



**HAL**  
open science

# Analyse sismique des ouvrages renforcés par inclusions rigides à l'aide d'une modélisation multiphasique

Viet Tuan Nguyen

► **To cite this version:**

Viet Tuan Nguyen. Analyse sismique des ouvrages renforcés par inclusions rigides à l'aide d'une modélisation multiphasique. Autre. Université Paris-Est, 2014. Français. NNT : 2014PEST1034 . tel-01127311

**HAL Id: tel-01127311**

**<https://pastel.hal.science/tel-01127311>**

Submitted on 7 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST  
ÉCOLE DOCTORALE SIE

# THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

**Docteur**

de l'Université Paris-Est

**Spécialité : STRUCTURE ET MATÉRIAUX**

Présentée et soutenue par

**Viet-Tuan NGUYEN**

**Analyse sismique des ouvrages renforcés  
par inclusions rigides à l'aide  
d'une modélisation multiphasique**

soutenue à Champs sur Marne le 04 février 2014

devant le jury composé de

**CLOUTEAU Didier**, Président et Rapporteur

**BOUTIN Claude**, Rapporteur

**PECKER Alain**, Examineur

**HASSEN Ghazi**, Examineur

**DE BUHAN Patrick**, Directeur de thèse



## Résumé

Bien que l'emploi des techniques de renforcement par inclusions des ouvrages de géotechnique se soit aujourd'hui largement répandu et diversifié, les méthodes de calcul et de dimensionnement correspondantes, notamment dans le cas de sollicitations dynamiques ou sismiques, exigent encore de nombreux développements tant sur le plan théorique que numérique. L'objet du présent travail est de mettre au point une méthode de calcul en conditions dynamiques des ouvrages en sols renforcés par pieux ou inclusions rigides, s'appuyant sur une modélisation multiphasique du composite sol renforcé, déjà largement développée pour l'analyse statique de ce type d'ouvrage.

Ayant préalablement établi les équations générales de l'élastodynamique pour un sol renforcé par inclusions linéaires, modélisé soit comme un milieu homogène anisotrope, soit comme un milieu biphasique, on s'intéresse tout d'abord à la solution particulière de ces équations, associée à la propagation d'une onde plane harmonique dans le sol renforcé. On montre alors que la méthode d'homogénéisation classique ne permet pas de rendre compte des phénomènes dispersifs qui apparaissent dans le sol renforcé, contrairement au modèle multiphasique qui permet d'intégrer aussi bien les interactions entre le sol et les inclusions, que les effets de flexion et de cisaillement dans ces dernières.

Ces développements théoriques débouchent alors sur la mise au point en plusieurs étapes d'un code de calcul numérique en élastodynamique, fondé sur la méthode des éléments finis appliquée à la modélisation multiphasique. Cet outil, qui conduit à des temps de calcul bien inférieurs à ceux que nécessite une simulation numérique directe des ouvrages, est alors confronté aux résultats de cette dernière pris comme référence, pour l'évaluation des impédances dynamiques de radiers de fondation sur groupe de pieux ou d'inclusions rigides verticales. Un accord remarquable est observé entre les résultats des deux approches, y compris dans le cas de configurations tridimensionnelles, témoignant ainsi de la pertinence du modèle multiphasique et de la qualité des simulations de l'outil numérique associé, potentiellement accessible à l'ingénieur.

**Mots clés** *sol renforcé, homogénéisation, modèle multiphasique, sismique.*

# Abstract

Despite the increasingly widespread use of reinforcement techniques of geotechnical structures by inclusions, setting up rational calculation and design methods, notably under dynamic or seismic loading conditions, remains subject to both theoretical and numerical developments. The present work is aimed at elaborating an elastodynamics-based calculation method for inclusion-reinforced ground structures, based on a multiphase modeling of the composite reinforced soil, already developed for the static or quasi-static design of this type of structures.

Starting from the general equations of elastodynamics established for a reinforced soil, modeled either as a homogeneous anisotropic medium, or as a two-phase continuum, the propagation of harmonic plane waves is first analyzed. It is shown that the classical homogenization method does not account for dispersive phenomena that can be observed in the reinforced soil, unlike the multiphase model which integrates both the interactions between the soil and the inclusions, as well as the shear and bending effects in the latter.

These theoretical developments lead to a fem-based computational code aimed at analyzing the dynamic response of reinforced soil structures, modeled as multiphase systems. The predictions derived from the implementation of this tool, which involves much lower computational times than those required by a direct fem simulation, which implies a separate mesh discretization of the soil and each individual inclusion, are then compared with the results of the latter, taken as reference for the evaluation of the dynamic stiffness of piled raft foundations. A remarkable agreement is observed between the results of both approaches, including in the case of three-dimensional configurations, thus testifying to the relevance of the multiphase model as well as to the performance of the associated numerical code as a potentially available engineering design tool.

**Keywords** *reinforced soil, homogenization, multiphase model, seismic.*

## Remerciement

Je voudrais remercier tout d'abord le Professeur Clouteau Didier qui m'a fait l'honneur de présider mon jury. Je remercie également les Professeurs Claude Boutin et Clouteau Didier pour leur lecture et leur lourde tâche de rapporteurs. J'adresse aussi mes remerciements au Professeur Alain Pecker qui a examiné mon travail, pour ses remarques constructives.

J'exprime toutes mes profondes reconnaissances à Patrick de Buhan, pour son accueil et sa direction scientifique au sein de l'équipe Multi-échelle, laboratoire Navier. La clarté de ses raisonnements scientifiques et ses qualités pédagogiques ont été pour moi très enrichissantes.

J'exprime de sincères remerciements à Ghazi Hassen pour son encadrement, ses conseils et sa disponibilité. Je dois également remercier chaleureusement tous les membres de l'équipe Multi-échelle pour la très bonne ambiance de travail qui règne au sein du laboratoire.

Je réserve enfin une pensée chaleureuse à mes parents, à ma femme et à mes enfants qui n'ont cessé de m'encourager et de me pousser vers l'avant.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction . . . . .	3
1.2	Les techniques de renforcement par inclusions rigides . . . . .	4
1.2.1	Type d'ouvrages renforcés par inclusions rigides . . . . .	4
1.2.2	Caractéristiques communes des ouvrages renforcés par inclusions rigides . . . . .	8
1.3	Méthode de calcul et de dimensionnement en conditions dynamiques	10
1.3.1	Approche fondée sur le modèle de Winkler . . . . .	10
1.3.2	Méthodes des éléments finis et des éléments de frontière . . .	11
1.3.3	Les approches par homogénéisation . . . . .	14
1.4	Vers une modélisation multiphasique pour l'analyse dynamique des sols renforcés . . . . .	16
1.4.1	Une brève histoire du modèle multiphasique . . . . .	16
1.4.2	Plan du mémoire . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Comportement dynamique d'un sol renforcé par inclusions, modélisé comme un milieu homogène anisotrope</b>	<b>21</b>
2.1	Introduction . . . . .	23
2.2	Principe de l'approche par homogénéisation classique . . . . .	23
2.3	Equation homogénéisée de l'élastodynamique . . . . .	26
2.4	Une solution particulière : la propagation d'une onde plane harmonique	27
2.4.1	Tenseur de Cristoffel et polarisation des ondes . . . . .	27
2.4.2	Exemple illustratif . . . . .	30
2.5	Traitement numérique pour un calcul dynamique . . . . .	35
2.5.1	Le problème traité . . . . .	35
2.5.2	Méthode d'homogénéisation vs simulation directe . . . . .	39
2.6	Intérêt et limite de l'approche par homogénéisation . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Modélisation dynamique du sol renforcé comme un milieu multiphasique avec prise en compte de l'interaction sol/inclusions</b>	<b>49</b>
3.1	Introduction . . . . .	51
3.2	Principe de la modélisation . . . . .	52
3.3	Equations de l'élastodynamique . . . . .	53
3.3.1	Dynamique d'un système multiphasique . . . . .	53



3.3.2	Comportement élastodynamique . . . . .	55
3.4	Application à la propagation d'une onde de compression parallèlement à la direction du renforcement . . . . .	58
3.5	Exemple d'application : Calcul de l'impédance d'une couche renforcée	65
3.5.1	Position du problème . . . . .	65
3.5.2	Solution en déplacement . . . . .	67
3.5.3	Identification des coefficients d'interaction et résultats . . . . .	73
3.6	Positionnement du modèle multiphasique par rapport à la méthode des développements asymptotiques . . . . .	76
3.6.1	Rappel de la méthode des développements asymptotiques . . . . .	76
3.6.2	Confrontation avec le modèle multiphasique . . . . .	78
3.7	Conclusion . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Mise en œuvre numérique 2D du modèle multiphasique dynamique en élasticité linéaire</b>	<b>81</b>
4.1	Introduction . . . . .	83
4.2	Formulation éléments finis en dynamique appliquée au modèle multiphasique . . . . .	83
4.3	Méthode de résolution dans le domaine temporel . . . . .	89
4.4	Conditions aux limites absorbantes . . . . .	91
4.5	Application au dimensionnement de fondations renforcées par inclusions rigides . . . . .	92
4.5.1	Position du problème . . . . .	92
4.5.2	Données du problème . . . . .	94
4.5.3	Simulation numérique et résultats . . . . .	95
4.5.4	Conclusion . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Un modèle multiphasique enrichi qui prend en compte les effets de flexion et de cisaillement dans les inclusions</b>	<b>103</b>
5.1	Introduction . . . . .	105
5.2	Description du modèle enrichi . . . . .	105
5.3	Équations de l'élastodynamique . . . . .	107
5.4	Application à la propagation d'une onde harmonique de cisaillement, parallèlement à la direction de renforcement . . . . .	109
5.5	Analyse vibratoire harmonique d'une couche renforcée . . . . .	112
5.5.1	Solution générale . . . . .	112
5.5.2	Positionnement du modèle multiphasique par rapport à la méthode des développements asymptotiques . . . . .	114

5.5.3	Vibration libre et modes propres . . . . .	115
5.5.4	Vibration forcée . . . . .	121
5.5.5	Comparaison avec la simulation directe . . . . .	123
5.6	Conclusion . . . . .	125
<b>6</b>	<b>Mise en œuvre numérique du modèle multiphasique enrichi, en dynamique et élasticité linéaire</b>	<b>127</b>
6.1	Introduction . . . . .	129
6.2	Formulation éléments finis en dynamique appliquée au modèle multiphasique enrichi . . . . .	129
6.2.1	Construction de la matrice de rigidité $[K]$ . . . . .	131
6.2.2	Matrice de masse $[M]$ . . . . .	133
6.2.3	Vecteur des forces nodales $\{F\}$ . . . . .	133
6.3	Vérification du code de calcul et première application . . . . .	134
6.3.1	Position du problème . . . . .	134
6.3.2	Paramètres du modèle multiphasique . . . . .	135
6.3.3	Résultats des simulations numériques et commentaires . . . . .	139
6.4	Extension du code de calcul multiphasique à la prise en compte de problèmes "tridimensionnels" . . . . .	142
6.4.1	Position du problème . . . . .	142
6.4.2	Application du code "tridimensionnel" aux calculs d'impédances . . . . .	145
6.5	Conclusions . . . . .	150
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>153</b>
7.1	Conclusions . . . . .	154
7.2	Quelques perspectives . . . . .	155
<b>A</b>		<b>157</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>161</b>



# Table des figures

1.1	Différents types de fondations . . . . .	4
1.2	Exemples d'ouvrages sur radier de pieux (Sudret, 1999 [51]) . . . . .	5
1.3	Les quatre constituants d'une fondation sur inclusions rigides complète . . . . .	6
1.4	Exemples d'ouvrages renforcés par inclusions rigides (Projet ASIRI, 2012 [47]) . . . . .	7
1.5	Renforcement des fondations des piles du pont Rion-Antirion . . . . .	8
1.6	Renforcement par inclusions sous le projet ICEDA (Bugey) . . . . .	8
1.7	Réseaux périodiques d'inclusions (Projet ASIRI, 2012 [47]) . . . . .	9
1.8	Modélisation de l'ensemble sol-pieux-dalle (Messioud <i>et al.</i> , 2011 [31]) . . . . .	13
1.9	Schéma de modèle simple pour groupe de pieux (a) flottant (b) encastré (Taherzadeh <i>et al.</i> , 2002 [52]) . . . . .	14
1.10	Milieu renforcé par inclusions linéaires. (a) Réseau de poutres droites identiques distribué périodiquement dans une matrice. (b) Géométrie et dimensions de la période (Soubestre, 2011 [49]) . . . . .	16
2.1	Principe de l'approche par homogénéisation classique . . . . .	24
2.2	Cellule de base du sol renforcé . . . . .	25
2.3	Notations relatives à la propagation d'une onde plane . . . . .	28
2.4	Trièdre orthonormé des directions de polarisation d'une onde plane harmonique se propageant dans le sol renforcé modélisé comme un milieu homogène anisotrope. . . . .	30
2.5	Onde plane se propageant parallèlement à la direction de renforcement . . . . .	31
2.6	Onde plane se propageant transversalement à la direction de renforcement . . . . .	32
2.7	Vitesses relatives de propagation des ondes en fonction de $\theta$ pour différentes valeurs de la fraction volumique de renforcement. . . . .	34
2.8	Inclinaison de la direction de polarisation par rapport à celle du renforcement en fonction de $\theta$ pour différentes valeurs de la fraction volumique de renforcement. . . . .	35
2.9	Structure renforcée par un groupe de pieux . . . . .	36
2.10	Disposition des pieux sous la fondation dans les quatre configurations étudiées (I) à (IV) . . . . .	38
2.11	Maillages employés dans le calcul dynamique par simulation directe . . . . .	42
2.12	Maillage du modèle de l'ouvrage homogénéisé . . . . .	42

2.13	Variation des impédances et déphasages pour une sollicitation verticale et horizontale en fonction des petits paramètres de changement d'échelle $\varepsilon^s$ et $\varepsilon^d$ . . . . .	44
2.14	Dynamique axiale et transversale d'une couche de sol renforcé d'extension horizontale infinie . . . . .	47
3.1	Principe de la modélisation multiphasique d'un sol renforcé par inclusions linéaires . . . . .	52
3.2	Contraintes, forces de volume et d'interaction dans un sol renforcé modélisé comme un milieu multiphasique (cas bidimensionnel) . . . .	53
3.3	Modélisation des efforts d'interaction " <i>de pointe</i> " . . . . .	54
3.4	Onde de compression se propageant parallèlement à la direction du renforcement . . . . .	59
3.5	Vitesse de l'onde de compression se propageant parallèlement à la direction du renforcement en fonction de la pulsation et du coefficient d'interaction. . . . .	64
3.6	Rapport entre les amplitudes $A^r/A^m$ en fonction de la pulsation et du coefficient d'interaction. . . . .	64
3.7	(a) Couche de sol renforcée par des inclusions encastrées. (b) Cellule de base . . . . .	66
3.8	(a) Couche de sol renforcée par des inclusions flottantes. (b) Cellule de base . . . . .	66
3.9	Sol renforcé par des inclusions modélisées comme des plaques . . . . .	73
3.10	Maillage par éléments finis du problème auxiliaire : (a) plaques <i>encastrées</i> (b) plaques <i>flottantes</i> . . . . .	74
3.11	Impédance verticale normalisée en fonction de la pulsation normalisée $a$ : cas des <i>plaques encastrées</i> . . . . .	75
3.12	Impédance verticale normalisée en fonction de la pulsation normalisée $a$ : cas des <i>plaques flottantes</i> . . . . .	75
4.1	Trois degrés de liberté du milieu multiphasique . . . . .	84
4.2	Algorithme d'intégration directe de Newmark . . . . .	90
4.3	Principe de la modélisation d'un système de sol infini par l'incorporation d'une frontière absorbante. . . . .	92
4.4	Fondation sur radier de pieux soumise à un chargement harmonique vertical. . . . .	93
4.5	Modélisation multiphasique d'une fondation sur radier de pieux . . . .	96

4.6	Maillage de la structure par des éléments T6 (a) Problème hétérogène direct (b) Modélisation multiphasique . . . . .	96
4.7	Évolution de l'effort résultant $F$ en fonction du temps correspondant à différentes fréquences de sollicitation . . . . .	98
4.8	Détermination de l'impédance de la structure par la méthode de résolution dans le domaine temporel . . . . .	99
4.9	Partie réelle et imaginaire de l'impédance verticale normalisée . . .	100
4.10	Module et déphasage de l'impédance verticale normalisée . . . . .	100
5.1	Modélisation multiphasique d'un sol renforcé avec prise en compte des effets de flexion . . . . .	106
5.2	Contraintes, forces de volume et forces d'interaction dans un sol renforcé modélisé comme un milieu multiphasique (cas bidimensionnel)	106
5.3	Onde de cisaillement se propageant parallèlement à la direction du renforcement . . . . .	110
5.4	Vitesse d'une onde de cisaillement se propageant parallèlement à la direction du renforcement en fonction de la pulsation et de la raideur en flexion des inclusions. . . . .	112
5.5	(a) Couche de sol renforcée par des inclusions encastrées; (b) Cellule de base . . . . .	113
5.6	Vibration libre (a) Couche de sol renforcée par des inclusions encastrées; (b) Cellule de base . . . . .	115
5.7	Evolution des coefficients $\Delta_1$ et $\Delta_2$ des trois premiers modes en fonction du paramètre $K$ . . . . .	119
5.8	Evolution des trois premières fréquences propres normalisées en fonction du paramètre $K$ . . . . .	120
5.9	Evolution des déformées normalisées des trois premiers modes en fonction du paramètre $K$ . . . . .	121
5.10	Vibration forcée (a) Couche de sol renforcée par des inclusions encastrées; (b) Cellule de base . . . . .	122
5.11	Maillage par éléments finis du problème auxiliaire relatif à la cellule de base . . . . .	123
5.12	Fonction transfert en fonction de la fréquence de la sollicitation . .	125
6.1	Les quatre degrés de liberté du milieu multiphasique en déformations planes dans le plan $(Oxy)$ . . . . .	130
6.2	Structure renforcée par un groupe de pieux . . . . .	135

---

6.3	Disposition des pieux sous la fondation dans les quatre configurations étudiées (I) à (IV) . . . . .	136
6.4	Maillages employés dans le calcul dynamique par simulation directe	138
6.5	Maillage 2D du modèle multiphasique . . . . .	139
6.6	Impédance verticale de la structure . . . . .	140
6.7	Impédance horizontale de la structure . . . . .	141
6.8	Radier de forme carrée renforcé par un groupe de pieux . . . . .	142
6.9	Sollicitation dans le plan $Oxy$ appliquée au radier de fondation . . .	144
6.10	Les cinq degrés de liberté du milieu multiphasique . . . . .	144
6.11	Structure renforcée par un groupe de 10x10 pieux . . . . .	145
6.12	Maillage par éléments finis de la structure multiphasique 3D . . . .	149
6.13	Impédance latérale de la structure : Comparaison entre les résultats de Taherzadeh <i>et al.</i> (2002) [52] et ceux de la modélisation multiphasique . . . . .	151
6.14	Impédance de renversement de la structure : Comparaison entre les résultats de Taherzadeh <i>et al.</i> (2002) [52] et ceux de la modélisation multiphasique . . . . .	152

# Liste des tableaux

1.1	Modules d'Young du sol et des matériaux de renforcement . . . . .	9
2.1	Espacement et rayon des pieux de renforcement dans les quatre configurations analysées . . . . .	38
2.2	Nombre d'éléments et de nœuds des maillages des quatre configurations analysées par simulation directe . . . . .	41
2.3	Equations de l'élastodynamique données par l'approche par homogénéisation et la méthode des développements asymptotiques . . . . .	46
3.1	Equations du modèle multiphasique et de la méthode des développements asymptotiques correspondant à deux ordres de grandeur différents de la pulsation . . . . .	79
4.1	Identification des coefficients d'interactions . . . . .	95
5.1	Fréquences propres des trois premiers modes obtenues par le modèle multiphasique et la simulation directe . . . . .	125
6.1	Paramètres du modèle multiphasique dans les quatre configurations analysées . . . . .	137
6.2	Identification des coefficients d'interaction pour les différentes configurations . . . . .	137





CHAPITRE 1

# Introduction

---

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>Les techniques de renforcement par inclusions rigides</b> . . .	<b>4</b>
1.2.1	Type d'ouvrages renforcés par inclusions rigides . . . . .	4
1.2.2	Caractéristiques communes des ouvrages renforcés par inclusions rigides . . . . .	8
<b>1.3</b>	<b>Méthode de calcul et de dimensionnement en conditions dynamiques</b> . . . . .	<b>10</b>
1.3.1	Approche fondée sur le modèle de Winkler . . . . .	10
1.3.2	Méthodes des éléments finis et des éléments de frontière . . .	11
1.3.3	Les approches par homogénéisation . . . . .	14
<b>1.4</b>	<b>Vers une modélisation multiphasique pour l'analyse dynamique des sols renforcés</b> . . . . .	<b>16</b>
1.4.1	Une brève histoire du modèle multiphasique . . . . .	16
1.4.2	Plan du mémoire . . . . .	17

---



---

## 1.1 Introduction

L'emploi des techniques de renforcement des ouvrages de fondation par inclusions de type pieux ou inclusions rigides s'est très largement répandu depuis maintenant plusieurs dizaines d'années. L'objectif de ces techniques est bien évidemment d'améliorer la performance de ces ouvrages, tant pour ce qui concerne la diminution des tassements de l'ouvrage qui en est attendue, que pour ce qui est de l'augmentation de la capacité portante.

L'objet de ce travail de thèse est d'évaluer, à travers une modélisation appropriée et la mise au point d'outils de calcul correspondants, l'amélioration du comportement dynamique de l'ouvrage, consécutive à son renforcement par inclusions. Si les méthodes numériques classiques sont suffisantes pour traiter le cas d'un petit nombre d'inclusions de renforcement, l'analyse devient impossible, ou exige tout au moins des temps de calcul considérables, dès que le nombre d'inclusions devient plus important.

On se propose donc ici de développer une méthode de calcul rapide et fiable pour le dimensionnement vis-à-vis de sollicitations dynamiques dans le cas où l'ouvrage est renforcé par un groupe de pieux ou d'inclusions rigides, en se restreignant au cas de l'élastodynamique, c'est-à-dire d'un comportement élastique linéaire des différents constituants du sol renforcé.

Ce chapitre introductif débute par un rapide descriptif des techniques de renforcement d'ouvrages par inclusions "rigides", ainsi que par la mise en évidence de caractéristiques communes à ce type de renforcement. Il se poursuit par un état des lieux concernant les modélisations et méthodes de calcul existantes pour le dimensionnement de ces ouvrages en conditions de chargement dynamique. Ce chapitre introductif s'achève enfin sur la proposition d'utiliser une modélisation multiphasique pour décrire le comportement dynamique d'un sol renforcé par inclusions, puis de la mettre en œuvre dans une méthode de calcul des ouvrages ainsi renforcés.

## 1.2 Les techniques de renforcement par inclusions rigides

### 1.2.1 Type d'ouvrages renforcés par inclusions rigides

Dans le domaine du génie civil, la technique de renforcement de sols par des inclusions linéaires "rigides" est utilisée dans plusieurs types d'ouvrages tels que :

- a) Les fondations sur réseaux de micro-pieux (Plumelle *et al.*, 2002 [42] ; Schlosser et Frank, 2003 [46]) qui sont souvent employées dans le cadre de travaux spéciaux de reprise en sous-oeuvre. Cette technique permet notamment de réhabiliter des aménagements du réseau routier dont les fondations se sont effondrées, ou de réparer des ouvrages d'art tels que ponts et bâtiments anciens endommagés par le temps ou les intempéries. Il s'agit d'un type d'ouvrage de fondation mettant en jeu des inclusions de diamètre réduit, dont la pose par forage peut être effectuée sur des chantiers difficiles d'accès.
- b) Les pentes stabilisées par l'introduction d'inclusions rigides capables de reprendre des efforts de flexion afin de diminuer fortement les mouvements de ces dernières (Gudehus et Schwarz, 1985 [23] ; Guilloux, 1993 [24])
- c) Les fondations sur groupes de pieux (Borel, 2001 [6] ; Burland *et al.*, 1977 [10]) qui consistent à mettre en place des pieux verticaux solidarisés par un radier (ou une semelle) pour transmettre le poids de l'ouvrage supporté aux couches profondes du sol de fondation. On peut distinguer dans cette catégorie deux types de fondation en considérant le contact entre le massif de sol et le radier.

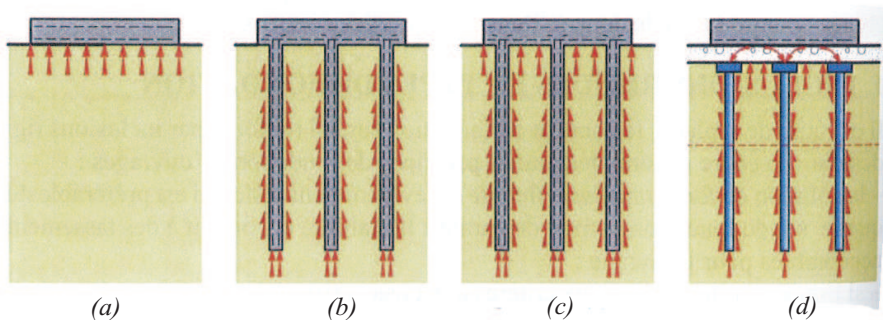
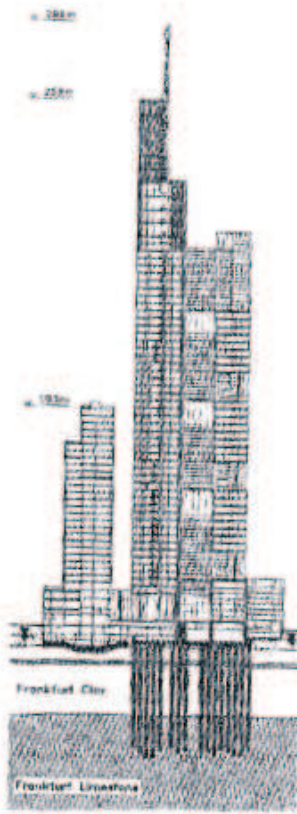
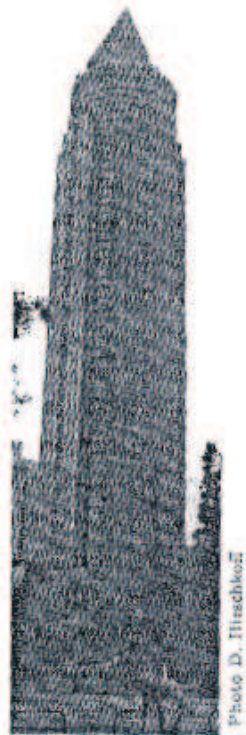


FIG. 1.1 – Différents types de fondations

Il s'agit d'une part des *fondations profondes* (FIG (1.1).b) où le radier n'est pas en contact avec le sol, les charges étant transmises par frottement le long des pieux, ainsi que par les efforts en pointe, d'autre part des *radiers de fondations sur pieux* ou *fondations mixtes* (FIG (1.1).c) ("piled raft foundation") pour lesquelles la semelle de fondation est en contact avec le sol. Cette dernière technique, d'utilisation plus récente que les fondations profondes, combine le mode de fonctionnement de ces dernières avec celui d'une fondation superficielle (FIG (1.1).a). La figure (1.2), extraite de la thèse de Sudret (1999) [51] montre l'utilisation de cette technique qui se révèle efficace pour améliorer la capacité portante de fondations d'immeubles de très grande hauteur.



(a) Tour de la Kommerzbank (1997)



(b) Messeturm (1990)



(c) Messeturm (Coupe verticale)

FIG. 1.2 – Exemples d'ouvrages sur radier de pieux (Sudret, 1999 [51])

d) Les fondations sur inclusions verticales en contact ou non avec un substratum, pour lesquelles les chargements sont répartis sur la tête des inclusions par l'intermédiaire d'un matelas de répartition constitué d'un matériau granulaire ((FIG (1.1).c) et FIG (1.3)) (Alexiew et Vogel, 2002 [1]; Berthelot *et al.*, 2003 [5]).

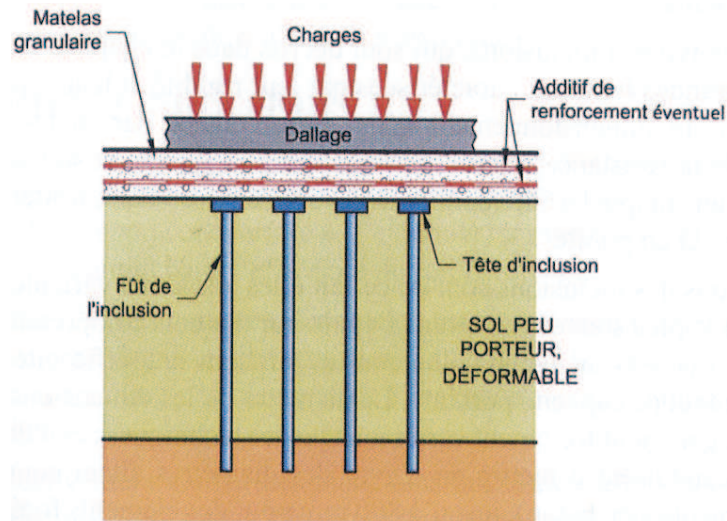
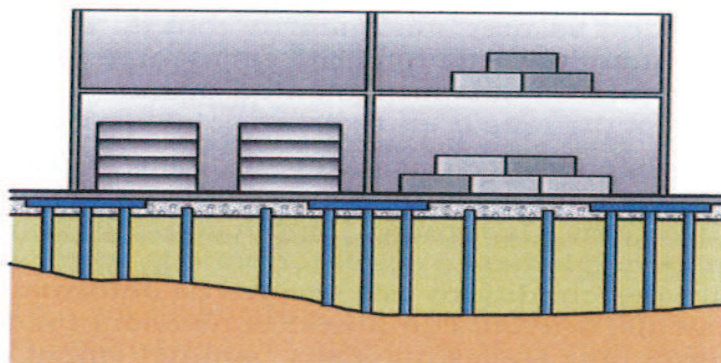
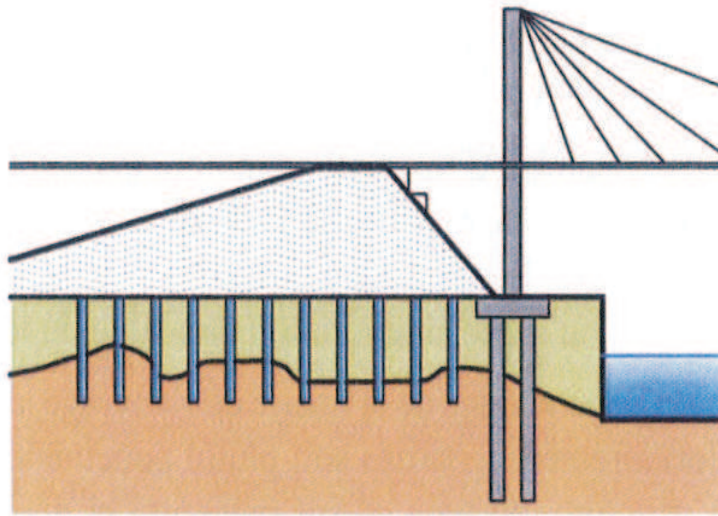


FIG. 1.3 – Les quatre constituants d'une fondation sur inclusions rigides complète

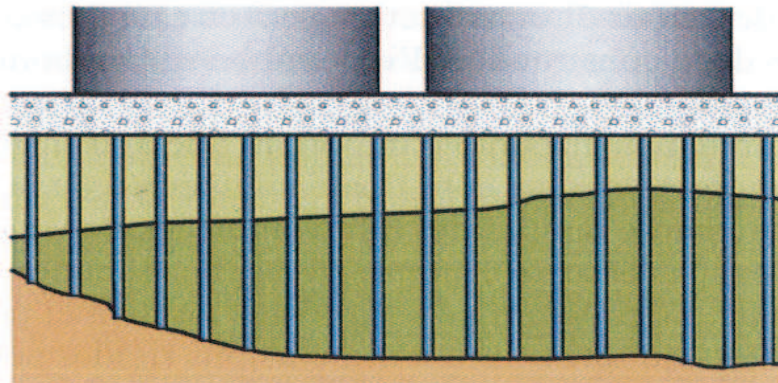
La figure (1.4) ci-dessous montre quelques exemples d'ouvrages renforcés par inclusions rigides.



(a) Dallages et fondation de bâtiments industriels



(b) Remblai d'accès à un ouvrage d'art



(b) Réservoirs et bassins

FIG. 1.4 – Exemples d'ouvrages renforcés par inclusions rigides (Projet ASIRI, 2012 [47])

Ce type de renforcement par inclusions rigides est en forte croissance depuis quelques années comme l'illustrent les figures (1.5) et (1.6), représentant respectivement le renforcement des fondations du pont de Rion-Antirion (Pecker, 2004 [41]) ou le schéma de renforcement d'une couche d'argile de grande profondeur par 292 inclusions en béton armé de 1 m de diamètre et de longueur variant entre 37 et 57 m (Projet ICEDA (Bugey), 2010).



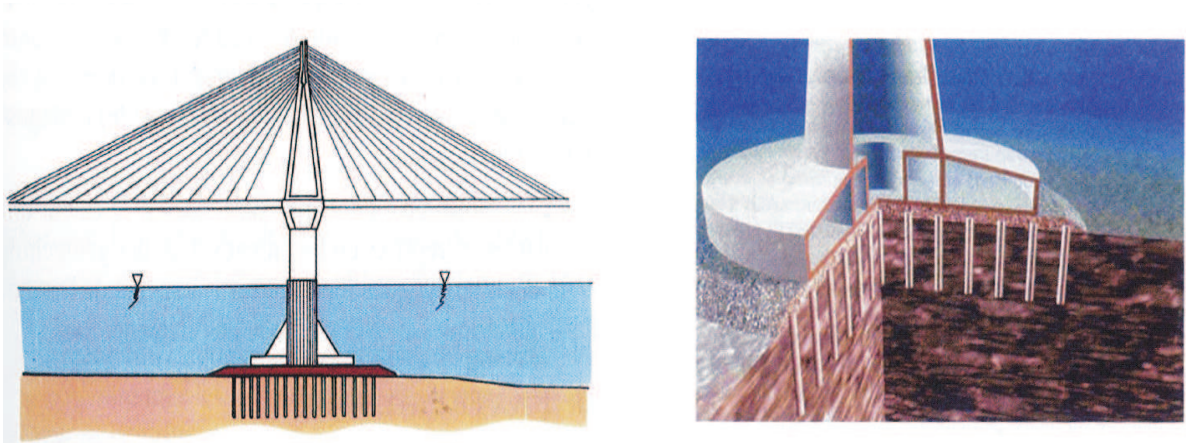


FIG. 1.5 – Renforcement des fondations des piles du pont Rion-Antirion

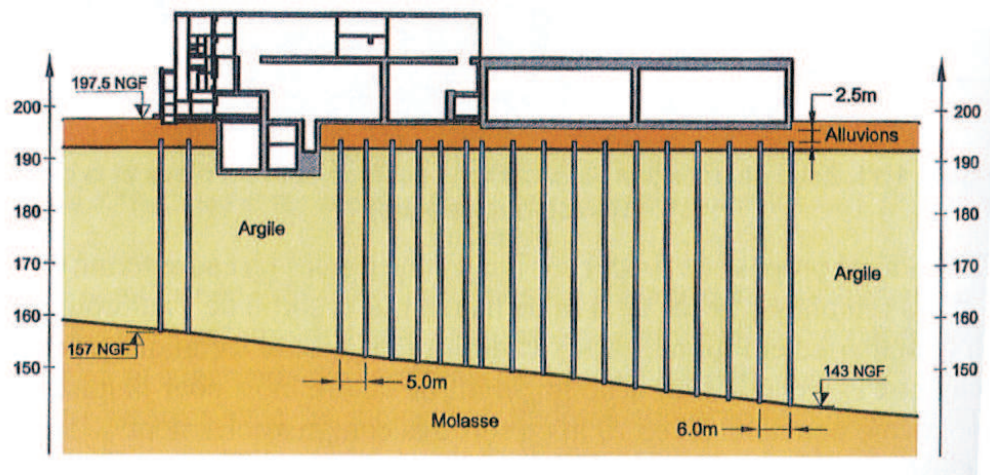


FIG. 1.6 – Renforcement par inclusions sous le projet ICEDA (Bugey)

### 1.2.2 Caractéristiques communes des ouvrages renforcés par inclusions rigides

Les types de renforcement précédents possèdent en commun les caractéristiques suivantes (Hassen, 2006 [25]) :

- ◇ un grand nombre d'inclusions (jusqu'à plusieurs centaines) ;
- ◇ une répartition des inclusions le plus souvent *périodique* selon un maillage rectan-

gulaire ou triangulaire (FIG (1.7));

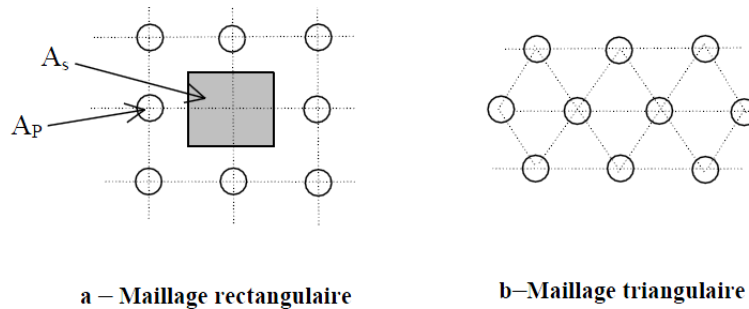


FIG. 1.7 – Réseaux périodiques d'inclusions (Projet ASIRI, 2012 [47])

- ◇ des caractéristiques mécaniques des inclusions (béton, acier, etc.) très supérieures à celles du massif environnant (argile, sable, etc.) (TAB (1.1));

Type	Module d'Young (MPa)
Argile	10 – 250
Sable	60 – 600
Béton	20000 – 40000
Acier	210000

TAB. 1.1 – Modules d'Young du sol et des matériaux de renforcement

- ◇ une fraction volumique très faible des inclusions (de l'ordre de quelques pourcents au maximum).

C'est l'ensemble de ces caractéristiques qui rend complexe, voire impossible, la simulation numérique directe du comportement (statique ou dynamique) de ce type d'ouvrages, pour lesquels, se référant par exemple à la méthode des éléments finis, il convient de discrétiser séparément le sol et chacune des inclusions de renforcement prise individuellement.

## 1.3 Méthode de calcul et de dimensionnement en conditions dynamiques

On trouvera dans Hassen (2006) [25] une synthèse des principales méthodes de calcul et de dimensionnement des fondations sur pieux ou renforcées par inclusions rigides décrites précédemment, soumises à des conditions de chargements *statiques* ou *quasi-statiques*, y compris dans le cas de la prise en compte d'un comportement non-linéaire (de type élastoplastique) des matériaux jusqu'à la rupture. Nous nous proposons de passer ici rapidement en revue quelques unes des modélisations du comportement *élastodynamique* de ces ouvrages, en particulier pour ce qui concerne l'évaluation de *l'impédance dynamique* de ce type de fondation.

### 1.3.1 Approche fondée sur le modèle de Winkler

Largement utilisé pour les calculs en statique de fondation sur groupes de pieux, le modèle de Winkler est également employé pour évaluer la raideur dynamique (impédance) de ce type d'ouvrages. Son principe repose sur une modélisation des inclusions comme des poutres, l'action du sol étant représentée par une distribution des ressorts et d'amortisseurs exerçant une densité efforts horizontaux  $q(z)$ . Cette dernière est reliée au déplacement correspondant  $Y(z)$  du pieu-inclusion par une relation du type de celle donnée par Mylonakis et Gazetas (1999) [32] pour une pulsation  $\omega$  :

$$\frac{d^4 Y(z)}{dz^4} + 4\lambda(z, \omega)^4 Y(z) = \frac{q(z)}{EI} \quad (1.1)$$

où la fonction  $\lambda(z, \omega)$  est donnée par :

$$\lambda(z, \omega) = [(K(z, \omega) - m\omega^2)/4EI]^{1/4} \quad (1.2)$$

dans laquelle  $EI$  et  $m$  désignent respectivement la raideur en flexion et la masse du pieu par unité de longueur, tandis que  $K(z, \omega) = k(z, \omega) + i\omega c(z, \omega)$  représente l'impédance complexe qui tient compte de la raideur, de l'inertie et des amortissements radiatif et matériel du sol.

Le travail le plus important dans l'utilisation du modèle de Winkler consiste à déterminer les caractéristiques du réseau de ressorts et d'amortisseurs à introduire dans les calculs. On trouve ainsi dans la littérature de nombreuses méthodes

conçues à cet effet : Gazetas et Dobry, 1984 [22]; Novak, 1974 [35]; Novak et Sheta, 1982 [36]; Pacheco, Suárez, Pando, 2008 [38], etc. Novak (1974) [35] par exemple donne une solution analytique permettant de déterminer le comportement dynamique d'un seul pieu sous l'hypothèse de déformation plane, dans laquelle le sol est schématisé comme un ensemble de couches horizontales infinitésimales agissant sur le pieu. Novak et Sheta (1982) [36] ont montré que les fonctions impédances sont affectées par l'interaction entre pieux, et avec le sol, ainsi que la fréquence, l'espacement entre pieux, le rapport de rigidité entre le sol et les pieux. Gazetas et Dobry (1984) [22] ont proposé une méthode simple permettant d'estimer les caractéristiques d'amortissement d'un pieu enfoncé dans le sol soumis à un chargement horizontal :

$$C(\omega) \approx \int_0^L c(z, \omega) Y(z)^2 dz \quad (1.3)$$

où  $c(z, \omega)$  est l'amortissement distribué le long du pieu.

Le principal avantage des méthodes basées sur l'utilisation du modèle de Winkler est la relative simplicité de mise en œuvre, la variation des propriétés de rigidité de sol avec la profondeur  $z$  étant tout naturellement prise en compte. Le principal défaut de ce type de modèle est qu'il ne prend nullement en compte l'interaction entre les ressorts, de sorte que le sol n'est plus modélisé comme un milieu continu classique.

### 1.3.2 Méthodes des éléments finis et des éléments de frontière

Compte tenu du caractère authentiquement tridimensionnel d'un ouvrage renforcé par inclusions rigides pour lequel il convient de prendre en compte les interfaces entre le sol et les inclusions, la méthode des éléments finis semble la plus appropriée pour traiter le problème du calcul élastodynamique de ce type d'ouvrage dans le cadre d'une telle modélisation. Mais cette approche se heurte à de nombreuses difficultés liées :

- au faible diamètre des pieux qui nécessite de mailler très finement le modèle au niveau des pieux et à leur proximité immédiate ;

- au nombre parfois très important d'inclusions mises en jeu conduisant à la résolution de problèmes de très grande taille ;
- à la nécessité de modéliser les interfaces sol/inclusions ;
- au fort contraste des propriétés des matériaux constituant le massif et l'inclusion, qui peut engendrer des problèmes de stabilité des calculs et de risque de divergence du résultat.

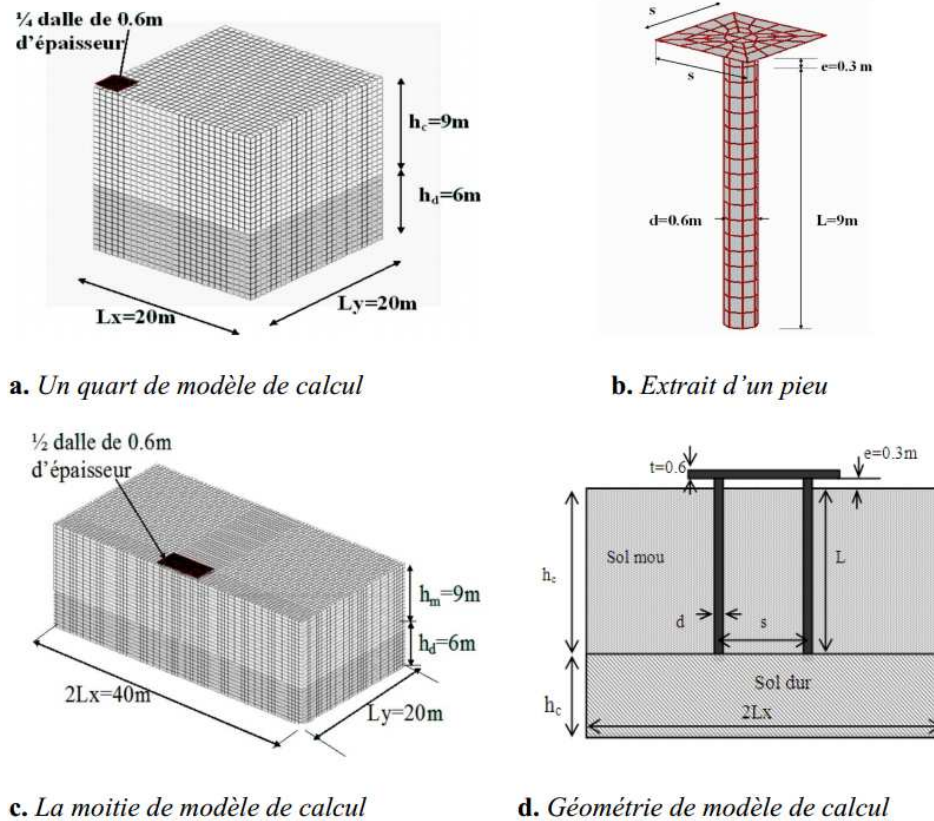
Il en résulte des temps de calcul prohibitifs, non compatibles avec la nécessité pour l'ingénieur de disposer d'une évaluation rapide des performances de l'ouvrage.

En raison de cette complexité, les analyses approfondies d'ouvrages renforcés par inclusions rigides, conduites à l'aide de la méthode des éléments finis, sont donc relativement rares. On peut citer à titre d'exemple quelques études récentes consacrées à la simulation par éléments finis tridimensionnels de ce type de problème :

- Guoxi Wu et Liam Finn (1997) [54] ont présenté une méthode des éléments finis quasi tridimensionnels, dans laquelle l'équation des ondes 3D est utilisée pour décrire la réponse dynamique du sol.
- Étude du comportement dynamique d'un groupe de pieux mis en place dans un massif de sol compressible (Messioud *et al.*, 2011 [31]). Une modélisation complexe de l'ensemble sol-pieux-dalle a été mise en œuvre par la méthode des éléments finis à l'aide du code ASTER (FIG (1.8)).

Afin de surmonter la complexité et la lourdeur de la méthode des éléments finis ci-dessus, d'autres approches numériques sont proposées :

- *la méthode des éléments de frontière* ("boundary element method") dans laquelle seuls les contours du sol, c'est à dire l'interface entre le sol et les pieux d'une part, entre le sol et le radier d'autre part, sont discrétisés (Poulos et Davis, 1980 [44]; Maeso *et al.* 2005 [37], etc.);
- la méthode des éléments finis couplée à celle des éléments de frontière où le sol est séparé en deux blocs : l'un contenant les inclusions modélisées par éléments finis (FE bloc), l'autre entourant le premier bloc modélisé par éléments de

FIG. 1.8 – Modélisation de l'ensemble sol-pieux-dalle (Messioud *et al.*, 2011 [31])

frontière (BE bloc). Ces deux blocs sont assemblés en utilisant la technique de Craig-Bampton [14] (Taherzadeh *et al.* (2002) [52], Coda, Venturini, 1998 [13]; Padron, Aznarez, Maeso, 2006 [29], etc.).

C'est sur la base de l'utilisation systématique conjointe des méthodes des éléments finis et des éléments de frontière que Taherzadeh *et al.* (2002) [52] ont établi des formules analytiques permettant d'évaluer l'impédance dynamique d'un radier de fondation reposant sur un groupe de pieux flottants ou encastrés, soumis à des sollicitations dynamiques latérales ou de renversement. De telles formules sont fondées sur la construction d'un modèle général de matrice d'impédance (FIG (1.9)) relative au comportement global de l'ouvrage : chacun des termes de cette matrice est alors identifié à partir de simulations numériques. L'avantage de cette démarche est de pouvoir disposer de formules analytiques simples, d'application directe, permettant d'évaluer les propriétés dynamiques de la fondation en fonction d'un certain nombre de paramètres géométriques et mécaniques, notamment pour des ouvrages comportant un grand nombre d'inclusions.

