



HAL
open science

Adjonction cohérente itérative de photons pour la génération d'états quantiques mésoscopiques du champ électromagnétique

Jean Etesse

► **To cite this version:**

Jean Etesse. Adjonction cohérente itérative de photons pour la génération d'états quantiques mésoscopiques du champ électromagnétique. Optique [physics.optics]. Institut d'Optique Graduate School, 2014. Français. NNT : 2014IOTA0016 . tel-01126991

HAL Id: tel-01126991

<https://pastel.hal.science/tel-01126991>

Submitted on 6 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT D'OPTIQUE GRADUATE SCHOOL

ÉCOLE DOCTORALE ONDES ET MATIERE

PHYSIQUE

THÈSE

**pour l'obtention du grade de Docteur en Sciences de
l'Institut d'Optique Graduate School**
préparée au Laboratoire Charles Fabry

soutenue le 12/12/2014

par

Jean ETESSE

Adjonction cohérente itérative de photons pour la génération
d'états quantiques mésoscopiques du champ
électromagnétique

Composition du jury :

<i>Président du jury :</i>	Claude FABRE	–	Laboratoire Kastler Brossel, Université Paris 6
<i>Rapporteurs :</i>	Nicolas CERF	–	Ecole Polytechnique de Bruxelles, Belgique
	Sébastien TANZILLI	–	Laboratoire de Physique de la Matière Condensée, Université Nice Sophia Antipolis
<i>Examineur :</i>	Manuel JOFFRE	–	Laboratoire d'Optique et Biosciences, Palaiseau
<i>Directrice de thèse :</i>	Rosa TUALLE-BROURI	–	Laboratoire Charles Fabry, Palaiseau

Remerciements

Un travail de thèse en physique n'est jamais l'œuvre d'un individu isolé, et c'est pourquoi j'aimerais remercier l'ensemble des personnes avec lesquelles j'ai pu interagir durant ces trois années.

Mes premiers remerciements vont à ma directrice de thèse Rosa Tualle-Brouri, pour m'avoir accueilli à bras ouverts dans cette aventure, et pour m'avoir permis de travailler dans les meilleures conditions possibles, et ce quelles que soient les circonstances et les moyens disponibles. Les nombreux échanges que nous avons pu avoir tout au long de ce travail m'ont donné une vision humaine de la recherche qui m'a énormément appris.

Je tiens en second lieu à remercier Marco Barbieri et Rémi Blandino pour m'avoir transmis leur savoir-faire expérimental et théorique de l'expérience, qui m'ont permis d'obtenir les résultats présentés dans ce manuscrit. L'héritage des codes et routines implémentés par Franck Ferreyrol a également permis un gain de temps considérable. Merci également à Bhaskar Kanseri et Martin Bouillard, qui prennent la relève sur la manip : travailler ensemble a été un réel plaisir.

Merci également à tous les permanents du groupe d'Optique Quantique, Philippe Grangier, Antoine Browaeys, Yvan Sortais, Thierry Lahaye, Alexei Ourjoumstev, Florence Nogrette et Gaëtan Messin. Merci ensuite à tous les doctorants et post-doctorants présents ou passés avec lesquels j'ai pu interagir durant ces trois années : Charles Evellin, Joseph Pellegrino, Ronan Bourgain, Erwan Bimbard, Radu Chicireanu, Andreas Fuhrmanek, Daniel Barredo, Sylvain Ravets, Henning Labuhn, Lucas Béguin, Aline Vernier, Stephan Jennewein, Imam Usmani. Travailler dans la bonne humeur n'a jamais été une corvée durant ces trois ans.

Ensuite, je voudrais remercier l'ensemble du personnel administratif et technique de l'Institut d'Optique avec qui j'ai pu interagir ou qui a œuvré dans l'ombre pour que cette thèse se déroule dans les meilleures conditions possibles.

Grâce à la passion qu'ils ont pu me transmettre, je voudrais également remercier les professeurs que j'ai pu rencontrer au cours de ma scolarité, quels qu'ils soient. Leur travail, qui n'est à mon goût pas suffisamment apprécié à sa juste valeur, marque l'existence d'une personne et forge son avenir. J'aimerais en particulier remercier Mr Michel et Mr Bouveron pour m'avoir transmis la fibre de la physique.

J'ai également une pensée émue pour Antonello De Martino, qui a été mon professeur à l'X et avec lequel j'ai travaillé lors de mes enseignements au TREX et qui a perdu son combat face à la maladie cette année. Son approche unique de l'enseignement expérimental et son enthousiasme resteront une source d'inspiration pour moi.

Je voudrais ensuite remercier mes parents : si j'en suis arrivé là aujourd'hui, c'est grâce à eux. Ils m'ont transmis le goût de la compréhension, de la transmission du savoir, de la rigueur théorique et de la manipulation expérimentale. Ils m'ont enseigné le fait qu'aussi difficile que soit le col à franchir, le plus important est de se concentrer sur "la roue du vélo" et de faire preuve de ténacité, qualité indispensable d'un bon expérimentateur.

Enfin, je voudrais remercier Sophie d'avoir été auprès de moi durant ces années, pour son soutien inconditionnel lors de cette thèse, que ce soit dans les meilleurs moments comme dans les plus difficiles.

Je ne mesurerai jamais assez la chance que j'ai.

Table des matières

Introduction	1
I Outils pour l'Optique Quantique	5
1 Outils théoriques	7
1.1 Quantification du champ électromagnétique	7
1.1.1 Quantification dans un volume cubique fini $V = L^3$	8
1.1.2 Cas d'un volume infini	9
1.2 Description et représentation des états de la lumière	10
1.2.1 Description "discrète"	10
1.2.2 Description continue	12
1.2.3 Complémentarité des deux descriptions	15
1.3 Transformations unitaires du champ	16
1.3.1 Optique linéaire	16
1.3.2 Optique non linéaire	18
1.3.3 Transformations des fonctions de Wigner	19
1.4 Les états quantiques usuels	20
1.4.1 Etats gaussiens	20
1.4.2 Etats non gaussiens	25
1.5 Reconstruction des états par tomographie	28
1.5.1 Principe de la mesure homodyne	28
1.5.2 Reconstruction de la fonction de Wigner	29
1.6 Conclusion	32
2 Outils expérimentaux	33
2.1 La source laser	34
2.1.1 Principe de fonctionnement d'un laser impulsionnel	34
2.1.2 Configuration femtoseconde	37
2.1.3 Configuration picoseconde	38
2.2 Génération de seconde harmonique	38
2.2.1 Paramètres de génération	39
2.2.2 Propriétés spectro-temporelles	42
2.2.3 Absorption à deux photons	42
2.3 Génération d'états paramétriques	43
2.3.1 Configuration dégénérée	44
2.3.2 Configuration non dégénérée	44
2.3.3 Modélisation des imperfections	45
2.4 Détections et mesures projectives	46

TABLE DES MATIERES

2.4.1	Détection de photons	46
2.4.2	Détection homodyne	48
2.4.3	Acquisition	52
2.5	Le photon unique	52
2.5.1	Principe de génération	53
2.5.2	Etat théorique attendu	53
2.5.3	Estimation des paramètres	54
2.5.4	Photon produit	55
2.6	Conclusion	55
 II Croissance expérimentale d'états "Chats de Schrödinger"		57
 3 Améliorations du protocole expérimental		59
3.1	Stabilisation et diagnostics laser	60
3.1.1	Stabilisation du pointé laser	61
3.1.2	Diagnostic et correction du profil spatial	62
3.1.3	Diagnostic de puissance	62
3.1.4	Diagnostic spectro-temporel	63
3.2	Amplification par dérive de fréquence	64
3.2.1	Montage expérimental	64
3.2.2	Principe	64
3.2.3	Résultats	67
3.2.4	Discussion de l'implémentation effective	68
3.2.5	Un dispositif plus stable, pour des caractéristiques reproductibles	69
3.3	Caractérisation des imperfections de génération OPA	69
3.3.1	Analyse théorique	69
3.3.2	Mesure expérimentale des gains paramétriques	72
3.3.3	Simulation de l'influence des paramètres d'imperfections	75
3.3.4	Caractérisation expérimentale des sources d'imperfections	77
3.3.5	Choix de la configuration d'amplification	80
3.4	Modification du montage homodyne	81
3.4.1	Montage optique	81
3.4.2	Contraste d'interférence	82
3.5	Caractérisation des améliorations par les photons uniques	84
3.6	Conclusion	86
 4 Croissance d'états chats : réalisation expérimentale		87
4.1	Introduction	87
4.2	But de l'expérience	88
4.2.1	Principe	88
4.2.2	Etat produit	89
4.3	Modèle théorique	89
4.3.1	Modèle bimode	90
4.3.2	Fonctions de Wigner conditionnées	91
4.4	Mise en œuvre expérimentale	93
4.4.1	Nécessité d'un contrôle de phase	94
4.4.2	Montage expérimental	99
4.5	Résultats expérimentaux	99
4.5.1	Expérience à un photon	101

4.5.2	Expérience à deux photons	104
4.6	Conclusion et perspectives	110
III Ingénierie quantique pour une violation des inégalités de Bell		113
5	Croissance d'états arbitraires par adjonction cohérente de photons	115
5.1	Introduction	116
5.1.1	Protocoles de génération existants	116
5.1.2	Nécessité d'une approche itérative	117
5.2	Le protocole d'adjonction	117
5.2.1	Idée de base du protocole	117
5.2.2	Application à la génération de superpositions arbitraires	118
5.2.3	Structuration du dispositif	119
5.2.4	Expression des équations à résoudre dans la configuration linéaire	122
5.2.5	Effet sur les fonctions d'ondes : gaussianisation locale	123
5.3	Performances du protocole	125
5.3.1	Exemples d'utilisation	125
5.3.2	Probabilité de succès du conditionnement	127
5.3.3	Influence des imperfections des photons d'entrée	130
5.3.4	Influence des inefficacités de détections	131
5.4	Génération et croissance d'états "Chats de Schrödinger" comprimés	132
5.4.1	Motivations : dispositif déjà proposé	132
5.4.2	Principe du nouveau protocole	133
5.4.3	Calcul de l'état de sortie	135
5.4.4	Performances du protocole	136
5.5	Génération d'états "Chats multipattes"	142
5.5.1	Définition mathématique	142
5.5.2	Croissance du nombre de pattes	143
5.5.3	Généralisation	144
5.6	Génération et croissance d'états "Peignes en quadrature"	145
5.6.1	Historique	145
5.6.2	Définition mathématique	147
5.6.3	Génération et croissance de peignes	148
5.6.4	Performances du protocole	152
5.7	Conclusion	153
6	Violation des inégalités de Bell sans échappatoire avec des <i>peignes en quadrature</i>	155
6.1	Formulation et état de l'art des tests de Bell	156
6.1.1	Les inégalités de Bell	156
6.1.2	L'état de l'art expérimental	159
6.2	Le protocole [Wenger 03]	162
6.2.1	Etats utilisés	162
6.2.2	Binarisation par signe	163
6.2.3	Calcul de la fonction S	163
6.3	Application du protocole [Wenger 03] aux <i>chats à quatre pattes</i>	164
6.3.1	Génération	164
6.3.2	Etat intriqué produit	166
6.3.3	Fonction S de Bell	167

TABLE DES MATIERES

6.3.4	Violation	169
6.4	Application du protocole [Wenger 03] aux <i>peignes en quadrature</i>	170
6.4.1	Génération d'états peignes alternés intriqués	171
6.4.2	Résultats de violation	175
6.5	Conclusion	178
Conclusion		179
IV Annexes		183
A Méthodes pour la simulation numérique		185
A.1	Généralités	185
A.2	Deux opérations triviales	186
A.2.1	Squeezing	186
A.2.2	Distributions de probabilités	186
A.3	Utilisation de la FFT	187
A.3.1	Principe de la transformation : description hybride analytico-numérique	187
A.3.2	Problème concret d'implémentation	187
A.4	Autres transformations	188
A.4.1	La lame 50:50 avec conditionnement sur un bras	188
A.4.2	Modélisation de pertes arbitraires	190
A.4.3	Soustraction de photon	191
A.5	Application à la simulation du protocole de la figure 6.8	191
A.5.1	Génération des états requis	191
A.5.2	Formation de l'état intriqué bimode	191
A.5.3	Première détermination des zones de binarisation	193
A.5.4	Calcul de la fonction de Bell	193
A.6	Code possible pour l'implémentation de l'équation (A.18)	193
B Gaussianisation d'une fonction par croissance		197
B.1	Hypothèses	197
B.2	Exemples	197
B.3	Résultats	199
B.4	Preuve	199
B.4.1	Convergence simple	199
B.4.2	Convergence en norme L^2	200
C Influence de l'efficacité de détection dans les protocoles de croissances		205
C.1	Expression mathématique de la transformation	205
C.2	Forme de la fenêtre de conditionnement	206
D Calcul explicite de la fonction de Wigner pour une fenêtre gaussienne		209
D.1	Hypothèses de calcul	209
D.2	Récurrence	210
E Protocole de violation des inégalités de Bell par mesures hybrides		213
E.1	Modèle théorique pour la simulation du protocole [Brask 12]	213
E.1.1	Etat utilisé pour la violation	213
E.1.2	Mesures effectuées et définition d'une fonction S de Bell	213

E.1.3	Prise en compte des imperfections de l'état et des détections	216
E.2	Violations en fonction des paramètres expérimentaux	220
F	Mélange de peignes sur une lame 50:50	223
G	Expression de la distribution bimode de probabilité dans le cas général dépendant de la phase	225
H	Calcul de l'amplification double passage	229
H.1	Expression de l'évolution de l'inversion de population en l'absence de signal . . .	229
H.1.1	Taux de pompage	229
H.1.2	Etablissement de la formule du gain	230
H.2	Inversion de population en présence de signal	231
H.2.1	Deux passages uniques dans le cristal	231
H.2.2	Prise en compte du taux de répétition	233
I	Liste des publications	235
	Bibliographie	247

Introduction

Lorsqu'il évoque au cours d'une conférence en 1900 le fait que "*La beauté et la clarté de la théorie dynamique, [...], est à présent obscurcie par deux nuages*" à propos de l'entraînement de l'éther et du rayonnement du corps noir, Thomson est loin de se douter que ces nuages annoncent en réalité deux véritables ouragans. Avec les formulations respectives de la relativité d'Einstein et de la quantification de Planck, c'est une réelle révolution de la physique qui s'est opérée au XX^e siècle pour l'explication de ces phénomènes à l'époque inconnus. Notre vision du monde a ainsi été largement modifiée par ces théories souvent contre-intuitives et totalement novatrices. Parmi les très nombreuses applications qui ont pu être développées grâce à ces théories, on peut citer l'invention du laser, des horloges atomiques, de l'IRM et du GPS.

Ces révolutions ont également été conceptuelles en ce sens qu'elles ont imposé l'adoption de principes totalement nouveaux et absents de notre expérience du monde à notre échelle. Pour n'en citer qu'un, un exemple frappant en physique quantique est celui de la *superposition quantique*, permettant à un système physique d'être dans plusieurs états *à la fois*. Bien entendu, ces propriétés ont été longtemps sujettes à débats, et Einstein lui-même réfutait l'idée d'un monde non-déterministe : "*Gott würfelt nicht*" ("*Dieu ne joue pas aux dés*", phrase prononcée lors du congrès de Solvay de 1927). Néanmoins, permettant l'explication de nombreux phénomènes physiques et n'entrant jusqu'à présent en contradiction avec aucune observation expérimentale, la physique quantique a su faire ses preuves : domaine de recherche très actif, elle a permis de jeter un regard nouveau sur de nombreux sujets allant de la physique de la matière condensée à la biologie en passant par la chimie, la physique des particules ou la physique atomique, parmi beaucoup d'autres.

Les ressources propres à ce domaine ont également ouvert la voie à de nouvelles disciplines. Les notions d'intrication, d'incertitude ou de superposition, chacune propre à la physique quantique, ont en effet donné naissance à des conceptions nouvelles en terme de télécommunications, de tests fondamentaux ou de simulations. L'une des disciplines les plus prometteuses pour les applications à long terme est probablement celle de l'information quantique, où l'idée générale est de mettre à profit les propriétés spécifiques aux systèmes quantiques en vue de réaliser des opérations de calcul ou de communication plus efficaces ou sécurisées qu'avec des systèmes classiques. Deux grandes branches de l'information quantique méritent d'être mentionnées.

La première, la cryptographie quantique, tire profit des incertitudes de mesure purement quantiques afin de garantir la sécurité d'un transfert d'information [Bennett 84, Bennett 92] par le biais d'une clé secrète (traditionnellement entre deux interlocuteurs Alice et Bob). Par une série de mesures adaptées et le concours d'un canal classique non sécurisé, les interlocuteurs peuvent détecter la présence d'un espion sur leur ligne et décider ou non d'effectuer le transfert d'information. A l'heure actuelle, ce type de protocole est sorti des laboratoires, et des systèmes sont même commercialisés [Seq , IDQ].

La seconde branche, le calcul quantique, utilise les superpositions quantiques d'un système afin de pouvoir implémenter des algorithmes plus efficaces que ceux utilisant des ressources clas-

INTRODUCTION

siques [Shor 97, Grover 97]. L'idée sous-jacente est le développement de l'ordinateur quantique [Ladd 10], sorte de super-calculateur capable de surpasser les ordinateurs actuels pour certains types de calculs : là où les ordinateurs classiques se contentent d'utiliser des *bits* d'information pouvant valoir 0 ou 1, l'ordinateur quantique tire parti de la superposition, afin d'utiliser des *qubits*, pouvant se trouver à la fois dans les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (1)$$

où α et β sont des nombres complexes tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Par exemple, un ordinateur quantique serait capable de "pirater" la sécurité des codes de carte bleue en un temps exponentiellement plus court qu'un ordinateur classique, dont le temps de calcul actuellement requis est suffisamment long à l'échelle de la vie humaine pour être considéré comme infini. Ce type d'ordinateurs pourrait de plus permettre, de part sa puissance, de simuler des situations complexes du réel : on parle alors de simulateur quantique, dont le concept a été pour la première fois mentionné par Richard Feynman [Feynman 82].

Par ailleurs il est nécessaire, tout comme dans un ordinateur classique, d'être capable de corriger les erreurs qui peuvent être faites au fur et à mesure des calculs, par l'utilisation de *codes correcteurs d'erreurs*. La difficulté qui se rajoute à celle de l'ordinateur classique est que les erreurs ne consistent plus simplement en un retournement de bit :

$$|01101\rangle \longrightarrow |11101\rangle, \quad (2)$$

mais peuvent aussi porter, entre beaucoup d'autres, sur un *déphasage* au sein de la superposition mentionnée précédemment

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \longrightarrow \alpha|0\rangle + e^{i\theta}\beta|1\rangle. \quad (3)$$

Les erreurs peuvent donc être plus complexes, et nécessiter alors des protocoles de correction spécifiques.

Disposer des qubits (1) et de codes correcteurs d'erreurs, ressources de l'ordinateur quantique, est un défi actuel que la communauté scientifique tente de relever à l'aide d'une grande variété de systèmes différents. Parmi ceux-ci, on peut citer les ions, les atomes, les supraconducteurs ou encore les photons. Les trois premiers ont l'avantage d'interagir facilement, et donc de faciliter des opérations à plusieurs qubits. Mais ces interactions facilitées constituent également un inconvénient : les systèmes perdent rapidement leurs propriétés quantiques du fait des processus de *décohérence*.

Les photons, en revanche, sont des systèmes qui interagissent très peu avec l'environnement et se propagent (par définition) à la vitesse de la lumière, ce qui en fait de très bons candidats pour les protocoles de télécommunications quantiques. Plusieurs stratégies peuvent être employées pour coder l'information sur ceux-ci, que l'on peut regrouper en deux grandes catégories : le codage à variables discrètes et le codage à variables continues, où l'on utilise respectivement les degrés de liberté discrets (nombre, polarisation, etc.) ou continus (comme le champ électrique) des photons pour coder l'information du qubit (1). Chaque méthode a ses propres spécificités, mais en règle générale les qubits à variables discrètes de la lumière sont plus simples à produire mais sont également plus sensibles aux imperfections des dispositifs, à l'inverse des qubits à variables continues.

Contexte et objectifs de ce travail

Cette thèse porte sur l'utilisation des degrés de liberté continus de la lumière afin de coder et manipuler l'information quantique. Dans cette approche, plusieurs types de qubits peuvent être

définis, dont les états "Chats de Schrödinger" optiques. Ceux-ci sont une réalisation expérimentale de la célèbre expérience de pensée d'Erwin Schrödinger [Schrödinger 35], et sont composés d'une superposition quantique de deux états cohérents de phase opposée :

$$|\psi_{\text{chat}}\rangle = |\alpha\rangle + |-\alpha\rangle. \quad (4)$$

De la même manière qu'en (1), le qubit $|0\rangle$ est donc simplement codé sur l'état $|\alpha\rangle$ et le qubit $|1\rangle$ est codé sur l'état $|-\alpha\rangle$. L'avantage dans ce cas est la simplicité de génération de chacun de ces deux qubits : avec l'avènement du laser, les états $|\pm\alpha\rangle$ peuvent être produits très simplement. En revanche, la superposition (4) est quant à elle beaucoup plus délicate à former, et des protocoles complexes sont nécessaires à sa production, limitant sa taille à quelques photons, le record expérimental actuel étant de $\alpha = 1.76$ [Gerrits 10]. Cependant, utiliser des chats de grande amplitude présente un fort intérêt en calcul quantique, car la distinction entre les bits $|\alpha\rangle$ et $|-\alpha\rangle$ se fait alors avec une meilleure précision, ceux-ci n'étant pas orthogonaux.

Ce travail propose un nouveau protocole théorique permettant la croissance étape par étape de ces états, par l'utilisation d'un montage simple et expérimentalement disponible. La démonstration expérimentale de sa validité a pu être réalisée dans sa forme la plus simple, ouvrant des perspectives importantes dans le domaine de la croissance expérimentale d'états chats.

Outre ces états chats, l'intérêt du protocole réside dans la possibilité de générer des états totalement arbitraires de la lumière (contenant un nombre fini de photons). Son utilisation permet alors de générer des états qui, en plus de pouvoir servir de codes correcteurs d'erreurs sur les variables continues de la lumière, permettent la réalisation de tests fondamentaux de la mécanique quantique et de contredire l'affirmation d'Einstein citée au début de cette introduction : tout semble en effet pousser à croire que, d'une certaine manière, Dieu jouerait bien aux dés.

Plan de la thèse

Ce manuscrit est divisé en trois grandes parties :

Première partie : Outils pour l'optique quantique

Afin de poser les bases nécessaires à l'élaboration des modèles théoriques et des développements expérimentaux proposés dans ce manuscrit, nous exposerons dans une première partie les différents outils dont nous disposons. Ceux-ci sont de deux types : les outils théoriques et les outils expérimentaux.

Les premiers, détaillés au chapitre 1, nous permettront de faire un bref rappel des différentes descriptions des états de la lumière et des objets de transformations et de mesure existants.

Les seconds, développés dans le chapitre 2, seront l'occasion de réaliser un inventaire des différentes techniques expérimentales dont nous disposons afin de réaliser des expériences d'optique quantique. Dans ce chapitre, nous présenterons également une méthode de génération expérimentale des états de Fock à un photon, qui constitueront les briques élémentaires de protocoles plus complexes étudiés ultérieurement.

Seconde partie : Croissance expérimentale d'états "Chats de Schrödinger"

En tant que ressource primaire (qubit) de protocoles de calcul quantique à variables continues, les états "Chats de Schrödinger" (que l'on a rapidement évoqués en (4)) seront l'objet de la seconde partie, à dominante expérimentale. Dans le chapitre 3, nous nous intéresserons aux différentes méthodes qui ont été mises en place durant cette thèse pour permettre la génération

INTRODUCTION

d'états de Fock à un photon de meilleure qualité et de manière plus reproductible. Pour ce faire, nous avons dû améliorer les paramètres de stabilité de la source laser utilisée, ainsi que les paramètres de génération des photons uniques et les performances des appareils de mesure. Comme ressource d'un protocole que nous introduirons au chapitre 4, nous démontrerons ensuite la possibilité qu'ils offrent de générer expérimentalement des états "Chats de Schrödinger" comprimés en quadrature. La bonne qualité des états que nous avons pu former (61% de fidélité vis-à-vis l'état attendu) permettra de conclure quant à la validité de la méthode.

Troisième partie : Ingénierie quantique pour une violation des inégalités de Bell

Enfin, dans la troisième et dernière partie de ce manuscrit, nous proposerons une généralisation du protocole présenté au chapitre 4 en vue de former des états arbitraires de la lumière (chapitre 5). Cette proposition théorique sera appliquée à la génération d'états "Chats de Schrödinger" de taille arbitraire mais également d'états plus complexes, les états "Peignes en quadrature". Ces états présentent un grand intérêt en calcul quantique de part leur structure particulière, leur permettant de faire office entre autres de codes correcteurs d'erreurs. Toutefois, c'est leur utilisation dans les tests des inégalités de Bell qui retiendra notre attention (chapitre 6). Nous démontrerons qu'ils peuvent mener à des violations arbitrairement proches de la violation maximale :

$$S = 2\sqrt{2} > 2, \quad (5)$$

violation maintenue même pour des efficacités de détection faibles, ouvrant la possibilité de réaliser une violation dite *sans échappatoires* des inégalités de Bell par mesures homodynes.

La figure 1 schématise la succession des états (représentés sous forme de fonction à trois dimensions) que l'on rencontrera au fur et à mesure de ce manuscrit. Nous rencontrerons dans l'ordre l'état cohérent et l'état comprimé au chapitre 2, puis l'état de Fock à un photon aux chapitres 2 et 3, l'état "Chat de Schrödinger" aux chapitres 4 et 5, et enfin l'état "Peigne en quadrature" aux chapitres 5 et 6. Avec nos méthodes expérimentales, chaque état présent sur ce graphique est généré à partir de son voisin de gauche, à l'exception de l'état cohérent (le premier), généré par le laser.

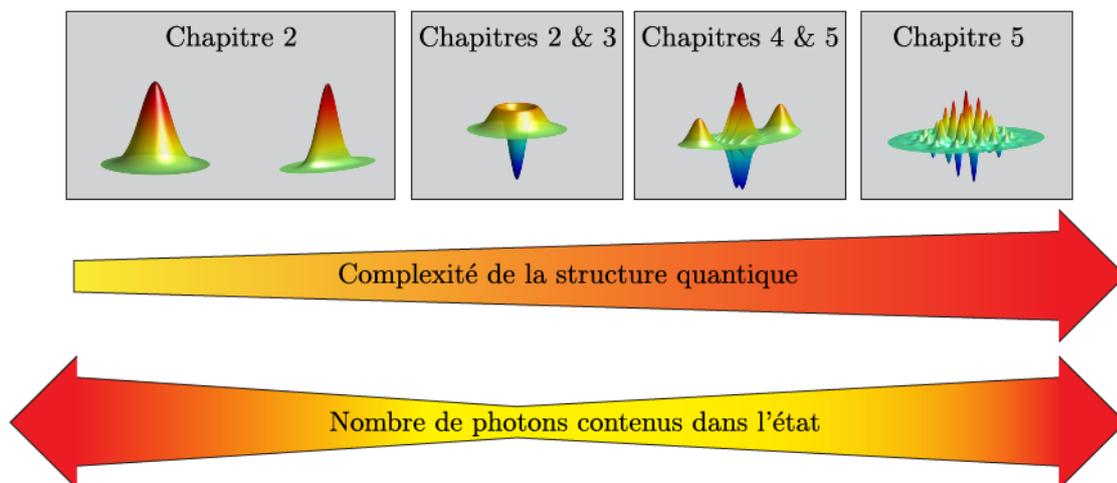


FIGURE 1 – Progression des états que l'on rencontrera tout au long du manuscrit, par ordre de complexité.

Première partie

Outils pour l'Optique Quantique

Chapitre 1

Outils théoriques

Sommaire

1.1	Quantification du champ électromagnétique	7
1.1.1	Quantification dans un volume cubique fini $V = L^3$	8
1.1.2	Cas d'un volume infini	9
1.2	Description et représentation des états de la lumière	10
1.2.1	Description "discrète"	10
1.2.2	Description continue	12
1.2.3	Complémentarité des deux descriptions	15
1.3	Transformations unitaires du champ	16
1.3.1	Optique linéaire	16
1.3.2	Optique non linéaire	18
1.3.3	Transformations des fonctions de Wigner	19
1.4	Les états quantiques usuels	20
1.4.1	Etats gaussiens	20
1.4.2	Etats non gaussiens	25
1.5	Reconstruction des états par tomographie	28
1.5.1	Principe de la mesure homodyne	28
1.5.2	Reconstruction de la fonction de Wigner	29
1.6	Conclusion	32

Nous allons dans ce chapitre présenter les différents outils théoriques dont nous aurons besoin tout au long de ce manuscrit. Après avoir succinctement décrit la procédure de quantification du champ électromagnétique, nous étudierons les transformations élémentaires que celui-ci peut subir, pour ensuite nous pencher sur les différents états quantiques "usuels" de l'optique quantique. Nous finirons par l'étude de la reconstruction des états par tomographie quantique.

1.1 Quantification du champ électromagnétique

Nous allons ici présenter brièvement les grandes étapes qui permettent de réaliser la quantification du champ électromagnétique. Des procédures plus détaillées sont fournies notamment dans [Cohen-Tannoudji 88, Garrison 08], ou encore dans [Grynberg 10].

La procédure générale de quantification nécessite l'utilisation d'équations dynamiques, qui peuvent être en général obtenues à l'aide du Lagrangien [Landau 76]. Celle-ci sera simplifiée ici par l'identification de *variables canoniques conjuguées*, dont l'équivalent quantique sera

immédiat.

Nous partons initialement des égalités de Maxwell dans le vide pour un rayonnement, loin de toutes les sources l'ayant généré. Si $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ (resp. $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$) est le champ électrique (resp. magnétique) au point de l'espace \mathbf{r} à l'instant t , ces égalités s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (1.1d)$$

1.1.1 Quantification dans un volume cubique fini $V = L^3$

Si l'on considère dans un premier temps l'espace borné à un cube de côté L (et que l'espace se répète avec cette périodicité), on peut exprimer le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ en fonction de ses composantes de Fourier discrètes :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \boldsymbol{\varepsilon}_l \sqrt{\frac{\hbar \omega_l}{2\epsilon_0 L^3}} \left[i\alpha_l(t) e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} - i\alpha_l^*(t) e^{-i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} \right], \quad (1.2)$$

où $l = (n_x, n_y, n_z; s)$ regroupe les entiers n_i variant dans \mathbb{Z} et s variant dans $\{1, 2\}$. Cet indice caractérise les différents modes du champ. La discrétisation des modes $(\mathbf{k}_l)_i = 2\pi n_i/L$ est due à l'aspect périodique du champ dans l'espace, ce qui implique que la norme du vecteur \mathbf{k}_l prend elle aussi des valeurs discrètes : $\|\mathbf{k}_l\| = \omega_l/c$. Le vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}_l$ quant à lui représente les deux polarisations orthogonales possibles du champ, qui est transverse d'après (1.1a). Ainsi, à chaque 3-uplet (n_x, n_y, n_z) correspond deux valeurs de s possibles relatives à ces deux directions.

En utilisant le même type d'écriture pour le champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, on peut obtenir une expression découplée de (1.1c) et (1.1d) grâce à l'utilisation de la *variable normale* α_l introduite dans 1.2 :

$$\frac{d\alpha_l}{dt} + i\omega_l \alpha_l = 0. \quad (1.3)$$

En posant $q_l = \sqrt{2\hbar} \Re(\alpha_l)$ et $p_l = \sqrt{2\hbar} \Im(\alpha_l)$, on obtient donc les équations dynamiques :

$$\frac{dq_l}{dt} = \frac{\partial H_l}{\partial p_l} \quad (1.4a)$$

$$\frac{dp_l}{dt} = -\frac{\partial H_l}{\partial q_l}, \quad (1.4b)$$

où $H_l = \hbar\omega_l |\alpha_l|^2$ est l'énergie du mode l , obtenue d'après :

$$H = \sum_l H_l = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3r \left[\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right] = \sum_l \hbar\omega_l (q_l^2 + p_l^2). \quad (1.5)$$

Les équations (1.4) définissent des équations dynamiques pour les variables canoniques conjuguées q_l et p_l . On peut alors procéder à la quantification du champ en définissant deux observables \hat{q}_l et \hat{p}_l obéissant aux relations de commutation :

$$[\hat{q}_l, \hat{p}_{l'}] = i\hbar \delta_{ll'} \quad (1.6a)$$

$$[\hat{q}_l, \hat{q}_{l'}] = [\hat{p}_l, \hat{p}_{l'}] = 0. \quad (1.6b)$$

L'analogie de l'amplitude classique du champ α_l donne alors naissance aux opérateurs d'annihilation \hat{a}_l et de création \hat{a}_l^\dagger , où

$$\hat{a}_l = \frac{\hat{q}_l + i\hat{p}_l}{\sqrt{2\hbar}}, \quad (1.7)$$

obéissants à la relation de commutation bosonique $[\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger] = \delta_{k,l}$. L'Hamiltonien du rayonnement du champ est alors donné par l'analogie de l'équation (1.5) :

$$\hat{H}_{\text{em}} = \sum_l \hbar\omega_l(\hat{q}_l + \hat{p}_l) = \sum_l \hbar\omega_l \left(\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + \frac{1}{2} \right). \quad (1.8)$$

Cet Hamiltonien est celui d'une somme d'oscillateurs harmoniques (voir par exemple [Cohen-Tannoudji 97, Basdevant 08] pour un traitement complet) dont les modes distincts ont pour fréquences propres de pulsation les ω_l . Les excitations sont alors dénombrées grâce à l'observable nombre $\hat{n}_l = \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l$, et porteront ici le nom de photons. Les opérateurs \hat{a}_l et \hat{a}_l^\dagger permettent de détruire ou de créer un photon dans le mode correspondant :

$$\hat{a}_l |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (1.9a)$$

$$\hat{a}_l^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (1.9b)$$

Un second type d'observables \hat{X}_l et \hat{P}_l est défini par :

$$\hat{X}_l = \frac{\hat{q}_l}{\sqrt{\hbar}} \quad (1.10a)$$

$$\hat{P}_l = \frac{\hat{p}_l}{\sqrt{\hbar}}. \quad (1.10b)$$

Ces observables, appelées *quadratures du champ*, sont à la base de la majorité des mesures réalisées dans cette thèse. Nous y reviendrons en détail plus tard.

Définir le champ quantique de ces excitations est également possible :

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \boldsymbol{\varepsilon}_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 L^3}} \left[i\hat{a}_l e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - i\omega_l t} - i\hat{a}_l^\dagger e^{-i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} + i\omega_l t} \right], \quad (1.11)$$

où la quantification a été obtenue à partir de (1.2) et après résolution de (1.3).

1.1.2 Cas d'un volume infini

Dans la pratique, et ce sera notre cas ici, le champ n'est pas nécessairement contenu dans un volume délimité $V = L^3$. Il faut donc pouvoir trouver des analogues aux expressions données précédemment. Concrètement, la différence principale vient du fait que la sommation sur tous les modes sera remplacée par une intégrale. Reprenons pour ce faire l'expression (1.11) du champ quantifié. Le volume élémentaire de la maille de sommation dans l'espace des impulsions \mathbf{k} est $\Delta k_i = 2\pi/L$ pour chaque degré de liberté i . Ainsi, le passage à l'intégrale dans l'expression (1.11) lorsque $L \rightarrow +\infty$ s'écrit :

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{s=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}) \sqrt{\frac{\hbar\omega}{16\epsilon_0\pi^3}} \left[i\hat{a}_s(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} - i\hat{a}_s^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t} \right], \quad (1.12)$$

avec $\omega = \|\mathbf{k}\|c$, et $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ la polarisation du champ, telle que $\boldsymbol{\varepsilon}_s \cdot \mathbf{k} = 0$. On a également posé $\hat{a}_s(\mathbf{k}) = \lim_{\Delta^3\mathbf{k} \rightarrow 0} \frac{\hat{a}_l}{\sqrt{\Delta^3\mathbf{k}}}$, dont les nouvelles relations de commutation bosoniques sont :

$$[\hat{a}_{s_1}(\mathbf{k}_1), \hat{a}_{s_2}^\dagger(\mathbf{k}_2)] = \delta_{s_1, s_2} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad (1.13)$$

où le premier δ est le symbole de Kronecker habituel, et où le second est la fonction de Dirac.

Modes du champ

La base des ondes planes que nous avons implicitement choisie en utilisant la transformation de Fourier discrète (1.2) est un outil mathématique très puissant qui permet la simplification de nombreux problèmes, mais qui a le désavantage de ne pas être un outil du monde physique réel. En effet, leurs extensions spatiale et temporelle infinies en font des états non normalisables. Dans la réalité, les champs auxquels nous serons confrontés pourront être vus comme des superpositions de ces ondes planes modulées par une enveloppe $\phi_s(\mathbf{k})$, où cette enveloppe vérifie la relation de normalisation $\sum_{s=1,2} \int |\phi_s(\mathbf{k})|^2 d^3\mathbf{k} = 1$. L'opérateur de création associé à cette enveloppe s'écrira alors :

$$\hat{a}^\dagger = \sum_{s=1,2} \int \phi_s(\mathbf{k}) \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k}. \quad (1.14)$$

On donne ainsi un poids différent à chaque composante de type onde plane dans le nouvel opérateur.

Ayant défini notre mode de la sorte, la relation de commutation relative à l'opérateur \hat{a} est alors simplement :

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (1.15)$$

Cet opérateur permet de détruire une excitation dans le mode défini par l'enveloppe ϕ : les problèmes pourront donc être traités de manière purement monomode, même si de multiples fréquences temporelles et spatiales y sont présentes. Puis, de la même manière, des observables de quadratures pour ce mode peuvent être définies par les formules :

$$\hat{X} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (1.16a)$$

$$\hat{P} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}, \quad (1.16b)$$

et l'opérateur comptant les excitations dans ce mode est

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{1}{2} [\hat{X}^2 + \hat{P}^2 - 1]. \quad (1.17)$$

1.2 Description et représentation des états de la lumière

Choisir la manière avec laquelle on veut décrire et représenter la lumière représente une question centrale suivant le problème que l'on désire traiter. Au vu du paragraphe précédent, la lumière montre déjà deux types de comportements complémentaires. Le premier, corpusculaire, tend à inciter à la description via les quantas qui la composent : les photons. Le second, ondulatoire, voudrait que l'on s'attache à utiliser les mêmes notions que dans l'électromagnétisme classique dont nous sommes initialement partis pour obtenir la quantification du champ. Ces deux aspects font l'objet de cette section.

1.2.1 Description "discrète"

1.2.1.1 La base des états de Fock

Comme nous l'avons vu, l'expression du Hamiltonien du champ libre (1.8) invite à la définition de corpuscules que l'on peut dénombrer dans un mode donné à l'aide d'un opérateur $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Chacun de ces corpuscules transporte une énergie donnée $\hbar\omega$ et peut être créé par

l'opérateur \hat{a}^\dagger ou détruit par l'opérateur \hat{a} suivant les équations (1.9). Ainsi, en partant du vide quantique (ne possédant aucune excitation) $|0\rangle$, on peut construire l'intégralité de ces états par application itérée de l'opérateur de création \hat{a}^\dagger :

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle. \quad (1.18)$$

Du fait qu'ils forment une base non dégénérée de l'espace de Hilbert décrivant le mode considéré, ils permettent la décomposition de tout état quantique pur $|\psi\rangle$ de la lumière en :

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, \quad (1.19)$$

où les c_n sont des nombres complexes tels que $\sum |c_n|^2 = 1$.

Les états $|n\rangle$ de la base sont appelés états *nombres* ou états de Fock à n photons du mode considéré.

1.2.1.2 Matrice densité

Dans le cas le plus général, l'outil le plus adapté à la description discrète de la lumière sera par extension la matrice densité [Fano 57]. Les états que l'on caractérise et que l'on mesure ont en effet une certaine probabilité classique p_k d'être dans l'état pur $|\psi_k\rangle$. Avec $\sum_k p_k = 1$, la matrice densité de l'état, de trace toujours égale à 1, s'écrit alors :

$$\hat{\rho} = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| = \sum_{n,m} \rho_{n,m} |n\rangle \langle m|. \quad (1.20)$$

Dans la base des états de Fock, les éléments diagonaux $\rho_{n,n}$ de cette matrice sont appelés les *populations* et les termes non-diagonaux les *cohérences*. Le terme de population vient du fait que si l'on réalise une mesure de photon, la probabilité d'en mesurer n vaut $\rho_{n,n}$. Les cohérences quant à elles révèlent l'existence d'une structure de superposition quantique plus ou moins présente dans l'état.

La structure de la matrice densité, comme somme probabiliste d'états purs, fait que l'état porte le nom de *mélange statistique*. Le degré de mélange peut être mesuré par la pureté \mathcal{P} , définie par

$$\mathcal{P} = \text{Tr}(\hat{\rho}^2). \quad (1.21)$$

Celle-ci vaut 1 si et seulement si l'état est pur.

Une propriété importante de ces matrices est qu'elle permet de n'étudier qu'une partie d'un système par le biais de la trace partielle. Si le système est par exemple décrit par la matrice densité bimode $\hat{\rho} = \hat{\rho}_{1,2}$ mais que l'utilisateur ne cherche à décrire que le premier mode, l'état auquel il aura affaire sera la trace partielle sur le mode 2 de la matrice densité totale :

$$\hat{\rho}_1 = \sum_k \langle k|_2 \hat{\rho}_{1,2} |k\rangle_2. \quad (1.22)$$

Cette propriété sera utile par la suite pour la description d'un système dont une partie est perdue dans la nature.

L'outil de caractérisation le plus naturel pour la description de manière discrète des états est alors le compteur de photons, qui permet la reconstruction de la statistique du nombre de photons.

1.2.2 Description continue

1.2.2.1 Quadratures du champ

L'autre description possible des états quantiques de la lumière est donnée par sa description en terme de quadratures, comme nous l'avons vu en (1.10). Pour illustrer la définition des quadratures, considérons l'équation (1.11) définissant le champ quantique, prise pour un seul mode du champ. Remplaçons ensuite \hat{a} et \hat{a}^\dagger par leur expression en fonction des quadratures \hat{X} et \hat{P} données par les équations (1.7) et (1.10). Le champ s'écrit alors, en appliquant pour simplifier un déphasage de $\pi/2$ par simple redéfinition de l'origine temporelle :

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\epsilon_0 L^3}} \left[\hat{X} \cos(\omega t - \mathbf{kr}) + \hat{P} \sin(\omega t - \mathbf{kr}) \right] = \hat{\mathbf{E}}^{(+)} e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} + \hat{\mathbf{E}}^{(-)} e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})}. \quad (1.23)$$

Si l'on représente la valeur moyenne de l'opérateur $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$ comme un vecteur dans l'espace de Fresnel, les quantités $\sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\epsilon_0 L^3}} \langle \hat{X} \rangle$ et $\sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\epsilon_0 L^3}} \langle \hat{P} \rangle$ peuvent être respectivement vues comme ses composantes en phase et en quadrature de phase (réelles et imaginaires). La figure 1.1 montre cette représentation.

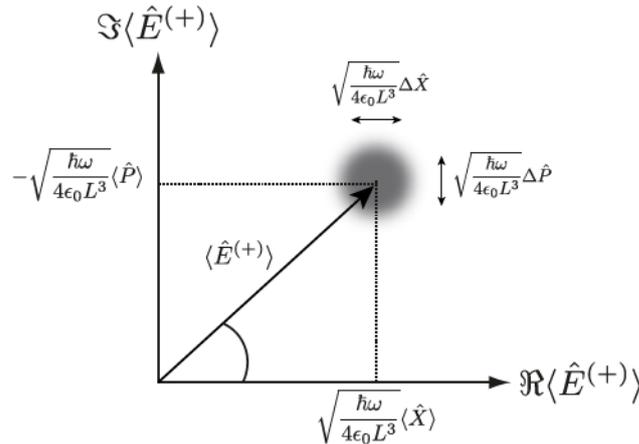


FIGURE 1.1 – Représentation de la valeur moyenne de la composante à fréquence positive du champ $\langle \hat{\mathbf{E}}^{(+)} \rangle$.

L'approche naturelle pour cette description est donc une approche ondulatoire, où la lumière est représentée par son amplitude et sa phase. Les observables \hat{X} et \hat{P} permettent une description continue de la lumière en ce sens que leur mesure peut prendre toutes les valeurs réelles. Les états propres de ces opérateurs sont alors des états $|x\rangle$ et $|p\rangle$, pour lesquels une mesure de quadrature suivant \hat{X} et \hat{P} (resp.) fournira toujours la même valeur : x et p .

Il est par contre immédiat de voir que ces états sont non physiques. En effet, la relation de commutation entre \hat{X} et \hat{P} :

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i \quad (1.24)$$

impose la relation d'incertitude de Heisenberg

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{1}{2}. \quad (1.25)$$

Autrement dit, un état fournissant une mesure infiniment précise suivant une quadrature fournit une mesure totalement délocalisée suivant la quadrature orthogonale. Cette délocalisation

impliquant la présence d'une quantité infinie d'énergie dans l'état, il est évident que l'état correspondant n'a pas de sens physique. Toutefois, en projetant un état $|\psi\rangle$ sur $|x\rangle$ et $|p\rangle$, on obtient une description de cet état suivant les variables continues x et p :

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \quad \psi(p) = \langle p|\psi\rangle. \quad (1.26)$$

Ces deux notations sont bien connues en physique quantique lorsqu'il s'agit de décrire la position et l'impulsion d'une particule, et il s'agit ici d'un cas totalement similaire. On sait en effet que l'on ne peut pas connaître simultanément la position et la vitesse d'une particule avec une précision arbitrairement grande. Ce phénomène est relié à une inégalité de Heisenberg tout à fait identique à (1.25). La comparaison ne s'arrête pas là car, comme on l'a dit précédemment, le Hamiltonien du champ libre est exactement le même que celui d'une collection d'oscillateurs harmoniques. Tous les résultats obtenus pour une particule dans un potentiel harmonique vont donc pouvoir être transposés à notre cas.

L'outil de mesure et de caractérisation du champ le plus adapté à cette description est alors la détection homodyne, à laquelle nous nous intéresserons davantage au paragraphe 1.5.1.

1.2.2.2 Fonction de Wigner

Définition

Dans le cas où l'état que l'on veut caractériser n'est plus un état pur, quelle peut alors être la description que l'on pourra utiliser ?

La matrice densité n'est pas le meilleur candidat, car elle ne reflète pas la symétrie entre les variables x et p . L'une des possibilités est l'utilisation d'une fonction de deux variables dont les projections suivant chaque direction donnent la distribution de probabilité suivant la quadrature orthogonale. Nous avons vu par exemple les deux quadratures \hat{X} et \hat{P} , mais il existe en fait une infinité de ces quadratures définies par une rotation d'un angle θ de celles-ci :

$$\hat{X}_\theta = \cos \theta \hat{X} + \sin \theta \hat{P} \quad (1.27a)$$

$$\hat{P}_\theta = \cos \theta \hat{P} - \sin \theta \hat{X}. \quad (1.27b)$$

Cette fonction de deux variables est appelée fonction de Wigner (W), et possède donc la propriété :

$$\text{pr}(x_\theta) = \int dp_\theta W(x_\theta \cos \theta - p_\theta \sin \theta, p_\theta \cos \theta + x_\theta \sin \theta), \quad (1.28)$$

où $\text{pr}(x_\theta)$ est la distribution de probabilité suivant la quadrature x_θ .

On peut montrer [Leonhardt 97] que cette condition suffit à définir pleinement la fonction de Wigner, par l'intermédiaire de la fonction caractéristique :

$$\mathcal{W}(\mu, \nu) = \text{Tr} \left[\hat{\rho} e^{-i\mu\hat{X} - i\nu\hat{P}} \right]. \quad (1.29)$$

La fonction de Wigner est en effet simplement la transformée de Fourier inverse de cette fonction caractéristique :

$$W(x, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \mathcal{W}(\mu, \nu) e^{i\mu x + i\nu p} d\mu d\nu, \quad (1.30)$$

qui peut être finalement réécrite comme

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\nu p} \langle x - \frac{\nu}{2} | \hat{\rho} | x + \frac{\nu}{2} \rangle d\nu. \quad (1.31)$$

CHAPITRE 1

La fonction de Wigner peut donc être vue comme la transformée de Fourier inverse "classique" (1.30) de la transformée de Fourier "quantique" (1.29) de la matrice densité. La transformation étant bijective, la fonction de Wigner permet bien la description des états de manière univoque.

Dans le cas général, l'état peut être défini par plusieurs modes (x_1, \dots, x_n) , et l'écriture (1.31) doit être généralisée en :

$$W(x_1, p_1, \dots, x_n, p_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\nu_1 p_1 + \dots + i\nu_n p_n} \langle x_1 - \frac{\nu_1}{2}, \dots, x_n - \frac{\nu_n}{2} | \hat{\rho} | x_1 + \frac{\nu_1}{2}, \dots, x_n + \frac{\nu_n}{2} \rangle d\nu_1 \dots d\nu_n. \quad (1.32)$$

Dans le cas particulier où l'état est factorisable $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_n$, cette écriture permet de dire que la fonction de Wigner sera simplement le produit des fonctions de Wigner : $W(x_1, p_1, \dots, x_n, p_n) = W_1(x_1, p_1) \dots W_n(x_n, p_n)$ où $W_i(x_i, p_i)$ est la fonction de Wigner de $\hat{\rho}_i$.

Propriétés

Enonçons quelques propriétés intéressantes de la fonction de Wigner [Leonhardt 97] :

- son intégrale, comme intégrale de distribution de probabilité, est égale à 1 :

$$\iint W(x, p) dx dp = 1, \quad (1.33)$$

- sa définition peut être étendue de la matrice densité à tout opérateur \hat{O} par une définition analogue :

$$W_{\hat{O}}(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\nu p} \langle x - \frac{\nu}{2} | \hat{O} | x + \frac{\nu}{2} \rangle d\nu, \quad (1.34)$$

- la trace d'un produit d'opérateurs est donnée par la *formule de recouvrement* :

$$\text{Tr}(\hat{O}\hat{R}) = 2\pi \iint W_{\hat{O}}(x, p) W_{\hat{R}}(x, p) dx dp, \quad (1.35)$$

qui permet de calculer la fidélité entre un état mélangé $\hat{\rho}$ et un état pur $|\psi\rangle\langle\psi|$:

$$\mathcal{F} = \text{Tr}(\hat{\rho}|\psi\rangle\langle\psi|) = 2\pi \iint W_{\hat{\rho}}(x, p) W_{|\psi\rangle\langle\psi|}(x, p) dx dp, \quad (1.36)$$

ainsi que la pureté d'un état mélange statistique $\hat{\rho}$ (1.21) :

$$\mathcal{P} = \text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 2\pi \iint W_{\hat{\rho}}^2(x, p) dx dp. \quad (1.37)$$

Dans le cas où l'on veut calculer la fidélité entre deux états mélangés, une nouvelle définition de celle-ci s'impose alors. Une possibilité est d'utiliser la formule $\mathcal{F} = \text{Tr}\left(\sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_1}\hat{\rho}_2\sqrt{\hat{\rho}_1}}\right)$, nécessitant de pouvoir calculer la racine carrée d'une matrice (et donc par exemple de pouvoir la diagonaliser) [Jozsa 94].

Une autre propriété importante des fonctions de Wigner est que ces dernières peuvent être négatives : les distributions de probabilités sur lesquelles portent les conditions de positivité ne sont que leurs projections. C'est pourquoi les fonctions de Wigner portent le nom de distribution de *quasi-probabilité*.

1.2.3 Complémentarité des deux descriptions

La question que l'on sera amené à se poser lorsque l'on voudra décrire un état de la lumière sera de savoir laquelle des deux représentations privilégier. Bien entendu il est toujours possible d'utiliser l'une comme l'autre, mais certains états se prêtent davantage à l'utilisation des matrices densités (les états de Fock et les superpositions d'un nombre limité de photons) alors que d'autres sont visuellement beaucoup plus faciles à identifier par la forme de leur fonction de Wigner (états cohérents, états comprimés, états chats de Schrödinger, etc.). Le passage d'une description à l'autre est toujours possible en utilisant (1.31) dans un premier sens, et la formule

$$\langle x|\hat{\rho}|y\rangle = \int e^{i(x-y)p} W\left[\frac{x+y}{2}, p\right] dp \quad (1.38)$$

dans l'autre sens.

Le passage de $\langle x|\hat{\rho}|y\rangle$ à $\langle n|\hat{\rho}|m\rangle$ se fait au besoin grâce aux relations

$$\langle x|\hat{\rho}|y\rangle = \sum_{n,m} \varphi_n(x)\varphi_m^*(y)\langle n|\hat{\rho}|m\rangle \quad \text{et} \quad \langle n|\hat{\rho}|m\rangle = \iint \varphi_n^*(x)\varphi_m(y)\langle x|\hat{\rho}|y\rangle dx dy, \quad (1.39)$$

où nous préciserons en (1.81a) l'expression de la fonction d'onde d'un état de Fock à k photons $\varphi_k(x)$.

Un autre élément qui va conditionner le choix de la description est donné par les techniques de simulation les plus adaptées. Travailler avec des matrices densité apparaît comme la solution naturelle au premier abord, étant donnée la facilité des codes informatiques à travailler avec des tableaux de nombres. Sous Matlab® par exemple une boîte à outils a été développée [Tan 99], permettant l'utilisation simplifiée du logiciel en vue du calcul sur des états quantiques. La seule hypothèse de travail à faire est la dimension de l'espace de travail, donnée par celle de l'espace de Hilbert. En règle générale ces hypothèses sont des hypothèses relativement faibles étant donné le petit nombre de photons avec lequel on travaille habituellement. Par contre, les opérateurs que l'on est amené à définir peuvent quant à eux nécessiter de travailler dans des espaces de Hilbert de grande dimension. Par exemple, l'opérateur de conditionnement homodyne $|x\rangle\langle x|$ que l'on sera amené à utiliser par la suite, a un nombre infini de composantes non nulles dans la base des états de Fock.

Travailler avec les variables continues du champ impose par contre de manipuler des fonctions aux expressions analytiques parfois peu commodes sur lesquelles il faut pouvoir réaliser des intégrations et d'autres transformations complexes (que nous verrons dans la suite de ce chapitre). Numériquement, les calculs deviennent très lourds à effectuer dès que le nombre de systèmes dépasse 2. Nous avons donc développé un outil de simulation spécifique adapté à nos besoins, permettant de simuler l'action de conditionnements homodynes, de soustractions de photons et d'opérations complexes sur le champ quantique sans avoir à recourir à des intégrales sur de grands espaces. Cet outil est détaillé dans l'annexe A et il y sera fait référence plus spécifiquement dans la suite de ce manuscrit.

Une belle illustration de la dualité des descriptions ondulatoires et corpusculaires de la lumière est l'expérience d'interférence à un photon [Grangier 86] : un photon unique est capable d'interférer avec lui-même lorsqu'il est envoyé dans un interféromètre de Mach Zehnder. A sa sortie, les détecteurs de photons ne fournissent qu'un seul clic au total, confirmant notre intuition d'un corpuscule unique qui aurait traversé le protocole. Par ailleurs, les histogrammes de ces clics montrent clairement des interférences en fonction de la différence de chemin optique dans les deux bras de l'interféromètre, poussant à une explication ondulatoire.

Des expériences plus récentes [Jacques 07, Kaiser 12] ont également mis en lumière l'aspect indissociable des deux conceptions, basées sur l'expérience de pensée de Wheeler [Wheeler 84] et

indiquant que le photon ne "choisit" pas avant d'entrer dans un interféromètre quel type de comportement il va adopter : il possède toujours les deux à la fois.

1.3 Transformations unitaires du champ

Voyons à présent quelques transformations unitaires du champ que nous aurons l'occasion d'utiliser par la suite.

1.3.1 Optique linéaire

1.3.1.1 Déphasage

La transformation la plus simple est le déphasage, modélisée par l'opérateur :

$$U_{\text{deph}} = e^{-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}. \quad (1.40)$$

Cet opérateur est en fait le propagateur du Hamiltonien du champ électromagnétique libre, qui aurait évolué durant un temps θ/ω . Son action sur l'opérateur de destruction est :

$$\hat{a}' = U_{\text{deph}}^\dagger \hat{a} U_{\text{deph}} = e^{-i\theta}\hat{a}, \quad (1.41)$$

permettant d'en déduire l'action sur les quadratures

$$\hat{X}' = \cos(\theta)\hat{X} + \sin(\theta)\hat{P} \quad (1.42a)$$

$$\hat{P}' = \cos(\theta)\hat{P} - \sin(\theta)\hat{X}. \quad (1.42b)$$

Ces transformations sont exactement identiques aux équations (1.27), indiquant qu'une évolution libre dans le temps est équivalente à une rotation dans l'espace des quadratures.

L'action de cet opérateur sur la base de Fock est simplement :

$$U_{\text{deph}}|n\rangle = e^{-in\theta}|n\rangle; \quad (1.43)$$

ainsi dans le cas d'un état général composé d'une superposition cohérente d'états de Fock $|\psi\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$, les différentes composantes de Fock seront déphasées d'une quantité différente, du fait de leurs énergies différentes.

1.3.1.2 Déplacement

L'opérateur déplacement d'une valeur complexe α est défini comme :

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}. \quad (1.44)$$

Son action sur l'opérateur de destruction est simplement :

$$\hat{a}' = \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha\hat{\mathbb{1}}. \quad (1.45)$$

Cette action, obtenue grâce à la formule de Baker-Hausdorff, indique que l'opérateur de destruction est simplement déplacé dans l'espace de la quantité complexe α .

Par le même type de raisonnement, on montre :

$$\hat{X}' = \hat{X} + \sqrt{2}\Re(\alpha) \quad (1.46a)$$

$$\hat{P}' = \hat{P} + \sqrt{2}\Im(\alpha). \quad (1.46b)$$

Les quadratures sont donc elles aussi translatées, respectivement de la partie réelle et de la partie imaginaire de $\sqrt{2}\alpha$. Ainsi cette transformation correspond à une simple translation dans l'espace des quadratures.

1.3.1.3 La lame séparatrice

La lame séparatrice est un des outils les plus simples mais aussi l'un des plus puissants de l'optique quantique. Elle est composée d'une lame de verre de transmission t en amplitude (et de réflectivité $r = \sqrt{1 - t^2}$), et comporte deux modes d'entrée et deux modes de sortie. Ceux-ci sont précisés sur la figure 1.2 (a).

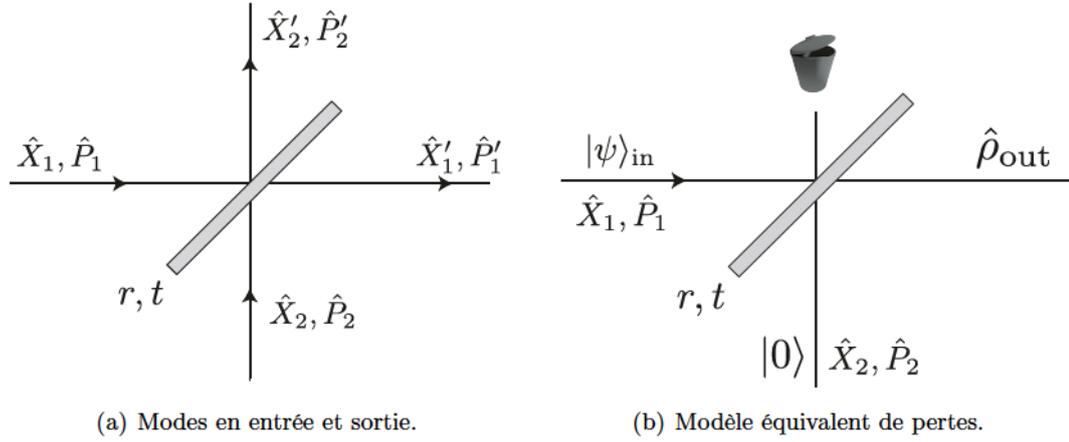


FIGURE 1.2 – La lame séparatrice.

Transformation

L'opérateur bimode relié à la transformation de la lame séparatrice s'écrit :

$$\hat{U}_{\text{bs}}(t) = e^{\arccos(t)(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger)}, \quad (1.47)$$

et son action sur les opérateurs de destruction est :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}'_1 \\ \hat{a}'_2 \end{pmatrix} = \hat{U}_{\text{bs}}^\dagger(t) \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \hat{U}_{\text{bs}}(t) = \begin{pmatrix} t & -r \\ r & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$

Les transformations sur les deux quadratures sont donc simplement :

$$\begin{aligned} \hat{X}'_1 &= t\hat{X}_1 - r\hat{X}_2 & , & \quad \hat{P}'_1 = t\hat{P}_1 - r\hat{P}_2 \\ \hat{X}'_2 &= t\hat{X}_2 + r\hat{X}_1 & \quad \hat{P}'_2 &= t\hat{P}_2 + r\hat{P}_1. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Ces équations sont celles d'une rotation dans l'espace bimode des quadratures.

Avec certains états incidents en entrée, la lame séparatrice pourra donc être utilisée pour intriquer des états, étant donnée la présence jointe des deux modes d'entrée dans les modes de sortie.

L'action sur les états de Fock peut être également explicitée [Leonhardt 97] :

$$\begin{aligned} \hat{U}_{\text{bs}}(t)|n_1, n_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!}} \sum_{k_1, k_2=0}^{n_1, n_2} \binom{n_1}{k_1} \binom{n_2}{k_2} t^{k_1+n_2-k_2} r^{n_1-k_1} (-r)^{k_2} \\ &\quad \times \sqrt{(k_1+k_2)!(n_1+n_2-k_1-k_2)!} |k_1+k_2, n_1+n_2-k_1-k_2\rangle. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Cette équation indique que l'état de sortie comporte bien toujours le même nombre total de photons que l'état d'entrée (n_1+n_2). Elle est par contre en règle générale moins aisée à manipuler que les rotations (1.49).

Modèle pour les pertes

Le modèle de la lame séparatrice pourra être utilisé pour une application particulièrement astucieuse : la modélisation des pertes. Pour un état usuel de la lumière, les pertes se traduisent en effet par une diminution de leur amplitude, qui peut être simulée par le passage à travers une lame semi-réfléchissante. Il suffit alors de reprendre le modèle de transformation donné par les équations (1.49), où le mode 1 contient l'état d'intérêt et où le mode 2 contient le vide. En sortie de la lame, l'état transmis 1 sera l'état ayant subi les pertes et l'état réfléchi 2 sera perdu dans la nature. L'état final sera donc un état mélangé, étant donnée la perte d'information relative au mode 2. L'équation (1.22) permet alors de réaliser le calcul de la matrice densité de l'état de sortie. La figure 1.2 (b) montre la modélisation pour un état pur $|\psi\rangle_{\text{in}}$ subissant des pertes. Pour une fonction de Wigner incidente W_{in} , des pertes (transmission t) donneront naissance à une fonction de sortie W_{out} :

$$W_{\text{out}}(x, p) = \iint W_0(tx_0 - rx, tp_0 - rp) W_{\text{in}}(tx + rx_0, tp + rp_0) dx_0 dp_0, \quad (1.51)$$

où W_0 est la fonction de Wigner du vide (que nous allons étudier dans la section suivante). Sachant que W_0 est paire et que $r^2 + t^2 = 1$, cette formule peut être réécrite plus explicitement comme un produit de convolution grâce au changement de variables $x'_0 = t(rx_0 + tx)$ et $p'_0 = t(rp_0 + tp)$:

$$W_{\text{out}}(x, p) = \frac{1}{r^2 t^2} \iint W_{\text{in}}\left(\frac{x'_0}{t}, \frac{p'_0}{t}\right) W_0\left(\frac{x - x'_0}{r}, \frac{p - p'_0}{r}\right) dx'_0 dp'_0. \quad (1.52)$$

Cette forme nous indique que la fonction de sortie est "lissée" par la fonction de Wigner du vide. Ainsi, plus les pertes subies par un état seront importantes, moins fins pourront être les détails de sa fonction de Wigner.

On peut également obtenir la matrice densité de l'état de sortie $\hat{\rho}_{\text{out}}$ en fonction de celle de l'état d'entrée $\hat{\rho}_{\text{in}}$ comme étant [Kiss 95] :

$$\langle n | \hat{\rho}_{\text{out}} | m \rangle = t^{\frac{n+m}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{\binom{n+j}{n} \binom{m+j}{m}} (1-t)^j \langle n+j | \hat{\rho}_{\text{in}} | m+j \rangle. \quad (1.53)$$

1.3.2 Optique non linéaire

Les transformations du champ peuvent également être non-linéaires, en ce sens que l'énergie des photons incidents n'est pas la même que celle des photons de sortie. Nous aurons l'occasion d'entrer davantage dans le détail des Hamiltoniens entrant en jeu dans ces transformations au chapitre 2.

1.3.2.1 Compression monomode

Un premier cas intéressant est celui de la compression monomode, dont l'opérateur s'écrit comme :

$$\hat{U}_{\text{comp}_1}(r) = e^{\frac{r}{2} [\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2]}. \quad (1.54)$$

Son action sur l'opérateur de destruction est :

$$\hat{a}' = \hat{U}_{\text{comp}_1}^\dagger(r) \hat{a} \hat{U}_{\text{comp}_1}(r) = \hat{a} \cosh(r) + \hat{a}^\dagger \sinh(r), \quad (1.55)$$

qui mène à la transformation des quadratures

$$\hat{X}' = e^r \hat{X} \quad (1.56a)$$

$$\hat{P}' = e^{-r} \hat{P}. \quad (1.56b)$$

Autrement dit, cela signifie que les valeurs suivant la quadrature \hat{X} sont "amplifiées" (si $r > 0$) et celles suivant la quadrature \hat{P} sont "comprimées", d'où le nom de l'opérateur.

Le paramètre $s = e^{-r}$ porte le nom de *compression*.

1.3.2.2 Compression bimode

La compression peut également avoir lieu sur deux modes de manière conjointe, grâce à l'opérateur

$$\hat{U}_{\text{comp}_2}(r) = e^{r[\hat{a}_1\hat{a}_2 - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger]}. \quad (1.57)$$

Dans ce cas, les opérateurs de destruction des deux modes sont transformés suivant la règle :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}'_1 \\ \hat{a}'_2 \end{pmatrix} = \hat{U}_{\text{comp}_2}^\dagger(t) \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \hat{U}_{\text{comp}_2}(t) = \begin{pmatrix} \cosh(r) & \sinh(r) \\ \sinh(r) & \cosh(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}, \quad (1.58)$$

et les quadratures de chaque mode sont alors mélangées suivant

$$\begin{aligned} \hat{X}'_1 &= \hat{X}_1 \cosh(r) + \hat{X}_2 \sinh(r) & \hat{X}'_2 &= \hat{X}_2 \cosh(r) + \hat{X}_1 \sinh(r) \\ \hat{P}'_1 &= \hat{P}_1 \cosh(r) - \hat{P}_2 \sinh(r) & \hat{P}'_2 &= \hat{P}_2 \cosh(r) - \hat{P}_1 \sinh(r). \end{aligned} \quad (1.59)$$

Les différences et sommes de ces quadratures possèdent par contre le même type de compression que précédemment, d'où le nom de l'opérateur :

$$\begin{aligned} \hat{X}'_1 + \hat{X}'_2 &= e^r(\hat{X}_1 + \hat{X}_2) & \hat{P}'_1 + \hat{P}'_2 &= e^{-r}(\hat{P}_1 + \hat{P}_2) \\ \hat{X}'_1 - \hat{X}'_2 &= e^{-r}(\hat{X}_1 - \hat{X}_2) & \hat{P}'_1 - \hat{P}'_2 &= e^r(\hat{P}_1 - \hat{P}_2). \end{aligned} \quad (1.60)$$

On peut donc là aussi définir la compression $s = e^{-r}$.

1.3.3 Transformations des fonctions de Wigner

Autant l'application de tous les opérateurs précédemment présentés sur la base des états de Fock peut se révéler complexe, autant leur action sur les fonctions de Wigner sont très simples à calculer. En effet, si les quadratures de N modes se transforment linéairement en

$$\begin{pmatrix} \hat{X}'_1 \\ \hat{P}'_1 \\ \vdots \\ \hat{X}'_N \\ \hat{P}'_N \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{P}_1 \\ \vdots \\ \hat{X}_N \\ \hat{P}_N \end{pmatrix}, \quad (1.61)$$

la fonction de Wigner de l'état exprimée avec les mêmes quadratures qu'à l'entrée s'écrit

$$W_{\text{out}}(x_1, p_1, \dots, x_N, p_N) = W_{\text{in}}(M^{-1}\mathbf{x}), \quad (1.62)$$

où $\mathbf{x} = (x_1, p_1, \dots, x_N, p_N)$. Toutes les transformations unitaires que nous considérerons dans ce manuscrit seront concernées par cette formule, qui simplifie beaucoup les calculs des transformations.

1.4 Les états quantiques usuels

Nous allons présenter ici quelques états usuels de l'optique quantique, dont nous aurons besoin plus tard. Deux grandes catégories sont à distinguer : les états gaussiens et les états non gaussiens. A chaque fois que cela sera possible, une représentation de la fonction de Wigner (1.31) et de la matrice densité (1.20) sera donnée. Les distributions de probabilités suivant les deux quadratures \hat{X} et \hat{P} seront également données en même temps que la fonction de Wigner, projetées au fond du graphique.

1.4.1 États gaussiens

Les états gaussiens, c'est-à-dire ceux dont la fonction de Wigner se met sous la forme d'une gaussienne bidimensionnelle, sont les états les plus simples à produire. Etudions quelques cas particuliers de ceux-ci.

1.4.1.1 Le vide quantique

Le plus simple de tous les états de la lumière est bien entendu le vide quantique $|0\rangle$. Il joue un rôle très important en optique quantique car il est présent dès que certaines imperfections apparaissent, ou qu'un mode n'est pas peuplé par des photons. Par exemple, comme nous l'avons vu sur la figure 1.2 (b), si un état est envoyé seul sur une lame séparatrice, cela signifie que l'autre port contient l'état de vide quantique. La fonction de Wigner de cet état est :

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} e^{-x^2 - p^2}. \quad (1.63)$$

La figure 1.3 montre la fonction de Wigner ainsi que la matrice densité de cet état.

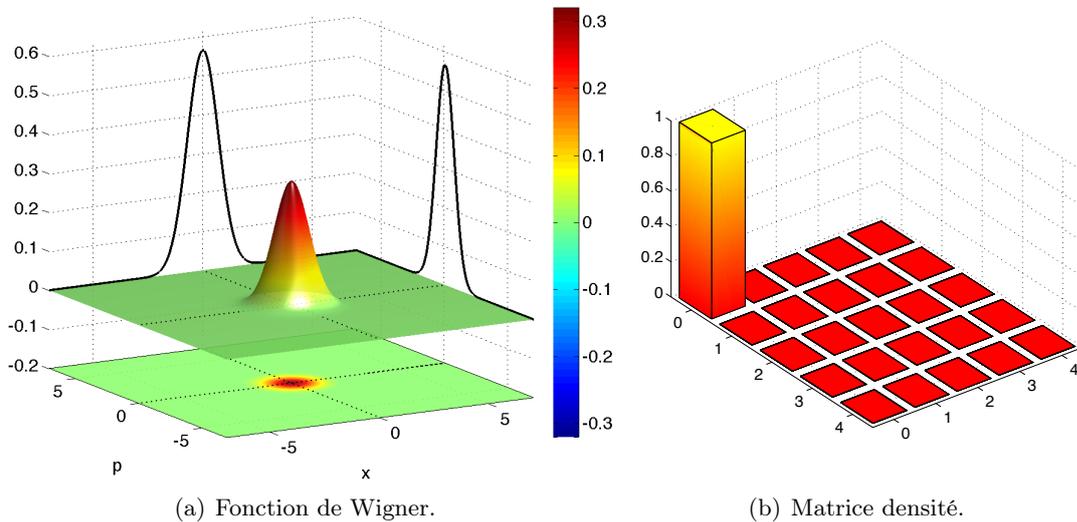


FIGURE 1.3 – Représentation du vide quantique.

Les moyennes des deux quadratures sont nulles, mais les fluctuations suivant ces deux directions ne le sont pas :

$$\Delta\hat{X} = \Delta\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1.64)$$

Ces écarts-types saturent la relation d'incertitude de Heisenberg (1.25), et le vide fait à ce titre partie des états d'incertitude minimale.

Les fluctuations du vide, comme limite du bruit de mesure, portent le nom de "shot noise" ou "bruit de photon" (même si le vide ne contient pas de photons à proprement parler).

1.4.1.2 Les états cohérents

Un autre type d'états d'incertitude minimale sont les états cohérents $|\alpha\rangle$, aussi appelés états de Glauber ou états quasi-classiques [Glauber 63]. Ils sont définis comme les états quantiques dont les moyennes de champ et d'énergie sont identiques aux valeurs classiques pour une onde d'amplitude complexe α :

$$\langle\alpha|\hat{E}(\mathbf{r}, t)|\alpha\rangle = E(\mathbf{r}, t) \quad (1.65)$$

$$\langle\alpha|\hat{H}_{\text{em}}|\alpha\rangle = \hbar\omega|\alpha|^2. \quad (1.66)$$

Ces conditions permettent d'établir que ces états sont les états propres de l'opérateur de destruction [Garrison 08] :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (1.67)$$

Leur décomposition dans la base des états de Fock s'écrit :

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (1.68)$$

menant à une statistique de distribution de photons Poissonienne de moyenne $\langle\hat{n}\rangle = |\alpha|^2$ et d'écart-type $\Delta\hat{n} = |\alpha|$. La fonction d'onde en représentations x et p s'écrit quant à elle :

$$\langle x|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{(x-\sqrt{2}\Re(\alpha))^2}{2}} e^{i\sqrt{2}\Im(\alpha)x} \quad (1.69a)$$

$$\langle p|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{(p-\sqrt{2}\Im(\alpha))^2}{2}} e^{-i\sqrt{2}\Re(\alpha)p}, \quad (1.69b)$$

permettant le calcul de la fonction de Wigner

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} e^{-(x-\sqrt{2}\Re(\alpha))^2 - (p-\sqrt{2}\Im(\alpha))^2}. \quad (1.70)$$

Cet état a donc exactement la même forme que le vide quantique, à la différence près que les valeurs moyennes des quadratures ne sont pas nulles. Ainsi, un état cohérent est un état de vide quantique déplacé par l'opérateur (1.44) : $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle$. La figure 1.4 montre la fonction de Wigner ainsi que la matrice densité d'un état cohérent d'amplitude $\alpha = 2$. De la même manière que pour un champ classique, il est possible pour un état cohérent suffisamment intense de définir un équivalent de phase et d'amplitude par les deux données du module et de la phase du nombre complexe α .

Ces états possèdent de plus la propriété de ne jamais être orthogonaux :

$$\forall(\alpha, \beta), \quad \langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha-\beta|^2 + \frac{1}{2}(\alpha^*\beta - \alpha\beta^*)} \neq 0, \quad (1.71)$$

même si pour α et β très différents on peut en faire l'approximation.

Mathématiquement, ils constituent également une base continue de l'espace : la seule connaissance des composantes d'un état (ou d'un opérateur) suivant les états cohérents suffit à sa définition.

La génération de ces états est très simple car on peut prouver qu'un laser réglé très au-dessus du seuil les produit [Loudon 83].

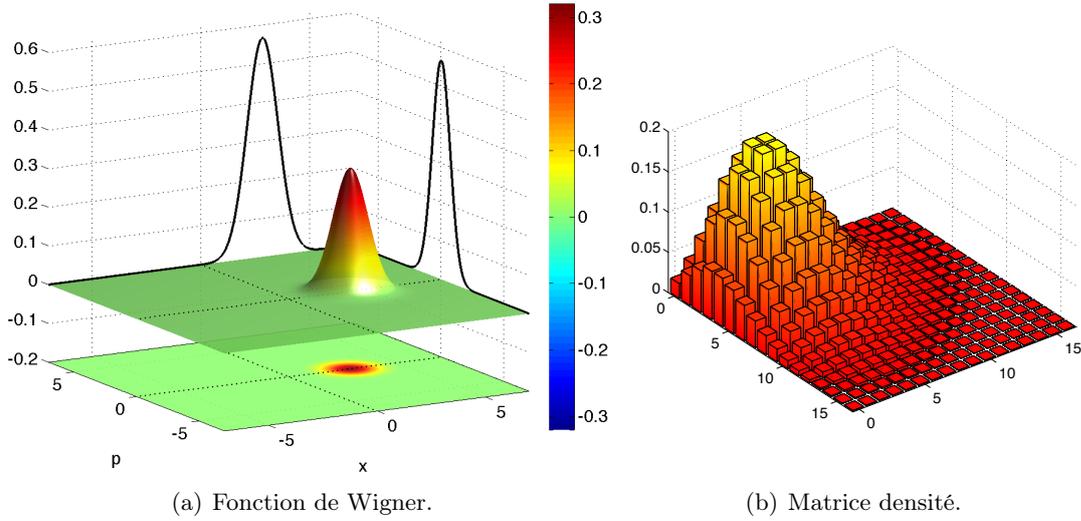


FIGURE 1.4 – Représentation d'un état cohérent, dans le cas $\alpha = 2$.

1.4.1.3 Le vide comprimé monomode

Un autre état gaussien que l'on utilisera est l'état de vide comprimé. Il résulte de l'application de l'opérateur de compression monomode (1.54) sur le vide, ce qui produit l'état dont la fonction de Wigner est semblable à celle du vide, à ceci près que la direction x est étirée d'un facteur $1/\sqrt{s} = e^r$, et que la direction p est comprimée d'un facteur $\sqrt{s} = e^{-r}$:

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{x^2}{1/s} - \frac{p^2}{s}}. \quad (1.72)$$

Suivant les deux quadratures \hat{X} et \hat{P} , l'état sature encore l'incertitude de Heisenberg, mais avec

$$\Delta\hat{P} = \frac{s}{\sqrt{2}} \quad (1.73a)$$

$$\Delta\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2s}}. \quad (1.73b)$$

Ainsi, au prix d'une augmentation de l'incertitude dans une direction il est possible de la réduire dans une direction orthogonale. Lorsque $x = 0$ (resp. $p = 0$), l'état $|x\rangle$ (resp. $|p\rangle$) que nous avons introduit avec l'équation (1.26) peut donc être vu comme une limite d'un état de vide comprimé lorsque $s \rightarrow +\infty$ (resp $s \rightarrow 0$).

La décomposition de cet état dans la base des états de Fock s'écrit :

$$|\psi_{\text{comp}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n!)}}{n!} \left[\frac{1}{2} \tanh r \right]^n |2n\rangle. \quad (1.74)$$

Ainsi, contrairement à son nom, le vide comprimé n'est pas vide mais contient des photons, qui sont toujours regroupés par paires.

La mesure de la compression se fait habituellement en décibel :

$$c_{\text{dB}} = 10 \log_{10}(e^{2|r|}). \quad (1.75)$$

Initialement produits dans des vapeurs de Sodium [Slusher 85], ces états sont le plus souvent générés par conversion paramétrique dégénérée dans un cristal non-linéaire [Wu 86]. C'est la technique que nous utilisons, et que nous détaillerons davantage dans le chapitre 2.

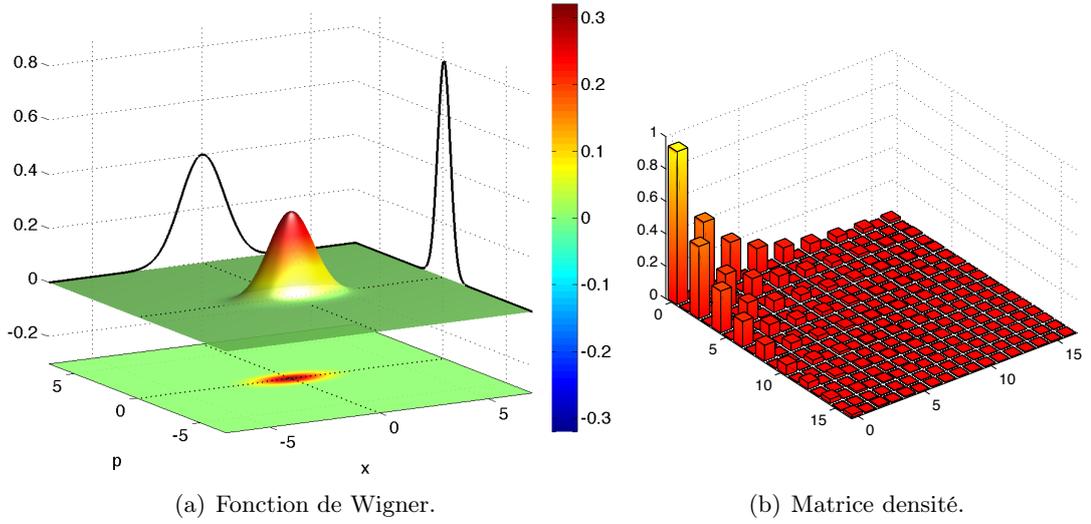


FIGURE 1.5 – Etat de vide comprimé, pour une compression suivant la quadrature \hat{P} de 1.5 dB ($s = 1/\sqrt{2}$).

1.4.1.4 Le vide comprimé bimode

De la même manière que précédemment, on peut définir un état de vide comprimé bimode par l'application de (1.57) sur le vide. Il en résulte un état intriqué dont les quadratures ont une moyenne nulle. Comme nous l'avons vu avec l'équation (1.60), la compression et l'anti-compression ont lieu sur les sommes et les différences des quadratures. La fonction de Wigner de cet état s'écrit donc :

$$W(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{1}{\pi^2} e^{-\frac{(x_1+x_2)^2}{2/s} - \frac{(p_1-p_2)^2}{2/s} - \frac{(x_1-x_2)^2}{2s} - \frac{(p_1+p_2)^2}{2s}}, \quad (1.76)$$

avec là aussi $s = e^{-2r}$. Cet état porte également le nom d'état EPR, faisant référence à l'état énoncé par Einstein, Podolsky et Rosen [Einstein 35] et qui peut être obtenu comme limite du vide comprimé bimode lorsque $s \rightarrow 0$. Comme nous le verrons par la suite, ces états peuvent être générés par pompage d'un cristal non-linéaire en vue d'obtenir de la fluorescence paramétrique [Ou 92], ou bien en combinant deux vides comprimés dans des directions orthogonales sur une lame 50:50 [Furusawa 98].

La décomposition dans la base des états de Fock de ces états est simplement

$$|\psi_{\text{comp}_2}\rangle = \sqrt{1 - \lambda^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n |n\rangle |n\rangle, \quad (1.77)$$

avec $\lambda = \tanh r$. Cette écriture révèle l'intrication présente entre les deux modes, et on peut même prouver que celle-ci est maximale pour une énergie donnée [Barnett 89]. Grâce à la corrélation du nombre de photons dans les deux modes, on utilisera cet état dans le chapitre 2 pour la génération d'états de Fock de la lumière.

1.4.1.5 Les états thermiques

Par définition, les états thermiques sont les états de la lumière en équilibre avec un réservoir à température T (par exemple les parois d'une cavité) [Garrison 08]. Les lois de la physique

statistique indiquent que la probabilité de population d'un système d'énergie E_n en équilibre avec un tel réservoir sera proportionnelle à $\exp[-E_n/(k_B T)]$, où k_B est la constante de Boltzmann. Suivant la distribution en énergie des photons ($E_n = \hbar\omega n$), on a alors une écriture de la matrice densité :

$$\hat{\rho}_{\text{th}} = \frac{1}{\sum_n e^{-\hbar\omega n/(k_B T)}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega n/(k_B T)} |n\rangle\langle n| = (1 - \lambda^2) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n} |n\rangle\langle n|, \quad (1.78)$$

où $\lambda = \exp[-\hbar\omega/(k_B T)]$. Si on pose $\lambda = \tanh r$, on voit que cette forme est en réalité la trace partielle sur un des deux modes de l'état de vide comprimé bimode (1.77).

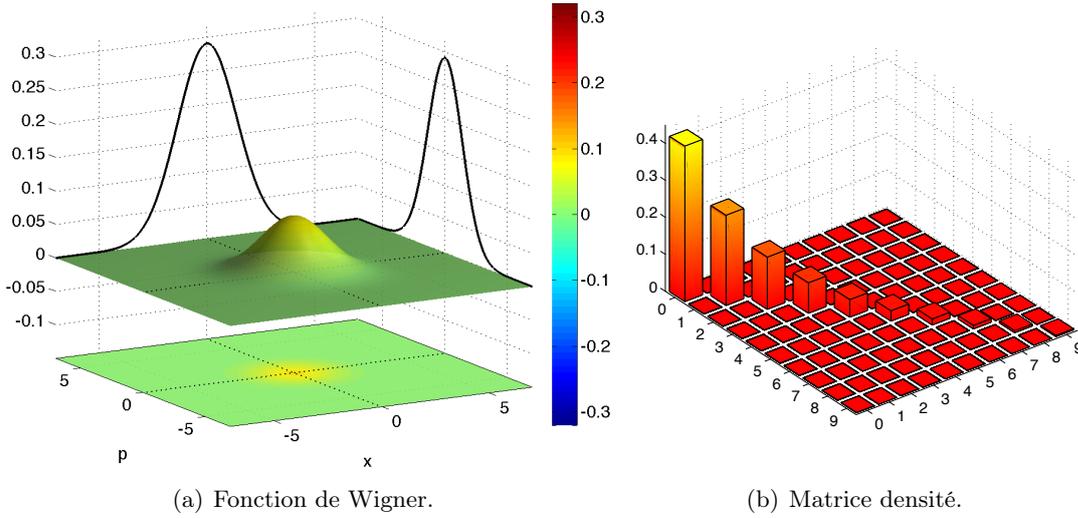


FIGURE 1.6 – Représentation d'un état thermique, pour un paramètre $\lambda = 0.76$.

La fonction de Wigner de cet état s'écrit ensuite :

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi \cosh(2r)} e^{-\frac{x^2 + p^2}{\cosh(2r)}}. \quad (1.79)$$

La figure 1.6 montre cette fonction de Wigner ainsi que la matrice densité associée pour un paramètre $r = 1$. De la même manière que la fonction de Wigner du vide, celle-ci est centrée sur l'origine et invariante par rotation, mais sa largeur est augmentée d'un facteur $\cosh(2r)$. Ce n'est donc en général plus un état d'incertitude minimale.

1.4.1.6 Etat gaussien général

Dans le cas le plus général et à une rotation près dans l'espace des phases, un état gaussien monomode peut toujours être vu comme un état thermique comprimé déplacé [Adam 95, Paris 03] :

$$\hat{\rho}_{\text{gaus}} = \hat{D}(\alpha) \hat{U}_{\text{comp}_1}(r) \hat{\rho}_{\text{th}} \hat{U}_{\text{comp}_1}(r)^\dagger \hat{D}(\alpha)^\dagger. \quad (1.80)$$

Les différents paramètres permettent de définir la largeur relative suivant deux directions orthogonales de l'espace (température de l'état thermique et compression monomode) ainsi que la position de la moyenne de l'état (amplitude du déplacement).

1.4.2 États non gaussiens

Tous les états que nous avons décrits précédemment ont une fonction de Wigner qui peut se mettre sous la forme d'une gaussienne. Cela n'est bien sûr qu'une fraction des états physiques, et nous nous proposons maintenant de nous pencher sur quelques-uns des états dont la fonction de Wigner n'est pas une gaussienne. Un théorème important [Hudson 74] permet d'affirmer a priori que si l'état est pur et non gaussien, alors sa fonction de Wigner prendra des valeurs négatives. C'est ce que nous allons voir ici au travers de deux exemples : les états de Fock et les états "chats de Schrödinger".

1.4.2.1 Les états de Fock

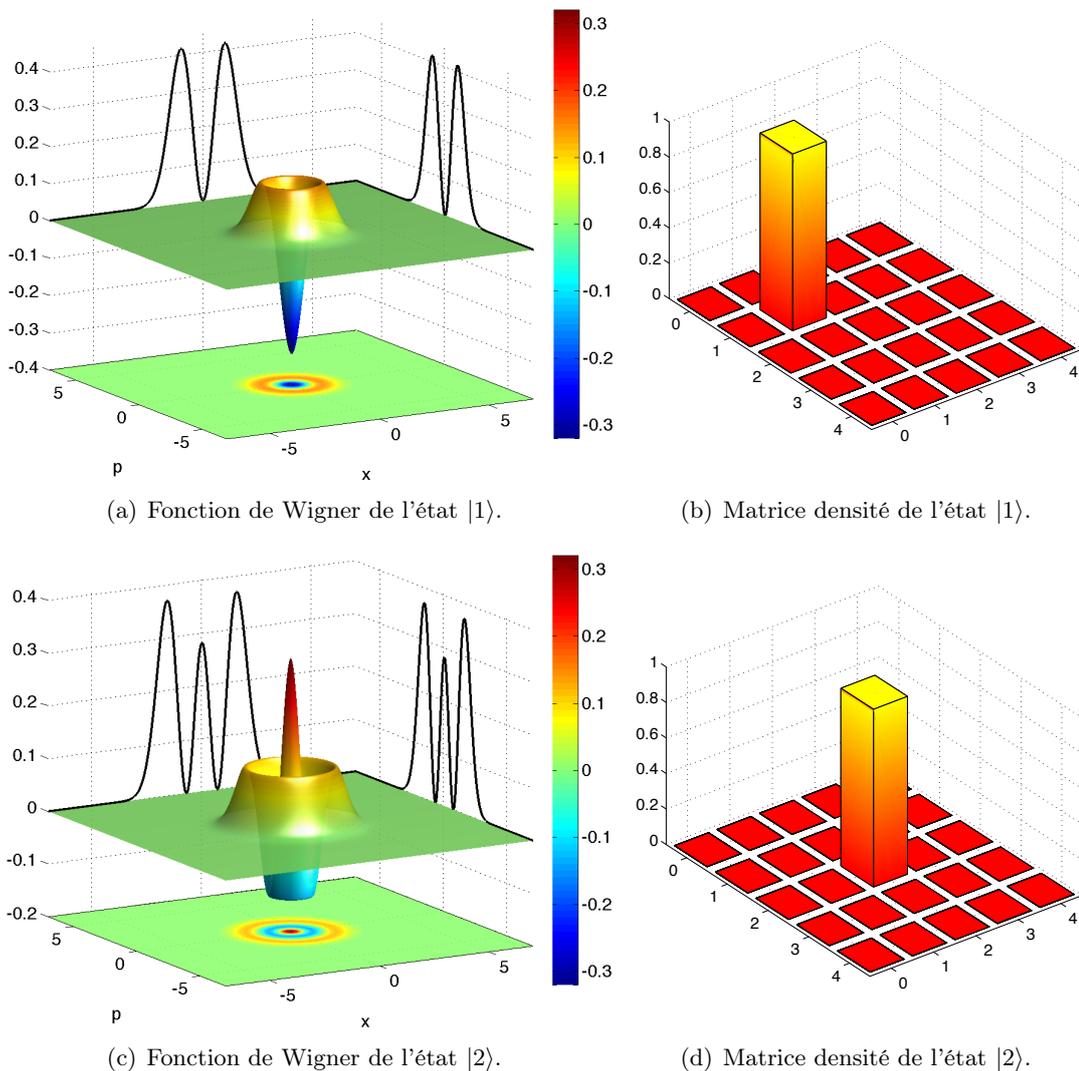


FIGURE 1.7 – Représentation des états de Fock à 1 et 2 photons.

Le premier exemple des états non gaussiens sont les états de Fock. En effet, à l'exception du vide quantique (état de Fock à 0 photon), les fonctions de Wigner de ces états prennent toutes des valeurs négatives, et sont donc non gaussiennes.

Comme nous l'avons vu précédemment, les états de Fock sont les excitations élémentaires du

champ électromagnétique quantique dont le Hamiltonien (1.8) est celui d'un oscillateur harmonique. Tout bon manuel de physique quantique permet d'obtenir la forme des solutions propres de l'équation de Schrödinger indépendante du temps associée et d'en déduire la forme des fonctions d'ondes en représentations x et p :

$$\langle x|n\rangle = \varphi_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{2^n n!}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (1.81a)$$

$$\langle p|n\rangle = \tilde{\varphi}_n(p) = e^{-in} \varphi_n(p), \quad (1.81b)$$

où $H_n(x)$ est le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Hermite, pouvant être défini par

$$H_n(x) = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-t^2+2xt} \right]_{t=0}. \quad (1.82)$$

Par exemple, les trois premières fonctions d'ondes s'écrivent :

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \varphi_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} x e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{2}} (2x^2 - 1) e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (1.83)$$

Le nombre d'annulations de ces fonctions est égal au nombre de photons, et correspond également au nombre de changement de signe de la fonction de Wigner :

$$W_n(x, p) = \frac{(-1)^n}{\pi} L_n(2(x^2 + p^2)) e^{-x^2 - p^2}, \quad (1.84)$$

où $L_n(x)$ est le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Laguerre :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-x)^k}{k!}. \quad (1.85)$$

La figure 1.7 montre les fonctions de Wigner et les matrices densité des deux états à un et deux photons.

Ces états ont la particularité d'être invariants de phase : contrairement à l'état cohérent il n'est donc pas possible d'attribuer une phase particulière à un état de Fock.

1.4.2.2 Les états "chats de Schrödinger"

Enfin, nous nous proposons de décrire les états "chats de Schrödinger" optiques. En 1935, Erwin Schrödinger énonce un paradoxe apparent de la physique quantique à propos des superpositions cohérentes [Schrödinger 35]. Il propose une expérience de pensée dans laquelle l'état de superposition d'un atome (excité/désexcité) serait retranscrit dans l'état "vivant" ou "mort" d'un chat. Ainsi, il arrive à une situation où si aucune mesure n'est réalisée sur le chat, celui-ci serait censé être à la fois mort et vivant. La résolution complète de ce paradoxe n'est actuellement toujours pas faite, mais on sait qu'un élément central limite la réalisabilité de ce type d'expérience : la décohérence.

Placer un système macroscopique (ici un chat) dans une superposition cohérente peut être transposé à d'autres types de systèmes, comme par exemple les états de la lumière. Nous avons étudié précédemment des états macroscopiques de la lumière avec les états cohérents : ils sont macroscopiques en ce sens qu'ils peuvent être identifiés et discriminés grâce à des mesures "classiques" (mesure avec une photodiode, à l'oeil, etc.). Ainsi, une superposition d'états quasi-classiques

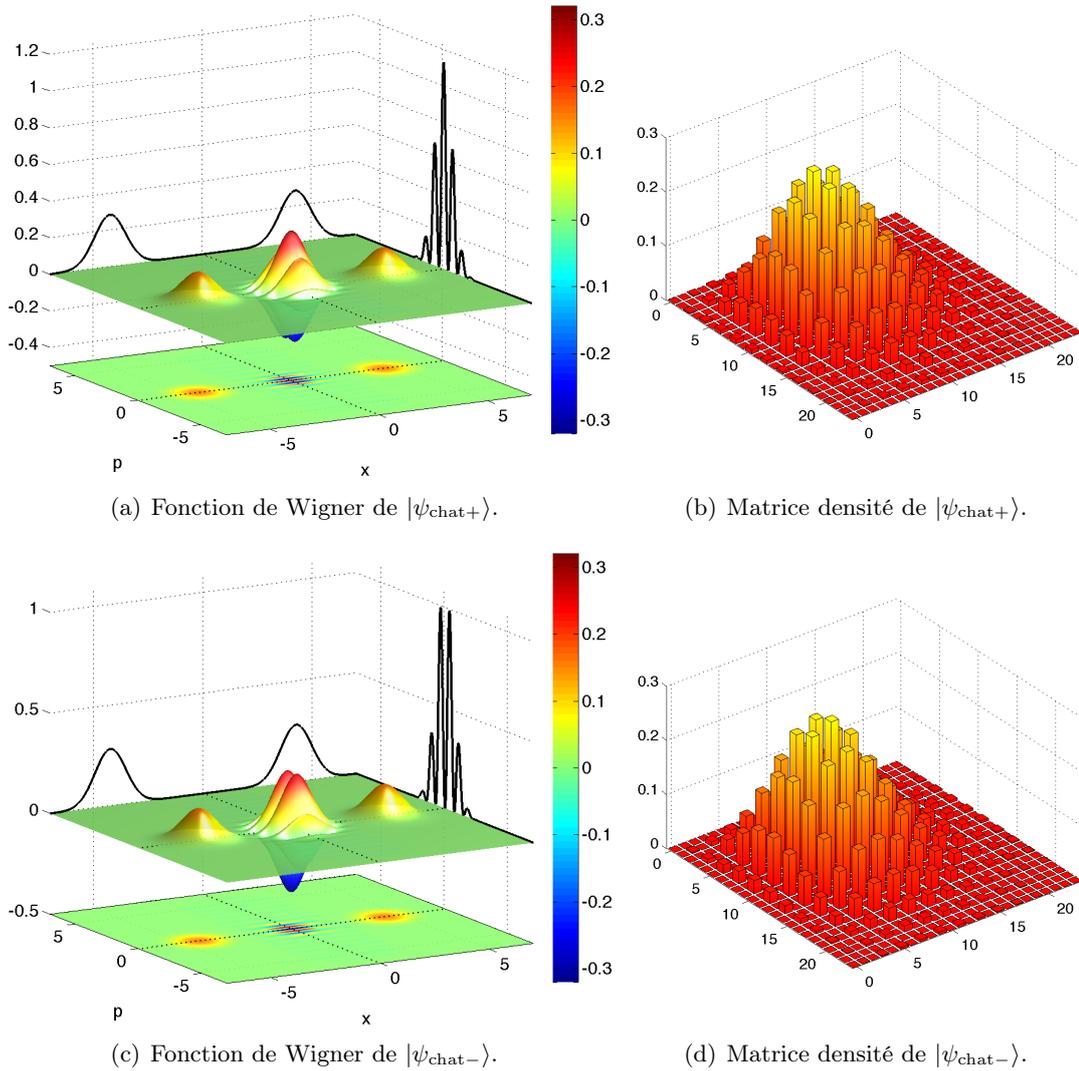


FIGURE 1.8 – Représentation d'états chats de Schrödinger pairs et impairs.

portera le nom de "chat de Schrödinger" optique.
 Nous allons définir un état chat comme :

$$|\psi_{\text{chat}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 + e^{-2\alpha^2} \cos \phi)}} \left[|\alpha\rangle + e^{i\phi} |-\alpha\rangle \right]. \quad (1.86)$$

On se limite ici aux superpositions d'états de phase opposée, toute autre superposition pouvant s'y ramener par application de l'opérateur déplacement. On suppose également $\alpha \in \mathbb{R}^+$, étant donnée la possibilité de s'y ramener par rotation dans l'espace des phases. Cette valeur α définira l'amplitude du chat.

La fonction de Wigner de cet état s'écrit :

$$W_{\text{chat}}(x, p) = \frac{e^{-x^2 - p^2}}{\pi[1 + e^{-2\alpha^2} \cos \phi]} \left[e^{-2\alpha^2} \cosh(2\sqrt{2}\alpha x) + \cos(2\sqrt{2}\alpha p - \phi) \right]. \quad (1.87)$$

Comme somme d'états cohérents, cette fonction est notamment composée de deux pics gaussiens centrés en $x = \sqrt{2}\alpha$ et en $x = -\sqrt{2}\alpha$. Une contribution due à la superposition cohérente de ces

états fait également apparaître des oscillations autour de l'origine, qui sont une signature de la nature quantique de la superposition.

Deux cas particuliers de ces états sont souvent rencontrés : les chats "pairs" $|\psi_{\text{chat}+}\rangle$ et "impairs" $|\psi_{\text{chat}-}\rangle$ obtenus respectivement pour $\phi = 0$ et $\phi = \pi$, appelés ainsi du fait de la parité du nombre de photons qui les composent :

$$|\psi_{\text{chat}+}\rangle = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{1+e^{-2\alpha^2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{\sqrt{(2k)!}} |2k\rangle \quad (1.88a)$$

$$|\psi_{\text{chat}-}\rangle = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{1-e^{-2\alpha^2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1}}{\sqrt{(2k+1)!}} |2k+1\rangle. \quad (1.88b)$$

Leurs fonctions d'ondes respectives sont, en représentations x et p :

$$\langle x|\psi_{\text{chat}+}\rangle = \frac{e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\alpha\right)^2} + e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\alpha\right)^2}}{\sqrt{2\sqrt{\pi}[1+e^{-2\alpha^2}]}} \quad (1.89a)$$

$$\langle p|\psi_{\text{chat}+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{e^{-\alpha^2}\sqrt{\pi}\cosh(\alpha^2)}} \cos(\sqrt{2}\alpha p)e^{-\frac{p^2}{2}}, \quad (1.89b)$$

et

$$\langle x|\psi_{\text{chat}-}\rangle = \frac{e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\alpha\right)^2} - e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\alpha\right)^2}}{\sqrt{2\sqrt{\pi}[1-e^{-2\alpha^2}]}} \quad (1.90a)$$

$$\langle p|\psi_{\text{chat}-}\rangle = \frac{i}{\sqrt{e^{-\alpha^2}\sqrt{\pi}\sinh(\alpha^2)}} \sin(\sqrt{2}\alpha p)e^{-\frac{p^2}{2}}. \quad (1.90b)$$

Les fonctions de Wigner de ces deux états sont représentées sur la figure 1.8.

1.5 Reconstruction des états par tomographie

La question que nous allons nous poser ici est de savoir finalement comment faire pour reconstruire les fonctions de Wigner que nous avons précédemment introduites. Il apparaît dans un premier temps nécessaire de pouvoir construire un appareil capable de mesurer les observables de quadratures \hat{X}_θ pour reconstruire cette distribution de quasi-probabilité. Au vu de l'équation (1.23), il suffirait de disposer d'un appareil capable de mesurer le champ optique en fonction du temps, et des oscillations de celui-ci on déduirait les amplitudes de chacune des quadratures. Mais, dans l'état actuel des technologies, aucun détecteur n'est assez rapide pour mesurer la dépendance temporelle des champs optiques (fréquences de plusieurs centaines de THz), et la mesure d'un mode du champ bien défini peut être également complexe à réaliser. Une méthode basée sur un principe interférométrique permet néanmoins de s'affranchir de ces problèmes.

1.5.1 Principe de la mesure homodyne

L'instrument de mesure dont on a besoin pour réaliser la mesure des observables de quadratures est une détection homodyne, dont le principe est montré sur la figure 1.9 : l'état à mesurer $\hat{\rho}_{\text{in}}$ est mélangé sur une 50:50 avec un état cohérent intense (l'oscillateur local, d'amplitude α) dont la phase θ peut être ajustée, et la différence des photocourants issus de deux photodiodes placées dans chacun des deux bras de sortie est mesurée. Cette différence est

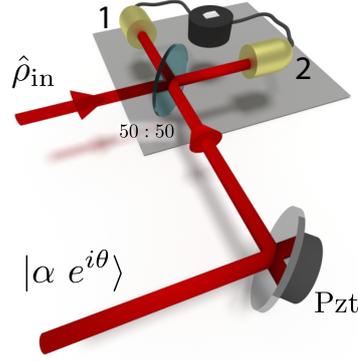


FIGURE 1.9 – Principe de la détection homodyne. Le signal à tomographier $\hat{\rho}_{in}$ est mélangé sur une lame 50:50 avec un état cohérent $|\alpha e^{i\theta}\rangle$ ($\alpha \in \mathbb{R}^+$) de phase ajustable (par exemple à l'aide d'une piézo (Pzt)). La différence des photocourants de deux photodiodes placées en sortie de lame fournit un signal proportionnel à la quadrature \hat{X}_θ .

proportionnelle à la quadrature \hat{X}_θ , voyons pourquoi.

