



HAL
open science

Étude des équations des milieux poreux et des modèles de cloques

Ghada Chmaycem

► **To cite this version:**

Ghada Chmaycem. Étude des équations des milieux poreux et des modèles de cloques. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris-Est, 2014. Français. NNT : 2014PEST1080 . tel-01127042

HAL Id: tel-01127042

<https://pastel.hal.science/tel-01127042>

Submitted on 6 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ — — PARIS-EST

THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST
ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUE ET STIC

Spécialité : Mathématiques

par

Ghada CHMAYCEM

Thèse préparée au CERMICS, École des Ponts ParisTech et financée par
l'ENPC et le CNRS-Libanais.

Sujet : *Etude de l'équation des milieux poreux
et d'un modèle de cloques*

Soutenue le 18 Septembre 2014 devant le jury composé de :

Rapporteurs :	Juan Luis Vázquez Danielle Hilhorst
Examineurs :	Emmanuel Chasseigne Jean Dolbeault Jean-Jacques Marigo
Directeurs de thèse :	Régis Monneau Mustapha Jazar

À mes parents *Mohammad Salah El Dine & Samar*

à mes sœurs *Ghina, Rayane & Rida*
à mon frère *Radwan*

à ma grand-mère *Ghada*
& toute ma famille

Remerciements

À la fin de ce projet de recherche, je suis convaincue que la thèse est loin d'être un travail solitaire. En effet, je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont la générosité, la bonne humeur et l'intérêt manifestés à l'égard de ma recherche m'ont permis de progresser dans cette phase délicate de "l'apprenti-chercheur". C'est avec une certaine émotion et beaucoup de sincérité que je voudrais remercier toutes les personnes ayant soutenu et apprécié mon travail.

En premier lieu, je remercie les membres du jury de ma thèse pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour leur disponibilité. En particulier, je remercie **M. Juan Luis Vázquez** et **Mme Danielle Hilhorst** d'avoir accepté d'être rapporteurs de mon manuscrit et de participer au jury de ma soutenance malgré leurs nombreuses charges. Leurs avis éclairés m'ont été précieux. Merci M. Vázquez de me faire l'honneur de présider le Jury de cette thèse. Je remercie Mme Hilhorst aussi pour les discussions fructueuses et les conseils précieux qu'elle m'a proposés. Je remercie également **M. Emmanuel Chasseigne**, **M. Jean Dolbeault** et **M. Jean-Jacques Marigo** qui ont assumé les rôles d'examinateurs. Ils ont aussi contribué par leurs nombreuses remarques et suggestions à améliorer la qualité de ce mémoire, et je leur en suis très reconnaissante.

Je tiens tout particulièrement à remercier mes directeurs de thèse **Régis Monneau** et **Mustapha Jazar**. Travailler avec vous a été très enrichissant, merci de m'avoir encouragé tout au long de ma thèse.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à **Régis** qui a encadré mes recherches et qui s'est toujours soucié de m'offrir, de tout point de vue, les meilleures conditions de travail possibles. Je le remercie de m'avoir fait confiance malgré les connaissances plutôt légères que j'avais en début de ma thèse, puis pour m'avoir guidé, encouragé, conseillé, pendant ces trois années tout en me laissant une grande liberté et en me faisant l'honneur de me déléguer plusieurs responsabilités dont j'espère avoir été à la hauteur. Je le remercie en particulier pour sa grande disponibilité

et la confiance qu'il m'a accordée. Merci pour son enthousiasme permanent, son incroyable soutien et surtout ses qualités humaines exceptionnelles qui font de lui le directeur de thèse dont tout le monde rêve !

Dr Mustapha, merci de m'avoir prise sous ton aile et de m'avoir proposée cette thèse, merci pour ton aide exceptionnelle sur le plan humain, scientifique et administratif. Merci pour tes qualités d'écoute, ta présence à mes côtés et tes conseils avisés et rassurants, merci pour tes remarques pertinentes et pour ta patience même pendant les périodes les plus chargées.. ! Ton soutien moral et scientifique au quotidien n'a pas de prix. Merci de m'avoir fait profiter de ton expérience de l'enseignement. J'espère avoir été digne de la confiance que tu m'avais accordée et que ce travail est finalement à la hauteur de tes espérances. Quoi qu'il en soit, j'ai beaucoup appris à tes côtés et je suis très honorée de t'avoir eu pour encadrant. Que tu trouves ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je ne sais comment exprimer ma sincère gratitude à ces deux personnes autrement qu'en leur promettant d'agir comme eux avec des étudiants dans ma situation, si un jour l'occasion m'en est donnée.

Je tiens à remercier **M. Jean François Delmas**, directeur du laboratoire Centre d'Enseignement et de Recherche en Mathématiques et Calcul Scientifique (CERMICS), ainsi que **M. Mustapha Jazar** directeur du Laboratoire de Mathématiques et Applications (LaMA-Liban) pour m'avoir accueilli au sein de ces institutions et pour les conseils stimulants que j'ai eu l'honneur de recevoir de leur part. Je remercie également **Mme Catherine Baccaert**, **Mme Nathalie Quelleu** et surtout **Mme Isabelle Simunic**. Sans vous le laboratoire ne serait pas le même. Elles sont toujours là pour compatir avec les (petites) difficultés des thésards et nous redonner le moral.

Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans l'aide de différents financeurs qui, à travers leur soutien matériel, ont reconnu mon travail et m'ont fait confiance pendant ces trois années de thèse : l'École Nationale des Ponts et Chaussées (ENPC), le Conseil National de la Recherche Scientifique-Liban (CNRS-L) et l'Association Libanaise pour la Recherche Scientifique (LASER).

Ces remerciements seraient incomplets si je n'en adressais pas à l'ensemble des membres du LASER pour leur soutien logistique et moral ainsi que pour l'ambiance chaleureuse qui a toujours régné. Mes plus vifs remerciements s'adressent

à **Khouloud El Masri Ghamraoui**, qui m'a offert une aide inconditionnelle, des encouragements permanents et une hospitalité chaleureuse au sein de LASER

afin d'effectuer mes recherches dans les meilleures conditions possibles. Je garderai longtemps le souvenir des moments agréables des pauses café ;

à **Zeina Awaydate Jazar**, qui m'a soutenu, encouragé et aidé tout au long de cette période pour me donner toutes les chances pour réussir. Son énergie incroyable, son enthousiasme permanent et sa confiance ont été des éléments moteurs pour moi ;

à **Rania Darwish Yamak**, à qui j'exprime ma profonde gratitude pour ses qualités humaines d'écoute et de compréhension et ses suggestions toujours avisées ;

à **Lama Tarabey Sayegh**, pour les multiples encouragements, le dynamisme et la bonne humeur qu'elle a déployés pour m'aider à progresser et à surmonter toutes les difficultés. Tes anecdotes sont toujours marrantes !!

à **Abdul Rahman Ayoubi**, pour son soutien quotidien indéfectible et son enthousiasme contagieux à l'égard de mes travaux qui m'ont permis de ne jamais dévier de mon objectif final. Dans les nombreux moments de doute, tu auras su me donner un autre regard et une force incomparable ;

à **Daria Ayoubi ElKass**, pour son support et ses encouragements surtout quand je faisais mes premiers pas à l'étranger ;

à **Ghina Accari**, pour la gentillesse et l'efficacité qu'elle a présentées en s'occupant de la partie administrative ;

à **Mohammad Fatfat**, pour sa patience et son soutien surtout pendant les derniers jours de préparation de la soutenance.

Je garde d'excellents souvenirs de toutes ces années passées avec vous..!

Je remercie tous ceux sans qui, cette thèse ne serait pas ce qu'elle est : aussi bien par les discussions que j'ai eu la chance d'avoir avec eux, leurs suggestions ou contributions. Je pense ici à tous les membres du laboratoire qui ont su créer une ambiance de travail chaleureuse au LaMA-Liban : **Hayat, Danny, Omar, Samar, Jana, Hala, Ahmad E., Nisrine, Hind, Safa, Maysaa, Ahmad D., Yeiha, Marwan, Hana, Michel...** Une thèse n'en serait pas une sans l'encouragement d'amis qui m'ont apporté le soutien scientifique, philosophique et logistique dont j'avais besoin. Travailler avec vous a été, est et sera toujours un plaisir. Je vous remercie encore pour les fructueuses discussions que j'ai eu avec vous.

Je sais tout particulièrement gré à ma collègue, amie et soeur, **Hayat Moustafa**, pour sa relecture et ses conseils toujours très pertinents. On s'est toujours partagé les soucis de la thèse. Notre entente n'aura jamais connu aucune faille. Sa présence à mes côtés et ses encouragements sont pour moi les piliers fondateurs de ce que je suis et de ce que je fais. J'envoie tous mes encouragements à toi Hayat pour la fin de ta thèse et je serais toujours à côté de toi.

Je témoigne toute mon amitié à **Jana Al Khayal** avec qui j'ai eu la chance de partager un séjour assez court mais inoubliable. Sans elle, mes conditions de travail auraient sans doute été très différentes et beaucoup moins agréables. Je n'ai rencontré quelqu'un d'aussi patient, serviable et bienveillant que toi.

Merci également à **Hala Osman** qui m'a consciencieusement relu des parties de ma thèse.

Un merci particulier à **Danny ElKass** de m'avoir fait profiter de ton expérience de l'enseignement, merci pour le temps passé à répondre à mes nombreuses questions, tu expliques trop bien! Je te souhaite une vie pleine de bonheur et de succès avec ta femme incroyable Daria et ta fille adorable Mariam..

Merci à tous les permanents, stagiaires et thésards qui m'ont accompagné pendant ces années au CERMICS : **Danny, Jana, Salma, Houssam, Arnaud, Guillaume, Mohammad, Lukasz, Eleftherios, Nahia, David, William, Adela, Yannik...** Merci à tous pour votre aide, votre soutien, votre sollicitude et surtout pour votre amitié...

C'est dans la difficulté que l'on reconnaît ses amis : j'ai la chance d'avoir pu compter sur leur soutien non-scientifique mais non moins significatif : merci du plus profond du coeur à **Sarah ElMir, Amal Abdul Razzac, Rayan ElMir, Madona Assoum, Batoul Abdel Aziz, Tamara El Bouti, Taghrid Mazloum, Tante Aida Azzaz...**

Mes remerciements s'adressent à tous ceux, famille et amis, qui m'ont encouragés et soutenus tout au long de cette thèse. Je réserve une place toute particulière, à ma mère **Samar** et mon père **Mohammad Salah El Dine**, sans qui ce travail n'aurait jamais débuté et grâce à qui il a été mené à terme. Je remercie également très fortement pour leur soutien, leur patience et leur amour tous mes proches : mes soeurs **Ghina, Rayane et Rida**, mon frère **Radwan**, mes grand-mères **Ghada et Fatima...**

Résumé

Dans cette thèse, deux problèmes complètement indépendants sont étudiés. Le premier sujet porte sur l'analyse mathématique d'un modèle simple de délamination de films minces et d'apparition de cloques. Le second sujet est une étude fine de l'équation des milieux poreux motivée par des problèmes d'intrusion saline.

Dans le premier sujet de ce travail, nous considérons un modèle variationnel simple unidimensionnel décrivant la délamination de films minces sous l'effet d'un refroidissement. Nous caractérisons les minimiseurs globaux qui correspondent à trois types de films : non-délaminés, partiellement délaminés (appelés cloques) ou bien complètement délaminés. Deux paramètres jouent un rôle crucial dans un tel phénomène : la longueur du film et la température. Dans le plan de phase de ces deux derniers, nous classifions l'ensemble des minimiseurs. Comme conséquence de notre analyse, nous identifions explicitement les cloques les plus petites pour ce modèle.

Dans le deuxième sujet, nous répondons d'abord à une question ouverte depuis longtemps concernant l'existence de nouvelles contractions pour l'équation de type milieux poreux. Pour $m > 0$ et $d \geq 1$, nous nous sommes intéressés à des solutions positives de l'équation normalisée suivante

$$mU_t = \Delta U^m \quad \text{sur} \quad (0, +\infty) \times \Omega = Q \quad \text{avec} \quad \Omega = \mathbb{R}^d.$$

Pour $0 < m < 2$, nous présentons une nouvelle famille de contractions pour cette équation en toute dimension d , ce qui induit une extension des propriétés de la contraction L^1 . Notre contraction peut être considérée comme étant la quatrième contraction connue pour cette équation. Même pour le cas $m = 1$, notre approche aboutit à des nouveaux résultats pour l'équation de la chaleur standard.

Dans un second temps, nous avons traité le même problème mais en utilisant une approche différentielle différente basée sur les distances géodésiques. Cette approche originale et générale sert à fabriquer des familles de contractions pour des équations aux dérivées partielles non linéaires, d'évolutions ou stationnaires. Nous présentons dans ce cadre diverses applications. En particulier, nous traitons à nouveau l'équation des milieux poreux et l'équation doublement non linéaire.

Abstract

In this thesis, we study two completely independent problems. The first one focuses on a simple mathematical model of thin films delamination and blistering analysis. In the second, we are interested in the study of the porous medium equation motivated by seawater intrusion problems.

In the first part of this work, we consider a simple one-dimensional variational model, describing the delamination of thin films under cooling. We characterize the global minimizers, which correspond to films of three possible types : non delaminated, partially delaminated (called blisters), or fully delaminated. Two parameters play an important role : the length of the film and the cooling parameter. In the phase plane of those two parameters, we classify all the minimizers. As a consequence of our analysis, we identify explicitly the smallest possible blisters for this model.

In the second part, we answer a long standing open question about the existence of new contractions for porous medium type equations. For $m > 0$ and $d \geq 1$, we consider nonnegative solutions $U(t, x)$ of the following normalized equation

$$mU_t = \Delta U^m \quad \text{on} \quad (0, +\infty) \times \Omega = Q \quad \text{with} \quad \Omega = \mathbb{R}^d.$$

For $0 < m < 2$, we present a new family of contractions for this equation in any dimensions d , which extends the L^1 contraction properties. Our contraction can be seen as the fourth known contraction for this equation. Even for the case $m = 1$, our approach leads to new results for the standard heat equation.

A second work focuses on the same problem but using a differential approach based on geodesic distances. This original and general method is used to produce families of contractions for nonlinear partial differential equations, of evolution or stationary type. We present in this part various applications of this method. In particular, we are concerned with the porous medium and the doubly nonlinear equations.

Publications issues de la thèse

Articles soumis et Preprints

- (avec M. JAZAR et R. MONNEAU) *Explicit global minimizers of a one-dimensional blister model*. Preprint déposé sur HAL.
- (avec M. JAZAR et R. MONNEAU) *A new contraction family for porous medium and fast diffusion equations*. Preprint déposé sur HAL.

Projet d'article

- (avec M. JAZAR et R. MONNEAU) *Application of the method of differential contractions for the porous medium and the doubly nonlinear equations*.

Sommaire

1	Introduction	1
1	Modèles de cloques	2
1.1	Motivation physique	2
1.2	Description du phénomène	4
1.3	Résultats principaux	6
2	Equation des milieux poreux	13
2.1	Méthode directe	13
2.2	Méthode des contractions différentielles	18
2.2.1	Equation des milieux poreux	19
2.2.2	Equations doublement non linéaire	21
3	L'intrusion saline et des questions associées	22
I	Blister Model	25
2	Explicit global minimizers of a one-dimensional blister model	27
1	Introduction	28
1.1	Physical motivation	28
1.2	Main results	29
1.3	Brief review of the literature	36
1.4	Organization of the paper	36
2	Proofs of Theorems 1.2 and 1.3 i)	37
2.1	Existence of global minimizers	37
2.2	Description of global minimizers of E	40
3	The auxiliary minimization problem and its consequences	45
3.1	Auxiliary Problem (2.53)	45
3.2	Global minimizers of E and blister's properties	47
4	Appendix	51
4.1	Preliminaries	51
4.2	Some technical lemmas	56
4.3	Identification of sets	62

II	Porous Medium Equation	67
3	A new contraction family for porous medium and fast diffusion equations	69
1	Introduction	70
2	Main results	72
3	The new contraction property	74
4	Decay of the gradient	78
4.1	Decay of the gradient	78
4.2	Decay of the directional derivative	79
4	A new contraction family for porous medium and fast diffusion equations (detailed version)	81
1	Introduction	82
1.1	Classical solutions	84
1.2	Weak solutions	85
1.3	Organization of the paper	87
2	Main Results	87
2.1	The new contraction family	87
2.2	Decay of the directional derivative	89
3	Proofs of the new contraction family	90
4	Proofs of the decay of the directional derivative	99
5	Appendix	108
5.1	Proof of Proposition 1.1	108
5.2	Proof of Lemma 3.1	109
5.3	Proof of Lemma 3.3	112
5.4	Proof of Lemma 4.3	116
5.5	General results	117
5	Application of the method of differential contractions for the porous medium and the doubly nonlinear equations	121
1	Introduction	122
2	Main results	124
2.1	The porous medium equation	124
2.2	The doubly nonlinear equation	125
3	The porous medium equation	126
3.1	Proof of Theorem 2.1	128
3.2	Proof of Theorem 2.2	133
4	The doubly nonlinear equation	135
4.1	Proof of Theorem 2.3	137
5	Appendix	141

III	Seawater intrusion and related questions	147
6	Modélisation d'un problème d'intrusion saline et Schémas numérique	149
1	Introduction	150
2	Définitions et notions	150
3	Modélisations mathématique et numérique du problème	156
3.1	Établissement des lois de la physique	156
3.2	Cas d'aquifère non confiné	158
3.3	Cas d'un aquifère confiné	163
4	Conclusions et perspectives	167
7	Numerical results in the case of confined aquifer	169
1	Hypothesis and results	170
2	Analytical solution	175
3	Numerical scheme	177
4	Numerical simulations	179
4.1	$\alpha = 1$ and $a = 0.05$	179
4.2	$\alpha = 1$ and $a = 1$	182
5	Conclusion	185
8	Transport Optimal	187
1	Introduction	188
2	Transport Optimal	191
3	Application sur le problème d'intrusion saline	195
4	Schéma numérique	199
4.1	Cas où $f(u) = u \ln u$	199
4.2	Cas où $f(u) = \frac{u^2}{2}$	204
4.2.1	Cas implicite	206
4.3	Cas où $f(u) = (1 - \epsilon_0)\frac{u_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} + (1 - \epsilon_0)u_1u_2$	207
4.4	Application sur le cas confiné	211
5	Quelques idées pour le calcul de la dérivée seconde	211
5.1	Application directe à notre problème	214

Table des figures

1.1	Flambage de rails sous l'effet de la dilatation thermique	2
1.2	Visualisation de cloques de délaminage	3
1.3	Exemple d'un flambage circulaire d'un film mince	3
1.4	film mince déposé sur un substrat rigide.	4
1.5	Présentation géométrique de ζ_1	8
1.6	Présentation géométrique de ζ_2	8
1.7	Trois types de solutions.	9
1.8	Diagramme de phase des paramètres (θ, L)	11
1.9	Schéma décrivant la monotonie de A et T	12
1.10	The set $K_{ n }$	15
2.1	Different types of solutions of problem (2.3)	29
2.2	Schematic phase diagram for parameters (θ, L)	34
2.3	Schematic describing the monotonicity of A and T	35
2.4	Schematic presentation of all curves	58
3.1	The set $K_{ n }$	72
4.1	The set $K_{ n }$	84
6.1	Le cas non confiné.	158
6.2	Le cas confiné.	163
7.1	The confined case.	170
7.2	The initial condition.	179
7.3	The interface g at $t = 28.2$ and $t = 56.4$	180
7.4	The interface g at $t = 94$ and $t = 131.6$	180
7.5	The interface g at $t = 235$ and the analytical solution	181
7.6	Evolution of M_n	182
7.7	The initial condition.	183
7.8	The interface g at $t = 0.19$ and $t = 0.66$	183
7.9	The interface g at $t = 0.94$ and $t = 1.22$	184

7.10	The interface g at $t = 1.5$ and the analytical solution	184
7.11	Evolution of M_n	185
8.1	Problème de brouette de Monge.	191
8.2	La géodésique d'une variété	195

Chapitre 1

Introduction

Ce chapitre est une introduction générale de la thèse qui est divisée en trois parties.

Dans la première partie, nous considérons un modèle variationnel simple unidimensionnel décrivant la délamination de films minces sous l'effet d'un refroidissement. Cette partie a abouti à un article soumis [30].

Dans la deuxième partie, nous nous sommes intéressés principalement à l'équation des milieux poreux. Nous présentons une nouvelle famille de contractions pour cette équation en toute dimension, ce qui induit une extension des propriétés de la contraction L^1 . Ensuite, nous présentons une méthode simple et générale pour fabriquer des familles de contractions pour des équations aux dérivées partielles non linéaires, d'évolution ou stationnaires. Cette partie a fait l'objet d'un papier soumis [31] et d'un autre en cours de préparation [32].

La troisième partie est consacrée à la présentation des idées et des réflexions traitées pendant la thèse. Les résultats de cette partie sont formels. Ils sont motivés par des problèmes d'intrusion saline. Dans ce cadre, nous discutons aussi des questions numériques. Cette partie n'a pas abouti à des publications.

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats les plus intéressants qui correspondent aux deux premières parties de la thèse tout en expliquant le contenu de la troisième partie.

1 Modèles de cloques

Dans cette section, nous présentons une vue générale des modèles de délamination de films minces et d'apparition de cloques. Pour plus de détails sur les résultats et les preuves de cette partie, le lecteur est invité à revenir au chapitre 2.

1.1 Motivation physique

Les études sur l'élasticité ont commencé en 1678, avec la loi de Hooke, que l'on traduit aujourd'hui par la proportionnalité de la contrainte et de la déformation. Les premières études d'élasticité, auxquelles se sont intéressés notamment Mariotte, Bernoulli et Euler, portent alors naturellement sur les déformations de tiges. En 1744, on a abouti à l'équation de l'elastica, dont les solutions décrivent le flambage d'une tige. Alors qu'au début du XXe siècle l'élasticité des plaques s'est traduite en équations grâce aux travaux de Föppl (1907) et de von Kármán (1910). Cette apparition tardive des corps élastiques bidimensionnels dans le champ de la mécanique s'explique par la complexité des équations de Föppl-von Kármán. Presqu'un siècle plus tard, l'élasticité des corps minces reste d'ailleurs un sujet de recherche vivace. L'élasticité intéresse aujourd'hui différentes disciplines (mathématiques, physique et mécanique) surtout qu'elle se traduit effectivement par de divers phénomènes dans notre vie quotidienne. Citons à titre d'exemple le flambage des rails de train illustré dans la Figure 1.1 sous l'effet des variations thermiques entre l'hiver et l'été. En Suède, les températures peuvent varier de -40°C à $+55^{\circ}\text{C}$ entre ces deux saisons.



FIGURE 1.1 – Flambage de rails sous l'effet de la dilatation thermique

D'autres exemples concrets décrivant ce phénomène sont présentés dans les figures suivantes

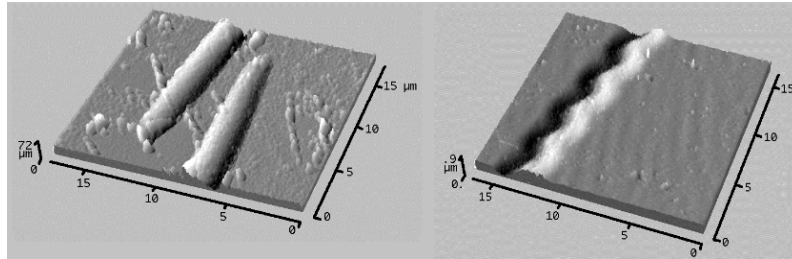


FIGURE 1.2 – Visualisation de cloques de délaminage

La Figure 1.2 présente de cloques de délaminage dues à des forces atomiques dans un film métallique déposé sur un substrat en polycarbonate.

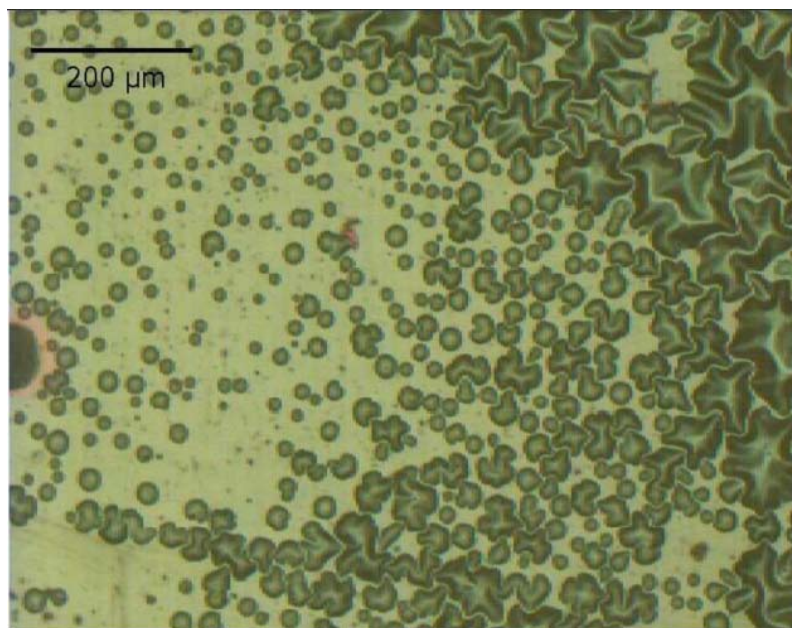


FIGURE 1.3 – Exemple d'un flambage circulaire d'un film mince

La Figure 1.3 illustre un flambage circulaire d'un film mince d'amorphous de nitrite de carbone déposé sur un substrat de verre.

On s'intéresse aux déformations des plaques élastiques minces appelées aussi films minces. On entend par film mince (ou plaque mince) élastique, un morceau de matériau, solide dont l'épaisseur ε est petite devant toutes ses autres dimensions, et

qui ne présente pas une courbure au repos. En présence de courbure, on parlerait de cloque.

1.2 Description du phénomène

Considérons un film mince déposé sur un substrat, et qui soumit à des contraintes résiduelles compressives (souvent d'origine thermique). Afin de libérer ce type des contraintes et retrouver sa longueur naturelle, le film tend à se détacher du substrat. On parle de délaminage. Comme une barre qu'on aurait comprimée axialement, le film, sous l'effet des contraintes compressives, sort de son plan et se courbe, voir Figure 1.4.

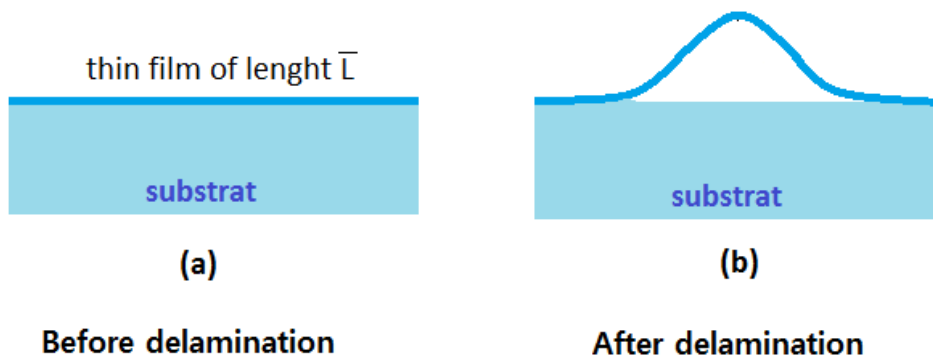


FIGURE 1.4 – film mince déposé sur un substrat rigide.

Il se débarrasse ainsi d'une partie de l'énergie de compression résiduelle, mais doit payer en échange de l'énergie de flexion. Cette dernière est bien plus économique : on sait qu'il est bien plus facile de déformer une feuille de papier en la roulant en cylindre, plutôt qu'en l'étirant dans son plan. C'est le flambement du film qui est la source d'énergie. La forme de la cloque va donc résulter d'un équilibre entre l'apport d'énergie élastique par le flambement du film, et la dissipation d'énergie liée à la rupture de l'interface film/substrat. Les cloques de délaminage ont été observées dans le cadre d'expériences bien contrôlées voir Figure 1.2. Partant de la donnée de la région délaminée, il s'agit de résoudre les équations des plaques élastiques (équations de Föpplé-von Kármán) pour calculer le profil vertical de la cloque : on peut considérer le film comme une plaque élastique attachée à ses bords. La résolution des équations de Föpplé-von Kármán est difficile, même numériquement (sauf pour des

formes de la cloque très particulières, 1D par exemple). Ces équations s'écrivent en effet comme des équations aux dérivées partielles non linéaires du quatrième ordre couplées pour deux fonctions inconnues.

On suppose dans ce qui suit que la plaque est constituée d'un matériau homogène et isotrope et que les déformations sont petites dans le sens que les déplacements des points dans la plaque sont petits par rapport à son épaisseur ε . En outre, le rôle du substrat, considéré rigide, a été négligé ainsi que la force de cohésion. Enfin, le problème simplifié que nous considérons ici est statique donc indépendant du temps.

Le principe des expériences est le suivant : une couche mince est déposée sur un substrat par évaporation. Lorsque le coefficient de dilatation thermique du substrat devient supérieur à celui du film, le refroidissement à température ambiante donne lieu à une contrainte résiduelle compressive dans le film. Si la compression est suffisante, le film tend à flamber, en se décollant du substrat. On suppose que la variation de température est petite et d'ordre le carré de l'épaisseur de la plaque : $(T_f - T_0)/\varepsilon^2 = \delta$ où δ est une constante.

Un modèle simplifié unidimensionnel décrivant ce phénomène est donnée par la minimisation du problème d'énergie de type Föppl-von Kármán suivant

$$E(\zeta_1, \zeta_2) := \int_{\Omega} \gamma \mathbf{1}_{\{\zeta_2 > 0\}} + 4\alpha \left(\zeta_1' + \frac{1}{2}(\zeta_2')^2 \right)^2 + \frac{4\alpha}{3} \zeta_2'^2 - 2\bar{\theta} \zeta_2'^2, \quad (1.1)$$

avec

$$\gamma = 1 \quad \text{et} \quad \Omega = \mathbb{R}/\bar{L}\mathbb{Z} = [-\bar{L}/2, \bar{L}/2]_{per},$$

et où \bar{L} représente la longueur du film, $\alpha > 0$ est le coefficient d'élasticité et $\bar{\theta} > 0$ est le coefficient thermique. Ici le paramètre γ mesure le coût de délamination. Il est similaire à la formulation de fracture avec le critère de Griffith (voir par exemple Francfort, Marigo [45], Griffith [46], Larsen [50]). Pour la simplicité, on normalise ce paramètre γ pour qu'il soit égal à 1 dans tout ce qui suit (quitte à redéfinir E , α et $\bar{\theta}$). La quantité ζ_2 désigne le déplacement vertical qui est supposé positif (le film reste au-dessus du substrat) et ζ_1 représente le déplacement horizontal. La périodicité est supposée afin de simplifier l'analyse. On introduit l'espace suivant

$$Y := H^1(\Omega) \times \{\zeta_2 \in H^2(\Omega), \zeta_2 \geq 0\}. \quad (1.2)$$

La solution de notre modèle est donnée en résolvant le problème suivant

$$\min_{(\zeta_1, \zeta_2) \in Y} E(\zeta_1, \zeta_2). \quad (1.3)$$

Définition 1.1. (Cloque)

On définit une cloque comme étant tout minimiseur global non trivial (ζ_1, ζ_2) de l'énergie E définie dans (1.1) c.à.d $(\zeta_1, \zeta_2) \neq (0, 0)$.

Sous des conditions appropriées, les cloques peuvent apparaître. On donne une description complète des minimiseurs globaux en termes des paramètres du problème.

1.3 Résultats principaux

Théorème 1.2. (*Existence de minimiseurs globaux*)

Il existe un minimiseur (global) $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in Y$ de l'énergie E introduite dans (1.1).

Afin d'étudier les minimiseurs de E , il est intéressant de faire le changement suivant du paramètre thermique $\bar{\theta}$ et de la longueur du film \bar{L}

$$\theta := \frac{\bar{\theta}}{\alpha}, \quad \text{et} \quad L := \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \bar{L}, \quad (1.4)$$

où le coefficient d'élasticité $\alpha > 0$ est maintenant fixé dans notre modèle. Considérons ainsi le problème de minimisation auxiliaire suivant

$$\min_{X \in \mathcal{D}} f(X), \quad (1.5)$$

où

$$f(X) := \begin{cases} (\theta - X)^{-1/2} - LX^2 & \text{si } 0 < X < \theta; \\ 0 & \text{si } X = 0; \end{cases} \quad (1.6)$$

avec \mathcal{D} l'intervalle donné par

$$\mathcal{D} := \left[0, \tilde{\theta}^+\right], \quad \text{avec} \quad \tilde{\theta}^+ = \max\left\{\tilde{\theta}, 0\right\} \quad \text{et} \quad \tilde{\theta} := \theta - \frac{\alpha^2}{L^2}. \quad (1.7)$$

En fait, le théorème suivant montre que le problème de minimisation (1.3) est équivalent à l'étude du problème auxiliaire (1.5).

Théorème 1.3. (*Description des minimiseurs globaux de E*)

i) (*Implication*)

Pour tout minimiseur global $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ de l'énergie E , il existe au moins un minimiseur $K \in \mathcal{D}$ du problème (1.5) tel que :

il existe $T \in [0, \bar{L}]$ (à une addition de constante et à une translation près de (ζ_1, ζ_2))

tel que ce minimiseur ζ peut s'écrire sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1(x) = \begin{cases} \frac{K}{2} \left(x + \frac{\bar{L}}{2} \right) & \text{si } x \in [-\bar{L}/2, -T/2]; \\ \frac{K\bar{L}}{8\pi} \sin(2\beta x) + \frac{K}{2} \left(1 - \frac{\bar{L}}{T} \right) x & \text{si } x \in (-T/2, T/2); \\ \frac{K}{2} \left(x - \frac{\bar{L}}{2} \right) & \text{si } x \in [T/2, \bar{L}/2], \end{cases} \\ \zeta_2(x) = \begin{cases} A(\cos(\beta x) + 1) & \text{si } x \in [-T/2, T/2]; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{array} \right. \quad (1.8)$$

où β , T et A sont donnés par

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta := \sqrt{\frac{3(\bar{\theta} - \alpha K)}{2\alpha}}; \\ T := \begin{cases} \frac{2\pi}{\beta} & \text{si } K > 0; \\ 0 & \text{si } K = 0; \end{cases} \\ A := \sqrt{\frac{K\bar{L}}{\pi\beta}}. \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Plus généralement, pour tout $K \in \mathcal{D}$ et toutes fonctions (ζ_1, ζ_2) données dans (1.8)-(1.9), on a

$$E(\zeta_1, \zeta_2) = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} f(K), \quad (1.10)$$

et pour $K \in \mathcal{D}$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \bar{L} \Leftrightarrow K = \tilde{\theta}; \\ \text{et} \\ T < \bar{L} \Leftrightarrow K < \tilde{\theta}. \end{array} \right. \quad (1.11)$$

ii) (Reciproque)

Si $K \in \mathcal{D}$ est un minimiseur du problème (1.5), alors la fonction $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ donnée dans (1.8)-(1.9) est un minimiseur global de E sur Y .

Les fonctions (ζ_1, ζ_2) données dans (1.8)-(1.9) sont représentées graphiquement dans les figures suivantes

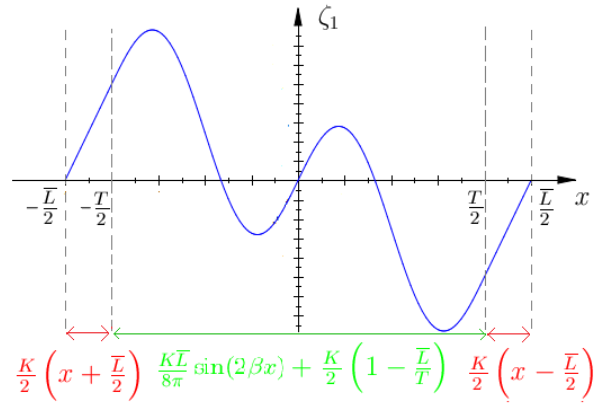


FIGURE 1.5 – Présentation géométrique de ζ_1 .

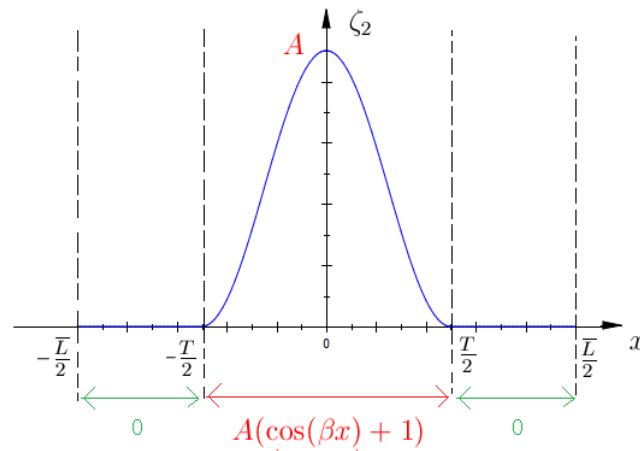


FIGURE 1.6 – Présentation géométrique de ζ_2 .

Noter que $\bar{\theta} - \alpha K > 0$ parce que $K \in \mathcal{D}$. En plus, si $K = 0$ alors $A = T = 0$ ce qui implique que $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$. Ainsi avec nos définitions, T peut être interprétée comme étant la longueur du support de ζ_2 . Le théorème 1.3 identifie trois types de minimiseurs globaux présentés dans la Figure 1.7

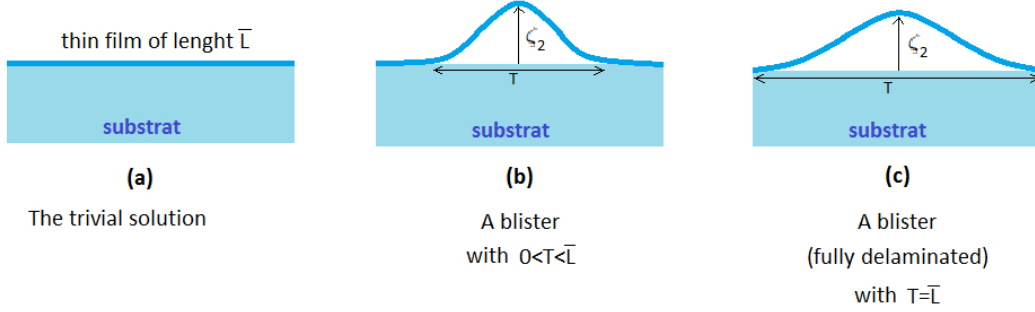


FIGURE 1.7 – Trois types de solutions.

Pour $K = 0$, on obtient la solution triviale (Figure 1.7, (a)).

Pour $K \in (0, \tilde{\theta})$, alors $0 < T < \bar{L}$ et on obtient la solution avec une cloque (Figure 1.7, (b)).

Finalement, pour $K = \tilde{\theta}$, alors $T = \bar{L}$ et on obtient la cloque complètement délaminiée (Figure 1.7, (c)). On utilise toujours la notion de "cloque" pour la solution mathématique même si physiquement le film est complètement délaminié.

Dans le but de classifier les solutions obtenues dans le Théorème 1.3, on définit les fonctions suivantes afin d'introduire les domaines D_0 , D_1 et D_2 des paramètres (θ, L) . La Figure 1.8 décrit ces domaines (pour toute valeur arbitraire α). On démontre que les solutions triviales correspondent à D_0 , les solutions de cloques à D_1 et les cloques complètement délaminiées à D_2 . Dans cette perspective, on introduit

$$\begin{cases} \theta^* := \frac{5}{4}\alpha^{-1/2}; & (1.12) \\ L_{01}(\theta) := \frac{5^{5/2}}{16}\theta^{-5/2} & \text{pour } \theta > 0; & (1.13) \\ L_{02}(\theta) := \frac{\alpha^{5/4}}{(\sqrt{\alpha}\theta - 1)^{1/2}} & \text{pour } \theta > \alpha^{-1/2}; & (1.14) \\ L_{12}(\theta) := \left(2\alpha^3\theta + 2\alpha^2\sqrt{\alpha(\alpha\theta^2 - 1)}\right)^{1/2} & \text{pour } \theta \geq \theta^* > \alpha^{-1/2}. & (1.15) \end{cases}$$

Définition 1.4. (*Domains D_0 , D_1 and D_2*)

On introduit maintenant les domaines suivants

$$D_0 := \left\{ \begin{array}{ll} (\theta, L) \in (0, +\infty)^2, & L < L_{01}(\theta) \quad \text{si } 0 < \theta \leq \theta^* \\ & L < L_{02}(\theta) \quad \text{si } \theta > \theta^* \end{array} \right\}; \quad (1.16)$$

$$D_1 := \left\{ \begin{array}{ll} (\theta, L) \in (0, +\infty)^2, & L > L_{01}(\theta) \quad \text{si } 0 < \theta \leq \theta^* \\ & L > L_{12}(\theta) \quad \text{si } \theta > \theta^* \end{array} \right\}; \quad (1.17)$$

$$D_2 := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \theta > \theta^* \text{ et } L_{02}(\theta) < L < L_{12}(\theta)\}. \quad (1.18)$$

On désigne par

$$\Gamma_{01} := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, 0 < \theta < \theta^* \text{ et } L = L_{01}(\theta)\}; \quad (1.19)$$

$$\Gamma_{02} := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \theta > \theta^* \text{ et } L = L_{02}(\theta)\}; \quad (1.20)$$

$$\Gamma_{12} := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \theta > \theta^* \text{ et } L = L_{12}(\theta)\}; \quad (1.21)$$

$$P = (\theta^*, L_{01}(\theta^*)). \quad (1.22)$$

Proposition 1.5. (Partition des domaines)

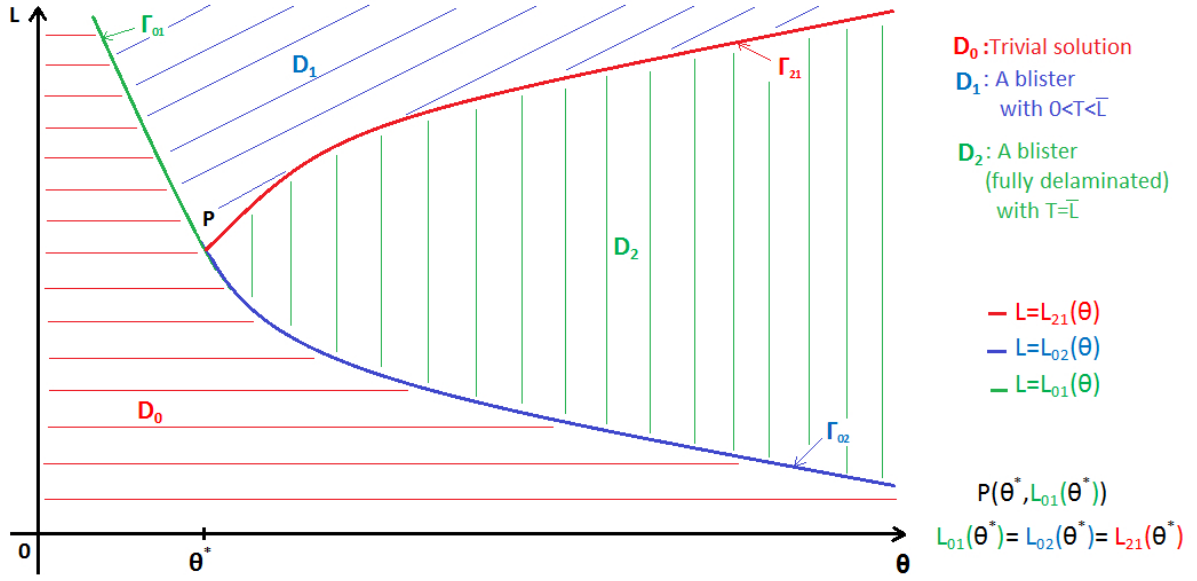
On a la décomposition disjointe suivante

$$(0, +\infty)^2 = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup \Gamma_{21} \cup \Gamma_{01} \cup \Gamma_{02} \cup \{P\}.$$

En plus, on a

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_{01}(\theta) < L_{02}(\theta), & \text{pour } \theta > \theta^*; \\ L'_{12}(\theta) > 0 \text{ and } L'_{02}(\theta) < 0, & \text{pour } \theta > \theta^*; \\ L'_{01}(\theta) < 0, & \text{pour } 0 < \theta < \theta^*; \\ L_{12}(\theta^*) = L_{01}(\theta^*) = L_{02}(\theta^*); \end{array} \right. \quad (1.23)$$

où θ^* est définie dans (1.12).

FIGURE 1.8 – Diagramme de phase des paramètres (θ, L) **Théorème 1.6. (Classification des minimiseurs globaux de E)**

Pour $(\theta, L) \in D_0$, le minimiseur global unique de E introduite dans (1.1) est la solution triviale $(\zeta_1, \zeta_2) = (0, 0)$.

Pour $(\theta, L) \in D_1 \cup D_2 \cup \Gamma_{12}$, il existe une seule cloque $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in Y$ (voir la Définition 1.1) qui minimise l'énergie E . En plus, la composante ζ_2 a un support de longueur T défini dans (1.9) et

$$\begin{cases} T < \bar{L} & \text{si } (\theta, L) \in D_1; \\ T = \bar{L} & \text{si } (\theta, L) \in D_2 \cup \Gamma_{12}. \end{cases} \quad (1.24)$$

Pour $(\theta, L) \in \Gamma_{01} \cup \Gamma_{02} \cup \{P\}$, l'énergie E a exactement deux minimiseurs : la solution triviale $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) = (0, 0)$ et une cloque $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in Y$ donnée dans (1.8) avec

$$\begin{cases} T < \bar{L} & \text{si } (\theta, L) \in \Gamma_{01}; \\ T = \bar{L} & \text{si } (\theta, L) \in \Gamma_{02} \cup \{P\}. \end{cases} \quad (1.25)$$

Proposition 1.7. (Propriétés des cloques dans $D_1 \cup D_2 \cup \Gamma_{12}$)

Pour $(\theta, L) \in D_1 \cup D_2 \cup \Gamma_{12}$, il existe un unique $K \in \mathcal{D}$ (dependant de (θ, L)) minimiseur du problème (1.5). En rappelant (1.4), on considère T et A données dans (1.9).

i) Monotonie

D'abord, T et A sont continues en (θ, L) dans $D_1 \cup D_2 \cup \Gamma_{12}$ et satisfont les propriétés suivantes

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}, \frac{\partial T}{\partial L} \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial A}{\partial \theta}, \frac{\partial A}{\partial L} \geq 0.$$

En particulier,

$$T = \bar{L} \quad \text{dans} \quad D_2 \cup \Gamma_{12}.$$

ii) La plus "petite" cloque

On a

$$\inf_{(\theta, L) \in D_1} T = T^* := 4\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha^{1/4}, \quad (1.26)$$

et

$$\inf_{(\theta, L) \in D_1} A = A^* := \frac{4}{\sqrt{3}}. \quad (1.27)$$

La proposition 1.7 est illustrée dans la Figure 1.9.

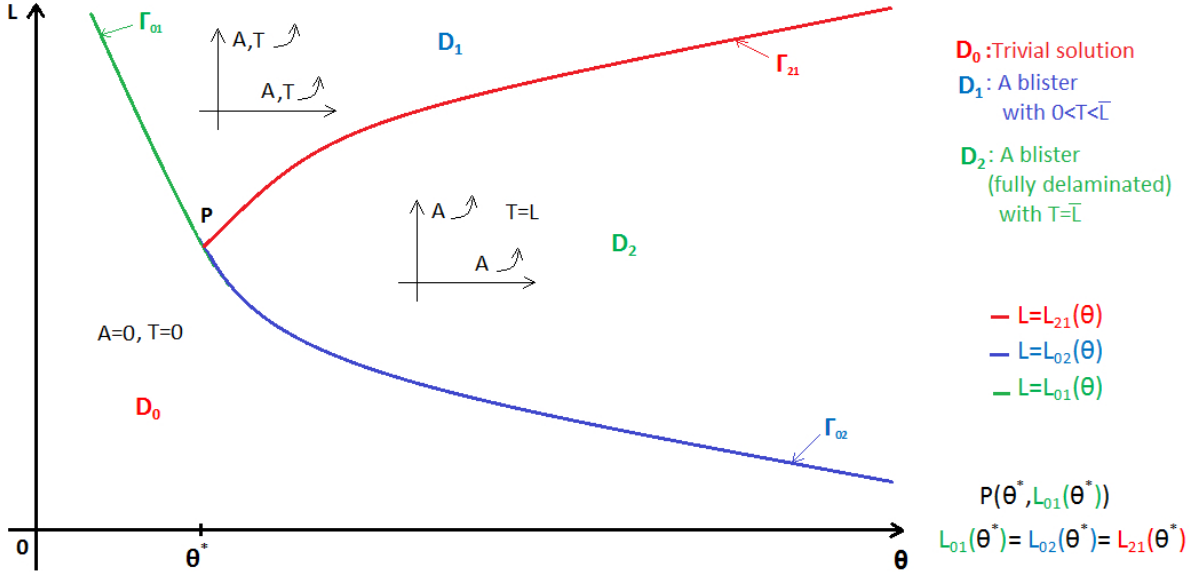


FIGURE 1.9 – Schéma décrivant la monotonie de A et T

Interprétation des plus petites cloques (cas non complètement délaminées)

Pour tout $(\theta, L) \in D_1$, il existe une seule cloque $(\zeta_1, \zeta_2) \in Y$ minimisant l'énergie E . La seconde composante ζ_2 a un support de longueur $T > T^*$ avec $T < \bar{L}$. Ceci montre que T^* peut être interprétée comme étant l'infimum des largeurs des cloques dont la longueur du support est strictement inférieure à la longueur du film. De même, nous pouvons interpréter l'amplitude A^* comme étant l'amplitude minimale des cloques.

Proposition 1.8. (*Des cloques relativement petites pour L assez grande*)
 Pour $(\theta, L) \in D_1$, il est possible de vérifier, quand L tend vers l'infini, que T et A ont un comportement comme $L^{1/3}$ et $L^{2/3}$ respectivement. En particulier, pour θ fixée et pour des films de longueur suffisamment large, la taille des cloques est plus petite que celle du film.

2 Equation des milieux poreux

Dans cette partie, nous répondons à une question ouverte depuis longtemps concernant l'existence de nouvelles contractions pour l'équation de type milieux poreux. Dans ce cadre, nous démontrons par deux méthodes différentes une nouvelle famille de contractions pour ce type d'équation. La première est une méthode directe basée sur un calcul astucieux et une connaissance profonde de la théorie. La seconde est une méthode générale qui sert à fabriquer des familles de contractions différentielles pour des équations aux dérivées partielles non linéaires en générale. Dans cette direction, nous s'intéressons à l'appliquer d'abord pour l'équation des milieux poreux ensuite pour l'équation doublement non linéaire.

2.1 Méthode directe

Pour $m > 0$ et $d \geq 1$, on considère des solutions positives faibles $U(t, x)$ de l'équation normalisée suivante

$$mU_t = \Delta U^m \quad \text{sur } (0, +\infty) \times \Omega = Q \quad \text{avec } \Omega = \mathbb{R}^d. \quad (1.28)$$

Si $m > 1$, cette équation est appelée équation des milieux poreux (*Porous Medium Equation*), alors que si $m < 1$ elle est appelée équation de diffusion rapide (*Fast Diffusion Equation*).

Les résultats de cette partie se trouvent dans le chapitre 3. Les détails sont présentés dans le chapitre 4 sachant qu'on travaille dans un cadre différent en considérant un domaine borné.

On introduit la définition de solution standard suivante

Définition 2.1. (Notion de solution)

Soit $m > 0$. On dit que $U \geq 0$ est une solution de (1.28) avec donnée initiale $0 \leq U_0 \in L^1(\Omega)$, si $U, U^m \in L^1_{loc}(Q)$ et pour toute fonction $\eta \in C_c^\infty(\bar{Q})$ à support compact, on a

$$\iint_Q \left\{ \frac{U^m}{m} \Delta \eta + U \eta_t \right\} dx dt + \int_\Omega U_0(x) \eta(0, x) dx = 0.$$

On rappelle que pour $m > 0$ et pour toute donnée initiale satisfaisant

$$U_0 \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{avec} \quad U_0 \geq 0, \quad (1.29)$$

il existe exactement une solution $U \in C([0, +\infty); L^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ au sens de la Définition 2.1 (voir [63, 64]). Dans le cas spécial où $m > m_c(d) := \max(0, \frac{d-2}{d})$, il est bien connu qu'il est possible de relaxer la condition $U_0 \in L^\infty(\Omega)$ pour avoir existence et unicité dans un espace plus faible. Pour présenter nos résultats d'une manière concise et unique pour $m > 0$, nous travaillerons sous les hypothèses (1.29).

Pour toutes les dimensions, il est connu (voir [62] et les références citées), que cette équation a au moins trois type de contractions : dans L^1 , dans H^{-1} et finalement pour la distance 2-Wasserstein si $m > m_c(d)$. Cette dernière propriété de contraction a été découverte par Otto dans [58] et publiée dans [57] (voir aussi [34]). Il est aussi connu pour l'équation des milieux poreux, que pour la distance p -Wasserstein, il n'y a pas de contractions pour $d \geq 2$ et $p > p_1(m, d)$, alors qu'il existe des contractions pour tout $p \in [1, +\infty]$ pour la dimension $d = 1$ (voir [62]). Noter encore que dans [64] (Théorème A.5 p. 583), les auteurs ont démontré que l'équation des milieu poreux n'est pas contractive par rapport à la norme L^p pour $m \geq 2$ si $p > p_2(m, d)$.

Pour $0 < m < 2$, nous présentons une nouvelle famille de contractions pour cette équation pour toutes les dimensions d ce qui induit une extension des propriétés de la contraction L^1 . Notre contraction peut être considérée comme étant la quatrième contraction connue pour cette équation. Même pour le cas $m = 1$, notre approche aboutit à de nouveaux résultats pour l'équation de chaleur standard. Plus précisément, pour U et V deux solutions positives de (1.28), nous démontrons que la quantité suivante

$$\int_{\Omega} |U^\alpha - V^\alpha|^p \quad (1.30)$$

est une fonctionnelle de Lyapunov qui est décroissante en temps pour tout (α, p) dans un certain ensemble admissible que nous déterminerons plus tard.

Dans tout ce qui suit, nous posons

$$n = m - 1.$$

Pour $0 < |n| < 1$, nous définissons l'ensemble admissible (convexe) (qui est présenté dans la Figure 1.10)

$$K_{|n|} = \{(\alpha, p) \in [|n|, 1] \times \mathbb{R}; \quad P_-(\alpha) \leq p \leq P_+(\alpha)\}, \quad (1.31)$$

avec

$$P_\pm(\alpha) = 1 + \frac{2}{n^2}(1 - \alpha)(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - n^2}). \quad (1.32)$$

Pour $n = 0$, on pose encore $K_0 = \{(\alpha, p) \in (0, 1] \times \mathbb{R}; \quad \alpha p \geq 1\}$. On peut se demander si la contraction (1.30) est reliée ou non à une structure de flot de gradient de cette équation. En effet, pour une solution positive donnée U de (1.28), on pose $u = U^\alpha$ qui résoud

$$u_t = u^{\gamma-1} (u\Delta u + \bar{\gamma}|\nabla u|^2) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{n}{\alpha} \quad (1.33)$$

et $\bar{\gamma} = \gamma - 1 + \alpha^{-1}$. Dans le cas spécial où $\bar{\gamma} = \gamma/2$, nous démontrons que (1.33) est un flot de gradient décroissant dans L^2 d'une certaine énergie, c.à.d. elle résoud

$$u_t = -\nabla_{L^2} E(u) \quad \text{avec} \quad E(u) = \int_{\Omega} u^\gamma \frac{|\nabla u|^2}{2}.$$

En plus, il est facile de vérifier (en calculant l'hessienne de E) que E est convexe si $\gamma \in [-1, 0]$. Ceci correspond exactement aux points $(\alpha, p) = (1 + \frac{n}{2}, 2) \in K_{|n|}$ qu'on capture pour $n \in [-\frac{2}{3}, 0]$. Cette interprétation est similaire à la dérivation du flot de Yamabe (voir par exemple [67]) avec la seule différence que l'exposant de la diffusion rapide n'est pas directement relié à la dimension de l'espace. Néanmoins, à l'exception de ce cas très exceptionnel, la contraction (1.30) ne semble pas être liée à une structure de flot de gradient.

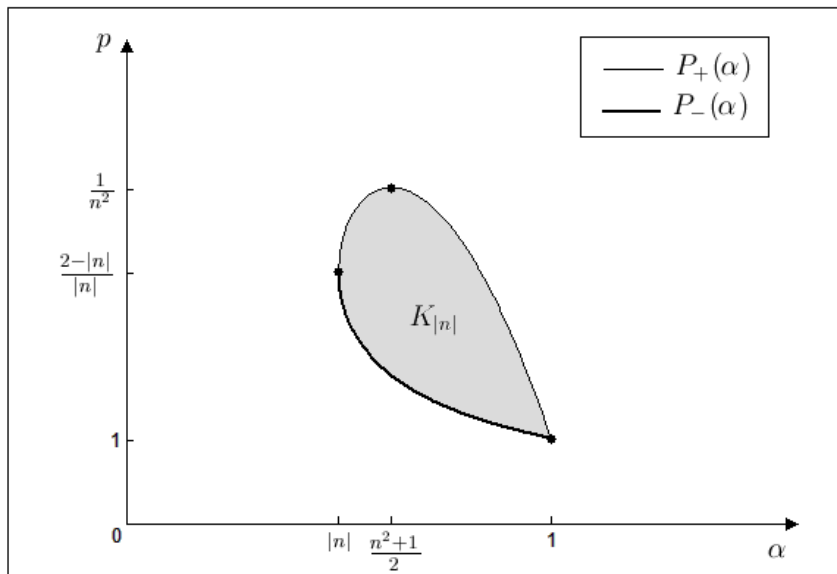


FIGURE 1.10 – The set $K_{|n|}$.

Résultats principaux

Nous présentons nos résultats plus précisément comme suit. Avec les notations précédentes, et pour $u, v > 0$, on définit la matrice symétrique pour $p > 1$ et $\alpha \in (0, 1]$:

$$Q_{\alpha,p}(v, u) = (p-1) \begin{pmatrix} v^\gamma \left(1 + \Gamma \left(\frac{u}{v} - 1\right)\right) & -\frac{1}{2}(v^\gamma + u^\gamma) \\ -\frac{1}{2}(v^\gamma + u^\gamma) & u^\gamma \left(1 + \Gamma \left(\frac{v}{u} - 1\right)\right) \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

avec

$$\Gamma = \frac{1 - \alpha}{\alpha(p-1)}.$$

et on pose $Q_{1,1}(v, u) = 0$. On peut vérifier que cette matrice est positive pour tout $u, v > 0$ si et seulement si $(\alpha, p) \in K_{|n|}$ (voir Lemme 2.2).

Lemma 2.2. (Propriétés de la matrice $Q_{\alpha,p}$)

Pour $|n| < 1$, soit $(\alpha, p) \in \text{Int } K_{|n|}$ où $K_{|n|}$ est défini dans (1.31).

i) Matrice définie positive

Soit $\eta > 0$. Alors pour $v > u > 0$ avec $1 + \eta^{-1} > v/u \geq 1 + \eta$, on a

$$Q_{\alpha,p}(v, u) \geq v^\gamma \nu I_2, \quad (1.35)$$

où I_2 est la matrice identité 2×2 , $Q_{\alpha,p}$ est définie dans (1.34), et $\nu = \nu(n, \alpha, p, \eta) > 0$.

ii) Une borne pour le premier terme diagonal

Soit $v \geq u > 0$, alors le premier terme diagonal satisfait

$$(Q_{\alpha,p}(v, u))_{11} \geq v^\gamma \nu u_0, \quad (1.36)$$

pour un certain $\nu_0 = \nu_0(n, \alpha, p) > 0$.

Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $y_+ = \max(0, y)$. Alors notre résultat principal est le suivant :

Théorème 2.3. (La nouvelle famille de contraction)

On rappelle que $\Omega = \mathbb{R}^d$ avec $d \geq 1$. Soient $|n| < 1$ et U (resp. V) une solution de (1.28) au sens de la Définition 2.1, avec la donnée initiale $0 \leq U_0 \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ (resp. $0 \leq V_0 \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$). Soit $(\alpha, p) \in K_{|n|}$ où $K_{|n|}$ est défini dans (1.31). Soient

$$u = U^\alpha \quad \text{et} \quad v = V^\alpha.$$

Alors pour $w = u$ et v , on a $w \in C(Q) \cap L^\infty(Q) \cap C([0, +\infty); L^p(\Omega))$ et $w \in C^\infty(Q \cap \{w > 0\})$. En plus, avec les notations $v(\tau) = v(\tau, \cdot)$, $u(\tau) = u(\tau, \cdot)$, on a pour tout $t \geq 0$

$$\int_{\Omega} (v(t) - u(t))_+^p dx + p \int_0^t d\tau \int_{\{v-u>0\} \cap \{u>0\}} e[v, u] dx \leq \int_{\Omega} (v(0) - u(0))_+^p dx \quad (1.37)$$

avec

$$e[v, u] = |v - u|^{p-2} \begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix}^T Q_{\alpha,p}(v, u) \begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix} \geq 0, \quad \text{pour } v > u > 0. \quad (1.38)$$

Noter qu'il est possible de montrer une égalité dans (1.37), si u et v sont régulières et positives sur le tore \mathbb{T}^d au lieu de l'espace \mathbb{R}^d .

On définit maintenant une deuxième matrice symétrique $M_{1,1} = 0$ et pour $(\alpha, p) \in K_{|n|} \setminus \{(1, 1)\}$

$$M_{\alpha,p} = (p-1) \begin{pmatrix} 1 & -\Gamma + \frac{\gamma}{2} \\ -\Gamma + \frac{\gamma}{2} & \Gamma(1-\gamma) \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

qui est encore positive (voir Lemme 2.4).

Lemma 2.4. (Propriétés de la marice $M_{\alpha,p}$)

Pour $|n| < 1$, soit $(\alpha, p) \in \text{Int } K_{|n|}$ où $K_{|n|}$ est défini dans (1.31).

Alors on a

$$M_{\alpha,p} \geq \nu_1 I_2, \quad (1.40)$$

où I_2 est la matrice identité 2×2 , $M_{\alpha,p}$ est définie dans (1.39), et $\nu_1 = \nu_1(n, \alpha, p) > 0$.

Notre résultat concernant le gradient est le suivant :

Théorème 2.5. (Décroissance du gradient)

Soit U la solution de l'équation (1.28) avec donnée initiale U_0 , sous les hypothèses du Théorème 2.3. On suppose que $\nabla U_0^\alpha \in L^p(\Omega)$. Soit $u = U^\alpha$, on a $\nabla u \in L^\infty([0, +\infty); L^p(\Omega))$. En plus, avec la notation $u(\tau) = u(\tau, \cdot)$, on a pour presque tout $t \geq 0$:

$$\int_{\Omega} |\nabla u(t)|^p dx + p \int_0^t d\tau \int_{\{\nabla u \neq 0\} \cap \{u > 0\}} \bar{e}[u, \nabla u, D^2 u] dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u(0)|^p dx. \quad (1.41)$$

avec

$$\bar{e}[u, w, A] = |w|^{p-2} u^{\gamma-2} \begin{pmatrix} uA_0 \\ w^2 \end{pmatrix}^T M_{\alpha,p} \begin{pmatrix} uA_0 \\ w^2 \end{pmatrix} + |w|^{p-2} u^\gamma (|A_2|^2 + p|A_1|^2) \geq 0, \quad (1.42)$$

où on écrit en général une matrice symétrique A comme

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ A_1^T & A_2 \end{pmatrix} \quad \text{par blocks dans l'espace vectoriel } \mathbb{R}b \oplus b^\perp \quad \text{avec } b = \frac{w}{|w|}.$$

À nouveau, notons qu'il est possible de prouver une égalité dans (1.41), si U_0 est régulière et positive avec $\Omega = \mathbb{T}^d$.

Il est intéressant de mentionner que nos résultats seront utilisés dans un travail ultérieur pour obtenir des informations sur les exposants anormaux associés à des solutions auto-similaires comme celles de Aronson-Graveleau (voir [10]), et celles de King-Peletier-Zhang (voir [49, 56]).

Pour $\xi = (\xi^t, \xi^x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, on définit la dérivée directionnelle

$$D_\xi u = \xi^t u_t + \xi^x \cdot \nabla u. \quad (1.43)$$

Le théorème suivant donne un résultat de décroissance pour la dérivée directionnelle comme une conséquence de notre estimation de contraction.

Théorème 2.6. (Décroissance de la dérivée directionnelle)

Soit U la solution de l'équation (1.28) avec donnée initiale U_0 , sous les hypothèses du Théorème 2.3. On pose aussi $u = U^\alpha$. Soit $\xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, supposons que

$$C_\xi := \limsup_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \left| \frac{u((0, x) + \eta\xi) - u(0, x)}{\eta} \right|^p dx < +\infty \quad (1.44)$$

Avec la notation $D_\xi u$ définie dans (1.43), on a $D_\xi u \in L^\infty([0, +\infty); L^p(\Omega))$. En plus, avec la notation $u(\tau) = u(\tau, \cdot)$, on a pour presque tout $t \geq 0$:

$$\int_{\Omega} |D_\xi u(t)|^p dx + p \int_0^t \int_{\{D_\xi u \neq 0\} \cap \{u > 0\}} \bar{e}[u, D_\xi u, \nabla u] dx \leq C_\xi. \quad (1.45)$$

avec

$$\bar{e}[u, w, \nabla u] = |w|^{p-2} u^{\gamma-2} \begin{pmatrix} u \nabla w \\ w \nabla u \end{pmatrix}^T M_{\alpha, p} \begin{pmatrix} u \nabla w \\ w \nabla u \end{pmatrix} \geq 0. \quad (1.46)$$

En particulier (1.44) est satisfaite si $\xi^t = 0$ et $D_\xi U_0^\alpha \in L^p(\Omega)$.

2.2 Méthode des contractions différentielles

Dans cette partie, nous présentons une méthode simple et générale qui sert à fabriquer des familles de contractions pour des équations aux dérivées partielles non linéaires, d'évolution ou bien stationnaires. On s'intéresse dans ce travail à appliquer cette méthode particulièrement à l'équation des milieux poreux et l'équation doublement non linéaire.

Pour plus de détails sur cette partie, nous référons le lecteur au chapitre 5.

