



**HAL**  
open science

# Analyse par le calcul à la rupture de la stabilité au feu des panneaux en béton armé de grandes dimensions

Duc Toan Pham

► **To cite this version:**

Duc Toan Pham. Analyse par le calcul à la rupture de la stabilité au feu des panneaux en béton armé de grandes dimensions. Génie civil. Université Paris-Est, 2014. Français. NNT : 2014PEST1073 . tel-01131232

**HAL Id: tel-01131232**

**<https://pastel.hal.science/tel-01131232v1>**

Submitted on 13 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE  
en vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR  
DE  
L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

**Spécialité : Structures et Matériaux**

par

DUC TOAN PHAM

**Sujet de la thèse :**

**ANALYSE PAR LE CALCUL À LA RUPTURE DE LA  
STABILITÉ AU FEU DES PANNEAUX EN BÉTON ARMÉ  
DE GRANDES DIMENSIONS**

*soutenue à Champs-sur-Marne le 15 décembre 2014  
devant le jury composé de :*

Prof. François Buyle-Bodin	Président, Rapporteur
Prof. Mohammed Hjiiaj	Rapporteur
Prof. Jean-Marc Franssen	Examineur
Dr. Céline Florence	Examineur
Dr. Jean-Vivien Heck	Invité
Prof. Patrick de Buhan	Directeur de thèse



## REMERCIEMENT

*J'adresse tout d'abord ma sincère reconnaissance aux Professeurs François Buyle-Bodin, Mohammed Hjiyaj et Jean-Marc Frassen pour l'honneur qu'ils me font de juger cette thèse.*

*J'adresse mes remerciements les plus respectueux à mon directeur de thèse, Professeur Patrick de Buhan. J'aimerais lui dire à quel point j'ai apprécié ses qualités scientifiques et pédagogiques, sa grande expérience, sa disponibilité ainsi que le soutien qu'il m'a apporté. J'ai été également extrêmement touché par ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail de recherche. Je suis heureux d'avoir été parmi ses doctorants et j'espère avoir été à la hauteur de ses attentes.*

*À ces remerciements, je souhaite associer mon encadrant, Docteur Céline Florence, pour la confiance qu'elle m'a accordé, pour le temps précieux qu'elle m'a apporté, pour ses multiples encouragements au cours de ces trois années et pour toutes les heures de discussion sur l'avancement de ce sujet de recherche.*

*Mes remerciements vont également à Docteurs Jean-Vivien Heck et Hong Hai Nguyen pour leur implication dans le projet, leur regard critique et leurs conseils.*

*J'en profite pour remercier Jérémy Bleyer, avec qui j'ai eu des échanges scientifiques sur le sujet.*

*Je souhaite aussi remercier l'équipe « résistance au feu », Jean-François Moller, Anthony Garcia, Stéphane Charuel, Cédric Pharose, Saida Hassan, Romuald Avenel, Pierre Pimienta, Philippe Rivillon, de m'avoir aidé pendant la réalisation des essais. Merci également à Dhionis Dhima, Nicolas Pinoteau, Dominique Pardon, Seddik Sakji, Jean Christophe Caillot, Nicolas Panayiotou, Olivier Jousse, Nsingi Mundele, Pierre Rutkowski et Philippe Menegault pour leur contribution et leur aide dans l'amélioration de ces essais.*

*Je désire remercier spécialement Elizabeth Blanchard pour son aide précieuse et sa disponibilité ainsi que tous les doctorants, El Mehdi Koutaiba, Romain Morlon, Mathieu Duny, Damien Lamalle, Michele Godio et les stagiaires, Anne Duchez, Olivier Teissier, pour l'ambiance de travail très agréable qu'ils ont su créer dans « l'Open Space » grâce à leur bonne humeur quotidienne. J'aimerais leur dire à quel point j'ai été touché par leur gentillesse, dans un délai très court, de volontairement relire mon mémoire de thèse avant de le rendre aux rapporteurs.*

*Un remerciement à Camil Matar et Ardi Shehu, mes deux stagiaires, qui ont participé en partie à ce travail.*

*Merci à Mara Tan pour sa gentillesse et son sourire chaque fois que je l'ai sollicité.*

*Je tiens aussi à mentionner le plaisir que j'ai eu à travailler au sein de la direction Sécurité Structures et Feu du Centre Scientifique et Technique du Bâtiment, et j'en remercie ici tous les membres, en les personnes de Mme Anne Voeltzel Leveque, M. Ménad Chenaf, M. Stéphane Hameury et Mme Stéphanie Vallerent, pour les moyens qu'ils ont mis pour faciliter mon travail, pour leur soutien logistique et moral et pour l'intérêt qu'ils ont eu envers ma recherche.*

*Sans oublier ma famille, qui par leur encouragement et leur soutien moral, malgré la distance, m'ont permis de franchir les obstacles les plus difficiles.*

*Enfin, mes pensées sont tournées vers ma chère épouse, Thi Thu Huong Do, sans qui je n'aurai jamais réussi. Je la remercie pour son soutien de chaque instant, pour son amour de tous les jours et pour le bonheur qu'elle a rempli dans notre vie.*

## RÉSUMÉ

Le présent travail propose et développe une méthode originale de dimensionnement vis-à-vis de l'incendie de parois de bâtiments industriels, en s'intéressant plus spécifiquement au cas des panneaux en béton armé de grande hauteur. Soumis à un fort gradient thermique, ces derniers subissent en effet des déplacements hors plan importants qui, du fait de l'excentrement du poids propre qui en résulte, vont engendrer des efforts de flexion venant s'ajouter aux efforts de compression déjà existants. Un tel changement de géométrie, d'autant plus prononcé que le panneau est de grande hauteur, combiné à une dégradation simultanée des propriétés de résistance des matériaux sous l'effet de l'élévation de température, peut conduire à un effondrement de la structure sous poids propre, bien avant par exemple l'apparition d'une instabilité de type flambement.

L'approche proposée repose très largement sur la théorie du Calcul à la Rupture, appliquée d'une part à la détermination d'un diagramme d'interaction au feu caractérisant la résistance du panneau en chacune de ses sections, d'autre part à l'analyse de la ruine globale du panneau dans sa configuration déformée. Cette démarche est d'abord mise en œuvre et complètement explicitée dans le cas où le panneau peut être modélisé comme une poutre unidimensionnelle, conduisant à la détermination exacte d'un facteur adimensionnel caractérisant la stabilité de ce dernier. La généralisation de la méthode de calcul à la configuration plus réaliste, mais plus complexe, d'un panneau schématisé comme une plaque rectangulaire, est ensuite développée. Elle aboutit à un certain nombre de résultats préliminaires qui devront être confortés et affinés dans un travail ultérieur.

L'approche théorique ici présentée est par ailleurs complétée par un volet expérimental (essais de flexion quatre points de dalles dans un four à maquette) qui a permis de valider au moins partiellement les évaluations du diagramme d'interaction prédites par le calcul.

*Mots clés* : Calcul à la Rupture, panneaux en béton armé de grande hauteur, résistance au feu, diagramme d'interaction, effets du second ordre.



## ABSTRACT

In this contribution, an original and comprehensive method aimed at designing vertical concrete walls submitted to fire loadings, is proposed and developed, with a special emphasis on high rise panels used in industrial buildings. Indeed, when subjected to high thermal gradients, such slender structures exhibit quite significant out-of-plane movements, resulting in an eccentricity of the gravity loads and thus to bending moments in addition to the pre-existing compressive forces. It is such a change of geometry, which is all the more pronounced as the panel is tall, combined with a temperature-induced degradation of the constituent materials strength properties, which may explain why an overall collapse of the structure may occur, well prior to buckling instability.

The proposed approach is fundamentally based on the theory of yield design. This theory is first applied to the determination of an interaction diagram, characterizing the fire resistance of a reinforced concrete panel cross-section. It is then implemented as a design method for analysing the stability of the panel in its previously calculated deformed configuration. The whole procedure is explained in full details in the simplified situation when the high rise panel can be modeled as a one-dimensional beam, leading to the exact determination of a dimensionless factor characterizing the stability of the panel. The method is then extended to deal with a more realistic, but somewhat more complex, configuration of a rectangular panel. Some preliminary results, which need to be further validated in a subsequent work, are finally produced.

As a necessary complement to the mostly theoretical and computational approach presented in this work, a series of four-point bending tests has been performed on reduced scale slabs placed in a furnace. The results of these tests partially validate the predicted interaction diagram of a fire loaded panel section.

*Keywords* : yield design theory, high rise concrete walls, fire resistance, interaction diagram, second order analysis.





# Table des matières

<b>CHAPITRE 1 : DIMENSIONNEMENT AU FEU DES STRUCTURES EN BÉTON ARMÉ : LA PROBLÉMATIQUE DES PANNEAUX DE GRANDES DIMENSIONS .....</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction .....	1
1.2 Murs séparatifs coupe-feu en éléments préfabriqués en béton.....	2
1.2.1 Procédé de panneaux en béton cellulaire.....	3
1.2.2 Procédé de panneaux en béton précontraint .....	5
1.3 Problématique des panneaux de grandes dimensions.....	6
1.4 Propriétés thermomécaniques des matériaux béton et acier.....	7
1.4.1 Propriétés thermiques du béton .....	8
1.4.2 Propriétés mécaniques du béton et de l'acier .....	10
1.4.3 Risque d'instabilité thermique du béton soumis à un incendie .....	11
1.5 Un bref aperçu des méthodes d'analyse actuelles .....	12
1.5.1 Méthodes de calcul des structures en béton armé au feu suivant l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005) .....	14
1.5.2 Différentes contributions au cours des dernières décennies.....	17
1.5.3 Intérêt de l'approche Calcul à la Rupture.....	21
1.6 Principe de l'approche Calcul à la Rupture .....	22
1.6.1 Données d'un problème de Calcul à la Rupture.....	22
1.6.2 Approche statique par l'intérieur de $K$ .....	24
1.6.3 Approche cinématique par l'extérieur de $K$ .....	25
1.7 Position du problème de stabilité au feu des panneaux en béton armé de grandes dimensions dans le cadre du Calcul à la Rupture.....	29
<b>PARTIE I : PANNEAU MODÉLISÉ COMME UNE POUTRE</b>	
<b>CHAPITRE 2 : UNE MÉTHODE DE CHANGEMENT D'ÉCHELLE POUR LA DÉTERMINATION DES DIAGRAMMES D'INTERACTION SOUS L'EFFET DE LA TEMPÉRATURE ÉLEVÉE .....</b>	<b>35</b>
2.1 Introduction .....	35
2.2 Propriétés de résistance des matériaux à hautes températures.....	36
2.2.1 Critère de résistance pour le béton .....	36
2.2.2 Critère de résistance pour le renforcement.....	38
2.3 Position du problème de Calcul à la Rupture .....	39

2.3.1	Mode de chargement et diagramme d'interaction .....	40
2.3.2	Qu'en est-il du chargement thermique? .....	41
2.3.3	Approche statique par l'intérieur .....	42
2.3.4	Approche cinématique par l'extérieur .....	43
2.4	Représentation géométrique du diagramme d'interaction dans le plan des chargements - Plan ( $N, M$ ) .....	46
2.4.1	Plaque en béton seul (non renforcée) .....	46
2.4.2	Plaque béton armé (plaque renforcée) .....	48
2.5	Exemple illustratif du diagramme d'interaction .....	50
2.6	Comparaison avec les prévisions de l'Eurocode 2 partie 1-1 à température ambiante .....	52
2.7	Conclusion .....	55
 <b>CHAPITRE 3 : LA PRISE EN COMPTE EXPLICITE DES CHANGEMENTS DE GÉOMÉTRIE DE LA</b>		
<b>STRUCTURE .....</b>		
		<b>57</b>
3.1	Introduction .....	57
3.2	Recherche de la configuration d'équilibre du panneau .....	58
3.2.1	Un modèle simplifié unidimensionnel .....	58
3.2.2	Déformée thermique pure .....	59
3.2.3	Déformée totale résultant de la prise en compte de l'effet du second ordre (Effet P-delta) 62	
3.3	Conclusion .....	76
 <b>CHAPITRE 4 : ANALYSE PAR LE CALCUL À LA RUPTURE DE LA STABILITÉ AU FEU DU</b>		
<b>PANNEAU DANS LE CADRE DU MODÈLE SIMPLIFIÉ .....</b>		
		<b>77</b>
4.1	Introduction .....	77
4.2	Approche statique par l'intérieur .....	77
4.2.1	Principe de l'approche statique par l'intérieur .....	77
4.2.2	Exemples illustratifs .....	78
4.2.3	Notion de facteur de stabilité .....	81
4.3	Approche cinématique par l'extérieur .....	83
4.3.1	Mise en œuvre de l'approche cinématique par l'extérieur .....	83
4.3.2	Facteur de stabilité .....	86
4.4	Résultats .....	89
4.4.1	Une étude paramétrique .....	89

4.4.2 Un calcul simplifié .....	91
4.5 Conclusion .....	93

## **PARTIE II : PANNEAU MODÉLISÉ COMME UNE PLAQUE**

### **CHAPITRE 5 : CRITÈRE DE RÉSISTANCE DU PANNEAU MODÉLISÉ COMME UNE PLAQUE ..... 97**

5.1 Introduction .....	97
5.2 Critère de résistance d'une plaque hétérogène périodique: mode de chargement de la cellule de base .....	98
5.2.1 Notion de cellule de base relative à une plaque hétérogène périodique.....	98
5.2.2 Mise en évidence d'un mode de chargement à 6 paramètres de la cellule de base	100
5.2.3 Critère de résistance macroscopique de la plaque : définitions statique et cinématique.....	102
5.3 Plaque béton homogène : critère de Coulomb sans résistance à la traction .....	103
5.3.1 Critère de résistance en <i>contraintes planes</i> du béton sans résistance à la traction	103
5.3.2 Approche statique par champs de <i>contraintes planes</i> .....	106
5.3.3 Approche cinématique par l'extérieur .....	106
5.3.4 Calcul de la fonction $\Pi$ relative à une discontinuité .....	110
5.3.5 Prise en compte des renforcements .....	112
5.3.6 Prise en compte de l'effet de la température .....	113
5.4 Conclusion .....	114

### **CHAPITRE 6 : ANALYSE DE STABILITÉ AU FEU D'UN PANNEAU RECTANGULAIRE PAR UNE APPROCHE CINÉMATIQUE SIMPLIFIÉE..... 115**

6.1 Introduction .....	115
6.2 Mise en œuvre de l'approche cinématique du Calcul à la Rupture par l'utilisation de mécanismes de ruine simples .....	115
6.2.1 Géométrie et conditions aux limites du problème.....	115
6.2.2 Calcul du changement de géométrie du panneau .....	117
6.2.3 Approche cinématique mettant en œuvre des mécanismes de ruine avec charnières	117
6.3 Premiers résultats : Un exemple illustratif .....	123
6.3.1 Données relatives aux caractéristiques géométriques et mécaniques .....	123

6.3.2	Calcul de la déformée du panneau par une simulation numérique.....	124
6.3.3	Une première évaluation du facteur de stabilité cinématique .....	127
6.4	Commentaires et premières conclusions .....	129

### **PARTIE III : PREMIÈRES VALIDATIONS EXPÉRIMENTALES**

#### **CHAPITRE 7 : PREMIÈRES VALIDATIONS EXPÉRIMENTALES..... 133**

7.1	Introduction .....	133
7.2	Validation du diagramme d'interaction d'une section en béton armé en condition d'incendie par des essais au feu de dalles en flexion composée .....	133
7.3	Réalisation des essais sur dalles en flexion au four à maquette .....	138
7.3.1	Caractéristiques des éprouvettes testées.....	138
7.3.2	Configuration des tests .....	140
7.3.3	Instrumentation.....	142
7.3.4	Procédure des tests .....	143
7.3.5	Résultats des essais et discussion .....	143
7.4	Conclusion.....	153

#### **CHAPITRE 8 : CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES..... 155**

8.1	Conclusions .....	155
8.2	Perspectives .....	156

#### **ANNEXE..... 159**

#### **BIBLIOGRAPHIE..... 165**

# Table des figures

<i>Figure 1.1. Exemple de panneaux en béton cellulaire armé en pose verticale - (CIMbéton, 2007).</i>	3
<i>Figure 1.2. Exemple de panneaux en béton cellulaire armé en pose horizontale - (CIMbéton, 2007).</i>	4
<i>Figure 1.3. Concept d'un système de panneaux précontraints « rotulés » et principe de fonctionnement au feu-(CIMbéton, 2007)</i>	5
<i>Figure 1.4. Panneau en béton armé (a) à froid et (b) au feu</i>	6
<i>Figure 1.5. Évolution de la conductivité thermique du béton en fonction de la température....</i>	8
<i>Figure 1.6. Évolution de la chaleur spécifique du béton pour une teneur en eau de 0%, 1,5% et 3% du poids du béton, en fonction de la température</i>	9
<i>Figure 1.7. Évolution de la masse volumique du béton en fonction de la température</i>	9
<i>Figure 1.8. Évolution de la déformation thermique du béton et de l'acier en fonction de la température</i>	10
<i>Figure 1.9. Évolution des facteurs de réduction applicables pour la diminution de la résistance du béton et de l'acier en fonction de la température</i>	11
<i>Figure 1.10. Modèle mathématique de la relation contrainte-déformation du béton de densité normale réalisé avec des granulats siliceux, en compression à températures élevées</i>	16
<i>Figure 1.11. Modèle mathématique de la relation contrainte-déformation de l'acier laminé à chaud (classe N) à températures élevées</i>	17
<i>Figure 1.12. Données de chargement et de critère de résistance relatives à un problème de Calcul à la Rupture pour le milieu continu 3D</i>	22
<i>Figure 1.13. Construction d'une approche statique par l'intérieur du domaine K</i>	24
<i>Figure 1.14. Interprétation géométrique de l'approche cinématique par l'extérieur</i>	27
<i>Figure 1.15. Construction d'une approche cinématique par l'extérieur du domaine K</i>	27
<i>Figure 1.16. Comparaison des résultats des deux approches du Calcul à la Rupture</i>	28
<i>Figure 1.17. Organisation des principaux chapitres du manuscrit</i>	31
<i>Figure 2.1. Courbe intrinsèque du béton à (a) température ambiante et (b) haute température</i>	37
<i>Figure 2.2. Élément de plaque en béton armé soumis à la combinaison d'un effort normal et d'un moment fléchissant</i>	39

<i>Figure 2.3. Profil de température dans l'épaisseur de la plaque .....</i>	<i>41</i>
<i>Figure 2.4. Distributions de contraintes (a) et (b) dans la plaque pour l'approche statique par l'intérieur du Calcul à la Rupture.....</i>	<i>42</i>
<i>Figure 2.5. Diagramme d'interaction pour une plaque en béton à la température ambiante.</i>	<i>47</i>
<i>Figure 2.6. Allure du diagramme d'interaction pour une plaque en béton homogène au feu.</i>	<i>47</i>
<i>Figure 2.7. Diagramme d'interaction pour une plaque en béton armé en condition d'incendie .....</i>	<i>48</i>
<i>Figure 2.8. Modes de rupture du diagramme d'interaction correspondant au cas <math>\dot{\alpha} &gt; 0</math> .....</i>	<i>49</i>
<i>Figure 2.9. Différents profils de température dans l'épaisseur d'une plaque en béton armé exposée au feu normalisé ISO 834.....</i>	<i>51</i>
<i>Figure 2.10. Diagrammes d'interaction de la plaque exposée au feu normalisé ISO 834 en fonction de la durée d'exposition au feu .....</i>	<i>51</i>
<i>Figure 2.11. Schématisation du comportement fragile du béton en traction.....</i>	<i>52</i>
<i>Figure 2.12. Courbes contrainte-déformation uni-axiales du béton et de l'acier .....</i>	<i>52</i>
<i>Figure 2.13. Diagramme des déformations relatives admissibles à l'état limite ultime .....</i>	<i>53</i>
<i>Figure 2.14. Comparaison entre le diagramme d'interaction obtenu par le Calcul à la Rupture avec les prévisions de l'Eurocode 2 partie 1-1 – Section en béton renforcée par deux lits d'armature.....</i>	<i>54</i>
<i>Figure 3.1. (a) Schéma de la déformée du panneau. (b) Diagramme des sollicitations.....</i>	<i>58</i>
<i>Figure 3.2. Distributions de déformations et de contraintes dans une section du panneau soumis à un gradient de température .....</i>	<i>60</i>
<i>Figure 3.3. Facteurs de réduction du module Young du béton et de l'acier en fonction de la température .....</i>	<i>65</i>
<i>Figure 3.4. Déformée d'un panneau de 12m de hauteur pour une durée d'exposition au feu de 120min.....</i>	<i>66</i>
<i>Figure 3.5. Déformées d'un panneau de 12m de hauteur pour différentes durées d'exposition au feu.....</i>	<i>67</i>
<i>Figure 3.6. Déformées de panneaux de 6m, 8m, 10m et 12m de hauteur exposés au feu pendant 120min.....</i>	<i>68</i>
<i>Figure 3.7. Déplacements à mi-hauteur en fonction de la hauteur de différents panneaux exposés au feu pendant 120min.....</i>	<i>68</i>
<i>Figure 3.8. Comparaison des déformées d'un panneau de 12m de hauteur exposé 120min au feu, obtenues par la procédure itérative et par les fonctions hypergéométriques .....</i>	<i>70</i>

<i>Figure 3.9. Une partie du maillage par éléments finis réalisé à l'aide du logiciel MARC .....</i>	<i>71</i>
<i>Figure 3.10. Distribution des (a) contraintes thermiques et (b) contraintes à mi-hauteur du panneau en prenant en compte de la pesanteur .....</i>	<i>73</i>
<i>Figure 3.11. Comparaison des déformées d'un panneau de 12m de hauteur exposé 120min au feu, données par la procédure itérative et par la simulation numérique à l'aide du logiciel Marc .....</i>	<i>73</i>
<i>Figure 3.12. Comparaison des déformées d'un panneau de 12m de hauteur exposé 120min au feu, données par la procédure itérative, la simulation numérique à l'aide de Marc avec des éléments volumiques dans lesquels les barres d'armature sont intégrées ainsi que celle avec les éléments bilinéaires de type coque épaisse sans barres d'armature.....</i>	<i>75</i>
<i>Figure 4.1. Analyse de stabilité du panneau en configuration déformée .....</i>	<i>78</i>
<i>Figure 4.2. Positionnement des courbes de sollicitations par rapport au diagramme d'interaction de la section béton en armé exposée 120min au feu .....</i>	<i>79</i>
<i>Figure 4.3. Condition de stabilité des panneaux de 6m, 8m 10m et 12m de hauteur exposés 120min au feu.....</i>	<i>80</i>
<i>Figure 4.4. Évaluation de la résistance au feu du panneau de 13m de hauteur.....</i>	<i>81</i>
<i>Figure 4.5. Définition du facteur de stabilité statique <math>F_{s,\theta}</math>.....</i>	<i>82</i>
<i>Figure 4.6. Facteur de stabilité de différents panneaux exposés 60, 90 et 120min au feu.....</i>	<i>82</i>
<i>Figure 4.7. Mécanisme de ruine du panneau (mouvement virtuel avec discontinuité de vitesse et de rotation).....</i>	<i>83</i>
<i>Figure 4.8. Équivalence des facteurs de stabilité statique et cinématique .....</i>	<i>88</i>
<i>Figure 4.9. Déformées des panneaux de différentes épaisseurs .....</i>	<i>89</i>
<i>Figure 4.10. Courbes de sollicitations des panneaux de différentes épaisseurs.....</i>	<i>90</i>
<i>Figure 4.11. Facteur de stabilité pour différents panneaux exposés à un feu de 120min .....</i>	<i>90</i>
<i>Figure 4.12. Déformée du panneau assimilée à deux segments de droite.....</i>	<i>91</i>
<i>Figure 4.13. Comparaison des facteurs de stabilité cinématiques de différents panneaux exposés 120min au feu.....</i>	<i>92</i>
<i>Figure 5.1. Cellule de base associée à la plaque hétérogène périodique.....</i>	<i>98</i>
<i>Figure 5.2. Conditions aux limites anti-périodiques en contrainte plane et périodiques et en vitesse sur la cellule de base .....</i>	<i>99</i>
<i>Figure 5.3. Critère de Mohr-Coulomb sans résistance à la traction (a) à température ambiante et (b) au feu.....</i>	<i>103</i>
<i>Figure 5.4. Changement de variables dans l'espace des contraintes planes .....</i>	<i>105</i>



<i>Figure 5.5. Critère de résistance dans l'espace des nouvelles variables .....</i>	<i>105</i>
<i>Figure 5.6. Fonction d'appui du critère de béton en contraintes planes.....</i>	<i>108</i>
<i>Figure 5.7. Fonction d'appui du critère de béton en contraintes planes en fonction des composantes de <math>\underline{\delta}</math>.....</i>	<i>109</i>
<i>Figure 5.8. Saut de vitesse et de taux de rotation à la traversée d'une ligne de discontinuité (charnière).....</i>	<i>110</i>
<i>Figure 5.9. Discontinuité de vitesse dans un lit de renforcement incliné d'un angle <math>\phi</math> par rapport à la charnière de la plaque .....</i>	<i>112</i>
<i>Figure 6.1. Géométrie et conditions aux limites du panneau rectangulaire soumis à l'action du feu.....</i>	<i>116</i>
<i>Figure 6.2. Mécanisme de ruine défini sur la configuration déformée simplifiée du panneau (mouvement virtuel avec discontinuités de vitesse de translation et de rotation le long de charnières) .....</i>	<i>118</i>
<i>Figure 6.3. Mécanisme de ruine et cinème associé pour le calcul des discontinuités de vitesse de rotation le long des charnières AE, EB et EF .....</i>	<i>121</i>
<i>Figure 6.4. Renforcements vus en coupe verticale dans le plan médian du panneau.....</i>	<i>123</i>
<i>Figure 6.5. Iso-valeurs des déplacements transversaux du panneau <math>12 \times 12 m^2</math> : vue de face dans le plan Oxz.....</i>	<i>125</i>
<i>Figure 6.6. Déplacements transversaux du panneau <math>12 \times 12 m^2</math> dont la déformée a été agrandie 10 fois : vue latérale dans le plan Oxy.....</i>	<i>125</i>
<i>Figure 6.7. Déplacements transversaux du panneau <math>12 \times 60 m^2</math> soumis au seul chargement thermique : vue de face dans le plan Oxy .....</i>	<i>126</i>
<i>Figure 6.8. Déplacements transversaux du panneau <math>12 \times 60 m^2</math> : vue de face dans le plan Oxy .....</i>	<i>126</i>
<i>Figure 6.9. Comparaison de la déformée du panneau donnée par le modèle simplifié et celles du modèle de type plaque .....</i>	<i>127</i>
<i>Figure 6.10. Charnières du mécanisme de ruine correspondant à la valeur minimale du facteur de stabilité obtenu sur la configuration déformée simplifiée du panneau carré <math>12 \times 12 m^2</math>.....</i>	<i>128</i>
<i>Figure 6.11. Charnières du mécanisme de ruine correspondant à la valeur minimale du facteur de stabilité obtenu sur la configuration déformée simplifiée du panneau rectangulaire <math>12 \times 60 m^2</math>.....</i>	<i>129</i>
<i>Figure 7.1. Schéma de principe des essais au feu réalisés par Croizier et Sanjayan.....</i>	<i>134</i>
<i>Figure 7.2. Distribution de température calculée par Safir et mesures de température des tests de Croizier et Sanjayan à 30min.....</i>	<i>135</i>

<i>Figure 7.3. Distribution de température calculée par Safir et mesures de température des tests de Croizier et Sanjayan à 60min .....</i>	<i>135</i>
<i>Figure 7.4. Facteur <math>k_c(\theta)</math> applicable pour la diminution de la résistance en compression du béton à haute résistance aux températures élevées (EN1992-1-2, 2005).....</i>	<i>136</i>
<i>Figure 7.5. Comparaison du diagramme d'interaction calculé avec le résultat du test IL150-52<sub>2</sub> effectué par Crozier et Sanjayan.....</i>	<i>137</i>
<i>Figure 7.6. Coffrages et ferrillages des dalles pour des orientations du renforcement égales à : (a) 0°, (b) 20°, et (c) 45° par rapport à l'axe longitudinal.....</i>	<i>139</i>
<i>Figure 7.7. Implantation de deux échelles de thermocouples à boule dans le ferrillage ....</i>	<i>139</i>
<i>Figure 7.8. Configuration d'un test de flexion 4 points .....</i>	<i>141</i>
<i>Figure 7.9. Mise en place d'un essai au feu.....</i>	<i>142</i>
<i>Figure 7.10. Courbes force-déplacement relatives aux essais A1, A2 et A3 .....</i>	<i>143</i>
<i>Figure 7.11. Courbes force-déplacement relatives aux essais A4, A5 et A6 .....</i>	<i>144</i>
<i>Figure 7.12. Courbes force-déplacement relatives aux essais A7 et A8.....</i>	<i>145</i>
<i>Figure 7.13. Évolution de la température mesurée dans le four et courbe de référence ISO 834.....</i>	<i>146</i>
<i>Figure 7.14. Gradients thermiques mesurés dans l'épaisseur des éprouvettes à 120 minutes .....</i>	<i>147</i>
<i>Figure 7.15. Évolution de la flèche des essais H1 à H5 au cours de l'échauffement.....</i>	<i>148</i>
<i>Figure 7.16. Évolution de la flèche des essais H6, H7 et H8 au cours de l'échauffement ....</i>	<i>149</i>
<i>Figure 7.17. Courbes force-déplacement des essais H1 à H5 .....</i>	<i>149</i>
<i>Figure 7.18. Courbes force-déplacement des essais H6, H7 et H8 .....</i>	<i>150</i>
<i>Figure 7.19. Distribution des moments dans un essai de flexion 4 points.....</i>	<i>151</i>
<i>Figure A.1. Chargements mécanique et thermique de la structure réticulée .....</i>	<i>159</i>
<i>Figure A.2. Comportement thermo-élastique parfaitement plastique des barres.....</i>	<i>160</i>
<i>Figure A.3. Domaine d'élasticité du système réticulé dans le plan (<math>N_T/N_0</math>, <math>Q/N_0</math>).....</i>	<i>162</i>



## Chapitre 1

# **DIMENSIONNEMENT AU FEU DES STRUCTURES EN BÉTON ARMÉ : LA PROBLÉMATIQUE DES PANNEAUX DE GRANDES DIMENSIONS**

### **1.1 INTRODUCTION**

L'utilisation de panneaux verticaux en béton armé de grandes dimensions s'est aujourd'hui généralisée dans les constructions industrielles ou de stockage. L'objectif est d'obtenir des volumes plus importants, plus libres d'aménagement et facilitant la circulation des engins, comme dans le cas des bâtiments de logistique. Réalisés par coulage in situ ou par assemblage de panneaux préfabriqués, ces composants de la construction doivent obéir aux exigences de la réglementation incendie qui leur impose une tenue dont la durée varie en fonction de la nature et de l'utilisation des locaux. Il s'agit essentiellement d'empêcher la ruine de l'édifice avant que l'intervention des pompiers ait permis d'évacuer tous les occupants.

Les modèles de calcul et de dimensionnement existants sont adaptés aux panneaux de plus petites dimensions dont le comportement au feu diffère très sensiblement de celui des panneaux de grandes dimensions. Le présent travail vise donc à enrichir les connaissances sur le comportement au feu de ce type de structure et à fournir une méthodologie de dimensionnement et les outils correspondants qui soient accessibles aux professionnels. Il devra notamment permettre d'identifier, par exemple, d'éventuels phénomènes que les impératifs de la simplification avaient jusqu'alors conduit à négliger.

Ce premier chapitre, à vocation introductive, est destiné à détailler la problématique spécifique du dimensionnement au feu des panneaux de grandes dimensions et fournir des éléments sur les différentes méthodes couramment utilisées, ou faisant actuellement l'objet de recherches, pour le dimensionnement au feu des structures en béton armé. La problématique spécifique des panneaux de grandes dimensions rend généralement l'utilisation de ces méthodes impropre ou difficile, ce qui suggère la nécessité d'aller vers des approches plus rationnelles et élaborées que pour les ouvrages courants, mais qui demeurent praticables par l'ingénieur. De ce point de vue, la *théorie du Calcul à la Rupture*, dans le cadre de laquelle se situe le présent travail, paraît être une solution innovante. Ce type d'approche, fondée sur la vérification de la compatibilité entre l'équilibre statique d'une structure soumise à des

conditions de chargement données, et les exigences de résistance exprimées à travers les critères de résistance des matériaux, présente des avantages considérables liés à la simplicité de sa mise en œuvre et à la facilité d'interprétation des résultats obtenus.

## **1.2 MURS SÉPARATIFS COUPE-FEU EN ÉLÉMENTS PRÉFABRIQUÉS EN BÉTON**

Les murs séparatifs coupe-feu dans les bâtiments industriels et entrepôts sont des systèmes constructifs destinés à séparer les locaux d'un bâtiment et à limiter la propagation du feu en cas d'incendie. La mise en œuvre d'un mur séparatif coupe-feu doit répondre à des exigences réglementaires qui consistent à préserver les vies humaines dans les meilleures conditions en facilitant l'évacuation des personnes ainsi que l'intervention des pompiers. Ces exigences font appel à trois critères de base (EN1992-1-2, 2005) :

- ◇ La résistance mécanique, symbolisée par « R », est la durée pendant laquelle le mur peut rester stable en place même si l'une des parties de la structure s'effondre.
- ◇ L'isolation thermique par le critère « I », considéré comme un état limite de service, impose la limite de 140K pour l'augmentation de température moyenne sur la totalité de la surface non exposée au feu et la limite de 180K pour l'augmentation maximale de la température en tout point de celle-ci.
- ◇ L'étanchéité aux flammes par le critère « E », se réfère à la fonction de séparation, c'est-à-dire l'aptitude à limiter la propagation du feu se déclarant d'un côté du mur à l'autre côté.

Un mur séparatif coupe-feu en éléments préfabriqués en béton est constitué en général de panneaux préfabriqués en béton, associés ou non à d'autres éléments de structure tels que des poteaux (encastrés dans des fondations) et des poutres. Le caractère incombustible et la faible vitesse d'échauffement du béton sont des avantages majeurs pour assurer la fonction de sécurité des panneaux en béton armé, aussi bien du point de vue de la stabilité mécanique que de la limitation de la propagation de l'incendie. Les panneaux de grandes dimensions, et notamment de grande hauteur, présentent des caractéristiques rendant la vérification des exigences de sécurité structurale difficile. Dans le cadre des travaux de recherche présentés dans ce mémoire, on s'intéresse donc à améliorer les outils de vérification du critère «R».

Des informations sur les caractéristiques, les prescriptions techniques de certains procédés ainsi que l'emploi des murs constitués de panneaux préfabriqués en béton sont fournis dans le guide (CIMbéton, 2007). Les panneaux se présentent couramment sous la forme de plaques pleines, de plaques nervurées ou de plaques sandwich. Les clauses techniques à insérer dans un marché de construction de murs en panneaux préfabriqués de grandes dimensions du type plaque pleine ou nervurée en béton ordinaire, ainsi que la fabrication et la mise en œuvre de ces panneaux sont spécifiées dans la norme française (DTU 22.1, 1993). Néanmoins, le

domaine d'emploi visé par ce document ne couvre pas toutes les configurations qui peuvent être réalisées actuellement. Il existe deux autres types de procédés qui sont les panneaux en béton précontraint et en béton cellulaire. L'utilisation des panneaux en béton précontraint permet de réaliser des éléments de structure de grande portée, tandis que le béton cellulaire offre des avantages du point de vue de l'isolation thermique. On présente dans ce qui suit quelques exemples de ces deux procédés qui font généralement l'objet d'avis techniques.

### 1.2.1 Procédé de panneaux en béton cellulaire

Les panneaux en béton cellulaire sont des éléments autoporteurs utilisés pour la construction de façades, de murs intérieurs ou de murs coupe-feu. La plus grande proportion d'air emprisonné dans le béton cellulaire par rapport au béton ordinaire lui confère de bonnes propriétés en termes d'isolation thermique. Les panneaux sont disposés aussi bien en bandes verticales juxtaposées (figure 1.1) qu'en bandes horizontales superposées (figure 1.2) et ils reposent à leur base sur une longrine en béton armé horizontale. L'épaisseur d'un panneau varie entre 15cm à 30cm, la longueur et la largeur standards sont respectivement de 6m et de 0,6m, ces dimensions pouvant aller jusqu'à 7,5m pour la longueur et jusqu'à 0,75m pour la largeur.

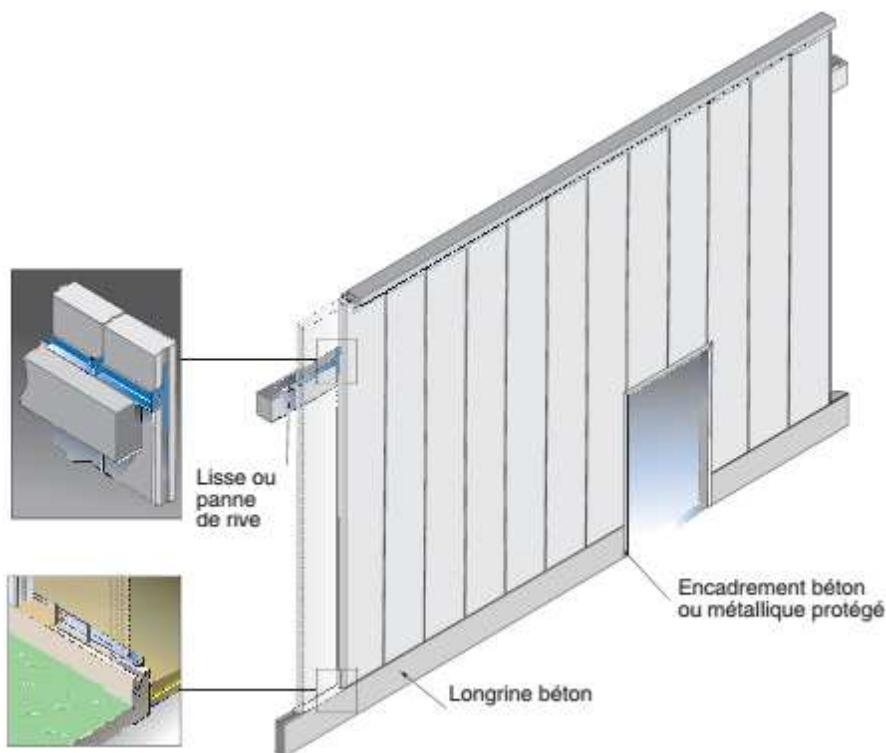


Figure 1.1. Exemple de panneaux en béton cellulaire armé en pose verticale - (CIMbéton, 2007)

En pose verticale, la hauteur du système de mur coupe-feu est donc limitée par la longueur des panneaux (maximal de 7,5m). L'accrochage en pied se fait à l'aide de fixations spéciales enfoncées à mi-épaisseur du panneau. Les têtes de panneau sont scellées dans une engravure de la longrine. En tête et en partie intermédiaire, l'accrochage se fait à l'aide de fixations métalliques protégées contre le feu. Les panneaux peuvent comporter un tenon et une mortaise (standard), ou deux rainures hémicylindriques, ou encore être planes.

La pose horizontale des panneaux superposés permet la réalisation des murs coupe-feu de hauteur plus grande que la pose verticale, allant jusqu'au 24m, mais la largeur entre deux poteaux est limitée à 7,5m correspondant à la longueur maximale d'un panneau. Dans cette configuration, les panneaux peuvent être posés devant les poteaux mais la solution la plus fréquente est celle avec les poteaux en béton de section en H dans lesquels les panneaux sont insérés.

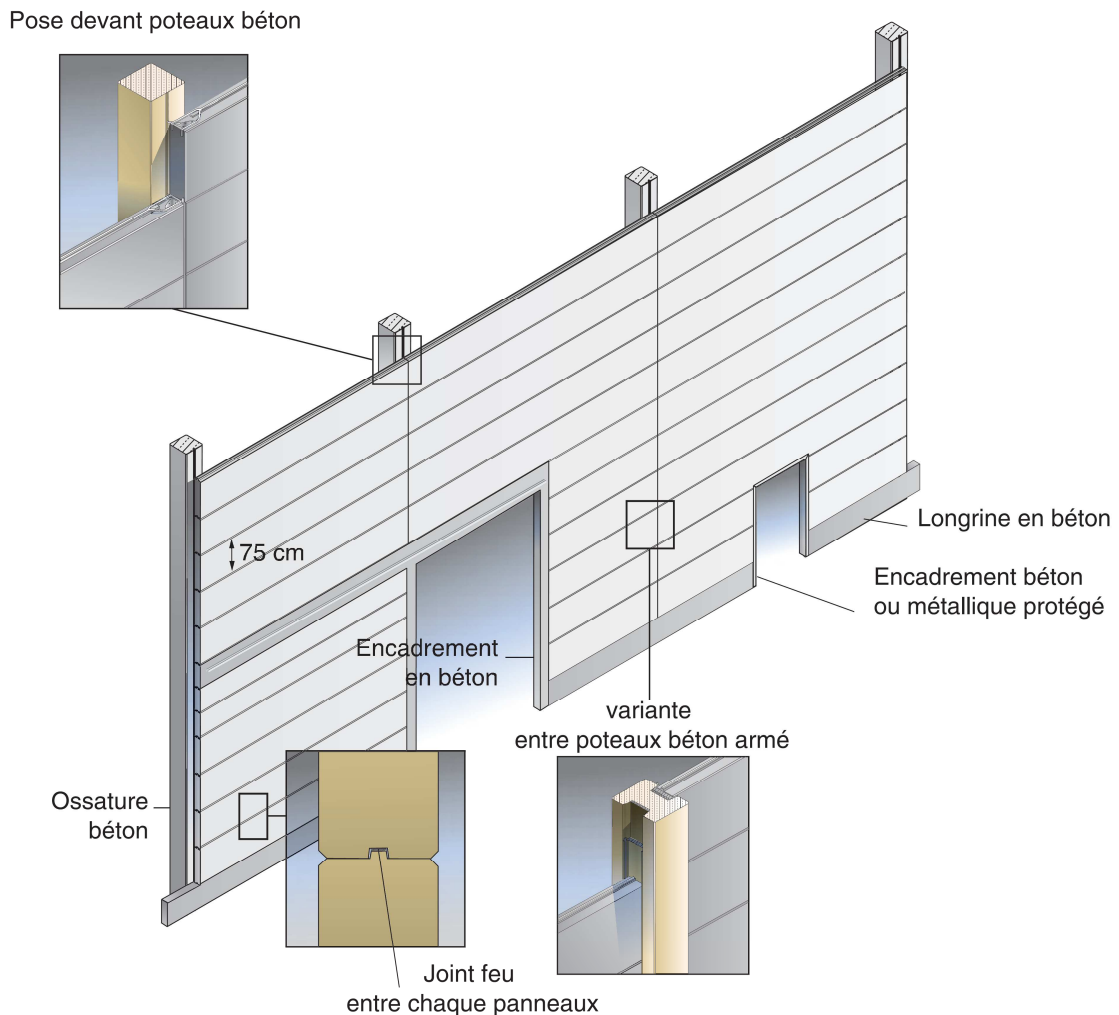


Figure 1.2. Exemple de panneaux en béton cellulaire armé en pose horizontale - (CIMbéton, 2007)

## 1.2.2 Procédé de panneaux en béton précontraint

Les panneaux préfabriqués en béton précontraint peuvent avoir jusqu'à une dizaine de mètres de longueur, de l'ordre de 2,4m de largeur et une épaisseur qui varie généralement entre 11 et 18cm. Ces panneaux sont en forme de plaques pleines et ils sont posés sur une ossature porteuse soit verticalement (figure 1.3), soit horizontalement.

Dans le cas de la pose verticale, les panneaux sont juxtaposés et reliés entre eux par une conjugaison mâle/femelle verticale. Ils sont maintenus par deux files de poutre disposées en partie haute sur chaque face et supportés par une longrine rotulée en partie basse. Une jonction verticale par emboîtement mâle/femelle est utilisée pour assurer la liaison entre le panneau et les poteaux latéraux. Ces poteaux assurent en effet la stabilité du mur sous l'action des forces extérieures tel que le vent.

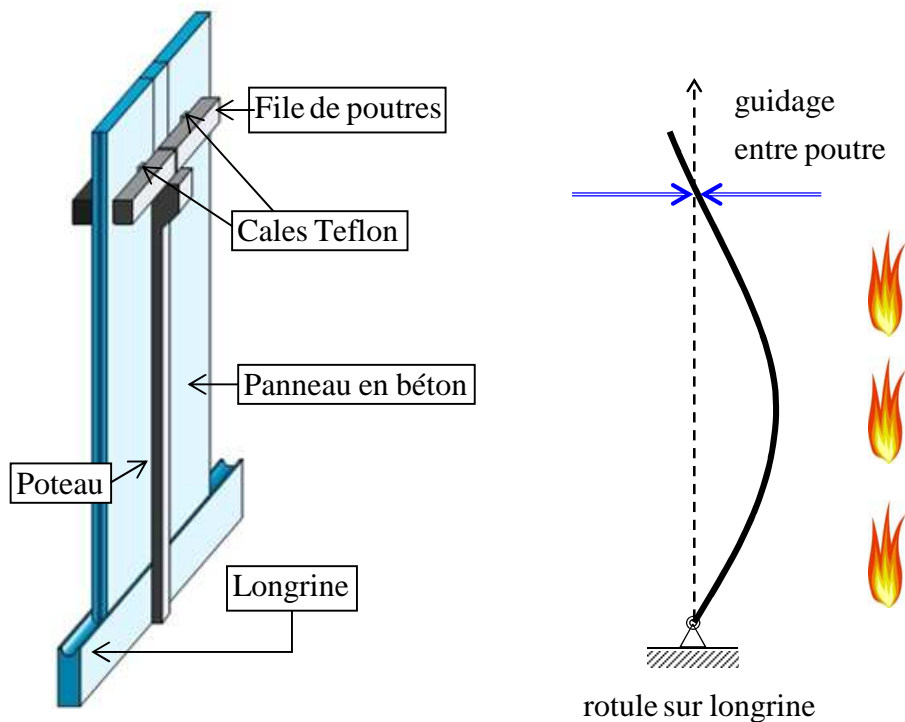


Figure 1.3. Concept d'un système de panneaux précontraints « rotulés » et principe de fonctionnement au feu-(CIMbéton, 2007)

La figure 1.3 illustre le principe de fonctionnement d'un panneau schématisé comme une poutre verticale articulée aux deux extrémités. Le guidage entre poutres du côté tête (pas nécessairement en tête) du panneau, permet un déplacement vertical libre. Cette configuration représentative de nombreuses situations de mur coupe-feu (mur non porteur) rencontrées est adoptée par la suite dans les différentes modélisations du problème.



### 1.3 PROBLÉMATIQUE DES PANNEAUX DE GRANDES DIMENSIONS

Le comportement au feu d'un panneau de grandes dimensions, et notamment de grande hauteur, est d'autant plus difficile à analyser qu'il faut, d'une part tenir compte de la dégradation des caractéristiques des matériaux sous l'effet de la chaleur, d'autre part des déformations thermiques susceptibles de provoquer des changements de géométrie non négligeables. Or, les fours de dimensions courantes ne permettent pas la validation par essai du comportement au feu de ces structures.

Se limitant dans un premier temps, afin d'alléger l'exposé, à la présentation d'un modèle simplifié dans un formalisme unidimensionnel, c'est-à-dire au cas où l'effet favorable des liaisons sur ses bords verticaux peut être négligé, le panneau peut être schématisé sous la forme d'une poutre verticale unidimensionnelle. On s'intéresse dans ce travail au problème de l'instabilité ou la rupture potentielle d'un panneau en béton armé de grande hauteur, soumis à son propre poids d'une part et à une exposition au feu sur une de ses faces d'autre part.

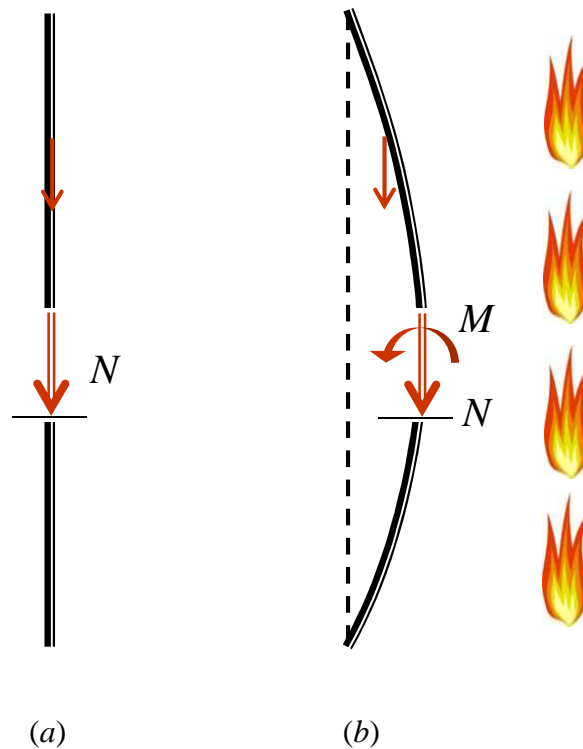


Figure 1.4. Panneau en béton armé (a) à froid et (b) au feu

Partant d'un état initial avant l'apparition du feu, le panneau est modélisé comme une poutre verticale droite soumise à son poids propre, engendrant par simple équilibre une distribution linéaire croissante de la force axiale de compression  $N$  le long de la hauteur du panneau (figure 1.4(a)). En général, le panneau est conçu de manière à éviter tout phénomène

de flambage, tandis que la force de compression maximale en pied reste très inférieure à la résistance à la compression de la section.

Quand une face du panneau est exposée au feu, le gradient transversal de température dans l'épaisseur de ce dernier induit une courbure thermique en raison des déformations thermiques très différentes qui en résultent entre les deux faces du panneau. Ces effets liés au gradient des déformations thermiques sont naturellement amplifiés par la grande taille de la structure et plus précisément par son élancement (rapport hauteur/épaisseur). Une telle structure élancée subit alors des déplacements hors plan importants qui, à leur tour, conduisent à un excentrement du poids propre par rapport au plan initial (figure 1.4(b)). En conséquence, des moments de flexion sont générés dans le panneau en plus de la distribution des efforts de compression axiale préexistants  $N$ . Ce phénomène constitue ce qu'il est convenu d'appeler « *effet du second ordre* » (ou effet P- delta) (voir par exemple l'ouvrage de Bazant et Cedolin (2010)). À mesure que l'excentrement augmente, les moments de flexion correspondants augmentent et donc également les déformations de courbure d'origine mécanique qui amplifient les déplacements transversaux et donc l'excentrement.

En dehors de ce premier phénomène décisif qui peut être attribué à un *changement de la géométrie* de la structure, les données expérimentales montrent clairement que les fortes augmentations de température associées à l'incendie, conduisent à une dégradation importante tant des propriétés de raideur élastique, que des propriétés de résistance des deux principaux matériaux constitutifs: le béton et l'acier. C'est donc l'effet combiné de ces deux phénomènes (changement de géométrie d'une part, dégradation des propriétés des matériaux d'autre part) qui est susceptible de conduire à l'effondrement de ces panneaux de grande hauteur. Leur coexistence ne peut donc que rendre complexe la réponse structurale d'un tel ouvrage, ce qui mérite donc une analyse approfondie particulière.

## **1.4 PROPRIÉTÉS THERMOMÉCANIQUES DES MATÉRIAUX BÉTON ET ACIER**

La connaissance préalable des propriétés thermomécaniques des matériaux béton et acier contribue à une meilleure compréhension des phénomènes physiques pouvant être à l'origine de l'instabilité de la structure durant l'incendie. Les propriétés thermomécaniques du béton dépendent notamment de la nature des granulats parmi lesquels on distingue deux types principaux, siliceux ou calcaires. Pour les aciers de béton armé, leurs propriétés sont aussi influencées par la façon dont ils sont fabriqués, par exemple laminés à chaud ou formés à froid. À titre indicatif, les valeurs numériques sur les propriétés thermomécaniques des matériaux béton et acier données dans la présente section sont extraites de l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005) et son Annexe Nationale. Le béton choisi est de densité normale réalisé avec des granulats siliceux. L'acier appartient à la classe N (EN1992-1-2, 2005) de type laminé à chaud.

## 1.4.1 Propriétés thermiques du béton

Tenant compte du fait que le taux volumique de renforcement d'une structure en béton armé est généralement faible et que les diamètres des barres d'armature sont très petits par rapport aux dimensions de la section, la température dans la section de l'élément peut être évaluée en ignorant la présence de ces barres d'armature (EN1992-1-2, 2005). Dans ce cas, les trois propriétés du matériau qui gouvernent l'équation de la chaleur dans le béton sont la conductivité thermique, la chaleur spécifique et la masse volumique.

### 1.4.1.1 Conductivité thermique

La conductivité thermique dépend de nombreux paramètres: la porosité, la teneur en eau, les granulats, ainsi que la température. Cette propriété diminue, de manière générale, lorsque la température augmente. L'évolution de la conductivité thermique du béton en fonction de la température proposée par l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005) est limitée par deux courbes. En France, la valeur à utiliser est donnée par une courbe comprise entre ces deux limites supérieure et inférieure (EN1992-1-2 /AN, 2007) (voir figure 1.5).

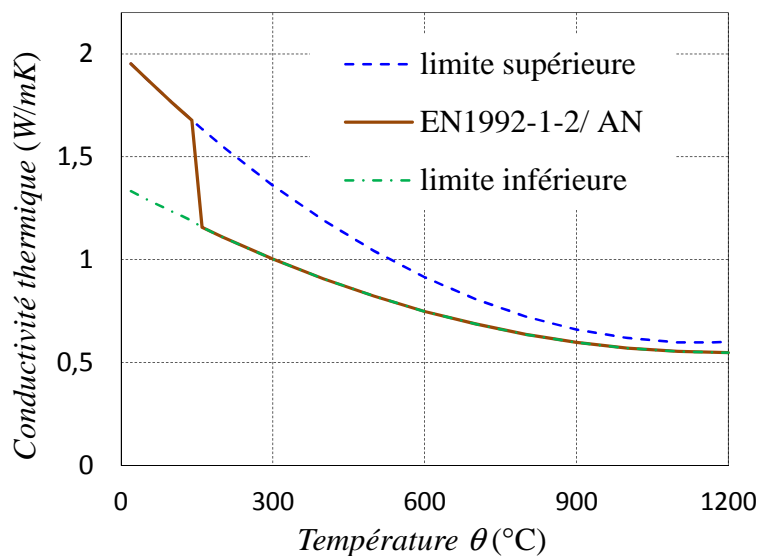


Figure 1.5. Évolution de la conductivité thermique du béton en fonction de la température

### 1.4.1.2 Chaleur spécifique

La chaleur spécifique du béton en fonction de la température est également donnée dans l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005) pour différents teneurs en eau. Cette évolution est reprise à la figure 1.6. On y observe clairement un pic de la chaleur spécifique situé entre 100°C et 115°C pour une teneur en eau différente à 0%, caractérisant le changement de phase de l'eau contenue dans le béton.

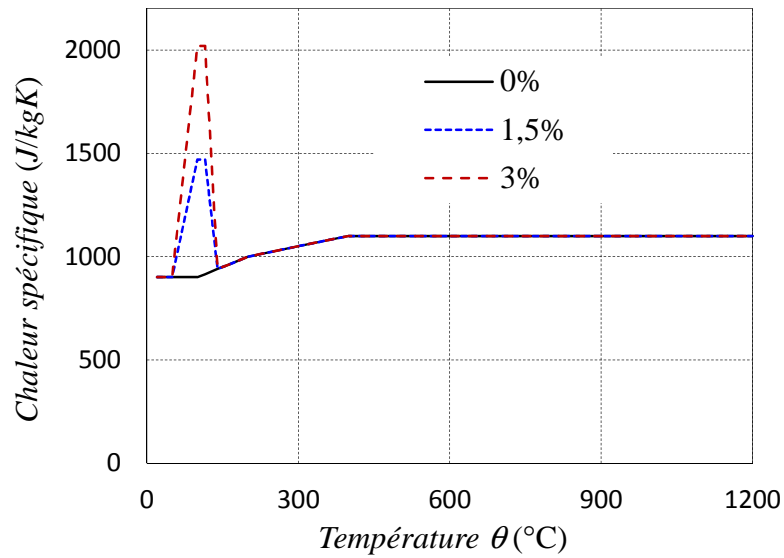


Figure 1.6. Évolution de la chaleur spécifique du béton pour une teneur en eau de 0%, 1,5% et 3% du poids du béton, en fonction de la température

#### 1.4.1.3 Masse volumique

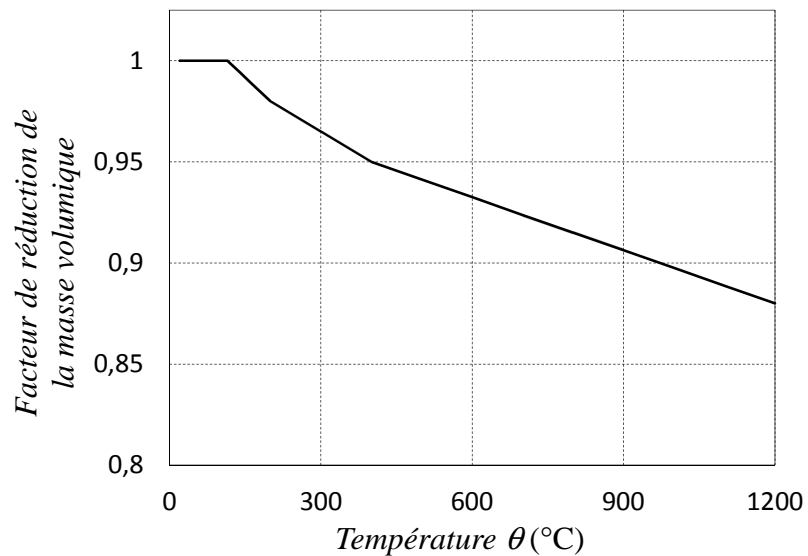


Figure 1.7. Évolution de la masse volumique du béton en fonction de la température

La masse volumique connue pour le béton ordinaire est d'environ  $2300\text{kg/m}^3$ . Lors d'un incendie, il convient de souligner que la masse volumique du béton est influencée par la perte en eau et varie donc en fonction de la température. L'évolution de la masse volumique du béton en fonction de la température, donnée par l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005), est représentée sur la figure 1.7.

## 1.4.2 Propriétés mécaniques du béton et de l'acier

Nous portons une attention particulière sur les déformations thermiques et l'affaiblissement de la résistance à haute température qui sont donc liés à l'effet combiné des deux phénomènes évoqués précédemment, changement de géométrie d'une part, dégradation des propriétés mécaniques de matériaux d'autre part.

### 1.4.2.1 Déformation thermique

L'effet géométrique de l'élévation de la température sur un élément de structure est la dilatation thermique engendrée. En prenant comme référence la longueur à température ambiante (20°C), la figure 1.8 illustre la variation de la déformation thermique en fonction de la température du béton et de l'acier (EN1992-1-2, 2005). La présentation des déformations thermiques des deux matériaux sur la même figure montre que le béton et l'acier n'ont pas le même coefficient de dilatation thermique. De plus, les courbes donnent une déformation thermique constante du béton pour une température plus élevée que 700°C et de 750°C à 850°C pour l'acier.

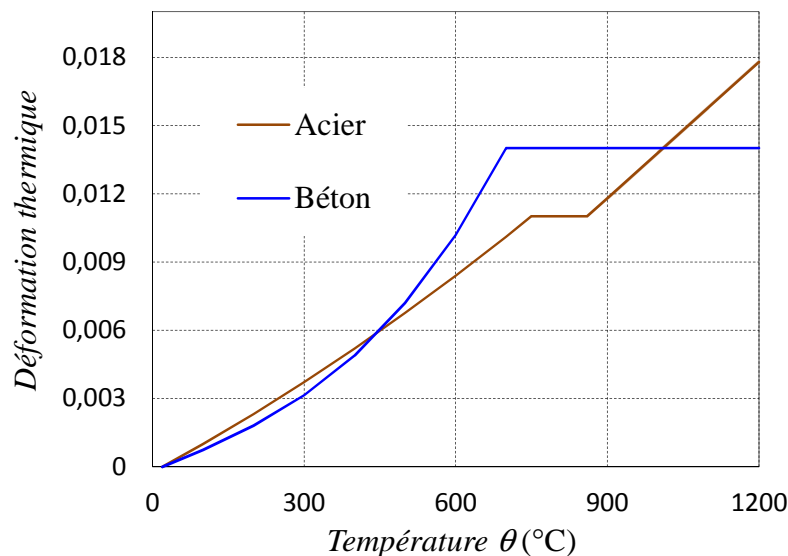


Figure 1.8. Évolution de la déformation thermique du béton et de l'acier en fonction de la température

### 1.4.2.2 Affaiblissement de la résistance à haute température

La résistance du béton et de l'acier décroît lorsque la température augmente. Les coefficients de réduction en fonction de la température (EN1992-1-2, 2005), recommandés pour des vitesses d'échauffement similaires à celles d'une exposition au feu normalisé (EN1991-1-2, 2003), sont représentés sur la figure 1.9.