Si \hat{a} est le mode du signal et \hat{a}_{OL} celui de l'oscillateur local, l'équation (1.48) permet d'obtenir les modes de sortie de la lame 50:50 :

$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{a} - \hat{a}_{OL}}{\sqrt{2}} \quad (1.91a)$$

$$\hat{a}_2 = \frac{\hat{a} + \hat{a}_{OL}}{\sqrt{2}}. \quad (1.91b)$$

Une photodiode étant sensible à l'énergie et donc au nombre de photons, la différence des photocourants sera proportionnelle à :

$$\hat{n}_{12} = \hat{n}_2 - \hat{n}_1 = \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 = \hat{a}_{OL}^\dagger \hat{a} + \hat{a}_{OL} \hat{a}^\dagger. \quad (1.92)$$

En faisant l'hypothèse que les fluctuations relatives des quadratures de l'oscillateur local sont suffisamment faibles, on peut le traiter classiquement ($\hat{a}_{OL} \simeq \alpha e^{i\theta}$), et en utilisant la définition (1.27) des quadratures tournées d'un angle θ , on obtient :

$$\hat{n}_{12} = \sqrt{2}\alpha \hat{X}_\theta. \quad (1.93)$$

Ainsi, le signal que l'on récupère avec la différence des photocourants est bien proportionnel à la quadrature \hat{X}_θ du champ, amplifiée d'un facteur α . Cette amplification par l'oscillateur local permet donc de rendre le bruit quantique du signal mesurable par un procédé classique. De plus, étant donné le fait que l'amplification n'a lieu que sur le mode de l'oscillateur local, on peut voir celui-ci comme un filtre pour le signal mesuré. Autrement dit, si les deux modes diffèrent, tout se passe comme si le signal subissait des pertes : nous y reviendrons plus en détail au chapitre 2.

1.5.2 Reconstruction de la fonction de Wigner

A présent que nous avons les mesures des quadratures, comment faire pour reconstruire la fonction de Wigner ? En effet, avec les mesures de quadratures, nous pouvons construire les histogrammes de leur occurrence et donc reconstruire les distributions de probabilité des quadratures (les courbes en noir sur les figures des fonctions de Wigner précédentes), qui ne sont

que les projections de la fonction de Wigner.

L'idée de la reconstruction est en fait la même que celle utilisée dans certaines techniques d'imagerie médicale : la tomographie. A partir des "ombres" projetées de la fonction de Wigner, on peut la reconstruire à l'aide de différentes techniques.

1.5.2.1 Transformée de Radon inverse

La première technique consiste à mathématiquement inverser la formule (1.28). Ce procédé mathématique a été introduit en 1917 par Radon [Radon 17] :

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \text{pr}(x_\theta) K(q \cos \theta + p \sin \theta - x) dx d\theta, \quad (1.94)$$

où

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int |\xi| e^{i\xi x} d\xi. \quad (1.95)$$

Cet objet K n'étant pas une fonction mais une distribution [Leonhardt 97], l'implémentation numérique du calcul de (1.94) impose de travailler avec une version lissée de celle-ci. D'autres méthodes analogues permettent ce même type de reconstruction par l'utilisation de la transformée de Fourier de la fonction de Wigner (fonction de Weyl) et de son développement polynomial sur la base des polynômes de Zernike [Benichi 11]. Les fonctions reconstruites sont alors moins bruitées étant donné le fait que les hypothèses utilisées pour la reconstruction sont moins contraignantes que celle du choix de la fonction de lissage.

1.5.2.2 Reconstruction par maximum de vraisemblance

Principe

Une seconde méthode consiste à utiliser le principe du maximum de vraisemblance, bien connu en statistique pour trouver les paramètres d'une fonction de densité de type connu à partir d'un échantillon de points. Initialement introduite par R. A. Fisher en 1912 [Fisher 12], la méthode consiste à définir une fonction des paramètres $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ associée à un tirage de points (x_1, \dots, x_N) :

$$\mathcal{V}(\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^N f(\mathbf{p}, x_i), \quad (1.96)$$

où $f(\mathbf{p}, x)$ est la densité de probabilité dont les paramètres optimaux sont recherchés pour tirage (x_1, \dots, x_N) . Ainsi, à chaque jeu de paramètre (p_1, \dots, p_n) correspond une valeur de la fonction \mathcal{V} , celle-ci étant maximisée pour le jeu le plus vraisemblable. C'est pourquoi cette fonction porte le nom de vraisemblance. Habituellement on préfère utiliser la log-vraisemblance définie comme le logarithme de la fonction \mathcal{V} afin que le produit soit transformé en somme et que les calculs numériques impliquent des nombres dont les ordres de grandeurs restent raisonnables.

On peut ensuite transposer cette idée à la reconstruction de la matrice densité (et donc à la fonction de Wigner) d'un état [Lvovsky 04]. En effet, si l'on réalise un certain nombre de mesures homodynes, il y aura un état qui sera le plus vraisemblable pour avoir donné naissance à ce jeu de mesures. La procédure se décompose comme suit.

Mettons que l'on ait réalisé N mesures de quadratures distribuées suivant des quadratures différentes : (x_i, θ_i) . Il est possible de définir la fonction de log-vraisemblance pour ce tirage par :

$$\log \mathcal{V} = \sum_{i=1}^N \log [\text{pr}_{\theta_i}(x_i)], \quad (1.97)$$

où $\text{pr}_{\theta_i}(x_i) = \text{Tr}[|\theta_i, x_i\rangle\langle\theta_i, x_i|\hat{\rho}]$. Ainsi, les paramètres sur lesquels devront porter l'optimisation sont ici les coefficients de la matrice densité. L'hypothèse qu'il est donc nécessaire de faire porte sur la troncature du nombre de composantes de celle-ci. Dans notre cas, cette hypothèse sera très facilement vérifiée, étant donné le faible nombre de photons contenus dans les états que l'on manipule.

Algorithme

L'idée de l'algorithme est d'exhiber un opérateur \hat{R} qui laisse invariant $\hat{\rho}_0$ (la matrice densité la plus vraisemblable) suivant $\hat{R}\hat{\rho}_0\hat{R} = \hat{\rho}_0$. Le théorème du point fixe fera alors converger un algorithme itératif vers la bonne matrice densité. Il est aisé de montrer que l'opérateur

$$\hat{R}(\hat{\rho}) = \sum_{i=1}^N \frac{|\theta_i, x_i\rangle\langle\theta_i, x_i|}{\text{pr}_{\theta_i}(x_i)} \quad (1.98)$$

vérifie cette condition. Ainsi, en itérant la relation

$$\hat{\rho}^{k+1} = \mathcal{N}[\hat{R}(\hat{\rho}^k)\hat{\rho}^k\hat{R}(\hat{\rho}^k)], \quad (1.99)$$

la matrice densité tendra vers la matrice densité la plus probable. Dans la relation précédente, \mathcal{N} est un coefficient de normalisation à chaque étape, et la matrice densité initiale peut être prise égale à l'identité par exemple.

Remarque : il a été montré [Řeháček 07] que cette technique peut parfois diverger, et le remplacement de $\hat{R}(\hat{\rho}^k)$ par $\frac{\hat{1} + \epsilon\hat{R}(\hat{\rho}^k)}{1 + \epsilon}$ (avec $\epsilon \ll 1$) dans (1.99) permet de pallier ce problème.

1.5.2.3 Correction de l'efficacité de détection

Les photodiodes de la détection homodyne peuvent avoir une efficacité quantique limitée. La qualité des états mesuré sera donc détériorée par cette efficacité, qui n'est propre qu'au dispositif de mesure : afin de reconstruire l'état de manière indépendante du système de mesure, on peut donc corriger des inefficacités de celui-ci. Nous nous proposons ici de voir comment adapter l'algorithme précédemment décrit à la prise en compte de ces imperfections, en vue de les corriger. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1.3.1.3, les pertes peuvent être modélisées par une lame de transmittivité finie η . Si les deux photodiodes de la détection homodyne sont sujettes aux mêmes imperfections de détection, il est alors possible de faire "remonter" ces pertes en amont de la lame 50:50 de mélange avec l'oscillateur local [Leonhardt 97]. Les pertes sur l'oscillateur local n'en modifient simplement que l'amplitude, mais celles sur le signal vont le détériorer. Ainsi, une efficacité de détection η sera équivalente à des pertes de même valeur sur l'état mesuré.

La matrice densité est alors modifiée suivant la formule (1.53), ce qui a pour conséquence de modifier l'opérateur \hat{R} de la formule (1.98) utilisé pour l'algorithme.

Dans cette expression, la probabilité $\text{pr}_{\theta_i}(x_i)$ sera remplacée par

$$\text{pr}_{\theta_i}^{\eta}(x_i) = \sum_{m,n=0}^{\infty} t^{\frac{n+m}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{\binom{n+j}{n} \binom{m+j}{m}} (1-t)^j \langle n|\theta_i, x_i\rangle \langle\theta_i, x_i|m\rangle \langle n+j|\hat{\rho}_0|m+j\rangle, \quad (1.100)$$

et le projecteur $|\theta_i, x_i\rangle\langle\theta_i, x_i|$ sera quant à lui remplacé par

$$\hat{E}_{\eta}(\theta_i, x_i) = \sum_{m,n=0}^{\infty} t^{\frac{n+m}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{\binom{n+j}{n} \binom{m+j}{m}} (1-t)^j \langle n|\theta_i, x_i\rangle \langle\theta_i, x_i|m\rangle |n+j\rangle \langle m+j|. \quad (1.101)$$

La matrice densité $\hat{\rho}_0$ ainsi reconstruite sera celle qui aurait été obtenue avec une détection homodyne d'efficacité 100%.

1.5.2.4 Erreurs statistiques

Pour estimer les coefficients de la matrice densité, seul un nombre fini de mesures homodynes sera effectué, et il est nécessaire de pouvoir estimer l'erreur statistique que l'on fait. La première technique consiste à utiliser l'information de Fisher relative au paramètre estimée sur la distribution théorique :

$$I(\rho_{ij}) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^\pi \frac{1}{\text{pr}_\theta(x)} \left(\frac{\partial^2 \text{pr}_\theta(x)}{\partial \rho_{ij}^2} \right) dx d\theta. \quad (1.102)$$

La variance de l'erreur statistique sur l'évaluation du coefficient ρ_{ij} est alors de $1/(NI(\rho_{ij}))$, où N est le nombre de tirages pour l'estimation. Cette méthode peut s'avérer relativement complexe étant donné le nombre possible de coefficients de la matrice densité.

Une seconde méthode, décrite dans [Lvovsky 04], consiste simplement à simuler un grand nombre de fois la reconstruction avec un tirage aléatoire des quadratures selon les distributions déduites de la matrice densité obtenue par l'algorithme. A chaque jeu de points correspondra alors une nouvelle matrice densité, et les fluctuations dans les coefficients donneront l'information des fluctuations statistiques.

Par exemple, si n_1 points ont été mesurés pour une phase θ_1, \dots, n_l pour une phase θ_l , ceux-ci permettront de reconstruire une matrice densité $\hat{\rho}_{ML}$. Ensuite, à partir de cette matrice densité et des distributions de probabilités associées (pour les phases $\theta_1, \dots, \theta_l$), il est alors possible de simuler un nouveau jeu de points par tirage de n_1 points suivant la phase θ_1, \dots, n_l points suivant la phase θ_l . Ce jeu de points permet la reconstruction d'une nouvelle matrice densité, dont les coefficients seront légèrement différents de ceux de $\hat{\rho}_{ML}$. En ré-itérant l'opération un grand nombre de fois, il est possible de réaliser une statistique sur les fluctuations des coefficients et donc de connaître les erreurs statistiques sur chacun des paramètres ρ_{ij} .

1.6 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre de quelle façon le champ pouvait être décrit de manière quantique, révélant la dualité des deux descriptions corpusculaires et ondulatoires. A l'aide de transformations unitaires de ce champ, il est ensuite possible de générer des états particuliers de la lumière, dont le caractère fortement non-classique peut être mis en évidence (négativité de la fonction de Wigner par exemple) à l'aide d'outils de mesure spécifiques.

Nous allons dans le chapitre suivant nous intéresser aux méthodes expérimentales qui sont à notre disposition pour l'implémentation concrète de ces objets.

Chapitre 2

Outils expérimentaux

Sommaire

2.1	La source laser	34
2.1.1	Principe de fonctionnement d'un laser impulsionnel	34
2.1.2	Configuration femtoseconde	37
2.1.3	Configuration picoseconde	38
2.2	Génération de seconde harmonique	38
2.2.1	Paramètres de génération	39
2.2.2	Propriétés spectro-temporelles	42
2.2.3	Absorption à deux photons	42
2.3	Génération d'états paramétriques	43
2.3.1	Configuration dégénérée	44
2.3.2	Configuration non dégénérée	44
2.3.3	Modélisation des imperfections	45
2.4	Détections et mesures projectives	46
2.4.1	Détection de photons	46
2.4.2	Détection homodyne	48
2.4.3	Acquisition	52
2.5	Le photon unique	52
2.5.1	Principe de génération	53
2.5.2	Etat théorique attendu	53
2.5.3	Estimation des paramètres	54
2.5.4	Photon produit	55
2.6	Conclusion	55

Nous allons voir dans ce chapitre comment les outils introduits au chapitre précédent peuvent être implémentés concrètement dans un laboratoire d'optique quantique.

Etudions tout d'abord les conditions à remplir pour notre expérience.

Notre but est de générer des états non-classiques de la lumière, par le biais des opérateurs de compression de type (1.54) ou (1.57). Comme nous le verrons dans ce chapitre, ceux-ci peuvent être implémentés par l'utilisation d'effets non-linéaires paramétriques. Or ces effets nécessitent, pour être visibles, des intensités élevées. Deux possibilités s'offrent alors :

- la première consiste à forcer un faisceau lumineux à réaliser un grand nombre d'aller-retours dans un cristal non-linéaire afin d'en exacerber les effets. Dans ce cas, c'est l'utilisation d'oscillateurs paramétriques qui est nécessaire, fonctionnant à l'aide de cavités autour de cristaux non-linéaires [Wu 86, Suzuki 06b].

- la seconde possibilité consiste à utiliser de très fortes intensités crêtes en concentrant l'énergie d'un faisceau durant un très court instant. L'effet paramétrique peut alors être obtenu en simple passage : c'est la méthode que nous avons employée et que nous détaillons ici.

Une fois l'état paramétrique généré, il faut pouvoir le faire interférer avec un faisceau de référence (oscillateur local) pour en réaliser la tomographie (cf section 1.5). L'idée qui a été choisie ici consiste à ne pas utiliser directement le laser pour générer les états paramétriques, mais à en utiliser la seconde harmonique : dans ce cas le mode spectral de l'état paramétrique pourra être celui du laser lui-même, et l'oscillateur local (le mode de référence) sera alors simplement obtenu par un prélèvement du faisceau laser avant la génération de seconde harmonique.

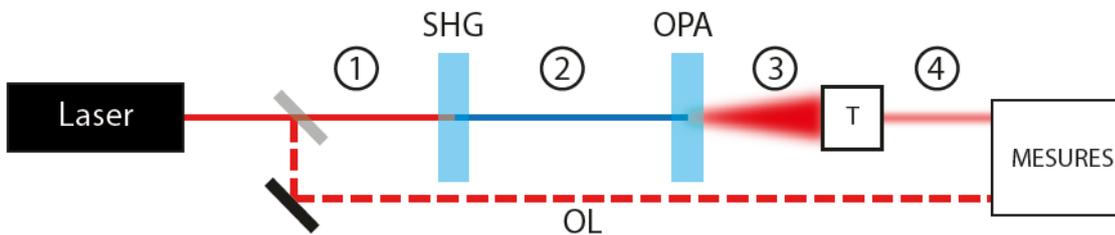


FIGURE 2.1 – Principe général de génération d'états. SHG : cristal de génération de seconde harmonique, OPA : cristal paramétrique optique, OL : oscillateur local, T : transformation.

La figure 2.1 résume le plan de ce chapitre : tout d'abord nous allons nous intéresser à la génération des impulsions nécessaires à notre dispositif (1), puis nous allons étudier la génération de seconde harmonique (2), pour ensuite nous pencher sur les techniques de génération d'états paramétriques quantiques de la lumière (3), et ce dans deux configuration différentes. Par l'application de transformations et de projections (T), il sera finalement possible de former différents états de la lumière (4), dont nous étudierons un cas particulier à la fin de ce chapitre : l'état de Fock à un photon.

2.1 La source laser

La source que nous utilisons pour la génération de nos états est un laser, permettant comme on l'a précisé dans le paragraphe 1.4.1.2 de générer des états proches d'états cohérents. Celui-ci fonctionne en mode impulsif et peut être utilisé dans deux configurations différentes : une configuration femtoseconde et une configuration picoseconde. Il s'agit d'un *Mira Optima 900-D* du constructeur *Coherent*. Après avoir rapidement rappelé le principe de fonctionnement d'un laser impulsif, nous verrons quels sont les impératifs liés à ce type de cavités, pour nous pencher sur les performances de notre matériel dans les deux configurations.

2.1.1 Principe de fonctionnement d'un laser impulsif

2.1.1.1 Verrouillage des modes

Pour obtenir des impulsions ultra-courtes, il faut d'une part que le nombre de modes fréquentiels qui co-existent dans la cavité soit grand (par transformation de Fourier, si l'impulsion est courte son spectre est large) et d'autre part que ceux-ci aient une relation de phase fixe. La figure 2.2 illustre le principe de la nécessité du verrouillage des modes en phase : si ceux-ci n'ont

pas de relation de phase particulière, ils ne vont pas interférer constructivement et vont mener à une amplitude bruitée dans le temps (figures (a), (b) et (c)), alors que si leur phase est verrouillée, il existera des instants où ceux-ci interféreront et donneront naissance à des impulsions (figures (d), (e) et (f)). Ces instants se répèteront à intervalle de temps régulier, où la période est donnée par l'inverse de l'intervalle spectral libre de la cavité $\Delta\nu = c/L$, où L est la longueur de la cavité.

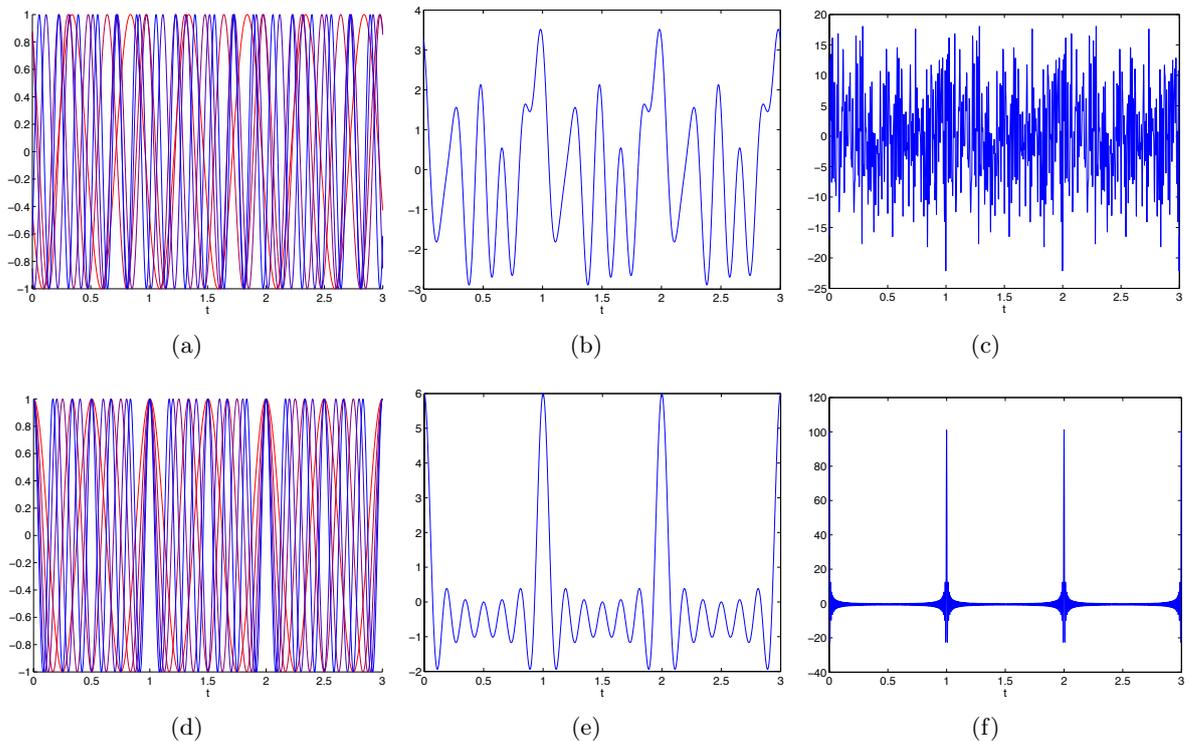


FIGURE 2.2 – Principe du verrouillage de modes. (a) Oscillations pour 5 modes sans relation de phase particulière. (d) Oscillations pour 5 modes verrouillés en phase. (b) Somme des 5 modes de la figure (a). (e) Somme des 5 modes de la figure (d). (c) Somme de 100 oscillations sans relation de phase : l'amplitude du champ ne possède pas de structure particulière. (f) Somme de 100 oscillations verrouillées en phase : des impulsions apparaissent périodiquement dans l'amplitude du champ.

Plusieurs stratégies existent pour réaliser le verrouillage de phase, qui se classent en deux grandes catégories : le verrouillage actif, où un élément participe activement à corriger les dérivés de phases de chaque mode, et le verrouillage passif (et même à ses débuts appelé verrouillage *magique*), où aucun élément n'agit directement sur la relation de phase.

Avec le temps, les stratégies ont eu tendance à privilégier les méthodes passives pour leur plus grande simplicité de mise en œuvre, et c'est cette méthode qui est utilisée dans notre laser : il s'agit du verrouillage de modes par effet Kerr optique.

Le principe est le suivant : si l'intensité d'un champ est suffisante, l'indice optique d'un matériau peut être modifié suivant la loi $n = n_0 + n_2 I$. Autrement dit, pour un faisceau gaussien (comme c'est le cas dans la cavité en bonne approximation) l'indice variera en fonction de la distance au centre de celui-ci, et un effet de lentille apparaîtra si l'intensité est suffisante. En plaçant un diaphragme judicieusement, il est alors possible de favoriser le fonctionnement impulsif par

rapport au fonctionnement continu : les pertes du régime continu sont plus importantes étant donné le fait qu'une grande partie du faisceau est coupé, par rapport au régime impulsionnel où le faisceau arrive à passer par le diaphragme. Ce principe est illustré sur la figure 2.3.

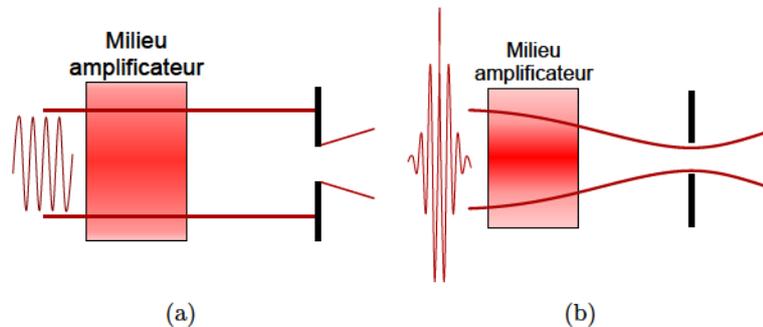


FIGURE 2.3 – Autofocalisation par effet Kerr (a) en régime continu et (b) en régime impulsionnel. Les pertes sont plus importantes en régime continu, favorisant le fonctionnement pulsé.

A l'allumage du laser par contre, il est nécessaire de permettre à la cavité d'"explorer" les configurations accessibles, et la vibration d'un "starter" consistant en une lame de verre permet de déclencher le verrouillage de la cavité.

2.1.1.2 Compensation de la dispersion

Lors de la propagation de l'impulsion dans les optiques de la cavité (starter, cristal, filtre), l'impulsion, dont le spectre peut être relativement large (3-4 nm), va subir de la dispersion. Celle-ci aura pour conséquence de déphaser progressivement les différents modes de la cavité, menant à un étalement temporel de l'impulsion initiale. Ce phénomène porte le nom anglais de *Group Velocity Dispersion* (GVD).

Il est donc nécessaire d'utiliser un dispositif permettant de compenser la dispersion à chaque aller-retour de l'impulsion dans la cavité. C'est ce dispositif qui fait la différence principale entre les configurations femtoseconde et picoseconde de la cavité *Mira*.

2.1.1.3 Augmentation de l'énergie par impulsion : *Cavity dumper*

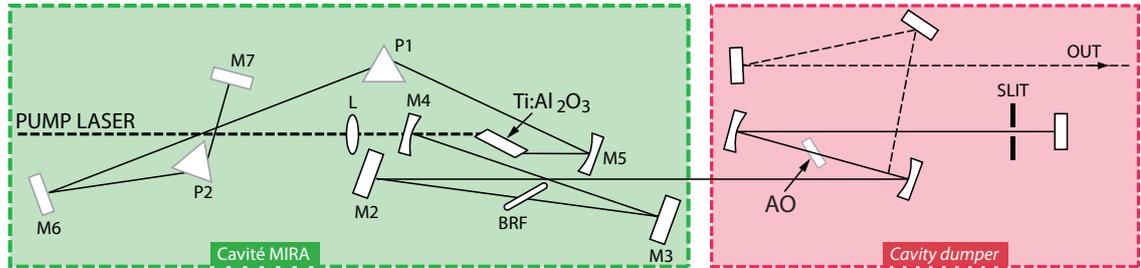
Pour permettre d'augmenter l'énergie par impulsion, nous avons choisi d'utiliser un dispositif permettant de forcer les impulsions à effectuer un plus grand nombre d'aller-retours dans la cavité avec des pertes minimales avant leur extraction : davantage de passages par le milieu à gain et moins de pertes entraîne une énergie par impulsion plus importante. Ce dispositif, le *Cavity dumper*, est placé au sein de la cavité et est composé essentiellement d'un cristal acousto-optique en double passage. Le miroir de fin de cavité laser, habituellement semi-réfléchissant pour permettre la sortie du faisceau laser, est alors remplacé par un miroir totalement réfléchissant. L'extraction des impulsions se fait finalement par l'envoi d'une onde électronique radio-fréquence (RF) dans le cristal acousto-optique, qui va alors défléchir le faisceau vers un miroir décalé, redirigeant l'impulsion vers l'extérieur du laser.

Des réglages portant sur l'impulsion RF permettent d'en ajuster la durée, la phase, le délai, et la puissance. Le taux de répétition de sortie est choisi de manière à maximiser l'énergie par impulsion tout en conservant une cadence de mesure suffisamment élevée pour les expériences : plus le nombre d'aller-retours dans la cavité sera important, plus l'énergie par impulsion sera grande, mais moins le taux de répétition sera élevé. Le phénomène de saturation empêchant

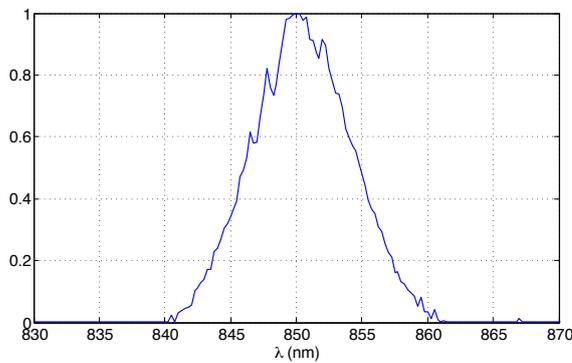
d'obtenir des énergies arbitrairement grandes, le taux de 800 kHz est un bon compromis dans notre cas.

2.1.2 Configuration femtoseconde

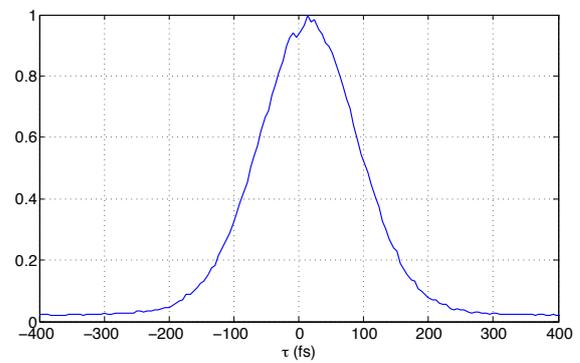
La configuration femtoseconde de la cavité laser est présentée sur la figure 2.4 (a). Cette



(a) Configuration de la cavité.



(b) Spectre du laser.



(c) Signal d'autocorrélation.

FIGURE 2.4 – Caractéristiques du laser dans la configuration femtoseconde.

dernière est composée d'un cristal de Titane-Saphir ($\text{Ti}:\text{Al}_2\text{O}_3$) dans lequel est focalisé un laser de pompe continu à 532 nm (*Coherent Verdi V5*) à l'aide d'une lentille. Autour de ce cristal, une sous-cavité constituée de deux miroirs concaves (M4 et M5) permet au faisceau laser généré d'être lui aussi focalisé au sein du cristal. Un filtre de Lyot (BRF) permet de régler le centrage du spectre laser, et une ligne de deux prismes permet la compensation de dispersion évoquée précédemment : les plus courtes longueurs d'ondes, plus déviées que les longues, parcourent un chemin plus court et rattrapent ainsi le retard qu'elles acquièrent du fait de la dispersion normale.

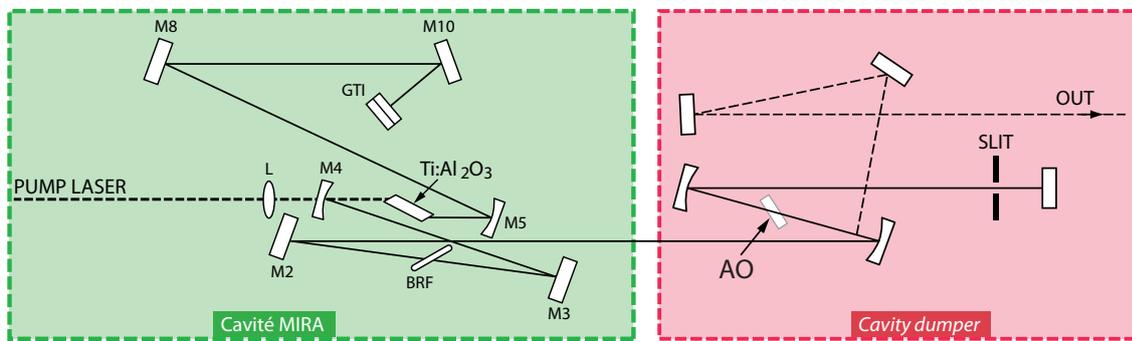
L'utilisation de la fente placée dans la cavité (*SLIT* sur la figure 2.4 (a)) permet ensuite de réaliser le verrouillage de modes décrit précédemment. Pour exciter les modes de la cavité, un *starter* est également présent devant le miroir M3 (non représenté sur la figure 2.4). C'est ce dispositif qui permet de basculer d'une configuration continue à une configuration pulsée.

Le spectre et le signal d'autocorrélation obtenus pour le laser dans la configuration femtoseconde sont montrés sur les figures 2.4 (b) et (c). Ceux-ci ont été respectivement obtenus à l'aide d'un analyseur de spectre optique *Advantest Q8384* (résolution maximale de 0.01 nm) et d'un autocorrélateur *APE PulseCheck 15*.

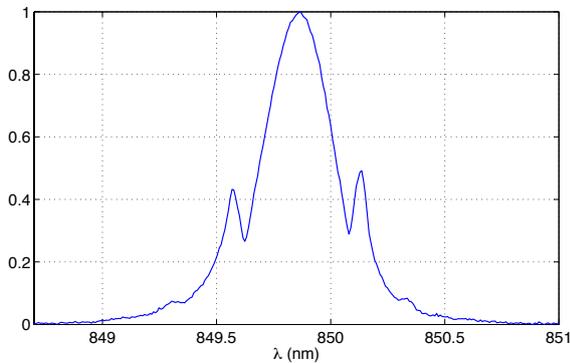
2.1.3 Configuration picoseconde

Dans la configuration picoseconde, la principale différence dans l'agencement de la cavité (visible sur la figure 2.5 (a)) est le remplacement de la ligne de prismes par un interféromètre de Gires-Tournois [Gires 64]. Celui-ci, semblable à un interféromètre de Fabry-Pérot dont une des faces est totalement réfléchissante, permet d'introduire un déphasage à la réflexion dépendant de la longueur d'onde du champ incident. En contrôlant précisément l'épaisseur de l'interféromètre, il est donc possible d'ajuster la compensation de dispersion. Le filtre de sélection du spectre est également plus fin, permettant l'utilisation d'un nombre plus restreint de modes dans la cavité.

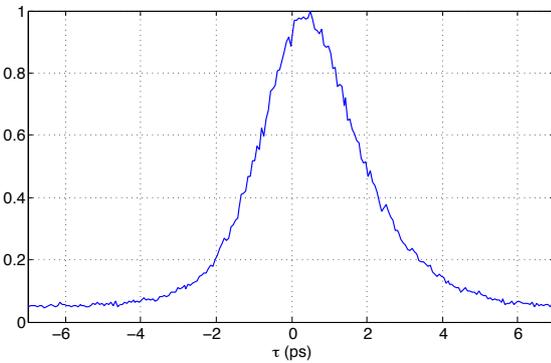
Les figures 2.5 (b) et (c) montrent l'allure spectro-temporelle du laser dans la configuration picoseconde.



(a) Configuration de la cavité. GTI = Interféromètre de Gires-Tournoi.



(b) Spectre du laser.



(c) Signal d'autocorrélation.

FIGURE 2.5 – Caractéristiques du laser dans la configuration picoseconde.

En résumé, les caractéristiques du laser dans les deux configurations sont les montrées dans le tableau 2.1.

2.2 Génération de seconde harmonique

Comme nous l'avons vu en introduction de ce chapitre, tout l'intérêt de travailler avec un laser impulsionnel est qu'il permet de délivrer des impulsions dont l'intensité crête peut être bien plus importante que les lasers continus, autorisant la génération d'effets non-linéaires en simple passage. Intéressons-nous ici à la génération de seconde harmonique nécessaire à notre dispositif.

	Configuration fs	Configuration ps
Cadence de répétition	800 kHz	
Longueur d'onde	850±0.2 nm	
Largeur spectrale	3 – 5 nm	0.2 – 0.5 nm
Durée d'autocorrélation	120 – 200 fs	2 – 3 ps
Energie par impulsion	~40 nJ	
Puissance crête	~250 kW	~15 kW

TABLEAU 2.1 – Propriétés du laser *Mira 900 D* dans les configurations fs et ps.

2.2.1 Paramètres de génération

2.2.1.1 Configuration utilisée

Le matériau dont nous disposons pour la génération est un cristal de niobate de potassium KNbO_3 , choisi pour son fort coefficient non-linéaire d'ordre 2 : $d_{\text{eff}} = 12 \text{ pm/V}$ [Weiner 98, Guzun 00]. La configuration que nous avons adoptée est un accord de phase non critique de type I. Ainsi, deux ondes pompe de polarisations ordinaires se conjuguent pour la formation d'une onde à la fréquence double et de polarisation extraordinaire, onde pour laquelle l'accord de phase peut être réalisé en ajustant la température du cristal [Zysset 92, Biaggio 92]. Aussi, le faisceau pompe se propage suivant l'axe a du cristal (axe perpendiculaire aux faces d'entrée/sortie du cristal) et est polarisé suivant son axe b .

L'accord de phase est non critique car étant donné que la propagation se fait à $\theta = 90^\circ$ de l'axe c , l'angle de walk-off $u \simeq (n_c - n_b)/n_b \sin(2\theta)$ s'annule : les faisceaux pompe rouge et harmonique bleu se propagent donc toujours suivant la même direction (leurs vecteurs de Poynting sont superposés).

2.2.1.2 Nécessité d'un travail à basses pressions

La référence [Zysset 92] permet de trouver la température d'accord de phase en fonction de la longueur d'onde : $T \simeq 3.3516\lambda - 2852$, où T est exprimé en $^\circ\text{C}$ et λ en nm. A la longueur d'onde de notre laser (850 nm), la température d'accord de phase est donc de -3°C : à cette température, la condensation pose problème à la pression ambiante. Il a donc été nécessaire de concevoir un dispositif permettant de réduire la pression autour du cristal.

Une photo de celui-ci est montrée sur la figure 2.6 (a) : il consiste en une enceinte cylindrique avec deux accès optiques (une fenêtre traitée AR à 850 nm en entrée et une fenêtre traitée AR à 425 nm en sortie), et un accès de pompage contrôlé par une valve. Le cristal est positionné dans une monture en cuivre, elle-même collée sur un élément Peltier. La surface chaude de cet élément est collée sur une base de cuivre refroidie par un circuit d'eau (15°C). Celui-ci peut être coupé si la température de consigne n'est pas trop basse (-3°C), étant donné le fait que l'élément Peltier supporte une différence de température entre la face chaude et la face froide de 50°C .

L'asservissement en température est réalisé à l'aide d'un contrôleur PID (*Thorlabs TED200C*) et d'une sonde (*Analog Device AD590*) placée dans la même monture que le cristal.

La figure 2.6 (b) montre quelle doit être la pression à ne pas dépasser pour une température donnée afin de ne pas avoir de condensation sur le cristal, pour différents taux d'humidité de l'air ambiant (h variant de 0.2 à 1). Etant donnée la température cible de -3°C et la tenue au

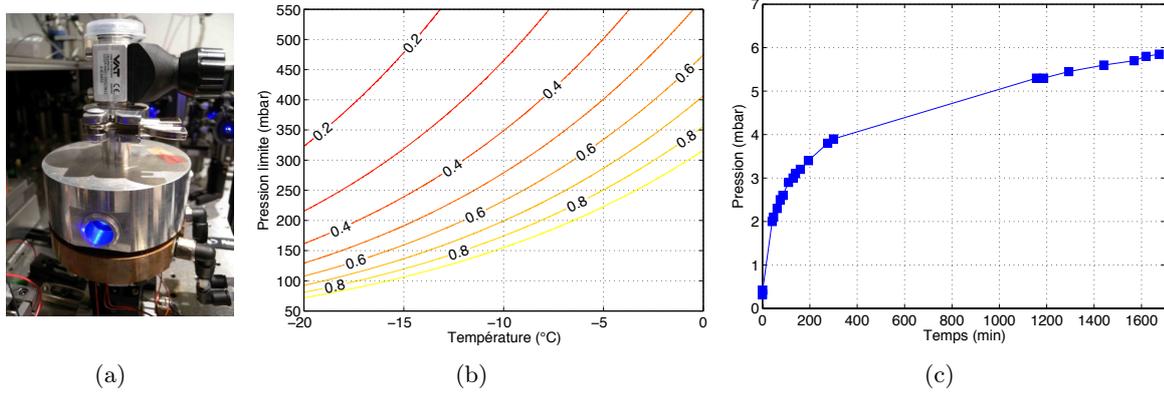


FIGURE 2.6 – Frigo pour la mise en température du cristal. (a) Dispositif permettant de maintenir le vide autour du cristal. (b) Courbes de pression limite en fonction de la température, pour différents taux d’humidité de l’air ambiant. (c) Taux de fuite du dispositif en fonction du temps.

vide du dispositif (cf figure 2.6 (c)), la pression limite de 250 mbar est atteinte environ 6 mois après pompage, dans l’hypothèse où l’air est saturé d’humidité ($h = 1$). Dans la pratique, ce taux dépassant rarement les 60%, un pompage tous les 9 mois est même suffisant.

2.2.1.3 Choix du cristal

Voyons à présent quels sont les paramètres qui conditionnent le choix de l’épaisseur du cristal de KNbO_3 dans les deux configurations d’impulsions laser. La résolution des équations couplées de Manley-Rowe [Boyd 08] dans l’hypothèse d’un accord de phase parfait permet d’exprimer l’intensité de l’onde harmonique I_{SHG} en fonction de celle de l’onde incidente I_0 :

$$I_{\text{SHG}}(L_c) = I_0 \tanh^2\left(\frac{L_c}{L}\right) \quad \text{où} \quad L = \sqrt{\frac{w_o^2 \epsilon_o c \lambda^2 n^3}{16\pi d_{\text{eff}}^2 P_c}}, \quad (2.1)$$

avec L_c la longueur du cristal, w_o le waist du faisceau pompe dans le cristal, P_c sa puissance crête, c la célérité de la lumière et n l’indice optique du cristal à la longueur d’onde du fondamental λ . Afin de pouvoir éviter les effets de diffraction naturelle du faisceau, on se place dans l’hypothèse où le cristal a une longueur maximale égale à la moitié de la longueur de Rayleigh $L_c = \pi w_o^2 / (2\lambda)$.

Dans ce cas, l’intensité de l’onde de sortie a pour expression $I_{\text{SHG}}(z) \propto \tanh^2(\sqrt{L_c} \sqrt{\frac{8\pi^2 d_{\text{eff}}^2 P_c}{\epsilon_o c \lambda^3 n^3}})$: cette expression indique que l’on a avantage à travailler à focalisation moindre avec un cristal plus épais ($L_c \rightarrow +\infty$). Cette épaisseur sera par contre limitée par d’autres phénomènes : la GVD, évoquée au paragraphe 2.1.1.2 et la GVM.

La GVM (Group Velocity Mismatch, ou désaccord de vitesse de groupe) caractérise le fait que l’impulsion harmonique ne se propage pas à la même vitesse que l’impulsion fondamentale dans le cristal. De cette différence il résultera un étalement temporel par unité de longueur quantifié par $\text{GVM} := M = 1/v_{g,2\omega} - 1/v_{g,\omega}$.

Pour le cristal de KNbO_3 , la GVD est de 316 fs²/mm, et la GVM est de 1.2 ps/mm. La figure 2.7 donne l’étalement relatif de l’impulsion dans le cas femtoseconde et picoseconde en fonction de l’épaisseur du cristal utilisé.

Cette figure montre que l’effet prépondérant qui limitera l’épaisseur du cristal est la GVM. Nous avons choisi des épaisseurs de 100 μm dans la configuration femtoseconde et de 1.5 mm dans la configuration picoseconde, menant à un étalement relatif théorique inférieur à 100%.

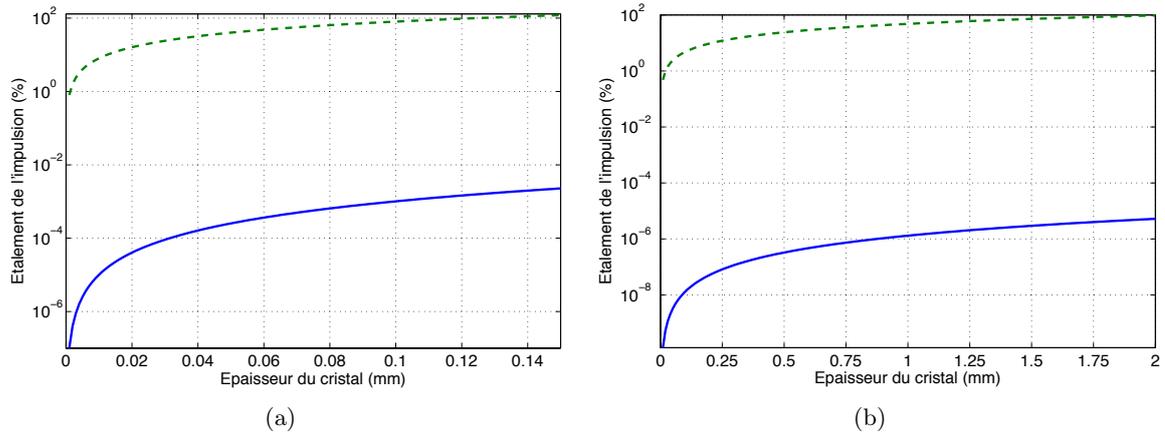


FIGURE 2.7 – Étalement relatif de la durée de l'impulsion dans le cas (a) femtoseconde ($\tau_{ac} = 150$ fs) et (b) picoseconde ($\tau_{ac} = 2.5$ ps). La courbe en trait plein bleu représente l'étalement dû à la GVD et la courbe en trait tireté vert celui dû à la GVM.

2.2.1.4 Influence de la focalisation

Une fois le cristal choisi, il convient d'étudier les paramètres de focalisation les plus adaptés pour la génération de seconde harmonique. L'étude de la dépendance de l'efficacité de conversion en fonction de la puissance incidente et de la défocalisation a été faite dans [Wenger 04a] pour la configuration femtoseconde, révélant que si le faisceau est trop focalisé, des effets parasites locaux dégradent la conversion. Ceux-ci ont été identifiés comme l'absorption à deux photons, les effets photoréfractifs [Reeves 91], l'absorption infrarouge induite par le bleu (BLIIRA) [Mabuchi 94] et des effets thermiques locaux. L'effet parasite prépondérant est a priori la conjugaison d'effets thermiques et de l'absorption à deux photons [Ourjountsev 07a].

Cet effet est montré sur les figures 2.8 (a) et (b) par les courbes rouges aux symboles circulaires : pour un waist de $8 \mu\text{m}$, l'efficacité de doublage diminue si la puissance de pompe augmente au-delà de 20 mW, et la position optimale du waist n'est pas au centre du cristal. L'utilisation d'un waist de $16 \mu\text{m}$ règle alors ce problème, permettant d'atteindre des efficacités de 25% (courbes bleues et symboles carrés).

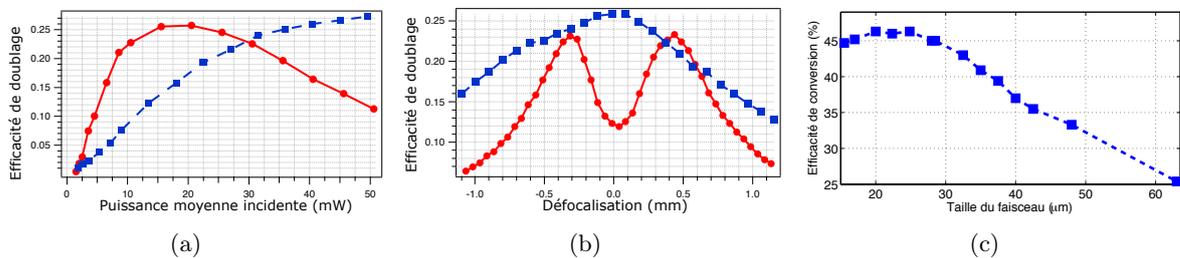


FIGURE 2.8 – Influence de la focalisation et des paramètres de pompe pour la génération de seconde harmonique (a) et (b) en configuration femtoseconde, et (c) picoseconde. Pour les courbes en régime femtoseconde, la courbe rouge (\bullet) correspond à un waist de $8 \mu\text{m}$, et la courbe bleue (\blacksquare) à un waist de $16 \mu\text{m}$.

Pour la configuration picoseconde, l'effet d'absorption à deux photons est moins problématique étant donnée la plus faible focalisation. La figure 2.8 (c) montre l'efficacité de conversion en fonction de la taille du waist pompe dans le cristal, révélant un effet de saturation pour des tailles de faisceau inférieures à 25 μm . Cette saturation peut s'expliquer par le fait qu'alors la longueur de Rayleigh n'est plus grande devant la taille du cristal. Nous avons donc choisi de travailler au point limite, pour lequel le cristal est deux fois plus fin que cette longueur : $w_0 \simeq 27 \mu\text{m}$, menant à une efficacité de conversion de 45%.

2.2.2 Propriétés spectro-temporelles

Le signal de cross-corrélation ainsi que le spectre relatif au signal de seconde harmonique dans la configuration picoseconde sont montrés sur la figure 2.9. Ils ont été obtenus avec un analyseur de spectre optique dans le visible (différent du précédent), ainsi qu'avec le même autocorrélateur que précédemment réglé avec un cristal différent. Le spectre possède une largeur de l'ordre de

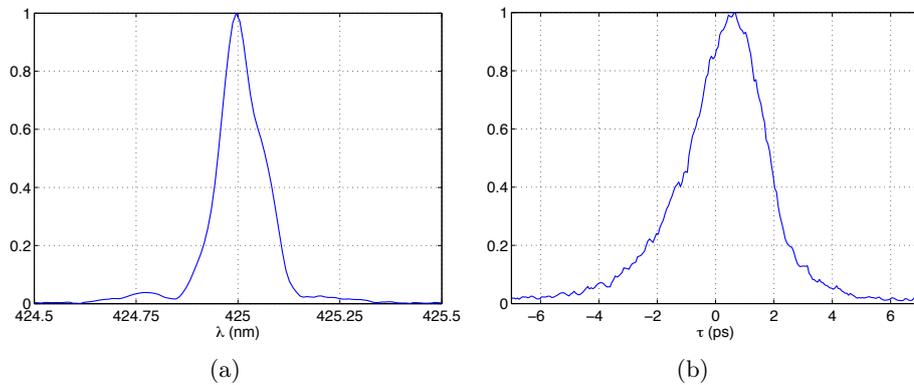


FIGURE 2.9 – Propriétés spectro-temporelles du faisceau bleu. (a) Spectre et (b) signal de cross-corrélation.

0.1 nm, et le signal de cross-corrélation a une largeur de 3 ps. Dans l'hypothèse où les profils temporels sont gaussiens, cela mène à une largeur à $1/e^2$ de l'ordre de 2 ps.

Dans la configuration femtoseconde, la cross-corrélation a une largeur de 250 fs, menant à une largeur à $1/e^2$ de 180 fs. Le spectre de l'impulsion bleue n'avait malheureusement pas pu être mesuré à l'époque du fait de la non-disponibilité du matériel.

2.2.3 Absorption à deux photons

Enfin, une propriété intéressante du cristal de KNbO_3 vis-à-vis du faisceau bleu est qu'aux intensités auxquelles nous travaillons, l'absorption à deux photons n'est pas négligeable. Ce phénomène est visible sur la figure 2.10, où le laser est en configuration femtoseconde.

Le fit des points expérimentaux de la figure 2.10 donne une dépendance de la forme :

$$P_{\text{out}} = \frac{0.69P_{\text{in}}}{1 + 24P_{\text{in}}}, \quad (2.2)$$

qui peut être assimilée à la formule

$$I(L) = \frac{\alpha_l I(0)}{1 + \beta L I(0)}, \quad (2.3)$$

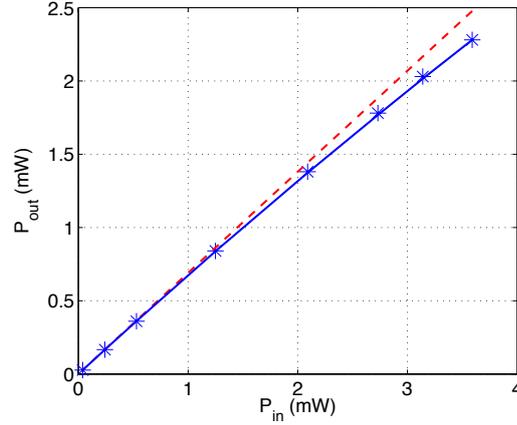


FIGURE 2.10 – Caractérisation de l’absorption à deux photons dans le KNbO_3 . Ligne rouge tiretée : absorption linéaire pour de faibles puissances de pompe, ligne bleue continue : absorption comprenant un terme à deux photons.

avec $\beta = 3.4 \cdot 10^{-11} \text{m.W}^{-1}$. Ce paramètre est en très bon accord avec celui trouvé dans [Ludlow 01] à 850 nm valant $\beta_{850} = 3.2 \cdot 10^{-11} \text{m.W}^{-1}$. Le terme d’absorption linéaire de 0.69 est aussi bas car, pour la mesure, le cristal est placé dans un frigo dont une des fenêtres n’est traitée anti-reflet que pour la longueur d’onde de 850 nm.

Finalement, l’ensemble des propriétés relatives à la génération de seconde harmonique est résumé dans le tableau 2.2.

	Configuration fs	Configuration ps
Cristal utilisé	KNbO_3 traité AR face avant et arrière 425 et 850 nm	
Accord de phase	Type I non critique	
Coefficient non linéaire	$d_{\text{eff}} = 12 \text{ pm/V}$	
GVD	$360 \text{ fs}^2/\text{mm}$	
GVM	1.2 ps/mm	
Absorption à 2 photons	$3.4 \cdot 10^{-11} \text{m.W}^{-1}$	
Température d’accord de phase	$\sim -3^\circ\text{C}$	
Épaisseur du cristal	100 μm	1.5 mm
Waist de la pompe	16 μm	27 μm
Efficacité de conversion (typ.)	25 %	45%
Durée à $1/e^2$ de la SHG	180 fs	2 ps
Largeur spectrale de la SHG		0.1nm (FWHM)

TABEAU 2.2 – Propriétés de la génération de seconde harmonique dans les configurations fs et ps.

2.3 Génération d’états paramétriques

Voyons à présent comment le bleu produit par génération de seconde harmonique permet, par effet paramétrique optique, de générer des états comprimés de la lumière. Le processus qui

va nous intéresser est celui de la génération paramétrique spontanée, au cours duquel un photon pompe est transformé en un photon signal et un photon complémentaire. Le Hamiltonien qui décrit cette transformation est donné par [Grynberg 10] :

$$\hat{H}_{\text{nl}} = i\hbar\chi^{(2)}(\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_s\hat{a}_i - \hat{a}_p\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger), \quad (2.4)$$

où $\chi^{(2)}$ est la susceptibilité non-linéaire d'ordre 2 du cristal, \hat{a}_p est le mode du faisceau de pompe, \hat{a}_s celui du faisceau signal et \hat{a}_i (i pour *idler*) celui du faisceau complémentaire. La conservation de l'énergie totale impose $\omega_p = \omega_s + \omega_i$, et la relation vectorielle d'accord de phase [Boyd 08] donne $\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i$.

La conversion des photons peut directement se lire sur l'expression de l'Hamiltonien (2.4) : la destruction d'un photon pompe (\hat{a}_p) permet la création conjointe d'un photon signal (\hat{a}_s^\dagger) et d'un photon complémentaire (\hat{a}_i^\dagger). Le plus souvent, le mode de pompe p peut être assimilé à un état cohérent suffisamment intense pour que l'opérateur de destruction associé puisse être approximé par sa valeur moyenne ($\hat{a}_p \simeq \alpha_p \hat{\mathbb{1}}$), et pour qu'il puisse être supposé non déplété par le processus paramétrique.

Expérimentalement, cet Hamiltonien est implémenté par l'utilisation d'un cristal non linéaire de KNbO₃ identique à celui utilisé pour la génération de seconde harmonique, pompé cette fois par le faisceau à fréquence double. Etant donné que, dans ce cas aussi, l'accord de phase est atteint grâce à la température du cristal, un dispositif identique à celui présenté sur la figure 2.6 (a) est là encore nécessaire.

2.3.1 Configuration dégénérée

Dans le cas où les photons signal et complémentaire sont produits dans le même mode, la configuration est dite dégénérée. Le Hamiltonien, avec la prise en compte de l'hypothèse de pompe non déplétée, s'écrit alors comme :

$$\hat{H}_{\text{nl,D}} = i\hbar\zeta_{\text{D}}(\hat{a}_s^2 - \hat{a}_s^{\dagger 2}). \quad (2.5)$$

Il est facile de constater que le propagateur associé à cet Hamiltonien s'écrit comme (1.54) : cette configuration permet donc la génération de l'état de vide comprimé monomode (1.74), de paramètre $r = 2\zeta_{\text{D}}nL/c$ (avec L la longueur du cristal, n l'indice optique du cristal et $\zeta_{\text{D}} = \chi^{(2)}\alpha_p/2$).

2.3.2 Configuration non dégénérée

Si à présent les deux modes signal et idler sont différents (longueur d'onde, mode spatial, polarisation, ...), le Hamiltonien (2.4) se réécrit alors comme :

$$\hat{H}_{\text{nl,D}} = i\hbar\zeta_{\text{ND}}(\hat{a}_s\hat{a}_i - \hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger). \quad (2.6)$$

Ainsi, le propagateur associé à cet Hamiltonien s'écrira comme (1.57), permettant la génération du vide comprimé bimode (1.77), de paramètre de compression $r = \zeta_{\text{ND}}nL/c$ (avec $\zeta_{\text{ND}} = \chi^{(2)}\alpha_p$).

Expérimentalement, on passe d'une configuration à l'autre en modifiant l'angle entre les faisceaux signal et idler, ainsi que la température d'accord de phase du cristal ($\sim 0^\circ\text{C}$ en configuration dégénérée à $\sim -1^\circ\text{C}$ en configuration non dégénérée).

2.3.3 Modélisation des imperfections

Dans la pratique, l'état produit n'est pas un état pur du fait des diverses imperfections du dispositif. Pour modéliser celles-ci, on part de l'hypothèse que l'état qui est produit dans les deux cas est un état gaussien de moyenne nulle. L'équation (1.80) indique que celui-ci peut être vu comme un état thermique comprimé, menant au modèle représenté sur la figure 2.11 pour les deux configurations. Tout état thermique pouvant être vu comme la trace partielle d'un état

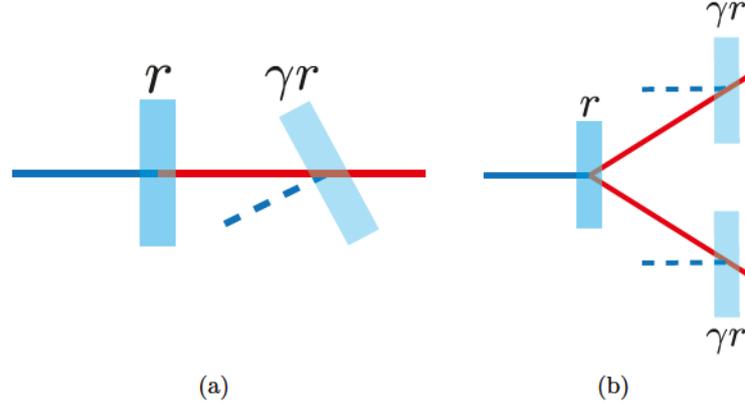


FIGURE 2.11 – Modèle d'imperfections pour la configuration (a) dégénérée et (b) non dégénérée.

EPR (cf (1.78)), on peut le simuler par une amplification non dégénérée pour laquelle un des bras est perdu dans la nature (de paramètre d'amplification γr), suivie d'une amplification parfaite (dégénérée ou non suivant le cas, de paramètre d'amplification r). Ces deux transformations pouvant être permutées, on préférera l'utilisation d'un modèle dans lequel l'état est vu comme un état parfait produit par compression de paramètre r , qui est ensuite sujet à un ajout de bruit de paramètre γr .

Les fonctions de Wigner de ces états s'écrivent alors comme :

$$W_D(x, p) = \frac{e^{-\frac{x^2}{h/s+h-1} - \frac{p^2}{hs+h-1}}}{\pi \sqrt{(h/s+h-1)(hs+h-1)}} \quad (2.7a)$$

$$W_{ND}(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{e^{-\frac{(x_1+x_2)^2}{2(h/s+h-1)} - \frac{(p_1-p_2)^2}{2(h/s+h-1)} - \frac{(x_1-x_2)^2}{2(hs+h-1)} - \frac{(p_1+p_2)^2}{2(hs+h-1)}}}{\pi^2 (h/s+h-1)(hs+h-1)}, \quad (2.7b)$$

avec $s = e^{-2r}$ et $h = \cosh^2(\gamma r)$.

Les méthodes de mesures ainsi que l'origine physique du paramètre γ seront présentées dans le chapitre 3, mais nous pouvons d'ores et déjà donner les valeurs caractéristiques typiques d'amplification dans les deux configurations. Celles-ci sont regroupées dans le tableau 2.3.

La température d'accord de phase est très variable d'un jour à l'autre et d'une configuration à l'autre étant donnée sa très grande sensibilité à la longueur d'onde centrale (un écart de 0.2 nm impose une différence de température de 0.5°C), ainsi qu'aux paramètres de focalisation (plus la focalisation est forte, plus les effets thermiques locaux sont importants).

Dans la pratique, on règle d'abord le plus précisément possible la longueur d'onde du laser à 850 nm, puis on ajuste les températures de chaque cristal en vue de maximiser les effets non-linéaires.

Nous allons maintenant montrer comment ces outils permettent de générer des états particuliers de la lumière : les états de Fock.

	Configuration fs	Configuration ps
Cristal utilisé	KNbO ₃ traité AR face avant et arrière 425 et 850 nm	
Accord de phase	Type I non critique	
Température d'accord de phase	~ -1°C	
Épaisseur du cristal	100 µm	1 mm
Puissance moyenne de pompe	5 mW	10 mW
r (typ)	0.3	0.1
γ (typ)	0.8	0.6

TABLEAU 2.3 – Propriétés de l'amplification paramétrique dans les configurations fs et ps.

2.4 Détections et mesures projectives

Voyons à présent comment les états que nous avons créés par effet paramétrique optique peuvent être projetés ou mesurés grâce à différents types de détecteurs.

2.4.1 Détection de photons

Le premier type de mesures est la détection de photons. Cette détection peut être de deux types différents : le comptage ou la détection simple.

Dans le premier cas, l'appareil qui fera la mesure pourra discriminer le nombre de photons qui constituent l'état, et l'opérateur de projection associé sera

$$\hat{\Pi}_{\text{compt}} = |n\rangle\langle n|. \quad (2.8)$$

Les détecteurs tels que les *Visible Light Photon Counter* (VLPC) [Waks 03], les *Transition Edge Sensor* (TES) [Miller 03] ou encore les méandres supraconducteurs [Rosenberg 05] permettent de réaliser ce type de mesure, pour un nombre maximum de photons de l'ordre de la dizaine. Ils permettent pour certains d'atteindre des efficacités de détection de 95% [Lita 08].

Ils ont pour point commun la nécessité de travailler à très basse température afin de limiter le bruit des photons thermiques, et demeurent pour cette raison relativement complexes à utiliser.

Dans le second cas, l'appareil de mesure n'est capable que de détecter la présence ou non de photons. L'opérateur de mesure est alors le POVM¹ [Paris 12] :

$$\hat{\Pi}_{\text{det}} = \hat{\mathbb{I}} - |0\rangle\langle 0|. \quad (2.9)$$

Dans la limite où l'efficacité de détection est très faible, on peut montrer que cette opération de mesure revient à la soustraction d'un photon [Ourjoumtsev 07a] :

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger. \quad (2.10)$$

Sur notre expérience, c'est cet opérateur que l'on a implémenté à l'aide d'un module APD *Perkin Elmer SPCM-AQR-13*.

Etant donné l'aspect fortement multimode de la fluorescence paramétrique que l'on produit expérimentalement, il est nécessaire de réaliser un filtrage afin que la détection se fasse sur le mode d'intérêt (qui va être mesuré par la détection homodyne) [Aichele 01]. Le système complet APD est représenté sur la figure 2.12 ; il est composé de deux types de filtrages :

1. POVM : *Positive-Operator Valued Measure*, opérateur permettant de généraliser les mesures projectives orthogonales.

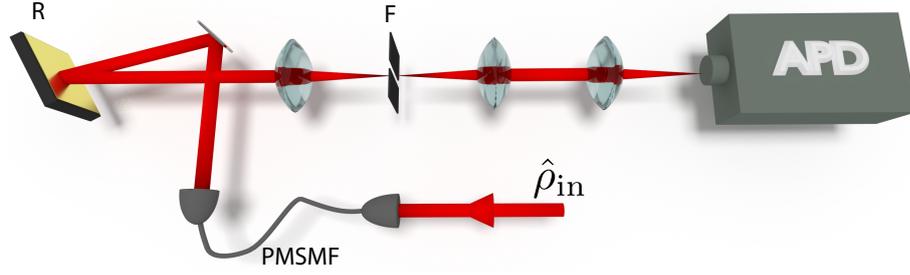


FIGURE 2.12 – Système de filtrage pour la détection de photons uniques dans un mode donné du champ. Un état $\hat{\rho}_{in}$ incident est couplé dans une fibre monomode à maintien de polarisation (PMSMF), permettant le filtrage spatial du mode. En sortie de fibre, un réseau de diffraction (R) blazé dans l'ordre -1 réalise la séparation spatiale des composantes spectrales de l'état. Une fente (F) placée au point focal d'une lentille permet finalement de réaliser le filtrage spectral adéquat, avant que le faisceau ne soit focalisé sur l'élément photosensible d'une photodiode à avalanche (APD).

- un filtrage spatial, effectué à l'aide d'une fibre optique monomode à maintien de polarisation.
- un filtrage spectral, composé d'un réseau en réflexion blazé dans l'ordre -1 et d'une fente placée au point focal d'une lentille. Cette fente peut être translatée afin de choisir la longueur d'onde centrale filtrée, et peut être élargie ou amincie suivant la sélectivité désirée.

Pour le réglage du dispositif, on injecte un faisceau dans le mode cible (celui de l'oscillateur local) dans la fibre monomode (couplage = $85 \pm 3\%$), et on centre la fente sur le maximum du spectre. On règle ensuite l'ouverture de celle-ci de manière à ne laisser passer que $\sim 20\%$ du signal. Ce filtrage permet d'obtenir des taux de comptages suffisants tout en assurant une bonne qualité modale des photons.

Finalement, le faisceau est focalisé sur l'élément photosensible de la photodiode à avalanche, d'efficacité quantique égale à 40% à 850 nm. Ces photodiodes à avalanche ont l'avantage d'avoir un taux de coups d'obscurité relativement bas (~ 200 coups par seconde, ramené à ~ 10 coups par seconde après synchronisation avec le trigger du laser), et de pouvoir fonctionner en régime non déclenché. Leur "temps mort" de 50 ns n'est également pas un problème pour nous étant donné la cadence de répétition du laser de 800 kHz (correspondant à une période de 1.25 μ s).

Bien entendu le filtrage modal n'est pas parfait, ce qui induit le déclenchement de l'APD sur des photons d'un mode différent de celui de la détection homodyne. De plus, les coups d'obscurité, même s'ils sont rares, participent à déclencher la détection de manière intempestive. Pour modéliser cette imperfection de filtrage, une *pureté modale* ξ peut être introduite : elle correspond à la proportion des clics APD qui mènent à la transformation correcte sur l'état. Formellement, cela peut s'écrire

$$\hat{\rho}_{out} = \xi \mathcal{E}(\hat{\rho}) + (1 - \xi) \mathcal{T}(\hat{\rho}), \quad (2.11)$$

où \mathcal{E} représente la transformation réussie sur la matrice densité (par exemple de la forme (2.8) ou (2.9)), et \mathcal{T} représente la transformation qui ne mène pas à un état dans le bon mode (de la forme d'une trace partielle).

2.4.2 Détection homodyne

Le second type de mesure que nous pouvons effectuer sur notre dispositif est la mesure homodyne. Comme nous l'avons vu au paragraphe 1.5.1, celle-ci est composée d'une lame 50:50 permettant le mélange de l'oscillateur local avec l'état à tomographier, suivie de la mesure de la différence des photocourants de deux photodiodes placées dans les deux bras de sortie de la lame.

2.4.2.1 Montage optique

Nous allons nous intéresser au montage initialement en place sur l'expérience au début de cette thèse [Wenger 04b, Ourjountsev 07a]. Son principe est montré sur la figure 2.13.

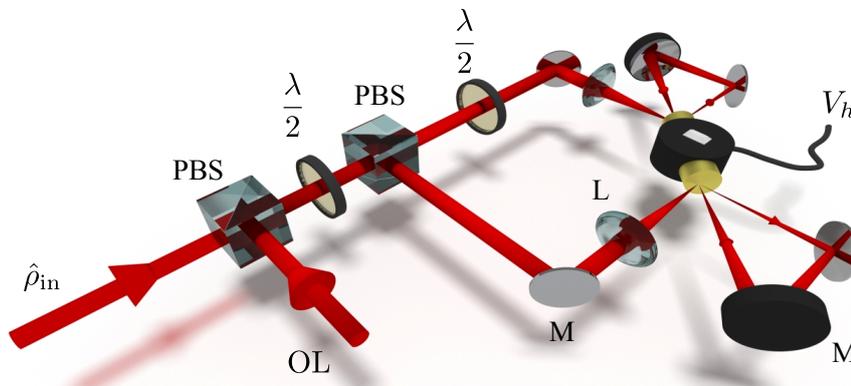


FIGURE 2.13 – Montage optique de la détection homodyne : l'état à mesurer $\hat{\rho}_{in}$, de polarisation horizontale, est superposé spatialement avec un oscillateur local (OL) de polarisation verticale à l'aide d'un cube séparateur de polarisation (PBS). Une lame demi-onde ($\frac{\lambda}{2}$) fait tourner les deux polarisations de 45° , permettant leur interférence sur un second cube polariseur. Les deux signaux de sortie sont ensuite focalisés ($f = 100$ mm, lentilles L) sur deux photodiodes dont on mesure la différence des photocourants. Pour chaque impulsion, on récupère une tension (V_h) proportionnelle au signal homodyne.

L'idée du montage est de pouvoir réaliser un équilibrage précis dans les deux bras de la détection homodyne à l'aide d'une lame d'onde.

L'état dont on veut réaliser la tomographie $\hat{\rho}_{in}$ est superposé à l'aide d'un cube séparateur de polarisation (PBS) à un oscillateur local de polarisation orthogonale. Le port de sortie du cube contenant le faisceau passe ensuite à travers une lame demi-onde, afin d'en faire tourner la polarisation de 45° . Un second PBS permet ensuite de réaliser l'interférence des deux faisceaux. La lame 50:50 de la figure 1.9 est donc ici constituée de l'agencement PBS/ $\frac{\lambda}{2}$ /PBS. Le gros avantage de cette méthode est qu'elle permet un équilibrage très simple des deux voies par rotation de la lame demi-onde. Une seconde lame demi-onde placée dans le bras transmis du PBS permet de tourner la polarisation de 90° afin qu'elle soit verticale (les miroirs sont traités pour la polarisation S).

Les deux bras de sortie sont ensuite focalisés sur deux photodiodes (*Hamamatsu S3883*) dont on réalise la différence des photocourants. Les photodiodes ont été sélectionnées pour leur bande passante et leur faible courant d'obscurité. Le photocourant est ensuite amplifié et converti en tension afin d'être lu par la carte d'acquisition. Pour augmenter l'efficacité de détection, les fuites par réflexion sur les photodiodes sont récupérées et focalisées de nouveau à l'aide de

miroirs concaves sur la photodiode.

2.4.2.2 Montage électronique

Le montage électronique utilisé pour l'amplification et la conversion est montré sur la figure 2.14.

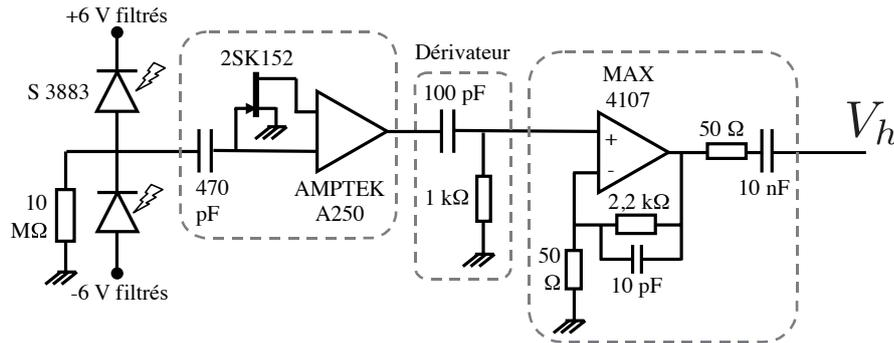


FIGURE 2.14 – Schéma du montage électronique de la détection homodyne.

La différence des photocourants est réalisée par la loi des noeuds en plaçant les deux photodiodes l'une derrière l'autre et en les polarisant en inverse à ± 6 V. Un montage amplificateur de charge est ensuite utilisé (*Amptek A250*, gain = $0.6 \mu\text{V/e}$), suivi d'un dérivateur et d'un amplificateur de tension (*Max 4107*, facteur 44 d'amplification). La bande passante du système complet est de l'ordre de 10 MHz, permettant de résoudre facilement les impulsions du laser. Le signal de sortie du circuit est une impulsion de 200 ns environ, dont il faut pouvoir mesurer l'aire pour récupérer le bon signal. Mais étant donné le fait que la bande passante de la carte est également de 10 MHz, celle-ci réalise l'intégration par convolution automatiquement et le signal affiché à l'écran sera bien proportionnel à la quadrature mesurée.

2.4.2.3 Calibration

Le signal que l'on mesure avec le dispositif est une tension V_h , dont la valeur dépend du dispositif amplificateur électronique présenté ci-dessus. Voyons comment on peut récupérer la valeur de la quadrature mesurée X .

La technique consiste à calibrer la détection homodyne par une mesure du vide : seul l'oscillateur local est présent pour cette mesure. On sait que cet état a une variance théorique égale à $1/2$ (cf (1.63)), et en acquérant un grand nombre de points (typiquement 500 000), on peut récupérer la variance sur les tensions mesurées $\Delta^2 V_{el}$. Le facteur de proportionnalité à appliquer à l'ensemble des points homodynes sera finalement $\sqrt{2\Delta^2 V_{el}}$:

$$X = \frac{V}{\sqrt{2\Delta^2 V_{el}}}. \quad (2.12)$$

Bien entendu, la variance du vide dépendra de la puissance de l'oscillateur local utilisée. L'équation (1.93) nous indique que la dépendance est linéaire, on peut donc s'assurer du bon fonctionnement de la détection homodyne sur une certaine plage de puissance, comme montré sur la

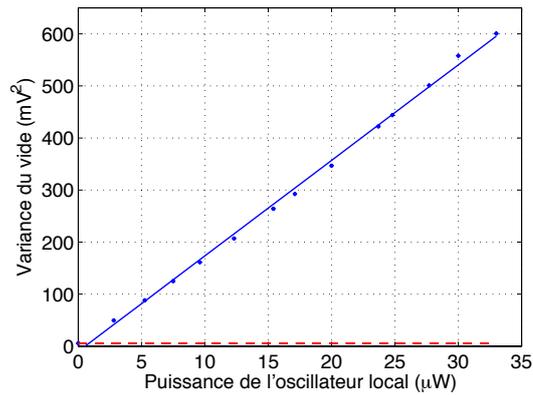


FIGURE 2.15 – Linéarité de la réponse de la détection homodyne (points bleus) en fonction de la puissance de l'oscillateur local. Le bruit électronique a été représenté à titre de comparaison (trait tireté rouge).

figure 2.15. Dans la pratique, on choisit de travailler avec une puissance d'oscillateur local de $20 \mu\text{W}$, permettant d'obtenir un rapport signal à bruit de 20 dB tout en gardant une bonne stabilité de mesure.

2.4.2.4 Imperfections

L'implémentation expérimentale souffre d'imperfections qu'il est nécessaire de prendre en compte afin de reconstruire l'état. Celles-ci peuvent être regroupées en deux catégories : les efficacités et les bruits.

→ **Les efficacités** : elles correspondent au cas équivalent à des pertes de photons du signal dans la nature et sont de quatre types différents.

- **Pertes optiques** : $\eta_{\text{opt}} \simeq 93\%$. Ces imperfections viennent de la qualité des traitements (miroirs, traitements anti-reflets) et des pertes dans les optiques en transmission au sein de la détection. Ces pertes sont simplement mesurées en utilisant un faisceau cohérent intense, dont on mesure l'intensité avant et après passage par les optiques concernées.
- **Efficacité quantique des photodiodes** : $\eta_{\text{quant}} = 94.6\%$. Cette efficacité correspond à la probabilité qu'un photon incident sur la photodiode produise un porteur de charge. Elle est de 90% sans la recombinaison de la réflexion précisée précédemment. La mesure de cette efficacité se fait par le tracé de l'intensité électrique fournie par la photodiode en fonction de l'intensité incidente. La pente de cette réponse donne l'efficacité en A/W qui peut être convertie en pourcentage.
- **Adaptation des modes** (*mode matching*) : $\eta_{\text{mod}} \simeq 83\%$. Cette efficacité correspond au recouvrement des modes (spatial, temporel, ...) de l'oscillateur local et du signal à mesurer. Elle peut être estimée en mesurant le contraste d'interférence entre l'oscillateur local et un état cohérent envoyé à la place de $\hat{\rho}_{\text{in}}$. On peut montrer [Grosshans 01] que le contraste prend pour valeur $\sqrt{\eta_{\text{mod}}}$. Celui-ci est maximisé à l'aide de lentilles (pour la ressemblance des profils spatiaux), d'un ajustement du délai (pour la superposition temporelle des deux impulsions) et de deux miroirs (pour la superposition des faisceaux).

- **Bruit électronique** : $\eta_{el} = 99\%$. Même s'il s'agit d'un bruit, qui participe donc à élargir la fonction de Wigner, on peut montrer qu'il peut être assimilé à des pertes dans l'hypothèse où la détection homodyne est calibrée avec celui-ci [Appel 07]. Il est simplement mesuré en récupérant la variance des points fournis par la détection homodyne dans le cas où aucun signal ni aucun oscillateur local n'est envoyé en entrée. Pour notre dispositif, on trouve un écart-type de 2.4 mV (variance de 5.7 mV² représentée en tiretés rouges sur la figure 2.15).

L'efficacité homodyne totale est le produit de ces efficacités : $\eta = \eta_{opt}\eta_{quant}\eta_{mod}\eta_{el} = 0.73 \pm 0.04$. L'incertitude vient principalement du fait que le mode matching est très variable d'un jour sur l'autre, et que celui-ci est différent si l'on utilise l'idler ou le signal comme faisceau mesuré.

→ **Les bruits** : ils participent à élargir le signal homodyne, et sont de trois types différents.

- **Les bruits d'intensité de l'oscillateur local**. Le laser ne fournit pas un signal constant dans le temps, et des fluctuations sont présentes dans l'intensité, qui se traduisent par des fluctuations de la variance du vide. Ainsi, les mesures homodynes sont sujettes à une imprécision de la forme (cf (1.93)) :

$$\hat{n}_{12} \tilde{\propto} \sqrt{I_{OL}} \left[1 + \frac{\delta I_{OL}}{2I_{OL}} \right] \hat{X}_\theta. \quad (2.13)$$

Les fluctuations typiques du laser sont de l'ordre de 2% en intensité, ce qui mène à un bruit de 1% sur les mesures homodynes.

- **Les fluctuations spatiales du laser**. Ce sont de loin les bruits les plus gênants sur notre expérience.

Une fois la détection homodyne correctement réglée, le spectre du signal que l'on obtient est le plus souvent de la forme présentée sur la figure 2.16 (a).

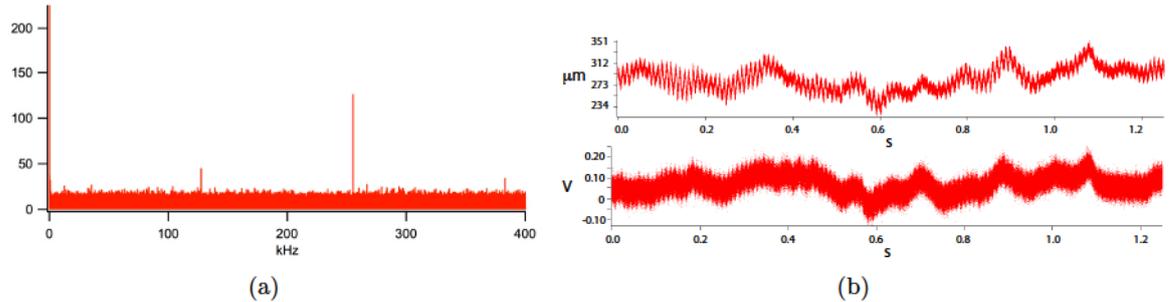


FIGURE 2.16 – (a) Spectre du signal homodyne (ordonnée arbitraire). Le pic principal est pour 100 Hz (collé à l'axe des ordonnées). (b) Comparaison des fluctuations de pointé suivant la direction horizontale (haut) et des fluctuations homodynes (bas).

Dans le cas parfait, le bruit attendu devrait être blanc et aucun pic ne devrait apparaître. L'hypothèse la plus vraisemblable pour expliquer la présence de ces pics réside dans les fluctuations spatiales du laser. En effet, si l'on mesure simultanément le signal homodyne et le pointé mesuré par une photodiode à quadrant, on remarque de fortes similitudes dans les fluctuations (cf figure 2.16 (b), trace pour un laser particulièrement instable). L'origine de ces bruits est diverse : à 100 Hz il s'agit d'un bruit acoustique dont on ne peut pas s'affranchir sur l'expérience, et à plus de 1 kHz il s'agit d'un bruit à l'extraction des impulsions laser de la cavité.

On peut s'affranchir des fluctuations lentes ($<100\text{Hz}$) en soustrayant aux données la moyenne glissante sur ~ 400 points. Les autres bruits doivent être minimisés au mieux en jouant sur les paramètres laser.

- **Bruit de la carte d'acquisition.** L'acquisition des points se fait avec une résolution finie égale à 0.1 mV pour une mesure à gain maximal. Ce bruit peut être négligé devant celui du dispositif homodyne, dont les fluctuations typiques sont de l'ordre de 2.4 mV comme nous l'avons vu.

2.4.3 Acquisition

L'acquisition des données de l'expérience est réalisée à l'aide d'une carte *National Instrument PCI-6110*, qui digitalise les données sur 12 bits, soit $2^{12} = 4096$ valeurs. Cette carte peut fonctionner avec un gain variant entre 0.1 et 50, permettant de réaliser des mesures de tensions variant entre $[-42\text{ V}, 42\text{ V}]$ et $[-200\text{ mV}, 200\text{ mV}]$. Quatre canaux analogiques peuvent être mesurés simultanément.

La bande passante de cette carte est de 10 MHz , suffisante pour résoudre les impulsions. Elle réalise les acquisitions par synchronisation sur un signal TTL fourni par le laser : l'ensemble des électroniques (détection homodyne, APD,...) doit donc être synchronisé à l'aide de lignes à retard réglables afin de mesurer le bon signal.

Le logiciel utilisé pour acquérir et traiter les données en temps réel est Igor. Il possède l'avantage de permettre l'affichage de données de diagnostic graphique, autorisant un contrôle continu des paramètres au fur et à mesure des acquisitions. A l'inverse des codes comme C++, il possède par contre le désavantage d'être relativement lent (l'acquisition ne peut pas être faite simultanément au traitement).

Maintenant que nous disposons d'états non-classiques de la lumière et d'outils de transformation et de mesure de ceux-ci, voyons comment il est possible de générer les états qui seront la ressource de base de ce manuscrit : les états de Fock à un photon.

2.5 Le photon unique

Un grand nombre de techniques existent pour générer des photons uniques, basées sur l'utilisation de systèmes très différents les uns des autres. Parmi celles-ci, on peut citer les systèmes qui permettent la génération "à la demande" de photons, comme les atomes uniques dans un piège optique [McKeever 04, Darquié 05, Hijlkema 07], les centres NV du diamant [Brouri 00, Kurtsiefer 00] ou les boîtes quantiques en cavité [Michler 00]. La collection des photons générés pose par contre un autre problème : on sait quand le photon est généré mais on contrôle mal la direction d'émission. En plus de cette direction, le contrôle du mode de celui-ci est également important dans nos expériences si l'on veut pouvoir réaliser une tomographie de l'état.

L'utilisation de cavités [Bertet 02] permet de contourner ce problème, et des photons microondes monomodes ont pu être formés grâce à l'interaction d'atomes de Rydberg avec le champ d'une cavité. Leur fonction de Wigner a pu ensuite être reconstruite, montrant une négativité importante en son centre. Par contre ces états restent confinés, ce qui rend leur application dans les protocoles de télécommunications quantique limitée.

Pour la production de photons uniques en espace libre, c'est l'utilisation de la génération de paires paramétriques qui est la plus communément utilisée [Lvovsky 01, Zavatta 04, Ourjoumtsev 06a, Ngah 14]. Cette technique permet par contre la génération de photons uniques "annoncés", c'est-à-dire générés de manière probabiliste. C'est celle-ci que nous détaillons ici.

2.5.1 Principe de génération

Le principe de la génération des états de Fock à l'aide de paires paramétriques est très simple : il consiste à utiliser un état EPR (1.77), et à réaliser un comptage de photons dans un des deux bras. L'état étant intriqué, la détection de n photons dans un bras projette l'autre bras dans l'état $|n\rangle$. Pour générer un état de Fock à 1 photon, il suffit donc de détecter un photon dans un des deux bras de l'état : un compteur n'est alors pas nécessaire si l'on suppose la probabilité de détecter plus d'un photon suffisamment petite. Le principe du montage expérimental est montré sur la figure 2.17. Pour ne pas alourdir inutilement la figure, les montages homodynes et APD présentés aux paragraphes 2.4.1 et 2.4.2 ont été simplifiés.

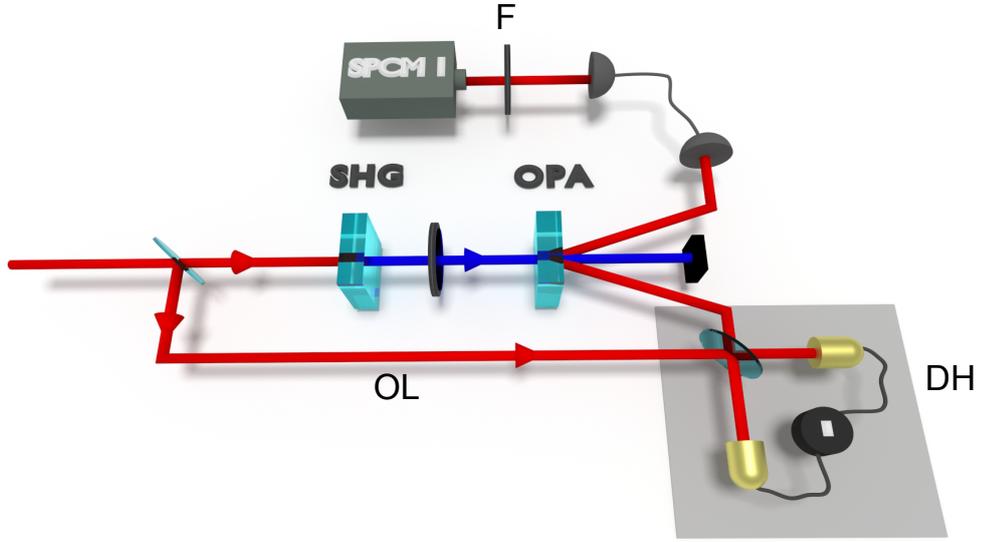


FIGURE 2.17 – Dispositif expérimental pour la génération d'états de Fock à un photon. Un état EPR est produit par pompage d'un cristal paramétrique (OPA) avec un faisceau bleu (produit par génération de seconde harmonique, SHG). Un des deux bras de l'état est envoyé vers un détecteur de photons après différents filtrages (F), dont un clic annonce la présence d'un état de Fock à un photon dans l'autre bras. Ce dernier est caractérisé par une détection homodyne (DH).

2.5.2 Etat théorique attendu

Intéressons nous à l'expression théorique de la fonction de Wigner de l'état attendu. Le traitement complet et détaillé de ce calcul est fait dans [Ourjoumtsev 07a] ; nous ne ferons que rappeler les grandes lignes du raisonnement ici.

Partons de l'expression d'un état EPR imparfait (2.7b). Celui-ci est sujet à une efficacité de détection homodyne η , que l'on peut calculer avec une formule analogue à (1.51) :

$$W_{\text{EPR},\eta}(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{1}{\pi^2 ab} e^{-\frac{(x_1+x_2)^2}{2a} - \frac{(p_1-p_2)^2}{2a} - \frac{(x_1-x_2)^2}{2b} - \frac{(p_1+p_2)^2}{2b}}, \quad (2.14)$$

où $a = \eta(h/s + h - 1) + 1 - \eta$ et $b = \eta(hs + h - 1) + 1 - \eta$. Le conditionnement réalisé par la détection de photon sur un des deux bras peut ensuite être calculé grâce à la formule (2.10). En prenant en compte la pureté modale définie par l'équation (2.11), et étant donné le fait

que l'action de l'opérateur de destruction sur la matrice densité est équivalente à l'action de l'opérateur

$$D_2 = \frac{1}{2} \left[1 + x_2^2 + p_2^2 + x_2 \partial_{x_2} + p_2 \partial_{p_2} + \frac{\partial_{x_2}^2 + \partial_{p_2}^2}{4} \right] \quad (2.15)$$

sur la fonction de Wigner (cet opérateur n'agit que sur le mode de conditionnement 2), on trouve une expression finale de la forme :

$$W_1(x, p) = \xi \frac{\text{Tr}_2[D_2 W_{\text{EPR}, \eta}]}{\text{Tr}_{1,2}[D_2 W_{\text{EPR}, \eta}]} + (1 - \xi) \frac{\text{Tr}_2[W_{\text{EPR}, \eta}]}{\text{Tr}_{1,2}[W_{\text{EPR}, \eta}]}, \quad (2.16)$$

qui se réécrit simplement comme :

$$W_1(x, p) = \frac{e^{-\frac{x^2+p^2}{\sigma^2}}}{\pi\sigma^2} \left[1 - \delta + \frac{\delta}{\sigma^2}(x^2 + p^2) \right], \quad (2.17)$$

avec

$$\sigma^2 = 2\eta(hg - 1) + 1 \quad (2.18a)$$

$$\delta = \frac{2\xi\eta h^2 g(g-1)}{\sigma^2(hg-1)}, \quad (2.18b)$$

et $g = \cosh^2(r)$. Le paramètre σ^2 est le double de la variance de l'état non conditionné ($\xi = 0$), et le paramètre δ est un indice de la négativité de la fonction de Wigner. Il est en effet aisé de vérifier que celle-ci prend des valeurs négatives si et seulement si $\delta > 1$. Dans le cas parfait on a $\delta = 2$ et $\sigma = 1$ (état pur).

2.5.3 Estimation des paramètres

Nous voudrions pouvoir avoir accès au paramètre δ rapidement, en vue de pouvoir estimer la qualité de l'état de Fock produit.

La technique la plus naturelle consiste à réaliser un fit sur les histogrammes des points expérimentaux. Bien que précise, cette technique nécessite la calibration des données (cf 2.4.2.3), le calcul d'un histogramme, et la réalisation d'une optimisation : elle est donc assez mal adaptée à l'acquisition en temps réel.

Une seconde méthode, détaillée dans [Ourjountsev 06a], consiste à calculer les moments d'ordre 2 et 4 de la distribution des points expérimentaux. Etant donné la forme (2.17), cette distribution s'écrit simplement comme :

$$P_1(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \left[1 - \frac{\delta}{2} + \frac{\delta x^2}{\sigma^2} \right], \quad (2.19)$$

dont les moments d'ordres 2 et 4 (V_2 et V_4) permettent de calculer les paramètres σ et δ selon

$$\begin{cases} V_2 = \frac{\sigma^2(1+\delta)}{2} \\ V_4 = \frac{3\sigma^4(1+2\delta)}{4} \end{cases} \implies \begin{cases} \sigma^2 = 2V_2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{V_4}{3V_2^2}} \right] \\ \delta = \frac{\sqrt{1 - \frac{V_4}{3V_2^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{V_4}{3V_2^2}}} \end{cases} \quad (2.20)$$

On remarque que le calcul de δ ne fait intervenir que le rapport V_4/V_2^2 , que l'on peut calculer sans avoir besoin de renormaliser les données avec la variance du vide : ce paramètre δ peut donc être facilement affiché en temps réel, et il fournit un très bon indice de la qualité de l'alignement de l'expérience.

2.5.4 Photon produit

En configuration femtoseconde, l'état de Fock à un photon produit expérimentalement a une distribution de probabilité montrée sur la figure 2.18 (a) (extraite de [Ourjountsev 07a]), correspondant à un jeu de paramètres $\sigma = 1.07$ et $\delta = 1.19$.

Les paramètres de génération sont alors de $r = 0.26$, $\gamma = 0.43$, $\xi = 0.92$ et $\eta_{\text{DH}} = 0.8$ (l'efficacité est différente de celle que l'on a évoqué précédemment, car le montage homodyne était à l'époque différent).

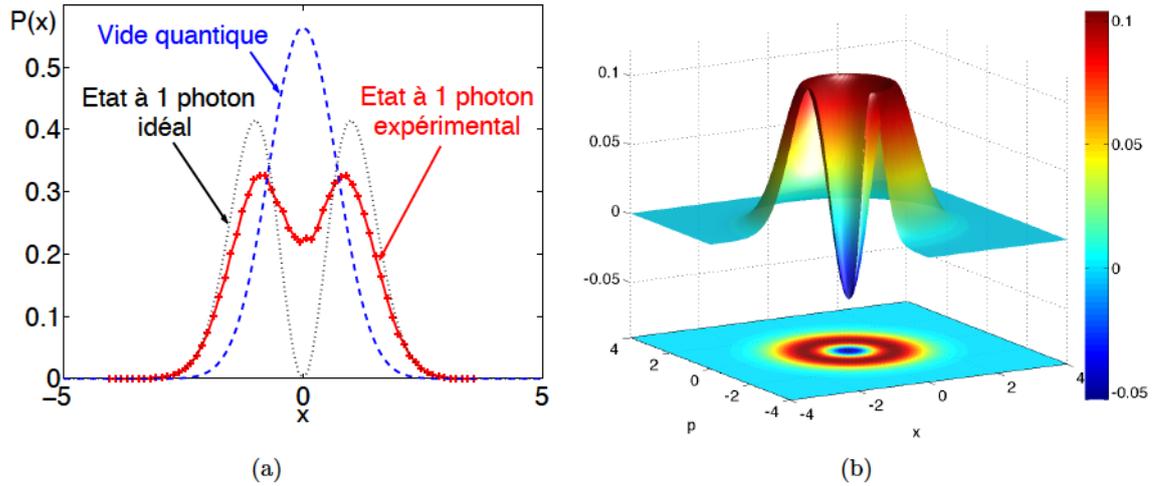


FIGURE 2.18 – Caractérisation expérimentale d'un photon unique, figure extraite de [Ourjountsev 07a]. (a) Distribution de probabilité expérimentale du photon unique (croix). Les distributions du photon unique (pointillés) et du vide (trait tireté bleu) sont montrées à titre de comparaison. (b) Fonction de Wigner de l'état reconstruite par le modèle.

La fidélité de l'état créé avec l'état de Fock à un photon est alors de 58% sans correction, et de 67% avec correction de l'efficacité de détection $\eta_{\text{DH}} = 0.8$.

2.6 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre les outils expérimentaux dont nous disposons afin de réaliser des expériences d'optique quantique. Grâce à l'utilisation d'un laser à impulsions courtes, des effets non-linéaires paramétriques peuvent être obtenus en simple passage, permettant la génération d'états de vides comprimés mono- et bimodes. Ces états peuvent être utilisés entre autres pour générer des états de Fock à un photon, qui seront la ressource de base de tous les protocoles présentés dans ce manuscrit.

Nous verrons dans la partie suivante quelles ont été les améliorations apportées au dispositif existant, et comment elles ont permis de générer des photons uniques de meilleure qualité en vue de former des états chats de Schrödinger.

Deuxième partie

Croissance expérimentale d'états
"Chats de Schrödinger"

Chapitre 3

Améliorations du protocole expérimental

Sommaire

3.1	Stabilisation et diagnostics laser	60
3.1.1	Stabilisation du pointé laser	61
3.1.2	Diagnostic et correction du profil spatial	62
3.1.3	Diagnostic de puissance	62
3.1.4	Diagnostic spectro-temporel	63
3.2	Amplification par dérive de fréquence	64
3.2.1	Montage expérimental	64
3.2.2	Principe	64
3.2.3	Résultats	67
3.2.4	Discussion de l'implémentation effective	68
3.2.5	Un dispositif plus stable, pour des caractéristiques reproductibles	69
3.3	Caractérisation des imperfections de génération OPA	69
3.3.1	Analyse théorique	69
3.3.2	Mesure expérimentale des gains paramétriques	72
3.3.3	Simulation de l'influence des paramètres d'imperfections	75
3.3.4	Caractérisation expérimentale des sources d'imperfections	77
3.3.5	Choix de la configuration d'amplification	80
3.4	Modification du montage homodyne	81
3.4.1	Montage optique	81
3.4.2	Contraste d'interférence	82
3.5	Caractérisation des améliorations par les photons uniques	84
3.6	Conclusion	86

La génération d'états non classiques de la lumière que l'on a évoquée dans le chapitre précédent se fait par le biais d'un dispositif dont la stabilité influencera grandement la qualité de ceux-ci. Pour anticiper sur les chapitres suivants, les états de Fock à un photon constitueront une ressource de base de protocoles plus complexes, et leur temps d'obtention aura un très fort impact sur la réalisabilité de ceux-ci. Ainsi, nous allons nous pencher dans ce chapitre sur les modifications du dispositif expérimental qui ont permis la génération d'états de meilleure qualité et de manière plus contrôlée. Ces améliorations portent principalement sur la source laser, sur la génération paramétrique et sur les montages optiques des détecteurs homodynes.

Nous verrons à la fin du chapitre comment elles ont permis la génération d'états de Fock à un photon de meilleure qualité.

3.1 Stabilisation et diagnostics laser

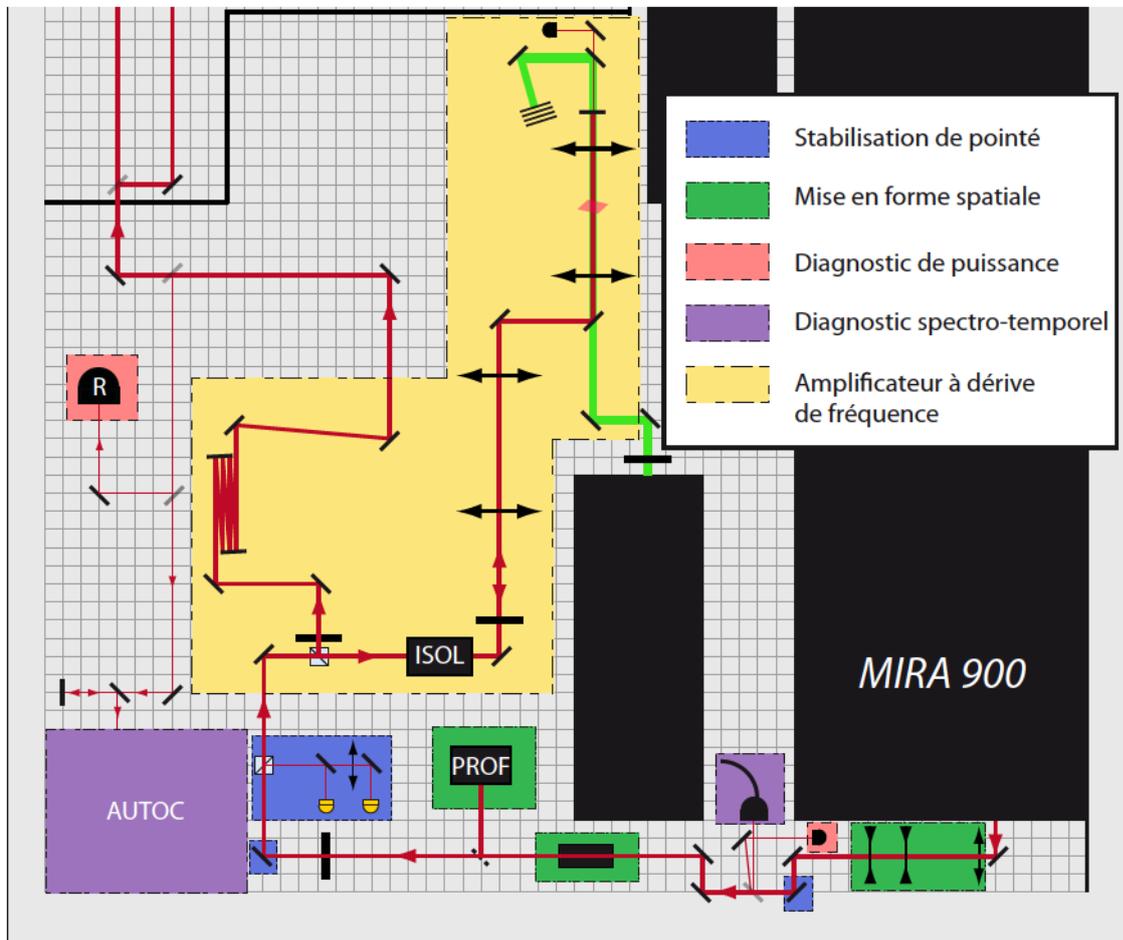


FIGURE 3.1 – Dispositif de stabilisation et de diagnostic laser, comprenant un contrôle actif du pointé laser, un télescope de réglage de la taille du faisceau, des photodiodes de contrôle de puissance et un autocorrélateur combiné à un analyseur de spectre. Un amplificateur à dérive de fréquence permet à souhait d’augmenter l’énergie par impulsion. Un trait rouge plus fin signifie que seule une fraction du faisceau est prélevée.

La principale source d’instabilité de l’expérience est le laser lui-même. En effet il est nécessaire de ré-aligner la cavité quotidiennement, du fait de désalignements ou de variations des paramètres d’extraction du pulse switch. Les variations de température dans le laboratoire (de l’ordre de 1°C) ont par exemple des conséquences non négligeables sur la qualité de l’alignement de la cavité.

Ces ré-alignements ont pour conséquence de modifier la quasi-intégralité des paramètres laser, tels que la taille du faisceau, la direction de son pointé, son spectre, le bruit d’amplitude ou encore la durée des impulsions. Tous ces éléments ont été pris en compte individuellement afin d’y apporter un moyen de diagnostic rapide et de correction efficace. La figure 3.1 représente la disposition des éléments au sortir du laser, pour les différents types de diagnostics et corrections à effectuer : nous allons dans la suite étudier ces éléments séparément.

3.1.1 Stabilisation du pointé laser

Les expériences d'optique quantique que nous effectuons nécessitent l'utilisation d'un grand nombre d'optiques en réflexion, et le moindre désalignement en entrée implique un réalignement complet de l'ensemble du dispositif. Etant donné que chaque jour le pointé du laser change du fait de l'orientation légèrement différente des optiques de la cavité, il est nécessaire de trouver un moyen de le stabiliser.

La première technique, utilisée jusqu'alors, consistait à se baser sur le contraste d'interférence d'un interféromètre placé loin sur l'expérience : en touchant à deux miroirs au sortir du laser il était possible de le maximiser et de retrouver ainsi un alignement approximatif. Le défaut de cette méthode était que l'alignement retrouvé était relatif (superposition de deux faisceaux) et non absolu, ne garantissant pas que le chemin du faisceau était strictement le même.

A cette technique a donc été préférée une autre méthode, basée sur l'utilisation de capteurs de position de grande précision : les photodiodes à quadrants.

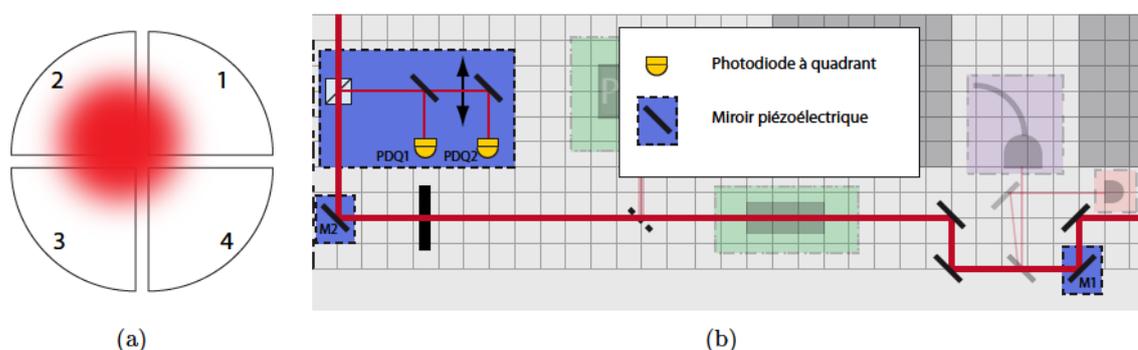


FIGURE 3.2 – Dispositif de stabilisation de pointé. (a) Principe de la photodiode à quadrant. (b) Montage optique pour la stabilisation.

La figure 3.2 (a) schématise le fonctionnement d'une photodiode à quadrant identique à celles que l'on utilise (*Thorlabs PDQ80A*) : le faisceau est envoyé sur un assemblage de quatre quadrants photosensibles, chacun fournissant respectivement un signal I_1 , I_2 , I_3 et I_4 proportionnel à l'intensité de la fraction du faisceau l'illuminant. On en déduit ainsi une position horizontale suivant $x \propto (I_2 + I_3) - (I_1 + I_4)$ et une position verticale suivant $y \propto (I_1 + I_2) - (I_3 + I_4)$. L'intervalle entre les quadrants de $42 \mu\text{m}$ impose de travailler avec des faisceaux suffisamment larges. Le centre du faisceau est déduit en ayant fait l'hypothèse que le profil est à symétrie de révolution, ce qui correspond à une bonne approximation.

