17

TÊTE	<i>BEM</i>		<i>FMM</i>			<i>SCSD</i>		
$f$ (Hz)	$tps_P$	$tps_R$	$tps_P$	$tps_R$	$N_{iter}$	$tps_P$	$tps_R$	$N_{iter}$
5 000	19.6	2.45	1.84	17.5	8	5.00	2.49	8
10 000	454	77.8	5.28	101	12	15.4	10.9	12
20 000	-	-	14.8	434	18	46.8	50.2	18

D'une part, pour un cas non trivial (résonances dans plusieurs cavités de tailles diverses), la concordance entre toutes ces figures montre bien que l'ensemble des méthodes d'assemblage implémentées dans *MyBEM* donnent des résultats tout à fait comparables. En considérant la BEM comme la référence (assemblage et résolution exacte), les méthodes approchées semblent donc relativement robustes. D'autre part, la SCSD montre des temps totaux plus rapides que les deux autres méthodes, pour un nombre d'itérations identique aux FMM.

Pour terminer, un embryon de calcul HRTF a été pratiqué sur un maillage de tête réelle (fig. 4.10). Fourni par P. Frey [89], ce maillage présente 15 000 sommets et autorise les calculs jusqu'à 5 000 Hz. La méthode consiste à placer une source ponctuelle au creux du pavillon auditif (étoile cyan, fig. 4.10), puis résoudre le problème de Neumann homogène associé avant de faire rayonner les solutions obtenues sur la sphère unité (e.g. [49], [50], [39]). D'après le principe de réciprocité, les déformations spectrales causées par la morphologie sont alors bien prises en compte [87]. Pour valider la démarche, ce



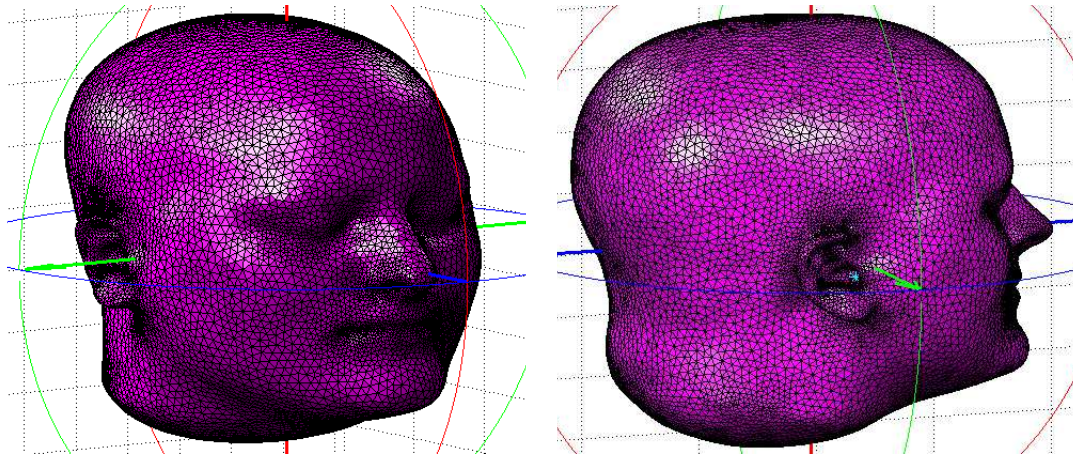


FIGURE 4.10 – Maillage de tête à 15 000 sommets, réalisé par P. Frey. (Gauche) Vue de face. (Droite) Vue de profil, avec une étoile bleue au creux de l'oreille droite, correspondant à la source ponctuelle pour le calcul de HRTF par réciprocité.

problème a aussi été résolu sur un maillage sphérique de rayon  $a = 8.74$  cm [58], avec une source ponctuelle placée à la surface en lieu et place de l'oreille droite. Comme il existe une solution analytique (eq. 1.5, [25]), les résultats numériques peuvent s'y référer. Pour ces derniers calculs, la formulation Brackage-Werner préconditionnée a de nouveau été utilisée et la précision fixée à  $10^{-3}$ . Les figures 4.11 et 4.12 représentent en décibel les solutions obtenues par BEM, FMM et SCSD, à 1 mètre de distance et 5 000 Hz. Les temps de calcul sont résumés dans le tableau suivant :

Méthode	SPHÈRE			TÊTE		
	$tps_P$	$tps_R$	$N_{iter}$	$tps_P$	$tps_R$	$N_{iter}$
<i>BEM</i>	29.9	4.38	-	805	70.1	-
<i>FMM</i>	1.28	18.4	6	8.24	85.6	11
<i>SCSD</i>	2.18	2.52	6	22.1	9.85	11

Tout d'abord, il apparaît que les rayonnements de la méthode exacte et des méthodes approchées sont bien concordants dans le cas sphérique, et ces résultats semblent coïncider avec le modèle de Duda (fig. 1.18). Néanmoins, il existe quelques écarts entre les méthodes approchées et la méthode exacte, visibles sur la tête réelle pour les gains relativement faibles (variations des échelles de couleurs). Ceci peut s'expliquer par la finesse de ce problème, à

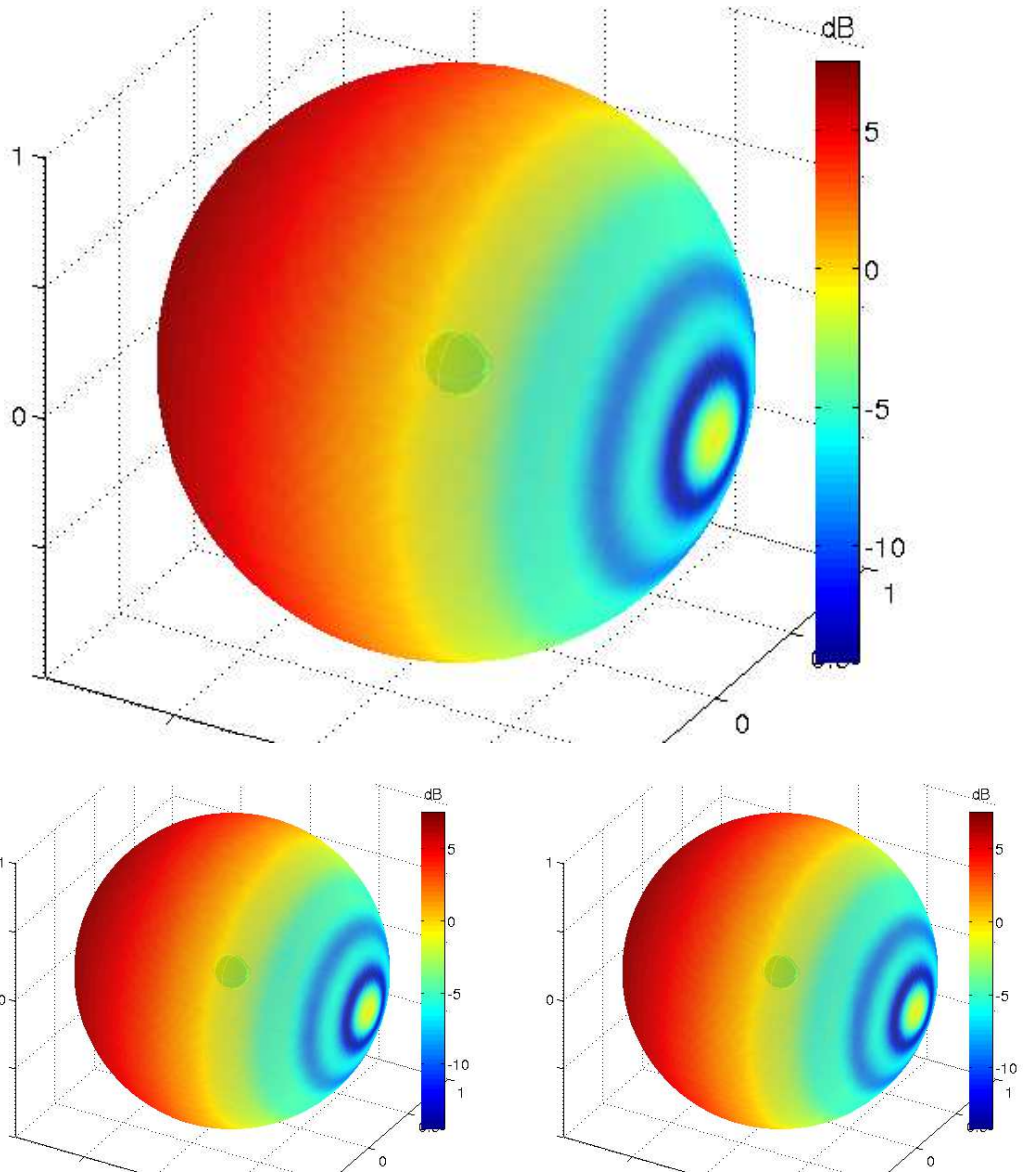


FIGURE 4.11 – HRTF sphérique du modèle de Duda de rayon 8.74 cm, calculée par *MyBEM* à 5 000 Hz, représentation en décibel sur la sphère unité. (Haut) Assemblage BEM. (Bas, gauche) Assemblage FMM. (Bas, droite) Assemblage SCSD.



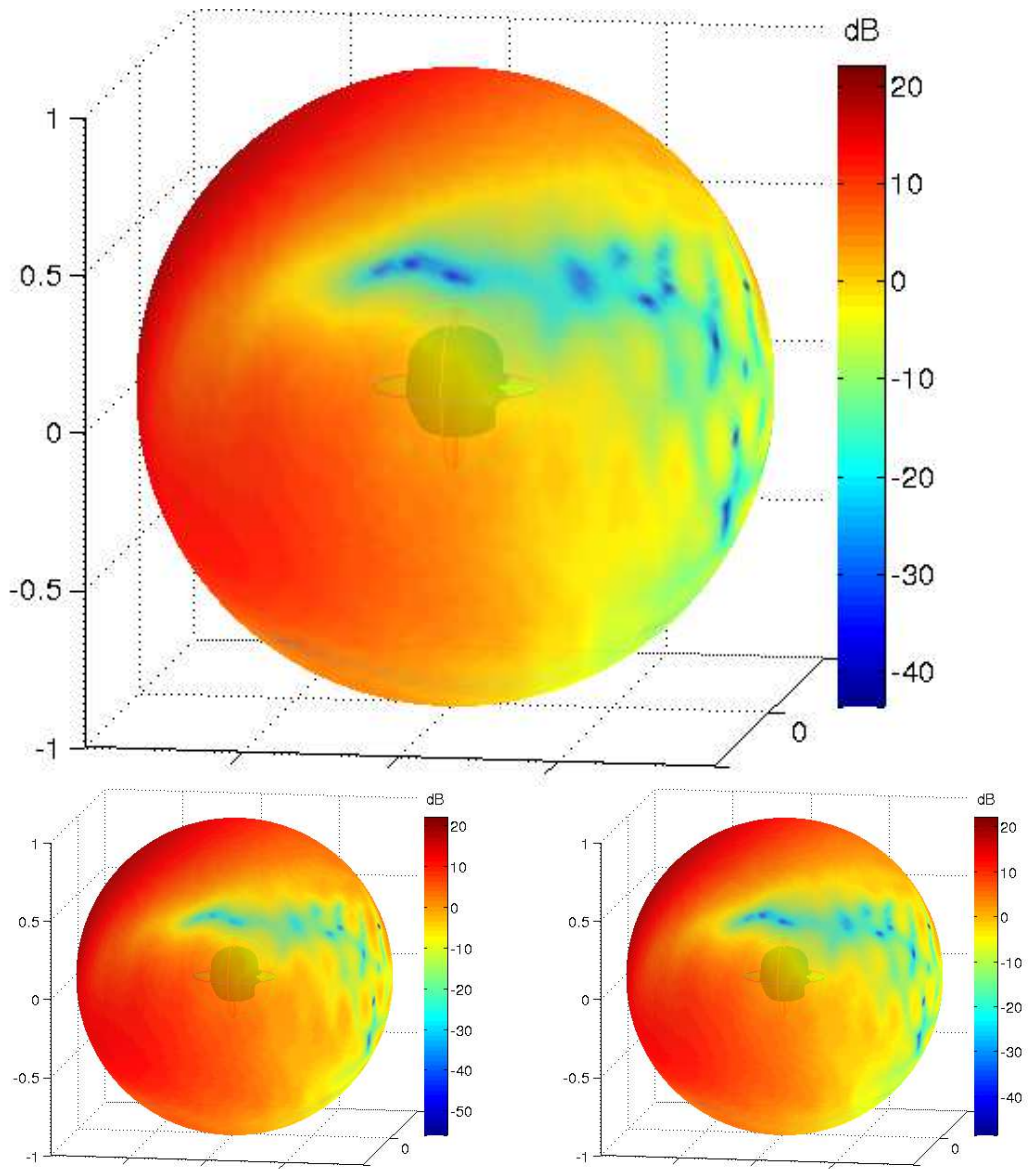


FIGURE 4.12 – HRTF du maillage de P. Frey calculée par *MyBEM* à 5 000 Hz, représentation en décibel sur la sphère unité. (Haut) Assemblage BEM. (Bas, gauche) Assemblage FMM. (Bas, droite) Assemblage SCSD.

savoir le rayonnement en champ proche d'une source ponctuelle dans une cavité, où des différences minimales peuvent générer des perturbations conséquentes. Mais vu l'ordre de grandeur relatif de ces écarts, il est possible qu'ils soient inaudibles.

Aussi, ces calculs montrent que *MyBEM* est prêt pour la génération numérique de HRTF par méthodes intégrales, que ce soit en BEM, FMM ou SCSD. Pour générer une HRTF complète, il ne reste désormais plus qu'à boucler sur les fréquences, en raffinant éventuellement le maillage de calcul.



# Conclusion

Pour conclure, l'ensemble des travaux présenté dans ce manuscrit offre des perspectives réellement prometteuses. D'une part, la Décomposition par Modèle Morphologique propose une nouvelle voie pour étudier les HRTF. Au lieu de construire des filtres basés sur des considérations arbitraires, des mesures réelles sont déconvoluées par des fonctions de transferts issues de modèles morphologiques paramétriques, obtenus analytiquement ou par simulation. Le résidu de cette décomposition peut alors être analysé, pour valider la bonne correspondance au modèle considéré. Cette démarche a prouvé son efficacité et de nombreuses applications industrielles en ont découlé (interpolation haute qualité, micro-variations de sources, déaffinement spatial de bases de données, individualisation des HRTF, etc.). D'autre part, la Décomposition Creuse en Sinus Cardinal permet la convolution rapide par un noyau de Green. Initiée par une démarche essentiellement expérimentale, une nouvelle théorie a vu le jour et les premiers tests de performances ont démontré l'efficacité de cette approche.

Des développements logiciels ont toujours accompagné les problèmes rencontrés, pour mieux cerner les idées visibles, comme les subtilités cachées. Cette méthode de travail a engendré la création de prototypes innovants et fonctionnels, directement exploitables par le milieu industriel. Deux bibliothèques indépendantes regroupent l'essentiel de ces codes. D'une part, *PifPaf3D* propose de nombreuses technologies pour la spatialisation sonore en temps réel, comme la synthèse binaurale, la captation-restitution en *High Order Ambisonics*, ou encore la réverbération de salles en trois dimensions. De multiples logiciels créés par la société Digital Media Solutions, à l'initiative de cette thèse CIFRE, en sont issus. D'autre part, *MyBEM* résout les équations intégrales de l'acoustique par éléments finis de frontières, incluant diverses méthodes d'assemblage et de résolution (BEM, FMM et SCSD). Ce code est aujourd'hui capable de traiter des problèmes de l'ordre du million d'inconnues relativement rapidement, avec une très bonne précision.

Ainsi, tous les outils dédiés à l'individualisation numérique de la spatialisation sonore sont réalisés et fonctionnels. Il ne reste désormais plus qu'à

générer des HRTF par équations intégrales pour "écouter" des mathématiques appliquées par synthèse binaurale. En effet, le formalisme de la Décomposition par Modèle Morphologique est particulièrement adapté au couplage entre les mesures réelles et les résultats de simulation numérique.

Par ailleurs, d'autres applications, qui dépassent largement le cadre de cette thèse, sont aussi envisageables pour l'acoustique, comme la simulation numérique architecturale ou la détection sonar. Enfin, d'un point de vue mathématique, nous sommes persuadés que la SCSD a un potentiel qu'il faudra exploiter dans les années à venir. Par exemple, il est fortement envisagé de l'utiliser pour résoudre des problèmes de très grandes tailles par équations intégrales, dans des domaines aussi variés que l'acoustique, la gravitation, l'élasticité linéaire, l'électromagnétisme, la mécanique des fluides, etc.

# Bibliographie

- [1] Acton, F. S. (1990). *Numerical methods that usually work*. Washington, DC : Mathematical Association of America.
- [2] Allen, J. B., & Berkley, D. A. (1979). *Image method for efficiently simulating small-room acoustics*. The Journal of the Acoustical Society of America, 65(4), 943-950.
- [3] Algazi, V. R., Duda, R. O., Thompson, D. M., & Avendano, C. (2001). *The cipic hrtf database*. In Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, 2001 IEEE Workshop on the (pp. 99-102).
- [4] Algazi, V. R., Duda, R. O., Duraiswami, R., Gumerov, N. A., & Tang, Z. (2002). *Approximating the head-related transfer function using simple geometric models of the head and torso*. The Journal of the Acoustical Society of America, 112(5), 2053-2064.
- [5] Alouges, F., Aussal, M. (2014) *The Sparse Cardinal Sine Decomposition and its application for fast numerical convolution*.
- [6] HRTF database from Acoustic Research Institute, [www.kfs.oeaw.ac.at](http://www.kfs.oeaw.ac.at)
- [7] Armelloni, E., Giottoli, C., & Farina, A. (2003, October). *Implementation of real-time partitioned convolution on a DSP board*. In Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, 2003 IEEE Workshop on. (pp. 71-74).
- [8] Aussal, M., Alouges, F., & Katz, B. F. (2012, March). *ITD interpolation and personalization for binaural synthesis using spherical harmonics*. In Audio engineering society UK conference. New York, UK (p. 04).
- [9] Aussal, M., Alouges, F., & Katz, B. (2013, June). *A study of spherical harmonics interpolation for HRTF exchange*. In Proceedings of Meetings on Acoustics (Vol. 19, No. 1, p. 050010). Acoustical Society of America.
- [10] Begault, D. R. (1994). *3-D sound for virtual reality and multimedia* (Vol. 955). Boston etc : AP professional.
- [11] Bertet, S., Daniel, J., & Moreau, S. (2006, May). *3d sound field recording with higher order ambisonics-objective measurements and validation*

- of spherical microphone*. In Audio Engineering Society Convention 120. Audio Engineering Society.
- [12] Begault, D. R., Wenzel, E. M., & Anderson, M. R. (2001). *Direct comparison of the impact of head tracking, reverberation, and individualized head-related transfer functions on the spatial perception of a virtual speech source*. Journal of the Audio Engineering Society, 49(10), 904-916.
- [13] Bensoam, J. (2003). *Représentation intégrale appliquée à la synthèse sonore par modélisation physique* (Doctoral dissertation, PhD thesis, Université du Maine).
- [14] Blauert, J. (1994). *La technologie binaurale : bases scientifiques et domaines d'application génériques*. Le Journal de Physique IV, 4 (C5-11).
- [15] Blauert, J. (1997). *Spatial hearing*.
- [16] Bonnet, M. (1999). *Boundary integral equation methods for solids and fluids*. Meccanica, 34(4), 301-302.
- [17] Cheng, C. I., & Wakefield, G. H. (1999, September). *Introduction to head-related transfer functions (HRTFs) : Representations of HRTFs in time, frequency, and space*. In Audio Engineering Society Convention 107. Audio Engineering Society.
- [18] Chaillat, S., & Bonnet, M. (2014). *A new Fast Multipole formulation for the elastodynamic half-space Green's tensor*. Journal of Computational Physics, 258, 787-808.
- [19] Craven, P. G., & Gerzon, M. A. (1977). U.S. Patent No. 4,042,779. Washington, DC : U.S. Patent and Trademark Office.
- [20] Daniel, J. (2000). *Représentation de champs acoustiques, application à la transmission et à la reproduction de scènes sonores complexes dans un contexte multimédia* (Doctoral dissertation, Ph. D. Thesis, University of Paris VI, France).
- [21] Daniel, J., Moreau, S., & Nicol, R. (2003, March). *Further investigations of high-order ambisonics and wavefield synthesis for holophonic sound imaging*. In Audio Engineering Society Convention 114. Audio Engineering Society.
- [22] Darbas, M., Darrigrand, E., & Lafranche, Y. (2013). *Combining analytic preconditioner and fast multipole method for the 3-D Helmholtz equation*. Journal of Computational Physics, 236, 289-316.
- [23] Durufle, M. (2006). *Intégration numérique et éléments finis d'ordre élevé appliqués aux équations de Maxwell en régime harmonique* (Doctoral dissertation, ENSTA ParisTech).

- [24] Dutt, A., & Rokhlin, V. (1993). *Fast Fourier transforms for nonequispaced data*. SIAM Journal on Scientific computing, 14(6), 1368-1393.
- [25] Duda, R. O., & Martens, W. L. (1998). *Range dependence of the response of a spherical head model*. The Journal of the Acoustical Society of America, 104(5), 3048-3058.
- [26] Duda, R. O., Avendano, C., & Algazi, V. R. (1999, March). *An adaptable ellipsoidal head model for the interaural time difference*. In Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1999. Proceedings., 1999 IEEE International Conference on (Vol. 2, pp. 965-968).
- [27] Duraiswaini, R., Zotkin, D. N., & Gumerov, N. A. (2004, May). *Interpolation and range extrapolation of HRTFs [head related transfer functions]*. In Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2004. Proceedings. (ICASSP'04). IEEE International Conference on (Vol. 4, pp. iv-45).
- [28] Evans, M. J., Angus, J. A., & Tew, A. I. (1998). *Analyzing head-related transfer function measurements using surface spherical harmonics*. The Journal of the Acoustical Society of America, 104(4), 2400-2411.
- [29] Farina, A. (2000, February). *Simultaneous measurement of impulse response and distortion with a swept-sine technique*. In Audio Engineering Society Convention 108. Audio Engineering Society.
- [30] Fiala, P., Huijssen, J., Pluymers, B., Hallez, R., & Desmet, W. (2010, September). *Fast Multipole BEM modeling of head related transfer functions of a dummy head and torso*. In ISMA 2010 Conference, Leuven, Belgium.
- [31] Fischer, M., Gauger, U., & Gaul, L. (2004). *A multipole Galerkin boundary element method for acoustics*. Engineering analysis with boundary elements, 28(2), 155-162.
- [32] Foster, S. (1986, April). *Impulse response measurement using Golay codes*. In Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP'86. (Vol. 11, pp. 929-932).
- [33] Gerzon, M. A. (1985). *Ambisonics in multichannel broadcasting and video*. Journal of the Audio Engineering Society, 33(11), 859-871.
- [34] Greengard, L., & Rokhlin, V. (1987). *A fast algorithm for particle simulations*. Journal of computational physics, 73(2), 325-348.
- [35] Greengard, L. (1988). *The rapid evaluation of potential fields in particle systems*. MIT press.
- [36] Greengard, L., & Lee, J. Y. (2004). *Accelerating the nonuniform fast Fourier transform*. SIAM review, 46(3), 443-454.



- [37] Gumerov, N. A., Duraiswami, R., & Tang, Z. (2002, May). *Numerical study of the influence of the torso on the HRTF*. In Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), 2002 IEEE International Conference on (Vol. 2, pp. II-1965).
- [38] Gumerov, N. A., & Duraiswami, R. (2005). *Fast multipole methods for the Helmholtz equation in three dimensions*. Elsevier.
- [39] Gumerov, N. A., O'Donovan, A. E., Duraiswami, R., & Zotkin, D. N. (2010). *Computation of the head-related transfer function via the fast multipole accelerated boundary element method and its spherical harmonic representation*. The Journal of the Acoustical Society of America, 127(1), 370-386.
- [40] M.A. Hamdi, *An integral equation variational formulation for the resolution of the Helmholtz equation including mixed boundary conditions*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Paris. 192 (1981) 17–20
- [41] Hannay, J. H., & Nye, J. F. (2004). *Fibonacci numerical integration on a sphere*. Journal of Physics A : Mathematical and General, 37 (48), 11591.
- [42] Hamasaki, K., Hiyama, K., & Okumura, R. (2005, May). *The 22.2 multichannel sound system and its application*. In Audio Engineering Society Convention 118. Audio Engineering Society.
- [43] Hackbusch, W. (2009). *Hierarchische Matrizen. Algorithmen und Analysis* Springer-Verlag, Berlin.
- [44] Hamming, R. (2012). *Numerical methods for scientists and engineers*. Courier Dover Publications.
- [45] Hartung, K., Braasch, J., & Sterbing, S. J. (1999, March). *Comparison of different methods for the interpolation of head-related transfer functions*. In Audio Engineering Society Conference : 16th International Conference : Spatial Sound Reproduction. Audio Engineering Society.
- [46] Hesse, K., Sloan, I. H., & Womersley, R. S. (2010). *Numerical integration on the sphere*. In Handbook of Geomathematics (pp. 1185-1219). Springer Berlin Heidelberg.
- [47] Hill, P. A., Nelson, P. A., Kirkeby, O., & Hamada, H. (2000). *Resolution of front-back confusion in virtual acoustic imaging systems*. The Journal of the Acoustical Society of America, 108(6), 2901-2910.
- [48] Jot, J. M. (1997, September). *Efficient models for reverberation and distance rendering in computer music and virtual audio reality*. In Proc. 1997 International Computer Music Conference.
- [49] Kahana, Y. (2000). *Numerical modelling of the head-related transfer function* (Doctoral dissertation, University of Southampton).