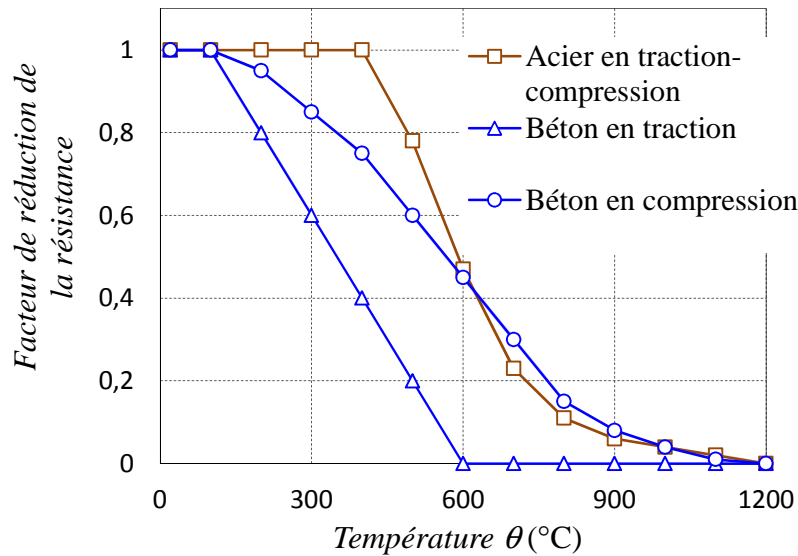


Figure 1.9. Évolution des facteurs de réduction applicables pour la diminution de la résistance du béton et de l'acier en fonction de la température

Les caractéristiques de résistance du béton sont affectées dès que la température atteint 100°C, température à laquelle l'eau s'évapore, tandis que la résistance de l'acier est affectée à partir de 400°C. Cependant, la réduction de la résistance de l'acier est beaucoup plus sensible à haute température, cette résistance décroissant plus rapidement que celle du béton à partir de 400°C.

### 1.4.3 Risque d'instabilité thermique du béton soumis à un incendie

L'*instabilité thermique* du béton durant l'incendie, couramment appelée *éclatement* ou *écaillage* (*spalling* en anglais), est un phénomène très complexe dont les conditions exactes d'apparition ne sont pas encore bien maîtrisées, et font l'objet de très nombreuses études expérimentales comme rapportées dans (Mindeguia, 2009). Ces travaux ont pour but de mettre expérimentalement en évidence certains paramètres favorisant ces risques d'instabilité thermique du béton, tels que la teneur en eau, la résistance en compression, la charge appliquée, la vitesse d'échauffement, le profil de chauffage et la taille de la section, ainsi que le ferrailage. Les premières observations expérimentales ont permis de définir une première classification en quatre types d'instabilité thermique du béton en fonction du degré d'intensité de ce dernier phénomène (Mindeguia, 2009).

- ◇ L'*éclatement de granulat*, lié au caractère instable des granulats, se produit en surface de la structure chauffée. Il n'est pas violent et ne provoque pas de dommages importants.
- ◇ L'*éclatement d'angle*, localisé au niveau des angles de l'élément, n'est également pas violent.

- ◇ L' *éclatement de surface*, couramment appelé *écaillage*, commence par un détachement progressif de petites écailles de béton qui par la suite peuvent engendrer une dénudation des granulats. Ce type d'instabilité thermique est violent car la surface de désagrégation augmente et les aciers perdent progressivement leur protection.
- ◇ Enfin, l' *éclatement explosif* est la forme la plus violente d'instabilité thermique du béton. Il présente un détachement brutal de grandes pièces de béton allant jusqu'à plusieurs dizaines de centimètres de longueur et de quelques centimètres d'épaisseur. Cet éclatement est en général accompagné d'un bruit d'explosion.

Hors du cadre des approches expérimentales, il convient de souligner qu'à ce jour, aucun modèle fiable n'existe permettant la prédiction par le calcul du risque d'instabilité thermique du béton soumis à un incendie. Dans ce contexte, la norme Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005) reconnaît bien le caractère préjudiciable mais imprédictible de ce dernier. L'ensemble des prescriptions données dans l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005) pour la prise en compte du phénomène d'instabilité thermique, est en effet défini par les situations pour lesquelles des vérifications ou des dispositions complémentaires sont nécessaires. Celles-ci portent sur différentes approches :

- ◇ vérifier par le calcul la section réduite par une perte locale d'enrobage sur des armatures situées à proximité de la surface exposée au feu,
- ◇ vérifier expérimentalement que le béton utilisé n'est pas sujet à éclatement,
- ◇ mettre en place une protection thermique,
- ◇ ajouter des fibres de polypropylène à la composition du béton en vue de l'améliorer.

Bien que l'apparition de ce dernier phénomène soit susceptible d'accroître le risque de ruine de la structure, il reste encore très difficile à prendre en compte dans le dimensionnement des structures vis-à-vis de l'incendie. C'est la raison pour laquelle, dans un souci de simplification de la démarche, ce phénomène est exclu de notre champ d'investigation de la stabilité au feu des panneaux de grandes dimensions.

## **1.5 UN BREF APERÇU DES MÉTHODES D'ANALYSE ACTUELLES**

Tandis que les méthodes d'analyse des structures en béton armé à température ambiante se sont largement développées ces dernières années, les méthodes de calcul et de simulation du comportement de telles structures vis à vis de l'incendie, tenant compte aussi bien de la dégradation des matériaux que des dilatations thermiques engendrées, exigent encore de nombreux développements, tant sur le plan théorique (prise en compte de fortes non-linéarités matérielles et géométriques), que numérique (simulation par éléments finis avec des lois de comportement non linéaires).

Historiquement, l'évaluation pratique de la tenue au feu des éléments de structure s'est faite essentiellement à partir de la réalisation d'essais, de leur interprétation, puis de leur exploitation. De tels essais sont généralement réalisés dans des conditions normalisées de manière à faciliter la reproductibilité et la comparaison des résultats qui en découlent, nécessitant le recours à des courbes d'évolution de température conventionnelles, souvent appelées «*courbes nominales*» (EN1991-1-2, 2003). Ces essais permettent d'établir et d'alimenter des bases de données, mais ne peuvent couvrir qu'un nombre limité de cas, notamment des éléments isolés et de dimensions compatibles avec les moyens d'essais. Ainsi, la réalisation d'essais en grandeur réelle pour des éléments de grandes dimensions que sont les panneaux de grande hauteur est évidemment très délicate, coûteuse, voire impossible du fait de la taille usuelle des fours d'essai.

Le besoin de tester des grandes structures à l'échelle réelle a conduit à s'orienter vers des essais *non conventionnels* permettant une meilleure compréhension du comportement des structures dans un *incendie réel*. Une multitude d'essais de type *feu naturel* (EN1991-1-2, 2003), ont été réalisés au cours des dernières années dans le monde entier (Bisby *et al.*, 2013), mais beaucoup d'entre eux ne peuvent encore être recalés précisément avec un modèle théorique ou numérique existant. La multiplicité des scénarios imaginables augmente rapidement avec les configurations testées et il est difficile de savoir quelle peut être la raison des différences observées entre les résultats.

Pour aller au-delà des difficultés principalement liées à la réalisation et l'exploitation des essais, il était nécessaire de développer des méthodes de calcul mettant en jeu des paramètres intervenant dans l'analyse de la stabilité des structures en béton armé soumises à un incendie. Dans ce contexte, les méthodes de calcul disponibles dans l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005) donnent en général satisfaction dans leur domaine d'application et servent de référence importante.

Cependant, il y a toujours lieu de s'interroger sur le caractère évolutif des règles et des recommandations contenues dans l'Eurocode. Ainsi, l'évaluation de la résistance ultime des éléments structuraux en béton armé soumis à une exposition au feu, et l'élaboration des méthodes de conception appropriées, a fait l'objet d'un nombre croissant de contributions au cours des dernières décennies. Nous recensons dans la suite les différentes méthodes de calcul couramment utilisées, dont les principes de justification et d'évaluation sont définis dans l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005). Nous citons ainsi de très nombreuses modélisations mécaniques capables chacune de résoudre un problème spécifique tout en ayant leur propre limite. Enfin, nous mettrons en évidence la pertinence de l'approche Calcul à la Rupture utilisée dans le présent travail, et démontrerons ses avantages.



## 1.5.1 Méthodes de calcul des structures en béton armé au feu suivant l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005)

Elles sont classées en trois catégories en fonction de leur degré de complexité et de leur domaine d'application, allant des plus simples aux plus développées: les *méthodes par valeurs tabulées*, les *méthodes simplifiées* et les *méthodes avancées*.

### 1.5.1.1 Méthodes par valeurs tabulées

Les méthodes les plus simples, appelées méthodes par *valeurs tabulées* (EN1992-1-2, 2005), se réfèrent directement à des tableaux préétablis issus de l'expérience, qui permettent de se dispenser de tout calcul thermique et mécanique complémentaire. Ces tableaux définissent, pour des dispositions constructives données, les dimensions minimales de différents types d'éléments de structure à respecter, ainsi que la distance du parement exposé à l'axe des armatures principales en fonction de la durée de résistance au feu exigée. Les hypothèses permettant l'application de ce type d'approche sont généralement conservatives, c'est-à-dire placées du côté de la sécurité. L'avantage de ces méthodes est leur rapidité d'application mais leur domaine d'application reste pour l'essentiel limité aux éléments les plus courants et les plus simples, comme poteaux, poutres, dalles, murs porteurs ou non porteurs, de dimensions courantes. De plus, ces valeurs tabulées ont été déterminées en se basant sur les conditions de l'incendie normalisé, donc non applicables à d'autres scénarios, et ne concernent que les durées d'exposition inférieures à 240min.

Ainsi, en première approximation, la résistance au feu d'un mur non-porteur composé de panneaux pleins préfabriqués en béton, exposé au feu sur une face, est exprimée en termes de critère EI (étanchéité et isolation thermique) et peut se déduire des valeurs tabulées issues de l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005), données dans le tableau 1.1 ci-dessous :

Tableau 1.1 : *Durée de résistance de murs non porteurs en éléments préfabriqués en béton*

Résistance au feu (EI)	30min	60min	90min	120min	180min	240min
Épaisseur minimale (cm)	10	11	12	15	20	25

Les valeurs relatives à un mur non porteur sont applicables dans le cas où son élancement (rapport hauteur/épaisseur) est limité à 40 (EN1992-1-2, 2005). Ceci correspond, pour une résistance au feu de 120min par exemple, à un mur de 15cm d'épaisseur dont la hauteur n'excède pas 6m. Cette limitation de hauteur, bien que très sécuritaire puisque la méthode l'est aussi, sera analysée dans le chapitre 3 où il sera démontré que les effets du second ordre deviennent très importants au-delà de cette hauteur.

### **1.5.1.2 Méthodes de calcul simplifiées**

Les *méthodes de calcul simplifiées* sont adoptées pour la vérification d'une *section chauffée* (2D) de l'élément de structure sous une combinaison d'actions. Elles sont plus précises que les méthodes par valeurs tabulées, car les températures dans la structure sont explicitement prises en compte dans cette approche. Ainsi, l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005) propose deux méthodes, la « *méthode de l'isotherme à 500°C* » et la « *méthode par zone* », pour le calcul de la résistance d'une section en béton armé en condition de *feu normalisé* pour les charges axiales, les moments fléchissants ou leurs combinaison.

La « *méthode de l'isotherme à 500°C* » est proposée sur la base de l'approximation selon laquelle le béton est supposé entièrement endommagé pour des températures supérieures à 500°C, tandis que la section de béton résiduelle conserve ses propriétés initiales. Les calculs sur cette section réduite sont ensuite réalisés en suivant les mêmes procédures que celles utilisées à température ambiante selon la méthode des états limites. Néanmoins, le fait de considérer une section réduite de béton implique que certaines barres d'armature peuvent se trouver en dehors de cette section réduite. En outre, ce calcul simplifié peut être non sécuritaire et donc très discutable, notamment dans le cas de petites sections, qui sont très sensibles à la température.

Recommandée pour les petites sections et les poteaux élancés, la « *méthode par zone* » définit une section réduite plus réaliste que celle de la « *méthode de l'isotherme à 500°C* ». Elle se fonde sur le principe selon lequel la section droite est subdivisée en plusieurs zones parallèles de même épaisseur. Dans chaque zone, la température moyenne est tout d'abord déterminée, suivie de l'évaluation des valeurs moyennes correspondantes de la résistance à la compression et du module d'élasticité du béton. La section réduite est ensuite déterminée en éliminant la zone endommagée suivant l'annexe B de l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005) et le calcul suit une procédure similaire à celle utilisée à froid.

### **1.5.1.3 Méthodes de calcul avancées**

Pour tenter d'aboutir à une solution complète prenant en compte l'ensemble des phénomènes physiques se produisant durant l'incendie, les « *méthodes de calcul avancées* » prennent généralement appui sur des outils informatiques lourds. Néanmoins, il faut garder à l'esprit que le terme « *avancé* » n'a qu'une signification qualitative. Selon l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005) ou son annexe nationale française (EN1992-1-2/AN, 2007) en matière de sécurité au feu des structures en béton, le mode de ruine le plus probable, les caractéristiques thermomécaniques des matériaux des éléments exposés, ainsi que les effets des dilatations thermiques et déformations doivent être pris en compte dans l'analyse globale d'un bâtiment. Devant la complexité du problème, l'Eurocode 2 ne met cependant pas à disposition des utilisateurs une méthode directement applicable de ce niveau de complexité, mais il existe des généralités et des données de base accessibles aux utilisateurs dans le développement de nombreux programmes numériques avancés. C'est le cas par exemple des

modèles mathématiques de comportement des matériaux béton et acier proposés sous forme de courbes contrainte-déformation mécanique uni-axiales.

Les figures 1.10 et 1.11 représentent, pour différentes températures, l'allure de l'évolution en fonction de la déformation mécanique du rapport de la contrainte uni-axiale sur la résistance caractéristique en compression du béton, et celle en traction-compression de l'acier. On constate immédiatement sur ces deux figures que le caractère non-linéaire de la courbe contrainte-déformation mécanique uni-axiale du béton est beaucoup plus prononcé que pour l'acier. En fonction de la température, la déformation maximale relative au pic de contrainte de l'acier reste constante, tandis que celle du béton est fortement dépendante de la température. Le traitement de cette non-linéarité dans l'analyse du comportement des structures est en effet encore sensiblement alourdi avec la prise en compte du gradient de déformations thermiques. Pour pouvoir faire converger les modèles numériques, il est admis d'adopter une partie descendante, linéaire ou non linéaire, jusqu'à la déformation ultime, qui correspond d'ailleurs à la valeur nulle de la contrainte (EN1992-1-2, 2005) de ces courbes contrainte-déformation uni-axiales.

La situation se complique lorsque le cas des sollicitations multiaxiales est envisagé, ce qui augmente déjà la difficulté du problème à température ambiante, aussi bien pour la formulation des lois de comportement des matériaux constitutifs, que pour leur intégration lors de la mise en œuvre d'une technique de résolution numérique du problème d'évolution. L'équation des surfaces de plasticité, même simplifiée, nécessite toujours la mise au point délicate d'algorithmes d'intégration complexes pour assurer la convergence de la solution finale du problème traité. Sur les aspects relatifs au comportement multiaxial à haute température, rien de tel n'apparaît dans l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005).

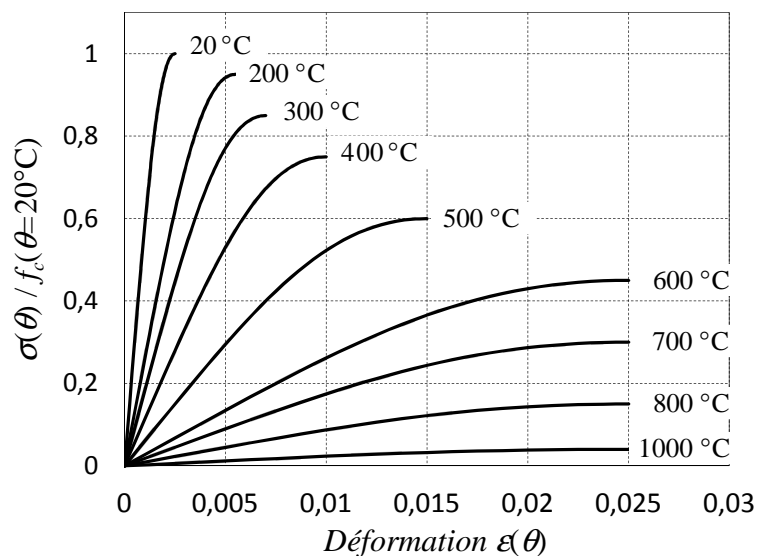


Figure 1.10. Modèle mathématique de la relation contrainte-déformation du béton de densité normale réalisé avec des granulats siliceux, en compression à températures élevées

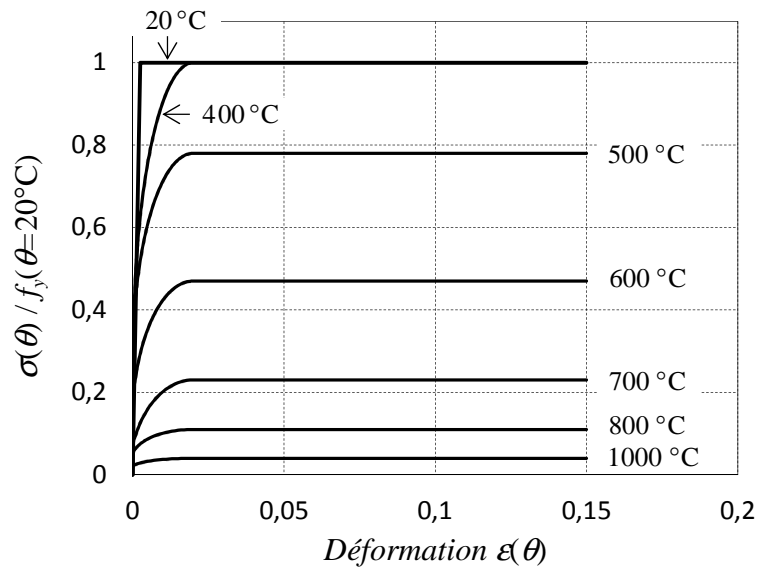


Figure 1.11. Modèle mathématique de la relation contrainte-déformation de l'acier laminé à chaud (classe N) à températures élevées

## 1.5.2 Différentes contributions au cours des dernières décennies

En plus des méthodes de calcul disponibles dans l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005), la diversité des publications que nous avons pu relever dans cette sous-section traduit les efforts entrepris pour la compréhension des problématiques propres aux panneaux de grandes dimensions. La question fondamentale qui se pose est de savoir s'il est possible en pratique d'obtenir une solution réaliste à l'aide des outils disponibles. Les différentes contributions que nous mentionnons ci-après ont porté aussi bien sur des méthodes simplifiées, que sur des calculs numériques avancés de structures complexes.

### 1.5.2.1 Modélisation de type poteau/poutre

La mise en charge d'un élément en flexion composée, similaire au modèle simplifié du panneau évoqué sur la figure 1.6, nous amène à nous interroger d'abord sur les méthodes disponibles permettant d'évaluer la résistance au feu des poteaux/poutres en béton armé. Une telle analyse peut alors être transposée à l'évaluation d'une section courante du panneau, car ce dernier se comporte comme un poteau soumis au feu uniquement sur une face. En effet, l'excentrement de l'effort de compression aux extrémités d'un poteau comprimé peut induire des effets du second ordre et l'analyse d'un poteau en compression-biflexion se réduit à un comportement en flexion composée.

Dans ce contexte, un modèle mathématique proposé par Lie et Celikkol (1991) pour l'évaluation de la résistance au feu d'un poteau de section circulaire a été appliqué à l'évaluation d'un poteau de section rectangulaire (Lie et Irwin, 1993). Le modèle est capable de calculer à la fois la distribution de la température dans la section, la déformation uniaxiale le long du poteau ainsi que la résistance sur la base des courbes contrainte-déformation

décrites dans (Lie et Celikkol, 1991). Les résultats du modèle ont été comparés à ceux d'essais de poteau dans lesquels les conditions aux extrémités sont de type encastrement tandis que le feu est appliqué de façon symétrique sur toutes les faces du poteau.

Un grand nombre de résultats expérimentaux sur des poteaux en béton armé en conditions d'incendie a été analysé dans (Franssen, 1997; Dotreppe et Franssen, 1998; Dotreppe *et al.*, 1999) aboutissant à proposer deux méthodes de calcul de la résistance au feu des poteaux. La première méthode est empirique. À partir de résultats d'essais et de calculs numériques, il a été proposé une loi décrivant l'évolution de la résistance en fonction de la position des barres d'armatures, la longueur de flambement, l'excentricité de la charge et le taux de chargement. Les coefficients liés à chacun de ces paramètres sont déterminés à l'aide d'un outil statistique simple, de manière à obtenir une bonne concordance avec les résultats d'essais. Ces formules semi-empiriques permettent d'avoir un résultat en tout point, évitant de passer par des interpolations comme c'est le cas pour la méthode des valeurs tabulées. Même si de nombreux essais ont été utilisés pour effectuer un tel calibrage, le fait de regrouper tous les paramètres dans une seule équation constitue une approximation relativement forte. Il convient donc de limiter l'application de cette méthode au domaine de variation des paramètres explorés (Franssen, 1997).

La deuxième méthode, également fondée sur l'observation de résultats expérimentaux et sur la simulation numérique, est plus élaborée que la première. Le principe de base consiste à exprimer la charge ultime de flambement d'un poteau soumis au feu, sous la forme d'une fraction de la charge de ruine plastique de la section. La particularité de la méthode réside dans l'introduction de deux coefficients fonction du temps, sans dimensions, qui expriment la chute des contributions relatives au béton et à l'acier au cours de l'incendie. Les lois d'évolution de ces deux coefficients ont été déterminées à l'aide de simulations numériques sur tronçon court de poutre en béton armé. La prise en compte de l'éclatement du béton dans l'évaluation de cette charge de ruine se fait à l'aide d'une fonction empirique réductrice simple. Malgré les quelques améliorations apportées, l'auteur (Franssen, 1997) mentionne que cette seconde méthode semble donner de moins bons résultats par rapport à la première méthode.

Toujours dans le cadre des méthodes destinées à évaluer la résistance au feu des poteaux, une extension de la méthode de prédiction de la résistance ultime d'un poteau à température ambiante (ACI, 2000) a été proposée par Tan et Yao (2003). Cette méthode emploie le diagramme d'interaction entre la charge axiale concentrée et le moment fléchissant ( $P$ ,  $M$ ) correspondant à différentes valeurs constantes de température. Deux cas de figure sont étudiés, d'abord pour le cas symétrique d'un poteau chauffé sur les quatre côtés, puis dans les cas plus complexes d'un poteau sollicité au feu sur une, deux ou trois faces (Tan et Yao, 2004), dans lesquels le déplacement de l'axe neutre est pris en compte. La méthode se base essentiellement sur l'outil numérique Safir (Franssen, 2005) pour la détermination des facteurs de réduction de résistance du béton et de l'acier, ainsi que de leur modules d'élasticité dans la section. Le principe de la méthode consiste à trouver le point

correspondant à la rupture du poteau sur le diagramme d'interaction ( $P$ ,  $M$ ), en prenant en compte les caractéristiques moyennes de la section chauffée et la déformée du poteau.

En ce qui concerne l'évaluation de la résistance ultime d'une section courante d'un poteau soumis au feu, l'emploi de diagrammes d'interaction ( $N$ ,  $M$ ) a été également proposé par (Caldas *et al.*, 2010; Law et Gillie, 2010). Différents algorithmes numériques ont été mis au point afin de déterminer de tels diagrammes d'interaction sur la base des courbes contrainte-déformation uni-axiales proposées par l'Eurocode 2 (EN1992-1-2, 2005).

Enfin, Heck (2009) a également proposé une approche pour l'évaluation de la stabilité au feu d'un panneau sandwich en béton de grande hauteur. La déformation d'un panneau de grande hauteur est approchée par une fonction polynomiale, en vérifiant les conditions aux limites sur les déplacements et sur la courbure et la condition que le moment et la courbure doivent avoir leur maximum à la même hauteur. Sur la base de cette hypothèse et à l'aide du logiciel CIM'feuEC2 développé par le CSTB et produit par CIMbéton (CSTB et CIMbéton, 2011), une courbe assurant la correspondance entre la courbure maximale et le moment maximal est obtenue numériquement. Cependant, l'extension de la démarche dans le cadre d'un modèle plus réaliste nécessite encore des développements, notamment en ce qui concerne l'identification d'une loi de comportement multiaxiale du béton en fonction de la température.

### ***1.5.2.2 Modèles de type coque/plaque***

Les *effets bi-dimensionnels* susceptibles d'être traduits par modèle de type *coque/plaque* du panneau, nous amènent à introduire les efforts membranaires de compression dans le plan du panneau en plus des moments fléchissants dans ce même plan. Ainsi, à température ambiante, Koechlin (2007) postule la formulation d'un critère portant sur tous les efforts membranaires et les moments de flexion, par généralisation du critère de Johansen (1962) pour une plaque, puis effectue la comparaison avec les essais de Polak et Vecchio (1994) et de Pascu (1995) dans le cas où les effets de torsion et de cisaillement transverse sont négligés.

Dans le domaine de la sécurité des structures au feu, la voie suivie actuellement par plusieurs chercheurs consiste à s'appuyer sur l'utilisation des lois constitutives multiaxiales pour le béton. Ainsi, le critère de plasticité de Drucker-Prager a été beaucoup utilisé pour la modélisation du comportement du béton à température ambiante (voir par exemple : Loret et Prevost, 1986; Jasona et Durand, 2007). Pour des sollicitations thermiques, les critères de plasticité, tel que celui de Drucker-Prager, sont généralement modifiés pour être pris en compte dans la modélisation, les déformations d'origine thermique ainsi que la dépendance des caractéristiques mécaniques à la température (Nechnecha *et al.*, 2002). De manière différente, Gernay (Gernay, 2012) a mis en oeuvre, par un couplage de la théorie de plasticité et d'endommagement, en se basant sur des résultats d'essais expérimentaux, un modèle multiaxial du béton pouvant être implanté dans un code aux éléments finis. Malgré certains

résultats encourageants, le caractère primordial des problèmes rencontrés avec certaines méthodes d'intégration (Franssen, 1997; Heinfling, 1998 ; Gernay, 2012) subsiste.

### **1.5.2.3 Emploi des logiciels de simulation numérique**

Lorsqu'une simulation numérique est envisagée pour étudier le comportement des structures vis-à-vis de l'incendie, il est important de savoir si le programme est capable de résoudre des problèmes que l'on se propose de traiter et dans ce cas d'évaluer la qualité et la fiabilité des résultats obtenus. Dans un domaine où les non-linéarités géométriques et matérielles sont essentielles à prendre en compte, il n'est pas facile de maîtriser tous les paramètres d'entrée dans un programme, sans connaissance préalable des hypothèses de calcul du développeur du programme. Un outil permettant l'analyse de structures soumises à un incendie dans des conditions aussi diverses que possibles est évidemment souhaitable. De nos jours, grâce à la richesse des bibliothèques de types d'éléments finis, ainsi que de lois constitutives de matériaux, des programmes de calcul commerciaux à vocation générale (Ansys, Abaqus, Marc,...) sont susceptibles de posséder potentiellement les capacités nécessaires à la modélisation efficace d'un tel comportement de structure. À titre d'exemple, plusieurs études s'appuyant sur de telles modélisations numériques des structures en béton armé ou en béton précontraint dans un incendie peuvent être citées ici : Sanad *et al.* (2000); Zha (2003); Ellobody et Bailey, (2009). Ces logiciels présentent l'avantage de posséder une interface graphique qui permet aux utilisateurs un accès interactif à des fonctions du programme, de la documentation et du matériel de référence. Ils proposent souvent un système de menu intuitif qui permet aux utilisateurs de naviguer dans le logiciel. Cependant, l'utilisation de ces logiciels peut se révéler assez complexe. Leur prise en main est difficile et nécessite en général une formation préalable, sans oublier que leur vocation générale oblige l'utilisateur à investir plus de temps afin d'adapter l'outil au domaine d'utilisation, en l'occurrence, pour des problèmes de stabilité au feu de structures. Ceci inclut le développement de sous-programmes permettant de décrire des lois de comportement ou de dépendance propres à certains matériaux de construction. Aussi, d'un point de vue technique, la convergence de l'analyse mécanique lorsque la structure est proche de l'état de rupture ultime est parfois problématique. En outre, le prix parfois élevé de la licence peut constituer un obstacle financier pour un dimensionnement courant.

Parmi les logiciels dédiés spécifiquement à l'analyse du comportement de bâtiments ou d'éléments de structures soumis au feu, le programme Safir (Franssen, 2005), développé à l'Université de Liège, sert de point de référence permettant la validation de méthodes simples (Tan et Yao, 2003; 2004) et la comparaison avec des essais expérimentaux (Dotreppe *et al.*, 1999; Lim *et al.*, 2004). De manière générale, le code a été conçu de sorte que les aspects thermiques et les aspects mécaniques du problème ne soient pas couplés. La distribution de température à l'intérieur de la section des éléments est déterminée de façon indépendante de l'analyse mécanique, par la méthode des éléments finis. L'évolution de la température dans le temps, calculée indépendamment des charges appliquées et de l'état de contrainte préexistant

dans la structure, a pour effet de créer des dilatations thermiques et de modifier les propriétés des matériaux.

La modélisation par lois constitutives uni-axiales est basée sur le principe du modèle «fibres 1D» dans lequel la section de l'élément est discrétisée en plusieurs fibres rectangulaires, ou triangulaires, ou encore quadrangulaires. Les lois constitutives uni-axiales sont données sous forme intégrée, la loi contrainte-déformation mécanique correspondant à une température quelconque étant caractérisée par une courbe non-linéaire.

En ce qui concerne le comportement de structures traitées comme des plaques bidimensionnelles, la modélisation du comportement au feu peut être réalisée grâce à l'utilisation d'un modèle de comportement multiaxial en tenant compte d'un certain nombre de simplifications. En traction, le critère utilisé pour le béton est celui de Rankine qui limite chaque contrainte principale de traction à une valeur limite, indépendamment des autres contraintes. Pour un état de contrainte plan, la surface correspondant au critère de Von-Mises, utilisé pour des aciers, est aussi utilisée pour représenter l'écoulement du béton en compression. Néanmoins, l'emploi d'un tel critère peut par exemple conduire à surévaluer la résistance en compression d'une dalle carrée appuyée sur ses quatre côtés (Franssen, 1997).

### **1.5.3 Intérêt de l'approche Calcul à la Rupture**

Après analyse des méthodes de calcul présentées plus haut, il nous paraît nécessaire de proposer de nouvelles approches propres à la problématique de la stabilité au feu des panneaux en béton armé de grandes dimensions. En effet, la modélisation du panneau vis-à-vis de l'incendie par les méthodes simplifiées ne permet pas de prendre en compte les effets du second ordre provoqués par l'excentrement du poids propre induit par le chargement thermique. Outre l'aspect purement empirique ou semi-empirique de telles approches, les modèles présentent des insuffisances quant à la simulation réaliste du comportement à la rupture de la structure.

Nous avons vu ainsi que la méthode des éléments finis est couramment utilisée pour l'élaboration et la mise au point de la plupart des méthodes de calculs numériques disponibles. Le caractère fortement non-linéaire du comportement du béton est source de nombreuses difficultés, notamment sur le plan numérique. Par voie de conséquence et pour des raisons d'ordre numérique, les calculs aux éléments finis se prêtent mal au traitement du comportement du béton, notamment lorsque sa résistance à la traction est négligée pour des raisons de sécurité. Ainsi, la mise en œuvre d'une technique de résolution par éléments finis comporte par exemple des difficultés de convergence lorsque la structure est proche de l'état de rupture ultime. Lorsqu'il s'agit de mettre en œuvre une telle technique pour l'évaluation de la résistance au feu des panneaux de grande hauteur, les champs de températures non-uniformes, les dilatations thermiques différentielles et les changements de géométrie dont l'effet ne peut plus être négligé, sont autant de facteurs qui contribuent fortement à la complexité du problème.



Pour des raisons qui ont été abordées ci-dessus, nous proposons dans ce manuscrit une nouvelle approche pour l'évaluation de la tenue au feu des panneaux en béton armé de grandes dimensions. La méthode proposée repose sur la mise en œuvre de la théorie du Calcul à la Rupture dont l'objet est la détermination directe des charges de ruine d'une structure à partir de l'analyse des conditions assurant la compatibilité entre l'équilibre de la structure (le panneau) et le respect en tout point d'un *critère de résistance*. Cette approche offre donc un cadre théorique rigoureux et cohérent d'un point de vue mécanique, parfaitement adapté aux calculs à l'état limite ultime de structures. Le principe général de la théorie du Calcul à la Rupture est rappelé ci-après, dans le cadre de la mécanique des milieux continus tridimensionnels : voir entre autres (de Buhan, 2007; Salençon, 1983; 2002; 2013).

## 1.6 PRINCIPE DE L'APPROCHE CALCUL À LA RUPTURE

### 1.6.1 Données d'un problème de Calcul à la Rupture

La position d'un problème de Calcul à la Rupture repose en tout premier lieu sur la connaissance de la *géométrie* du système occupant un domaine  $\Omega$  de bord  $\partial\Omega$ , repéré par un trièdre  $Oxyz$  supposé orthonormé (figure 1.12). Dans l'hypothèse des *petites perturbations* où nous nous plaçons, les changements de géométrie peuvent être négligés et le domaine  $\Omega$  représente à la fois la configuration initiale et la configuration actuelle (c'est-à-dire soumis au chargement) du système (de Buhan, 2007).

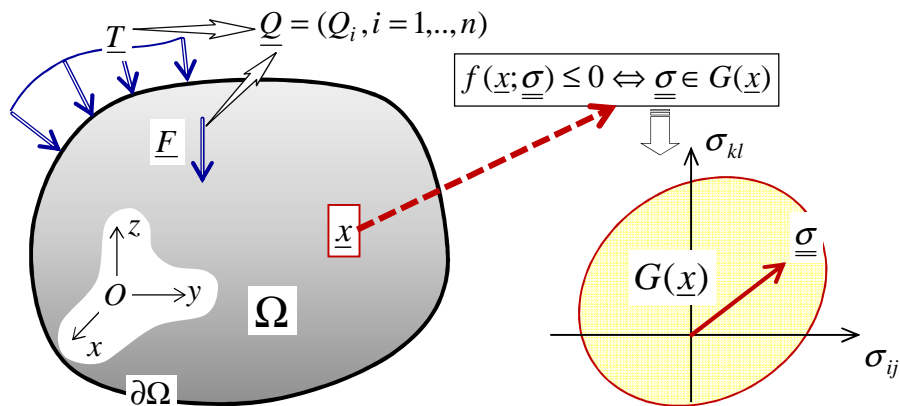


Figure 1.12. Données de chargement et de critère de résistance relatives à un problème de Calcul à la Rupture pour le milieu continu 3D

Dans cette géométrie ainsi fixée, le système est supposé soumis à un *mode de chargement* à  $n$  paramètres représenté par un vecteur  $\underline{Q} = (Q_i, i=1, \dots, n)$ . Les données relatives au chargement sont classiquement de deux types : *forces volumiques* à distance d'une part (la pesanteur par exemple), caractérisées par un champ vectoriel  $\rho \underline{F}$  ( $\rho$  : masse volumique), distribution d'efforts surfaciques  $\underline{T}$  appliqués sur le contour  $\partial\Omega$ , d'autre part.

Le critère de résistance est défini, en chaque point  $\underline{x}$  du système  $\Omega$ , par une limitation portant sur l'état de contrainte en ce point. Dans le formalisme du milieu continu 3D, ce critère peut se formuler de la manière suivante (Salençon, 1983; 2013) :

$$\forall \underline{x} \in \Omega, f(\underline{x}; \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})) \leq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad (1.1)$$

où  $f(\cdot)$  désigne une fonction à valeur scalaire du tenseur des contraintes locales tandis que  $G(\underline{x})$  représente le *domaine de résistance* dans l'espace des contraintes en un point  $\underline{x}$ . Plus précisément :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \begin{cases} < 0 \text{ si } \underline{\underline{\sigma}} \text{ intérieur à } G \\ = 0 \text{ si } \underline{\underline{\sigma}} \text{ sur la frontière de } G \\ > 0 \text{ si } \underline{\underline{\sigma}} \text{ extérieur à } G \end{cases} \quad (1.2)$$

où la troisième condition est physiquement impossible.

Le domaine de résistance  $G(\underline{x})$  décrivant les capacités de résistance locale du matériau constitutif possède généralement les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall \underline{x} \in \Omega : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{0} \in G(\underline{x}) \\ \forall \underline{x} \in \Omega, \forall \underline{\underline{\sigma}}^1(\underline{x}), \underline{\underline{\sigma}}^2(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \Rightarrow (1 - \lambda)\underline{\underline{\sigma}}^1(\underline{x}) + \lambda\underline{\underline{\sigma}}^2(\underline{x}) \in G(\underline{x}), \quad \forall \lambda \in [0,1] \end{aligned} \quad (1.3)$$

La première, qui exprime que le domaine de résistance contient l'origine, semble tout à fait naturelle car elle signifie simplement que le matériau résiste à l'état de contrainte nulle. La seconde, qui exprime la *convexité* du domaine de résistance, est en pratique toujours vérifiée (Salençon, 2002).

Par comparaison à l'*analyse limite* qui détermine les *chargements limites* de la structure par la compatibilité entre l'équilibre du système et la condition de parfaite plasticité de son matériau constitutif, le Calcul à la Rupture apporte la réponse des *chargements potentiellement supportables*, l'expression de la compatibilité « *équilibre-résistance* ». L'adverbe « *potentiellement* » vise à signifier que, hormis dans le cas particulier où le critère de résistance est un critère de plasticité parfaite avec règle d'écoulement plastique associée (cas de l'analyse limite), on n'est nullement assuré que les chargements extrêmes déterminés par le raisonnement de Calcul à la Rupture puissent être effectivement atteints le long d'un trajet de chargement (de Buhan, 2007).

Se plaçant dans la situation d'un *mode de chargement* à nombre fini de paramètres tel que décrit précédemment, le domaine  $K$  des *chargements potentiellement supportables* par la structure est alors défini (Salençon, 2013) comme l'ensemble de chargements  $\underline{Q}$  tels qu'il soit possible de mettre en évidence un champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  statiquement admissible (S.A.) avec  $\underline{Q}$  et vérifiant en tout point le *critère de résistance* (1.1) du matériau constitutif :

$$\underline{Q} \in K \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\sigma} \text{ SA avec } \underline{Q} & \rightarrow \text{Condition de l'équilibre} \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \forall \underline{x} \in \Omega & \rightarrow \text{Condition de résistance} \end{cases} \quad (1.4)$$

S'il apparaît donc que les chargements extrêmes déterminés par le Calcul à la Rupture ne sont que *potentiellement accessibles* au terme d'un trajet de chargement, il est clair en revanche qu'aucun chargement situé à l'extérieur du domaine  $K$  ne peut être atteint, puisque la compatibilité équilibre-résistance qu'exprime le raisonnement du Calcul à la Rupture, et qui constitue une *condition nécessaire* de stabilité de la structure, n'est alors même pas satisfaite. De plus, il convient de noter que les propriétés supposées valables pour tout  $G(\underline{x})$  sont transposables au domaine  $K$ , qui contient donc le chargement  $\underline{Q}=0$  (une conséquence immédiate du fait que le champ de contrainte uniformément nul est statiquement admissible avec le vecteur des forces généralisées) et vérifie la propriété de convexité. Les chargements  $\underline{Q}^*$  situés sur la frontière de  $K$  sont donc les *chargements extrêmes* de la structure, c'est-à-dire tout chargement  $\underline{Q}$  situé à l'extérieur du domaine  $K$  conduira certainement à la ruine.

### 1.6.2 Approche statique par l'intérieur de $K$

L'approche statique par l'intérieur de  $K$  consiste à appliquer la définition du domaine  $K$  des chargements potentiellement supportables, donnée par (1.4). Il s'agit pour une valeur donnée du chargement  $\underline{Q}$ , de mettre en évidence un champ de contrainte équilibrant ce chargement tout en respectant le critère de résistance en tout point du système analysé. Pour identifier des points (chargements) appartenant au domaine  $K$ , il suffit donc d'être capable de construire de tels champs de contrainte. Il est important d'observer qu'un tel champ de contrainte n'est pas unique.

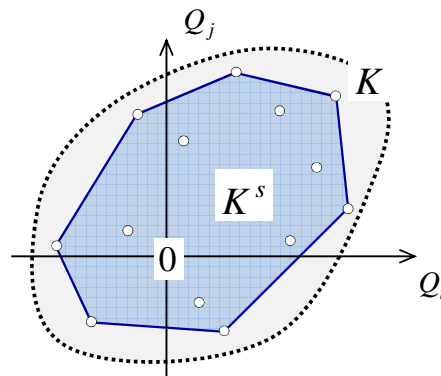


Figure 1.13. Construction d'une approche statique par l'intérieur du domaine  $K$

Étant donné, dans l'espace des paramètres de chargement  $\underline{Q}$ , un ensemble de points représentatifs de chargements potentiellement supportables appartenant à  $K$ , la propriété de *convexité* permet d'affirmer que l'*enveloppe convexe* de ces points (notée  $K^s$  et définie comme le plus petit ensemble convexe les contenant) est incluse dans le domaine  $K$  (figure 1.13). Cette enveloppe constitue une *approche statique par l'intérieur* du domaine  $K$ . Le long

d'un trajet de chargement donné (radial par exemple), la valeur maximale obtenue par une telle approche représente un *minorant* ou *borne inférieure* du chargement *extrême* (ou de ruine) de la structure le long de ce trajet de chargement, située sur la frontière du domaine  $K$ .

### 1.6.3 Approche cinématique par l'extérieur de $K$

Le principe de l'approche cinématique par l'extérieur est d'identifier des points de l'espace des chargements qui n'appartiennent pas au domaine  $K$ . Cette approche repose entièrement sur le *Principe des Puissances Virtuelles*.

#### 1.6.3.1 Principe des Puissances Virtuelles

On désigne par  $\underline{U}$  un *champ de vitesses virtuelles* dont il est essentiel de préciser qu'il n'est *a priori* astreint à aucune des limitations imposées aux *mouvements réels* (liaisons, condition d'incompressibilité, etc.). Un tel champ peut en particulier comporter des surfaces de discontinuité  $\Sigma_U$  au franchissement desquelles le champ de vitesse possède une discontinuité notée  $[\underline{U}]$ . Ce champ est supposé cinématiquement admissible (C.A.) pour le problème considéré, c'est-à-dire vérifiant les conditions aux limites en vitesse sur le contour  $\partial\Omega$ .

Par l'introduction d'un *vecteur des paramètres cinématiques généralisés*  $\dot{q}$ , associé par dualité au vecteur  $\underline{Q}$  des paramètres de chargement, la *puissance virtuelle des efforts extérieurs* appliqués au système  $\Omega$ , définie par :

$$P_e(\underline{U}) = \int_{\Omega} \rho \underline{F} \underline{U} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T} \underline{U} dS \quad (1.5)$$

peut s'écrire sous forme d'un produit scalaire :

$$P_e(\underline{U}) = \underline{Q} \dot{q}(\underline{U}) \quad (1.6)$$

Le *Principe des Puissances Virtuelles* exprime l'égalité de la *puissance virtuelle des efforts extérieurs* et de la *puissance virtuelle de déformation*, dont l'expression est donnée par :

$$P_d(\underline{U}) = \int_{\Omega} (\underline{\sigma} : \underline{d}) d\Omega + \int_{\Sigma_U} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot [\underline{U}] d\Sigma \quad (1.7)$$

où  $\underline{d}$  désigne le *taux de déformation virtuel* associé en tout point au champ  $\underline{U}$  par :

$$\underline{d} = \frac{1}{2} \{ \underline{\text{grad}} \underline{U} + {}^T \underline{\text{grad}} \underline{U} \} \quad (1.8)$$

Le Principe des Puissances Virtuelles s'écrit donc :

$$\forall \underline{U} \text{ C.A. avec } \dot{q}(\underline{U}), \quad \forall \underline{\sigma} \text{ S.A. avec } \underline{Q}$$

$$\underline{Q}\dot{q} = \int_{\Omega} (\underline{\sigma} : \underline{d}) d\Omega + \int_{\Sigma_U} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot [\underline{U}] d\Sigma \quad (1.9)$$

Il convient d'insister sur le fait que le Principe des Puissances Virtuelles exprime la dualisation mathématique des conditions d'équilibre d'un système. Il n'y a pas lieu de le rapprocher de quelconques considérations de type « énergétique » ou « thermodynamique » (de Buhan, 2007). Il constitue en revanche l'outil essentiel de l'approche cinématique par l'extérieur de Calcul à la Rupture.

### 1.6.3.2 Puissance résistante maximale

Définie comme la valeur maximale de la puissance virtuelle de déformation compte tenu du critère de résistance du matériau en tout point, la *puissance résistante maximale* a pour expression :

$$P_{rm}(\underline{U}) = \int_{\Omega} \pi(\underline{d}) d\Omega + \int_{\Sigma_U} \pi(\underline{n}; [\underline{U}]) d\Sigma \quad (1.10)$$

où :

$$\pi(\underline{d}) = \sup\{\underline{\sigma} : \underline{d}; \underline{\sigma} \in G\} \quad ; \quad \pi(\underline{n}; [\underline{U}]) = \sup\{(\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot [\underline{U}]; \underline{\sigma} \in G\} \quad (1.11)$$

sont les *fonctions d'appui* du domaine de résistance  $G$ .

Compte tenu de cette définition, l'implication suivante est évidente :

$$\forall \underline{x} \in \Omega, \quad \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \Rightarrow \forall \underline{U}, \quad P_d(\underline{U}) \leq P_{rm}(\underline{U}) \quad (1.12)$$

Il apparaît par ailleurs, que les fonctions  $\pi$  définies par (1.11) sont toujours positives ou nulles car l'état de contrainte nulle appartient au domaine  $G$ . Il en est donc de même de la puissance résistante maximale.

### 1.6.3.3 Approche cinématique par l'extérieur

Partant de la définition du domaine  $K$  par voie statique dans laquelle l'équilibre est exprimé à travers le *Principe des Puissances Virtuelles*, il vient :

$$\underline{Q} \in K \Leftrightarrow \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \exists \underline{\sigma} \text{ S.A. avec } \underline{Q} \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega \end{array} \right\}}_{\text{approche statique}} \Leftrightarrow \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{U} \text{ C.A. avec } \dot{q}; \quad \underline{Q}\dot{q} = P_d(\underline{U}) \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega \end{array} \right\}}_{\text{approche cinématique}} \quad (1.13)$$

En vertu de (1.9), il apparaît alors qu'une *condition nécessaire* pour qu'un chargement  $\underline{Q}$  soit potentiellement supportable s'écrit :

$$\underline{Q} \in K \Rightarrow \forall \underline{U} \text{ C.A. avec } \underline{\dot{q}}; \underline{Q}\underline{\dot{q}} \leq P_{rm}(\underline{U}) \quad (1.14)$$

Cette dernière inégalité donne lieu à une interprétation géométrique : le domaine  $K$  est inclus dans le demi-espace contenant l'origine et délimité par le plan d'équation :

$$\underline{Q}\underline{\dot{q}}(\underline{U}) = P_{rm}(\underline{U}) \quad (1.15)$$

Le domaine  $K$  des chargements potentiellement supportables appartient donc au demi-espace tel que  $\underline{\dot{q}}(\underline{U})$  soit un vecteur normal extérieur à ce demi-espace (figure 1.14).

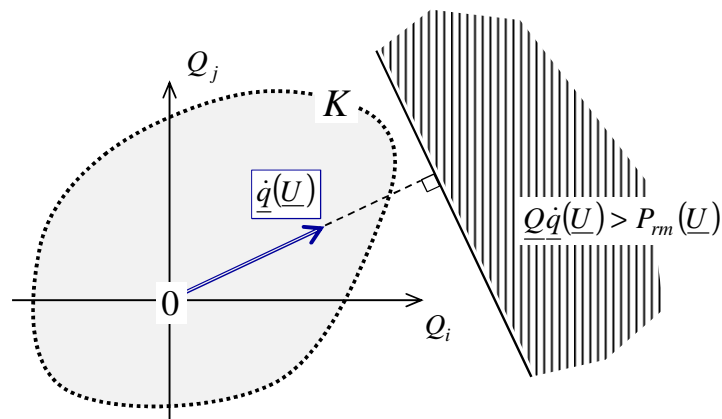


Figure 1.14. Interprétation géométrique de l'approche cinématique par l'extérieur

En considérant successivement un certain nombre de champs de vitesse virtuelle cinématiquement admissibles pour lesquels on calcule la puissance des efforts extérieurs et la puissance résistante maximale, on élimine autant de demi-espaces auxquels le domaine  $K$  ne peut appartenir et par conséquent autant de demi-espaces complémentaires auxquels il appartient. Le domaine convexe  $K^c$  formé par l'intersection de ces derniers constitue une approche cinématique par l'extérieur du domaine  $K$  (figure 1.15). L'approche cinématique par l'extérieur du Calcul à la Rupture conduit à l'obtention de *majorants* ou *bornes supérieures* des chargements extrêmes.

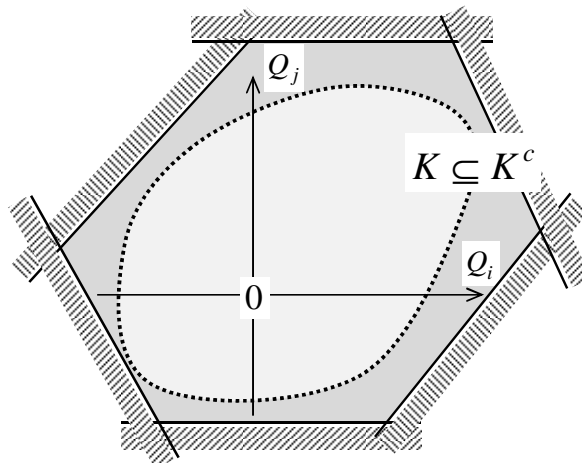


Figure 1.15. Construction d'une approche cinématique par l'extérieur du domaine  $K$

#### 1.6.3.4 Condition de pertinence des champs de vitesse

La définition (1.11) des fonctions d'appui  $\pi$  peut conduire, pour certaines directions du tenseur  $\underline{d}$  (ou de l'orientation de la discontinuité de vitesse par rapport à la surface de discontinuité) à des valeurs infinies de ces fonctions et donc de la puissance résistante maximale. Dans ce cas, les plans délimitant les demi-espaces auxquels le domaine  $K$  ne peut appartenir sont rejetés à l'infini et aucune conclusion pratique ne peut être déduite. Dans ces conditions, l'obtention de majorants effectifs des chargements extrêmes (c'est-à-dire qui ne soient pas infinis) suppose que deux conditions relatives aux champs de vitesses soient remplies :

- ◇ la puissance des efforts extérieurs dans un tel champ de vitesse doit être non nulle;
- ◇ la puissance résistante maximale (et donc les fonctions d'appui) doit prendre des valeurs finies, c'est-à-dire que les champs de vitesse doivent satisfaire la « *condition de pertinence* ».

Il est important de noter que la *condition de pertinence* est liée à la possibilité ou non de pouvoir calculer les fonctions d'appui, et donc la *puissance résistante maximale*. Elles n'ont en particulier rien à voir avec le caractère plus ou moins « *physiquement réaliste* » des champs de vitesse virtuels. En effet, il convient de rappeler que ceux-ci n'ont pas à être soumis aux limitations imposées aux mouvements réels (de Buhan, 2007 ; Salençon, 2013).

Dans la pratique, il n'est le plus souvent pas possible de déterminer exactement le domaine  $K$ , même en combinant les deux approches. L'utilisation conjointe de ces dernières permet d'aboutir à un encadrement du domaine  $K$  comme schématisé sur la figure 1.16.

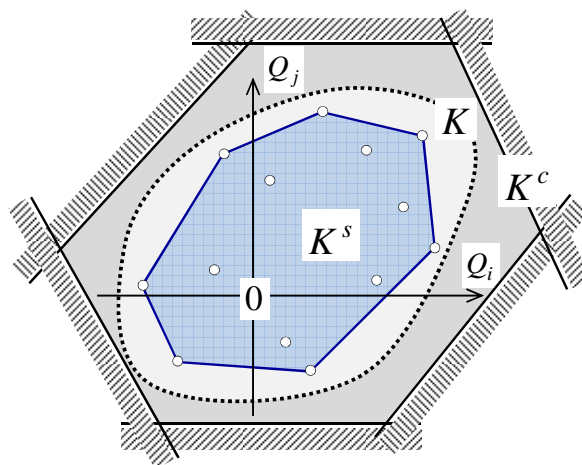


Figure 1.16. Comparaison des résultats des deux approches du Calcul à la Rupture

## 1.7 POSITION DU PROBLÈME DE STABILITÉ AU FEU DES PANNEAUX EN BÉTON ARMÉ DE GRANDES DIMENSIONS DANS LE CADRE DU CALCUL À LA RUPTURE

L'objectif du présent travail est d'étendre le champ d'application du Calcul à la Rupture (Salençon, 1983; 2002; 2013; de Buhan, 2007) afin de permettre l'analyse de la stabilité globale des panneaux de grandes dimensions, sans qu'il soit nécessaire de recourir à des calculs numériques longs en termes de temps et compliqués en termes de convergence numérique, tels qu'ils ont été analysés ci-dessus. Le présent travail traite de deux modèles de référence d'une telle structure de panneau: un *modèle simplifié de type poutre* d'une part et un modèle plus réaliste de type plaque ou dalle. Les prochains chapitres sont donc organisés comme indiqué sur la figure 1.17.

Les trois chapitres qui suivent (c'est-à-dire les chapitres 2, 3 et 4) qui constituent la première partie du mémoire, traitent de façon exhaustive du modèle simplifié de type poutre, où la démarche adoptée ainsi que les traits originaux qu'elle comporte sont détaillés. Celle-ci comporte trois étapes successives:

- ◇ Le chapitre 2 présente et met en œuvre une *méthode de changement d'échelle* permettant d'évaluer et de quantifier la dégradation de la résistance d'une section en béton armé soumise à l'action du feu, sous la forme d'une courbe d'interaction dépendant de la température. L'objectif de ce chapitre est de déterminer par la mise en œuvre des approches du Calcul à la Rupture, les capacités de résistance à l'effort normal et au moment de flexion de n'importe quelle section du panneau en fonction d'un gradient de température prescrit caractéristique d'une sollicitation de type incendie. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux déduits des règles courantes telles que celles de l'Eurocode 2 dans le cas d'une température ambiante.
- ◇ Faisant référence à la configuration déformée du panneau sous l'action du chargement thermique, un *effet de second ordre* est alors mis en évidence au chapitre 3. Ce chapitre vise d'abord à évaluer la configuration d'équilibre du panneau sous l'action conjuguée d'un gradient thermique et de son poids propre, puis à calculer les sollicitations (effort normal et moment fléchissant) qui en résultent localement dans chaque section du panneau.
- ◇ Le quatrième chapitre porte sur l'analyse par le Calcul à la Rupture d'un modèle simplifié du panneau dans sa configuration déformée préalablement déterminée au chapitre 3; en tenant compte de la dégradation des propriétés de résistance en toute section du panneau déterminées au chapitre 2. Un facteur, appelé par la suite *facteur de stabilité*, permettant d'évaluer le degré de sécurité quant à la stabilité du panneau, est alors défini pour l'objectif de développer une solution qui servira de référence à des modèles de panneaux plus réalistes.



Le modèle de type plaque/dalle adopté pour un panneau de grandes dimensions (grande hauteur et largeur limitée) est traité dans les chapitres 5 et 6 qui constituent la seconde partie du mémoire. Ce modèle représente une extension de la modélisation simplifiée mise au point dans la première partie :

- ◇ L'objet du chapitre 5, homologue « bidimensionnel » du chapitre 2, est de formuler un critère de résistance en tout point du panneau qui tienne compte de l'effet du feu. La prise en compte du caractère fortement hétérogène des matériaux dont la résistance est fortement affectée par la température élevée passera par la définition, puis la mise en œuvre d'une démarche d'homogénéisation en Calcul à la Rupture.
- ◇ Une approche cinématique par l'extérieur fondée sur l'utilisation de mécanismes de ruine simples avec charnières est mise en œuvre dans le chapitre 6, en vue d'analyser la stabilité globale de la structure du panneau dans sa configuration déformée. Ces mécanismes correspondent à un saut de vitesse dans le plan du panneau à la traversée d'une ligne de discontinuité, combiné à une discontinuité du taux de rotation à la traversée de cette même ligne. Ce chapitre se termine par un exemple de dimensionnement au feu d'un panneau rectangulaire de grandes dimensions dont on fait progressivement croître la largeur. Les premiers résultats obtenus par cette méthode, qu'il faut interpréter avec précaution compte tenu du fait que l'on obtient des majorants du facteur de stabilité, semblent suggérer en première analyse, que pour des mêmes caractéristiques de section (même épaisseur et même taux de renforcement), le modèle de type plaque conduit à une bien meilleure stabilité que celle prédite par le modèle simplifié de type poutre.

Enfin la troisième et dernière partie, constituée du chapitre 7, est consacrée à tester au moins partiellement la validité de l'approche proposée. On présente en premier lieu une étude expérimentale réalisée par ailleurs, ainsi que l'interprétation de ses résultats. Dans la seconde partie du chapitre, on présentera les résultats que nous avons obtenus dans le cadre d'essais de flexion quatre points sur dalles chargées jusqu'à la rupture dans des conditions de fortes élévations de température. Les résultats de ces deux études expérimentales semblent bien confirmer la validité des calculs effectués au chapitre 2 pour déterminer le diagramme d'interaction au feu d'une section de panneau en béton armé.

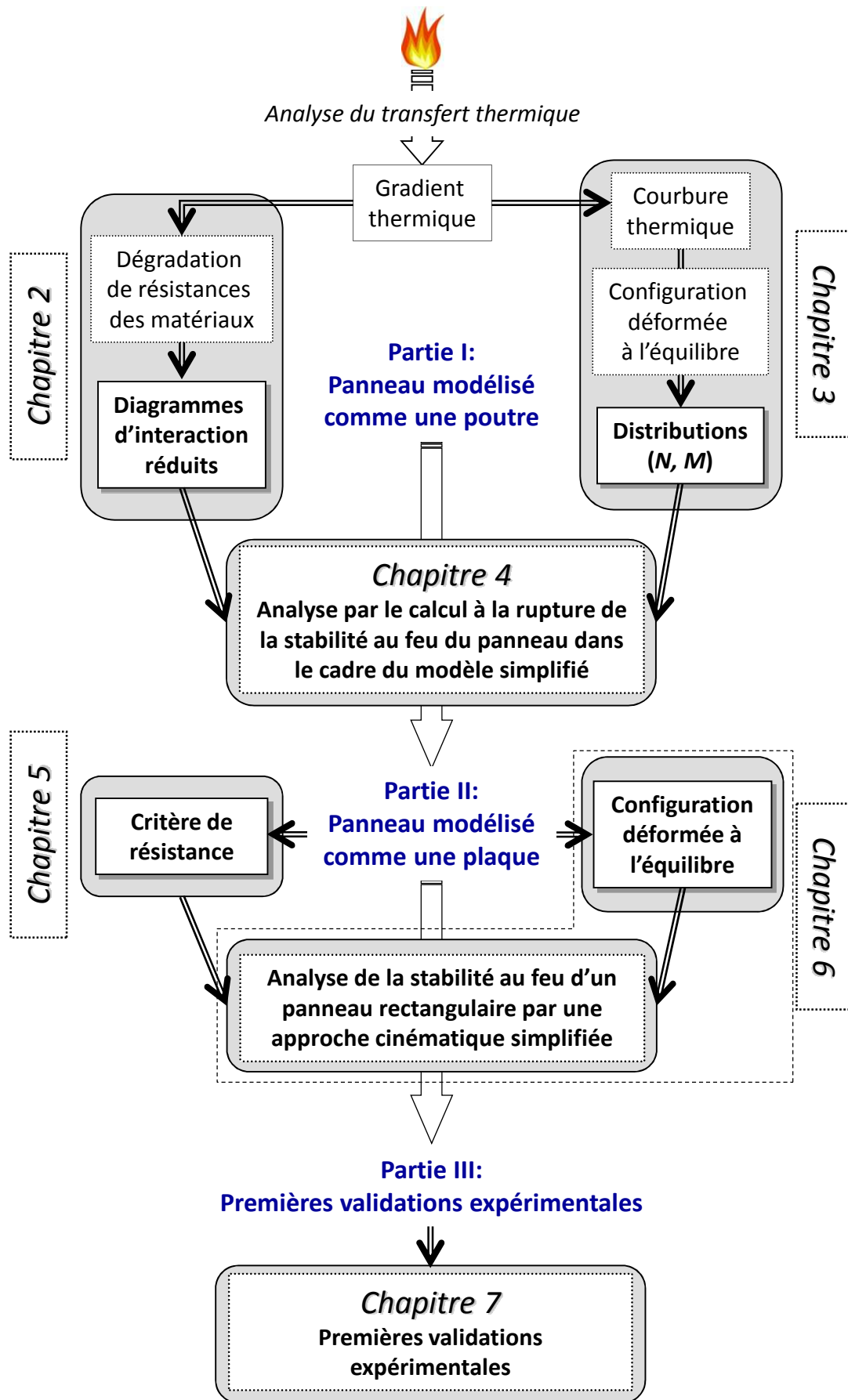


Figure 1.17. Organisation des principaux chapitres du manuscrit



**PARTIE I**

**PANNEAU MODÉLISÉ COMME UNE  
POUTRE**



## Chapitre 2

# UNE MÉTHODE DE CHANGEMENT D'ÉCHELLE POUR LA DÉTERMINATION DES DIAGRAMMES D'INTERACTION SOUS L'EFFET DE LA TEMPÉRATURE ÉLEVÉE

### 2.1 INTRODUCTION

Le dimensionnement en flexion composée des éléments en béton armé passe généralement par la détermination du diagramme d'interaction de la section. Ce diagramme, tracé dans le plan des chargements *effort normal-moment fléchissant* ( $N$ ,  $M$ ), fournit une illustration graphique de la capacité de charge axiale et de flexion ultime. Cette courbe peut être classiquement établie en tenant compte de toutes les distributions de contraintes admissibles correspondantes aux états limites ultimes (ELU) dans la section, comme cela est décrit par exemple dans l'Eurocode 2 partie 1-1 (EN1992-1-1, 2005). Plus précisément, trois points caractéristiques, généralement appelés «pivots», sont définis, qui correspondent aux différentes limites en déformations de l'armature d'acier en traction et du béton en compression. Cependant, une telle méthode de calcul basée sur les limites de déformation devient beaucoup plus complexe pour le dimensionnement d'une section en béton armé sous un chargement thermique, puisque, d'une part, ces limites de déformations sont désormais dépendantes de la température, et d'autre part, les chargements thermiques provoquent une dégradation des propriétés des matériaux constitutifs.