Dans ce qui suit, nous considérons le domaine $\Omega = \mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ qui est le tore de dimension $d \geq 1$. Soit

$$m > 0 \quad \text{et} \quad n = m - 1.$$

2.2.1 Equation des milieux poreux

Pour $T > 0$, nous considérons des solution positives $u(x, t)$ de l'équation suivante

$$\begin{cases} mu_t = \Delta u^m & \text{dans } (0, T) \times \Omega = Q_T, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (\text{PME})$$

où $0 \leq u_0 \in L^1(\Omega)$.

Construction des solutions

Soit $\varepsilon > 0$, on considère u_0^a et $u_0^b \in C^\infty(\Omega)$, telles que

$$\varepsilon \leq u_0^a, u_0^b \leq 1/\varepsilon.$$

Alors il existe u^a et u^b deux solutions classiques du problème (PME) avec données initiales u_0^a et u_0^b respectivement. Pour $s \in [0, 1]$, on choisit une fonction

$$\begin{aligned} u_0 &: [0, 1] \rightarrow C^\infty(\Omega) \\ s &\mapsto u_0^s, \end{aligned}$$

telle que $u_0 \in C^\infty([0, 1]; C^\infty(\Omega))$ est un chemin reliant u_0^a à u_0^b vérifiant

$$\varepsilon \leq u_0 \leq 1/\varepsilon,$$

c.à.d,

$$u_0^0 = u_0^a \quad \text{and} \quad u_0^1 = u_0^b.$$

Pour chaque $s \in [0, 1]$, on construit la fonction

$$\begin{aligned} u^s &: Q_T \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto u^s(x, t), \end{aligned}$$

comme étant la solution classique du problème (PME) avec donnée initiale u_0^s . Il est clair que

$$u^0 = u^a \quad \text{and} \quad u^1 = u^b.$$

On introduit maintenant

$$\begin{aligned} u &: Q_T \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t, s) &\mapsto u(x, t, s), \end{aligned} \quad (1.47)$$

tel que pour tout $x \in \Omega$ et tout $0 \leq s \leq 1$, on a

$$u(x, 0, s) = u_0^s(x),$$

et pour $t > 0$, on a

$$u(x, t, s) = u^s(x, t).$$

Ainsi on déduit, par construction, que pour $s \in [0, 1]$, $u^s = u(\cdot, \cdot, s)$ est solution du problème (PME) avec donnée initiale u_0^s .

On construit pour chaque $u_0 \in C^\infty([0, 1], C^\infty(\Omega))$, $u \in C^\infty([0, 1]; C^\infty(Q_T))$.

On définit l'ensemble \mathcal{E} des courbes régulières $u = u(\cdot, \cdot, s) = (u^s)_{s \in [0, 1]}$ construites dans (1.47) telles que $u^0 = u^a$ et $u^1 = u^b$.

Théorème 2.7. (Contraction pour (PME) dans le cas $p > 1$)

Considérons $0 < n < 1$. Pour $u_0^a, u_0^b \in C^\infty(\Omega)$ telles que $\varepsilon \leq u_0^a, u_0^b \leq 1/\varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$, Soient u^a et u^b les solutions classiques du problème (PME) avec données initiales u_0^a et u_0^b respectivement. Pour $1 < p \leq 1/n^2$, on définit

$$\beta_\pm(p) := \frac{p-1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 - n^2 p} \right), \quad (1.48)$$

et soit $\beta \in [\beta_-, \beta_+]$. Alors pour tout $t \geq 0$ on a, avec la notation $w(\tau) = w(\cdot, \tau)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ((u^b)^{1+\beta/p}(t) - (u^a)^{1+\beta/p}(t))_+^p dx &\leq \int_{\Omega} ((u_0^b)^{1+\beta/p} - (u_0^a)^{1+\beta/p})_+^p dx \\ &- \frac{(\beta+p)^p}{p^{p-1}} \int_0^t d\tau \int_0^1 ds \int_{\{u'>0\}} u^{n+\beta}(u')^p \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^t Q \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) dx, \end{aligned} \quad (1.49)$$

où $u \in \mathcal{E}$, $u' = \partial u / \partial s$ et

$$Q := \begin{pmatrix} \frac{\beta(\beta-1)}{p} + n\beta & \beta + \frac{n(p-1)}{2} \\ \beta + \frac{n(p-1)}{2} & p-1 \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

En plus, on a $Q \geq 0$ et $\int_{\Omega} ((u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p})_+^p dx$ est décroissante en temps.

Théorème 2.8. (Contraction pour (PME) pour le cas $p < 1$)

Considérons $0 < n \leq 1$. Soit u_0^a et $u_0^b \in C^\infty(\Omega)$ telles que

$$\varepsilon \leq u_0^a \leq u_0^b \leq 1/\varepsilon, \quad \text{pour } \varepsilon > 0.$$

Soient u^a et u^b les solutions classiques du problème (PME) avec données initiales u_0^a et u_0^b respectivement. Pour $0 < p \leq \min\{1, 1/n^2\}$, soit $\beta \in [\beta_-(p), \beta_+(p)]$ où β_- et β_+ sont donnés dans (1.48). Alors pour tout $t \geq 0$ on a, avec la notation $w(\tau) = w(\cdot, \tau)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi ((u^b)^{1+\beta/p}(t) - (u^a)^{1+\beta/p}(t)) dx &\leq \int_{\Omega} \psi ((u_0^b)^{1+\beta/p} - (u_0^a)^{1+\beta/p}) dx \\ &+ \frac{(\beta+p)^p}{p^{p-1}} \int_0^t dt \int_0^1 ds \int_{\{u'>0\}} u^{n+\beta}(u')^p \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^t Q \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) dx, \end{aligned} \quad (1.51)$$

où

$$\psi(x) = \begin{cases} -x^p & \text{si } x > 0, \\ +\infty & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \quad (1.52)$$

$u \in \mathcal{E}$ et Q est définie dans (1.50).

En plus, on a $Q \leq 0$ et $\int_{\Omega} \psi ((u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p}) dx$ est décroissante en temps.

2.2.2 Equations doublement non linéaire

On cherche à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(u^n e'(\nabla u)) & \text{dans } Q_T \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (\text{DNE})$$

où

$$\begin{aligned} e &: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ q &\longmapsto e(q), \end{aligned}$$

est une fonction convexe homogène de degré $\lambda + 1$ pour $\lambda > 0$ (voir [58]).

Construction des solutions

Similairement au cas de l'équation des milieux poreux, on choisit une fonction

$$\begin{aligned} u_0 &: [0, 1] \rightarrow C^\infty(\Omega) \\ s &\mapsto u_0^s, \end{aligned}$$

telle que $u_0 \in C^\infty([0, 1]; C^\infty(\Omega))$ est un chemin reliant u_0^a à u_0^b vérifiant

$$\varepsilon \leq u_0 \leq 1/\varepsilon.$$

On construit ensuite u

$$\begin{aligned} u &: Q_T \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t, s) &\mapsto u(x, t, s). \end{aligned} \quad (1.53)$$

telle que pour $s \in [0, 1]$, $u^s = u(\cdot, \cdot, s)$ est solution du problème (DNE) avec donnée initiale u_0^s . On définit l'ensemble \mathcal{E}' des courbes régulières $u = u(\cdot, \cdot, s) = (u^s)_{s \in [0, 1]}$ construites dans (1.53) telles que $u^0 = u^a$ et $u^1 = u^b$.

Théorème 2.9. (Contraction pour (DNE))

Considérons $0 < n < 1$ et $T > 0$. Soient $u_0^a, u_0^b \in C^\infty(\Omega)$ telles que

$$\varepsilon \leq u_0^a, u_0^b \leq 1/\varepsilon, \quad \text{pour } \varepsilon > 0.$$

Soient u^a et u^b des solutions classiques du problème (DNE) avec données initiales u_0^a et u_0^b respectivement. Pour $1 < p < 1/n$, on définit

$$\gamma_\pm := \frac{(p-1) \left[2\lambda + np - np\lambda \pm 2\sqrt{\lambda((1-np)\lambda + np(1-n))} \right]}{4\lambda(p-1) - p(\lambda+1)^2}. \quad (1.54)$$

Soit $\gamma \in [\gamma_-, \gamma_+]$ et $w = \sqrt{e''(\nabla u)}$. Alors pour tout $t \geq 0$ on a, avec la notation $w(\tau) = w(\cdot, \tau)$

$$\int_{\Omega} |(u^b)^{1+\gamma/p}(t) - (u^a)^{1+\gamma/p}(t)|^p dx \leq \int_{\Omega} |(u_0^b)^{1+\gamma/p} - (u_0^a)^{1+\gamma/p}|^p dx \quad (1.55)$$

$$-\frac{(\gamma+p)^p}{p^{p-1}} \int_0^t dt \int_0^1 ds \int_{\{u'>0\}} u^{n+\gamma}(u')^p \begin{pmatrix} w \nabla \ln u \\ w \nabla \ln u' \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} w \nabla \ln u \\ w \nabla \ln u' \end{pmatrix} dx,$$

où $u \in \mathcal{E}'$, $u' = \frac{\partial u}{\partial s}$ et

$$M := \begin{pmatrix} \frac{\gamma(\gamma-1)}{\lambda p} + \frac{n\gamma}{\lambda} & \frac{(\lambda+1)\gamma}{2\lambda} + \frac{n(p-1)}{2\lambda} \\ \frac{(\lambda+1)\gamma}{2\lambda} + \frac{n(p-1)}{2\lambda} & p-1 \end{pmatrix}. \quad (1.56)$$

En plus, on a $M \geq 0$ et $\int_{\Omega} |(u^b)^{1+\gamma/p} - (u^a)^{1+\gamma/p}|^p dx$ est décroissante en temps.

3 L'intrusion saline et des questions associées

Les résultats de cette section sont très formels et n'ont pas abouti effectivement à des publications.

On commence cette partie par une sorte d'introduction générale présentée dans le chapitre 6. Dans ce cadre, nous présentons le problème d'intrusion saline qui menace actuellement de nombreuses villes côtières dans le monde. Nous introduisons ainsi toutes les définitions et les notions nécessaires permettant au lecteur de se familiariser au monde de l'hydrologie souterraine.

D'autre part, il est bien connu que la modélisation est un outil qui sert à créer une vue simplifiée d'un système complexe dans le but de le comprendre et de l'analyser. Les modèles peuvent être physiques, mathématiques ou mécaniques. En effet, l'observation des phénomènes physiques nous permet d'établir les lois de la physique, qui se traduisent en général par des équations aux dérivées partielles qui souvent n'admettent pas des solutions analytiques. D'où le recours aux méthodes numériques afin de résoudre ces équations. Dans cette vue, nous traitons dans le chapitre 7 un modèle simplifié, proposé dans [48], modélisant l'intrusion saline en particulier dans la ville de Tripoli. Nous proposons plusieurs schémas numériques qui décrivent plusieurs cas. Des simulations numériques préliminaires sont présentées pour ce modèle dans le cas confiné sous des hypothèses particulières. Nous avons malheureusement pas eu le temps de développer cette partie et de tester l'efficacité et la robustesse de ces schémas.

Finalement, nous présentons dans le chapitre 8 des idées et des réflexions que nous avons eu pendant cette thèse sur le problème de transport optimal. Les résultats présentés ne sont pas rigoureux. Ils contiennent aussi des tentatives d'applications pour le problème d'intrusion saline, particulièrement pour le cas confiné.

Nous discutons en plus dans ce cadre des questions numériques assez intéressantes en considérant plusieurs schémas numériques. Mais le contenu de cette partie se restreint à des discussions et des réflexions préliminaires qui pourront aboutir à des résultats intéressants dans le futur.

Première partie

Blister Model

Chapitre 2

Explicit global minimizers of a one-dimensional blister model

This chapter leads to a submitted paper in collaboration with M. Jazar and R. Monneau [30]. The current version is more detailed than the original one. In this work, we consider a simple one-dimensional variational model, describing the delamination of thin films under cooling. We characterize the global minimizers, which correspond to films of three possible types : non delaminated, partially delaminated (called blisters), or fully delaminated. Two parameters play an important role : the length of the film and the cooling parameter. In the phase plane of those two parameters, we classify all the minimizers. As a consequence of our analysis, we identify explicitly the smallest possible blisters for this model.

Abstract

We consider a thin film bonded to a substrate. The film acquires a residual stress upon cooling because of the mismatch of thermal expansion coefficient between the film and the substrate. The film tends to lift off the substrate when this residual stress is compressive and large enough. In this work, this phenomenon is described by a simplified one-dimensional variational model. We minimize an energy and study its global minimizers. Our problem depends on three parameters : the length of the film, its elasticity and a thermal parameter. Our main result consists in describing a phase diagram depending on those parameters in order to identify three types of global minimizers : a blister, a fully delaminated blister and a trivial solution (without any delamination). Moreover, we prove various qualitative results on the shape of the blisters and identify the smallest blister which may appear.

Keywords : blister, thin film, fracture, delamination, buckling, Föppel-von Kármán, variational model, classification of global minimizers, phase diagram, nonlinear elasticity, obstacle problem, non interpenetration condition.

1 Introduction

1.1 Physical motivation

The thin films are often obtained by evaporation on a substrate. When the coefficient of thermal expansion of the substrate is higher than that of the film, cooling to ambient temperature leads to a compressive residual stress in the film. If compression is sufficient, the film tends to buckle, separating from the substrate. It is said that the film delaminates (see Figure 2.1).

An oversimplified one dimensional model which describes this phenomena is given by the minimization of the following energy (of Föppel-von Kármán type)

$$E(\zeta_1, \zeta_2) := \int_{\Omega} \gamma \mathbf{1}_{\{\zeta_2 > 0\}} + 4\alpha \left(\zeta_1' + \frac{1}{2}(\zeta_2')^2 \right)^2 + \frac{4\alpha}{3} \zeta_2'^2 - 2\bar{\theta} \zeta_2'^2 \quad \text{with} \quad \gamma \neq 0 \quad (2.1)$$

with

$$\Omega = \mathbb{R}/\bar{L}\mathbb{Z} = [-\bar{L}/2, \bar{L}/2]_{per},$$

and where \bar{L} is the length of the film, $\alpha > 0$ represents its elasticity coefficient and $\bar{\theta} > 0$ is the thermal parameter. Here the parameter γ measures the cost of delamination and is similar to the formulation of fracture with Griffith criterion (see for instance Francfort, Marigo [45], Griffith [46], Larsen [50]). For $\gamma = 0$, this model was formally derived from 3D elasticity in the asymptotics of thin films in [42] by

El Doussouki and the last author, see also [53]. For simplicity, we normalize this parameter γ to be equal to 1 in the whole paper (this normalization can always be absorbed in a redefinition of E , α and $\bar{\theta}$ by rescaling). The quantity $\zeta_2(x)$ denotes the vertical displacement and is assumed to be nonnegative (the film is above the substrate) and $\zeta_1(x)$ is the horizontal one with $x \in \Omega$, where the periodicity is assumed to simplify the analysis (see also Remark 1.4 for other boundary conditions describing a clamped film). We introduce the following space

$$Y := H^1(\Omega) \times \{\zeta_2 \in H^2(\Omega), \zeta_2 \geq 0\}. \quad (2.2)$$

The solution of our model is given by solving the following problem

$$\min_{(\zeta_1, \zeta_2) \in Y} E(\zeta_1, \zeta_2). \quad (2.3)$$

Definition 1.1. (Blister)

We call a "blister" any global minimizer of the energy E defined in (2.1) which is non trivial i.e. $(\zeta_1, \zeta_2) \neq (0, 0)$.

This paper elaborates the delamination of compressed thin films. Under appropriate conditions, blisters may appear. We give a complete description of global minimizers in terms of the parameters of the problem.

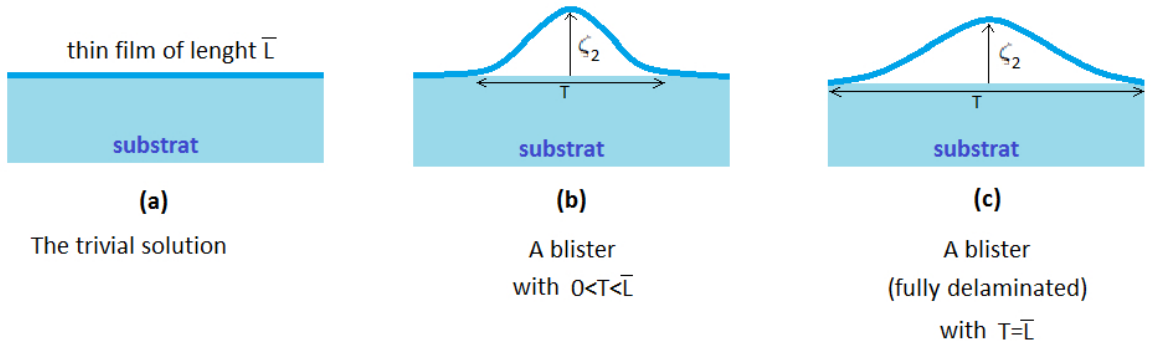


FIGURE 2.1 – Different types of solutions of problem (2.3)

1.2 Main results

Theorem 1.2. (Existence of global minimizers)

There exists a (global) minimizer $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in Y$ of the energy E introduced in (2.1).

In order to study minimizers of E , it is useful to consider the following auxiliary minimizing problem

$$\min_{X \in \mathcal{D}} f(X), \quad (2.4)$$

where

$$f(X) := \begin{cases} (\theta - X)^{-1/2} - LX^2 & \text{if } 0 < X < \theta; \\ 0 & \text{if } X = 0; \end{cases} \quad (2.5)$$

with rescaled versions of the thermal parameter $\bar{\theta}$ and of the length \bar{L}

$$\theta := \frac{\bar{\theta}}{\alpha}, \quad \text{and} \quad L := \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \bar{L}, \quad (2.6)$$

where $\alpha > 0$ is from now on fixed in the model and \mathcal{D} is the interval given by

$$\mathcal{D} := [0, \tilde{\theta}^+], \quad \text{with} \quad \tilde{\theta}^+ = \max \{ \tilde{\theta}, 0 \} \quad \text{and} \quad \tilde{\theta} := \theta - \frac{\alpha^2}{L^2}. \quad (2.7)$$

Indeed the following theorem shows that the minimizing problem (2.3) is equivalent to the study of the auxiliary problem (2.4).

Theorem 1.3. (*Description of global minimizers of E*)

i) (*Implication*)

For any global minimizer $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ of the energy E , there exists at least a minimizer $K \in \mathcal{D}$ of problem (2.4) such that the following holds : there exists $T \in [0, \bar{L}]$ such that (up to addition of constants and translation of (ζ_1, ζ_2)), this minimizer ζ can be written as follows

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_1(x) = \begin{cases} \frac{K}{2} \left(x + \frac{\bar{L}}{2} \right) & \text{in } [-\bar{L}/2, -T/2]; \\ \frac{K\bar{L}}{8\pi} \sin(2\beta x) + \frac{K}{2} \left(1 - \frac{\bar{L}}{T} \right) x & \text{in } (-T/2, T/2); \\ \frac{K}{2} \left(x - \frac{\bar{L}}{2} \right) & \text{in } [T/2, \bar{L}/2], \end{cases} \\ \zeta_2(x) = \begin{cases} A(\cos(\beta x) + 1) & \text{in } [-T/2, T/2]; \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

where β , T and A are given by

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta := \sqrt{\frac{3(\bar{\theta} - \alpha K)}{2\alpha}}; \\ T := \begin{cases} \frac{2\pi}{\beta} & \text{if } K > 0; \\ 0 & \text{if } K = 0; \end{cases} \\ A := \sqrt{\frac{K\bar{L}}{\pi\beta}}. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

More generally, for any $K \in \mathcal{D}$ and any functions (ζ_1, ζ_2) given in (2.8)-(2.9), we have

$$E(\zeta_1, \zeta_2) = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}f(K), \quad (2.10)$$

and for $K \in \mathcal{D}$

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \bar{L} \Leftrightarrow K = \tilde{\theta}; \\ \text{and} \\ T < \bar{L} \Leftrightarrow K < \tilde{\theta}. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

ii) (Reciprocal)

If $K \in \mathcal{D}$ is a minimizer of problem (2.4), then the function $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ given in (2.8)-(2.9) is a global minimizer of E on Y .

Notice that $\bar{\theta} - \alpha K > 0$ because $K \in \mathcal{D}$. Moreover, when $K = 0$ then $A = T = 0$ which implies that $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$. Thus with our definition, T can be interpreted as the length of the support of ζ_2 . Theorem 1.3 identifies three types of global minimizers. For $K = 0$, we get the trivial solution (Figure 2.1, (a)). For $K \in (0, \tilde{\theta})$, then $0 < T < \bar{L}$ and we get the blister solution (Figure 2.1, (b)). Finally, for $K = \tilde{\theta}$, then $T = \bar{L}$ and we get the fully delaminated blister (Figure 2.1, (c)). We still use the name "blister" for the mathematical solution even if physically the film is completely delaminated. Note that our blister solution (Figure 2.1, (b)) can be roughly speaking seen as the cross section of blisters with the shape of fingers (see for instance experiments in Figure 8.1 in [65]).

Remark 1.4. (Clamped boundary conditions)

Recall that the periodic boundary conditions are included in the set Y defined in (2.2).

We now introduce another set of functions satisfying clamped boundary conditions

$$\tilde{Y} := H_0^1(-\bar{L}/2, \bar{L}/2) \times \{\zeta_2 \in H_0^2(-\bar{L}/2, \bar{L}/2), \zeta_2 \geq 0\}.$$

Then

$$\inf_{\tilde{Y}} E \geq \inf_Y E,$$

because any $y \in \tilde{Y}$ can be seen as an element of Y when it is extended by periodicity. Moreover, any global minimizer of E on Y is given (up to addition of constants and translation of (ζ_1, ζ_2)) by the solution written in (2.8) which satisfies $(\zeta_1, \zeta_2) \in \tilde{Y}$. Therefore,

$$\inf_{\tilde{Y}} E = \inf_Y E,$$

and then in this paper we also solved the minimization problem of E on \tilde{Y} .

To classify the solutions obtained in Theorem 1.3, we have to define the following functions in order to introduce some domains D_0 , D_1 and D_2 of parameters (θ, L) . Figure 2.2 describes those domains (still for arbitrary fixed value α). We will show that trivial solutions correspond to D_0 , blister solutions to D_1 and fully delaminated blister to D_2 . For this purpose, we introduce

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta^* := \frac{5}{4}\alpha^{-1/2}; \end{array} \right. \quad (2.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{01}(\theta) := \frac{5^{5/2}}{16}\theta^{-5/2} \end{array} \right. \quad \text{for } \theta > 0; \quad (2.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{02}(\theta) := \frac{\alpha^{5/4}}{(\sqrt{\alpha}\theta - 1)^{1/2}} \end{array} \right. \quad \text{for } \theta > \alpha^{-1/2}; \quad (2.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{12}(\theta) := \left(2\alpha^3\theta + 2\alpha^2\sqrt{\alpha(\alpha\theta^2 - 1)}\right)^{1/2} \end{array} \right. \quad \text{for } \theta \geq \theta^* > \alpha^{-1/2}. \quad (2.15)$$

Definition 1.5. (Domains D_0 , D_1 and D_2)

Let us now introduce the following domains

$$\left\{ \begin{array}{l} D_0 := \left\{ \begin{array}{l} (\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \quad L < L_{01}(\theta) \quad \text{if } 0 < \theta \leq \theta^* \\ \quad L < L_{02}(\theta) \quad \text{if } \theta > \theta^* \end{array} \right\}; \end{array} \right. \quad (2.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 := \left\{ \begin{array}{l} (\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \quad L > L_{01}(\theta) \quad \text{if } 0 < \theta \leq \theta^* \\ \quad L > L_{12}(\theta) \quad \text{if } \theta > \theta^* \end{array} \right\}; \end{array} \right. \quad (2.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_2 := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \theta > \theta^* \text{ and } L_{02}(\theta) < L < L_{12}(\theta)\}. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

We denote by

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{01} := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, 0 < \theta < \theta^* \text{ and } L = L_{01}(\theta)\}; \\ \Gamma_{02} := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \theta > \theta^* \text{ and } L = L_{02}(\theta)\}; \\ \Gamma_{12} := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \theta > \theta^* \text{ and } L = L_{12}(\theta)\}; \\ P = (\theta^*, L_{01}(\theta^*)). \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.19) \\ (2.20) \\ (2.21) \\ (2.22) \end{array}$$

Remark 1.6. (*A partition of the domains*)

We have the following disjoint decomposition

$$(0, +\infty)^2 = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup \Gamma_{21} \cup \Gamma_{01} \cup \Gamma_{02} \cup \{P\}.$$

Moreover, the following properties hold true

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{01}(\theta) < L_{02}(\theta), \quad \text{for } \theta > \theta^*; \\ L'_{12}(\theta) > 0 \text{ and } L'_{02}(\theta) < 0, \quad \text{for } \theta > \theta^*; \\ L'_{01}(\theta) < 0, \quad \text{for } 0 < \theta < \theta^*; \\ L_{12}(\theta^*) = L_{01}(\theta^*) = L_{02}(\theta^*); \end{array} \right. \quad (2.23)$$

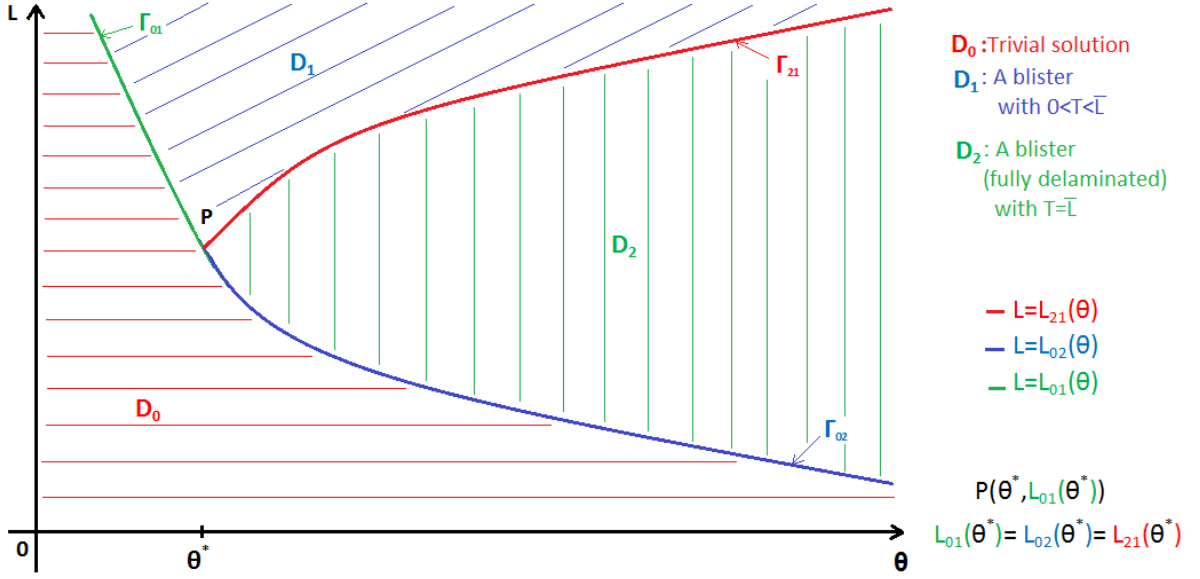
where θ^* is defined in (2.12).

The proof of Remark 1.6 is done by a simple computation, except for the first point of (2.23) which is demonstrated in Lemma 4.8 point 1.

Theorem 1.7. (*Classification of global minimizers of E*)

- For $(\theta, L) \in D_0$, the unique global minimizer of the energy E introduced in (2.1) is the trivial solution $(\zeta_1, \zeta_2) = (0, 0)$.
- For $(\theta, L) \in D_1 \cup D_2 \cup \Gamma_{12}$, there is a unique blister $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in Y$ (see Definition 1.1) minimizing the energy E . Moreover, the component ζ_2 has a support of length T which is defined in (2.9) and

$$\left\{ \begin{array}{l} T < \bar{L} \quad \text{if } (\theta, L) \in D_1; \\ T = \bar{L} \quad \text{if } (\theta, L) \in D_2 \cup \Gamma_{12}. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

FIGURE 2.2 – Schematic phase diagram for parameters (θ, L)

— For $(\theta, L) \in \Gamma_{01} \cup \Gamma_{02} \cup \{P\}$, the energy E has exactly two global minimizers : the trivial solution $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) = (0, 0)$ and a blister $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in Y$ given in (2.8) with

$$\begin{cases} T < \bar{L} & \text{if } (\theta, L) \in \Gamma_{01}; \\ T = \bar{L} & \text{if } (\theta, L) \in \Gamma_{02} \cup \{P\}. \end{cases} \quad (2.25)$$

Proposition 1.8. (Blister's properties in $D_1 \cup D_2 \cup \Gamma_{12}$)

For $(\theta, L) \in D_1 \cup D_2 \cup \Gamma_{12}$, there exists a unique $K \in \mathcal{D}$ (depending on (θ, L)) minimizing problem (2.4). Recalling (2.6), we consider T and A given in (2.9).

i) Monotonicity

First, T and A are continuous in (θ, L) on $D_1 \cup D_2 \cup \Gamma_{12}$ and satisfy the following properties

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}, \frac{\partial T}{\partial L} \geq 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial A}{\partial \theta}, \frac{\partial A}{\partial L} \geq 0.$$

In particular,

$$T = \bar{L} \quad \text{on} \quad D_2 \cup \Gamma_{12}.$$

ii) "Smallest" blister solutions

We have

$$\inf_{(\theta, L) \in D_1} T = T^* := 4\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha^{1/4}, \quad (2.26)$$

and

$$\inf_{(\theta, L) \in D_1} A = A^* := \frac{4}{\sqrt{3}}. \quad (2.27)$$

We refer to Figure 2.3 for an illustration of Proposition 1.8.

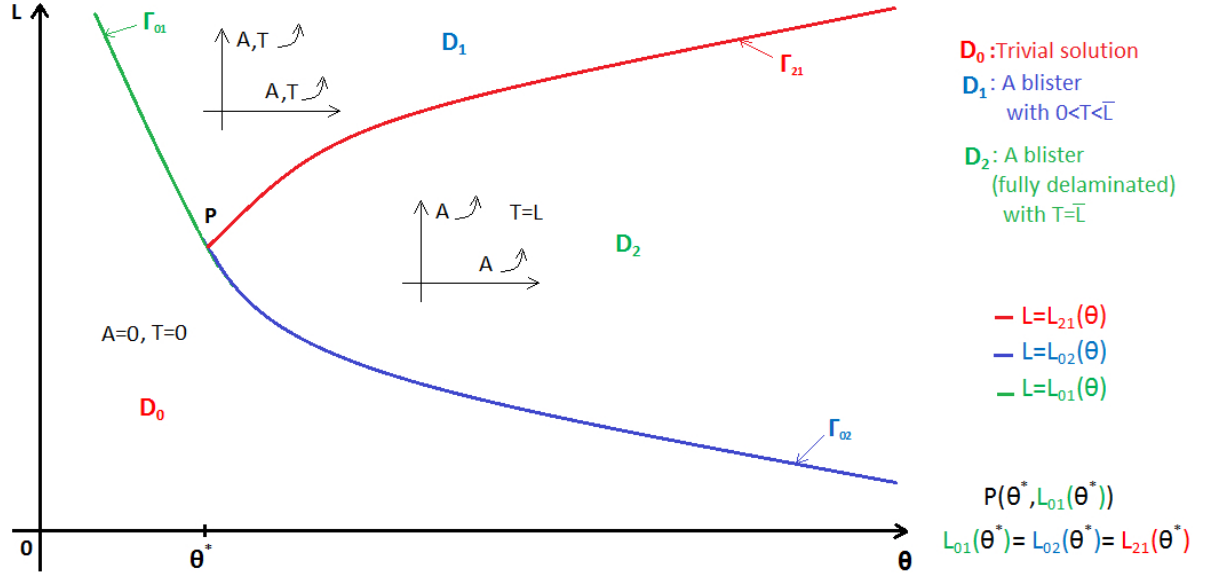


FIGURE 2.3 – Schematic describing the monotonicity of A and T

Remark 1.9. (*Prediction for the smallest blisters; not fully delaminated case*)

For any $(\theta, L) \in D_1$, we have a unique blister $(\zeta_1, \zeta_2) \in Y$ minimizing the energy E . According to Proposition 1.8, the second component ζ_2 has a support of length $T > T^*$ with $T < \bar{L}$. This shows that T^* can be interpreted as the infimum of the width of blisters whose length support is strictly less than the length of the film. Similarly, we can also interpret the amplitude A^* as the minimal amplitude of the blisters.

Remark 1.10. (*Values of K on $\Gamma_{01} \cup \Gamma_{02} \cup \{P\}$*)

On the curve $\Gamma_{01} \cup \Gamma_{02} \cup \{P\}$, we have two possible values of K

$$K = 0 \quad \text{or} \quad \begin{cases} K \in (0, \tilde{\theta}) & \text{if } (\theta, L) \in \Gamma_{01}; \\ K = \tilde{\theta} & \text{if } (\theta, L) \in \Gamma_{02} \cup \{P\}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Remark 1.11. (*Relatively small blisters for large L*)

For $(\theta, L) \in D_1$, it is possible to check, as L tends to infinity, that T and A have a behavior like $L^{1/3}$ and $L^{2/3}$ respectively. In particular, for θ fixed and for large enough films, the size of the blisters is much smaller than the size of the film.

Remark 1.12. (*Phase diagram for local minimizers*)

For local minimizers (with small perturbation of the support), we expect to have similar phase diagram for p blisters (only local minimizers) of the same width T with now \bar{L} replaced by \bar{L}/p , L replaced by L/p and $T \leq \bar{L}/p$ (see Remark 2.3).

1.3 Brief review of the literature

Buckling delamination blisters have commonly been studied for a long time. In [47], Gioia and Ortiz give an overview of experiments, propose and study mathematically variational models of blisters, among other things motivated by the description of telephone-cord morphology. See also [13] where such a telephone-cord instability is studied.

Experimentally and theoretically in [60], the authors study blisters which have the one dimensional symmetry. Their results seem coherent with ours, even if the problem and the modeling are not exactly the same. We also refer the reader to [15] and the references therein for recent developments on the analysis and modeling of blisters. In this nice work, the authors consider a Föppel-von Kármán model for the film with a special bonding energy with the substrate. For this variational model, they study several regimes for the energy. This is also interesting to mention the work [14] where the authors derive rigorously a variational similar model of thin films bonded to a substrate when the thickness of the film goes to zero. Their limit energy contains in particular a bonding term which is similar to our term with γ in the energy (2.1).

1.4 Organization of the paper

The organization of the paper is as follows. In Section 2, we prove Theorems 1.2 and 1.3 i). In Section 3, we are first interested in solving the auxiliary minimizing problem (2.4). The results are in particular based on Propositions 3.1 which focuses on the minimization of f on $[0, \theta)$ and Proposition 3.3 concerning the identification of domains introduced in Definition 1.5. In the second part of this section, we give the proofs of Theorems 1.3 ii), 1.7 and Proposition 1.8. Finally in Section 4, we end up with the appendix, where the first subsection is devoted to present some results which will be useful to prove Proposition 3.3. In the second subsection, we give some technical lemmas concerning the geometrical aspect of some curves describing our domains. The last subsection is then dedicated to prove Proposition 3.3.

2 Proofs of Theorems 1.2 and 1.3 i)

This section is divided into two parts : the first is devoted to prove Theorem 1.2 and the second one is dedicated to the proof of Theorem 1.3 i).

2.1 Existence of global minimizers

In order to prove Theorem 1.2, we begin this subsection by the following lemma.

Lemma 2.1. (*Orthogonal decomposition*)

Consider two functions $\zeta_1, w \in H^1(\mathbb{R}/\overline{L}\mathbb{Z})$, then we have

$$\int_{\Omega} (w + \zeta_1')^2 dx = \int_{\Omega} (\bar{w} + \zeta_1')^2 dx + \frac{1}{\overline{L}} \left(\int_{\Omega} w dx \right)^2,$$

where $\bar{w} = w - \oint_{\Omega} w dx$.

Proof of Lemma 2.1

We set $c = \oint_{\Omega} w$, then we get

$$\int_{\Omega} (w + \zeta_1')^2 = \int_{\Omega} (\bar{w} + \zeta_1' + c)^2 = \int_{\Omega} (\bar{w} + \zeta_1')^2 + c^2,$$

where we have used the fact that $\int_{\Omega} \bar{w} = 0 = \int_{\Omega} \zeta_1'$. This gives the result. \square

Proof of Theorem 1.2

The proof of Theorem 1.2 seems very classical, but for the convenience of the reader, we give a complete proof.

Let us consider a minimizing sequence $\zeta^k = (\zeta_1^k, \zeta_2^k) \in Y$ such that

$$E(\zeta^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} I = \inf_{\zeta \in Y} E(\zeta).$$

Step 1 : Bounds on a minimizing sequence

For simplicity, we denote the derivative of ζ^k by

$$\zeta^{k'} = \frac{d}{dx} \zeta^k \quad \text{and} \quad \zeta^{k''} = \frac{d^2}{dx^2} \zeta^k.$$

First using Young's inequality, we get

$$2\bar{\theta} \int_{\Omega} (\zeta_2^{k'})^2 = 4\bar{\theta} \int_{\Omega} \left(\zeta_1^{k'} + \frac{1}{2} (\zeta_2^{k'})^2 \right) \leq \frac{2\bar{\theta}^2 \overline{L}}{\alpha} + 2\alpha \int_{\Omega} \left(\zeta_1^{k'} + \frac{1}{2} (\zeta_2^{k'})^2 \right)^2. \quad (2.29)$$

Then

$$E(\zeta^k) \geq -\frac{2\bar{\theta}^2 \overline{L}}{\alpha} + \int_{\Omega} 2\alpha \left(\zeta_1^{k'} + \frac{1}{2} (\zeta_2^{k'})^2 \right)^2 + \frac{4\alpha}{3} (\zeta_2^{k''})^2.$$

Using Lemma 2.1 with $w = \frac{1}{2}(\zeta_2^{k'})^2$, we have

$$E(\zeta^k) \geq \frac{\alpha}{2\bar{L}} \left(\int_{\Omega} (\zeta_2^{k'})^2 \right)^2 - \frac{2\bar{\theta}^2 \bar{L}}{\alpha} + \int_{\Omega} 2\alpha \left(\zeta_1^{k'} + \frac{1}{2}(\zeta_2^{k'})^2 - \frac{1}{2\bar{L}} \int_{\Omega} (\zeta_2^{k'})^2 \right)^2 + \frac{4\alpha}{3} (\zeta_2^{k'})^2. \quad (2.30)$$

Up to addition of a constant to ζ_2^k , we can assume that $\inf_{\Omega} \zeta_2^k = 0$. Therefore there exists $x_0 \in \Omega$ such that $\zeta_2^k(x_0) = \zeta_2^k(x_0 + L) = 0$. Up to translation of ζ^k , we can choose $x_0 = -L/2$. Now applying Poincaré inequality, we deduce that there exists a constant C_{Ω} depending on Ω such that

$$|\zeta_2^k|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} \left| \zeta_2^{k'} \right|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.31)$$

Since $E(\zeta^k) \leq I + 1$, we conclude using (2.30) and (2.31) that

$$|\zeta_2^k|_{H^2} \leq C.$$

Similarly, we can assume that $\inf_{\Omega} \zeta_1^k = 0$. Applying Poincaré inequality again, we deduce that

$$|\zeta_1^k|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} \left| \zeta_1^{k'} \right|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.32)$$

By Sobolev embedding, we have

$$|(\zeta_2^{k'})^2|_{L^2(\Omega)} \leq c |(\zeta_2^k)^2|_{H^2(\Omega)}.$$

Now using (2.32) and (2.30), we get

$$|\zeta_1^k|_{H^1} \leq C.$$

Therefore

$$\zeta^k \rightharpoonup \zeta \text{ weakly in } Y.$$

Let us now demonstrate that $E(\zeta) = I$. To this end, we decompose the energy $E(\zeta)$ in

$$E(\zeta) := E_0(\zeta) + E_1(\zeta),$$

where

$$E_0(\zeta) := \int_{\Omega} 4\alpha \left(\zeta_1' + \frac{1}{2}(\zeta_2')^2 \right)^2 + \frac{4\alpha}{3} (\zeta_2'')^2 - 2\bar{\theta}(\zeta_2')^2,$$

and

$$E_1(\zeta) := \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{\zeta_2 > 0\}}.$$

Step 2 : Study of E_0

Because ζ_2^k is bounded in $H^2(\Omega)$, we deduce that

$$\zeta_2^{k''} \rightharpoonup \zeta_2'' \quad \text{weakly in } L^2(\Omega), \quad (2.33)$$

$$\zeta_2^{k'} \rightharpoonup \zeta_2' \quad \text{weakly in } H^1(\Omega) \xrightarrow{\text{compact}} L^4(\Omega), \quad (2.34)$$

and from (9), we deduce that

$$(\zeta_2^{k'})^2 \longrightarrow (\zeta_2')^2 \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

Thus, we obtain

$$\zeta_1^{k'} + \frac{1}{2}(\zeta_2^{k'})^2 \rightharpoonup \zeta_1' + \frac{1}{2}(\zeta_2')^2 \quad \text{weakly in } L^2(\Omega). \quad (2.35)$$

From (5) and (11), we get

$$\int_{\Omega} 4\alpha \left(\zeta_1' + \frac{1}{2}(\zeta_2')^2 \right)^2 + \frac{4\alpha}{3}(\zeta_2'')^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} 4\alpha \left(\zeta_1^{k'} + \frac{1}{2}(\zeta_2^{k'})^2 \right)^2 + \frac{4\alpha}{3}(\zeta_2^{k''})^2. \quad (2.36)$$

Moreover, we have

$$\zeta_2^{k'} \longrightarrow \zeta_2' \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

from which we deduce using (2.36) that

$$E_0(\zeta) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E_0(\zeta^k). \quad (2.37)$$

Step 3 : Study of E_1

On the other hand, since $H^1(\Omega)$ is compactly embedded in $L^\infty(\Omega)$ and $(\zeta_2^k)_k$ is bounded in $H^2(\Omega)$, we deduce in particular that

$$\zeta_2^k \longrightarrow \zeta_2 \quad \text{in } L^\infty(\Omega).$$

For all x_0 , such that $\zeta_2(x_0) > 0$, we know that $\zeta_2^k(x_0) > 0$ for k large enough. Thus

$$\mathbf{1}_{\{\zeta_2^k > 0\}} \longrightarrow 1 \quad \text{on } \{\zeta_2 > 0\},$$

then, applying Fatou's Lemma, we get

$$E_1(\zeta) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{\zeta_2 > 0\}} \leq \int_{\Omega} \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{\{\zeta_2^k > 0\}} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{\zeta_2^k > 0\}} = \liminf_{k \rightarrow \infty} E_1(\zeta^k). \quad (2.38)$$

Therefore from (2.37) and (2.38), we get

$$E(\zeta) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E(\zeta^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} E(\zeta^k) = I,$$

which implies that $\zeta \in Y$ is a minimizer of E on Y . □

2.2 Description of global minimizers of E

We first start this subsection by the following lemma which will be used to prove Theorem 1.3 i).

Lemma 2.2. (Classification of solutions ζ_2)

Let $\zeta_2 \in \{f \in H^2(\Omega), f \geq 0\}$. Consider the following ordinary differential equation

$$\begin{cases} \zeta_2^{(4)} + \frac{3(\bar{\theta} - \alpha K)}{2\alpha} \zeta_2'' = 0 & \text{on } \omega_0 = (x_0, y_0); \\ \zeta_2 > 0 & \text{on } \omega_0; \\ \zeta_2 = 0 & \text{on } \partial\omega_0; \end{cases} \quad (2.39)$$

where $x_0 < y_0$.

If $\bar{\theta} - \alpha K \leq 0$, then there is no solution of (2.39).

If $\bar{\theta} - \alpha K > 0$, then up to translate ζ_2 , we have

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{T}{2} \quad \text{and} \quad y_0 = \frac{T}{2}; \\ \zeta_2(x) = A_0(\cos(\beta x) + 1) & \text{on } \omega_0 = (x_0, y_0); \\ \beta = \sqrt{\frac{3(\bar{\theta} - \alpha K)}{2\alpha}} = \frac{2\pi}{T}; \end{cases} \quad (2.40)$$

where $A_0 > 0$ is a constant.

Proof of Lemma 2.2

Since $\zeta_2 \in H^2(\mathbb{R}/\bar{L}\mathbb{Z})$, then $\zeta_2 \in C^1(\mathbb{R}/\bar{L}\mathbb{Z})$. Moreover $\zeta_2 \geq 0$, which implies that

$$\zeta_2(x_0) = \zeta_2'(x_0) = 0 = \zeta_2(y_0) = \zeta_2'(y_0). \quad (2.41)$$

We have

$$\zeta_2(x) = \zeta_2^S(x) + \zeta_2^A(x) \quad \text{on } \omega_0 = (x_0, y_0),$$

where

$$\zeta_2^S(x) = \frac{\zeta_2(x) + \zeta_2(-x)}{2},$$

and

$$\zeta_2^A(x) = \frac{\zeta_2(x) - \zeta_2(-x)}{2}.$$

We define $T := y_0 - x_0 > 0$ and then up to translate the solution, we can assume that

$$\omega_0 = (-T/2, T/2) \quad \text{with} \quad x_0 = -T/2 \quad \text{and} \quad y_0 = T/2. \quad (2.42)$$

The symmetric part ζ_2^S verifies the following conditions

$$\zeta_2^S > 0 \quad \text{on } \omega_0 \quad \text{and} \quad \zeta_2^S = (\zeta_2^S)' = 0 \quad \text{on } \partial\omega_0, \quad (2.43)$$

and the antisymmetric part ζ_2^A satisfies

$$\zeta_2^A = (\zeta_2^A)' = 0 \quad \text{on } \partial\omega_0. \quad (2.44)$$

Case 1 : If $\bar{\theta} - \alpha K > 0$, then we have

$$\zeta_2^S(x) = A_0 \cos(\beta x) + D_0,$$

and

$$\zeta_2^A(x) = B_0 \sin(\beta x) + C_0 x$$

with A_0, B_0, C_0 and D_0 are real constants and

$$\beta = \sqrt{\frac{3(\bar{\theta} - \alpha K)}{2\alpha}}.$$

If $A_0 = 0$, then $D_0 = 0$ and thus $\zeta_2^S \equiv 0$. Therefore $\zeta_2(0) = \zeta_2^A(0) = 0$ which is impossible since $\zeta_2 > 0$ on ω_0 .

If $A_0 \neq 0$, using (2.43) we can show that $A_0 = D_0$ and

$$\beta = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.45)$$

Thus (2.44) can be written as

$$\begin{pmatrix} \sin(\beta T/2) & T/2 \\ \beta \cos(\beta T/2) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Using (2.45), we can deduce that the determinant of this matrix is nonzero, which implies that $B_0 = C_0 = 0$ and then $\zeta_2^A \equiv 0$.

Therefore the solution of (2.39) is given by (2.40).

Case 2 : If $\bar{\theta} - \alpha K = 0$, then ζ_2 is a polynomial of degree less or equal to 3 and using (2.41), we can write

$$\zeta_2'(x) = A(x - x_0)(y - y_0).$$

Moreover

$$0 = \zeta_2(y_0) - \zeta_2(x_0) = \int_{\omega_0} \zeta_2'(x) dx.$$

But for all $x \in \omega_0$, $\zeta_2'(x)$ has the same sign as $-A$. Then we deduce that $A = 0$ and therefore $\zeta_2 \equiv 0$ which is impossible since $\zeta_2 > 0$ on ω_0 .

Case 3 : If $\bar{\theta} - \alpha K < 0$, then we have

$$\zeta_2^S(x) = A_0 \cosh(\beta x) + D_0,$$

and

$$\zeta_2^A(x) = B_0 \sinh(\beta x) + C_0 x$$

with A_0, B_0, C_0 and D_0 are real constants and

$$\beta = \sqrt{-\frac{3(\bar{\theta} - \alpha K)}{2\alpha}}.$$

Recall that ζ_2^S satisfies conditions (2.43) and ζ_2^A verifies (2.44).

As in case 1, if $A_0 = 0$, then $D_0 = 0$ and thus $\zeta_2^S \equiv 0$. Therefore $\zeta_2(0) = \zeta_2^A(0) = 0$ which is impossible since $\zeta_2 > 0$ on ω_0 .

If $A_0 \neq 0$, using (2.43) we have $(\zeta_2^S)'(T/2) = A_0 \beta \sinh(\beta T/2) = 0$. Hence $T = 0$, which is impossible since $x_0 \neq y_0$. □

Proof of Theorem 1.3 i)

Consider $(\zeta_1, \zeta_2) \in Y$ a minimizer of E .

Step 1 : Differentiating E with respect to ζ_1

Differentiating E with respect to ζ_1 leads to the following Euler-Lagrange equation :

$$\left(\zeta_1' + \frac{1}{2}(\zeta_2')^2 \right)' = 0 \quad \text{on } \mathbb{R}/\bar{L}\mathbb{Z},$$

i.e.

$$\zeta_1' + \frac{1}{2}(\zeta_2')^2 = \frac{K}{2}, \tag{2.46}$$

for some constant K given by

$$K = \frac{1}{L} \int_{\Omega} (\zeta_2')^2 \geq 0, \tag{2.47}$$

where we have used the fact that $\int_{\Omega} \zeta_1' = 0$. Therefore

$$\int_{\Omega} \left(\zeta_1' + \frac{1}{2}(\zeta_2')^2 \right)^2 = \frac{K^2 \bar{L}}{4} = \frac{1}{4\bar{L}} \left(\int_{\Omega} (\zeta_2')^2 \right)^2. \tag{2.48}$$

Using (2.48), the total energy becomes

$$E(\zeta_1, \zeta_2) = \bar{E}(\zeta_2) := \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{\zeta_2 > 0\}} + \frac{\alpha}{L} \left(\int_{\Omega} (\zeta_2')^2 \right)^2 + \frac{4\alpha}{3} \int_{\Omega} (\zeta_2'')^2 - 2\bar{\theta} \int_{\Omega} (\zeta_2')^2.$$

If $K = 0$, then $\zeta_2 \equiv 0$ and thus $\zeta_1 \equiv \text{const}$ on Ω , and up to subtract a constant to ζ_1 , we can assume that $\zeta_1 \equiv 0$.

If $K > 0$, then $\zeta_2 \not\equiv 0$ and we proceed as follows.

Step 2 : Differentiating \bar{E} with respect to ζ_2

Differentiating \bar{E} with respect to ζ_2 , yields the following Euler-Lagrange equation

$$\zeta_2^{(4)} + \frac{3(\bar{\theta} - \alpha K)}{2\alpha} \zeta_2'' = 0 \quad \text{on} \quad \{\zeta_2 > 0\}.$$

Up to add a constant to ζ_2 , we can assume that $\inf_{\Omega} \zeta_2 = 0$. Therefore there exists $x_0 \in \Omega$ such that $\zeta_2(x_0) = 0$. Up to translation, we choose $x_0 = -\bar{L}/2$. Then, we deduce that

$$\{\zeta_2 > 0\} = \bigcup_{i \in J} \omega_i, \quad \text{for} \quad \omega_i = (x_i, y_i),$$

where J is a set at most countable and such that $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$ for $i \neq j$. Applying Lemma 2.2 to each ω_i , we conclude that $\bar{\theta} - \alpha K > 0$,

$$y_i - x_i = T = 2\pi \sqrt{\frac{2\alpha}{3(\bar{\theta} - \alpha K)}}$$

and up to translation, the solution ζ_2 is given by (2.40) on each ω_i with the amplitude A_0 replaced by A_i . Now, we deduce that $\text{card}(J) = p < +\infty$ with $p \geq 1$ satisfying $pT \leq \bar{L}$. Since the ω_i are disjoint, we get

$$K\bar{L} = \int_{\Omega} (\zeta_2')^2 = \frac{\beta^2 T}{2} \sum_{i=1}^p A_i^2, \quad (2.49)$$

and

$$\int_{\Omega} (\zeta_2'')^2 = \frac{\beta^4 T}{2} \sum_{i=1}^p A_i^2 = \beta^2 K\bar{L}.$$

In conclusion, the energy becomes

$$\begin{aligned} \bar{\bar{E}}(K, p) &:= \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{\zeta_2 > 0\}} + \alpha K^2 \bar{L} + \frac{4\alpha}{3} \int_{\Omega} (\zeta_2'')^2 - 2\bar{\theta} K\bar{L} \\ &= p \cdot T + \alpha K^2 \bar{L} + \frac{4\alpha}{3} \beta^2 K\bar{L} - 2\bar{\theta} K\bar{L}. \end{aligned}$$

Hence using (2.40), we get

$$\bar{\bar{E}}(K, p) = 2p\pi \sqrt{\frac{2\alpha}{3(\bar{\theta} - \alpha K)}} - \alpha K^2 \bar{L} \quad (2.50)$$

with the conditions

$$1 \leq p \leq \frac{\bar{L}}{T} \quad \text{and} \quad T = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (2.51)$$

Step 3 : Minimizing with respect to p and calculation of (ζ_1, ζ_2)

If $K > 0$, clearly the minimum is reached for $p = 1$ and the energy becomes

$$E(\zeta_1, \zeta_2) = \bar{E}(\zeta_2) = \bar{\bar{E}}(K, 1) = \bar{\bar{\bar{E}}}(K) := 2\pi \sqrt{\frac{2\alpha}{3(\bar{\theta} - \alpha K)}} - \alpha K^2 \bar{L} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} f(K) \quad (2.52)$$

where f is introduced in (2.5) with $0 < T \leq \bar{L}$ and $0 < K < \bar{\theta}/\alpha = \theta$.

From Step 2, we deduce that

$$\zeta_2(x) = A(\cos(\beta x) + 1), \quad \text{on } [-T/2, T/2],$$

with $T \leq \bar{L}$. Using (2.49) and (2.51), we get $A^2 = \frac{K\bar{L}}{\pi\beta}$, and the expression of ζ_2

follows as in (2.8). Similarly, using (2.46), we get the expression of ζ_1 in (2.8).

If $K = 0$, then we can choose $\zeta = 0$ and (2.8) still holds true. Moreover, $E(\zeta) = 0 = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} f(0)$.

Step 4 : Minimizing f on the interval $\mathcal{D} = [0, \tilde{\theta}^+]$

It is easy to check that (if $K > 0$) we have

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \bar{L} \Leftrightarrow K = \tilde{\theta}; \\ \quad \text{and} \\ T < \bar{L} \Leftrightarrow K < \tilde{\theta}. \end{array} \right.$$

But $\tilde{\theta} < \theta$ and $K \geq 0$, therefore we only need to minimize the function f for K on the interval $[0, \tilde{\theta}]$ if $\tilde{\theta} > 0$.

If $\tilde{\theta} \leq 0$, then $0 \leq K \leq \tilde{\theta} \leq 0$ which implies that $K = 0$ and the unique solution in this case is the trivial one.

Step 5 : Relation between E and f

Using Steps 3 and 4, we have in particular proved (2.10) and (2.11). □

Remark 2.3. (Local minimizers)

For local minimizers of E , we may have p blisters (all separated by any positive distance) with the same width T and with amplitude A_i satisfying (2.49). For $p \geq 1$ given, we can also optimize K in $\bar{\bar{E}}(K, p)$ which should correspond to local minimizers (restricted to small perturbations of the support) with \bar{L} replaced by \bar{L}/p , L replaced by L/p and $T \leq \bar{L}/p$.

3 The auxiliary minimization problem and its consequences

In this section, we are interested in the following auxiliary minimization problem

$$\min_{X \in \mathcal{D}} f(X), \quad (2.53)$$

where f and \mathcal{D} are defined respectively in (2.5) and (2.7). We present in the first subsection some results concerning problem (2.53) which will be useful in the second subsection to show Theorems 1.3 ii), 1.7 and Proposition 1.8.

3.1 Auxiliary Problem (2.53)

Recall that for $(\theta, L) \in (0, \infty)^2$, we have that $\mathcal{D} \subsetneq [0, \theta]$. In order to determine the minimum of the function f on $[0, \theta]$, we have to introduce the quantity for $\theta > 0$

$$L_d = L_d(\theta) := \frac{25}{24} \sqrt{\frac{5}{3}} \theta^{-5/2}, \quad (2.54)$$

Proposition 3.1. (*Minimizing f on $[0, \theta]$*)

We consider f defined in (2.5) and L_d introduced in (2.54).

i) If $L \leq L_d$, then f is increasing on $(0, \theta)$ and

$$\min_{X \in [0, \theta]} f(X) = f(0).$$

In this case, we set artificially $X_m := 2\theta/5$.

ii) If $L > L_d$, then there exist X_M and X_m such that $0 < X_M < 2\theta/5 < X_m < \theta$ and

$$\begin{cases} f' \geq 0 & \text{on } (0, X_M] \cup [X_m, \theta); \\ f' < 0 & \text{on } (X_M, X_m); \end{cases}$$

and

$$\min_{X \in [0, \theta]} f(X) = \min\{f(0), f(X_m)\}.$$

Proof of Proposition 3.1

We recall that

$$f(X) := \begin{cases} (\theta - X)^{-1/2} - LX^2 & \text{if } 0 < X < \theta; \\ 0 & \text{if } X = 0; \end{cases}$$

For $0 < X < \theta$, we have

$$f'(X) = g(X) - h(X) \quad \text{with} \quad g(X) := \frac{1}{2}(\theta - X)^{-3/2} \quad \text{and} \quad h(X) := 2LX.$$

We notice that g is strictly convex on $[0, \theta)$, with $g(0) > 0$ and $g'(0) > 0$. Therefore there exists a unique $L = L_d > 0$ such that the straight line $y = h(X)$ is tangent from below to the graph $y = g(X)$, at a point $X_d > 0$. In particular, we have

$$\begin{cases} g(X_d) = h(X_d); \\ g'(X_d) = h'(X_d). \end{cases}$$

The unique solution of the system is $X_d = 2\theta/5$ and the value of L_d given in (2.54). Using the strict convexity of g (and the fact that $g(\theta^-) = +\infty$), we deduce the variations of f in cases *i*) and *ii*). With the notations of case *ii*) in Proposition 3.1, X_m is in particular uniquely characterized by

$$g(X_m) = h(X_m) \quad \text{with} \quad X_m \in \left(\frac{2\theta}{5}, \theta \right), \quad (2.55)$$

and then we get

$$\min_{X \in [0, \theta)} f(X) = \min\{f(0), f(X_m)\}.$$

□

In what follows, we consider the minimizer of f on the subinterval \mathcal{D} of $[0, \theta)$ where we recall that $\mathcal{D} := [0, \tilde{\theta}^+]$ and $\tilde{\theta}^+$ is defined (2.7). For this purpose, we introduce

$$\bar{X} := \min\{\tilde{\theta}^+, X_m\}, \quad (2.56)$$

where X_m is the quantity introduced in Proposition 3.1. Then we have

$$\min_{X \in \mathcal{D}} f(X) = \min\{f(0), f(\bar{X})\} \quad \text{and} \quad \operatorname{argmin}_{\mathcal{D}} f \subset \{0, \bar{X}\}. \quad (2.57)$$

Definition 3.2. (*Domains \tilde{D}_0, \tilde{D}_1 and \tilde{D}_2*)

Let us now introduce the following sets which give a partition for the parameters $(\theta, L) \in (0, +\infty)^2$:

$$\begin{cases} \tilde{D}_0 := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \bar{X} = 0 \text{ or } f(0) < f(\bar{X})\}; & (2.58) \\ \tilde{D}_1 := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \bar{X} > 0 \text{ and } f(0) > f(\bar{X}) \text{ with } \tilde{\theta} > X_m\}; & (2.59) \\ \tilde{D}_2 := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \bar{X} > 0 \text{ and } f(0) > f(\bar{X}) \text{ with } \tilde{\theta} < X_m\}. & (2.60) \end{cases}$$

We denote by

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Gamma}_{01} := \left\{ (\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \bar{X} > 0 \text{ and } f(0) = f(\bar{X}) \text{ with } \tilde{\theta} > X_m \right\}; \quad (2.61) \\ \tilde{\Gamma}_{02} := \left\{ (\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \bar{X} > 0 \text{ and } f(0) = f(\bar{X}) \text{ with } \tilde{\theta} < X_m \right\}; \quad (2.62) \\ \tilde{\Gamma}_{12} := \left\{ (\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \bar{X} > 0 \text{ and } f(0) > f(\bar{X}) \text{ with } \tilde{\theta} = X_m \right\}; \quad (2.63) \\ \tilde{\mathcal{P}} = \left\{ (\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \bar{X} > 0 \text{ and } f(0) = f(\bar{X}) \text{ with } \tilde{\theta} = X_m \right\}. \quad (2.64) \end{array} \right.$$

Proposition 3.3. (Identification of the sets)

We have

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{D}_i = D_i \quad \text{for } i = 0, 1, 2; \\ \tilde{\Gamma}_{ij} = \Gamma_{ij} \quad \text{for } i, j \in \{0, 1, 2\} \text{ with } i < j; \\ \tilde{\mathcal{P}} = \{P\}; \end{array} \right.$$

where $\tilde{D}_i, \tilde{\Gamma}_{ij}$ and $\tilde{\mathcal{P}}$ are given in Definition 3.2 and D_i, Γ_{ij} and P are introduced in Definition 1.5.

For (θ, L) on the boundary of the domains D_i , we recover certain natural equalities between the minimal values $f(0), f(X_m)$ and $f(\tilde{\theta})$. Proposition 3.3 is difficult to establish, because we have to study very finely the values of minimizers of f as functions of (θ, L) . We will prove Proposition 3.3 in Subsection 4.3.

3.2 Global minimizers of E and blister's properties

In this subsection, we prove Theorems 1.3 ii), 1.7 and Proposition 1.8.

Proof of Theorem 1.3 ii)

a) Case where $(\theta, L) \in \tilde{D}_0 \cup \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2 \cup \tilde{\Gamma}_{12}$

Using Proposition 3.1 and Definition 3.2, there exists a unique minimizer $K \in \mathcal{D}$ of the function f . Now using Theorems 1.2 and 1.3 i), there exists a global minimizer $\zeta \in Y$ of the energy E and there exists $T \in [0, \bar{L}]$ such that (up to addition of constants and translation of (ζ_1, ζ_2)) this minimizer is given by (2.8) and (2.9).

b) Case where $(\theta, L) \in \tilde{\Gamma}_{01} \cup \tilde{\Gamma}_{02} \cup \tilde{\mathcal{P}}$

Using Proposition 3.1 and Definition 3.2, there exist exactly two minimizers of the function f on \mathcal{D} . Similarly using (2.10), Theorems 1.2 and 1.3 i), we see that the energy E has exactly two global minimizers in Y : the trivial solution $(\zeta_1, \zeta_2) = (0, 0)$ and a blister $\zeta \in Y$ given by (2.8)-(2.9).

□

Proof of Theorem 1.7

Using Proposition 3.3, we have

$$\operatorname{argmin}_{\mathcal{D}} f = \begin{cases} \{0\} & \text{if } (\theta, L) \in D_0; \\ \{X_m\} & \text{if } (\theta, L) \in D_1; \\ \{\tilde{\theta}\} & \text{if } (\theta, L) \in D_2 \cup \Gamma_{12}; \end{cases}$$

and

$$\operatorname{argmin}_{\mathcal{D}} f \in \begin{cases} \{0, X_m\} & \text{if } (\theta, L) \in \Gamma_{01}; \\ \{0, \tilde{\theta}\} & \text{if } (\theta, L) \in \Gamma_{02} \cup \{P\}; \end{cases}$$

Using Theorem 1.3, a minimizer $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ of the energy E is defined as in (2.8) and (2.9). Moreover, using (2.11) we get $T < \bar{L}$ if $(\theta, L) \in D_1$, and $T = \bar{L}$ if $(\theta, L) \in D_2 \cup \Gamma_{12}$. Similarly for $(\theta, L) \in \Gamma_{01}$ or $(\theta, L) \in \Gamma_{02} \cup \{P\}$.

□

Proof of Proposition 1.8**Proof of i)**

Let $(\theta, L) \in D_1 \cup D_2 \cup \Gamma_{12}$. Using Proposition 3.3, we conclude that there exists a unique $K = K(\theta, L) \in \mathcal{D}$ such that

$$\min_{X \in \mathcal{D}} f(X) = f(K),$$

with f and \mathcal{D} , respectively introduced in (2.5) and (2.7), do depend on (θ, L) . According to (2.9), the length of the support of ζ_2 and its amplitude A can be written (using (2.6) to express $(\bar{\theta}, \bar{L})$ in terms of (θ, L)) as

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2\alpha}{3(\bar{\theta} - \alpha K)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} (\theta - K)^{-1/2}, \quad (2.65)$$

and

$$A = \sqrt{\frac{K\bar{L}}{\pi\beta}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/4} (\pi\alpha)^{-1/2} (KLT)^{1/2}. \quad (2.66)$$

We want to show that $K = K(\theta, L)$ is a smooth function of (θ, L) on each domain D_1 and D_2 . For $(\theta, L) \in D_2 \cup \Gamma_{12}$, we have $K = \tilde{\theta} > 0$ which is smooth. For $(\theta, L) \in D_1$, we have $L > L_d$ (otherwise we would have $\min f = f(0)$ by Proposition 3.1 i)) and then

$$2\theta/5 < X_m = K < \tilde{\theta} \quad \text{with} \quad f'(K) = 0. \quad (2.67)$$

Using (2.67), we have

$$f''(K) = \frac{3}{4}(\theta - K)^{-5/2} - 2L = \frac{L(5K - 2\theta)}{\theta - K} > 0. \quad (2.68)$$

We deduce that $f''(K) \neq 0$. Then by the Implicit Function Theorem, we deduce that $K = K(\theta, L)$ is a smooth function.