- [50] Katz, B. F. (2001). *Boundary element method calculation of individual head-related transfer function. I. Rigid model calculation.* The Journal of the Acoustical Society of America, 110(5), 2440-2448.
- [51] Kahana, Y., & Nelson, P. A. (2006). *Numerical modelling of the spatial acoustic response of the human pinna.* Journal of Sound and Vibration, 292 (1), 148-178.
- [52] Kahana, Y., & Nelson, P. A. (2007). *Boundary element simulations of the transfer function of human heads and baffled pinnae using accurate geometric models.* Journal of sound and vibration, 300(3), 552-579.
- [53] K-V. Nguyen, T. Carpentier, M. Noisternig, O. Warusfel, *Calculation of the head related transfer function in the proximity region using spherical harmonics decomposition : comparison with measurements and evaluation.* Proc. of the 2nd International Symposium on Ambisonics and Spherical Acoustics - Paris, 2010.
- [54] Kechroud, R., Soulaïmani, A., Saad, Y., & Gowda, S. (2004). *Preconditioning techniques for the solution of the Helmholtz equation by the finite element method.* Mathematics and Computers in Simulation, 65(4), 303-321.
- [55] Kirkup, S. (1998). *The boundary element method in acoustics* (Vol. 129). Heptonstall : Integrated sound software.
- [56] Kreuzer, W., Majdak, P., & Chen, Z. (2009). *Fast multipole boundary element method to calculate head-related transfer functions for a wide frequency range.* The Journal of the Acoustical Society of America, 126(3), 1280-1290.
- [57] Larcher, V., & Jot, J. M. (1997, April). *Techniques d'interpolation de filtres audio-numériques, Application a la reproduction spatiale des sons sur écouteurs.* In Proc. CFA : Congrès Français d'Acoustique.
- [58] Larcher, V. (2001). *Techniques de spatialisation des sons pour la réalité virtuelle* (Doctoral dissertation).
- [59] Laborie, A., Bruno, R., & Montoya, S. (2003, March). *A new comprehensive approach of surround sound recording.* In Audio Engineering Society Convention 114. Audio Engineering Society.
- [60] Lebedev, V. I., & Laikov, D. N. (1999). *A quadrature formula for the sphere of the 131st algebraic order of accuracy.* In Doklady. Mathematics (Vol. 59, No. 3, pp. 477-481). MAIK Nauka/Interperiodica.
- [61] Lee, J. Y., & Greengard, L. (2005). *The type 3 nonuniform FFT and its applications.* Journal of Computational Physics, 206(1), 1-5.

- [62] HRTF database from listen project, [www.recherche.ircam.fr/equipes/salles/listen](http://www.recherche.ircam.fr/equipes/salles/listen)
- [63] Lokki, T., & Pätynen, J. (2011). *Lateral reflections are favorable in concert halls due to binaural loudness*. The Journal of the Acoustical Society of America, 130(5), EL345-EL351.
- [64] Majdak, P., Balazs, P., & Laback, B. (2007). *Multiple exponential sweep method for fast measurement of head-related transfer functions*. Journal of the Audio Engineering Society, 55(7/8), 623-637.
- [65] Majdak, P., Iwaya, Y., Carpentier, T., Nicol, R., Parmentier, M., Roginska, A., ... & Noisternig, M. (2013, May). *Spatially Oriented Format for Acoustics : A Data Exchange Format Representing Head-Related Transfer Functions*. In Audio Engineering Society Convention 134. Audio Engineering Society.
- [66] Messonnier, J. C., & Moraud, A. (2011, May). *Auditory Distance Perception : Criteria and Listening Room*. In Audio Engineering Society Convention 130. Audio Engineering Society.
- [67] Middlebrooks, J. C. (1999). *Individual differences in external-ear transfer functions reduced by scaling in frequency*. The Journal of the Acoustical Society of America, 106(3), 1480-1492.
- [68] Møller, H. (1992). *Fundamentals of binaural technology*. Applied acoustics, 36(3), 171-218.
- [69] J.C Nédélec, *Acoustics ans Electromagnetic equations. Integral representations for harmonic problems*. Applied Mathematics Science, 144, Springer Verlag, New-York (2001).
- [70] Nicol, R. (1999). *Restitution sonore spatialisée sur une zone étendue : application à la téléprésence*. PhD these, Université Du Maine, France.
- [71] Nicol, R., & Emerit, M. (1999, March). *3D-sound reproduction over an extensive listening area : A hybrid method derived from holophony and ambisonic*. In Audio Engineering Society Conference : 16th International Conference : Spatial Sound Reproduction. Audio Engineering Society.
- [72] Otani, M., & Ise, S. (2003). *A fast calculation method of the head-related transfer functions for multiple source points based on the boundary element method*. Acoustical Science and Technology, 24(5), 259-266.
- [73] Pulkki, V. (1997). *Virtual sound source positioning using vector base amplitude panning*. Journal of the Audio Engineering Society, 45(6), 456-466.
- [74] Rayleigh, L. (1907). XII. *On our perception of sound direction*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 13(74), 214-232.

- [75] Romblom, D., & Cook, B. (2008, October). *Near-field compensation for HRTF processing*. In Audio Engineering Society Convention 125. Audio Engineering Society.
- [76] Saad, Y., & Schultz, M. H. (1986). *GMRES : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems*. SIAM Journal on scientific and statistical computing, 7(3), 856-869.
- [77] Salles, N. (2013). *Calcul des singularités dans les méthodes d'équations intégrales variationnelles* (Doctoral dissertation, Université Paris Sud-Paris XI).
- [78] Shaw, E. A. G., & Teranishi, R. (1968). *Sound Pressure Generated in an External-Ear Replica and Real Human Ears by a Nearby Point Source*. The Journal of the Acoustical Society of America, 44(1), 240-249.
- [79] Steinbach, O., & Wendland, W. L. (1998). *The construction of some efficient preconditioners in the boundary element method*. Advances in Computational Mathematics, 9(1-2), 191-216.
- [80] Stan, G. B., Embrechts, J. J., & Archambeau, D. (2002). *Comparison of different impulse response measurement techniques*. Journal of the Audio Engineering Society, 50(4), 249-262.
- [81] Takemoto, H., Mokhtari, P., Kato, H., Nishimura, R., & Iida, K. (2010). *A simple pinna model for generating head-related transfer functions in the median plane*. Proc. 20th Int. Congr. Acoust.(ICA'10).
- [82] Terrasse, I., & Abboud, T. (2007). *Modélisation des phénomènes de propagation d'ondes. (Modeling of wave propagation phenomena)*, Ecole Polytechnique.
- [83] Mercier, D. (2002). *Le livre des techniques du son-Tome 1-3*. Dunod.
- [84] Wightman, F. L., & Kistler, D. J. (1999). *Resolution of front-back ambiguity in spatial hearing by listener and source movement*. The Journal of the Acoustical Society of America, 105(5), 2841-2853.
- [85] Woodworth, R. S., & Schlosberg, H. (1962). *Experimental psychology*. Holt, Rinehart and Winston.
- [86] Zotkin, D. N., Hwang, J., Duraiswami, R., & Davis, L. S. (2003, October). *HRTF personalization using anthropometric measurements*. In Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, 2003 IEEE Workshop on. (pp. 157-160).
- [87] Zotkin, D. N., Duraiswami, R., Grassi, E., & Gumerov, N. A. (2006). *Fast head-related transfer function measurement via reciprocity*. The Journal of the Acoustical Society of America, 120(4), 2202-2215.

- [88] Voir <http://www.cims.nyu.edu/cmcl/fmm3dlib/fmm3dlib.html>
- [89] Voir <https://www.ljll.math.upmc.fr/frey>
- [90] Voir <http://www.xbox.com/fr-FR/Kinect>
- [91] Voir <http://www.neumann.com>
- [92] Voir <http://meshlab.sourceforge.net>
- [93] Voir <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/25135-nufft-nfft-usfft>
- [94] Voir <http://web.eecs.umich.edu/fessler/code/index.html>
- [95] Voir <http://www.cims.nyu.edu/cmcl/nufft/nufft.html>
- [96] Voir <http://www-user.tu-chemnitz.de/potts/nfft>
- [97] Voir <http://remesh.sourceforge.net>
- [98] Voir <http://www.physik3.gwdg.de/tstool>
- [99] Voir <http://www.vtk.org>

# The Sparse Cardinal Sine Decomposition and its application for fast numerical convolution

François Alouges · Matthieu Aussal

Received: date / Accepted: date

**Abstract** Fast convolution algorithms on unstructured grids have become a well established subject. Algorithms such as Fast Miltipole Method (FMM), adaptive cross approximation (ACA) or  $\mathcal{H}$ -matrices for instance are, by now, classical and reduce the complexity of the matrix-vector product from  $O(N^2)$  to  $O(N \log N)$  with a broad range of applications in e.g. electrostatics, magnetostatics, acoustics or electromagnetics. In this paper we describe a new algorithm of which we would like to explore the potential. Based on the Non Uniform FFT algorithm, it is at the same time simple, efficient and versatile.

**Keywords** Quadrature · Non Uniform FFT · Fast convolution · Fast Multipole Method

**Mathematics Subject Classification (2000)** 65T50 · 65Z05

## 1 Introduction

In many areas of computational physics appears the problem of solving a PDE via the convolution of a distribution with an explicit Green kernel. This is for instance the case in electrostatics, magnetostatics or gravitation where a Coulombian interaction is used. In order to fix the ideas we set the problem as computing for  $N$  given punctual masses  $(f_k)_{\{1 \leq k \leq N\}}$  located at the points

---

F. Alouges

CMAP - Ecole Polytechnique, Route de Saclay, 91128, Palaiseau Cedex, France.

Tel.: +33-1-69334631

Fax: +33-1-69334646

E-mail: francois.alouges@polytechnique.edu

M. Aussal

CMAP - Ecole Polytechnique, Route de Saclay, 91128, Palaiseau Cedex, France and Digital

Media Solutions, 45 Grande Allée du 12 Février 1934, 77186 Noisiel, France.

E-mail: matthieu.aussal@gmail.com

$(x_k)_{\{1 \leq k \leq N\}}$  in  $\mathbb{R}^3$ , the Coulombian potential at the same points defined by

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, g_k = \sum_{l=1}^N \frac{f_l}{4\pi|x_k - x_l|}. \quad (1)$$

The previous problem is easily solved with the  $O(N^2)$  algorithm by computing straightforwardly the potential generated by each source at each target. However for big values of  $N$  (e.g. a million or a billion), the above formula is too slow to be used. Techniques already exist to speed up this computation, the most famous of which being certainly the FMM (for Fast Multipole Method) developed by Greengard and coauthors (see the seminal book [9] for instance). We hereafter would like to present a different method that is based on a sparse Fourier representation.

## 2 Principle of the method

Introducing the  $N \times N$  matrix  $A$  whose entries are  $A_{kl} = \frac{1}{4\pi|x_k - x_l|}$ , we recast the problem as storing  $A$  and computing the matrix-vector product  $G = AF$ , where  $G = (g_1, \dots, g_N)^t$  and  $F = (f_1, \dots, f_N)^t$ . A fast algorithm is at hand if we are able to write  $A$  as a sum of a small number of rank one matrices<sup>1</sup>

$$A = \sum_n C_n R_n,$$

where  $C_n$  and  $R_n$  are respectively column and row vectors of size  $N$ . Indeed, the matrix vector product is computed in this case as

$$AF = \sum_n C_n R_n F = \sum_n C_n (R_n^t \cdot F), \quad (2)$$

and each term in the sum is computed in  $O(N)$  operations.

Notice that such a decomposition is formally given by writing the Fourier transform of the kernel  $\frac{1}{4\pi|x|}$  in  $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{4\pi|x|}\right) = \frac{1}{|\xi|^2}.$$

Indeed, this enables us to write

$$\frac{1}{4\pi|x-y|} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i(x-y)\cdot\xi}}{|\xi|^2} d\xi,$$

---

<sup>1</sup> This is by the way the basis of the principle of  $\mathcal{H}$ -matrices, see [11].

while coming back to the problem (1), we deduce

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N \frac{1}{4\pi|x_k - x_l|} f_l &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{l=1}^N \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i(x_k - x_l) \cdot \xi}}{|\xi|^2} d\xi \right) f_l \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix_k \cdot \xi} \left( \sum_{j=1}^N \frac{e^{-ix_j \cdot \xi}}{|\xi|^2} f_j \right) d\xi. \end{aligned} \quad (3)$$

This latter formula is exactly under the desired form (2) with

$$C_\xi = \frac{1}{(2\pi)^3} (e^{ix_1 \cdot \xi}, \dots, e^{ix_N \cdot \xi})^t \text{ and } R_\xi = \frac{(e^{-ix_1 \cdot \xi}, \dots, e^{-ix_N \cdot \xi})}{|\xi|^2},$$

except that the finite sum indexed by  $n$  is now replaced by an integral over  $\xi \in \mathbb{R}^3$ . We can thus produce a formula of the desired form if we can derive a quadrature formula that approximates the integral. For efficiency reasons, it is also desirable to have the smallest possible number of terms in this quadrature formula<sup>2</sup>. In order to proceed, we pass in spherical coordinates, and further transform (3) into

$$\begin{aligned} g_k &= \sum_{l=1}^N \frac{1}{4\pi|x_k - x_l|} f_l \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} \left( \int_{\mathbb{S}^2} e^{i\lambda x_k \cdot \xi} \left( \sum_{l=1}^N \frac{e^{-i\lambda x_l \cdot \xi}}{\lambda^2} f_l \right) \lambda^2 d\xi \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} \left( \int_{\mathbb{S}^2} e^{i\lambda x_k \cdot \xi} \left( \sum_{l=1}^N e^{-i\lambda x_l \cdot \xi} f_l \right) d\xi \right) d\lambda. \end{aligned} \quad (4)$$

The basis of our method thus consists in finding numerical quadratures for the integrals in  $\lambda$  and  $\xi$ . This would eventually permit us to approximate the above formula by

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N \frac{1}{4\pi|x_k - x_l|} f_l &\sim \sum_{s=1}^S \omega_s e^{i\lambda_s x_k \cdot \xi_s} \left( \sum_{l=1}^N e^{-i\lambda_s x_l \cdot \xi_s} f_l \right) \\ &= \sum_{s=1}^S \omega_s e^{ix_k \cdot \zeta_s} \left( \sum_{l=1}^N e^{-ix_l \cdot \zeta_s} f_l \right), \end{aligned}$$

having set  $\zeta_s = \lambda_s \xi_s \in \lambda_s \mathbb{S}^2$ . Afterwards, the convolution can be done in two passes :

- Compute  $\eta_s = \sum_{l=1}^N e^{-ix_l \cdot \zeta_s} f_l$  from the  $(f_l)_{1 \leq l \leq N}$  for all  $1 \leq s \leq S$  ;
- Compute  $g_k = \sum_{s=1}^S e^{ix_k \cdot \zeta_s} (\omega_s \eta_s)$  knowing the previously computed  $(\eta_s)_{1 \leq s \leq S}$

<sup>2</sup> Notice that similar ideas are already used in [2] and [8], though in a different context.



Both steps can be realized using a (direct and inverse) type-3 Non Uniform FFT (NUFFT) algorithm [4,15,16]. We will be more explicit on this point later.

Afterall, the method is not surprising and simply relies on the fact that a convolution is a product in Fourier space. The difficulty however stands in the fact that one needs, to make the method of practical use, a good quadrature which is both precise and efficient (i.e. that possesses a small number of points).

It turns out that this is feasible to a very reasonable cost, and at the end gives a quite powerful numerical method that we have called *Sparse Cardinal Sine Decomposition* (SCSD). Maybe the originality of the present approach lies in the fact that, having written the integral in spherical coordinates permits us furthermore to decouple the approximation problem (in  $\lambda$  and  $\xi$ ), and treat them separately. The aim of the paper is to give such a method and estimate its complexity through the following Proposition.

**Proposition 1** *Assume that the original points are uniformly distributed in a ball then the SCSD algorithm has a global complexity which scales as  $O(N \log N)$ . If instead, the points are spread uniformly on a regular surface in  $\mathbb{R}^3$ , then the complexity is  $O(N^{6/5} \log N)$ .*

The paper is divided as follows. Section 3 addresses the problem of finding a good quadrature in  $\lambda$ , by introducing a so-called sparse cardinal sine decomposition. Section 4 explain the spherical quadrature. Actually, a classical Gauss-Legendre quadrature is used whose parameters are thoroughly studied (see [10] for instance). Eventually Section 5 explains how to take into account the close interactions, while Section 6 details how to choose the parameters of the method. Other kernels are treated in Section 7 and numerical results are provided the last Section. In particular, we compare the timings obtained to compute the convolution using either a FMM routine provided by Leslie Greengard on CMCL website [18] or the abovementioned quadrature and NUFFT approach where the (type-3) NUFFT routine is also taken from the same website [17]. (Another implementation, which in particular uses the FFTW package, is also available in the NFFT project of D. Potts [19] but the type 3 NFFT does not yet have a MATLAB interface.)

### 3 The Sparse Cardinal Sine Decomposition

In order to decouple the problem in spherical coordinates we notice that the formula (4) can be rewritten under the form

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N \frac{1}{4\pi|x_k - x_l|} f_l &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} \sum_{l=1}^N \left( \int_{\mathbb{S}^2} e^{i\lambda x_k \cdot \xi} (e^{-i\lambda x_l \cdot \xi} f_l) d\xi \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} \left( \sum_{l=1}^N \text{sinc}(\lambda|x_k - x_l|) f_l \right) d\lambda, \end{aligned}$$

using  $\int_{\mathbb{S}^2} e^{ix \cdot \xi} d\xi = 4\pi \operatorname{sinc}(|x|)$ , for all  $x \in \mathbb{R}^3$ . Here,  $\operatorname{sinc}$  stands for the cardinal sine function

$$\operatorname{sinc}(r) = \frac{\sin(r)}{r}.$$

This simply reflects that

$$\forall r \in \mathbb{R}, \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(\lambda r) d\lambda. \quad (5)$$

As we have pointed out in the preceding section, the first step of the method consists in finding a discrete quadrature rule

$$\frac{1}{4\pi r} \sim \sum_p \alpha_p \operatorname{sinc}(\lambda_p r). \quad (6)$$

This is a decomposition of the Green kernel into a series of dilated sinc functions. Notice that in the case of the Laplace kernel, this decomposition is equivalently rewritten, setting  $\beta_p = \frac{4\pi\alpha_p}{\lambda_p}$ , as

$$1 \sim \sum_p \beta_p \sin(\lambda_p r),$$

and we seek for a formula that should be valid as uniformly as possible in  $r$  and as sparse as possible in  $p$ . An exact formula exists, though containing an infinite number of terms, since for all  $r \in (0, \pi)$ , one has

$$\sum_{p \geq 0} \frac{4}{\pi(2p+1)} \sin((2p+1)r) = 1. \quad (7)$$

Indeed, the preceding formula comes from the decomposition in Fourier series of the  $2\pi$ -periodic square function defined on  $(-\pi, \pi)$  by

$$h(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } r \in (0, \pi), \\ -1 & \text{if } r \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

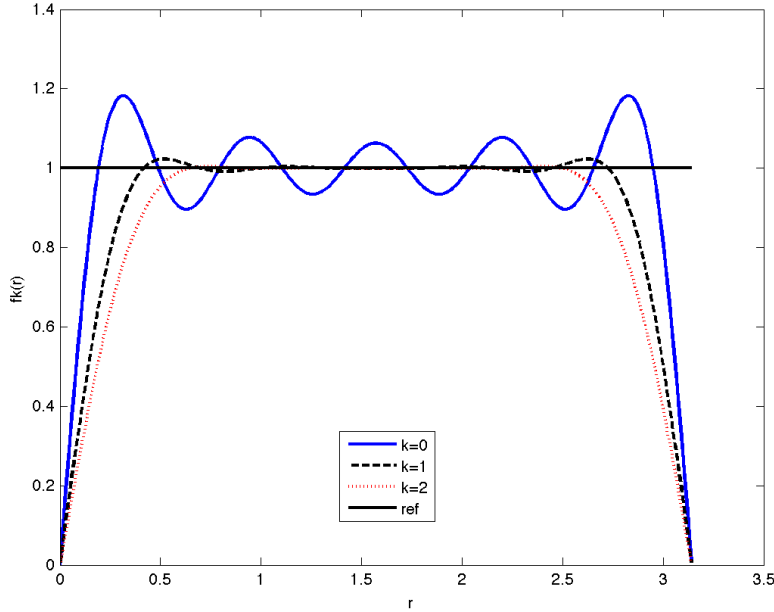
Unfortunately, due to the discontinuity of the square function at 0, the convergence of the series (7) is slow and highly depends on the value of  $r$ . Indeed, the series only converges because of the oscillatory behavior of the sine, which occurs later if  $r$  is small. It is also very well known that, truncating<sup>3</sup> the series (7) leads to a Gibbs phenomenon. Very high oscillations occur near 0 and  $\pi$  while in the center of the interval, the approximation is much better.

Truncating the series does not lead to a good approximation, and it is well known [1, 12, 20] that much better results can be obtained by using the so-called  $\sigma$ -approximation. It consists in replacing the truncated series

$$1 \sim \sum_{p=0}^{P-1} \frac{4}{\pi(2p+1)} \sin((2p+1)r)$$

---

<sup>3</sup> Alternative strategies, e.g. using Padé (see after) approximations lead to very good approximations of the square function (see [21]). They are however difficult to use in our context and unfortunately seem useless.



**Fig. 1** The Gibbs phenomenon obtained with the convergence of the Fourier series of the square function on  $[0, \pi]$ . We give the approximations obtained by truncating the series after its 5th term and regularizing it by a  $\sigma$ -factor for  $k = 0$  (dashed),  $k = 1$  (plain) and  $k = 2$  (dotted). The reference square is indicated as a horizontal line. The Gibbs phenomenon is clearly visible and is very much reduced as  $k$  increases.

by

$$1 \sim \sum_{p=0}^{P-1} \frac{4}{\pi(2p+1)} \left[ \operatorname{sinc} \left( \frac{2p+1}{2P} \pi \right) \right]^k \sin((2p+1)r)$$

where the term  $\operatorname{sinc} \left( \frac{2p+1}{2P} \pi \right)$  is the Lanczos'  $\sigma$ -factor. A power  $k = 1$  is usually used but the  $\sigma$  factor can also be squared or cubed ( $k = 2$  or  $3$ ) in the most extreme cases. As a sake of illustration, we show in Fig. 1 the graphs obtained with  $P = 5$  terms in the sum and  $k = 0, 1, 2$ . It is clear that the approximation is much better and the Gibbs phenomenon is significantly reduced. However, as one can see, the approximation can be very good in the center of the interval and quite bad at the extremities.

In order to avoid the problems at the extremities, we consider the following approximation problem:

For a given  $\rho \in (0, \frac{\pi}{2})$ , and  $P$ , find weights  $(\beta_p)_{\{0 \leq p \leq P-1\}}$  such that the accuracy

$$\varepsilon = \sup_{r \in [\rho, \pi - \rho]} \left| \sum_{p=0}^{P-1} \beta_p \sin((2p+1)r) - 1 \right|$$

is as small as possible.

The treatment of small values for  $r$  is postponed to Section 5. It is expected that in order to maintain a given precision,  $P$  must be increased as  $\rho$  gets smaller. We propose to solve this problem via a least square approximation. This leads to the following natural algorithm

---

**Algorithm 1** (least square approximation)

---

1. Given  $\rho$ , and  $P$ .
  2. Compute  $A = (A_{lp})_{1 \leq l, p \leq P-1}$  and  $b = (b_l)_{1 \leq l \leq P-1}$  defined by
 
$$A_{lp} = \int_{\rho}^{\pi-\rho} \sin((2l+1)r) \sin((2p+1)r) dr, \text{ and}$$

$$b_l = \int_{\rho}^{\pi-\rho} \sin((2l+1)r) dr.$$
  3. Solve
 
$$A\beta = b \text{ where } \beta = (\beta_0, \dots, \beta_{P-1})^t.$$
- 

Of course, both the matrix and the right-hand side can be computed analytically.

We have shown in Fig. 2 the approximation error on the interval  $[\rho, \pi - \rho]$  obtained by the preceding algorithm compared to the ones obtained with the truncated Fourier series smoothed by the Lanczos  $\sigma$ -factor. It is noticeable that the approximation is better with our algorithm especially for small (or high) values of  $r$ , namely close to  $\rho$  or  $\pi - \rho$ . Moreover, the error is more uniformly distributed.