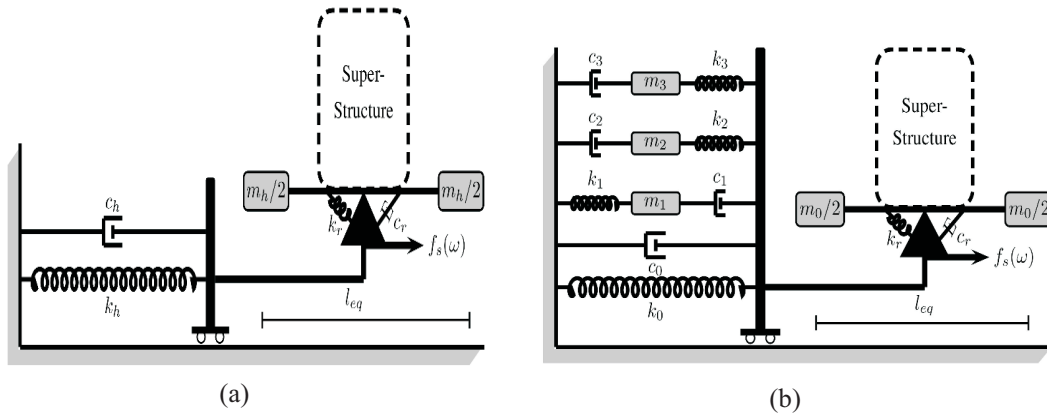


FIG. 1.9 – Schéma de modèle simple pour groupe de pieux (a) flottant (b) encastré (Taherzadeh *et al.*, 2002 [52])

La limitation évidente de cette démarche est qu'elle ne couvre pas tous les cas de figure. Les résultats obtenus par cette méthode seront en revanche très utiles comme éléments de comparaison avec notre approche (voir chapitre 6).

### 1.3.3 Les approches par homogénéisation

Prenant en compte les difficultés évoquées précédemment concernant la mise en œuvre d'approches numériques dans lesquelles les inclusions et le sol doivent être considérés comme des éléments distincts, les techniques d'homogénéisation permettent de surmonter ces difficultés en s'intéressant au comportement macroscopique du composite "sol renforcé". Dans le domaine du comportement dynamique de ce type de milieux, on peut citer un certain nombre de travaux :

- Postel (1985) [43] a caractérisé le comportement dynamique d'une fondation profonde assimilée à un milieu composite fibré dont les rigidités des constituants sont du même ordre de grandeur.
- Se référant particulièrement à la méthode des développements asymptotiques, Boutin et Auriault (1993) [8] se sont intéressés aux correcteurs d'ordres supérieurs relatifs aux phénomènes de diffraction d'ondes dans un milieu hétérogène périodique.

- Fish et Chen (2001, 2002) [19], [20], ainsi que Nagai et al. (2002) [33] ont développé un modèle non-local stabilisé pour la dispersion des ondes dans un milieu hétérogène périodique en utilisant deux paramètres d'échelle d'espace et de temps. Ce modèle a été aussi mis en œuvre par la méthode des éléments finis.
- Parnell et Abrahams (2006, 2008) [39], [40] ont établi l'équation d'onde homogénéisée à basse fréquence qui gouverne la propagation d'une onde SH parallèlement et perpendiculairement à l'axe des renforts.
- Adrioanov *et al.* (2008) [2] ont étudié la dispersion des ondes élastiques de compression dans une barre unidimensionnelle et de cisaillement transversal dans un composite périodique à fibres circulaires (2D).
- Tout récemment Soubestre (2011) [49], Boutin et Soubestre 2012 [50] ont modélisé le comportement macroscopique de milieux périodiquement renforcés par inclusions linéaires en régime dynamique. Se référant au petit paramètre  $\varepsilon$  classiquement introduit, différents ordres de grandeur du contraste de rigidité entre les modules de cisaillement des deux constituants sont pris en compte. Ils ont par exemple trouvé qu'un contraste d'ordre deux entre les rigidités génère un couplage entre le comportement de type poutre en flexion des renforts et le comportement élastique de la matrice. La dynamique du système composite est alors décrite pour différentes gammes de fréquences, passant de l'état statique aux états quasi-statiques puis dynamiques, la limite étant atteinte à des fréquences très élevées pour lesquelles l'absence de séparation d'échelle empêche d'utiliser la méthode d'homogénéisation.

Nous verrons que, dans le cas d'un contraste de rigidité d'ordre deux, évoqué ci-dessus, les résultats obtenus par la méthode des développements asymptotiques coïncident parfaitement avec ceux dérivés de la modélisation multiphasique adopté dans le présent travail (voir chapitre 4).



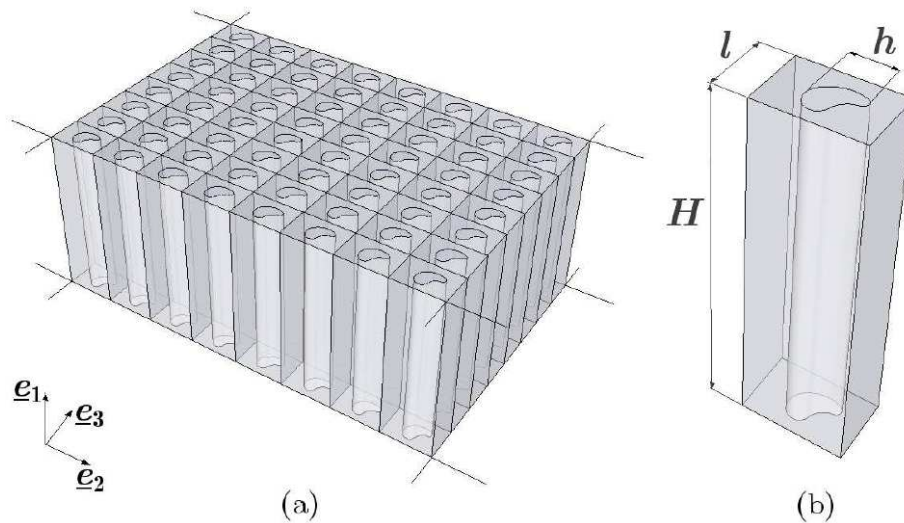


FIG. 1.10 – Milieu renforcé par inclusions linéaires. (a) Réseau de poutres droites identiques distribué périodiquement dans une matrice. (b) Géométrie et dimensions de la période (Soubestre, 2011 [49])

## 1.4 Vers une modélisation multiphasique pour l'analyse dynamique des sols renforcés

### 1.4.1 Une brève histoire du modèle multiphasique

Le modèle multiphasique a été proposé il y a maintenant près de 15 ans pour les ouvrages en sols renforcés par inclusions linéaires continues souples (terre armée, géotextiles, etc.) ou raides (inclusions "rigides", pieux, etc.). Il constitue une approche alternative, de type "milieu équivalent", construite à partir de la méthode des puissances virtuelles. Il s'agit d'un modèle purement macroscopique, dans lequel on considère que sont superposées en chaque point une particule de matrice (sol ou roche) et autant de particules de renforcement qu'il y a de directions de renforcement. Ce modèle conduit notamment à une simplification considérable du maillage de la structure en raison de son homogénéité macroscopique, et donc à une réduction très importante du temps de calcul par rapport à une simulation directe. Le développement de ce modèle s'est effectué en plusieurs étapes successives concrétisées par quatre thèses traitant du comportement statique ou quasi-statique des ouvrages :

- B.Sudret (1999) [51] a établi les bases théoriques du modèle multiphasique. Il a mis en œuvre un premier code de calcul, baptisé CASTOR, pour la résolution

numérique en élasto-plasticité des problèmes plans (déformations planes ou conditions axisymétriques) relatifs à des inclusions souples (où seuls les efforts de traction-compression sont pris en compte) en condition d'adhérence parfaite entre les phases renforcement représentant les inclusions et la matrice représentant le sol environnant. Enfin, les effets d'échelles ont été abordé concernant l'interaction sol/inclusions et l'effet de flexion dans les inclusions grâce au choix de cinématiques distinctes par phase.

- M. Bennis (2002) [3] a construit une loi d'interaction de type élasto-plastique intégrée pour les inclusions souples. Ces travaux ont donné lieu à l'implémentation du modèle dans le logiciel éléments finis CESAR du LCPC par Bourgeois *et al.* (2001) [7] (projet CASTOR).
- G. Hassen (2006) [25] s'est ensuite intéressé à l'application du modèle multiphasique au cas des inclusions rigides pour lesquelles les composantes de flexion et de cisaillement susceptibles de jouer un rôle prépondérant dans le comportement de l'ouvrage, doivent être pris en compte. Un code de calcul numérique par éléments finis, dans le cadre d'un comportement élastique ou élasto-plastique des constituants, limité au cas de l'adhérence parfaite, a été implémenté pour simuler le comportement des fondations sur radier de pieux soumises à un chargement combiné, vertical, horizontal et de renversement.
- Q. Thai Son (2009) [48] enfin a prolongé les travaux précédents à travers le développement d'un modèle multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions "souples", ainsi que d'une version plus générale du modèle multiphasique où les renforcements sont considérés comme des inclusions rigides. Il a mis au point un outil numérique capable de prendre en compte aussi bien l'interaction entre les renforcements et le sol par le biais d'une loi de comportement appropriée, que les effets de flexion et de cisaillement des inclusions rigides.

L'ambition du présent travail est d'étendre cette modélisation à la prise en compte du comportement dynamique des sols renforcés.

## 1.4.2 Plan du mémoire

Le modèle multiphasique a été jusqu'à présent exclusivement développé dans le cadre de la résolution de problèmes en conditions quasi-statiques ou pseudo-statiques (les forces d'inertie étant représentées par des forces volumiques

équivalentes). On envisage donc dans ce présent travail de traiter la question de dimensionnement des ouvrages fondés sur inclusions rigides ou groupes de pieux en conditions authentiquement dynamiques. Deux questions seront ici plus spécifiquement analysées :

- La propagation d’ondes sismiques au sein du massif renforcé, où l’on pourra s’appuyer sur les nombreux travaux portant sur l’application de la méthode d’homogénéisation des milieux périodiques à ce type de problème (méthode des développements asymptotiques). Le modèle multiphasique pourra là encore se révéler être un précieux auxiliaire pour traiter cette question dans des conditions d’efficacité numérique optimale.
  
- La détermination, pour des configurations simples de référence dans un premier temps, des fonctions d’impédance d’un sol renforcé par un réseau régulier d’inclusions verticales, en s’appuyant sur une modélisation macroscopique du sol renforcé. Cette dernière peut aller d’une approche classique par homogénéisation (le composite sol renforcé traité comme un milieu homogène anisotrope), à une approche multiphasique plus générale, prenant en compte les effets de flexion et de cisaillement des inclusions ou de leur interaction avec le sol. Une comparaison avec des approches numériques directes, conduites par d’autres équipes de recherche spécialisées dans les calculs dynamiques, et dans lesquelles les inclusions de renforcement sont traitées comme des éléments individualisés de type poutre au sein du massif de sol, doit être envisagée, avec pour objectif de valider la modélisation précédente.

En vue de répondre à ces deux questions, le plan de thèse proposé est alors le suivant :

- ◇ Le chapitre 2 commence par présenter une première version simplifiée du modèle multiphasique (approche par homogénéisation classique) où le sol renforcé est modélisé à l’échelle macroscopique comme un milieu homogène, mais anisotrope en raison de la direction préférentielle des inclusions de renforcement. Cela revient à traiter les inclusions comme des éléments de type poutres ne reprenant que des efforts axiaux et parfaitement adhérents au sol environnant. On développe alors les équations de l’élastodynamique correspondantes qui sont illustrées par l’analyse de la propagation d’ondes harmoniques dans le sol renforcé. Les limites de cette première approche simplifiée seront alors clairement mises en évidence.

- ◇ On propose ensuite dans le chapitre 3 une extension du modèle intégrant les interactions sol/inclusions. Le sol et le réseau d'inclusions sont ainsi homogénéisés séparément sous la forme de deux « phases », dénommées phase matrice et phase renforcement, en interaction mutuelle et animées de cinématiques distinctes. Le modèle est complété par l'adoption de lois d'interaction élastiques entre ces phases. Les équations généralisées de l'élastodynamique sont ensuite établies et illustrées sur l'exemple de la propagation d'une onde harmonique de compression parallèlement à la direction de renforcement dans le sol renforcé. Elles seront ensuite appliquées au calcul de l'impédance verticale d'une couche de sol renforcée et confrontées aux résultats de la méthode des développements asymptotiques.
- ◇ Le chapitre 4 est consacré à la mise en œuvre numérique du modèle multiphasique présenté dans le chapitre précédent, puis à son application à la simulation du comportement dynamique de la structure. L'exemple traité est celui d'une fondation sur radier de pieux dont on évalue la raideur dynamique verticale (impédance verticale) à l'aide du code biphasique ainsi mis au point.
- ◇ Dans le chapitre 5, le modèle multiphasique est étendu au cas où la phase renforcement représentant le réseau d'inclusions, intègre les effets de flexion et de cisaillement. Après avoir explicité les équations de la dynamique, on s'intéresse à la propagation d'une onde plane harmonique de cisaillement parallèlement à la direction de renforcement dans le massif du sol renforcé. Les équations obtenues coïncident alors parfaitement avec celles issues de la méthode des développements asymptotiques (Soubestre, 2011 [49]).
- ◇ Le chapitre 6 enfin concerne l'extension du code de calcul précédent à la prise en compte des raideurs de flexion et de cisaillement de la phase renforcement. Les résultats ainsi obtenus sont confrontés à ceux obtenus à l'aide d'une simulation directe par éléments finis dans laquelle le sol et les inclusions sont discrétisés séparément, ainsi qu'avec ceux provenant d'autres travaux (Taherzadeh *et al.*, 2002 [52]).



# Comportement dynamique d'un sol renforcé par inclusions, modélisé comme un milieu homogène anisotrope

---

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>23</b>
<b>2.2</b>	<b>Principe de l'approche par homogénéisation classique</b>	<b>23</b>
<b>2.3</b>	<b>Equation homogénéisée de l'élastodynamique</b>	<b>26</b>
<b>2.4</b>	<b>Une solution particulière : la propagation d'une onde plane harmonique</b>	<b>27</b>
2.4.1	Tenseur de Cristoffel et polarisation des ondes	27
2.4.2	Exemple illustratif	30
<b>2.5</b>	<b>Traitement numérique pour un calcul dynamique</b>	<b>35</b>
2.5.1	Le problème traité	35
2.5.2	Méthode d'homogénéisation vs simulation directe	39
<b>2.6</b>	<b>Intérêt et limite de l'approche par homogénéisation</b>	<b>45</b>

---



## 2.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de mettre en œuvre une première version simplifiée du modèle multiphasique, dénommée "*approche par homogénéisation classique*", pour analyser le comportement dynamique d'un sol renforcé par inclusions rigides. Selon cette version, le sol renforcé est modélisé à l'échelle macroscopique comme un milieu homogène, mais anisotrope en raison de la direction préférentielle des inclusions de renforcement. Cela revient à traiter les inclusions comme des éléments de type poutres ne reprenant que des efforts axiaux (à l'exclusion d'efforts de cisaillement et de flexion) et parfaitement adhérents au sol environnant. Dans le cas d'un calcul dynamique où il est légitime de se limiter au comportement élastique linéaire des différents matériaux (sol, inclusions), on commence par présenter le principe d'une telle approche et déterminer les propriétés élastiques anisotropes du milieu homogène équivalent. On développe ensuite les équations de l'élastodynamique correspondantes, qui sont illustrées par l'analyse de la propagation d'ondes harmoniques dans le sol renforcé.

En vue d'examiner la pertinence et la validité de l'approche par homogénéisation classique, on procède alors au traitement numérique des équations de l'élastodynamique associées à ce modèle. La méthode numérique ainsi mise au point est alors appliquée à l'évaluation de la raideur dynamique (impédance) d'une fondation sur radier de pieux. Les résultats ainsi obtenus sont comparés avec ceux d'une simulation directe par éléments finis dans laquelle le sol et les inclusions sont discrétisés séparément.

Cette comparaison permet de conclure que si l'utilisation du modèle homogénéisé de sol renforcé permet de réduire le temps de calcul par rapport à un calcul direct, il existe un écart entre les résultats des deux calculs que l'on peut interpréter comme un "effet d'échelle". Cette observation est confirmée par l'analyse faite par Boutin (1993) [8] et Soubestre (2011) [49] à partir de la méthode des développements asymptotiques appliquée aux équations de l'élastodynamique.

## 2.2 Principe de l'approche par homogénéisation classique

Le principe de l'approche par homogénéisation classique consiste à remplacer le sol renforcé considéré comme un milieu hétérogène périodique par un milieu



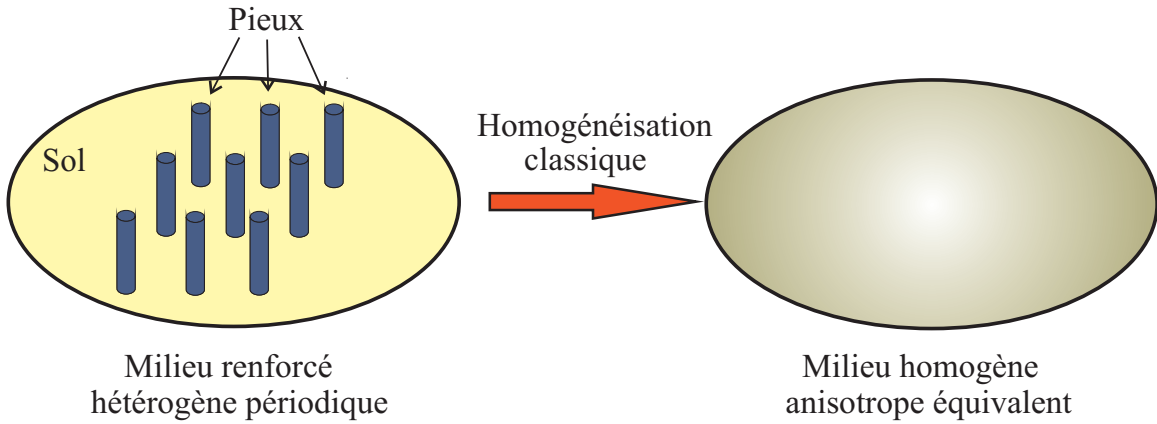


FIG. 2.1 – Principe de l’approche par homogénéisation classique

homogène anisotrope équivalent (FIG (2.1)). Les bases théoriques de l’homogénéisation des milieux périodiques ont été établies il y a plus de trente ans dans le cadre de l’élasticité linéaire, en s’appuyant notamment sur la méthode des développements asymptotiques (Duvaut, 1976 [17]; Bensoussan *et al.*, 1978 [4]; Sanchez Palencia, 1980 [45]). Cette théorie montre, qu’à la condition que le facteur d’échelle (défini comme le rapport entre la taille de la période caractéristique du milieu hétérogène et la longueur caractéristique de la structure ou la longueur d’onde de la sollicitation) soit suffisamment petit, le comportement macroscopique du milieu équivalent peut être déterminé à partir de la résolution d’un problème d’élasticité défini sur la cellule de base du milieu périodique. Dans le cas d’un sol renforcé par inclusions, cette cellule est un volume parallélépipédique dont la section droite est un carré de côté  $e$  (espacement entre deux inclusions voisines) comprenant une inclusion cylindrique circulaire de rayon  $r$  (FIG (2.2)), de sorte que la fraction volumique du renforcement vaut :

$$\eta = \frac{\pi r^2}{e^2} \quad (2.1)$$

On désigne respectivement par  $(E^s, \nu^s, \rho^s)$  et  $(E^b, \nu^b, \rho^b)$  les modules d’Young, coefficients de Poisson et masses volumiques du sol et du matériau constituant les inclusions. En général, les inclusions de renforcement sont présentées dans le sol en "très faible" fraction volumique :  $\eta \ll 1$ , celle ci excédant rarement quelques pour-cents, tandis que les propriétés mécaniques de leur matériau constitutif (acier, béton) sont considérablement plus élevées que celle du sol environnant  $E^b \gg E^s$ .

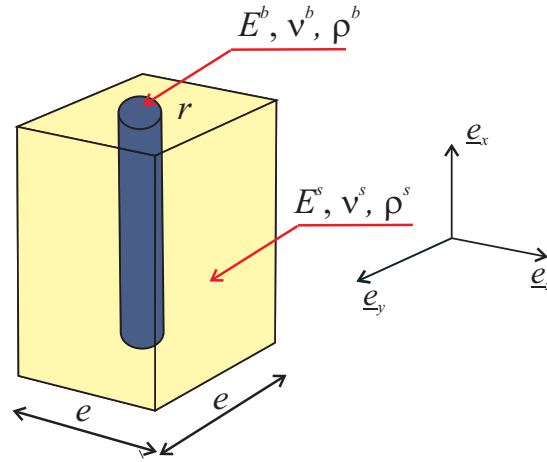


FIG. 2.2 – Cellule de base du sol renforcé

Dans ces conditions, on peut montrer (de Buhan et Hassen, 2008 [15]) que le tenseur d'élasticité macroscopique du sol ainsi renforcé peut s'écrire :

$$\mathbf{C}^{hom} = \lambda^s \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + 2\mu^s \mathbf{I} + \alpha \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (2.2)$$

où  $\underline{e}_x$  est le vecteur unitaire porté par la direction du renforcement (FIG 2.2) tandis que le paramètre scalaire  $\alpha$  est défini par :

$$\alpha = \eta E^b \quad (2.3)$$

Utilisant la notation matricielle de Voigt, ce tenseur peut s'écrire :

$$[\mathbf{C}^{hom}] = \begin{bmatrix} \lambda^s + 2\mu^s + \alpha & \lambda^s & \lambda^s & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^s & \lambda^s + 2\mu^s & \lambda^s & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^s & \lambda^s & \lambda^s + 2\mu^s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu^s \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

La loi de comportement élastique macroscopique du sol renforcé peut donc être exprimée sous la forme :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbf{C}^{hom} : \underline{\underline{\epsilon}} = \lambda^s (\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu^s \underline{\underline{\epsilon}} + \alpha \epsilon_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (2.5)$$

Il apparait ainsi que la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  peut se décomposer en la somme d'une contrainte relative au sol ( $\underline{\underline{\sigma}}^s = \lambda^s (\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu^s \underline{\underline{\epsilon}}$ ), et d'une contrainte *uniaxiale* associée au renforcement ( $\sigma^r = \alpha \epsilon_{xx}$ ), celle ci pouvant être interprétée comme l'effort axial  $N$  dans une inclusion de renforcement par *unité de surface transversale*, puisque :

$$\sigma^r = \alpha \epsilon_{xx} = \eta E^b \epsilon_{xx} = \frac{(\pi r^2) E^b \epsilon_{xx}}{e^2} = \frac{N}{e^2} \quad (2.6)$$

On en déduit immédiatement que le paramètre  $\alpha$  représente la *rigidité axiale d'une inclusion par unité de surface transversale*. L'élasticité du sol renforcé est ainsi de type *orthotrope de révolution* autour de l'axe de renforcement. Elle ne dépend que de trois paramètres, que sont les deux coefficients d'élasticité du sol (isotrope) et le paramètre  $\alpha$ . Il importe de noter que, même si le matériau de renforcement est beaucoup plus raide que le sol, ce dernier paramètre est du même ordre de grandeur que le module d'élasticité du sol en raison de la très faible valeur de  $\eta$ .

### 2.3 Equation homogénéisée de l'élastodynamique

L'équation de l'élastodynamique peut généralement s'écrire à partir de l'équation générale de la dynamique :

$$\text{div } \underline{\underline{\Sigma}} + \rho^{hom} (\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{\gamma}}) = 0 \quad (2.7)$$

dans laquelle :

◇  $\rho^{hom}$  est la *masse volumique moyenne* du sol renforcé qui, compte tenu de la très faible fraction volumique du renforcement, est quasiment égale à celle du sol :

$$\rho^{hom} = (1 - \eta) \rho^s + \eta \rho^b \approx \rho^s \quad (2.8)$$

◇  $\underline{\gamma}$  désigne le champ d'accélération défini par la dérivée seconde par rapport au temps du champ de déplacement  $\underline{\xi}$  :

$$\underline{\gamma} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\xi} \quad (2.9)$$

◇  $\underline{F}$  est le champ des forces de volume, telles que la pesanteur.

Reprenant l'équation (2.5) en notation intrinsèque :

$$\text{div } \underline{\underline{\Sigma}} = (\lambda^s + \mu^s) \underline{\text{grad}}(\text{div } \underline{\xi}) + \mu^s \Delta \underline{\xi} + \alpha \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} \underline{e}_x \quad (2.10)$$

Finalement, en introduisant l'équation (2.10) dans (2.7), l'équation de l'élastodynamique du sol renforcé modélisé comme un milieu homogène anisotrope peut s'écrire sous la forme :

$$(\lambda_s + \mu_s) \underline{\text{grad}}(\text{div } \underline{\xi}) + \mu_s \Delta \underline{\xi} + \alpha \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} \underline{e}_x + \rho^{\text{hom}} \left( \underline{F} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\xi}(x, t) \right) = 0 \quad (2.11)$$

## 2.4 Une solution particulière : la propagation d'une onde plane harmonique

Nous nous proposons d'appliquer l'équation (2.11) au cas particulier d'une onde plane harmonique.

### 2.4.1 Tenseur de Cristoffel et polarisation des ondes

L'équation de propagation d'une onde plane harmonique dans un milieu continu homogène mais anisotrope (le sol renforcé homogénéisé) représente une solution particulière de l'équation de l'élastodynamique (2.11). Dans ce cas, la solution en déplacement est recherchée sous la forme :

$$\underline{\xi}(x, t) = A \underline{d} \sin \omega \left( t - \frac{\underline{p} \cdot \underline{x}}{c} \right) \quad (2.12)$$

où  $A$  représente l'amplitude de l'onde,  $\underline{d}$  est un vecteur unitaire définissant la

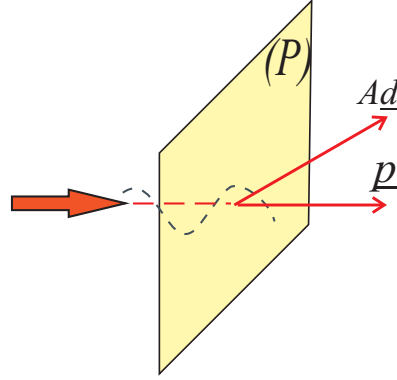


FIG. 2.3 – Notations relatives à la propagation d'une onde plane

direction de polarisation,  $\underline{p}$  celui associé à la direction de propagation (FIG (2.3)), tandis que  $c$  désigne la célérité de l'onde et  $\omega = 2\pi/T$  sa pulsation.

Le champ de déformation vaut alors :

$$\underline{\underline{\xi}} = -A(\omega/c)(\underline{d} \otimes^s \underline{p})^1 \cos \omega(t - \frac{\underline{p} \cdot \underline{x}}{c}) \quad (2.13)$$

et le champ de contrainte associé par la loi de comportement élastique (2.5) :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbf{C}^{hom} : \underline{\underline{\xi}} = -A(\omega/c)[\mathbf{C}^{hom} : (\underline{d} \otimes^s \underline{p})] \cos \omega(t - \frac{\underline{p} \cdot \underline{x}}{c}) \quad (2.14)$$

tandis que le champ d'accélération prend la forme suivante :

$$\underline{\underline{\gamma}} = \frac{\partial^2 \underline{\underline{\xi}}}{\partial t^2} = -\omega^2 A \underline{d} \sin \omega(t - \frac{\underline{p} \cdot \underline{x}}{c}) \quad (2.15)$$

La divergence du champ de contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{\underline{\Sigma}} &= -A(\frac{\omega}{c})[\mathbf{C}^{hom} : (\underline{d} \otimes^s \underline{p})] \cdot \underline{\text{grad}}[\cos \omega(t - \frac{\underline{p} \cdot \underline{x}}{c})] \\ &= -A(\frac{\omega}{c})^2[\mathbf{C}^{hom} : (\underline{d} \otimes^s \underline{p})] \cdot \underline{p} \sin \omega(t - \frac{\underline{p} \cdot \underline{x}}{c}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

---

<sup>1</sup> $\underline{a} \otimes^s \underline{b} = \frac{1}{2}(\underline{a} \otimes \underline{b} + \underline{b} \otimes \underline{a})$

Reportant les expressions (2.15) et (2.16) dans l'équation de la dynamique (2.7), où l'on néglige les forces de volume, il vient alors en simplifiant par  $(\frac{\omega}{c})^2 A \sin \omega(t - \frac{\underline{p} \cdot \underline{x}}{c})$  :

$$[\mathbf{C}^{hom} : (\underline{d} \overset{s}{\otimes} \underline{p})] \cdot \underline{p} = \rho^{hom} c^2 \underline{d} \quad (2.17)$$

Remplaçant alors le tenseur d'élasticité macroscopique par son expression (2.2), on obtient finalement :

$$[(\lambda^s \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + 2\mu^s \mathbf{I} + \alpha \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) : (\underline{d} \overset{s}{\otimes} \underline{p})] \cdot \underline{p} = \rho^{hom} c^2 \underline{d} \quad (2.18)$$

soit :

$$[\underline{\underline{\Gamma}} - \rho^{hom} c^2 \underline{\underline{1}}] \cdot \underline{d} = 0 \quad (2.19)$$

dans laquelle  $\underline{\underline{\Gamma}}$  est appelé *tenseur de Cristoffel* (Navi, 2006 [34]), qui est ici égal à :

$$\underline{\underline{\Gamma}} = (\lambda^s + \mu^s) \underline{p} \otimes \underline{p} + \mu^s \underline{\underline{1}} + \alpha (\underline{p} \cdot \underline{e}_x)^2 \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (2.20)$$

Désignant par  $\Gamma_K$ ,  $K = I, II, III$  les valeurs propres de ce tenseur de Cristoffel et par  $\underline{d}_K$  les valeurs propres associées de sorte que :

$$K = I, II, III : \underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{d}_K = \Gamma_K \underline{d}_K \quad (\text{sans sommation}) \quad (2.21)$$

l'équation (2.19) est bien vérifiée pour  $\underline{d} = \underline{d}_K$  à la condition que :

$$c_K = \sqrt{\frac{\Gamma_K}{\rho^{hom}}} \quad (2.22)$$

Il existe donc trois directions de polarisation orthogonales entre elles auxquelles sont associées trois vitesses d'ondes données par l'équation (2.22). L'expression (2.20) de  $\underline{\underline{\Gamma}}$  montre que le vecteur unitaire  $\underline{d}_{III}$  perpendiculaire au plan  $(\underline{p}, \underline{e}_x)$  est une direction de polarisation associée à la vitesse d'onde :

$$c_{III} = \sqrt{\frac{\Gamma_{III}}{\rho^{hom}}} \quad (2.23)$$

les deux autres directions étant contenues dans le plan  $(\underline{p}, \underline{e}_x)$ .

## 2.4.2 Exemple illustratif

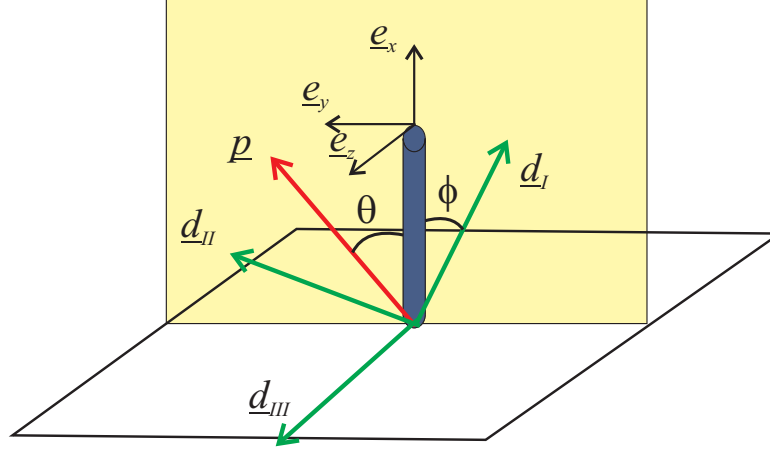


FIG. 2.4 – Trièdre orthonormé des directions de polarisation d’une onde plane harmonique se propageant dans le sol renforcé modélisé comme un milieu homogène anisotrope.

L’espace est repéré par le *trièdre orthonormé direct*  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  tel que la direction de propagation de l’onde harmonique s’écrit (FIG (2.4)) :

$$\underline{p} = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_y \quad \text{avec} \quad \theta = [0, 90^\circ] \quad (2.24)$$

La matrice du tenseur de Cristoffel (2.20) s’écrit alors dans la base  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  :

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \begin{bmatrix} (\lambda^s + \mu^s + \alpha) \cos^2 \theta + \mu^s & (\lambda^s + \mu^s) \cos \theta \sin \theta & 0 \\ (\lambda^s + \mu^s) \cos \theta \sin \theta & \lambda^s + 2\mu^s - (\lambda^s + \mu^s) \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & \mu^s \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

On distingue tout d’abord deux cas particuliers où l’onde harmonique se propage *parallèlement* ( $\underline{p} = \underline{e}_x$ ,  $\theta = 0^\circ$ ) et *transversalement* ( $\underline{p} \cdot \underline{e}_x = 0$ ,  $\theta = 90^\circ$ ) à la direction de renforcement.

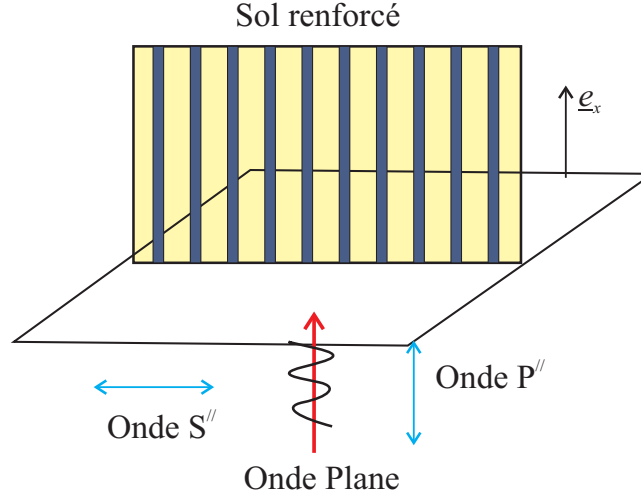


FIG. 2.5 – Onde plane se propageant parallèlement à la direction de renforcement

#### 2.4.2.1 Onde se propageant parallèlement à la direction du renforcement ( $\theta = 0^\circ$ )

L'expression (2.25) du tenseur de Cristoffel devient dans ce cas :

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \begin{bmatrix} \lambda^s + 2\mu^s + \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \mu^s & 0 \\ 0 & 0 & \mu^s \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

ce qui nous donne immédiatement les trois directions principales de polarisation : l'une est la direction du renforcement à laquelle est associée une *onde de compression* (onde P) de vitesse de propagation égale à (voir l'équation (2.22)) :

$$c_P^{//} = \sqrt{\frac{\lambda^s + 2\mu^s + \alpha}{\rho^{hom}}} \approx \sqrt{\frac{\lambda^s + 2\mu^s + \alpha}{\rho^s}} \quad (2.27)$$

les deux autres étant les directions perpendiculaires à la direction du renforcement, auxquelles sont associées des *ondes de cisaillement* (ondes S) de même vitesse que celle du sol non renforcé (FIG (2.5)) :

$$c_S^{//} = \sqrt{\frac{\mu^s}{\rho^{hom}}} \approx \sqrt{\frac{\mu^s}{\rho^s}} \quad (2.28)$$



### 2.4.2.2 Onde se propageant transversalement à la direction du renforcement ( $\theta = 90^\circ$ )

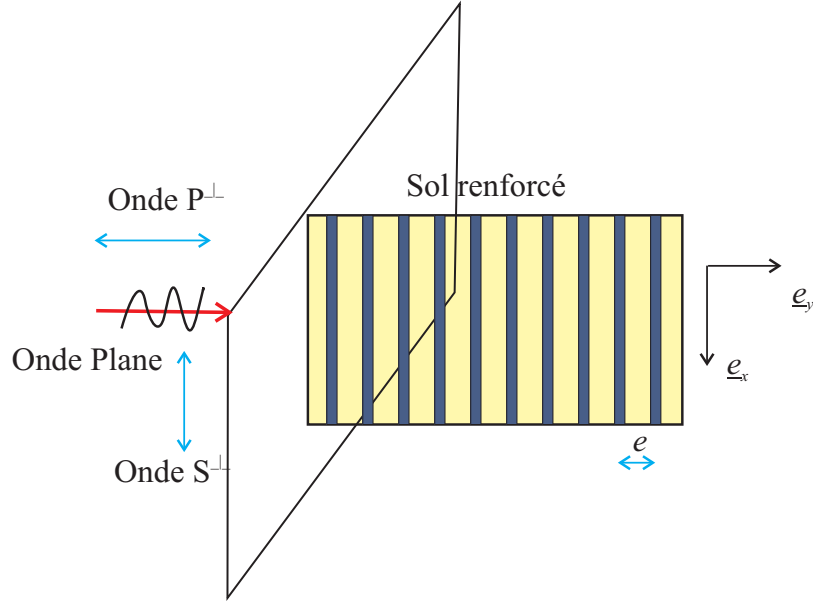


FIG. 2.6 – Onde plane se propageant transversalement à la direction de renforcement

La matrice du tenseur de Cristoffel devient :

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \begin{bmatrix} \mu^s & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^s + 2\mu^s & 0 \\ 0 & 0 & \mu^s \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

où le terme associé au renforcement disparaît, de sorte que l'onde n'est pas affectée par le renforcement. On retrouve alors directement les ondes P et S de vitesses respectives suivantes :

$$c_P^\perp = \sqrt{\frac{\lambda^s + 2\mu^s}{\rho^s}} \text{ et } c_S^\perp = \sqrt{\frac{\mu^s}{\rho^s}} \quad (2.30)$$

correspondant au sol non renforcé (FIG (2.6)).

### 2.4.2.3 Cas général ( $\theta \in ]0, 90^\circ[$ )

Compte tenu de l'expression (2.25) du tenseur de Cristoffel dans le repère  $Oxyz$ , les valeurs propres dans le plan  $(x, y)$  contenant la direction du renforcement  $\underline{e}_x$  et

la direction de propagation  $\underline{p}$  sont :

$$\begin{cases} \Gamma_I = \frac{\Gamma_{xx} + \Gamma_{yy}}{2} + \frac{\sqrt{(\Gamma_{xx} - \Gamma_{yy})^2 + 4\Gamma_{xy}^2}}{2} \\ \Gamma_{II} = \frac{\Gamma_{xx} + \Gamma_{yy}}{2} - \frac{\sqrt{(\Gamma_{xx} - \Gamma_{yy})^2 + 4\Gamma_{xy}^2}}{2} \end{cases} \quad (2.31)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx} &= (\lambda^s + \mu^s + \alpha) \cos^2 \theta + \mu^s \\ \Gamma_{yy} &= \lambda^s + 2\mu^s - (\lambda^s + \mu^s) \cos^2 \theta \\ \Gamma_{zz} &= (\lambda^s + \mu^s) \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (2.32)$$

L'inclinaison  $\phi$  par rapport à la direction de renforcement du vecteur propre unitaire  $\underline{d}_I$  associé à  $\Gamma_I \geq \Gamma_{II}$  (FIG (2.4)) est donnée par :

$$\phi = \arctan\left(\frac{\Gamma_I - \Gamma_{xx}}{\Gamma_{xy}}\right) \quad (2.33)$$

On choisit alors le jeu de valeurs numériques suivant, typique d'un renforcement de sol par inclusions rigides :

$$E^b = 30000 \text{ MPa}; E^s = 50 \text{ MPa}; \nu^s = 0,3; \rho^{hom} = 2000 \text{ kg/m}^3$$

et l'on représente pour différentes valeurs de la fraction volumique  $\eta$  du renforcement :

- les célérités relatives des ondes dans les directions de polarisation  $\underline{d}_I$  et  $\underline{d}_{II}$  (FIG (2.7)) :

$$\frac{c_I}{c_S} = \sqrt{\frac{\Gamma_I}{\mu^s}}, \quad \frac{c_{II}}{c_S} = \sqrt{\frac{\Gamma_{II}}{\mu^s}} \quad (2.34)$$

- l'inclinaison  $\phi$  de la direction de polarisation  $\underline{d}_I$  par rapport au renforcement. (FIG (2.8))

On observe sur ces différentes figures que l'inclinaison  $\phi$  est toujours inférieure à  $\theta$ , hormis pour les cas particuliers  $\theta = 0$  et  $\theta = 90^\circ$ . La première célérité  $c_I$  est une fonction décroissante de l'inclinaison  $\theta$  de la direction de propagation avec les valeurs particulières :

$$\frac{c_I}{c_S}(\theta = 0^\circ) = \sqrt{\frac{\lambda^s + 2\mu^s + \alpha}{\mu^s}}, \quad \frac{c_I}{c_S}(\theta = 90^\circ) = \sqrt{\frac{\lambda^s + 2\mu^s}{\mu^s}} \quad (2.35)$$

La célérité  $c_{II}$  est tout d'abord une fonction croissante de  $\theta$ , puis décroissante avec les valeurs particulières :

$$\frac{c_{II}}{c_S}(\theta = 0^\circ) = \frac{c_{II}}{c_S}(\theta = 90^\circ) = 1 \quad (2.36)$$

Ces différentes vitesses augmentent avec le taux de renforcement  $\eta$ , tandis que l'écart entre  $\phi$  et  $\theta$  s'accroît.

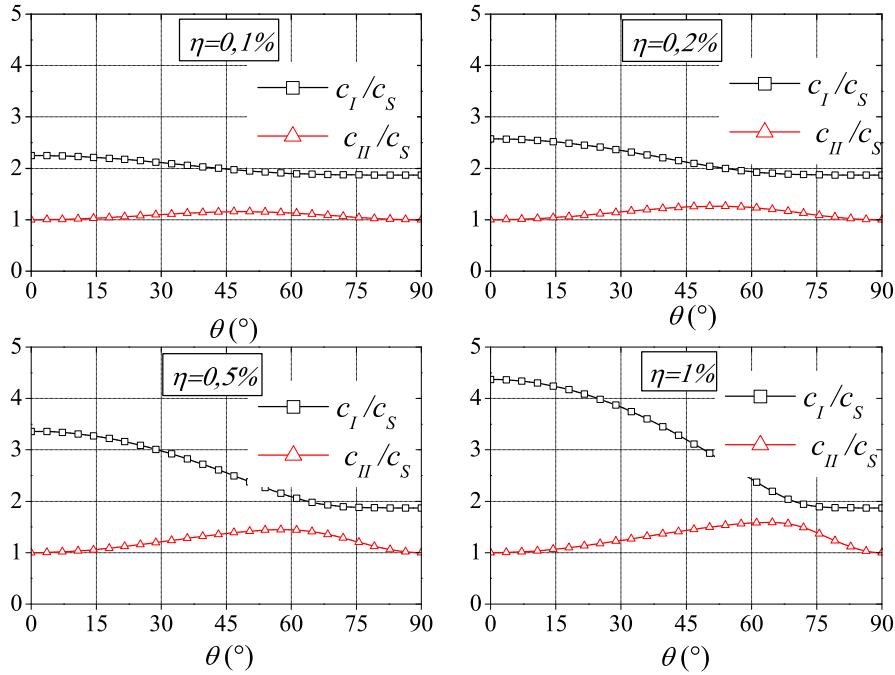


FIG. 2.7 – Vitesses relatives de propagation des ondes en fonction de  $\theta$  pour différentes valeurs de la fraction volumique de renforcement.

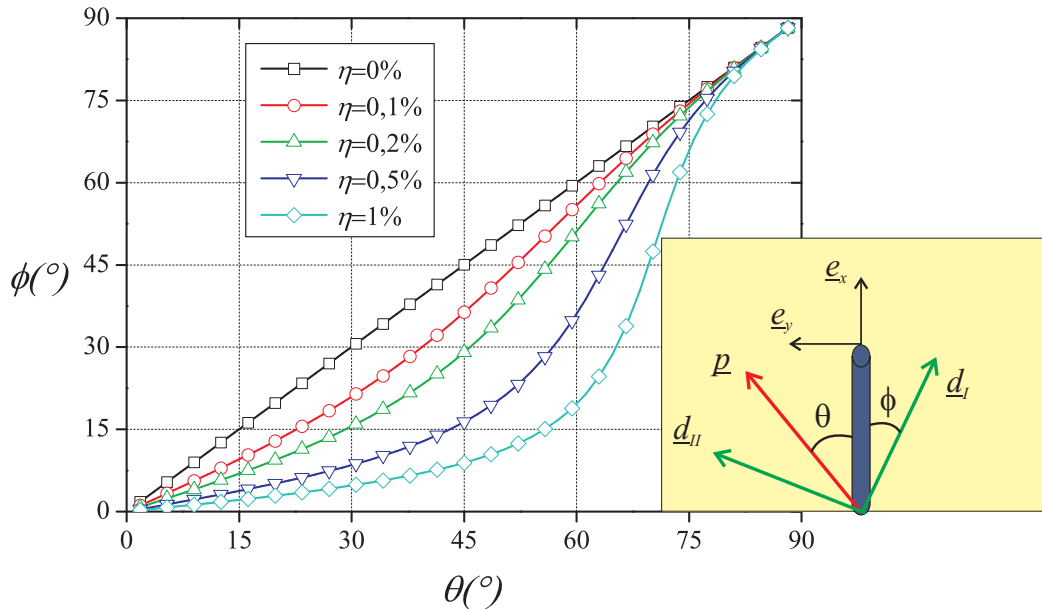


FIG. 2.8 – Inclinaison de la direction de polarisation par rapport à celle du renforcement en fonction de  $\theta$  pour différentes valeurs de la fraction volumique de renforcement.

## 2.5 Traitement numérique pour un calcul dynamique

### 2.5.1 Le problème traité

Nous nous proposons d'illustrer l'application de l'approche par homogénéisation classique précédente à l'analyse du comportement dynamique d'une structure constituée d'un radier de fondation de largeur  $B$  (semelle filante) reposant sur un massif de sol d'épaisseur  $H$ , renforcé par un groupe de pieux flottants de longueur  $L$  comme indiqué sur la figure (2.9). Cette structure est considérée comme infinie suivant la direction de l'axe  $Oz$ , ses bords latéraux étant positionnés à la distance  $D/2$  de l'axe de symétrie de la fondation. Le massif est en outre délimité en partie inférieure par un substratum supposé indéformable. Des conditions de type frontière absorbante (Lysmer and Kuhlemeyer, 1969 [30]) sont appliquées sur ces bords latéraux.