Straightforward calculations show that for $(\theta, L) \in D_1 \cup D_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\theta T = \pi \sqrt{\frac{2}{3}}(\theta - K)^{-3/2}(\partial_\theta K - 1), \\ \partial_L T = \pi \sqrt{\frac{2}{3}}(\theta - K)^{-3/2}\partial_L K, \\ \partial_\theta A = \left(\frac{1}{24}\right)^{1/4} \left(\frac{L}{\alpha\pi KT}\right)^{1/2} (T\partial_\theta K + K\partial_\theta T), \\ \partial_L A = \left(\frac{1}{24}\right)^{1/4} \left(\frac{1}{\alpha\pi KTL}\right)^{1/2} (KT + TL\partial_L K + KL\partial_L T). \end{array} \right. \quad (2.69)$$

Case 1 : $(\theta, L) \in D_1$

In order to take the derivation with respect to θ , we write the dependance of f on θ : $f(X) = f(X, \theta)$. Using Proposition 3.3, we have $K = X_m \in \text{Int}(\mathcal{D})$, so we have

$$\frac{d}{d\theta}(\partial_X f(K, \theta)) = 0. \quad (2.70)$$

Using (2.68), we have $\partial_{XX}^2 f(K) > 0$, which implies using (2.70) that

$$\partial_\theta K = -\frac{\partial_{X\theta}^2 f}{\partial_{XX}^2 f} = \frac{3/4(\theta - K)^{-5/2}}{3/4(\theta - K)^{-5/2} - 2L} > 1, \quad (2.71)$$

Similarly, we get that

$$\partial_L K = -\frac{\partial_{XL}^2 f}{\partial_{XX}^2 f} = \frac{2K}{3/4(\theta - K)^{-5/2} - 2L} > 0. \quad (2.72)$$

Using (2.69), we conclude that

$$\partial_\theta T, \partial_L T, \partial_\theta A, \partial_L A \geq 0.$$

Case 2 : $(\theta, L) \in D_2 \cup \Gamma_{12}$

Using Proposition 3.3, we have $K = \tilde{\theta}(L) = \theta - \alpha^2/L^2$ and $T = \bar{L}$. So we have

$$\partial_\theta K = 1 \quad \text{and} \quad \partial_L K = \frac{2\alpha^2}{L^3} > 0.$$

Using (2.69), we conclude that

$$\partial_\theta T, \partial_L T, \partial_\theta A, \partial_L A \geq 0.$$

Proof of ii)

Step 1 : Proof of (2.26)

Our goal is to compute the derivative of T with respect to θ along the curve Γ_{01} . Using (2.69), (2.71) and (2.72), we get with obvious notation for $(\theta, L) \in \Gamma_{01}$ (using the fact that $L = L_{01}(\theta)$ given in (2.13))

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} T(\theta, L_{01}(\theta)) &= \pi \sqrt{\frac{2}{3}} (\theta - K)^{-3/2} [(\partial_\theta K - 1) + \partial_L K \partial_\theta L_{01}(\theta)] \\ &= \pi \sqrt{\frac{2}{3}} (\theta - K)^{-3/2} \left[\frac{5^{5/2} \theta^{-5/2} (2 - 5\theta^{-1} K)}{16 (3/4 (\theta - K)^{-5/2} - 2L)} \right]. \end{aligned}$$

Using (2.67) and (2.68), we conclude that $T = T(\theta, L_{01}(\theta))$ is decreasing in θ along the curve Γ_{01} . Then we deduce that $\inf_{(\theta, L) \in \Gamma_{01}} T = T(P) = T(\theta^*, L_{01}(\theta^*))$. Using (2.25),

we have $T(P) = \bar{L}^*$, where \bar{L}^* is the value of \bar{L} at the point P . Therefore

$$\inf_{(\theta, L) \in \Gamma_{01}} T = \bar{L}^* = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{L_{01}(\theta^*)}{\alpha} = 4\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha^{1/4} =: T^*. \quad (2.73)$$

Using the monotonicity of T in θ and L on D_1 , we get (2.26).

Step 2 : Identification of \bar{K}

For $(\theta, L) \in D_1 \cup \Gamma_{01}$, recall that $K = X_m$ is characterized by

$$\frac{1}{2}(\theta - K)^{-3/2} = 2LK \quad \text{with} \quad \frac{2}{5}\theta < K < \theta.$$

Let $\bar{K} := K/\theta$, in particular for $(\theta, L) \in \Gamma_{01}$ we have

$$\frac{1}{2}(1 - \bar{K})^{-3/2} = \frac{5^{5/2}}{8} \bar{K} \quad \text{with} \quad \frac{2}{5} < \bar{K} < 1.$$

The uniqueness of \bar{K} shows that \bar{K} is a constant independent of θ . Now using (2.65), we explicit T in term of \bar{K} for $(\theta, L) \in \Gamma_{01}$. A straightforward computation gives

$$T(\theta, L_{01}(\theta)) = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} (1 - \bar{K})^{-1/2} \theta^{-1/2}.$$

We recover that $T = T(\theta, L_{01}(\theta))$ is decreasing in θ along the curve Γ_{01} , and then we get another expression of T^* (defined in (2.73)), using the expression of θ^* given in (2.12) :

$$T^* := \inf_{(\theta, L) \in \Gamma_{01}} T = T(\theta^*, L_{01}(\theta^*)) = 4\pi \sqrt{\frac{2}{15}} (1 - \bar{K})^{-1/2} \alpha^{1/4}.$$

Now using (2.73), we identify $\bar{K} = 4/5$.

Step 3 : Proof of (2.27)

Similarly using (2.66) and (2.65), we explicit A in term of \bar{K} for $(\theta, L) \in \Gamma_{01}$ (in particular $L = L_{01}(\theta)$). A straightforward computation gives

$$A(\theta, L_{01}(\theta)) = \left(\frac{1}{12}\right)^{1/2} 5^{5/4} (\bar{K}(1 - \bar{K})^{-1/2})^{1/2} \alpha^{-1/2} \theta^{-1}.$$

Then $A = A(\theta, L_{01}(\theta))$ is decreasing in θ along the curve Γ_{01} . So

$$\inf_{(\theta, L) \in \Gamma_{01}} A = A(\theta^*, L_{01}(\theta^*)) = 2 \left(\frac{5}{9}\right)^{1/4} (\bar{K}(1 - \bar{K})^{-1/2})^{1/2} =: A^*.$$

Using the identification of \bar{K} in Step 2, we get that $A^* = 4/\sqrt{3}$. And using the monotonicity of A in θ and L on D_1 , we get (2.27). \square

4 Appendix

This section is divided into several parts. The first subsection is devoted to prove some results which will be useful in the proof of Proposition 3.3. In the second subsection, we give some technical lemmas concerning the geometrical position of some curves describing our domains. The last subsection is then dedicated to prove Proposition 3.3.

4.1 Preliminaries

We have see that

$$\min_{X \in \mathcal{D}} f(X) = \min\{f(0), f(\bar{X})\} \quad \text{with} \quad \bar{X} = \min\{\tilde{\theta}^+, X_m\}, \quad (2.74)$$

where $\tilde{\theta}^+$ is defined in (2.7) and X_m is the quantity introduced in Proposition 3.1. For this reason, we have to study in particular the equalities

$$\begin{cases} X_m &= \tilde{\theta}, \\ f(0) &= f(X_m), \\ f(0) &= f(\tilde{\theta}). \end{cases}$$

This subsection is devoted to explicit on (θ, L) such relations. To this end, we need to introduce the following functions

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0 := \alpha^{-1/2}; \end{array} \right. \quad (2.75)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_a(\theta) := \frac{\alpha^{5/4}}{(\sqrt{\alpha}\theta + 1)^{1/2}} \end{array} \right. \quad \text{for } \theta > 0; \quad (2.76)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_b(\theta) := \alpha\theta^{-1/2} \end{array} \right. \quad \text{for } \theta > 0; \quad (2.77)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_c(\theta) := \sqrt{\frac{5}{3}}\alpha\theta^{-1/2} \end{array} \right. \quad \text{for } \theta > 0; \quad (2.78)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_d(\theta) := \frac{25}{24}\sqrt{\frac{5}{3}}\theta^{-5/2} \end{array} \right. \quad \text{for } \theta > 0; \quad (2.79)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_e(\theta) := \left(2\alpha^3\theta - 2\alpha^2\sqrt{\alpha(\alpha\theta^2 - 1)}\right)^{1/2} \end{array} \right. \quad \text{for } \theta \geq \theta_0; \quad (2.80)$$

where L_d has already been introduced in (2.54).

We recall that $f' = g - h$ with h linear. For $X \in (0, \theta)$, we denote the slope of the chord connecting the origin to the point $(X, g(X))$ by

$$B(X) := \frac{g(X)}{X} = \frac{(\theta - X)^{-3/2}}{2X}. \quad (2.81)$$

This slope $B(X)$ will play an important role in our study through the following result :

Lemma 4.1. (Monotonicity of the function B)

On the interval $(0, \theta)$, B is decreasing on $(0, 2\theta/5)$ and increasing on $(2\theta/5, \theta)$.

The proof of Lemma 4.1 is straightforward because of the strict convexity of g and the definition of $X_d = 2\theta/5$ in the proof of Proposition 3.1.

From the definition of $\tilde{\theta}$ in (2.7), we have the following straightforward result :

Lemma 4.2. (Conditions on $\tilde{\theta}$)

For all $\theta > 0$, the following equivalences hold true

$$\text{i) } \left\{ \begin{array}{l} L > L_b(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\theta} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{X} > 0; \\ L = L_b(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\theta} = 0. \end{array} \right.$$

$$\text{ii) } \left\{ \begin{array}{l} L > L_c(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\theta} > 2\theta/5; \\ L = L_c(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\theta} = 2\theta/5. \end{array} \right.$$

where $\tilde{\theta}$, \bar{X} , L_b and L_c are respectively defined in (2.7), (2.74), (2.77) and (2.78).

Lemma 4.3. (*Sufficient condition for the trivial solution*)

i) If $L \leq \max\{L_b(\theta), L_d(\theta)\}$, then

$$\operatorname{argmin}_{\mathcal{D}} f = \{0\};$$

ii) If $L > \max\{L_b(\theta), L_d(\theta)\}$, then

$$\tilde{\theta} > 0 \quad \text{and} \quad X_m > 2\theta/5,$$

where L_b and L_d are respectively defined in (2.77) and (2.79) with $\tilde{\theta}$ and X_m respectively introduced in (2.7) and Proposition 3.1.

Proof of Lemma 4.3

Proof of i) If $L \leq L_b(\theta)$, using Lemma 4.2 i) we deduce that $\tilde{\theta} \leq 0$ and then $\bar{X} = 0$ and $\mathcal{D} = \{0\}$. Using (2.74), we deduce that $\operatorname{argmin}_{\mathcal{D}} f = \{0\}$.

If $L \leq L_d(\theta)$, using Proposition 3.1 i) we conclude that $\operatorname{argmin}_{\mathcal{D}} f = \{0\}$.

Proof of ii) If $L > \max\{L_b(\theta), L_d(\theta)\}$, then using Lemma 4.2 i) and Proposition 3.1 ii) we deduce that $\tilde{\theta} > 0$ and $X_m > 2\theta/5$. □

Proposition 4.4. (*Comparison of X_m and $\tilde{\theta}$*)

Consider $L > \max\{L_b(\theta), L_d(\theta)\}$, where L_b and L_d are given by (2.77) and (2.79) respectively. We have

$$\begin{aligned} \text{i) } X_m < \tilde{\theta} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \theta < \theta_0 \text{ and } L > L_c(\theta), \\ \text{or} \\ \theta \geq \theta_0, L > L_c(\theta) \text{ and } (L < L_e(\theta) \text{ or } L > L_{12}(\theta)); \end{cases} \\ \text{ii) } X_m > \tilde{\theta} &\Leftrightarrow \begin{cases} \theta > 0 \text{ and } L \leq L_c(\theta), \\ \text{or} \\ \theta \geq \theta_0, L > L_c(\theta) \text{ and } L_e(\theta) < L < L_{12}(\theta), \end{cases} \\ \text{iii) } X_m = \tilde{\theta} &\Leftrightarrow \theta \geq \theta_0, L > L_c(\theta) \text{ and } (L = L_e(\theta) \text{ or } L = L_{12}(\theta)). \end{aligned}$$

where θ_0 is defined in (2.75). L_c , L_e and L_{12} are respectively given in (2.78), (2.80) and (2.15).

Proof of Proposition 4.4

Consider $L > \max\{L_b(\theta), L_d(\theta)\}$. Then, using Lemma 4.3 ii), we deduce that $\tilde{\theta} > 0$

and f admits a non zero minimizer $X_m \in (2\theta/5, \theta)$. We have

$$B(X_m) = 2L \quad \text{and} \quad B(\tilde{\theta}) = \frac{L^5}{2\alpha^3(\theta L^2 - \alpha^2)}.$$

In order to compare X_m and $\tilde{\theta}$, we look at the sign of the difference

$$B(\tilde{\theta}) - B(X_m) = \frac{LQ(\theta, L)}{2\alpha^3(\theta L^2 - \alpha^2)},$$

where

$$Q(\theta, L) := L^4 - 4\alpha^3\theta L^2 + 4\alpha^5. \quad (2.82)$$

Since $L > L_b(\theta)$, then $B(\tilde{\theta}) - B(X_m)$ has the same sign of Q . A direct computation shows that

$$Q(\theta, L) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \theta < \theta_0; \\ \text{or} \\ \theta \geq \theta_0 \text{ and } (L < L_e(\theta) \text{ or } L > L_{12}(\theta)); \end{cases} \quad (2.83)$$

and

$$Q(\theta, L) = 0 \Leftrightarrow \theta \geq \theta_0 \text{ and } (L = L_e(\theta) \text{ or } L = L_{12}(\theta)). \quad (2.84)$$

Proof of i) We have

$$\begin{aligned} Q > 0 \text{ and } L > L_e(\theta) &\Leftrightarrow Q > 0 \text{ and } \tilde{\theta} > 2\theta/5 \\ &\Leftrightarrow B(X_m) < B(\tilde{\theta}) \text{ and } \tilde{\theta} > 2\theta/5 \\ &\Leftrightarrow X_m < \tilde{\theta}, \end{aligned}$$

where in the first line, we have used Lemma 4.2 ii) and in the last line we used the fact that $X_m > 2\theta/5$ and Lemma 4.1. Using (2.83) and the equivalences above, we conclude i).

Proof of ii) (and **iii**) By a similar method, we can prove ii) and iii). □

Proposition 4.5. (Comparison of $f(0)$ and $f(X_m)$)

Consider $L > \max\{L_b(\theta), L_d(\theta)\}$. For $\theta > 0$, we have the following equivalences

$$\begin{cases} f(X_m) < f(0) &\Leftrightarrow L > L_{01}(\theta); \\ f(X_m) = f(0) &\Leftrightarrow L = L_{01}(\theta). \end{cases} \quad (2.85)$$

where L_{01} is given in (2.13).

Proof of Proposition 4.5

Consider $L > \max\{L_b(\theta), L_d(\theta)\}$. Then, using Lemma 4.3 ii), we deduce that $\tilde{\theta} > 0$ and f admits a non zero minimizer $X_m \in (2\theta/5, \theta)$.

Step 1 : The first equivalence with the sign of $X_m - X_m^+$

Using the fact that f is discontinuous at $X = 0$ with $f(0) = 0$, and the relation (2.55), we get $(\theta - X_m)^{-1/2} = 4LX_m(\theta - X_m)$. Then

$$f(0) - f(X_m) = -f(X_m) = LX_m(5X_m - 4\theta).$$

By introducing the following quantity

$$X_m^+ := \frac{4}{5}\theta, \quad (2.86)$$

we deduce that X_m^+ is a critical value for which $f(0) - f(X_m)$ changes sign. Therefore we get

$$\begin{cases} f(X_m) < f(0) & \Leftrightarrow X_m > X_m^+; \\ f(X_m) = f(0) & \Leftrightarrow X_m = X_m^+. \end{cases} \quad (2.87)$$

Step 2 : The second equivalence with the sign of $L - L_{01}(\theta)$

A straightforward computation shows that

$$B(X_m) - B(X_m^+) = 2L - \frac{5^{5/2}}{8}\theta^{-5/2}.$$

Since $X_m^+ > 2\theta/5$, using Lemma 4.1 we have

$$\begin{cases} X_m > X_m^+ & \Leftrightarrow B(X_m) > B(X_m^+) & \Leftrightarrow L > L_{01}(\theta); \\ X_m = X_m^+ & \Leftrightarrow B(X_m) = B(X_m^+) & \Leftrightarrow L = L_{01}(\theta). \end{cases} \quad (2.88)$$

Using the relations (2.87) and (2.88), we get (2.85). □

Proposition 4.6. (Comparison of $f(0)$ and $f(\tilde{\theta})$)

Consider $L > \max\{L_b(\theta), L_d(\theta)\}$. Then, we have

$$f(0) > f(\tilde{\theta}) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \theta \leq \theta_0 \text{ and } L < L_a(\theta), \\ \text{or} \\ \theta > \theta_0, L < L_a(\theta) \text{ or } L > L_{02}(\theta), \end{cases}$$

and

$$f(0) = f(\tilde{\theta}) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \theta \leq \theta_0 \text{ and } L = L_a(\theta), \\ \text{or} \\ \theta > \theta_0, L = L_a(\theta) \text{ or } L = L_{02}(\theta), \end{cases}$$

where θ_0 , L_a and L_{02} are respectively defined in (2.75), (2.76) and (2.14).

Remark 4.7. (Weaker assumption)

Proposition 4.6 is still true for $L > L_b(\theta)$.

Proof of Proposition 4.6

Consider $L > \max\{L_b(\theta), L_a(\theta)\}$. Then, using Lemma 4.3 ii), we deduce that $\tilde{\theta} > 0$ and f admits a non zero minimizer $X_m \in (2\theta/5, \theta)$. Moreover, we have

$$\begin{aligned} f(0) - f(\tilde{\theta}) &= -f(\tilde{\theta}) \\ &= L \left(\theta - \frac{\alpha^2}{L^2} \right)^2 - \left(\frac{\alpha^2}{L^2} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{[(\sqrt{\alpha}\theta - 1)L^2 - \alpha^{5/2}] [(\sqrt{\alpha}\theta + 1)L^2 - \alpha^{5/2}]}{\alpha L^3}. \end{aligned}$$

Then we get the results. □

4.2 Some technical lemmas

In this subsection, we give some technical lemmas which will play an important role in the proof of Proposition 3.3. We begin by giving some geometrical results concerning the position of some curves describing our domains. We refer to Figure 2.4 for an illustration of the following results.

Lemma 4.8. (Positions of some curves)

We recall θ_0 and θ^* respectively given in (2.75) and (2.12).

1. For all $\theta \in (\theta_0, +\infty) \setminus \{\theta^*\}$, we have $L_{01}(\theta) < L_{02}(\theta)$. In particular, $L_{01}(\theta^*) = L_{02}(\theta^*)$.

2. We have

$$\begin{cases} L_{01}(\theta) > L_{12}(\theta) & \text{for } \theta_0 \leq \theta < \theta^*; \\ L_{01}(\theta) = L_{12}(\theta) & \text{for } \theta = \theta^*; \\ L_{01}(\theta) < L_{12}(\theta) & \text{for } \theta > \theta^*. \end{cases}$$

3. We have

$$\begin{cases} L_{02}(\theta) > L_{12}(\theta) & \text{for } \theta_0 < \theta < \theta^*; \\ L_{02}(\theta) = L_{12}(\theta) & \text{for } \theta = \theta^*; \\ L_{02}(\theta) < L_{12}(\theta) & \text{for } \theta > \theta^*. \end{cases}$$

4. Denote by

$$\theta_{01}^c := \frac{5\sqrt[4]{3}}{4}\alpha^{-1/2} \simeq 1.65\alpha^{-1/2} > \theta^*, \quad (2.89)$$

then we have

$$\begin{cases} L_{01}(\theta) > L_c(\theta) & \text{for } 0 < \theta < \theta_{01}^c; \\ L_{01}(\theta) = L_c(\theta) & \text{for } \theta = \theta_{01}^c; \\ L_{01}(\theta) < L_c(\theta) & \text{for } \theta > \theta_{01}^c. \end{cases}$$

5. For all $\theta > 0$, we have $L_{01}(\theta) > L_d(\theta)$.

6. For all $\theta > \theta_0$, we have $L_{02}(\theta) > L_b(\theta)$.

7. Denote by

$$\theta_{02}^c := \frac{5}{2}\alpha^{-1/2} = 2.5\alpha^{-1/2} > \theta^*, \quad (2.90)$$

then we have

$$\begin{cases} L_{02}(\theta) > L_c(\theta) & \text{for } \theta_0 < \theta < \theta_{02}^c; \\ L_{02}(\theta) = L_c(\theta) & \text{for } \theta = \theta_{02}^c; \\ L_{02}(\theta) < L_c(\theta) & \text{for } \theta > \theta_{02}^c. \end{cases}$$

8. For all $\theta > \theta_0$, we have $L_{02}(\theta) > L_e(\theta)$.

9. For all $\theta \geq \theta_0$, we have $L_{12}(\theta) > L_c(\theta)$.

10. For all $\theta > 0$, we have $L_a(\theta) < L_b(\theta)$.

11. For all $\theta > 0$, we have $L_b(\theta) < L_c(\theta)$.

12. Denote by

$$\theta_{bd} := \frac{5^{5/4}}{2^{3/2}3^{3/4}}\alpha^{-1/2} \simeq 1.16\alpha^{-1/2} < \theta^*, \quad (2.91)$$

then we have

$$\begin{cases} L_b(\theta) < L_d(\theta) & \text{for } 0 < \theta < \theta_{bd}; \\ L_b(\theta) = L_d(\theta) & \text{for } \theta = \theta_{bd}; \\ L_b(\theta) > L_d(\theta) & \text{for } \theta > \theta_{bd}. \end{cases}$$

13. Denote by

$$\theta_{ce} := \frac{5}{2\sqrt{6}}\alpha^{-1/2} \simeq 1.02\alpha^{-1/2} < \theta^*, \quad (2.92)$$

then we have

$$\begin{cases} L_c(\theta) < L_e(\theta) & \text{for } \theta_0 \leq \theta < \theta_{ce}; \\ L_c(\theta) = L_e(\theta) & \text{for } \theta = \theta_{ce}; \\ L_c(\theta) > L_e(\theta) & \text{for } \theta > \theta_{ce}. \end{cases}$$

The proof of Lemma 4.8 is given at the end of this subsection.

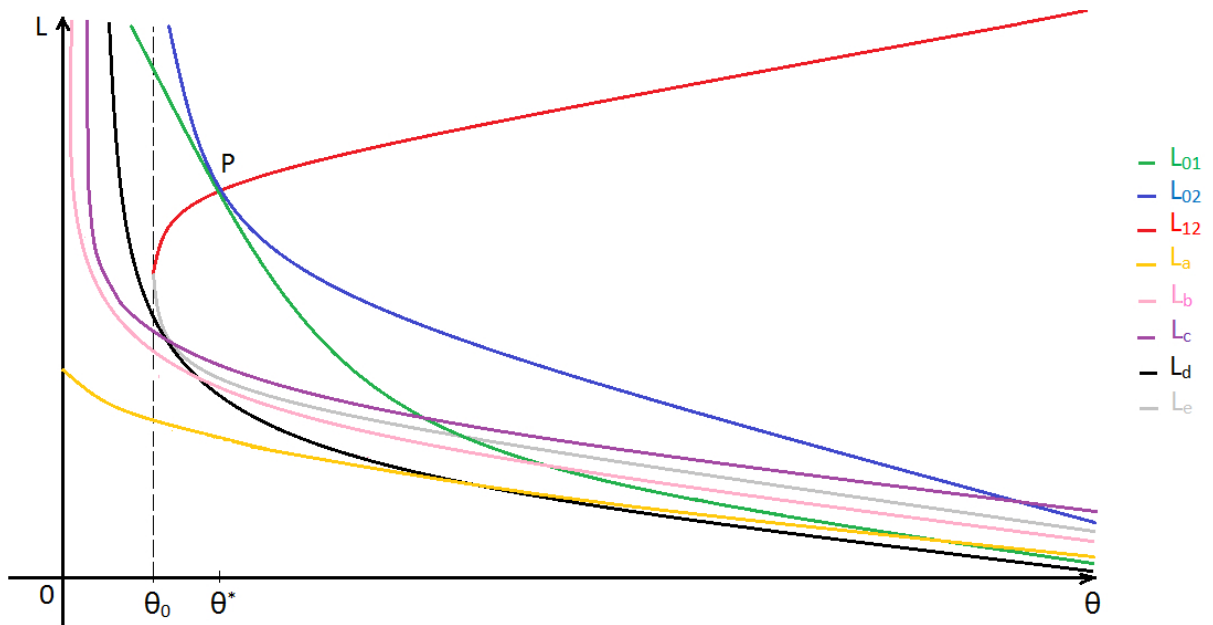


FIGURE 2.4 – Schematic presentation of all curves

We define the function

$$\tilde{L}(\theta) = \begin{cases} L_{01}(\theta) & \text{for } 0 < \theta \leq \theta^*; \\ L_{02}(\theta) & \text{for } \theta > \theta^*. \end{cases} \quad (2.93)$$

Lemma 4.9. (*Properties of \tilde{L}*)

For all $\theta > 0$, we have

- i) $L_{01}(\theta) \leq \tilde{L}(\theta)$;
- ii) $L_b(\theta) < \tilde{L}(\theta)$.

Proof of Lemma 4.9

Proof of i) :

If $0 < \theta \leq \theta^*$, using the definition of \tilde{L} in (2.93) then $L_{01}(\theta) = \tilde{L}(\theta)$.

If $\theta > \theta^*$, using (2.93) and Lemma 4.8 point 1, we get that $L_{01}(\theta) < L_{02}(\theta) = \tilde{L}(\theta)$.

Proof of ii) :

Using Lemma 4.8 points 11 and 4 with (2.93), we get

$$L_b(\theta) < L_c(\theta) < L_{01}(\theta) = \tilde{L}(\theta) \quad \text{if } 0 < \theta \leq \theta^* < \theta_{01}^c.$$

Using Lemma 4.8 point 6 with (2.93) we get

$$L_b(\theta) < L_{02}(\theta) = \tilde{L}(\theta) \quad \text{if } \theta > \theta^* > \theta_0.$$

□

To prove Proposition 3.3, we need also to split the domains D_0 , D_1 and D_2 into subsets as follows.

Lemma 4.10. (*Analytical expression of the subsets*)

Using Definition 1.5 and Lemma 4.9, we have the following partition of each D_i for $i = 0, 1, 2$:

$D_1 = D_1^1 \cup D_1^2$, where

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1^1 := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, 0 < \theta < \theta_0 \text{ and } L > L_{01}(\theta)\}, \\ D_1^2 := \left\{ \begin{array}{l} (\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \quad L > L_{01}(\theta) \quad \text{if } \theta_0 \leq \theta \leq \theta^* \\ L > L_{12}(\theta) \quad \text{if } \theta > \theta^* \end{array} \right\} \end{array} \right\}.$$

$D_2 = D_2^1 \cup D_2^2$, where

$$\left\{ \begin{array}{l} D_2^1 := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \theta > \theta^* \text{ and } L_{02}(\theta) < L < L_{12}(\theta)\} \cap \{L \leq L_c(\theta)\}, \\ D_2^2 := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \theta > \theta^* \text{ and } L_{02}(\theta) < L < L_{12}(\theta)\} \cap \{L > L_c(\theta)\}. \end{array} \right.$$

$D_0 = D_0^1 \cup D_0^2 \cup D_0^3 \cup D_0^4 \cup D_0^5$, where

$$\begin{cases} D_0^1 := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, L_b(\theta) < L < L_{01}(\theta)\} \cap \{L \leq L_d(\theta)\}; \\ D_0^2 := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, L_b(\theta) < L < L_{01}(\theta)\} \cap \{L > L_d(\theta)\}; \\ D_0^3 := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \theta > \theta^*, L_b(\theta) < L < L_{02}(\theta), L \geq L_{01}(\theta)\} \cap \{L \leq L_c(\theta)\}; \\ D_0^4 := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, \theta > \theta^*, L_b(\theta) < L < L_{02}(\theta), L \geq L_{01}(\theta)\} \cap \{L > L_c(\theta)\}; \\ D_0^5 := \{(\theta, L) \in (0, +\infty)^2, L \leq L_b(\theta) \text{ and } L < \tilde{L}(\theta)\}. \end{cases}$$

The reader may skip the proof of the Lemma 4.8 and go directly to subsection 4.3 for the proof of Propostion 3.3.

Proof of Lemma 4.8

1. A simple computation leads us to

$$L_{02}^2(\theta) - L_{01}^2(\theta) = \frac{\mathcal{F}(\theta)}{\theta^5(\sqrt{\alpha}\theta - 1)},$$

where

$$\mathcal{F}(\theta) := \alpha^{5/2}\theta^5 - \frac{5^5}{16^2}\alpha^{1/2}\theta + \frac{5^5}{16^2}.$$

We have

$$\mathcal{F}'(\theta) = 5\alpha^{1/2} \left((\alpha^{1/2}\theta)^4 - \left(\frac{5}{4}\right)^4 \right).$$

Then $\mathcal{F}'(\theta)$ vanishes on $(0, +\infty)$ only for $\theta = \theta^* = 5\alpha^{-1/2}/4$. Therefore \mathcal{F} has a strict minimum at $\theta = \theta^*$. Moreover, $\mathcal{F}(\theta^*) = 0$. Then we deduce that $\mathcal{F}(\theta) \geq 0$ for all $\theta > \theta_0$ and $\mathcal{F}(\theta) > 0$ for all $\theta \neq \theta^*$.

2. To prove the result, it is sufficient to remark that for all $\theta \geq \theta_0$ we have

$$L'_{01}(\theta) < 0, \quad L'_{12}(\theta) > 0 \quad \text{and} \quad L_{01}(\theta^*) = L_{12}(\theta^*) = 2\alpha^{5/4}.$$

3. To prove the result, it is sufficient to remark that for all $\theta > \theta_0$ we have

$$L'_{02}(\theta) < 0, \quad L'_{12}(\theta) > 0 \quad \text{and} \quad L_{02}(\theta^*) = L_{12}(\theta^*) = 2\alpha^{5/4}.$$

4. It is sufficient to write

$$L_{01}(\theta) - L_c(\theta) = \sqrt{5}\theta^{-1/2} \left(\frac{25}{16\theta^2} - \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \right).$$

5. We see that for all $\theta > 0$

$$L_d(\theta) = \frac{25}{24} \sqrt{\frac{5}{3}} \theta^{-5/2} \simeq 1.345 \theta^{-5/2} < L_{01}(\theta) = \frac{5^{5/2}}{16} \theta^{-5/2} \simeq 3.49 \theta^{-5/2}.$$

6. For all $\theta > \theta_0$, we have

$$L_{02}^2(\theta) - L_b^2(\theta) = \frac{\alpha^2}{\theta(\sqrt{\alpha\theta} - 1)} > 0.$$

7. For $\theta > \theta_0$, we have

$$L_{02}^2(\theta) - L_c^2(\theta) = \frac{\alpha^2(-2\alpha^{1/2}\theta + 5)}{3\theta(\sqrt{\alpha\theta} - 1)},$$

and then we get the result.

8. First, we demonstrate that $\{L = L_e(\theta)\} \cap \{L = L_{02}(\theta)\} = \emptyset$. In fact, we have

$$\begin{aligned} L_e(\theta) = L_{02}(\theta) &\Rightarrow 2\alpha^3\theta - 2\alpha^2\sqrt{\alpha(\alpha\theta^2 - 1)} = \frac{\alpha^{5/2}}{\alpha^{1/2}\theta - 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{2\alpha^{7/2}\theta^2 - 2\alpha^3\theta - \alpha^{5/2}}{\alpha^{1/2}\theta - 1} = 2\alpha^2\sqrt{\alpha(\alpha\theta^2 - 1)} \\ &\Rightarrow (2\alpha^{3/2}\theta^2 - 2\alpha\theta - \alpha^{1/2})^2 = 4\alpha(\alpha^{1/2}\theta - 1)^2(\alpha\theta^2 - 1) \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{5}{4}\alpha^{-1/2} = \theta^*. \end{aligned}$$

A direct computation leads us to

$$L_e(\theta^*) = \alpha^{5/4} \quad \text{and} \quad L_{02}(\theta^*) = 2\alpha^{5/4}.$$

Then we conclude that $\{L = L_e(\theta)\} \cap \{L = L_{02}(\theta)\} = \emptyset$. Moreover, since $L_e(\theta^*) < L_{02}(\theta^*)$, we deduce that

$$L_e(\theta) < L_{02}(\theta) \quad \text{for all } \theta > \theta_0.$$

9. We have for all $\theta \geq \theta_0$

$$L'_c(\theta) < 0, L'_{12}(\theta) > 0 \quad \text{and} \quad L_c(\theta_0) = \sqrt{\frac{5}{3}}\alpha^{5/4} < L_{12}(\theta_0) = \sqrt{2}\alpha^{5/4}.$$

10. For all $\theta > 0$, we have

$$L_b^2(\theta) - L_a^2(\theta) = \frac{\alpha^2}{\theta(\sqrt{\alpha\theta} + 1)} > 0.$$

11. Obvious.

12. It is sufficient to write

$$L_d(\theta) - L_b(\theta) = \theta^{-1/2} \left(\frac{5^{5/2}}{2^3 \times 3^{3/2}\theta^2} - \alpha \right).$$

13. In fact, we have

$$\begin{aligned} L_c^2(\theta) > L_e^2(\theta) &\Leftrightarrow \frac{5}{3\theta} > 2\alpha\theta - 2\sqrt{\alpha(\alpha\theta^2 - 1)} \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{\alpha(\alpha\theta^2 - 1)} > \frac{6\alpha\theta^2 - 5}{3\theta}. \end{aligned}$$

Since $\theta \geq \theta_0$, then $6\alpha\theta^2 - 5 > 0$. Then

$$\begin{aligned} L_c^2(\theta) > L_e^2(\theta) &\Leftrightarrow 36\theta^2(\alpha(\alpha\theta^2 - 1)) > (6\alpha\theta^2 - 5)^2 \\ &\Leftrightarrow \theta > \frac{5}{2\sqrt{6}}\alpha^{-1/2} = \theta_{ce}. \end{aligned}$$

□

4.3 Identification of sets

This subsection is dedicated to prove Proposition 3.3.

Proof of Proposition 3.3

Case A : $(\theta, L) \in D_1 = D_1^1 \cup D_1^2$

Our first goal is to show that $L > \max\{L_b(\theta), L_d(\theta)\}$ for all $\theta > 0$. According to Lemma 4.8 point 5, for $0 < \theta \leq \theta^*$ we have $L > L_{01}(\theta) > L_d(\theta)$. Using points 4 and 11 of Lemma 4.8, for $0 < \theta \leq \theta^* < \theta_{01}^c$ we have $L > L_{01}(\theta) > L_c(\theta) > L_b(\theta)$. On the other hand, using Lemma 4.8 points 9, 11 and 12, for $\theta > \theta^*$ we have $L > L_{12}(\theta) > L_c(\theta) > L_b(\theta) > L_d(\theta)$. Then we deduce that $L > \max\{L_b(\theta), L_d(\theta)\}$ for all $\theta > 0$. Therefore, using Lemma 4.3 ii), we deduce that $\tilde{\theta} > 0$ and f admits a non zero minimizer $X_m \in (2\theta/5, \theta)$.

Since $L > L_{01}(\theta)$ for all $\theta > 0$, we use Proposition 3.1 ii) and Proposition 4.5 to conclude that

$$\min_{X \in [0, \theta]} f(X) = f(X_m) < f(0).$$

It remains to show that $X_m < \tilde{\theta}$.

i) If $(\theta, L) \in D_1^1$, Lemma 4.8 point 4 implies that $L > L_{01}(\theta) > L_c(\theta)$. Then from Proposition 4.4 i), we deduce that $X_m < \tilde{\theta}$.

ii) If $(\theta, L) \in D_1^2$, Lemma 4.8 points 4 and 9 implies that

$$\begin{cases} L > L_{01}(\theta) > L_c(\theta) & \text{for } \theta_0 \leq \theta \leq \theta^*; \\ L > L_{12}(\theta) > L_c(\theta), & \text{for } \theta > \theta^*. \end{cases}$$

Then from Proposition 4.4 i), we deduce that $X_m < \tilde{\theta}$.

Therefore,

$$\min_{X \in \mathcal{D}} f(X) = f(X_m) \quad \text{and} \quad \operatorname{argmin}_{\mathcal{D}} f = \{\bar{X}\} \quad \text{with} \quad 0 < \bar{X} = X_m < \tilde{\theta}.$$

Case B : $(\theta, L) \in D_2 = D_2^1 \cup D_2^2$

Using Lemma 4.8 point 6, we deduce that for all $\theta > \theta^*$, $L > L_{02}(\theta) > L_b(\theta)$. Using Lemma 4.8 points 1 and 5, we obtain that for all $\theta > \theta^*$, $L > L_{02}(\theta) > L_{01}(\theta) > L_d(\theta)$. So, we deduce that $L > \max\{L_b(\theta), L_d(\theta)\}$. Then, using Lemma 4.3 ii), we deduce that $\tilde{\theta} > 0$ and f admits a non zero minimizer $X_m \in (2\theta/5, \theta)$.

Since $L > L_{01}(\theta)$ for all $\theta > \theta^*$, we use Proposition 3.1 ii) and Proposition 4.5 to deduce that

$$\min_{X \in [0, \theta]} f(X) = f(X_m) < f(0).$$

Now we show that $X_m > \tilde{\theta}$.

i) If $(\theta, L) \in D_2^1$, we have $L \leq L_c(\theta)$ in particular for all $\theta > \theta^*$. Using Proposition 4.4 ii), we deduce that $X_m > \tilde{\theta}$.

ii) If $(\theta, L) \in D_2^2$, using Lemma 4.8 point 8, we deduce in particular that, for all $\theta > \theta^*$, $L > L_{02}(\theta) > L_e(\theta)$. According to Proposition 4.4 ii), we have $X_m > \tilde{\theta}$.

It remains to compare $f(\tilde{\theta})$ and $f(0)$. Since $L > L_{02}(\theta)$ for all $\theta > \theta^*$, according to Proposition 4.6, we deduce that $f(0) > f(\tilde{\theta})$. Then, we get

$$\min_{X \in \mathcal{D}} f(X) = f(\tilde{\theta}) \quad \text{and} \quad \operatorname{argmin}_{\mathcal{D}} f = \{\bar{X}\} \quad \text{with} \quad 0 < \bar{X} = \tilde{\theta} < X_m.$$

Case C : $(\theta, L) \in D_0 = D_0^1 \cup D_0^2 \cup D_0^3 \cup D_0^4 \cup D_0^5$

Let us treat each case.

i) For $(\theta, L) \in D_0^1$, we have $L > L_b(\theta)$ then using Lemma 4.2 i) we deduce that $\bar{X} > 0$. Using Lemma 4.3 i), we deduce that

$$\min_{X \in \mathcal{D}} f(X) = f(0) < f(\bar{X}) \quad \text{and} \quad \operatorname{argmin}_{\mathcal{D}} f = \{0\} \quad \text{with} \quad \bar{X} > 0.$$

ii) For $(\theta, L) \in D_0^2$, using Lemma 4.3 ii), we deduce that $\tilde{\theta} > 0$ and f admits a non zero minimizer $X_m \in (2\theta/5, \theta)$.

Since $L < L_{01}(\theta)$, using Proposition 3.1 ii) and Proposition 4.5, we deduce that

$$\min_{X \in [0, \theta]} f(X) = f(0) < f(X_m).$$

It remains to compare $f(\tilde{\theta})$ and $f(0)$. Using Lemma 4.8 point 10, we deduce that for all $0 < \theta \leq \theta_0$, $L > L_b(\theta) > L_a(\theta)$. And using Lemma 4.8 points 10 and 1, we deduce that for all $\theta > \theta_0$, $L_a(\theta) < L_b(\theta) < L < L_{01}(\theta) \leq L_{02}(\theta)$. Now using Proposition 4.6, we conclude that $f(0) < f(\tilde{\theta})$.

$$\min_{X \in \mathcal{D}} f(X) = f(0) < f(\bar{X}) \quad \text{and} \quad \operatorname{argmin}_{\mathcal{D}} f = \{0\} \quad \text{with} \quad \bar{X} > 0.$$

iii) For $(\theta, L) \in D_0^3$, using point 5 of Lemma 4.8, we deduce that $L \geq L_{01}(\theta) > L_d(\theta)$. Then using Lemma 4.3 ii), we deduce that $\tilde{\theta} > 0$ and f admits a non zero minimizer

$X_m \in (2\theta/5, \theta)$.

Since $L \leq L_c(\theta)$, using Lemma 4.2, we deduce that $\tilde{\theta} < 2\theta/5 < X_m$ and then $\bar{X} = \tilde{\theta} > 0$. According to Lemma 4.8 point 10, we deduce that for all $\theta > \theta^*$, $L_a(\theta) < L_b(\theta) < L < L_{02}(\theta)$. Using Proposition 4.6, we conclude that $f(0) < f(\tilde{\theta}(L))$. Therefore

$$\min_{X \in \mathcal{D}} f(X) = f(0) < f(\bar{X}) \quad \text{and} \quad \operatorname{argmin}_{\mathcal{D}} f = \{0\} \quad \text{with} \quad \bar{X} = \tilde{\theta} > 0.$$

iv) For $(\theta, L) \in D_0^4$, using point 5 of Lemma 4.8, we have for all $\theta > \theta^*$, $L \geq L_{01}(\theta) > L_d(\theta)$. Then using Lemma 4.3 ii), we deduce that $\tilde{\theta} > 0$ and f admits a non zero minimizer $X_m \in (2\theta/5, \theta)$.

Using Lemma 4.8 point 13, we have for all $\theta > \theta^* > \theta_{ce}$, $L > L_c(\theta) > L_e(\theta)$. Using point 3 of Lemma 4.8, we deduce that for all $\theta > \theta^*$, $L < L_{02}(\theta) < L_{12}(\theta)$. Therefore according to Proposition 4.4 ii), we deduce that $\tilde{\theta} < X_m$ and $\bar{X} = \tilde{\theta} > 0$. It remains to compare $f(\tilde{\theta})$ and $f(0)$. According to Lemma 4.8 point 10, we deduce that for all $\theta > \theta^*$, $L_a(\theta) < L_b(\theta) < L < L_{02}(\theta)$. Using Proposition 4.6, we get that $f(0) < f(\tilde{\theta})$. Therefore

$$\min_{X \in \mathcal{D}} f(X) = f(0) < f(\bar{X}) \quad \text{and} \quad \operatorname{argmin}_{\mathcal{D}} f = \{0\} \quad \text{with} \quad \bar{X} = \tilde{\theta} > 0.$$

v) For $(\theta, L) \in D_0^5$, $\tilde{\theta}(L) \leq 0$ and then $\mathcal{D} = \{0\}$. Using Lemma 4.3 i), we deduce that

$$\min_{X \in \mathcal{D}} f(X) = f(0) \quad \text{and} \quad \operatorname{argmin}_{\mathcal{D}} f = \{0\} \quad \text{with} \quad \bar{X} = 0.$$

Case D : $(\theta, L) \in \Gamma_{12}$

Using Lemma 4.8 points 9 and 11, we deduce that for all $\theta > \theta^* > \theta_0$,

$$L = L_{12}(\theta) > L_c(\theta) > L_b(\theta). \quad (2.94)$$

Using Lemma 4.8 points 2 and 5, we obtain that for all $\theta > \theta^*$,

$$L = L_{12}(\theta) > L_{01}(\theta) > L_d(\theta).$$

Then using Lemma 4.3 ii), we deduce that $\tilde{\theta} > 0$ and f admits a non zero minimizer $X_m \in (2\theta/5, \theta)$.

Since $L > L_{01}(\theta)$ for all $\theta > \theta^*$, we use Proposition 3.1 ii) and Proposition 4.5 to conclude that

$$\min_{X \in [0, \theta]} f(X) = f(X_m) < f(0).$$

Using (2.94) and Proposition 4.4 iii), we deduce that $X_m = \tilde{\theta}$. Then

$$\min_{X \in \mathcal{D}} f(X) = f(\bar{X}) \quad \text{and} \quad \operatorname{argmin}_{\mathcal{D}} f = \{\bar{X}\} \quad \text{with} \quad \bar{X} = X_m = \tilde{\theta} > 0.$$

Case E : $(\theta, \mathbf{L}) \in \Gamma_{01}$

According to Lemma 4.8 points 4 and 11, for all $0 < \theta < \theta^* < \theta_{01}^c$ we deduce that

$$L = L_{01}(\theta) > L_c(\theta) > L_b(\theta). \quad (2.95)$$

And from point 5 of Lemma 4.8, for all $0 < \theta < \theta^*$ we conclude that $L = L_{01}(\theta) > L_d(\theta)$. Then using Lemma 4.3 ii), we deduce that $\tilde{\theta} > 0$ and f admits a non zero minimizer $X_m \in (2\theta/5, \theta)$.

Using Lemma 4.8 point 2, for all $\theta_0 \leq \theta < \theta^*$ we conclude that

$$L = L_{01}(\theta) > L_{12}(\theta). \quad (2.96)$$

Now using (2.95) and (2.96) with Proposition 4.4 i), we deduce that $X_m < \tilde{\theta}$ and then $\bar{X} = X_m$. Since $L = L_{01}(\theta)$ for all $0 < \theta < \theta^*$, we use Proposition 3.1 ii) and Proposition 4.5 to conclude that

$$\min_{X \in \mathcal{D}} f(X) = f(X_m) = f(0) \quad \text{and} \quad \operatorname{argmin}_{\mathcal{D}} f = \{0, \bar{X}\} \quad \text{with} \quad 0 < \bar{X} = X_m < \tilde{\theta}.$$

Case F : $(\theta, \mathbf{L}) \in \Gamma_{02}$

Using Lemma 4.8 point 6, we deduce that for all $\theta > \theta^* > \theta_0$, $L = L_{02}(\theta) > L_b(\theta)$. Using Lemma 4.8 points 1 and 5, we obtain that for all $\theta > \theta^*$, $L = L_{02}(\theta) > L_{01}(\theta) > L_d(\theta)$. Then using Lemma 4.3 ii), we deduce that $\tilde{\theta} > 0$ and f admits a non zero minimizer $X_m \in (2\theta/5, \theta)$.

Using Lemma 4.8 point 7, we have

$$\begin{cases} L = L_{02}(\theta) > L_c(\theta) & \text{for } \theta^* < \theta < \theta_{02}^c; \\ L = L_{02}(\theta) \leq L_c(\theta), & \text{for } \theta \geq \theta_{02}^c. \end{cases} \quad (2.97)$$

From points 8 and 3 of Lemma 4.8, we get that for $\theta^* < \theta < \theta_{02}^c$

$$L_e(\theta) < L = L_{02}(\theta) < L_{12}(\theta). \quad (2.98)$$

Using (2.97) and (2.98) with Proposition 4.4 ii) we deduce that $X_m > \tilde{\theta}(L)$ and then $\bar{X} = \tilde{\theta} > 0$. Since $L = L_{02}(\theta)$ for all $\theta > \theta^*$, according to Proposition 4.6, we deduce that $f(0) = f(\tilde{\theta})$. Then, we get

$$\min_{X \in \mathcal{D}} f(X) = f(\tilde{\theta}) = f(0) \quad \text{and} \quad \operatorname{argmin}_{\mathcal{D}} f = \{0, \bar{X}\} \quad \text{with} \quad 0 < \bar{X} = \tilde{\theta} < X_m.$$

Case G : $(\theta, \mathbf{L}) = \mathbf{P} = (\theta^*, \mathbf{L}_{01}(\theta^*))$

Using Remark 1.6, we have $L = L_{01}(\theta^*) = L_{02}(\theta^*) = L_{12}(\theta^*)$. Using Lemma 4.8 point 6, we deduce that $L = L_{02}(\theta^*) > L_b(\theta^*)$. Using Remark 4.8 point 5, we obtain

$L = L_{01}(\theta^*) > L_d(\theta^*)$. Then using Lemma 4.3 ii), we deduce that $\tilde{\theta} > 0$ and f admits a non zero minimizer $X_m \in (2\theta/5, \theta)$.

Since $L = L_{01}(\theta^*)$, we use Proposition 3.1 ii) and Proposition 4.5 to conclude that

$$\min_{X \in [0, \theta]} f(X) = f(X_m) = f(0).$$

Using Lemma 4.8 point 9, we have $L = L_{12}(\theta^*) > L_c(\theta^*)$ and then according to Proposition 4.4 iii), we show that $X_m = \tilde{\theta}$. Then, we get

$$\min_{X \in \mathcal{D}} f(X) = f(\bar{X}) = f(0) \quad \text{and} \quad \operatorname{argmin}_{\mathcal{D}} f = \{0, \bar{X}\} \quad \text{with} \quad 0 < \bar{X} = X_m = \tilde{\theta}.$$

Conclusion : We now easily check that

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{D}_i = D_i & \text{for } i = 0, 1, 2; \\ \tilde{\Gamma}_{ij} = \Gamma_{ij} & \text{for } i, j \in \{0, 1, 2\} \text{ with } i < j; \\ \tilde{\mathcal{P}} = \{P\}; \end{array} \right.$$

This ends the proof of Proposition 3.3. □

Acknowledgment

The authors thank A. El Doussouki for helpful discussions on the problem. This work has been financially supported by the project CEDRE 11EF45 L20 (2012-2013).

Deuxième partie

Porous Medium Equation

Chapitre 3

A new contraction family for porous medium and fast diffusion equations

This chapter is the submitted version of a paper done in collaboration with M. Jazar and R. Monneau [31].

In this work, we answer a long standing open question about the existence of new contractions for porous medium type equations. For $m > 0$ and $d \geq 1$, we consider nonnegative solutions $U(t, x)$ of the following normalized equation

$$mU_t = \Delta U^m \quad \text{on} \quad (0, +\infty) \times \Omega = Q \quad \text{with} \quad \Omega = \mathbb{R}^d.$$

For $0 < m < 2$, we present a new family of contractions for this equation in any dimensions d , which extends the L^1 contraction properties. Our contraction can be seen as the fourth known contraction for this equation. Even for the case $m = 1$, our approach leads to new results for the standard heat equation.

Abstract

In this paper, we present a surprising two-dimensional contraction family for porous medium and fast diffusion equations. This approach provides new a priori estimates on the solutions, even for the standard heat equation.

AMS Classification : 35K55, 35K65.

Keywords : contraction, porous medium equation, fast diffusion.

1 Introduction

In this paper, we answer a long standing open question about the existence of new contractions for porous medium type equations. For $m > 0$ and $d \geq 1$, we consider nonnegative solutions $U(t, x)$ of the following normalized equation

$$mU_t = \Delta U^m \quad \text{on} \quad (0, +\infty) \times \Omega = Q \quad \text{with} \quad \Omega = \mathbb{R}^d. \quad (3.1)$$

For $m > 1$, this equation is called the porous medium equation (PME), while for $m < 1$, it is called the fast diffusion equation (FDE). We choose the following standard definition of solution :

Definition 1.1. (Notion of solution)

Let $m > 0$. We say that $U \geq 0$ is a solution of (3.1) with initial data $0 \leq U_0 \in L^1(\Omega)$, if $U, U^m \in L^1_{loc}(Q)$ and for every function $\eta \in C_c^\infty(\overline{Q})$ with compact support, we have

$$\iint_Q \left\{ \frac{U^m}{m} \Delta \eta + U \eta_t \right\} dxdt + \int_\Omega U_0(x) \eta(0, x) dx = 0.$$

We recall that for $m > 0$ and any initial data satisfying

$$U_0 \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{with} \quad U_0 \geq 0, \quad (3.2)$$

there is exactly one solution $U \in C([0, +\infty); L^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ in the sense of Definition 1.1 (see [63, 64]). In the special case where $m > m_c(d) := \max(0, \frac{d-2}{d})$, it is well known that it is possible to remove the condition $U_0 \in L^\infty(\Omega)$ to get existence and uniqueness in some weaker space. To present our results in a concise and unified way for $m > 0$, we will stick under assumptions (3.2).

In any dimensions, it is known (see [62] and the references therein), that this equation has at least three types of contractions : in L^1 , in H^{-1} and finally for the 2-Wasserstein distance if $m > m_c(d)$. This last contraction property has been discovered by Otto in [58] and published in [57] (see also later [34]). It is also known for the PME, that for the p -Wasserstein distance, there is no contraction for $d \geq 2$

and $p > p_1(m, d)$, while there is contraction for any $p \in [1, +\infty]$ in dimension $d = 1$ (see [62]). Note also that in [64] (Theorem A.5 p. 583), the author proves that the PME is not contractive with respect to L^p norm for $m \geq 2$ if $p > p_2(m, d)$.

In this paper, for $0 < m < 2$, we present a new family of contractions for this equation in any dimensions, which extends the L^1 contraction properties. Our contraction can be seen as the fourth known contraction for this equation. Even for the case $m = 1$, our approach leads to new results for the standard heat equation. More precisely, for U and V two nonnegative solutions of (3.1), we show that the following quantity

$$\int_{\Omega} |U^\alpha - V^\alpha|^p \quad (3.3)$$

is a Lyapunov functional which is nonincreasing in time for all (α, p) in some admissible set.

For convenience, we will work in the whole paper with

$$n = m - 1.$$

For $0 < |n| < 1$, we define the admissible (convex) set (which is sketched on Figure 3.1)

$$K_{|n|} = \{(\alpha, p) \in [|n|, 1] \times \mathbb{R}; \quad P_-(\alpha) \leq p \leq P_+(\alpha)\}. \quad (3.4)$$

with

$$P_{\pm}(\alpha) = 1 + \frac{2}{n^2}(1 - \alpha)(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - n^2})$$

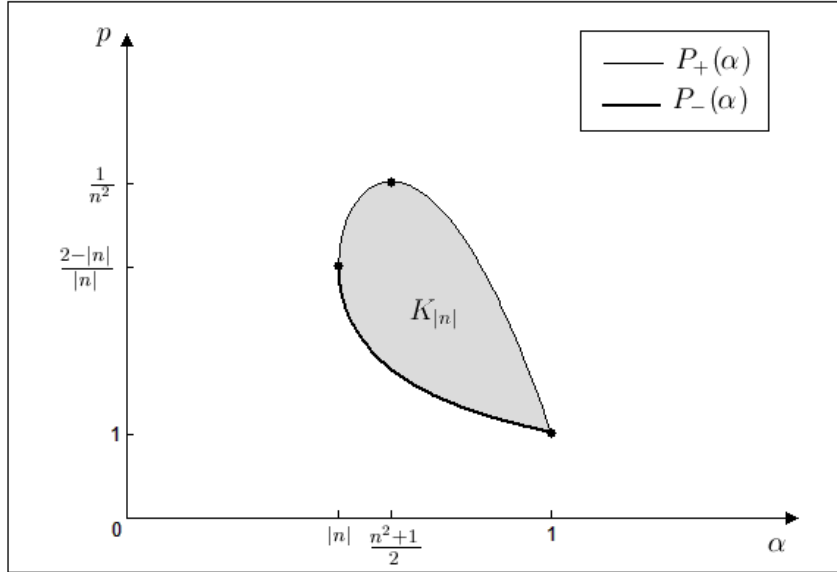
For $n = 0$, we also set $K_0 = \{(\alpha, p) \in (0, 1] \times \mathbb{R}; \quad \alpha p \geq 1\}$. One may wonder if contraction (4.2) is related or not to some gradient flow structure of the equation. Indeed, for a given positive solution U of (3.1), we can set $u = U^\alpha$ which solves

$$u_t = u^{\gamma-1} (u\Delta u + \bar{\gamma}|\nabla u|^2) \quad \text{with} \quad \gamma = \frac{n}{\alpha} \quad (3.5)$$

and $\bar{\gamma} = \gamma - 1 + \alpha^{-1}$. In the special case where $\bar{\gamma} = \gamma/2$, it can be seen that equation (4.6) is the negative L^2 -gradient flow of some energy, i.e. it solves

$$u_t = -\nabla_{L^2} E(u) \quad \text{with} \quad E(u) = \int_{\Omega} u^\gamma \frac{|\nabla u|^2}{2}.$$

Moreover, it is easy to check (computing the hessian of E) that E is convex if $\gamma \in [-1, 0]$. This corresponds exactly to the points $(\alpha, p) = (1 + \frac{n}{2}, 2) \in K_{|n|}$ that we capture for $n \in [-\frac{2}{3}, 0]$. This interpretation is similar to the derivation of Yamabe flow (see for instance [67]) with the difference here that the exponent of the fast diffusion is not directly related to the space dimension. Nevertheless, except this

FIGURE 3.1 – The set $K_{|n|}$.

very exceptional case, contraction (4.2) does not seem to be related to any gradient flow structure.

The paper is organized as follows. In Section 2, we present our main results. In Section 3, we prove the new contraction property. Finally in Section 4, we prove several gradient decay estimates.

2 Main results

We state precisely our main results. With the previous notation, and for $u, v > 0$, we define the symmetric matrix for $p > 1$ and $\alpha \in (0, 1]$:

$$Q_{\alpha,p}(v, u) = (p-1) \begin{pmatrix} v^\gamma \left(1 + \Gamma \left(\frac{u}{v} - 1\right)\right) & -\frac{1}{2}(v^\gamma + u^\gamma) \\ -\frac{1}{2}(v^\gamma + u^\gamma) & u^\gamma \left(1 + \Gamma \left(\frac{v}{u} - 1\right)\right) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

with

$$\Gamma = \frac{1-\alpha}{\alpha(p-1)}.$$

and set $Q_{1,1}(v, u) = 0$. We can check that this matrix is nonnegative for all $u, v > 0$ if and only if $(\alpha, p) \in K_{|n|}$ (see Lemma 3.1). For $y \in \mathbb{R}$, we set $y_+ = \max(0, y)$. Then our main result is the following

Theorem 2.1. (The new contraction family)

We recall that $\Omega = \mathbb{R}^d$ with $d \geq 1$. Let $|n| < 1$ and U (resp. V) be the solution of (3.1) in the sense of Definition 1.1, with initial data $0 \leq U_0 \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ (resp. $0 \leq V_0 \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$). Let $(\alpha, p) \in K_{|n|}$ where $K_{|n|}$ is defined in (3.4). We set

$$u = U^\alpha \quad \text{and} \quad v = V^\alpha.$$

Then for $w = u$ and v , we have $w \in C(Q) \cap L^\infty(Q) \cap C([0, +\infty); L^p(\Omega))$ and $w \in C^\infty(Q \cap \{w > 0\})$. Moreover, with the notation $v(\tau) = v(\tau, \cdot)$, $u(\tau) = u(\tau, \cdot)$, we have for all $t \geq 0$

$$\int_{\Omega} (v(t) - u(t))_+^p dx + p \int_0^t d\tau \int_{\{v-u>0\} \cap \{u>0\}} e[v, u] dx \leq \int_{\Omega} (v(0) - u(0))_+^p dx \quad (3.7)$$

with

$$e[v, u] = |v - u|^{p-2} \begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix}^T Q_{\alpha, p}(v, u) \begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix} \geq 0, \quad \text{for } v > u > 0. \quad (3.8)$$

Note that it is possible to see that there is equality in (4.16), for instance if u and v are smooth and positive on the torus \mathbb{T}^d instead of the whole space.

We now define a second symmetric matrix $M_{1,1} = 0$ and for $(\alpha, p) \in K_{|n|} \setminus \{(1, 1)\}$

$$M_{\alpha, p} = (p-1) \begin{pmatrix} 1 & -\Gamma + \frac{\gamma}{2} \\ -\Gamma + \frac{\gamma}{2} & \Gamma(1-\gamma) \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

which turns out to be also nonnegative (see Lemma 4.1).

Then, we have also the following result

Theorem 2.2. (Decay of the gradient)

Let U be the solution of equation (3.1) with initial data U_0 , under the assumptions of Theorem 2.1. Assume that $\nabla U_0^\alpha \in L^p(\Omega)$. Setting $u = U^\alpha$, we have $\nabla u \in L^\infty([0, +\infty); L^p(\Omega))$. Moreover, with the notation $u(\tau) = u(\tau, \cdot)$, we have for almost every $t \geq 0$:

$$\int_{\Omega} |\nabla u(t)|^p dx + p \int_0^t d\tau \int_{\{\nabla u \neq 0\} \cap \{u > 0\}} \bar{e}[u, \nabla u, D^2 u] dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u(0)|^p dx. \quad (3.10)$$

with

$$\bar{e}[u, w, A] = |w|^{p-2} u^{\gamma-2} \begin{pmatrix} uA_0 \\ w^2 \end{pmatrix}^T M_{\alpha, p} \begin{pmatrix} uA_0 \\ w^2 \end{pmatrix} + |w|^{p-2} u^\gamma (|A_2|^2 + p|A_1|^2) \geq 0, \quad (3.11)$$

where we write a general symmetric matrix A as

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ A_1^T & A_2 \end{pmatrix} \quad \text{by blocks in the vector space } \mathbb{R}b \oplus b^\perp \quad \text{with } b = \frac{w}{|w|}.$$

Again, note that it is possible to see that there is equality in (3.10), if U_0 is smooth and positive with $\Omega = \mathbb{T}^d$.

Let us mention that our results will be used in a future work to get information on the anomalous exponents associated to self-similar solutions like the one of Aronson-Graveleau (see [10]), and also the one of King-Peletier-Zhang (see [49, 56]).

3 The new contraction property

This section is devoted to the proof of Theorem 2.1. To this end, we first need the following result whose proof is elementary.

Lemma 3.1. (Properties of the matrix $Q_{\alpha,p}$)

For $|n| < 1$, let $(\alpha, p) \in \text{Int } K_{|n|}$ where $K_{|n|}$ is defined in (3.4).

i) Positive definite matrix

Let $\eta > 0$. Then for $v > u > 0$ with $1 + \eta^{-1} > v/u \geq 1 + \eta$, we have

$$Q_{\alpha,p}(v, u) \geq v^\gamma \nu I_2, \quad (3.12)$$

where I_2 is the 2×2 identity matrix, $Q_{\alpha,p}$ is defined in (4.12), and $\nu = \nu(n, \alpha, p, \eta) > 0$.

ii) Bound from below for the top diagonal term

Let $v \geq u > 0$, then the top diagonal term of the matrix satisfies

$$(Q_{\alpha,p}(v, u))_{11} \geq v^\gamma \nu_0, \quad (3.13)$$

for some $\nu_0 = \nu_0(n, \alpha, p) > 0$.

Proof of Lemma 3.1

We set $w = u/v \in (0, 1]$ and start with $\alpha \in (0, 1)$ and $p > 1$.

Step 1 : on the determinant

A direct computation shows that $\det Q_{\alpha,p}(v, u) > 0$ if and only if

$$G_\gamma(w) := \Gamma(1 - \Gamma) f_1(w) - \frac{1}{4} f_\gamma(w) > 0 \quad \text{with} \quad f_\gamma(w) := w^\gamma - 2 + \frac{1}{w^\gamma}. \quad (3.14)$$

Note that $G_\gamma(1) = G'_\gamma(1) = 0$. We now show that G_γ is strictly convex for $w \leq 1$, which will imply (3.14) for $w \neq 1$. Indeed, we have

$$G''_\gamma(w) = -w^{-3} F_\gamma(w),$$

with

$$F_\gamma(w) := \frac{1}{4}\gamma((\gamma-1)w^{\gamma+1} + (\gamma+1)w^{1-\gamma}) - 2\Gamma(1-\Gamma) \leq F_\gamma(1),$$

where we have used $|\gamma| < 1$ and $w \leq 1$ to get the inequality. We see that $F_\gamma(1) < 0$ if and only if Γ is in between the two distinct roots $\Gamma_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{1-\gamma^2}}{2}$, which is equivalent to $(\alpha, p) \in \text{Int } K_{|n|}$. This implies the strict convexity of G_γ .

Step 2 : conclusion

Recall that for $(\alpha, p) \in \text{Int } K_{|n|}$, we have $p > P_-(\alpha) \geq \frac{1}{\alpha}$. We deduce that each diagonal term of $Q_{\alpha,p}$ is positive (which shows ii)) and then $\text{tr } Q_{\alpha,p}(v, u) > 0$. With Step 1, this implies the result i). \square

Proof of Theorem 2.1

We only deal with the case $(\alpha, p) \in \text{Int } K_{|n|}$. Note that the border case can easily be recovered, by a passage to the limit. The proof is divided into several steps.

Step 1 : Estimate for smooth positive solutions

Given two nonnegative and smooth initial data U_0, V_0 with compact support, we consider modified initial data for $\varepsilon \in (0, 1)$

$$U_{0\varepsilon} = U_0 + \varepsilon \quad \text{and} \quad V_{0\varepsilon} = V_0 + \varepsilon.$$

According to the standard parabolic theory (see [51]), we can consider the smooth positive functions $U_\varepsilon, V_\varepsilon$, which are the classical solutions of (3.1) respectively associated to initial data $U_{0\varepsilon}$ and $V_{0\varepsilon}$. We have moreover the obvious bounds

$$\varepsilon \leq U_\varepsilon, V_\varepsilon \leq |U_0|_{L^\infty(\Omega)} + \varepsilon. \tag{3.15}$$

For $u_\varepsilon = U_\varepsilon^\alpha$, $v_\varepsilon = V_\varepsilon^\alpha$, for a cut-off function $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ satisfying $\varphi \geq 0$ and for $p > 1$, we will compute $\frac{d}{dt} \int_\Omega \varphi^2 (v_\varepsilon - u_\varepsilon)_+^p$. We will use the positivity properties of the matrix $Q_{\alpha,p}$, to control the error term created by the cut-off. To this end, it is useful to introduce for $\delta \in [0, \varepsilon]$, the function $\Psi_{\delta,p}(w)$ which is an approximation of $\Psi_{0,p}(w) = w_+^p$, given by

$$\Psi_{\delta,p}(w) = \left\{ \frac{w^p}{p} - \delta^{p-1}w - \delta^p \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \right\} \cdot 1_{\{w > \delta\}}.$$

Then a direct computation gives

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi^2 \Psi_{\delta,p} (v_{\varepsilon} - u_{\varepsilon}) dx \\
&= \int_{\Omega} \varphi^2 \Psi'_{\delta,p} (v_{\varepsilon} - u_{\varepsilon}) \{v_{\varepsilon}^{\gamma} \Delta v_{\varepsilon} - u_{\varepsilon}^{\gamma} \Delta u_{\varepsilon}\} dx \\
&+ \int_{\Omega} \varphi^2 \Psi'_{\delta,p} (v_{\varepsilon} - u_{\varepsilon}) \bar{\gamma} \{v_{\varepsilon}^{\gamma-1} |\nabla v_{\varepsilon}|^2 - u_{\varepsilon}^{\gamma-1} |\nabla u_{\varepsilon}|^2\} dx \\
&= \int_{\{v_{\varepsilon} - u_{\varepsilon} > \delta\}} f dx - \int_{\{v_{\varepsilon} - u_{\varepsilon} > \delta\}} \varphi^2 e[v_{\varepsilon}, u_{\varepsilon}] dx + \delta^{p-1} \int_{\{v_{\varepsilon} - u_{\varepsilon} > \delta\}} \varphi^2 g dx
\end{aligned} \tag{3.16}$$

with the notation $e[\cdot, \cdot]$ defined in (4.15),

$$f = -\Psi'_{\delta,p} (v_{\varepsilon} - u_{\varepsilon}) 2\varphi \nabla \varphi \cdot \{v_{\varepsilon}^{\gamma} \nabla v_{\varepsilon} - u_{\varepsilon}^{\gamma} \nabla u_{\varepsilon}\}$$

and

$$g = \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} (|\nabla v_{\varepsilon}|^2 v_{\varepsilon}^{\gamma-1} - |\nabla u_{\varepsilon}|^2 u_{\varepsilon}^{\gamma-1}).$$

Here in (3.16) we have used equation (4.6) to get the second line, and have done an integration by parts on the first term of the second line, using in particular for $\delta > 0$ the chain rule $\nabla \Psi'_{\delta,p} (w) = \Psi''_{\delta,p} (w) \nabla w$ with equality almost everywhere with the convention that the right hand side is zero if $\nabla w = 0$ irrespective of whether $\Psi''_{\delta,p}$ is defined. The case $\delta = 0$ can be recovered, passing to the limit $\delta \rightarrow 0$.