Eventually, one can translate the preceding formula to get an approximation for all  $R \in [R_{\min}, R_{\max}]$  by choosing  $\rho = \delta R_{\min}$ , with  $\delta = \frac{\pi}{R_{\min} + R_{\max}}$  (notice that then  $\pi - \rho = \delta R_{\max}$ ). Setting  $r = \delta R$  in the preceding formula we obtain

$$\varepsilon = \sup_{R \in [R_{\min}, R_{\max}]} \left| \sum_{p=0}^{P-1} \beta_p \sin((2p+1)\delta R) - 1 \right|,$$

and

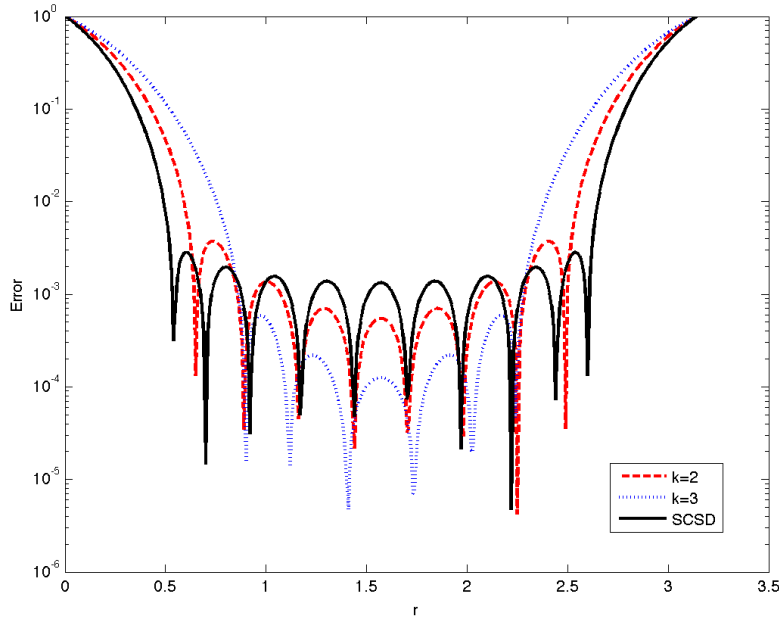
$$\frac{1}{4\pi R} \sim \sum_{p=0}^{P-1} \frac{(2p+1)\delta\beta_p}{4\pi} \operatorname{sinc}((2p+1)\delta R), \quad (8)$$

which is exactly under the form (6) with  $\lambda_p = (2p+1)\delta$ , and  $\alpha_p = \frac{\lambda_p\beta_p}{4\pi}$ .

Remark that the accuracy  $\varepsilon$  of the method only relies on the parameters  $\rho$  and  $P$ , or conversely, for a given accuracy  $\varepsilon$  and  $\rho$ , one can find the smallest value for  $P$ .

**Lemma 1** *Let  $\rho \in (0, \pi/2)$ . Construct for all  $P \in \mathbb{N}$  the least square approximation  $h_P$  of  $h$  with the help of the Algorithm 2. Then, there exists  $P_0 \in \mathbb{N}$  such that for all  $P > P_0$ , one has the estimation*

$$\|h - h_P\|_{L^2([\rho, \pi-\rho])} \leq \frac{1 - \sin(\rho)}{\sqrt{\sin(\rho)P}} \left( \frac{1 - \sin(\rho)}{1 + \sin(\rho)} \right)^{P+1}.$$



**Fig. 2** Comparison of the errors for the approximation of the square function with Lanczos  $\sigma$ -approximation with  $k = 2$  (plain),  $k = 3$  (dashed) and the SCSD (dotted) all with 5 coefficients. In the SCSD, the error is more equilibrated on the whole interval and drops down quicker.

*Proof* The proof is a quite direct consequence of the approximation of the sign function by polynomials. Indeed, let  $\tilde{h}$  be the sign function defined on  $[-1, 1]$  by

$$\tilde{h}(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } r \in (0, 1), \\ -1 & \text{if } r \in (-1, 0). \end{cases}$$

We have obviously  $h(r) = \tilde{h}(\sin(r))$ ,  $\forall r \in \mathbb{R}$ . We remark that the sought approximation  $\sum_{p=0}^{P-1} \beta_p \sin((2p+1)r)$  can be rewritten as  $\mathbb{P}_P(\sin(r))$  where  $\mathbb{P}_P$  is a polynomial function of degree at most  $2P-1$ . Therefore, by a simple change of variable, approximating  $h$  with a truncated Fourier series amounts to approximate  $\tilde{h}$  by a polynomial. It turns out that this problem has been widely studied in the literature, and even dates back to the 19th century [21] where the optimal approximation of  $\tilde{h}$  with a Padé approximant is obtained. Quite strangely, the case of polynomial approximation has been treated much later in [5] (see also the references therein). In particular, it is shown that the best polynomial approximation  $\mathbb{Q}_P$  of degree  $2P-1$  of  $\tilde{h}$  in  $L^\infty$  norm on  $[-1, -a] \cup [a, 1]$  satisfies

$$\|\tilde{h} - \mathbb{Q}_P\|_{L^\infty([-1, -a] \cup [a, 1])} \sim \frac{1-a}{\sqrt{\pi a P}} \left( \frac{1-a}{1+a} \right)^{P+1} \text{ as } P \rightarrow +\infty.$$

We therefore deduce, setting  $a = \sin(\rho)$  that

$$\begin{aligned} \|h(r) - \mathbb{P}_P(\sin(r))\|_{L^2([\rho, \pi-\rho])} &\leq \|h(r) - \mathbb{Q}_P(\sin(r))\|_{L^2([\rho, \pi-\rho])} \\ &\leq \sqrt{(\pi - 2\rho)} \|h(r) - \mathbb{Q}_P(\sin(r))\|_{L^\infty([\rho, \pi-\rho])} \\ &\leq \sqrt{(\pi - 2\rho)} \|\tilde{h}(r) - \mathbb{Q}_P\|_{L^\infty([\sin(\rho), 1])} \\ &\sim \sqrt{1 - \frac{2\rho}{\pi} \frac{1 - \sin(\rho)}{\sqrt{\sin(\rho)P}}} \left( \frac{1 - \sin(\rho)}{1 + \sin(\rho)} \right)^{P+1} \end{aligned}$$

as  $P \rightarrow \infty$ . The result follows.

The preceding result is used in order to fix the degree  $P$  of the approximation, depending on the requested precision  $\varepsilon$  (in  $L^2$  norm) and the lower bound  $\rho$  down to which the approximation is sought. We find that

$$P \sim -\frac{\log(\varepsilon)}{2 \sin(\rho)}, \quad (9)$$

or in the limit  $R_{\min} \ll R_{\max}$ ,

$$P \sim -\frac{\log(\varepsilon) R_{\max}}{2\pi R_{\min}}. \quad (10)$$

We present in Table 1 and Table 2, a comparison of the least square approximation and the truncated Fourier series with the Lanczos'  $\sigma$ -factor with a power  $k$  ranging from 0 to 3. Different values have been chosen for  $\rho$ , and we indicate the smallest number of terms (i.e. the value of  $P$ ) to reach a precision  $\varepsilon = 10^{-3}$  and  $\varepsilon = 10^{-6}$  respectively, for the four methods.

$\rho$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	SCSD	Predicted $P$
0.5	656	25	11	9	7	7
0.1	>1000	121	54	44	37	34
0.01	>1000	>1000	539	432	362	345

**Table 1** Number of terms needed to reach an accuracy  $\varepsilon = 10^{-3}$  on  $[\rho, \pi - \rho]$  for the truncated Fourier series with  $\sigma$ -factor to the power  $k$  and the least square approximation (SCSD). The last column gives the prediction of the number of terms for the sparse approximation SCSD using the formula (9).

It is seen that the least square approximation outperforms the Lanczos'  $\sigma$ -approximation to any order. Moreover, the prediction (9) for the number of terms to keep for a given accuracy is very effective.

#### 4 Spherical quadratures

Once the preceding radial quadrature is known, that is to say we have a discrete approximation

$$1 \sim \sum_{p=0}^{P-1} \beta_p \sin(\lambda_p R)$$

$\rho$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	SCSD	Predicted $P$
0.5	>1000	>1000	106	44	14	14
0.1	>1000	>1000	>1000	188	71	69
0.01	>1000	>1000	>1000	>1000	708	690

**Table 2** Number of terms needed to reach an accuracy  $\varepsilon = 10^{-6}$  on  $[\rho, \pi - \rho]$  for the truncated Fourier series with  $\sigma$ -factor to the power  $k$  and the least square approximation (SCSD). The last column gives the prediction of the number of terms for the sparse approximation SCSD using the formula (9).

valid for  $R \in [R_{\min}, R_{\max}]$  at a precision  $\varepsilon$ , we proceed to the second step, namely the spherical quadrature. Let  $x \in \mathbb{R}^3$  such that  $R = |x| \in [R_{\min}, R_{\max}]$ , we already know that

$$\frac{\sin(\lambda_p |x|)}{\lambda_p |x|} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \exp(i\lambda_p x \cdot \xi) d\xi. \quad (11)$$

We again need a spherical quadrature to produce a discrete version of the above integral.

Spherical quadrature is a long standing subject, and several have been studied in the literature. We refer the reader to the review article [10] for a comprehensive explanation of the state of the art concerning this question. In what follows, we have chosen to use the Gauss-Legendre quadrature which consists in composing unidimensional quadratures (in the vertical axis  $z$  and the polar horizontal angle  $\theta$  on the sphere  $\mathbb{S}^2$ ). Positive weights are assured but there is a clear drawback that the underlying set of points is much denser near the poles than near the equator. Other techniques have therefore been proposed like the Lebedev grids [14], or other cubature rules [7]. Although very tempting because they need a fewer number of quadrature points, both techniques are limited in the degree of precision and much less adaptive than the Gauss-Legendre quadrature.

The Gauss-Legendre quadrature is simple. Given a number  $N$ , it consists in discretizing the set of azimuthal angles with  $2N$  angles

$$\theta_k = k \frac{\pi}{N}, k = 0, \dots, 2N - 1,$$

while the elevation angles  $(\psi_l)_{0 \leq l \leq N-1}$  are such that  $\cos(\psi_l)$  is a zero of the  $N^{\text{th}}$  Legendre polynomial  $L_N$ . The complete set of points used in the quadrature is thus

$$\xi_{kl} = (\cos(\theta_k) \sin(\psi_l), \sin(\theta_k) \sin(\psi_l), \cos(\psi_l)) \text{ with } L_N(\cos(\psi_l)) = 0.$$

for all values  $0 \leq k \leq 2N - 1$  and  $0 \leq l \leq N - 1$ . The corresponding weights  $(\omega_{kl})_{0 \leq k \leq 2N-1, 0 \leq l \leq N-1}$  do not depend on  $k$  (i.e.  $\omega_{kl} = \omega_l$ ), and are such that the one dimensional quadrature formula

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \sim \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\omega_l}{2\pi} f(\cos(\psi_l))$$

is actually the classical one dimensional Gauss-Legendre quadrature which is exact for all  $f$  polynomial of degree less than or equal to  $2N - 1$ . In particular they are all positive. Similarly, Gauss-Legendre quadratures on the sphere are known to integrate exactly all the spherical harmonics  $Y_m$  of degree  $l \leq 2N - 1$ , or equivalently the restriction on the sphere of any function  $g \in \mathcal{P}_{2N-1}$ , where we have denoted by  $\mathcal{P}_J$  the set of polynomial in  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{S}^2$  of degree less than or equal to  $J$ .

Classical theorems (see e.g. [10]) usually express the precision of the quadrature formula in terms of the Sobolev or Hölder regularity of  $f_X$ . they are therefore useless in our context, since the function on which we need an estimation is known and analytic on the sphere. Instead of this, we are more interested in the smallest value that one should choose for  $N$  in the quadrature to obtain a required precision in the formula uniformly in  $X$ .

**Lemma 2** *Let  $X \in \mathbb{R}^3$ , and  $f$  the function*

$$\begin{aligned} f_X : \mathbb{S}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ \xi &\mapsto \exp(iX \cdot \xi). \end{aligned}$$

*Then, we have, using the Gauss-Legendre quadrature, and provided  $|X| < 2N + 1$ ,*

$$\left| \int_{\mathbb{S}^2} f_X(\xi) d\xi - \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega_l f_X(\xi_{kl}) \right| \leq 8\pi \frac{|X|^{2N}}{(2N)!} \frac{2N+1}{2N+1-|X|}.$$

*Proof* For any function  $g$ , we set  $I(g) = \int_{\mathbb{S}^2} g(\xi) d\xi$ , the exact integral and  $Q(g) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{2N-1} \omega_l g(\xi_{kl})$  its approximation. We remark first that since for any  $g \in \mathcal{P}_{2N-1}$ ,  $I(g) = Q(g)$ , we get the estimate

$$\begin{aligned} |I(f_X) - Q(f_X)| &\leq |I(f_X - g) - Q(f_X - g)| \\ &\leq \left( 4\pi + \sum_{l=0}^{N-1} 2N |\omega_l| \right) \|f_X - g\|_\infty \\ &\leq 8\pi \|f_X - g\|_\infty, \forall g \in \mathcal{P}_{2N-1}, \end{aligned}$$

since the weights are all positive and the constant function  $1 \in \mathcal{P}_{2N-1}$  leads to  $Q(1) = 4\pi$ .

Now, expanding  $f_X$  in Taylor series, we have

$$f_X(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iX \cdot \xi)^m}{m!},$$

while taking  $g(\xi) = \sum_{m=0}^{2N-1} \frac{(iX \cdot \xi)^m}{m!}$ , in the preceding estimate, we obtain

$$\begin{aligned} |I(f_X) - Q(f_X)| &\leq 8\pi \|f_X - g\|_\infty \\ &\leq 8\pi \sup_{\xi \in \mathbb{S}^2} \sum_{m=2N}^{\infty} \left| \frac{(iX \cdot \xi)^m}{m!} \right| \\ &\leq 8\pi \frac{|X|^{2N}}{(2N)!} \frac{2N+1}{2N+1-|X|} \end{aligned}$$



if  $2N + 1 > |X|$ .

However a much better estimate can be obtained if  $X$  is vertical, that is to say  $X = (0, 0, |X|)^t$ . Indeed, one has the following lemma.

**Lemma 3** *Let  $\lambda > 0$  and with the preceding notation  $f_{\lambda e_3} : \xi \rightarrow \exp(i\lambda\xi_3)$ . Then one has*

$$|I(f_{\lambda e_3}) - Q(f_{\lambda e_3})| \leq \frac{2 \cdot (2\lambda)^{2N} (N!)^4}{(2N + 1)[(2N)!]^3}.$$

*Proof* First, we remark that the set of Gauss-Legendre quadrature points being symmetric with respect to the origin on the sphere, one can replace  $f_{\lambda e_3}$  with its even part, namely  $g_{\lambda e_3} : \xi \rightarrow \cos(\lambda\xi_3)$ . Then, we notice that  $f_{\lambda e_3}$  is also constant on the sphere along the horizontal circles. The integration along those circles is therefore exact and one thus deduces

$$\begin{aligned} |I(f_{\lambda e_3}) - Q(f_{\lambda e_3})| &= |I(g_{\lambda e_3}) - Q(g_{\lambda e_3})| \\ &= \left| \int_{-1}^1 g_{\lambda e_3}(z) dz - \sum_{l=0}^{N-1} \omega_l g_{\lambda e_3}(\cos(\psi_l)) \right| \end{aligned}$$

which is nothing but the error of the 1D Gauss-Legendre quadrature of  $g_{\lambda e_3}(z)$ . Noticing that  $g_{\lambda e_3}$  is an analytic function in a neighborhood of the segment  $[-1, 1]$  in  $\mathbb{C}$ , a classical result of [13] applies which gives

$$|I(f_{\lambda e_3}) - Q(f_{\lambda e_3})| \leq \frac{2^{(2N+1)}(N!)^4}{(2N + 1)[(2N)!]^3} \|g_{\lambda e_3}^{(2N)}\|_{\infty}$$

which gives the result.

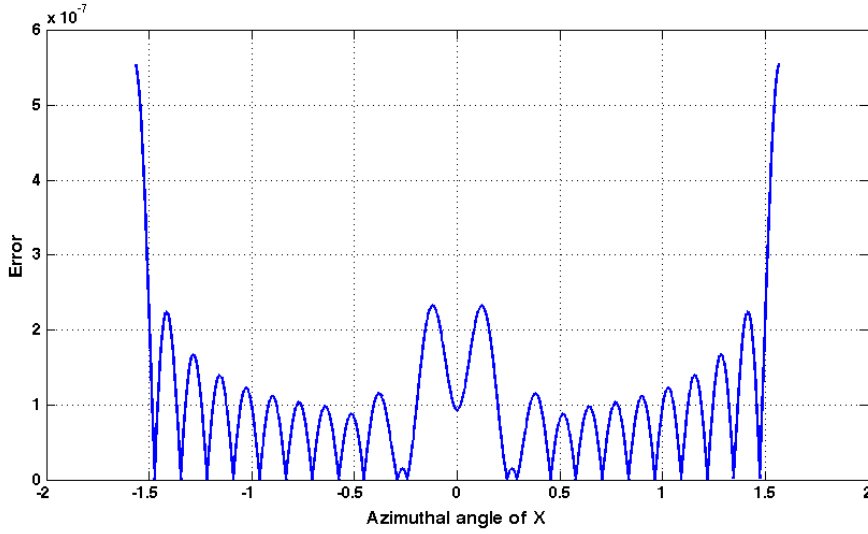
It is not difficult to see that Lemma 3 gives a much better estimation than Lemma 2. However, this estimation only holds for vertical  $X$ . Nevertheless, we have observed that such vectors provide the worst possible error for the Gaussian quadrature among vectors of the same magnitude. As a matter of fact, we report in Fig. 3 the quantity  $|I(f_X) - Q(f_X)|$  for vectors  $X$  of the same magnitude and different azimuthal angles. It is clearly seen that the maximum error is obtained for azimuthal angles  $\pm\pi/2$  i.e. vertical vectors  $X$ . We express this result as the following conjecture.

*Conjecture 1* We have

$$\forall \lambda > 0, \max_{X \in \lambda S^2} |I(f_X) - Q(f_X)| = |I(f_{\lambda e_3}) - Q(f_{\lambda e_3})|$$

Although we have not yet been able to prove this result, we use the result obtained in Lemma 3 in the sequel for the construction of the whole sparse grid.

As before, we use Lemma 3. in order to compute the minimal value for  $N$  needed to achieve a desired accuracy  $\varepsilon'$ . Since, in view of (11), the maximum



**Fig. 3** A typical graph of the error  $|I(f_X) - Q(f_X)|$  for vectors  $X$  of different azimuthal angles and magnitude 10. We have chosen a number of quadrature points of the Gauss-Legendre quadrature  $2N \times N$  with  $N = 12$ .

value for  $|X|$  depends on  $p$  and is equal to  $\lambda_p R_{\max} \leq (2p + 1)\pi$ , the corresponding degree  $N_p$  to which the quadrature should be exact can be estimated in order to satisfy

$$\frac{2((4p + 2)\pi)^{2N} (N!)^4}{(2N + 1)[(2N)!]^3} \leq \varepsilon'_p, \quad (12)$$

which, using Stirling formula leads to

$$N_p \sim \frac{(2p + 1)\pi e}{4} - \frac{1}{2} \log \left( \frac{2\varepsilon'_p}{\sqrt{\pi}} \right). \quad (13)$$

We further rescale the quadrature points by setting  $\zeta_{kl}^p = (2p + 1)\delta\xi_{kl}$  and call the corresponding weights  $\omega_l^p$ . Notice that we have emphasized the dependence in  $p$ , and that the points  $\zeta_{kl}^p$  now discretize the sphere  $\lambda_p \mathbb{S}^p$ . We thus obtain a quadrature formula as

$$\frac{\sin(\lambda_p |x|)}{\lambda_p |x|} \sim \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{N_p-1} \sum_{k=0}^{2N_p-1} \omega_l^p \exp(ix \cdot \zeta_{kl}^p) \quad (14)$$

which, if  $N_p$  satisfies (13), is accurate to within an error  $\varepsilon'_p$  uniformly for all  $x \in [R_{\min}, R_{\max}]$ .

## 5 Close interactions

The formula (8) is only valid for  $|x| \in [R_{\min}, R_{\max}]$ . Therefore, interactions between neighboring points (pairs of points  $x_k$  and  $x_l$  such that  $|x_k - x_l| \leq R_{\min}$

or equivalently such that  $\delta|x_k - x_l| \leq \rho$ ) are wrongly computed, and need a fix. We thus correct the preceding computation with the (sparse) matrix multiplication

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, \tilde{g}_k = \sum_{l=1}^N B_{kl} f_l$$

where

$$B_{kl} = \frac{1}{4\pi|x_k - x_l|} - \sum_{p=0}^{P-1} \alpha_p \sum_{m=0}^{N_p-1} \sum_{n=0}^{2N_p-1} \omega_l^p \exp(i(x_k - x_l) \cdot \zeta_{mn}^p).$$

Fortunately, those interaction are only local and can be computed with a sparse matrix multiplication.

We remark that the methodology presented here is very close to an Ewald summation method. Named after Paul Ewald [6], this method indeed splits the interactions into two parts, one which is local in space (the close interactions in our case) and the long range interactions which are treated in Fourier space. However, this method is usually only used for periodic problems. Our approach insted generalizes it to the free space.

## 6 Summary of the method. Fixing the parameters

We summarize the method in the following algorithms. Algorithm 3 below explains the initialization step which merely consists in finding the global quadrature formula for a given precision and parameters  $R_{\min}$  and  $R_{\max}$ . The Algorithm 4 given after provides the matrix vector product, using the preceding quadrature formula.

**Algorithm 3** (Precomputation)

1. Given  $(x_k)_{1 \leq k \leq N}$ , compute  $R_{\max}$  and choose  $R_{\min}$ .  
Prescribe an accuracy  $\varepsilon$ , and set  $\delta = \frac{\pi}{R_{\min} + R_{\max}}$ .
2. Compute the Sparse Cardinal Sine Decomposition (Algorithm 2),  
using  $\rho = \delta R_{\min}$ , and  $P = -\frac{\log(\varepsilon)R_{\min}}{2R_{\max}}$ .
3. For all  $p \in \{0, \dots, P-1\}$ , compute the Gauss-Legendre  
quadrature  $(\omega_l^p, \zeta_{kl}^p)$ .
4. Compute the sparse matrix  $B_{kl}$  to handle local interactions.

**Algorithm 4** (Matrix vector product)

1. Given a set of values  $(f_j)_{1 \leq j \leq N}$ , associated to the  $(x_j)_{1 \leq j \leq N}$ .
2. Compute  $\eta_{kl}^p = \sum_{j=1}^N \exp(-ix_j \cdot \zeta_{kl}^p) f_j$ .
3. Compute  $g_j^1 = \sum_{p,l,k} \exp(ix_j \cdot \zeta_{kl}^p) \alpha_p \omega_l^p \eta_{kl}^p$ .
4. Compute  $g_j^2 = \sum_{k=1}^N B_{jk} f_k$ .
5. Compute  $g_j = g_j^1 + g_j^2$ .

In order to evaluate the complexity of the method, we remark that steps 2. and 3. of Algorithm 4 can be realized using a Type 3 NUFFT. The complexity of the NUFFT is known to be  $O(M \log M)$ , where  $M = \max(N, N_\zeta)$ , where  $N_\zeta$  is the number of quadrature points in the Fourier quadrature. The remaining of this Section thus consists in estimating  $N_\zeta$  in terms of  $N$  and showing Proposition 1. Before proceeding, we estimate the error that one can make in the spherical quadratures which, when used in conjunction with the SCSD quadrature formula (8), will give a relative error of the order of  $\varepsilon$ , at least for all  $R \in [R_{\min}, R_{\max}]$ . In that aim, we use the following Lemma.

**Lemma 4** Assume  $\varepsilon'_p$  in (12) is chosen as  $\varepsilon'_p = \frac{\varepsilon}{4\pi R_{\max} P |\alpha_p|}$ , where  $P$  is the number of terms of the Sparse Cardinal Sine Decomposition and the conjecture 1 is true, then the global quadrature ensures

$$\sup_{|X| \in [R_{\min}, R_{\max}]} 4\pi |X| \left| \frac{1}{4\pi |X|} - \sum_{p,k,l} \alpha_p \omega_l^p \exp(iX \cdot \zeta_{kl}^p) \right| \leq 2\varepsilon.$$

*Proof* In view of the preceding Lemmas, we have

$$\begin{aligned}
& \left| 1 - 4\pi|X| \sum_{p,k,l} \alpha_p \omega_l^p \exp(iX \cdot \zeta_{kl}^p) \right| \\
& \leq \left| 1 - \sum_p \beta_p \sin(\lambda_p |X|) \right| + 4\pi|X| \sum_p |\alpha_p| \left| \operatorname{sinc}(\lambda_p |X|) - \sum_{kl} \omega_l^p \exp(iX \cdot \zeta_{kl}^p) \right| \\
& \leq \varepsilon + \sum_{p=0}^{P-1} 4\pi R_{\max} |\alpha_p| \varepsilon'_p \\
& \leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

if  $\varepsilon'_p = \frac{\varepsilon}{4\pi R_{\max} P |\alpha_p|}$ . Notice that  $\beta_p \sim \frac{1}{2p+1}$  so that  $\alpha_p = \frac{\lambda_p \beta_p}{4\pi} \sim \frac{\delta}{4\pi}$  and we deduce

$$\varepsilon'_p \sim \frac{\varepsilon}{P\pi} = -\frac{2\varepsilon}{\log(\varepsilon)} \frac{R_{\min}}{R_{\max}}.$$

Eventually, we may furthermore estimate the total number of points  $N_\zeta$  of this quadrature by

$$\begin{aligned}
N_\zeta &= \sum_{p=0}^{P-1} 2N_p^2 \\
&= \sum_{p=0}^{P-1} 2 \left( \frac{(2p+1)\pi e}{4} - \frac{1}{2} \log \left( \frac{2\varepsilon'_p}{\sqrt{\pi}} \right) \right)^2 \\
&\sim \pi^2 e^2 \frac{P^3}{6} \\
&\sim \frac{e^2}{48\pi} \left( -\log(\varepsilon) \frac{R_{\max}}{R_{\min}} \right)^3 \tag{15}
\end{aligned}$$

using (10).