Dans ce contexte, la méthode de l'*isotherme 500°C* préconisée dans l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005) est aujourd'hui la seule méthode disponible permettant de procéder à des calculs mettant en jeu ces pivots, mais l'application reste encore discutable. Pour continuer à utiliser ces pivots, qui sont maintenant très nombreux, Caldas *et al.* (2010) ont mis au point un algorithme pour la construction des diagrammes d'interaction des sections de forme arbitraire. Les diagrammes sont obtenus à l'aide de la prescription des valeurs de déformations ultimes du béton et de l'acier, où les déformations thermiques ont été prises en compte. D'autre part, Law et Gillie (2010) ont proposé une méthode alternative fondée sur l'utilisation de la matrice de rigidité tangente reliant les incréments de force axiale et de moment de flexion aux incréments de déformation axiale et de courbure correspondante. Le point où cette matrice devient singulière est recherché au moyen d'un algorithme numérique. Même si ces méthodes présentent des améliorations par rapport aux précédentes, leur mise en

œuvre demeure assez complexe, notamment dans un contexte où il convient de disposer d'outils simples, rationnels et efficaces pour les ingénieurs.

L'objet de ce chapitre est d'appliquer l'approche Calcul à la Rupture à la détermination des diagrammes d'interaction d'une section en béton armé exposée au feu (Pham *et al.*, 2013a; 2015a), d'une manière plus simple et plus efficace que les méthodes de calcul mentionnées ci-dessus. Ainsi que nous l'avons démontré au chapitre précédent, une telle approche exige seulement qu'une limitation des contraintes soit prescrite pour les matériaux constitutifs sous la forme d'un critère de résistance, sans référence à d'autres caractéristiques mécaniques, telles que les propriétés de déformabilité ou de rigidité élastique.

L'application du Calcul à la Rupture au dimensionnement des poutres en béton armé soumises à un moment de flexion et un effort normal à température ambiante a été faite dans (Averbuch, 1996; Koechlin et Potapov, 2007). Elle aboutit à l'obtention de formules analytiques, simples à utiliser, pour les diagrammes d'interaction de ce type de poutres. Tout récemment, Bleyer et de Buhan (2013) ont appliqué la méthode à la détermination des surfaces d'interaction de flexion bi-axiale de poutres composites, qui peuvent ensuite être incorporées dans l'analyse à la rupture de structures formées d'assemblage de poutres à température ambiante.

Dans ce chapitre, il sera démontré en particulier que la température affecte les propriétés de résistance d'une section en béton armé sous la forme d'une réduction significative de la taille du diagramme d'interaction. Une interprétation géométrique de la construction de tels diagrammes d'interactions dépendant de la température sera donnée et une confrontation de la solution obtenue avec des prédictions de l'Eurocode 2 partie 1-1 (EN1992-1-1, 2005) à température ambiante permettra de qualifier la solution proposée.

## **2.2 PROPRIÉTÉS DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX À HAUTES TEMPÉRATURES**

Il est bien connu et établi expérimentalement que la résistance de matériaux tels que le béton ou l'acier décroît lorsque la température augmente. Dans l'hypothèse où l'on ne tient pas compte du phénomène d'écaillage du béton, les critères de résistance seront définis pour différents matériaux constitutifs (le béton et le renforcement), d'abord à température ambiante, puis à température élevée afin d'intégrer les effets du feu. Dans une première approche, et pour des raisons de simplicité, on fera l'*hypothèse d'adhérence parfaite* entre les armatures d'acier et le béton environnant tout au long du présent manuscrit.

### **2.2.1 Critère de résistance pour le béton**

Comme cela a été proposé par Chen (1982); Averbuch et de Buhan (1999); Salençon (1983, 2001) ou tout récemment Nielsen et Hoang (2010), les caractéristiques de résistance d'un béton peuvent être convenablement décrites par un critère de Coulomb «tronqué en traction». Un tel critère peut être défini par la condition suivante :

$$f^b(\underline{\sigma}) = \sup_{i,j=1,2,3} \{ \sigma_i(1 + \sin \varphi) - \sigma_j(1 - \sin \varphi) - f_c(1 - \sin \varphi); \sigma_i - f_t \} \leq 0 \quad (2.1)$$

où  $\sigma_i$ ,  $i=1,2,3$ , sont les valeurs principales du tenseur de contrainte, tandis que  $f_t$ ,  $f_c$  et  $\varphi$  sont les trois paramètres caractéristiques de la résistance du matériau, nommés respectivement résistances à la traction et à la compression uni-axiale, et angle de frottement interne, à température ambiante. Suite aux ajustements de Nielsen et Hoang (2010), cet angle de frottement peut être conventionnellement pris égal à  $37^\circ$  pour un béton ordinaire. La représentation d'un tel critère dans le *plan de Mohr*, sous la forme d'une *courbe intrinsèque*, est donnée sur la figure 2.1(a).

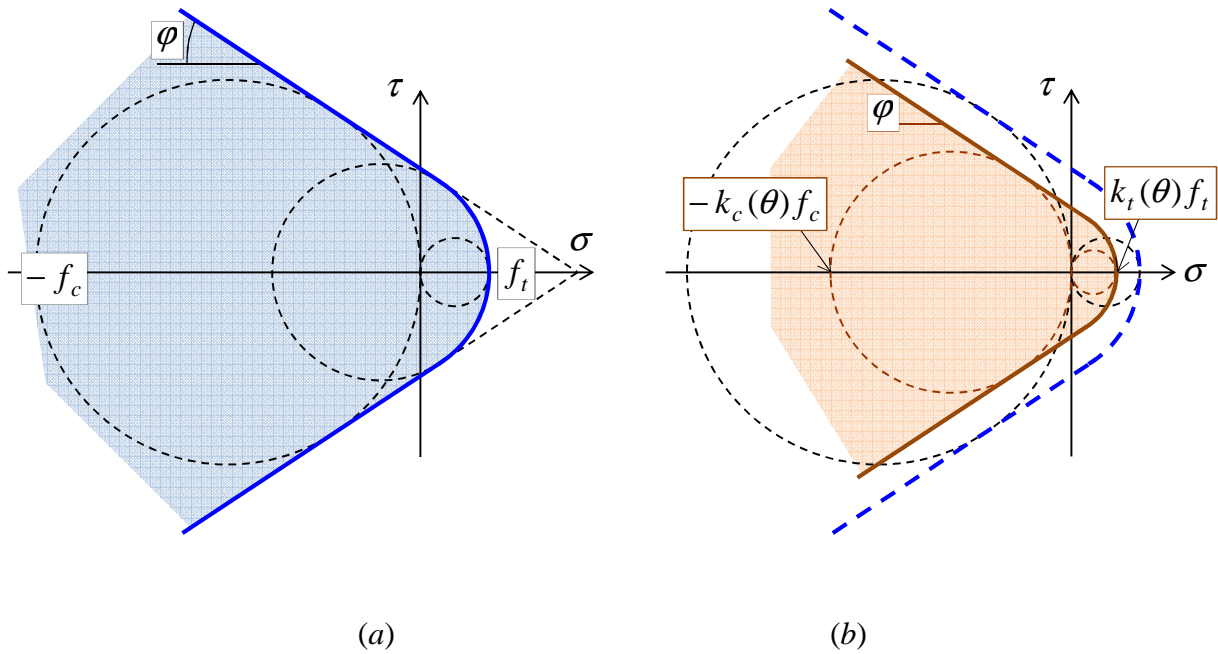


Figure 2.1. Courbe intrinsèque du béton à (a) température ambiante et (b) haute température

Pour un béton respectant le critère de résistance (2.1), la fonction d'appui est définie par (voir équation (1.11) du chapitre 1) :

$$\pi^b(\underline{d}) = \sup \{ \underline{\sigma} : \underline{d}; f^b(\underline{\sigma}) \leq 0 \} \quad (2.2)$$

où  $\underline{d}$  est le tenseur du taux de déformation associé en tout point de la structure au champ de vitesses virtuelles considéré dans la mise en œuvre de l'approche cinématique par l'extérieur. L'expression de cette fonction peut être calculée en lien avec la détermination de la *condition de pertinence* associée pour un taux de déformation et une discontinuité de vitesse donnés (Salençon, 1983; 2013) :



$$\pi^b(\underline{d}) = \begin{cases} \frac{f_c}{2} \left[ \sum_{i=1}^3 |d_i| - \text{tr} \underline{d} \right] + \frac{f_t}{1 - \sin \varphi} \left[ \text{tr} \underline{d} - \sin \varphi \sum_{i=1}^3 |d_i| \right] & \text{si } \text{tr} \underline{d} \geq \left( \sum_{i=1}^3 |d_i| \right) \sin \varphi \\ +\infty & \text{si non} \end{cases}$$

et (2.3)

$$\pi^b([\underline{U}], \underline{n}) = \begin{cases} \frac{f_c}{2} (|[\underline{U}]| - [\underline{U}], \underline{n}) + \frac{f_t}{1 - \sin \varphi} ([\underline{U}], \underline{n} - |[\underline{U}]| \sin \varphi) & \text{si } [\underline{U}], \underline{n} \geq |[\underline{U}]| \sin \varphi \\ +\infty & \text{si non} \end{cases}$$

où  $d_i$ ,  $i=1,2,3$ , sont les valeurs principales du tenseur du taux de déformation  $\underline{d}$  et  $[\underline{U}]$  désigne la discontinuité de vitesse à la traversée d'une surface de discontinuité selon la normale unitaire  $\underline{n}$ .

À température élevée, l'angle de frottement interne  $\varphi$  étant supposé maintenu constant égal à  $37^\circ$ , les résistances à la traction et à la compression seront réduites par l'intermédiaire de facteurs multiplicatifs sans dimension, fonction de l'évaluation en température :

$$f_t(\theta) = k_t(\theta) f_t \quad \text{et} \quad f_c(\theta) = k_c(\theta) f_c \quad (2.4)$$

où  $k_t(\theta)$  et  $k_c(\theta)$  sont des fonctions décroissantes avec l'augmentation de la température  $\theta$ , qui prennent la valeur 1 pour la température ambiante. La courbe intrinsèque correspondante est schématisée sur la figure 2.1(b). Il en résulte que l'expression de la fonction d'appui est aussi donnée par (2.3) où les paramètres  $f_t$  et  $f_c$  sont respectivement remplacés par les expressions données en (2.4).

## 2.2.2 Critère de résistance pour le renforcement

Noyées dans le béton considéré comme un *milieu continu tridimensionnel* (3D), les barres d'acier sont modélisées comme des *éléments continus unidimensionnels* (1D). En négligeant toute résistance à l'effort tranchant, ainsi qu'au moment fléchissant, les propriétés de résistance de ces renforcements sont caractérisées par la condition portant sur la seule force axiale  $n$  :

$$|n| \leq n_y = f_y A \quad (2.5)$$

où  $n_y$  est la valeur absolue de la *résistance en traction*, supposée ici identique à celle en compression. Elle est égale au produit de la limite d'élasticité  $f_y$  de l'acier constitutif de l'armature par l'aire de la section  $A$  de cette dernière. La fonction d'appui correspondante s'écrit alors tout simplement :

$$\pi^r(d) = \sup \{ nd; |n| \leq n_y \} = n_y |d| \quad (2.6)$$

où :

$$d = \underline{t} \cdot \underline{d} \cdot \underline{t} \quad (2.7)$$

est le taux de déformation axial du renforcement orienté selon le vecteur unitaire  $\underline{t}$ .

L'influence de la température sur le critère de résistance, et donc sur la résistance en traction-compression des barres d'acier, est prise en compte de façon similaire à ce qui a été fait en (2.4) pour le béton :

$$f_y(\theta) = k_s(\theta) f_y \Rightarrow n_y(\theta) = k_s(\theta) n_y, \quad k_s(\theta) \leq 1 \quad (2.8)$$

où  $k_s(\theta)$  est une fonction décroissante de l'augmentation de la température  $\theta$ , qui prend la valeur 1 pour la température ambiante. De même, sa fonction d'appui est aussi donnée par (2.6) où le paramètre  $n_y$  est remplacé par l'expression donnée en (2.8).

### 2.3 POSITION DU PROBLÈME DE CALCUL À LA RUPTURE

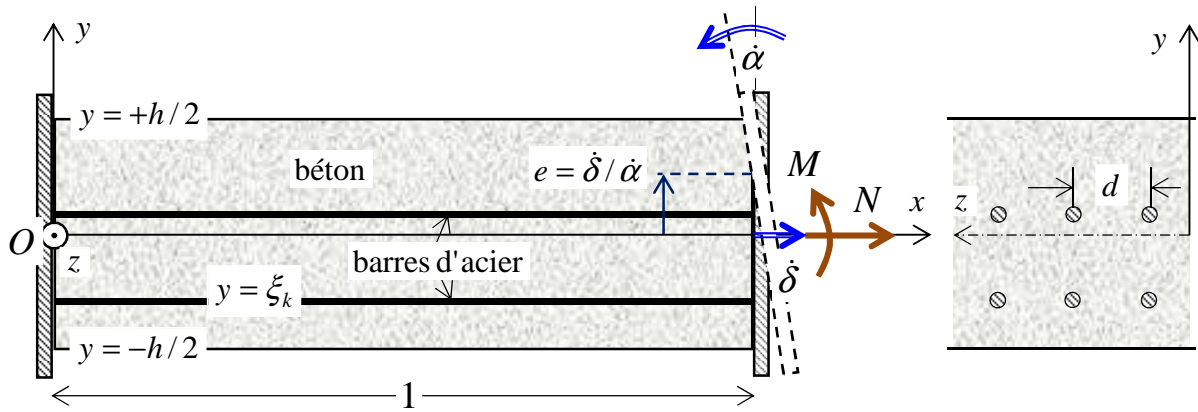


Figure 2.2. Élément de plaque en béton armé soumis à la combinaison d'un effort normal et d'un moment fléchissant

La démarche suivie consiste à considérer un élément de plaque repéré par un trièdre  $Oxyz$  orthonormé (figure 2.2), cet élément étant modélisé comme un solide ayant la forme d'un parallélépipède d'épaisseur  $h$  dans la direction  $Oy$  et de largeurs unitaires dans les directions transversales  $Ox$  et  $Oz$ . Ce solide, constitué du béton supposé homogène, est renforcé par  $n$  barres d'acier longitudinales parallèles à la direction  $Ox$ , de vecteur unitaire  $\underline{t} = \underline{e}_x$ . Le lit de renforcement numéro  $k$  constitué de renforcements de section  $A_k$  espacés d'une distance  $d$  selon  $Oz$ , est repéré par sa coordonnée  $\xi_k$  sur  $Oy$ , avec  $-h/2 \leq \xi_k \leq +h/2$ .

Le solide est soumis à un chargement défini comme suit.

- ◇ Forces de volume nulles.

◇ Section gauche (bord d'abscisse  $x=0$ ) en contact *sans frottement* avec un plateau vertical fixe :

$$U_x = 0; T_y = T_z = 0 \quad (2.9)$$

où  $\underline{U}$  désigne la vitesse et  $\underline{T}$  désigne le vecteur contrainte sur une facette de cette section.

◇ Section droite (bord d'abscisse  $x=1$ ) en contact *sans frottement* avec un plateau indéformable animé d'un mouvement rigidifiant de translation horizontale de vitesse  $\dot{\delta}$  à mi-hauteur ( $y=0$ ) et de rotation de vitesse angulaire  $\dot{\alpha}$  autour de l'axe  $Oz$ . D'où les conditions aux limites :

$$U_x = \dot{\delta} - \dot{\alpha}y; T_y = T_z = 0 \quad (2.10)$$

◇ Les autres faces horizontales ( $y = \pm h/2$ ) et verticales ( $z = \pm 1/2$ ) sont *libres d'efforts* ( $\underline{T}=0$ ).

### 2.3.1 Mode de chargement et diagramme d'interaction

Étant donné un champ de vitesse virtuelle quelconque  $\underline{U}$  cinématiquement admissible avec les conditions aux limites en vitesse (2.9) et (2.10), la *puissance des efforts extérieurs* dans un tel champ peut être écrite sous la forme :

$$\forall \underline{U} \text{ C.A. avec } (\dot{\delta}, \dot{\alpha}) : P_e(\underline{U}) = \overbrace{\int_{x=0} T_x \underline{U} dS}^{=0} + \int_{x=1} T_x \underline{U} dS = \int_{x=1} T_x (\dot{\delta} - y\dot{\alpha}) dy dz \quad (2.11)$$

soit :

$$P_e(\underline{U}) = \overbrace{\left( \int_{x=1} T_x dy dz \right)}^N \dot{\delta} + \overbrace{\left( - \int_{x=1} y T_x dy dz \right)}^M \dot{\alpha} \quad (2.12)$$

où  $N$  et  $M$  peuvent être interprétés comme l'*effort axial* et le *moment fléchissant* par unité de longueur selon  $Oz$ , exercés sur la section droite de la plaque (figure 2.2). Cette expression de la puissance des efforts extérieurs fait donc apparaître un *mode de chargement à deux paramètres* ( $N, M$ ) de l'élément de plaque.

Dans ces conditions, un chargement ( $N, M$ ) appartient au domaine  $K$  des chargements *potentiellement supportables*, s'il peut être équilibré par une distribution de contraintes dans l'élément de plaque (c'est-à-dire un champ de contrainte dans le béton, des forces uni-axiales de traction-compression le long des barres d'acier) qui respecte en tout point les critères de

résistance respectifs du béton (2.1) et du renforcement (2.5). La frontière  $\partial K$  de ce domaine n'est autre que le *diagramme d'interaction* recherché, qui caractérise la résistance globale de la section sous la sollicitation combinée de traction-compression et flexion.

### 2.3.2 Qu'en est-il du chargement thermique?

Outre la détérioration des propriétés mécaniques des matériaux, le feu modifie de façon importante l'état initial de la structure, induisant par exemple du fait de l'incompatibilité géométrique des déformations thermiques, des champs thermiques d'autocontrainte (c'est-à-dire en équilibre avec un chargement mécanique nul). Or, conformément à un résultat général relatif à la résolution des problèmes d'évolution élasto-plastique (voir par exemple de Buhan (2007)), *cette modification de l'état initial due à l'action thermique du feu, n'a aucune influence sur les charges limites ou extrêmes de la structure*; ces dernières étant indépendantes des caractéristiques élastiques des matériaux constitutifs, du trajet de chargement suivi pour y aboutir, et enfin de l'état d'autocontrainte initial. Afin de justifier très précisément ce point essentiel et de mieux s'en convaincre, l'exemple simple d'une structure réticulée soumise simultanément à un chargement mécanique et à une sollicitation thermique, est analysé en détail à l'Annexe de ce mémoire.

En conséquence, la seule influence à attendre d'une sollicitation thermique sur le diagramme d'interaction constitué de l'ensemble des charges extrême, doit être attribuée à la dégradation des propriétés de résistance du béton et du renforcement liée à l'augmentation de température. C'est de cette manière que nous allons introduire l'effet du feu dans le calcul du diagramme d'interaction.

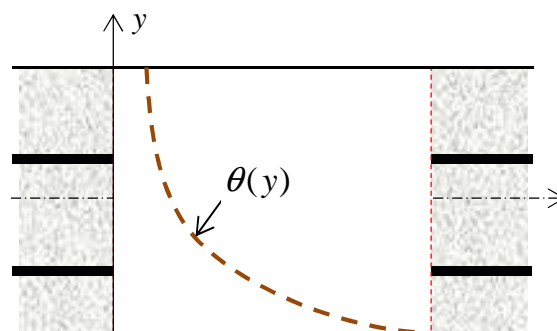


Figure 2.3. Profil de température dans l'épaisseur de la plaque

L'effet de l'incendie se traduisant par une augmentation de température uniforme sur l'une des faces de la plaque (la face inférieure par exemple), la propagation de chaleur dans l'épaisseur de cette dernière est unidimensionnelle induisant un écart de température de la forme :

$$\theta(x, y, z) = \theta(y) \quad (2.13)$$

Compte tenu de ce profil de température (figure 2.3), les résistances du béton et du renforcement sont modifiées en conséquence :

$$f_t(y) = k_t(\theta(y))f_t \quad ; \quad f_c(y) = k_c(\theta(y))f_c \quad \text{et} \quad n_0(y) = k_s(\theta(y))n_0 \quad (2.14)$$

ce qui conduit à une modification correspondante du diagramme d'interaction de la plaque que nous allons maintenant évaluer.

### 2.3.3 Approche statique par l'intérieur

Cette approche revient à appliquer la définition du domaine  $K$  des chargements potentiellement supportables défini au paragraphe 2.3.1. Elle est mise en œuvre à l'aide de champs de contrainte *uni-axiaux* définis comme suit.

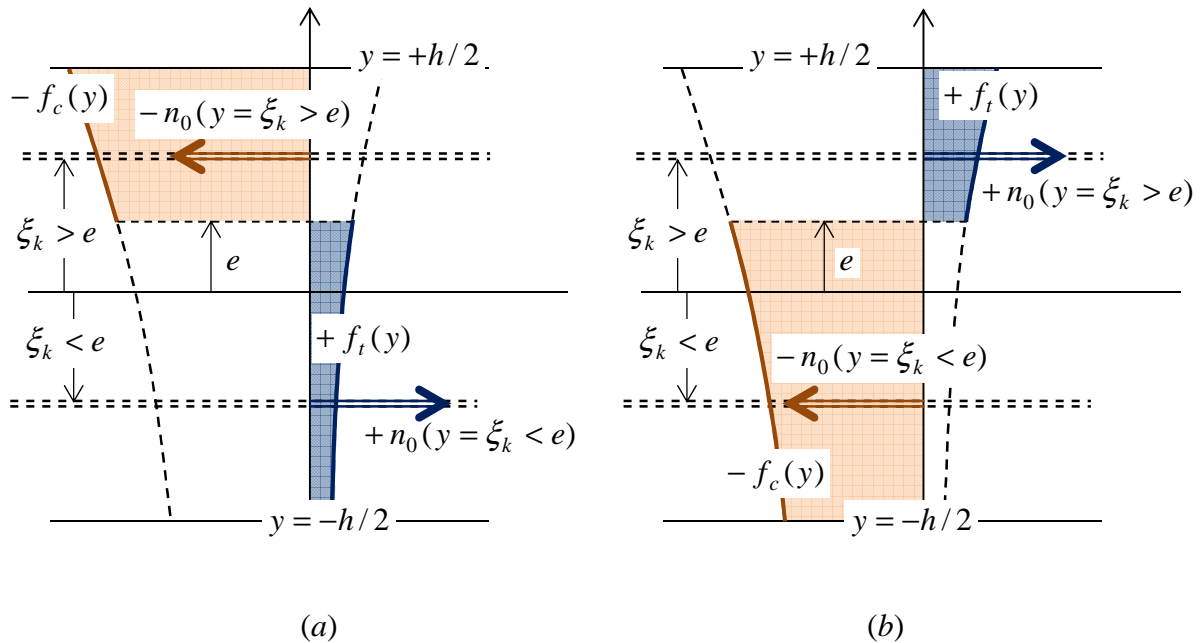


Figure 2.4. Distributions de contraintes (a) et (b) dans la plaque pour l'approche statique par l'intérieur du Calcul à la Rupture

Pour toute valeur  $e$ , comprise entre  $-h/2$  et  $+h/2$ , les deux champs de contrainte uni-axiaux suivants sont considérés dans le béton (voir figure 2.4) :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(a)} = \sigma^{(a)}(y)\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}}^{(b)} = \sigma^{(b)}(y)\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (2.15)$$

avec :

$$\sigma^a(y) = \begin{cases} -f_c(y) & \text{pour } e < y \leq +h/2 \\ +f_t(y) & \text{pour } -h/2 \leq y < e \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma^b(y) = \begin{cases} +f_t(y) & \text{pour } e < y \leq +h/2 \\ -f_c(y) & \text{pour } -h/2 \leq y < e \end{cases} \quad (2.16)$$

En outre, les valeurs correspondantes de la force axiale par unité de longueur transversale selon  $Oz$  dans un lit d'armatures de coordonnée  $\xi_k$  sont les suivantes :

$$n_k^{(a)} = \begin{cases} +n_0 & \text{si } \xi_k < e \\ -n_0 & \text{si } \xi_k > e \end{cases} \quad \text{et} \quad n_k^{(b)} = \begin{cases} -n_0 & \text{si } \xi_k < e \\ +n_0 & \text{si } \xi_k > e \end{cases} \quad (2.17)$$

avec  $n_0 = n_y / d = f_y A / d$  où  $d$  est l'espacement horizontal dans la direction  $Oz$  entre deux armatures du même lit.

Les formules (2.15) à (2.17) signifient que dans la configuration (a), le béton et les barres d'acier atteignent leur valeur limite positive de traction (respectivement valeur limite négative de compression) lorsqu'ils se trouvent au-dessous (respectivement au-dessus) du plan d'équation  $y=e$ . L'inverse s'applique dans la configuration (b).

De tels champs de contrainte satisfont par construction les critères de résistance des matériaux constitutifs en tout point de la structure. De plus ils vérifient les équations d'équilibre sans forces de volume ( $\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0$ ), la continuité du vecteur contrainte au franchissement du plan d'équation  $y=e$ , ainsi que les conditions aux limites en efforts. Les paramètres de chargement qu'ils équilibrent sont d'après (2.12) :

$$\begin{aligned} N^{(a)}(e) &= \int_{-h/2}^e f_t(y) dy - \int_e^{+h/2} f_c(y) dy + \sum_k n_0 (\xi_k < e) - \sum_k n_0 (\xi_k > e) \\ M^{(a)}(e) &= - \int_{-h/2}^e y f_t(y) dy + \int_e^{+h/2} y f_c(y) dy - \sum_k \xi_k n_0 (\xi_k < e) + \sum_k \xi_k n_0 (\xi_k > e) \\ N^{(b)}(e) &= - \int_{-h/2}^e f_c(y) dy + \int_e^{+h/2} f_t(y) dy - \sum_k n_0 (\xi_k < e) + \sum_k n_0 (\xi_k > e) \\ M^{(b)}(e) &= \int_{-h/2}^e y f_c(y) dy - \int_e^{+h/2} y f_t(y) dy + \sum_k \xi_k n_0 (\xi_k < e) - \sum_k \xi_k n_0 (\xi_k > e) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ces dernières équations représentent les équations paramétriques d'une courbe d'interaction, de paramètre  $e$ . Il convient de noter que cette courbe, ainsi que le domaine qu'elle délimite, est *a priori* un *minorant* du diagramme d'interaction. Nous allons montrer, grâce à la mise en œuvre de l'approche cinématique par l'extérieur, que cette courbe est bien le diagramme d'interaction recherché.

### 2.3.4 Approche cinématique par l'extérieur

Étant donné un champ de vitesses virtuelles cinématiquement admissible  $\underline{U}$  vérifiant les conditions aux limites (2.9) et (2.10), l'approche cinématique par l'extérieur s'écrit :

$$\begin{aligned} & \forall \underline{U} \text{ C.A. avec } (\dot{\delta}, \dot{\alpha}) \\ P_e(\underline{U}) = N\dot{\delta} + M\dot{\alpha} \geq P_{rm}(\underline{U}) & \Rightarrow (N, M) \notin K \setminus \partial K \end{aligned} \quad (2.19)$$

où  $K \setminus \partial K$  est l'intérieur du domaine  $K$ .  $P_{rm}(\underline{U})$  est la *puissance résistante maximale* correspondant au champ de vitesses considéré. Elle est définie comme la valeur maximale de la *puissance virtuelle de déformation* et calculée comme la somme de deux contributions :

$$P_{rm}(\underline{U}) = \int_{\Omega} \pi^b(\underline{d}) \, d\Omega + \sum_k \int_{L_k} \pi^r(d) \, dy \quad (2.20)$$

où  $\Omega$  désigne l'élément de plaque en béton armé de la figure 2.2,  $L_k$  est la  $k^{\text{ième}}$  barre de renforcement, tandis que  $\pi^b$  et  $\pi^r$  représentent respectivement les fonctions d'appui des conditions de résistance du béton et du renforcement.

L'approche cinématique par l'extérieur est mise en œuvre en utilisant la famille de champs de vitesses virtuelles de la forme :

$$U_z = 0 ; U_x = \dot{\alpha}(e-y)x ; U_z = \frac{\dot{\alpha}}{2}x^2 + w(y) , \dot{\alpha} > 0 \quad (2.21)$$

où  $w(y)$  est une fonction définie comme suit :

$$w(y) = \frac{\dot{\alpha}}{2}(e-y)^2 \begin{cases} K_p = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} & y > e \\ 0 & y < e \end{cases} \quad (2.22)$$

On vérifie aisément que ces champs de vitesses sont cinématiquement admissibles avec les paramètres cinématiques généralisés  $\dot{\delta} = e\dot{\alpha}$  et  $\dot{\alpha} > 0$ , et correspondent à une rotation du bord droit de la plaque autour de l'axe  $z$  passant par le point  $(x=1, y=e)$ . Les champs de vitesses considérés sont continus et conduisent aux champs de taux de déformation associés en tout point du volume :

$$\underline{d} = \dot{\alpha}(e-y)\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \dot{\alpha}(e-y)\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \begin{cases} K_p & \text{pour } y > e \\ 0 & \text{pour } y < e \end{cases} \quad (2.23)$$

de sorte que la restriction cinématique (*condition de pertinence*) liée à la définition de la fonction d'appui du critère de résistance du béton (2.3) est automatiquement satisfaite :

$$\begin{aligned} y > e : \text{tr} \underline{d} &= \dot{\alpha}(y-e)(K_p - 1) = \dot{\alpha}(y-e)(K_p + 1) \sin \varphi = \left( \sum_i |d_i| \right) \sin \varphi \\ y < e : \text{tr} \underline{d} &= \dot{\alpha}(e-y) = \left( \sum_i |d_i| \right) \geq \left( \sum_i |d_i| \right) \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.24)$$

Par conséquent, l'expression générale (2.3) de la fonction d'appui correspondant se réduit simplement à :

$$\pi^b(\underline{d}) = \begin{cases} \dot{\alpha}(y-e)f_c & \text{pour } y > e \\ \dot{\alpha}(e-y)f_t & \text{pour } y < e \end{cases} \quad (2.25)$$

et la contribution du béton à la puissance résistante maximale développée dans les champs de vitesses considérés s'écrit :

$$\begin{aligned} P_{rm}^b(\underline{U}) &= \int_{\Omega} \pi^b(\underline{d}) \, d\Omega \\ &= \dot{\alpha} \left[ \left( \int_{-h/2}^e f_t(y) dy - \int_e^{+h/2} f_c(y) dy \right) e + \left( - \int_{-h/2}^e y f_t(y) dy + \int_e^{+h/2} y f_c(y) dy \right) \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Par ailleurs, la fonction d'appui des barres d'acier donnée par (2.6) devient :

$$\pi^r(d = d_{xx}) = \dot{\alpha} n_0 |e-y| \quad (2.27)$$

ce qui conduit à l'expression suivante de la puissance résistante maximale pour l'ensemble des renforcements :

$$\begin{aligned} P_{rm}^r(\underline{U}) &= \sum_k \int_{L_k} \pi^r(d) \, dx \\ &= \dot{\alpha} \left[ \left( \sum_k n_0(\xi_k < e) - \sum_k n_0(\xi_k > e) \right) e + \left( - \sum_k \xi_k n_0(\xi_k < e) + \sum_k \xi_k n_0(\xi_k > e) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Il en résulte que la puissance résistante maximale totale développée par l'élément en béton armé dans le champ de vitesse virtuel défini par (2.21) et (2.22) peut être écrite sous la forme :

$$P_{rm}(\underline{U}) = \dot{\alpha} [eN^{(a)}(e) + M^{(a)}(e)] = P_e \{N = N^{(a)}(e), M = M^{(a)}(e); \underline{U}\} \quad (2.29)$$

où les expressions de  $N^{(a)}$  et  $M^{(a)}$  coïncident précisément avec celles données par les deux premières lignes de (2.18), qui ont été obtenues par l'approche statique par l'intérieur. Ceci implique, en vertu de (2.19), que le chargement associé aux paramètres  $N=N^{(a)}(e)$ ,  $M=M^{(a)}(e)$  ne peut appartenir à l'intérieur de  $K$ , donc se situe à l'extérieur ou sur la frontière de  $K$ .

Comme il a été prouvé par l'approche statique par l'intérieur effectuée dans la section 2.3.3 que  $(N=N^{(a)}(e), M=M^{(a)}(e))$  est un chargement situé sur la frontière  $\partial K$ , c'est-à-dire par définition un chargement extrême. La courbe déterminée par l'approche statique précédente est donc bien la *courbe d'interaction exacte* définissant le critère de résistance de la section en béton armé. Le même type de raisonnement peut être effectué pour  $\dot{\alpha} < 0$ , permettant ainsi de



montrer que les deux dernières équations paramétriques de (2.18) sont associées à la partie inférieure de la courbe d'interaction.

Le calcul précédent permet de donner l'expression de la *fonction support* du critère d'interaction, définie par :

$$\Pi(\dot{\delta}, \dot{\alpha}) = \text{Max}\{N\dot{\delta} + M\dot{\alpha}; (N, M) \in K\} \quad (2.30)$$

qui n'est autre que la puissance résistante maximale calculée dans le champ de vitesse associé aux paramètres cinématiques ( $\dot{\delta} = e\dot{\alpha}, \dot{\alpha}$ ), soit pour  $\dot{\alpha} \geq 0$  :

$$\Pi(\dot{\delta} = e\dot{\alpha}, \dot{\alpha} \geq 0) = P_{rm}(\underline{U}) = \dot{\alpha}[eN^{(a)}(e) + M^{(a)}(e)] \quad (2.31)$$

où les expressions de  $N^{(a)}(e)$  et  $M^{(a)}(e)$  sont données par (2.18).

On observe qu'un chargement extrême  $(N, M)$  situé sur le diagramme d'interaction est obtenu d'une part par le biais d'une distribution de contrainte dans l'épaisseur de la plaque, caractérisée par l'ordonnée  $e$  du plan horizontal à travers lequel le signe des contraintes change (passant par exemple de  $+f_t(y)$  à  $-f_c(y)$ ), d'autre part par le biais d'un champ de vitesse tel que le signe de la vitesse horizontale s'inverse à travers le plan de même ordonnée  $\dot{\delta} / \dot{\alpha} = e$ . Cela signifie que les champs de contrainte et de vitesse sont *associés*<sup>1</sup> et que la solution obtenue par l'approche statique est confirmée par l'approche cinématique. Pour mieux visualiser le résultat ainsi obtenu, on se propose, dans la section suivante, de tracer cette courbe d'interaction dans le cas particulier d'une section en béton homogène, puis renforcée par un seul lit d'armatures.

## 2.4 REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DU DIAGRAMME D'INTERACTION DANS LE PLAN DES CHARGEMENTS - PLAN $(N, M)$

### 2.4.1 Plaque en béton seul (non renforcée)

En l'absence de renforcement, le béton étant homogène, à température ambiante, les équations paramétriques (2.18) se réduisent à :

$$\begin{aligned} -h/2 \leq e \leq +h/2 \\ N^{(a)}(e) = h(f_t - f_c)/2 + e(f_t + f_c), \quad M^{(a)}(e) = (f_t + f_c)(h^2/4 - e^2)/2 \\ N^{(b)}(e) = N^{(a)}(e) - 2e(f_t + f_c), \quad M^{(b)}(e) = -M^{(a)}(e) \end{aligned} \quad (2.32)$$

---

<sup>1</sup> Au sens du *théorème d'association en Calcul à la Rupture* (voir Salençon, 1983 ; 2013)

Les courbes correspondantes ont été tracées dans le plan  $(N, M)$  (figure 2.5). Le domaine  $K$  des chargements potentiellement supportables est ainsi délimité par deux arcs de paraboles symétriques par rapport à l'axe de l'effort normal. Les distributions de contraintes associées aux configurations particulières associées à  $e=0$ ,  $+h/2$  et  $-h/2$  sont également présentées sur la même figure. Elles correspondent respectivement aux valeurs extrêmes de l'effort normal et du moment de flexion.

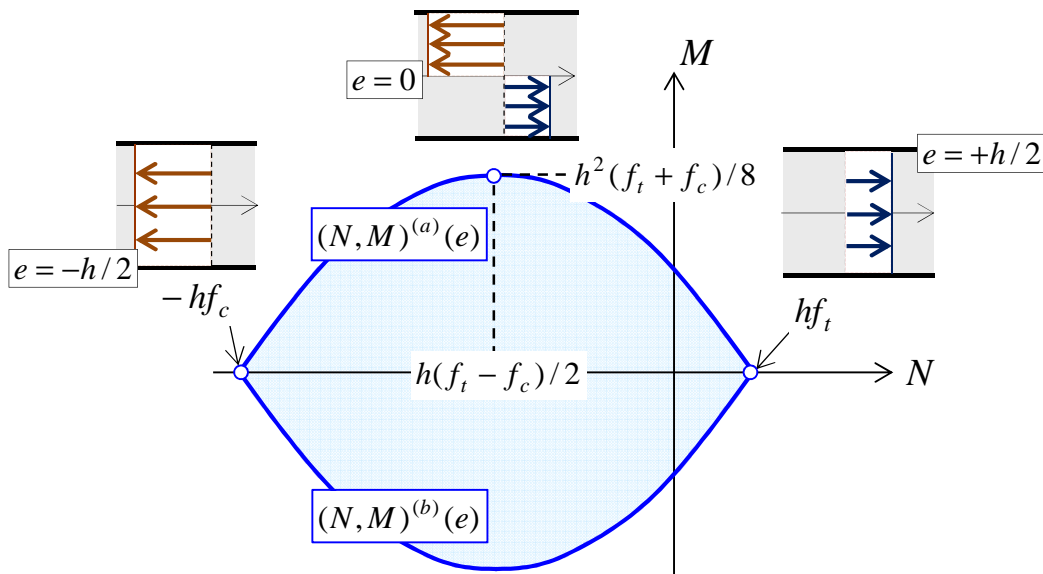


Figure 2.5. Diagramme d'interaction pour une plaque en béton à la température ambiante

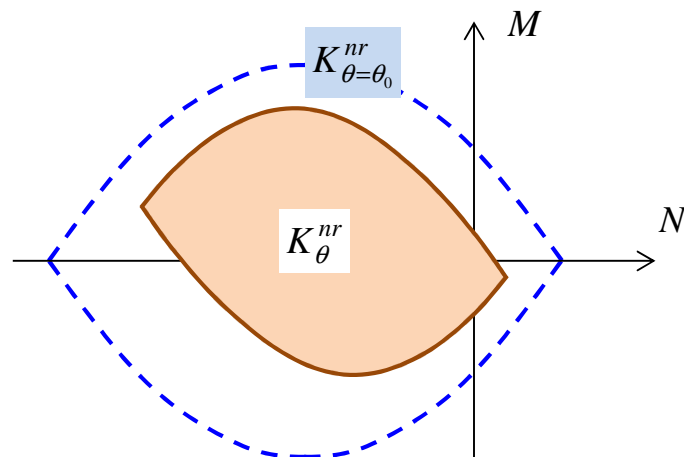


Figure 2.6. Allure du diagramme d'interaction pour une plaque en béton homogène au feu

Lorsque la plaque est soumise au feu, le diagramme d'interaction est fortement affecté par l'augmentation de température qui en résulte. Pour un profil d'augmentation de températures  $\theta(y)$  donné dans l'épaisseur de la plaque béton (tel que représenté par exemple sur la figure 2.3), les valeurs des résistances à la traction et à la compression du béton doivent être

modifiées par le biais de coefficients de réduction des caractéristiques de résistance du béton introduits selon les formules (2.14), puis incorporées dans (2.18). La figure 2.6 représente l'allure d'un diagramme d'interaction typique où une telle sollicitation par le feu est prise en compte. Le domaine de résistance correspondant (noté  $K_{\theta}^{nr}$ ), délimité par le diagramme d'interaction, apparaît comme très significativement « rétréci » par rapport au domaine d'interaction initial, c'est-à-dire à température ambiante (noté  $K_{\theta=\theta_0}^{nr}$ ).

## 2.4.2 Plaque béton armé (plaque renforcée)

On suppose maintenant, à titre d'illustration, que la plaque est renforcée par un seul lit d'armatures placé à une distance  $\xi$  par rapport au plan moyen horizontal ( $y=0$ ), avec une résistance à la traction-compression égale à :

$$n_0(\xi) = k_s(\theta(\xi))n_0 \quad (2.33)$$

reportant cette contribution du renforcement dans les équations paramétriques (2.18), on peut alors montrer que le domaine d'interaction de la plaque en béton armé peut être décrit comme suit :

$$(N, M) \in K_{\theta}^r \Leftrightarrow \begin{cases} \exists n \in [-n_0(\xi), n_0(\xi)] \\ (N - n, M - (-\xi n)) \in K_{\theta}^{nr} \end{cases} \quad (2.34)$$

où  $n$  et  $(-\xi n)$  représentent respectivement les contributions supplémentaires de l'armature à l'effort normal et au moment fléchissant. Il en résulte que le domaine de résistance  $K_{\theta}^r$  peut être construit comme l'enveloppe convexe de deux domaines obtenus par translations du domaine  $K_{\theta}^{nr}$  de vecteurs  $(n_0, -\xi n_0)$  et  $(-n_0, \xi n_0)$ , comme le montre la figure 2.7.

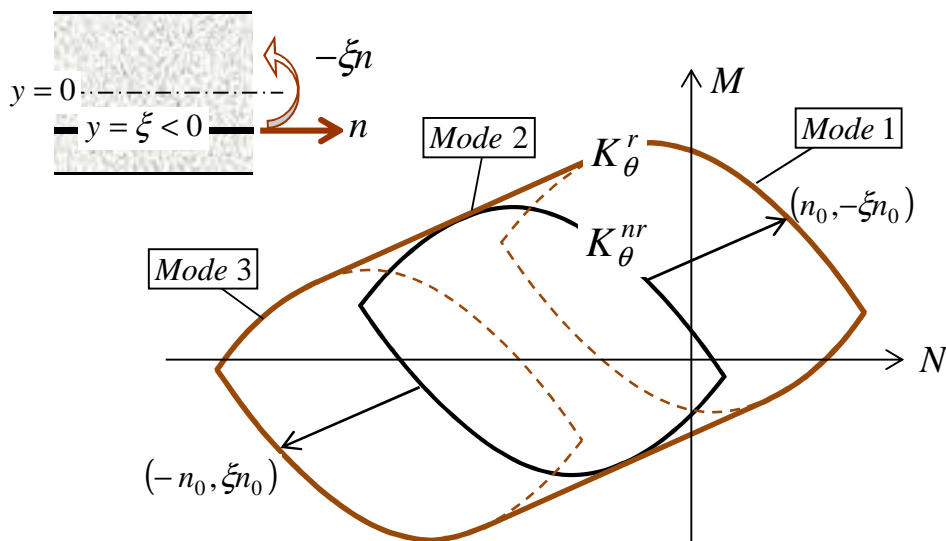
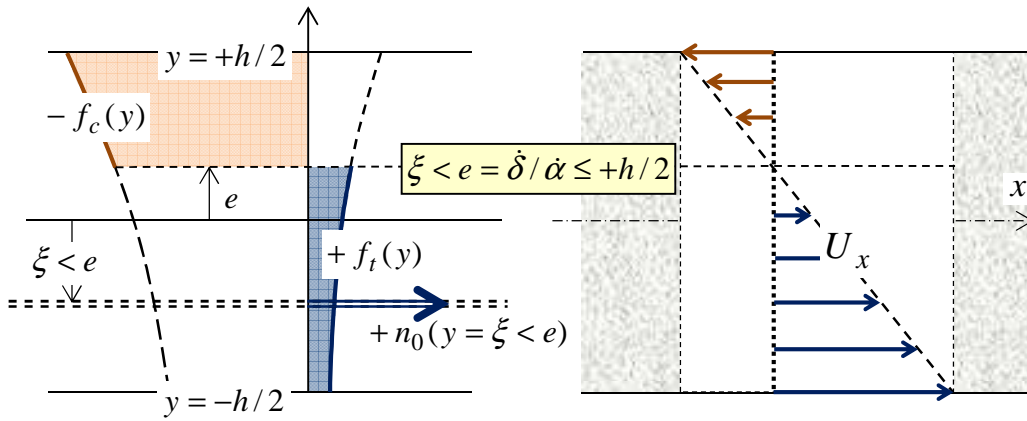
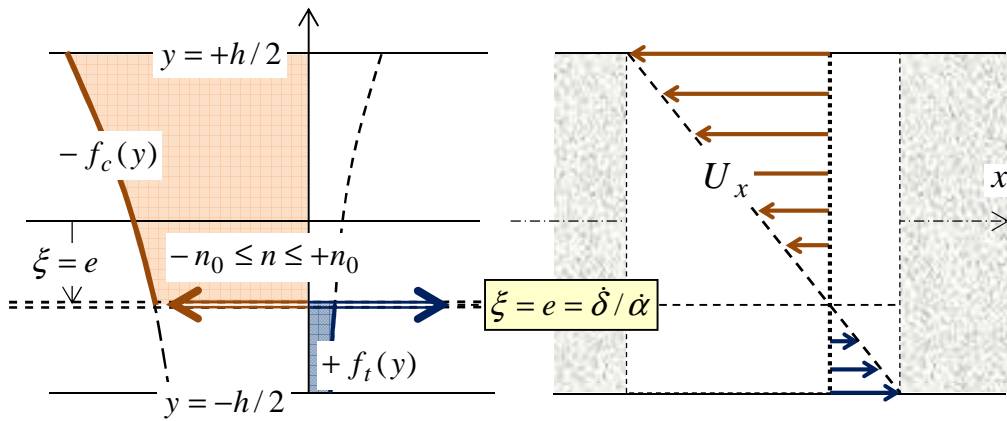


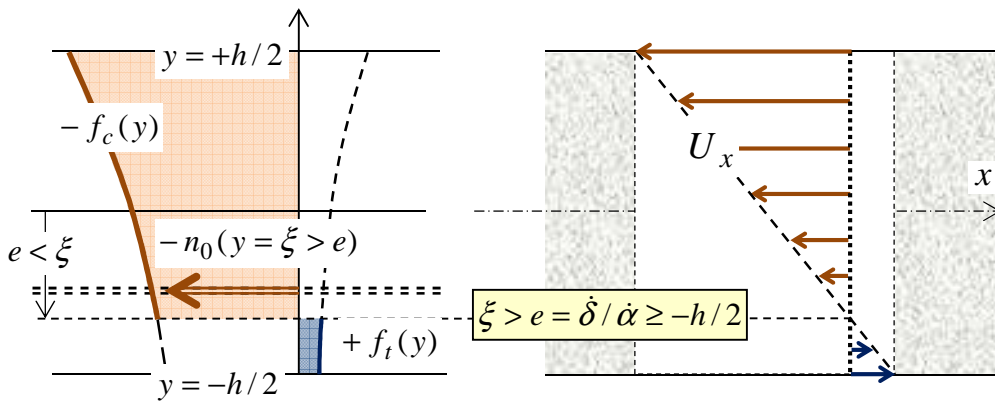
Figure 2.7. Diagramme d'interaction pour une plaque en béton armé en condition d'incendie



(Mode 1)



(Mode 2)



(Mode 3)

Figure 2.8. Modes de rupture du diagramme d'interaction correspondant au cas  $\dot{\alpha} > 0$

Une telle interprétation peut être facilement généralisée au cas où la section en béton est renforcée par plusieurs lits d'armatures. Les modes de rupture du diagramme d'interaction

correspondant au cas  $\dot{\alpha} > 0$  de la figure 2.7 sont représentés sur la figure 2.8. Cette figure montre clairement que les champs de contrainte et de vitesse sont bien associés.

- ◇ Le mode 1 correspond à une rupture de la section en béton pour laquelle l'armature est sollicitée jusqu'à sa limite en traction.
- ◇ Le mode 2 est associé à une rupture du béton seul, la contrainte dans l'armature pouvant varier entre ses résistances en compression et en traction.
- ◇ Enfin le mode 3 correspond à une rupture de la section du béton, l'armature étant sollicitée jusqu'à sa limite en compression.

L'interprétation est analogue pour  $\dot{\alpha} < 0$ , correspondant à la partie inférieure de la courbe d'interaction

À noter que les résultats présentés ici sont tout à fait similaires à ceux résultant des travaux d'Averbuch (1996) dans le cas particulier de la température ambiante; la seule différence réside dans le fait que le diagramme d'interaction d'Averbuch prend en compte une résistance nulle des armatures en compression.

## 2.5 EXEMPLE ILLUSTRATIF DU DIAGRAMME D'INTERACTION

À titre illustratif, les données suivantes qui ont été choisies, permettent de mettre clairement en évidence de façon quantitative l'influence de l'augmentation de la température sur la modification du diagramme d'interaction d'une section en béton armé :

- ◇ La section rectangulaire de  $0,15 \times 1 \text{ m}^2$  est exposée à un feu ISO 834 (EN1991-1-2, 2003) sur sa face inférieure ( $y = -h/2$ ).
- ◇ Béton de densité normale réalisé avec des granulats siliceux:  $f_c = 32 \text{ MPa}$ ,  $f_t = 2,5 \text{ MPa}$ .
- ◇ Deux lits (un lit supérieur et un lit inférieur) comportant chacun 10 barres d'acier laminé à chaud de 6mm de diamètre avec 3cm d'enrobage :  $f_y = 500 \text{ MPa}$ .
- ◇ Les coefficients  $k_t(\theta)$ ,  $k_c(\theta)$ , et  $k_s(\theta)$  applicables pour la diminution de la résistance caractéristique des matériaux sont considérés en fonction de la température  $\theta$  comme recommandés dans l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005)(voir figure 1.9 du chapitre 1).

L'établissement du diagramme d'interaction requiert au préalable la donnée du profil de température dans l'épaisseur de la plaque. Ce profil peut être obtenu soit par l'utilisation d'un logiciel de simulation des transferts thermiques, soit en s'appuyant sur des mesures expérimentales de l'évolution de la température à l'intérieur de la plaque. Dans cet exemple, le logiciel Safir (Franssen, 2005) a été utilisé pour obtenir ce profil de température. Différents profils correspondant à différentes durées d'exposition au feu (0, 60, 90 et 120min) sont

présentés sur la figure 2.9. L'introduction de ces profils de température ainsi déterminés par voie numérique, aboutit aux diagrammes d'interaction représentés sur la figure 2.10. On observe immédiatement que l'augmentation de la température conduit à un rétrécissement important du diagramme d'interaction, tout particulièrement dans sa partie inférieure. Ce dernier phénomène s'explique par le fait que la plaque étant exposée au feu sur sa face inférieure, la dégradation des propriétés de résistance des matériaux est bien plus marquée en partie inférieure de la plaque.

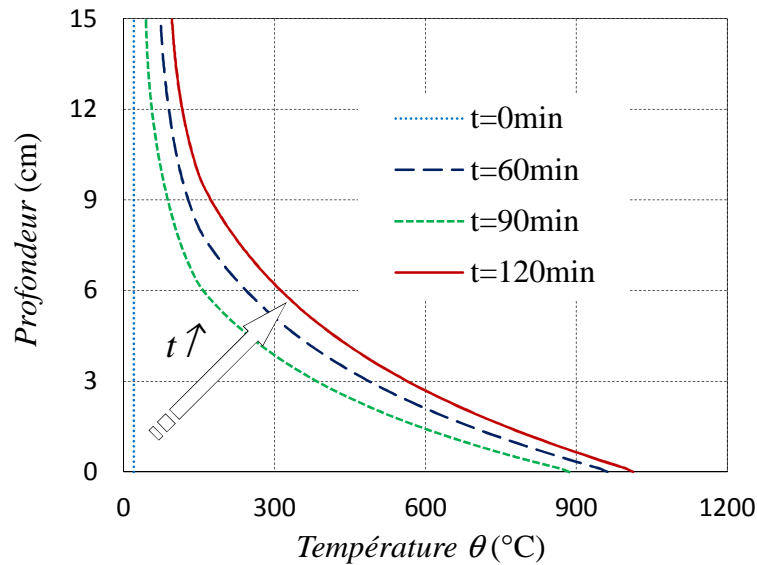


Figure 2.9. Différents profils de température dans l'épaisseur d'une plaque en béton armé exposée au feu normalisé ISO 834

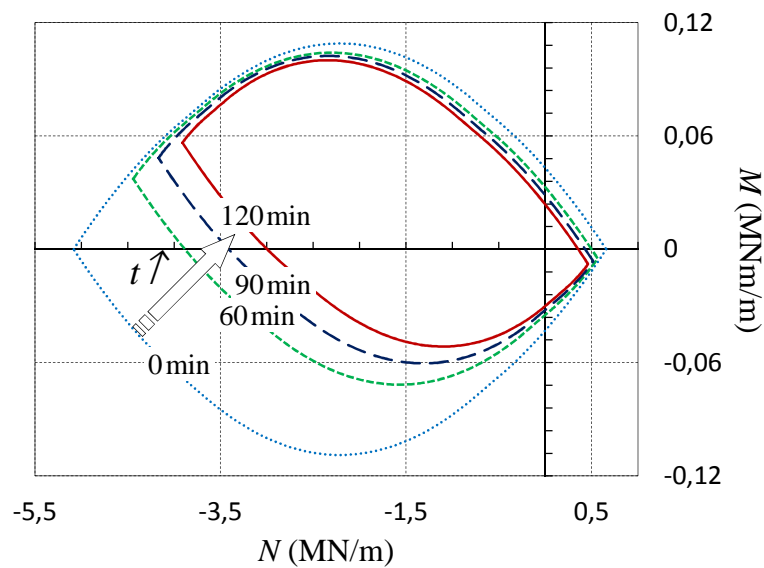


Figure 2.10. Diagrammes d'interaction de la plaque exposée au feu normalisé ISO 834 en fonction de la durée d'exposition au feu

## 2.6 COMPARAISON AVEC LES PRÉVISIONS DE L'EUROCODE 2 PARTIE 1-1 À TEMPÉRATURE AMBIANTE

Dans le contexte d'une nouvelle approche permettant de déterminer le diagramme d'interaction d'une section en béton armé, telle qu'elle vient d'être présentée, il est indispensable de comparer la solution ainsi obtenue par le Calcul à la Rupture avec les résultats obtenus par les méthodes de type Eurocode.

Pour ce faire, il nous faut tout d'abord clarifier la question de la résistance en traction du matériau béton : *peut-elle être encore considérée comme non nulle après l'apparition des fissures, notamment en raison de l'augmentation de la température provoquée par le feu?* En effet, la fragilité du comportement en traction du béton suggère qu'elle s'annule brutalement dès que sa résistance en traction est atteinte (figure 2.11). C'est pour cette raison que nous supposons dans la suite que la résistance en traction du béton est nulle ( $f_t=0$ ), ce qui conduit à l'adoption d'un critère de Mohr-Coulomb entièrement tronqué en traction permettant de décrire les propriétés de résistance du béton.

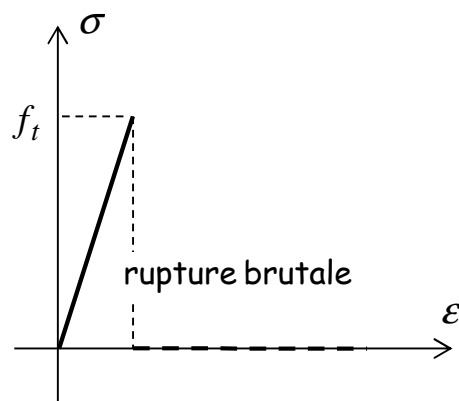


Figure 2.11. Schématisation du comportement fragile du béton en traction

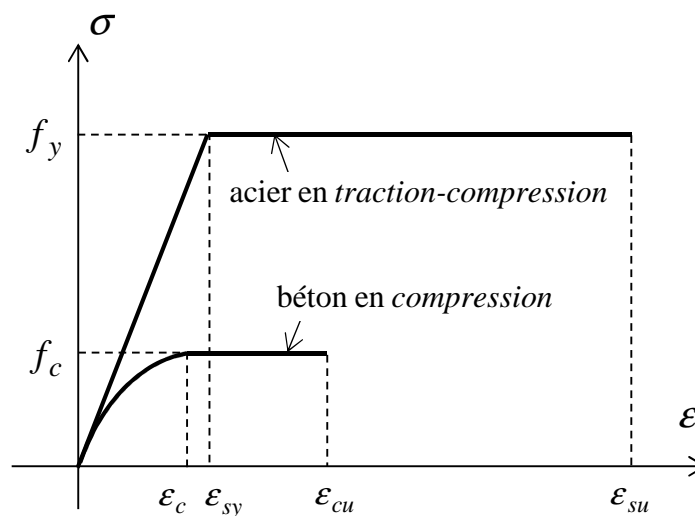


Figure 2.12. Courbes contrainte-déformation uni-axiales du béton et de l'acier

La démarche sur laquelle se fondent les calculs de l'Eurocode 2 partie 1-1 (EN1992-1-1, 2005) est similaire à l'approche statique par l'intérieur du Calcul à la Rupture développée dans ce chapitre, mais en se limitant au cas de la température ambiante. Les données relatives aux propriétés mécaniques des matériaux sont introduites sous la forme de diagrammes *contrainte-déformation*, de type *parabole-rectangulaire* pour le béton en compression et élastique parfaitement plastique pour l'acier en traction aussi bien qu'en compression (voir figure 2.12).

Les prédictions de l'Eurocode 2 partie 1-1 (EN1992-1-1, 2005) sont basées sur l'hypothèse que la section plane de béton armé reste plane après déformation. Elles reposent sur l'examen de configurations particulières de la section définies à partir des valeurs maximales prescrites pour la *déformation* (et non la *contrainte* comme dans le raisonnement du Calcul à la Rupture) du béton ( $-\epsilon_{cu}$ ) et de l'acier ( $\epsilon_{su}$ ) : voir figure 2.12. Ces valeurs limites définissent trois « pivots » notés *A*, *B* et *C*, représentés sur la figure 2.13 dans le cas d'un seul lit d'armatures, et trois domaines de variation des diagrammes de déformations, noté 1, 2 et 3, et définis comme suit.

- ◇ Le *domaine 1* correspond aux diagrammes pour lesquels la *limite de déformation en traction* est atteinte dans le renforcement (pivot *A*), la déformation dans le béton de la fibre supérieure restant supérieure à sa valeur limite en compression (pivot *B*).
- ◇ Le *domaine 2* correspond à la situation où la déformation de raccourcissement ultime du béton est atteinte sur la fibre supérieure (pivot *B*), la déformation de la fibre inférieure restant positive ou nulle (ce dernier cas définissant le pivot *C*).
- ◇ Enfin le *domaine 3* correspond aux diagrammes de déformation pour lesquels toute la section est en compression, l'axe neutre pour lequel la déformation est nulle étant situé en dehors de la section.

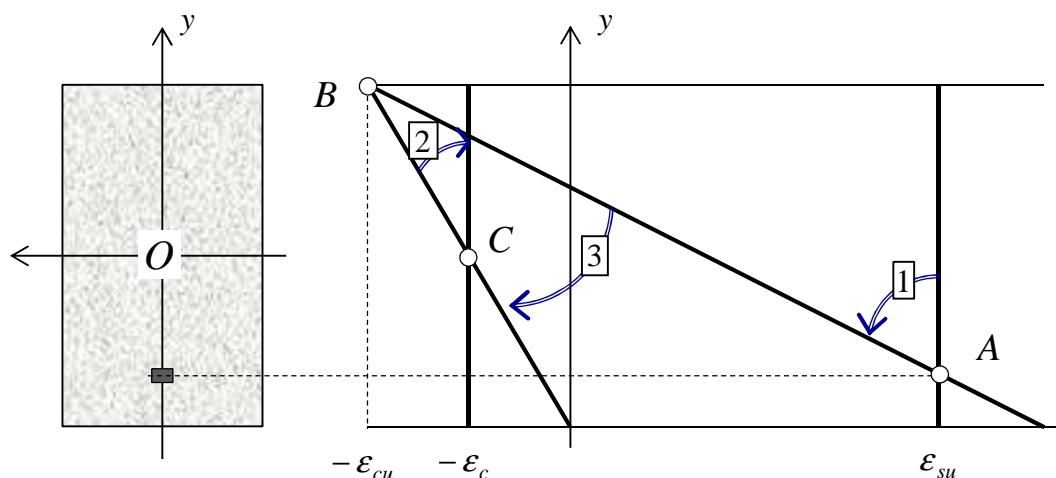


Figure 2.13. Diagramme des déformations relatives admissibles à l'état limite ultime



Le diagramme d'interaction est alors obtenu, point par point, en intégrant sur l'épaisseur de la section la distribution des contraintes associées à ces différents diagrammes de déformation admissible.

Adoptant pour la section en béton armé les mêmes caractéristiques que celles choisies à la section 2.5 du présent chapitre, la figure 2.14 montre d'une part, en trait continu, les courbes d'interaction paraboliques issues du Calcul à la Rupture, d'autre part les points correspondant au calcul de l'Eurocode 2 partie 1-1 (EN1992-1-1, 2005). Les deux sont en très bon accord, même s'il apparaît que des points restent légèrement à l'intérieur du domaine d'interaction donné par le Calcul à la Rupture, notamment pour des valeurs de compression et de flexion importantes. Cette différence provient du fait que dans certaines configurations la contrainte ultime du béton en compression est atteinte, ce qui n'est pas toujours le cas de l'acier.