Les pieux de renforcement placés sous le radier de fondation sont disposés selon un maillage périodique de section carrée, où  $e$  désigne l'espacement entre deux

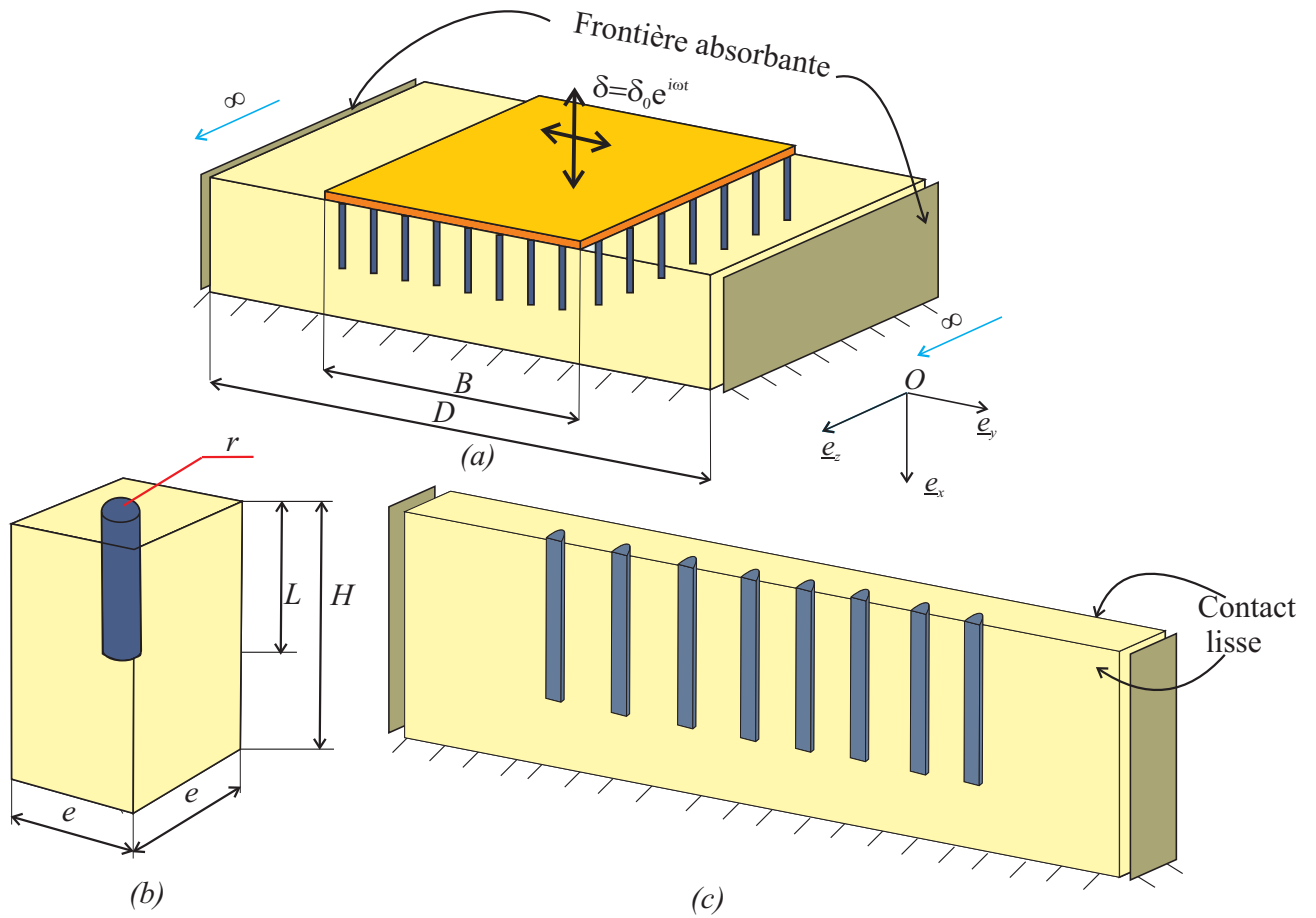


FIG. 2.9 – Structure renforcée par un groupe de pieux

pieux voisins. L'ouvrage est soumis à une sollicitation harmonique caractérisée par un déplacement horizontal ou vertical uniforme de la forme :

$$\delta = \delta_0 e^{i\omega t} \quad (2.37)$$

imposé en tout point de l'aire de contact entre le radier et le sol renforcé, où  $\omega$  désigne la pulsation de la sollicitation.

Il est alors facile de voir que la résolution de ce problème se ramène à celle d'une demie "tranche" d'épaisseur  $e/2$  parallèle au plan  $Oxy$  et contenant une seule demie rangée de pieux comme indiqué sur la figure (2.9).c, les conditions aux limites appliquées sur les deux faces de cette tranche correspondant à un contact lisse avec

les plans verticaux correspondants. La réponse de l'ouvrage en *régime permanent* correspond à la résultante (horizontale ou verticale) par unité de longueur selon  $Oz$  des efforts exercés par le radier sur le massif, qui peut s'écrire classiquement :

$$F = F_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (2.38)$$

où  $\varphi$  est l'angle de déphasage.

On se propose d'évaluer *l'impédance* (ou la *raideur dynamique*) de la fondation définie par le nombre complexe :

$$K = \frac{F}{\delta} = \frac{F_0}{\delta_0} e^{i\varphi} = K_0 e^{i\varphi} \quad (2.39)$$

où  $K_0$  désigne le module de l'impédance.

On retient les données suivantes pour réaliser les simulations numériques présentées ci-après :

- Géométrie :  $B = 8$  m,  $D = 30$  m,  $H = 30$  m,  $L = 20$  m ;
- Caractéristiques du sol :  $E^s = 5$  MPa,  $\nu^s = 0,3$ ,  $\rho^s = 1750$  kg/m<sup>3</sup> ;
- Caractéristiques du matériau constituant les pieux (béton) :  $E^b = 20$  GPa,  $\nu^b = 0,3$ ,  $\rho^b = 2500$  kg/m<sup>3</sup> ;

Quatre configurations représentées sur la figure (2.10) et reportées sur le tableau (2.1) ont été analysées. Elles correspondent toutes au *même taux de renforcement* égal à :

$$\eta = \frac{\pi r^2}{e^2} \approx 3,14\% \quad (2.40)$$

mais à des valeurs différentes, reportées dans le tableau (2.1), du *facteur d'échelle statique*, défini comme le rapport entre l'espacement entre deux pieux voisins et la largeur de la fondation :

$$\varepsilon^s = \frac{e}{B} = 0,125 - 0,25 - 0,5 - 1 \quad (2.41)$$

Configuration	Pieux/tranche	$r(m)$	$e(m)$	$\varepsilon^s$	$\eta(\%)$
I	8	0,1	1	0,125	3,14
II	4	0,2	2	0,25	3,14
III	2	0,4	4	0,5	3,14
IV	1	0,8	8	1	3,14

TAB. 2.1 – Espacement et rayon des pieux de renforcement dans les quatre configurations analysées

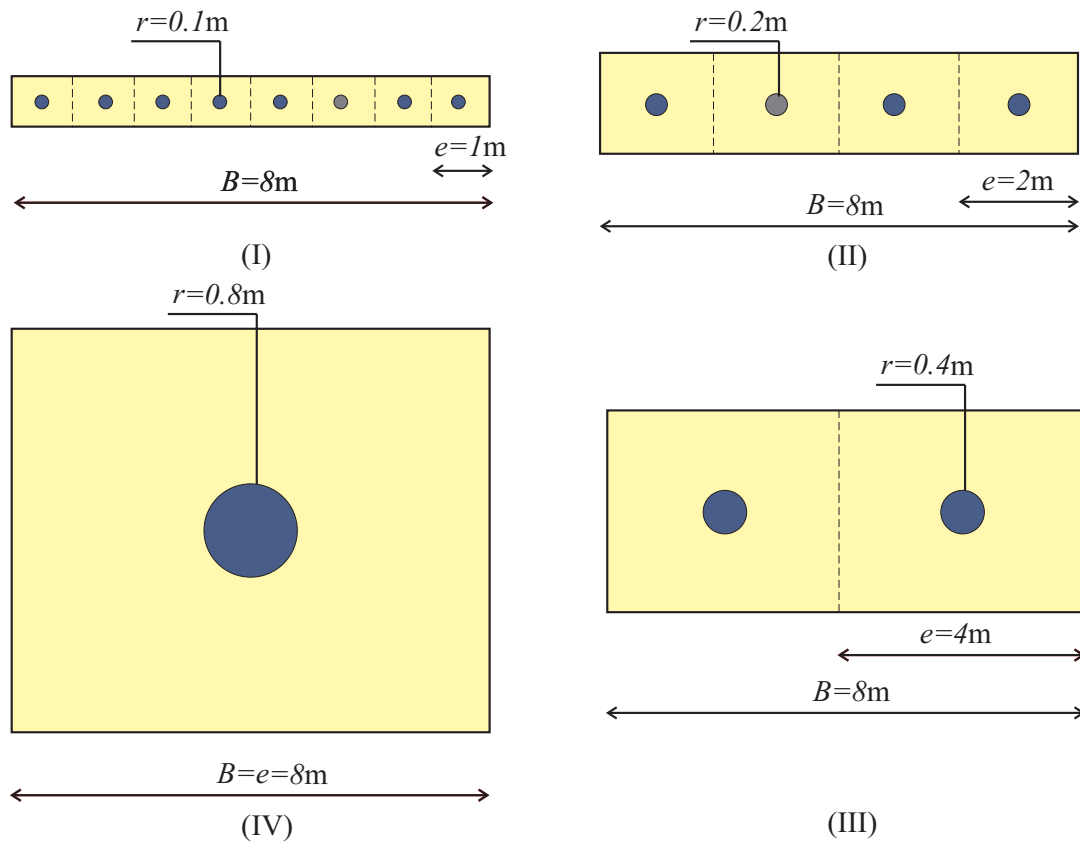


FIG. 2.10 – Disposition des pieux sous la fondation dans les quatre configurations étudiées (I) à (IV)

Par ailleurs, en vue d'évaluer les caractéristiques dynamiques du problème, on introduit aussi le *paramètre de changement d'échelle dynamique*  $\varepsilon^d$  :

$$\varepsilon^d = \frac{e}{\lambda} \quad (2.42)$$

dans laquelle  $\lambda$  est la longueur d'une onde de cisaillement se propageant dans le sol :

$$\lambda = \frac{2\pi V_s}{\omega} \quad (2.43)$$

où  $V_s$  désigne la vitesse de l'onde. On obtient :

$$\varepsilon^d = \frac{e\omega}{2\pi V_s} \quad (2.44)$$

A  $e$  et  $V_s$  fixés, le paramètre adimensionnel  $\varepsilon^d$  est donc proportionnel à la pulsation  $\omega$ .

## 2.5.2 Méthode d'homogénéisation vs simulation directe

### 2.5.2.1 Description de la méthode numérique employée

Dans le but de déterminer la fonction d'impédance (2.39) de la fondation, on se réfère à la méthode de résolution dans le domaine fréquentiel (Guoxi Wu et Liam Finn, 1997 [54] ; Wolf, 2004 [53]). Cette dernière permet de calculer directement la solution du problème en régime permanent ou stationnaire, sans aborder la phase transitoire. La description de cette méthode est brièvement présentée ci-dessous.

Étant donnée une formulation éléments finis du problème, cette dernière peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\} \quad (2.45)$$

dans laquelle  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  désignent respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité,  $\{F\}$  et  $\{U\}$  sont les vecteurs de force et de déplacement en tous les points de la structure discrétisée.

Compte tenu de la sollicitation harmonique (2.37) appliquée à l'ouvrage, les vecteurs de forces  $\{F\}$  et de déplacements  $\{U\}$  en régime permanent peuvent



s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \{F\} = \{F_0\}e^{i\omega t} \\ \{U\} = \{U_0\}e^{i\omega t} \end{cases} \quad (2.46)$$

où  $\{F_0\}$  et  $\{U_0\}$  sont respectivement les vecteurs d'amplitudes complexes des vecteurs de force et de déplacement.

Reportant ces expressions dans la formulation (2.45), on obtient alors :

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]) \{U_0\}e^{i\omega t} = \{F_0\}e^{i\omega t} \quad (2.47)$$

soit après simplification par  $e^{i\omega t}$  :

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{U_0\} = \{F_0\} \quad (2.48)$$

ou en posant :  $[S] = -\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]$  :

$$[S]\{U_0\} = \{F_0\} \quad (2.49)$$

La résolution du système linéaire (2.49) permet de déterminer directement la réponse de la structure en régime permanent à une sollicitation harmonique. Il suffit pour cela de calculer les matrices de rigidité  $[K]$  et de masse  $[M]$ , ainsi que la matrice d'amortissement  $[C]$ , qui est souvent présentée sous la forme de Rayleigh (E. Boyere, 2011 [9] ; K. Chopra, 1995 [12]) :

$$[C] = \alpha_R[M] + \beta_R[K] \quad (2.50)$$

où  $\alpha_R$  et  $\beta_R$  sont des coefficients expérimentaux.

En ce qui concerne l'approche par homogénéisation classique, compte tenu de (2.8), la matrice de masse homogénéisée n'est autre que celle du sol non renforcé, tandis que, en vertu de (2.2) la matrice de rigidité homogénéisée  $[K] = [K]^{hom}$  est la somme de celle du sol  $[K]^s$  et de celle du renforcement  $[K]^r$  :

$$[K] = [K]^{hom} = [K]^s + [K]^r \quad (2.51)$$

Il convient de remarquer que le maillage utilisé pour le calcul éléments finis du sol renforcé est identique à celui du sol non renforcé, en raison de l'homogénéité du modèle. C'est à dire que la taille des matrices de masse et de rigidité homogénéisée est égale à celle du sol non renforcé. La présence des inclusions de renforcement n'implique aucune modification du maillage.

En revanche, pour ce qui concerne la *simulation directe*, le fait de devoir discrétiser séparément les pieux et le sol et raffiner le maillage autour des pieux implique une augmentation considérable du nombre d'éléments et de nœuds, et donc de la taille des matrices de masse et de rigidité. En outre, il est nécessaire de remailler complètement la structure à chaque fois que l'on change de configuration.

En effet, on observe sur la figure (2.11) les quatre maillages différents correspondant aux quatre configurations précédentes (où la structure est réduite à une *demi-tranche* en tenant compte des symétries). Le tableau (2.2) donne le nombre d'éléments tétraédriques quadratiques et de nœuds utilisés. Tandis qu'il y a un seul maillage, quelque soit la configuration traitée, comportant 1827 éléments et 3867 nœuds, pour l'ouvrage homogénéisé (FIG (2.12)). C'est la raison pour laquelle l'approche par homogénéisation classique permet de réduire très sensiblement (voire considérablement dans le cas d'un nombre important d'inclusions) le temps de calcul par rapport à la simulation directe.

Configuration	Nombre d'éléments	Nombre de nœuds
I	8226	13524
II	7049	11746
III	6370	10488
IV	6152	9911

TAB. 2.2 – Nombre d'éléments et de nœuds des maillages des quatre configurations analysées par simulation directe

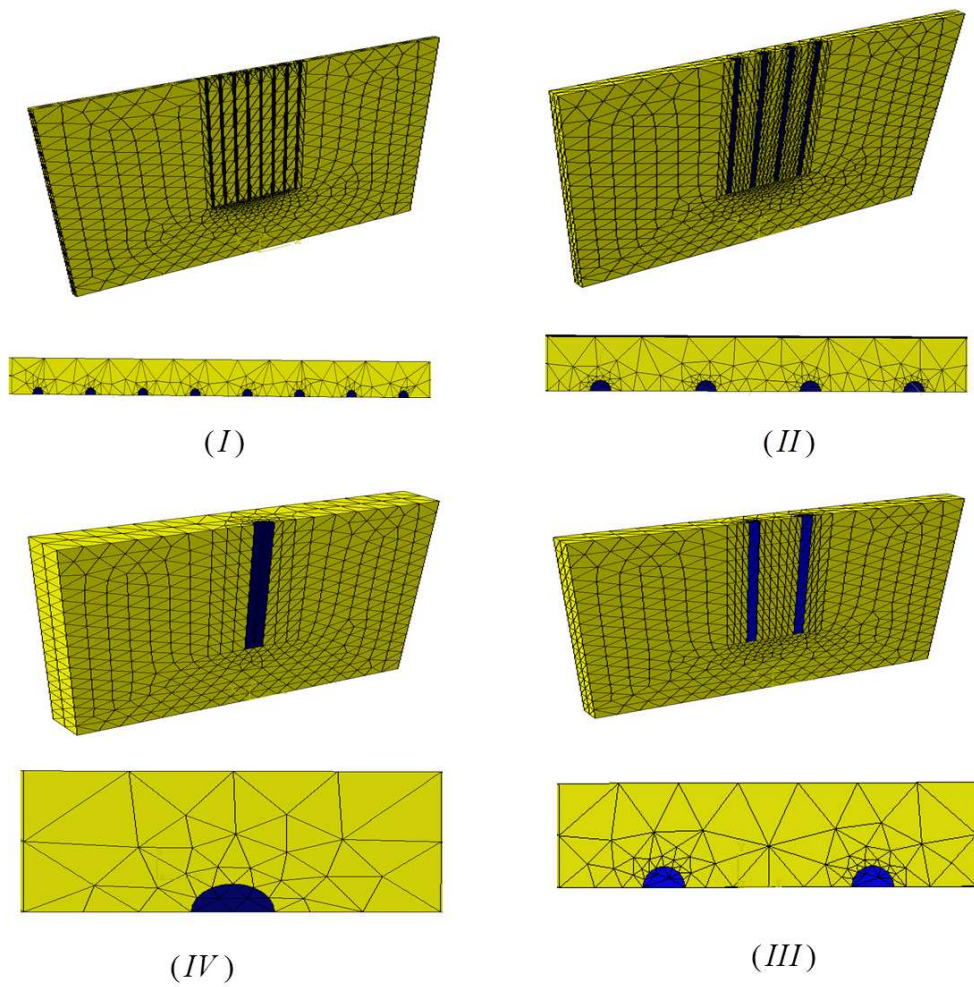


FIG. 2.11 – Maillages employés dans le calcul dynamique par simulation directe

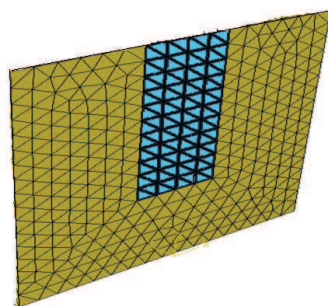


FIG. 2.12 – Maillage du modèle de l'ouvrage homogénéisé

### 2.5.2.2 Résultats

La figure (2.13) présente l'évolution des impédances verticale et horizontale en fonction du rapport  $\varepsilon^d/\varepsilon^s$  fournies par l'approche par homogénéisation classique et la simulation directe. On notera que, compte tenu des définitions (2.41) et (2.44), ce rapport est égal à :

$$\frac{\varepsilon^d}{\varepsilon^s} = \frac{e\omega}{2\pi V_s} \frac{B}{e} = \frac{\omega B}{2\pi V_s} = \frac{B}{V_s T} = \frac{B}{\lambda} \quad (2.52)$$

c'est à dire au rapport entre la largeur de la fondation et la longueur d'une onde de cisaillement de pulsation  $\omega$  se propageant dans le sol non renforcé.

L'impédance verticale (resp. horizontale) est complexe, exprimée à travers son module normalisé  $K_{0V}/K_{SV}$  (resp.  $K_{0H}/K_{SH}$ ) et son déphasage  $\varphi_V$  (resp.  $\varphi_H$ ) où  $K_{SV}$  (resp.  $K_{SH}$ ) désigne la raideur verticale (resp. horizontale) en statique de la structure dans le cas du sol non renforcé. L'examen de ces figures permet de tirer les premières conclusions suivantes :

◇ *Impédance verticale.*

Dans le cas d'un chargement statique ( $B/\lambda = 0$ ) : points situés sur l'axe des ordonnées), la méthode d'homogénéisation tend à *surestimer* la raideur verticale de la fondation, ce qui est confirmé aux résultats obtenus par Hassen et de Buhan (2008) [15]. Lorsque l'on augmente progressivement la fréquence de sollicitation ( $B/\lambda$  augmente), les différentes évaluations du module de l'impédance diminuent très sensiblement, pour ensuite augmenter notablement. On constate alors que la méthode d'homogénéisation surestime les évaluations numériques directes qui paraissent converger vers la même valeur quelque soit la valeur du paramètre d'échelle statique  $\varepsilon^s$ .

◇ *Impédance horizontale.*

Il apparait que la méthode d'homogénéisation conduit à légèrement *sous-estimer* la raideur statique horizontale de la fondation, ce qui recoupe les conclusions données par Hassen et de Buhan (2008) [15] sur un problème similaire. Cette sous-estimation s'accroît à même que la fréquence de la sollicitation augmente ( $B/\lambda$  augmente), l'évaluation par le calcul direct conduisant à des valeurs croissantes avec le facteur d'échelle statique  $\varepsilon^s$ .

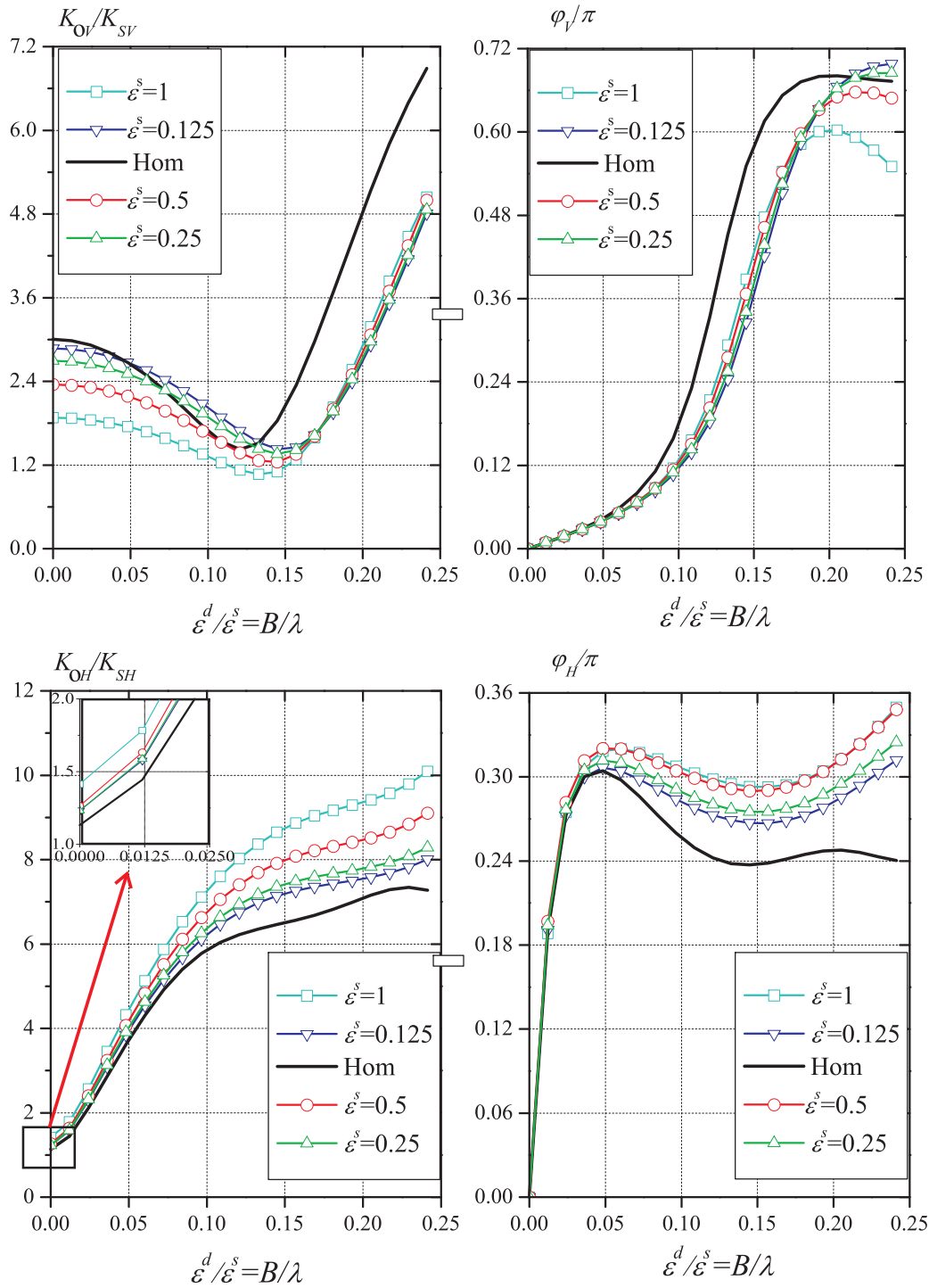


FIG. 2.13 – Variation des impédances et déphasages pour une sollicitation verticale et horizontale en fonction des petits paramètres de changement d'échelle  $\varepsilon^s$  et  $\varepsilon^d$

## 2.6 Intérêt et limite de l'approche par homogénéisation

L'avantage de l'approche par homogénéisation par rapport à un calcul direct est manifesté à la lecture des résultats précédents. En appréhendant le sol renforcé composite comme un milieu homogène équivalent, mais anisotrope en raison de la présence des inclusions de renforcement, cette approche :

- ◇ simplifie la mise en œuvre numérique ; il n'est pas nécessaire de discrétiser la zone renforcée plus finement que si elle était homogène ;
- ◇ réduit considérablement le temps de calcul et l'espace mémoire utilisé pour le calcul de l'ordinateur grâce à une diminution notable de la taille du problème (nombre d'éléments et de nœuds) par rapport à la simulation directe.

Cependant, cette approche comporte un certain nombre d'insuffisances relatives à la non prise en compte d'un "effet d'échelle". Ce dernier, déjà constaté dans le cas d'un chargement statique ( $\varepsilon^d = 0$ ) (Hassen et de Buhan, 2008 [15]), est associé aux deux effets suivants :

- ◇ un *effet de bord* qui met en évidence des phénomènes d'interaction entre le sol et les inclusions de renforcement ;
- ◇ un *effet de flexion et de cisaillement* des renforcements.

Ces effets disparaissent lorsque le petit paramètre de changement d'échelle statique  $\varepsilon^s$  tend vers zéro. Mais à l'inverse, si ce paramètre augmente, ils peuvent devenir prépondérants (FIG (2.13)). Or dans la réalité,  $\varepsilon^s$  n'est pas vraiment petit, c'est-à-dire que la taille caractéristique du renforcement n'est pas très petite au regard des dimensions de l'ouvrage. Il en résulte que l'approche par homogénéisation échoue à refléter le fonctionnement réel de la structure. En effet, en supposant qu'il y a adhérence parfaite entre le sol et les inclusions de renforcement (resp. négligeant l'effet de flexion et de cisaillement), l'approche par homogénéisation prédit une rigidité verticale (resp. rigidité horizontale) de la structure plus grande (resp. plus petite) par rapport à celle obtenue par la simulation directe.

Dans le cas d'un chargement dynamique ( $\varepsilon^d > 0$ ), de tels effets, loin de disparaître, peuvent être accentués. En effet, plus le petit paramètre de changement d'échelle dynamique augmente, c'est-à-dire plus la pulsation augmente, plus l'effet d'échelle se révèle important. Or, il est bien connu qu'un milieu hétérogène périodique devient dispersif dès que la longueur d'onde ( $\lambda$ ) n'est pas suffisamment grande vis-à-vis de la période  $e$  (Navi, 2006 [34]). Autrement dit, si  $\varepsilon^d = e/\lambda$  n'est pas suffisamment petit, la vitesse de l'onde n'est pas intrinsèque au matériau. En plus de son élasticité et sa masse volumique, elle dépend aussi de sa fréquence, ce qui n'est pas prédit par la méthode d'homogénéisation.

Les limites de la méthode d'homogénéisation classique, notamment dans le cas d'un chargement dynamique, peuvent également être mises en évidence par le recours à la technique des développements asymptotiques (Boutin, 1993 [8]; Sousbrestre, 2011 [49]). Considérant par exemple une couche de sol d'extension horizontale infinie renforcée par un réseau périodique d'inclusions verticales (FIG (2.14)), le tableau (2.3) donne les équations de l'élastodynamique fournies par la méthode d'homogénéisation, présentée dans le présent chapitre, et par la méthode des développements asymptotiques dans laquelle le contraste de rigidité du sol par rapport au matériau constituant les inclusions rigides est supposé d'ordre deux en  $\varepsilon^d$ .

$$\mu^s = O(\varepsilon^{d^2} \mu^b) \quad (2.53)$$

où  $\mu^s$  et  $\mu^b$  désignent respectivement les modules de cisaillement du sol et du matériau de renforcement.

Dynamique	Homogénéisation	Développements asymptotiques
Axiale	$(\alpha + \lambda^s + 2\mu^s) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho^{hom} \omega^2 v = 0$	$\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + [\eta \rho^b + (1 - \eta) \rho^s \frac{1}{S^m} \int_{S^m} \xi^1(\omega) ds] \omega^2 v = 0$
Transversale	$\mu^s \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho^{hom} \omega^2 u = 0$	$\mu^s \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{E^b I^b}{S} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho^{hom} \omega^2 u = 0$

TAB. 2.3 – Equations de l'élastodynamique données par l'approche par homogénéisation et la méthode des développements asymptotiques

Dans ce tableau,  $v$  désigne le champ de déplacement vertical des inclusions seules et  $u$  le champ de déplacement horizontal du sol et des inclusions,  $I^b$  est le moment d'inertie d'une inclusion, et  $S^m$  (resp.  $S$ ) est l'aire de la surface transversale

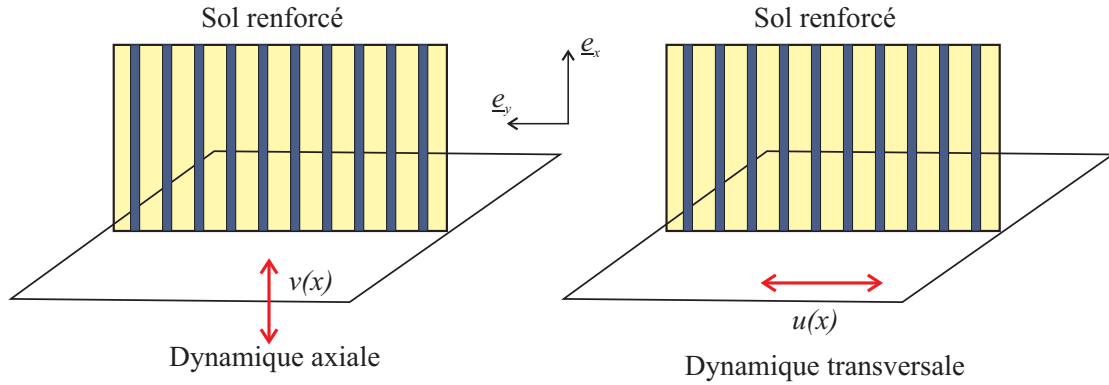


FIG. 2.14 – Dynamique axiale et transversale d'une couche de sol renforcé d'extension horizontale infinie

du sol (resp. totale du sol et de l'inclusion) dans une cellule de base. A la différence de l'approche par homogénéisation, on trouve bien les deux termes qui représentent l'effet d'échelle dans la méthode des développements asymptotiques :

- ◇  $(1 - \eta)\rho^s \int_{S^m} \xi^1(\omega) ds$  est un terme de masse linéique qui traduit l'interaction du sol et des inclusions.
- ◇  $\frac{E^b I^b}{S}$  exprime l'effet de flexion et de cisaillement de l'inclusion.

Afin de remédier à ces limitations de l'approche par homogénéisation classique, liées à un effet d'échelle, nous proposons dans les chapitres suivants une extension du modèle intégrant d'une part les interactions sol/inclusions, d'autre part les effets de flexion et de cisaillement dans les inclusions au cas du chargement dynamique, comme cela a déjà été réalisé dans le cas statique (Hassen et de Buhan, 2008 [15])





# Modélisation dynamique du sol renforcé comme un milieu multiphasique avec prise en compte de l'interaction sol/inclusions

---

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>51</b>
<b>3.2</b>	<b>Principe de la modélisation . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>3.3</b>	<b>Equations de l'élastodynamique . . . . .</b>	<b>53</b>
3.3.1	Dynamique d'un système multiphasique . . . . .	53
3.3.2	Comportement élastodynamique . . . . .	55
<b>3.4</b>	<b>Application à la propagation d'une onde de compression parallèlement à la direction du renforcement . . . . .</b>	<b>58</b>
<b>3.5</b>	<b>Exemple d'application : Calcul de l'impédance d'une couche renforcée . . . . .</b>	<b>65</b>
3.5.1	Position du problème . . . . .	65
3.5.2	Solution en déplacement . . . . .	67
3.5.3	Identification des coefficients d'interaction et résultats . . . . .	73
<b>3.6</b>	<b>Positionnement du modèle multiphasique par rapport à la méthode des développements asymptotiques . . . . .</b>	<b>76</b>
3.6.1	Rappel de la méthode des développements asymptotiques . . . . .	76
3.6.2	Confrontation avec le modèle multiphasique . . . . .	78
<b>3.7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>80</b>

---



## 3.1 Introduction

Partant de l'approche par homogénéisation classique présentée dans le chapitre précédent, nous allons maintenant développer une modélisation qualifiée de "*multiphasique*", dans laquelle le sol et le réseau d'inclusions sont homogénéisés *séparément* sous la forme de deux phases en interaction mutuelle, animées de cinématiques distinctes.

Se limitant toujours au cadre de l'élasticité linéaire, le principe de la modélisation est tout d'abord présenté, mettant en évidence des champs de déplacement ainsi que d'efforts intérieurs (contraintes) propres à chaque phase. On aboutit ainsi à une écriture des équations de l'élastodynamique pour chacune des phases, ces équations étant alors couplées par le biais d'une loi d'interaction élastique entre phases.

On s'intéresse ensuite à la propagation d'une onde plane harmonique de compression se propageant dans le sol renforcé, parallèlement à la direction du renforcement. Il est intéressant de montrer que d'une part la vitesse d'une telle onde est la même dans la phase matrice et la phase renforcement, et d'autre part qu'elle peut être déterminée grâce à une équation polynomiale de degré quatre dans laquelle interviennent notamment la pulsation et les coefficients d'interaction sol/inclusions.

La partie suivante de ce chapitre est consacrée au traitement analytique d'un exemple qui est celui d'une couche de sol d'extension infinie dans la direction horizontale, renforcée par des inclusions rigides verticales et soumise à une sollicitation harmonique verticale. Deux configurations sont étudiées, celle de l'emploi d'inclusions flottantes et celle d'inclusions encastrées en pieds dans un substratum indéformable. La comparaison des résultats analytiques prédits par la mise en œuvre du modèle multiphasique et de simulation numérique directe par éléments finis, pour les deux configurations étudiées permet d'identifier les coefficients d'interaction du modèle multiphasique.

Finalement, la dernière partie du chapitre s'efforce de positionner le modèle multiphasique par rapport à la méthode des développements asymptotiques (Soubestre, 2011 [49]; Soubestre et Boutin, 2012 [50]) en considérant le régime de dynamique axiale d'une couche de sol d'extension horizontale infinie, renforcée par un réseau périodique d'inclusions rigides verticales.

## 3.2 Principe de la modélisation

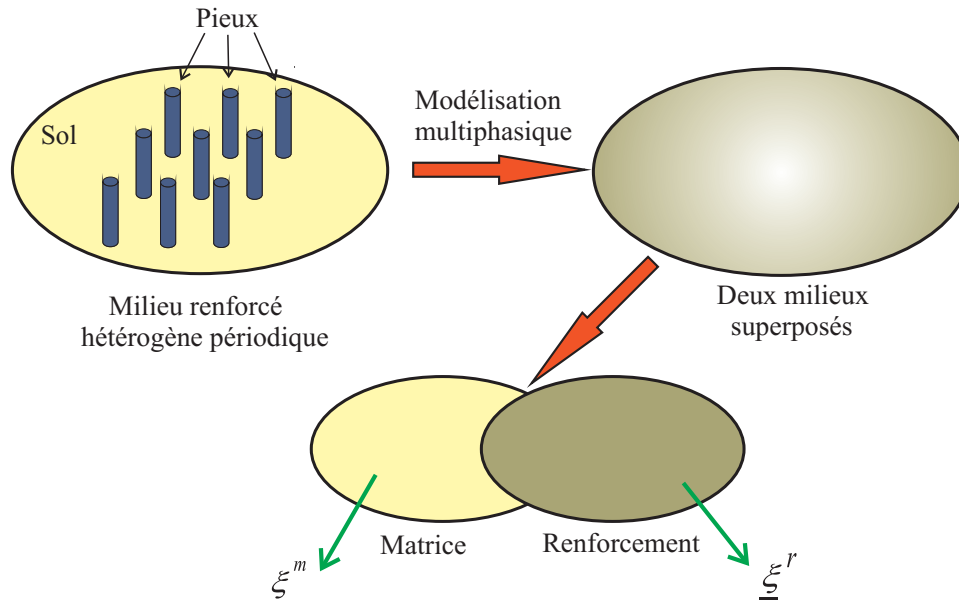


FIG. 3.1 – Principe de la modélisation multiphasique d'un sol renforcé par inclusions linéaires

Le modèle multiphasique est conçu dans le but de remédier aux limitations de l'approche par homogénéisation classique dans le cas d'un chargement vertical (chapitre 2). Visant à décrire le comportement global du sol renforcé composite à l'échelle macroscopique, il consiste à substituer à ce dernier non pas par un seul milieu équivalent comme dans l'approche par homogénéisation classique décrite au chapitre précédent, mais par deux milieux continus superposés, appelés « phases », représentant respectivement le sol (phase matrice) et le réseau périodique d'inclusions (phase renforcement) (Sudret et de Buhan, 1999 [51]; Thai Son et de Buhan, 2009 [48]). Malgré cette superposition, chaque phase est animée d'une cinématique propre : on désignera ainsi par  $\underline{\xi}^m$  (resp. par  $\underline{\xi}^r$ ) le déplacement de la particule de la phase matrice (resp. renforcement) à partir d'une configuration initiale donnée (FIG (3.1)). C'est-à-dire qu'il y a une coïncidence géométrique de deux particules en interaction mutuelle, auxquelles sont associés deux champs de déplacement distincts en tout point de la zone renforcée.

Compte tenu de cette description, la méthode des puissances virtuelles (Sudret et de Buhan, 1999 [51]) permet d'aboutir à la modélisation des efforts intérieurs (contraintes) à chacune des phases. On obtient ainsi pour la phase matrice les

contraintes usuelles de Cauchy désignées par  $\underline{\underline{\sigma}}^m$  et pour la phase renforcement un champ de contraintes uniaxiales de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}^r = n^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (3.1)$$

où  $n^r$  s'interprète comme étant la densité d'effort axial dans les inclusions par unité de surface transversale à l'orientation de ces inclusions.

### 3.3 Equations de l'élastodynamique

#### 3.3.1 Dynamique d'un système multiphasique

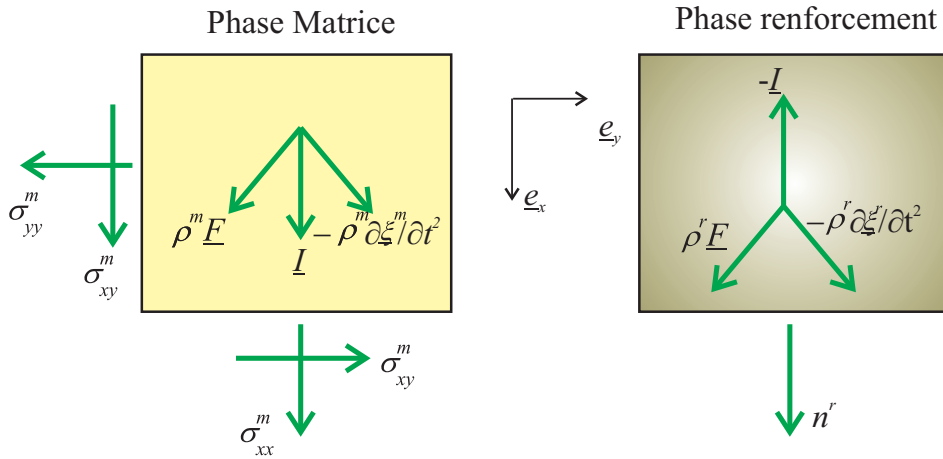


FIG. 3.2 – Contraintes, forces de volume et d'interaction dans un sol renforcé modélisé comme un milieu multiphasique (cas bidimensionnel)

En se basant sur la description cinématique ainsi que la modélisation des efforts intérieurs précédente, on peut écrire l'équation de l'équilibre dynamique correspondant à chaque phase, en tenant compte des quantités d'accélération, sous la forme :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^m + \rho^m (\underline{F} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\xi}^m) + \underline{I} = 0, \text{ phase matrice} \\ \operatorname{div} (n^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) + \rho^r (\underline{F} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\xi}^r) - \underline{I} = 0, \text{ phase renforcement} \end{cases} \quad (3.2)$$

dans laquelle (FIG (3.2)) :

- ◇  $\rho^m$  et  $\rho^r$  désignent les masses volumiques des deux phases égales respectivement à :  $\rho^m = (1 - \eta)\rho^s$  et  $\rho^r = \eta\rho^b$  ;
- ◇  $\underline{F}$  est la densité massique de forces de volume (pesanteur) ;
- ◇  $\underline{I}$  est la densité d'efforts volumique, dits d'interaction, exercés en tout point par la phase renforcement sur la phase matrice, tandis qu'en vertu de la loi des actions mutuelles  $-\underline{I}$  représente les efforts exercés par la phase matrice sur la phase renforcement.

A cette première catégorie d'efforts d'interaction entre les phases matrice et renforcement vient s'ajouter un second type d'efforts d'interaction localisé le long de la surface  $\Sigma$  lieu des extrémités ("pointes") des inclusions de renforcement en contact avec le sol (matrice) notamment dans le cas d'inclusions "flottantes". Ces efforts d'interaction, ainsi que la loi d'interaction associée, peuvent jouer un rôle prépondérant dans ce dernier cas, comme cela a été démontré dans le cas statique (Cartiaux et al., 2007 [11] ; Hassen et al., 2009 [28]). Ces efforts d'interaction et les équations d'équilibre correspondantes peuvent être introduits comme suit.

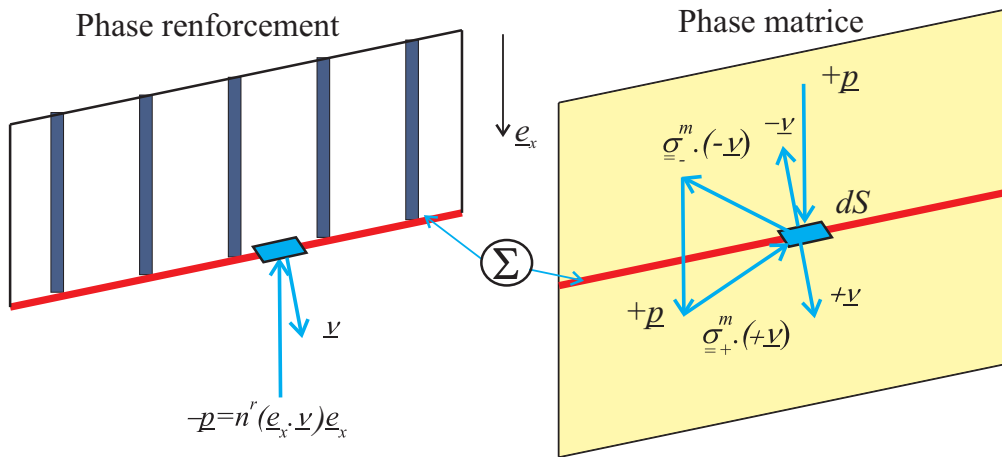


FIG. 3.3 – Modélisation des efforts d'interaction "de pointe"

On désigne par  $\underline{p}$  la densité surfacique des efforts exercés par la phase matrice sur la phase renforcement le long de la surface  $\Sigma$ , de normale unitaire extérieure  $\underline{v}$ . La condition aux limites s'écrit donc pour la phase renforcement :

$$(n^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) \cdot \underline{\nu} = -\underline{p} = n^r \underline{e}_x (\underline{e}_x \cdot \underline{\nu}) \quad (3.3)$$

de sorte que  $\underline{p}$  est nécessairement parallèle à la direction des inclusions de renforcement.

En vertu de la loi des actions mutuelles, la phase matrice est soumise de la part de la phase renforcement à une densité d'efforts surfaciques  $\underline{p}$  appliquée le long de la surface  $\Sigma$ . Cette densité surfacique va engendrer une discontinuité du champ de contrainte dans la matrice à la traversée de cette surface.

Considérant l'équilibre d'un volume élémentaire cylindrique d'épaisseur infinitésimal dont les faces, de section  $dS$ , sont situées de part et d'autre de  $\Sigma$ , on obtient la relation :

$$(\underline{\underline{\sigma}}_+^m \cdot \underline{\nu}) dS + (\underline{\underline{\sigma}}_-^m \cdot (-\underline{\nu})) dS + \underline{p} dS = 0 \quad (3.4)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}_-^m$  et  $\underline{\underline{\sigma}}_+^m$  désignent les valeurs prises par la contrainte dans la phase matrice en aval et en amont de  $\Sigma$  en suivant la normale  $\underline{\nu}$ . On obtient donc l'équation aux discontinuités :

$$[\underline{\underline{\sigma}}^m] \cdot \underline{\nu} + \underline{p} = 0 \text{ avec } [\underline{\underline{\sigma}}^m] = \underline{\underline{\sigma}}_+^m - \underline{\underline{\sigma}}_-^m \quad (3.5)$$

### 3.3.2 Comportement élastodynamique

On s'intéresse dans cette partie en premier lieu à la formulation de la loi de comportement élastique pour chaque phase (matrice et renforcement) :

◇ *Phase matrice* : les déformations sont décrites par le tenseur des déformations linéarisées, défini par la partie symétrique du gradient du champ de déplacement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^m = 1/2 [\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{\xi}}^m) + {}^T \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{\xi}}^m)] \quad (3.6)$$

et le comportement élastique linéaire s'exprime, sous l'hypothèse d'isotropie et



pour un état initial naturel, par :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \lambda^m (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^m) \underline{\underline{1}} + 2\mu^m \underline{\underline{\varepsilon}}^m \quad (3.7)$$

◇ *Phase renforcement* : la variable déformation pertinente est la déformation axiale :

$$\varepsilon^r = \frac{\partial \xi_x^r}{\partial x} \quad (3.8)$$

et le comportement élastique linéaire correspondant s'écrit :

$$n^r = \alpha \varepsilon^r \quad (3.9)$$

où  $\alpha$  est la raideur à l'effort axial (voir chapitre 2, équation (2.3)).

En deuxième lieu, on va préciser la *loi de comportement d'interaction* entre la phase matrice et la phase renforcement correspondant aux deux types d'interaction mis en évidence ci-dessus :

◇ *Interaction volumique*. La loi de comportement d'interaction volumique entre phases s'écrit sous la forme d'une relation linéaire entre la densité d'effort d'interaction et la variable cinématique duale qui n'est autre que le déplacement relatif de la phase renforcement par rapport à la phase matrice :

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{c}}^I \cdot (\underline{\underline{\xi}}^r - \underline{\underline{\xi}}^m) \quad (3.10)$$

où  $\underline{\underline{c}}^I$  est un tenseur du second ordre défini positif représentant la raideur d'interaction volumique entre les deux phases.

◇ *Interaction surfacique* (interaction de "pointe"). La loi de comportement d'interaction de pointe sur  $\Sigma$  est donnée par :

$$\underline{\underline{p}} = \underline{\underline{c}}^p \cdot (\underline{\underline{\xi}}^{r,p} - \underline{\underline{\xi}}^{m,p}) \quad (3.11)$$

où  $\underline{\underline{c}}^p$  est le tenseur de rigidité correspondant,  $\underline{\underline{\xi}}^{m,p}$  (resp.  $\underline{\underline{\xi}}^{r,p}$ ) désigne le

déplacement de la phase matrice (resp. phase renforcement) sur la surface  $\Sigma$ .

L'incorporation de ces équations de comportement élastique dans les équations de l'équilibre dynamique (3.2) nous donne les équations de l'*élastodynamique* suivantes :

◇ *Phase matrice* :

$$(\lambda^m + \mu^m) \underline{\text{grad}}(\text{div } \underline{\xi}^m) + \mu^m \Delta \underline{\xi}^m + \rho^m (\underline{F} - \partial^2 \underline{\xi}^m / \partial t^2) + \underline{c}^I \cdot (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) = 0 \quad (3.12)$$

◇ *Phase renforcement* :

$$\alpha \frac{\partial^2 \xi_x^r}{\partial x^2} \underline{e}_x + \rho^r (\underline{F} - \partial^2 \underline{\xi}^r / \partial t^2) - \underline{c}^I \cdot (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) = 0 \quad (3.13)$$

On constate que ces deux équations sont couplées à travers le terme d'interaction qui fait apparaître la différence entre les deux champs de déplacements. L'identification des paramètres élastiques du modèle à partir des caractéristiques du sol et des inclusions est obtenue immédiatement :

$$\begin{cases} \rho^m \approx \rho^s, \lambda^m \approx \lambda^s, \mu^m \approx \mu^s \\ \rho^r = \eta \rho^b, \alpha = \eta E^b \end{cases} \quad (3.14)$$

d'où la réécriture du système couplé des équations de la dynamique du système multiphasique :

$$\begin{cases} (\lambda^s + \mu^s) \underline{\text{grad}}(\text{div } \underline{\xi}^m) + \mu^s \Delta \underline{\xi}^m + \rho^s (\underline{F} - \partial^2 \underline{\xi}^m / \partial t^2) + \underline{c}^I \cdot (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) = 0 \\ \eta E^b \frac{\partial^2 \xi_x^r}{\partial x^2} \underline{e}_x + \eta \rho^b (\underline{F} - \partial^2 \underline{\xi}^r / \partial t^2) - \underline{c}^I \cdot (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

L'hypothèse d'adhérence parfaite entre phases est définie par le fait que les deux phases ont la même cinématique :

$$\underline{\xi}^m = \underline{\xi}^r = \underline{\xi} \quad (3.16)$$

configuration qui peut être obtenue en faisant par exemple tendre les raideurs d'interaction vers l'infini, et qui correspond en pratique à la situation où, à raideur constante de la phase renforcement, l'espacement entre les inclusions tend vers zéro. On obtient en faisant la somme des deux équations du système (3.15), qui permet d'éliminer les termes d'interaction, l'équation dynamique globale :

$$(\lambda^s + \mu^s)\underline{\text{grad}}(\text{div } \underline{\xi}) + \mu^s \Delta \underline{\xi} + \alpha \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} \underline{e}_x + \rho^{hom}(\underline{F} - \partial^2 \underline{\xi} / \partial t^2) = 0 \quad (3.17)$$

qui n'est autre que l'équation de l'élastodynamique du sol renforcé, modélisé comme un *milieu élastique homogène anisotrope* (voir chapitre 2). Ceci est parfaitement cohérent avec le fait que la méthode d'homogénéisation devient asymptotiquement exacte quand l'espacement entre inclusions tend vers zéro, ce qui correspond à l'hypothèse d'adhérence parfaite du modèle multiphasique (voir de Buhan et Hassen (2008) [15] dans le cas statique).