We are now in a position to prove Proposition 1. Notice that the preceding error estimate relies on conjecture 1 but the number of points chosen in the method does not (only the precision does). Therefore the proposition follows from counting the number of short and long range interactions with the preceding methods.

*Proof (of Proposition 1)* Call  $R_{\max}$  the diameter of the ball in which the points  $(x_l)_{1 \leq l \leq N}$  are uniformly distributed. Their density is thus given by

$$\rho = \frac{6}{\pi} \frac{N}{R_{\max}^3}.$$

The number of points contained in a ball of radius  $R_{\min}$  is thus of the order of

$$\frac{4}{3} \pi R_{\min}^3 \rho = 8N \left( \frac{R_{\min}}{R_{\max}} \right)^3,$$

which gives the number of close interactions and correspondingly the number of terms in the correction matrix  $B$  as  $8N^2 \left(\frac{R_{\min}}{R_{\max}}\right)^3$ .

The complexity of the method is thus governed by the number of points in the  $\zeta$  mesh in the Fourier variable, given by formula (15), and the number of close interactions. Setting

$$R_{\min} = R_{\max} \left( \frac{e^2}{48\pi} \frac{(-\log(\varepsilon))^3}{8N^2} \right)^{1/6},$$

we get a total number of close interactions equal to the number of points  $N_\zeta$  in the  $\zeta$  grid

$$8N^2 \left( \frac{R_{\min}}{R_{\max}} \right)^3 = \frac{e^2}{48\pi} \left( -\log(\varepsilon) \frac{R_{\max}}{R_{\min}} \right)^3 = \left( \frac{e^2}{6\pi} \right)^{1/2} (-\log(\varepsilon))^{3/2} N.$$

This clearly indicates that, in that case the complexity of the whole algorithm is  $O(N \log N)$ , the logarithmic term being due to the NUFFT.

When the points are uniformly distributed on a surface in 3D, the number of close interactions becomes  $4N^2 \left(\frac{R_{\min}}{R_{\max}}\right)^2$ , and choosing now

$$R_{\min} = R_{\max} \left( \frac{e^2}{48\pi} \frac{(-\log(\varepsilon))^3}{4N^2} \right)^{1/5},$$

we obtain

$$4N^2 \left( \frac{R_{\min}}{R_{\max}} \right)^2 = \frac{e^2}{48\pi} \left( -\log(\varepsilon) \frac{R_{\max}}{R_{\min}} \right)^3 = \left( \frac{e^2}{6\pi} \right)^{2/5} (-\log(\varepsilon))^{6/5} N^{6/5},$$

which now becomes only very slightly super-linear in  $N$ , giving an overall complexity  $O(N^{6/5} \log(N))$ .

## 7 Generalization to other kernels

The preceding strategy can be of applied to other kernel than the Laplace one. Indeed, we see here that most – if not all – of the classically used kernels can be handled by using the formula given above. We split the following discussion into two parts: the non-oscillatory and the oscillatory Green kernels.

### 7.1 Non-oscillatory Green kernels

We put in this class kernels that are coming from equations as various as the equation of magnetostatics, those for linear elasticity and Stokes equations. Those equations are currently used with a very wide range of applications in particular in solid and fluid mechanics.

Let us start with the Stokes problem, which models a fluid flow at low Reynolds number

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = f & \text{in } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Here,  $f$  is the force density and  $(u, p)$  are respectively the fluid velocity and pressure. The parameter  $\mu$  stands for the viscosity of the fluid. In the free space, this system can be solved by using Fourier variables. Indeed, one has  $\hat{u}(\xi) = \hat{\mathcal{S}}(\xi)\hat{f}(\xi)$  where

$$\hat{\mathcal{S}}(\xi) = \frac{1}{\mu|\xi|^2} \left( \operatorname{Id} - \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2} \right),$$

which going back to real space leads to the following formula for the so-called Stokeslet  $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S}(x) = \frac{1}{8\pi\mu|x|} \left( \operatorname{Id} + \frac{x \otimes x}{|x|^2} \right).$$

As for the magnetostatic case, solving Stokes equations in the free space, namely computing for a given force distribution  $(f_j)_{1 \leq j \leq N}$  at the points  $(x_j)_{1 \leq j \leq N}$  the velocities

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, u_i = \sum_{j=1}^N \mathcal{S}(x_i - x_j) f_j$$

can be done by the following procedure

---

**Algorithm 5**

---

1. Compute  $\hat{f}(\zeta_s)$  using the NUFFT.
  2. Compute  $\frac{1}{8\pi\mu} \left( \operatorname{Id} - \frac{\zeta_s \otimes \zeta_s}{|\zeta_s|^2} \right) \hat{f}(\zeta_s)$  for all  $s$ .
  3. Multiply by the SCSD weights computed from the Laplace formula.
  4. Go back to real space by the (inverse) NUFFT.
- 

Eventually, the case of linear elasticity follows the same procedure. Namely, the equation becomes now

$$-\mu\Delta u - (\mu + \lambda)\nabla \operatorname{div}(u) = f \text{ in } \mathbb{R}^3,$$

where  $\mu$  and  $\lambda$  are the Lamé coefficients of a material,  $u$  is its deformation, and  $f$  the applied force density. As before, taking the Fourier transform of this equation leads to  $\hat{u}(\zeta) = \hat{\mathcal{E}}(\zeta)\hat{f}(\zeta)$  where

$$\hat{\mathcal{E}}(\zeta) = \frac{1}{\mu|\zeta|^2} \left( \operatorname{Id} - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \frac{\zeta \otimes \zeta}{|\zeta|^2} \right),$$

and the modification that one needs to bring to Algorithm 3 is straightforward.

## 7.2 Oscillatory Green kernels

The classical oscillatory Green kernel that people use in practice quite often is

$$G(x) = \frac{\exp(ik|x|)}{4\pi|x|}.$$

It is well-known that  $G$  is the fundamental solution to the Helmholtz equation together with Sommerfeld radiation condition at  $\infty$

$$\begin{cases} \Delta G + k^2 G = \delta_0 & \text{in } \mathbb{R}^3, \\ \frac{\partial G}{\partial R} - ikG = O\left(\frac{1}{R^2}\right) & \text{as } R = |x| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

where  $\delta_0$  stands for the Dirac mass centered at 0. The function  $G$  plays a prominent role in acoustics and electromagnetics when solving the 3D diffraction problem of an object in the free space. In order to use the method detailed in this paper, we need to obtain a sinc decomposition of the radial function  $g(R) = \frac{\exp(ikR)}{4\pi R}$ , or equivalently to write

$$\exp(ikR) \sim \sum_p \gamma_p \sin(\lambda_p R)$$

for weights  $(\gamma_p)_{0 \leq p \leq P-1}$  and scaling factors  $(\lambda_p)_{0 \leq p \leq P-1}$  to be determined. Again, we expect the preceding formula to be valid as uniformly as possible as  $R$  ranges between  $R_{\min}$  and  $R_{\max}$  (values  $R \leq R_{\min}$  correspond to local interactions and are handled as for Coulombian interactions by considering a sparse matrix).

Obviously, the imaginary part of the kernel is already a sine, and we therefore need only to concentrate on the real part, namely the cosine function. Notice that if the  $(\lambda_p)_{0 \leq p \leq P-1}$  were known, we could compute the weights by the same least-square procedure that we explained before.

Strangely, a formula can be obtained from the preceding one. Indeed, let's consider the preceding decomposition in Fourier series of the square function

$$1 \sim \sum_{p=0}^{P-1} \beta_p \sin((2p+1)\delta R).$$

valid for  $R \in [R_{\min}, R_{\max}]$ , with  $\delta = \frac{\pi}{R_{\min} + R_{\max}}$ . We multiply both sides by  $\cos(kR)$  to obtain

$$\cos(kR) \sim \sum_{p=0}^{P-1} \beta_p \sin((2p+1)\delta R) \cos(kR),$$

while using  $\sin((2p+1)\delta R) \cos(kR) = \frac{1}{2} \sin((k+(2p+1)\delta)R) - \frac{1}{2} \sin((k-(2p+1)\delta)R)$ , gives

$$\cos(kR) \sim \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\beta_p}{2} (\sin((k+(2p+1)\delta)R) - \sin((k-(2p+1)\delta)R)),$$



which is under the desired form, and provides us with the right values for the sequence  $(\lambda_p)_p$ . We thus obtain this striking result that any sinc decomposition of the square function (that correspond to Laplace equation) gives instantaneously a suitable approximation for the Helmholtz kernel and consequently a fast method. It is needless to say that this is not the case for the FMM for instance where having written a FMM approximation for the Laplace equation does not give any hint about the writing of a similar method for the Helmholtz equation. To finish, notice that we just obtain twice as many values as before, clustered around the frequency  $k$  of the problem.

## 8 Numerical results

A MATLAB implementation has been developed and compared to the direct call to the FMM Laplace and Helmholtz routines provided on the NYU site. Our method, instead, relies on the NUFFT routine also available on the same website and the sinc decomposition that we have exposed. Besides the NUFFT kernel routine, everything else is written in MATLAB. We give in Table 3 (for the Laplace kernel) and Table 4 (for the Helmholtz kernel) the performances in terms of accuracy and CPU-time obtained by both methods on a set of points ranging from  $N = 10^3$  to  $N = 10^6$ . In both cases, the first column gives the preprocessing time (for computing the integration points and weights), and the second row gives the time for a matrix-vector product (mainly the time spent in the NUFFT). Third column gives the total time that needs to be compared to the time of the FMM routine (fourth column).

$N$	$R_{\min}/R_{\max}$	$T_P$ (s)	$T_{MV}$ SCSD (s)	$T_{MV}$ FMM (s)
$10^3$	1/10	0.23	0.060	0.026
$10^4$	1/22	0.27	0.27	0.31
$10^5$	1/47	2.0	4.4	7.8
$10^6$	1/100	37	28	75

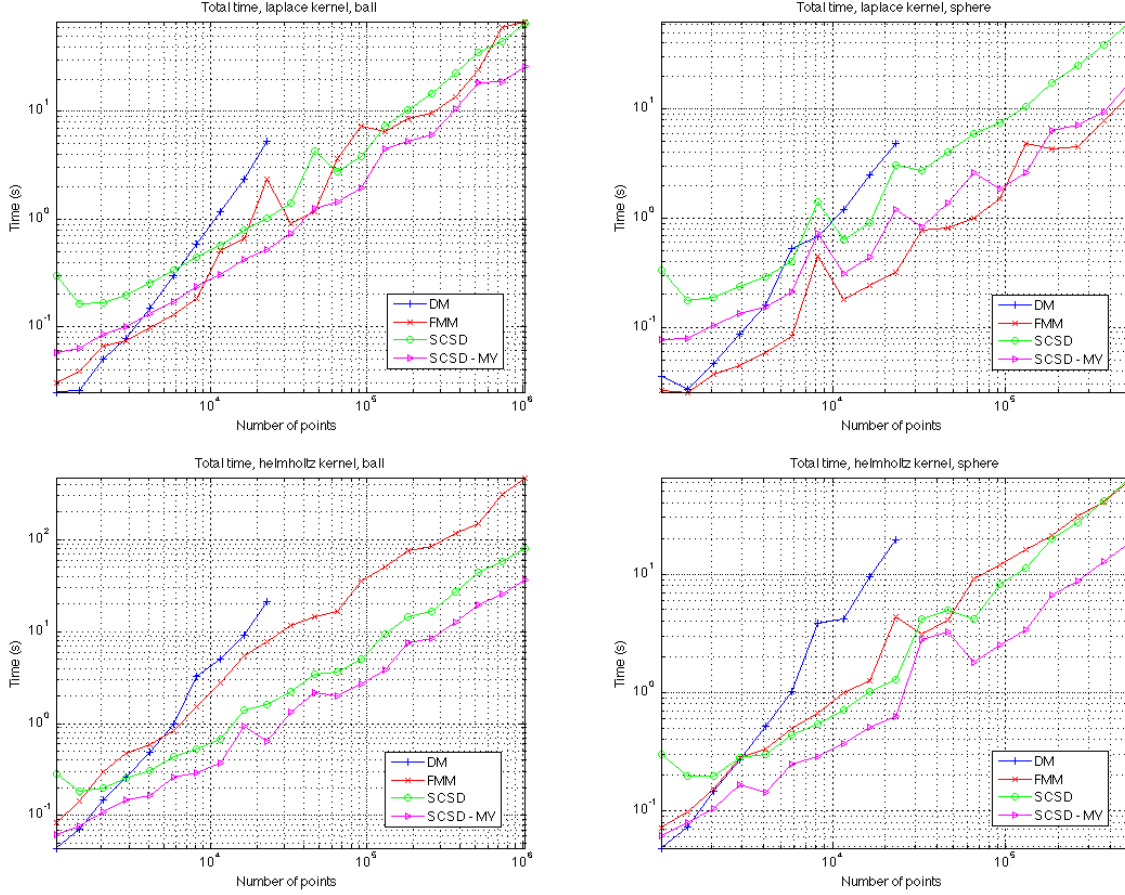
**Table 3** CPU-time comparison between the SCSD and the FMM for the Laplace operator. The first column reports the time for the precomputation. The time for a matrix-vector product with the SCSD is given in the second column and the time for the FMM in the last one. For both methods an error  $\varepsilon = 10^{-3}$  is chosen.

It is noteworthy to say that although the total time of the SCSD algorithm ( $T_P + T_{MV}$ ) is very comparable to the FMM and scale identically. We also present in Fig. 4 curves that show the scalings of the CPU-time for the three methods ( $O(N^2)$  Direct product, FMM, SCSD) in terms of the number of points, for Laplace and Helmholtz kernels.

The computer used for this test is a laptop cadenced to 1.6 GHz and possessing 8 GB of memory. For a more fair comparison, both the FMM and the NUFFT routines have been recompiled to run on a single thread and MATLAB is also run on a single thread. Parallelization strategies of the method will be considered elsewhere.

$N$	$R_{\min}/R_{\max}$	$T_P$ (s)	$T_{MV}$	SCSD (s)	$T_{MV}$	FMM (s)
$10^3$	1/10	0.22		0.060		0.093
$10^4$	1/22	0.29		0.36		1.5
$10^5$	1/47	2.3		2.9		38
$10^6$	1/100	39		36		475

**Table 4** CPU-time comparison between the SCSD and the FMM for the Helmholtz operator. The first column reports the time for the precomputation. The time for a matrix-vector product with the SCSD is given in the second column and the time for the FMM in the last one. For both methods an error  $\varepsilon = 10^{-3}$  is chosen. A wavenumber  $k = 1$  has been chosen here.



**Fig. 4** Total time for a convolution with Laplace (top row) and Helmholtz (bottom row) kernels in 3D using the Direct Method (blue), the FMM (red) and the SCSD (green). Also reported is the time for the SCSD without the time for the precomputations (purple). The same error  $\varepsilon = 10^{-3}$  is used for the FMM and the SCSD and a number of points between  $10^3$  and  $10^6$  is used uniformly distributed in a ball (left) and on a sphere (right). Timings for the FMM and the SCSD are very similar.

## 9 Conclusion

We have presented an original alternative to the FMM for the computation of the coulombian interaction between punctual masses. Although the method is much simpler than the FMM, it turns out to be comparably fast, and only needs a simple NUFFT routine to apply. The heart of the method consists in using a spherical Gaussian quadrature in the Fourier space which is developed in two steps: first a sparse radial quadrature is computed to high accuracy and then spherical quadrature are obtained with simple Gauss-Legendre meshes. The analysis of the complexity of the method shows a very good behavior, comparable to the complexity of the FMM and extensions to classical kernels, in particular oscillatory ones, are given.

## Acknowledgments

Both the FMM and the NUFFT codes have been taken on the CMCL website [3,17,18]. We gratefully thank Leslie Greengard for having provided the community with such tools.

## References

- [1] Acton, F. S.: Numerical Methods That Work. Math. Assoc. Amer., Washington D.C., (1990)
- [2] Chaillat, S. and Bonnet, M.: A new fast multipole formulation for the elastodynamic half-space green's tensor. *J. Comput. Phys.*, 256, 787–808 (2014)
- [3] See <http://www.cims.nyu.edu/cmcl/cmcl.html> .
- [4] Dutt, A. and Rokhlin, V.: Fast fourier transforms for nonequispaced data. *SIAM J. Sci. Comput.* 14 (1993)
- [5] Eremenko, A. and Yuditskii, P.: Uniform approximation of  $\text{sgn}(x)$  by polynomials and entire functions. *J. Anal. Math.* 101, 313–324 (2007)
- [6] Ewald, P.: Dir Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale. In *Ann. Phys.* 369, 253–287 (1921)
- [7] Fliege, J. and Maier, U.: A two-stage approach for computing cubature formulae for the sphere. In *Mathematik 139T*, Universitat Dortmund, Fachbereich Mathematik, Universitat Dortmund, 44221 (1996)
- [8] Greengard, L. and Lin, P.: Spectral approximation of the free-space heat kernel. *Appl. Comput. Harmonic Anal.* 9, 83–97 (2000)
- [9] Greengard, L.: The rapid evaluation of potential fields in particle systems. MIT Press (1988)
- [10] Hesse, K., Sloan I. H. and Womersley, R. S.: Numerical integration on the sphere. In *Handbook of Geomathematics*, 1185–1219. Springer (2010)
- [11] Hackbusch, W.: Hierarchische Matrizen. Springer (2009)
- [12] Hamming, R. W.: Numerical Methods for Scientists and Engineers, 2nd Ed. Dover, New York, (1986)
- [13] Kahaner, D., Moler, C. and Nash, S. Numerical Methods and Software. Prentice-Hall (1989)
- [14] Lebedev, V. I. and Laikov, D. N.: A quadrature formula for the sphere of the 131st algebraic order of accuracy. *Doklady Mathematics* 59(3), 477–481 (1999)
- [15] Lee, J.-Y. and Greengard, L.: Accelerating the nonuniform fast fourier transform. *SIAM Reviews*, 48, 443–454 (2004)

- 
- [16] Lee, J.-Y. and Greengard, L.: The type 3 nonuniform fft and its application. *J. Comput. Phys.*, 206, 1–5 (2005)
- [17] See <http://www.cims.nyu.edu/cmcl/nufft/nufft.html> .
- [18] See <http://www.cims.nyu.edu/cmcl/fmm3dlib/fmm3dlib.html> .
- [19] See <http://www-user.tu-chemnitz.de/~potts/nfft/> .
- [20] Weisstein, E. W.: Lanczos  $\sigma$  factor. Mathworld-A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/LanczosSigmaFactor.html>
- [21] Zolotarev, E. I.: Application of the elliptic functions to questions on functions of least and most deviation from zero. *Bull. de l'Académie de Sciences de St.-Petersbourg*, 24(3) (1878)

# Using a binaural spatialization tool in current sound post-production and broadcast workflow

Pierre Bézard<sup>1</sup>, Matthieu Aussal<sup>2,3</sup>, Matthieu Parmentier<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Louis Lumière School for Cinema, 20 rue Ampère, 93213 La Plaine Saint-Denis CEDEX, France

<sup>2</sup>Centre de Mathématiques Appliquées de l'École Polytechnique, Route de Saclay, 91128 Palaiseau, CEDEX France (UMR7641)

<sup>3</sup>Digital Media Solutions, 45 Grande Allée du 12 février 1934, 77186 Noisiel, France

<sup>4</sup>France Télévisions, Innovations et Développement, 23 rue Leblanc, 75015 Paris, France

Correspondence should be addressed to Pierre Bézard (bezardp@free.fr)

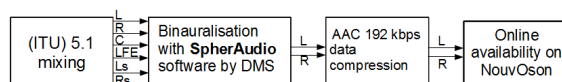
## ABSTRACT

This paper describes an experiment designed to study the differences between 5.1 audio played through loudspeakers and headphones in binaural, and between compressed, and uncompressed audio files. Differences in terms of spatial impression and of overall quality of the sound have been studied. This experiment was made in the context of "NouvOson", a Radio France website launched in March 2013 (<http://nouvoson.radiofrance.fr/>), where audio contents are available online both in native 5.1 and processed in binaural using SpherAudio software by Digital Media Solutions. It also concerned the BILI Project, dealing with BInaural LIstening, involving Radio France, France Televisions and DMS.

Binaural processing theoretically allows the reproduction of 3D sound when listening through headphones; however, this technology still faces issues. These are not only due to the actual limits of research and development, but also to the way we listen to and localize sounds. This experiment has shown that spatial characteristics, as well as timbre of the sound are modified. Besides, no real difference in the listener's perception has been found between binaural uncompressed files and AAC 192 kbps as well as MP3 192 kbps files.

## INTRODUCTION

Binaural technologies are based on the fact that we localise sounds thanks to our audio filters called HRTFs (Head-Related Transfer Functions, [1], [2]), which characterise the way sound is modified by the morphology of the head and the outer ear, depending on the sound source position. This implies that HRTFs are different for each one of us. The basic principle of a binaural synthesis is to convolve a sound by the pair of HRTFs corresponding to any desired position (see Begault [3], pp. 95-100 and Nicol [4], pp. 119-125). When the resulting stereophonic signal is listened to with headphones, the sound should be perceived at this position. As this is only a perceptual effect involving virtual sound sources, there are some limitations, e.g. non-individualization of the HRTFs (see [4], pp. 132-139), spatial interpolation of the HRTFs where no data is available (see [5] and [6]),



**Fig. 1:** The workflow used by Radio France for NouvOson.

and inability to move the head relative to the sound. Indeed, head movements allow us to determine the position of a sound more precisely by ensuring a dynamic combination of filters (see Begault [3], pp. 39-40). For example, Wightman and Kistler have studied the resolution of front-back ambiguity with head movements [7].

These limitations did not prevent binaural tools from being created and used as part of the BiLi project [8]. One of the concrete applications resulting from this consortium is NouvOson, on Radio France website, which consists in mixing audio content (music, radio dramas, documentaries...) in ITU 5.1 with loudspeakers, encoding in binaural with fixed HRTFs, converting to AAC 192 kbps, and uploading both the 5.1 and the binaural version (fig. 1). This workflow leads to some questions, as to the effects of the binauralisation before and after AAC conversion (see also [9] about binaural and bitrate reduction). Therefore, the goal of the experiment described in this paper is to evaluate the appreciation of the result by the listeners, as compared to the original 5.1 file.

## 1. DESCRIPTION OF THE EXPERIMENT

### 1.1. Software used

The whole experiment was conducted using the software SpherAudio. This software computes binaural processing in the frequency domain to spatialise sounds in the 3D space for headphones, at any distance, azimuth and elevation. SpherAudio offers the use of ten different HRTFs that were selected from measurements on real people as part of the Listen project [10]. In this experimental protocol, the HRTF used was "Best matching 2", and a "room" setting was enabled at "order 3" with a 50% level.

### 1.2. Experimental protocol

The experiment took place in a room of 7.40 m by 5.20 m and 2.30 m high. Curtains and blankets had been added so as to obtain a reverberation time inferior to 0.3 s, and to attenuate the influence of proper modes. Under normal conditions the level of background noise was approximately of 34 dBspl. The room had been arranged so that darkness prevented the subjects from seeing the loudspeakers or any other elements in the room. 23 subjects participated in the experiment, one at a time. They were seated behind a small desk, on a chair set at the "sweet spot" of the listening system.

The experiment was divided into three parts: one using loudspeakers, one using headphones, plus a visual test for calibration:

- The workflow used for NouvOson involves ITU 5.1, however the experiment on loudspeakers used ITU 5.0: indeed, low frequencies could compromise the accuracy of the localisation (see

[11]). Moreover, very low frequencies are difficult to play on headphones. Loudspeakers were DMS SR250 loudspeakers (<http://www.dms-cinema.com/fr/products/>), which frequency response had been compensated in the experimental room, by an equalization using a cinema processor.

- For the experiment using headphones, Sennheiser HD650 headphones were used.
- During the visual test, an operator with a laser pointer successively lit five marks in the darkness. The subjects had to indicate the positions of the light. The goal was to have an idea of the ability of the subject to visually transfer on paper his visual and aural perception of his environment, thus allowing an evaluation of the bias caused by this way of answering.

In order to give the same explanations to every subject, a recorded explanation guided them through the whole experiment. During the audio parts, the subjects heard different stimuli containing multiple sounds ("sources"), and were asked to localise precise sources for each stimulus. They wrote on an answer sheet the positions of those sources (fig. 6). They had to draw the zones where they heard the sound, using a pencil, without any other constraint. On the paper was an image of their head as seen from the top of the room, and circles around it to help them evaluate the distance (this answer sheet was drawn after Zacharov [12]). Moreover, they had to globally evaluate the stimulus that they had heard, in terms of:

- Feeling of precision ("*sentiment de précision*"), as evaluated between "badly-defined feeling" and "well-defined feeling";
- Legibility ("*lisibilité*"), as evaluated between "confused" and "distinct";
- Immersion ("*sentiment d'immersion*"), as evaluated between "bad" and "excellent";
- Sound colouring ("*timbre/coloration*"), between "dark" and "brilliant";
- Appreciation ("*appréciation globale*"), between "bad" and "excellent".

They evaluated these criteria on a scale of 0 to 7. The criteria were chosen after the work of Zacharov [12], Berg and Rumsey [13] [14] [15] [16] and Rumsey [17] in order to be easily understood by the subjects, and to evaluate aspects of the sound which could have been impacted by the binauralisation process, or through the bitrate reduction process, thus reducing the listening pleasure of the auditors.