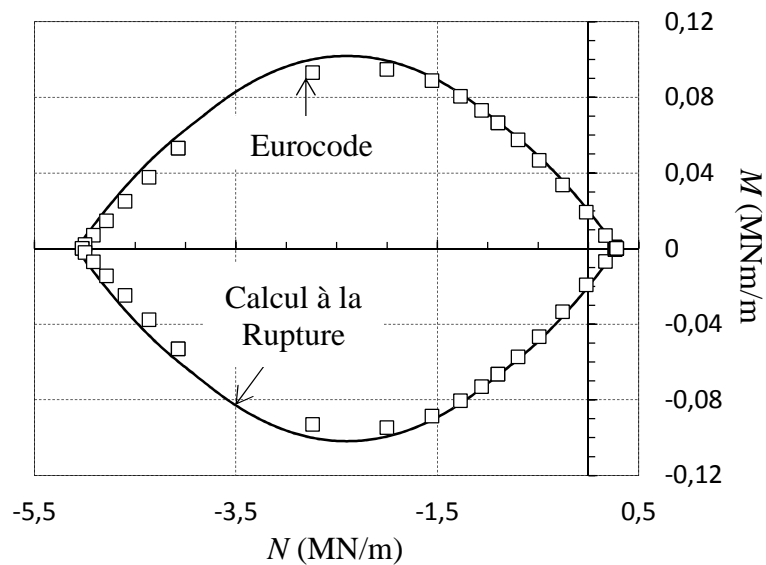


Figure 2.14. Comparaison entre le diagramme d'interaction obtenu par le Calcul à la Rupture avec les prévisions de l'Eurocode 2 partie 1-1 – Section en béton renforcée par deux lits d'armature

## 2.7 CONCLUSION

Nous avons étudié dans ce chapitre l'effet que peut avoir une augmentation élevée de température (due par exemple à un incendie) sur les capacités de résistance ultimes d'une section en béton armé exprimées à travers un diagramme d'interaction entre l'effort normal et le moment de flexion. Grâce à l'utilisation combinée des approches statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur du Calcul à la Rupture, un tel diagramme d'interaction a pu être déterminé de façon exacte en fonction de la distribution de l'augmentation de température et de la dégradation des propriétés de résistance des matériaux constitutifs qui en résulte.

L'une des principales caractéristiques de l'analyse est l'introduction de relations, issues d'essais expérimentaux, reliant la dégradation locale des propriétés de résistance des matériaux à l'augmentation de température. L'avantage de la méthode proposée, par rapport à d'autres méthodes, est de fournir un moyen rapide et simple permettant la détermination exacte des courbes d'interaction à partir de la connaissance du profil de température, sans avoir recours par exemple à des simulations numériques par éléments finis qui apparaissent lourdes. Des formulations (semi) analytiques ont été proposées pour de tels diagrammes d'interaction qui pourront ensuite, dans un second temps, être mises en œuvre dans le cadre d'un Calcul à la Rupture de l'ouvrage. Cette démarche peut être généralisée sans aucune difficulté de principe à des situations plus complexes, telles que celles mettant en jeu des poutres soumises à la flexion bi-axiale ou des plaques soumises à des sollicitations de flexion multiaxiale et des efforts membranaires dans son plan (voir chapitre 5).

Il convient de souligner que le modèle adopté dans ce chapitre ne se réfère pas à une schématisation de la poutre (ou plaque en déformation planes) conçue comme un assemblage de « fibres » indépendantes travaillant en traction-compression seulement. Le modèle adopté est dans le formalisme du *milieu continu 3D* car, même si les champs de contrainte utilisés dans l'approche statique par l'intérieur sont purement uni-axiaux, l'approche cinématique par l'extérieur utilise des champs de vitesse authentiquement tridimensionnels. Un tel choix apparaît plus rigoureux puisque, contrairement au modèle « fibres 1D », il reste par exemple parfaitement applicable à des situations où les effets de cisaillement doivent être pris en compte dans la détermination de diagrammes d'interaction incluant l'effet de l'effort tranchant.

Une confrontation de la formulation semi-analytique du diagramme d'interaction d'une section en béton armé en conditions isothermes avec les prédictions de l'Eurocode 2 partie 1-1, a permis de qualifier la méthode de calcul proposée. La validation proprement dite de ces diagrammes d'interaction en conditions d'incendie fera l'objet du chapitre 7, où nous comparerons le résultat des prédictions théoriques avec d'une part ceux d'essais au feu issus de la littérature, d'autre part avec ceux que nous avons effectués dans le cadre du présent travail.

L'application proprement dite de tels diagrammes d'interaction à l'analyse de la stabilité de panneaux de grande hauteur fait objet du chapitre 4. Le chapitre suivant sera dédié à la prise en compte explicite des changements de la géométrie provoqués par le chargement thermique, analysés dans le cadre d'un modèle simplifié de structure.

\* \*

\*

## Chapitre 3

# LA PRISE EN COMPTE EXPLICITE DES CHANGEMENTS DE GÉOMÉTRIE DE LA STRUCTURE

### 3.1 INTRODUCTION

En vertu des principes qui sont à la base du raisonnement du Calcul à la Rupture, la géométrie du système est considérée comme une *donnée*. Cette situation se présente lorsque les changements de géométrie dus à l'action de chargement peuvent être négligés, de sorte que la géométrie représente à la fois la configuration initiale et la configuration actuelle de la structure (*hypothèse des petites perturbations* : Salençon (1983 ; 2013), de Buhar (2007)). Il n'en est pas de même lorsque, comme dans notre cas par exemple, les déformations thermiques sont susceptibles de provoquer des changements de géométrie non négligeables en raison des grandes dimensions et notamment de la hauteur de la structure. Cette donnée, bien qu'indispensable à la résolution du problème, ne pourra donc pas être fournie par le Calcul à la Rupture, mais devra être recherchée en ayant recours à un calcul auxiliaire préalable.

De façon générale, ce dernier est fondé sur une simulation (analytique ou numérique) de la déformée du panneau prenant en compte le comportement thermomécanique des matériaux constitutifs (béton, armatures). Se référant par exemple à la méthode classique des éléments finis, il s'agit donc de spécifier la géométrie initiale de la structure (panneau droit vertical), le maillage de la structure, les lois de comportement thermomécanique utilisées, les conditions aux limites du problème et de déterminer avec la meilleure précision possible la déformée finale du panneau qui résulte du chargement thermique à l'aide d'un outil de post-traitement performant. C'est cette dernière qui sera alors introduite comme donnée d'entrée du Calcul à la Rupture.

Pour une application plus directe et praticable de la démarche en vue de pouvoir facilement réaliser des études paramétriques, nous avons choisi dans ce chapitre de développer un tel calcul de manière semi-analytique (Pham *et al.*, 2013*b*; 2014*b*; 2015*b*) sur la base d'une modélisation simplifiée 1D du panneau. Le calcul consiste donc à évaluer la configuration d'équilibre finale du panneau sous l'action conjuguée d'un gradient thermique et de son poids propre, puis de calculer des sollicitations qui en résultent localement dans chaque section du panneau. Les calculs sont effectués dans le cadre d'un comportement

(thermo-)élastique linéaire des matériaux, mais en prenant explicitement en compte les effets du seconde ordre qui jouent un rôle essentiel dans l'analyse.

## 3.2 RECHERCHE DE LA CONFIGURATION D'ÉQUILIBRE DU PANNEAU

### 3.2.1 Un modèle simplifié unidimensionnel

Adoptant une modélisation simplifiée, le panneau en béton armé est schématisé comme une poutre verticale (orientée suivant l'axe  $Ox$ ) de hauteur  $H$ , initialement droite et articulée à ses deux extrémités comme indiqué à la figure 3.1(a). La liaison en partie basse est maintenue fixe, correspondant par exemple à un appui simple en pied sur longrine, tandis que la partie haute est maintenue par un appui simple mobile libre de se déplacer verticalement.

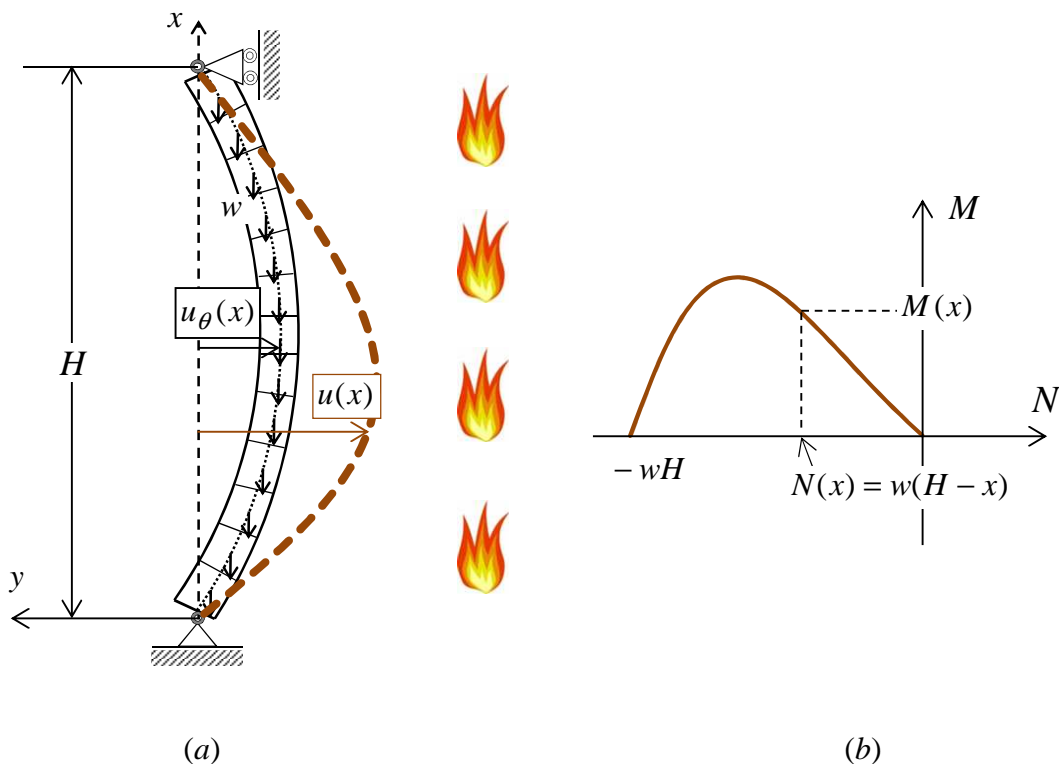


Figure 3.1. (a) Schéma de la déformée du panneau. (b) Diagramme des sollicitations

Le panneau ainsi modélisé, libre d'effort le long de ses bords latéraux, est soumis à l'action de son poids propre de densité linéique  $w$  considéré comme uniformément réparti sur toute sa hauteur, ainsi qu'à un gradient thermique uniforme se traduisant par une *déformée primaire* d'équation  $u_\theta(x)$  (vers le feu), où  $u$  représente le déplacement transversal suivant  $Oy$  à la hauteur  $x$  du panneau. Ce premier changement de géométrie, d'origine purement thermique, induit une excentricité du poids propre par rapport au plan vertical initial du panneau, qui entraîne l'apparition de moments de flexion et donc de déformations élastiques

supplémentaires qui viennent s'ajouter aux déformations thermiques et aboutissent finalement à une nouvelle déformée à l'équilibre d'équation  $u(x)$ .

Il convient tout d'abord de noter que le panneau de grande hauteur n'est soumis à aucun autre chargement mécanique que son poids propre (mur non-porteur), ce qui signifie en particulier que sa partie supérieure est libre de tout effort vertical. Par conséquent, en supposant que la rotation en tout point de la poutre déformée reste suffisamment faible, c'est-à-dire :

$$0 \leq x \leq H : \left| \frac{du}{dx} \right| = |u'(x)| \ll 1 \quad (3.1)$$

la *force axiale de compression* en une section quelconque  $N(x)$  est simplement égale au poids de la partie de poutre de hauteur  $(H-x)$  située au-dessus de cette section. La distribution linéaire de cet effort :

$$N(x) = w(x - H) \quad (3.2)$$

reste constante quelles que soit la déflexion horizontale  $u$ , pourvu que la condition (3.1) soit satisfaite.

Pour déterminer la configuration déformée finale associée à l'état d'équilibre du panneau, il est commode de décomposer cette déformée en deux parties additives : l'une, d'équation  $u_{th}(x)$ , correspond à l'intégration des seules déformations thermiques tandis que l'autre est associée aux déformations élastiques à l'apparition d'un moment fléchissant engendré par l'excentrement du poids propre.

### 3.2.2 Déformée thermique pure

Lorsque le panneau est uniformément chauffé sur l'une de ses faces, la face exposée au feu, et donc à l'augmentation de la température, tend à se dilater beaucoup plus que la face non exposée. Cette dilatation différentielle va engendrer une courbure globale du panneau, qui peut être calculée en fonction de l'augmentation de température  $\theta(y)$  à travers son épaisseur  $(-h/2 \leq y \leq +h/2)$ . La déformation thermique associée  $\varepsilon^{th}(y)$  (dont la distribution est représentée par la ligne rouge en pointillé sur la figure 3.2) est égale à :

$$-h/2 \leq y \leq +h/2 : \varepsilon^{th}(y) = \alpha(y)\theta(y) \quad (3.3)$$

où  $\alpha(y)$  est le coefficient de dilatation thermique du matériau (béton ou acier) situé à la côte  $y$  dans l'épaisseur du panneau.

Dans l'hypothèse classiquement admise où les sections planes restent planes après déformation (figure 3.2), la *déformation totale* (c'est-à-dire la somme des déformations thermique et mécanique) est affine dans l'épaisseur du panneau, ce qui induit des contraintes de compression dans les parties inférieure et supérieure de la section, et des contraintes de

traction dans la partie centrale. En conséquence, la cinématique de chaque section plane transversale située à la hauteur  $x$  du panneau est caractérisée par la déformation axiale  $\varepsilon_\theta(x)$  dans le plan médian ( $y=0$ ) de cette section d'une part, sa courbure  $\chi_\theta(x)$  d'autre part (voir figure 3.2), de sorte que la valeur de la déformation totale s'écrit :

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon_\theta(x) - \chi_\theta(x)y \quad (3.4)$$

et, en supposant que le béton obéit à un comportement thermoélastique linéaire :

$$(\sigma_c - \sigma_c^0)(x, y) = E_c(\theta(y))(\varepsilon_\theta(x) - \chi_\theta(x)y - \varepsilon_c^{\text{th}}(y)) \quad (3.5)$$

où  $\sigma_c^0(x, y)$  est la distribution de contraintes initiale (c'est-à-dire préalablement à l'application du chargement thermique) et  $E_c(\theta(y))$  le module Young du béton, qui varie avec la température  $\theta(y)$ . De même, la force axiale dans l'armature n° $k$  localisée dans le plan  $y=\xi_k$  peut s'écrire sous la forme :

$$(n_s - n_s^0)(x, \xi_k) = A_k E_s(\theta(\xi_k))(\varepsilon_\theta(x) - \chi_\theta(x)\xi_k - \varepsilon_s^{\text{th}}(\xi_k)) \quad (3.6)$$

dans laquelle  $n_s^0(x, \xi_k)$  est la force axiale initiale et  $E_s(\theta(y))$  est le module d'Young dépendant de la température du matériau (acier) constitutif de l'armature, de section  $A_k$ .

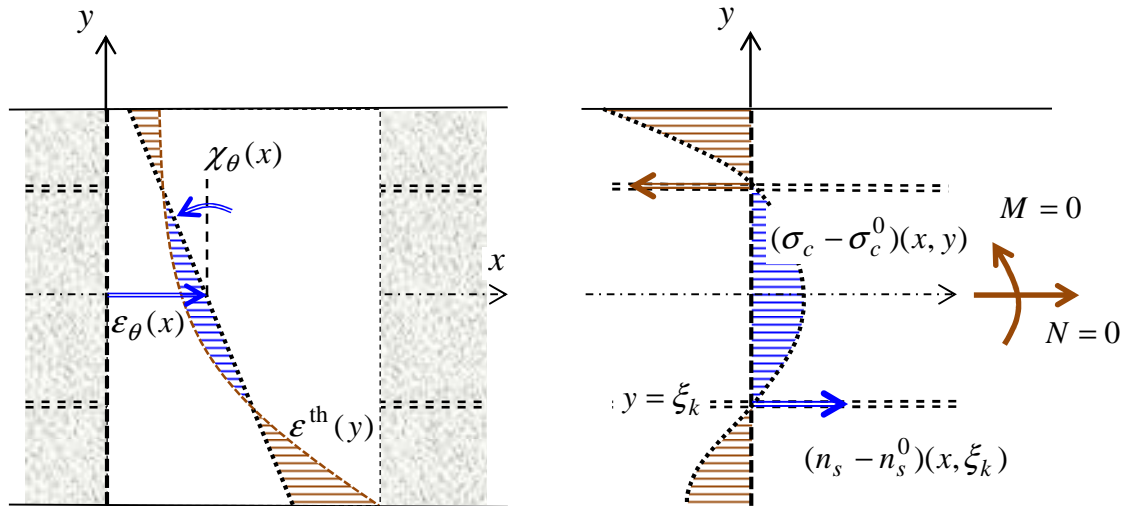


Figure 3.2. Distributions de déformations et de contraintes dans une section du panneau soumise à un gradient de température

Or il apparaît que les incréments de contraintes figurant dans les équations (3.5) et (3.6), engendrés par l'incompatibilité des déformations thermiques dans une section courante du panneau, sont auto-équilibrés, c'est-à-dire en équilibre avec un effort normal et un moment de flexion *nuls*; ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_c - \sigma_c^0)(y) dy + \sum_k (n_s - n_s^0)(\xi_k) = 0 \\
& \int_{-h/2}^{h/2} -y(\sigma_c - \sigma_c^0)(y) dy - \sum_k \xi_k (n_s - n_s^0)(\xi_k) = 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Introduisant les expressions de ces contraintes données par (3.5) et (3.6), dans les équations (3.7), il est alors possible de calculer la déformation axiale et la courbure qui sont de la forme :

$$\varepsilon_\theta = \frac{CD - BE}{AC - B^2} \quad \text{et} \quad \chi_\theta = \frac{BD - AE}{AC - B^2} \tag{3.8}$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$  sont des constantes caractéristiques de la section, fonctions du gradient de température, données par :

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-h/2}^{h/2} E_c(\theta(y)) dy + \sum_k E_s(\theta(\xi_k)) A_k; \\
B &= \int_{-h/2}^{h/2} y E_c(\theta(y)) dy + \sum_k \xi_k E_s(\theta(\xi_k)) A_k; \\
C &= \int_{-h/2}^{h/2} y^2 E_c(\theta(y)) dy + \sum_k \xi_k^2 E_s(\theta(\xi_k)) A_k; \\
D &= \int_{-h/2}^{h/2} E_c(\theta(y)) \varepsilon_c^{\text{th}}(y) dy + \sum_k E_s(\theta(\xi_k)) \varepsilon_s^{\text{th}}(\xi_k) A_k; \\
E &= \int_{-h/2}^{h/2} y E_c(\theta(y)) \varepsilon_c^{\text{th}}(y) dy + \sum_k \xi_k E_s(\theta(\xi_k)) \varepsilon_s^{\text{th}}(\xi_k) A_k
\end{aligned} \tag{3.9}$$

À température ambiante, les déformations  $\varepsilon^{\text{th}}(y)$  étant nulles et les modules d'élasticité des matériaux constants, il est facile de vérifier que  $D=E=0$  et  $\varepsilon_\theta = \chi_\theta = 0$ . De plus, puisque le gradient thermique est identique dans chaque section, les déformations axiales et les courbures résultantes sont constantes tout au long de la hauteur du panneau. Il s'ensuit que la déformée thermique du panneau est caractérisée par un déplacement  $u_\theta(x)$  hors plan tel que :

$$\frac{d^2 u_\theta}{dx^2} = \chi_\theta \tag{3.10}$$

La double intégration de l'équation différentielle ci-dessus donne immédiatement, en tenant compte des conditions aux limites  $u_\theta(x=0) = u_\theta(x=H) = 0$ , la déformée thermique, de courbure constante, et donc d'équation parabolique :



$$u_{\theta}(x) = \frac{\chi_{\theta}}{2} x(x-H) = \frac{1}{2\rho_{\theta}} x(x-H) \quad (3.11)$$

où  $\rho_{\theta} = 1/\chi_{\theta}$  désigne le *rayon de courbure*. La condition (3.1) de *petite rotation* en tout point de la poutre est satisfaite si et seulement si ce rayon de courbure est grand vis-à-vis de la hauteur du panneau :  $\rho_{\theta} \gg H$ .

### 3.2.3 Déformée totale résultant de la prise en compte de l'effet du second ordre (Effet P-delta)

La déformée « thermique » caractérisée par l'équation parabolique (3.11) conduit à une déflexion hors plan du panneau qui entraîne en tout point l'apparition d'un moment fléchissant  $M_{\theta}(x)$ . Le panneau étant alors modélisé comme une poutre courbe, l'analyse de cette structure *isostatique* permet de calculer la distribution correspondante de moments fléchissants :

$$M_{\theta}(x) = w \left[ \frac{x-H}{H} \int_0^H u_{\theta}(s) ds + \int_x^H [u_{\theta}(s) - u_{\theta}(x)] ds \right] \quad (3.12)$$

soit, en tenant compte de (3.11) :

$$M_{\theta}(x) = \frac{w}{12\rho_{\theta}} x(H-x)(5H-4x) \quad (3.13)$$

Cette distribution du moment fléchissant va à son tour engendrer des déformations élastiques de flexion que l'on peut calculer en recourant au même type de raisonnement que celui utilisé précédemment pour évaluer la déformée thermique initiale (3.11). Désignant par  $\Delta N(x)$  et  $\Delta M(x)$  les incréments de sollicitations appliquées à la section située à la hauteur  $x$  du panneau, et par  $\Delta \mathcal{E}(x)$  et  $\Delta \chi(x)$  la réponse élastique correspondante exprimée en terme d'incrément de déformations axiales à mi-épaisseur et de courbure de la même section, les relations suivantes peuvent être écrites de façon similaires aux équations (3.5) et (3.6) :

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_c(x, y) &= E_c(\theta(y))(\Delta \mathcal{E}(x) - \Delta \chi(x)y) \\ \Delta n_s(x, \xi_k) &= A_k E_s(\theta(\xi_k))(\Delta \mathcal{E}(x) - \Delta \chi(x)\xi_k) \end{aligned} \quad (3.14)$$

qui, incorporées dans les conditions d'équilibre :

$$\int_{-h}^h \Delta \sigma_c(y) dy + \sum_k \Delta n_s(\xi_k) = \Delta N \quad ; \quad - \int_{-h}^h y \Delta \sigma_c(y) dy - \sum_k \xi_k \Delta n_s(\xi_k) = \Delta M \quad (3.15)$$

conduisent aux relations linéaires suivantes :

$$\begin{pmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ -B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon \\ \Delta \chi \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

où les expressions des coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont données par (3.9). Étant donné que dans la situation actuelle,  $\Delta N(x)=0$  et  $\Delta M(x)=M_\theta(x)$ , on obtient finalement :

$$\Delta \chi(x) = \frac{d^2}{dx^2} [\Delta u(x)] = \frac{M_\theta(x)}{(EI)_\theta} \quad (3.17)$$

où :

$$(EI)_\theta = C - B^2 / A \quad (3.18)$$

correspond à la *rigidité en flexion pure* de la section chauffée associée au profil de température  $\theta(y)$  donné. Cette dernière relation montre que, puisque la variation de l'épaisseur du panneau (et donc de son inertie géométrique) due aux déformations thermiques reste négligeable, la diminution du module d'élasticité des matériaux entraîne la diminution correspondante de la rigidité flexionnelle de la section. En outre, les relations (3.9) montrent que, dans le cas particulier d'une section de béton homogène renforcée par deux barres d'acier placées symétriquement ( $y=\pm\xi$ ), à température ambiante,  $B=0$ , l'expression de la rigidité flexionnelle se simplifie en :

$$(EI)_{\theta=\theta_0} = C = \frac{h^3}{12} E_c + 2\xi^2 A_s E_s \quad (3.19)$$

Les propriétés élastiques de la section chauffée étant désormais caractérisées en tout point du panneau, nous nous proposons maintenant d'évaluer la déformée finale du panneau en équilibre sous l'action de son poids excentré.

### 3.2.3.1 Une procédure itérative simple

L'intégration de l'équation (3.17), tenant compte de (3.18) ainsi que les conditions aux limites aux deux extrémités du panneau, donne :

$$u_1(x) = u_\theta(x) + \Delta u(x) \quad (3.20)$$

avec :

$$\Delta u(x) = \frac{w}{720\rho_\theta(EI)_\theta} x(x-H) [12x^3 - 33Hx^2 + 17H^2(x+H)] \quad (3.21)$$

correspondant à l'expression actualisée suivante de la distribution des moments de flexion calculée à travers l'équation (3.17) dans laquelle  $u_\theta$  doit être remplacé par  $u_1$ :

$$M_1(x) = M_\theta(x) + \frac{w^2 x(x-H)}{1440 \rho_\theta (EI)_\theta} \left[ 20x^4 - 76Hx^3 + 89H^2x^2 - 11H^3x - 28H^4 \right] \quad (3.22)$$

Il est alors facile de voir que le déplacement transversal supplémentaire  $\Delta u(x)$  relatif à l'excentrement du poids propre est donné par l'équation (3.21). La même procédure itérative peut être appliquée une fois de plus pour la résolution de l'équation différentielle du second ordre :

$$M_1(x) = (EI)_\theta \frac{d^2}{dx^2} [u_2(x) - u_\theta(x)] \quad (3.23)$$

donnant une nouvelle expression polynomiale  $u_2(x)$ , de degré 8, pour la déformée du panneau. Cette procédure est effectuée jusqu'à ce que la convergence des déplacements transversaux est observée, qui correspond au fait que la déformée et le moment fléchissant tendent simultanément vers les solutions :

$$u(x) = \lim_{i \rightarrow +\infty} u_i(x) \text{ et } M(x) = \lim_{i \rightarrow +\infty} M_i(x) \quad (3.24)$$

Ainsi, la courbe donnant en toute hauteur  $x$  le moment de flexion  $M(x)$  en fonction de l'effort normal  $N(x) = w(x-H)$  peut alors être tracée dans le plan  $(N, M)$ , comme indiqué sur la figure 3.1(b).

### 3.2.3.2 Exemple illustratif de la déformée du panneau

À titre d'exemple illustratif, les données suivantes ont été choisies pour mettre en évidence les changements de la géométrie de la structure induits par le feu. Le panneau en béton armé retenu pour le cas d'étude est de même section que celle traitée dans le cadre de la section 2.5 du chapitre 2, dont les caractéristiques sont rappelées ici :

- ◇ La section rectangulaire de  $0,15 \times 1 \text{ m}^2$  est exposée à un feu ISO 834 (EN1991-1-1, 2003) sur sa face droite ( $y = -h/2$ ).
- ◇ Béton de densité normale réalisé avec des granulats siliceux:  $f_c = 32 \text{ MPa}$ ,  $f_t = 2,5 \text{ MPa}$ .
- ◇ Deux lits (un lit supérieur et un lit inférieur) comportant chacun 10 barres d'acier laminé à chaud de 6mm de diamètre avec 3cm d'enrobage :  $f_y = 500 \text{ MPa}$ .
- ◇ Le poids linéique  $w = 3,75 \text{ kN/m}$  correspondant au poids volumique  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$  du béton armé, est supposé indépendant de la température.
- ◇ Les déformations thermiques du béton et de l'acier extraites de l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005) sont données sur la figure 1.8 du chapitre 1.

La figure 3.3 ci-après donne l'évolution des facteurs de réduction des modules d'élasticité du béton et de l'acier en fonction de la température. En ce qui concerne le béton, l'évaluation du module Young  $E_c$  en fonction de la température est déduite de la courbe contrainte-déformation uni-axiale dépendante de la température de l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005) –(voir figure 1.10 du chapitre 1) par la formule :

$$E_c(\theta) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{3}{2} \frac{f_c(\theta)}{\varepsilon_{c,1}(\theta)} \quad (3.25)$$

où  $\varepsilon_{c,1}(\theta)$  est la déformation correspondant à la résistance en compression  $f_c(\theta)$  dont les valeurs sont données dans le tableau 3.1 de l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005). Il en résulte que pour un béton de la résistance à la compression égale à 32MPa, le module Young  $E_c$  correspondant est égal à 19,2GPa à température ambiante. Le module Young  $E_s$  à température ambiante de l'acier est de 200GPa. Ces modules sont corrigés à la baisse en fonction de la température par l'intermédiaire des coefficients multiplicatifs représentés sur la figure 3.3.

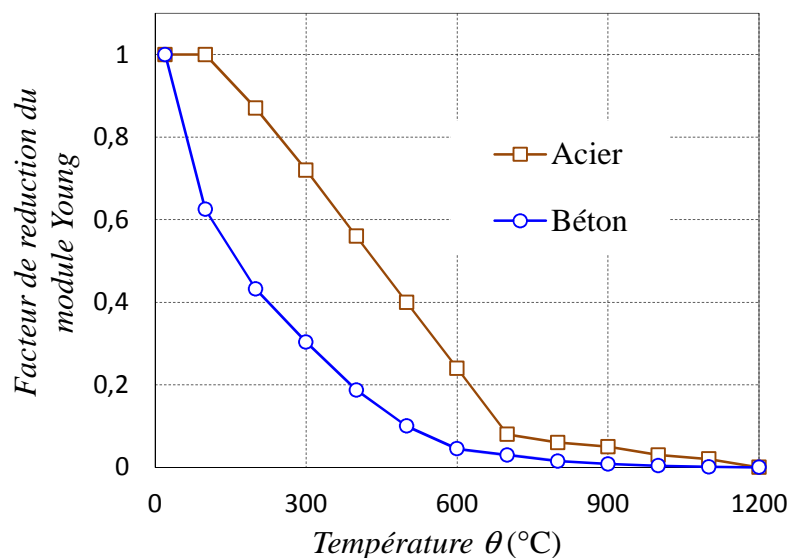


Figure 3.3. Facteurs de réduction du module Young du béton et de l'acier en fonction de la température

Sur la base des caractéristiques géométriques et des propriétés mécaniques des matériaux constitutifs ainsi déterminées, l'introduction des profils de température de la figure 2.9 (chapitre 2) conduit aux dilatations thermiques  $\varepsilon_\theta$  à mi-épaisseur du panneau, aux rayons thermiques  $\rho_\theta$  ainsi qu'aux rigidités flexionnelles  $(EI)_\theta$  suivantes, répertoriés dans le tableau 3.1 ci-après. Les résultats regroupés dans ce tableau montrent que la rigidité flexionnelle est donc très sensible à l'augmentation de la durée d'exposition au feu. Elle passe de 5,6MNm<sup>2</sup>/m à température ambiante à 1,143MNm<sup>2</sup>/m après 120min d'exposition au feu, c'est-à-dire que le panneau est 5 fois plus souple après 120min au feu.

Tableau 3.1. *Caractéristiques de la section chauffée du panneau*

Durée au feu (min)	Dilatation thermique $\varepsilon_\theta$ (%)	Rayon thermique $\rho_\theta$ (m)	Rigidité flexionnelle $(EI)_\theta$ (MNm <sup>2</sup> )
0	0	$+\infty$	5,600
30	0,089	49,351	2,864
60	0,174	30,768	1,956
90	0,252	23,836	1,464
120	0,326	19,747	1,143

Le calcul de la déformée du panneau prenant en compte les déformations d'origine thermique, ainsi que les déformations élastiques de courbure est alors effectué en utilisant la procédure itérative décrite en 3.2.3.1. Notons qu'une telle procédure, qui pourrait apparaître longue et fastidieuse en termes de temps de calcul se révèle en fait très rapide. D'une part parce que les expressions polynomiales qui entrent en jeu dans l'expression de la déformée totale et de la distribution des moments fléchissants sont aisées à manipuler, d'autre part parce qu'il apparaît qu'en pratique la convergence de la procédure se réalise au bout de seulement deux ou trois itérations. La figure 3.4 montre par exemple que, pour un panneau de 12m de hauteur exposé 120min au feu ISO 834 (EN1991-1-2, 2003), les déformées correspondant à la deuxième et la troisième itération sont quasiment égales à la solution convergée :

$$u_2(x) \cong u_3(x) \cong u(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) \quad (3.26)$$

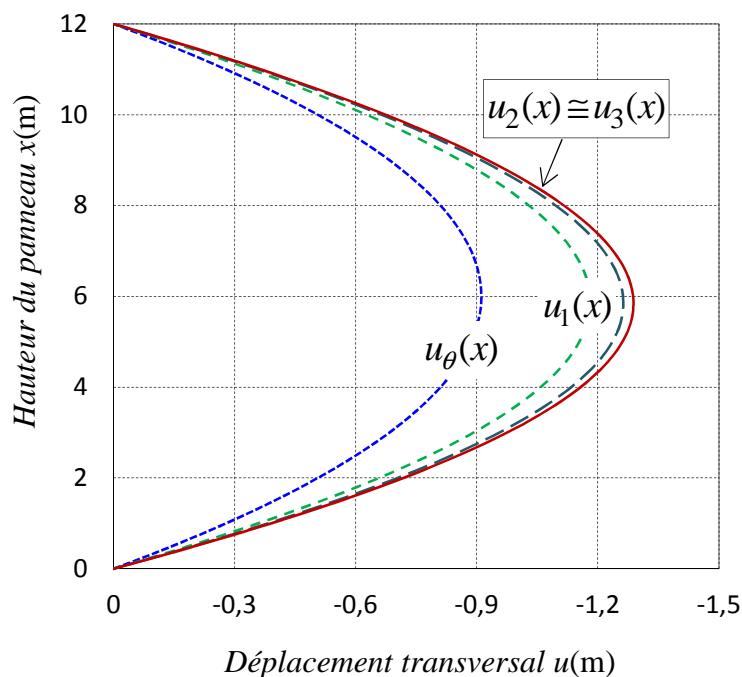


Figure 3.4. Déformée d'un panneau de 12m de hauteur pour une durée d'exposition au feu de 120min

Les déformées de ce panneau en fonction de la durée d'exposition au feu sont également présentées sur la figure 3.5. L'augmentation rapide de la différence entre la déformée totale et la déformée thermique en fonction de la durée d'exposition au feu ressort bien de cette figure.

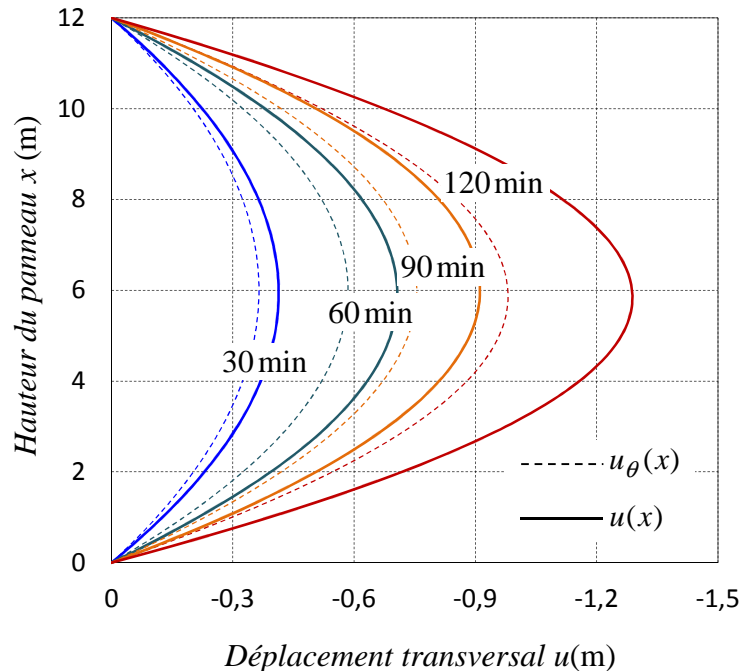


Figure 3.5. Déformées d'un panneau de 12m de hauteur pour différentes durées d'exposition au feu

La figure 3.6 présente les déformées thermiques et finales de panneaux de différentes hauteurs (6m, 8m, 10m et 12m) soumis à une durée d'exposition au feu de 120min. Les différents panneaux étant de même section, la courbure thermique initiale est constante (indépendante de la hauteur) mais ce n'est bien évidemment pas le cas du déplacement transversal, qui, en vertu de (3.1), est une fonction fortement croissante de la hauteur du panneau. On observe également sur cette même figure l'augmentation très rapide de la différence entre la déformée totale et la déformée thermique en fonction de la hauteur du panneau, mettant en évidence les effets du second ordre liés à l'excentrement du poids propre. Ainsi, pour le panneau de 6m de hauteur, le déplacement transversal supplémentaire d'origine élastique, dû à l'effet du poids propre est négligeable, tandis que pour les panneaux de hauteur de 10m et 12m, la réponse est tout à fait différente, les déplacements transversaux supplémentaires liés au poids propre apparaissant beaucoup plus importants.

Afin d'illustrer concrètement ce dernier point, la figure 3.7 représente les déplacements transversaux à mi-hauteur de différents panneaux. Le déplacement transversal maximal du panneau de 12m de hauteur est par exemple plus de six fois supérieur à celui du panneau de 6m de hauteur (1,28m au lieu de 0,2m) et même plus de dix fois dans le cas d'un panneau de 14m. Cela signifie que, dans le cas présent, l'effet du second ordre demeure négligeable tant

que la hauteur du panneau reste inférieure à 6m mais se manifeste de façon croissante pour des panneaux de plus grande hauteur (plus de 10m environ).

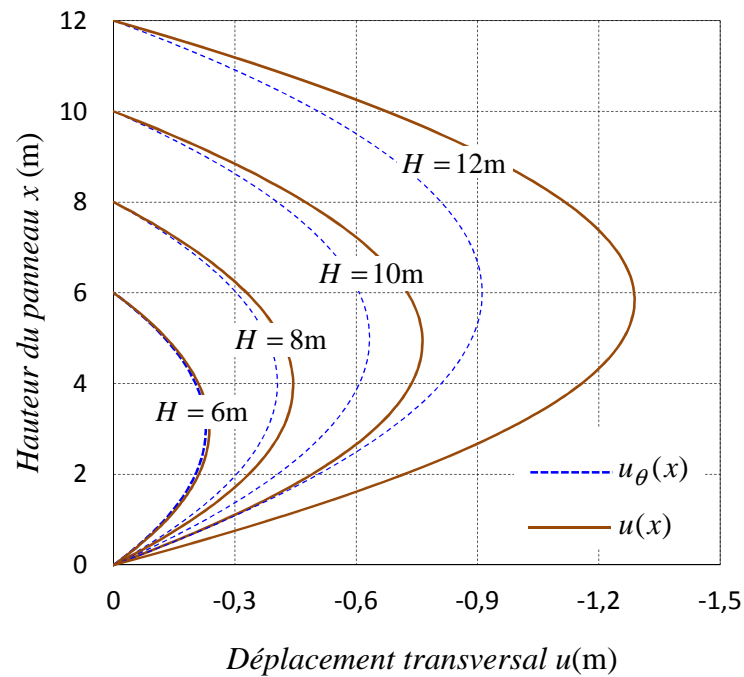


Figure 3.6. Déformées de panneaux de 6m, 8m, 10m et 12m de hauteur exposés au feu pendant 120min

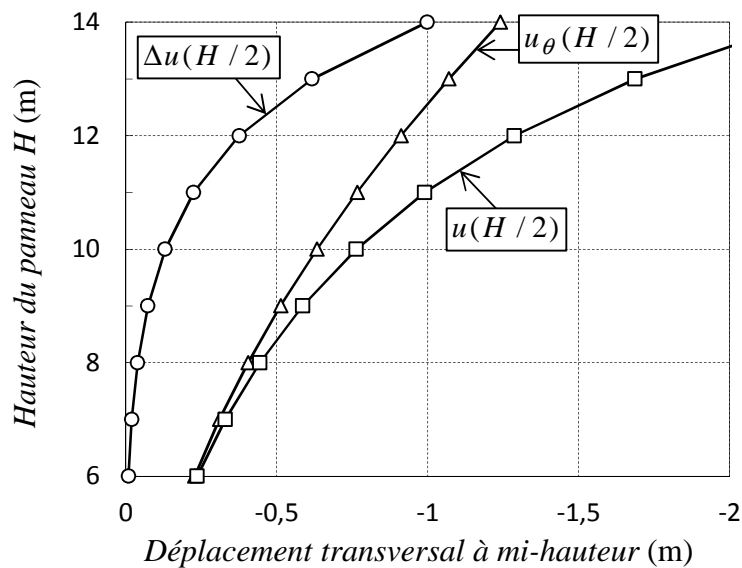


Figure 3.7. Déplacements à mi-hauteur en fonction de la hauteur de différents panneaux exposés au feu pendant 120min

On peut d'ores et déjà prévoir que l'amplitude des déplacements hors-plan d'un panneau de largeur limitée, modélisée comme une plaque en appui simple sur ses quatre bords et notamment sur ses deux bords latéraux (question que nous examinerons en détail au chapitre

6), sera significativement inférieure à celle que prédite le modèle simplifié ici présenté, qui ne tient pas compte des conditions d'appui sur les bords latéraux. On peut également préciser que dans notre approche, le panneau est uniformément exposé au feu sur toute sa hauteur, ce qui constitue sans doute une hypothèse très sécuritaire pour les panneaux de grandes dimensions, mais est cohérent avec la réglementation incendie nationale en vigueur pour ce qui concerne le feu conventionnel.

### 3.2.3.3 Comparaison avec les résultats d'un modèle analytique

Conçue comme une alternative à la procédure itérative décrite ci-dessus, une solution (semi)analytique du problème peut être directement obtenue comme suit. En exprimant l'équilibre sur la configuration déformée finale, caractérisée par le profil de déplacements (inconnu)  $u(x)$ , la distribution des moments fléchissants engendrée par l'excentrement du poids propre s'écrit sous la forme intégrale suivante :

$$M(x) = w \left[ \frac{x-H}{H} \int_0^H u(s) ds + \int_x^H [u(s) - u(x)] ds \right] \quad (3.27)$$

en tenant compte de la loi de comportement thermoélastique de type flexion-courbure :

$$M(x) = (EI)_\theta \frac{d^2}{dx^2} [u(x) - u_\theta(x)] \quad (3.28)$$

conduit, après dérivation par rapport à  $x$ , à l'équation différentielle du troisième ordre suivante en  $u(x)$  :

$$u'''(x) + \frac{w}{(EI)_\theta} (H-x) u'(x) = c \quad (3.29)$$

où  $c$  est une constante d'intégration à déterminer. Cette équation différentielle a par exemple été traitée par J. H. R. Sampaio et Hundhausen (1998) dont nous reproduisons ci-dessous la démarche.

Effectuant le changement de variable de la forme  $x=aX+b$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes, l'équation (3.29) peut être réécrite sous la forme :

$$u'''(X) + \frac{w}{(EI)_\theta} (H-aX-b) a^2 u'(X) = a^3 c \quad (3.30)$$

On choisit alors les constantes  $a$  et  $b$  de telle sorte que le coefficient de  $u'(X)$  dans l'équation (3.30) devienne égal  $(-X)$ , c'est-à-dire que :

$$\frac{w}{(EI)_\theta} (H-aX-b) a^2 = -X \quad (3.31)$$



ce qui correspond à :

$$a = \left( \frac{(EI)_\theta}{w} \right)^{1/3}, \quad b = H \quad (3.32)$$

L'équation (3.31) se simplifie donc en :

$$u'''(X) - Xu'(X) = a^3 c \quad (3.33)$$

Constatant alors que l'équation (3.33) ne comprend pas de terme en  $u(X)$ , nous pouvons réduire son ordre en posant  $f(X)=u'(X)$  (Sampaio et Hundhausen, 1998). D'où finalement l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$f''(X) - Xf(X) = a^3 c \quad (3.34)$$

La solution explicite de cette équation peut être obtenue à l'aide des fonctions spéciales représentées par des séries hypergéométriques généralisées (J. H. R. Sampaio, 1996), et tenant compte des conditions aux limites correspondant à des appuis simples aux deux extrémités :

$$u(x=0) = u(x=H) = 0, \quad u''(x=0) = u''(x=H) = \chi_\theta \quad (3.35)$$

La figure 3.8 montre clairement que les deux méthodes de calcul (la procédure itérative :  $u_3(x)$  et le modèle semi-analytique :  $u_{an}(x)$ ) conduisent à des résultats qui sont en excellent accord entre eux.

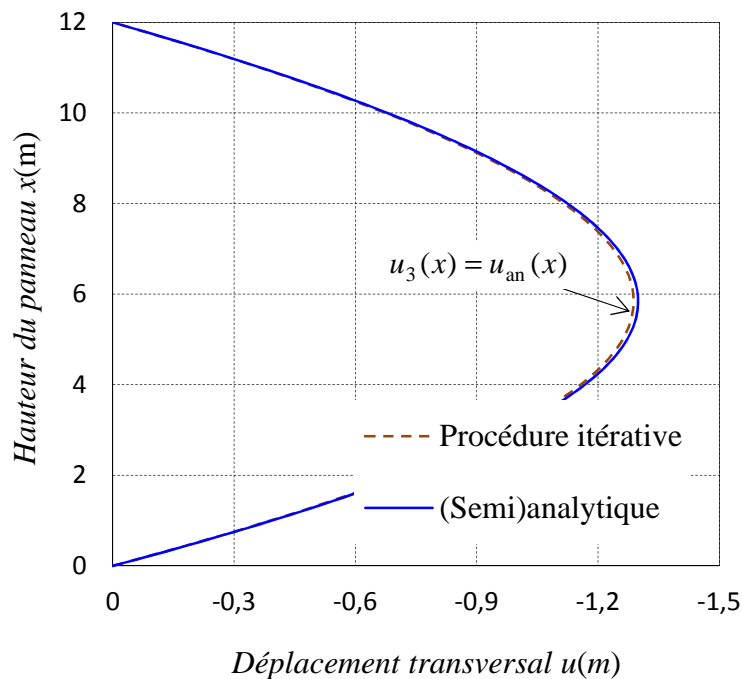


Figure 3.8. Comparaison des déformées d'un panneau de 12m de hauteur exposé 120min au feu, obtenues par la procédure itérative et par les fonctions hypergéométriques

### 3.2.3.4 Comparaison avec des simulations numériques

En complément du modèle semi-analytique précédent, et à titre de comparaison, une simulation numérique du même problème a été réalisée à l'aide du logiciel de calcul aux éléments finis Marc (MSC.Software Corporation, 2007). Ce logiciel, à vocation générale, offre la possibilité d'effectuer des analyses linéaires ou non-linéaires des structures dans lesquelles les propriétés des matériaux peuvent dépendre de la température. Les caractéristiques retenues pour les matériaux sont celles employées dans l'exemple précédent. Elles concernent l'évolution des modules Young et des déformations thermiques (coefficients de dilatation thermique) en fonction de la température du béton et de l'acier. Les conditions aux limites imposées sont des déplacements verticaux nuls en pied du panneau reposant sur la longrine support, des déplacements transversaux nuls en pied et en tête. Les déplacements verticaux au niveau de la tête du panneau sont laissés libres afin que la dilatation thermique verticale et le déplacement dû au poids propre soient possibles.

Sur le plan numérique, le panneau en béton est modélisé dans son épaisseur par des éléments de volume hexaédriques à 8 nœuds (HEXA8) avec interpolation linéaire. L'étude de sensibilité du maillage nous conduit, pour un panneau de 12m de hauteur et de 15cm d'épaisseur, à choisir 8 éléments dans l'épaisseur et 240 éléments sur toute la hauteur. La largeur du panneau est prise identique à son épaisseur afin que l'analyse soit proche du modèle simplifié de type poutre. La figure 3.9 représente des éléments volumiques représentatifs suivant la hauteur du panneau.

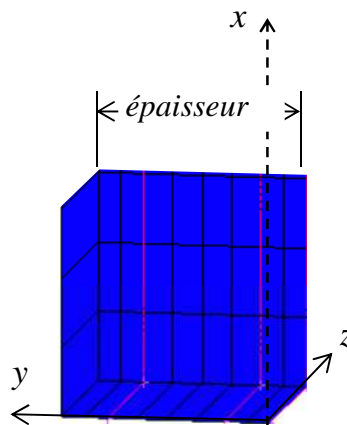


Figure 3.9. Une partie du maillage par éléments finis réalisé à l'aide du logiciel MARC

Le maillage des lits d'armature est réalisé à l'aide des éléments «REBAR» travaillant uniquement en *traction-compression*. Ces éléments sont bien positionnés et connectés aux éléments volumiques HEXA8. L'idée de base du concept de la couche d'armatures se traduit par le fait que les barres (inclusions) de renforcement et la matrice de matériau béton sont représentées de façon indépendante par différents types d'éléments ainsi que différents modèles de comportement. Dans cette modélisation, les barres d'armatures sont représentées

sous la forme de couches intégrées dans les éléments représentant la matrice du béton. La compatibilité entre les éléments « REBAR » représentant les lits d'armatures et les éléments volumiques hexaédriques modélisant le béton est ensuite imposée (MSC.Software Corporation, 2007). Pour ce faire, deux options sont possibles dans le logiciel :

- ◇ superposition des éléments de barres d'armature dans la matrice correspondant aux éléments solides de béton en utilisant la même connectivité ;
- ◇ intégration des éléments de barres d'armatures représentés par un maillage indépendant dans le maillage de la matrice de béton.

Dans la première option, les éléments de barres d'armatures partagent les mêmes nœuds que ceux de l'élément de la matrice correspondante. La condition de compatibilité entre les armatures et les matériaux de la matrice est alors appliquée automatiquement.

Pour obtenir une plus grande souplesse dans la définition de barres d'armature pouvant être positionnées de façon arbitraire, et une meilleure visualisation des éléments, la deuxième option a été choisie dans cette simulation numérique. Les données essentielles pour caractériser une telle barre sont l'aire de la section (correspondant à un diamètre de 6mm), l'orientation ( $0^\circ$  par rapport à l'axe vertical du panneau) et le nombre de barres d'armatures par unité de largeur selon l'axe  $Oz$  (égal ici à 10). C'est ainsi que le maillage des éléments d'armatures est visualisé par des lignes rouges sur la figure 3.9.

Le calcul thermomécanique effectué à l'aide de ce logiciel s'attache à évaluer la déformée du panneau due à un chargement thermique appliqué uniformément sur une face du panneau, combiné à l'effet de son poids propre. Les profils de température, qui servent de données d'entrée pour le calcul thermomécanique, sont ceux de la figure 2.9 du chapitre 2. Le calcul est effectué dans le cadre d'un comportement thermoélastique linéaire qui consiste à résoudre le problème d'équilibre mécanique statique associé à un critère de convergence basé sur les résidus de forces. Les calculs sont effectués en grands déplacements afin d'identifier les non-linéarités géométriques au cours de l'analyse statique (grandes déformations thermiques notamment et effet du second ordre éventuel du panneau sous son poids propre).

Sous l'effet du gradient thermique créé par l'écart de température entre les deux faces du panneau, des contraintes thermiques (autocontraintes) apparaissant dans l'épaisseur de ce dernier, sont représentées sur la figure 3.10(a).

On constate que, pour une hauteur donnée, les iso-valeurs correspondantes sont distribuées de façon uniforme dans l'épaisseur du panneau. Sous l'effet des dilatations thermiques différentielles, les barres d'aciers sont soumises à une compression. Ceci traduit le fait que le gradient thermique transversal induit trois zones de contraintes dans l'épaisseur dont la zone centrale est en traction et les deux zones proches des deux faces sont en compression (voir figure 3.2).

Sous l'effet combiné du chargement thermique et du poids propre, les contraintes dépendent évidemment de la hauteur du panneau. La figure 3.10(b) montre la distribution des contraintes dans l'épaisseur à mi-hauteur du panneau.

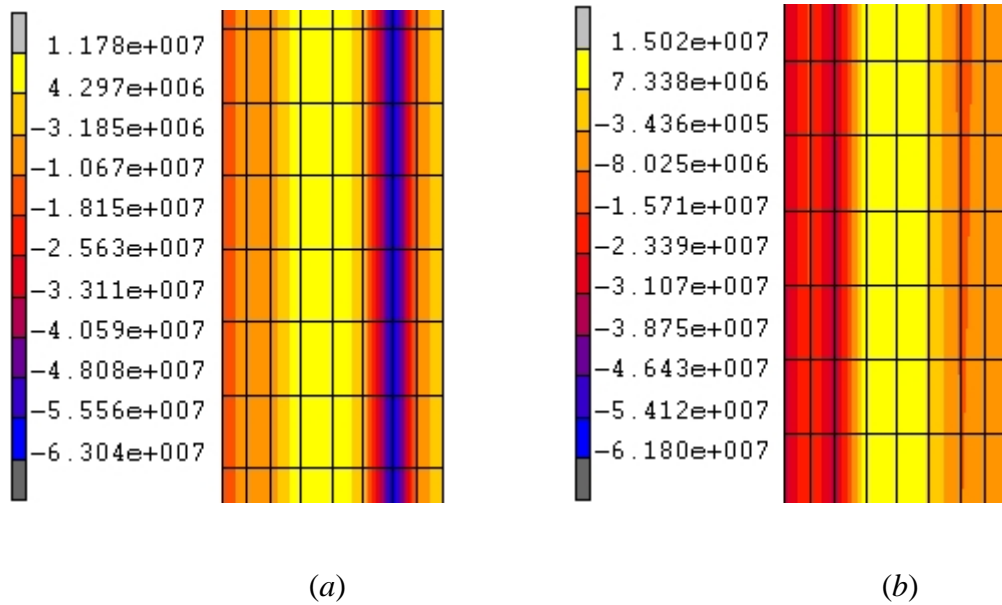


Figure 3.10. Distribution des (a) contraintes thermiques et (b) contraintes à mi-hauteur du panneau en prenant en compte de la pesanteur

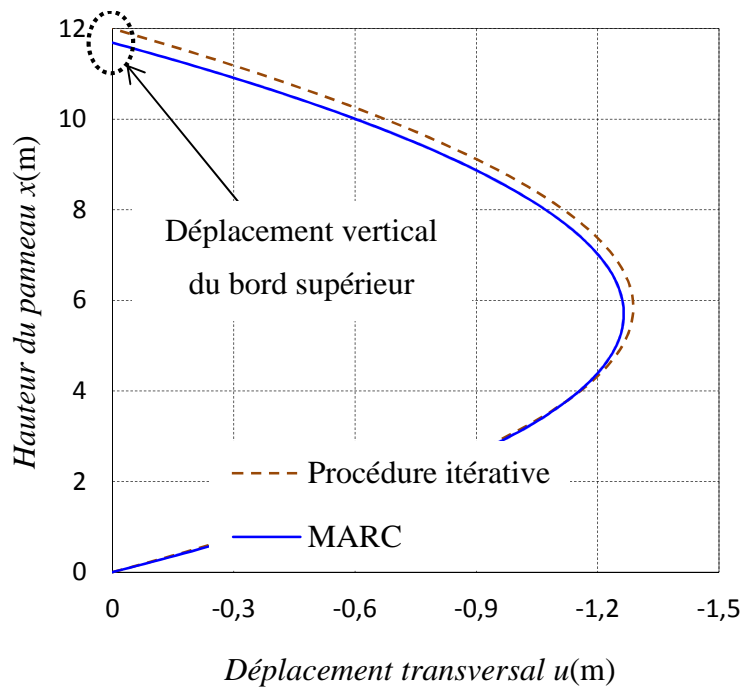


Figure 3.11. Comparaison des déformées d'un panneau de 12m de hauteur exposé 120min au feu, données par la procédure itérative et par la simulation numérique à l'aide du logiciel Marc

La figure 3.11 compare la déformée totale calculée par la procédure itérative décrite auparavant et celle donnée par la simulation numérique à l'aide du logiciel Marc. Les déplacements transversaux, pour une hauteur supérieure à mi-hauteur du panneau, donnés par la simulation numérique sont légèrement inférieurs à ceux donnés par la procédure intégrative. La comparaison, bien que moins bonne que celle de la figure 3.8, reste cependant tout à fait correcte. Le résultat montre ainsi que le déplacement vertical du bord supérieur du panneau reste négligeable par rapport à la taille du panneau de grande hauteur, valeur de 34cm correspondant à 2,8% de la hauteur totale du panneau. Cela signifie que l'hypothèse de petite rotation tout au long de la hauteur du panneau est ainsi validée.

Il est à noter que l'intégration des éléments d'armatures dans la matrice béton peut augmenter le nombre de nœuds du maillage ainsi que le nombre de degrés de liberté de ces nœuds supplémentaires, qui sont limités par l'option du logiciel. On note également que la convergence de la solution est très sensible à la taille des mailles choisie. Pour un panneau carré de dimensions  $12 \times 12 \text{m}^2$  par exemple, le nombre d'éléments dans la largeur doit être approximativement égal à celui le long de la hauteur, soit une multiplication par 240 du nombre total d'éléments par rapport au modèle simplifié de type poutre, le nombre d'éléments dans l'épaisseur étant fixé. Il en résulte une explosion du temps de calcul.

Dans un souci de simplification de la démarche, on propose dans ce qui suit une simulation numérique du problème à l'aide d'éléments bilinéaires de type « coque épaisse » (MSC.Software Corporation, 2007). Il s'agit d'un élément à quatre nœuds dont les degrés de liberté sont les déplacements globaux et les rotations. Des interpolations bilinéaires sont utilisées pour les coordonnées, les déplacements et les rotations. Les déformations membranaires et de courbures sont respectivement obtenues à partir des champs de déplacements et de rotations. De la manière dont il est construit, cet élément, très simple et efficace, présente un comportement correct dans le cas limite des coques minces. L'élément peut être utilisé dans l'analyse des plaques courbes ainsi que de structures plus complexes de plaque. Grâce à sa formulation simple, en comparaison de celle adoptée pour des éléments standards de type coque d'ordre supérieur, il apparaît moins coûteux du point de vue du temps de calcul, et, par conséquent, particulièrement attrayant pour des analyses non linéaires. De plus, ces éléments ne sont pas très sensibles à la distorsion, en particulier si les nœuds aux angles se situent dans un même plan (MSC.Software Corporation, 2007).

L'emploi des éléments bilinéaires de type coque épaisse nous permet en effet d'introduire assez facilement un gradient thermique dans l'épaisseur de l'élément dans laquelle les caractéristiques du matériau tels que le module Young et la dilatation thermique peuvent dépendre de la température. Cependant, ces éléments à quatre nœuds ne permettent pas de placer des éléments représentant des barres d'armature à la bonne position.

La figure 3.12 montre une comparaison des déformées d'un panneau donnée par les 3 solutions: la procédure itérative, la simulation numérique avec des éléments volumiques dans lesquels les barres d'armature sont intégrées, ainsi que celle utilisant des éléments bilinéaires

de type coque épaisse sans barres d'armature. Cette dernière simulation est effectuée sur un panneau de mêmes caractéristiques géométriques et caractéristiques mécaniques du béton que celui avec des éléments volumique précédent. Le maillage comporte donc 100 éléments selon la hauteur du panneau et 1 seul élément dans la largeur.

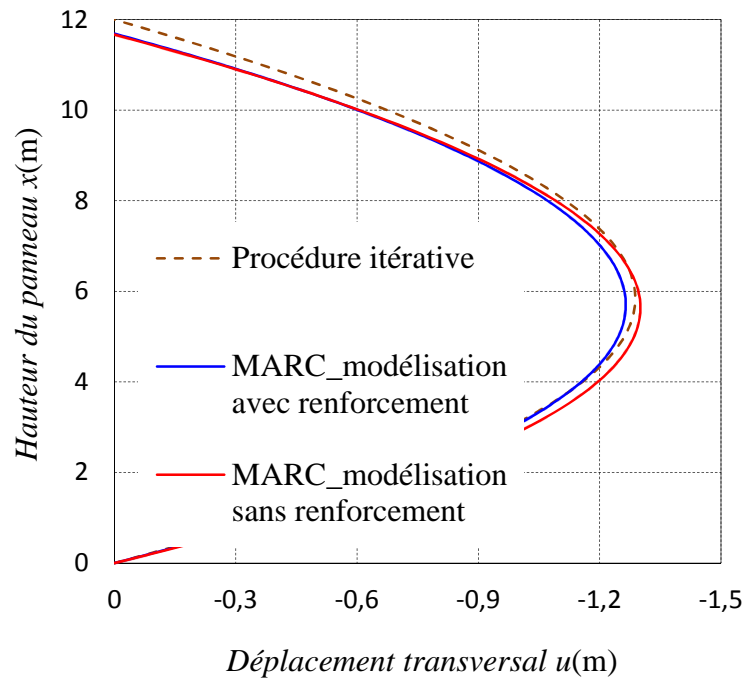


Figure 3.12. Comparaison des déformées d'un panneau de 12m de hauteur exposé 120min au feu, données par la procédure itérative, la simulation numérique à l'aide de Marc avec des éléments volumiques dans lesquels les barres d'armature sont intégrées ainsi que celle avec les éléments bilinéaires de type coque épaisse sans barres d'armature

Les déplacements transversaux obtenus à l'aide du modèle avec éléments bilinéaires de type coque épaisse sont légèrement supérieurs à ceux donnés par le modèle avec éléments de volume. Sans renforcement, la rigidité flexionnelle est diminuée, et la déformée correspondante est bien évidemment plus importante, ce qui va dans le sens de la sécurité. La petite différence observée entre les déplacements transversaux obtenus à l'aide des deux simulations (voir figure 3.12) indique que le taux de renforcement ne joue pas un rôle très important dans la détermination de la déformée totale du panneau (tout au moins dans le cadre d'un comportement thermoélastique), mais il joue un rôle très important dans la détermination de la résistance de la section courante du panneau (voir chapitre 2 sur la détermination du diagramme d'interaction d'une section en béton armé en conditions d'incendie).

### 3.3 CONCLUSION

Les aspects relatifs au changement de géométrie, qui joue un rôle primordial dans l'analyse de la stabilité au feu d'un panneau de grande hauteur, ont été abordés dans ce chapitre. La non-linéarité géométrique est ainsi mise en évidence par la prise en compte explicite d'une configuration déformée du panneau clairement distincte de la géométrie initiale plane. L'approche proposée pour l'évaluation de la dilatation et de la courbure résultant d'un gradient thermique différentiel est simple et directe. Les calculs de la déformée du panneau que nous avons effectués selon diverses méthodes (procédure itérative, approche semi-analytique directe et simulation numérique) montrent clairement l'importance qu'il y a à prendre en compte des effets du second ordre dans l'analyse de la configuration à l'équilibre et de la vérification de la stabilité de panneaux de grande hauteur en cas d'incendie.

Il convient de souligner que la déformée est calculée dans le cadre de la prise en compte d'un comportement (thermo)élastique linéaire des matériaux constitutifs (béton et acier), le moment fléchissant et la déformation de courbure d'une section étant proportionnellement liés par la raideur flexionnelle de cette section. Dans le chapitre suivant, le Calcul à la Rupture sera mis en œuvre à l'aide de deux approches classiques statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur pour l'analyse de la stabilité au feu des panneaux dans la configuration déformée calculée dans ce chapitre.