Les équation du champ (3.15) écrites séparément pour chacune des phases, doivent être complétées par l'équation :

$$\lambda^m [\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}^m] \underline{\underline{\nu}} + 2\mu^m [\underline{\underline{\varepsilon}}^m] \cdot \underline{\underline{\nu}} + \underline{\underline{c}}^p \cdot (\underline{\underline{\xi}}^{r,p} - \underline{\underline{\xi}}^{m,p}) = 0 \quad (3.18)$$

valable en tout point de la surface  $\Sigma$ , lieu de l'interaction de pointe, et obtenue par combinaison de l'équation de saut (3.5) avec les équations de comportement élastique de la matrice (3.7) et de l'interaction de pointe (3.11).

### 3.4 Application à la propagation d'une onde de compression parallèlement à la direction du renforcement

Afin d'illustrer les équations de l'élastodynamique du modèle multiphasique précédentes, on s'intéresse tout d'abord à la propagation d'une onde plane harmonique de compression dans un sol renforcé, modélisé comme un milieu multiphasique infini, parallèlement à la direction du renforcement (FIG (3.4)). La solution en déplacement du problème est recherchée pour chacune des phases sous la forme suivante :

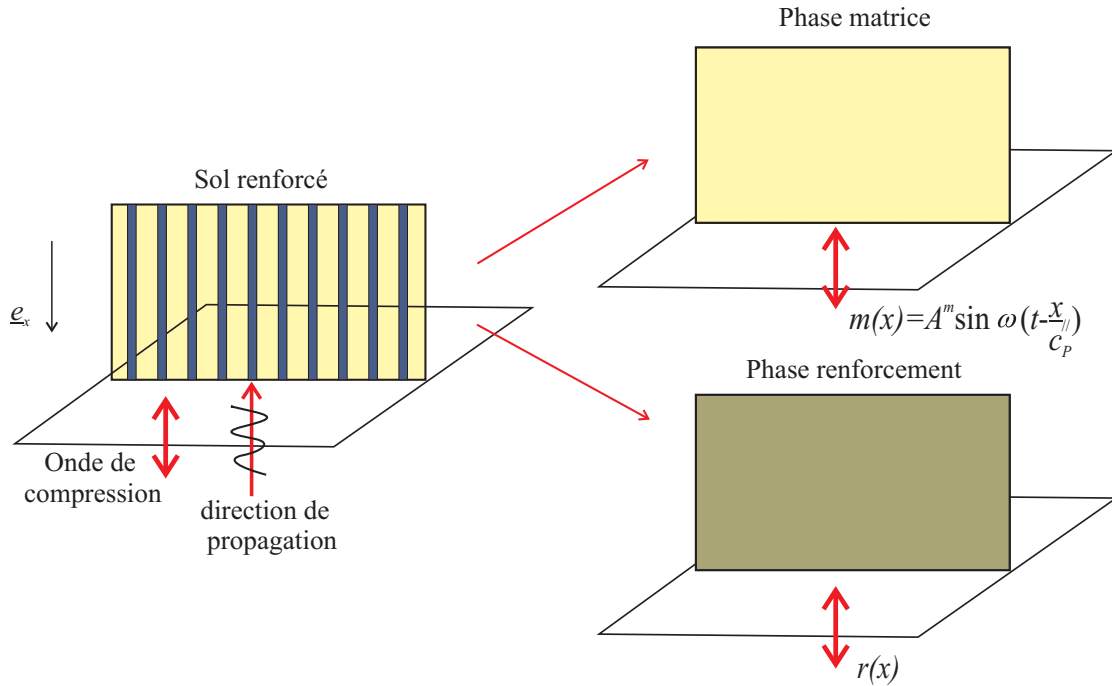


FIG. 3.4 – Onde de compression se propageant parallèlement à la direction du renforcement

◇ *Phase matrice :*

$$\underline{\xi}^m = m(x, t)\underline{e}_x = A^m \sin \omega \left( t - \frac{x}{c_p'} \right) \underline{e}_x \quad (3.19)$$

où  $A^m$  et  $c_p'$  représentent respectivement l'amplitude et la vitesse de propagation de l'onde se propageant dans la phase matrice, tandis que  $\omega = 2\pi/T$  désigne sa pulsation.

◇ *Phase renforcement.* La solution en déplacement est recherchée sous une forme plus générale :

$$\underline{\xi}^r = r(x, t)\underline{e}_x \quad (3.20)$$

En négligeant les forces de volume  $\underline{F}$ , les équations de l'élastodynamique (3.15) deviennent :

$$\begin{cases} (\lambda^s + 2\mu^s)m''\underline{e}_x + \omega^2\rho^s m\underline{e}_x + (r - m)\underline{c}^I.\underline{e}_x = 0 \\ \alpha r''\underline{e}_x - \eta\rho^b\ddot{r}\underline{e}_x - (r - m)\underline{c}^I.\underline{e}_x = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

En supposant que le tenseur d'interaction élastique soit tel que :

$$\underline{c}^I.\underline{e}_x = c^I\underline{e}_x \quad (3.22)$$

où  $c^I$  est sa valeur propre dans la direction  $Ox$ , le système d'équations (3.21) devient :

$$\begin{cases} (\lambda^s + 2\mu^s)m'' + \omega^2\rho^s m + c^I(r - m) = 0 \\ \alpha r'' - \eta\rho^b\ddot{r} - c^I(r - m) = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

A partir de la première équation de (3.23) et de l'équation (3.19), on peut déterminer l'expression du déplacement de la phase renforcement  $r$  :

$$\begin{aligned} r &= -\frac{\lambda^s + 2\mu^s}{c^I}m'' - \frac{\omega^2\rho^s - c^I}{c^I}m \\ &= \left[ \frac{\lambda^s + 2\mu^s}{c^I} \left( \frac{\omega}{c_P''} \right)^2 - \frac{\omega^2\rho^s - c^I}{c^I} \right] A^m \sin \omega \left( t - \frac{x}{c_P''} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

C'est-à-dire que la solution en déplacement dans la phase renforcement est une onde harmonique plane, de mêmes pulsation et vitesse que celles de l'onde se propageant dans la phase matrice, seule l'amplitude étant différente. Introduisant cette expression dans la deuxième équation de (3.23), et éliminant le terme non nul  $A^m \sin \omega \left( t - \frac{x}{c_P''} \right)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} &-\alpha \left( \frac{\omega}{c_P''} \right)^2 \left[ \frac{\lambda^s + 2\mu^s}{c^I} \left( \frac{\omega}{c_P''} \right)^2 - \frac{\omega^2\rho^s - c^I}{c^I} \right] + \omega^2\eta\rho^b \left[ \frac{\lambda^s + 2\mu^s}{c^I} \left( \frac{\omega}{c_P''} \right)^2 - \frac{\omega^2\rho^s - c^I}{c^I} \right] \\ &-c^I \left[ \frac{\lambda^s + 2\mu^s}{c^I} \left( \frac{\omega}{c_P''} \right)^2 - \frac{\omega^2\rho^s}{c^I} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

soit :

$$\left[ \eta\rho^b\rho^s - \frac{c^I}{\omega^2}(\eta\rho^b + \rho^s) \right] c_P^{//4} + \left[ (\alpha + \lambda^s + 2\mu^s)\frac{c^I}{\omega^2} - \alpha\rho^s - (\lambda^s + 2\mu^s)\eta\rho^b \right] c_P^{//2} + \alpha(\lambda^s + 2\mu^s) = 0 \quad (3.26)$$

Cette dernière équation est une équation du second degré en  $X = (c_P^{//})^2$  qui s'écrit :

$$AX^2 + BX + C = 0 \quad (3.27)$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= \eta\rho^b\rho^s - \frac{c^I}{\omega^2}(\eta\rho^b + \rho^s) \\ B &= (\alpha + \lambda^s + 2\mu^s)\frac{c^I}{\omega^2} - \alpha\rho^s - (\lambda^s + 2\mu^s)\eta\rho^b \\ C &= \alpha(\lambda^s + 2\mu^s) \end{aligned} \quad (3.28)$$

On s'intéresse aux cas suivants :

◇ Premier cas particulier :  $\chi = \frac{c^I}{\omega^2\rho^s} \rightarrow \infty$ .

Cette configuration peut être obtenue soit en faisant tendre le coefficient d'interaction  $c^I$  vers l'infini (hypothèse d'adhérence parfaite entre phases), soit à  $c^I$  fixé en faisant tendre la pulsation vers zéro (cas quasi-statique). L'équation (3.27) devient alors :

$$-(\eta\rho^b + \rho^s)X^2 + (\alpha + \lambda^s + 2\mu^s)X = 0 \quad (3.29)$$

d'où la seule racine positive non-nulle :

$$c_P^{//} = \sqrt{X} = \sqrt{\frac{\alpha + \lambda^s + 2\mu^s}{\eta\rho^b + \rho^s}} = c_P^{hom} \quad (3.30)$$

Compte tenu de (3.24), le rapport des amplitudes tend alors vers 1 :

$$\frac{A^r}{A^m} = 1 + \frac{1}{\chi} \left( \frac{\lambda^s + 2\mu^s}{\rho^s (c_P^{\prime\prime})^2} - 1 \right) \xrightarrow{\chi \rightarrow \infty} 1 \quad (3.31)$$

où  $A^r$  désigne l'amplitude de l'onde se propageant dans la phase renforcement ( $r = A^r \sin \omega \left( t - \frac{x}{c_P^{\prime\prime}} \right)$ ).

On retrouve ainsi le résultat obtenu au chapitre précédent pour un sol renforcé modélisé comme un milieu homogénéisé.

◇ Deuxième cas particulier :  $\chi = \frac{c^I}{\omega^2 \rho^s} \rightarrow 0$ .

Ce cas limite correspond soit à un coefficient d'interaction qui tend vers zéro, soit à la propagation d'ondes de pulsation infinie. L'équation (3.27) devient dans ce cas :

$$\eta \rho^b \rho^s X^2 - [\alpha \rho^s + (\lambda^s + 2\mu^s) \eta \rho^b] X + \alpha (\lambda^s + 2\mu^s) = 0 \quad (3.32)$$

dont les solutions évidentes sont :

$$c_P^{\prime\prime} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda^s + 2\mu^s}{\rho^s}} = c_P^s \\ \sqrt{\frac{\alpha}{\eta \rho^b}} = c_P^r \end{cases} \quad (3.33)$$

On peut alors montrer, à partir de l'expression du rapport des amplitudes, déduite de (3.31) que :

$$\chi \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} c_P^{\prime\prime} \rightarrow c_P^s \Rightarrow \frac{A^r}{A^m} \rightarrow 0 \\ c_P^{\prime\prime} \rightarrow c_P^r \Rightarrow \frac{A^m}{A^r} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

La solution correspond à une propagation d'onde dans chacune des phases séparément.

◇ Cas général :  $0 < \chi = \frac{c^I}{\omega^2 \rho^s} < +\infty$ .

Ce cas est analysé pour le jeu de valeurs suivant, caractéristique d'un sol renforcé par inclusions rigides :

– Caractéristiques du sol :

$$E^s = 9 \text{ MPa}; \nu^s = 0,2; \rho^s = 1800 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{d'où : } \lambda^s = 2,5 \text{ MPa}; \mu^s = 3,75 \text{ MPa et } \lambda^s + 2\mu^s = 10 \text{ MPa}$$

– Caractéristiques des inclusions :

$$E^b = 10 \text{ GPa}; \rho^b = 2500 \text{ kg/m}^3$$

– Fraction volumique des inclusions :

$$\eta = 0,02; \text{ d'où : } \alpha = 200 \text{ MPa et } \eta\rho^b = 50 \text{ kg/m}^3$$

La variation de la vitesse de compression  $c_P^{\prime\prime}$  normalisée par celle du sol non renforcé  $c_P^s$  :

$$c_P^s = \sqrt{\frac{\lambda^s + 2\mu^s}{\rho^s}} \tag{3.35}$$

est représentée sur la figure (3.5), en fonction de la pulsation  $\omega$  et pour différentes valeurs de  $c^I$ . Pour le jeu de valeurs choisies et la gamme de pulsation considérée, l'équation (3.27) ne possède qu'une solution en  $X$  positive et donc une solution en vitesse  $c_P^{\prime\prime}$ . La figure (3.5) met en évidence la *correction dispersif* du système multiphasique, qui disparaît lorsque les deux phases sont parfaitement adhérentes ( $c^I \rightarrow +\infty$ ).

A  $c^I$  fixé, la vitesse de propagation  $c_P^{\prime\prime}$  décroît en fonction de la pulsation, passant de la valeur  $c_P^{hom}$  à la valeur  $c_P^s$  pour des pulsations élevées, tandis que le rapport entre les amplitudes  $A^r/A^m$  décroît à partir de la valeur 1 (FIG (3.6)).

$c_P^{\prime\prime}$  est par ailleurs une fonction croissante de  $c^I$ , tendant vers  $c_P^{hom}$  lorsque  $c^I \rightarrow +\infty$ .



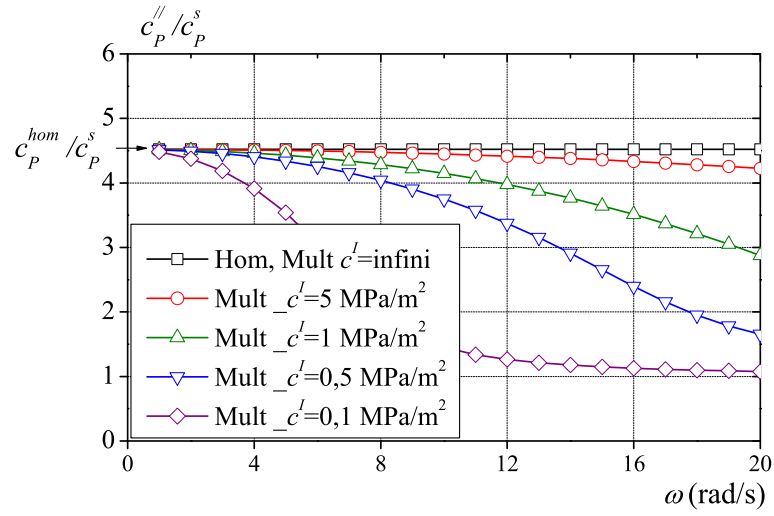


FIG. 3.5 – Vitesse de l'onde de compression se propageant parallèlement à la direction du renforcement en fonction de la pulsation et du coefficient d'interaction.

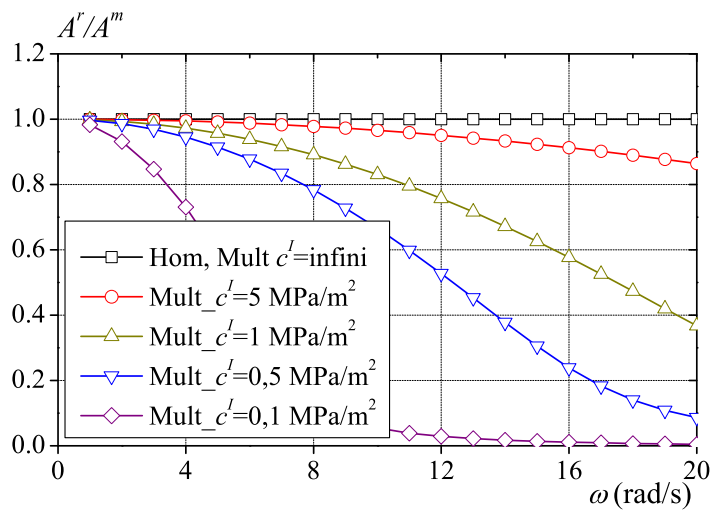


FIG. 3.6 – Rapport entre les amplitudes  $A^r/A^m$  en fonction de la pulsation et du coefficient d'interaction.

## 3.5 Exemple d'application : Calcul de l'impédance d'une couche renforcée

### 3.5.1 Position du problème

On considère une couche de sol d'épaisseur  $H$  encastrée en partie inférieure, renforcée par un réseau périodique d'inclusions rigides verticales de longueur  $L$ , et supposée infinie dans le plan horizontal. Les inclusions, plongées dans le sol, sont soit *flottantes*, soit *encastrées* dans un substratum rigide, comme l'indique des figures (3.7).a et (3.8).a.

La mise en œuvre de la modélisation multiphasique pour l'étude de ce problème consiste à remplacer la couche renforcée par une couche multiphasique d'épaisseur  $H$  et d'extension infinie suivant les directions horizontales soumise au chargement suivant :

$$\underline{\xi}^r(x=0) = \delta_0 e^{i\omega t} \underline{e}_x \quad (3.36)$$

c'est à dire que la sollicitation harmonique est appliquée à la phase renforcement en ( $x=0$ ) tandis que la phase matrice demeure libre d'effort en ( $x=0$ ) :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m(x=0) \cdot \underline{e}_x = 0 \quad (3.37)$$

Compte tenu de la *périodicité* de la structure, le problème peut se réduire à l'étude d'un problème auxiliaire défini sur la *cellule de base* (FIG (3.7).b et (3.8).b) où les conditions aux limites appliquées sur ses deux faces verticales correspondent à un contact *lisse* avec les plans verticaux correspondants.

#### 3.5.1.1 Inclusions encastrées

La condition limite en surface inférieure de la couche de sol renforcé ( $x=H$ ) s'écrit dans ce cas :

$$\underline{\xi}^m(x=H) = \underline{\xi}^r(x=H) = 0 \quad (3.38)$$

Dans ce cas, il n'existe pas d'effet de pointe et seule l'interaction volumique intervient dans la résolution du problème.

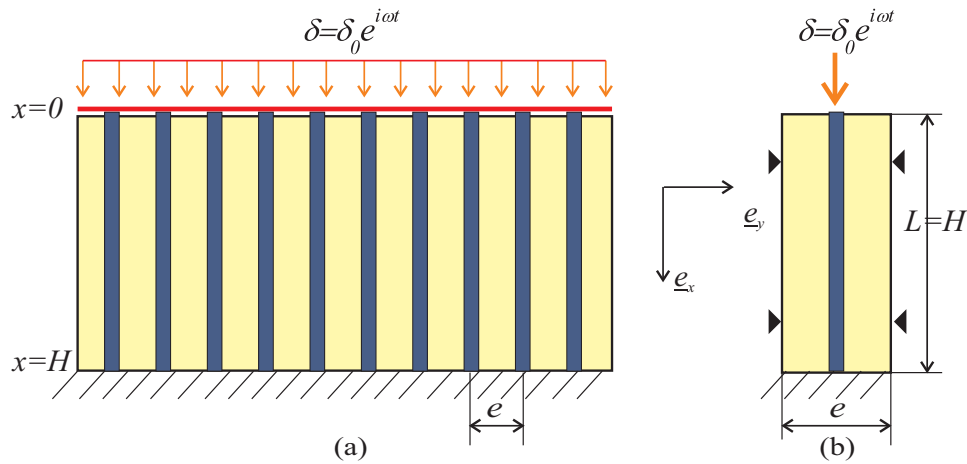


FIG. 3.7 – (a) Couche de sol renforcée par des inclusions encastrées. (b) Cellule de base

### 3.5.1.2 Inclusions flottantes

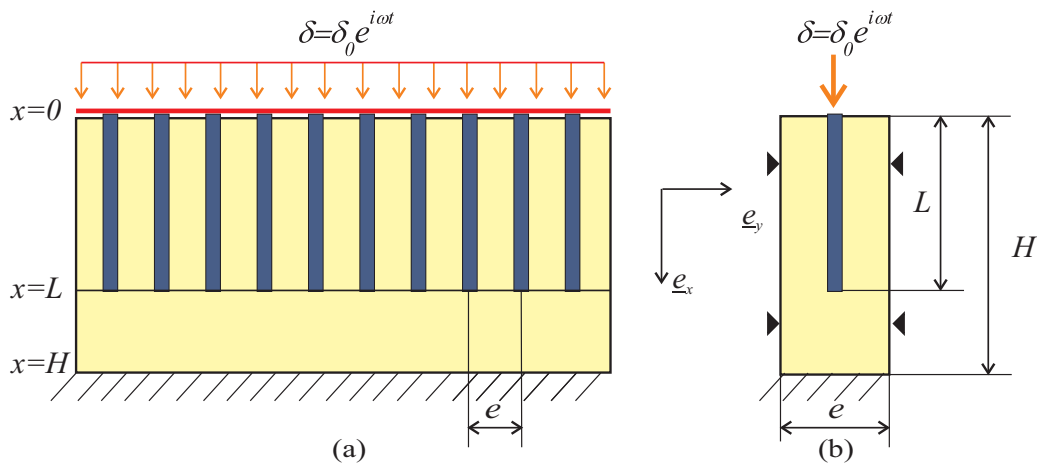


FIG. 3.8 – (a) Couche de sol renforcée par des inclusions flottantes. (b) Cellule de base

Dans le cas d'inclusions flottantes, l'effet de pointe se manifeste en pied des inclusions ( $x = L$ ), soit d'après (3.3) et (3.5) :

$$\begin{aligned}
 -p &= n^r(x = L^-) \\
 \sigma_{xx}^m(x = L^+) - \sigma_{xx}^m(x = L^-) &= -p
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

où  $p$  est la densité d'effort de pointe qui, compte tenu de la loi de comportement (3.11), s'écrit :

$$p = c^P [\xi_x^r(x = L) - \xi_x^m(x = L)] \quad (3.40)$$

où  $c^P$  est le coefficient d'interaction de pointe.

Par ailleurs, la couche de sol est encastrée en bas ( $x = H$ ) :

$$\underline{\xi}^m(x = H) = 0 \quad (3.41)$$

### 3.5.2 Solution en déplacement

La solution en déplacement en *régime permanent* est recherchée sous la forme :

– *Phase matrice* :

$$\underline{\xi}^m = m(x) e^{i\omega t} \underline{e}_x \quad (3.42)$$

– *Phase renforcement* :

$$\underline{\xi}^r = r(x) e^{i\omega t} \underline{e}_x \quad (3.43)$$

Pour la zone de sol renforcé modélisée comme un système multiphasique, les équations de l'élastodynamique (3.15) peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} (\lambda^s + 2\mu^s)m'' + \omega^2\rho^s m + c^I(r - m) = 0 \\ \alpha r'' + \omega^2\eta\rho^b r - c^I(r - m) = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

où l'expression de  $r$  en fonction de  $m$  et  $m''$  peut être tirée de la première équation de (3.44) :

$$r = -\frac{\lambda^s + 2\mu^s}{c^I} m'' - \frac{\omega^2\rho^s - c^I}{c^I} m \quad (3.45)$$

et être introduite dans la deuxième équation. D'où :

$$\alpha(\lambda^s + 2\mu^s)m^{(4)} - [(\lambda^s + 2\mu^s + \alpha)c^I - \omega^2\eta\rho^b(\lambda^s + 2\mu^s) - \omega^2\rho^s\alpha]m'' + [\eta\rho^b\rho^s\omega^4 - (\eta\rho^b + \rho^s)\omega^2c^I]m = 0 \quad (3.46)$$

La solution générale de cette dernière équation est donc de la forme :

$$m = A \sinh(\Delta_1 \frac{x}{H}) + B \cosh(\Delta_1 \frac{x}{H}) + C \sin(\Delta_2 \frac{x}{H}) + D \cos(\Delta_2 \frac{x}{H}) \quad (3.47)$$

dans laquelle les paramètres sans dimension  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont déterminés par le système d'équations :

$$\begin{aligned} \Delta_1^2 - \Delta_2^2 &= \frac{(\lambda^s + 2\mu^s + \alpha)c^I - \omega^2\eta\rho^b(\lambda^s + 2\mu^s) - \omega^2\rho^s\alpha}{\alpha(\lambda^s + 2\mu^s)} H^2 \\ \Delta_1^2 \Delta_2^2 &= \frac{-\eta\rho^b\rho^s\omega^4 + (\eta\rho^b + \rho^s)\omega^2c^I}{\alpha(\lambda^s + 2\mu^s)} H^4 \end{aligned} \quad (3.48)$$

### 3.5.2.1 Inclusions encastrées ( $L = H$ )

La condition d'encastrement en bas de la couche ( $x = H$ ), valable pour les deux phases, s'écrit :

$$\begin{cases} m(x = H) = 0 \\ r(x = H) = 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

Reportant ces conditions dans l'équation (3.45), il vient :

$$m''(x = H) = 0 \quad (3.50)$$

et on obtient alors, compte tenu de l'expression (3.47) :

$$\begin{cases} A \sinh(\Delta_1) + B \cosh(\Delta_1) + C \sin(\Delta_2) + D \cos(\Delta_2) = 0 \\ \Delta_1^2 A \sinh(\Delta_1) + \Delta_1^2 B \cosh(\Delta_1) - \Delta_2^2 C \sin(\Delta_2) - \Delta_2^2 D \cos(\Delta_2) = 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

A la surface du massif ( $x = 0$ ), les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^m(x=0) \Rightarrow m'(x=0) = 0 \\ \underline{\xi}^r(x=0) = \delta_0 e^{i\omega t} \underline{e}_x \Rightarrow r(x=0) = \delta_0 \end{cases} \quad (3.52)$$

soit encore en vertu de (3.45) :

$$\begin{cases} m'(x=0) = 0 \\ -\frac{\lambda^s + 2\mu^s}{c^I} m''(x=0) - \frac{\omega^2 \rho^s - c^I}{c^I} m(x=0) = \delta_0 \end{cases} \quad (3.53)$$

Reportant l'expression de  $m$  donnée par (3.47) dans les équations (3.53), on obtient :

$$\begin{cases} A\Delta_1 + C\Delta_2 = 0 \\ -\frac{\lambda^s + 2\mu^s}{c^I} \left( \frac{B\Delta_1^2}{H^2} - \frac{D\Delta_2^2}{H^2} \right) - \frac{\omega^2 \rho^s - c^I}{c^I} (B + D) = \delta_0 \end{cases} \quad (3.54)$$

La résolution du système linéaire formé par les équations (3.51) et (3.54) permet de déterminer les constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  comme suit :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\Delta_2 H^2 c^I \delta_0}{\Delta} \\ B &= \frac{-\Delta_2 H^2 \tanh(\Delta_1) c^I \delta_0}{\Delta} \\ C &= \frac{-\Delta_1 H^2 c^I \delta_0}{\Delta} \\ D &= \frac{\Delta_1 H^2 \tan(\Delta_2) c^I \delta_0}{\Delta} \end{aligned} \quad (3.55)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta &= [\Delta_1^2 \Delta_2 (\lambda^s + 2\mu^s) + \Delta_2 H^2 (\omega^2 \rho^s - c^I)] \tanh(\Delta_1) \\ &+ [\Delta_1 \Delta_2^2 (\lambda^s + 2\mu^s) - \Delta_1 H^2 (\omega^2 \rho^s - c^I)] \tan(\Delta_2) \end{aligned} \quad (3.56)$$

La valeur de l'effort  $n^r$  dans la phase renforcement en  $x = 0$  est donnée par :

$$n^r(0) = \alpha r'(x=0)e^{i\omega t} \quad (3.57)$$

soit d'après (3.45) et la première condition de (3.53) et en tenant compte de (3.47) :

$$n^r(0) = \alpha \left[ -\frac{\lambda^s + 2\mu^s}{c^I} m'''(0) - \frac{\omega^2 \rho^s - c^I}{c^I} m'(0) \right] = -\alpha \frac{\lambda^s + 2\mu^s}{c^I} \left[ \frac{A\Delta_1^3}{H^3} - \frac{C\Delta_2^3}{H^3} \right] e^{i\omega t} \quad (3.58)$$

Finalement, l'impédance verticale peut être définie comme le rapport entre l'effort appliqué en tête de la phase renforcement et le déplacement imposé, soit d'après (3.58) :

$$K_d = \frac{-n^r(0)}{\delta_0 e^{i\omega t}} = \frac{\alpha(\lambda^s + 2\mu^s)(\Delta_2\Delta_1^3 + \Delta_1\Delta_2^3)}{H\Delta} \quad (3.59)$$

### 3.5.2.2 Inclusions flottantes ( $L < H$ )

On distingue dans ce cas les deux zones, renforcée et non renforcée, du sol :

– *Zone renforcée* (de  $x = 0$  à  $x = L$ ) :

La solution de  $m(x)$  est toujours de la forme :

$$m = A \sinh\left(\Delta_1 \frac{x}{H}\right) + B \cosh\left(\Delta_1 \frac{x}{H}\right) + C \sin\left(\Delta_2 \frac{x}{H}\right) + D \cos\left(\Delta_2 \frac{x}{H}\right) \quad (3.60)$$

avec les mêmes conditions aux limites en  $x = 0$  :

$$\begin{cases} A\Delta_1 + C\Delta_2 = 0 \\ -\frac{\lambda^s + 2\mu^s}{c^I} \left( \frac{B\Delta_1^2}{H^2} - \frac{D\Delta_2^2}{H^2} \right) - \frac{\omega^2 \rho^s - c^I}{c^I} (B + D) = \delta_0 \end{cases} \quad (3.61)$$

– *Zone non renforcée* (de  $x = L$  à  $x = H$ ) :

L'équation de l'élastodynamique se réduit à celle du sol seul :

$$(\lambda^s + 2\mu^s)m'' + \rho^s\omega^2m = 0 \quad (3.62)$$

dont la solution générale  $m(x)$  s'écrit :

$$m(x) = P \sin(\Delta_3 \frac{x}{H}) + Q \cos(\Delta_3 \frac{x}{H}) \quad (3.63)$$

où :

$$\Delta_3 = \omega H \sqrt{\frac{\rho^s}{\lambda^s + 2\mu^s}} \quad (3.64)$$

La condition d'encastrement en  $x = H$  :

$$m(x = H) = 0 \quad (3.65)$$

donne alors d'après (3.63) :

$$P \sin(\Delta_3) + Q \cos(\Delta_3) = 0 \quad (3.66)$$

– *Interface entre les zones renforcée et non renforcée ( $x = L$ ) :*

Cette interface contenant les extrémités inférieures des inclusions, on peut écrire l'équation de saut (3.39) qui devient dans ce cas :

$$(\lambda^s + 2\mu^s)[m'(L^+) - m'(L^-)] = -c^P[r(L) - m(L)] \quad (3.67)$$

ainsi que la condition aux bords ( $x = L$ ) de la phase renforcement :

$$\alpha r'(L) + c^P[r(L) - m(L)] = 0 \quad (3.68)$$

A ces deux équations s'ajoute la condition de continuité du déplacement de la phase matrice :

$$m(L^+) = m(L^-) = m(L) \quad (3.69)$$



Compte tenu des expressions générales (3.60) et (3.63) de  $m(x)$  ainsi que l'expression (3.45) de  $r(x)$ , en posant :

$$\begin{cases} \Delta'_1 = \frac{\Delta_1}{H} \\ \Delta'_2 = \frac{\Delta_2}{H} \\ \Delta'_3 = \frac{\Delta_3}{H} \end{cases} \quad (3.70)$$

les équations (3.67), (3.68) et (3.69) conduisent au système linéaire suivant en  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $P$  et  $Q$  :

$$\begin{cases} (\lambda^s + 2\mu^s) \left[ A\Delta'_1 \cosh(\Delta'_1 L) + B\Delta'_1 \sinh(\Delta'_1 L) + C\Delta'_2 \cos(\Delta'_2 L) - D\Delta'_2 \sin(\Delta'_2 L) \right. \\ \left. - P\Delta'_3 \cos(\Delta'_3 L) + Q\Delta'_3 \sin(\Delta'_3 L) \right] \\ = \frac{c^P}{c^I} \left\{ (\lambda^s + 2\mu^s) \left[ A\Delta_1'^2 \sinh(\Delta'_1 L) + B\Delta_1'^2 \cosh(\Delta'_1 L) - C\Delta_2'^2 \sin(\Delta'_2 L) - D\Delta_2'^2 \cos(\Delta'_2 L) \right] \right. \\ \left. + \omega^2 \rho^s \left[ A \sinh(\Delta'_1 L) + B \cosh(\Delta'_1 L) + C \sin(\Delta'_2 L) + D \cos(\Delta'_2 L) \right] \right\} \\ \\ \frac{\alpha}{c^I} \left\{ -(\lambda^s + 2\mu^s) \left[ A\Delta_1'^3 \cosh(\Delta'_1 L) + B\Delta_1'^3 \sinh(\Delta'_1 L) - C\Delta_2'^3 \cos(\Delta'_2 L) + D\Delta_2'^3 \sin(\Delta'_2 L) \right] \right. \\ \left. - (\omega^2 \rho^s - c^I) \left[ A\Delta'_1 \cosh(\Delta'_1 L) + B\Delta'_1 \sinh(\Delta'_1 L) + C\Delta'_2 \cos(\Delta'_2 L) - D\Delta'_2 \sin(\Delta'_2 L) \right] \right\} \\ = \frac{c^P}{c^I} \left\{ (\lambda^s + 2\mu^s) \left[ A\Delta_1'^2 \sinh(\Delta'_1 L) + B\Delta_1'^2 \cosh(\Delta'_1 L) - C\Delta_2'^2 \sin(\Delta'_2 L) - D\Delta_2'^2 \cos(\Delta'_2 L) \right] \right. \\ \left. + \omega^2 \rho^s \left[ A \sinh(\Delta'_1 L) + B \cosh(\Delta'_1 L) + C \sin(\Delta'_2 L) + D \cos(\Delta'_2 L) \right] \right\} \\ \\ A \sinh(\Delta'_1 L) + B \cosh(\Delta'_1 L) + C \sin(\Delta'_2 L) + D \cos(\Delta'_2 L) = P \sin(\Delta'_3 L) + Q \cos(\Delta'_3 L) \end{cases} \quad (3.71)$$

Enfin, le système linéaire formé par les équations (3.61), (3.66) et (3.71) permet de déterminer les valeurs de  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $P$ ,  $Q$  et d'en déduire l'impédance dynamique verticale de la structure.

## 3.5.3 Identification des coefficients d'interaction et résultats

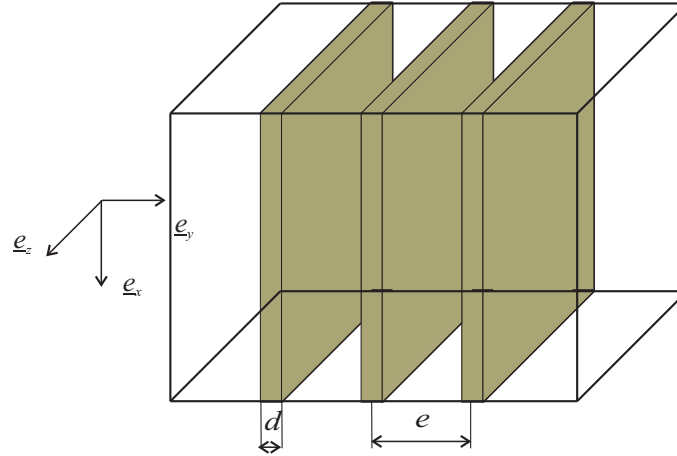


FIG. 3.9 – Sol renforcé par des inclusions modélisées comme des plaques

On se place dans la situation où les inclusions sont modélisées comme des plaques de hauteur  $L$ , d'épaisseur  $d$  et de longueur infinie dans la direction  $Oz$ , espacées régulièrement d'une distance  $e$ , comme indiqué sur la figure (3.9). On choisit le jeu de paramètres suivant :

– Caractéristiques du sol :

$$E^s = 45 \text{ MPa}; \nu^s = 0,2; \rho^s = 1750 \text{ kg/m}^3$$

– Caractéristiques des pieux :

$$E^b = 20 \text{ GPa}; \rho^b = 2500 \text{ kg/m}^3$$

– Paramètres géométriques :

$$H = 24 \text{ m}; L = 16 \text{ m}; e = 4 \text{ m}; d = 0,1 \text{ m}$$

Grâce à la méthode des moindres carrés, on peut alors identifier les coefficients d'interaction  $c^J$  et  $c^P$ , en calant les valeurs de l'impédance verticale de la structure, données par les formules analytiques précédentes du modèle multiphasique, avec celles obtenues à partir de la simulation directe d'un problème auxiliaire, conduite à l'aide de la méthode des éléments finis (FIG (3.10)).

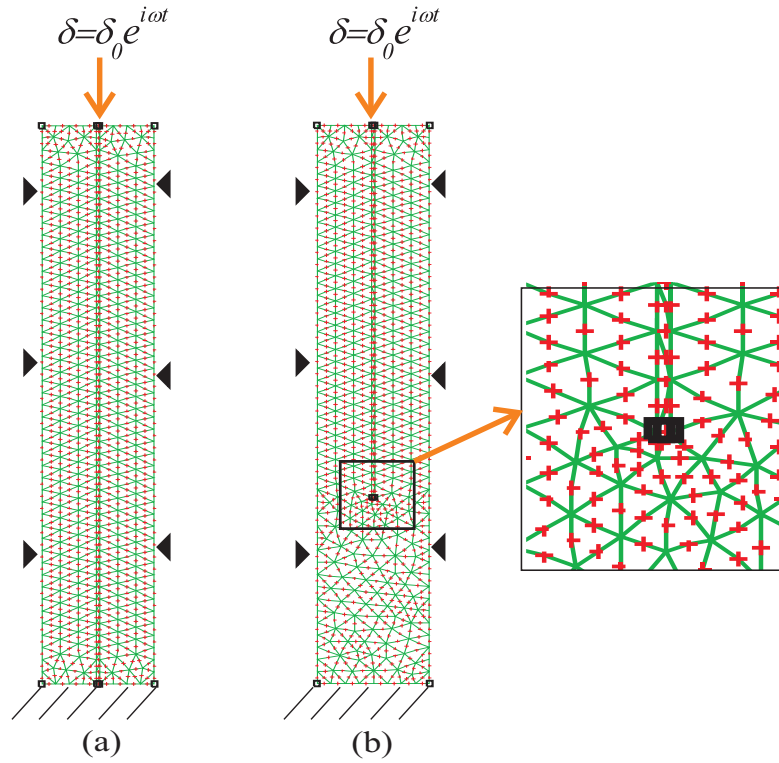


FIG. 3.10 – Maillage par éléments finis du problème auxiliaire : (a) plaques *encastées* (b) plaques *flottantes*

Les figures (3.11) et (3.12) représentent l'impédance verticale de la structure normalisée par la raideur verticale en statique de la structure renforcée, obtenue à l'aide du modèle multiphasique avec les coefficients d'interaction identifiés et de la simulation directe, en fonction de la pulsation normalisée  $a$  définie par :

$$a = \frac{\omega H}{c_P^s} \quad (3.72)$$

où  $c_P^s$  est la vitesse de l'onde en compression du sol non renforcé :

$$c_P^s = \sqrt{\frac{\lambda^s + 2\mu^s}{\rho^s}} \quad (3.73)$$

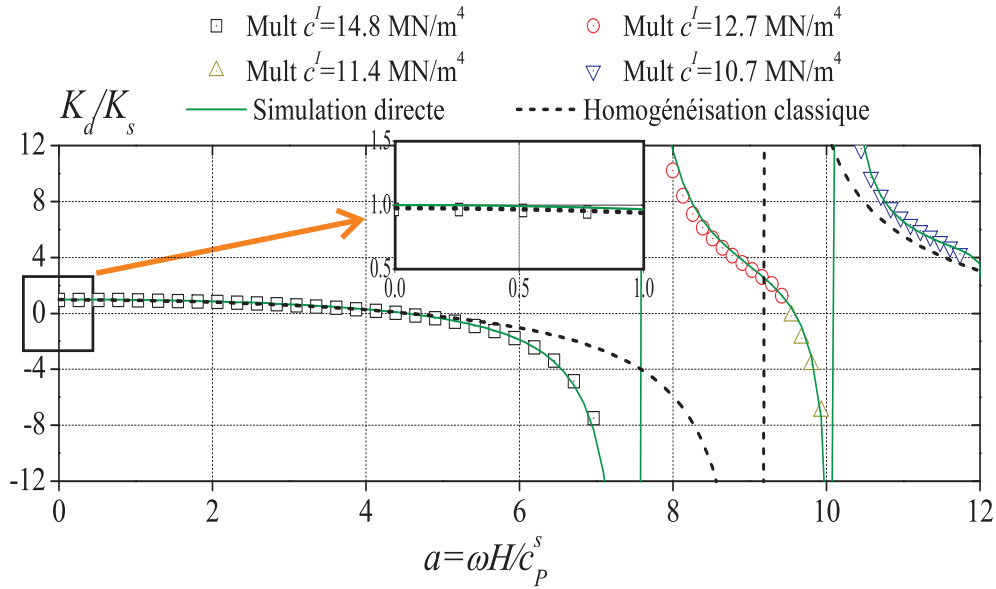


FIG. 3.11 – Impédance verticale normalisée en fonction de la pulsation normalisée  $a$  : cas des *plaques encastrées*

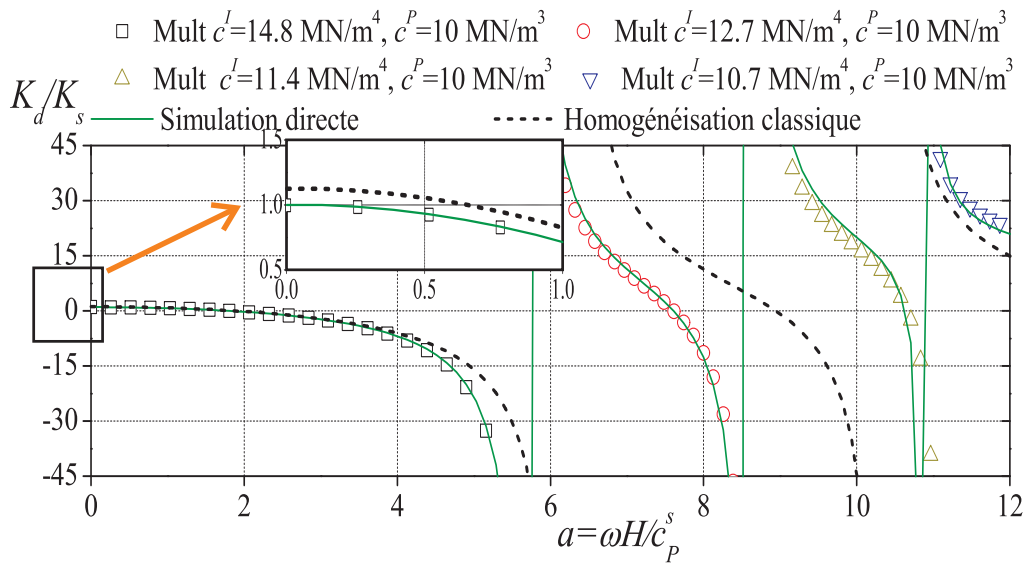


FIG. 3.12 – Impédance verticale normalisée en fonction de la pulsation normalisée  $a$  : cas des *plaques flottantes*

Ces figures montrent, qu'une fois identifiés les paramètres d'interaction, dans le cas statique ( $a = 0$ ) par exemple, l'accord est excellent entre les résultats de la simulation par le modèle multiphasique utilisant ces paramètres et ceux de la simulation directe par éléments finis. On note toutefois que le coefficient d'interaction  $c^I$  diminue légèrement quand la pulsation augmente.

### 3.6 Positionnement du modèle multiphasique par rapport à la méthode des développements asymptotiques

Ce chapitre se termine sur une tentative de confrontation entre le modèle bi-phasique avec prise en compte d'un comportement d'interaction, décrit ci-dessus, et les résultats obtenus par Soubestre (2011) [49], Soubestre et Boutin (2012) [50] sur la base de la méthode des développements asymptotiques développée dans le cas d'un chargement dynamique.

#### 3.6.1 Rappel de la méthode des développements asymptotiques

On se place dans le cas où le contraste de rigidité (module de cisaillement) matrice/inclusion est d'ordre deux ( $\mu^s = O(\varepsilon^2 \mu^b)$ ), dans lequel  $\varepsilon$  est un petit paramètre d'échelle du problème, défini comme le rapport  $\varepsilon = e/L$ , où  $L$  est une longueur macroscopique et  $e$  désigne l'espacement entre les inclusions.

On définit ensuite une première pulsation caractéristique, notée  $\omega^s$ , correspondant au régime de fonctionnement dynamique en cisaillement transverse de la matrice :

$$\omega^s = \sqrt{\frac{\mu^s}{\rho^s}} \frac{1}{L} \quad (3.74)$$

et une autre, notée  $\omega^b$ , correspondant au régime de fonctionnement dynamique en compression axiale de l'inclusion :

$$\omega^b = \sqrt{\frac{E^b}{\rho^b}} \frac{1}{L} \quad (3.75)$$

Ces pulsations correspondent à des longueurs d'onde, respectivement de cisaillement dans la matrice et de compression dans l'inclusion, qui sont du même ordre de grandeur que la longueur  $L$ .

En considérant que les masses volumiques  $\rho^b$  et  $\rho^s$  sont du même ordre de grandeur, le ratio des pulsations relatives aux deux constituants est alors du même ordre de grandeur que la racine carrée du contraste de rigidité, soit d'ordre un en  $\varepsilon$  :

$$\frac{\omega^s}{\omega^b} = \sqrt{\frac{\rho^b \mu^s}{\rho^s E^b}} = O\left(\sqrt{\frac{\mu^s}{E^b}}\right) = O\left(\sqrt{\frac{\mu^s}{\mu^b}}\right) = O(\varepsilon) \quad (3.76)$$

On s'intéresse dans cette partie, à deux domaines de fonctionnement dynamique différents du système dans la direction axiale, correspondant aux deux ordres de grandeur de la pulsation :

a)  $\omega = O(\omega^s) = \varepsilon O(\omega^b)$

La longueur d'onde de compression dans l'inclusion associée à cette pulsation est très grande par rapport à la longueur macroscopique :

$$\frac{\lambda^b}{2\pi} = \sqrt{\frac{E^b}{\rho^b}} \frac{1}{\varepsilon \omega^b} = \varepsilon^{-1} L \gg L \quad (3.77)$$

Le milieu renforcé est donc en régime quasi-statique dans la direction axiale. En négligeant les termes en  $O(\varepsilon^2)$ , l'équation de l'élastodynamique se réduit à une équation d'équilibre statique :

$$\eta E^b U_1^{0''} = 0 \quad (3.78)$$

où  $U_1^0$  est le déplacement axial de l'inclusion.

b)  $\omega = O(\omega^b) = \varepsilon^{-1} O(\omega^s)$

La longueur d'onde de compression dans l'inclusion est du même ordre de grandeur que la longueur macroscopique :

$$\frac{\lambda^b}{2\pi} = \sqrt{\frac{E^b}{\rho^b} \frac{1}{\omega^b}} = L \quad (3.79)$$

Le milieu renforcé fonctionne donc en régime dynamique dans la direction axiale régi par l'équation de l'élastodynamique correspondante (voir Soubestre, 2011 [49] pour plus de détails) :

$$\eta E^b U_1^{0''} + \left( \eta \rho^b + \rho^s \frac{1}{|S^s|} \int_{S^s} \zeta^1(\omega) ds \right) \omega^2 U_1^0 = 0 \quad (3.80)$$

dans laquelle  $\frac{1}{|S^s|} \int_{S^s} \zeta^1(\omega) ds$  désigne un *terme de masse correctif* dépendant de la fréquence.