Using bounds (3.15), we see that $0 < v_{\varepsilon}^{\gamma}, u_{\varepsilon}^{\gamma} \leq M$ for some constant $M > 0$. Moreover for $v_{\varepsilon} - u_{\varepsilon} > \delta > 0$, we have by Young inequality

$$|f| \leq (v_{\varepsilon} - u_{\varepsilon})^{p-2} \left\{ \frac{2M}{\varepsilon \nu} (v_{\varepsilon} - u_{\varepsilon})^2 |\nabla \varphi|^2 + \varphi^2 \varepsilon \nu (v_{\varepsilon}^{\gamma} |\nabla v_{\varepsilon}|^2 + u_{\varepsilon}^{\gamma} |\nabla u_{\varepsilon}|^2) \right\} \tag{3.17}$$

where $\nu = \nu(\delta) > 0$ is given in (3.12) for $\delta > 0$.

Step 2 : First integral estimate on the gradient

We now choose $u_{\varepsilon} \equiv \varepsilon$ and $\delta = 0$. Then estimate (3.17) still holds true, but with ν replaced by ν_0 given in (3.13). This implies

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi^2 \Psi_{0,p} (v_{\varepsilon} - \varepsilon) dx \leq \int_{\Omega} C_0 |\nabla \varphi|^2 \Psi_{0,p} (v_{\varepsilon} - \varepsilon) dx - (1 - \varepsilon) \int_{\{v_{\varepsilon} - \varepsilon > 0\}} \varphi^2 e[v_{\varepsilon}, \varepsilon] dx$$

with $C_0 = \frac{2pM}{\varepsilon \nu_0}$. We then take a sequence of functions φ converging towards $\varphi_{\lambda}(x) = e^{-\lambda|x|}$ for $\lambda > 0$. Integrating in time, and passing to the limit $\lambda \rightarrow 0$, and using again (3.13), we get

$$\int_{\Omega} \Psi_{0,p} (v_{\varepsilon}(t) - \varepsilon) dx + (1 - \varepsilon) \nu_0 \int_0^t \int_{\Omega} v_{\varepsilon}^{\gamma} |\nabla v_{\varepsilon}|^2 \leq \int_{\Omega} \Psi_{0,p} (v_{\varepsilon}(0) - \varepsilon) dx \tag{3.18}$$

Step 3 : Refined estimate

We come back to general $v_\varepsilon, u_\varepsilon$ as in Step 1 and now consider $\delta > 0$. Using (3.17), we get

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi^2 \Psi_{\delta,p}(v_\varepsilon - u_\varepsilon) dx \\ & \leq \int_{\Omega} C |\nabla \varphi|^2 \Psi_{0,p}(v_\varepsilon - u_\varepsilon) dx - (1 - \varepsilon) \int_{\{v_\varepsilon - u_\varepsilon > \delta\}} \varphi^2 e[v_\varepsilon, u_\varepsilon] dx \\ & \quad + \delta^{p-1} \int_{\{v_\varepsilon - u_\varepsilon > \delta\}} \varphi^2 g dx \end{aligned}$$

with $C = \frac{2pM}{\varepsilon^\nu}$. Note that estimate (3.18) for both v_ε and u_ε , controls uniformly in time $\int_{\Omega} \Psi_{0,p}(v_\varepsilon - u_\varepsilon) dx$ and the time integral of $\int_{\Omega} \delta^{p-1} |g| dx$. Therefore, we can again apply the choice of $\varphi = \varphi_\lambda$, integrate in time, and take the limit $\lambda \rightarrow +\infty$ as in Step 2, and then conclude in the limit $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Psi_{0,p}(v_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t)) dx + (1 - \varepsilon) \int_0^t d\tau \int_{\{v_\varepsilon - u_\varepsilon > 0\} \cap \{u_\varepsilon > 0\}} e[v_\varepsilon, u_\varepsilon] dx \quad (3.19) \\ & \leq \int_{\Omega} \Psi_{0,p}(v_\varepsilon(0) - u_\varepsilon(0)) dx. \end{aligned}$$

Step 4 : The limit $\varepsilon \rightarrow 0$

For a point $P_0 = (t_0, x_0)$, let us denote the open parabolic cylinder $Q_r(P_0) = (t_0 - r^2, t_0) \times B_r(x_0)$, where $B_r(x_0)$ is the open ball of center x_0 and radius $r > 0$. It is known by Theorem 1.1 in Sacks [59] that for any smooth solution U_ε of (3.1) on $Q_{2r}(P_0)$, there exists a modulus of continuity ω of U_ε on $Q_r(P_0)$, depending only on r, d, n and $|U_\varepsilon|_{L^\infty(Q_{2r}(P_0))}$. This property is automatically transferred to $u_\varepsilon = U_\varepsilon^\alpha$ with the modulus of continuity ω^α . This implies, by Ascoli-Arzelà theorem, that $U_\varepsilon \rightarrow U$, where U is still a solution of (3.1) with initial data U_0 in the sense of Definition 1.1. We also note that (with $\alpha p \geq 1$)

$$\int_{\Omega} |u(t, \cdot) - u(s, \cdot)|^p \leq \int_{\Omega} |U(t, \cdot) - U(s, \cdot)|^{\alpha p} \leq (2|U|_{L^\infty(Q)})^{\alpha p - 1} |U(t, \cdot) - U(s, \cdot)|_{L^1(\Omega)}$$

which shows in particular that $U \in C([0, +\infty); L^1(\Omega))$ implies $u \in C([0, +\infty); L^p(\Omega))$.

From the standard parabolic theory [51], we know that $U \in C^\infty(Q \cap \{U > 0\})$, with corresponding quantitative estimates on solutions locally bounded from above and below. Similarly, we have $V_\varepsilon \rightarrow V$, and we call $u = U^\alpha, v = V^\alpha$. Using the C^1 convergence of $(v_\varepsilon, u_\varepsilon)$ to (v, u) on compact sets inside $\{v - u > 0\} \cap \{u > 0\}$, we can pass to the limit in (3.19), and get the same inequality for $\varepsilon = 0$ with $(v_\varepsilon, u_\varepsilon)$ replaced by (v, u) . This means (4.16). We finally conclude to the result for general initial data U_0, V_0 , by a standard approximation argument in $L^1(\Omega)$. \square

4 Decay of the gradient

This section is divided into two subsections. In the first subsection, we give the proof of the gradient decay Theorem 2.2. In the second subsection, we give a directional derivative estimate (Theorem 4.2) as a corollary of our contraction estimate.

4.1 Decay of the gradient

We start with the following simpler analogue of Lemma 3.1, whose proof follows from an elementary computation.

Lemma 4.1. (Properties of the matrix $M_{\alpha,p}$)

For $|n| < 1$, let $(\alpha, p) \in \text{Int } K_{|n|}$ where $K_{|n|}$ is defined in (3.4).

Then we have

$$M_{\alpha,p} \geq \nu_1 I_2, \quad (3.20)$$

where I_2 is the 2×2 identity matrix, $M_{\alpha,p}$ is defined in (4.18), and $\nu_1 = \nu_1(n, \alpha, p) > 0$.

Proof of Theorem 2.2

We follow the lines of proof of Theorem 2.1. For $\delta > 0$, a direct computation gives with $b_\varepsilon = \frac{\nabla u_\varepsilon}{|\nabla u_\varepsilon|}$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi^2 \Psi_{\delta,p}(|\nabla u_\varepsilon|) dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi^2 \Psi'_{\delta,p}(|\nabla u_\varepsilon|) b_\varepsilon \cdot \nabla \{u_\varepsilon^{\gamma-1} (u_\varepsilon \Delta u_\varepsilon + \bar{\gamma} |\nabla u_\varepsilon|^2)\} dx \\ &= \int_{\{|\nabla u_\varepsilon| > \delta\}} \bar{f} dx - \int_{\{|\nabla u_\varepsilon| > \delta\}} \varphi^2 \bar{e}[u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon, D^2 u_\varepsilon] dx + \delta^{p-1} \int_{\{|\nabla u_\varepsilon| > \delta\}} \varphi^2 \bar{g} \end{aligned} \quad (3.21)$$

with the notation $\bar{e}[\cdot, \cdot, \cdot]$ defined in (3.11) and

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^d -2\varphi \nabla_i \varphi \Psi'_{\delta,p}(|\nabla u_\varepsilon|) b_\varepsilon \cdot \nabla \{u_\varepsilon^\gamma \nabla_i u_\varepsilon\} \quad \text{and} \quad \bar{g} = \frac{(\alpha-1)}{\alpha} b_\varepsilon \cdot \nabla \{u_\varepsilon^{\gamma-1} |\nabla u_\varepsilon|^2\}.$$

Here we have integrated by parts the term Δu_ε in the second line of (3.21). We then pass to the limit $\delta \rightarrow 0$. We replace the fine property (3.12) of the matrix $Q_{\alpha,p}$, by (3.20). We finally conclude as in the proof of Theorem 2.1. \square

4.2 Decay of the directional derivative

For $\xi = (\xi^t, \xi^x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, we define the directional derivative

$$D_\xi u = \xi^t u_t + \xi^x \cdot \nabla u. \quad (3.22)$$

In this subsection, we prove the following result as a consequence of our contraction estimate.

Theorem 4.2. (Decay of the directional derivative)

Let U be the solution of equation (3.1) with initial data U_0 , under the assumptions of Theorem 2.1. We also set $u = U^\alpha$. Let $\xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, and let us assume that

$$C_\xi := \limsup_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \left| \frac{u((0, x) + \eta\xi) - u(0, x)}{\eta} \right|^p dx < +\infty \quad (3.23)$$

With the notation $D_\xi u$ defined in (4.17), we have $D_\xi u \in L^\infty([0, +\infty); L^p(\Omega))$. Moreover, with the notation $u(\tau) = u(\tau, \cdot)$, we have for almost every $t \geq 0$:

$$\int_{\Omega} |D_\xi u(t)|^p dx + p \int_0^t \int_{\{D_\xi u \neq 0\} \cap \{u > 0\}} \bar{e}[u, D_\xi u, \nabla u] dx \leq C_\xi. \quad (3.24)$$

with

$$\bar{e}[u, w, \nabla u] = |w|^{p-2} u^{\gamma-2} \begin{pmatrix} u \nabla w \\ w \nabla u \end{pmatrix}^T M_{\alpha, p} \begin{pmatrix} u \nabla w \\ w \nabla u \end{pmatrix} \geq 0. \quad (3.25)$$

In particular (3.23) is satisfied if $\xi^t = 0$ and $D_\xi U_0^\alpha \in L^p(\Omega)$. We will use the following result.

Lemma 4.3. (Limit of the quadratic term)

For $|n| < 1$, let $(\alpha, p) \in K_{|n|}$ where $K_{|n|}$ is defined in (3.4).

Let Ω_1 be an open set such that $u, w, z \in C^1(\Omega_1)$ with $u > 0$ on Ω_1 . For $\eta \in (0, 1)$, let v_η be a function satisfying

$$|v_\eta - (u + \eta w + \eta^2 z)|_{C^1(\Omega_1)} = o(\eta^2)$$

Then we have on Ω_1

$$J_\eta(v_\eta, u) = \eta^{-2} \begin{pmatrix} \nabla v_\eta \\ \nabla u \end{pmatrix}^T Q_{\alpha, p}(v_\eta, u) \begin{pmatrix} \nabla v_\eta \\ \nabla u \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} J_0 = u^{\gamma-2} \begin{pmatrix} u \nabla w \\ w \nabla u \end{pmatrix}^T M_{\alpha, p} \begin{pmatrix} u \nabla w \\ w \nabla u \end{pmatrix},$$

where we recall that the matrices $Q_{\alpha, p}$ and $M_{\alpha, p}$ are respectively defined in (4.12) and (4.18).

Proof of Lemma 4.4

The proof is done using a simple Taylor expansion argument. For $Q_{\alpha,p}(v, u)$, we set $Q_i = \partial_v^i Q_{\alpha,p}(u, u)$ for $i = 0, 1, 2$. For $V_\eta = \begin{pmatrix} \nabla v_\eta \\ \nabla u \end{pmatrix}$, we set $V_\eta = V_0 + \eta V_1 + \eta^2 V_2 + o(\eta^2)$. Using the fact that $Q_0 V_0 = 0 = V_0^T Q_1 V_0$, we get

$$J_\eta(v_\eta, u) = \frac{1}{2} w^2 V_0^T Q_2 V_0 + 2w V_1^T Q_1 V_0 + V_1^T Q_0 V_1 + o(1)$$

which implies the result. \square

Proof of Theorem 4.2

Let $v_\eta(t, x) = u(t, x) + \eta \xi$. We simply apply Theorem 2.1 to $v_\eta - u$ and $u - v_\eta$ and use the symmetry $e[v, u] = e[u, v]$, in order to control

$$\int_\Omega \left| \frac{v_\eta(t) - u(t)}{\eta} \right|^p$$

We pass to the limit as $\eta \rightarrow 0$ using Lemma 4.4 which gives (3.23). \square

Chapitre 4

A new contraction family for porous medium and fast diffusion equations (detailed version)

This chapter is a work done in collaboration with M. Jazar et R. Monneau. It presents a detailed version of the previous chapter even if we work in a different context by considering a bounded domain.

For $m > 0$, $d \geq 1$ and $T > 0$, we consider nonnegative solutions $U(t, x)$ of the following normalized equation

$$mU_t = \Delta U^m \quad \text{on} \quad (0, T) \times \Omega = Q_T,$$

where $\Omega = \mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ is the d -dimensional torus. For $0 < m < 2$, we present a new family of contractions for this equation in any dimensions d , which extends the L^1 contraction properties. Our contraction can be seen as the fourth known contraction for this equation.

Abstract

In this work, we present a surprising two-dimensional contraction family for the porous medium. As a consequence, we also get new a priori estimates on the solutions. This approach provides new a priori estimates on the solutions, even for the standard heat equation.

1 Introduction

The porous medium equation is an example of nonlinear evolution equation of parabolic type. It appears in the description of different natural phenomena mainly to describe processes involving fluid flow, heat transfer or diffusion. Hence the interest of its study, both for the pure mathematics and the applied scientist.

For $m > 0$, $d \geq 1$ and $T > 0$, we consider nonnegative solutions $U(t, x)$ of the following normalized equation

$$\begin{cases} mU_t = \Delta U^m & \text{on } (0, T) \times \Omega = Q_T, \\ U(x, 0) = U_0(x) & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

where $\Omega = \mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ is the d -dimensional torus and $0 \leq U_0 \in L^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} U &: \mathbb{R}^+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (t, x) &\longmapsto U(t, x). \end{aligned}$$

U_t is the derivative of U with respect to time and ΔU is the standard laplacien operator of U with respect to space.

For $m > 1$, this equation is called the porous medium equation (PME), while for $m < 1$, it is called the fast diffusion equation (FDE). In this work, we are interested in contraction properties of solution of such equations, which extends the L^1 contraction properties. Our contraction can be seen as the fourth known contraction for this equation. Even for the case $m = 1$, our approach leads to new results for the standard heat equation.

More precisely, for U and V two nonnegative solutions of (PME), we show that the following quantity

$$\int_{\Omega} |U^\alpha - V^\alpha|^p \quad (4.2)$$

is a Lyapunov functional which is nonincreasing in time for all (α, p) in some admissible (convex) set.

For convenience, we will work in the whole paper with

$$n = m - 1.$$

For $|n| < 1$, we start by defining the (convex) admissibility set $K_{|n|}$, the set of couples $(\alpha, p) \in \mathbb{R}^2$ that will be useful to prove our main results. The proof of the following proposition is in the appendix.

Proposition 1.1. (*Admissibility set*)

Let $0 < |n| < 1$, $\alpha \in [|n|, 1]$ and consider the following functions

$$P_-(\alpha) = 1 + \frac{2}{m^2}(1 - \alpha)(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - m^2}), \quad (4.3)$$

and

$$P_+(\alpha) = 1 + \frac{2}{m^2}(1 - \alpha)(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - m^2}). \quad (4.4)$$

Then, we have the following results

1. $1 \leq \frac{1}{\alpha} \leq P_-(\alpha) \leq P_+(\alpha)$.
2. $P_-(m) = P_+(m) = (2 - |n|)/|n|$ and $P_-(1) = P_+(1) = 1$.
3. The set

$$\begin{cases} K_{|n|} = \{(\alpha, p) \in [|n|, 1] \times \mathbb{R}; P_-(\alpha) \leq p \leq P_+(\alpha)\} & \text{for } 0 < |n| < 1, \\ K_0 = \{(\alpha, p) \in (0, 1] \times \mathbb{R}; \alpha p \geq 1\}. \end{cases} \quad (4.5)$$

is convex.

For $0 < |n| < 1$, we sketched $K_{|n|}$ on Figure 4.1.

One may wonder if contraction (4.2) is related or not to some gradient flow structure of the equation. Indeed, for a given positive solution U of (PME), we can set $u = U^\alpha$ which solves

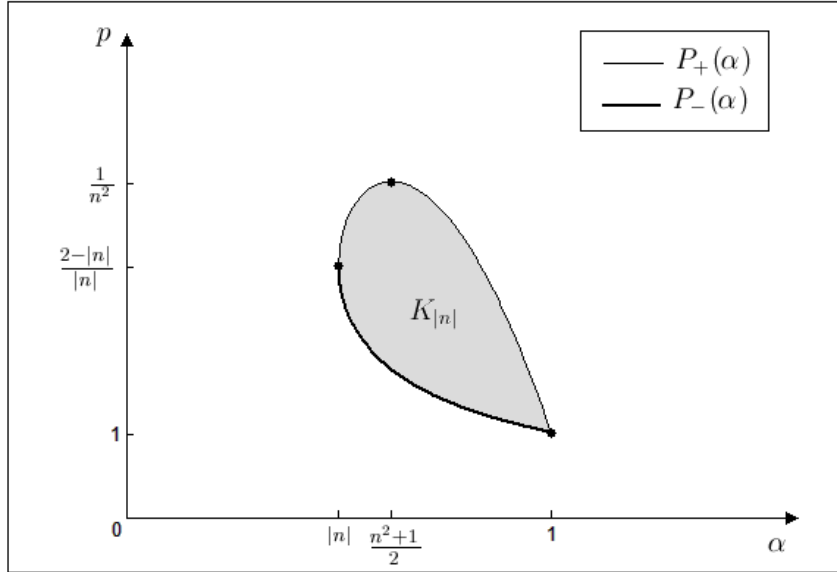
$$u_t = u^{\gamma-1} (u\Delta u + \bar{\gamma}|\nabla u|^2) \quad \text{with} \quad \gamma = \frac{n}{\alpha} \quad (4.6)$$

and $\bar{\gamma} = \gamma - 1 + \alpha^{-1}$. In the special case where $\bar{\gamma} = \gamma/2$, it can be seen that equation (4.6) is the negative L^2 -gradient flow of some energy, i.e. it solves

$$u_t = -\nabla_{L^2} E(u) \quad \text{with} \quad E(u) = \int_{\Omega} u^\gamma \frac{|\nabla u|^2}{2}.$$

Moreover, it is easy to check (computing the hessian of E) that E is convex if $\gamma \in [-1, 0]$. This corresponds exactly to the points $(\alpha, p) = (1 + \frac{n}{2}, 2) \in K_{|n|}$ that we capture for $n \in [-\frac{2}{3}, 0]$. This interpretation is similar to the derivation of Yamabe flow (see for instance [67]) with the difference here that the exponent of the fast diffusion is not directly related to the space dimension. Nevertheless, except this very exceptional case, contraction (4.2) does not seem to be related to any gradient flow structure.

The Problem (PME) is widely studied in the litterature (see ??). So it is useful now to present the theory of classical and weak solutions of such problems.

FIGURE 4.1 – The set $K_{|n|}$.

1.1 Classical solutions

First, we start by introducing the following equivalent problem

Proposition 1.2. (*Equivalent problem*)

For $m > 0$, by considering the function

$$\begin{aligned} \phi &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ U &\mapsto \phi(U) = U^m, \end{aligned}$$

Problem (PME) is equivalent to the following problem

$$\begin{cases} U_t = \Delta \phi(U) & \text{in } Q_T \\ U(x, 0) = U_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (4.7)$$

where Δ is the standard Laplacien operator.

The proof of Proposition 1.2 is obvious.

In this part, we define classical solutions of Problem (4.7) and we give the existence result of such solutions. Moreover, we present the famous L^1 -contraction property.

Definition 1.3. (Classical solution)

We say that U is a classical solution of Problem (4.7) with initial data $U_0 \in C^2(\Omega)$ if U belongs to $C^{2,1}(\overline{Q_T})$ and if we have

$$\begin{cases} U_t(x, t) = \Delta\phi(U(x, t)) & \text{in } Q_T \\ U(x, 0) = U_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Theorem 1.4. (Existence of classical solutions, See [64, Theorem 3.2, page 34])

We consider the following hypothesis :

- (\mathcal{H}_0) Ω is a bounded domain in \mathbb{R}^d , $d \geq 1$.
- (\mathcal{H}_1) $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ which is C^2 smooth and it is increasing on \mathbb{R} . We assume the normalization $\phi(0) = 0$.
- (\mathcal{H}_2) U_0 is bounded and C^α function where $\alpha \geq 2$.

Under the above assumptions, Problem (4.7) admits a classical solution U in the space $C^{2,1}(\overline{Q_T})$. If $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ and U_0 belongs to $C^\infty(\Omega)$, then $U \in C^\infty(Q_T)$.

Proposition 1.5. (L^1 -contraction principle, See [64, Proposition 3.5, page 36])

Let U and \widehat{U} be two smooth solutions of Problem (4.7), possibly of changing sign and with initial data U_0 and \widehat{U}_0 respectively. For every $t > \tau \geq 0$, we have

$$\int_{\Omega} (U(x, t) - \widehat{U}(x, t))_+ dx \leq \int_{\Omega} (U(x, \tau) - \widehat{U}(x, \tau))_+ dx.$$

As a consequence, for every $t > 0$

$$\|U(t) - \widehat{U}(t)\|_1 \leq \|U_0 - \widehat{U}_0\|_1. \quad (4.8)$$

Corollary 1.6. (L^∞ -bound, See [64, Lemma 3.3, page 34])

Under the hypothesis of Theorem 1.4, there exists U a smooth solution of problem (4.7), with initial data U_0 satisfying

$$\|U\|_{L^\infty(Q_T)} \leq \|U_0\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

1.2 Weak solutions

Now, we consider a natural concept of weak solution to solve our problem. We focus on the existence and uniqueness of such solutions. Those results have already been introduced and proved by Vazquez in [?].

Definition 1.7. (Weak solution, See [64, Definition 5.4, page 87])

A locally integrable function U defined in Q_T is said to be a weak solution of Problem (4.7) with initial data U_0 if

i- $U \in L^1(Q_T)$ and $\phi(U) \in L^1(0, T; W^{1,1}(\Omega))$;

ii- U satisfies the identity

$$\int \int_{Q_T} \{\nabla \phi(U) \cdot \nabla \eta - U \eta_t\} dx dt = \int_{\Omega} U_0(x) \eta(x, 0) dx, \quad (4.9)$$

for any function $\eta \in C^1(\overline{Q_T})$ which vanishes for $t = T$.

Theorem 1.8. (*Existence of weak solutions, See [64, Theorem 5.5, page 93]*)

We make the following assumptions

- (\mathcal{H}_0) Ω is a bounded domain in \mathbb{R}^d , $d \geq 1$.
- (\mathcal{H}_3) $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous and increasing with $\phi(0) = 0$; $\phi(U)$ is smooth with $\phi'(U) > 0$ for $U > 0$.
- (\mathcal{H}_4) We assume that $U_0 \geq 0$ belongs to $L^1(\Omega)$ such that $\psi(U_0) \in L^1(\Omega)$ where ψ is the primitive of ϕ defined as

$$\psi(s) = \int_0^s \phi(\sigma) d\sigma. \quad (4.10)$$

We call the space

$$X = L_{\psi}(\Omega) = \{U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ such that } U \in L^1(\Omega) \text{ and } \psi(U) \in L^1(\Omega)\}.$$

Under the above assumptions, there exists a weak solution U of Problem (4.7) with initial data $U_0 \in L^1(\Omega)$ and $U_0 \geq 0$ where the solution is understood in the weak sense of Definition (1.7). This solution is non-negative, and the time interval is unbounded ($T = \infty$).

We have $\psi(U) \in L^{\infty}(0, T; L^1(\Omega))$ for all $T > 0$ and $\phi(U) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$. An energy inequality is satisfied

$$\iint_{Q_T} |\nabla \phi(U)|^2 dx dt + \int_{\Omega} \psi(U(x, T)) dx \leq \int_{\Omega} \psi(U_0(x)) dx. \quad (4.11)$$

It is therefore a weak energy solution.

Theorem 1.9. (*Comparison Principle, See [64, Theorem 5.5, page 93]*)

The comparison principle holds for weak solutions :

If U and \widehat{U} are weak solutions with initial data such that

$$\begin{aligned} U_0 &\leq \widehat{U}_0 && \text{a.e. in } \Omega \\ \text{then} &&& \\ U &\leq \widehat{U} && \text{a.e. in } Q_T. \end{aligned}$$

In particular, if $U_0 \geq 0$ in Ω , then $U \geq 0$ in Q_T .

Theorem 1.10. (*Uniqueness of weak solutions, See [64, Theorem 5.3, page 90]*)

Under the additional assumptions that

$$\phi(U) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad \text{and} \quad U \in L^2(Q_T),$$

Problem (4.7) has at most one weak solution.

1.3 Organization of the paper

The organization of this chapter is as follows. In Section 2, we state our main results concerning the new contraction family (Theorems 2.1 and 2.2) and the decay of the directional derivative (Theorems 2.4 and 2.5). We give the proofs of Theorems 2.1 and 2.2 in Section 3. Section 4 is dedicated to prove Theorems 2.4 and 2.5. Finally, we end up with an Appendix.

2 Main Results

In this section, we state precisely our main results which will be divided into two parts : the results concerning the new contraction family and those concerning the decay of the gradient.

2.1 The new contraction family

In this subsection, we present our main results concerning the new contraction family. First, we state the result for classical solutions and then for weak solutions. For $u, v > 0$, we define the symmetric matrix for $p > 1$ and $\alpha \in (0, 1]$:

$$Q_{\alpha,p}(v, u) = (p-1) \begin{pmatrix} v^\gamma \left(1 + \Gamma \left(\frac{u}{v} - 1\right)\right) & -\frac{1}{2}(v^\gamma + u^\gamma) \\ -\frac{1}{2}(v^\gamma + u^\gamma) & u^\gamma \left(1 + \Gamma \left(\frac{v}{u} - 1\right)\right) \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

with

$$\Gamma = \frac{1-\alpha}{\alpha(p-1)} \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{n}{\alpha}, \quad (4.13)$$

and we set $Q_{1,1}(v, u) = 0$. We can check that this matrix is nonnegative for all $u, v > 0$ if and only if $(\alpha, p) \in K_{|n|}$ (see Lemma 3.1). For $y \in \mathbb{R}$, we set $y_+ = \max(0, y)$. Then our main result is the following

Theorem 2.1. (*The new contraction family for classical solutions*)

Let $d \geq 1$ and $\Omega = \mathbb{T}^d$ is the d -dimensional torus. Let $|n| < 1$ and $T > 0$. Consider

$U_0, V_0 \in C^\infty(\Omega)$ and $\varepsilon > 0$ such that $\varepsilon \leq U_0, V_0 \leq 1/\varepsilon$.

Then there exist $U, V \in C^\infty(Q_T)$ two solutions of Problem (PME) in the classical sense according to Definition 1.3 with initial data U_0 and V_0 respectively.

Let $(\alpha, p) \in K_{|n|}$ where $K_{|n|}$ is defined in (4.5). We set

$$u = U^\alpha \quad \text{and} \quad v = V^\alpha.$$

Moreover, with the notation $v(\tau) = v(\tau, \cdot)$, $u(\tau) = u(\tau, \cdot)$, we have for all $t \in [0, T]$

$$\int_{\Omega} (v(t) - u(t))_+^p dx + p \int_0^t d\tau \int_{\{v-u>0\}} e[v, u] dx = \int_{\Omega} (v(0) - u(0))_+^p dx \quad (4.14)$$

with

$$e[v, u] = |v - u|^{p-2} \begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix}^T Q_{\alpha, p}(v, u) \begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix} \geq 0, \quad \text{for } v > u > 0, \quad (4.15)$$

where $Q_{\alpha, p}$ is given in (4.12).

The proof of Theorem 2.1 is done in Section 3.

Theorem 2.2. (The new contraction family for weak solutions)

Let $d \geq 1$, $\Omega = \mathbb{T}^d$ is the d -dimensional torus and $T > 0$. Let $|n| < 1$ and $(\alpha, p) \in K_{|n|}$ where $K_{|n|}$ is defined in (4.5). Consider $0 \leq U_0, V_0 \in L^q(\Omega)$ where $q = \max\{\alpha p, 2\alpha - n, n + 2\}$.

Then there exist U and V two solutions of Problem (PME) with initial data U_0 and V_0 respectively in the weak sense according to Definition 1.7 such that $\nabla U^\alpha, \nabla V^\alpha \in L^2(Q_T)$. We set

$$u = U^\alpha \quad \text{and} \quad v = V^\alpha.$$

Then for $w = u$ and v , we have $w \in C(Q_T) \cap C([0, +\infty); L^p(\Omega))$ and $w \in C^\infty(Q_T \cap \{w > 0\})$. Moreover, with the notation $v(\tau) = v(\tau, \cdot)$, $u(\tau) = u(\tau, \cdot)$, we have for all $t \in [0, T]$

$$\int_{\Omega} (v(t) - u(t))_+^p dx + p \int_0^t d\tau \int_{\{v-u>0\}} e[v, u] dx \leq \int_{\Omega} (v(0) - u(0))_+^p dx \quad (4.16)$$

with the notation $e[\cdot, \cdot]$ given in (4.15) and where $e[\cdot, \cdot]$ makes sense even in the case $u = 0$ in the down diagonal term of the matrix $(Q_{\alpha, p}(v, u))_{22}$ using the convention $0 \times \infty = 0$.

The proof of Theorem 2.2 is done in Section 3.

2.2 Decay of the directional derivative

In this subsection, we present our main results concerning the decay of the directional derivative.

Definition 2.3. (*Directional derivative*)

For $\xi = (\xi^t, \xi^x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, we define the derivative of u in the direction of the vector ξ by

$$D_\xi u := \xi^t u_t + \xi^x \cdot \nabla u. \quad (4.17)$$

For $|n| < 1$, we define a second symmetric matrix $M_{1,1} = 0$ and for $(\alpha, p) \in K_{|n|} \setminus \{(1, 1)\}$

$$M_{\alpha,p} = (p-1) \begin{pmatrix} 1 & -\Gamma + \frac{\gamma}{2} \\ -\Gamma + \frac{\gamma}{2} & \Gamma(1-\gamma) \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

where Γ and γ are given in (4.13). This matrix turns out to be also nonnegative (see Lemma 4.1).

First, we state the result for classical solutions and then for weak solutions :

Theorem 2.4. (*Decay of the directional derivative for classical solutions*)

Let U be the solution of equation (PME) with initial data U_0 , under the assumptions of Theorem 2.1. We also set $u = U^\alpha$. Let $\xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. With the notations $D_\xi u$ defined in (4.17) and $u(\tau) = u(\tau, \cdot)$, we have for all $t \in [0, T]$

$$\int_{\Omega} (D_\xi u(t))_+^p dx + p \int_0^t d\tau \int_{\{D_\xi u > 0\}} \bar{e}[u, D_\xi u, \nabla u] dx = \int_{\Omega} (D_\xi u(0))_+^p dx. \quad (4.19)$$

with

$$\bar{e}[u, w, \nabla u] = |w|^{p-2} u^{\gamma-2} \begin{pmatrix} u \nabla w \\ w \nabla u \end{pmatrix}^T M_{\alpha,p} \begin{pmatrix} u \nabla w \\ w \nabla u \end{pmatrix} \geq 0, \quad (4.20)$$

where $M_{\alpha,p}$ is defined in (4.18).

The proof of Theorem 2.4 is done in Section 4.

Theorem 2.5. (*Decay of the directional derivative for weak solutions*)

Let U be the solution of equation (PME) with initial data U_0 , under the assumptions of Theorem 2.2. We also set $u = U^\alpha$. Let $\xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, and let us assume that $D_\xi u(0) \in L^p(\Omega)$. With the notation $D_\xi u$ defined in (4.17), we have $D_\xi u \in L^\infty([0, +\infty); L^p(\Omega))$. Moreover, with the notation $u(\tau) = u(\tau, \cdot)$, we have for all $t \in [0, T]$

$$\int_{\Omega} (D_\xi u(t))_+^p dx + p \int_0^t d\tau \int_{\{D_\xi u > 0\} \cap \{u > 0\}} \bar{e}[u, D_\xi u, \nabla u] dx \leq \int_{\Omega} (D_\xi u(0))_+^p dx. \quad (4.21)$$

with $\bar{e}[\cdot, \cdot, \cdot]$ introduced in (4.20).

The proof of Theorem 2.5 is done in Section 4.

3 Proofs of the new contraction family

The aim of this section is to prove Theorem 2.1 and 2.2. To this end, we first need to introduce the following result concerning the sign of the matrix $Q_{\alpha,p}$.

Lemma 3.1. (*Sign of the matrix $Q_{\alpha,p}$*)

Let $|n| < 1$ and $(\alpha, p) \in K_{|n|}$. For $u, v > 0$, we have

$$Q_{\alpha,p}(v, u) \geq 0,$$

where $Q_{\alpha,p}$ is given in (4.12).

Moreover, if $u \neq v$ and $\gamma \neq 1$ then there exists $\nu = \nu(n, \alpha, p, u, v, \gamma) > 0$ such that

$$Q_{\alpha,p}(v, u) \geq \nu I_2,$$

where I_2 is the 2×2 identity matrix.

The proof of Lemma 3.1 is done in the Appendix.

Proof of Theorem 2.1

Let $U_0, V_0 \in C^\infty(\Omega)$ such that $\varepsilon \leq U_0, V_0 \leq 1/\varepsilon$, then according to Theorem 1.4 and Proposition 4.7 there exist $U, V \in C^\infty(Q_T)$ solutions of problem (PME) in the classical sense with initial data U_0 and V_0 respectively.

Moreover, using the maximum principle, we have for all $t \in [0, T]$

$$\varepsilon \leq U(x, t), V(x, t) \leq 1/\varepsilon \quad \text{in } \Omega.$$

We use the notations

$$u = U^\alpha \quad \text{and} \quad v = V^\alpha.$$

For $\delta > 0$, we introduce the following function

$$\Psi_{\delta,p}(u) = \begin{cases} \frac{u^p}{p} - \delta^{p-1}u - \delta^p \left(\frac{1}{p} - 1 \right) & \text{if } u > \delta, \\ 0 & \text{if } u \leq \delta, \end{cases} \quad (4.22)$$

which is an approximation of $\Psi_{0,p}(u) = u_+^p$.

Step 1 : Calculation of the derivative of $A_\delta := \int_\Omega \Psi_{\delta,p}(v - u) dx$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_\delta &= \int_\Omega \Psi'_{\delta,p}(v - u) \frac{d}{dt} (v - u) dx \\ &= \int_\Omega \Psi'_{\delta,p}(v - u) \{ v^{\gamma-1} (v \Delta v + \bar{\gamma} |\nabla v|^2) - u^{\gamma-1} (u \Delta u + \bar{\gamma} |\nabla u|^2) \} dx, \end{aligned}$$

where we use in the last equality (4.6). Now we integrate by parts the laplacien terms and we use in particular for $\delta > 0$ the chain rule $\nabla \Psi'_{\delta,p}(w) = \Psi''_{\delta,p}(w) \nabla w$ with equality almost everywhere with the convention that the right hand side is zero if $\nabla w = 0$ irrespective of whether $\Psi''_{\delta,p}$ is defined. The case $\delta = 0$ can be recovered, passing to the limit $\delta \rightarrow 0$. Then we get for every $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Psi_{\delta,p}(v-u) dx &= - \int_{\{v-u>\delta\}} (v-u)^{p-2} \begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix}^T Q_{\alpha,p}(v,u) \begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix} dx \\ &\quad + \delta^{p-1} \int_{\{v-u>\delta\}} \frac{(\alpha-1)}{\alpha} (|\nabla v|^2 v^{\gamma-1} - |\nabla u|^2 u^{\gamma-1}) dx, \end{aligned} \quad (4.23)$$

where $Q_{\alpha,p}$ is given in (4.12).

Step 2 : Passage to the limit in (4.23) when δ tends to zero

We may to the limit in (4.23) as δ tends to zero.

Step 2.1 : Convergence of A_{δ}

For every $t \in [0, T]$, we have

$$\Psi_{\delta,p}(v-u) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{(v-u)_+^p}{p} \quad \text{in } \Omega,$$

and

$$|\Psi_{\delta,p}(v-u)| \leq \frac{(v-u)_+^p}{p} \in L^1(\Omega).$$

Then using Lebesgue Dominated Convergence Theorem, we have

$$\int_{\Omega} \Psi_{\delta,p}(v-u) dx \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{(v-u)_+^p}{p} dx.$$

Step 2.2 : Convergence of the first term of the right hand side of (4.23)

To pass to the limit when δ tends to zero in the first term of the right hand side of (4.23), we apply Monotone Convergence Theorem . Indeed, for every $t \in [0, T]$ we have

$$I_{\delta}^1(t) = \int_{\Omega} (v-u)^{p-2} \begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix}^T Q_{\alpha,p}(v,u) \begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix} 1_{\{v-u>\delta\}} dx.$$

According to Lemma 3.1, we have

$$\begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix}^T Q_{\alpha,p}(v,u) \begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix} \geq 0,$$

then

$$w_{\delta_k}^1 := (v-u)^{p-2} \begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix}^T Q_{\alpha,p}(v,u) \begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix} 1_{\{v-u>\delta\}}$$

is a decreasing sequence in δ . Further,

$$\inf_{\delta > 0} I_\delta^1 \geq 0 > .$$

Applying Monotone Convergence Theorem, we have for every $t \in [0, T]$

$$w_\delta^1 \xrightarrow{\delta_k \rightarrow 0} w_0^1 := (v - u)^{p-2} \begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix}^T Q_{\alpha,p}(v, u) \begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix} 1_{\{v-u>0\}}, \quad \text{a.e. in } \Omega$$

and

$$I_\delta^1(t) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{\{v-u>0\}} (v - u)^{p-2} \begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix}^T Q_{\alpha,p}(v, u) \begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix} dx.$$

Step 2.3 : Convergence of the second term of the left hand side of (4.23)

To pass to the limit when δ tends to zero in the second term of the left hand side of (4.23), we apply Dominated Convergence Theorem . In fact,

$$I_\delta^2 = \int_{\Omega} \delta^{p-1} \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} (|\nabla v|^2 v^{\gamma-1} - |\nabla u|^2 u^{\gamma-1}) 1_{\{v-u>\delta\}} dx.$$

Let

$$w_\delta^2 := \delta^{p-1} \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} (|\nabla v|^2 v^{\gamma-1} - |\nabla u|^2 u^{\gamma-1}) 1_{\{v-u>\delta\}}.$$

We know that u and v are $C^\infty(Q_T)$ with $\varepsilon \leq u, v \leq 1/\varepsilon$, then for every $t \in [0, T]$ we have

$$w_\delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \quad \text{a.e in } \Omega,$$

and

$$|w_\delta^2| \leq \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} ||\nabla v|^2 v^{\gamma-1} - |\nabla u|^2 u^{\gamma-1}| \in L^1(\Omega).$$

By Dominated Convergence Theorem, we deduce that for every $t \in [0, T]$

$$I_\delta^2(t) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Therefore, for every $t \in [0, T]$ we have (4.16). □

To prove Theorem 2.2, we have to introduce the following results stated in Lemmas 3.2 and 3.3.

Lemma 3.2. (Bound $L^2(Q_T)$ of ∇U^α)

Let $d \geq 1$, $\Omega = \mathbb{T}^d$ is the d -dimensional torus and $T > 0$. Consider $|n| < 1$, $(\alpha, p) \in K_{|n|}$ and $0 \leq U_0 \in L^q(\Omega)$ where $q = \max\{\alpha p, 2\alpha - n\}$. Then there exist U a weak solution of Problem (PME) with initial data U_0 and $\nabla U^\alpha \in L^2(Q_T)$.

Proof of Lemma 3.2

The proof of this Lemma is divided into several steps

Step 1 : Construction of approximated solution $(U_\varepsilon)_\varepsilon$ and its convergence

Let $0 < \varepsilon < 1$ and consider $U_{0\varepsilon} = U_0 * \rho_\varepsilon + \varepsilon$ where $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \rho_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ such that $\rho_1 \in C_c^\infty(\Omega)$, $\rho_1 \geq 0$ and $\int_\Omega \rho_1(x) dx = 1$. Then $U_{0\varepsilon} \in C_c^\infty(\Omega)$. Now using Theorem 1.4 and Proposition 4.7, there exist $U_\varepsilon \in C^\infty(\overline{Q_T})$ solution of (PME) in the classical sense according to Definition 1.3 with initial data $U_{0\varepsilon}$.

Passage to the limit in u_ε is based on the L^1 dependence of solutions on data which is described in Proposition 1.5. Therefore for all $t \in [0, T]$,

$$U_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} U(t) \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

Since the functions are bounded, it follows that

$$U_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} U \quad \text{in } C([0, T]; L^p(\Omega)) \quad \text{for } p < +\infty.$$

Step 2 : Bound of $\nabla U_\varepsilon^\alpha$

We have two cases to treat :

Case 2.1 : $q = 2\alpha - n > \alpha p$

For $(\alpha, p) \in K_{|n|}$, we have $\alpha p > 1$ which implies that $q > 1$. We know that

$$(U_\varepsilon)_t = \operatorname{div}(U_\varepsilon^n \nabla U_\varepsilon) \quad \text{in } Q_T$$

Let $\beta > 0$. By multiplying the previous equation by U_ε^β and integrating over Ω , we get

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \frac{U_\varepsilon^{\beta+1}}{\beta+1} dx = -\beta \int_\Omega U_\varepsilon^{\beta-q+1} |\nabla U_\varepsilon^\alpha|^2 dx.$$

Take $\beta = q - 1 > 0$, then we have

$$\frac{-1}{q-1} \frac{d}{dt} \int_\Omega \frac{U_\varepsilon^q}{q} dx = \int_\Omega |\nabla U_\varepsilon^\alpha|^2 dx.$$

Integrating now with respect to time between 0 and T , we get

$$\iint_{Q_T} |\nabla U_\varepsilon^\alpha|^2 dx = \frac{1}{q(q-1)} \left[\int_\Omega U_{0\varepsilon}^q dx - \int_\Omega U_\varepsilon^q(x, T) dx \right].$$

Therefore

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} |\nabla U_\varepsilon^\alpha|^2 dx &\leq \frac{1}{q(q-1)} \int_\Omega U_{0\varepsilon}^q dx \\ &\leq \frac{1}{q(q-1)} \left[\|U_0\|_{L^q(\Omega)} + (\operatorname{mes}(\Omega))^{1/q} \right]^q. \end{aligned}$$

Case 2.2 : $q = \alpha p > 2\alpha - n$

Let $k > 0$ such that $U_{0\varepsilon} \geq \varepsilon > k$. Using (4.16), we have

$$\int_{\Omega} \frac{(U_{0\varepsilon}^{\alpha} - k^{\alpha})^p}{p} dx \geq \int_0^T \int_{\{U_{\varepsilon} > k\}} (U_{\varepsilon}^{\alpha} - k^{\alpha})^{p-2} Q_{11}(k^{\alpha}, U_{\varepsilon}^{\alpha}) |\nabla U_{\varepsilon}^{\alpha}|^2 dx dt,$$

where

$$Q_{11}(U_{\varepsilon}^{\alpha}, k^{\alpha}) = U_{\varepsilon}^m \left(p - 1 + \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \left(\frac{k^{\alpha}}{U_{\varepsilon}^{\alpha}} - 1 \right) \right).$$

Since $U_{0\varepsilon} > k$ then using the maximum principle we deduce that

$$U_{\varepsilon}(x, t) > k \quad \text{for all } (x, t) \in Q_T.$$

Therefore we have

$$\int_{\Omega} \frac{(U_{0\varepsilon}^{\alpha} - k^{\alpha})^p}{p} dx \geq \iint_{Q_T} (U_{\varepsilon}^{\alpha} - k^{\alpha})^{p-2} Q_{11}(U_{\varepsilon}^{\alpha}, k^{\alpha}) |\nabla U_{\varepsilon}^{\alpha}|^2 dx dt. \quad (4.24)$$

We may now pass to the limit in (4.24) as k tends to 0. First we have

$$\frac{(U_{0\varepsilon}^{\alpha} - k^{\alpha})^p}{p} \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} \frac{U_{0\varepsilon}^{\alpha p}}{p} \quad \text{in } \Omega,$$

and

$$\frac{(U_{0\varepsilon}^{\alpha} - k^{\alpha})^p}{p} \leq \frac{U_{0\varepsilon}^{\alpha p}}{p} \in L^1(\Omega).$$

Using Dominated Convergence Theorem, we deduce that

$$\int_{\Omega} \frac{(U_{0\varepsilon}^{\alpha} - k^{\alpha})^p}{p} dx \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} \int_{\Omega} \frac{U_{0\varepsilon}^{\alpha p}}{p} dx.$$

On the other hand, we have

$$(U_{\varepsilon}^{\alpha} - k^{\alpha})^{p-2} Q_{11}(U_{\varepsilon}^{\alpha}, k^{\alpha}) |\nabla U_{\varepsilon}^{\alpha}|^2 \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} \left(p - 1 - \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) U_{\varepsilon}^{\alpha(p-2)+n} |\nabla U_{\varepsilon}^{\alpha}|^2 \quad \text{in } Q_T,$$

moreover since $0 < k < \varepsilon < 1$, we have also

$$(U_{\varepsilon}^{\alpha} - k^{\alpha})^{p-2} Q_{11}(U_{\varepsilon}^{\alpha}, k^{\alpha}) |\nabla U_{\varepsilon}^{\alpha}|^2 \leq \left(p - 1 - \frac{1 - \alpha}{\alpha} \left(\frac{1}{U_{\varepsilon}^{\alpha}} - 1 \right) \right) U_{\varepsilon}^{\alpha(p-2)} |\nabla U_{\varepsilon}^{\alpha}|^2 \in L^1(Q_T).$$

Again using Dominated Convergence Theorem, we get

$$\iint_{Q_T} (U_{\varepsilon}^{\alpha} - k^{\alpha})^{p-2} Q_{11}(U_{\varepsilon}^{\alpha}, k^{\alpha}) |\nabla U_{\varepsilon}^{\alpha}|^2 dx dt \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} \iint_{Q_T} \left(p - 1 - \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) U_{\varepsilon}^{\alpha(p-2)+n} |\nabla U_{\varepsilon}^{\alpha}|^2 dx dt.$$

Therefore we have

$$\int_{\Omega} \frac{U_{0\varepsilon}^{\alpha p}}{p} dx \geq \int_{Q_T} \left(p - 1 - \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) U_{\varepsilon}^{\alpha(p-2)+n} |\nabla U_{\varepsilon}^{\alpha}|^2 dx dt.$$

Since $\alpha p > 2\alpha - n$ and $U_{\varepsilon} > k$ then $U_{\varepsilon}^{\alpha(p-2)+n} > k^{\alpha(p-2)+n}$. Then

$$\int_{\Omega} \frac{U_{0\varepsilon}^{\alpha p}}{p} dx \geq \int_{Q_T} \left(p - 1 - \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) k^{\alpha(p-2)+n} |\nabla U_{\varepsilon}^{\alpha}|^2 dx dt.$$

Therefore

$$\iint_{Q_T} |\nabla U_{\varepsilon}^{\alpha}|^2 dx dt \leq C \int_{\Omega} U_{0\varepsilon}^q dx,$$

where C is a constant depending on n, α, p and k . Then

$$\iint_{Q_T} |\nabla U_{\varepsilon}^{\alpha}|^2 dx dt \leq C \left[\|U_0\|_{L^q(\Omega)} + (\text{mes}(\Omega))^{1/q} \right]^q.$$

In conclusion, if $U_0 \in L^q(\Omega)$ then

$$\|\nabla U_{\varepsilon}^{\alpha}\|_{L^2(Q_T)} \leq C,$$

where C is a constant depending on n, α, p, k, U_0 and Ω .

Step 3 : Bound of ∇U^{α}

Since $\|\nabla U_{\varepsilon}^{\alpha}\|_{L^2(Q_T)} \leq C$, then

$$\nabla U_{\varepsilon}^{\alpha} \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} \nabla U^{\alpha} \quad wL^2(Q_T).$$

Therefore

$$\|\nabla U^{\alpha}\|_{L^2(Q_T)} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla U_{\varepsilon}^{\alpha}\|_{L^2(Q_T)} \leq C.$$

□

Lemma 3.3. (Convergence in matrix form)

Given Ω a bounded domain in \mathbb{R}^d for $d \geq 1$. Consider a sequence of vectorial functions $F^k \in (L^2(\Omega))^2$ such that

$$F^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} F \quad wL^2.$$

let G^k be a sequence of symmetric positive 2×2 functional matrix such that for all $1 \leq i, j \leq 2$ we have $|G_{ij}^k| < +\infty$ a.e. and

$$G^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} G \quad a.e.$$

where the symmetric matrix G is characterized by the fact that for $(i, j) \neq (2, 2)$ we have $|G_{ij}| < +\infty$ almost everywhere and G_{22} could take the value $+\infty$. We consider the convention " $\infty \times 0 = 0$ ". If $G_{22} = +\infty$ then $F_2 = 0$, $F^t G F = F_1^2 G_{11}$. In all cases, we have

$$\int_{\Omega} F^t G F dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (F^k)^t G^k F^k dx.$$

The proof of Lemma 3.3 is done in the Appendix.

Proof of Theorem 2.2

This proof will be divided into several steps :

Step 1 : Construction of approximated solutions $(U_{\varepsilon})_{\varepsilon}, (V_{\varepsilon})_{\varepsilon}$ and their convergences

We begin by constructing sequences of approximate initial data $U_{0\varepsilon}$ and $V_{0\varepsilon}$ which don't take the value zero, so as to avoid the degeneracy of the equation. We may simply put

$$U_{0\varepsilon}(x) = \rho_{\varepsilon}(x) * U_0(x) + \varepsilon, \quad V_{0\varepsilon}(x) = \rho_{\varepsilon}(x) * V_0(x) + \varepsilon, \quad x \in \Omega \text{ and } 0 < \varepsilon < 1,$$

where $\rho_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \rho_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ such that $\rho_1 \in C_c^{\infty}(\Omega)$, $\rho_1 \geq 0$ and $\int_{\Omega} \rho_1(x) dx = 1$. Then $u_{0\varepsilon}, v_{0\varepsilon} \in C_c^{\infty}(\Omega)$. Now using Theorem 1.4 and Proposition 4.7, there exist $U_{\varepsilon}, V_{\varepsilon} \in C^{\infty}(\overline{Q_T})$ solution of (PME) in the classical sense according to Definition 1.3 with initial data respectively $U_{0\varepsilon}$ and $V_{0\varepsilon}$.

According to the quasilinear theory, now the approximate solutions $U_{\varepsilon}, V_{\varepsilon} \in C^{\infty}(Q_T)$ are not continuous down to $t = 0$ unless the data are. Instead, they take the initial data in $L^p(\Omega)$ for every $p < +\infty$.

Passage to the limit in U_{ε} and V_{ε} is based on the L^1 dependence of solutions on data which is described in Proposition 1.5.

In fact, if we consider $s > 0$, then we obtain for all $t \in [0, T]$

$$\|U_{\varepsilon+s}(t) - U_{\varepsilon}(t)\|_1 \leq \|U_{0\varepsilon+s} - U_{0\varepsilon}\|_1 \leq \|U_{0\varepsilon+s} - U_0\|_1 + \|U_{0\varepsilon} - U_0\|_1 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Then, for all $t \in [0, T]$ and $s > 0$

$$\|U_{\varepsilon+s}(t) - U_{\varepsilon}(t)\|_1 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Thus for all $t \in [0, T]$, $(u_{\varepsilon}(t))_{\varepsilon}$ is a Cauchy sequence in $L^1(\Omega)$ which is complete. Therefore for all $t \in [0, T]$,

$$U_{\varepsilon}(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} U(t) \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

It follows that

$$U_{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} U \quad \text{in } C([0, T]; L^1(\Omega)).$$

Similarly for V_ε . Since the functions are bounded, convergence also takes place in $C([0, T]; L^p(\Omega))$ for $p < +\infty$. Now we consider the notations

$$u_\varepsilon = U_\varepsilon^\alpha \quad \text{and} \quad v_\varepsilon = V_\varepsilon^\alpha.$$

Step 2 : Estimations on u_ε and v_ε

According to Theorem 2.1, we have for all $t \in [0, T]$

$$\int_{\Omega} (v_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t))_+^p dx + p \int_0^t d\tau \int_{\{v_\varepsilon - u_\varepsilon > 0\}} e[v_\varepsilon, u_\varepsilon] dx = \int_{\Omega} (v_\varepsilon(0) - u_\varepsilon(0))_+^p dx,$$

where $e[\cdot, \cdot]$ is given in (4.15).

Let $\delta > 0$, we have

$$\int_{\Omega} (v_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t))_+^p dx + p \int_0^t d\tau \int_{\{v_\varepsilon - u_\varepsilon > \delta\}} e[v_\varepsilon, u_\varepsilon] dx \leq \int_{\Omega} (v_\varepsilon(0) - u_\varepsilon(0))_+^p dx,$$

The aim now is to pass to the limit when ε tends to 0 in the previous inequality.

Step 2.1 : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (v_\varepsilon(0) - u_\varepsilon(0))_+^p dx = \int_{\Omega} (v_0 - u_0)_+^p dx.$

In fact, we have

$$(v_\varepsilon(0) - u_\varepsilon(0))_+^p \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} ((v_0 - u_0)_+)^p \quad \text{a.e. in } \Omega,$$

moreover

$$\begin{aligned} (v_\varepsilon(0) - u_{0\varepsilon}(0))_+^p &\leq (v_\varepsilon(0))^p \leq \|V_\varepsilon(0)\|_{L^q}^q \\ &\leq [\|V_0 * \rho_\varepsilon\|_{L^q} + (\text{mes}(\Omega))^{1/q}]^q \\ &\leq [\|V_0\|_{L^q} \cdot \|\rho_\varepsilon\|_{L^1} + (\text{mes}(\Omega))^{1/q}]^q \\ &\leq [\|V_0\|_{L^q} + (\text{mes}(\Omega))^{1/q}]^q, \end{aligned}$$

where we used in the third inequality YOUNG's inequality

$$(\|f * g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^r} \text{ with } 1 \leq q, p, r \leq \infty \text{ and } 1 - \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{r}).$$

Now, using Dominated Convergence Theorem we deduce the result.

Step 2.2 : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (v_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t))_+^p dx = \int_{\Omega} (v(t) - u(t))_+^p dx.$

This result is a direct consequence of the fact that for all $t > 0$, we have

$$v_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v(t) \quad \text{and} \quad u_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u(t) \quad \text{in } L^p(\Omega).$$

Step 2.3 : In this step, we prove that

$$\int_0^t d\tau \int_{\Omega} F^t G F dx \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t d\tau \int_{\Omega} (F^\varepsilon)^t G^\varepsilon F^\varepsilon dx, \quad (4.25)$$

where

$$G^\varepsilon := (v_\varepsilon - u_\varepsilon)^{p-2} Q_{\alpha,p}(v_\varepsilon, u_\varepsilon) 1_{\{v_\varepsilon - u_\varepsilon > \delta\}} 1_{\{v - u > \delta\}} \quad \text{and} \quad G := (v - u)^{p-2} Q_{\alpha,p}(v, u) 1_{\{v - u > \delta\}},$$

and

$$F^\varepsilon := \begin{pmatrix} \nabla v_\varepsilon \\ \nabla u_\varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad F := \begin{pmatrix} \nabla v \\ \nabla u \end{pmatrix}.$$

First, we show that

$$G^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} G \text{ a.e.} \quad (4.26)$$

In fact, we have

$$(v_\varepsilon - u_\varepsilon)^{p-2} Q_{\alpha,p}(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (v - u)^{p-2} Q_{\alpha,p}(v, u) \quad \text{a.e. in } \{v_\varepsilon - u_\varepsilon > \delta\} \cap \{v - u > \delta\}.$$

Moreover, we have

$$1_{\{v_\varepsilon - u_\varepsilon > \delta\}} 1_{\{v - u > \delta\}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1_{\{v - u > \delta\}} \quad \text{everywhere.}$$

On the other hand, we prove that

$$F^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} F \quad wL^2. \quad (4.27)$$

Since $U_0, V_0 \in L^q(\Omega)$ where $q = \max\{\alpha p, 2\alpha - n\}$ then $U_{0\varepsilon}, V_{0\varepsilon} \in L^q(\Omega)$, using Lemma 3.2 we deduce that

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2} \leq C_1 \quad \text{and} \quad \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2} \leq C_2,$$

where C_1 and C_2 are two positive constants independent on ε .

Then

$$\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \nabla u \quad \text{and} \quad \nabla v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \nabla v \quad wL^2.$$

If $u = 0$, then $\nabla u = 0$ a.e. in Ω and the down diagonal term of the matrix $(Q_{\alpha,p}(v, u))_{22}$ explode. Using the convention $0 \times \infty = 0$, we have $(Q_{\alpha,p}(v, u))_{22} \times |\nabla u|^2 = 0$. Now using (4.26), (4.27), Lemma 3.3 with the convention $0 \times \infty = 0$, we get (4.25).

Step 3 : Estimations on u and v .

As a consequence, we have

$$\begin{aligned}
p \int_0^t d\tau \int_{\{v-u>\delta\}} e[v, u] dx &= p \int_0^t d\tau \int_{\Omega} F^t G F dx \\
&\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} p \int_0^t d\tau \int_{\Omega} (F^\varepsilon)^t G^\varepsilon F^\varepsilon dx \\
&= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} p \int_0^t d\tau \int_{\{v_\varepsilon - u_\varepsilon > \delta\} \cap \{v-u > \delta\}} e[v_\varepsilon, u_\varepsilon] dx \\
&\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} p \int_0^t d\tau \int_{\{v_\varepsilon - u_\varepsilon > \delta\}} e[v_\varepsilon, u_\varepsilon] dx \\
&\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega} (v_\varepsilon(0) - u_\varepsilon(0))_+^p dx - \int_{\Omega} (v_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t))_+^p dx \right] \\
&= \int_{\Omega} (v_0 - u_0)_+^p dx - \int_{\Omega} (v(t) - u(t))_+^p dx.
\end{aligned}$$

Then, we have

$$\int_{\Omega} (v(t) - u(t))_+^p dx + p \int_0^t d\tau \int_{\{v-u>\delta\}} e[v, u] dx \leq \int_{\Omega} (v_0 - u_0)_+^p dx. \quad (4.28)$$

Step 4 : Passage to the limit when δ tends to zero in (4.28).

It's clear that $e[v, u]1_{\{v-u>\delta\}}$ is a decreasing sequence in δ . So we apply the Monotone Convergence theorem and we get (4.16). \square

4 Proofs of the decay of the directional derivative

The aim of this section is to prove Theorem 2.4 and 2.5. To this end, we first need to introduce the following result concerning the sign of the matrix $M_{\alpha,p}$.

Lemma 4.1. (*Sign of the matrix $M_{\alpha,p}$*)

Let $|n| < 1$. For $(\alpha, p) \in K_{|n|}$ where $K_{|n|}$ is introduced in (4.5), then

$$M_{\alpha,p} \geq 0,$$

where $M_{\alpha,p}$ is the symmetric matrix given in (4.18). Moreover if $(\alpha, p) \in \text{Int } K_{|n|}$, therefore there exists $\nu_1 = \nu_1(n, \alpha, p) > 0$ such that

$$M_{\alpha,p} \geq \nu_1 I_2,$$

where I_2 is the 2×2 identity matrix.

Proof of Lemma 4.1

We will show that $\text{tr}(M_{\alpha,p}) > 0$ and $\det(M_{\alpha,p}) \geq 0$.

Step 1 : $\text{tr}(M_{\alpha,p}) > 0$

In fact, we have

$$\text{tr}(M_{\alpha,p}) = p - 1 + \frac{(1 - \alpha)(\alpha - n)}{\alpha^2} > 0,$$

since $p > 1$ and $|n| \leq \alpha < 1$.

Step 2 : $\det(K_{\alpha,p}) \geq 0$

By calculating $\det(K_{\alpha,p})$, we obtain

$$\begin{aligned} \det(M_{\alpha,p}) &= \frac{(p-1)(1-\alpha)(\alpha-n)}{\alpha^2} - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} + \frac{n}{2\alpha}(p-1) \right)^2 \\ &= \frac{-n^2(p-1)^2 + 4\alpha(1-\alpha)(p-1) - 4(1-\alpha)^2}{4\alpha^2}. \end{aligned}$$

We set $Y = p - 1$, then

$$\det(M_{\alpha,p}) \geq 0 \Leftrightarrow -n^2Y^2 + 4\alpha(1-\alpha)Y - 4(1-\alpha)^2 \geq 0.$$

If we calculate the discriminant of the previous equation, we get

$$\Delta' = 4(\alpha^2 - n^2)(1 - \alpha)^2 \geq 0.$$

Thus, we have two solutions given by

$$Y_{\pm}(\alpha) = \frac{2\alpha(1-\alpha) \pm 2(1-\alpha)\sqrt{\alpha^2 - n^2}}{n^2},$$

and

$$\begin{aligned} \det(M_{\alpha,p}) \geq 0 &\Leftrightarrow Y \in [Y_-(\alpha), Y_+(\alpha)] \\ &\Leftrightarrow p \in [P_-(\alpha), P_+(\alpha)], \end{aligned}$$

with P_- and P_+ given respectively in (4.3) and (4.4). □

Remark : ($M_{\alpha,p}$ definite positive matrix)

Let λ_- and λ_+ be the eigenvalues of the matrix $M_{\alpha,p}$. Then we have

if $(\alpha, p) \in \text{Int } K_{|n|}$ then $\det(M_{\alpha,p}) = \lambda_- \lambda_+ > 0$ and then $M_{\alpha,p} > 0$,

if $(\alpha, p) \in \partial K_{|n|} \setminus \{(1, 1)\}$, then $\lambda_- = 0$ and $\lambda_+ > 0$,

if $(\alpha, p) = (1, 1)$, then $\lambda_- = \lambda_+ = 0$.

To prove Theorem 2.4, we need also to introduce the following lemma.