\*       \*

\*

## Chapitre 4

# ANALYSE PAR LE CALCUL À LA RUPTURE DE LA STABILITÉ AU FEU DU PANNEAU DANS LE CADRE DU MODÈLE SIMPLIFIÉ

### 4.1 INTRODUCTION

Ce chapitre se propose de montrer à partir de la mise en œuvre des approches de la théorie du Calcul à la Rupture, comment il est possible d'évaluer la résistance au feu d'un panneau (Pham *et al.*, 2015b) à partir des résultats établis dans les deux chapitres précédents : la connaissance de la distribution des efforts le long de la hauteur du panneau engendrés par l'excentrement du poids propre d'une part (chapitre 3), le diagramme d'interaction qui rétrécit en fonction du chargement thermique appliqué d'autre part (chapitre 2). L'application de l'approche Calcul à la Rupture proposée dans ce chapitre constitue un outil de calcul permettant une évaluation directe et rapide de la résistance au feu de ces panneaux.

Une telle évaluation passe par la définition de ce que nous appellerons *facteur de stabilité* de la structure, incluant l'analyse de la configuration déformée globale combinée à la dégradation de la résistance locale du panneau. La détermination de ce facteur repose sur les deux approches, statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur. Nous montrerons que ces deux approches aboutiront à la même évaluation de ce facteur, ce qui correspond au fait que, dans le cas présent de la modélisation 1D du panneau, la distribution d'efforts et le mécanisme de ruine optimisé sont parfaitement associés.

### 4.2 APPROCHE STATIQUE PAR L'INTÉRIEUR

#### 4.2.1 Principe de l'approche statique par l'intérieur

Elle repose en premier lieu sur le diagramme d'interaction d'une section en béton armé fonction de l'incendie, que nous avons établi au chapitre 2. En pratique, l'utilisation de ce diagramme d'interaction se fait usuellement en positionnant le point correspondant à un couple de sollicitations ( $N$ ,  $M$ ) en une section donnée, vis-à-vis de ce diagramme. Un point situé sur ou à l'intérieur du diagramme respecte la condition de stabilité, alors qu'un point à l'extérieur indique que le critère de résistance est violé, c'est-à-dire que la résistance de la



section est insuffisante. Ainsi, la tenue au feu du panneau, de hauteur donnée, est assurée tant que la courbe représentant dans le plan  $(N, M)$  la distribution des sollicitations le long de la hauteur du panneau (que nous appellerons *courbe des sollicitations*), reste entièrement à l'intérieur du domaine de résistance délimité par la courbe d'interaction. La rupture se produit à une certaine hauteur lorsque la courbe des sollicitations devient tangente au diagramme d'interaction (figure 4.1). Ce point de tangence caractérise donc la situation ultime permettant de déterminer la hauteur maximale du panneau au-delà de laquelle il y aura rupture pour une durée d'exposition au feu fixée ou la durée maximale, d'exposition au feu pour une hauteur donnée du panneau.

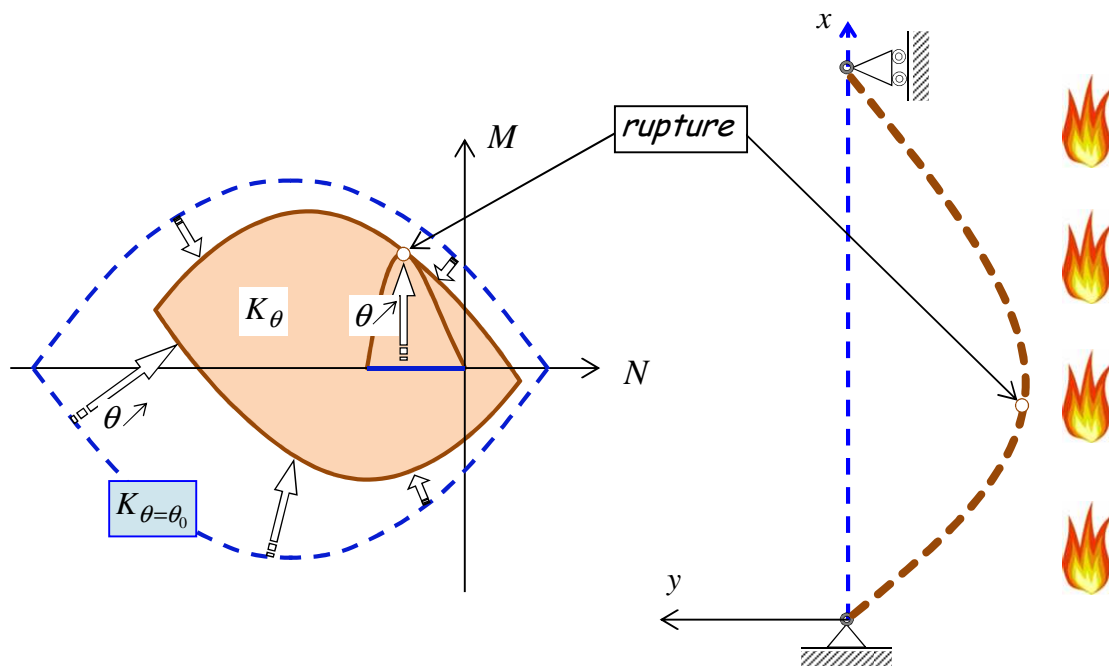


Figure 4.1. Analyse de stabilité du panneau en configuration déformée

Il convient de remarquer que la rupture du panneau ne se produit pas nécessairement au point de moment maximal. Mais la rupture locale d'une section entraîne bien la rupture globale du panneau. Cela est dû au fait que la poutre qui modélise le panneau est une structure *isostatique*, les diagrammes d'efforts étant entièrement définis par le seul équilibre. Il est bien connu que dans ce cas, la charge limite (ou charge extrême) de la structure coïncide exactement avec sa limite d'élasticité. La démarche que nous avons adoptée, consistant à calculer la déformée (thermo)élastique du panneau, puis à vérifier le critère de résistance en tout point sur cette configuration déformée, est donc parfaitement justifiée.

#### 4.2.2 Exemples illustratifs

En vue de se familiariser avec le modèle simplifié du panneau, l'ensemble de la démarche décrite ci-dessus est mis en œuvre sur des panneaux soumis à une exposition au feu donnée. À titre illustratif, les données suivantes ont été choisies, le panneau en béton armé ayant les

mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques que celles qui ont été adoptées dans la section 2.5 du chapitre 2 et dans la section 3.2.3.2 du chapitre 3. Elles sont rappelées ci-dessous:

- ◇ La section rectangulaire de  $0,15 \times 1 \text{ m}^2$  est exposée à un feu ISO 834 (EN1991-1-2, 2003) sur sa face droite ( $y=-h/2$ ).
- ◇ Béton de densité normale réalisé avec des granulats siliceux:  $f_c=32\text{MPa}$ ,  $f_t=2,5\text{MPa}$ ,  $E_c=19200\text{MPa}$ .
- ◇ Deux lits (un lit supérieur et un lit inférieur) comportant chacun 10 barres d'acier laminé à chaud de 6mm de diamètre avec 3cm d'enrobage :  $f_y=500\text{MPa}$ ,  $E_s=200000\text{MPa}$ .
- ◇ Le poids linéique  $w=3,75\text{kN/m}$ , correspondant au poids volumique  $\rho=2500\text{kg/m}^3$  du béton armé, est supposé indépendant de la température.

La durée d'exposition au feu étant fixée, par exemple 120min, le diagramme d'interaction reste constant, tandis que les courbes de sollicitations varient avec les hauteurs examinées. La figure 4.2 ci-dessous représente par exemple le domaine délimité par le diagramme d'interaction pour cette durée d'exposition et les courbes de sollicitations correspondant aux panneaux de hauteur variant entre 6m et 12m.

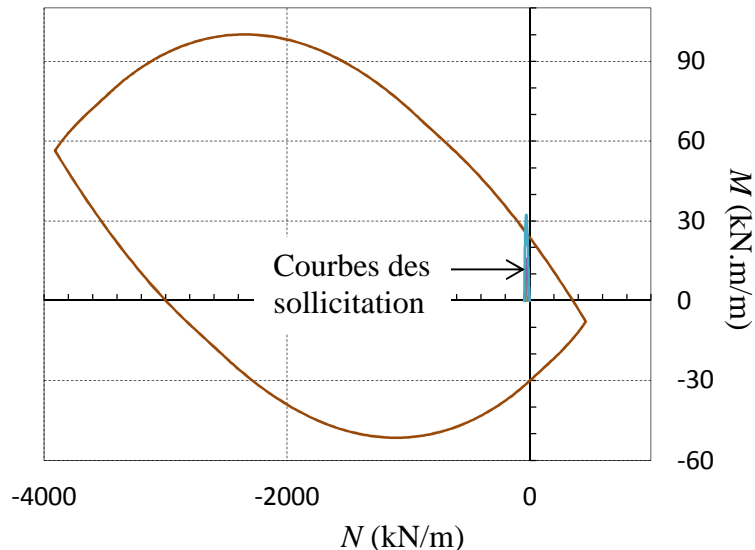


Figure 4.2. Positionnement des courbes de sollicitations par rapport au diagramme d'interaction de la section béton en armé exposée 120min au feu

On observe sur la dernière figure que l'effort axial maximal de compression atteint en partie inférieure du panneau, égal à son poids (45kN par unité de largeur pour le panneau de 12m de haut), est considérablement inférieur à la résistance en compression simple du panneau qui est égale à 5083kN/m. Il en résulte que la courbe de sollicitations  $(N, M)(x)$  se

situé dans une zone très proche de l'origine dans le plan des chargements ( $N$ ,  $M$ ). Cette zone a été agrandie sur la figure 4.3. Cette figure montre que la courbe d'interaction est quasiment linéaire dans cette région et que la courbe des sollicitations intersecte la courbe d'interaction pour un panneau de hauteur égale à 12m, montrant ainsi que la stabilité de ce dernier n'est plus assurée. En faisant varier la hauteur du panneau, on peut finalement montrer que la rupture se produit pour une hauteur égale à 11,32m, la section critique, correspondant au point de tangence entre deux courbes, se situe à 3,62m (c'est-à-dire approximativement à un tiers de la hauteur du panneau).

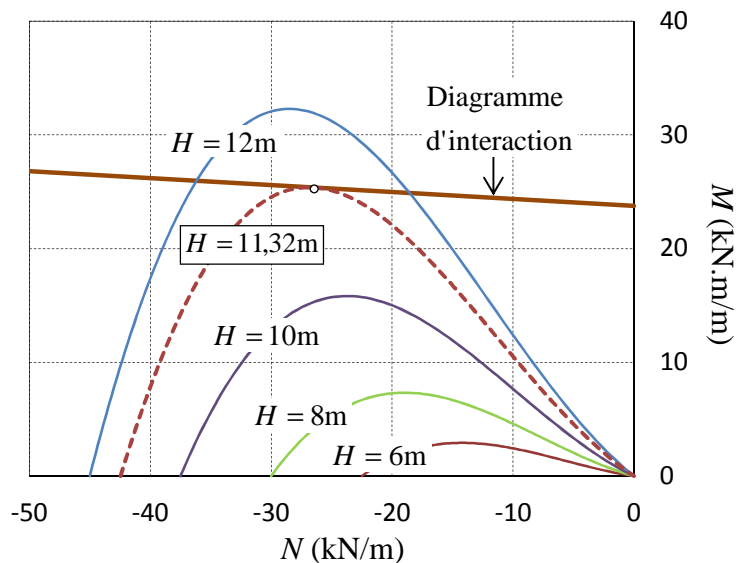


Figure 4.3. Condition de stabilité des panneaux de 6m, 8m 10m et 12m de hauteur exposés 120min au feu

Nous avons vu plus haut qu'au-delà de 11,32m, la ruine du panneau exposé au feu pendant 120min, se produira nécessairement.

Supposons maintenant que le panneau est de hauteur fixée égale par exemple à 13m. Nous nous proposons cette fois-ci d'évaluer la durée maximale d'exposition au feu qu'un tel panneau est capable de supporter sans atteindre la ruine.

Comme mentionné précédemment, l'augmentation de température, conduit d'une part à un rétrécissement du diagramme d'interaction, d'autre part, à l'augmentation du moment de flexion dans chaque section engendrée par l'augmentation de l'excentrement du poids propre, l'effort axial de compression restant indépendant de la durée au feu. La rupture se produit lorsque les deux courbes correspondantes viennent en contact l'une de l'autre. La figure 4.4 montre différentes courbes d'interaction et de sollicitations le long de la hauteur du panneau, correspondant à différentes durées d'exposition au feu. Elle indique qu'un panneau de 13m de hauteur ne résistera pas plus de 83min au feu, la section critique étant située à une hauteur d'environ 4,8m.

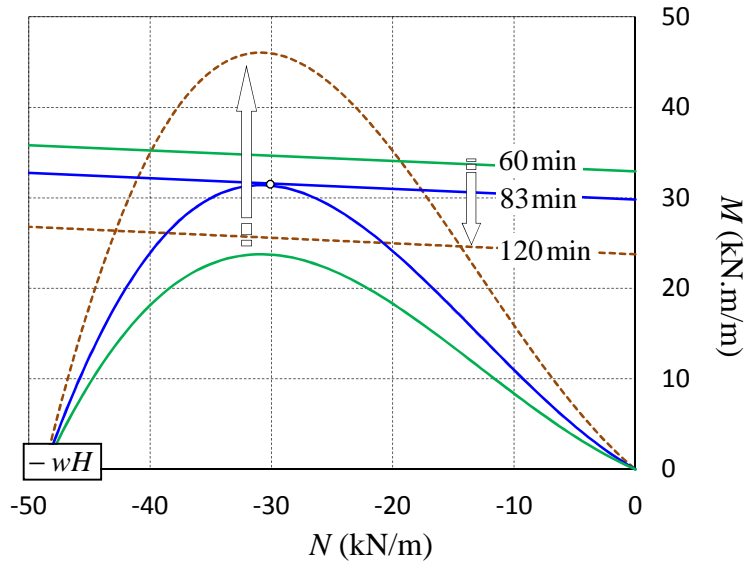


Figure 4.4. Évaluation de la résistance au feu du panneau de 13m de hauteur

### 4.2.3 Notion de facteur de stabilité

Afin d'évaluer la résistance au feu des panneaux de grande hauteur de façon plus commode que par la méthode présentée ci-dessus, il est intéressant d'introduire la notion de *facteur de stabilité*,  $F_{s,\theta}$ , défini par le coefficient positif par lequel il faudrait multiplier le paramètre de chargement, par exemple ici le poids propre  $w^2$ , pour atteindre la rupture du panneau. Compte tenu de cette définition, la condition de stabilité s'écrit tout naturellement :

$$F_{s,\theta}(w) = \frac{w^+}{w} \geq 1 \quad (4.1)$$

où  $w^+$  désigne la valeur maximale du poids propre, correspondant au cas où la courbe des sollicitations associée  $(N^+, M^+)(x)$  est tangente au diagramme d'interaction pour  $x=x^+$ . Cette dernière courbe est obtenue à partir de la courbe initiale par une homothétie de centre l'origine et de rapport égal au facteur de sécurité :

$$\forall x, (N^+, M^+)(x) = \frac{w^+}{w} (N, M)(x) = F_{s,\theta} (N, M)(x) \quad (4.2)$$

La figure 4.5 représente ces deux courbes de sollicitations, ainsi que le diagramme d'interaction initial et le diagramme d'interaction « réduit » déduit de ce dernier par homothétie de rapport  $1/F_{s,\theta}$  par rapport à l'origine.

<sup>2</sup> Sans modifier aucun autre paramètre du problème

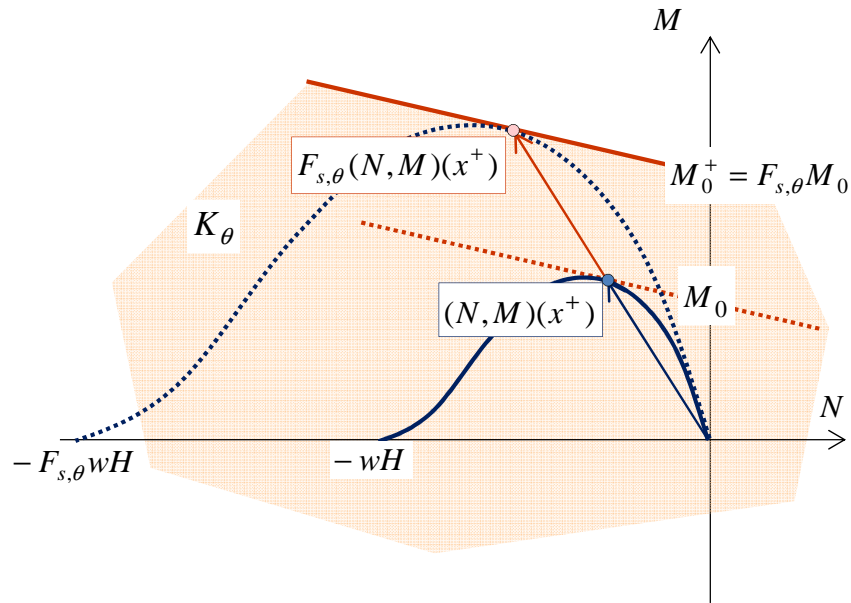


Figure 4.5. Définition du facteur de stabilité statique  $F_{s,\theta}$

En désignant par  $M_0^+$  la résistance en flexion pure de la section chauffée du panneau, et par  $M_0$  celle associée au diagramme réduit, il est facile de voir que :

$$F_{s,\theta}(w) = \frac{M_0^+}{M_0} \quad (4.3)$$

Les diagrammes d'interaction étant quasi-linéaire, la valeur de  $M_0$  s'obtient comme l'ordonnée du point d'interaction avec l'axe des ordonnées de la tangente à la courbe de sollicitation parallèle au diagramme d'interaction.

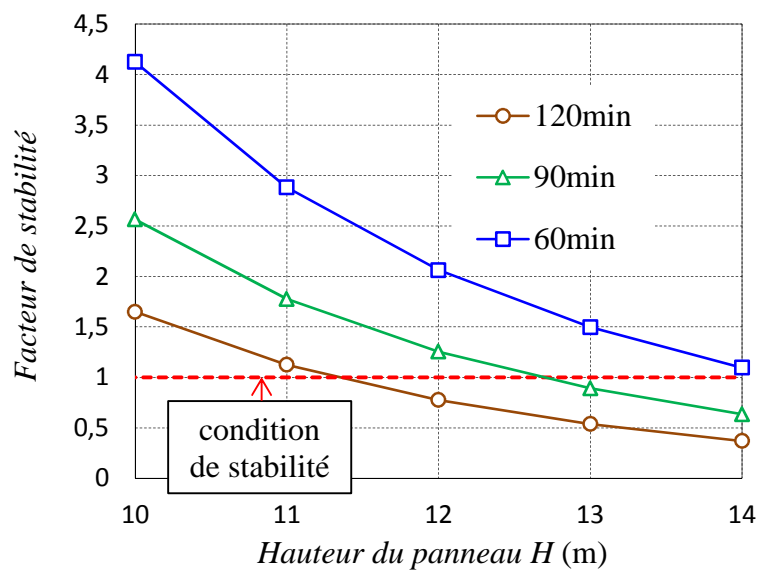


Figure 4.6. Facteur de stabilité de différents panneaux exposés 60, 90 et 120min au feu

La figure 4.6 donne sous forme de courbes d'évolution du facteur de stabilité d'un panneau de même caractéristiques que dans l'exemple précédent, en fonction de sa hauteur et de la durée d'exposition au feu. On observe que ce facteur est une fonction fortement décroissante tant de la hauteur du panneau examiné, que de la durée d'exposition au feu.

L'analyse des évolutions de ce facteur de stabilité nous conduit à généraliser les premières conclusions tirées à partir du cas d'étude précédent. La rupture du panneau est extrêmement sensible à l'augmentation de sa hauteur. Ainsi, pour un panneau exposé 120min au feu par exemple, le facteur de stabilité passe de 1,65 dans le cas du panneau de 10m, à 1,13 pour une hauteur de 11m, puis à 0,78 pour une hauteur de 12m. Une augmentation de 20% de la hauteur du panneau conduit à diviser par deux son facteur de stabilité.

### 4.3 APPROCHE CINÉMATIQUE PAR L'EXTÉRIEUR

En vue de confirmer les résultats de l'approche statique par l'intérieur développée ci-dessus, le même problème de stabilité au feu du panneau est traité en faisant appel à l'approche cinématique par l'extérieur appliquée aux systèmes de poutres ou d'arcs, qui met en jeu des « rotules » à l'endroit de section potentiellement critique.

#### 4.3.1 Mise en œuvre de l'approche cinématique par l'extérieur

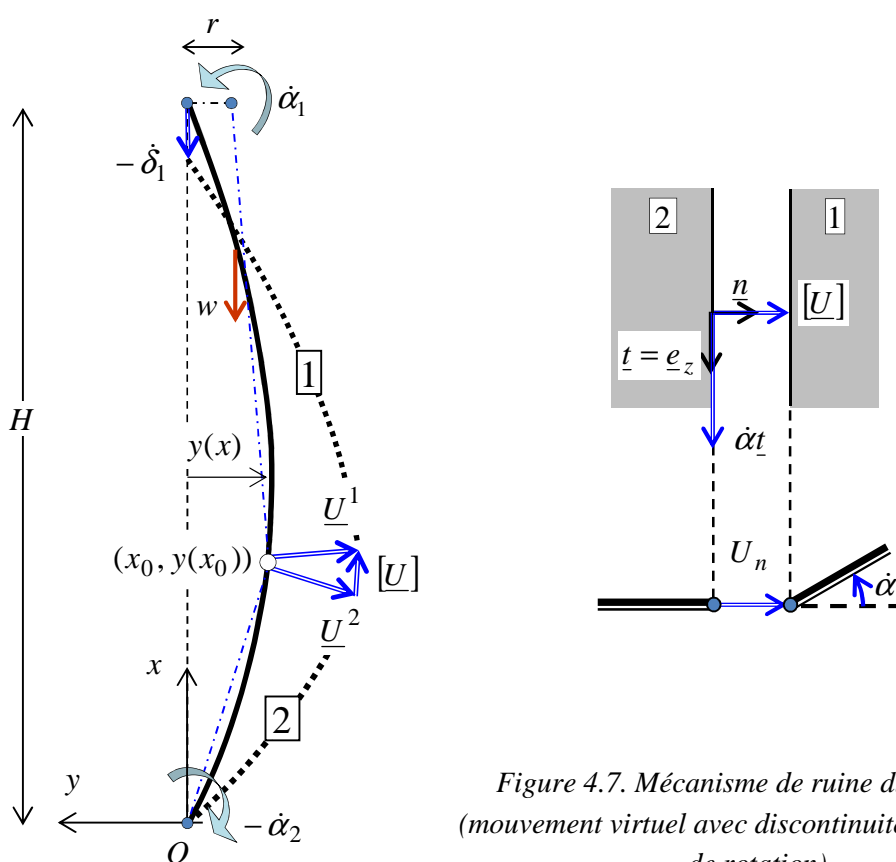


Figure 4.7. Mécanisme de ruine du panneau (mouvement virtuel avec discontinuité de vitesse et de rotation)

Partant de la même déformée du panneau à l'équilibre statique que celle adoptée dans l'approche statique par l'intérieur précédente, on considère une *section potentiellement critique* (« charnière ») localisée à la hauteur  $x_0$ , séparant le panneau, modélisé comme une poutre courbe ou un arc, en deux parties, notées respectivement  $\boxed{1}$  et  $\boxed{2}$ . La partie supérieure  $\boxed{1}$  est animée d'un mouvement rigidifiant virtuel de translation verticale  $-\dot{\delta}_1 \underline{e}_x$  ( $\dot{\delta}_1 > 0$ ) en son point d'appui supérieur et de rotation de vitesse  $\dot{\alpha}_1$  ( $\dot{\alpha}_1 > 0$ ), tandis que la partie inférieure  $\boxed{2}$  est animée d'un mouvement virtuel de rotation  $-\dot{\alpha}_2$  ( $\dot{\alpha}_2 > 0$ ) autour de son bord horizontal inférieur (voir figure 4.7).

Dans ce mécanisme, les vitesses au point de la charnière séparant les deux morceaux s'écrivent :

$$\begin{aligned}\underline{U}^1 &= -(\dot{\delta}_1 + y(x_0)\dot{\alpha}_1)\underline{e}_x + (x_0 - H)\dot{\alpha}_1\underline{e}_y \\ \underline{U}^2 &= \dot{\alpha}_2(y(x_0)\underline{e}_x - x_0\underline{e}_y)\end{aligned}\quad (4.4)$$

conduisant à un *saut de vitesse* à la traversée de cette section égal à :

$$[\underline{U}] = \underline{U}^1 - \underline{U}^2 = [-\dot{\delta}_1 - y(x_0)(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2)]\underline{e}_x + [\dot{\alpha}_1(x_0 - H) + \dot{\alpha}_2 x_0]\underline{e}_y \quad (4.5)$$

La condition pour que cette discontinuité de vitesse soit *tangente* au panneau déformé s'écrit :

$$y'(x_0) = \frac{\dot{\alpha}_1(x_0 - H) + \dot{\alpha}_2 x_0}{-\dot{\delta}_1 - y(x_0)(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2)} \quad (4.6)$$

soit compte tenu de l'hypothèse des faibles rotations  $|y'(x_0)| \ll 1$  :

$$\frac{\dot{\alpha}_2}{\dot{\alpha}_1} \cong \frac{H - x_0}{x_0} \quad (4.7)$$

*Remarque.* La restriction cinématique (4.7) qui traduit le fait que la discontinuité de vitesse reste tangente au panneau, ou de manière équivalente qu'il n'y pas de discontinuité de vitesse normale à ce dernier, provient de la *condition de pertinence* relative au critère d'interaction ici adopté. En effet ce critère ne porte que sur l'effort axial et le moment de flexion, à l'exclusion de l'effort tranchant, ce qui revient implicitement à considérer que la résistance à cet effort tranchant est *infinie*. La condition (4.7) permet donc d'assurer que le calcul de la fonction support du critère relative à une discontinuité reste finie et conduit donc à une majoration effective de la charge de ruine du panneau.

### 4.3.1.1 Calcul de la puissance des efforts extérieurs

La dernière relation (4.7) montre que, dans l'hypothèse des petites rotations, le rapport entre les vitesses de rotation des deux parties du panneau ne dépend que de la position  $x_0$  de la charnière. Il en résulte que la discontinuité de vitesse de rotation à la traversée de cette charnière vaut :

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_1 - (-\dot{\alpha}_2) = \dot{\alpha}_1 \frac{H}{x_0} \geq 0 \quad (4.8)$$

tandis qu'en posant  $\dot{\delta}_1 = r\dot{\alpha}_1, r \geq 0$ , le saut de vitesse tangentiel est égal à :

$$U_n \cong [U_x] \cong -\dot{\alpha} \left[ r \frac{x_0}{H} + y(x_0) \right] \quad (4.9)$$

de sorte que :

$$r = -[\lambda + y(x_0)] \frac{H}{x_0} \quad \text{avec } \lambda = U_n / \dot{\alpha} \quad (4.10)$$

Dans ces conditions, et en supposant que les seules données en effort non nulles concernent le poids propre  $w$ , compté positivement vers le bas, la puissance virtuelle des efforts extérieurs (calculée par unité de longueur selon  $Oz$ ) de la partie supérieure  $\boxed{1}$  du panneau s'écrit :

$$P_e^1 = \dot{\alpha}_1 \int_{x_0}^H w y(x) dx + \dot{\delta}_1 \int_{x_0}^H w dx \quad (4.11)$$

tandis que celle de la partie inférieure  $\boxed{2}$  vaut :

$$P_e^2 = w \dot{\alpha}_2 \int_0^{x_0} -y(x) dx \quad (4.12)$$

d'où l'expression de la puissance totale des efforts extérieurs :

$$\begin{aligned} P_e &= P_e^1 + P_e^2 \\ &= \dot{\alpha} w \left[ \frac{x_0}{H} \int_{x_0}^H \left( y(x) - [\lambda + y(x_0)] \frac{H}{x_0} \right) dx - \frac{(H - x_0)}{H} \int_0^{x_0} y(x) dx \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Cette dernière expression indique que, pour une déformée  $y(x)$  donnée, la puissance des efforts extérieurs associée à un mécanisme mettant en jeu une discontinuité de vitesse à



travers une charnière localisée à une hauteur  $x_0$ , peut s'écrire en fonction des deux paramètres cinématiques  $U_n$  et  $\dot{\alpha}$  qui caractérisent cette discontinuité.

#### 4.3.1.2 Calcul de puissance résistante maximale

Ce calcul se résume à celui de la puissance résistante maximale développée dans la seule discontinuité de vitesse et de taux de rotation à travers la charnière, le reste de la structure, c'est-à-dire les panneaux inférieur et supérieur séparés par cette charnière, étant animée d'un mouvement rigidifiant. On a donc :

$$P_{rm} = \Pi(U_n, \dot{\alpha}) = \text{Sup}\{NU_n + M\dot{\alpha}; (N, M) \in K\} \quad (4.14)$$

où l'on rappelle que  $K$  désigne le domaine d'interaction déterminé au chapitre 2 en fonction des caractéristiques de résistance des matériaux, de l'épaisseur du panneau et de la position des armatures de renforcement, en tenant compte du gradient de température imposé. L'expression générale de la fonction support du critère d'interaction est donnée par l'équation (2.31) du chapitre 2 en tenant compte des expressions (2.18), soit dans le cas présent où  $\dot{\delta} = U_n = \lambda \dot{\alpha}$  :

$$\begin{aligned} P_{rm} &= \Pi(\dot{\delta} = U_n = \lambda \dot{\alpha}; \dot{\alpha} \geq 0) \\ &= \dot{\alpha} \left[ \left( \int_{-h/2}^{\lambda} f_t(\theta(y)) dy - \int_{\lambda}^{+h/2} f_c(\theta(y)) dy \right) \lambda + \left( - \int_{-h/2}^{\lambda} y f_t(\theta(y)) dy + \int_{\lambda}^{+h/2} y f_c(\theta(y)) dy \right) \right] \\ &\quad + \dot{\alpha} \sum_k (\lambda - \xi_k) n_0(\theta(\xi_k)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

En vertu de l'approche cinématique par l'extérieur du Calcul à la Rupture, une *condition nécessaire de stabilité* consiste à écrire que dans le mécanisme considéré, qui dépend des seuls paramètres  $x_0, \dot{\alpha}$  et  $\lambda$ , la puissance des efforts extérieurs donnée par (4.13) demeure inférieure à la puissance résistante maximale (4.15) :

$$\text{Stabilité} \Rightarrow \forall (x_0, \dot{\alpha}, \lambda) \quad P_e(x_0, \dot{\alpha}, \lambda) \leq P_{rm}(x_0, \dot{\alpha}, \lambda) \quad (4.16)$$

#### 4.3.2 Facteur de stabilité

La condition nécessaire de stabilité (4.16) nous conduit à introduire un facteur de stabilité «cinématique» défini comme suit :

$$F_{c,\theta}(x_0, \lambda) = \frac{P_{rm}(x_0, \dot{\alpha}, \lambda)}{P_e(x_0, \dot{\alpha}, \lambda)} \quad (4.17)$$

dont il est facile de montrer, à partir des expressions (4.13) et (4.15), qu'il est indépendant de  $\dot{\alpha} > 0$ . Il en résulte que cette condition implique qu'un tel facteur reste supérieur à l'unité :

$$\text{Stabilité} \Rightarrow \forall (x_0, \lambda) \quad F_{c,\theta}(x_0, \lambda) \geq 1 \quad (4.18)$$

Cette dernière condition équivaut à écrire que le *minimum* de ce facteur de stabilité doit rester supérieur à un :

$$\text{Stabilité} \Rightarrow F_{c,\theta} = \underset{(x_0, \lambda)}{\text{Min}} F_{c,\theta}(x_0, \lambda) \geq 1 \quad (4.19)$$

Nous allons montrer que ce minimum  $F_{c,\theta}$  est égal au facteur « statique »  $F_{s,\theta}$  dont la définition donnée au paragraphe 4.2.3 est rappelée sur la figure 4.8 ci-dessous.

Tout d'abord, étant donné un mécanisme avec charnière quelconque défini par la position  $x_0$  de la charnière et les paramètres de discontinuité cinématiques  $\dot{\alpha}$  et  $\lambda$ , on peut écrire en vertu du *principe des puissances virtuelles* :

$$P_e(x_0; \lambda, \dot{\alpha}) = N(x_0)\lambda\dot{\alpha} + M(x_0)\dot{\alpha} \quad (4.20)$$

où le membre de droite de cette équation représente la *puissance virtuelle de déformation* qui met en jeu la sollicitation  $(N, M)(x_0)$  au droit de la charnière. Soit en multipliant les deux membres de cette équation par le facteur de stabilité statique :

$$F_{s,\theta}P_e(x_0; \lambda, \dot{\alpha}) = F_{s,\theta}N(x_0)\lambda\dot{\alpha} + F_{s,\theta}M(x_0)\dot{\alpha} \quad (4.21)$$

cette quantité pouvant s'interpréter comme le produit scalaire du vecteur de composantes  $F_{s,\theta}(N, M)(x_0)$ , dont l'extrémité est sur la courbe en pointillés de la figure 4.8, tangente à la courbe d'interaction, par le vecteur de composantes  $(\lambda\dot{\alpha}, \dot{\alpha})$  dans le même plan. Il s'ensuit que la sollicitation  $F_{s,\theta}(N, M)(x_0)$  appartient au domaine d'interaction et que donc :

$$F_{s,\theta}P_e(x_0; \lambda, \dot{\alpha}) = F_{s,\theta}N(x_0)\lambda\dot{\alpha} + F_{s,\theta}M(x_0)\dot{\alpha} \leq \Pi(x_0; \lambda, \dot{\alpha}) = P_{rm}(x_0; \lambda, \dot{\alpha}) \quad (4.22)$$

d'où en vertu de (4.17) :

$$F_{s,\theta} \leq \frac{P_{rm}(x_0; \lambda, \dot{\alpha})}{P_e(x_0; \lambda, \dot{\alpha})} = F_{c,\theta}(x_0; \lambda) \Rightarrow F_{s,\theta} \leq F_{c,\theta} = \underset{(x_0, \lambda)}{\text{Min}} F_{c,\theta}(x_0, \lambda) \quad (4.23)$$

On considère alors le mécanisme mettant en jeu une charnière localisée au point d'abscisse  $x^+$  où le critère est atteint dans l'approche statique, et on désigne par  $(U_n^+ = \lambda^+\dot{\alpha}, \dot{\alpha} \geq 0)$  la normale extérieure (définie à un facteur multiplicatif près) au point de tangence  $F_{s,\theta}(N, M)(x^+)$  entre le diagramme d'interaction et la courbe obtenue à partir de la courbe de sollicitations par homothétie de centre l'origine et de rapport  $F_{s,\theta}$ . On a alors de façon évidente pour ce mécanisme particulier :

$$\begin{aligned}
P_{rm}(x^+; \lambda^+ \dot{\alpha}, \dot{\alpha}) &= \Pi(x^+; \lambda^+ \dot{\alpha}, \dot{\alpha}) \\
&= F_{s,\theta} N(x^+) (\lambda^+ \dot{\alpha}) + F_{s,\theta} M(x^+) \dot{\alpha} = F_{s,\theta} [N(x^+) (\lambda^+ \dot{\alpha}) + M(x^+) \dot{\alpha}]
\end{aligned}
\tag{4.24}$$

Soit en utilisant le principe des puissances virtuelles (4.21) :

$$P_{rm}(x^+; \lambda^+ \dot{\alpha}, \dot{\alpha}) = F_{s,\theta} P_e(x^+; \lambda^+ \dot{\alpha}, \dot{\alpha}) \tag{4.25}$$

c'est-à-dire finalement en tenant compte de (4.23) :

$$F_{s,\theta} = F_{c,\theta}(x^+; \lambda^+) = F_{c,\theta} = \underset{(x_0, \lambda)}{\text{Min}} F_{c,\theta}(x_0, \lambda) \tag{4.26}$$

Cette dernière relation montre d'une part que le *facteur de stabilité* « statique » est égal au *minimum du facteur de stabilité* « cinématique », d'autre part que ce dernier minimum est obtenu pour une charnière localisée au point  $x^+$  où le critère est atteint dans l'approche statique, avec un vecteur de discontinuités cinématique normal extérieur au critère au point de tangence (figure 4.8). Les champs statique et cinématique optimaux sont *associés* au sens du théorème d'association en Calcul à la Rupture (Salençon, 1983; 2013).

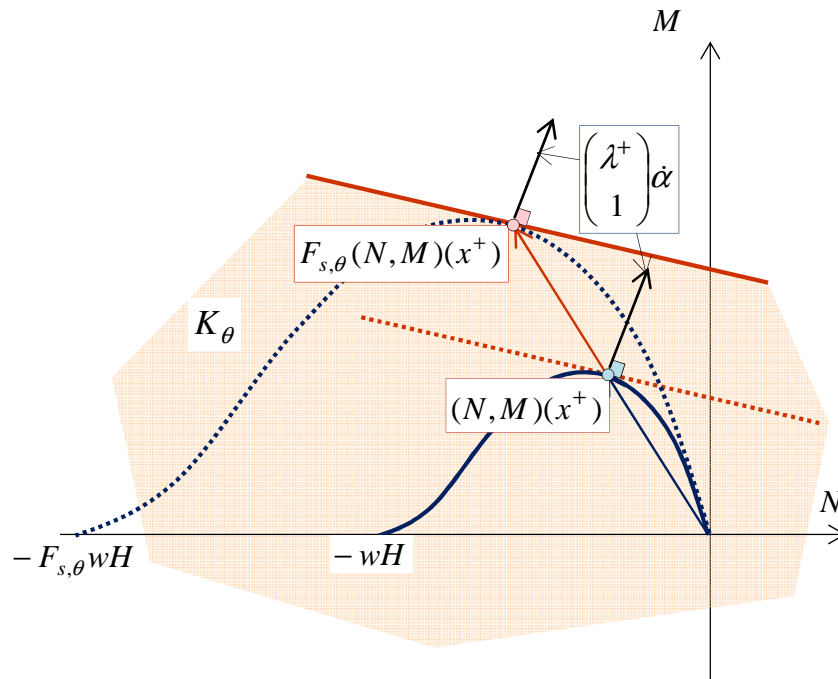


Figure 4.8. Équivalence des facteurs de stabilité statique et cinématique

## 4.4 RÉSULTATS

### 4.4.1 Une étude paramétrique

Étant donné le nombre de paramètres qui entrent en jeu dans l'évaluation du facteur de stabilité, il est intéressant maintenant d'analyser l'évolution de ce facteur en fonction de quelques-uns de ces paramètres qui apparaissent comme les plus significatifs. L'aire du renforcement et la distance d'enrobage étant maintenus constants, et pour une hauteur du panneau et une exposition au feu données, l'augmentation de l'épaisseur du panneau conduit d'une part, à une augmentation de la résistance de la section courante, et d'autre part à une augmentation du paramètre de chargement (le poids propre), le poids volumique du béton armé étant supposé indépendant de la température.

La figure 4.10 représente les courbes de sollicitations  $(N, M)(x)$  dans le plan des chargements  $(N, M)$  pour des panneaux de 12m de hauteur et d'épaisseur variant de 15cm à 20cm, soumis à une exposition au feu ISO 834 (EN1991-1-2,2003) de 120min sur une face. L'augmentation de l'épaisseur du panneau conduit à une augmentation du poids propre, donc de la force maximale de compression. En revanche, cette augmentation conduit également à une augmentation de la rigidité flexionnelle du panneau. Les courbes de la figure 4.9 indiquent clairement que l'augmentation de rigidité flexionnelle a une influence plus importante que celle du poids propre, puisque l'amplitude de la déformée décroît avec l'épaisseur.

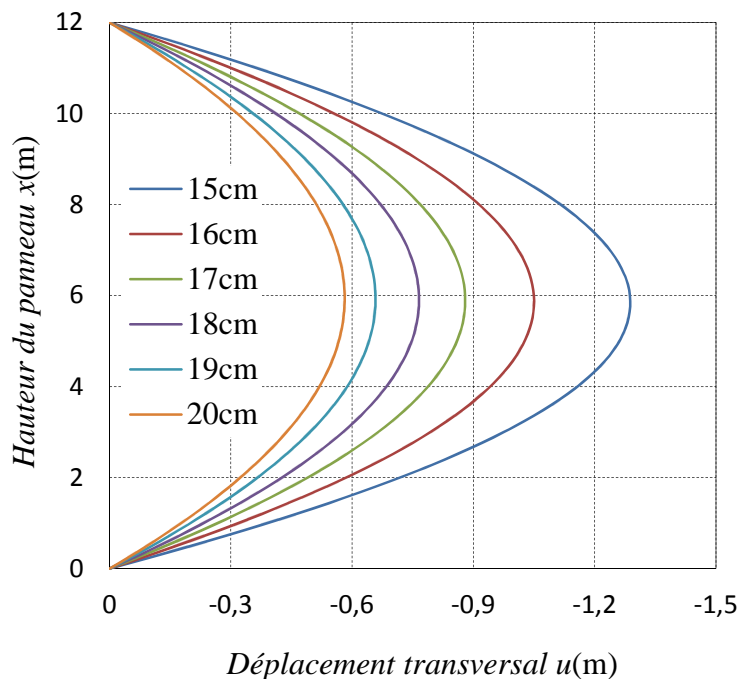


Figure 4.9. Déformées des panneaux de différentes épaisseurs

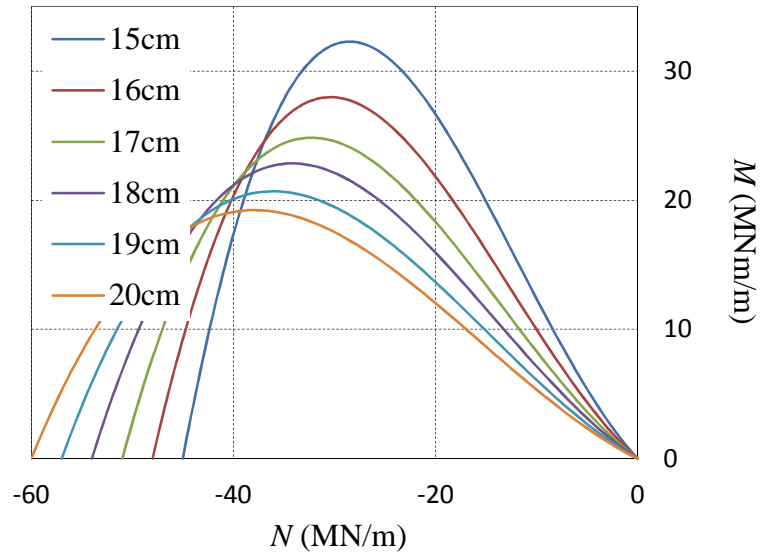


Figure 4.10. Courbes de sollicitations des panneaux de différentes épaisseurs

Au final, comme cela est illustré sur la figure 4.11, la valeur du facteur de stabilité du panneau augmente avec l'augmentation de l'épaisseur du panneau. À l'inverse, pour une épaisseur fixée, le facteur de stabilité diminue très sensiblement avec l'augmentation de la hauteur du panneau.

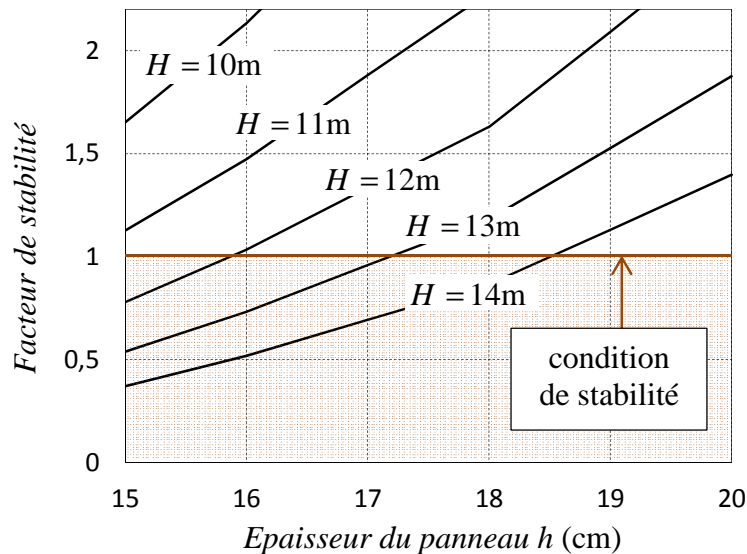


Figure 4.11. Facteur de stabilité pour différents panneaux exposés à un feu de 120min

Sur le plan pratique, la méthode de calcul permettant d'aboutir à la détermination directe et exacte des facteurs de stabilité, constitue donc un outil simple, rapide et efficace pour l'évaluation de la résistance des panneaux dans le cadre du modèle simplifié adopté. La figure 4.11 indique par exemple que pour une résistance au feu souhaitée de 120min, l'épaisseur d'un panneau de 13m de hauteur doit être supérieure à 17cm.

#### 4.4.2 Un calcul simplifié

L'égalité (4.26) permet de procéder au calcul de la valeur exacte du facteur de stabilité du panneau par minimisation du facteur « cinématique » en se limitant à l'exploration de l'ensemble des mécanismes avec charnières, les paramètres de minimisation étant d'une part la position  $x_0$  de cette charnière, d'autre part le rapport  $\lambda$  homogène à une distance entre la discontinuité de vitesse tangentielle et la discontinuité de vitesse de rotation (ce rapport est représenté dans le plan du diagramme d'interaction par la pente du vecteur  $(U_n, \dot{\alpha})$ ).

Une méthode simplifiée permettant d'effectuer très rapidement un tel calcul<sup>3</sup> consiste à assimiler la déformée du panneau à deux segments de droite dont le point de jonction est situé sur la charnière (voir figure 4.12). On obtient ainsi, après calculs l'expression simplifiée suivante de la *puissance des efforts extérieurs* :

$$P_e = w(H - x_0)\dot{\delta}_1 = \dot{\alpha}_1 r w (H - x_0) \frac{x_0}{H} \quad (4.27)$$

où le paramètre  $r$  est relié à  $\lambda$  et  $x_0$  par l'équation (4.10).

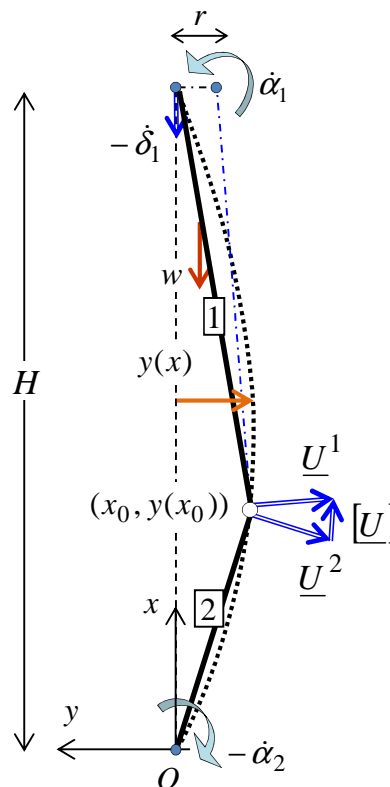


Figure 4.12. Déformée du panneau assimilée à deux segments de droite

<sup>3</sup> Méthode que nous adopterons dans le cas où le panneau est modélisé comme une plaque rectangulaire (voir chapitre 5)

La figure 4.13 ci-dessous donne sous forme de deux courbes les évaluations exactes et simplifiées du facteur de stabilité d'un panneau en fonction de sa hauteur. Les valeurs correspondantes ainsi que celles de la position de la charnière du mécanisme optimal sont reportées dans le tableau 4.1.

Il ressort de cette comparaison que le fait d'adopter une représentation simplifiée de la déformée du panneau à l'aide de deux segments de droite pour le calcul de la puissance des efforts extérieurs, conduit à légèrement surestimer la valeur du facteur de stabilité (de l'ordre de 5% à 8%). La position de la charnière optimale est un peu plus basse dans le modèle de calcul simplifié que dans le modèle exact initial.

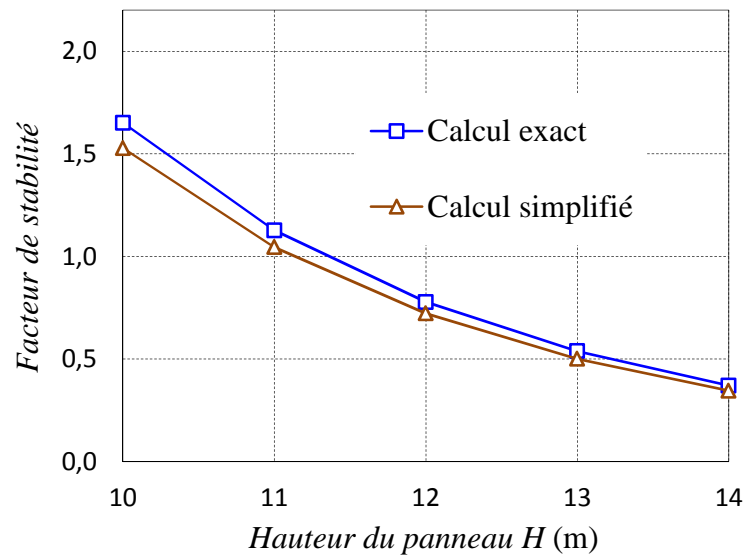


Figure 4.13. Comparaison des facteurs de stabilité cinématiques de différents panneaux exposés 120min au feu

Tableau 4.1 : Comparaison des facteurs de stabilité d'un mur de 15cm d'épaisseur exposé 120min au feu

H (m)	Calcul exact		Calcul simplifié		$\frac{F_{c,\theta\_simpl}}{F_{c,\theta\_exact}}$
	$F_{c,\theta\_exact}$	$x_0/H$	$F_{c,\theta\_simpl}$	$x_0/H$	
6	11,32	19/50	10,39	17/50	0,92
7	6,30	19/50	5,80	17/50	0,92
8	3,84	18/50	3,54	16/50	0,92
9	2,47	18/50	2,28	16/50	0,92
10	1,65	18/50	1,53	16/50	0,93
11	1,13	18/50	1,05	16/50	0,93
12	0,78	18/50	0,72	16/50	0,92
13	0,54	18/50	0,50	16/50	0,93
14	0,37	18/50	0,35	16/50	0,95

## 4.5 CONCLUSION

Étant basé sur une modélisation unidimensionnelle simplifiée du problème, ce chapitre a proposé et développé une approche rigoureuse, complète et cohérente pour évaluer la résistance au feu des panneaux en béton armé de grande hauteur. La méthode repose sur la théorie du Calcul à la Rupture tant pour ce qui concerne le critère de résistance exprimé sous la forme d'un diagramme d'interaction en fonction du chargement thermique, que pour ce qui a trait à l'analyse de la tenue des panneaux en configuration déformée. L'ensemble de la procédure a été mis en œuvre sur un cas d'étude, ce qui permet de mettre en évidence les effets du feu sur les propriétés de résistance des éléments individuels et des effets du second ordre en raison des changements de géométrie induits par le chargement thermique. Parmi les premières conclusions les plus importantes qui peuvent être tirées à partir des résultats de ce cas d'étude, est le fait que la rupture du panneau est extrêmement sensible à une relativement légère augmentation de sa hauteur.

Les deux approches statique et cinématique du Calcul à la Rupture pour l'analyse de la stabilité du panneau dans sa configuration déformée ont été mises en œuvre, permettant de trouver la valeur exacte du facteur de stabilité d'un panneau en béton armé au feu. Grâce à sa simplicité, principalement attribuable par des formulations (semi)analytiques impliquées dans l'analyse, le modèle et la méthode de calcul associée sont particulièrement bien adaptés pour un dimensionnement préliminaire du panneau de grande hauteur dans des conditions d'incendie, ce qui fournissent des lignes directrices utiles pour la question cruciale de l'évaluation de la sécurité des structures. Ils permettent de réaliser des études paramétriques d'une manière assez rapide, sans qu'il soit nécessaire de recourir à des simulations numériques complexes. En outre, la procédure pourrait aisément être généralisée à des conditions de chargement thermique plus complexes, en raison, par exemple, du fait que le panneau n'est pas exposé au feu de manière uniforme sur toute sa hauteur.

La limite du modèle simplifié réside, bien entendu, dans son incapacité à fournir des prédictions fiables dans le cas de panneau rectangulaire de grande hauteur et de largeur limitée. Dans ce cas, la structure nécessite d'être schématisée sous forme de plaque (ou dalle) à deux dimensions, en *appui simple* sur ses quatre côtés, comme exposée dans la deuxième partie du manuscrit.

\*        \*

\*





## **PARTIE II**

# **PANNEAU MODÉLISÉ COMME UNE PLAQUE**



## Chapitre 5

# CRITÈRE DE RÉSISTANCE DU PANNEAU MODÉLISÉ COMME UNE PLAQUE

### 5.1 INTRODUCTION

Dans les conditions plus réalistes où le panneau dont on analyse la stabilité au feu est de largeur limitée, l'effet des conditions aux limites sur les bords verticaux latéraux (liaison panneau-poteaux) ne peut plus être considéré comme négligeable comme dans le modèle simplifié unidimensionnel que nous avons adopté jusqu'à présent. Le panneau possède en réalité un comportement *bidimensionnel*, c'est-à-dire qu'il doit être modélisé comme une dalle ou plaque sur quatre appuis et non comme une poutre. Nous verrons dans ce chapitre ainsi que dans le suivant que l'extension de la démarche adoptée dans les chapitres précédents au cas d'une modélisation de type plaque ou dalle fait apparaître, outre une certaine complexité, des différences importantes par rapport au modèle simplifié de type poutre.

L'objet du présent chapitre, homologue « bidimensionnel » du chapitre 2, est de formuler un critère de résistance en tout point du panneau qui tienne compte de l'effet du feu. Dans le cas du modèle simplifié de type poutre, le critère de rupture, formulé en termes de diagramme d'interaction, ne porte que sur l'effort normal et le moment fléchissant, la poutre étant supposée infiniment résistante vis-à-vis de l'effort tranchant. Les structures de type plaque, telles que le panneau ici considéré, sont des milieux continus généralisés à *deux dimensions d'espace*. Tout comme pour les poutres, les *efforts intérieurs* sont de trois types : les efforts *membranaires*, les efforts *tranchants* et les moments de *flexion*, respectivement homologues de l'effort *normal*, de l'effort *tranchant* et du moment *fléchissant* pour la poutre chargée dans son plan.

Nous ferons ici l'hypothèse que, tout comme dans le modèle poutre, la plaque/dalle mince qui modélise le panneau, est infiniment résistante aux efforts tranchants, son critère de résistance s'exprimant comme une fonction des 6 variables d'efforts généralisés que, constituent les 3 efforts membranaires  $\underline{N}$  situés dans le plan de la plaque et les 3 moments de flexion  $\underline{M}$ . Dans ce cas, la représentation complète d'un tel critère de rupture dans l'espace à 6 dimensions se révèle délicate, et on se restreindra en pratique à des représentations partielles

d'un tel critère sous la forme par exemple de projections sur des sous-espaces de dimensions deux ou trois.

Il conviendra par ailleurs, dans la détermination d'un tel critère, de prendre en compte le caractère fortement hétérogène des matériaux dont la résistance est fortement affectée par la température élevée. Cela passera par la définition, puis la mise en œuvre d'une démarche d'homogénéisation en Calcul à la Rupture permettant de déterminer le critère de rupture en variables généralisées (efforts membranaires et moments de flexion) à partir de la connaissance des critères de résistance locaux des matériaux constitutifs (béton et armatures), et des paramètres caractérisant la géométrie du renforcement (position et espacement des armatures).

## 5.2 CRITÈRE DE RÉSISTANCE D'UNE PLAQUE HÉTÉROGÈNE PÉRIODIQUE: MODE DE CHARGEMENT DE LA CELLULE DE BASE

### 5.2.1 Notion de cellule de base relative à une plaque hétérogène périodique

Adoptant la démarche proposée par Sab (2003) ou par Dallot et Sab (2007), ou encore tout récemment par Bleyer *et al.* (2015), nous présentons ci-après la méthode d'homogénéisation en Calcul à la Rupture appliquée aux plaques hétérogènes périodiques, dont les panneaux en béton armé offrent un bon exemple.

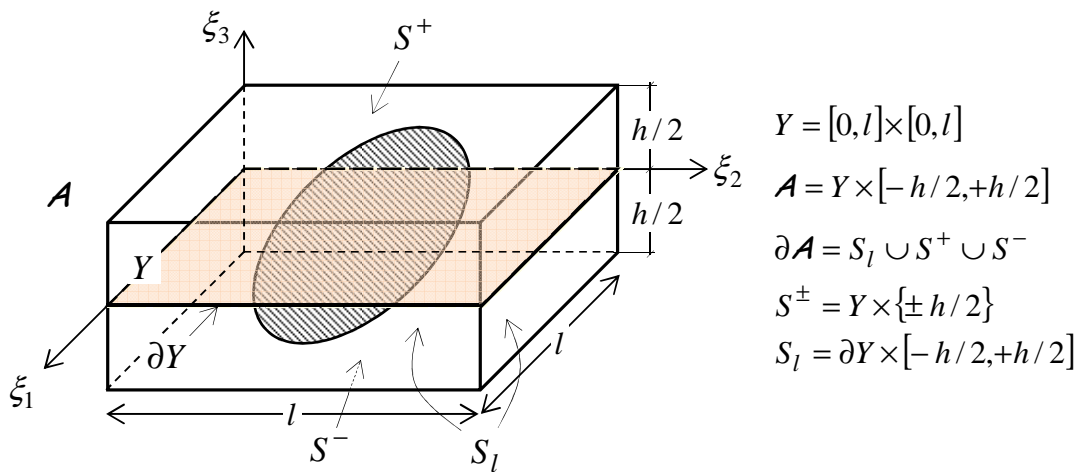


Figure 5.1. Cellule de base associée à la plaque hétérogène périodique

On considère une telle plaque d'épaisseur  $h$ , périodique, de période  $l$  dans les deux directions 1 et 2 de son plan, et occupant le domaine  $\Omega = \omega \times [-h/2, +h/2]$  de l'espace  $R^3$ , où  $\omega \subseteq R^2$  désigne la surface médiane. On peut alors mettre en évidence une cellule de base parallélépipédique  $A = Y \times [-h/2, +h/2]$ , avec  $Y = [0, l] \times [0, l]$ , représentative de la périodicité de la structure et contenant toutes les informations relatives à la plaque.

Les autres notations associées à la cellule de base sont données sur la figure 5.1. Les surfaces  $S^\pm = Y \times \{\pm h/2\}$  et  $S_l = \partial Y \times [-h/2, +h/2]$  sont respectivement la surface inférieure, la surface supérieure et les surfaces latérales de la cellule de base. Cette cellule, considérée comme une « microstructure » tridimensionnelle, est soumise à un chargement défini comme suit :

- ◇ Les forces de volume sont *nulles*.
- ◇ Les surfaces inférieure et supérieure  $S^\pm$  sont *libres d'efforts*.

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_3 = 0 \text{ en } \xi_3 = \pm h/2 \quad (5.1)$$

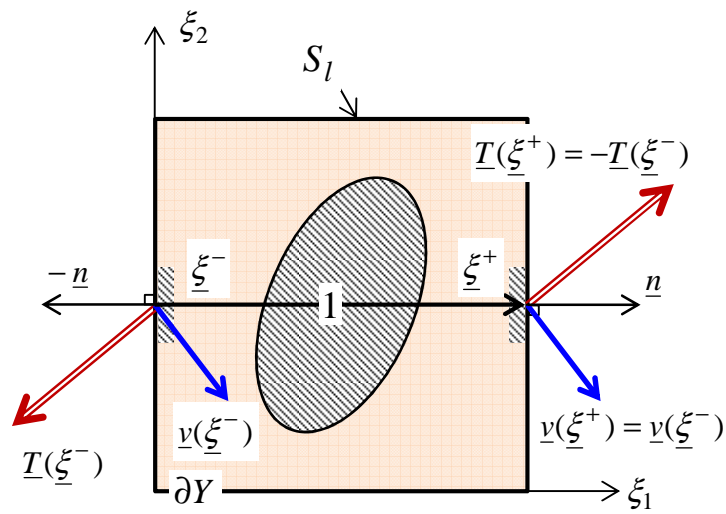


Figure 5.2. Conditions aux limites anti-périodiques en contrainte plane et périodiques et en vitesse sur la cellule de base

- ◇ La distribution d'efforts surfaciques s'exerçant sur le contour  $S_l$  de la cellule de base est *anti-périodique*, c'est-à-dire que,  $\underline{\xi}^+$  et  $\underline{\xi}^-$  désignant les vecteurs positions de deux points situés sur deux faces opposées de la surface latérale de la cellule de base, déduits l'un de l'autre par périodicité :

$$\underline{T}(\underline{\xi}^+) = \underline{\sigma}(\underline{\xi}^+) \cdot \underline{n}(\underline{\xi}^+) = -\underline{\sigma}(\underline{\xi}^-) \cdot \underline{n}(\underline{\xi}^-) = -\underline{T}(\underline{\xi}^-) \quad (5.2)$$

$\underline{n}$  désignant la normale unitaire extérieure à la surface latérale.

- ◇ Désignant par :

$$\underline{F} = F_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta, \underline{\chi} = \chi_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta, \alpha, \beta = 1, 2 \quad (5.3)$$

deux tenseurs plan, le second étant symétrique, les champs de vitesses (virtuelles) sont de la forme :

$$\underline{U}(\underline{\xi}) = \underline{F} \cdot \underline{\xi} - \xi_3 \underline{\chi} \cdot \underline{\xi} + 1/2(\underline{\xi} \cdot \underline{\chi} \cdot \underline{\xi}) e_3 + \underline{v}(\underline{\xi}) \quad (5.4)$$

où la vitesse  $\underline{v}$  est *périodique* sur la surface latérale :

$$\underline{v}(\underline{\xi}^+) = \underline{v}(\underline{\xi}^-) \quad (5.5)$$

L'interprétation des tenseurs  $\underline{F}$  et  $\underline{\chi}$  est donnée ci-dessous. Les conditions de *périodicité* (5.4) et d'*antipériodicité* (5.5) sont illustrées sur la figure 5.2.