Pour la stabilisation du pointé, on a besoin de deux points de référence : un proche de la sortie laser et un "éloigné". En réalité, l'utilisation d'une lentille permet de s'affranchir d'avoir à placer la seconde photodiode à quadrant trop loin. Le principe est montré sur la figure 3.2 (b) : les deux photodiodes à quadrant diagnostiquent le pointé du faisceau en champ proche (PDQ1) et en champ lointain (PDQ2). Chaque photodiode rétro-agit grâce à un contrôleur PID (*Thorlabs TQD001*) sur un miroir fixé sur une monture piézoélectrique (PDQ1 rétro-agit sur M1 et PDQ2 rétro-agit sur M2), permettant la stabilisation absolue du faisceau. La bande passante de l'intégralité de ce dispositif, de l'ordre de 50 Hz, ne permet par contre pas de se débarrasser des fluctuations du pointé dues au bruit mécanique de l'expérience.

3.1.2 Diagnostic et correction du profil spatial

En plus des fluctuations de pointé, le laser souffre d'aberrations spatiales gênantes. Si l'on mesure le profil du faisceau à différents points de l'espace après la sortie du laser, on note en effet que celui-ci est relativement divergent (~ 0.6 mrad) et elliptique. Ceci est montré sur la figure 3.3 (a).

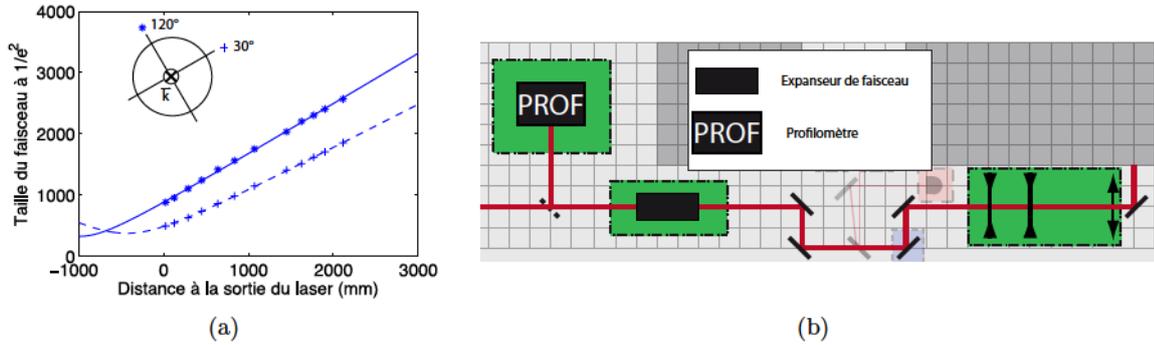


FIGURE 3.3 – Correction des propriétés spatiales du faisceau. (a) Profil suivant deux directions orthogonales (30° et 120°) du faisceau laser (taille en μm). (b) Dispositif de correction d'astigmatisme et de réglage des tailles.

L'ellipticité se manifeste comme un comportement différent du faisceau suivant deux directions orthogonales (30° et 120° sur la figure 3.3 (a)) : tout se passe comme si ces deux directions avaient des caractéristiques gaussiennes indépendantes. Etant donné que ces directions restent les mêmes le long du faisceau, on en déduit qu'il s'agit d'un astigmatisme orthogonal [Alda 03]. Il apparaît clairement que tout se passe comme si les deux directions avaient des comportements identiques mais étaient simplement décalées de 50 cm. Ainsi, nous avons réalisé la correction de cette aberration à l'aide de trois lentilles différentes : une lentille sphérique et deux lentilles cylindriques (cf figure 3.3 (b), cadre vert de droite).

En focalisant le faisceau, la lentille sphérique transforme d'abord la différence de position de waists de même taille en une différence de tailles de waists à la même position. Dans notre cas, la lentille utilisée étant de focale 50 mm, les tailles suivant les directions 30° et 120° sont alors respectivement de $\sim 30 \mu\text{m}$ et $\sim 20 \mu\text{m}$ à $1/e^2$. Puis, en plaçant une lentille cylindrique de 50 mm dans la direction 120° et une lentille cylindrique de 75 mm dans la direction 30° , on obtient un faisceau très peu elliptique ($e > 0.92$) et bien collimaté ($700 \mu\text{m}$ largeur à $1/e^2$) en sortie de ce dispositif.

Ensuite, la taille du faisceau peut être ajustée précisément à l'aide d'un expandeur de faisceau (*Thorlabs BE052-B*) jusqu'à la taille de $900 \mu\text{m}$ à $1/e^2$. Cette dernière est réglée à l'aide d'un profilomètre, permettant de faire une mesure de taille proche du télescope (20 cm) ainsi que loin (1.5 m) à l'aide d'un jeu de miroirs basculants. La divergence du faisceau de sortie est alors très faible ($\sim 15 \mu\text{rad}$).

3.1.3 Diagnostic de puissance

Deux photodiodes sont utilisées pour le diagnostic de puissance du laser, et sont visibles dans les cadres saumons de la figure 3.1. La première, ne résolvant pas les impulsions du laser (bande passante de 100 kHz), permet de contrôler en temps réel les fluctuations de celui-ci, afin

de veiller à ce qu'elles ne soient pas trop fortes (typiquement inférieures à 2%). Le montage électronique de cette photodiode ainsi que sa réponse sont montrés sur la figure 3.4.

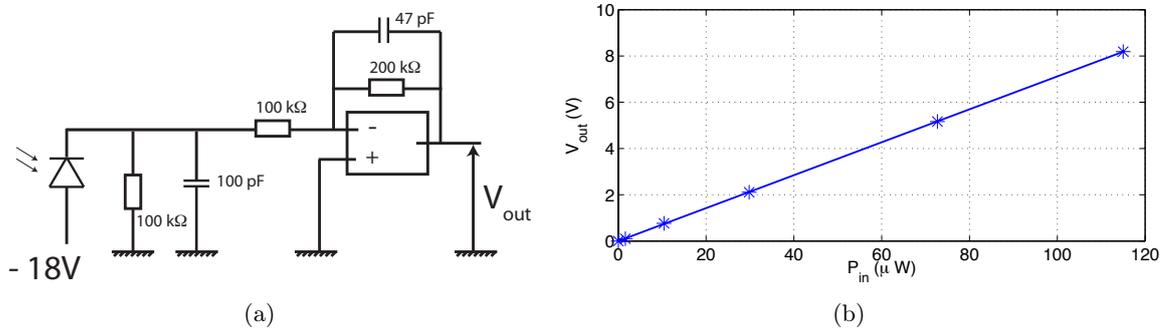


FIGURE 3.4 – Photodiodes filtrées. (a) Montage électronique. (b) Réponse du détecteur.

Le photodétecteur (*Thorlabs FDS100*) a été choisi pour son faible coût, sa bonne sensibilité ainsi que la taille de sa zone photosensible, et a permis ainsi de construire un détecteur avec un fort gain (71 mV/μW) et un bas bruit (utilisation d'un amplificateur opérationnel *Texas Instrument OPA27GP*).

La seconde photodiode quant à elle peut être de deux types, afin de réaliser deux types de réglages différents.

- La première possibilité est d'utiliser une photodiode rapide (*Alphalas UPD-30-VSG-P*, temps de montée <30 ps), pour réaliser le diagnostic des doubles impulsions et régler ainsi les paramètres d'extraction (durée et délai de l'onde RF).
- La seconde possibilité est d'utiliser une photodiode permettant simplement de résoudre les impulsions (bande passante >1MHz). On récupère ensuite son signal en vue d'en observer le spectre, et les pics dans celui-ci nous renseignent sur la qualité de l'alignement de la cavité. Souvent, en touchant au positionnement et à la largeur de la fente, il est possible de minimiser leur taille.

3.1.4 Diagnostic spectro-temporel

Aux diagnostics précédents se rajoutent ceux du spectre laser et de l'autocorrélation, mis en évidence dans les cadres violets de la figure 3.1. L'acquisition peut se faire en temps réel et en parallèle des expériences étant données les faibles puissances nécessaires pour ces affichages. Le réglage du spectre se fait à l'aide du filtre de Lyot dans la cavité laser (cf chapitre 2), et la durée d'autocorrélation peut être ajustée soit à l'aide de l'insertion d'un des prismes de compensation de la dispersion en configuration femtoseconde, soit à l'aide de la position de l'interface totalement réfléchissante de l'interféromètre de Gires-Tournois en configuration picoseconde.

La figure 3.5 montre des points expérimentaux de durée d'autocorrélation en fonction de la largeur spectrale. Pour la configuration femtoseconde (figure 3.5 (a)), on peut déduire de la comparaison avec un profil spectral parfait que, soit le profil est Gaussien, et la dispersion initiale de l'ordre de 3000 fs² (cf courbe tiretée rouge), soit le profil est différent d'une Gaussienne. Pour comprendre quelle est l'hypothèse la plus probable, nous avons à notre disposition des matériaux dispersifs (SF10, GVD=143 fs²/mm) et des matériaux à dispersion négative (miroirs chirpés *Layertec*, GVD=-1300 fs²). On observe qu'après passage par l'un ou l'autre de ces éléments, la durée d'autocorrélation de l'impulsion ne fait qu'augmenter, laissant à penser que l'impulsion est limitée par transformée de Fourier, mais avec un profil différent d'un profil Gaussien.

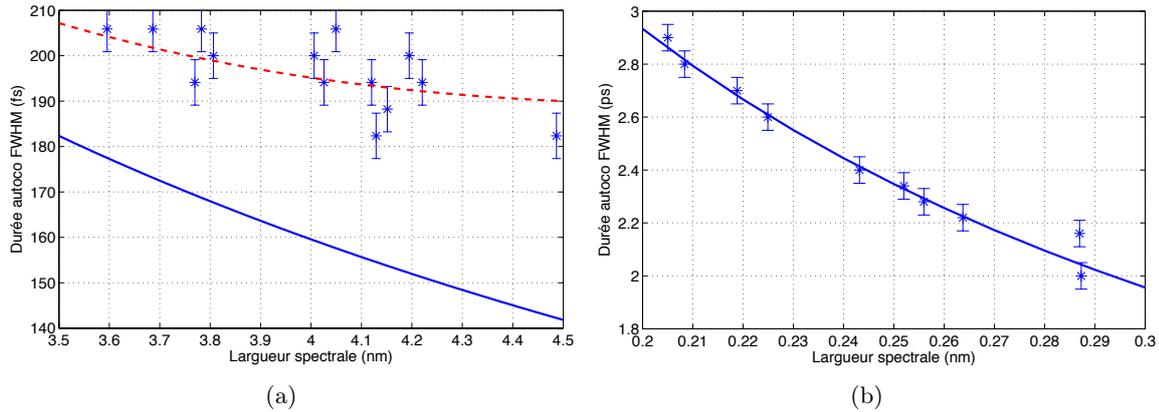


FIGURE 3.5 – Durée d’autocorrélation (FWHM) en fonction de la largeur spectrale (écart-type en intensité), pour les configurations (a) femtoseconde et (b) picoseconde. La courbe en trait plein de la figure (a) représente la largeur à mi-hauteur du signal d’autocorrélation attendu pour une impulsion gaussienne limitée par transformée de Fourier, la courbe en pointillés représente celle obtenue pour une impulsion ayant subi une dispersion de 3000 fs². La courbe en trait plein de la figure (b) représente la largeur à mi-hauteur du signal d’autocorrélation attendu pour une impulsion de forme sécante hyperbolique limitée par transformée de Fourier.

Pour le cas picoseconde, la GVD joue un rôle mineur (voir à ce propos la figure 2.7), et l’accord des données d’autocorrélation en fonction de la largeur spectrale est très bon pour une impulsion limitée par transformée de Fourier de forme sécante hyperbolique.

3.2 Amplification par dérive de fréquence

Un autre élément a été totalement inclus dans le montage : il s’agit d’un amplificateur par dérive de fréquence (CPA pour Chirped Pulse Amplification en anglais), permettant d’augmenter l’énergie par impulsion du laser. Ce montage a été conçu et mis en œuvre en 2007 principalement par Julien Laurat et Aurélien Dantan [Dantan 07]. Nous présentons ici les modifications et adaptations à notre dispositif.

3.2.1 Montage expérimental

Le montage de l’amplificateur est rappelé sur la figure 3.6. Il permet l’amplification par double passage d’une impulsion, par l’utilisation d’un cristal identique à celui utilisé dans la cavité laser : un cristal de Titane-Saphir (Ti :Sa).

3.2.2 Principe

Pour réaliser l’amplification, l’impulsion ultrabrève d’entrée est focalisée en même temps qu’un faisceau de pompe (*Coherent Verdi V18*, de puissance pouvant aller jusqu’à 18 W) sur la face avant d’un cristal de Titane-Saphir (produit par la société *Crystal Systems*). Le faisceau est ensuite renvoyé sur lui-même, afin d’être amplifié une seconde fois.

Séparation des deux trajets

Étant donné que les deux passages sont spatialement superposés, il faut être capable de les

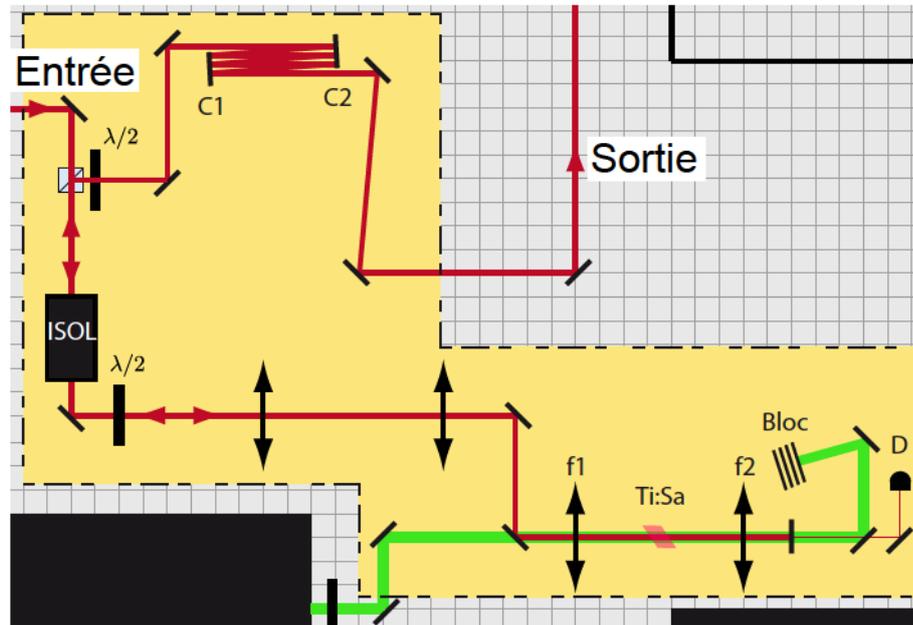


FIGURE 3.6 – Montage de l'amplificateur impulsif à double passage.

séparer le mieux possible pour extraire le faisceau amplifié. Ceci est effectué à l'aide de l'utilisation conjuguée d'un cube séparateur de polarisation et d'un isolateur optique (rotateur de Faraday) : la polarisation tourne de 45° dans l'isolateur, puis est ramenée à l'horizontale par une lame demi-onde (pour maximiser la transmission dans le cristal, taillé à Brewster pour la polarisation H) lors du premier passage. Après le second passage, la lame demi-onde ramène la polarisation à 45° , et l'isolateur optique termine la rotation à 90° : la polarisation est alors verticale, et le cube séparateur sera totalement réfléchissant pour cette polarisation.

Refroidissement cryogénique

Etant données les fortes focalisations et les puissances de pompe en jeu, il est également nécessaire de refroidir le cristal à des températures cryogéniques (~ 100 K) afin de ne pas l'endommager (plus de 80% du faisceau pompe est absorbé par le cristal).

A cette fin, un cryostat (*Oxford Instruments CVF*) fonctionnant à l'aide d'un flux continu d'azote (77 K) est utilisé. Deux types de réglages de la température peuvent être effectués : un grossier, où c'est simplement le débit d'azote qui est régulé, et un précis, où une résistance chauffante pilotée par un contrôleur spécifique (*Oxford Instrument ITC*) permet d'atteindre des stabilités en température de l'ordre du Kelvin. L'efficacité et la stabilité du refroidissement dépendent beaucoup de la qualité du transfert de l'azote dans le cryostat. Afin que celui-ci soit optimal, une canne de transfert spécialement conçue à cet effet est utilisée : celle-ci permet la circulation de l'azote dans un conduit isolé de l'air ambiant par du vide. Afin de permettre le refroidissement efficace du cristal et l'absence de condensation, le cryostat est pompé jusqu'à $\sim 5.10^{-5}$ mbar. Le refroidissement pose par contre un autre problème : après un temps suffisamment long d'utilisation, la partie extérieure du cryostat finit par se refroidir elle aussi, et de la condensation peut alors apparaître sur ses fenêtres. La déshumidification de l'air du laboratoire permet de s'affranchir de ce problème.

Pour le refroidissement efficace du cristal, une monture spéciale a été conçue à l'aide de *Solidworks* au début de cette thèse afin de maximiser au mieux les évacuations thermiques. Le

cristal est maintenu dans une structure de cuivre, et le contact thermique est réalisé à l'aide de fines feuilles d'indium. Ce matériau a pour avantage d'être bon conducteur thermique tout en étant très ductile : une pression mécanique suffit à le faire fondre, et permet ainsi une très bonne adaptation du matériau aux aspérités des surfaces. Mais cette propriété peut aussi être un désavantage : si le laser de pompe est focalisé trop près d'une de ces feuilles, celle-ci peut fondre et des résidus peuvent se déposer sur le cristal. La nouvelle monture a donc été conçue pour qu'il soit impossible qu'une réflexion parasite du laser de pompe vienne taper sur la monture, et pour que les feuilles d'indium restent confinées le plus possible.

Aberrations

Les fortes focalisations sur la surface du cristal font que de multiples aberrations voient le jour lors de l'amplification. En particulier, un astigmatisme important peut être noté en sortie de premier passage. Ceci peut être partiellement corrigé en jouant sur l'angle de la lentille f_2 (cf figure 3.6). Dans la pratique, c'est le gain du second passage qui sert de référence à ce réglage.

Recompression

Etant donné que le faisceau passe à travers des optiques dispersives lors de l'amplification (et notamment de l'isolateur, de dispersion $\sim 5000 \text{ fs}^2$), il est nécessaire de re-comprimer temporellement l'impulsion.

Pour ceci, on utilise deux miroirs chirpés (miroirs C1 et C2 de la figure 3.6), permettant l'introduction d'une dispersion négative de $\sim -1300 \text{ fs}^2$ par réflexion. Dans notre cas, 6 réflexions permettent de retrouver une durée d'autocorrélation minimale. Il est à noter qu'étant données les énergies auxquelles on travaille, la dérive de fréquence n'est ici qu'un effet parasite et n'est pas nécessaire, contrairement aux lasers ultra-brefs travaillant avec de fortes énergies, dont le simple passage dans l'air pourrait par exemple l'ioniser (voir par exemple les chaînes laser du Laboratoire d'Optique Appliquée [LOA] ou du Laboratoire d'Utilisation des Lasers Intenses [LULI]).

Diagnostics

Plusieurs types de diagnostics ont été ajoutés au dispositif déjà existant afin de pouvoir en réaliser un alignement rapide.

- **Alignement grossier** : Avant de réaliser l'amplification à pleine puissance, il faut s'assurer que les faisceaux sont correctement centrés dans le cristal. Pour ce faire, une simple webcam (*Trust WB-1400T*), placée entre la lentille de focalisation f_1 et le cryostat, et que l'on règle pour faire la mise au point sur le cristal, est utilisée. On évite ainsi très facilement les dommages précédemment décrits.
- **Superposition des deux faisceaux et réglage des tailles** : Pour un réglage plus fin des tailles des faisceaux ainsi que pour leur superposition, l'utilisation du profilomètre évoqué au paragraphe 3.1.2 permet un gain de temps considérable. Les lentilles f_1 et f_2 permettent une focalisation du faisceau pompe à 532 nm de l'ordre de $12 \mu\text{m}$, et une focalisation du faisceau rouge de $10 \mu\text{m}$ (taille à $1/e^2$). Le réglage des tailles et la superposition longitudinale des waists des deux faisceaux se font à l'aide du télescope formé des deux lentilles convergentes précédant le cristal. Pour réaliser ces mesures, un miroir basculant entre la lentille f_1 et le cristal permet de défléchir le faisceau vers le profilomètre.
- **Diagnostic de puissance** : En sortie de premier passage d'amplification, une photodiode ("D" sur la figure 3.6) permet la mesure de la fraction de faisceau infrarouge transmise

par le miroir de retour. Plusieurs filtrages (d'abord avec un miroir à 523 nm puis avec un filtre passe bande à 850 nm) permettent de se débarrasser de la pompe résiduelle, dont la majorité de la puissance est déviée vers un absorbeur de faisceau de grande puissance ("Bloc" sur la figure 3.6). Le diagnostic du gain du second passage est simplement fait par mesure de la puissance en sortie de dispositif.

3.2.3 Résultats

3.2.3.1 Amplification

Les résultats d'amplification pour deux puissances de pompes sont présentés sur la figure 3.7. Les courbes obtenues en 2007 avec ce même amplificateur (mais avec un laser femtoseconde différent) [Dantan 07] sont montrées également, à titre de comparaison.

Le schéma amplificateur amène à définir deux gains différents : le gain brut et le gain net. Le gain brut correspond au gain que l'on obtient en mesurant la puissance en sortie d'amplificateur avec et sans la pompe. Le gain net, quant à lui, correspond au rapport des puissances avant et après l'amplificateur (avec la pompe branchée). Ainsi, le gain net est égal au gain brut multiplié par la transmission de l'amplificateur sans pompe. Cette transmission étant de l'ordre de 50%, le rapport correcteur est environ de 2.

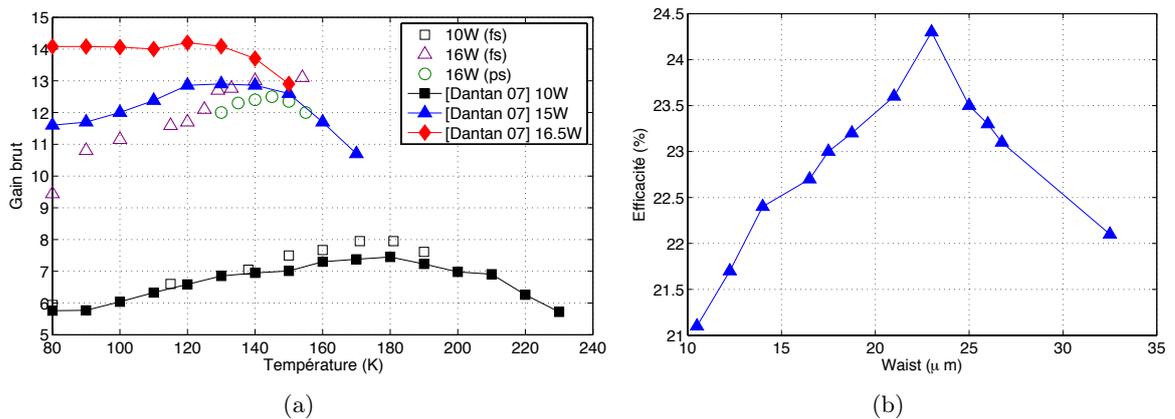


FIGURE 3.7 – Résultats d'amplification. (a) Gains bruts pour 10W et 16W de puissance de pompe. Une partie des résultats de [Dantan 07] sont superposés à titre de comparaison. (b) Efficacité de doublage du faisceau amplifié en fonction de la focalisation du faisceau dans la configuration picoseconde. Un waist optimal de 23 μm permet une conversion d'environ 24.5%.

Ces courbes indiquent un effet commun : il existe une température pour laquelle le gain est maximal. Une explication possible de cette tendance est que lorsque la température diminue les effets thermiques néfastes diminuent, d'où une augmentation du gain lorsque la température diminue. Par contre, si la température diminue trop, le spectre d'émission du Ti:Sa se décale vers le bleu, menant à une moins grande amplification [Delaigue 06]. L'annexe H montre le calcul de l'amplification, avec la considération du taux de répétition du laser. On trouve un gain théorique de l'ordre de 25 pour une puissance de pompe de 10 W, en ne prenant pas en compte les différentes distorsions de front d'onde, les effets de diffraction, de dépendances en température ou en longueur d'onde.

3.2.3.2 Génération de seconde harmonique

Une fois le faisceau amplifié, nous pouvons tester la qualité de la génération de seconde harmonique.

Configuration femtoseconde

Pour un faisceau laser de puissance 30 mW, l'amplification avec une pompe de 16W permet l'obtention d'un facteur 6 pour le gain net (180 mW de puissance laser continue). Etant donné qu'il avait été noté des effets parasites si la focalisation était trop importante (cf 2.2.1.4), nous avons travaillé avec la même intensité crête en divisant la taille du waist au point focal par un facteur $\sqrt{6}$.

Dans ce cas, c'est 31 mW de puissance bleue qui ont pu être mesurés, menant à une efficacité de conversion de l'ordre de 17%.

Configuration picoseconde

Avec une puissance de pompe de 10 W, un gain d'un facteur 4 a pu être obtenu avec le laser en configuration picoseconde, menant à une puissance à l'entrée de la génération de seconde harmonique de 70 mW.

L'étude de l'influence de la focalisation révèle qu'un faisceau de waist 23 μm permet d'obtenir une conversion maximale de 25 % étant donnée la puissance incidente. Ceci est visible sur la figure 3.7 (b).

3.2.4 Discussion de l'implémentation effective

L'amplificateur est à présent fonctionnel et intégré à l'expérience. Toutefois, il possède un défaut qu'il faut considérer pour les expérimentations futures : le profil spatial est très altéré par l'amplification. Comme montré sur la figure 3.8, ce profil, initialement Gaussien, est de plus en plus dégradé lorsque la puissance de pompe augmente.

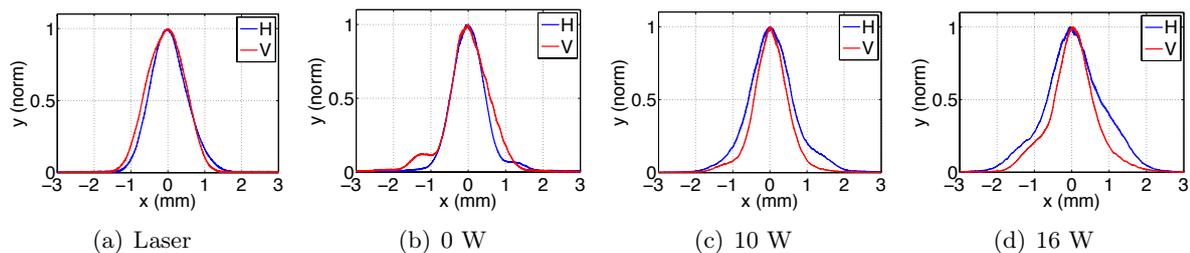


FIGURE 3.8 – Profil du faisceau suivant les directions horizontales (H) et verticales (V) (a) en sortie de laser, après l'amplificateur et (b) sans pompe, (c) 10 W de pompe et (d) 16 W de pompe.

Le filtrage spatial de ce profil par une fibre monomode classique ne peut pas être utilisé du fait des effets non linéaires parasites (principalement l'automodulation de phase), et deux possibilités accessibles rapidement s'offrent à nous :

- Soit on utilise un dispositif de filtrage simplement composé d'une lentille et d'un iris placé au point focal, mais alors les pertes vont grandissantes avec la qualité du filtrage,

- Soit on utilise des fibres à coeur creux, permettant un filtrage sans effet non-linéaire parasite. Ces fibres, ne permettant pas jusqu'alors un filtrage aussi bon que les fibres usuelles, voient leurs performances s'améliorer avec le temps [Fini 13].

Finalement, si la puissance nécessaire à l'expérimentation est inférieure à 30 mW, la possibilité est laissée à l'opérateur de dévier le faisceau directement vers l'expérience, afin de ne pas avoir à subir les distorsions spatiales présentées ici.

3.2.5 Un dispositif plus stable, pour des caractéristiques reproductibles

L'ensemble des améliorations que l'on vient de présenter a permis de disposer d'une source d'impulsions stabilisée, et dont les paramètres peuvent être contrôlés facilement. A présent, l'alignement quotidien de la cavité ainsi que le réglage de tous les paramètres ne prennent pas plus d'une heure, avec l'information que tous les paramètres laser sont corrects. Ces améliorations ont donc été centrales pour la faisabilité d'expériences plus complexes, que nous présenterons au chapitre 4.

Afin de disposer d'états dont la qualité est la meilleure possible, nous allons à présent étudier les caractéristiques de génération des états paramétriques (2.7), et voir dans quelle mesure celles-ci peuvent être améliorées.

3.3 Caractérisation des imperfections de génération OPA

Le cristal paramétrique que nous utilisons permet la génération d'états de la lumière comprimés. Ceux-ci souffrent d'imperfections de génération, introduites au paragraphe 2.3.3 et que l'on se propose de traiter plus en détail ici. Rappelons la formule de la fonction de Wigner du vide comprimé monomode imparfait :

$$W_D(x, p) = \frac{e^{-\frac{x^2}{h/s+h-1} - \frac{p^2}{hs+h-1}}}{\pi \sqrt{(h/s + h - 1)(hs + h - 1)}}, \quad (3.1)$$

où $s = e^{-2r}$ et $h = \cosh^2(\gamma r)$.

3.3.1 Analyse théorique

3.3.1.1 Une équivalence

La première question que l'on va se poser est comment peut-on mesurer les paramètres de génération s et h (ou, de manière équivalente r et γ) facilement? Réaliser une reconstruction de la fonction de Wigner (3.1) par une tomographie pour extraire ces paramètres peut s'avérer relativement long, et une autre méthode est donc préférable.

Une remarque intéressante est que le gain sur la variance du vide (cf compression ou anti-compression) est le même que le gain en intensité d'une sonde classique [La Porta 91]. Autrement dit, en remplaçant le vide par un état cohérent lors du processus de compression, et en mesurant le gain sur cette sonde avec une simple photodiode, on peut trouver les paramètres d'amplification et donc les imperfections associées. La figure 3.9 illustre ce principe avec des points homodynes simulés.

Si l'on considère l'implication mathématique de l'équivalence, on peut obtenir une relation entre les paramètres r et γ "quantiques" (c'est-à-dire ceux qui apparaissent dans la formule (3.1)) et leurs homologues "classiques" r_c et γ_c , dont nous allons donner les expressions.

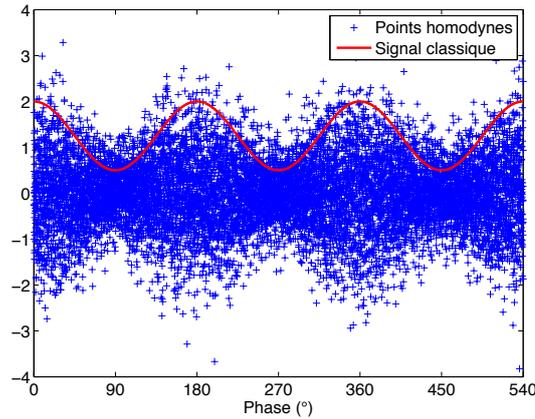


FIGURE 3.9 – Equivalence de la mesure homodyne avec un signal classique amplifié. Pour cette figure, les mesures sont simulées.

L'amplification classique obtenue par un amplificateur en configuration dégénérée de paramètre de compression r_c , suivi d'un amplificateur non-dégénéré de paramètre $\gamma_c r_c$ fournit l'expression des gains d'amplification et de déamplification :

$$G_c^\pm = e^{\pm 2r_c} \cosh^2(\gamma_c r_c). \quad (3.2)$$

L'amplification quantique, quant à elle, fournit une amplification en variance d'un coefficient :

$$G_q^\pm = \frac{\Delta x^{\pm 2}}{\Delta x_v^2} = \cosh^2(\gamma r) e^{\pm 2r} + \sinh^2(\gamma r). \quad (3.3)$$

L'identification de ces deux expressions, dans l'hypothèse où les paramètres sont tous petits devant 1, permet d'obtenir :

$$r \simeq r_c \quad \text{et} \quad \gamma \simeq \gamma_c / \sqrt{2}. \quad (3.4)$$

Pour mesurer les paramètres quantiques r et γ , nous avons donc implémenté une simple mesure de gains en intensité classique, et à partir des deux gains d'amplification G_c^+ et de déamplification G_c^- on en déduit les deux paramètres r_c et γ_c (et donc r et γ) grâce aux formules :

$$r_c = \frac{1}{4} \log \left[\frac{G_c^+}{G_c^-} \right] \quad \text{et} \quad \gamma_c = \frac{\text{acosh}((G_c^+ G_c^-)^{1/4})}{r_c}. \quad (3.5)$$

3.3.1.2 Modélisation des imperfections

Avant de montrer les résultats expérimentaux des mesures de ces paramètres, voyons dans un premier temps les différentes sources qui peuvent permettre d'assimiler les imperfections de génération à un excès de bruit γ_c .

Nous allons pour le calcul considérer deux sources principales d'imperfections :

- **Imperfections spatiales** : elles concernent le fait que les profils ne sont pas uniformes mais gaussiens, et que la superposition des taches peut ne pas être parfaite, notamment du fait d'ellipticités des faisceaux utilisés.

- **Imperfections temporelles** : de la même manière que les profils spatiaux, les profils temporels sont finis et limités dans le temps par des enveloppes que l'on supposera gaussiennes et qui pourront être différentes entre la sonde et la pompe.

De plus, au sein des imperfections temporelles, la GVM fera que l'impulsion pompe et le mode sonde se propageront à des vitesses différentes dans le cristal.

Voyons à présent comment incorporer ces imperfections dans un modèle mathématique.

Modèle utilisé

On peut montrer [Boyd 08] que si un champ sonde de la forme $\mathbf{E}_s = \mathbf{e}_s A_s(0) e^{i(k_s z - \omega_s t)}$ est envoyé dans un amplificateur paramétrique en configuration dégénérée (pompe par un champ de pompe $\mathbf{E}_p = \mathbf{e}_p A_p e^{i(k_p z - \omega_p t + \varphi)}$), alors le champ sonde de sortie peut s'écrire :

$$A_s(L) = \frac{A_s(0)}{2} \left[(1 + e^{i(\varphi + \pi/2)}) e^{\Gamma |A_p| L} + (1 - e^{i(\varphi + \pi/2)}) e^{-\Gamma |A_p| L} \right], \quad (3.6)$$

où $\Gamma = \frac{\omega_s}{n_s c} \chi_{eff}^{(2)}$ et où L est l'épaisseur du cristal paramétrique. On voit apparaître ici clairement la dépendance de phase de l'amplification : si $\varphi = -\pi/2$, le gain est supérieur à 1 et vaut

$$g^+ = e^{\Gamma |A_p| L}, \quad (3.7)$$

alors que si $\varphi = \pi/2$, celui-ci est inférieur à 1 et vaut $g^- = 1/g^+$. Pour une amplification parfaite, les paramètres r et γ prennent donc respectivement les valeurs $\Gamma |A_p| L$ et 0.

Introduction des imperfections

Adaptons à présent la forme des gains g^\pm précédemment obtenus afin qu'ils permettent la prise en compte des imperfections mentionnées au début de ce paragraphe.

Pour la pompe, celles-ci peuvent être prises en compte par le simple remplacement de $|A_p|$ par une expression de la forme :

$$|A_p|(x, y, z, t) = A e^{-\frac{x^2 + e^2 y^2}{w_p^2}} e^{-\frac{(t - zM)^2}{\tau_p^2}}. \quad (3.8)$$

Ici, e est l'ellipticité du faisceau de pompe, w_p son waist, τ_p sa durée et M la GVM du matériau non-linéaire (on se place dans le référentiel de l'impulsion rouge pour le calcul).

Chaque tranche de cristal d'épaisseur dz donnera ainsi le gain :

$$dg^\pm(x, y, z, t) = \exp \left[\Gamma A dz e^{-\frac{x^2 + e^2 y^2}{w_p^2}} e^{-\frac{(t - zM)^2}{\tau_p^2}} \right], \quad (3.9)$$

et le gain total sera le produit de ces gains sur toute l'épaisseur du cristal. Par passage au logarithme et en reprenant l'exponentielle, ce produit s'écrit en fait simplement :

$$g^\pm(x, y, t) = \exp \left[\phi e^{-\frac{x^2 + e^2 y^2}{w_p^2}} \int_0^L e^{-\frac{(t - zM)^2}{\tau_p^2}} dz \right], \quad (3.10)$$

où

$$\phi := \Gamma A = \Gamma' \sqrt{\frac{P_p^{cw}}{w_p^2 \nu_{rep} \tau_p}}, \quad (3.11)$$

et P_p^{cw} est la puissance de pompe continue (lue au mesureur de puissance), w_p le rayon à $1/e^2$ du faisceau, ν_{rep} le taux de répétition du laser, τ_p la durée de l'impulsion de pompe et Γ' une

constante ne dépendant que des propriétés du cristal. En considérant que la sonde a elle aussi un profil spatio-temporel du même type que la pompe (3.8), le gain en intensité que l'on mesurera à l'aide de photodiodes sera calculé grâce à la relation :

$$G^\pm = \frac{2e\sqrt{2}}{\pi^{3/2}w_s^2\tau_s} \iiint (g^\pm(x, y, t))^2 e^{-2\frac{e^2x^2+y^2}{w_s^2}} e^{-\frac{2t^2}{\tau_s^2}} dx dy dt. \quad (3.12)$$

Dans cette formule, il a été supposé que l'ellipticité du profil sonde est la même que celle du bleu, mais suivant un axe perpendiculaire afin de maximiser l'imperfection potentielle.

Nous avons donc à notre disposition deux modèles théoriques différents pour décrire notre amplification classique : le modèle (3.2), dont les paramètres r_c et γ_c pourront, on va le voir, être facilement évalués expérimentalement, et le modèle (3.12), qui donne une origine physique possible aux imperfections pour une amplification avec une sonde classique. Un modèle multi-mode complet a également été développé afin de rendre compte des imperfections sur les états quantiques [Tualle-Brouri 09].

Dans la suite de cette section, nous allons nous intéresser au montage expérimental de mesure des paramètres r_c et γ_c , pour ensuite simuler les comportements attendus en fonction des différentes imperfections à l'aide du modèle (3.12), et nous validerons finalement les tendances attendues par différentes mesures expérimentales.

3.3.2 Mesure expérimentale des gains paramétriques

3.3.2.1 Dispositif de mesure

Maintenant que nous disposons d'un modèle théorique, voyons comment évaluer les gains paramétriques sur notre expérience en mesurant, comme nous l'avons dit au paragraphe 3.3.1.1, les gains d'amplification et de déamplification d'une sonde classique (et par suite les paramètres r_c et γ_c). Le montage expérimental pour la mesure est montré sur la figure 3.10.

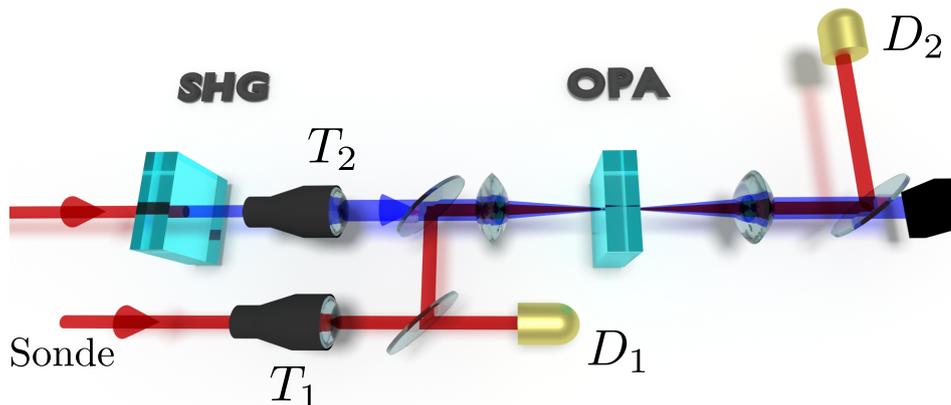


FIGURE 3.10 – Montage expérimental pour la mesure des paramètres d'amplification classiques.

En plus du faisceau pompe bleu, on focalise dans le cristal paramétrique un faisceau sonde. La superposition doit être temporelle et spatiale : ceci peut être réalisé respectivement à l'aide d'une platine de translation et par l'utilisation conjuguée de miroirs et de télescopes (T_1 et T_2) afin de superposer au mieux les points focaux au sein du cristal.

Deux détecteurs permettent de mesurer le signal sonde avant et après amplification (resp. D_1 et D_2 sur la figure 3.10). Ces détecteurs sont identiques à ceux présentés sur la figure 3.4.

Leurs signaux sont ensuite mesurés simultanément par la même carte d'acquisition que celle

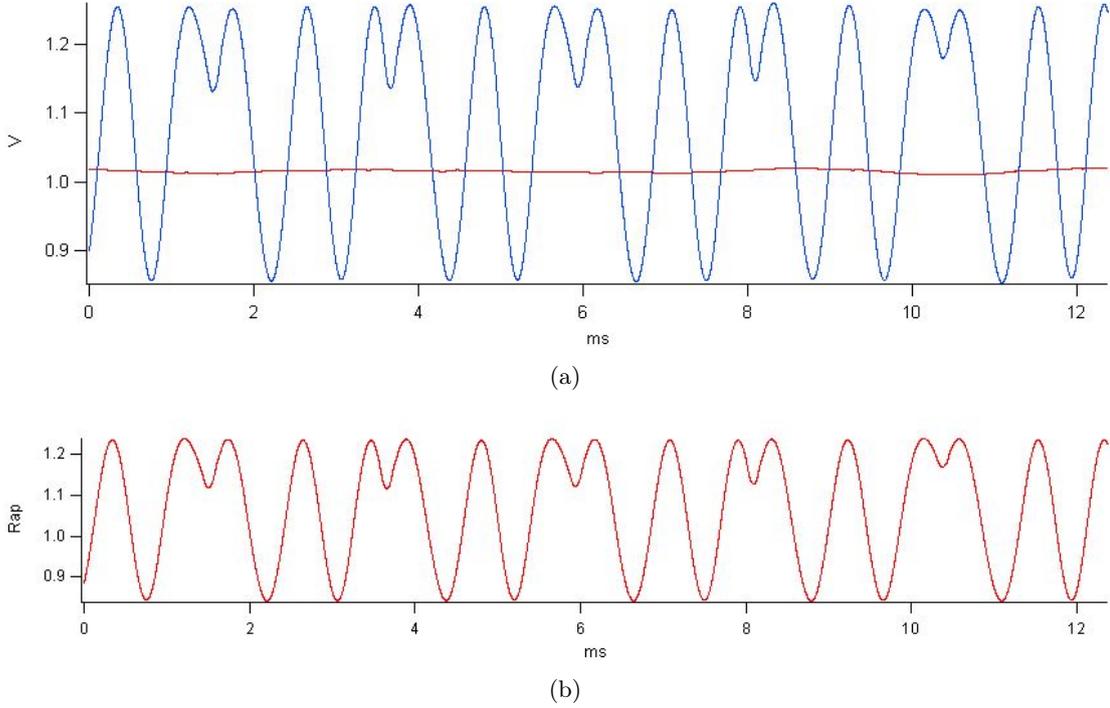


FIGURE 3.11 – Signaux d’amplification classique. (a) Tensions V_2 (bleu) et V_1 (rouge). (b) Rapport des deux tensions, corrigé du facteur R (rapport des tensions en l’absence d’effet paramétrique).

présentée au paragraphe 2.4.3. Après calibration du rapport des deux signaux sans effet paramétrique $R = V_{2,0}/V_{1,0}$, on peut mesurer les gains d’amplification et de déamplification grâce à la formule :

$$G^\pm = \frac{V_2^\pm}{RV_1}. \quad (3.13)$$

Il est par contre très important de conserver la même puissance de bleu lors de la mesure de R , étant donné l’effet parasite du BLIIRA (cf paragraphe 2.2.1.4). La mesure de référence peut être faite en détruisant l’accord de phase par une rotation de la polarisation de la pompe de 90° . Pour récupérer les valeurs maximales (V_2^+) et minimales (V_2^-) du signal de sortie, on balaye simplement la phase du faisceau sonde à l’aide d’un élément piézoélectrique : des oscillations mesurées on déduit les deux gains. Un résultat de mesure brute est par exemple montré sur la figure 3.11 (a), qui permet d’obtenir l’évolution du gain en fonction du temps en traçant le rapport $V_2/(RV_1)$, comme montré sur la figure 3.11 (b).

Une mesure de la corrélation des deux signaux en l’absence de pompe permet également de contrôler la présence éventuelle d’imperfections dans les faisceaux : $C = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$, où σ_{12} est la covariance des signaux mesurés par les deux photodiodes, et σ_1 et σ_2 leurs écart-types respectifs. Dans la pratique, $C > 99.8\%$.

3.3.2.2 Résultats expérimentaux

Avec ce dispositif, on peut mesurer les gains montrés sur la figure 3.12 (a), pour différentes valeurs de la puissance de pompe. Si l'on superpose à ces points expérimentaux la courbe théo-

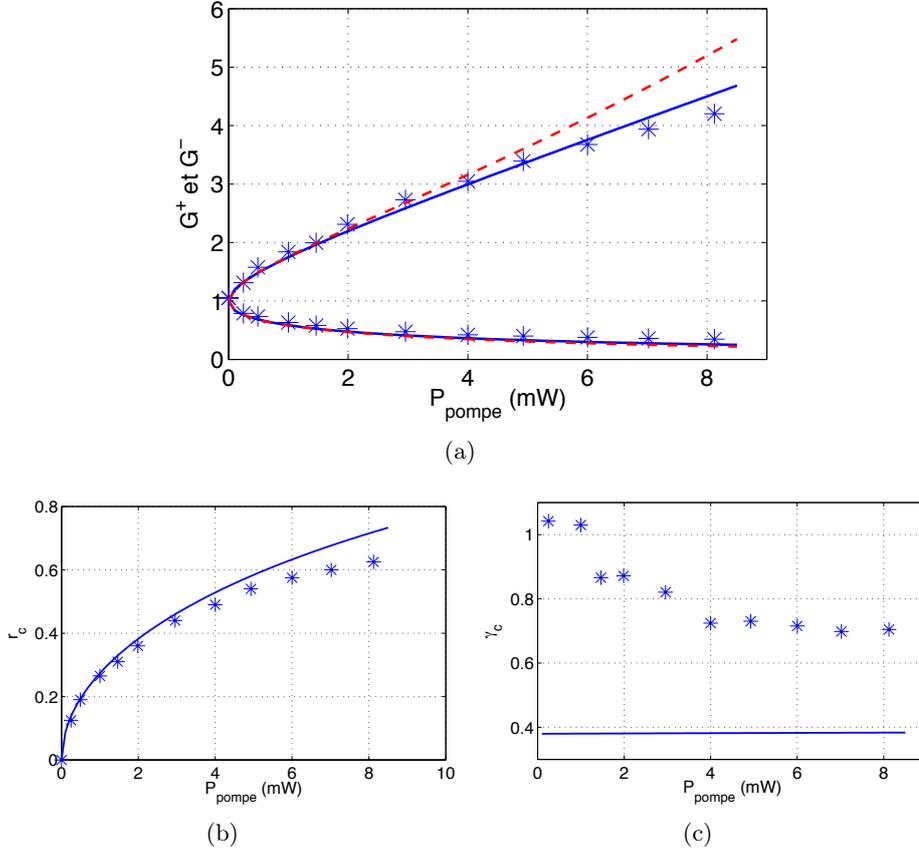


FIGURE 3.12 – Paramètres de l’amplification paramétrique. (a) Gains paramétriques (d’amplification si $G > 1$ et de déamplification si $G < 1$) en fonction de la puissance de pompe. (b) Paramètre de compression r_c du modèle (3.2). (c) Paramètre d’excès de bruit γ_c du modèle (3.2). Etoiles : points expérimentaux, courbe tiretée rouge : gains théoriques de la forme (3.12) sans absorption à 2 photons, courbe bleue continue : gains théoriques de la forme (3.12) avec absorption à 2 photons. Le fit des données se fait sur le paramètre Γ' , tous les autres étant fixés par les propriétés spatio-temporelles des impulsions. Données extraites de [Ourjountsev 07a].

rique attendue donnée par la formule (3.12), on obtient la courbe tiretée rouge présentée sur cette même figure, avec les paramètres $w_s = 20 \mu\text{m}$, $w_p = 24 \mu\text{m}$, $\tau_s = 100 \text{ fs}$, $\tau_p = 180 \text{ fs}$, $M = 1.2 \text{ ps.mm}^{-1}$ et $e = 0.7$. Le paramètre Γ' est trouvé par optimisation et vaut $1.18 \cdot 10^{-3} \text{ m.W}^{1/2}$.

Cette figure montre que la formule proposée en (3.12) n’est pas valide pour toutes les puissances de pompe, et qu’elle impose une correction supplémentaire. Cette correction peut en partie être réalisée par la prise en compte de l’absorption biphotonique décrite au paragraphe 2.2.3 : avec la prise en compte de cet effet l’accord est alors meilleur (cf courbe en trait plein bleu de la figure 3.12 (a)).

Grâce à la formule (3.5), on peut retrouver les deux paramètres r_c et γ_c , qui sont représentés respectivement sur les figures 3.12 (b) et (c). Etant donnés ces résultats, on voit que notre modèle

sur-estime les performances de notre amplificateur paramétrique : le γ_c attendu par le modèle est plus faible que celui qui est effectivement mesuré. Cela est dû au fait que de nombreux effets n'ont pas été pris en compte dans le modèle (effets photoréfractifs parasites, mauvais alignement, fronts d'ondes imparfaits, etc.).

En gardant cette observation en tête, nous nous proposons malgré tout d'étudier les tendances de variation des paramètres d'amplification r_c et γ_c en fonction des imperfections que nous avons introduites, afin de jauger leur importance sur la qualité de l'état de sortie.

3.3.3 Simulation de l'influence des paramètres d'imperfections

3.3.3.1 Paramètres spatiaux

Etudions dans un premier temps l'influence des rapports des tailles de faisceaux ainsi que l'ellipticité de ceux-ci sur la qualité de l'amplification. Nous négligerons ici l'influence des paramètres temporels ($\tau_s \rightarrow +\infty$, $\tau_p \rightarrow +\infty$ et $M = 0$ dans les profils). Pour une puissance de pompe de $P_p^{cw} = 5$ mW, une focalisation du faisceau sonde de $w_s = 20$ μm et une durée d'impulsion $\tau_p = 180$ fs (nécessaire à l'établissement de la puissance crête), les équations (3.10) et (3.12) peuvent se récrire :

$$g^\pm(x, y) = \exp \left[\phi L e^{-\frac{x^2 + e^2 y^2}{w_p^2}} \right] \quad \text{et} \quad G^\pm = \frac{2e}{\pi w_s^2} \iint (g^\pm(x, y))^2 e^{-2\frac{e^2 x^2 + y^2}{w_s^2}} dx dy, \quad (3.14)$$

où ϕ est toujours donnée par la formule (3.11) et $\Gamma' = 1.18 \cdot 10^{-3}$ m.W^{1/2}. En faisant varier w_p/w_s et e , on obtient les valeurs de r_c et γ_c (trouvées par la formule (3.5)) représentées sur les figures 3.13 (a) et (b).

Ces figures révèlent l'importance cruciale de travailler avec une pompe plus large que la sonde (cf (b)), étant donnée la dégradation rapide du paramètre d'excès de bruit si $w_p < w_s$. Ce phénomène peut être simplement expliqué en se penchant sur l'allure des profils spatiaux dans les cas d'amplification et de déamplification : si la pompe est large devant la sonde (cf figure 3.13 (c)), les profils restent gaussiens et aucune déformation n'est présente. Alors que si la pompe est trop petite par rapport à la sonde, les profils sont fortement déformés (cf figure 3.13 (d)). Les déformations étant différentes entre l'amplification et la déamplification, le produit G^+G^- n'est plus égal à 1, d'où la dégradation du paramètre γ_c .

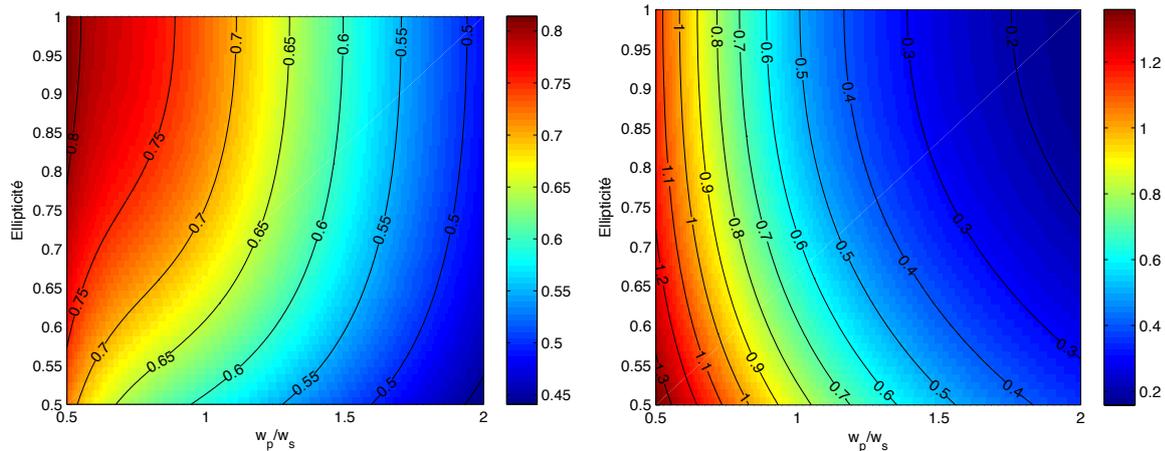
Une observation intéressante que l'on peut faire sur la figure 3.13 (b) est que l'ellipticité spatiale n'a en théorie qu'une incidence limitée sur la qualité de l'amplification, nous y reviendrons lors de l'analyse des mesures effectuées plus tard.

3.3.3.2 Paramètres temporels

Si à présent nous nous intéressons à l'influence des paramètres temporels (τ_p et M), les gains deviennent :

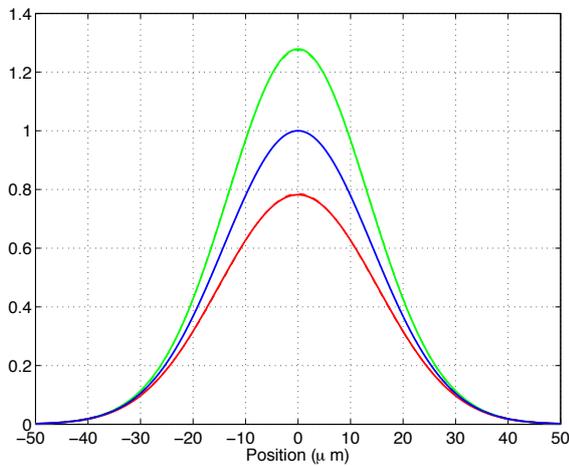
$$g^\pm(t) = \exp \left[\phi \int_0^L e^{-\frac{(t-zM)^2}{\tau_p^2}} dz \right] \quad \text{et} \quad G^\pm = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\tau_s}} \int (g^\pm(t))^2 e^{-\frac{2t^2}{\tau_s^2}} dt. \quad (3.15)$$

De la même manière que pour le cas spatial, la qualité de l'amplification est d'autant meilleure que la pompe a une durée plus longue, et ce au prix d'une diminution du paramètre de compression r_c . Un comportement intéressant est toutefois à noter ici : lorsque la GVM augmente, la qualité de l'état augmente (γ_c diminue). Ce comportement a priori peu instinctif s'explique par

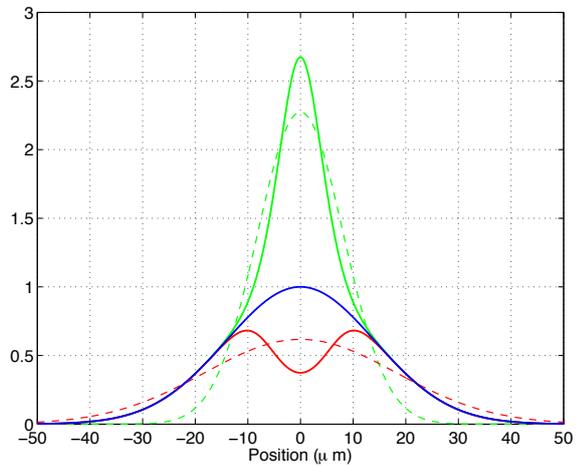


(a) Paramètre de compression r_c .

(b) Paramètre d'excès de bruit γ_c .



(c) Déformation des profils si $w_p/w_s = 2$ (bleu : profil initial, vert : profil amplifié, rouge : profil déamplifié).



(d) Déformation des profils si $w_p/w_s = 0.5$ (bleu : profil initial, vert : profil amplifié, rouge : profil déamplifié).

FIGURE 3.13 – Amplification en fonction des paramètres spatiaux.

le fait que le profil d'amplification est élargi artificiellement par l'action de la GVM, tendant à le rendre uniforme (cf figure 3.14 (c)) : lors de l'amplification, l'impulsion de pompe va "balayer" le profil de l'impulsion sonde, et au sortir du cristal (si celui-ci est assez épais), chaque instant de l'impulsion sonde aura vu le même gain, d'où l'uniformisation artificielle.

3.3.3.3 Quelles expériences réaliser ?

Au vu des simulations précédentes, un des paramètres semble jouer un rôle prépondérant dans la qualité de l'amplification : il s'agit du rapport des tailles des points focaux de pompe et de sonde $r = w_p/w_s$. L'ellipticité spatiale semble ne jouer qu'un rôle limité tant qu'elle n'est pas inférieure à 50%, le rapport temporel (rappelons le, >1 d'après les sections 2.1 et 2.2) ne semble pas non plus être un paramètre limitant, et la GVM serait un allié dans l'amélioration de la qualité d'amplification. Nous allons voir expérimentalement comment l'amplification se comporte en fonction de ce paramètre spatial, ainsi qu'en fonction d'autres paramètres expérimentaux qui n'ont pas pu être simulés étant donnée la complexité des modèles qu'ils imposent, ou tout

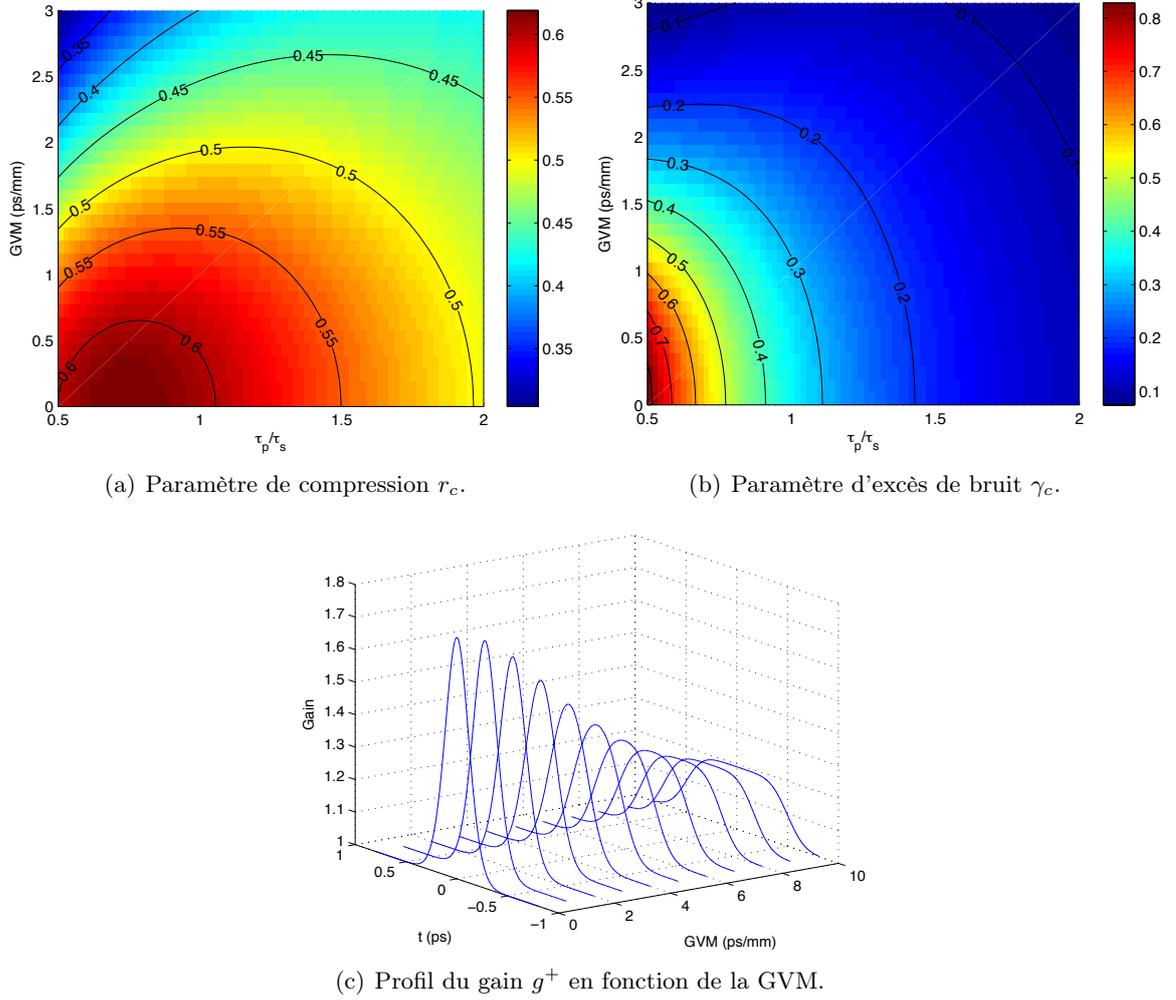


FIGURE 3.14 – Amplification dans le cas d'imperfections temporelles.

simplement par la méconnaissance des effets qu'ils impliquent.

3.3.4 Caractérisation expérimentale des sources d'imperfections

Nous avons réalisé les tests de caractérisation expérimentale avec les mêmes paramètres que dans le paragraphe 3.3.2.2 : les résultats de toute cette section 3.3.4 ont donc été obtenus en configuration femtoseconde.

3.3.4.1 Paramètres laser

Les premiers paramètres dont nous pouvons étudier l'influence sur le paramètre d'imperfection γ_c sont les paramètres laser. Nous nous sommes penchés sur quatre d'entre eux : le délai et la phase de l'onde RF d'extraction des impulsions, la position transverse de la fente servant au mode-locking de la cavité, et la largeur du spectre laser. Les dépendances de γ_c en fonction de ces paramètres ainsi que la puissance laser sont représentées sur la figure 3.15. Dans tous ces cas, le paramètre d'étude a été modifié et l'amplificateur a été ré-aligné, afin d'optimiser la mesure.

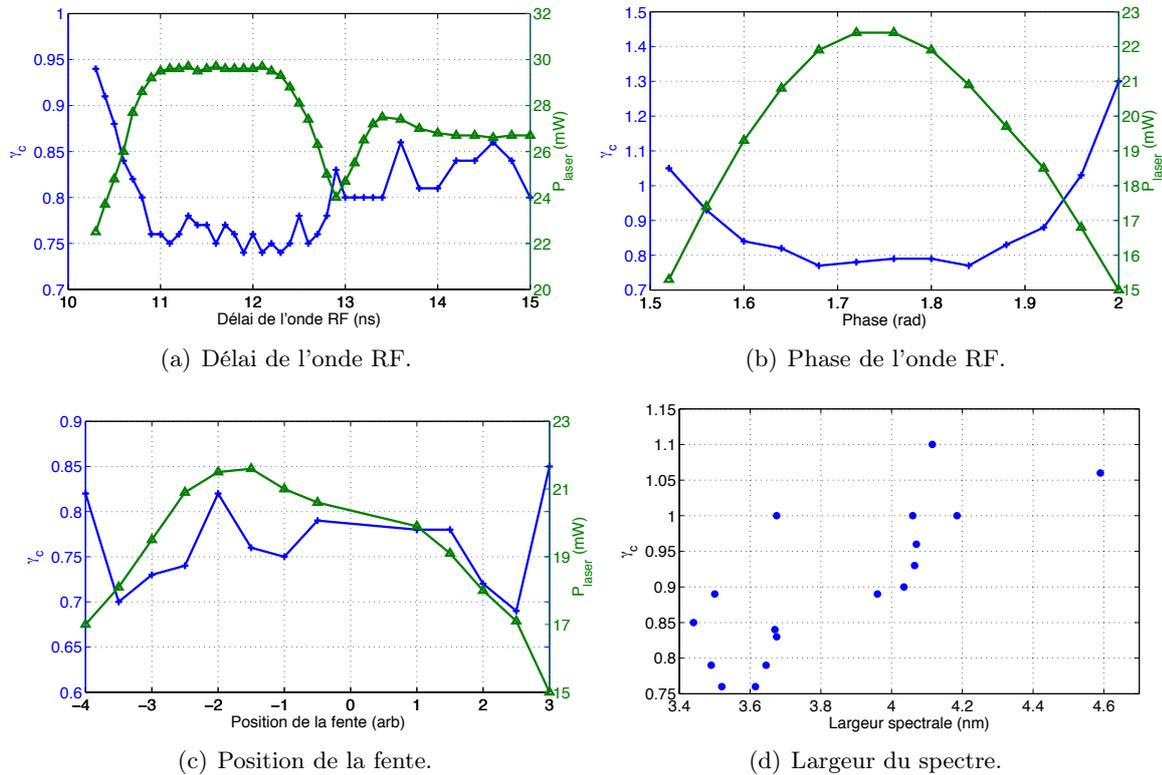


FIGURE 3.15 – Influence de certains paramètres laser sur la qualité de l'amplification paramétrique.

Cette figure révèle des dépendances certaines vis-à-vis des paramètres d'extraction RF (délai et phase), mais dont le contrôle peut être simplement obtenu par observation de la puissance laser : le paramètre γ_c est le meilleur lorsque la puissance est maximale. Ensuite, la position de la fente semble quant à elle n'avoir qu'une incidence limitée sur γ_c , cela nous autorise donc à jouer sur ce paramètre sans compromettre les mesures, notamment en vue de réduire les bruits dans l'amplitude laser (cf remarque faite à la fin du paragraphe 3.1.3).

Finalement, il semblerait par contre que la largeur spectrale du laser ait une incidence sur la qualité de l'amplification : plus le spectre est fin, plus il semble que le paramètre γ_c soit faible. Ce paramètre de largeur spectrale ayant de multiples conséquences (cf durée de l'impulsion), mais également dépendant de plusieurs facteurs (forme du spectre notamment), il est difficile de conclure quant au rôle précis que celui-ci joue. Nous avons par contre à notre disposition la configuration picoseconde, qui permet d'explorer les régions de plus faible largeur spectrale. Nous nous y intéresserons dans la suite.

3.3.4.2 Paramètres de génération paramétrique

En plus des paramètres du laser, nous pouvons également jouer sur les paramètres de la génération paramétrique elle-même. Nous avons dans cette optique étudié trois d'entre eux : la température du cristal, la qualité de superposition des points focaux, et le rapport des tailles focales pompe/sonde $r = w_p/w_s$.

Superposition des points focaux

Tout d'abord, voyons à quel point la qualité de l'amplification est sensible à la bonne superposition longitudinale des deux points focaux. Pour cela, nous avons réalisé la mesure de γ_c dans plusieurs configurations : nous avons décalé le waist du faisceau bleu de Δz par rapport au waist rouge, qui lui-même a été placé à une distance z_0 du cristal. Ces notations sont précisées sur la figure 3.16.

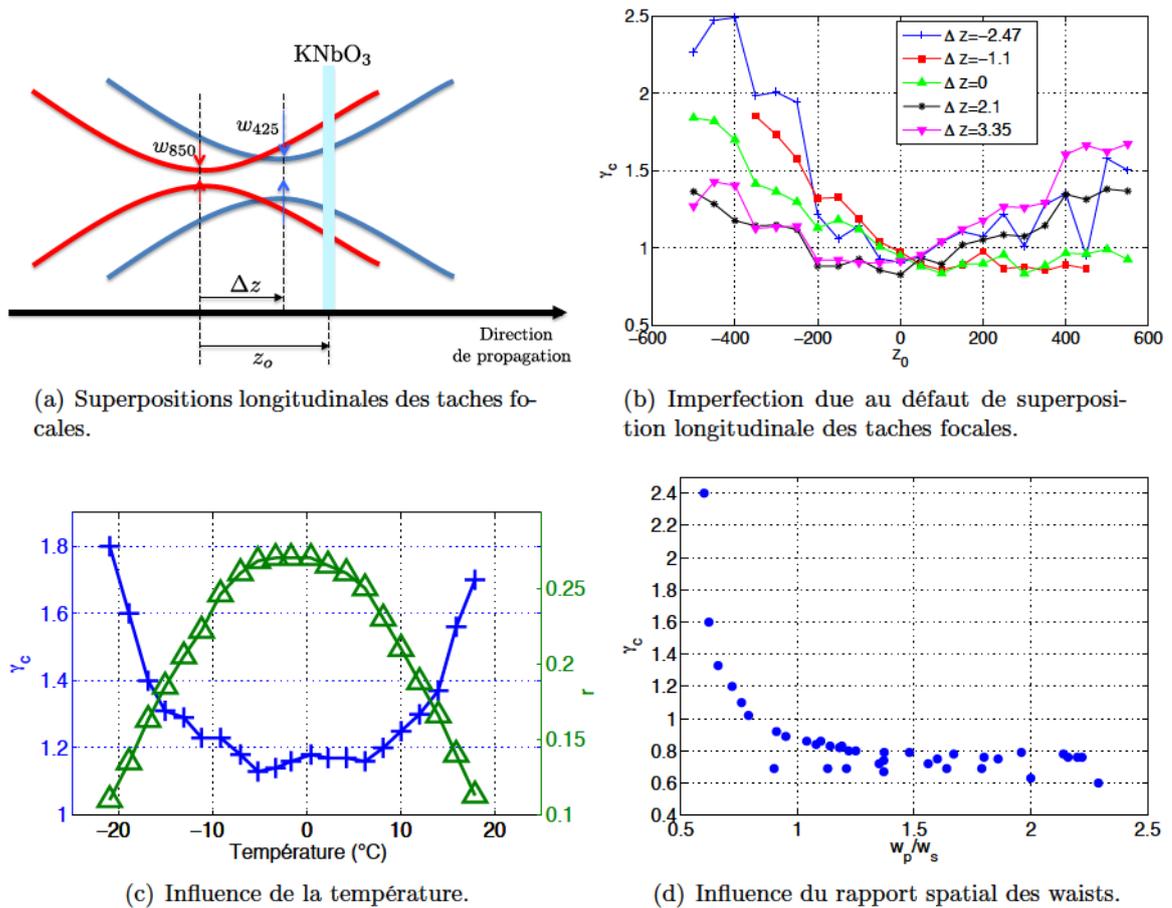


FIGURE 3.16 – Influence des paramètres d'amplification.

Cette figure montre que l'amplification est de meilleure qualité lorsque le waist rouge est placé au niveau du cristal, et que le waist bleu est à peu près superposé avec celui-ci, comme on aurait pu s'y attendre. Cette figure nous indique également que la tolérance sur les paramètres de superposition est grande, ce qui fait que le réglage de la superposition n'est pas trop critique pour notre montage.

Température du cristal pour l'accord de phase

Si l'on étudie la dépendance de γ_c en la température du cristal de KNbO₃, on obtient la dépendance représentée sur la figure 3.16 (c) : là encore ce paramètre semble dépendre relativement peu de la température, étant donné le fait qu'il reste quasiment constant dans la plage [-5°C, 5°C] (on notera la mauvaise qualité de l'amplification le jour du test sur le paramètre γ_c).

Rapport des tailles w_p/w_s

Une fois l'ensemble des autres paramètres optimisés, nous avons étudié l'influence du rapport des tailles des points focaux sur le paramètre γ_c . On rappelle que d'après la figure 3.13 (b), on s'attend à une amélioration de celui-ci lorsque le rapport augmente. Cette tendance est effectivement confirmée par les points expérimentaux de la figure 3.16 (d), mais l'amélioration n'est pas aussi grande que celle attendue : γ_c sature à une valeur de 0.6 là où la théorie prédit une valeur inférieure à 0.3. Cette différence est à relier à l'observation faite en fin de paragraphe 3.3.2.2, où il avait été noté que notre modèle (3.12) fournissait un paramètre γ_c sous-évalué par rapport aux mesures. La valeur $w_p/w_s \simeq 1.2$ semble être une valeur charnière pour la qualité, et on se placera donc le plus possible au-dessus.

3.3.5 Choix de la configuration d'amplification

A la vue des résultats de simulations et de mesures montrés précédemment, nous avons choisi de travailler en configuration picoseconde, afin de minimiser la largeur spectrale, qui constitue un paramètre clé d'après la figure 3.15 (d). Le très grand avantage de cette configuration réside également dans sa faible sensibilité à la dispersion de vitesse de groupe induite par l'ensemble des optiques en transmission sur la table (cubes séparateurs de polarisations, lentilles, lames d'ondes, etc.).

Concernant les paramètres de focalisation, ceux-ci doivent être beaucoup plus grands que dans le cas femtoseconde : le cristal étant plus épais (1 mm dans notre cas), les faisceaux devront être moins focalisés afin que la longueur de Rayleigh demeure grande devant cette épaisseur. La dépendance du nouveau paramètre γ_c en configuration picoseconde est montrée sur la figure 3.17.

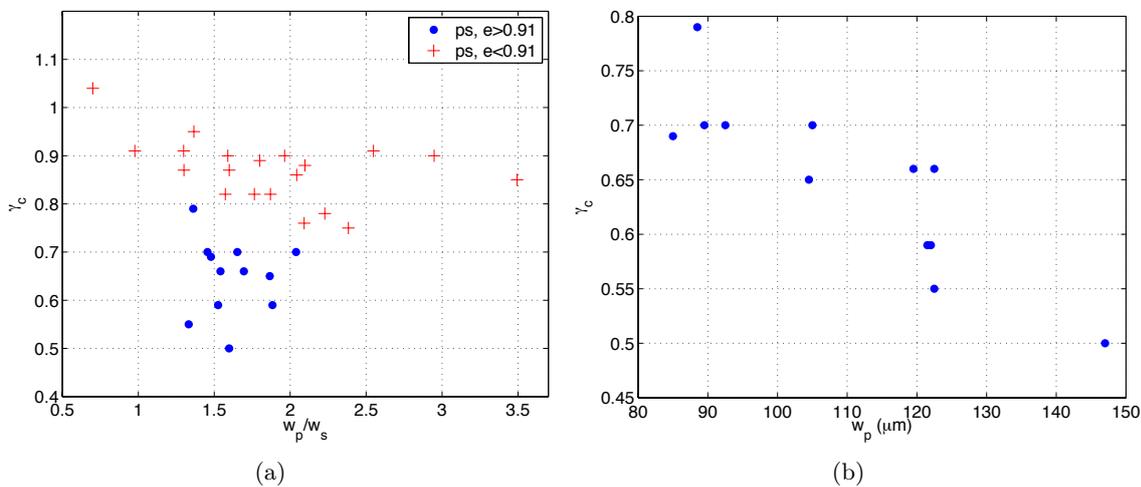


FIGURE 3.17 – Paramètre γ_c dans la configuration picoseconde pour différentes tailles de pompe w_p et de sonde w_s . (a) γ_c en fonction du rapport des tailles, pour des ellipticités supérieures ou inférieures à 0.91. (b) γ_c en fonction de la taille de la pompe w_p , pour $e > 0.91$.

Cette figure montre clairement que le rapport spatial n'est pas la seule variable pertinente pour décrire la qualité de l'état, mais que les tailles de focalisation (notamment de la pompe, représentée sur la figure 3.17 (b)) jouent également un rôle important. Au vu de ces résultats, nous avons opté pour un waist bleu de 150 μm et un waist rouge de 100 μm , permettant

d'atteindre des qualités d'amplification jamais atteintes en configuration femtoseconde ($\gamma_c = 0.5$). L'avantage de cette configuration est qu'elle est très simple d'alignement et qu'elle permet de travailler avec des gains d'amplification suffisants (paramètre de compression $r \geq 0.1$).

Il a été de plus noté que la qualité de l'amplification se dégrade si l'ellipticité décroît, ceci étant visible sur la figure 3.17 (a). On avait vu au paragraphe 3.3.3.1 que celle-ci devait n'avoir qu'une incidence relativement faible sur la qualité de l'état de sortie, mais les simulations avaient été faites pour des points focaux superposés. Or l'ellipticité, comme on l'a vu au paragraphe 3.1.2, peut également être une manifestation de l'astigmatisme du faisceau : les points focaux suivant les deux directions de l'espace peuvent ne pas être superposés, et comme on l'a vu sur la figure 3.16 (b), une mauvaise superposition a une incidence sur le paramètre γ_c .

Étant données la complexité et la sensibilité du montage pour la correction de l'astigmatisme présenté au paragraphe 3.1.2, une solution qu'il faudrait pouvoir explorer est l'utilisation de fibres optiques à cœur creux pour le filtrage spatial du faisceau, tout comme nous l'avions proposé au paragraphe 3.2.4 pour le filtrage du mode spatial en sortie de l'amplificateur à dérive de fréquence. Ce point demeure à l'étude actuellement.

Maintenant que nous avons démontré l'amélioration des paramètres de génération par l'utilisation d'une configuration adaptée, voyons les modifications qui ont pu être apportées au dispositif de caractérisation des états.

3.4 Modification du montage homodyne

3.4.1 Montage optique

Le montage initialement utilisé pour les détections homodynes, présenté au paragraphe 2.4.2, souffre d'un défaut principal : les cubes séparateurs de polarisation sont des optiques de performances en général relativement médiocres ($\sim 2\text{-}3\%$ de pertes), et la qualité des états que l'on produit est directement impactée par ces pertes. Le montage optique de ces détections a donc été légèrement modifié, afin qu'il permette l'utilisation de lames 50:50 non polarisantes, dont les pertes peuvent être facilement inférieures au pourcent. Celui-ci est montré sur la figure 3.18, où les lames séparatrices utilisées portent la référence *Newport 10RQ00UB.2*. Les pertes optiques dans la détection, initialement de 7%, sont ici réduites à moins de 1%, permettant de faire passer l'efficacité homodyne totale de 73% à 77% (avec toujours l'imprécision de $\pm 4\%$ à cause de la variabilité des contrastes d'interférences).

Ce montage, qui se rapproche davantage du montage théorique présenté au paragraphe 1.5, possède par contre un inconvénient majeur : les lames que l'on trouve sur le marché ne sont jamais parfaitement 50:50, et les deux bras des détections homodynes ne sont jamais tout à fait identiques, ainsi l'équilibrage qui pouvait être fait à l'aide d'une lame demi-onde doit à présent être obtenu en jouant sur l'angle de la lame semi-réfléchissante. Dans notre cas, l'incidence sur celle-ci doit être d'environ 40° , ce qui complique la géométrie des montages.

Modifier cet angle a également pour conséquence de désaligner l'ensemble des optiques qui suivent au sein du montage de la détection, c'est pourquoi deux miroirs supplémentaires sont placés juste en sortie de la lame 50:50, permettant de rattraper facilement d'éventuels décalages.

De plus, le réglage de l'intensité de l'oscillateur local, qui pouvait se faire à l'aide de lames d'onde avec le précédent montage, se fait maintenant à l'aide de la combinaison d'une lame d'onde et d'un polariseur (*Thorlabs LPVIS100-MP*, $1:10^8$ de coefficient d'extinction), autorisant de surcroît un ajustement précis de la polarisation.

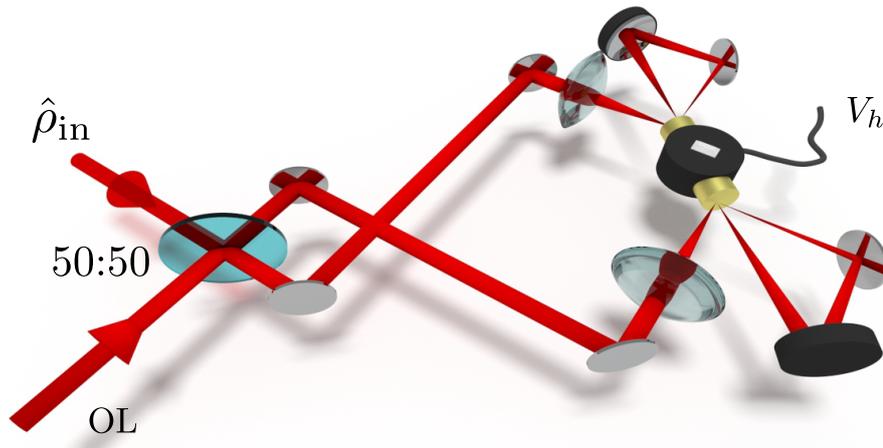


FIGURE 3.18 – Montage optique d’une détection homodyne avec une lame 50:50.

Pour l’équilibrage fin de la détection, on pourra s’autoriser à tourner très légèrement la polarisation, la lame 50:50 n’ayant pas les mêmes propriétés de transmission et de réflexion pour les deux polarisations. Cette rotation pourra être assimilée à de très faibles pertes, que l’on pourra négliger dans les faits.

3.4.2 Contraste d’interférence

On rappelle que pour estimer le *mode-matching* (cf paragraphe 2.4.2.4), un état cohérent de même amplitude que l’oscillateur local est envoyé dans la détection homodyne. En balayant la phase de ce dernier, on obtient un contraste d’interférence à partir duquel on peut estimer l’adaptation modale. On rappelle que celui-ci est égal à 91% dans notre cas.

Mesures de diagnostic

Pour réaliser un diagnostic rapide et efficace des paramètres pertinents qui peuvent limiter ce contraste, un montage a été mis en place pour les faisceaux : un miroir basculant, placé dans un des bras de la détection homodyne, permet de défléchir le faisceau vers quatre types d’instruments de mesure différents.

- Une mesure du contraste peut être faite à l’aide d’une simple photodiode (cf montage de la figure 3.4 (a)).
- Le spectre peut être mesuré à l’aide du même analyseur de spectre que celui présenté dans le chapitre 2.
- Une caméra CMOS (*Thorlabs DCC1545M*) permet de réaliser une mesure du profil spatial du faisceau.
- Enfin, un analyseur de front d’onde (*Thorlabs WFS300-14AR*) permet de mesurer la phase spatiale du faisceau.

En adoptant un modèle simplifié pour le contraste d’interférence, on peut ainsi avoir une estimation de l’importance des différents paramètres.

Modèle théorique

Etant donnés les différents profils mesurés grâce aux instruments précédemment mentionnés,

nous nous proposons d'en déduire un modèle permettant d'estimer le contraste théorique attendu.

D'abord, le signal mesuré par la photodiode en fonction du délai de l'oscillateur local est de la forme :

$$s(\tau) \propto \int dt \iint dx dy |E_s(x, y, t) + E_{OL}(x, y, t - \tau)|^2, \quad (3.16)$$

où E_s est le champ du signal (ou de l'idler suivant les configurations) et E_{OL} celui de l'oscillateur local, qui vont interférer sur la lame 50:50 de la détection homodyne.

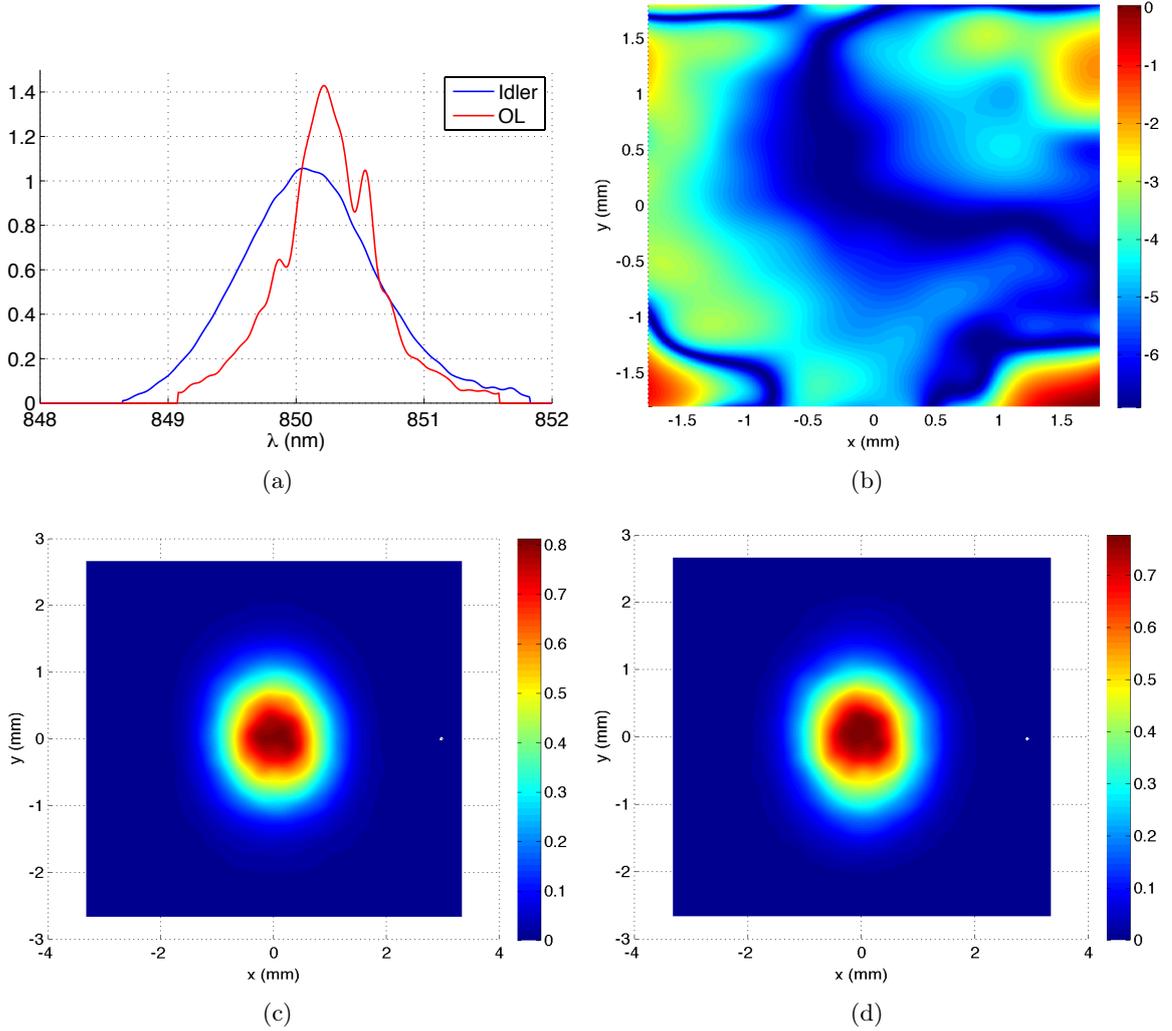


FIGURE 3.19 – Propriétés des faisceaux interférant dans la détection homodyne, dans le cas de l'interférence entre l'oscillateur local et l'idler (configuration d'amplification non-dégénérée). (a) Amplitudes spectrales. (b) Accord des fronts d'ondes : $\ln(1.001 - \cos(k\Delta\varphi))$ (plus la valeur est négative, meilleur est l'accord). Profils spatiaux (c) de l'idler et (d) de l'oscillateur local.

Nous allons choisir des champs de la forme

$$E(x, y, t) = E_0 f(t) g(x, y), \quad (3.17)$$

avec $\int |f(t)|^2 dt = \iint |g(x, y)|^2 dx dy = 1$ et $g(x, y) = P(x, y) \exp[i\varphi(x, y)k]$. Dans ce modèle simplifié, chaque faisceau est décrit par son profil temporel (enveloppe $|f|$), son profil spatial (P) et sa phase spatiale (φ , exprimée ici comme une longueur grâce au terme $k = 2\pi/\lambda$). La phase temporelle ne nous est pas accessible étant donnée la nécessité d'utiliser des appareils de mesure plus perfectionnés (FROG, SPIDER,... [Trebino 97, Iaconis 98]) dont nous ne disposons pas. Avec ces formes de champs, on en déduit un signal des photodiodes donné par :

$$s(\tau) = 2I_0 \left(1 + c \cos(\omega\tau) \right), \quad (3.18)$$

où

$$c = \int h_{OL}(\lambda) h_s(\lambda) d\lambda \iint P_{OL}(x, y) P_s(x, y) \cos[k(\varphi_{OL}(x, y) - \varphi_s(x, y))] dx dy \quad (3.19)$$

est le contraste des interférences mesuré, et $h(\lambda)$ est l'amplitude spectrale, obtenue en prenant la racine carrée du signal mesuré par l'analyseur de spectre. Un exemple de mesure expérimentale des différents profils est donné sur la figure 3.19 dans la configuration picoseconde, avec le faisceau idler faisant office de faisceau cohérent à la place de l'état à mesurer.

Dans ce cas, on trouve un terme de recouvrement spectral de $\int h_{OL}(\lambda) h_s(\lambda) d\lambda = 93\%$ et un terme de recouvrement spatial de $\iint P_{OL}(x, y) P_s(x, y) \cos[k(\varphi_{OL}(x, y) - \varphi_s(x, y))] dx dy = 99.5\%$. Les profils sont en effet très proches l'un de l'autre (cf figures (c) et (d)), et la correspondance des fronts d'onde est excellente (cf figure (b), où une échelle logarithmique est même nécessaire pour faire apparaître les imperfections autour de l'origine). Le produit de ces deux termes donne le contraste maximal que l'on peut obtenir, soit ici de 92.5%. Dans la pratique, comme nous l'avons dit au paragraphe 2.4.2.4, il dépasse rarement les 91%, du fait des imperfections qui ne sont pas prises en compte par notre modèle (alignement des faisceaux, égalité des intensités, qualité des polarisations, des optiques de superposition, etc). Il est par contre possible de conclure sur l'effet prépondérant dans la baisse de qualité de ce contraste : il s'agit des différences spectrales (et donc des recouvrements temporels imparfaits).

Afin de maximiser ce contraste et donc le mode-matching avec l'oscillateur local du mode mesuré, une possibilité consiste à en optimiser les différents paramètres spatio-temporels [Polycarpou 11]. Cette technique est par contre plus complexe à implémenter du fait de l'utilisation d'outils spécifiques (lignes 4f) et de la nécessité d'une optimisation des paramètres de manière itérative. Elle pourrait par contre constituer un axe intéressant d'amélioration de l'expérience.

3.5 Caractérisation des améliorations par les photons uniques

Voyons finalement comment l'ensemble des modifications que l'on a pu apporter à notre dispositif permet d'améliorer la qualité des états de base que nous allons utiliser par la suite : les états de Fock à un photon. Le montage expérimental est du même type que celui de la figure 2.17, et nous ne le précisons donc pas ici.

Avec toutes les améliorations fournies par le dispositif, les nouveaux points expérimentaux sont montrés sur la figure 3.20 (a), associés à la fonction de Wigner de la figure (b) (reconstruite par maximum de vraisemblance). Grâce aux efforts apportés aux améliorations, la fidélité de l'état produit avec un état de Fock parfait $|1\rangle$ sans correction d'efficacité atteint 62%, et vaut 77% après correction de l'efficacité de détection (cette dernière valant 77%, comme nous l'avons vu au paragraphe 3.4.1).

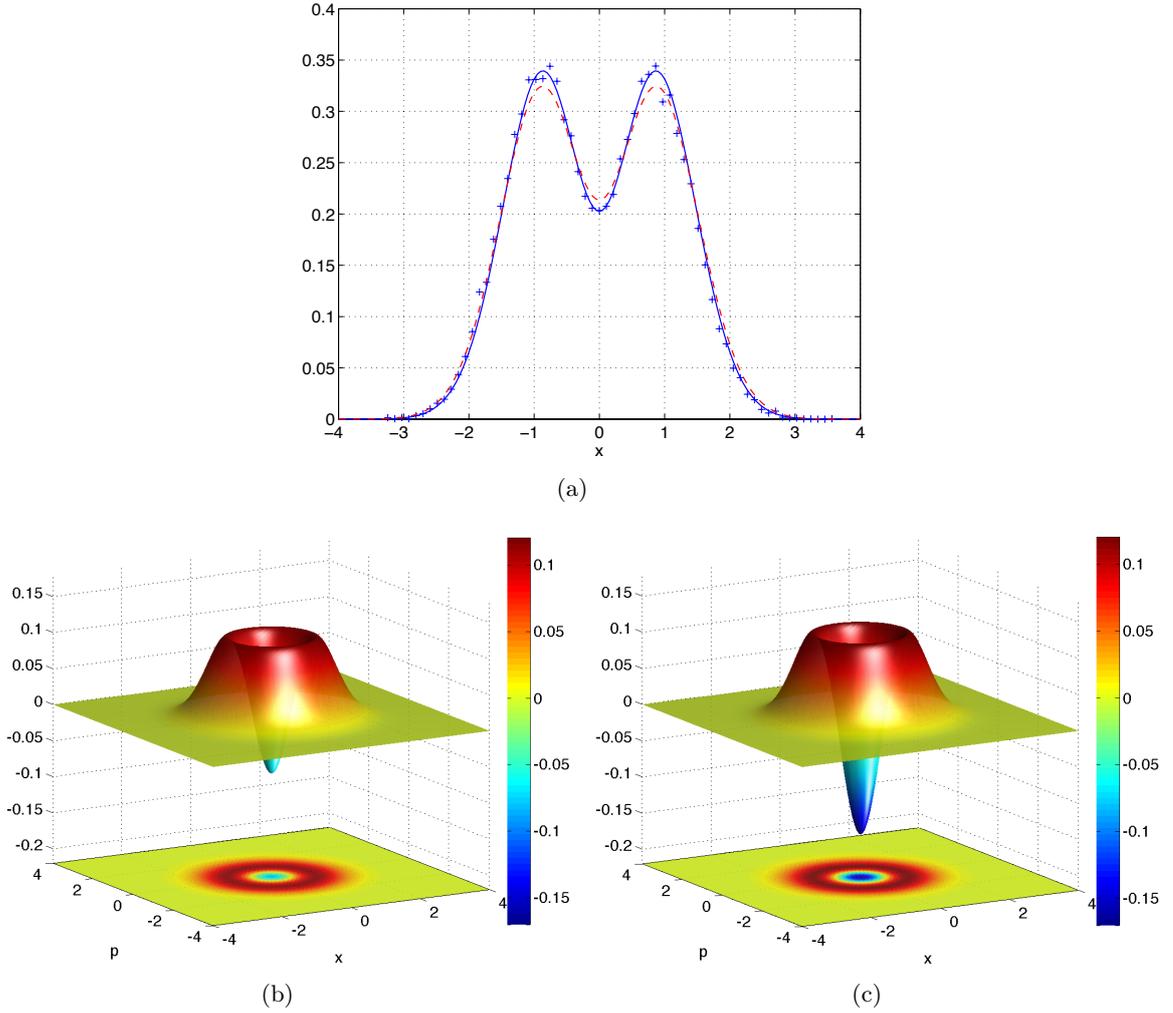


FIGURE 3.20 – Nouvel état de Fock à un photon. (a) Points expérimentaux (croix), et projection de la fonction de Wigner reconstruite sans correction de l’efficacité de détection (ligne continue). A titre de comparaison, la distribution de probabilité théorique obtenue avec les paramètres du paragraphe 2.5.4 issus de [Ourjoumtsev 07a] est montrée en trait tireté rouge. Fonctions de Wigner reconstruites par maximum de vraisemblance (b) sans et (c) avec correction des 77% d’efficacité de détection.

Les nouveaux paramètres du modèle théorique associés à cet état sont à présent $\sigma = 1.03$ et $\delta = 1.26$, pour des paramètres d’amplification $r = 0.2$, $\gamma = 0.35$, $\xi = 0.965$ et $\eta = 0.75$ ($=0.77 \times 0.97$).

Si l’on compare ces résultats avec ceux obtenus en configuration femtoseconde, comme montré sur le tableau 3.1, on observe une amélioration des paramètres r , γ et ξ . Le paramètre r est plus faible simplement car la focalisation dans le cristal paramétrique est moins grande, le paramètre γ est amélioré suite à l’étude que nous avons menée à la section 3.3, et la pureté modale ξ est meilleure en configuration picoseconde.

A titre de comparaison, les meilleurs photons uniques produits actuellement par le processus de génération paramétrique ont une fidélité de 79% avec des photons uniques parfaits sans corrections d’efficacité, et de 91% avec correction [Morin 12]. Ces valeurs plus élevées s’expliquent en partie par le fait que les auteurs utilisent des cavités, permettant une très bonne adaptation des modes.

	σ	δ	r	γ	ξ	η_{DH}	η_{trans}	\mathcal{F}	$\mathcal{F}_{\text{corr}}$
Configuration Femto [Ourjountsev 06a]	1.07	1.19	0.26	0.43	0.92	0.8	/	58%	67%
Configuration Pico	1.03	1.26	0.2	0.35	0.965	0.77 ± 0.04	0.97	62%	$77\% \pm 3\%$

TABLEAU 3.1 – Paramètres de génération des états de Fock à un photon, pour les configurations femto et picosecondes.

3.6 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre comment il a été possible de stabiliser et de diagnostiquer un grand nombre de paramètres expérimentaux, dans l'optique de disposer d'une expérience qui puisse être réglée de manière rapide et efficace. A ces améliorations a été rajoutée une meilleure qualité de génération des paires paramétriques par l'utilisation de la configuration picoseconde et par l'optimisation des paramètres de focalisation dans le cristal paramétrique. Un panorama d'un certain nombre de paramètres d'imperfections pertinents a pu être dressé, permettant d'ouvrir des pistes pour des améliorations futures. L'ensemble de ces modifications a permis d'obtenir des photons uniques de meilleure qualité que ceux produits antérieurement dans l'équipe, que nous nous proposons d'utiliser pour former des états plus complexes dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Croissance d'états chats : réalisation expérimentale

Sommaire

4.1	Introduction	87
4.2	But de l'expérience	88
4.2.1	Principe	88
4.2.2	Etat produit	89
4.3	Modèle théorique	89
4.3.1	Modèle bimode	90
4.3.2	Fonctions de Wigner conditionnées	91
4.4	Mise en œuvre expérimentale	93
4.4.1	Nécessité d'un contrôle de phase	94
4.4.2	Montage expérimental	99
4.5	Résultats expérimentaux	99
4.5.1	Expérience à un photon	101
4.5.2	Expérience à deux photons	104
4.6	Conclusion et perspectives	110

4.1 Introduction

Les états chats de Schrödinger introduits au paragraphe 1.4.2.2 sont des outils centraux en optique quantique à variable continue, compte tenu des perspectives qu'ils offrent dans le calcul quantique à état cohérent [Lloyd 99, Jeong 02, Ralph 03], la téléportation quantique [van Enk 01, Jeong 01, Ourjoumtsev 09, Lee 11], les mesures de précision [Ralph 02, Munro 02, Joo 11] ou la construction de codes correcteurs d'erreurs quantiques [Lloyd 98, Cochrane 99].

Depuis les dix dernières années, de nombreux protocoles ont vu le jour afin de produire expérimentalement ces états. Les premières idées, basées sur l'utilisation de non-linéarités cubiques [Yurke 86] semblaient difficiles à implémenter en espace libre étant donnée l'intensité de la non linéarité nécessaire pour espérer voir naître la superposition cohérente. Ces protocoles ont pu être adaptés en cavités, où les interactions entre les photons et les atomes peuvent être contrôlées et exacerbées [Vogel 93]. Il a ainsi pu être observé des non-linéarités à moins d'un photon [Turchette 95], puis des états chats ont pu être générés et tomographiés [Deléglise 08].

Toutefois, le principal défaut de ces protocoles réside dans le fait que les états sont "emprisonnés" dans la cavité de quantification du champ.

La génération d'états chats en régime propagatif s'est quant à elle faite en utilisant des méthodes différentes. Etant donnée l'impossibilité de modifier un champ incident par de très fortes non-linéarités, des méthodes non déterministes basées sur l'utilisation de faisceaux intriqués ou comprimés ont été préférées.

Les premiers états chats à proprement parler ont été générés à partir d'un vide comprimé monomode sur lequel une soustraction de photon était réalisée [Ourjoumtsev 06b]. Ces états n'étaient par contre qu'une approximation d'états chats de Schrödinger impairs de faible amplitude étant donnée leur nature (il s'agissait de photons uniques comprimés). Ils ont donc été baptisés "chatons" de Schrödinger. Faire croître l'amplitude de ces états par une technique similaire a requis la soustraction de davantage de photons du vide comprimé [Gerrits 10, Yukawa 13], au prix de détecteurs très performants et de taux de comptages faibles (18 h^{-1} pour la soustraction de 3 photons par exemple). D'autres protocoles, basés sur l'interaction de deux états de vide comprimé [Takahashi 08] ou des conditionnements homodynes utilisant des états de Fock à deux photons [Ourjoumtsev 07b] ont également permis de réaliser la génération d'états pairs.

Toutefois, tous les protocoles cités ci-dessus souffrent d'un désavantage commun : ils n'ouvrent pas de perspective quant à la possibilité d'augmenter la probabilité de succès pour la génération de chats arbitrairement grands. Ce désavantage est dû au fait qu'ils reposent sur des soustractions de photons ou sur la génération d'états complexes, sur lesquelles l'expérimentateur n'a que peu de contrôle sur la réussite et sur la qualité.

Construire un protocole itératif, c'est-à-dire qui par son utilisation répétée fait grandir la taille d'un état chat, semble être incontournable afin de pouvoir augmenter la probabilité totale de succès. En effet, s'il est possible d'itérer un processus simple, l'introduction de mémoires quantiques entre deux applications permettrait de se départir de la nécessité de clics simultanés. Des protocoles de ce type ont été proposés [Lund 04, Fiurásek 05, Dakna 99] et seront étudiés plus en détails dans le chapitre 5, mais souffrent d'un défaut commun : ils nécessitent l'utilisation de détecteurs de photons, limitant les probabilités de succès à chaque itération.

Nous démontrons dans ce chapitre la mise en œuvre expérimentale d'un nouveau protocole permettant la génération et la croissance d'états "Chats de Schrödinger", basé sur un conditionnement homodyne et utilisant des photons uniques comme seule ressource. Le principe général et complet du protocole sera étudié théoriquement au chapitre 5 et nous le présenterons brièvement ici, avant d'exposer les résultats expérimentaux que ce protocole a permis d'obtenir.

4.2 But de l'expérience

4.2.1 Principe

Le principe de l'expérience de génération d'états chats de Schrödinger repose sur l'application d'un protocole très simple, basé sur la coalescence de photons et représenté sur la figure 4.1 (a) : deux états de Fock à un photon sont mélangés sur une lame 50:50, et une mesure homodyne est effectuée sur un des deux ports de sortie. Lorsque cette mesure tombe dans un intervalle $[-\Delta x^c, \Delta x^c]$, on considère que la transformation a correctement eu lieu et on annonce l'état $|\psi_{\text{out}}\rangle$ en sortie de dispositif (position interrupteur fermé vert sur la figure). Si la mesure homodyne tombe en dehors de cet intervalle, on considère que l'expérience a échoué et on retente le mélange.