### 3.6.2 Confrontation avec le modèle multiphasique

On revient maintenant au modèle multiphasique, pour lequel les équations de l'élastodynamique s'écrivent (équation (3.44)) :

$$\begin{cases} (\lambda^s + 2\mu^s)m'' + \omega^2 \rho^s m + c^I(r - m) = 0 \\ \eta E^b r'' + \omega^2 \eta \rho^b r - c^I(r - m) = 0 \end{cases} \quad (3.81)$$

Dans le but de positionner le modèle multiphasique par rapport à la méthode des développements asymptotiques, on redimensionne comme suit les caractéristiques du sol :

$$\begin{aligned} \lambda^s &= \varepsilon^2 \lambda^{s*} = \varepsilon^2 O(\mu^b) \\ \mu^s &= \varepsilon^2 \mu^{s*} = \varepsilon^2 O(\mu^b) \end{aligned} \quad (3.82)$$

de sorte que les caractéristiques  $\lambda^{s*}$  et  $\mu^{s*}$  sont de même ordre que  $\mu^b$ .

On examine alors les deux ordres de grandeur de la pulsation :

a)  $\omega = \varepsilon \omega^* = \varepsilon O(\omega^b) = O(\omega^s)$

L'équation (3.81) devient :

$$\begin{cases} \varepsilon^2(\lambda^{s*} + 2\mu^{s*})m'' + \varepsilon^2\omega^{*2}\rho^s m + c^I(r - m) = 0 \\ \eta E^b r'' + \varepsilon^2\omega^{*2}\eta\rho^b r - c^I(r - m) = 0 \end{cases} \quad (3.83)$$

de sorte qu'en négligeant les termes d'ordre deux en  $\varepsilon$ , comme dans la méthode des développements asymptotiques, on obtient :

$$\eta E^b r'' = 0 \quad (3.84)$$

b)  $\omega = O(\omega^b) = O(\varepsilon^{-1}\omega^s)$

Les équations (3.81) deviennent dans ce cas :

$$\begin{cases} \varepsilon^2(\lambda^{s*} + 2\mu^{s*})m'' + \omega^2\rho^s m + c^I(r - m) = 0 \\ \eta E^b r'' + \omega^2\eta\rho^b r - c^I(r - m) = 0 \end{cases} \quad (3.85)$$

de sorte que négligeant les termes en  $\varepsilon^2$ , on obtient l'équation en  $r$  suivante :

$$\eta E^b r'' + (\eta\rho^b + \rho^s \frac{c^I}{c^I - \rho^s \omega^2})\omega^2 r = 0 \quad (3.86)$$

	Multiphasique	Développements asymptotiques
$\omega = \varepsilon O(\omega^b)$	$\eta E^b r'' = 0$	$\eta E^b U_1^{0''} = 0$
$\omega = O(\omega^b)$	$\eta E^b r'' + (\eta\rho^b + \rho^s \frac{c^I}{c^I - \rho^s \omega^2})\omega^2 r = 0$	$\eta E^b U_1^{0''} + (\eta\rho^b + \rho^s \frac{1}{ S^s } \int_{S^s} \zeta^1(\omega) ds)\omega^2 U_1^0 = 0$

TAB. 3.1 – Equations du modèle multiphasique et de la méthode des développements asymptotiques correspondant à deux ordres de grandeur différents de la pulsation

Les équations relatives au modèle multiphasique et à la méthode des développements asymptotiques écrites pour deux ordres de grandeur différents de la pulsation, sont représentées dans le tableau (3.1). Tenant compte de  $U_1^0 = r$ , on obtient en premier lieu une concordance entre les deux méthodes pour  $\omega = \varepsilon O(\omega^b)$ . Dans le cas où  $\omega = O(\omega^b)$ , les équations de la dynamique relatives aux inclusions de



renforcement sont formellement identiques, sous réserve de l'identification suivante du coefficient d'interaction :

$$c^I = \frac{\frac{1}{|S^s|} \int_{S^s} \zeta^1(\omega) ds}{\frac{1}{|S^s|} \int_{S^s} \zeta^1(\omega) ds - 1} \rho^s \omega^2 \quad (3.87)$$

### 3.7 Conclusion

Ce chapitre a été consacré au développement d'un modèle multiphasique prenant en compte deux types d'interaction entre le sol et les inclusions : interaction volumique et interaction surfacique (effet de *pointe*). La mise en œuvre de ce modèle a été illustrée sur l'exemple de la propagation d'une onde de compression dans le sol renforcé, parallèlement à la direction de renforcement. Elle nous a permis de montrer que la vitesse de cette onde peut être déterminée à l'aide d'une équation polynomiale de degré quatre, et qu'elle dépend non seulement des caractéristiques des matériaux constituant le sol renforcé, mais aussi de la raideur d'interaction et surtout de la pulsation, contrairement au résultat donné par le modèle d'homogénéisation classique.

Cette modélisation est alors appliquée au calcul de l'impédance d'une couche de sol d'extension infinie uniformément renforcée par des inclusions verticales soit encastrées en pointe, soit flottante. La résolution étant entièrement analytique, ses résultats sont comparés à ceux d'une simulation numérique directe conduite à l'aide de la méthode des éléments finis. Il est alors remarquable de constater, qu'une fois les paramètres d'interaction multiphasique identifiés pour une pulsation particulière (par exemple nulle), l'accord entre les prévisions du modèle multiphasique et celles de la simulation numérique se révèle excellent, validant ainsi la modélisation multiphasique.

Le chapitre s'achève enfin sur une première tentative de confrontation entre le modèle multiphasique et la méthode des développements asymptotiques récemment appliquée au comportement des sols renforcés par inclusions linéaires, par Soubestre (2011) [49]. Se plaçant dans la situation où le rapport entre les modules d'élasticité du sol et du renforcement est un infiniment petit d'ordre deux par rapport au petit paramètre d'homogénéisation, la forme des équations de l'élastodynamique axiale obtenues par les deux approches est tout à fait similaire, le coefficient d'interaction pouvant alors être calculé à partir de la méthode des développements asymptotiques.

# Mise en œuvre numérique 2D du modèle multiphasique dynamique en élasticité linéaire

---

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>83</b>
<b>4.2</b>	<b>Formulation éléments finis en dynamique appliquée au modèle multiphasique</b> . . . . .	<b>83</b>
<b>4.3</b>	<b>Méthode de résolution dans le domaine temporel</b> . . . . .	<b>89</b>
<b>4.4</b>	<b>Conditions aux limites absorbantes</b> . . . . .	<b>91</b>
<b>4.5</b>	<b>Application au dimensionnement de fondations renforcées par inclusions rigides</b> . . . . .	<b>92</b>
4.5.1	Position du problème . . . . .	92
4.5.2	Données du problème . . . . .	94
4.5.3	Simulation numérique et résultats . . . . .	95
4.5.4	Conclusion . . . . .	101

---



## 4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de mettre au point un code de calcul numérique du modèle multiphasique présenté dans le chapitre précédent, dans le cadre de la méthode des éléments finis en élasticité linéaire et en déformations planes.

On établit tout d'abord une formulation éléments finis en dynamique appliquée au modèle multiphasique en se basant sur les travaux de Thai Son, 2009 [48].

En parallèle à la méthode de résolution dans le domaine *fréquentiel* présentée au chapitre 2, on propose ici la méthode de résolution dans le domaine *temporel*, permettant de trouver la solution du problème à tout instant, y compris en régime transitoire.

Il est aussi intéressant de présenter la condition aux limites de type frontières absorbantes qui est fréquemment utilisée dans les problèmes dynamiques d'ouvrages.

A la fin de ce chapitre, l'application et la vérification du code de calcul multiphasique ainsi mis au point seront effectuées sur l'exemple du dimensionnement d'un radier de fondation de pieux, soumis à un chargement dynamique vertical.

## 4.2 Formulation éléments finis en dynamique appliquée au modèle multiphasique

Dans le but d'établir une formulation éléments finis en dynamique du problème, on se basera sur les travaux de Thai Son, 2009 [48] qui portent sur le cas *statique*. Pour simplifier l'exposé et tirer partie des résultats établis, les forces d'inerties seront traitées dans un premier temps comme des forces de volumes *données*, puis exprimées en fonction des inconnues nodales. Il est à signaler que diverses méthodes telles que la mise en œuvre du principe des puissances virtuelles, du principe de Hamilton ou encore l'utilisation des équations de Lagrange sur le système discrétisé, peuvent être également utilisées, mais amènent au même résultat.

On adopte un maillage standard de la structure, en chaque nœud duquel sont attachées les variables de déplacement des deux phases, au nombre de 4 dans le cas de la déformation plane. On peut réduire ce nombre à 3 degrés de liberté en

admettant que le seul déplacement relatif entre phases est parallèle à la direction des inclusions de renforcement.

Dans le cas d'un milieu renforcé par une seule famille d'inclusions de renforcement parallèles à la direction  $Ox$ , sollicité en déformation plane dans  $(Oxy)$ , sous l'hypothèse d'adhérence parfaite dans la direction  $(Oy)$  du renforcement, le champ de déplacement à trois degrés de liberté du milieu multiphasique (FIG (4.1)) est noté par :

$$\{\xi\}(x, y) = \begin{pmatrix} \xi_x^m(x, y) \\ \xi_y(x, y) \\ \xi_x^r(x, y) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

où  $\xi_x^m$ ,  $\xi_y$  désignent les composants suivant  $x$  et  $y$  du champ de déplacement de la phase matrice, tandis que  $\xi_x^r$ ,  $\xi_y$  sont associés à la phase renforcement.

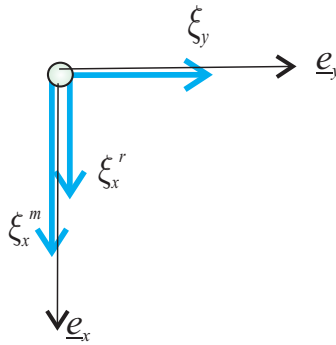


FIG. 4.1 – Trois degrés de liberté du milieu multiphasique

L'application du *principe du minimum de l'énergie potentielle* au système multiphasique dans les conditions citées ci-dessus (déformation plane dans le plan  $(Oxy)$  et adhérence parfaite dans la direction  $(Oy)$ ) nous amène à la formulation éléments finis suivante (Thai Son, 2009 [48]) :

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (4.2)$$

où  $[K]$  est la matrice de rigidité du système dont la taille est  $3n$ ,  $n$  désigne le

nombre de nœuds du maillage,  $\{U\}$  est le vecteur des inconnues nodales et  $\{F\}$  celui des forces nodales.

La matrice de rigidité  $[K]$  est construite en se basant sur l'assemblage des matrices de rigidité élémentaire  $[k]_e$ . Pour un exemple élément  $\nu_e$  à  $n_e$  nœuds :

$$[k]_e = \int_{\nu_e} {}^t[B]_e [D] \cdot [B]_e d\Omega + \int_{\nu_e \cap \Sigma} {}^t[B]_e^P [c^P] \cdot [B]_e^P dS \quad (4.3)$$

dans laquelle :

- ◇  $\Sigma$  est la surface où se trouve des extrémités ("*pointes*") des inclusions de renforcement en contact avec le sol (matrice) ;
- ◇  $[D]$  désigne la matrice d'élasticité généralisée :

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda^m + 2\mu^m & \lambda^m & \lambda^m & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^m & \lambda^m + 2\mu^m & \lambda^m & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^m & \lambda^m & \lambda^m + 2\mu^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^I \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

et  $[c^P]$  est une matrice à une seule composante  $c^P$  ;

- ◇  $[B]_e$  est une matrice formée de  $n_e$  matrice  $[B]_k$  de taille (6 x 3) :

$$[B]_e = [\dots, [B]_k, \dots] \quad k = 1, \dots, n_e \quad (4.5)$$

avec :

$$[B]_k = \begin{bmatrix} N_{k,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{k,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ N_{k,y} & N_{k,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{k,x} \\ -N_k & 0 & N_k \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

où  $N_k(x, y)$  est le polynôme de degré  $n_e$  tel que :

$$N_k(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{au nœud } k \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad k = 1, \dots, n_e \quad (4.7)$$

et  $N_{k,x} = \frac{\partial N_k}{\partial x}$ ,  $N_{k,y} = \frac{\partial N_k}{\partial y}$  ;

◇  $[B]_e^P$  est une matrice formée de  $n_e$  matrice  $[B]_k^P$  de taille (1 x 3) :

$$[B]_e^P = [\dots, [B]_k^P, \dots] \quad k = 1, \dots, n_e \quad (4.8)$$

avec :

$$[B]_k^P = [-N_k, 0, N_k] \quad (4.9)$$

En ce qui concerne le vecteur des forces nodales  $\{F\}$ , il est assemblé à partir des vecteurs de forces élémentaires  $[f]_e$  :

$$\{f_e\} = \int_{\nu_e} {}^t[N]_e \{\rho F\} d\Omega + \int_{\nu_e \cap \partial\Omega_T^m} {}^t[N]_e \{T^m\} dS + \int_{\nu_e \cap \partial\Omega_T^r} {}^t[N]_e \{T^r\} dS \quad (4.10)$$

où :

$$\begin{aligned}
{}^t\{\rho F\} &= \{\rho^m F_x^m, \rho^m F_y^m + \rho^r F_y^r, \rho^r F_x^r\} \\
{}^t\{T^m\} &= \{T_x^{m,d}, T_y^{m,d}, 0\} \\
{}^t\{T^r\} &= \{0, T_y^{r,d}, T_x^{r,d}\}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$[N]_e$  est la matrice des fonctions de formes élémentaires :

$$[N]_e(x, y) = \left[ \dots \begin{pmatrix} N_k(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & N_k(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & N_k(x, y) \end{pmatrix} \dots \right] \quad k = 1, \dots, n_e \tag{4.12}$$

et  $\partial\Omega_T^m$  (resp.  $\partial\Omega_T^r$ ) est la partie du bord  $\partial\Omega$  de la structure sur laquelle sont données les densités d'efforts surfaciques  $\{T^m\}$  (resp.  $\{T^r\}$ ) appliquées à la phase matrice (resp. phase renforcement).

Dans le cas où le système multiphasique est soumis à une *sollicitation dynamique*, le travail des forces inertielles dans un champs de déplacement généralisé  $(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r)$  doit être pris en compte. Il s'écrit dans le cadre d'une formulation éléments finis :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r) &= \sum_{e=1}^{n_e} \left( \int_{\nu_e} (\rho^m \ddot{\underline{\xi}}^m \cdot \underline{\xi}^m + \rho^r \ddot{\underline{\xi}}^r \cdot \underline{\xi}^r) \right) d\Omega \\
&= \sum_{e=1}^{n_e} a_e(\{u_e\})
\end{aligned} \tag{4.13}$$

où  $N_e$  désigne le nombre d'éléments du maillage,  $\{u_e\}$  le vecteur des variables nodales élémentaires et  $a_e$  est le travail élémentaire des efforts d'accélération.  $\rho^m$  (resp.  $\rho^r$ ) est la masse volumique de la matrice (resp. phase renforcement).  $\ddot{\underline{\xi}}^m$  et  $\ddot{\underline{\xi}}^r$  sont les champs d'accélération des deux phases, donnés par :

$$\ddot{\underline{\xi}}^m = \frac{d^2 \underline{\xi}^m}{dt^2} \quad \ddot{\underline{\xi}}^r = \frac{d^2 \underline{\xi}^r}{dt^2} \tag{4.14}$$

Les expressions des champs de déplacement et d'accélération par élément en fonction des variables nodales, amène à l'expression suivante du travail élémentaire



des efforts d'accélération :

$$\begin{aligned} a_e(\{u_e\}) &= {}^t\{\ddot{u}_e\} \cdot \left( \int_{\nu_e} [\rho] \cdot {}^t[N]_e \cdot [N]_e d\omega \right) \{u_e\} \\ &= {}^t\{\ddot{u}_e\} [m]_e \{u_e\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

où  $[\rho]$  est la *matrice de masse volumique* qui s'écrit :

$$[\rho] = \begin{bmatrix} \rho^m & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \eta)\rho^m + \eta\rho^r & 0 \\ 0 & 0 & \rho^r \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

tandis que  $[m]_e$  désigne la matrice de masse élémentaire donnée par :

$$[m]_e = \int_{\nu_e} [\rho] \cdot {}^t[N]_e \cdot [N]_e d\omega \quad (4.17)$$

dont l'assemblage permet d'obtenir la *matrice de masse globale*  $[M]$ .

Le travail des efforts inertiels sous forme discrétisée s'écrit finalement :

$$\mathcal{A}(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r) = \sum_{e=1}^{N_e} {}^t\{\ddot{u}_e\} [m]_e \{u_e\} = \{\ddot{U}\} [M] \{U\} \quad (4.18)$$

la résolution par éléments finis du problème mettant en jeu un système multiphasique conduit au système linéaire suivant :

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{F\} \quad (4.19)$$

Par ailleurs, dans le cas d'un système *amorti*, on obtient une formulation éléments finis complète :

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{F\} \quad (4.20)$$

où  $[C]$  est la *matrice d'amortissement* déterminée par la formule de Rayleigh (E. Boyere, 2011 [9]; K. Chopra, 1995 [12]) :

$$[C] = \alpha_R[M] + \beta_R[M] \quad (4.21)$$

où  $\alpha_R$  et  $\beta_R$  sont les coefficients expérimentaux.

### 4.3 Méthode de résolution dans le domaine temporel

La méthode de résolution dans le domaine temporel permet de chercher la solution du problème à tout instant  $t$ . L'objectif est de trouver la solution  $(\{U\}_{n+1}, \{\dot{U}\}_{n+1}, \{\ddot{U}\}_{n+1})$  à un instant donné  $t_{n+1} = t_n + h$  à partir de la connaissance de la solution  $(\{U\}_n, \{\dot{U}\}_n, \{\ddot{U}\}_n)$  à l'instant  $t_n$ , où  $h$  est un pas du temps. On utilise les approximations de la méthode de Newmark définies comme suit :

$$\begin{aligned} \{\dot{U}\}_{n+1} &= \{\dot{U}\}_n + (1 - \gamma_N)h\{\ddot{U}\}_n + \gamma_N h\{\ddot{U}\}_{n+1} \\ \{U\}_{n+1} &= \{U\}_n + h\{\dot{U}\}_n + h^2(0,5 - \beta_N)\{\ddot{U}\}_n + h^2\beta_N\{\ddot{U}\}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.22)$$

où  $\gamma_N$  et  $\beta_N$  désignent les coefficients de Newmark.

Introduisant ensuite les équations (4.22) dans l'équation (4.20) on obtient alors :

$$\begin{aligned} ([M] + \gamma_N h[C] + \beta_N h^2[K])\{\ddot{U}\}_{n+1} &= \{F\}_{n+1} - [C](\{\dot{U}\}_n + (1 - \gamma_N)h\{\ddot{U}\}_n) \\ &\quad - [K](\{U\}_n + h\{\dot{U}\}_n + (0,5 - \beta_N)h^2\{\ddot{U}\}_n) \end{aligned} \quad (4.23)$$

En posant :

$$\begin{aligned} [K]' &= [M] + \gamma_N h[C] + \beta_N h^2[K] \\ \{F\}'_{n+1} &= \{F\}_{n+1} - [C](\{\dot{U}\}_n + (1 - \gamma_N)h\{\ddot{U}\}_n) \\ &\quad - [K](\{U\}_n + h\{\dot{U}\}_n + (0,5 - \beta_N)h^2\{\ddot{U}\}_n) \end{aligned} \quad (4.24)$$

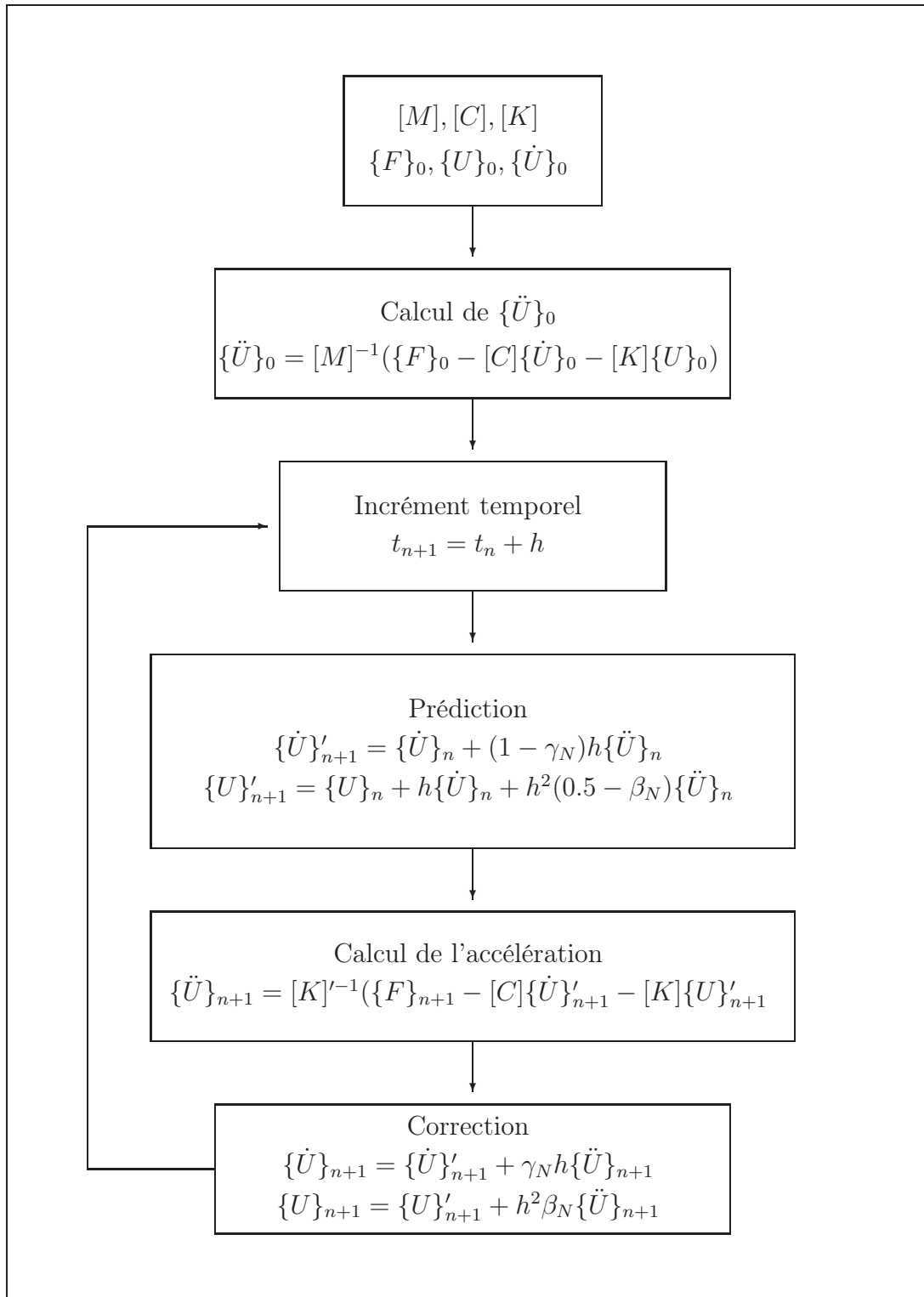


FIG. 4.2 – Algorithme d'intégration directe de Newmark

on obtient alors :

$$[K]'\{\ddot{U}\}_{n+1} = \{F\}'_{n+1} \quad (4.25)$$

$\{\ddot{U}\}_{n+1}$  est déterminé par la résolution du système linéaire (4.25) par l'inversion de la matrice  $[K]'$ , les vecteurs  $\{U\}_{n+1}$ ,  $\{\dot{U}\}_{n+1}$  sont ensuite déterminés grâce aux relations (4.22).

Partant d'un état initial où  $\{U\}_0$  et  $\{\dot{U}\}_0$  sont connus et adoptant un pas de temps constant  $h$ , la procédure de calcul associée à la méthode implicite d'intégration temporelle directe de Newmark, résumée sur le schéma de la figure (4.2), est par la suite mise en œuvre pour accéder à la solution à tout instant  $t$ .

## 4.4 Conditions aux limites absorbantes

Le traitement numérique dynamique d'un problème dont une partie de la frontière est située à l'infini, pose une question particulière. Il est en effet impossible de modéliser par éléments finis la géométrie initiale du problème, et il convient donc de se limiter à une zone d'extension finie à la frontière de laquelle doivent être imposées des conditions aux limites appropriées. Étant donné par exemple un massif de sol semi-infini, on considère une frontière imaginaire convexe qui entoure tous les sources d'excitation et divise le massif en deux régions : intérieure et extérieure (FIG (4.3)). On observe que la propagation des ondes de la région intérieure vers la région extérieure ne donne lieu à aucune réflexion, leur énergie étant transmise totalement au travers de cette frontière imaginaire. L'effet de la région extérieure sur la région intérieure consiste donc à absorber toute l'énergie des ondes arrivant sur la frontière imaginaire et faire disparaître les ondes de réflexion vers la région intérieure. Dans le but de trouver un modèle d'extension finie équivalent, on va donc rechercher une frontière réelle associée à des conditions particulières pour remplacer la frontière imaginaire et jouer le rôle de la région extérieure. Pour ce faire, Lysmer et Kuhlemeyer (1969) [30] ont proposé d'imposer les conditions aux limites suivantes sur cette frontière :

$$\begin{aligned} \sigma &= a\rho V_P \dot{\xi}_n \\ \tau &= b\rho V_s \dot{\xi}_t \end{aligned} \quad (4.26)$$

où  $\sigma$  et  $\tau$  sont les contraintes normale et tangentielle à la frontière, tandis que  $\dot{\xi}_n$  et

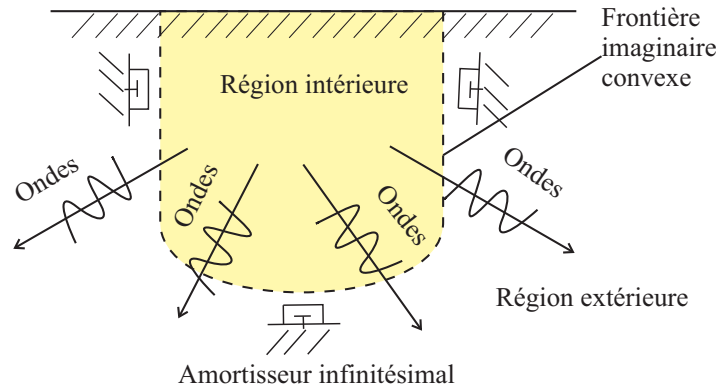


FIG. 4.3 – Principe de la modélisation d’un système de sol infini par l’incorporation d’une frontière absorbante.

$\dot{\xi}_t$  désignent les vitesses correspondantes,  $\rho$  est la masse volumique du sol,  $V_P$  et  $V_S$  sont les vitesses des ondes de compression  $P$  et de cisaillement  $S$ . Cette proposition correspond effectivement à la situation dans laquelle la frontière est supportée par des amortisseurs infinitésimaux orientés normalement et tangentiellement à la frontière limite (*frontière visqueuse*). Lysmer et Kuhlemeyer (1969) [30] ont étudié la réflexion et la réfraction des ondes et notamment les expressions de l’énergie à cette frontière pour montrer que cette frontière visqueuse est capable d’absorber l’énergie de l’onde incidente. En considérant le rapport entre l’énergie transmise de l’onde de réflexion et celle de l’onde arrivée par unité de surface, ils ont fait varier les paramètres  $a$  et  $b$  et ont obtenu une absorption presque parfaite lorsque  $a = b = 1$ . Cette analyse est basée sur la théorie de Ewing, Jardetzky et Press (1957) [18] sur la réflexion et réfraction des ondes élastiques sur une surface libre.

## 4.5 Application au dimensionnement de fondations renforcées par inclusions rigides

### 4.5.1 Position du problème

On considère une fondation de largeur  $B$  reposant sur une couche de sol de caractéristiques  $(E^s, \nu^s, \rho^s)$  et d’épaisseur  $H$ , préalablement renforcée par des inclusions rigides de caractéristiques  $(E^b, \nu^b, \rho^b)$  et de longueur  $L$  (FIG (4.4).a). Ces inclusions sont modélisées comme des plaques de largeur  $d$ , régulièrement espacées d’une distance  $e$  (FIG (4.4).b). Les conditions aux limites sont absorbantes sur les

#### 4.5. Dimensionnement de fondations renforcées par inclusions rigides 93

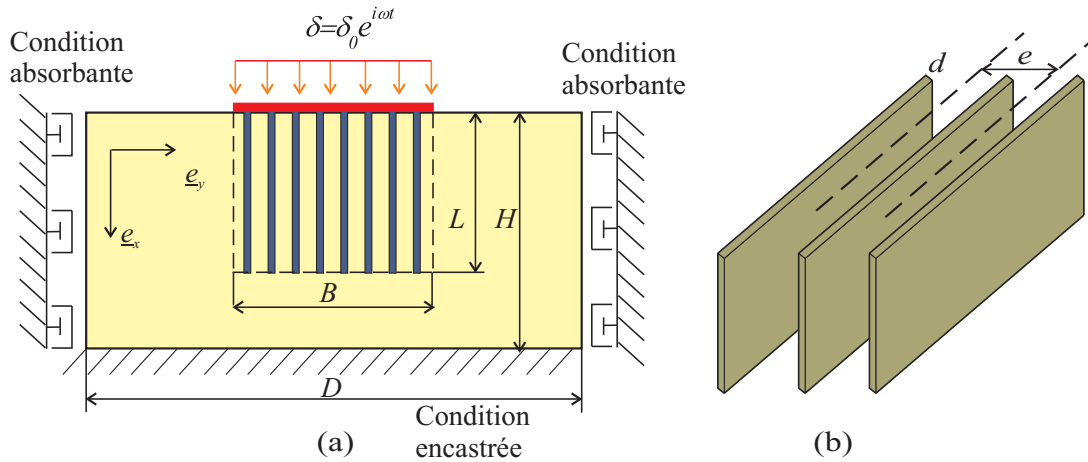


FIG. 4.4 – Fondation sur radier de pieux soumise à un chargement harmonique vertical.

bords latéraux tandis que le bas de la couche est supposé encastree.

La fondation, supposée indéformable, est animée d'un mouvement de corps rigide purement vertical :

$$\delta = \delta_0 e^{i\omega t} \quad (4.27)$$

où  $\delta_0$  est l'amplitude du mouvement de la fondation et  $\omega = 2\pi f$  désigne sa pulsation de fréquence  $f$ .

Sous l'hypothèse d'adhérence parfaite entre le sol et la fondation, le déplacement vertical de tout point situé à l'interface fondation/sol est donné par (4.27). Comme l'effet de la gravité est négligeable, la résultante des efforts de compression exercés par la fondation sur le sol est le seul paramètre de chargement du problème :

$$F = \int_{S_0} -T_x dS \quad (4.28)$$

En régime permanent, le paramètre de chargement  $F$  peut être écrit comme une fonction harmonique de même fréquence que celle du mouvement de la fondation :

$$F = F_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (4.29)$$

## 94 Chapitre 4. Mise en œuvre numérique 2D du modèle multiphasique

Comme dans l'exemple traité au chapitre 2, on obtient la *fonction d'impédance* de la structure sous la forme :

$$K_d = \frac{F}{\delta} = \frac{F_0}{\delta_0} e^{i\varphi} = K_0 e^{i\varphi} \quad (4.30)$$

dans laquelle :

$$K_0 = \frac{F_0}{\delta_0} \quad \text{et} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im}(K_d)}{\text{Re}(K_d)}\right) \quad (4.31)$$

### 4.5.2 Données du problème

Les données du problème retenues sont les suivantes :

◇ Caractéristiques du sol :

$$E^s = 45 \text{ MPa}; \nu^s = 0,2; \rho^s = 1750 \text{ kg/m}^3$$

◇ Caractéristiques des inclusions (béton) :

$$E^b = 20 \text{ GPa}; \nu^b = 0,3; \rho^b = 2500 \text{ kg/m}^3$$

◇ Caractéristiques géométriques :

$$B = 40 \text{ m}; D = 100 \text{ m}; H = 24 \text{ m}; L = 16 \text{ m}; e = 4 \text{ m}; d = 0,1 \text{ m}$$

Les paramètres du modèle multiphasique sont alors déterminés à partir de ces caractéristiques :

◇ *Phase matrice*

Compte tenu de la faible valeur de la fraction volumique de renforcement :

$$\eta = \frac{d}{e} = 2,5\% \ll 1 \quad (4.32)$$

les caractéristiques mécaniques de la phase matrice sont approximées par celles du sol qu'elle représente :

## 4.5. Dimensionnement de fondations renforcées par inclusions rigides 95

$$E^m \approx E^s = 45 \text{ MPa}; \nu^m \approx \nu^s = 0,2 \quad (4.33)$$

### ◇ Phase renforcement

La rigidité en traction-compression vaut :

$$\alpha^r = \eta E^b = 500 \text{ MPa} \quad (4.34)$$

Il faut remarquer que cette rigidité ne dépend pas de la taille des inclusions mais de la fraction volumique du renforcement.

### ◇ Coefficients d'interaction $c^I$ et $c^P$

Les caractéristiques géométriques et mécaniques du sol et de son renforcement étant les mêmes que celles adoptées au chapitre 3 (section 3.5.3), les paramètres d'interactions relatifs au problème de la fondation sont égaux à ceux identifiés au chapitre précédent sur la configuration de la couche de sol uniformément renforcée par des inclusions flottantes. Ces caractéristiques valent donc en fonction du paramètre sans dimension  $a$  défini par l'équation (3.72) au chapitre 3 :

$a$	$c^I$ (MN/m <sup>4</sup> )	$c^P$ (MN/m <sup>3</sup> )
0-6	14,7	10
6-9	12,7	10
9-11	11,4	10
>11	10,7	10

TAB. 4.1 – Identification des coefficients d'interactions

### 4.5.3 Simulation numérique et résultats

Dans cette partie, le code de calcul multiphasique mis au point dans le présent chapitre est appliqué au calcul de l'impédance verticale de la structure. Il devra



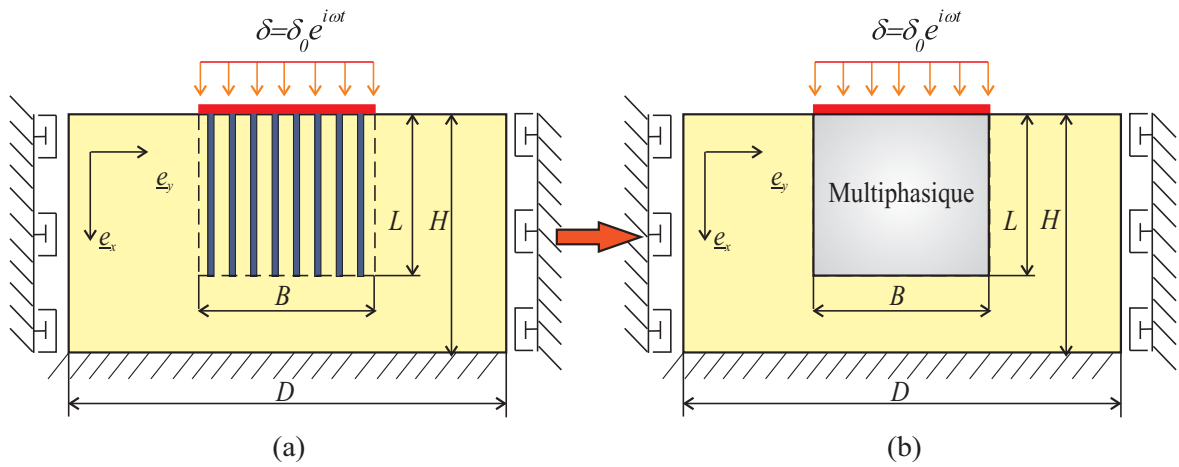


FIG. 4.5 – Modélisation multiphasique d’une fondation sur radier de pieux

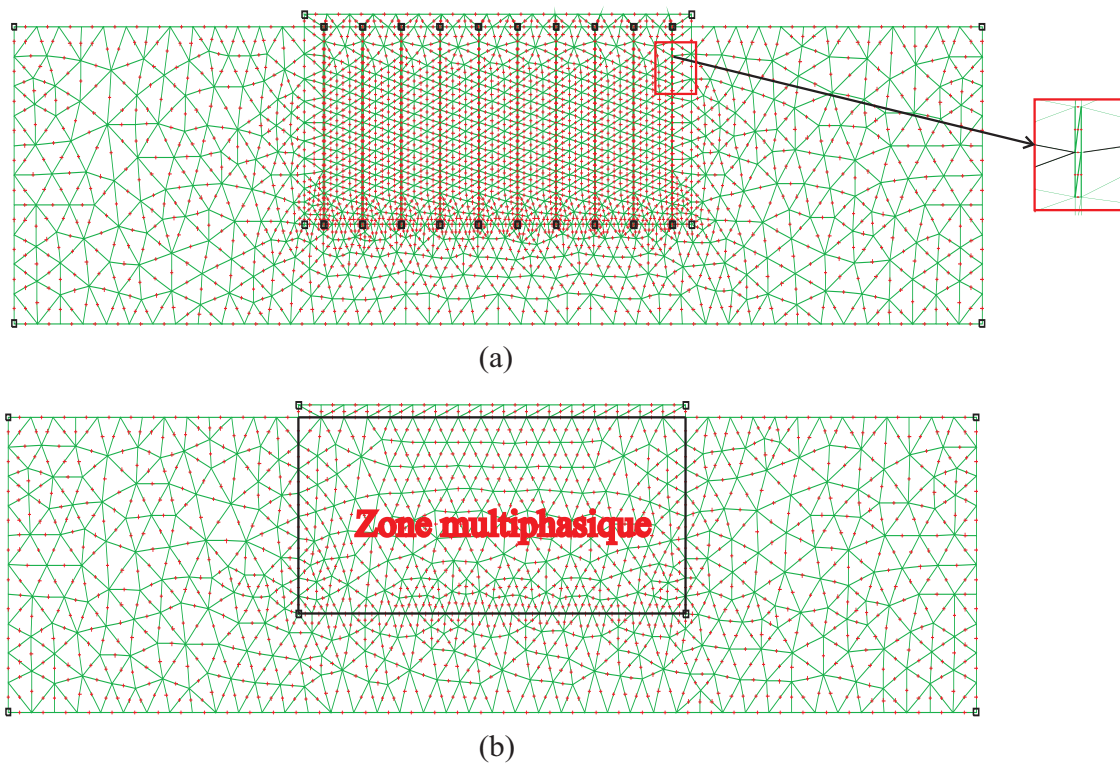


FIG. 4.6 – Maillage de la structure par des éléments T6 (a) Problème hétérogène direct (b) Modélisation multiphasique

#### 4.5. Dimensionnement de fondations renforcées par inclusions rigides97

ensuite être comparé avec l'approche par homogénéisation classique présentée au chapitre 2 et la simulation directe par éléments finis. A la différence de cette dernière où les inclusions et le sol sont discrétisés séparément, le modèle multiphasique et l'approche par homogénéisation classique, consistent à remplacer la zone renforcée respectivement par un milieu homogène et par un milieu multiphasique comme l'indique la figure (4.5). Les traits de délimitation de la zone renforcée doivent faire partie du maillage de façon à pouvoir distinguer la zone non renforcée de la zone renforcée. Les maillages de la structure relatifs à la simulation directe, au modèle multiphasique et à l'approche par homogénéisation classique sont représentés sur la figure (4.6). Ils comprennent :

- ◇ 949 éléments T6 et 2006 nœuds pour le modèle multiphasique et l'approche par homogénéisation classique ;
- ◇ 2067 éléments T6 et 4242 nœuds pour la simulation directe.

Il convient de noter que le nombre d'éléments et de nœuds relatifs au maillage du modèle multiphasique et du modèle d'homogénéisation classique, est considérablement réduit par rapport à celui de la simulation directe.

On présente tout d'abord les résultats de la méthode de résolution dans le domaine temporel, pour trois fréquences de sollicitation  $f = 8, 10, 12$  Hz et une amplitude de déplacement imposé égale à  $\delta_0 = 1$  cm. Les évolutions correspondantes de l'effort résultant  $F$  en fonction du temps sont représentées sur la figure (4.7). A partir de cette figure, on observe clairement par comparaison avec la simulation directe que le modèle multiphasique donne de bien meilleurs résultats que le modèle d'homogénéisation classique.

En s'appuyant sur l'évolution stabilisée de la courbe donnant l'évolution de l'effort  $F$  en fonction du temps, on peut aussi déterminer les composants de l'impédance verticale comme sur l'exemple de la figure (4.8) représentant l'évolution du déplacement imposé  $\delta$  et de l'effort  $F$  en fonction du temps obtenue par le modèle multiphasique :

$$K_0 = \frac{F_0}{\delta_0} = 4,845 \text{ GN/m}^2, \varphi = 42.48^\circ \quad (4.35)$$

Dans la mesure où, si l'on ne s'intéresse qu'à la détermination de l'impédance, la méthode de résolution dans le domaine temporel est relativement lourde à

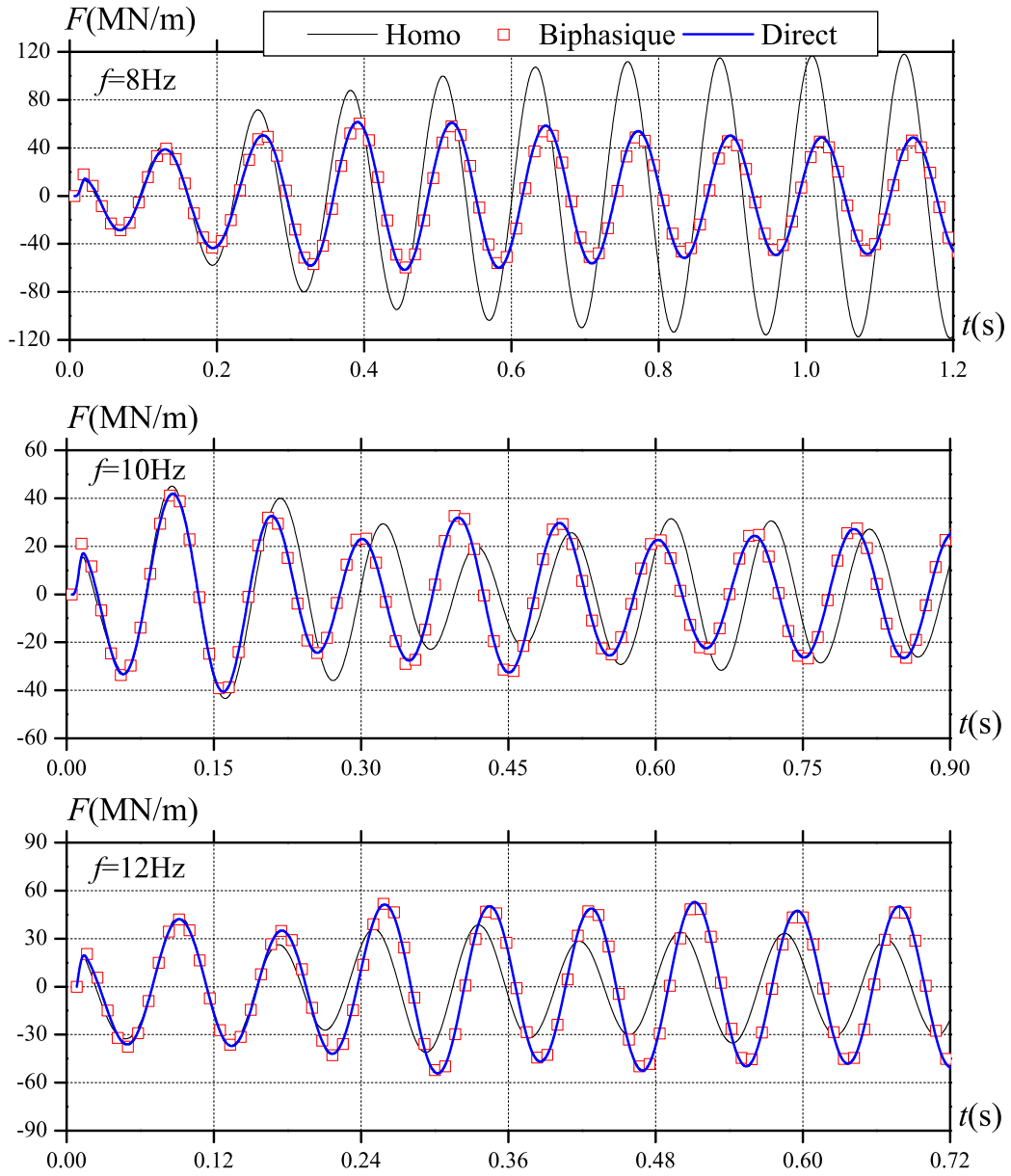


FIG. 4.7 – Évolution de l'effort résultant  $F$  en fonction du temps correspondant à différentes fréquences de sollicitation

#### 4.5. Dimensionnement de fondations renforcées par inclusions rigides 99

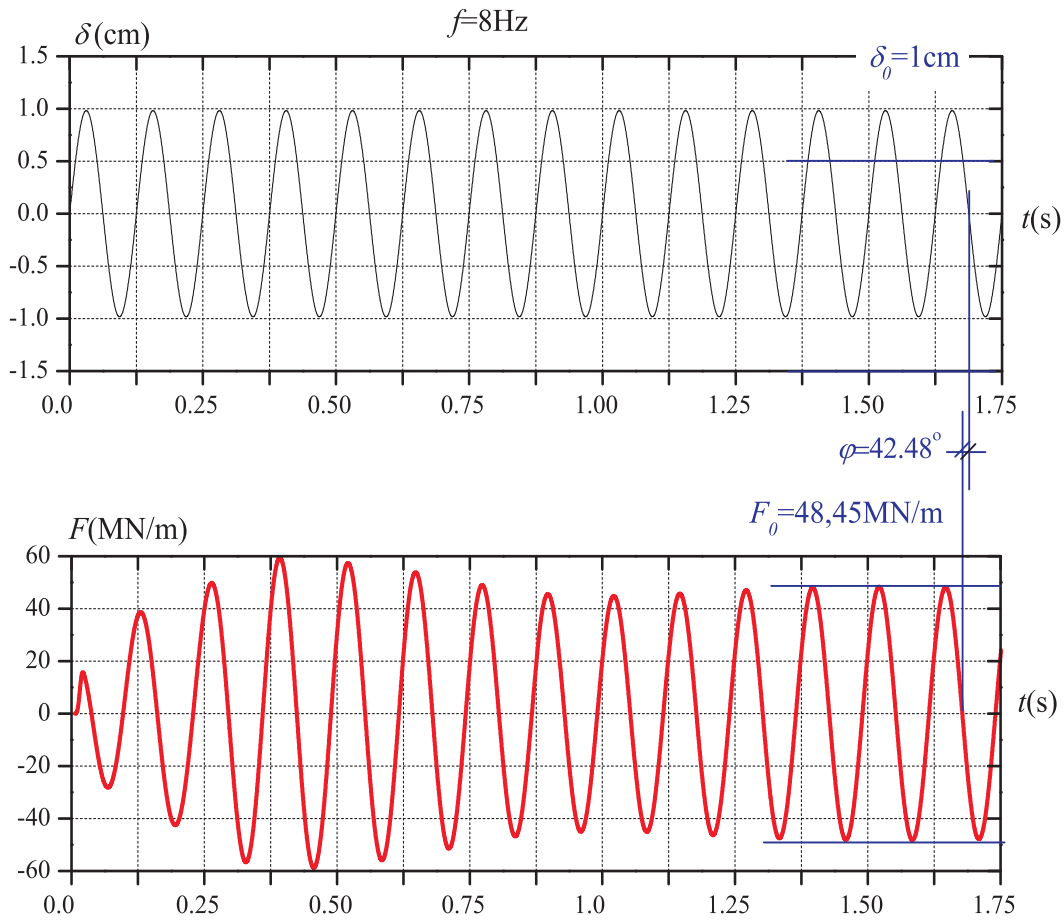


FIG. 4.8 – Détermination de l'impédance de la structure par la méthode de résolution dans le domaine temporel

mettre en œuvre car requérant d'atteindre le régime permanent, il est largement préférable d'utiliser la méthode de résolution dans le domaine fréquentiel présentée au chapitre 2.