For each subject, the two auditive parts of the experiment were separated by a minimum of 10 hours, in order to enable some rest and limit the effect of memories of the previous part of the experiment (what may be called a "learning effect").

### 1.3. Listening test

The experiment with loudspeakers consisted of three versions of the same stimuli used for the experiment with headphones: version 1 was the reference, version 2 and 3 were "delusion" versions, which were different from version 1 only by the position of the sounds. This aimed at confusing the memory of the subjects, and avoid a "learning effect".

For the experiment with headphones, version 1 of the 5.0 mix was binauralized, and a few treatments added. We then obtained four binaural versions:

- Binaural reference: the 5.0 stimuli had simply been binauralised using SpherAudio Headphones the same way as NouvOson,
- Binaural hidden reference: a copy of the reference, that was played later on during the experiment,
- Binaural AAC 192 kbps: the reference had been compressed into AAC using the same parameters as used for NouvOson,
- binaural MP3 192 kbps: the reference had been compressed into MP3 using the software Audacity (and Lame Encoder), in order to offer a comparison using a widespread codec.

Each version was set pseudo-randomly using a Latin square design: thus we obtained different series, each corresponding to a particular order of the sounds. The subjects undertook the experiment with one series with headphones and another one with loudspeakers.

The subjects could play the sounds over and over as many times as they wanted, using a computer keyboard.

They were also able to change the listening level, but they had no visual clue as to the actual level they were listening at. This was to ensure that they chose a listening level with their own ears, that made them feel comfortable. Moreover, to make sure that the subjects understood which sounds they were expected to localise, the sounds that could be ambiguous were played solo, in the center, before the corresponding stimuli (e.g. the bassoon, the lead guitar, the creaking branch...).

### 1.4. Stimuli

The experiment was made using five stimuli, four of which attempted to represent contents that could be found on NouvOson: a voice, a forest environment, a rock music, a classical music, and a pink noise. As all the detailed work may be found in the original master thesis of the main author (see [18]), this paper will focus especially on the voice stimulus, which proved to be the most representative as to the results:

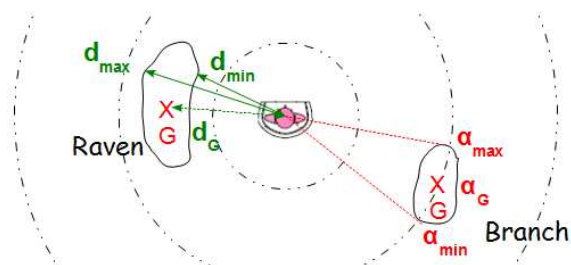
**Voice stimulus** This stimulus consisted in four voices recorded without any environment sound: a young male voice, an elderly male voice, a young female voice, an elderly female voice. The four voices recited a children's poem ("Le hareng saur", by Charles Cros [19]), one after the other, with transitions occurring in the middle of a sentence so that the subject could not anticipate these transitions. The subject had to localise the four voices. The poem was in French, which was a language spoken and understood by all the subjects.

## 2. RESULTS

### 2.1. Representing the results

To represent the results of the experiment, we had to determine distances and angles of the areas drawn by the subjects on their answer sheets (fig.2). Almost all the subjects had represented the areas where they localised the sounds by drawing ellipses, or circles (particular case of ellipses), or points (zero-radius ellipses). We therefore modeled ellipses to represent the subjects' answers.

To make the results clearer, only the centers of gravity of the areas measured for every subjects are represented, for a given stimulus and for a given listening system (fig.3). These centers of gravity are represented on the same diagram as the one used for the answer sheets, except that this diagram is completed with the position of the loudspeakers. In addition to the centers of gravity, the mean



**Fig. 2:** A typical answer sheet: distances and angles were measured for each area drawn by the subjects. G represents the center of gravity of the area.

center of gravity is represented for each sound; it symbolises the mean position where the sound (raven, guitar...) was localised by the subjects. On the same diagram, the variance ellipse is also represented: its half-radius  $R_a$  is proportional to the distance variance for all the centers of gravity, and its half-radius  $R_b$  is proportional to the azimuth variance for all the centers of gravity (see fig.3).

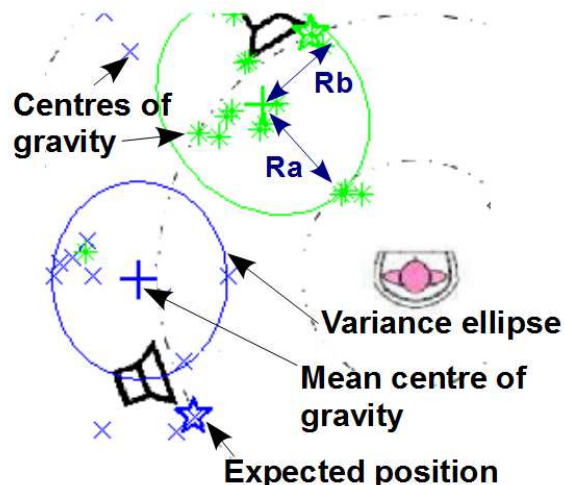
**2.2. Results for the visual test**

Fig.4 shows the results for the visual test. This diagram leads to some observations: first of all, the accuracy of the representation of visual marks on a paper is not constant. It depends on the expected azimuth: the average error is more important for light 1 (-15 degrees of expected azimuth) or light 4 (155 degrees) than for light 2 or 3 (30 and 55), while the stimulus remained the same. The average error lies between 2 (for light 5) and 15 degrees (for light 1). We assume here that the results observed on one side of the subject can be transposed on the other side by symmetry.

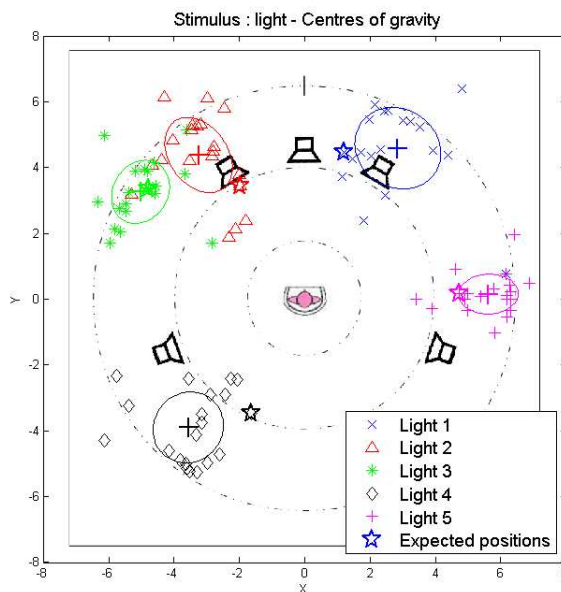
The authors are not yet able to fully explain the reasons of these errors, however, these results introduce what will be called a "drawing error" that shall be taken into account for the analysis of the results for the sound stimuli.

**2.3. Diagrams for the voice**

The five diagrams for the voice stimulus are shown on fig.5. The first image on this figure illustrates the results for the stimulus heard using loudspeakers. Localization seems good, as the average azimuth error remains quite small (between 5 and 15 degrees for sources in front, on the LCR). It seems greater for stimuli located at the back

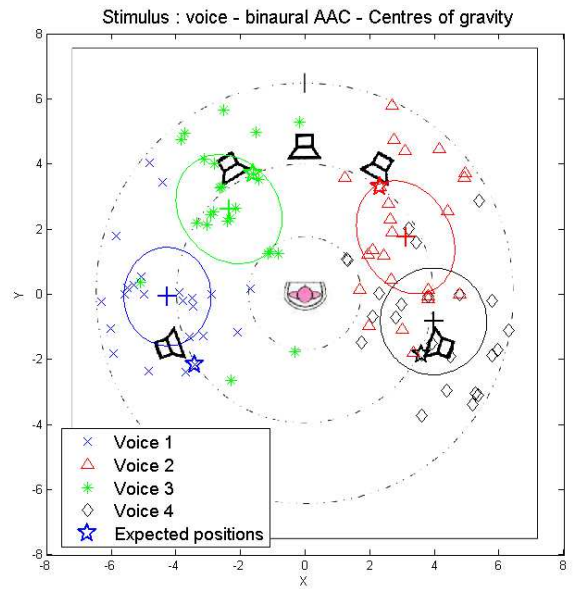
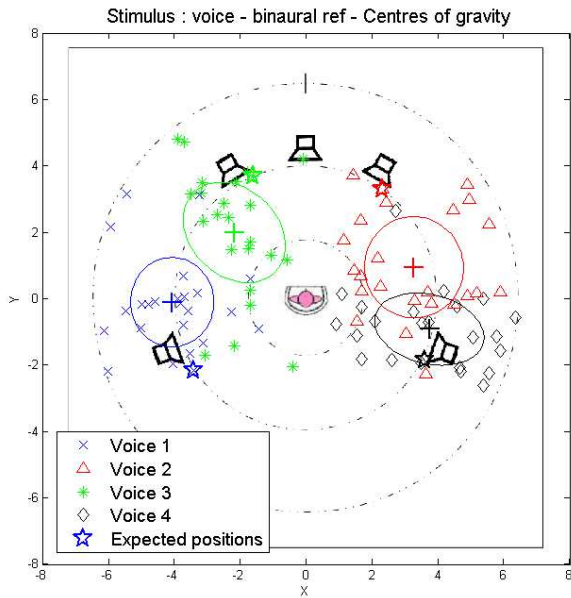
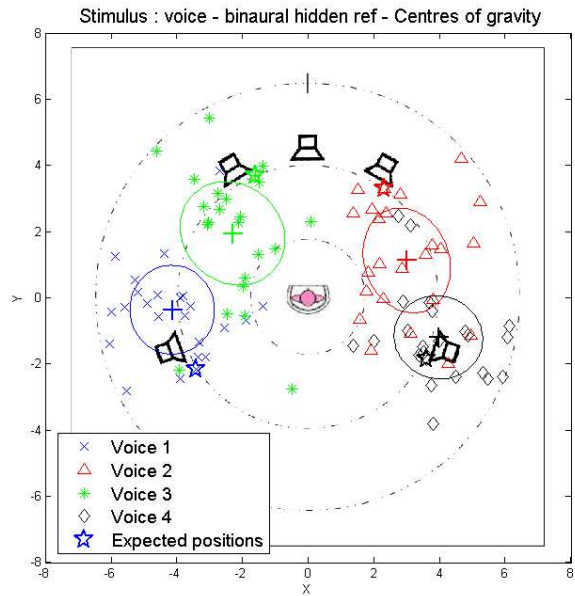
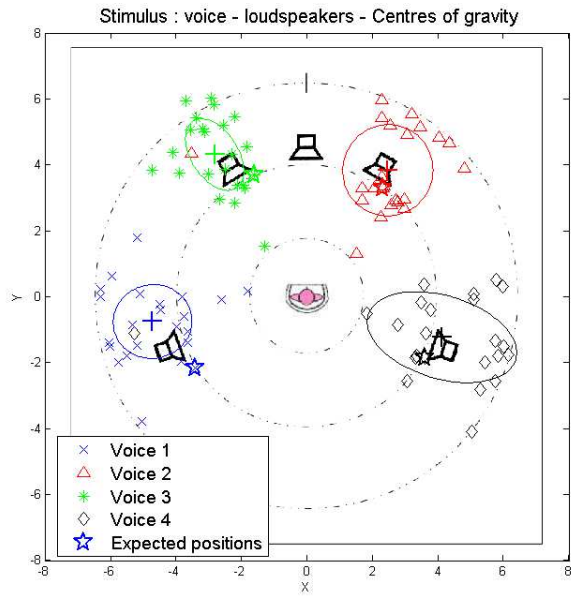


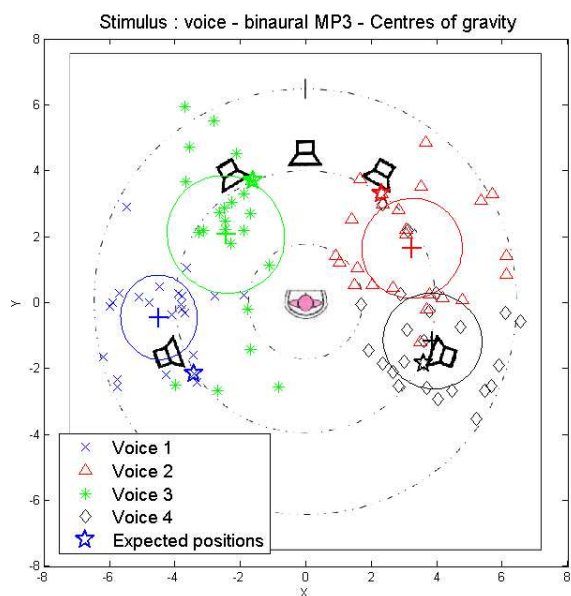
**Fig. 3:** The representation of the results.



**Fig. 4:** Results for the visual test.





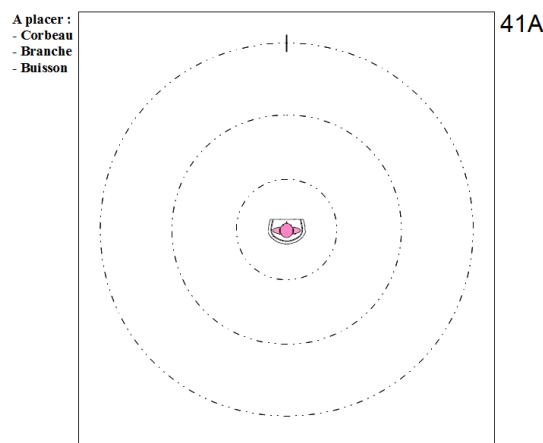


**Fig. 5:** (5 diagrams above) Results for the visual test and for the entire test with the voice.

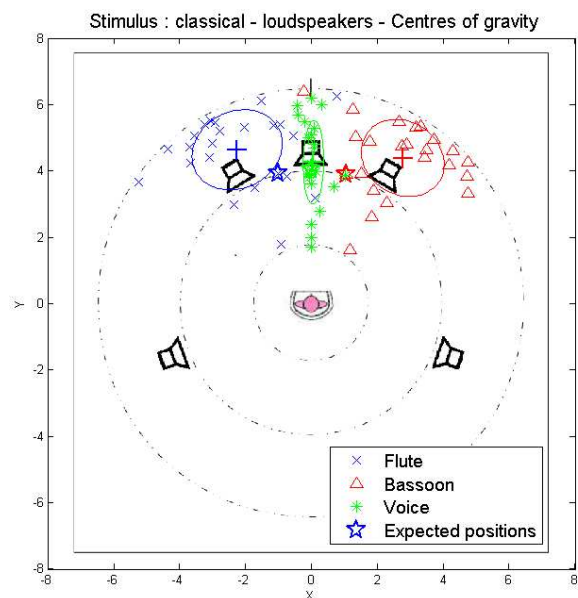
of the subject (up to 42 degrees of error), but the "drawing error" that was revealed by the visual test has to be kept in mind (which would give 15 degrees of average error). The sounds are heard at the average distance of the loudspeakers.

The second diagram and the next one allow a comparison between 5.0 over loudspeakers and binaural. Binauralisation causes a phenomenon of what may be called "crushing": the stereo image is larger in binaural than with loudspeakers, in front and in the back. We shall be cautious around this observation, as a similar "crushing effect" could already be observed in the visual test. Along with this, comes the impression that the sounds appear nearer in binaural than with loudspeakers. The results for the hidden reference show that the accuracy of the results for the binaural sounds is approximately 10 degrees. The measured distances, however, show variations that do not seem to follow any logic. It seems that distances were overall perceived with more coherence and regularity on loudspeakers than in binaural.

The results for the binaural in AAC and in MP3 show differences from the reference, but these differences are between the results for the reference and for the hidden reference. Furthermore, the "drawing error" and the fact



**Fig. 6:** Answer sheet used by the auditors to indicate where they located the sounds. They also had to evaluate the stimulus with the scales, and they could write comments.

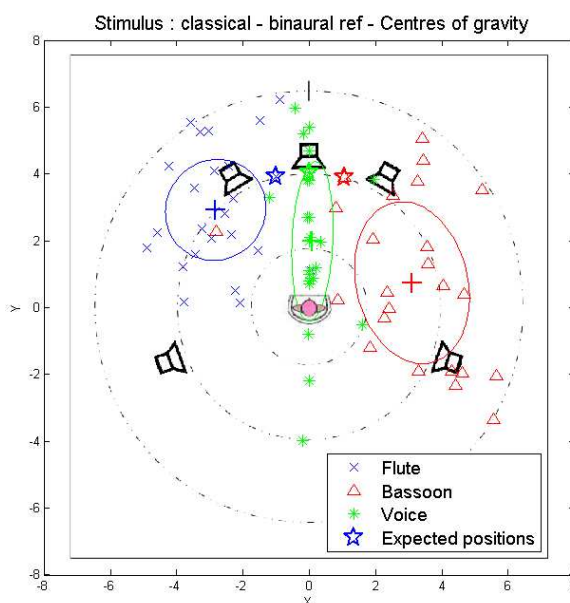


**Fig. 7:** An illustration of the results with loudspeakers. Notice the accuracy of localization for sources at the center (voice).

that the answer sheet itself bears few benchmarks, do not allow a very precise analysis of the results. Therefore, differences between the results in AAC 192kbps, in MP3 192kbps, and for the reference, do not seem significant.

#### 2.4. Results for the other stimuli

The analysis of the results for other stimuli provides more information. When using loudspeakers, when a sound can be expected to be located by the subjects between two loudspeakers, it seems instead to be located near, or at the position of, the nearest loudspeaker (see the flute and the bassoon in fig.7). Figure 7 also shows the great accuracy of localization for the sounds that are located precisely at the center. We also notice a few cases of "inside-the-head" localisation (IHL), which seem to occur only for sounds at the center (fig.8, for the voice). We can also notice that the results seem to depend on the considered stimulus: on fig.8, the flute and the bassoon were expected more or less at the same angle in relation to the center. Yet the bassoon is located much more to the side than the flute, and the variance ellipse is much bigger for the bassoon.



**Fig. 8:** An illustration of the IHL for sources at the center (voice), and of the dependence on the type of stimulus (flute and bassoon).

## 2.5. Results for the scales

We will show here the box plot that was obtained for the voice stimulus. These results are representative of what was observed for all scales. It can be noticed that the results are not always the same for the reference and the hidden reference. The difference may reach 0.5 point, e.g. for the accuracy or immersion criteria. Differences inferior to 0.5 point therefore could hardly be considered significant for our analysis.

Overall the accuracy is considered a little better when using loudspeakers (1 to 1.5 point when compared to any binaural version). Immersion is considered globally as satisfying in binaural as it is with loudspeakers, if not more so (for some stimuli, such as classical music). Legibility tends to be considered a bit less satisfying in binaural than with loudspeakers, but the difference seems hardly significant. Sound coloring seems different in binaural and with loudspeakers: sounds seem to carry more low-frequencies in binaural encoded with SpherAudio. However, this criterium depends on the frequency response of the headphones that were used, compared to the one of the loudspeakers. Differences between the reference and the other binaural versions do not exceed 0.5 point. Finally, appreciation seems to be as good in binaural as it is using loudspeakers. There seems to be no significant differences between the binaural versions.

## 3. CONCLUSION

This experiment showed significant differences in the feelings of the auditors, between a 5.0 mix and its binaural version by SpherAudio, when used with the same workflow as for NouvOson. Some artifacts were noticed in binaural:

- An overestimation of the azimuth of the sources ("crushing"), with cases of front-back confusions,
- In-head localisation for sounds located in the median plane,
- An influence of the considered azimuth,
- An influence of the nature of the stimulus.

The binaural version of the 5.0 mix also seems to show a low-frequency enhancement sensation when compared to a listening through loudspeakers. However, the listening seems as pleasant for the listeners in binaural as it is using loudspeakers (especially in terms of immersion).

When compared to the differences between the binaural reference and the hidden reference, differences between binaural in WAV, in AAC 192 kbps and MP3 192 kbps do not appear to be significant.

The origin of the differences between native 5.0 and binaural is not easy to determine. They can be due to the experimental protocol (such as the choice of the loudspeakers and of the headphones, as well as the type of answer sheet provided), but they may also be due to the limitations linked with the mechanism of auditory perception. Due to the uncertainty of the binaural rendering of a 5.0 sound, the sound engineer and his subjective hearing have a role to play in the binauralisation process of a 5.0 mix.

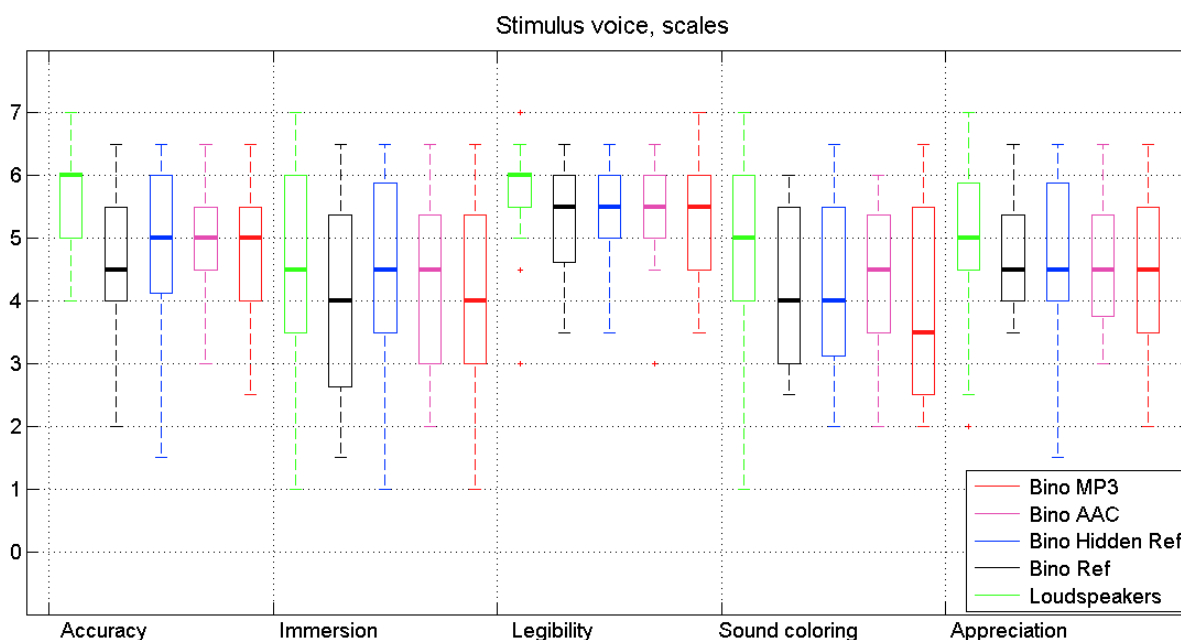
Moreover, the limits of binaural technologies are being pushed back by current progress in research (e.g. head tracking systems: see Pedersen and Jorgensen [20]), and they may not prevent binaural from becoming an efficient way to create full 3D sound experiences reproduced through a simple headset.

## 4. ACKNOWLEDGMENTS

This research was made as part of a thesis made at Louis Lumière school for cinema. It was supported by Digital Media Solutions. The authors wish to thank Hervé Roux, CEO of Digital Media Solutions, The Digital Media Solutions Audio 3D team, Edwige Roncière, Hervé Déjardin and Frédéric Changenet from Radio France, Matthieu Parmentier from the BiLi project, Jean Roucouse from Louis Lumière school for cinema, Brian Katz from the LIMSI-CNRS, and Louise Molière for her help in writing this article.

## 5. REFERENCES

- [1] J. Blauert. *Spatial Hearing (revised edition)*. The MIT Press, 1997.
- [2] C. I. Cheng and G. H. Wakefield. Introduction to Head-Related Transfer Functions (HRTFs): Representations of HRTFs in Time, Frequency, and Space. In *Audio Engineering Society Convention 107*, Audio Engineering Society, 1999.
- [3] D. R. Begault. *3-D Sound for Virtual Reality and Multimedia*. NASA, Ames Research Center, Moffett Field, California, 2000.



**Fig. 9:** Results for the scales, voice stimulus.

- [4] R. Nicol. *Représentation et perception des espaces auditifs virtuels*, Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches. Master's thesis, 2010.
- [5] M. Aussal, F. Alouges, and B. F. G. Katz. HRTF interpolation and ITD personalization for binaural synthesis using spherical harmonics. In *25th AES UK Conference: Spatial Audio in Today's 3D World, York*, 2012.
- [6] M. Aussal, F. Alouges, and B. F. G. Katz. A study of spherical harmonics interpolation for HRTF exchange. *Proceedings of Meetings on Acoustics, Acoustical Society of America*, p. 050010, 2013.
- [7] F. L. Wightman and D. J. Kistler. Resolution of front-back ambiguity in spatial hearing by listener and source movement. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1999 May. vol. 105, no 5, p. 2841-2853.
- [8] BILI project official site. [www.bili-project.org/](http://www.bili-project.org/).
- [9] B. F. G. Katz and F. Prezat. The Effect of Audio Compression Techniques on Binaural Audio Rendering. In *Audio Engineering Society Convention 120*, Audio Engineering Society, 2006.
- [10] Listen project website, Ircam. <http://recherche.ircam.fr/equipes/salles/listen/>, consulté en avril 2013.
- [11] B. Lagnel. Prise de son multicanale et binaurale. In *Meeting of the AES France*, Conference at Radio France, Paris, Audio Engineering Society, 2013.
- [12] N. Zacharov and K. Koivuniemi. Unravelling the perception of spatial sound reproduction: Techniques and experimental design. In *Audio Engineering Society Convention 111*, Audio Engineering Society, 2001.
- [13] J. Berg and F. Rumsey. Identification of perceived spatial attributes of recordings by repertory grid technique and other methods. In *Audio*

*Engineering Society Convention 106*, Audio Engineering Society, 1999.