### 5.2.2 Mise en évidence d'un mode de chargement à 6 paramètres de la cellule de base

Un champ de contrainte  $\underline{\sigma}$  sera *statiquement admissible* (s. a.) pour le problème relatif à la cellule de base si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

◇ Vérification de l'équation d'équilibre sans forces de volume:

$$\forall \underline{\xi} \in \mathcal{A}, \quad \text{div} \underline{\sigma}(\underline{\xi}) = 0 \quad (5.6)$$

◇ ainsi que de l'équation de saut à la traversée d'éventuelles *surfaces de discontinuité*  $\Sigma$  du champ de contrainte:

$$\forall \underline{\xi} \in \Sigma, \quad [\underline{\sigma}] \cdot \underline{n} = 0 \quad (5.7)$$

◇ *condition d'anti-périodicité* sur le bord latéral de la cellule et de surface libre d'effort sur les bords supérieur et inférieur:

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} \text{ antipériodique sur } S_l, \quad \underline{\sigma} \cdot e_3 = 0 \text{ sur } S^\pm \quad (5.8)$$

De la même façon, un champ de vitesses virtuel sera cinématiquement admissible (c.a) s'il peut s'écrire sous la forme (5.4). On obtient alors :

$$\begin{aligned} d\underline{U}(\underline{\xi}) &= (\underline{F} - \xi_3 \underline{\chi}) \cdot d\underline{\xi} - d\xi_3 \underline{\chi} \cdot \underline{\xi} + (\underline{\xi} \cdot \underline{\chi} \cdot d\underline{\xi}) e_3 + \underline{\text{grad}} v \cdot d\underline{\xi} \\ &= \underbrace{(\underline{F} - \xi_3 \underline{\chi} - (\underline{\chi} \cdot \underline{\xi}) \otimes e_3 + e_3 \otimes (\underline{\xi} \cdot \underline{\chi}) + \underline{\text{grad}} v)}_{\underline{\text{grad}} U} \cdot d\underline{\xi} \end{aligned} \quad (5.9)$$

d'où le champ des *taux de déformation*:

$$\underline{\underline{d}}(\underline{\xi}) = \frac{1}{2} \left\{ \underline{\underline{\text{grad}U}} + {}^T \underline{\underline{\text{grad}U}} \right\} = \underline{\underline{D}} - \xi_3 \underline{\underline{\dot{\chi}}} + \underline{\underline{d}}(\underline{\underline{v}}(\underline{\xi})) \quad (5.10)$$

avec :  $\underline{\underline{D}} = 1/2 \left\{ \underline{\underline{F}} + {}^T \underline{\underline{F}} \right\}$ .

Dans ces conditions, la *puissance des efforts extérieurs* à la cellule dans un champ de vitesse cinématiquement admissible, c'est-à-dire vérifiant (5.4) est égale, en vertu du *Principe des Puissances Virtuelles*, à la *puissance de déformation* correspondante:

$$\begin{aligned} & \forall \underline{\underline{\sigma}} \text{ s.a. } , \forall \underline{\underline{U}} \text{ c.a. } (\underline{\underline{F}}, \underline{\underline{\dot{\chi}}}) \\ P_e(\underline{\underline{U}}) &= \int_{\mathcal{A}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \, d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} \underline{\underline{\sigma}} : \left[ \underline{\underline{D}} - \xi_3 \underline{\underline{\dot{\chi}}} + \underline{\underline{d}}(\underline{\underline{v}}) \right] d\mathcal{A} \\ &= \left( \int_{\mathcal{A}} \sigma_{\alpha\beta} e_\alpha \otimes e_\beta \right) : \underline{\underline{D}} \, d\mathcal{A} + \left( - \int_{\mathcal{A}} \xi_3 \sigma_{\alpha\beta} e_\alpha \otimes e_\beta \right) : \underline{\underline{\dot{\chi}}} \, d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{A}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{\underline{v}}) \, d\mathcal{A} \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\text{avec : } \int_{\mathcal{A}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}(\underline{\underline{v}}) \, d\mathcal{A} = \int_{S^\pm} \overbrace{(\underline{\underline{\sigma}} \cdot (\pm e_3)) \cdot \underline{\underline{v}}}^{=0} \, dS + \int_{S_l} \overbrace{(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{v}}}^{=0} \, dS = 0,$$

l'annulation de la seconde intégrale, calculée sur le bord latéral de la cellule, provenant des conditions d'antipériodicité (5.2) et de périodicité (5.5). Il vient donc finalement :

$$\forall \underline{\underline{\sigma}} \text{ s.a. } , \forall \underline{\underline{U}} \text{ c.a. } (\underline{\underline{F}}, \underline{\underline{\dot{\chi}}}) : P_e(\underline{\underline{U}}) = \int_{\mathcal{A}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \, d\mathcal{A} = l^2 (\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\dot{\chi}}}) \quad (5.12)$$

avec :

$$\underline{\underline{N}} = 1/l^2 \left( \int_{\mathcal{A}} \sigma_{\alpha\beta} e_\alpha \otimes e_\beta \right) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{M}} = 1/l^2 \left( - \int_{\mathcal{A}} \xi_3 \sigma_{\alpha\beta} e_\alpha \otimes e_\beta \right) \quad (5.13)$$

Les tenseurs  $\underline{\underline{N}}$  et  $\underline{\underline{M}}$  s'interprètent alors respectivement comme le tenseur des *efforts membranaires* et celui des *moments fléchissants*. Les variables cinématiques duales étant les tenseurs  $\underline{\underline{D}}$  et  $\underline{\underline{\dot{\chi}}}$  qui représentent respectivement le *taux de déformation* et le *taux de courbure* du plan moyen de la plaque. L'expression (5.12) de la puissance des efforts extérieurs ou de la puissance de déformation montre ainsi que la cellule de base est soumise à un *mode de chargement à six paramètres* que sont les composantes des tenseurs plans symétriques  $\underline{\underline{N}}$  et  $\underline{\underline{M}}$ .



### 5.2.3 Critère de résistance macroscopique de la plaque : définitions statique et cinématique

Compte tenu du mode de chargement ainsi introduit, on peut définir un *problème auxiliaire de Calcul à la Rupture* consistant à déterminer le domaine  $G^{\text{hom}}$  des *chargements potentiellement supportables* relatif à ce problème auxiliaire et défini comme suit :

$$(\underline{N}, \underline{M}) \in G^{\text{hom}} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\sigma} \text{ S.A. avec } (\underline{N}, \underline{M}) \\ \forall \underline{\xi} \in \mathcal{A}, \underline{\sigma}(\underline{\xi}) \in G(\underline{\xi}) \end{cases} \quad (5.14)$$

$G(\underline{\xi})$  désignant le domaine de résistance du matériau au point  $\underline{\xi}$  de la cellule de base. Ce domaine est l'analogie pour une plaque du domaine d'interaction d'une poutre.

La méthode d'homogénéisation en Calcul à la Rupture consiste alors à remplacer l'analyse à la rupture de la plaque hétérogène périodique par celle d'une plaque de même géométrie, soumise au même chargement que la plaque initiale, mais dont les capacités de résistance exprimées à travers le domaine d'interaction  $G^{\text{hom}}$  sont homogènes.

En supposant vérifiées les conditions assurant l'équivalence des approches statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur du domaine  $G^{\text{hom}}$ , la fonction d'appui de ce domaine peut s'écrire sous la forme d'une minimisation sur l'ensemble des champs de vitesse  $\underline{U}$  de la forme (5.4):

$$\begin{aligned} \Pi(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) &= \sup \left\{ \underline{N} : \underline{D} + \underline{M} : \underline{\dot{\chi}} ; (\underline{N}, \underline{M}) \in G^{\text{hom}} \right\} \\ &= \text{Inf} \left\{ \langle \pi(\underline{d}) \rangle ; \underline{U} \text{ c.a. } (\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) \right\} \end{aligned} \quad (5.15)$$

avec :

$$\begin{aligned} \langle \pi(\underline{d}) \rangle &= (1/l^2) \int \pi[\underline{\xi}; \underline{d}(\underline{\xi})] d\mathcal{A} \\ \pi[\underline{\xi}; \underline{d}(\underline{\xi})] &= \sup_{\mathcal{A}} \left\{ \underline{\sigma} : \underline{d}(\underline{\xi}) ; \underline{\sigma} \in G(\underline{\xi}) \right\} \end{aligned} \quad (5.16)$$

La méthode d'homogénéisation en Calcul à la Rupture est tout d'abord appliquée à la détermination du critère de résistance d'une plaque homogène en béton seul, la résistance de ce dernier étant modélisée par un critère de Coulomb sans résistance à la traction.

## 5.3 PLAQUE BÉTON HOMOGÈNE : CRITÈRE DE COULOMB SANS RÉSISTANCE À LA TRACTION

### 5.3.1 Critère de résistance en *contraintes planes* du béton sans résistance à la traction

Il est à rappeler ici que la *fragilité* du comportement en *traction* du béton, notamment en raison de l'augmentation de la température provoquée par le feu, suggère que cette résistance en *traction*  $f_t$  s'annule brutalement dès qu'elle est atteinte. C'est pour cette raison, ainsi que pour la simplicité de la démarche qui va suivre, que nous admettrons que les propriétés de résistance du béton peuvent être caractérisées par un critère de Mohr-Coulomb entièrement tronqué en traction. Pour un état de contrainte *plane*, le critère s'écrit en *contraintes principales*:

$$-f_c \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq 0 \quad (5.17)$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les deux valeurs principales du tenseur de contrainte, la troisième valeur étant nulle.

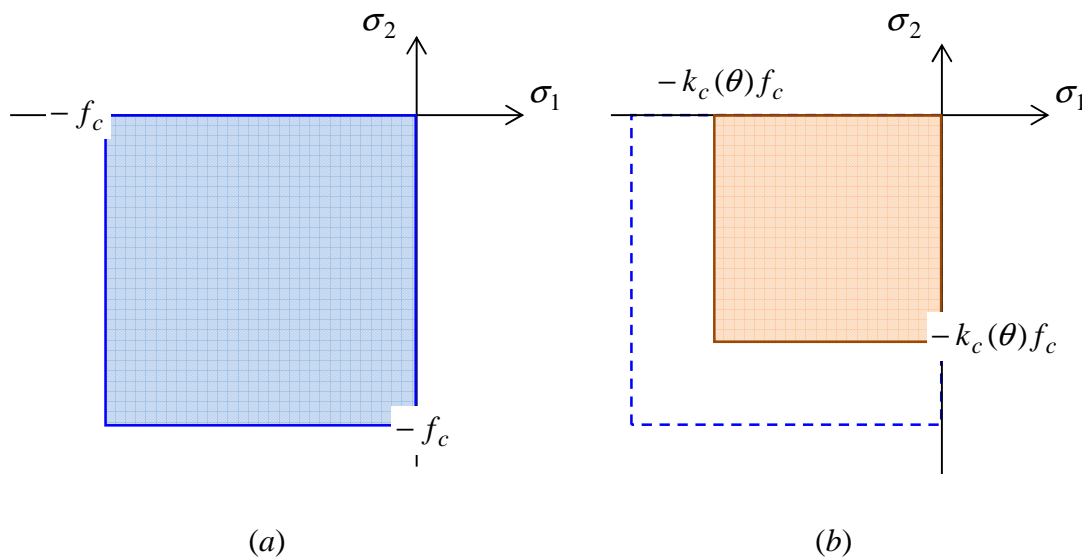


Figure 5.3. Critère de Mohr-Coulomb sans résistance à la traction (a) à température ambiante et (b) au feu

Dans le plan de ces contraintes principales ( $\sigma_1, \sigma_2$ ), le critère de résistance de Mohr-Coulomb tronqué entièrement en traction défini par (5.17) est donc simplement délimité par un carré dont la longueur du côté est égale à la résistance à la compression,  $f_c$ , du béton (figure 5.3(a)).

La matrice relative à un état de contrainte plane s'écrivant dans les axes orthonormés (1,2) :

$$(\underline{\underline{\sigma}}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

ses valeurs propres (contraintes principales) sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma \end{pmatrix} = (\sigma_{11} - \sigma)(\sigma_{22} - \sigma) - \sigma_{12}^2 = 0 \quad (5.19)$$

soit :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \frac{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}{2} \quad (5.20)$$

Le critère de résistance (5.17) peut s'exprimer alors à travers les deux inégalités :

$$\begin{cases} \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \leq 0 \\ -2f_c \leq \sigma_{11} + \sigma_{22} - \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \end{cases} \Leftrightarrow F(\sigma_{\alpha\beta}) \leq 0 \quad (5.21)$$

soit encore :

$$F(\sigma_{\alpha\beta}) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2f_c \leq \sigma_{11} + \sigma_{22} \leq 0 \\ \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 \leq 0 \\ (\sigma_{11} + f_c)(\sigma_{22} + f_c) - \sigma_{12}^2 \leq 0 \end{cases} \quad (5.22)$$

et en notations intrinsèques :

$$\begin{aligned} -2f_c &\leq \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \leq 0 \\ \det \underline{\underline{\sigma}} &\leq 0, \quad \det(\underline{\underline{\sigma}} + f_c \underline{\underline{1}}) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

On introduit alors le changement de variable suivant (voir figure 5.4) :

$$u = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{\sqrt{2}}, \quad w = \sqrt{2}\sigma_{12} \quad (5.24)$$

les axes orthonormés  $(u, v, w)$  étant déduits des axes  $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$  par une rotation de  $45^\circ$  autour de l'axe  $\sigma_{12}$ , suivie d'une homothétie de rapport  $\sqrt{2}$  le long de ce même axe. Avec ces nouvelles variables, le critère de résistance (5.17) s'écrit finalement :

$$u + \sqrt{v^2 + w^2} \leq 0, \quad \sqrt{v^2 + w^2} \leq u + \sqrt{2}f_c \quad (5.25)$$

La figure 5.5 ci-dessous montre le domaine de résistance correspondant dans le plan  $(u, \sqrt{v^2 + w^2})$  ainsi que dans le repère  $(u, v, w)$ . Il est constitué de la réunion de deux troncs de cône de même axe  $Ou$ , de demi-angle d'ouverture égal à  $45^\circ$  et de même hauteur.

L'influence d'une augmentation de température  $\theta$  sur le critère de résistance (5.25) est prise en compte de la même façon que dans (2.4) pour la résistance en compression du béton, la résistance en traction étant supposée nulle. Le domaine de résistance correspondant est représenté sur la figure 5.3(b) où la longueur des côtés du carré est réduite proportionnellement au coefficient  $k_c(\theta)$ .

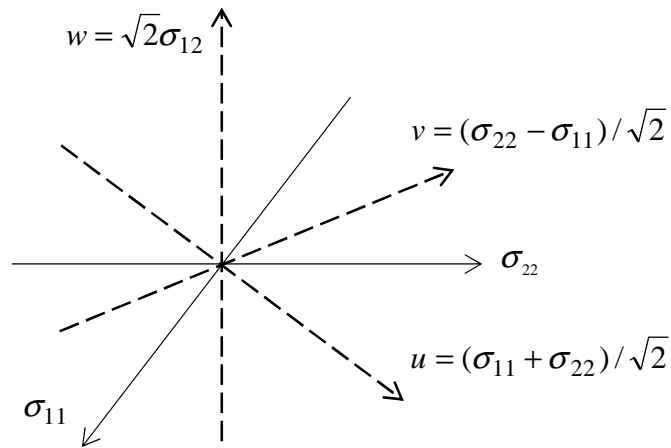


Figure 5.4. Changement de variables dans l'espace des contraintes planes

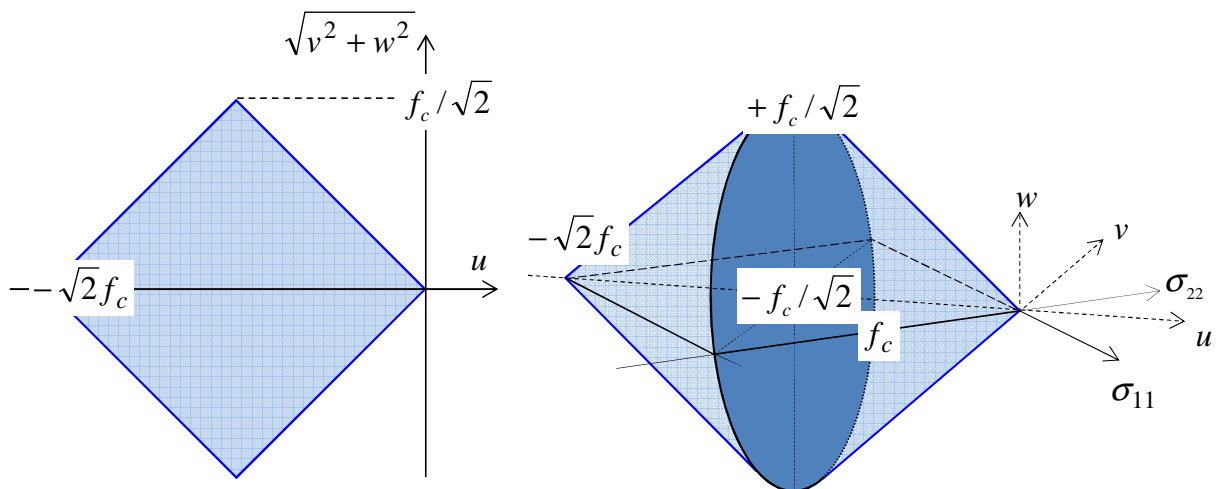


Figure 5.5. Critère de résistance dans l'espace des nouvelles variables

### 5.3.2 Approche statique par champs de contraintes planes

Elle est mise en œuvre à l'aide de champs de contraintes planes de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{\alpha\beta}(\xi_3) \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (5.26)$$

qui vérifient les équations d'équilibre avec forces de volumes nulles :

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\xi}) = 0 \quad \forall \underline{\xi} \in \mathcal{A} \quad (5.27)$$

la continuité du vecteur contrainte au franchissement du plan  $\partial Y(-h/2 < \xi_3 < h/2)$  :

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{\underline{n}} = 0 \quad \forall \underline{\xi} \in \partial Y \quad (5.28)$$

la continuité du vecteur contrainte au franchissement de tout plan horizontal où le champ (5.26) pourrait être discontinu, puisque ce vecteur est nul, la condition d'*anti-périodicité* (5.2) sur le bord latéral de la cellule et celle de bord libre sur les faces horizontales (condition (5.1)). En vertu de (5.13), ces champs de contraintes planes sont donc *statiquement admissibles* avec des efforts membranaires et des moments de flexion égaux à :

$$\alpha, \beta = 1, 2: \underline{N} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \, d\xi_3, \quad \underline{M} = \int_{-h/2}^{+h/2} -\xi_3 \sigma_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \, d\xi_3 \quad (5.29)$$

Le critère de résistance du béton en *contraintes planes* s'écrivant:

$$F(\sigma_{\alpha\beta}) \leq 0 \quad (5.30)$$

le domaine de résistance  $G_s^{\text{hom}}$  défini statique par :

$$G_s^{\text{hom}} = \left\{ (\underline{N}, \underline{M}); \exists \sigma_{\alpha\beta}(\xi_3) \left| \begin{array}{l} \underline{N} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \, d\xi_3, \underline{M} = \int_{-h/2}^{+h/2} -\xi_3 \sigma_{\alpha\beta} \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \, d\xi_3 \\ \forall \xi_3 \in [-h/2, +h/2]: F[\sigma_{\alpha\beta}(\xi_3)] \leq 0 \end{array} \right. \right\} \quad (5.31)$$

constitue donc une *approche statique par l'intérieur* du domaine  $G^{\text{hom}}$  définissant le critère de résistance de la plaque :

$$G_s^{\text{hom}} \subseteq G^{\text{hom}} \quad (5.32)$$

### 5.3.3 Approche cinématique par l'extérieur

On met en œuvre l'approche cinématique par l'extérieur à l'aide de champs de vitesse virtuels de la forme :

$$\underline{U}(\underline{\xi}) = \underline{D} \cdot \underline{\xi} - \xi_3 \underline{\dot{\chi}} \cdot \underline{\xi} + 1/2 (\underline{\xi} \cdot \underline{\dot{\chi}} \cdot \underline{\xi}) \underline{e}_3 + \dot{w}(\xi_3) \underline{e}_3 \quad (5.33)$$

où  $\dot{w}(\xi_3)$  est une fonction de la seule coordonnée  $\xi_3$ , les champs de *taux de déformation* correspondants s'écrivant alors :

$$\underline{d}(\underline{\xi}) = \underline{d}(\xi_3) = \frac{1}{2} \left\{ \underline{\text{grad}} U + {}^T \underline{\text{grad}} U \right\} = \underline{D} - \xi_3 \underline{\dot{\chi}} + \dot{w}'(\xi_3) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (5.34)$$

où  $\dot{w}'(\xi_3) = \frac{d\dot{w}}{dx_3}(\xi_3)$ .

On vérifie aisément que ces champs de vitesse virtuels  $\underline{U}$  sont cinématiquement admissibles avec  $(\underline{D}; \underline{\dot{\chi}})$ , c'est-à-dire de la forme (5.4), car les conditions aux limites périodiques en vitesse sur les surfaces latérales  $S_l$  de la cellule de base sont bien satisfaites.

Étant donné alors un tel champ de vitesse  $\underline{U}$  cinématiquement admissible dans le mode de chargement prescrit, la *puissance résistante maximale* développée dans ce champ vaut, compte tenu (5.16) :

$$\begin{aligned} \Pi(\underline{D}; \underline{\dot{\chi}}) \leq \langle \pi(\underline{d}) \rangle &= (1/l^2) \int_{\mathcal{A}} \pi[\underline{\xi}; \underline{d}(\underline{\xi})] d\mathcal{A} = \int_{-h/2}^{+h/2} \pi[\underline{d}(\xi_3)] d\xi_3, \\ \text{avec } \pi[\underline{d}] &= \begin{cases} \frac{f_c}{2} \left[ \sum_{i=1,2,3} |d_i| - \text{tr} \underline{d} \right] & \text{si } \text{tr} \underline{d} \geq \left( \sum_{i=1,2,3} |d_i| \right) \sin \varphi \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Posant alors  $\underline{\delta}(\xi_3) = \underline{D} - \xi_3 \underline{\dot{\chi}}$  et désignant par  $\delta_1$  et  $\delta_2$  ses valeurs principales dans le plan (1,2), la troisième étant nulle, la *condition de pertinence* du champ de vitesse rappelée dans (5.35) devient:

$$\delta_1 + \delta_2 + \dot{w}' \geq (|\delta_1| + |\delta_2| + |\dot{w}'|) \sin \varphi \quad (5.36)$$

l'expression correspondante de la fonction  $\pi$  devenant alors :

$$\pi(\delta_1, \delta_2, \dot{w}') = \frac{f_c}{2} (|\delta_1| + |\delta_2| + |\dot{w}'| - \delta_1 - \delta_2 - \dot{w}') \quad (5.37)$$

Il est alors toujours possible de choisir  $\dot{w}'$  *positif* et suffisamment grand pour que la condition de pertinence (5.35) soit vérifiée, la fonction  $\pi$  se réduisant alors à une expression indépendante de  $\dot{w}'$  :

$$\pi(\delta_1, \delta_2) = \frac{f_c}{2} (|\delta_1| + |\delta_2| - \delta_1 - \delta_2) \quad (5.38)$$

qui n'est autre que la *fonction d'appui du critère en contraintes planes* (figure 5.6). Les valeurs principales du taux de déformation étant égales à :

$$\delta_1, \delta_2 = \frac{\delta_{11} + \delta_{22}}{2} \pm \frac{\sqrt{(\delta_{11} - \delta_{22})^2 + 4\delta_{12}}}{2} \quad (5.39)$$

les différentes valeurs de la fonction d'appui en fonction des composantes de  $\underline{\delta}$  sont données sur la figure 5.7.

Cette fonction d'appui peut finalement s'écrire en notations intrinsèques :

$$\pi(\underline{\delta}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{tr} \underline{\delta} \geq 0 \text{ et } \det \underline{\delta} \geq 0 \quad [0] \\ -\frac{f_c}{2} \left[ \text{tr} \underline{\delta} - \sqrt{(\text{tr} \underline{\delta})^2 - 4 \det \underline{\delta}} \right] & \text{si } \det \underline{\delta} \leq 0 \quad [1] \\ -f_c \text{tr} \underline{\delta} & \text{si } \text{tr} \underline{\delta} \leq 0 \text{ et } \det \underline{\delta} \geq 0 \quad [2] \end{cases} \quad (5.40)$$

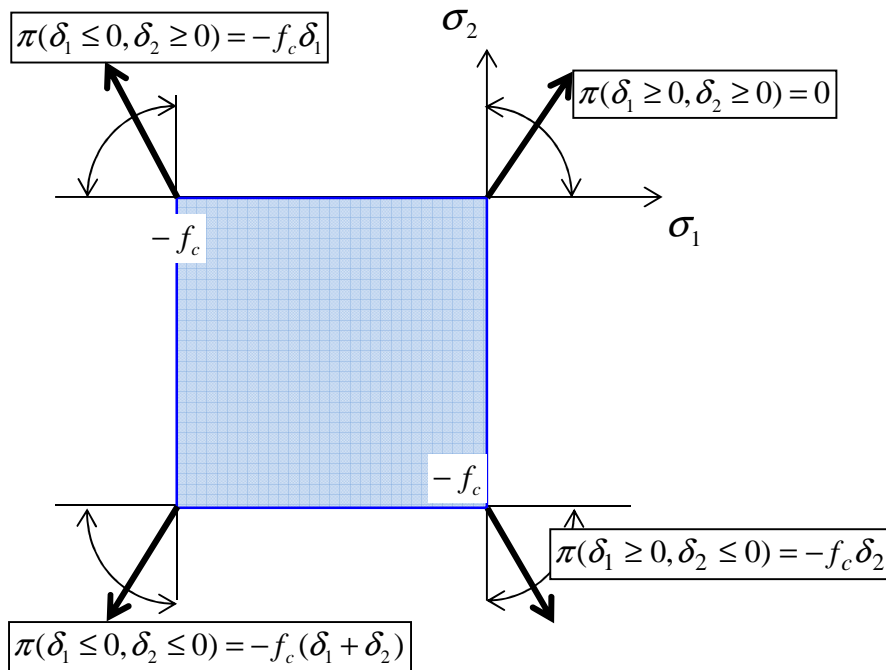


Figure 5.6. *Fonction d'appui du critère de béton en contraintes planes*

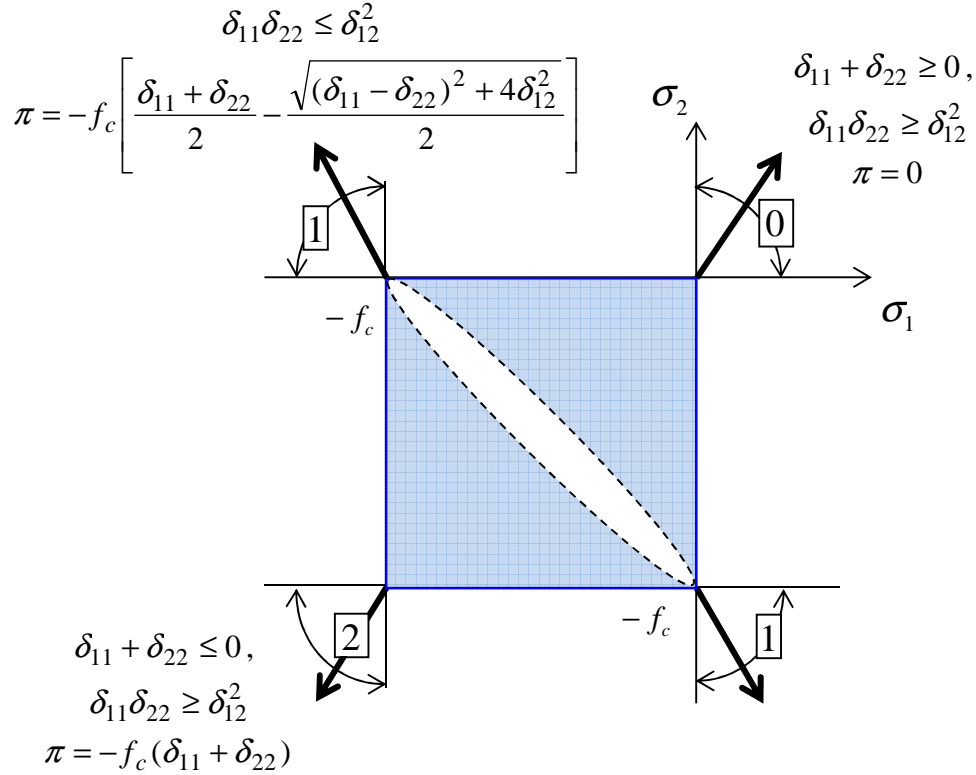


Figure 5.7. Fonction d'appui du critère de béton en contraintes planes en fonction des composantes de  $\underline{\delta}$

Les expressions [0] à [2] correspondent à un découpage en 3 zones de l'épaisseur de la plaque. Les coordonnées des deux surfaces séparant ces différentes zones vérifient l'équation :

$$\det(\underline{D} - \xi_3 \underline{\chi}) = (D_{11} - \xi_3 \chi_{11})(D_{22} - \xi_3 \chi_{22}) - (D_{12} - \xi_3 \chi_{12})^2 = 0 \quad (5.41)$$

soit après calculs :

$$\xi_3^\pm = \frac{\underline{\chi} : \underline{D} \pm \sqrt{(\underline{\chi} : \underline{D})^2 - 4(\text{tr} \underline{\chi})(\det \underline{D})}}{2 \text{tr} \underline{\chi}} \quad (5.42)$$

ce qui permet de calculer la puissance résistante maximale par intégration sur l'épaisseur de la plaque, qui constitue un majorant de la fonction d'appui du critère :

$$\Pi(\underline{D}; \underline{\chi}) \leq \langle \pi(\underline{d}) \rangle = \int_{-h/2}^{+h/2} \pi(\delta_1, \delta_2) d\xi_3 \quad (5.43)$$



On peut d'ailleurs montrer que :

$$\Pi(\underline{D}; \underline{\dot{\chi}}) = \int_{-h/2}^{+h/2} \pi(\delta_1, \delta_2) d\xi_3 \quad (5.44)$$

de sorte que l'approche statique par l'intérieur avec champs de contraintes planes et l'approche cinématique décrite ci-dessus coïncident.

En pratique, un tel calcul par voie analytique s'avère difficile à réaliser, nécessitant le recours à une méthode numérique. Dans la mesure où, dans le chapitre suivant, nous traiterons la stabilité du panneau au feu à l'aide de l'approche cinématique du Calcul à la Rupture ne mettant en jeu que des mécanismes avec discontinuités au travers de charnières, nous nous limitons dans la suite à expliciter le critère à travers l'obtention d'une expression analytique de sa fonction d'appui pour de telles discontinuités.

### 5.3.4 Calcul de la fonction $\Pi$ relative à une discontinuité

La figure 5.8 représente une ligne (charnière) à travers laquelle apparaît une discontinuité de *vitesse* et de *taux de rotation*. Ce mécanisme est en fait une généralisation du mécanisme examiné au chapitre 4 précédent, avec un saut de vitesse tangentielle complémentaire à la traversée de la ligne de discontinuité.

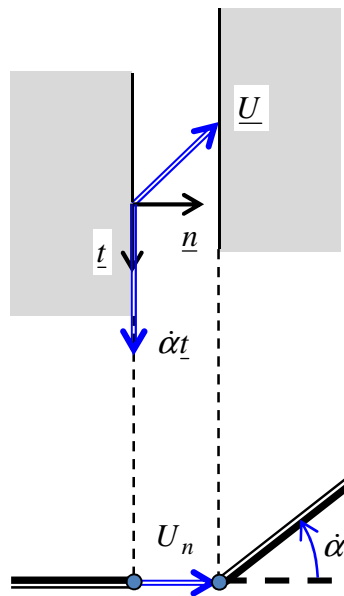


Figure 5.8. Saut de vitesse et de taux de rotation à la traversée d'une ligne de discontinuité (charnière)

Dans le cas d'une telle discontinuité, la fonction d'appui du critère de la plaque s'écrit :

$$\Pi(\underline{U}, \underline{n}; \dot{\alpha}) = \sup \left\{ (\underline{N}, \underline{n}) \cdot \underline{U} + M_{nn} \dot{\alpha}; (\underline{N}, \underline{M}) \in G^{\text{hom}} \right\} \quad (5.45)$$

où  $\underline{U}$  désigne le saut de vitesse dans le plan de la plaque à la traversée de la ligne de discontinuité de normale  $\underline{n}$ , et  $\dot{\alpha}$  est la discontinuité du taux de rotation à la traversée de cette même ligne. Plus précisément :

$$\begin{aligned} \Pi(\underline{U}, \underline{n}; \dot{\alpha}) &= \sup \left\{ \underline{N} : (\underline{n} \otimes^s \underline{U}) + \underline{M} : (\dot{\alpha} \underline{n} \otimes \underline{n}); (\underline{N}, \underline{M}) \in G^{\text{hom}} \right\} \\ &= \Pi(\underline{D} = \underline{n} \otimes^s \underline{U}, \underline{\chi} = \dot{\alpha} \underline{n} \otimes \underline{n}) \end{aligned} \quad (5.46)$$

avec, compte tenu de (5.44) :

$$\pi^{\text{hom}}(\underline{U}, \underline{n}; \dot{\alpha}) = \int_{-h/2}^{+h/2} \pi \left( \underline{\delta} = \underline{n} \otimes^s \underline{U} - \xi_3 \dot{\alpha} \underline{n} \otimes \underline{n} \right) d\xi_3 \quad (5.47)$$

Il vient alors :

$$\pi^{\text{hom}}(\underline{U}, \underline{n}; \dot{\theta}) = \int_{-h/2}^{+h/2} \pi \left( \underline{\delta} = \underline{n} \otimes^s \underline{U} - \xi_3 \dot{\theta} \underline{n} \otimes \underline{n} \right) d\xi_3 \quad (5.48)$$

Or  $\det \underline{\delta} = \det \left[ (U_n - \xi_3 \dot{\alpha}) \underline{n} \otimes \underline{n} + U_t \underline{t} \otimes \underline{n} \right] = -\frac{1}{4} U_t^2 \leq 0$  et donc d'après (5.40) :

$$\pi(\underline{\delta}) = -\frac{f_c}{2} \left[ \text{tr} \underline{\delta} - \sqrt{(\text{tr} \underline{\delta})^2 - 4 \det \underline{\delta}} \right] = \frac{f_c}{2} \left[ \xi_3 \dot{\alpha} - U_n + \sqrt{(\xi_3 \dot{\alpha} - U_n)^2 + U_t^2} \right] \quad (5.49)$$

soit :

$$\Pi(U_n, U_t, \dot{\alpha}) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{f_c}{2} \left[ \xi_3 \dot{\alpha} - U_n + \sqrt{(\xi_3 \dot{\alpha} - U_n)^2 + 4U_t^2} \right] d\xi_3 \quad (5.50)$$

Posant  $X = \xi_3 \dot{\alpha} - U_n$ , on peut alors écrire :

$$\Pi(U_n, U_t, \dot{\alpha}) = \frac{f_c}{2\dot{\alpha}} \int_{-h\dot{\alpha}/2 - U_n}^{h\dot{\alpha}/2 - U_n} \left[ X + \sqrt{X^2 + 4U_t^2} \right] dX = \frac{f_c}{2\dot{\alpha}} [F(X)]_{-h\dot{\alpha}/2 - U_n}^{h\dot{\alpha}/2 - U_n} \quad (5.51)$$

avec :

$$F(X) = U_t \left\{ X \sqrt{(X/2U_t)^2 + 1} + 2U_t \text{Ln} \left( \sqrt{(X/2U_t)^2 + 1} + X/2U_t \right) \right\} \quad (5.52)$$

### Cas particuliers

◇  $U_n = U_t = 0$  :

$$\Pi(U_n = U_t = 0, \dot{\alpha}) = \frac{f_c}{2} \int_{-h/2}^{+h/2} (\xi_3 \dot{\alpha} + |\xi_3 \dot{\alpha}|) d\xi_3 = \frac{f_c h^2}{4} |\dot{\alpha}| \quad (5.53)$$

◇  $\dot{\alpha} = 0$  :

$$\Pi(U_n, U_t, \dot{\alpha} = 0) = \frac{f_c h}{2} \left( \sqrt{U_n^2 + 4U_t^2} - U_n \right) \quad (5.54)$$

### 5.3.5 Prise en compte des renforcements

Conformément à la modélisation adoptée au chapitre 2, les armatures de renforcement sont traitées comme des éléments unidimensionnels (barres) parfaitement adhérents au béton environnant et ne reprenant que des efforts de traction-compression. Nous calculons ci-après la contribution de ces renforcements à la fonction support du critère de résistance de la plaque pour une ligne de discontinuité.

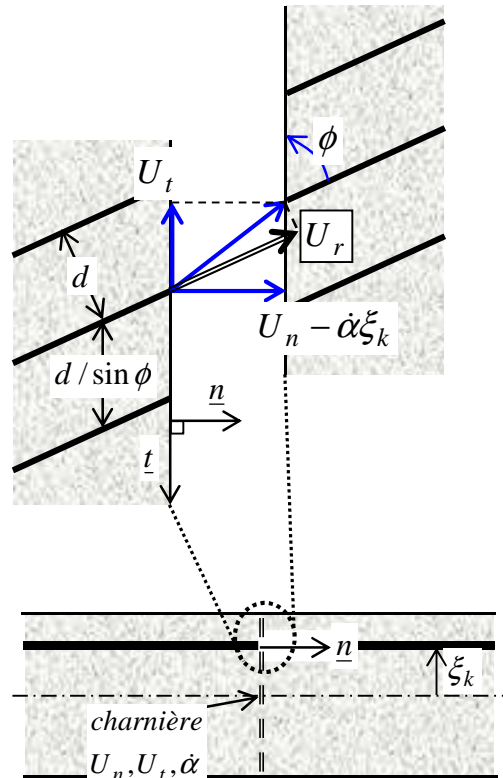


Figure 5.9. Discontinuité de vitesse dans un lit de renforcement incliné d'un angle  $\phi$  par rapport à la charnière de la plaque

On considère un lit de renforcement situé à une distance  $\xi_k$  du plan moyen de la plaque et incliné d'un angle  $\phi$  par rapport à une charnière (ligne de discontinuité) caractérisée par les discontinuités de vitesse  $U_n$  et  $U_t$  comptées au niveau du plan moyen de la plaque ( $y=0$ ) et la discontinuité de vitesse de rotation  $\dot{\alpha}$  (figure 5.9). La discontinuité de vitesse au niveau du lit de renforcement est alors égale à :

$$\underline{U}_r = (U_n - \dot{\alpha}\xi_k)\underline{n} + U_t\underline{t} \quad (5.55)$$

et donc sa projection sur la direction du renforcement s'écrit :

$$U_r = (U_n - \dot{\alpha}\xi_k)\sin\phi + U_t\cos\phi \quad (5.56)$$

Il en résulte que l'expression de la puissance résistante maximale relative à un renforcement individuel a pour expression :

$$p_{rm} = n_y |U_r(\phi)| = n_y |(U_n - \dot{\alpha}\xi_k)\sin\phi + U_t\cos\phi| \quad (5.57)$$

où l'on rappelle que  $n_y = f_y A$  désigne la résistance en *traction-compression* du renforcement, ses résistances à l'effort tranchant et à la flexion étant négligées. Il en résulte que cette puissance résistante maximale calculée par unité de longueur de la charnière s'écrit :

$$p_{rm} / (d / \sin\phi) = n_y / d |U_r(\phi)| \sin\phi = n_0 \sin\phi |(U_n - \dot{\alpha}\xi_k)\sin\phi + U_t\cos\phi| \quad (5.58)$$

où  $n_0$  représente la *résistance du lit d'armatures par unité de longueur transversale à la direction du renforcement*. Ce terme vient s'ajouter à l'expression (5.50) de la fonction d'appui de la plaque en béton seul autant de fois qu'il y a de lits de renforcement.

### 5.3.6 Prise en compte de l'effet de la température

En présence d'un gradient de température provoqué par une sollicitation thermique, il suffit de remplacer les résistances à froid du béton et de l'acier par celles fonctions de l'augmentation de température à travers les coefficients réducteurs correspondants (équations (2.4) et (2.8)) :

$$f_c(\theta) = k_c(\theta)f_c, n_y(\theta) = k_s(\theta)n_y \Rightarrow n_0(\theta) = k_s(\theta)n_0 \quad (5.59)$$

ce qui, compte tenu de (5.50) et (5.58) conduit à l'expression suivante de la fonction d'appui du panneau en béton armé, relative à une charnière, en fonction du gradient thermique  $\theta(\xi_3)$  :

$$\begin{aligned} \Pi_{\theta}^r(U_n, U_t, \dot{\alpha}) &= \frac{f_c}{2} \int_{-h/2}^{h/2} k_c(\theta(\xi_3)) \left[ \xi_3 \dot{\alpha} - U_n + \sqrt{(\xi_3 \dot{\alpha} - U_n)^2 + U_t^2} \right] d\xi_3 \\ &+ n_0 \sum_k k_s[\theta(\xi_k)] \sin\phi_k |(U_n - \dot{\alpha}\xi_k)\sin\phi_k + U_t\cos\phi_k| \end{aligned} \quad (5.60)$$

où l'on suppose que les lits de renforcement ne diffèrent entre eux que par leur position  $\xi_k$  et leur orientation  $\phi_k$ .

## 5.4 CONCLUSION

La technique d'homogénéisation en Calcul à la Rupture mise en œuvre dans ce chapitre, a permis de formuler de manière générale le critère de rupture d'une plaque soumise à des efforts membranaires et de flexion, comme solution d'un problème de Calcul à la Rupture défini sur un élément représentatif de la plaque. La fonction d'appui d'un tel critère peut alors être explicitée dans le cas d'une discontinuité de vitesse et de taux de rotation à la traversée d'une charnière linéique.

Disposant à l'issue de ce chapitre de l'évaluation numérique d'une telle fonction d'appui, nous sommes maintenant en mesure de procéder à une *approche cinématique par l'extérieur* de la stabilité d'un panneau sous poids propre soumis au feu, en utilisant des mécanismes simples mettant en jeu de telles discontinuités, sans avoir besoin de formuler explicitement le critère de rupture en  $(\underline{N}, \underline{M})$ .

\*       \*

\*

## Chapitre 6

# ANALYSE DE STABILITÉ AU FEU D'UN PANNEAU RECTANGULAIRE PAR UNE APPROCHE CINÉMATIQUE SIMPLIFIÉE

## 6.1 INTRODUCTION

Une approche cinématique par l'extérieur fondée sur l'utilisation de mécanismes de ruine simples avec charnières est mise en œuvre dans ce chapitre afin d'évaluer la stabilité globale d'un panneau rectangulaire dont la configuration déformée a été préalablement déterminée par un calcul thermoélastique prenant simultanément en compte la sollicitation thermique et le poids propre.

Cette opération de simulation du changement de géométrie est classiquement effectuée à l'aide d'un logiciel de calcul par éléments finis dans lequel les effets du second ordre intègrent explicitement des moments de flexion en plus des efforts membranaires dus à l'excentrement du poids propre.

## 6.2 MISE EN ŒUVRE DE L'APPROCHE CINÉMATIQUE DU CALCUL À LA RUPTURE PAR L'UTILISATION DE MÉCANISMES DE RUINE SIMPLES

### 6.2.1 Géométrie et conditions aux limites du problème

Se référant à un repère cartésien orthonormé  $Oxyz$  tel que le panneau dans sa configuration initiale soit dans le plan  $Oxz$ , l'axe  $Oy$  étant transversal à ce plan (figure 6.1), le panneau a la forme d'un rectangle de hauteur  $H$  et largeur  $L$ , son épaisseur supposée constante étant égale à  $h$ . Le modèle simplifié unidimensionnel étudié dans les chapitres 2 à 4 correspond au cas limite pour lequel la largeur du panneau tend vers l'infini. L'assimilation du panneau à une plaque bidimensionnelle suppose que son épaisseur  $h$  soit faible au regard de ses dimensions transversales.

Les conditions aux limites du problème, que nous allons maintenant définir, correspondent à une configuration où la liaison base est maintenue fixe (appui simple en pied sur longrine),

la partie haute est tenue par une liaison laissant libre la dilatation (translation verticale), et les deux bords verticaux sont posés sur deux appuis simples (le panneau est inséré dans deux poteaux de type H par exemple). Plus précisément (figure 6.1) :

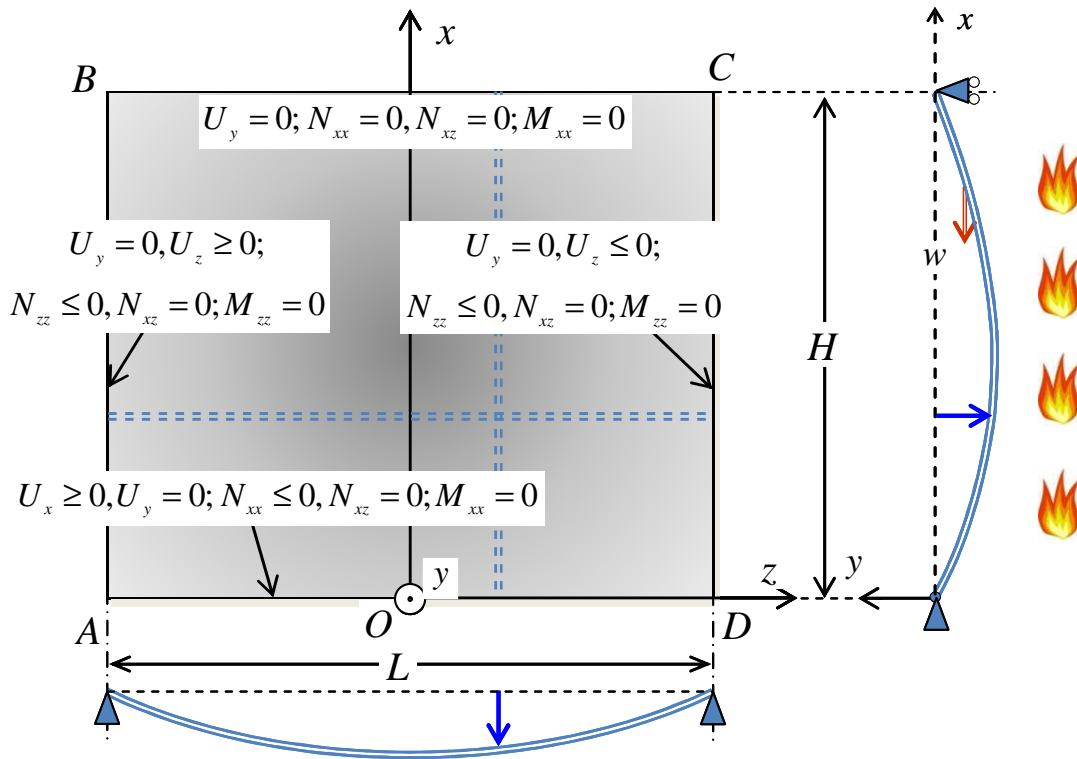


Figure 6.1. Géométrie et conditions aux limites du panneau rectangulaire soumis à l'action du feu

- ◇ le panneau est en appui simple sur son bord inférieur d'abscisse  $x=0$ , mais libre de se déplacer horizontalement et verticalement vers le haut (appui unilatéral) :

$$U_x \geq 0, U_y = 0; N_{xx} \leq 0, N_{xz} = M_{xx} = 0 \quad (6.1)$$

- ◇ tandis que l'appui simple en tête ( $x=H$ ) est libre de se déplacer verticalement :

$$U_y = 0; N_{xx} = N_{xz} = M_{xx} = 0 \quad (6.2)$$

- ◇ Par ailleurs le bord latéral droit ( $z = +L/2$ ), en appui simple sur le poteau vertical est libre de se déplacer verticalement et horizontalement vers la gauche :

$$U_y = 0, U_z \leq 0, N_{zz} \leq 0, N_{xz} = M_{zz} = 0 \quad (6.3)$$

- ◇ le bord opposé ( $z = -L/2$ ) étant soumis aux conditions aux limites :

$$U_y = 0, U_z \geq 0, N_{zz} \leq 0, N_{xz} = M_{zz} = 0 \quad (6.4)$$

Sous les conditions de chargement thermique et gravitaire uniformes, le panneau présente donc une symétrie géométrique par rapport à son plan médian vertical  $Oxy$ .

## 6.2.2 Calcul du changement de géométrie du panneau

Sous l'action du chargement thermique, et du gradient de température transversal qui lui est associé, le panneau va se déformer hors de son plan initial. Il en résulte, tout comme pour le modèle simplifié unidimensionnel examiné dans la première partie de ce travail, un changement de géométrie du panneau résultant des déformations thermiques et mécaniques.

Il existe néanmoins une différence essentielle entre le cas où le panneau est modélisé comme une poutre 1D et celui où il est schématisé comme une plaque. En effet dans le premier cas, où le système est *isostatique*, la *limite d'élasticité*, définie comme la valeur du chargement pour laquelle le critère d'interaction est atteint dans une section, coïncide avec la *charge limite* ou *charge de ruine*. Dans ces conditions un calcul de la déformée de la poutre-panneau prenant en compte le comportement thermoélastique de la poutre apparaît comme rigoureux.

Il n'en est pas de même dans le cas du panneau modélisé comme une dalle qui est une structure *hyperstatique*. Un calcul exact, mais beaucoup trop lourd et délicat à mettre en œuvre, consisterait à procéder à une analyse thermo-élastoplastique de la structure qui tienne compte du changement de géométrie jusqu'à la ruine complète de l'ouvrage, sans doute bien au-delà de sa limite d'élasticité. L'approche heuristique que nous adoptons consiste à calculer la déformée du panneau en se restreignant à un comportement thermoélastique des matériaux, puis à procéder à un Calcul à la Rupture de la structure *dans la géométrie déformée* ainsi évaluée, grâce à la mise en œuvre de l'approche cinématique par l'extérieur.

Il apparaît alors évident que la valeur du coefficient de stabilité qui sera ainsi déterminée sera un *majorant* de la valeur exacte de ce coefficient, pour deux raisons complémentaires :

- ◇ l'utilisation de l'approche cinématique par l'extérieur;
- ◇ la sous-estimation des déformations et donc de l'amplitude de la déformée du panneau puisque seules les déformations thermoélastiques sont prises en compte dans le calcul préalable de cette déformée.

## 6.2.3 Approche cinématique mettant en œuvre des mécanismes de ruine avec charnières

La déformée du panneau due au chargement thermique étant obtenue par voie numérique, il s'agit d'analyser sa stabilité au sens du Calcul à la Rupture sur cette géométrie déformée qui constitue une donnée d'entrée du problème de Calcul à la Rupture. L'idée directrice est de mettre en œuvre l'approche cinématique par l'extérieur du Calcul à la Rupture en utilisant des mécanismes de ruine simplifiés formés de morceaux de dalles séparés par des lignes de



discontinuités de vitesses de translation et de rotation (« charnières ») pour lesquelles nous disposons de l'expression générale de la fonction d'appui calculée au chapitre précédent.

### 6.2.3.1 Description du mécanisme et calcul de la puissance des efforts extérieurs

On considère un mécanisme de ruine, symétrique par rapport à l'axe central  $Ox$  du panneau, dans lequel le panneau est « découpé » en 4 morceaux, respectivement notés de 1 à 4 (figure 6.2), chacun de ces morceaux est animé d'un mouvement virtuel de translation ainsi que de rotation autour du bord sur lequel il s'appuie.

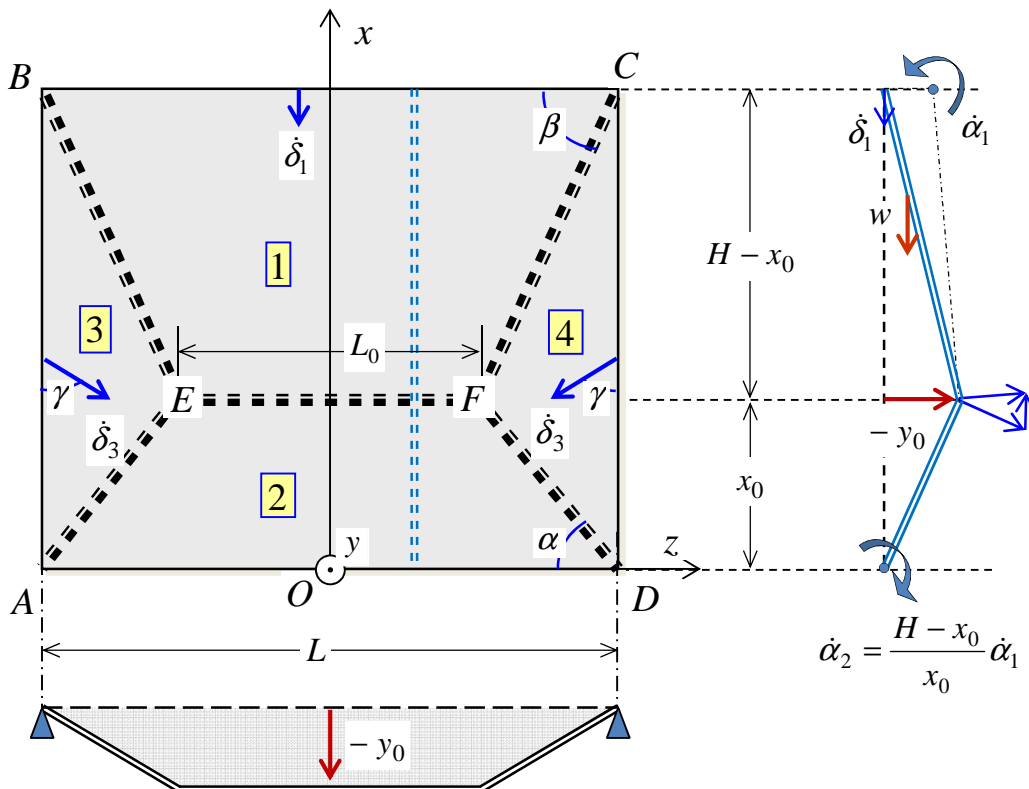


Figure 6.2. Mécanisme de ruine défini sur la configuration déformée simplifiée du panneau (mouvement virtuel avec discontinuités de vitesse de translation et de rotation le long de charnières)

Le morceau 1 est animé d'un mouvement de translation de vitesse verticale égale à  $-\dot{\delta}_1 \underline{e}_x$  ( $\dot{\delta}_1 > 0$ ) sur l'arête supérieure  $BC$  du panneau combinée à une vitesse de rotation  $\dot{\alpha}_1$  autour de cette même arête. Le morceau 2 est quant à lui doté d'un mouvement de rotation pure de vitesse  $\dot{\alpha}_2$  autour de la base  $AD$  du panneau. Tout comme dans le cas du modèle simplifié 1D de panneau étudié au chapitre 4, la condition de pertinence permettant de calculer la fonction d'appui du critère au droit de cette charnière impose la continuité de la vitesse normale au plan du panneau et donc la relation cinématique :

$$\frac{\dot{\alpha}_2}{\dot{\alpha}_1} \cong \frac{H - x_0}{x_0} \quad (6.5)$$

Le morceau triangulaire n°3 a une vitesse de translation égale à  $-\dot{\delta}_3 \cos \gamma e_x + \dot{\delta}_3 \sin \gamma e_z$  ( $\dot{\delta}_3 > 0$ ) sur le bord latéral  $AB$ . Sa vitesse de rotation autour de ce bord (qui n'intervient pas dans la puissance des efforts extérieurs c'est-à-dire ici le seul poids vertical) sera calculée ultérieurement. Le dernier morceau triangulaire n°4, symétrique du précédent par rapport à l'axe  $Ox$  est animé d'un mouvement de translation de vitesse symétrique par rapport à  $Ox$  et de rotation autour du bord  $CD$  de signe opposé à celle du morceau 3.

Similairement à l'approximation faite pour le calcul de la puissance des efforts extérieurs lors de la mise en œuvre de l'approche cinématique par l'extérieur dans le chapitre 4 (modèle simplifié 1D), on assimilera la déformée initiale du panneau engendrée par la sollicitation thermique et le poids propre à quatre *morceaux de plan* se rejoignant aux sommets  $E$  et  $F$ , situés sur la surface déformée initiale, et séparés par les cinq charnières rectilignes  $AE$ ,  $BE$ ,  $CF$ ,  $DF$  et  $EF$ . On peut observer que le mécanisme ainsi décrit tend vers celui du modèle simplifié de type poutre examiné au chapitre 4, lorsque la largeur  $L$  du panneau devient très grande vis-à-vis de sa hauteur, la distance entre les sommets  $E$  et  $F$  devenant elle-même très grande.

Dans ces conditions, la puissance virtuelle des efforts extérieurs, c'est-à-dire du poids du panneau, dans un tel mécanisme, peut s'écrire comme la somme de quatre contributions :

$$P_e = \sum_{i=1}^4 P_e^i \quad (6.6)$$

où  $P_e^i, i = 1$  à  $4$  sont respectivement les contributions des morceaux 1 à 4 à cette puissance. Elles sont calculées, avec une bonne approximation comme suit :

$$P_e^1 \cong \dot{\alpha}_1 w (H - x_0) y_0 \frac{1}{6} (2L_0 + L) + \dot{\delta}_1 w \frac{1}{2} (L + L_0) (H - x_0) \quad (6.7)$$

$$P_e^2 \cong w \dot{\alpha}_2 x_0 (-y_0) \frac{1}{6} (2L_0 + L) \quad (6.8)$$

$$P_e^3 = P_e^4 \cong w H \frac{1}{4} (L - L_0) \dot{\delta}_3 \cos \gamma \quad (6.9)$$

avec  $L_0 = EF$ , les contributions relatives aux morceaux latéraux 3 et 4 étant identiques.

Tenant compte de la relation (6.5), la puissance virtuelle des efforts extérieurs développée dans le mécanisme, se réduit alors à :

$$P_e = w \frac{1}{2} [(H - x_0)(L + L_0)\dot{\delta}_1 + H(L - L_0)\dot{\delta}_3 \cos \gamma] \quad (6.10)$$

qui ne fait intervenir que les vitesses de translation  $\dot{\delta}_1$  et  $\dot{\delta}_3$ .

### 6.2.3.2 Calcul des discontinuités de vitesse aux charnières et de la puissance résistante maximale

Les vecteurs de discontinuité de vitesse de rotation le long des charnières entre les différents morceaux peuvent être déterminés géométriquement à partir du *cinème* représenté sur la partie droite de la figure 6.3 ci-après. On en déduit les relations suivantes entre les discontinuités de vitesse de rotation entre les différents morceaux du panneau et la rotation  $\dot{\alpha}_1$  ( $\dot{\alpha}_1 > 0$ ) =  $\dot{\alpha}_{01}$  du morceau 1 :

$$|\underline{\dot{\alpha}}_{12}| = |\underline{\dot{\alpha}}_{02} - \underline{\dot{\alpha}}_{01}| = \dot{\alpha}_1 \frac{H}{x_0} \quad (6.11)$$

$$|\underline{\dot{\alpha}}_{23}| = |\underline{\dot{\alpha}}_{03} - \underline{\dot{\alpha}}_{02}| = \dot{\alpha}_1 \frac{H - x_0}{x_0 \cos \alpha} \quad (6.12)$$

$$|\underline{\dot{\alpha}}_{31}| = |\underline{\dot{\alpha}}_{01} - \underline{\dot{\alpha}}_{03}| = \dot{\alpha}_1 \frac{1}{\cos \beta} \quad (6.13)$$

où les angles  $\alpha$  et  $\beta$ , représentés sur la figure 6.3, sont les inclinaisons des charnières  $AE$  et  $BE$  par rapport à l'horizontale.

Il reste donc à calculer les discontinuités de vitesses normales et tangentielles relatives aux charnières séparant les différents morceaux.

La charnière horizontale  $EF$  séparant les morceaux 1 et 2 est située à une distance  $y_0$  du plan initial du panneau. Il en résulte que les sauts de vitesses normales et tangentielles à la traversée de cette charnière sont constants, égaux respectivement à :

$$U_n^{12} = -\dot{\delta}_1 - y_0 |\underline{\dot{\alpha}}_{12}|, \quad U_t^{12} = 0 \quad (6.14)$$

En revanche, les charnières  $AE$  et  $BE$  sont inclinées par rapport au plan initial, la distance d'un point de ces charnières à ce plan variant linéairement entre la valeur nulle pour les points  $A$  et  $B$  et le sommet  $E$  situé à la distance  $y_0$ . Les discontinuités de vitesses normales et tangentielles relatives à ces charnières s'écrivent respectivement en fonction de la coordonnée  $x$  :

$$U_n^{23}(x) = -\dot{\delta}_3 \cos(\alpha - \gamma) - |\underline{\dot{\alpha}}_{23}| \frac{y_0}{x_0} x, \quad U_t^{23}(x) = \dot{\delta}_3 \sin(\alpha - \gamma) \quad (6.15)$$

pour la charnière  $AE$  séparant les morceaux 2 et 3, et

$$\begin{aligned} U_n^{31}(x) &= -\delta_1 \cos \beta + \delta_3 \cos(\gamma + \beta) - y_0 \frac{H-x}{H-x_0} |\dot{\alpha}_{31}|, \\ U_t^{31}(x) &= \delta_1 \sin \beta - \delta_3 \sin(\gamma + \beta) \end{aligned} \quad (6.16)$$

pour la charnière  $BE$  séparant les morceaux 1 et 3.