La figure (4.9) représente la partie réelle  $Re(K_d)$  et la partie imaginaire  $Im(K_d)$  de l'impédance verticale, normalisée par la raideur verticale en statique de la structure non renforcée  $K_s$ , en fonction de la pulsation adimensionnelle  $a$ . De façon équivalente, cette impédance verticale peut être aussi représentée par son module normalisé  $K_0/K_s$  et son déphasage  $\varphi$  comme indiqué sur la figure (4.10). Toutes ces figures montrent un très bon accord entre le modèle multiphasique et la simulation directe, contrairement à l'approche par homogénéisation classique.

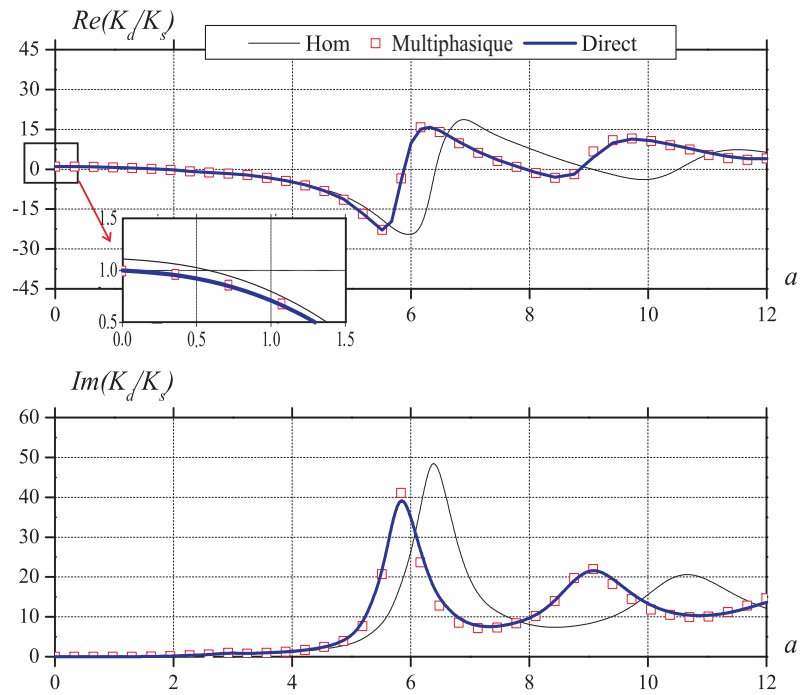


FIG. 4.9 – Partie réelle et imaginaire de l'impédance verticale normalisée

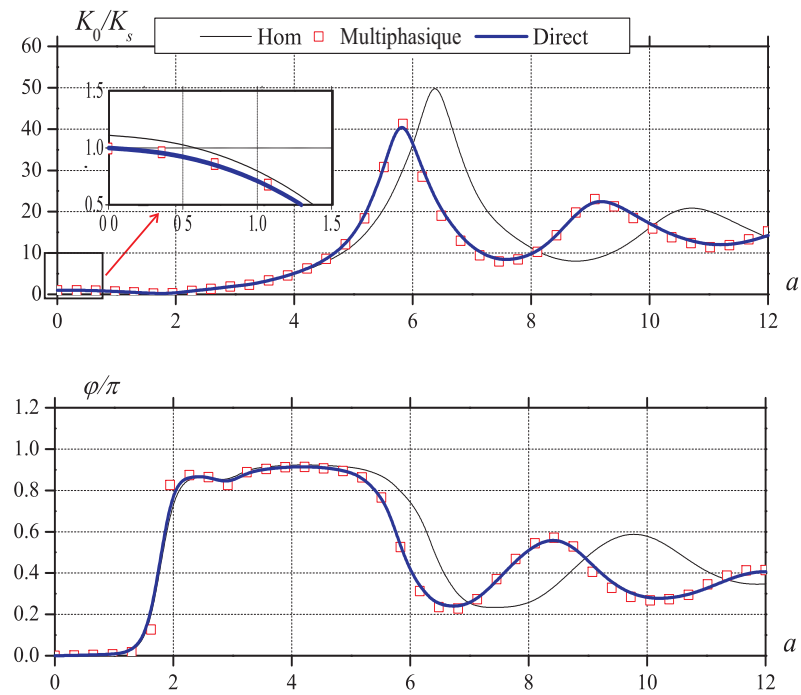


FIG. 4.10 – Module et déphasage de l'impédance verticale normalisée

### 4.5.4 Conclusion

Ce chapitre a permis de mettre au point un code de calcul multiphasique dynamique 2D permettant notamment de déterminer l'impédance verticale d'une fondation sur radier de pieux, dans le cadre d'un comportement élastique linéaire des constituants (sol, pieux). A la différence de la méthode d'homogénéisation classique, des lois d'interaction élastiques entre le sol et les inclusions sont explicitement prises en compte tout au niveau volumique (*frottement latéral*) qu'au niveau des extrémités des inclusions (*effets de pointe*). Ceci requiert l'adoption d'une cinématique enrichie en chaque nœud du maillage éléments finis.

Par rapport à une simulation directe par éléments finis, l'adoption du modèle multiphasique permet de simplifier considérablement la résolution du problème puisqu'il n'est pas nécessaire de discrétiser la zone renforcée plus finement que si elle était homogène, tandis que la taille du problème (nombre d'éléments et de nœuds) n'est pas modifiée par la présence des inclusions de renforcement, contrairement à ce qui se passe dans la simulation directe. Cela conduit à une réduction significative du coût de calcul associé au traitement numérique du problème. Par ailleurs, les résultats donnés par le modèle multiphasique sont bien vérifiés par ceux de la simulation directe, non seulement dans le domaine temporel, mais aussi dans le domaine fréquentiel. Ces comparaisons effectuées confirment finalement les avantages du modèle multiphasique et son caractère opérationnel.

La suite du présent mémoire porte sur l'extension du modèle multiphasique dynamique prenant en compte des raideurs à la flexion et au cisaillement des inclusions, pouvant jouer un rôle important, voire décisif, dans le comportement global de l'ouvrage notamment dans le cas d'un chargement s'exerçant transversalement à la direction des inclusions (Hassen et de Buhan, 2005 [26]; de Buhan et Hassen, 2010 [27]). Un code de calcul multiphasique dynamique 3D intégrant l'interaction sol/pieux sera finalement développé.



# Un modèle multiphasique enrichi qui prend en compte les effets de flexion et de cisaillement dans les inclusions

---

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>105</b>
<b>5.2</b>	<b>Description du modèle enrichi</b>	<b>105</b>
<b>5.3</b>	<b>Équations de l'élastodynamique</b>	<b>107</b>
<b>5.4</b>	<b>Application à la propagation d'une onde harmonique de cisaillement, parallèlement à la direction de renforcement</b>	<b>109</b>
<b>5.5</b>	<b>Analyse vibratoire harmonique d'une couche renforcée</b>	<b>112</b>
5.5.1	Solution générale	112
5.5.2	Positionnement du modèle multiphasique par rapport à la méthode des développements asymptotiques	114
5.5.3	Vibration libre et modes propres	115
5.5.4	Vibration forcée	121
5.5.5	Comparaison avec la simulation directe	123
<b>5.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>125</b>

---





## 5.1 Introduction

Le modèle multiphasique présenté puis mis en œuvre numériquement dans les deux chapitres précédents permet de prendre en compte les comportements d'interaction entre le sol et les inclusions mais, assimilant ces dernières à des poutres unidimensionnelles, seuls les efforts axiaux, sont considérés dans l'analyse du comportement dynamique de l'ouvrage, à l'exclusion des composantes de flexion et de cisaillement. Or, il a été montré dans le cas d'un chargement statique ou quasi-statique que ces composantes pouvaient jouer un rôle important dans le comportement global de l'ouvrage, notamment dans le cas d'un chargement s'exerçant transversalement à la direction des inclusions (Hassen et de Buhan, 2005 [26]; de Buhan et Hassen, 2010 [27]).

On adopte donc dans ce chapitre une version plus élaborée du modèle, dérivée du modèle multiphasique précédent, dans laquelle la phase renforcement représentant le réseau d'inclusions intègre les effets de flexion et de cisaillement.

On explicite en premier lieu les équations de la dynamique qui résultent d'une telle modélisation. La propagation d'une onde plane harmonique de cisaillement, parallèlement à la direction des inclusions est alors étudiée. On s'intéresse ensuite à l'analyse vibratoire harmonique dans la direction horizontale d'une couche de sol renforcée par des inclusions rigides verticales, d'extension horizontale infinie. Dans ce dernier exemple, les résultats du modèle multiphasique sont alors comparés à ceux provenant de la simulation directe par éléments finis d'un problème auxiliaire représentatif du problème. Ils montrent la pertinence de ce nouveau modèle pour décrire le comportement dynamique d'un sol renforcé sollicité transversalement.

Enfin, un très bon accord entre le modèle multiphasique et la méthode des développements asymptotiques (Soubestre, 2011 [49]; Boutin et Soubestre 2012 [50]) est mis en évidence, sur l'exemple du régime dynamique transversal d'une couche de sol renforcée par un réseau périodique d'inclusions rigides verticales, d'extension horizontale infinie.

## 5.2 Description du modèle enrichi

Comme dans le modèle initial décrit au chapitre 3, la cinématique de la phase matrice est caractérisée par un champ de déplacement  $\underline{\xi}^m$ , mais la cinématique de la phase renforcement est en revanche caractérisée non seulement par un champ de

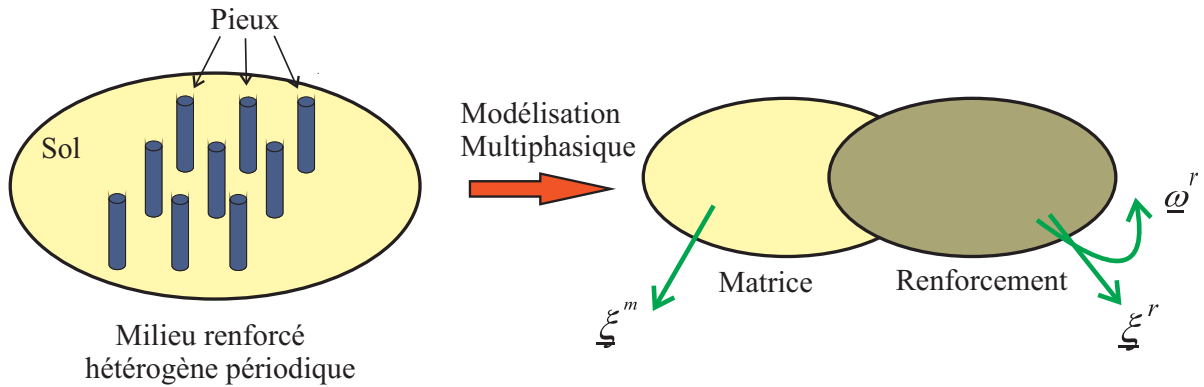


FIG. 5.1 – Modélisation multiphasique d’un sol renforcé avec prise en compte des effets de flexion

déplacement toujours noté  $\underline{\xi}^r$ , mais également par un *champ de rotation*  $\underline{\omega}^r$  (FIG (5.1)).

L’adoption d’une telle cinématique enrichie permet d’aboutir à une modélisation des efforts intérieurs de type Cauchy pour la phase matrice, tandis que la phase renforcement est modélisée comme un milieu *micro-polaire* ou de *Cosserat* (de Buhhan et Sudret, 2000 [16]). En se restreignant au cas bidimensionnel dans le plan  $Oxy$ , les contraintes relatives à cette phase renforcement sont de deux types (FIG (5.2)) :

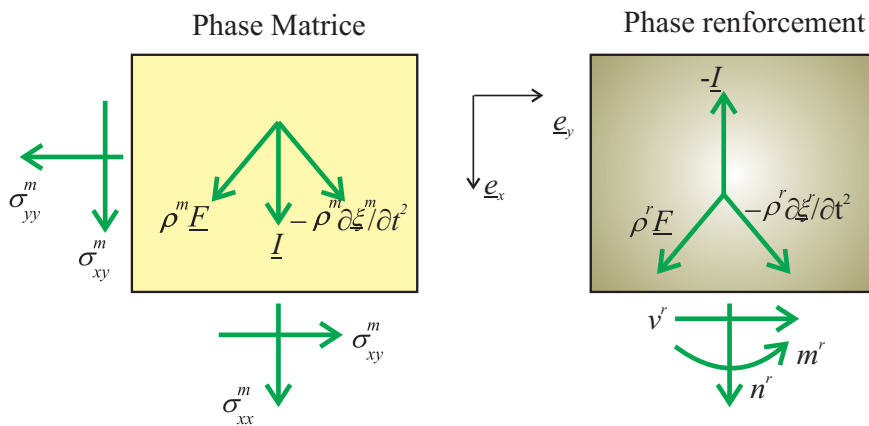


FIG. 5.2 – Contraintes, forces de volume et forces d’interaction dans un sol renforcé modélisé comme un milieu multiphasique (cas bidimensionnel)

- ◇ les contraintes caractérisées en tout point par un tenseur *non-symétrique* de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}^r = n^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + v^r \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x \quad (5.1)$$

où  $n^r$  est la densité d'effort axial dans les inclusions par unité de surface transversale à l'orientation de ces inclusions et  $v^r$  la densité d'effort tranchant correspondante ;

- ◇ le tenseur des *couples-contraintes* qui s'écrit :

$$\underline{\underline{h}}^r = m^r \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x \quad (5.2)$$

où  $m^r$  s'interprète comme la densité de moment de flexion des inclusions par unité de surface transversale à l'orientation des inclusions.

Les *équations de la dynamique* s'écrivent alors comme suit pour un tel système :

- ◇ Phase matrice :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^m + \rho^m (\underline{F} - \frac{\partial^2 \underline{\xi}^m}{\partial t^2}) + \underline{I} = 0 \quad (5.3)$$

- ◇ Phase renforcement :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(n^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + v^r \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \rho^r (\underline{F} - \frac{\partial^2 \underline{\xi}^r}{\partial t^2}) - \underline{I} = 0 \\ \operatorname{div}(m^r \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x) + v^r \underline{e}_z = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

où l'on a négligé les termes d'inertie liés à la rotation, ne tenant compte que des *accélérations de translation*.

## 5.3 Équations de l'élastodynamique

L'équation de l'élastodynamique de la *phase matrice* est identique à celle établie dans le chapitre 3 (équation 3.12), soit :

$$(\lambda^m + \mu^m) \underline{\underline{\operatorname{grad}}}(\operatorname{div} \underline{\xi}^m) + \mu^m \Delta \underline{\xi}^m + \rho^m (\underline{F} - \partial^2 \underline{\xi}^m / \partial t^2) + \underline{\underline{c}}^I \cdot (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) = 0 \quad (5.5)$$

Pour ce qui concerne la *phase renforcement*, il convient au préalable de préciser la loi de comportement élastique de cette dernière. Celle-ci s'écrit (de Buhan et Sudret, 2000 [16]) :

$$n^r = \alpha \varepsilon^r, \quad v^r = \beta^r \theta^r, \quad m^r = \gamma^r \chi^r \quad (5.6)$$

où :

$$\varepsilon^r = \frac{\partial \xi_x^r}{\partial x}, \quad \theta^r = \frac{\partial \xi_y^r}{\partial x} - \omega^r, \quad \chi^r = \frac{\partial \omega^r}{\partial x} \quad (5.7)$$

désignent respectivement les déformations *axiale*, de *cisaillement* et la *courbure* de la phase renforcement, tandis que  $\alpha^r$ ,  $\beta^r$  et  $\gamma^r$  s'interprètent comme des densités de raideur *axiale*, de *cisaillement* et de *flexion* par unité de surface transversale.

La seconde équation de (5.4) qui traduit l'équilibre dynamique en moment donne la relation :

$$\operatorname{div}(m^r \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x) + v^r \underline{e}_z = \left( \frac{\partial m^r}{\partial x} + v^r \right) \underline{e}_z = \underline{0} \quad (5.8)$$

qui reportée dans la première équation de (5.4) (équilibre dynamique en résultante dans le plan  $Oxy$ ) conduit à :

$$\frac{\partial n^r}{\partial x} \underline{e}_x - \frac{\partial^2 m^r}{\partial x^2} \underline{e}_y + \rho^r \left( \underline{F} - \frac{\partial^2 \underline{\xi}^r}{\partial t^2} \right) - \underline{c}^I \cdot (\underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m) = \underline{0} \quad (5.9)$$

soit en faisant l'hypothèse de Navier-Bernoulli  $\theta^r = \frac{\partial \xi_y^r}{\partial x} - \omega^r = 0$  :

$$\begin{cases} \alpha^r \frac{\partial^2 \xi_x^r}{\partial x^2} + \rho^r \left( F_x - \frac{\partial^2 \xi_x^r}{\partial t^2} \right) - c_t^I (\xi_x^r - \xi_x^m) = 0 \\ \gamma^r \frac{\partial^4 \xi_y^r}{\partial x^4} - \rho^r \left( F_y - \frac{\partial^2 \xi_y^r}{\partial t^2} \right) - c_t^I (\xi_y^r - \xi_y^m) = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

$c_t^I$  et  $c_t^I$  désignant respectivement les coefficients d'interaction longitudinale et transversale.

Omettant le dernier terme relatif à l'interaction entre phases dans les deux équations (5.10), la première équation représente l'homologue de l'équation des

vibrations longitudinales d'une poutre, tandis que la seconde est l'homologue de l'équation des vibrations en flexion.

Les équations couplées (5.5) et (5.10) peuvent être résolues numériquement dans le cadre de la méthode des éléments finis, comme cela a déjà été réalisé dans le cas statique (voir par exemple Thai Son, 2009 [48]).

## 5.4 Application à la propagation d'une onde harmonique de cisaillement, parallèlement à la direction de renforcement

De façon analogue à l'analyse de la propagation d'une onde plane harmonique de compression parallèlement à la direction de renforcement présentée dans le chapitre 3, on développe dans cette section celle relative à une onde plane harmonique de cisaillement dans laquelle les effets de flexion dans les inclusions peuvent jouer un rôle important (FIG (5.3)). Adoptant l'hypothèse de l'*adhérence parfaite* entre la phase matrice et la phase renforcement, la solution en déplacement et rotation du problème est recherchée donc sous la forme :

$$\begin{aligned}\underline{\xi}^m &= \underline{\xi}^r = u(x, t)\underline{e}_y \\ \underline{\omega}^r &= \omega^r(x, t)\underline{e}_z\end{aligned}\tag{5.11}$$

où la fonction  $u(x, t)$  est recherchée sous la forme d'une fonction harmonique :

$$u(x, t) = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{c_S''} \right)\tag{5.12}$$

où  $A$  désigne l'amplitude,  $c_S''$  est la vitesse de propagation, tandis que  $\omega = 2\pi/T$  désigne sa pulsation.

Tenant compte de l'hypothèse de Navier-Bernoulli  $\theta^r = \frac{\partial \xi_y^r}{\partial x} - \omega^r = 0$ , on obtient :

$$\omega^r(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\tag{5.13}$$

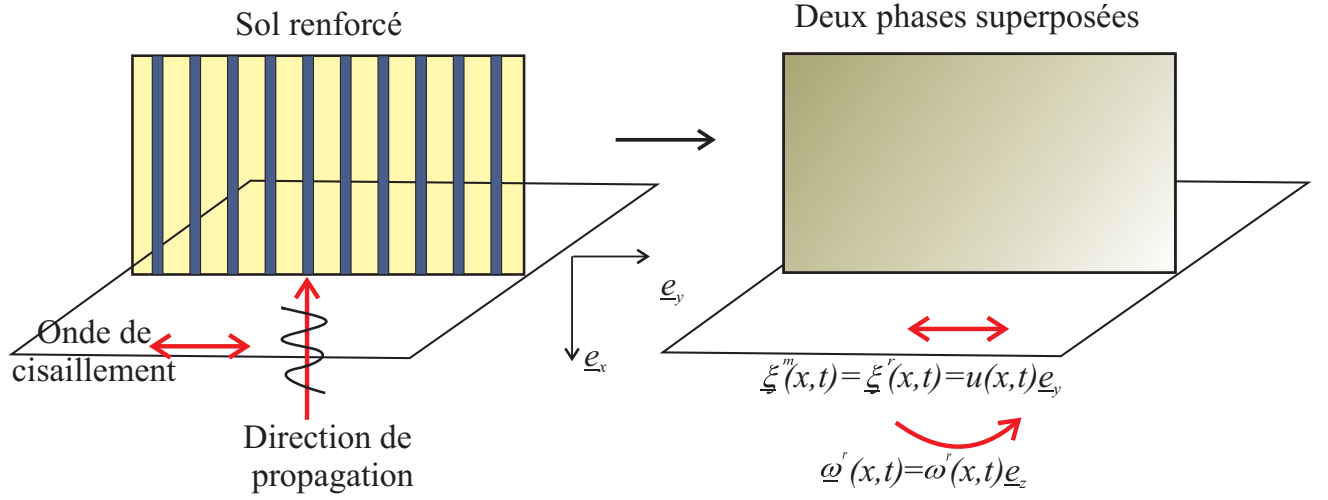


FIG. 5.3 – Onde de cisaillement se propageant parallèlement à la direction du renforcement

La sommation des deux équations (5.5) et (5.9) où l'on néglige les forces de volume conduit à la relation :

$$(\lambda^m + \mu^m) \underline{\text{grad}}(\text{div } \underline{\xi}^m) + \mu^m \Delta \underline{\xi}^m + \frac{\partial n^r}{\partial x} \underline{e}_x - \frac{\partial^2 m^r}{\partial x^2} \underline{e}_y - \rho^m \frac{\partial^2 \underline{\xi}^m}{\partial t^2} - \rho^r \frac{\partial^2 \underline{\xi}^r}{\partial t^2} = 0 \quad (5.14)$$

dans laquelle :

$$\begin{aligned} n^r &= \alpha^r \frac{\partial \xi_x^r}{\partial x} = 0 \\ m^r &= \gamma^r \frac{\partial \omega^r}{\partial x} = \gamma^r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Reportant les équations (5.11) dans l'équation (5.14) en tenant compte de (5.15) , il vient finalement :

$$\mu^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma^r \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \rho^{hom} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (5.16)$$

avec  $\rho^{hom} = \rho^m + \rho^r$ , où tenant compte de (5.12) :

$$\begin{aligned}
 \mu^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\mu^m \frac{A\omega^2}{c_S^{//2}} \sin \omega \left( t - \frac{x}{c_S^{//}} \right) \\
 \gamma^r \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= \gamma^r \frac{A\omega^4}{c_S^{//4}} \sin \omega \left( t - \frac{x}{c_S^{//}} \right) \\
 \rho^{hom} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\rho^{hom} A\omega^2 \sin \omega \left( t - \frac{x}{c_S^{//}} \right)
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

En simplifiant par le terme non nul  $A\omega^2 \sin \omega \left( t - \frac{x}{c_S^{//}} \right)$ , il vient donc :

$$-\mu^m \frac{1}{c_S^{//2}} - \gamma^r \frac{\omega^2}{c_S^{//4}} + \rho^{hom} = 0 \tag{5.18}$$

On obtient finalement l'expression de la vitesse de l'onde de cisaillement :

$$c_S^{//} = \sqrt{\frac{\mu^m + \sqrt{(\mu^m)^2 + 4\gamma^r \rho^{hom} \omega^2}}{2\rho^{hom}}} \tag{5.19}$$

Cette expression montre que la vitesse de propagation de l'onde dépend de la pulsation  $\omega$ , de sorte que le milieu multiphasique apparait comme *dispersif*. Cet effet de dispersion est clairement lié à la prise en compte du comportement en flexion des inclusions de renforcement à travers le paramètre  $\gamma^r$ .

En choisissant le jeu de valeurs suivant :  $\mu^m \approx \mu^s = 3,75$  MPa;  $\rho^s = 1800$  kg/m<sup>3</sup>;  $\rho^{hom} = 1850$  kg/m<sup>3</sup>, la variation de la vitesse de compression  $c_S^{//}$  normalisée par celle du sol non renforcé  $c_S^s$  égale à :

$$c_S^s = \sqrt{\frac{\mu^s}{\rho^s}} \tag{5.20}$$

est représentée sur la figure (5.4), en fonction de la pulsation  $\omega$  et pour différentes valeurs de  $\gamma^r$ . On observe que la vitesse de propagation  $c_S^{//}$  est une *fonction croissante* de  $\gamma^r$  ainsi que de  $\omega$ , cette vitesse de propagation devenant indépendante de  $\omega$  lorsque  $\gamma^r = 0$ , retrouvant aussi le résultat de l'approche par homogénéisation classique.



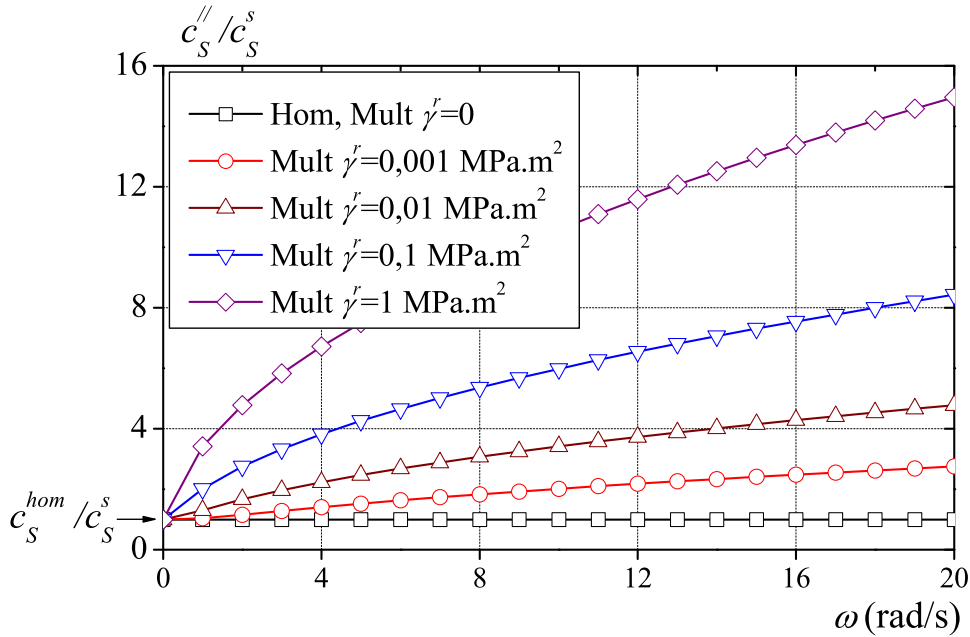


FIG. 5.4 – Vitesse d’une onde de cisaillement se propageant parallèlement à la direction du renforcement en fonction de la pulsation et de la raideur en flexion des inclusions.

## 5.5 Analyse vibratoire harmonique d’une couche renforcée

Revenons à l’exemple d’une couche de sol renforcée par des inclusions rigides verticales encastrées, d’extension infinie dans la direction horizontale, présenté dans le chapitre 3 (FIG (5.5)). On considère d’une part sa vibration harmonique *libre* dans la direction horizontale (FIG (5.6)) et d’autre part sa vibration *forcée* correspondant à un chargement horizontal harmonique imposé en bas de la structure (FIG (5.10)).

### 5.5.1 Solution générale

La solution en déplacement et rotation du problème sous l’hypothèse de l’adhérence parfaite, est recherchée sous la forme :

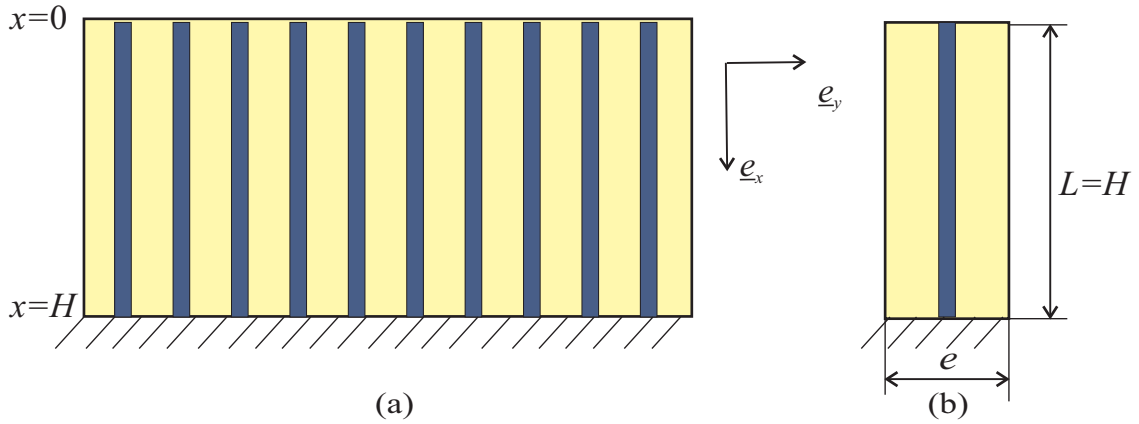


FIG. 5.5 – (a) Couche de sol renforcée par des inclusions encastrées; (b) Cellule de base

$$\begin{aligned}\underline{\xi}^m &= \underline{\xi}^r = u(x, t)\underline{e}_y = U(x)e^{i\omega t}\underline{e}_y \\ \underline{\omega}^r &= \omega^r(x, t)\underline{e}_z\end{aligned}\quad (5.21)$$

Les développements de la section précédente conduisent à l'équation de l'élastodynamique (5.16) :

$$\mu^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma^r \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \rho^{hom} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (5.22)$$

soit compte tenu de  $u(x, t) = U(x)e^{i\omega t}$  :

$$\mu^m \frac{d^2 U}{dx^2} - \gamma^r \frac{d^4 U}{dx^4} + \rho^{hom} \omega^2 U = 0 \quad (5.23)$$

La solution générale de cette équation est donnée par :

$$U(x) = A \sinh(\Delta_1 \frac{x}{H}) + B \cosh(\Delta_1 \frac{x}{H}) + C \sin(\Delta_2 \frac{x}{H}) + D \cos(\Delta_2 \frac{x}{H}) \quad (5.24)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta_1^2 - \Delta_2^2 = \frac{\mu^m H^2}{\gamma^r} \\ \Delta_1^2 \Delta_2^2 = \frac{\rho^{hom} \omega^2 H^4}{\gamma^r} \end{cases} \quad (5.25)$$

### 5.5.2 Positionnement du modèle multiphasique par rapport à la méthode des développements asymptotiques

Cette section est consacrée à une comparaison entre les résultats fournis par le modèle multiphasique et la méthode des développements asymptotiques (Soubestre, 2011 [49]; Boutin et Soubestre 2012 [50]) appliquée à l'analyse du régime dynamique transverse d'une couche de sol renforcée par inclusions rigides verticales, d'extension infinie horizontale.

On se place dans le cas où le contraste de rigidité (module de cisaillement) matrice/inclusion est d'ordre deux en  $\varepsilon$  ( $\mu^s = O(\varepsilon^2 \mu^b)$ ) (voir chapitre 3). L'équation de l'élastodynamique à laquelle conduit la méthode des développements asymptotiques, correspondant au régime de fonctionnement dynamique en cisaillement transverse dans la matrice, s'écrit comme suit :

$$\mu^s \frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{E^p I^p}{|S|} \frac{d^4 U}{dx^4} + \frac{\rho^s |S^s| + \rho^p |S^p|}{|S|} \omega^2 U = 0 \quad (5.26)$$

où  $\rho^s, |S^s|$  (resp.  $\rho^p, |S^p|$ ) désignent la masse volumique et la surface transversale du sol (resp. de l'inclusion),  $\mu^s$  est le module de cisaillement du sol,  $E^p, I^p$  désignent respectivement le module d'Young et le moment d'inertie de l'inclusion,  $|S| = |S^s| + |S^p|$  est la surface transversale totale de l'inclusion et du sol.

Procédant alors à l'identification suivante entre les paramètres physiques initiaux du sol renforcé et ceux du modèle multiphasique :

$$\begin{aligned} \mu^s &\approx \mu^m \\ \frac{E^p I^p}{|S|} &= \gamma^r \\ \frac{\rho^s |S^s| + \rho^p |S^p|}{|S|} &= \rho^{hom} \end{aligned} \quad (5.27)$$

l'équation (5.26) s'écrit finalement :

$$\mu^m \frac{d^2 U}{dx^2} - \gamma^r \frac{d^4 U}{dx^4} + \rho^{hom} \omega^2 U = 0 \quad (5.28)$$

qui n'est autre que l'équation de l'élastodynamique (5.23) donnée par le modèle multiphasique. Ceci fournit un argument supplémentaire confirmant la validité du modèle multiphasique pour l'analyse dynamique d'un sol renforcé par inclusions rigides, notamment dans le cas de sollicitations transverses à la direction de renforcement.

### 5.5.3 Vibration libre et modes propres

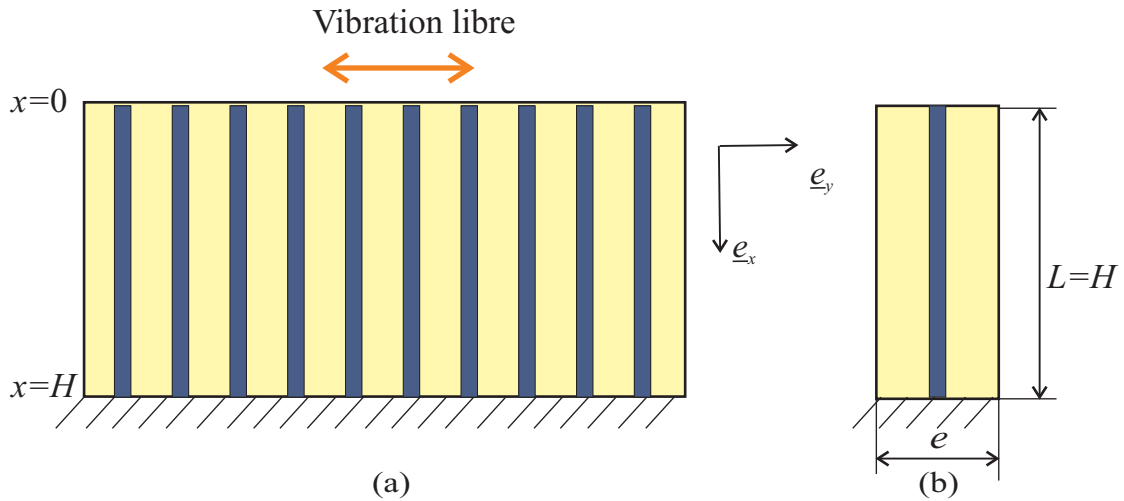


FIG. 5.6 – Vibration libre (a) Couche de sol renforcée par des inclusions encastrées; (b) Cellule de base

La surface du massif étant libre d'efforts, les efforts de cisaillement et de flexion en  $x = 0$  sont nuls. D'où en tenant compte des équations (5.8) et (5.15), les conditions limites s'écrivent :

$$\begin{cases} m^r(x=0) = \gamma^r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x=0) = 0 \\ \sigma_{xy}(x=0) + v^r(x=0) = \mu^m \frac{\partial u}{\partial x}(x=0) - \gamma^r \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x=0) = 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

Reportant l'expression  $u = Ue^{i\omega t}$  avec  $U$  donnée par (5.24) dans ces équations, on obtient :

$$\begin{cases} B \frac{\Delta_1^2}{H^2} - D \frac{\Delta_2^2}{H^2} = 0 \\ \mu^m \left( A \frac{\Delta_1}{H} + C \frac{\Delta_2}{H} \right) - \gamma^r \left( A \frac{\Delta_1^3}{H^3} - C \frac{\Delta_2^3}{H^3} \right) = 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

soit compte tenu de la première relation de (5.25) :

$$\begin{cases} D = \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2^2} B \\ C = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} A \end{cases} \quad (5.31)$$

La solution générale du problème (avant d'écrire les conditions aux limites en bas de la couche) devient :

$$U(x) = A \left[ \sinh\left(\Delta_1 \frac{x}{H}\right) + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \sin\left(\Delta_2 \frac{x}{H}\right) \right] + B \left[ \cosh\left(\Delta_1 \frac{x}{H}\right) + \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2^2} \cos\left(\Delta_2 \frac{x}{H}\right) \right] \quad (5.32)$$

La condition d'*encastrement* en bas de la couche ( $x = H$ ) s'écrit :

$$\begin{cases} u(x = H) = 0 \\ \omega^r(x = H) = \frac{\partial u}{\partial x}(x = H) = 0 \end{cases} \quad (5.33)$$

soit :

$$\begin{cases} U(x = H) = 0 \\ \frac{dU}{dx}(x = H) = 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

Reportant l'équation (5.32) dans ces deux équations, il vient :

$$\begin{cases} A \left[ \sinh(\Delta_1) + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \sin(\Delta_2) \right] + B \left[ \cosh(\Delta_1) + \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2^2} \cos(\Delta_2) \right] = 0 \\ A \left[ \Delta_1 \cosh(\Delta_1) + \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1} \cos(\Delta_2) \right] + B \left[ \Delta_1 \sinh(\Delta_1) - \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2} \sin(\Delta_2) \right] = 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

La solution  $(A, B)$  de cette équation est non triviale si et seulement si :

$$\det \begin{bmatrix} \sinh(\Delta_1) + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \sin(\Delta_2) & \cosh(\Delta_1) + \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2^2} \cos(\Delta_2) \\ \Delta_1 \cosh(\Delta_1) + \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1} \cos(\Delta_2) & \Delta_1 \sinh(\Delta_1) - \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2} \sin(\Delta_2) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.36)$$

soit :

$$2\Delta_1^2\Delta_2^2 + (\Delta_1^2 - \Delta_2^2)\Delta_1\Delta_2 \sinh(\Delta_1) \sin(\Delta_2) + (\Delta_1^4 + \Delta_2^4) \cosh(\Delta_1) \cos(\Delta_2) = 0 \quad (5.37)$$

En introduisant le paramètre adimensionnel  $K = \frac{\mu^m H^2}{\gamma^r}$ , on obtient un système formé par l'équation (5.37) et la première équation de (5.25) :

$$\begin{cases} \Delta_1^2 - \Delta_2^2 = K \\ 2\Delta_1^2\Delta_2^2 + K\Delta_1\Delta_2 \sinh(\Delta_1) \sin(\Delta_2) + (\Delta_1^4 + \Delta_2^4) \cosh(\Delta_1) \cos(\Delta_2) = 0 \end{cases} \quad (5.38)$$

soit encore, en divisant la deuxième équation de ce système par le terme non nul  $\Delta_1^2\Delta_2^2 \cosh(\Delta_1)$  :

$$\begin{cases} \Delta_1^2 - \Delta_2^2 = K \\ \frac{K^2 \cos(\Delta_2)}{\Delta_1^2\Delta_2^2} + \frac{K \tanh(\Delta_1) \sin(\Delta_2)}{\Delta_1\Delta_2} + 2 \left( \cos(\Delta_2) + \frac{1}{\cosh(\Delta_1)} \right) = 0 \end{cases} \quad (5.39)$$

La résolution numérique de ce système permet de déterminer les valeurs des coefficients  $\Delta_{1i}$  et  $\Delta_{2i}$  correspondant au  $i^{me}$  mode. On s'intéresse aux cas limites suivants :

◇ Premier cas particulier :  $K = \frac{\mu^m H^2}{\gamma^r} \rightarrow 0$  :

Cette configuration peut être obtenue en adoptant une raideur en flexion des inclusions très grande par rapport au module de cisaillement du sol. L'équation (5.39) devient alors :

$$\begin{cases} \Delta_1 \approx \Delta_2 \equiv \Delta_0 \\ \cos(\Delta_0) + \frac{1}{\cosh(\Delta_0)} = 0 \end{cases} \quad (5.40)$$

qui n'est autre que l'équation aux fréquences propres d'une poutre encastree-libre en flexion .

◇ Deuxième cas particulier :  $K = \frac{\mu^m H^2}{\gamma^r} \rightarrow \infty$  :

Ce cas limite correspond à un module de cisaillement du sol très grand par rapport à la raideur en flexion des inclusions. L'équation (5.39) devient dans ce cas :

$$\begin{cases} \Delta_1 \rightarrow \infty \\ \cos(\Delta_2) = 0 \end{cases} \quad (5.41)$$

qui n'est autre que l'équation aux fréquences propres d'une couche de sol homogène en cisaillement.

La figure (5.7) présente la variation des coefficients  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  en fonction du paramètre sans dimension  $K$  pour les trois premiers modes. On observe que pour de faibles valeurs de  $K$ , pour chaque mode, les  $\Delta_{1i}$  tendent vers les  $\Delta_{2i}$ . Lorsque  $K$  augmente,  $\Delta_{1i}$  et  $\Delta_{2i}$  diffèrent. Les  $\Delta_{1i}$  convergent en tendant vers l'infini pour des valeurs élevées de  $K$ .

La fréquence propre  $f_i$  est alors calculée à partir de la deuxième équation de (5.25) comme suit :

$$f_i = \frac{\Delta_{1i} \Delta_{2i}}{2\pi H^2} \sqrt{\frac{\gamma^r}{\rho^{hom}}} \quad (5.42)$$

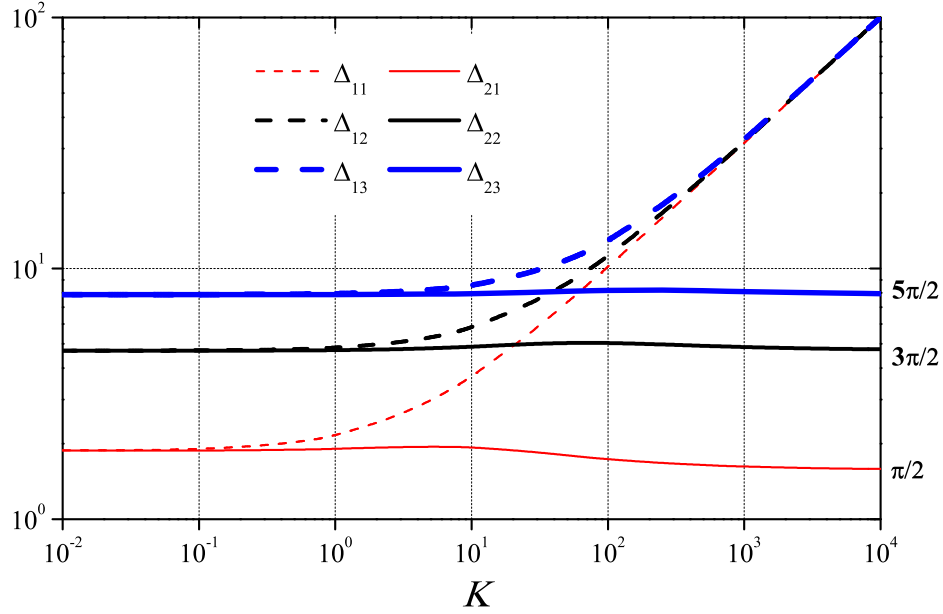


FIG. 5.7 – Evolution des coefficients  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  des trois premiers modes en fonction du paramètre  $K$

Cette équation permet de déterminer les fréquences propres normalisées par la première fréquence propre  $f_1$  :

$$f_i/f_1 = \frac{\Delta_{1i}\Delta_{2i}}{\Delta_{11}\Delta_{21}} \quad (5.43)$$

qui sont présentées sur la figure (5.8). On observe que pour les faibles valeurs de  $K$ , on retrouve les résultats d'une poutre encastree-libre en flexion ( $f_2/f_1 = 6,27$ ;  $f_3/f_1 = 17,55$ ). Tandis que pour les fortes valeurs de  $K$ , on rejoint ceux d'une couche de sol homogène en cisaillement ( $f_2/f_1 = 3$ ;  $f_3/f_1 = 5$ ).

En outre, la déformée modale normalisée par  $U_0(x=0)$  du mode  $i$  peut s'écrire sous la forme :



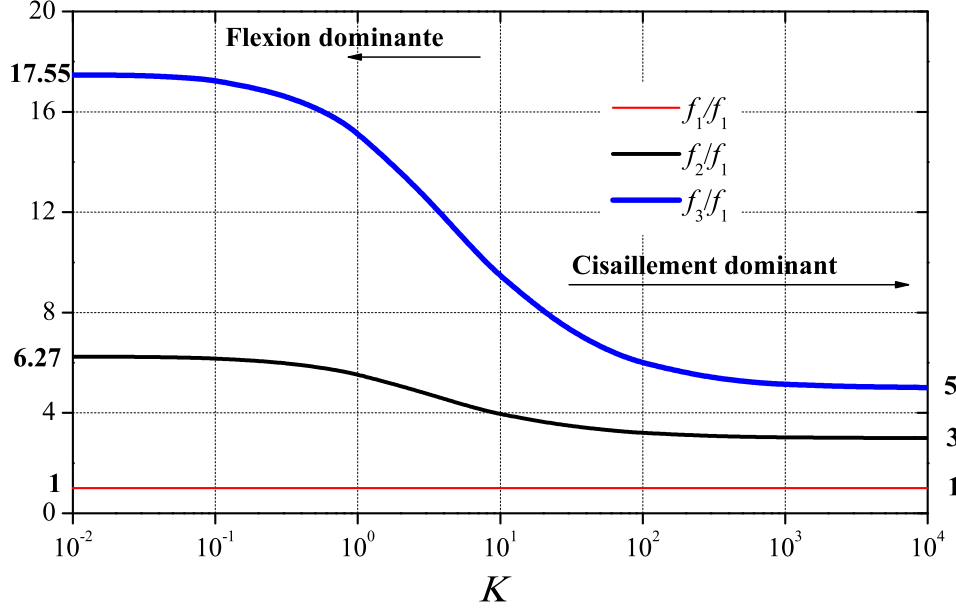


FIG. 5.8 – Evolution des trois premières fréquences propres normalisées en fonction du paramètre  $K$

$$\begin{aligned}
 \frac{\Phi_i(x)}{U_0} = & \frac{-\Delta_{1i}^2 \Delta_{2i}^2 \sinh(\Delta_{1i}) + \Delta_{1i}^3 \Delta_{2i} \sin(\Delta_{2i})}{(\Delta_{1i}^2 \cosh(\Delta_{1i}) + \Delta_{2i}^2 \cos(\Delta_{2i}))(\Delta_{1i}^2 + \Delta_{2i}^2)} \left[ \sinh(\Delta_{1i} \frac{x}{H}) + \frac{\Delta_{2i}}{\Delta_{1i}} \sin(\Delta_{2i} \frac{x}{H}) \right] \\
 & + \frac{\Delta_{2i}^2}{\Delta_{1i}^2 + \Delta_{2i}^2} \left[ \cosh(\Delta_{1i} \frac{x}{H}) + \frac{\Delta_{1i}}{\Delta_{2i}} \cos(\Delta_{2i} \frac{x}{H}) \right] \quad (5.44)
 \end{aligned}$$

La figure (5.9) représente les déformées normalisées des trois premiers modes du milieu renforcé pour différentes valeurs du paramètre adimensionnel  $K$ . On observe que les résultats du modèle multiphasique présentés sur les figures (5.7), (5.8), (5.9) sont totalement coïncidents avec ceux présentés dans la thèse de Jean Soubestre (2011) (Soubestre, 2011 [49]), obtenus par la méthode des développements asymptotiques. Ceci ne saurait bien évidemment surprendre puisque les deux approches aboutissent à la même équation (5.23) ou (5.28).