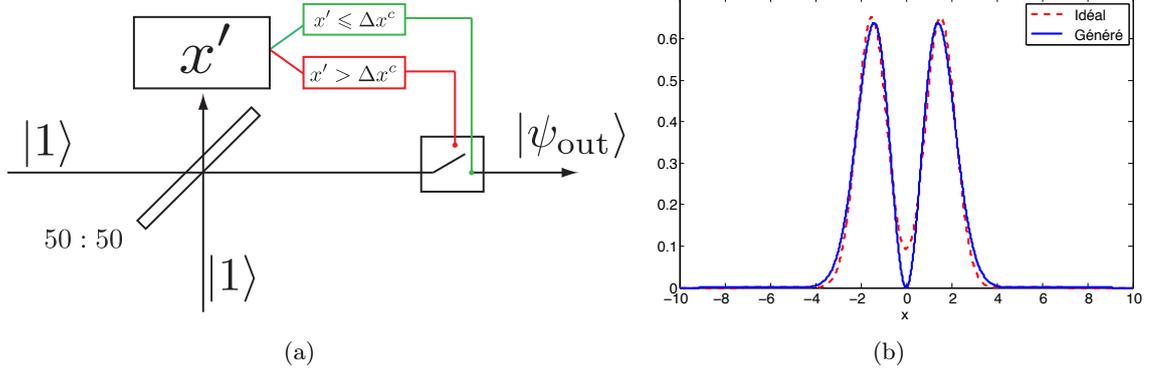


FIGURE 4.1 – Protocole pour la génération d'un état chat par coalescence de photons. (a) Principe du protocole : deux états à un photon sont mélangés sur une lame 50:50 et une mesure homodyne est effectuée dans un des ports de sortie. Si la mesure est suffisamment proche de 0, la transformation a correctement eu lieu, sinon on recommence l'opération. (b) Fonction d'onde de l'état créé (trait bleu plein) comparée avec celle d'un état Chat de Schrödinger pair d'amplitude $\alpha = 1.63$ comprimé d'un facteur $s = 1.52$ suivant la quadrature x (trait rouge tireté). La fidélité entre les deux états est de 99%

4.2.2 Etat produit

Dans la limite du cas parfait ($\Delta x^c \rightarrow 0$), les transformations successives peuvent s'écrire comme :

$$\begin{aligned}
 |\psi_{\text{in}}\rangle = |11\rangle &\xrightarrow{50:50} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|02\rangle - |20\rangle \right] \xrightarrow{x'=0} N \left[\varphi_2(0)|0\rangle - \varphi_0(0)|2\rangle \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle, \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

où $N = \sqrt{\sqrt{\pi}2/3}$ et $\varphi_n(x)$ est la fonction d'onde en représentation x de l'état de Fock à n photons, donnée par l'équation (1.81a).

L'état (4.1), composé d'un nombre pair de photons uniquement, est très proche d'un état chat de Schrödinger pair d'amplitude $\alpha = 1.63$ comprimé d'un facteur $s = 1.52$ suivant la quadrature x , d'écriture en base de Fock :

$$\psi_{\text{chat}} \simeq 0.61|0\rangle + 0.79|2\rangle + \dots, \quad (4.2)$$

où les termes suivants peuvent être négligés mais restent non nuls. Le but de ce chapitre est d'exposer les résultats de la mise en œuvre expérimentale de ce protocole.

Nous allons commencer par réaliser le calcul des différentes distributions que l'on s'attend à mesurer pour la caractérisation de l'état.

4.3 Modèle théorique

Pour calculer l'état généré par le dispositif, nous allons considérer le modèle (2.17) d'imperfection pour le photon unique, dont les paramètres σ , σ' , δ et δ' seront dans un premier temps

supposés pouvoir être différents :

$$W_1(x, p) = \frac{e^{-\frac{x^2+p^2}{\sigma^2}}}{\pi\sigma^2} \left[1 - \delta + \frac{\delta(x^2 + p^2)}{\sigma^2} \right], \quad (4.3a)$$

$$W'_1(x, p) = \frac{e^{-\frac{x^2+p^2}{\sigma'^2}}}{\pi\sigma'^2} \left[1 - \delta' + \frac{\delta'(x^2 + p^2)}{\sigma'^2} \right]. \quad (4.3b)$$

4.3.1 Modèle bimode

Pour caractériser l'état bimode issu de la lame séparatrice 50:50, nous allons réaliser une caractérisation par mesure homodyne non conditionnée, c'est-à-dire que l'on va oublier momentanément le conditionnement $x' = 0$, et que l'on va tracer le nuage de points obtenu en réalisant une mesure homodyne sur chaque bras. Les détections homodynes seront supposées verrouillées en phase, où celle-ci sera notée θ . Le principe est illustré sur la figure 4.2.

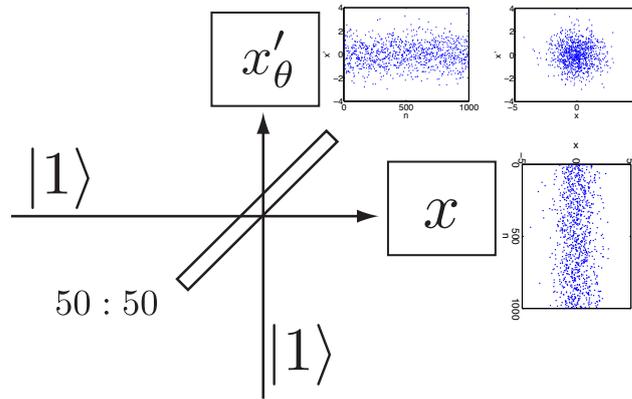


FIGURE 4.2 – Caractérisation de l'état bimode produit par la lame séparatrice.

Voyons quelle est la distribution mathématique attendue.

Comme on ne réalise des mesures que suivant les quadratures x et x'_θ , la densité de probabilité sera la trace de la fonction bimode sur les quadratures conjuguées p et p'_θ :

$$P(x, x'_\theta) = \int \int W_1\left(\frac{x+x'}{\sqrt{2}}, \frac{p+p'}{\sqrt{2}}\right) W'_1\left(\frac{x-x'}{\sqrt{2}}, \frac{p-p'}{\sqrt{2}}\right) dp dp'_\theta, \quad (4.4)$$

où $x' = x'_\theta \cos(\theta) - p'_\theta \sin(\theta)$, $p' = p'_\theta \cos(\theta) + x'_\theta \sin(\theta)$ et θ la phase relative entre les deux détections homodynes. Cette fonction intégrale n'a pas d'expression simple pour une phase quelconque (une expression brute est donnée en annexe G), mais nous pouvons toutefois l'expliciter pour $\theta = 0$:

$$P(x, x'_0) = \frac{1}{4\pi\sigma\sigma'} e^{-\frac{(x+x'_0)^2}{2\sigma^2} - \frac{(x-x'_0)^2}{2\sigma'^2}} \left[(x+x'_0)^2 \frac{\delta}{\sigma^2} - (\delta - 2) \right] \left[(x-x'_0)^2 \frac{\delta'}{\sigma'^2} - (\delta' - 2) \right], \quad (4.5)$$

et pour $\theta = \pi/2$:

$$P(x, x'_{\pi/2}) = \frac{2}{\pi \Sigma^6} e^{-\frac{2(x^2 + x'_{\pi/2})^2}{\Sigma^2}} \left[\left(\frac{2\delta\sigma^2}{\Sigma^2}(x^2 + x'_{\pi/2})^2 + 1 - 2\delta'\frac{\sigma'^2}{\Sigma^2} \right) \left(\frac{2\delta'\sigma'^2}{\Sigma^2}(x^2 + x'_{\pi/2})^2 + 1 - 2\delta\frac{\sigma^2}{\Sigma^2} \right) - \left(\delta\sigma^2(\Sigma^2 - \delta'\sigma'^2) + \delta'\sigma'^2(\Sigma^2 - \delta\sigma^2) \right) \right], \quad (4.6)$$

où $\Sigma^2 = \sigma^2 + \sigma'^2$.

Au vu de ces expressions et de la formule (4.4), on peut par contre faire deux observations intéressantes sur les symétries de la distribution de probabilité :

Propriété 1 : La distribution a toujours les deux axes à $\pm 45^\circ$ comme axes de symétrie.

Propriété 2 : La distribution est radiale pour un déphasage $\theta = \pi/2$.

Ces propriétés sont démontrées dans l'annexe G et sont illustrées sur la figure 4.3, qui montre l'allure des distributions pour les quatre phases $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

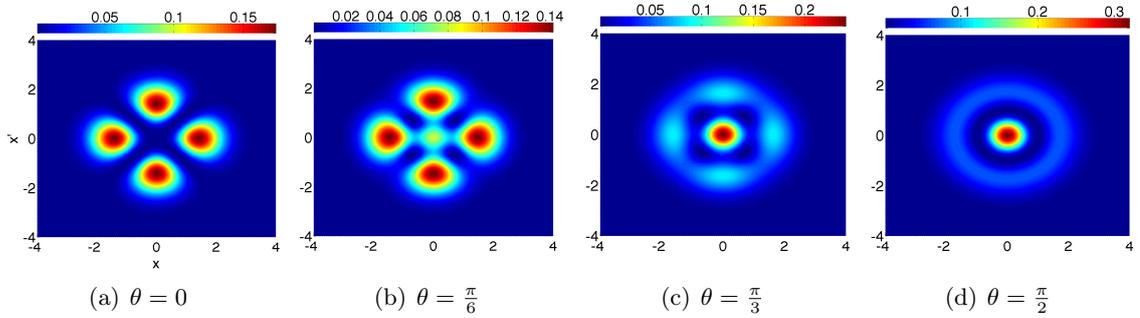


FIGURE 4.3 – Distribution bimode de probabilité dans le cas parfait $\sigma = \sigma' = 1$ et $\delta = \delta' = 2$.

Le conditionnement reviendra alors à ne prendre que des tranches horizontales ou verticales dans la figure, suivant que le conditionnement se fait selon la quadrature x ou x' . Chaque quadrature permettra ensuite de reconstruire la fonction de Wigner de l'état, dont nous nous proposons de trouver l'expression en fonction des paramètres d'imperfection.

4.3.2 Fonctions de Wigner conditionnées

4.3.2.1 Cas sans inefficacité de détection, deux photons incidents différents

Pour trouver la fonction de Wigner de l'état après conditionnement sur $x' = 0$, il suffit de réaliser l'intégration sur p' de la fonction bimode exprimée en $x' = 0$:

$$W(x, p) = \int W_1\left(\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{p+p'}{\sqrt{2}}\right) W_1\left(\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{p-p'}{\sqrt{2}}\right) dp'. \quad (4.7)$$

On obtient après calcul :

$$W_{\text{out}}(x, p) = \frac{e^{-\frac{2p^2}{\sigma^2 + \sigma'^2} - \frac{x^2(\sigma^2 + \sigma'^2)}{2\sigma^2\sigma'^2}}}{2\sqrt{2}\pi^{3/2} \left[\sigma\sigma'(\sigma^2 + \sigma'^2)^{3/2} \right]^3} \left[a_{11} + a_{13}p^2 + a_{15}p^4 + a_{31}x^2 + a_{51}x^4 + a_{33}x^2p^2 \right], \quad (4.8)$$

où

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \sigma^2 \sigma'^2 (\sigma^2 + \sigma'^2)^2 \left[2(\delta - 1)(\delta' - 2)\sigma^4 + (8 - 6(\delta + \delta') + 7\delta\delta')\sigma^2 \sigma'^2 + 2(\delta - 2)(\delta' - 1)\sigma'^4 \right] \\
 a_{13} &= -4\sigma^2 \sigma'^2 (\sigma^2 + \sigma'^2) \left[\delta(\delta' - 2)\sigma^4 - 2(\delta + \delta' - 4\delta\delta')\sigma^2 \sigma'^2 + \delta'(\delta - 2)\sigma'^4 \right] \\
 a_{15} &= 16\delta\delta'\sigma^4 \sigma'^4 \\
 a_{31} &= -2(\sigma^2 + \sigma'^2)^3 \left[\delta'(\delta - 1)\sigma^4 + (\delta\delta' - \delta - \delta')\sigma^2 \sigma'^2 + \delta(\delta' - 1)\sigma'^4 \right] \\
 a_{51} &= \delta\delta'(\sigma^2 + \sigma'^2)^4 \\
 a_{33} &= 4\delta\delta'(\sigma^2 + \sigma'^2)^2 (\sigma^4 + \sigma'^4).
 \end{aligned}$$

Cette fonction n'est pas normalisée, étant donné l'aspect probabiliste de la transformation. Dans le cas parfait $\delta = \delta' = 2$ et $\sigma = \sigma' = 1$, on trouve l'expression de la fonction de Wigner de l'état (4.1) après normalisation :

$$W(x, p) = \frac{e^{-x^2 - p^2}}{3\pi} [3 + 4(x^2 + p^2)^2 - 4x^2 - 12p^2]. \quad (4.9)$$

4.3.2.2 Cas avec inefficacité de détection, photons incidents identiques

Dans le cas où l'état est sujet à des pertes homodynes (efficacité de détection η), et où l'intervalle de conditionnement homodyne $[-\Delta x^c, \Delta x^c]$ n'est pas infiniment fin, l'annexe C détaille le calcul et montre que la nouvelle intégrale à calculer est de la forme :

$$W(x, p) = \int \int W_1\left(\frac{x+x'}{\sqrt{2}}, \frac{p+p'}{\sqrt{2}}\right) W_1'\left(\frac{x-x'}{\sqrt{2}}, \frac{p-p'}{\sqrt{2}}\right) \varphi(x') dx' dp', \quad (4.10)$$

où $\varphi(x')$ est donnée par la formule (C.9). En se plaçant dans le cas $\Delta x^c \ll \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}}$ (l'opérateur pilotant l'expérience est supposé choisir un intervalle de conditionnement suffisamment fin), la formule (C.12) indique que cette fenêtre peut être approchée en bonne approximation par une gaussienne de la forme :

$$\varphi(x') \simeq \frac{2\Delta x^c}{\sqrt{\pi(1-\eta)}} e^{-\eta \frac{x'^2}{1-\eta}}. \quad (4.11)$$

En considérant, pour simplifier les calculs, que les deux photons sont identiques à l'entrée de la lame ($\sigma = \sigma'$ et $\delta = \delta'$), on obtient l'expression de la fonction de Wigner :

$$W_{\text{out}}(x, p) = \frac{\Delta x^c e^{-\frac{x^2+p^2}{\sigma^2}}}{8\pi^{3/2}\sigma^2 (1+\eta(\sigma^2-1))^{5/2}} [b_{11} + b_{13}p^2 + b_{15}p^4 + b_{31}x^2 + b_{51}x^4 + b_{33}x^2p^2], \quad (4.12)$$

où

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= 8[2 + \delta(\delta - 2)](\eta - 1)^2 - 8[4 + \delta(2\delta - 5)](\eta - 1)\sigma^2\eta + [16 + \delta(11\delta - 24)]\eta^2\sigma^4 \\
 b_{13} &= -\frac{4\delta}{\sigma^2}[4(1 - \delta)(\eta - 1) + (5\delta - 4)\eta\sigma^2][1 + \eta(\sigma^2 - 1)] \\
 b_{15} &= \frac{4\delta^2}{\sigma^4}[1 + \eta(\sigma^2 - 1)]^2 \\
 b_{31} &= -\frac{4\delta}{\sigma^2}[4(1 - \delta)(\eta - 1) + (3\delta - 4)\eta\sigma^2][1 + \eta(\sigma^2 - 1)] \\
 b_{51} &= \frac{4\delta^2}{\sigma^4}[1 + \eta(\sigma^2 - 1)]^2 \\
 b_{33} &= \frac{8\delta^2}{\sigma^4}[1 + \eta(\sigma^2 - 1)]^2.
 \end{aligned}$$

L'intégrale de la fonction $W_{\text{out}}(x, p)$ n'est pas là non plus égale à 1 du fait de l'aspect probabiliste de la transformation. Dans notre cas, cette intégrale donne la probabilité de succès de l'opération. On vérifie qu'après normalisation on retrouve la formule (4.9) lorsque $\delta = 2$, $\sigma = 1$ et $\eta = 1$.

Voyons à présent les contraintes spécifiques à la mise en œuvre expérimentale de ce protocole.

4.4 Mise en œuvre expérimentale

Les deux états à un photon nécessaires à l'expérience sont produits grâce au procédé présenté à la section 2.5, et la simultanéité de leur production est assurée par la simultanéité des clics dans les APDs.

La figure 4.4 montre le principe de l'expérience en vue de réaliser la génération ainsi que la mesure de l'état chat de Schrödinger comprimé.

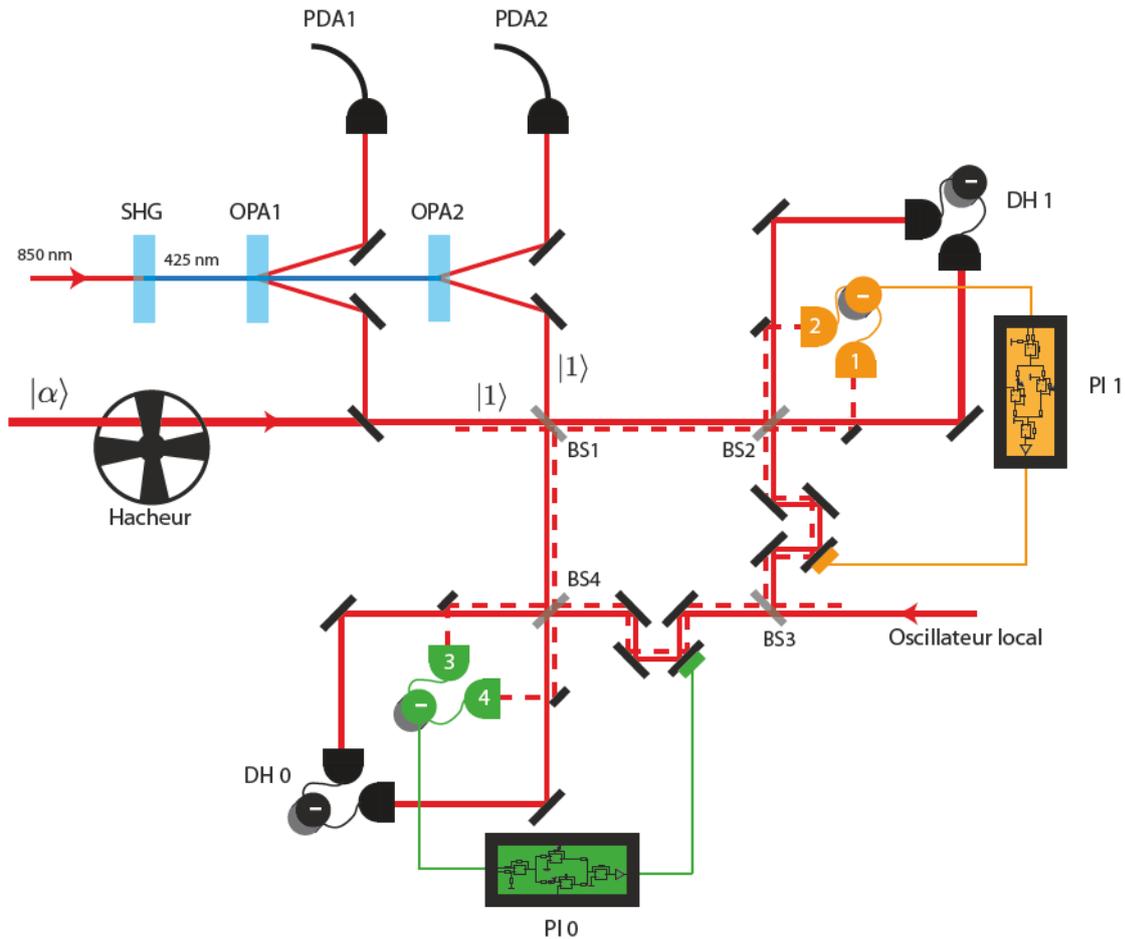


FIGURE 4.4 – Schéma expérimental du protocole de génération d'états chats. Deux états à un photon sont produits par deux amplificateurs paramétriques optiques (OPA1 et OPA2), après mesure de deux clics simultanés par les photodiodes à avalanches de conditionnements (PDA1 et PDA2). Les deux photons sont ensuite mélangés sur un lame 50:50, dont les ports de sortie sont envoyés dans deux détecteurs homodynes (DH0 et DH1) verrouillés en phase. Ce verrouillage se fait à l'aide de faisceaux auxiliaires se propageant 6 mm sous les faisceaux principaux (tirés décalés horizontalement sur la figure). Les deux circuits électroniques d'asservissements indépendants sont représentés en vert pour la DH0 (PI0) et en orange pour la DH1 (PI1). Un diagnostic de phase est de plus réalisé à intervalle régulier par injection d'un état cohérent peu intense dans le dispositif grâce à un hacheur.

4.4.1 Nécessité d'un contrôle de phase

Même si c'était le cas pour les états incidents à un photon, l'état (4.1) créé par le dispositif n'est pas un invariant de phase, et un contrôle de la phase relative entre les deux détecteurs homodynes est donc impératif pour en réaliser la tomographie. Plusieurs stratégies peuvent être adoptées pour réaliser ce verrouillage. La première, la plus simple à mettre en œuvre, consiste à encoder les chemins des deux détecteurs homodynes sur deux polarisations orthogonales de la lumière [Ourjoumtsev 07a, Ourjoumtsev 09]. Le verrouillage entre les deux modes se fait de façon passive, du fait que les deux faisceaux suivent exactement le même chemin optique. Cette méthode impose par contre l'utilisation de lames polarisantes pour faire office de lames 50:50,

mais étant données les faibles performances de la majorité de ces optiques (environ 2 à 3 % de pertes), nous avons préféré utiliser des lames séparatrices non polarisantes, de pertes totales inférieures à 1%. Il est alors nécessaire d'utiliser une seconde stratégie, où le verrouillage des modes se fait de manière active.

C'est ce que nous allons présenter dans ce qui suit.

4.4.1.1 Montage de l'asservissement

Nous voulons stabiliser la phase relative entre les deux détections homodynes : comment cela se formule-t-il mathématiquement ? Voyons pour cela la figure 4.5, qui représente une version simplifiée des chemins pertinents de l'asservissement de phase.

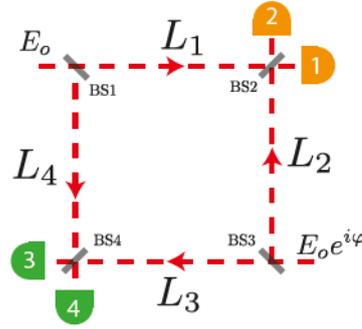


FIGURE 4.5 – Chemins de l'asservissement en phase.

Deux signaux entrant, l'un par la lame BS1 (lame de mélange des deux photons uniques) et l'autre par la lame BS3 (séparation des deux oscillateurs locaux), interfèrent sur les deux lames BS2 et BS4 (les lames des détections homodynes), et des mesures classiques d'intensité sont réalisées par quatre détecteurs dans chacun des bras de sortie. Les signaux mesurés par les détecteurs 1, 2, 3 et 4 de la figure sont alors de la forme :

$$I_1 \propto 1 + \cos \left[\varphi + k(L_1 - L_2) \right] \quad (4.13a)$$

$$I_2 \propto 1 - \cos \left[\varphi + k(L_1 - L_2) \right] \quad (4.13b)$$

$$I_3 \propto 1 + \cos \left[\varphi + k(L_3 - L_4) \right] \quad (4.13c)$$

$$I_4 \propto 1 - \cos \left[\varphi + k(L_3 - L_4) \right], \quad (4.13d)$$

où les longueurs L_i sont les longueurs des chemins optiques et φ est la phase relative des deux faisceaux incidents dans notre interféromètre. La stabilisation des phases relatives entre les deux détections signifie que la quantité $k(L_1 - L_2) - k(L_3 - L_4)$ doit être constante : on n'a donc pas besoin d'avoir de contrôle de la phase φ externe à notre interféromètre.

La stratégie que nous avons adoptée consiste à utiliser un faisceau auxiliaire pour stabiliser les chemins. Ce faisceau auxiliaire décalé de 6 mm verticalement vers le bas se propage suivant le même chemin que le faisceau principal à l'intérieur de l'interféromètre. Deux systèmes totalement autonomes et indépendants ont été utilisés pour ensuite stabiliser les valeurs de $I_1 - I_2$ ainsi que $I_3 - I_4$ (cf figure 4.4) : nous réalisons donc plus que le simple asservissement relatif, car nous stabilisons les valeurs $\varphi' + k(L_1 - L_2)$ et $\varphi' + k(L_3 - L_4)$, où φ' est la phase relative entre les

deux entrées de l'interféromètre pour le faisceau auxiliaire. En procédant de la sorte, la différence $k(L_1 - L_2) - k(L_3 - L_4)$ reste bien constante.

Remarque : nous aurions pu simplement stabiliser I_1 et I_3 (ou tout couple faisant intervenir les deux détecteurs homodynes) afin de réaliser la stabilisation voulue, mais l'avantage de notre méthode est qu'elle permet d'avoir un signal toujours centré en 0, nous rendant moins sensible aux fluctuations expérimentales.

Le système complet d'asservissement est constitué de photodiodes dont les photocourants sont soustraits, d'un contrôleur proportionnel intégral (PI) et d'un élément piézoélectrique. Voyons le montage de chacun de ces éléments.

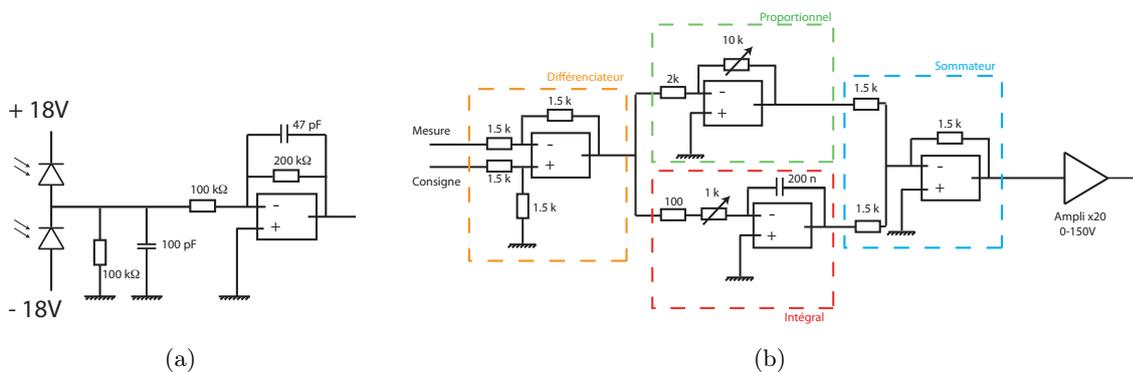


FIGURE 4.6 – Schémas électroniques du montage d'asservissement de la phase. (a) Montage des photodiodes afin de récupérer la différence des photocourants. (b) Montage électronique du contrôleur PI.

Les photodiodes

Les photodiodes ont été montées tête-bêche sur un montage amplificateur de tension passe-bas, permettant la récupération d'un signal suffisamment rapide pour suivre les différents bruits à asservir (bande passante de 10 kHz), mais suffisamment lent pour ne pas résoudre les impulsions et donc ne pas avoir à synchroniser les signaux. Ce type de montage est du même type que celui utilisé pour les détecteurs homodynes, avec bien entendu une sensibilité et une bande passante bien moindres. Ce montage est présenté sur la figure 4.6 (a).

Le montage de rétro-action

Le montage électronique du contrôleur Proportionnel Intégral (PI) est donné sur la figure 4.6 (b). Etant donné le très faible temps de réponse caractéristique du système, un montage sans dérivateur a été choisi pour réaliser la correction. Les différents gains et temps caractéristiques des correcteurs ont été estimés par l'utilisation de la méthode de boucle ouverte de Ziegler-Nichols [Ziegler 42]. Une possibilité est laissée à l'utilisateur de régler les gains proportionnel et intégral, et d'échanger les signaux de mesure et de consigne afin d'asservir sur une pente positive ou négative du signal d'erreur (ce dernier étant défini comme la différence entre la mesure et la consigne). En sortie du sommateur, un amplificateur large bande (Piezodrive PDL 200) permet d'amplifier le signal 20 fois vers l'élément piézo, afin d'obtenir un signal compris entre 0V et 150V.

Les actionneurs

En fin de circuit d'asservissement, un élément piézoélectrique permet de translater le miroir pour réaliser la correction de phase nécessaire. Nous avons choisi des éléments permettant une correction rapide en les sélectionnant pour leur très faible capacité électrique (90 nF), afin de maximiser la bande passante électronique du circuit. Ceux-ci (Thorlabs AE0203D04F) sont formés d'un faible nombre d'empilements d'éléments piézoélectriques et ont un déplacement maximal de $4.6 \mu\text{m}$ qui suffit amplement à corriger toutes les dérives de phase expérimentales. Ils sont ensuite collés d'un côté à un support massif et de l'autre à un miroir dont les dimensions ont été réduites afin d'en limiter le poids. La photo de la figure 4.7 montre un de ces assemblages.

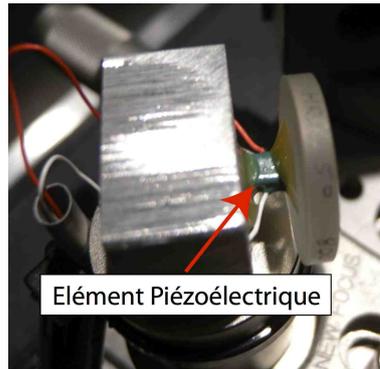


FIGURE 4.7 – Montage de l'actionneur piézoélectrique sur le miroir.

Résultats de l'asservissement

Une fois l'asservissement monté on obtient une bande passante de l'ordre de 1 kHz pour le système, pour une consigne sinusoïdale d'amplitude ± 30 V. Ceci est très largement suffisant pour réaliser la correction des bruits de phase, comme on peut le voir sur la figure 4.8. Les faisceaux décalés sont stabilisés à $\pm 2^\circ$, les fluctuations rapides de phase à 100 Hz étant quasiment effacées (figure 4.8 (a) et (b)). Avec cet asservissement, les deux détecteurs homodynes sont verrouillées en phase à $\pm 7^\circ$, comme le montre la figure 4.8 (c).

4.4.1.2 Estimation de la phase

Une fois la phase stabilisée activement, il faut pouvoir l'estimer en temps réel afin de pouvoir en mesurer la valeur moyenne et les dérives éventuelles.

Pour ce faire, nous injectons dans le montage à intervalle de temps régulier un état cohérent peu intense par le dos d'un des miroirs hautement réfléchissants. L'état entrant dans les détecteurs homodynes (~ 10 photons en moyenne) a une amplitude suffisante pour qu'une mesure de phase relative puisse être effectuée. Le séquençage temporel est réalisé à l'aide d'un hacheur mécanique constitué d'une roue laissant successivement passer ou non la lumière, comme montré sur la figure 4.4.

En balayant la phase de l'oscillateur local en amont de l'interféromètre décrit sur la figure 4.5, on obtient des oscillations sur chacune des détecteurs homodynes durant un intervalle de temps correspondant au temps d'estimation de la phase, comme montré sur la figure 4.9. Ce temps doit être suffisamment long pour permettre aux signaux de faire au moins une oscillation complète comportant un grand nombre de points (afin de réaliser une moyenne de bonne qualité sur ceux-ci), mais il doit aussi être suffisamment court pour limiter le temps imparti à l'estimation de phase au profit des mesures homodynes qui nous importent.

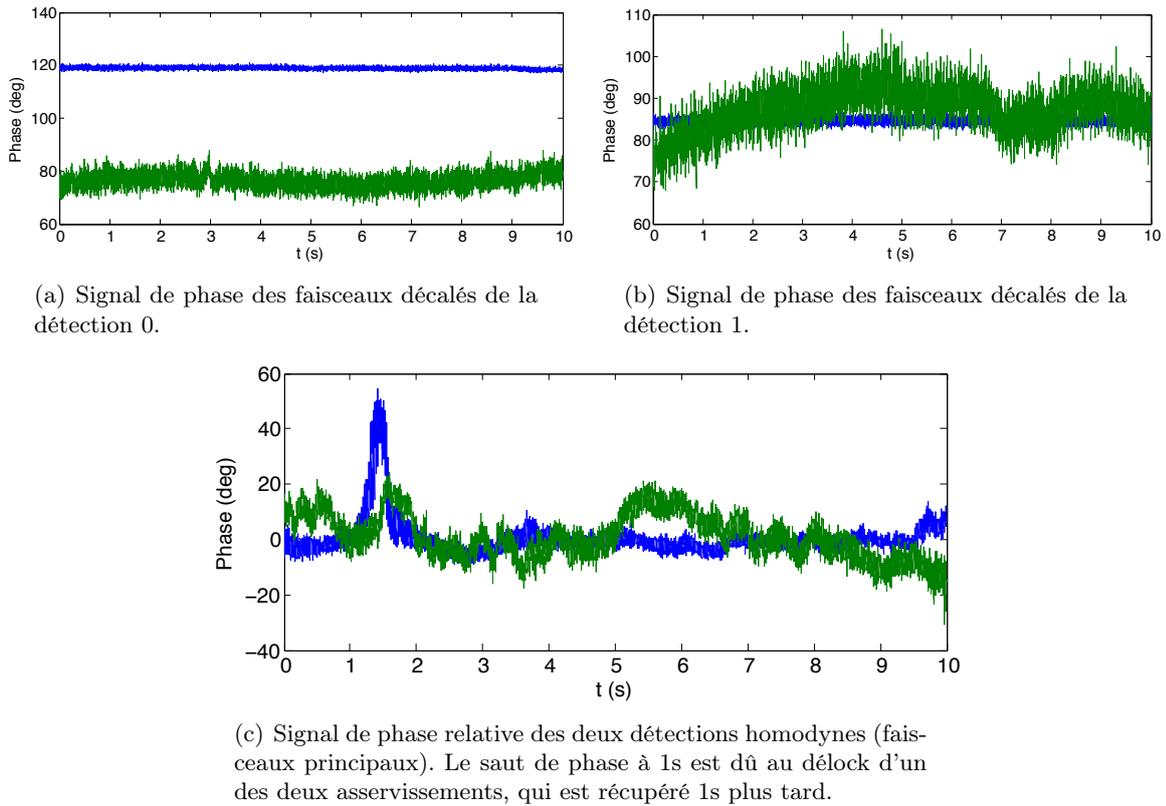


FIGURE 4.8 – Signaux de phase reconstruits avant (vert) et après (bleu) asservissement des deux détections homodynes.

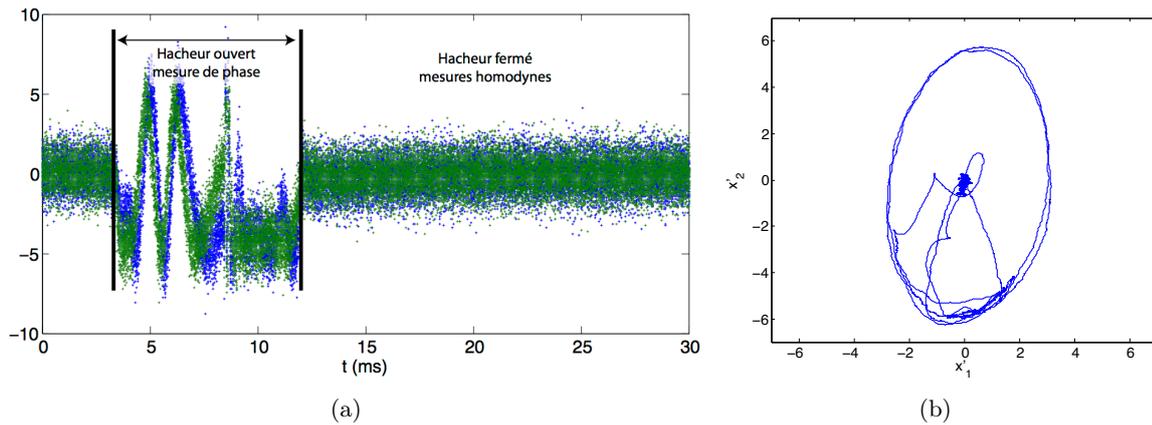


FIGURE 4.9 – Méthode d'estimation de phase. (a) Séquence de mesures homodynes et de diagnostic de phase sur les signaux homodynes 0 (vert) et 1 (bleu) (b) Ellipse d'estimation de phase relative.

Paramètres expérimentaux : Afin d'avoir un rendu quasi temps réel, on a choisi de réaliser une mesure de phase toutes les 50 ms, chacune durant environ 8 ms. Pour ce faire deux zones passantes du hacheur sur trois ont été obstruées, permettant de réduire de 60 Hz à 20 Hz la fréquence de répétition des mesures de phase. Ainsi, la majeure partie du temps est consacrée à l'acquisition de points expérimentaux.

Récupération de la phase : Pour récupérer la phase des données du type de celle de la figure 4.9 (a) sans avoir à réaliser de fit, on a utilisé une méthode simple en temps réel basée sur le fait que les signaux réalisent au moins une oscillation complète.

Après récupération des données dédiées à l'estimation de phase, on réalise une moyenne glissante sur celles-ci (afin de récupérer un signal soustrait du bruit de photon), et on obtient deux signaux de la forme :

$$x_1(t) = \cos(\omega t), \quad (4.14a)$$

$$x_2(t) = \cos(\omega t + \varphi). \quad (4.14b)$$

En posant $x'_1 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}$ et $x'_2 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}$, x'_1 et x'_2 vérifient l'équation :

$$\frac{1 - \cos \varphi}{\sin^2(\varphi)} x_1'^2 + \frac{1 + \cos \varphi}{\sin^2(\varphi)} x_2'^2 = 1. \quad (4.15)$$

C'est l'équation de l'ellipse de déphasage tournée de 45° . Ainsi, par la simple mesure des tailles α et β suivant x'_1 et x'_2 de l'ellipse, on peut remonter au déphasage :

$$\varphi = 2 \arctan \left[\frac{\alpha}{\beta} \right]. \quad (4.16)$$

Le tracé de cette ellipse tournée de 45° pour les données de la figure 4.9 (a) est donné sur la figure 4.9 (b). Pour ce jeu de données, on trouve une phase relative de $53^\circ \pm 5^\circ$.

Un autre grand intérêt de ces ellipses de phase est qu'elles renseignent sur le bon centrage des données homodynes. Celles-ci peuvent en effet se déséquilibrer très facilement, et la simple observation de l'ellipse indique immédiatement des phénomènes de saturation.

4.4.2 Montage expérimental

Le montage expérimental total est montré sur la figure 4.10 : les deux photons uniques produits par les OPA suivant le principe détaillé au paragraphe 2.5 sont mélangés sur la lame 50:50 (entre les deux DH 0 et 1) afin de réaliser le protocole de génération d'état chat de Schrödinger comprimé. La principale difficulté de cette expérience est qu'elle requiert une précision inférieure au millimètre pour six chemins optiques, pouvant aller jusqu'à 4 mètres. La conception assistée par ordinateur de l'expérience permet de pré-configurer la disposition des optiques sur la table pour économiser un temps précieux.

4.5 Résultats expérimentaux

Nous présentons dans cette section les résultats que le protocole présenté précédemment a fourni.

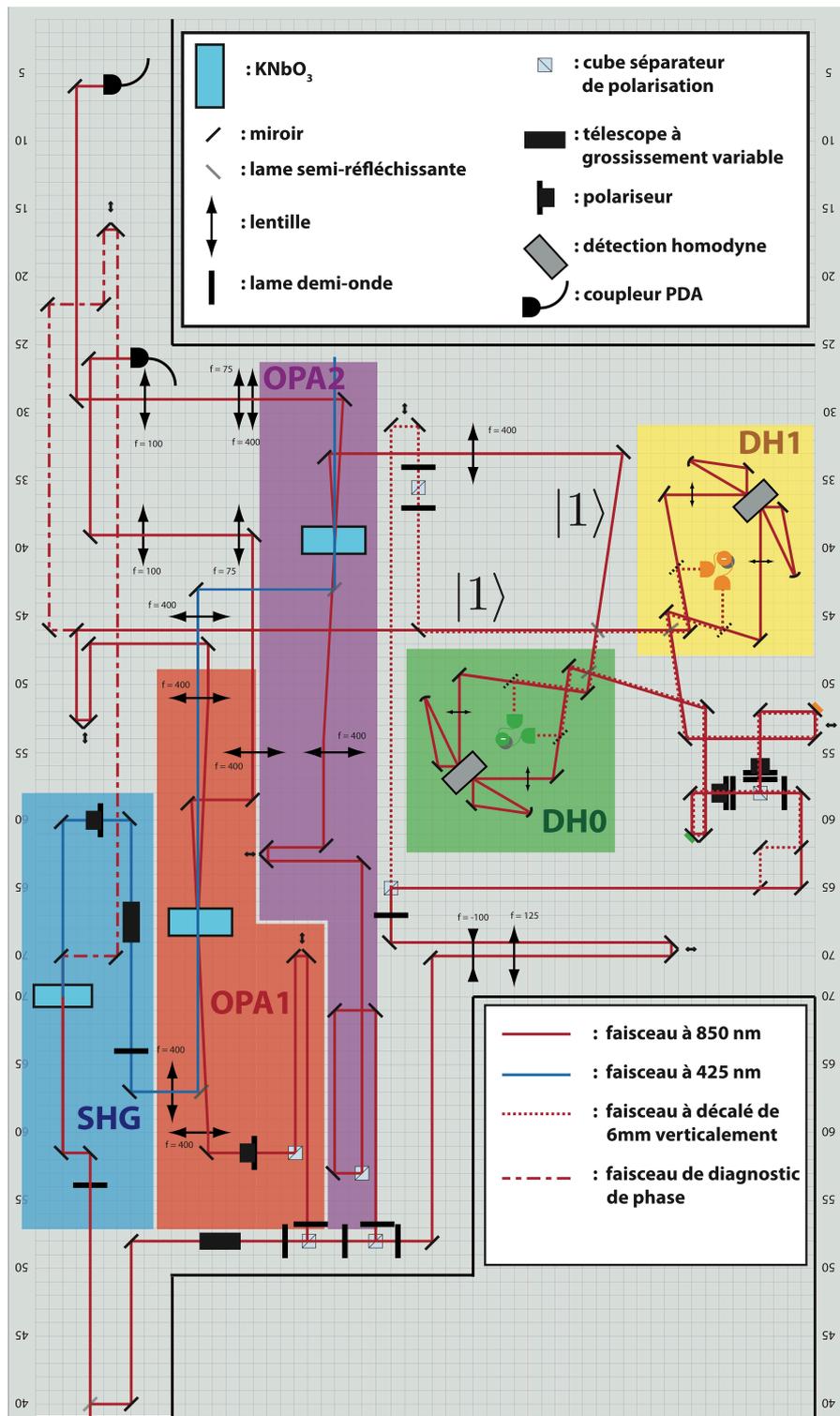


FIGURE 4.10 – Montage expérimental de l'expérience de génération d'états "Chats de Schrödinger" par adjonction cohérente. Deux OPA (OPA 1 et OPA2) sont pompés par un faisceau bleu produit par seconde harmonique (SHG) pour produire les paires de photons non dégénérées. Un des deux photons générés est envoyé dans les photodiodes à avalanches (PDA) pour projeter l'autre bras dans un état de Fock à un photon ($|1\rangle$). Ces deux états sont mélangés puis analysés par les deux détections homodynes (DH0 et DH1).

4.5.1 Expérience à un photon

Avant de pouvoir réaliser l'expérience totale à deux photons, nous avons besoin de connaître les paramètres de qualités de nos états à un photon, et ce malgré la lame 50:50 sur leur chemin (lame servant à leur mélange). Il est donc nécessaire d'avoir une technique de caractérisation rapide pour que l'expérience finale puisse être lancée une fois que l'on est certain de la qualité des états qui la composent.

Les histogrammes expérimentaux en deux dimensions que l'on obtient en n'envoyant qu'un seul des deux photons uniques dans les deux détections homodynes sont montrés sur la figure 4.11. L'allure de ces histogrammes en deux dimensions montrent bien que l'on a là aussi affaire à un

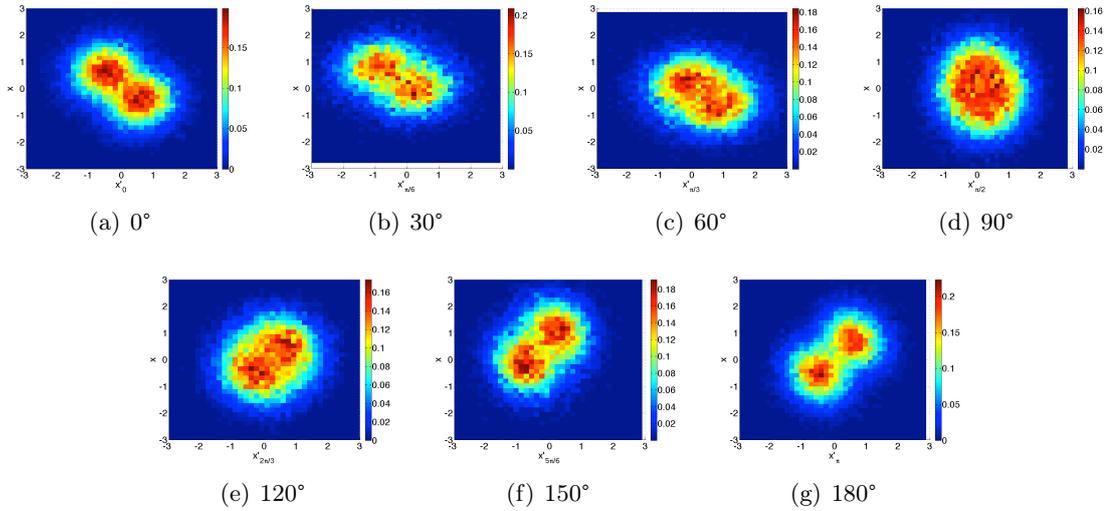


FIGURE 4.11 – Histogrammes des données homodynes 1 en fonction des données homodynes 0.

état intriqué : il n'est pas possible de mettre la distribution de probabilité bimode sous la forme d'un produit de distributions monomodes.

Ces données, conditionnées sur la détection homodyne 0 permettraient au même titre que dans [Babichev 04] de générer des superpositions arbitraires de la forme $\alpha|0\rangle + \sqrt{1-|\alpha|^2}|1\rangle$. Cet aspect ne sera pas détaillé ici, mais constituera un bloc élémentaire de la génération d'états arbitraires dans le chapitre 5.

Etant donnés les nuages bimodes, différentes stratégies peuvent être adoptées pour récupérer les paramètres σ et δ du photon unique à caractériser.

4.5.1.1 Fit par les distributions 2D théoriques

La première stratégie consiste à réaliser les mesures de ces distributions et à en réaliser un fit par la distribution théorique attendue. Pour calculer cette dernière, il suffit de prendre la formule (4.4) avec $\sigma' = 1$ et $\delta' = 0$ (un des deux photons uniques est remplacé par le vide), et on récupère la distribution théorique attendue. Par exemple, la distribution à 180° a pour expression :

$$P(x, x'_\pi) = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{(x-x'_\pi)^2}{2\sigma^2} - \frac{(x+x'_\pi)^2}{2}} \left[(x-x'_\pi)^2 \frac{\delta}{\sigma^2} - \delta + 2 \right]. \quad (4.17)$$

Ainsi, connaissant notre nuage de points, on peut par exemple réaliser une estimation des paramètres σ et δ par maximum de vraisemblance. Si

$$\mathcal{V}_\pi(\sigma, \delta) = \sum_i \log [P(x_i, x'_{\pi_i}, \sigma, \delta)] \quad (4.18)$$

définit la fonction de vraisemblance de notre distribution de points (x_i, x'_{π_i}) pour les paramètres σ et δ , alors le maximum de cette fonction correspondra au couple le plus vraisemblable de ces paramètres. L'erreur qui sera faite sur ces paramètres sera minorée par la borne de Cramér-Rao :

$$\text{Var}(\delta) \geq \frac{1}{NI(\sigma, \delta)}, \quad (4.19)$$

où N est le nombre de tirages et $I(\sigma, \delta)$ l'information de Fisher associée à la distribution. Relativement au paramètre δ , celle-ci peut s'exprimer comme :

$$I(\sigma, \delta) = \iint \frac{1}{P(x, x'_\pi, \sigma, \delta)} \left(\frac{\partial^2 P(x, x'_\pi, \sigma, \delta)}{\partial \delta^2} \right) dx dx'_\pi, \quad (4.20)$$

et peut être vue comme la quantité d'information que l'on obtient en un tirage sur un paramètre (ici δ). Cette information étant additive, l'information obtenue après N tirages est donc N fois l'information obtenue après 1 tirage.

La maximisation de la vraisemblance sur le nuage de points à 180° donne $\sigma = 1.02$ et $\delta = 1.19$, et l'erreur statistique associée à ces valeurs est négligeable ($< 10^{-4}$). La distribution théorique est montrée sur la figure 4.12.

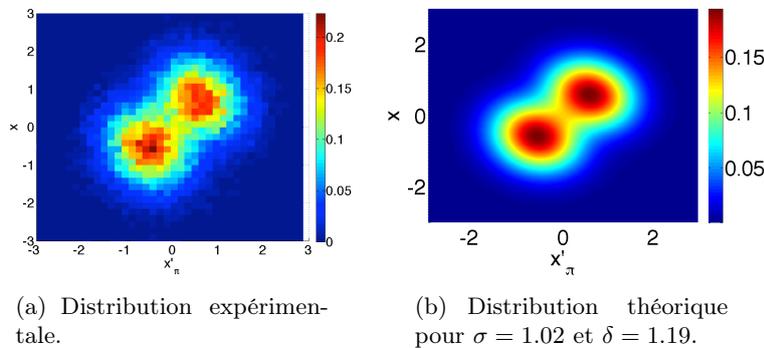


FIGURE 4.12 – Distribution de probabilité pour 180° de déphasage entre les deux détections homodynes.

Un désavantage notable de cette technique est qu'elle nécessite de réaliser une procédure d'optimisation, ce qui n'est pas une solution idéale pour l'estimation en temps réel des paramètres. Ainsi nous proposons une autre méthode utilisant les co-moments.

4.5.1.2 Estimation des paramètres par co-moments

Une astuce pour l'estimation des paramètres de la distribution (4.17) consiste à se baser sur le calcul de ses moments, d'expressions :

$$\mu_{ij} = \iint (x - \bar{x})^i (x'_\pi - \bar{x}'_\pi)^j P(x, x'_\pi) dx dx'_\pi. \quad (4.21)$$

Par exemple, le moment d'ordre (1,1) s'écrit $\mu_{11} = \frac{1}{4}[(1 + \delta)\sigma^2 - 1]$. Il suffirait ainsi de connaître un second moment pour en déduire δ et σ , mais cela imposerait de normaliser les données expérimentales : les mesures expérimentales des x_i et x'_π sont des tensions (Ξ_i et Ξ'_π), qui doivent être renormalisées par la variance du vide, comme nous l'avons vu au paragraphe 2.4.2.3. Cette dernière valeur variant d'une expérience à l'autre du fait de fluctuations expérimentales, l'implémentation serait peu propice à l'estimation de paramètres.

Mais en fait on peut définir de nouveaux paramètres par des rapports de moments, et ne nécessitant pas la normalisation par le bruit du vide.

Supposons en effet que Σ' soit l'écart-type en tension du vide dans la détection homodyne 0 et que Σ soit celui de la détection 1. Si les tensions mesurées s'écrivent Ξ_i et Ξ'_π , alors les points homodynes correspondants seront :

$$x_i = \frac{\Xi_i}{\sqrt{2\Sigma}} \quad x'_i = \frac{\Xi'_\pi}{\sqrt{2\Sigma'}}. \quad (4.22)$$

Ainsi, sachant $\bar{x} = \bar{x}'_\pi = 0$, les moments d'ordre (1,1), (2,0), (0,2), (4,0) et (0,4) peuvent s'écrire comme :

$$\mu_{11} = \frac{M_{11}}{2\Sigma\Sigma'}, \quad \mu_{20} = \frac{M_{20}}{2\Sigma^2}, \quad \mu_{02} = \frac{M_{02}}{2\Sigma'^2} \quad (4.23a)$$

$$\mu_{22} = \frac{M_{22}}{4\Sigma^2\Sigma'^2}, \quad \mu_{40} = \frac{M_{40}}{4\Sigma^4}, \quad \mu_{04} = \frac{M_{04}}{4\Sigma'^4}, \quad (4.23b)$$

où les moments M_{ij} sont les moments mesurés non normalisés :

$$M_{ij} = \frac{1}{N} \sum_k (\Xi_k - \bar{\Xi})^i (\Xi'_\pi - \bar{\Xi}'_\pi)^j. \quad (4.24)$$

Par conséquent, les rapports

$$s_1 = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{02}\mu_{20}}} = \frac{M_{11}}{\sqrt{M_{02}M_{20}}} \quad (4.25a)$$

$$s_2 = \frac{\mu_{22}}{\sqrt{\mu_{04}\mu_{40}}} = \frac{M_{22}}{\sqrt{M_{04}M_{40}}} \quad (4.25b)$$

peuvent être définis sans même avoir à normaliser les données. Sachant également que :

$$\mu_{11} = \frac{1}{4}[(1 + \delta)\sigma^2 - 1] \quad (4.26a)$$

$$\mu_{20} = \frac{1}{4}[(1 + \delta)\sigma^2 + 1] \quad (4.26b)$$

$$\mu_{22} = \frac{1}{16}[3 - 2(1 + \delta)\sigma^2 + (3 + 6\delta)\sigma^4] \quad (4.26c)$$

$$\mu_{40} = \frac{3}{16}(1 + \sigma^2)[1 + (1 + 2\delta)\sigma^2], \quad (4.26d)$$

on en déduit les valeurs des paramètres σ et δ

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{1 - s_1} - \frac{2\sqrt{(s_2 - 1)(-2s_1^2 + 3s_2 - 1)}}{\sqrt{3}(s_1 - 1)(s_2 - 1)}} - 1$$

$$\delta = \frac{2\left(\sqrt{3}s_1\sqrt{(s_2 - 1)(-2s_1^2 + 3s_2 - 1)} + \sqrt{3}\sqrt{(s_2 - 1)(-2s_1^2 + 3s_2 - 1)} + 4s_1^2 - 6s_2 + 2\right)}{(1 - s_1)(3(s_1 + 3)s_2 + 5s_1 - 1)}.$$

Cette technique donne de très bons résultats en temps réel, et les paramètres sont très proches de ceux obtenus par la méthode précédente. Avec le même jeu de données, on trouve également $\sigma = 1.02$ et $\delta = 1.19$.

4.5.1.3 Estimation des paramètres par distribution monomode

Il existe enfin une autre méthode permettant de se ramener à des distributions déjà connues : en effet, puisque l'on mesure des quadratures en sortie d'une lame séparatrice, on peut aussi remonter aux quadratures en amont de celle-ci en inversant simplement les relations (1.48). Ainsi, si l'on examine par exemple l'expression (4.17) de la distribution de probabilité bimode à 180°, on voit qu'un changement de variables $x_1 = \frac{x' - x'_\pi}{\sqrt{2}}$ et $x_2 = \frac{x' + x'_\pi}{\sqrt{2}}$ suivi d'une intégration suivant la direction x_2 donne la distribution de probabilité monomode x_1 :

$$P(x_1) = \frac{e^{-\frac{x_1^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{\pi}\sigma} \left[1 - \frac{\delta}{2} + \frac{\delta x_1^2}{\sigma^2} \right], \quad (4.28)$$

qui est exactement la même que celle obtenue en (2.19). Ainsi, la technique d'utilisation des moments monomodes permet là aussi de remonter aux paramètres expérimentaux.

Cette technique a de plus l'avantage de fournir un nuage de points sur lequel il est aisé de réaliser un diagnostic visuel : celui attendu pour le photon unique. Un réglage en temps réel des filtres spectraux PDA est par exemple possible en observant le comportement de ce nuage.

Toujours avec les données précédentes, on trouve des paramètres : $\sigma = 1.02$ et $\delta = 1.18$, ce qui est toujours en bon accord avec les résultats précédemment obtenus.

Pour sa facilité d'implémentation, sa rapidité et sa proximité avec les modèles précédents, c'est cette méthode qui a finalement été retenue pour le diagnostic de la qualité des états de Fock à un photon.

4.5.2 Expérience à deux photons

À présent que les outils de diagnostics des deux photons uniques séparés sont en place, voyons les résultats obtenus lorsque ceux-ci sont envoyés simultanément sur la lame 50:50. L'acquisition de points conditionnés sur l'utilisation simultanée de deux photons s'est faite sur un temps beaucoup plus long qu'à un photon, l'implémentation de mémoires quantiques en vue de faire croître la probabilité de succès de l'expérience n'ayant pas encore été faite.

Le taux de comptage des photons uniques individuels est de $\sim 1600 \text{ s}^{-1}$, ce qui ramène à $\sim 3 \text{ s}^{-1}$ le taux de photons simultanés dans les deux voies. Sachant également que durant 1/6 du temps la mesure est dévolue à l'estimation de la phase, et que la carte d'acquisition ne peut pas enregistrer en même temps qu'elle traite les données sur le logiciel utilisé (Igor), ce taux est dans les faits de l'ordre de 0.5 s^{-1} .

Il a été possible de mesurer 14083 points pour une phase relative de 90°, 23115 points à 120°, 17427 points à 150° et 17326 points à 180°. Les histogrammes en deux dimensions relatifs aux nuages des points sont donnés sur la colonne de gauche de la figure 4.13.

4.5.2.1 Fit par maximum de vraisemblance "usuel" des nuages bimodes

Pour connaître les paramètres relatifs à notre distribution (que nous allons chercher de la forme (4.4)), nous nous proposons dans un premier temps de réaliser une recherche par maximum de vraisemblance, de la même manière qu'au paragraphe 4.5.1.1. La recherche portera ici sur les paramètres σ , δ , σ' et δ' :

$$\mathcal{V}(\sigma, \delta, \sigma', \delta') = \sum_{\theta=90^\circ}^{180^\circ} \sum_i \log \left[P(x_i, x'_{\theta_i}, \sigma, \delta, \sigma', \delta') \right]. \quad (4.29)$$

Par cette technique, on trouve les paramètres $\sigma = 1.02$, $\delta = 1.17$, $\sigma' = 1.02$ et $\delta' = 1.16$.

Cet écart par rapport aux valeurs mesurées dans le paragraphe 4.5.1 s'explique par le fait que

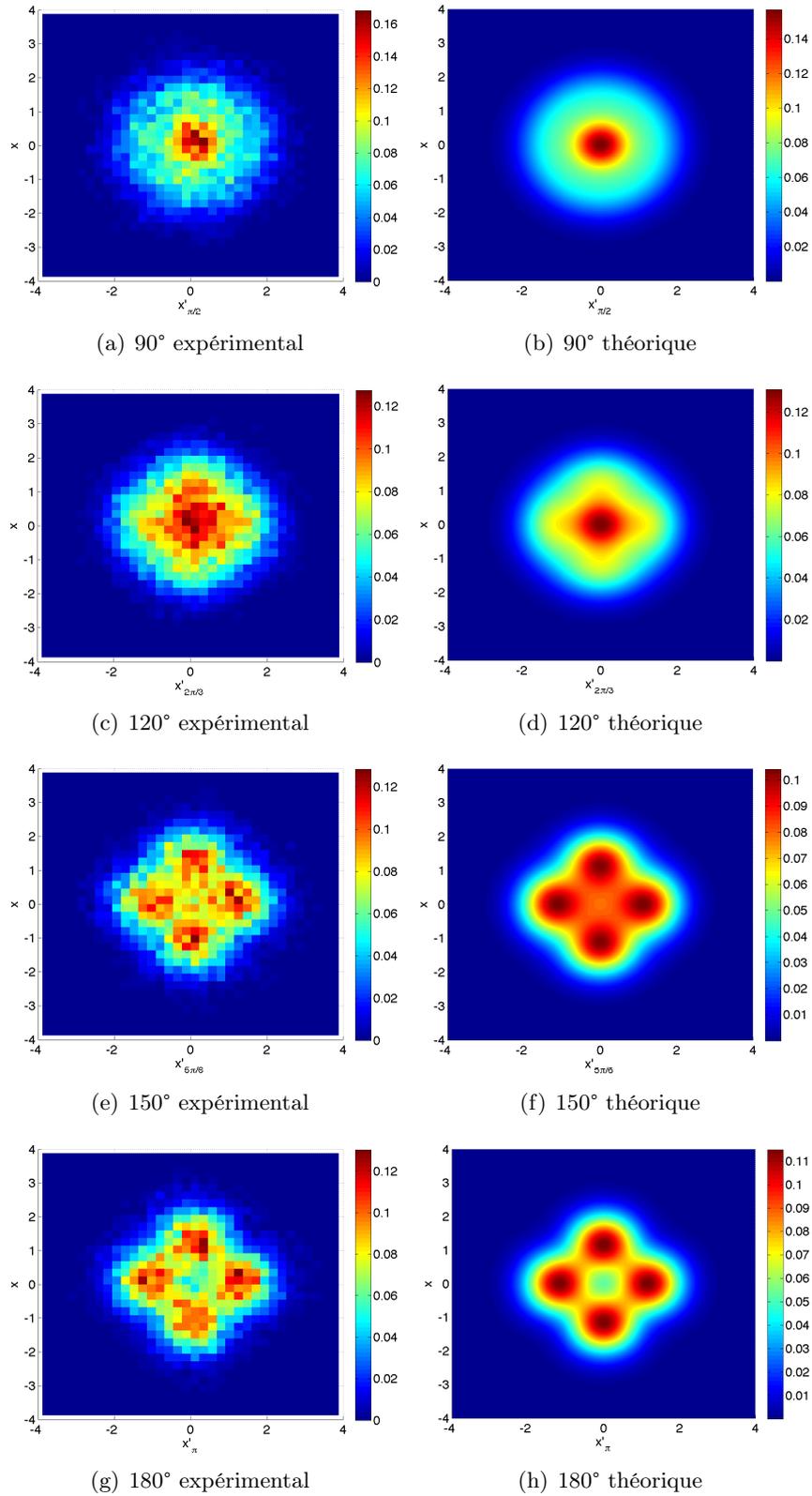


FIGURE 4.13 – Histogrammes expérimentaux (colonne de gauche) et théoriques (colonne de droite) pour les quatre phases relatives 90° , 120° , 150° et 180° entre les deux détections homodynes. Les histogrammes théoriques ont été obtenus avec les paramètres $\sigma = 1.02$, $\delta = 1.17$, $\sigma' = 1.02$ et $\delta' = 1.16$.

les mesures ont été faites sur de longues durées (souvent supérieures à 1h), les valeurs de δ et δ' s'altérant avec le temps (désalignement, déplacement du spectre, etc). Étant donné la difficulté de stabiliser l'expérience à des valeurs supérieures à $\delta = 1.2$, l'expérience a été poursuivie tant que cette valeur restait supérieure à $\delta = 1.1$, d'où les résultats.

Les distributions théoriques pour ces paramètres sont représentées sur la colonne de droite de la figure 4.13.

4.5.2.2 Conditionnement des données

Comme on l'a vu au paragraphe 4.2.1, le principe de l'expérience de génération d'états chats repose sur le conditionnement en $x' \in [-\Delta x^c, \Delta x^c]$ d'une des deux voies homodynes. Cela signifie graphiquement que sur un nuage bimode, seule une zone de points sera sélectionnée, comme le montre la figure 4.14 (a). On obtient ainsi quatre nuages de points correspondants aux quatre

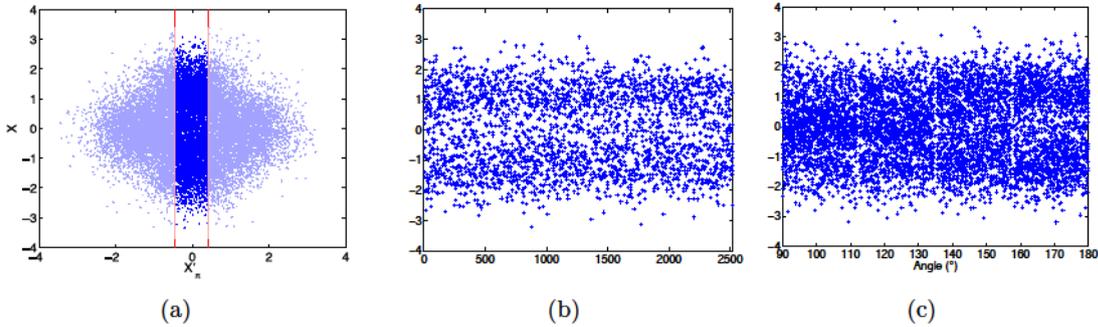


FIGURE 4.14 – Conditionnement homodyne. (a) Zone de conditionnement des points, où le conditionnement a lieu sur la détection 0, pour une largeur de 0.2 (ici pour la phase relative 180°). (b) Nuage obtenu pour le conditionnement de la figure (a). (c) Nuages obtenus pour les quatre phases 90° , 120° , 150° et 180° .

phases de mesures (cf figure 4.14 (c)). Expérimentalement ce conditionnement a été choisi égal à $\Delta x^c = 0.2$, et revient à une sélection de l'ordre de 15% des données, portant à 20 min^{-1} environ le taux de production effectif des états. Cette sélection a résulté d'un compromis entre un nombre de points suffisant pour les statistiques et une sélection suffisante dans le conditionnement. Le faible taux de comptage est ce qui a limité le nombre de quadratures mesurées : environ 2000 points conditionnés par quadrature ont pu être récupérés pour la reconstruction de la fonction de Wigner, que nous allons à présent étudier.

Reconstruction de la fonction de Wigner de l'état sans correction : A présent que nous disposons de nuages de points suivant les quadratures, nous allons reconstruire la fonction de Wigner de l'état. Deux techniques s'offrent alors à nous.

La première consiste à utiliser les paramètres que nous avons précédemment trouvés grâce au maximum de vraisemblance appliqué sur les nuages de points bimodes, et à en déduire l'allure de la fonction de Wigner grâce aux formules (4.8) ou (4.12). La comparaison des allures théoriques des distributions de probabilités (trait bleu continu) superposées aux histogrammes des points expérimentaux est donnée sur la figure 4.15 (a), (b), (c) et (d), et indique un bon accord des tendances attendues.

La fonction de Wigner reconstruite grâce à la formule (4.8), donnée sur la figure 4.15 (e), montre

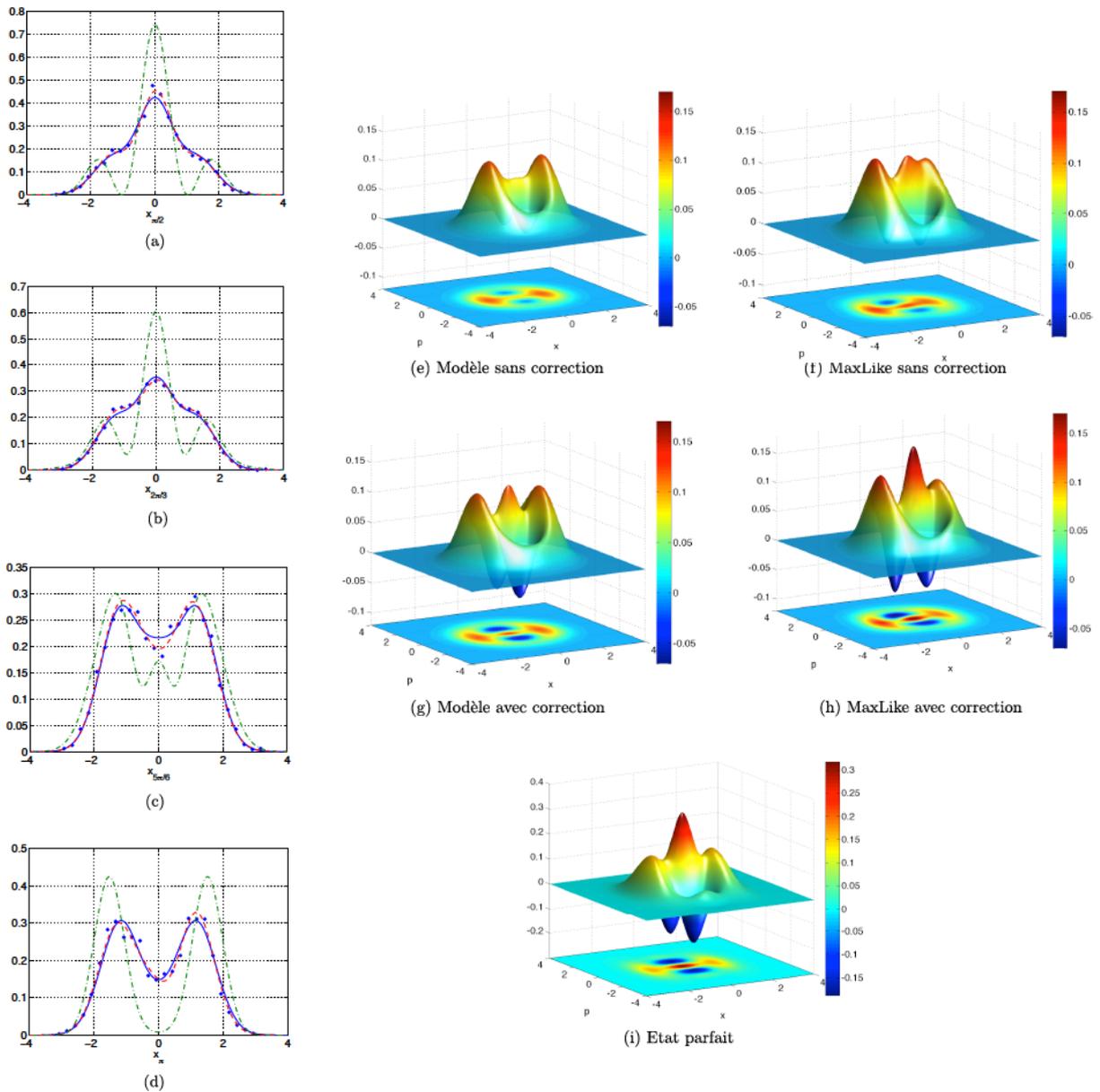


FIGURE 4.15 – États générés expérimentalement. Colonne de gauche : histogrammes des points expérimentaux (points) acquis pour les phases relatives (a) 90° , (b) 120° , (c) 150° et (d) 180° . Les courbes données par le modèle théorique de l'équation (4.8) sont représentées en trait bleu continu, et celles fournies par l'estimation du maximum de vraisemblance quantique le sont en trait tireté rouge. Le chat parfait attendu par le protocole ($\alpha = 1.63$, $s = 1.52$) est représenté pour information en trait mixte vert. Etant donné ces histogrammes, on peut reconstruire la fonction de Wigner de l'état à partir du modèle théorique (e) sans et (g) avec correction de 77% d'efficacité de détection. De la même manière, la reconstruction de la fonction de Wigner par estimation de maximum de vraisemblance peut être faite (f) sans et (h) avec correction de cette même efficacité. Le chat parfait attendu par la théorie est donné à titre de comparaison (i).

une fidélité de 46.6% avec le chat attendu. Cette fonction est très légèrement négative ($W_{\min} = -0.005$) mais a encore une allure relativement différente de celle attendue (cf état (4.2) dont la fonction de Wigner est représentée sur la figure 4.15 (i)).

La seconde technique pour reconstruire la fonction de Wigner consiste à ne pas faire d'hypothèse sur sa forme a priori, mais seulement sur le nombre maximal de photons contenus dans l'état. Cette technique décrite dans la section 1.5.2.2, dite de maximum de vraisemblance quantique, permet d'obtenir la matrice densité (et donc la fonction de Wigner) la plus vraisemblable relativement aux points mesurés expérimentalement. La fonction de Wigner obtenue par cette méthode est représentée sur la figure 4.15 (f). La négativité est à présent de $W_{\min} = -0.024$, et un pic central est à présent visible au milieu de la distribution, conformément à l'allure théorique attendue. La fidélité de l'état reconstruit est alors de 50.3% avec l'état parfait, très légèrement supérieure à la fidélité $\frac{1+e^{-2\alpha^2}}{2} = 50.25\%$ que l'on obtiendrait entre l'état chat parfait et le mélange statistique $\frac{1}{2}(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|)$, pour $\alpha = 1.63$.

La négativité de la fonction de Wigner, même sans correction de pertes, est un signe fort de l'aspect quantique de notre état, et montre l'intérêt qu'il y a eu au soin de la stabilisation de la source laser et de l'augmentation de la qualité des états décrits dans le chapitre 3.

Reconstruction de la fonction de Wigner de l'état avec correction : Si l'on s'autorise ensuite à corriger l'état des pertes de la détection homodyne de caractérisation (DH1 sur la figure 4.4), on peut adapter les deux techniques précédentes pour reconstruire la fonction de Wigner de l'état. L'efficacité de détection sera prise égale à 77%, étant données les efficacités quantiques des photodiodes (94.6%), le mode-matching donné par les contrastes d'interférences (91%) et la transmission des optiques de détection (99%) : $\eta = 0.946 \times 0.91^2 \times 0.99$.

Dans le cas où l'on utilise le modèle théorique pour la reconstruire, étant donné que $\sigma \simeq \sigma'$, $\delta \simeq \delta'$ et que la largeur de conditionnement $\Delta x^c = 0.2$ peut être supposée petite devant $\sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}} = 0.5$, on peut utiliser la formule (4.12) pour reconstruire la fonction de Wigner. Cette formule ne donne par contre que la fonction de Wigner dont le bras de conditionnement aurait subi des pertes. Nous proposons donc le raisonnement suivant pour la correction de l'efficacité de détection de mesure :

- Les deux efficacités homodynes (DH0 et DH1) étant égales à 77%, on peut dans un premier temps corriger l'état de ces deux efficacités simultanément. L'effet peut alors être reporté sur les deux valeurs de δ et δ' , qui passent de $\delta = \delta' = 1.16$ à $\delta_{\text{corr}} = \delta'_{\text{corr}} = 1.16/0.77 = 1.51$. Les modifications de $\sigma = \sigma'$ peuvent quant à elles être négligées.
- Les pertes homodynes de conditionnement sont ré-appliquées grâce à la formule (4.12), permettant de trouver la fonction de Wigner recherchée.

En procédant de la sorte, on trouve l'allure représentée sur la figure 4.15 (g), où la fidélité de l'état avec le chat comprimé parfait attendu est de 57.1%, et la négativité de $W_{\min} = -0.054$. L'allure est alors plus fidèle à celle de l'état chat.

Par la méthode de maximum de vraisemblance quantique, la correction des efficacités de détection peut ensuite être directement implémentée dans le calcul, comme précisé dans la section 1.5.2.2. Toujours en choisissant une efficacité de détection de 77%, on obtient la fonction de Wigner représentée sur la figure 4.15 (h).

Cette fonction, fidèle à 61.1% avec l'état parfait attendu, révèle une allure caractéristique des états chats de Schrödinger : deux pics symétriques par rapport à l'origine, séparés par des oscillations. Le pic central des oscillations est d'ailleurs plus élevé que dans les cas précédents, et la négativité est bien plus importante : $W_{\min} = -0.080$ ici.

4.5.2.3 Détermination des erreurs : estimation par le maximum de vraisemblance

Bien entendu, sachant que les fonctions de Wigner ont été reconstruites à l'aide d'un nombre limité de points, les erreurs statistiques entrant en jeu dans leur reconstruction ne sont pas négligeables. Pour quantifier celles-ci, nous exploitons la technique décrite dans [Lvovsky 04] : étant donnée une matrice densité estimée par maximum de vraisemblance, on simule un grand nombre de fois un tirage de points suivant chacune des quadratures. Le nombre de points par quadrature doit bien entendu correspondre au nombre de points obtenus expérimentalement. Chacun de ces nuages de points permet la détermination d'une nouvelle matrice densité, et les variations dans les coefficients de cette matrice densité reflètent les variations dues aux fluctuations statistiques.

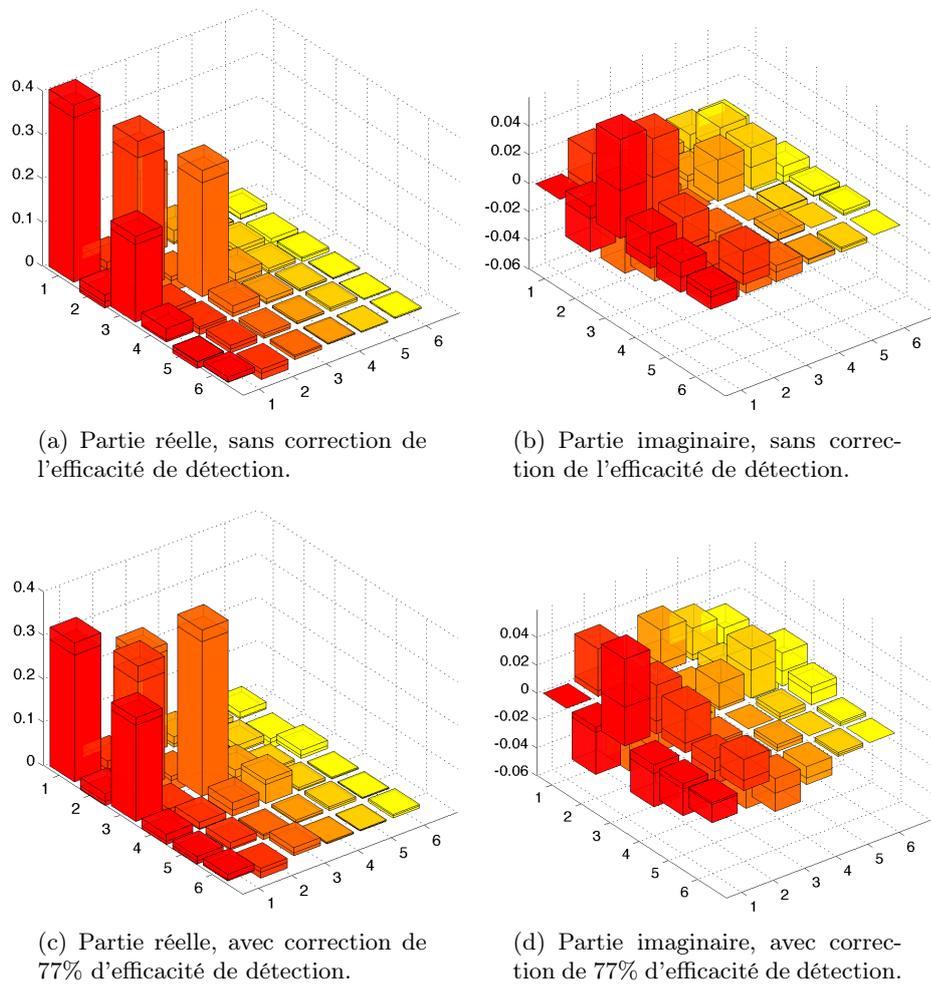


FIGURE 4.16 – Matrices densités reconstruites par l'estimation du maximum de vraisemblance. Les écarts-types des erreurs statistiques sont représentés autour des maxima.

Dans notre cas, nous avons réalisé 1000 tirages de jeux de points, permettant de reconstruire 1000 matrices densité différentes. Les fluctuations de celles-ci permettent de déduire des estimations d'erreurs statistiques. Ainsi dans l'estimation par maximum de vraisemblance, on trouve des matrices densité qui sont données sur les figures 4.16 (a) et (b) dans le cas d'une estimation sans correction des pertes, et sur les figures 4.16 (c) et (d) dans le cas d'une estimation avec cor-

rection de 77% d'efficacité de détection. Les écart-types des erreurs statistiques sont représentés par une boîte autour des maxima.

L'incertitude sur la fidélité est alors de l'ordre de $\pm 1\%$ dans les cas sans et avec correction de l'inefficacité de détection. La négativité quant à elle vaut alors respectivement de $W_{\min} = -0.024 \pm 0.01$ et $W_{\min} = -0.080 \pm 0.01$. Les valeurs des erreurs annoncées sont celles relatives à l'écart-type des fluctuations des simulations.

On voit que malgré ces imprécisions la négativité de la fonction de Wigner est bien conservée, indiquant la qualité des états créés par notre dispositif.

4.6 Conclusion et perspectives

Nous avons vu dans ce chapitre comment un dispositif permet la génération expérimentale d'un état chat de Schrödinger comprimé suivant la quadrature x . Le protocole consiste à mélanger deux états de Fock à un photon sur une lame séparatrice 50:50, à la sortie de laquelle un conditionnement homodyne est réalisé. Ce conditionnement, réalisé sur un des deux bras de sortie, est annoncé comme réussi si la mesure est proche de 0.

L'expérience a permis la validation de ce protocole, permettant la génération d'états fidèles à plus de 61% à des états chats parfaits. A notre connaissance il s'agit des chats pairs en espace libre de plus grande amplitude et fidélité jamais produits, tous les records étant détenus par des chats impairs [Gerrits 10, Yukawa 13].

Ce dispositif simple est en fait à la base d'un protocole bien plus général de croissance d'états chats, où l'idée est d'itérer le protocole dont nous venons de valider la mise en place expérimentale. La figure 4.17 (a) montre en effet l'état que l'on s'attendrait à mesurer si l'on plaçait l'état que nous avons créé (cf figure 4.15 (h)) à la place des états de Fock à un photon de la figure 4.1.

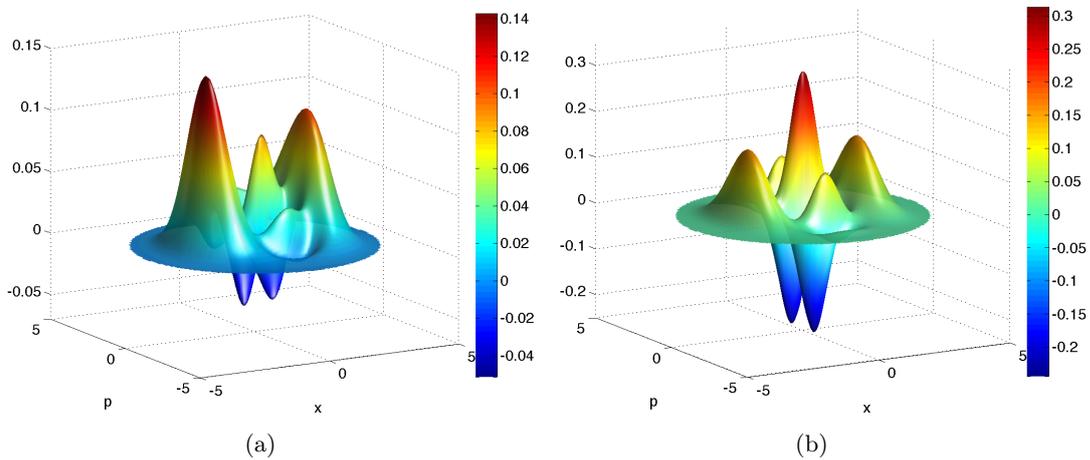


FIGURE 4.17 – (a) Fonction de Wigner théorique de l'état produit à partir de l'état de la figure 4.15 (h) placé en entrée du dispositif de la figure 4.1, à la place des états de Fock à un photon. (b) Fonction de Wigner d'un état chat de Schrödinger d'amplitude $\alpha = 2.12$ et comprimé d'un facteur $s = 1.45$ suivant la quadrature x . La fidélité entre les deux états est de 51%.

Cette fois-ci, quatre zones de négativité apparaîtraient, et l'état serait fidèle à 51% à un état chat de Schrödinger d'amplitude $\alpha = 2.12$ et de compression $s = 1.45$ suivant la quadrature x , dont l'allure est donnée sur la figure 4.17 (b). Il est par contre hors de question d'imaginer

réaliser ce dispositif en dupliquant simplement le protocole que nous avons établi ici en l'état : en effet, avec les taux de comptages actuels, le taux de production de ces états serait de l'ordre de un tous les deux ans et demi. La structuration particulière de ce protocole permet par contre l'utilisation de mémoires quantiques, faisant remonter ces probabilités de succès à des valeurs accessibles à l'expérience.

En l'adaptant, ce même protocole peut par ailleurs permettre la génération d'états arbitraires de la lumière. L'étude complète de toutes ces généralisations fait l'objet du chapitre suivant.

Troisième partie

Ingénierie quantique pour une violation
des inégalités de Bell

Chapitre 5

Croissance d'états arbitraires par adjonction cohérente de photons

Sommaire

5.1	Introduction	116
5.1.1	Protocoles de génération existants	116
5.1.2	Nécessité d'une approche itérative	117
5.2	Le protocole d'adjonction	117
5.2.1	Idée de base du protocole	117
5.2.2	Application à la génération de superpositions arbitraires	118
5.2.3	Structuration du dispositif	119
5.2.4	Expression des équations à résoudre dans la configuration linéaire	122
5.2.5	Effet sur les fonctions d'ondes : gaussianisation locale	123
5.3	Performances du protocole	125
5.3.1	Exemples d'utilisation	125
5.3.2	Probabilité de succès du conditionnement	127
5.3.3	Influence des imperfections des photons d'entrée	130
5.3.4	Influence des inefficacités de détections	131
5.4	Génération et croissance d'états "Chats de Schrödinger" comprimés	132
5.4.1	Motivations : dispositif déjà proposé	132
5.4.2	Principe du nouveau protocole	133
5.4.3	Calcul de l'état de sortie	135
5.4.4	Performances du protocole	136
5.5	Génération d'états "Chats multipattes"	142
5.5.1	Définition mathématique	142
5.5.2	Croissance du nombre de pattes	143
5.5.3	Généralisation	144
5.6	Génération et croissance d'états "Peignes en quadrature"	145
5.6.1	Historique	145
5.6.2	Définition mathématique	147
5.6.3	Génération et croissance de peignes	148
5.6.4	Performances du protocole	152
5.7	Conclusion	153

5.1 Introduction

5.1.1 Protocoles de génération existants

La génération d'états arbitraires de la lumière est un défi actuel qui constitue un des principaux verrous du calcul quantique optique [Ladd 10, Lloyd 99, Ralph 03]. La principale difficulté à surmonter est le fait que les photons n'interagissent pas entre eux en espace libre et un intermédiaire d'interaction est donc nécessaire. Les atomes couplés à des cavités par exemple [Vogel 93, Deléglise 08, Duan 04] sont de bons candidats pour réaliser ces interactions, car les couplages, monomodes par définition, peuvent être très efficaces. Ces montages sont toutefois lourds car ils nécessitent des contrôles d'atomes uniques, ou au moins d'un nombre précis d'atomes. Une seconde possibilité consiste à délocaliser les excitations du champ dans un nuage d'atomes et de convertir cette excitation en un état optique [Bimbard 14].

Une autre approche pour l'ingénierie quantique consiste à utiliser des circuits supraconducteurs pour former des états dont on peut précisément contrôler le nombre d'excitations et leurs cohérences. En 2009, une équipe de l'Université de Santa Barbara a ainsi pu réaliser des superpositions arbitraires de qubits supraconducteurs de phase contenant jusqu'à 6 photons, et à les caractériser en réalisant une tomographie complète de ceux-ci [Hofheinz 09]. Plus récemment et avec le même type de système, des états "chats de Schrödinger" contenant plus de 100 photons ont même pu être réalisés [Vlastakis 13].

Toutefois, l'un des principaux désavantages de ce type de système est le très court temps de cohérence et les échelles spatiales typiques de confinement des états, qui limitent leur utilisation en télécommunication quantique.

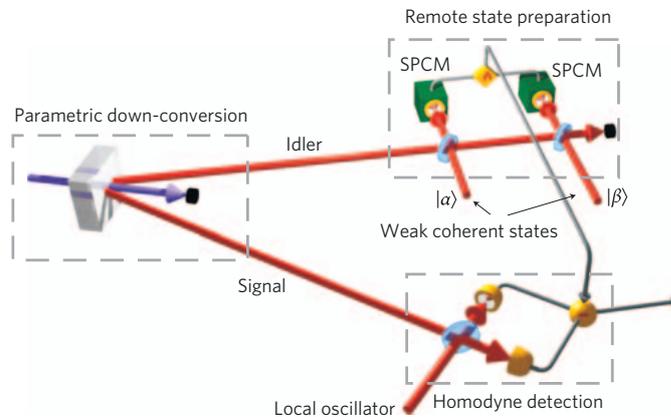


FIGURE 5.1 – Protocole pour la génération de superpositions arbitraires à deux photons de [Bimbard 10].

En espace libre, la génération d'états propagatifs de la lumière est généralement réalisée en utilisant un état intriqué sur une partie duquel on réalise une mesure. Les mesures sont le plus souvent de type comptage de photons [Bimbard 10, Yukawa 13, Resch 02] ou mesure homodyne [Jeong 06, Babichev 04, Laghaout 13]. La méthode la plus employée jusqu'à présent, par comptage de photons, consiste à utiliser la génération paramétrique spontanée de paires de photons et à réaliser un comptage sur un des deux modes de sortie (le mode de conditionnement). Par interférence avec des faisceaux cohérents verrouillés en phase, toutes les superpositions à N photons (où N est le nombre de détections) sont ainsi accessibles. C'est la technique décrite

dans [Bimbard 10] et illustrée sur la figure 5.1¹, et c'est également celle que nous utilisons pour la génération de nos états de Fock à un photon, comme nous l'avons vu au chapitre 2.

Cette méthode peut permettre ainsi, en augmentant le nombre de détecteurs de photons uniques, de générer des états arbitraires de la lumière au coût d'une probabilité de succès exponentiellement décroissante avec le nombre de ressources. De plus, la génération des états est liée au dispositif de génération paramétriques spontanée de paires de photons, ce qui limite les architectures possibles du dispositif.

5.1.2 Nécessité d'une approche itérative

Les protocoles présentés précédemment souffrent principalement d'un défaut commun : la probabilité de succès de l'opération de génération décroît exponentiellement avec les ressources nécessaires. Un protocole qui permet l'utilisation de mémoires quantiques en vue d'augmenter cette probabilité pour que la décroissance ne soit plus exponentielle semble donc incontournable. Certains protocoles, basés sur l'addition [Dakna 99] ou la soustraction [Fiurášek 05] itérée de photons proposent une première version de ces itérations, mais ils nécessitent des détecteurs de photons, dont les efficacités actuelles limitent grandement la probabilité de succès du protocole complet.

Nous nous proposons donc dans ce chapitre de décrire un protocole permettant la génération d'états arbitraires de la lumière basé sur l'itération d'une opération de conditionnement simple [Brask 10].

5.2 Le protocole d'adjonction

5.2.1 Idée de base du protocole

L'idée de base du protocole consiste à utiliser le dispositif présenté sur la figure 5.2.

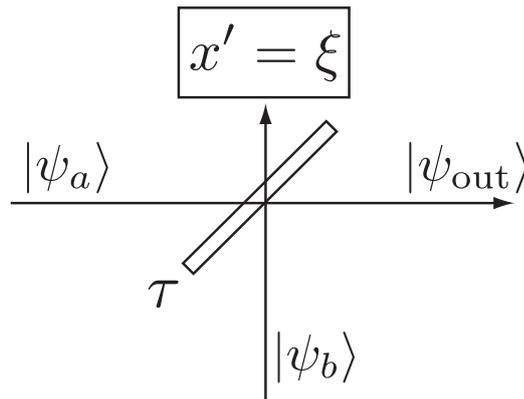


FIGURE 5.2 – Protocole de croissance élémentaire.

On place deux fonctions d'ondes $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$ en entrée d'une lame de transmittivité τ (et de réflectivité $\rho = \sqrt{1 - \tau^2}$), permettant la formation de la fonction d'onde bimode :

$$\langle x, x' | \psi_{ab} \rangle = \psi_{ab}(x, x') = \psi_a(\tau x - \rho x') \psi_b(\rho x + \tau x'). \quad (5.1)$$

1. Reprinted by permission from Macmillan Publishers Ltd : [Bimbard 10], copyright 2010

Puis, si dans un des deux ports de sortie on effectue une mesure homodyne (mode de la quadrature x' sur la figure 5.2) et que l'on conditionne l'état de sortie de l'autre port sur le résultat $x' = \xi$, on crée l'état de sortie monomode :

$$\psi_{\text{out}} \propto \psi_a(\tau x - \rho \xi) \psi_b(\rho x + \tau \xi). \quad (5.2)$$

Autrement dit, notre protocole nous permet de générer un état dont la fonction d'onde (en représentation x) est le produit des fonctions d'ondes des états d'entrée. Les coefficients τ et ξ nous permettent de régler les coefficients d'échelles de ces deux fonctions.

Etudions comment cette opération simple permet la génération itérative d'états arbitraires de la lumière.

5.2.2 Application à la génération de superpositions arbitraires

5.2.2.1 Hypothèses et équivalence

Pour générer des superpositions arbitraires d'états de la lumière, nous allons supposer que nous disposons à volonté d'états de la forme

$$|\psi^{(1)}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \quad (5.3)$$

Ces états, que nous qualifierons d'états *ressources* peuvent être produits par exemple par comptage de photons [Resch 02] ou par conditionnement homodyne [Babichev 04]. En représentation x , leur fonction d'onde s'écrit :

$$\langle x|\psi^{(1)}\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}}(\alpha + \sqrt{2}\beta x)e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (5.4)$$

Cette fonction est donc de la forme d'un polynôme arbitraire de degré 1 multiplié par une gaussienne de variance égale à 1.

Nous allons chercher à former des superpositions arbitraires de n photons, qui s'écrivent donc :

$$\langle x|\psi_{\text{cible}}\rangle = \langle x|\left(\sum_{k=1}^n c_k|k\rangle\right) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\sqrt{2^k k!}} H_k(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = P_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (5.5)$$

où l'on a utilisé l'écriture (1.81a) d'un état de Fock en représentation x . Les polynômes de Hermite (1.82) formant une base de $\mathbb{C}[X]$, le polynôme P_n intervenant dans l'écriture de l'état peut donc être totalement quelconque. La seule hypothèse que nous ferons sera qu'il est effectivement de degré n (autrement dit, la probabilité de présence de n photons dans l'état n'est pas nulle). On a donc l'équivalence :

$$\boxed{\begin{array}{c} |\psi_{\text{cible}}\rangle \\ \text{superposition arbitraire} \\ \text{de } n \text{ photons} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \psi_{\text{cible}}(x) \propto P_n(x) e^{-x^2/2} \\ \text{avec } P_n \text{ un polynôme arbitraire} \\ \text{de degré } n \end{array}}. \quad (5.6)$$

Nous allons montrer qu'avec les états ressource (5.3), le protocole de la figure 5.2 et l'équivalence (5.6) on peut former des superpositions arbitraires de n photons.

5.2.2.2 Superposition à deux photons

Commençons par un cas simple, où l'on utilise le dispositif de la figure 5.2 "nourri" par deux états ressources $|\psi_1^{(1)}\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ et $|\psi_2^{(1)}\rangle = \alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle$ à la place des états $|\psi_a\rangle$ et

$|\psi_b\rangle$ respectivement. Par mélange sur une lame de transmittivité τ et avec un conditionnement $x' = \xi_1$, l'équation (5.2) permet d'obtenir la fonction d'onde de l'état de sortie :

$$\psi_{\text{out}}(x) \propto (a_1x - b_1)(a_2x - b_2)e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (5.7)$$

avec

$$a_1 = \sqrt{2}\beta_1\tau \qquad b_1 = -\alpha_1 + \sqrt{2}\beta_1\rho\xi_1 \quad (5.8a)$$

$$a_2 = \sqrt{2}\beta_2\rho \qquad b_2 = -(\alpha_2 + \sqrt{2}\beta_2\tau\xi_1), \quad (5.8b)$$

et $\rho = \sqrt{1 - \tau^2}$. Si β_1, β_2, τ et ρ ne sont pas nuls, l'équation (5.7) est donc la forme générale d'un polynôme de degré 2 multiplié par une gaussienne, donc d'une superposition de 2 photons d'après l'équivalence (5.6). Le polynôme de degré 2 est bien arbitraire, étant donné que les polynômes sont scindés dans $\mathbb{C}[X]$. On peut donc bien, grâce à notre protocole, former des superpositions à 2 photons.

Généralisons l'idée pour la formation de superpositions à un nombre quelconque de photons.

5.2.2.3 Superposition arbitraire

Si on nourrit le protocole de la figure 5.2 avec des états $|\psi^{(n)}\rangle$ et $|\psi^{(m)}\rangle$ (superpositions arbitraires de n et m photons) à la place de $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$ (resp.) :

$$\psi^{(n)}(x) \propto P_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (5.9a)$$

$$\psi^{(m)}(x) \propto P_m(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (5.9b)$$

l'équation (5.2) indique que l'état créé par le protocole sera de la forme

$$\psi_{\text{out}} \propto P_n(\tau x - \rho\xi)P_m(\rho x + \tau\xi)e^{-\frac{x^2}{2}} \propto P_{n+m}(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (5.10)$$

avec P_{n+m} un polynôme de degré $n + m$, qui est arbitraire étant donné que P_n et P_m le sont. Autrement dit notre protocole permet, en partant de deux superpositions arbitraires de n et m photons, de former une superposition arbitraire à $n + m$ photons.

Ainsi, en utilisant les états ressource (5.3) en entrée de dispositif et en itérant le protocole, il sera finalement possible de former tous les états arbitraires de la lumière à n photons.

5.2.3 Structuration du dispositif

Un des principaux avantages de notre protocole est qu'il permet une construction des états suivant un schéma structurel adaptable. En effet, ici les opérations de conditionnement peuvent être réalisées en parallèle, d'où une augmentation potentielle considérable de la probabilité totale de succès. C'est ce que nous allons étudier dans cette section, après avoir défini quelques termes de vocabulaire.

L'opération montrée sur la figure 5.2 et dont l'équation de transformation est donnée par (5.2) sera appelée dans la suite l'*opération de croissance*. La figure 5.3 (a) montre un exemple de protocole constitué de deux opérations de croissance avec trois états d'entrée $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ et $|\psi_3\rangle$. Lorsque le montage est symétrique, *i.e.* lorsque les deux états incidents sur chaque lame séparatrice ont enduré le même nombre d'opérations de croissance, nous dirons que le montage consiste en p *étages de croissance*, où $p = \log_2(k + 1)$ et k est le nombre d'opérations de croissance. Par exemple, un protocole consistant en deux étages de croissance est montré sur la figure 5.3 (b). Ce protocole est constitué de $2^2 - 1 = 3$ opérations de croissance.

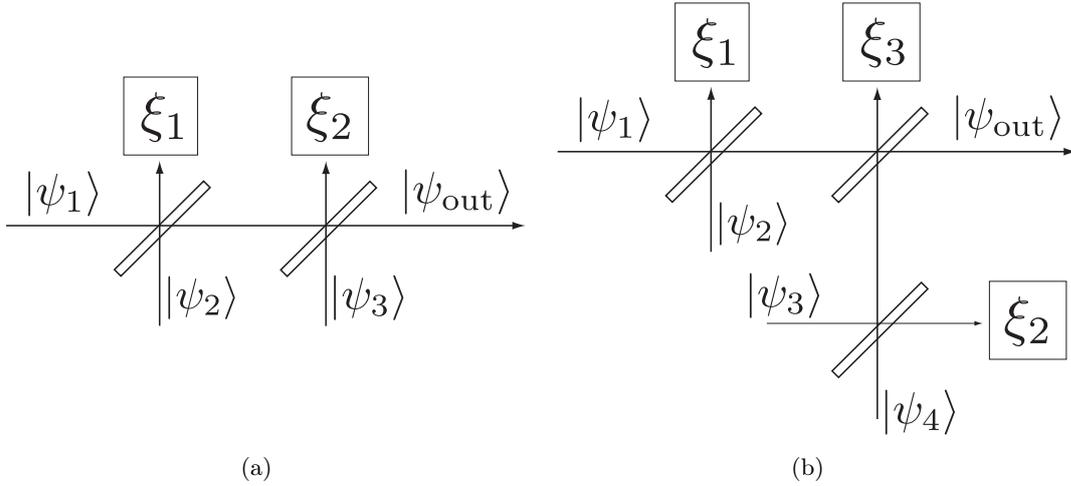


FIGURE 5.3 – Protocole constitué de deux (a) *opérations de croissance* et (b) *étages de croissance*. Le cas (b) est donc un cas particulier d’un protocole constitué de trois *opérations de croissance*.

5.2.3.1 Probabilités de succès

Détermination brute

Si la transformation est annoncée par la simultanéité des mesures homodynes mises en jeu dans le montage, la probabilité de succès sera le produit des probabilités de succès de toutes les opérations de croissance. Ainsi, le protocole de la figure 5.3 (b) aurait une probabilité de succès $P_{\text{tot}} = P_{\text{mix}_1}^2 P_{\text{mix}_2}$, où P_{mix} est la probabilité de succès d’une opération de croissance. La décroissance de la probabilité de succès avec le nombre d’opérations serait donc exponentielle. Une idée que l’on peut exploiter pour augmenter cette probabilité de succès est de ne pas tenter d’opération de croissance sans être sûr que les deux états requis en entrée sont bien présents. En d’autres termes, si une opération de croissance réussit au premier étage, nous voudrions faire *attendre* l’état créé par celle-ci jusqu’à ce que l’état produit par l’autre opération (attendu dans l’autre port) soit effectivement présent. Cette attente ouvre la possibilité d’utiliser des mémoires quantiques.

Mémoires quantiques

Calculons donc la probabilité de succès en nous donnant la possibilité de stocker et d’extraire les états à la demande. Par exemple, sur la figure 5.3 (b), cela signifie que les états issus des conditionnements sur ξ_1 et ξ_2 pourront être individuellement stockés jusqu’à ce que les deux soient simultanément prêts. Comme nous pouvons itérer le protocole et utiliser un nombre arbitraire d’états en entrée, calculons la probabilité de succès par récurrence. Celle-ci sera définie comme le rapport du nombre minimal de ressources (d’états d’entrée) divisé par le nombre moyen de ressources nécessaires.

Soit P_k (resp. P_l) la probabilité de succès d’un montage ayant mélangé k (resp. l) états d’entrée et ayant donné naissance à un état $|\psi^{(k)}\rangle$ (resp. $|\psi^{(l)}\rangle$). Déterminons la probabilité de succès de l’opération totale si l’on réalise une opération de croissance mélangeant $|\psi^{(k)}\rangle$ et $|\psi^{(l)}\rangle$. Le nombre moyen de ressources nécessaires à la production de ces états est respectivement de k/P_k et l/P_l . Ainsi, le nombre moyen de ressources nécessaires pour réaliser la transformation avec succès est $N = \frac{1}{P_{\text{mix}}} \left(\frac{k}{P_k} + \frac{l}{P_l} \right)$. La probabilité de succès de l’opération de mélange sera donc

de :

$$P_{k+l} = \frac{k+l}{N} = \frac{k+l}{kP_l + lP_k} P_k P_l P_{\text{mix}}. \quad (5.11)$$

Si l'on suppose que $P_1 = 1$ (les états d'entrée sont supposés être disponibles à la demande), on peut calculer la probabilité de succès pour n'importe quelle configuration.

5.2.3.2 Design du protocole

La question que l'on va se poser dans ce paragraphe est de savoir comment agencer les opérations de croissance pour maximiser la probabilité de succès (5.11) sachant que l'on veut mélanger 2^p états d'entrée. Nous allons considérer deux types de configurations : une configuration "linéaire" et une configuration "symétrique".

Configuration "linéaire"

Supposons que l'on mélange les états progressivement, en réalisant les opérations de croissance les unes après les autres. La figure 5.4 illustre une telle configuration avec quatre états d'entrée.

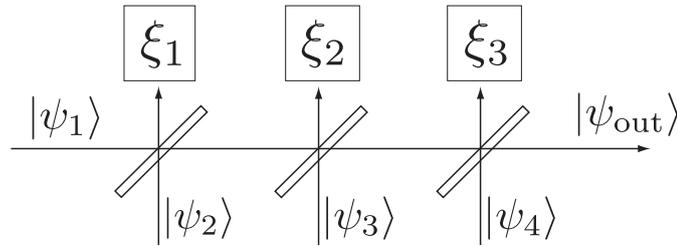


FIGURE 5.4 – Protocole constitué de trois opérations de croissances agencées "linéairement".

La formule (5.11) permet de calculer la probabilité de succès de l'opération par récurrence, étant donné :

$$P_{k+1} = \frac{k+1}{k+P_k} P_k P_{\text{mix}}. \quad (5.12)$$

Ainsi

$$P_{2^p} = \frac{2^p P_{\text{mix}_1} \dots P_{\text{mix}_{2^p-1}}}{2 + P_{\text{mix}_1} + P_{\text{mix}_1} P_{\text{mix}_2} + \dots + P_{\text{mix}_1} \dots P_{\text{mix}_{2^p-2}}}, \quad (5.13)$$

avec P_{mix_k} la probabilité de succès de la $k^{\text{ième}}$ opération de croissance. On voit que l'utilisation des mémoires quantiques a augmenté la probabilité de succès du dispositif d'un facteur $2^p / (2 + P_{\text{mix}_1} + P_{\text{mix}_1} P_{\text{mix}_2} + \dots + P_{\text{mix}_1} \dots P_{\text{mix}_{2^p-2}})$.