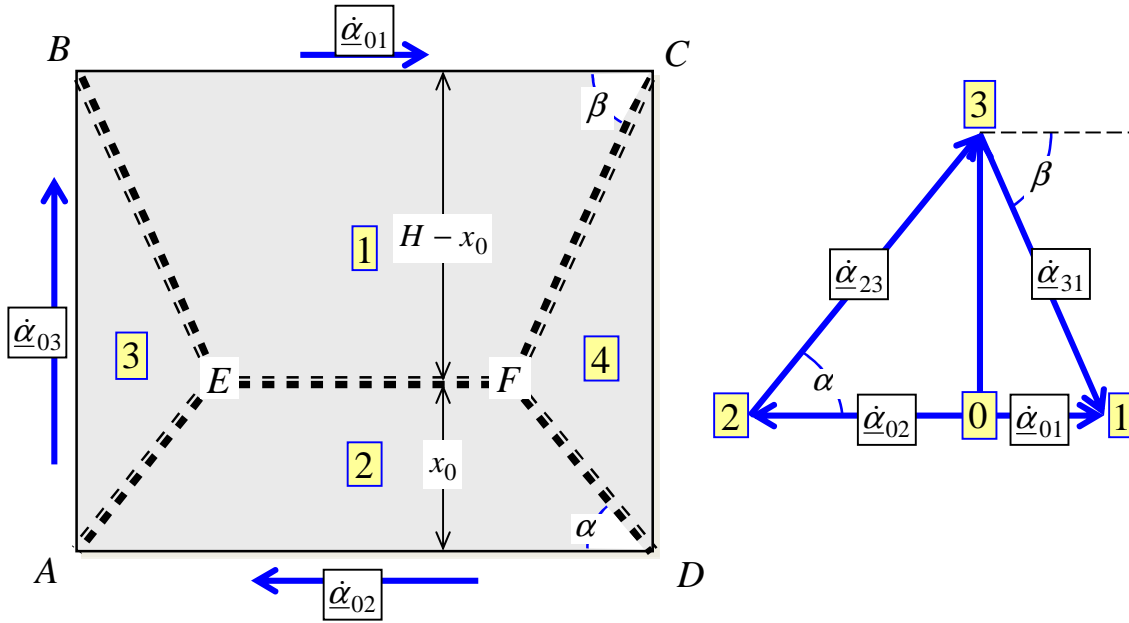


Figure 6.3. Mécanisme de ruine et cinème associé pour le calcul des discontinuités de vitesse de rotation le long des charnières  $AE$ ,  $EB$  et  $EF$

En raison de la symétrie du mécanisme par rapport à l'axe  $Ox$ , la contribution des charnières à la puissance résistante maximale développée dans ce mécanisme s'écrit pour le seul béton :

$$P_{rm}^b = P_{rm}^b(EF) + 2P_{rm}^b(AE) + 2P_{rm}^b(BE) \quad (6.17)$$

avec :

$$P_{rm}^b(EF) = \int_{EF} \Pi(U_n^{12}, \dot{\alpha}_{12}) dl \quad (6.18)$$

$$P_{rm}^b(AE) = \int_{AE} \Pi(U_n^{23}, U_t^{23}, \dot{\alpha}_{23}) dl \quad (6.19)$$

$$P_{rm}^b(BE) = \int_{BE} \Pi(U_n^{31}, U_t^{31}, \dot{\alpha}_{31}) dl \quad (6.20)$$

où la fonction  $\Pi$  est calculée selon la formule (5.50).

A ces différentes expressions doivent être ajoutées les contributions dues aux différents lits de renforcements :

$$P_{rm}^r = P_{rm}^r(EF) + 2P_{rm}^r(AE) + 2P_{rm}^r(BE) \quad (6.21)$$

Ainsi, pour un lit de renforcement situé à une distance  $\xi_k$  du plan moyen du panneau et caractérisé par une résistance  $n_0$  des armatures par unité de longueur transversale à la direction des armatures, on obtient compte tenu de l'expression (5.58) de la *densité linéaire de puissance résistante maximale* :

$$P_{rm}^r(EF) = EF \times n_0 \sin \phi_k^{EF} \left| (U_n^{12} - \dot{\alpha}_{12} \xi_k) \sin \phi_k^{EF} \right| \quad (6.22)$$

$$P_{rm}^r(AE) = \int_{AE} n_0 \sin \phi_k^{AE} \left| (U_n^{23} - \dot{\alpha}_{23} \xi_k) \sin \phi_k^{AE} + U_t^{23} \cos \phi_k^{AE} \right| dl \quad (6.23)$$

$$P_{rm}^r(BE) = \int_{AE} n_0 \sin \phi_k^{BE} \left| (U_n^{31} - \dot{\alpha}_{31} \xi_k) \sin \phi_k^{BE} + U_n^{31} \cos \phi_k^{BE} \right| dl \quad (6.24)$$

où  $\phi_k^{IJ}$  désigne l'inclinaison de la direction du lit de renforcement n°k par rapport à la charnière *IJ*.

D'où finalement l'expression de la *puissance résistante maximale totale* :

$$P_{rm} = P_{rm}^b + P_{rm}^r \quad (6.25)$$

Tout comme dans le modèle simplifié 1D de panneau, le facteur de stabilité relatif à ce mécanisme est défini comme le rapport entre la puissance résistante maximale calculée en (6.25) et la puissance des efforts extérieurs calculée en (6.10). La condition nécessaire de stabilité déduite de l'approche cinématique par l'extérieur devient :

$$F_{c,\theta}(r_1, r_3, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{P_{rm}}{P_e} \quad (6.26)$$

qui dépend des paramètres angulaires  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  ainsi que des paramètres  $r_1$  et  $r_3$  définis par :

$$r_1 = \frac{\dot{\delta}_1}{\dot{\alpha}_1} ; r_3 = \frac{\dot{\delta}_3}{\dot{\alpha}_1} \quad (6.27)$$

caractérisant un tel mécanisme. Recherchant alors la valeur minimale de ce facteur en fonction de ces paramètres, il apparaît clairement qu'une condition *nécessaire* (mais *non suffisante*) de stabilité du panneau dans sa configuration déformée s'écrit :

$$\text{Stabilité} \Rightarrow \text{Min}_{(r_1, r_3, \alpha, \beta, \gamma)} F_{c,\theta} \geq 1 \quad (6.28)$$

Le calcul de ce facteur permet d'une part de conclure quant à la stabilité du panneau, et d'autre part de mettre en comparaison le modèle plus réaliste de type plaque avec celui simplifié de type poutre. On se propose dans la section suivante d'analyser avec cette approche un exemple illustratif conduisant à l'évaluation de la résistance au feu d'un panneau de grandes dimensions par le modèle de type plaque qui vient d'être exposé.

## 6.3 PREMIERS RÉSULTATS : UN EXEMPLE ILLUSTRATIF

### 6.3.1 Données relatives aux caractéristiques géométriques et mécaniques

Elles sont listées comme suit.

- ◇ Le panneau rectangulaire est de forme carré : hauteur  $H=12\text{m}$ , largeur  $L=12\text{m}$  et épaisseur  $h=15\text{cm}$ .
- ◇ Béton de densité normale réalisé avec des granulats siliceux :  $f_c=32\text{MPa}$ ,  $f_t=0\text{MPa}$ ,  $E_c=19200\text{MPa}$ .
- ◇ Quatre lits (deux lits supérieurs orthogonaux et deux lits inférieurs orthogonaux) comportant chacun des barres d'acier laminé à chaud de 6mm de diamètre, espacées de  $d=10\text{cm}$  avec une épaisseur d'enrobage  $a=3\text{cm}$  (voir figure 6.4) :  $f_y=500\text{MPa}$ ,  $E_s=200000\text{MPa}$ .

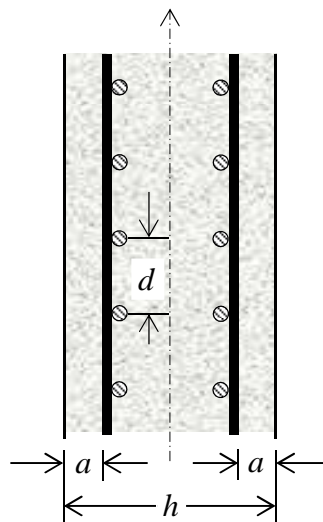


Figure 6.4. Renforcements vus en coupe verticale dans le plan médian du panneau

- ◇ Le poids linéique  $w=3,75\text{kN/m}$ , correspondant au poids volumique  $\rho=2500\text{kg/m}^3$  du béton armé, est supposé indépendant de la température.
- ◇ Le feu ISO 834 (EN1991-1-2, 2003) est exposé sur la face droite ( $y=-h/2$ ) du panneau.

### 6.3.2 Calcul de la déformée du panneau par une simulation numérique

La simulation numérique permettant de déterminer la déformée du panneau, conduite à l'aide du logiciel par éléments finis Marc, est très similaire à celle réalisée pour le modèle simplifié de type poutre exposé au chapitre 3. Il s'agit d'une modélisation dans laquelle le panneau est modélisé par des éléments de type coque et interpolation bilinéaire. Une étude préalable de la sensibilité au maillage nous conduit à choisir 24 éléments sur la hauteur et sur la largeur, soit en tout  $24 \times 24 = 576$  éléments de coque.

Les caractéristiques retenues pour les matériaux sont identiques à celles employées dans les exemples précédents. Elles concernent l'évolution des modules Young et des déformations thermiques (coefficients de dilatation thermique) en fonction de la température du béton et de l'acier. Les conditions aux limites imposées sont des déplacements verticaux nuls en pied du panneau reposant sur la longrine support, des déplacements horizontaux nuls aux deux bords latéraux du panneau inséré dans les poteaux de type H, et des déplacements transversaux nuls en pied et en tête. Les déplacements verticaux en tête du panneau sont laissés libres afin que la dilatation thermique verticale et le déplacement dû au poids propre soient possibles.

On rappelle que l'objectif du calcul thermomécanique est d'évaluer la déformée du panneau due à l'effet combiné du chargement thermique appliqué uniformément sur une face du panneau et de l'action de son poids propre. Les profils de température, qui constituent les données d'entrée du calcul thermomécanique, sont toujours ceux représentés sur la figure 2.9. Les calculs sont effectués en grands déplacements afin d'identifier les non-linéarités géométriques au cours de l'analyse statique (grandes déformations thermiques notamment et effet du second ordre éventuel du panneau sous son poids propre).

Les figures ci-dessous représentent les iso-valeurs du déplacement latéral du panneau vu dans les plans  $Oxz$  et  $Oxy$ , pour une exposition au feu de 120min, l'unité étant le mètre. La déformée de la figure 6.6 a été agrandie de 10 fois dans la direction horizontale.

Sur ces deux figures, les plus fortes courbures ainsi que les plus grands déplacements latéraux sont observés au centre du panneau. La carte des iso-valeurs des déplacements latéraux de la figure 6.5 est quasiment symétrique. Cela est cohérent avec le fait que le panneau carré s'appuie sur ses quatre bords, et que les effets du second ordre engendrés par l'excentrement du poids propre sont négligés.

La comparaison avec les résultats issus du modèle simplifié de type poutre montre que, tous les autres paramètres étant identiques, les déplacements transversaux maximaux à mi-hauteur du panneau que l'on observe pour le panneau carré sont nettement inférieurs (30cm) à ceux du panneau modélisé comme une poutre (128cm). On peut également observer que les effets du second ordre sont beaucoup moins prononcés dans la modélisation plaque que ceux de la modélisation simplifiée de type poutre. Les calculs effectués montrent à l'évidence que l'introduction des conditions aux limites d'appui le long des bords latéraux réduit

considérablement l'amplitude des déplacements transversaux par rapport à ceux prédits par le modèle simplifié.

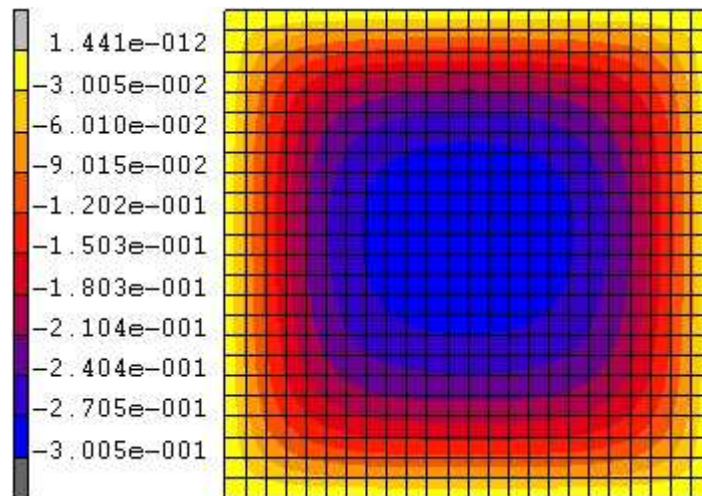


Figure 6.5. Iso-valeurs des déplacements transversaux du panneau  $12 \times 12 \text{m}^2$  : vue de face dans le plan  $Oxz$

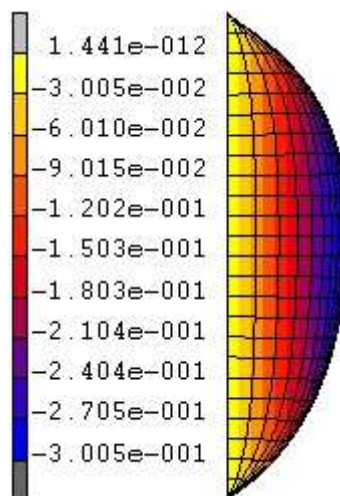


Figure 6.6. Déplacements transversaux du panneau  $12 \times 12 \text{m}^2$  dont la déformée a été agrandie 10 fois : vue latérale dans le plan  $Oxy$

Dans le cas où le rapport de la largeur sur la hauteur du panneau devient plus important, le modèle se rapproche du modèle simplifié de type poutre. Ainsi, la figure 6.7 représente les déplacements transversaux engendrés par la dilatation thermique d'un panneau de 12m de hauteur et de 60m de largeur et la figure 6.8 représente ces mêmes déplacements quand le chargement de gravité est pris en compte. On observe que l'excentrement du poids propre a tendance à faire augmenter le déplacement de la zone centrale du panneau d'environ 10cm (environ 13%) par rapport à celui engendré par le seul chargement thermique. Le déplacement



latéral maximal au centre du panneau est environ trois fois plus grand que celui du panneau carré (90cm au lieu de 30cm).

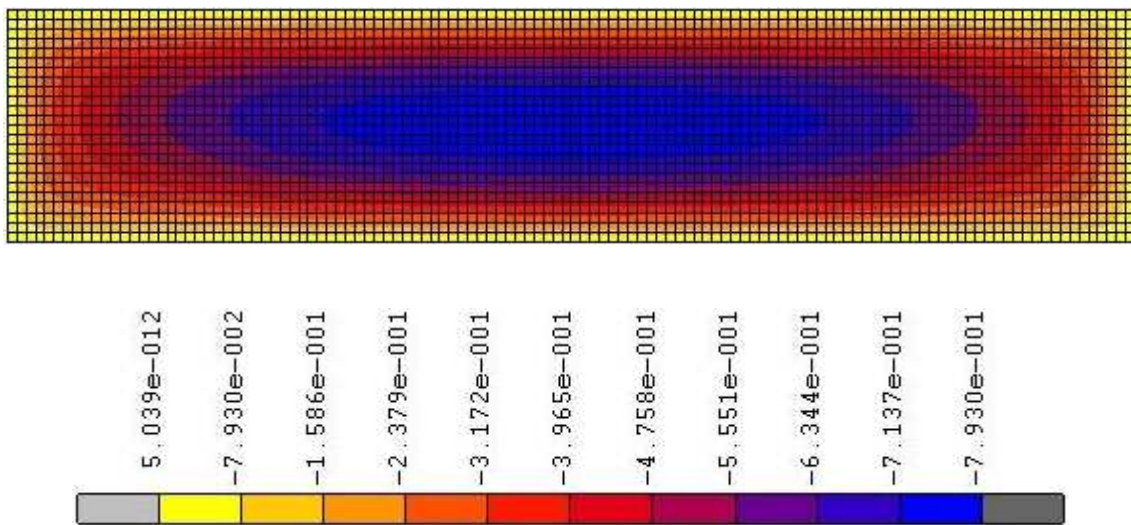


Figure 6.7. Déplacements transversaux du panneau  $12 \times 60 \text{ m}^2$  soumis au seul chargement thermique : vue de face dans le plan  $Oxy$

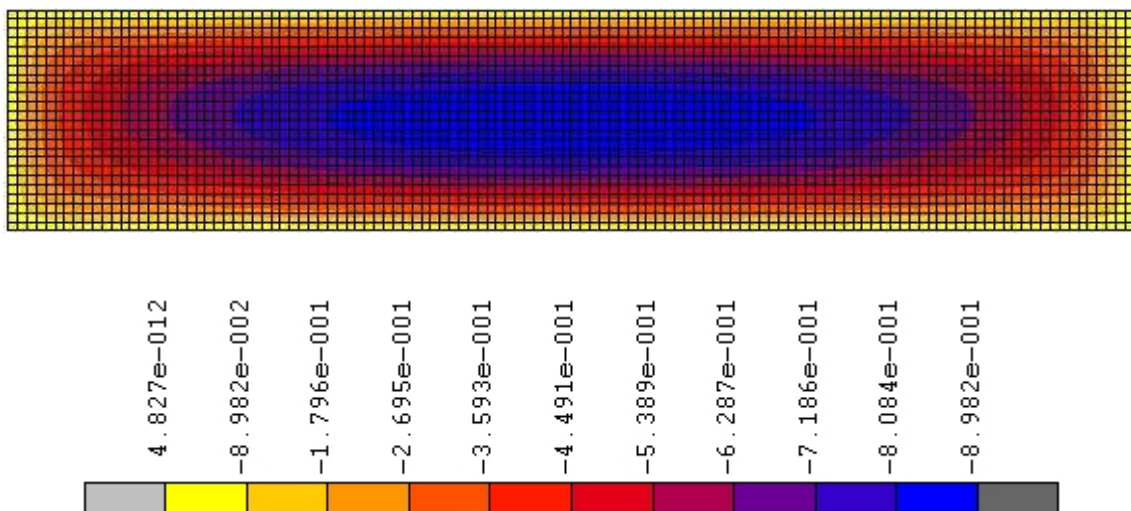


Figure 6.8. Déplacements transversaux du panneau  $12 \times 60 \text{ m}^2$  : vue de face dans le plan  $Oxy$

La figure 6.9 ci-après compare la déformée du modèle simplifié de type poutre avec celle vue en coupe verticale dans le plan médian (vue latérale dans le plan  $Oxy$ ) d'un panneau de hauteur  $H=12\text{m}$  et de largeur  $L$  égale à  $12\text{m}$  et  $60\text{m}$ , donnée par le modèle de type plaque. Cette figure permet de constater que lorsque la largeur devient importante, la déformée de la partie centrale se rapproche de la déformée du modèle simplifié de type poutre.

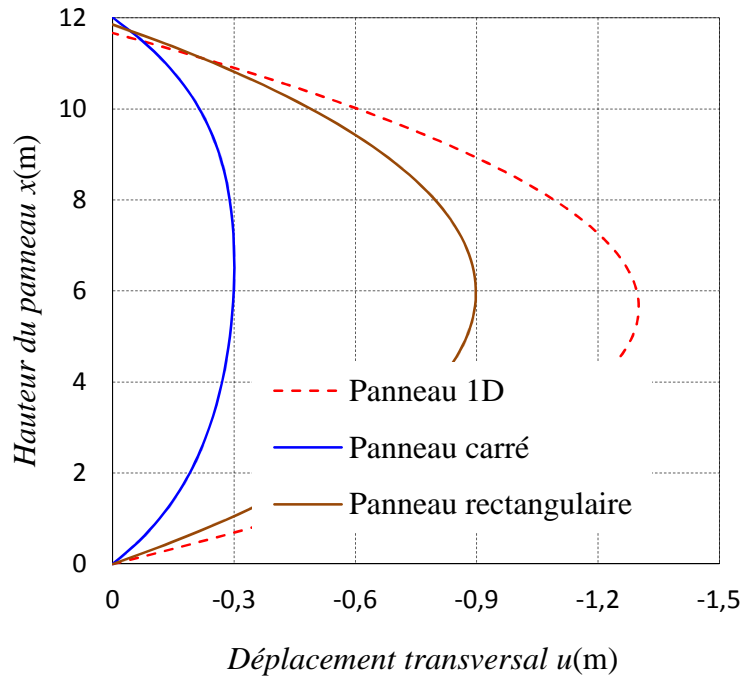


Figure 6.9. Comparaison de la déformée du panneau donnée par le modèle simplifié et celles du modèle de type plaque

### 6.3.3 Une première évaluation du facteur de stabilité cinématique

La déformée du panneau modélisé comme une plaque étant déterminée par la simulation numérique précédente, nous recherchons maintenant la valeur minimale du facteur de stabilité calculé par l'approche cinématique mettant en œuvre le mécanisme avec charnières rectilignes de la figure 6.3 et dont l'expression est donnée par l'équation (6.26). Une telle minimisation est effectuée en faisant varier les 5 paramètres indépendants dont dépend le facteur de stabilité.

La valeur minimale du facteur de stabilité est recherchée à l'aide d'une procédure directe très simple consistant à balayer toutes les valeurs possibles des paramètres et à prendre le minimum du facteur de stabilité. La déformée totale du panneau et le mécanisme avec charnières considéré étant symétriques par rapport à l'axe vertical  $Ox$ , pour un point  $F$  quelconque situé sur la partie droite du panneau de coordonnée  $x_0$  et  $L_0/2$  dont le déplacement transversal est égal à  $y_0$ , les angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont reliés à ces derniers paramètres par les relations :

$$\tan \alpha = \frac{2x_0}{L - L_0} \quad , \quad \tan \beta = \frac{2(H - x_0)}{L - L_0} \quad (6.29)$$

où  $L_0$  est la longueur de la charnière  $EF$ . En conséquence, la variation des paramètres géométriques  $\alpha$  et  $\beta$  se ramène à une variation de la position du point  $F$  sur toute la surface de

la déformée de la partie droite du panneau. Dans un premier temps, on fait varier les autres paramètres dans les plages suivantes :

- ◇ L'angle  $\gamma$  varie entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ .
- ◇ Les paramètres  $r_1$  et  $r_2$  varient entre 0 et 2m.

Pour les plages de valeurs ainsi considérées, la valeur minimale du facteur de stabilité obtenue est égale à 36,7, correspondant aux valeurs suivantes des paramètres cinématiques :  $\gamma=0^\circ$ ,  $r_1=0,7\text{m}$  et  $r_3=0,7\text{m}$ , la position des charnières du mécanisme optimal étant représentée sur la figure 6.10.

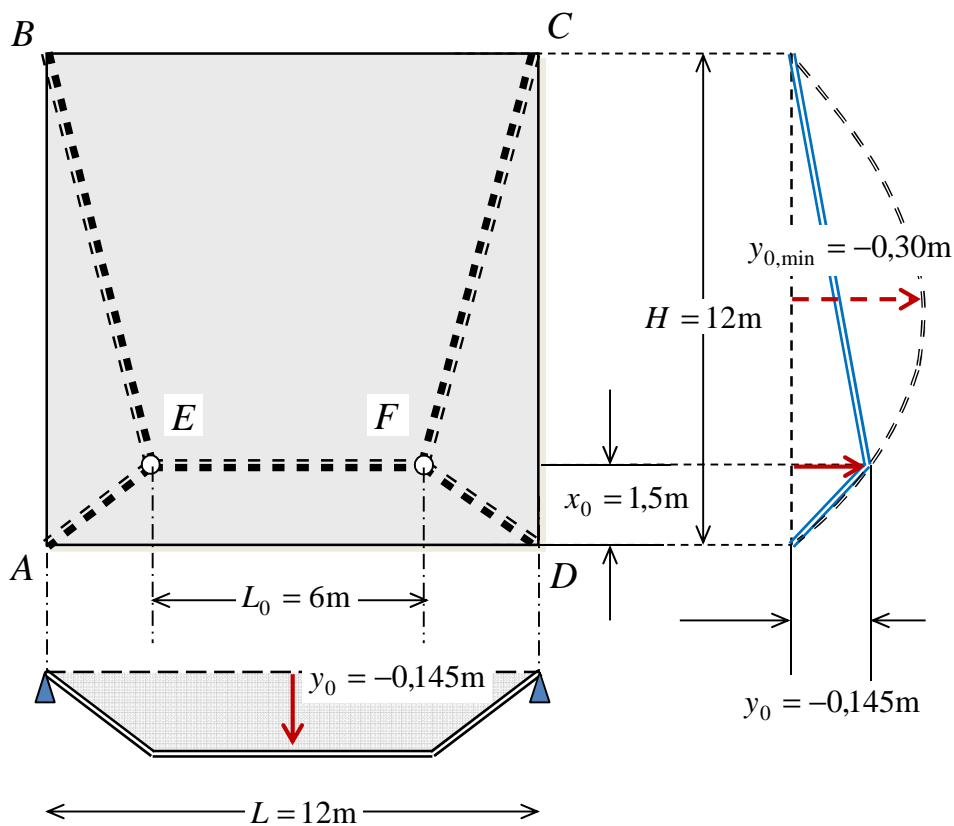


Figure 6.10. Charnières du mécanisme de ruine correspondant à la valeur minimale du facteur de stabilité obtenu sur la configuration déformée simplifiée du panneau carré  $12 \times 12\text{m}^2$

Dans le cas du panneau rectangulaire  $12 \times 60\text{m}^2$ , la valeur minimale du facteur de stabilité est fortement diminuée, égale à 8,7 correspondant aux valeurs suivantes des paramètres cinématiques :  $\gamma=0^\circ$ ,  $r_1=1,1\text{m}$  et  $r_3=1,1\text{m}$ . La position des charnières est représentée sur la figure 6.11.

À titre de comparaison, la valeur (exacte) du facteur de stabilité du panneau modélisé comme une poutre 1D dont toutes les caractéristiques, hormis la largeur, sont identiques à celles des deux panneaux précédents, est égale à 0,78.

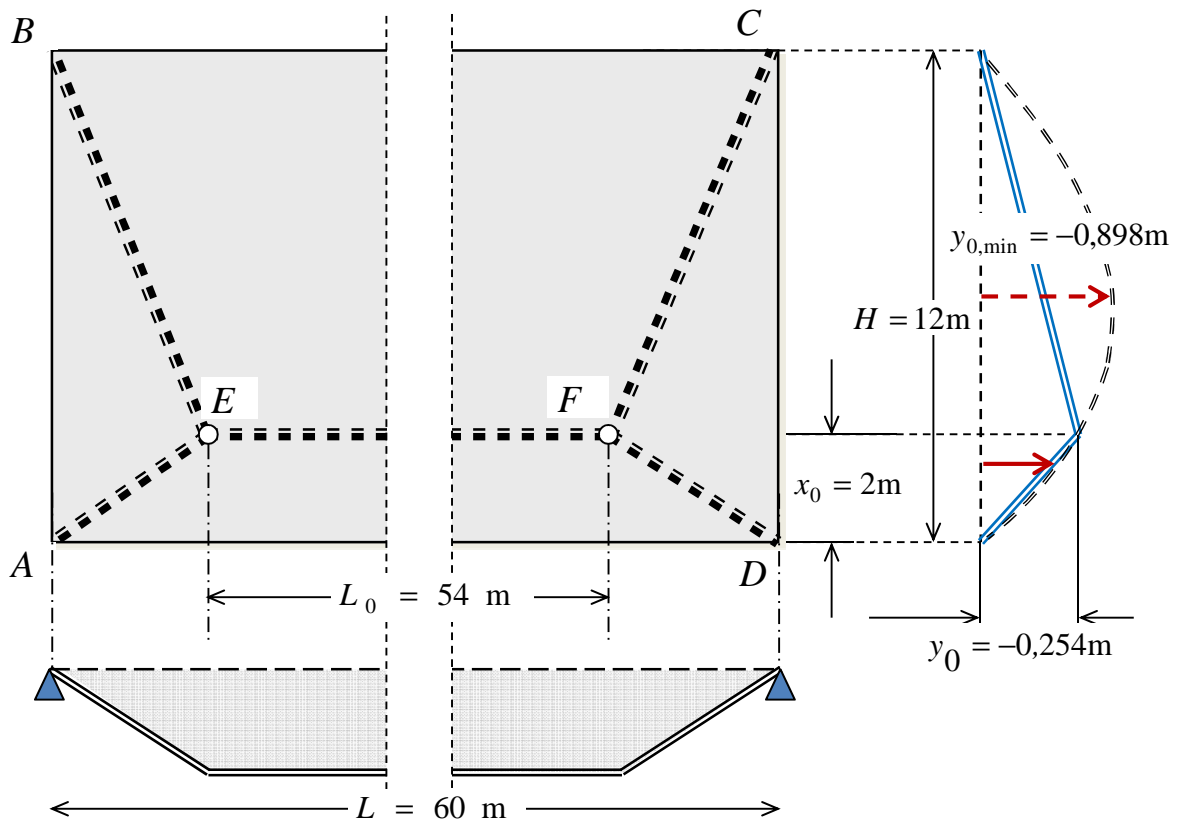


Figure 6.11. Charnières du mécanisme de ruine correspondant à la valeur minimale du facteur de stabilité obtenu sur la configuration déformée simplifiée du panneau rectangulaire  $12 \times 60 \text{ m}^2$

## 6.4 COMMENTAIRES ET PREMIÈRES CONCLUSIONS

La démarche mise en œuvre dans la première partie du mémoire pour l'analyse de la stabilité au feu d'un panneau dans le cadre d'un modèle simplifié de type poutre, a été étendue dans cette seconde partie à une modélisation de type plaque pouvant être considérée comme plus réaliste. La stabilité du panneau dans sa géométrie déformée a été analysée par la seule approche cinématique, en se limitant à des mécanismes simples mettant en jeu des lignes de discontinuités (charnières). L'utilisation de ce type de mécanismes ne requiert qu'une connaissance partielle du critère de rupture du panneau exprimé en termes d'efforts membranaires et de moments de flexion.

La déformée globale de la structure, introduite comme une donnée d'entrée du Calcul à la Rupture, est classiquement évaluée à partir d'un calcul thermoélastique effectué à l'aide d'un logiciel aux éléments finis. L'étude des effets du second ordre reconduite pour la modélisation de type plaque du panneau dans la plage des dimensions concernées, a montré que ceux-ci ne sont plus aussi apparents dans cette nouvelle configuration. Cette modélisation a permis de rendre compte de l'effet stabilisateur des liaisons sur les bords latéraux du panneau.

Les tous premiers résultats quantitatifs obtenus au terme de cette approche mise en œuvre sur un exemple illustratif, appellent les commentaires suivants :

- ◇ Même s'ils décroissent nettement en fonction de la largeur du panneau (passant de 37,8 pour un panneau carré à 8,7 pour un panneau 5 fois plus large), les majorants du facteur de stabilité du panneau obtenus par l'approche cinématique par l'extérieur demeurent néanmoins très supérieurs à celui évalué par le modèle 1D.
- ◇ Ces valeurs bien supérieures peuvent en premier lieu s'expliquer par le fait que, à la différence de la modélisation 1D, les conditions d'appui du panneau le long de ses bords latéraux limitent fortement les déplacements transversaux provoqués par le chargement thermique couplé à l'excentrement du poids propre (voir figure 6.8). Le facteur de stabilité du panneau s'en trouve donc a priori fortement augmenté. De plus, l'amplitude de la déformée initiale est encore réduite par l'approximation de type « affine par morceaux » adoptée lors du calcul de la puissance des forces extérieures.
- ◇ Seules les propriétés thermoélastiques du panneau sont prises en compte dans le calcul de la déformée initiale. On peut raisonnablement estimer que la prise en compte de ses propriétés non-élastiques (plasticité ou endommagement par exemple) aboutirait à une déformée plus importante et donc un facteur de stabilité plus faible.
- ◇ Enfin, les mécanismes ici considérés restent très simplifiés et il doit donc être possible d'améliorer notablement les majorants obtenus à l'aide de mécanismes plus complexes, engendrés par exemple par une discrétisation par éléments finis du panneau.

\*       \*

\*

## **PARTIE III**

# **PREMIÈRES VALIDATIONS EXPÉRIMENTALES**



## Chapitre 7

# PREMIÈRES VALIDATIONS EXPÉRIMENTALES

### 7.1 INTRODUCTION

Le développement du modèle de calcul présenté et mis en œuvre dans le présent travail, nécessite de façon générale une confrontation avec l'expérience qui permette de valider, en tout ou en partie, les différents aspects de ce modèle. Ce chapitre est donc consacré à la validation expérimentale de l'une des composantes essentielles du modèle, que constitue la détermination du critère de résistance du panneau dont on cherche à analyser la stabilité au feu, formulé en termes de diagramme d'interaction.

Il recense tout d'abord les premières études expérimentales pour la validation des diagrammes d'interaction établis au chapitre 2 à l'aide du Calcul à la Rupture. Ces études concernent d'une part l'exploitation de résultats d'essais issus de la littérature, d'autre part la réalisation par nous-mêmes d'essais à échelle réduite de dalles en flexion quatre points chargées jusqu'à la rupture dans des conditions de hautes températures. Cette dernière campagne expérimentale met notamment en lumière le rôle joué par l'orientation des armatures de renforcement et permet ainsi d'obtenir des éléments d'informations complémentaires permettant de généraliser le critère de rupture au cas d'une orientation quelconque des armatures.

### 7.2 VALIDATION DU DIAGRAMME D'INTERACTION D'UNE SECTION EN BÉTON ARMÉ EN CONDITION D'INCENDIE PAR DES ESSAIS AU FEU DE DALLES EN FLEXION COMPOSÉE

Dans un premier temps, les essais choisis pour la validation du diagramme d'interaction sont ceux de Croizier et Sanjayan (2010). Les dalles en béton armé qui ont fait l'objet de tels essais ont pour longueur 3,6m et largeur 1,2m, avec une épaisseur de 15cm. Leurs caractéristiques sont fournies dans le tableau 7.1. Les dalles sont placées en position horizontale sur deux rouleaux (appuis simples mobiles) et exposées au feu sur la face inférieure comme indiqué sur la figure 7.1. Chaque dalle est soumise à l'action combinée d'une charge transversale et d'une charge axiale excentrée de compression. Le chargement latéral agissant sur chacune des dalles est un chargement linéique uniforme permanent correspondant au poids propre  $w$  par unité de longueur de la dalle. La charge axiale est



appliquée au niveau du plan supérieur de la dalle, c'est-à-dire avec une excentricité égale à la demi-épaisseur de la dalle. Elle est maintenue constante pendant toute la durée d'exposition au feu. La courbe d'évolution dans le temps de la température du four suit la norme australienne AS 1530.4 (AS1530.4, 1997), qui est équivalente à la courbe ISO R834 définie dans l'Eurocode 1 partie 1-2 (EN 1991-1-2, 2003).

Tableau 7.1 : Caractéristiques des dalles testées par Croizier et Sanjayan (2010)

Éprouvette	$f_c$ (MPa)	Renforcement longitudinal				$f_y$ (MPa)
		Diamètre (mm)	Espacement (mm)	Aire (mm <sup>2</sup> /m)	Enrobage (mm)	
IL150-66 <sub>1</sub>	77	7,1	100	396	65	624
IL150-52 <sub>1</sub>	67	7,1	100	396	65	624
IL150-66 <sub>2</sub>	83	7,1	200	198	30/110	624
IL150-52 <sub>2</sub>	70	7,1	200	198	30/110	624

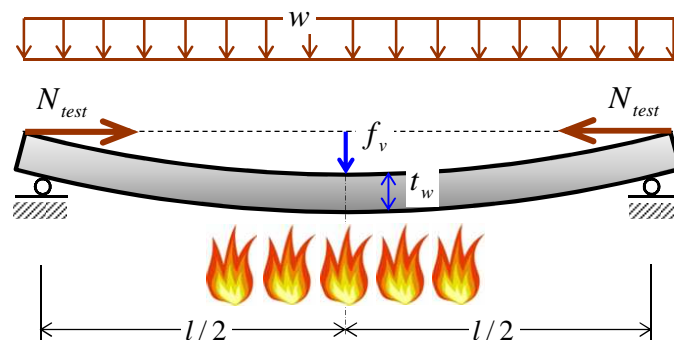


Figure 7.1. Schéma de principe des essais au feu réalisés par Croizier et Sanjayan

On désigne par  $f_v$  la flèche mesurée au milieu de la dalle. Celle-ci est due à l'effet conjugué du chargement thermique à travers les déformations de courbure qui en résultent et des déformations de courbure mécaniques associées à la distribution de moments fléchissants engendrée par le poids propre et l'excentrement de la charge axiale. L'analyse des résultats d'essais consiste donc d'une part à calculer le moment de flexion maximal au centre de la dalle du à l'excentrement de la charge axiale et au poids propre, et d'autre part à comparer cette valeur avec la valeur correspondante prédite par le calcul à travers la détermination du diagramme d'interaction. Ce moment de flexion maximal vaut :

$$M_{test} = M_w + M_{N_{test}} = wl^2/8 + N_{test} \times (t_w/2 + f_v) \quad (7.1)$$

où  $w$  désigne la densité linéique du poids propre et  $N_{test}$  la force axiale, tandis que  $l$ ,  $t_w$  et  $f_v$  sont respectivement la portée, l'épaisseur et la flèche de la dalle, cette dernière quantité étant directement mesurée.

Les données de température disponibles à travers l'épaisseur de la dalle se limitent à trois valeurs mesurées respectivement au niveau de la surface inférieure, exposée au feu, à mi-épaisseur, et au niveau de la surface supérieure non exposée de la dalle. La courbe complète de distribution de température est alors obtenue par le biais d'une simulation numérique du transfert thermique conduite avec le logiciel Safir (2005) à travers un calage de la courbe numérique sur les trois points expérimentaux. Les figures 7.2 et 7.3 montrent les résultats d'un tel calage pour des durées d'exposition au feu égales respectivement à 30 et 60min.

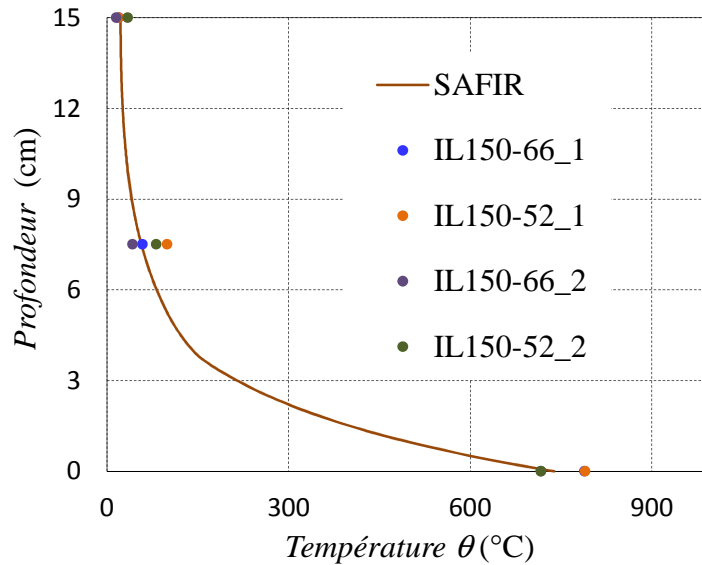


Figure 7.2. Distribution de température calculée par Safir et mesures de température des tests de Croizier et Sanjayan à 30min

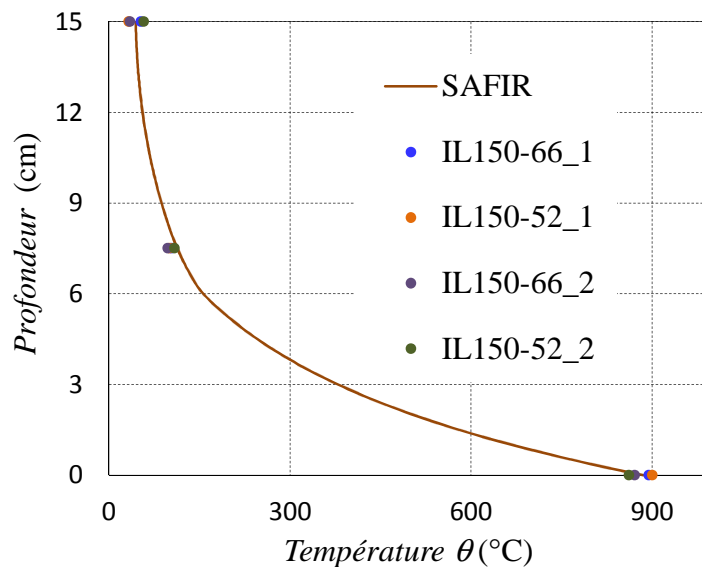


Figure 7.3. Distribution de température calculée par Safir et mesures de température des tests de Croizier et Sanjayan à 60min

Il convient de noter, comme le montrent les valeurs retenues dans le tableau 7.1 pour la résistance en compression du béton ( $f_c$ ), qu'un béton à haute résistance a été utilisé pour fabriquer les dalles ainsi testées. Par conséquent, la diminution de la résistance de ce type de béton en fonction de la température élevée suit les recommandations de l'Eurocode 2 partie 1-2 (EN1992-1-2, 2005) : béton de classe 2 pour les éprouvettes IL150-66<sub>1</sub> et IL150-66<sub>2</sub>, et béton de classe 1 pour les éprouvettes IL150-52<sub>1</sub> et IL150-52<sub>2</sub>.

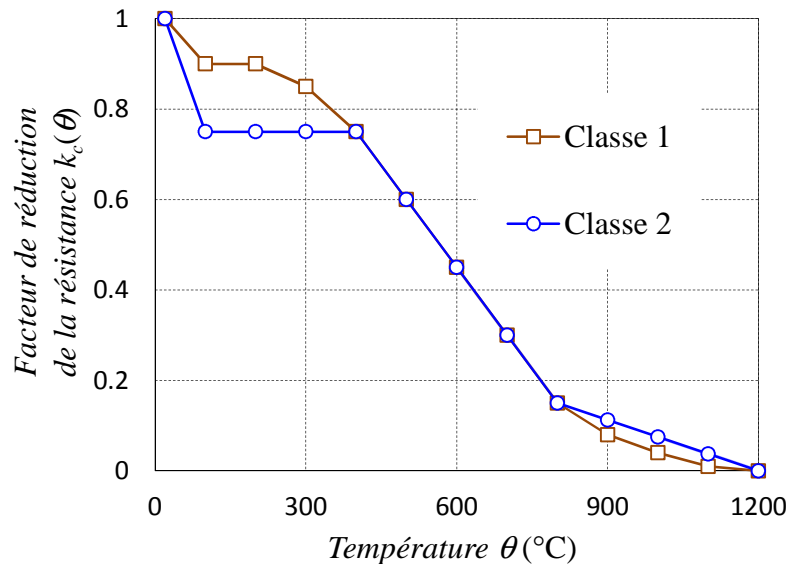


Figure 7.4. Facteur  $k_c(\theta)$  applicable pour la diminution de la résistance en compression du béton à haute résistance aux températures élevées (EN1992-1-2, 2005)

Les résultats des expériences et les prédictions théoriques correspondantes effectuées par nous-mêmes, sont reportés sur le tableau 7.2. Un relativement bon accord est ainsi obtenu dans tous les cas, le rapport entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées des moments de flexion maximaux restant proche de 1.

Analysant plus spécifiquement la quatrième plaque IL150-52<sub>2</sub>, la figure 7.5 représente le diagramme d'interaction évalué par le Calcul à la Rupture, selon la méthode décrite au chapitre 2, sur la base du profil de température prescrit. Le point expérimental correspondant aux valeurs mesurées de l'effort de compression et du moment de flexion associé par l'équation (7.1) lors de l'observation de la ruine de la dalle, y est également représenté. Une vue agrandie de la partie droite de la figure illustre le fait que, grâce à la force de compression axiale, la résistance à la flexion résultante est augmentée d'environ 30% par rapport à la résistance à la flexion pure, associée à un effort de compression nul, qui correspond à l'ordonnée du point d'intersection du diagramme d'interaction avec l'axe des moments de flexion  $M$ .

La comparaison ainsi faite avec des résultats expérimentaux récents disponibles dans la littérature, constitue une première validation encourageante du modèle de calcul du diagramme d'interaction au feu d'une dalle en béton armé décrit au chapitre 2.

Tableau 7.2 : Comparaisons des moments maximaux expérimentaux et calculés

Éprouvette	Maximum de $N_{test}$ (kN)	Durée au feu (min)	$M_{test}$ (kN.m/m)	$M_{pred.}$ (kN.m/m)	$\frac{M_{pred.}}{M_{test}}$
IL150-66 <sub>1</sub>	145	65	36,7	31,6	0,861
IL150-52 <sub>1</sub>	133	32	30,4	30,6	1,007
IL150-66 <sub>2</sub>	95	62	25,2	25,3	1,004
IL150-52 <sub>2</sub>	98	62	24,0	25,3	1,054

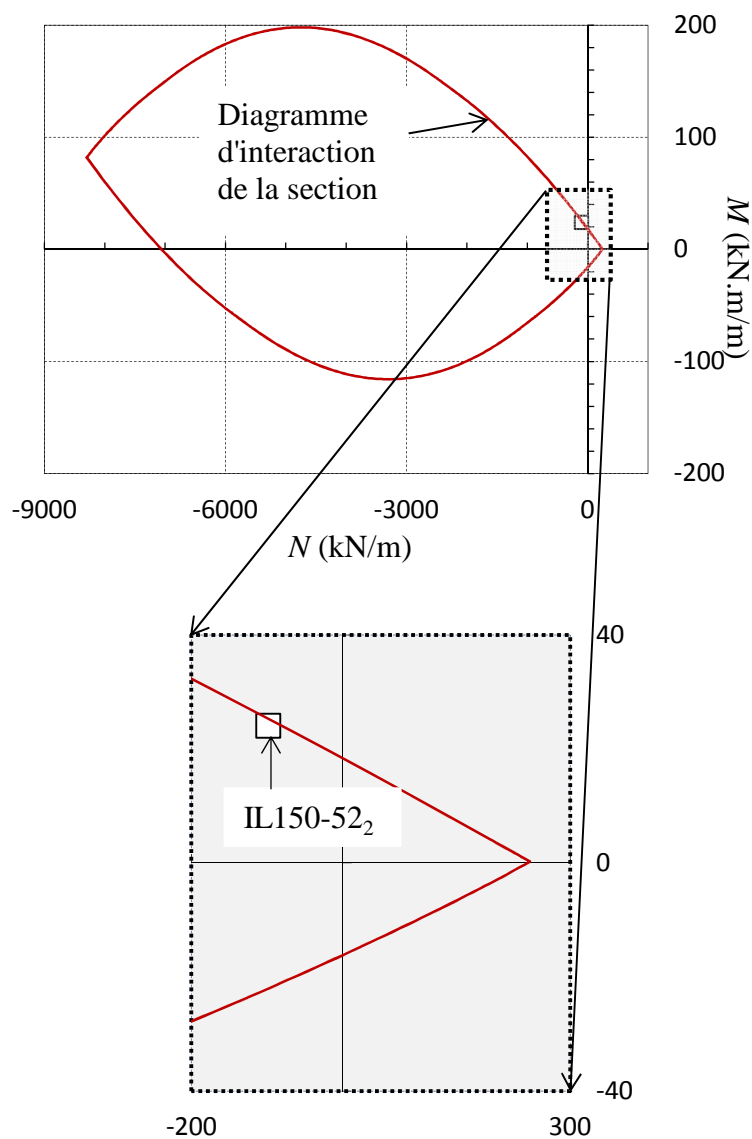


Figure 7.5. Comparaison du diagramme d'interaction calculé avec le résultat du test IL150-52<sub>2</sub> effectué par Crozier et Sanjayan

## 7.3 RÉALISATION DES ESSAIS SUR DALLES EN FLEXION AU FOUR À MAQUETTE

Destinée à venir compléter et confirmer la validation expérimentale précédente, la campagne d'essais conduite dans le cadre du présent travail a été également motivée par la volonté d'étudier l'influence de l'orientation du renforcement sur la capacité de résistance d'une section en béton armé soumise à un gradient thermique engendré par le feu (Pham *et al.*, 2014a). En effet par exemple, les mécanismes simples que nous avons considérés au chapitre 6 précédent comportent des lignes de discontinuités (charnières) inclinées par rapport aux directions horizontale et verticale de renforcement.

De plus, de tels essais peuvent apporter la justification nécessaire à certaines hypothèses faites sur le comportement des matériaux dans le développement du modèle de calcul ici développé. À cet égard, les résultats d'essai sont indispensables pour améliorer les modèles de calcul, fournissant une base de données précieuse pour la validation de ces modèles.

### 7.3.1 Caractéristiques des éprouvettes testées

Le programme d'essais porte sur deux séries de dalles relatives aux conditions de température suivantes:

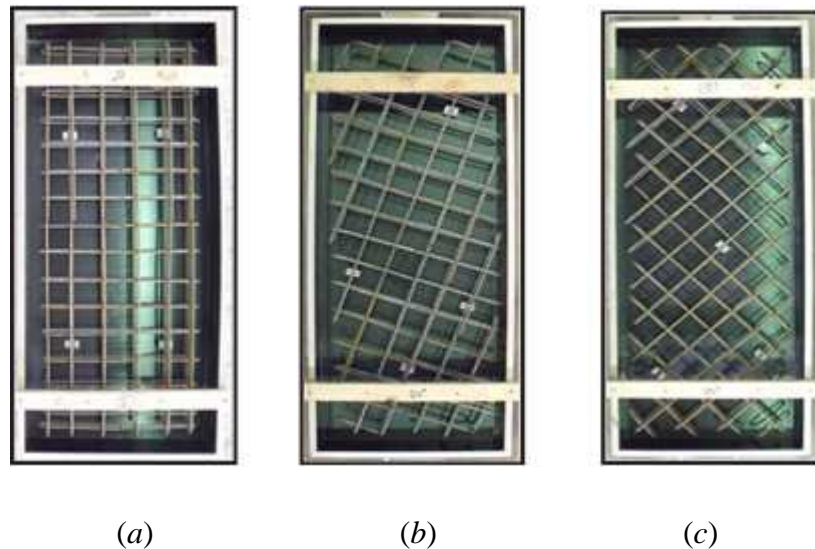
- ◇ Séries **A** : 8 dalles testées à température ambiante.
- ◇ Séries **H**: 8 dalles testées au feu.

Toutes les dalles sont de dimensions  $120 \times 45 \text{cm}^2$  dans le plan, dimensions adaptées à l'espace disponible dans le four à maquette pour des essais en *flexion quatre points* (appuis de même largeur que les éprouvettes, libres de se déplacer dans le sens de la longueur : voir figure 7.8). La largeur de ces éprouvettes (45cm) a été choisie de façon à éviter tout frottement latéral contre les parois du four, notamment lorsque la flèche au centre de la dalle devient importante. L'épaisseur des dalles a été prise égale à 10cm, c'est-à-dire proche de la valeur courante pour les panneaux de compartimentage en béton préfabriqué.

Il est tout d'abord important de souligner ici que le risque d'éclatement du béton en présence du feu est réel, pouvant menacer la sécurité du four d'essai. C'est pour cette raison, que la formulation B40F du béton (Mindeguia, 2009) a été utilisée pour la réalisation des dalles. Ce béton est de formulation simple en terme de composants et suffisamment représentative de celles qui sont couramment utilisées sur chantier.

Les dalles sont renforcées par des barres d'armatures en acier à haute adhérence (HA) de 6mm de diamètre, régulièrement espacées d'environ 7,5cm, soit 6 barres pour une largeur de 45cm; c'est-à-dire un nombre suffisant permettant d'assurer que la dalle ainsi fabriquée sera bien représentative d'un comportement homogénéisé moyen du composite «béton armé». Le nombre de barres représente une section de ferrailage de  $3,77 \text{cm}^2$  par unité de largeur

transversale, soit une proportion volumique égale à 0,084%. Elles sont disposées selon deux réseaux orthogonaux placés selon différentes orientations ( $\alpha$ ) par rapport à l'axe longitudinal de l'éprouvette, respectivement égales à  $0^\circ$ ,  $20^\circ$  et  $45^\circ$  (figure 7.6).



*Figure 7.6. Coffrages et ferrailages des dalles pour des orientations du renforcement égales à : (a)  $0^\circ$ , (b)  $20^\circ$ , et (c)  $45^\circ$  par rapport à l'axe longitudinal*

L'opération de ferrailage est relativement délicate car les barres doivent être attachées et placées dans la bonne direction par rapport à l'axe longitudinal de l'éprouvette. Chaque barre a la forme d'un cadre, mais non-fermé. Les ancrages sont courbes, retournés à  $180^\circ$ , afin d'empêcher le glissement des barres par rapport au béton environnant. De plus, la longueur des crochets a été augmentée pour faciliter la fabrication et pour pouvoir accrocher les échelles de thermocouples destinés à mesurer les températures dans l'épaisseur de la dalle (figure 7.7). L'ensemble des barres attachées forme une cage d'armatures unique. Des cales en béton sont placées à différents endroits dans le coffrage pour respecter une distance d'enrobage de 2cm. Pour la manutention, 4 douilles de levage sont implantées dans deux zones proches de l'extrémité.



*Figure 7.7. Implantation de deux échelles de thermocouples à boule dans le ferrailage*

Les dalles ont été coulées dans des coffrages identiques en bois. Après décoffrage, elles ont été conservées dans les conditions de la halle du laboratoire, à l'abri des intempéries, pour un vieillissement naturel jusqu'au moment de l'essai (minimum 90 jours). En plus de ces dalles, ont également été fabriqués des cylindres de 16cm de diamètre et de 32cm de hauteur, destinés à mesurer la résistance en compression et en traction du béton. L'ensemble des cylindres a été conservé à proximité des dalles.

Le béton étant un matériau durcissant (phénomène de prise), sa résistance évolue avec l'âge. Elle augmente très vite au début, puis est considérée comme stabilisée au-delà du troisième mois. Le tableau suivant résume les caractéristiques et l'âge des éprouvettes au moment de l'essai. Les résistances du béton sont les valeurs moyennes obtenues par les essais à 90 jours.

Tableau 7.3 : *Caractéristiques des éprouvettes*

Éprouvette	Poids (kg)	$f_t$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$\alpha$ (°)	Age au moment de l'essai (jours)
A1_0°	122	2	24	595	0	94
A2_20°	120	2	24	595	20	94
A3_45°	121	2	24	595	45	97
A4_0°	127	2,5	27,8	621,3	0	90
A5_20°	129	2,5	27,8	621,3	20	91
A6_45°	126	2,5	27,8	621,3	45	90
A7_0°	128	2,5	27,8	621,3	0	238
A8_20°	127	2,5	27,8	621,3	20	238
H1_0°	119	2	24	595	0	94
H2_0°	120	2	24	595	0	93
H3_20°	118	2	24	595	20	97
H4_20°	120	2	24	595	20	101
H5_45°	120	2	24	595	45	96
H6_0°	125	2,5	27,8	621,3	0	96
H7_20°	125	2,5	27,8	621,3	20	94
H8_45°	125	2,5	27,8	621,3	45	91

### 7.3.2 Configuration des tests

Les essais sont menés sur un bâti rigide conçu au Centre Scientifique et Technique du Bâtiment (CSTB). Toutes les dalles sont disposées en position horizontale sur deux rouleaux (appuis simples) laissant libre la dilatation thermique et le déplacement horizontal (figure

7.8). Les bords latéraux de l'éprouvette sont libres d'efforts. Pendant les essais au feu, ils sont protégés par une isolation thermique en laine de verre.

Le principe de l'essai consiste à imposer une flexion 4 points jusqu'à la rupture des éprouvettes. La charge est appliquée sur l'éprouvette par l'intermédiaire de deux supports supérieurs, ce qui permet de créer une zone centrale dans laquelle le moment est constant, égale à sa valeur maximale, tandis que l'effort tranchant est nul. Les deux supports supérieurs sont espacés de 33cm, soit 1/3 de la portée entre les deux rouleaux d'appui inférieurs. Cette configuration facilite la recherche du moment fléchissant ultime, sans influence de l'effort tranchant. Dans cette configuration, le poids propre, considéré comme uniformément réparti sur la longueur, est inévitable. À noter également que la charge est appliquée sur l'éprouvette par l'intermédiaire du bâti supérieur, qui lui-même pèse 50kg. La force réelle appliquée est donc la somme de la force mesurée et du poids du bâti supérieur.

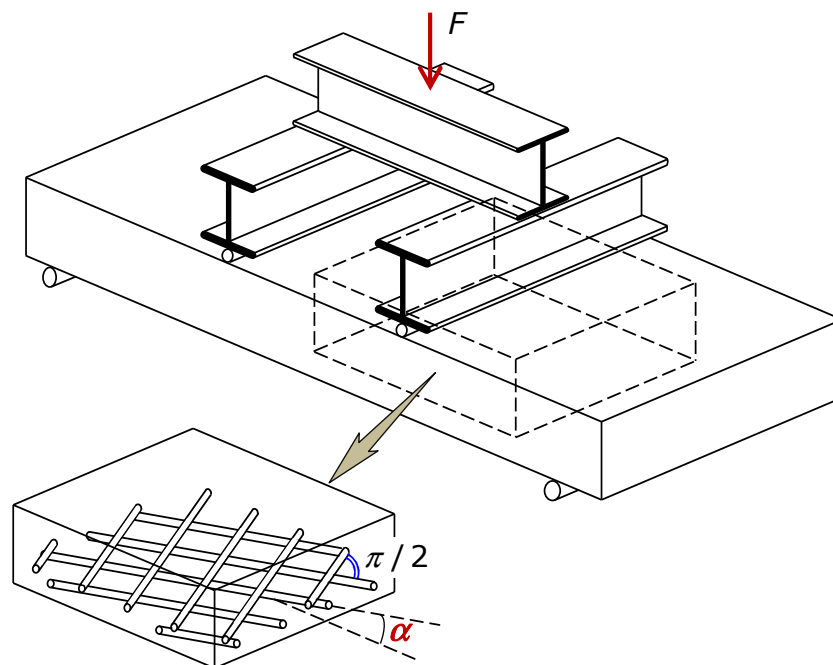


Figure 7.8. Configuration d'un test de flexion 4 points

Les essais au feu consistent à soumettre les dalles au programme thermique normalisé (feu ISO 834 - EN1991-1-2, 2003) et à leur imposer à un instant choisi une flexion jusqu'à la rupture de celles-ci. Il est à rappeler que le feu ISO 834 est purement conventionnel et est en général utilisé pour les essais en laboratoire, car il facilite la reproductibilité et la comparaison.

La figure 7.9 montre la mise en place d'un essai au feu où les bords latéraux de l'éprouvette sont protégés par une isolation thermique en laine de verre.





*Figure 7.9. Mise en place d'un essai au feu*

### **7.3.3 Instrumentation**

La température dans le béton est mesurée à différents niveaux par deux échelles de 7 thermocouples à boules et deux thermocouples à disques de cuivre pour des mesures au niveau de la face non-exposée. Les échelles sont placées dans la zone centrale de chaque dalle de manière à éviter les effets de bord (à 15cm au moins des parois verticales latérales) et dans la zone dans laquelle le risque de rupture est le plus important (c'est-à-dire dans la zone centrale). Les températures sont enregistrées toutes les 30s à l'aide d'un système d'acquisition électronique. Le programme thermique normalisé est suivi par l'intermédiaire des thermocouples placés dans le four. Afin d'assurer une évolution de la température qui suive la courbe théorique, les brûleurs sont pilotés manuellement.

Un système de chargement connecte le bâti rigide et le vérin hydraulique avec un capteur de force de 5 tonnes maximum pour mesurer la force appliquée. Le chargement est piloté par le déplacement du vérin. La mesure de la flèche s'effectue grâce à deux capteurs à fil. Ces fils relient le bâti rigide avec la face supérieure de la dalle. Dans cette configuration, le fil suit donc le déplacement de l'éprouvette par rapport à un référentiel bâti rigide. Afin de pouvoir recalibrer la flèche et assurer la rigidité des appuis, deux capteurs, constitués de tiges en aluminium à contact ponctuel, sont installés pour mesurer le déplacement vertical de la dalle au niveau des appuis.

Les forces et déplacements sont enregistrés toutes les 1/8s à l'aide d'un système d'acquisition électronique indépendant de celui utilisé pour les thermocouples. Suite à un incident de programmation, l'acquisition s'est faite toutes les 10s pour les premiers essais. Nous précisons plus en détail la fréquence des acquisitions dans la suite du mémoire. Comme les deux systèmes d'acquisitions sont indépendants, une attention particulière a été portée au calage du démarrage de l'acquisition.

### 7.3.4 Procédure des tests

À un instant visé (0 minute pour les essais à froid, 120 minutes pour les essais au feu), le déplacement du vérin est augmenté manuellement à une vitesse relativement constante. Le temps nécessaire pour atteindre l'effort  $F$  conduisant à la rupture est de courte durée (autour de 5min) afin d'éviter les perturbations de mesures dû à l'augmentation de température. Au cours du chargement, l'effort imposé et les déplacements résultants sont enregistrés en continu de manière à obtenir une courbe charge-déplacement dont l'allure permet d'identifier la charge maximale.

### 7.3.5 Résultats des essais et discussion

Dans cette section, les résultats expérimentaux sont reportés et discutés en référence à la charge de rupture en fonction de l'orientation du renforcement et le chargement thermique associé. Les résultats présentés ci-dessous sous la forme de graphes montrent l'évolution de la force en fonction du déplacement dans le temps.

#### 7.3.5.1 Résultats des essais à température ambiante

Les figures 7.10 et 7.11 montrent les courbes force-déplacement de 6 premiers tests à température ambiante. Pour les trois tests notés A1 à A3, l'augmentation de la force appliquée a dû être arrêtée en raison de l'instabilité de la dalle qui a été observée. La flèche maximale atteinte est donc relativement limitée. Dans les trois essais suivants, notés A4 à A6, la flèche a pu être poussée plus loin, permettant de mieux mettre en avant la rupture de la dalle.