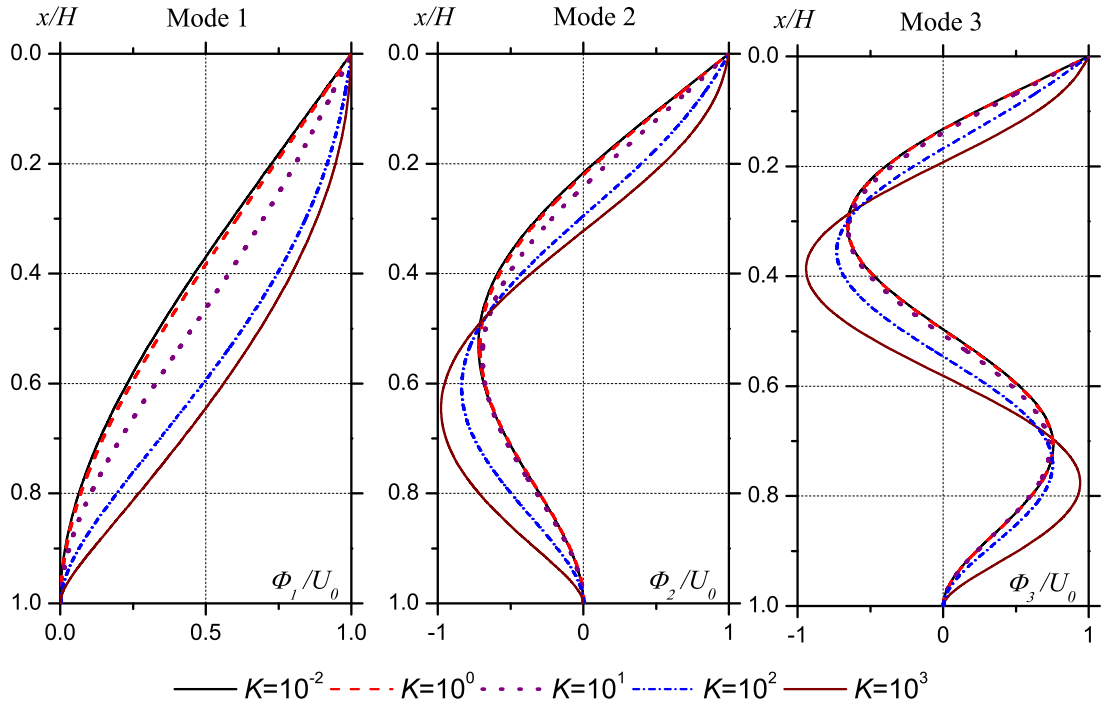


FIG. 5.9 – Evolution des déformées normalisées des trois premiers modes en fonction du paramètre  $K$ .

#### 5.5.4 Vibration forcée

On s'intéresse maintenant à une *vibration forcée* dans laquelle un déplacement harmonique est imposé en bas de la couche de sol ( $x = H$ ) (FIG (5.10)) :

$$u_H(H, t) = \delta = \delta_0 e^{i\omega t} \quad (5.45)$$

Les conditions aux limites en bas de la couche s'écrivent donc :

$$\begin{cases} U(x = H) = \delta_0 \\ \frac{dU}{dx}(x = H) = 0 \end{cases} \quad (5.46)$$

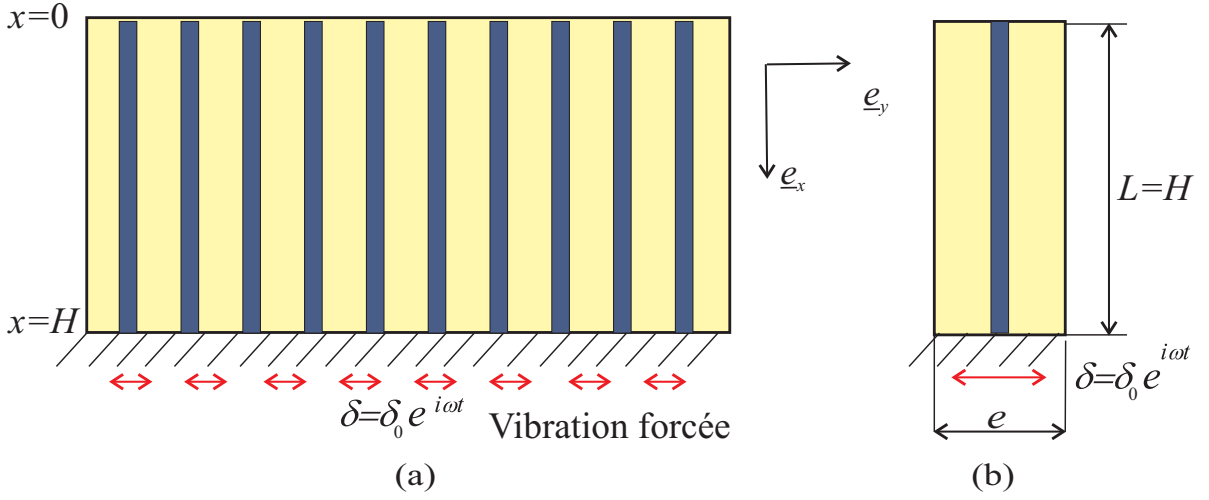


FIG. 5.10 – Vibration forcée (a) Couche de sol renforcée par des inclusions encastées; (b) Cellule de base

La surface du massif étant libre, la solution générale du problème est toujours de la forme (5.32). Reportant cette équation dans les deux conditions aux limites précédentes, il vient :

$$\begin{cases} A \left[ \sinh(\Delta_1) + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \sin(\Delta_2) \right] + B \left[ \cosh(\Delta_1) + \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2^2} \cos(\Delta_2) \right] = \delta_0 \\ A \left[ \Delta_1 \cosh(\Delta_1) + \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1} \cos(\Delta_2) \right] + B \left[ \Delta_1 \sinh(\Delta_1) - \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2} \sin(\Delta_2) \right] = 0 \end{cases} \quad (5.47)$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} A = -\frac{\Delta_1^2 \Delta_2^2 \sinh(\Delta_1) - \Delta_1^3 \Delta_2 \sin(\Delta_2)}{\Delta} \delta_0 \\ B = \frac{\Delta_1^2 \Delta_2^2 \cosh(\Delta_1) + \Delta_2^4 \sin(\Delta_2)}{\Delta} \delta_0 \end{cases} \quad (5.48)$$

avec :

$$\Delta = 2\Delta_1^2 \Delta_2^2 + (\Delta_1^2 - \Delta_2^2) \Delta_1 \Delta_2 \sinh(\Delta_1) \sin(\Delta_2) + (\Delta_1^4 + \Delta_2^4) \cosh(\Delta_1) \cos(\Delta_2) \quad (5.49)$$

En tenant compte de ces expressions, la *fonction de transfert*, définie comme le rapport entre le déplacement en surface ( $x = 0$ ) et le déplacement imposé en bas de la couche ( $x = H$ ), s'écrit comme suit :

$$\frac{U_0}{U_H} = \frac{(\Delta_1^2 + \Delta_2^2)[\Delta_1^2 \cosh(\Delta_1) - \Delta_2^2 \sin(\Delta_2)]}{\Delta} \quad (5.50)$$

### 5.5.5 Comparaison avec la simulation directe

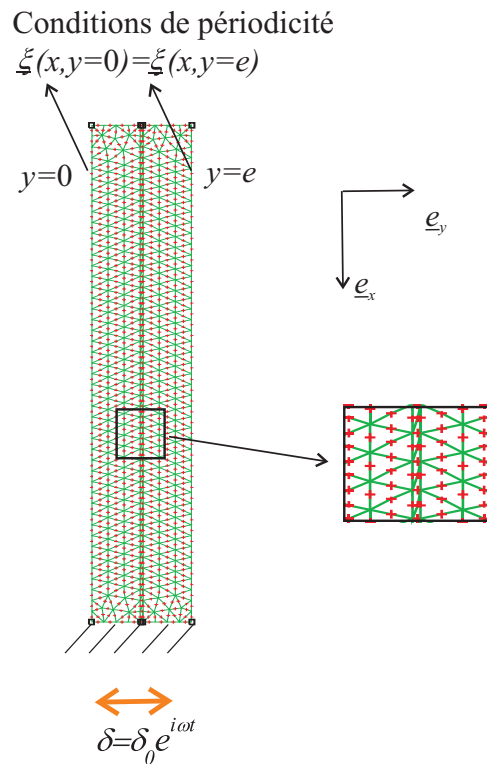


FIG. 5.11 – Maillage par éléments finis du problème auxiliaire relatif à la cellule de base

Afin d'illustrer ces résultats du modèle multiphasique enrichi, on reprend les données du problème de l'exemple traité dans la section 3.5.3 du chapitre 3 :

◇ Caractéristiques du sol :

$$E^s = 45 \text{ MPa}; \nu^s = 0,3; \rho^s = 1750 \text{ kg/m}^3$$

◇ Caractéristiques des inclusions :

$$E^b = 20 \text{ GPa}; \nu^b = 0,2; \rho^b = 2500 \text{ kg/m}^3$$

◇ Caractéristiques géométriques :

$$H = 24 \text{ m}; L = 24 \text{ m}; e = 4 \text{ m}; d = 0,1 \text{ m}$$

Les paramètres  $\mu^m, \gamma^r, \rho^{hom}$  du modèle multiphasique sont alors calculés comme suit :

$$\begin{aligned} \mu^m &\approx \mu^s = \frac{E^s}{2 + 2\nu^s} = 17,30 \text{ MPa} \\ \gamma^r &= \frac{d^3}{12} \frac{E^b}{e(1 - \nu^2)} = 0,43 \text{ MPa.m}^2 \\ \rho^{hom} &= \left(1 - \frac{d}{e}\right)\rho^s + \frac{d}{e}\rho^b = 1812,5 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

d'où la valeur du paramètre  $K$  :

$$K = \frac{\mu^m H^2}{\gamma^r} = 2,3 \cdot 10^4 \quad (5.51)$$

On effectue une comparaison entre les résultats du modèle multiphasique muni des caractéristiques précédentes avec ceux obtenus à partir d'une simulation directe d'un problème auxiliaire, conduite à l'aide d'un logiciel de calcul par éléments finis (FIG (5.11)). Les fréquences propres des trois premiers modes sont représentées sur le tableau (5.1).

On obtient un bon accord entre les résultats de ces deux méthodes bien que les fréquences propres du modèle multiphasique soient légèrement inférieures à celles obtenues par la simulation directe.

La *fonction de transfert* en fonction de la fréquence de sollicitation obtenue par le modèle multiphasique et la simulation numérique directe est représentée sur

Mode	$f(\text{Hz})$ -Multiphasique	$f(\text{Hz})$ -Simulation directe
1	1,03	1,05
2	3,08	3,15
3	5,13	5,25

TAB. 5.1 – Fréquences propres des trois premiers modes obtenues par le modèle multiphasique et la simulation directe

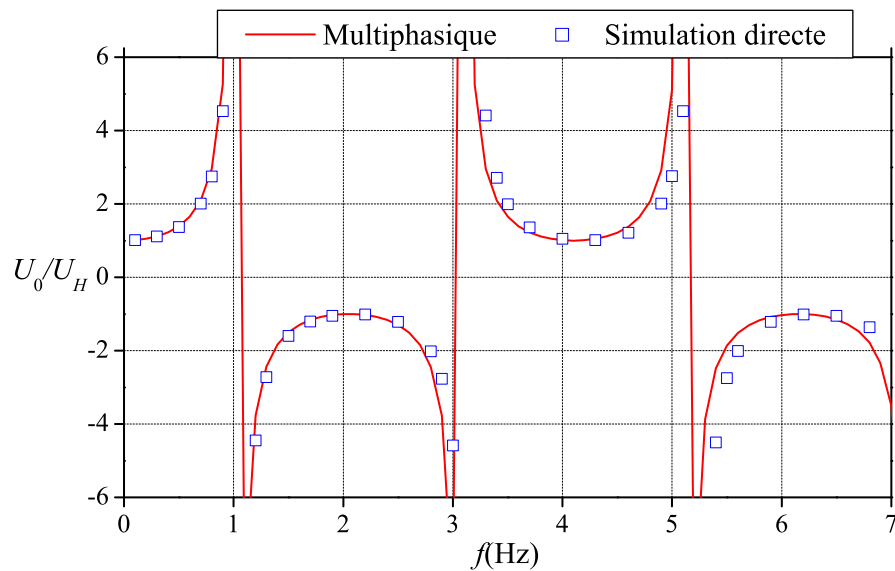


FIG. 5.12 – Fonction transfert en fonction de la fréquence de la sollicitation

la figure (5.12). On observe que les résultats de ces deux modèles sont concordants, validant ainsi le modèle multiphasique adopté.

## 5.6 Conclusion

Le modèle multiphasique enrichi présenté dans ce chapitre permet de rendre compte des effets de flexion et de cisaillement des inclusions de renforcement dans

le cas d'un chargement dynamique. Ceci est démontré dans une première étape à travers l'expression de la vitesse d'une onde plane harmonique de cisaillement se propageant dans le sol renforcé parallèlement à la direction de l'inclusion. Cette vitesse dépend non seulement du module de cisaillement de la phase matrice  $\mu^m$ , mais aussi de la raideur en flexion de la phase de renforcement  $\gamma^r$  et de la pulsation  $\omega$  de l'onde.

Dans un second temps, l'effet de flexion des inclusions est illustré sur l'exemple d'une couche de sol renforcée par inclusions rigides d'extension horizontale infinie. On obtient une solution en déplacement d'une vibration harmonique libre et d'une vibration forcée de cette couche de sol. Les résultats obtenus sont ensuite validés par comparaison avec ceux obtenus par la simulation directe par éléments finis d'un problème auxiliaire.

Enfin, la validité du modèle multiphasique ainsi enrichi est encore une fois attestée par la comparaison avec la méthode des développements asymptotiques. Les équations de l'élastodynamique issues des deux méthodes appliquées à l'analyse du régime dynamique transverse d'une couche de sol renforcée par des inclusions rigides, d'extension horizontale infinie, sont en effet identiques.

# Mise en œuvre numérique du modèle multiphasique enrichi, en dynamique et élasticité linéaire

---

## Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>129</b>
<b>6.2</b>	<b>Formulation éléments finis en dynamique appliquée au modèle multiphasique enrichi</b>	<b>129</b>
6.2.1	Construction de la matrice de rigidité $[K]$	131
6.2.2	Matrice de masse $[M]$	133
6.2.3	Vecteur des forces nodales $\{F\}$	133
<b>6.3</b>	<b>Vérification du code de calcul et première application</b>	<b>134</b>
6.3.1	Position du problème	134
6.3.2	Paramètres du modèle multiphasique	135
6.3.3	Résultats des simulations numériques et commentaires	139
<b>6.4</b>	<b>Extension du code de calcul multiphasique à la prise en compte de problèmes "tridimensionnels"</b>	<b>142</b>
6.4.1	Position du problème	142
6.4.2	Application du code "tridimensionnel" aux calculs d'impédances	145
<b>6.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>150</b>

---





## 6.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'extension du code de calcul multiphasique développé au chapitre 4, à la prise en compte de la version enrichie du modèle présentée au chapitre 5, dans laquelle les efforts de flexion et de cisaillement ainsi que les interactions volumique et de pointe sont prises en compte.

La vérification de l'outil numérique développé est par la suite effectuée à travers une première simulation de la réponse élastodynamique d'une couche de sol d'extension horizontale infinie renforcée par une distribution régulière de pieux, permettant de retrouver les résultats de la section 2.5 dans le cas où les raideurs à la flexion ( $\gamma^r$ ) et au cisaillement ( $\beta^r$ ) de la phase renforcement sont négligées et l'hypothèse d'adhérence parfaite ( $c^I \rightarrow \infty$ ) adoptée.

Le code de calcul est ensuite mis en œuvre pour l'évaluation des impédances verticale et horizontale de la couche de sol renforcée. Les résultats obtenus sont comparés à ceux provenant d'une simulation directe tridimensionnelle du même problème.

La fin de ce chapitre est consacrée au développement d'une version de l'outil numérique permettant d'appréhender des problèmes multiphasiques tridimensionnels. Cet outil est ensuite mis en œuvre pour le calcul de la matrice d'impédance d'une fondation en sol renforcé soumise à un chargement vertical, horizontal, ainsi qu'à un moment de renversement.

## 6.2 Formulation éléments finis en dynamique appliquée au modèle multiphasique enrichi

L'objectif de cette section est de présenter succinctement la formulation éléments finis en dynamique du modèle multiphasique enrichi présenté au chapitre précédent. Ces développements aboutiront à un code de calcul bidimensionnel permettant de déterminer les fonctions d'impédances verticale, horizontale et de renversement d'un radier sur pieux sollicité en déformation plane dans le plan ( $Oxy$ ).

Sous l'hypothèse d'adhérence parfaite dans la direction  $Oy$ , perpendiculaire à la direction de renforcement, la cinématique du milieu multiphasique comporte quatre degrés de liberté regroupés dans le vecteur :

$$\{\xi\}(x, y) = \begin{pmatrix} \xi_x^m(x, y) \\ \xi_y(x, y) \\ \xi_x^r(x, y) \\ \omega_z^r(x, y) \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

où  $\xi_x^m$  (resp.  $\xi_x^r$ ) désigne la composante suivant la direction de renforcement  $Ox$  du champ de déplacement de la phase matrice (resp. renforcement),  $\xi_y$  désigne la composante des champs de déplacement des deux phases et  $\omega_z^r$  est la rotation autour de  $(Oz)$  de la phase renforcement (FIG (6.1)).

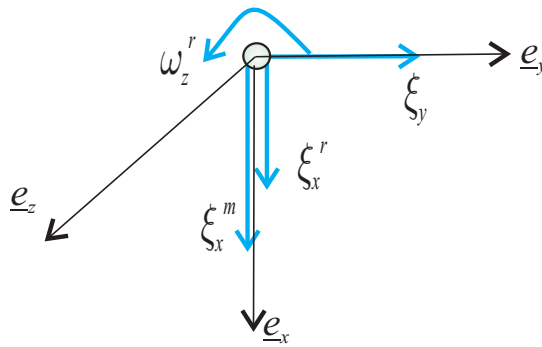


FIG. 6.1 – Les quatre degrés de liberté du milieu multiphasique en déformations planes dans le plan  $(Oxy)$

D'une manière analogue aux développements présentés au chapitre 4, la discrétisation par éléments finis de ce problème permet d'aboutir à une formulation matricielle qui s'écrit :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\} \quad (6.2)$$

où  $\{U\}$  est le vecteur des inconnues nodales. La construction des matrices de rigidité  $[K]$  et de masse  $[M]$ , ainsi que le vecteur des forces nodales  $\{F\}$  fait l'objet des paragraphes qui suivent, tandis que la matrice d'amortissement  $[C]$  est déterminée par la formule de Rayleigh (E. Boyere, 2011 [9], K. Chopra, 1995 [12]).

## 6.2. Formulation EF en dynamique du modèle multiphasique enrichi 131

### 6.2.1 Construction de la matrice de rigidité $[K]$

La matrice de rigidité  $[K]$  est obtenue par assemblage des matrices de rigidité élémentaires de tous les éléments  $\nu_e$  du maillage :

$$[k]_e = \int_{\nu_e} {}^t[B]_e[D].[B]_e d\Omega + \int_{\nu_e \cap \Sigma} {}^t[B]_e^P[c^P].[B]_e^P dS \quad (6.3)$$

où :

◇  $\Sigma$  est la surface où se trouvent les extrémités ("pointes") des inclusions de renforcement en contact avec le sol (matrice) ;

◇  $[D]$  désigne la matrice d'élasticité locale généralisée :

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda^m + 2\mu^m & \lambda^m & \lambda^m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^m & \lambda^m + 2\mu^m & \lambda^m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^m & \lambda^m & \lambda^m + 2\mu^m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^I \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

◇  $[c^P]$  est une matrice à une seule composante  $c^P$  ;

◇  $[B]_e$  est une matrice formée de  $n_e$  (nombre nœuds de l'élément  $\nu_e$ ) matrices  $[B]_k$  de taille (8 x 4) chacune :

$$[B]_e = [\dots, [B]_k, \dots] \quad k = 1, \dots, n_e \quad (6.5)$$

avec :

$$[B]_k = \begin{bmatrix} N_{k,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{k,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{k,y} & N_{k,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{k,x} & 0 \\ 0 & N_{k,x} & 0 & -N_k \\ 0 & 0 & 0 & N_{k,x} \\ -N_k & 0 & N_k & 0 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Le nombre de lignes de  $[B]_k$  (8) correspond au nombre de variables de déformations ( $\varepsilon_{xx}^m, \varepsilon_{yy}^m, \varepsilon_{zz}^m = 0, \varepsilon_{xy}^m, \varepsilon^r, \theta^r, \chi^r, \Delta\xi_x$ ). Les fonctions de forme  $N_k(x, y)$  sont des polynômes de degré  $n_e$  tels que :

$$N_k(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{au nœud } k \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad k = 1, \dots, n_e \quad (6.7)$$

$$\text{et } N_{k,x} = \frac{\partial N_k}{\partial x}, \quad N_{k,y} = \frac{\partial N_k}{\partial y}$$

◇ Enfin  $[B]_e^P$  est une matrice formée de  $n_e$  matrices  $[B]_k^P$  de taille (1 x 4). Le nombre de lignes correspond au nombre de variables de déformation ( $\Delta\xi_x$ ) et le nombre de colonnes correspond au nombre de degrés de liberté :

$$[B]_e^P = [\dots, [B]_k^P, \dots] \quad k = 1, \dots, n_e \quad (6.8)$$

avec :

$$[B]_k^P = [-N_k, 0, N_k, 0] \quad (6.9)$$

## 6.2. Formulation EF en dynamique du modèle multiphasique enrichi 133

### 6.2.2 Matrice de masse $[M]$

La matrice de masse  $[M]$  est construite par assemblage des matrices de masse élémentaires des éléments  $\nu_e$  :

$$[m]_e = \int_{\nu_e} [\rho] \cdot {}^t[N]_e \cdot [N]_e d\omega \quad (6.10)$$

où :

◇  $[N]_e$  est la matrice des fonctions de forme élémentaires :

$$[N]_e = \left[ \dots \left( \begin{array}{cccc} N_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_k \end{array} \right) \dots \right] \quad k = 1, \dots, n_e \quad (6.11)$$

◇ et  $[\rho]$  la *matrice de masse volumique* qui s'écrit :

$$[\rho] = \begin{bmatrix} \rho^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \eta)\rho^m + \eta\rho^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

### 6.2.3 Vecteur des forces nodales $\{F\}$

Le vecteur de forces nodales élémentaires est obtenu en faisant la somme des contributions des forces volumiques ainsi que des forces surfaciques appliquées sur le contour de la phase matrice et le contour de la phase renforcement :

$$\{f_e\} = \int_{\nu_e} {}^t[N]_e \{\rho F\} d\Omega + \int_{\partial\nu_e \cap \partial\Omega_T^m} {}^t[N]_e \{T^m\} dS + \int_{\partial\nu_e \cap \partial\Omega_T^r} {}^t[N]_e \{T^r\} dS + \int_{\partial\nu_e \cap \partial\Omega_C} {}^t[N]_e \{C^r\} dS \quad (6.13)$$

dans laquelle :

$$\begin{aligned}
{}^t\{\rho F\} &= \{\rho^m F_x^m, \rho^m F_y^m + \rho^r F_y^r, \rho^r F_x^r, 0\} \\
{}^t\{T^m\} &= \{T_x^{m,d}, T_y^{m,d}, 0, 0\} \\
{}^t\{T^r\} &= \{0, T_y^{r,d}, T_x^{r,d}, 0\} \\
{}^t\{C^r\} &= \{0, 0, 0, C^{r,d}\}
\end{aligned} \tag{6.14}$$

$\partial\Omega_T^m$  (resp.  $\partial\Omega_T^r$ ) est la partie du bord  $\partial\Omega$  de la structure sur laquelle les densités surfaciques d'efforts  $\{T^m\}$  (resp.  $\{T^r\}$ ) appliquées à la phase matrice (resp. phase renforcement) sont données.  $\partial\Omega_C^r$  est la partie du bord  $\partial\Omega$  de la structure sur laquelle les densités de couple  $\{C^r\}$  appliquées à la phase renforcement sont données. L'assemblage des vecteurs de forces nodales élémentaires conduit à la construction du vecteur des forces nodales  $\{F\}$ .

## 6.3 Vérification du code de calcul et première application

### 6.3.1 Position du problème

Reprenons l'exemple du chapitre 2 (FIG (6.2) et (6.3)) relatif à un radier de fondation de largeur  $B$  (semelle filante) reposant sur un massif de sol d'épaisseur  $H$ , renforcé par un groupe de pieux flottants de longueur  $L$ , et soumis à une sollicitation harmonique caractérisée par un déplacement horizontal ou vertical uniforme de la forme :

$$\delta = \delta_0 e^{i\omega t} \tag{6.15}$$

imposé en tout point de l'aire de contact entre le radier et le sol renforcé, où  $\omega$  désigne la pulsation de la sollicitation. Les caractéristiques géométriques ainsi que les propriétés mécaniques des différents constituants retenues pour les simulations numériques sont les suivantes :

- Géométrie :  $B = 8$  m ;  $D = 30$  m ;  $H = 30$  m ;  $L = 20$  m ;
- Caractéristiques du sol :  $E^s = 5$  MPa ;  $\nu^s = 0,3$  ;  $\rho^s = 1750$  kg/m<sup>3</sup> ;

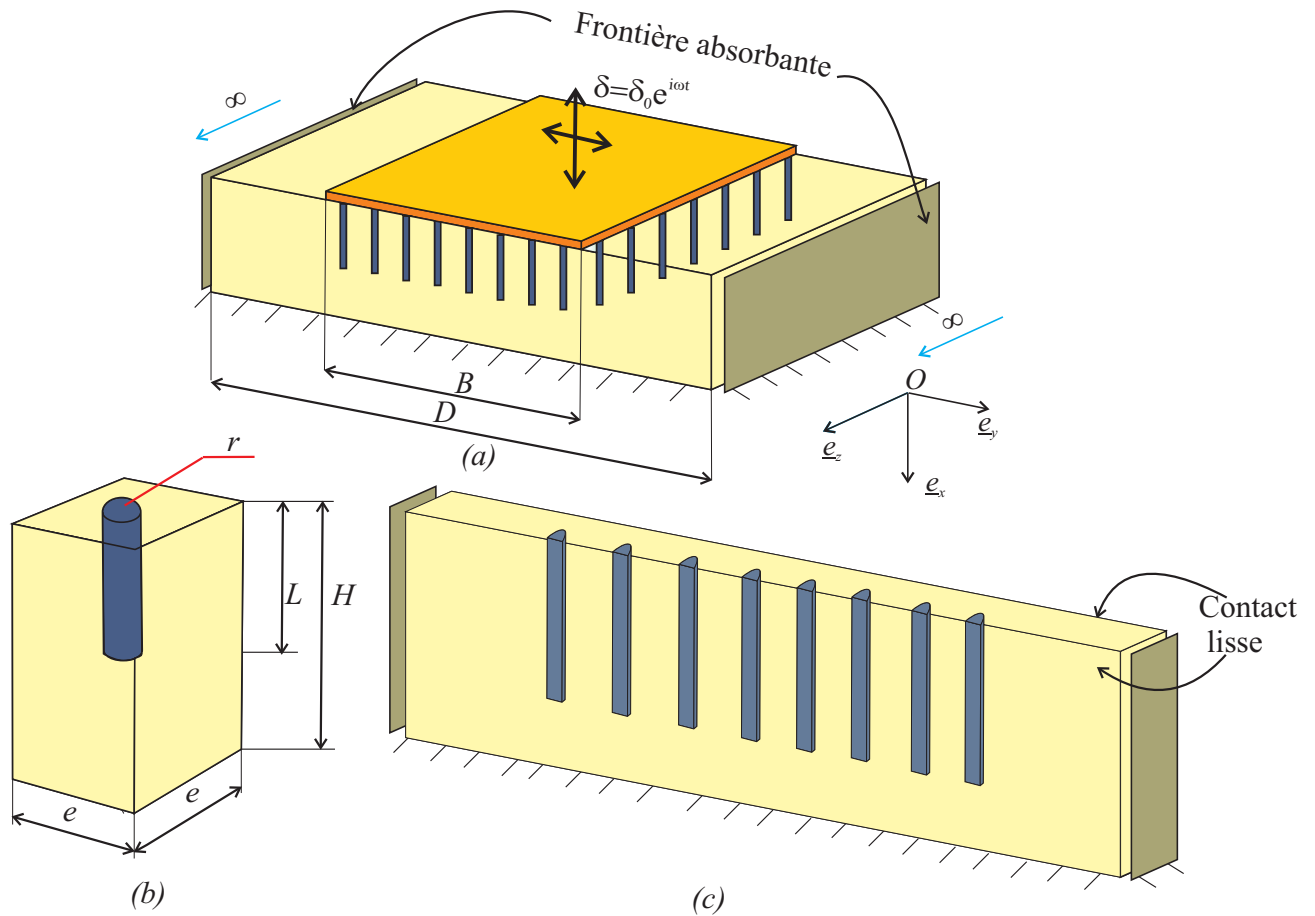


FIG. 6.2 – Structure renforcée par un groupe de pieux

- Caractéristiques du matériau constituant les pieux (béton) :  $E^b = 20 \text{ GPa}$  ;  
 $\nu^b = 0,3$  ;  $\rho^b = 2500 \text{ kg/m}^3$  ;

L'objectif est ici de déterminer les impédances verticale et horizontale de la structure ainsi renforcée par la mise en œuvre du code de calcul présenté à la section (6.2) qui intègre la version enrichie du modèle multiphasique présentée au chapitre 5.

### 6.3.2 Paramètres du modèle multiphasique

Il est de noter que, la fraction volumique du renforcement étant très faible ( $\eta = 3,14\%$ ), la fraction volumique du sol ( $1-\eta$ ) est donc proche de l'unité. Par conséquent, il semble raisonnable d'adopter pour la phase matrice les mêmes



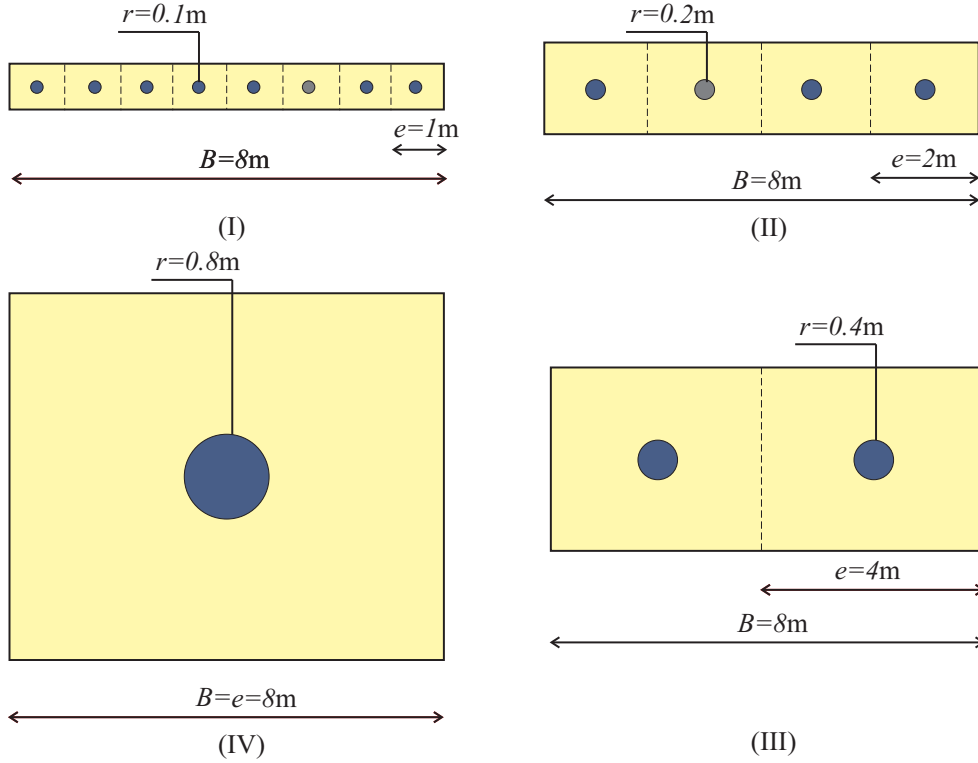


FIG. 6.3 – Disposition des pieux sous la fondation dans les quatre configurations étudiées (I) à (IV)

caractéristiques élastiques que celles de la couche de sol. Concernant la phase renforcement, les densités de rigidité axiale ( $\alpha^r$ ), de cisaillement ( $\beta^r$ ) et de flexion ( $\gamma^r$ ) sont tout simplement calculées, en divisant les quantités correspondantes relatives à une inclusion individuelle par l'aire de la section droite ( $e^2$ ) du volume élémentaire représentatif :

$$\begin{cases} \alpha^r = \frac{AE^b}{e^2} = \eta E^b \\ \beta^r = \frac{A^* \mu^b}{e^2} \\ \gamma^r = \frac{IE^b}{e^2} \end{cases} \quad (6.16)$$

où  $A = \pi r^2$  est l'aire de la section droite de l'inclusion,  $A^* = (27/32)A$  son aire réduite intervenant dans la rigidité au cisaillement (voir par exemple Frey (1994) [21] pour plus de détail),  $I = \pi r^4/4$  est son moment d'inertie par rapport à son diamètre et  $\mu^b$  est le module de cisaillement du matériau constituant les pieux ( $\mu^b = E^b/2(1 + \nu^b)$ ). Les quatre configurations de la figure (6.3) sont

étudiées ici afin d'analyser l'effet de variation du rayon et de l'espacement des inclusions, à fraction volumique  $\eta$  constante, sur les valeurs des impédances horizontale et verticale de la structure, c'est à dire *l'effet d'échelle* statique (voir chapitre 2).

Les valeurs correspondantes des paramètres du modèle multiphasique sont indiquées dans le tableau (6.1) pour les quatre configurations analysées. Pour ce qui concerne les paramètres d'interaction, ceux-ci sont identifiés par la méthode présentée au chapitre 3, section 3.5.3. En faisant l'hypothèse que les paramètres d'interaction sont peu influencés par la fréquence de sollicitation, on choisit une valeur constante égale à celle du cas quasi statique. Les valeurs ainsi identifiées de ces paramètres sont données pour chaque configuration dans le tableau (6.2).

Configuration	$r(m)$	$e(m)$	$\varepsilon^s$	$\eta(\%)$	$\alpha^r(\text{MPa})$	$\beta^r(\text{MPa})$	$\gamma^r(\text{MPa}\cdot\text{m}^2)$
I	0,1	1	0,125	3,14	628	204	1,57
II	0,2	2	0,25	3,14	628	204	6,28
III	0,4	4	0,5	3,14	628	204	25,1
IV	0,8	8	1	3,14	628	204	100,53

TAB. 6.1 – Paramètres du modèle multiphasique dans les quatre configurations analysées

Configuration	$c^I(\text{MN}/\text{m}^4)$	$c^P(\text{MN}/\text{m}^3)$
I	7,71	3,53
II	2,45	1,50
III	0,70	0,59
IV	0,16	0,34

TAB. 6.2 – Identification des coefficients d'interaction pour les différentes configurations

D'une manière analogue à ce qui a été fait dans le chapitre 2, les symétries du

problème permettent de se ramener à l'étude d'une tranche d'épaisseur  $B/2$  avec les conditions aux limites appropriées. Les maillages adoptés pour les simulations directes tridimensionnelles de la réponse dynamique de la structure sont représentés sur la figure (6.4) pour les quatre configurations étudiées. En revanche, la modélisation multiphasique du problème amène à la réduction du problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel en déformation plane, dans lequel la zone renforcée est remplacée par une zone multiphasique homogène, dont le maillage est indépendant des caractéristiques géométriques des inclusions ( $r$ ) et de leurs espacement ( $e$ ) d'une part, et ne requiert pas un raffinement particulier d'autre part (FIG (6.5)).

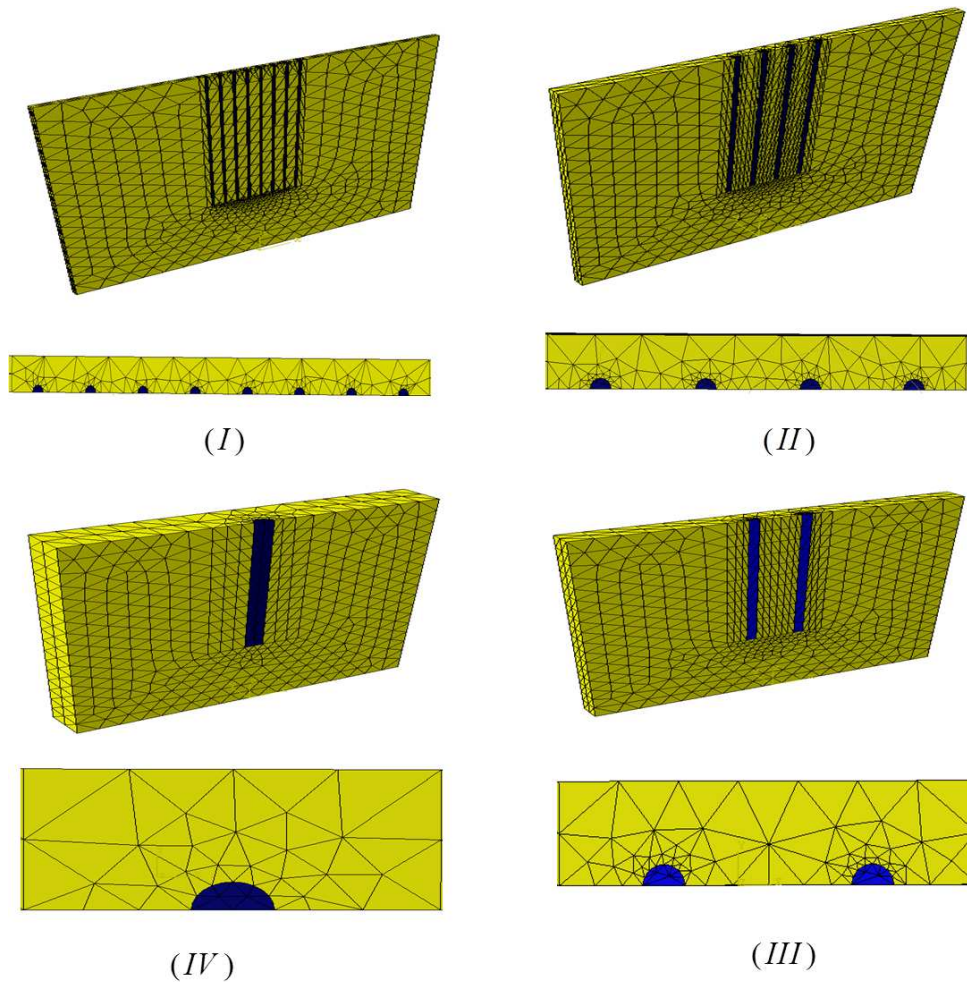


FIG. 6.4 – Maillages employés dans le calcul dynamique par simulation directe

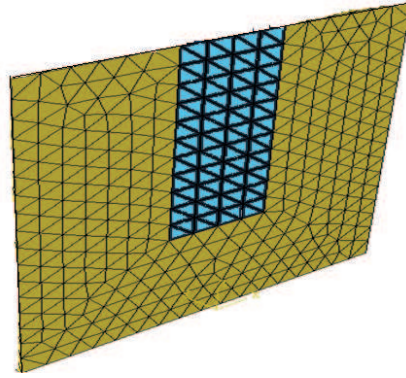


FIG. 6.5 – Maillage 2D du modèle multiphasique

### 6.3.3 Résultats des simulations numériques et commentaires

Les calculs ont été effectués en utilisant la méthode de résolution dans le domaine fréquentiel. Les variations des impédances verticale et horizontale en fonction du paramètre de changement d'échelle dynamique  $\varepsilon^d = \frac{e}{\lambda}$  (voir chapitre 2), pour chaque configuration ( $\varepsilon^s = 0.125 - 0.25 - 0.5 - 1$ ), fournies par la simulation directe, l'approche par homogénéisation classique, et le modèle multiphasique enrichi, sont représentées sur les figures (6.6) et (6.7). L'impédance verticale (resp. horizontale) est exprimée à travers son module normalisé  $K_{0V}/K_{SV}$  (resp.  $K_{0H}/K_{SH}$ ) et son déphasage  $\varphi_V$  (resp.  $\varphi_H$ ) où  $K_{SV}$  (resp.  $K_{SH}$ ) désigne la raideur verticale (resp. horizontale) en statique de la structure dans le cas du sol non renforcé.

On observe une bonne, voir très bonne concordance, entre les résultats du modèle multiphasique et ceux obtenus par la simulation directe. Il est remarquable de constater que cet accord est non seulement valable pour de faibles valeurs du facteur d'échelle statique  $\varepsilon^s$  (c'est à dire pour un nombre significatif d'inclusions : voir configuration (I)), mais également dans le cas extrême de la configuration (IV) correspondant à une seule file de pieux placée sous la semelle filante. L'approche par homogénéisation classique en revanche tend à surestimer l'impédance verticale et à sous-estimer l'impédance horizontale. Ce dernier résultat confirme l'analyse faite dans le cas statique (voir Hassen et de Buhan (2008) [15]). Il convient de noter que les résultats de l'approche par homogénéisation classique sont retrouvés par le code multiphasique 2D en flexion ici développé en adoptant les valeurs suivantes :

$$c^I \rightarrow \infty, \quad \beta^r = 0, \quad \gamma^r = 0 \quad (6.17)$$

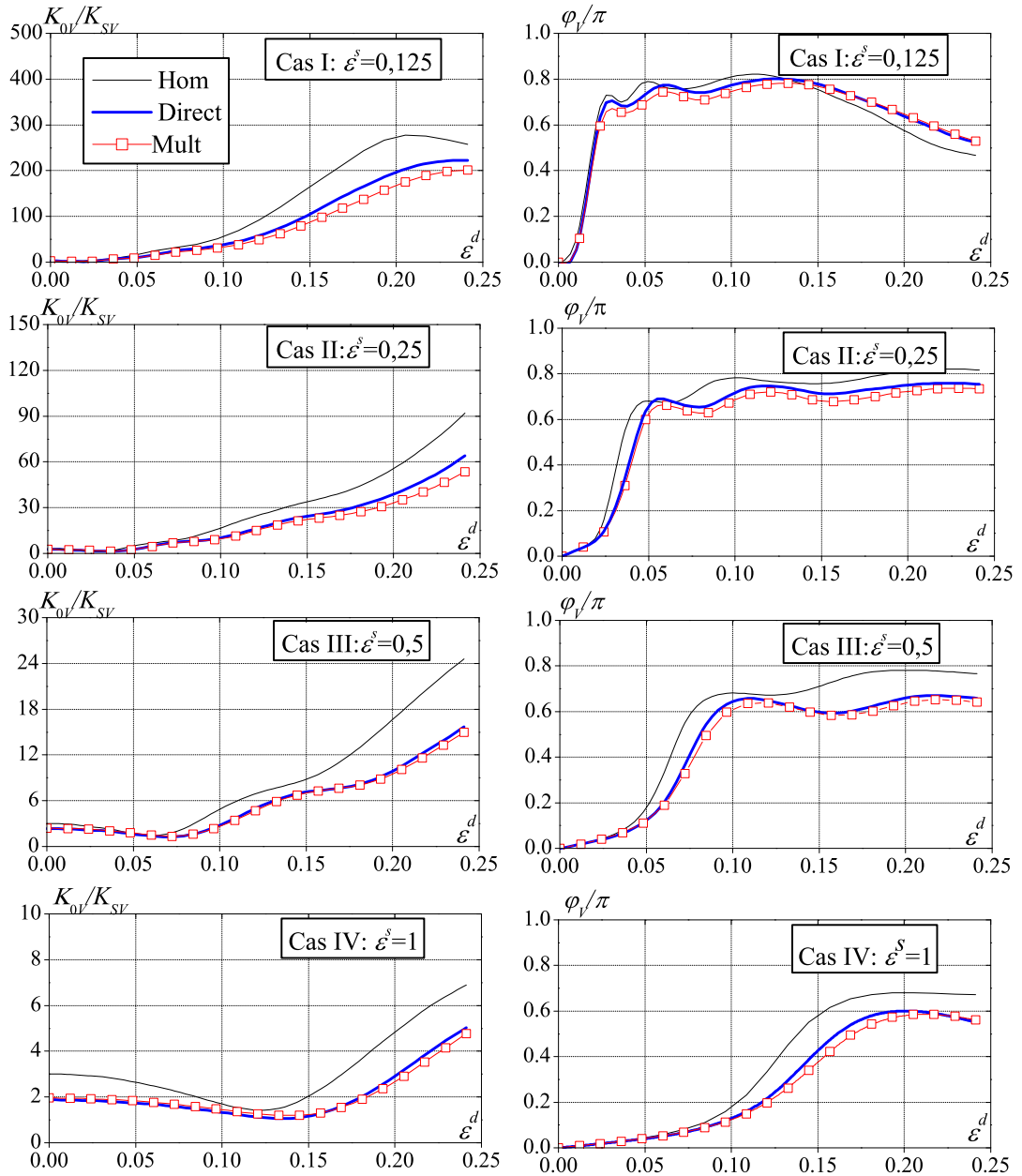


FIG. 6.6 – Impédance verticale de la structure

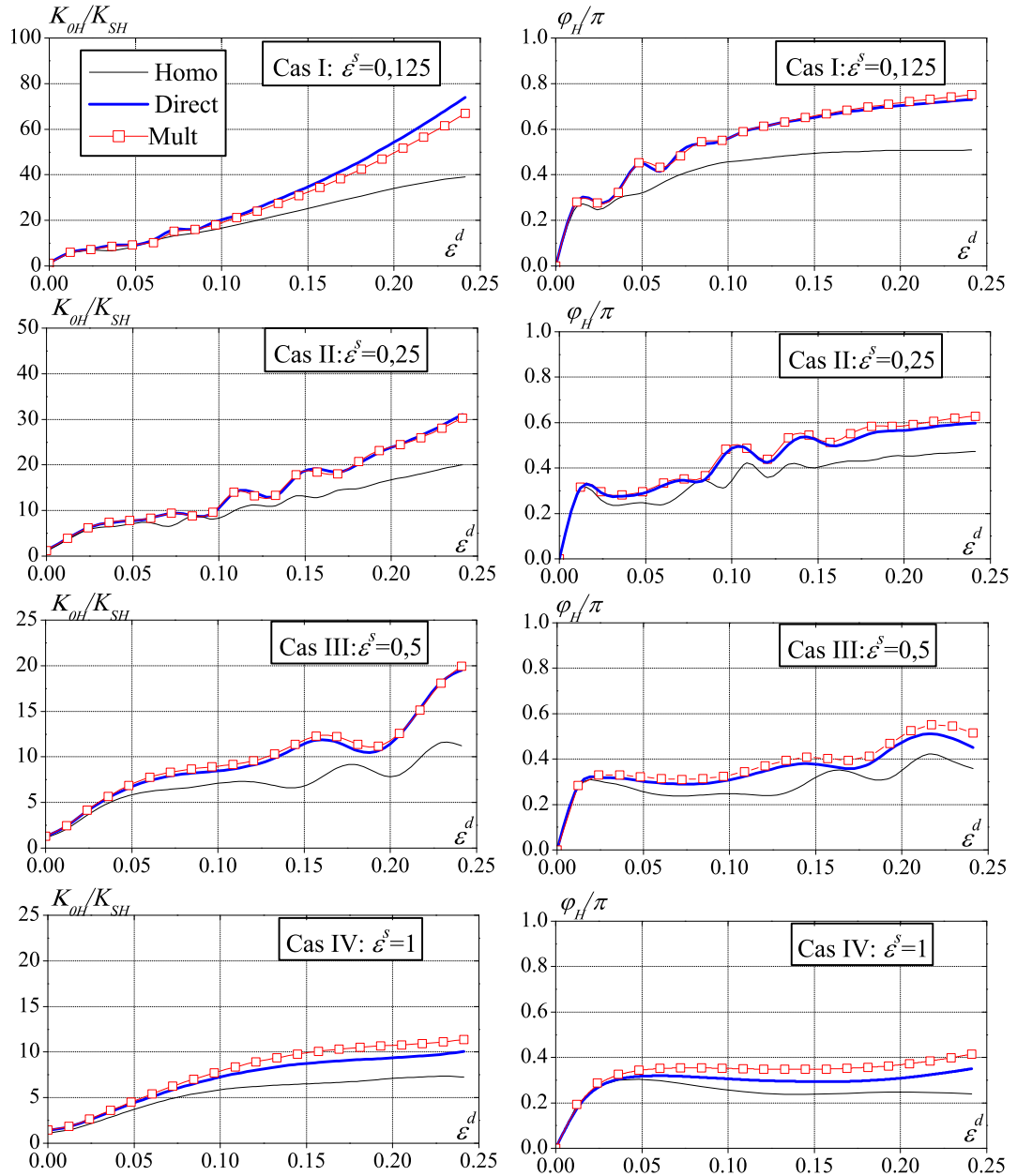


FIG. 6.7 – Impédance horizontale de la structure

c'est à dire en négligeant les raideurs en cisaillement et flexion des inclusions et en faisant l'hypothèse d'adhérence parfaite entre phases.