Configuration "symétrique" ou "en arbre"

Si l'on suppose le montage symétrisé, autrement dit constitué de p étages de croissance (et nécessitant donc 2^p états en entrée de protocole, p désignant ainsi la "profondeur" de l'arbre), la probabilité de succès est maintenant de :

$$P_{2^p} = P_{\text{mix}_1} \dots P_{\text{mix}_p}. \quad (5.14)$$

A titre de comparaison, si l'on suppose que toutes les probabilités de mélange sont égales ($P_{\text{mix}_1} = \dots = P_{\text{mix}_{2^p-1}}$), la figure 5.5 montre les trois cas superposés (sans mémoire quantique,

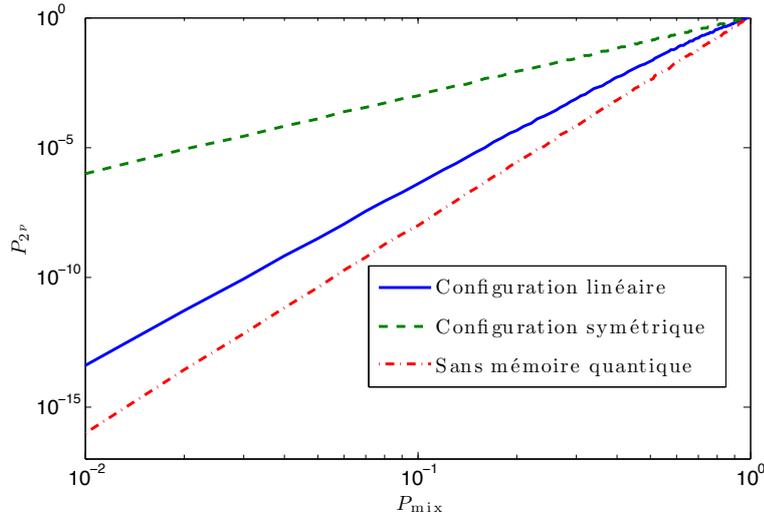


FIGURE 5.5 – Performances en probabilité de succès totale du protocole dans le cas $p = 3$ et $P_{\text{mix}_1} = \dots = P_{\text{mix}_{2^p-1}} = P_{\text{mix}}$. La configuration symétrique offre une probabilité de succès exponentiellement plus élevée.

cas linéaire, et cas symétrique) pour $p = 3$, et indique clairement le gain des mémoires quantiques, et l'avantage exponentiel à utiliser une configuration symétrique. Cette configuration a un avantage assez intuitif, du fait qu'elle permet la réalisation de multiples opérations en parallèle sur tout le protocole : on distribue les conditionnements sur plusieurs détecteurs homodynes, ce qui augmente les chances de succès du dispositif total.

Croissance avec un nombre arbitraire d'états ressources

Bien entendu, le protocole totalement symétrique proposé précédemment et composé de p étages de croissance n'est possible à implémenter que pour 2^p états d'entrée. Malgré tout, on peut tirer profit de la "symétrisation" du protocole pour réaliser une croissance avec un nombre n quelconque d'états d'entrée, en réalisant le plus d'opérations en parallèle possible.

La configuration à adopter est en fait donnée par l'écriture binaire de n , chaque digit de poids k non nul indiquant la présence d'un protocole de croissance à k étages.

Par exemple, si $n = 11 = 1011_2$, les digits 2^0 , 2^1 et 2^3 sont présents et donc trois protocoles de croissances sont présents : un à 0 étage, un à 1 étage et un à 3 étages. Il faudra donc mélanger un état produit par 0 étage avec un état produit par 1 étage (mélange se faisant par le protocole de la figure 5.2) de croissance pour former un état qui, mélangé à un état produit par 3 étages de croissance, produira l'état recherché.

5.2.4 Expression des équations à résoudre dans la configuration linéaire

Donnons une expression explicite de la fonction d'onde de l'état que l'on produit par croissance avec un protocole linéaire composé de $n - 1$ opérations de croissance.

On suppose que le protocole est nourri par les n états de la forme $|\psi_i^{(1)}\rangle = \alpha_i|0\rangle + \beta_i|1\rangle$ et que les conditionnements ont lieu successivement sur les valeurs ξ_1, \dots, ξ_{n-1} après mélanges sur des lames de transmission $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$. On montre, après calcul, que l'état créé s'écrit :

$$\langle x | \psi_{\text{out}} \rangle \propto (a_1 x - b_1)(a_2 x - b_2) \dots (a_n x - b_n) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (5.15)$$

avec

$$a_1 = \sqrt{2}\beta_1 \prod_{i=1}^{n-1} \tau_i \quad (5.16a)$$

$$a_j = \sqrt{2}\beta_j \rho_{j-1} \prod_{i=j}^{n-1} \tau_i \quad \text{pour } 1 < j < n \quad (5.16b)$$

$$a_n = \sqrt{2}\beta_n \rho_{n-1} \quad (5.16c)$$

et

$$b_1 = -\alpha_1 + \sqrt{2}\beta_1 \left[\rho_1 \xi_1 + \sum_{l=1}^{n-2} \prod_{i=1}^l \tau_i \rho_{l+1} \xi_{n+1} \right] \quad (5.17a)$$

$$b_j = -\alpha_j - \sqrt{2}\beta_j \tau_{j-1} \xi_{j-1} + \sqrt{2}\beta_j \rho_{j-1} \left[\rho_j \xi_j + \sum_{l=j}^{n-2} \prod_{i=j}^l \tau_i \rho_{l+1} \xi_{l+1} \right] \quad \text{pour } 1 < j < n-1 \quad (5.17b)$$

$$b_{n-1} = -\alpha_{n-1} - \sqrt{2}\beta_{n-1} \tau_{n-2} \xi_{n-2} + \sqrt{2}\beta_{n-1} \rho_{n-2} \rho_{n-1} \xi_{n-1} \quad (5.17c)$$

$$b_n = -\alpha_n - \sqrt{2}\beta_n \tau_{n-1} \xi_{n-1}. \quad (5.17d)$$

Conformément à ce que l'on avait annoncé au paragraphe 5.2.2.3, l'équation (5.15) est bien de la forme d'un polynôme arbitraire de degré n multiplié par une gaussienne de variance égale à un : c'est bien la fonction d'onde d'une superposition arbitraire de n photons.

L'équation qu'il faudra résoudre pour connaître les paramètres α_i , β_i , τ_i et ξ_i du protocole de croissance linéaire en fonction des c_k intervenant dans l'écriture de la superposition désirée $\sum c_k |k\rangle$ sera donc finalement :

$$\prod_{k=1}^n \left[x - \frac{b_k}{a_k} \right] = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{c_n 2^{\frac{n+k}{2}}} \sqrt{\frac{n!}{k!}} H_k(x). \quad (5.18)$$

Il n'est malheureusement pas possible dans le cas général d'exhiber les solutions de cette équation, étant donné que le problème revient à expliciter les racines d'un polynôme de degré n quelconque, ce qui est impossible dès que $n > 4$ [Abel 26]. Chaque problème doit donc être traité au cas par cas. Nous verrons quelques exemples plus loin.

5.2.5 Effet sur les fonctions d'ondes : gaussianisation locale

Si l'on reprend l'interprétation donnée par l'équation (5.2), le protocole d'adjonction cohérente permet de réaliser la multiplication des fonctions d'ondes, à un facteur de compression près. Ainsi, si l'on prend le cas simple d'un protocole nourri par deux fonctions d'ondes identiques $\psi_{\text{in}}(x)$, utilisant une lame 50:50 ($r = t = 1/\sqrt{2}$), et réalisant un conditionnement homodyne sur $x' = 0$, l'état généré sera décrit par la fonction d'onde :

$$\psi_{\text{out}}(x) \propto \psi_{\text{in}}^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \quad (5.19)$$

En réalisant n mélanges de ce type (cf paragraphe 5.2.3.2) par le protocole de croissance¹, on obtient la fonction d'onde :

$$\psi_{\text{pc}}(x) \propto \psi_{\text{in}}^n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right). \quad (5.20)$$

1. Nous indiquerons par l'indice "pc" les fonctions qui sont générées par le protocole de croissance, et ce dans toute la suite de ce manuscrit.

Voyons l'incidence que cette transformation peut avoir sur l'allure de la fonction.

Supposons que la fonction ψ_{in} possède un maximum local en x_i : le développement limité de ψ_{in} autour de ce point, tronqué à l'ordre 2, s'écrit

$$\psi_{\text{in}}(x) \simeq \psi_{\text{in}}(x_i) + \frac{\psi_{\text{in}}''(x_i)}{2}(x - x_i)^2. \quad (5.21)$$

L'application de la transformation $\psi_{\text{pc}}(x) \propto \psi_{\text{in}}^n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ permet d'obtenir une forme de l'expression du développement limité de ψ_{pc} au voisinage de $x = \sqrt{n}x_i$:

$$\psi_{\text{pc}}(x) \simeq \psi_{\text{in}}(x_i)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[\frac{\psi_{\text{in}}''(x_i)}{2\psi_{\text{in}}(x_i)} \right]^k \left(\frac{x}{\sqrt{n}} - x_i \right)^{2k}. \quad (5.22)$$

Ce développement limité, lorsque $n \rightarrow +\infty$, est équivalent au voisinage de $\sqrt{n}x_i$ à celui de la fonction :

$$\psi_{\text{pc}}(x) \simeq \psi_{\text{in}}^n(x_i) \exp \left[\frac{\psi_{\text{in}}''(x_i)}{2\psi_{\text{in}}(x_i)} (x - \sqrt{n}x_i)^2 \right]. \quad (5.23)$$

Ce raisonnement non rigoureux mathématiquement (la démonstration rigoureuse est développée dans l'annexe B) donne malgré tout une idée correcte de ce qui se passe : autour du maximum, la fonction ressemble de plus en plus à une gaussienne lorsque $n \rightarrow +\infty$. Sa variance est donnée par $-\psi_{\text{in}}(x_i)/\psi_{\text{in}}''(x_i)$ et elle est centrée en $\sqrt{n}x_i$.

Nous énonçons donc le théorème de gaussianisation locale comme :

Théorème de gaussianisation locale :

Si une fonction d'onde $\psi(x)$ possède des extrema locaux en (x_1, \dots, x_N) , alors l'utilisation répétée n fois de l'opération de croissance sur celle-ci générera une fonction qui convergera en norme L^2 vers une somme de gaussiennes centrées en les points $(\sqrt{n}x_1, \dots, \sqrt{n}x_N)$:

$$\psi(x) \xrightarrow[\text{de croissance}]{n \text{ opérations}} \sum_{i=1}^N \psi(x_i)^n e^{-\alpha_i(x - \sqrt{n}x_i)^2},$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$, avec $\alpha_i = -\psi_{\text{in}}''(x_i)/2\psi_{\text{in}}(x_i)$.

Suivent quelques propriétés intéressantes de ce théorème :

Propriété 1. Les fonctions gaussiennes $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{s\pi^{1/4}}} e^{-\frac{x^2}{2s^2}}$ sont invariantes par gaussianisation locale.

Propriété 2. Si la fonction initiale s'écrit comme un produit de fonctions : $\psi(x) = f(x)g(x)$, alors la fonction obtenue après n opérations de croissance nourries avec ψ sera la même que le produit des deux fonctions obtenues après n opérations de croissance nourries respectivement par f et g .

Ces deux propriétés, triviales à démontrer, permettent néanmoins la formulation d'un corollaire très important pour la suite.

Propriété 3. Si la fonction initiale s'écrit comme un produit d'une gaussienne par une fonction f : $\psi(x) = f(x)e^{-\frac{x^2}{2s^2}}$, alors la fonction obtenue après n opérations de croissance nourries avec ψ sera de la forme $f_{\text{pc}}(x)e^{-\frac{x^2}{2s^2}}$, où f_{pc} est la fonction obtenue après n opérations de croissance nourries par f .

Bien entendu, ce phénomène de gaussianisation locale n'intervient que dans le cas parfait, et des corrections sont à prendre en compte si l'on veut pouvoir étudier un modèle plus réaliste.

Remarque : Le fait que la transformation (5.20) gaussiannise une fonction est un phénomène que l'on voit apparaître dans d'autres applications. Par exemple, celui-ci peut être mis à contribution dans des protocoles de distillation de squeezing [Campbell 12], peut permettre de montrer l'extremalité des états gaussiens dans les protocoles de télécommunications quantiques [Wolf 06], et peut être utilisé pour démontrer le théorème central limite. Notre analyse sera ici différente, car nous tirerons parti du fait que le phénomène de gaussianisation a lieu autour de *chaque* extremum local de la fonction d'onde.

5.3 Performances du protocole

Etudions à présent une mise en œuvre concrète du protocole de croissance, en prenant en compte un certain nombre d'imperfections du protocole ainsi que des ressources de celui-ci.

5.3.1 Exemples d'utilisation

Nous nous proposons dans un premier temps d'étudier quels doivent être les paramètres pour la génération de trois états différents de la lumière : l'état ressource (5.3), une superposition à 2 photons, et l'état de Fock à trois photons.

5.3.1.1 Cas trivial : superposition $\frac{1}{\sqrt{1+|c_0|^2}}(c_0|0\rangle + |1\rangle)$

Dans l'hypothèse où les seuls états dont on dispose sont des états de Fock à un photon et non les états ressources (5.3), montrons que notre protocole peut être utilisé pour produire ces derniers.

Si l'on nourrit notre protocole avec un état de Fock à un photon à la place de $|\psi_a\rangle$ et le vide à la place de $|\psi_b\rangle$ et en supposant que la lame est symétrique ($\tau = 1/\sqrt{2}$), il est aisé de montrer que la fonction d'onde générée par le protocole s'écrit

$$|\psi^{(1)}\rangle = \sqrt{\frac{2\xi_1^2}{2\xi_1^2 + 1}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2\xi_1^2 + 1}}|1\rangle, \quad (5.24)$$

où le conditionnement homodyne se fait pour $x' = \xi_1$.

Ainsi, pour $\xi_1 \in \mathbb{R}$, on peut générer toutes les superpositions de la forme

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+c_0^2}}(c_0|0\rangle + |1\rangle) \quad (5.25)$$

avec $c_0 \in [0, 1[$. La phase arbitraire peut ensuite être simplement rajoutée par un déphasage de la forme (1.40).

La réalisation expérimentale de ce protocole a été effectuée dans [Babichev 04] pour la première fois, et nous avons pu constater les mêmes comportements dans le chapitre précédent (cf section 4.5.1).

5.3.1.2 Superposition $\frac{1}{\sqrt{1+|c_0|^2+|c_1|^2}}(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + |2\rangle)$

On peut également utiliser le protocole pour générer des superpositions plus complexes, comme des superpositions à deux photons, comme nous l'avons vu au paragraphe 5.2.2.2.

Etudions la génération des états de la forme

$$|\psi_{\text{cible}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|c_0|^2+|c_1|^2}}(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + |2\rangle), \quad (5.26)$$

avec $(c_0, c_1) \in \mathbb{R}^2$, dont l'écriture en représentation x est :

$$\psi_{\text{cible}}(x) \propto \left[x^2 + c_1 x + \frac{c_0}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right] e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (5.27)$$

L'identification des racines du polynôme entrant en jeu dans cette écriture avec celui de l'équation (5.7) permet ensuite d'exprimer les paramètres α_1 , β_1 , α_2 et β_2 des états ressources nécessaires au protocole (que l'on supposera réels) si $\Delta = c_1^2 - 4(c_0/\sqrt{2} - 1/2) > 0$:

$$\beta_1 = \epsilon_1 \frac{1}{\sqrt{1 + 2[x_1 \tau + \rho \xi_1]^2}}, \quad \alpha_1 = \sqrt{1 - |\beta_1|^2}, \quad (5.28a)$$

$$\beta_2 = \epsilon_2 \frac{1}{\sqrt{1 + 2[x_2 \rho - \tau \xi_1]^2}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{1 - |\beta_2|^2}, \quad (5.28b)$$

où $x_1 = \frac{\sqrt{\Delta} + c_1}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{\Delta} - c_1}{2}$, $\epsilon_1 = \text{signe}(x_1 \tau + \rho \xi_1)$ et $\epsilon_2 = \text{signe}(x_2 \rho - \tau \xi_1)$.

Dans le cas particulier où $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et $\tau = 1/\sqrt{2}$, on montre que l'état créé s'écrit

$$|\psi^{(2)}\rangle = \frac{1 - 2\xi_1^2}{\sqrt{2 + (1 - 2\xi_1^2)^2}} |0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + (1 - 2\xi_1^2)^2}} |2\rangle, \quad (5.29)$$

qui est de la forme

$$|\psi^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |c_0|^2}} (c_0 |0\rangle + |2\rangle), \quad (5.30)$$

avec $c_0 \in [0, 1]$. Ces états coïncident avec ceux que l'on a générés dans le chapitre précédent dans le cas où $\xi_1 = 0$ (cf paragraphe 4.2.2 et section 4.5.2). Nous les étudierons théoriquement plus en détail dans la seconde partie de ce chapitre, car ils constitueront la brique essentielle à la réalisation de protocoles de génération d'états plus complexes.

5.3.1.3 L'état de Fock à trois photons $|3\rangle$

En plus de superpositions cohérentes d'états de Fock, le protocole permet aussi la génération d'états de Fock, comme par exemple l'état de Fock à trois photons $|3\rangle$. Bien entendu, la génération de cet état nécessitera au moins trois étages, impliquant l'utilisations de trois états d'entrée $|\psi_1^{(1)}\rangle$, $|\psi_2^{(1)}\rangle$ et $|\psi_3^{(1)}\rangle$, que l'on choisira tous les trois être des photons uniques, pour simplifier. Le protocole impliquera ensuite deux opérations de croissance de paramètres respectifs (τ_1, ξ_1) et (τ_2, ξ_2) . En choisissant $\tau_1 = 1/\sqrt{2}$, on montre que l'équation (5.18) qu'il faut résoudre s'écrit :

$$\left(x - \frac{\xi_1 + \rho_2 \xi_2}{\tau_2} \right) \left(x - \frac{-\xi_1 + \rho_2 \xi_2}{\tau_2} \right) \left(x + \frac{\tau_2 \xi_2}{\rho_2} \right) = x(x - \sqrt{3/2})(x + \sqrt{3/2}). \quad (5.31)$$

Parmi toutes les solutions, il est possible par exemple de choisir $\xi_1 = \sqrt{3}/2$, $\xi_2 = 0$ et $\tau_2 = 1/\sqrt{2}$.

Comme nous l'avons vu, des degrés de libertés supplémentaires ont été mis de côté dans ces exemples (travail avec des photons uniques comme ressources, choix de la réflectivité d'une lame, ...). Loin d'être inutiles, ces degrés de liberté excédentaires peuvent être exploités afin de jouer sur un autre levier expérimental : la probabilité de succès, que nous allons maintenant étudier.

5.3.2 Probabilité de succès du conditionnement

5.3.2.1 Intuition théorique

Le problème auquel on sera confronté lorsque l'on voudra générer un état arbitraire sera de savoir quels sont les coefficients $(x_i, \xi_i, t_i, \tau_i)$ qu'il faudra choisir. On sera donc amené à résoudre l'équation (5.18) avec les inconnues $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\tau_1, \dots, \tau_{n-1}), (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$. Il y a plus de variables que d'équations à notre problème, et on va pouvoir exploiter l'excédent de variables pour optimiser la probabilité de succès de l'opération totale.

Une illustration simple de ceci peut être donnée pour le protocole élémentaire exposé au paragraphe 5.3.1.1 : toutes les superpositions de la forme $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+c_0^2}}(c_0|0\rangle + |1\rangle)$ avec $c_0 \in [0, 1[$ peuvent être générées par le protocole. Mais on voit clairement que ce procédé n'est pas optimal pour la génération de tous les états : en effet, pour obtenir un état à un photon $|1\rangle$ en sortie, l'équation (5.24) indique qu'il faut réaliser le conditionnement sur $\xi_1 = 0$, mais la probabilité de succès de l'opération sera limitée par le fait que le photon a une chance sur deux d'être correctement transmis, ainsi que par le fait que même si c'est le vide qui arrive sur la détection homodyne, encore faut-il que celui-ci mène à une mesure suffisamment proche de $\xi_1 = 0$.

Avec l'utilisation du degré de liberté supplémentaire τ , ce problème disparaît car il suffit de choisir $\tau = 1$ (cf figure 5.2) et la probabilité de succès de la génération est alors de 1.

Pour la génération de l'état vide $|0\rangle$ avec le dispositif, le problème est encore plus flagrant : (5.24) indique qu'il faut choisir $\xi_1 \rightarrow +\infty$, ce qui mène manifestement à une probabilité de succès nulle, alors qu'un simple choix $\tau = 0$ sans conditionnement homodyne résout immédiatement le problème avec une probabilité de succès de 1.

5.3.2.2 Traitements numériques

Nous allons quantifier l'apport du degré de liberté supplémentaire en terme de gain de probabilité de succès en étudiant la dépendance de celle-ci en fonction de la superposition choisie. Nous allons réaliser l'étude dans deux cas : le cas simple du protocole élémentaire, où l'état cible est donné par (5.25) et le cas où l'on veut générer une superposition à deux photons de la forme (5.26). Les deux cas ont pour point commun de ne nécessiter qu'un seul protocole de croissance. Etant donné que le fait de conditionner exactement en ξ_1 sur la détection homodyne mène à une probabilité de succès nulle, il va falloir accepter les résultats proches de cette valeur : si la quadrature mesurée (ici x') tombe dans $[\xi_1 - \Delta x^c, \xi_1 + \Delta x^c]$, on considèrera que la transformation a correctement eu lieu. Par contre, il est évident que l'état qu'il faudra alors considérer sera un état mélangé, et le formalisme des fonctions d'ondes pour la description de l'état ne sera plus valide.

Superposition ressource (5.25)

Pour prendre en compte la largeur de conditionnement non nulle dans la génération de l'état ressource, l'état (5.24) doit être remplacé par la fonction de Wigner calculée par :

$$W_{\text{out}}^{(1)}(x, p) = \int_{\xi_1 - \Delta x^c}^{\xi_1 + \Delta x^c} dx' \int_{\mathbb{R}} dp' W_1(\tau x + \rho x', \tau p + \rho p') W_0(\tau x - \rho x', \tau p - \rho p'), \quad (5.32)$$

où W_1 est la fonction de Wigner de l'état à un photon (1.84), et W_0 celle du vide. On trouve, après calcul :

$$W_{\text{out}}^{(1)}(x, p) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{\xi_1 - \Delta x^c}^{\xi_1 + \Delta x^c} \left[2\tau^2 p^2 + 2(\tau x + \rho x')^2 - \tau^2 \right] e^{-x^2 - p^2 - x'^2} dx'. \quad (5.33)$$

On retrouve bien, pour $\Delta x^c = +\infty$ et $\rho = 0$, la fonction de Wigner de l'état à un photon. Cette fonction sera ensuite à comparer avec la fonction de Wigner de l'état (5.25) :

$$W_{\text{th}}(x, p) = \frac{1}{1 + c_0^2} \left[c_0^2 W_0(x, p) + W_1(x, p) + \frac{2\sqrt{2}c_0}{\pi} x e^{-x^2 - p^2} \right]. \quad (5.34)$$

Nous effectuerons cette comparaison en utilisant la fidélité (1.36).

Pour quantifier l'intérêt d'utiliser des lames de réflectivité variable, on se propose de fixer une fidélité cible de l'état que l'on veut générer et de maximiser la probabilité de succès en jouant à la fois sur ξ_1 , Δx^c et ρ .

Le calcul numérique de (5.33) et l'optimisation de la norme de cette fonction (la probabilité de succès du conditionnement) pour une fidélité cible de 99% donnent les points de la figure 5.6 (a) pour la réflectivité optimale et (b) pour la probabilité de succès maximale.

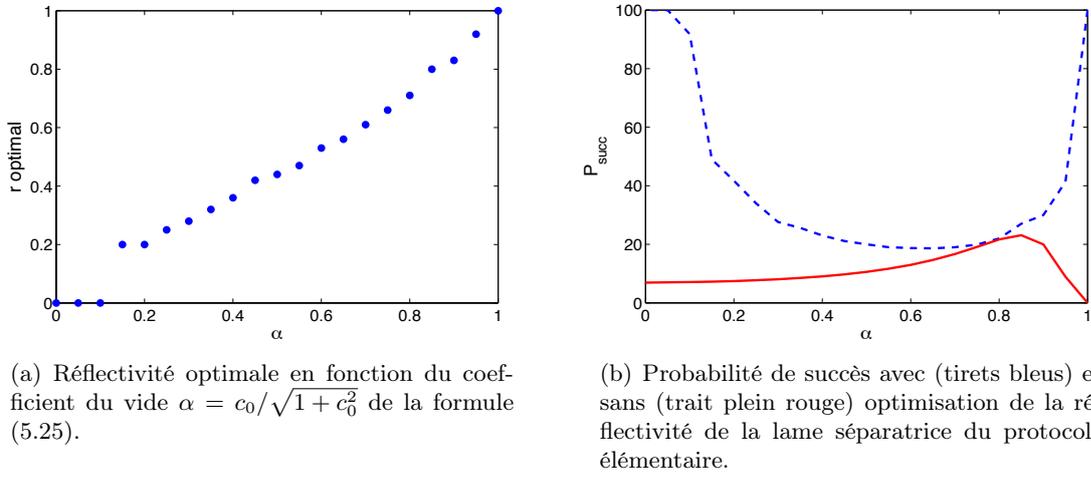


FIGURE 5.6 – Caractéristiques de la génération à un étage sous optimisation de la probabilité de succès, pour une fidélité cible de 99%.

Avec optimisation, on voit que la probabilité de succès est toujours supérieure à 20%, et tend vers 100% pour $\alpha = c_0/\sqrt{1+c_0^2} = 0$ et $\alpha = 1$, alors que sans optimisation celle-ci ne dépasse pas 30% et tend vers 0 si l'on veut générer du vide (cas trivial). L'intérêt de ce degré de liberté supplémentaire est donc indubitable.

Superposition à deux photons (5.26)

Dans le cas où l'on considère la génération d'états de la forme (5.26), l'état produit par un protocole utilisant un conditionnement de taille non nulle sera calculé grâce à l'équation

$$W_{\text{out}}^{(2)}(x, p) = \int_{\xi_1 - \Delta x^c}^{\xi_1 + \Delta x^c} dx' \int_{\mathbb{R}} dp' W_1^{(1)}(\tau x + \rho x', \tau p + \rho p') W_2^{(1)}(\tau x - \rho x', \tau p - \rho p'), \quad (5.35)$$

où $W_i^{(1)}(x, p)$ est la fonction de Wigner de l'état ressource $\alpha_i|0\rangle + \beta_i|1\rangle$:

$$W_i^{(1)}(x, p) = \alpha_i^2 W_0(x, p) + \beta_i W_1(x, p) + \frac{2\sqrt{2}\alpha_i\beta_i}{\pi} x e^{-x^2 - p^2}. \quad (5.36)$$

La fonction $W_{\text{out}}^{(2)}$ peut être calculée numériquement, puis comparée (après normalisation) à la fonction de Wigner théorique de l'état (5.26) en utilisant là encore la fidélité comme outil de

mesure de la qualité.

La probabilité de succès de l'opération de conditionnement sera finalement donnée par l'intégrale sur \mathbb{R}^2 de $W_{\text{out}}^{(2)}(x, p)$.

Illustrons la possibilité d'optimiser les paramètres (τ, ξ_1) du protocole en vue de maximiser la probabilité de succès de l'opération. Pour ce faire, nous allons considérer la génération de quatre états de la forme (5.26) :

$$|\psi_1^{(2)}\rangle = |2\rangle \quad (5.37a)$$

$$|\psi_2^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) \quad (5.37b)$$

$$|\psi_3^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |2\rangle) \quad (5.37c)$$

$$|\psi_4^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle). \quad (5.37d)$$

En nous fixant une fidélité entre l'état créé par le protocole imparfait (5.35) et l'état parfait (5.36), on peut maximiser la probabilité de succès en jouant sur le paramètre Δx^c . La dépendance de cette probabilité de succès en fonction de ξ_1 et τ pour l'état (5.37b) et une fidélité cible de 99% est par exemple montrée sur la figure 5.7 (a), révélant l'existence d'un jeu de paramètres optimal autour de $(\xi_1, \tau^2) = (0.46, 0.32)$. Les formules (5.28) ont été utilisées ici pour déterminer les paramètres des états ressources d'entrée en fonction de ξ_1 et τ .

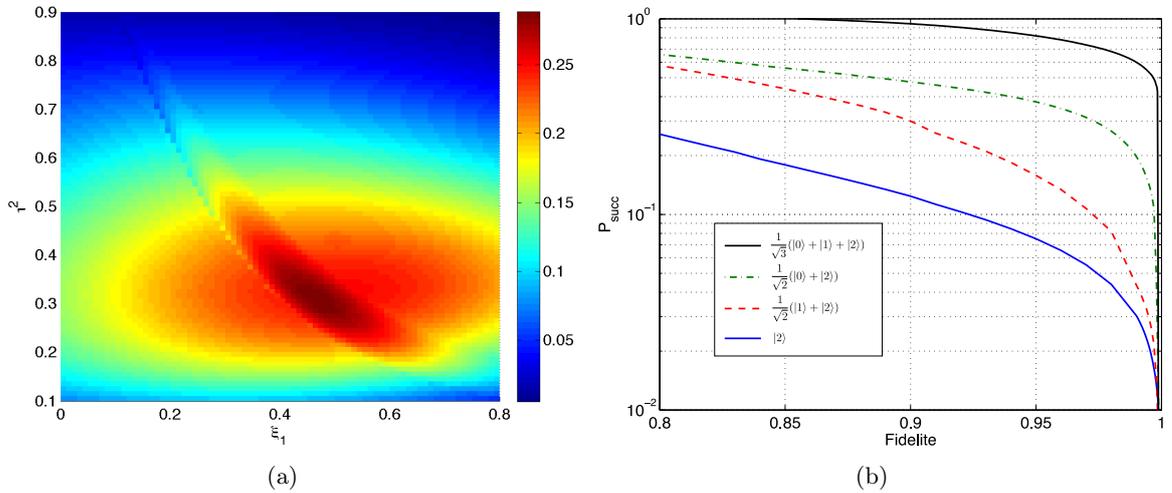


FIGURE 5.7 – Optimisation de la probabilité de succès pour la génération de superpositions à deux photons. (a) Probabilité de succès de formation de l'état (5.37b) en fonction des paramètres du protocole de croissance ξ_1 et τ . (b) Probabilité de succès maximale de l'opération en fonction de la fidélité cible pour les états (5.37a) en trait plein bleu, (5.37b) en trait tireté rouge, (5.37c) en trait mixte vert et (5.37d) en trait plein noir.

En traçant les probabilités de succès maximales en fonction de la fidélité cible, on obtient ensuite les courbes de la figure 5.7 (b) pour les quatre états (5.37). Cette figure révèle les bonnes performances de notre dispositif, étant donné que pour des fidélités cibles supérieures à 90%, des probabilités de succès de plus de 10% peuvent être atteintes, dans l'hypothèse où les états

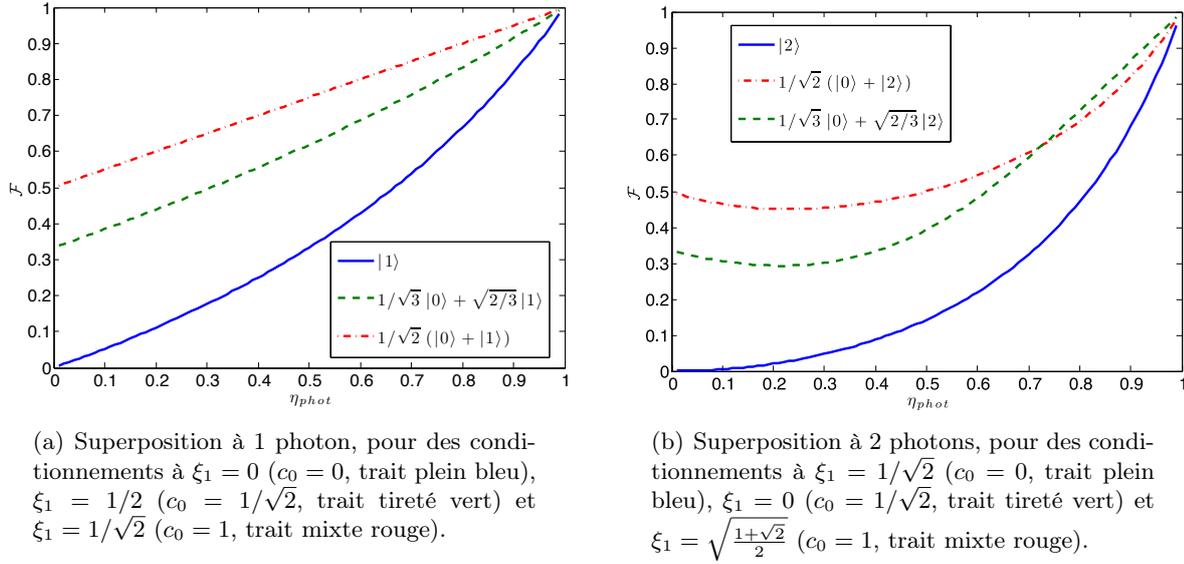


FIGURE 5.8 – Influence des imperfections des photons utilisés pour nourrir le protocole d'adjonction sur la fidélité de l'état de sortie avec l'état attendu.

ressources sont disponibles à la demande.

A titre de comparaison, l'étude de la génération des états (5.37) avait également été faite dans [Fiurášek 05] et le protocole proposé ne permettait d'atteindre que des probabilités de succès de l'ordre de 10^{-5} pour des fidélités cibles de l'ordre de 90%. On voit donc le fort intérêt potentiel de notre proposition.

5.3.3 Influence des imperfections des photons d'entrée

Il va de soi que le cas idéal précédent qui utilise des photons uniques parfaits de la forme (1.84) n'est qu'un cas limite et qu'il faudra considérer des imperfections pour un protocole expérimental raisonnable. Nous nous proposons ici d'étudier un cas particulier de ces imperfections : celui où l'état est mélangé avec le vide, le poids η_{phot} de l'état à 1 photon dans le mélange reflétant la qualité de l'état :

$$\rho_1 = \eta_{\text{phot}}|1\rangle\langle 1| + (1 - \eta_{\text{phot}})|0\rangle\langle 0|. \quad (5.38)$$

Pour étudier l'influence de ces imperfections, nous allons considérer les deux cas de superpositions donnés par les équations (5.25) (superposition entre 0 et 1 photon) et (5.30) (superposition entre 0 et 2 photons), et pour chacun de ces deux cas trois possibilités de superposition seront envisagées, $c_0 = 0$, $c_0 = 1/\sqrt{2}$ et $c_0 = 1$, obtenus respectivement pour $\xi_1 = 0$, $1/2$ et $1/\sqrt{2}$ pour l'état (5.25) et $\xi_1 = 1/\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{(1 + \sqrt{2})/2}$ pour l'état (5.30).

La figure 5.8 regroupe les résultats des simulations donnant la fidélité de l'état de sortie avec l'état attendu dans chacun des cas, montrant bien entendu que cette fidélité tend vers 1 lorsque la qualité des photons augmente, mais également révélant le fait que le poids du qubit de poids fort ($|1\rangle$ ou $|2\rangle$) ne détermine pas forcément la rapidité de la décroissance de cette fidélité. Cette observation est révélée par les courbes de la figure 5.8 (b), où les courbes verte tiretée et rouge mixte se croisent pour un coefficient $\eta_{\text{phot}} \simeq 0.7$.

Pour des états d'entrée constitués uniquement de vide ($\eta_{\text{phot}} = 0$), la fidélité de sortie correspond bien entendu au carré du poids du vide de la superposition cible (c'est la fidélité du vide avec cet état là).

Ces courbes indiquent la difficulté que pose notre protocole à générer des états de Fock, étant donné la rapidité de décroissance des deux courbes pleines ($\mathcal{F} = 30\%$ pour une fidélité d'entrée de 70% pour la génération d'un état de Fock à deux photons par exemple). Pour ce qui est des superpositions par contre la robustesse est bien meilleure, et l'état de sortie peut avoir une fidélité de l'ordre de celle du photon unique d'entrée. Ces simulations seront approfondies dans la suite du chapitre lors de l'étude du protocole de croissance de chats.

5.3.4 Influence des inefficacités de détections

La seconde imperfection à laquelle on peut également s'intéresser est celle relative à l'efficacité des détections homodynes. L'annexe C propose un traitement de ces imperfections, et montre qu'elles sont équivalentes – dans la limite où le seuil de conditionnement Δx^c est suffisamment petit, ce que l'on supposera ici – à un élargissement fictif de la fenêtre de conditionnement. La nouvelle largeur est alors donnée par $\sqrt{\frac{1-\eta_{dh}}{\eta_{dh}}}$, avec η_{dh} l'efficacité de détection homodyne.

La figure 5.9 montre l'allure de la fidélité de sortie des états en fonction de cette efficacité, et révèle là aussi des comportements très différents suivant le cas de figure à 1 ou 2 photons. Cette

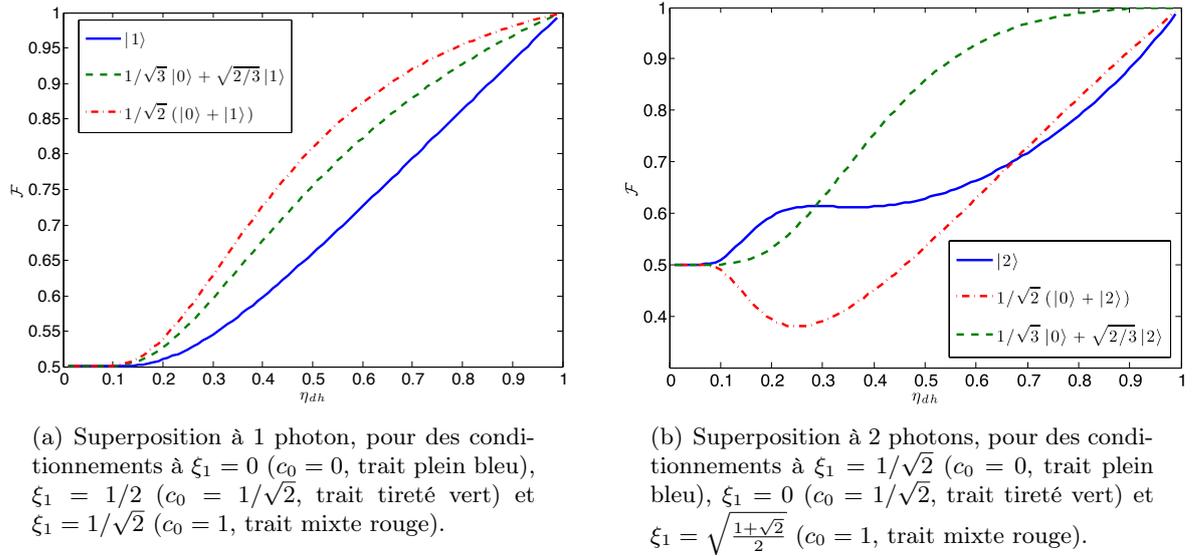


FIGURE 5.9 – Influence des imperfections des détections homodynes utilisées pour conditionner les transformations du protocole.

fidélité tend bien sûr vers 1 lorsque les imperfections disparaissent, mais sature à 50% pour une efficacité de détection nulle. En effet, ce cas de figure est équivalent à un conditionnement de largeur infinie, autrement dit à l'absence de conditionnement. Ainsi les états préparés sont respectivement $|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$ et $|0\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 2|$: ce ne sont que des mélanges statistiques. La fidélité avec les superpositions est donc bien de 50% dans tous les cas.

De la même manière que précédemment, on n'observe pas de comportement monotone dans les fidélités en fonction du poids du qubit de poids fort de la superposition : par exemple sur la figure 5.9 (b), la fidélité de l'état de sortie est meilleure pour l'état $1/\sqrt{3}|0\rangle + \sqrt{2/3}|2\rangle$ comparée à celle de l'état $1/\sqrt{2}(|0\rangle + |2\rangle)$.

On note tout de même un comportement intéressant pour le cas de la superposition $1/\sqrt{3}|0\rangle + \sqrt{2/3}|2\rangle$, où la fidélité reste longtemps élevée, et ce même pour de faibles efficacités

de détection (plus de 90% pour une efficacité de 55%).

Voyons à présent comment, au vu des observations faites, ce protocole permet la génération et la croissance d'états de la lumière propices au calcul quantique à variables continues.

5.4 Génération et croissance d'états "Chats de Schrödinger" comprimés

Nous nous proposons au sein de cette section d'utiliser le protocole décrit précédemment pour la génération d'états "Chats de Schrödinger" (1.86), dont nous avons vu la mise en œuvre expérimentale au chapitre 4.

5.4.1 Motivations : dispositif déjà proposé

5.4.1.1 Protocole et hypothèses

Penchons nous dans un premier temps sur un protocole déjà proposé pour la croissance d'états chats [Lund 04, Suzuki 06a, Rhode 07], et dont le principe est présenté sur la figure 5.10¹. Il

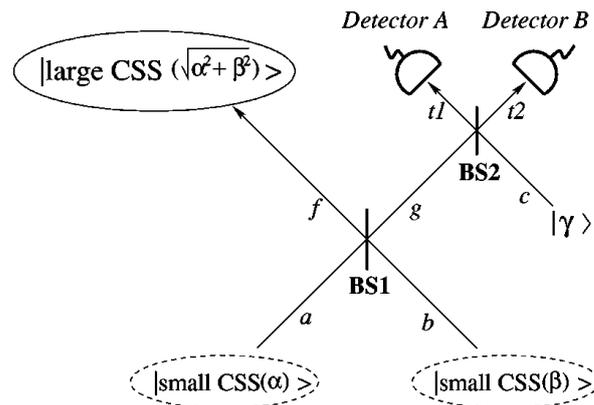


FIGURE 5.10 – Protocole pour la croissance de chats par détection de photons, extrait de [Lund 04].

est basé sur le fait que lorsque deux chats interfèrent sur une lame séparatrice de réflectivité appropriée, l'état de sortie contient un chat d'amplitude plus élevée dans un port et le vide dans l'autre. L'idée des auteurs a été de proposer un protocole basé non pas sur l'absence de détection mais sur la détection simultanée de photons dans les deux détecteurs. L'inefficacité de ceux-ci ne pose alors pas de problème pour la qualité de l'état (la transformation est conditionnée sur les détections), et a pour seule conséquence de faire décroître la probabilité de succès de l'opération totale.

5.4.1.2 Amplification

Si deux états chats de même amplitude sont placés en entrée de dispositif :

$$|\psi\rangle_{\text{in}} \propto \left[|\alpha_i\rangle - |-\alpha_i\rangle \right]_a \left[|\alpha_i\rangle - |-\alpha_i\rangle \right]_b, \quad (5.39)$$

1. Reprinted figure with permission from [Lund 04]. Copyright 2004 by the American Physical Society.

alors l'état bimode après la lame séparatrice **BS1** est

$$|\psi\rangle_{\text{out}_1} \propto |0\rangle_f \left[|\sqrt{2}\alpha_i\rangle_g + |-\sqrt{2}\alpha_i\rangle_g \right] - \left[|\sqrt{2}\alpha_i\rangle_f + |-\sqrt{2}\alpha_i\rangle_f \right] |0\rangle_g. \quad (5.40)$$

L'interférence du bras du mode g avec un troisième mode c contenant un état cohérent d'amplitude $\sqrt{2}\alpha_i$ produit finalement l'état trimode :

$$|\psi\rangle_{\text{out}_2} \propto |0\rangle_f \left[|2\alpha_i\rangle_{t_1} |0\rangle_{t_2} + |0\rangle_{t_1} |2\alpha_i\rangle_{t_2} \right] - \left[|\sqrt{2}\alpha_i\rangle_f + |-\sqrt{2}\alpha_i\rangle_f \right] |\alpha_i\rangle_{t_1} |-\alpha_i\rangle_{t_2}. \quad (5.41)$$

Ainsi, si les deux détecteurs (dans les modes t_1 et t_2) détectent simultanément des photons, cela signifie que l'état qu'ils reçoivent est l'état $|\alpha_i\rangle_{t_1} |-\alpha_i\rangle_{t_2}$, et donc que l'autre bras contient l'état $|\sqrt{2}\alpha_i\rangle_f + |-\sqrt{2}\alpha_i\rangle_f$, qui n'est autre qu'un état chat d'amplitude égale à l'amplitude initiale multipliée par un facteur $\sqrt{2}$. On a donc bien réalisé une "croissance" d'un état chat par le protocole.

5.4.1.3 Discussion

Ce protocole, jamais réalisé expérimentalement jusqu'à ce jour, présente plusieurs difficultés particulièrement dures à surmonter expérimentalement¹ :

- Bien entendu, ce protocole requiert de disposer d'états chats a priori, en vue de les amplifier. Ces états étant déjà complexes à produire, comme nous l'avons déjà vu, cela pose une première limitation au dispositif.
- Le mélange sur la lame **BS1** doit se faire avec la bonne phase, ainsi les chats $|CSS(\alpha)\rangle$ et $|CSS(\beta)\rangle$ doivent être verrouillés en phase.
- Le mélange de l'état du mode g avec l'état cohérent $|\gamma\rangle$ doit lui aussi se faire de manière verrouillée en phase, et l'amplitude de cet état $|\gamma\rangle$ doit être parfaitement contrôlée.
- Les détecteurs A et B ne doivent cliquer que sur les photons du bon mode. Or, le plus souvent les protocoles de génération d'états chats utilisent de la génération spontanée de paires, ce qui fournit un état hautement multimode. Un filtrage supplémentaire doit donc être considéré, faisant drastiquement chuter la probabilité de succès de l'opération.
- Enfin, les modes des deux chats interagissant sur la lame ainsi que les pertes qu'ils subissent jouent un rôle central dans la qualité de l'état produit : en plus d'amplifier l'état, le protocole amplifie les imperfections.

Au vu des nombreux inconvénients de ce dispositif, nous nous proposons dans cette section d'utiliser le protocole d'adjonction décrit en 5.2 pour générer des états "chats de Schrödinger".

5.4.2 Principe du nouveau protocole

5.4.2.1 Croissance de chats

Tous les concepts que l'on vient d'introduire peuvent être utilisés pour permettre la réalisation d'états "chats de Schrödinger" comprimés (que nous noterons ECC pour Etats Chats Comprimés dans la suite) avec notre protocole.

Ceux-ci, au vu de l'équation (1.86), ont une fonction d'onde constituée d'une somme de deux gaussiennes. Ainsi, si l'on dispose d'un état dont la fonction d'onde initiale est composée de deux extrema de même taille équidistants de l'origine, le théorème de gaussianisation locale montre que ceux-ci seront transformés en deux gaussiennes (donc ressembleront de plus en plus à un chat) dont les centres s'écarteront de plus en plus (donc à des chats de plus en plus gros) avec

1. Les notations sont toujours celles de la figure 5.10.

un nombre croissant d'opérations.

Or il se trouve que nous avons à notre disposition un état dont la fonction d'onde rassemble ces critères : il s'agit de l'état de Fock à un photon $|1\rangle$. Ainsi en plaçant des photons uniques à l'entrée du dispositif de croissance, dans le cas $r = t$ et conditionné sur $x' = 0$, on s'attend à obtenir des états chats d'amplitude et de fidélité croissantes avec le nombre d'étages.

L'état créé par n opérations de croissance nourries par des photons uniques s'écrit :

$$\psi_{\text{ECC}_{\text{pc}}}(x) = \sqrt{\frac{2^{2n}n!}{\sqrt{\pi}(2n)!}} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (5.42)$$

La formule (5.23) nous permet de calculer les paramètres attendus :

$\psi_{\text{in}}(x)$	x_i	$\psi_{\text{in}}(x_i)$	$\psi_{\text{in}}''(x_i)$	$\psi_{\text{pc}}(x)\tilde{\alpha}$
$\frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} x e^{-\frac{x^2}{2}}$	-1	$-\sqrt{\frac{2}{e\sqrt{\pi}}}$	$2\sqrt{\frac{2}{e\sqrt{\pi}}}$	$(-1)^n e^{-(x+\sqrt{n})^2}$
	1	$\sqrt{\frac{2}{e\sqrt{\pi}}}$	$-2\sqrt{\frac{2}{e\sqrt{\pi}}}$	$e^{-(x-\sqrt{n})^2}$

L'état vers lequel le protocole converge lorsque $n \rightarrow +\infty$ s'écrit donc :

$$\phi_{\text{ECC}}(x) = \left[\frac{2}{\pi} \right]^{1/4} \frac{e^{-(x-\sqrt{n})^2} + (-1)^n e^{-(x+\sqrt{n})^2}}{\sqrt{2(1 + (-1)^n e^{-2n})}}. \quad (5.43)$$

C'est l'équation de la fonction d'onde d'un ECC d'amplitude \sqrt{n} et comprimé de $\sqrt{2}$ suivant la quadrature x , et de parité donnée par la parité du nombre n d'opérations de croissance utilisées dans le protocole.

On remarque que l'état créé par notre dispositif est exactement le même que celui de [Ourjoumtsev 07b], mais la différence principale est que notre protocole ne requiert pas la génération d'états de Fock à $|n\rangle$ photons arbitraires, la taille du chat étant croissante avec n . La figure 5.11 montre les protocoles à un et deux étages ($n = 2$ et $n = 2^2$) ainsi que les fonctions d'ondes des ECC générées par ce protocole. Cette figure montre la performance du protocole, étant données les très fortes fidélités des états créés avec des états parfaits. A un nombre quelconque de photons (et donc plus seulement une puissance de 2), l'amplitude et la compression du chat le plus proche de l'état de sortie sont donnés sur la figure 5.12. On voit que lorsque n croît, l'amplitude du chat converge très vite vers l'amplitude théorique \sqrt{n} . La compression quant à elle converge également vers la valeur $\sqrt{2}$, mais de manière plus lente.

5.4.2.2 Avantages du protocole

A la différence du protocole de [Lund 04], ce protocole ne nécessite pas de disposer en entrée d'états chats mais de photons uniques seulement. Ceux-ci, produits avec une qualité croissante avec le temps étant donné le perfectionnement des dispositifs de génération [Morin 12], peuvent permettre la formation d'états chats plus fidèles.

Un second avantage réside dans le fait que les états de Fock d'entrée sont des invariants de phase, et aucun asservissement de phase n'est donc nécessaire en amont de leur interférence. Cette remarque vaut également pour un protocole proposé parallèlement à celui présenté ici [Laghaout 13], où les auteurs proposent d'utiliser des états "chatons" pour nourrir le même protocole : autrement dit des états photons uniques comprimés [Ourjoumtsev 06b]. D'une certaine manière, dans ce montage, les photons sont "mis à la bonne taille" avant d'être utilisés dans le

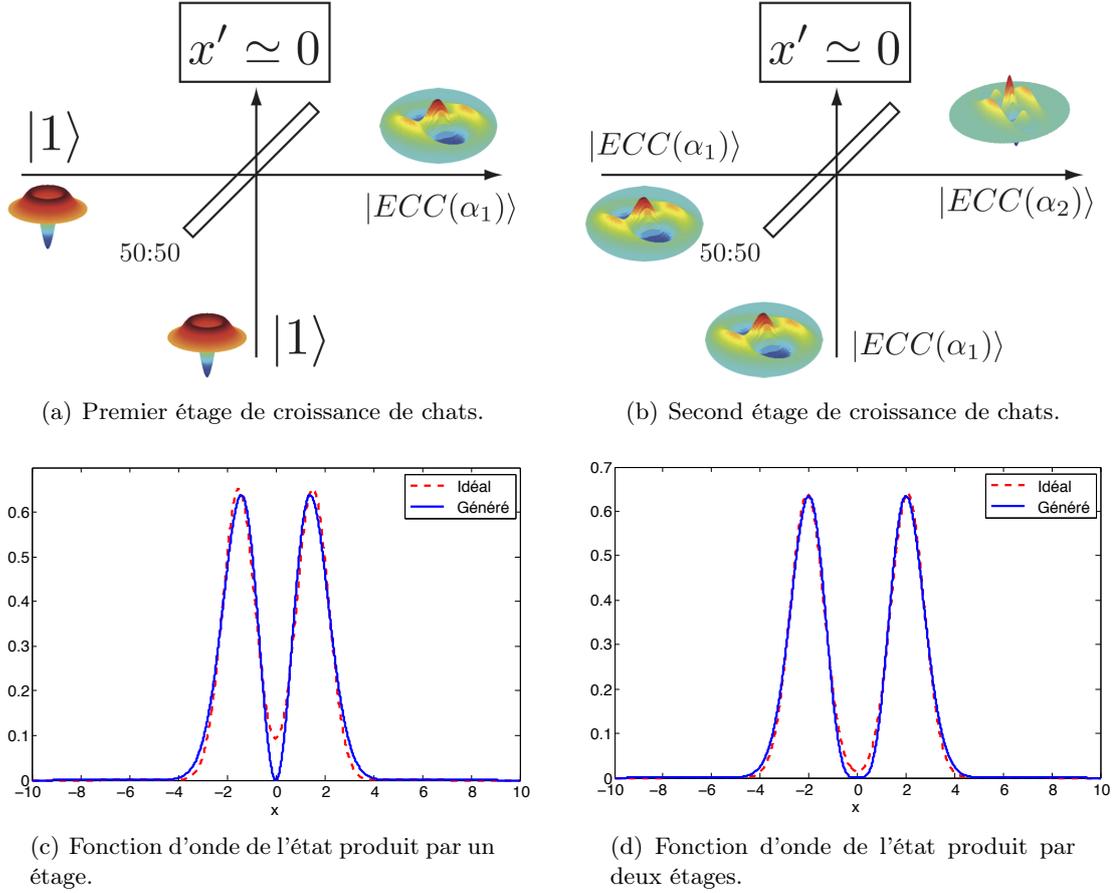


FIGURE 5.11 – Premier étage ((a) et (c)) et second étage ((b) et (d)) du protocole de croissance d'états chats de Schrödinger. A un étage, l'état généré est fidèle à 99% à un état chat de Schrödinger d'amplitude $\alpha_1 = 1.63$ et de facteur de compression $s_1 = 1.52$ suivant la quadrature x . A deux étages, cette fidélité monte déjà à 99.7% avec un chat d'amplitude $\alpha_2 = 2.12$ et de compression $s_2 = 1.45$.

protocole de croissance, au prix d'une dépendance de phase.

Ensuite, concernant le conditionnement des états, une mesure homodyne est intrinsèquement monomode de part le filtrage que constitue l'oscillateur local. Ainsi les problèmes relatifs à l'utilisation de détecteurs de photons ne se posent plus.

Enfin, le protocole autorise à moduler la probabilité de succès contrairement à [Lund 04]. En effet, comme nous l'avons vu dans le paragraphe 5.3.2.2, le conditionnement se fera dans une fenêtre $[-\Delta x^c, \Delta x^c]$ dont la taille peut être choisie par l'opérateur, permettant un choix de la probabilité de succès. Bien entendu, une augmentation de la probabilité de succès se fera au détriment de la fidélité de l'état. L'étude du compromis entre probabilité de succès et fidélité est l'objet de la section suivante.

5.4.3 Calcul de l'état de sortie

Avant de passer à la suite, arrêtons-nous sur les méthodes de calcul des états de sortie du protocole. Dès que l'on veut s'intéresser aux imperfections de celui-ci, le calcul en fonctions d'ondes n'est bien évidemment plus valide, comme on a pu le voir dans la section 5.3.

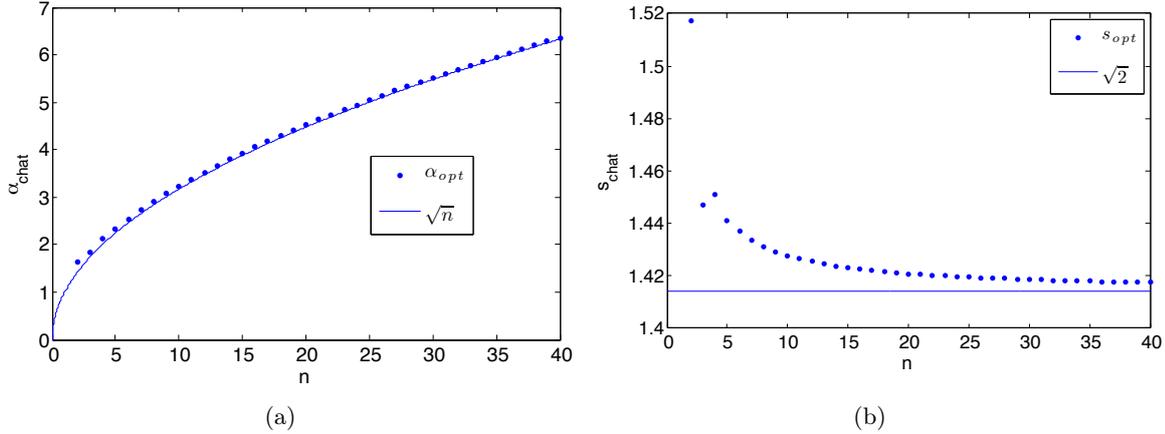


FIGURE 5.12 – Caractéristiques du chat produit par n photons. (a) Taille du chat de sortie (points) superposée à la loi théorique $\alpha_{\text{chat}} \simeq \sqrt{n}$ (ligne). (b) Compression du chat de sortie (points) superposée à la loi théorique $s = \sqrt{2}$.

Ainsi, si l'on veut traiter le cas le plus général analytiquement, on est amené à calculer des intégrales du type :

$$W_{\text{out}}(x_1, p_1) = \int_{\mathbb{R}} \int_{-\Delta x^c}^{\Delta x^c} W_{\text{in}}\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{2}}\right) W_{\text{in}}\left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{2}}\right) dx_2 dp_2. \quad (5.44)$$

De part la description en fonction de Wigner, il est très complexe de réaliser ces calculs d'intégrales analytiquement étant donné le fait qu'elles font intervenir la *fonction d'erreur* définie par :

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (5.45)$$

qui n'a pas d'expression analytique plus simple.

Une des astuces possibles, pour malgré tout réussir à mener le calcul à bien, consiste à ne pas réaliser une intégrale entre $[-\Delta x^c, \Delta x^c]$ pour la quadrature conditionnée, mais à réaliser une intégrale sur \mathbb{R} de la fonction multipliée par une gaussienne d'écart-type Δx^c . Cette méthode, utilisée dans [Ourjoumtsev 07a] pour un cas simple, montre vite ses limites lorsqu'il s'agit de pousser le calcul pour un nombre arbitraire d'étages. Dans l'hypothèse où toutes les largeurs de conditionnement sont égales pour tous les étages, l'annexe D propose toutefois un calcul explicite de l'expression de la fonction de Wigner.

Nous avons donc choisi, en vue de traiter le cas général, de réaliser le calcul de manière numérique en utilisant l'outil performant que constitue la transformée de Fourier rapide (ou *FFT* pour Fast Fourier Transform). La méthode complète est détaillée dans l'annexe A, et la suite de ce chapitre utilisera ces outils pour réaliser les simulations nécessaires.

5.4.4 Performances du protocole

Nous nous proposons ici d'étudier le rôle des différents types d'imperfections auxquelles le protocole peut être sujet, avec l'utilisation des outils précisés précédemment.

5.4.4.1 Probabilité de succès

Tout d'abord, voyons quelle est l'influence de la fidélité sur la probabilité de succès de l'opération. Pour ce faire, nous allons considérer les protocoles de croissance de 1 à 5 étages, en

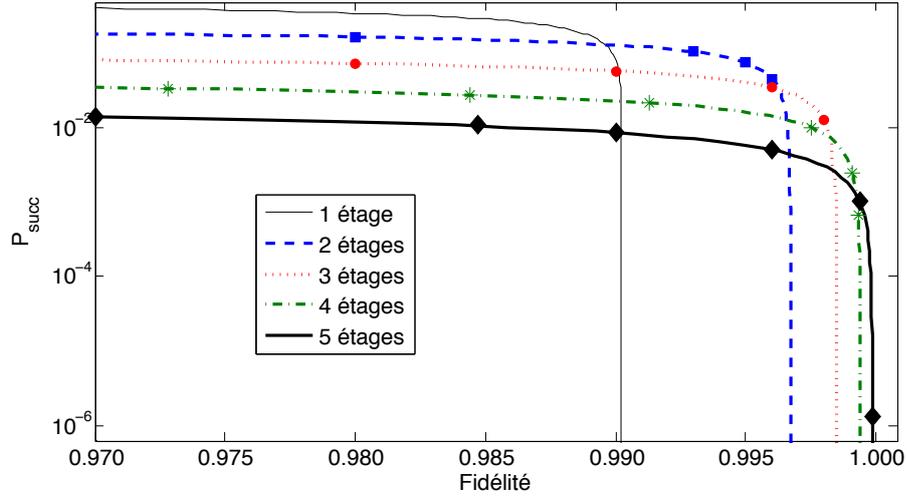


FIGURE 5.13 – Probabilité de succès de l’opération de croissance maximisée en fonction de la fidélité cible de l’état. L’optimisation sur tous les paramètres donne les symboles (carrés pour 2 étages, ronds pour 3, étoiles pour 4 et losanges pour 5), et la loi empirique $\Delta x_{n+1}^c = 1.3\Delta x_n^c$ donne les courbes.

nous autorisant à adapter les largeurs de conditionnements de manière séparée : $\Delta x_1^c, \dots, \Delta x_5^c$. En supposant les photons uniques d’entrée parfaits, on peut optimiser ce jeu de paramètres en vue de maximiser la probabilité de succès sous la contrainte d’une fidélité minimale. Le tracé de cette probabilité de succès est donné sur la figure 5.13, dans l’hypothèse où celle-ci est donnée par la formule (5.14).

Comme attendu, plus le nombre d’étages augmente, plus la fidélité maximale atteignable augmente. De plus, la probabilité de succès tend vers 0 pour une fidélité se rapprochant de la fidélité limite (limite où tous les Δx^c tendent vers 0), et la probabilité de succès décroît avec le nombre d’étages. Le fait d’avoir utilisé des mémoires quantiques pour stocker les états entre chaque étage fait que cette décroissance ne se fait pas de manière exponentielle mais selon l’inverse du nombre de ressources nécessaires : par exemple pour une fidélité cible de 97%, la probabilité de succès décroît comme $\sim 1.3/n^{1.3}$ où n est le nombre minimal de photons nécessaires au protocole. Le nombre moyen de ressources nécessaires est donc de l’ordre de n^2 . Le fait que l’état produit ait une taille qui augmente avec le nombre d’étages fait qu’il est possible de faire croître la largeur de l’intervalle de conditionnement sans dégrader l’état. C’est ce que nous pouvons voir sur la figure 5.13, où les lignes ont été représentées sous l’hypothèse que $\Delta x_{n+1}^c = 1.3\Delta x_n^c$. Cette loi empirique est par ailleurs proche du choix optimal des Δx_n^c [Etesse 14].

5.4.4.2 Pertes entre deux étages

Le premier type de pertes que l’on peut considérer est lié à l’utilisation des mémoires quantiques dans le dispositif. En effet, celles-ci ont toujours une efficacité de stockage finie qui va avoir pour conséquence de dégrader la qualité de l’état.

Nous allons supposer que cette efficacité est assimilable à des pertes en ligne, et nous allons nous intéresser à la valeur de la fidélité ainsi qu’à l’amplitude du chat de sortie dans le cas d’une amplification à deux étages. Le principe ainsi que la position de la mémoire quantique sont précisés sur la figure 5.14 (a). Pour les simulations, on suppose qu’une seule mémoire était présente : le

stockage d'un état n'a besoin d'être effectué que dans un bras, afin que celui-ci "attende" l'état de l'autre bras.

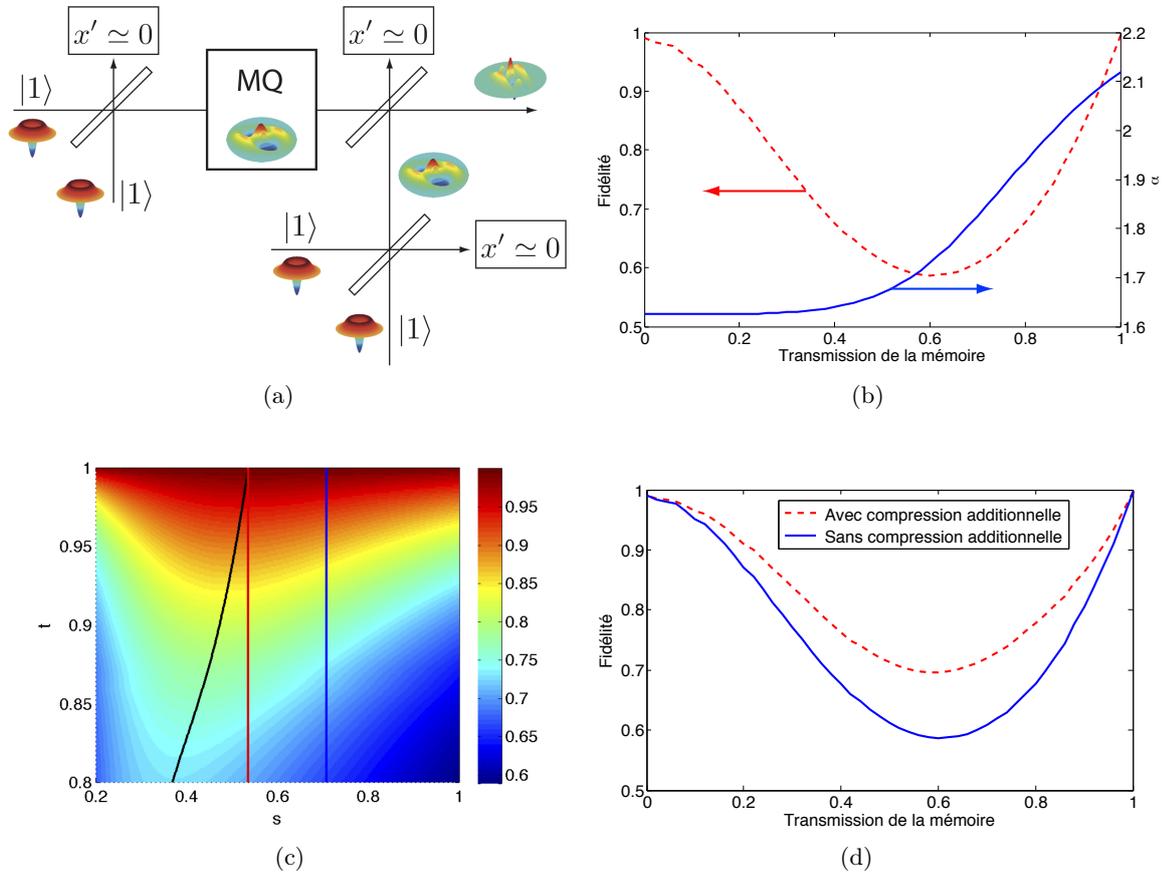


FIGURE 5.14 – Introduction de pertes entre deux étages et optimisation de la compression. (a) Protocole à deux étages de croissance avec mémoire quantique (MQ). (b) Fidélité et amplitude des états en sortie du dispositif, en fonction de l'efficacité de la mémoire quantique. (c) Fidélité d'un chat après avoir subi une compression s suivant p (ici comprise entre 0 et 1, donc une anti-compression) puis des pertes caractérisées par une transmission t . La compression de notre dispositif est indiquée en bleu ($1/\sqrt{2}$), la compression menant à un nombre minimal de photons moyen en rouge, et la compression maximisant la fidélité en noir. (d) Fidélité de l'état de sortie du protocole après optimisation de la compression avant passage dans la mémoire quantique.

Les dépendances sont tracées sur la figure 5.14 (b), et montrent que l'amplitude du chat produit décroît pour une qualité de transmission décroissante. La fidélité, quant à elle, a une variation non monotone en fonction de la transmission de la mémoire quantique : partant de 100% pour une transmission de 100%, elle décroît jusqu'à 60% pour une efficacité de stockage de 60%, pour remonter à 100% pour une mémoire inefficace (0%). Ce dernier cas surprenant s'explique simplement : l'état qui sort d'un étage de croissance a une fonction d'onde $\psi_{in_1} \propto x^2 e^{-x^2/2}$, et la mémoire quantique de transmission nulle ne laisse passer que le vide $\psi_{in_2} \propto e^{-x^2/2}$. Ainsi le mélange sur la lame du second étage (d'équation donnée par (5.19)) n'aura pas d'incidence sur la fonction d'onde, et l'état de sortie sera $\psi_{out} \propto x^2 e^{-x^2/2}$: tout se passe comme si l'état n'avait subi qu'un seul étage de croissance, et on retrouve bien une fidélité de 100% avec un état chat comprimé.

5.4.4.3 Efficacité de détection : rôle de la compression

Comme on l'a remarqué dans le paragraphe 5.4.2.1, les états qui sont générés par notre protocole sont comprimés d'un facteur $\sqrt{2}$ suivant la quadrature x . Cette compression, qui tend à ramener les deux pics de la fonction de Wigner plus proches l'un de l'autre, est également le signe d'un nombre restreint de photons dans l'état. En effet un état chat de Schödinger d'amplitude \sqrt{n} a, pour n grand, un nombre moyen de photons égal à n et on sait qu'un protocole de croissance à p étages génère un état qui ne peut pas contenir plus de $n = 2^p$ photons. Par exemple, l'état produit par un étage de croissance est :

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle. \quad (5.46)$$

Sachant malgré tout que la fidélité de notre état avec un chat parfait tend vers 1, cela signifie donc que l'on a "comprimé" l'information d'un état chat (comportant en moyenne n photons) dans notre état (comportant un nombre fini inférieur à n de composantes de Fock). La compression a donc un double sens ici : le sens usuel de la compression de quadrature et le sens du nombre de photons contenus dans l'état.

Le fait de contenir un plus petit nombre de photons rend également plus robuste aux pertes. En effet, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.3.1.3, les pertes ont pour effet de "lisser" et rapprocher de l'origine la fonction de Wigner, le lissage étant plus ou moins sévère en fonction de la valeur des pertes. Ainsi, pour qu'une fonction soit robuste aux pertes, il faut que les variations de celle-ci soient les plus lentes possibles pour résister à cette opération de lissage.

Or, la fonction de Wigner de l'état de Fock à n photons (1.84) est de la forme d'un polynôme de degré n en $R^2 = x^2 + p^2$ multiplié par une gaussienne. Cela signifie que si un état a une fonction de Wigner qui a des variations rapides, cela implique un grand nombre de composantes de Fock. Par contreposée, si le nombre de composantes de Fock est faible dans l'état, les fluctuations ne pourront pas être arbitrairement rapides. Ainsi, réduire le nombre de photons dans l'état par compression diminue la rapidité des variations d'une fonction de Wigner, et augmente ainsi la robustesse aux pertes.

Cet effet est illustré sur la figure 5.14 (c), où la fidélité d'un état chat est représentée en fonction de la compression s qu'il subit (suivant la quadrature p , pour varier dans $[0,1]$) et des pertes t qui suivent : la fidélité maximale est obtenue pour une compression menant à un nombre minimal de photons moyen dans l'état (pour de fortes efficacités).

Etant donné que notre état n'est pas optimisé en compression (facteur 1.41 contre 1.9 pour un nombre minimal de photons dans l'état), on peut chercher à optimiser celle-ci pour maximiser la fidélité en fonction de la transmission. Autrement dit, cela revient sur la figure 5.14 (a) à rajouter une compression avant la mémoire quantique, et une décompression de même facteur après celle-ci. Les résultats de fidélité en fonction des pertes sont donnés sur la figure 5.14 (d) et montrent une amélioration de plus de 10% de la fidélité pour une transmission de la mémoire de 60%.

5.4.4.4 Imperfection des photons

Une autre source d'imperfections pour les états de sortie est bien entendu la qualité des photons uniques. Ces états, expérimentalement bien décrits par la formule (2.17) sont, on le rappelle, principalement sujets à quatre types d'imperfections :

- Les pertes, caractérisées par la transmission η ,

- Les imperfections de génération du fait de l'excès de bruit, caractérisées par le paramètre γ ,
- Les imperfections de génération du fait des paires multiples, caractérisées par le paramètre de compression r ,
- Les imperfections de conditionnement, caractérisées par la pureté modale ξ .

Nous allons étudier ces imperfections de manière séparée afin d'en apprécier les effets individuels.

Pertes η_{phot}

Ce type d'imperfection est celui qui est le plus souvent considéré lorsqu'il s'agit de traiter de photons imparfaits [Lvovsky 01] : ces états sont mélangés avec du vide comme

$$\rho_{\text{out}} = \eta_{\text{phot}}|1\rangle\langle 1| + (1 - \eta_{\text{phot}})|0\rangle\langle 0|. \quad (5.47)$$

La valeur η_{phot} donne donc le poids du photon unique dans l'état, donc la qualité de ce dernier. La figure 5.15 (a) donne l'allure de la fidélité de l'état de sortie pour 1 à 3 étages en fonction

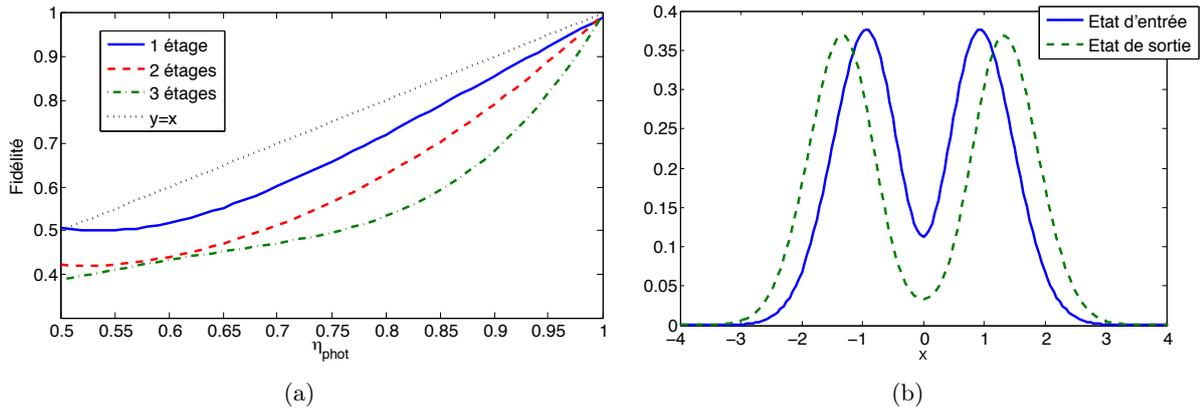


FIGURE 5.15 – Influence des imperfections du photon unique dans le cas d'un mélange statistique avec le vide. (a) Fidélité en fonction de la qualité du photon unique pour 1, 2 et 3 étages. La comparaison avec la droite $y = x$ est donnée en pointillés. La courbe bleue en trait plein est la même que celle de la figure 5.8 (b) pour la superposition (5.46). (b) Action du protocole de croissance sur la distribution de probabilité de l'état, dans le cas où le photon unique (en bleu) est imparfait. Le protocole compense cette imperfection en éloignant les pics et en creusant davantage le centre de la distribution (en tirets verts).

du poids η_{phot} du photon unique dans le mélange statistique avec le vide. On constate que pour un étage, cette fidélité est très proche de la droite $y = x$ représentée en pointillés (symbolisant une transformation qui préserve la qualité de l'état) : autrement dit le protocole en lui-même n'ajoute que peu d'imperfections. Bien entendu, lorsque le nombre d'étage augmente, cette fidélité diminue plus rapidement. On peut avoir une intuition de cette préservation de qualité en se penchant sur la figure 5.15 (b), qui représente les distributions marginales de probabilité suivant la quadrature x de l'état d'entrée (5.47) ainsi que de l'état de sortie. On se rappelle que la transformation de l'état se fait suivant l'équation :

$$W_{\text{out}}(x, p) \propto \int_{-\Delta x^c/2}^{\Delta x^c/2} dx' \int_{\mathbb{R}} dp' W_{\text{in}}\left(\frac{x+x'}{\sqrt{2}}, \frac{p+p'}{\sqrt{2}}\right) W_{\text{in}}\left(\frac{x-x'}{\sqrt{2}}, \frac{p-p'}{\sqrt{2}}\right), \quad (5.48)$$

où W_{in} est l'état à l'entrée du dispositif. Ainsi, en ce qui concerne la distribution marginale de probabilité, la loi de transformation s'écrit comme :

$$P_{\text{out}}(x) \propto \int_{-\Delta x^c/2}^{\Delta x^c/2} dx' P_{\text{in}}\left(\frac{x+x'}{\sqrt{2}}\right) P_{\text{in}}\left(\frac{x-x'}{\sqrt{2}}\right) \underset{\Delta x^c \rightarrow 0}{\simeq} P_{\text{in}}^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad (5.49)$$

où $P_{\text{in}}(x) = \int W_{\text{in}}(x, p) dp$. Donc la loi de transformation valable pour les fonctions d'ondes (5.19) l'est aussi pour les distributions marginales. Etant donné que l'état dont on dispose en entrée a une distribution initialement creusée, on s'attend à ce que le protocole la creuse davantage tout en éloignant ses maxima. Ce creusement est un signe que la négativité de la fonction est préservée, et donc une explication au maintien de la qualité de l'état.

Autres imperfections du photon unique

La figure 5.16 donne un aperçu de la dépendance de la fidélité de l'état de sortie en les trois imperfections de photon unique γ , r et ξ pour un étage de croissance de chats.

On remarque la sensibilité de la qualité de l'état de sortie en l'imperfection de génération γ (figure 5.16 (a)) : les photons non corrélés jouent rapidement un rôle nuisible dans la qualité de l'état, comme on a pu le voir dans le chapitre 3. La fidélité finit par remonter pour des γ élevés (≥ 1), car l'état de sortie se rapproche de plus en plus d'un état thermique, relativement ressemblant au vide pour de faibles gains paramétriques (l'amplitude du chat le plus proche est alors très faible).

La figure 5.16 (b) montre que la valeur de γ doit être inférieure à 0.2 si l'on veut espérer générer des états de bonne qualité avec une probabilité de succès acceptable.

La rapide décroissance de la fidélité en fonction de la pureté modale ξ est elle aussi à noter (figures 5.16 (e) et (f)), du fait là encore de mesures de photons non corrélés. Par contre, de la même manière que précédemment, si la pureté modale est nulle, tout se passe comme s'il n'y avait pas de conditionnement de photon unique et l'état d'entrée est un état thermique de faible variance.

Une imperfection à laquelle le protocole est moins sensible est celle du gain paramétrique r , comme montré sur les figures 5.16 (c) et (d) : dans nos régimes de fonctionnement ($r \leq 0.3$), la fidélité varie de moins de 10%, pour une amplitude de chat quasiment constante. La partie finale de la courbe d'amplitude, croissante pour $r \geq 1$, n'a pas de réel sens physique étant donné le fait que la fidélité tend vers 0. A la différence des deux précédents, ce paramètre peut être facilement ajusté en jouant sur la puissance de la pompe générant les paires paramétriques.

5.4.4.5 Imperfections des détections homodynes de conditionnement

De la même manière que dans le paragraphe 5.3.4, on peut finalement s'intéresser à l'influence de l'efficacité homodyne η_{dh} des détections servant au conditionnement de l'état. On rappelle que dans ce cas, et dans l'hypothèse où $\Delta x^c \ll \sqrt{\frac{1-\eta_{dh}}{\eta_{dh}}}$, tout se passe comme si l'efficacité augmentait artificiellement la largeur de conditionnement jusqu'à $\sqrt{\frac{1-\eta_{dh}}{\eta_{dh}}}$ (voir annexe C). La figure 5.17 montre la fidélité de l'état de sortie en fonction de cette efficacité, et révèle la robustesse de celui-ci vis-à-vis de cette imperfection. Les efficacités homodynes que l'on atteint aujourd'hui étant très aisément supérieures à 90%, les performances du protocole seront donc d'abord limitées par les imperfections des photons uniques.

Après cette étude de génération d'états chats de Schrödinger, voyons comment le même protocole permet la génération d'états plus complexes de la lumière : les états "Chats multipattes".

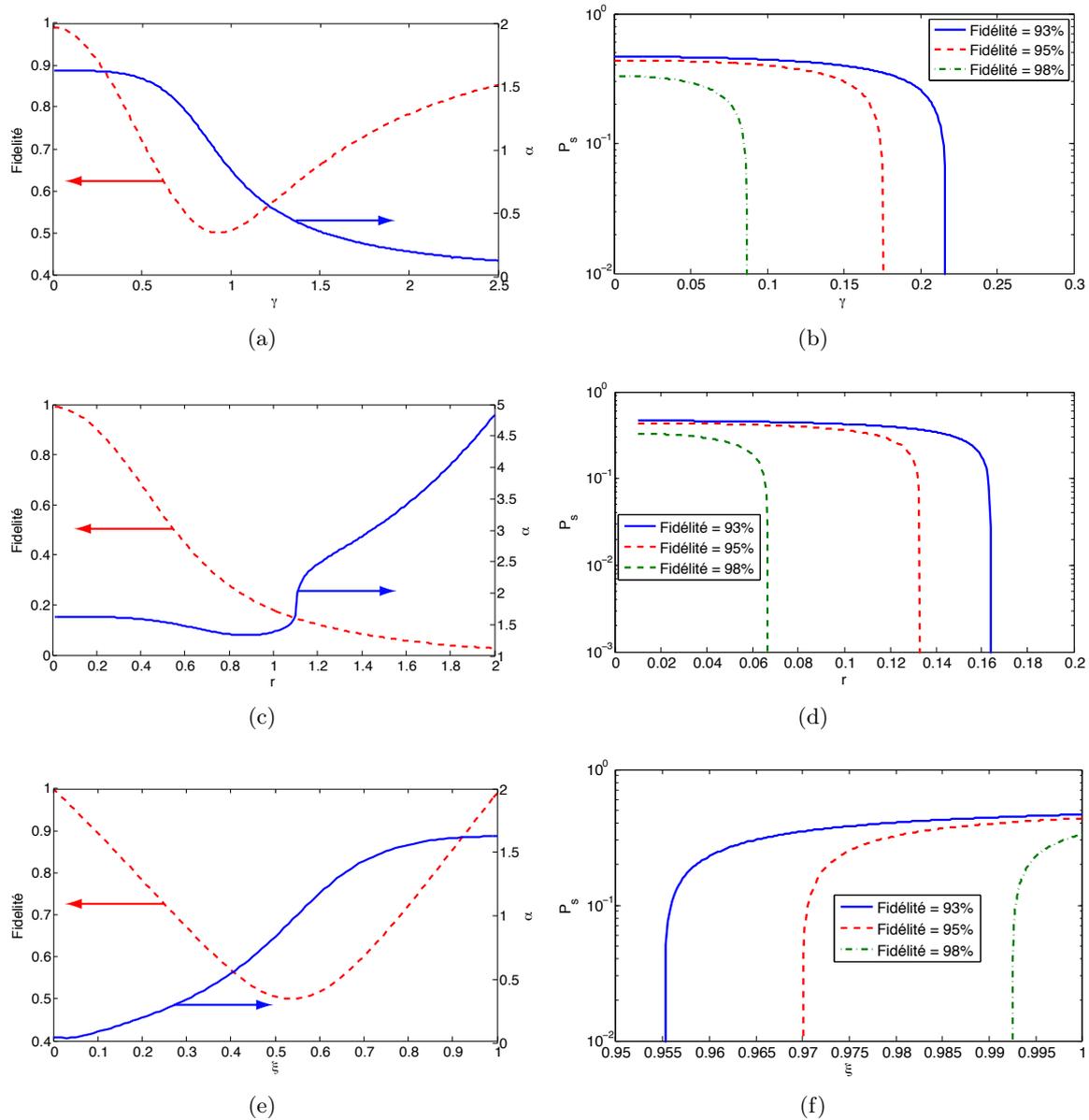


FIGURE 5.16 – Sensibilité du protocole de croissance de chat à un étage pour les imperfections de génération (a) γ et (c) r , et (e) pour la pureté modale ξ , et comparaison des probabilités de succès maximales pour des fidélités cibles variables en fonction de (b) γ , (d) r et (f) ξ .

5.5 Génération d'états "Chats multipattes"

Etant donnés les états chats que l'on a pu produire grâce au protocole présenté, une autre application du protocole présenté à la section 5.2 va nous permettre de générer des états plus complexes : les états "chats multipattes".

5.5.1 Définition mathématique

De la même manière que pour un état chat usuel, un état chat multipattes est une superposition cohérente d'états cohérents, où le nombre de ces états cohérents n'est pas limité à 2.

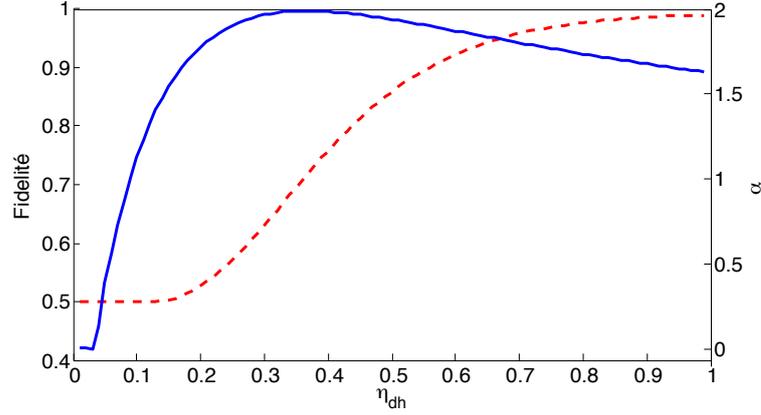


FIGURE 5.17 – Amplitude (trait plein bleu) et fidélité (trait tireté rouge) du chat le plus proche en fonction de l’efficacité de détection homodyne pour un étage de croissance. La courbe tiretée est identique à celle présentée sur la figure 5.9 (b) pour la superposition (5.46).

Mathématiquement, leur fonction d’onde s’écrit :

$$\langle x|\psi_{\text{mult}}\rangle = \frac{1}{N_{\text{mult}}} \sum_{i=1}^n \epsilon_i \left[e^{-\frac{(x-\sqrt{2}\alpha_i)^2}{2}} + \epsilon e^{-\frac{(x+\sqrt{2}\alpha_i)^2}{2}} \right], \quad (5.50)$$

où N_{mult} est un facteur de normalisation, et où $\epsilon_i = \pm 1$ et $\epsilon = \pm 1$ (on limite notre étude à des chats pairs ou impairs, avec l’hypothèse qu’ils ont tous la même parité). Cette écriture, faisant intervenir n fonctions d’ondes, est celle d’un état que l’on appellera *chat à $2n$ pattes d’amplitudes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$* (supposés réels ici). Comme somme d’états chats, il est simple de prouver que si $\forall i, \epsilon_i = \epsilon = +1$, la représentation p de notre état s’écrit sous la forme (cf (1.89b)) :

$$\langle p|\psi_{\text{mult}}\rangle = \frac{1}{N'_{\text{mult}}} \sum_{i=1}^n \cos(\sqrt{2}\alpha_i p) e^{-\frac{p^2}{2}}. \quad (5.51)$$

Nous allons voir comment notre protocole permet, de manière simple, la génération de ces chats à 2^n pattes.

5.5.2 Croissance du nombre de pattes

L’idée est en fait la même que pour la croissance de la taille des états chats, et nous allons utiliser un protocole proche à celui de la figure 5.11 (a), en remplaçant les états ressources $|1\rangle$ par des états chats déphasés de $\pi/2$ de fonctions d’ondes respectives :

$$\langle x|\psi_1\rangle = \frac{1}{N_1} \cos(\sqrt{2}\alpha'_1 x) e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (5.52a)$$

$$\langle x|\psi_2\rangle = \frac{1}{N_2} \cos(\sqrt{2}\alpha'_2 x) e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (5.52b)$$

Si l’on mélange ces deux états sur une lame semi-réfléchissante de transmittivité t , et que l’on réalise un conditionnement $x = 0$ sur une des deux voies de sortie (de la même manière que pour un état chat), alors la fonction d’onde de l’état de sortie s’écrira simplement :

$$\langle x|\psi_{\text{out}}\rangle \propto \cos(\sqrt{2}\alpha'_1 t x) \cos(\sqrt{2}\alpha'_2 r x) e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (5.53)$$

En utilisant les relations de trigonométrie usuelles, celle-ci peut être réécrite :

$$\langle x|\psi_{\text{out}}\rangle \propto \left[\cos\left(\sqrt{2}(\alpha'_1 t - \alpha'_2 r)x\right) + \cos\left(\sqrt{2}(\alpha'_1 t + \alpha'_2 r)x\right) \right] e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (5.54)$$

qui est de la forme (5.51) avec $n = 2$, $\alpha_1 = \alpha'_1 t - \alpha'_2 r$ et $\alpha_2 = \alpha'_1 t + \alpha'_2 r$. Ainsi, en mélangeant deux états chats à deux pattes (les chats "usuels") il est possible de former un chat à quatre pattes.

En poursuivant l'itération, c'est-à-dire en mélangeant l'état (5.54) avec un autre chat à deux pattes (et ainsi de suite), on peut montrer que le mélange de $n + 1$ chats d'amplitudes $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n+1}$ à l'aide de n lames séparatrices de transmittivités t_1, \dots, t_n permet la génération d'un chat à 2^{n+1} pattes d'amplitudes $\alpha_{\delta_1}, \dots, \alpha_{\delta_{2^n}}$ où les α_{δ_i} sont donnés par

$$\alpha_{\delta_i} = \prod_{k=1}^n t_k \alpha'_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \delta_{ik} r_k \alpha'_{k+1} \prod_{l=k+1}^n t_l + \delta_{in} r_n \alpha'_{n+1}, \quad (5.55)$$

avec $\delta_i = (\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_n})$ et $\delta_{i_k} = \pm 1$: les 2^n combinaisons donnent les 2^n coefficients δ_i .

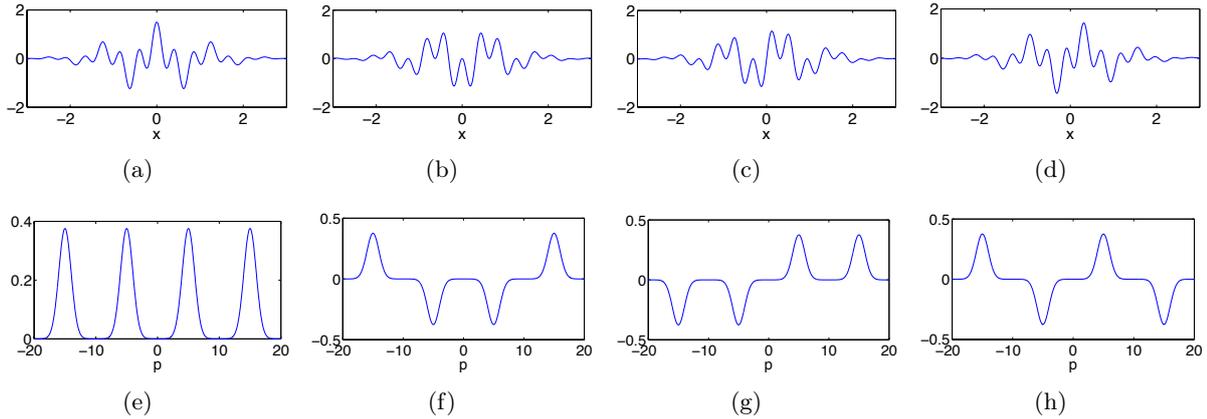


FIGURE 5.18 – Fonctions d'ondes de chats à 4 pattes dans les quatre configurations du tableau 5.1 (colonne par colonne, correspondant aux lignes du tableau). La première ligne donne l'allure de la représentation x de l'état, la seconde celle de la représentation p . Dans ce cas, $\alpha'_1 = 10$, $\alpha'_2 = 5$ et $t = 1/\sqrt{2}$.

5.5.3 Généralisation

On peut montrer que le protocole, nourri par des états de parité ajustable, permet la génération des états de la forme générale (5.50), sans supposer que $\forall i, \epsilon_i = \epsilon = +1$. Ceci peut se prouver en se rappelant que la différence dans les fonctions d'ondes des chats impairs est le remplacement du cosinus dans (5.52) en un sinus. Ensuite, le mélange des fonctions d'ondes par le même procédé va permettre la multiplication entre deux fonctions sinusoidales dont la réécriture déterminera la forme finale. Ceci est illustré dans le tableau 5.1 pour le cas du mélange de deux chats d'amplitudes respectives α'_1 et α'_2 . On rappelle que dans tous les cas, $\alpha_1 = \alpha'_1 t - \alpha'_2 r$ et $\alpha_2 = \alpha'_1 t + \alpha'_2 r$.

$\langle x \psi_{\text{chat1}}\rangle \propto$	$\langle x \psi_{\text{chat2}}\rangle \propto$	Réécriture du produit	ϵ_1	ϵ_2	ϵ
$\cos(\sqrt{2}\alpha'_1 x)e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\cos(\sqrt{2}\alpha'_2 x)e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\left(\cos(\sqrt{2}\alpha_1 x) + \cos(\sqrt{2}\alpha_2 x)\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$	+1	+1	+1
$\sin(\sqrt{2}\alpha'_1 x)e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\sin(\sqrt{2}\alpha'_2 x)e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\left(-\cos(\sqrt{2}\alpha_1 x) + \cos(\sqrt{2}\alpha_2 x)\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$	-1	+1	+1
$\sin(\sqrt{2}\alpha'_1 x)e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\cos(\sqrt{2}\alpha'_2 x)e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\left(\sin(\sqrt{2}\alpha_1 x) + \sin(\sqrt{2}\alpha_2 x)\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$	+1	+1	-1
$\cos(\sqrt{2}\alpha'_1 x)e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\sin(\sqrt{2}\alpha'_2 x)e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\left(\sin(\sqrt{2}\alpha_1 x) - \sin(\sqrt{2}\alpha_2 x)\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$	+1	-1	-1

TABLEAU 5.1 – Type d'états chats à 4 pattes produits par le mélange de deux chats de parités différentes.

Etant donné que l'état est défini à une phase globale près, on a 8 combinaisons possibles pour les trois epsilons, donnant bien toutes les combinaisons voulues pour l'état. Ces différents états sont représentés sur la figure 5.18, pour les quatre configurations du tableau 5.1.

Nous allons ensuite nous pencher sur le cas particulier où $\alpha'_1 = \dots = \alpha'_{n+1}$ et $t_1 = \dots = t_n = 1/\sqrt{2}$ en vue de former des états que nous avons baptisé "Peignes en quadrature".

5.6 Génération et croissance d'états "Peignes en quadrature"

Nous avons vu comment notre protocole d'adjonction permettait la génération d'état "Chats de Schrödinger" en exploitant les propriétés de "gaussianisation locale" de celui-ci. Nous nous proposons dans cette section d'étendre l'idée à la génération d'états plus complexes, que nous avons baptisé "Peignes en quadrature", en nous inspirant des résultats obtenus lors de la génération d'états "Chats multipattes".

5.6.1 Historique

Les états peignes ont été introduits pour la première fois en 2001 dans [Gottesman 01] comme une proposition pour l'encodage d'information sur les variables continues de la lumière [Braunstein 98, Lloyd 98]. Ces états, plus complexes que les états proposés jusqu'alors, permettent l'encodage de codes correcteurs d'erreurs, pour des erreurs notamment de type décalage en amplitude ou en phase. Une première proposition pour la génération de ces états avait été développée dans [Vasconcelos 10], et nous allons présenter dans cette section une méthode proche dans son principe mais différente aussi bien dans son analyse que dans son traitement.

La figure 5.19¹ montre l'allure de la distribution de probabilité en quadrature de ces états, composée de pics gaussiens distribués régulièrement suivant les quadratures, d'où le nom de "peignes en quadratures". Une modulation gaussienne de plus grande largeur permet d'assurer la convergence en norme L^2 de la fonction.

En dimension 2 par exemple, l'idée du code correcteur est d'encoder les deux états du qubit sur deux états $|\bar{0}\rangle$ et $|\bar{1}\rangle$, pour lesquels une mesure de quadrature permet une discrimination la meilleure possible. Par exemple, avec le code de la figure 5.19, une mesure de q permet de discriminer facilement entre $|\bar{0}\rangle$ et $|\bar{1}\rangle$.

La structure particulière de ces états (et c'est ce qui fait tout leur intérêt) est du même type

1. Reprinted figure with permission from [Gottesman 01]. Copyright 2001 by the American Physical Society.

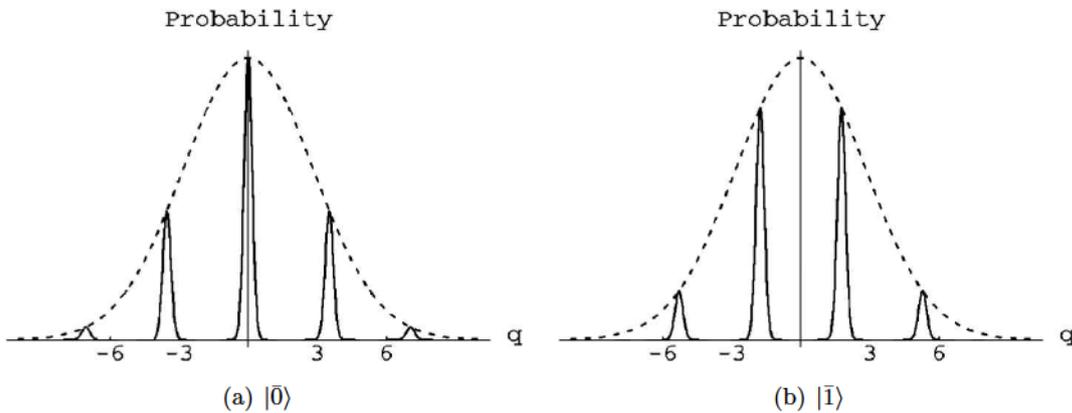


FIGURE 5.19 – L'état peigne introduit dans [Gottesman 01] pour l'implémentation de codes correcteurs d'erreurs. La modulation est représentée en pointillés.

suivant la quadrature conjuguée p , permettant d'obtenir également de très bonnes précisions de discriminations entre les superpositions $|\bar{0}\rangle + |\bar{1}\rangle$ et $|\bar{0}\rangle - |\bar{1}\rangle$ suivant cette quadrature. C'est là l'avantage de ces états, car en encodant le qubit sur un pic unique (un état cohérent $|\alpha\rangle$), la discrimination entre les superpositions $|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle$ et $|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle$ (état chat pair/état chat impair) par simple mesure homodyne est entachée d'erreur étant donné le recouvrement de leur fonctions d'ondes, comme on le voit sur la figure 5.20.

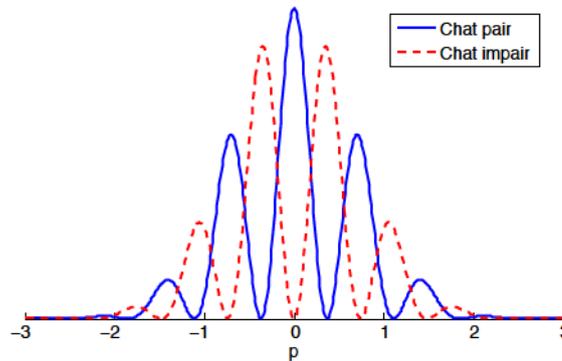


FIGURE 5.20 – Fonctions d'ondes d'états chats pair et impair suivant la quadrature p . Leur discrimination par mesure homodyne est entachée d'erreur.

On peut en plus montrer qu'il est possible de réaliser les opérations nécessaires à la correction d'erreurs quantiques à l'aide d'opérations symplectiques : par exemple une porte de Hadamard peut être simplement encodée à l'aide d'un déphasage [Gottesman 01].

En plus de cette application, ces états présentent un grand intérêt pour la réalisation de tests fondamentaux, comme les tests des inégalités de Bell. Ceci sera étudié plus en détail dans le chapitre 6.

Après les avoir mathématiquement définis, nous nous proposons dans cette section d'étudier comment le protocole que l'on a décrit précédemment permet la réalisation de ces états.

5.6.2 Définition mathématique

5.6.2.1 Fonction d'onde

La première définition des états peignes mentionnée dans [Gottesman 01] est la suivante :

$$|\bar{0}_{\text{parf}}\rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x = 2k\alpha\rangle \quad (5.56a)$$

$$|\bar{1}_{\text{parf}}\rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x = (2k + 1)\alpha\rangle. \quad (5.56b)$$

Ces états, constitués d'une somme infinie d'états infiniment comprimés, sont parfaits en ce sens qu'ils protègent de manière optimale contre les erreurs décrites précédemment. Ils ont par contre une forme non physique étant donné le fait qu'ils contiennent une infinité d'énergie. Une forme physique de ces états s'obtient, comme on l'a vu précédemment, en donnant une certaine largeur aux pics tout en limitant le nombre. C'est cette forme que nous allons retenir dans la suite :

$$\langle x | \bar{0} \rangle_a^{s_1, s_2} = \frac{1}{N_{\bar{0}}} e^{-\frac{s_1^2 x^2}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(x - ma)^2}{2s_2^2}} \quad (5.57a)$$

$$\langle x | \bar{1} \rangle_a^{s_1, s_2} = \frac{1}{N_{\bar{1}}} e^{-\frac{s_1^2 x^2}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{[x - (m+1/2)a]^2}{2s_2^2}}, \quad (5.57b)$$

où

$$N_{\bar{0}} = \left[\sqrt{\frac{\pi}{s_1^2 + 1/s_2^2}} \sum_{m, m' \in \mathbb{Z}} e^{\frac{mm'}{2V_1} - \frac{m^2 + m'^2}{2V_2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.58a)$$

$$N_{\bar{1}} = \left[\sqrt{\frac{\pi}{s_1^2 + 1/s_2^2}} \sum_{m, m' \in \mathbb{Z}} e^{\frac{(m+1/2)(m'+1/2)}{2V_1} - \frac{(m+1/2)^2 + (m'+1/2)^2}{2V_2}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.58b)$$

$$V_1 = \frac{s_2^2(1+s_1^2s_2^2)}{a^2} \text{ et } V_2 = \frac{2V_1}{1+2s_1^2s_2^2}.$$

Les états peignes sont donc définis par trois paramètres distincts : s_1 dont l'inverse définit la largeur de l'enveloppe gaussienne totale, s_2 qui règle la largeur de chaque pic gaussien au sein de l'enveloppe et a qui définit la distance entre deux pics consécutifs. La figure 5.21 (a) illustre ces trois paramètres.

Un cas particulier de choix de paramètres est donné par

$$s_2 \ll a \ll 1/s_1, \quad (5.59)$$

pour lequel les pics sont très fins par rapport à leur écartement, et sont nombreux au sein de l'enveloppe de modulation. Dans cette hypothèse, les coefficients de normalisation se simplifient en :

$$N_{\bar{0}} \simeq N_{\bar{1}} \simeq \sqrt{\frac{\pi s_2}{a s_1}}. \quad (5.60)$$

C'est dans ce cas que le code correcteur d'erreur est le plus ressemblant au code parfait (5.56), obtenu en faisant $s_1 \rightarrow 0$ et $s_2 \rightarrow 0$ (chaque pic de la fonction de Wigner est infiniment fin).

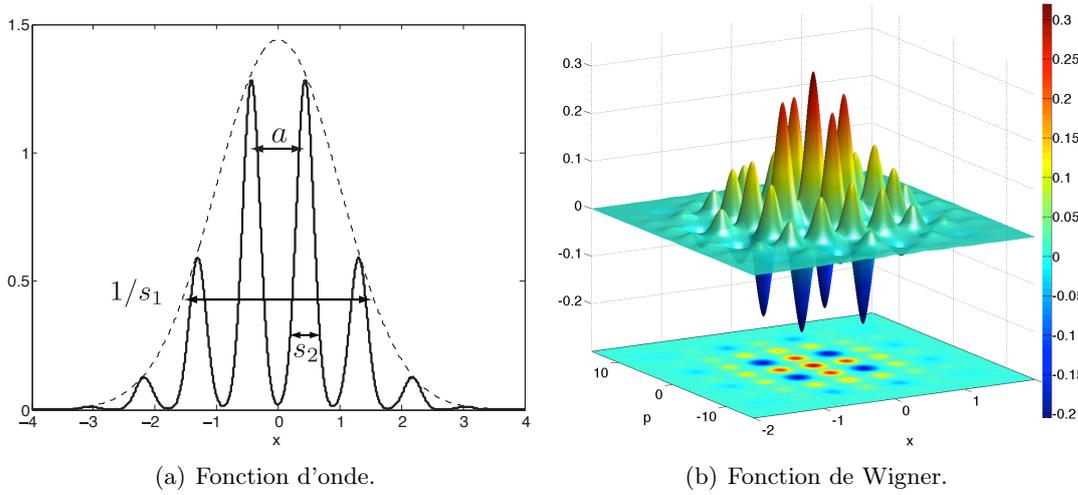


FIGURE 5.21 – Représentation des états peignes en quadrature.