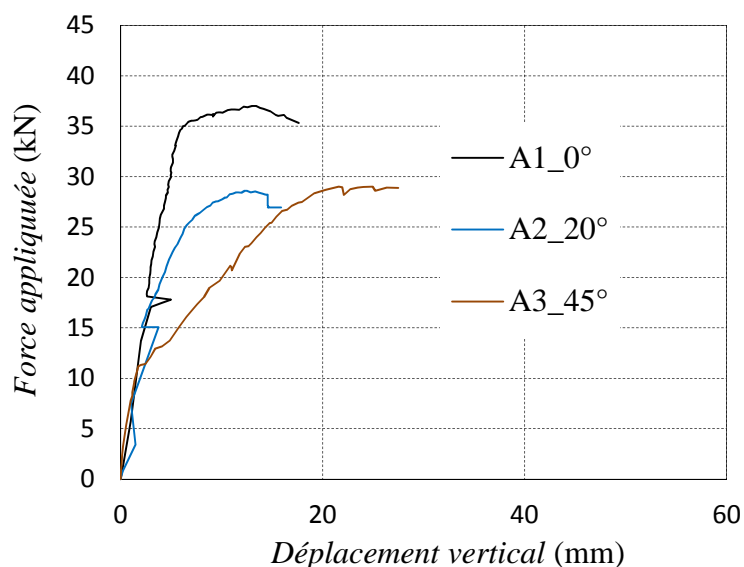


Figure 7.10. Courbes force-déplacement relatives aux essais A1, A2 et A3

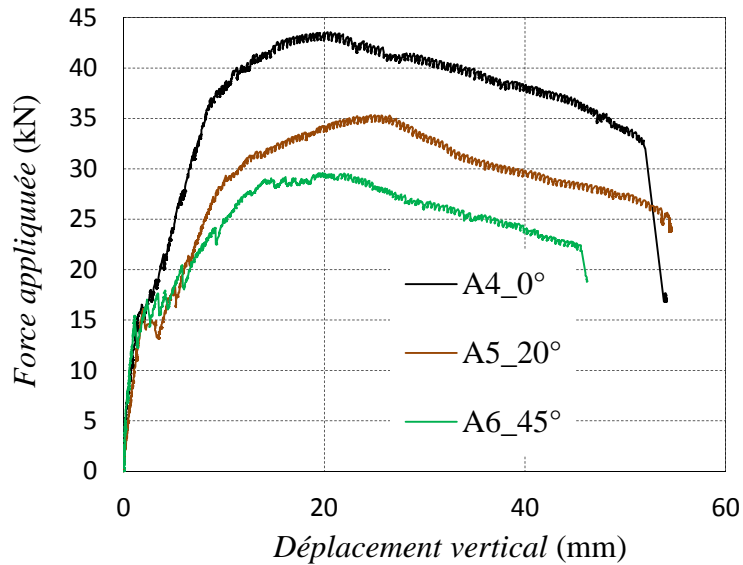


Figure 7.11. Courbes force-déplacement relatives aux essais A4, A5 et A6

Nous constatons qu'après une première phase, que l'on peut considérer comme élastique, les courbes force-déplacement s'incurvent et tendent vers l'horizontale, avec une flèche qui devient importante, caractéristique d'un comportement relativement ductile. L'effort maximal ainsi mesuré, assimilé à la charge de ruine de la dalle, diminue sensiblement à mesure que la direction des aciers de renforcement s'écarte de l'axe longitudinal de la dalle. L'augmentation de l'angle du renforcement conduit donc à la diminution de la charge de ruine, mais il est plus difficile de dégager une tendance similaire pour ce qui concerne la raideur en flexion dans la phase élastique (tangente à l'origine des courbes). De plus, si la différence entre la charge maximale de l'essai A5 et celle de l'essai A6 est bien significative, il n'en est pas de même en ce qui concerne les essais A2 et A3.

On rappelle également que pour les essais A1 à A3 la force et le déplacement sont enregistrés toutes les 10s, tandis que la fréquence d'acquisition est fortement augmentée pour les essais A4 à A6. L'enregistrement toutes les 1/8s pour ces derniers permet alors de décrire plus finement et précisément les différentes phases caractérisant le comportement en flexion: phase élastique linéaire, phase de fissuration, phase d'écoulement et phase de rupture.

Pour les essais A7 et A8, la procédure a été légèrement modifiée par l'application préalable d'un cycle de chargement-déchargement afin d'étudier les conséquences de ce pré-chargement sur le comportement des dalles, et notamment sur la valeur du moment ultime (figure 7.12). Ceci nous permet notamment d'éliminer entièrement la résistance à la traction du béton pour laquelle la question de sa contribution à la capacité portante reste posée.

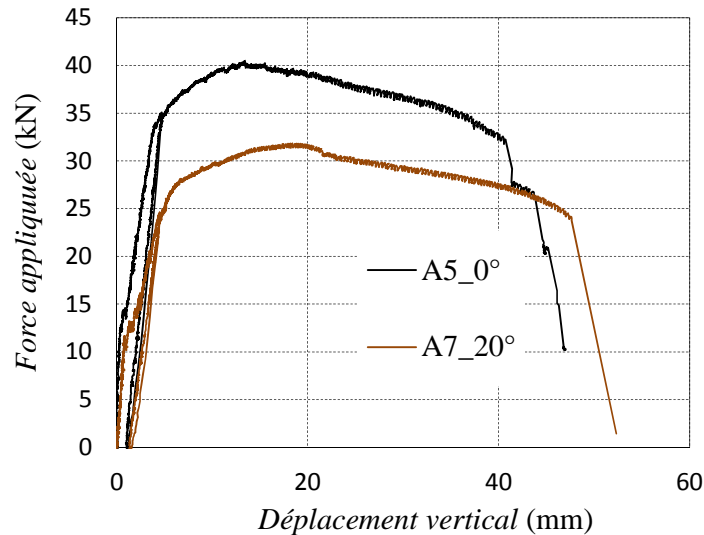


Figure 7.12. Courbes force-déplacement relatives aux essais A7 et A8

La première phase est élastique linéaire, puis le comportement devient non-linéaire. La diminution de la raideur flexionnelle liée à l'angle de renforcement apparaît alors assez clairement dans ce cas. En effet dans cette première phase, la courbe relative à l'essai A8 affiche une pente légèrement inférieure à celle de l'essai A7, donc une rigidité élastique en flexion plus faible. Dans la phase de décharge quasi linéaire, on observe aussi une diminution de la pente. Si l'on compare ces deux phases de charge et décharge, on observe pour chaque essai, une pente plus faible dans la phase décharge que celle de la première phase. Cette perte de rigidité apparaît bien comme un indicateur de l'endommagement du béton. En outre, la charge maximale que la dalle A8 peut supporter est nettement inférieure à celle de la dalle A7, les ruptures correspondantes conservant un caractère relativement ductile avec une décroissance post-pic très progressive. Par rapport à l'essai A7 ( $\alpha=0^\circ$ ), on note une diminution moyenne de la charge limite de 20% relative à l'essai de l'éprouvette A8 ( $\alpha=20^\circ$ ).

Le tableau 7.4 ci-dessous récapitule les caractéristiques de l'ensemble des essais et les valeurs correspondantes des forces maximales mesurées.

Tableau 7.4 : Synthèse des résultats de l'ensemble des essais à froid

Éprouvette	$f_t$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$\alpha$ (°)	$F$ (kN)
A1_0°	2	24	595	0	37,00
A2_20°	2	24	595	20	28,59
A3_45°	2	24	595	45	29,00
A4_0°	2	27,8	621,3	0	43,56
A5_20°	2	27,8	621,3	20	35,32
A6_45°	2	27,8	621,3	45	29,60
A7_0°	2	27,8	621,3	0	40,51
A8_20°	2	27,8	621,3	20	31,85

### 7.3.5.2 Résultats des essais au feu

Avant d'analyser plus en détail les courbes obtenues dans le cas des essais au feu, nous faisons état de quelques observations effectuées au cours des phases d'échauffement et de refroidissement. Pendant les essais au feu, de petites fissures apparaissent au bout de 20min environ. Des tâches d'eau commencent à apparaître en surface de la dalle, l'eau en ébullition suivant le chemin créé par les fissures. Après 60min environ, l'eau en surface sèche progressivement. La flèche verticale continue à augmenter. Après 90min environ, les bords latéraux et la face supérieure sont presque totalement secs. Au cours de l'échauffement, les dalles se déforment en direction du four. A l'instant de l'application de la force au bout de 120min, la flèche thermique est de l'ordre de 1 à 2cm. À la fin de l'essai, les dalles comportent 3 fissures importantes dans le sens de la largeur et quelques petites fissures secondaires. Les fissures sont apparues au centre et au niveau des zones situées sous les supports supérieurs.

Le béton n'a pas subi d'écaillage pendant toute la phase d'échauffement. Cependant, après la sortie du four, le béton situé sur la face exposée au feu s'est sensiblement désagrégé pendant le levage.

#### Mesures de température

Les valeurs mesurées par les thermocouples placés dans le four sont moyennées et la courbe température-temps résultante est représentée sur la figure 7.13 qui montre un faible écart entre la température du four mesurée au cours de chaque essai (H1 à H8) et celle donnée par la courbe ISO 834 (EN1991-1-2, 2003).

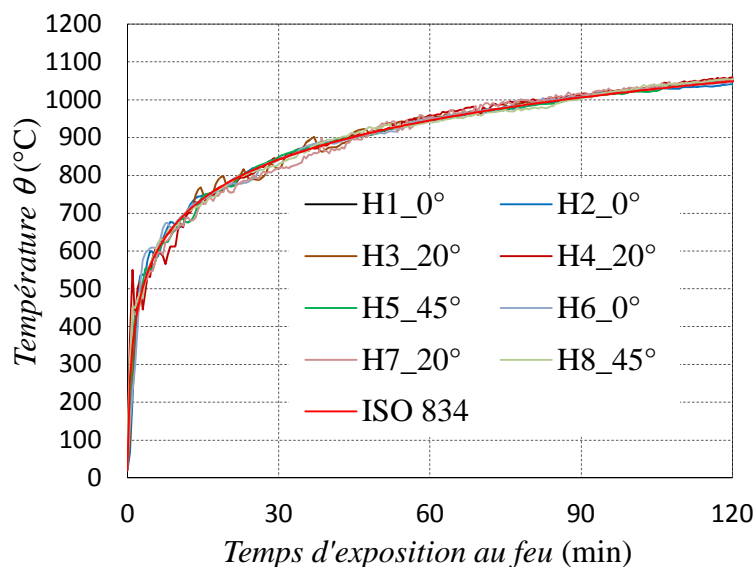


Figure 7.13. Évolution de la température mesurée dans le four et courbe de référence ISO 834

Les thermocouples placés sur les deux échelles mesurent les températures en différents points dans l'épaisseur de chaque éprouvette. Les résultats sont directement exploitables. Pour chaque point de mesure à un instant donné, les valeurs moyennes sont calculées. Les températures ainsi enregistrées à chaque niveau par les deux thermocouples ne présentent que des écarts faibles. Lorsque la température d'un thermocouple n'est pas définie (erreurs d'acquisition), une interpolation linéaire est appliquée systématiquement.

Tableau 7.5 : Températures mesurées à 120 minutes

Distance/face exposée	Températures							
	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8
Face exposée (0cm)	1041	1044	1053	1050	1060	1053	1078	1049
1cm	814	797	778	754	783	768	739	751
2cm	688	665	655	674	665	658	636	641
3cm	588	570	548	578	579	562	548	544
4cm	497	466	463	X	497	477	453	458
5cm	419	407	395	408	411	404	394	386
6cm	357	338	334	X	343	345	333	327
8cm	276	261	277	274	270	257	254	240
Face non-exposée (10cm)	X	X	X	179	178	204	197	190

X : données non disponibles

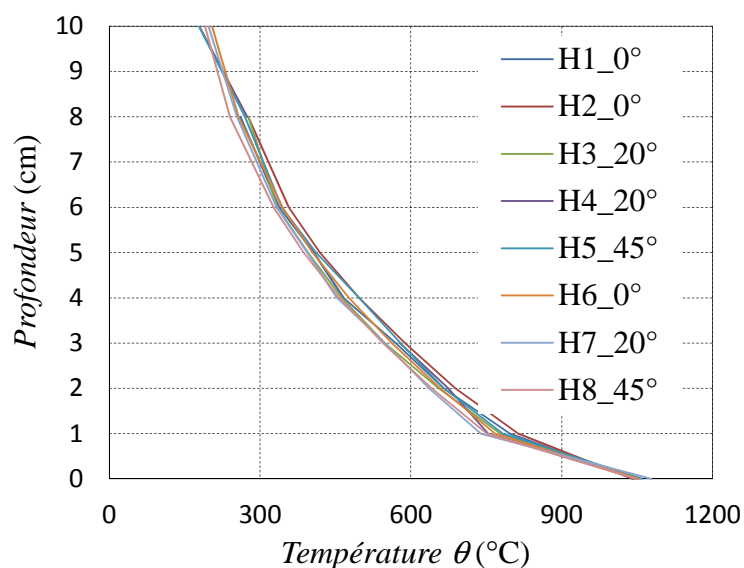


Figure 7.14. Gradients thermiques mesurés dans l'épaisseur des éprouvettes à 120 minutes

Le tableau 7.5 présente les valeurs mesurées des températures à 120min en fonction de la position dans l'épaisseur pour les 8 éprouvettes testées à chaud. Dans ce tableau, les signes «X» correspondent aux cas où la valeur moyenne des températures n'est pas disponible. Ainsi, les thermocouples placés sur la face non exposée n'ayant été mis en place qu'à partir de l'essai H4, cette mesure n'est pas disponible pour les éprouvettes H1, H2, et H3.

La température ambiante au début de chaque essai est enregistrée (valeur proche de 18°C). La figure 7.14 représente les gradients thermiques dans l'épaisseur des éprouvettes à 120min. Par ailleurs, on fait l'hypothèse communément admise que la température des barres d'acier correspond à celle du béton dans la même zone (au niveau de leur axe car leur diamètre est faible).

### Mesures de forces et de déplacements

Pendant l'échauffement, et avant l'application du chargement, la manière dont les dalles se comportent est gouvernée par le gradient thermique dans leur épaisseur et les dilatations qui en résultent, ainsi que par leur poids propre. Après avoir été chauffées, les dalles sont visiblement fléchies. Dans ce cas, le suivi de la flèche peut être exploité pour caractériser les déformées thermiques. Son exploitation apporte donc des informations complémentaires sur la courbure thermique et la dilatation thermique provoquées par l'apparition d'un gradient thermique dans l'épaisseur. Les figures 7.15 et 7.16 montrent le fléchissement des dalles en fonction du temps d'essai (c'est-à-dire de la durée d'exposition au feu).

La flèche due au gradient thermique correspondant à 120min d'exposition au feu varie entre 15mm et 20mm. On observe que ces flèches ont tendance à augmenter avec l'angle du renforcement. Cette augmentation de la flèche semble indiquer une diminution de la raideur en flexion de la dalle quand le renforcement est incliné par rapport à son axe longitudinal.

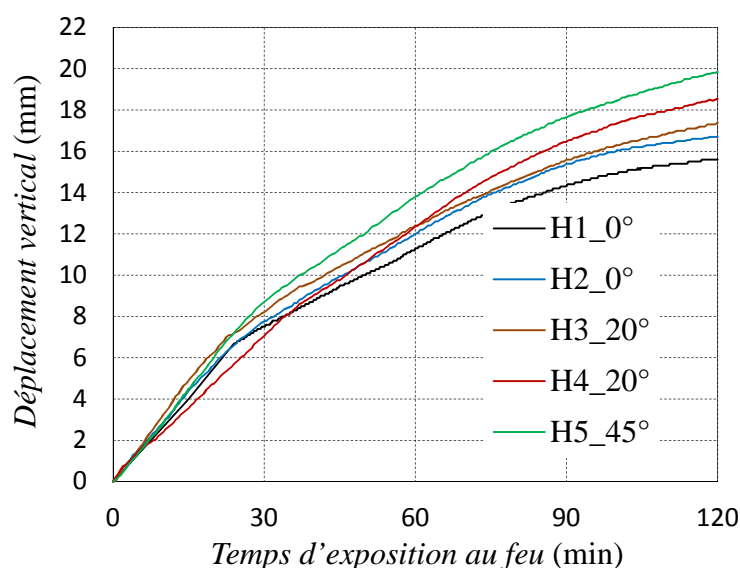


Figure 7.15. Évolution de la flèche des essais H1 à H5 au cours de l'échauffement

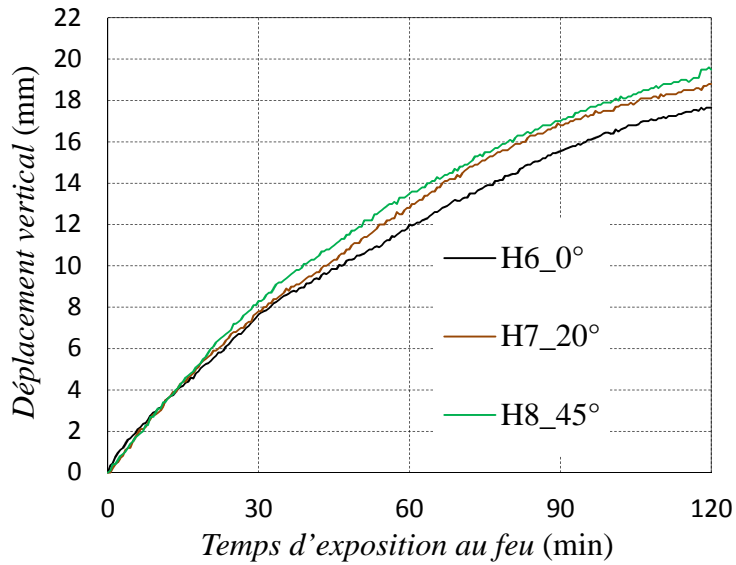


Figure 7.16. Évolution de la flèche des essais H6, H7 et H8 au cours de l'échauffement

Au fur et à mesure que la charge appliquée augmente, des fissures apparaissent, indice d'une dégradation du béton. Pour des raisons de sécurité, les essais doivent être arrêtés quand la stabilité de la dalle parait menacée. Cette indication n'est qu'approximative et limite l'intervalle de mesure possible. Pour cette raison, une modification du dispositif de chargement a été apportée pour les essais H6 à H8. Ces derniers essais ont été sécurisés en attachant les éprouvettes aux élingues d'un pont roulant, celles-ci restant lâches, non tendues, afin d'éviter un risque de chute à l'intérieur du four. Nous avons pu ainsi conduire l'essai sur des plages de variation de flèches plus grandes que celles des essais H1 à H5.

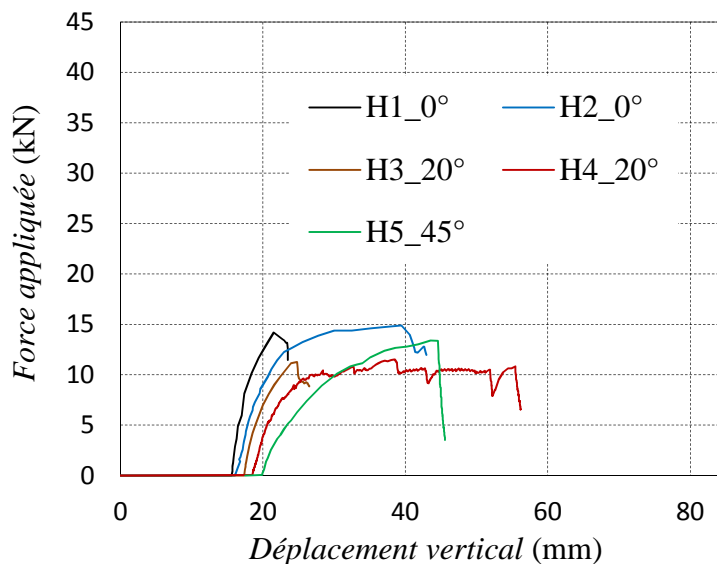


Figure 7.17. Courbes force-déplacement des essais H1 à H5

Sur les courbes présentées à la figure 7.17, il est difficile de conclure quant à l'effet de l'angle du renforcement. En revanche, l'effet du feu est clairement mis en évidence à travers



la chute de la charge maximale correspondant à la ruine de la dalle. Le caractère non-linéaire du comportement en conditions de hautes températures se manifeste dès le début de l'application de l'effort  $F$ . Il en est de même pour les courbes de la figure 7.18.

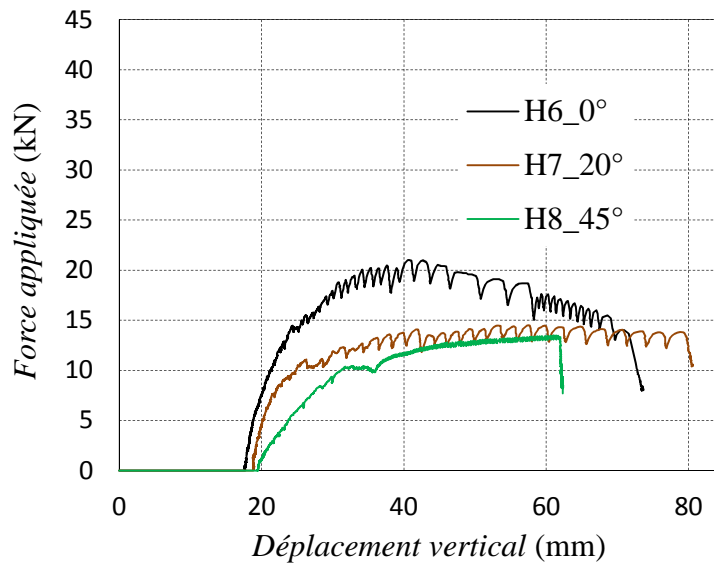


Figure 7.18. Courbes force-déplacement des essais H6, H7 et H8

Sur la dernière figure, on observe que les valeurs de la force maximale évoluent dans le même sens que celles des essais à froid précédents, la force maximale que les dalles peuvent supporter diminuant avec l'augmentation de l'angle du renforcement. On observe également que la raideur en flexion semble diminuer avec l'augmentation de l'angle de renforcement.

Le tableau 7.6 ci-dessous récapitule l'ensemble des résultats des essais à chaud, notamment pour chaque essai la valeur de la flèche thermique, ainsi que la force maximale mesurée.

Tableau 7.6 : Synthèse des résultats d'essais : flèches thermiques et forces maximales après 120min d'exposition au feu conventionnel.

Éprouvette	$f_t$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$\alpha$ (°)	Flèche thermique (mm)	$F_{max}$ (kN)
H1	2	24	595	0	15,60	14,19
H2	2	24	595	0	16,70	14,88
H3	2	24	595	20	17,40	11,28
H4	2	24	595	20	18,55	10,43
H5	2	24	595	45	19,85	13,41
H6	2	27,8	621,3	0	17,65	20,96
H7	2	27,8	621,3	20	18,80	14,51
H8	2	27,8	621,3	45	19,50	13,47

### 7.3.5.3 Comparaison des résultats de mesures avec le modèle développé

Dans cette dernière section, seuls les résultats des éprouvettes où les renforcements sont parallèles aux axes ont été comparés avec ceux prédits par la modélisation proposée au chapitre 2 sous la forme de courbes d'interaction fonctions du degré d'exposition au feu. L'analyse des résultats d'essais consiste d'une part à calculer le moment maximal dû à l'application de l'effort dans l'essai de flexion 4 points, ainsi qu'au poids propre, et d'autre part à comparer cette valeur avec la valeur correspondante du calcul.

Comme exposé dans le chapitre 2, l'établissement du diagramme d'interaction requiert au préalable la donnée du profil de température dans l'épaisseur. Les températures introduites sont celles mesurées au cours des essais au feu par les thermocouples. À un instant donné, elles fournissent le gradient thermique dans l'épaisseur de l'éprouvette.

Par symétrie du problème, le moment de flexion, constitué de deux contributions, atteint son maximum à mi-portée (figure 7.19) et il vaut:

$$M_{test} = M_w + M_F = wL^2/8 + FL/6 \quad (7.2)$$

où  $w$  et  $F$  désignent respectivement le poids propre par unité de longueur et la force appliquée, tandis que  $L$  est la portée entre les appuis inférieurs sur lesquels repose la dalle.

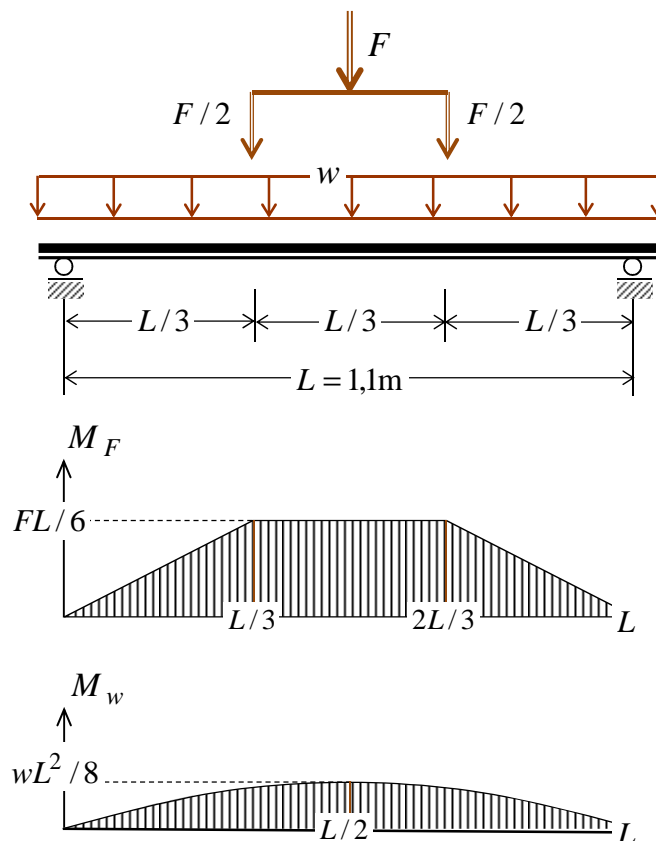


Figure 7.19. Distribution des moments dans un essai de flexion 4 points

Le tableau 7.7 montre les résultats des calculs effectués pour déterminer le moment maximal de chaque essai et la comparaison de ces résultats à ceux obtenus par notre modèle. À noter que la valeur théorique calculée correspond à la résistance de la dalle en flexion pure, c'est-à-dire en l'absence de tout effort normal (point d'intersection de la courbe d'interaction avec l'axe des moments de flexion).

Tableau 7.7 : Comparaison des moments ultimes mesurés et calculés

Éprouvette	Poids propre (kg)	$F$ (kN)	Moment limite du test $M_{test}$ (kN.m/m)	Moment limite calculé $M_{calcul}$ (kN.m/m)	Rapport $M_{calcul} / M_{test}$
A1	122	37+0,5	7,015	7,300	1,04
A4	127	43,56+0,5	8,223	7,672	0,93
A5	128	40,51+0,5	7,665	7,672	1,00
H1	120	14,19+0,5	2,831	2,516	0,89
H2	119	14,88+0,5	2,956	2,899	0,98
H6	125	20,96+0,5	4,078	3,170	0,78

Il ressort de cette comparaison que les résultats des essais à froid semblent être plus proches de ceux du calcul, que ceux des essais au feu. Pour l'essai A4, le modèle sous-estime la capacité portante mesurée. Cet écart peut être attribué au fait que la résistance à la traction du béton n'est pas prise en compte dans le modèle. Ceci est d'ailleurs confirmé par les résultats de l'essai A5 où l'application préalable d'un cycle charge-décharge a permis d'annuler par fissuration cette résistance en traction, le résultat de l'essai devenant quasiment identique à celui de calcul.

De même, les calculs effectués en tenant compte du gradient thermique semblent sous-estimer, parfois significativement, les valeurs expérimentales. Cette différence peut s'expliquer par deux facteurs : d'une part, encore une fois, la résistance à la traction du béton n'a pas été prise en compte dans les prédictions données par le modèle; d'autre part, les coefficients adoptés pour la réduction des résistances du béton et de l'acier sont ceux issus de l'Eurocode 2 (EN1992-1-2, 2005), qui sont des valeurs forfaitaires enveloppes, donc allant dans le sens de la sécurité.

Ainsi se référant à l'essai H6, une différence importante de 22% sur la charge limite a été observée. La raison pour laquelle dans cet essai la force enregistrée expérimentalement atteint une valeur beaucoup plus élevée que celles des essais H1 et H2 n'apparaît pas clairement. Cependant, la différence de résultats entre l'essai H1 et l'essai H2 est sans doute due au fait que l'essai H1 a dû être arrêté quand la stabilité paraissait menacée, donc juste avant que la rupture de la dalle se produise.

## 7.4 CONCLUSION

Les essais issus de la littérature ont été analysés dans le but de valider le diagramme d'interaction d'une section en béton armé, en présence du feu. La comparaison faite entre ces résultats expérimentaux et les prédictions données par le diagramme calculé montre un bon accord entre les deux approches.

Une première campagne d'essais a par ailleurs été effectuée dans le but de constituer une base de données qui doit permettre à l'avenir de conforter la modélisation proposée dans ce travail. Les essais que nous avons réalisés ont permis d'une part de valider le diagramme d'interaction dans le cas d'une flexion pure en présence du feu, d'autre part de montrer les effets de l'inclinaison de renforcement par rapport à la sollicitation sur la capacité portante de la structure. Les résultats expérimentaux obtenus appellent quelques commentaires:

- ◇ Une observation globale des évolutions de la force maximale indique une diminution significative de ces valeurs maximales, correspondant à la ruine par flexion pure, quand les renforcements ne sont plus parallèles aux axes de l'éprouvette.
- ◇ Les allures des courbes force-déplacement sont similaires et représentatives d'un comportement relativement ductile. Cette ductilité montre que le taux de renforcement du béton par les armatures métalliques est suffisant. La présence d'acier en trop faible proportion se traduirait par une rupture fragile ou brutale de la structure, pouvant menacer la sécurité de l'essai.
- ◇ L'analyse des résultats expérimentaux permet de vérifier *a posteriori* la pertinence de certaines hypothèses faites sur le comportement des matériaux. Dans le cadre de ce travail de thèse, le problème de la tenue au feu d'une section en béton armé a été traité par la théorie du Calcul à la Rupture, dont la validité des résultats dépend du caractère plus ou moins ductile des matériaux constitutifs. Les résultats de ces essais confirment à nouveau que le comportement mécanique d'un élément en béton armé est ductile tant à température ambiante qu'à haute température. L'observation de l'ensemble des essais au feu permet de conforter le modèle choisi.
- ◇ En ce qui concerne le comportement structurel des éprouvettes, une identification de la raideur flexionnelle nécessite un traitement plus complet. Son évolution en fonction de l'angle du renforcement est toutefois qualitativement observée pour les angles 0° et 20°, mais ce n'est pas le cas pour le 45°.

\*           \*

\*



## Chapitre 8

# CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

### 8.1 CONCLUSIONS

Dans le but de modéliser et de traiter de façon rationnelle le problème de la stabilité au feu des panneaux de grandes dimensions vis-à-vis de l'incendie et d'examiner les points particuliers sur lesquels il convient de focaliser l'étude, une approche de type Calcul à la Rupture a été privilégiée, puis développée et mise en œuvre de façon pratique tout au long de ce travail. Cette approche offre le cadre théorique adéquat permettant de conduire à une évaluation rigoureuse des charges limites (ou de ruine) d'une structure, sans qu'il soit nécessaire de prendre en compte toute l'histoire de chargement, c'est-à-dire en s'affranchissant des difficultés liées à l'utilisation de lois de comportement non linéaires de type plasticité ou endommagement dans le cadre de simulations pas-à-pas de l'évolution de la structure.

Particulièrement originale, la partie consacrée au modèle simplifié de type poutre s'est focalisée sur la détermination des capacités de résistance du panneau d'une part, exprimées par le biais d'un diagramme d'interaction intégrant explicitement la dégradation des propriétés de résistance des matériaux, due au feu, et dans l'analyse de la ruine de l'ouvrage d'autre part, où le changement de géométrie provoqué par la sollicitation thermique est explicitement pris en compte. Plus précisément, le diagramme d'interaction d'une section en béton armé associé à un profil de température prescrit a été déterminé exactement par la mise en œuvre conjointe des deux approches, statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur, du Calcul à la Rupture. Un des éléments essentiels de l'analyse est l'introduction de relations établies expérimentalement entre la dégradation locale des propriétés de résistance des matériaux et l'augmentation de température induite par le feu.

Les résultats obtenus ont été confrontés à ceux issus de modélisations de type calcul de béton armé classique, ainsi qu'à des résultats expérimentaux disponibles dans la littérature et réalisés en propre dans le cadre de ce travail. Cette confrontation a permis de déboucher sur une validation partielle des prédictions théoriques relatives à la détermination du diagramme d'interaction en fonction de la sollicitation thermique due au feu. Une autre originalité de la présente contribution repose sur le fait que la configuration géométrique du panneau de grande hauteur sur laquelle l'approche Calcul à la Rupture est développée, n'est pas connue *a*

*priori*, mais résulte d'un calcul thermoélastique préalable capable de prendre explicitement en compte les effets non linéaires du second ordre et donc le changement de géométrie qui en découle et qui conditionne fortement la stabilité du panneau.

L'autre apport essentiel de ce travail a consisté à étendre à l'évaluation d'un panneau de grande hauteur, mais de largeur limitée, la modélisation simplifiée de type poutre adoptée dans la première partie du mémoire, et qui doit être remplacée par une modélisation de type plaque ou dalle, plus proche de la réalité. Une telle extension passe notamment par la définition d'un critère de rupture du panneau formulé en variables généralisées que sont les efforts membranaires et les moments fléchissants. Tout comme dans le cas du diagramme d'interaction classique, ce critère peut être évalué par une approche de type changement d'échelle (ou homogénéisation) à partir des caractéristiques géométriques et de résistance définies dans l'épaisseur du panneau.

Une évaluation de la stabilité du panneau-plaque est alors obtenue grâce à l'approche cinématique par l'extérieur utilisant des mécanismes simples impliquant des discontinuités (charnières), sans qu'il soit besoin de formuler complètement le critère de rupture en efforts membranaires et moments de flexion. Cette toute première évaluation, se traduisant par l'obtention de majorants du facteur de stabilité, est susceptible d'être très notablement améliorée.

## **8.2 PERSPECTIVES**

Il convient maintenant, au terme de ce premier travail, de tracer un certain nombre de perspectives pour l'éventuel prolongement de ce sujet de recherche, en vue d'élargir son domaine d'application à la modélisation et au calcul de modèles plus réalistes de panneaux réalisés par exemple par assemblage de blocs préfabriqués de type bandeaux verticaux ou horizontaux. Cela exigera notamment d'introduire un comportement à la rupture des joints de liaison entre panneaux permettant de parvenir à l'élaboration d'une méthode d'évaluation complète de ce type de panneaux.

Ensuite, sur le plan expérimental, la campagne d'essais sur le four à maquette réalisée dans le cadre du présent travail, devra être complétée par des essais sur dalles en béton armé soumises à différentes combinaisons de sollicitations en effort normal-moment de flexion, en faisant varier l'angle du renforcement, afin d'évaluer la capacité portante des éprouvettes en condition d'incendie, puis de la comparer aux prévisions fournies par le modèle théorique.

De manière plus générale, il paraît essentiel de pouvoir à terme recourir à des expérimentations à l'échelle 1 pour la validation complète de la méthode ici proposée et notamment de l'évaluation de la stabilité du panneau tenant compte du changement de géométrie de ce dernier. Le projet de montage d'une campagne expérimentale sur un mur de 9m de hauteur et de 3m de largeur a été récemment relancé au CSTB à travers l'utilisation du grand équipement Vulcain aujourd'hui disponible. Ce type d'essai en *quasi* vraie grandeur est

destiné à permettre de valider les hypothèses faites dans la construction du modèle d'une part, d'identifier ou de faire apparaître d'autres phénomènes locaux éventuels non accessibles par la modélisation, d'autre part.

Enfin, comme indiqué en conclusion du chapitre 6, il s'agira de mettre au point des outils de calcul performants permettant d'améliorer aussi bien la prévision du changement de géométrie du panneau engendré par le chargement thermique, que d'évaluer plus finement sa stabilité dans le cadre de l'approche Calcul à la Rupture. Des méthodes numériques fondées sur la discrétisation en éléments finis du panneau traité comme une coque à faible courbure et l'utilisation de techniques d'optimisation non-linéaires, qui ont connu récemment des progrès importants, devront pouvoir être développées et appliquées à ce problème essentiel de sécurité au feu des grandes structures.

\*        \*

      \*





## ANNEXE

### Un exemple simple de structure réticulée illustrant l'indépendance de la charge limite par rapport aux contraintes thermiques

Nous avons vu au chapitre 2 que le feu modifie de façon importante l'état initial de la structure, induisant par exemple du fait de l'incompatibilité géométrique des déformations thermiques, des champs thermiques d'autocontrainte (contraintes thermiques). On se propose de montrer ici, sur un exemple simple que, conformément à un résultat général (voir par exemple de Buhan, 2007), cette modification de l'état initial due à l'action thermique, n'a aucune influence sur les charges limites de la structure; ces dernières étant également indépendantes des caractéristiques élastiques du matériau constitutif, ainsi que du trajet de chargement suivi pour y aboutir.

On reprend l'exemple du problème d'évolution élasto-plastique de la structure réticulée constituée de trois barres verticales identiques, traité dans (de Buhan, 2007). On cherche à réévaluer la charge de ruine  $Q^+$  de la structure dans le cas où cette dernière est soumise à un chargement thermique en plus du chargement mécanique. Les données du problème initial et les notations correspondantes sont rappelées sur la figure A.1 ci-dessous.

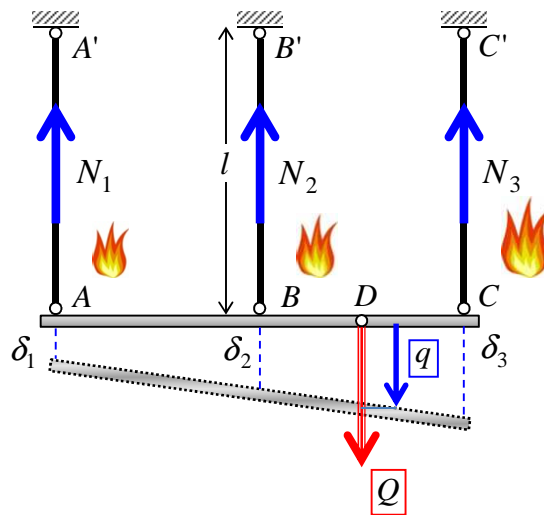


Figure A.1. Chargements mécanique et thermique de la structure réticulée

Les trois barres, notées  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$  sont homogènes de longueur  $l$  et de section  $S$ , et numérotées respectivement de 1 à 3. Elles sont fixées à leur extrémité supérieure (points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ ) par des articulations *sans frottement* et reliées entre elles en partie inférieure par un

barreau initialement horizontal supposé indéformable, les points  $A$ ,  $B$ , et  $C$  représentant également des articulations sans frottement. Les distances  $AB$ ,  $A'B'$ ,  $BC$  et  $B'C'$  sont égales.

Chacune des barres obéit à un comportement *thermoélastique parfaitement plastique* caractérisé par le module d'Young  $E$  du matériau constitutif, la même valeur absolue de la *limite d'élasticité*  $N_0$  en traction et en compression de l'effort normal  $N_i$  et le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ , ces caractéristiques du matériau étant ici *supposées indépendantes de la température*. La figure A.2 représente le diagramme effort-allongement caractérisant le comportement de chaque barre, le principe du travail plastique maximal se traduisant ici par le fait que la barre s'allonge (resp. se raccourcit) plastiquement lorsque la limite d'élasticité est atteinte en traction  $+N_0$  (resp. compression  $-N_0$ ), la valeur de l'effort étant maintenue constante.

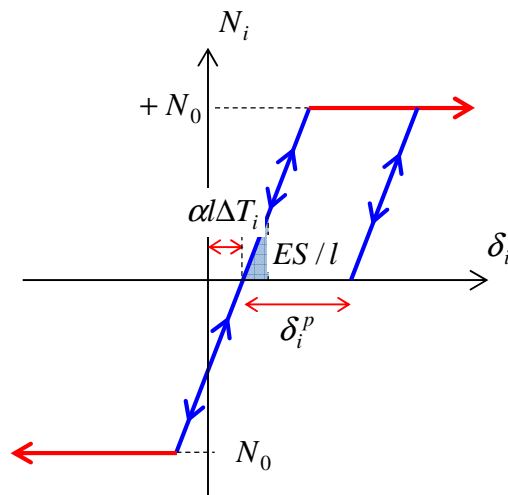


Figure A.2. Comportement thermo-élastique parfaitement plastique des barres

Chaque barre ( $i$ ) est soumise à une augmentation de température  $\Delta T_i$  uniforme sur toute sa longueur tandis que l'ensemble des barres est soumis à une force verticale d'intensité  $Q$  croissant progressivement à partir de zéro, comptée positivement vers le bas et appliquée au point  $D$  milieu du segment  $BC$ .

L'état *initial* de la structure étant supposé *naturel* (efforts nuls dans les barres de la structure non chauffée et non chargée) :

$$\Delta T_{i=1,2,3} = 0, Q = 0 : N_{i=1,2,3} = 0 \quad (\text{A.1})$$

on cherche à déterminer l'évolution du système à mesure que le chargement  $Q$  augmente à partir de la valeur nulle. On rappelle en particulier qu'en l'absence de sollicitation thermique, la charge limite de la structure est égale à  $2N_0$  (de Buhan, 2007).

### Phase de comportement thermoélastique :

Se plaçant dans l'hypothèse des petites perturbations ( $\delta_i/l \ll 1$  et  $\alpha\Delta T_i \ll 1$ ), les équations exprimant l'équilibre en résultante verticale et en moment par rapport au point  $D$  du barreau horizontal, s'écrivent :

$$\begin{cases} N_1 + N_2 + N_3 = Q \\ 3N_1 + N_2 - N_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

le système étant donc *hyperstatique de degré 1*. Pour rajouter la troisième équation, on s'appuie sur les *équations de comportement* des barres qui s'écrivent en phase élastique :

$$i = 1,2,3: \delta_i = \alpha\Delta T_i + N_i \frac{l}{ES} \quad (\text{A.3})$$

(le premier terme représentant l'allongement thermique, le second l'allongement élastique), que l'on reporte dans la relation de *compatibilité géométrique* entre les allongements totaux des barres, obtenue en exprimant que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  restent alignés et qui s'écrit :

$$\delta_1 + \delta_3 - 2\delta_2 = 0 \quad (\text{A.4})$$

soit :

$$(N_1 + ES\alpha\Delta T_1) + (N_3 + ES\alpha\Delta T_3) - 2(N_2 + ES\alpha\Delta T_2) = 0 \quad (\text{A.5})$$

La résolution du système linéaire formé des équations (A.2) et (A.5) donne alors les résultats suivants :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{Q}{12} + \frac{\alpha(\Delta T_1 + \Delta T_3 - 2\Delta T_2)ES}{6} ; \quad \delta_1 = \frac{Q}{12} \frac{l}{ES} + \frac{\alpha l(7\Delta T_1 + \Delta T_3 - 2\Delta T_2)}{6} \\ N_2 &= \frac{Q}{3} - \frac{\alpha(\Delta T_1 + \Delta T_3 - 2\Delta T_2)ES}{3} ; \quad \delta_2 = \frac{Q}{3} \frac{l}{ES} - \frac{\alpha l(\Delta T_1 + \Delta T_3 + \Delta T_2)}{3} \\ N_3 &= \frac{7Q}{12} + \frac{\alpha(\Delta T_1 + \Delta T_3 - 2\Delta T_2)ES}{6} ; \quad \delta_3 = \frac{7Q}{12} \frac{l}{ES} + \frac{\alpha l(\Delta T_1 + 7\Delta T_3 - 2\Delta T_2)}{6} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

ce qui conduit au déplacement vertical  $q$  du point d'application de la force :

$$q = \frac{\delta_2 + \delta_3}{2} = \frac{11Q}{24} \frac{l}{ES} + \frac{\alpha l(5\Delta T_3 - 4\Delta T_2 - \Delta T_1)}{12} \quad (\text{A.7})$$

Posant alors :

$$N_T = \alpha(\Delta T_1 + \Delta T_3 - 2\Delta T_2)ES \quad (\text{A.8})$$

il en résulte que le comportement de la structure reste (thermo)élastique tant que les efforts dans les barres restent dans le domaine d'élasticité, c'est-à-dire que les trois doubles inégalités suivantes portant sur le chargement  $Q$  sont vérifiées :

$$\begin{aligned} -12 - 2 \frac{N_T}{N_0} &\leq \frac{Q}{N_0} \leq 12 - 2 \frac{N_T}{N_0} \\ -3 + \frac{N_T}{N_0} &\leq \frac{Q}{N_0} \leq 3 + \frac{N_T}{N_0} \\ -\frac{12}{7} - \frac{2}{7} \frac{N_T}{N_0} &\leq \frac{Q}{N_0} \leq \frac{12}{7} - \frac{2}{7} \frac{N_T}{N_0} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Le domaine d'élasticité correspondant dans le demi-plan  $(N_T/N_0, Q/N_0 \geq 0)$  est représenté par le quadrilatère bleu  $D1D2D3D4$  sur la figure A.3.

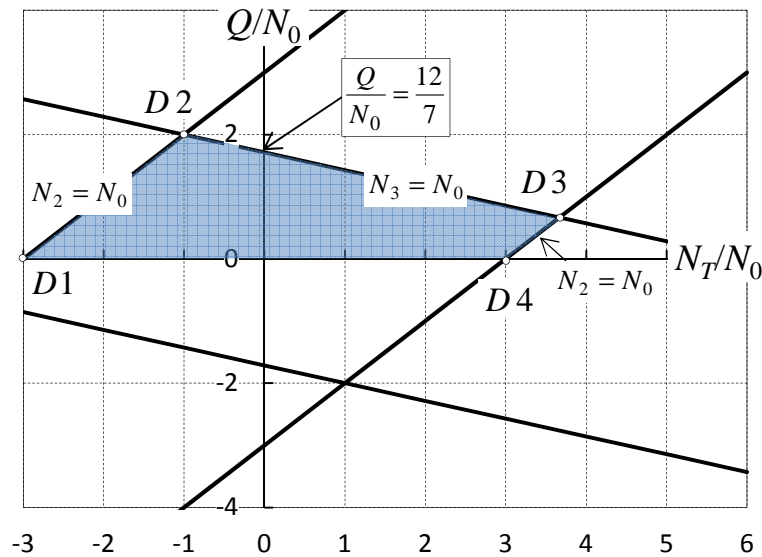


Figure A.3. Domaine d'élasticité du système réticulé dans le plan  $(N_T/N_0, Q/N_0)$

En l'absence de chargement thermique, c'est-à-dire pour  $N_T=0$ , on retrouve le domaine d'élasticité correspondant à un chargement purement mécanique à partir d'un état initial naturel :

$$0 \leq \frac{Q}{N_0} \leq \frac{12}{7} \quad (\text{A.10})$$

Le segment  $D1D2$  correspond à la plastification en traction de la barre 2, le segment  $D2D3$  à la plastification en traction de la barre 3 et le segment  $D3D4$  à la plastification en compression de la barre 2.

### Phase de comportement élasto-plastique :

La figure A.3 montre que dans la phase élastique du comportement de la structure la barre 2 est la plus sollicitée dans le cas où  $-3 \leq N_T / N_0 \leq -1$ , tandis que la barre 3 devient la plus sollicitée lorsque  $-1 \leq N_T / N_0 \leq 6$ . On se propose de poursuivre le chargement  $Q$  au-delà de la limite d'élasticité de la structure, d'abord dans le cas où la barre 2 étant la plus sollicitée atteint sa limite d'élasticité en traction et s'y maintient :

$$N_2 = +N_0, \dot{N}_2 = 0 \quad (\text{A.11})$$

Les efforts dans les deux autres barres se calculent alors immédiatement à partir des équations d'équilibre (A.2) :

$$N_1 = -Q/4 + N_0/2; N_3 = 3Q/4 - N_0/2 \quad (\text{A.12})$$

Le comportement des barres 1 et 3 restant (thermo)élastique, il vient :

$$\delta_1 = \alpha \Delta T_1 + \left( -\frac{Q}{4} + \frac{N_0}{2} \right) \frac{l}{ES} ; \delta_3 = \alpha \Delta T_3 + \left( \frac{3Q}{4} - \frac{N_0}{2} \right) \frac{l}{ES} \quad (\text{A.13})$$

d'où en tenant compte de la relation de compatibilité géométrique (A.4):

$$\delta_2 = \frac{\alpha(\Delta T_1 + \Delta T_3)}{2} + \frac{Ql}{4ES} \quad (\text{A.14})$$

Les efforts dans les barres 1 et 3 rentent dans le domaine élastique s'ils vérifient :

$$N_1 = -Q/4 + N_0/2 \geq -N_0 \text{ et } N_3 = 3Q/4 - N_0/2 \leq N_0 \quad (\text{A.15})$$

soit :

$$Q \leq 2N_0 \quad (\text{A.16})$$

La charge limite est atteinte pour la valeur  $2N_0$  correspondant à la plastification de la barre 3 en traction ( $N_3=N_0$ ), l'effort normal dans la barre 1 s'annulant pour cette valeur du chargement.

---

<sup>4</sup> Cette relation permet de montrer que la règle d'écoulement plastique de la barre 2, plastifiée en traction, est bien vérifiée puisque  $\dot{\delta}_2^p = \dot{\delta}_2 = \dot{Q}l/4ES \geq 0$

Il est facile de montrer que cette même valeur de la charge limite  $2N_0$  est obtenue dans le cas où la barre 3 est la plus sollicitée, c'est-à-dire lorsque  $-1 \leq N_T / N_0 \leq 6$  et donc en phase élasto-plastique  $N_3 = +N_0$ ,  $\dot{N}_3 = 0$ , ce qui est notamment le cas lorsque le chargement thermique est absent ( $N_T=0$ ).

On en conclut donc que le *chargement thermique n'a aucune influence sur la charge limite* de la structure, toujours égale à  $2N_0$ .

\* \*

\*

## BIBLIOGRAPHIE

- ACI (American Concrete Institute). (2000). Building code requirement for reinforced concrete, Part 3: Use of concrete in buildings - Design, specification, and related topics. ACI Committee Rep. 318-99, ACI Manual of Concrete Practice, Detroit.
- AS1530.4. (1997). Methods for fire tests on building materials, components and structures- Part 4 : Fire resistance tests of elements of building construction. Standards Association of Australia.
- Averbuch, D. (1996). *Approche du dimensionnement des structures en béton armé par le Calcul à la Rupture*. Paris: Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. Thèse de doctorat.
- Averbuch, D., et de Buhan, P. (1999). *Shear design of reinforced concrete deep beams: A numerical approach*. Journal of Structural Engineering, 125(3), 309-318.
- Bazant, Z., et Cedolin, L. (2010). *Stability of Structures : Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. World Scientific.
- Bisby, L., Gales, J., et Maluk, C. (2013). *A contemporary review of large-scale non-standard structural fire testing*. Fire Science Reviews, 2(1).
- Bleyer, J., et de Buhan, P. (2013). *Yield surface approximation for lower and upper bound yield design of 3D composite frame structures*. Computers & Structures, 129, 86-98.
- Bleyer, J., Pham, D. T., de Buhan, P., et Florence, C. (2015). *Yield design of periodically heterogeneous plates*. Springer: Direct Methods for Limit and Shakedown Analysis of Structures, 143-158.
- Caldas, R. B., Sousa, J. J., et Fakury, R. H. (2010). *Interaction diagrams for reinforced concrete sections subjected to fire*. Engineering Structures, 32, 2832-2838.
- Chen, W. F. (1982). *Plasticity in reinforced concrete*. Newyork: McGraw-Hill.
- CIMbéton. (2007). *Conception des bâtiments d'activités en béton : Mur séparatifs coupe-feu et façades à fonction d'écran thermique en béton*. Paris : Centre d'information sur le ciment et ses applications.
- Crozier, D. A., et Sanjayan, J. G. (2000). *Tests of load-bearing slender reinforced concrete walls in fire*. ACI Structural Journal, 97(2), 243-51.



- CSTB, et CIMbéton. (2011). *CIM'FeuEC2 : Logiciel de vérification par calcul de la résistance au feu des structures en béton*. Paris : Centre d'information sur le ciment et ses applications.
- Dallot, J., et Sab, K. (2008). *Limit analysis of multi-layered plates. Part I: The homogenized Love–Kirchhoff model*. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56, 561-580.
- de Buhan, P. (2007). *Plasticité et Calcul à la Rupture*. Paris: Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Dotreppe, J. C., et Franssen, J. M. (1998). *Fire attack on concrete columns and design rules under fire conditions. Computational and Experimental Methods in Mechanical and Thermal Engineering*, Proceedings of an International Symposium, Academia Press, Ghent, 219-223.
- Dotreppe, J. C., Franssen, J. M., et Vanderzeypen, Y. (1999). *Calculation method for design of reinforced concrete columns under fire conditions*. *ACI Structural Journal*, 96(1), 9-18.
- DTU 22.1 (NF P10-210-1). (1993). Murs extérieurs en panneaux préfabriqués de grandes dimensions du type plaque pleine ou nervurée en béton ordinaire - Partie 1 : Cahier des charges (Indice de classement : P10-210-1).
- Ellobody, E., et Bailey, C. G. (2009). *Modelling of unbonded post-tensioned concrete slabs under fire conditions*. *Fire Safety Journal*, 44(2), 159-167.
- EN 1992-1-2/NA. (2007). Eurocode 2 : Calcul des structures en béton - Partie 1-2 : Règles générales - Calcul du comportement au feu. Annexe nationale à la NF EN 1992-1-2 (Indice de classement : P18-712-1/NA)
- EN1991-1-2. (2003). Eurocode 1 : Actions sur les structures. Partie 1-2 : Actions générales- Actions sur les structures exposées au feu.
- EN1992-1-1. (2005). Eurocode 2 : Calcul des structures en béton. Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments.
- EN1992-1-2. (2005). Eurocode 2 : Calcul des structures en béton - Partie 1-2 : Règles générales - Calcul du comportement au feu.
- Franssen, J. M. (1997). *Contributions à la modélisation des incendies dans les bâtiments et de leurs effets sur les structure*. Liège : Université de Liège. Post doctoral thesis (Agrégation de l'enseignement supérieur).
- Franssen, J.-M. (2005). *SAFIR: A thermal/structural program for modeling structures under fire*. *Engineering Journal-American Institute of Steel Construction Inc*, 42(3), 143-158.

- Gernay, T. (2012). *A multiaxial constitutive model for concrete in the fire situation including transient creep and cooling down phases*. Liège : Université de Liège. Thèse de doctorat.
- Heck, J. V. (2009). *Approche théorique et expérimentale du comportement des murs en béton de grande hauteur, soumis au programme thermique normalisé décrit par l'arrêté du 3 août 1999*. Rapport interne du CSTB.
- Heinfling, G. (1998). *Contribution a la modelisation numerique du comportement du beton et des structures en beton arme sous sollicitations thermo-mecaniques a hautes temperatures*. Lyon : INSA de Lyon. Thèse de doctorat.
- J.H.B. Sampaio, Jr. (1996). *A mathematical model for mechanical buckling of drillstrings within curved bore-holes*. Ph.D. Dissertation No.T-4818, Colorado School of Mines, Golden, CO.
- J.H.B. Sampaio, Jr., et Hundhausen, J. R. (1998). *A mathematical model and analytical solution for buckling of inclined beam-columns*. Applied Mathematical Modelling, 22, 405-21.
- Jason, L., et Durand, S. (2007). *A two-surface plastic model for concrete behaviour*. Revue Européenne de Génie Civil, 11(5), 579-602.
- Johansen K.W. (1962). *Yield-line theory*. London : Cement and Concrete Association.
- Koechlin, P. (2007). *Modèle de comportement membrane-flexion et critère de perforation pour l'analyse de structures minces en béton armé sous choc mou*. Paris : Université Pierre et Marie Curie – Paris VI. Thèse de doctorat
- Koechlin, P., et Potapov, S. (2007). *Global constitutive model for reinforced concrete plates*. Journal of Engineering Mechanics, 133(3), 257-266.
- Law, A., et Gillie, M. (2010). *Interaction diagrams for ambient and heated concrete sections*. Engineering Structures, 32, 1641-1649.
- Lie, T. T., et Celikkol, B. (1991). *Method to calculate the fire resistance of circular reinforced concrete columns*. ACI Materials Journal, 88(1), 84-91.
- Lie, T. T., et Irwin, R. J. (1993). *Method to calculate the fire resistance of reinforced concrete columns with rectangular cross section*. ACI Structural Journal, 90(1), 52-60.
- Lim, L., Buchanan, A., Moss, P., et Franssen, J. M. (2004). *Numerical modelling of two-way reinforced concrete slabs in fire*. Engineering Structures, 26(8), 1081-1091.

- Loret, B., Prevost, J. H. (1986). *Accurate numerical solutions for Drucker-Prager elastic-plastic models*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 54 (3), 259-277.
- Mindeguia, J. C. (2009). *Contribution expérimentale à la compréhension des risques d'instabilité thermique des bétons*. Université de Pau et des Pays de l'Adour. Thèse de doctorat.
- MSC.Software Corporation. (2007). User documentation of MSC Marc.
- Nechnech, W., Meftah, F., et Reynouard, J. M. (2002). *An elasto-plastic damage model for plain concrete subjected to high temperatures*. Engineering Structures, 24(5), 597-611.
- Nielsen, M. P., et Hoang, L. C. (2010). *Limit analysis and concrete plasticity*. 3<sup>rd</sup> edition. CRC Press, Taylor and Francis Group.
- Pham, D. T., de Buhan, P., Florence, C., et Nguyen, H. H. (2013a). *Analytical interaction diagrams for reinforced concrete sections in fire conditions*. The 13th International Conference and Exhibition on Fire Science and Engineering, V2, pp. 1095-1105. London, United Kingdom.
- Pham, D. T., de Buhan, P., Florence, C., Heck, J. V., et Nguyen, H. H. (2013b). *Approche par la théorie du Calcul à la Rupture du dimensionnement au feu de panneaux de grande hauteur*. Le 21<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique. Bordeaux, France.
- Pham, D. T., de Buhan, P., Florence, C., Heck, J. V., Charuel, S., et Avenel, R. (2014a). *Reinforced concrete slabs in fire: Experimental investigations on reinforcement mesh orientation*. The 8th International Conference on Structures In Fire, V1, pp. 263-270. Shanghai, China.
- Pham, D. T., de Buhan, P., Florence, C., Heck, J. V., et Nguyen, H. H. (2014b). *Yield design-based analysis of high rise concrete walls subjected to fire loading conditions*. The 8th International Conference on Structures In Fire, V1, pp. 271-278. Shanghai, China.
- Pham, D. T., de Buhan, P., Florence, C., Heck, J. V., et Nguyen, H. H. (2015a). *Interaction diagrams of reinforced concrete sections in fire: A yield design approach*. Engineering Structures, 90, 38-47.
- Pham, D. T., de Buhan, P., Florence, C., Heck, J. V., et Nguyen, H. H. (2015b). *Yield design-based analysis of high rise concrete walls subjected to fire loading conditions*. Engineering Structures, 87, 153-161.
- Polak, M. A., et Vecchio, F. (1994). *Reinforced concrete shell elements subjected to bending and membrane loads*. ACI Structural Journal, 91(3), 261-268.

- Sab, K. (2003). *Yield design of thin periodic plates by a homogenization technique and an application to masonry walls*. C. R. Mécanique, 331, 641-646.
- Salençon, J. (1983). *Calcul à la Rupture et analyse limite*. Paris: Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Salençon, J. (2002). *De l'élasto-plasticité au Calcul à la Rupture*. Paris: Editions de l'Ecole Polytechnique.
- Salençon, J. (2013). *Yield design*. Great Britain and the United States: ISTE Ltd and John Wiley and Sons, Inc.
- Sanad, A. M., Lamont, S., Usmani, A. S., et Rotter, J. M. (2000). *Structural behaviour in fire compartment under different heating regimes—Part 1 (slab thermal gradients)*. Fire Safety Journal, 35(2), 99-116.
- Tan, K. H., et Yao, Y. (2003). *Fire resistance of four-face heated reinforced concrete columns*. Journal of Structural Engineering, 129(9), 1220–1229.
- Tan, K. H., et Yao, Y. (2004). *Fire resistance of reinforced concrete columns subjected to 1, 2, 3 face heating*. Journal of Structural Engineering, 130(11), 1820–1828.
- Zha, X. X. (2003). *Three-dimensional non-linear analysis of reinforced concrete members in fire*. Building and Environment, 38(2), 297-307.





Le présent travail propose et développe une méthode originale de dimensionnement vis-à-vis de l'incendie de parois de bâtiments industriels, en s'intéressant plus spécifiquement au cas des panneaux en béton armé de grande hauteur. Soumis à un fort gradient thermique, ces derniers subissent en effet des déplacements hors plan importants qui, du fait de l'excentrement du poids propre qui en résulte, vont engendrer des efforts de flexion venant s'ajouter aux efforts de compression déjà existants. Un tel changement de géométrie, d'autant plus prononcé que le panneau est de grande hauteur, combiné à une dégradation simultanée des propriétés de résistance des matériaux sous l'effet de l'élévation de température, peut conduire à un effondrement de la structure sous poids propre, bien avant par exemple l'apparition d'une instabilité de type flambement.

L'approche proposée repose très largement sur la théorie du Calcul à la Rupture, appliquée d'une part à la détermination d'un diagramme d'interaction au feu caractérisant la résistance du panneau en chacune de ses sections, d'autre part à l'analyse de la ruine globale du panneau dans sa configuration déformée. Cette démarche est d'abord mise en œuvre et complètement explicitée dans le cas où le panneau peut être modélisé comme une poutre unidimensionnelle, conduisant à la détermination exacte d'un facteur adimensionnel caractérisant la stabilité de ce dernier. La généralisation de la méthode de calcul à la configuration plus réaliste, mais plus complexe, d'un panneau schématisé comme une plaque rectangulaire, est ensuite développée. Elle aboutit à un certain nombre de résultats préliminaires qui devront être confortés et affinés dans un travail ultérieur.

L'approche théorique ici présentée est par ailleurs complétée par un volet expérimental (essais de flexion quatre points de dalles dans un four à maquette) qui a permis de valider au moins partiellement les évaluations du diagramme d'interaction prédites par le calcul.

*Mots clés* : Calcul à la Rupture, panneaux en béton armé de grande hauteur, résistance au feu, diagramme d'interaction, effets du second ordre.