Lemma 4.2. (*Equality verified by $\Psi_{\delta,p}(D_\xi u)$*)

Let $\delta > 0$. Under the hypothesis of Theorem 2.4, for all $t \in [0, T]$ we have in $\mathcal{D}'(0, T)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Psi_{\delta,p}(D_\xi u) dx &= - \int_{\{D_\xi u > \delta\}} \Psi''_{\delta,p}(D_\xi u) \nabla(D_\xi u) D_\xi(u^\gamma \nabla u) dx \\ &\quad - \int_{\{D_\xi u > \delta\}} \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} \Psi'_{\delta,p}(D_\xi u) D_\xi(u^{\gamma-1} |\nabla u|^2) dx. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Proof of Lemma 4.2

Let $\eta > 0$ and $v = u((t, x) + \eta\xi)$, we have for all $t \in [0, T]$

$$I_\eta(t) := \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Psi_{\delta,p} \left(\frac{v - u}{\eta} \right) dx = \int_{\Omega} \Psi'_{\delta,p} \left(\frac{v - u}{\eta} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{v - u}{\eta} \right) dx.$$

Then

$$I_\eta(t) = \frac{1}{\eta} \int_{\Omega} \Psi'_{\delta,p} \left(\frac{v - u}{\eta} \right) \{v^{\gamma-1} (v\Delta v + \bar{\gamma}|\nabla v|^2) - u^{\gamma-1} (u\Delta u + \bar{\gamma}|\nabla u|^2)\} dx,$$

where we use (4.6). Now we integrate by parts the laplacien terms and we use in particular for $\delta > 0$ the chain rule $\nabla \Psi'_{\delta,p}(w) = \Psi''_{\delta,p}(w) \nabla w$ with equality almost everywhere with the convention that the right hand side is zero if $\nabla w = 0$ irrespective of whether $\Psi''_{\delta,p}$ is defined. Then we obtain for all $t \in [0, T]$

$$I_\eta(t) = -I_\eta^1(t) - I_\eta^2(t). \quad (4.30)$$

where

$$I_\eta^1(t) := \int_{\Omega} \Psi''_{\delta,p} \left(\frac{v - u}{\eta} \right) \nabla \left(\frac{v - u}{\eta} \right) \left(\frac{v^\gamma \nabla v - u^\gamma \nabla u}{\eta} \right) dx,$$

and

$$I_\eta^2(t) := \int_{\Omega} \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} \Psi'_{\delta,p} \left(\frac{v - u}{\eta} \right) \left(\frac{v^{\gamma-1} |\nabla v|^2 - u^{\gamma-1} |\nabla u|^2}{\eta} \right) dx.$$

Passage to the limit in (4.30) when η tends to zero :

Step 1 : Convergence of I_η

Using the continuity of the function $\Psi_{\delta,p}$ we have for all $t \in [0, T]$

$$\Psi_{\delta,p} \left(\frac{v - u}{\eta} \right) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \Psi_{\delta,p}(D_\xi u), \quad \text{a.e. in } \Omega$$

and by applying Mean Value Theorem, we obtain

$$\begin{aligned} \left| \Psi_{\delta,p} \left(\frac{v - u}{\eta} \right) \right| &= \left| \Psi_{\delta,p} \left(\frac{u(t + \eta\xi^t, x + \eta\xi^x) - u(t, x)}{\eta} \right) \right| \\ &= |\Psi_{\delta,p}(D_\xi u(t_0, x_0))| \\ &\leq \frac{1}{p} |D_\xi u(t_0, x_0)|^p \in L^1(\Omega), \end{aligned}$$

where (t_0, x_0) is a point of the segment joining (t, x) to $(t + \eta\xi^t, x + \eta\xi^x)$. Then we can apply Dominated Convergence Theorem to obtain for all $t \in [0, T]$

$$\int_{\Omega} \Psi_{\delta,p} \left(\frac{v-u}{\eta} \right) dx \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Psi_{\delta,p}(D_{\xi}u) dx.$$

Step 2 : Convergence of I_{η}^1

We set

$$w_{\eta}^1 = \Psi_{\delta,p}'' \left(\frac{v-u}{\eta} \right) \nabla \left(\frac{v-u}{\eta} \right) \left(\frac{v^{\gamma} \nabla v - u^{\gamma} \nabla u}{\eta} \right).$$

Then for all $t \in [0, T]$ we have

$$w_{\eta}^1 \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \Psi_{\delta,p}''(D_{\xi}u) \nabla(D_{\xi}u) D_{\xi}(u^{\gamma} \nabla u) \quad \text{a.e. in } \Omega,$$

and since u is $C^{\infty}(Q_T)$ by applying Mean value Theorem we get

$$\begin{aligned} |w_{\eta}^1| &\leq \left| \Psi_{\delta,p}''(D_{\xi}u(t_0, x_0)) \nabla(D_{\xi}u(t_0, x_0)) (D_{\xi}(u^{\gamma} \nabla u)(t_0, x_0)) \right| \\ &\leq (p-1) \left| |D_{\xi}u(t_0, x_0)|^{p-2} \nabla(D_{\xi}u(t_0, x_0)) (D_{\xi}(u^{\gamma} \nabla u)(t_0, x_0)) \right| \in L^1(\Omega), \end{aligned}$$

where (t_0, x_0) is a point of the segment joining (t, x) to $(t + \eta\xi^t, x + \eta\xi^x)$. Using Dominated Convergence Theorem, we obtain for all $t \in [0, T]$

$$I_{\eta}^1(t) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Psi_{\delta,p}''(D_{\xi}u) \nabla(D_{\xi}u) D_{\xi}(u^{\gamma} \nabla u) dx.$$

Step 3 : Convergence of I_{η}^2

We set

$$w_{\eta}^2 = \frac{(\alpha-1)}{\alpha} \Psi_{\delta,p}' \left(\frac{v-u}{\eta} \right) \left(\frac{v^{\gamma-1} |\nabla v|^2 - u^{\gamma-1} |\nabla u|^2}{\eta} \right).$$

Then for all $t \in [0, T]$ we have

$$w_{\eta}^2 \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \frac{(\alpha-1)}{\alpha} \Psi_{\delta,p}'(D_{\xi}u) D_{\xi}(u^{\gamma-1} |\nabla u|^2) \quad \text{a.e. in } \Omega,$$

and since u is $C^{\infty}(Q_T)$ by applying Mean value Theorem, we get

$$\begin{aligned} |w_{\eta}^2| &\leq \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \left| \Psi_{\delta,p}'(D_{\xi}u(t_0, x_0)) (D_{\xi}(u^{\gamma-1} |\nabla u|^2)(t_0, x_0)) \right| \\ &\leq \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \left| |D_{\xi}u(t_0, x_0)|^{p-1} (D_{\xi}(u^{\gamma-1} |\nabla u|^2)(t_0, x_0)) \right| \in L^1(\Omega), \end{aligned}$$

where (t_0, x_0) is a point of the segment joining (t, x) to $(t + \eta\xi^t, x + \eta\xi^x)$. Using Dominated Convergence Theorem, we obtain for all $t \in [0, T]$

$$I_{\eta}^2(t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \delta} \int_{\Omega} \frac{(\alpha-1)}{\alpha} \Psi_{\delta,p}'(D_{\xi}u) D_{\xi}(u^{\gamma-1} |\nabla u|^2) dx.$$

□

Proof of Theorem 2.4

Let $U_0 \in C^\infty(\Omega)$ such that $\varepsilon \leq U_0 \leq 1/\varepsilon$, then according to Theorem 1.4 and Proposition 4.7 there exists $U \in C^\infty(Q_T)$ solutions of problem (PME) in the classical sense with initial data U_0 .

Moreover, using the maximum principle, we have for all $t \in [0, T]$

$$\varepsilon \leq U(t, x) \leq 1/\varepsilon \quad \text{in } \Omega.$$

We use the notation $u = U^\alpha$. Let $0 < \delta < 1$.

Step 1 : Calculation of the derivative of $I_\delta(t) := \int_\Omega \Psi_{\delta, p}((D_\xi u^\alpha)_+) dx$

Applying Lemma 4.2, ffor all $t \in [0, T]$ we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_\delta(t) &= - \int_\Omega \Psi''_{\delta, p}(D_\xi u) \nabla(D_\xi u) D_\xi(u^\gamma \nabla u) dx \\ &\quad - \int_\Omega \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} \Psi'_{\delta, p}(D_\xi u) D_\xi(u^{\gamma-1} |\nabla u|^2) dx \\ &= - \int_{\{D_\xi u > \delta\}} (p - 1) (D_\xi u)^{p-2} \nabla(D_\xi u) D_\xi(u^\gamma \nabla u) dx \\ &\quad - \int_{\{D_\xi u > \delta\}} \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} ((D_\xi u)^{p-1} - \delta^{p-1}) D_\xi(u^{\gamma-1} |\nabla u|^2) dx, \end{aligned}$$

where we have used the definition of $\Psi_{\delta, p}$ given in (5.19) in the last equality. Then for all $t \in [0, T]$ we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_\delta(t) &= - \int_{\{D_\xi u > \delta\}} (p - 1) (D_\xi u)^{p-2} \nabla(D_\xi u) (u^\gamma \nabla(D_\xi u) + \gamma u^{\gamma-1} \nabla u D_\xi u) dx \\ &\quad - \int_{\{D_\xi u > \delta\}} \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} (D_\xi u)^{p-1} \left(\frac{\gamma - 1}{\alpha} u^{\gamma-2} |\nabla u|^2 D_\xi u + 2u^{\gamma-1} \nabla u \nabla(D_\xi u) \right) dx \\ &\quad + \delta^{p-1} \int_{\{D_\xi u > \delta\}} \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} D_\xi(u^{\gamma-1} |\nabla u|^2) dx. \end{aligned}$$

Then ffor all $t \in [0, T]$, we get

$$\frac{d}{dt} I_\delta(t) = -I_\delta^1(t) + I_\delta^2(t), \quad (4.31)$$

where

$$I_\delta^1(t) := \int_{\{D_\xi u > \delta\}} \bar{e}[u, D_\xi u, \nabla u] dx$$

with $\bar{e}[\cdot, \cdot, \cdot]$ given in (4.20), and

$$I_\delta^2(t) := \delta^{p-1} \int_{\{D_\xi u > \delta\}} \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} D_\xi(u^{\gamma-1} |\nabla u|^2) dx.$$

Step 2 : Passage to the limit in (4.31) when δ tends to zero

Step 2.1 : Convergence of $I_\delta(t)$

To pass to the limit when δ tends to zero in the left hand side of (4.31), we apply the Dominated Convergence Theorem. In fact, for all $t \in [0, T]$ we have

$$\begin{aligned} \Psi_{\delta,p}(D_\xi u) &\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{(D_\xi u)_+^p}{p} \quad \text{in } \Omega, \\ |\Psi_{\delta,p}((D_\xi u)_+)| &\leq \frac{((D_\xi u)_+)^p}{p} \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Then

$$\int_\Omega \Psi_{\delta,p}(D_\xi) dx \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_\Omega \frac{(D_\xi u)_+^p}{p} dx.$$

Step 2.2 : Convergence of the first term of the right hand side of (4.31)

To pass to the limit when δ tends to zero in the first term of the right hand side of (4.31), we apply Monotone Convergence Theorem. Indeed, for all $t \in [0, T]$

$$I_\delta^1(t) = \int_\Omega \bar{e}[u, D_\xi u, \nabla u] 1_{\{D_\xi u > \delta\}} dx.$$

According to Lemma 4.1, since $(\alpha, p) \in K_{|n|}$ we have $M_{\alpha,p} \geq 0$ then for all $t \in [0, T]$

$$w_\delta^1(t) := \bar{e}[u, D_\xi u, \nabla u] 1_{\{D_\xi u^\alpha > \delta\}}$$

is a decreasing sequence in δ . Therefore, by applying Monotone Convergence Theorem we get for all $t \in [0, T]$

$$w_\delta^1(t) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} w_0^1(t) := \bar{e}[u, D_\xi u, \nabla u] 1_{\{D_\xi u^\alpha > 0\}}, \quad \text{a.e. in } \Omega$$

and for all $t \in [0, T]$

$$I_\delta^1(t) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{\{D_\xi u^\alpha > 0\}} \bar{e}[u, D_\xi u, \nabla u] dx.$$

Step 2.3 : Convergence of the second term of the left hand side of (4.31)

To pass to the limit when δ tends to zero in the second term of the left hand side of (4.31), we apply Dominated Convergence Theorem . In fact, for all $t \in [0, T]$

$$I_\delta^2(t) = \int_\Omega w_\delta^2(t) dx \quad \text{where} \quad w_\delta^2(t) := \delta^{p-1} \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} D_\xi(u^{\gamma-1} |\nabla u|^2) 1_{\{D_\xi u > \delta\}}.$$

Since u and v are bounded and $C^\infty(Q_T)$, then for all $t \in [0, T]$

$$w_\delta^2(t) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \quad \text{in } \Omega,$$

and

$$|w_\delta^2(t)| \leq \frac{(1-\alpha)}{\alpha} |D_\xi(u^{\gamma-1} |\nabla u|^2)| \in L^1(\Omega).$$

By Dominated Convergence Theorem, we deduce that for all $t \in [0, T]$

$$I_\delta^2(t) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Therefore we have for all $t \in [0, T]$

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \frac{(D_\xi u)_+^p}{p} dx = \int_{\{D_\xi u^\alpha > 0\}} \bar{e}[u, D_\xi u, \nabla u] dx \quad \text{in } \mathcal{D}'(0, T).$$

Now we integrate the previous equality between 0 and t for every $t \in [0, T]$ and we get (4.19). □

Let us now prove the result of the decay of the directional derivative for weak solutions (Theorem 2.5). To this end, it is useful to introduce the following lemma.

Lemma 4.3. (Convergence in L^p)

Let $d \geq 1$ and $\Omega = \mathbb{T}^d$ the d -dimensional torus. For $\eta > 0$, $p \geq 1$ and $\xi \in \mathbb{R}^d$, consider a sequence f_η such that

$$f_\eta \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} f \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega),$$

with $\|f_\eta\|_{L^p} \leq C$ and $\|f\|_{L^p} \leq C$ for some $C > 0$. Moreover, f_η satisfies the following property

$$f_\eta(x) = \int_0^1 f(x + s\eta y) ds \quad \text{for some } y \in \mathbb{R}^d. \quad (4.32)$$

Then

$$f_\eta \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} f \quad \text{in } L^p(\Omega).$$

The proof of Lemma 4.3 is done in the Appendix.

Lemma 4.4. (Limit of the quadratic term)

Let $d \geq 1$ and $\Omega = \mathbb{T}^d$ the d -dimensional torus. For $|n| < 1$, let $(\alpha, p) \in K_{|n|}$ where $K_{|n|}$ is introduced in (4.5). Let $u, w, z \in C^1(\Omega)$ with $u > 0$. For $\eta \in (0, 1)$, let v_η be a function satisfying

$$|v_\eta - (u + \eta w + \eta^2 z)|_{C^1(\Omega)} = o(\eta^2)$$

Then we have on Ω

$$J_\eta(v_\eta, u) = \eta^{-2} \begin{pmatrix} \nabla v_\eta \\ \nabla u \end{pmatrix}^T Q_{\alpha,p}(v_\eta, u) \begin{pmatrix} \nabla v_\eta \\ \nabla u \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} J_0(u, w) = u^{\gamma-2} \begin{pmatrix} u \nabla w \\ w \nabla u \end{pmatrix}^T M_{\alpha,p} \begin{pmatrix} u \nabla w \\ w \nabla u \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

where we recall that the matrices $Q_{\alpha,p}$ and $M_{\alpha,p}$ are respectively defined in (4.12) and (4.18).

Proof of Lemma 4.4

The proof is done using a simple Taylor expansion argument. For $Q_{\alpha,p}(v, u)$, we set $Q_i = \partial_v^i Q_{\alpha,p}(u, u)$ for $i = 0, 1, 2$. For $V_\eta = \begin{pmatrix} \nabla v_\eta \\ \nabla u \end{pmatrix}$, we set $V_\eta = V_0 + \eta V_1 + \eta^2 V_2 + o(\eta^2)$. Using the fact that $Q_0 V_0 = 0 = V_0^T Q_1 V_0$, we get

$$J_\eta(v_\eta, u) = \frac{1}{2} w^2 V_0^T Q_2 V_0 + 2w V_1^T Q_1 V_0 + V_1^T Q_0 V_1 + o(1)$$

which implies the result. \square

Proof of Theorem 2.5

For $\eta > 0$, let $v_\eta(t, x) = u((t, x) + \eta\xi)$ and $\delta > 0$. By applying Theorem 2.2 to $v_\eta - u$, we obtain for all $t \in [0, T]$

$$\int_\Omega (v_\eta(t) - u(t))_+^p dx + p \int_0^t d\tau \int_{\{v_\eta - u > \delta\} \cap \{D_\xi u > \delta\} \cap \{u > \delta\}} e[v_\eta, u] dx \leq \int_\Omega (v_\eta(0) - u(0))_+^p dx,$$

where $e[\cdot, \cdot]$ is given in (4.15). We divide by η^p and we get

$$\int_\Omega \left(\frac{v_\eta(t) - u(t)}{\eta} \right)_+^p dx + I_\eta(t) \leq \int_\Omega \left(\frac{v_\eta(0) - u(0)}{\eta} \right)_+^p dx, \quad (4.34)$$

where

$$I_\eta(t) := p \int_0^t d\tau \int_{\{v_\eta - u > \delta\} \cap \{D_\xi u > \delta\} \cap \{u > \delta\}} \left| \frac{v_\eta - u}{\eta} \right|^{p-2} J_\eta(v_\eta, u) dx,$$

where J_η is given in 4.33.

Step 1 : Passage to the limit in (4.34) when η tends to zero

Step 1.1 : Convergence of $I_\eta(t)$

We know that $u \in C^\infty(\{u > \delta\})$. Then for all $t \in [0, T]$, we have

$$1_{\{v_\eta - u > \delta\} \cap \{D_\xi u > \delta\} \cap \{u > \delta\}} \left| \frac{v_\eta - u}{\eta} \right|^{p-2} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 1_{\{D_\xi u > \delta\} \cap \{u > \delta\}} |D_\xi u|^{p-2} \quad \text{in } \Omega.$$

According to the Lemma 4.4, we get for all $t \in [0, T]$

$$1_{\{u>\delta\}} J_\eta(v_\eta, u) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 1_{\{u>\delta\}} J_0(u, D_\xi u) \quad \text{in } \Omega,$$

where J_0 is given in (4.33). Then for all $t \in [0, T]$

$$1_{\{v_\eta - u > \delta\} \cap \{D_\xi u > \delta\} \cap \{u > \delta\}} \left| \frac{v_\eta - u}{\eta} \right|^{p-2} J_\eta(v_\eta, u) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 1_{\{D_\xi u > \delta\} \cap \{u > \delta\}} |D_\xi u|^{p-2} J_0(u, D_\xi u) \quad \text{in } \Omega.$$

By applying Fatou's Lemma and since $\bar{e}[u, w, \nabla u] = |w|^{p-2} J_0(u, w)$, we get for all $t \in [0, T]$

$$p \int_0^t d\tau \int_{\{D_\xi u > \delta\} \cap \{u > \delta\}} \bar{e}[u, D_\xi u, \nabla u] dx \leq \liminf_{\eta \rightarrow 0} I_\eta(t).$$

Step 1.2 : For all $t \in [0, T]$, we apply Lemma 4.3 for

$$f_\eta = f_\eta(t) = \frac{v_\eta(t) - u(t)}{\eta}.$$

Since for all $t \in [0, T]$, $f_\eta(t) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} D_\xi u(t)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, we get

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_\Omega \left(\frac{v_\eta(t) - u(t)}{\eta} \right)_+^p dx = \int_\Omega (D_\xi u(t))_+^p dx.$$

Step 1.3 : We apply Lemma 4.3 for

$$f_\eta = f_\eta(0) = \frac{v_\eta(0) - u(0)}{\eta}.$$

Since $f_\eta(0) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} D_\xi u(0)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, we get

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_\Omega \left(\frac{v_\eta(0) - u(0)}{\eta} \right)_+^p dx = \int_\Omega (D_\xi u(0))_+^p dx.$$

Therefore, we get

$$\int_\Omega (D_\xi u(t))_+^p dx + p \int_0^t d\tau \int_{\{D_\xi u > \delta\} \cap \{u > \delta\}} \bar{e}[u, D_\xi u, \nabla u] dx \leq \int_\Omega (D_\xi u(0))_+^p dx. \quad (4.35)$$

Step 2 : Passage to the limit in (4.35) when δ tends to zero

Again, by applying Monotone Convergence theorem, we get

$$\int_0^t d\tau \int_{\{D_\xi u > \delta\} \cap \{u > \delta\}} \bar{e}[u, D_\xi u, \nabla u] dx \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_0^t d\tau \int_{\{D_\xi u > 0\} \cap \{u > 0\}} \bar{e}[u, D_\xi u, \nabla u] dx.$$

Therefore, we get (4.21). □

5 Appendix

This section is dedicated to prove Proposition 1.1, Lemmas 3.1, 3.3, 4.3 and some general results.

5.1 Proof of Proposition 1.1

Proof of Proposition 1.1

Let $0 < |n| < 1$ and $\alpha \in [|n|, 1]$.

First, we have

$$\begin{aligned} P_-(\alpha) - \frac{1}{\alpha} &= \frac{2 - \alpha + \sqrt{\alpha^2 - n^2}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - n^2}} - \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{(1 - \alpha)(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - n^2})}{\alpha(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - n^2})} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

On the other hand, as $|n| \leq \alpha \leq 1$ we have

$$\begin{aligned} P_-(\alpha) - P_+(\alpha) &= \frac{2}{n^2}(1 - \alpha)(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - n^2} - \alpha - \sqrt{\alpha^2 - n^2}) \\ &= \frac{-4}{n^2}(1 - \alpha)\sqrt{\alpha^2 - n^2} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Convexity of the set $K_{|n|}$

In order to show that $K_{|n|}$ is convex, it suffices to prove that P_- defined in (4.3) is convex and P_+ defined in (4.4) is concave for $\alpha \in [|n|, 1]$.

In fact, we have

$$P'_-(\alpha) = \frac{2}{n^2} \left(1 - 2\alpha + \sqrt{\alpha^2 - n^2} + \frac{\alpha^2 - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - n^2}} \right),$$

and

$$P'_+(\alpha) = \frac{2}{n^2} \left(1 - 2\alpha - \sqrt{\alpha^2 - n^2} + \frac{\alpha - \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 - n^2}} \right).$$

Let us now calculate the second derivative of P_- and P_+ . We obtain

$$P''_-(\alpha) = \frac{2}{n^2} \left(\frac{F_-(\alpha)}{(\alpha^2 - n^2)\sqrt{\alpha^2 - n^2}} \right) \quad \text{and} \quad P''_+(\alpha) = \frac{2}{n^2} \left(\frac{F_+(\alpha)}{(\alpha^2 - n^2)\sqrt{\alpha^2 - n^2}} \right).$$

where

$$F_-(\alpha) = -2(\alpha^2 - n^2)\sqrt{\alpha^2 - n^2} + 2\alpha^3 - 3n^2\alpha + n^2,$$

and

$$F_+(\alpha) = -2(\alpha^2 - n^2)\sqrt{\alpha^2 - n^2} - 2\alpha^3 + 3n^2\alpha - n^2.$$

To study the sign of P_-'' and P_+'' , it sufficient to study the sign of the functions F_- and F_+ . In fact, we have

$$F_-'(\alpha) = 3 \left(-2\alpha\sqrt{\alpha^2 - n^2} + 2\alpha^2 - n^2 \right) > 0,$$

and

$$F_+'(\alpha) = -3 \left(2\alpha\sqrt{\alpha^2 - n^2} + 2\alpha^2 - n^2 \right) < 0.$$

Then F_- is an increasing function and $F_-(\alpha) \geq F_-(|n|) = n^2(1 - |n|)$. And F_+ is a decreasing function and $F_+(\alpha) \leq F_+(|n|) = n^2(|n| - 1)$. Since $0 < |n| < 1$, we deduce that

$$F_-(\alpha) > 0 \quad \text{and} \quad P_-''(\alpha) > 0, \quad \text{for } \alpha \in [|n|, 1]$$

and

$$F_+(\alpha) < 0 \quad \text{and} \quad P_+''(\alpha) < 0, \quad \text{for } \alpha \in [|n|, 1].$$

□

5.2 Proof of Lemma 3.1

To prove Lemma 3.1, we have to introduce the following results (Lemmas 5.1 and 5.2). We begin by introducing the following function

$$\begin{aligned} F_\gamma &: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto F_\gamma(w) = \frac{1}{4}\gamma((\gamma - 1)w^{\gamma+1} + (\gamma + 1)w^{1-\gamma}) - 2\Gamma(1 - \Gamma). \end{aligned} \quad (4.36)$$

where $|\gamma| \leq 1$ and Γ is given in (4.13) for $\alpha \in (0, 1)$ and $p > 1$. We also define

$$\Gamma_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \gamma^2}}{2}. \quad (4.37)$$

Lemma 5.1. (*Study of the function F_γ*)

If $\Gamma \in [\Gamma_-, \Gamma_+]$, then we have

$$F_\gamma(w) \leq 0 \quad \text{for all } |\gamma| \leq 1 \text{ and } w \in \mathbb{R}_+^*.$$

Proof of Lemma 5.1

The proof of this lemma is divided into several steps.

Step 1 : Computing of F_γ'

It is easy to show that

$$F_\gamma'(w) = \frac{1}{4}\gamma(\gamma - 1)(\gamma + 1)g_w(\gamma) \quad \text{where} \quad g_w(\gamma) := w^\gamma - w^{-\gamma}. \quad (4.38)$$

Step 2 : Study of the function g_w

We compute $g'_w(\gamma) = \ln w(w^\gamma + w^{-\gamma})$ with $\gamma \neq 0$.

If $0 < w < 1$, then $g'_w(\gamma) < 0$ and g_w is decreasing and vanishes at $\gamma = 0$.

If $w > 1$, then $g'_w(\gamma) > 0$ and g_w is increasing and vanishes at $\gamma = 0$.

If $w = 1$ then $g_w(\gamma) = 0$ for all $|\gamma| \leq 1$.

Step 3 : Sign of the function F'_γ

For $|\gamma| \leq 1$ and using (4.38), we deduce that $F'_\gamma(w) \geq 0$ for $0 < w < 1$ and $F'_\gamma(w) \leq 0$ for $w > 1$. Finally, we have $F'_\gamma(1) = 0$.

Step 4 : Variation of the function F_γ

Using Step 3, F_γ has a maximum at $w = 1$ for $|\gamma| \leq 1$. A direct computation shows that $F_\gamma(1) = 2\Gamma^2 - 2\Gamma + \frac{1}{2}\gamma^2$. Therefore since $|\gamma| \leq 1$, we have $\Delta' = 1 - \gamma^2$. It is easy to check that Γ_\pm defined in (4.37) are the solution of $F_\gamma(1) = 0$ and for $\Gamma \in [\Gamma_-, \Gamma_+]$, we have

$$F_\gamma(w) \leq 0 \quad \text{for all } w \in \mathbb{R}_+^*.$$

□

Lemma 5.2. (Equivalent set)

Let $0 < |n| < 1$, $\alpha \in (|n|, 1)$ and $\gamma = n/\alpha$. Then

$$\Gamma_- \leq \Gamma \leq \Gamma_+ \Leftrightarrow P_-(\alpha) \leq p \leq P_+(\alpha),$$

where Γ is given by (4.13), Γ_\pm is defined in (4.37) and P_\pm are introduced in (4.3) and (4.4) respectively.

Proof of Lemma 5.2

For $0 < |n| < 1$ and $\alpha \in (|n|, 1)$, we have

$$\begin{aligned} \Gamma_- \leq \Gamma \leq \Gamma_+ &\Leftrightarrow \alpha - \sqrt{\alpha^2 - n^2} \leq \frac{2(1 - \alpha)}{p - 1} \leq \alpha + \sqrt{\alpha^2 - n^2} \\ &\Leftrightarrow (p - 1) \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - n^2} \right) \leq 2(1 - \alpha) \leq (p - 1) \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - n^2} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{2(1 - \alpha)}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - n^2}} \leq p - 1 \leq \frac{2(1 - \alpha)}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - n^2}} \\ &\Leftrightarrow P_-(\alpha) \leq p \leq P_+(\alpha). \end{aligned}$$

□

Proof of Lemma 3.1

Under the hypothesis of Lemma 3.1, we will show that $\text{tr}(Q_{\alpha,p}) > 0$ and $\det(Q_{\alpha,p}) \geq 0$.

Step 1 : $\text{tr}(Q_{\alpha,p}) > 0$

In fact, we have $u, v > 0$ then

$$\frac{u}{v} - 1 > -1.$$

By multiplying by $\frac{1-\alpha}{\alpha} > 0$ and adding $p-1$, we obtain

$$p-1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\frac{u}{v} - 1 \right) > p-1 - \frac{1-\alpha}{\alpha} = p - \frac{1}{\alpha}.$$

From Proposition 1.1, we know that $P_-(\alpha) \geq 1/\alpha$ for $|n| < \alpha < 1$, and since $p \in [P_-(\alpha), P_+(\alpha)]$, we obtain $p \geq 1/\alpha$, and then

$$p-1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\frac{u}{v} - 1 \right) > 0.$$

Therefore

$$\text{tr}(Q_{\alpha,p}) > 0.$$

Step 2 : $\det(Q_{\alpha,p}) \geq 0$

For this purpose, we will show that $\det(Q_{\alpha,p})$ is nonnegative if and only if, some function G_γ defined later in (4.39) is nonnegative. To show this, it suffices to demonstrate that G_γ is a convex function on \mathbb{R}_+^* with $G_\gamma(1) = G'_\gamma(1) = 0$.

Step 2.1 : Construction of the function G_γ

Setting $w = u/v$ and $\gamma = n/\alpha$. A direct computations show that

$$\begin{aligned} \det(Q_{\alpha,p}) \geq 0 &\Leftrightarrow 1 + \Gamma(1-\Gamma) \frac{(w-1)^2}{w} \geq \frac{1}{4} \frac{(w^\gamma+1)^2}{w^\gamma} \\ &\Leftrightarrow \Gamma(1-\Gamma) \frac{(w-1)^2}{w} \geq \frac{1}{4} \frac{(w^\gamma-1)^2}{w^\gamma} \\ &\Leftrightarrow \Gamma(1-\Gamma) f_1(w) \geq \frac{1}{4} f_\gamma(w), \end{aligned}$$

where $w > 0$ and $f_\gamma(w) := \frac{(w^\gamma-1)^2}{w^\gamma} = w^\gamma - 2 + \frac{1}{w^\gamma}$. Then

$$\det(Q_{\alpha,p}) \geq 0 \Leftrightarrow G_\gamma(w) \geq 0 \quad \forall w > 0,$$

with

$$G_\gamma(w) := \Gamma(1-\Gamma) f_1(w) - \frac{1}{4} f_\gamma(w). \quad (4.39)$$

Step 2.2 : Convexity of G_γ

By calculating the derivatives of $f_\gamma(w)$, we obtain

$$f'_\gamma(w) = \gamma(w^{\gamma-1} - w^{-\gamma-1}) \quad \text{and} \quad f''_\gamma(w) = \gamma(\gamma-1)w^{\gamma-2} + \gamma(\gamma+1)w^{-\gamma-2}.$$

So we have

$$G'_\gamma(w) = \Gamma(1-\Gamma)(1-w^{-2}) - \frac{1}{4}\gamma(w^{\gamma-1} - w^{-\gamma-1}) \quad \text{and} \quad G''_\gamma(w) = -w^{-3}F_\gamma(w),$$

where $F_\gamma(w)$ is given by (4.36).

According to Lemma 5.1, if $\Gamma \in [\Gamma_-, \Gamma_+]$ then we have

$$F_\gamma(w) \leq 0 \Leftrightarrow G_\gamma''(w) \geq 0, \quad \text{for all } w \in \mathbb{R}_+^*.$$

In this case, G_γ is a convex function.

Step 2.3 : $G_\gamma \geq 0$

Since $G_\gamma'(1) = G_\gamma(1) = 0$, we can deduce that $G_\gamma(w) \geq 0$ for all $w \in \mathbb{R}_+^*$.

According to Lemma 5.2, we know that $\Gamma_- \leq \Gamma \leq \Gamma_+ \Leftrightarrow P_1(\alpha) \leq p \leq P_2(\alpha)$

Then if $p \in [P_-(\alpha), P_+(\alpha)]$, we have

$$G_\gamma(w) \geq 0 \quad \text{for all } w \in \mathbb{R}_+^* \quad \Leftrightarrow \quad \det(Q_{\alpha,p}) \geq 0.$$

Therefore, it was shown that $\text{tr}(Q_{\alpha,p}) > 0$ and $\det(Q_{\alpha,p}) \geq 0$. Then $Q_{\alpha,p} \geq 0$. □

5.3 Proof of Lemma 3.3

To prove Lemma 3.1, we have to introduce the following results (Lemmas 5.3 and 5.4).

Lemma 5.3. (Convergence in matrix form with bounded functions)

Given Ω a bounded domain in \mathbb{R}^d for $d \geq 1$. Consider a sequence of vectorial functions $F^k \in (L^2(\Omega))^2$ such that

$$F^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} F \quad \text{in } L^2.$$

let G^k be a sequence of symmetric positive 2×2 functional matrix such that for all $1 \leq i, j \leq 2$ we have $|G_{ij}^k| < +\infty$ a.e. and

$$G^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} G \quad \text{a.e.}$$

where G is a symmetric matrix characterized by the fact that for all $1 \leq i, j \leq 2$ we have $|G_{ij}| < +\infty$ a.e. Moreover, we suppose that for all $k \geq 1$

$$\|G^k\|_{L^\infty} \leq C_1,$$

where C_1 is a non negative constant. Then

$$\int_{\Omega} F^T G F dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (F^k)^T G^k F^k dx.$$

Proof of Lemma 5.3 :

Let us consider the following continuous function $\sqrt{\cdot}$ such that for all symmetric positive matrix $Q = P^T \Lambda P$ where P is a 2×2 matrix verifying $P^T P = P P^T = Id$ and Λ is a 2×2 diagonal matrix, we define \sqrt{Q} by

$$\sqrt{Q} = P^T \sqrt{\Lambda} P \quad \text{where} \quad \sqrt{\Lambda} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

To show the result of this lemma, it suffices to prove that

$$(F^k)^T \sqrt{G^k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} F^T \sqrt{G} \quad \text{in } wL^2.$$

Let $h \in (L^2(\Omega))^2$, we have to prove that

$$\int_{\Omega} (F^k)^T \sqrt{G^k} h dx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int_{\Omega} F^T \sqrt{G} h dx.$$

We know that

$$F^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} F \quad \text{in } wL^2,$$

therefore we obtain the result if we prove that

$$\sqrt{G^k} h \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \sqrt{G} h \quad \text{in } L^2,$$

i.e

$$\int_{\Omega} \left| (\sqrt{G^k} - \sqrt{G}) h \right|^2 dx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

We can simply apply Dominated Convergence theorem to show this result. In fact, since

$$G^k = (P^k)^T \Lambda^k P^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} G = P^T \Lambda P \quad \text{a.e.}$$

then

$$\Lambda^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \Lambda \quad \text{and} \quad P^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} P \quad \text{a.e.} \quad (4.41)$$

Moreover, we have

$$\begin{aligned} \left| (\sqrt{G^k} - \sqrt{G}) h \right|^2 &= \left| \left((P^k)^T \sqrt{\Lambda^k} P^k - P^T \sqrt{\Lambda} P \right) h \right|^2 \\ &= \left| (P^k)^T \left(\sqrt{\Lambda^k} - \sqrt{\Lambda} \right) P^k + \left((P^k)^T - P^T \right) \sqrt{\Lambda} P^k + P^T \sqrt{\Lambda} (P^k - P) \right|^2 h^2. \end{aligned}$$

Then using (4.41), we deduce that

$$\left| (\sqrt{G^k} - \sqrt{G}) h \right|^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{a.e.}$$

and

$$|\sqrt{G^k} - \sqrt{G}|^2 h^2 \leq 2C_1 |h|^2 \in L^1(\Omega).$$

□

For $\ell > 0$, let us consider the following continuous function

$$t_\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto t_\ell(x) = \begin{cases} x & \text{if } x < \ell \\ \ell & \text{if } x \geq \ell. \end{cases} \quad (4.42)$$

We consider also the following function T_ℓ such that for all real symmetric positive matrix $Q = P^T \Lambda P$ where $P \in O(2)$ and Λ is a 2×2 diagonal matrix, we have

$$T_\ell(Q) = P^T T_\ell(\Lambda) P \quad \text{where} \quad T_\ell(\Lambda) = \begin{pmatrix} t_\ell(\lambda_1) & 0 \\ 0 & t_\ell(\lambda_2) \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

and t_ℓ is defined in (4.42).

Lemma 5.4. (Matrix computation)

Given Ω a bounded domain in \mathbb{R}^n for $n \geq 1$. let G^k be a sequence of symmetric positive 2×2 functional matrix such that for all $1 \leq i, j \leq 2$ we have $|G_{ij}^k| < +\infty$ a.e. in Ω and

$$G^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} G \quad \text{a.e.}$$

where the symmetric matrix G is characterized by the fact that for $(i, j) \neq (2, 2)$ we have $|G_{ij}| < +\infty$ and $G_{22} = +\infty$. Then for $\ell > 0$, we have

$$T_\ell(G^k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} T_\ell(G) \quad \text{a.e.}$$

where T_ℓ is defined in (4.43) and

$$T_\ell(G) := \begin{pmatrix} t_\ell(G_{11}) & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix}.$$

Proof of Lemma 5.4 :

By computing the eigenvalues λ_\pm^k of G^k , we find

$$\lambda_\pm^k = \frac{G_{11}^k + G_{22}^k \pm \sqrt{(G_{11}^k - G_{22}^k)^2 + 4(G_{12}^k)^2}}{2}.$$

Computing the unit eigenvectors of G^k , we have

$$v_+^k = \sqrt{\frac{(G_{11}^k - \lambda_+^k)^2}{(G_{11}^k - \lambda_+^k)^2 + (G_{22}^k)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{G_{12}^k}{G_{11}^k - \lambda_+^k} \\ 1 \end{pmatrix}$$

and

$$v_-^k = \sqrt{\frac{(G_{22}^k)^2}{(G_{22}^k - \lambda_-^k)^2 + (G_{22}^k)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{G_{22}^k - \lambda_-^k}{G_{12}^k} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Now we calculate the limit of the eigenvalues and the eigenvectors as k tends to ∞ . We get

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_+^k = +\infty & \text{and} & & \lambda_- &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_-^k = G_{11}, \\ v_+ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{v}_+^k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{and} & & v_- &= \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{v}_-^k = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Therefore

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_-^k & 0 \\ 0 & \lambda_+^k \end{pmatrix} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Lambda = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & +\infty \end{pmatrix}$$

and

$$T_m(G^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} P^t \begin{pmatrix} t_m(G_{11}) & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} t_m(G_{11}) & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\text{with } P = (v_- \quad v_+) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Proof of Lemma 3.3 :

The proof of Lemma 3.3 is divided into several steps :

Step 1 : $\ell < +\infty$

Let $\ell > 0$, we introduce the function T_ℓ defined in (4.43).

In the case where $G_{22} < +\infty$, we have

$$T_\ell(G^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T_\ell(G) = P^t \begin{pmatrix} t_\ell(\lambda_1) & 0 \\ 0 & t_\ell(\lambda_2) \end{pmatrix} P \quad \text{a.e.},$$

where λ_1 and λ_2 are the eigenvalues of G and $P = (v_1 \quad v_2)$ with v_1 and v_2 representing the corresponding eigenvectors.

In the case where $G_{22} = +\infty$, we use Lemma 5.4 to deduce that

$$T_\ell(G^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T_\ell(G) = \begin{pmatrix} t_\ell(G_{11}) & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix} \quad \text{a.e.},$$

Therefore in all cases, we have

$$\begin{aligned} \|T_\ell(G^k)\|_{L^\infty} &= \|T_\ell(\Lambda^k)\|_{L^\infty} \\ &= \max_{1 \leq i \leq 2} |t_\ell(\lambda_i)| \\ &\leq \ell, \end{aligned}$$

where $\|Q\|_{L^\infty} = \sup_{|\xi|=1} |\xi^t Q \xi|$ for any matrix Q . Thus, we can apply Lemma 5.3 and obtain

$$\int_{\Omega} F^t T_\ell(G) F dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (F^k)^t T_\ell(G^k) F^k dx.$$

But we have

$$(F^k)^t T_\ell(G^k) F^k \leq (F^k)^t G^k F^k,$$

thus

$$\int_{\Omega} F^t T_\ell(G) F dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (F^k)^t G^k F^k dx. \quad (4.44)$$

Step 2 : ℓ tends to $+\infty$

Now we may pass to the limit in (4.44) when ℓ tends to $+\infty$. In fact, since $(F^t T_\ell(G) F)_\ell$ is an increasing sequence in ℓ with

$$F^t T_\ell(G) F \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} F^t G F \quad \text{a.e.}$$

where if $G_{22} = +\infty$, we use the convention $\infty \times 0 = 0$ to get

$$F^t G F = \begin{cases} F_1^2 G_{11} & \text{if } F_2 = 0 \\ +\infty & \text{if } F_2 \neq 0. \end{cases}$$

By applying Monotone Convergence Theorem, we get

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F^t T_\ell(G) F dx = \int_{\Omega} F^t G F dx.$$

So we obtain

$$\int_{\Omega} F^t G F dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (F^k)^t G^k F^k dx < +\infty,$$

therefore, the case where $F_2 \neq 0$ is eliminated. □

5.4 Proof of Lemma 4.3

To prove Lemma 4.3, we need the following result

Lemma 5.5. (*Translation property*)

Let $d \geq 1$ and Ω be a bounded domain in \mathbb{R}^d . For $1 \leq p < +\infty$, consider a function $g \in L^p(\Omega)$. Then we have

$$\|\tau_h g - g\|_{L^p} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{where} \quad \tau_h g(x) = g(x+h) \quad \text{for } x \in \Omega.$$

Lemma 4.3 is a classical result (see [16]).

Proof of Lemma 4.3

Using (4.32), we have

$$|f_\eta - f|(x) \leq \int_0^1 |f(x + s\eta y) - f(x)| ds.$$

Then

$$\begin{aligned} |f_\eta - f|_{L^p}^p &\leq \int_\Omega \left(\int_0^1 |f(x + s\eta y) - f(x)| ds \right)^p dx \\ &\leq \int_\Omega \int_0^1 |f(x + s\eta y) - f(x)|^p ds dx, \end{aligned}$$

where we have used in the last inequality the convexity of the function $\psi(w) = w^p$ for $p \geq 1$. Using Lemma 5.5 and the Dominated Convergence Theorem, we get the result. \square

5.5 General results

In this subsection, we present some general and interesting results which we have not used in our proofs.

Lemma 5.6. (Convergence for bounded functions)

Given Ω a domain in \mathbb{R}^d for $d \geq 1$. For $k \geq 1$, let us consider two sequences of functions $f_k \in L^2(\Omega)$ and $0 \leq g_k \in L^\infty(\Omega)$ such that

$$f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f \quad wL^2(\Omega),$$

and

$$g_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} g \quad a.e. \text{ in } \Omega.$$

Then

$$\int_\Omega g f^2 dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega g_k f_k^2 dx.$$

Proof of Lemma 5.6 :

In fact, it suffices to show that $\sqrt{g_k} f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \sqrt{g} f \quad wL^2$. Let $h \in L^2(\Omega)$, we have to prove that

$$\int_\Omega \sqrt{g_k} f_k h dx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int_\Omega \sqrt{g} f h dx.$$

We know that

$$f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f \quad wL^2,$$

therefore we obtain the result if we prove that

$$\sqrt{g_k}h \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \sqrt{g}h \quad \text{in } L^2 \quad \text{i.e.} \quad \int_{\Omega} |\sqrt{g_k}h - \sqrt{g}h|^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

We can simply apply the Dominated Convergence Theorem to show this result. In fact, we have

$$|\sqrt{g_k} - \sqrt{g}|^2 h^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{a.e.},$$

and

$$|\sqrt{g_k} - \sqrt{g}|^2 h^2 \leq 2C|h|^2 \in L^1(\Omega),$$

where C is a nonnegative constant. □

Corollary 5.7. (Convergence for unbounded functions)

Given Ω a domain in \mathbb{R}^d for $d \geq 1$, we consider the functions $f \in L^2(\Omega)$ and $g \in [0, +\infty]$. For $k \geq 1$, let us consider two sequences of functions $f_k \in L^2(\Omega)$ and $g_k \in [0, +\infty]$ such that

$$f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f \quad \text{in } wL^2(\Omega),$$

and

$$g_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} g \quad \text{a.e. in } \Omega.$$

Then

$$\int_{\Omega} g f^2 dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_k f_k^2 dx.$$

Proof of Corollary 5.7 :

Let $\ell > 0$ and let us consider the continuous function t_{ℓ} defined in (4.42). Then

$$t_{\ell}(g_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} t_{\ell}(g) \quad \text{a.e.},$$

with $\|t_{\ell}(g_k)\|_{L^{\infty}} \leq \ell$. Thus we can apply the previous lemma 5.6 and obtain

$$\int_{\Omega} t_{\ell}(g) f^2 dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} t_{\ell}(g_k) f_k^2 dx.$$

Since $t_{\ell}(g_k) f_k^2 \leq g_k f_k^2$, we deduce that

$$\int_{\Omega} t_{\ell}(g) f^2 dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_k f_k^2 dx. \quad (4.45)$$

Now we can pass to the limit in (4.45) when ℓ tends to $+\infty$. It's clear that $(t_{\ell}(g) f^2)_m$ is an increasing sequence in ℓ with

$$t_{\ell}(g) f^2 \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} g f^2 \quad \text{a.e.}$$

By applying Monotone Convergence Theorem, we get

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{\Omega} t_{\ell}(g) f^2 dx = \int_{\Omega} g f^2 dx.$$

So we obtain

$$\int_{\Omega} g f^2 dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_k f_k^2 dx.$$

□

Lemma 5.8. (*Convergence in matrix form with bounded functions (Case L^p)*)

Given Ω a bounded domain in \mathbb{R}^d for $d \geq 1$. For $p > 1$, consider a sequence of vectorial functions $F^k \in (L^p(\Omega))^2$ such that

$$F^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} F \quad wL^p.$$

let G^k be a sequence of symmetric positive 2×2 functional matrix such that for all $1 \leq i, j \leq 2$ we have $|G_{ij}^k| < +\infty$ a.e. and

$$G^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} G \quad a.e.$$

where G is a symmetric matrix characterized by the fact that for all $1 \leq i, j \leq 2$ we have $|G_{ij}| < +\infty$ a.e. Moreover, we suppose that for all $k \geq 1$

$$\|G^k\|_{L^\infty} \leq C_1,$$

where C_1 is a non negative constant. Then

$$\int_{\Omega} F^T G F dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (F^k)^T G^k F^k dx.$$

The proof of Lemma 5.8 is similar to the proof of Lemma 5.3.

Lemma 5.9. (*Convergence in matrix form with unbounded function (Case L^p)*)

Given Ω a bounded domain in \mathbb{R}^d for $d \geq 1$. For $p > 1$, consider a sequence of vectorial functions $F^k \in (L^p(\Omega))^2$ such that

$$F^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} F \quad wL^p.$$

let G^k be a sequence of symmetric positive 2×2 functional matrix such that for all $1 \leq i, j \leq 2$ we have $|G_{ij}^k| < +\infty$ a.e. and

$$G^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} G \quad a.e.$$

where the symmetric matrix G is characterized by the fact that for $(i, j) \neq (2, 2)$ we have $|G_{ij}| < +\infty$ almost everywhere and G_{22} could take the value $+\infty$. We consider the convention " $\infty \times 0 = 0$ ". If $G_{22} = +\infty$ then $F_2 = 0$, $F^tGF = F_1^2G_{11}$. In all cases, we have

$$\int_{\Omega} F^tGF dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (F^k)^t G^k F^k dx.$$

The proof of Lemma 5.9 is similar to the proof of Lemma 3.3.

Proposition 5.10. (*Property of the function $\Psi_{\delta,p}$*)

For all $u \in \mathbb{R}$ and $a > 0$, we have

$$\Psi_{\delta,p}(au) = a^p \Psi_{\frac{\delta}{a},p}(u). \quad (4.46)$$

Proof of Proposition 5.10

1. If $au > \delta \Leftrightarrow u > \delta/a$, we have

$$\begin{aligned} \Psi_{\delta,p}(au) &= \frac{(au)^p}{p} - \delta^{p-1}(au) - \delta^p \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \\ &= a^p \frac{u^p}{p} - a\delta^{p-1}u - \delta^p \left(\frac{1}{p} - 1 \right). \end{aligned}$$

Since $u > \delta/a$, then

$$\Psi_{\frac{\delta}{a},p}(u) = \frac{u^p}{p} - \left(\frac{\delta}{a} \right)^{p-1} u - \left(\frac{\delta}{a} \right)^p \left(\frac{1}{p} - 1 \right),$$

so

$$\Psi_{\delta,p}(au) = a^p \Psi_{\frac{\delta}{a},p}(u).$$

2. If $au \leq \delta \Leftrightarrow u \leq \delta/a$, we have

$$\Psi_{\delta,p}(au) = 0 \quad \text{and} \quad \Psi_{\frac{\delta}{a},p}(u) = 0.$$

Thus, we obtain the equality (4.46). □

Chapitre 5

Application of the method of differential contractions for the porous medium and the doubly nonlinear equations

This chapter is a work done in collaboration with M. Jazar et R. Monneau [32]. It is an article in preparation about an original method of differential contractions and its applications. This simple and general method is used to produce families of contractions for nonlinear partial differential equations, of evolution or stationary type. We present in this part various applications of this method. In particular, we are concerned with the porous medium and the doubly nonlinear equations.

1 Introduction

In this chapter, we present a general and fairly simple method to design families of contractions for nonlinear partial differential equations, either of evolution type, or of stationary type. As a particular example, we apply this method to the porous medium and the doubly nonlinear equation, for which we get new contractions. This method opens new directions to explore.

In all this work, we consider the domain $\Omega = \mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ which is the d -dimensional torus for $d \geq 1$. Let

$$m > 0 \quad \text{and} \quad n = m - 1.$$

Let us consider the first type of problems :
For $T > 0$, we consider nonnegative solutions $u(t, x)$ of the following normalized equation

$$\begin{cases} mu_t = \Delta u^m & \text{in } (0, T) \times \Omega = Q_T, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (\text{PME})$$

where $0 \leq u_0 \in L^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} u &: \mathbb{R}^+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (t, x) &\longmapsto u(t, x). \end{aligned}$$

u_t is the derivative of u with respect to time and Δu is the standard laplacien operator of u with respect to space.

For the second problem :
Given $u_0 \in L^1(\Omega)$, find a locally integrable function $u = u(x, t)$ defined in Q_T , that solves the system

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(u^n e'_q(\nabla u)) & \text{in } Q_T \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (\text{DNE})$$

where

$$\begin{aligned} e &: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ q &\longmapsto e(q), \end{aligned}$$

is a convex homogeneous function of degree $\lambda + 1$ for $\lambda > 0$.

Construction of solutions

Let $\varepsilon > 0$, consider u_0^a and $u_0^b \in C^\infty(\Omega)$, such that

$$\varepsilon \leq u_0^a, u_0^b \leq 1/\varepsilon.$$

Then there exist u^a and u^b two classical solutions of problem (PME) with initial data u_0^a and u_0^b respectively. For $s \in [0, 1]$, we choose a function

$$\begin{aligned} u_0 &: [0, 1] \rightarrow \Omega \\ s &\longmapsto u_0^s, \end{aligned} \quad (5.1)$$

such that $u_0 \in C^\infty([0, 1]; C^\infty(\Omega))$ is a path between u_0^a and u_0^b verifying

$$\varepsilon \leq u_0 \leq 1/\varepsilon,$$

i.e.,

$$u_0^0 = u_0^a \quad \text{and} \quad u_0^1 = u_0^b.$$

Then, for each $s \in [0, 1]$, we construct the function

$$\begin{aligned} u^s &: Q_T &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto u^s(x, t), \end{aligned} \tag{5.2}$$

as the classical solution of problem (PME) with initial data u_0^s . It's clear that

$$u^0 = u^a \quad \text{and} \quad u^1 = u^b.$$

Now, we introduce the function

$$\begin{aligned} u &: Q_T \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t, s) &\mapsto u(x, t, s), \end{aligned} \tag{5.3}$$

such that for all $x \in \Omega$ and all $0 \leq s \leq 1$, we have

$$u(x, 0, s) = u_0^s(x),$$

and for $t > 0$, we have

$$u(x, t, s) = u^s(x, t).$$

Then, we deduce, by construction, that for $s \in [0, 1]$, $u^s = u(\cdot, \cdot, s)$ is solution of problem (PME) with initial data u_0^s .

We constructed for each $u_0 \in C^\infty([0, 1], C^\infty(\Omega))$, $u \in C^\infty([0, 1]; C^\infty(Q_T))$.

Definition 1.1. (A pseudo-distance)

Let $\varepsilon > 0$, for fixed $u_0^a, u_0^b \in C^\infty(\Omega)$ such that

$$\varepsilon \leq u_0^a, u_0^b \leq 1/\varepsilon,$$

then there exist u^a and u^b two classical solutions of problem (PME) with initial data u_0^a and u_0^b respectively. Define the set \mathcal{E} of smooth curves $u = u(\cdot, \cdot, s) = (u^s)_{s \in [0, 1]}$ constructed in (5.3) such that $u^0 = u^a$ and $u^1 = u^b$. For all $t \geq 0$, we introduce the following pseudo-distance

$$d_g^2(u^a(\cdot, t), u^b(\cdot, t)) = \inf_{u \in \mathcal{E}} \int_0^1 ds \int_{\Omega} g(u) \frac{(u')_+^p}{p} dx, \tag{5.4}$$

where the function $g \in C^2(\mathbb{R})$ will be fixed later, $u' = \partial u / \partial s$ and $p \in \mathbb{R}_+^*$.

In what follows, we specify the function u_0^s introduced in (5.1). We choose this function as the geodesic between u_0^a and u_0^b with respect to the pseudo-distance d_g defined in (5.4).

2 Main results

In this section, we state precisely our main results.

2.1 The porous medium equation

Theorem 2.1. (*Contraction for (PME) in the case $p > 1$*)

Consider $0 < n < 1$. For $u_0^a, u_0^b \in C^\infty(\Omega)$ such that $\varepsilon \leq u_0^a, u_0^b \leq 1/\varepsilon$ for some $\varepsilon > 0$, let u^a and u^b be the solutions of problem (PME) in the classical sense with initial data u_0^a and u_0^b respectively. For $1 < p \leq 1/n^2$, we define

$$\beta_\pm(p) := \frac{p-1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 - n^2 p} \right), \quad (5.5)$$

and let $\beta \in [\beta_-, \beta_+]$. Then, for all $t \geq 0$ we have, with the notations $w(\tau) = w(\cdot, \tau)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left((u^b)^{1+\beta/p}(t) - (u^a)^{1+\beta/p}(t) \right)_+^p dx &\leq \int_{\Omega} \left((u_0^b)^{1+\beta/p} - (u_0^a)^{1+\beta/p} \right)_+^p dx \\ &\quad - \frac{(\beta+p)^p}{p^{p-1}} \int_0^t d\tau \int_0^1 ds \int_{\{u'>0\}} u^{n+\beta}(u')^p \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^t Q \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) dx, \end{aligned} \quad (5.6)$$

where $u \in \mathcal{E}$, $u' = \partial u / \partial s$ and

$$Q := \begin{pmatrix} \frac{\beta(\beta-1)}{p} + n\beta & \beta + \frac{n(p-1)}{2} \\ \beta + \frac{n(p-1)}{2} & p-1 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

Moreover, we have $Q \geq 0$ and $\int_{\Omega} \left((u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p} \right)_+^p dx$ is decreasing with time.

Theorem 2.2. (*Contraction for the (PME) in the case $p < 1$*)

Consider $0 < n \leq 1$. Let u_0^a and $u_0^b \in C^\infty(\Omega)$ such that

$$\varepsilon \leq u_0^a \leq u_0^b \leq 1/\varepsilon, \quad \text{for } \varepsilon > 0.$$

Let u^a and u^b be the solutions of problem (PME) in the classical sense with initial data u_0^a and u_0^b respectively. For $0 < p \leq \min\{1, 1/n^2\}$, let $\beta \in [\beta_-(p), \beta_+(p)]$ where β_- and β_+ are given in (5.5). Then, for all $t > 0$ we have

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi \left((u^b)^{1+\beta/p}(x, t) - (u^a)^{1+\beta/p}(x, t) \right) dx &\leq \int_{\Omega} \psi \left((u_0^b)^{1+\beta/p}(x) - (u_0^a)^{1+\beta/p}(x) \right) dx \\ &\quad + \frac{(\beta+p)^p}{p^{p-1}} \int_0^t dt \int_0^1 ds \int_{\{u'>0\}} u^{n+\beta}(u')^p \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^t Q \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) dx, \end{aligned} \quad (5.8)$$

where

$$\psi(x) = \begin{cases} -x^p & \text{si } x > 0, \\ +\infty & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \quad (5.9)$$

$u \in \mathcal{E}$ and Q is defined in (5.7).

Moreover, we have $Q \leq 0$ and $\int_{\Omega} \psi ((u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p}) dx$ is decreasing with time.

2.2 The doubly nonlinear equation

Construction of solutions

Similarly à PME, we choose the function

$$\begin{aligned} u_0 &: [0, 1] \rightarrow \Omega \\ s &\mapsto u_0^s, \end{aligned}$$

such that $u_0 \in C^\infty([0, 1]; C^\infty(\Omega))$ is a path between u_0^a and u_0^b verifying

$$\varepsilon \leq u_0 \leq 1/\varepsilon.$$

We construct then u

$$\begin{aligned} u &: Q_T \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t, s) &\mapsto u(x, t, s), \end{aligned} \quad (5.10)$$

such that for each $s \in [0, 1]$, $u^s = u(\cdot, \cdot, s)$ is solution of Problem (DNE) with initial data u_0^s . Define the set \mathcal{E}' of smooth curves $u = u(\cdot, \cdot, s) = (u^s)_{s \in [0, 1]}$ constructed in (5.3) such that $u^0 = u^a$ and $u^1 = u^b$.

Theorem 2.3. (Contraction for the (DNE))

Consider $0 < n < 1$ and $T > 0$. Let $u_0^a, u_0^b \in C^\infty(\Omega)$ such that

$$\varepsilon \leq u_0^a, u_0^b \leq 1/\varepsilon, \quad \text{for } \varepsilon > 0.$$

Let u^a and u^b be the solutions of problem (DNE) in the classical sense with initial data u_0^a and u_0^b respectively. For $1 < p < 1/n$, we define

$$\gamma_{\pm} := \frac{(p-1) \left[2\lambda + np - np\lambda \pm 2\sqrt{\lambda((1-np)\lambda + np(1-n))} \right]}{4\lambda(p-1) - p(\lambda+1)^2}. \quad (5.11)$$

Let $\gamma \in [\gamma_-, \gamma_+]$ and $w = \sqrt{e''(\nabla u)}$. Then, for all $t > 0$ we have

$$\int_{\Omega} |(u^b)^{1+\gamma/p}(x, t) - (u^a)^{1+\gamma/p}(x, t)|^p dx \leq \int_{\Omega} |(u_0^b)^{1+\gamma/p}(x) - (u_0^a)^{1+\gamma/p}(x)|^p dx \quad (5.12)$$

$$-\frac{(\gamma+p)^p}{p^{p-1}} \int_0^t dt \int_0^1 ds \int_{\{u'>0\}} u^{n+\gamma}(u')^p \begin{pmatrix} w \nabla \ln u \\ w \nabla \ln u' \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} w \nabla \ln u \\ w \nabla \ln u' \end{pmatrix} dx,$$

where $u \in \mathcal{E}'$, $u' = \frac{\partial u}{\partial s}$ and

$$M := \begin{pmatrix} \frac{\gamma(\gamma-1)}{\lambda p} + \frac{n\gamma}{\lambda} & \frac{(\lambda+1)\gamma}{2\lambda} + \frac{n(p-1)}{2\lambda} \\ \frac{(\lambda+1)\gamma}{2\lambda} + \frac{n(p-1)}{2\lambda} & p-1 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Moreover, we have $M \geq 0$ and $\int_{\Omega} |(u^b)^{1+\gamma/p} - (u^a)^{1+\gamma/p}|^p dx$ is decreasing with time.

3 The porous medium equation

The aim of this section is to prove Theorems 2.1 and 2.2. We begin by introducing the following result concerning the sign of the matrix Q given in (5.7).

Lemma 3.1. (Sign of the matrix Q)

For $n > 0$, $0 < p < \min\{1, 1/n^2\}$ and $\beta \in [\beta_-(p), \beta_+(p)]$, then

$$Q \leq 0,$$

where β_- and β_+ are given in (5.5).

For $0 < n < 1$, $1 < p \leq 1/n^2$ and $\beta \in [\beta_-(p), \beta_+(p)]$, then

$$Q \geq 0.$$

Proof of Lemma 3.1

The proof of this lemma will be divided into two steps;

— **First step :** $\det(Q) \geq 0$

For $n > 0$ and $0 < p \leq 1/n^2$, we calculate the determinant of the matrix Q .

Then, we get

$$\begin{aligned} \det(Q) &= (p-1) \left(\frac{\beta(\beta-1)}{p} + n\beta \right) - \left(\beta + \frac{n(p-1)}{2} \right)^2 \\ &= \frac{\beta(p-1)}{p} (\beta-1 + np) - \beta^2 - \frac{n^2(p-1)^2}{4} - n\beta(p-1) \\ &= \frac{-1}{p} \beta^2 - \frac{(p-1)}{p} \beta - \frac{n^2(p-1)^2}{4} \\ &= \frac{-1}{p} f(\beta), \end{aligned}$$

where

$$f(\beta) := \beta^2 + (p-1)\beta + \frac{n^2 p(p-1)^2}{4}. \quad (5.14)$$

Now, let us compute the discriminant of f

$$\Delta = (p-1)^2(1-n^2p),$$

then

$$\beta_{\pm} = \frac{p-1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1-n^2p} \right),$$

and

β	β_-	β_+
Sign of $f(\beta)$	+ 0	- 0 +

Since $\beta \in [\beta_-, \beta_+]$, $f(\beta) \leq 0$ and $\det(Q) \geq 0$.

— **Second step** : Remarkable matrix property

Let us evaluate the relation between the determinant and the trace of the matrix Q

$$\begin{aligned} \det(Q) &= (p-1) \left[\frac{\beta(\beta-1)}{p} + n\beta \right] - \left(\beta + \frac{n(p-1)}{2} \right)^2 \\ &= (p-1) [\operatorname{tr}(Q) - (p-1)] - \left(\beta + \frac{n(p-1)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Then, we get

$$(p-1)\operatorname{tr}(Q) = \det(Q) + (p-1)^2 + \left(\beta + \frac{n(p-1)}{2} \right)^2. \quad (5.15)$$

Using first step, for $p < 1$, we deduce from (5.15) that $\operatorname{tr}(Q) < 0$. Therefore

$$Q \leq 0.$$

And for $p > 1$, we deduce from (5.15) that $\operatorname{tr}(Q) > 0$. Then

$$Q \geq 0.$$

□

To prove Theorems 2.1 and 2.2, we need also the following result.

Lemma 3.2. (*Explicit expression of the pseudo-distance*)

Let u^a and u^b be the solutions of problem (PME) in the classical sense with initial data u_0^a and u_0^b respectively such that

$$\varepsilon \leq u_0^a, u_0^b \leq 1/\varepsilon, \quad \text{for } \varepsilon > 0.$$

If $0 < n < 1$, $1 < p \leq 1/n^2$, and $\beta \in [\beta_-(p), \beta_+(p)]$, then we have

$$d_+^2(u^a, u^b) := \inf_{u \in \mathcal{E}} \int_0^1 ds \int_{\Omega} u^\beta \frac{(u')_+^p}{p} dx = \frac{p^{p-1}}{(\beta+p)^p} \int_{\Omega} ((u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p})_+^p dx. \quad (5.16)$$

where β_- and β_+ are defined in (5.5).

If $n > 0$, $0 < p < \min\{1, 1/n^2\}$ and $\beta \in [\beta_-(p), \beta_+(p)]$, then we have

$$d_-^2(u^a, u^b) := \inf_{u \in \mathcal{E}} \int_0^1 ds \int_{\Omega} -u^\beta \frac{(u')_+^p}{p} dx = \frac{p^{p-1}}{(\beta+p)^p} \int_{\Omega} -((u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p})_+^p dx, \quad (5.17)$$

where \mathcal{E} is given in (8.9) and $u' = \partial u / \partial s$.

The proof of Lemma 3.2 is done in the Appendix.

Notice that $d_+^2(\cdot, \cdot) = d_g^2(\cdot, \cdot)$ with $g(u) = u^\beta$ where d_g is given in (5.4). And $d_-^2(\cdot, \cdot) = d_g^2(\cdot, \cdot)$ with $g(u) = -u^\beta$.

Lemma 3.3. (*Sign of $\beta + p$ for $\beta \in [\beta_-, \beta_+]$*)

Let $m > 0$ and $0 < p \leq 1/n^2$. For $\beta \in [\beta_-(p), \beta_+(p)]$, where β_- and β_+ are defined in (5.5), we have

$$\beta + p > 0.$$

The proof of Lemma 3.3 is done in the Appendix.

3.1 Proof of Theorem 2.1

Consider $u_0^a, u_0^b \in C^\infty(\Omega)$ such that

$$\varepsilon \leq u_0^a, u_0^b \leq 1/\varepsilon, \quad \text{for } \varepsilon > 0.$$

Let u^a and $u^b \in C^\infty(Q_T)$ be the solutions of problem (PME) in the classical sense with initial data u_0^a and u_0^b respectively satisfying

$$\varepsilon \leq u^a(x, t), u^b(x, t) \leq 1/\varepsilon,$$

for every $x \in \Omega$ and $t > 0$. Let u be the function constructed in (5.3).

Step 1 : Equation satisfied by u'

We know that u satisfies

$$u_t = \operatorname{div}(u^n \nabla u).$$

Let us now check the equation solved by $u' = \partial u / \partial s$. In fact, we have

$$\begin{aligned} (u')_t &= (u_t)' \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{div}(u^n \nabla u) \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{\partial}{\partial s} (u^n \nabla u) \right). \end{aligned}$$

Then

$$(u')_t = \operatorname{div} (nu^{n-1}u'\nabla u + u^n\nabla u'). \quad (5.18)$$

For $\delta > 0$, let us define the following function

$$\Psi_{\delta,p}(u) = \begin{cases} \frac{u^p}{p} - \delta^{p-1}u - \delta^p \left(\frac{1}{p} - 1 \right) & \text{if } u > \delta \\ 0 & \text{if } u \leq \delta. \end{cases} \quad (5.19)$$

Step 2 : Calculation of the time derivative of $A := \int_0^1 ds \int_{\Omega} u^\beta \Psi_{\delta,p}(u') dx$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A &= \frac{d}{dt} \int_0^1 ds \int_{\Omega} u^\beta \Psi_{\delta,p}(u') dx \\ &= \int_0^1 ds \int_{\Omega} (\beta u^{\beta-1} \Psi_{\delta,p}(u') u_t + u^\beta \Psi'_{\delta,p}(u') (u')_t) dx, \end{aligned}$$

Since u' verify equation (5.18), we get

$$\frac{d}{dt} A = \int_0^1 ds \int_{\Omega} [\beta u^{\beta-1} \Psi_{\delta,p}(u') \operatorname{div}(u^n \nabla u) + u^\beta \Psi'_{\delta,p}(u') \operatorname{div}(nu^{n-1}u'\nabla u + u^n \nabla u')] dx.$$

By integrating by parts with respect to x , we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A &= - \int_0^1 ds \int_{\Omega} [\beta(\beta-1)u^{\beta-2} \Psi_{\delta,p}(u') u^n |\nabla u|^2 + \beta u^{\beta-1} \Psi'_{\delta,p}(u') u^n \nabla u \cdot \nabla u'] dx \\ &\quad - \int_0^1 ds \int_{\Omega} \beta u^{\beta-1} \Psi'_{\delta,p}(u') (nu^{n-1}u' |\nabla u|^2 + u^n \nabla u \cdot \nabla u') dx \\ &\quad - \int_0^1 ds \int_{\Omega} u^\beta \Psi''_{\delta,p}(u') (nu^{n-1}u' \nabla u \cdot \nabla u' + u^n |\nabla u'|^2) dx. \end{aligned}$$

Using the definition of $\Psi_{\delta,p}$, we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A &= - \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} |\nabla u|^2 \left[\frac{\beta(\beta-1)}{p} u^{n+\beta-2} |u'|^p + n\beta u^{n+\beta-2} |u'|^p \right] dx \\ &\quad - \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} \nabla u \cdot \nabla u' [n(p-1)u^{n+\beta-1} (u')^{p-1} + 2\beta u^{n+\beta-1} (u')^{p-1}] dx \\ &\quad - \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} |\nabla u'|^2 [(p-1)u^{n+\beta} |u'|^{p-2}] dx \\ &\quad + \delta^{p-1} \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} [u^{n-1}u' (n\beta u^{\beta-1} + \beta(\beta-1)u^{\beta-1}) |\nabla u|^2 + 2\beta u^{n+\beta-1} \nabla u \cdot \nabla u'] dx \\ &\quad + \delta^p \frac{(1-p)}{p} \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} \beta(\beta-1)u^{n+\beta-2} |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

Since $u > 0$, we have

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A &= - \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} u^n |u'|^p |\nabla \ln u|^2 u^\beta \left(\frac{\beta(\beta-1)}{p} + n\beta \right) dx \\
&\quad - \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} u^n |u'|^p \nabla \ln u \cdot \nabla \ln u' u^\beta [n(p-1) + 2\beta] dx \\
&\quad - \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} u^n |u'|^p |\nabla \ln u'|^2 u^\beta [p-1] dx, \\
&\quad + \delta^{p-1} \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} [u^{n-1} u' u^{\beta-1} (n\beta + \beta(\beta-1)) |\nabla u|^2 + 2\beta u^{n+\beta-1} \nabla u \cdot \nabla u'] dx \\
&\quad + \delta^p \frac{(1-p)}{p} \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} \beta(\beta-1) u^{n+\beta-2} |\nabla u|^2 dx.
\end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^1 ds \int_\Omega u^\beta \Psi_{\delta,p}(u') dx &= - \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} u^{n+\beta} (u')^p \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^t Q \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) dx \\
&\quad + \delta^{p-1} \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} [u^{n-1} u' u^{\beta-1} (n\beta + \beta(\beta-1)) |\nabla u|^2 + 2\beta u^{n+\beta-1} \nabla u \cdot \nabla u'] dx \\
&\quad + \delta^p \frac{(1-p)}{p} \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} \beta(\beta-1) u^{n+\beta-2} |\nabla u|^2 dx,
\end{aligned} \tag{5.20}$$

where Q is given in (5.7).