- [14] J. Berg and F. Rumsey. Spatial attribute identification and scaling by repertory grid technique and other methods. In *Audio Engineering Society Conference: 16th International Conference: Spatial Sound Reproduction*, Audio Engineering Society, 1999.
- [15] J. Berg and F. Rumsey. In search of the spatial dimensions of reproduced sound: Verbal protocol analysis and cluster analysis of scaled verbal descriptors. In *Audio Engineering Society Convention 108*, Audio Engineering Society, 2000.
- [16] J. Berg and F. Rumsey. Correlation between emotive, descriptive and naturalness attributes in subjective data relating to spatial sound reproduction. In *Audio Engineering Society Convention 109*, Audio Engineering Society, 2000.
- [17] F. Rumsey. Subjective assessment of the spatial attributes of reproduced sound. In *Audio Engineering Society Conference: 15th International Conference: Audio, Acoustics and Small Spaces*, Audio Engineering Society, 1998.
- [18] P. Bézard. *L'insertion d'un outil de spatialisation binaurale dans le flux de post-production et de diffusion sonore*. PhD thesis, École Nationale Supérieure Louis Lumière (section Son), June 2013.
- [19] *Poèmes à dire, choisis par Daniel Gélin*. Seghers editions, 2003.
- [20] J. A. Pedersen and T. Jorgensen. Localization Performance of Real and Virtual Sound Sources. In *AM3D A/S AALBORG (DENMARK)*, 2005.



**ICA 2013 Montreal**  
**Montreal, Canada**  
**2 - 7 June 2013**

**Psychological and Physiological Acoustics**  
**Session 1pPPa: Binaural Hearing and Binaural Techniques I**

**1pPPa2. A study of spherical harmonics interpolation for HRTF exchange**

Matthieu Aussal\*, François Alouges and Brian Katz

\*Corresponding author's address: Digital Media Solutions, 45 grande allée du 12 février 1934, Noisiel, 77186, Seine et marne, France, [matthieu.aussal@dms-cinema.com](mailto:matthieu.aussal@dms-cinema.com)

Today, there exists a growing number of publicly available HRTF datasets, with each set often proposing a unique variation on the spatial discretization measurement grid. These various grids, typically determined by the mechanical system employed, result in datasets which are not directly comparable or exploitable. To alleviate the limitation of incompatible grids and assist in the adaptation of measurements performed on one grid to another, facilitating the inter-exchange of HRTF sets, a fixed radius HRTF interpolation method is proposed. The approach is based on a decomposition of the sound field using spherical harmonics, allowing for a global spatial recomposition. A high spatial density HRTF was used as a test case for evaluating the interpolation method, and a series of measures are employed to quantitatively compare the quality of the interpolation as theoretical laws.

Published by the Acoustical Society of America through the American Institute of Physics

## INTRODUCTION

Head-Related Transfers Functions (HRTF) are the main acoustical signature of spatial hearing, characterizing firstly interaural information as Interaural Time Difference (ITD) and Interaural Level Difference (ILD), and secondly spectral deformation undergone by a sound wave as it impinges on the listener. In theory, knowledge of those functions offers the ability to synthesize a natural listening experience over headphones, typically called binaural synthesis. In practice, HRTFs are mainly measured in laboratory conditions and each system often has its own unique set-up. Therefore, to allow definition of a universal exchange format, there is a need for automatic spatial interpolation of those functions.

In this study, interpolation algorithms based on spherical harmonic decomposition are the focus. Well known theoretical principles are first introduced before proposing a method for interpolation validation. Finally, theoretical laws are discussed, in agreement with numerical computation, to predict a domain of effectiveness of this type of interpolation.

### MATHEMATICAL REMINDERS

As the theoretical background for spherical harmonic interpolation is well introduced in many previous studies, we provide here only several simple mathematical reminders. The curious reader may refer to reference articles as [1, 2, 3, 4, 5].

#### Theoretical construction of spherical harmonics basis

Spherical harmonics  $Y_l^m$  can be introduced as the trace on the unit sphere  $S^2$  of harmonic homogeneous polynomials of degree  $l$  [6]. So let  $\forall l \in \mathbb{N}$ ,  $-l \leq m \leq l$ , and  $-1 < x < 1$ ,  $P_l^m$  the Legendre function associated to Legendre polynomials  $P_l$ , defined by:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x). \quad (1)$$

In spherical coordinates  $(r, \theta, \phi)$  with colatitude convention, the family  $(Y_l^m)$  defined by:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\phi)) e^{im\theta} \quad (2)$$

form an orthonormal basis of  $L^2(S^2)$ , which diagonalizes the Laplace Beltrami operator  $\Delta$  on the sphere  $S^2$ :

$$\Delta Y_l^m + l(l+1)Y_l^m = 0. \quad (3)$$

Thus, any function  $u \in L^2(S^2)$  can be written as:

$$u(\theta, \phi) = \sum_{l,m} \alpha_l^m Y_l^m(\theta, \phi) \quad (4)$$

where  $\alpha_l^m$  are the expansion coefficients.

### Theoretical problem resolution

In numerical practice [2], summation is truncated at a fixed value  $L$  called the truncation number, in such a way that  $\alpha_l^m = 0 \forall l > L$ . After that, there is a total of  $M = (L+1)^2$  terms in spherical decomposition Eq. (4). Then, for a discrete set of measurements  $u(\theta, \phi)$  known at  $N$  spatial position  $\{u_1, \dots, u_N\}$  on the sphere  $S^2$ , the  $M$  unknowns  $\alpha_l^m$  are fitted by writing a linear system of equations:

$$\begin{aligned} (u_i)_{i \in [1, N]} = (u(\theta_i, \phi_i))_i &= \left[ \left( \sum_{l,m} \alpha_l^m Y_l^m(\theta_i, \phi_i) \right)_i \right] \\ &\Downarrow \\ Y\alpha &= U \end{aligned} \quad (5)$$

where  $Y$  is the  $N \times M$  left hand side,  $\alpha$  the unknowns vector, and  $U$  the right hand side.

To smooth solutions and avoid numerical instabilities, a Tikhonov regularization is employed as in [2, 4], carefully chosen for the given problem. In general, this regularization is performed by a minimization of the norm of the standard data or their variations. In our particular case, as  $\alpha$  is the weighting vector of spherical harmonics, "low" spatial frequencies have to be emphasized to avoid abrupt variations. The linear system of Eq. (5) then becomes:

$$(Y^T Y + \epsilon D)\alpha = Y^T U \quad (6)$$

with  $D_{ij} = (1 + l(l+1))\delta_{ij}$ ,  $l$  the degree of the corresponding spherical harmonic  $Y_l^m$ , and  $\epsilon \in [0, 1]$ .



It is important to note that in Eq. (5), the order of truncation  $L$  must be chosen in relation to information provided by the right hand side. Without Tikhonov regularization, a high precision given by a high truncation order  $L$  will improve the reconstruction of  $(u_i)_{i \in [1, N]}$ , but with aliasing for  $u$  at all others position due to the resolution of an over-determined system. A judicious choice of the value  $\epsilon$  is required to keep an optimal interpolation accuracy for oversized  $L$ . At the same time,  $L$  should not be too small, otherwise the resultant spatial average will generate a loss of information by the resolution of an under-determined system.

### Application to HRTF interpolation

An HRTF is a complex function in space  $(\rho, \theta, \phi)$  and frequency  $(f)$ . In most cases, HRTFs are measured for a given fixed radius  $\rho$  and may be described as a function  $H(\theta, \phi, f)$ . For each frequency,  $H$  is a complex function of  $L^2(S^2)$ , so spherical harmonic interpolation can be applied, frequency by frequency, to compute HRTF interpolation [2]. Despite the apparent complexity of the algorithm, the main advantage of this approach is the ease of use. It is only necessary to provide the HRTF and corresponding spherical positions of each measurement and the interpolation can be done automatically for any point on the sphere  $S^2$ .

### DATABASE AND ANALYSIS TOOLS

In order to evaluate the effectiveness of the proposed method, a series of analytical validations has been performed to extract an objective domain of validity. In this study, only three parameters are considered:

- number of spatial positions  $N$  used to form the linear system (construction points),
- order of truncation  $L$  of the spherical harmonics  $Y_l^m$ ,
- frequency  $f$ .

### HRTF database

The HRTF of a dummy head was measured in an anechoic chamber. Microphones (DPA 4060) were placed at the entrance of the ear canals (blocked meatus) of a KEMAR mannequin. Three loudspeakers, spaced at  $5^\circ$  intervals, were mounted on a movable arm at a distance of 1.95 m from the center of the head.[7] The mannequin was installed on a rotating turntable and wore a fleece jumper and felt cap in order to provide realistic absorption characteristics.[8] Measurements were made for elevations of  $-40^\circ$  to  $+90^\circ$ , in  $5^\circ$  steps, with the turntable rotating in  $15^\circ$  increments. Using the three speakers, this resulted in a grid roughly  $5^\circ \times 5^\circ$ . HRIRs were obtained using a sweepsine excitation signal [9] and recorded at 192 kHz sample rate (RME Fireface 800). In order to obtain a complete full-sphere dataset, the mannequin was then installed in an inverted position and the measurement was repeated. The two datasets were merged by the completion of the upper measurement ( $-40^\circ$  to  $+90^\circ$ ) by the lower one ( $-90^\circ$  to  $-45^\circ$ ). The resulting dataset comprised 1722 positions, represented by black dots in Fig 1.a.

### Errors measurements

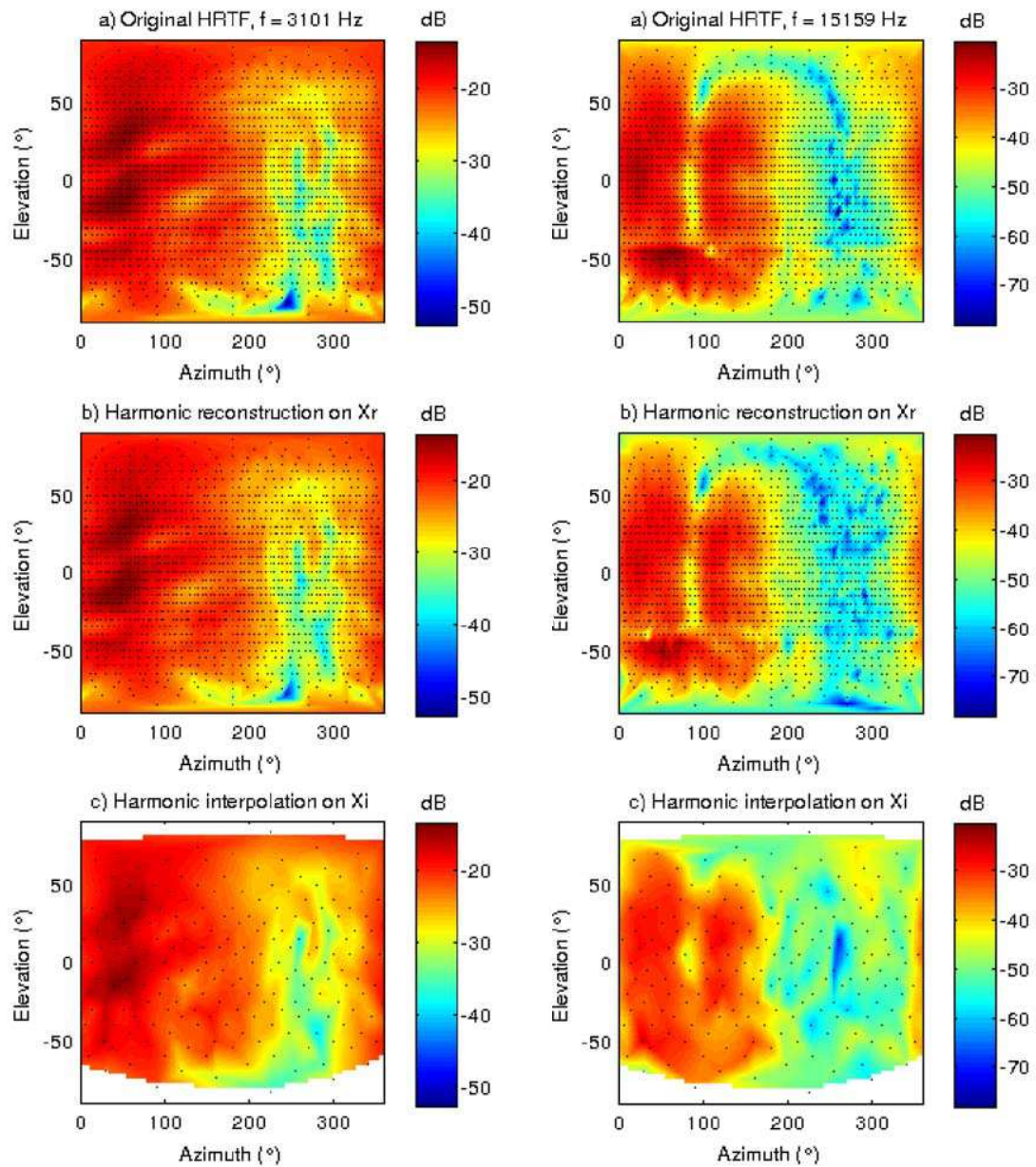
In this study two signals have to be compared, a reference  $H_{ref}$  and a computed one  $H_{com}$ , both functions of time and space. We propose as a suitable error measurement the global Mean Square Error (MSE) in frequency domain [10, 11], defined as:

$$E_{\mathbf{x}, f}(H_{com}, H_{ref}) = 20 * \log_{10} \left( \frac{\|H_{com}(\mathbf{x}, f) - H_{ref}(\mathbf{x}, f)\|_{\mathbf{x}, f}}{\|H_{ref}(\mathbf{x}, f)\|_{\mathbf{x}, f}} \right) \quad (7)$$

where  $\mathbf{x} = (\rho, \theta, \phi)$  is the spatial position,  $f$  HRTF temporal frequencies, and  $\|\cdot\|_{\mathbf{x}, f}$  is the euclidean norm along  $\mathbf{x}$  and  $f$ . It is important to note that this norm can be applied along only  $\mathbf{x}$  to define the spatial MSE  $E_{\mathbf{x}}$  and along only  $f$  to define the frequency MSE  $E_f$ .

Secondly, in order to meet the assumptions of theoretical considerations detailed in the previous section, two kinds of points have to be considered (as per [1]):

- The first type consists of reconstructed



**FIGURE 1:** Representation of HRTF at fixed parameters  $N$ ,  $L$ , and  $f$  for  $f = 3101$  Hz (left column) and  $f = 15159$  Hz (right column) showing (a) original, (b) reconstructed, and (c) interpolated HRTF's for the KEMAR left ear. Black dots represent the data grid.

points  $\mathbf{x}_r$ . This set of point they used for the spherical harmonics construction in order to compute the expansion coefficients  $\alpha_l^m$  in Eq. (5). It is expected that the measured error of these points always decreases with truncation order  $L$ .

- The second type consists of interpolated points  $\mathbf{x}_i$ , the set of points not used for the computation of  $\alpha_l^m$  in Eq. (5). These

reflect the effectiveness of the spherical harmonic interpolation.

Error measures  $E_{\mathbf{x},f}$ ,  $E_{\mathbf{x}}$ , and  $E_f$  were calculated for both sets of points,  $\mathbf{x}_r$  and  $\mathbf{x}_i$ .

### Meshes coarsening

In order to compute the two kinds of points  $\mathbf{x}_r$  and  $\mathbf{x}_i$ , in order to evaluate the interpola-

tion method, no interpolations are permitted for  $\mathbf{x}_r$ . Mesh coarsening based on a Fibonacci grid [12] was used to extract  $\mathbf{x}_i$  without any preferred spatial direction. To do this, the measurement point closest to the exact grid is extracted from the original mesh to form an approximated uniform grid. The remaining points form the  $\mathbf{x}_r$  set. In this study, 200 interpolated points were selected, represented by black dots in Fig 1.c, leaving up to 1522 reconstructed points to be considered for Spherical Harmonic construction (black dots in Fig 1.b). It is important to note that both poles, North and South, are always taken as reconstructed points, in order to keep the full sphere hypothesis, according to theory.

To represent HRTF measurements and errors MSE in space, the sphere  $S^2$  was represented in two dimensions with azimuth and elevation. Triangular linear interpolation was carried out for data plotting using the barycentric mean of the three closest neighbors.

## RESULTS AND DISCUSSIONS

In this section, MSE colormap in Fig 2 and Fig 3 is from less than -20 dB in blue to 0 dB in red. The corresponding linear scale is from less than 10% to 100% in the relative sense.

### HRTF and error representation

In the next two subsections, all three considered parameters are fixed in order to draw spatial representations. Values are chosen such that there are  $N = 1522$  reconstructed points  $\mathbf{x}_r$ , at frequencies  $f \simeq 3000$  and 15000 Hz, with a truncation order  $L = 30$  to avoid harmonic averaging. Fig 1.a presents measured left HRTF amplitude on original measurement positions for each frequency. There is more spatial variation for the larger frequency  $f$  due to the fact that the HRTF is the result of a scattering problem, so it is expected that spatial variations will increase with frequency. Secondly, following the measurement protocol, the HRTF database has an apparent discontinuity at low elevations, between  $-40^\circ$  and  $-45^\circ$ , which is more pronounced at higher frequencies.

Fig 1.b represents the left HRTF amplitude values on reconstructed points  $\mathbf{x}_r$ , used to compute Eq. (5). As HRTFs present greater variability at high frequencies, spatial aliasing appears due to insufficient size of  $N$  and  $L$ .

Fig 1.c represents the left HRTF amplitude values on interpolated points  $\mathbf{x}_i$ , computed by spherical harmonic interpolation from previously selected  $\mathbf{x}_r$ . This small mesh of 200 pts is sufficiently uniform to be objective for spatial and frequency error measurements.

### Reconstructed and interpolated HRTF MSE

Fig 2.a shows the Mean Square Error (MSE) on  $\mathbf{x}_r$ , and Fig 2.b shows the MSE on  $\mathbf{x}_i$ , for each spatial position for two select frequencies. As expected, both depend on frequency, with a notable difference between accuracy on  $\mathbf{x}_i$ , poorer for  $\mathbf{x}_r$ . First, despite the relative metric induced by MSE, there is a large difference on the effectiveness of the algorithm between left and right sound source positions relative to the left ear HRTF. This is probably due to the fact that ipsilateral sources are more scattered by the head than contralateral ones. Secondly, for the two frequencies, errors induced by the full-sphere measurement protocol at  $-40^\circ$  elevation are visible.

In order to better understand the frequency dependence of MSE, Fig 2.c provides the spatial MSE  $E_{\mathbf{x}}$  as a function of frequency. As expected, the higher the frequency, the greater the spatial averaged error.

Finally, to have a more precise idea of the  $L$  dependence of MSE in space and frequency  $E_{\mathbf{x},f}$ , Fig 2.d shows the convergence of results as a function of order of truncation.  $\mathbf{x}_r$  values always converge for higher order, more quickly than for  $\mathbf{x}_i$ , according to theory. Only interpolation points are considered, because a convergence of  $\mathbf{x}_i$  values induces a convergence for  $\mathbf{x}_r$ , which is not reciprocal (see above).

### Theoretical laws and results

For scattering problems there are two theoretical laws providing good error agreement. The first one comes from Fast Multipole liter-

ature [2, 13], and expresses the frequency dependence of the truncation order:

$$L \geq E\left(\frac{2\pi f}{c}a\right) + 1 \quad (8)$$

where  $E$  is the integer part function,  $a$  is the radius of the smallest sphere surrounding the scattering object (here the dummy head), and  $c$  the speed of sound.

The second one is a classical law taken from boundary element method (BEM) [6, 14], and expresses the frequency dependence of the mesh used to compute spherical harmonics. For a uniform mesh of  $N$  construction points on the sphere  $S^2$ :

$$N \geq E\left(4\pi a^2 \left(\frac{nf}{c}\right)^2\right) \quad (9)$$

where  $n$  is the number of points used to intercept an elementary signal (generally small,  $n = 4$  for example).

For these two laws, superiority relation is allowed by the Tikhonov regularization in Eq. (6), which smooth solutions for overdetermined problems. In the equality case, a third law could be extracted from the two previous ones, expressed by the relation  $N \approx (L)^2 \approx M$ . This relation reflects well the need to solve a square system in Eq. (5).

In Fig 3.a, Fig 3.b, and Fig 3.c, spatial MSE  $E_{\mathbf{x}}$  is represented. For each figure, one of the three parameters  $N$ ,  $L$ , and  $f$  is fixed. Laws in equality cases are represented by the dark curves, with the first law in Fig 3.a, the second law in Fig 3.b, and both laws in Fig 3.c. In

each case, dark curves delineate areas of good and bad numerical interpolations, as expected. Also, these analytical laws give an efficient estimation of the value of  $N$  and  $L$  needed to compute the chosen frequency.

## CONCLUSION AND FUTURE WORKS

In summary, a validation method for harmonic interpolation of full-sphere HRTFs was proposed and evaluated. Two theoretical laws have been proposed and empirically validated. For the highest frequency to be reproduced, those laws give a good idea of the size of the mesh  $N$ , with the associated truncation order  $L$  necessary to maintain good accuracy. For example, to correctly interpolate HRTFs from 20 Hz to 20 kHz, truncation order  $L \approx 37$  for an uniform grid of  $N \approx 7000$  points are needed, which is very difficult to measure in practice. But, in accordance with measurement datasets, a prediction of an objective frequency domain of validity for this kind of interpolation is possible. So, subject to the limitations imposed by databases themselves, the exchange of HRTF databases is possible.

Works on different spherical databases of HRTFs should now be carried out to completely demonstrate the robustness of the presented approach. This study could also be extended to a set of HRTFs measured at different distances in order to evaluate spherical harmonic extrapolation of HRTFs.

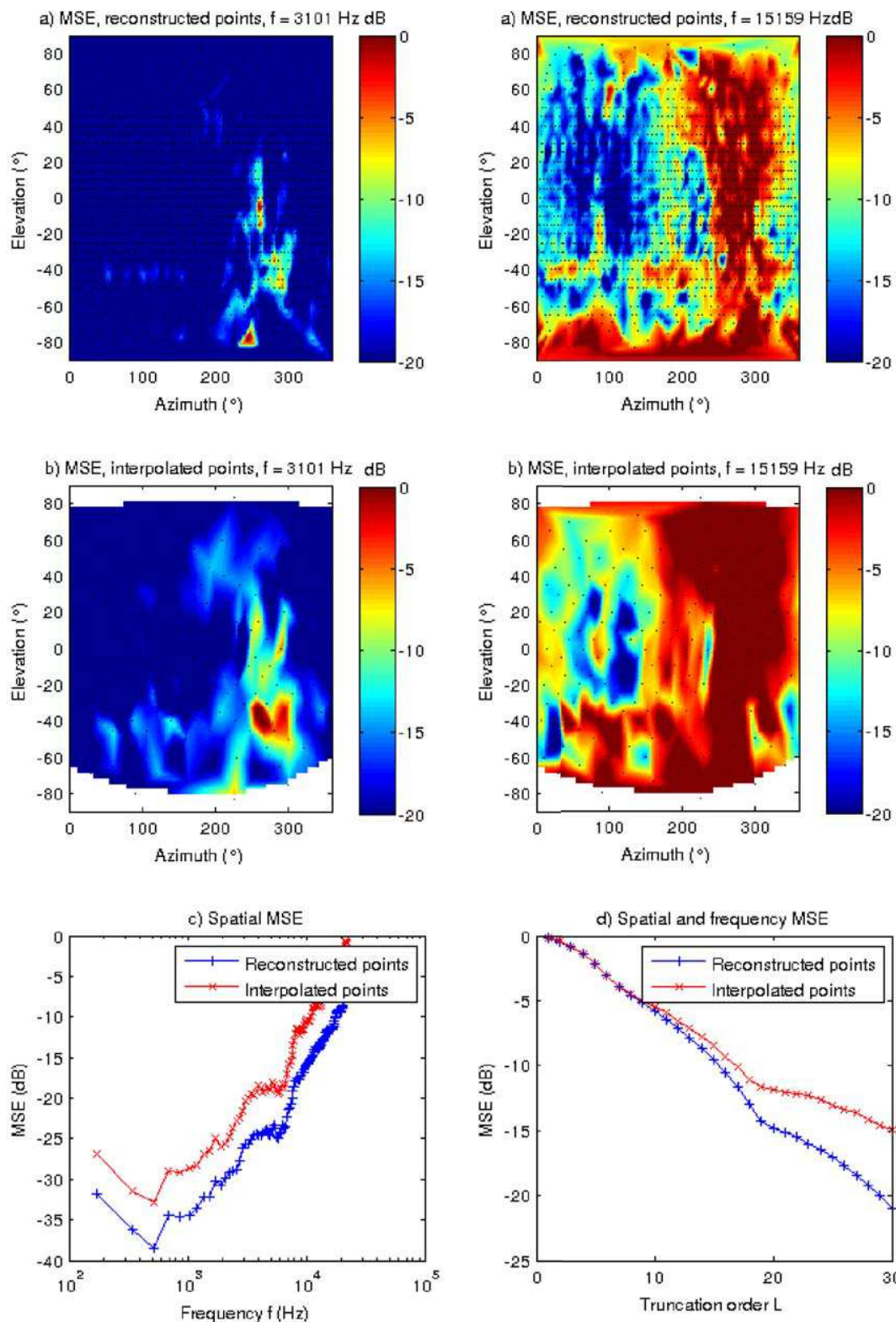
## ACKNOWLEDGMENTS

This work was performed in the context of a CIFRE industry-linked research funding program with Digital Media Solutions (DMS). The authors would like to thank Gaëtan Parseihian, LIMSI-CNRS, for the HRTF measurement, and IRCAM for use of their measurement facilities, regarding the acquisition of the KEMAR HRTF. Finally, thanks to Omnihead ([www.univ-brest.fr/mstis/omnihead/accueil.htm](http://www.univ-brest.fr/mstis/omnihead/accueil.htm)) for the use of the KEMAR dummy head.