5.6.2.2 Fonction de Wigner

La fonction de Wigner de cet état peut se calculer en utilisant la formule (1.31). On trouve, après calcul :

$$W_{\bar{0}}(x, p) = \frac{1}{N_{W_{\bar{0}}}} \sum_{j, j'} e^{-s_1 x^2 - \frac{1}{2s_2^2} [(x - ja)^2 + (x - j'a)^2] + \frac{1}{s_1^2 + 1/s_2^2} [ip + \frac{a}{2s_2} (j - j')]^2} \quad (5.61a)$$

$$W_{\bar{1}}(x, p) = \frac{1}{N_{W_{\bar{1}}}} \sum_{j, j'} e^{-s_1 x^2 - \frac{1}{2s_2^2} [(x - (j + \frac{1}{2})a)^2 + (x - (j' + \frac{1}{2})a)^2] + \frac{1}{s_1^2 + 1/s_2^2} [ip + \frac{a}{2s_2} (j - j')]^2}, \quad (5.61b)$$

où

$$N_{W_{\bar{0}}} = \pi \sum_{j, j'} e^{-\frac{a^2}{4s_2^2} [2(j^2 + j'^2) - \frac{(j + j')^2}{1 + s_1^2 s_2^2}]} \quad (5.62a)$$

$$N_{W_{\bar{1}}} = \pi \sum_{j, j'} e^{-\frac{a^2}{4s_2^2} [2((j + \frac{1}{2})^2 + (j' + \frac{1}{2})^2) - \frac{(j + j' + 1)^2}{1 + s_1^2 s_2^2}]} \quad (5.62b)$$

Pour exemple, la fonction de Wigner de l'état $W_{\bar{0}}(x, p)$ est représentée sur la figure 5.21 (b) dans le cas $s_1 = 1$, $s_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}}$ et $a = \frac{\pi\sqrt{2}}{5}$. L'état consiste en un agencement de pics suivant les quadratures, tantôt positifs tantôt négatifs. La largeur de ces pics est de l'ordre de s_1 suivant la direction p et s_2 suivant la direction x .

Une propriété remarquable qui avait été mentionnée dans l'introduction est la similitude de l'allure de la fonction dans les deux directions x et p .

5.6.3 Génération et croissance de peignes

L'idée de la méthode de génération des états peignes (5.57) consiste à tirer de nouveau parti de la transformation (5.20) et du théorème de gaussianisation locale du paragraphe 5.2.5 : la fonction d'onde que l'on désire générer consiste en une somme de pics gaussiens de même hauteur, modulés par une gaussienne plus large. Ainsi si l'on dispose a priori d'une fonction

d'onde comportant une structure en pics périodiques de même hauteur modulés par une fonction gaussienne, alors le protocole de gaussianisation locale va avoir pour action de faire ressembler chacun des pics initiaux à des gaussiennes.

Il se trouve que nous avons à notre disposition des états possédant ces caractéristiques : il s'agit des chats déphasés de $\pi/2$. En effet, au regard des formules (1.89b) et (1.90b), la fonction d'onde de ces états consiste en une sinusoïde modulée par une gaussienne ; le nombre d'oscillations au sein de cette sinusoïde dépendant de l'amplitude du chat, et la phase à l'origine dépendant de sa parité.

5.6.3.1 Etats créés

Si l'on nourrit donc un protocole de croissance à p étages par des états chats comprimés pairs ($\text{ECC}_+(s, \alpha)$) ou impairs ($\text{ECC}_-(s, \alpha)$) d'amplitude α , de compression s et déphasés de $\pi/2$:

$$\langle x | \text{ECC}_+(s, \alpha) \rangle = \sqrt{\frac{s}{e^{-\alpha^2} \sqrt{\pi} \cosh \alpha^2}} \cos(\sqrt{2} \alpha s x) e^{-\frac{s^2 x^2}{2}} \quad (5.63a)$$

$$\langle x | \text{ECC}_-(s, \alpha) \rangle = \sqrt{\frac{s}{e^{-\alpha^2} \sqrt{\pi} \sinh \alpha^2}} \sin(\sqrt{2} \alpha s x) e^{-\frac{s^2 x^2}{2}}, \quad (5.63b)$$

les fonctions d'ondes des états de sortie de protocole de croissance s'écrivent, en utilisant l'équation (5.20) :

$$\langle x | \bar{0}_{\text{pc}}(s, \alpha, p) \rangle = \frac{1}{N_{\bar{0}_{\text{pc}}}} \cos^{2p} \left(2^{\frac{1-p}{2}} \alpha s x \right) e^{-\frac{s^2 x^2}{2}} \quad (5.64a)$$

$$\langle x | \bar{1}_{\text{pc}}(s, \alpha, p) \rangle = \frac{1}{N_{\bar{1}_{\text{pc}}}} \sin^{2p} \left(2^{\frac{1-p}{2}} \alpha s x \right) e^{-\frac{s^2 x^2}{2}}, \quad (5.64b)$$

où les facteurs de normalisation valent

$$N_{\bar{0}_{\text{pc}}} = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{s 2^{2p+1}} \sum_{j=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{j} e^{-\frac{\alpha^2 (2j-2p+1)^2}{2^{p+1}}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.65a)$$

$$N_{\bar{1}_{\text{pc}}} = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{s 2^{2p+1}} \sum_{j=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{j} (-1)^{j-2p} e^{-\frac{\alpha^2 (2j-2p+1)^2}{2^{p+1}}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.65b)$$

D'après le théorème de gaussianisation locale, ces états tendent vers des états peignes en quadrature dont nous nous proposons de trouver analytiquement les paramètres en fonction de α , s et p .

Nous allons supposer pour cette étude que l'enveloppe varie lentement par rapport aux oscillations de la fonction d'onde (hypothèse (5.59)) : autrement dit que les chats servant à nourrir le protocole sont suffisamment gros. Dans ce cas les extremums seront donnés avec une bonne précision par les termes sinusoïdaux (cf Propriété 3 de la gaussianisation locale). D'après la formule (5.23), on a

$\psi_{\text{in}}(x)$	x_i	$\psi_{\text{in}}(x_i)$	$\psi_{\text{in}}''(x_i)$	$\psi_{\text{out}}(x) \tilde{\propto}$
$\cos(\alpha s x \sqrt{2})$	$\frac{m\pi}{\sqrt{2s\alpha}}, \quad m \in \mathbb{Z}$	$(-1)^m$	$(-1)^{m+1} 2\alpha^2 s^2$	$e^{-\alpha^2 s^2 \left(x - \frac{\pi m}{\alpha s} 2^{\frac{p-1}{2}} \right)^2}$
$\sin(\alpha s x \sqrt{2})$	$\frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{\sqrt{2s\alpha}}, \quad m \in \mathbb{Z}$	$(-1)^m$	$(-1)^{m+1} 2\alpha^2 s^2$	$e^{-\alpha^2 s^2 \left(x - \frac{\pi(m+1/2)}{\alpha s} 2^{\frac{p-1}{2}} \right)^2}$

ce qui permet de déduire les transformations suivantes :

$$|ECC_+(s, \alpha)\rangle \longrightarrow |\bar{0}_{\text{pc}}(s, \alpha, p)\rangle \underset{p \rightarrow +\infty}{\simeq} |\bar{0}\rangle_{2^{\frac{p-1}{2}} \pi / (\alpha s)}^{s, 1 / (\sqrt{2} \alpha s)} \quad (5.66a)$$

$$|ECC_-(s, \alpha)\rangle \longrightarrow |\bar{1}_{\text{pc}}(s, \alpha, p)\rangle \underset{p \rightarrow +\infty}{\simeq} |\bar{1}\rangle_{2^{\frac{p-1}{2}} \pi / (\alpha s)}^{s, 1 / (\sqrt{2} \alpha s)}. \quad (5.66b)$$

Ainsi, la taille de l'enveloppe est la même que celle du chat ayant servi à la croissance du peigne ($s_1 = s$), la taille des pics gaussiens est fixe et déterminée par la taille du chat d'entrée α ainsi que par sa compression s ($s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha s}$), et la distance entre les pics du peigne dépend de ces paramètres ainsi que du nombre d'étages de croissance ($a = \frac{2^{\frac{p-1}{2}} \pi}{\alpha s}$) : plus celui-ci sera élevé, plus les pics seront espacés. La figure 5.22 illustre la modification de la fonction d'onde pour un chat d'entrée de compression $s = 1$ et d'amplitude $\alpha = 5$, pour 1 et 2 étages de croissance. De la même manière que pour la génération d'ECC, la convergence est extrêmement rapide, car dès le premier étage la fidélité est déjà de 99%.

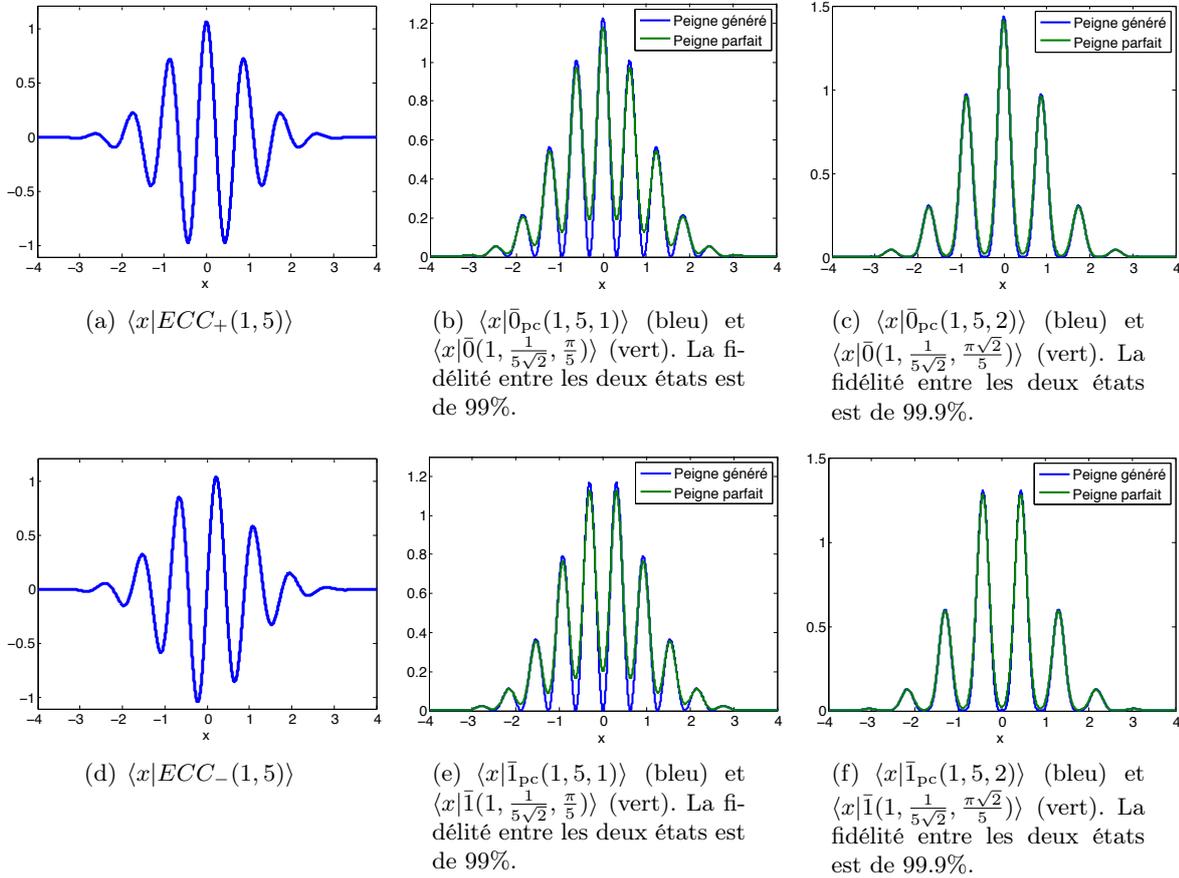


FIGURE 5.22 – Allure des fonctions d'ondes résultant de la croissance de peignes pour un chat pair ((a), (b) et (c)) et impair ((d), (e) et (f)) d'amplitude $\alpha = 5$ et de compression $s = 1$ en entrée de protocole. Les fonctions d'ondes après 0 ((a) et (d)), 1 ((b) et (e)) et 2 ((c) et (f)) étages de croissance sont données.

La convergence des paramètres des peignes est présentée sur la figure 5.23, où l'on peut voir que les paramètres s_1 et a sont très bien approximés par les paramètres trouvés analytiquement, et où s_2 converge rapidement vers la valeur analytique.

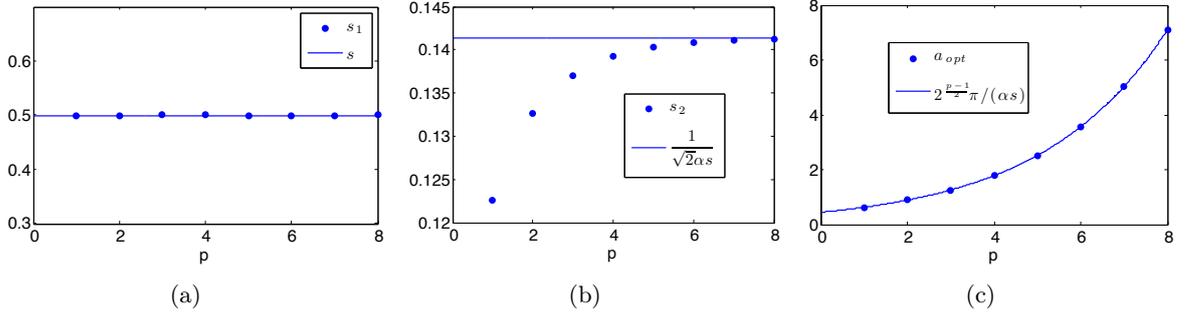


FIGURE 5.23 – Paramètres des états peignes générés pour un nombre p croissant d'étages. (a) s_1 , (b) s_2 et (c) a . Ces paramètres ont été obtenus pour un protocole nourri par des chats d'amplitude $\alpha = 10$ et de compression $s = 0.5$.

5.6.3.2 Conditionnement particulier

La structure particulière des états peignes et la simplicité de leur discrimination peuvent être mises à profit dans la mise en œuvre expérimentale de leur croissance. Il est montré dans l'annexe F que le mélange de deux peignes identiques sur une lame 50:50 fournit les transformations suivantes :

$$|\bar{1}\rangle_a \otimes |\bar{1}\rangle_a \longrightarrow |\bar{1}\rangle_{\sqrt{2}a} \otimes |\bar{0}\rangle_{\sqrt{2}a} + |\bar{0}\rangle_{\sqrt{2}a} \otimes |\bar{1}\rangle_{\sqrt{2}a} \quad (5.67a)$$

$$|\bar{0}\rangle_a \otimes |\bar{0}\rangle_a \longrightarrow |\bar{0}\rangle_{\sqrt{2}a} \otimes |\bar{0}\rangle_{\sqrt{2}a} + |\bar{1}\rangle_{\sqrt{2}a} \otimes |\bar{1}\rangle_{\sqrt{2}a}, \quad (5.67b)$$

où les deux premiers paramètres s_1 et s_2 , identiques pour tous les états, ont été omis. On retrouve le fait que le mélange produit des états dont l'amplitude a été multipliée par $\sqrt{2}$.

Ces transformations amènent de plus deux remarques importantes :

- Pour réaliser la transformation de croissance $|\bar{0}\rangle_a \rightarrow |\bar{0}\rangle_{\sqrt{2}a}$ (ou $|\bar{1}\rangle_a \rightarrow |\bar{1}\rangle_{\sqrt{2}a}$), on voit qu'il est en fait suffisant de détecter l'état $|\bar{0}\rangle_{\sqrt{2}a}$ sur la détection homodyne de conditionnement. Autrement dit, sachant que celle-ci reçoit soit $|\bar{0}\rangle_{\sqrt{2}a}$, soit $|\bar{1}\rangle_{\sqrt{2}a}$, il suffit d'être capable de discriminer ces deux états. Cette propriété de discrimination est ce qui fait l'intérêt de ces états : une mesure homodyne permet normalement à coup sûr (avec un peigne parfait) de savoir quel peigne est mesuré. Ainsi, le conditionnement autour de tous les pics de l'état $|\bar{0}\rangle_{\sqrt{2}a}$ (et donc pas seulement 0) permet de réaliser la bonne transformation, et donc la croissance [Etesse 14]. Autrement dit, on peut se permettre d'accepter tous les événements homodynes x vérifiant :

$$|x - k\sqrt{2}a| < \Delta x^c. \quad (5.68)$$

Cette remarque permet d'obtenir des probabilités de succès bien plus importantes que précédemment.

- La transformation indique également qu'il n'est pas forcément nécessaire de disposer d'états chats impairs pour former les états $|\bar{1}\rangle$, étant donné le fait qu'il est possible d'obtenir ces derniers par mélange de deux peignes $|\bar{0}\rangle$ et de réaliser une mesure de conditionnement qui identifie un état $|\bar{1}\rangle$. Autrement dit, la mesure de conditionnement homodyne

$$|x - (k + 1/2)\sqrt{2}a| < \Delta x^c \quad (5.69)$$

permet le changement de type de peigne par le protocole de croissance.

Remarque : Il est possible d'utiliser ces deux observations pour augmenter encore plus la probabilité de succès de l'opération de croissance de peignes. En effet, au lieu de forcer la croissance à se faire toujours avec des peignes de même type à toutes les étapes ($|\bar{0}\rangle$ ou $|\bar{1}\rangle$), on peut s'autoriser à chaque étage à changer de type de peigne, à la condition tout de même que deux peignes entrant sur une même lame soient du même type. Seul le dernier étage doit satisfaire une condition non modifiable pour produire l'état peigne souhaité. Pour simplifier les calculs et ne pas alourdir ce manuscrit, cette étude ne sera pas effectuée ici.

5.6.4 Performances du protocole

Voyons maintenant quelles sont les performances du protocole de croissance de peigne dans deux cas d'imperfections : le conditionnement fini et les pertes sur les états.

5.6.4.1 Probabilité de succès

De la même manière qu'à la section 5.4.4, nous allons nous intéresser à l'influence d'un conditionnement non nul sur la qualité des états peignes produits. La figure 5.24 représente la probabilité de succès du protocole de croissance pour différents étages, en fonction de la fidélité cible désirée. La croissance est supposée n'être faite qu'avec des états $|\bar{0}\rangle$ et les chats utilisés pour nourrir le dispositif sont des chats produits par 5 étages de croissance de chats ($\alpha \simeq \sqrt{2^5}$ et $s \simeq \sqrt{2}$).

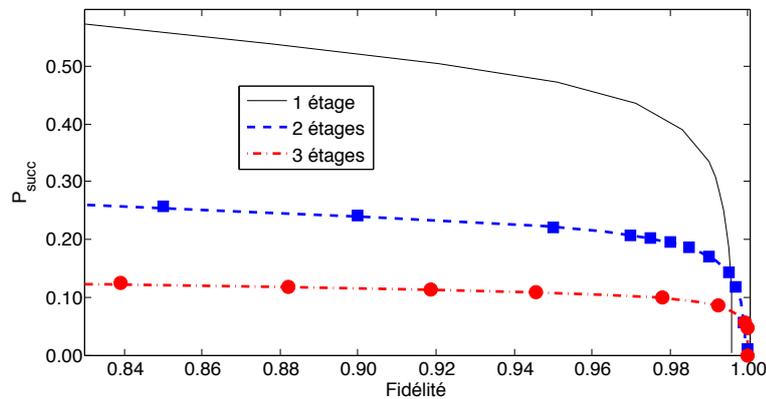


FIGURE 5.24 – Probabilité de succès du protocole de croissance de peignes à 1, 2 et 3 étages en fonction de la fidélité cible. Les symboles représentent les points obtenus après optimisation de toutes les largeurs de conditionnement, les courbes sont tracées avec la loi empirique $\Delta x_{n+1}^c = 1.3\Delta x_n^c$.

Il est important de noter dans ce cas le fait que l'échelle verticale n'est plus logarithmique mais linéaire, au contraire de la figure 5.13. Les fidélités que l'on arrive à atteindre sont de plusieurs ordres de grandeurs supérieures à précédemment : cela vient du fait que l'on peut réaliser le conditionnement sur davantage d'événements qu'autour de 0 grâce à la formule (5.68).

On remarque également que la loi empirique $\Delta x_{n+1}^c = 1.3\Delta x_n^c$ est là encore valable, de la même manière que pour la croissance d'états chats.

5.6.4.2 Robustesse aux pertes

Pour étudier les propriétés de robustesse des états peignes, nous nous proposons de nous focaliser sur leur résistance aux pertes. On se donne pour ceci un peigne produit par deux étages de croissance, nourris par les mêmes états chats qu'au paragraphe précédent ($\alpha \simeq \sqrt{2^5}$, $s \simeq \sqrt{2}$) que l'on soumet à des pertes variables. Pour des pertes variant entre 0 et 8%, la fidélité de l'état de sortie est donnée sur la figure 5.25 (a).

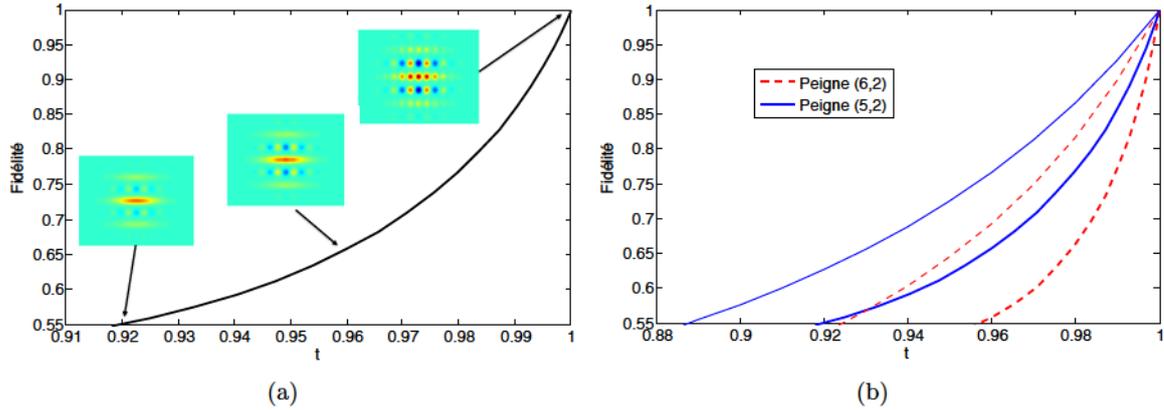


FIGURE 5.25 – Robustesse d'un état peigne aux pertes (a) pour un peigne produit avec un chat généré par 5 étages de croissance de chats, et (b) pour ce même état ainsi qu'un peigne produit à l'aide de chats de plus grande amplitude. La figure indique également la fidélité obtenue par optimisation de la compression de l'état, par une ligne de même type de trait plus fine.

La structure de ces états les rend davantage sensibles aux pertes étant donné le fait que les oscillations sont nombreuses : elles disparaissent donc rapidement avec la convolution avec le vide (cf disparition des zones de négativité dans la fonction de Wigner représentée superposée à la figure 5.25 (a)). On peut malgré tout augmenter la robustesse de ces états aux pertes en utilisant la même astuce que dans le paragraphe 5.4.4.3 : en optimisant leur compression.

La figure 5.26 (a) montre l'allure de la fonction de Wigner de l'état ayant subi 8% de pertes, révélant que la structure de l'état peigne ainsi que la négativité de la fonction ont quasiment disparu. Par contre, en rattrapant la compression avant de subir les pertes, il est possible d'augmenter la résistance de l'état, comme le montre la figure 5.26 (b) : on retrouve alors une structure similaire aux peignes initiaux, avec des zones de négativité clairement visibles. La figure 5.25 (b) montre l'amélioration de la fidélité de l'état de sortie par optimisation de la compression pour notre état (baptisé (5,2)) ainsi que pour un état produit à l'aide d'un chat initial plus gros d'amplitude $\alpha \simeq \sqrt{2^6}$ et de compression $s \simeq \sqrt{2}$ (6,2). La fidélité est améliorée de plus de 10% grâce à l'optimisation de la compression.

5.7 Conclusion

Nous avons vu comment un protocole très simple consistant en une lame séparatrice et un conditionnement homodyne permet, à partir de photons uniques exclusivement, de former toutes les superpositions cohérentes de photons tronquées à un nombre N de photons arbitrairement grand. Ce protocole peut être appliqué à la croissance d'états chats de Schrödinger ainsi que d'états "peignes en quadrature".

La possibilité inédite de ce protocole à utiliser des mémoires quantiques en vue d'augmenter les

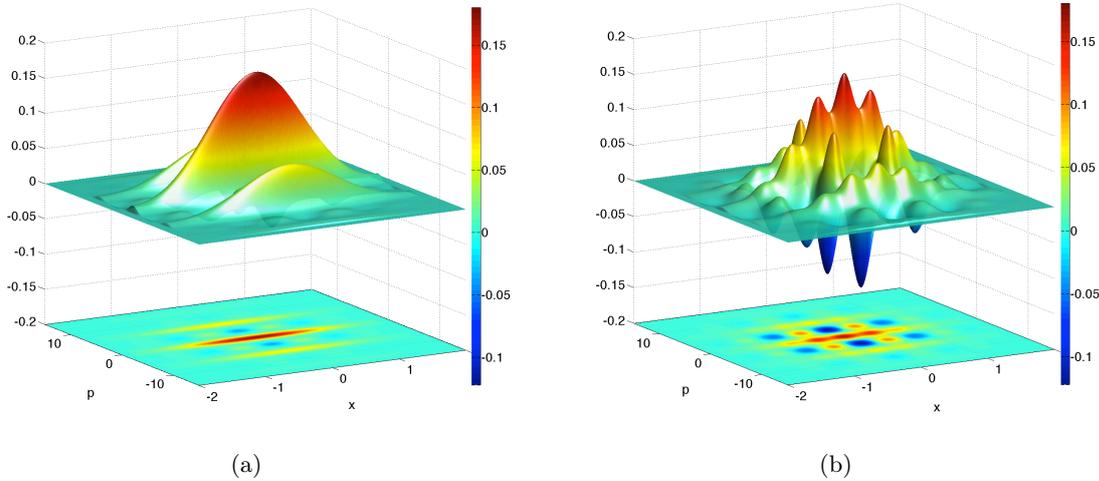


FIGURE 5.26 – Fonction de Wigner de l'état peigne après 8% de pertes (a) sans et (b) avec optimisation de la compression.

probabilités de succès a été étudiée, mettant en exergue des performances exponentiellement plus rapides que des protocoles nécessitant des événements simultanés. La robustesse du protocole aux imperfections montre son vif intérêt pour l'ingénierie quantique d'états, la seule limitation actuelle résidant dans la qualité des photons nécessaire pour obtenir l'intégralité du panel des états accessibles.

Les états peignes, jusqu'ici confinés aux outils théoriques de l'optique quantique, ouvrent un champ des possibles considérable dans le domaine de l'information quantique et des tests fondamentaux de la physique quantique. Une des applications de ces états, la violation maximale des inégalités de Bell par mesures homodynes, est présentée dans le chapitre suivant.

Chapitre 6

Violation des inégalités de Bell sans échappatoire avec des *peignes en quadrature*

Sommaire

6.1	Formulation et état de l'art des tests de Bell	156
6.1.1	Les inégalités de Bell	156
6.1.2	L'état de l'art expérimental	159
6.2	Le protocole [Wenger 03]	162
6.2.1	Etats utilisés	162
6.2.2	Binarisation par signe	163
6.2.3	Calcul de la fonction S	163
6.3	Application du protocole [Wenger 03] aux chats à quatre pattes . .	164
6.3.1	Génération	164
6.3.2	Etat intriqué produit	166
6.3.3	Fonction S de Bell	167
6.3.4	Violation	169
6.4	Application du protocole [Wenger 03] aux peignes en quadrature .	170
6.4.1	Génération d'états peignes alternés intriqués	171
6.4.2	Résultats de violation	175
6.5	Conclusion	178

La description des systèmes physiques par la mécanique quantique a, durant de nombreuses années, été sujette à controverse au sein de la communauté des physiciens. L'une des plus célèbres de ces controverses est probablement celle qui a été formulée par Einstein dans son célèbre article de 1935 aux côtés de Podolsky et Rosen [Einstein 35], que nous avons brièvement évoqué au paragraphe 1.4.1.4. Dans cet article, les auteurs tentent de montrer que la mécanique quantique ne peut pas être considérée comme complète étant donnée son incapacité à décrire totalement un système (si par exemple celui-ci est intriqué avec un autre) et les résultats des mesures projectives que l'on peut obtenir. Ils font appel à un *élément de réalité physique* manquant à la description, qui permettrait de prédire avec certitude les résultats de mesures faites sur ce système. C'est dans ce contexte qu'ont été formulées les inégalités de Bell [Bell 64], qui ont permis les tests expérimentaux des différentes théories.

Après avoir rappelé une formulation possible de ces inégalités, nous verrons quelles ont été les

expériences réalisées jusqu'à ce jour, et pourquoi elles ne permettent toujours pas de conclure de manière certaine à l'invalidité des théories locales à variables cachées. Nous étudierons ensuite une proposition de violation des inégalités de Bell utilisant les états chats multipattes puis les états peignes en quadrature que l'on a introduit au chapitre précédent, violation possible en ne réalisant que des mesures homodynes au contraire de la majorité des propositions faites jusqu'à présent.

6.1 Formulation et état de l'art des tests de Bell

6.1.1 Les inégalités de Bell

6.1.1.1 Le modèle à variables cachées

Voyons dans un premier temps la formulation mathématique des différentes versions de la description d'un état physique. Selon Einstein [Einstein 35], l'association d'un *élément de réalité physique* à un système dont on peut prévoir l'état à coup sûr est considérée comme naturelle et impérative :

If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity.

Cela fait suite à une réserve qu'il émet quant à l'influence d'une mesure de l'état d'un système en un point de l'espace, qui pourrait influencer instantanément un autre système en un point arbitrairement loin de l'espace :

But on one supposition we should, in my opinion, absolutely hold fast : the real factual situation of the system S_2 is independent of what is done with the system S_1 , which is spatially separated from the former.

Autrement formulé, si deux systèmes sont corrélés, alors la mesure de l'un ne pourra pas influencer l'état de l'autre, étant donnée la nécessité d'un élément de réalité physique préexistant à la mesure, et l'impossibilité de transfert d'information supraluminique.

Illustrons ceci par un exemple simple, tiré de [Basdevant 08] : considérons une expérience où deux enveloppes hermétiquement fermées contiennent l'une un carton rouge et l'autre un carton jaune (on suppose qu'il est impossible de connaître la couleur des cartons sans ouvrir les enveloppes). Distribuons ensuite une de ces enveloppes à un individu partant pour la Lune (Alice), et l'autre à un individu restant sur Terre (Bob). Une fois Alice arrivée à destination, si Bob ouvre son enveloppe, il découvrira la couleur de son carton et pourra instantanément dire de quelle couleur est celui d'Alice, même si celle-ci se trouve hors de son cône de lumière. Il n'y a donc pas dans ce cas de restriction sur la vitesse avec laquelle Bob pourra déduire la couleur du carton d'Alice. Cette expérience extrêmement simple n'entre bien sûr pas en contradiction avec les principes de la relativité, et Einstein s'inspire de ce type de cas en disant qu'il est nécessaire d'inclure un élément de réalité supplémentaire pour la description du système, ou autrement dit une variable cachée. Dans notre cas, celle-ci serait l'information d'un observateur qui aurait été attentif au mélange des enveloppes (par exemple le nombre de permutations nécessaires au mélange qui ont été faites avant la distribution) : ce que l'on considère comme le hasard dans ce cas est en fait la conséquence de notre ignorance de l'ensemble des éléments physiques du système, et même si nous avons décidé d'ignorer cette variable cachée elle est tout de même présente, et les considérations mathématiques imposent de la prendre en compte.

L'essence des inégalités de Bell est de tester si oui ou non ce raisonnement peut s'appliquer sur tous les systèmes quantiques, et en particulier sur les systèmes intriqués.

6.1.1.2 Un système intriqué

Le formalisme de la mécanique quantique autorise l'existence de systèmes dont la description ne peut être faite que par un seul objet, même si celui-ci est multipartite, de parties arbitrairement éloignées l'une de l'autre dans l'espace. Prenons par exemple un état du même type que celui que Bohm a présenté en 1952 [Bohm 52] pour tenter d'expliquer la mécanique quantique en termes de variables cachées : l'état singulet de spin

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle). \quad (6.1)$$

Les lois de la mécanique quantique font que si une mesure est réalisée sur une des parties de ce système (mettons la première), alors la seconde sera entièrement déterminée par cette mesure. Ainsi, si l'opérateur mesure un état de spin + (resp. -) sur le premier système, le second est à coup sûr dans l'état - (resp. +). Là encore, quelle que soit la séparation des deux opérateurs, la déduction de l'état de la partie éloignée du système est immédiate après prise de connaissance du résultat de la mesure.

6.1.1.3 La fonction S de Bell

Plusieurs types de fonctions peuvent être définies pour mettre en évidence la non-validité d'une théorie locale à variables cachées. Nous présentons ici la fonction S qui a été introduite peu de temps après [Bell 64] par Clauser, Horne, Shimony et Holt (CHSH) en 1969 [Clauser 69]. Celle-ci fait intervenir deux opérateurs (Alice et Bob), qui recevront chacun une des parties de l'état intriqué (6.1). Ils seront supposés être suffisamment éloignés afin de rendre impossible toute communication "classique" (plus lente que la vitesse de la lumière) entre eux. Ils pourront de plus régler leur instrument de mesure dans deux configurations différentes, et ce de manière indépendante. Dans notre cas, ce réglage pourra être celui de l'orientation d'un appareil de Stern et Gerlach en vue de mesurer l'état de spin dans une direction arbitraire de l'espace \mathbf{u}_a ou \mathbf{u}'_a pour Alice, et \mathbf{u}_b ou \mathbf{u}'_b pour Bob.

Soit ensuite la fonction S de Bell définie par ¹

$$S = E(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b) + E(\mathbf{u}'_a, \mathbf{u}'_b) + E(\mathbf{u}'_a, \mathbf{u}_b) - E(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}'_b), \quad (6.2)$$

où $E(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ est la valeur moyenne du produit des résultats des mesures d'Alice et Bob dans le cas où ceux-ci ont orienté leur détecteurs respectivement dans les directions \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 . Ces résultats, normalement égaux à $\hbar/2$ ou $-\hbar/2$, seront divisés par $\hbar/2$ pour être égaux à ± 1 .

Le principe est ensuite d'exprimer cette fonction S avec les deux approches définies plus tôt : l'approche à variables cachées et l'approche quantique. Si une contradiction naît entre les deux expressions, c'est qu'un des modèles n'est pas valable.

S pour un modèle à variable cachée

Dans le cas d'un modèle à variable cachée [Bell 10], on peut attribuer au système d'Alice une quantité $A(\mathbf{u}_a, \lambda)$ qui permettra de prévoir le résultat de la mesure du spin suivant la direction \mathbf{u}_a avant que la mesure n'ait lieu. Ce résultat prendra les valeurs +1 et -1, suivant que le spin mesuré sera positif ou négatif. De la même manière, une quantité $B(\mathbf{u}_b, \lambda)$ pourra être définie pour Bob. La variable cachée, ici λ , est un paramètre que l'on ne contrôle pas mais qui est partagé par les deux systèmes lors de leur création : sa connaissance permettrait de prévoir l'intégralité des mesures.

1. Il est important de noter que l'on peut à loisir déplacer le signe - de cette définition devant le terme voulu : il n'y a pas unicité de la définition de S .

Ainsi, si ce paramètre est distribué suivant une loi de distribution $p(\lambda) > 0$, telle que $\int p(\lambda)d\lambda = 1$, les valeurs moyennes des produits des résultats des mesures s'expriment par la relation :

$$E(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b) = \int p(\lambda)A(\mathbf{u}_a, \lambda)B(\mathbf{u}_b, \lambda)d\lambda. \quad (6.3)$$

D'où la fonction S de Bell :

$$\begin{aligned} S &= \int p(\lambda) \left[A(\mathbf{u}_a, \lambda)B(\mathbf{u}_b, \lambda) + A(\mathbf{u}'_a, \lambda)B(\mathbf{u}'_b, \lambda) + A(\mathbf{u}'_a, \lambda)B(\mathbf{u}_b, \lambda) - A(\mathbf{u}_a, \lambda)B(\mathbf{u}'_b, \lambda) \right] d\lambda \\ &= \int p(\lambda) \left[A(\mathbf{u}_a, \lambda) \left(B(\mathbf{u}_b, \lambda) - B(\mathbf{u}'_b, \lambda) \right) + A(\mathbf{u}'_a, \lambda) \left(B(\mathbf{u}'_b, \lambda) + B(\mathbf{u}_b, \lambda) \right) \right] d\lambda. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Puis, étant donné que les résultats des mesures de Bob valent soit +1 soit -1, alors l'un des termes $B(\mathbf{u}_b, \lambda) - B(\mathbf{u}'_b, \lambda)$ et $B(\mathbf{u}_b, \lambda) + B(\mathbf{u}'_b, \lambda)$ est nul et l'autre est égal à ± 2 . Après utilisation de l'inégalité triangulaire, on obtient donc l'inégalité :

$$|S| \leq 2 \int p(\lambda)|A(\mathbf{u}, \lambda)|d\lambda = 2, \quad (6.5)$$

où $\mathbf{u} = \mathbf{u}_a$ ou \mathbf{u}'_a . Autrement dit, dans une théorie locale à variable cachées, la fonction de Bell est majorée par 2 : il s'agit d'une inégalité de Bell. Ainsi, si un système quantique permet de violer cette inégalité, on montre l'invalidité de ce type de théorie dans la description des systèmes quantiques.

S en mécanique quantique

Pour calculer la fonction S de Bell avec les outils de la mécanique quantique, on peut d'abord exprimer $E(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b)$, en utilisant l'état $|\psi_i\rangle$ de l'expression (6.1) :

$$E(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b) = \frac{4}{\hbar^2} \langle \psi_i | \hat{\mathbf{S}}_a \cdot \mathbf{u}_a \otimes \hat{\mathbf{S}}_b \cdot \mathbf{u}_b | \psi_i \rangle. \quad (6.6)$$

Si $\mathbf{u}_k = \alpha_{k,x}\mathbf{e}_x + \alpha_{k,y}\mathbf{e}_y + \alpha_{k,z}\mathbf{e}_z$ (avec $k = a$ ou b), l'opérateur de spin bimode s'écrit

$$\frac{4}{\hbar^2} \hat{\mathbf{S}}_a \cdot \mathbf{u}_a \otimes \hat{\mathbf{S}}_b \cdot \mathbf{u}_b = \begin{pmatrix} \alpha_{a,z} & \alpha_{a,x} - i\alpha_{a,y} \\ \alpha_{a,x} + i\alpha_{a,y} & -\alpha_{a,z} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_{b,z} & \alpha_{b,x} - i\alpha_{b,y} \\ \alpha_{b,x} + i\alpha_{b,y} & -\alpha_{b,z} \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Ainsi,

$$E(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b) = -\alpha_{a,x}\alpha_{b,x} - \alpha_{a,y}\alpha_{b,y} - \alpha_{a,z}\alpha_{b,z} = -\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_b, \quad (6.8)$$

et donc

$$S = -\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_b - \mathbf{u}'_a \cdot \mathbf{u}'_b - \mathbf{u}'_a \cdot \mathbf{u}_b + \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}'_b. \quad (6.9)$$

Mais, si l'on choisit pour les vecteurs les directions :

$$\mathbf{u}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_b = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}'_a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}'_b = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

alors on trouve simplement que la fonction S de Bell vaut $2\sqrt{2}$, qui viole manifestement l'inégalité (6.5). Ainsi, il apparaît que la théorie locale à variable cachée n'est pas valable.

Autrement dit, les arguments avancés par Einstein ne peuvent pas être retenus, du fait de l'impossibilité de décrire le système total par deux éléments distincts séparés : même si ceux-ci sont distants l'un de l'autre, la seule possibilité pour envisager nos deux systèmes est de considérer qu'ils sont décrits comme un seul et même objet mathématique. L'avantage de ce raisonnement est qu'il a pu être mis en œuvre expérimentalement afin de vérifier si la nature suivait ou non ce comportement.

6.1.2 L'état de l'art expérimental

6.1.2.1 L'expérience historique

Les premières expériences concluantes quant à la violation des inégalité de Bell ont été réalisées en 1972 [Freedman 72], mais celle qui a proposé une violation claire et proche du raisonnement précédent est l'expérience réalisée en 1982 par Alain Aspect et son équipe [Aspect 82b, Aspect 82a]. Le montage schématisé de l'expérience est montré sur la figure 6.1.

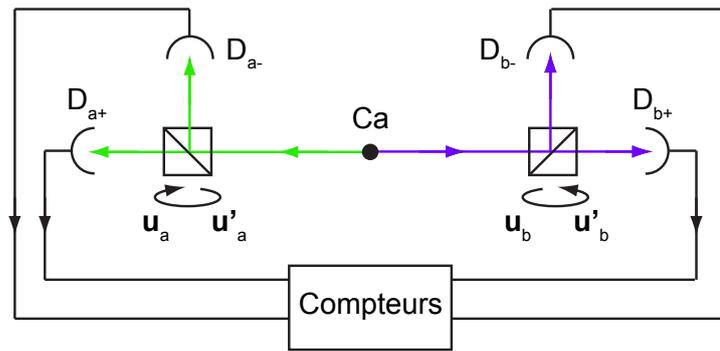


FIGURE 6.1 – Schéma simplifié de l'expérience d'Aspect

Les états intriqués sont codés sur des paires de photons, et l'observable d'intrication utilisée est la polarisation :

$$|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|a : \uparrow, b : \uparrow\rangle + |a : \rightarrow, b : \rightarrow\rangle \right). \quad (6.11)$$

Ces photons, l'un de longueur d'onde 551 nm (Alice) et l'autre de longueur d'onde 422 nm (Bob), sont émis par une cascade atomique d'atomes de calcium, après excitation de ceux-ci par des lasers. Un filtrage adéquat permet de sélectionner les longueurs d'ondes des photons reçus.

Ensuite, un polariseur est utilisé, en vue de transmettre une direction de polarisation (vers un détecteur D_{a+} pour Alice et D_{b+} pour Bob) et de réfléchir la direction orthogonale (vers un détecteur D_{a-} pour Alice et D_{b-} pour Bob). Deux possibilités sont données aux opérateurs A et B pour choisir la direction de leur polariseur ; de la même manière que précédemment les vecteurs d'analyse pouvaient être \mathbf{u}_a ou \mathbf{u}_b . On peut facilement montrer que les corrélations dans l'espace des polarisations sont similaires à celles dans l'espace des spins, à un facteur 2 de correction près sur les angles définissant la détection :

$$E(\alpha_a, \beta_b) = \cos [2(\alpha_a - \beta_b)], \quad (6.12)$$

et la fonction S de Bell utilisée a donc la forme

$$|S| = |\cos [2(\alpha_a - \beta_b)] + \cos [2(\alpha'_a - \beta'_b)] + \cos [2(\alpha'_a - \beta_b)] - \cos [2(\alpha_a - \beta'_b)]|, \quad (6.13)$$

et le choix $\alpha_a = 0^\circ$, $\beta_b = 22.5^\circ$, $\alpha'_a = 45^\circ$, $\beta'_b = 67.5^\circ$ permet de réaliser la violation de l'inégalité montrée précédemment ($S = 2.697 \pm 0.015$). Ce type d'expérience est maintenant implanté dans des salles de travaux pratiques, du fait de la facilité de production de paires EPR par conversion paramétrique (1.77) [Bel 14].

6.1.2.2 Les échappatoires expérimentaux

Le protocole souffre néanmoins d'"échappatoires" qui ne permettent pas de conclure totalement au vu des résultats de mesure. Il existe plusieurs échappatoires, propres le plus souvent aux montages expérimentaux des tests de Bell, mais deux posent un problème concret dans la majeure partie des dispositifs.

- **L'échappatoire de localité** : il s'agit du fait que lorsque les deux parties (Alice et Bob) réalisent leur mesure, il faut qu'elles soient suffisamment loin l'une de l'autre pour qu'il n'y ait aucune possibilité à un signal classique d'être transmis entre elles. Car dès lors que des communications sont possibles, l'hypothèse de localité n'est plus valable. Avec les systèmes optiques, cette échappatoire est a priori aisée à contourner, de part la possibilité d'éloigner les deux parties de façon importante : ce qui fixera par contre une distance minimale entre les deux parties sera la rapidité du choix et de la mise en place de la base de mesure. Cette échappatoire est liée à l'échappatoire de "free will", imposant que les deux parties puissent réaliser leur choix de base de mesure de manière totalement indépendante.
- **L'échappatoire de détection (ou d'échantillon représentatif)** : il s'agit de l'échappatoire qui repose sur l'hypothèse, généralement implicitement effectuée, selon laquelle l'échantillon qui est mesuré est représentatif de tout l'ensemble des états produits, ceux-ci n'ayant pas pu être intégralement mesurés du fait de l'imperfection des détecteurs [Pearle 70]. Cette échappatoire est la plus difficile à contourner en optique, étant donné le fait que les détecteurs de photons ont rarement des efficacités supérieures à 70%. L'expérience d'Aspect souffre de cette échappatoire.

Une analyse montre que pour réaliser une violation des inégalités de Bell de type CHSH [Clauser 69] et CH [Clauser 74] sans hypothèse d'échantillon représentatif (ce qui clôt l'échappatoire), une efficacité de détection minimale de $\eta = 2\sqrt{2} - 2 \simeq 82.8\%$ est nécessaire pour des états intriqués de la forme (6.11). Une analyse ultérieure a pu montrer qu'en réalité, en considérant des états non maximalelement intriqués de la forme

$$|\psi_E\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \left(|\uparrow, \uparrow\rangle + r|\rightarrow, \rightarrow\rangle \right), \quad (6.14)$$

et en optimisant le paramètre r ainsi que les angles des détecteurs en fonction de l'efficacité de détection, cette dernière pouvait être abaissée à $\eta = 2/3 \simeq 66.7\%$ [Eberhard 93].

6.1.2.3 Expériences récentes en optique quantique

Outre les expériences historiques présentées précédemment, un grand nombre de tentatives ont été faites en vue de clore les échappatoires. Sans être exhaustif, on pourra citer [Ou 88] pour l'utilisation de photons corrélés produits par génération paramétriques de paires, [Tapster 94] et [Tittel 98] pour des violations avec des receveurs très éloignés l'un de l'autre, ou [Rowe 01] pour une violation qui permet de clore l'échappatoire de détection, par l'utilisation d'ions comme porteurs de l'intrication, qui peuvent être détectés très efficacement (mais au prix d'une séparation spatiale très faible des deux systèmes, laissant ouverte l'échappatoire de localité). Malgré tout, toutes les échappatoires n'ont jusqu'à présent jamais été closes ensemble.

Des expériences récentes [Giustina 12, Christensen 13] ont pu pour la première fois clore l'échappatoire de détection sur des systèmes d'optique quantique à l'aide de détecteurs très efficaces, les Transition Edge Sensor (TES [Lita 08], que nous avons rapidement évoqués au paragraphe 2.4.1). Les groupes ont ainsi pu atteindre des efficacités de détection totales de $\sim 75\% > 66.7\%$. Même si les résultats sont très encourageants pour enfin parvenir à une violation sans échappatoire des inégalités de Bell, des problèmes d'importance se posent dans ces protocoles : dans [Giustina 12], un problème d'échappatoire dû à la définition des zones temporelles de coïncidences se pose [Larsson 14], et dans les deux cas il semble difficile de pouvoir placer les deux parties A et B à une distance suffisamment élevée l'une de l'autre du fait des pertes introduites par les fibres permettant l'acheminement des photons jusqu'aux détecteurs cryogéniques. C'est donc maintenant de nouveau l'échappatoire de localité qui pose problème.

Même si ces protocoles sont ceux qui ont le plus de chance de clore toutes les échappatoires ensemble, rechercher d'autres types de montages en vue de réaliser des tests de Bell sans échappatoire présente un vif intérêt dans la communauté de l'information quantique, notamment en cryptographie [Pironio 09]. Pouvoir réaliser ces tests avec des appareils simples à manipuler et peu coûteux est une étape nécessaire à la cryptographie "device-independent". Au vu de ces applications, les détecteurs de type TES (très coûteux, volumineux et complexes d'utilisation) ne semblent donc pas représenter la technologie la plus adaptée.

6.1.2.4 Propositions actuelles

Nous ne ferons pas un inventaire de toutes les propositions qui ont pu voir le jour dans les dernières années, le lecteur intéressé pourra consulter [Brunner 14] pour une revue récente.

Deux types de protocoles vont par contre nous intéresser dans ce chapitre : les protocoles dits "hybrides" et les protocoles à mesures homodynes.

Protocoles "hybrides"

Les protocoles hybrides consistent en l'utilisation d'un état intriqué relativement simple de la lumière, mais sur lequel les parties peuvent réaliser soit une mesure du type comptage de photon, soit une mesure homodyne. Le protocole est donc hybride en ce sens qu'il implique à la fois des outils de l'optique quantique à variables discrètes et à variables continues. La proposition originale [Cavalcanti 11] propose d'utiliser l'état intriqué

$$|\psi_h\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|02\rangle + |20\rangle), \quad (6.15)$$

et de permettre aux deux parties Alice et Bob de choisir entre une mesure homodyne et une détection de photon (jusqu'à présent leur choix était limité à l'orientation d'un analyseur). Pour un comptage de photon, +1 sera associé au clic du détecteur, et -1 à l'absence de clic. Pour une mesure homodyne, +1 sera associé à une mesure qui est tombée dans un intervalle $[-z, z]$ et -1 à une mesure qui est tombée dans l'ensemble complémentaire. En considérant que la détection homodyne a une efficacité de 100% (ce qui peut être supposé en bonne approximation [Wakui 07]), ce protocole permet de tolérer soit une transmission de 84%, soit une efficacité de détection de 71.1%. Cette dernière valeur est encore trop élevée pour les détecteurs usuels, et une version modifiée du protocole utilisant un amplificateur sans bruit non déterministe [Ralph 08, Ferreyrol 10] a été par la suite proposée, permettant de baisser l'efficacité limite de détection à 64.8% (pour une transmission des états vers les parties égale à 1) [Brask 12]. Ce protocole présente un grand intérêt étant donné la disponibilité des états ressources requis,

ainsi que des paramètres de détection nécessaires. Nous proposons dans l'annexe E un traitement détaillé de la faisabilité expérimentale de ce type de protocole avec notre dispositif expérimental, pour quantifier individuellement les différents paramètres nécessaires à une violation.

Protocoles homodynes

Une autre série de propositions présentent également un intérêt certain pour notre expérience : ce sont les protocoles qui n'impliquent que des mesures homodynes de la part des deux parties. Comme on l'a dit précédemment, ces mesures sont très efficaces et d'une grande simplicité de mise en œuvre. Par ailleurs, contrairement aux protocoles qui reposent sur des événements de détection dans un état de polarisation donné, les détections homodynes donnent toujours un résultat de mesure, ce qui clôt l'échappatoire de détection. Plusieurs protocoles ont été proposés pour obtenir des violations d'inégalités de Bell, a priori sans échappatoire si l'état intriqué peut être créé. L'un des premiers, proposé en 2003 [Wenger 03] avait l'avantage de permettre une violation maximale avec des mesures homodynes, mais imposait la génération d'états très complexes. Une série d'autres propositions ont suivi [García-Patrón 04, Stobińska 07, Torlai 13], mais les violations étaient alors soit très faibles, soit là encore obtenues avec des états difficiles à générer expérimentalement.

Avec l'étude que nous avons menée à la section 5.6, nous avons désormais à présent à notre disposition des états proches de ceux qui sont nécessaires au protocole [Wenger 03] pour réaliser la violation des inégalités de Bell.

Nous allons donc étudier comment les états chats multipattes et les états peignes en quadrature peuvent permettre d'obtenir de fortes violations des inégalités de Bell de type CHSH avec des mesure homodynes seulement.

6.2 Le protocole [Wenger 03]

Rappelons dans un premier temps le principe général du protocole initialement proposé dans [Wenger 03] : les états qu'il requiert, le type de mesures qu'Alice et Bob doivent réaliser, et la manière avec laquelle la fonction S de Bell peut être calculée.

6.2.1 Etats utilisés

L'état intriqué qui sera la ressource du protocole, et sur lequel Alice et Bob réaliseront leurs mesures s'écrit sous la forme :

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ff\rangle + e^{i\theta}|gg\rangle), \quad (6.16)$$

où f est une fonction paire et g une fonction impaire. Les auteurs présentent notamment l'exemple suivant :

$$f(x) \propto \cos\left(\frac{\pi x}{2\alpha}\right) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - \alpha(j + 1/2)\right) \quad (6.17a)$$

$$g(x) \propto \sin\left(\frac{\pi x}{2\alpha}\right) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - \alpha(j + 1/2)\right), \quad (6.17b)$$

où δ est la distribution de Dirac usuelle. Ces états, ainsi que leurs transformées de Fourier (suivant la quadrature p) sont représentés sur la figure 6.2¹.

1. Reprinted figure with permission from [Wenger 03]. Copyright 2003 by the American Physical Society.

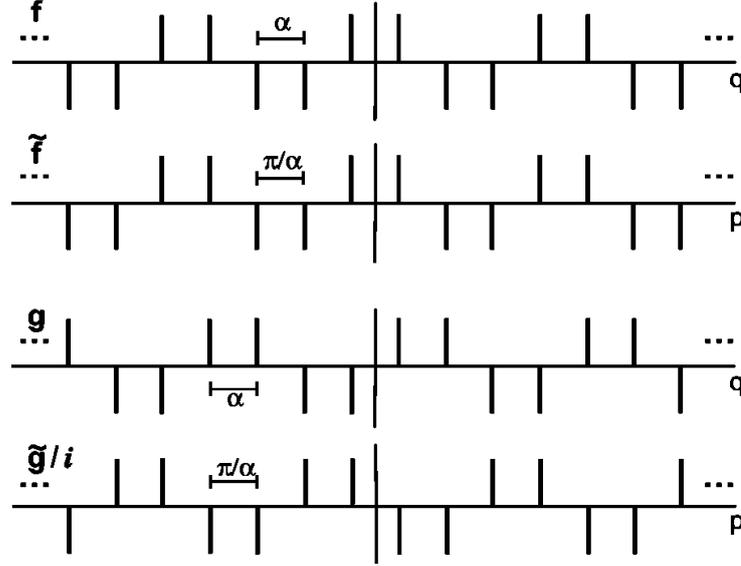


FIGURE 6.2 – États nécessaires à une violation maximale des inégalités de Bell par mesure homodyne, figure extraite de [Wenger 03].

Ceux-ci sont constitués d'un nombre infini de pics infiniment comprimés suivant les deux quadratures.

6.2.2 Binarisation par signe

Alice et Bob réaliseront ensuite suivant leur choix (non influencés l'un par l'autre) une mesure suivant la quadrature x (appelée q sur la figure 6.2) ou p , et attribueront la valeur $+1$ si leur mesure tombe dans un domaine \mathcal{D}_+^x (si la mesure était suivant la quadrature x) ou \mathcal{D}_+^p (si la mesure était suivant la quadrature p), et -1 sinon. Les domaines sont déterminés avant toute mesure : Alice et Bob se mettent d'accord sur la définition :

$$\mathcal{D}_+^x = \{x | f(x)g(x) \geq 0\} \quad (6.18a)$$

$$\mathcal{D}_+^p = \{p | \tilde{f}(p)\tilde{g}(p)/i \geq 0\}, \quad (6.18b)$$

où \tilde{f} et \tilde{g} sont les transformées de Fourier des expressions (6.17). Les domaines pour lesquels le résultat retourné est -1 sont donc respectivement $\mathcal{D}_-^x = \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_+^x$ et $\mathcal{D}_-^p = \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_+^p$.

6.2.3 Calcul de la fonction S

Avec leurs mesures, Alice et Bob peuvent calculer la fonction S de Bell suivant la définition

$$S = |E_{x,x} + E_{x,p} + E_{p,x} - E_{p,p}|, \quad (6.19)$$

avec E_{q_1,q_2} la moyenne des produits des résultats obtenus par Alice et Bob lorsque ceux-ci ont réalisé respectivement une mesure suivant la quadrature q_1 et q_2 .

On peut montrer qu'après calcul la fonction S s'écrit, si f paire, g impaire et $\theta = -\pi/4$, :

$$S = \sqrt{V^4 + W^4 + 6V^2W^2}, \quad (6.20)$$

avec

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)g(x)|dx \quad (6.21a)$$

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(p)\tilde{g}(p)|dp. \quad (6.21b)$$

Les paramètres V et W caractérisent donc le recouvrement des deux fonctions d'onde, ce sont eux que l'on doit chercher à maximiser : s'ils sont égaux à 1 tous les deux, alors la violation est maximale : $S = 2\sqrt{2} > 2$.

Bien entendu, la violation maximale n'est atteignable qu'avec les états non physiques f et g de la figure 6.2. Nous allons donc voir dans la suite de ce chapitre comment, avec les états que l'on a pu générer avec notre protocole du chapitre 5, il va être possible d'arriver à réaliser des violations importantes des inégalités de Bell, dans le cas où les états f et g sont remplacés par des chats à quatre pattes, puis par des états peignes en quadrature.

6.3 Application du protocole [Wenger 03] aux chats à quatre pattes

Comme on l'a dit précédemment, les états idéaux f et g (6.17) ne sont pas physiques du fait qu'ils sont constitués d'une infinité de pics infiniment comprimés. Une première idée pour les rendre physiques est de limiter leur nombre et de limiter leur compression [Wenger 03]. On obtient alors les états que nous avons introduits à la section 5.5 : les chats multipattes. Nous proposons ici un montage permettant la formation des états intriqués nécessaires à la violation, pour le cas d'un chat à quatre pattes.

6.3.1 Génération

En observant les figures 5.18 (f) et (g), on voit que l'on sait générer des chats à quatre pattes à l'allure identique à f et g (au signe près). Nous appellerons ces états respectivement $|f_{\text{cm}}\rangle$ et $|g_{\text{cm}}\rangle$ (cm pour chat multipattes). On se rappelle également que ces états ont été obtenus à partir d'états chats déphasés de $\pi/2$ comme ressource initiale : nous allons légèrement modifier cela en considérant que l'on ne réalise pas le conditionnement sur $x' = 0$ mais sur $p' = 0$. Dans ce cas, la superposition des gaussiennes se fait sur la quadrature x . Une condition supplémentaire sur la régularité de la répartition des pics (cf allures de f et g) s'écrit :

$$\alpha_2 = 3\alpha_1 = 3\alpha \implies \alpha'_1 t = 2\alpha'_2 r. \quad (6.22)$$

Leur écriture en représentation x est donc :

$$\langle x | f_{\text{cm}} \rangle = \frac{1}{N_{f_{\text{cm}}}} \left(e^{-\frac{(x-\sqrt{2}\alpha)^2}{2}} + e^{-\frac{(x+\sqrt{2}\alpha)^2}{2}} - e^{-\frac{(x-3\sqrt{2}\alpha)^2}{2}} - e^{-\frac{(x+3\sqrt{2}\alpha)^2}{2}} \right) \quad (6.23a)$$

$$\langle x | g_{\text{cm}} \rangle = \frac{1}{N_{g_{\text{cm}}}} \left(e^{-\frac{(x-\sqrt{2}\alpha)^2}{2}} - e^{-\frac{(x+\sqrt{2}\alpha)^2}{2}} + e^{-\frac{(x-3\sqrt{2}\alpha)^2}{2}} - e^{-\frac{(x+3\sqrt{2}\alpha)^2}{2}} \right), \quad (6.23b)$$

avec

$$N_{f_{\text{cm}}} = \sqrt{2(2 + e^{-18\alpha^2} - e^{-2\alpha^2} - 2e^{-8\alpha^2})} \quad (6.24a)$$

$$N_{g_{\text{cm}}} = \sqrt{2(2 - e^{-18\alpha^2} + e^{-2\alpha^2} - 2e^{-8\alpha^2})}. \quad (6.24b)$$

Violation des inégalités de Bell sans échappatoire avec des *peignes en quadrature*

Deux cas simples de résolution de l'équation (6.22) se présentent naturellement à nous : soit la réflectivité de la lame servant au mélange est de $1/\sqrt{2}$ et alors les amplitudes des deux chats à deux pattes nécessaires pour la formation de l'état sont α'_1 et $\alpha'_2 = \alpha'_1/2$ (et alors $\alpha = \alpha'_1/2$), soit deux chats à deux pattes de même amplitude sont utilisés pour la formation du chat à quatre pattes, et on a $t = 2/\sqrt{5}$ (avec $\alpha = \alpha'_1/\sqrt{5}$). Pour fixer les idées, nous avons choisi de nous placer dans le second cas ici¹. La figure 6.3 résume cela, dans le cas $\alpha'_1 = \alpha'_2 = 5\sqrt{5}$ (et donc $\alpha = 5$).

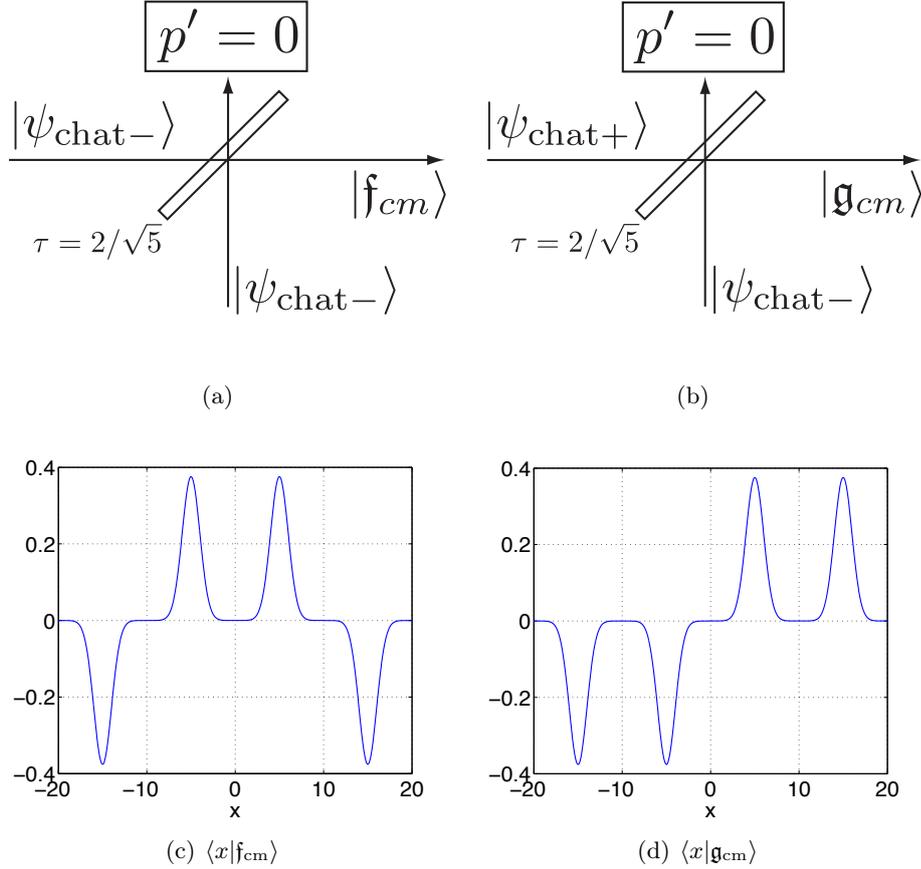


FIGURE 6.3 – Protocoles ((a) et (b)) pour la génération des deux états (c) $|f_{\text{cm}}\rangle$ et (d) $|g_{\text{cm}}\rangle$ proches de f et g .

Maintenant que nous avons vu comment générer des états $|f_{\text{cm}}\rangle$ et $|g_{\text{cm}}\rangle$ proches de f et g , il est encore nécessaire de réussir à les intriquer afin de former l'état

$$|\psi_{\text{out,parf}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|f_{\text{cm}}f_{\text{cm}}\rangle + e^{i\theta}|g_{\text{cm}}g_{\text{cm}}\rangle). \quad (6.25)$$

L'astuce consiste à tirer parti d'un protocole permettant d'intriquer des états chats : la *soustraction délocalisée* [Ourjountsev 09]. L'idée est que si l'on dispose de deux états chats $|\psi_{\text{chat}+}\rangle$ et $|\psi_{\text{chat}-}\rangle$, et que l'on soustrait un photon de l'un des deux états sans pouvoir savoir lequel, l'état créé est l'état intriqué $|\psi_{\text{chat}+}\psi_{\text{chat}+}\rangle + |\psi_{\text{chat}-}\psi_{\text{chat}-}\rangle$. L'implémentation expérimentale de ce processus de soustraction délocalisée est montrée sur la figure 6.4 : deux lames séparatrices de

1. Cela n'a aucune incidence sur le calcul, étant donné que l'état bimode en sortie de la lame séparatrice est le même dans tous les cas.

très faible réflectivité sont placées dans les deux voies d'un état bimode $|\psi_{\text{chat}+}, \psi_{\text{chat}-}\rangle$, et les faisceaux réfléchis sont mélangés sur une lame 50:50 ($\tau_s = 1/\sqrt{2}$). Dans les ports de sortie de cette lame, on place deux détecteurs de photons uniques (D1 et D2 sur la figure 6.4) : si un et un seul des deux détecteurs clique, alors l'opération de soustraction délocalisée est réussie. Dans la pratique, si les réflectivités R sont suffisamment faibles, un seul détecteur suffit étant donnée la très faible probabilité de clics simultanés.

En rajoutant un déphasage de θ dans un des deux bras, on peut implémenter l'opérateur :

$$\hat{O} = \frac{\hat{a}_1 - e^{i\theta}\hat{a}_2}{\sqrt{2}}. \quad (6.26)$$

Malgré tout, l'état généré n'est pas exactement de la forme $1/\sqrt{2}(|\mathbf{f}_{\text{cm}}\mathbf{f}_{\text{cm}}\rangle + e^{i\theta}|\mathbf{g}_{\text{cm}}\mathbf{g}_{\text{cm}}\rangle)$, et un calcul supplémentaire est nécessaire pour le déterminer.

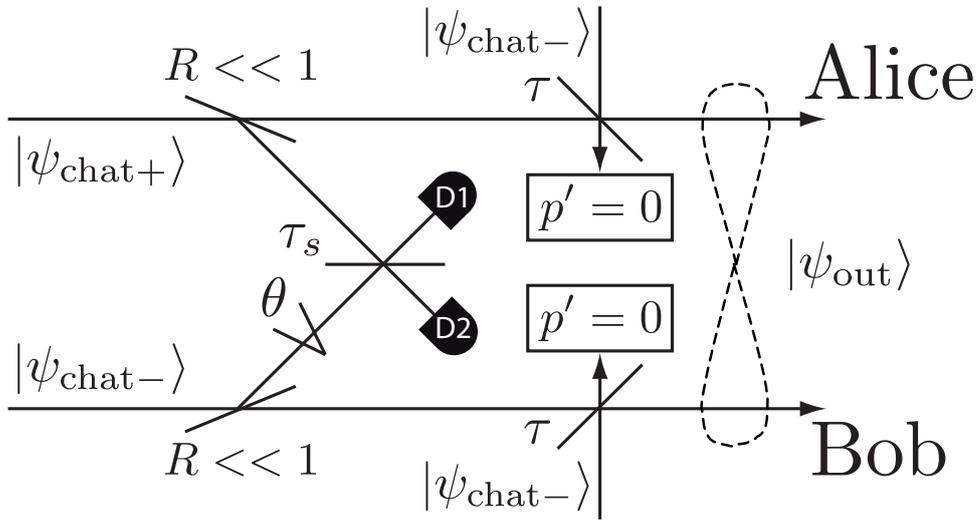


FIGURE 6.4 – Protocole pour la génération d'états à quatre pattes intriqués.

6.3.2 Etat intriqué produit

Calculons l'état effectivement produit par le protocole montré sur la figure 6.4. Tout d'abord, l'état bimode $|\psi_{\text{chat}+}\psi_{\text{chat}-}\rangle$ subit la soustraction délocalisée (6.26) :

$$\hat{O}|\psi_{\text{chat}+}\psi_{\text{chat}-}\rangle = \hat{O}\frac{1}{N_+N_-}(|\alpha'\rangle + |-\alpha'\rangle) \otimes (|\alpha'\rangle - |-\alpha'\rangle) \quad (6.27)$$

$$= \frac{N_-}{N_+}|\psi_{\text{chat}-}\psi_{\text{chat}-}\rangle - e^{i\theta}\frac{N_+}{N_-}|\psi_{\text{chat}+}\psi_{\text{chat}+}\rangle, \quad (6.28)$$

où $N_+ = \sqrt{2(1 + e^{-2\alpha^2})}$ (resp. $N_- = \sqrt{2(1 - e^{-2\alpha^2})}$) est la constante de normalisation du chat pair (resp. impair).

Ensuite, les états produits par les protocoles des figures 6.4 (a) et (b) ne peuvent s'écrire $|\mathbf{f}_{\text{cm}}\rangle$ et $|\mathbf{g}_{\text{cm}}\rangle$ qu'après normalisation. En réalité, l'état produit est de la forme :

$$|\psi_{\text{chat}-}\rangle \longrightarrow \frac{1}{N_-}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle - |3\alpha\rangle - | -3\alpha\rangle) = \frac{N_{\mathbf{f}_{\text{cm}}}}{N_-}|\mathbf{f}_{\text{cm}}\rangle = \frac{1}{N_-}|\mathbf{f}'_{\text{cm}}\rangle \quad (6.29)$$

pour le protocole de la figure 6.4 (a), et

$$|\psi_{\text{chat}+}\rangle \longrightarrow \frac{1}{N_+}(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle + |3\alpha\rangle - |-3\alpha\rangle) = \frac{N_{\mathbf{g}_{\text{cm}}}}{N_+}|\mathbf{g}_{\text{cm}}\rangle = \frac{1}{N_+}|\mathbf{g}'_{\text{cm}}\rangle \quad (6.30)$$

pour le protocole de la figure 6.4 (b). Les états \mathbf{f}'_{cm} et \mathbf{g}'_{cm} peuvent donc être vus comme les états attendus non normalisés. Finalement, en combinant les trois équations (6.28), (6.29) et (6.30), on obtient la forme finale

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = \frac{1}{N_{\text{tot}}}(|\mathbf{f}'_{\text{cm}}\mathbf{f}'_{\text{cm}}\rangle + e^{i\theta'}|\mathbf{g}'_{\text{cm}}\mathbf{g}'_{\text{cm}}\rangle), \quad (6.31)$$

où $\theta' = \pi + \theta$ et $N_{\text{tot}} = 4\sqrt{2\left((1 - e^{-8\alpha^2})^2 + \frac{1}{4}(e^{-2\alpha^2} - e^{-18\alpha^2})^2\right)}$. Cet état de sortie peut donc être mis sous la forme proche de (6.25) :

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(A|\mathbf{f}_{\text{cm}}\mathbf{f}_{\text{cm}}\rangle + Be^{i\theta'}|\mathbf{g}_{\text{cm}}\mathbf{g}_{\text{cm}}\rangle), \quad (6.32)$$

où

$$A = \frac{2 + e^{-18\alpha^2} - e^{-2\alpha^2} - 2e^{-8\alpha^2}}{\sqrt{4(1 - e^{-8\alpha^2})^2 + (e^{-2\alpha^2} - e^{-18\alpha^2})^2}} \quad (6.33a)$$

$$B = \frac{2 - e^{-18\alpha^2} + e^{-2\alpha^2} - 2e^{-8\alpha^2}}{\sqrt{4(1 - e^{-8\alpha^2})^2 + (e^{-2\alpha^2} - e^{-18\alpha^2})^2}}, \quad (6.33b)$$

tendent vers 1 lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$.

6.3.3 Fonction S de Bell

Seuil de conditionnement nul

Ensuite, pour calculer la fonction de Bell attendue pour l'état (6.31), il faut exprimer les paramètres V et W de l'équation (6.21). On trouve, après calcul :

$$V = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}N_{\text{tot}}} \left[\mathcal{I}(3\alpha) - \mathcal{I}(\alpha) + e^{-8\alpha^2} \left(2\mathcal{I}(\alpha) - \sqrt{\pi} \right) \right] \quad (6.34a)$$

$$W = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}N_{\text{tot}}} \left[\mathcal{J}(3\alpha) - 3\mathcal{J}(\alpha) \right], \quad (6.34b)$$

où

$$\mathcal{I}(\alpha) = \int_{\mathcal{D}_+^x} e^{-(q-\sqrt{2}\alpha)^2} dx \quad (6.35a)$$

$$\mathcal{J}(\alpha) = \int_{\mathcal{D}_+^p} \sin(2\sqrt{2}\alpha p) e^{-p^2} dp, \quad (6.35b)$$

les domaines \mathcal{D}_\pm^x et \mathcal{D}_\pm^p étant déterminés par les relations (6.18) appliquées aux fonctions \mathbf{f}'_{cm} et \mathbf{g}'_{cm} .

Bien entendu, ces expressions ne seront pas valables dans la pratique, étant donnée la nécessité de conditionnement sur $p' = 0$. Tout comme au paragraphe 5.3.2, nous allons donc introduire

une largeur $[-\Delta p^c, \Delta p^c]$ à l'intérieur de laquelle le conditionnement sera considéré comme réussi. L'opérateur de conditionnement associé s'écrira donc comme le projecteur :

$$\hat{\Pi}_{\text{cond}} = \int_{-\Delta p^c}^{\Delta p^c} |p\rangle\langle p| dp. \quad (6.36)$$

Cela impose donc de calculer les différentes moyennes des mesures bimodes effectuées par Alice et Bob sur un état de la forme de (6.31), qui ne peut être exprimé qu'à l'aide des matrices densités.

Seuil de conditionnement non nul

Le calcul nous amène à définir deux nouveaux états

$$|\mathbf{f}'_{\text{cm}}(p')\rangle = \langle p' - 3\alpha | \alpha \rangle + \langle p' | 3\alpha \rangle | -\alpha \rangle - \langle p' | -\alpha \rangle | 3\alpha \rangle - \langle p' - \alpha | -3\alpha \rangle \quad (6.37a)$$

$$|\mathbf{g}'_{\text{cm}}(p')\rangle = \langle p' - 3\alpha | \alpha \rangle - \langle p' | 3\alpha \rangle | -\alpha \rangle + \langle p' | -\alpha \rangle | 3\alpha \rangle - \langle p' - \alpha | -3\alpha \rangle, \quad (6.37b)$$

qui sont identiques à (6.29) et (6.30) si $p' = 0$ (conditionnement parfait). D'après la remarque faite à la fin du paragraphe précédent, l'état général fera intervenir des intégrales sur l'intervalle $[-\Delta p^c, \Delta p^c]$ de ces fonctions :

$$\hat{\rho}_{\text{out}} = \frac{1}{N_{\text{out}}} (\hat{\rho}^{\mathbf{f}} \otimes \hat{\rho}^{\mathbf{f}} + \hat{\rho}^{\mathbf{g}} \otimes \hat{\rho}^{\mathbf{g}} - e^{i\theta} \hat{\rho}^{\mathbf{f}\mathbf{g}} \otimes \hat{\rho}^{\mathbf{f}\mathbf{g}} - e^{-i\theta} \hat{\rho}^{\mathbf{g}\mathbf{f}} \otimes \hat{\rho}^{\mathbf{g}\mathbf{f}}), \quad (6.38)$$

avec

$$\hat{\rho}^{\mathbf{f}} = \int_{-\Delta p^c}^{\Delta p^c} |\mathbf{f}'_{\text{cm}}(p')\rangle\langle \mathbf{f}'_{\text{cm}}(p')| dp' \quad (6.39a)$$

$$\hat{\rho}^{\mathbf{g}} = \int_{-\Delta p^c}^{\Delta p^c} |\mathbf{g}'_{\text{cm}}(p')\rangle\langle \mathbf{g}'_{\text{cm}}(p')| dp' \quad (6.39b)$$

$$\hat{\rho}^{\mathbf{g}\mathbf{f}} = \int_{-\Delta p^c}^{\Delta p^c} |\mathbf{g}'_{\text{cm}}(p')\rangle\langle \mathbf{f}'_{\text{cm}}(p')| dp' \quad (6.39c)$$

$$\hat{\rho}^{\mathbf{f}\mathbf{g}} = \left(\hat{\rho}^{\mathbf{g}\mathbf{f}} \right)^\dagger, \quad (6.39d)$$

$$N_{\text{out}} = \frac{32}{\pi} \left[\left(\mathcal{K}_{\Delta p^c}(0) - \mathcal{K}_{\Delta p^c}(\alpha) e^{-8\alpha^2} \right)^2 + \left(\frac{\mathcal{K}_{\Delta p^c}(\alpha)}{2} e^{-18\alpha^2} + e^{-2\alpha^2} \left(\frac{\mathcal{K}_{\Delta p^c}(3\alpha)}{2} - \mathcal{K}_{\Delta p^c}(2\alpha) \right) \right)^2 \right] \quad (6.40)$$

et

$$\mathcal{K}_{\Delta p^c}(\alpha) = \int_{-\Delta p^c}^{\Delta p^c} e^{-p^2} e^{-2i\sqrt{2}\alpha p} dp. \quad (6.41)$$

Dès que $\alpha > 1$, on montre facilement que (6.40) peut être approximée par :

$$N_{\text{out}} \simeq 32 \left(\text{Erf}(\Delta p^c) \right)^2, \quad (6.42)$$

où $\text{Erf}(x)$ est la fonction d'erreur habituelle définie par $\text{Erf}(x) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Les expressions des paramètres V et W des équations (6.34a) et (6.34b) sont alors modifiées suivant :

$$V(\Delta p^c) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi\sqrt{N_{\text{out}}}} \left[\mathcal{K}_{\Delta p^c}(0) \left(\mathcal{I}(3\alpha) - \mathcal{I}(\alpha) \right) + \mathcal{K}_{\Delta p^c}(\alpha) e^{-8\alpha^2} \left(2\mathcal{I}(\alpha) - \sqrt{\pi} \right) \right] \quad (6.43a)$$

$$W(\Delta p^c) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi\sqrt{N_{\text{out}}}} \left[\mathcal{K}_{\Delta p^c}(\alpha) \mathcal{J}(3\alpha) - \left(2\mathcal{K}_{\Delta p^c}(2\alpha) + \mathcal{K}_{\Delta p^c}(3\alpha) \right) \mathcal{J}(\alpha) \right]. \quad (6.43b)$$

Voyons donc quels sont les résultats de violation obtenus dans les différents cas, en utilisant la fonction S de Bell définie en (6.20).

6.3.4 Violation

La figure 6.5 présente la fonction S de Bell calculée pour les trois différents cas que nous avons traités précédemment : le cas chat à quatre pattes intriqué parfait (6.25), l'état produit par le dispositif de soustraction délocalisé et un seuil de conditionnement nul (6.31) ou non nul (6.38). Cette figure révèle que l'état que l'on crée permet une violation très proche de l'état idéal (6.25) : la violation a simplement lieu à partir de $\alpha = 1.8$ au lieu de $\alpha = 1.66$. Le seuil non nul influence la violation en diminuant la valeur maximale, pratiquement sans changer la valeur seuil de α à partir de laquelle la violation a lieu. On note également que dans ce cas, la fonction S présente un maximum en fonction de α , au contraire des cas précédents où celle-ci augmente lorsque α augmente.

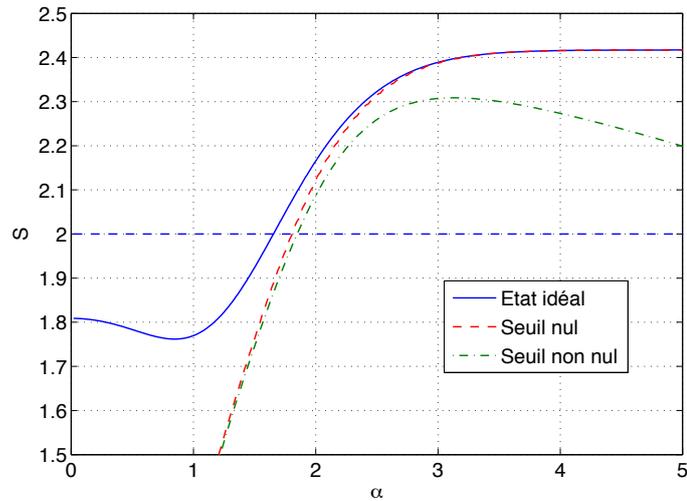


FIGURE 6.5 – Violations $S > 2$ obtenues pour les états (6.25) (trait bleu continu), (6.31) (trait tireté rouge) et (6.38) (trait mixte vert). Le seuil non nul a été pris égal à $\Delta p^c = 0.05$.

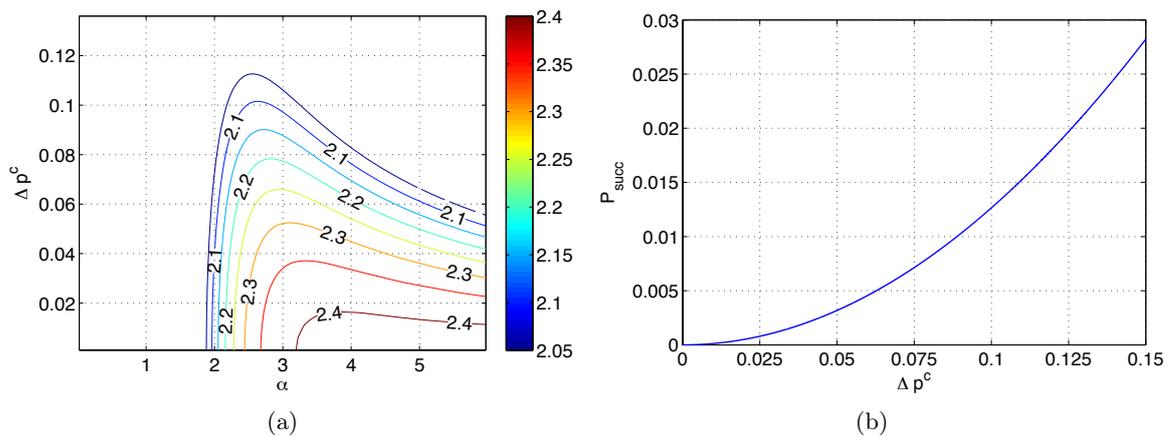


FIGURE 6.6 – Paramètres pour la violation. (a) fonction S de Bell en fonction de l'amplitude du chat à quatre pattes α et de la largeur de conditionnement, calculée par (6.20) et (6.43), (b) probabilité de succès en fonction de la largeur de conditionnement, calculée par (6.44).

Une autre donnée importante est la probabilité de succès du protocole en fonction de la

largeur de conditionnement homodyne. Celle-ci est égale au carré de la norme de la fonction à quatre modes (mode d’Alice, mode de Bob, mode de la DH de conditionnement du côté d’Alice et mode de la DH de conditionnement du côté de Bob), après le conditionnement (6.36) mais avant d’avoir effectué la trace partielle sur les modes homodynes. Tous calculs faits, on trouve :

$$P_{\text{succ}}(\Delta p^c) = \frac{2}{\pi} \frac{\left[\left(\mathcal{K}_{\Delta p^c}(0) - \mathcal{K}_{\Delta p^c}(\alpha') e^{-8\alpha'^2} \right)^2 + \left(\frac{\mathcal{K}_{\Delta p^c}(\alpha')}{2} e^{-18\alpha'^2} + e^{-2\alpha'^2} \left(\frac{\mathcal{K}_{\Delta p^c}(3\alpha')}{2} - \mathcal{K}_{\Delta p^c}(2\alpha') \right) \right)^2 \right]}{(1 + e^{-20\alpha'^2} - 2e^{-10\alpha'^2})^2 + (1 - e^{-20\alpha'^2})^2} \simeq_{\alpha > 1} \left(\text{Erf}(\Delta p^c) \right)^2. \quad (6.44)$$

La figure 6.6 (b) montre cette dépendance pour de faibles valeurs de Δp^c , ainsi que la fonction S de Bell associée en fonction de α (figure (a)). On voit que la violation peut avoir lieu tant que $\Delta p^c \leq 0.11$, correspondant à une probabilité de succès inférieure à 1.5%.

Il avait par contre été noté dans [Wenger 03] que les états chats multipattes ne permettaient pas d’atteindre une violation élevée rapidement, ceci étant principalement dû au fait que la fonction d’onde ne peut pas ressembler autant que l’on veut à sa transformée de Fourier (autrement dit, ses fonctions d’ondes en représentations x et p diffèrent trop), et donc les deux paramètres V (6.21a) et W (6.21b) diffèrent trop l’un de l’autre.

Une alternative est alors proposée, que nous allons à présent étudier avec l’utilisation des peignes en quadrature que l’on avait introduits au paragraphe 5.6.

6.4 Application du protocole [Wenger 03] aux *peignes en quadrature*

Une autre méthode pour générer des états ressemblant à ceux de la figure 6.2 consiste à utiliser une fonction d’onde constituée de pics gaussiens de compression non infinie, mais dont on limite le nombre grâce à une modulation gaussienne. Ces états sont en fait les états peignes en quadrature que l’on a introduits au chapitre 5. Pour simplifier notre première étude, nous allons supposer dans cette section que les peignes que l’on utilise ont été générés à l’aide d’états chats de Schrödinger parfaits d’amplitude $\alpha \simeq 2^{\frac{k}{2}}$ et de compression $s \simeq 1/\sqrt{2}$ (afin de mimer la génération par croissance de k étages), auxquels p étages de croissance de peignes ont été appliqués.

On rappelle leur allure, visible sur la figure 5.21 (a), et leur fonction d’onde :

$$\langle x | \bar{0}_{\text{pc}}(s, \alpha, p) \rangle \simeq \langle x | \bar{0} \rangle_a^{s_1, s_2} \propto e^{-\frac{s_1^2 x^2}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{[x-la]^2}{2s_2^2}} \quad (6.45a)$$

$$\langle x | \bar{1}_{\text{pc}}(s, \alpha, p) \rangle \simeq \langle x | \bar{1} \rangle_a^{s_1, s_2} \propto e^{-\frac{s_1^2 x^2}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{[x-(l+1/2)a]^2}{2s_2^2}}, \quad (6.45b)$$

avec

$$s_1 = s \quad s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha s} \quad a = \frac{2^{\frac{p-1}{2}} \pi}{\alpha s}. \quad (6.46)$$

Etant donnée la forme des états parfaits (6.17) pour la violation, les pics du peigne doivent être centrés sur des multiples impairs de $a/2$, et l’état qui va nous intéresser sera donc $|\bar{1}_{\text{pc}}(s, \alpha, p)\rangle$. Seulement, celui-ci ne présente pas encore l’alternance de signe des pics voulue, et il faut de plus réussir à intriquer les peignes pour former un état de la forme de (6.16).

6.4.1 Génération d'états peignes alternés intriqués

6.4.1.1 Alternance des signes

Là où l'alternance des signes se faisait naturellement pour la génération d'états chats multi-pattes par le mélange de chats à deux pattes de parité variable, l'alternance des signes des pics pour le peigne nécessite une petite astuce. Celle-ci consiste encore une fois à tirer parti de la transformation induite par notre protocole de croissance : comme nous l'avions vu avec l'équation (5.2), notre protocole permet la multiplication des fonctions d'ondes entre elles, ainsi si l'on dispose d'une fonction valant successivement $+1$ dans les zones où l'on veut préserver le signe et -1 là où l'on veut l'inverser, alors on peut, par application d'un conditionnement homodyne, obtenir la fonction voulue.

Cette fonction parfaite alternée ne nous est malheureusement pas accessible expérimentalement, mais nous avons à notre disposition une fonction qui peut l'approximer dans notre cas : c'est la fonction d'onde d'un chat en représentation p . Celle-ci est en effet de la forme d'une sinusoïde multipliée par une gaussienne, et l'alternance des signes de cette sinusoïde va pouvoir être mise à profit dans notre cas.

Mélangions donc l'état $|\bar{1}_{\text{pc}}(s, \alpha, p)\rangle$ avec un chat pair $|ECC_+(s_m, \alpha_m)\rangle$ de la forme (5.63a) (que nous appellerons *chat de modulation*) sur une lame de transmittivité t , et effectuons le conditionnement habituel $x' \simeq 0$ dans un des deux bras de sortie. La fonction d'onde de l'état de sortie s'écrit :

$$\langle x | \tilde{1}_{\text{pc}}^+(s, \alpha, p) \rangle \tilde{\propto} \cos(\sqrt{2}s_m\alpha_m t x) e^{-\frac{(s_1^2 r^2 + s_m^2 t^2)x^2}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{r^2}{2s_2^2} [x - (l+1/2)\frac{a}{r}]^2}. \quad (6.47)$$

Nous donnerons à ces états le nom de *peignes alternés*.

Pour que la modulation produite soit du même type que celle de (6.17a) (alternance de deux pics positifs et deux pics négatifs), il faut donc que

$$s_m \alpha_m a \frac{t}{r} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad (6.48)$$

Pour nos simulations, nous avons choisi d'utiliser des chats de modulation d'amplitude $\alpha_m = 2^{\frac{m}{2}}$ (pour mimer une croissance à m étages), et de réaliser la modulation avec une lame symétrique ($r = t = 1/\sqrt{2}$). Le paramètre qu'il faudra régler sera donc la compression s_m grâce à cette formule.

Idéalement, il faut $\alpha_m \rightarrow +\infty$ ($s_m \rightarrow 0$) : dans ce cas on augmente la taille de l'enveloppe totale d'un facteur $\sqrt{2}$ et le nombre total de pics visibles dans l'enveloppe reste inchangé (alors qu'il diminue en augmentant le nombre d'étages normalement, voir la figure 5.23).

Le raisonnement peut être dupliqué pour obtenir une alternance des signes en vue de créer un état ressemblant à g , par l'utilisation d'un chat de modulation impair $|ECC_-(s_m, \alpha_m)\rangle$, dont les paramètres vérifient la même relation (6.48).

La figure 6.7 montre les états obtenus par ce procédé, dans le cas où le peigne a été généré par un état chat d'amplitude $\alpha \simeq 8$ et de compression $s = 1.4$ (6 étages de croissance de chats) et deux étages de croissance de peignes. Le chat de modulation, quant à lui, a une amplitude $\alpha_m \simeq 4$ (4 étages de croissance) et une compression ajustée avec la formule (6.48). Dans l'hypothèse où l'on saurait intriquer les états produits pour former l'état (6.16), la violation que l'on pourrait attendre avec cet état serait de $S = 2.68 > 2$. Les valeurs de la fonction S de Bell sont montrées dans le tableau 6.1 pour différentes valeurs du nombre d'étages de croissance de chats et de peignes. Ce tableau nous révèle qu'augmenter le nombre d'étages de croissance de peignes (p)

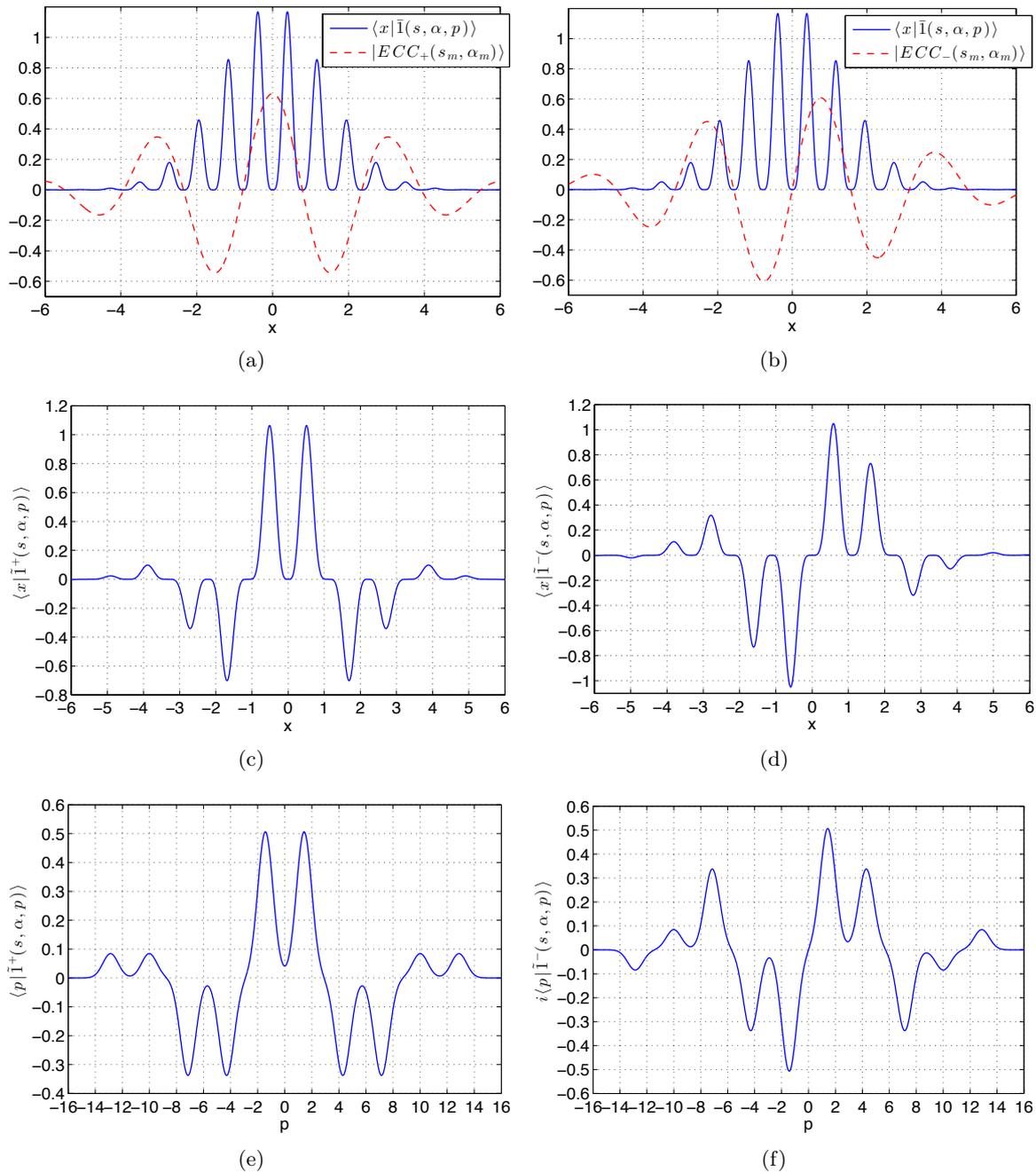


FIGURE 6.7 – Alternance des signes des pics du peigne en quadrature, par mélange avec un chat de modulation (a) pair et (b) impair. Les états alors produits (resp. (c) et (d)) ont une fonction d’onde en représentation x qui présente de fortes similitudes avec celle en représentation p (visibles respectivement sur les figures (e) et (f)).

pour un chat ressource d’amplitude fixée ne permet pas d’augmenter indéfiniment la violation, et qu’à une taille de chat donnée correspond un optimal du nombre d’étages de croissance de peignes. Ceci peut se comprendre en considérant l’expression des fonctions V et W (6.21) : on avait dit que la violation était maximale lorsque le recouvrement des fonctions f et g était maximal, et que celui de leurs transformées de Fourier l’était aussi. Autrement dit, à un facteur

		k						
		1	2	3	4	5	6	7
p	0	1.95	2.24	2.39	2.42	2.42	2.42	2.42
	1	1.84	2.03	2.36	2.54	2.57	2.57	2.57
	2	1.85	1.88	2.08	2.45	2.65	2.68	2.68
	3	1.87	1.87	1.90	2.10	2.50	2.72	2.75

TABLEAU 6.1 – Fonction S de Bell pour différents étages de croissance de chats (k) utilisés pour la croissance de peignes (p). Les violations maximales à k fixé sont représentées en vert.

de compression près, la fonction doit ressembler le plus possible à sa transformée de Fourier : $f = \tilde{f}$ et $g = i\tilde{g}$. Mathématiquement simplement formulé, cela se traduit par le même nombre de pics dans l’enveloppe des deux fonctions f et \tilde{f}

$$\begin{aligned}
 2^{p-1} &\simeq \frac{2^{\frac{k}{2}}}{\pi} \\
 \frac{k}{2} - p &\simeq \frac{\log(\frac{\pi}{2})}{\log(2)},
 \end{aligned} \tag{6.49}$$

et un rapport entre la taille des pics et leur écartement égal :

$$\begin{aligned}
 2^{\frac{p}{2}} \pi &\simeq 2^{\frac{k}{2}} 2^{\frac{1-p}{2}} \\
 \frac{k}{2} - p &\simeq \frac{\log(\frac{\sqrt{2}}{\pi})}{\log(2)}.
 \end{aligned} \tag{6.50}$$

Bien entendu, les deux conditions (6.49) et (6.50) ne peuvent pas être remplies ensemble étant données les variables d’ajustement dont on dispose (p et k), mais ces deux égalités peuvent être approximées par :

$$\frac{k}{2} - p \simeq 1, \tag{6.51}$$

qui est en plutôt bon accord avec les valeurs optimales trouvées dans le tableau 6.1 (en vert).

Remarque 1 : dans l’hypothèse où la seule ressource de base dont on dispose sont des photons uniques (et non plus des chats), il est à noter que les violations sont légèrement différentes de celles présentées ici. Les simulations que nous feront par la suite pourront donc donner des valeurs optimales différentes de celles présentées ici.

Remarque 2 : la relation (6.48) n’est pas valable si $p = 0$; la condition de modulation optimale est à appliquer à un chat, qui change donc de signe. On trouve alors :

$$s_m \alpha_m = \frac{s\alpha}{2} \tag{6.52}$$

à la place de la relation (6.48). En fait, ce cas est celui de l’état chat à quatre pattes que l’on a étudié à la section 6.3, à la différence près que les chats servant de ressource peuvent être comprimés (si $s_m = s = 1$, on retrouve la condition (6.22) avec $r = t$). La valeur de S maximale est par contre la même que précédemment (2.42 dans le tableau 6.1 et sur la figure 6.5).

6.4.1.2 Intrication

Pour obtenir les valeurs précédentes, on a supposé être capable d'intriquer les états peignes alternés : voyons comment on peut réaliser cela en pratique.

En fait, l'idée présentée au paragraphe 6.3 peut de nouveau être exploitée : nous venons de voir que les peignes alternés peuvent être produits par mélange d'un chat de modulation avec un peigne, et que la parité du chat de modulation déterminait le type de peigne alterné $|\tilde{I}_{pc}^+\rangle$ ou $|\tilde{I}_{pc}^-\rangle$ produit. Ainsi, en intriquant les états chats de modulation avant mélange avec les peignes, on pourra donc utiliser la même astuce que précédemment. Le schéma pour la production des états peignes alternés intriqués est illustré sur la figure 6.8. Il est important de noter que les chats

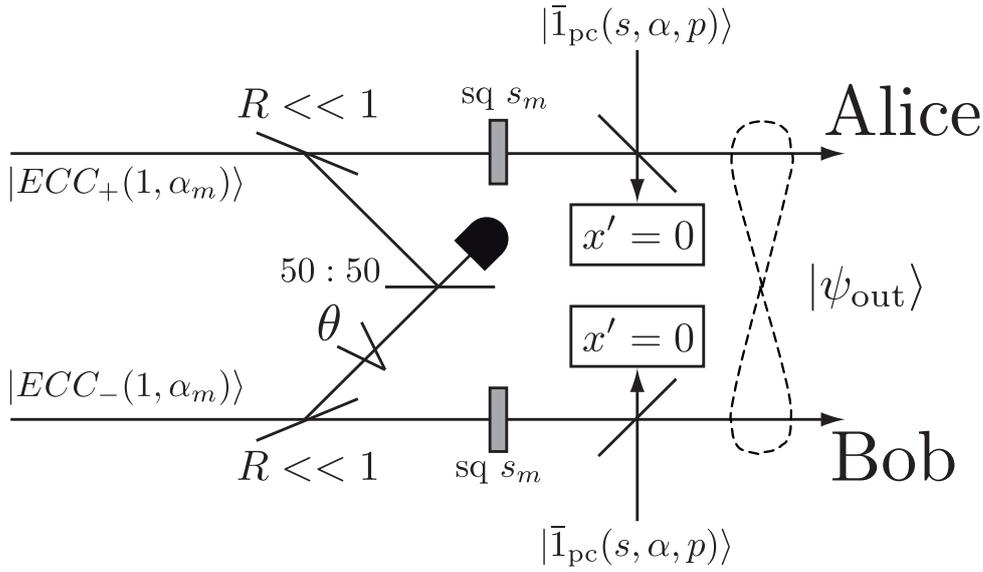


FIGURE 6.8 – Protocole pour la génération d'états peignes alternés intriqués.

utilisés pour la soustraction délocalisée doivent être dé-comprimés ($s_m = 1$) afin de pouvoir fournir l'état correctement intriqué (la soustraction d'un photon d'un chat comprimé d'une certaine parité ne donne le chat comprimé de même amplitude et de parité opposée que si $s_m = 1$). Afin de garantir ensuite les conditions d'accords de tailles ((6.52) si $p = 0$ et (6.48) si $p > 0$), une compression s_m ad hoc est ensuite appliquée (cf "sq s_m " sur la figure). On génère ainsi un état de la forme

$$|\psi_{out}\rangle \tilde{\propto} |\tilde{I}_{pc}^+ \tilde{I}_{pc}^+\rangle + e^{i\theta'} |\tilde{I}_{pc}^- \tilde{I}_{pc}^-\rangle, \quad (6.53)$$

où le symbole \sim dénote le fait que cet état est produit pour de grandes amplitudes des chats (cf le problème soulevé pour la génération d'états chats multipattes intriqués au paragraphe 6.3.2), et $\theta' = \theta + \pi$.

On note aussi que le conditionnement ne se fait plus sur $p' = 0$ mais sur $x' = 0$, ceci étant simplement dû au fait que les états que l'on utilise en entrée de dispositif sont ou bien des états chats déphasés de $\pi/2$, ou bien des états peignes (produits à partir de ce même type de chats). Il ne s'agit donc que d'un déphasage supplémentaire qui est à prendre en compte.

Nous allons à présent nous intéresser aux résultats de violation possibles avec ce dispositif.

6.4.2 Résultats de violation

Dans ce paragraphe, on va supposer que tous les états dont on dispose auront été créés par le protocole de croissance avec pour ressource de base des photons uniques : tous les états chats seront donc produits par le protocole de la section 5.4 et pourront servir à nourrir les protocoles de croissance de peignes de la section 5.6.

L'intégralité des résultats qui seront présentés ici ont été obtenus de manière numérique étant donnée la complexité des calculs analytiques lorsqu'il s'agit de prendre en compte les différentes imperfections du protocole. La méthode de simulation numérique est précisée dans l'annexe A.5, et nous allons présenter ici différents résultats qu'elle a permis d'obtenir.

6.4.2.1 Violations

Nous allons considérer trois cas du tableau 6.1 pour le calcul de la violation : $(k = 3, p = 0)$, $(k = 4, p = 1)$ et $(k = 6, p = 2)$. Ces cas sont proches de ceux obtenus par la formule simple (6.51), et permettent d'obtenir les violations respectives de 2.33, 2.41 et 2.66 (les valeurs diffèrent de celles trouvées dans le tableau 6.1 car les états d'entrée sont différents). Pour ces protocoles, un chat de modulation généré par un étage de croissance seulement est utilisé en vue de réduire le nombre de ressources minimales nécessaires. Celui-ci, donné par la formule $n_{\min} = 2(2^{k_{\text{mod}}} + 2^{p+k})$ (où k_{mod} est le nombre d'étages qui ont servi à générer l'état chat de modulation), est en effet égal à 36, 68 et 516 (resp.) dans les trois cas : le nombre de photons minimaux nécessaires croît donc exponentiellement avec la violation recherchée. Il semble évident que la production simultanée de 516 photons semble très peu réaliste, et l'utilisation des mémoires quantiques dont on avait parlé au chapitre 5 permettrait une très grande augmentation de la probabilité de succès de l'expérience.

Bien entendu, le protocole sera soumis à des imperfections, que nous allons considérer de trois types :

- Les canaux de transmission vers Alice et Bob peuvent avoir des pertes, et donc dégrader la violation potentielle.
- Les détections homodynes servant à la préparation des états chats et peignes peuvent avoir une efficacité finie.
- Les photons uniques de ressource peuvent être imparfaits (mélange avec du vide, imperfections de génération ou de conditionnement).