Step 3 : Passage to the limit when δ tends to zero in (5.26)

Step 3.1 : Passage to the limit in the term A .

Since

$$u^\beta \Psi_{\delta,p}(u') \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} u^\beta \frac{(u')_+^p}{p} \quad \text{a.e. in } \Omega,$$

and

$$|u^\beta \Psi_{\delta,p}(u')| \leq u^\beta \frac{(u')_+^p}{p} \in L^1(\Omega),$$

then, using Dominated Convergence theorem, we get

$$\int_0^1 ds \int_\Omega u^\beta \Psi_{\delta,p}(u') dx \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_0^1 ds \int_\Omega u^\beta \frac{(u')_+^p}{p} dx.$$

Step 3.2 : To pass to the limit when δ tends to zero in the first term of the right hand side of (5.26), we apply Monotone Convergence Theorem. Indeed,

$$I_\delta^1(t) := \int_0^1 ds \int_\Omega u^{n+\beta} (u')^p \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^t Q \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) 1_{\{u'>\delta\}} dx.$$

We know that $1 < p \leq 1/m^2$ and $\beta \in [\beta_-(p), \beta_+(p)]$, where β_- and β_+ are given in (5.5). Using Lemma 3.1, we have

$$\left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^t Q \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) \geq 0.$$

Then

$$w_\delta^1 := u^{n+\beta} (u')^p \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^t Q \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) 1_{\{u' > \delta\}}$$

is a decreasing sequence in δ . Further, for all $t > 0$

$$\inf_{\delta > 0} I_\delta^1(t) \geq 0 > -\infty.$$

Therefore, by applying Monotone Convergence theorem, we have

$$w_\delta^1 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} w_0^1 := u^{n+\beta} (u')^p \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^t Q \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) 1_{\{u' > 0\}}, \quad \text{a.e. in } \Omega,$$

and

$$I_\delta^1(t) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_0^1 ds \int_{\{u' > 0\}} u^{n+\beta} (u')^p \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^t Q \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) dx.$$

Step 3.3 : To pass to the limit when δ tends to zero in the second term of the left hand side of (5.26), we apply Dominated Convergence Theorem . In fact, for all $t \geq 0$

$$I_\delta^2(t) := \delta^{p-1} \int_0^1 ds \int_{\{u' > \delta\}} [u^{n-1} u' u^{\beta-1} (n\beta + \beta(\beta-1)) |\nabla u|^2 + 2\beta u^{n+\beta-1} \nabla u \cdot \nabla u'] dx.$$

Let

$$w_\delta^2 = \delta^{p-1} [u^{n-1} u' u^{\beta-1} (n\beta + \beta(\beta-1)) |\nabla u|^2 + 2\beta u^{n+\beta-1} \nabla u \cdot \nabla u'] 1_{\{u' > \delta\}}.$$

We know that $u \in C^\infty(Q_T)$ with $\varepsilon \leq u \leq 1/\varepsilon$, then

$$w_\delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \quad \text{a.e in } \Omega,$$

and

$$|w_\delta^2| \leq |\beta(n + \beta - 1) u^{n+\beta-2} u' |\nabla u|^2 + 2\beta u^{n+\beta-1} \nabla u \cdot \nabla u'| \in L^1(\Omega),$$

since u and u' are $C^\infty(Q_T)$. By Dominated Convergence Theorem, we deduce that for all $t \geq 0$

$$I_\delta^2(t) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Step 3.4 : To pass to the limit when δ tends to zero in the last term of the left hand side of (5.26), we apply Dominated Convergence Theorem . In fact, for all $t > 0$

$$I_\delta^3(t) := \delta^p \frac{(1-p)}{p} \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} \beta(\beta-1) u^{n+\beta-2} |\nabla u|^2 dx.$$

Let

$$w_\delta^3 = \delta^p \frac{(1-p)}{p} \beta(\beta-1) u^{n+\beta-2} |\nabla u|^2.$$

We know that $u \in C^\infty(Q_T)$ with $\varepsilon \leq u \leq 1/\varepsilon$, then

$$w_\delta^3 \xrightarrow{\delta_k \rightarrow 0} 0, \quad \text{a.e in } \Omega,$$

and

$$|w_\delta^3| \leq \left| \frac{\beta(\beta-1)(1-p)}{p} \right| u^{n+\beta-2} |\nabla u|^2 \in L^1(\Omega).$$

By Dominated Convergence theorem, we deduce that for all $t \geq 0$

$$I_\delta^3(t) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Therefore, for all $t \in [0, T]$, we have in $D'(0, T)$

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 ds \int_\Omega u^\beta \frac{(u')_+^p}{p} dx = - \int_0^1 ds \int_{\{u'>0\}} u^{n+\beta} (u')^p \begin{pmatrix} \nabla \ln u \\ \nabla \ln u' \end{pmatrix}^t Q \begin{pmatrix} \nabla \ln u \\ \nabla \ln u' \end{pmatrix} dx,$$

where Q is given in (5.7).

Step 4 : Proof of inequality (5.6)

By integrating the previous equation with respect to t , we get

$$\begin{aligned} \int_0^1 ds \int_\Omega u^\beta(x, t, s) \frac{(u'(x, t, s))_+^p}{p} dx &= \int_0^1 ds \int_\Omega u^\beta(x, 0, s) \frac{(u'(x, 0, s))_+^p}{p} dx \\ &\quad - \int_0^t d\tau \int_0^1 ds \int_{\{u'>0\}} u^{n+\beta} (u')^p \begin{pmatrix} \nabla \ln u \\ \nabla \ln u' \end{pmatrix}^t Q \begin{pmatrix} \nabla \ln u \\ \nabla \ln u' \end{pmatrix} dx, \end{aligned}$$

since $u_0^s = u(\cdot, 0, s)$ is chosen to be the geodesic between u_0^a and u_0^b with respect to the pseudo-distance d_g with $g(u) = u^\beta$, then for all $t > 0$, we have

$$\begin{aligned} \int_0^1 ds \int_\Omega g(u(x, t, s)) \frac{(u'(x, t, s))_+^p}{p} dx &= d_g^2(u_0^a, u_0^b) \\ &\quad - \int_0^t d\tau \int_0^1 ds \int_{\{u'>0\}} u^{n+\beta} (u')^p \begin{pmatrix} \nabla \ln u \\ \nabla \ln u' \end{pmatrix}^t Q \begin{pmatrix} \nabla \ln u \\ \nabla \ln u' \end{pmatrix} dx. \end{aligned}$$

Hence

$$d_g^2(u^a, u^b) \leq d_g^2(u_0^a, u_0^b) - \int_0^t d\tau \int_0^1 ds \int_{\{u' > 0\}} u^{n+\beta} (u')^p \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^t Q \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) dx.$$

Since $g(u) = u^\beta$ with $\beta \in [\beta_-, \beta_+]$, we use Lemma 3.2 and 3.3, for all $t \geq 0$ we get

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left((u^b)^{1+\beta/p}(\cdot, t) - (u^a)^{1+\beta/p}(\cdot, t) \right)_+^p dx &\leq \int_{\Omega} \left((u_0^b)^{1+\beta/p} - (u_0^a)^{1+\beta/p} \right)_+^p dx \\ &\quad - \frac{(\beta + p)^p}{p^{p-1}} \int_0^t d\tau \int_0^1 ds \int_{\{u' > 0\}} u^{n+\beta} (u')^p \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^t Q \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) dx. \end{aligned}$$

Step 5 : Decreasing distance with respect to time

Using Lemma 3.1, we have

$$Q \geq 0.$$

Therefore, for all $t \geq 0$ we get

$$\int_{\Omega} \left((u^b)^{1+\beta/p}(\cdot, t) - (u^a)^{1+\beta/p}(\cdot, t) \right)_+^p dx \leq \int_{\Omega} \left((u_0^b)^{1+\beta/p} - (u_0^a)^{1+\beta/p} \right)_+^p dx,$$

and

$$\int_{\Omega} \left((u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p} \right)_+^p dx$$

is decreasing with respect to time. □

3.2 Proof of Theorem 2.2

Consider $u_0^a, u_0^b \in C^\infty(\Omega)$ such that

$$\varepsilon \leq u_0^a \leq u_0^b \leq 1/\varepsilon, \quad \text{for } \varepsilon > 0.$$

Let u^a and $u^b \in C^\infty(Q_T)$ be the solutions of problem (PME) in the classical sense with initial data u_0^a and u_0^b respectively. Then

$$\varepsilon \leq u^a(x, t) \leq u^b(x, t) \leq 1/\varepsilon,$$

for every $(x, t) \in Q_T$.

Step 1 : Calculation of the time derivative of $A := \int_0^1 ds \int_{\Omega} -u^\beta \Psi_{\delta, p}(u') dx$

Using Step 2 of the previous proof, we get

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^1 ds \int_{\Omega} -u^{\beta} \Psi_{\delta,p}(u') dx &= \int_0^1 ds \int_{\{u' > \delta\}} u^{n+\beta} (u')^p \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^t Q \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) dx \\
&\quad - \delta^{p-1} \int_0^1 ds \int_{\{u' > \delta\}} [u^{n-1} u' u^{\beta-1} (n\beta + \beta(\beta-1)) |\nabla u|^2 + 2\beta u^{n+\beta-1} \nabla u \cdot \nabla u'] dx \\
&\quad - \delta^p \frac{(1-p)}{p} \int_0^1 ds \int_{\{u' > \delta\}} \beta(\beta-1) u^{n+\beta-2} |\nabla u|^2 dx,
\end{aligned} \tag{5.21}$$

where Q is given in (5.7).

Step 2 : Passage to the limit in equation (5.21)

As in the proof of Theorem 2.1 and using the same arguments, we can pass to the limit in (5.21) as δ tends to zero and we get for all $t \in [0, T]$

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 ds \int_{\Omega} -u^{\beta} \frac{(u')_+^p}{p} dx = \int_0^1 ds \int_{\{u' > 0\}} u^{n+\beta} (u')^p \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^t Q \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) dx,$$

where Q is given in (5.7).

Step 3 : Proof of inequality (5.8)

By integrating the previous equation with respect to t , we get

$$\begin{aligned}
\int_0^1 ds \int_{\Omega} -u^{\beta}(x, t, s) \frac{(u'(x, t, s))_+^p}{p} dx &= \int_0^1 ds \int_{\Omega} -u^{\beta}(x, 0, s) \frac{(u'(x, 0, s))_+^p}{p} dx \\
&\quad + \int_0^t d\tau \int_0^1 ds \int_{\{u' > 0\}} u^{n+\beta} (u')^p \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^t Q \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) dx,
\end{aligned}$$

since $u_0^s = u(\cdot, 0, s)$ is chosen to be the geodesic between u_0^a and u_0^b with respect to the pseudo-distance d_g with $g(u) = -u^{\beta}$, then for all $t > 0$, we have

$$\begin{aligned}
\int_0^1 ds \int_{\Omega} g(u(x, t, s)) \frac{(u'(x, t, s))_+^p}{p} dx &= d_g^2(u_0^a, u_0^b) \\
&\quad + \int_0^t d\tau \int_0^1 ds \int_{\{u' > 0\}} u^{n+\beta} (u')^p \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^t Q \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) dx.
\end{aligned}$$

Hence

$$d_g^2(u^a, u^b) \leq d_g^2(u_0^a, u_0^b) + \int_0^t d\tau \int_0^1 ds \int_{\{u' > 0\}} u^{n+\beta} (u')^p \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^t Q \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) dx.$$

Since $g(u) = -u^{\beta}$ with $\beta \in [\beta_-, \beta_+]$, we use Lemma 3.2 and 3.3, for all $t \geq 0$ we get

$$\int_{\Omega} -((u^b)^{1+\beta/p}(\cdot, t) - (u^a)^{1+\beta/p}(\cdot, t))_+^p dx \leq \int_{\Omega} -((u_0^b)^{1+\beta/p} - (u_0^a)^{1+\beta/p})_+^p dx$$

$$+ \frac{(\beta + p)^p}{p^{p-1}} \int_0^t d\tau \int_0^1 ds \int_{\{u' > 0\}} u^{n+\beta} (u')^p \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^t Q \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) dx.$$

Since $u^1(\cdot, t) \leq u^2(\cdot, t)$ for all $t > 0$, then

$$\int_{\Omega} \psi \left((u^2)^{1+\beta/p}(x, t) - (u^1)^{1+\beta/p}(x, t) \right) dx \leq \int_{\Omega} \psi \left((u_0^2)^{1+\beta/p}(x) - (u_0^1)^{1+\beta/p}(x) \right) dx$$

$$- \frac{(\beta + p)^p}{p^{p-1}} \int_0^t dt \int_0^1 ds \int_{\{u' > 0\}} u^m (u')^p \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right)^T Q_{g,p}(u) \left(\frac{\nabla \ln u}{\nabla \ln u'} \right) dx.$$

Step 4 : Decreasing distance with respect to time

Using Lemma 3.1, we have

$$Q \leq 0.$$

Therefore, for all $t > 0$ we get

$$\int_{\Omega} \psi \left((u^2)^{1+\beta/p}(x, t) - (u^1)^{1+\beta/p}(x, t) \right) dx \leq \int_{\Omega} \psi \left((u_0^2)^{1+\beta/p}(x) - (u_0^1)^{1+\beta/p}(x) \right) dx$$

and

$$\int_{\Omega} \psi \left((u^2)^{1+\beta/p} - (u^1)^{1+\beta/p} \right) dx$$

is decreasing with time. □

4 The doubly nonlinear equation

This section is devoted to the proof of Theorem 2.3. To this end, we first need the following results whose proofs are elementary.

Lemma 4.1. (*Property of e*)

Let $\lambda > 0$. For e convex homogeneous function of degree $\lambda + 1$, we have

$$e''(q)q = \beta e'(q). \quad (5.22)$$

Proof of Lemma 4.1

Since e is an homogeneous function of degree $\lambda + 1$ then e' is an homogeneous function of degree β . Therefore

$$e'(\lambda q) = \lambda^{\beta} e'(q).$$

Then

$$e''(\lambda q)q = \beta \lambda^{\beta-1} e'(q).$$

In particular for $\lambda = 1$, we have

$$e''(q)q = \beta e'(q). \quad \square$$

Lemma 4.2. (*Sign of the matrix M*)

For $0 < n < 1$, $1 < p < 1/n$ and $\gamma \in [\gamma_-, \gamma_+]$, then

$$M \geq 0,$$

where γ_- and γ_+ are given in (5.11).

Proof of Lemma 4.2

The proof of this lemma will be divided into two steps ;

— **First step :** $\det(M) > 0$

For $0 < n < 1$ and $1 < p < 1/n$, we calculate the determinant of the matrix M . Then, we get

$$\begin{aligned} \det(M) &= (p-1) \left(\frac{\gamma(\gamma-1)}{\lambda p} + \frac{n\gamma}{\lambda} \right) - \left(\frac{(\lambda+1)\gamma + n(p-1)}{2\lambda} \right)^2 \\ &= \frac{f(\gamma)}{4p\lambda^2}, \end{aligned}$$

where

$$f(\gamma) := (4\lambda(p-1) - p(\lambda+1)^2)\gamma^2 + 2(p-1)(np\lambda - 2\lambda - np)\gamma - n^2p(p-1)^2. \quad (5.23)$$

Now, let us compute the discriminant of f

$$\Delta' = 4\lambda(p-1)^2 [(1-np)\lambda + np(1-n)] > 0 \quad \text{for } 1 < p < 1/n.$$

Since $\gamma \in [\gamma_-, \gamma_+]$, then $f(\gamma) \geq 0$ and therefore $\det(M) \geq 0$.

— **Second step :** Remarkable matrix property

We can remark that

$$(p-1)\text{tr}(M) = \det(M) + (p-1)^2 + \frac{(\gamma(\lambda+1) + n(p-1))^2}{4\lambda^2}. \quad (5.24)$$

Using first step, for $p > 1$, we deduce from (5.24) that $\text{tr}(M) > 0$. Then

$$M \geq 0.$$

□

4.1 Proof of Theorem 2.3

Consider $u_0^a, u_0^b \in C^\infty(\Omega)$ such that

$$\varepsilon \leq u_0^a, u_0^b \leq 1/\varepsilon, \quad \text{for } \varepsilon > 0.$$

Let u^a and $u^b \in C^\infty(Q_T)$ be the solutions of problem (DNE) in the classical sense with initial data u_0^a and u_0^b respectively satisfying

$$\varepsilon \leq u^a(x, t), u^b(x, t) \leq 1/\varepsilon,$$

for every $x \in \Omega$ and $t > 0$.

Step 1 : Equation satisfied by u'

We know that u satisfies

$$u_t = \operatorname{div}(u^n e'(\nabla u)).$$

Let us now check the equation solved by $u' = \partial u / \partial s$. In fact, we have

$$\begin{aligned} (u')_t &= (u_t)' \\ &= \frac{\partial}{\partial s} (\operatorname{div}(u^n e'(\nabla u))) \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{\partial}{\partial s} (u^n e'(\nabla u)) \right). \end{aligned}$$

Then

$$(u')_t = \operatorname{div} (nu^{n-1} u' e'(\nabla u) + u^n e''(\nabla u) \nabla u'). \quad (5.25)$$

Step 2 : Calculation of the time derivative of $A := \int_0^1 ds \int_\Omega u^\gamma \Psi_{\delta,p}(u') dx$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A : &= \frac{d}{dt} \int_0^1 ds \int_\Omega u^\gamma \Psi_{\delta,p}(u') dx \\ &= \int_0^1 ds \int_\Omega (\gamma u^{\gamma-1} \Psi_{\delta,p}(u') u_t + u^\gamma \Psi'_{\delta,p}(u') (u')_t) dx, \end{aligned}$$

Since u' verify equation (5.25), we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A &= \int_0^1 ds \int_\Omega \gamma u^{\gamma-1} \Psi_{\delta,p}(u') \operatorname{div}(u^n e'_q(\nabla u)) dx \\ &\quad + \int_0^1 ds \int_\Omega u^\gamma \Psi'_{\delta,p}(u') \operatorname{div} (nu^{n-1} u' e'(\nabla u) + u^n e''_{qq}(\nabla u) \nabla u') dx. \end{aligned}$$

By integrating by parts with respect to x , we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A &= - \int_0^1 ds \int_{\Omega} [\gamma(\gamma-1)u^{\gamma-2}\Psi_{\delta,p}(u')u^n e'(\nabla u)\nabla u + \gamma u^{\gamma-1}\Psi'_{\delta,p}(u')u^n e'(\nabla u) \cdot \nabla u'] dx \\ &\quad - \int_0^1 ds \int_{\Omega} \gamma u^{\gamma-1}\Psi'_{\delta,p}(u') (nu^{n-1}u' e'(\nabla u)\nabla u + u^n e''(\nabla u)\nabla u \cdot \nabla u') dx \\ &\quad - \int_0^1 ds \int_{\Omega} u^\gamma \Psi''_{\delta,p}(u') (nu^{n-1}u' e'(\nabla u)\nabla u' + u^n e''(\nabla u)|\nabla u'|^2) dx. \end{aligned}$$

Using the definition of $\Psi_{\delta,p}$ and Lemma 4.1, we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A &= - \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} e''(\nabla u)|\nabla u|^2 \left[\frac{\gamma-1}{p} + n \right] \frac{\gamma}{\lambda} u^{n+\gamma-2}(u')^p dx \\ &\quad - \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} e''(\nabla u)\nabla u \cdot \nabla u' \left[\gamma \left(\frac{1}{\lambda} + 1 \right) + \frac{n(p-1)}{\lambda} \right] u^{n+\gamma-1}(u')^{p-1} dx \\ &\quad - \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} e''(\nabla u)|\nabla u'|^2 (p-1)u^{n+\gamma}(u')^{p-2} dx \\ &\quad + \delta^{p-1} \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} e''(\nabla u)|\nabla u|^2 \left[\frac{\gamma}{\lambda} (\gamma-1+n) u^{n+\gamma-2}u' \right] dx \\ &\quad + \delta^{p-1} \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} e''(\nabla u)\nabla u \cdot \nabla u' \left[\gamma \left(\frac{1}{\lambda} + 1 \right) u^{n+\gamma-1} \right] dx \\ &\quad + \delta^p \frac{(1-p)}{p} \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} e''(\nabla u)|\nabla u|^2 \frac{\gamma(\gamma-1)}{\lambda} u^{n+\gamma-2} dx. \end{aligned}$$

Since $u > 0$ and using the notation $w = \sqrt{e''(\nabla u)}$, we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A &= - \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} |w \nabla \ln u|^2 \left[\frac{\gamma-1}{p} + n \right] \frac{\gamma}{\lambda} u^{n+\gamma}(u')^p dx \\ &\quad - \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} w^2 \nabla \ln u \cdot \nabla \ln u' \left[\gamma \left(\frac{1}{\lambda} + 1 \right) + \frac{n(p-1)}{\lambda} \right] u^{n+\gamma}(u')^p dx \\ &\quad - \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} |w \nabla \ln u'|^2 (p-1)u^{n+\gamma}(u')^p dx \\ &\quad + \delta^{p-1} \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} w^2 \left[\frac{\gamma}{\lambda} (\gamma-1+n) u^{n+\gamma-2}u' |\nabla u|^2 + \gamma \left(\frac{1}{\lambda} + 1 \right) u^{n+\gamma-1} \nabla u \cdot \nabla u' \right] dx \\ &\quad + \delta^p \frac{(1-p)}{p} \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} w^2 |\nabla u|^2 \frac{\gamma(\gamma-1)}{\lambda} u^{n+\gamma-2} dx. \end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^1 ds \int_{\Omega} u^\gamma \Psi_{\delta,p}(u') dx &= - \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} u^{n+\gamma}(u')^p \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right)^T M \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right) dx \\ &+ \delta^{p-1} \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} w^2 \left[\frac{\gamma}{\lambda} (\gamma - 1 + n) u^{n+\gamma-2} u' |\nabla u|^2 + \gamma \left(\frac{1}{\lambda} + 1 \right) u^{n+\gamma-1} \nabla u \cdot \nabla u' \right] dx \\ &+ \delta^p \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} w^2 |\nabla u|^2 \frac{\gamma(\gamma-1)(1-p)}{p\lambda} u^{n+\gamma-2} dx. \end{aligned} \quad (5.26)$$

where M is given in (5.13).

Step 3 : Passage to the limit in equation (5.26)

Step 3.1 : Passage to the limit in the term A .

Since

$$u^\gamma \Psi_{\delta,p}(u') \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} u^\gamma \frac{(u')_+^p}{p} \quad \text{a.e. in } \Omega,$$

and

$$|u^\gamma \Psi_{\delta,p}(u')| \leq u^\gamma \frac{(u')_+^p}{p} \in L^1(\Omega),$$

then, using Dominated Convergence theorem, we get

$$\int_0^1 ds \int_{\Omega} u^\gamma \Psi_{\delta,p}(u') dx \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_0^1 ds \int_{\Omega} u^\gamma \frac{(u')_+^p}{p} dx.$$

Step 3.2 : To pass to the limit when δ tends to zero in the first term of the right hand side of (5.26), we apply Monotone Convergence Theorem . Indeed,

$$I_\delta^1(t) := \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} u^{n+\gamma}(u')^p \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right)^T M \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right) dx$$

Using Lemma 4.2, we have $M \geq 0$. Then

$$w_\delta^1 := u^{n+\gamma}(u')^p \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right)^T M \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right) 1_{\{u'>\delta\}}$$

is a decreasing sequence in δ . Therefore, by applying Monotone Convergence theorem, we have

$$w_\delta^1 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} w_0^1 := u^{n+\gamma}(u')^p \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right)^T M \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right) 1_{\{u'>0\}}, \quad \text{a.e. in } \Omega,$$

and

$$I_\delta^1(t) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_0^1 ds \int_{\{u'>0\}} u^{n+\gamma}(u')^p \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right)^T M \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right) dx.$$

Step 3.3 : To pass to the limit when δ tends to zero in the second, third and fourth term of the left hand side of (5.26), we apply Dominated Convergence Theorem and we get

$$\delta^{p-1} \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} w^2 \left[\frac{\gamma}{\lambda} (\gamma - 1 + n) u^{n+\gamma-2} u' |\nabla u|^2 + \gamma \left(\frac{1}{\lambda} + 1 \right) u^{n+\gamma-1} \nabla u \cdot \nabla u' \right] dx \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0,$$

and

$$\delta^p \int_0^1 ds \int_{\{u'>\delta\}} w^2 |\nabla u|^2 \frac{\gamma(\gamma-1)(1-p)}{p\lambda} u^{n+\gamma-2} dx \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Therefore, for all $t \in [0, T]$, we have

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 ds \int_{\Omega} u^\gamma \frac{(u')_+^p}{p} dx = - \int_0^1 ds \int_{\{u'>0\}} u^{n+\gamma} (u')^p \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right)^T M \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right) dx.$$

Step 4 : Proof of inequality (5.12)

By integrating the previous equation with respect to t , we get

$$\begin{aligned} \int_0^1 ds \int_{\Omega} u^\gamma(x, t, s) \frac{(u'(x, t, s))_+^p}{p} dx &= \int_0^1 ds \int_{\Omega} u^\gamma(x, 0, s) \frac{(u'(x, 0, s))_+^p}{p} dx \\ &\quad - \int_0^t d\tau \int_0^1 ds \int_{\{u'>0\}} u^{n+\gamma} (u')^p \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right)^T M \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right) dx, \end{aligned}$$

since $u_0^s = u(\cdot, 0, s)$ is chosen to be the geodesic between u_0^a and u_0^b with respect to the pseudo-distance d_g with $g(u) = u^\gamma$, then for all $t > 0$, we have

$$\begin{aligned} \int_0^1 ds \int_{\Omega} u^\gamma(x, t, s) \frac{(u'(x, t, s))_+^p}{p} dx &= d_g^2(u_0^a, u_0^b) \\ &\quad - \int_0^t d\tau \int_0^1 ds \int_{\{u'>0\}} u^{n+\gamma} (u')^p \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right)^T M \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right) dx. \end{aligned}$$

Hence

$$d_g^2(u^a, u^b) \leq d_g^2(u_0^a, u_0^b) - \int_0^t d\tau \int_0^1 ds \int_{\{u'>0\}} u^{n+\gamma} (u')^p \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right)^T M \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right) dx.$$

Using Lemma 3.2, for all $t > 0$ we get

$$\int_{\Omega} \left((u^b)^{1+\gamma/p}(\cdot, t) - (u^a)^{1+\gamma/p}(\cdot, t) \right)_+^p dx \leq \int_{\Omega} \left((u_0^b)^{1+\gamma/p} - (u_0^a)^{1+\gamma/p} \right)_+^p dx$$

$$-\frac{(\gamma + p)^p}{p^{p-1}} \int_0^t d\tau \int_0^1 ds \int_{\{u' > 0\}} u^{n+\gamma} (u')^p \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right)^T M \left(\frac{w \nabla \ln u}{w \nabla \ln u'} \right) dx.$$

Step 5 : Decreasing distance with respect to time

Since $g(u) = u^\gamma$, using Lemma 3.1, we have $M \geq 0$. Therefore, for all $t > 0$ we get

$$\int_{\Omega} \left((u^b)^{1+\gamma/p}(\cdot, t) - (u^a)^{1+\gamma/p}(\cdot, t) \right)_+^p dx \leq \int_{\Omega} \left((u_0^b)^{1+\gamma/p} - (u_0^a)^{1+\gamma/p} \right)_+^p dx,$$

and

$$\int_{\Omega} \left((u^b)^{1+\gamma/p} - (u^a)^{1+\gamma/p} \right)_+^p dx$$

is decreasing with time. □

Remark 4.3. (Other applications) In a future work, we will apply the method of differential contractions for different type of equations like Kolmogorov equation, Fokker-Planck equation, elliptic equations... (see [52]).

5 Appendix

In this section, we prove Lemmas 3.2 and 3.3.

Proof of Lemma 3.2

Proof of (5.16)

First method : Let $u \in \mathcal{E}$, we have

$$\begin{aligned} \int_0^1 ds \int_{\Omega} u^\beta \frac{(u')_+^p}{p} dx &= \int_{\Omega} dx \int_0^1 \frac{(u^{\beta/p} u')_+^p}{p} ds \\ &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} dx \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^{1+\beta/p}}{1+\beta/p} \right) \right)_+^p ds. \end{aligned}$$

Since $p > 1$, using Jensen's inequality and Lemma 3.3, we get

$$\begin{aligned} \int_0^1 ds \int_{\Omega} u^\beta \frac{((u')_+)^p}{p} dx &\geq \frac{1}{p} \int_{\Omega} dx \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^{1+\beta/p}}{1+\beta/p} \right) \right)_+ ds \right)^p \\ &= \frac{p^{p-1}}{(\beta+p)^p} \int_{\Omega} \left((u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p} \right)_+^p dx. \end{aligned}$$

Therefore, we obtain

$$\inf_{u \in \mathcal{E}} \int_0^1 ds \int_{\Omega} u^\beta \frac{(u')_+^p}{p} dx \geq \frac{p^{p-1}}{(\beta+p)^p} \int_{\Omega} \left((u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p} \right)_+^p dx.$$

On the other hand, for $(x, t) \in Q_T$ and $s \in [0, 1]$, consider the following path

$$\tilde{u}(x, t, s) = \left((u^b)^{1+\beta/p}(x, t) - (u^a)^{1+\beta/p}(x, t) \right) s + (u^a)^{1+\beta/p}(x, t)^{p/(\beta+p)}.$$

Since $\tilde{u} \in \mathcal{E}$, then

$$\begin{aligned} \inf_{u \in \mathcal{E}} \int_0^1 ds \int_{\Omega} u^{\beta} \frac{(u')_+^p}{p} dx &\leq \int_0^1 ds \int_{\Omega} \tilde{u}^{\beta} \frac{(\tilde{u}')_+^p}{p} dx \\ &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} dx \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial \tilde{u}^{1+\beta/p}}{\partial s} \right)_+ \right)^p ds \\ &= \frac{p^{p-1}}{(\beta+p)^p} \int_{\Omega} \left((u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p} \right)_+^p dx. \end{aligned}$$

Therefore, we have

$$\inf_{u \in \mathcal{E}} \int_0^1 ds \int_{\Omega} u^{\beta} \frac{(u')_+^p}{p} dx \leq \frac{p^{p-1}}{(\beta+p)^p} \int_{\Omega} \left((u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p} \right)_+^p dx.$$

Then

$$d_+^2(u^a, u^b) = \frac{p^{p-1}}{(\beta+p)^p} \int_{\Omega} \left((u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p} \right)_+^p dx.$$

Second method : Let $u \in \mathcal{E}$, we have

$$\begin{aligned} \int_0^1 ds \int_{\Omega} u^{\beta} \frac{(u')_+^p}{p} dx &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} dx \int_0^1 (u^{\beta/p} u')_+^p ds \\ &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} dx \int_0^1 \left(\frac{\partial u^{1+\beta/p}}{\partial s} \right)_+^p ds \\ &= \frac{p^{p-1}}{(\beta+p)^p} \int_{\Omega} dx \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial s} (u^{1+\beta/p}) \right)_+^p ds. \end{aligned}$$

Let us introduce the following function

$$\begin{aligned} v &: Q_T \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t, s) &\mapsto v(x, t, s) = u^{1+\beta/p}(x, t, s), \end{aligned}$$

and the functional

$$J(v) := \int_{\Omega} dx \int_0^1 (v')_+^p ds.$$

— **Step 1 : Derivation of J**

By deriving J , we get for $w \in C^\infty(Q_T \times [0, 1])$

$$\begin{aligned} J'(v) \cdot w &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{J(v + sw) - J(v)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\Omega} dx \int_0^1 \frac{(v' + sw')_+^p - (v')_+^p}{s} ds. \end{aligned}$$

Let introduce the following function

$$\begin{aligned} \theta & : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ s & \mapsto \theta(s) = (v' + sw')_+^p. \end{aligned}$$

For $s \in (0, 1)$, we have

$$\theta'(s) = p(v' + sw')_+^{p-1} w'.$$

Then

$$\begin{aligned} J'(v) \cdot w & = \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\Omega} dx \int_0^1 \frac{\theta(s) - \theta(0)}{s} ds \\ & = \int_{\Omega} dx \int_0^1 \theta'(0) ds \\ & = p \int_{\Omega} dx \int_0^1 (v')_+^{p-1} w' ds. \end{aligned}$$

By integrating by parts with respect to s , we obtain

$$\begin{aligned} J'(v) \cdot w & = -p(p-1) \int_{\Omega} dx \int_0^1 (v')_+^{p-2} v'' w ds \\ & \quad + p \int_{\Omega} [(v')_+^{p-1} w]_0^1 dx. \end{aligned}$$

We choose the function $w \in C^\infty(Q_T \times [0, 1])$ such that for all $(x, t) \in Q_T$

$$(v'(x, t, 1))_+^{p-1} w(x, t, 1) = (v'(x, t, 0))_+^{p-1} w(x, t, 0).$$

Then, we have

$$J'(v) \cdot w = -p(p-1) \int_{\Omega} dx \int_0^1 (v')_+^{p-2} v'' w ds.$$

— **Step 2 : Euler-Lagrange equation**

For all $w \in C^\infty(Q_T \times [0, 1])$, we can write the Euler-Lagrange equation as

$$J'(v) \cdot w = 0$$

which is equivalent to

$$(v')_+^{p-2} v'' = 0 \quad \text{in } Q_T \times [0, 1].$$

Hence, $v'' = 0$ and for all $(x, t) \in Q$

$$v(x, t, s) = a(x, t)s + b(x, t),$$

with

$$v(x, t, 0) = (u^a)^{1+\beta/p}(x, t) \quad \text{and} \quad v(x, t, 1) = (u^b)^{1+\beta/p}(x, t).$$

Therefore, we have for all $(x, t) \in Q$

$$v(x, t, s) = ((u^b)^{1+\beta/p}(x, t) - (u^a)^{1+\beta/p}(x, t)) s + (u^a)^{1+\beta/p}(x, t).$$

Hence

$$v' = (u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p},$$

then

$$\inf_{u \in \mathcal{E}} \int_0^1 ds \int_{\Omega} u^{\beta} \frac{(u')_+^p}{p} dx = \frac{p^{p-1}}{(\beta+p)^p} \int_{\Omega} ((u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p})_+^p dx.$$

Proof of (5.17)

First method : Let $u \in \mathcal{E}$, we have

$$\begin{aligned} \int_0^1 ds \int_{\Omega} -u^{\beta} \frac{(u')_+^p}{p} dx &= \int_{\Omega} dx \int_0^1 -\frac{(u^{\beta/p} u')_+^p}{p} ds \\ &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} dx \int_0^1 -\left(\left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{u^{1+\beta/p}}{1+\beta/p} \right) \right)_+^p ds. \end{aligned}$$

Since $p < 1$, using Jensen's inequality and Lemma 3.3, we get

$$\begin{aligned} \int_0^1 ds \int_{\Omega} -u^{\beta} \frac{(u')_+^p}{p} dx &\geq -\frac{1}{p} \int_{\Omega} dx \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^{1+\beta/p}}{1+\beta/p} \right) \right)_+ ds \right)^p \\ &= \frac{p^{p-1}}{(\beta+p)^p} \int_{\Omega} -((u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p})_+^p dx. \end{aligned}$$

Therefore, we obtain

$$\inf_{u \in \mathcal{E}} \int_0^1 ds \int_{\Omega} -u^{\beta} \frac{(u')_+^p}{p} dx \geq \frac{p^{p-1}}{(\beta+p)^p} \int_{\Omega} -((u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p})_+^p dx.$$

On the other hand, for $(x, t) \in Q$ and $s \in [0, 1]$, consider the following path

$$\tilde{u}(x, t, s) = (((u^b)^{1+\beta/p}(x, t) - (u^a)^{1+\beta/p}(x, t)) s + (u^a)^{1+\beta/p}(x, t))^{p/(\beta+p)}.$$

Since $\tilde{u} \in \mathcal{E}$, then

$$\begin{aligned} \inf_{u \in \mathcal{E}} \int_0^1 ds \int_{\Omega} -u^{\beta} \frac{(u')_+^p}{p} dx &\leq \int_0^1 ds \int_{\Omega} -\tilde{u}^{\beta} \frac{(\tilde{u}')_+^p}{p} dx \\ &= -\frac{1}{p} \int_{\Omega} dx \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\tilde{u}^{1+\beta/p}}{1+\beta/p} \right) \right)_+^p ds \\ &= \frac{p^{p-1}}{(\beta+p)^p} \int_{\Omega} -((u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p})_+^p dx. \end{aligned}$$

Therefore, we have

$$\inf_{u \in \mathcal{E}} \int_0^1 ds \int_{\Omega} -u^{\beta} \frac{(u')_+^p}{p} dx \leq \frac{p^{p-1}}{(\beta+p)^p} \int_{\Omega} -((u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p})_+^p dx.$$

Then

$$d_-^2(u^a, u^b) = \frac{p^{p-1}}{(\beta+p)^p} \int_{\Omega} -((u^b)^{1+\beta/p} - (u^a)^{1+\beta/p})_+^p dx.$$

□

Proof of Lemma 3.3

Let $n > 0$ and $0 < p \leq 1/n^2$. For $\beta \in [\beta_-(p), \beta_+(p)]$, we have

$$\beta_-(p) + p \leq \beta + p \leq \beta_+(p) + p.$$

To prove that $\beta + p > 0$, it's sufficient to demonstrate that

$$\beta_-(p) + p > 0.$$

In fact, we have

$$\begin{aligned} \beta_-(p) + p &= \frac{(p-1)}{2} \left(-1 - \sqrt{1-n^2p} \right) + p \\ &= \frac{p+1}{2} - \frac{(p-1)}{2} \sqrt{1-n^2p} \\ &= \frac{1}{2} \left(p+1 - (p-1)\sqrt{1-n^2p} \right). \end{aligned}$$

Then,

$$\begin{aligned} \beta_-(p) + p > 0 &\Leftrightarrow p+1 - (p-1)\sqrt{1-n^2p} > 0 \\ &\Leftrightarrow p+1 > (p-1)\sqrt{1-n^2p}. \end{aligned}$$

If $p = 1$, the result is obvious.

If $0 < p < 1$, then we have

$$(p-1)\sqrt{1-n^2p} < 0 < p+1.$$

If $p > 1$, we obtain

$$\begin{aligned} \beta_-(p) + p > 0 &\Leftrightarrow (p+1)^2 > (p-1)^2(1-n^2p) \\ &\Leftrightarrow n^2p^3 - 2n^2p^2 + (4+n^2)p > 0. \end{aligned}$$

Since $p > 0$, we have

$$\beta_-(p) + p > 0 \Leftrightarrow g(p) := n^2p^2 - 2n^2p + (4 + n^2) > 0$$

Computing the discriminant of g , we get

$$\Delta' = n^4 - n^2(4 + n^2) = -4n^2 < 0.$$

Therefore, $g(p) > 0$ for all $0 < p < 1/n^2$, and then

$$\beta_-(p) + p > 0.$$

□

Troisième partie

Seawater intrusion and related questions

Chapitre 6

Modélisation d'un problème d'intrusion saline et Schémas numérique

Ce chapitre est une sorte d'introduction générale dans laquelle nous présentons le problème d'intrusion saline qui menace actuellement de nombreuses villes côtières dans le monde. Nous commençons d'abord par introduire toutes les définitions et les notions nécessaires permettant au lecteur de se familiariser au monde de l'hydrologie souterraine. Dans le but d'écrire des schémas numériques, nous traitons un modèle simplifié, proposé dans [48], modélisant l'intrusion saline en particulier dans la ville de Tripoli.

1 Introduction

L'eau douce constitue 2.5% de l'eau dans le globe terrestre, et 95% de l'eau douce utilisable se trouve dans le sous sol. Ces chiffres montrent l'importance de cette source d'eau. Elle est d'autant plus importante si l'on considère la pénurie d'eau à laquelle le monde devra faire face dans le futur. Actuellement, le nombre de pays touchés par la surexploitation des eaux souterraines augmente jour après jour. Et cette augmentation s'avère alarmante surtout si l'on considère la répartition inégale des ressources en eaux dans un même pays, et si l'on considère la concentration démographique des grandes villes et surtout sur les côtes. En réalité, les régions côtières sont considérées comme une source majeure pour l'approvisionnement en eau douce dans de nombreux pays à travers le monde et particulièrement dans les zones arides et semi-arides. En outre, le fait que les zones côtières sont densément peuplées rend la nécessité en eau douce de plus en plus aigüe, ce qui aboutit à une extraction intensive des eaux souterraines. Ainsi, cette extraction empêche l'écoulement d'eau douce vers la mer, et crée ensuite un vide local dans la nappe phréatique, ce qui permet à l'eau de mer de migrer vers l'intérieur et de remonter pour arriver aux puits et saliniser une partie importante du sol, et ceci engendre des conséquences nuisibles au niveau de l'agriculture, de l'alimentation en eau et des écosystèmes marins côtiers. Ce phénomène appelé, intrusion saline, est devenu l'une des contraintes principales imposées sur l'utilisation des eaux souterraines. Comme l'intrusion saline progresse avec le temps, l'eau des puits de pompage existants près de la côte, devient salée et ces puits doivent donc être abandonnés. Alors, pour éviter les conséquences dangereuses de ce problème, il sera nécessaire d'utiliser des modèles mathématiques, afin de simuler le phénomène, et faire des estimations quantitatives des effets des décisions de gestion différentes qui devraient être prises pour remédier ce problème. La modélisation de ce phénomène dans les aquifères côtiers est un travail important et difficile. La difficulté primaire réside dans la simulation du mouvement de l'eau salée.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la modélisation de l'intrusion saline dans les régions côtières surtout Tripoli. On réfère à [24] pour une vue générale des modèles d'intrusion saline.

2 Définitions et notions

Dans cette section, on donne les définitions et les notions nécessaires pour s'introduire au monde de l'hydrologie.

Le milieu poreux :

Le milieu poreux est l'ensemble de grains solides ou d'agrégats autour desquels

existent des espaces vides appelés pores, qui peuvent être interconnectés ou non. La matrice constituée des grains solides est rigide ou peut subir des petites déformations.

Les premières informations sur les propriétés d'un tel milieu sont fournies par l'analyse granulométrique, souvent réalisé par tamisage. Parmi ces propriétés, celles qui vont influencer sur les phénomènes d'écoulement et de transport : la porosité totale et la perméabilité intrinsèque, qui sont des propriétés spécifiques du milieu dépendant de nombreux facteurs et caractérisant le milieu du point de vue hydraulique.

La perméabilité intrinsèque :

La perméabilité d'un matériau (une roche, un tissu, etc.) est une grandeur intrinsèque à ce dernier. Elle mesure sa capacité à laisser passer un fluide, elle est indépendante du fluide. Plus un milieu est perméable plus le fluide s'écoulera vite. La perméabilité noté k s'exprime en unité de surface m^2 . Notez aussi que cette propriété est représentée mathématiquement par un tenseur.

La porosité :

La porosité d'un milieu poreux est l'expression du rapport du volume de vide des pores sur le volume total du sol. Une perméabilité élevée exige une bonne porosité mais l'inverse n'est pas vrai. Une roche très poreuse peut avoir une perméabilité très faible (argiles par exemple). La porosité est un rapport volumique est souvent notée Φ . C'est un rapport volumique sans unité.

$$\Phi = \frac{\text{volume du vide}}{\text{volume total}} \in (0, 1).$$

La viscosité dynamique d'un fluide :

La viscosité dynamique est le coefficient de proportionnalité de la force s'appliquant entre deux couches de vitesses différentes d'un fluide, elle traduit la résistance à l'écoulement uniforme et sans turbulence se produisant dans la masse de matière. Lorsque la viscosité augmente, la capacité du fluide à s'écouler diminue. On pourrait croire que la viscosité d'un fluide s'accroît avec sa densité mais ce n'est pas nécessairement le cas : par exemple, l'huile est moins dense que l'eau cependant elle est nettement plus visqueuse. La viscosité dynamique est noté μ et est exprimée en *Pa.s*. Notez qu'on appelle fluidité d'un fluide l'inverse de sa viscosité dynamique.

Le poids spécifique :

On appelle poids spécifique d'un fluide α (ou aussi poids volumique), noté γ_α le produit de la masse volumique de ce fluide ρ par l'accélération de gravité g , c.à.d

$$\gamma = \rho \cdot g.$$

La teneur en eau volumique :

Dans les milieux poreux non saturés, nous définissons la teneur en eau volumique notée θ comme étant le rapport entre le volume d'eau contenu dans le milieu poreux et le volume total de ce milieu.

$$\theta = \frac{\text{volume de l'eau dans le sol}}{\text{volume total}}.$$

La teneur en eau d'un sol varie entre une valeur minimale (la teneur en eau résiduelle notée θ_r), et une valeur maximale (la teneur en eau à saturation notée θ_s). Cette dernière est en principe égale à la porosité. Toutefois, dans les conditions naturelles, un sol ne parvient jamais à la saturation totale, car il reste toujours de l'air piégé.

La conductivité hydraulique :

Le terme de conductivité hydraulique (ou coefficient de perméabilité) est le rapport entre la perméabilité intrinsèque du sol affectée par le poids spécifique de l'eau et la viscosité dynamique du fluide (ici l'eau), cette propriété est notée K et elle indique la capacité des milieux poreux à transférer un volume d'un fluide (ici l'eau). On écrit alors

$$K = \frac{k \cdot \rho \cdot g}{\mu},$$

où k est la perméabilité intrinsèque définie ci dessus, ρ la masse volumique du fluide et g l'accélération de pesanteur et μ la viscosité dynamique du fluide déjà définie.

La charge hydraulique :

Le paramètre qui régit le transfert de matière ou d'énergie constitue le potentiel. Lorsque le potentiel est égal partout dans un domaine, il n'y a pas de transfert de masse ou d'énergie. Par contre, des différences de potentiel provoquent le transfert de masse ou d'énergie. Les changements du potentiel selon les différentes directions dans un domaine donné définissent le gradient de potentiel dans ce domaine. Dans le cas de l'écoulement en milieux poreux, c'est la charge hydraulique qui constitue le potentiel puisque l'écoulement se fait des secteurs à haute charge hydraulique vers ceux à faible charge hydraulique. En hydrogéologie, la charge hydraulique notée h

est exprimée en mètres d'eau (m), de sorte que le gradient hydraulique est sans dimensions (m/m). De plus, la charge hydraulique est formée de deux composantes : la composante d'élevation (énergie potentielle reliée à la gravité) z et la composante de pression (appelée aussi potentiel de pression) qui est égale à $\frac{p}{\rho g}$ où p est la pression du fluide (eau) qui est mesurée simplement par la hauteur de la remontée d'eau dans un piézomètre (installation qui sert à mesurer la pression d'eau exercée à sa base), ρ est la masse volumique du fluide et g est l'accélération de pesanteur constante et standard.

La densité du flux de l'écoulement :

La densité du flux est un paramètre qui indique la quantité et la direction dans laquelle la masse ou l'énergie est transférée en fonction du temps à travers une surface unitaire dans les matériaux sous l'effet du gradient du potentiel déjà défini. Dans le cas de l'écoulement, nous nous intéressons au flux de masse (ou volumétrique) de fluide à travers les matériaux découlant du gradient hydraulique. De façon mathématique, le flux est un vecteur noté \vec{q} qui est généralement exprimé en volume de fluide (à densité constante) par unité de temps et de surface $\left(\frac{m^3}{s.m^2} \text{ ou } \frac{m}{s}\right)$. Donc, cette densité \vec{q} est aussi appelée vitesse de filtration. Elle est reliée à la vitesse réelle \vec{v} des écoulements par

$$\vec{q} = \theta \vec{v},$$

où θ est la teneur en eau effective du milieu poreux définie ci-dessus.

Nappe phréatique :

La nappe phréatique est contenue dans l'aquifère souterrain que l'on rencontre à faible profondeur. Elle alimente traditionnellement les puits et les sources en eau potable. C'est la nappe la plus exposée à la pollution en provenance de la surface.

Couche de confinement

Une couche de confinement est une unité géologique de faible ou très faible conductivité hydraulique (inférieure à $10^{-7} m/s$). ces couches sont subdivisées généralement en aquifuge, aquitard, et aquiclude.

L'**aquifuge** est une unité absolument imperméable ne contenant pas d'eau et ne permettant pas l'écoulement. Ce terme est plutôt conceptuel et correspond à assez peu de situations réelles.

L'**aquitard**, aussi appelé *couche semi-perméable* ("*leaky confining layer*"), est une

unité de faible perméabilité mais qui peut emmagaziner de l'eau souterraine et la transférer lentement d'un aquifère à un autre.

L'**aquiclude** est aussi une unité de faible perméabilité constituant la limite supérieure ou inférieure d'un système d'écoulement.

Les aquifères :

Un aquifère est une couche de terrain ou une roche, suffisamment poreuse (qui peut stocker de l'eau) et perméable (où l'eau circule librement), pour contenir une nappe d'eau souterraine, c'est aussi le terme donné à une unité de roche qui donne de l'eau en quantités utilisables à des puits ou des sources. Un aquifère peut être visualisé comme une éponge géante souterraine qui retient l'eau et qui, sous certaines conditions, permet à l'eau de se déplacer à travers elle. Les roches contenant de l'eau qui composent les aquifères sont constituées soit de meubles (comme de la terre), soit des dépôts ou des roches consolidées. Les propriétés physiques des matériaux aquifères et des nappes eux-mêmes (épaisseur, profondeur) sont importantes pour déterminer la rapidité avec laquelle l'eau souterraine se déplace et dans quelles routes il faudra se déplacer dans un aquifère. Cette connaissance permet de décider la meilleure façon de faire jaillir l'eau du sol pour une bonne consommation d'eau potable, l'irrigation et autres usages.

Les aquifères sont généralement classifiés en deux types comme suivants : Aquifères libres (ou non confinés) et Aquifères captifs (ou confinés).

Aquifères non confinés :

Dans les aquifères non confinés, les eaux souterraines remplit partiellement l'aquifère. La surface supérieure de la nappe phréatique est donc libre de monter et de décliner. La nappe phréatique est soumise à la pression atmosphérique. Il est important de noter que les aquifères non confinés, en particulier ceux proches de la surface, peuvent être vulnérables à la contamination provenant des activités humaines sur la surface du sol.

Aquifères confinés :

Les aquifères captifs peuvent également être appelés aquifères artésiens. Un aquifère captif se trouve entre deux couches de matériaux imperméables (comme l'argile) notées "lits" de confinements, qui entravent le mouvement de l'eau dans et hors de l'aquifère. À cause de ces "lits" de confinement, les eaux souterraines dans ces aquifères se trouvent sous haute pression. Et en raison de cette haute pression, le niveau d'eau dans un puits passera à un niveau plus élevé que le niveau d'eau dans la partie supérieure de l'aquifère. Même dans une nappe captive, l'eau cherche son

propre niveau. Les couches géologiques ne sont pas parfaitement horizontales. Notez finalement que l'eau embouteillée est souvent annoncée comme provenant d'aquifères artésiens. Ces eaux sont souvent plus pures car les "lits" de confinement gênent le mouvement de la contamination. Rien ne garantit, cependant, que les eaux de puits artésiens sont les plus propres que les eaux souterraines d'un aquifère non confiné.

Intrusion saline :

L'intrusion saline est le mouvement de l'eau salée dans les aquifères d'eau douce. Le plus souvent, elle est causée par le pompage des puits côtiers d'eau souterraine, ou de la construction de canaux de navigation ou des canaux de pétrole. Ces derniers engendrent des conduites d'eau salée en marais d'eau douce. L'intrusion d'eau salée peut également se produire à la suite d'un processus naturel, comme une onde de tempête à partir d'un ouragan. L'intrusion saline se produit dans presque tous les aquifères côtiers, où ils sont en continuité hydraulique avec l'eau de mer.

Lorsque l'eau douce est retirée à un rythme plus rapide que ce qu'il peut être reconstitué, la nappe phréatique est prélevée à la suite. Ce tirage vers le bas permet également de réduire la pression hydrostatique. Lorsque cela se produit à proximité d'une zone océanique côtière, l'eau salée de l'océan est tirée vers l'aquifère d'eau douce. Le résultat est que l'aquifère sera contaminé par l'eau salée. Ce qui se passe à de nombreuses communautés côtières.

La relation de Ghyben-Herzberg :

Les premières formulations physiques de l'intrusion saline ont été faites par W. Badon-Ghyben (1888, 1889) et A. Herzberg (1901), ainsi appelées de la relation Ghyben-Herzberg. Ces données sont tirées des solutions analytiques afin de rapprocher les comportements d'intrusion, qui sont basés sur un certain nombre d'hypothèses qu'on ne peut pas tenir compte dans tous les cas sur le terrain. L'eau douce a une densité d'environ 1,000 gramme par centimètre cube (g/cm^3) à 20° C, tandis que celle de l'eau de mer est d'environ 1,025 g/cm^3 . Le rapport de Ghyben-Herzberg affirme que, pour chaque "foot" de l'eau douce dans un aquifère non confiné au-dessus du niveau de la mer, il y aura quarante "feet" d'eau douce dans l'aquifère sous le niveau de la mer. Au 20^{ième} siècle, la puissance de calcul a permis l'utilisation des méthodes numériques (généralement la méthode des différences finies ou éléments finis) qui ont besoin de moins d'hypothèses et peuvent être appliquées de façon plus générale.

3 Modélisations mathématique et numérique du problème

La modélisation de l'intrusion saline est considérée difficile. Certaines difficultés typiques se posent à cause de la présence éventuelle de fissures et de fractures dans l'aquifère, dont les positions précises sont inconnues, mais qui ont une grande influence sur le développement de l'intrusion saline. De plus la présence éventuelle d'hétérogénéités à petite échelle dans les propriétés hydrauliques de l'aquifère, qui sont trop petites pour être prises en compte par le modèle mais qui peuvent aussi avoir une grande influence sur le développement de l'intrusion saline. En outre, il y a le changement des propriétés hydrauliques par l'intrusion saline : un mélange d'eau salée et d'eau douce est souvent sous-saturé en ce qui concerne le calcium, le déclenchement de la dissolution du calcium dans la zone de mélange et la modification des propriétés hydrauliques. Et finalement, pour les modèles à long terme, le futur changement climatique pose une grande question. Les résultats du modèle dépendent souvent fortement du niveau de la mer et du taux de recharge. Les deux sont susceptibles de changer dans l'avenir.

3.1 Établissement des lois de la physique

Deux types de lois de la physique sont utilisés pour résoudre un problème : **Une loi de comportement** et **Une loi de conservation**. Exprimées mathématiquement et combinées, ces lois permettent de dériver les équations aux dérivées partielles qui représenteront le problème physique à résoudre : la loi de comportement établit une relation entre le potentiel et le flux. Dans notre domaine d'hydrogéologie, c'est la célèbre **Loi de Darcy**, alors que la loi de conservation connu en hydrogéologie par le **Principe de continuité** est une expression du principe de Lavoisier qui spécifie que la masse ou l'énergie est conservée dans le domaine considéré.

Loi de Darcy :

La loi expérimentale de Darcy ou loi de Darcy a été établie par Henry Darcy. Elle est notamment utile pour calculer les écoulements souterrains de l'eau ou d'un liquide, verticalement à travers le sol vers la nappe par exemple, ou à travers un milieu poreux (comme, par exemple, dans un barrage en terre). Elle est utilisée dans le domaine de l'hydraulique et des sciences du sol, pour calculer les coefficients de percolation, ou de circulation horizontale ou verticale de l'eau, selon la masse d'eau présente en surface ou dans un milieu hydrophile.

Cette loi régissant l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible caractérisé par une viscosité μ à travers un milieu poreux caractérisé par un tenseur de conductivités hydrauliques $[K]$, permet notamment de mesurer, modéliser le débit d'eau

pouvant (par gravité et/ou par capillarité) s'écouler à travers un sol ou un échantillon de matériau poreux. La loi de Darcy s'exprime par la forme générale suivante :

$$\vec{q} = -[K].\vec{\nabla}h, \quad (6.1)$$

où \vec{q} est le vecteur densité de flux de l'écoulement, h est la charge hydraulique et $[K]$ est le tenseur donnant la conductivité hydraulique du sol. En remplaçant la charge hydraulique par ses deux composantes déjà données, cette loi s'écrira donc

$$\vec{q} = -[K].\vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right). \quad (6.2)$$

Le signe négatif indique que le flux est positif lorsque le gradient de la charge hydraulique est négatif, c'est-à-dire qu'il diminue dans la direction de transfert.

Le principe de continuité ou conservation de masse :

On applique au milieu poreux continu équivalent l'équation de continuité (ou bilan des masses d'eau) qui consiste à écrire l'égalité entre le bilan des flux de masse d'eau à travers les surfaces d'un volume d'un échantillon donné et la variation dans le temps de la masse d'eau dans ce volume. L'intégrale sur la surface est transformée par la formule d'Ostrogradsky en intégrale sur le volume délimité par cette surface. On peut écrire l'équation de continuité sous la forme suivante :

$$\frac{\partial(\rho.\theta)}{\partial t} + \vec{\nabla} . (\rho \vec{q}) = 0, \quad (6.3)$$

où ρ est la masse volumique de l'eau ($kg.m^{-3}$), θ est la porosité totale du milieu et \vec{q} est le vecteur densité de flux volumique ($m.s^{-1}$). Cette équation traduit l'égalité entre la différence des masses entrante et sortante d'un volume donné pendant un intervalle de temps et la variation de masse dans le même volume pendant le même intervalle de temps.

Hypothèses considérées

On est bien intéressé par le problème d'intrusion saline qui menace actuellement les villes côtières généralement et Tripoli particulièrement au Nord du Liban. Dans notre milieu poreux, on néglige toutes les fractures où l'eau s'écoule trop vite et on suppose que hors ces fractures, l'eau met un temps infini pour traverser le sous-sol. Dans ce travail, on utilise souvent la valeur ϵ_0 qui est le rapport donné par

$$\epsilon_0 = \frac{\gamma_s - \gamma_f}{\gamma_s},$$

qui exprime la différence de salinité des deux fluides supposés non-miscibles. Il sera aussi intéressant d'ajouter un terme source à notre modèle. Dans ce qui suit, on distingue deux situations : le cas d'aquifère non confiné et le cas d'aquifère confiné.

3.2 Cas d'aquifère non confiné

Un aquifère non confiné est schématisé dans la figure 6.1 qui présente une coupe verticale du domaine.

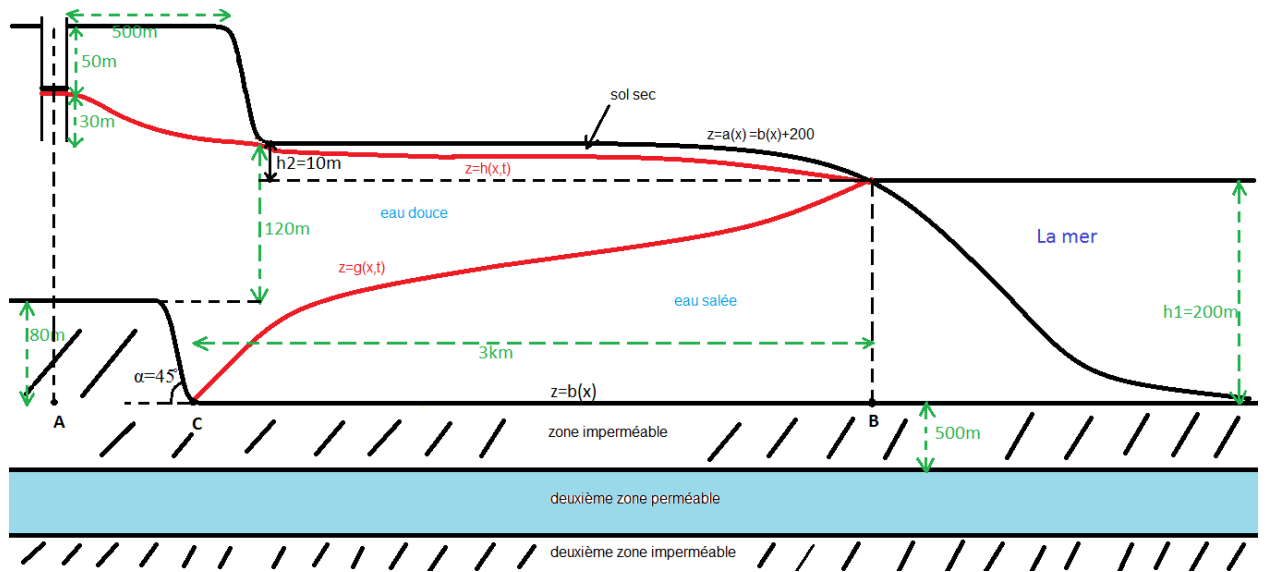


FIGURE 6.1 – Le cas non confiné.

Description de la géométrie de la figure

On considère les coordonnées d'espaces $(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ où x représente la coordonnée horizontale et z la coordonnée verticale. On considère que l'origine est fixé au point $B = (0, 0)$ (voir figure 6.1). On suppose que la surface du sol est décrite par $z = a(x)$ et que l'interface avec la roche imperméable est décrite par le niveau $z = b(x)$, satisfaisant $b \leq a$. Dans le milieu poreux, on suppose aussi que l'interface séparant l'eau douce du sol sec est décrite par $z = h(x, t)$ et l'interface séparant l'eau douce de l'eau salée (supposés deux fluides non miscibles) est représentée par $z = g(x, t)$. Cette interface est prolongée dans les zones là où il n'y a plus d'eau douce ou d'eau salée comme suit

$$g(x, t) = \begin{cases} a(x) & \text{pour } x \geq x_B, \\ b(x) & \text{pour } x \leq x_C, \end{cases}$$

où $C = (-3000, 0)$. On suppose en plus que

$$b \leq g \leq h \leq a \quad \text{sur } \mathbb{R}^N.$$

Les fonctions b, g, h et a sont suffisamment continues.

La loi de Darcy et l'équation de conservation de masse appliquées à notre modèle nous amènent au système des EDP suivant (voir [48]) :

$$\begin{cases} (h - g)_t = \operatorname{div} [(h - g) (\nabla(1 - \epsilon_0)h)] & \text{pour } x_A < x < x_B, \\ g_t = \operatorname{div} ((g - b)\nabla [(1 - \epsilon_0)h + \epsilon_0g]) & \text{pour } x_A < x < x_B, \end{cases} \quad (6.4)$$

où $A = (-3500, 0)$ et $B = (0, 0)$ sont représentés dans la figure 6.1. Les conditions aux bords sont les suivantes :

$$\begin{cases} h = g = h_1 & \text{pour } x = B, \\ \left. \begin{array}{l} h = h_1 + 30 + h_2 \\ g = b \end{array} \right\} & \text{pour } x = A, \end{cases}$$

où h_1 représente le niveau d'eau de mer estimé de l'ordre de $200m$ et h_2 représente la dénivellation par rapport au niveau d'eau de mer. Cette dénivellation est de l'ordre de $10m$ (voir figure 1).

On considère maintenant le cas du régime stationnaire où toute variation par rapport au temps sera négligée. Ainsi, la relation de Ghyben-Herzberg (GH) s'écrit comme suit :

$$(1 - \epsilon_0)h + \epsilon_0g = h_1 \quad \text{sur } \{g > b\} \cap \{h > g\}, \quad (6.5)$$

ce qui est équivalent à

$$h - h_1 = \left(\frac{\epsilon_0}{1 - \epsilon_0} \right) (h_1 - g) \quad \text{sur } \{g > b\} \cap \{h > g\},$$

avec $\frac{\epsilon_0}{1 - \epsilon_0} = 40$ (approximativement).

Cette relation signifie que l'épaisseur de la zone d'eau douce au-dessous du niveau d'eau de mer est approximativement 40 fois plus grande que celle au-dessus de ce même niveau.

On introduit la fonction β défini par

$$\beta(h) = \frac{h - h_1}{\epsilon_0} \chi_{\{g > b\}} + (h - b) \chi_{\{g = b\}}.$$

Proposition 3.1. (Equation en h)

La première équation du système (6.4) s'écrit sous la forme suivante

$$0 = \operatorname{div}(\beta(h)\nabla h) \text{ pour } x \in (x_A, x_B).$$

avec

$$\begin{cases} h = h_1 + 30 + h_2 & \text{en } x = A, \\ h = h_1 & \text{en } x = B. \end{cases}$$

Preuve de la Proposition 3.1 :

Ce résultat est directement obtenu en utilisant la relation GH dans (6.5) et en remarquant que la première équation du système (6.4) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} 0 = \operatorname{div}((h - b)(\nabla(1 - \epsilon_0)h)) & \text{si } x_A < x < x_C \text{ où } \{g = b\}, \\ 0 = \operatorname{div}\left(\frac{h - h_1}{\epsilon_0}(\nabla(1 - \epsilon_0)h)\right) & \text{si } x_C < x < x_B \text{ où } \{g > b\}. \end{cases} \quad (6.6)$$

□

Schéma numérique

Dans cette partie, on s'intéresse à trouver des schémas numériques décrivant notre modèle dans le cas non confiné.