## REFERENCES

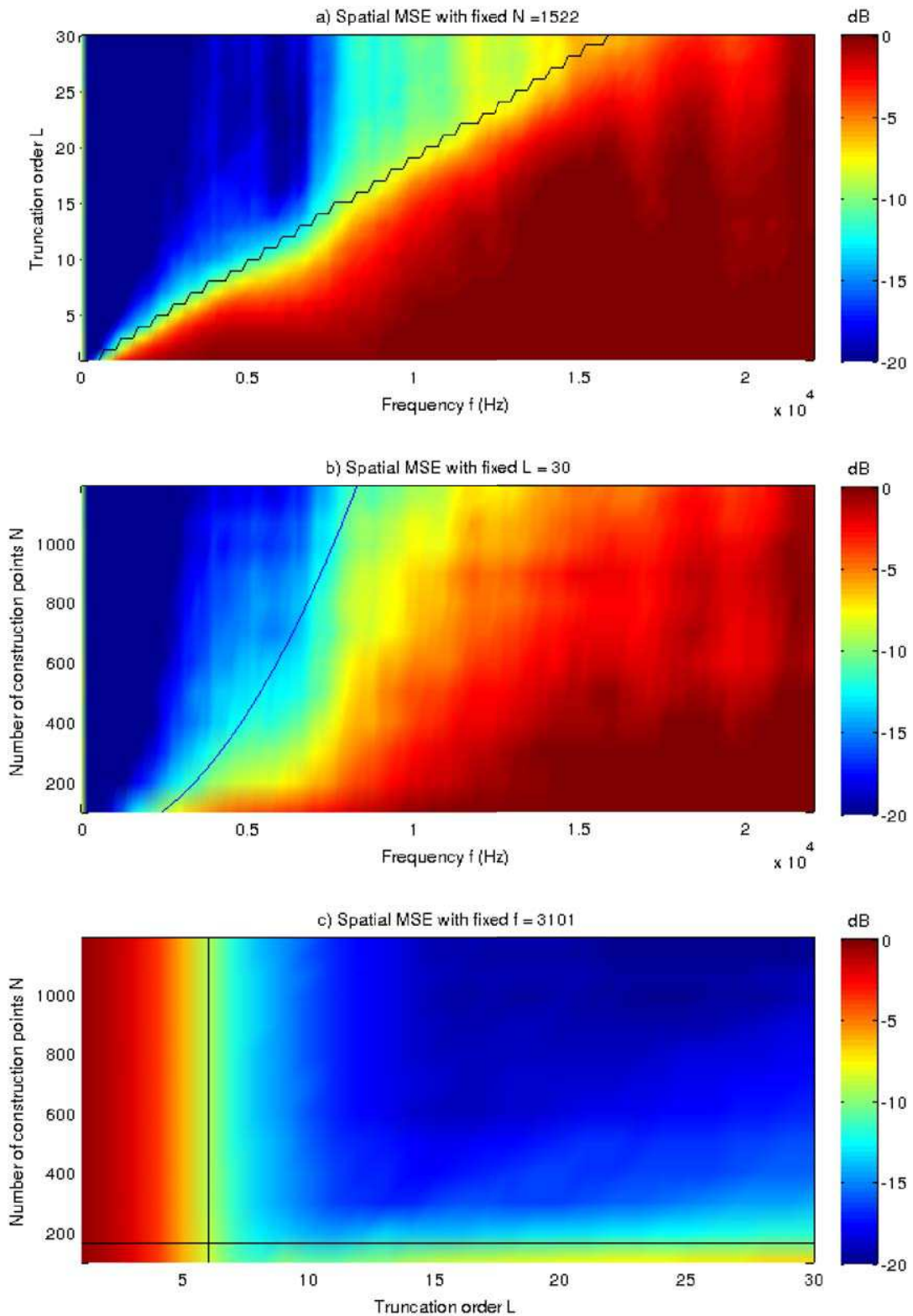
- [1] M. Aussal, F. Alouges, and B. F. Katz, "ITD interpolation and personalization for binaural synthesis using spherical harmonics", in *Audio Engineering Society UK Conference*, 04\_01–10 (York, UK) (2012).

- [2] R. Duraiswaini, D. Zotkin, and N. Gumerov, "Interpolation and range extrapolation of hrtfs [head related transfer functions]", in *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2004. Proceedings. (ICASSP '04). IEEE International Conference on*, volume 4, 45–48 (2004).
- [3] A. Laborie, R. Bruno, and S. Montoya, "A new comprehensive approach of surround sound recording", in *Audio Engineering Society Convention 114*, 5717:1–20 (Amsterdam) (2003).
- [4] K.-V. Nguyen, T. Carpentier, M. Noisternig, and O. Warusfel, "Calculation of the head related transfer function in the proximity region using spherical harmonics decomposition: comparison with measurements and evaluation", in *2nd Intl. Symp. on Ambisonics and Spherical Acoustics*, 1–4 (Paris) (2010).
- [5] D. Zotkin, R. Duraiswami, and N. Gumerov, "Regularized HRTF fitting using spherical harmonics", in *Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics (WASPAA '09)*, 257–260 (2009).
- [6] J.-C. Nedelec, *Acoustics and Electromagnetic equations. Integral representations for harmonic problems*, number 144 in Applied Mathematics Science (Springer Verlag, New York) (2001).
- [7] "LISTEN HRTF database", (2003), URL [recherche.ircam.fr/equipes/salles/listen](http://recherche.ircam.fr/equipes/salles/listen).
- [8] B. F. Katz, "Acoustic absorption measurement of human hair and skin within the audible frequency range", *J. Acoust. Soc. America* **108**(5), 2238–2242 (2000).
- [9] P. Fausti and A. Farina, "Acoustic measurements in opera houses: comparison between different techniques and equipment", *J. Sound and Vibration* **232**, 213–229 (2000).
- [10] T. Ajdler, C. Faller, L. Sbaiz, and M. Vetterli, "Sound field analysis along a circle and its applications to HRTF interpolation", *J. Aeronaut. Sci.* **56**, 156–175 (2008).
- [11] W. Zhang, P. Abhayapala, and R. Kennedy, "Horizontal plane HRTF reproduction using continuous Fourier-Bessel functions", in *31st International Conference: New Directions in High Resolution Audio*, 4, 1–9 (London) (2007).
- [12] R. Swinbank and R. James Purser, "Fibonacci grids: A novel approach to global modelling", *Quarterly J. Royal Meteorological Soc.* **132**, 1769–1793 (2006).
- [13] N. Gumerov, A. O'Donovan, R. Duraiswami, and D. Zotkin, "Computation of the head-related transfer function via the fast multipole accelerated boundary element method and its spherical harmonic representation", *J. Acoust. Soc. America* **127**, 1370–386 (2010).
- [14] B. Katz, "Boundary element method calculation of individual head-related transfer function. I. Rigid model calculation", *J. Acoust. Soc. America* **110**, 2440–2448 (2001).



**FIGURE 2:** Representation of Mean Square Errors (MSE) at fixed parameters  $N$ ,  $L$ , and  $f$  for  $f = 3101$  Hz (left) and  $f = 15159$  Hz (right) for the KEMAR left ear HRTF showing (a) reconstructed and (b) interpolated points. Black dots represent the data grid. (c) Spatial and (d) spatial-frequency mean MSE.





**FIGURE 3:** Representation of Mean Square Errors (MSE) as a function of different parameters: (a)  $L$  &  $f$ , (b)  $N$  &  $f$ , and (c)  $N$  &  $L$ . Dark curves represent the corresponding theoretical law.

# ITD INTERPOLATION AND PERSONALIZATION FOR BINAURAL SYNTHESIS USING SPHERICAL HARMONICS

MATTHIEU AUSSAL<sup>1</sup>, FRANÇOIS ALOUGES<sup>2</sup>, BRIAN FG KATZ<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Digital Media Solutions, 45 grande allée du 12 février 1934, 77186 Noisiel, France*

<sup>2</sup>*CMAP, UMR 7641, Ecole Polytechnique, route de Saclay, 91128 Palaiseau CEDEX, France*

<sup>3</sup>*LIMSI-CNRS, BP 133, Université Paris Sud, 91403 Orsay, France*

Using Head-Related Impulses Responses (HRIR) measurements, the spectral part of the Head-Related Transfer Function (HRTF) and the Interaural Time Delay (ITD) were separated. A method of synthesizing the ITD using individual morphological data and an external HRTF database was evaluated, in order to compute an individual ITD for each listener. To achieve this, spherical harmonics interpolation was performed. This method was evaluated on a set of measurements obtained for a KEMAR dummy head on the full sphere with a 5° spatial resolution, and the effect of modal truncation order was evaluated.

## 1. INTRODUCTION

The HRTF represents the acoustic signature for human spatial hearing, characterizing the diffraction of sound waves by the anatomy of the listener. HRTFs vary greatly from person to person, representing a major issue in reproduction quality of spatial sources over headphones. As each individual is morphologically different, these functions are particularly difficult to transpose to other individuals without audible artifacts. Current research activities have explored a variety of different approaches to solve this problem, for example, numerical simulations [6, 3], statistical matching and selection [4, 8, 7], learning optimal HRTFs by listening [5], *etc.*

In this paper, we focus on the personalization of the ITD through a principal component analysis (PCA), mainly for the following reasons:

- ITD is the primary acoustic cue for spatial sound localization [14],
- ITD is a real real-valued spatial function, simpler than the HRTF which is a complex spatial function in the frequency domain,
- PCA analysis on ITD provides interesting results, because output modes are physically interpretable. While individual values vary, the underlying cause of the ITD is common across

people, that being two ears on either side of a somewhat spherical head sitting atop a torso.

The Listen database [9], with HRIR measurement on 51 subjects, was used to compute modal values of ITD by PCA. As this measurement set has a hole, with no data below -45° elevation, spherical harmonic interpolation was evaluated in order to fill this void in the measurement grid. So, the aim of this paper is first to evaluate spherical harmonic interpolation applied on ITD values, with full-sphere measurements on a KEMAR mannequin. Second, an optimal order of interpolation is determined to build a full sphere model of ITD from PCA applied to the Listen database. Finally, this model may be compared with actual ITD KEMAR measurements in future work, to assess performance.

## 2. SPHERICAL HARMONIC DECOMPOSITION

In this section, a theoretical summary of spherical harmonic decomposition is presented. The main purpose is to introduce classical notations and knowledge foundations for the practical use of this decomposition. Actually, spherical harmonic basis is nothing more than an equivalent for the  $\mathbb{R}^3$  sphere of the  $(e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$  basis for the  $\mathbb{R}^2$  circle case [12]. For this reason, the term “Fourier Bessel expansion” is sometimes used to describe this tool [10]. This basis is widely used in many domains of computer graphics and physics, including in particular that of acoustics.



## 2.1 Theoretical construction

Spherical harmonics of order  $l$  can be introduced as the trace on the unit sphere  $\mathbf{S}^2$  of harmonic homogeneous polynomials of degree  $l$ . They have two notable properties:

1. Spherical harmonics of different orders are orthogonal for the scalar product in  $L^2(\mathbf{S}^2)$ , the space of square integrable functions on the unit sphere.
2. Spherical harmonics of order  $l$  form a vector space whose dimension is  $2l + 1$ .

These two points lead to the following fundamental theorem, key to the practical use of spherical harmonics.

**Theorem:** Let  $\forall l \in \mathbb{N}$ ,  $-1 \leq m \leq l$  and  $-1 < x < 1$ ,  $P_{lm}$  the Legendre function associated to the Legendre polynomials  $P_l$  defined by

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x). \quad (1)$$

In spherical coordinates  $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}, \phi)$  with colatitude convention, the family  $(Y_{lm})$  defined by

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\phi)) e^{im\theta} \quad (2)$$

form an orthonormal basis of  $L^2(\mathbf{S}^2)$ , which diagonalizes the Laplace Beltrami operator  $\Delta$  on the sphere  $\mathbf{S}^2$ :

$$\Delta Y_l^m + l(l+1)Y_l^m = 0. \quad (3)$$

Thus, any function  $\mathbf{u} \in L^2(\mathbf{S}^2)$  can be written as

$$u(\theta, \phi) = \sum_{l,m} \alpha_{lm} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (4)$$

where  $\alpha_{lm}$  are the coefficients of the Fourier Bessel expansion.

This orthonormal basis of  $L^2(\mathbf{S}^2)$  can now be used to represent many data types measured on a sphere. Indeed, as the ITD is a function of  $L^2(\mathbf{S}^2)$ , it can be projected onto this basis. In addition, a global interpolation for new data is possible, for example over the hole in the Listen database measurement grid.

## 2.2 Calculation of the decomposition coefficient

As explained in [2], in numerical practice we truncate the summation at a fixed value  $\mathbf{L}$  called the truncation number, in such a way that we take  $\alpha_{lm} = 0$ ,  $\forall l > \mathbf{L}$ . There is a total of  $\mathbf{M} = (\mathbf{L} + 1)^2$  terms in the spherical decomposition Eq. (4), and, for a discrete set of measurements,  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}, \phi)$  is known at  $\mathbf{N}$  spatial position

$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N\}$  on the sphere  $\mathbf{S}^2$ . We therefore fit the  $\mathbf{M}$  unknowns  $\alpha_{lm}$  using a regularized fitting approach, by writing  $\mathbf{N}$  linear equation

$$\begin{aligned} u_1 = u(\theta_1, \phi_1) &= \sum_{l,m} \alpha_{lm} Y_l^m(\theta_1, \phi_1) \\ &\dots \\ u_N = u(\theta_N, \phi_N) &= \sum_{l,m} \alpha_{lm} Y_l^m(\theta_N, \phi_N). \end{aligned} \quad (5)$$

In short form, Eq. (5) is rewritten as  $\mathbf{Y}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{U}$ , where  $\mathbf{Y}$  is an  $\mathbf{N} \times \mathbf{M}$  matrix of spherical harmonics in Eq. (2) at measurement points,  $\boldsymbol{\alpha}$  is the unknown  $\mathbf{M}$  vector of Fourier Bessel coefficients, and  $\mathbf{U}$  is the  $\mathbf{N}$  vector of values at measurements points.

## 2.3 Truncation order

The formulation in spherical harmonics, Eq. (4), has the advantage of condensing all spatial information available on the unit sphere  $\mathbf{S}^2$  as a set of coefficients  $\alpha_{lm}$ , depending on the order  $\mathbf{L}$ . In theory, the greater  $\mathbf{L}$ , the more spatially accurate the decomposition in spherical harmonics will be. In contrast, as  $\mathbf{L}$  decreases, the decomposition in spherical harmonics will represent a spatial averaging. Mathematically, this principle is inherent to Eq. (2), where the width of the lobes depends on the order  $0 < l < \mathbf{L}$ .

In our approach (Eq. (5)), it is necessary to pay special attention to the order of truncation. Indeed, the resolution matrix of the system depends on the number of measurement points, defined for each database. Also, it is necessary to ensure that an increased precision given by a high truncation order  $\mathbf{L}$  for reconstructed values does not induce errors, due to solving an overdetermined system, in regions where no measurements are available. Numerous studies exist on this subject, and the determination of optimal order for the decomposition is still an active research question.

## 2.4 Matrix conditioning and regularization

As the system in Eq. (5) is solved in the least squares sense, it is important to note that the condition number of matrix  $\mathbf{Y}$  also plays an important role, being primarily dependent on the spatially distribution of the measured data. For example, most databases have a hole at low elevations (Listen, CIPIC, *etc.*), which leads in practice to an ill-conditioned matrix  $\mathbf{Y}$ , and requires regularization methods [13].

**Tikhonov Regularization:** Let us consider the linear system Eq. (5) that we rewrite under the form  $\mathbf{Y}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{U}$ , where  $\mathbf{Y}$  is generally not square. The classical approach to solve an over/underdetermined system of linear equations is to minimize the norm of the residual  $\|\mathbf{Y}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{U}\|^2$ . In order to favor a particular solution with properties that seem relevant, a regularization term  $\boldsymbol{\Gamma}$  is introduced in this minimization:

$$\|\mathbf{Y}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{U}\|^2 + \epsilon \|\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\alpha}\|^2, \epsilon \in [0, 1]. \quad (6)$$

The ‘‘Tikhonov matrix’’  $\boldsymbol{\Gamma}$  must be carefully chosen for the given problem. To smooth solutions, including large instabilities in areas where information is missing, regularization by Eq. (6) is often performed using a normalization of the variations. In the present case, as  $\boldsymbol{\alpha}$  is the weighting vector of spherical harmonics, it was decided to emphasize the ‘‘low’’ spatial frequencies to avoid abrupt variations, such as mentioned in [2]. The linear system of Eq. (5) then becomes

$$(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} + \epsilon \mathbf{D})\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Y}^T \mathbf{U} \quad (7)$$

with  $\mathbf{D} = \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}(1+I(I+1))$ , (*diag* being the diagonal operator), and  $I$  the degree of the corresponding spherical harmonic Eq. (2).

### 3. CASE STUDY ON PRECISION

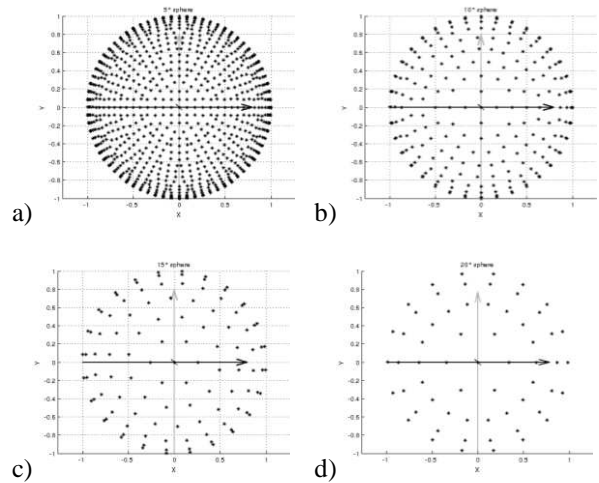
As the fundamental theory of interpolation by spherical harmonics is now introduced, we focus on the application of this interpolation for the KEMAR mannequin ITD, measured on a full-sphere using a particularly dense grid. In order to study the effects of truncation order, incomplete spherical grids, and interpolation, it was necessary to have a complete HRTF measurement set over the entire sphere measured with a high spatial resolution.

#### 3.1 Reference dataset

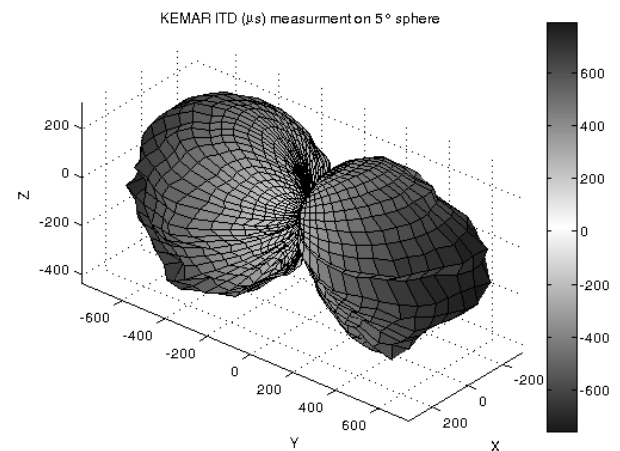
The HRTF of a dummy head was measured in an anechoic chamber. Microphones (DPA 4060) were placed at the entrance of the ear canals (blocked meatus) of a KEMAR mannequin. Three loudspeakers, spaced at  $5^\circ$  intervals, were mounted on a movable arm at a distance of 1.95 m from the center of the head. The mannequin was installed on a rotating turntable and wore a fleece jumper and felt brimless cap in order to provide realistic absorption characteristics. Measurements were made for elevations of  $-45^\circ$  to  $+90^\circ$ , in  $5^\circ$  steps, with the turntable rotating in  $15^\circ$  increments. Using the three speakers, this resulted in a grid roughly  $5^\circ \times 5^\circ$ . HRIRs were obtained using a sweep sine excitation signal [18] and recorded at 192 kHz sample rate (RME Fireface 800).

In order to obtain a complete spherical dataset, the mannequin was then installed in an inverted position, with the inter-aural axis at the same position, and the measurement was repeated. Following equalization for the measurement chain, the two datasets were merged. This was accomplished through a panning between the two sets at coincident measurement points. A linear panning was employed, after assuring time alignment of the two HRIRs using the peak of the cross-correlation to minimize any potential comb filtering errors. The resulting dataset comprised 1710 positions (see Fig. 1a).

The ITD was estimated from the measured HRIR by calculating the centroid value of the inter-aural cross-correlation between the envelopes of left and right HRIRs for each position (see [16]), which offers a more stable ITD estimate than the more commonly used maximum IACC method (e.g. [15]).



**Figure 1 - Top view of KEMAR measurement grid (a) every  $5^\circ$ , and coarse versions at (b)  $10^\circ$ , (c)  $15^\circ$ , and (d)  $20^\circ$  resolution.**



**Figure 2 - Measured KEMAR ITD ( $\mu\text{s}$ ).**

### 3.2 Errors measurements

For the following section, in order to evaluate the spherical harmonic decomposition for ITD, some error measurements need to be properly defined.

First, as seen in Fig. 2, the maximum ITD for the KEMAR dataset is  $\sim 790 \mu\text{s}$ . The localization precision of human hearing is of the order of  $2^\circ$  at best. Therefore, the just-noticeable-difference (JND) for ITD can be estimated to be  $\sim 8 \mu\text{s}/^\circ$ . Even if the JND increases with azimuth, the maximal acceptable error can be considered to be on the order of  $16 \mu\text{s}$ , and we hereafter use this value as a reference.

Second, as previously discussed, it would be relevant to compare these errors to the condition number of the linear system Eq. (5). Indeed, the condition number measures the sensitivity of the solution to errors in the data, and gives an indication of the accuracy of the results. Values of conditioning near unity indicate a well-conditioned matrix, while greater values are signs of ill-conditioned systems, with poorer results.

### 3.3 Spatial resolution and truncation order

In order to meet the assumptions of the theoretical considerations detailed in the previous section, we first study harmonic interpolation in the case of a complete sphere, without regularization. For this, the initial mesh has been coarsened (Fig. 1b, 1c, and 1d), and two types of points are now considered.

1. The first set of points consists of Reconstructed Points (**RP**), which are the points retained as input data for the spherical harmonic decomposition in order to compute the Fourier Bessel coefficients  $\mathbf{a}_m$  in Eq. (5). It is expected that the measured error of these points decreases with the truncation order  $\mathbf{L}$ .
2. The second set contains the Interpolated Points (**IP**), defined as all points present in the original mesh not contained in the set **RP**, and therefore, not used for the computation of  $\mathbf{a}_m$  in Eq. (5). Errors related to this set reflect the effectiveness of the spherical harmonics for interpolation.

Measures of error  $\mathbf{e}$  were calculated for both sets of points, **RP** and **IP** (Fig. 3).

As expected,  $\mathbf{e}(\mathbf{RP})$  converge with spherical harmonic truncation order  $\mathbf{L}$ . The coarser the mesh, the smaller the size of set **RP**, which results in a quicker converging process, and is consistent with the theory. However, for coarsened meshes,  $\mathbf{e}(\mathbf{IP})$  is unstable for

some truncation orders  $\mathbf{L}$ . Indeed, the problem becomes ill-conditioned when too many spherical harmonics are used in relation to the number and density of points on the measurement grid.

To overcome this problem, the Tikhonov regularization in Eq. (7) has been performed, and results are shown in Fig. 4. The effectiveness of this regularization method is seen due to the fact that  $\mathbf{e}(\mathbf{RP})$  and  $\mathbf{e}(\mathbf{IP})$  are convergent, even if  $\mathbf{e}_{\max}(\mathbf{IP})$  can be further improved. The choice of the matrix  $\mathbf{\Gamma}$  and the weight  $\epsilon$  in Eq. (7) should be studied more thoroughly in order to improve this convergence. However, data used as references are physical measures, and suffer from inaccuracy. Also, the inherent smoothing of the interpolation by spherical harmonics may produce “errors”, which can ultimately prove beneficial. Finally, it is interesting to notice that  $\mathbf{e}(\mathbf{RP})$  does not tend towards zero when the Tikhonov regularization is used. Indeed, as this method performs a smoothing of the results, reconstructed values **RP** are included. But these errors are well below the proposed limit of  $16 \mu\text{s}$ , which remains acceptable.

### 3.4 Effect of a data hole

Having addressed the case of the complete sphere, we are now interested in the accuracy of spherical harmonic decomposition when the dataset has a hole. Because of the complexity of measurements of HRIRs at low elevations, most databases do not have measurements in this area. The linear system in Eq. (5) is therefore ill-conditioned, which is a real problem.