## 6.4 Extension du code de calcul multiphasique à la prise en compte de problèmes "tridimensionnels"

Notre objectif est maintenant d'élaborer un code de calcul multiphasique en élastodynamique, applicable à des configurations qui demeurent tridimensionnelles même lorsque la zone de sol renforcé a été remplacée par le milieu multiphasique. Nous nous intéresserons ici plus particulièrement à un radier de forme carrée renforcé par un groupe de pieux, configuration pour laquelle nous disposons de résultats de simulations numériques directes fournis par Taherzadeh *et al.*(2012) [52]

### 6.4.1 Position du problème

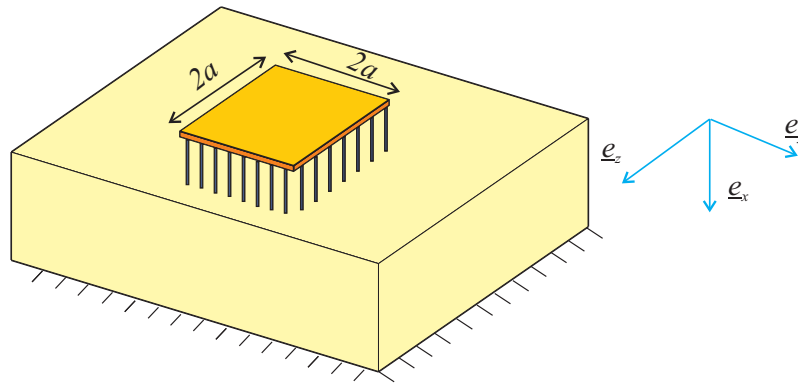


FIG. 6.8 – Radier de forme carrée renforcé par un groupe de pieux

On se propose ici d'étudier la réponse dynamique, quantifiée par la matrice d'impédance, d'une structure constituée d'une couche de sol d'extension horizontale infinie, renforcée sur une zone carrée de côté  $2a$ , par une distribution périodique de pieux et surmontée d'un radier rigide de même forme (FIG (6.8)). La matrice d'impédance correspondante est une matrice  $6 \times 6$ , symétrique définie positive, reliant le vecteur à 6 composantes des paramètres de chargement donné par :

$${}^t\{Q\} = \left( Q_x, Q_y, Q_z, M_x/a, M_y/a, M_z/a \right) \quad (6.18)$$

au vecteur des paramètres cinématiques associés :

$${}^t\{\delta\} = \left( \delta_x, \delta_y, \delta_z, a\omega_x, a\omega_y, a\omega_z \right) \quad (6.19)$$

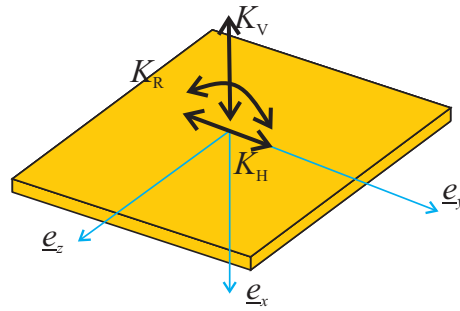
où  $Q_x$  (resp.  $Q_y$  et  $Q_z$ ) désigne la résultante suivant  $x$  (resp.  $y$  et  $z$ ) des efforts extérieurs appliqués par le radier sur le sol de fondation.  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_z$  sont les moments de ces mêmes efforts par rapport à  $(Ox)$ ,  $(Oy)$  et  $(Oz)$  respectivement. Les variables cinématique  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  et  $\delta_z$  correspondent aux déplacements de translation du radier au point  $O$  suivant les trois directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ , tandis que  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$  sont les rotations du radier autour des axes  $(Ox)$ ,  $(Oy)$  et  $(Oz)$ .

On peut alors montrer que, tenu compte des symétries du problème, la matrice d'impédance  $[K]$  est de la forme générale :

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \\ M_x/a \\ M_y/a \\ M_z/a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_V & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_H & 0 & 0 & 0 & K_{YZ} \\ 0 & 0 & K_H & 0 & K_{YZ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{YZ} & 0 & K_R & 0 \\ 0 & K_{YZ} & 0 & 0 & 0 & K_R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ a\omega_x \\ a\omega_y \\ a\omega_z \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

où  $K_V$  et  $K_H$  sont les impédances verticale selon  $x$  et horizontales suivant  $y$  et  $z$ , tandis que  $K_T$  désigne l'impédance de torsion autour de l'axe  $(Ox)$ , et  $K_R$  est l'impédance de renversement autour de l'axe  $(Oy)$  ou  $(Oz)$ . La composante  $K_{YZ} = K_{ZY}$  est un terme de couplage entre le moment de renversement ( $M_y$ ) (resp.  $(M_z)$ ) autour de  $(Oy)$  (resp.  $(Oz)$ ) et la résultante latérale  $Q_y$  (resp.  $Q_z$ ) des efforts extérieurs. Les sollicitations dynamiques de torsion étant rarement considérées en génie parasismique, on se restreindra par la suite à l'évaluation des impédances verticale  $K_V$ , horizontale  $K_H$  et de renversement  $K_Z$  (FIG (6.9)) associées à un mouvement harmonique imposé purement vertical en ce qui concerne  $K_V$ , purement horizontal pour  $K_H$  et de renversement harmonique autour de  $(Oz)$  pour  $K_Z$ .



FIG. 6.9 – Sollicitation dans le plan  $Oxy$  appliquée au radier de fondation

Compte tenu des symétries de ces trois problèmes par rapport au plan  $(Oxy)$ , les effets de cisaillement et de flexion des inclusions dans le plan  $(Oxz)$  ainsi que les effets de torsion sont nuls. Il est alors légitime de réduire de nombre de degrés de liberté de la phase renforcement en gardant uniquement les trois composantes du champ de déplacement  $\xi_x^r$ ,  $\xi_y^r = \xi_y^m = \xi_y$ ,  $\xi_z^r = \xi_z^m = \xi_z$  ainsi que la rotation autour de  $(Oz)$   $\omega_z^r$ .

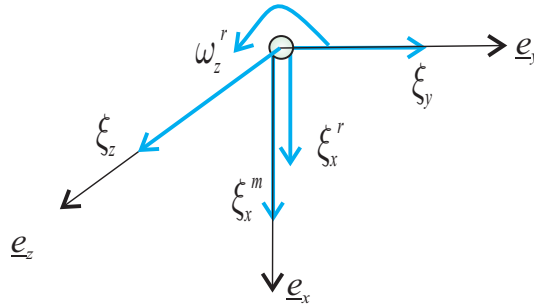


FIG. 6.10 – Les cinq degrés de liberté du milieu multiphasique

Dans ces conditions, le vecteur des degrés de liberté en chaque nœud du maillage est donné par :

$$\{\xi\} = \begin{pmatrix} \xi_x^m \\ \xi_y \\ \xi_z \\ \xi_x^r \\ \omega_z^r \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

La mise en œuvre du modèle multiphasique dans le cadre de la méthode des éléments finis conduit alors à un système analogue à celui développé en 6.2 pour les problèmes bidimensionnels :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\} \quad (6.22)$$

où les matrices  $[K]$ ,  $[C]$  et  $[M]$  sont les matrices de rigidité, d'amortissement et de masse respectivement, obtenues par assemblage de leurs homologues élémentaires.  $\{F\}$  est le vecteur des forces nodales obtenu par assemblage des vecteurs  $\{f_e\}$  des forces élémentaires. Les expressions des matrices élémentaires et du vecteur des forces élémentaires sont données en annexe A.

#### 6.4.2 Application du code "tridimensionnel" aux calculs d'impédances

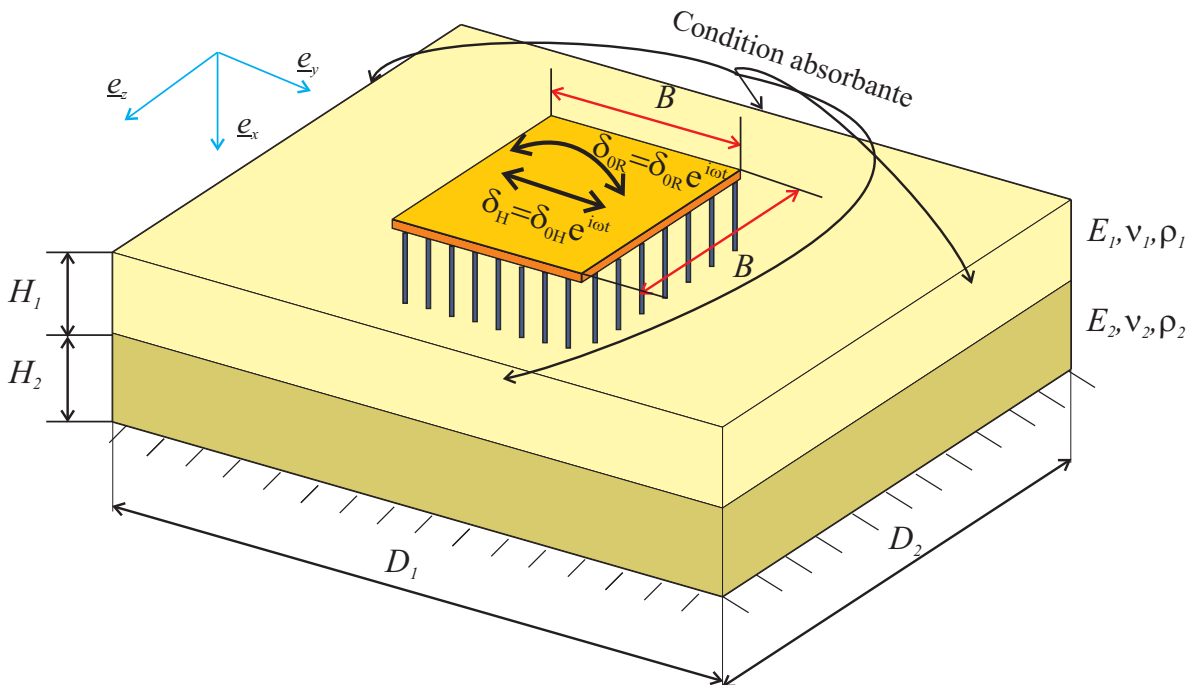


FIG. 6.11 – Structure renforcée par un groupe de 10x10 pieux

On reprend ici l'exemple traité dans Taherzadeh et al. (2002) [52] qui consiste à déterminer l'impédance horizontale et de renversement d'un radier de fondation rigide reposant sur un groupe de 10x10 pieux de rayon  $r = 0.5\text{m}$  et de longueur  $L = 22\text{m}$ , espacés de  $e = 5\text{m}$  et enfoncés dans deux couches de sol de caractéristiques différentes, reposant sur un substratum (FIG (6.11)).

La couche supérieure d'épaisseur  $H_1$  possède les caractéristiques mécaniques suivantes :

$$E_1 = 60\text{MPa}; \quad \nu_1 = 0,4; \quad \rho_1 = 1750\text{kg/m}^3 \quad (6.23)$$

tandis que la couche inférieure d'épaisseur  $H_2$  est significativement plus raide :

$$E_2 = 1,5\text{GPa}; \quad \nu_2 = 0,3; \quad \rho_2 = 2000\text{kg/m}^3 \quad (6.24)$$

Les pieux de forme cylindrique de rayon  $r = 0,5\text{m}$ , sont constitués d'un béton de caractéristiques suivantes :

$$E_b = 30\text{GPa}; \quad \nu_b = 0,25; \quad \rho_b = 2500\text{kg/m}^3 \quad (6.25)$$

tandis que les caractéristiques géométriques de la structure sont données par :

$$B = 50\text{m}; \quad D_1 = 150\text{m}; \quad D_2 = 150\text{m}; \quad H_1 = 20\text{m}; \quad H_2 = 30\text{m} \quad (6.26)$$

Des conditions aux limites du type *conditions absorbantes* (voir chapitre 4) sont introduites sur les faces verticales de la structures d'équations ( $y = \pm D_1/2$ ) et ( $z = \pm D_2/2$ ), où l'origine  $O$  du repère est placé au centre de la surface supérieure de la zone renforcée. La face inférieure de la structure est encastrée, tandis que la face supérieure du massif de sol située en dehors de la zone renforcée est libre d'efforts. Afin de déterminer les impédances horizontale  $K_H$  et de renversement  $K_Z$  (autour de l'axe  $Oz$ ) de la structure, on applique dans un premier temps à la face supérieure de la zone renforcée  $S_R$  un déplacement harmonique horizontale de la forme :

$$\delta_H = \delta_0 e^{i\omega t} \quad \text{sur} \quad S_R \quad (6.27)$$

La réponse dynamique de la structure, caractérisée ici en régime permanent par l'intensité de la résultante horizontale selon l'axe  $Oy$  des efforts exercés par le radier sur la face supérieure de la zone renforcée du massif  $S_R$ , s'écrit sous la forme :

$$F_H = \int_{S_R} T_y dS = F_0 e^{i\omega t + \varphi_H} \quad (6.28)$$

qui permet d'évaluer l'impédance horizontale de la structure :

$$K_H = \frac{F_H}{\delta_H} = K_{0H} e^{i\varphi_H} \quad \text{avec} \quad K_{0H} = \frac{F_0}{\delta_0} \quad (6.29)$$

où  $\varphi_H$  désigne le déphasage de l'impédance horizontale.

De façon analogue, dans le but de déterminer l'impédance de renversement  $K_Z$ , on applique à la face supérieure un mouvement de rotation harmonique autour de  $(Oz)$  :

$$\omega_z = \omega_0 e^{i\omega t} \quad \text{sur} \quad S_R \quad (6.30)$$

de sorte que le moment de renversement  $M_z$  autour de  $(Oz)$ , dont l'expression générale est donnée par :

$$M_z = \left( \int_{S_R} \underline{x} \wedge \underline{T} dS \right) \cdot \underline{e}_z = \int_{S_R} -y T_x dS \quad (6.31)$$

peut s'écrire en régime permanent sous la forme :

$$M_z = M_{0z} e^{i\omega t + \varphi_R} \quad (6.32)$$

où  $\varphi_R$  est l'angle de déphasage correspondant. Il en résulte alors que l'impédance de renversement est donnée par :

$$K_R = \frac{M_z / (B/2)}{(B/2)\omega_z} = K_{0R} e^{i\varphi_R} \quad \text{avec} \quad K_{0R} = \frac{4}{B^2} \frac{M_{0z}}{\omega_0} \quad (6.33)$$

où  $\varphi_R$  désigne le déphasage de l'impédance de renversement.

### 6.4.2.1 Approche par la modélisation mixte : éléments finis du type poutre et méthode des éléments de frontière

Une *modélisation mixte* des structures en sols renforcés par inclusions rigides a été proposée par Coda *et al.* (1998) [13] puis par Pardon *et al.* (2006) [29] dans laquelle les pieux de renforcement sont modélisés par des éléments finis unidimensionnels de type poutre de Bernoulli, en interaction avec le massif de sol traité par la méthode des éléments de frontière (BEM). La prise en compte de l'interaction entre le sol et les inclusions est assurée par l'adoption de la technique d'assemblage développée par Craig-Bampton (Craig et Bampton, 1968 [14]). Le problème du radier présenté ci-dessus a été analysé en utilisant cette approche par Taherzadeh *et al.* (2002) [52], moyennant la mise en œuvre d'une modélisation mixte EF-poutre/Eléments de frontière. Les résultats de cette étude sont reportés sur les figures (6.13) et (6.14) donnant l'évolution des modules et des déphasages des impédances horizontale et de renversement ( $K_{0H}$ ,  $\varphi_H$ ) et ( $K_{0R}$ ,  $\varphi_R$ ) pour différentes valeurs de la fréquence de sollicitation.

### 6.4.2.2 Formules analytiques de Taherzadeh *et al.* (2002) [52]

Taherzadeh *et al.* (2002) [52] ont conduit une étude paramétrique de calcul d'impédances, en faisant varier les caractéristiques géométriques de la structure et mécaniques des différents constituants. Les auteurs proposent les expressions suivantes des impédances horizontale et de renversement :

$$\begin{cases} K_H = k_h - a_0^2 m_h + ia_0 c_h + \frac{a_0^2 c_1^2}{k_1 - a_0^2 m_1 + ia_0 c_1} - \frac{k_2^2}{k_2 - a_0^2 m_2 + ia_0 c_2} - \frac{k_3^2}{k_3 - a_0^2 m_3 + ia_0 c_3} \\ K_R = k_r - a_0^2 m_r + ia_0 c_r \end{cases} \quad (6.34)$$

dans lesquelles les différents coefficients apparaissant dans ces formules sont des paramètres dépendant des caractéristiques des matériaux et de la géométrie de la structure, et dont les expressions, obtenues par confrontation avec les simulations numériques décrites au paragraphe précédent, sont données par Taherzadeh *et al.* (2002) [52].

L'identification de ces paramètres pour le jeu de valeurs (6.23) à (6.26) permet d'estimer les impédances horizontale et de renversement dont les modules ( $K_{0H}$ ,  $K_{0R}$ ) ainsi que les déphasages, sont représentés sur les figures (6.13) et (6.14) en fonction de la fréquence de sollicitation.

### 6.4.2.3 Mise en œuvre du code de calcul multiphasique

La mise en œuvre numérique de la version enrichie du modèle multiphasique pour le calcul de la structure tridimensionnelle présentée au début de la section 6.4.3, consiste tout d'abord à remplacer la zone de sol renforcée par pieux par un domaine multiphasique homogène. L'analyse des symétries du problème permet de ramener l'analyse de ce problème à l'étude de la moitié de la structure correspondant aux valeurs de  $z < 0$ , pour laquelle une condition aux limites de type contact sans frottement avec le plan  $z = 0$  est adoptée.

Un maillage de la structure (FIG (6.12)) comportant 1294 éléments tétraédriques à 10 nœuds (T10) et 19234 nœuds est adopté pour les calculs numériques effectués à l'aide du code de calcul multiphasique développé ici et présenté en 6.4.1.

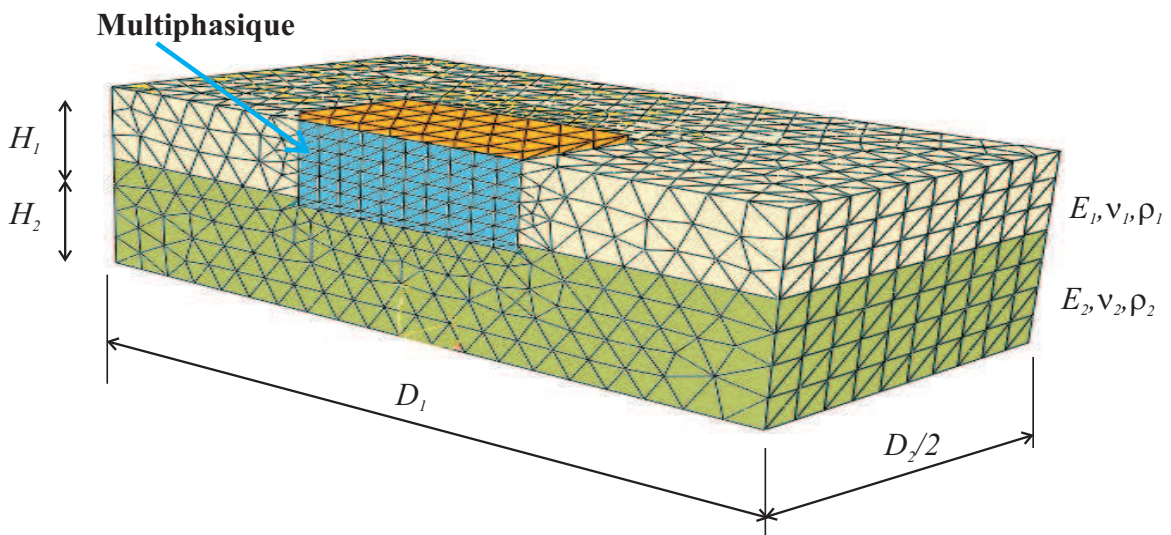


FIG. 6.12 – Maillage par éléments finis de la structure multiphasique 3D

Les paramètres du modèle multiphasique sont calculés à partir des caractéristiques du sol et des pieux. On calcule tout d'abord la fraction volumique de renforcement :

$$\eta = \frac{A}{e^2} = 3.14\% \quad (6.35)$$

et ensuite les raideurs axiale, de cisaillement et de flexion de la phase renforcement,

soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^r = \frac{AE^b}{e^2} = 942,48\text{MPa} \\ \beta^r = \frac{A^*\mu^b}{e^2} = 318,09\text{MPa} \\ \gamma^r = \frac{IE^b}{e^2} = 58,91\text{MPa.m}^2 \end{array} \right. \quad (6.36)$$

En raison de la faible fraction volumique de la phase renforcement, les caractéristiques de la phase matrice sont identifiées à celles du sol :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1^m \approx E_1, \nu_1^m \approx \nu_1 \\ E_2^m \approx E_2, \nu_2^m \approx \nu_2 \end{array} \right. \quad (6.37)$$

Les résultats des simulations numériques des deux problèmes de sollicitations latérale et de renversement de la fondation sur pieux sont reportés sur les figures (6.13) et (6.14), donnant les variations en fonction de la fréquence de sollicitation du module de l'impédance et de son déphasage, pour lesquels les résultats de la modélisation mixte et des formules de Taherzadeh *et al.* (2002) [52] sont également reportés. L'analyse de ces différents résultats montre un bon accord entre les différentes prédictions puisque l'écart entre les résultats de la modélisation multiphasique du problème et ceux de la modélisation mixte n'excède pas celui entre les résultats de cette dernière et donnés par les formules simplifiées. On note par ailleurs que, le système est dispersif puisque les impédances dépendent de la fréquence de la sollicitation.

## 6.5 Conclusions

Ce dernier chapitre nous a permis de mettre au point un code de calcul 2D du modèle multiphasique enrichi, en dynamique et en élasticité linéaire, incorporant aussi bien les raideurs d'interaction sol/inclusions et les raideurs de flexion et de cisaillement de la phase renforcement, puis d'étendre son application au traitement de problèmes 3D.

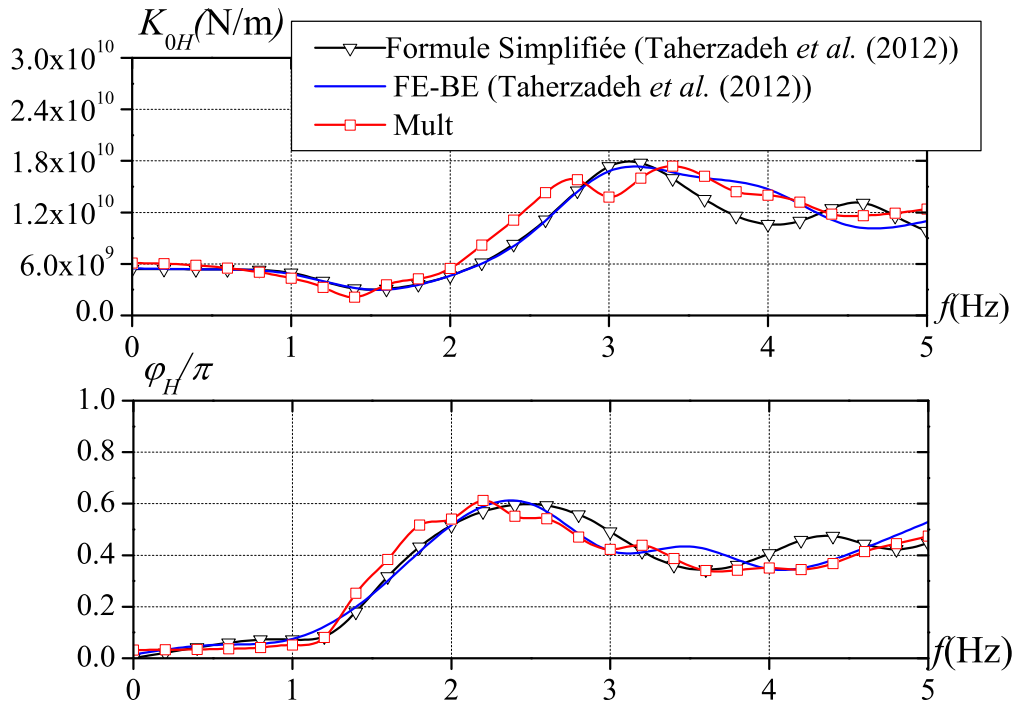


FIG. 6.13 – Impédance latérale de la structure : Comparaison entre les résultats de Taherzadeh *et al.* (2002) [52] et ceux de la modélisation multiphasique

Une première confrontation a été effectuée entre les simulations numériques issues de cette modélisation et les résultats d'un calcul direct dans lequel le sol et les inclusions de renforcement sont discrétisés séparément. Outre le fait que l'on observe un bon accord entre les résultats de ces deux modélisations, la comparaison effectuée avec les résultats provenant d'une homogénéisation simple du sol renforcé a permis de mettre en évidence les insuffisances de cette dernière approche, qui conduit par exemple à surestimer la raideur d'impédance verticale et à sous-estimer la raideur d'impédance latérale. D'autre part, en utilisant un maillage dont le raffinement est identique à celui utilisé pour un sol non renforcé, le modèle multiphasique permet de réduire considérablement le temps de calcul par rapport à la simulation directe en s'affranchissant notamment de la tâche fastidieuse, mais nécessaire, de devoir raffiner le maillage au voisinage des inclusions, et de devoir changer celui-ci à chaque configuration.



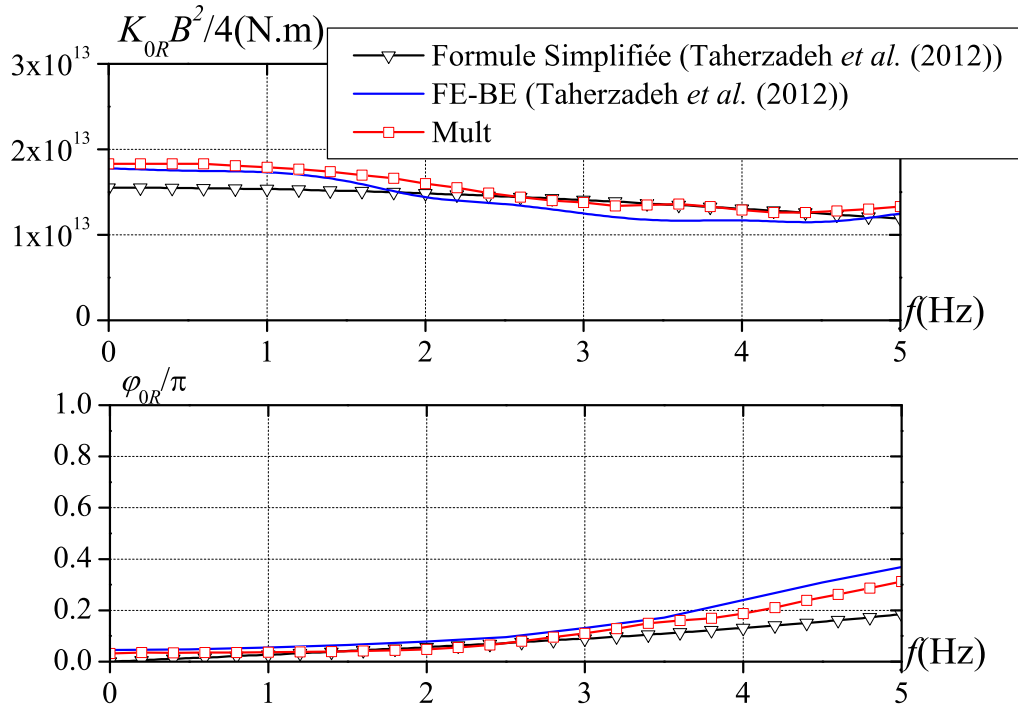


FIG. 6.14 – Impédance de renversement de la structure : Comparaison entre les résultats de Tahezadeh *et al.* (2002) [52] et ceux de la modélisation multiphasique

Une extension 3D du code de calcul a ensuite été réalisée, applicable par exemple à des fondations rectangulaires sur pieux, dans laquelle des simplifications peuvent être faites concernant notamment la cinématique de la phase renforcement. Cette extension a permis d'évaluer les impédances dynamiques latérale et au renversement d'une semelle de fondation carrée reposant sur un sol bicouche renforcé par un groupe de 10x10 pieux. La comparaison a pu ainsi être faite avec les résultats d'une simulation numérique directe conduite grâce à la combinaison de la méthode des éléments finis et de celle des éléments de frontière. La bonne concordance entre les résultats des deux approches permet de conclure positivement quant à la qualité et la pertinence de la modélisation multiphasique et de l'outil numérique ainsi mis au point, dont le domaine d'application va bien au-delà de la configuration particulière pour laquelle la comparaison a été faite.

# Conclusions et perspectives

---

## Sommaire

---

7.1	Conclusions . . . . .	154
7.2	Quelques perspectives . . . . .	155

---

## 7.1 Conclusions

Le présent travail a abouti au développement d'un modèle multiphasique applicable au dimensionnement des ouvrages fondés sur inclusions rigides ou groupes de pieux, en conditions authentiquement sismiques, dans l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire des différents constituants de la structure. Partant de l'approche par homogénéisation classique où le composite sol renforcé est traité comme un milieu homogène anisotrope, on a progressivement construit une approche multiphasique plus générale, prenant en compte l'interaction sol/inclusions, puis les effets de flexion et de cisaillement des inclusions.

Les équations générales de l'élastodynamique ont été établies pour le système homogénéisé, le système biphasique en interaction sol/inclusions et le système biphasique enrichi prenant en compte des effets de flexion et de cisaillement dans les inclusions. La mise en œuvre de ces équations a été effectuée sur l'analyse de la propagation d'ondes harmoniques dans le sol renforcé. Il a ainsi été démontré que, tandis que l'approche par homogénéisation conduit à une modélisation du sol renforcé comme un milieu non dispersif, caractérisé par une célérité des ondes indépendante de leur fréquence, le modèle multiphasique aboutit à un comportement dispersif attribuable aux effets soit du comportement d'interaction, soit de la prise en compte du cisaillement et de la flexion. Ceci est largement confirmé par l'approche de ce problème fondée sur la méthode des développements asymptotiques telle que développée par (Soubestre, 2011 [49]; Boutin et Soubestre 2012 [50]).

Afin de bien mettre en valeur les applications potentielles du modèle multiphasique, on s'est tout d'abord intéressé au traitement analytique d'un exemple simple mais illustratif : celui d'une couche de sol d'extension horizontale infinie, renforcée par des inclusions verticales, et soumise à deux types de chargements harmoniques :

- ◇ *Sollicitation harmonique verticale.* La solution analytique du problème, traitée dans le cadre du modèle multiphasique avec prise en compte des interactions entre phase, confrontée à la simulation numérique directe du même problème, nous a permis d'identifier les valeurs des raideurs d'interaction à prendre en compte dans les calculs multiphasiques.
  
- ◇ *Sollicitation harmonique horizontale.* Deux types de vibrations ont été consi-

dérées : soit libre, soit forcée. La validité de la solution analytique a ainsi été confirmée par comparaison avec la simulation directe d'un problème auxiliaire.

Sur le plan des développements numériques, on a élaboré et mis au point un code de calcul multiphasique 2D, fondé sur la formulation éléments finis des équations de l'élastodynamique d'un milieu multiphasique, incorporant des raideurs d'interactions. Ce code de calcul a ensuite été étendu à des configurations 3D pour lesquelles non seulement les raideurs d'interaction, mais aussi les raideurs de flexion et de cisaillement de la phase renforcement ont été prises en compte. Le code 2D (resp. code 3D) a été appliqué en vue de déterminer les impédances verticale et latérale (resp. latérale et de renversement) de fondations renforcées par un réseau périodique d'inclusions. La pertinence et les avantages de la modélisation multiphasique mise en œuvre à travers ces codes ont été mis en évidence par la comparaison avec les résultats de la simulation directe ainsi que de l'approche par homogénéisation classique. Les outils de calcul multiphasique en élastodynamique ainsi mis au point, et notamment la version 3D du code, ont pu également être qualifiés et vérifiés par confrontation avec les résultats d'études paramétriques conduites à l'aide de la méthode des éléments finis combinée à la méthode des éléments de frontière, sur des radiers de fondation sur groupe de pieux schématisés dans le cadre d'une modélisation mixte.

## 7.2 Quelques perspectives

On peut envisager, dans le prolongement de ce travail, d'étudier les points suivants.

- ◇ La possibilité d'identifier les coefficients d'interaction sol/inclusions à l'aide de la méthode des développements asymptotiques (Soubestre, 2011 [49]; Boutin et Soubestre 2012 [50]).
- ◇ La prise en compte d'une loi d'interaction transversale (et non plus seulement longitudinale) dans l'analyse par exemple de la réponse d'un ouvrage renforcé par inclusions inclinées sous chargement sismique.
- ◇ L'étude paramétrique concernant le paramètre de changement d'échelle dynamique  $\varepsilon^d$  (voir chapitre 2).

- ◇ L'extension du modèle multiphasique en dynamique en tenant compte d'un comportement élastoplastique du sol et des inclusions de renforcement.
- ◇ L'extension du code de calcul 3D prenant compte des effets de torsion des inclusions pour certaines configurations réelles de la structure.
- ◇ La valorisation des résultats du présent travail passera enfin nécessairement par la mise en œuvre des outils de calcul ainsi développés sur des applications concrètes, ainsi que leur incorporation possible dans des codes de calcul existants.



◇  $[c^P]$  est une matrice à une seule composante  $c^P$ .

◇  $[B]_e$  est une matrice formée de  $n_e$  matrice  $[B]_k$  de taille (10 x 5) :

Le nombre de lignes 10 correspond au nombre de variables de déformation du modèle ( $\varepsilon_{xx}^m, \varepsilon_{yy}^m, \varepsilon_{zz}^m, \varepsilon_{xy}^m, \varepsilon_{yz}^m, \varepsilon_{xz}^m, \varepsilon^r, \theta^r, \chi^r, \Delta\xi_x$ ) tandis que le nombre de colonne 5 correspond au nombre de degrés de libertés par noeud ((6.21)).

$$[B]_e = [\dots, [B]_k, \dots] \quad k = 1, \dots, n_e \quad (\text{A.3})$$

avec :

$$[B]_k = \begin{bmatrix} N_{k,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{k,y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{k,y} & 0 & 0 \\ N_{k,y} & N_{k,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{k,z} & N_{k,y} & 0 & 0 \\ N_{k,z} & 0 & N_{k,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{k,x} & 0 \\ 0 & N_{k,x} & 0 & 0 & -N_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{k,x} \\ -N_k & 0 & 0 & N_k & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

où  $N_k(x, y, z)$  désigne la fonction de forme associée au noeud  $k$ , telle que :

$$N_k(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{au noeud } k \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad k = 1, \dots, n_e \quad (\text{A.5})$$

$$\text{et } N_{k,x} = \frac{\partial N_k}{\partial x}, \quad N_{k,y} = \frac{\partial N_k}{\partial y}, \quad N_{k,z} = \frac{\partial N_k}{\partial z}$$

◇  $[B]_e^P$  est une matrice formée de  $n_e$  matrice  $[B]_k^P$  de taille (1 x 5) :

Le nombre de ligne 1 correspond au nombre de degrés de liberté associées à l'interaction de pointe ( $\Delta\xi_x$ ) tandis que le nombre de colonne correspond au nombre de degrés de liberté par noeud ((6.21)).

$$[B]_e^P = [\dots, [B]_k^P, \dots] \quad k = 1, \dots, n_e \quad (\text{A.6})$$

avec :

$$[B]_k^P = [-N_k, 0, 0, N_k, 0] \quad (\text{A.7})$$

## Matrice de masse $[M]$

La matrice de masse  $[M]$  est construite par l'assemblage des matrices de masse élémentaire des éléments  $\nu_e$  :

$$[m]_e = \int_{\nu_e} [\rho] \cdot {}^t[N]_e \cdot [N]_e d\omega \quad (\text{A.8})$$

où :

◇  $[N]_e$  est la matrice des fonctions de formes élémentaires

$$[N]_e = \left[ \dots \left( \begin{array}{ccccc} N_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_k \end{array} \right) \dots \right] \quad k = 1, \dots, n_e \quad (\text{A.9})$$

◇  $[\rho]$  est la *matrice de masse volumique* qui s'écrit :



$$[\rho] = \begin{bmatrix} \rho^m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\eta)\rho^m + \eta\rho^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\eta)\rho^m + \eta\rho^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

## Vecteur de forces nodales $\{F\}$

Le vecteur de forces nodales  $\{F\}$  est obtenu en assemblant les vecteurs de forces nodales élémentaires des éléments  $\nu_e$  :

$$\begin{aligned} \{f_e\} = \int_{\nu_e} {}^t[N]_e \{\rho F\} d\Omega + \int_{\partial\nu_e \cap \partial\Omega_T^m} {}^t[N]_e \{T^m\} dS + \int_{\partial\nu_e \cap \partial\Omega_T^r} {}^t[N]_e \{T^r\} dS \\ + \int_{\partial\nu_e \cap \partial\Omega_C} {}^t[N]_e \{C^r\} dS \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

dans laquelle :

$${}^t\{\rho F\} = \{\rho^m F_x^m, \rho^m F_y^m + \rho^r F_y^r, \rho^m F_z^m + \rho^r F_z^r, \rho^r F_x^r, 0\} \quad (\text{A.12})$$

$${}^t\{T^m\} = \{T_x^{m,d}, T_y^{m,d}, T_z^{m,d}, 0, 0\} \quad (\text{A.13})$$

$${}^t\{T^r\} = \{0, T_y^{r,d}, T_z^{r,d}, T_x^{r,d}, 0\} \quad (\text{A.14})$$

$${}^t\{C^r\} = \{0, 0, 0, 0, C^{r,d}\} \quad (\text{A.15})$$

$\partial\Omega_T^m$  (resp.  $\partial\Omega_T^r$ ) est la partie du bord  $\partial\Omega$  de la structure sur laquelle les densités d'efforts surfacique  $\{T^m\}$  (resp.  $\{T^r\}$ ) appliquées à la phase matrice (resp. phase renforcement) sont prescrites.  $\partial\Omega_C$  est la partie du bord  $\partial\Omega$  de la structure sur laquelle les densités de couple  $\{C^r\}$  appliquées à la phase renforcement sont données.

# Bibliographie

- [1] D. Alexiew and W. Vogel. Remblais ferroviaires renforcés sur pieux en Allemagne : projet phares. *Travaux*, (786) : 47-52, 2002. 6
- [2] V. Andrianov, I. Bonshakov, V. Danishevskiy, and D. Weichert. Higher order asymptotic homogenization and wave propagation in periodic composite materials. *Proc. R. Soc. A*, 464, 1181-1201, 2008. 15
- [3] M. Bennis. *Un modèle multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions, avec prise en compte de l'interaction matrice-inclusions*. PhD thesis, ENPC, Paris, 2002. 17
- [4] A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North Holland, Amsterdam, 1978. 24
- [5] P. Berthelot, B. Pezot, and Ph. Liansu. Amélioration des sols naturels ou anthropiques par colonnes semi-rigides : le procédé cmc. *13th CMSGE*, 2003. 6
- [6] S. Borel. *Comportement et dimensionnement des fondations mixtes*. PhD thesis, ENPC, Paris, 2001. 4
- [7] E. Bourgeois, J.-F. Semblat, D. Garnier, and B. Sudret. Multiphase model for the 2d and 3d numerical analysis of pile foundations. *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, pages 1435-1440, 2001. 17
- [8] C. Boutin and J. Auriault. Rayleigh scattering in elastic composite materials. *International Journal of Engineering Science*, 31(12) : 1669-1689, 1999. 14, 23, 46
- [9] E. Boyere. Modélisation de l'amortissement en dynamique linéaire. *Manuel de référence, Code Aster*, 2011. 40, 89, 130
- [10] J.B. Burland and V.F.B. De Mello. Behaviour of foundations and structures. state of the art. *Report, session 2. Proc. 9th ICSMFE, Tokyo*, 2 : 495-546, 1997. 4
- [11] F.B. Cartiaux, A. Gellée, P. de Buhan, and G. Hassen. A multiphase model for the design of soils reinforced by rigid inclusions. *Rev. Fr. Géotech.*, (118) : 43-52, 2007. 54
- [12] K. Chopra. *Dynamics of structure : Theory and Application to Earthquake Engineering*. Prentice Hall, Inc, New Jersey, 1995. 40, 89, 130
- [13] H.B. Coda and W.S. Venturini. On the coupling of 2d bem and fem frame model applied to elastodynamic analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 36, 4789-4804, 1998. 13, 148

- [14] R.J. Craig and M. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7) :1313-1319, 1968. 13, 148
- [15] P. de Buhan and G. Hassen. Multiphase approach as a generalized homogenization procedure for modelling the macroscopic behavior of soils reinforced by linear inclusions. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 27 :662-679, 2008. 25, 43, 45, 47, 58, 139
- [16] P. de BUHAN and B. SUDRET. Micropolar multiphase model for materials reinforced by linear inclusions. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 19, n°4, pp. 669-687, 2000. 106, 108
- [17] G. Duvaut. *Inequalities in mechanics and physics*. 1976. 24
- [18] Ewing, Jardetzky, and Press. *Elastic waves in layered media*. McGraw-Hill Book Company, Inc, 1957. 92
- [19] J. Fish and W. Chen. Higher-order homogenization of initial/boundary-value problem. *ASCE J. Eng. Mech*, Vol. 127, No.12, pp.1223-1230, 2001. 15
- [20] J. Fish and W. Chen. Nonlocal dispersive model for wave propagation in heterogeneous media part 1 and 2. *Int. J. Num. Meth. Eng*, Vol. 54, pp. 331-363, 2002. 15
- [21] F. Frey. *Analyse des structures et milieux continus, volume 2*. Presses Polytechniques et Universitaires Romande, 1994. 136
- [22] G. Gazetas and R. Dobry. Horizontal response of piles in layered soils. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 110 :1, pp. 20-40, 1984. 11
- [23] G. Gudhus and W. Schwarz. Stabilization of creeping slopes by dowels. *Proc. 11th ICSMFE*, 1985. 4
- [24] A. Guilloux. Slope stabilization using soil nailing in france ; design methods and cares histories for the foundation of the rion-antirion brige. paper number : 11311. *72nd, Annual meeting of Transportation Research Board*, 1993. 4
- [25] G. Hassen. *Modélisation multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions rigides*. PhD thesis, ENPC, Paris, 2006. 8, 10, 17
- [26] G. Hassen and P. de Buhan. A two-phase model and related numerical tool for the design of soil structures reinforced by stiff linear inclusions. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 24 :987-1001, 2005. 101, 105
- [27] G. Hassen and P. de Buhan. Méthode de calcul simplifiée multiphasique des ouvrages en sols renforcés par inclusions rigides. présentation du logiciel asori. *Rapport Contrat EDF-SPTEN n°CQN02403*, 2010. 101, 105

- [28] G. Hassen, D. Dias, and P. de Buhan. Implementation of a multiphase constitutive model for the design of piled-embankments and comparison with 3d numerical simulation. *International Journal of Geomechanics*, 2009. 54
- [29] O. Maeso L.A. Padrón, J.J. Aznárez. Bem-fem coupling model for the dynamic analysis of piles and pile groups. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31 : 473-484, 2006. 13, 148
- [30] J. Lysmer and R. L. Kuhlemeyer. Finite dynamic model for infinite media. *Journal of the Engineering Mechanics Division of the ASCE*, pp. 859-877, August 1969. 35, 91, 92
- [31] S. Messiod, D. Dias, U.S. Okyay, and B. Sbartai. Impédances dynamiques de fondations sur groupe de pieux. *XXIXèmes Rencontres Universitaires de Génie Civil. Tlemcen*, 2011. ix, 12, 13
- [32] G. Mylonakis and G. Gazetas. Lateral vibration and internal forces of groupe piles in layered soil. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering, ASCE*, 1999. 10
- [33] G. Nagai, J. Fish, and K.Watanabe. Stabilized nonlocal model for dispersive wave propagation in heterogeneous media. *WCCM V*, 2002. 15
- [34] P. Navi. *Propriétés acoustiques des matériaux, Propagation des ondes planes harmoniques*. Presses polytechniques et universitaire romandes, France, 2006. 29, 46
- [35] M. Novak. Dynamic stiffness and damping of piles. *Canadian Geotechnical Journal*, 11, 574-598, 1974. 11
- [36] M. Novak and M.Sheta. Dynamic response of piles and piles groups. *Proc. 2nd Int. on Num. Methods in Offshore piling, Austin*, 489-507, 1982. 11
- [37] F. Garcia O. Maeso, JJ. Aznarez. *Dynamic Impedances of Piles and Groups of Piles in Saturated Soils*. *Computer and Structures*, 83 : 769-782,2005. 12
- [38] G. Pacheco, E. Suárez, and M. Pando. Dynamic lateral response of single piles considering soil inertia contributions. *The 14th World Conference on Earthquake Engineering*, 2008. 11
- [39] W.J. Parnell and I.D. Abrahams. Dynamic homogenization in periodic fibre reinforced media. quasi-static limit for sh waves. *Wave Motion*, 43, 474-498, 2006. 15
- [40] W.J. Parnell and I.D. Abrahams. Homogenization for wave propagation in periodic fibre-reinforced media with complex microstructure. i-theory. *J. Mech. Phys. Solids*, 56 : 2521-2540, 2002. 15

- [41] A. Pecker. Le pont de rion-antirion en grèce, le défi sismique. *550e conférence, prononcée à l'Université de tous les savoirs*, 20 octobre 2004. 7
- [42] C. Plumelle, P. Cangneux, R. Frank, J. Canou, R. Estephan, P. Furay, and J. Garnier. Projet national forever-différentes approches du comportement des groupes et des réseaux de micropieux, en modèle réduit, en modèle centrifugé, en vraie grandeur. *Revue européenne de génie civil*, hors série, 2002. 4
- [43] L. Postel. *Réponse sismique de fondations sur pieux*. PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, Paris, 1985. 14
- [44] H. G. Poulos and Davis E. H. *Pile Foundation Analysis and Design*. John Wiley and Sons, New York, 1980. 12
- [45] E. Sanchez-Palencia. *Non-homogeneous media and vibration theory*. Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin, 1980. 24
- [46] F. Schlosser and R. Frank. Projet national forever-synthèse des résultats et recommandations du projet national sur les micropieux. *Presses des ponts et chaussées*, 2003. 4
- [47] B. Simon and al. *Recommandations pour la conception, le dimensionnement, l'exécution et le contrôle de l'amélioration des sols de fondation par inclusions rigides, Projet National ASIRI*. Presse des Ponts, France, 2012. ix, 7, 9
- [48] Q. Thai Son. *Développements théoriques et numériques d'un modèle multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions*. PhD thesis, ENPC, Paris, 2006. 17, 52, 83, 84, 109
- [49] J. Soubestre. *Homogénéisation et expérimentation de milieux renforcés par inclusions linéaires-Application aux fondations profondes*. PhD thesis, Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat, Lyon, 2011. ix, 15, 16, 19, 23, 46, 51, 76, 78, 80, 105, 114, 120, 154, 155
- [50] J. Soubestre and C. Boutin. Non-local dynamic behaviour of linear fiber reinforced materials. *Mech. Mater.* 55, 16-32, 2012. 15, 51, 76, 105, 114, 154, 155
- [51] B. Sudret. *Modélisation multiphasique des ouvrages renforcés par inclusions*. PhD thesis, ENPC, Paris, 1999. ix, 5, 16, 52
- [52] R. Taherzadeh, D. Clouteau, and R. Cottureau. Simple formulas for the dynamic stiffness of pile groups. *Earthquake Engng Struct. Dyn.* 00 :1-6, 2002. ix, xii, 13, 14, 19, 142, 146, 148, 150, 151, 152
- [53] P. Wolf and J. Deeks. *Foundation Vibration Analysis : A Strength-of-Materials Approach*. Elsevier, Oxford, 2004. 39

- [54] Guoxi Wu and W.D. Liam Finn. Dynamic elastic analysis of pile foundations using finite element method in the frequency domain. *Canadian Geotechnical Journal*, 34 :43, 1997. 12, 39