Définition 3.2. (Schéma explicite monotone)

On dit qu'un schéma numérique explicite de la forme $h_i^{n+1} = F_i(h_{i-1}^n, h_i^n, h_{i+1}^n)$ est un schéma monotone si et seulement si F_i est une fonction croissante par rapport à chacune de ses variables. En d'autres termes, si et seulement si

$$\frac{\partial F_i}{\partial h_j^n} \geq 0 \text{ pour tout } j \in \{i-1, i, i+1\}.$$

Dans ce qui suit, on considère le cas évolutionnel afin de discrétiser la première équation du système principal (6.4) dans un cas particulier.

Considérons le cas particulier où $g = 0$, alors la première équation du système (6.4) s'écrit sous la forme

$$h_t = \frac{1 - \epsilon_0}{2} \Delta(h^2). \quad (6.7)$$

Proposition 3.3. (Schéma explicite de l'équation (6.7))

Un schéma numérique explicite de différence finie en temps et de différence finie centrée en espace pour l'équation (6.7) est donné par

$$h_i^{n+1} = F_i(h_i^n), \quad (6.8)$$

où

$$F_i(h_i^n) = \frac{(1 - \epsilon_0)\Delta t}{2\Delta x^2} ((h_{i+1}^n)^2 + (h_{i-1}^n)^2 - 2(h_i^n)^2) + h_i^n,$$

où $h_i^n = h(i\Delta x, n\Delta t)$ avec Δx représentant le pas en espace et Δt représentant le pas en temps.

Proposition 3.4. (*Schéma explicite monotone de l'équation (6.7)*)

On suppose que $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{4h_i^n}$. Alors le schéma numérique défini par (6.8) est monotone.

Preuve de la Proposition 3.4 :

Testons la monotonie du schéma dans notre cas simplifié :

pour $j = i \pm 1$; on a $\frac{\partial F_i}{\partial h_j^n} = 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} h_j^n \geq 0$ (car tous les termes sont positifs).

pour $j = i$; on a $\frac{\partial F_i}{\partial h_i^n} = 1 - 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} h_i^n \geq 0 \iff \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{4h_i^n}$ (C'est la condition CFL).

□

Maintenant, on introduit le changement de variables suivant :

$$\bar{h} = h - g \quad \text{et} \quad \bar{g} = g - b.$$

Ainsi le système 6.4 sera équivalent au système suivant

$$\begin{cases} \bar{h}_t = \text{div} [\bar{h} \nabla ((1 - \epsilon_0)(\bar{h} + \bar{g} + b))] & \text{pour } A < x < B, \\ \bar{g}_t = \text{div} [\bar{g} \nabla ((1 - \epsilon_0)\bar{h} + \bar{g} + b)] & \text{pour } A < x < B. \end{cases} \quad (6.9)$$

Proposition 3.5. (*Schéma explicite de l'équation (6.7)*)

Un schéma numérique explicite de différence finie en temps et de différence finie centrée en espace pour le système (6.4) est donné par

$$\begin{cases} \bar{h}_i^{n+1} = H_i(\bar{h}_i^n, \bar{g}_i^n), \\ \bar{g}_i^{n+1} = G_i(\bar{h}_i^n, \bar{g}_i^n), \end{cases} \quad (6.10)$$

où

$$\begin{aligned} H_i(\bar{h}_i^n, \bar{g}_i^n) = & \frac{(1 - \epsilon_0)\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\frac{\bar{h}_{i+1}^n + \bar{h}_i^n}{2} \right) \left(\frac{(\bar{h}_{i+1}^n + \bar{g}_{i+1}^n + b_{i+1}) - (\bar{h}_i^n + \bar{g}_i^n + b_i)}{\Delta x} \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{\bar{h}_i^n + \bar{h}_{i-1}^n}{2} \right) \left(\frac{(\bar{h}_i^n + \bar{g}_i^n + b_i) - (\bar{h}_{i-1}^n + \bar{g}_{i-1}^n + b_{i-1})}{\Delta x} \right) \right] + \bar{h}_i^n, \end{aligned}$$

et

$$G_i(\bar{h}_i^n, \bar{g}_i^n) = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\frac{\bar{g}_{i+1}^n + \bar{g}_i^n}{2} \right) \left(\frac{\left((1 - \epsilon_0) \bar{h}_{i+1}^n + \bar{g}_{i+1}^n + b_{i+1} \right) - \left((1 - \epsilon_0) \bar{h}_i^n + \bar{g}_i^n + b_i \right)}{\Delta x} \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{\bar{g}_i^n + \bar{g}_{i-1}^n}{2} \right) \left(\frac{\left((1 - \epsilon_0) \bar{h}_i^n + \bar{g}_i^n + b_i \right) - \left((1 - \epsilon_0) \bar{h}_{i-1}^n + \bar{g}_{i-1}^n + b_{i-1} \right)}{\Delta x} \right) \right] + \bar{g}_i^n.$$

Cas particulier (Cas où il n'y a pas d'eau salée)

On considère le cas particulier où $\bar{g} = 0$ et $b = 0$ (c.à.d $g = b = 0$). Ainsi, le système (6.9) se réduit en une équation qui sera discrétisé comme suit.

Proposition 3.6. (*Schéma explicite de la première équation de (6.9)*)

Un schéma numérique explicite de différence finie en temps et de différence finie centrée en espace pour la première équation de (6.9) est donné par

$$\bar{h}_i^{n+1} = F_i(\bar{h}_{i-1}^n, \bar{h}_i^n, \bar{h}_{i+1}^n), \quad (6.11)$$

$$F_i(\bar{h}_{i-1}^n, \bar{h}_i^n, \bar{h}_{i+1}^n) =$$

$$(1 - \epsilon_0) \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\frac{\bar{h}_{i+1}^n + \bar{h}_i^n}{2} \right) \left(\frac{\bar{h}_{i+1}^n - \bar{h}_i^n}{\Delta x} \right) - \left(\frac{\bar{h}_i^n + \bar{h}_{i-1}^n}{2} \right) \left(\frac{\bar{h}_i^n - \bar{h}_{i-1}^n}{\Delta x} \right) \right] + \bar{h}_i^n.$$

Proposition 3.7. (*Condition de monotonie du schéma (6.11)*)

Le schéma (6.11) est monotone si

$$2(1 - \epsilon_0) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \bar{h}_i^n \leq 1.$$

Preuve de la Proposition 3.7 :

Calculons $\frac{\partial F_i}{\partial \bar{h}_j^n}$, où $j \in \{i-1, i, i+1\}$ afin de tester la monotonie du schéma :

Pour $j = i+1$, on a :

$$\frac{\partial F_i}{\partial \bar{h}_j^n} = (1 - \epsilon_0) \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{h}_{i+1}^n - \bar{h}_i^n}{\Delta x} \right) + \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\bar{h}_{i+1}^n + \bar{h}_i^n}{2} \right) \right] \\ = (1 - \epsilon_0) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \bar{h}_{i+1}^n \geq 0 \quad (\text{toujours}).$$

Pour $j = i-1$, on a :

$$\frac{\partial F_i}{\partial \bar{h}_j^n} = -(1 - \epsilon_0) \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{h}_i^n - \bar{h}_{i-1}^n}{\Delta x} \right) - \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\bar{h}_i^n + \bar{h}_{i-1}^n}{2} \right) \right] \\ = (1 - \epsilon_0) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \bar{h}_{i-1}^n \geq 0 \quad (\text{toujours}).$$

Pour $j = i$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial \bar{h}_j^n} &= (1 - \epsilon_0) \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{h}_{i+1}^n - \bar{h}_i^n}{\Delta x} \right) - \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\bar{h}_{i+1}^n + \bar{h}_i^n}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{h}_i^n - \bar{h}_{i-1}^n}{\Delta x} \right) - \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\bar{h}_i^n + \bar{h}_{i-1}^n}{2} \right) \right] + 1 \\ &= (1 - \epsilon_0) \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (\bar{h}_{i+1}^n - \bar{h}_i^n - \bar{h}_{i+1}^n - \bar{h}_i^n - \bar{h}_i^n + \bar{h}_{i-1}^n - \bar{h}_i^n - \bar{h}_{i-1}^n) + 1 \\ &= 1 - 2(1 - \epsilon_0) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \bar{h}_i^n \geq 0 \quad \iff \quad 2(1 - \epsilon_0) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \bar{h}_i^n \leq 1. \end{aligned}$$

□

3.3 Cas d'un aquifère confiné

Un aquifère confiné est schématisé dans la figure 6.2 qui présente une coupe verticale du domaine.

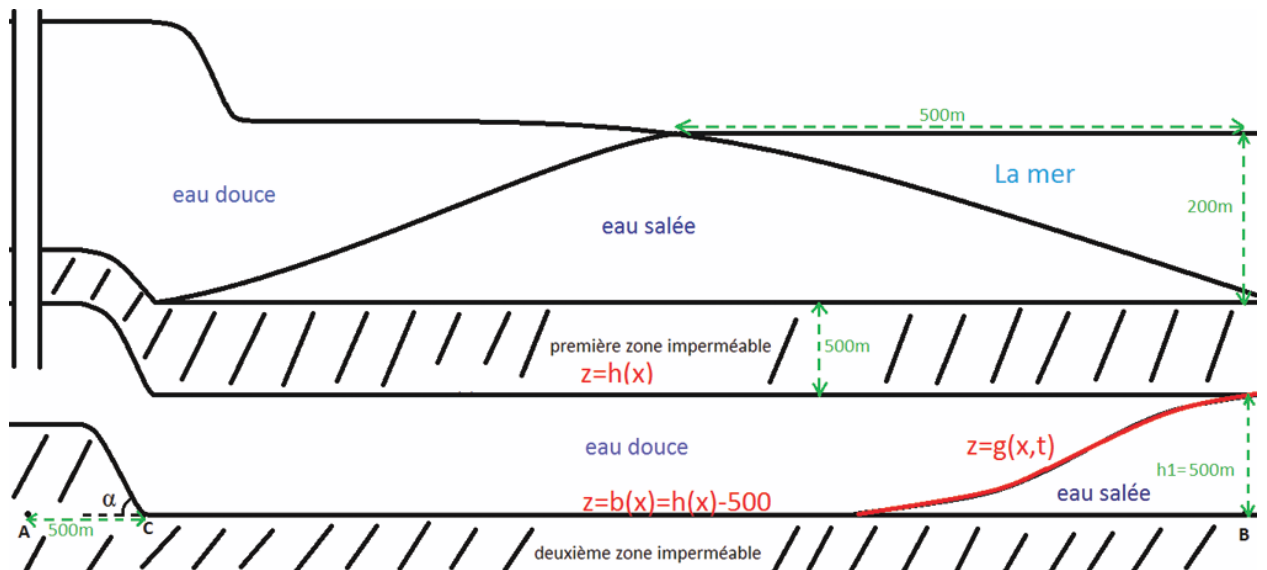


FIGURE 6.2 – Le cas confiné.

Dans le cas d'aquifère confiné, la pression joue un rôle primordial dont on ne peut pas nier l'importance. Noter que dans ce cas $h(x)$ est connue et donc le but est de trouver les fonctions $g(x, t)$ et $p(x, t)$. Le même travail nous amène au système

suisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (h - g)_t = \operatorname{div} [(h - g)\nabla_x(p + (1 - \epsilon_0)h)] \\ g_t = \operatorname{div} [(g - b)\nabla_x(p + (1 - \epsilon_0)h + \epsilon_0g)] \end{array} \right. \quad \text{pour } A < x < B. \quad (6.12)$$

En additionnant ces deux égalités, et en supposant que l'étude se fait en régime permanent (stationnaire), où toute variation au cours de temps est négligée, on obtient l'équation suivante :

$$h_t = 0 = \operatorname{div} [(h - b)\nabla(p + (1 - \epsilon_0)h) + (g - b)\nabla(\epsilon_0g)]. \quad (6.13)$$

On considère aussi les conditions aux bords suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} g = b \\ p(x = A, t) = p_0(A) \end{array} \right. \quad \text{en } x = A, \quad \left\{ \begin{array}{l} g = h(B) \\ p(x = B, t) = \text{pression de } 700m \text{ d'eau salée} = 700(1 - \epsilon_0) \end{array} \right. \quad \text{en } x = B. \quad (6.14)$$

Remarque 3.8. Notez qu'au lieu de donner la pression au point A, on peut donner la densité de flux en ce point comme suivant :

$$K(A) = (h - b)\nabla(p + (1 - \epsilon_0)h).$$

Ce terme n'est autre que la quantité déjà vue à l'intérieur de div dans (6.13), en annulant le terme $(g - b)\nabla(\epsilon_0g)$ car en $x = A$, on a $g = b$.

En régime stationnaire, la relation GH sera écrite dans le cas confiné comme suit :

$$p + (1 - \epsilon_0)h + \epsilon_0g = \text{cte} = h_1 + p(B). \quad (6.15)$$

En effet, la relation GH était au cas non confiné $(1 - \epsilon_0)h + \epsilon_0g = h_1$, alors en considérant seulement la pression au point B, on obtient la nouvelle relation GH dans notre cas confiné.

Proposition 3.9. (*Equation en g*)

En régime stationnaire, l'équation (6.13) s'écrit sous la forme suivante

$$\operatorname{div}((h - g)\nabla g) = 0.$$

Preuve de la Proposition 3.9 :

Ce résultat est une conséquence de la relation GH (6.15) injectée dans (6.13). En effet,

$$h_t = 0 = \operatorname{div} [(h - b)\nabla(p + (1 - \epsilon_0)h) + (g - b)\nabla(\epsilon_0 g)].$$

Ceci est équivalent à

$$h_t = 0 = \operatorname{div} [(h - b)\nabla(h_1 + p(B) - \epsilon_0 g) + (g - b)\nabla(\epsilon_0 g)].$$

Et en remarquant que $\nabla(p(B) + h_1) = 0$, ceci implique que

$$h_t = 0 = \operatorname{div} [(h - b)\nabla(-\epsilon_0 g) + (g - b)\nabla(\epsilon_0 g)].$$

Donc,

$$\operatorname{div}((-h + b + g - b)\nabla\epsilon_0 g) = 0.$$

Et finalement, en simplifiant par $-\epsilon_0$, on obtient

$$\operatorname{div}((h - g)\nabla g) = 0.$$

□

Cas particulier :

On considère maintenant le cas particulier normalisé où

$$h - b = h_1 = 1 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

Alors, l'égalité (6.13) s'écrira

$$\operatorname{div} [\nabla(p + (1 - \epsilon_0)) + g\nabla(\epsilon_0 g)] = 0,$$

ce qui implique que

$$\nabla p + g\nabla(\epsilon_0 g) = \text{cte} = \Upsilon.$$

En travaillant dans le cas unidimensionnel $N = 1$, la seconde équation de (6.12) s'écrira donc

$$\begin{aligned} g_t &= \operatorname{div} [g(\nabla(p + (1 - \epsilon_0)h) + \nabla(\epsilon_0 g))] \\ &= \operatorname{div} [g(\nabla(\epsilon_0 g) + \Upsilon - g\nabla(\epsilon_0 g))] \\ &= \Upsilon \operatorname{div}(g) + \operatorname{div} [g(1 - g)\nabla(\epsilon_0 g)]. \end{aligned}$$

Schéma numérique

Dans cette partie, on s'intéresse à trouver des schémas numériques décrivant notre modèle dans le cas confiné. On introduit le changement de variables suivant

$$\bar{g} = g - b, \quad \bar{p} = p + (1 - \epsilon_0)h \quad \text{et} \quad \bar{h} = h - b,$$

la seconde équation de (6.12) donnera (en notant que $g_t = \bar{g}_t$, b étant constante au cours de temps) :

$$\begin{aligned} g_t &= \operatorname{div} [(g - b)(\nabla(p + (1 - \epsilon_0)h) + \nabla(\epsilon_0 g))] \\ &= \operatorname{div} [\bar{g}(\nabla[\bar{p} + \epsilon_0(g - b + b)])] \\ &= \operatorname{div} [\bar{g}(\nabla(\bar{p} + \epsilon_0 \bar{g} + \epsilon_0 b))]. \end{aligned}$$

Ainsi, on écrit le système (6.12) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \bar{g}_t = \operatorname{div} [\bar{g}(\nabla(\bar{p} + \epsilon_0 \bar{g} + \epsilon_0 b))], \\ \varepsilon \bar{p}_\tau = \operatorname{div} [\bar{h} \nabla \bar{p} + \bar{g} \nabla(\epsilon_0(\bar{g} + b))]. \end{cases} \quad (6.16)$$

Remarque 3.10. La deuxième équation de ce système est l'équation d'évolution artificielle qu'on l'utilise afin d'accélérer la dynamique de notre schéma avec τ un paramètre de temps différent de t .

Proposition 3.11. (Schéma explicite du système (6.12))

Un schéma numérique explicite de différence finie en temps et de différence finie centrée en espace pour le système (6.12) est donné par

$$\begin{cases} \bar{g}_i^{n+1} = F_i(\bar{g}_i^n, \bar{p}_i^n), \\ \bar{p}_i^{n+1} = P_i(\bar{g}_i^n, \bar{p}_i^{n,k}), \end{cases} \quad (6.17)$$

où

$$\begin{aligned} F_i(\bar{g}_i^n, \bar{p}_i^n) &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\frac{\bar{g}_{i+1}^n + \bar{g}_i^n}{2} \right) \left(\frac{(\bar{p}_{i+1}^n + \epsilon_0 \bar{g}_{i+1}^n + \epsilon_0 b_{i+1}) - (\bar{p}_i^n + \epsilon_0 \bar{g}_i^n + \epsilon_0 b_i)}{\Delta x} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\bar{g}_i^n + \bar{g}_{i-1}^n}{2} \right) \left(\frac{(\bar{p}_i^n + \epsilon_0 \bar{g}_i^n + \epsilon_0 b_i) - (\bar{p}_{i-1}^n + \epsilon_0 \bar{g}_{i-1}^n + \epsilon_0 b_{i-1})}{\Delta x} \right) \right] + \bar{g}_i^n, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_i(\bar{g}_i^n, \bar{p}_i^{n,k}) &= \frac{\Delta \tau}{\varepsilon \Delta x} \left[\left(\frac{\bar{h}_{i+1} + \bar{h}_i}{2} \right) \left(\frac{\bar{p}_{i+1}^{n,k} - \bar{p}_i^{n,k}}{\Delta x} \right) - \left(\frac{\bar{h}_i + \bar{h}_{i-1}}{2} \right) \left(\frac{\bar{p}_i^{n,k} - \bar{p}_{i-1}^{n,k}}{\Delta x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_0 \left(\frac{\bar{g}_{i+1}^n + \bar{g}_i^n}{2} \right) \left(\frac{(\bar{g}_{i+1}^n + b_{i+1}) - (\bar{g}_i^n + b_i)}{\Delta x} \right) \right. \\ &\quad \left. - \epsilon_0 \left(\frac{\bar{g}_i^n + \bar{g}_{i-1}^n}{2} \right) \left(\frac{(\bar{g}_i^n + b_i) - (\bar{g}_{i-1}^n + b_{i-1})}{\Delta x} \right) \right] + \bar{p}_i^{n,k}. \end{aligned}$$

Remarque 3.12. On a donc maintenant deux indices de temps. On a aussi que $\bar{p}_i^{n+1} = \bar{p}_i^{n,k_0}$ pour k_0 suffisamment grand avec $\bar{p}_i^{n,0} = \bar{p}_i^n$.

4 Conclusions et perspectives

Le problème évoqué ci-dessus est l'intrusion saline qui est une contrainte principale imposée sur l'utilisation des eaux souterraines. En effet, dans ce travail, on a modélisé des écoulements d'eaux souterraines dans les aquifères côtiers menacés par l'intrusion saline (couplage eau douce/eau salée). On a privilégié à travers les différentes sections de ce travail une approche fortement couplée basée sur la loi de Darcy, permettant la description des différentes régions d'écoulement, cette approche de modélisation mathématique spatialement distribuée était nécessaire pour appréhender ce phénomène malgré sa complexité physique et géométrique. On peut cependant mettre en avance, sans aller dans les détails, les réalisations suivantes : D'abord, on a pu détecter l'équation d'évolution au cours du temps de l'interface abrupte séparant l'eau douce de l'eau salée et celle séparant l'eau douce du sol sec en (2D), dans les deux cas confiné et non confiné. Cette équation dépend de plusieurs facteurs comme la pression, la masse volumique des deux fluides, de la conductivité hydraulique du sol et plusieurs autres facteurs énoncés ci-dessus. Ensuite, on a travaillé sous des hypothèses spéciales, celles utilisant la relation de Ghyben-Herzberg dans un modèle limite stationnaire. On a pu arriver enfin à construire un schéma numérique en se basant sur la méthode de différences finies et tout en posant des hypothèses supplémentaires afin de simplifier le calcul.

A l'issue de ce travail, plusieurs perspectives s'ouvrent. On donne ici quelques unes sur lesquelles on va travailler ultérieurement. Concernant les schémas numériques proposés, on pourra comparer les résultats obtenus avec d'autres schémas connus. Il serait aussi intéressant d'essayer de simuler ces schémas tout en variant les conditions aux bords et voir l'effet de ce changement.

Chapitre 7

Numerical results in the case of confined aquifer

Modeling is a tool used to create a simplified view of a complex system with the aim to understand and analyze it. Models can be physical, mathematical or numerical. The observation of physical phenomena allows us to establish the laws of physics, that could be translated as partial differential equations which do not admit usually analytical solutions. Hence we use numerical methods to solve these equations. The purpose of this chapter is to make some numerical simulations for the seawater intrusion problem in the confined case under particular assumptions.

with

$$[\mathcal{K}_\alpha(x, z)]_{z=z_1}^{z=z_2} = \mathcal{K}_\alpha(x, z_2) - \mathcal{K}_\alpha(x, z_1), \quad \text{for } \alpha = f, s,$$

by defining

$$\mathcal{K}_\alpha(x, z) = \gamma_s \int_0^z d\bar{z} \bar{\kappa}_\alpha^{xx}(x, \bar{z}), \quad \text{with } \bar{\kappa}_\alpha^{xx}(x, z) = \kappa_\alpha^{xx}(x, z) - (\kappa_\alpha^{zz}(x, z))^{-1} \kappa_\alpha^{xz}(x, z) \kappa_\alpha^{zx}(x, z),$$

and by considering

$$\epsilon_0 = \frac{\gamma_s - \gamma_f}{\gamma_s} \in (0, 1), \quad \text{with } \gamma_\alpha = \rho_\alpha g^0 \text{ where } g^0 \text{ is the standard gravitational constant.}$$

Notice that $\alpha = f$ correspond to the freshwater case and $\alpha = s$ correspond to the seawater case. And

$$\begin{cases} h_t = 0, \\ p(t, x) = p_1(x) = \max(0, h_1 - c(x)) > 0 \quad \text{on } \{h = c\}. \end{cases} \quad (7.2)$$

Let ω be the following set

$$\omega = \{x \in \mathbb{R}^N, \quad h(x) < c(x)\}.$$

Then p is in particular solution of

$$\begin{cases} 0 = \operatorname{div}_x \left[\left([\mathcal{K}_s(x, z)]_{z=b}^{z=g} + [\mathcal{K}_f(x, z)]_{z=g}^{z=h} \right) \nabla_x (p + (1 - \epsilon_0)h) + \epsilon_0 ([\mathcal{K}_s(x, z)]_{z=b}^{z=g} \nabla_x g) \right], & \text{on } \omega, \\ p(t, x) = p_1(x) = \max(0, h_1 - c(x)) > 0, & \text{on } \partial\omega. \end{cases} \quad (7.3)$$

To simplify, we consider the following particular assumption

$$\mathcal{K}_\alpha(x, z) = z \cdot Id. \quad (7.4)$$

Then we obtain

$$\begin{cases} b \leq g \leq h \leq c, & \text{on } [0, +\infty) \times \mathbb{R}^N, \\ g_t = \operatorname{div}_x ((g - b) \nabla_x (p + (1 - \epsilon_0)h + \epsilon_0 g)), & \text{in } \omega, \\ g = c = h, & \text{on } \mathbb{R}^N \setminus \omega, \end{cases} \quad (7.5)$$

with p solution of

$$\begin{cases} 0 = \operatorname{div}_x ((h - b) \nabla_x (p + (1 - \epsilon_0)h) + \epsilon_0 (g - b) \nabla_x g), & \text{in } \omega, \\ p(t, x) = p_1(x) := \max(0, h_1 - c(x)) > 0, & \text{on } \partial\omega. \end{cases} \quad (7.6)$$

Using the second equation of (7.5) and the first equation of (7.6), one obtains

$$\begin{cases} g_t = \operatorname{div}_x ((g - b)\nabla_x(p + (1 - \epsilon_0)h + \epsilon_0g)), & \text{in } \omega, \\ 0 = \operatorname{div}_x ((h - b)\nabla_x(p + (1 - \epsilon_0)h) + \epsilon_0(g - b)\nabla_xg), & \text{in } \omega. \end{cases} \quad (7.7)$$

Considering the special case where $h = 1$ and $b = 0$, one obtains

$$\begin{cases} g_t = \operatorname{div} [g\nabla(p + \epsilon_0g)], & \text{in } \omega, \\ 0 = \operatorname{div} [\nabla p + \epsilon_0g\nabla g], & \text{in } \omega. \end{cases} \quad (7.8)$$

For the boundary conditions : on $\partial\omega = \{x = 0\}$, one has

$$\begin{cases} g(X_{MAX}, t) = g(0, t) = \alpha(t), & \text{for all } t, \\ p(X_{MAX}, t) = p_1(X_{MAX}), & \text{for all } t. \end{cases}$$

where α is a function that depends on t with $0 \leq \alpha(t) \leq 1$, for all t . In fact, $p_1(X_{MAX})$ corresponds to the height of salt water on B' .

The aim of this chapter is to transform the system (7.8) in only one equation by considering particular assumptions and thus arrive to a simple numerical scheme. In other terms, we will try to get rid of one of the two variables ($p =$ the pressure) in order to get one equation in g (the interface fresh/salt water).

To this end, we define the constant a by

$$a = \nabla p(0) + \epsilon_0g(0)\nabla g(0). \quad (7.9)$$

Proposition 1.2. (*The simplified system*)

Under the above assumptions, the freshwater/saltwater interface g satisfies the following equation

$$g_t = \operatorname{div}(-ga) + \Delta\phi(g), \quad 0 \leq g \leq 1, \quad x \leq 0, \quad (7.10)$$

where a is defined by (7.9) and ϕ is given by $\phi(x) = \epsilon_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)$.

Proof of Proposition 1.2

Indeed, the second equation of the system (7.8) gives :

$$0 = \operatorname{div} \left[\nabla \left(p + \epsilon_0 \frac{g^2}{2} \right) \right] = \Delta \left(p + \epsilon_0 \frac{g^2}{2} \right).$$

Let $w = -p - \epsilon_0 \frac{g^2}{2}$, we obtain :

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{(It is an harmonic function),} \\ w(0) = -p_1 - \frac{\epsilon_0}{2}. \end{cases}$$

In the 1-D case :

$$\begin{aligned} w(x) &= w(0) + ax, \\ &= -p_1 - \frac{\epsilon_0}{2} + ax. \end{aligned}$$

At the point A , we have

$$\begin{aligned} p(X_{MIN}) &= -w(X_{MIN}) - \epsilon_0 \frac{g^2(X_{MIN})}{2} \quad \text{with } g(X_{MIN}) = 0, \\ &= p_1 + \frac{\epsilon_0}{2} - aX_{MIN}. \end{aligned}$$

Hence

$$p + \epsilon_0 \frac{g^2}{2} = p_1 + \frac{\epsilon_0}{2} - ax, \quad (7.11)$$

and

$$\nabla p = -\epsilon_0 g \nabla g - a, \quad (7.12)$$

By reinjecting into the first equation of the system (7.8), we get

$$\begin{aligned} g_t &= \operatorname{div} [-ga - \epsilon_0 g^2 \nabla g + \epsilon_0 g \nabla g] \\ &= \operatorname{div} \left[-ga + \epsilon_0 \nabla \left(\frac{g^2}{2} - \frac{g^3}{3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Let us now define $\frac{g^2}{2} - \frac{g^3}{3} = \frac{1}{\epsilon_0} \phi(g)$, we obtain :

$$g_t = \Delta(\phi(g)),$$

if $a = 0$, and if $a > 0$

$$\begin{cases} 0 \leq g \leq 1, \\ g_t = \operatorname{div} [-ga + \epsilon_0 g(1-g) \nabla g]. \end{cases} \quad (7.13)$$

Or

$$g_t = \operatorname{div}(-ga) + \Delta(\phi(g)) \quad \text{with } 0 \leq g \leq 1, \quad x \leq 0.$$

□

Remark 1.3. For convenience, we consider that $g(-\infty) = 0$.

Proposition 1.4. (Boundary conditions)

Under the above assumptions, α is given by

$$\alpha(t) = 1 - \sqrt{(1 - \alpha(0))^2 - \frac{2a}{\epsilon_0}t}, \quad \text{for } 0 \leq t \leq \frac{\epsilon_0(1 - \alpha(0))^2}{2a}. \quad (7.14)$$

Proof of Proposition 1.4

Using the conservation of flow along the vertical of our domain and since $\alpha \neq 1$, we have

$$\int_g^h \nabla p(0) dz = \int_g^h \nabla p(-\infty) dz,$$

therefore

$$(1 - \alpha(t))\nabla p(0) = \nabla p(-\infty).$$

From (7.12), we have $\nabla p = -\epsilon_0 g \nabla g - a$, then

$$\nabla p(-\infty) = -a,$$

and

$$\nabla p(0) = -\epsilon_0 \alpha(t) \alpha'(t) - a.$$

Thus

$$(1 - \alpha(t))(\epsilon_0 \alpha(t) \alpha'(t) + a) = a,$$

therefore

$$\epsilon_0(1 - \alpha(t))\alpha(t)\alpha'(t) = \alpha(t)a.$$

While $\alpha(t) \neq 0$, then we obtain

$$\epsilon_0(1 - \alpha(t))\alpha'(t) = a.$$

Hence

$$\left(\frac{(1 - \alpha(t))^2}{2} \right)' = -(1 - \alpha(t))\alpha'(t) = -\frac{a}{\epsilon_0}.$$

By integrating this equality over $[0, t]$, we obtain

$$(1 - \alpha(t))^2 - (1 - \alpha(0))^2 = -\frac{2a}{\epsilon_0}t.$$

Setting $\beta(t) = 1 - \alpha(t)$, then one has

$$\beta(t) = \sqrt{\left(\beta(0)^2 - \frac{2a}{\epsilon_0}t \right)} \quad \text{for } 0 \leq t \leq \frac{\epsilon_0 \beta(0)^2}{2a},$$

hence

$$\alpha(t) = 1 - \sqrt{(1 - \alpha(0))^2 - \frac{2a}{\epsilon_0}t}, \quad \text{for } 0 \leq t \leq \frac{\epsilon_0(1 - \alpha(0))^2}{2a}.$$

□

Remark 1.5. (Special cases)

For $0 < \alpha < 1$, we can cover the cases where the outflow is not reduced to a point. Its width is now about $1 - \alpha > 0$.

For $\alpha = 0$, we don't have fresh/salt water interface.

2 Analytical solution

Let us now turn back to the system (7.13) in stationary regime :

$$\begin{cases} 0 \leq g \leq 1, \\ 0 = \operatorname{div} [-ga + \epsilon_0 g(1 - g)\nabla g], \end{cases} \quad (7.15)$$

with the following boundary conditions

$$\begin{cases} g(X_{MAX}) = \alpha, & \text{with } 0 < \alpha \leq 1. \\ g(-\infty) = 0. \end{cases} \quad (7.16)$$

Theorem 2.1. (A solution in the stationary case)

The solution of (7.15)-(7.16) is given by

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x \leq X_{INT}, \\ 1 - \sqrt{(1 - \alpha)^2 - \frac{2a}{\epsilon_0}x}, & \text{for } X_{INT} \leq x \leq X_{MAX}. \end{cases}$$

Proof of Theorem 2.1

By integrating

$$0 = \operatorname{div} [-ga + \epsilon_0 g(1 - g)\nabla g]$$

over $[X_{INT}, x]$, we get

$$-g(x)a + \epsilon_0 g(x)(1 - g(x))\nabla g(x) + g(X_{INT})a - \epsilon_0 g(X_{INT})(1 - g(X_{INT}))\nabla g(X_{INT}) = 0.$$

But $g(X_{INT}) = 0$, therefore

$$-g(x)a + \epsilon_0 g(x)(1 - g(x))\nabla g(x) = 0.$$

For x such that $g(x) \neq 0$, we have

$$-a + \epsilon_0(1 - g(x))\nabla g(x) = 0,$$

thus

$$-((1 - g)^2)' = 2(1 - g)\nabla g = \frac{2a}{\epsilon_0}. \quad (7.17)$$

By integrating equation 7.17 over $[x, 0]$, we get

$$(1 - g(x))^2 - (1 - g(0))^2 = -\frac{2a}{\epsilon_0}x,$$

then

$$g(x) = 1 - \sqrt{(1 - \alpha)^2 - \frac{2a}{\epsilon_0}x},$$

with

$$\frac{2a}{\epsilon_0}X_{INT} = (1 - \alpha)^2 - 1.$$

□

Particular case :

If $\alpha = 1$, in this case the outflow is reduced to a point and we obtain

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } X_{MIN} \leq x \leq X_{INT}, \\ 1 - \sqrt{-\frac{2a}{\epsilon_0}x}, & \text{if } X_{INT} \leq x \leq X_{MAX}, \end{cases}$$

with

$$\frac{2a}{\epsilon_0}X_{INT} = -1.$$

3 Numerical scheme

Consider the following equation :

$$g_t = \text{div}(-ag) + \Delta\phi(g), \quad \phi' \geq 0. \quad (7.18)$$

Proposition 3.1. (*Explicit numerical scheme*)

A finite difference upwind scheme in time and space of the equation (7.18) is given by

$$\begin{cases} g_i^{n+1} = F_i(g_{i-1}^n, g_i^n, g_{i+1}^n) \\ F_i(g_{i-1}^n, g_i^n, g_{i+1}^n) = -a\Delta t \left(\frac{g_i^n - g_{i-1}^n}{\Delta x} \right) + \Delta t \frac{\phi(g_{i+1}^n) - 2\phi(g_i^n) + \phi(g_{i-1}^n)}{\Delta x^2} + g_i^n. \end{cases} \quad (7.19)$$

Proof :

In one dimensional case, using equation (7.18), one gets, by setting $g = u_x$:

$$u_t = -au_x + (\phi(u_x))_x.$$

Discretizing this equation, we get

$$(S_i) : \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -a \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \right) + \frac{\phi \left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} \right) - \phi \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \right)}{\Delta x}.$$

Setting $g_i^n := \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}$ then :

$$(S_i) : \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -ag_{i-1}^n + \frac{\phi(g_i^n) - \phi(g_{i-1}^n)}{\Delta x},$$

$$(S_{i+1}) : \quad \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\Delta t} = -ag_i^n + \frac{\phi(g_{i+1}^n) - \phi(g_i^n)}{\Delta x}.$$

Thus

$$\frac{(S_{i+1}) - (S_i)}{\Delta x} : \quad \frac{g_i^{n+1} - g_i^n}{\Delta t} = -a \left(\frac{g_i^n - g_{i-1}^n}{\Delta x} \right) + \frac{\phi(g_{i+1}^n) - 2\phi(g_i^n) + \phi(g_{i-1}^n)}{\Delta x^2}.$$

Therefore

$$g_i^{n+1} = -a\Delta t \left(\frac{g_i^n - g_{i-1}^n}{\Delta x} \right) + \Delta t \frac{\phi(g_{i+1}^n) - 2\phi(g_i^n) + \phi(g_{i-1}^n)}{\Delta x^2} + g_i^n,$$

so

$$g_i^{n+1} = F_i(g_{i-1}^n, g_i^n, g_{i+1}^n),$$

where

$$F_i(g_{i-1}^n, g_i^n, g_{i+1}^n) = -a\Delta t \left(\frac{g_i^n - g_{i-1}^n}{\Delta x} \right) + \Delta t \frac{\phi(g_{i+1}^n) - 2\phi(g_i^n) + \phi(g_{i-1}^n)}{\Delta x^2} + g_i^n.$$

□

Proposition 3.2. (Monotonicity of the scheme (7.19))

The explicit scheme (7.19) is monotone if

$$\Delta t \leq \frac{2\Delta x^2}{2a\Delta x + 1}.$$

Proof of Proposition 3.2

Let us calculate $\frac{\partial F_i}{\partial g_j^n}$ for $j \in \{i-1, i, i+1\}$ in order to test the monotonicity of the

scheme. Indeed,

For $j = i \pm 1$, the result is obvious since $\phi'(g) = g(1-g) \geq 0$.

Moreover, we have

$$\frac{\partial F_i}{\partial g_{i-1}^n} = -a \frac{\Delta t}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \phi'(g_{i-1}^n) \geq 0.$$

And

$$\frac{\partial F_i}{\partial g_{i+1}^n} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \phi'(g_{i+1}^n) \geq 0.$$

For $j = i$, one gets :

$$\frac{\partial F_i}{\partial g_i^n} = -a \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \phi'(g_i^n) + 1 \geq 0.$$

Hence the CFL condition :

$$\Delta t \left(\frac{a}{\Delta x} + 2 \frac{\phi'(g_i^n)}{\Delta x^2} \right) \leq 1,$$

and since $\phi'(g_i^n) \leq \phi'(1/2) = 1/4$, then

$$\Delta t \left(\frac{a}{\Delta x} + \frac{1}{2\Delta x^2} \right) \leq 1,$$

therefore

$$\Delta t \leq \frac{2\Delta x^2}{2a\Delta x + 1}.$$

□

4 Numerical simulations

In our case, the largest distance between the "denivelation" and the coast is about 4 km, while the thickness of the confined part is about 500m ($h - b \simeq 500m$, $h \simeq -200m$, $b \simeq -700m$). For this, we will consider the domain $[A, B] = [X_{MIN}, X_{MAX}] = [-8, 0]$ (See figure 1).

4.1 $\alpha = 1$ and $a = 0.05$

We will work in this part by considering the case $\alpha = 1$ and $a = 0.05$.

We consider that $\Delta x = 0.05$. We always sets the time step while respecting the CFL condition

$$\Delta t \leq \frac{2\Delta x^2}{2a\Delta x + 1}.$$

The function b is the zero function. The function h is defined by $h(X) = b(X) + 1$. For the initial condition, we assume that $X_{INT} = -4$.

We choose the function g_0 given by

$$g_0(X) = \begin{cases} b(X), & \text{for } X_{MIN} \leq X \leq X_{INT}, \\ -\frac{1}{2}\sqrt{-X} + 1, & \text{for } X_{INT} \leq X \leq X_{MAX}. \end{cases}$$

After writing the code in matlab, we obtain the following results : The initial condition is illustrated by the following figure

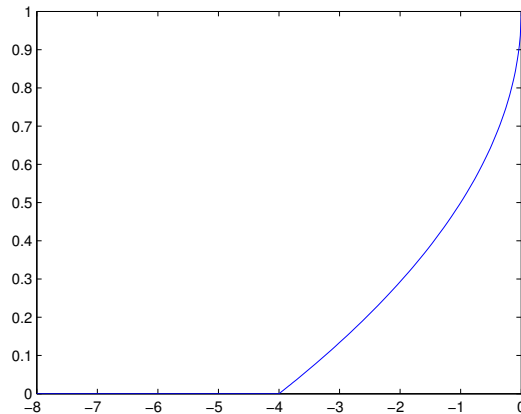
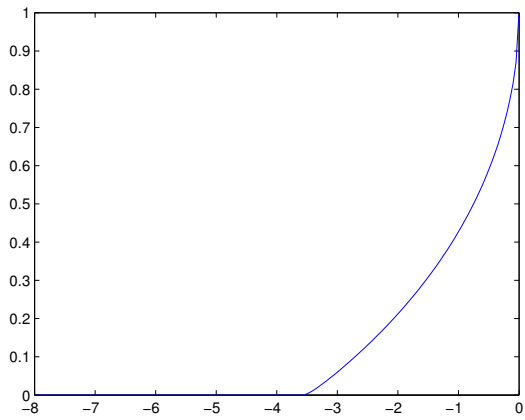
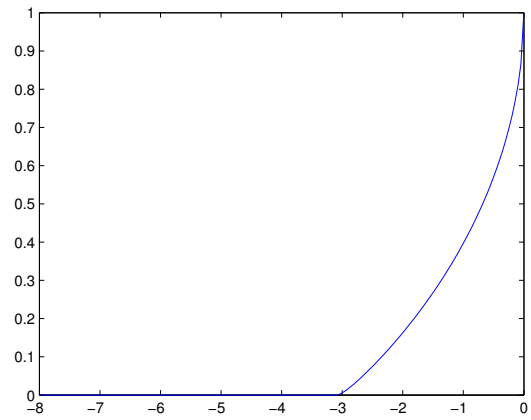
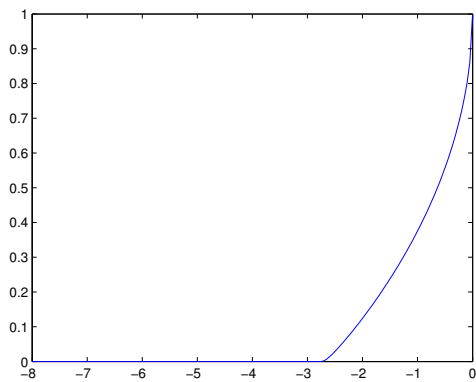
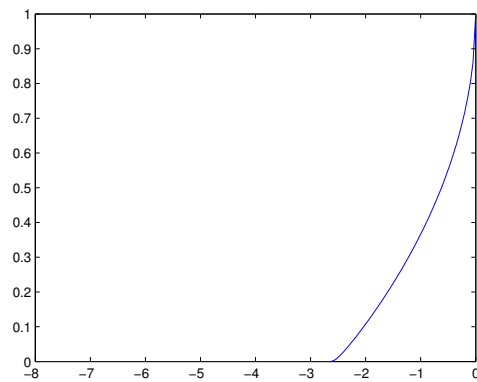
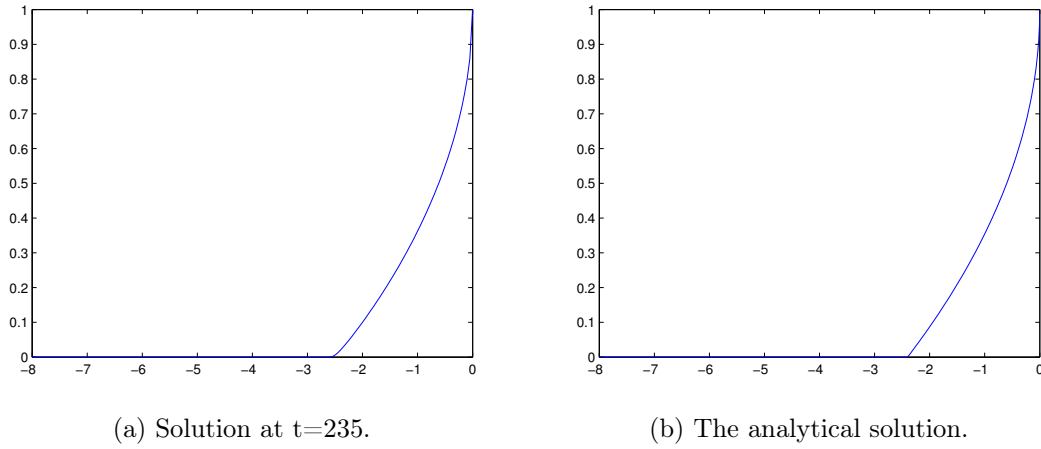


FIGURE 7.2 – The initial condition.

We find below the numerical results obtained by taking the number of time discretization $N = 50000$ and $\Delta t = 0.0043$:

(a) Solution at $t=28.2$.(b) Solution at $t=56.4$.FIGURE 7.3 – The interface g at $t = 28.2$ and $t = 56.4$ (a) Solution at $t=94$.(b) Solution at $t=131.6$.FIGURE 7.4 – The interface g at $t = 94$ and $t = 131.6$

The solution at the final instant and the analytical solution are given by :

FIGURE 7.5 – The interface g at $t = 235$ and the analytical solution

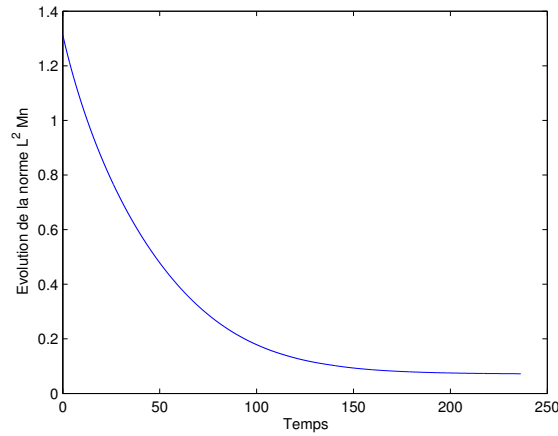
Let us define M_n by

$$M_n = \left\| \frac{g_n - g_{ex}}{g_{ex}} \right\|_{L^2},$$

where g_n is the solution calculated at time n and g_{ex} is the analytical solution given by

$$g_{ex}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } X_{MIN} \leq x \leq X_{INT}. \\ 1 - \sqrt{-\frac{2a}{\epsilon_0}x} & \text{if } X_{INT} \leq x \leq X_{MAX}. \end{cases}$$

We find below the evolution of the normalized difference M_n function of time.

FIGURE 7.6 – Evolution of M_n .

By calculating the minimum of the function M_n , we find $\min(M_n) = 0.0722$.

4.2 $\alpha = 1$ and $a = 1$

We will work in this part by considering the particular case $\alpha = 1$ and $a = 1$. We consider that $\Delta x = 0.005$. We choose the time step respecting the CFL condition

$$\Delta t \leq \frac{2\Delta x^2}{2a\Delta x + 1}.$$

The function b is the zero function. The function h is defined by $h(X) = b(X) + 1$. For the initial condition, we assume that $X_{INT} = -1$.

We choose the function g_0 given by

$$g_0(X) = \begin{cases} b(X), & \text{for } X_{MIN} \leq X \leq X_{INT}, \\ -\sqrt{-X} + 1, & \text{for } X_{INT} \leq X \leq X_{MAX}. \end{cases}$$

In this case, we find below the numerical results obtained by taking the number of time discretization $N = 32000$ and $\Delta t = 4.703 \times 10^{-5}$:

The initial condition is illustrated by the following figure

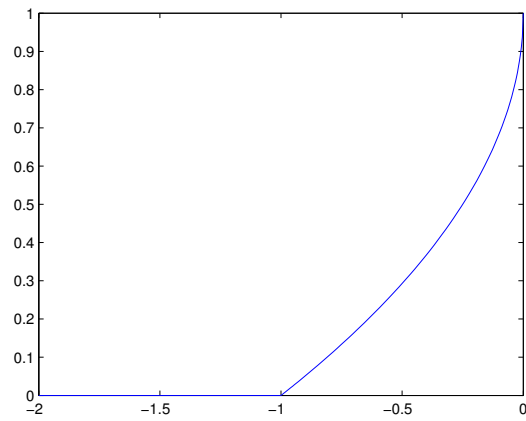
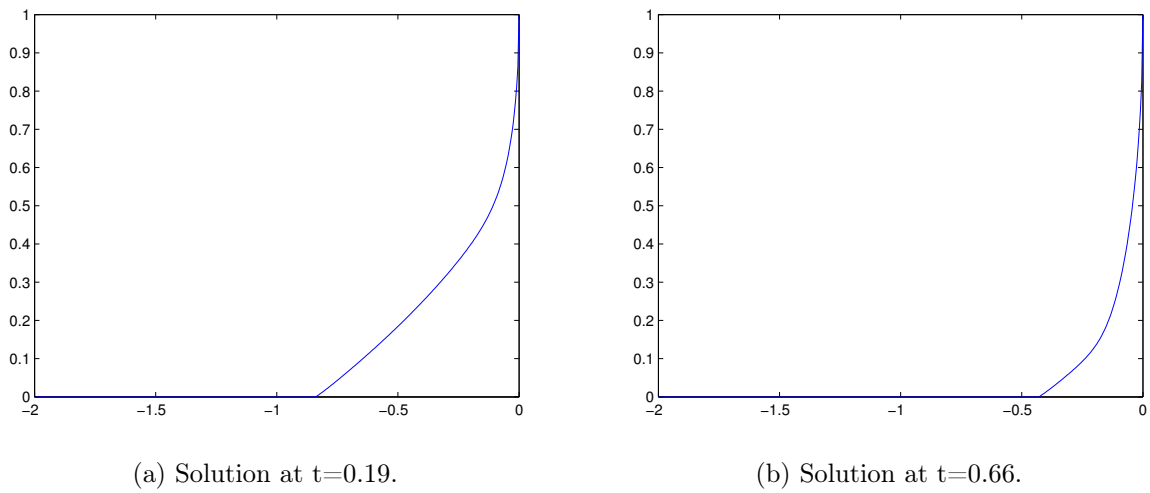
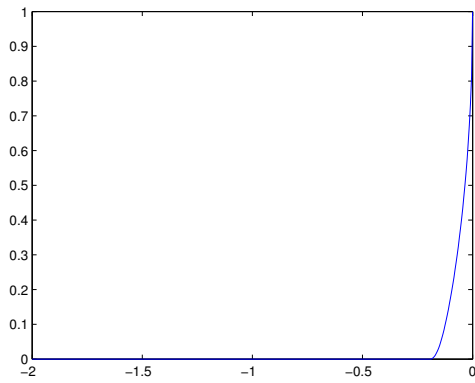
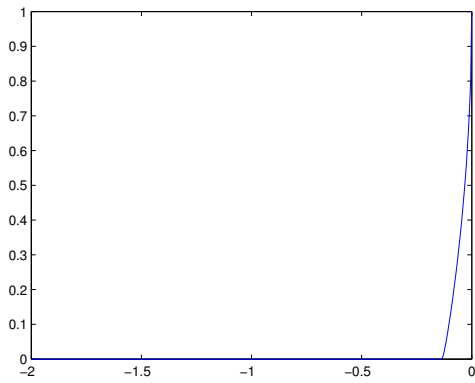
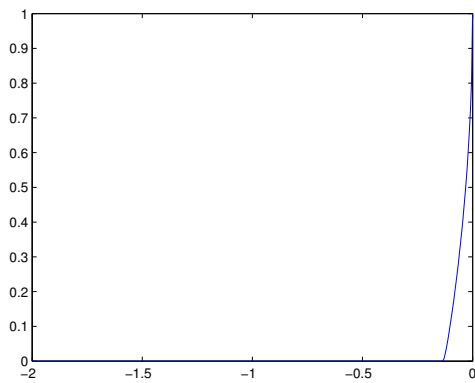
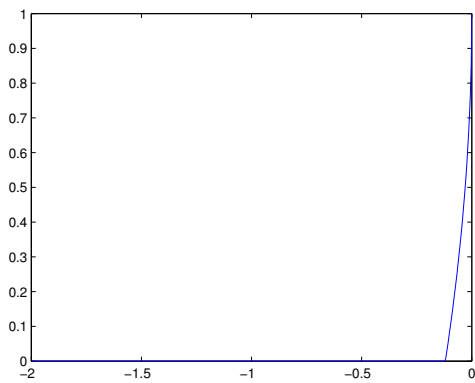


FIGURE 7.7 – The initial condition.

(a) Solution at $t=0.19$.(b) Solution at $t=0.66$.FIGURE 7.8 – The interface g at $t = 0.19$ and $t = 0.66$

(a) Solution at $t=0.94$.(b) Solution at $t=1.22$.FIGURE 7.9 – The interface g at $t = 0.94$ and $t = 1.22$ (a) Solution at $t=1.5$.

(b) The analytical solution.

FIGURE 7.10 – The interface g at $t = 1.5$ and the analytical solution

We find below the evolution of M_n function of time.

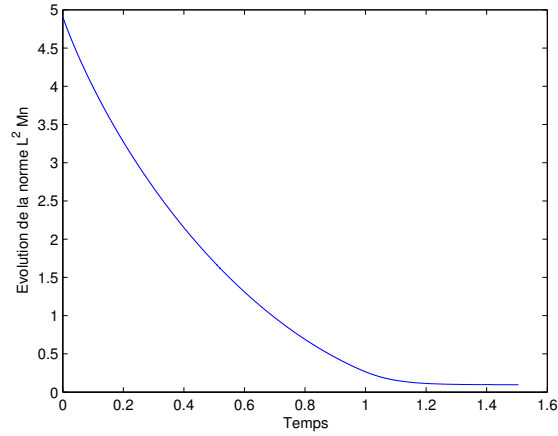


FIGURE 7.11 – Evolution of M_n

By calculating the minimum of the function M_n , we find $\min(M_n) = 0.0967$.

5 Conclusion

We can conclude that our scheme converge in all cases.

If $\alpha = 1$, we can easily remark that the difference between the solution to which we converge and the analytical solution g_{ex} decreases when the space step Δx decreases.

Chapitre 8

Transport Optimal

Ce chapitre est très formel. Nous présentons dans cette partie des idées et des réflexions qu nous avons traitées pendant la thèse sur le problème de transport optimal. Ainsi les résultats présentés ne sont pas rigoureux. Ils contiennent aussi des tentatives d'applications pour le problème d'intrusion saline particulièrement pour le cas confiné. Nous discutons en plus dans ce chapitre des questions numériques en considérant plusieurs schémas numériques que nous avons pas eu le temps de les simuler afin de tester leur validité.

1 Introduction

Dans ce chapitre, pour plus de simplicité, on considère le tore $\Omega := \mathbb{T}^d$ où $d \geq 1$.

Définition 1.1. (Dérivée fonctionnelle)

E étant une fonctionnelle donnée d'un espace de Banach X dans \mathbb{R} .

On définit sa différentielle comme étant

$$E'(u) : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longmapsto E'(u) \cdot v = \left. \frac{d}{ds}(E(u + sv)) \right|_{s=0}.$$

Notons que $E'(u)$ est une forme linéaire. Ainsi, si X est un espace de Hilbert alors pour tout $v \in X$ la différentielle $E'(u)$ est définie par :

$$\langle \nabla E(u), v \rangle = E'(u) \cdot v.$$

Proposition 1.2. (Décroissance en temps)

Considérons l'équation suivante

$$u_t = -\nabla E(u), \tag{8.1}$$

où E est une fonctionnelle donnée convexe de X Hilbert dans \mathbb{R} . Si u et v sont deux solutions de (8.1), alors $u - v$ décroît en fonction de t .

Preuve :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{|u - v|^2}{2} &= \langle u - v, u_t - v_t \rangle \\ &= -\langle u - v, \nabla E(u) - \nabla E(v) \rangle \\ &= -\int_0^1 \langle u - v, D^2 E(v + s(u - v), u - v) \rangle ds, \end{aligned}$$

car $\phi(1) = \phi(0) + \int_0^1 \phi'(s) ds$ avec $\phi(s) = \nabla E(v + s(u - v))$.

Comme E est convexe, alors $D^2 E(v + s(u - v), u - v) \geq 0$ et par suite

$$\frac{d}{dt} \frac{|u - v|^2}{2} \leq 0.$$

□

Proposition 1.3. (Cas particulier)

Soit la fonctionnelle $E(u) = \int \frac{|\nabla u|^2}{2}$, où $u \in H^1(\Omega)$, alors

$$u_t = \Delta u = -\nabla E(u).$$

Preuve :

En effet, on a

$$\begin{aligned} \langle \nabla E(u), v \rangle_{L^2} &= E'(u) \cdot v \\ &= \left. \frac{d}{ds} (E(u + sv)) \right|_{s=0} \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \\ &= \int_{\Omega} (-\Delta u) v. \end{aligned}$$

D'où

$$\Delta u = -\nabla E(u).$$

□

Définition 1.4. (Nouveau produit scalaire)

Soit $u \in L^2(\Omega)$ une fonction donnée. On définit le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_u$ par

$$\langle v, w \rangle_u = \int_{\Omega} u \nabla \phi \cdot \nabla \psi, \quad (8.2)$$

où ϕ et $\psi \in C^\infty(\Omega)$ vérifiant

$$v + \operatorname{div}(u \nabla \phi) = 0 \quad (8.3)$$

et

$$w + \operatorname{div}(u \nabla \psi) = 0. \quad (8.4)$$

En particulier,

$$\langle v, v \rangle_u = \int_{\Omega} u |\nabla \phi|^2 \geq 0.$$

Soit E une fonctionnelle donnée de $L^2(\Omega)$ dans \mathbb{R} . Dans ce qui suit on suppose que

$$\langle (\nabla_{\langle \cdot, \cdot \rangle_u} E)(u), v \rangle_u := E'(u) \cdot v.$$

Proposition 1.5. (*Différentielle de E par rapport au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_u$*)

On a

$$(\nabla_{\langle \cdot, \cdot \rangle_u} E)(u) = -\operatorname{div} \left(u \nabla \frac{\delta E}{\delta u} \right), \quad (8.5)$$

où $\frac{\delta E}{\delta u}(u) = (\nabla_{L^2} E)(u)$.

Preuve :

Soit $v \in L^2(\Omega)$ et soient ϕ et $\psi \in C^\infty(\Omega)$ vérifiant

$$(\nabla_{\langle \cdot, \cdot \rangle_u} E)(u) + \operatorname{div}(u \nabla \phi) = 0 \quad \text{et} \quad v + \operatorname{div}(u \nabla \psi) = 0. \quad (8.6)$$

On aura

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\delta E}{\delta u} \cdot v &= \langle (\nabla_{L^2} E)(u), v \rangle_{L^2} \\ &= E'(u) \cdot v \\ &= \langle (\nabla_{\langle \cdot, \cdot \rangle_u} E)(u), v \rangle_u \\ &= \int_{\Omega} u \nabla \phi \cdot \nabla \psi && \text{(D'après (8.2)),} \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(u \nabla \phi) \psi \\ &= \int_{\Omega} (\nabla_{\langle \cdot, \cdot \rangle_u} E)(u) \psi && \text{(D'après (8.6)),} \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(u \nabla \frac{\delta E}{\delta u} \right) \psi && \text{(D'après (8.5)),} \\ &= \int_{\Omega} u \nabla \frac{\delta E}{\delta u} \cdot \nabla \psi \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\delta E}{\delta u} \operatorname{div}(u \nabla \psi) \\ &= \int_{\Omega} \frac{\delta E}{\delta u} \cdot v && \text{(D'après (8.6)).} \end{aligned}$$

□

Application :

Soit $m \geq 2$. Pour $u \in L^m(\Omega)$ on définit

$$E(u) = \int_{\Omega} \frac{u^m}{m}, \quad (8.7)$$

alors pour tout vecteur $v \in L^2(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta E}{\delta u}(u), v \right\rangle_{L^2} &= \langle (\nabla_{L^2} E)(u), v \rangle_{L^2} \\ &= E'(u) \cdot v \\ &= \int u^{m-1} \cdot v \\ &= \langle u^{m-1}, v \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\delta E}{\delta u}(u) = u^{m-1}.$$

D'après la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned} u_t &= -(\nabla_{\langle \cdot, \cdot \rangle_u} E)(u) \\ &= \operatorname{div} \left(u \nabla \frac{\delta E}{\delta u} \right) \\ &= \operatorname{div} (u \nabla u^{m-1}) \\ &= \frac{m-1}{m} \Delta u^m. \end{aligned}$$

2 Transport Optimal

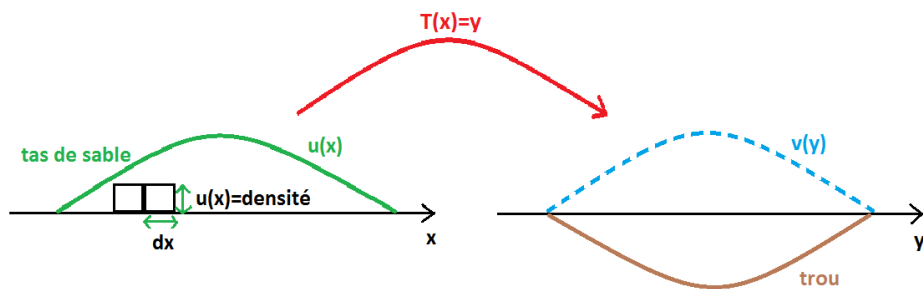


FIGURE 8.1 – Problème de brouette de Monge.

On sait que

$$\text{coût de transport} = \sum \text{unité} \times \text{dist}^2(x, y).$$

Le but est de minimiser le coût et donc de chercher

$$\text{coût} = \min_T \int |T(x) - x|^2 u(x) dx.$$

Ainsi, on va chercher la transformation T telle que le transport de u par T donne v . La théorie du transport optimal est détaillée dans [66].

Définition 2.1. (Distance de Wasserstein)

Soit $\mu(x, y) \geq 0$ une mesure de radon positive. On définit la distance suivante

$$W_2^2(u, v) = \frac{1}{2} \inf_{\mu \in \mathcal{M}} \int |y - x|^2 d\mu(x, y),$$

avec \mathcal{M} est l'ensemble des mesures de Radon positives et $\text{proj } \mu|_x = u(x)dx$ et $\text{proj } \mu|_y = v(y)dy$.

Théorème 2.2. (Contraction par rapport à la distance de Wasserstein)

Soit u une fonction. $E(u)$ étant une fonctionnelle convexe donnée, telle que

$$u_t = -(\nabla_{\langle \cdot, \cdot \rangle_u} E)(u).$$

Si $u(t)$ et $v(t)$ sont deux solutions, alors

$$W_2(u(t), v(t)) \leq W_2(u(0), v(0)).$$

Ainsi, en posant $u^a(x, t) = u(x + a, t)$ pour tout $a \in \Omega$, on a

$$\frac{W_2(u^a(t), u(t))}{|a|} \leq \frac{W_2(u^a(0), u(0))}{|a|},$$

et dans ce cas, on a un contrôle en espace uniforme en temps.

Et en posant $u_b(x, t) = u(x, t + b)$ pour tout $b > 0$, on a

$$\frac{W_2(u_b(t), u(t))}{b} \leq \frac{W_2(u_b(0), u(0))}{b},$$

et dans ce cas, on a un contrôle en temps uniforme en espace.

Théorème 2.3. (Théorème de Brenier - McCann)

Si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors il existe une transformation unique T caractérisée par l'existence d'une fonction convexe $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $T = \nabla \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Remarque 2.4. Notons que ϕ n'est pas nécessairement unique, mais $\nabla\phi$ est unique.

Commentaire :

On sait que $T(x) = \nabla\phi(x) = y$ et comme $v(y)dy = u(x)dx$ alors

$$v(\nabla\phi(x))\det(D^2\phi(x))dx = u(x)dx,$$

d'où

$$v(\nabla\phi(x))\det(D^2\phi(x)) = u(x).$$

En définissant

$$W_2^2(u, v) = \frac{1}{2} \inf \int |y - x|^2 d\mu(x, y),$$

où $\text{proj } \mu|_x = u$ et $\text{proj } \mu|_y = v$, on obtient

$$W_2^2(u, v) = \frac{1}{2} \inf \int |T(x) - x|^2 u(x) dx.$$

Comme

$$v(y)dy = u(x)dx,$$

alors

$$v(T(x))T'(x) = u(x),$$

où $T = \nabla\phi$ et ϕ une fonction convexe.

Ainsi comme $d\mu(x, y) = u(x)dx = v(y)dy$, alors

$$\int_{x,y} \phi(x, y) d\mu(x, y) = \int_x \phi(x, T(x)) u(x) dx = \int_x \phi(T^{-1}(y), y) v(y) dy.$$

Proposition 2.5. (Changement de variables)

Posons $U(x) = \int_0^1 u(x) dx \in [0, 1]$ et $V(y) = \int_0^1 v(y) dy \in [0, 1]$.

$U^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $V^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sont les fonctions réciproques associées.

Alors

$$W_2^2(u, v) = \frac{1}{2} \inf_{V^{-1}} \int_0^1 |V^{-1}(z) - U^{-1}(z)|^2 dz.$$

Preuve :

On sait que

$$v(y)dy = u(x)dx,$$

donc

$$\int_0^1 v(y)dy = \int_0^1 u(x)dx = z,$$

d'où

$$V(T(x)) = U(x) = z,$$

alors

$$x = U^{-1}(z) \text{ et } y = T(x) = V^{-1}(z),$$

et

$$u(x)dx = dU = dz \text{ et } v(y)dy = dV = dz.$$

Ainsi,

$$\text{dist}^2(u, v) = \frac{1}{2} \inf_T \int |T(x) - x|^2 u(x) dx = \frac{1}{2} \inf_{V^{-1}} \int_0^1 |V^{-1}(z) - U^{-1}(z)|^2 dz.$$

□

Définition 2.6. (Une géodésique)

Une géodésique désigne le plus court chemin ou l'un des plus courts chemins s'il en existe plusieurs, entre deux points d'espace pourvu d'une métrique.

Remarque 2.7. (Famille de transformations)

Soit T la transformation qui amène u à v (d'après Brenier - McCann $T = \nabla\phi$). On pose

$$T_s = (1 - s)Id + s\nabla\phi,$$

pour $0 \leq s \leq 1$. Alors $T_0 = Id$ et $T_1 = T = \nabla\phi$. Donc $T_s : u \mapsto u_s$ où $u_0 = u$ et $u_1 = v$.

En général, pour définir la transformation $T : u \mapsto v$ on pose

$$u(x)dx = \mu \text{ et } v(y)dy = \nu,$$

alors

$$T\#u(x)dx = v(y)dy,$$

donc

$$T\#\mu = \nu.$$

Ainsi

$$T_s\#u(x)dx = u_s(y)dy \Leftrightarrow u(x)dx = T_s^{-1}\#u_s(y)dy.$$

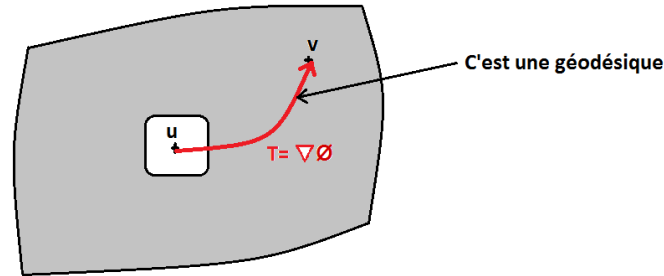


FIGURE 8.2 – La géodésique d'une variété

3 Application sur le problème d'intrusion saline

Notre théorie s'applique sur les modèles d'intrusion saline dans les deux cas confiné et non confiné.

Pour le moment considérons le cas non confiné (on se réfère à [48] pour plus d'information) :

$$\begin{cases} h_t = \operatorname{div}_x [(1 - \epsilon_0)h \nabla_x (h + g)], & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ g_t = \operatorname{div}_x [g \nabla_x ((1 - \epsilon_0)h + g)], & \text{in } \Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (8.8)$$

Soit

$$E(h, g) = \int \frac{(1 - \epsilon_0)}{2} (h + g)^2 + \epsilon_0 \frac{g^2}{2}. \quad (8.9)$$

Théorème 3.1. (*Flot de gradient de E*)

Soit $u = (h, g)$ solution de (8.8), alors on a

$$u_t = -\nabla E(u), \quad (8.10)$$

où E est donné dans (8.9).