The results for two mesh resolutions, the original one and a mesh coarsened to  $15^\circ$  resolution, are presented here (see Fig. 5 and 6). In both cases, the Tikhonov regularization in Eq. (7) has been applied.  $\mathbf{e}(\mathbf{RP})$  and  $\mathbf{e}(\mathbf{IP})$  are now not only functions of truncation order  $\mathbf{L}$ , but also of the hole size (varied here as a function of elevation below which data are excluded from set **RP**). In the first case (Fig. 5),  $\mathbf{e}(\mathbf{IP})$  applies only to points in the hole to focus attention solely on the presence of this hole in the harmonic interpolation. The second case (Fig. 6) is more general since it allows one to obtain an optimal truncation order  $\mathbf{L}$  empirically, in the case of the Listen database (measurements every  $15^\circ$ , hole at  $\phi = -45^\circ$ ).

**Conditioning:** Both cases (Fig. 5 and 6) show that despite regularization, the conditioning of linear system Eq. (7) deteriorates with increased hole size and also with increasing order. This is not surprising since we are attempting to solve a problem more precisely with  $\mathbf{L}$  increasing, though using less and less information.

**Reconstruction error:  $e_{\max}(\mathbf{RP})$**  clearly converges in both cases (see Fig. 5 and 6), even if the truncation order  $L = 30$  is insufficient to see  $e_{\max}(\mathbf{RP}) < 16 \mu\text{s}$  on the original mesh. Moreover, it converges more quickly when the number of points used for reconstruction decreases, as predicted by theory.

**Interpolation error on 5 Mesh:** In Fig. 5,  $e(\mathbf{IP})$  generally follows the conditioning of the matrix, with some exceptions. We find that the larger the hole, the poorer the interpolated values in the hole. Indeed, the interpolation over the hole does not correspond to reality, but to the model that we have imposed by the Tikhonov regularization in Eq. (7).

**Interpolation error on 15 Mesh:** In Fig. 6,  $e(\mathbf{IP})$  is the combination of errors generated by the hole, as well as errors generated by the data surrounded by points of reconstruction. It appears that the error generated by the hole is still present, but it is compensated by the accuracy of the interpolation in the area where measurements exist. So, even if  $e_{\max}(\mathbf{IP})$  does not converge,  $e_{\text{mean}}(\mathbf{IP})$  is rather good at  $L \sim 18$ . We therefore use this value in the following section.

#### 4. ITD INDIVIDUALIZATION VIA PCA

In considering the ITD as a simple single valued function at any given point in space (ITD as a function of frequency is not considered in this initial study) it can be imagined that it would be possible to predict the ITD for an individual given sufficient morphological information. This phase of the study concerns the prediction of approximate ITD values using a limited number of morphological parameters and statistical analysis of an HRTF/morphological database.

##### 4.1 PCA

Principal Component Analysis (PCA) is a powerful statistical tool that uses an orthogonal transformation to convert a set of observations of possibly correlated variables into a set of values of uncorrelated variables called principal components, hierarchically ordered. This procedure can be used to reduce the complexity of datasets while finding commonalities across observations.

Using the publicly available Listen HRTF dataset [9], the ITD of each individual in the dataset was calculated. This dataset (at the time of this study) contained HRIRs for 51 individuals, sampled at 187 positions from  $-45^\circ$  to  $+90^\circ$  in elevation, with sampling spacing of approximately  $15^\circ$  in azimuth and elevation. The ITD was estimated using the same method described in Sec. 3.

Applying the PCA analysis to this set of ITD results in the generation of a series of spatial basis functions and associated scalar weightings for each individual, which when recombined allow for the reconstruction of the original dataset. The first three PCA components, or spatial functions, are shown in Fig. 7. These functions have a value range of  $\sim \pm 2$ . Their contributions to the reconstructed ITD can be examined by values of the associated weighting functions. The corresponding three individual weighting functions have respective means(standard deviations) of  $357.5(16.7)$ ,  $-0.13(22.8)$ , and  $0.13(18.1)$  for an ITD in  $\mu\text{s}$ . Visual inspection of these results highlights that the first component contains the primary and fundamental information associated with the ITD, clearly defining variations with respect to the median plane, with extreme values being near the extreme azimuthal positions. The second and third components appear to offer refinements in the ITD spatial function along either the generalized front/back or up/down directions. The mean error in the reconstructed ITD over all subjects and positions using only these three PCA components was  $-0.75 \pm 25.52 \mu\text{s}$ , with the mean unsigned error being  $16.47 \pm 19.51 \mu\text{s}$ .

Overall, the reconstructed ITD results via PCA are within the perceptual error limits described previously, though there is some degree of variation that extends beyond these limits. Inspection of the estimated ITD from measurements highlights some variations which are possibly due to individual subject errors. The goal of the PCA method is to provide a *generalized* solution to an ITD prediction method, and therefore some error may exist for a given individual. If, for example, there are any anomalies in the measurement results for an individual, at some given position, the PCA reconstruction will act as a form of smoothing, removing this anomaly (unless it is present in all subjects). As such, the calculated error could be high, while the actual perceived error for the subject could be lower, if not even improved with respect to the measurements.

##### 4.2 Morphological prediction

In addition to the measured HRIR data, the Listen database [9] also included morphological data measured on the various subjects following the parameters defined in the CIPIC database [17]. Using the available morphological parameters, the individual weights are predicted using a directed linear regression analysis technique. Of the 51 subjects in the database, 38 subjects had sufficient associated head and torso morphological data (parameters relative to the pinnae morphology were not included).

The procedure consisted of calculating the best linear regression fit using all available morphological

data (using the MatLab function *robustfit*). From these first results, those parameters whose contribution was judged to be relevant to the prediction ( $p$ -value  $< 0.15$ ) were retained and the robust regression was recalculated with only these select parameters. This procedure was performed for the three sets of individual weights. Results showed that the morphological parameters that were most correlated with the different weights, and therefore identified as contributing to the respective spatial functions were:

- PCA 1: *Head\_Circumference\_x16* and *Shoulder\_Circumference\_x17*,
- PCA 2: *Head\_Depth\_x3* and *Torso\_Top\_Width\_x9*,
- PCA 3: *Head\_Depth\_x3*, *Pinna\_Offset\_Back\_x5*, *Neck\_Width\_x6*, and *Neck\_Height\_x7*.

Correlations of the resulting prediction models to the computed PCA weighting function resulted in values of 0.86, 0.34, and 0.50 for the three functions respectively. The prediction model for the first and primary principal component performs well, requiring only two simple parameters which seem relevant to the acoustics inherent in the ITD. The second component, associated with front/back variations, presents the poorest performance. The third component performs moderately, with several additional parameters. These results, combined with the presence of somewhat unexpected morphological parameters such as neck height, may be indicative of the difficulty in obtaining reliable values for the more “obvious” parameters. We note that while the CIPIC protocol presents numerous measures, the precise definitions are not apparent when applied to real-world individuals. As such, parameters such as head depth, or ear offset, may exhibit more variability due to experimenter protocol which may render the results less pertinent. At the same time, simpler to measure parameters, such as those relating to the neck and torso, while not having obvious acoustical impact may be anatomically correlated to the more difficult to measure parameters.

The mean error across all participating subjects was  $-0.63 \pm 37.56 \mu\text{s}$ , with the mean unsigned error being  $28.04 \pm 25.00 \mu\text{s}$ , slightly higher but still quite comparable to the results for the PCA reconstruction. Mean results over subjects of a correlation analysis between the overall estimated ITD and both the PCA decomposition and the PCA reconstruction using the morphological predictions for the individual weighting functions are equal to 0.99.

### 4.3 Spherical harmonics applied to PCA ITD

The goal of the application of a spherical harmonic decomposition to the proposed ITD prediction method is to improve the interpolation of ITD values far from those points in the measured dataset. The main advantage of this method over linear interpolation is that it is a global interpolation, not local. Moreover, it is particularly suited to the spherical distribution of data, which is generally the case for measurements of HRIR. Finally, the Tikhonov regularization provides a smoothing of interpolated values, controllable by the matrix regularization. This can impose some desired properties on the solution sought. Using the results from Sec. 3, spatial decomposition of the three PCA spatial functions has been performed with the order limits determined according to the spatial resolution and spatial distribution corresponding to the Listen measurement dataset (roughly  $15^\circ$  spacing with no data below  $-45^\circ$  elevation). This corresponds to a model order of  $\mathbf{L} = 18$ , as determined in the previous section.

The ITD prediction process for the simple PCA recomposition (Sec. 4.1) and the recomposition using PCA and the morphological model for the PCA weighting functions (Sec. 4.2) was repeated using the reconstructed three PCA basis functions using spherical harmonics. The mean error relative to the measured ITD across all subjects and positions for the PCA reconstruction using the spherical harmonic decomposition was found to be  $-0.78 \pm 25.81 \mu\text{s}$ , with the unsigned mean error being  $16.59 \pm 19.78 \mu\text{s}$ , almost identical to the results for the pure PCA reconstruction. The mean error for the ITD reconstructed using the morphological method for individual weighting functions was  $-0.66 \pm 37.74 \mu\text{s}$ , with the mean unsigned error being  $28.23 \pm 25.06 \mu\text{s}$ . These results show little to no degradation due to the spherical harmonic decomposition of the PCA basis functions.

A more detailed analysis of the error is provided as a function of azimuth angle in Fig. 8. Results show good performance for the proposed method for azimuths near the median plane, while errors for azimuths approaching the interaural axis exhibited the largest errors, with the maximum errors a lateral angle of  $105^\circ$ . This region offers a variety of difficulties in ITD analysis, which are beyond the scope of this paper.

The results here suggest that for the majority of potential source positions, using the spherical harmonic decomposition of the PCA model combined with the morphological model for the individual weighting functions provides an architecture for the prediction of individual ITD values for any desired source position. The errors are typically below  $20 \mu\text{s}$ , near the

approximate JND limit of 16  $\mu$ s. While some variations beyond this limit are observed, it remains to be verified if these errors are actually perceptible.

## 5. CONCLUSION

The decomposition of ITD using PCA resulted in the first three components offering spatial variations which present variations relevant to physical interpretations. Correlations of weighting functions for PCA components with individual morphological data showed high correlations with physically relevant parameters. While the determination of *high* relevance of some parameters was not always obvious, variability and difficulty in the measurement of some of the finer parameters may explain their absence in the statistical results, and biological correlations between indirect measurements may offer justification for these final results.

Otherwise, results for the morphological prediction of PCA weighting functions are encouraging. While not perfect, the proposed method offers a new approach for addressing the need for individualized HRTF data (currently only addressing the ITD) in the case when actual measured data for the individual is not available.

As a final evaluation of the proposed methodology, the ITD estimate based on the morphology of the KEMAR mannequin has to be compared to the corresponding measured ITD. As this measured ITD employed a finer resolution spatial grid over the entire sphere, the accuracy of the predicted ITD should be compared both at intermediate positions relative to the Listen measurement grid for which the PCA basis functions were calculated, as well as at lower elevations where the Listen dataset had no data. Our results for spherical harmonic interpolation are a significant step towards achieving this in the near future.

Finally, additional studies should be carried out concerning the perceptual validation of the method with regards to prediction errors, as well as interpolation errors.

## ACKNOWLEDGMENTS

This work was performed in the context of a CIFRE industry-linked research funding program with Digital Media Solutions (DMS). The authors would like to thank both Gaëtan Parseihian, LIMSI-CNRS, for his assistance, and IRCAM for use of their measurement facilities, regarding the acquisition of the KEMAR HRTF. Finally, thanks to Omnihead (<http://www.univ->

[breast.fr/mstis/omnihead/accueil.htm](http://breast.fr/mstis/omnihead/accueil.htm)) for the use of their KEMAR dummy head.

## REFERENCES

- [1] M. Bruneau. *Introduction aux Théories de l'Acoustique*. Université du Maine, Le Mans, France - 1983.
- [2] R. Duraiswami, D. Zotkin, and N. Gumerov. *Interpolation and range extrapolation of HRTFs*. In IEEE ICASSP'04, pages IV45–IV48, Montreal, Canada - 2004.
- [3] N. A. Gumerov, A. O'Donovan, R. Duraiswami, and D. N. Zotkin. *Computation of the head-related transfer function via the fast multipole accelerated boundary element method and its representation via the spherical harmonic spectrum*. Technical Report CS-TR-4936 (also UMIACSTR-2009-06), Department of Computer Science, University of Maryland, College Park - 2009.
- [4] V. Larcher. *Techniques de spatialisation des sons pour la réalité virtuelle*. PhD thesis - 2001.
- [5] B.F.G Katz and G. Parseihian. *Perceptually based head-related transfer function database optimization*. Journal of the Acoustical Society of America, vol. 131(2), pp. EL99-EL105 - 2012.
- [6] B.F.G. Katz. *Boundary element method calculation of individual head-related transfer function. I. Rigid model calculation*. Journal of the Acoustical Society of America, vol. 110 (5), pp. 2440-2448 - 2001.
- [7] D. Schönstein and B.F.G. Katz. *HRTF selection for binaural synthesis from a database using morphological parameters*. Proc. 20th International Congress on Acoustics (ICA), Sydney - 2010.
- [8] Y. Iwaya. *Individualization of head-related transfer functions with tournament-style listening test: Listening with other's ears*. Acoustical Science and Technology, 27(6):340–343 - 2006.
- [9] IRCAM Listen HRTF database. <http://recherche.ircam.fr/equipements/salles/listen/> (date last viewed 10/28/11).

- [10] A. Laborie, R. Bruno, and S. Montoya. *A New Comprehensive Approach of Surround Sound Recording*. AES 114th Convention, Amsterdam - 2003.
- [11] K.-V. Nguyen, T. Carpentier, M. Noisternig, and O. Warusfel. *Calculation of head related transfer functions in the proximity region using spherical harmonics decomposition : Comparaison with the measurements and evaluation*. Proc of the 2nd Int. Sym. on Ambisonics and Spherical Acoustics - 2010.
- [12] J.C Nédélec. *Acoustics and Electromagnetic equations. Integral representations for harmonic problems*. Applied Mathematics Science, 144, Springer Verlag, New-York - 2001.
- [13] D. N. Zotkin, R. Duraiswami, and N. A. Gumerov. *Regularized HRTF fitting using spherical harmonics*. Proceedings of the 2009 IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, pp. 257–260 - 2009.
- [14] J. Blauert. *Spatial Hearing*. MIT Press, Cambridge - 1996.
- [15] D.J. Kistler and F.L. Wightman. *A model of head-related transfer functions based on principal components analysis and minimum-phase reconstruction*. Journal of the Acoustical Society of America, Vol 91(3), pp. 1637–1647 - 1992.
- [16] P. Minnaar, J. Plogsties, S.K. Olesen, F. Christensen and H. Møller. *The Interaural Time Difference in Binaural Synthesis*. In Proceedings 108th Convention of the Audio Engineering Society, Paris, France, preprint 5133 - 2000.
- [17] V.R. Algazi, R.O. Duda, D.M. Thompson and C. Avendano. *The CIPIC HRTF database*. Proceedings of the IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, 99–102 (New Platz, NY) - 2001.
- [18] P. Fausti and A. Farina. *Acoustic measurements in opera houses: comparison between different techniques and equipment*. J. Sound Vib. 232, 213–229 - 2000.

FIGURES

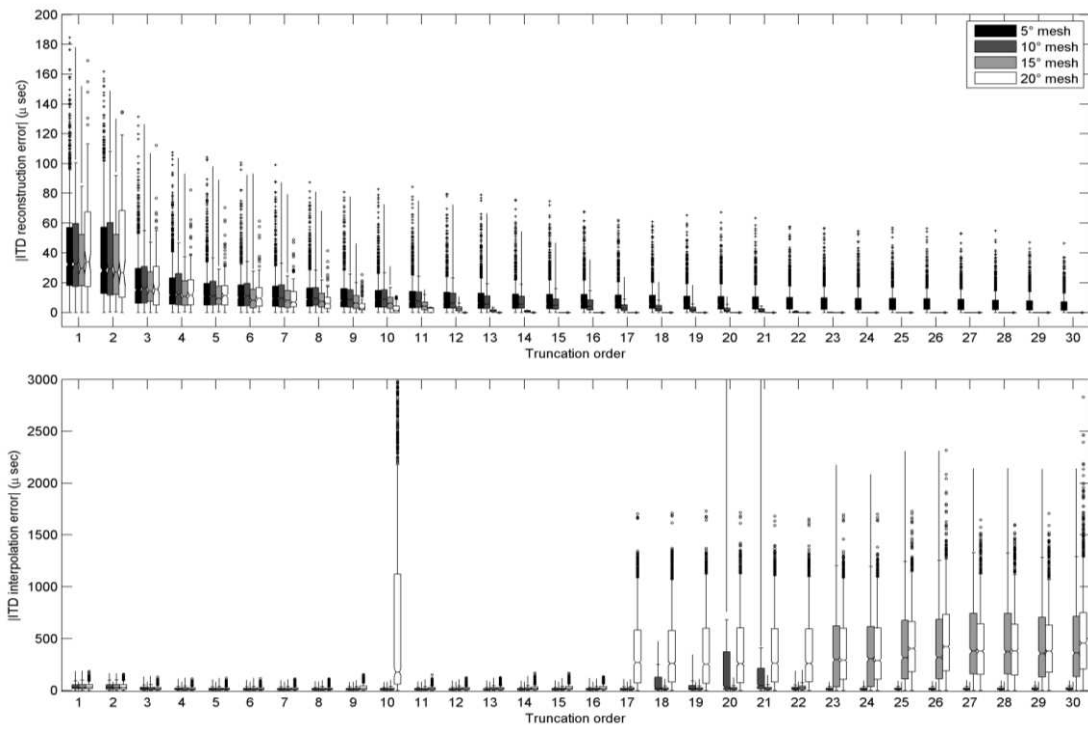


Figure 3 - Absolute error of reconstruction  $e(RP)$  (top) and interpolation  $e(IP)$  (bottom) on the full sphere, without Tikhonov regularization.

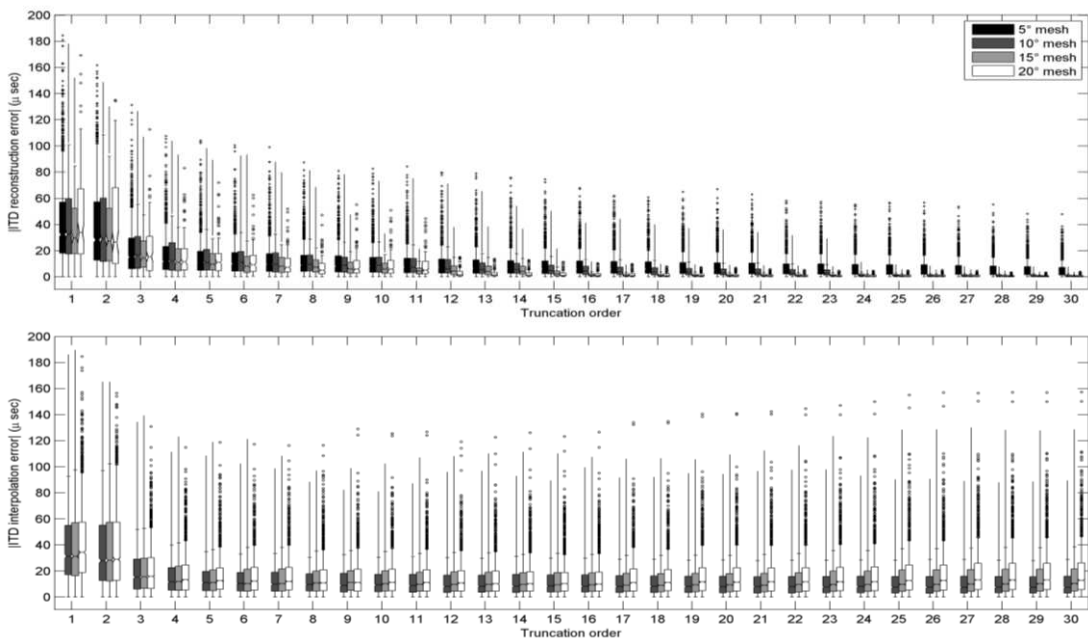


Figure 4 - Absolute error of reconstruction  $e(RP)$  (top) and interpolation  $e(IP)$  (bottom) on the full sphere, after Tikhonov regularization.



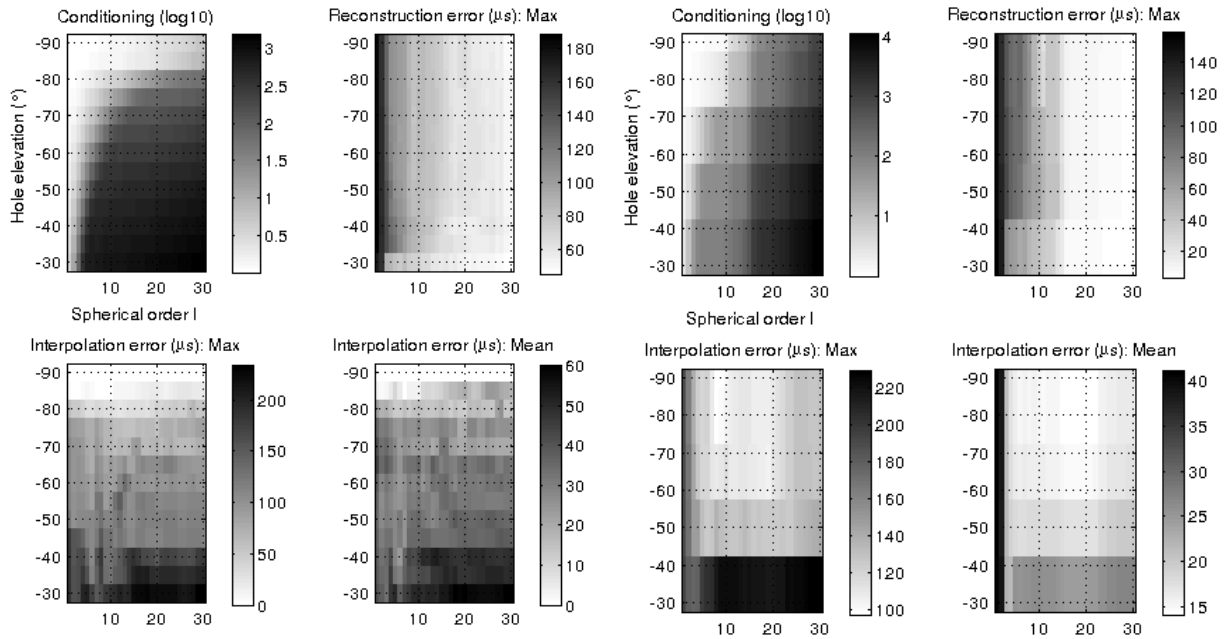


Figure 5 - Errors due to a data hole on the original mesh (5°), as a function of truncation order L and hole elevation.

Figure 6 - Errors due to a data hole on a coarse mesh (15°), as a function of truncation order L and hole elevation.

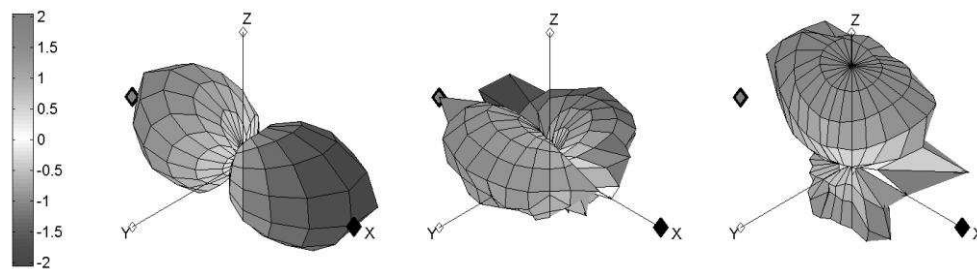


Figure 7 - First three PCA components for ITD reconstruction, from left to right.

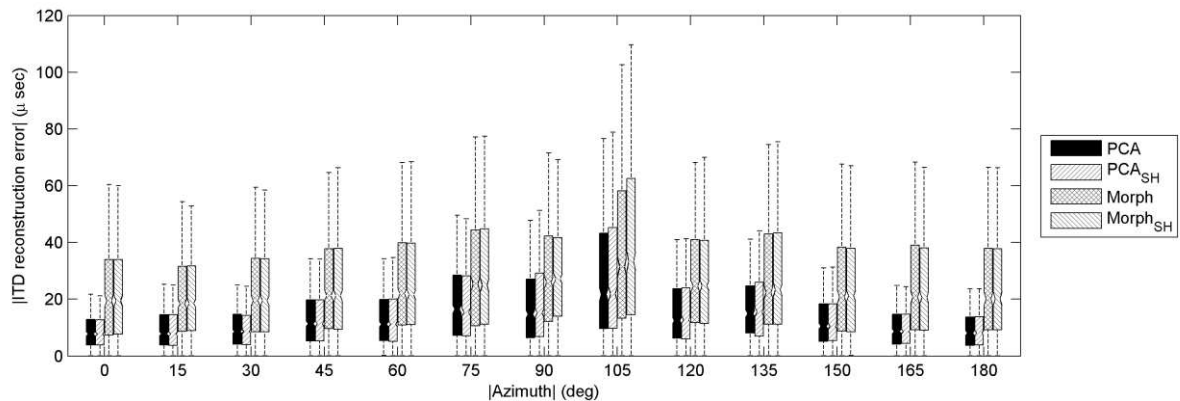


Figure 8 - Boxplots of unsigned errors in ITD reconstruction relative to measured data over all subjects vs. azimuth angle magnitude: direct reconstructions (PCA), and reconstructions using morphologically predicted individual weighting function (Morph) using the original PCA basis function or spherical harmonic (SH) decompositions of the PCA basis functions.