Nous allons étudier un à un ces cas.

6.4.2.2 Imperfections du protocole

Pertes en ligne

Le premier type d'imperfection que l'on peut considérer est la transmission finie des canaux de transmission vers Alice et Bob, ou de manière équivalente l'efficacité de leurs détections homodynes. Dans les cas des peignes (3,0) et (6,2), les résultats sont présentés sur la figure 6.9 par les lignes continue et mixte (resp.) [Etesse 14].

On voit que malgré la grande sensibilité de nos états peignes aux pertes (cf figure 5.26 (b)), ceux-ci sont capables de maintenir une violation tant que la transmission en énergie (t^2) est supérieure à 85% pour un état (3,0) et 79% pour un état (6,2). En adaptant la compression avant de subir les pertes afin d'optimiser la robustesse de l'état (cf paragraphe 5.6.4.2), on obtient les symboles de la figure 6.9, qui permettent alors de tolérer des transmissions en énergie aussi basse que 74% pour un état (6,2). Ces transmissions limites, bien que plus élevées que celles proposées dans les protocoles hybrides (64.8% pour [Brask 12]) ou à états intriqués

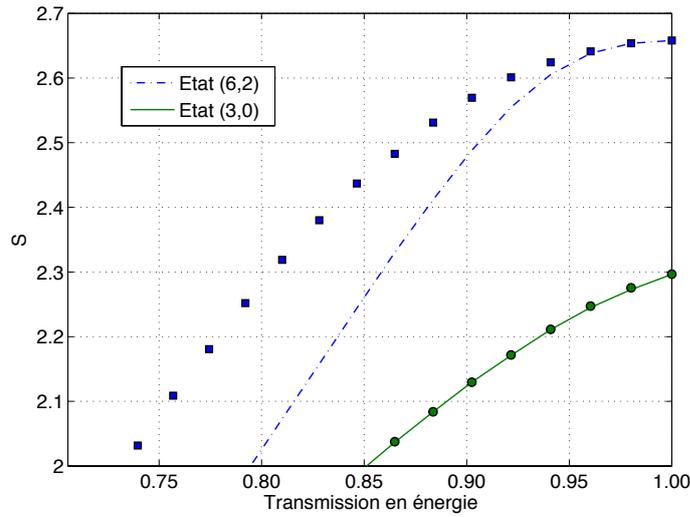


FIGURE 6.9 – Fonction S de Bell en fonction de la transmission des canaux d’Alice et Bob pour les états (6,2) (ligne mixte et carrés) et (3,0) (ligne continue et cercles).

asymétriques (66.7% pour [Eberhard 93]), ont le très grand avantage d’être à ce jour très largement dépassées par les efficacités actuelles des détections homodynes (98% [Wakui 07]) et constituent donc une limite très large au regard des capacités actuelles de détection.

Inefficacités de détection pour la génération

Les grandes tolérances sur les efficacités de détections vont souvent de pair avec les restrictions sur la qualité nécessaire des états.

Voyons dans un premier temps l’influence de l’inefficacité des détections homodynes utilisées pour la génération des différents états chats et peignes nécessaires à notre protocole. Celle-ci est représentée sur la figure 6.10 (a).

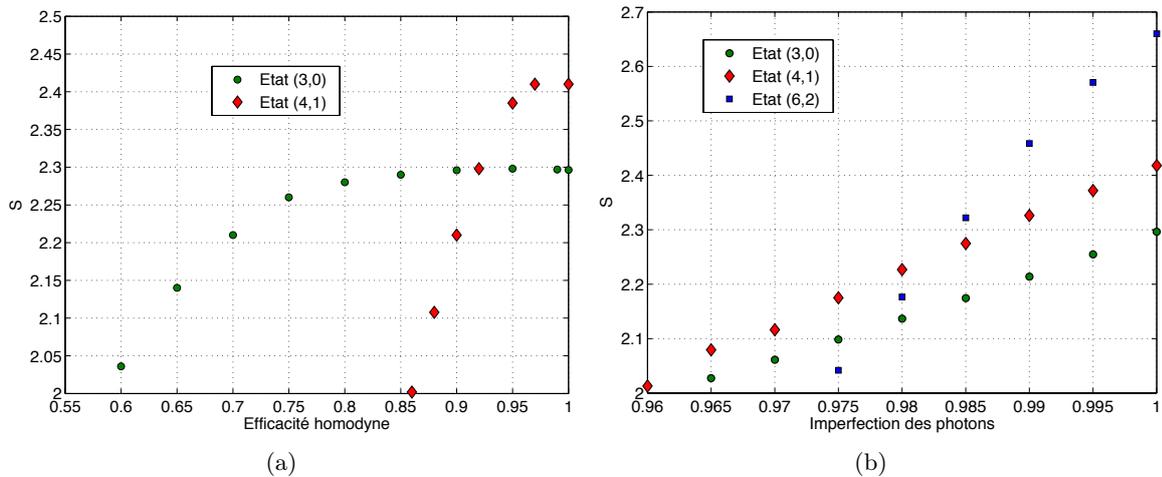


FIGURE 6.10 – Imperfections de génération de l’état nécessaire à la violation. (a) Inefficacité des détections homodynes, (b) imperfection des photons uniques servant de ressource.

On voit que pour l'état (3,0), l'efficacité joue un rôle mineur tant qu'elle est supérieure à 90%, et la violation est maintenue tant que celle-ci est supérieure à 58%. En augmentant l'amplitude du peigne, cette efficacité limite augmente jusqu'à 86%, indiquant que l'état sera davantage sensible aux imperfections si sa taille augmente. Ceci s'explique simplement par le fait que plus l'état est gros, plus le nombre d'étages de croissance nécessaire (et donc de conditionnement homodynes imparfaits) est important. Malgré tout, les valeurs restent largement accessibles aux détections homodynes actuelles, comme nous l'avons mentionné précédemment.

Imperfection des photons

Enfin, d'autres imperfections importantes à prendre en compte sont les imperfections des photons uniques eux-mêmes que l'on considèrera de trois types : pertes (les imperfections le plus souvent considérées [Lvovsky 01]), imperfections de génération (paramètre γ) et de conditionnement (pureté modale ξ).

Tout d'abord les imperfections de pertes, qui amènent à définir la matrice densité modifiée

$$\hat{\rho}_{\text{out}} = \eta_{\text{phot}}|1\rangle\langle 1| + (1 - \eta_{\text{phot}})|0\rangle\langle 0|, \quad (6.54)$$

ou bien qui peuvent être prises directement en compte dans la forme de la fonction de Wigner de l'état de photon unique imparfait (2.18), ont une influence montrée sur la figure 6.10 (b). Elles ont un très fort impact sur la violation possible, étant donné le fait que pour des pertes supérieures à 4%, aucune violation n'est observable avec les états que l'on considère ici. La limite inférieure ne dépend d'ailleurs pas de la taille de l'état de manière monotone : l'état (4,1) est ici l'état qui permet la violation pour la qualité la plus faible.

Malgré tout, avec les progrès réalisés actuellement sur les protocoles, des fidélités de l'ordre de 90% peuvent être envisagées [Morin 12], se rapprochant de notre limite ici présentée.

Les autres types d'imperfections des photons, liés à leur génération (γ et ξ) ont une influence montrée dans les tableaux 6.2 et 6.3.

	γ				
	0	0.05	0.1	0.15	0.2
(3,0)	2.33	2.3	2.22	2.09	1.95
(6,2)	2.66	2.58	2.43	2.1	1.78

TABLEAU 6.2 – Fonction S de Bell en fonction de γ .

	ξ							
	1	0.995	0.99	0.985	0.98	0.975	0.97	0.965
(3,0)	2.33	2.27	2.21	2.16	2.11	2.06	2.02	1.98
(6,2)	2.66	2.54	2.43	2.30	2.15	2.03	1.91	1.83

TABLEAU 6.3 – Fonction S de Bell en fonction de ξ .

Les limites de violations ($\gamma \lesssim 0.15$ et $\xi \gtrsim 0.97$) indiquent la très grande sensibilité de la fonction S de Bell à ce type d'imperfections. À titre de comparaison, sur notre montage expérimental, $\gamma \simeq 0.4$ et $\xi \simeq 0.96$: ces paramètres sont encore loin de ceux nécessaires à l'obtention d'une violation. Ce qu'il est là encore toutefois important de noter est que les imperfections du protocole en tant que telles (avec des photons uniques parfaits en entrée) ne semblent pas limitantes dans ses performances (cf figures 6.9 et 6.10 (a)).

6.4.2.3 Probabilité de succès

Enfin, pour clore cette étude, on peut représenter la probabilité de succès de la génération des états intriqués (en supposant les photons uniques disponibles à la demande) en fonction de la violation attendue (on fait varier pour cela les largeurs de conditionnements homodynes). La figure 6.11 représente ceci pour les cas (3,0) et (6,2).

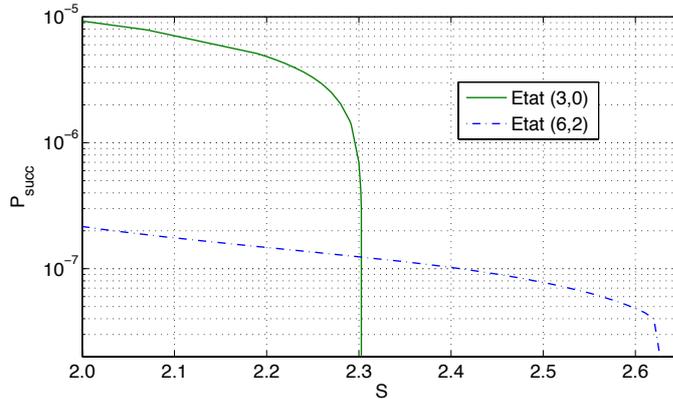


FIGURE 6.11 – Probabilité de succès de génération des états intriqués nécessaires à la violation dans les cas (3,0) (trait vert continu) et (6,2) (trait bleu mixte).

Cette figure, obtenue pour $R = 0.1\%$ et une efficacité APD de 6% (celle que l'on a sur notre montage expérimental, incluant les filtrages), révèle la faible probabilité de succès de l'opération complète de préparation des états. Toutefois, la possibilité offerte en optique de travailler avec de grandes cadences de répétition (plusieurs dizaines de MHz) permettrait d'obtenir des taux de comptages acceptables.

6.5 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre comment les états que nous avons introduits au chapitre 5, les états chats multipattes et les états peignes, peuvent permettre de réaliser des tests fondamentaux de la physique quantique par le biais d'une violation des inégalités de Bell.

Une proposition expérimentale concrète, impliquant l'utilisation d'une soustraction délocalisée de photons et de conditionnements homodynes, a été proposée en vue de préparer les états intriqués requis pour une violation nécessitant des mesures homodynes seulement de la part des parties Alice et Bob. Des violations pouvant atteindre $2.66 > 2$ ont pu être obtenues numériquement, montrant la validité de la proposition.

La sensibilité de ce protocole aux imperfections des photons uniques servant de ressource est par contre un problème auquel il faudra faire face pour permettre l'obtention de violations.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Cette thèse a été l'occasion de développer de nouveaux outils expérimentaux et théoriques pour la formation d'états arbitraires de la lumière, par l'utilisation itérée d'un protocole élémentaire simple basé sur l'adjonction cohérente itérative d'états de Fock à un photon.

Ces états de Fock, expérimentalement imparfaits, ont pu être caractérisés par différentes techniques. Celles-ci ont entre autres montré l'importance des paramètres spatio-temporels de leur génération : par l'augmentation des tailles des points focaux dans les cristaux non-linéaires ainsi que par l'amélioration des performances des instruments de mesure, la fidélité des états de Fock à un photon produits a ainsi pu passer de 67% à 77% (en tenant compte des inefficacités de détections). La stabilisation et le diagnostic en temps réel de plusieurs paramètres expérimentaux a de plus permis d'améliorer grandement la rapidité d'obtention de ces états.

Ensuite, par le mélange de deux de ces états sur une lame 50:50, et à l'aide d'un conditionnement homodyne $x = 0$ dans une des deux voies de sortie, la génération expérimentale d'états fidèles à $61.1 \pm 1\%$ à des états "Chat de Schrödinger" optique d'amplitude $\alpha = 1.63$ et comprimé d'un facteur $s = 1.52$ suivant la quadrature x a pu être réalisée. Nous avons ensuite vu qu'en itérant ce protocole, celui-ci peut permettre la génération d'états chats d'amplitude et de fidélité arbitrairement grandes, grâce à un procédé mathématique de "gaussianisation" locale de l'allure des fonctions d'ondes.

La force de ce protocole est qu'il peut aussi être généralisé à la production d'états arbitraires de la lumière, en ne restreignant plus le mélange des états de Fock à un photon à se faire sur des lames 50:50 et en permettant d'effectuer les conditionnements homodynes en des points différents de $x = 0$. L'étude de ce protocole dans quelques cas simples révèle alors la possibilité d'obtenir de très bonnes performances vis-à-vis des imperfections éventuelles du dispositif (pertes en ligne, inefficacités de détection,...).

Enfin, ce protocole peut également être utilisé pour la génération d'états que nous avons baptisés "Peignes en quadrature" (du fait de leur structure en pics gaussiens), présentant un grand intérêt en calcul quantique de par la possibilité qu'ils offrent d'implémenter des codes correcteurs d'erreurs. Nous avons étudié une autre de leurs applications, avec l'étude des violations des inégalités de Bell de type CHSH lorsque les deux parties n'effectuent que des mesures homodynes. Avec une proposition expérimentale explicite pour la génération, l'intrication et la mesure des états nécessaires, ce travail a été l'occasion de montrer les très fortes violations accessibles à l'aide de ces états. Par exemple, par l'utilisation d'états peignes produits par deux étages de croissance nourris par des états chats produits par six étages de croissance, une violation $S = 2.66 > 2$ peut être théoriquement obtenue.

Une propriété importante de ce protocole est sa forte tolérance aux pertes sur les canaux respectifs d'Alice et Bob : pour l'état précédent par exemple, une violation est toujours observable tant que la transmission reste supérieure à 74%.

Perspectives

La mise en œuvre expérimentale de la croissance d'états chats a pu être réalisée dans sa version la plus simple, à savoir par le mélange de deux états de Fock à un photon. En revanche, comme nous l'avons vu, les taux de création des états chats étaient très limités (20 min^{-1} , correspondant à une probabilité de succès de création de l'ordre de 5.10^{-7}), et donc dupliquer simplement le protocole en vue de réaliser la croissance plus poussée des états sans aucune modification ne semble pas envisageable. Pour donner un ordre d'idées, nous avons vu qu'un temps de deux ans et demi en moyenne serait nécessaire pour espérer réaliser un conditionnement réussi pour un chat à deux étages. Il est donc évident de voir pourquoi une autre stratégie, utilisant des mémoires quantiques, est préférable.

Trois grandes pistes sont actuellement à l'étude pour permettre des croissances impliquant davantage de photons : le retrait du *cavity dumper*, la génération d'effets non-linéaires en cavité et la mise en place de mémoires quantiques.

Retrait du cavity dumper

Malgré tous les efforts qui ont été déployés pour stabiliser la source laser, il reste difficile d'obtenir exactement les mêmes caractéristiques laser d'un jour sur l'autre. Le principal responsable de ceci est le *cavity dumper* que l'on utilise pour augmenter l'énergie par impulsion. La prochaine étape sur l'expérience sera donc son retrait, ce qui n'empêchera en rien d'utiliser avec bénéfice toutes les améliorations acquises durant cette thèse pour stabiliser la source laser. En plus de permettre une meilleure stabilité du laser, ce retrait permettra également de travailler à des fréquences beaucoup plus élevées (76 MHz pour le *Mira*). En revanche, l'énergie par impulsion sera divisée par un facteur 10, faisant a priori chuter l'énergie des faisceaux produits par effets non-linéaires d'un facteur $10^2 = 100$.

Pour ne pas travailler avec des taux de comptages inférieurs à ceux que l'on a actuellement, des modifications seront donc à prévoir dans le montage de génération d'états par effets non-linéaires.

Effets non-linéaires en cavités

En utilisant des cavités autour des cristaux de KNbO_3 , il sera possible d'exacerber les effets non-linéaires de notre expérience (génération de seconde harmonique ou génération paramétrique). En outre, l'avantage de ces cavités est qu'elles permettent de filtrer les modes spatiaux des faisceaux : ainsi, l'amplificateur cryogénique par dérive de fréquence que nous avons introduit en 3.2 pourrait être utilisé pour augmenter d'un facteur 4 l'énergie par impulsion, ne nécessitant de rattraper qu'un facteur 6 au lieu de 100 (des tests rapides ont pu montrer qu'à 76 MHz le gain de l'amplificateur n'était que légèrement altéré par rapport à celui obtenu pour 800 kHz).

Une fois que l'on dispose d'une énergie par impulsion de pompe comparable à celle que l'on a actuellement, le taux de création des états de Fock à un photon serait donc multiplié par un facteur ~ 100 , avec une qualité spatiale meilleure du fait de l'utilisation de faisceaux issus de cavités optiques.

Mise en place de mémoires quantiques : adjonction cohérente itérative en cavité

Pour ce qui est de la croissance des états étape par étape, l'utilisation de cavités peut là encore être mise à profit. Une possibilité, montrée sur la figure 1, consiste à stocker les états au fur et à mesure de leur formation dans une cavité (ici une cavité en anneaux, formée par quatre

miroirs). Etudions rapidement la succession des étapes pour la génération d'un état similaire à celui qui a été montré au chapitre 4 (mélange de deux photons uniques sur une lame 50:50 et conditionnement $x = 0$ sur un bras de sortie).

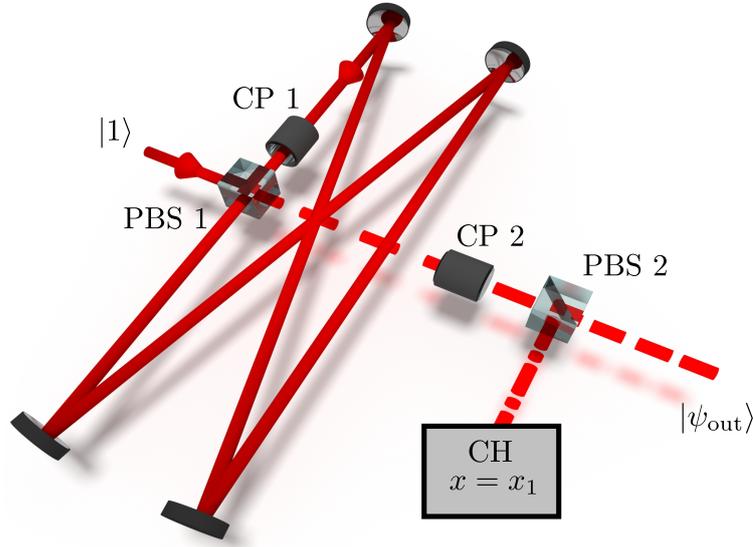


FIGURE 1 – Génération de chats par l'utilisation d'une mémoire quantique formée d'une cavité. L'utilisation couplée de cubes séparateurs de polarisation (PBS) et de cellules de Pockels (CP) permettent d'extraire et de diriger le faisceau à volonté. Le conditionnement homodyne (CH) est alors effectué séparément du mélange des deux états.

- (i) Initialement la cavité est vide, et un état de Fock à un photon arrive en haut à gauche sur la figure, sur un port d'entrée d'un cube séparateur de polarisation PBS 1. Sa polarisation verticale fera qu'il sera réfléchi et entrera donc dans la cavité.
- (ii) A ce moment, la tension $V_{\lambda/2}$ est envoyée dans une cellule de Pockels (CP 1 sur la figure), dont on a placé les axes à $\pm 45^\circ$ de l'horizontale et de la verticale. La polarisation du photon unique est donc tournée de 90° , et celui-ci est donc transmis par le cube. La tension de la cellule de Pockels est alors immédiatement coupée, et le photon sera piégé dans la cavité.
- (iii) Si l'on suppose la cavité correctement synchronisée (sa longueur est identique à celle de la cavité laser, soit ~ 4 m à 76 MHz), lorsqu'un autre photon unique arrive sur le port d'entrée de PBS 1, celui-ci est superposé temporellement et spatialement avec celui qui était piégé jusqu'alors dans la cavité. Par contre, ils auront tous les deux des polarisations orthogonales.
- (iv) Avant que ces deux photons n'arrivent sur CP 1, on applique à celle-ci la tension $V_{\lambda/4}$ pour que les deux polarisations des photons deviennent circulaires. Le PBS 1 réfléchira alors 50% de l'énergie (trajet en tirets espacés) vers l'extérieur de la cavité, et 50 % de l'énergie restera piégée dans la cavité. Ce PBS 1 aura aussi pour effet de faire interférer les deux photons uniques étant donné que sur chaque bras de sortie les polarisations seront identiques : c'est ainsi que la lame 50:50 est "simulée".
- (v) Une fois cette séparation effectuée, on coupe la tension appliquée à CP 1 et on applique la tension $V_{\lambda/2}$ à CP 2. Les modifications de ces tensions auront pour effets respectifs de piéger une partie de l'état dans la cavité et d'envoyer l'autre partie vers le conditionnement

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

homodyne CH. Si ce dernier est réussi ($x = 0$), alors l'état qui est emprisonné dans la cavité est l'état chat comprimé voulu.

- (vi) Finalement, pour extraire le chat de la cavité, il suffira d'appliquer $V_{\lambda/2}$ à CP 1 pour faire tourner sa polarisation de 90° , et de ne pas appliquer de tension à CP 2 pour que l'état puisse être transmis par PBS 2.

Il est également possible d'utiliser ce protocole pour la croissance d'états chats utilisant plus que deux photons : en bouclant entre les étapes (iii) et (v), l'état chat emprisonné grandira avec le nombre de photons qui auront été utilisés dans le processus. Le dispositif est alors agencé suivant une configuration "linéaire" repliée, pour faire écho aux notations introduites au paragraphe 5.2.3.2.

De nouveaux systèmes liés à de nouveaux défis

L'utilisation du type de configuration présenté sur la figure 1 pose un certain nombre de problèmes spécifiques qui méritent d'être mentionnés.

Tout d'abord, le travail à hautes fréquences (76 MHz) nécessite l'utilisation de composants de très grande bande passante. Les cellules de Pockels par exemple sont limitées à ~ 2 MHz, ce qui rend difficile la séparation d'états conditionnés trop proches.

Pour ce qui est des détections homodynes, des montages ont déjà été développés dans ces gammes de fréquences [Cooper 12], montrant qu'elles ne constitueront pas un frein au protocole. Par contre, les APDs que nous utilisons ne permettent pas de résoudre correctement l'intégralité des impulsions : leur temps mort, de l'ordre de 50 ns (qui ne nous gênait pas jusqu'à présent), est environ quatre fois supérieur à la période de nos impulsions. Cela pourra donc constituer un problème qu'il faudra prendre en compte.

Ensuite, un contrôle de la phase des états en temps réel est nécessaire pour que le conditionnement se fasse sur la bonne quadrature et que l'état de sortie puisse être tomographié. En effet, même si tous les photons uniques utilisés comme ressources du protocole sont des invariants de phase, ça n'est pas le cas des états chats.

Ce contrôle de phase doit pouvoir être fait sur la cavité ainsi que sur le chemin de sortie.

Enfin, et c'est probablement le problème clé, plus le temps de stockage des états dans la cavité sera long, plus grandes seront les pertes et donc moins bonne sera la qualité des états. La qualité des miroirs, des cellules de Pockels et des cubes séparateurs de polarisation sera donc cruciale pour ce dispositif expérimental.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Méthodes pour la simulation numérique

Si l'on veut réaliser la simulation numérique d'une expérience d'optique quantique, deux options principales s'offrent à nous :

- Soit l'intégralité des états et des opérateurs en jeu dans l'expérience peuvent être tronqués à une dimension "raisonnable" dans l'espace de Fock, et alors une simulation dans un espace de Hilbert de dimension n fixée peut être effectuée.
- Soit il existe des opérateurs ou des états dont la décomposition en base de Fock comporte un nombre d'éléments trop grand pour les simulations, et alors le travail dans l'espace des phases avec les fonctions de Wigner peut se révéler simplificateur.

Etant donné le fait qu'il existe des packages déjà prêts pour des simulations dans un espace de Hilbert de dimension finie (travail avec des tableaux) [Tan 99], nous ne rentrerons pas dans les détails de la mise en œuvre des calculs en base de Fock.

Nous nous intéresserons par contre à la simulation de quelques transformations utiles si l'on veut travailler avec les fonctions de Wigner, en nous penchant plus particulièrement sur les transformations de conditionnements homodynes que nous avons introduits aux chapitres 4 et 5.

Nous verrons dans un premier temps comment quelques opérations simples peuvent être implémentées, puis ensuite comment l'utilisation de la transformée de Fourier rapide (FFT pour *Fast Fourier Transform*) va nous permettre de réaliser des opérations plus complexes. Nous terminerons cette étude par une description de la méthode employée pour simuler l'expérience de violation des inégalités de Bell avec le protocole décrit à la section 6.4.

A.1 Généralités

Nous allons supposer que nous disposons de fonctions de Wigner numériques, c'est-à-dire représentées par des tableaux de taille $N_q \times N_p$ de coefficients $W(m\Delta q, n\Delta p) \simeq W_{mn}$, m variant dans $[-\frac{N_q}{2}, \frac{N_q}{2} - 1]$ et n variant dans $[-\frac{N_p}{2}, \frac{N_p}{2} - 1]$.

On supposera la taille du domaine de définition initial $[-\frac{N_q\Delta q}{2}, (\frac{N_q}{2} - 1)\Delta q] \times [-\frac{N_p\Delta p}{2}, (\frac{N_p}{2} - 1)\Delta p]$ ajustée au support de la fonction de Wigner. Cet ajustement consistera en le critère $\Delta Q := N_q\Delta q = 2S_Q$ et $\Delta P := N_p\Delta p = 2S_P$, où S_Q et S_P sont respectivement les supports de la fonction de Wigner dans les deux directions q et p . Ceci est illustré sur la figure A.1, pour la fonction de Wigner du photon unique.

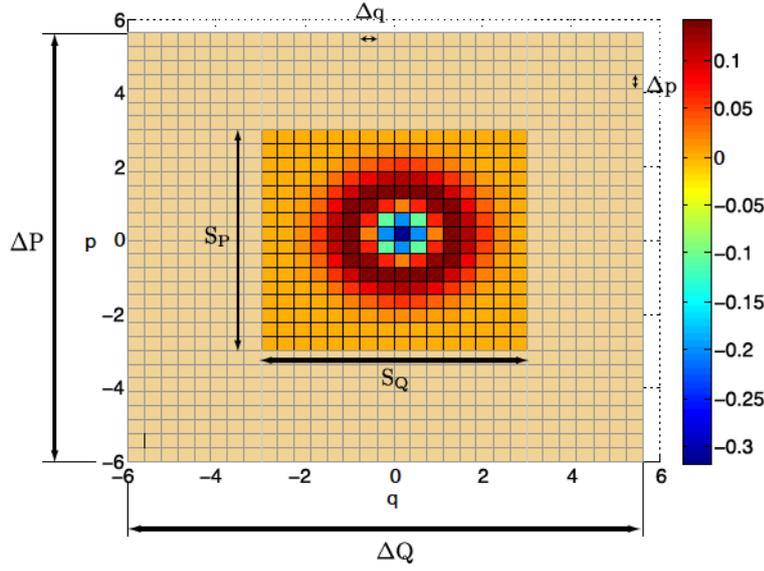


FIGURE A.1 – Définition des différentes notations utilisées dans la discrétisation d’une fonction de Wigner, dans le cas du photon unique.

A.2 Deux opérations triviales

A.2.1 Squeezing

Là où le squeezing de paramètre s est une transformation pouvant être complexe à implémenter en base de Fock, elle est triviale dans le domaine des quadratures : elle consiste simplement en la multiplication d’une des quadratures par s et de l’autre par $1/s$. On ne modifie donc même pas le tableau W_{mn} , mais seulement les échelles d’abscisse et d’ordonnée.

A.2.2 Distributions de probabilités

Pour obtenir la distribution de probabilité d’une fonction de Wigner suivant une quadrature, il suffit de réaliser l’intégrale de cette fonction suivant la quadrature orthogonale :

$$f(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(q, p) dp. \quad (\text{A.1})$$

Cela peut être approximé par une simple somme des coefficients dans une direction du tableau, multipliée par le pas de quadrature :

$$f(m\Delta q) = \sum_{n=-N_p/2}^{N_p/2-1} W_{mn} \Delta p, \quad (\text{A.2})$$

$$g(n\Delta p) = \sum_{m=-N_q/2}^{N_q/2-1} W_{mn} \Delta q. \quad (\text{A.3})$$

Là aussi, le calcul ne pose aucun problème numérique.

A.3 Utilisation de la FFT

Malheureusement, toutes les opérations ne sont pas aussi simples dans le domaine des quadratures, et la simulation numérique de certaines d'entre elles nécessite l'utilisation de quelques astuces. Nous montrons ici une possibilité utilisant les transformations vers le domaine de Fourier.

A.3.1 Principe de la transformation : description hybride analytico-numérique

Il est toujours possible d'exprimer une fonction $W(q, p)$ périodique de période ΔQ dans la direction q et ΔP dans la direction p comme une somme de ses composantes de Fourier :

$$W(q, p) = \frac{1}{\Delta Q \Delta P} \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}} \tilde{W}_{kl}^o e^{2i\pi(\frac{qk}{\Delta Q} + \frac{pl}{\Delta P})}, \quad (\text{A.4})$$

où

$$\tilde{W}_{kl}^o = \int_{-\frac{\Delta Q}{2}}^{\frac{\Delta Q}{2}} dq \int_{-\frac{\Delta P}{2}}^{\frac{\Delta P}{2}} dp W(q, p) e^{-2i\pi(\frac{qk}{\Delta Q} + \frac{pl}{\Delta P})}. \quad (\text{A.5})$$

Dans notre cas, on pourra utiliser ces transformations en supposant que la fonction de Wigner que l'on considère est périodique de période ΔQ dans la direction q et ΔP dans la direction p . En utilisant la même méthode que (A.2) et (A.3) pour réaliser le calcul de l'intégrale (A.5), on obtient l'expression approchée :

$$\tilde{W}_{kl}^o \simeq \Delta q \Delta p \sum_{m=-N_q/2}^{N_q/2-1} \sum_{n=-N_p/2}^{N_p/2-1} W_{mn} e^{-2i\pi(\frac{mk}{N_q} + \frac{nl}{N_p})}. \quad (\text{A.6})$$

Bien évidemment, plus les pas choisis pour la discrétisation de la fonction de Wigner seront petits, plus cette expression sera valable.

Si l'on pose ensuite

$$\tilde{W}_{kl} = \sum_{m,n} W_{mn} e^{-2i\pi(\frac{mk}{N_q} + \frac{nl}{N_p})}, \quad (\text{A.7})$$

on aura finalement

$$W(q, p) \simeq \frac{1}{N_q N_p} \sum_{k=-N_q/2}^{N_q/2-1} \sum_{l=-N_p/2}^{N_p/2-1} \tilde{W}_{kl} e^{2i\pi(\frac{qk}{\Delta Q} + \frac{pl}{\Delta P})}. \quad (\text{A.8})$$

L'approche que nous utilisons donc ici est hybride entre les Séries de Fourier et la Transformation de Fourier Discrète (DFT) : dans la suite des calculs, nous remplacerons l'expression analytique de W par l'expression (A.8).

A.3.2 Problème concret d'implémentation

L'implémentation de la transformée de Fourier numérique ne pose aucun problème dans les logiciels de simulations numériques. Par exemple, Matlab possède une fonction incluse qui permet de réaliser la transformation (A.7) de manière très efficace par les algorithmes de FFT. L'algorithme inverse, permettant de récupérer les coefficients W_{mn} réalise une *Invert Fast Fourier Transform* (IFFT).

A.4 Autres transformations

A.4.1 La lame 50:50 avec conditionnement sur un bras

A.4.1.1 Formulation

Nous allons nous intéresser au cas où l'on veut connaître la fonction de Wigner d'une transformation de beamsplitter 50:50 suivi d'un conditionnement homodyne dans un des deux bras. Ce protocole est le même que celui que l'on a rencontré aux chapitres 4 et 5, et qui est montré sur la figure 5.2.

Formellement, cette opération s'écrit (comme on l'avait vu en (5.44)) :

$$W_{\text{out}}(q, p) = \int_{-\epsilon_q}^{\epsilon_q} dq' \int_{-\epsilon_p}^{\epsilon_p} dp' W_1\left(\frac{q-q'}{\sqrt{2}}, \frac{p-p'}{\sqrt{2}}\right) W_2\left(\frac{q+q'}{\sqrt{2}}, \frac{p+p'}{\sqrt{2}}\right). \quad (\text{A.9})$$

Comme le lecteur l'aura remarqué, la seule différence avec la formule (5.44) est que l'on ne réalise pas ici l'intégrale sur p sur l'ensemble des réels mais seulement sur un intervalle donné : nous y reviendrons plus tard.

D'après la méthode décrite au paragraphe A.3.1, remplaçons ensuite W_1 et W_2 par leurs expressions en fonction des coefficients de Fourier pour obtenir :

$$W_{\text{out}}(q, p) = \frac{1}{N_q^2 N_p^2} \sum_{k', l', k'', l''} \tilde{W}_{1, k' l'} \tilde{W}_{2, k'' l''} \int_{-\epsilon_q}^{\epsilon_q} dq' \int_{-\epsilon_p}^{\epsilon_p} dp' e^{\frac{2\pi i}{\sqrt{2}} \left[\frac{(q-q')k'}{\Delta Q} + \frac{(p-p')l'}{\Delta P} + \frac{(q+q')k''}{\Delta Q} + \frac{(p+p')l''}{\Delta P} \right]}, \quad (\text{A.10})$$

qui se simplifie en

$$W_{\text{out}}(q, p) = \frac{1}{N_q N_p} \sum_{k', l', k'', l''} \tilde{W}_{1, k' l'} \tilde{W}_{2, k'' l''} S_q(k'' - k') S_p(l'' - l') e^{\frac{2\pi i}{\sqrt{2}} \left[\frac{q(k'+k'')}{\Delta Q} + \frac{p(l'+l'')}{\Delta P} \right]}, \quad (\text{A.11})$$

avec

$$S_q(x) = \frac{2\epsilon_q}{N_q} \text{sinc} \left[\frac{2\pi x \epsilon_q}{\sqrt{2} \Delta Q} \right] \quad \text{et} \quad S_p(x) = \frac{2\epsilon_p}{N_p} \text{sinc} \left[\frac{2\pi x \epsilon_p}{\sqrt{2} \Delta P} \right]. \quad (\text{A.12})$$

Les coefficients de Fourier de l'expression (A.11), donnés par l'équation (A.7) peuvent enfin s'écrire simplement comme :

$$\tilde{W}_{\text{out}, kl} = \sum_{k', l', k'', l''} \tilde{W}_{1, k' l'} \tilde{W}_{2, k'' l''} S_q(k'' - k') S_p(l'' - l') \delta_{k, k'+k''} \delta_{l, l'+l''} \quad (\text{A.13})$$

$$= \sum_{k', l'} \tilde{W}_{1, k' l'} \tilde{W}_{2, [k-k'] [l-l']} S_q([k-k'] - k') S_p([l-l'] - l') \quad (\text{A.14})$$

où $[k-k']$ (resp. $[l-l']$) est égal à la valeur congrue à $k-k'$ (resp. $l-l'$) modulo N_q (resp. N_p) comprise dans $\llbracket -\frac{N_q}{2}, \frac{N_q}{2} - 1 \rrbracket$ (resp. $\llbracket -\frac{N_p}{2}, \frac{N_p}{2} - 1 \rrbracket$).

Il est important de noter qu'alors les résolutions Δq et Δp en sortie de calcul seront dégradées d'un facteur $\sqrt{2}$: $\tilde{W}_{\text{out}, kl}$ aura pour IFFT $W_{\text{out}, mn} \simeq W_{\text{out}}(\sqrt{2}m\Delta q, \sqrt{2}n\Delta p)$, du fait de l'apparition du facteur $\sqrt{2}$ dans l'exponentielle de l'expression (A.11).

A.4.1.2 Cas ϵ_q quelconque et $\epsilon_p = \frac{\Delta P}{\sqrt{2}}$

Dans le cas où l'on réalise un conditionnement sur la quadrature q , ϵ_p devra être choisi grand (idéalement $\rightarrow +\infty$). Mais, étant donné le fait que l'on a choisi ΔP et ΔQ plus grands que les

supports des fonctions d'un facteur 2, on pourra se permettre de choisir $\epsilon_p = \frac{\Delta P}{\sqrt{2}}$.

En observant l'expression (A.12), on voit que cette valeur de ϵ_p présente un grand intérêt, car alors la fonction S_p se simplifie en :

$$S_p([l - l'] - l') = \sqrt{2}\delta_{[l-l'],l'}\Delta p, \quad (\text{A.15})$$

où δ et le symbole de Kronecker habituel.

Il faut par contre prendre garde à un problème majeur si l'on simplifie le calcul de cette manière. Considérons en effet l'équation (A.9) : p variant dans $[-\frac{\Delta P}{2\sqrt{2}}, \frac{\Delta P}{2\sqrt{2}}]$ (facteur $\sqrt{2}$ expliqué plus haut) et p' variant dans $[-\epsilon_p, \epsilon_p] = [-\frac{\Delta P}{\sqrt{2}}, \frac{\Delta P}{\sqrt{2}}]$, alors $\frac{p \pm p'}{\sqrt{2}}$ variera dans $[-\frac{3\Delta P}{4}, \frac{3\Delta P}{4}]$. C'est le domaine dans lequel on évaluera les fonctions de Wigner W_1 et W_2 .

Or initialement, on rappelle que l'on a défini les fonctions dans un intervalle $[-\frac{\Delta P}{2}, \frac{\Delta P}{2}]$, et que celles-ci sont prolongées par périodicité au-delà : les valeurs de la période suivante "contamineront" donc notre calcul sur une largeur $\Delta P/4$ de part et d'autre de l'intervalle initial.

Mais il faut se souvenir que nous avons initialement choisi $\Delta P = 2S_p$, autrement dit la largeur de l'intervalle de périodisation était supposé être deux fois plus grande que le support de la fonction. Ainsi, le débordement précédemment mentionné ne pose pas de problème, car la fonction sera supposée quasi-nulle dans cette zone (cf zone orange dans la fig. A.2).

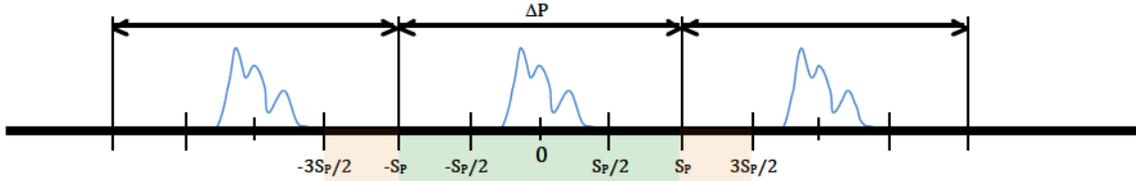


FIGURE A.2 – Domaines de la fonction : S_p support de la fonction, ΔP intervalle de périodisation, $[-\frac{3\Delta P}{4}, \frac{3\Delta P}{4}] = [-\frac{3S_p}{2}, \frac{3S_p}{2}]$ domaine d'évaluation de la fonction dans l'intégrale (A.9).

Si l'on revient maintenant à la forme (A.14) avec la simplification (A.15), les l' sur lesquels réaliser la sommation devront vérifier

$$l - l' \equiv l' [N_p], \quad (\text{A.16})$$

qui se réécrit simplement $l' \equiv \frac{l}{2} [\frac{N_p}{2}]$, qui a pour solutions, si l pair :

$$l'_1 = \frac{l}{2} \quad \text{et} \quad l'_2 = \text{reste} \left[\frac{l}{2}, N_p \right] - \frac{N_p}{2}, \quad (\text{A.17})$$

où $\text{reste}[x, y]$ est le reste dans la division de x par y . Si l est impair, (A.16) n'a pas de solution dans \mathbb{Z} , et S_p est donc nul. Grâce à cela, l'expression (A.14) se réécrit finalement :

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{\text{out},kl} &= \sqrt{2}\Delta p \sum_{k'} \tilde{W}_{1,k'l'_1} \tilde{W}_{2,[k-k']l'_1} S_q([k - k'] - k') \\ &+ \sqrt{2}\Delta p \sum_{k'} \tilde{W}_{1,k'l'_2} \tilde{W}_{2,[k-k']l'_2} S_q([k - k'] - k') \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

si l est pair, et

$$\tilde{W}_{\text{out},kl} = 0 \quad (\text{A.19})$$

si l est impair.

Avec cette simplification, le calcul numérique est grandement accéléré : il suffit de réaliser des multiplications matricielles simples, et une seule boucle d'itération peut être utilisée.

La section A.6 présente une implémentation possible de cette équation, centrale pour toutes nos simulations.

A.4.2 Modélisation de pertes arbitraires

Il est également possible, grâce à l'utilisation des FFT, de simuler des pertes arbitraires facilement.

La fonction de Wigner d'un état ayant subi des pertes (transmission t en amplitude à travers une lame séparatrice) s'écrit :

$$W_{\text{out}}(q, p) = \int_{\mathbb{R}} dq' \int_{\mathbb{R}} dp' W(tq - rq', tp - rp') W_o(rq + tq', rp + tp'), \quad (\text{A.20})$$

où $W_o(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-q^2 - p^2}$ est la fonction de Wigner du vide. Toujours avec la même méthode, en utilisant (A.8), on peut écrire

$$W_{\text{out}}(q, p) = \frac{1}{N_q N_p} \sum_{k,l} \tilde{W}_{kl} e^{2i\pi t (\frac{qk}{\Delta Q} + \frac{pl}{\Delta P})} \int_{\mathbb{R}} dq' \int_{\mathbb{R}} dp' W_o(rq + tq', rp + tp') e^{-2i\pi r (\frac{q'k}{\Delta Q} + \frac{p'l}{\Delta P})}. \quad (\text{A.21})$$

Posons ensuite $\mathbf{q} = tq' + rq$ et $\mathbf{p} = tp' + rp$:

$$W_{\text{out}}(q, p) = \frac{1}{t^2 N_q N_p} \sum_{k,l} \tilde{W}_{kl} e^{\frac{2i\pi}{t} (\frac{qk}{\Delta Q} + \frac{pl}{\Delta P})} \int_{\mathbb{R}} d\mathbf{q} \int_{\mathbb{R}} d\mathbf{p} W_o(\mathbf{q}, \mathbf{p}) e^{-\frac{2i\pi r}{t} (\frac{qk}{\Delta Q} + \frac{pl}{\Delta P})}, \quad (\text{A.22})$$

dont la double intégrale peut être calculée :

$$S_{kl} = \frac{1}{t^2} \int_{\mathbb{R}} d\mathbf{q} \int_{\mathbb{R}} d\mathbf{p} W_o(\mathbf{q}, \mathbf{p}) e^{-\frac{2i\pi r}{t} (\frac{qk}{\Delta Q} + \frac{pl}{\Delta P})} = \frac{1}{t^2} e^{-\frac{\pi^2 r^2}{t^2} (\frac{k^2}{\Delta Q^2} + \frac{l^2}{\Delta P^2})}. \quad (\text{A.23})$$

Ainsi,

$$W_{\text{out}}(m t \Delta q, n t \Delta p) = W_{\text{out},mn} = \frac{1}{N_q N_p} \sum_{k,l} \tilde{W}_{kl} S_{kl} e^{2i\pi (\frac{mk}{N_q} + \frac{nl}{N_p})} \quad (\text{A.24})$$

dont les coefficients de Fourier (A.7) s'identifient directement :

$$\boxed{\tilde{W}_{\text{out},kl} = \tilde{W}_{kl} S_{kl}}. \quad (\text{A.25})$$

Le calcul est donc ici encore plus simple d'implémentation que pour le cas précédent, mais un aspect gênant doit être pris en compte : c'est le changement de résolution et donc de domaine de travail.

Là où précédemment celui-ci se faisait avec un rapport de $\sqrt{2}$, il peut ici être arbitraire (cf r) et un traitement soigneux de la fonction avant et après la transformation (augmentation de la résolution, interpolations ...) est impératif pour ne pas dégrader la qualité des résolutions en jeu.

A.4.3 Soustraction de photon

Enfin, étudions une dernière transformation : la soustraction de photon. Celle-ci transforme une fonction de Wigner suivant la relation [Ourjountsev 07a] :

$$W_{\text{out}}(q, p) = \frac{1}{2} \left[1 + q^2 + p^2 + q\partial_q + p\partial_p + \frac{\partial_q^2 + \partial_p^2}{4} \right] W_{\text{in}}(q, p). \quad (\text{A.26})$$

Pour implémenter cette transformation, on est ainsi amené à exprimer la dérivée de la fonction de Wigner. Ceci peut être fait efficacement si l'on considère la transformation dans l'espace de Fourier : la dérivation équivaudra à un produit.

Si $q \in [-\frac{N_q \Delta q}{2}, (\frac{N_q}{2} - 1)\Delta q]$ avec un pas Δq , la variable conjuguée de q , notée x , variera dans $x \in [-\frac{1}{2\Delta q}, \frac{1}{2\Delta q} - \frac{1}{N_q \Delta q}]$ avec un pas $\Delta x = \frac{1}{N_q \Delta q}$.

La dérivation sera simplement implémentée dans le domaine de Fourier suivant :

$$\tilde{W}'_{kl} = 2\pi x_k \tilde{W}_{kl}. \quad (\text{A.27})$$

A.5 Application à la simulation du protocole de la figure 6.8

Nous allons à présent étudier les différentes étapes qu'il est nécessaire de mettre en place pour la simulation du protocole décrit sur la figure 6.8, dans le cas où les états d'entrée sont uniquement décrits par leur fonction de Wigner. Nous allons décomposer la procédure étapes par étapes.

A.5.1 Génération des états requis

Pour "nourrir" le protocole, quatre états sont requis en entrée de dispositif. Nous avons donc besoin de connaître leur fonction de Wigner numérique.

Ceux-ci sont dans notre cas tous générés à partir du protocole de croissance (dont l'implémentation numérique se fait grâce à la formule (A.18)) nourri par les états de Fock à un photon de fonction de Wigner donnée par l'équation (2.17). On a, de cette manière, quatre états W_{mod_1} , W_{mod_2} (états chats de modulation, cf ports $|ECC_+\rangle$ et $|ECC_-\rangle$ sur la figure 6.8), W_{comb_1} et $W_{\text{comb}_2} = W_{\text{comb}_1}$ (on utilise le même peigne dans les deux canaux d'Alice et Bob pour le protocole, cf ports $|\tilde{1}_{\text{pc}}\rangle$ sur la figure 6.8).

L'hypothèse supplémentaire que nous allons faire, mais qui n'influence en rien les résultats, est que $W_{\text{mod}_1} = W_{\text{mod}_2}$: l'état que l'on crée n'est en fait pas (6.53) mais

$$|\psi_{\text{out}}\rangle \tilde{\propto} |\tilde{1}_{\text{pc}}^-\tilde{1}_{\text{pc}}^+\rangle + e^{i\theta'} |\tilde{1}_{\text{pc}}^+\tilde{1}_{\text{pc}}^-\rangle. \quad (\text{A.28})$$

A.5.2 Formation de l'état intriqué bimode

A.5.2.1 Intrication du chat de modulation

La difficulté principale de l'utilisation d'une méthode numérique pour la simulation du protocole décrit sur la figure 6.8 est que celui-ci implique quatre états d'entrée qui doivent être considérés simultanément dans les calculs, étant donné le fait que l'état total est intriqué (on ne peut pas considérer de manière disjointe les opérations de modulation du canal d'Alice et de celui de Bob).

On peut en fait utiliser une astuce impliquant des opérateurs mathématiques qui n'ont pas de

sens physique. Pour comprendre les simplifications qui nous sont accessibles, donnons l'expression de l'état créé par le processus de soustraction délocalisée :

$$\hat{\rho}_{\text{mod,out}} = \frac{\hat{a}_1 - e^{i\theta}\hat{a}_2}{\sqrt{2}}\hat{\rho}_{\text{mod}_1} \otimes \hat{\rho}_{\text{mod}_2} \frac{\hat{a}_1^\dagger - e^{-i\theta}\hat{a}_2^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.29})$$

$$= \frac{1}{2}[U_{13} \otimes U_{21} - e^{-i\theta}U_{12} \otimes U_{22}^\dagger - e^{i\theta}U_{12}^\dagger \otimes U_{22} + U_{11} \otimes U_{23}], \quad (\text{A.30})$$

où on a posé $U_{i1} = \hat{\rho}_{\text{mod}_i}$, $U_{i2} = \hat{a}_i\hat{\rho}_{\text{mod}_i}$ et $U_{i3} = \hat{a}_i\hat{\rho}_{\text{mod}_i}\hat{a}_i^\dagger$ ($i = 1$ ou 2).

Avec cette formulation, on force d'une certaine manière l'écriture de l'état à rester factorisée, par l'utilisation d'opérateurs qui ne décrivent pas forcément une matrice densité physique (cf U_{i2}). La fonction de Wigner de l'état de sortie pourra donc être écrite :

$$\begin{aligned} W_{\text{mod,out}}(q_1, p_1, q_2, p_2) &= \frac{1}{2}[W_{U_{13}}(q_1, p_1)W_{U_{21}}(q_2, p_2) - e^{-i\theta}W_{U_{12}}(q_1, p_1)W_{U_{22}}^*(q_2, p_2) \\ &- e^{i\theta}W_{U_{12}}^*(q_1, p_1)W_{U_{22}}(q_2, p_2) + W_{U_{11}}(q_1, p_1)W_{U_{23}}(q_2, p_2)], \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

où les $W_{U_{ij}}$ sont les fonctions de Wigner des opérateurs U_{ij} , données par la formule (1.34), qui peuvent être complexes si $j = 2$. Numériquement, leur calcul se fait en utilisant la méthode montrée au paragraphe A.4.3 pour $W_{U_{i3}}$, et par un analogue aux formules trouvées, grâce à l'opération

$$W_{\text{out}}(q, p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[q + ip + \frac{\partial_q + i\partial_p}{2}\right]W_{\text{in}}(q, p) \quad (\text{A.32})$$

à la place de l'équation (A.26) pour $W_{U_{i2}}$ (fonction de Wigner de l'opérateur $\hat{a}\hat{\rho}_{\text{in}}$).

A.5.2.2 Formation de l'état peigne alterné intriqué

La formation des états peignes alternés implique le protocole de croissance appliqué avec l'état chat de modulation intriqué dans un port et l'état peigne W_{comb} dans l'autre port. La formule de l'état chat intriqué (A.31) faisant intervenir les fonctions $W_{U_{ij}}$, les transformations avec les états peignes donneront naissance à de nouvelles fonctions de Wigner :

$$\left(W_{U_{ij}}(q_i, p_i), W_{\text{comb}_i}(q_i, p_i)\right) \longrightarrow W_{V_{ij}}(q_i, p_i). \quad (\text{A.33})$$

Encore une fois, le mélange des deux fonctions se faisant à l'aide d'une lame symétrique et d'un conditionnement homodyne, la flèche de l'équation revient à l'utilisation de l'équation (A.18). L'état qui sera reçu par Alice et Bob sera donc de la forme (A.31) avec remplacement de U par V :

$$\begin{aligned} W'_{\text{mod,out}}(q_1, p_1, q_2, p_2) &= \frac{1}{2}[W_{V_{13}}(q_1, p_1)W_{V_{21}}(q_2, p_2) - e^{-i\theta}W_{V_{12}}(q_1, p_1)W_{V_{22}}^*(q_2, p_2) \\ &- e^{i\theta}W_{V_{12}}^*(q_1, p_1)W_{V_{22}}(q_2, p_2) + W_{V_{11}}(q_1, p_1)W_{V_{23}}(q_2, p_2)]. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Il est ensuite possible de faire subir aux états des pertes arbitraires par l'utilisation des formules dérivées dans le paragraphe A.4.2, et de définir ainsi des nouvelles fonctions $W'_{V_{ij}}$ par des formules analogues à (A.33).

A.5.3 Première détermination des zones de binarisation

Ensuite, il faut définir quelles sont les zones de binarisations optimales des données pour Alice et Bob : celles-ci sont normalement définies grâce aux signes relatifs de f et g , mais dans notre cas il n'est pas possible de définir les fonctions d'ondes des états avec lesquels on travaille. La méthode que nous avons utilisée est alors la suivante :

- On cherche l'état peigne alterné parfait le plus proche des deux états $W_{V_{11}}$ et $W_{V_{13}}$. On en déduit donc les paramètres de fonctions f et g ressemblant à nos états, sur lesquelles on peut réaliser la détermination des zones de binarisation.
- Etant donnée la forme initiale des zones de binarisation trouvées à l'étape précédente, on optimise leur forme sur la valeur finale de la fonction S de Bell.

A.5.4 Calcul de la fonction de Bell

On peut finalement calculer les probabilités $P_{q_A, q_B}(\pm, \pm)$, $P_{p_A, q_B}(\pm, \pm)$, $P_{q_A, p_B}(\pm, \pm)$ et $P_{p_A, p_B}(\pm, \pm)$ nécessaires à l'expression de S :

$$P_{r_A, r_B}(\pm, \pm) = \int_{\mathcal{D}_{\pm}^r} dr_A \int_{\mathbb{R}} ds_A \int_{\mathcal{D}_{\pm}^r} dr_B \int_{\mathbb{R}} ds_B W'_{\text{mod, out}}(q_A, p_A, q_A, p_A), \quad (\text{A.35})$$

où r_A et r_B peuvent être au choix les quadratures q ou p (s_A et s_B étant les quadratures orthogonales à r_A et r_B), et $W'_{\text{mod, out}}$ est donnée par la formule (A.34).

S se calcule finalement grâce à (6.19) :

$$S = |E(q_A, q_B) + E(q_A, p_B) + E(p_A, q_B) - E(p_A, p_B)|, \quad (\text{A.36})$$

avec rappelons-le $E(r_A, r_B) = P_{r_A, r_B}(+, +) + P_{r_A, r_B}(-, -) - P_{r_A, r_B}(+, -) - P_{r_A, r_B}(-, +)$.

A.6 Code possible pour l'implémentation de l'équation (A.18)

Enfin, nous finissons cette annexe par un exemple de code possible (en Matlab) pour l'implémentation numérique de l'équation (A.18).

```

fonction [Wout, dx, dq, dy, dp, Psucc] = Equation3kron(epsX, dx, dq, dy, dp, ...
                                                    W1, W2, Nq, Np )
% Cette fonction implemente le calcul numerique du conditionnement
% homodyne sur q=0.
% Entrees : - largeur de conditionnement epsX (epsilon_x)
%           - resolutions dans l'espace direct (dq et dp) et dans
%           l'espace de Fourier (dx et dy)
%           - FFT des deux fonctions d'entree W1 et W2
%           - tailles des fonctions suivant les deux directions q
%             (Nq) et p (Np)
% Sorties : - coefficients de Fourier de la fonction de
%           sortie (Wout)
%           - nouvelles resolutions dans l'espace direct
%             (dq et dp) et dans l'espace de Fourier (dx et dy)
%           - probabilite de succes de l'operation de
%             conditionnement (Psucc)

```

ANNEXE A

```
% Initialisation de la matrice des coefficients de Fourier de
% la fonction de Wigner de sortie
Wout = zeros(Nq,Np);

% Definition des vecteurs d'indices k' et -k'
kp = -Nq/2:Nq/2-1;
kpm = Nq/2-1:-1:-Nq/2;

% Definition des vecteurs l, l'_1 et l'_2.
l=-Np/2:Np/2-1;
% Si l est impair, on peut remplir le vecteur par un indice quelconque
lp1 = l/2.*(mod(l/2,1)==0)+(mod(l/2,1)==0.5)*15;
lp2 = (mod(l/2,Np)-Np/2).*(mod(mod(l/2,Np)-Np/2,1)==0)+...
      (mod(mod(l/2,Np)-Np/2,1)==0.5);

% Prise en compte du fait que pour l impair la fonction
% de sortie est nulle
mask = (mod(l/2,1)==0);
uns = ones(Nq,1);
matmask = kron(uns,mask);

% Definition des tableaux sur lesquels vont etre effectuees les sommes
W1lp1 = W1(:,lp1+Np/2+1).*matmask;
W1lp2 = W1(:,lp2+Np/2+1).*matmask;
W2lp1 = W2(:,lp1+Np/2+1).*matmask;
W2lp2 = W2(:,lp2+Np/2+1).*matmask;

% Boucle pour le calcul ligne par ligne de la matrice des coefficients
% de sortie de la fonction
for k = -Nq/2:Nq/2-1;
    % Definition de l'indice [k-k'] dans [[-N/2,N/2-1]]
    kmkp = circshift(kpm,[0,k+1]);
    kpcirc = kmkp-kp;

    % Definition des deux fonctions Sq et Sp
    Sq = 2*epsX*sinc(2*pi*kpcirc*epsX*dx/sqrt(2))/Nq;
    Sp = dp*sqrt(2);

    % Definition des tableaux d'indices decales
    W2circlp1 = W2lp1(kmkp+Nq/2+1,:);
    W2circlp2 = W2lp2(kmkp+Nq/2+1,:);

    % Calcul de la matrice des coefficients de sortie
    Wout(k+Nq/2+1,:) = Sq*(W1lp1.*W2circlp1+W1lp2.*W2circlp2)*Sp;

end

% Modification des resolutions
dq = dq*sqrt(2);
```

```
dp = dp*sqrt(2);
dx = dx/sqrt(2);
dy = dy/sqrt(2);

% Probabilite de succes (integrale dans l'espace direct <-> mesure du
% point 0 en Fourier)
Psucc = Wout(Nq/2+1,Np/2+1)*dp*dq;

% Normalisation (facteur 2 du aux modifications des normalisations)
Wout = 2*Wout/Psucc;

end
```


Annexe B

Gaussianisation d'une fonction par croissance

Nous nous proposons dans cette annexe de prouver mathématiquement le théorème de gaussianisation évoqué au paragraphe 5.2.5.

B.1 Hypothèses

Faisons d'abord quelques hypothèses sur les fonctions qui vont être utilisées pour prouver l'effet de gaussianisation :

- (1) f est une fonction de carré intégrable de classe C^3 , telle que f''' est bornée, et les points singuliers x (*i.e.* $f'(x) = 0$) vérifient $f''(x) \neq 0$.
- (2) Le nombre d'extrema locaux de f est fini dans chaque segment $[-a, a]$, $a > 0$.
- (3) Si $|y_0|$ est le maximum de $|f|$, atteint en x_0 :

$$\exists A > 1, \forall |x| \geq A, \frac{|f(x)|}{|y_0|} < \frac{1}{|x|}.$$

- (4) Si $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ sont les abscisses des extrema locaux de f dans $[-A, A]$, on suppose que

$$f(x_i) \neq 0, \frac{f''(x_i)}{2f(x_i)} = -\alpha_i < 0.$$

Ainsi, pour $r \geq 1$, les $y_i^{2^r} = f_r(\sqrt{2^r}x_i)$ sont exactement les extrema locaux de f_r dans $[-\sqrt{2^r}A, \sqrt{2^r}A]$, où $f_r(x) = f^{2^r}(x/\sqrt{2^r})$.

B.2 Exemples

1 - La fonction d'onde de l'état de Fock à un photon (figure B.1) vérifie les conditions précédentes :

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} x e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

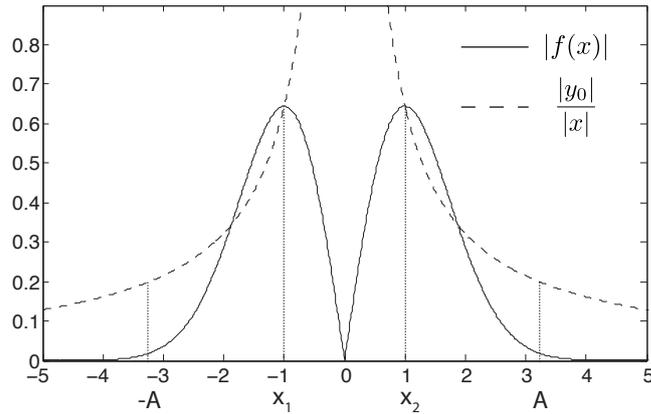


FIGURE B.1 – Valeur absolue de la fonction d’onde du photon unique avec les précisions des x_i et A .

2 - Une fonction somme de deux Lorentziennes remplit les conditions précédentes :

$$f(x) = \frac{N}{0.2 + (x - 2)^2} + \frac{N}{0.2 + (x + 2)^2},$$

avec N tel que $\int f^2(x)dx = 1$. Cette fonction est tracée sur la figure B.2, avec les différentes notations introduites précisées sur la figure.

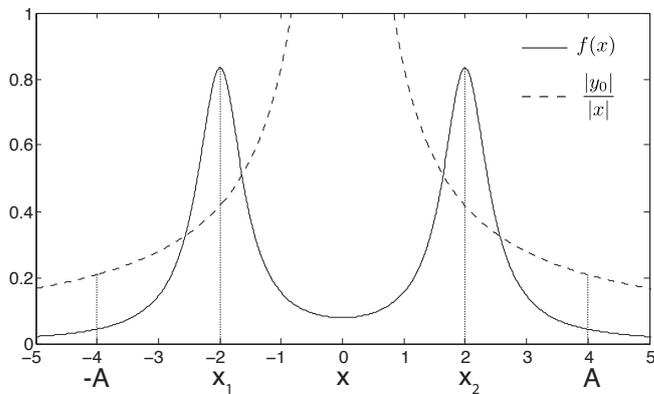


FIGURE B.2 – Somme de deux Lorentziennes, avec précision des x_i et A .

3 - Des structures encore plus complexes, comme le chat de Schrödinger :

$$f(x) = N \cos(\sqrt{2}\alpha x)e^{-x^2/2},$$

où N est une constante de normalisation, remplit les conditions. La valeur absolue de cette fonction d’onde est représentée sur la figure B.3, avec $\alpha = 3$. La valeur de A a été choisie suffisamment grande pour que plusieurs extrema soient pris en compte (en théorie, on peut choisir $A > 1$ aussi proche de 1 que l’on veut dans ce cas).

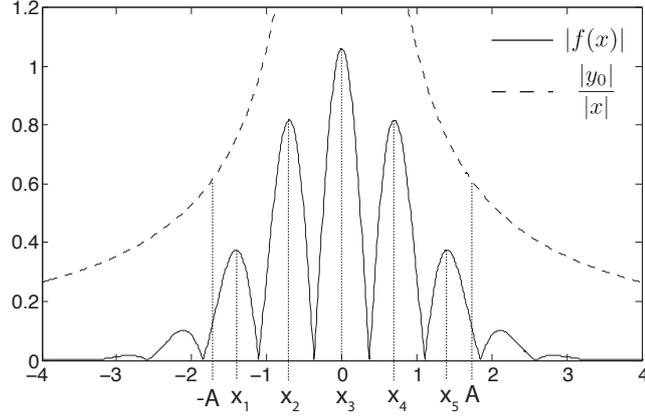


FIGURE B.3 – Valeur absolue de la fonction d'onde du chat de Schrödinger, avec mention des x_i et de A .

B.3 Résultats

Soit

$$G_r(x) = \sum_{i=1, |f(x_i)|=|y_0|}^N g_{i,r}(x), \quad \text{avec} \quad g_{i,r}(x) = f(x_i)^{2r} e^{-\alpha_i(x-\sqrt{2^r}x_i)^2}.$$

Nous allons montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_r(x) \tilde{G}_r(x) dx \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque} \quad r \rightarrow +\infty$$

$$\text{avec} \quad \tilde{f}_r(x) = \frac{f_r(x)}{\sqrt{\int f_r^2(x) dx}} \quad \text{et} \quad \tilde{G}_r(x) = \frac{G_r(x)}{\sqrt{\int G_r^2(x) dx}}.$$

B.4 Preuve

B.4.1 Convergence simple

Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à f au point x_i (l'abscisse d'un extremum local de f dans $[-A, A]$) :

$$f(x) = f(x_i) + \frac{f''(x_i)}{2}(x-x_i)^2 + \frac{f'''(c_{i,x})}{6}(x-x_i)^3 \quad \text{avec} \quad |c_{i,x} - x_i| < |x - x_i| \quad (\text{B.1})$$

alors

$$f_r(x) = y_i^{2r} \left[1 - \alpha_i \left(\frac{x - \sqrt{2^r} x_i}{\sqrt{2^r}} \right)^2 + \varphi_{i,r}(x) \left(\frac{x - \sqrt{2^r} x_i}{\sqrt{2^r}} \right)^3 \right]^{2r} \quad (\text{B.2})$$

$$\text{avec} \quad \varphi_{i,r}(x) = \frac{f'''(c_{i,r,x})}{6f(x_i)}, \quad |c_{i,r,x} - x_i| < \left| \frac{x}{\sqrt{2^r}} - x_i \right| \quad \text{et} \quad y_i = f(x_i).$$

Pour simplifier, posons :

$$f_r(x) = y_i^{2r} \left[1 + u_{i,r}(x) \right]^{2r} \quad (\text{B.3})$$

$$\text{avec} \quad u_{i,r}(x) = -\alpha_i \left(\frac{x - \sqrt{2^r} x_i}{\sqrt{2^r}} \right)^2 + \varphi_{i,r}(x) \left(\frac{x - \sqrt{2^r} x_i}{\sqrt{2^r}} \right)^3.$$

ANNEXE B

Soit ensuite $0 < a < 1$, et $\epsilon_r = \beta^r$ avec $1 < \beta < 2^{1/6}$; comme $\varphi_{i,r}$ est bornée de part l'hypothèse (1) et $\epsilon_r/\sqrt{2^r} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$, si l'on choisit $x \in I_i := [\sqrt{2^r}x_i - \epsilon_r, \sqrt{2^r}x_i + \epsilon_r]$ on a

$$\exists R, \forall r \geq R, \forall i, |u_{i,r}(x)| \leq a < 1, \quad (\text{B.4})$$

et on peut réaliser le développement de Taylor-Lagrange de $\ln[f_r(x)] = \ln(y_i^{2^r}) + 2^r \ln[1 + u_{i,r}(x)]$ pour $x \in I_i$ et $r \geq R$:

$$\ln[f_r(x)] = \ln(y_i^{2^r}) + 2^r \left[u_{i,r}(x) - \frac{u_{i,r}(x)^2}{2(1+z_{u_{i,r}}(x))^2} \right], \quad (\text{B.5})$$

avec $|z_{u_{i,r}}(x)| < |u_{i,r}(x)|$.

Bien sûr, on est intéressé par avoir $\lim_{r \rightarrow +\infty} \epsilon_r = +\infty$, de manière à ce que la taille des intervalles croisse de plus en plus avec r .

En remplaçant $u_{i,r}(x)$ par son expression, on obtient :

$$\ln[f_r(x)] = \ln(y_i^{2^r}) - \alpha_i(x - \sqrt{2^r}x_i)^2 + \psi_{i,r}(x) \frac{(x - \sqrt{2^r}x_i)^3}{\sqrt{2^r}}, \quad (\text{B.6})$$

avec $\psi_{i,r}(x) = \varphi_{i,r}(x) - \frac{1}{2(1+z_{u_{i,r}}(x))^2} \frac{x - \sqrt{2^r}x_i}{\sqrt{2^r}} \left[-\alpha_i + \varphi_{i,r}(x) \frac{x - \sqrt{2^r}x_i}{\sqrt{2^r}} \right]^2$.

Mais sachant que $\epsilon_r/\sqrt{2^r} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$ et $\varphi_{i,r}(x)$ est borné, $\psi_{i,r}(x)$ est borné étant donné le choix de ϵ_r , (B.4), (B.5) et l'hypothèse (1). Autrement dit :

$$\exists M, \forall i, \forall r \geq R, \forall x \in I_i, |\psi_{i,r}(x)| \leq M. \quad (\text{B.7})$$

En prenant l'exponentielle de l'équation (B.6), on obtient :

$$f_r(x) = y_i^{2^r} e^{-\alpha_i(x - \sqrt{2^r}x_i)^2} e^{\psi_{i,r}(x) \frac{(x - \sqrt{2^r}x_i)^3}{\sqrt{2^r}}}, \quad (\text{B.8})$$

qui permet d'écrire les inégalités

$$\forall x \in I_i, \forall r \geq R, \quad g_{i,r}(x) e^{-\frac{\epsilon_r^3}{\sqrt{2^r}} M} \leq f_r(x) \leq g_{i,r}(x) e^{\frac{\epsilon_r^3}{\sqrt{2^r}} M}. \quad (\text{B.9})$$

Sachant que l'on veut $\epsilon_r \rightarrow +\infty$, $\frac{\epsilon_r}{\sqrt{2^r}} \rightarrow 0$ et $\frac{\epsilon_r^3}{\sqrt{2^r}} \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow +\infty$, le choix $\epsilon_r = \beta^r$ avec $1 < \beta < 2^{1/6}$ que l'on a fait en (B.4) remplit ces conditions.

Nous avons prouvé qu'autour de chaque abscisse $\sqrt{2^r}x_i$ d'un maximum local $y_i^{2^r}$ de f_r dans $[-\sqrt{2^r}A, \sqrt{2^r}A]$ la fonction f_r est équivalente à une Gaussienne de largeur donnée par $\alpha_i = -f''(x_i)/(2f(x_i))$. Prouvons à présent qu'il y a également convergence en norme L^2 .

B.4.2 Convergence en norme L^2

Idée du reste de la démonstration : Pour prouver que $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_r(x) \tilde{G}_r(x) dx \rightarrow 1$ lorsque $r \rightarrow +\infty$, il suffit, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, de minorer $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_r(x) \tilde{G}_r(x) dx$ par une quantité qui tend 1. En d'autres termes, nous devons prouver que l'on peut écrire :

$$\int_{\mathbb{R}} f_r(x) G_r(x) dx \geq \|f_r\|_2 \times \|G_r\|_2 (1 - \eta_r), \quad \text{avec } \eta_r \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0. \quad (\text{B.10})$$

Mais, étant donné que $f_r(x) \geq 0$ et $G_r(x) \geq 0$ dès que $r \geq 1$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f_r(x) G_r(x) dx = \sum_{\substack{i=0 \\ |y_i|=|y_0|}}^N \int_{\mathbb{R}} f_r(x) y_i^{2^r} e^{-\alpha_i(x-\sqrt{2^r}x_i)^2} \geq \sum_{\substack{i=0 \\ |y_i|=|y_0|}}^N \int_{I_i} f_r(x) y_i^{2^r} e^{-\alpha_i(x-\sqrt{2^r}x_i)^2}, \quad (\text{B.11})$$

qui peut être minoré, en utilisant (B.9), par :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_r(x) G_r(x) dx &\geq y_0^{2^{r+1}} e^{-\frac{\epsilon_r^3 M}{\sqrt{2^r}}} \sum_{\substack{i=0 \\ |y_i|=|y_0|}}^N \int_{I_i} e^{-2\alpha_i(x-\sqrt{2^r}x_i)^2} \\ &= y_0^{2^{r+1}} e^{-\frac{\epsilon_r^3 M}{\sqrt{2^r}}} \sum_{\substack{i=0 \\ |y_i|=|y_0|}}^N \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha_i}} (1 - \eta_r) \end{aligned}$$

avec $\eta_r \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$, car $\epsilon_r \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} +\infty$ (B.4). Comme $\epsilon_r^3/\sqrt{2^r} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$, il suffit de prouver que $\|f_r\|_2 \times \|G_r\|_2 \sim y_0^{2^{r+1}} \sum_{i=0, |y_i|=|y_0|}^N \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha_i}}$ pour démontrer le résultat.

En fait, nous allons d'abord prouver que

$$\|f_r\|_2^2 \sim y_0^{2^{r+1}} \sum_{\substack{i=0 \\ |y_i|=|y_0|}}^N \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha_i}} \quad (\text{B.12})$$

puis ensuite que

$$\|G_r\|_2^2 \sim y_0^{2^{r+1}} \sum_{\substack{i=0 \\ |y_i|=|y_0|}}^N \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha_i}}, \quad (\text{B.13})$$

et cela prouvera $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_r(x) \tilde{G}_r(x) dx \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 1$.

Equivalent pour $\|f_r\|_2^2$: Définissons les intervalles

$$\begin{aligned} U_0 &=] -\sqrt{2^r} A, \sqrt{2^r} x_1 - \epsilon_r [, \\ \forall i \in [1, N-1], \quad U_i &=] \sqrt{2^r} x_i + \epsilon_r, \sqrt{2^r} x_{i+1} - \epsilon_r [, \\ U_N &=] \sqrt{2^r} x_N + \epsilon_r, \sqrt{2^r} A [, \end{aligned}$$

qui sont toujours bien définis et non vides si r est assez grand. Dans le cas de deux Lorentziennes, ces intervalles sont représentés sur la figure B.4 ($r=0$ est suffisant pour les définir correctement).

Soit $\hat{f}(x) = \frac{f_r(x)}{y_0^{2^r}}$, et considérons :

$$\begin{aligned} \|\hat{f}_r\|_2^2 &:= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_r^2(x) dx = \int_{-\infty}^{-\sqrt{2^r} A} \hat{f}_r^2(x) dx + \int_{\sqrt{2^r} A}^{+\infty} \hat{f}_r^2(x) dx + \\ &\quad \sum_{i=0}^N \int_{U_i} \hat{f}_r^2(x) dx + \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \hat{f}_r^2(x) dx. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Nous allons étudier les quatre intégrales en jeu dans cette expression séparément.

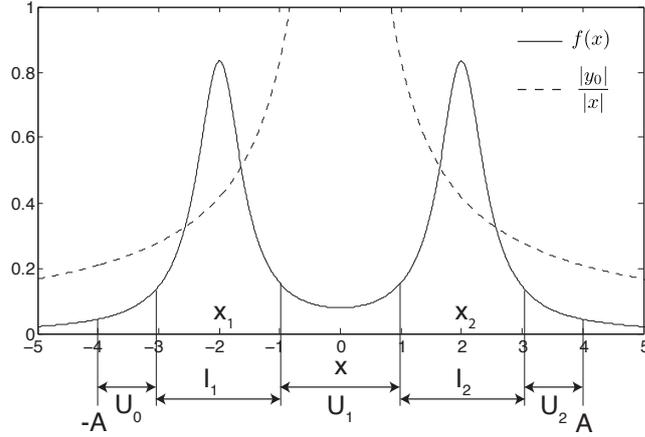


FIGURE B.4 – Définition des différents intervalles pour la fonction formée de deux Lorentziennes.

- La première peut être majorée, grâce à l'hypothèse (3) :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2^r}A} \hat{f}_r^2(x) dx &= \sqrt{2^r} \int_{-\infty}^{-A} \left[\frac{f(u)}{y_0} \right]^{2^{r+1}} du \\ &\leq \sqrt{2^r} \int_{-\infty}^{-A} \frac{du}{u^{2^{r+1}}} = \frac{\sqrt{2^r}}{2^{r+1} - 1} \frac{1}{A^{2^{r+1}-1}}, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

qui tend vers 0 lorsque $r \rightarrow +\infty$ car $A > 1$.

Avec le même argument, on peut prouver que la seconde intégrale tend aussi vers 0.

- Pour les intégrales sur U_N , nous pouvons majorer la fonction :

$$\forall x \in U_N, \quad f_r^2(x) \leq \max[f_r^2(\sqrt{2^r}x_N + \epsilon_r), f_r^2(\sqrt{2^r}A)]. \quad (\text{B.16})$$

En effet, comme f_r n'a pas d'extrema locaux dans U_i (hypothèse (4)), la fonction est bornée par ses valeurs aux bornes de l'intervalle. Alors, d'après (B.9) on a

$$f_r^2(\sqrt{2^r}x_N + \epsilon_r) \leq y_N^{2^{r+1}} e^{\frac{2\epsilon_r^3}{\sqrt{2^r}} M} e^{-2\alpha_N \epsilon_r^2}, \quad (\text{B.17})$$

et d'après l'hypothèse (3) on a

$$f_r^2(\sqrt{2^r}A) = f(A)^{2^{r+1}} \leq \left(\frac{y_0}{A} \right)^{2^{r+1}}, \quad (\text{B.18})$$

qui donne, si

$$m_{N,r} = \max \left[\left(\frac{y_N}{y_0} \right)^{2^{r+1}} e^{\frac{2\epsilon_r^3}{\sqrt{2^r}} M} e^{-2\alpha_N \epsilon_r^2}, \frac{1}{A^{2^{r+1}}} \right], \quad (\text{B.19})$$

que

$$\int_{U_N} \hat{f}_r^2(x) dx \leq \int_{U_N} m_{N,r} dx = \sqrt{2^r} [(A - x_N) - \frac{\epsilon_r}{\sqrt{2^r}}] m_{N,r}. \quad (\text{B.20})$$

Cela permet déduire $\int_{U_N} \hat{f}_r^2(x) dx \rightarrow 0$ car $\sqrt{2^r} m_{N,r} \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow +\infty$.

Nous pouvons alors conclure que $\int_{U_0} \hat{f}_r^2(x) dx \rightarrow 0$ et $\int_{U_i} \hat{f}_r^2(x) dx \rightarrow 0$ avec le même type

d'arguments que plus haut.

- Pour les intégrales sur I_i , on peut utiliser (B.9) pour obtenir les inégalités :

$$\left(\frac{y_i}{y_0}\right)^{2^{r+1}} e^{-\frac{2\epsilon_r^3}{\sqrt{2^r}}M} \int_{-\epsilon_r}^{\epsilon_r} e^{-2\alpha_i u^2} du \leq \int_{I_i} \hat{f}_r^2(x) dx \leq \left(\frac{y_i}{y_0}\right)^{2^{r+1}} e^{\frac{2\epsilon_r^3}{\sqrt{2^r}}M} \int_{-\epsilon_r}^{\epsilon_r} e^{-2\alpha_i u^2} du. \quad (\text{B.21})$$

Etant donné que $\frac{\epsilon_r^3}{\sqrt{2^r}} \rightarrow 0$ et $\epsilon_r \rightarrow +\infty$ lorsque $r \rightarrow +\infty$,

- si $|y_i| < |y_0|$, $\int_{I_i} \hat{f}_r^2(x) dx \rightarrow 0$
- si $|y_i| = |y_0|$, $\int_{I_i} \hat{f}_r^2(x) dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha_i}}$.

Alors, on obtient :

$$\|f_r\|_2^2 \sim y_0^{2^{r+1}} \sum_{\substack{i=0 \\ |y_i|=|y_0|}}^N \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha_i}}, \quad (\text{B.22})$$

qui est le résultat attendu en (B.12).

Equivalent pour $\|G_r\|_2^2$: Dans ce cas, le calcul est beaucoup plus simple :

$$\int_{\mathbb{R}} G_r^2(x) dx = y_0^{2^{r+1}} \sum_{\substack{i,j \\ |y_i|=|y_j|=|y_0|}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_i + \alpha_j}} e^{-2^r \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j} (x_i - x_j)^2}, \quad (\text{B.23})$$

qui est équivalent à

$$\int_{\mathbb{R}} G_r^2(x) dx \sim y_0^{2^{r+1}} \sum_{\substack{i \\ |y_i|=|y_0|}} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha_i}}. \quad (\text{B.24})$$

Cet équivalent est celui que l'on voulait démontrer en (B.13).

Annexe C

Influence de l'efficacité de détection dans les protocoles de croissances

Nous allons dans cette annexe calculer l'influence de l'efficacité de détection dans un protocole de conditionnement homodyne mettant en jeu deux fonctions de Wigner W_1 et W_2 et une lame de mélange de transmission τ . Les notations des différents modes sont précisés sur la figure C.1.

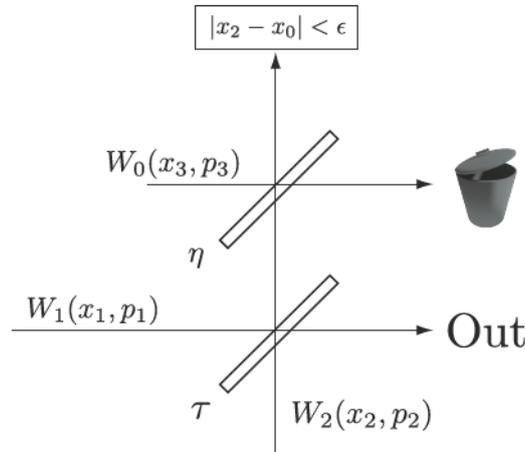


FIGURE C.1 – Modélisation des imperfections lors d'un processus de conditionnement homodyne.

C.1 Expression mathématique de la transformation

A la sortie de la lame de mélange, l'état à deux modes s'écrit :

$$W_{\text{out}1}(x_1, p_1, x_2, p_2) = W_1(\tau x_1 + \rho x_2, \tau p_1 + \rho p_2) W_2(\tau x_1 - \rho x_2, \tau p_1 - \rho p_2), \quad (\text{C.1})$$

où $\rho = \sqrt{1 - \tau^2}$.

Après cette lame, le mode qui est envoyé vers la détection homodyne de conditionnement va subir des pertes. Tout se passe comme si celui-ci traversait une lame fictive de transmission η . L'état total est donc, en entrée de cette lame fictive :

$$W_{\text{out}}(x_1, p_1) = W_1(\tau x_1 + \rho x_2, \tau p_1 + \rho p_2) W_2(\tau x_1 - \rho x_2, \tau p_1 - \rho p_2) W_0(x_3, p_3). \quad (\text{C.2})$$

La transformation imposée par la lame modélisant les pertes s'écrit ensuite simplement comme :

$$x_2 = \sqrt{\eta}x'_2 - \sqrt{1-\eta}x'_3 \quad (\text{C.3})$$

$$x_3 = \sqrt{\eta}x'_3 + \sqrt{1-\eta}x'_2, \quad (\text{C.4})$$

ce qui permet d'écrire l'état final, après conditionnement homodyne de largeur $2\Delta x^c$ autour de x_0 comme :

$$W_{\text{out}}(x_1, p_1) = \int_{x_0-\Delta x^c}^{x_0+\Delta x^c} dx'_2 \int_{\mathbb{R}^3} dp'_2 dx'_3 dp'_3 W_1(\tau x_1 + \rho x_2, \tau p_1 + \rho p_2) W_2(\tau x_1 - \rho x_2, \tau p_1 - \rho p_2) W_0(x_3, p_3). \quad (\text{C.5})$$

En réalisant le changement de variable $x'_2 \rightarrow x_2$, $p'_2 \rightarrow p_2$, $x'_3 \rightarrow x_3$ et $p'_3 \rightarrow p_3$, on obtient le changement de zone d'intégration :

$$(x'_2, p'_2, x'_3, p'_3) \in [x_0 - \Delta x^c, x_0 + \Delta x^c] \times \mathbb{R}^3 \quad (\text{C.6a})$$

$$(x_2, p_2, x_3, p_3) \in \mathbb{R}^2 \times \left[-\sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}}x_2 + \frac{x_0 - \Delta x^c}{\sqrt{1-\eta}}, -\sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}}x_2 + \frac{x_0 + \Delta x^c}{\sqrt{1-\eta}} \right] \times \mathbb{R}. \quad (\text{C.6b})$$

(C.5) se réécrit alors comme :

$$W_{\text{out}}(x_1, p_1) = \int_{\mathbb{R}^2} dp_2 dx_2 W_1(\tau x_1 + \rho x_2, \tau p_1 + \rho p_2) W_2(\tau x_1 - \rho x_2, \tau p_1 - \rho p_2) \int_{-\sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}}x_2 + \frac{x_0 - \Delta x^c}{\sqrt{1-\eta}}}^{-\sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}}x_2 + \frac{x_0 + \Delta x^c}{\sqrt{1-\eta}}} dx_3 \int_{\mathbb{R}} dp_3 W_0(x_3, p_3). \quad (\text{C.7})$$

Etant donné que dans le mode 3 c'est le vide qui est incident, la dernière partie de l'intégrale peut se calculer simplement :

$$\int_{-\sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}}x_2 + \frac{x_0 - \Delta x^c}{\sqrt{1-\eta}}}^{-\sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}}x_2 + \frac{x_0 + \Delta x^c}{\sqrt{1-\eta}}} dx_3 \int_{\mathbb{R}} dp_3 W_0(x_3, p_3) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}}x_2 + \frac{x_0 - \Delta x^c}{\sqrt{1-\eta}}}^{-\sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}}x_2 + \frac{x_0 + \Delta x^c}{\sqrt{1-\eta}}} dx_3 e^{-x_3^2} \quad (\text{C.8})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(1-\eta)}} \int_{x_0 - \Delta x^c}^{x_0 + \Delta x^c} e^{-\frac{(x_2 - x_3/\sqrt{\eta})^2}{1-\eta}} dx_3. \quad (\text{C.9})$$

Ainsi, l'intégrale à calculer peut être exprimée simplement comme :

$$W_{\text{out}}(x_1, p_1) = \int_{\mathbb{R}^2} dp_2 dx_2 W_1(\tau x_1 + \rho x_2, \tau p_1 + \rho p_2) W_2(\tau x_1 - \rho x_2, \tau p_1 - \rho p_2) \varphi(x_2), \quad (\text{C.10})$$

où $\varphi(x_2)$ est donnée par l'équation (C.9).

C.2 Forme de la fenêtre de conditionnement

La forme de la fonction $\varphi(x_2)$ va d'une certaine manière déterminer l'intervalle sur lequel l'intégration devra être faite, en fonction de son support.

Deux cas sont alors à séparer :

- $\Delta x^c \gg \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}}$: c'est le cas de forte efficacité de détection. Dans ce cas, tout se passe comme si la fenêtre était rectangulaire, de largeur dépendant de Δx^c et η :

$$\varphi(x_2) \simeq 1_{\left[\frac{x_0 - \Delta x^c}{\sqrt{\eta}}, \frac{x_0 + \Delta x^c}{\sqrt{\eta}}\right]}(x_2). \quad (\text{C.11})$$

- $\Delta x^c \ll \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}}$: c'est le cas d'une faible efficacité de détection. L'élargissement prédominant est celui dû au vide, et l'intégrale est proche d'une gaussienne :

$$\varphi(x_2) \simeq \frac{2\Delta x^c}{\sqrt{\pi(1-\eta)}} e^{-\frac{(x_2-x_0/\sqrt{\eta})^2}{\frac{1-\eta}{\eta}}} . \quad (\text{C.12})$$

La figure C.2 montre la validité de ces approximations dans le cas $\Delta x^c = 0.2$ et $x_0 = 0.5$, pour différentes valeurs de η .

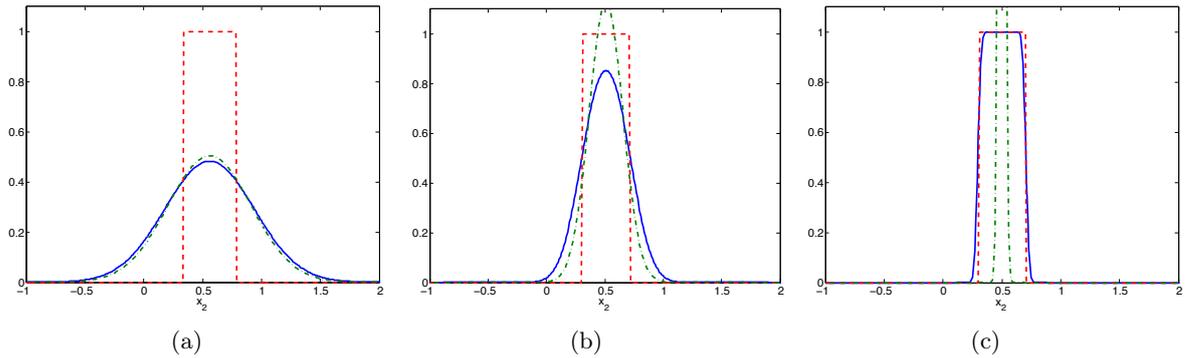


FIGURE C.2 – Allures de la fonction $\varphi(x_2)$ (trait bleu continu) pour des efficacités de détections de (a) $\eta = 0.8$, (b) $\eta = 0.96$ et (c) $\eta = 0.999$, dans le cas $\Delta x^c = 0.2$ et $x_0 = 0.5$. Les fonctions approximantes sont représentées en trait tireté rouge pour (C.11) et en trait mixte vert pour (C.12).

Annexe D

Calcul explicite de la fonction de Wigner pour une fenêtre gaussienne

D.1 Hypothèses de calcul

Nous nous proposons dans cette annexe de calculer l'expression analytique de la fonction de Wigner de l'état créé par un protocole de croissance à r étages, dans l'hypothèse où les photons uniques utilisés comme ressource sont identiques et imparfaits, et où la fenêtre d'intégration est gaussienne, et non plus simplement la fenêtre $I = [-\Delta q^c, \Delta q^c]$.

Le calcul qu'il faut effectuer est donc

$$W^{(r)}(q, p) = \iint W^{(r-1)}\left(\frac{q+q'}{\sqrt{2}}, \frac{p+p'}{\sqrt{2}}\right) W^{(r-1)}\left(\frac{q-q'}{\sqrt{2}}, \frac{p-p'}{\sqrt{2}}\right) \varphi_r(q') dq' dp', \quad (\text{D.1})$$

avec $\varphi_r(t) = \lambda_r e^{-\frac{t^2}{\epsilon^2}}$ et $W^{(0)}$ donnée par (2.17). Sauf précision contraire, le domaine d'intégration sera toujours supposé être \mathbb{R}^2 .

L'intégration dans une fenêtre gaussienne se rencontre dans deux cas :

- On peut dans un premier temps approximer la fenêtre I par la gaussienne de la forme :

$$\mathbb{1}_I(q) \sim e^{-\frac{q^2}{(\Delta q^c)^2}}. \quad (\text{D.2})$$

Comme nous l'avons vu au paragraphe 5.4.3, cette technique avait par exemple été utilisée dans [Ourjoumtsev 07a] afin de pouvoir réaliser des calculs n'impliquant pas l'utilisation des *fonctions d'erreur*. Ainsi, dans ce cas, $\lambda_r = 1$ et $\epsilon = \Delta q^c$.

- Comme nous l'avons vu dans l'annexe C, on rencontre également ce cas lorsque le conditionnement homodyne est supposé être suffisamment fin : $\Delta q^c \ll \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}}$, où η est l'efficacité homodyne. Dans ce cas, la formule (D.1) est similaire à (C.10), avec φ_r donné par l'équation (C.12) :

$$\varphi_r(q) = \frac{2\Delta x_r^c}{\sqrt{\pi(1-\eta)}} e^{-\frac{q^2}{\frac{1-\eta}{\eta}}}. \quad (\text{D.3})$$

Ainsi, dans ce cas, $\lambda_r = \frac{2\Delta x_r^c}{\sqrt{\pi(1-\eta)}}$ and $\epsilon = \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}}$.

D.2 Récurrence

Nous allons montrer par récurrence que la fonction $W^{(r)}$ calculée par la formule (D.1) s'écrit sous la forme :

$$W^{(r)}(q, p) = Q_r(q, p)e^{-\frac{q^2+p^2}{\sigma^2}}, \quad (\text{D.4})$$

dans laquelle Q_r est un polynôme où les seules puissances qui apparaissent sont paires, et dont le degré global est égal à 2^{r+1} . La récurrence est initialisée par la fonction de Wigner (2.17) qui vérifie bien cette propriété.

Ensuite, grâce à l'hypothèse de récurrence, on peut récrire (D.1) au rang r :

$$\begin{aligned} W^{(r)}(q, p) &= \lambda_r e^{\frac{\pi^2}{\epsilon^2}} \iint Q_{r-1}\left(\frac{q''}{\sqrt{2}}, \frac{p''}{\sqrt{2}}\right) e^{-\left(\frac{\sigma^2+\epsilon^2}{2\sigma^2\epsilon^2}\right)q''^2 - \frac{p''^2}{2\sigma^2}} \\ &\times Q_{r-1}\left(\frac{q''-2q}{\sqrt{2}}, \frac{p''-2p}{\sqrt{2}}\right) e^{-\left(\frac{\sigma^2+\epsilon^2}{2\sigma^2\epsilon^2}\right)(q''-2q)^2 - \frac{(p''-2p)^2}{2\sigma^2}} dq'' dp''. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

En posant ensuite $W_r(q, p) = Q_r(q, p)e^{-\frac{q^2+p^2}{\sigma^2}}$ (mais sans pour l'instant prétendre que Q_r est un polynôme), on a donc :

$$\begin{aligned} Q_r\left(\frac{q}{2}, \frac{p}{2}\right) e^{-\frac{(\sigma^2+\epsilon^2)q^2}{4\sigma^2\epsilon^2} - \frac{p^2}{4\sigma^2}} &= \lambda_r \iint Q_{r-1}\left(\frac{q''}{\sqrt{2}}, \frac{p''}{\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{(\sigma^2+\epsilon^2)q''^2}{2\sigma^2\epsilon^2} - \frac{p''^2}{2\sigma^2}} \\ &\times Q_{r-1}\left(\frac{q-q''}{\sqrt{2}}, \frac{p-p''}{\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{(\sigma^2+\epsilon^2)(q-q'')^2}{2\sigma^2\epsilon^2} - \frac{(p-p'')^2}{2\sigma^2}} dp'' dq''. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

On remarque que cette écriture est un produit de convolution à deux variables, et l'idée que nous allons utiliser est que la transformée de Fourier (que l'on notera \mathcal{F}) d'un produit de convolution est un produit simple.

En nous rappelant que

$$\mathcal{F}(q^n e^{-\frac{aq^2}{2}})(x) := \int q^n e^{-\frac{aq^2}{2}} e^{-iqx} dq = \left(\frac{-i}{\sqrt{2a}}\right)^n \sqrt{\frac{2\pi}{a}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2a}}\right) e^{-\frac{x^2}{2a}}, \quad (\text{D.7})$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(q^n e^{-\frac{aq^2}{2}})(x) := \frac{1}{2\pi} \int q^n e^{-\frac{aq^2}{2}} e^{iqx} dq = \left(\frac{i}{\sqrt{2a}}\right)^n \sqrt{\frac{1}{2\pi a}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2a}}\right) e^{-\frac{x^2}{2a}}, \quad (\text{D.8})$$

où $H_n(x)$ est le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Hermite, défini en (1.82), on montre que la transformée de Fourier du terme de droite de l'équation (D.6) vaut

$$\lambda_r \left[\frac{2\pi\sigma^2\epsilon}{\sqrt{\sigma^2+\epsilon^2}} e^{-\frac{\sigma^2\epsilon^2 x^2}{2(\sigma^2+\epsilon^2)} - \frac{\sigma^2 y^2}{2}} Q_{r-1}\left(\frac{-i\sigma\epsilon}{2\sqrt{\sigma^2+\epsilon^2}} H\left(\frac{\sigma\epsilon x}{\sqrt{2(\sigma^2+\epsilon^2)}}\right), -\frac{i\sigma}{2} H\left(\frac{\sigma y}{\sqrt{2}}\right)\right) \right]^2, \quad (\text{D.9})$$

où l'on a adopté la notation suivante : si

$$P(x, y) = \sum_{k,l} a_{k,l} x^k y^l \quad (\text{D.10})$$

est un polynôme, alors

$$P(\alpha_x H(\beta_x x), \alpha_y H(\beta_y y)) = \sum_{k,l} a_{k,l} \alpha_x^k \alpha_y^l H_k(\beta_x x) H_l(\beta_y y). \quad (\text{D.11})$$

Formellement, on remplace donc respectivement les monômes de degrés k et l en x et y par les $k^{\text{ième}}$ et $l^{\text{ième}}$ polynômes de Hermite.

L'expression (D.9) peut donc s'écrire sous la forme

$$\mathcal{P}(x, y) e^{-\frac{\sigma^2 \epsilon^2 x^2}{2(\sigma^2 + \epsilon^2)} - \frac{\sigma^2 y^2}{2}}, \quad (\text{D.12})$$

où $\mathcal{P}(x, y)$ est un polynôme pair de degré global 2^{r+1} en x et en y . En utilisant ensuite (D.8) pour calculer la transformée de Fourier inverse de l'expression (D.12) et en nous rappelant de la valeur de l'expression calculée grâce à (D.6), on obtient :

$$Q_r\left(\frac{q}{2}, \frac{p}{2}\right) e^{-\frac{(\sigma^2 + \epsilon^2)q^2}{4\sigma^2 \epsilon^2} - \frac{p^2}{4\sigma^2}} = \mathcal{Q}(q, p) e^{-\frac{(\sigma^2 + \epsilon^2)q^2}{4\sigma^2 \epsilon^2} - \frac{p^2}{4\sigma^2}}, \quad (\text{D.13})$$

où $\mathcal{Q}(q, p)$ est un polynôme pair de degré global 2^{r+1} en q et p . Ainsi, Q_r est bien un polynôme pair de degré global 2^{r+1} .

Donnons ensuite une expression de ce polynôme Q_r par récurrence, par transformation de Fourier de l'équation (D.6). Grâce à (D.9), après transformée de Fourier et simplification des termes, on obtient :

$$\begin{aligned} & Q_r\left(\frac{i\sigma\epsilon}{2\sqrt{\sigma^2 + \epsilon^2}} H\left(\frac{\sigma\epsilon x}{\sqrt{\sigma^2 + \epsilon^2}}\right), \frac{i\sigma}{2} H(\sigma y)\right) \\ &= \lambda_r \frac{\pi\sigma^2\epsilon}{\sqrt{\sigma^2 + \epsilon^2}} \left[Q_{r-1}\left(\frac{-i\sigma\epsilon}{2\sqrt{\sigma^2 + \epsilon^2}} H\left(\frac{\sigma\epsilon x}{\sqrt{2(\sigma^2 + \epsilon^2)}}\right), -\frac{i\sigma}{2} H\left(\frac{\sigma y}{\sqrt{2}}\right)\right) \right]^2, \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

qui permet d'obtenir la récurrence jusqu'au rang $r = 0$:

$$\begin{aligned} & Q_r\left(i\sqrt{\frac{\alpha}{2}} H\left(\frac{x}{i\sqrt{2\alpha}}\right), i\sqrt{\frac{\beta}{2}} H\left(\frac{y}{i\sqrt{2\beta}}\right)\right) \\ &= \lambda_r (\lambda_{r-1})^2 \dots (\lambda_1)^{2^{r-1}} \left(\frac{\pi\sigma^2\epsilon}{\sqrt{\sigma^2 + \epsilon^2}}\right)^{2^{r-1}} \left[Q_0\left(i\sqrt{\frac{\alpha}{2}} H\left(\frac{x}{i\sqrt{2^{r+1}\alpha}}\right), -i\sqrt{\frac{\beta}{2}} H\left(\frac{y}{i\sqrt{2^{r+1}\beta}}\right)\right) \right]^{2^r} \\ &= \chi_r \left[Q_0\left(i\sqrt{\frac{\alpha}{2}} H\left(\frac{x}{i\sqrt{2^{r+1}\alpha}}\right), -i\sqrt{\frac{\beta}{2}} H\left(\frac{y}{i\sqrt{2^{r+1}\beta}}\right)\right) \right]^{2^r}, \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

avec

$$\alpha = \frac{\sigma^2 \epsilon^2}{2(\sigma^2 + \epsilon^2)} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\sigma^2}{2}. \quad (\text{D.16})$$

En utilisant alors la forme du polynôme apparaissant dans l'écriture de la fonction de Wigner du photon unique (2.17)

$$\begin{aligned} Q_0\left(i\sqrt{\frac{\alpha}{2}} H\left(\frac{x}{i\sqrt{2^{r+1}\alpha}}\right), -i\sqrt{\frac{\beta}{2}} H\left(\frac{y}{i\sqrt{2^{r+1}\beta}}\right)\right) &= \frac{(2 - \delta)\sigma^2 + 2\epsilon^2}{2\pi\sigma^2(\sigma^2 + \epsilon^2)} + \frac{\delta}{\pi\sigma^4 2^r} (x^2 + y^2) \\ &= \mu + \frac{\nu}{2^r} (x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

on peut récrire l'égalité (D.15) :

$$Q_r\left(i\sqrt{\frac{\alpha}{2}} H\left(\frac{x}{i\sqrt{2\alpha}}\right), i\sqrt{\frac{\beta}{2}} H\left(\frac{y}{i\sqrt{2\beta}}\right)\right) = \chi_r \sum_{n=0}^{2^r} \sum_{k=0}^n \binom{2^r}{n} \binom{n}{k} \mu^{2^r-n} \frac{\nu^n}{2^{rn}} x^{2k} y^{2(n-k)}. \quad (\text{D.18})$$

ANNEXE D

Puis, étant donné que

$$i^n \sqrt{\frac{\alpha^n}{2^n}} H_n \left[\frac{1}{2i} H \left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha}} \right) \right] = x^n, \quad (\text{D.19})$$

si l'on procède au remplacement suivant des termes ¹ :

$$x^k \longrightarrow \sqrt{\frac{\alpha^k}{2^k}} H_k \left(\frac{q}{\sqrt{2\alpha}} \right) \quad (\text{D.20})$$

$$y^l \longrightarrow \sqrt{\frac{\beta^l}{2^l}} H_l \left(\frac{p}{\sqrt{2\beta}} \right) \quad (\text{D.21})$$

dans (D.18), on obtient la forme finale explicite de la fonction de Wigner pour une fenêtre gaussienne :

$$W^{(r)}(q, p) = e^{-\frac{q^2+p^2}{\sigma^2}} \chi_r \sum_{n=0}^{2^r} \sum_{k=0}^n \binom{2^r}{n} \binom{n}{k} \mu^{2^r-n} \frac{\nu^n}{2^{(r+1)n}} \alpha^k \beta^{n-k} H_{2k} \left(\frac{q}{\sqrt{2\alpha}} \right) H_{2(n-k)} \left(\frac{p}{\sqrt{2\beta}} \right). \quad (\text{D.22})$$

1. Ce remplacement porte le nom de composition ombrale [Roman 05]

Annexe E

Protocole de violation des inégalités de Bell par mesures hybrides

Nous nous proposons dans cette annexe d'étudier les résultats que l'on s'attend à obtenir avec le protocole dit "hybride" de violation des inégalités de Bell proposé dans [Brask 12], qui permet l'utilisation au choix de mesures homodynes ou de détection de photons aux deux parties en jeu.

L'étude menée ici est faite à partir de notre modèle expérimental développé au chapitre 2.

E.1 Modèle théorique pour la simulation du protocole [Brask 12]

E.1.1 Etat utilisé pour la violation

Le principe de la génération des états nécessaires à la violation du protocole proposé dans [Brask 12] est rappelé sur la figure E.1 (a). Un état EPR (tronqué à 1 photon) est incident dans les modes 1 et 2, et un des deux bras de cet état est amplifié grâce à un amplificateur sans bruit non déterministe, dont le principe simplifié est montré sur la figure E.1 (b). Le fonctionnement général de celui-ci est le suivant : un état de très faible amplitude (dont on peut négliger les composantes à plus d'un photon) est envoyé sur une lame 50:50, et est mélangé avec un port de sortie d'une lame séparatrice (r, t) dont un des bras d'entrée contient un photon unique et l'autre le vide. Au sortir de cette lame 50:50, deux détecteurs (D_1 et D_2) détectent ou non la présence de photons. Si un seul des deux clique, alors la transformation d'amplification sans bruit a correctement eu lieu, et l'état de sortie $|\psi_{\text{out}}\rangle$ est de la forme $|\psi_{\text{out}}\rangle = g^N |\psi_{\text{in}}\rangle$, où le gain est $g = \sqrt{\frac{1-r^2}{r^2}}$. Les références [Ralph 08, Ferreyrol 10] proposent un traitement détaillé du fonctionnement de cet amplificateur et de sa mise en œuvre expérimentale.