Définition 3.2. (*Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_u$ pour un vecteur*)

On définit le vecteur u comme étant $u = (u_1, u_2)$, avec $u_i \geq 0$ pour $i = 1, 2$.

On définit aussi le produit scalaire suivant

$$\langle v, w \rangle_u := \int u_1 \nabla \phi_1 \cdot \nabla \psi_1 + u_2 \nabla \phi_2 \cdot \nabla \psi_2,$$

avec

$$v = (v_1, v_2) \quad \text{et} \quad w = (w_1, w_2),$$

vérifiant

$$v_i + \operatorname{div}(u_i \nabla \phi_i) = 0 \quad \text{et} \quad w_i + \operatorname{div}(u_i \nabla \psi_i) = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Lemme 3.3. (*Calcul des dérivées partielles de E*)

Les dérivées partielles de E (8.9) sont

$$\frac{\delta E}{\delta u_1}(u_1, u_2) = (1 - \epsilon_0)(u_1 + u_2) \quad \text{et} \quad \frac{\delta E}{\delta u_2}(u_1, u_2) = u_2 + (1 - \epsilon_0)u_1.$$

Preuve :

En effet, on a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta E}{\delta u_1}(u_1, u_2), v \right\rangle &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{E(u_1 + sv, u_2) - E(u_1, u_2)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\int \frac{(1 - \epsilon_0)}{2} (u_1 + sv + u_2)^2 + \frac{\epsilon_0}{2} u_2^2 \right) \\ &\quad - \left(\frac{(1 - \epsilon_0)}{2} (u_1 + u_2)^2 - \frac{\epsilon_0}{2} u_2^2 \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\frac{(1 - \epsilon_0)}{2} \int s^2 v^2 + 2su(u_1 + u_2) \right) \\ &= (1 - \epsilon_0) \int (u_1 + u_2) v \\ &= \langle (1 - \epsilon_0)(u_1 + u_2), v \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\delta E}{\delta u_1}(u_1, u_2) = (1 - \epsilon_0)(u_1 + u_2).$$

Et d'autre part, on a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta E}{\delta u_2}(u_1, u_2), v \right\rangle &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{E(u_1, u_2 + sv) - E(u_1, u_2)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\int \frac{(1 - \epsilon_0)}{2} (u_1 + u_2 + sv)^2 + \frac{\epsilon_0}{2} (u_2 + sv)^2 \right) \\ &\quad - \left(\frac{(1 - \epsilon_0)}{2} (u_1 + u_2)^2 - \frac{\epsilon_0}{2} u_2^2 \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\int \frac{(1 - \epsilon_0)}{2} (s^2 v^2 + 2sv(u_1 + u_2)) + \frac{\epsilon_0}{2} s^2 v^2 + \epsilon_0 s u_2 v \right) \\ &= \int (1 - \epsilon_0)(u_1 + u_2) v + \epsilon_0 u_2 v \\ &= \langle u_2 + (1 - \epsilon_0)u_1, v \rangle. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\delta E}{\delta u_2}(u_1, u_2) = u_2 + (1 - \epsilon_0)u_1.$$

□

Preuve du théorème 3.1 :

D'après la proposition (1.5), on trouve

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -(\nabla_{\langle \cdot, \cdot \rangle_u} E)(u_i) = \operatorname{div} \left(u_i \nabla \frac{\delta E}{\delta u_i} \right) \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

avec

$$\frac{\delta E}{\delta u_1}(u_1, u_2) = (1 - \epsilon_0)(u_1 + u_2) \quad \text{et} \quad \frac{\delta E}{\delta u_2}(u_1, u_2) = u_2 + (1 - \epsilon_0)u_1 \quad (\text{d'après lemme (3.3)}).$$

Ainsi

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} = \operatorname{div} (u_1 \nabla ((1 - \epsilon_0)(u_1 + u_2))) = \operatorname{div} (h \nabla ((1 - \epsilon_0)(h + g))).$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} = \operatorname{div} (u_2 \nabla (u_2 + (1 - \epsilon_0)u_1)) = \operatorname{div} (g \nabla ((1 - \epsilon_0)h + g)).$$

Poursuite, on retrouve le système (8.8). □

Application et interprétation du théorème Brenier - McCann :

Posons $u = (h, g) = (u_1, u_2)$, et $v = (v_1, v_2)$. D'après le théorème de Brenier - McCann, il existe deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 telles que $\nabla \phi_1 : u_1 \mapsto v_1$ et $\nabla \phi_2 : u_2 \mapsto v_2$. En général, si $T : u \mapsto v$ est une transformation qui change la fonction u en v , alors $T\#u(x)dx = v(y)dy$ donc $T\#\mu = \nu$ où $\mu = u(x)dx$ et $\nu = v(y)dy$. Et $u(x)dx = v(y)dy$ avec $y = T(x)$, alors $v(T(x))T'(x)dx = u(x)dx$. En appliquant cela à notre problème, on trouve

$$\nabla \phi_i \# u_i dx_i = v_i dy_i \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Posons $u_{i,s} = ((1 - s)Id + s\nabla \phi_i)\#u_i$, avec $T_{i,s} = (1 - s)Id + s\nabla \phi_i$ pour $i = 1, 2$.

Idée concernant la convexité de la fonction $s \mapsto E(u_s)$:

On a

$$E(u_s) = \int \left(\frac{1 - \epsilon_0}{2} (u_{1,s})^2 + \frac{1}{2} (u_{2,s})^2 + (1 - \epsilon_0) u_{1,s} u_{2,s} \right) (y) dy,$$

avec $y = T_{i,s}(x) = (1 - s)x + s\nabla \phi_i(x)$ pour $i = 1, 2$.

Et

$$u_i(x) = u_{i,s}(T_{i,s}(x))T'_{i,s}(x),$$

alors

$$u_i(x) = u_{i,s}((1-s)x + s\nabla\phi_i(x)) \det((1-s)Id + sD^2\phi_i), \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

$$\begin{aligned} E(u_s) &= \int \frac{1-\epsilon_0}{2} \left(\frac{u_1(x)}{\det((1-s)Id + sD^2\phi_1(x))} \right)^2 \det((1-s)Id + sD^2\phi_1(x)) dx \\ &+ \int \frac{1}{2} \left(\frac{u_2(x)}{\det((1-s)Id + sD^2\phi_2(x))} \right)^2 \det((1-s)Id + sD^2\phi_2(x)) dx + \alpha. \end{aligned}$$

où

$$\alpha = \int (1-\epsilon_0) \frac{u_1(x)u_2(x)}{\det((1-s)Id + sD^2\phi_1(x)) \det((1-s)Id + sD^2\phi_2(x))} dx.$$

Donc

$$E(u_s) = \int \left(\frac{1-\epsilon_0}{2} \frac{u_1^2(x)}{\det((1-s)Id + sD^2\phi_1(x))} + \frac{1}{2} \frac{u_2^2(x)}{\det((1-s)Id + sD^2\phi_2(x))} \right) dx + \alpha.$$

Etudions la convexité de chaque terme :

Dans le cas 1D :

Les deux premiers termes sont similaires à la fonction

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{as+b} \quad \text{avec } as+b \geq 0, \\ f'(s) &= \frac{-a}{(as+b)^2} \quad \text{et} \quad f''(s) = \frac{2a}{(as+b)^3} \geq 0. \end{aligned}$$

En dimensions supérieures :

Elles sont similaires à la fonction suivante

$$f(s) = \prod_j \frac{1}{a_j s + b_j} \quad \text{avec } a_j s + b_j \geq 0,$$

$$f'(s) = \prod_j \left(\frac{1}{a_j s + b_j} \right) \sum_k \frac{-a_k}{a_k s + b_k},$$

$$f''(s) = \prod_j \left(\frac{1}{a_j s + b_j} \right) \left(\sum_k \frac{-a_k}{a_k s + b_k} \right)^2 + \prod_j \left(\frac{1}{a_j s + b_j} \right) \left(\sum_k \frac{a_k^2}{(a_k s + b_k)^2} \right) \geq 0.$$

Ainsi, dans tous les cas, les deux premiers termes sont convexes.

Pour le terme α , en posant $y = (1-s)x_{i,s} + s\nabla\phi_i(x_{i,s})$ pour $i = 1, 2$, on trouve

$$\alpha = \int (1-\epsilon_0) \frac{u_1(x_{1,s})u_2(x_{2,s})}{\det((1-s)Id + sD^2\phi_1(x_{1,s})) \det((1-s)Id + sD^2\phi_2(x_{2,s}))} dy.$$

Mais on ne sait plus comment continuer.

D'où, la question d'unicité du problème (8.10) reste ouverte.

4 Schéma numérique

Considérons l'équation de la chaleur

$$u_t = \Delta u, \quad (8.11)$$

Cette section va être divisée en trois parties selon le choix de la fonctionnelle $E(u) = \int_{\Omega} f(u)$:

4.1 Cas où $f(u) = u \ln u$

Comme $f(u) = u \ln u$, alors $f'(u) = 1 + \ln(u)$ et $f''(u) = \frac{1}{u}$.

On a déjà démontré que

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = -(\nabla_{\langle \cdot, \cdot \rangle_u} E)(u).$$

Nous allons chercher

$$\inf_u \left\{ E(u) + \frac{1}{2\Delta t} \text{dist}^2(u, u^n) \right\} = E(u^{n+1}) + \frac{1}{2\Delta t} \text{dist}^2(u^{n+1}, u^n),$$

où $\arg(\min) = u^{n+1}$.

On pose les fonctions U et V par $U_x = u(x)$ et $V_y = v(y)$, et on définit les fonctions \bar{U} et \bar{V} comme étant les fonctions réciproques de U et V c.à.d $\bar{U} = U^{-1}$ et $\bar{V} = V^{-1}$.

Lemme 4.1. (Dérivée de l'inverse)

En se basant sur les notations précédentes, on trouve

$$\left(\bar{U}^{-1} \right)_x = \frac{1}{\bar{U}' \circ \bar{U}^{-1}(x)}.$$

Preuve :

On sait que

$$\bar{U} \circ \bar{U}^{-1} = Id.$$

En dérivant cette équation par rapport à x , on obtient

$$\bar{U}' \left(\bar{U}^{-1} \right) \times \left(\bar{U}^{-1} \right)' = Id,$$

alors

$$\left(\bar{U}^{-1} \right)_x = \frac{1}{\bar{U}' \circ \bar{U}^{-1}(x)}.$$

□

On pose $U_\epsilon = (\bar{U} + \epsilon \bar{V})^{-1}$

Lemme 4.2. (La dérivée de U_ϵ par rapport à ϵ)

On a

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} U_\epsilon(x) \right|_{\epsilon=0} = \frac{-\bar{V}(\bar{U}^{-1}(x))}{\bar{U}'(\bar{U}^{-1}(x))}.$$

Preuve :

On a

$$(\bar{U} + \epsilon\bar{V})^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = (\bar{U} + \epsilon\bar{V})(y),$$

alors

$$x = (\bar{U} + \epsilon\bar{V}) \circ (\bar{U} + \epsilon\bar{V})^{-1}(x) = F_\epsilon.$$

En dérivant par rapport à ϵ , on obtient

$$0 = \frac{dF_\epsilon}{d\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F_\epsilon - F_0}{\epsilon}.$$

Grâce à la continuité de U_ϵ par rapport à ϵ et à sa linéarité, on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F_\epsilon - F_0}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\bar{U} + \epsilon\bar{V})\left((\bar{U} + \epsilon\bar{V})^{-1}(x)\right) - \bar{U}\left(\bar{U}^{-1}(x)\right)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{(\bar{U} + \epsilon\bar{V})\left(\bar{U}_\epsilon^{-1}(x)\right) - \bar{U}_\epsilon\left(\bar{U}^{-1}(x)\right)}{\epsilon} + \frac{\bar{U}_\epsilon\left(\bar{U}^{-1}(x)\right) - \bar{U}\left(\bar{U}^{-1}(x)\right)}{\epsilon} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{U}_\epsilon\left(\bar{U}_\epsilon^{-1}(x)\right) - \bar{U}_\epsilon\left(\bar{U}^{-1}(x)\right)}{\epsilon} \right) + \bar{V}\left(\bar{U}^{-1}(x)\right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{U}_\epsilon\left(\bar{U}_\epsilon^{-1}(x)\right) - \bar{U}\left(\bar{U}_\epsilon^{-1}(x)\right)}{\epsilon} - \frac{\bar{U}_\epsilon\left(\bar{U}^{-1}(x)\right) - \bar{U}\left(\bar{U}^{-1}(x)\right)}{\epsilon} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{U}\left(\bar{U}_\epsilon^{-1}(x)\right) - \bar{U}\left(\bar{U}^{-1}(x)\right)}{\bar{U}_\epsilon^{-1}(x) - \bar{U}^{-1}(x)} \times \frac{\bar{U}_\epsilon^{-1}(x) - \bar{U}^{-1}(x)}{\epsilon} \right) + \bar{V}\left(\bar{U}^{-1}(x)\right) \\ &= \bar{V}\left(\bar{U}^{-1}(x)\right) - \bar{V}\left(\bar{U}^{-1}(x)\right) + \bar{U}'\left(\bar{U}^{-1}(x)\right) \times \left. \frac{d}{d\epsilon} \bar{U}_\epsilon^{-1} \right|_{\epsilon=0} + \bar{V}\left(\bar{U}^{-1}(x)\right). \end{aligned}$$

D'où

$$\bar{U}'\left(\bar{U}^{-1}(x)\right) \times \left. \frac{d}{d\epsilon} \bar{U}_\epsilon^{-1} \right|_{\epsilon=0} + \bar{V}\left(\bar{U}^{-1}(x)\right) = 0.$$

Ainsi

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} U_\epsilon \right|_{\epsilon=0} = \frac{-\bar{V}(\bar{U}^{-1}(x))}{\bar{U}'(\bar{U}^{-1}(x))}.$$

□

D'après la proposition (2.5), on a

$$\begin{aligned} W_2^2(u, v) &= \frac{1}{2} \inf \int_{\Omega} |y - x|^2 d\mu(x, y) \\ &= \frac{1}{2} \inf \int_{\Omega} |U^{-1}(z) - V^{-1}(z)|^2 dz \\ &= \frac{1}{2} \inf \int_{\Omega} |\bar{U}(z) - \bar{V}(z)|^2 dz. \end{aligned}$$

Donc le problème maintenant est de chercher

$$\inf_u F(\bar{U}) \quad \text{où} \quad F(\bar{U}) = E(u(\bar{U})) + \frac{1}{2\Delta t} \int |\bar{U}(z) - \bar{U}^n(z)|^2 dz.$$

Alors pour $F(\bar{U}^{n+1}) = \min F(\bar{U})$ on aura

$$F'(\bar{U}^{n+1}) \cdot \bar{V} = \left. \frac{dF}{d\epsilon} (\bar{U}^{n+1} + \epsilon \bar{V}) \right|_{\epsilon=0} = 0.$$

Lemme 4.3. (*Calcul de $F'(\bar{U}) \cdot \bar{V}$ pour $f(u)$ général*)
En calculant $F'(\bar{U}) \cdot \bar{V}$, on trouve

$$F'(\bar{U}) \cdot \bar{V} = \int \frac{\bar{V}(\bar{U}^{-1}(x))}{\bar{U}'(\bar{U}^{-1}(x))} f''(u(\bar{U})) u_x dx + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V}. \quad (8.12)$$

Preuve :

Comme

$$F'(\bar{U}) \cdot \bar{V} = \left. \frac{dF}{d\epsilon} (\bar{U} + \epsilon \bar{V}) \right|_{\epsilon=0} = 0,$$

donc

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \left(E(u(\bar{U} + \epsilon \bar{V})) + \frac{1}{2\Delta t} \int |\bar{U} + \epsilon \bar{V} - \bar{U}^n|^2 \right) \right|_{\epsilon=0} = 0.$$

D'où

$$\int \left. f'(u(\bar{U} + \epsilon \bar{V})) \right|_{\epsilon=0} \partial_x \left(\left. \frac{d}{d\epsilon} (\bar{U} + \epsilon \bar{V})^{-1} \right|_{\epsilon=0} \right) + \frac{1}{2\Delta t} \int 2(\bar{U} + \epsilon \bar{V} - \bar{U}^n) \left. \frac{d(\bar{U} + \epsilon \bar{V})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} dz = 0,$$

alors

$$\int f'(u(\bar{U}))\partial_x \left(\frac{d}{d\epsilon} (\bar{U} + \epsilon \bar{V})^{-1} \Big|_{\epsilon=0} \right) + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V} dz = 0.$$

D'après le lemme (4.2), on trouve

$$F'(\bar{U}) \cdot \bar{V} = \int f'(u(\bar{U}))\partial_x \left(\frac{-\bar{V}(\bar{U}^{-1}(x))}{\bar{U}'(\bar{U}^{-1}(x))} \right) + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V} dz = 0. \quad (8.13)$$

En intégrant par partie, on trouve

$$F'(\bar{U}) \cdot \bar{V} = \int \frac{\bar{V}(\bar{U}^{-1}(x))}{\bar{U}'(\bar{U}^{-1}(x))} f''(u(\bar{U}))u_x dx + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V}.$$

□

Lemme 4.4. (*Calcul de $F'(\bar{U}) \cdot \bar{V}$ pour $f(u) = u \ln u$*)

En calculant $F'(\bar{U}) \cdot \bar{V}$ dans le cas où $f(u) = u \ln(u)$, on trouve

$$F'(\bar{U}) \cdot \bar{V} = \int \left(\frac{1}{\bar{U}_z} \right)_z \bar{V}(z) dz + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V} = 0.$$

où la variable z est définie comme étant $z = U(x)$.

Preuve :

D'après le lemme (4.3), on a

$$F'(\bar{U}) \cdot \bar{V} = \int \frac{\bar{V}(\bar{U}^{-1}(x))}{\bar{U}'(\bar{U}^{-1}(x))} f''(u(\bar{U}))u_x dx + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V},$$

donc

$$\begin{aligned} F'(\bar{U}) \cdot \bar{V} &= \int \bar{V}(\bar{U}^{-1}(x)) \frac{u_x}{u(\bar{U})} \frac{dx}{\bar{U}'(\bar{U}^{-1}(x))} + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V} \\ &= \int \bar{V}(U(x)) (\ln(u))_x d(\bar{U}^{-1}(x)) + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V} \\ &= \int \bar{V}(U(x)) (\ln(U_x))_x d(U(x)) + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V}, \end{aligned}$$

où on obtient la deuxième inégalité en appliquant Lemme (4.1)). Posons maintenant $z = U(x) \Leftrightarrow x = U^{-1}(z) = \bar{U}(z)$, on a

$$F'(\bar{U}) \cdot \bar{V} = \int \bar{V}(z) \frac{U_{xx}}{U_x}(x = \bar{U}(z)) dz + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V} = 0.$$

Mais

$$\frac{1}{\bar{U}_z} = \frac{1}{(U^{-1}(z))_z} = U' \circ U^{-1}(z), \quad (8.14)$$

et

$$\left(\frac{1}{\bar{U}_z} \right)_z = (U' \circ U^{-1}(z))_z = U'' \circ U^{-1}(z) \times \frac{1}{U' \circ U^{-1}(z)} = \frac{U_{xx}}{U_x}(x = U^{-1}(z)). \quad (8.15)$$

D'où

$$F'(\bar{U}) \cdot \bar{V} = \int \left(\frac{1}{\bar{U}_z} \right)_z \bar{V}(z) dz + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V}.$$

□

Proposition 4.5. (Schéma numérique associé à (8.11))

Un schéma numérique de différence finie décentré associé à l'équation de chaleur (8.11) en fonction de \bar{U} est donné par

$$\frac{\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_i^n}{\Delta t} = - \left(\frac{1}{\bar{U}_{i+1}^{n+1} - \bar{U}_i^{n+1}} - \frac{1}{\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_{i-1}^{n+1}} \right).$$

Preuve :

D'après le lemme (4.4), on a démontré que

$$F'(\bar{U}) \cdot \bar{V} = \int \left(\frac{1}{\bar{U}_z} \right)_z \bar{V}(z) dz + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V}.$$

Et comme $\bar{U}^{n+1} = \min F(\bar{U})$, ainsi

$$\frac{\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^n}{\Delta t} = \left(\frac{-1}{\bar{U}_z^{n+1}} \right)_z, \quad \text{avec } z = i\Delta z.$$

Alors

$$\frac{\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_i^n}{\Delta t} = - \left(\frac{1}{\frac{\bar{U}_{i+1}^{n+1} - \bar{U}_i^{n+1}}{\Delta z}} - \frac{1}{\frac{\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_{i-1}^{n+1}}{\Delta z}} \right) \frac{1}{\Delta z},$$

par suite

$$\frac{\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_i^n}{\Delta t} = - \left(\frac{1}{\bar{U}_{i+1}^{n+1} - \bar{U}_i^{n+1}} - \frac{1}{\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_{i-1}^{n+1}} \right).$$

□

4.2 Cas où $f(u) = \frac{u^2}{2}$

Comme $f(u) = \frac{u^2}{2}$, alors $f'(u) = u$ et $f''(u) = 1$.

Lemme 4.6. (*Calcul de $F'(\bar{U}) \cdot \bar{V}$ pour $f(u) = u^2/2$)*
 En calculant $F'(\bar{U}) \cdot \bar{V}$ dans le cas où $f(u) = u^2/2$, on trouve

$$F'(\bar{U}) \cdot \bar{V} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\bar{U}_z^2} \right)_z \bar{V}(z) dz + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V}.$$

Preuve :

On a déjà démontré d'après (8.12) que

$$\begin{aligned} F'(\bar{U}) \cdot \bar{V} &= \int \frac{\bar{V}(\bar{U}^{-1}(x))}{\bar{U}'(\bar{U}^{-1}(x))} f''(u(\bar{U})) u_x dx + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V} \\ &= \int \bar{V}(\bar{U}^{-1}(x)) u_x \frac{dx}{\bar{U}'(\bar{U}^{-1}(x))} + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V} \\ &= \int \bar{V}(U(x)) U_{xx} d(U_x) + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V}. \end{aligned}$$

En posant $z = U(x)$, on obtient

$$F'(\bar{U}) \cdot \bar{V} = \int \bar{V}(z) U_{xx}(x = \bar{U}(z)) dz + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V}.$$

Mais d'après (8.15), on a

$$U_{xx}(x = \bar{U}(z)) = \left(\frac{1}{\bar{U}_z} \right)_z \times U_x(x = \bar{U}(z)),$$

et comme

$$U_x(x) = \frac{1}{\bar{U}' \circ \bar{U}^{-1}(x)} = \frac{1}{\bar{U}'(U(x))},$$

alors

$$U_x(x = \bar{U}(z)) = \frac{1}{\bar{U}_z}. \quad (8.16)$$

D'où

$$\begin{aligned} F'(\bar{U}) \cdot \bar{V} &= \int \bar{V}(z) \left(\frac{1}{\bar{U}_z} \right)_z \times \frac{1}{\bar{U}_z} dz + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V} \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\bar{U}_z^2} \right)_z \bar{V}(z) dz + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V}. \end{aligned}$$

□

Proposition 4.7. (Schéma numérique associé à (8.11))

Un schéma numérique de différence finie décentré associé à l'équation de chaleur (8.11) en fonction de \bar{U} est donné par

$$\frac{\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_i^n}{\Delta t} = \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{(\bar{U}_{i+1}^{n+1} - \bar{U}_i^{n+1})^2} - \frac{1}{(\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_{i-1}^{n+1})^2} \right) \Delta z.$$

Preuve :

D'après le lemme (4.6), on a

$$F'(\bar{U}) \cdot \bar{V} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\bar{U}_z^2} \right)_z \bar{V}(z) dz + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U} - \bar{U}^n) \bar{V}.$$

Toujours en supposant que $\bar{U}^{n+1} = \min F(\bar{U})$, on trouve

$$\frac{\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^n}{\Delta t} = \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{(\bar{U}_z^{n+1})^2} \right)_z, \quad \text{avec } z = i\Delta z.$$

Donc

$$\frac{\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_i^n}{\Delta t} = \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{\left(\frac{\bar{U}_{i+1}^{n+1} - \bar{U}_i^{n+1}}{\Delta z} \right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_{i-1}^{n+1}}{\Delta z} \right)^2} \right) \frac{1}{\Delta z},$$

par suite

$$\frac{\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_i^n}{\Delta t} = \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{(\bar{U}_{i+1}^{n+1} - \bar{U}_i^{n+1})^2} - \frac{1}{(\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_{i-1}^{n+1})^2} \right) \Delta z.$$

□

4.2.1 Cas implicite

En général, pour le schéma numérique précédent, on a

$$\frac{\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\bar{U}_{i+1}^{n+1} - \bar{U}_i^{n+1})^2} - \frac{1}{(\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_{i-1}^{n+1})^2} \right) \Delta z$$

⇔

$$\frac{\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_i^n}{\Delta t} = F(\bar{U}_{i-1}^{n+1}, \bar{U}_i^{n+1}, \bar{U}_{i+1}^{n+1}).$$

Donc

$$\bar{U}_i^{n+1} - \Delta t F(\bar{U}_{i-1}^{n+1}, \bar{U}_i^{n+1}, \bar{U}_{i+1}^{n+1}) = \bar{U}_i^n,$$

alors

$$\bar{F}(\bar{U}_{i-1}^{n+1}, \bar{U}_i^{n+1}, \bar{U}_{i+1}^{n+1}) = \bar{U}_i^n,$$

où

$$\bar{F}(\bar{U}_{i-1}^{n+1}, \bar{U}_i^{n+1}, \bar{U}_{i+1}^{n+1}) = \bar{U}_i^{n+1} - \Delta t F(\bar{U}_{i-1}^{n+1}, \bar{U}_i^{n+1}, \bar{U}_{i+1}^{n+1}).$$

Proposition 4.8. (Variation de \bar{F})

\bar{F} est une fonction décroissante par rapport à $\bar{U}_{i\pm 1}^{n+1}$ et croissante par rapport à \bar{U}_i^{n+1} .

Preuve :

En fait, en calculant les dérivées de \bar{F} par rapport à ses variables on trouve

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{U}_{i-1}^{n+1}} = -\Delta t \frac{\partial F}{\partial \bar{U}_{i-1}^{n+1}} = -\Delta t \Delta z \frac{1}{(\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_{i-1}^{n+1})^3},$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{U}_{i+1}^{n+1}} = -\Delta t \frac{\partial F}{\partial \bar{U}_{i+1}^{n+1}} = -\Delta t \Delta z \frac{1}{(\bar{U}_{i+1}^{n+1} - \bar{U}_i^{n+1})^3},$$

et

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{U}_i^{n+1}} = 1 - \Delta t \frac{\partial F}{\partial \bar{U}_i^{n+1}} = 1 - \Delta t \left(-\frac{1}{(\bar{U}_{i+1}^{n+1} - \bar{U}_i^{n+1})^3} - \frac{1}{(\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_{i-1}^{n+1})^3} \right).$$

□

Soit $\bar{\bar{F}}$ la fonction telle que $\bar{U}_i^{n+1} = \bar{\bar{F}}(\bar{U}_i^n, \bar{U}_{i\pm 1}^{n+1})$.

Corollaire 4.9. (Variation de $\bar{\bar{F}}$)

$\bar{\bar{F}}$ est croissante par rapport à toutes ses variables.

4.3 Cas où $f(u) = (1 - \epsilon_0)\frac{u_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} + (1 - \epsilon_0)u_1u_2$

Proposition 4.10. (*Shéma numérique associé à (8.11)*)

Un schéma numérique de différence finie décentré associé à l'équation de chaleur (8.11) en fonction de \bar{U} est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(\bar{U}_1)_i^{n+1} - (\bar{U}_1)_i^n}{\Delta t} = -\frac{1 - \epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{\left((\bar{U}_1)_{i+1}^{n+1} - (\bar{U}_1)_i^{n+1} \right)^2} - \frac{1}{\left((\bar{U}_1)_i^{n+1} - (\bar{U}_1)_{i-1}^{n+1} \right)^2} \right) \Delta z_1, \\ -\frac{1 - \epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{\left((\bar{U}_2)_{j+1}^{n+1} - (\bar{U}_2)_j^{n+1} \right)^2} - \frac{1}{\left((\bar{U}_2)_j^{n+1} - (\bar{U}_2)_{j-1}^{n+1} \right)^2} \right) \Delta z_2, \\ \frac{(\bar{U}_2)_i^{n+1} - (\bar{U}_2)_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\left((\bar{U}_2)_{i+1}^{n+1} - (\bar{U}_2)_i^{n+1} \right)^2} - \frac{1}{\left((\bar{U}_2)_i^{n+1} - (\bar{U}_2)_{i-1}^{n+1} \right)^2} \right) \Delta z_2, \\ -\frac{1 - \epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{\left((\bar{U}_1)_{\bar{j}+1}^{n+1} - (\bar{U}_1)_{\bar{j}}^{n+1} \right)^2} - \frac{1}{\left((\bar{U}_1)_{\bar{j}}^{n+1} - (\bar{U}_1)_{\bar{j}-1}^{n+1} \right)^2} \right) \Delta z_1. \end{array} \right.$$

où les indices j et \bar{j} sont définis de la manière suivante :

$$j = j(i) \text{ tel que } \widehat{U}_2^{n+1}(j\Delta z_2) = \widehat{U}_1^{n+1}(i\Delta z_1),$$

et

$$\bar{j} = \bar{j}(i) \text{ tel que } \widehat{U}_1^{n+1}(\bar{j}\Delta z_1) = \widehat{U}_2^{n+1}(i\Delta z_2),$$

avec

$$\widehat{U}_\alpha^{n+1} = (\bar{U}_\alpha)_i^{n+1} \quad \text{si} \quad i\Delta z_\alpha \leq z < (i+1)\Delta z_\alpha \quad \text{pour } \alpha = 1, 2.$$

Preuve :

Le traitement des deux premiers termes de $E(u)$ est similaire à celui de la section précédente. Donc, il suffit d'étudier le troisième terme.

Étape 1 : posons

$$F_0(\bar{U}) = E_0(u) = \int f_0(u), \quad \text{avec } f_0(u) = u_1u_2.$$

On pose aussi pour $i = 1, 2$

$$(U_i)_x = u_i, \quad U_i(x) = z_i \quad \text{et} \quad \bar{U}_i = U_i^{-1},$$

donc

$$u_i = \partial_x(U_i) = \partial_x(\bar{U}_i^{-1}).$$

On sait que

$$\bar{U}_1^{-1}(x) = U_1(x) = z_1 \quad \text{et} \quad \bar{U}_2^{-1}(x) = U_2(x) = z_2,$$

alors, d'après le lemme (4.1) on a

$$dz_1 = \frac{1}{\bar{U}'_1 \circ \bar{U}_1^{-1}(x)} dx \quad \text{et} \quad dz_2 = \frac{1}{\bar{U}'_2 \circ \bar{U}_2^{-1}(x)} dx.$$

Soit $\bar{V} = (\bar{V}_1, \bar{V}_2)$, d'après l'équation (8.13) on a

$$\begin{aligned} F'_0(\bar{U}) \cdot \bar{V} &= \int u_2(x) \partial_x \left(\frac{-\bar{V}_1(\bar{U}_1^{-1}(x))}{\bar{U}'_1 \circ \bar{U}_1^{-1}(x)} \right) + u_1(x) \partial_x \left(\frac{-\bar{V}_2(\bar{U}_2^{-1}(x))}{\bar{U}'_2 \circ \bar{U}_2^{-1}(x)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U}_1 - \bar{U}_1^n) \bar{V}_1 + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U}_2 - \bar{U}_2^n) \bar{V}_2 \\ &= \int \left(\frac{-\bar{V}_1(\bar{U}_1^{-1}(x))}{\bar{U}'_1 \circ \bar{U}_1^{-1}(x)} (u_2(x))_x + \frac{-\bar{V}_2(\bar{U}_2^{-1}(x))}{\bar{U}'_2 \circ \bar{U}_2^{-1}(x)} (u_1(x))_x \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U}_1 - \bar{U}_1^n) \bar{V}_1 + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U}_2 - \bar{U}_2^n) \bar{V}_2 \\ &= \int \bar{V}_1(z_1) (u_2)_x(x = \bar{U}_1(z_1)) dz_1 + \int \bar{V}_2(z_2) (u_1)_x(x = \bar{U}_2(z_2)) dz_2 \\ &\quad + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U}_1 - \bar{U}_1^n) \bar{V}_1 + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U}_2 - \bar{U}_2^n) \bar{V}_2, \end{aligned}$$

où on obtient la deuxième inégalité en intégrant par partie. Or, on sait que

$$(U_1)_x = u_1 \quad \text{et} \quad (U_2)_x = u_2,$$

alors

$$\begin{aligned} F'_0(\bar{U}) \cdot \bar{V} &= \int \bar{V}_1(z_1) (U_2)_{xx}(x = U_1^{-1}(z_1)) dz_1 + \int \bar{V}_2(z_2) (U_1)_{xx}(x = U_2^{-1}(z_2)) dz_2 \\ &\quad + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U}_1 - \bar{U}_1^n) \bar{V}_1 + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U}_2 - \bar{U}_2^n) \bar{V}_2. \\ &= \int \bar{V}_1(z_1) \frac{(U_2)_{xx}}{(U_2)_x}(x) \times (U_2)_x(x) dz_1 + \int \bar{V}_2(z_2) \frac{(U_1)_{xx}}{(U_1)_x}(x) \times (U_1)_x(x) dz_2 \\ &\quad + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U}_1 - \bar{U}_1^n) \bar{V}_1 + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U}_2 - \bar{U}_2^n) \bar{V}_2. \end{aligned}$$

Mais d'après (8.15), on a

$$\frac{(U_1)_{xx}}{(U_1)_x} (x = U_1^{-1}(z_1) = \bar{U}_1(z_1)) = \left(\frac{1}{(\bar{U}_1)_{z_1}} \right)_{z_1}$$

et

$$\frac{(U_2)_{xx}}{(U_2)_x} (x = U_2^{-1}(z_2) = \bar{U}_2(z_2)) = \left(\frac{1}{(\bar{U}_2)_{z_2}} \right)_{z_2}.$$

Et d'après (8.16), on a

$$(U_1)_x (x = \bar{U}_1(z_1)) = \frac{1}{(\bar{U}_1)_{z_1}} \quad \text{et} \quad (U_2)_x (x = \bar{U}_2(z_2)) = \frac{1}{(\bar{U}_2)_{z_2}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} F'_0(\bar{U}) \cdot \bar{V} &= \int \bar{V}_1(z_1) \left(\frac{1}{(\bar{U}_2)_{z_2}} \right)_{z_2} \Big|_{z_2=U_2(U_1^{-1}(z_1))} \times \frac{1}{(\bar{U}_2)_{z_2}} \Big|_{z_2=U_2(U_1^{-1}(z_1))} dz_1 \\ &\quad + \int \bar{V}_2(z_2) \left(\frac{1}{(\bar{U}_1)_{z_1}} \right)_{z_1} \Big|_{z_1=U_1(U_2^{-1}(z_2))} \times \frac{1}{(\bar{U}_1)_{z_1}} \Big|_{z_1=U_1(U_2^{-1}(z_2))} dz_2 \\ &\quad + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U}_1 - \bar{U}_1^n) \bar{V}_1 + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U}_2 - \bar{U}_2^n) \bar{V}_2 \\ &= \int \bar{V}_1(z_1) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{((\bar{U}_2)_{z_2})^2} \right)_{z_2} \Big|_{z_2=U_2(U_1^{-1}(z_1))} dz_1 \\ &\quad + \int \bar{V}_2(z_2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{((\bar{U}_1)_{z_1})^2} \right)_{z_1} \Big|_{z_1=U_1(U_2^{-1}(z_2))} dz_2 \\ &\quad + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U}_1 - \bar{U}_1^n) \bar{V}_1 + \frac{1}{\Delta t} \int (\bar{U}_2 - \bar{U}_2^n) \bar{V}_2 \end{aligned}$$

D'où

$$F'_0(\bar{U}) = \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{((\bar{U}_2)_{z_2})^2} \right)_{z_2} \Big|_{z_2=U_2(U_1^{-1}(z_1))} + \frac{1}{\Delta t} (\bar{U}_1 - \bar{U}_1^n) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{((\bar{U}_1)_{z_1})^2} \right)_{z_1} \Big|_{z_1=U_1(U_2^{-1}(z_2))} + \frac{1}{\Delta t} (\bar{U}_2 - \bar{U}_2^n) \end{array} \right)$$

Etape 2 : vu que $\bar{U}^{n+1} = \arg(\min)$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{U}_1^{n+1} - \bar{U}_1^n}{\Delta t} = -\frac{1 - \epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{\left((\bar{U}_1^{n+1})_{z_1} \right)^2} \right)_{z_1} - \frac{1 - \epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{\left((\bar{U}_2^{n+1})_{z_2} \right)^2} \right)_{z_2} \Big|_{z_2 = U_2^{n+1}((U_1^{-1})^{n+1}(z_1))} \\ \frac{\bar{U}_2^{n+1} - \bar{U}_2^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\left((\bar{U}_2^{n+1})_{z_2} \right)^2} \right)_{z_2} - \frac{1 - \epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{\left((\bar{U}_1^{n+1})_{z_1} \right)^2} \right)_{z_1} \Big|_{z_1 = U_1^{n+1}((U_2^{-1})^{n+1}(z_2))} \end{array} \right.$$

avec $x = \bar{U}_1^{n+1}(z_1) = \bar{U}_2^{n+1}(z_2)$.

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(\bar{U}_1)_i^{n+1} - (\bar{U}_1)_i^n}{\Delta t} = -\frac{1 - \epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{\left((\bar{U}_1)_{i+1}^{n+1} - (\bar{U}_1)_i^{n+1} \right)^2} - \frac{1}{\left((\bar{U}_1)_i^{n+1} - (\bar{U}_1)_{i-1}^{n+1} \right)^2} \right) \Delta z_1, \\ \quad -\frac{1 - \epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{\left((\bar{U}_2)_{j+1}^{n+1} - (\bar{U}_2)_j^{n+1} \right)^2} - \frac{1}{\left((\bar{U}_2)_j^{n+1} - (\bar{U}_2)_{j-1}^{n+1} \right)^2} \right) \Delta z_2, \\ \frac{(\bar{U}_2)_i^{n+1} - (\bar{U}_2)_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\left((\bar{U}_2)_{i+1}^{n+1} - (\bar{U}_2)_i^{n+1} \right)^2} - \frac{1}{\left((\bar{U}_2)_i^{n+1} - (\bar{U}_2)_{i-1}^{n+1} \right)^2} \right) \Delta z_2, \\ \quad -\frac{1 - \epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{\left((\bar{U}_1)_{\bar{j}+1}^{n+1} - (\bar{U}_1)_{\bar{j}}^{n+1} \right)^2} - \frac{1}{\left((\bar{U}_1)_{\bar{j}}^{n+1} - (\bar{U}_1)_{\bar{j}-1}^{n+1} \right)^2} \right) \Delta z_1. \end{array} \right.$$

où les indices j et \bar{j} sont définis de la manière suivante :

$$j = j(i) \text{ tel que } \widehat{U}_2^{n+1}(j\Delta z_2) = \widehat{U}_1^{n+1}(i\Delta z_1),$$

et

$$\bar{j} = \bar{j}(i) \text{ tel que } \widehat{U}_1^{n+1}(\bar{j}\Delta z_1) = \widehat{U}_2^{n+1}(i\Delta z_2),$$

avec

$$\widehat{U}_\alpha^{n+1} = (\bar{U}_\alpha)_i^{n+1} \quad \text{si} \quad i\Delta z_\alpha \leq z < (i+1)\Delta z_\alpha \quad \text{pour } \alpha = 1, 2.$$

□

Le cas explicite est facile à appliquer. Il suffit de remplacer $n + 1$ par n dans les seconds membres des égalités précédentes.

4.4 Application sur le cas confiné

On cherche

$$\inf_{u_1+u_2=u_1^n+u_2^n} \left\{ E(u) + \frac{1}{2\Delta t} \text{dist}^2(u, u^n) \right\},$$

où $u = (h, g) = (u_1, u_2)$.

On sait que pour $i=1,2$

$$(u_i)_t = \text{div} \left(u_i \nabla \left(p + \frac{\delta E}{\delta u_i} \right) \right).$$

Posons $u_1 + u_2 = h = u_1^n + u_2^n = h + g$, alors le problème sera

$$\min_{F(u)=u_1+u_2-h=0} E(u).$$

Alors, il existe un multiplicateur de Lagrange $\lambda = -p$ tel que $\frac{\delta E}{\delta u}(x) + p \frac{\delta F}{\delta u}(x) = 0$.

Ainsi

$$\frac{\delta E}{\delta u_i}(x) + p = 0.$$

Parsuite, on obtient pour $i=1,2$

$$(u_i)_t = \text{div} \left(u_i \nabla \left(p + \frac{\delta E}{\delta u_i} \right) \right).$$

5 Quelques idées pour le calcul de la dérivée seconde

Dans ce qui suit, ρ représente une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d , avec $d \geq 1$. On se réfère dans ce travail à [34].

Soit ρ_0 et ρ_1 deux mesures de probabilités. On sait d'après le Brenier - McCann qu'il existe un unique gradient d'une fonction convexe φ tel que

$$\nabla \varphi \# \rho_0 = \rho_1.$$

En fait, $\#$ désigne l'opération définie par la formule suivante

$$\int f d(T\#\mu) = \int (f \circ T) d\mu.$$

En plus, $\nabla\varphi$ est le transport optimal pour le problème de Monge-Kantorovich avec un coût quadratique dans le sens que la distance de Wasserstein sera donnée par

$$W_2^2(\rho_0, \rho_1) = \int_{\mathbb{R}^d} |x - \nabla\varphi(x)|^2 d\rho_0(x).$$

La famille de mesures de probabilités

$$\rho_s = [(1-s)Id + s\nabla\varphi]\# \rho_0$$

joue le rôle de chemins géodésiques interpolant entre ρ_0 et ρ_1 .

Un calcul facile montre qu'en négligeant les problèmes de régularités alors ρ_s satisfait le système différentiel suivant représentant la conservation de masse et de moment

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_s}{\partial s} + \nabla \cdot (\rho_s v_s) = 0, \\ \frac{\partial (\rho_s v_s)}{\partial s} + \nabla \cdot (\rho_s v_s \otimes v_s) = 0, \end{cases} \quad (8.17)$$

avec $v_0(x) = \nabla\varphi(x) - x$, et $v_s = \nabla\psi_s$ pour une certaine fonction ψ_s .

Définition 5.1. (Densité d'énergie interne)

On définit la fonction $U : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ qui représente la densité d'énergie interne. Et on pose

$$\mathcal{U}(\rho) = \int_{\mathbb{R}^d} U(\rho) dx.$$

Définition 5.2. (Divergence du produit tensoriel)

Soient a, b deux vecteurs donnés. On définit la divergence du produit tensoriel de a par b par

$$(\nabla \cdot (a \otimes b))_i = \sum_j \partial_j (a_i b_j) := \partial_j (a_i b_j).$$

Remarque 5.3. (Quelques propriétés de la divergence)

Soient v et w deux fonctions vectorielles données. Et soit ρ une fonction scalaire. On donne les propriétés suivantes

$$(v \cdot \nabla) \cdot \rho = v \cdot \nabla \rho,$$

et

$$(v \cdot \nabla) \cdot w = v \times (\nabla \cdot w).$$

Proposition 5.4. (*Dérivée seconde de $\mathcal{U}(\rho_s)$*)

En calculant la dérivée seconde de $\mathcal{U}(\rho_s)$, on trouve

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{U}(\rho_s) = \int_{\mathbb{R}^d} (P'(\rho_s)\rho_s - P(\rho_s)) (\nabla \cdot v_s)^2 + \int_{\mathbb{R}^d} P(\rho_s) \text{tr}(Dv_s)^2, \quad (8.18)$$

où

$$P(\rho) = \int_0^\rho \sigma U''(\sigma) d\sigma = \rho U'(\rho) - U(\rho),$$

et Dv correspond à la matrice $(\partial_i v_j)_{1 \leq i, j \leq d}$.

Pour tout $s \in [0, 1]$, v_s est un champ de vecteur gradient de telle sorte que $\text{tr}(Dv_s)^2$ coïncide avec $\text{tr}((Dv_s)^T(Dv_s))$ qui est le carré de la norme Hilbert-Schmidt de la matrice Dv_s .

Preuve :

Comme $P(\rho) = \rho U'(\rho) - U(\rho)$, alors $P'(\rho) = \rho U''(\rho)$ et $P(0) = 0$.

Notre but est donc de démontrer l'égalité suivante

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{U}(\rho_s) = \int_{\mathbb{R}^d} (P'(\rho_s)\rho_s - P(\rho_s)) (\nabla \cdot v_s)^2 + \int_{\mathbb{R}^d} P(\rho_s) \text{tr}(Dv_s)^2.$$

On sait que

$$\mathcal{U}(\rho_s) = \int_{\mathbb{R}^d} U(\rho_s(x)) dx,$$

alors

$$\frac{d}{ds}\mathcal{U}(\rho_s) = \int_{\mathbb{R}^d} U'(\rho_s) \frac{\partial \rho_s}{\partial s} dx.$$

D'après la première équation du système (8.17), on a $\frac{\partial \rho_s}{\partial s} = -\nabla \cdot (\rho_s v_s)$. Alors

$$\frac{d}{ds}\mathcal{U}(\rho_s) = - \int_{\mathbb{R}^d} U'(\rho_s) \nabla \cdot (\rho_s v_s) dx.$$

Donc

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{U}(\rho_s) = + \int_{\mathbb{R}^d} U''(\rho_s) (\nabla \cdot (\rho_s v_s))^2 dx - \int_{\mathbb{R}^d} U'(\rho_s) \nabla \cdot \left(\frac{\partial(\rho_s v_s)}{\partial s} \right) dx.$$

Mais d'après la deuxième équation du système (8.17), on a $\frac{\partial(\rho_s v_s)}{\partial s} = -\nabla \cdot (\rho_s v_s \otimes v_s)$,

alors

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{U}(\rho_s) &= \int_{\mathbb{R}^d} U''(\rho_s) (\nabla \cdot (\rho_s v_s))^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} U'(\rho_s) \nabla \cdot (\nabla \cdot (\rho_s v_s \otimes v_s)) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} U''(\rho_s) (\nabla \rho_s \cdot v_s + \rho_s \nabla \cdot v_s)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^d} U''(\rho_s) \nabla \rho_s (\nabla \cdot (\rho_s v_s \otimes v_s)) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} U''(\rho_s) (\nabla \rho_s \cdot v_s + \rho_s \nabla \cdot v_s)^2 dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^d} U''(\rho_s) \nabla \rho_s \cdot [\rho_s v_s (\nabla \cdot v_s) + [(v_s \cdot \nabla) \rho_s] v_s + [(v_s \cdot \nabla) v_s] \rho_s] dx \quad (\text{d'après (5.2)}), \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} U''(\rho_s) ((v_s \cdot \nabla \rho_s)^2 + \rho_s^2 (\nabla \cdot v_s)^2 + 2(v_s \cdot \nabla \rho_s)(\rho_s \nabla \cdot v_s)) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^d} U''(\rho_s) \nabla \rho_s \cdot [\rho_s v_s (\nabla \cdot v_s) + [(v_s \cdot \nabla) \rho_s] v_s + [(v_s \cdot \nabla) v_s] \rho_s] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} U''(\rho_s) (\rho_s^2 (\nabla \cdot v_s)^2 + (v_s \cdot \nabla \rho_s)(\rho_s \nabla \cdot v_s) - \nabla \rho_s \cdot [(v_s \cdot \nabla) v_s] \rho_s) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (\rho_s P'(\rho_s) (\nabla \cdot v_s)^2 + v_s (\nabla \cdot v_s) \cdot \nabla P(\rho_s) - (v_s \cdot \nabla) v_s \nabla P(\rho_s)) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (\rho_s P'(\rho_s) (\nabla \cdot v_s)^2 + P(\rho_s) (-\nabla \cdot (v_s (\nabla \cdot v_s)) + \nabla \cdot ((v_s \cdot \nabla) v_s))) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (\rho_s P'(\rho_s) (\nabla \cdot v_s)^2 + P(\rho_s) (-(\nabla \cdot v_s)^2 + \nabla_i (v_s)_j \nabla_j (v_s)_i)) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} ((\rho_s P'(\rho_s) - P(\rho_s)) (\nabla \cdot v_s)^2 + P(\rho_s) \text{tr}(\nabla \cdot v_s) (\nabla \cdot v_s)) dx.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{U}(\rho_s) = \int_{\mathbb{R}^d} (P'(\rho_s) \rho_s - P(\rho_s)) (\nabla \cdot v_s)^2 + \int_{\mathbb{R}^d} P(\rho_s) \text{tr}(Dv_s)^2.$$

□

5.1 Application directe à notre problème

Dans notre cas, ρ joue le rôle de (h, g) , et

$$\mathcal{U}(\rho) = \mathcal{U}(h, g) = E(h, g) = \int \frac{g^2}{2} + (1 - \epsilon_0) \frac{\bar{h}^2}{2} + (1 - \epsilon_0) \bar{h} g.$$

Posons $\rho^a = h$ et $\rho^b = g$, on obtient

$$U(\rho) = U(\rho^a, \rho^b) = c(\rho^a)^2 + \frac{1}{2}(\rho^b)^2 + 2c\rho^a \rho^b,$$

où $c = \frac{1 - \epsilon_0}{2}$, posons $\alpha = a, b$ et $\beta = a, b$, en calculant $U''(\rho)$, on trouve

$$\frac{U''(\rho)}{2} = \begin{pmatrix} c & c \\ c & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Pour calculer la dérivée seconde, on calcule l'intégrale suivante

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^d} U''_{\alpha,\beta}(\rho) (\nabla \cdot (\rho^\alpha v^\alpha)) (\nabla \cdot (\rho^\beta v^\beta)) dx + \int_{\mathbb{R}^d} U'_\alpha(\rho) \nabla \cdot (\nabla \cdot (\rho^\alpha v^\alpha \otimes v^\alpha)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} U''_{\alpha,\beta}(\rho) [(\nabla \cdot (\rho^\alpha v^\alpha)) (\nabla \cdot (\rho^\beta v^\beta)) - \nabla \rho^\beta (\nabla \cdot (\rho^\alpha v^\alpha \otimes v^\alpha))] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} U''_{\alpha,\beta}(\rho) ((\rho^\alpha \nabla \cdot v^\alpha) (\rho^\beta \nabla \cdot v^\beta) + (v^\alpha \cdot \nabla \rho^\alpha) (v^\beta \cdot \nabla \rho^\beta) + 2(v^\alpha \cdot \nabla \rho^\alpha) (\rho^\beta (\nabla \cdot v^\beta))) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^d} U''_{\alpha,\beta}(\rho) \nabla \rho^\beta \cdot [\rho^\alpha v^\alpha (\nabla \cdot v^\alpha) + [(v^\alpha \cdot \nabla) \rho^\alpha] v^\alpha + [(v^\alpha \cdot \nabla) v^\alpha] \rho^\alpha] dx \end{aligned}$$

Si on pose

$$U''_{\alpha,\beta}(\rho) \cdot \rho^\beta = P'_\alpha(\rho),$$

alors on trouve

$$P'_a(\rho) = 2c\rho^a + 2c\rho^b,$$

et

$$P'_b(\rho) = 2c\rho^a + \rho^b.$$

Donc

$$P(\rho) = c(\rho^a)^2 + \frac{1}{2}(\rho^b)^2 + 2c\rho^a\rho^b = U(\rho).$$

Traitons le terme suivant J qui figure dans I

$$J = \sum_{\alpha,\beta \text{ avec } \alpha \neq \beta} U''_{\alpha,\beta}(\rho) (v^\alpha \cdot \nabla \rho^\alpha) (v^\beta \cdot \nabla \rho^\beta - v^\alpha \cdot \nabla \rho^\beta),$$

car si $\alpha = \beta$, ce terme s'annule. Alors $(\alpha, \beta) = (a, b)$ ou (b, a) . D'où

$$\begin{aligned} J &= (v^a \cdot \nabla \rho^a) (v^b \cdot \nabla \rho^b - v^a \cdot \nabla \rho^b) + (v^b \cdot \nabla \rho^b) (v^a \cdot \nabla \rho^a - v^b \cdot \nabla \rho^a) \\ &= (v^a \cdot \nabla \rho^a) (v^b - v^a) \cdot \nabla \rho^b + (v^b \cdot \nabla \rho^b) (v^a - v^b) \cdot \nabla \rho^a \\ &= (v^a - v^b) [(v^b \cdot \nabla \rho^b) \cdot \nabla \rho^a - (v^a \cdot \nabla \rho^a) \cdot \nabla \rho^b] \\ &= (v^a - v^b) (v^b - v^a) [(D^2 \rho^b) \rho^a + (D^2 \rho^a) \rho^b]. \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] ADAMS, R., *Sobolev Spaces, Pure and Applied Mathematics*, Academic Pressm, New York-London, 65 (1975).
- [2] AGUEH, M., *Gagliardo-Nirenberg inequalities involving the gradient L^2 -norm*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Sér. I 346 (2008), 757-762.
- [3] ARONSON, D. G., *The Porous Medium Equation*. In Nonlinear Diffusion Problems, Lecture Notes in Math. 1224, A. Fasano and M. Primicerio eds., Springer-Verlag New York, (1986), 12-46.
- [4] ANGENENT, S. B., ARONSON, D. G., *The focusing problem for the radially symmetric porous medium equation*, Comm. Partial Differential Equations 20 (1995), 1217-1240.
- [5] ANGENENT, S. B., ARONSON, D. G., *Non-axial self-similar hole filling for the porous medium equation*. J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), no. 4, 737-782.
- [6] ARONSON, D. G., BENILAN, P., *Régularite des solutions de l'équation des milieux poreux dans \mathbb{R}^N* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 288 (1979), 103-105.
- [7] ARONSON, D. G., VAN DEN BERG, J. B., HULSHOF, J., *Parametric dependence of exponents and eigenvalues in focussing porous media flows*, European J. Appl. Math. 14, 4 (2003), 485-512.
- [8] ARONSON, D. G., CAFFARELLI, L. A., *The initial trace of a solution of the porous medium equation*, Trans. Amer. Math. Soc. 280 (1983), 351-366.
- [9] ANDREU-VAILLO, A., CASELLES, V., MAZÓN, J. M., *Parabolic quasilinear equations minimizing linear growth functionals*. Birkhauser, Basel, (2004).
- [10] ARONSON, D.G., GRAVELEAU, J., *A Self-similar solution to the focusing problem for the porous medium equation*. European J. Appl. Math, 4 (1993), 65-81.
- [11] ARONSON, D. G., VÁZQUEZ, J.-L., *Anomalous exponents in Nonlinear Diffusion*. Journal Nonlinear Science 5, 1 (1995), 29-56.
- [12] AUDOLY, B., *Mode-dependent toughness and the delamination of compressed thin films*, J. OF MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS, 48 (2000), 2315-2332.

- [13] AUDOLY, B., *Stability of Straight Delamination Blisters*, J. OF PHYSICAL REVIEW LETTERS, 83 (20) (1999), 4124-4127.
- [14] BALDELLI, A. A. L., BOURDIN, B., MARIGO, J. J., MAURINI, C., *Delamination and fracture of thin films : a variational approach*, DIRECT AND VARIATIONAL METHODS FOR NONSMOOTH PROBLEMS IN MECHANICS AMBOISE, FRANCE, JUNE 24-26, (2013).
- [15] BEDROSSIAN, J., KOHN, R. V., *Blister patterns and energy minimization in compressed thin films on compliant substrates*, PREPRINT (2013).
- [16] BRÉZIS, H., *Analyse fonctionnelle : Théorie et Applications* (1983).
- [17] BENILAN, P., BREZIS, H., CRANDALL, M.G., *A semilinear equation in $L^1(\mathbb{R}^N)$* , ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA - CLASSE DI SCIENZE, VOL. 2 (4) (1975), 523-555.
- [18] BENGURIA, R., BREZIS, H., LIEB, E. H., *The Thomas-Fermi-von Weizsacker Theory of Atoms and Molecules*, COMMUN. MATH. PHYS. 79 (1981) 167-180.
- [19] BLANCHET, A., BONFORTE, M., DOLBEAULT, J., GRILLO, G., VÁZQUEZ, J.-L., *Asymptotics of the fast diffusion equation via entropy estimates*, ARCHIVE FOR RATIONAL MECHANICS AND ANALYSIS 191 (2009) 347-385.
- [20] BLANCHET, A., CALVEZ, V., CARRILLO, J.A., *Convergence of the mass-transport steepest descent scheme for the sub-critical Patlak-Keller-Segel model*, (2007).
- [21] BRÉZIS, H., CRANDALL, M. G., *Uniqueness of solutions of the initial-value problem for $u_t - \Delta\phi(u) = 0$* , J. MATH. PURES APPL 58 (1979) 153-163.
- [22] BÉNILAN, P., CRANDALL, M. G., *The continuous dependence on ϕ of solutions of $u_t - \Delta\phi = 0$* , INDIANA UNIV. MATH. J. 30 (1981) 161-177.
- [23] BÉNILAN, P., CRANDALL, M. G., *Regularizing effects of homogeneous evolution equations*, CONTRIBUTIONS TO ANALYSIS AND GEOMETRY, SUPPL. TO AMER. JOUR. MATH., BALTIMORE (1981) 23-39.
- [24] BEAR, J., CHENG, A.H.D., SOREK, S., OUAZAR, D., HERRERA, I., *Sea-water Intrusion in Coastal Aquifers - Concepts, Methods and Practices*, THEORY AND APPLICATIONS OF TRANSPORT IN POROUS MEDIA 14, KLUWER ACADEMIC PUBLISHER, NETHERLANDS, (1999).
- [25] BÉNILAN, P., CRANDALL, M. G., PAZY, A., *Evolution Equations Governed by Accretive Operators*, UNPUBLISHED BOOK DRAFT.
- [26] BOCCARDO, L., MURAT, F., *Remarques sur l'homogénéisation de certains problèmes quasi-linéaires*, PORTUGALIAE MATEMATICA 41 (1-4) (1982), 535-562.

- [27] CAFFARELLI, L. A., FRIEDMAN, A., *Continuity of the density of a gas flow in a porous medium*. TRANS. AMER. MATH. SOC. 252 (1979), 99-113.
- [28] CAFFARELLI, L. A., FRIEDMAN, A., *Asymptotic behaviour of solutions of $u_t = \Delta u^m$ as $m \rightarrow \infty$* . INDIANA UNIV. MATH. JOUR. 36, 4 (1987), 711-728.
- [29] CAFFARELLI, L. A., VÁZQUEZ, J.-L., WOLANSKI, N. I., *Lipschitz continuity of solutions and interfaces of the N -dimensional porous medium equation*, INDIANA UNIV. MATH. J. 36 (1987), 373-401.
- [30] CHMAYCEM, G., JAZAR, M., MONNEAU, R., *Explicit global minimizers of a one-dimensional blister model*, PREPRINT (2014).
- [31] CHMAYCEM, G., JAZAR, M., MONNEAU, R. *A new contraction family for porous medium and fast diffusion equations*, PREPRINT (2014).
- [32] CHMAYCEM, G., JAZAR, M., MONNEAU, R. *Application of the method of differential contractions for porous medium and doubly nonlinear equations*, WORK IN PREPARATION (2014).
- [33] CARRILLO, J.A., JÜNGEL, A., MARKOWICH, P.A., TOSCANI, G., UNTERREITER, A., *Entropy Dissipation Methods for Degenerate Parabolic Problems and Generalized Sobolev Inequalities*, MONATSH. MATH. 133 (2001), 1-82.
- [34] CARRILLO, J.A., MCCANN, R.J., VILLANI, C., *Contractions in the 2-Wasserstein Length Space and Thermalization of Granular Media*, ARCH. RATIONAL MECH. ANAL. 179 (2006), 217-263.
- [35] CARRILLO, J.A., MCCANN, R.J., VILLANI C., *Kinetic equilibration rates for granular media and related equations : entropy dissipation and mass transportation estimates*, REV. MAT. IBEROAMERICANA 19 (2003), 971-1018.
- [36] CRANDALL, M. G., PIERRE, M., *Regularizing effects for $u_t = \Delta \phi(u)$* , TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, 274 (1982) 159-168.
- [37] CHASSEIGNE, E., VÁZQUEZ, J.-L., *Theory of Extended Solutions for Fast Diffusion Equations in Optimal Classes of Data*. RADIATION FROM SINGULARITIES. ARCHIVE RAT. MECH. ANAL. 164 (2002), 133-187.
- [38] DIBENEDETTO, E., *Continuity of weak solutions to certain singular parabolic equations*, T.S.R. 2124 MATH. RESEARCH CENTER, MADISON, WISC., 32 (1981).
- [39] DIBENEDETTO, E., *Continuity of weak solutions to a general porous medium equation*, T.S.R. 2189 MATH. RESEARCH CENTER, MADISON, WISC., (1983).

- [40] DELPINO, M., DOLBEAULT, J., *Best constants for Gagliardo-Nirenberg inequalities and applications to nonlinear diffusions*, J. MATH. PURES APPL. 81, 9 (2002), 847-875.
- [41] DUCHÊNE, V., *Etude de modèles de Trafic routier*, 12 NOVEMBRE (2006).
- [42] EL DOUSSOUKI, A. THÈSE, UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNES, (2012).
- [43] DAHLBERG, B. E. J., KENIG, C., *Nonnegative solutions to fast diffusion equations*. REV. MAT. IBEROAMERICANA, 4 (1988), 11-29.
- [44] DESVILLETES, L., VILLANI, C., *Entropic Methods for the Study of the Long Time Behavior of Kinetic Equations*, TRANSPORT THEORY AND STATISTICAL PHYSICS, 30 (2-3) (2001), 155-168.
- [45] FRANCFORT, G., MARIGO, J. J., *Griffith Theory Of Brittle Fracture Revisited : Merits And Drawbacks*, J. OF LATIN AMERICAN JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES, VOL. 2 (2005), 57-64.
- [46] GRIFFITH, A. A., *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*, J. OF PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON. SERIES A, CONTAINING PAPERS OF A MATHEMATICAL OR PHYSICAL CHARACTER, VOL. 221 (1920), 163-198.
- [47] GIOIA, G., ORTIZ, M., *Delamination of Compressed Thin Films*, J. OF ADVANCES IN APPLIED MECHANICS, 33 (1997), 119-192
- [48] JAZAR, M., MONNEAU, R., *Derivation of seawater intrusion models by formal asymptotics*, TO APPEAR IN SIAM J. APPL. MATH. (2014).
- [49] KING, J.R., *Self-similar behaviour for the equation of fast nonlinear diffusion*. PHIL. TRANS. ROY. SOC. LONDON A 343 (1993), 337-375.
- [50] LARSEN, C. J., *Models of dynamic fracture based on Griffith's criterion*, IUTAM SYMPOSIUM ON VARIATIONAL CONCEPTS WITH APPLICATIONS TO THE MECHANICS OF MATERIALS : PROCEEDINGS OF THE IUTAM SYMPOSIUM ON VARIATIONAL CONCEPTS WITH APPLICATIONS TO THE MECHANICS OF MATERIALS, BOCHUM, GERMANY, SEPTEMBER 22-26, (2008), VOL. 21. SPRINGER, (2010).
- [51] LADYŽENSKAYA, O.A., SOLONNIKOV, V.A., URAL'CEVA, N.N., *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*. AMER. MATH. SOC., PROVIDENCE, R.I, (1988).
- [52] MONNEAU, R., *The method of differential contractions*, PREPRINT (2014).
- [53] MONNEAU, R., *Some remarks on the asymptotic invertibility of the linearized operator of nonlinear elasticity in the context of the displacement approach*, J. OF ZAMM . Z. ANGEW. MATH. MECH., (2006), 1-10.

- [54] MARCUS, M., MIZEL, V. J., *Absolute continuity on tracks and mappings of Sobolev spaces*, ARCH. RATIONAL MECH. ANAL. 45 (1972), 294-320.
- [55] PIERRE, M., *Uniqueness of the solutions of $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$ with initial datum a measure*. NONLINEAR ANAL., TMA 6 (1982), 175-187.
- [56] PELETIER, M.A., ZHANG, H., *Self-similar solutions of a fast diffusion equation that do not conserve mass*, DIFF. INT. EQNS. 8 (1995), 2045-2064.
- [57] OTTO, F., *The geometry of dissipative evolution equations : the porous medium equation*, COMM. PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS 26 (1-2) (2001), 101-174.
- [58] OTTO, F., *Double degenerate diffusion equations as steepest descent*, PRE-PRINT OF THE UNIVERSITY OF BONN, (1996).
- [59] SACKS, P.E., *Continuity of solutions of a singular parabolic equation*, NON-LINEAR ANALYSIS, THEORY AND APPLICATIONS, 7 (1983), 387-409.
- [60] VELLA, D., BICO, J., BOUDAUD, A., ROMAN, B., REIS, P. M., *The macroscopic delamination of thin films from elastic substrates*, J. OF PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES 106.27 (2009), 10901-10906.
- [61] VÁZQUEZ, J.-L., *Asymptotic behaviour for the Porous Medium Equation posed in the whole space*. JOURNAL OF EVOLUTION EQUATIONS 3 (2003), 67-118.
- [62] VÁZQUEZ, J.-L., *The Porous Medium Equation. New contractivity results*. PROGR. NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS APPL., 63 (2005), 433-451.
- [63] VÁZQUEZ, J.-L., *Smoothing and Decay Estimates for Nonlinear Diffusion Equations : Equations of Porous Medium Type*. OXFORD LECTURE NOTES IN MATHS. AND ITS APPLICATIONS, OXFORD UNIV. PRESS, 33 (2006).
- [64] VÁZQUEZ, J.-L., *The Porous Medium Equation. Mathematical Theory*, OXFORD MATHEMATICAL MONOGRAPHS, CLARENDON PRESS, OXFORD (2007).
- [65] VOLINSKY, A. A., WATERS, P., *Delaminated Film Buckling Microchannels*, J. OF MECHANICAL SELF-ASSEMBLY : SCIENCES AND APPLICATIONS, (2013), 153-170.
- [66] VILLANI, C., *Optimal Transport : Old and New*, SPRINGER (2003).
- [67] YE R., *Global existence and convergence of Yamabe flow*, J. DIFFERENTIAL GEOMETRY 9 (1994), 35-50.