On peut montrer (nous ne le ferons pas ici) qu'après le mélange des deux modes sur la lame séparatrice BS3, l'état de sortie intriqué qui va être envoyé à Alice et Bob peut s'écrire :

$$|\psi_f\rangle = r|0, 0\rangle + \frac{\lambda t}{\sqrt{2}}(|0, 2\rangle + |2, 0\rangle). \quad (\text{E.1})$$

E.1.2 Mesures effectuées et définition d'une fonction S de Bell

Comme nous l'avons dit rapidement au paragraphe 6.1.2.4, les mesures que Alice et Bob vont devoir effectuer seront, selon leur choix, soit une mesure homodyne, soit une détection de photons. Pour une mesure homodyne, la valeur $+1$ correspond à une mesure dans $\mathcal{D}^+ = [-z, z]$ et la valeur -1 correspond à une mesure dans $\mathcal{D}^- = \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}^+$. Pour une mesure APD, $+1$ correspond

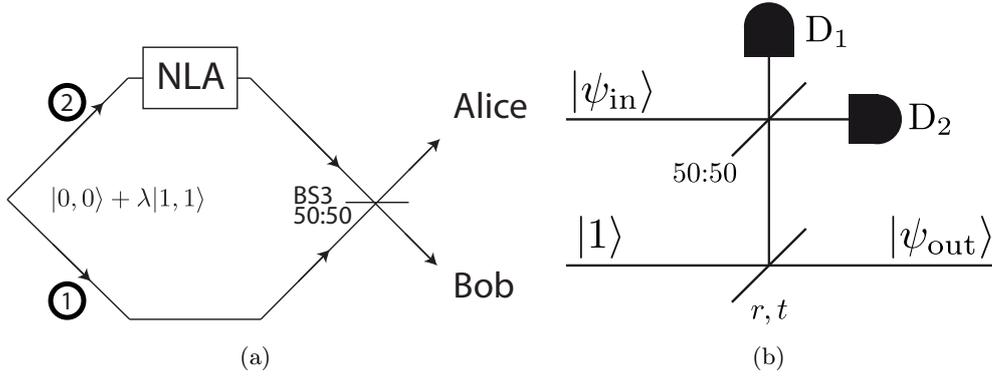


FIGURE E.1 – Principe de la génération d'un état de la forme (E.1) : un des bras d'un état EPR (tronqué à 1 photon) est amplifié par un amplificateur sans bruit non déterministe

à une détection de photon et -1 à l'absence de détection.

Ces mesures permettent de définir une fonction de Bell suivant la relation :

$$S = E_{XX} + E_{NX} + E_{XN} - E_{NN}, \quad (\text{E.2})$$

où E_{ij} correspond à la valeur moyenne du produit des résultats de Bob et Alice dans le cas où ceux-ci ont respectivement réalisé une mesure de type i et j (X : mesure de quadrature, N : détection de photons). Explicitons les expressions de ces quatre espérances E_{ij} suivant les cas, si l'état bimode incident pour Alice et Bob est $\hat{\rho}_{\text{out}}$.

Alice et Bob réalisent une mesure homodyne tous les deux

Si l'on pose

$$\mathcal{I}^{\pm}(n_1, n_2) = \int_{\mathcal{D}^{\pm}} \varphi_{n_1}(x) \varphi_{n_2}(x) dx, \quad (\text{E.3})$$

avec $\varphi_n(x)$ la fonction d'onde de l'état de Fock à n photons (1.81a), on obtient les expressions des probabilités de chaque mesure :

$$\begin{aligned} P(++|XX) &= \int_{\mathcal{D}^+} dx_A \int_{\mathcal{D}^+} dx_B \langle x_A, x_B | \hat{\rho}_{\text{out}} | x_A, x_B \rangle \\ &= \sum_{n_A, n'_A, n_B, n'_B} \langle n_A, n_B | \hat{\rho}_{\text{out}} | n'_A, n'_B \rangle \mathcal{I}^+(n_A, n'_A) \mathcal{I}^+(n_B, n'_B) \end{aligned} \quad (\text{E.4a})$$

$$P(--|XX) = \sum_{n_A, n'_A, n_B, n'_B} \langle n_A, n_B | \hat{\rho}_{\text{out}} | n'_A, n'_B \rangle \mathcal{I}^-(n_A, n'_A) \mathcal{I}^-(n_B, n'_B) \quad (\text{E.4b})$$

$$P(-+|XX) = \sum_{n_A, n'_A, n_B, n'_B} \langle n_A, n_B | \hat{\rho}_{\text{out}} | n'_A, n'_B \rangle \mathcal{I}^-(n_A, n'_A) \mathcal{I}^+(n_B, n'_B) \quad (\text{E.4c})$$

$$P(+-|XX) = \sum_{n_A, n'_A, n_B, n'_B} \langle n_A, n_B | \hat{\rho}_{\text{out}} | n'_A, n'_B \rangle \mathcal{I}^+(n_A, n'_A) \mathcal{I}^-(n_B, n'_B), \quad (\text{E.4d})$$

d'où

$$\boxed{E_{XX} = \sum_{n_A, n'_A, n_B, n'_B} \langle n_A, n_B | \hat{\rho}_{\text{out}} | n'_A, n'_B \rangle \left[\delta_{n_A, n'_A} \delta_{n_B, n'_B} - 2\mathcal{I}^-(n_A, n_A) \mathcal{I}^+(n_B, n'_B) - 2\mathcal{I}^+(n_A, n_A) \mathcal{I}^-(n_B, n'_B) \right]}. \quad (\text{E.5})$$

Alice réalise une détection de photon et Bob réalise une mesure homodyne

La probabilité de détection d'au moins un photons est égale à la somme des probabilités de détecter $n \neq 0$ photons. Ainsi les différentes probabilités sont données par :

$$P(++|NX) = \sum_{n_A=1}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}^+} dx_B \langle n_A, x_B | \hat{\rho}_{\text{out}} | n_A, x_B \rangle \quad (\text{E.6a})$$

$$= \sum_{n_A=1}^{+\infty} \sum_{n_B, n'_B=0}^{+\infty} \langle n_A, n_B | \hat{\rho}_{\text{out}} | n_A, n'_B \rangle \mathcal{I}^+(n_B, n'_B) \quad (\text{E.6b})$$

$$P(-+|NX) = \sum_{n_B, n'_B=0}^{+\infty} \langle 0, n_B | \hat{\rho}_{\text{out}} | 0, n'_B \rangle \mathcal{I}^+(n_B, n'_B) \quad (\text{E.6c})$$

$$P(+ - |NX) = \sum_{n_A=1}^{+\infty} \sum_{n_B, n'_B=0}^{+\infty} \langle n_A, n_B | \hat{\rho}_{\text{out}} | n_A, n'_B \rangle \mathcal{I}^-(n_B, n'_B) \quad (\text{E.6d})$$

$$P(--|NX) = \sum_{n_B, n'_B=0}^{+\infty} \langle 0, n_B | \hat{\rho}_{\text{out}} | 0, n'_B \rangle \mathcal{I}^-(n_B, n'_B). \quad (\text{E.6e})$$

L'espérance des produits des résultats d'Alice et de Bob est donc :

$$E_{NX} = \sum_{n_B, n'_B=0}^{+\infty} \left[\sum_{n_A=1}^{+\infty} \langle n_A, n_B | \hat{\rho}_{\text{out}} | n_A, n'_B \rangle - \langle 0, n_B | \hat{\rho}_{\text{out}} | 0, n'_B \rangle \right] \left(\delta_{n_B, n'_B} - 2\mathcal{I}^-(n_B, n'_B) \right). \quad (\text{E.7})$$

Si Alice et Bob inversent leur rôles, l'expression est du même type, avec une simple inversion des indices A et B.

Alice et Bob réalisent tous deux une détection de photons

Dans ce cas, les probabilités sont simplement données par :

$$P(--|NN) = \langle 0, 0 | \hat{\rho}_{\text{out}} | 0, 0 \rangle \quad (\text{E.8a})$$

$$P(-+|NN) = \sum_{n_A=1}^{+\infty} \langle n_A, 0 | \hat{\rho}_{\text{out}} | n_A, 0 \rangle \quad (\text{E.8b})$$

$$P(+ - |NN) = \sum_{n_B=1}^{+\infty} \langle 0, n_B | \hat{\rho}_{\text{out}} | 0, n_B \rangle \quad (\text{E.8c})$$

$$P(++|NN) = \sum_{n_A, n_B=1}^{+\infty} \langle n_A, n_B | \hat{\rho}_{\text{out}} | n_A, n_B \rangle. \quad (\text{E.8d})$$

D'où

$$E_{NN} = 1 - 2 \sum_{n_A=1}^{+\infty} \langle n_A, 0 | \hat{\rho}_{\text{out}} | n_A, 0 \rangle - 2 \sum_{n_B=1}^{+\infty} \langle 0, n_B | \hat{\rho}_{\text{out}} | 0, n_B \rangle. \quad (\text{E.9})$$

Avec l'utilisation de l'état (E.1) comme état intriqué, la violation en fonction de la taille de l'intervalle de binarisation homodyne est montrée sur la figure E.2, avec ($r = 0.0008$) et sans ($r=0$) amplificateur sans bruit. La très faible valeur de r pour l'amélioration du paramètre S vient du fait que le gain de l'opération d'amplification sans bruit s'écrit $g = \sqrt{\frac{1-r^2}{r^2}}$, qui tend vers $+\infty$ lorsque r tend vers 0.

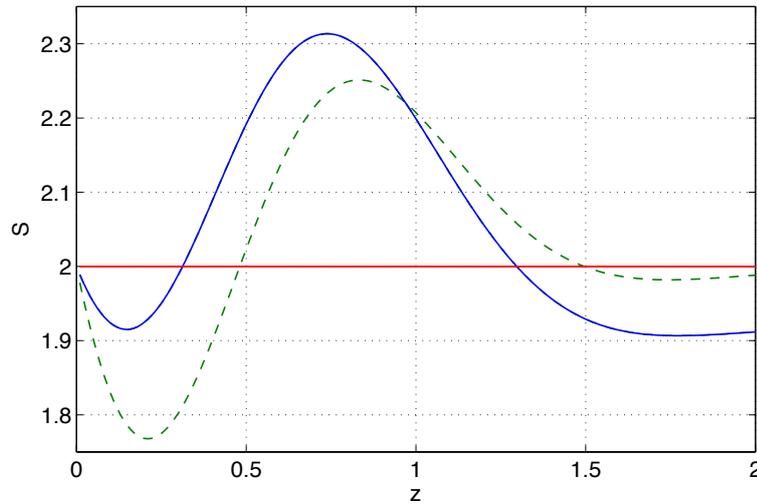


FIGURE E.2 – Fonction S de Bell d'un protocole avec $r = 0$ (courbe tiretée verte) et $r \neq 0$ (courbe bleue) en fonction de la taille de l'intervalle de binarisation des données homodynes $\mathcal{D}^+ = [-z, z]$. $S > 2$ indique une violation des inégalités de Bell.

E.1.3 Prise en compte des imperfections de l'état et des détections

Le but de cette section est de réaliser le calcul de la fonction S pour un dispositif imparfait. Celui-ci est modélisé par la figure E.3.

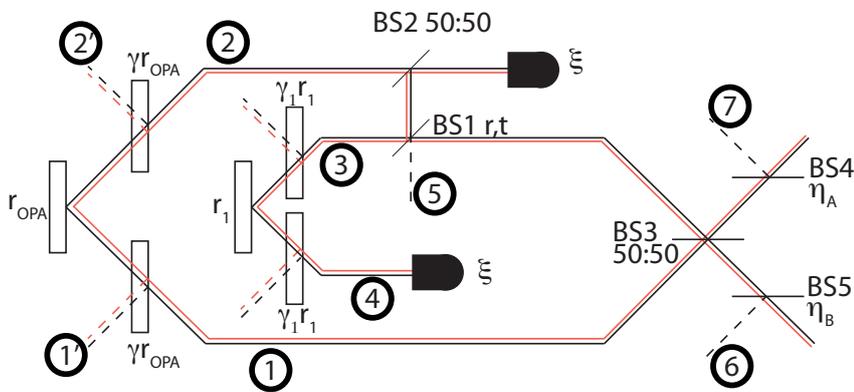


FIGURE E.3 – Modélisation de la manip réelle.

Ces imperfections se retrouvent en trois points :

- Les états que nous générons ne sont pas des états EPR parfaits, ils sont bruités par le paramètre γ (et γ_1 pour l'état à 1 photon).
- Malgré un filtrage à l'entrée des APDs de conditionnement, il est possible que celles-ci cliquent sur un mode orthogonal au mode homodyne (mode représenté en rouge sur la figure E.3, que l'on notera avec l'exposant \perp). Ce mode ne sera alors pas vu par les

détections homodynes.

La probabilité pour une APD de cliquer sur ce mode est notée $1 - \xi$.

- Il faudra également prendre les pertes en compte, comme on l'a fait dans la section précédente.

E.1.3.1 Etat en entrée de dispositif

Notre modélisation de l'état d'entrée s'écrit comme deux OPA non dégénérés de paramètres γr tous les deux appliqués aux deux bras d'un OPA non dégénéré de paramètre r . Mathématiquement parlant, notre état total d'entrée s'écrit donc

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = S_{2,2'}(\gamma r_{OPA})S_{1,1'}(\gamma r_{OPA})S_{1,2}(r_{OPA})|0\rangle, \quad (\text{E.10})$$

où $S_{i,j}(r')$ est l'opérateur de squeezing sur les modes i et j de paramètre r' , donné par l'équation (1.57).

Les modes 1' et 2' sont perdus dans la nature et on récupère donc un état d'entrée :

$$\hat{\rho}_{OPA} = \text{Tr}_{1',2'}(|\psi_{\text{in}}\rangle\langle\psi_{\text{in}}|). \quad (\text{E.11})$$

Malheureusement, cet état aura des composantes aussi bien dans le mode homodyne que dans des modes orthogonaux à celui-ci. Pour limiter la contribution des modes orthogonaux, on utilise un filtrage lors des conditionnements de création de nos états. Malgré tout, ce filtrage n'est pas parfait, et l'état que l'on est capable de produire une fois conditionné est un mélange statistique de l'état conditionné dans le bon mode avec l'état conditionné dans un mode orthogonal. Autrement dit, on écrit :

$$\hat{\rho}'_{OPA} = \xi \left[\hat{\rho}_{OPA} \otimes |0\rangle\langle 0|_{1+2^\perp} \right] + (1 - \xi) \left[|0\rangle\langle 0|_{12} \otimes \hat{\rho}_{OPA}^\perp \right]. \quad (\text{E.12})$$

L'état total initial est ensuite le produit tensoriel entre l'état EPR de l'OPA et l'état EPR qui fournit le photon unique. On supposera que leur pureté ξ est la même : cela n'est pas trivial. En effet au vu de la figure E.3, on voit que le filtrage n'intervient qu'en deux points : au bout des voies 2 et 4. Dire que la pureté modale du photon unique est ξ semble aller de soi (cf formalisme adopté dans le paragraphe 2.5). Par contre, il se pourrait très bien que le conditionnement de la manip (clic simultané des deux APDs) réussisse par la seule contribution de la paire EPR du photon unique (le photon du bras 3 remonte vers l'APD de conditionnement du NLA). A ce moment, le mode de l'état EPR des bras 1 et 2 pourrait être absolument quelconque et non simplement celui proposé par l'équation (E.12) !

En fait on s'en sort en disant que la probabilité que deux photons arrivent simultanément sur la lame 2 est très faible, et donc si l'APD a cliqué dans le bon mode c'est qu'elle a reçu soit un photon du mode 3 (les modes 1 et 2 étant vides) soit un photon du mode 2 (le mode 5 étant vide)¹.

On peut donc bien écrire l'état d'entrée total dans cette approximation :

$$\hat{\rho}_{in} = \xi^2 \left[\hat{\rho}_{OPA} \otimes \hat{\rho}_{OPA_1} \otimes |0\rangle\langle 0|_{1+2^\perp} \otimes |0\rangle\langle 0|_{3+4^\perp} \right] + \xi(1 - \xi) \left[|0\rangle\langle 0|_{12} \otimes \hat{\rho}_{OPA_1} \otimes \hat{\rho}_{OPA}^\perp \otimes |0\rangle\langle 0|_{3+4^\perp} \right] + (1 - \xi)\xi \left[\hat{\rho}_{OPA} \otimes |0\rangle\langle 0|_{34} \otimes |0\rangle\langle 0|_{1+2^\perp} \otimes \hat{\rho}_{OPA_1}^\perp \right] + (1 - \xi)^2 \left[|0\rangle\langle 0|_{12} \otimes |0\rangle\langle 0|_{34} \otimes \hat{\rho}_{OPA}^\perp \otimes \hat{\rho}_{OPA_1}^\perp \right], \quad (\text{E.13})$$

1. Comme précédemment, cette hypothèse revient à négliger les termes en $r\lambda$.

où $\hat{\rho}_{OPA_1}$ est obtenu de la même manière qu'en (E.11), grâce à la trace partielle sur deux modes 3' et 4', permettant d'obtenir un état bimode sur 3 et 4.

E.1.3.2 Etat en sortie de dispositif

Même si l'on peut s'en sortir avec des opérateurs agissant dans des espaces plus grands, pour déterminer l'état de sortie nous allons séparer les 4 cas de figures qui entrent en jeu dans l'écriture de l'état initial (E.13).

Ceci est motivé par le fait que l'on veut réaliser la simulation numérique de cette expérience, et donc la prise en compte de tous les modes (même vides) alourdit inutilement le calcul.

Le calcul des transformations sur les quatre matrices densité incidentes (relatives aux différents cas de figure de conditionnement, correspondant aux quatre lignes de l'équation (E.13)) se fera à partir de matrices densités initiales à 8 modes ordonnés suivant 1, 2, 3, 4, 1^\perp , 2^\perp , 3^\perp , 4^\perp , et permettra l'expression de matrices densités de sortie à quatre modes ordonnés suivant 1, 3, 1^\perp , 3^\perp . Les calculs impliqueront également les opérateurs de lames séparatrices (1.47), que l'on notera U_i pour la lame BS_i dans toute cette annexe.

Dans le cas où un opérateur \hat{O} agit sur les modes i_1, \dots, i_k on notera \hat{O}^\perp le même opérateur agissant sur les modes $i_1^\perp, \dots, i_k^\perp$ (comme on l'avait fait pour les matrices densité $\hat{\rho}_{OPA}$ et $\hat{\rho}_{OPA_1}$ précédemment).

(a) Les deux APDs ont cliqué sur le mode homodyne : terme ξ^2

L'état d'entrée du dispositif est :

$$\hat{\rho}_{\text{in}, \xi^2} = \hat{\rho}_{OPA} \otimes \hat{\rho}_{OPA_1} \otimes |0\rangle\langle 0|_{1^\perp, 2^\perp, 3^\perp, 4^\perp}. \quad (\text{E.14})$$

Le conditionnement sur la voie 4 peut s'écrire comme $\Pi_4 = \mathbb{I} - |0\rangle\langle 0|_{4, 4^\perp}$, ainsi l'état qui arrive sur le BS1 s'écrit

$$\hat{\rho}_{3, \xi^2} = Tr_{4, 4^\perp}(\Pi_4 \hat{\rho}_{OPA_1} \otimes |0\rangle\langle 0|_{4^\perp} \Pi_4^\dagger).$$

Après le BS1, cet état monomode est mélangé au mode 5 pour donner un état bimode :

$$\hat{\rho}_{3, 5, \xi^2} = U_1(\hat{\rho}_{3, \xi^2} \otimes |0\rangle\langle 0|_5)U_1^\dagger. \quad (\text{E.15})$$

Puis, cet état va être mélangé à l'état EPR d'entrée, et le conditionnement va être effectué sur la voie 2. Après avoir effectué la trace partielle sur les voies 2 et 5 (ces parties de l'état sont perdues), l'état avant la lame 3 est donc :

$$\hat{\rho}_{1, 3, \xi^2} = Tr_{2, 5}[\Pi_2 U_2(\hat{\rho}_{OPA} \otimes \hat{\rho}_{3, 5, \xi^2})U_2^\dagger \Pi_2^\dagger]. \quad (\text{E.16})$$

Ainsi en sortie de dispositif (avant d'avoir subi les pertes dues aux efficacités de détections), l'état s'écrit :

$$\boxed{\hat{\rho}'_{1, 3, 1^\perp, 3^\perp, \xi^2} = U_3 \hat{\rho}_{1, 3, \xi^2} U_3^\dagger \otimes |0\rangle\langle 0|_{1^\perp, 3^\perp}.} \quad (\text{E.17})$$

(b) L'APD du bras 4 a cliqué sur le mode homodyne, l'APD du bras 2 a cliqué sur un mode orthogonal au mode homodyne : terme $\xi(1 - \xi)$

L'état d'entrée est :

$$\hat{\rho}_{\text{in}, \xi(1-\xi)} = |0\rangle\langle 0|_{12} \otimes \hat{\rho}_{OPA_1} \otimes \hat{\rho}_{OPA}^\perp \otimes |0\rangle\langle 0|_{3^\perp, 4^\perp}. \quad (\text{E.18})$$

Les transformations induites par le BS1 sont identiques à précédemment, et l'état après celui-ci est également $\hat{\rho}_{3, 5, \xi(1-\xi)} = \hat{\rho}_{3, 5, \xi^2}$. Simplement maintenant la transformation induite par BS2 sera différente :

$$\hat{\rho}_{1,3,1^\perp,3^\perp,\xi(1-\xi)} = |0\rangle\langle 0|_1 \otimes \text{Tr}_{2,5} \left[\Pi_2 U_2 (|0\rangle\langle 0|_2 \otimes \hat{\rho}_{3,5,\xi(1-\xi)}) U_2^\dagger \Pi_2^\dagger \right] \otimes \text{Tr}_{2^\perp,5^\perp} \left[\Pi_2^\perp U_2^\perp (\hat{\rho}_{OPA}^\perp \otimes |0\rangle\langle 0|_{5^\perp}) (U_2^\perp)^\dagger (\Pi_2^\perp)^\dagger \right] \otimes |0\rangle\langle 0|_{3^\perp}, \quad (\text{E.19})$$

que l'on peut récrire en

$$\hat{\rho}_{1,3,1^\perp,3^\perp,\xi(1-\xi)} = |0\rangle\langle 0|_1 \otimes \hat{\rho}_{3,\xi(1-\xi)} \otimes \hat{\rho}_{1^\perp,\xi(1-\xi)} \otimes |0\rangle\langle 0|_{3^\perp}. \quad (\text{E.20})$$

Alors l'état après BS3 sera

$$\hat{\rho}'_{1,3,1^\perp,3^\perp,\xi(1-\xi)} = U_3 (|0\rangle\langle 0|_1 \otimes \hat{\rho}_{3,\xi(1-\xi)}) U_3^\dagger \otimes U_3^\perp (\hat{\rho}_{1^\perp,\xi(1-\xi)} \otimes |0\rangle\langle 0|_{3^\perp}) (U_3^\perp)^\dagger. \quad (\text{E.21})$$

La différence fondamentale ici avec le cas précédent est que les lames BS2 et BS3 ne mélangent plus les états, mais les mélangent chacun avec du vide.

(c) L'APD du bras 2 a cliqué sur le mode homodyne, l'APD du bras 4 a cliqué sur un mode orthogonal au mode homodyne : terme $(1 - \xi)\xi$

L'état d'entrée est :

$$\hat{\rho}_{\text{in},(1-\xi)\xi} = \hat{\rho}_{OPA} \otimes |0\rangle\langle 0|_{34} \otimes |0\rangle\langle 0|_{1+2^\perp} \otimes \hat{\rho}_{OPA_1}^\perp. \quad (\text{E.22})$$

La transformation induite par BS1 se fait à présent uniquement sur les modes \perp , et l'état en sortie de BS1 sera le même que précédemment, mais dans les modes 3^\perp et 5^\perp :

$$\hat{\rho}_{3^\perp,(1-\xi)\xi} = \text{Tr}_{4,4^\perp} \left[\Pi_4^\perp \hat{\rho}_{OPA_1}^\perp (\Pi_4^\perp)^\dagger \right], \quad (\text{E.23})$$

puis

$$\hat{\rho}_{3^\perp,5^\perp,(1-\xi)\xi} = U_1^\perp (\hat{\rho}_{3^\perp,(1-\xi)\xi} \otimes |0\rangle\langle 0|_{5^\perp}) (U_1^\perp)^\dagger. \quad (\text{E.24})$$

Alors, la transformée par BS2 (après projection) s'écrit

$$\hat{\rho}_{1,3,1^\perp,3^\perp,(1-\xi)\xi} = \text{Tr}_{2,5} \left[\Pi_2 U_2 (\hat{\rho}_{OPA} \otimes |0\rangle\langle 0|_5) U_2^\dagger \Pi_2^\dagger \right] \otimes |0\rangle\langle 0|_3 \otimes |0\rangle\langle 0|_{1^\perp} \otimes \text{Tr}_{2^\perp,5^\perp} \left[\Pi_2^\perp U_2^\perp (|0\rangle\langle 0|_{2^\perp} \otimes \hat{\rho}_{3^\perp,5^\perp,(1-\xi)\xi}) (U_2^\perp)^\dagger (\Pi_2^\perp)^\dagger \right], \quad (\text{E.25})$$

que l'on note

$$\hat{\rho}_{1,3,1^\perp,3^\perp,(1-\xi)\xi} = \hat{\rho}_{1,(1-\xi)\xi} \otimes |0\rangle\langle 0|_3 \otimes |0\rangle\langle 0|_{1^\perp} \otimes \hat{\rho}_{3^\perp,(1-\xi)\xi}. \quad (\text{E.26})$$

Finalement, l'évolution par BS3 donne

$$\hat{\rho}'_{1,3,1^\perp,3^\perp,(1-\xi)\xi} = U_3 (\hat{\rho}_{1,(1-\xi)\xi} \otimes |0\rangle\langle 0|_3) U_3^\dagger \otimes U_3^\perp (|0\rangle\langle 0|_{1^\perp} \otimes \hat{\rho}_{3^\perp,(1-\xi)\xi}) (U_3^\perp)^\dagger. \quad (\text{E.27})$$

(d) Aucune des APD ne clique sur le mode homodyne : terme $(1 - \xi)^2$

Ce cas se déduit très simplement du cas du terme ξ^2 : c'est le même état de sortie, où l'on a échangé les termes i avec les termes i^\perp (on suppose, pour simplifier le traitement, que les modes \perp peuvent interférer entre eux) :

$$\hat{\rho}'_{1,3,1^\perp,3^\perp,(1-\xi)^2} = |0\rangle\langle 0|_{13} \otimes U_3^\perp \hat{\rho}_{1^\perp,3^\perp,(1-\xi)^2} (U_3^\perp)^\dagger, \quad (\text{E.28})$$

où

$$\hat{\rho}_{1^\perp,3^\perp,(1-\xi)^2} = \text{Tr}_{2^\perp,5^\perp} \left[\Pi_2^\perp U_2^\perp (\hat{\rho}_{OPA}^\perp \otimes \hat{\rho}_{3^\perp,5^\perp,(1-\xi)^2}) (U_2^\perp)^\dagger (\Pi_2^\perp)^\dagger \right], \quad (\text{E.29})$$

et $\hat{\rho}_{3^\perp,5^\perp,(1-\xi)^2} = \hat{\rho}_{3^\perp,5^\perp,(1-\xi)\xi}$.

Etat total final, comportement des détecteurs

Finalement l'état total en sortie de dispositif s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{1,3,1^\perp,3^\perp,tot} = & \xi^2 \hat{\rho}'_{1,3,1^\perp,3^\perp,\xi^2} + (1-\xi)^2 \hat{\rho}'_{1,3,1^\perp,3^\perp,(1-\xi)^2} \\ & + \xi(1-\xi) \left[\hat{\rho}_{1,3,1^\perp,3^\perp,\xi(1-\xi)} + \hat{\rho}_{1,3,1^\perp,3^\perp,(1-\xi)\xi} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.30})$$

Avant d'appliquer les opérations de pertes sur cet état et de calculer les espérances présentées dans la section précédente, il faut transformer cet état en un état bimode.

Pour ce faire, il faut se référer au fonctionnement de nos détecteurs : une détection homodyne ne détecte que ce qui se trouve dans son mode (sinon elle détecte le vide) alors qu'une APD cliquera de la même façon si l'état se trouve dans le mode homodyne ou le mode orthogonal au mode homodyne¹.

En fait, il faut qu'on réalise une opération de "concaténation" des deux modes du bras lorsque la mesure qui va être effectuée dans ce bras est une opération de détection de photons : dans le mode i on met tous les photons des modes i et i^\perp .

A l'inverse il faut qu'on réalise une trace partielle sur le mode orthogonal au mode homodyne dans le bras si la mesure qui va être effectuée dans ce bras est une mesure homodyne.

En résumé les différentes opérations à effectuer sont les suivantes :

- 2 mesures homodynes

$$\hat{\rho}_{XX,tot} = \text{Tr}_{1^\perp,3^\perp} \left[\hat{\rho}_{1,3,1^\perp,3^\perp,tot} \right]. \quad (\text{E.31})$$

- Alice : homodyne, Bob : détection

$$\hat{\rho}_{XN,tot} = \text{Tr}_{1^\perp} \text{Conc}_{3,3^\perp} \left[\hat{\rho}_{1,3,1^\perp,3^\perp,tot} \right]. \quad (\text{E.32})$$

- Alice : détection, Bob : homodyne

$$\hat{\rho}_{NX,tot} = \text{Tr}_{3^\perp} \text{Conc}_{1,1^\perp} \left[\hat{\rho}_{1,3,1^\perp,3^\perp,tot} \right]. \quad (\text{E.33})$$

- 2 détections

$$\hat{\rho}_{NN,tot} = \text{Conc}_{1,1^\perp} \text{Conc}_{3,3^\perp} \left[\hat{\rho}_{1,3,1^\perp,3^\perp,tot} \right]. \quad (\text{E.34})$$

Conc_{i,i^\perp} est l'opérateur de concaténation des modes i et i^\perp , comme expliqué plus haut.

Enfin il ne reste plus qu'à appliquer les pertes sur chacune des deux voies en fonction de la nature des détecteurs, η_h et η_d .

E.2 Violations en fonction des paramètres expérimentaux

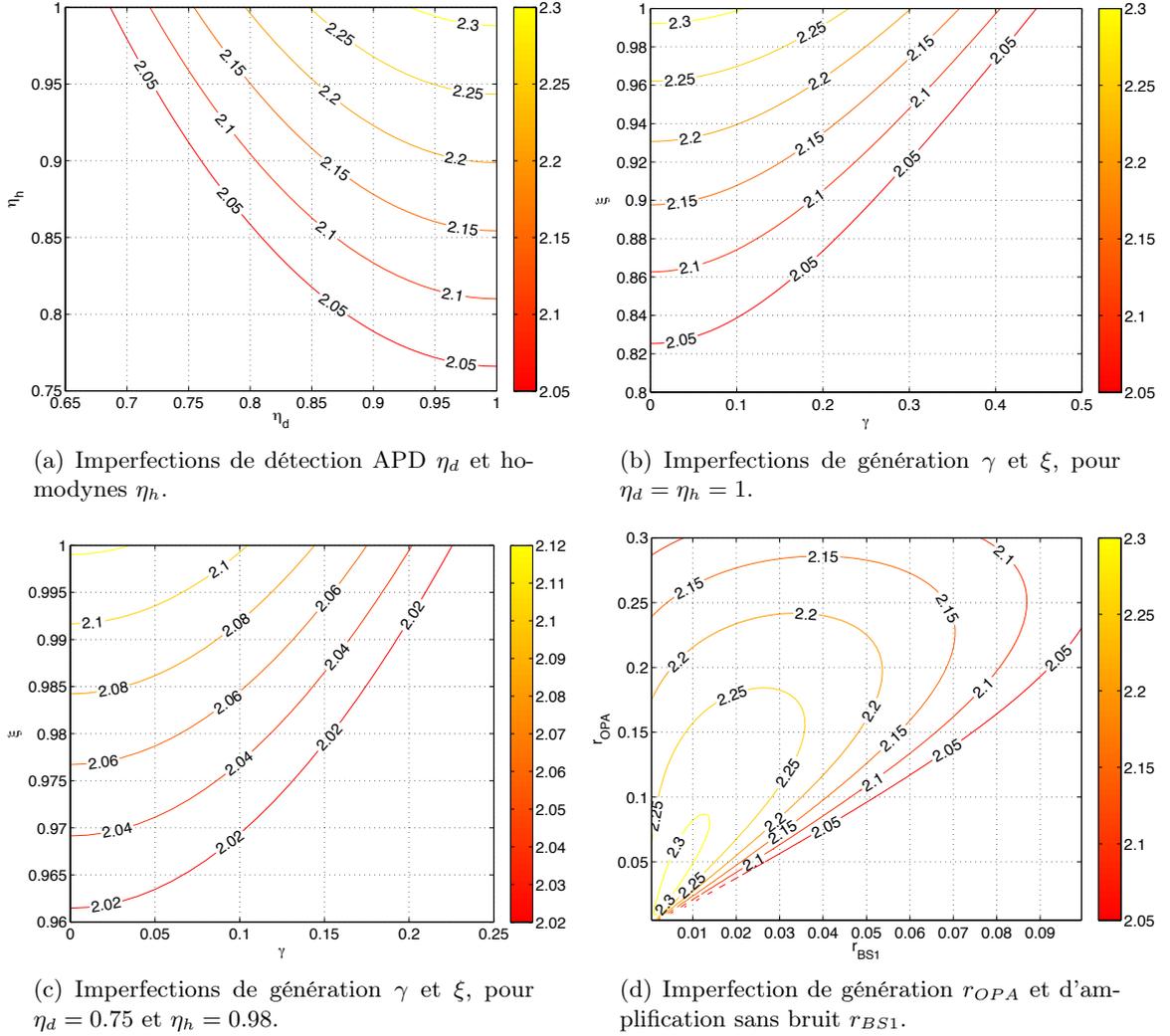
Etant donné le modèle dérivé dans la section précédente, on peut tracer la violation maximale (en z) en fonction des différents paramètres expérimentaux.

Efficacités de détection

La première dépendance intéressante concerne les efficacités de détections. En traçant la fonction S de Bell en fonction de η_d et η_h , on obtient la zone de violation présentée sur la figure E.4 (a) : tant que $\eta_h > 0.75$ et $\eta_d > 0.66$, une violation est possible.

Le point le plus haut accessible technologiquement actuellement ($\eta_h = 0.98$, $\eta_d = 0.75$) permet d'obtenir une violation de $S = 2.12 > 2$, dans l'hypothèse où l'état créé est l'état parfait (E.1).

1. On a réalisé une opération de filtrage lors des conditionnements, et on ne s'autorise au mieux qu'à refaire la même au moment de la détection ou au pire à n'en effectuer aucune.


 FIGURE E.4 – Fonction S de Bell (E.2), pour différents types d'imperfections.

Paramètres de génération

La figure E.4 (b) montre ensuite l'influence des paramètres γ et ξ pour $\eta_h = \eta_d = 1$, et la figure (c) montre la même dépendance pour $\eta_h = 0.98$ et $\eta_d = 0.75$. Ces derniers paramètres imposent donc de travailler avec $\gamma < 0.23$ ou $\xi > 0.96$, qui ne sont pas encore accessibles expérimentalement simultanément (dans notre cas, $\gamma = 0.4$ et $\xi = 0.96$). Des améliorations sont donc nécessaires sur notre montage pour espérer utiliser ce type de protocole en vue de réaliser des violations expérimentales de Bell sans échappatoires.

Autres paramètres

En plus des paramètres que l'on vient de citer, le paramètre de compression de l'OPA, r_{OPA} , et le coefficient de réflexion de la lame BS1, r_{BS1} , auront également un impact sur la violation maximale atteignable. Ceci est visible sur la figure (d), qui indique que pour chaque paramètre de compression r_{OPA} , il existe un gain optimal de l'amplificateur sans bruit non déterministe réglable avec r_{BS1} . C'est lorsque $r_{OPA} \rightarrow 0$ et $r_{BS1} \rightarrow 0$ ($g_{NLA} \rightarrow +\infty$) que la violation atteignable est maximale.

Annexe F

Mélange de peignes sur une lame 50:50

Nous nous proposons dans cette annexe de montrer mathématiquement la transformation (5.67). Afin de ne pas surcharger cette annexe, seulement la démonstration de (5.67b) sera faite, le raisonnement étant du même type pour la première transformation.

$$\psi_i(x, x') = \left(\langle x | \otimes \langle x' | \right) \left(|\bar{0}\rangle_a^{s,s'} \otimes |\bar{0}\rangle_a^{s,s'} \right) = aG_{1/s'}(x)G_{1/s'}(x') \sum_{k,l} G_s(x - ka)G_s(x' - la). \quad (\text{F.1})$$

L'action de la lame séparatrice sur les quadratures s'écrit ensuite :

$$\begin{aligned} \psi_{out}(x, x') &= \left(\left\langle \frac{x+x'}{\sqrt{2}} \middle| \otimes \left\langle \frac{x-x'}{\sqrt{2}} \middle| \right. \right) \left(|\bar{0}\rangle_a^{s,s'} \otimes |\bar{0}\rangle_a^{s,s'} \right) = \\ &aG_{1/s'}\left(\frac{x+x'}{\sqrt{2}}\right)G_{1/s'}\left(\frac{x-x'}{\sqrt{2}}\right) \sum_{k,l} G_s\left(\frac{x+x'}{\sqrt{2}} - ka\right)G_s\left(\frac{x-x'}{\sqrt{2}} - la\right). \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

En écrivant $m = k + l$ et $n = k - l$, on note que m et n ont toujours la même parité, et on obtient l'expression

$$\begin{aligned} \psi_{out}(x, x') &= aG_{1/s'}\left(\frac{x+x'}{\sqrt{2}}\right)G_{1/s'}\left(\frac{x-x'}{\sqrt{2}}\right) \times \\ &\sum_{m,n, \text{ même parité}} G_s\left(\frac{x - ma/\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{x' - na/\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)G_s\left(\frac{x - ma/\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{x' - na/\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Puis, étant donné que $G_s\left(\frac{x+x'}{\sqrt{2}}\right)G_s\left(\frac{x-x'}{\sqrt{2}}\right) = G_s(x)G_s(x')$, cette expression peut être simplifiée en :

$$\begin{aligned} \psi_{out}(x, x') &= aG_{1/s'}(x)G_{1/s'}(x') \sum_{m,n, \text{ pair}} G_s(x - ma/\sqrt{2})G_s(x' - na/\sqrt{2}) \\ &+ aG_{1/s'}(x)G_{1/s'}(x') \sum_{m,n, \text{ impair}} G_s(x - ma/\sqrt{2})G_s(x' - na/\sqrt{2}), \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

qui peut être finalement réécrite :

$$\begin{aligned} \psi_{out}(x, x') &= aG_{1/s'}(x)G_{1/s'}(x') \sum_{k',l'} G_s(x - k'\sqrt{2}a)G_s(x' - l'\sqrt{2}a) \\ &+ aG_{1/s'}(x)G_{1/s'}(x') \sum_{k',l'} G_s\left(x - \left(k' + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2}a\right)G_s\left(x' - \left(l' + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2}a\right) \\ &= \left[\langle x | \otimes \langle x' | \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\bar{0}\rangle_{\sqrt{2}a}^{s,s'} \otimes |\bar{0}\rangle_{\sqrt{2}a}^{s,s'} + |\bar{1}\rangle_{\sqrt{2}a}^{s,s'} \otimes |\bar{1}\rangle_{\sqrt{2}a}^{s,s'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Annexe G

Expression de la distribution bimode de probabilité dans le cas général dépendant de la phase

Nous donnons dans cette annexe la forme analytique de la distribution de probabilité bimode des données homodynes pour l'expérience de croissance de chats du chapitre 4, dans l'hypothèse où les deux photons sont imparfaits, d'imperfections pouvant être a priori différentes (photon 1 : σ , δ et photon 2 : σ' , δ').

L'expression présentée ici est le résultat du calcul de l'équation (4.4). Nous allons dans un premier temps poser :

$$u_{11} = 4 \left[\sigma^4 + \sigma'^4 + 6\sigma^2\sigma'^2 - (\sigma^2 - \sigma'^2)^2 \cos(2\theta) \right]^2 \left[8 \sin^4 \theta (\sigma^8(1 - \delta) + \sigma'^8(1 - \delta')) \right. \\ \left. + 4(3 + \cos(2\theta)) \sin^2 \theta (\sigma^6\sigma'^2(4 - \delta' - 3\delta + 2\delta\delta') + \sigma^2\sigma'^6(4 - \delta - 3\delta' + 2\delta\delta')) \right. \\ \left. + \sigma^4\sigma'^4(82 - 41(\delta + \delta') + 28\delta\delta' - 20(\delta + \delta' - 2) \cos(2\theta) + (6 - 3(\delta + \delta') + 4\delta\delta') \cos(4\theta)) \right] \quad (\text{G.1})$$

$$u_{31} = 16 \left[\sigma^4 + \sigma'^4 + 6\sigma^2\sigma'^2 - (\sigma^2 - \sigma'^2)^2 \cos(2\theta) \right] \left[8 \sin^4 \theta (\sigma^{10}\delta + \sigma'^{10}\delta') \right. \\ \left. + 4\sigma^2\sigma'^2 \left[\sigma^6(8\delta + 5\delta' - 18\delta\delta' + (3\delta' - 10\delta\delta') \cos(2\theta)) \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma'^6(8\delta' + 5\delta - 18\delta\delta' + (3\delta - 10\delta\delta') \cos(2\theta)) \right] \right. \\ \left. + 2\sigma^4\sigma'^4 \left[\sigma^2(36\delta' + 15\delta - 35\delta\delta' + 4(-3\delta + 6\delta' + 2\delta\delta') \cos(2\theta) + (4\delta' - 3\delta - 5\delta\delta') \cos(4\theta)) \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma'^2(36\delta + 15\delta' - 35\delta\delta' + 4(-3\delta' + 6\delta + 2\delta\delta') \cos(2\theta) + (4\delta - 3\delta' - 5\delta\delta') \cos(4\theta)) \right] \right] \quad (\text{G.2})$$

$$u_{51} = 64\delta\delta'\sigma^2\sigma'^2 \left[(\sigma^8 + \sigma'^8)(7 - 4 \cos(2\theta) - 3 \cos(4\theta)) \right. \\ \left. + (\sigma^6\sigma'^2 + \sigma^2\sigma'^6)(20 - 16 \cos(2\theta) - 4 \cos(4\theta)) \right. \\ \left. + \sigma^4\sigma'^4(74 + 40 \cos(2\theta) + 14 \cos(4\theta)) \right] \quad (\text{G.3})$$

$$u_{22} = -32 \cos \theta \left[\sigma^4 + \sigma'^4 + 6\sigma^2\sigma'^2 - (\sigma^2 - \sigma'^2)^2 \cos(2\theta) \right] \left[8 \sin^4 \theta (\delta\sigma^{10} - \delta'\sigma'^{10}) \right. \\ \left. 4 \sin^2 \theta \sigma^2\sigma'^2 \left[\sigma'^6(-4\delta' - 7\delta + 24\delta\delta' + (-\delta - 4\delta' + 4\delta\delta') \cos(2\theta)) \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma^6(4\delta + 7\delta' - 24\delta\delta' + (\delta' + 4\delta - 4\delta\delta') \cos(2\theta)) \right] \right. \\ \left. + 2\sigma^4\sigma'^4 \left[\sigma^2(46\delta' - 15\delta - 30\delta' + (16\delta' + 12\delta + 4\delta\delta') \cos(2\theta) + (2\delta' + 3\delta - 6\delta\delta') \cos(4\theta)) \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma'^2(-46\delta + 15\delta' + 30\delta + (-16\delta - 12\delta' - 4\delta\delta') \cos(2\theta) + (-2\delta - 3\delta' + 6\delta\delta') \cos(4\theta)) \right] \right] \quad (\text{G.4})$$

$$u_{42} = -2048\delta\delta'\sigma^2\sigma'^2(\sigma^4 - \sigma'^4)\cos\theta\sin^2\theta \quad (\text{G.5})$$

$$\times \left[3\sigma^4 + 2\sigma^2\sigma'^2 + 3\sigma'^4 + (\sigma^2 - \sigma'^2)^2 \cos(2\theta) \right]$$

$$u_{33} = 64\delta\delta'\sigma^2\sigma'^2 \left[(\sigma^8 + \sigma'^8)(28 - 7\cos(2\theta) - 20\cos(4\theta) - \cos(6\theta)) \quad (\text{G.6}) \right.$$

$$+ (\sigma^6\sigma'^2 + \sigma^2\sigma'^6)(16 - 36\cos(2\theta) + 16\cos(4\theta) + 4\cos(6\theta))$$

$$\left. \sigma^4\sigma'^4(-88 - 170\cos(2\theta) + 8\cos(4\theta) - 6\cos(6\theta)) \right].$$

La distribution bimode de probabilités s'écrit alors comme :

$$P(x, x'_\theta) = e^{\frac{-4(x^2+x'_\theta{}^2)(\sigma^2+\sigma'^2)+8xx'_\theta(\sigma^2-\sigma'^2)\cos(\theta)}{\sigma^4+6\sigma^2\sigma'^2+\sigma'^4-(\sigma^2-\sigma'^2)^2\cos(2\theta)}} \frac{\sum_{j,k=1}^5 u_{jk}x^{j-1}x'_\theta{}^{k-1}}{2\sqrt{2}\pi \left[\sigma^4 + 6\sigma^2\sigma'^2 + \sigma'^4 - (\sigma^2 - \sigma'^2)^2 \cos(2\theta) \right]^{9/2}}, \quad (\text{G.7})$$

avec la convention $u_{jk} = u_{kj}$, et avec les seuls u_{kj} non nuls ceux précisés par les équations (G.1-G.6).

Dans le cas où les deux photons uniques sont identiques ($\delta' = \delta$ et $\sigma' = \sigma$), cette expression se simplifie grandement en :

$$P(x, x'_\theta) = \frac{e^{-\frac{x^2+x'_\theta{}^2}{\sigma^2}}}{4\pi\sigma^6} \left[\delta^2(x^2 + x'_\theta{}^2)^2 + (x^2 + x'_\theta{}^2)\sigma^2\delta(2\delta\cos^2\theta + 4 - 4\delta) \quad (\text{G.8}) \right.$$

$$\left. - 4\delta^2x^2x'_\theta{}^2\cos^2\theta + \sigma^4(4 - 4\delta + \delta^2(2 - \cos^2\theta)) \right].$$

Comme nous l'avons énoncé au chapitre 4, la distribution (G.7) a deux propriétés intéressantes.

Propriété 1 : La distribution a toujours les deux axes à $\pm 45^\circ$ comme axes de symétrie.

Propriété 2 : La distribution est radiale pour un déphasage $\theta = \pi/2$.

Pour démontrer ces assertions, il suffit de se rappeler que les fonctions de Wigner initiales (4.3) sont radiales. Ainsi, l'intégrale (4.4) peut être écrite sous la forme :

$$P(x, x'_\theta) = \int \int f_1 \left[\left(\frac{x+x'}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{p+p'}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] f_1' \left[\left(\frac{x-x'}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{p-p'}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] dp dp'_\theta. \quad (\text{G.9})$$

Puis, sachant

$$\left[\frac{x+x'}{\sqrt{2}} \right]^2 + \left[\frac{p+p'}{\sqrt{2}} \right]^2 = \frac{1}{2} \left[x^2 + p^2 + x'^2 + p'^2 + 2 \left(\cos(\theta)(xx'_\theta + pp'_\theta) + \sin(\theta)(px'_\theta - xp'_\theta) \right) \right]$$

$$\left[\frac{x-x'}{\sqrt{2}} \right]^2 + \left[\frac{p-p'}{\sqrt{2}} \right]^2 = \frac{1}{2} \left[x^2 + p^2 + x'^2 + p'^2 - 2 \left(\cos(\theta)(xx'_\theta + pp'_\theta) + \sin(\theta)(px'_\theta - xp'_\theta) \right) \right],$$

l'échange $x \leftrightarrow x'_\theta$ accompagné du changement de variables $p \rightarrow -p$ et $p'_\theta \rightarrow -p'_\theta$ dans l'intégrale laisse bien la distribution invariante, d'où l'axe de symétrie à $+45^\circ$. Puis, l'échange $x \leftrightarrow -x'_\theta$ accompagné du changement de variable $p'_\theta \rightarrow p$ et $p \rightarrow p'_\theta$ laisse bien également la distribution

Expression de la distribution bimode de probabilité dans le cas général dépendant de la phase

invariante, d'où l'axe de symétrie à -45° .

Pour démontrer que pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ la distribution est radiale, les formules précédentes s'écrivent :

$$\left[\frac{x+x'}{\sqrt{2}} \right]^2 + \left[\frac{p+p'}{\sqrt{2}} \right]^2 = \frac{1}{2} \left[x^2 + p^2 + x_\theta'^2 + p_\theta'^2 + 2(px'_\theta - xp'_\theta) \right] \quad (\text{G.11a})$$

$$\left[\frac{x-x'}{\sqrt{2}} \right]^2 + \left[\frac{p-p'}{\sqrt{2}} \right]^2 = \frac{1}{2} \left[x^2 + p^2 + x_\theta'^2 + p_\theta'^2 - 2(px'_\theta - xp'_\theta) \right]. \quad (\text{G.11b})$$

Dans ce cas, une rotation d'un angle β des variables x et x'_θ peut être compensée par une rotation du même angle β pour les variables p et p'_θ , ce qui laisse inchangées les expressions (G.11) et l'intégrale (G.9) qui calcule la distribution $P(x, x'_\theta)$.

Annexe H

Calcul de l'amplification double passage

Dans cette annexe, nous nous proposons de calculer l'amplification théorique maximale que l'amplificateur double passage présenté en 3.2 peut fournir. Les notations suivent celles de [Bretenaker 11] le plus possible.

H.1 Expression de l'évolution de l'inversion de population en l'absence de signal

H.1.1 Taux de pompage

Le saphir dopé au titane est un système à quatre niveaux, ainsi

$$\Delta n_o = n \frac{W_p}{W_p + \frac{1}{\tau_{\text{spont}}}}, \quad (\text{H.1})$$

où n est la population volumique dans le Ti:Sa, W_p est le taux de pompage (que l'on précise ensuite) et τ_{spont} est le temps de fluorescence du Ti:Sa.

Le taux de pompage est défini comme :

$$\left. \frac{d\Delta N_s}{dt} \right|_{\text{pompe}} = W_p N, \quad (\text{H.2})$$

avec ΔN_s l'inversion de population sur la transition laser et N la population totale de cette transition. Pour exprimer ce taux de pompage en fonction de la puissance de pompe,

$$\begin{aligned} \alpha E_p &= h\nu_p \Delta N_p \\ &= \frac{h\nu_p}{\eta} \Delta N_s \\ \alpha P_p &= \frac{h\nu_p}{\eta} \left. \frac{d\Delta N_s}{dt} \right|_{\text{pompe}} = \frac{h\nu_p}{\eta} W_p N, \end{aligned}$$

où α est le coefficient d'absorption de la pompe par le cristal, E_p est l'énergie de la pompe, ν_p est la fréquence de la pompe, ΔN_p est l'inversion de population sur la transition de la pompe, η est l'efficacité quantique de la transition ($\eta = \Delta N_s / \Delta N_p$) et P_p est la puissance de pompe.

Ainsi :

$$W_p = \alpha \eta \frac{P_p}{h\nu_p N}. \quad (\text{H.3})$$

L'équation maîtresse de l'inversion de population s'écrit :

$$\frac{d\Delta N}{dt} = W_p N - (W_p + A)\Delta N - \kappa F \Delta N, \quad (\text{H.4})$$

où κ dépend des paramètres de la cavité laser considérée. Dans le cas où le signal est nul (nombre de photons $F = 0$), (H.4) se réécrit

$$\frac{d\Delta N}{dt} = \frac{\Delta N_o - \Delta N}{\tau} \quad (\text{H.5})$$

avec

$$\Delta N_o = N \frac{W_p}{W_p + A}, \quad \tau = \frac{1}{W_p + A} \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{\tau_{\text{spont}}}, \quad (\text{H.6})$$

et où τ_{spont} représente le temps caractéristique d'émission spontanée de la transition laser. En prenant la condition initiale $\Delta N(t = 0) = 0$ on a :

$$\Delta N(t) = \Delta N_o (1 - e^{-t/\tau}) \quad (\text{H.7})$$

avec

$$\Delta N_o = \frac{\alpha \eta P_p \frac{\lambda_p}{\hbar c} \tau_{\text{spont}}}{\alpha \eta I_p \frac{\lambda_p}{\hbar c n L} \tau_{\text{spont}} + 1} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\tau_{\text{spont}}}{\alpha \eta I_p \frac{\lambda_p}{\hbar c n L} \tau_{\text{spont}} + 1}, \quad (\text{H.8})$$

où I_p est l'intensité de la pompe, n est le nombre d'atomes de titane par unité de volume et L est la longueur du cristal.

H.1.2 Etablissement de la formule du gain

Si l'on considère l'amplification d'une impulsion femtoseconde, le temps d'interaction du milieu amplificateur avec celle-ci sera très court par rapport au temps caractéristique de désexcitation du niveau inférieur de la transition laser vers le niveau inférieur de la transition de pompe (\sim ps). Ainsi, durant l'interaction on pourra considérer le milieu comme un système à trois niveaux. Les équations de taux sont alors :

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{I}{\tau_{\text{cav}}} \left(1 - \frac{\Delta N}{\Delta N_{th}}\right) \quad (\text{H.9})$$

$$\frac{d\Delta N}{dt} = -\frac{1}{\tau} \left(\Delta N - \Delta N_o + \frac{I}{I_{\text{sat}}} \Delta N\right), \quad (\text{H.10})$$

où ΔN_{th} est l'inversion de population au seuil. Dans notre cas, la cavité est ouverte et le temps d'interaction est court devant celui de l'inversion de population ($\tau_{\text{cav}}, \tau \rightarrow +\infty$). En utilisant les inversions de population volumique (Δn au lieu de ΔN), et sachant que $\Delta n_{th} = \frac{1}{\sigma \tau_{\text{cav}} c}$, $I_{\text{sat}} = \frac{h\nu}{2\sigma\tau}$, où σ est la section efficace l'émission stimulée du milieu amplificateur, (H.9) et (H.10) deviennent :

$$\frac{dI}{dt} = c\sigma I \Delta n \quad (\text{H.11})$$

$$\frac{d\Delta n}{dt} = -\frac{2}{\hbar\omega_o} \sigma \Delta n I. \quad (\text{H.12})$$

D'après [Frantz 63], la résolution de ces équations pour une impulsion carrée donne :

$$\frac{J_{\text{out}}}{J_{\text{in}}} = \frac{1}{2\sigma\eta'} \log[1 + e^{\Delta n\sigma L} (e^{2\sigma\eta'} - 1)], \quad (\text{H.13})$$

avec $\eta' = n_o cT$ (n_o est le nombre de photons, T la durée de l'impulsion et σ la section efficace d'émission stimulée), soit $\eta'\sigma = \sigma cT \frac{S\lambda}{hc} J_{\text{in}} = \frac{J_{\text{in}}}{J_{\text{sat}}}$ en définissant $J_{\text{sat}} = \frac{hc}{\lambda_s \sigma}$. Ainsi, après passage dans le milieu amplificateur on a :

$$\boxed{J_{\text{out}} = \frac{J_{\text{sat}}}{2} \log[1 + G_o (e^{2\frac{J_{\text{in}}}{J_{\text{sat}}}} - 1)] \quad \text{avec} \quad G_o = e^{\Delta n\sigma L}}. \quad (\text{H.14})$$

Pour un système à trois niveaux (par rapport à un système à quatre niveaux), tout se passe comme si la fluence de saturation était divisée par deux.

On pourra noter cette équation

$$J_{\text{out}} = G(J_{\text{in}})J_{\text{in}}. \quad (\text{H.15})$$

H.2 Inversion de population en présence de signal

H.2.1 Deux passages uniques dans le cristal

La figure H.1 résume les notations qui sont adoptées ici. Les valeurs avec l'indice i sont celles prises avant le passage de l'impulsion, celles avec l'indice f sont celles après. Les exposants (1) et (2) précisent le passage dont il s'agit.

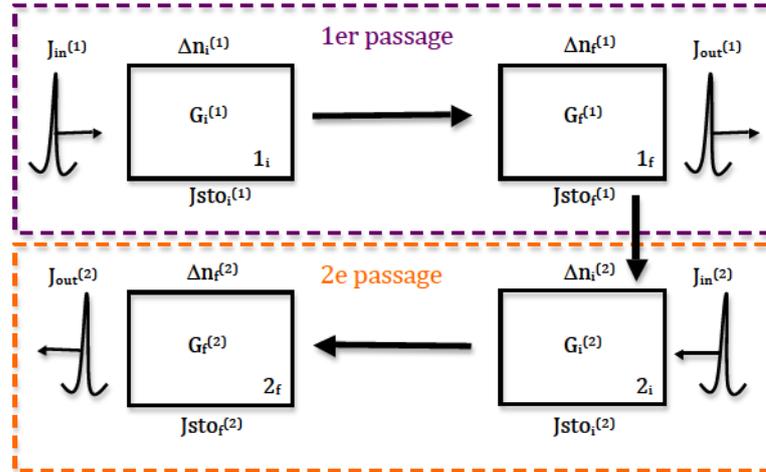


FIGURE H.1 – Notations utilisées pour le calcul de l'inversion de population en régime stationnaire

Le but du calcul qui va suivre est d'obtenir une équation ne portant que sur $\Delta n_i^{(1)}$ et $J_{\text{in}}^{(1)}$. La condition de stationnarité permettra d'en déduire $\Delta n_i^{(1)}$ et donc l'amplification totale théorique.

$\boxed{1_i}$: l'énergie stockée initialement vaut $E_{\text{sto}} = \frac{hc}{\lambda_s} N_2 = \frac{hc}{\lambda_s} \frac{\Delta N}{2}$ où N_2 est la population de l'état excité. Ainsi

$$\boxed{J_{\text{sto}_i}^{(1)} = \frac{hc}{\lambda_s} \frac{\Delta n_i^{(1)}}{2} L}. \quad (\text{H.16})$$

$\boxed{1_f}$: en sortie de premier passage,

$$J_{\text{out}}^{(1)} = G_i^{(1)} J_{\text{in}}^{(1)} = \frac{J_{\text{sat}}}{2} \log[1 + e^{\Delta n_i^{(1)} \sigma L} (e^{2 \frac{J_{\text{in}}^{(1)}}{J_{\text{sat}}}} - 1)], \quad (\text{H.17})$$

et

$$J_{\text{sto}_f}^{(1)} = J_{\text{sto}_i}^{(1)} - (J_{\text{out}}^{(1)} - J_{\text{in}}^{(1)}) \quad (\text{H.18})$$

$$= \frac{hc}{2\lambda_s} \Delta n_i^{(1)} L - J_{\text{in}}^{(1)} (G_i^{(1)} - 1) \quad (\text{H.19})$$

$$= \frac{hc}{2\lambda_s} \Delta n_f^{(1)} L, \quad (\text{H.20})$$

d'où

$$\boxed{\Delta n_f^{(1)} = \Delta n_i^{(1)} - \frac{2\lambda_s}{hcL} J_{\text{in}}^{(1)} (G_i^{(1)} - 1)}. \quad (\text{H.21})$$

$\boxed{2_i}$: après retour de l'impulsion vers le cristal amplificateur, on a

$$\boxed{J_{\text{in}}^{(2)} = \Gamma J_{\text{out}}^{(1)}}, \quad (\text{H.22})$$

où Γ est la transmission du chemin de retour. On utilise (H.5) pour calculer l'évolution libre de l'inversion de population entre les deux passages :

$$\Delta n_i^{(2)} = e^{-\frac{t_m}{\tau}} (\Delta n_f^{(1)} - \Delta n_o) + \Delta n_o. \quad (\text{H.23})$$

En comparant les temps t_m (aller-retour sur le cristal amplificateur $\sim ns$) et τ (temps caractéristique de l'inversion de population $\sim \mu s$), on voit que l'on peut négliger la variation d'inversion de population dans le cristal lors du retour de l'impulsion :

$$\Delta n_i^{(2)} \simeq \Delta n_f^{(1)}. \quad (\text{H.24})$$

$\boxed{2_f}$: en sortie de deuxième passage,

$$J_{\text{out}}^{(2)} = G_i^{(2)} J_{\text{in}}^{(2)} = \frac{J_{\text{sat}}}{2} \log[1 + e^{\Delta n_i^{(2)} \sigma L} (e^{2 \frac{J_{\text{in}}^{(2)}}{J_{\text{sat}}}} - 1)]. \quad (\text{H.25})$$

Ceci permet d'exprimer $G_i^{(2)}$ comme

$$G_i^{(2)} = \frac{J_{\text{sat}}}{2\Gamma G_i^{(1)} J_{\text{in}}^{(1)}} \log[1 + e^{\Delta n_i^{(2)} \sigma L} (e^{2 \frac{\Gamma G_i^{(1)} J_{\text{in}}^{(1)}}{J_{\text{sat}}}} - 1)], \quad (\text{H.26})$$

où $\Delta n_i^{(2)}$ est donné par (H.24) et (H.21). Ensuite, l'inversion de population après le deuxième passage de l'impulsion s'écrit

$$\Delta n_f^{(2)} = \Delta n_i^{(2)} - \frac{2\lambda_s}{hcL} J_{\text{in}}^{(2)} (G_i^{(2)} - 1) \quad (\text{H.27})$$

$$= \Delta n_i^{(1)} - \frac{2\lambda_s}{hcL} J_{\text{in}}^{(1)} (G_i^{(1)} - 1) - \frac{2\lambda_s}{hcL} J_{\text{in}}^{(2)} (G_i^{(2)} - 1). \quad (\text{H.28})$$

H.2.2 Prise en compte du taux de répétition

Pour obtenir le comportement stationnaire de l'amplificateur, il faut prendre en compte le fait qu'entre chaque impulsion qui va se faire amplifier il y a un temps fini, et donc que l'inversion de population n'a pas le temps de se rétablir complètement jusqu'à sa valeur maximale ΔN_o . La condition de stationnarité s'exprime par le fait que l'inversion de population avant l'arrivée de l'impulsion $\Delta n_i^{(1)}$ est égale à l'évolution "libre" (i.e. en présence du pompage seul) de celle-ci durant un temps $\frac{1}{\nu_{\text{rep}}}$ avec comme condition initiale $\Delta n_f^{(2)}$:

$$\Delta n_i^{(1)} = e^{-\frac{t_{\text{rep}}}{\tau}} (\Delta n_f^{(2)} - \Delta n_o) + \Delta n_o \iff \Delta n_f^{(2)} = e^{\frac{t_{\text{rep}}}{\tau}} (\Delta n_i^{(1)} - \Delta n_o) + \Delta n_o. \quad (\text{H.29})$$

Ainsi l'équation que nous recherchions est la suivante :

$$\Delta n_i^{(1)} - \frac{2\lambda_s}{hcL} J_{\text{in}}^{(1)} (G_i^{(1)} - 1) - \frac{2\lambda_s}{hcL} J_{\text{in}}^{(2)} (G_i^{(2)} - 1) = e^{\frac{t_{\text{rep}}}{\tau}} (\Delta n_i^{(1)} - \Delta n_o) + \Delta n_o. \quad (\text{H.30})$$

Grâce à toutes les équations précédentes, on voit que cette équation ne dépend que de $\Delta n_i^{(1)}$ et $J_{\text{in}}^{(1)}$. Pour une fluence d'entrée donnée, on peut donc numériquement en déduire l'inversion de population initiale, et donc la fluence de sortie.

Si l'on se place dans le cas de notre amplificateur, les propriétés sont les suivantes : $\alpha = 0, 8$, $\eta = 0, 9$, $n = 4, 5 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$, $P_p = 10 \text{ W}$, $d_p = 25 \text{ }\mu\text{m}$, $d_s = 20 \text{ }\mu\text{m}$, $E_s = 40 \text{ nJ}$, $\lambda_p = 532 \text{ nm}$, $\lambda_s = 850 \text{ nm}$, $L = 0, 3 \text{ cm}$, $\tau_{\text{spont}} = 3, 2 \text{ }\mu\text{s}$, $J_{\text{sat}} = 1, 2 \text{ J/cm}^2$, $\nu_{\text{rep}} = 800 \text{ kHz}$.

La résolution numérique de (H.30) donne un gain au premier passage de 5,4 et au second passage de 5, ce qui fait un gain total de 24,3 (en prenant les pertes en compte).

On voit que cette valeur est largement supérieure à celle que l'on avait trouvée au mieux pour notre amplificateur pour une puissance de pompe de 10 W (facteur d'amplification brut égal 8), mais ceci peut s'expliquer par plusieurs raisons :

- Les faisceaux sont supposés avoir une taille constante dans le cristal, ce qui n'est pas le cas (la longueur de Rayleigh est de 1mm contre 3mm de longueur pour le cristal). Cela dégrade le *mode-matching* entre la pompe et le signal. [Malyutin 11] peut apporter des indications de calcul plus précis pour la prise en compte de ceci.
- Il n'a pas été tenu compte de l'influence de la température dans cette étude, [Dantan 07] montre bien que ce paramètre est crucial pour la dépendance du gain.
- Le profil spatial a été considéré comme cylindrique et non gaussien, et les déformations dues à la forte focalisation (notamment l'astigmatisme) ont été négligées.

Toutefois, ce calcul permet de calculer la limite qu'il est théoriquement impossible de dépasser et donne un ordre de grandeur des gains accessibles.

Annexe I

Liste des publications

Cette thèse a donné lieu à plusieurs publications :

- J. Etesse, R. Blandino, B. Kanseri et R. Tualle-Brouri. *Proposal for a loophole-free violation of Bell's inequalities with a set of single photons and homodyne measurements*. New J. Phys. **16**, 053001 (2014)
- J. Etesse, B. Kanseri et R. Tualle-Brouri. *Iterative tailoring of optical quantum states with homodyne measurements*, Opt. Exp. **22**(24), 30357 (2014).
- J. Etesse, M. Bouillard, B. Kanseri et R. Tualle-Brouri. *Generation of squeezed Schrödinger cat states with an operation allowing iterative growth*. arXiv :1412.3219v1 (2014), soumis à Phys. Rev. Lett.

Les publications suivantes ont été réalisées en début de thèse mais ne sont pas développées dans ce manuscrit car elles font l'objet de la thèse de Rémi Blandino [Blandino 13].

- R. Blandino, M. G. Genoni, J. Etesse, M. Barbieri, M. G. A. Paris, P. Grangier et R. Tualle-Brouri. *Homodyne estimation of gaussian quantum discord*, Phys. Rev. Lett. **109**, 180402 (2012)
- R. Blandino, A. Leverrier, M. Barbieri, J. Etesse, P. Grangier et R. Tualle-Brouri. *Improving the maximum transmission distance of continuous-variable quantum key distribution using a noiseless amplifier*, Phys. Rev. A **86**, 012327 (2012)

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

- [Abel 26] N. H. Abel. *Beweis der Unmöglichkeit algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. **1**, pages 65–84, 1826.
- [Adam 95] G. Adam. *Density matrix elements and moments for generalized Gaussian state fields*. J. Mod. Opt., vol. **42**, no. 1311, 1995.
- [Aichele 01] T. Aichele, A. I. Lvovsky & S. Schiller. *Optical mode characterization of single photons prepared via conditional measurements on a biphoton state*. arXiv :quant-ph, page 0107080v1, 2001.
- [Alda 03] J. Alda. Laser and gaussian beam propagation and transformation, in Encyclopedia of optical engineering. Marcel Dekker, 2003.
- [Appel 07] J. Appel, D. Hoffman, E. Figueroa & A. I. Lvovsky. *Electronic noise in optical homodyne tomography*. Phys. Rev. A, vol. **75**, no. 035802, 2007.
- [Aspect 82a] A. Aspect, J. Dalibard & G. Roger. *Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers*. Phys. Rev. Lett., vol. **49**, no. 25, pages 1804–1807, 1982.
- [Aspect 82b] A. Aspect, P. Grangier & G. Roger. *Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : a new violation of Bell's inequalities*. Phys. Rev. Lett., vol. **49**, no. 2, pages 91–94, 1982.
- [Babichev 04] S. A. Babichev, B. Brezger & A. I. Lvovsky. *Remote preparation of a single-mode photonic qubit by measuring field quadrature noise*. Phys. Rev. Lett., vol. **92**, no. 047903, 2004.
- [Barnett 89] S. M. Barnett & S. J. D. Phoenix. *Entropy as a measure of quantum optical correlation*. Phys. Rev. A, vol. **40**, no. 5, pages 2404–2409, 1989.
- [Basdevant 08] J.-L. Basdevant & J. Dalibard. Mécanique quantique. Les éditions de l'Ecole Polytechnique, 2008.
- [Bel 14] *Mécanique quantique - Photons intriqués et inégalités de Bell*
<http://paristech.institutoptique.fr/site.php?id=763&fileid=8437>, 2013/2014.
- [Bell 64] J. S. Bell. *On the Einstein Podolsky Rosen paradox*. Physics, vol. **1**, no. 3, pages 195–200, 1964.
- [Bell 10] J. S. Bell. Speakable and unspeakable in quantum mechanics. Cambridge University Press, 3e edition, 2010.
- [Benichi 11] H. Benichi & A. Furusawa. *Optical homodyne tomography with polynomial series expansion*. Phys. Rev. A, vol. **84**, no. 3, 2011.
- [Bennett 84] C. H. Bennett & G. Brassard. *Quantum cryptography : public key distribution and coin tossing*. Proceedings of IEEE International

BIBLIOGRAPHIE

- conference on computers, Systems and signal processing, vol. **175**, page 8, 1984.
- [Bennett 92] C. H. Bennett, F. Bessette, G. Brassard, L. Salvail & J. Smolin. *Experimental quantum cryptography*. J. Cryptol., vol. **5**, pages 3–28, 1992.
- [Bertet 02] P. Bertet, A. Auffeves, P. Maioli, S. Osnaghi, T. Meunier, M. Brune, J.-M. Raimond & S. Haroche. *Direct Measurement of the Wigner Function of a One-Photon Fock State in a Cavity*. Phys. Rev. Lett., vol. **89**, no. 200402, 2002.
- [Biaggio 92] I. Biaggio, P. Kerkoc, L.-S. Wu, P. Günter & B. Zysset. *Refractive indices of orthorhombic KNbO₃. I. Phase-matching configurations for nonlinear-optical interactions*. J. Opt. Soc. Am. B, vol. **9**, no. 4, pages 507–517, 1992.
- [Bimbard 10] E. Bimbard, N. Jain, A. MacRae & A. I. Lvovsky. *Quantum-optical state engineering up to the two-photon level*. Nat. Phot., vol. **4**, pages 243–247, 2010.
- [Bimbard 14] E. Bimbard, R. Boddeda, N. Vitrant, A. Grankin, V. Parigi, J. Stanojevic, A. Ourjoumteev & P. Grangier. *Homodyne Tomography of a Single Photon Retrieved on Demand from a Cavity-Enhanced Cold Atom Memory*. Phys. Rev. Lett., vol. **112**, no. 3, 2014.
- [Blandino 13] R. Blandino. *Intrication de champs quantiques mésoscopiques pour les communications quantiques*. PhD thesis, Université Paris-Sud XI, 2013.
- [Bohm 52] D. Bohm. *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables*. Phys. Rev., vol. **85**, no. 166,180, 1952.
- [Boyd 08] R. W. Boyd. *Nonlinear optics*. Academic press, San diego, 3e edition, 2008.
- [Brask 10] J. B. Brask, I. Rigas, E. S. Polzik, U. L. Andersen & A. S. Sørensen. *Hybrid Long-Distance Entanglement Distribution Protocol*. Phys. Rev. Lett., vol. **105**, no. 160501, 2010.
- [Brask 12] J. B. Brask, N. Brunner, D. Cavalcanti & A. Leverrier. *Bell tests for continuous-variable systems using hybrid measurements and heralded amplifiers*. Phys. Rev. A, vol. **85**, no. 042116, 2012.
- [Braunstein 98] S. L. Braunstein. *Error correction for continuous quantum variables*. Phys. Rev. Lett., vol. **80**, no. 18, pages 4084–4087, 1998.
- [Bretenaker 11] F. Bretenaker. *Laser physics*. 2010-2011.
- [Brouri 00] R. Brouri, A. Beveratos, J.-P. Poizat & P. Grangier. *Photon antibunching in the fluorescence of individual color centers in diamond*. Opt. Lett., vol. **25**, no. 17, pages 1294–1296, 2000.
- [Brunner 14] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani & S. Wehner. *Bell Nonlocality*. Rev. of Mod. Phys., vol. **86**, no. 419, 2014.
- [Campbell 12] E. T. Campbell & J. Eisert. *Gaussification and entanglement distillation of continuous-variable systems : a unifying picture*. Phys. Rev. Lett., vol. **108**, no. 020501, 2012.
- [Cavalcanti 11] D. Cavalcanti, N. Brunner, P. Skrzypczyk, A. Salles & V. Scarani. *Large violation of Bell inequalities using both particle and wave measurements*. Phys. Rev. A, vol. **84**, no. 022105, 2011.

-
- [Christensen 13] B. G. Christensen, K. T. McCusker, J. B. Altepeter, B. Calkins, T. Gerrits, A. E. Lita, A. J. Miller, L. K. Shalm, Y. Zhang, S. W. Nam, N. Brunner, C. C. W. Lim, N. Gisin & P. G. Kwiat. *Detection-loophole-free test of quantum nonlocality, and applications*. Phys. Rev. Lett., vol. **111**, no. 130406, 2013.
- [Clauser 69] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony & R. A. Holt. *Proposed experiment to test local hidden-variable theories*. Phys. Rev. Lett., vol. **23**, no. 15, pages 880–884, 1969.
- [Clauser 74] J. F. Clauser & A. Horne. *Experimental consequences of objective local theories*. Phys. Rev. D, vol. **10**, page 526, 1974.
- [Cochrane 99] P. T. Cochrane, G. J. Milburn & W. J. Munro. *Macroscopically distinct quantum-superposition states as a bosonic code for amplitude damping*. Phys. Rev. A, vol. **59**, no. 4, pages 2631–2634, 1999.
- [Cohen-Tannoudji 88] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc & G. Grynberg. *Processus d'interaction entre photons et atomes*. InterEditions - CNRS Editions, 1988.
- [Cohen-Tannoudji 97] C. Cohen-Tannoudji & F. Laloë. *Mécanique quantique tome1*. Hermann, 1997.
- [Cooper 12] M. Cooper, C. Soeller & B. J. Smith. *High-stability time-domain balanced homodyne detector for ultrafast optical pulse application*. In Quantum electronics and laser science conference, 2012.
- [Dakna 99] M. Dakna, J. Clausen, L. Knöll & D.-G. Welsch. *Generation of arbitrary quantum states of traveling fields*. Phys. Rev. A, vol. **59**, no. 2, pages 1658–1661, 1999.
- [Dantan 07] A. Dantan, J. Laurat, A. Ourjoumtsev, R. Tualle-Brouri & P. Grangier. *Femtosecond Ti:sapphire cryogenic amplifier with high gain and MHz repetition rate*. Opt. Exp., vol. **15**, no. 14, pages 8864–8870, 2007.
- [Darquié 05] B. Darquié, M. P. A. Jones, J. Dingjan, J. Beugnon, S. Bergamini, Y. Sortais, G. Messin, A. Browaeys & P. Grangier. *Controlled Single-Photon Emission from a Single Trapped Two-Level Atom*. Science, vol. **309**, no. 5733, pages 454–456, 2005.
- [Delaigue 06] M. Delaigue. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2006.
- [Deléglise 08] S. Deléglise, I. Dotsenko, C. Sayrin, J. Bernu, M. Brune, J.-M. Raimond & S. Haroche. *Reconstruction of non-classical cavity field states with snapshots of their decoherence*. Nature, vol. **455**, pages 510–514, 2008.
- [Duan 04] L.-M. Duan & H. J. Kimble. *Scalable photonic quantum computation through cavity-assisted interactions*. Phys. Rev. Lett., vol. **92**, no. 127902, 2004.
- [Eberhard 93] P. H. Eberhard. *Background level and counter efficiencies required for a loophole-free Einstein-Podolsky-Rosen experiment*. Phys. Rev. A, vol. **47**, no. R747(R), 1993.
- [Einstein 35] A. Einstein, B. Podolsky & N. Rosen. *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* Phys. Rev., vol. **47**, pages 777–780, 1935.
- [Etesse 14] J. Etesse, R. Blandino, B. Kanseri & R. Tualle-Brouri. *Proposal for a loophole-free violation of Bell's inequalities with a set of single photons and homodyne measurements*. New J. Phys., vol. **16**, page 053001, 2014.

BIBLIOGRAPHIE

- [Fano 57] U. Fano. *Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques*. Rev. of Mod. Phys., vol. **29**, no. 1, pages 74–93, 1957.
- [Ferreyrol 10] F. Ferreyrol, M. Barbieri, R. Blandino, S. Fossier, R. Tualle-Brouri & P. Grangier. *Implementation of a Nondeterministic Optical Noiseless Amplifier*. Phys. Rev. Lett., vol. **104**, no. 12, 2010.
- [Feynman 82] R. P. Feynman. *Simulating physics with computers*. Int. J. Theor. Phys., vol. **21**, no. 6-7, pages 467–488, 1982.
- [Fini 13] J. M. Fini, J. W. Nicholson, R. S. Windeler, E. M. Monberg, L. Meng, B. Mangan, A. DeSantolo & F. V. DiMarcello. *Low-loss hollow-core fibers with improved single-modedness*. Opt. Exp., vol. **21**, no. 5, pages 6233–6242, 2013.
- [Fisher 12] R. Fisher. *On an absolute criterion for fitting frequency curves*. Mess. of Math., vol. **41**, pages 155–160, 1912.
- [Fiurášek 05] J. Fiurášek, R. García-Patrón & N. J. Cerf. *Conditional generation of arbitrary single-mode quantum states of light by repeated photon subtractions*. Phys. Rev. A, vol. **72**, no. 033822, 2005.
- [Frantz 63] L. M. Frantz & J. S. Nodvik. *Theory of Pulse Propagation in a Laser Amplifier*. J. App. Phys., vol. **34**, no. 8, pages 2346–2349, 1963.
- [Freedman 72] S. J. Freedman & J. F. Clauser. *Experimental test of local hidden-variable theories*. Phys. Rev. Lett., vol. **28**, no. 938, 1972.
- [Furusawa 98] A. Furusawa, L. J. Sørensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble & E. S. Polzik. *Unconditional quantum teleportation*. Science, vol. **282**, no. 5389, pages 706–709, 1998.
- [García-Patrón 04] R. García-Patrón, J. Fiurášek, N. J. Cerf, J. Wenger, R. Tualle-Brouri & P. Grangier. *Proposal for a loophole-free Bell test using homodyne detection*. Phys. Rev. Lett., vol. **93**, no. 13, 2004.
- [Garrison 08] J. Garrison & R. Chiao. Quantum optics. ISBN : 0198508867. Oxford Graduate Texts, 2008.
- [Gerrits 10] T. Gerrits, S. Glancy, T. S. Clement, B. Calkins, A. E. Lita, A. J. Miller, A. L. Migdall, S. W. Nam, R. P. Mirin & E. Knill. *Generation of optical coherent-state superpositions by number-resolved photon subtraction from the squeezed vacuum*. Phys. Rev. A, vol. **82**, no. 031802, 2010.
- [Gires 64] F. Gires & P. Tournois. *Interféromètre utilisable pour la compression d'impulsions lumineuses modulées en fréquence*. C. R. Acad. Sc. Paris, vol. **258**, pages 6112–6115, 1964.
- [Giustina 12] M. Giustina, A. Mech, S. Ramelow, B. Wittmann, J. Kofler, J. Beyer, A. E. Lita, B. Calkins, T. Gerrits, S. W. Nam, R. Ursin & A. Zeilinger. *Bell violation using entangled photons without the fair-sampling assumption*. Nature, vol. **497**, pages 227–230, 2012.
- [Glauber 63] R. J. Glauber. *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*. Phys. Rev., vol. **131**, no. 6, pages 2766–2788, 1963.
- [Gottesman 01] D. Gottesman, A. Kitaev & J. Preskill. *Encoding a qubit in an oscillator*. Phys. Rev. A, vol. **64**, no. 012310, 2001.

-
- [Grangier 86] P. Grangier, G. Roger & A. Aspect. *Experimental evidence for a photon anticorrelation effect on a beam splitter : a new light on single-photon interferences*. Europhys. Lett., vol. **1**, no. 4, pages 173–179, 1986.
- [Grosshans 01] F. Grosshans & P. Grangier. *Effective quantum efficiency in the pulsed homodyne detection of a n-photon state*. Eur. Phys. J. D, vol. **14**, no. 119, 2001.
- [Grover 97] L. K. Grover. *Quantum mechanics help in searching for a needle in a haystack*. Phys. Rev. Lett., vol. **79**, no. 2, pages 325–328, 1997.
- [Grynberg 10] G. Grynberg, A. Aspect & C. Fabre. *Introduction to quantum optics*. ISBN : 97805211551120. Cambridge University Press, 2010.
- [Guzun 00] D. Guzun, Y.-Q. Li & M. Xiao. *Blue light generation in single-pass frequency doubling of femtosecond pulses in KNbO₃*. Opt. Com., vol. **180**, pages 367–371, 2000.
- [Hijlkema 07] M. Hijlkema, B. Weber, H. P. Specht, S. C. Webster, A. Kuhn & G. Rempe. *A single-photon server with just one atom*. Nat. Phys., vol. **3**, pages 253–255, 2007.
- [Hofheinz 09] M. Hofheinz, H. Wang, M. Ansmann, R. C. Bialczak, E. Lucero, M. Neeley, A. D. O’Connell, D. Sank, J. Wenner, J. M. Martinis & A. N. Cleland. *Synthesizing arbitrary quantum states in a superconducting resonator*. Nature, vol. **459**, no. 7246, pages 546–549, 2009.
- [Hudson 74] R. L. Hudson. *When is the Wigner quasi-probability density non-negative ?* Rep. on Math. Phys., vol. **6**, no. 2, pages 249–252, 1974.
- [Iaconis 98] C. Iaconis & I. A. Walmsley. *Spectral phase interferometry for direct electric-field reconstruction of ultrashort optical pulses*. Opt. Lett., vol. **23**, no. 10, pages 792–794, 1998.
- [IDQ] <http://www.idquantique.com/quantum-safe-crypto/technology/qkd.html>.
- [Jacques 07] V. Jacques, E. Wu, F. Grosshans, F. Treussart, P. Grangier, A. Aspect & J.-F. Roch. *Experimental realization of Wheeler’s delayed-choice Gedanken experiment*. Science, vol. **315**, pages 966–968, 2007.
- [Jeong 01] H. Jeong, M. S. Kim & J. Lee. *Quantum-information processing for a coherent superposition state via a mixedentangled coherent channel*. Phys. Rev. A, vol. **64**, no. 052308, 2001.
- [Jeong 02] H. Jeong & M. S. Kim. *Efficient quantum computation using coherent states*. Phys. Rev. A, vol. **65**, no. 4, 2002.
- [Jeong 06] H. Jeong *et al.* *Conditional quantum-state engineering using ancillary squeezed-vacuum states*. Phys. Rev. A, vol. **74**, no. 033813, 2006.
- [Joo 11] J. Joo, W. J. Munro & T. P. Spiller. *Quantum metrology with entangled coherent states*. Phys. Rev. Lett., vol. **107**, no. 083601, 2011.
- [Jozsa 94] R. Jozsa. *Fidelity for mixed quantum states*. J. Mod. Opt., vol. **41**, no. 12, pages 2315–2323, 1994.
- [Kaiser 12] F. Kaiser, T. Coudreau, P. Milman, D. B. Ostrowsky & S. Tanzilli. *Entanglement-enabled delayed choice experiment*. Science, vol. **338**, pages 637–340, 2012.
- [Kiss 95] T. Kiss, U. Herzog & U. Leonhardt. *Compensation of losses in photodetection and in quantum-state measurement*. Phys. Rev. A, vol. **52**, no. 3, pages 2433–2435, 1995.

BIBLIOGRAPHIE

- [Kurtsiefer 00] C. Kurtsiefer, S. Mayer, P. Zarda & H. Weinfurter. *Stable Solid-State Source of Single Photons*. Phys. Rev. Lett., vol. **85**, no. 2, pages 290–293, 2000.
- [La Porta 91] A. La Porta & R. E. Slusher. *Squeezing limits at high parametric gains*. Phys. Rev. A, vol. **44**, no. 3, pages 2013–2022, 1991.
- [Ladd 10] T. D. Ladd, F. Jelezko, R. Laflamme, Y. Nakamura, C. Monroe & J. L. O’Brien. *Quantum computers*. Nature, vol. **464**, pages 45–53, 2010.
- [Laghaout 13] A. Laghaout, J. S. Neergaard-Nielsen, I. Rigas, C. Kragh, A. Tipsmark & U. L. Andersen. *Amplification of realistic Schrödinger-cat-state-like states by homodyne heralding*. Phys. Rev. A, vol. **87**, no. 043826, 2013.
- [Landau 76] L. D. Landau & E. M. Lifshitz. *Mechanics*. Pergamon Press, 3e edition, 1976.
- [Larsson 14] J.-A. Larsson, M. Giustina, J. Kofler, B. Wittmann, R. Ursin & S. Ramelow. *Bell-inequality violation with entangled photons, free of the coincidence-time loophole*. Phys. Rev. A, vol. **90**, no. 032107, 2014.
- [Lee 11] N. Lee, H. Benichi, Y. Takeno, S. Takeda, J. Webb, E. Huntington & A. Furusawa. *Teleportation of Nonclassical Wave Packets of Light*. Science, vol. **332**, no. 6027, pages 330–333, 2011.
- [Leonhardt 97] U. Leonhardt. *Measuring the quantum state of light*. Cambridge University Press, 1997.
- [Lita 08] A. E. Lita, A. J. Miller & S. W. Nam. *Counting near-infrared single-photons with 95% efficiency*. Opt. Exp., vol. **16**, no. 5, pages 3032–3040, 2008.
- [Lloyd 98] S. Lloyd & J.-J. E. Slotine. *Analog Quantum Error Correction*. Phys. Rev. Lett., vol. **80**, pages 4088–4091, 1998.
- [Lloyd 99] S. Lloyd & S. L. Braunstein. *Quantum Computation over Continuous Variables*. Phys. Rev. Lett., vol. **82**, no. 8, pages 1784–1787, 1999.
- [LOA] LOA. http://loa.ensta-paristech.fr/laser-ultrabref_lang_FR_menu_3.
- [Loudon 83] R. Loudon. *The quantum theory of light*. Oxford University press, 2nd edition edition, 1983.
- [Ludlow 01] A. D. Ludlow, H. M. Nelson & S. D. Bergeson. *Two-photon absorption in potassium niobate*. J. Opt. Soc. Am. B, vol. **18**, no. 12, pages 1813–1820, 2001.
- [LULI] LULI. http://www.luli.polytechnique.fr/medias/fichier/posters2008-9_1332170667643.pdf.
- [Lund 04] A. P. Lund, H. Jeong, T. C. Ralph & M. S. Kim. *Conditional production of superpositions of coherent states with inefficient photon detection*. Phys. Rev. A, vol. **70**, no. 020101, 2004.
- [Lvovsky 01] A. I. Lvovsky, H. Hansen, T. Aichele, O. Benson, J. Mlynek & S. Schiller. *Quantum State Reconstruction of the Single-Photon Fock State*. Phys. Rev. Lett., vol. **87**, no. 050402, 2001.
- [Lvovsky 04] A. I. Lvovsky. *Iterative maximum-likelihood reconstruction in quantum homodyne tomography*. Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics, vol. **6**, no. 6, page S556, 2004.

-
- [Mabuchi 94] H. Mabuchi, E. S. Polzik & H. J. Kimble. *Blue-light-induced infrared absorption in KNbO₃*. J. Opt. Soc. Am. B, vol. **11**, no. 10, pages 2023–2029, 1994.
- [Malyutin 11] A. A. Malyutin. *Modified Frantz-Nodvik equation for calculating the gain of divergent laser beams*. Quant. Elec., vol. **41**, no. 1, page 55, 2011.
- [McKeever 04] J. McKeever, A. Boca, A. D. Boozer, R. Miller, J. R. Buck, A. Kuzmich & H. J. Kimble. *Deterministic Generation of Single Photons from One Atom Trapped in a Cavity*. Science, vol. **303**, no. 5666, pages 1992–1994, 2004.
- [Michler 00] P. Michler, A. Kiraz, C. Becher, W. V. Schoenfeld, P. M. Petroff, L. Zhang, E. Hu & A. Imamoglu. *A Quantum Dot Single-Photon Turnstile Device*. Science, vol. **290**, no. 5500, pages 2282–2285, 2000.
- [Miller 03] A. J. Miller, S. W. Nam, J. M. Martinis & A. V. Sergienko. *Demonstration of a low-noise near-infrared photon counter with multiphoton discrimination*. Appl. Phys. Lett., vol. **83**, no. 4, pages 791–793, 2003.
- [Morin 12] O. Morin, V. D’Auria, C. Fabre & J. Laurat. *High-fidelity single-photon source based on a Type II optical parametric oscillator*. Opt. Lett., vol. **37**, no. 17, pages 3738–3740, 2012.
- [Munro 02] W. J. Munro, K. Nemoto, G. J. Milburn & S. L. Braunstein. *Weak-force detection with superposed coherent states*. Phys. Rev. A, vol. **66**, no. 023819, 2002.
- [Ngah 14] L. A. Ngah, O. Alibart, L. Labonté, V. D’Auria & S. Tanzilli. *Ultra-fast heralded single photon source based on telecom technology*. arXiv :quant-ph/1412.5427v1, 2014.
- [Ou 88] Z. Y. Ou & L. Mandel. *Violation of Bell’s inequality and classical probability in a two-photon correlation experiment*. Phys. Rev. Lett., vol. **61**, pages 50–53, 1988.
- [Ou 92] Z. Y. Ou, S. F. Pereira, H. J. Kimble & K. C. Peng. *Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables*. Phys. Rev. Lett., vol. **68**, no. 25, pages 3663–3666, 1992.
- [Ourjountsev 06a] A. Ourjountsev, R. Tualle-Brouri & P. Grangier. *Quantum homodyne tomography of a two-photon Fock state*. Phys. Rev. Lett., vol. **96**, no. 213601, 2006.
- [Ourjountsev 06b] A. Ourjountsev, R. Tualle-Brouri, J. Laurat & P. Grangier. *Generating optical Schrödinger kittens for quantum information processing*. Science, vol. **312**, no. 5770, pages 83–86, 2006.
- [Ourjountsev 07a] A. Ourjountsev. *Etude théorique et expérimentale de superpositions quantiques cohérentes et d’états intriqués non-gaussiens de la lumière*. PhD thesis, Université Paris-Sud XI, 2007.
- [Ourjountsev 07b] A. Ourjountsev, H. Jeong, R. Tualle-Brouri & P. Grangier. *Generation of optical ‘Schrodinger cats’ from photon number states*. Nature, vol. **448**, no. 7155, pages 784–786, 2007.
- [Ourjountsev 09] A. Ourjountsev, F. Ferreyrol, R. Tualle-Brouri & P. Grangier. *Preparation of non-local superpositions of quasi-classical light states*. Nat Phys, vol. **5**, no. 3, pages 189–192, 2009.

BIBLIOGRAPHIE

- [Paris 03] M. G. A. Paris, F. Illuminati, A. Serafini & S. De Siena. *Purity of gaussian states : Measurement schemes and evolution in noisy channels*. Phys. Rev. A, vol. **68**, no. 012314, 2003.
- [Paris 12] M. G. A. Paris. *The modern tools of quantum mechanics*. Eur. Phys. Jour. Special topics, vol. **203**, no. 61, 2012.
- [Pearle 70] P. M. Pearle. *Hidden-variable example based upon data rejection*. Phys. Rev. D, vol. **2**, no. 1418, 1970.
- [Pironio 09] S. Pironio, A. Acin, N. Brunner, N. Gisin, S. Massar & V. Scarani. *Device-independent quantum key distribution secure against collective attacks*. New J. Phys., vol. **11**, no. 045021, 2009.
- [Polycarpou 11] C. Polycarpou, K. N. Cassemiro, G. Venturi, A. Zavatta & M. Bellini. *Adaptively measuring the temporal shape of ultrashort single photons for higher-dimensional quantum information processing*. arXiv :1111.7161v1, no. 7161v1, 2011.
- [Radon 17] J. Radon. *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*. Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaft, vol. **69**, no. 262, 1917.
- [Ralph 02] T. C. Ralph. *Coherent superposition states as quantum rulers*. Phys. Rev. A, vol. **65**, no. 042313, 2002.
- [Ralph 03] T. C. Ralph, A. Gilchrist, G. J. Milburn, W. J. Munro & S. Glancy. *Quantum computation with optical coherent states*. Phys. Rev. A, vol. **68**, no. 042319, 2003.
- [Ralph 08] T. C. Ralph & A. P. Lund. *Nondeterministic noiseless linear amplification of quantum systems*. arXiv :quant-ph/0809.0326v1, 2008.
- [Reeves 91] R. J. Reeves, M. G. Jani, B. Jassemnejad & R. C. Powell. *Photorefractive properties of KNbO₃*. Phys. Rev. B, vol. **43**, no. 1, pages 71–82, 1991.
- [Resch 02] K. J. Resch, J. S. Lundeen & A. M. Steinberg. *Quantum state preparation and conditional coherence*. Phys. Rev. Lett., vol. **88**, no. 113601, 2002.
- [Rhode 07] P. P. Rhode & A. P. Lund. *Practical effects in cat state breeding*. arXiv :quant-ph/0702064, 2007.
- [Roman 05] S. Roman. *The umbral calculus*. Dover Publications, 2005.
- [Rosenberg 05] D. Rosenberg, A. E. Lita, A. J. Miller & S. W. Nam. *Noise-free high-efficiency photon-number-resolving detectors*. Phys. Rev. A, vol. **71**, no. 061803, 2005.
- [Rowe 01] M. A. Rowe *et al.* *Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection*. Nature, vol. **409**, pages 791–794, 2001.
- [Schrödinger 35] E. Schrödinger. *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik*. Die Naturwissenschaften, vol. **23**, no. 49, pages 823–828, 1935.
- [Seq] [http ://www.sequrennet.com/index.html](http://www.sequrennet.com/index.html).
- [Shor 97] P. W. Shor. *Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer*. SIAM J. Comput., vol. **26**, pages 1484–1509, 1997.

-
- [Slusher 85] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz & J. F. Valley. *Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave Mixing in an Optical Cavity*. Phys. Rev. Lett., vol. **55**, no. 22, pages 2409–2412, 1985.
- [Stobińska 07] M. Stobińska, H. Jeong & T. C. Ralph. *Violation of Bell's inequality using classical measurements and non-linear local operations*. Phys. Rev. A, vol. **75**, no. 052105, 2007.
- [Suzuki 06a] S. Suzuki, M. Takeoka, M. Sasaki, U. L. Andersen & F. Kannari. *Practical purification scheme for decohered coherent-state superpositions via partial homodyne detection*. Phys. Rev. A, vol. **73**, no. 042304, Apr 2006.
- [Suzuki 06b] S. Suzuki, H. Yonezawa, F. Kannari, M. Sasaki & A. Furusawa. *7 dB quadrature squeezing at 860nm with periodically poled KTiOPO₄*. Appl. Phys. Lett., vol. **89**, no. 061116, 2006.
- [Takahashi 08] H. Takahashi, K. Wakui, S. Suzuki, M. Takeoka, K. Hayasaka, A. Furusawa & M. Sasaki. *Generation of Large-Amplitude Coherent-State Superposition via Ancilla-Assisted Photon Subtraction*. Phys. Rev. Lett., vol. **101**, no. 233605, 2008.
- [Tan 99] S. M. Tan. *A Computational Toolbox for Quantum and Atomic Optics*. J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt, vol. **1**, pages 424–432, 1999.
- [Tapster 94] P. R. Tapster, J. G. Rarity & P. C. M. Owens. *Violation of Bell's inequality over 4 km of optical fiber*. Phys. Rev. Lett., vol. **73**, pages 1923–1926, 1994.
- [Tittel 98] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden & N. Gisin. *Violation of Bell inequalities by photons more than 10 km apart*. Phys. Rev. Lett., vol. **81**, pages 3563–3566, 1998.
- [Torlai 13] G. Torlai, G. McKeown, P. Marek, R. Filip, H. Jeong, M. Paternostro & G. De Chiara. *Violation of Bell's inequalities with preamplified homodyne detection*. Phys. Rev. A, vol. **87**, no. 052112, 2013.
- [Trebino 97] R. Trebino, K. W. DeLong, D. N. Fittinghoff, J. N. Sweetser, M. A. Krumbügel, B. A. Richman & D. J. Kane. *Measuring ultrashort laser pulses in the time-frequency domain using frequency-resolved optical gating*. Rev. Sci. Instrum., vol. **68**, no. 9, pages 3277–3295, 1997.
- [Tualle-Brouri 09] R. Tualle-Brouri, A. Ourjoumtsev, A. Dantan, P. Grangier, M. Wubs & A. S. Sørensen. *Multimode model for projective photon-counting measurements*. Phys. Rev. A, vol. **80**, no. 013806, 2009.
- [Turchette 95] Q. Turchette, C. J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi & H. J. Kimble. *Measurement of Conditional Phase Shifts for Quantum Logic*. Phys. Rev. Lett., vol. **75**, no. 25, pages 4710–4713, 1995.
- [van Enk 01] S. van Enk & O. Hirota. *Entangled coherent states : Teleportation and decoherence*. Phys. Rev. A, vol. **64**, no. 2, 2001.
- [Vasconcelos 10] H. M. Vasconcelos, L. Sanz & S. Glancy. *All-optical generation of states for "Encoding a qubit in an oscillator"*. Opt. Lett., vol. **35**, no. 19, pages 3261–3263, 2010.
- [Vlastakis 13] Brian Vlastakis, Gerhard Kirchmair, Zaki Leghtas, Simon E. Nigg, Luigi Frunzio, S. M. Girvin, Mazyar Mirrahimi, M. H. Devoret & R. J. Schoelkopf. *Deterministically Encoding Quantum Information Using*

BIBLIOGRAPHIE

- 100-Photon Schrödinger Cat States*. Science, vol. **342**, no. 6158, pages 607–610, 2013.
- [Vogel 93] K. Vogel, V. M. Akulin & W. P. Schleich. *Quantum state engineering of the radiation field*. Phys. Rev. Lett., vol. **71**, no. 12, pages 1816–1819, 1993.
- [Řeháček 07] J. Řeháček, Z. Hradil, E. Knill & A. I. Lvovsky. *Diluted maximum-likelihood algorithm for quantum tomography*. Phys. Rev. A, vol. **75**, no. 042108, 2007.
- [Waks 03] E. Waks, K. Inoue, W. Olivier, E. Diamanti & Y. Yamamoto. *High-efficiency photon-number detection for quantum information processing*. IEEE Sel. Top. in Quant. El., vol. **9**, no. 6, pages 1502–1511, 2003.
- [Wakui 07] K. Wakui, H. Takahashi, A. Furusawa & M. Sasaki. *Photon subtracted squeezed states generated with periodically poled KTiOPO₄*. Opt. Exp., vol. **15**, no. 6, 2007.
- [Weiner 98] A. M. Weiner, A. M. Kan'an & D. E. Leaird. *High-efficiency blue generation by frequency doubling of femtosecond pulses in a thick nonlinear crystal*. J. Opt. Soc. Am. B, vol. **23**, no. 18, pages 1441–1443, 1998.
- [Wenger 03] J. Wenger, M. Hafezi, F. Grosshans, R. Tualle-Brouri & P. Grangier. *Maximal Violation of Bell Inequalities using Continuous Variables Measurements*. Phys. Rev. A, vol. **67**, no. 012105, 2003.
- [Wenger 04a] J. Wenger. *Dispositifs impulsionnels pour la communication quantique à variables continues*. PhD thesis, Université Paris-Sud XI, 2004.
- [Wenger 04b] J. Wenger, R. Tualle-Brouri & P. Grangier. *Pulsed homodyne measurements of femtosecond squeezed pulses generated by single-pass parametric deamplification*. Opt. Lett., vol. **29**, no. 11, pages 1267–1269, 2004.
- [Wheeler 84] J. A. Wheeler & W. H. Zurek. Quantum theory and measurement. Princeton Univ. Press, 1984.
- [Wolf 06] M. M. Wolf, G. Giedke & J. I. Cirac. *Extremality of gaussian quantum states*. Phys. Rev. Lett., vol. **96**, no. 080502, 2006.
- [Wu 86] L.-A. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall & H. Wu. *Generation of Squeezed States by Parametric Down Conversion*. Phys. Rev. Lett., vol. **57**, no. 20, pages 2520–2523, 1986.
- [Yukawa 13] M. Yukawa, K. Miyata, T. Mizuta, H. Yonezawa, P. Marek, R. Filip & A. Furusawa. *Generating superposition of up-to three photons for continuous variable quantum information processing*. Opt. Exp., vol. **21**, no. 5, pages 5529–5535, 2013.
- [Yurke 86] B. Yurke & D. Stoler. *Generating quantum mechanical superpositions of macroscopically distinguishable states via amplitude dispersion*. Phys. Rev. Lett., vol. **57**, no. 1, pages 13–16, 1986.
- [Zavatta 04] A. Zavatta, S. Viciani & M. Bellini. *Tomographic reconstruction of the single-photon Fock state by high-frequency homodyne detection*. Physical Review A, vol. **70**, no. 5, 2004.

-
- [Ziegler 42] J. G. Ziegler & N. B. Nichols. *Optimum Settings for Automatic Controllers*. Trans. ASME, vol. **64**, pages 759–768, 1942.
- [Zysset 92] B. Zysset, I. Biaggio & P. Günter. *Refractive indices of orthorhombic $KNbO_3$. I. Dispersion and temperature dependence*. J. Opt. Soc. Am. B, vol. **9**, no. 3, pages 380–386, 1992.

Résumé :

Cette thèse porte sur la génération d'états quantiques mésoscopiques arbitraires de la lumière par l'utilisation itérée d'un protocole élémentaire simple, basé sur un procédé d'adjonction cohérente de photons. Ce protocole tire parti des deux descriptions ondulatoires et corpusculaires complémentaires de la lumière, en impliquant des états davantage propices à une description discrète (les photons, corpuscules élémentaires de la lumière) avec des mesures continues sur le champ électromagnétique (les mesures de quadratures). Nous démontrons la validité du protocole expérimentalement en montrant que celui-ci permet la génération d'états chats de Schrödinger optiques (superposition cohérente d'états quasi-classiques) comprimés en quadrature. Ces états présentent un grand intérêt étant donné qu'ils peuvent constituer la brique élémentaire du calcul quantique à états cohérents, le "qubit" (ou *bit* quantique). Nous étudions également la mise en œuvre théorique du protocole dans la production d'états plus complexes : les états "Peignes en quadrature" dont la fonction d'onde sur la quadrature x est constituée d'une succession de fins pics gaussiens modulés par une large enveloppe gaussienne. Outre l'intérêt que ceux-ci présentent dans la mise en œuvre de codes correcteurs d'erreurs quantiques, nous montrons qu'ils permettent de réaliser des violations des inégalités de Bell par mesures homodynes seulement, ouvrant la voie à des tests sans échappatoires.

Mots clés : optique quantique, ingénierie quantique, variables continues, états non-gaussiens, états Chats de Schrödinger optiques, inégalités de Bell.

Summary :

In this thesis, we propose a new scheme for the generation of mesoscopic optical quantum states of light, by the iterated use of an elementary protocol, based on a coherent adjunction of photons. This protocol takes advantage of the two complementary wave and particle descriptions of light, by involving intrinsically discrete states (photons, elementary particles of light) and continuous measurements on the electromagnetic field (quadrature measurements). We experimentally prove the validity of the protocol by showing that it enables the generation of squeezed optical Schrödinger cat states (coherent superposition of quasi-classical states). These states are of great interest as they can be used as the elementary piece in the coherent state quantum calculation, the "qubit" (or quantum *bit*). We also study the theoretical implementation of the protocol for the production of more complex states : the "quadrature Comb states", whose wavefunction along the quadrature x consists in a succession of thin gaussian peaks modulated by a larger gaussian envelope. Amongst other applications like quantum error correcting codes, we show that they allow for a violation of Bell's inequalities with homodyne measurements only, opening the path towards loophole-free tests.

Keywords : quantum optics, quantum engineering, continuous variables, non-gaussian states, optical Schrödinger cat states, Bell's inequalities.

